

### ΚΕΦ. 13.3: ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΜΑΖΑΣ ΕΝΕΡΓΩΝ ΑΣΤΡΩΝ

ΣΕΛ. 226 έως 234 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΚΣ.

23<sup>ο</sup> VIDEO, 20/12/2013

Ο ελάχιστος και ο μέγιστος αριθμός νουκλεονίων που εμφανίζεται σε ενεργά άστρα είναι  $10^{56}$  και  $\sim 2,5 \times 10^{59}$ .

**0λ έως 30λ: Ελάχιστο μέγεθος.** Για την κατανόηση του ελάχιστου μεγέθους ενεργού άστρου είναι σημαντικό να μελετήσετε το Σχ. 13.1β, σελ. 229 που δείχνει τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας και της θερμοκρασίας ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$  του συμπυκνώματος που ενδεχομένως θα καταλήξει σε άστρο. Εάν λάβει κανείς υπόψη του τη σύνδεση της ακτίνας  $R$  με την κβαντική κινητική ενέργεια, προκύπτει ότι η καμπύλη της θερμοκρασίας εμφανίζει ένα μέγιστο, που στα αριστερά του κυριαρχεί η κβαντική κινητική ενέργεια  $E_{KQ}$  και στα δεξιά του η κλασική θερμική κινητική ενέργεια  $E_{K\Theta}$ .

Η ολική κινητική ενέργεια είναι προσεγγιστικά το άθροισμα της θερμικής και της κβαντικής, όπου

$$E_{K\Theta} = \frac{3}{2} N k_B T = BT, \quad E_{KQ} = a_K \hbar^2 N_e^{5/3} / m_e R^2 = A / R^2 \quad (1)$$

Το άθροισμα θερμικής και κβαντικής πίεσης που ισούται με τα 2/3 της ολικής κινητικής ενέργειας πρέπει να εξισορροπήσει τη βαρυτική πίεση που είναι το 1/3 της βαρυτικής ενέργειας. Επομένως η βαρυτική ενέργεια ( $E_B = -\gamma G N_v^2 m_u^2 / R = -2\Gamma / R$ ) σε απόλυτη τιμή ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος της κβαντικής και της θερμικής κινητικής ενέργειας

$$\Gamma / R = (A / R^2) + BT \Rightarrow T = ((\Gamma / R) - (A / R^2)) / B \quad (2)$$

Η θερμοκρασία θα μηδενισθεί όταν  $R = R_0 = A / \Gamma$  και θα εμφανίσει ένα μέγιστο όταν  $R = 2R_0$  (προσοχή! Η τελευταία τιμή είναι η σωστή και όχι αυτή που εμφανίζεται στο Σχ. 13.1β και στη σελ. 228) και η τιμή της μέγιστης θερμοκρασίας θα είναι

$$T_{\max} = \Gamma^2 / 4A = (\gamma G N_v^2 m_u^2 / 2)^2 / 4 (a_K \hbar^2 N_e^{5/3} / m_e) = \left( \frac{\gamma^2}{16a_K} \right) \frac{G^2 m_u^4 m_e}{\hbar^2 k_B} \left( \frac{N_v}{N_e} \right)^4 N_e^{4/3} \quad (3)$$

Σημειώστε ότι ο αριθμητικός συντελεστής στην (3) είναι περίπου ίσος με αυτόν στον τύπο (13.21) της σελ. 228 του βιβλίου ΚΣ και είναι περίπου ίσος με 0.02.

Η θερμοκρασία για να αρχίσουν οι θερμοδυναμικές πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης πρωτονίων (οι οποίες χρησιμοποιούν και το φαινόμενο τούνελ) δίνεται για λόγους διαστατικής ανάλυσης

$$k_B T_{ign} = \eta \frac{e^4 m_p}{\hbar^2} \quad (4)$$

όπου ο αριθμητικός συντελεστής  $\eta$  αναμένεται να είναι πολύ μικρότερος της μονάδας γιατί υπάρχουν, λόγω κατανομής Boltzmann των ταχυτήτων των πρωτονίων, τιμές πολύ μεγαλύτερες της μέσης. Συγκρίνοντας με τη θερμοκρασία στο κέντρο του Ήλιου συμπεραίνουμε ότι  $\eta < 0.05$ . Θα επιλέξουμε  $\eta = 0.02$ . Θέτοντας  $T_{max} = \Lambda T_{ign}$ ,  $\Lambda \approx 1,1$  βρίσκουμε

$$N_e \approx \frac{\Lambda^{3/4}}{\beta^{3/4}} \left( \frac{N_e}{N_\nu} \right)^3 \left( \frac{e^2}{G \sqrt{m_u^4 m_e / m_p}} \right)^{3/2} \approx 10^{56} \quad (5)$$

όπου ο παράγοντας  $\beta$  είναι περίπου 2,83 για λόγους που παρουσιάζονται στις σελ. 230 έως 231, ο λόγος  $N_e / N_\nu = 5,5/7$  και  $\Lambda = 1,1$

**30λ έως τέλος: Μέγιστο μέγεθος.** Όταν το μέγεθος του άστρου είναι πολύ μεγάλο, πολύ μεγάλη είναι και η θερμοκρασία του και επομένως η πίεση των φωτονίων (που είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της θερμοκρασίας) γίνεται η κυρίαρχη πίεση που εξισορροπεί την συνθλιπτική πίεση της βαρύτητας. Στην περίπτωση αυτή, η ισότητα των πιέσεων συνεπάγεται την ισότητα των ενεργειών (σε απόλυτες τιμές). Άρα ο σχηματισμός του άστρου δεν συνοδεύεται από ενεργειακό κέρδος και επομένως δεν θα λάβει χώρα.

Ας θεωρήσουμε ότι η πίεση των φωτονίων είναι  $\Lambda$  φορές μεγαλύτερη από την θερμική πίεση:

$$P_\phi = \Lambda P_K \Rightarrow \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{45 \hbar^3 c^3} = \Lambda \frac{N k_B T}{V} \quad (6)$$

Η ισότητα των πιέσεων, που είναι προϋπόθεση για την ισορροπία, σημαίνει

$$P_B = (1 + \Lambda) P_K \Rightarrow \frac{\gamma}{3(3/4\pi)^{1/3}} \frac{G N_\nu^2 m_u^2}{V^{4/3}} = (1 + \Lambda) \frac{N k_B T}{V} \quad (7)$$

Λύνουμε ως προς  $k_B T$  την (6) και αντικαθιστούμε στην (7) και στη συνέχεια λύνουμε την προκύπτουσα σχέση ως προς  $N_\nu$  και έτσι βρίσκουμε το άνω όριο μεγέθους ενός ενεργού άστρου

$$N_\nu = C_2 \left( \frac{\hbar c}{G m_u^2} \right)^{3/2}, \quad C_2 = 5,42 \left( \frac{\Lambda^{1/3} (1 + \Lambda)}{\gamma} \right)^{3/2} \left( \frac{N}{N_\nu} \right)^2 \quad (8)$$

Επιλέγοντας  $\Lambda = 2$  ή  $1$ ,  $\gamma = 0,8$ , και  $N / N_\nu = 1,5$  βρίσκουμε

$$N_{v,\max} = 2,81 \times 10^{59} \approx 235 N_{v,H} \quad \text{ή} \quad 1,08 \times 10^{59} \approx 90 N_{v,H} \quad (9)$$

Στη συνέχεια στο VIDEO υπάρχει μια ανασκόπηση των βασικών θεμάτων σχετικών με τα άστρα και, ως απόκριση σε ερώτηση φοιτητή, η εύρεση του τύπου για την ενέργεια και την εντροπία ιδανικού αερίου χρησιμοποιώντας την εκτατικότητα, τη διαστατική ανάλυση και τους αντίστοιχους ορισμούς.

Για να παρακολουθήσετε το 23<sup>ο</sup> VIDEO, 20/12/2013, από 0λ έως το τέλος πατήστε **εδώ**

### Σύνοψη των κυριοτέρων τύπων

Είναι οι σχέσεις (3) έως (9). Η τεκμηρίωση αυτών των σχέσεων στο βιβλίο ΚΣ είναι στις σελ. 226 έως 234.

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ο σχηματισμός ενός άστρου ακολουθεί τα εξής στάδια: (1) Μια αρχική συγκέντρωση ύλης συρρικνώνεται υπό την επίδραση του ίδιου βάρους της και ταυτόχρονα έλκει την περιβάλλουσα ύλη μέχρι εξαντλήσεώς της. (2) Κατά τη διάρκεια της συρρίκνωσης και της προσθήκης ύλης, η βαρυτική ενέργεια μετατρέπεται μέσω συγκρούσεων των σωματίων σε θερμική κινητική ενέργεια, η οποία αυξάνει συνεχώς και μαζί της η θερμοκρασία. (3) Αν η συρρίκνωση συνεχισθεί απρόσκοπτη, η κινητική ενέργεια θα συνεχίσει να αυξάνεται αλλά ο χαρακτήρας της θα αλλάζει σταδιακά μετατρέπόμενη από θερμική προς κβαντική με αποτέλεσμα η θερμοκρασία να φτάσει σε ένα μέγιστο και πέραν αυτού να μειώνεται καθώς η ακτίνα του υπό σχηματισμό άστρου μικραίνει. (4) Εάν η μέγιστη θερμοκρασία υπερβεί την θερμοκρασία έναρξης των πυρηνικών αντιδράσεων σύντηξης υδρογόνων προς ήλιο, τότε οι πυρηνικές αντιδράσεις θα εξασφαλίσουν μια δυναμική ισορροπία τροφοδοτώντας την κινητική ενέργεια (κυρίως θερμική) για να αντιμετωπίσει την βαρυτική σύνθλιψη και την απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας. Η μέγιστη θερμοκρασία δίνεται από τον τύπο:

$$(\alpha) k_B T_{\max} = \eta(G^2 m_u^4 / \hbar^2) N_v^{4/3}$$

$$(\beta) k_B T_{\max} = \eta(G^2 m_u^2 / \hbar^2) N_v^{4/3}$$

$$(\gamma) k_B T_{\max} = \eta(G^2 m_u^4 / \hbar^2) N_v^{4/3} m_e$$

$$(\delta) k_B T_{\max} = \eta(G m_u^4 / \hbar^2) N_v^{4/3} m_e$$

2. Ο σχηματισμός ενός άστρου ακολουθεί τα εξής στάδια: (1) Μια αρχική συγκέντρωση ύλης συρρικνώνεται υπό την επίδραση του ίδιου βάρους της και ταυτόχρονα έλκει την περιβάλλουσα ύλη μέχρι εξαντλήσεώς της. (2) Κατά τη διάρκεια της συρρίκνωσης και της προσθήκης ύλης, η βαρυτική ενέργεια μετατρέπεται μέσω συγκρούσεων των σωματίων σε θερμική κινητική ενέργεια, η οποία αυξάνει συνεχώς και μαζί της η θερμοκρασία. (3) Αν η συρρίκνωση συνεχισθεί απρόσκοπτη, η κινητική ενέργεια θα συνεχίσει να αυξάνεται αλλά ο χαρακτήρας της θα αλλάζει σταδιακά μετατρέπόμενη από θερμική προς κβαντική με αποτέλεσμα η θερμοκρασία να φτάσει σε ένα μέγιστο και πέραν αυτού να μειώνεται καθώς η ακτίνα του υπό σχηματισμό

άστρου μικραίνει. (4) Εάν η μέγιστη θερμοκρασία υπερβαίνει την θερμοκρασία  $T_{ign}$  έναρξης των πυρηνικών αντιδράσεων σύντηξης υδρογόνων προς ήλιο, τότε οι πυρηνικές αντιδράσεις θα εξασφαλίσουν μια δυναμική ισορροπία τροφοδοτώντας την κινητική ενέργεια (κυρίως θερμική) για να αντιμετωπίσει την βαρυτική σύνθλιψη και την απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας. Η θερμοκρασία  $T_{ign}$  δίνεται από τον τύπο:

$$(α) k_B T_{ign} = \eta (e^4 / m_e \hbar^2)$$

$$(β) k_B T_{ign} = \eta (e^4 m_e / \hbar^2)$$

$$(γ) k_B T_{ign} = \eta (e^4 m_e / \hbar^2) m_e$$

$$(δ) k_B T_{ign} = \eta (e^4 m_p / \hbar^2)$$

$$\eta = 0,02$$

3. Ο σχηματισμός ενός άστρου ακολουθεί τα εξής στάδια: (1) Μια αρχική συγκέντρωση ύλης συρρικνώνεται υπό την επίδραση του ίδιου βάρους της και ταυτόχρονα έλκει την περιβάλλουσα ύλη μέχρι εξαντλήσεώς της. (2) Κατά τη διάρκεια της συρρίκνωσης και της προσθήκης ύλης, η βαρυτική ενέργεια μετατρέπεται μέσω συγκρούσεων των σωματίων σε θερμική κινητική ενέργεια, η οποία αυξάνει συνεχώς και μαζί της η θερμοκρασία. (3) Αν η συρρίκνωση συνεχισθεί απρόσκοπτη, η κινητική ενέργεια θα συνεχίσει να αυξάνεται αλλά ο χαρακτήρας της θα αλλάζει σταδιακά μετατρέπόμενη από θερμική προς κβαντική με αποτέλεσμα η θερμοκρασία να φτάσει σε ένα μέγιστο και πέραν αυτού να μειώνεται καθώς η ακτίνα του υπό σχηματισμό άστρου μικραίνει. (4) Εάν η μέγιστη θερμοκρασία υπερβαίνει την θερμοκρασία έναρξης των πυρηνικών αντιδράσεων σύντηξης υδρογόνων προς ήλιο, τότε οι πυρηνικές αντιδράσεις θα εξασφαλίσουν μια δυναμική ισορροπία τροφοδοτώντας την κινητική ενέργεια (κυρίως θερμική) για να αντιμετωπίσει την βαρυτική σύνθλιψη και την απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας. Η συνθήκη  $T_{ign} \leq T_{max}$  οδηγεί στον ακόλουθο τύπο για τον ελάχιστο αριθμό νουκλεονίων που απαιτείται για την δημιουργία άστρου:

$$(α) N_v = 0,26 (e^2 / G \sqrt{m_e m_u^3})$$

$$(β) N_v = 0,26 (e^2 / G \sqrt{m_e m_u^3})^{3/2}$$

$$(γ) N_v = 0,26 (e^2 / G m_u^2)$$

$$(δ) N_v = 0,26 (e^2 / G m_u^2)^{3/2}$$

4. Ο σχηματισμός ενός άστρου ακολουθεί τα εξής στάδια: (1) Μια αρχική συγκέντρωση ύλης συρρικνώνεται υπό την επίδραση του ίδιου βάρους της και ταυτόχρονα έλκει την περιβάλλουσα ύλη μέχρι εξαντλήσεώς της. (2) Κατά τη διάρκεια της συρρίκνωσης και της προσθήκης ύλης, η βαρυτική ενέργεια μετατρέπεται μέσω συγκρούσεων των σωματίων σε θερμική κινητική ενέργεια, η οποία αυξάνει συνεχώς και μαζί της η θερμοκρασία. (3) Αν η συρρίκνωση συνεχισθεί απρόσκοπτη, η κινητική ενέργεια θα συνεχίσει να αυξάνεται αλλά ο χαρακτήρας της θα αλλάζει σταδιακά μετατρέπόμενη από θερμική προς κβαντική με αποτέλεσμα η θερμοκρασία να φτάσει σε ένα μέγιστο και πέραν αυτού να μειώνεται καθώς η ακτίνα του υπό σχηματισμό άστρου μικραίνει. (4) Εάν η μέγιστη θερμοκρασία υπερβαίνει την θερμοκρασία έναρξης των

πυρηνικών αντιδράσεων σύντηξης υδρογόνων προς ήλιο, τότε οι πυρηνικές αντιδράσεις θα εξασφαλίσουν μια δυναμική ισορροπία τροφοδοτώντας την κινητική ενέργεια (κυρίως θερμική) για να αντιμετωπίσει την βαρυτική σύνθλιψη και την απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας. Για μικρά άστρα, όπου  $T_{ign} \approx T_{max}$ , η μέση θερμοκρασία  $T$  του άστρου είναι ανάλογη της  $T_{ign}$ :  $T = T_{ign} / \beta$ , όπου  $\beta \approx 3$ . Στη συνέχεια εξισώνοντας την θερμική κινητική ενέργεια με μείον το μισό της βαρυτικής βρίσκουμε ότι η ακτίνα του άστρου είναι:

$$(\alpha) R = \eta(Gm_u m_e / e^2) N_v a_B$$

$$(\beta) R = \eta(Gm_u^2 / e^2) N_v a_B$$

$$(\gamma) R = \eta(Gm_u m_e / e^2) N_v$$

$$(\delta) R = \eta(Gm_e^2 / e^2) N_v a_B$$

5. Όταν η μάζα του άστρου είναι πολύ μεγάλη, η ενέργεια των φωτονίων γίνεται κατά  $\bar{\Lambda}$  φορές μεγαλύτερη από την θερμική ενέργεια των σωματίων του. Επί πλέον η πίεση των φωτονίων γίνεται συγκρίσιμη με την πίεση της βαρύτητας. Οι δύο αυτές σχέσεις καθορίζουν τη μέγιστη δυνατή μάζα ενός ενεργού άστρου:

$$(\alpha) N_{max} = \eta(\hbar c / G m_u^2)$$

$$(\beta) N_{max} = \eta(\hbar c / G m_u^2)^2$$

$$(\gamma) N_{max} = \eta(\hbar c / G m_u^2)^{3/2}$$

$$(\delta) N_{max} = \eta(e^2 / G m_u^2)^{3/2}$$

6. Η πίεση στο κέντρο ενός ενεργού άστρου είναι:

$$(\alpha) P = (3 / 2\pi)(GM^2 / R^3)$$

$$(\beta) P = (3 / 2\pi)(GM^2 / R^4)$$

$$(\gamma) P = (3 / 2\pi)(GM^2 / R^5)$$

$$(\delta) P = (3 / 2\pi)(GM^2 / R^6)$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Τα υπ'αρ. 1, 2, 3, σελ. 234 του βιβλίου ΚΣ