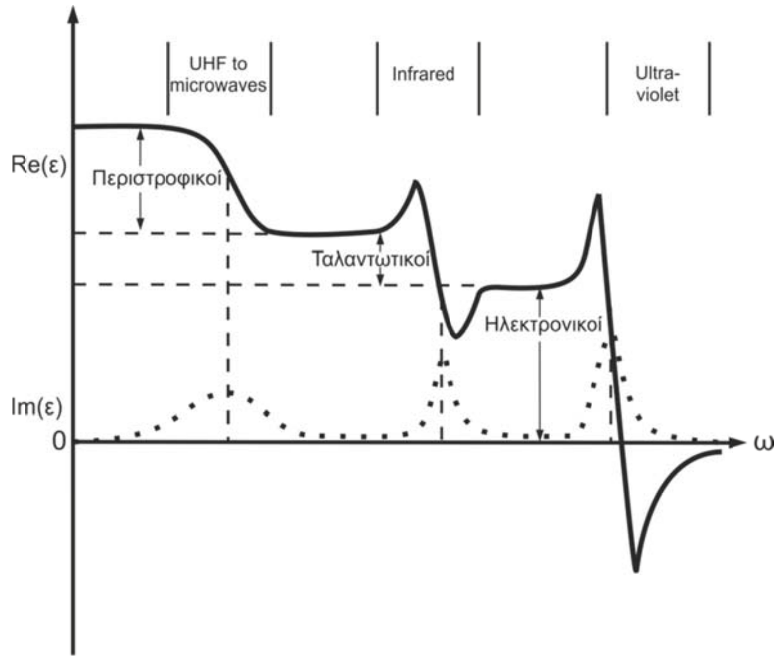
ΚΕΦ. 14.1 : ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ Ι

ΣΕΛ. 237 έως 250 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΚΣ. 24$^{\mathrm{O}}$ VIDEO, 09/01/2014

0λ έως 19:40λ Εξάρτηση της διηλεκτρικής συνάρτησης από τη συχνότητα ω και ο ρόλος των συντονισμών

Παρουσιάζεται το γράφημα Re(ε) και το Im(ε) ως συνάρτησης του ω:



Για να γίνει κατανοητή η λόγω συντονισμών έντονη μεταβολή του ε αρκεί να εξετάσουμε την εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση παρουσία τριβής:

$$m\ddot{x} = -\kappa x - (m/\tau)\dot{x} + \mathrm{Re}[F_0 \exp(-i\omega t)] \qquad \text{με λύση} \qquad \mathrm{Re}[x_0 \exp(-i\omega \mathrm{t})] \tag{1}$$

όπου το F_0 μπορεί να θεωρηθεί θετική ποσότητα. Αίροντας προσωρινά το Re και το $\exp(-\mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{t})$ έχουμε τη σχέση

$$-m\omega^2 x_0 = -\kappa x_0 + i\,\omega(m/\tau)\,x_0 + F_0, \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)} \qquad \text{ή}$$

$$\mathrm{Re}\left(x_0\right) = \frac{(F_0/m)\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}, \qquad \mathrm{Im}\left(x_0\right) = \frac{(F_0/m)(\omega/\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \tag{2}$$

Κατασκευάστε τα γραφήματα των $\mathrm{Re}\left(x_0\right)$ και $\mathrm{Im}\left(x_0\right)$ vs. ω/ω_0 επιλέγοντας $\omega_0\tau = 20$.

Αποκαθιστώντας το Re και το $\exp(-i\omega t)$ και ορίζοντας $x_0 = |x_0|\exp(i\phi)$ έχουμε

$$x(t) = |x_0|\cos(\omega t - \phi) \quad \text{και} \quad dW/dt = F(t)\dot{x}(t) = -F_0\omega|x_0|\cos(\omega t)\sin(\omega t - \phi) \qquad (3)$$

Η ύπαρξη τριβών δεν σημαίνει χρονική απόσβεση, όπως λανθασμένα αναφέρθηκε στο VIDEO, αλλά την εμφάνιση μιας μη μηδενικής διαφοράς φάσεως φ που συνεπάγεται από άποψη φυσικής ότι το παραγόμενο ανά μονάδα χρόνου έργο από τη δύναμη δεν είναι κατά μέσο όρο μηδέν, όπως θα ήταν αν φ=0 (βλ. (3)).

Εαν αθροίσουμε δύο (ή περισσότερους) όρους του τύπου (2) προκύπτουν τα παραπάνω γραφήματα της διηλεκτρικής συνάρτησης . Ο ένας προσθετέος μπορεί να οφείλεται σε ιοντικές ιδιοσυχνότητες και εμφανίζεται σε τιμές περίπου μερικών δεκάδων meV και ο άλλος στις ηλεκτρονικές διεγέρσεις από κατειλημμένες σε άδειες καταστάσεις με συχνότητες συντονισμού περίπου μερικών eV . Σε υγρά, όπως στο νερό, μπορεί να εμφανισθεί και τρίτος συντονισμός σε πολύ χαμηλές συχνότητες (περίπου 20 μeV) που οφείλεται σε περιστροφές πολικών μορίων.

Για να παρακολουθήσετε το 24^{o} VIDEO, 09/01/2014, από 0λ έως 19:40λ πατήστε **εδώ**

19:40λ έως το τέλος : ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

Για μια περιγραφική ιστορική εισαγωγή βλ. τις σελ. 237 έως 243 του βιβλίου ΚΣ. Βλ. επίσης και τις διαφάνειες 99 και 103. Η τελευταία που οφείλεται στην αποστολή Planck επεκτείνει τις μετρήσεις του WMAP πιο πέρα και από *l*=2500 (σύγκρινε και με το Σχ. 14.2 σελ. 239 του βιβλίου ΚΣ). Ως συνέπεια αυτών των ακριβέστερων μετρήσεων έχουν τροποποιηθεί οι πίνακες 14.1 (σελ. 255) και 14.2 (σελ. 259)

Η σύγχρονη Κοσμολογία βασίζεται στην παραδοχή ότι σε μεγάλη κλίμακα (>500 εκ. ετών φωτός) η κατανομή ενέργειας στο Σύμπαν είναι ομογενής και ισότροπη με πυκνότητα ε και πίεση p=wε .

Εκτός από μια αρχική περίοδο του **πληθωρισμού** που διήρκεσε από περίπου 10^{-36} s έως 10^{-32} s, την χρονική και χωρική εξέλιξη του Σύμπαντος καθορίζει η Γ.Θ.Σ. η οποία οδηγεί στην ακόλουθη σχέση για την απόσταση R μεταξύ δύο πολύ απομακρυσμένων σημείων (R> 500 εκ. έτη φωτός)

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R^2}, \qquad \varepsilon = \varepsilon_b + \varepsilon_e + \varepsilon_{ph} + \varepsilon_\nu + \varepsilon_{dm} + \varepsilon_{de} \qquad (4)$$

Στην (4), η H ονομάζεται σταθερά του Hubble, $\dot{R} \equiv dR/dt$, το κ καθορίζει το είδος της γεωμετρίας του Σύμπαντος με κ=0 να συνεπάγεται Ευκλείδεια γεωμετρία, και οι δύο τελευταίοι όροι στην πυκνότητα ενέργειας να οφείλονται στη σκοτεινή ύλη και στη σκοτεινή ενέργεια αντίστοιχα. Τα παρατηρησιακά δεδομένα συνηγορούν στο ότι η πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας είναι μια παγκόσμια σταθερά που συνδέεται με τη λεγόμενη κοσμολογική σταθερά Λ:

$$\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_{dm} = \frac{\Lambda}{3} \tag{5}$$

Λόγω πληθωρισμού, που μέσα σε 10^{-32} s το R^2 μεγάλωσε κατά τουλάχιστον 52 τάξεις μεγέθους, ο όρος $\kappa c^2 / R^2$ είναι απολύτως αμελητέος και επομένως η γεωμετρία του Σύμπαντος είναι Ευκλείδεια.

Σημειώστε ότι η σχέση (4) μπορεί να προκύψει από στοιχειώδη Νευτώνεια μηχανική και επομένως πρέπει να είσθε σε θέση να την αποδείξετε (βλ. σελ. 248 του βιβλίου ΚΣ). Δείτε επίσης και τις διαφάνειες 88 και 89 στις οποίες μεταξύ των άλλων αποδεικνύεται ότι η ολική ενέργεια του Σύμπαντος είναι **μηδέν**. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι η «δημιουργία» του Σύμπαντος δεν κόστισε ενέργεια

Από τον 1ο νόμο, για dS=0, έπεται ότι η πυκνότητα ενέργειας και η αντίστοιχη πίεση συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{d\varepsilon_i}{dR} = -\frac{3}{R}\left(\varepsilon_i + p_i\right), \quad i = b,\ e,\ ph,\ \nu,\ dm,\ de, \tag{6}$$

Αποδείξτε από την (4) για κ=0 και την (6) ότι

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p) \tag{7}$$

Για τη «σημερινή» τιμή του ε και για τα «σημερινά» ποσοστά κάθε συμβολής στο ε βλ. διαφάνεια 91.

Για να παρακολουθήσετε το 24ο VIDEO, 09/01/2014, από 19:40λ έως το τέλος πατήστε **εδώ**

Σύνοψη των κυριοτέρων τύπων

Είναι οι σχέσεις (4), (6) και (7). Η τεκμηρίωση αυτών των σχέσεων στο βιβλίο ΚΣ είναι στις σελ. 246 έως 250.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο χωρίς όρια με πυκνότητα ενέργειας ε και πίεση p, η στοιχειώδης τετραδιάστατη «απόσταση» ds δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τη σχέση $ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2\{du^2(1-u^2) + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}$, όπου η ακτίνα r έχει γραφεί ως $r = R(t)u$ με το $R(t)$ να καθορίζει την εξαρτώμενη από το χρόνο κλίμακα μήκους, ενώ το u

είναι αδιάστατο. Το $R(t)$ ικανοποιεί την ακόλουθη βασική διαφορική εξίσωση υποθέτοντας την ύπαρξη πληθωριστικής περιόδου στην αρχική φάση του Σύμπαντος :

(α) $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\varepsilon - (\kappa c^2/R)^2, \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{d\varepsilon}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = c^2/8\pi G$

(β) $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\varepsilon, \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{d\varepsilon}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2/8\pi G$

(γ) $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\varepsilon - (\kappa c^2/R^2), \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{d\varepsilon}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2/8\pi G$

(δ) $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\varepsilon, \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{d\varepsilon}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = c^2/8\pi G$

2. Σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο χωρίς όρια με πυκνότητα ενέργειας ε και πίεση p, η στοιχειώδης τετραδιάστατη «απόσταση» ds δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τη σχέση $ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2\{du^2(1-u^2) + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}$, όπου η ακτίνα r έχει γραφεί ως $r = R(t)u$ με το $R(t)$ να καθορίζει την εξαρτώμενη από το χρόνο κλίμακα μήκους, ενώ το u είναι αδιάστατο. Το $R(t)$ ικανοποιεί και την ακόλουθη διαφορική εξίσωση υποθέτοντας την ύπαρξη πληθωριστικής περιόδου στην αρχική φάση του Σύμπαντος :

(α) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon + 3p), \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{de}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2/8\pi G,$

(β) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon + 3p), \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{de}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2/8\pi G, \;\; p = p' - \varepsilon_{d\varepsilon}$

(γ) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon + 2p), \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{de}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2/8\pi G,$

(δ) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon + 2p), \;\; \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{de}, \;\; \varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2/8\pi G, \;\; p = p' - \varepsilon_{d\varepsilon}$

3. Σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο χωρίς όρια με πυκνότητα ενέργειας ε και πίεση p, η στοιχειώδης τετραδιάστατη «απόσταση» ds δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τη σχέση $ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2\{du^2(1-u^2) + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}$, όπου η ακτίνα r έχει γραφεί ως $r = R(t)u$ με το $R(t)$ να καθορίζει την εξαρτώμενη από το χρόνο κλίμακα μήκους, ενώ το u είναι αδιάστατο. Η ποσότητα $\dot{R}/R$, που ονομάζεται σταθερά του Hubble και δίνει τον ανηγμένο ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος, από διαστατικούς λόγους πρέπει να έχει την ακόλουθη μορφή υποθέτοντας ότι είναι ανεξάρτητη του p :

(α) $(\dot{R}/R)^2 = \sqrt{G\varepsilon/c^2}\,\varphi(c^2/R\sqrt{G\varepsilon})$ (β) $(\dot{R}/R) = \sqrt{G\varepsilon/c^2}\,\varphi(c^2/R\sqrt{G\varepsilon})$

(γ) $(\dot{R}/R) = \sqrt{G\varepsilon/c^2}\,\varphi(c/R\sqrt{G\varepsilon})$ (δ) $(\dot{R}/R) = \sqrt{G\varepsilon/c}\,\varphi(c^2/R\sqrt{G\varepsilon})$

4. Η βασική εξίσωση της Κοσμολογίας για ένα ομογενές και ισότροπο μέσο χωρίς όρια με πυκνότητα ενέργειας $\varepsilon = \rho c^2$ και πίεση p μπορεί να προκύψει με απλή νευτώνεια μηχανική, θεωρώντας την επιτάχυνση ενός μακρινού γαλαξία μάζας m σε απόσταση R από τον παρατηρητή: $m\ddot{R} = -GMm / R^2$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή *υπό σταθερή μάζα* M βρίσκουμε τη σχέση:

(α) $(\dot{R}/R)^2 = -(4\pi/3c^2)G\varepsilon - C/R^2$ (β) $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\varepsilon - C/R^2$

(γ) $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\rho - C/R^2$ (δ) $(\dot{R}/R)^2 = -(4\pi/3c^2)G\rho - C/R^2$

5. Με αφετηρία τη βασική εξίσωση $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\varepsilon' + (\Lambda/3)$, όπου $\varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2 / 8\pi G$ και τη διατήρηση της ενέργειας $dU = -pdV$, προκύπτει η εξίσωση για την επιτάχυνση της διαστολής του Σύμπαντος, που είναι:

(α) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon' + 3p') + (\Lambda/3)$ (β) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon' - 3p') + (\Lambda/3)$

(γ) $(\ddot{R}/R) = (4\pi G/3c^2)(\varepsilon' - 3p') + (\Lambda/3)$ (δ) $(\ddot{R}/R) = (4\pi G/3c^2)(\varepsilon' + 3p') + (\Lambda/3)$

6. Εάν μια συνιστώσα ε_i της πυκνότητας ενέργειας του Σύμπαντος δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, όπως θεωρούμε ότι συμβαίνει με την ε_{de}, τότε από τη διατήρηση της ενέργειας έπεται ότι η αντίστοιχη συνιστώσα p_i της πίεσης ικανοποιεί τη σχέση:

(α) $p_i = \varepsilon_i$ (β) $p_i = 3\varepsilon_i$ (γ) $p_i = -\varepsilon_i$ (δ) $p_i = -3\varepsilon_i$

7. Με αφετηρία τη βασική εξίσωση $(\dot{R}/R)^2 = (8\pi/3c^2)G\varepsilon$ και τη διατήρηση της ενέργειας $dU = -pdV$, προκύπτει η εξίσωση για την επιτάχυνση της διαστολής του Σύμπαντος, που είναι:

(α) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon - 3p)$ (β) $(\ddot{R}/R) = (4\pi G/3c^2)(\varepsilon - 3p)$

(γ) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon + 3p)$ (δ) $(\ddot{R}/R) = (4\pi G/3c^2)(\varepsilon + 3p)$

8. Από τη σχέση $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon + 3p)$ και τη σχέση $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{d\varepsilon}$, $\varepsilon_{d\varepsilon} = \Lambda c^2 / 8\pi G$ προκύπτει η ακόλουθη:

(α) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon' + 3p') - (\Lambda/6)$

(β) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon' + 3p') + (\Lambda/3)$

(γ) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon' + 3p') - (2\Lambda/3)$

(δ) $(\ddot{R}/R) = -(4\pi G/3c^2)(\varepsilon' + 3p') - (4\Lambda/3)$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Η υπ' αρ. 2 της σελίδας 258 του βιβλίου ΚΣ

2. Χρησιμοποιώντας δεδομένα από το Google και το πρόβλημα 9, σελ. 216 του βιβλίου ΚΣ σχεδιάστε το γράφημα της διηλεκτρικής συνάρτησης του νερού στις εξής περιοχές συχνοτήτων 1-100 GHz, 300GHz-5THz, 800THz- 1800THz