23. $\rho+\delta\rho = m/(\upsilon-\delta\upsilon) = (m/\upsilon)/[1-(\delta\upsilon/\upsilon)] = \rho/[1-(\delta\upsilon/\upsilon)]$ (υ είναι ο όγκος μάζας m)

$(\rho+\delta\rho)/\rho = 1/[1-(\delta\upsilon/\upsilon)] = 1+(\delta\upsilon/\upsilon)$ (σε 1^{η} τάξη ως προς το μικρό $\delta\upsilon/\upsilon$)

Αλλά από τον ορισμό του B εχουμε $\delta\upsilon/\upsilon=\delta P/B$, όπου $\delta P=\rho g d$ και $B=\rho v^2$.

Επομένως $\delta\upsilon/\upsilon=\delta P/B=gd/v^2$=98100/2250000=**4,36%=**$\delta\rho/\rho$ (σε πρώτη τάξη**).**

Η απάντηση μέχρις εδώ είναι πλήρως ικανοποιητική.

Αν όμως έχετε ενδιαφέρον για παραπάνω, όχι αναγκαίους υπολογισμούς , τότε διαβάστε το παρακάτω:

Σε δεύτερη τάξη ως προς $\delta\rho/\rho$, $\delta P = <\rho> gd = [(2\rho+\delta\rho)/2\ ]gd$. Το δg είναι αμελητέο. Το $\mathrm{B}+\delta\mathrm{B} = \mathrm{B}+5\mathrm{B}(\delta r/r)$, ενώ το $\rho+\delta\rho = \rho+3\rho(\delta r/r)$ σε πρώτ τάξη ως προς δr/r. Επομένως σε δεύτερη τάξη $(\delta\upsilon/\upsilon) = \delta P/B = gd\rho[1+(\delta\rho/2\rho)]/\mathrm{B}[1+(5\delta\rho/3\rho)]$ $=(\delta\upsilon/\upsilon)$ (πρώτης τάξης) $(1-(7\delta\upsilon/10\delta\upsilon)) = (\delta\upsilon/\upsilon)-0,7(\delta\upsilon/\upsilon)^2$ $(1-(7\delta\upsilon/10\delta\upsilon) = (\delta\upsilon/\upsilon)-0,7(\delta\upsilon/\upsilon)^2$.

Αρα $1+\delta\rho/\rho = 1/\{1-(\delta\upsilon/\upsilon)+0,7(\delta\upsilon/\upsilon)^2\} = 1+(\delta\upsilon/\upsilon)+(1-0,7)(\delta\upsilon/\upsilon)^2 = 1+(\mathbf{4,417}\%)$ (σε δεύτερη ταξη ως προς (δυ/υ).

24.

(1) Αν κάνουμε την εύλογη παραδοχή ότι $<p_\mathrm{i}>=0,\ \mathrm{i}=\mathrm{x,y,z}$, τότε από τον ορισμό της τυπικής απόκλισης έχουμε ότι $\Delta p_\mathrm{i}^2 \equiv <p_\mathrm{i}^2>$. Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με την αρχή του Heisenberg συνεπάγεται ότι $<p_\mathrm{i}^2> \ge \hbar^2/4<x_\mathrm{i}^2>$ και επομένως $<\vec{p}^2> \ge 9\hbar^2/4<\vec{r}^2>$.

Είναι τελείως προφανές ότι το $<\vec{r}^2>$ είναι ανάλογο της ακτίνας R^2 ή του όγκου $V^{2/3}$, αφού $V \propto R^3$. Άρα η κινητική ενέργεια, $\varepsilon_\mathrm{K} = \vec{p}^2/2m$, ενός μη σχετικιστικού σωματίου μάζας m περιορισμένου σε ένα όγκο V ακτίνας R είναι ανάλογη του

$$\varepsilon_\mathrm{K} \propto \hbar^2/2mV^{2/3} \propto \hbar^2/2mR^2 \qquad (1)$$

Εάν έχουμε N όμοια **φερμιόνια** ελεύθερα να κινηθούν στον όγκο V (στην περίπτωσή μας τα N_{e} ηλεκτρόνια σθένους των οποίων ο αριθμός ισούται με τον αριθμό των ατομων, αφού το σθένος του νατρίου είναι 1 (τα υπόλοιπα 10 ηλεκτρονια του κάθε ατόμου νάτριου εξακολουθούν να είναι παγιδευμένα γύρω από τον κάθε πυρήνα και επομένως δεν υπόκεινται στον περιορισμό του όγκου V)) τότε για να ικανοποιήσουν την αρχή του Pauli περιορίζονται ανά δύο σε όγκο $V/(N_{\mathrm{e}}/2) = 2V/N_{\mathrm{e}}$. Έτσι η κινητική ενέργεια του **κάθε** ηλεκτρονίου σθένους προκύπτει κατά μέσον όρο αντικαθιστώντας τον ογκο V στον τύπο (1) από την έκφραση $2V/N_{\mathrm{e}}$ και έτσι έχουμε

$$\varepsilon_{\mathrm{K}} \propto \hbar^2 N_{\mathrm{e}}^{2/3}/2mV^{2/3} \propto \hbar^2 N_{\mathrm{e}}^{2/3}/2mR^2 \tag{2}$$

Επομένως η ολική κινητική ενέργεια των N_{e} ηλεκτρονίων είναι

$$E_{\mathrm{K}} = N_{\mathrm{e}}\varepsilon_{\mathrm{K}} = a'\hbar^2 N_{\mathrm{e}}^{5/3}/2mV^{2/3} = a\hbar^2 N_{\mathrm{e}}^{5/3}/2mR^2 \tag{3}$$

όπου $a,\ a'$ είναι οι συντελεστές ανάλογίας.

(2) Εάν προσθέσουμε ένα ακόμη ηλεκτρόνιο σθένους η ολική κινητική ενέργεια θα γίνει $E_{\mathrm{K}}(N_{\mathrm{e}}+1)$ από $E_{\mathrm{K}}(N_{\mathrm{e}})$. Η αύξηση $E_{\mathrm{K}}(N_{\mathrm{e}}+1) - E_{\mathrm{K}}(N_{\mathrm{e}})$ ισούται κατ' ανάγκη με E_{F}, αφού το επί πλέον ηλεκτρόνιο θα τοποθετηθεί οπωσδήποτε στην ανώτερη κατειλημμένη στάθμη που είναι εξ ορισμού η E_{F}. Αρα

$$E_{\mathrm{F}} = [E_{\mathrm{K}}(N_{\mathrm{e}}+1) - E_{\mathrm{K}}(N_{\mathrm{e}})]/1 = (\partial E_{\mathrm{K}}/\partial N_{\mathrm{e}})_{\mathrm{V}} \tag{4}$$

ή

$$E_{\mathrm{F}} = (5/3)a\hbar^2 N_{\mathrm{e}}^{2/3}/2mR^2 \tag{5}$$

(3) Η ενέργεια Fermi προκύπτει επίσης από τη σχέση $E_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}^2/2m_{\mathrm{e}}$, όπου το p_{F} υπολογίζεται από τον δοσμένο τύπο και προκύπτει ίσο με $p_{\mathrm{F}} = (\hbar/R)(9\pi N_{\mathrm{e}}/4)^{1/3}$. Αντικαθιστώντας στην $E_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}^2/2m_{\mathrm{e}}$ και συγκρίνοντας με την (5) βρίσκουμε ότι

$$a = 0{,}3(9\pi/4)^{2/3} \approx 1{,}105.$$

(4) Η ολική δυναμική ενέργεια Coulomb, ως εκτατική ιδιότητα, οφείλει να έχει τη μορφή

$$E_{\mathrm{C}} = -0{,}56N_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^2/r) = -0{,}56N_{\mathrm{e}}^{4/3}(\mathrm{e}^2/R) \tag{6}$$

όπου το τελευταίο σκέλος προκύπτει από τη σχέση $(4\pi/3)R^3 = N_e(4\pi/3)r^3$

(5) Ελαχιστοποιώντας το άθροισμα $E_K + E_C$ ως προς R (σχέσεις (3) και (6)) βρίσκουμε

$$R = (2{,}21/0{,}56)(\hbar^2/m_e e^2)N_e^{1/3} = 3{,}946 a_B N_e^{1/3} \quad (7)$$

Η μάζα του συστήματος ισούται με $M = A_B N_a m_u$ όπου το $A_B \approx Z + N$ με N λίγο μεγαλύτερο από το Z=11 (Z=11, γιατί το νάτριο είναι στην 1η στήλη και στην τρίτη γραμμή) και κατά προτίμηση άρτιο, δηλαδή N=12 και $A_B \approx 23$. Αφού το σθένος είναι 1, το $N_a = N_e$, το δε $m_u = 1823 m_e$. Η πυκνότητα προκύπτει από τη σχέση ρ=M/V= $M/(4\pi/3)R^3$, λαμβάνοντας υπόψη τις αμέσως προηγούμενες σχέσεις και την (7) οπότε

$$\rho = (1823 \times 23 \times m_e)/[(4\pi/3)3{,}946^3 a_B{}^3] = 1\,\mathrm{g/cm^3} \quad (8)$$

Η παραπάνω λύση, για λόγους παιδαγωγικούς και μόνο, είναι πολύ πιο αναλυτική από όσο χρειάζεται.