

Από τα κουάρκ μέχρι το Σύμπαν: Μια σύντομη περιήγηση

Στην ατομική ιδέα “ενυπάρχει μια τεράστια ποσότητα πληροφορίας για τον Κόσμο, εάν διαθέσει κανείς λίγη φαντασία και σκέψη”.

R. P. Feynman

**Ε.Ν. Οικονόμου
Ι.Τ.Ε
20 Δεκεμβρίου 2016**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή: Τρεις βασικές ιδέες και ένα εργαλείο

2. Φωτόνια: Μεταφορείς και συνδετήρες

3. Δομές της Ύλης:

- Όπου οι ισχυρές δυνάμεις κυριαρχούν
- Το βασίλειο της ΗΜ δύναμης
- Η βαρύτητα στο προσκήνιο

1

Η ΑΤΟΜΙΚΗ ΙΔΕΑ

- Τα πάντα είναι φτιαγμένα από “άφθαρτα”, αδιαίρετα (ά-τομα) μικροσκοπικά **σωμάτια** που **αλληλοέλκονται λόγω αλληλεπιδράσεων**.
- Ως αποτέλεσμα οι ιδιότητες των **δομών της ύλης** σε **όλες τις κλίμακες**, υπό συνθήκες **ισορροπίας**, εξαρτώνται μόνο από 4-5 παγκόσμιες σταθερές.
- Η ισορροπία απαιτεί την **εξισορρόπηση** της έλξης, γιατί αλλιώς τα πάντα θα συνθλίβονταν σε μαύρες τρύπες.
- **Τι** εμποδίζει λοιπόν την κατάρρευση της ύλης και εξασφαλίζει την ύπαρξη της;

2

Ο ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΣ ΔΥΙΣΜΟΣ ΜΑΣ ΣΩΖΕΙ

- Κάθε σωματίο ενέργειας ε και ορμής p κινείται όχι σε τροχιά αλλά ως κύμα με συχνότητα $\omega = \varepsilon / \hbar$ και κυματάνυσμα* $k = p / \hbar$
- Κάθε κύμα με συχνότητα ω και κυματάνυσμα k αποτελείται από αδιαίρετα στοιχειώδη κομμάτια ενέργειας $\varepsilon = \hbar\omega$ και ορμής $p = \hbar k$
- Ο Κ.Δ. οδηγεί στην Κβαντομηχανική η οποία μπορεί να συμπυκνωθεί σε τρεις βασικές αρχές:
(Το «ζουμί» της ΚβΜ, αυτό που πρέπει να μείνει όταν όλα ξεχαστούν)

* Υπενθύμιση $k = 2\pi / \lambda$

ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

1) Αρχή του Heisenberg: $\Delta x \times \Delta p_x \geq \hbar / 2$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon_{\text{κιν}} \rangle \approx \langle \mathbf{p}^2 \rangle / 2m \geq (\Delta p^2 / 2m) \propto \hbar^2 / m \Delta r^2 \propto \hbar^2 / m r^2 \propto \hbar^2 / m V^{2/3}$$

$$\approx c \langle |\mathbf{p}| \rangle \geq (c \Delta p) \propto c \hbar / \Delta r \propto c \hbar / r \propto c \hbar / V^{1/3}$$

2) Αρχή του Pauli: N όμοια σωμάτια με σπιν 1/2 δεν συγκατοικούν

$$\Rightarrow V \rightarrow V / N_{\uparrow, \downarrow} = 2V / N, \quad N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = N / 2$$

$$\Rightarrow \langle E_{\text{κιν}, N} \rangle \geq 2,87 N \times \left(\hbar^2 N^{2/3} / m V^{2/3} \right) = 1,105 (\hbar^2 N^{5/3} / m R^2)$$

$$\langle E_{\text{κιν}, N} \rangle \geq 2,32 N \times \left(\hbar c N^{1/3} / V^{1/3} \right) = 1,44 (\hbar c N^{4/3} / R)$$

3) Αρχή του Schrödinger: Διάκριτο φάσμα, όταν εντοπισμός

$$\Delta \varepsilon \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \propto \hbar^2 / m V^{2/3} \quad \text{ή} \quad c \hbar / V^{1/3}$$

σύνθετα σωμάτια συμπεριφέρονται ως στοιχειώδη μέχρι το όριο $\Delta \varepsilon$.

1+2 $\Rightarrow$ Εμποδίζουν την κατάρρευση της ύλης, εξασφαλίζουν την ύπαρξή της.

3 $\Rightarrow$ Εξασφαλίζει το αναλλοίωτο σύνθετων σωματίων μέχρι κάποιο όριο

Κινητική ενέργεια N όμοιων σωματίων με σπιν $1/2$, με ολική ορμή και στροφορμή μηδέν και με **ομοιογενή** συγκέντρωση, σε όγκο $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

$$E_K \geq 2.87 N \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{m V^{2/3}} = 1.105 \frac{\hbar^2}{m} \frac{N^{5/3}}{R^2}, \quad \varepsilon_K = p^2 / 2m$$

$$E_K \geq 2.32 N \frac{\hbar c N^{1/3}}{V^{1/3}} = 1.44 \hbar c \frac{N^{4/3}}{R}, \quad \varepsilon_K = c p$$

ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ* $\Leftrightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Η ενέργεια έχ

■ Την δυναμική

- ❖ που οφείλεται
- ❖ είναι συνάρτηση
- ❖ και τείνει

■ Την κινητική

- ❖ που είναι
- ❖ ενεργά άσ
- ❖ που, λόγω
- ❖ συρρικνώ
- ❖ και επομέν
- ❖ πίεση της δυναμικής ενέργειας
- ❖ και εξασφαλίζει την ύπαρξη ευσταθών δομών της ύλης

Θυμίζω:

Λόγω της αρχής του Schrödinger η ενεργειακή απόσταση της πρώτης διεγερμένης κατάστασης από την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι μη μηδενική.

Αυτό συνεπάγεται το αναλλοίωτο και αδιαίρετο (μέχρις ορισμένου ορίου) σύνθετων συστημάτων και σταθερή χημική συμπεριφορά (απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη του κόσμου μας)

πρűσεως στα

όσο το σύστημα

εί τη συνθλιπτική

* Για $T = 0 \text{ }^{\circ}\text{K}$ και $P = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{\partial E_{\Delta}}{\partial V} + \frac{\partial E_K}{\partial V} = 0 \Rightarrow |P_{\Delta}| = |P_K|$$

Παρουσία εξωτερικής θερμοκρασίας και πίεσης $T_{\varepsilon\xi}, P_{\varepsilon\xi}$, η ευσταθής ισορροπία αντιστοιχεί στο ελάχιστο της ελεύθερης ενέργειας του Gibbs

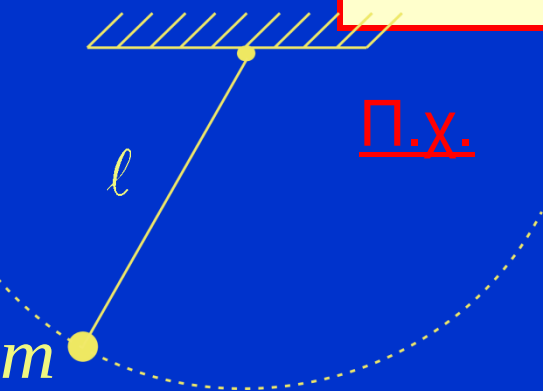
$$G \equiv U + P_{\varepsilon\xi} V - T_{\varepsilon\xi} S \equiv H - T_{\varepsilon\xi} S$$

$$E = \langle E \rangle \equiv U$$

Άσκηση

- Σχεδιάστε την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs ως συνάρτηση της θερμοκρασίας υπό σταθερή πίεση (πολύ μικρή, ενδιάμεση, πολύ μεγάλη πίεση) για τις τρεις φάσεις της ύλης (στερεά, υγρή, αέρια). Με βάση τα παραπάνω γραφήματα σχεδιάστε το διάγραμμα των τριών φάσεων στο επίπεδο T, P .
- Υποδείξεις: Χρησιμοποιήστε φυσικά επιχειρήματα, τη σχέση της G με την εντροπία και τη σχέση της εντροπίας με την ειδική θερμότητα.

ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ



Π.χ. Συχνότητα ω ταλάντωσης εκκρεμούς
Εξαρτάται: 1) Φυσικές σταθερές, g
2) Φυσικά μεγέθη, ℓ, m

$$\Rightarrow \omega = C g^a \ell^\beta m^\gamma \Rightarrow \gamma = 0, \beta + a = 0, a = \frac{1}{2}$$

$$C \text{ αριθμητική σταθερά} = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{g / \ell}$$

Γενικά: X εξαρτάται από $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$

$$X = X_0 f\left(\frac{A_4}{A_{40}}, \frac{A_5}{A_{50}}, \dots\right)$$

$$[X_0 \equiv A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3}] = [X] \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$[A_{40} \equiv A_1^{n_1} A_2^{n_2} A_3^{n_3}] = [A_4] \Rightarrow n_1, n_2, n_3, \text{ etc.}$$

**Ποια είναι και τι ιδιότητες
έχουν τα στοιχειώδη σωματiα**

ΑΤΟΜΟ

ΝΕΤΡΟΝΙΑ

ΠΥΡΗΝΑΣ

ΠΡΩΤΟΝΙΑ

ΚΑΤΩ ΚΟΥΑΡΚ

ΠΑΝΩ ΚΟΥΑΡΚ



Παγκόσμιες Φυσικές Σταθερές

$$\hbar \approx 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

■ Σωματίδια

Όνομα/ σύμβολο	Μάζα $\times c^2$ (MeV)	Ηλεκτρικό Φορτίο
Ηλεκτρόνιο e	$m_e = 0,51$	-e
Πρωτόνιο p	$m_p = 938,27$	+e
Νετρόνιο n	$m_n = 939,57$	0
Νετρίνιο ν	>0	0

■ Αλληλεπιδράσεις

Όνομα	Πόσο Ισχυρή	Εμβέλεια
Βαρυτική	$\alpha_G = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 5,9 \times 10^{-39}$	$\infty, \frac{-Gm_1, m_2}{r_{12}}$
Ηλεκτρο- Μαγνητική, H/M	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137$	$\infty, \text{ αλλά } \pm e^2 / r_{12}$
Ασθενής πυρηνική $n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	$\alpha_w \approx 10^{-5}$	10^{-18} m
Ισχυρή πυρηνική	$\alpha_s \approx 1$	$\approx 10^{-15} \text{ m}$

1. Εισαγωγή: Τρεις βασικές ιδέες και ένα εργαλείο

2. Φωτόνια: Μεταφορείς και συνδετήρες

3. Δομές της Ύλης:

- Όπου οι ισχυρές δυνάμεις κυριαρχούν
- Το βασίλειο της ΗΜ δύναμης
- Η βαρύτητα στο προσκήνιο

ΦΩΤΟΝΙΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΜΕ ΥΛΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ T

Οι ιδιότητες τους εξαρτώνται, προφανώς, από τον V και την T .

k_B και T πάνε στη φύση πάντα πακέτο.



Άρα οι ιδιότητες των εν λόγω φωτονίων εξαρτώνται από:

(α) Από τις φυσικές παραμέτρους $k_B T$ [ενέργεια] και V .

και τις φυσικές σταθερές:

(β) $\hbar$: αφού το φωτόνιο είναι το κβάντο του H/M πεδίου [ενέργεια $\times$ χρόνος]

(γ) c : αφού το c χαρακτηρίζει το φωτόνιο και το H/M κύμα

$$\frac{\hbar}{k_B T} : [\text{χρόνος}]$$

$$\frac{\hbar c}{k_B T} : [\text{μήκος}]$$

$$U_{ph} \equiv V \varepsilon_{ph}, \quad \text{εκτατικότητα των } U_{ph} \quad \text{και } V$$

$$\varepsilon_{ph} = \left(\right) \hbar^\nu c^\mu (k_B T)^\xi$$

Αλλά και κατ' ευθείαν, αφού $[\hbar c / k_B T] = [\mu\acute{\eta}\kappa\omicron\varsigma]$

$$\varepsilon_{ph} = \left(\right) \frac{k_B T}{(\hbar c / k_B T)^3} = \left(\frac{\pi^2}{15} \right) \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3}$$

$$U_{ph} = V \varepsilon_{ph} = \frac{\pi^2}{15} V \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3}$$

$$dU_V = TdS, \quad \Rightarrow \quad S_{ph} = \frac{4}{3} \frac{U_{ph}}{T},$$

$$F_{ph} \equiv U_{ph} - TS_{ph} = -\frac{1}{3} U_{ph}$$

$$P_{ph} = - \left(\frac{\partial F_{ph}}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{3} \varepsilon_{ph}$$

$$I = \frac{c}{4} \varepsilon_{ph} = \frac{\pi^2}{60} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^2}$$

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΟΥ

Εξαρτάται από:

- Το φορτίο του q
- Την επιτάχυνσή του a
- Την ταχύτητα του φωτός c

$$I = c_1 \frac{q^2 a^2}{c^3}, \quad c_1 = \frac{2}{3}$$

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΔΙΠΟΛΟΥ I , ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ τ

- Ταχύτητα φωτός, c
- Διπολική ροπή, $p = e r$
- Συχνότητα, ω

$$I = c_1 \frac{p^2 \omega^4}{c^3}, \quad c_1 = \frac{2}{3}$$

$$I \cdot \tau = \hbar \omega \Rightarrow \tau = \hbar \omega / I = \frac{3}{2} \hbar c^3 / p^2 \omega^3$$

$$p = e \cdot r \approx e \cdot a_B \text{ (για } H)$$

$$\hbar \omega = E_1 - E_0 = 10,2 \text{ eV (για } 2p \rightarrow 1s \text{ στο } H)$$

$$\tau = 1,77 \times 10^{-9} \text{ s έναντι } 1,59 \times 10^{-9} \text{ s}$$

ΔΙΑΤΟΜΗ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΦΩΤΟΝΙΟΥ

$$\sigma_s = \frac{I / \hbar \omega}{c \mathbf{E}_0^2 / 4 \pi \hbar \omega} = \frac{4 \pi I}{c \mathbf{E}_0^2}$$

Από ένα σωματίο φορτίου e και μάζας m_i

$$\sigma_s = \frac{4 \pi I}{c \mathbf{E}_0^2} = \frac{8 \pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_i c^2} \right)^2 = \frac{8 \pi}{3} r_i^2 = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2 \text{ (if } i = e \text{)}$$

Από δίπολο διπολικής ροπής $\mathbf{p} = a_p \mathbf{E}_0$

$$\sigma_s = \frac{4 \pi I}{c \mathbf{E}_0^2} = \frac{8 \pi}{3} \frac{a_p^2 \omega^4}{c^4}, \quad a_p = c_1 r_0^3 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega / \tau)}$$

Μέση ελεύθερη διαδρομή: $\frac{1}{\ell} = \sum_j n_j \sigma_{sj}$

1. Εισαγωγή: Τρεις βασικές ιδέες και ένα εργαλείο

2. Φωτόνια: Αγγελιοφόροι και συνδετήρες

3. Δομές της Ύλης:

- Όπου οι ισχυρές δυνάμεις κυριαρχούν
- Το βασίλειο της ΗΜ δύναμης
- Η βαρύτητα στο προσκήνιο

Ελάχιστο. $E \Rightarrow$ Ισότητα συμπιεστικής και διασταλτικής πίεσης



Κλίμακα μήκους (m)	Σταθερές δομές	Δυναμική ενέργεια	Κινητική ενέργεια (Κ.Ε.)
10^{-15}	Νουκλεόνια	Ισχυρή	Κβαντική Κ.Ε.
$10^{-15} - 10^{-14}$	Πυρήνες	Ισχυρή/ ΗΜ	Κβαντική Κ.Ε./(ΗΜ)
10^{-10}	Άτομα	ΗΜ	Κβαντική Κ.Ε.
$>10^{-10}$	Μόρια	ΗΜ	Κβαντική Κ.Ε.
$>10^{-10}$	Στερεά/Υγρά	ΗΜ	Κβαντική Κ.Ε.
$< 5 \times 10^5$	Αστεροειδείς	ΗΜ	Κβαντική Κ.Ε.
10^7	Πλανήτες	Βαρυτική, ΗΜ	Κβαντική Κ.Ε.
10^9	Άστρα	Βαρυτική, ΗΜ, Ισχυρή/Ασθενής	Κβαντική Κ.Ε. Θερμική Κ.Ε.
10^7	Λευκοί νάνοι	Βαρυτική	Κβαντική Κ.Ε.
10^4	Άστρα νετρονίων	Βαρυτική	Κβαντική Κ.Ε.
$10^4 ?$	Μαύρες τρύπες	Βαρυτική	
10^{21}	Γαλαξίες	Βαρυτική	Κ.Ε.
10^{26}	Σύμπαν	Βαρυτική	Κ.Ε. διαστολής, Σκοτεινή ενέργεια

1. Εισαγωγή: Τρεις βασικές ιδέες και ένα εργαλείο
2. Φωτόνια: Αγγελιοφόροι και συνδετήρες
3. Δομές της Ύλης:
 - Όπου οι ισχυρές δυνάμεις κυριαρχούν
 - Το βασίλειο της ΗΜ δύναμης
 - Η βαρύτητα στο προσκήνιο

**Η μάζα των πρωτονίων και των νετρονίων είναι
η κινητική ενέργεια των κουάρκ**

$$m_p c^2 \approx m_n c^2 \approx 2 \frac{3,0217 \hbar c}{V^{1/3}} = 2 \frac{1,8745 \hbar c}{r}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r_p^3 \quad r_p \approx 0,84 \text{ fm}$$

$$m_p c^2 \approx 880 \text{ Mev} \quad \text{Πειρ. } 938,27$$

$$m_n c^2 \approx 880 \text{ Mev} \quad \text{Πειρ. } 939,57$$

Πυρήνες: $A=N+Z$

Ισχυρές αλληλεπιδράσεις:

$$-\frac{1}{2}A_v A_{nn} V_s - \frac{1}{2}A_s A'_{nn} V_s; \quad A = A_v + A_s, \quad A'_{nn} \approx \frac{2}{3}A_{nn}, \quad A_{nn} \approx 8$$

$$R \propto A^{1/3}, \quad A_s \approx 4\pi R^2 / \pi \alpha_0^2 \approx A^{2/3}, \quad A_v = A - A^{2/3}, \quad V_s \approx 11,4 \text{ MeV}$$

☞ **Αλληλεπιδράσεις Coulomb:** $\frac{1}{2}Z(Z-1)\frac{3e^2}{5R}$

☞ **Κινητική ενέργεια:** $\left[Z\left(\frac{Z}{2}\right)^{2/3} + N\left(\frac{N}{2}\right)^{2/3} \right] 2,87 \frac{\hbar^2}{mV^{2/3}} \approx \alpha'' A + \frac{\eta}{A}(N-Z)^2$

$$E_{\text{nucleus}} : Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - \alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + \frac{\eta}{A}(N-Z)^2 \begin{cases} -\delta & e/e \\ +0 & e/0 \\ +\delta & 0/0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}A_{nn} V_s - \alpha'' \approx 15,75, \quad \beta = \frac{1}{2}(A_{nn} - A'_{nn})V_s \approx 17,8, \quad \gamma \approx 0,71, \quad \eta \approx 23,69 \quad \delta \approx \frac{34}{A^{3/4}}$$

$$E_t = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B,$$

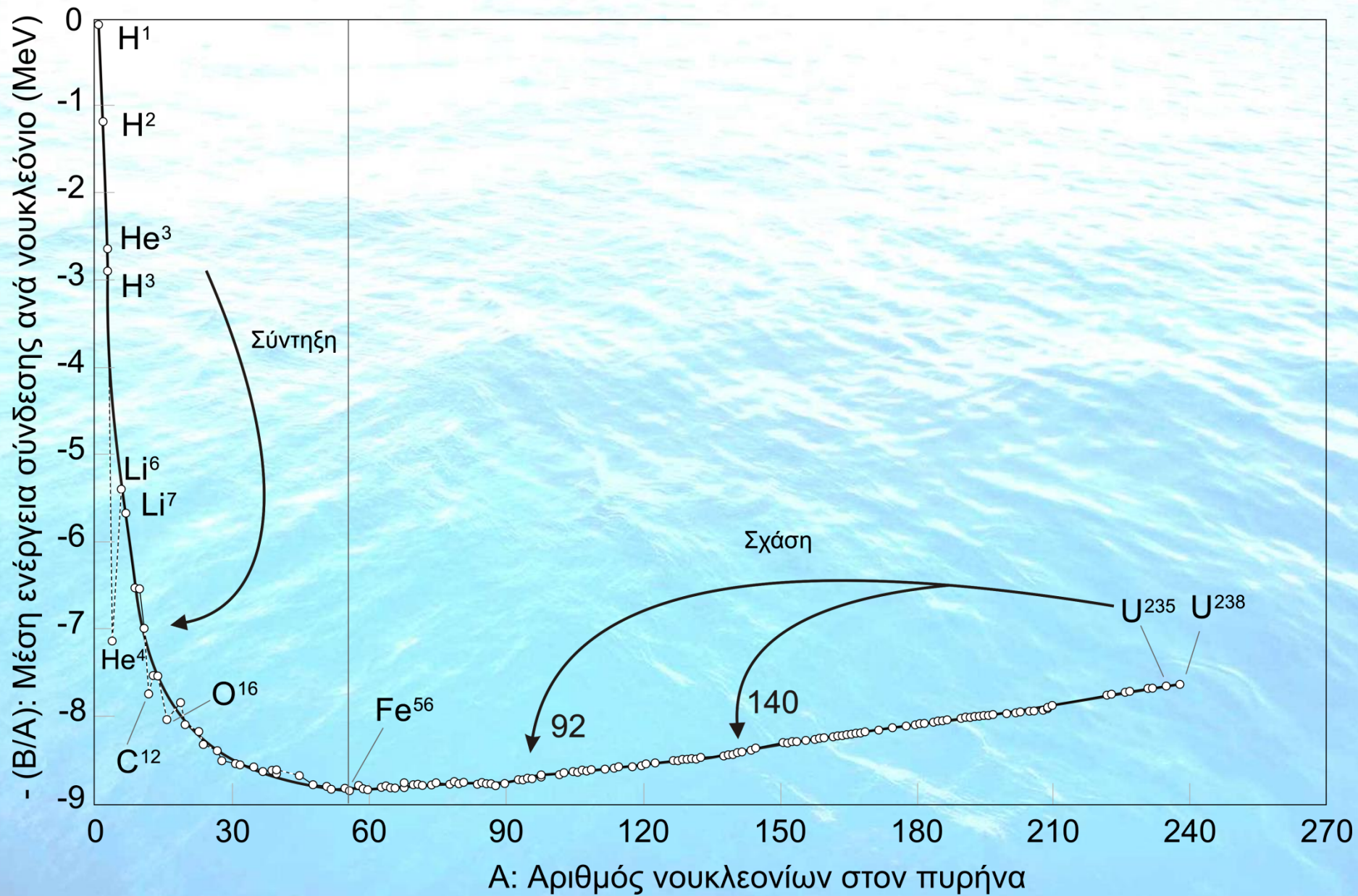
$$-B = -\alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + \frac{a_K}{A} (N-Z)^2 \begin{cases} -\delta & e/e \\ +0 & e/0 \\ +\delta & 0/0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} A_{nn} V_s - \alpha'' \approx 15.75, \quad \beta = \frac{1}{2} V_s (A_{nn} - A'_{nn}) \approx 17.8, \quad \gamma \approx 0.71, \quad a_K \approx 23.69, \quad \delta \approx \frac{34}{A^{3/4}}$$

Ποσοστό πρωτονίων σε πυρήνα ‘εν ισορροπία’

$$\left. \frac{\partial E_t}{\partial Z} \right)_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Z}{A} = \frac{1.014}{2 + \frac{\gamma A^{2/3}}{2a_K}} \approx \frac{1.014}{2 + 0.015 A^{2/3}}$$

$$-\frac{B}{A} \approx -9.45 + 0.008 A \text{ MeV}, \quad A > 90$$



1. Εισαγωγή: Τρεις βασικές ιδέες και ένα εργαλείο
2. Φωτόνια: Αγγελιοφόροι και συνδετήρες
3. Δομές της Ύλης:
 - Όπου οι ισχυρές δυνάμεις κυριαρχούν
 - Το βασίλειο της ΗΜ δύναμης**
 - Η βαρύτητα στο προσκήνιο

ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ & ΑΤΟΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΑΔΩΝ

Δυναμική ενέργεια $\Leftrightarrow e$

Κινητική ενέργεια $\Leftrightarrow m_e, \hbar$

$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} :$ Ατομική μονάδα μήκους (ακτίνα Bohr)

αντί $e, m_e, \hbar \Rightarrow a_B, m_e, \hbar$

$a_B \Rightarrow r_a = \bar{r}_a a_B$

ΑΠΟ ΤΑ ΑΤΟΜΑ ΜΕΧΡΙ ΑΣΤΕΡΟΕΙΔΕΙΣ

$$X = X_o \cdot f_X \left(Z, \frac{m_a}{m_e} (Z), \frac{T}{T_o}, \frac{P}{P_o}, \frac{c}{v_o}, \dots \right)$$

$$X_o = \hbar^n m_e^p a_B^q; \quad n, p, q \text{ ώστε } [X_o] = [X]$$

$$k_B T_o \equiv E_o = e^2 / a_B = \hbar^2 / m_e a_B^2 = 27,2 \text{ eV}, \quad T_o = 315775 \text{ K}$$

$$P_o = \hbar^2 / m_e a_B^5 = 294 \text{ Mbar},$$

$$v_o = \hbar / m_e a_B = c / 137 = 2188 \text{ km/s},$$

$$t_o = \hbar / E_o = m_e a_B^2 / \hbar = 2,42 \times 10^{-17} \text{ s}$$

$$a_B \rightarrow r = \bar{r} a_B, \quad X_o \rightarrow X'_o, \quad T_o \rightarrow T'_o, \text{ etc}$$

Η ηλεκτροστατική ενέργεια κυριαρχεί:

- **Άτομα**
- Μόρια
- Στερεά
- Υγρά

ΑΤΟΜΑ

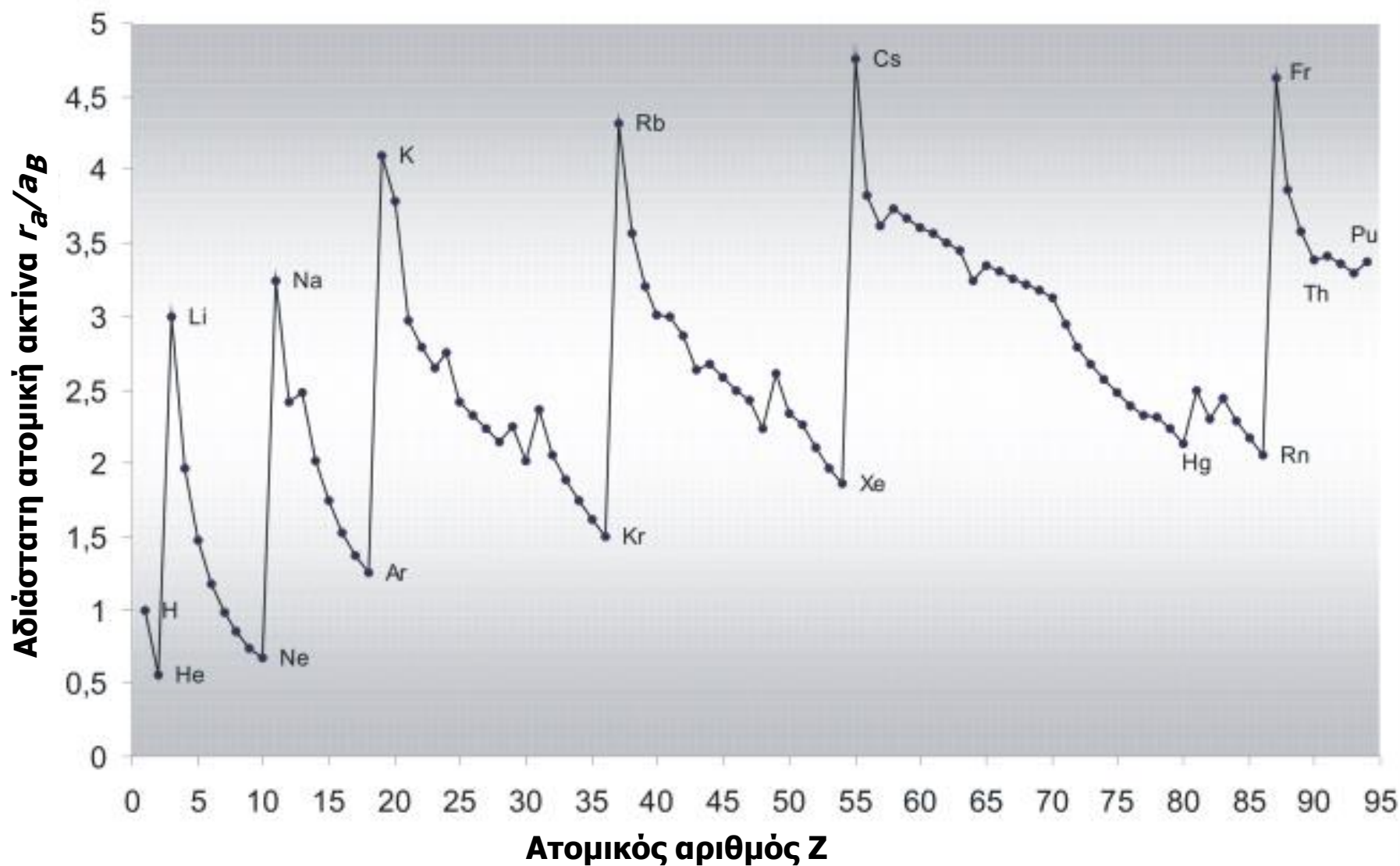
$$r_a = \bar{r}_a a_B, \quad 0,6 \leq \bar{r}_a \leq 5, \quad \bar{r}_a \approx 2,6$$

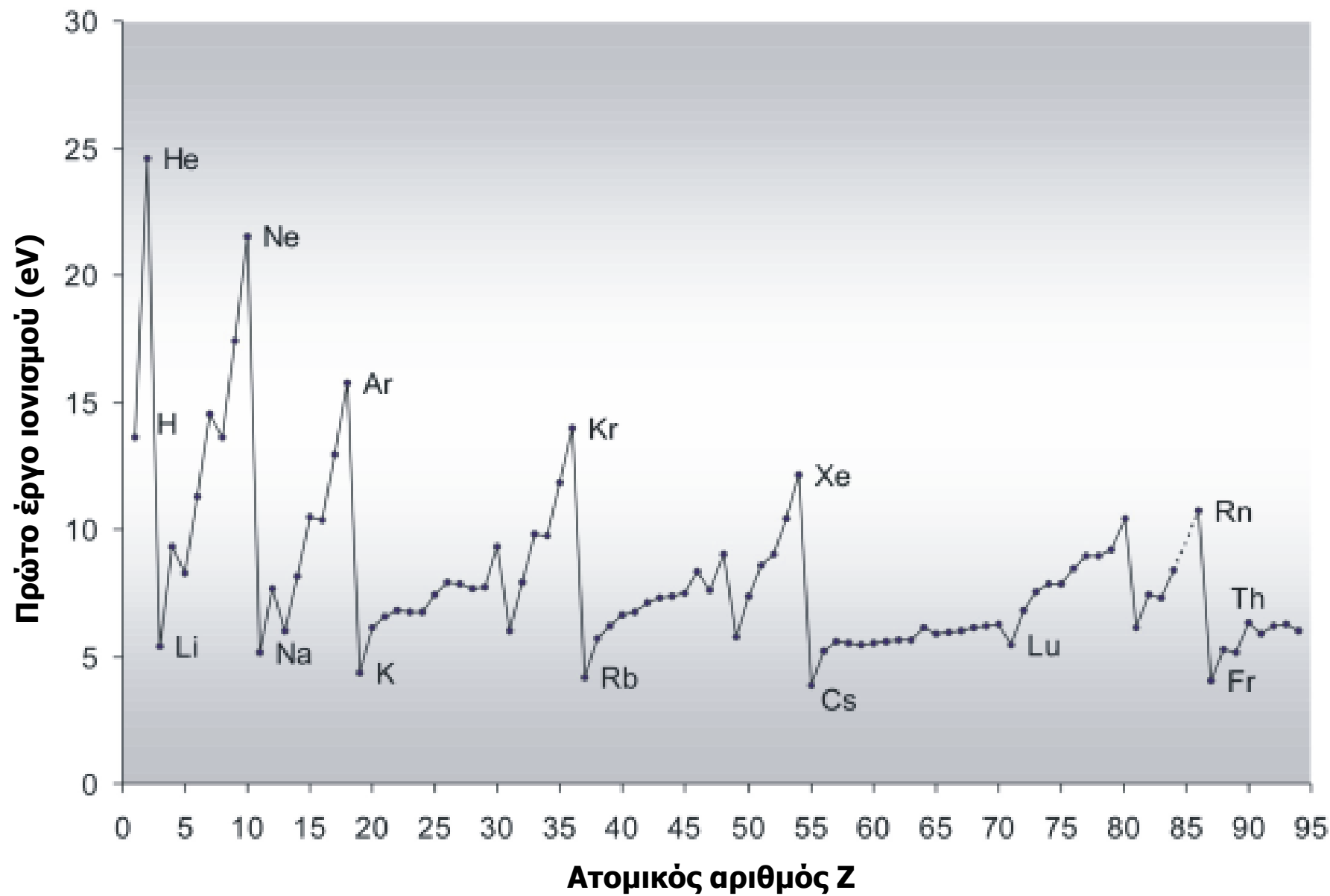
$$I = \bar{I} \frac{\hbar^2}{2m_e a_B^2} = 13,6 \bar{I} \text{ eV} \quad 0,28 \leq \bar{I} \leq 1,8$$

$$a_B \rightarrow r_a = \bar{r}_a a_B$$

Ατομικά τροχιακά και φλοιοί & υποφλοιοί

Περιοδικός πίνακας των στοιχείων (ΠΠΣ)





Φλοιοί/υποφλοιοί οφείλονται στη γωνιακή εξάρτηση των ατομικών τροχιακών,

- που προκύπτει από τη γωνιακή εξάρτηση πολωνύμων βαθμού ℓ που ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace.

$\ell = 0 \Leftrightarrow$ σταθ. $\Leftrightarrow$ χωρίς γωνιακή εξάρτηση $\Leftrightarrow$ τροχιακό s

$\ell = 1 \Leftrightarrow x, y, z \Leftrightarrow \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta \Leftrightarrow$ 3 τροχιακά p

$\ell = 2 \Leftrightarrow xy, yz, zx, x^2-y^2, y^2-z^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ 5 τροχιακά d

$\ell = 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xyz, z(x^2 - y^2), x(y^2 - z^2), y(z^2 - x^2) \\ y(x^2 - \frac{1}{3}y^2), z(y^2 - \frac{1}{3}z^2), x(z^2 - \frac{1}{3}x^2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ 7 f

κλ... $E = f(n, \ell), \quad n = n_r + \ell + 1, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ↑				Μέγιστος αρ. ηλεκτρονίων σε κάθε φλοιό	Συνολικός αριθμός ηλεκτρονίων	
7s_____	7p_____	7d_____	7f_____	32	32+86=118	7ος Φλοιός 7η Γραμμή
6s_____	6p_____	6d_____	6f_____	32	32+54=86	6ος Φλοιός 6η Γραμμή
5s_____	5p_____	5d_____	5f_____	18	18+36=54	5ος Φλοιός 5η Γραμμή
4s_____	4p_____	4d_____	4f_____	18	18+18=36	4ος Φλοιός 4η Γραμμή
3s_____	3p_____	3d_____		8	8+10=18	3ος Φλοιός 3η Γραμμή
2s_____	2p_____			8	8+2=10	2ος Φλοιός 2η Γραμμή
1s_____				2	2	1ος Φλοιός 1η Γραμμή του Π.Π.Σ.
s, l=0	p, l=1	d, l=2	f, l=3	2 6 10 14 ← Μέγιστος αριθμός ηλεκτρονίων σε κάθε l		

Άσκηση

- Για ένα ουδέτερο άτομο μεγάλου ατομικού αριθμού Z , εκτιμήστε τη μέση απόσταση ενός ηλεκτρονίου από τον πυρήνα καθώς και την ολική του ενέργεια (κινητική συν Coulomb).

Η ηλεκτροστατική ενέργεια κυριαρχεί:

- Άτομα
- **Μόρια**
- Στερεά
- Υγρά

MOPIA

$$d \approx r_1 + r_2 = (\bar{r}_{a1} + \bar{r}_{a2}) a_B = \bar{d} a_B \approx 2,5 \text{ \AA}$$

$$E_B = \eta_\Delta \frac{\hbar^2}{m_e a_B^2} \frac{1}{\bar{d}^2} \approx 27,2 \frac{1}{\bar{d}^2} \text{ eV} \approx 2 \text{ eV}, \quad \frac{\hbar^2}{m_e a_B^2} = \frac{e^2}{a_B}$$

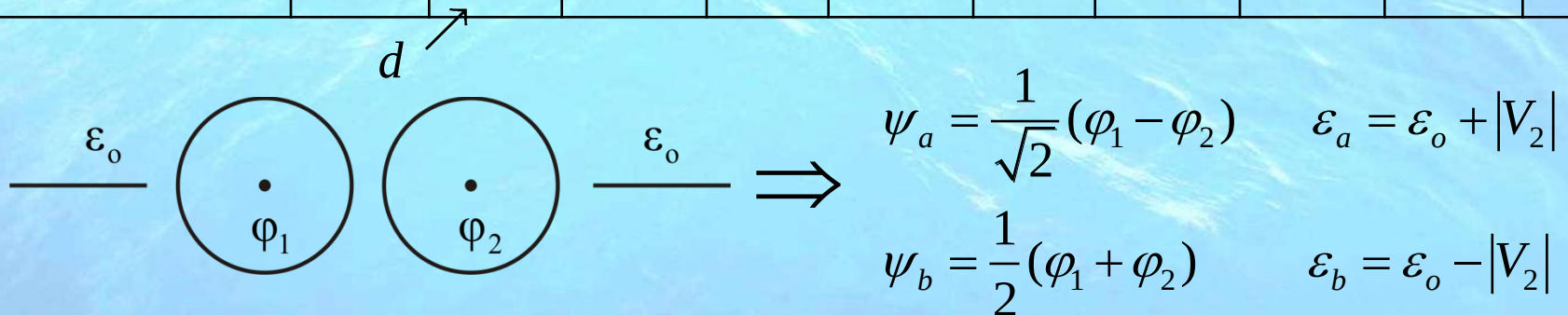
$$\varepsilon_\tau \equiv \hbar \omega = \frac{4,75 \hbar^2}{m_e a_B^2 \bar{d}^2} f(m_r / m_e) \quad \dot{\eta} \quad \frac{e^2}{a_B \bar{d}} f(m_r / m_e)$$

$$\varepsilon_\tau = \frac{0,637}{\bar{d}} \sqrt{\frac{1}{A_{B,r}}} \text{ eV} \quad \dot{\eta} \quad \hbar \sqrt{\frac{\kappa}{m_r}} \approx E_B \sqrt{\frac{22,5 m_e}{m_r}} \approx \frac{3,026}{\bar{d}^2} \sqrt{\frac{1}{A_{B,r}}} \text{ eV}$$

$$\varepsilon_\pi \equiv \frac{\hbar^2}{I_{PA}} = 0,0149 \frac{1}{\bar{d}^2} \frac{1}{A_{B,r}} \text{ eV}$$

Σύγκριση πειραματικών δεδομένων για ορισμένα χαρακτηριστικά διατομικά μόρια με εκτιμήσεις βασισμένες σε διαστατική ανάλυση

	H ₂		N ₂		O ₂		Na ₂		AgI	
	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.
$d_0(\text{\AA})$	0,74	1,06	1,098	1,04	1,21	0,90	3,08	3,426	2,54	2,33
$A_{B,r}$	0,5		7		8		11,5		58,3	
$D(\text{eV})$	4,48	13,9	9,79	6,31	5,165	5,2	0,775	0,8	2,42	1,18
$\hbar\omega(\text{meV})$	516	875 647	292	265 117	196	204 99	19,7	26 32	25,6	18 17



Άσκηση

- Βρέστε τις τέσσερις ιδιοταλαντώσεις του διοξειδίου του άνθρακα και εκτιμήστε τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες. Ποια (ή ποιες) είναι υπεύθυνες για το φαινόμενο του θερμοκηπίου;

Η ηλεκτροστατική ενέργεια κυριαρχεί:

- Άτομα
- Μόρια
- **Στερεά**
- Υγρά

ΣΤΕΡΕΑ

$$\frac{V}{N} \equiv \frac{4\pi}{3} r_s^3 \equiv \frac{4\pi}{3} (\bar{r}_s a_B)^3; \quad \bar{r}_s \approx 3$$

$$\rho_M = \frac{m_\alpha}{\frac{4\pi}{3} r_s^3} = 2,675 \frac{A_B}{\bar{r}_s^3} \text{ g / cm}^3$$

$$|\delta E| = \eta_s \frac{\hbar^2}{m_e r_s^2} = \eta_s \frac{27,2}{\bar{r}_s^2} \frac{\text{eV}}{\text{atom}} = \eta_s \frac{625}{\bar{r}_s^2} \frac{\text{cal}}{\text{mol}}, \quad \eta_s \approx 1$$

$$B = c_s \frac{\hbar^2}{m_e r_s^5} = c_s \frac{294}{\bar{r}_s^5} \times 10^{11} \text{ N / m}^2 \approx \frac{180}{\bar{r}_s^5} \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad c_s \approx 0,6$$

$$v_0 = \alpha'_s \frac{\hbar}{m_e r_s} \sqrt{\frac{m_e}{m_\alpha}} = \frac{51 \alpha'_s}{\bar{r}_s \sqrt{A_B}} \frac{\text{km}}{\text{s}} = \sqrt{\frac{B}{\rho_M}}, \quad \alpha'_s \approx 1,6 \quad \eta' \approx 0,47$$

ΣΤΕΡΕΑ

$$\mu = \beta_s B, \quad 0,1 \leq \beta_s \leq 1$$

$$\tau_s \approx \frac{B}{500} \approx \frac{1,2 \times 10^{-3}}{\bar{r}_s^5} \frac{\hbar^2}{m_e \alpha_B^5}$$

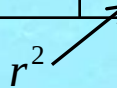
$$\omega_{\max} = \frac{e^2}{\hbar \bar{r}_s a_B} \sqrt{\frac{m_e}{m_a}} \approx \frac{97}{\bar{r}_s \sqrt{A_B}} \times 10^{13} \text{ rad / s},$$

$$\omega_{\max} \approx \tilde{v}_0 k_D \approx \frac{2,8\hbar}{m_e a_B^2 \bar{r}_s^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_a}} \approx \frac{270}{\bar{r}_s^2 \sqrt{A_B}} \times 10^{13} \text{ rad / s}$$

$$\Theta_D \approx \frac{7390}{\bar{r}_s \sqrt{A_B}} \text{ } ^\circ\text{K} \approx \frac{20700}{\bar{r}_s^2 \sqrt{A_B}} \text{ } ^\circ\text{K}$$

Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα

	Fe		Al		Cu		Si	
	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.
$\bar{r}_s$	2,70		2,99		2,67		3,18	
A_B	55,85		26,98		63,55		28,09	
$\rho_M (gr / cm^3)$	7,86		2,70		8,96		2,33	
$ \delta E (eV/atom)$	4,28	3,73	3,39	3,04	3,49	3,82	4,63	2,69
$B(10^{11} N / m^2)$	1,68	1,29	0,722	0,73	1,37	1,29	0,998	0,54
$\nu (km/s)$	4,63	4,06	5,68	5,28	3,93	3,85	6,48	4,87
$\Theta_D (K)$	464	366 380	426	476 446	344	347 364	645	438 386

r^2 

Καλύτερα αποτελέσματα, αν το $\bar{r}_s \rightarrow \tilde{r}_s \equiv \bar{r}_s (f / 0.74)^{1/3}$

Π.χ. για το Si, $f=0,34$, και επομένως

$$\tilde{r}_s = 2,454, \quad \delta E = 4,52, \quad B = 1,98, \quad \nu = 6,27, \quad \Theta_D = 568$$

ΣΤΕΡΕΑ	Pb		Be		Mg		Na	
	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.	Πειρ.	Εκτ.
$\bar{r}_s$	3,66		2,35		3,34		3,93	
$ \delta E $ (eV/atom)	2,03	2,03	3,32	3,93	1,51	2,44	1,113	1,76
$B(10^{11} N / m^2)$	0,43	0,27	1,003	2,47	0,354	0,426	0,068	0,189
v (km/s)	2	1,57	7,88	11,62	4,57	4,98		
Θ_D (K)	105	140 107	1440	1047 1249	400	449 376	158	392 280

Το μοντέλο Jellium για r_s & B

$$\frac{E}{N_a} = \left(\frac{a'}{\bar{r}_s^2} - \frac{\gamma'}{\bar{r}_s} \right) \frac{\hbar^2}{m_e a_B}$$

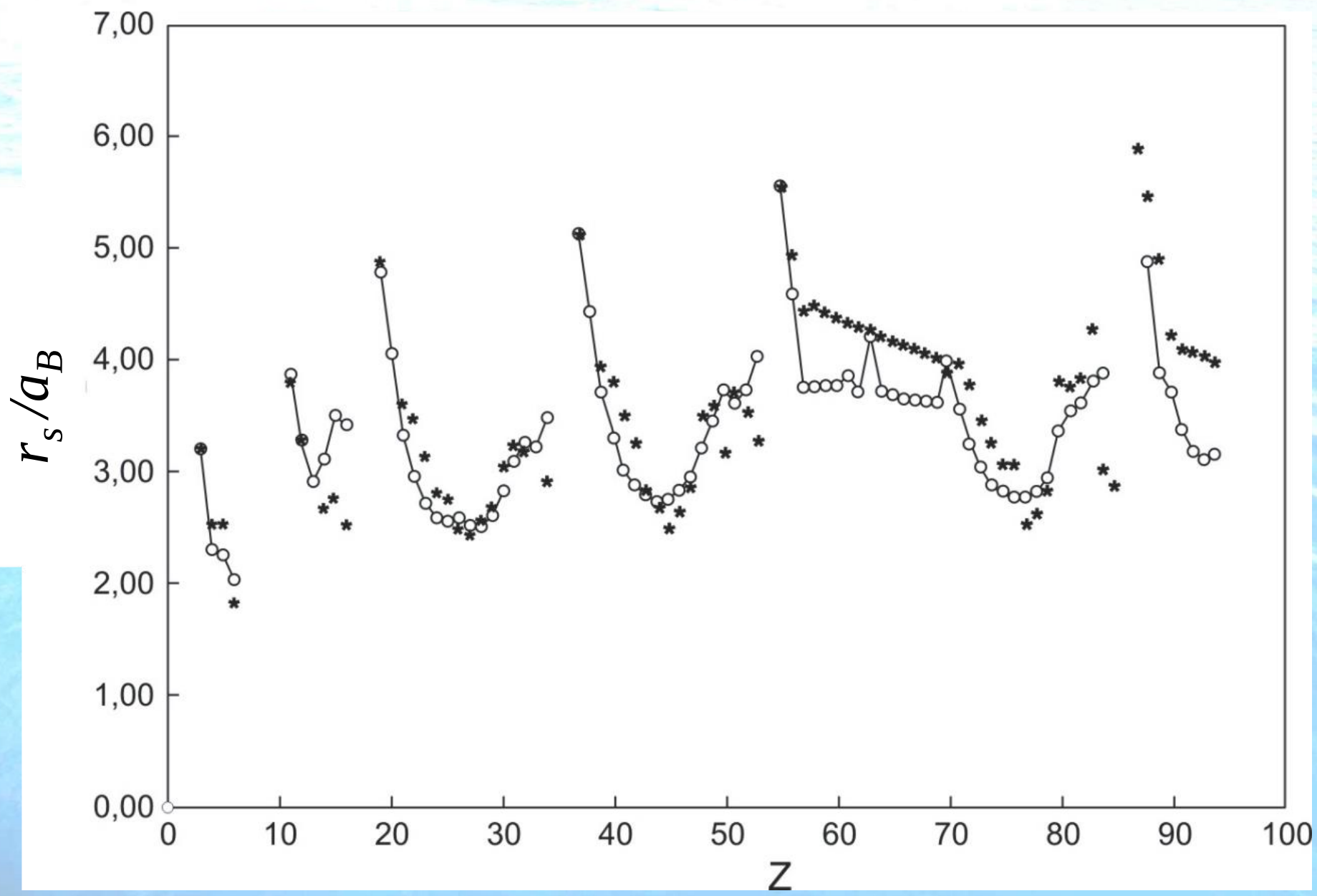
Κινητική Ενέργεια Coulomb
ενέργεια

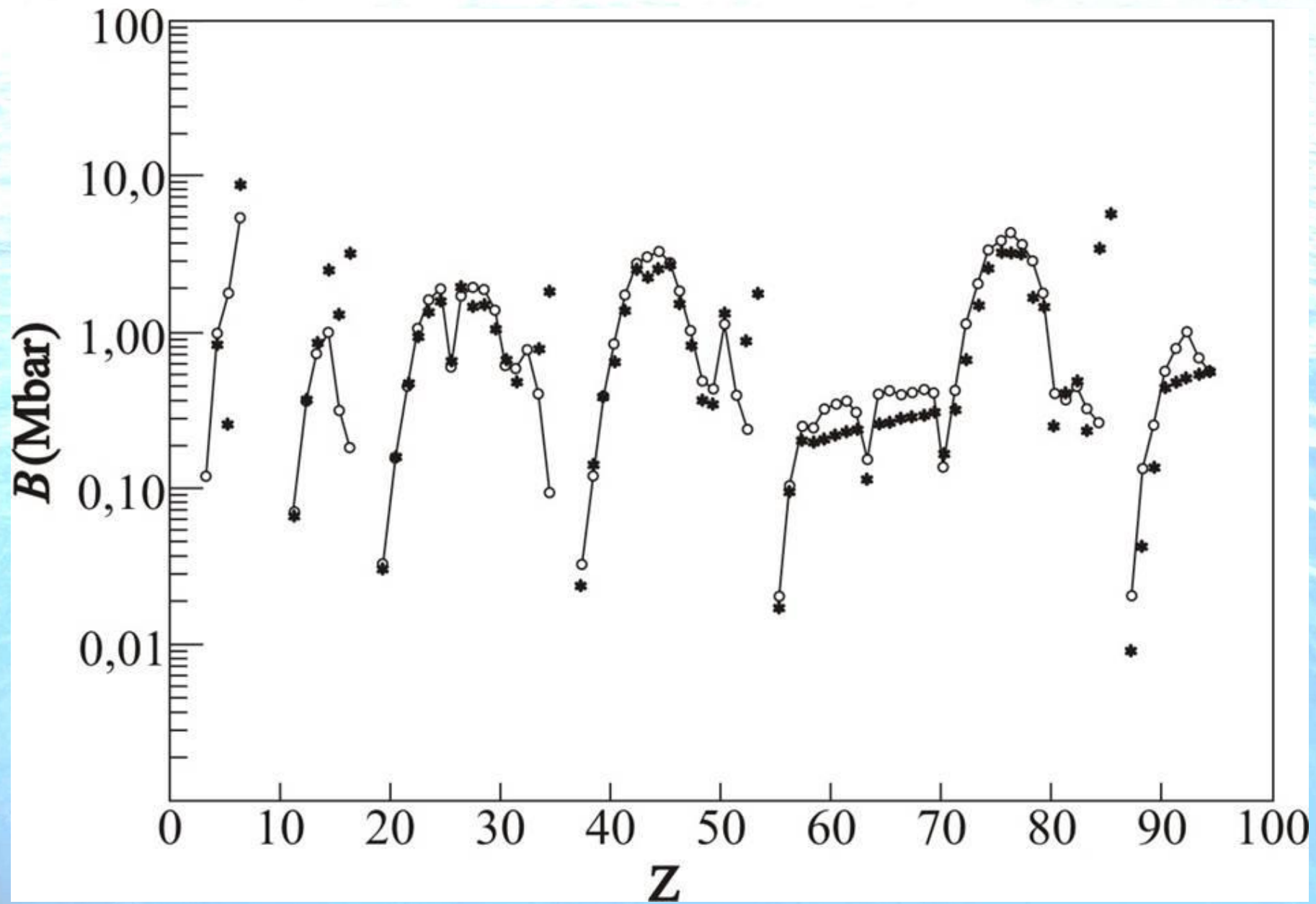
$$a' = 1,3\zeta^{5/3} + \eta\zeta^2\bar{r}_c, \quad 0,4 \leq \eta \leq 0,9$$

$$\gamma' = 0,56\zeta^{4/3} + 0,9\zeta^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{r}_s} = 0 \Rightarrow \bar{r}_s = \frac{2a'}{\gamma'}$$

$$\Rightarrow B = 15,6 \frac{a'}{\bar{r}_s^5} \text{ Mbar}$$





Θερμοκρασία τήξεως

$$U_s + PV_s - T_m S_s = U_\ell + PV_\ell - T_m S_\ell$$

$$PV_s \approx PV_\ell$$

$$U_\ell - U_s \approx 0,03U_s$$

$$S_\ell - S_s \approx N_a k_B$$

$$T_m \approx 0,03 \frac{\hbar^2}{k_B \bar{r}_s^2 a_B^2 m_e} \approx \frac{10^4}{\bar{r}_s^2} \text{ K}$$

Ειδική ηλεκτρική αντίσταση, DC, ρ_e

$$R = \frac{V}{I} = \frac{E/q}{q/s} = \frac{E \cdot s}{q^2} :$$

$$R_o = \hbar / e^2 = 4108,236 \text{ Ohm}$$

$$R = \rho_e \ell / S = \rho_e / \ell \Rightarrow [\rho_e] = [R][\ell]$$

$$\rho_{eo} = \frac{\hbar a_B}{e^2} = 21,74 \mu\Omega \cdot \text{cm} \quad [\text{διαστάσεις χρόνου}]$$

$$\rho_e = 21,74 \bar{r}_s \approx 60 \mu\Omega \cdot \text{cm}$$

Ειδική ηλεκτρική αντίσταση, DC, ρ_e (2)

	Ti	Pb	Nb	Bi	Pr	U	Cs	Mn	Na	Cu	Al	Ag
$\rho_e (\mu\Omega \cdot \text{cm})$ για $T=295\text{K}$	43,1	21,3	14,5	116	67	25,7	20	139	4,93	1,73	2,73	1,63

για $T=2\text{K}$ $\rho=10^{-3} \mu\Omega \cdot \text{cm}$ εως $10^{-5} \mu\Omega \cdot \text{cm}$ για καθαρò Cu

$\rho=2 \times 10^{23} \mu\Omega \cdot \text{cm}$ για κίτρινο θείο

Τι πήγε στραβά?

Ο τύπος για την ρ_e εξαρτάται από $e, n_e, m_e / \tau$

$$\rho_e = \eta \frac{m_e}{e^2 n_e \tau}, \quad \eta \approx 1$$

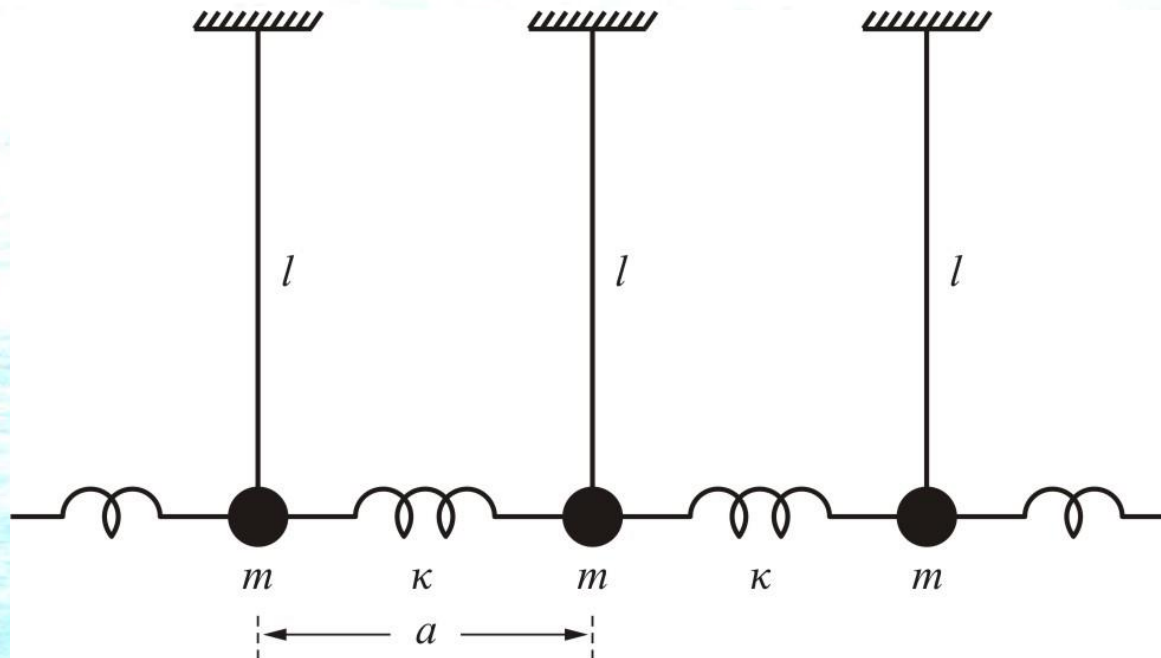
$$\tau = \ell / v_F = \hbar / (2\pi \lambda_t k_B T), \quad 0,1 \leq \lambda_t \leq 0,3$$

$$\rho_e = \frac{m_e v_F}{e^2 n \ell}$$

$$\bar{\rho}_e = \frac{(9\pi/4)^{1/3} (4\pi/3) \bar{r}_e^3}{\bar{r}_e \bar{\ell}} \approx \frac{8 \bar{r}_a^2}{\zeta^{2/3} \bar{\ell}} \approx \frac{70}{\zeta^{2/3} \bar{\ell}}, \quad \bar{r}_e = \bar{r}_a / \zeta^{1/3},$$

$$\bar{\ell} \approx \frac{70}{\bar{\rho}_e \zeta^{2/3}}, \quad \ell = (5-12) \text{Å} \approx (2-5) d; \quad \bar{\rho}_e \approx 3$$

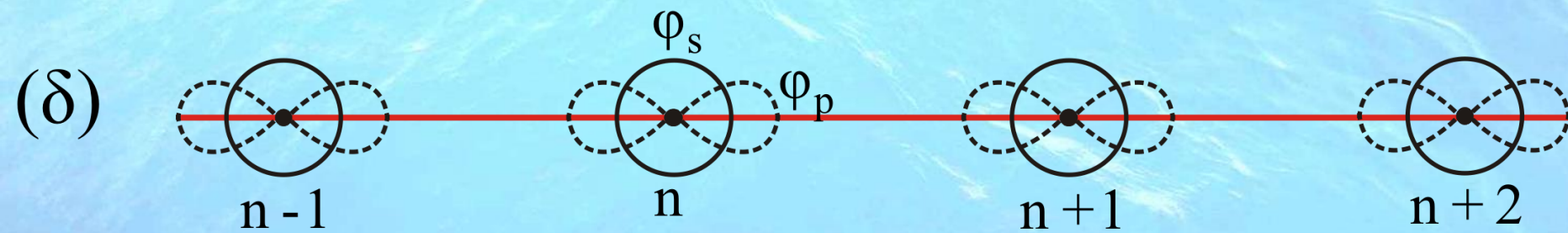
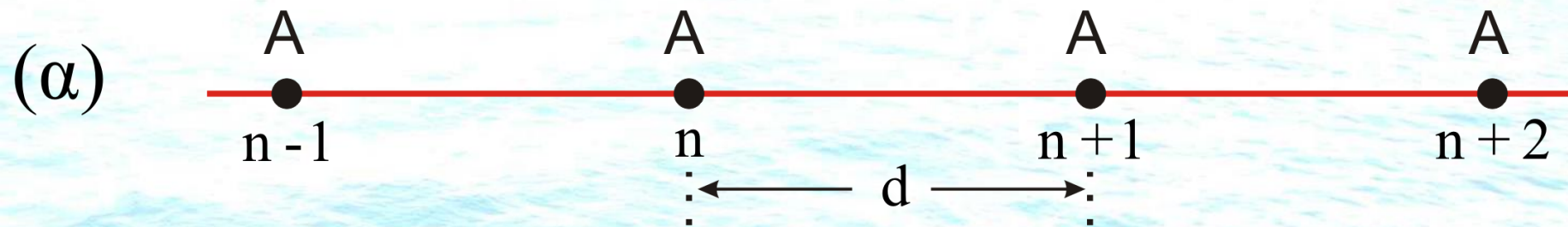
If $\bar{\rho}_e \approx 10^{-6} \Rightarrow \ell \approx 10^7 d \approx 0,5 \text{cm!}$ *Είναι δυνατόν ;*

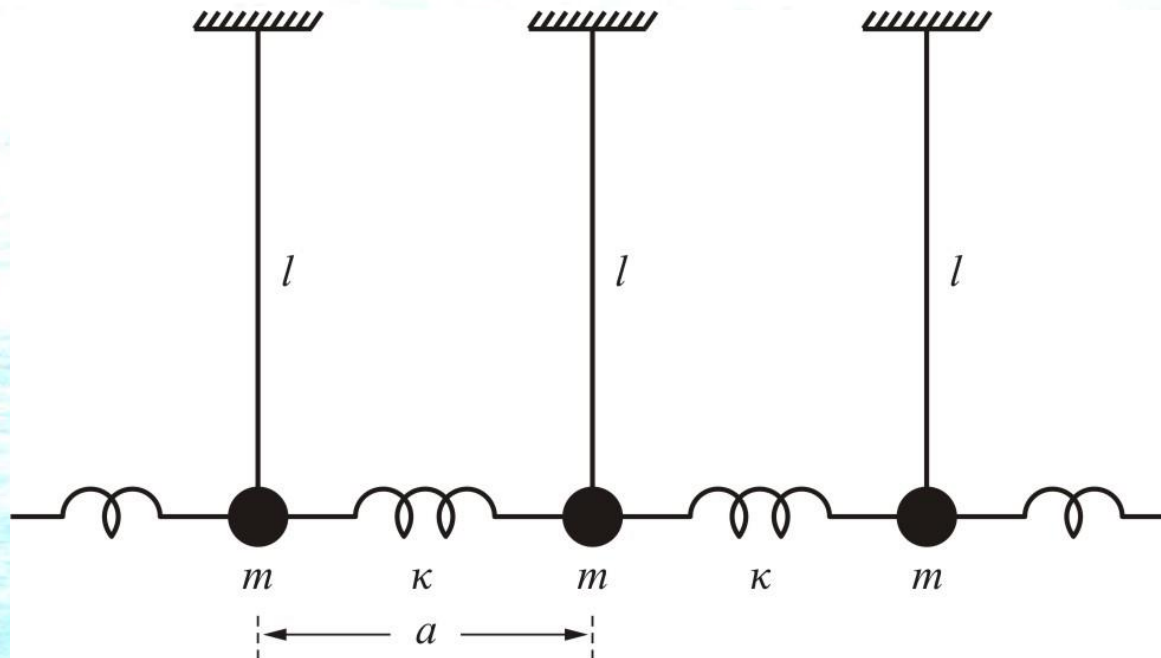


«...Το γεγονός ότι η περιοδικότητα του κρυστάλλου θα ήταν ουσιαστικής σημασίας μου ήλθε στο νου ανακαλώντας στη μνήμη μου μια επίδειξη στο μάθημα της στοιχειώδους φυσικής, όπου πολλά ίδια και ομοίως συζευγμένα εκκρεμή ήσαν αναρτημένα από μια ράβδο σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις και την κίνηση του ενός εκκρεμούς τη βλέπαμε να «μεταναστεύει» κατά μήκος της αλυσίδας από εκκρεμές σε εκκρεμές. Με τέτοιες ασαφείς ιδέες στο νου μου γύρισα στο νοικιασμένο δωμάτιό μου ένα βραδάκι στις αρχές Ιανουαρίου (1928) και έπιασα μολύβι και χαρτί...»

F. Bloch

**ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΟΣΗ & ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ⇒ ΕΠΟΙΚΟΔΟΜΗΤΙΚΗ ΣΥΜΒΟΛΗ
⇒ ΑΝΑΙΡΕΣΗ ΤΗΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ⇒ ΟΙΟΝΕΙ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΔΙΑΔΟΣΗ**





«...Το γεγονός ότι η περιοδικότητα του κρυστάλλου θα ήταν ουσιαστικής σημασίας μου ήλθε στο νου ανακαλώντας στη μνήμη μου μια επίδειξη στο μάθημα της στοιχειώδους φυσικής, όπου πολλά ίδια και ομοίως συζευγμένα εκκρεμή ήσαν αναρτημένα από μια ράβδο σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις και την κίνηση του ενός εκκρεμούς τη βλέπαμε να «μεταναστεύει» κατά μήκος της αλυσίδας από εκκρεμές σε εκκρεμές. Με τέτοιες ασαφείς ιδέες στο νου μου γύρισα στο νοικιασμένο δωμάτιό μου ένα βραδάκι στις αρχές Ιανουαρίου (1928) και έπιασα μολύβι και χαρτί...»

F. Bloch

Πιάστε, λοιπόν, και σεις μολύβι και χαρτί και λύστε –με βάση το νόμο του Νεύτωνα, $F=ma$, το περιοδικό σύστημα των συζευγμένων εκκρεμών του παραπάνω σχήματος

$$\Rightarrow m\omega^2 u_n = (m\omega_o^2 + 2\kappa)u_n - \kappa u_{n-1} - \kappa u_{n+1}$$

$$u_n = \text{Re}\{A \exp(ikx_n - i\omega_k t)\}, \quad x_n = na$$

$$\omega_k^2 = \omega_o^2 + (2\kappa/m)(1 - \cos ka), \quad \omega_o^2 = g/l$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\psi = \sum_n c_n \varphi_n$$

$$\sum_n (H_{mn} - E\delta_{mn})c_n = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

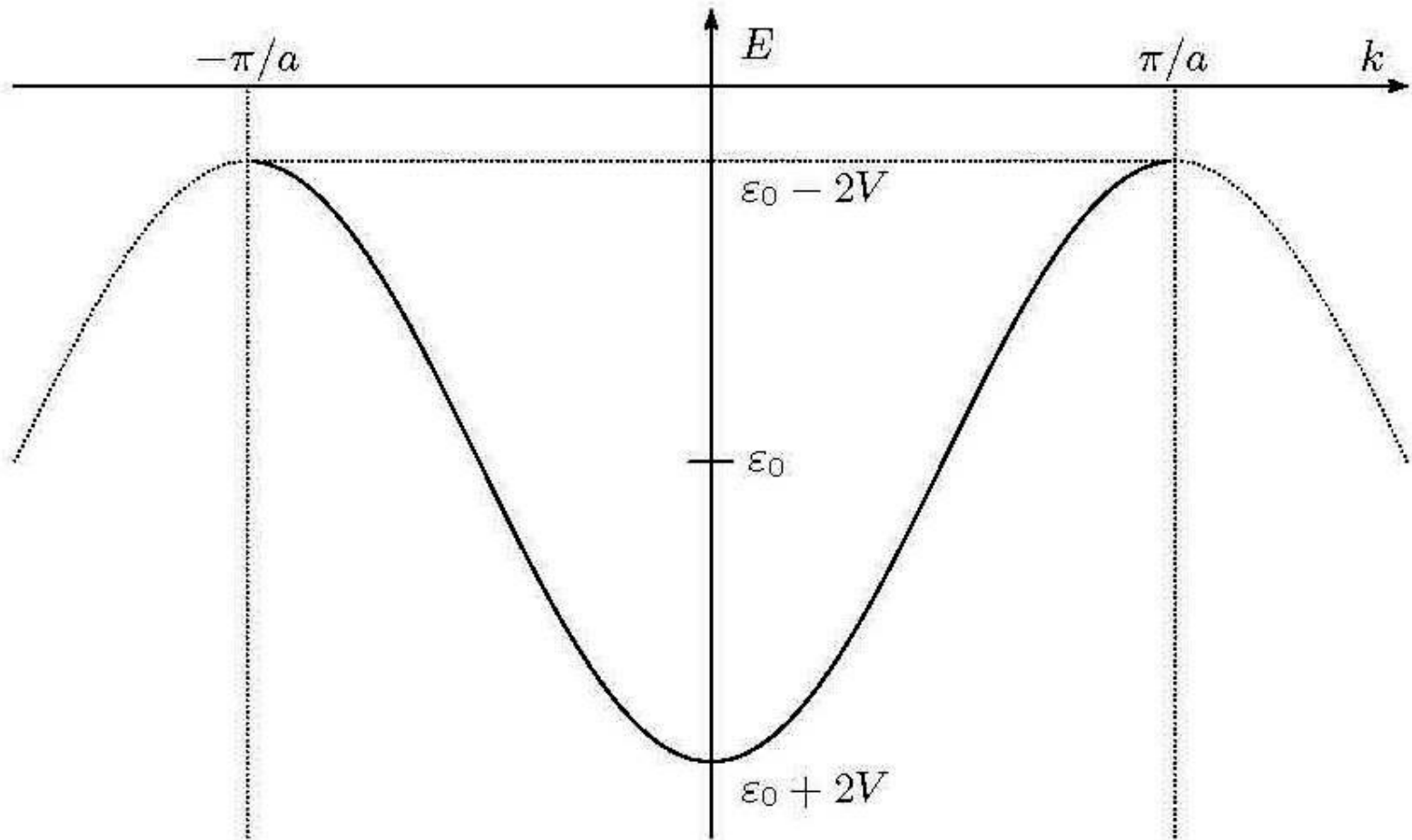
$$H_{mm} = \varepsilon_o, \quad H_{mm\pm 1} = V_2,$$

$$\Rightarrow Ec_n = \varepsilon_o c_n + V_2(c_{n-1} + c_{n+1}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$u_n \quad m\omega^2 \quad m\omega_o^2 + 2\kappa \quad \kappa$$

$$c_n \quad E \quad \varepsilon_o \quad -V_2$$

$$E_k = \varepsilon_0 + 2V_2 \cos ka$$



Μέταλλα

$$\rho \propto \sigma_s \propto |V|^2 \propto |u|^2 \propto E_v \approx 3k_B T$$

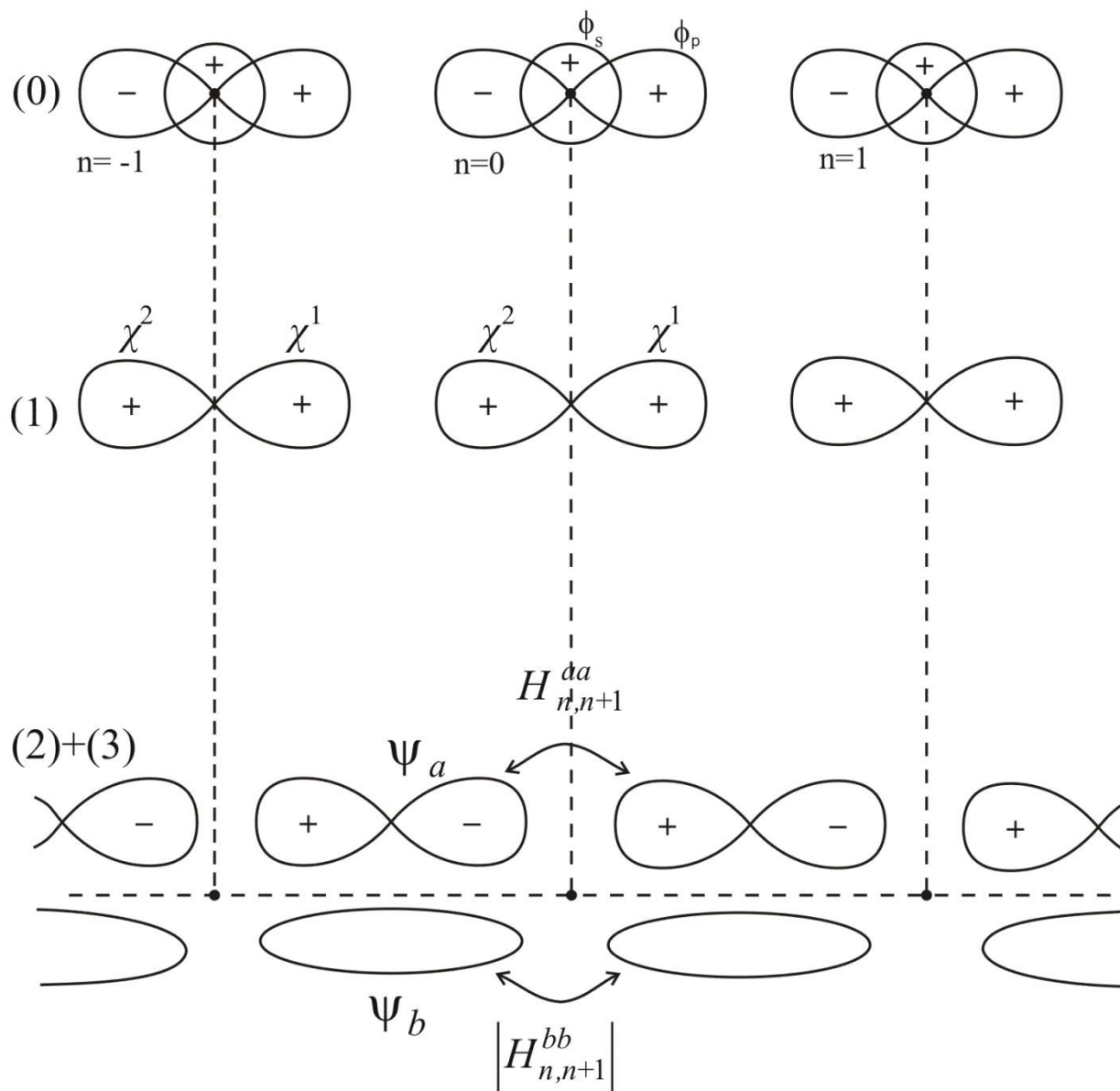
$$\rho = c_1 \rho_o \bar{r}_s \frac{3k_B T}{E'_o} = 3c_1 \rho_o \bar{r}_s^3 \frac{T}{T_o} \approx c_1 1,67 \mu\Omega \cdot \text{cm}$$

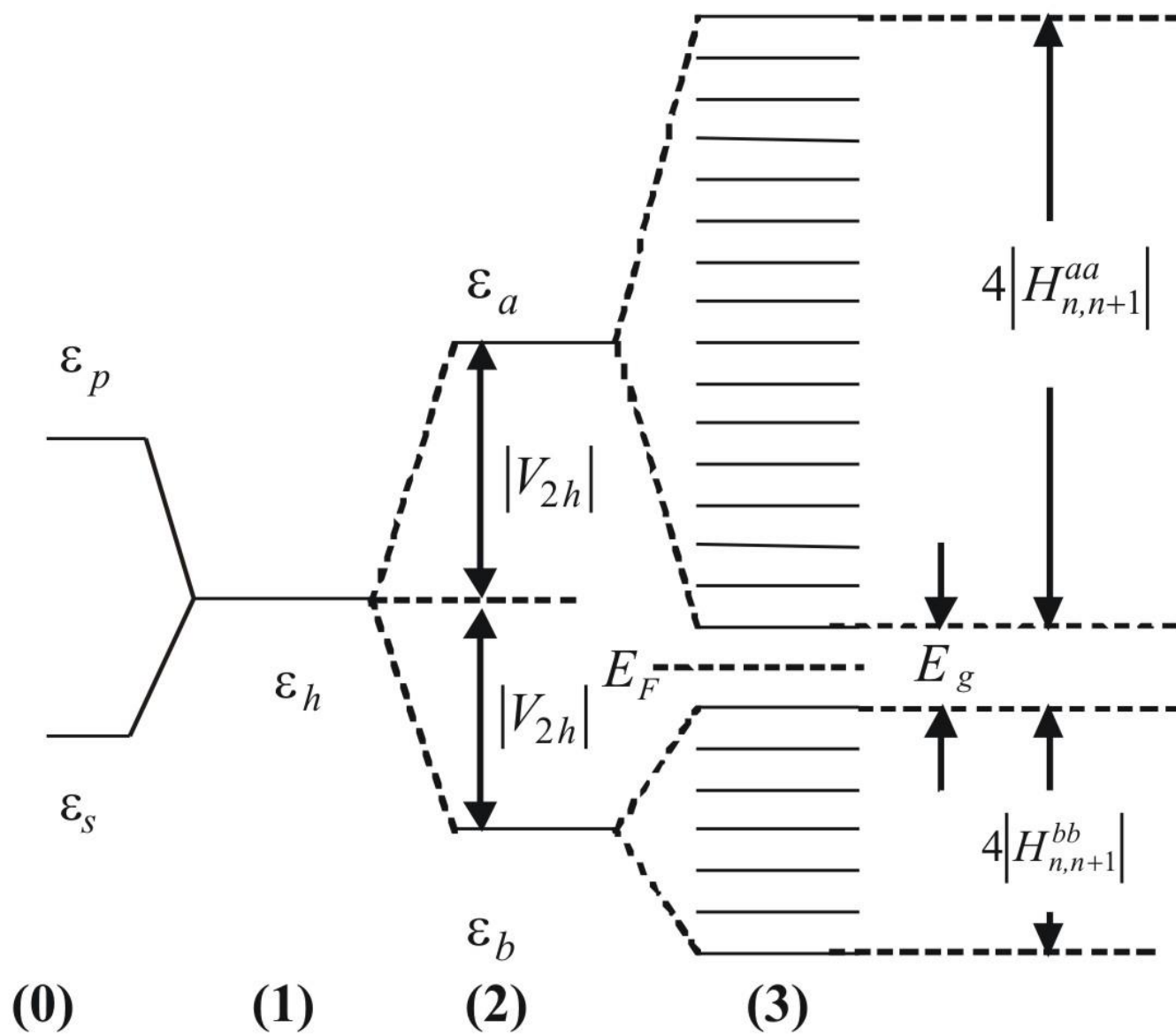
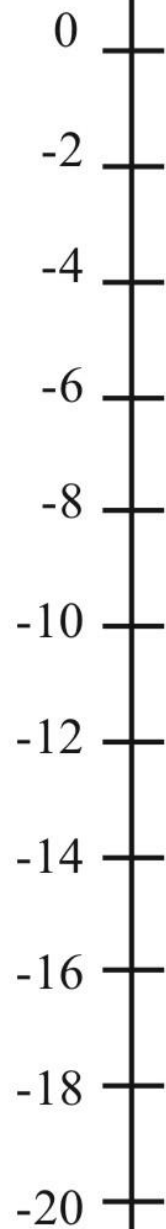
Ημιαγωγοί

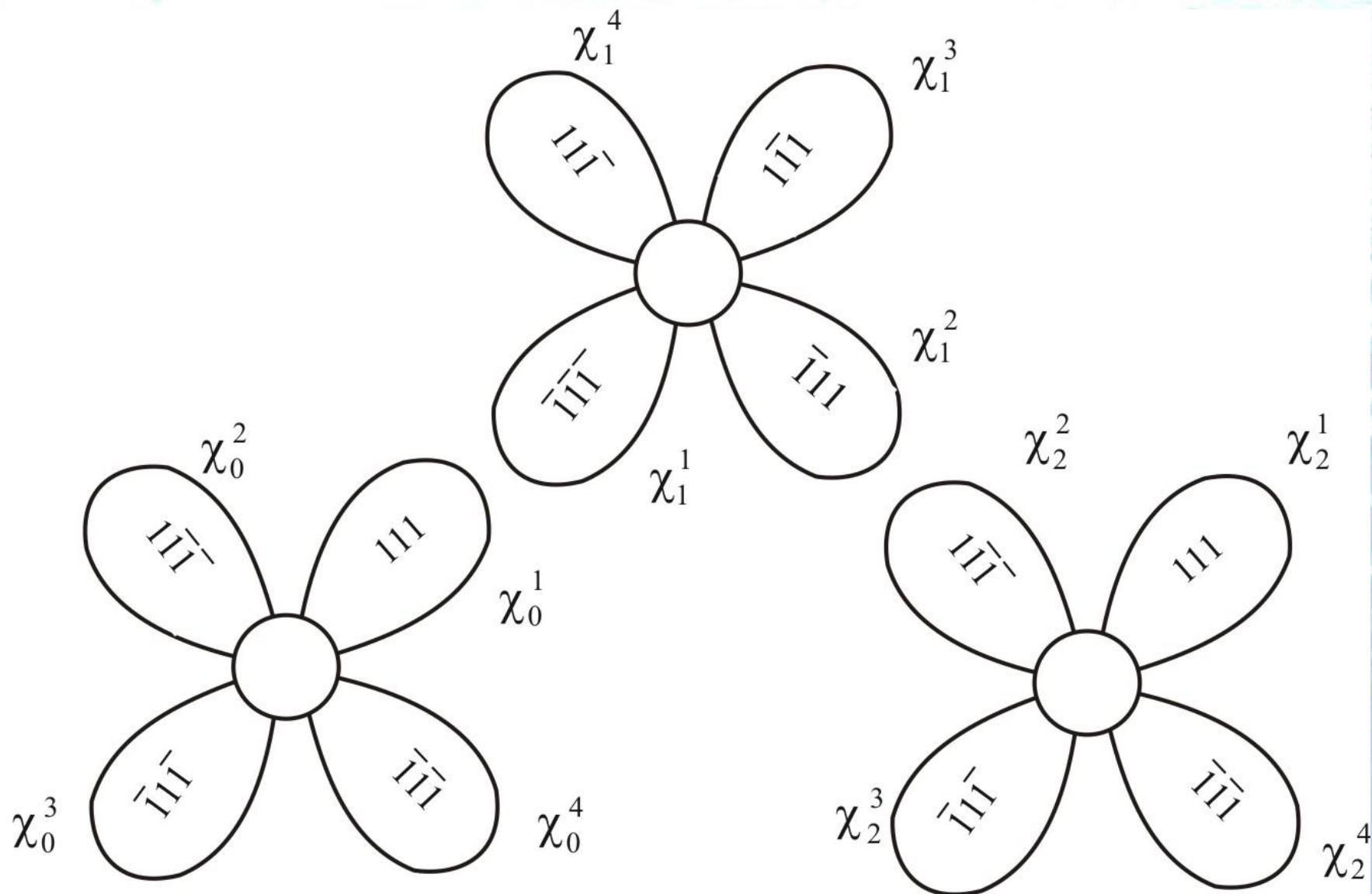
Καταστρεπτική συμβολή $\Rightarrow$ Χάσμα, E_g

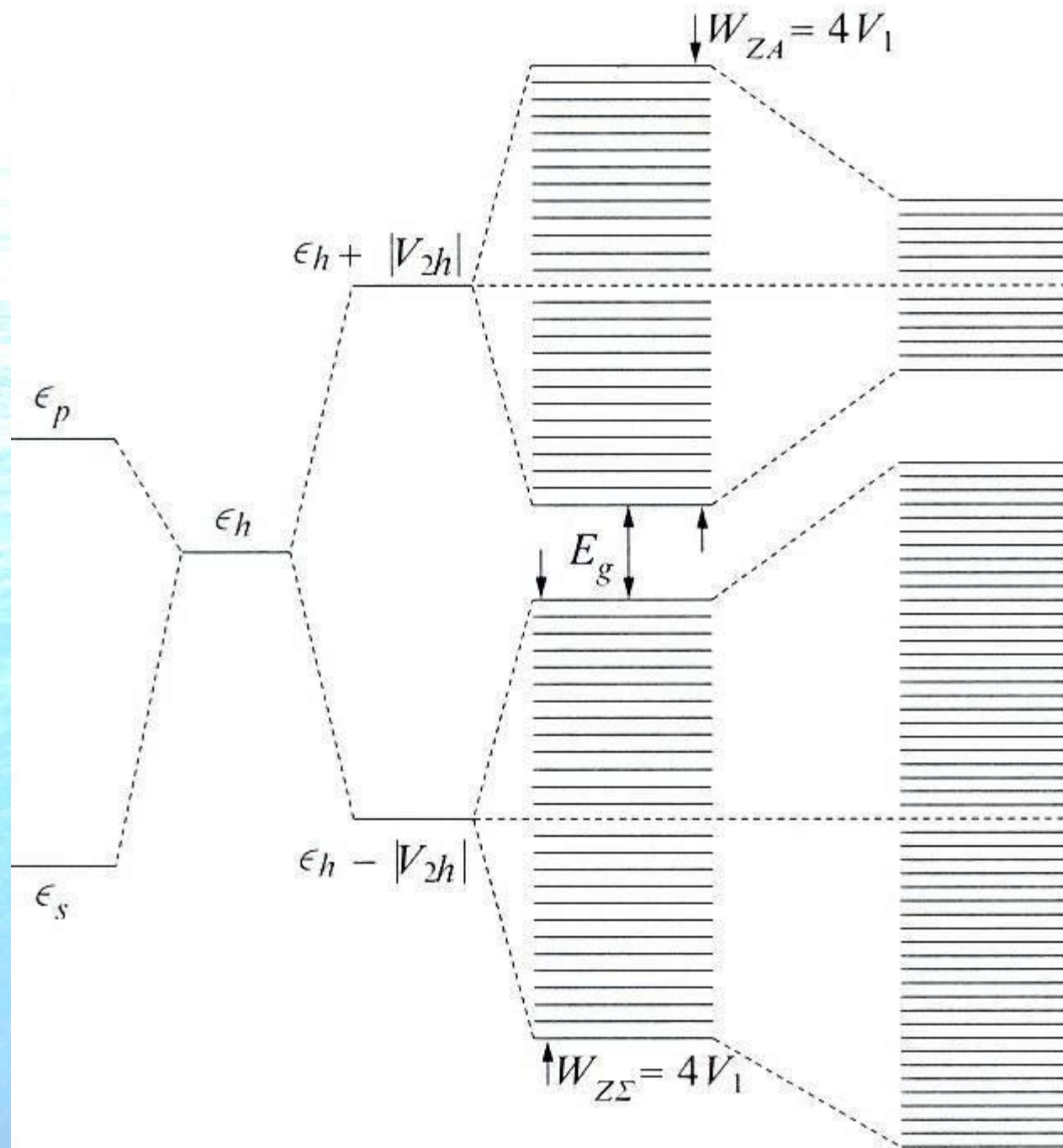
$$\rho \propto n_e^{-1} \propto e^{E_g / 2k_B T}$$

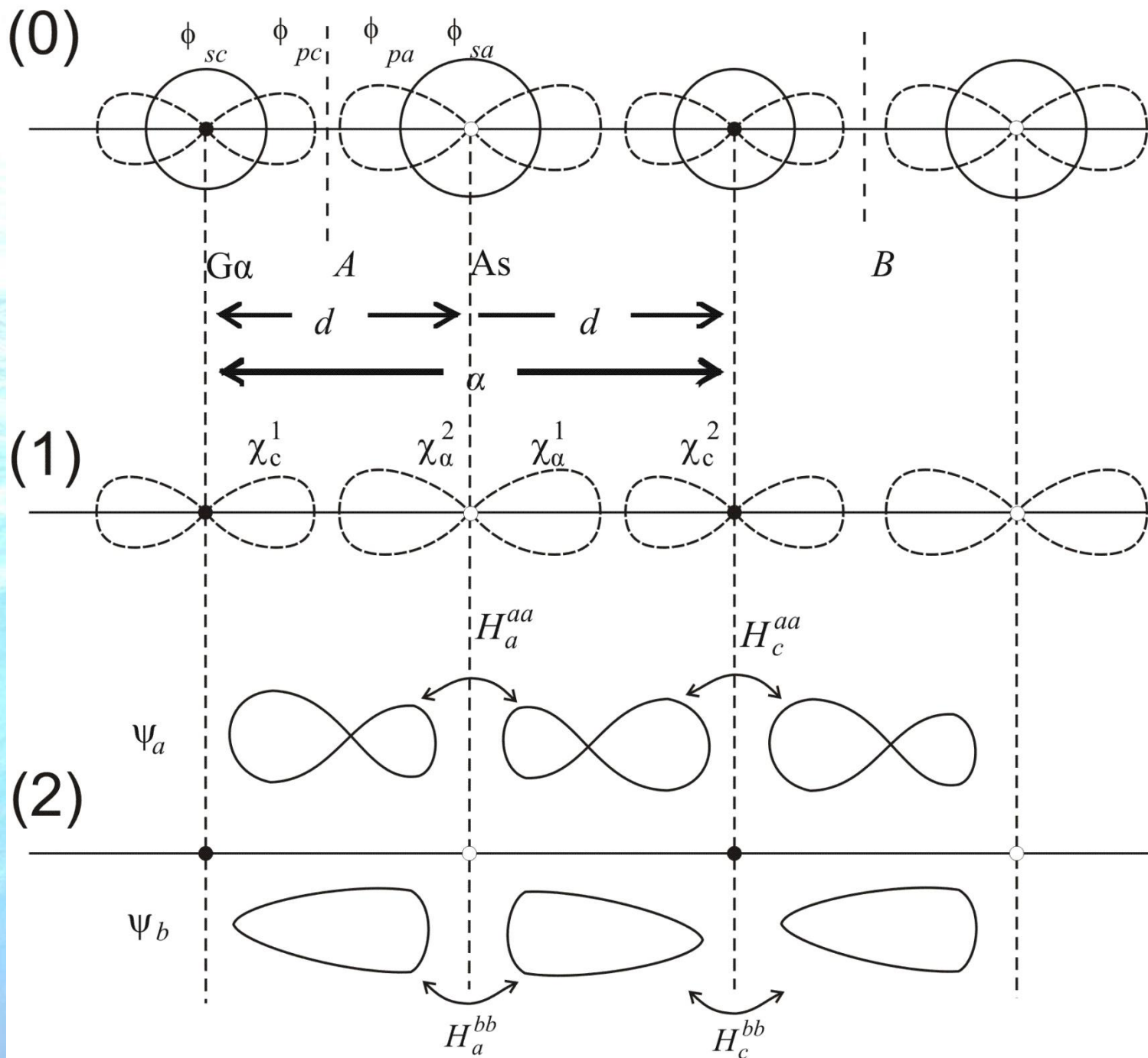
$$E_g \approx 2|V_{2h}| - (\varepsilon_p - \varepsilon_s), \quad V_{2h} = 3,22 \hbar^2 / m_e d^2$$



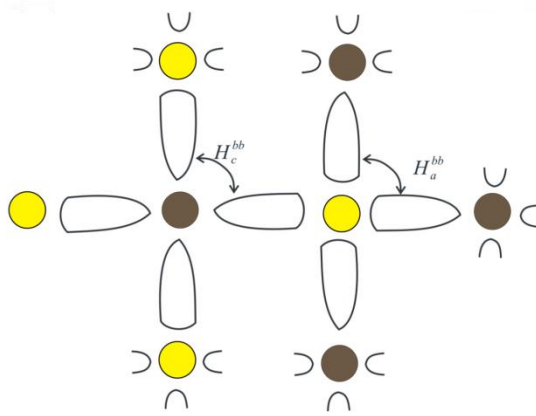




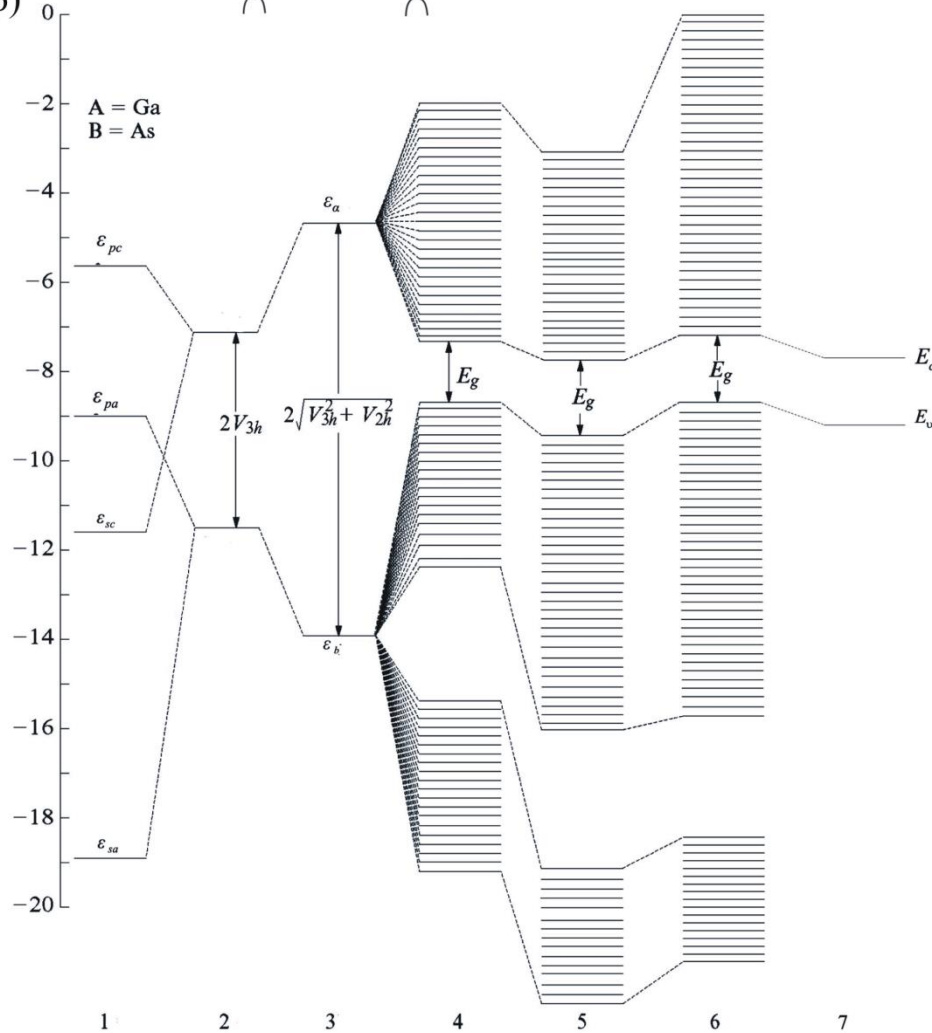




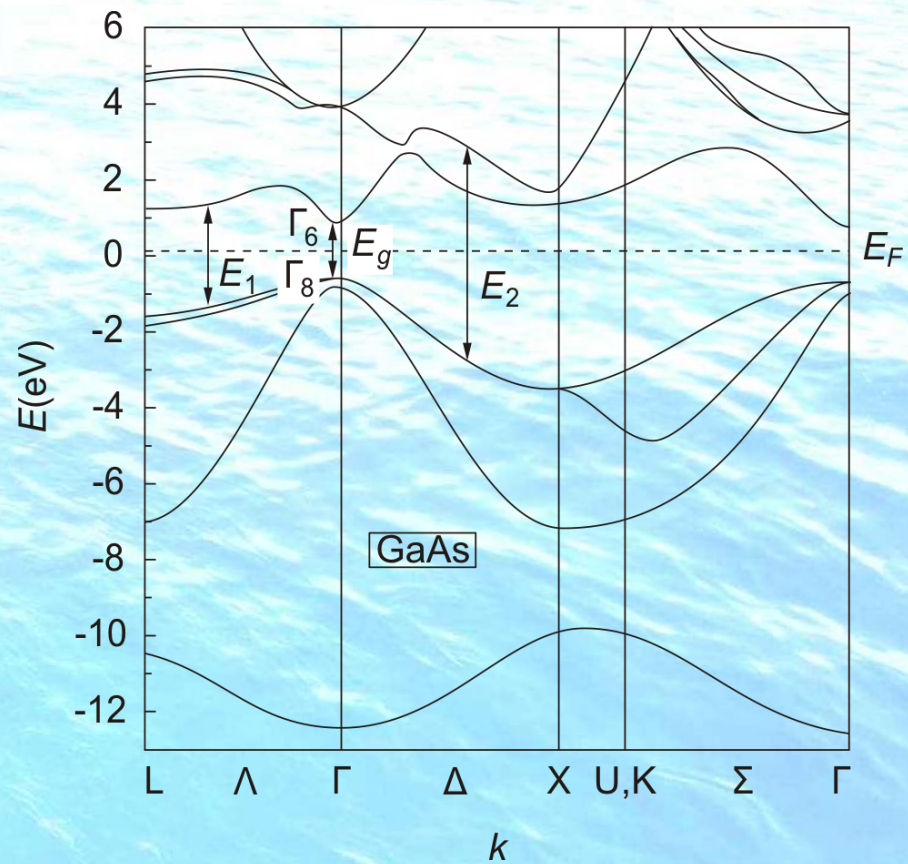
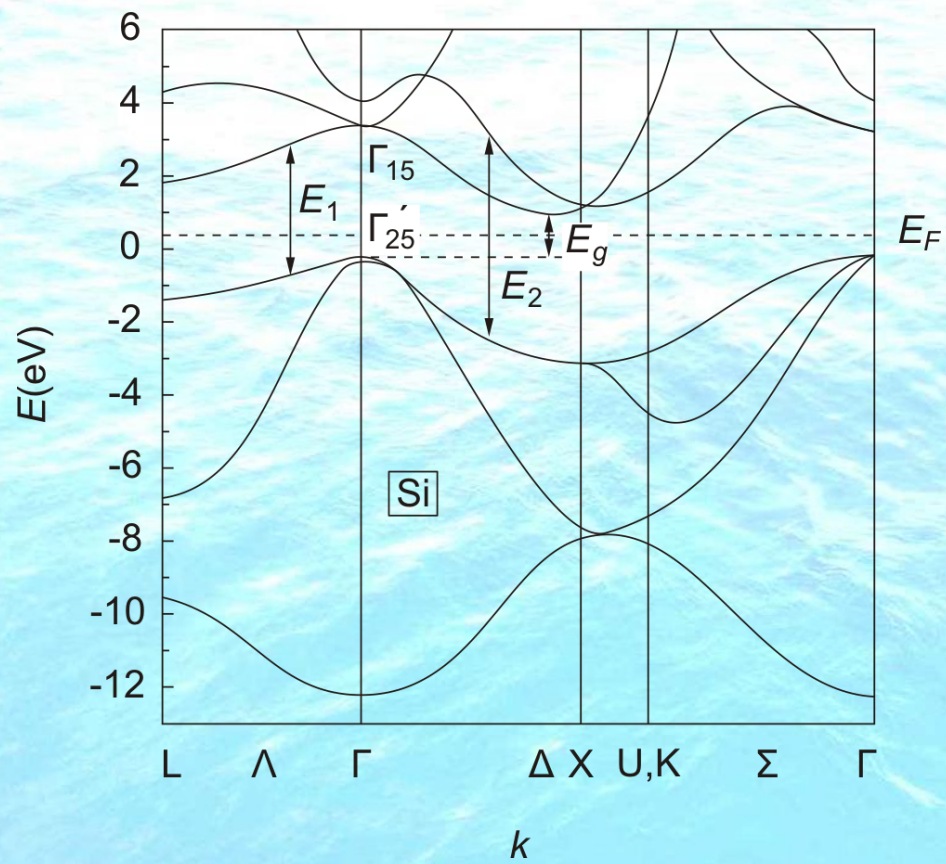
(α)

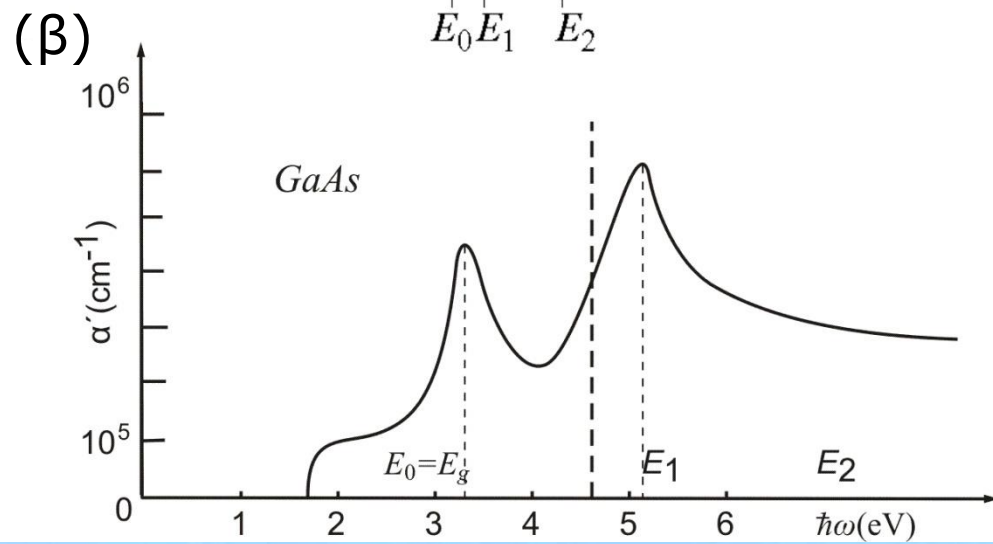
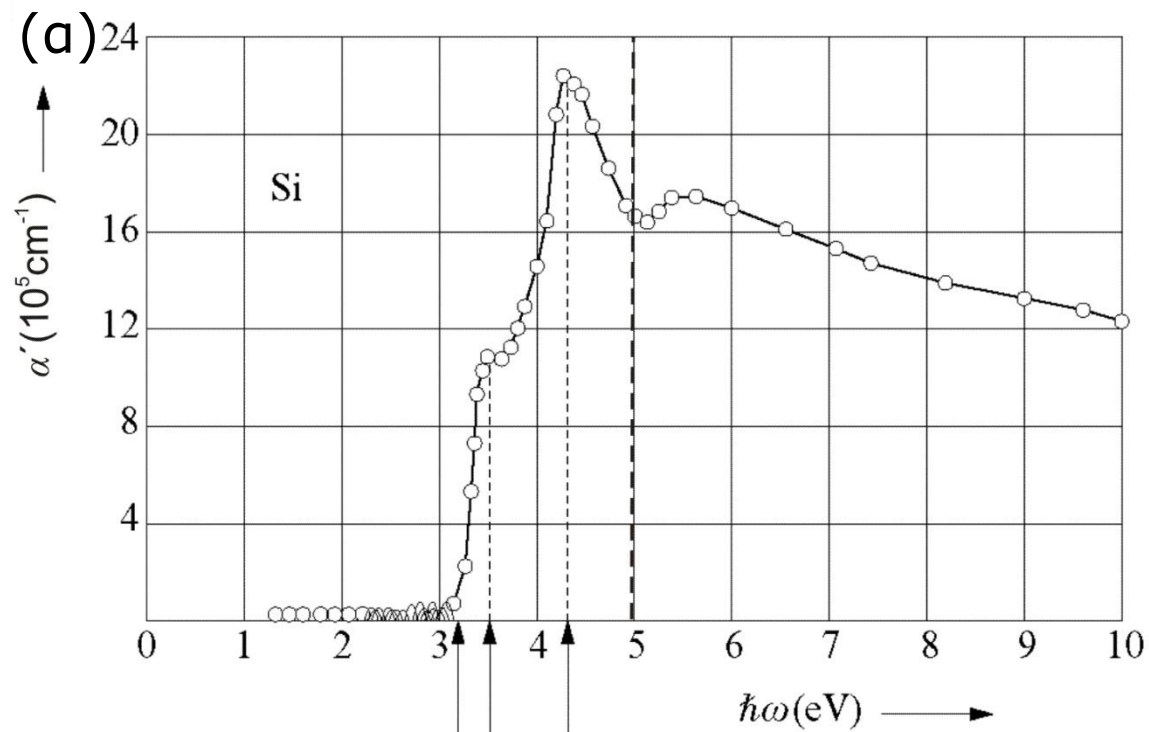


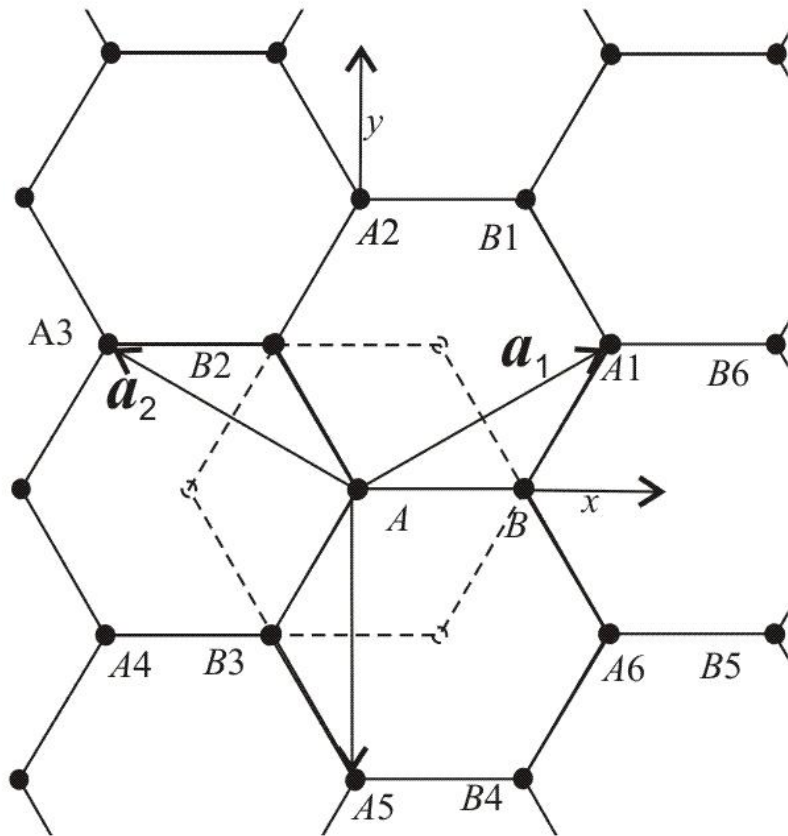
(β)



$$E_g \approx 2\sqrt{V_2^2 + V_3^2} - (\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_s)$$

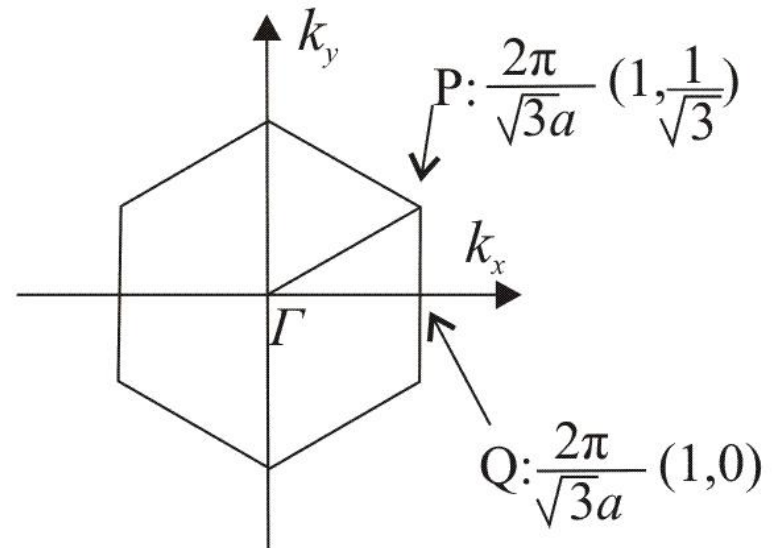






(a)

$$d = 1,42 \text{ \AA}$$



(b)

$$a = \sqrt{3}d = 2,46 \text{ \AA}$$

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{An} \left| p_z \right\rangle_{A_n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{Bn} \left| p_z \right\rangle_{B_n},$$

$$Ec_A = \varepsilon_p c_A + V_2 [c_B + c_{B2} + c_{B3}]$$

$$c_{B2} = c_B \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2)$$

$$c_{B3} = c_B \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1)$$

$$Ec_A = \varepsilon_p c_A + V_2 f c_B \quad (1)$$

$$f = 1 + \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1) + \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2)$$

$$Ec_B = \varepsilon_p c_B + V_2 f^* c_A \quad (2)$$

$$E_{\pm} = \varepsilon_p \pm |V_2 f|$$

$$|f| \simeq \frac{3d}{2} |\delta \mathbf{k}|, \quad \delta \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_p$$

Ειδική Θερμότητα

$$C = C_{ph} + C_e$$

Κλασικά $C_{ph} = 3k_B N_a$, $C_e = \frac{3}{2} k_B N_e$

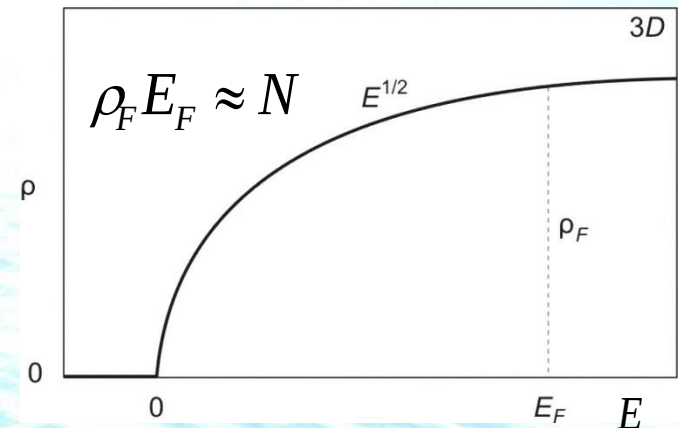
QM: $C_{ph} = 3k_B N'_a$: $N'_a = \int_0^{\eta k_B T} \phi(\omega) d\omega$; $\varepsilon = \hbar\omega, (2c)$

$$C_e = \frac{3}{2} k_B N'_e$$
 : $N'_e \approx 2 \frac{3}{2} k_B T \rho_F$; Pauli (2b)

$$C_e \approx \frac{9}{2} N k_B \frac{T}{T_F}$$

$$k_B T / \hbar \omega_{\max} \rightarrow 0 \quad C_{ph} \rightarrow 0$$

$$\eta k_B T / \hbar \omega_{\max} \geq 1 \quad C_{ph} \approx 3k_B N_a$$



Η ηλεκτροστατική ενέργεια κυριαρχεί:

- Άτομα
- Μόρια
- Στερεά
- **Υγρά**

ΥΓΡΑ Ι

Ταχύτητα θαλάσσιων κυμάτων

$[g, \lambda \text{ (ή το } k = \frac{2\pi}{\lambda}), d, \text{ πυκνότητα?}]$

$$v_g^2 = (g / k) f(kd)$$

$$f(kd) \rightarrow 1, \quad kd \gg 1$$

$$\rightarrow kd, \quad kd \ll 1$$

$$f(kd) = \tanh kd$$

$$v_g^2 \rightarrow v^2 = v_g^2 + v_\sigma^2, \quad v_\sigma^2 = \frac{\sigma k}{\rho}$$

ΥΓΡΑ ΙΙΙ

$$\sigma \approx \frac{\frac{1}{2}(A_{nn} - A'_{nn})\varepsilon}{2 \times \pi r^2}$$

$$r = \bar{r}_w \alpha_B$$

$$\frac{1}{2} A_{nn} \varepsilon \approx 0,45 \text{ eV / molecule}$$

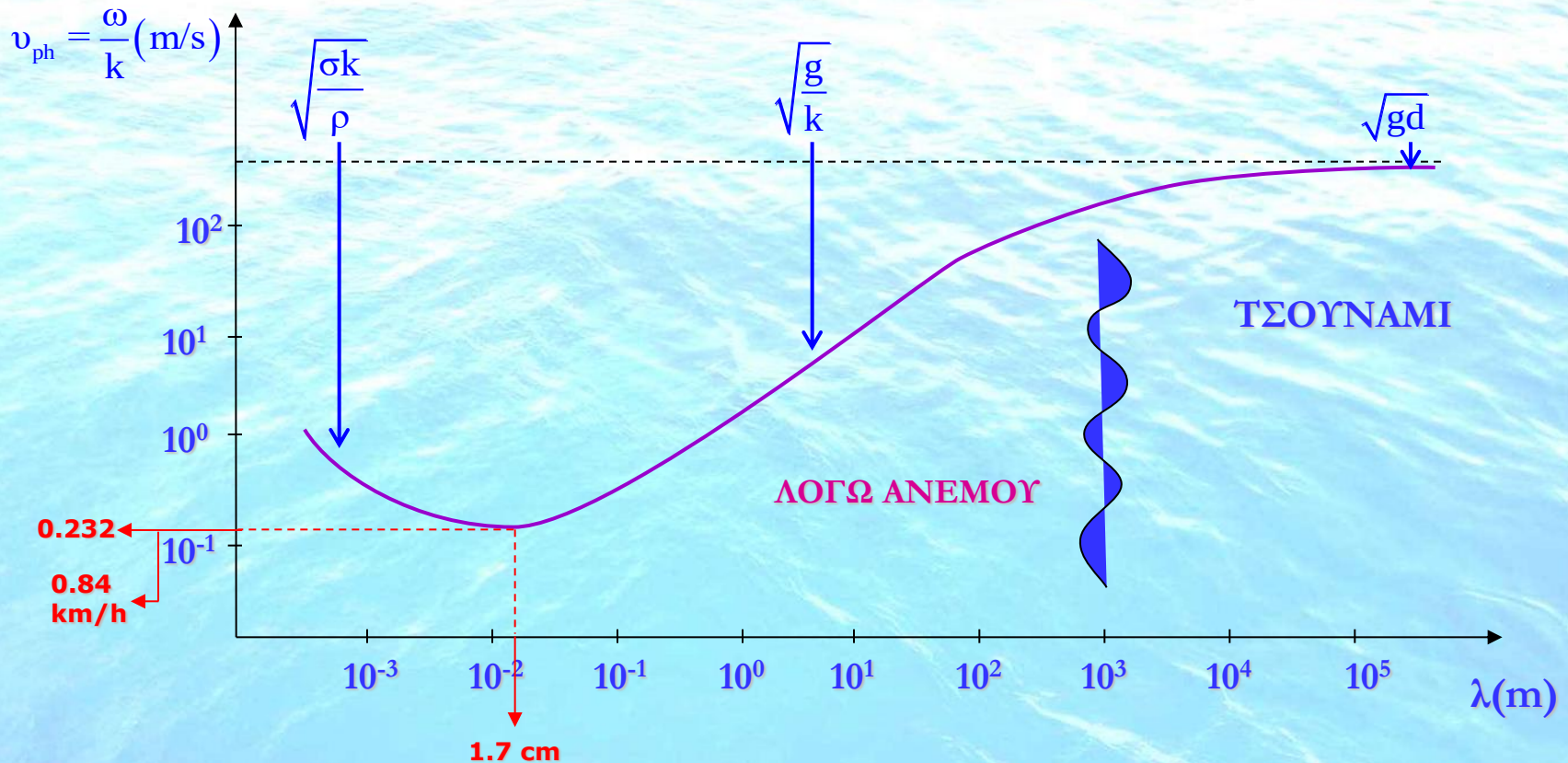
$$A_{nn} \approx 8$$

$$A'_{nn} \approx 5$$

$$\bar{r}_w = 3,64$$

$$\sigma \approx 0,077 \frac{\text{J}}{\text{m}^2} \quad \text{exp: } 0,073 \text{ J/m}^2$$

ΥΓΡΑ ΙΙ



ΡΕΥΣΤΑ Ι

Δύναμη αντίστασης στην κίνηση σώματος

$$[v, \rho_\rho, \eta, S_\sigma]$$

Μεγάλα σώματα, μεγάλες ταχύτητες: $E_{\text{κιν},\sigma} \rightarrow E_{\text{κιν},\rho} \rightarrow \text{θερμότητα}$

$$F_a = c_1 \rho_\rho S_\sigma v^2$$

Μικρό σώμα, μικρές ταχύτητες: Τριβές στο ρευστό λόγω $\frac{\Delta v}{\Delta x}$

$$F_\eta = c_2 \eta v \sqrt{S_\sigma}, \quad c_2 \sqrt{S_\sigma} = 6\pi R$$

Αριθμός του Reynolds: $Re = \frac{F_a}{F_\eta} = \frac{v \sqrt{S_\sigma}}{\eta / \rho_\rho}$

	$\eta (gcm^{-1}s^{-1})$	$\eta / \rho (cm^2s^{-1})$
Νερό	0,01	0,01
Αέρας	0,00018	0,15

ΠΕΥΣΤΑ ΙΙ

$$[\eta] = [\text{Pressure}] \times [\text{time}]$$

$$\eta = c_1 \mu \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = a_s \frac{\hbar}{m_e \alpha_B^2 \bar{r}_s^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_\alpha}} = a_s \frac{97 \times 10^{13}}{\bar{r}_w^2} \sqrt{\frac{1}{18}}; \quad a_s \approx 1$$

$$\omega = a_s 1,72 \times 10^{13} \text{ rad / s}$$

$$\eta = 2\pi \frac{c_1}{a_s} \frac{2,44 \times 10^9 \text{ kg}}{1,72 \times 10^{13} \text{ ms}} = \frac{c_1}{a_s} 0,89 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

$$\text{exp: } 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

1. Εισαγωγή: Τρεις βασικές ιδέες και ένα εργαλείο
2. Φωτόνια: Αγγελιοφόροι και συνδετήρες
3. Δομές της Ύλης:
 - Όπου οι ισχυρές δυνάμεις κυριαρχούν
 - Το βασίλειο της ΗΜ δύναμης
 - Η βαρύτητα στο προσκήνιο**

Βαρύτητα

Τα θερμοδυναμικά μεγέθη είναι είτε εκτατικά (δηλ. ανάλογα του N) είτε εντατικά (δηλ. ανεξάρτητα του N). Αυτή η ιδιότητα προκύπτει από τον βραχείας εμβέλειας-και άρα αθροιστικό-χαρακτήρα των αλληλεπιδράσεων (όπως είναι οι ηλεκτροστατικές, για τοπικά ουδέτερα συστήματα) και της κινητικής ενέργειας.

Αυτή η ιδιότητα **δεν** ισχύει για την βαρυτική αυτοενέργεια E_G :

$$E_G \propto \frac{GM^2}{R} \propto \frac{GN^2}{N^{1/3}} = GN^{5/3}, \quad \text{εάν } R \propto N^{1/3}$$

$$E_K = AN \quad \text{ή} \quad E_c = A' N$$

$$\text{Εάν } E_G + E_c \propto E_K, \quad \text{τότε } N \propto (A'' / G)^{3/2} \quad (1)$$

Ο εκθέτης στη $3/2$ σχέση (1) εμφανίζεται συστηματικά, έστω και αν η σχέση $R \propto N^{1/3}$ δεν ισχύει.

Η βαρύτητα στο προσκήνιο

- **Πλανήτες**
- Ενεργά άστρα
- Νεκρά άστρα: Λευκοί νάνοι
- Νεκρά άστρα : Άστρα νετρονίων
- Νεκρά άστρα : Μαύρες τρύπες
- Σύμπαν

Τυπικός πλανήτης: $E_{\text{βαρυτική}} = E_{\text{ηλεκτρική}}$

$$\gamma \frac{GM^2}{R} \approx \frac{y\gamma'}{\bar{r}_s} N_a \frac{e^2}{a_B}$$

$$\gamma \approx \frac{3}{5}, \quad \gamma' \approx 0,56\zeta^{4/3} + 0,9\zeta^2, \quad \zeta \approx 1, \quad \bar{r}_s \approx 2,69, \quad y \approx 1 \quad A_B \approx 40$$

$$M = N_a A_B m_u = N_v m_u$$

$$\frac{4\pi}{3} R^3 = N_a \frac{4\pi}{3} r_s^3 \Rightarrow R = N_a^{1/3} r_s = (N_v / A_B)^{1/3} \bar{r}_s a_B$$

$$N_v \approx \left(\frac{y}{\gamma} \right)^{3/2} \frac{\gamma'^{3/2}}{A_B^2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_G} \right)^{3/2} \approx_{A \approx 40} 3,33 \times 10^{51}$$

$$R \approx \frac{1,56}{A_B} \left(\frac{\alpha}{\alpha_G} \right)^{1/2} \bar{r}_s a_B \approx_{A \approx 40} 6,21 \times 10^6 \text{ m}$$

$$N_{vE} \approx 3,597 \times 10^{51} \quad R_E \approx 6,371 \times 10^6 \text{ m}$$

Πλανήτες: Μέση θερμοκρασία

$$Q_{\text{in}} = Q_{\text{out}}$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} &= (1-A)(4\pi R_S^2 \sigma T_S^4) (\pi R_P^2 / 4\pi R_{SP}^2) = \\ &= (1-A)(R_S^2 / R_{SP}^2) \sigma T_S^4 \pi R_P^2 \approx (1-A) \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2 \sigma T_S^4 \pi R_P^2 \end{aligned}$$

$$Q_{\text{out}} = 4\pi R_P^2 \sigma T_P^4 = 4\pi R_P^2 \sigma \left(\frac{1}{2} T_{\text{tr}}^4 + \frac{1}{4} T_{\text{c}}^4 + \frac{1}{4} T_{\text{g}}^4\right)$$

$$T_P = (1-A)^{1/4} \sqrt{\frac{\theta}{4}} T_S, \quad \frac{R_S}{R_{SP}} = \tan \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$$

$$A \approx 0,3, \quad \theta = 32' = 0,00931, \quad T_S \approx 5760 \text{ K} \Rightarrow T_E \approx 254 \text{ K}$$

$$T_g \approx 290 \text{ K}, \quad T_c \approx 265 \text{ K}, \quad T_{\text{tr}} \approx 225 \text{ K}$$

- Γιατί η Γη είναι στρογγυλή ;
- Γιατί υπάρχουν βουνά ;
- Πόσο υψηλό μπορεί να είναι ένα βουνό σε βραχώδη πλανήτη ;
 - Κατάρρευση όταν η διατμητική τάση φτάσει την κρίσιμη τιμή

$$\tau \approx \tau_c$$

$$\tau = x \frac{B'}{S}, \quad \tau_c \approx 1.2 \times 10^{-3} \frac{y \hbar^2}{m_e \alpha_B^5 \bar{r}_s^5}$$

$$B' = V \rho g$$

$$V \approx \frac{1}{3} S H$$

$$\rho = \frac{3}{4\pi} \frac{m_\alpha}{\alpha_B^3 \bar{r}_s^3}$$

$$g = GM / R^2$$

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho'$$

$$\bar{r}_s' \approx 2,69, \quad \bar{r}_s \approx 2,89, \quad A_B' \approx 40, \quad A_B \approx 24,25, \quad y/x \approx 1$$

$$\frac{RH}{\alpha_B^2} = 0,015 \frac{y}{x} \frac{\bar{r}_s'^3}{r_s^2} \frac{1}{A_B A_B'} \left(\frac{\alpha}{\alpha_G} \right) \approx 4,52 \times 10^{31}$$

$$RH \approx 1,26 \times 10^{11} \text{ m}^2$$

Πλανήτες

$$R_{\min} \approx 10^6 \text{ m} \quad (R \geq 10H)$$

$$N_{v, \min} \approx 10^{49} \quad \left(N_v \approx \frac{R^3 A_B}{\bar{r}_s^3 \alpha_B^3} \right)$$

$$N_{v, \max} \approx 10^{55} \quad (N_{v, \min, \text{star}} \geq 10^{56})$$

$$R_{\max} \approx 10^8 \text{ m} \quad \left(R \approx \left(\frac{N_v}{A_B} \right)^{1/3} \bar{r}_s \alpha_B \right)$$

Δίας: $N_v = 1,14 \times 10^{54}, \quad (R \approx 7,15 \times 10^7 \text{ m})$

Πλούτωνας: $N_v = 8,9 \times 10^{48}, \quad (R \approx 1,15 \times 10^6 \text{ m})$

$$10^{55} \leq M_{BD} \leq 8,5 \times 10^{55}$$

Η βαρύτητα στο προσκήνιο

- Πλανήτες
- **Ενεργά άστρα**
- Νεκρά άστρα: Λευκοί νάνοι
- Νεκρά άστρα : Άστρα νετρονίων
- Νεκρά άστρα : Μαύρες τρύπες
- Σύμπαν

Ενεργά άστρα

- **ΕΛΑΧΙΣΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΩΝ:**

$$N_{\nu,\min} \approx 0,34 \left(\frac{m_u}{m_e} \right)^{3/4} \left(\frac{\alpha}{\alpha_G} \right)^{3/2} \approx 1 \times 10^{56}, \quad \frac{\alpha}{\alpha_G} = \frac{e^2}{G m_p^2}$$

- **ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΩΝ :**

$$N_{\nu,\max} \approx 100 \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_G} \right)^{3/2} \approx 2,25 \times 10^{59}, \quad \frac{\alpha_s}{\alpha_G} = \frac{\hbar c}{G m_p^2}$$

- **ΑΡΙΘΜΟΣ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΩΝ ΣΤΟΝ ΗΛΙΟ ΜΑΣ:** $1,1932 \times 10^{57}$

$$\frac{\alpha}{\alpha_G} = \frac{e^2}{G m_p^2} = 1,24 \times 10^{36}$$

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_G} = \frac{\hbar c}{G m_p^2} = 1.69 \times 10^{38}$$

ΕΝΕΡΓΑ ΑΣΤΡΑ

M_{min}

$$N_{v,\min} \approx 0,34 \left(\frac{m_u}{m_e} \right)^{3/4} \left(\frac{\alpha}{\alpha_G} \right)^{3/2}$$

$$E_{\text{KIN}} = \frac{1}{2} |E_G|$$

$$|E_G| = \gamma \frac{GM^2}{R}$$

$$E_{\text{KIN}} \approx N_e \sqrt{\left(\frac{3}{5} E_F \right)^2 + \left(\frac{3}{2} v k_B T \right)^2}$$

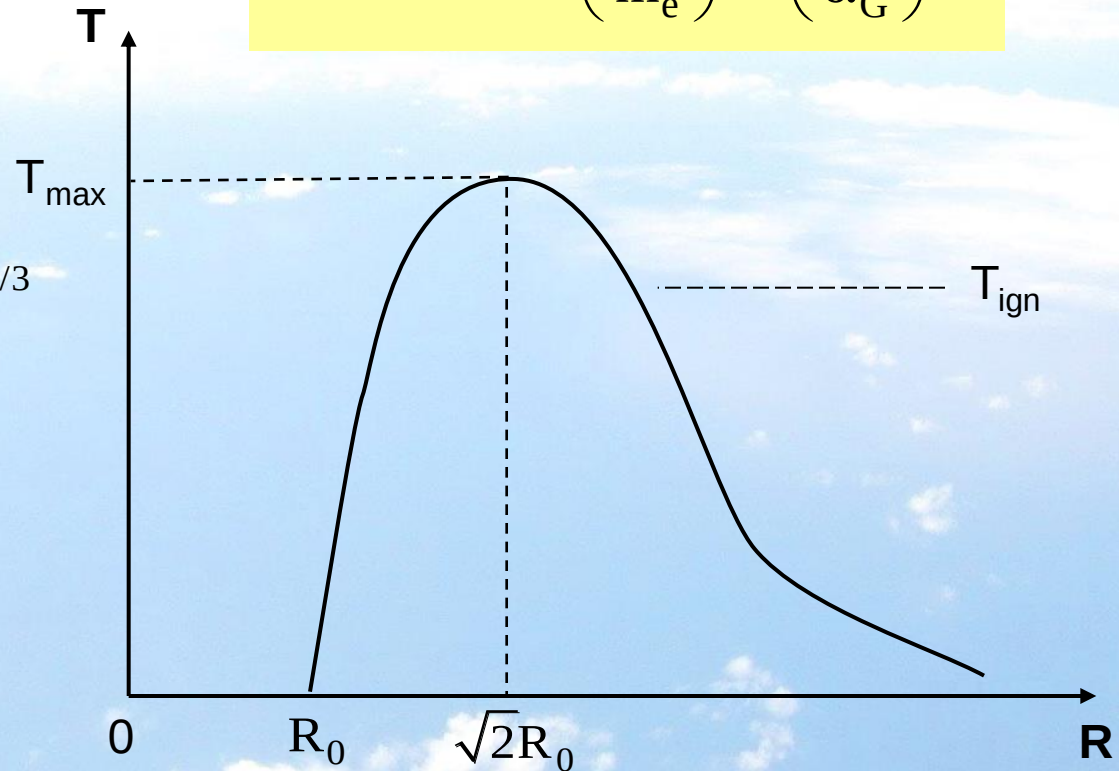
$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(3\pi^2 \frac{N_e}{V} \right)^{2/3}$$

$$v = 1 + \frac{1}{Z}$$

$$T_{\max} = \frac{\gamma^2}{12\alpha_K v} \frac{G^2 m_u^4}{e^2 a_B k_B} \left(\frac{N_v}{N_e} \right)^{8/3} N_v^{4/3}$$

$$T_{\text{ign}} \approx 0,04 \frac{e^4 m_p}{2k_B \hbar^2}$$

$$T_{\max} \approx \Lambda T_{\text{ign}}, \quad \Lambda \geq 1$$



ΕΝΕΡΓΑ ΑΣΤΡΑ

M_{max}

$$\text{Έστω } P_{\text{ph}} = \Lambda P_{\text{kin}} \Rightarrow (k_{\text{B}}T / \hbar c)^3 \propto \Lambda N / V \Rightarrow k_{\text{B}}T / \hbar c \propto \left(\frac{\Lambda N}{V} \right)^{1/3} \quad (1)$$

$$P_{\text{G}} = P_{\text{kin}} + P_{\text{ph}} = (1 + \Lambda)P_{\text{kin}} \Rightarrow \frac{Gm_{\text{u}}^2 N^2}{V^{4/3}} \propto (1 + \Lambda) \frac{Nk_{\text{B}}T}{V} \propto (1 + \Lambda) \frac{N}{V} \frac{\hbar c (\Lambda N)^{1/3}}{V^{1/3}} \quad (2)$$

$$Gm_{\text{u}}^2 N^{2/3} \propto (1 + \Lambda) \Lambda^{1/3} \hbar c \quad \Rightarrow \quad N_{\text{max}} \propto (1 + \Lambda)^{3/2} \Lambda^{1/2} \left(\frac{\hbar c}{Gm_{\text{u}}^2} \right)^{3/2}$$

Η βαρύτητα στο προσκήνιο

- Πλανήτες
- Ενεργά άστρα
- **Νεκρά άστρα: Λευκοί νάνοι**
- **Νεκρά άστρα : Άστρα νετρονίων**
- **Νεκρά άστρα : Μαύρες τρύπες**
- Σύμπαν

Κινητική ενέργεια N όμοιων σωματίων με σπιν $1/2$, μηδενική ολική ορμή και στροφορμή, υπό συνθήκες ομοιογενούς συγκέντρωσης, σε όγκο

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$E_K \geq 2.87 N \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{m V^{2/3}} = 1.105 \frac{\hbar^2}{m} \frac{N^{5/3}}{R^2}, \quad \varepsilon_K = p^2 / 2m$$

$$E_K \geq 2.32 N \frac{\hbar c N^{1/3}}{V^{1/3}} = 1.44 \hbar c \frac{N^{4/3}}{R}, \quad \varepsilon_K = c p$$

Λευκοί νάνοι

$$E_K = a_K N_e^{5/3} \hbar^2 / m_e R^2; \quad E_G = -\gamma G M^2 / R; \quad M = N_v m_v$$

$$\partial E / \partial R = 0 \Rightarrow E_K = \frac{1}{2} |E_G|$$

$$R_{\Lambda N} = \frac{2a_K}{\gamma} \left(\frac{N_e}{N_v} \right)^{5/3} \frac{\hbar^2}{G m_u^2 m_e} \frac{1}{N_v^{1/3}}; \quad \frac{a_K}{\gamma} = \frac{1,105}{0,6} \rightarrow 2,255$$

$$E_K / N_v \sim v^2 \sim N_v^{4/3} \Rightarrow E_K \rightarrow E'_K = a'_K c \hbar N_e^{4/3} / R$$

$$N_{v,cr} = \left(\frac{a'_K}{\gamma} \right)^{3/2} \left(\frac{N_e}{N_v} \right)^2 \left(\frac{c \hbar}{G m_v^2} \right)^{3/2}; \quad \frac{a'_K}{\gamma} \approx \frac{1,44}{0,6} \rightarrow 2.12$$

$$N_{v,cr} = 1,74 \times 10^{57} = 1,458 N_{v,s}, \text{ Chandrasekhar, } N_{v,cr} \approx 1,4 N_{v,s}$$

Αστρο νετρονίων(νετρόνια, πρωτόνια, ηλεκτρόνια)

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad \partial E_{o\lambda} / \partial R = 0 \Rightarrow N_n / N_v = 93.4\% \quad N_p / N_v = 6.6\%$$

$$E_{K o\lambda} = a_K \frac{\hbar^2 (N_n^{5/3} + N_p^{5/3})}{m_n R^2} + \tilde{a}_K \frac{\hbar c N_e^{4/3}}{R}, \quad E_{Kn} = 92.14\%, \quad E_{Ke} = 6.75\%$$

$$\frac{\partial E_{o\lambda}}{\partial R} = 0 \Rightarrow R_{AN} = \frac{2.02 a_K}{\gamma} \frac{\hbar^2}{G m_n^3} \frac{1}{N_v^{1/3}}; \quad \frac{a_K}{\gamma} = \frac{1.105}{0.6} \rightarrow 1.56$$

$$\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\alpha \text{ για } 4U1820 / 30: \frac{M}{M_s} = 1.58, \quad R = 9.1 \text{ km}; \quad \frac{R_{AN}}{R_{AN}} \approx \frac{m_n}{m_e}$$

$$E_K = a'_K c \hbar \left(N_n^{4/3} + N_e^{4/3} + N_p^{4/3} \right) / R$$

$$N_n / N_v = 88.88\% \quad N_e / N_v = N_p / N_v = 11.11\%$$

Άστρο νετρονίων (συνέχεια)

$$E_K = |E_G|$$

⇓

$$N_{cr} = \left(\frac{0,9615a'_K}{\gamma} \right)^{3/2} \left(\frac{c\hbar}{Gm_n^2} \right)^{3/2}$$

$$\simeq 1,84 \left(\frac{c\hbar}{Gm_n^2} \right)^{3/2} = 2,39 N_{ch} = 3,38 N_{vS}$$

$$\acute{\eta}, \quad 10,6 \left(\frac{M_s}{M} \right)^{1/3} = R_{NS} = r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} = 2,954 \frac{M}{M_s} \text{ km}$$

⇓

$$\left(\frac{M}{M_s} \right)'_{cr} = 2,6$$

Μαύρες τρύπες

$$1. \quad r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad \left(\frac{1}{2} mc^2 = \frac{GMm}{r_s} \right)$$

$$2. \quad k_B T = \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar c}{r_s} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}$$

$$3. \quad dU = TdS \Rightarrow \frac{S}{k_B} = \frac{A}{4\ell_P^2}, \quad A = 4\pi r_s^2, \quad \ell_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,62 \times 10^{-35} \text{ m}$$

$$4. \quad dU = c^2 dM = -4\pi r_s^2 \sigma T^4 dt \Rightarrow M^3 = M_0^3 - \frac{\pi^2}{10(8\pi)^3} \frac{\hbar c^4}{G^2} t$$

$$t_0 = 2,665 \times 10^{-24} [M_0 (\text{kg})]^3 \text{ \u0394\tau\eta}$$

Η βαρύτητα στο προσκήνιο

- Πλανήτες
- Ενεργά άστρα
- Νεκρά άστρα: Λευκοί νάνοι
- Νεκρά άστρα : Άστρα νετρονίων
- Νεκρά άστρα : Μαύρες τρύπες
- **Σύμπαν**

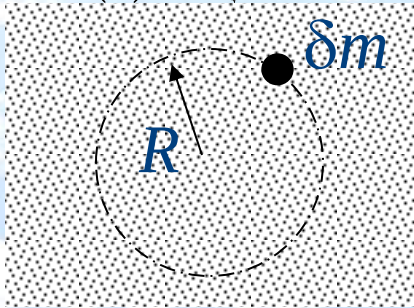
Σύμπαν

- Ομογενές και ισότροπο

- Διαστέλλεται σύμφωνα με τον νόμο του Hubble: $\frac{dR}{dt} \equiv \dot{R} = H(t)R$

- Η σταθερά του Hubble (ανεξάρτητη του R): $H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R}$

- $H(t) \approx \sqrt{G\rho} f(p/\varepsilon)$ διαστατικά; $\varepsilon = \rho c^2$



$$\delta m \ddot{R} = -\frac{GM\delta m}{R^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\delta m \dot{R}^2 = \frac{GM\delta m}{R} - C$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{C'}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\frac{G\varepsilon}{c^2} - \frac{C'}{R^2}$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon$$

$\Rightarrow$ Ευκλείδεια γεωμετρία

(ως αποτέλεσμα του πληθωρισμού)

Σύμπαν (2)

- Ευκλείδεια γεωμετρία ως αποτέλεσμα του πληθωρισμού ↪

$$E_{\text{κιν}} = \frac{3}{10} M \dot{R}^2, \quad E_G = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{κιν}} + E_G = 0$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{cr}} = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \quad (1)$$

- 1^{ος} Νόμος (για $dS=0$): $dU=d(\varepsilon V)=-pdV \Rightarrow d\varepsilon/dR=-(3/R)(\varepsilon+p)$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3p) \quad (2)$$

- Τρεις άγνωστες συναρτήσεις: $R(t)$, $\varepsilon(t)$, $p(t)$

- $\frac{\varepsilon}{c^2} \approx 8,63 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx$ Το ισοδύναμο 5,16 πρωτονίων ανά m^3

- Αυτή η πυκνότητα ισούται με την κρίσιμη με 0,5% αβεβαιότητα

- $\frac{\varepsilon_{\text{nucleons}}}{c^2} \approx \frac{1}{4}$ πρωτονίων ανά m^3 , δηλ. περίπου 4,83% του ε

- $\frac{\varepsilon_{\text{ph}}}{c^2} \approx 0,005\%$ of ε

- $\frac{\varepsilon_{\nu}}{c^2} \leq 1\%$ of ε

Το υπόλοιπο ;

- Σκοτεινή ύλη $(\approx 25,845 \pm 0,37)\%$

- Σκοτεινή ενέργεια $(\approx 69,2 \pm 1,0)\%$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{nucleons}} + \varepsilon_{\nu} + \varepsilon_{\text{ph}} + \varepsilon_{\text{dm}} + \varepsilon_{\text{de}}$$

$$P = P_{\text{nucleons}} + P_{\nu} + P_{\text{ph}} + P_{\text{dm}} + P_{\text{de}}$$

$$P_{\text{de}} \approx \varepsilon_{\text{de}} w; \quad -1,03 \leq w \leq -0,952$$

$$\epsilon_{\text{nucleons}} = \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{R^3} \approx \frac{N_{\text{nucleons}}}{V} m_p c^2 ;$$

$$\epsilon_{\text{ph}} = \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{R^4} : \epsilon \propto T_{\text{ph}}^4, \quad S \propto R^3 T_{\text{ph}}^3 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\epsilon_v \propto \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{R^3} \quad \text{if} \quad T < 10^{10} \text{ K}$$

$$\epsilon_{\text{DM}} \propto \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{R^3}$$

$$\epsilon_{\text{DE}} \approx (c^2 / 8\pi G) \Lambda, \quad \Lambda = H \text{ κοσμολογική σταθερά του Einstein}$$

Κοσμικές Εποχές

1. Πληθωρισμός,
2. Μεταβατική περίοδος, $10^{-33} \text{ s} < t < 10^{-30} \text{ s}$
3. Φωτοκρατία, $10^{-14} \text{ s} < t < 10 \text{ ky}$
4. Υλοκρατία, $800 \text{ ky} < t < 3 \text{ Gy}$
5. Κυριαρχία της σκοτεινής ενέργειας, $30 \text{ Gy} < t$

Φωτοκρατία

$$\frac{\dot{R}}{R} \propto \frac{1}{R^2} \Rightarrow R\dot{R} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow R = At^{1/2}, \quad A \approx 8,43 \times 10^{16} m \cdot s^{-1/2}$$

$$T = C / R, \quad C \approx 1,186 \times 10^{27} K \cdot m, \quad \varepsilon \propto t^{-2}$$

Από τη φωτοκρατία στην υλοκρατία

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \left[\frac{a_{ph}}{R^4} + \frac{a_m}{R^3} \right]; \quad (2b^{1/2}a_{ph}^{1/2})^{1/2} = A; \quad a_m = ;$$

$$t = \frac{2a_{ph}^{3/2}}{b^{1/2}a_m^2} \left[\frac{1}{3}(1+a_o R)^{3/2} - (1+a_o R)^{1/2} + \frac{2}{3} \right], \quad b = \frac{8\pi G}{3c^2}, \quad a_o = \frac{a_m}{a_{ph}}$$

$$t = 191,21 \left[\frac{1}{3}(1+0,96581R)^{3/2} - (1+0,96581R)^{1/2} + \frac{2}{3} \right] \quad (1)$$

↑
σε ky

↑
σε $10^{23}m$

↑
σε $10^{23}m$

$$t \rightarrow 0, \quad R = (2b^{1/2}a_{ph}^{1/2}t)^{1/2} \quad t \gg 380ky, \quad R = \left(\frac{3}{2}b^{1/2}a_m^{1/2}t \right)^{2/3}$$

Από την υλοκρατία στη σκοτεινή ενέργεια

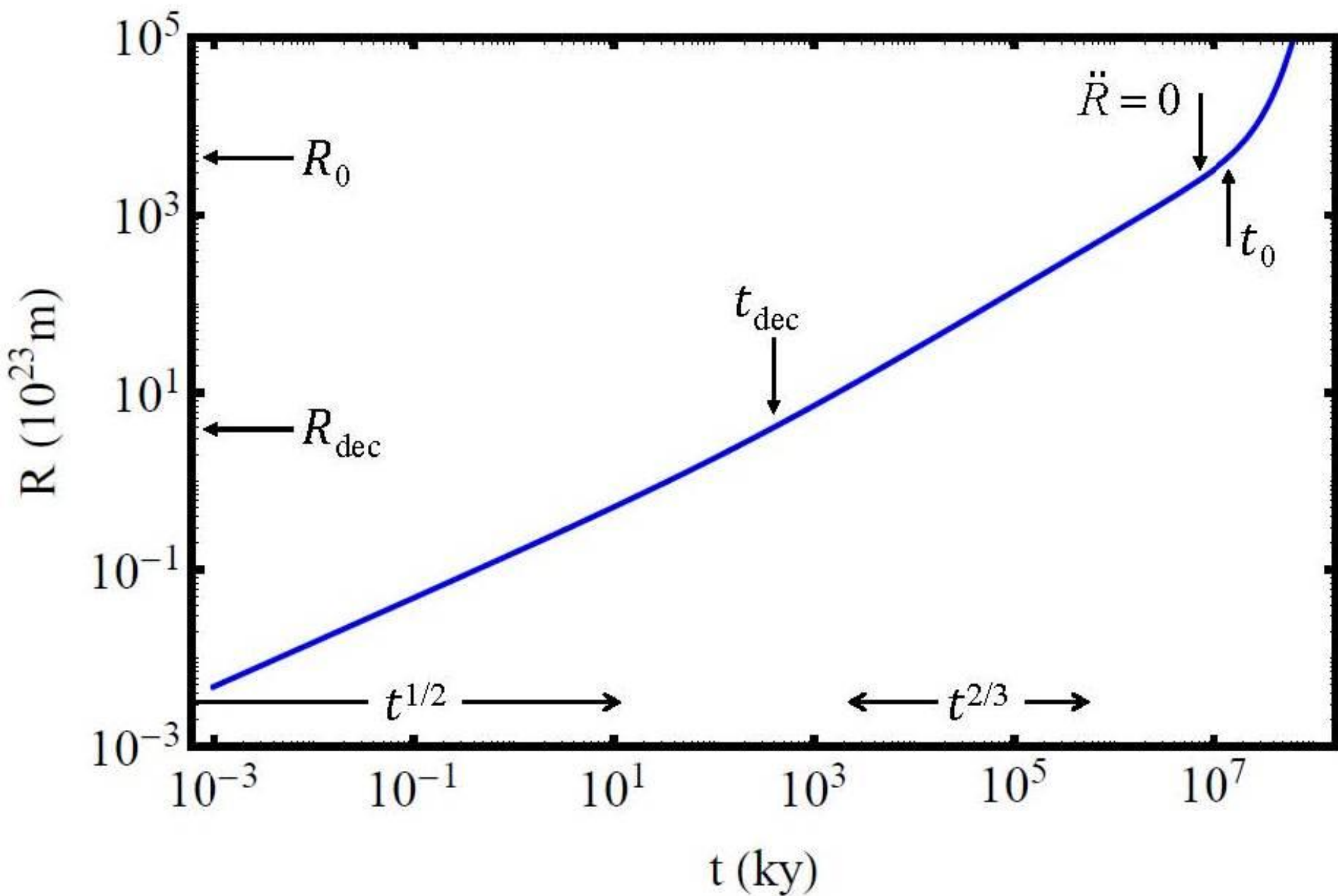
$$\dot{R} = \left[\frac{c_1}{R} + c_2 R^2 \right]^{1/2}, \quad c_1 / c_2 = (30,711 / 69,14) R_o^3, \quad H_o = \sqrt{c_2 / 0,6914}$$

$$R(t) \approx \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{1/3} \left[\sinh\left(\frac{3}{2} \sqrt{c_2} t\right) \right]^{2/3}$$

$$R(t) \approx 0,763 R_{\text{Σήμερα}} \left[\sinh(0,086446 t) \right]^{2/3}, \quad t \text{ σε Gy} \quad (2)$$

$$\ddot{R} = 0 \quad \text{για} \quad t \approx 7,62 \text{ Gy} \quad [t \approx 7,83 \text{ Gy}]$$

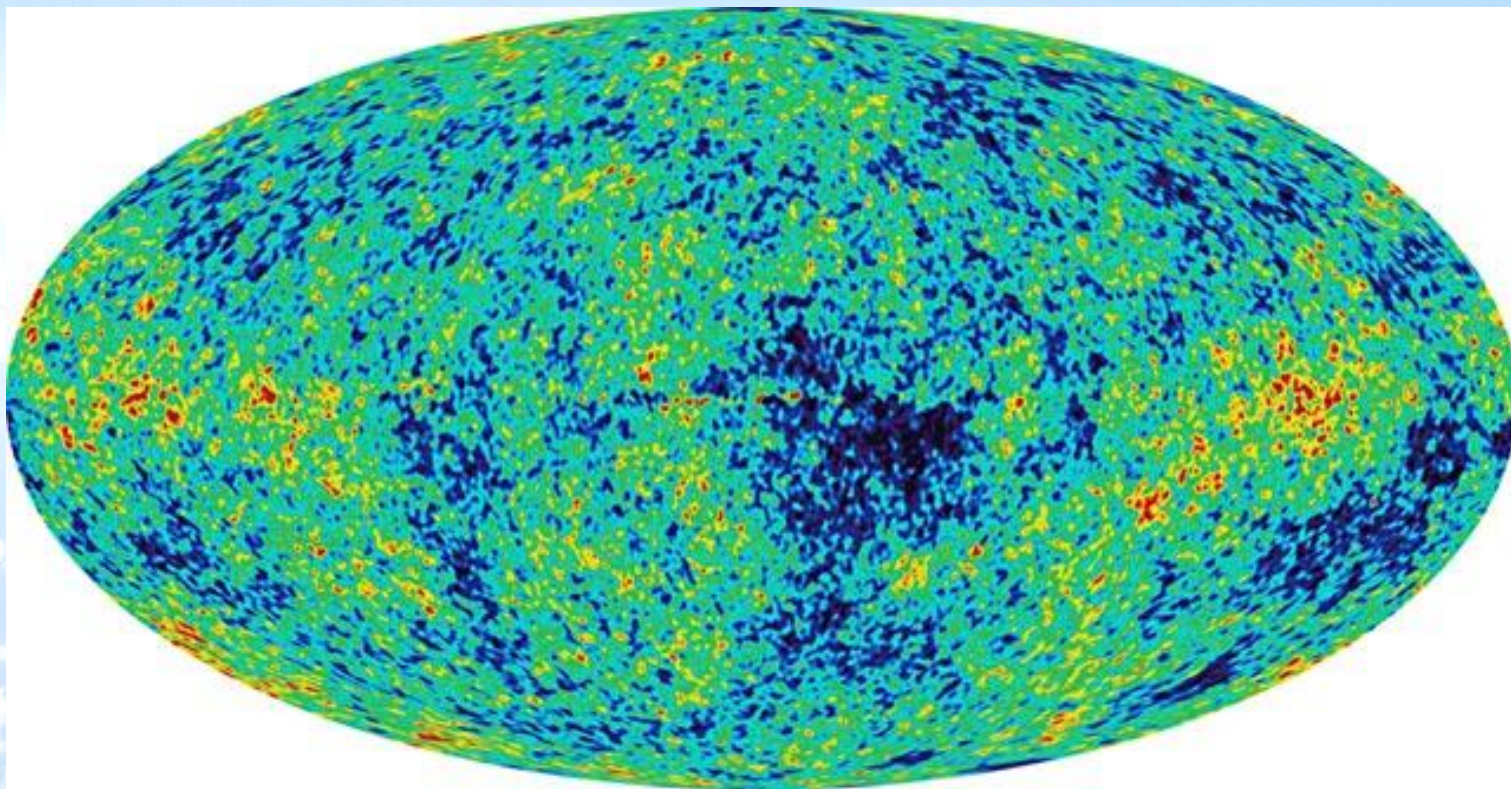
$$\frac{R(t = 380 \text{ ky})}{R_{\Sigma}} \approx \frac{1}{1108} \left[\approx \frac{1}{1090} \right] \quad \text{από την (1)}$$



- Το αρχέγονο Σύμπαν δονούσαν ακουστικά κύματα μιας βασικής συχνότητας και των αρμονικών της
- Αποτέλεσαν το σπέρμα των μελλοντικών γαλαξιών
- Αυτή η κοσμική «μουσική» πρέπει να έχει αποτυπωθεί στα αρχέγονα φωτόνια (δηλ. στην κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου)
- Βρίσκεται πράγματι εκεί ;
- Μπορούμε να την ‘ακούσουμε’ ;

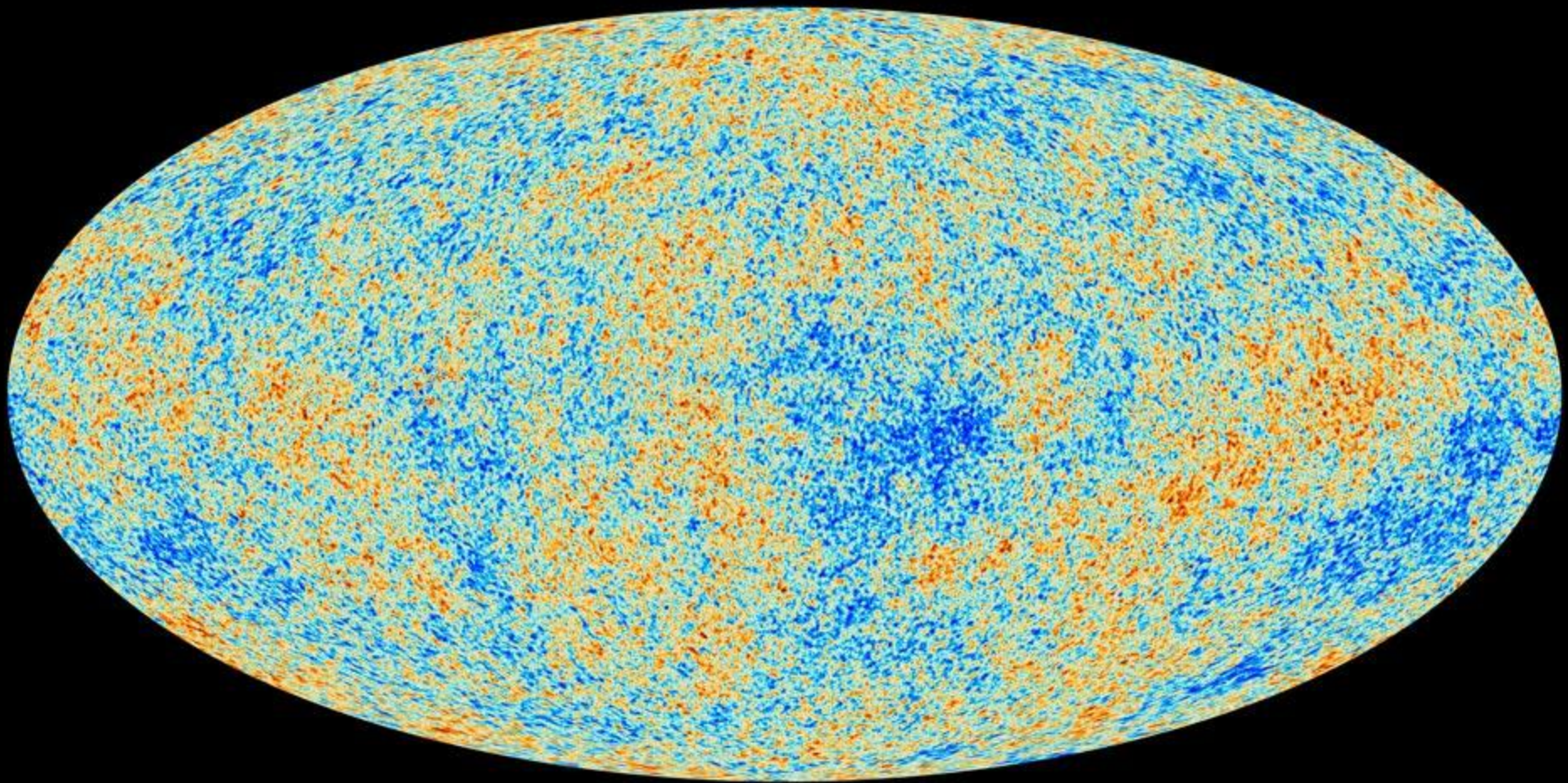
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΑΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

WMAP Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

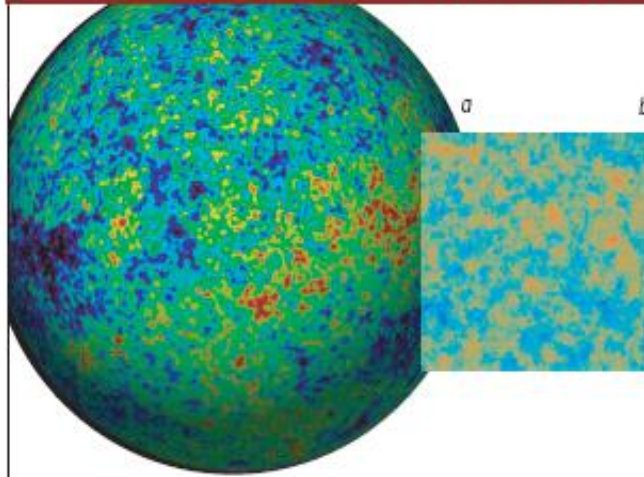


Παρατηρησιακά δεδομένα του Planck

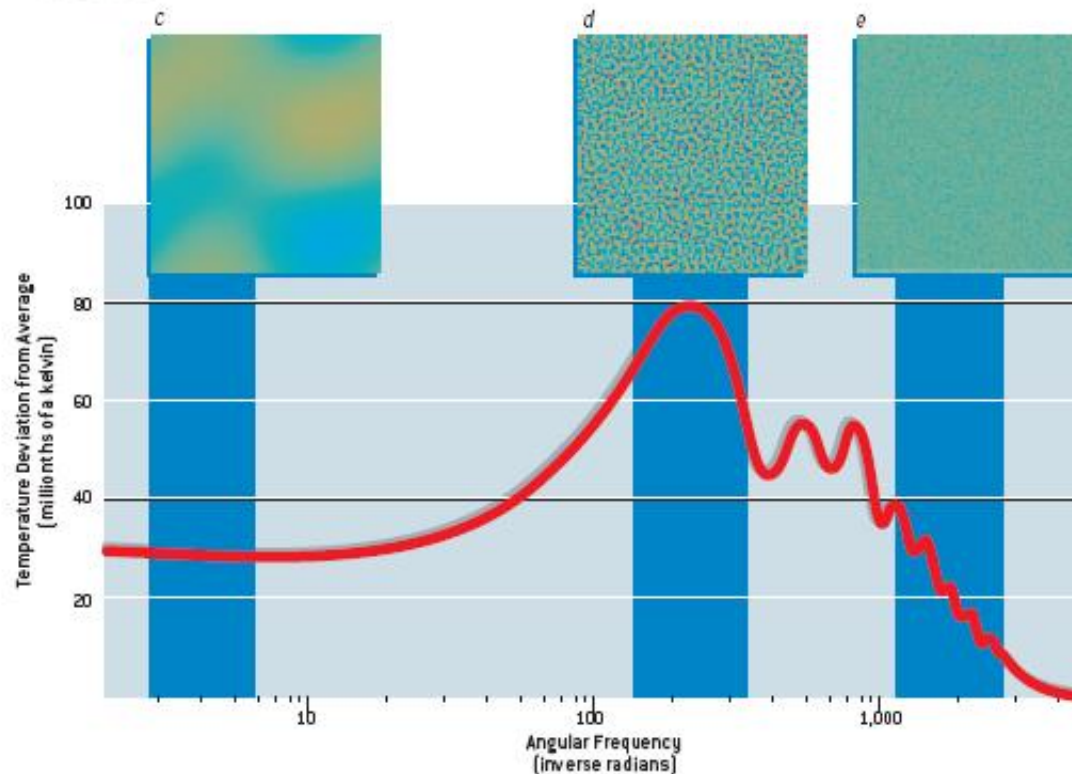
25/3/2013



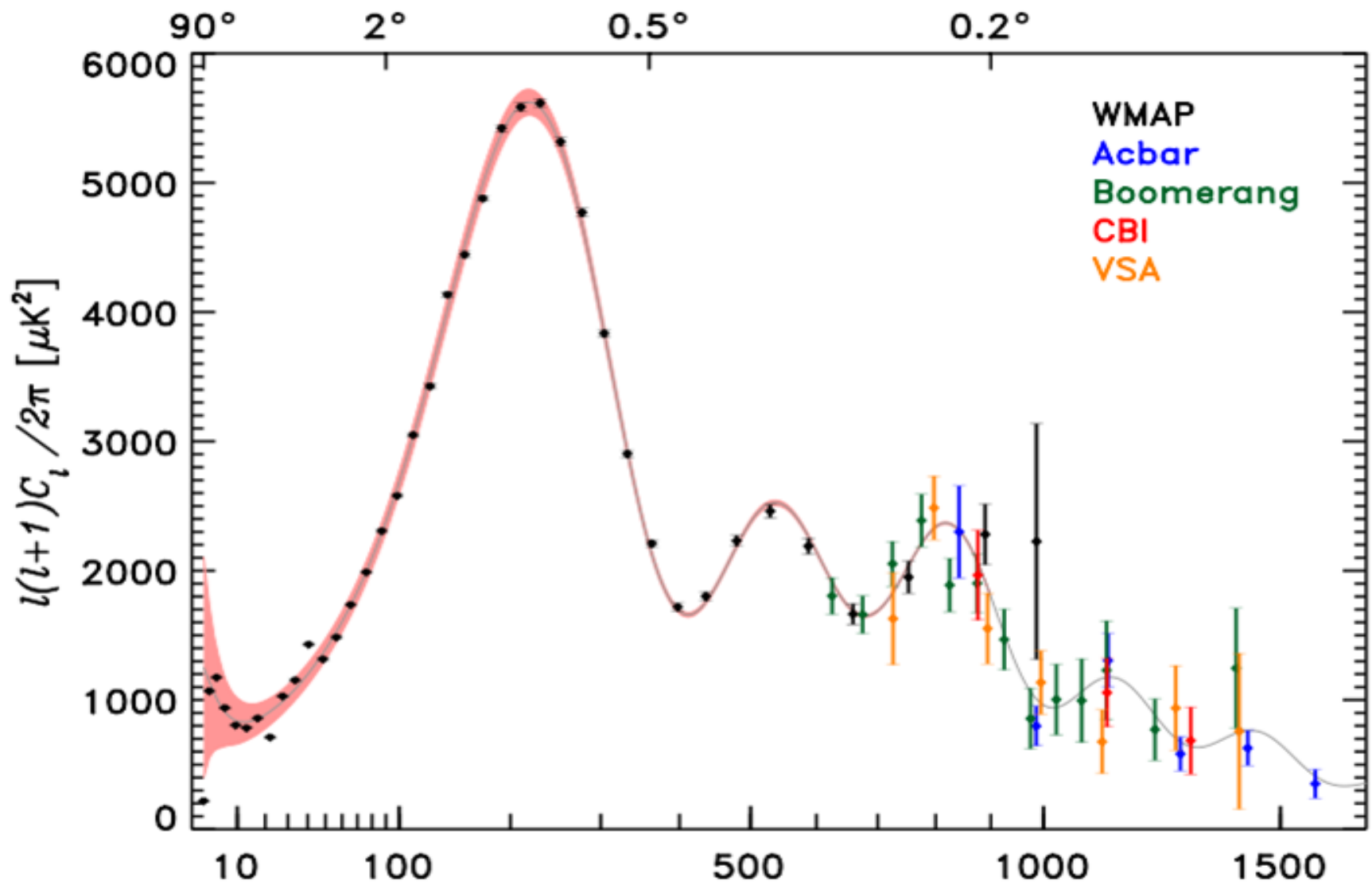
THE POWER SPECTRUM



OBSERVATIONS OF THE CMB provide a map of temperature variations across the whole sky [a]. When researchers analyze portions of that map [b], they use band filters to show how the temperature of the radiation varies at different scales. The variations are barely noticeable at large scales corresponding to regions that stretch about 30 degrees across the sky [c] and at small scales corresponding to regions about a tenth of a degree across [e]. But the temperature differences are quite distinct for regions about one degree across [d]. This first peak in the power spectrum (graph at bottom) reveals the compressions and rarefactions caused by the fundamental wave of the early universe; the subsequent peaks show the effects of the overtones.



Γωνιακό άνοιγμα



Δείκτης l σφαιρικής αρμονικής Y_{lm}

Δείκτης ℓ σφαιρικής αρμονικής $Y_{\ell m}$

10

100

500

1000

Διακυμάνσεις θερμοκρασίας

6000

5000

4000

3000

2000

1000

0

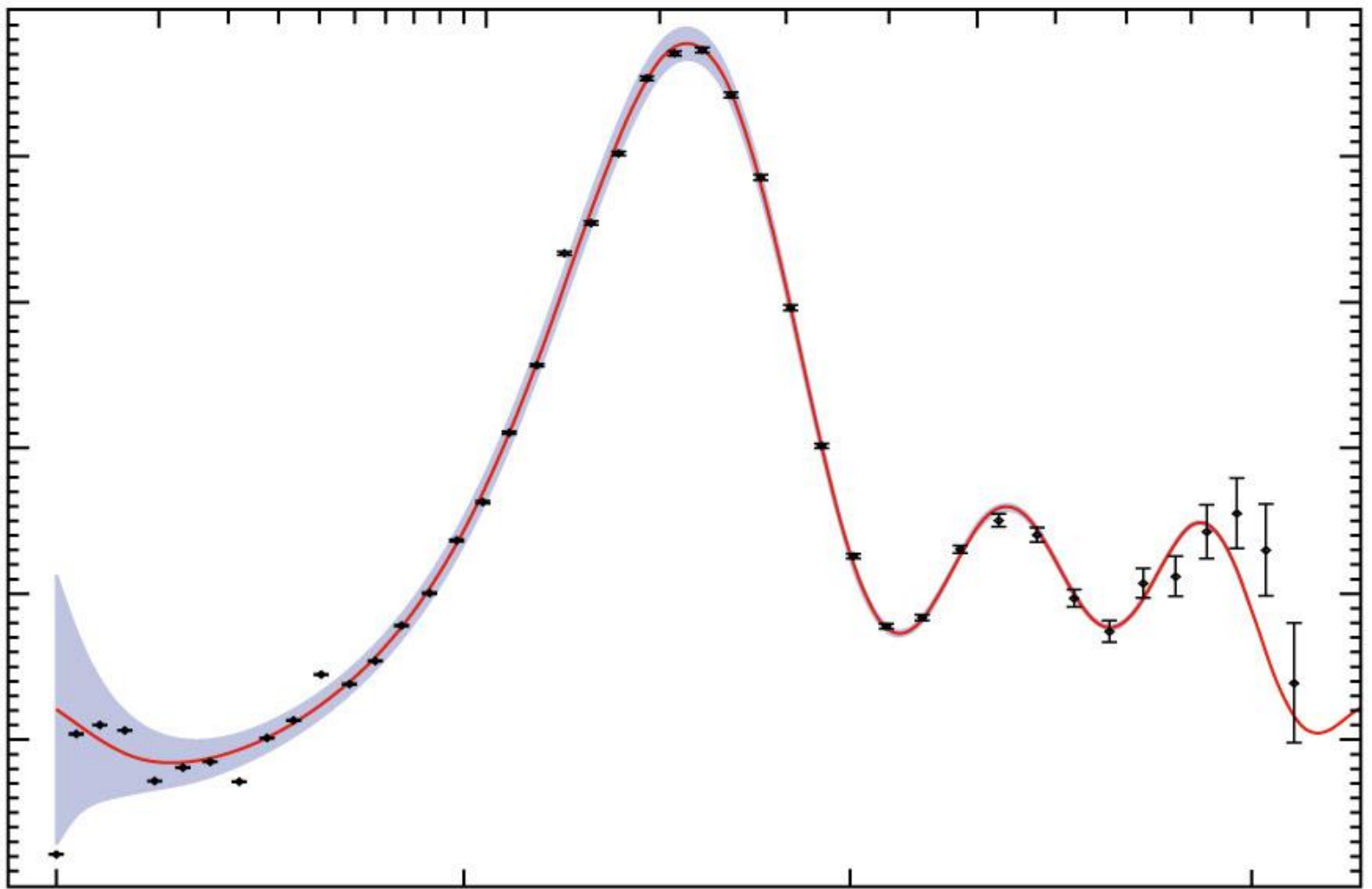
90°

2°

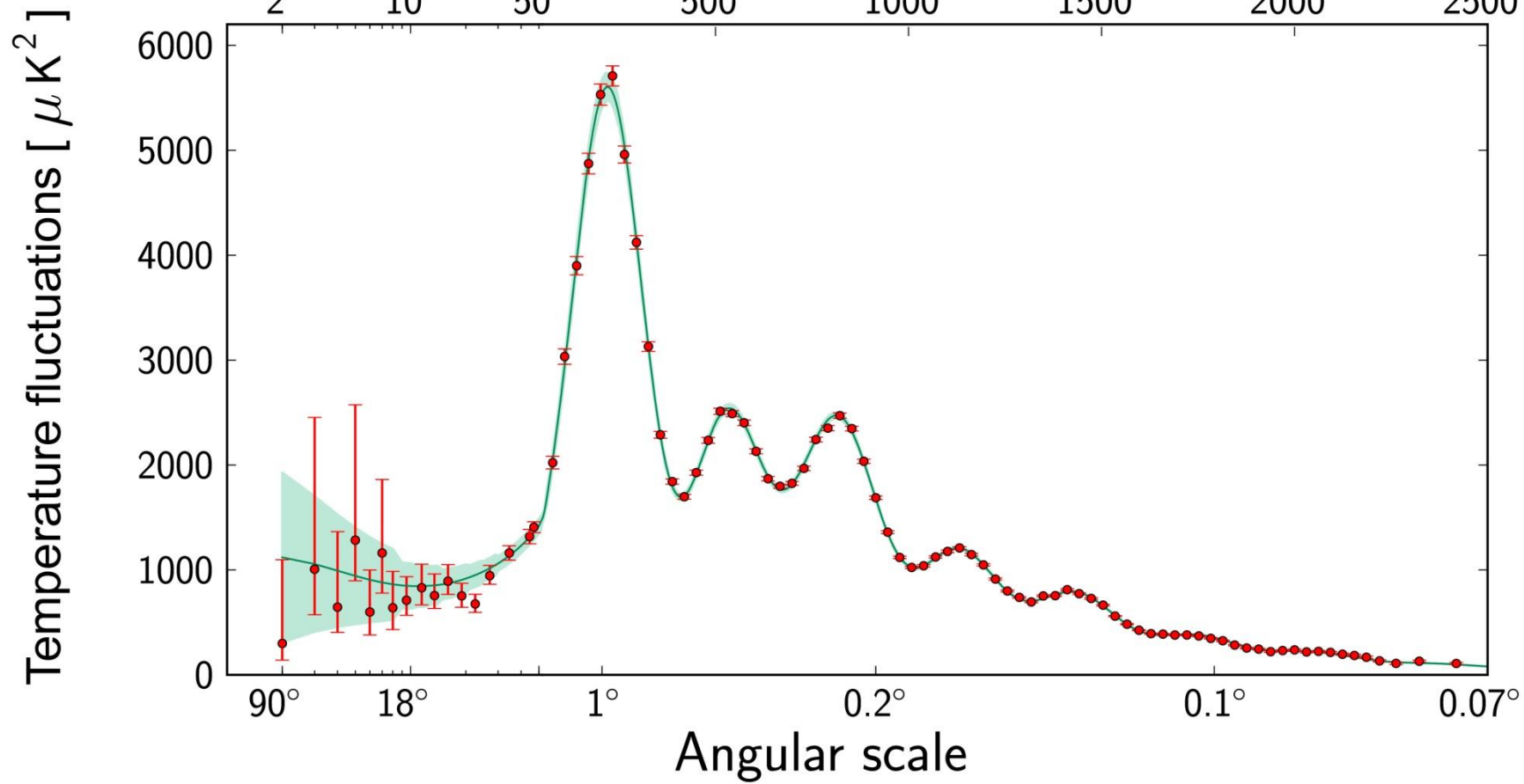
0.5°

0.2°

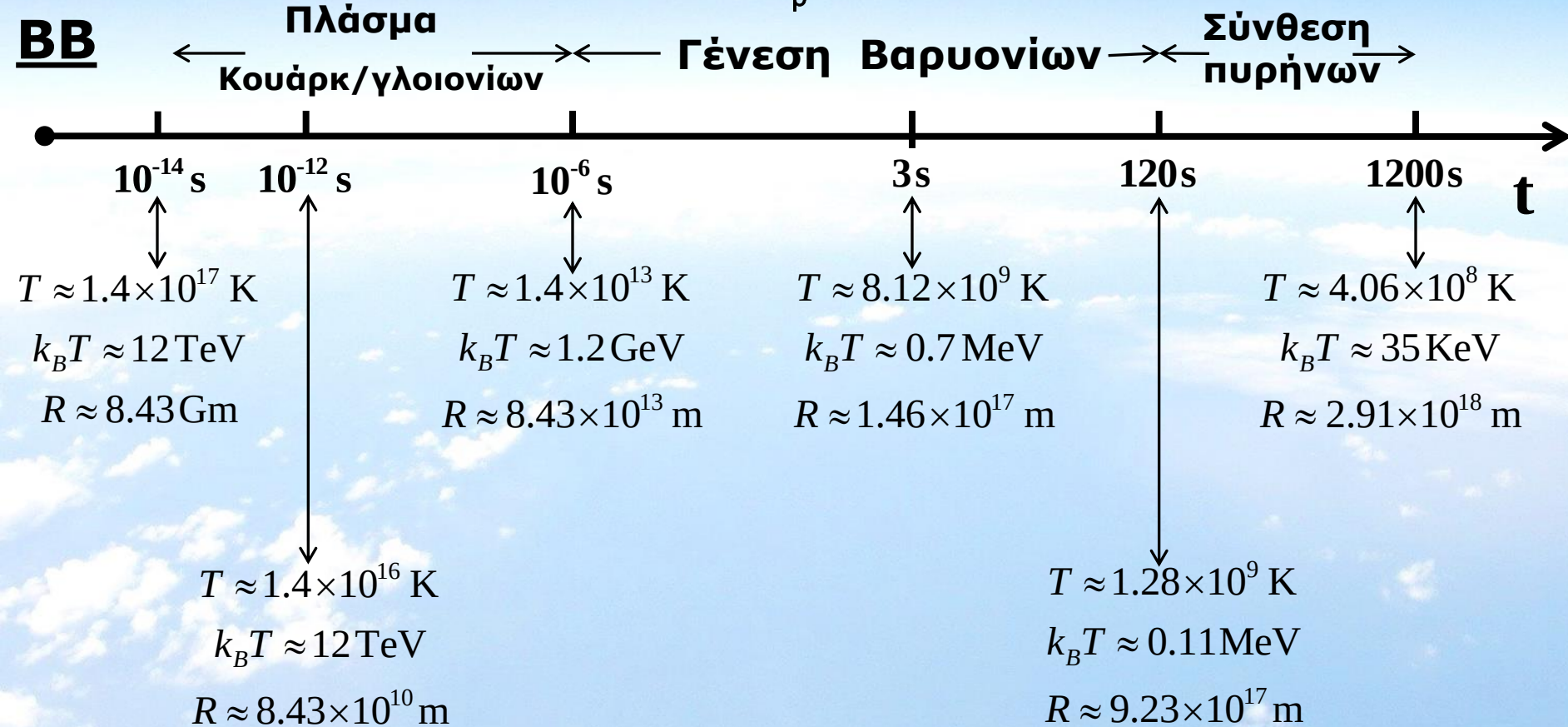
Γωνιακό άνοιγμα

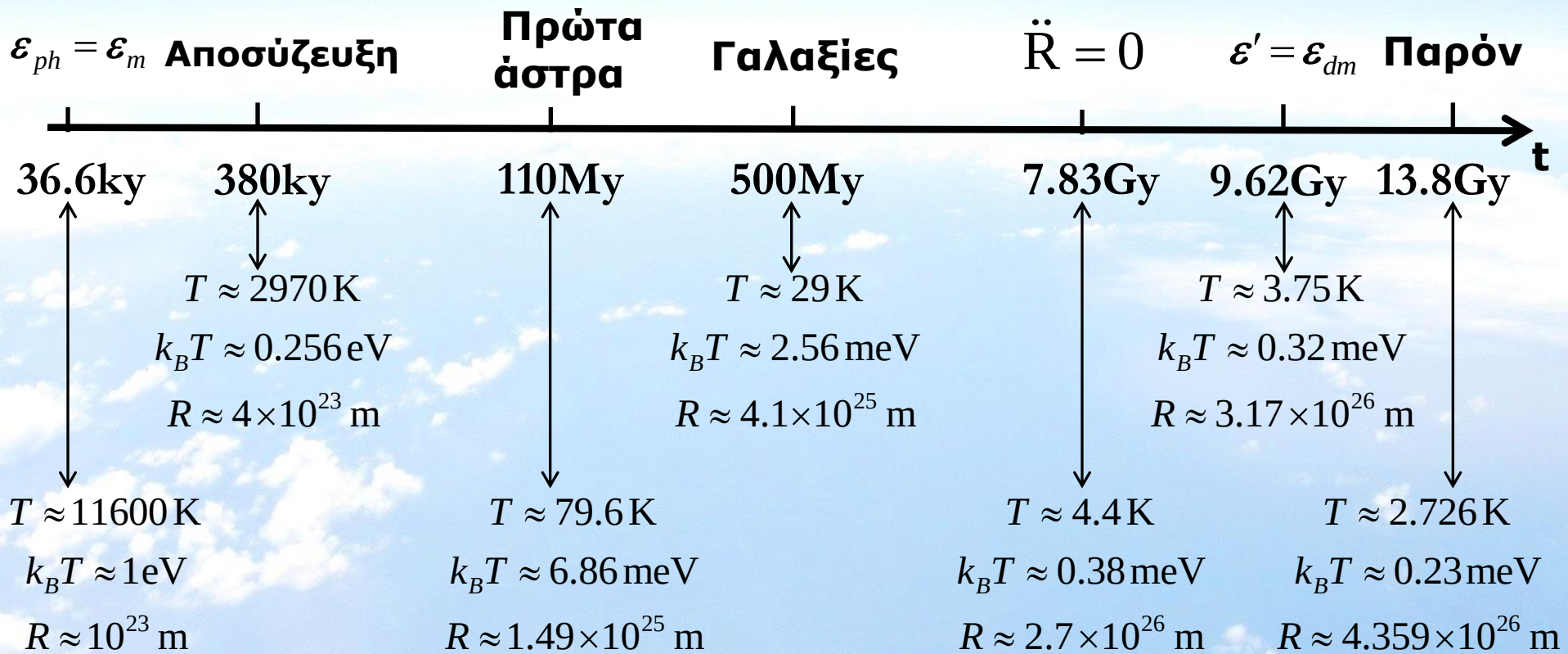


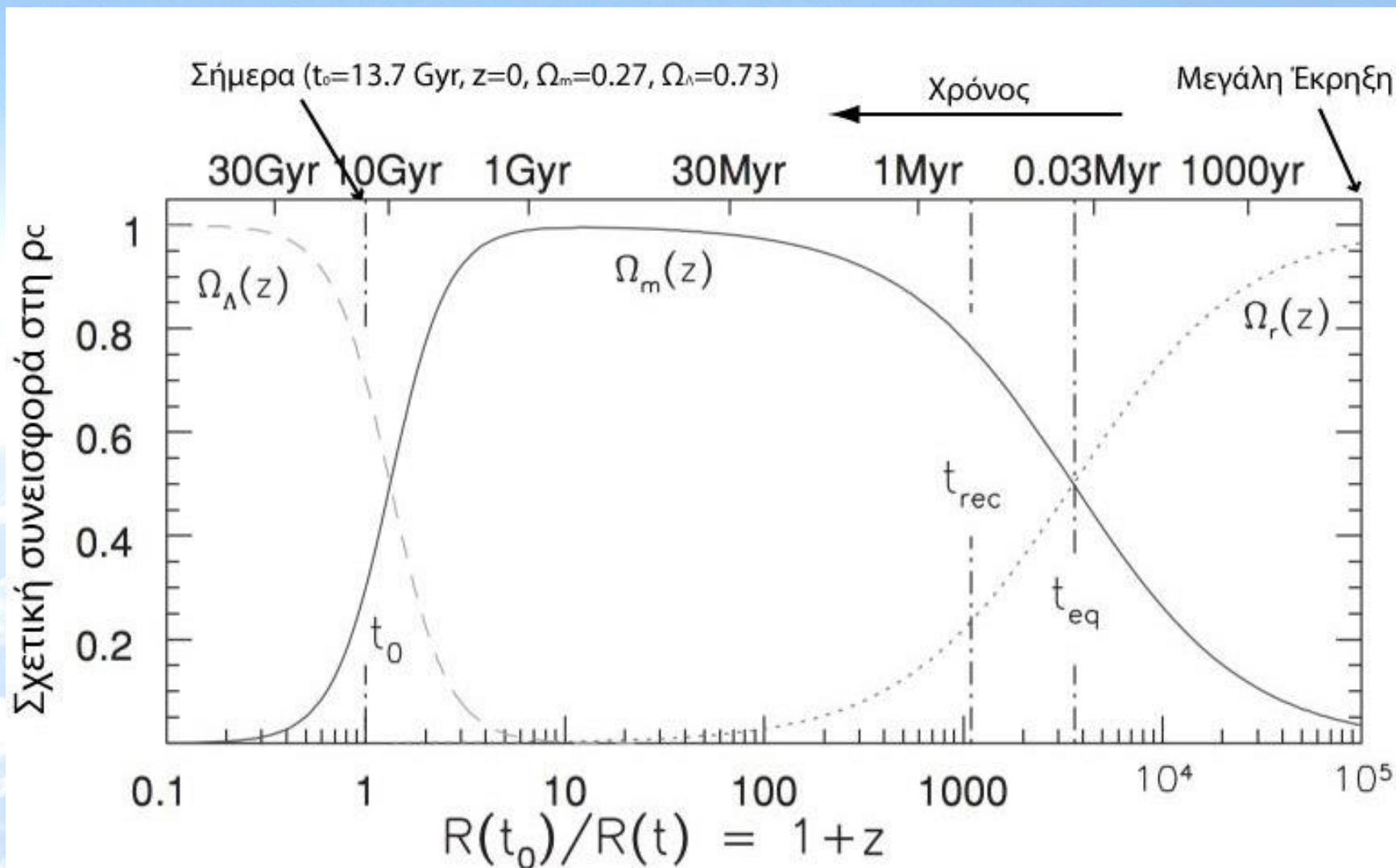
Multipole moment, ℓ



$$\frac{n_n}{n_p} \approx e^{-\Delta\epsilon/k_B T} \approx \frac{1}{6}$$







ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

ΤΡΙΑ ΜΕΓΑΛΑ ΜΕΤΩΠΑ:

ΤΟ ΜΙΚΡΟ, ΤΟ ΜΕΓΑ, ΚΑΙ ΤΟ ΠΕΡΙΠΛΟΚΟ

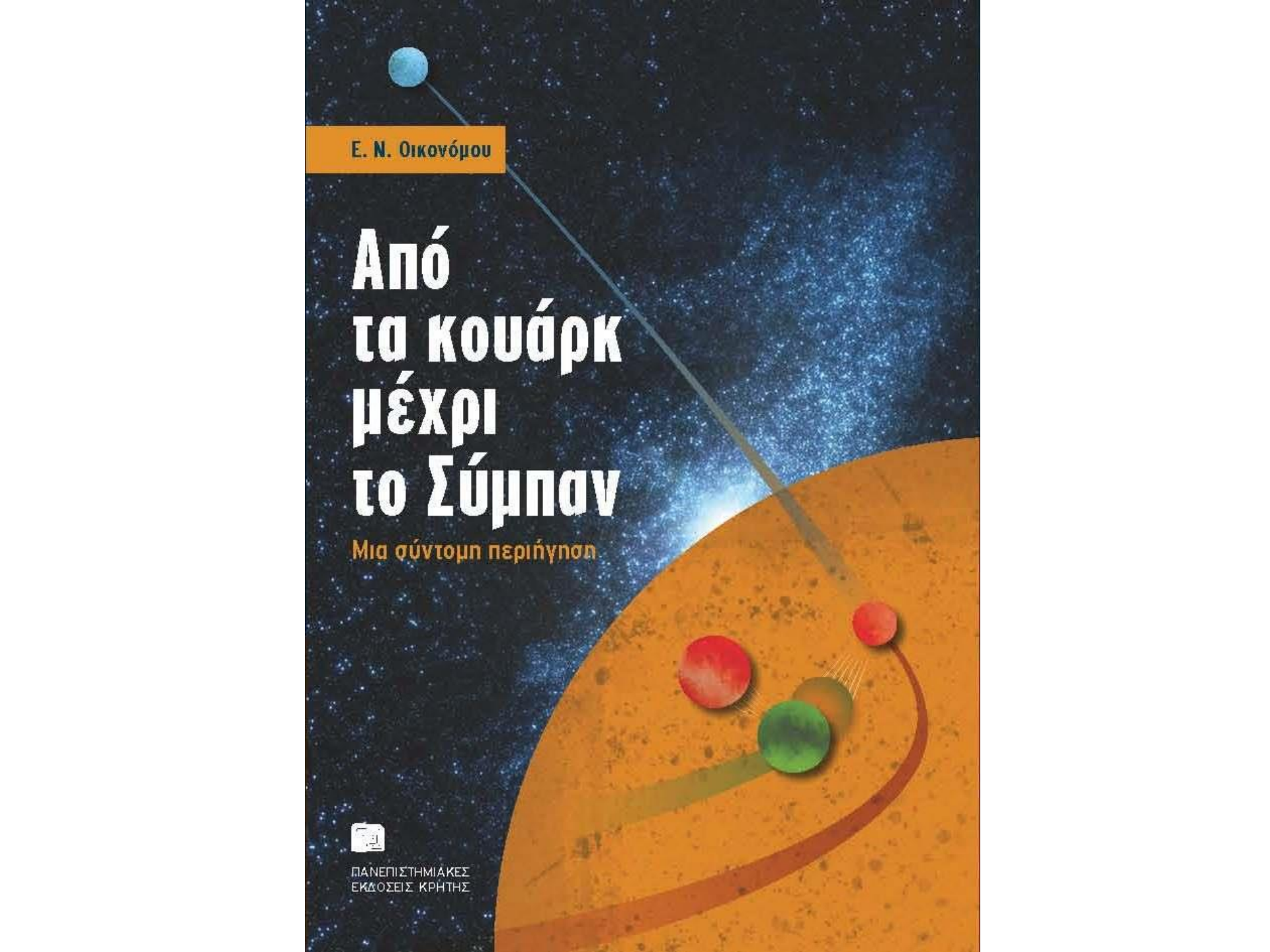
**ΤΟ ΦΙΔΙ
ΔΑΓΚΩΝΕΙ
ΤΗΝ ΟΥΡΑ
ΤΟΥ**

**I. ΤΟ ΤΑΞΙΔΙ ΠΡΟΣ ΤΑ
ΑΔΥΤΑ ΤΟΥ
ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ
ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ (ΑΛΛΑ
ΣΩΜΑΤΙΑ;)**

**ΧΩΡΙΣ ΤΗ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΑ ΙΔΕΑ;**

**II. Ο ΜΕΓΑΚΟΣΜΟΣ ΤΟΥ
ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ (ή ΤΩΝ
ΣΥΜΠΑΝΤΩΝ ?)
ΣΥΝΕΧΙΖΕΙ ΝΑ ΜΑΣ
ΕΚΠΛΗΣΣΕΙ**

**III. Η ΙΔΕΑ ΤΟΥ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΥ ΠΡΟΣ
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΖΩΣΑ
ΥΛΗ ΚΑΙ ΣΤΙΣ
ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΗΣ.
ΥΛΗ & ΦΩΣ**



Ε. Ν. Οικονόμου

Από τα κουάρκ μέχρι το Σύμπαν

Μια σύντομη περιήγηση



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Eleftherios N. Economou

From Quarks to the Universe

A Short Physics Course

Second Edition

 Springer

ΕΝΕΡΓΑ ΑΣΤΡΑ

M_{max}

$$\text{Let } P_{\text{ph}} = \Lambda P_{\text{kin}} \Rightarrow (k_{\text{B}}T / \hbar c)^3 \propto \Lambda N / V \Rightarrow k_{\text{B}}T / \hbar c \propto \left(\frac{\Lambda N}{V} \right)^{1/3} \quad (1)$$

$$P_{\text{G}} = P_{\text{kin}} + P_{\text{ph}} = (1 + \Lambda)P_{\text{kin}} \Rightarrow \frac{Gm_{\text{u}}^2 N^2}{V^{4/3}} \propto (1 + \Lambda) \frac{Nk_{\text{B}}T}{V} \propto (1 + \Lambda) \frac{N}{V} \frac{\hbar c (\Lambda N)^{1/3}}{V^{1/3}} \quad (2)$$

$$Gm_{\text{u}}^2 N^{2/3} \propto (1 + \Lambda) \Lambda^{1/3} \hbar c \quad \Rightarrow \quad N_{\text{max}} \propto (1 + \Lambda)^{3/2} \Lambda^{1/2} \left(\frac{\hbar c}{Gm_{\text{u}}^2} \right)^{3/2}$$