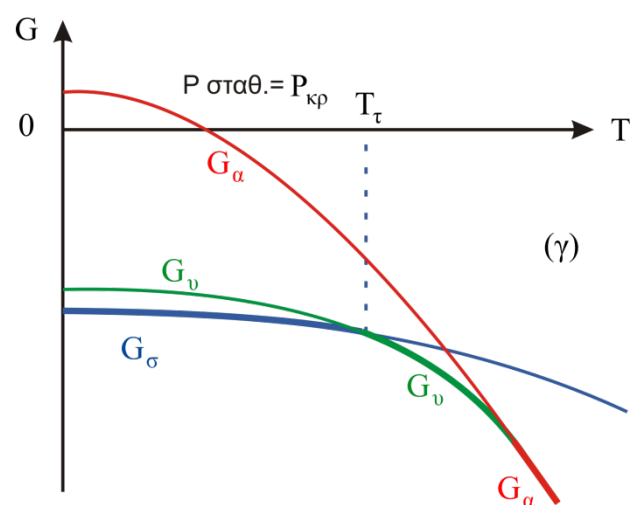
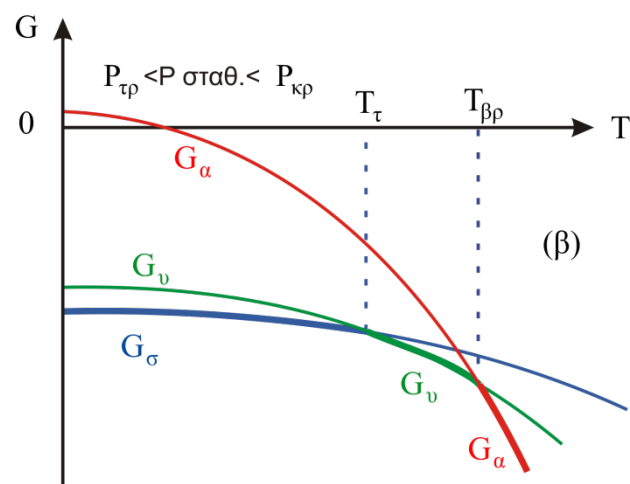
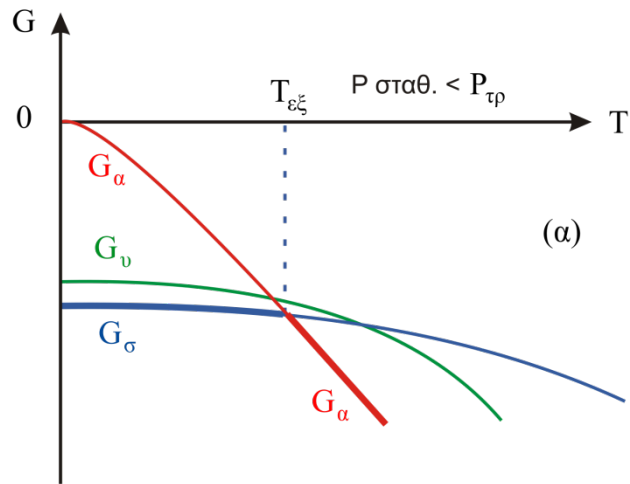


ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΕΦ. 3

2. και 3. Βλέπε τα παρακάτω γραφήματα του G vs. T για διάφορες πιέσεις και για στερεά (σ), υγρή(ν) και αέρια(α) φάση



Σε οποιοδήποτε σημείο P, T της διαχωριστικής γραμμής μεταξύ της φάσης 1 και της φάσης 2 ισχύει

$$G_1(P, T) = G_2(P, T) \quad (1)$$

Σ' ένα διπλανό σημείο $P + \delta P, T + \delta T$ της ίδιας διαχωριστικής γραμμής ισχύει προφανώς

$$G_1(P + \delta P, T + \delta T) = G_2(P + \delta P, T + \delta T) \quad (2)$$

Αναπτύσσοντας την (2) σε δυνάμεις του δP και δT (μέχρι πρώτου βαθμού) και λαμβάνοντας υπόψη την (1) έχουμε

$$(\partial G_1 / \partial P) \delta P + (\partial G_1 / \partial T) \delta T = (\partial G_2 / \partial P) \delta P + (\partial G_2 / \partial T) \delta T$$

ή

$$V_1 \delta P - S_1 \delta T = V_2 \delta P - S_2 \delta T$$

ή

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1} = \frac{T \Delta S}{T \Delta V} = \frac{Q_\lambda}{T \Delta V}$$

όπου Q_λ είναι η λανθάνουσα θερμότητα για την αλλαγή φάσης από $1 \rightarrow 2$, θεωρώντας ότι $S_2 - S_1 \equiv \Delta S > 0$

Επειδή η στερεά και η υγρή φάση της ύλης μένουν σχεδόν ανεπηρέαστες από τη μεταβολή της πίεσης, δηλ. $\Delta V \approx 0$, έπεται ότι $dT/dP \approx 0$. Άρα η θερμοκρασία κατά μήκος της διαχωριστικής γραμμής στερεάς/υγρής φάσης παραμένει περίπου η ίδια καθώς η πίεση μεταβάλλεται. Άρα η διαχωριστική αυτή γραμμή είναι σχεδόν κατακόρυφη με κλίση ελαφρώς θετική όταν $V_2 > V_1$ και κλίση ελαφρώς αρνητική όταν $V_2 < V_1$ όπως στην περίπτωση πάγου/νερού. Το συμπέρασμα είναι ότι η θερμοκρασία του τριπλού σημείου του H_2O είναι κατά τι μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία τήξεώς του υπό πίεση μιας ατμόσφαιρας. Πράγματι η θερμοκρασία του τριπλού σημείου του H_2O είναι ίση με $0,01^\circ\text{C} = 273,16\text{K}$

Θεωρώντας τώρα τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ νερού και ατμού έχουμε από την (1)

$$\frac{dP}{dT} = \frac{Q_\lambda}{T \Delta V} = \frac{43 \times 10^3 \text{ J/mol}}{RT^2 / P}$$

όπου $R = 8,31 \text{ J/K}$ είναι η σταθερά των ιδανικών αερίων (θεώρησα ότι $\Delta V = V_{\alpha\mu} - V_{\nu\epsilon\rho} \approx V_{\alpha\mu} \approx RT/P$ και ότι το Q_λ μένει περίπου σταθερό).

Επομένως

$$\frac{dP}{dT} = 5,17 \times 10^3 \frac{P}{T^2}$$

ή

$$\frac{dP}{P} = 5,17 \times 10^3 \frac{dT}{T^2}$$

ή

$$\frac{P}{P_0} = \exp\left[-5170\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

όπου $T_0 = 100^\circ\text{C} = 373,15\text{K}$ είναι το σημείο ζέσεως του νερού υπό πίεση $P_0 = 1\text{bar}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές $T = 273,16$, $T_0 = 373,15$ και $P_0 = 1\text{bar}$ βρίσκουμε για την πίεση του τριπλού σημείου του H_2O

$$P = 0,00627\text{bar}$$

έναντι $0,00611\text{bar}$ που είναι η πειραματική τιμή.

1. Από τη σχέση $(\partial S / \partial T)_V \equiv C_V / T$ και το ότι το C_V θεωρείται ανεξάρτητο του T , έχουμε

$$S(T) = S_0 + \int_{T_0}^T \frac{C_V}{T} dT = S_0 + C_V \ln \frac{T}{T_0}, \quad S_0 \equiv S(T_0),$$

Η άντληση έργου απαιτεί ένα τρίτο σώμα που εκτελεί κυκλικές μεταβολές. Λαμβάνει Q_A από Α και Q_B από Β και δίνει $W = Q_A + Q_B$. Μέγιστο έργο όταν $S_{\text{αρχ}} = S_{\text{τελ}}$

ή

$$2S_0 + C_V \ln \frac{T_A}{T_0} + C_V \ln \frac{T_B}{T_0} = 2S_0 + 2C_V \ln \frac{T}{T_0} \quad (1)$$

ή

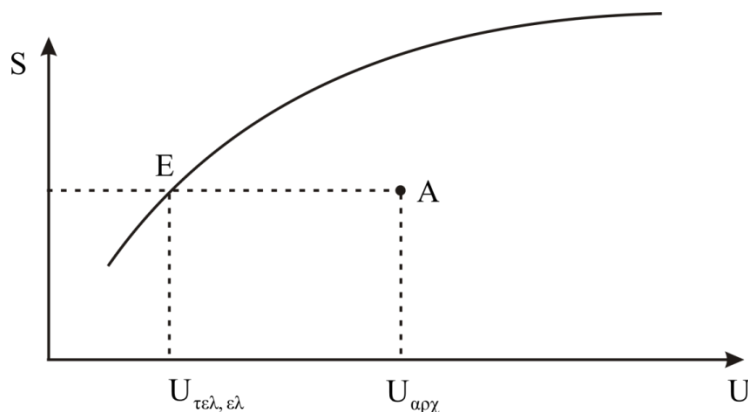
$$\ln \frac{T_A T_B}{T_0^2} = \ln \frac{T^2}{T_0^2} \quad \text{ή} \quad T = \sqrt{T_A T_B}$$

Το 2 στο δεξιό μέλος της (1) λόγω του ότι το C_V είναι εκτατική ποσότητα. Ο συντελεστής απόδοσης η ισούται με το έργο που αντλήθηκε $\Delta U_A + \Delta U_B = C_V(T_A - T) + C_V(T_B - T) = C_V(T_A + T_B - 2T)$ δια του Q_A

$$\eta = \frac{(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B})^2}{T_A - \sqrt{T_A T_B}} = \frac{\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B}}{\sqrt{T_A}}$$

4. Βλέπε το βιβλίο Στατιστική Φυσική του Ε Ν, Οικονόμου, σελ. 28-29

5. Στο παρακάτω γράφημα εικονίζεται η S vs. U



Η καμπύλη είναι αύξουσα (αφού $(\partial S / \partial U) = 1/T > 0$) και με τα κοίλα προς τα κάτω

$$(\text{αφού } \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial U} = -\frac{1}{T^2} \frac{1}{C_V} < 0).$$

Οποιαδήποτε αρχική κατάσταση A μη ισορροπίας του θερμικά μονωμένου συστήματός μας οφείλει να αντιστοιχεί σ' ένα σημείο κάτω από την καμπύλη ισορροπίας προκειμένου να ικανοποιηθεί ο 2^{ος} νόμος, που λέει ότι υπό συνθήκες $dQ=0$ η εντροπία ουδέποτε μειώνεται κατά την πορεία προς την ισορροπία. Ακριβώς λόγω του 2^{ου} νόμου η όποια τελική κατάσταση ισορροπίας οφείλει να έχει υψηλότερη (ή στην ακραία περίπτωση ίση) εντροπία από την αρχική, δηλαδή να κείται άνω (ή στην ακραία περίπτωση επί) της οριζόντιας γραμμής AE (η οποία αντιστοιχεί σε $\Delta S=0$). Από τον 1^ο νόμο, $W = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}$, είναι προφανές ότι, προκειμένου να αντλήσουμε το μέγιστο έργο, η τελική ενέργεια $U_{\text{τελ}}$ πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη. Δεν μπορεί όμως να είναι μικρότερη από αυτήν που αντιστοιχεί στο σημείο E γιατί αλλιώς θα παραβίαζε τον 2^ο νόμο. Άρα το μέγιστο έργο είναι αυτό που αντιστοιχεί στο ευθύγραμμο τμήμα EA και επιτυγχάνεται υπό ισηντροπικές συνθήκες. Κάθε αύξηση της εντροπίας αναγκαστικά οδηγεί σε μείωση του μέγιστου διαθέσιμου έργου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Η παροχή Π εξαρτάται από τη διατομή του σωλήνα, S , και από το ιξώδες η που προκαλεί τριβές καθ' όλο το μήκος του σωλήνα. Για να υπερνικηθούν αυτές οι τριβές θα πρέπει να επιβληθεί μια διαφορά πίεσης ανάλογη του μήκους του σωλήνα, $\Delta p : \Delta x$. Άρα η ζητούμενη παροχή είναι

$$\Pi = C (\Delta p / \Delta x)^\mu \eta^\nu S^\tau$$

με $\mu = 1$, $\nu = -1$, $\tau = 2$. Για κυκλική διατομή $S = \pi R^2$, $C = 1/8\pi$

2. Θεωρώ κυκλική τροχιά για απλότητα. Απουσία ακτινοβολίας για $t = 0$,

$$mv^2 = \frac{e^2}{r}, \quad r = a_B$$

ή

$$m\omega^2 r^2 = \frac{e^2}{r} \quad \text{ή} \quad \omega^2 = \frac{e^2}{ma_B^3} \quad (\alpha)$$

ή

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{ma_B^3}{e^2} \right)^{1/2} = 1,52 \times 10^{-16} \text{ s}$$

αφού $\omega = 4,13 \times 10^{16} \text{ rad/s}$

- (β) Η ακτινοβολία ενός επιταχυνόμενου σωματίου ισούται με

$$I = \frac{2}{3} e^2 a^2 / c^3$$

όπου a η επιτάχυνση. Εδώ, αν υποθέσω ότι $(t_o / T) \ll 1$ (όπου t_o ο χρόνος ζωής), τότε η επιτάχυνση είναι ουσιαστικά η κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{mr^2}$$

Η ενέργεια του συστήματος, $-e^2 / 2r$, μειώνεται λόγω της ακτινοβολίας. Έχουμε

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{e^2}{2r} \right) = -I = -\frac{2}{3} \frac{e^6}{c^3 m^2 r^4}$$

ή

$$\frac{e^2}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{e^6}{c^3 m^2 r^4}$$

ή

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3 r^2}$$

ή

$$r^2 dr = -\frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} dt$$

ή

$$r^3 = a_B^3 - \frac{4e^4}{m^2 c^3} t$$

Ο χρόνος ζωής του ατόμου θα τερματισθεί όταν το ηλεκτρόνιο πέσει πάνω στο πρωτόνιο, δηλαδή όταν

$$t_o = \frac{1}{4} \frac{m^2 c^3 a_B^3}{e^4} = \frac{c^3}{4} \quad \text{α.μ.}$$

ή

$$t_o = 1,55 \times 10^{-11} \text{ s} \quad (!)$$

$$\frac{t_o}{T} = \frac{1,55 \cdot 10^{-11}}{1,52 \cdot 10^{-16}} = 1,02 \times 10^5 \quad (\gamma)$$

Άρα η παραδοχή $t_o / T \ll 1$ επαληθεύεται.

Αν ίσχυε η κλασική μηχανική το άτομο του υδρογόνου θα κατέρρεε σε 15,5 τρισεκατομμυριοστά του δευτερολέπτου. *Ευτυχώς υπάρχει το $\hbar$ (!)*

Διαστατική ανάλυση

Το t_o θα εξαρτάται από:

(α) Το e (αν δεν υπήρχε το e δεν θα υπήρχε ακτινοβολία και η κίνηση θα συνεχιζόταν για πάντα, αν δεν υπήρχαν συγκρούσεις με άλλα συστήματα, όπως η Γη γύρω από τον Ήλιο). Επίσης το e καθορίζει την κεντρομόλο επιτάχυνση.

(β) Το a_B (που είναι η αρχική απόσταση· αν $a_B = \infty$, $t_o = \infty$)

(γ) Τη μάζα m του ηλεκτρονίου (αφού το m επηρεάζει την επιτάχυνση που επηρεάζει την ακτινοβολία)

(δ) Την ταχύτητα του φωτός c (αφού πρόκειται για ακτινοβολία· αν το $c = \infty$ τότε θα είχαμε το ηλεκτροστατικό όριο και όχι ακτινοβολία).

Από τα τρία πρώτα φτιάχνουμε δύο μεγέθη με διαστάσεις χρόνου, t_1 , και ταχύτητας, v_1 .

$$t_1 = \frac{a_B}{v_1} = \frac{m^{1/2} a_B^{3/2}}{e}$$

$$v_1 = \frac{e}{(ma_B)^{1/2}}$$

Άρα

$$t_o = \frac{m^{1/2} a_B^{3/2}}{e} f\left(\frac{e}{c(ma_B)^{1/2}}\right)$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι ακόμη άγνωστη. Όμως το c μπαίνει μόνο στην ακτινοβολία και μπαίνει ως c^3 . Επομένως

$$f(x) = C \frac{1}{x^3}$$

(γιατί όχι $f(x) = x^3$; Γιατί όταν $c \rightarrow \infty$ το $t_o \rightarrow \infty$)

Άρα

$$t_o = C \frac{m^{1/2} a_B^{3/2}}{e} \frac{c^3 m^{3/2} a_B^{3/2}}{e^3}$$

$$= C \frac{m^2 a_B^3 c^3}{e^4}$$

3. Στο χώρο ανάμεσα στις δύο πλάκες υπάρχουν κβαντικές διακυμάνσεις του ΗΜ πεδίου, η ενέργεια των οποίων δίνεται από τη λεγόμενη “κίνηση μηδενικού σημείου”

$E_{o\lambda}(d) = \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_n$. Η ενέργεια $E_{o\lambda}(d)$ είναι προφανώς μηδέν για $d = 0$ και είναι άπειρη

για $d \rightarrow \infty$. Επομένως, αν θεωρήσουμε τη διαφορά $\Delta E_{o\lambda}(d) \equiv E_{o\lambda}(d) - E_{o\lambda}(\infty)$ έχουμε ότι $\Delta E_{o\lambda} \rightarrow 0$ για $d \rightarrow \infty$ και $\Delta E_{o\lambda} \rightarrow -\infty$ για $d \rightarrow 0$. Η ποσότητα $\Delta E_{o\lambda}$ οφείλει να εξαρτάται από την απόσταση d και από τις παγκόσμιες σταθερές $\hbar$ και c (αφού πρόκειται για κβαντικό, ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο). Δεν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των μεταλλικών πλακών, αφού θεωρήσαμε ότι είναι τέλεια μέταλλα. Προφανώς το $\Delta E_{o\lambda}(d)$

είναι ανάλογο της επιφάνειας S των μεταλλικών πλακών (θεωρούμε ότι $\sqrt{S} \propto d$)

Άρα

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}(d)}{S} = C \hbar^\alpha c^\beta d^\gamma$$

ή

$$\frac{[E]}{[L^2]} = [E^\alpha t^\alpha] [L^\beta / t^\beta] [L^\gamma]$$

Η παραπάνω διαστατική σχέση ικανοποιείται για $\alpha = \beta = 1$ και $\beta + \gamma = -2 \Rightarrow \gamma = -3$.

Επομένως

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}(d)}{S} = C \frac{\hbar c}{d^3}$$

όπου το C είναι αρνητικός αριθμός για να ικανοποιηθούν οι οριακές συνθήκες. Συμβαίνει να είναι $C = -\pi^2/720$ και επομένως η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (δηλ. η ελκτική πίεση) είναι

$$\frac{F}{S} = -\frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{\Delta E(d)}{S} \right) = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4} = -1,297 \text{ bar για } d = 10 \text{ nm}$$