ΜΑΘΗΜΑ 3^{ο} 4/10/2016

Μελετήστε πολύ προσεκτικά τα δύο πρώτα κεφάλαια του βιβλίου του μαθήματος.
Ακόμη πιο προσεκτικά μελετήστε τις σύντομες παρακάτω σημειώσεις **και απαντήστε μέχρι 6/10/2016 στις ερωτήσεις.**

I. Τι είναι κυματοσωμάτιο; Είναι και οι δύο παρακάτω οντότητες, που συνθέτουν τα πάντα

1. Είναι ένα (διάκριτο) σωμάτιο ενέργειας ε και ορμής **p,** που δεν ακολουθεί τροχιά αλλά κινείται ως κύμα κυκλικής συχνότητας $\omega = \varepsilon / \hbar$ και κυματανύσματος $\mathbf{k} = \mathbf{p} / \hbar$
2. Είναι ένα κύμα κυκλικής συχνότητας ω και κυματανύσματος $\mathbf{k}$, που αποτελείται από διάκριτα αδιαίρετα κομμάτια ενέργειας $\varepsilon = \hbar\omega$ και ορμής $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

II. Δύο τρόποι να αποδεχτούμε κάπως την αχώνευτη συγκατοίκηση σωματίου-κύματος:

1. Με την έννοια του $\psi(\mathbf{r},t)$ τέτοια ώστε $\left|\psi(\mathbf{r},t)\right|^2 d^3r = p(\mathbf{r},t)d^3r$ να είναι η **πιθανότητα** να βρεθεί το σωμάτιο τη χρονική στιγμή t στον στοιχειώδη όγκο d^3r γύρω από το σημείο **r.** Το $\psi(\mathbf{r},t)$ ικανοποιεί την περίφημη διαφορική εξίσωση του Schroedinger (ή την εξίσωση του Dirac). Η πρώτη έχει αφετηρία τη σχέση κινητικής ενέργειας-ορμής, $\varepsilon = \mathbf{p}^2 / 2m_0$, ενώ η δεύτερη την ακριβή (σχετικιστική) σχέση $\varepsilon = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$
2. Να δεχτούμε ότι η μετακίνηση του σωματίου από το σημείο Α στο σημείο Β δεν γίνεται μέσω της κλασικής τροχιάς αλλά μέσω όλων των δυνατών διαδρομών (περιλαμβανόμενης και της κλασικής τροχιάς) από Α προς Β, όπου για κάθε διαδρομή δ_j υπολογίζεται ένα πλάτος πιθανότητας a_j τέτοιο ώστε η πιθανότητα μετάβασης από το Α στο Β να είναι $\left|\sum_j a_j\right|^2$

III. Αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg

1. Ξεκαθαρίστε τους ορισμούς:
   $\langle x\rangle \equiv \int p(x)\,x\,dx,\ \langle x^2\rangle \equiv \int p(x)\,x^2\,dx,\ (\Delta x)^2 \equiv \int p(x)\left(x-\langle x\rangle\right)^2 dx = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$. Αντίστοιχοι ορισμοί ισχύουν για τις συνιστώσες y και z, όπως και για τις συνιστώσες $p_x,\ p_y,\ p_z$. Συνήθως οι μέσες τιμές $\langle x\rangle,\ \langle y\rangle, \langle z\rangle, \langle p_x\rangle, \langle p_y\rangle, \langle p_z\rangle$ είναι μηδέν.
2. Η αρχή της απροσδιοριστίας προκύπτει από τον κυματικό χαρακτήρα του σωματίου. Το φυσικό νόημα της θεμελιώδους αυτής σχέσης, $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2$, είναι ότι, εάν ένα κυματοσωμάτιο είναι περιορισμένο σε ένα μήκος της τάξης του Δx, τότε δεν είναι δυνατόν να είναι ακίνητο, θα κινείται πίσω-μπρος χωρίς σταματημό έτσι ώστε το τετράγωνο της ορμής του p_x^2 να είναι κατά μέσο όρο μεγαλύτερο ή ίσο του $\hbar^2 / 4\Delta x^2$, άρα και η συνιστώσα της κινητικής του ενέργειας $p_x^2 / 2m$ θα είναι κατά μέσο όρο μεγαλύτερη ή ίση του $\hbar^2 / 8m\Delta x^2$. Το ίδιο φυσικά ισχύει και για τις άλλες δύο συνιστώσες και επομένως , εάν ένα σωμάτιο είναι περιορισμένο σε ένα όγκο V ακτίνας r , τότε η

ελάχιστη κινητική του ενέργεια δεν μπορεί να είναι μικρότερη από περίπου $\left(4,8\right)\hbar^2 / mV^{2/3} \approx \left(1,85\right)\hbar^2 / mr^2$. **Πώς θα αλλάξει ο τύπος για την ελάχιστη κινητική ενέργεια, εάν η σχέση ενέργειας-ορμής είναι η ακραία σχετικιστική, ε=cp ;**

Απαντήστε γραπτώς (ή εν ανάγκη ηλεκτρονικά) μέχρι την 6η /10/2016.

IV. Απαγορευτική αρχή του Pauli

1. Η απουσία τροχιάς δεν επιτρέπει να ξεχωρίσουμε ποιο κυματοσωμάτιο είναι ποιο μεταξύ **όμοιων** κυματοσωματίων που έχουν απλωθεί στην **ίδια περιοχή** του χώρου. Αυτή η μη διακρισιμότητα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι εναλλαγή του ονόματος δύο κυματοσωματίων αφήνει τις παρατηρούμενες ιδιότητες αναλλοίωτες πράγμα που συνεπάγεται ότι $\psi(1,2) = \pm\psi(2,1)$. Το άνω πρόσημο ισχύει για σωμάτια με ακέραιο σπιν (τα λεγόμενα **μποζόνια**) και το κάτω για σωμάτια με ημιακέραιο σπιν (τα λεγόμενα **φερμιόνια**). Έπεται ότι δύο φερμιόνια δεν μπορούν να καταλάβουν την ίδια χωρική κατάσταση και με την ίδια προβολή του σπιν. Αντίθετα ένα μποζόνιο είναι τόσο πιο πιθανό να καταλάβει μια χωρική/σπιν κατάσταση όσο πιο πολλά όμοια μποζόνια βρίσκονται ήδη στην κατάσταση αυτή. (Δύο «τίμια» κλασικά ζάρια έχουν 36 ισοπίθανες καταστάσεις, δύο «τίμια» μποζονικά ζάρια έχουν 21 ισοπίθανες καταστάσεις, ενώ δύο «τίμια» φερμιονικά ζάρια έχουν 15 ισοπίθανες καταστάσεις. **Γιατί ;)**
2. Εάν N όμοια φερμιόνια βρεθούν στον ίδιο χώρο προκειμένου να μην παραβιάσουν την αρχή του Pauli μπορούν να χωρίσουν το χώρο σε N/2 ίσους υποχώρους (αν έχουν σπιν ½) και σε κάθε υποχώρο να τοποθετηθούν δύο με αντίθετες προβολές του σπιν. Τότε όμως, επειδή ο όγκος που περιορίζεται το κάθε φερμιόνιο είναι πια $V/(N/2) = 2V/N,$ η κινητική ενέργεια του κάθε φερμιονίου θα είναι $\varepsilon = \left(4,8\right)\hbar^2 / m\left(2V/N\right)^{2/3} = (2,87)\hbar^2 N^{2/3} / mV^{2/3}$ και η ολική κινητική ενέργεια $E_K = N\varepsilon$ θα είναι $E_K = N\varepsilon = \left(2,87\right)\hbar^2 N^{5/3} / mV^{2/3} = (1,105)\hbar^2 N^{5/3} / mr^2$.
   Πώς θα αλλάξει αυτός ο τύπος αν η σχέση κινητικής ενέργειας-ορμής είναι αυτή της ακραίας σχετικιστικής περίπτωσης, ε=cp ; Απαντήστε γραπτώς (ή …) μέχρι 6/10/2016
3. Η έννοια της **ενέργειας Fermi,** E_F, η σύνδεσή της με τον εναλλακτικό ακριβή προσδιορισμό της ελάχιστης ολικής κινητικής ενέργειας, E_K, *N* όμοιων φερμιονίων και η σχέση της με την ποσότητα $\varepsilon \equiv E_K / N$

V. Αρχή του "Schroedinger"

1. Ενα κλασικό κύμα και επομένως και ένα κυματοσωμάτιο που περιορίζεται σε μια **πεπερασμένη περιοχή του χώρου** έχει διάκριτες τιμές (μη συνεχείς) στο φάσμα συχνοτήτων ή ενεργειών. Θυμηθείτε τις συχνότητες που παράγουν οι χορδές μιας κιθάρας, ή τις ενεργειακές στάθμες του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή ή τις ενεργειακές στάθμες στο άτομο του υδρογόνου.
2. Μελετήστε με **ιδιαίτερη προσοχή** το Σχ. 2.6, του βιβλίου, τη λεζάντα του και τα σχόλια που ακολουθούν (τα οποία επισημαίνουν τις διαφορές, υπό συνήθεις συνθήκες, μεταξύ των κυματοσωματίων ύλης και των κυματοσωματίων –φορέων αλληλεπιδράσεων).