Κεφάλαιο Α

Η Φυσική και ο Κόσμος ο μικρός, ο Μέγας

Α, μα του ανθρώπου το άπλωμα
το χειροπιαστό να ξεπερνάει πρέπει.
Αλλιώς ο ουρανός γιατί υπάρχει;

R. Browning

Σύνοψη. *Παρουσιάζονται το αντικείμενο και η μεθοδολογία της Φυσικής καθώς και μια περίληψη των κύριων σημείων και των βασικών ιδεών αυτού του βιβλίου*.

Α.1. Τα καίρια ερωτήματα

Οι λεγόμενες θετικές επιστήμες, αναβίωσαν μετά το Μεσαίωνα, υπό το ενιαίο και περιεκτικό όνομα Φιλοσοφία της Φύσης. Στη συνέχεια, καθώς εξελίσσονταν σε βάθος και γίνονταν πιο ποσοτικού χαρακτήρα, χωρίστηκαν σταδιακά σε επί μέρους επιστήμες, όπως Φυσική, Χημεία, Βιολογία, κλπ. Η σύγχρονη Φυσική, χάρη στα μεγάλα επιτεύγματα του $20^{ου}$ αιώνα με προεξάρχουσα την Κβαντομηχανική, έχει επεκτείνει πια το βεληνεκές της έτσι ώστε ο Κόσμος ο μικρός, ο Μέγας να αποτελεί το δυνάμει αντικείμενό της. Για να εκτιμήσει κανείς την αξία της σύγχρονης Φυσικής και να την αγαπήσει πραγματικά, δεν πρέπει να ξεχνά αυτό το συγκλονιστικό γεγονός: Το ότι δηλαδή η Φυσική σήμερα είναι σε θέση να παρέχει αξιόπιστες απαντήσεις στα πιο βασικά, πανάρχαια, αλλά πάντα επίκαιρα ερωτήματα, που δεν είναι άλλα από τα ακόλουθα:

1 *Πώς είναι φτιαγμένος ο Κόσμος;*

2 *Υπάρχει μια υποκείμενη απλότητα στην τεράστια περιπλοκότητα του Κόσμου;*

Αυτά τα ερωτήματα, που χαρακτηρίζουν "την πραγματική ποιητική και μυθική διάσταση της ανθρώπινης ύπαρξης", δεν έχουν συνήθως την ευκαιρία να αναδειχθούν γιατί τα καταπνίγει ο τρόπος που διδάσκεται η Φυσική και στη Μέση Εκπαίδευση αλλά και στα Πανεπιστήμια. Δηλαδή μια διδασκαλία με έμφαση σε έτοιμες απαντήσεις που αφορούν συνήθως τεχνικές λεπτομέρειες. Θυμίζει η διδασκαλία αυτή το απόφθεγμα του Woody Allen:

"Έχω μια απάντηση, μου λέτε την ερώτηση;"

Είναι κρίμα, γιατί έτσι, όχι μόνο το ευρύτερο κοινό, αλλά ακόμη και ειδικοί δεν γίνονται κοινωνοί της συναρπαστικής πορείας της ανθρώπινης διάνοιας προς τις απαντήσεις στα καίρια αυτά ερωτήματα.

Φυσικά, η Φυσική και οι άλλες Επιστήμες, πέρα από τα νοητικά τους επιτεύγματα, έχουν θέσει τα θεμέλια για τη δημιουργία του εντυπωσιακού τεχνολογικού περιβάλλοντος. Έτσι ο κόσμος που καλείται κανείς να κατανοήσει σε αδρές γραμμές, δεν είναι μόνο ο *Φυσικός Κόσμος* αλλά και οι *ανθρωπογενείς προσθήκες* σ' αυτόν.

Τα τελευταία χρόνια την Φυσική έχει αρχίσει να την απασχολεί ένα επίσης αρχέγονο αλλά πάντα επίκαιρο και πολύ πιο δύσκολο ερώτημα[1]:

3 *Πώς έγινε ο Κόσμος;*

Τα παρατηρησιακά δεδομένα (όπως είναι, π.χ. η απομάκρυνση των γαλαξιών, η φασματική και γωνιακή κατανομή της κοσμικής ακτινοβολίας μικροκυμάτων, κλπ.) σε συνδυασμό με τις βασικές θεωρίες της Φυσικής έχουν επιτρέψει να ανασυνθέσουμε σε αδρές γραμμές μερικές κύριες φάσεις της ιστορίας του Σύμπαντος. Φυσικά ολόκληρες περίοδοι παραμένουν άγνωστες και πολλά επί μέρους ερωτήματα παραμένουν αναπάντητα και είναι αντικείμενα έντονης παρατηρησιακής και θεωρητικής ανάλυσης και έρευνας. Μεταξύ αυτών αξίζει να αναφέρουμε το πώς, πού και πότε ξεκίνησε το φαινόμενο της Ζωής και -στο θεωρητικό επίπεδο- τις ανολοκλήρωτες προσπάθειες για το πάντρεμα της Κβαντομηχανικής με τη θεωρία βαρύτητας του Einstein. (Βλέπε, π.χ., τα βιβλία του Chaisson, *Cosmic Dawn*, και του Hawking, *Το χρονικό του χρόνου*).

[1] Η μεγάλη πρόοδος που έχει επιτευχθεί όσον αφορά στα ερωτήματα του πώς είναι φτιαγμένος ο Κόσμος οφείλεται αναμφίβολα και στην αναγωγική μέθοδο που «σπάει» το πρόβλημα στα στοιχειώδη τμήματά του και εξετάζει το καθένα μόνο του και χωριστά από τα άλλα και στη συνέχεια ανασυνθέτει το σύνολο «βάζοντας τα κομμάτια στη θέση τους». Όμως σε «ιστορικής φύσεως» ερωτήματα, όπως είναι το πώς έγινε, η αναγωγική μέθοδος δεν είναι εν γένει εφαρμόσιμη, αφού το «όλον» μπορεί να επηρεάζει το «επί μέρους». Επομένως για ερωτήματα του πώς έγινε χρειάζεται μια ολιστική προσέγγιση, πράγμα, φυσικά, πολύ πιο δύσκολο.

Α.2. Η μεθοδολογία της Φυσικής

Αν και το αντικείμενο της Φυσικής είναι δυνάμει τόσο ευρύ ώστε να υπερκαλύψει όλες τις επιστήμες, στην πράξη περιορίζεται από την απαιτητική μεθοδολογία της Φυσικής που βασίζεται στα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

α. Χρήση παρατηρήσεων και κυρίως πειραμάτων που δίνουν ποσοτικά αποτελέσματα (αριθμούς).
β. Εξάρτηση των αποτελεσμάτων από ένα μικρό αριθμό ποσοτικά ελέγξιμων παραμέτρων.
γ. Απαίτηση ποσοτικής πρόβλεψης και ερμηνείας των παρατηρήσεων ή των πειραμάτων με αφετηρία ένα μικρό αριθμό θεμελιακών σχέσεων.
δ. Απαραίτητη χρήση της μαθηματικής γλώσσας που επιτρέπει *εννοιολλογική* διεύρυνση και επιτυγχάνει οικονομία, σαφήνεια και ακρίβεια.

Είναι ακριβώς αυτή η μεθοδολογία της Φυσικής και ιδιαίτερα το στοιχείο *γ.*, που την έχει αναδείξει ως το θεμέλιο των άλλων Επιστημών και αυτών της Φύσης, αλλά και αυτών του Μηχανικού. Αλλά παράλληλα, όπως αναφέραμε προηγουμένως, θέτει και εμπόδια στη διεύρυνση του πεδίου εφαρμογής της. Έτσι η Φυσική έχει ένα διττό ρόλο: Αφενός μεν παρέχει τα θεμέλια πάνω στα οποία βασίζονται οι άλλες Επιστήμες αλλά και τα τεχνολογικά εργαλεία για τη συγκέντρωση αναγκαίων πληροφοριών που τις αφορούν, αφετέρου δε τείνει -στο πλαίσιο των περιορισμών της μεθοδολογίας της- να απλωθεί σταδιακά ‘στα χωράφια των άλλων Επιστημών’, όπως δείχνει ο επόμενος πίνακας Α.1, μέχρι του σημείου να απορροφήσει κάποιες από αυτές. Π.χ. η Αστρονομία έχει γίνει πια κλάδος της Φυσικής. Βέβαια το αντικείμενο των άλλων μεγάλων Επιστημών, όπως είναι η Χημεία και ιδίως η Βιολογία, είναι τόσο ευρύ και εντυπωσιακά περίπλοκο ώστε ο κύριος όγκος του να μη μπορεί να αναχθεί στη Φυσική, η οποία περιορίζεται σε επιλεκτικές διεισδύσεις. Αξίζει να αναφέρουμε επίσης τη σχέση της Φυσικής με την νεοπαγή Επιστήμη της Πληροφορικής, η οποία είχε ως αφετηρία τα μαθηματικά και την κάλυψη υπολογιστικών αναγκών αλλά εξελίχθηκε δημιουργώντας το δικό της αντικείμενο, τη δική της μεθοδολογία, αλλά και την εξυπηρέτηση πολλαπλών αναγκών και όχι μόνο επιστημονικών. Η Φυσική αντιμετωπίζει την Πληροφορική αφενός μεν ως ένα πολύτιμο εργαλείο, αφετέρου δε της παρέχει το υλικό υπόβαθρο για την παρούσα και τη μελλοντική, ενδεχομένως επαναστατική, ανάπτυξή της.

Πιν.Α.1: Κλάδοι της Φυσικής και η σχέση τους με άλλους επιστημονικούς και τεχνολογικούς τομείς

Μαθηματικά[2]	Φυσική στοιχειωδών σωματίων Πυρηνική Φυσική Ατομική και μοριακή Φυσική, Φυσική στερεάς κατάστασης (ή Φυσική της συμπυκνωμένης ύλης)	Χημεία Επιστήμη Υλικών
	Βιοφυσική	Βιολογία
	Γεωφυσική	Γεωλογία
	Ατμοσφαιρική φυσική	Μετεωρολογία
	Διαστημική φυσική Αστροφυσική Κοσμολογία	Αστρονομία
Τεχνολογικοί τομείς	ΗΜ κύματα Λέϊζερ	Τεχνολογία
	Τρανζίστορ Ολοκληρωμένα κυκλώματα Μαγνητικές μνήμες	Ηλεκτρονικοί υπολογιστές
	Ακτίνες Χ Υπέρηχοι Μαγνητική Τομογραφία κ.λπ.	Ιατρική τεχνολογία

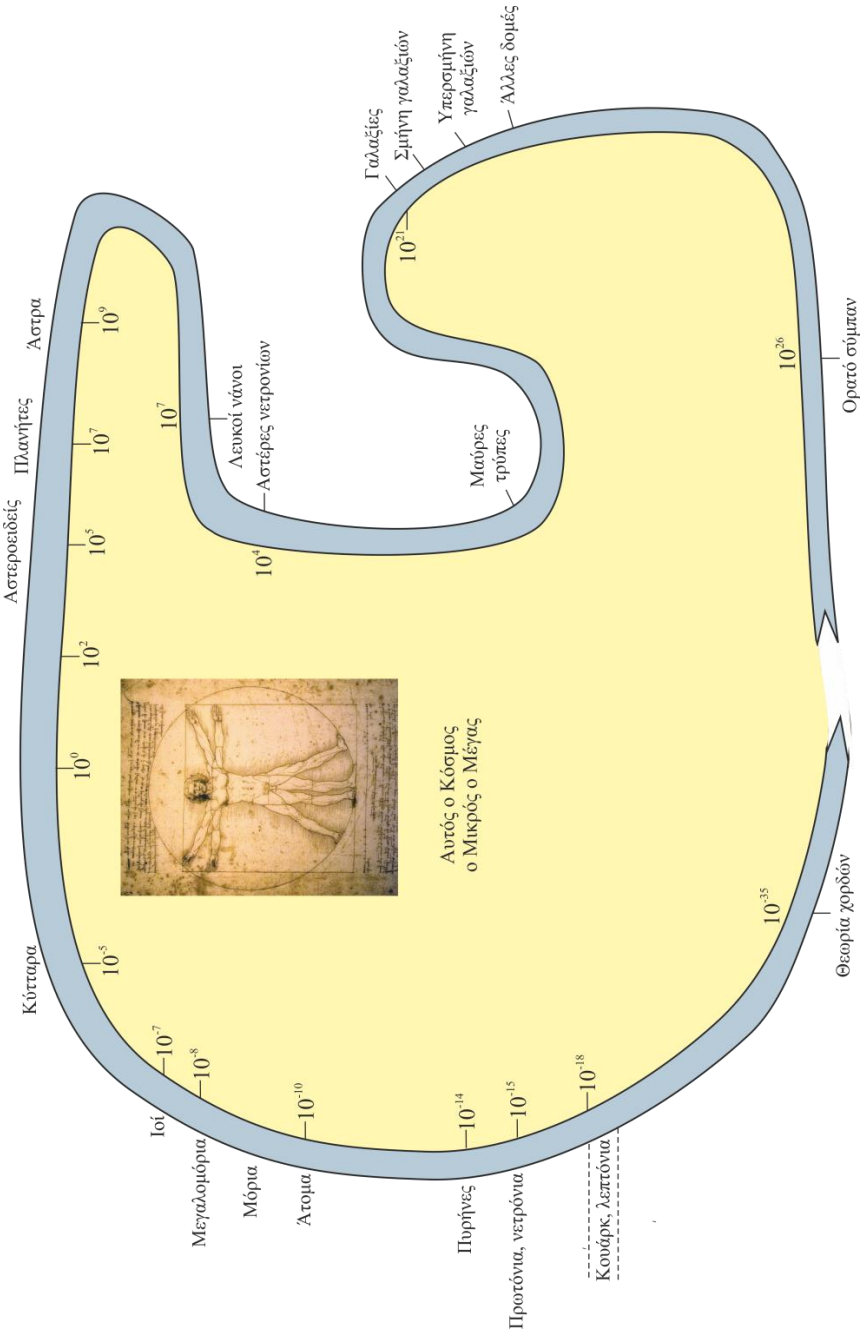
Α.3. Το αντικείμενο της Φυσικής

Στον επόμενο πίνακα, παρουσιάζονται οι κύριες δομές του Φυσικού Κόσμου, αρχίζοντας από τις απειροελάχιστες και φθάνοντας μέχρι το Σύμπαν. Η μελέτη και η κατανόηση αυτών των δομών, αποτελεί ένα βασικό μέρος του αντικειμένου της Φυσικής αλλά και άλλων Επιστημών. Π.χ. τα μόρια αποτελουν αντικείμενο κυρίως της Χημείας αλλά σε κάποιο βαθμό και της Βιολογίας. Τα κύτταρα και οι βιολογικοί οργανισμοί, όπου εμφανίζεται η αποθέωση της περιπλοκότητας, είναι προφανώς το κατ' εξοχήν αντικείμενο της Βιολογίας και σε πιο εξειδικευμένο βαθμό της Ιατρικής.

[2] Βλέπε το βιβλίο του Γ. Λ. Ευαγγελόπουλου, *Μαθηματικά και Φυσική, μια Ιδιαίτερη Σχέση*, Εκδόσεις Ευρασία, Αθήνα, 2010.

Πιν. Α.2: Τα βασικά επίπεδα οργάνωσης της ύλης

Επίπεδο οργάνωσης της ύλης	**Κλίμακα μήκους** (σε m)	**Συστατικά**	**Είδος αλληλεπιδράσεων που καθορίζουν τη δομή του** (κατά σειρά σπουδαιότητας)
Κουάρκ	$<10^{-18}$	φαίνεται ότι είναι στοιχειώδη	-
Ηλεκτρόνιο	$<10^{-18}$	φαίνεται ότι είναι στοιχειώδες	-
Πρωτόνιο	10^{-15}	u,u,d κουάρκ	ισχυρές, ασθενείς, Η/Μ
Νετρόνιο	10^{-15}	u,d,d κουάρκ	ισχυρές, ασθενείς , Η/Μ
Πυρήνες	10^{-15}-10^{-14}	πρωτόνια, νετρόνια	ισχυρές, ασθενείς, ΗΜ
Άτομα	10^{-10}	πυρήνας , ηλεκτρόνια	Η/Μ
Μόρια	$>10^{-10}$	άτομα, ή/και ιόντα και ηλεκτρόνια	Η/Μ
Στερεά (θεμελιώδης κυψελίδα) (π.χ. μέταλλα)	$>10^{-10}$	άτομα, ή /και ιόντα και ηλεκτρόνια	Η/Μ
Κύτταρα	$\gtrsim 10^{-6}$	μόρια	Η/Μ
Βιολογικοί οργανισμοί (π.χ. άνθρωπος)	10^{-8}-10^{2} (1 m)	μόρια, κύτταρα, ιστοί, όργανα, κλπ	Η/Μ
Πλανήτες	10^{6}-10^{8}	στερεά, υγρά, αέρια	Η/Μ, Βαρυτικές
Άστρα	$\gtrsim 10^{9}$	ιόντα, ηλεκτρόνια, πυρήνες	βαρυτικές, ισχυρές, ασθενείς, Η/Μ
Λευκοί Νάνοι	10^{7}	πυρήνες, ηλεκτρόνια	βαρυτικές
Αστέρες Νετρονίων	10^{4}	νετρόνια,πρωτόνια, ηλεκτρόνια	βαρυτικές
Αστρικές Μαύρες Τρύπες	10^{4}	?	βαρυτικές
Γαλαξίες	10^{21}	άστρα +...	βαρυτικές, άλλες ;
Σύμπαν	10^{26}	γαλαξίες +…	βαρυτικές, άλλες;



Σχ. Α.1: Απεικόνιση του Πιν. Α.2. Σύνδεση του ελάχιστου και του (νυν) μέγιστου στο απώτατο παρελθόν (το φίδι-Σύμπαν δαγκώνει 'τρόπον τινά' την ουρά του)

Α.4. Οι τρεις βασικές Ιδέες της Φυσικής

1η Ιδέα, η ατομική δομή της ύλης: *Η ύλη αποτελείται από μικροσκοπικές* αδιαίρετες *οντότητες, τα* στοιχειώδη σωμάτια. *Ως αποτέλεσμα, οι ιδιότητες της όποιας ύλης σε ισορροπία ανάγονται στις ιδιότητες και στις κινήσεις των στοιχειωδών σωματίων. Οι κινήσεις τους καθορίζονται και από τις μεταξύ τους δυνάμεις (πιο γενικά τις μεταξύ τους άλληλεπιδράσεις) και από τους νόμους κίνησης*.

Αναζητώντας τα στοιχειώδη σωμάτια ας θεωρήσουμε ένα ιδεατό ταξίδι προς τα άδυτα του μικρόκοσμου με αφετηρία την κλίμακα του ανθρώπου (το 1m). Ο πρώτος σταθμός, έπειτα από μια σμίκρυνσή μας 100.000 φορές (που αντιστοιχεί σε κλίμακα $10^{-5}\,\mathrm{m}$), μας φέρνει στο επίπεδο ενός λευκού αιμοσφαιρίου. Ο επόμενος σταθμός με μια νέα σμίκρυνση πάλι 100.000 φορές (που αντιστοιχεί σε κλίμακα πια $10^{-10}\,\mathrm{m}$) μας φέρνει στα άτομα, έστω στο άτομο του υδρογόνου, που αποτελείται από ένα σωμάτιο, που ονομάζεται πρωτόνιο, και ένα άλλο στοιχειώδες σωμάτιο, που ονομάζεται **ηλεκτρόνιο**. Το ηλεκτρόνιο, που είναι περίπου 1836 φορές ελαφρύτερο του πρωτονίου, περιφέρεται γύρω από το πρωτόνιο ορίζοντας με την περιοχή της κίνησής του το μέγεθος του ατόμου (διευκρινίζουμε ότι οι διαστάσεις του ίδιου του ηλεκτρονίου, αν υπάρχουν, είναι τουλάχιστον 100 εκατομμύρια φορές μικρότερες από αυτές του ατόμου). Το πρωτόνιο δεν είναι στοιχειώδες. Αποτελείται από τρία στοιχειώδη σωμάτια, δύο ίδια, που το καθένα τους λέγεται **πάνω κουάρκ (**και συμβολίζεται με το γράμμα **u)** και ένα τρίτο που λέγεται **κάτω κουάρκ (**και συμβολίζεται με το γράμμα **d)**. Για το μέγεθος των κουάρκ ισχύει ό,τι είπαμε για τις πρακτικά μηδενικές διαστάσεις του ηλεκτρονίου. Η μάζα τους, που δεν έχει προσδιορισθεί πλήρως, είναι γύρω στις δέκα φορές μεγαλύτερη από αυτήν του ηλεκτρονίου. Το μέγεθος του πρωτονίου, που καθορίζεται από την περιοχή κίνησης των τριών κουάρκ γύρω από το κέντρο μάζας τους, έχει μετρηθεί και είναι περίπου 100.000 φορές μικρότερο από αυτό του ατόμου, δηλαδή κάτι λιγότερο από $1{,}7\times10^{-15}\,\mathrm{m}$.

Από τα τρία αυτά είδη στοιχειωδών σωματίων, *τα πάνω κουάρκ, τα κάτω κουάρκ και τα ηλεκτρόνια* αποτελείται όλη η ύλη μέσα μας, γύρω μας, στον πλανήτη μας, στον Ήλιο μας, στα δισεκατομμύρια δισεκατομμυρίων άλλα πλανητικά συστήματα, κλπ, κλπ. Είναι φυσικό, λοιπόν, στο βιβλίο αυτό να επανερχόμαστε ξανά και ξανά στις ιδιότητες και τις κινήσεις των τριών αυτών στοιχειωδών σωματίων.

Προς το παρόν όμως ο αναγνώστης πιθανόν να αναρωτιέται: Γιατί παγιδεύεται το ηλεκτρόνιο γύρω από το πρωτόνιο και έτσι δημιουργεί το άτομο του υδρογόνου; Γιατί τα τρία κουάρκ αλληλοπαγιδεύονται σχηματίζοντας έτσι το πρωτόνιο; Υποθέτω ότι όποιος ή όποια έχει το ενδιαφέρον να θέσει αυτά τα ερωτήματα, δεν θα δυσκολευτεί να βρει την απάντηση που

είναι ότι κάποιες ελκτικές δυνάμεις δρούν μεταξύ των σωματίων-στοιχειωδών ή σύνθετων- και τα αλληλοπαγιδεύουν με παρόμοιο τρόπο που η Γη έχει παγιδευτεί γύρω από τον Ήλιο. Αν όμως είναι έτσι, γιατί το ηλεκτρόνιο δεν πέφτει πάνω στο πρωτόνιο; Γιατί, καίτοι περιφέρεται γύρω από το πρωτόνιο, μένει τόσο πολύ μακριά του και σχεδόν πάντοτε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο; Γιατί, ενώ το άτομο του υδρογόνου συνεχώς υφίσταται συγκρούσεις, μένει αμετάβλητο έτσι ώστε τα βιβλία της Χημείας να μπορούν να του αποδίδουν σταθερές ιδιότητες; Γιατί το μόριο του DNA αναπαράγει με τέτοια θαυμαστή πιστότητα από γενιά σε γενιά το ίδιο βιολογικό είδος; Μάλιστα, η ίδια Κλασική Φυσική που εξηγεί το πώς έρχεται το σήμα στην τηλεόραση μας ή στο κινητό μας και χίλια-δυο άλλα φαινόμενα της καθημερινής μας ζωής οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ηλεκτρόνιο ώφειλε να πέσει πάνω στο πρωτόνιο σε ένα εκατοστό του δισεκατομμυριοστού του δευτερολέπτου (βλ. λυμένη άσκηση 4 κεφ. 4). Αν αυτό το συμπέρασμα ήταν σωστό δεν θα υπήρχαν τα άτομα, δεν θα υπήρχαν τα μόρια, δεν θα υπήρχαμε εμείς, δεν θα υπήρχε ο Κόσμος όπως τον ξέρουμε. Κάτι λοιπόν πρέπει να αλλάξει στην Κλασική Φυσική και να αλλάξει δραστικά, επαναστατικά. Και πράγματι άλλαξε, ξεκινώντας από την αυγή του $20^{ου}$ αιώνα και κατάληγοντας σε αυτό που ονομάζεται Κβαντική Φυσική, η οποία πηγάζει από την ακόλουθη $2^{η}$ βασική Ιδέα.

$2^{η}$ Ιδέα, ο κυματοσωματιδιακός δυισμός: *Όλα είναι κυματοσωμάτια, δηλαδή οντότητες διττής φύσης: Σωμάτια ως προς τη δομή τους (δηλαδή αποτελούμενα από ακέραιο αριθμό αδιαίρετων ποσοτήτων) χωρίς όμως να ακολουθούν τροχιά όπως θα ώφειλαν κλασικά, αλλά να κινούνται ως να ήσαν κύματα (δηλαδή ως να ήσαν συνεχώς κατανεμημένα στο χώρο).* Η Ιδέα αυτή εξειδικεύεται στις τρεις θεμελιώδεις αρχές της Κβαντικής Φυσικής:

α) *Αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg*, που εξασφαλίζει την αέναη, χωρίς σταματημό, κίνηση οποιουδήποτε *μικροσκοπικού* σωματίου εγκλωβισμένου εντός του *πεπερασμένου* όγκου μιας σύνθετης δομής. Αποτρέπεται έτσι, λόγω της κίνησης και της συνακόλουθης διασταλτικής πίεσης, η αυτόσύνθλιψη σύνθετων δομών την οποία τείνουν να επιβάλλουν οι αλληλεπιδράσεις (λόγω του ελκτικού συνολικά χαρακτήρα τους). Επί πλέον η παρουσία αέναης κίνησης ταυτόχρονα με ελκτικές δυνάμεις εξασφαλίζει την ύπαρξη του συστήματος σε μια *κατάσταση ελάχιστης εσωτερικής ενέργειας* στην οποία αναγκαστικά και νομοτελειακά πάντοτε επανέρχεται.

β) *Απαγορευτική αρχή του Pauli*, που ισχύει για τα σωμάτια ύλης, όπως είναι τα ηλεκτρόνια, τα κουάρκ και τα πρωτόνια, και η οποία ενισχύει δραστικά, όπως θα δούμε, την ελάχιστη ολική κινητική τους ενέργεια E_K. Η τελευταία δίνεται τελικά από τον ακόλουθο τύπο για N *ίδια* σωμάτια ύλης που το καθένα τους έχει μάζα m και κινείται (με ταχύτητα πολύ μικρότερη από αυτή του φωτός c) εντός όγκου V (για το σύμβολο $\hbar$ βλέπε παρακάτω):

$$E_K = a_K \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mV^{2/3}}, \qquad a_K = 2{,}87\,. \tag{A.1α}$$

Αν η ταχύτητα των σωματίων είναι παρόμοια με την ταχύτητα του φωτός c, όπως είναι για τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται π.χ. στο εσωτερικό ενός αστέρα νετρονίων (ακτίνας R και όγκου $V = (4\pi/3)R^3$), τότε

$$E_K = a'_K \frac{\hbar c N^{4/3}}{R}, \qquad a'_K = 1{,}44\,. \tag{A.1β}$$

Η σημασία των αρχών α) και β) και των συνακόλουθων τύπων (Α.1) είναι καίριας σημασίας προκειμένου να ισορροπήσουν (άρα και να υπάρξουν) οι διάφορες σταθερές δομές της ύλης. Με άλλα λόγια, οι δύο αυτές αρχές παρέχουν τον απαραίτητο μηχανισμό κατάλληλου μεγέθους που εξισορροπεί τη σύνθλιψη των δυνάμεων. (Βλ. και σχετικά σχόλια στο Σχ.2.4 σελ.57).

γ) *Αρχή φασματικής διακριτότητας του Schrödinger* που εξασφαλίζει ότι σύνθετα μικροσκοπικά σωμάτια, όπως π.χ. το άτομο του υδρογόνου, συμπεριφέρονται *μέχρις ενός ορίου* ως να ήσαν αναλλοίωτα και αδιαίρετα. Μια σοφή ρύθμιση εξισορρόπησης μεταξύ αφενός μεν σταθερότητας, αφετέρου δε δυνατότητας αλλαγής.

Παρόλη την καίρια σημασία της, η βασική Ιδέα του κυματοσωματιδιακού δυισμού παραμένει εν πολλοίς άγνωστη. Όπως παραμένει άγνωστο στους πολλούς το γεγονός ότι η Ιδέα αυτή δεν έχει μόνο ποιοτικό χαρακτήρα αλλά και ποσοτικό γιατί συνοδεύεται από μια νέα παγκόσμια σταθερά, τη σταθερά του Planck $\hbar$, που έχει παντού και πάντα την ίδια τιμή (η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι μια άλλη παγκόσμια σταθερά που έχει και αυτή παντού και πάντα την ίδια τιμή). Η σταθερά του Planck είναι παρούσα στους τύπους (Α.1) και, όπως θα δούμε στο παρόν βιβλίο, εμφανίζεται σε όλες τις κλίμακες της ύλης από το πρωτόνιο μέχρι τα άστρα και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ή να εκτιμήσουμε το μέγεθός τους και άλλες ιδιότητές τους. Ό,τι και να πω δεν είναι δυνατόν να υπερτονίσω τη σημασία της $2^{ης}$ Ιδέας (αυτής του κυματοσωματιδιακού δυισμού) και των τύπων (Α.1). Θα τολμήσω να πω ότι, *αν είναι να μείνει ένα μόνο πράγμα από τη μελέτη αυτού του βιβλίου ή ακόμη και από το σύνολο των πανεπιστημιακών σπουδών για το Φυσικό Κόσμο, αυτό θα πρέπει να είναι η ιδέα του κυματοσωματιδιακού δυισμού και των συνακόλουθων τύπων* (Α.1).

Και κάτι τελευταίο: Συχνά λέγεται και γράφεται ότι η Κβαντική Φυσική ισχύει μόνο στο μικρόκοσμο, ενώ η Κλασική Φυσική ισχύει στις συνήθεις κλίμακες προσιτές στις αισθήσεις μας. Μη το πιστεύετε: Όπως θα δείξουμε στο παρόν βιβλίο, οι ***ιδιότητες*** *όλων των δομών της ύλης* από το πρωτόνιο μέχρι και τα άστρα καθορίζονται από την Κβαντική Φυσική και όχι από την Κλασική. Όμως, για ***μακροσκοπικές κινήσεις***, όπως π.χ. η κίνηση των πλανητών περί τον Ήλιο, η Κβαντική Φυσική ανάγεται την Κλασική Φυσική. (Βλ. σχετικά και το τελευταίο σχόλιο στη σελίδα 74).

3η Ιδέα: *Οι σταθερές δομές της ύλης, δηλαδή αυτές που βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία, αντιστοιχούν στο ελάχιστο της εσωτερικής ενέργειας* (*που οφείλεται και στην αέναη κίνηση των σωματίων που αποτελούν την κάθε δομή και στις μεταξύ τους δυνάμεις*). *Ισχύει και το αντίστροφο.*

Αργότερα, στο 3ο κεφάλαιο, θα επαναδιατυπώσουμε την Ιδέα αυτή διευκρινίζοντας τις συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει και λαμβάνοντας υπόψη και τον 2ο Νόμο της Θερμοδυναμικής. Αυτή η 3η Ιδέα μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε θεωρητικά τις σταθερές δομές της ύλης μέσω του υπολογισμού της εσωτερικής τους ενέργειας και της ελαχιστοποίησής της.

Α.5. Οι βασικές Ιδέες εν δράσει

1. Πρωτόνια και νετρόνια: Είδαμε ότι δύο πάνω κουάρκ και ένα κάτω σχηματίζουν το πρωτόνιο. Σχηματίζεται επίσης και ένα άλλο σωμάτιο, που ονομάζεται **νετρόνιο** και έχει ίδιο μέγεθος με το πρωτόνιο. Έχει λίγο πιο μεγάλη εσωτερική ενέργεια από το πρωτόνιο και αποτελείται από δύο κάτω κουάρκ και ένα πάνω. Ως αποτέλεσμα της διαφορετικής αυτής σύνθεσης, το μεν νετρόνιο, όπως θα δούμε, είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, ενώ το πρωτόνιο είναι ηλεκτρικά φορτισμένο. Το νετρόνιο, όταν είναι απομονωμένο και σε αντίθεση με το πρωτόνιο, είναι μετασταθές, δηλαδή μετατρέπεται σε πρωτόνιο, αλλάζοντας ένα κάτω κουάρκ σε πάνω κουάρκ: Αν έχουμε N απομονωμένα νετρόνια μετά από ένα χρονικό διάστημα $t_{1/2}$, θα έχουν μείνει τα μισά. Αυτό το χρονικό διάστημα χαρακτηρίζει κάθε μετασταθή δομή και ονομάζεται *χρόνος υποδιπλασιασμού*. Για το απομονωμένο νετρόνιο το $t_{1/2}$ είναι περίπου 10 λεπτά της ώρας.

Τριών ειδών δυνάμεις καθορίζουν τις ιδιότητες των πρωτονίων και των νετρονίων. Η πιο σημαντική, που ονομάζεται **ισχυρή**, είναι αυτή που συμβάλλει κυρίως στην αμοιβαία έλξη των κουάρκ. Η δύναμη αυτή είναι ιδιαίτερα περίπλοκη, έχει εντυπωσιακές ιδιομορφίες και παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες στη μελέτη της. Εκτός από την ισχυρή δύναμη, υπάρχουν επίσης ελκτικές και απωστικές **ηλεκτρικές** δυνάμεις (αν και πολύ ασθενέστερες των ισχυρών), οι οποίες οφείλονται στο ότι και τα δύο είδη των κουάρκ φέρουν ηλεκτρικό φορτίο. Μη ξεχνάτε ότι την έλξη των δυνάμεων εξισορροπεί η αδιάκοπη κίνηση των κουάρκ εντός του πρωτονίου ή του νετρονίου και η συνακόλουθη κινητική τους ενέργεια που αποτελεί και την κυριότερη συμβολή στη συνολική εσωτερική ενέργεια και του πρωτονίου και του νετρονίου. Ο ρόλος της τρίτου είδους δύναμης, της λεγόμενης **ασθενούς** είναι να δίνει τη *δυνατότητα* μετατροπής ενός κάτω κουάρκ σε πάνω (και επομένως ενός νετρονίου σε πρωτόνιο) αλλά και αντιστρόφως.

2. Πυρήνες: Το επόμενο στάδιο οργάνωσης της ύλης αξιοποιεί την ύπαρξη πρωτονίων και νετρονίων, για να σχηματίσει τους διάφορους ατομικούς πυρήνες ή απλώς **πυρήνες,** που αποτελούνται από Z πρωτόνια (το Z,

ανάλογα με το είδος του πυρήνα, κυμαίνεται από 1 έως 92) και N νετρόνια (το N κυμαίνεται από 0 έως 146). Για απλότητα τα πρωτόνια και τα νετρόνια ως συστατικά του πυρήνα αναφέρονται συλλήβδην ως **νουκλεόνια.** Έτσι, ένας πυρήνας με Z πρωτόνια και N νετρόνια λέμε ότι περιέχει $A = Z + N$ νουκλεόνια. Τα νουκλεόνια στους διάφορους πυρήνες σχεδόν ακουμπάνε μεταξύ τους. (Η μέση απόσταση μεταξύ των κέντρων γειτονικών νουκλεονίων είναι περίπου 10% μεγαλύτερη της διαμέτρου τους). Ένας πυρήνας με A νουκλεόνια προσαρμόζει το ποσοστό των πρωτονίων του, Z/A (άρα και το ποσοστό των νετρονίων του N/A), ώστε να ελαχιστοποιήσει την εσωτερική του ενέργεια και να επιτύχει έτσι τη σταθερότητά του. Η δυνατότητα αυτή υπάρχει λόγω της ασθενούς δύναμης που, όπως είπαμε, μπορεί να μετατρέψει νετρόνια σε πρωτόνια και αντίστροφα. Ένας πυρήνας έχει και άλλους τρόπους να ελαχιστοποιήσει την εσωτερική του ενέργεια, π.χ. με το να διασπασθεί σε δύο θυγατρικούς πυρήνες. Αυτό συμβαίνει σε πολύ μεγάλους πυρήνες όπου είναι ενισχυμένες, έναντι των υπολοίπων συμβολών, οι ηλεκτρικές απώσεις μεταξύ των πρωτονίων. Αυτός είναι ο λόγος που δεν υπάρχουν πυρήνες, έστω και μετασταθείς με A μεγαλύτερο του 300 περίπου (ή σταθεροί πυρήνες με A>206). Για να προσδιορίσουμε λοιπόν τη σύνθεση και τις άλλες ιδιότητες των διαφόρων πυρήνων είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε την εσωτερική τους ενέργεια E που αποτελείται από τέσσερις συνιστώσες: την ελκτική ενέργεια E_ι των ισχυρών δυνάμεων μεταξύ *γειτονικών* νουκλεονίων, την απωστική ενέργεια E_a μεταξύ όλων των ζευγών πρωτονίων και ασφαλώς -για να μη ξεχνιόμαστε- τη συνολική κινητική ενέργεια χωριστά των πρωτονίων (που είναι του τύπου (Α.1α) και τη συνολική κινητική ενέργεια χωριστά των νετρονίων που είναι επίσης του τύπου (Α.1α).

3. Άτομα: Το κάθε άτομο αποτελείται από έναν από τους υπάρχοντες πυρήνες (με $A = Z + N$ νουκλεόνια) και Z ηλεκτρόνια που παγιδεύονται γύρω του ώστε να σχηματίσουν μια ηλεκτρικά ουδέτερη δομή. Αν ο αριθμός των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα είναι μικρότερος του Z έχουμε μια μετασταθή, θετικά φορτισμένη δομή, που ονομάζεται **κατιόν**· αν είναι μεγαλύτερος του Z, έχουμε μια αρνητικά φορτισμένη μετασταθή δομή, που ονομάζεται **ανιόν**. Οι βασικές ιδιότητες των διαφόρων ατόμων καθορίζονται από την εσωτερική τους ενέργεια E και την ελαχιστοποίηση της. Η ενέργεια E αποτελείται από τρεις συνιστώσες: Την ελκτική ηλεκτρική ενέργεια E_ε μεταξύ του πυρήνα και όλων των ηλεκτρονίων, την απωστική ηλεκτρική ενέργεια E_α μεταξύ όλων των ζευγών ηλεκτρονίων και, φυσικά, την κινητική ενέργεια E_K όλων των ηλεκτρονίων, που είναι εν γένει του τύπου (Α.1α). Επειδή τα άτομα θα αποτελέσουν τα συστατικά για το επόμενο επίπεδο οργάνωσης της ύλης, παίζει σημαντικό ρόλο η χωρική κατανομή του κάθε ηλεκτρονίου, κυρίως αυτών που βρίσκονται στις

παρυφές του κάθε ατόμου. Αυτή η κατανομή, που είναι το αντίστοιχο της τροχιάς στην Κλασική Φυσική, ονομάζεται ατομικό **τροχιακό**. Ενδιαφέρει επομένως ο προσδιορισμός της γωνιακής κυρίως κατανομής των ατομικών τροχιακών, ο οποίος, ευτυχώς, μπορεί να γίνει με στοιχειώδεις μεθόδους.

4. Μόρια: Τα μόρια αποτελούνται από άτομα (ή και κατιόντα/ανιόντα) που συνδυάζονται μεταξύ τους δημιουργώντας σταθερές και πολυποίκιλες δομές. Το νέο στοιχείο στα μόρια, έναντι των προηγούμενων δομών, είναι ότι τα άτομα σ' ένα μόριο, ακουμπώντας με τα διπλανά τους, καταλαμβάνουν λίγο-πολύ σταθερές θέσεις στο χώρο σχετικά με τα άλλα άτομα του μορίου και εκτελούν μικρού πλάτους ταλαντώσεις γύρω από αυτές. Το άλλο νέο στοιχείο είναι ότι δεν υπάρχει άνω όριο στο πόσα πολλά άτομα μπορούν να συμμετέχουν σ' ένα μόριο. Έτσι έχουμε μικρά μόρια, όπως αυτά του νερού, που τα δύο άτομα υδρογόνου φτιάχνουν γωνία 105 μοιρών με το άτομο του οξυγόνου στην κορυφή. Αλλά υπάρχουν και τα μεγάλα βιομόρια με εκατομμύρια άτομα. Αυτός ο απίστευτος πλούτος μοριακών δομών, που αποτελεί το αντικείμενο μιας χωριστής Επιστήμης (της Χημείας), οφείλεται σε τρεις κυρίως λόγους: α) Ο πρώτος είναι ότι στα μόρια συνδυάζονται ενενήντα διαφορετικά άτομα έναντι δύο μόνο διαφορετικών νουκλεονίων στους πυρήνες. β) Ο δεύτερος λόγος είναι ότι τα άτομα είναι ηλεκτρικά ουδέτερα και ως συνέπεια δεν υπάρχουν μακράς εμβέλειας ηλεκτρικές απώσεις που θα έθεταν ένα άνω όριο στο μέγεθός τους, όπως συμβαίνει στους πυρήνες λόγω των θετικά φορτισμένων πρωτονίων. γ) Ο τρίτος λόγος έχει να κάνει με την κατευθυντικότητα των ατομικών τροχιακών που παράγουν μια μεγάλη ποικιλία μορίων με διαφορετικές στερεοχημικές δομές. Μία βασική μέθοδος μελέτης των μορίων είναι ο προσδιορισμός των *μοριακών τροχιακών* που ελαχιστοποιούν την εσωτερική ενέργεια του μορίου. Μια απλή διαδικασία προσδιορισμού των μοριακών τροχιακών έγκειται στο να γραφούν αυτές ως γραμμικός συνδυασμός ατομικών τροχιακών.

5. Συμπυκνωμένη ύλη: Στη συμπυκνωμένη ύλη περιλαμβάνονται τα στερεά, τα υγρά και ενδιάμεσες δομές, όπως είναι π.χ. τα πολυμερή. Ο αριθμός των ατόμων, που σχηματίζουν τη συμπυκνωμένη ύλη όντας σε επαφή μεταξύ τους, είναι τεράστιος με τυπική τιμή τον λεγόμενο αριθμό του Avogadro, 6×10^{23}. Στα στερεά τα άτομα καταλαμβάνουν συγκεκριμένες θέσεις στο χώρο και εκτελούν μικρού πλάτους ταλαντώσεις γύρω από τις θέσεις αυτές. Στα υγρά τα άτομα κινούνται κυλιόμενα πάνω στα διπλανά τους και τείνουν το καθένα τους να καταλάβει όλο το διαθέσιμο χώρο. Όπως στα άτομα και στα μόρια, η ισορροπία στη συμπυκνωμένη ύλη αποκαθίσταται από τον ανταγωνισμό της ηλεκτρικής ελκτικής (συνολικά) ενέργειας και της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων. Πιο συγκεκριμένα, στα μέταλλα η κινητική ενέργεια οφείλεται κυρίως στα αποσπασμένα από τα άτομα ηλεκτρόνια (τα λεγόμενα ελεύθερα) και έχει τη μορφή του τύπου (Α.1α). Η ηλεκτρική ελκτική ενέργεια δίνεται από τον ακόλουθο τύπο: $E_\varepsilon =$

$= -\kappa N^{4/3} e^2 / V^{1/3}$, όπου e είναι το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου και κ είναι ένας αριθμητικός παράγοντας. Στους ημιαγωγούς, στους μονωτές, στα μοριακά στερεά κλπ για την εύρεση των τροχιακών του στερεού, που ελαχιστοποιούν την εσωτερική ενέργεια, ακολουθείται συνήθως η μέθοδος του γραμμικού συνδυασμού ατομικών τροχιακών, όπως στα μόρια.

6. Πλανήτες: Οι πλανήτες είναι σφαιρικά σώματα ακτίνας R που κυμαίνεται από περίπου 1.000 km έως περίπου 100.000 km. Ανάλογα με τα είδη των ατόμων που τους αποτελούν μπορεί να είναι βραχώδεις, όπως η Γη, ή αέριοι, όπως ο Δίας. Τα άτομα που τους αποτελούν είναι εν μέρει ιονισμένα. Είναι πιο βολικό να μετράμε τη μάζα τους με το συνολικό αριθμό νουκλεονίων N_ν που περιλαμβάνεται σε όλους τους πυρήνες τους και ο οποίος κυμαίνεται στους πλανήτες περίπου μεταξύ 10^{49} έως 10^{55}. Στην ελκτική ενέργεια συμβάλλουν *με συγκρίσιμο ποσοστό* και οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ όλων των πυρήνων του πλανήτη και οι ηλεκτρικές δυνάμεις E_ε. Την τάση για σύνθλιψη εξισορροπεί η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που δίνεται και πάλι από ένα τύπο όπως ο (Α.1α). Η βαρυτική ελκτική ενέργεια δίνεται από τον τύπο $E_B = -aGM^2 / R$, όπου G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, $M = N_\nu m_u$ είναι η μάζα του πλανήτη, m_u είναι το 1/12 της μάζας του ατόμου του άνθρακα-12 και το a είναι λίγο μεγαλύτερο από 0,6. Ο τύπος για το E_B είναι άμεση συνέπεια του νόμου της παγκόσμιας έλξης. Ας σημειωθεί ότι η βαρυτική ελκτική ενέργεια δεν είχε εμφανισθεί μέχρι τώρα. Ο λόγος ήταν η αφάνταστα μικρή έντασή της. Εντούτοις, ο *πάντα ελκτικός* χαρακτήρας της βαρύτητας και η *άπειρη εμβέλειά της* την καθιστούν σημαντική όταν η μάζα του συστήματος γίνει τόσο μεγάλη ώστε να φτάσει τα όρια αυτής ενός πλανήτη· γίνεται δε κυρίαρχη σε ακόμη μαζικότερα αντικείμενα, όπως είναι τα άστρα. Επίσης, μπορεί εύκολα να δείξει κανείς ότι το σφαιρικό σχήμα των ουρανίων σωμάτων (μεγάλης μάζας) οφείλεται στον πάντα ελκτικό χαρακτήρα της βαρύτητας και στην άπειρη εμβέλειά της, γιατί αυτό είναι το σχήμα που ελαχιστοποιεί την βαρυτική ενέργεια.

7. Άστρα: *Ενεργά άστρα,* όπως ο Ήλιος, είναι εκείνα που στην κεντρική τους περιοχή συντελείται *σύντηξη* τεσσάρων πρωτονίων τελικά προς τον πυρήνα του ηλίου-4 (με δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια). Οι συντήξεις αυτές ελευθερώνουν μεγάλα ποσά ενέργειας υπό μορφή τελικά ηλεκτρομαγνητικής (ΗΜ) ενέργειας και *θερμικής* κινητικής ενέργειας των σωματίων που αποτελούν το άστρο· αυτή η κινητική και η ΗΜ ενέργεια εξισορροπούν την βαρυτική σύνθλιψη. Για την έναρξη όμως της σύντηξης χρειάζεται πολύ υψηλή αρχική θερμοκρασία για να υπερνικηθεί η ηλεκτρική άπωση μεταξύ των πρωτονίων ώστε να λάβει χώρα η σύντηξή τους. Αυτή όμως η θερμοκρασία απαιτεί μια μίνιμουμ τιμή, M_μ, της μάζας

του άστρου . Όπως θα δούμε στο Κεφ. 13, αυτή η τιμή δίνεται από τον τύπο $M_\mu / m_u \approx \frac{1}{4}(e^2 / Gm^2)^{3/2}$ που εξαρτάται μόνο από παγκόσμιες σταθερές, δεδομένου ότι το m ορίζεται από τη σχέση $m^4 = m_e m_u^3$. Η τιμή που προκύπτει για το λόγο $M_\mu / m_u \equiv N_\nu$ είναι $N_\nu \approx 10^{56}$ νουκλεόνια. Εάν πάλι η μάζα του υπό σχηματισμό άστρου είναι πάρα πολύ μεγάλη, η πίεση της προκύπτουσας εσωτερικής ΗΜ ενέργειας υπερβαίνει τη βαρυτική συμπίεση και το άστρο δεν θα σχηματισθεί. Κατά συνέπεια υπάρχει ένα άνω όριο M_M στη μάζα ενός ενεργού άστρου που δίνεται από τον εξής τύπο $M_M / m_u \approx$ $\approx 100(\hbar c / Gm_u^2)^{3/2}$ και αντιστοιχεί σε περίπου 3×10^{59} νουκλεόνια. Σημειώστε ότι το M_M εξαρτάται και αυτό από παγκόσμιες σταθερές μεταξύ των οποίων και η σταθερά του Planck.

Ένα ενεργό άστρο διατηρείται σε *δυναμική* ισορροπία όσο υπάρχουν τα πυρηνικά «καύσιμα», κυρίως το υδρογόνο, που με τη σύντηξή τους αναπληρώνουν την απώλεια ενέργειας την οφειλόμενη κυρίως στην ακτινοβολία. Όταν αυτά εξαντληθούν το άστρο εισέρχεται σε μια σύντομη φάση αστάθειας που χάνει ένα μεγάλο μέρος της αρχικής του μάζας. Τελικά μη έχοντας τη θερμική κινητική ενέργεια για να αντιταχθεί στη βαρύτητα, το άστρο συμπιέζεται από την τελευταία για να καταλήξει, ανάλογα με τη μάζα που του έχει απομείνει, σε τρία είδη αστρικών «πτωμάτων»: Αν αυτή η τελική μάζα είναι μικρότερη από 1,4 φορές τη σημερινή μάζα του Ήλιου, προκύπτει ο λεγόμενος **λευκός νάνος**, που αποτελείται από γυμνούς πυρήνες και ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η ισορροπία του λευκού νάνου όπως και η ακτίνα του καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση της εσωτερικής του ενέργειας $E = E_B + E_K$, όπου το E_B είναι η βαρυτική ενέργεια και το E_K είναι η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που δίνεται από τον τύπο (Α.1α). Η προκύπτουσα τιμή για την ακτίνα του λευκού νάνου είναι περίπου 10.000 km, δηλαδή περίπου όση η διάμετρος της Γης. Όταν η τελική μάζα του νεκρού άστρου υπερβεί τη κρίσιμη τιμή του 1,4 φορές τη μάζα του Ήλιου, τα ηλεκτρόνια αποκτούν πια σχετικιστικές ταχύτητες και η κινητική τους ενέργεια δίνεται από τον τύπο (Α.1β)· αυτή η κινητική ενέργεια δεν είναι πια σε θέση να αντιμετωπίσει τη σύνθλιψη της βαρύτητας· το νεκρό άστρο καταρρέει, η ακτίνα του μειώνεται κατά ένα παράγοντα της τάξεως του $(2m_e / m_n) \approx (1/1000)$ και καταλήγει γύρω στα 10 km. Οι πυρήνες του, λόγω της τρομερής συμπίεσης, αποσυντίθενται σε νετρόνια και πρωτόνια· τα τελευταία αντιδρούν σε μεγάλο βαθμό με τα ηλεκτρόνια και δίνουν νετρόνια, ενώ απομένει ένα μικρό ποσοστό από πρωτόνια και ηλεκτρόνια. Το προκύπτον νεκρό άστρο ονομάζεται για προφανείς λόγους **αστέρας νετρονίων** επειδή αποτελείται κυρίως από νετρόνια αλλά και κάποια πρωτόνια και ηλεκτρόνια, όλα τους συμπιεσμένα από τη βαρύτητα σε

πυκνότητα μεγαλύτερη από αυτήν ενός ατομικού πυρήνα. Ο αστέρας νετρονίων ισορροπεί λόγω της εξίσωσης των πιέσεων που οφείλονται αφενός μεν στη βαρυτική ελκτική ενέργεια και αφετέρου στην κινητική ενέργεια κυρίως των *νετρονίων* η οποία εξακολουθεί να δίνεται από τον τύπο (Α.1α) αλλά με τη μάζα m_n του *νετρονίου* στον παρονομαστή αντί για τη μάζα του ηλεκτρονίου m_e που εμφανίζεται στην περίπτωση των λευκών νάνων. Η ισορροπία αυτή διατηρείται όσο η μάζα του αστέρα νετρονίων δεν υπερβαίνει περίπου τις 2,5 φορές τη σημερινή μάζα του Ήλιου. Αν την υπερβεί παύει να ισχύει ο τύπος (Α.1α) ακόμη και για τα νετρόνια και ισχύει ο τύπος (Α.1β) για όλα τα σωμάτια, και για τα νετρόνια και για τα λίγα πρωτόνια και ηλεκτρόνια. Όμως τότε, η διασταλτική πίεση της συνολικής κινητικής ενέργειας υπολείπεται της συνθλιπτικής πίεσης της βαρύτητας και ο αστέρας νετρονίων καταρρέει χωρίς να υπάρχει κάποιος εμφανής φυσικός μηχανισμός φρεναρίσματος. Επομένως η κατάρρευση συνεχίζεται ασταμάτητα και οδηγεί στην κατάσταση που ονομάζεται αστρική **μαύρη τρύπα**.

8. Σύμπαν: Τόσο οι αστρονομικές παρατηρήσεις όσο και η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το Σύμπαν διαστέλλεται, ο ίδιος ο χώρος διαστέλλεται. Αυτό σημαίνει ότι δύο σημεία στο χώρο, που απέχουν σε μια χρονική στιγμή *R*, απομακρύνονται μεταξύ τους με ρυθμό που είναι ανάλογος της μεταξύ τους απόστασης: $\dot{R} = HR$, όπου $\dot{R} \equiv dR/dt$· η σταθερά αναλογίας *H* είναι ανεξάρτητη του *R* (όσο το *R* είναι της τάξεως των 500 εκατομμύριων ετών φωτός ή μεγαλύτερο) και ονομάζεται *σταθερά του Hubble*. Σημαίνει επίσης ότι όσο πηγαίνουμε πίσω στο χρόνο το Σύμπαν θα ήταν πυκνότερο, θερμότερο και πιθανόν διαφορετικής σύνθεσης. Οδηγούμαστε έτσι στην εικόνα ότι κάποτε στο απώτατο παρελθόν θα υπήρχε μια στιγμή όπου όλος ο χώρος και το Σύμπαν μαζί του θα είχε συρρικνωθεί σε ένα σημείο άπειρης πυκνότητας και θερμοκρασίας. Μετά τη στιγμή αυτή, που σηματοδοτεί τη χρονική αφετηρία του Σύμπαντος, ακολουθεί μια ταχύτατη διαστολή εκρηκτικών διαστάσεων, το Big Bang. Το σενάριο αυτό είναι συνεπές με την παρακάτω εξίσωση (Α.2) της χρονικής εξέλιξης που ικανοποιεί η σταθερά του Hubble $H \equiv \dot{R}/R$. Η εξίσωση αυτή, που αποτελεί τη βάση της Κοσμολογίας και ισχύει μετά μια πολύ αρχική φάση, έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon \ , \qquad \text{(A.2)}$$

όπου ε είναι η πυκνότητα ενέργειας στο Σύμπαν (χωρίς τη βαρυτική ενέργεια). Όπως θα δείξουμε στο Κεφ. 14 η εξίσωση αυτή μπορεί να εξαχθεί σχετικά εύκολα με χρήση της οικείας νευτώνειας μηχανικής. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ολική ενέργεια του Σύμπαντος, που είναι το

άθροισμα βαρυτικής και όλης της άλλης ισούται με μηδέν. Η πυκνότητα ενέργειας του τύπου (Α.2) γράφεται ως εξής: $\varepsilon=\varepsilon_{ph}+\varepsilon_{v}+\varepsilon_{b}+\varepsilon_{dm}+\varepsilon_{de,}$ όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους οφείλεται στα φωτόνια (και σε ενδεχόμενα ζεύγη σωματίων/*αντισωματίων* που δημιουργούνται από τα φωτόνια), ο δεύτερος οφείλεται στα λεγόμενα *νετρίνα*, ο τρίτος στα πρωτόνια και τα νετρόνια, ο τέταρτος στη λεγόμενη *σκοτεινή ύλη* και ο τελευταίος στη λεγόμενη *σκοτεινή ενέργεια*. Στο Κεφ. 14 θα παρουσιάσουμε τις γνώσεις μας για κάθε ένα από τους πέντε αυτούς όρους καθώς και για την εξάρτησή τους από το *R*. Με βάση αυτή την εξάρτηση προκύπτουν οι χρονικές περίοδοι κυριαρχίας του κάθε όρου (π.χ. φωτοκρατία, υλοκρατία και μελλοντική κυριαρχία του τελευταίου όρου που φαίνεται ότι έχει την ιδιομορφία να είναι ανεξάρτητος του *R*, δηλαδή μια ακόμη παγκόσμια σταθερά). Στη σημερινή κοσμική εποχή, 13,8 δισεκατομμύρια έτη μετά τη στιγμή 0 του Big Bang, το ε_{de} αποτελεί το 70% περίπου του ολικού ε. Το πώς προκύπτει φυσικά η εικόνα που περιγράψαμε θα το παρουσιάσουμε στο Κεφ. 14.

Α.6. Πόσο τελεσίδικο είναι το παρόν νοητικό πλαίσιο της Φυσικής;

Θα διακινδυνεύσουμε μια απάντηση σ' αυτό το εύλογο ερώτημα, που απασχολεί φιλοσόφους, ιστορικούς της Επιστήμης και αρκετούς επιστήμονες.

Το κοσμοείδωλο της Φυσικής, για τη βαθύτερη δομή του Κόσμου, ίσως αλλάξει. Τα στοιχειώδη, σημειακά (στην ουσία) κυματοσωμάτια (ύλης και δυνάμεων), που θεωρούνται σήμερα οι έσχατοι δομικοί λίθοι του Σύμπαντος, ίσως αντικατασταθούν, όπως αντικαταστάθηκαν τα κλασικά νευτώνεια σωμάτια και κύματα, από τα κβαντικά κυματοσωμάτια. Δε θα αλλάξουν όμως τα αποτελέσματα που έχουμε ήδη πετύχει[3] από την κλίμακα του ατομικού πυρήνα (10^{-15} m), μέχρι και ενδεχομένως την κλίμακα των άστρων και των γαλαξιών (10^{21} m). Φυσικά, στις ακραίες κλίμακες (αυτές των στοιχειωδών σωματίων και της κοσμολογίας), όπου το βασικό νοητικό πλαίσιο είναι ακόμη υπό διαμόρφωση και όπου ο παρατηρησιακός ή ο πειραματικός έλεγχος, είναι ιδιαίτερα δυσχερής έως αδύνατος, ουσιώδεις συμπληρώσεις ή ακόμη και ανατροπές δεν θα πρέπει να αποκλεισθούν.

[3] Τα μυριάδες, αν όχι εκατομμύρια, αυτά *ποσοτικά* αποτελέσματα είναι σε εντυπωσιακή συμφωνία με τα αντίστοιχα παρατηρησιακά και πειραματικά δεδομένα. Το αληθές τους επιβεβαιώνεται κάθε μέρα από την ύπαρξη και τη λειτουργία όλων των ανθρωπογενών δημιουργημάτων (τηλεοράσεις, κινητά τηλέφωνα, μαγνητική τομογραφία, υπολογιστές, διαδίκτυο, κλπ, κλπ, κλπ). Τίποτε από αυτά, δεν θα υπήρχε αν οι νόμοι της Φυσικής δεν απεικόνιζαν την πραγματικότητα.

Κεφάλαιο 1

Η ατομική ιδέα: Ο θρίαμβος του Δημόκριτου

Εάν, σ' ένα παγκόσμιο κατακλυσμό, όλη η επιστημονική γνώση επρόκειτο να καταστραφεί εκτός από μια μόνο πρόταση που θα περνούσε στις επόμενες γενιές, ποια θα ήταν αυτή η πρόταση που θα περιείχε τη μέγιστη πληροφορία με τις ελάχιστες λέξεις;

Πιστεύω ότι είναι η ατομική ιδέα ότι, δηλαδή, τα πάντα είναι φτιαγμένα από ά-τομα, μικροσκοπικά σωμάτια που κινούνται γύρω-γύρω αέναα, έλκοντας άλληλα όταν είναι σε κοντινή από-σταση, αλλά απωθώντας άλληλα όταν συμπιεσθούν το ένα πάνω στο άλλο.

Σ' αυτή τη μία πρόταση ενυπάρχει μια τεράστια ποσότητα πληρο-φορίας για τον Κόσμο, εάν διαθέσει κανείς λίγη φαντασία και σκέψη.

R. P. Feynman

Σύνοψη: *Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα στοιχειώδη (δηλ. τα αδιαίρετα) υλικά σωμάτια από τα οποία αποτελείται καθετί μέσα μας και 'γύρω' μας (το 'γύρω' μας εκτείνεται ώστε να περιλάβει ακόμη και τα πιο μακρινά άστρα). Παρουσιάζουμε επίσης τις δυνάμεις (ή πιο σωστά τις αλληλεπιδράσεις) που υποχρεώνουν τα σωμάτια ύλης να έλθουν το ένα δίπλα στο άλλο και να σχηματίσουν έτσι σε διαδοχικά στάδια την αφάνταστα τεράστια ποικιλία των δομών του Σύμπαντος. Οι αλληλεπιδράσεις αυ-τές, σε στοιχειώδες επίπεδο, πραγματοποιούνται με το να εκπεφθούν ή/και να απορροφηθούν από τα σωμάτια ύλης αδιαίρετες οντότητες που ονομάζονται είτε κβάντα είτε σωμάτια-φορείς αλληλεπιδράσεων. Τη διαδικασία αυτής της εκπομπής ή/και της απορρόφησης αποτυπώνουν τα λεγόμενα διαγράμματα Feynman.*

1.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με την ατομική ιδέα το καθετί αποτελείται από **στοιχειώδη** (δηλαδή **αδιαίρετα**) μικροσκοπικά σωμάτια[1] που αλληλοέλκονται και αλληλοπαγιδεύονται χωρίς όμως να συνθλίβονται *γιατί κινούνται αέναα*. Έτσι σχηματίζεται, σε διαδοχικά στάδια, η τεράστια ποικιλία του Κόσμου. Τα σωμάτια αυτά θα τα ονομάσουμε *στοιχειώδη σωμάτια ύλης* (**σωμάτια-υ**) για να τα διακρίνουμε από τα *στοιχειώδη μικροσκοπικά σωμάτια* που είναι οι φορείς των διαφόρων ειδών δυνάμεων. Με άλλα λόγια η ατομική δομή δεν περιορίζεται μόνο στην ύλη αλλά επεκτείνεται και στις δυνάμεις ή, πιο σωστά, και στις αλληλεπιδράσεις, οι οποίες ασκούνται μέσω ανταλλαγής αδιαίρετων σωματίων που θα τα ονομάσουμε *κβάντα* των αλληλεπιδράσεων ή *στοιχειώδη σωμάτια-φορείς αλληλεπιδράσεων* (**σωμάτια-αλ**).

Η ατομική δομή του Κόσμου είναι πράγματι η πιο βασική ιδέα της Επιστήμης. Γιατί σ' αυτήν ενυπάρχει, όπως προσφυώς επισημαίνει ο Feynman, μια τεράστια ποσότητα πληροφορίας. Γιατί σ' αυτήν βρίσκεται η κρυμμένη απλότητα ενός Κόσμου που εμφανίζεται τόσο αφάνταστα ποικίλος και περίπλοκος στις δομές του. Γιατί αυτές οι δομές, τουλάχιστον όσες είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία, μπορούν να κατανοηθούν σε ποσοτικό επίπεδο με βάση τις *ιδιότητες* και τις *κινήσεις* των μικροσκοπικών σωματίων που τις αποτελούν. Μ' άλλα λόγια, οι δομές αυτές εξαρτώνται μόνο από κάποιους λίγους αριθμούς μετρημένους στα δάχτυλα του ενός χεριού που χαρακτηρίζουν τα στοιχειώδη σωμάτια και τις αλληλεπιδράσεις τους. Π.χ., οι ποικίλες ιδιότητες των *διαφόρων* μετάλλων, όπως η πυκνότητά τους, η ηλεκτρική τους αντίσταση, η θερμική τους αγωγιμότητα, η μηχανική τους αντοχή, η τήξη τους, η σκληρότητα τους, το αν σκουριάζουν ή όχι, το αν μαγνητίζονται ή όχι, η αδιαφάνεια τους στο φως, το πόσο γρήγορα διαδίδεται ο ήχος σ' αυτά κλπ εξαρτώνται, χάρη στην ατομική ιδέα, από τέσσερις μόνο αριθμούς. Από αυτούς οι τρεις (η λεγόμενη παγκόσμια σταθερά του Planck $\hbar$, το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου e, και η μάζα του ηλεκτρονίου m_e) είναι οι ίδιοι για όλα τα μέταλλα και για όλη την οικεία ύλη και μόνο ο τέταρτος – ένας ακέραιος αριθμός που συμβολίζεται με Z και ονομάζεται ατομικός αριθμός – διαφέρει από στοιχείο σε στοιχείο. Στις ποσότητες αυτές θα επανέλθουμε σε λίγο.

Για να αποκτήσει «σάρκα και οστά» η ατομική ιδέα χρειάζεται να γνωρίζουμε ποια είναι τα διάφορα είδη των στοιχειωδών σωματίων ύλης (σωματίων-υ) και ποια τα διάφορα είδη των στοιχειωδών σωματίων των αλληλεπιδράσεων (σωματίων-αλ), τι ιδιότητες έχουν, πώς τα πρώτα αλληλεπιδρούν με τα δεύτερα και επομένως ποιες αλληλοπαγιδεύσεις είναι εφικτές ώστε να προχωρήσουμε έτσι στα επόμενα στάδια οργάνωσης της ύλης.

[1] Όμως η θεωρία χορδών ή μεμβρανών (χωρίς πειραματική επιβεβαίωση μέχρι σήμερα (2018)) δέχεται στοιχειώδη αντικείμενα όχι σημειακά, αλλά γραμμικά, ή διδιάστατα, κ.ο.κ.

1.2 Τα στοιχειώδη σωμάτια της ύλης σήμερα[2]

Η ύλη που μας περιβάλλει (στην παρούσα φάση της ιστορίας του Σύμπαντος) ή μας αποτελεί συνίσταται από δύο μόνο είδη **κουάρκ**[3] **(**τα λεγόμενα **πάνω** κουάρκ (*u*) και **κάτω** κουάρκ (*d*)) και μόνο ένα είδος **ηλεκτρονίου** που το σύμβολό του είναι *e* ή e^-. Στην πραγματικότητα τα κουάρκ δεν έχουν παρατηρηθεί ελεύθερα αλλά πάντοτε ως συστατικά σύνθετων σωματίων ύλης, όπως είναι, π.χ. τα πρωτόνια.

Το ηλεκτρόνιο κατά τις αλληλεπιδράσεις του με κάποια σωμάτια–φορείς αλληλεπιδράσεων δημιουργεί αυτοκαταστρεφόμενο σε ορισμένες περιπτώσεις ένα σωμάτιο που λέγεται **νετρίνο** και συμβολίζεται ως ν_e, το οποίο όμως διαφεύγει στο διάστημα και δεν παγιδεύεται στην ύλη. Τα ραδιενεργά κατάλοιπα της σχάσης στους πυρηνικούς αντιδραστήρες εκπέμπουν *αντινετρίνα* (βλ. πιο κάτω) και ηλεκτρόνια μέσω μιας αντίστοιχης αντίδρασης. Τα ηλεκτρόνια και τα νετρίνα έχουν το κοινό όνομα **λεπτόνια.**

Έτσι η συνήθης ύλη περιλαμβάνει τρία μόνο είδη σωματίων ύλης: δύο κουάρκ και ένα λεπτόνιο, το ηλεκτρόνιο. (Αν θέλουμε να μετρήσουμε και το νετρίνο, παρόλο που δεν συμμετέχει στην συνήθη ύλη, τότε τα λεπτόνια

---

[2] Η μέχρι τώρα εμπειρία έχει δείξει ότι αυτά που κατά καιρούς θεωρούσαμε στοιχειώδη αποδείχτηκαν σύνθετα. Το κάθε άτομο δεν είναι στοιχειώδες, όπως αρχικά εθεωρείτο, αφού συνίσταται από πυρήνα και ηλεκτρόνια. Ο κάθε πυρήνας δεν είναι στοιχειώδης, αφού συνίσταται από πρωτόνια και νετρόνια (εκτός αυτού του απλού υδρογόνου). Τα πρωτόνια και τα νετρόνια δεν είναι στοιχειώδη, αφού συνίστανται από τρία κουάρκ. Ίσως με τα ηλεκτρόνια και τα κουάρκ να φτάσαμε επιτέλους στο τέλος. Έστω και αν τα ηλεκτρόνια, τα κουάρκ και όλα τα άλλα σωμάτια του Πιν. 1.1 είναι πράγματι στοιχειώδη (δηλαδή αδιαίρετα), μπορεί να υπάρχουν και άλλα στοιχειώδη σωμάτια ύλης στο Σύμπαν που δεν έχουν βρεθεί πειραματικά. Αστρονομικές παρατηρήσεις συνηγορούν υπέρ της ύπαρξης τέτοιων μη ανακαλυφθέντων σωματίων, που αποτελούν τη λεγόμενη σκοτεινή ύλη.

[3] Το κάθε κουάρκ εκτός από ηλεκτρικό φορτίο θεωρείται ότι φέρει και ένα άλλο είδος φορτίου που έχει καθιερωθεί να ονομάζεται **χρωματικό φορτίο** (αν και δεν έχει καμία σχέση με χρώμα). Όπως το ηλεκτρικό φορτίο είναι η ιδιότητα που αποτελεί την πηγή και τον αποδέκτη της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης, έτσι και το χρωματικό φορτίο είναι η ιδιότητα που αποτελεί την πηγή και τον αποδέκτη της λεγόμενης ισχυρής δύναμης (βλ. Πιν. 1.2, σελ. 30). Σε αντίθεση με το ηλεκτρικό φορτίο (που είναι ενός μόνο τύπου) το χρωματικό φορτίο είναι τριών τύπων «κόκκινο» (*R*), «πράσινο» (*G*) και «μπλε» (*B*). Έτσι κάθε κουάρκ μπορεί να φέρει μια μονάδα, «κόκκινου» χρωματικού φορτίου, ή «πράσινου» χρωματικού φορτίου ή «μπλε» χρωματικού φορτίου. Το κάθε αντικουάρκ φέρει αντίθετο χρωματικό φορτίο από το αντίστοιχο κουάρκ. Έχουμε έτσι για κάθε αντικουάρκ τη δυνατότητα «αντικόκκινου» $\overline{R}$, ή «αντιπράσινου» $\overline{G}$, ή «αντιμπλέ» $\overline{B}$ χρωματικού φορτίου. Οι συνδυασμοί κουάρκ-αντικουάρκ $R\overline{R}$, $G\overline{G}$, $B\overline{B}$, ή τριών κουάρκ, *RGB*, ή τριών αντικουάρκ $\overline{R}\overline{G}\overline{B}$ που εμφανίζονται στη φύση αντιστοιχούν πάντοτε σε μηδενικό συνολικό χρωματικό φορτίο.

είναι και αυτά δύο). Οι ιδιότητες των σωματίων αυτών (περιλαμβανομένου και του νετρίνου) φαίνονται στην πρώτη οικογένεια του Πιν**.** 1.1 (σελ. 26). Και τα τέσσερα σωμάτια ύλης έχουν μια εσωτερική ιδιότητα που ονομάζεται **σπιν** και έχει την τιμή 1/2 (ημιακέραιο). Το σπιν συνδέεται με την εσωτερική στροφορμή του σωματίου βάσει του τύπου: εσωτερική στροφορμή = σπιν×$\hbar$, όπου $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck (δια 2π).

Δύο πάνω και ένα κάτω κουάρκ με την παρουσία και τη βοήθεια σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων αλληλοπαγιδεύονται και δημιουργούν το *πρωτόνιο*, *p*:

$$p = (u, u, d)\,. \tag{1.1}$$

Δύο κάτω και ένα πάνω κουάρκ με την παρουσία και με τη βοήθεια σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων αλληλοπαγιδεύονται και δημιουργούν το *νετρόνιο*, *n*:

$$n = (u, d, d)\,. \tag{1.2}$$

Τα πρωτόνια, τα νετρόνια και άλλα παρόμοια σύνθετα σωμάτια που αποτελούνται από τρία κουάρκ φέρουν το κοινό όνομα *βαρυόνια* και τους αποδίδεται ο βαρυονικός αριθμός 1. Κατά συνέπεια αποδίδουμε στο κάθε κουάρκ *βαρυονικό αριθμό* 1/3. Η τιμή μηδέν, για το λεπτονικό αριθμό των κουάρκ, δείχνει απλώς ότι τα κουάρκ δεν είναι λεπτόνια. Το αντίθετο συμβαίνει για τα λεπτόνια: Το κάθε λεπτόνιο φέρει *λεπτονικό αριθμό* 1 και βαρυονικό αριθμό μηδέν.

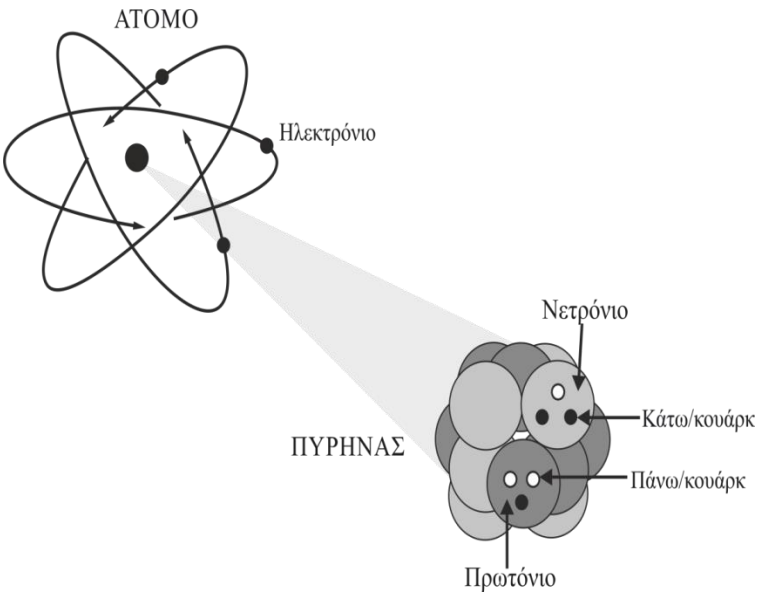
Θυμίζουμε ότι για κάθε ένα από τα παραπάνω τέσσερα σωμάτια[4] υπάρχει το **αντισωμάτιό** του που συμβολίζεται ως $\bar{u}$, $\bar{d}$, e^{+},$\bar{\nu}_e$ αντιστοίχως. Η *μάζα*, το *σπιν* και το *μέγεθος* του κάθε αντισωματίου είναι ακριβώς ίδια με αυτά του αντίστοιχου σωματίου, ενώ το *ηλεκτρικό φορτίο*, το *χρωματικό φορτίο*, ο *βαρυονικός αριθμός* και ο *λεπτονικός αριθμός* είναι ακριβώς αντίθετα. Σημειώστε ότι τα αντισωμάτια δεν συμμετέχουν στη δομή της συνηθισμένης ύλης, τα παράγουμε όμως πειραματικά στους επιταχυντές-αντιδραστήρες υψηλής ενέργειας και προκύπτουν υποχρεωτικά και αβίαστα από τη θεωρία. Ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ σχηματίζουν σύνθετα σωμάτια που ονομάζονται *μεσόνια*. Τα μεσόνια είναι μετασταθή σωμάτια και άρα βραχύβια. Παράγονται κατά τις συγκρούσεις των κοσμικών ακτίνων με σωμάτια της ατμόσφαιρας ή, τεχνητά, σε επιταχυντές-αντιδραστήρες. Πρωτόνια και νετρόνια αλληλοπαγιδεύονται (με τη βοήθεια πάντοτε κάποιων σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων) και δημιουργούν τους ατομικούς *πυρήνες*.

Ο κάθε πυρήνας, που φέρει θετικό ηλεκτρικό φορτίο, παγιδεύει γύρω του ηλεκτρόνια, που είναι αρνητικά φορτισμένα, (με τη βοήθεια των

[4] Τονίζουμε ότι το νετρίνο επειδή δεν παγιδεύεται μαζί με άλλα σωμάτια, δεν συμμετέχει στη δομή των διαφόρων επιπέδων οργάνωσης της ύλης.

σωματίων-φορέων των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων) δημιουργώντας έτσι τα ουδέτερα *άτομα* (όταν ο αριθμός πρωτονίων στον πυρήνα και των παγιδευμένων γύρω του ηλεκτρονίων είναι ίσος) ή τα *ιόντα* (όταν ο αριθμός των ηλεκτρονίων διαφέρει από τον αριθμό των πρωτονίων). Στο Σχ. 1.1 συνοψίζουμε τη σύνθεση των πρωτονίων και των νετρονίων από κουάρκ, των πυρήνων από πρωτόνια και νετρόνια και των ατόμων από πυρήνα και ηλεκτρόνια, τα οποία περιφέρονται γύρω του σε μεγάλες σχετικά αποστάσεις χωρίς να ακολουθούν τροχιές παρόλο που είθισται να τις σχεδιάζουμε. (Για να αποκτήσετε μια εικόνα των σχετικών μεγεθών θεωρήστε ότι ο πυρήνας έχει μεγενθυθεί ένα τρισεκατομμύριο φορές και έχει γίνει περίπου όσο το κεφάλι μιας καρφίτσας. Τότε ο σφαιρικός χώρος γύρω από τον πυρήνα τον οποίο χρησιμοποιούν τα ηλεκτρόνια για την αδιάκοπη κίνησή τους είναι περίπου όσο ένα γήπεδο ποδοσφαίρου ή και μεγαλύτερος. Αυτός ο χώρος ορίζει το μέγεθος των διαφόρων ατόμων).

Η φύση φαίνεται ότι στάθηκε σπάταλη και δημιούργησε εκτός από την



Σχ. 1.1. Ιεραρχική οργάνωση των δομών της ύλης: Από τα πάνω κουάρκ και τα κάτω κουάρκ στα πρωτόνια και τα νετρόνια, από τα πρωτόνια και τα νετρόνια στους πυρήνες, από τον κάθε πυρήνα και τα ηλεκτρόνια στα άτομα, κλπ, κλπ, κλπ

πρώτη οικογένεια των τεσσάρων σωματίων στον Πιν. 1.1, και άλλες δύο παρόμοιες οικογένειες στοιχειωδών σωματίων, που η κάθε μια τους αποτελείται από τέσσερα σωμάτια ύλης (δύο κουάρκ και δύο λεπτόνια), όπως φαίνεται στον Πιν. 1.1. Το κάθε ένα από τα κουάρκ *c, s, t, b* φέρει επίσης χρωματικό φορτίο που είναι τριών τύπων: *R, G, B*. **Πολύ συχνά οι 3 αυτές οικογένειες αναφέρονται ως 3 «γεύσεις».**

Πιν. 1.1: Τα γνωστά στοιχειώδη σωμάτια της ύλης.

	ΛΕΠΤΟΝΙΑ						ΚΟΥΑΡΚ					
	Όνομα/ Σύμβολο	Μάζα x c^2 (MeV)	Σπιν	Ηλεκτρικό φορτίο	Βαρυ-ονικός αριθμός	Λεπτο-νικός αριθμός	Όνομα/ Σύμβολο	Μάζα (MeV)	Σπιν	Ηλεκτρικό φορτίο	Βαρυ-ονικός αριθμός	Λεπτο-νικός αριθμός
1η Οικογένεια	Νετρίνο ηλεκτρονίου ν_e	$0 < m_0 \lesssim 10^{-8}$????	1/2	0	0	1_e	πάνω κουάρκ u_{RGB}	1,5-4,5	1/2	2/3	1/3	0
	Ηλεκτρόνιο e	0,511 0,5109989	1/2	-1	0	1_e	κάτω κουάρκ $d_{\bar{R}\bar{G}\bar{B}}$	5-8,5	1/2	-1/3	1/3	0
2η Οικογένεια	Νετρίνο μιονίου ν_μ	$0 < m_0 \lesssim 10^{-8}$????	1/2	0	0	1_μ	χαρισματικό c_{RGB}	1000-1400	1/2	2/3	1/3	0
	Μιόνιο μ	105,658	1/2	-1	0	1_μ	παράξενο s_{RGB}	80-155	1/2	-1/3	1/3	0
3η Οικογένεια	Νετρίνο του τ ν_τ	$0 < m_0 \lesssim 10^{-8}$????	1/2	0	0	1_τ	κορυφαίο t_{RGB}	174.000	1/2	2/3	1/3	0
	Σωμάτιο τ τ	1777,05	1/2	-1	0	1_τ	πυθμενικό b_{RGB}	4000-4500	1/2	-1/3	1/3	0

Τα στοιχειώδη σωμάτια ύλης (σωμάτια-υ) είναι δύο τύπων (λεπτόνια και κουάρκ) και τριών "οικογενειών" ($1^η$, $2^η$, $3^η$). Η συνήθης ύλη αποτελείται από τρία μόνο είδη σωματίων (e, u, d). Τα νετρίνα είναι πολύ ελαφριά και πολύ ασθενώς αλληλεπιδρώντα για να παγιδευτούν στην ύλη και επομένως κυκλοφορούν παντού ελεύθερα. Τα σωμάτια-υ των οικογενειών 2 και 3 έχουν περίσσεια ενέργειας ηρεμίας και ως εκ τούτου είναι μεταστάθή και μεταστχηματίζονται σε σωμάτια της $1^{ης}$ οικογένειας. Αστροφυσικές και κοσμολογικές παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι θα πρέπει να υπάρχουν και άλλα σωμάτια-υ, που προβλέπονται από κάποιες θεωρίες, αλλά δεν έχουν βρεθεί (ακόμη;). Σημειώστε ότι όλα τα σωμάτια-υ έχουν σπιν ½. Τα κουάρκ φέρουν χρωματικό φορτίο τριών ειδών (R,G, B), εξού και οι αντίστοιχοι κάτω δείκτες που συνοδεύουν το σύμβολό τους.
Άλλα σωμάτια ??? Μάζα νετρίνων ???

Τα σωμάτια των οικογενειών 2 και 3 του Πιν. 1.1 δεν μετέχουν στο σχηματισμό της ύλης, λόγω του ότι δεν είναι σταθερά. Αυτό, γιατί είναι βαρύτερα από τα αντίστοιχα της οικογένειας 1 του Πιν. 1.1 και επομένως διαθέτουν περίσσεια ενέργειας ηρεμίας ώστε με τη βοήθεια σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων να μετασχηματίζονται σε σωμάτια της πρώτης οικογένειας (του Πιν. 1.1.). Άρα τα σωμάτια των οικογενειών 2 και 3 του Πιν. 1.1 είναι μετασταθή με την έννοια ότι ένας αρχικός πληθυσμός τους N_o μειώνεται εκθετικά με την πάροδο του χρόνου t ακολουθώντας τη σχέση $N(t) = N_o \exp(-t/\tau)$, όπου το τ χαρακτηρίζει το ρυθμό μείωσης του πληθυσμού και ονομάζεται *μέσος χρόνος ζωής* (mean lifetime). Ορίζεται επίσης ο λεγόμενος *χρόνος υποδιπλασιασμού* $t_{1/2}$. Ο χρόνος $t_{1/2}$ είναι ο απαιτούμενος χρόνος για να υποδιπλασιαστεί ο αρχικός πληθυσμός και επομένως συνδέεται με το τ μέσω της σχέσης: $N(t_{1/2}) \equiv N_o/2 = N_o \exp(-t_{1/2}/\tau)$ από την οποία έπεται λογαριθμίζοντας ότι $t_{1/2} = (\ln 2)\,\tau \approx 0,693\,\tau$. Π.χ.το μιόνιο (βλ. Πιν. 1.1) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\mu \to e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e\,, \tag{1.3}$$

με χρόνο υποδιπλασιασμού $1,523\times10^{-6}$s και $\tau = 2,197\times10^{-6}$s.

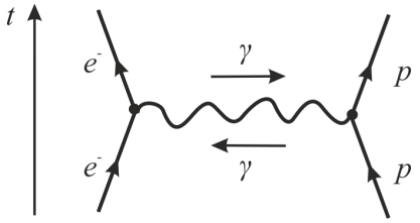
Όλα τα σωμάτια του Πιν. 1.1 έχουν τα αντισωμάτιά τους , όπως απαιτεί η θεωρία και επιβεβαιώνει το πείραμα. Και τα σωμάτια και τα αντισωμάτια του Πιν. 1.1 έχουν παρατηρηθεί και αναλυθεί πειραματικά. Κλείνοντας αυτήν την ενότητα, ας επισημάνουμε ξανά, ότι από τα 12 σωμάτια του Πιν. 1.1 και τα 12 αντισωμάτιά τους μόνο τρία (το πάνω κουάρκ, *u*, το κάτω κουάρκ, *d*, και το ηλεκτρόνιο, *e*) μετέχουν στη δομή της ύλης που μας αποτελεί και μας περιβάλλει).

Αν λάβουμε υπόψη και το χρωματικό φορτίο ο αριθμός των διαφόρων ειδών κουάρκ και των αντικουάρκ τριπλασιάζεται. Σημειώστε ότι όλα τα σωμάτια ύλης του Πιν. 1.1 έχουν σπιν ½, πράγμα που συνεπάγεται, όπως θα δούμε, ότι υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli (βλ. σελ. 53). Σωμάτια. με σπιν ημιακέραιο ονομάζονται συλλήβδην **φερμιόνια**.

1.3 Τα στοιχειώδη σωμάτια των δυνάμεων (ή των αλληλεπιδράσεων)

Υπάρχουν τεσσάρων ειδών στοιχειώδεις δυνάμεις ή, πιο σωστά, στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων: Η **ισχυρή αλληλεπίδραση** (που παρέχει την έλξη για να σχηματισθούν πρωτόνια ή νετρόνια από κουάρκ, ή πυρήνες από πρωτόνια και νετρόνια), η **ασθενής αλληλεπίδραση** (που είναι υπεύθυνη για το μετασχηματισμό στοιχειωδών σωματίων, όπως π.χ, αυτός της σχέσης (1.3)), η **ηλεκτρομαγνητική** (ΗΜ) (στην οποία οφείλεται ο σχηματισμός ατόμων, μορίων, στερεών, αστεροειδών κλπ) και τέλος

η **βαρυτική** (η οποία παίζει ρόλο ή και κυριαρχεί σε πολύ μεγάλα αντικείμενα ή δομές, όπως, π.χ., οι πλανήτες, τα άστρα, οι γαλαξίες κλπ). Οι τρεις πρώτες αλληλεπιδράσεις εκτός από τη δημιουργία ελκτικών ή απωστικών δυνάμεων μπορούν να παίξουν ένα γενικότερο ρόλο με το να συμμετέχουν στο μετασχηματισμό σωματίων. Κάθε στοιχειώδες σωμάτιο (επομένως και κάθε σύνθετο) είναι πηγή αλλά και αποδέκτης μιας τουλάχιστον από τις παραπάνω τέσσερις στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις. Πηγή με την έννοια ότι μπορεί να εκπέμψει ένα σωμάτιο-φορέα της υπόψη αλληλεπίδρασης και αποδέκτης με την έννοια ότι μπορεί να απορροφήσει ένα σωμάτιο-φορέα της υπόψη αλληλεπίδρασης. Π.χ. η ηλεκτρική έλξη μεταξύ ενός ηλεκτρονίου και ενός πρωτονίου μπορεί να θεωρηθεί ότι οφείλεται στο ότι το ηλεκ-

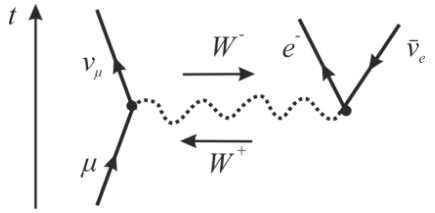


Σχ. 1.2. Η ηλεκτρομαγνητική (ΗΜ) αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-πρωτονίου οφείλεται στην ανταλλαγή ενός σωματίου-φορέα της ΗΜ αλληλεπίδρασης, που ονομάζεται **φωτόνιο** και συμβολίζεται με το γράμμα γ. Στην περίπτωση αυτή ούτε το ηλεκτρόνιο ούτε το πρωτόνιο μετασχηματίζεται σε άλλο σωμάτιο. Η προκύπτουσα δυναμική ενέργεια στην περίπτωση αυτή είναι της γνωστής μορφής Coulomb, $\mathcal{V} = -e^2 / r$, όπου e είναι το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου, $-e$ αυτό του ηλεκτρονίου και r η μεταξύ τους απόσταση. Το φωτόνιο στην παρούσα περίπτωση δεν εμφανίζεται ούτε στην αρχική ούτε στην τελική κατάσταση. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε ότι το φωτόνιο εν προκειμένω (ή το σωμάτιο-αλ εν γένει) είναι **εικονικό (**virtual**).** Στο σχήμα εμφανίζεται και το βέλος που δείχνει τη φορά του χρόνου

τρόνιο εκπέμπει τον φορέα της ηλεκτρομαγνητικής (ΗΜ) αλληλεπίδρασης, που ονομάζεται **φωτόνιο**, και στο ότι το πρωτόνιο απορροφά αυτό το φωτόνιο ή αντίστροφα. Η διαδικασία αυτή μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.2.

Ένα παράδειγμα μετασχηματισμού που οφείλεται στη μεσολάβηση ενός σωματίου φορέα αλληλεπίδρασης είναι αυτό της σχέσης (1.3), η οποία μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά, όπως στο Σχ. 1.3.

Ας σημειωθεί ότι και η διαδικασία του Σχ. 1.2 θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένας τετριμμένος (ταυτοτικός) μετασχηματισμός όπου το αρχικό ζεύγος ηλεκτρονίου-πρωτονίου μετασχηματίζεται σε ένα τελικό ζεύγος πάλι ηλεκτρονίου-πρωτονίου με τη βοήθεια ενός εικονικού φωτονίου.



Σχ. 1.3. Το μιόνιο, μ, μετασχηματίζεται σε νετρίνο μιονίου, ν_μ, με τη εκπομπή ενός σωματίου, που συμβολίζεται με W^- και είναι ένας από τους φορείς της λεγόμενης ασθενούς αλληλεπίδρασης. Το W^- στη συνέχεια αφανίζεται με τη δημιουργία ζεύγους ηλεκτρονίου, e^-, αντινετρίνου ηλεκτρονίου, $\overline{\nu}_e$. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να γίνει και με την απορρόφηση ενός W^+, εάν αυτό έχει ήδη εκπεμφθεί ταυτόχρονα με τη δημιουργία του ζεύγους ηλεκτρονίου-αντινετρίνου. Σημειώστε ότι τα αντισωμάτια τα παριστάνουμε με φορά αντίθετη από αυτή του βέλους του χρόνου, ως να προχωρούν προς το παρελθόν (βλ. [21], σελ. 576-578). Διαγράμματα όπως αυτά των σχημάτων 1.2, 1.3 και αυτών που ακολουθούν ονομάζονται **διαγράμματα Feynman**. Τα διαγράμματα αυτά είναι πολύ χρήσιμα γιατί, αφενός μεν δίνουν μια εναργή εικόνα της φυσικής διαδικασίας, αφετέρου δε επιτρέπουν μέσω συγκεκριμένων κανόνων τον υπολογισμό ποσοτήτων όπως είναι, π.χ., ο μέσος χρόνος ζωής του μιονίου

Στον Πιν**.** 1.2 (επόμενη σελίδα) δίνονται κάποια στοιχεία για τις τέσσερις βασικές αλληλεπιδράσεις. Τα σύμβολα που εμφανίζονται στην τρίτη στήλη του Πιν. 1.2 έχουν ως εξής: G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας (σταθερά της παγκόσμιας έλξης), $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck (δια 2π, το «σήμα κατατεθέν» της Κβαντομηχανικής), c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, g_w είναι ένα μέτρο της έντασης της ασθενούς αλληλεπίδρασης, m_w είναι η μάζα του σωματίου-αλ, W^+, g_s είναι ένα μέτρο της έντασης της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Οι αριθμητικές τιμές κάποιων από αυτές τις παγκόσμιες σταθερές δίνονται στον πίνακα 1 στο εσώφυλλο του βιβλίου.

Η εμβέλεια r_o των αλληλεπιδράσεων (εκτός της ισχυρής, που υπόκειται σε εγκλωβισμό και δεν μπορεί να εκδηλωθεί, βλ. Κεφ. 6 και 7) συνδέεται με τη μάζα m των φορέων τους (δηλ.με τη μάζα των σωματίων-αλ) ως εξής:

$$r_0 = \hbar / mc \,. \qquad (1.4)$$

Ας σημειωθεί ότι το σπιν όλων των σωματίων-αλ είναι ακέραιο σε αντίθεση με αυτό των σωματίων-υ που έχουν σπιν ημιακέραιο. Ως συνέπεια αυτού του γεγονότος τα σωμάτια-αλ δεν υπόκεινται στην απαγόρευση του να βρεθούν περισσότερα από ένα όμοια στην ίδια κατάσταση. Μάλιστα, τα σωμάτια με ακέραιο σπιν, που ονομάζονται συλλήβδην **μποζόνια**, προτιμούν να βρεθούν μαζί με άλλα όμοια τους στην ίδια κατάσταση.

Πιν. 1.2: Οι βασικές αλληλεπιδράσεις και τα σωμάτια-φορείς τους.

Όνομα	Εμβέλεια (m)	Αδιάστατη ένταση	Σωμάτιο (α) φορέας (είς)	Σύμβο-λο	Μάζα × c^2 ηρεμίας (MeV)	Ηλεκτρι κό φορτίο	Σπιν	Χρωμα-τικό φορτίο	Ποια σωμάτια είναι πηγές και αποδέκτες
Βαρύτητα	∞	$\alpha_G = G\,m_p^{\,2}/\hbar c = 5,905955\times10^{-39}$	Βαρυτόνιο	-	0	0	2	0	Όλα (λεπτόνια, κουάρκ και αυτά του παρόντος πίνακα)
Ηλεκτρο-μαγνητική (ΗΜ)	∞ (αλλά και 10^{-10} λόγω + και -)	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$	Φωτόνιο	γ	0	0	1	0	Όλα όσα έχουν ηλεκτρικό φορτίο
Ασθενής πυρινική	10^{-18}	$\alpha_w = \frac{g_w^2}{\hbar c}\frac{\sqrt{2}m_p^2}{m_w^2} \sim 3\times10^{-7}$	Διανυσματικά μποζόνια	W^+ W^- Z^o	80000 80000 91000	1 -1 0	1 1 1	0	Κουάρκ και λεπτόνια, φωτόνια και διανυσματικά μποζόνια
Ισχυρή πυρινική	10^{-15}	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{\hbar c} \approx 1$	Γλοιόνια*	g	0	0	1	Ναι*	Κουάρκ και γλοιόνια

Σωμάτιο Higgs: Θεωρείται ότι έχει βρεθεί (ανακοίνωση του CERN της 4/7/2012) με ενέργεια ηρεμίας 125GeV, σπιν=0, ηλεκτρικό φορτίο=0.

*Τα γλοιόνια είναι πάντοτε παγιδευμένα όπως και τα κουάρκ και δεν έχουν παρατηρηθεί ελεύθερα. Σημειώστε ότι τα γλοιόνια φέρουν συνδυασμό χρωματικού φορτίου και αντιφορτίου (σε αντίθεση με τα φωτόνια που είναι ηλεκτρικά ουδέτερα). Το αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι ότι και τα ίδια τα γλοιόνια είναι πηγές και αποδέκτες της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Ένα ακόμη αποτέλεσμα είναι ότι η ισχυρή αλληλεπίδραση δεν διατηρεί κατ' ανάγκη το χρωματικό φορτίο *ενός κουάρκ*. Π.χ. ένα «κόκκινο (*R*) κουάρκ *u* μπορεί να γίνει «μπλε» (*B*) κουάρκ *u* εκπέμποντας ένα γλοιόνιο $B\overline{R}$ ή απορροφώντας ένα γλοιόνιο $B\overline{R}$. Αν λάβουμε υπόψη το χρωματικό φορτίο υπάρχουν οκτώ είδη γλοιονίων: $R\overline{B}, R\overline{G}, G\overline{R}, G\overline{B}$, $B\overline{R}, B\overline{G}, (R\overline{R} - G\overline{G})/\sqrt{2}$ και $(R\overline{R} + G\overline{G} - 2B\overline{B})/\sqrt{6}$. Σημειώστε ότι το σπιν όλων των σωματίων-αλ είναι ακέραιο σε αντίθεση με αυτό των σωματίων-υ που έχουν σπιν ημιακέραιο. Ως συνέπεια του γεγονότος αυτού τα σωμάτια-αλ δεν υπόκεινται στην απαγόρευση του να βρεθούν περισσότερα από ένα όμοια στην ίδια κατάσταση. Αντίθετα, τα σωμάτια με ακέραιο σπιν, που ονομάζονται **μποζόνια**, προτιμούν να βρεθούν μαζί με άλλα όμοια τους στην ίδια κατάσταση.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα σωμάτια φορείς των αλληλεπιδράσεων δεν είναι απλώς ένα νοητικό εργαλείο για να υπολογίζουμε σωστά τα αποτελέσματα των αλληλεπιδράσεων. Τα σωμάτια-αλ (περιλαμβανομένων και των φωτονίων που συνεχώς συλλαμβάνονται από τα μάτια μας και τις συσκευές καθημερινής χρήσης) έχουν πραγματική υπόσταση και έχουν παρατηρηθεί και μετρηθεί[5] στις πειραματικές διατάξεις που συνοδεύουν τους αντιδραστήρες υψηλών ενεργειών. Σημειώστε ότι η τρέχουσα προσπάθεια είναι να αναπτυχθεί μια ενιαία θεωρία και για τις τέσσερις αλληλεπιδράσεις έτσι ώστε να εμφανιστούν ως διαφορετικές «όψεις» μιας μόνο ενοποιημένης αλληλεπίδρασης (κατ' αντιστοιχία με την ενοποίηση των ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων που επέτυχαν οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού του Maxwell). Η προσπάθεια ενοποίησης έχει αποδώσει καρπούς με τη δημιουργία του λεγόμενου **καθιερωμένου προτύπου** που εξετάζει με ενιαίο τρόπο τις τρεις από τις τέσσερις βασικές αλληλεπιδράσεις. (Η βαρύτητα «αρνείται» προς το παρόν να ενταχθεί στο ενιαίο σχήμα).

Σημειώστε ότι τα σωμάτια–φορείς των αλληλεπιδράσεων, καίτοι τα περισσότερα δεν έχουν μάζα ηρεμίας, εντούτοις έχουν ενέργεια, E, και επομένως βάσει της σχέσης του Einstein, $E=mc^2$, έχουν και σχετικιστική μάζα (π.χ. το φωτόνιο έχει σχετικιστική μάζα $m=\hbar\omega/c^2$, παρόλο που έχει μάζα ηρεμίας μηδέν). Επομένως και τα σωμάτια-φορείς αλληλεπιδράσεων μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σωμάτια (με την ευρεία όμως έννοια) και ως εκ τούτου υπόκεινται στις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

Σημειώστε επίσης ότι σε αρκετές περιπτώσεις χειριζόμαστε τις αλληλεπιδράσεις ως κλασικά κύματα ή ακόμη και ως κλασικές δυνάμεις με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συνήθως λαμβάνουμε υπόψη τον κυματοσωματιδιακό χαρακτήρα των αλληλεπιδράσεων, όταν πρόκειται για μετασχηματισμούς ή για υπολογισμούς υψηλής ακρίβειας. *Στο παρόν βιβλίο θα χειριστούμε τις αλληλεπιδράσεις ως επί το πλείστον ως κλασικά κύματα ή ακόμη και ως κλασικές δυνάμεις.*

Στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου θα επανέλθουμε στα στοιχειώδη σωμάτια των Πιν. 1.1 και 1.2, (που είναι στην πραγματικότητα κυματοσωμάτια) για να αναφέρουμε πώς αλληλοπαγιδεύονται και πώς μετασχηματίζονται. Προς το παρόν θα περιοριστούμε σε κάποιες επισημάνσεις που πρέπει να έχει υπόψη του ο αναγνώστης ή η αναγνώστρια.

1.4 Σχόλια

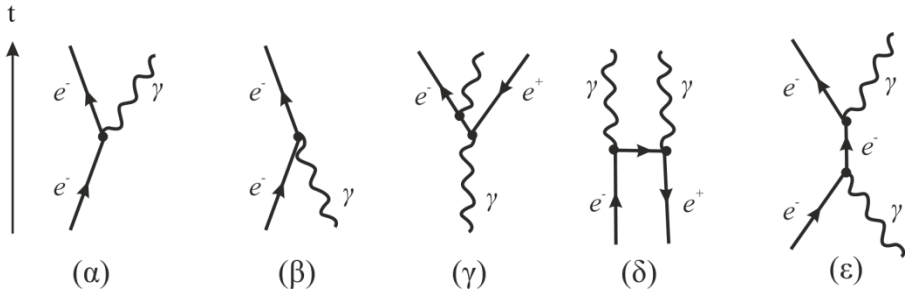
Η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι αφάνταστα πιο ασθενική από οποιαδήποτε άλλη. Κάθε φορά που ανασηκώνετε ένα αντικείμενο οι μύες σας, μάζας της τάξεως ενός κιλού που λειτουργούν με υπόλοιπα (μετά τις προσθαφαι-

[5] Εξαίρεση αποτελεί το βαρυτόνιο που δεν έχει παρατηρηθεί λόγω της απειροελάχιστης ισχύος αλληλεπίδρασής του.

ρέσεις) των ΗΜ αλληλεπιδράσεων, υπερνικούν την βαρύτητα που ασκεί όλη η Γη πάνω στο αντικείμενο που ανασηκώνετε. Εντούτοις αυτή η απίστευτα ασήμαντη βαρυτική αλληλεπίδραση γίνεται συγκρίσιμη και φτάνει στο σημείο να κυριαρχήσει ενεργειακά σε αντικείμενα πολύ μεγάλου αριθμού στοιχειωδών σωματίων-υ, όπως είναι ένας πλανήτης (όπου ο συνολικός αριθμός N_v πρωτονίων και νετρονίων μαζί είναι της τάξεως του 10^{50}-10^{54}) ή ένα άστρο όπου το N_v είναι της τάξεως 10^{56}-10^{60}. Αυτό οφείλεται στο μοναδικό συνδυασμό δύο παραγόντων που χαρακτηρίζουν τη βαρύτητα: Του *πάντοτε ελκτικού χαρακτήρα* της και της *μακράς εμβέλειάς* της. Ένα άλλο μοναδικό χαρακτηριστικό της βαρύτητας είναι το ότι *όλων* των ειδών τα σωμάτια (και τα σωμάτια-υ και τα σωμάτια-αλ, περιλαμβανομένων και των ίδιων των βαρυτονίων) είναι και πηγές και αποδέκτες της βαρυτικής άλληλεπίδρασης, αφού όλα τους έχουν μη μηδενική ενέργεια, άρα και μη μηδενική σχετικιστική μάζα. Αυτή η οικουμενικότητα της βαρύτητας φαίνεται κάπως δικαιολογημένη με βάση την κεντρική ιδέα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein. Σύμφωνα με αυτήν την ιδέα η βαρύτητα δεν είναι τίποτε άλλο παρά η *τροποποιημένη γεωμετρία του χωροχρόνου* λόγω της *παρουσίας* και της *κίνησης* της ενέργειας. Επομένως, αφού στη γεωμετρία υπόκειται το καθετί, το ίδιο θα ισχύει και για τη βαρύτητα. Θα κλείσω αυτήν την παράγραφο με την παρατήρηση ότι από τις τέσσερις στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις η λιγότερο κατανοητή σε μικροσκοπικό επίπεδο είναι η βαρύτητα, παρόλο που είναι η πιο οικεία και παρόλο που προηγήθηκε κατά 200 χρόνια στην ποσοτική της μελέτη.

Η ΗΜ αλληλεπίδραση παρουσιάζει επίσης κάποιες μοναδικές ιδιότητες. Πρώτον, είναι η μόνη που καθορίζει τη δομή της ύλης από την κλίμακα του ατόμου (10^{-10} m) έως αυτήν ενός αστεροειδούς (10^{5} m), είναι, δηλαδή, αυτή που "βασιλεύει" για 15 τάξεις μεγέθους. Δεύτερον, το στοιχειώδες σωμάτιο-αλ της ΗΜ αλληλεπίδρασης, το *φωτόνιο*, πέρα από το να "μεσιτεύει" την ΗΜ δύναμη, μπορεί να ταξιδεύει ελεύθερο στο χώρο μεταφέροντας σε μεγάλες αποστάσεις *ενέργεια* και *πληροφορία*. Κανένα άλλο σωμάτιο-αλ δεν είναι σε θέση να το κάνει αυτό: Το βαρυτόνιο είναι πολύ αδύναμο για να γίνει αισθητό, τουλάχιστον με την παρούσα τεχνολογία. Τα διανυσματικά μποζόνια είναι πολύ βραχύβια για ένα τέτοιο ρόλο. Τέλος τα γλοιόνια είναι για πάντα εγκλωβισμένα στα βαρυόνια και τα μεσόνια. Τρίτον, τα φωτόνια μπορούν εύκολα να εκπεμφθούν και να ανιχνευτούν (βλ. Σχ. 1.4). Αυτές οι μοναδικές ιδιότητες των φωτονίων τα καθιστούν καίριας σημασίας για τον Κόσμο: Π.χ., υπάρχει ζωή στη Γη και χάρη στα φωτόνια που μεταφέρουν από τον Ήλιο ενέργεια καθώς και πληροφορία (με την έννοια ότι το ισοζύγιο εισαγόμενης/εξαγόμενης εντροπίας είναι αρνητικό). Βλέπουμε τα διάφορα αντικείμενα χάρη στα εκπεμπόμενα από αυτά φωτόνια που καταλήγουν στα μάτια μας. Τα κινητά τηλέφωνα, οι τηλεοράσεις, το ασύρματο internet, οι τομογραφίες, τα τηλεκοντρόλ κλπ λειτουργούν χάρη σε φωτόνια

που μεταφέρουν πληροφορίες με τις οποίες ξεκίνησαν από την πηγή ή τις οποίες συνέλεξαν στην πορεία τους. Στα φωτόνια θα επανέλθουμε σε επό-



Σχ. 1.4 Διαδικασίες όπου μετέχει ένα ελεύθερο φωτόνιο: (α) Εκπομπή ενός φωτονίου από ηλεκτρόνιο (όπως στην παραγωγή ακτίνων Χ). (β) Απορρόφηση ενός φωτονίου από ηλεκτρόνιο (όπως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο). (γ) Δίδυμη γένεση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με αφανισμό ενός φωτονίου και εκπομπή ενός φωτονίου. (δ) Δίδυμος αφανισμός ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με δημιουργία δύο φωτονίων (στην περιοχή των ακτίνων γ με εφαρμογή στην ιατρική διαγνωστική μέθοδο PET), (ε) Απορρόφηση και εκπομπή φωτονίου από ηλεκτρόνιο (όπως στη σκέδαση Raman).

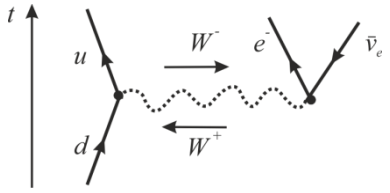
μενο κεφάλαιο.

Ο κύριος ρόλος της ασθενούς αλληλεπίδρασης, είναι ο μετασχηματισμός ενός λεπτονίου (όπως στο Σχ. 1.3) ή ενός κουάρκ (όπως στο Σχ. 1.5, επόμενη σελίδα) ή και ενός ζεύγους κουάρκ-λεπτονίου (όπως στο Σχ. 1.6) σε κάποια άλλα λεπτόνια/αντιλεπτόνια ή/και σε άλλα κουάρκ. Αυτοί οι μετασχηματισμοί επιτυγχάνονται με την εκπομπή ενός σωματίου-αλ του τύπου W^- ή του τύπου W^+ και τη σχεδόν άμεση απορρόφησή του. Όλα τα λεπτόνια και τα κουάρκ καθώς και τα ίδια τα W^+, W^-, Z^o και το φωτόνιο υπόκεινται στην ασθενή αλληλεπίδραση. Σημειώστε το πόσο μεγάλη είναι η μάζα ηρεμίας των σωματίων W^+, W^-, Z, πράγμα που εξηγεί την εξαιρετικά μικρή εμβέλεια της ασθενούς αλληλεπίδρασης βάσει του τύπου (1.4).

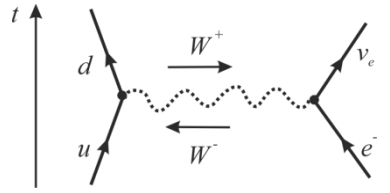
Σε κάθε *στοιχειώδη κόμβο*, όπου εκπέμπεται ή απορροφάται ένα σωμάτιο-αλ ορισμένες ποσότητες, όπως το ηλεκτρικό φορτίο, το χρωματικό φορτίο, ο βαρυονικός αριθμός, ο λεπτονικός αριθμός (για κάθε οικογένεια χωριστά[6]), η ορμή κλπ διατηρούνται. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε στοιχειώδη κόμβο το συνολικό, π.χ. ηλεκτρικό φορτίο των σωματίων που εισέρχονται στον κόμβο (περιλαμβανομένων και των σωματίων-αλ) πρέπει να είναι ίσο με αυτό εκείνων που εξέρχονται. Ανάλογα με το είδος της αλληλεπίδρασης υπάρχουν και άλλες επί πλέον ποσότητες που διατηρούνται. Σημειώστε τέλος ότι η ενέργεια δεν είναι ανάγκη να διατηρείται σε κάθε στοιχειώδη κόμβο, αν θεωρήσουμε ότι η ενέργεια είναι συνάρτηση της ορμής, όπως σε ένα ελεύθερο σωμάτιο· εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε ότι η ενέργεια δεν

[6] Στη συνέχεια μετά την εκπομπή ενός νετρίνου, αυτό μπορεί να μετατραπεί σε νετρίνο μιας άλλης οικογένειας, ένα φαινόμενο που είναι γνωστό ως ταλάντωση των νετρίνων.

εξαρτάται από την ορμή, αν τη θεωρήσουμε δηλαδή ως ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε πρέπει να διατηρείται σε κάθε κόμβο. Πάντως, σε οποιαδήποτε περίπτωση η ενέργεια οφείλει να διατηρείται συνολικά, που σημαίνει ότι η ενέργεια των σωματίων πριν από την έναρξη μιας οποιασδήποτε αντίδρασης οφείλει να είναι ίση με την ενέργεια των προϊόντων της αντίδρασης μετά την ολοκλήρωσή της. Προφανώς οι νόμοι διατήρησης επιβάλλουν περιορισμούς στο ποιες διαδικασίες μετασχηματισμού είναι εφικτές και ποιες όχι. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε σε μελλοντικό κεφάλαιο.



Σχ. 1.5 Η στοιχειώδης διαδικασία που οδηγεί στη λεγόμενη διάσπαση β. Η τελευταία είναι η βασική αντίδραση η οποία συμβαίνει στους θυγατρικούς πυρήνες που προκύπτουν από τη σχάση του ουρανίου στους πυρηνικούς αντιδραστήρες και είναι υπεύθυνη για τη ραδιενέργειά τους. Η εικονιζόμενη αντίδραση, που οφείλεται στην ασθενή αλληλεπίδραση, μετατρέπει ένα κουάρκ *d* σε κουάρκ *u* (και επομένως ένα νετρόνιο σε πρωτόνιο) με ταυτόχρονη εκπομπή ενός σωματίου-αλ W^- το οποίο σχεδόν αμέσως αφανίζεται δημιουργώντας ένα ζεύγος ηλεκτρονίου και αντινετρίνου ηλεκτρονίου



Σχ. 1.6 Ένα κουάρκ *u* εκπέμπει ένα σωμάτιο-αλ W^+ και ταυτόχρονα μετατρέπεται σε κουάρκ *d*, (έτσι μετατρέπεται ένα πρωτόνιο σε νετρόνιο). Το σωμάτιο-αλ W^+ σχεδόν αμέσως απορροφάται από ένα προϋπάρχον ηλεκτρόνιο που μετατρέπεται έτσι σε νετρίνο. Η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να γίνει σε ένα άτομο υδρογόνου γιατί θα παραβίαζε τη διατήρηση της ενέργειας συνολικά, αφού η ενέργεια ηρεμίας του νετρονίου και του νετρίνου είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου μαζί. Μπορεί όμως να γίνει μέσα σε ένα πυρήνα, εάν οδηγεί σε μείωση της συνολικής ενέργειας ηρεμίας του πυρήνα. Η παραπάνω διαδικασία δεν οδηγεί σε ραδιενεργές συνέπειες. Γιατί;

Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις πραγματοποιούνται με την ανταλλαγή σωματίων-αλ που λέγονται **γλοιόνια**. Από όλα τα σωμάτια μόνο τα κουάρκ και τα ίδια τα γλοιόνια είναι πομποί και αποδέκτες των γλοιονίων· άρα μόνο τα γλοιόνια και τα κουάρκ συμμετέχουν στην ισχυρή αλληλεπίδραση, η οποία είναι υπεύθυνη για την σύνδεση τριών κουάρκ προς σχηματισμό των λεγομένων βαρυονίων, όπως είναι το πρωτόνιο, το νετρόνιο και πολλά άλλα βραχύβια βαρυόνια.

Ακόμη και το νετρόνιο όταν είναι ελεύθερο είναι μετασταθές λόγω της διαδικασίας που εικονίζεται στο Σχ. 1.5, $d \to u + e^- + \overline{\nu}_e$, η οποία μετατρέπει ένα νετρόνιο σε πρωτόνιο, συν ηλεκτρόνιο, συν αντινετρίνο ηλεκτρονίου. Επειδή η ενέργεια ηρεμίας ενός ελεύθερου νετρονίου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ενεργειών ηρεμίας των προϊόντων, $p + e^- + \overline{\nu}_e$, της αντίδρασης, η αντίδραση ικανοποιεί τη διατήρηση της ενέργειας (με την προσθήκη της κινητικής ενέργειας των προϊόντων της αντίδρασης). Ένα ελεύθερο πρωτόνιο δεν υφίσταται την αντίδραση $p \to n + e^+ + \nu_e$ γιατί τότε θα παραβιαζόταν η διατήρηση της ενέργειας συνολικά. Αντίθετα, μέσα σε ένα πυρήνα πρωτόνια μπορούν να μετατραπούν σε νετρόνια μέσω της αντίδρασης $p \to n + e^+ + \nu_e$ ή μέσω της αντίδρασης $p + e^- \to n + \nu_e$, που εικονίζεται σε επίπεδο κουάρκ στο Σχ. 1.6, όπως και νετρόνια μπορούν να μετατραπούν σε πρωτόνια βάσει της $d \to u + e^- + \overline{\nu}_e$. Από όλες αυτές τις αντιδράσεις μόνο εκείνες μπορούν να γίνουν *μέσα σε ένα πυρήνα*, οι οποίες μειώνουν την *συνολική* ενέργεια ηρεμίας του πυρήνα. Έτσι, σε ένα πυρήνα, νετρόνια μπορούν να αλλάξουν σε πρωτόνια και αντίστροφα μέχρι ο πυρήνας να αποκτήσει την ελάχιστη ενέργεια ηρεμίας. Από κει και πέρα ο πυρήνας είναι σταθερός. Αλλιώς ο πυρήνας είναι ραδιενεργός μέχρι να καταλήξει σε κάποιο σταθερό πυρήνα μέσω κάποιας από τις παραπάνω αντιδράσεις και ενδεχομένως μέσω εκπομπής ελεύθερου φωτονίου ή άλλως πως.

Εκτός από βαρυόνια (σταθερά ή ασταθή), η ισχυρή αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό των λεγόμενων μεσονίων που αποτελούνται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ. Τα μεσόνια είναι όλα τους μετασταθή. Τα μεσόνια που σχηματίζονται από κουάρκ της πρώτης οικογένειας και έχουν ελάχιστη ενέργεια λέγονται **πιόνια** και είναι τα εξής τρία: $\pi^+ \equiv u\overline{d}$, $\pi^- \equiv d\overline{u}$, $\pi^o \equiv (u\overline{u} - d\overline{d})/\sqrt{2}$.

Οι ιδιότητες και οι μετασχηματισμοί όχι μόνο των στοιχειωδών σωματίων αλλά και των σύνθετων (βαρυονίων και μεσονίων) που μελετώνται πειραματικά στους μεγάλους επιταχυντές είναι σε πλήρη συμφωνία με τους θεωρητικούς υπολογισμούς που βασίζονται στην αποδεκτή θεωρία η οποία είναι γνωστή ως το *καθιερωμένο πρότυπο (ή μοντέλο).* Το μοντέλο αυτό απαιτεί την ύπαρξη ενός ακόμη είδους στοιχειώδους σωματίου, που αποκαλείται **σωμάτιο Higgs**[7] και είναι υπεύθυνο για το ότι στοιχειώδη σωμάτια, όπως π.χ.τα διανυσματικά μποζόνια, έχουν μη μηδενική μάζα ηρεμίας. Το σωμάτιο Higgs δεν είχε ανιχνευθεί πειραματικά μέχρι 2012, διότι οι λειτουργούντες μέχρι τότε επιταχυντές δεν προσέδιδαν στα συγκρουόμενα

[7] Το σωμάτιο Higgs είναι αναγκαίο θεωρητικά γιατί η αλληλεπίδρασή του με άλλα σωμάτια είναι αυτή που τους προσδίδει μάζα μέσω ενός μηχανισμού που είχε προταθεί από τον P. W. Anderson ένα έτος πριν από τη σχετική δημοσίευση του Higgs και άλλων, βλ. [43], σελ. 219.

σωμάτια επαρκή ενέργεια για να παραχθεί το Higgs του οποίου η ενέργεια ηρεμίας αναμενόταν να είναι την περιοχή 114000 έως 150000 MeV. Με την κατασκευή και λειτουργία του επιταχυντή Large Hadron Collider (LHC) στο CERN επετεύχθη επιτέλους η απαιτούμενη ενέργεια των πρωτονίων ώστε κατά τη μετωπική σύγκρουσή τους να παραχθεί και να ανιχνευθεί το σωμάτιο Higgs. Αυτό πράγματι συνέβη, σύμφωνα με την ανακοίνωση του CERN της 4ης Ιουλίου 2012, προσφέροντας έτσι μια ακόμη επαλήθευση για το καθιερωμένο μοντέλο. Η ενέργεια ηρεμίας του Higgs προσδιορίστηκε στα 125000 MeV, επαληθεύθηκε δε, ότι το σπιν του είναι μηδέν (καθιστώντας το έτσι το μοναδικό βαθμωτό στοιχειώδες μποζόνιο) και ότι η ομοτιμία του ειναι θετική.

Το καθιερωμένο μοντέλο παρ' όλες τις επιτυχίες του αφήνει αναπάντητα κάποια θεμελιώδη ερωτήματα: Γιατί υπάρχουν τρεις οικογένειες κουάρκ και λεπτονίων και όχι μόνο μία ή π.χ. πέντε; Γιατί οι μάζες ηρεμίας των σωματίων-υ έχουν τις συγκεκριμένες τιμές; Γιατί οι εντάσεις των διαφόρων άλληλεπιδράσεων έχουν τις τιμές που έχουν; Μήπως υπάρχει σ' ένα βαθύτερο επίπεδο και σε πολύ πιο μικρή κλίμακα μήκους μια δομή του Κόσμου από την οποία να προκύπτουν απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα; Μ' άλλα λόγια υπάρχει μια πιο θεμελιώδης θεώρηση του Κόσμου από την οποία να προκύπτουν οι μάζες των στοιχειωδών σωματίων-υ και οι εντάσεις των διαφόρων αλληλεπιδράσεων;

Δεν υπάρχει έλλειψη ιδεών και θεωρητικών προτάσεων πέρα από το καθιερωμένο μοντέλο που αποβλέπουν στο να απαντήσουν σε κάποια τουλάχιστον από τα παραπάνω ερωτήματα. Ένα τέτοιο θεωρητικό σχήμα, γνωστό ως **υπερσυμμετρικό**, συγκεντρώνει κάποιες σοβαρές ενδείξεις υπέρ του αλλά όχι πειραματική επιβεβαίωση. Το μοντέλο αυτό προβλέπει ότι οι άλληλεπιδράσεις για πάρα πολύ υψηλή ενέργεια ενοποιούνται έχοντας ένα κοινό μέγεθος έντασης. Το υπερσυμμετρικό μοντέλο προβλέπει επίσης μια συμμετρία μεταξύ ύλης και δυνάμεων με την έννοια ότι για κάθε ένα από τα φερμιόνια του Πιν. 1.1 υπάρχει ένα αντίστοιχο δίδυμο σωμάτιο που είναι μποζόνιο και για κάθε μποζόνιο του Πιν. 1.2 υπάρχει ένα αντίστοιχο δίδυμο σωμάτιο που είναι φερμιόνιο. Επί πλέον το μοντέλο θεωρεί ότι οι φυσικοί νόμοι που ισχύουν για τα σωμάτια των πινάκων 1.1 και 1.2 ισχύουν επίσης και για τα αντίστοιχα δίδυμά τους σωμάτια. Ένα προσόν της υπερσυμμετρικής υπόθεσης είναι ότι παρέχει υποψήφια σωμάτια από τα οποία ενδεχομένως να συνίσταται η λεγόμενη σκοτεινή ύλη που εμφανίζεται έμμεσα σε γαλαξιακές και κοσμολογικές παρατηρήσεις.

Ένα άλλο θεωρητικό μοντέλο, στενά συνδεδεμένο με το υπερσυμμετρικό και γνωστό ως **θεωρία χορδών,** υποθέτει ότι οι στοιχειώδεις μονάδες του Κόσμου δεν είναι σημειακά σωμάτια αλλά ότι έχουν διαστάσεις, είτε μία (χορδές) είτε δύο (μεμβράνες) είτε και περισσότερες. Το μέγεθος τους είναι πολύ πιο μικρό από οτιδήποτε είναι προσιτό στη σύγχρονη τεχνολογία: 10^{-35}m, δηλαδή 17 τάξεις μεγέθους μικρότερο από τα σημερινά τεχ-

νολογικά όρια. Το θεωρητικό αυτό σχήμα, χωρίς πειραματική στήριξη μέχρι σήμερα (2018), έχει ορισμένες πολύ επιθυμητές ιδιότητες, π.χ., ανάγεται στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας στο όριο που η σταθερά του Planck, $\hbar$, τείνει στο μηδέν. Κάποια επιχειρήματα υπέρ του υπερσυμμετρικού μοντέλου και του μοντέλου των χορδών μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο βιβλίο των Hawking και Mlodinow, *Το Μεγάλο Σχέδιο*[3].

1.5 Περίληψη των κυριοτέρων σημείων

Τα στοιχειώδη σωμάτια ύλης και οι βασικές αλληλεπιδράσεις παρουσιάζονται στους πίνακες 1.1 και 1.2 αντιστοίχως. Η καθιερωμένη και επιβεβαιωμένη ιεραρχική δομή της ύλης στη σημερινή εποχή ξεκινά από τα δύο είδη κουάρκ της πρώτης οικογένειας, τα οποία με τη βοήθεια της ισχυρής αλληλεπίδρασης, δηλαδή μέσω ανταλλαγής γλοιονίων, συντίθεται σε δύο ειδών σύνθετα σωμάτια:

Στο *πρωτόνιο* το οποίο αποτελείται από δύο πάνω κουάρκ και ένα κάτω κουάρκ· το πρωτόνιο συνολικά φέρει μια μονάδα θετικού ηλεκτρικού φορτίου, μηδέν συνολικά χρωματικό φορτίο (είναι δηλαδή, "άχρωμο"), έχει ενέργεια ηρεμίας 938,27 MeV=1836,15 $m_e c^2$ και ακτίνα $0{,}84\times10^{-15}$m.

Και στο *νετρόνιο* το οποίο αποτελείται από δύο κάτω κουάρκ και ένα πάνω κουάρκ· το νετρόνιο έχει συνολικά μηδέν και ηλεκτρικό φορτίο και χρωματικό φορτίο, ενέργεια ηρεμίας 939,56 MeV $= 1838{,}68 m_e c^2$ και ακτίνα $0{,}84\times10^{-15}$m. Τόσο το πρωτόνιο όσο και νετρόνιο έχουν σπιν ½, είναι δηλαδή, φερμιόνια. Το ελεύθερο νετρόνιο είναι μετασταθές με μέσο χρόνο ζωής 14,8 λεπτά ή χρόνο υποδιπλασιασμού 10,2 λεπτά.

Το επόμενο βήμα στην ιεραρχική δομή της ύλης επιτυγχάνεται με το συνδυασμό πρωτονίων και νετρονίων προς σχηματισμό ατομικών πυρήνων με τη βοήθεια πάλι της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Υπάρχουν περίπου 270 διαφορετικοί πυρήνες από τον μικρότερο που έχει μόνο ένα πρωτόνιο (και είναι ο πυρήνας του συνήθους ατόμου του υδρογόνου) μέχρι τον μεγαλύτερο που έχει 92 πρωτόνια και 146 νετρόνια (και είναι ο πυρήνας του ατόμου του ουρανίου με 238=92+146 **νουκλεόνια**, όπως λέγονται από κοινού τα πρωτόνια και τα νετρόνια, ως συστατικά των πυρήνων). Υπάρχει και ο μικρότερος πυρήνας του ουρανίου με 92 πρωτόνια και 143 νετρόνια, το ουράνιο 235.

Ο κάθε πυρήνας, ως θετικά φορτισμένος, έλκει ηλεκτρικά τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια και τα παγιδεύει γύρω του σε αποστάσεις όμως που κυμαίνονται από εκατό έως εκατό χιλιάδες φορές μεγαλύτερες από τις διαστάσεις του πυρήνα. Έτσι σχηματίζονται τα 92 είδη ατόμων. Το κάθε είδος ατόμου χαρακτηρίζεται μόνο από τον αριθμό των πρωτονίων στον πυρήνα του, ο οποίος ονομάζεται **ατομικός αριθμός** και συμβολίζεται με Z κεφαλαίο. Άτομα με το ίδιο Z αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων στον πυρήνα

τους ονομάζονται **ισότοπα** του ίδιου στοιχείου. Π.χ. το ουράνιο 238 και το ουράνιο 235 είναι ισότοπα του ουρανίου με το ίδιο Z=92 αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων.

Η διαδικασία συνεχίζεται με τη συνένωση ατόμων προς σχηματισμό μορίων, συνένωση ατόμων ή/και μορίων προς σχηματισμό στερεών, υγρών, ιστών, οστών, φυτών, αστεροειδών ή και ακόμη μεγαλύτερων αντικειμένων όπως είναι οι πλανήτες, τα άστρα, κλπ όπου επεμβαίνουν και οι βαρυτικές άλληλεπιδράσεις.

Η εμβέλεια των δυνάμεων (εκτός της ισχυρής) μεταξύ δύο σωματίων χαρακτηρίζεται από ένα μήκος r_0 εκθετικής απόσβεσής τους όσο τα δύο σωμάτια απομακρύνονται. Το μήκος αυτό συνδέεται με τη μάζα ηρεμίας m του κβάντου (ή των κβάντων) της αντίστοιχης αλληλεπίδρασης με τον ακόλουθο τύπο:

$$r_o = \hbar / mc \,. \qquad (1.4)$$

Αν αυτή η δύναμη μειώνεται όχι εκθετικά, αλλά αντιστρόφως ανάλογα π.χ. του τετραγώνου της απόστασης, όπως η βαρύτητα, θεωρούμε το r_0 άπειρο.

Η ιεραρχική δομή της ύλης, που βασίζεται στην ύπαρξη ελκτικών συνολικά αλληλεπιδράσεων, οδηγεί σε ένα συμπέρασμα και σε ένα καίριο ερώτημα: *Οι αλληλεπιδράσεις από μόνες τους αναμένεται ότι θα οδηγούσαν στη σύνθλιψη και κατάρρευση των δομών της ύλης λόγω του συνολικά ελκτικού χαρακτήρα τους (όπως συμβαίνει στις μαύρες τρύπες). Επομένως κάτι πρέπει να αντιτίθεται στις αλληλεπιδράσεις και να εμποδίζει την κατάρρευση της ύλης.* Τι είναι λοιπόν αυτό που αντιτίθεται στη συμπίεση των αλληλεπιδράσεων και εξασφαλίζει το ότι οι δομές της ύλης δεν καταρρέουν, αλλά αντίθετα βρίσκονται σε ισορροπία και εμφανίζουν σταθερότητα χωρίς εντούτοις να αποκλείεται και η δυνατότητα αλλαγής ;

Η απάντηση βρίσκεται στη 2^{η} βασική ιδέα της Φυσικής που είναι:

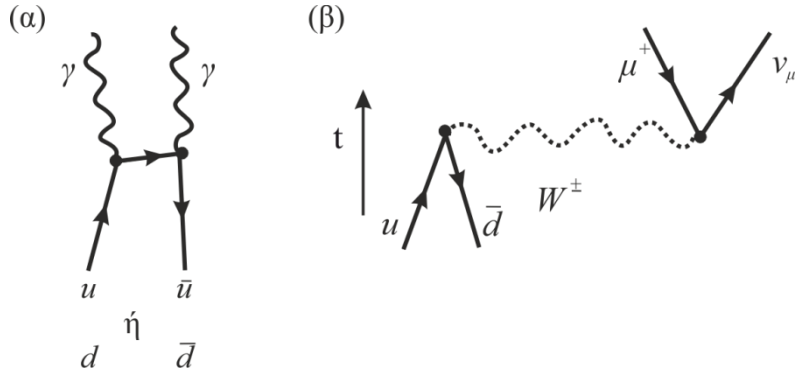
Ο ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΣ ΔΥΙΣΜΟΣ !

1.6 Λυμένες ασκήσεις

1. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman για τον αφανισμό των μεσονίων $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ και $\pi^+ = u\bar{d}$. Εκτιμήστε το μέσο χρόνο ζωής τους.

Λύση: Το π^0 αποτελείται από ένα σωμάτιο και το αντισωμάτιό του (είτε το u και το $\bar{u}$ είτε το d και το $\bar{d}$· όμως, εάν υπάρχουν δύο δυνατότητες, όπως στην παρούσα περίπτωση, η Κβαντομηχανική επιτρέπει και τον οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό τους που στην προκειμένη περίπτωση είναι ο εμφανιζόμενος

στην εκφώνηση του προβλήματος. Ο αφανισμός ζεύγους σωματίου και του αντισωματίου του γίνεται κατ' αναλογία με το Σχ. 1.4(δ) προς δύο φωτόνια είτε πρόκειται για το ζεύγος $u\bar{u}$ είτε για το ζεύγος $d\bar{d}$ είτε για γραμμικό συνδυασμό τους. Η ανάγκη για δύο φωτόνια προκύπτει από τη διατήρηση της ορμής. Αυτό είναι προφανές αν εξετάσουμε τον αφανισμό του πιονίου π^0 σε ένα σύστημα όπου το πιόνιο ακινητεί. Αν το π^0 μετασχηματιζόταν σε ένα μόνο φωτόνιο η ορμή της τελικής κατάστασης θα ήταν διάφορη του μηδενός, ενώ της αρχικής θα ήταν μηδέν. Χρειάζονται επομένως, δύο φωτόνια αντίθετης ορμής το καθένα τους και με ενέργεια ίση με το μισό της ενέργειας ηρεμίας του π^0. Επομένως το αντίστοιχο διάγραμμα Feynman έχει όπως στο Σχ. 1.7(α). (Τρία ή περισσότερα φωτόνια θα ικανοποιούσαν επίσης τους νόμους διατήρησης αλλά το αντίστοιχο διάγραμμα θα είχε τρεις ή περισσότερους κόμβους. Κάθε διάγραμμα (που εμπλέκει την ΗΜ δύναμη) με ένα επί πλέον κόμβο δίνει μια μικρή διόρθωση στο προηγούμενό του (σ' αυτό χωρίς τον επί πλέον κόμβο) συνήθως κατά λιγότερο από 1% και άρα μπορεί να παραλειφθεί). Επομένως στα διάγραμματα Feynman που εμπλέκουν ΗΜ (ή ασθενείς) αλληλεπιδράσεις περιοριζόμαστε συνήθως στον ελάχιστο αριθμό κόμβων που να ικανοποιεί όμως τους νόμους διατήρησης.



Σχ. 1.7 (α) Το διάγραμμα Feynman για τον αφανισμό του π^0. (β) Το διάγραμμα Feynman για τον αφανισμό του π^+.

Ο αφανισμός του $\pi^+ = u\bar{d}$ δεν μπορεί να γίνει με την ΗΜ αλληλεπίδραση, δηλαδή με εκπομπή φωτονίου, γιατί θα παραβίαζε τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου. Η μόνη δυνατότητα είναι ο αφανισμός του π^+ να συνοδευθεί με εκπομπή του σωματίου W^+, ή, ισοδύναμα, με απορρόφηση ενός προϋπάρχοντος W^-. Το αντίστοιχο διάγραμμα θα είναι κάπως παρόμοιο με αυτό του Σχ. 1.5, αλλά με τη διαφορά ότι το *u* είναι στην αρχική κατάσταση και όχι στην τελική, όπως στο 1.5, και το ότι στην αρχική κατάσταση έχουμε το αντισωμάτιο $\bar{d}$ και όχι το σωμάτιο *d*. Με αυτές τις τροποποιήσεις προκύπτει το διάγραμμα του Σχ. 1.7(β) για τον αφανισμό του π^+. Αντί της δυάδας $\bar{\mu}, \nu_\mu$ μπορούσε να είχαμε την e^+, ν_e.

Για την εκτίμηση του χρόνου ζωής ισχύει το εξής: ΄Οσο ισχυρότερες είναι οι αλληλεπιδράσεις που ευθύνονται για τον αφανισμό σωματίου τόσο βραχύτερος

είναι ο χρόνος ζωής του. Έτσι, όταν υπεύθυνες για τον αφανισμό σωματίου είναι οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις, οι τυπικές τιμές κυμαίνονται συνήθως στην περιοχή από 10^{-24}-10^{-23}s, ενώ, όταν υπεύθυνες είναι οι ΗΜ (σε διαγράμματα με δύο κόμβους), οι τυπικές τιμές μέσου χρόνου ζωής είναι γύρω στην περιοχή του 10^{-16} s. Όταν υπεύθυνες είναι οι ασθενείς, που είναι οι ασθενέστερες όλων, οι τυπικές τιμές χρόνου ζωής (για διαδικασίες με δύο κόμβους) αναμένονται να είναι γύρω στο 10^{-8} s αλλά και πολύ μεγαλύτερες, όπως είδαμε στην περίπτωση του μιονίου και του ελεύθερου νετρονίου. Πράγματι ο μέσος χρόνος ζωής του π^0 είναι $0{,}84\times10^{-16}$s, ενώ του π^+ $2{,}6\times10^{-8}$ s. Περιμένει κανείς ότι το π^+ θα είναι, ως τάξη μεγέθους, $20000^2 = 400$ εκατομμύρια φορές μακροβιότερο του π^0, λόγω του συνδυασμού της παρουσίας *δύο* κόμβων με το ότι οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι περί τις είκοσι χιλιάδες φορές ασθενέστερες σε σχέση με τις ΗΜ. Στην προκειμένη περίπτωση, το π^+ είναι πράγματι περίπου 300 εκατομμύρια φορές μακροβιότερο του π^0. Όμως, θα πρέπει να έχει κανείς υπόψη του ότι ο χρόνος ζωής ο οφειλόμενος σε ασθενείς αλληλεπιδράσεις κυμαίνεται ανάλογα με την περίπτωση από 10^{-13} έως 889 s. (Βλ. Πιν. 7.1 και 7.2, σελ. 170 και 171).

2. Η εμβέλεια r_0 των ασθενών αλληλεπιδράσεων είναι περίπου $2{,}3\times10^{-18}$ m. Ποια είναι η ενέργεια ηρεμίας των διανυσματικων μποζονίων ;

Λύση: Από τον τύπο $r_0 = \hbar / mc$ έχουμε $mc^2 = \hbar c / r_0$. Είναι ίσως βολικότερο να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς στο ατομικό σύστημα μονάδων, όπου το c=137α.μ., το $r_0 = 2{,}3\times10^{-18} / 0{,}529\times10^{-10} = 4.35\times10^{-8}$ α.μ. και το $\hbar = 1$ α.μ. Άρα η ενέργεια ηρεμίας στις μονάδες αυτές προκύπτει ίση με $mc^2 = 137 / (4{,}35\times10^{-8}) = 3{,}15\times10^{9}$ α.μ.=86 GeV. Οι μετρημένες τιμές των W^+, W^- είναι 80 GeV, ενώ του Z^o είναι 91 GeV.

1.7 Άλυτες ασκήσεις

1. Καταρτίστε ένα πίνακα των τριών οικογενειών λεπτονίων και κουάρκ δίνοντας κατά σειρά το όνομα, το σύμβολο, τη μάζα, το σπιν, και το ηλεκτρικό φορτίο.

2. Καταρτίστε ένα πίνακα των τεσσάρων βασικών δυνάμεων της φύσης δίνοντας το όνομά τους, την εμβέλειά τους, την σχετική έντασή τους, τα σωμάτια φορείς τους (μαζί με τη μάζα τους, το ηλεκτρικό τους φορτίο, το σπιν τους και τις πηγές τους).

3. Καταρτίστε ένα πίνακα των βασικών δομών της ύλης ξεκινώντας από τα θεωρούμενα στοιχειώδη σωμάτια και καταλήγοντας στο Σύμπαν ολόκληρο. Για κάθε δομή να αναφέρετε το χαρακτηριστικό της μέγεθος, τα συστατικά της και τις αλληλεπιδράσεις που την καθορίζουν.

4. Το 1798 ο Henry Cavendish χρησιμοποιώντας ζυγό στρέψης μέτρησε για πρώτη φορά τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G ($G = 6{,}674\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$). Η μετρηση αυτή προσδιόρισε τη μάζα της Γης. «Ζύγισε» για πρώτη φορά τη Γη, όπως είπαν τότε. Εξηγήστε πώς. Προσδιορίστε τη μάζα της Γης και τη μέση πυκνότητά της με τον ακριβέστερο τρόπο γνωρίζοντας την τιμή του G.

Κεφάλαιο 2

Κυματοσωματιδιακός δυισμός: Η μεγάλη Ανατροπή

Τόσο εύλογο το ακατανόητο

Ο. Ελύτης

Σύνοψη: *Το κάθε στοιχειώδες κυματοσωμάτιο ενώ είναι αδιαίρετο, κινείται εντούτοις σαν να ήταν κύμα. Αυτός ο κυματικός χαρακτήρας συνεπάγεται αέναη κίνηση του κυματοσωματίου, όταν εγκλωβίζεται σε σύνθετες δομές περιορισμένου όγκου. Η σταθερά του Planck, ħ, συνδέει τη σωματιδιακή δυάδα* (ε,**p**) *με την κυματική* (ω,**k**). *Αντί τροχιάς τα κυματοσωμάτια περιγράφονται μέσω της λεγόμενης κυματοσυνάρτησης ψ από την οποία αντλούνται εν γένει πιθανοκρατικού χαρακτήρα πληροφορίες. Η Κβαντομηχανική, η θεωρία που μελετά τα κυματοσωμάτια, συνοψίζεται σε τρεις αρχές: του Heisenberg, του Pauli και του Schrödinger. Η σωματιδιακή φύση και ο κυματικός χαρακτήρας της κίνησης σε περιορισμένο όγκο εξασφαλίζουν διακριτές τιμές (όχι συνεχείς) και στη συνολική ενέργεια και στην ενέργεια του κάθε σωματίου. Αυτή η διπλή διακριτότητα (double digital character) εξασφαλίζει το σχετικά αναλλοίωτο των σύνθετων μικροσκοπικών δομών.(Βλ. Επίλογο, σελ. 368).*

2.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή

2.1.1. Τι είναι και πώς οδεύει το φως;

Ο Isaak Newton (1642-1727) επηρεασμένος ίσως από την εικόνα της φωτεινής ακτίνας θεωρούσε ότι το φώς αποτελείται από στοιχειώδη **σωμάτια**, δηλαδή από οντότητες που:

α. Είναι αδιαίρετες.

β. Οδεύουν από το σημείο Α στο σημείο Β ακολουθώντας μια τροχιά[1].

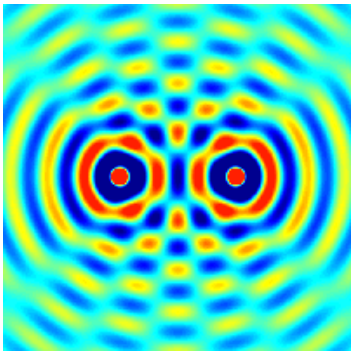
[1] Για τα 'σωμάτια' του φωτός η τροχιά από το Α στο Β καθορίζεται από την αρχή του ελάχιστου χρόνου, του Fermat (1601-1665). Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει

Ο Ch. Huygens (Χόϊχενς) (1629-1695) υποστήριζε ότι το φώς δεν αποτελείται από στοιχειώδη σωμάτια αλλά αντίθετα ότι είναι **κύμα**, δηλαδή μία οντότητα που:

α΄. Είναι συνεχής (και επομένως άπειρα διαιρετή).

β΄. Οδεύει από το σημείο Α στο σημείο Β όχι με το μονοδιάστατο τρόπο της τροχιάς αλλά απλωμένη στο διαθέσιμο χώρο[2] και εμφανίζουσα το χαρακτηριστικό κυματικό φαινόμενο της συμβολής. [Σχ.2.1.]

Το κυματικό μοντέλο του φωτός εξηγεί όχι μόνο τα φαινόμενα της γεωμετρικής οπτικής αλλά και άλλα, όπως είναι η συμβολή, όπου η σωματιδιακή εικόνα αποτυγχάνει. Έτσι επικράτησε η αμιγής κυματική εικόνα για το φως μέχρι και τις αρχές του 20^{ου} αιώνα.



Σχ. 2.1 Κύματα από δύο πηγές διαδίδονται σε όλο το χώρο και εμφανίζουν το φαινόμενο της συμβολής που έγκειται στο ότι αλλού λαμβάνει χώρα έντονη ενίσχυση (δύο φορές το άθροισμα των δύο ενεργειών) και αλλού αλληλοαναίρεση των ενεργειών

Οι M. Planck (1858-1947) και A. Einstein (1879-1955) προκειμένου να εξηγήσουν ο μεν πρώτος την ακτινοβολία του λεγομένου μέλανος σώματος, ο δε δεύτερος το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο αναγκάστηκαν να δεχθούν ότι το φώς έχει ένα μικτό χαρακτήρα: Ότι αποτελείται δηλαδή, από στοιχειώδη σωμάτια που έχουν μεν την ιδιότητα (α), αλλά δεν έχουν την ιδιότητα (β)˙ αντίθετα έχουν την κυματική ιδιότητα (β΄). Επομένως το φώς είναι εν μέρει σωμάτιο (λόγω της ιδιότητας (α)) και εν μέρει κύμα (λόγω της ιδιότητας (β΄)). Είναι δηλαδή, **κυματοσωμάτιο**.

ότι η αρχή αυτή εξηγεί τα φαινόμενα της λεγόμενης γεωμετρικής οπτικής (ευθύγραμμη διάδοση σε ομοιογενή μέσα, ανάκλαση, διάθλαση, νόμοι φακών κλπ).

[2] Σε ορισμένες περιπτώσεις η διάδοση περιορίζεται στο εσωτερικό ενός είδους ‘σωλήνα’ με ασαφή όρια, του τροχιακού ‘σωλήνα’ (βλ. Σχ.2.2).

2.1.2. Τι είναι και πώς οδεύουν τα υλικά σωμάτια;

Μέχρι και τη δεκαετία του 1920 τα στοιχειώδη υλικά σωμάτια εθεωρούντο οντότητες που είχαν και τις δύο θεμελιώδεις σωματιδιακές ιδιότητες και την (α) και την (β)[3]. Ο N. Bohr (1885-1962) προκειμένου να δικαιολογήσει την παρατηρούμενη θαυμαστή σταθερότητα των ατόμων και την επιλεκτική εκπομπή ΗΜ ακτινοβολίας από άτομα μόνο σε ορισμένες διακριτές συχνότητες θεώρησε *αυθαίρετα* ότι από όλες τις δυνατές τροχιές ενός ηλεκτρονίου γύρω από τον ατομικό πυρήνα μόνο εκείνες είναι πραγματοποιήσιμες που η στροφορμή τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck $\hbar$. Η παραδοχή του Bohr είχε μεγάλη επιτυχία: Προσδιόρισε την τάξη μεγέθους των ατομικών διαστάσεων ($a_B = \hbar^2 / e^2 m$ στο G-CGS ή $a_B = 4\pi\varepsilon_o \hbar^2 / e^2 m$ στο SI, $a_B = 0,529\,\text{Å}$) καθώς και το έργο ιονισμού του ατόμου του υδρογόνου. Ερμήνευσε ποιοτικά και ποσοτικά τις φασματικές γραμμές του ατομικού υδρογόνου και, φυσικά, ήρε το παράδοξο της σταθερότητας των ατόμων (βάσει της αρχής της κβάντωσης του Schrödinger, (βλέπε ενότητα 2.6 πιο κάτω). Παρέμενε όμως μια αυθαίρετη παραδοχή μέχρι που ο Louis-Victor de Broglie πρότεινε το 1924 την εξής ιδέα:

> Αφού τα κλασικά κύματα έχουν και σωματιδιακά χαρακτηριστικά, γιατί να μην έχουν και τα κλασικά σωμάτια κυματικά χαρακτηριστικά; Μ' άλλα λόγια, όπως στη συχνότητα, ω, και το κυματάνυσμα, **k**, του κύματος αντιστοιχίσαμε μια ενέργεια $\varepsilon = \hbar\omega$ και μια ορμή $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, γιατί να μην αντιστοιχήσουμε στην ενέργεια του σωματίου, ε, μια συχνότητα $\omega = \varepsilon / \hbar$ και στην ορμή του σωματίου **p** ένα κυματάνυσμα $\mathbf{k} = \mathbf{p} / \hbar$;

Αν το τολμήσουμε, η αυθαίρετη παραδοχή του Bohr αντιστοιχεί σε στάσιμα ηλεκτρονιακά κύματα γύρω από το πρωτόνιο, όπως στο Σχ. Ι(στ) του παραρτήματος Ι (σελ. 375), μετατρέπεται δηλαδή σε μια εύλογη απαίτηση. Με άλλα λόγια η παραδοχή του Bohr προκύπτει αβίαστα αν δεχτεί κανείς ότι τα

---

[3] Η τροχιά ενός υλικού σωματίου από το σημείο Α στο σημείο Β καθορίζεται σύμφωνα με την Κλασική Φυσική, από το νόμο του Νεύτωνα, **F**=*m***α**, ή, ισοδύναμα, από την αρχή της ελάχιστης δράσης. Η δράση είναι το ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο της διαφοράς κινητικής και δυναμικής ενέργειας κατά μήκος της όποιας τροχιάς.

υλικά σωμάτια, όπως και τα φωτόνια, είναι οντότητες που έχουν μεν την ιδιότητα (α) αλλά αντί της (β), έχουν την ιδιότητα (β΄). Είναι, δηλαδή στην πραγματικότητα και αυτά *κυματοσωμάτια*. Η ιδέα ότι τελικά *όλα* είναι κυματοσωμάτια έχει ελεγχθεί πειραματικά πάμπολλες φορές και με διάφορους τρόπους και έχει πάντοτε επιβεβαιωθεί. Έτσι αποτελεί μαζί με την ατομική ιδέα το πιο θεμελιώδες βάθρο της Επιστήμης. Λοιπόν, ας την συνοψίσουμε και ας τη σχολιάσουμε:

2.2 Όλα είναι κυματοσωμάτια: Σωμάτια ως προς την δομή τους, κύματα ως προς την κίνησή τους.

Σύμφωνα με τον κυματοσωματιδιακό δυισμό τα υλικά σωμάτια είναι είτε στοιχειώδη (δηλαδή αδιαίρετα) είτε σύνθετα (δηλαδή αποτελούμενα από έναν *ακέραιο* αριθμό στοιχειωδών σωματίων). Όμως, κάθε υλικό σωμάτιο ενέργειας ε και ορμής $\mathbf{p}$ δεν ακολουθεί στην κίνησή του μια συγκεκριμένη τροχιά, όπως θεωρεί η Κλασική Φυσική, αλλά οδεύει ως κύμα (βλέπε (β΄)) κυκλικής συχνότητας ω, όπου

$$\boxed{\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}}\ * \qquad (2.1)$$

και κυματανύσματος[4] $\mathbf{k}$, όπου

$$\boxed{\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}}. \qquad (2.2)$$

$\hbar$ είναι η σταθερά του Planck, η πιο "παγκόσμια" φυσική σταθερά.

Επί πλέον κάθε οντότητα που οδεύει ως κύμα (βλέπε (β΄)) με κυκλική συχνότητα ω και κυματάνυσμα $\mathbf{k}$ αποτελείται από έναν ακέραιο αριθμό αδιαίρετων στοιχειωδών ποσοτήτων, των λεγόμενων και κβάντων. Η κάθε τέτοια στοιχειώδης ποσότητα έχει ενέργεια

$$\varepsilon = \hbar\omega, \qquad (2.1΄)$$

και ορμή

***** Εξισώσεις εντός γκρι πλαισίου είναι βασικές, θεωρούνται γνωστές (και πολύ χρήσιμες και για το παρόν βιβλίο αλλά και γενικότερα). Εξισώσεις εντός λευκού πλαισίου είναι βασικές αλλά δεν θα χρησιμοποιηθούν στο παρόν βιβλίο.

[4] Η φορά του $\mathbf{k}$ δίνει τη κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και το μέτρο του, $|\mathbf{k}|$, ισούται εξ ορισμού με $2\pi/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος.

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \,. \qquad (2.2')$$

Μ' άλλα λόγια αυτά που η Κλασική Φυσική θεωρεί ως σωμάτια οδεύουν όπως τα κύματα παραμένοντας όμως σωμάτια. Και αυτά που η Κλασική Φυσική θεωρεί ως κύματα αποτελούνται από στοιχειώδη αδιαίρετα σωμάτια, ενώ εξακολουθούν να οδεύουν ως κύματα.

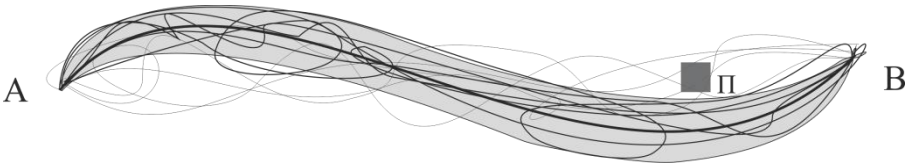
Δεν είναι εύκολο να συμφιλιωθεί κανείς με την επιβεβλημένη από το πείραμα "συγκατοίκηση", κάτω από τη "στέγη" κυματοσωμάτιο, των εννοιών κύμα και σωμάτιο που μας μοιάζουν αντιφατικές. Για να συνειδητοποιήσει κανείς αυτή τη δυσκολία και τελικά να την αποδεχθεί κάπως, θα ήταν χρήσιμο να μελετήσει το ιδεατό πείραμα των δύο σχισμών[5], που απότελεί εξιδανίκευση πραγματικών πειραμάτων. Η μετάβαση από την οικεία έννοια ενός σωματίου που κινείται σε τροχιά στην παράδοξη έννοια ενός σωματίου που διαδίδεται ως κύμα διευκολύνεται κάπως αν θεωρήσουμε την εξής εικόνα: Το σωμάτιο ακολουθεί για την μετακίνησή του από το αρχικό σημείο Α στο τελικό σημείο Β όχι μία αλλά πολλές τροχιές, πιο σωστά, όλες τις δυνατές τροχιές, αλλά κάθε μία με διαφορετικό *πλάτος πιθανότητας*[6] (βλέπε Σχ. 2.2). Η κλασική τροχιά έχει τη μεγαλύτερη συμβολή στην πιθανότητα. Αυτές που είναι κοντά της έχουν κάπως μικρότερη συμβολή. Και αυτές που είναι πολύ μακριά της έχουν πάρα πολύ μικρή συμβολή. Τελικά έχουμε μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση αν περιοριστούμε στη συμβολή των τροχιών που κείνται στο εσωτερικό του 'σωλήνα' του Σχ. 2.2. Επίσης η συμβολή των τροχιών που σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t κατάλήγουν στο εσωτερικό μιας περιοχής, π.χ. της έντονα διαγραμμισμένης περιοχής Π του Σχ. 2.2, δίνει το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο στην περιοχή αυτή γύρω από τη θέση $\mathbf{r}$ τη χρονική στιγμή t. Αυτό το πλάτος πιθανότητας[7] το συμβολίζουμε με το ελληνικό γράμμα ψ. Το $\psi(\mathbf{r},t)$,

[5] Η περιγραφή αυτού του ιδεατού πειράματος, που οφείλεται στον Feynman, παρουσιάζεται στο βιβλίο του Ε.Ν. Οικονόμου, *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος Ι, σελ. 178-186.

[6] Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος των πλατών πιθανότητας υψωμένη στο τετράγωνο δίνει εξ ορισμού την πιθανότητα μετάβασης από το Α στο Β.

[7] Η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο κατά τη χρονική στιγμή t σε μια μικρή περιοχή όγκου δV γύρω από το σημείο $\mathbf{r}$ ισούται εξ ορισμού με το $|\psi(\mathbf{r},t)|^2\,\delta V$ διηρημένο με το $\int|\psi|^2 dV$. Η μέση τιμή της ενέργειας δίνεται από τον τύπο $\langle E\rangle =$

που περιγράφει πλήρως την κατάσταση του σωματίου, είναι το αντίστοιχο της τροχιάς $\mathbf{r}(t)$ της κλασικής φυσικής, με την έννοια ότι από το $\psi(\mathbf{r},t)$



Σχ. 2.2 Ένα κυματοσωμάτιο για τη μετακίνησή του από την αρχική στοιχειώδη περιοχή Α στην τελική Β ακολουθεί όχι μία τροχιά (την κλασική, σημειωμένη με παχύτερη γραμμή), αλλά όλες τις δυνατές τροχιές κάθε μία με διαφορετικό πλάτος πιθανότητας. Θεωρήστε ένα "σωλήνα" με άξονα την κλασική τροχιά και πάχος της τάξεως του μήκους κύματος λ (διαγραμμισμένη περιοχή). Η συμβολή των τροχιών που βρίσκονται εκτός του "σωλήνα" είναι πάρα πολύ μικρή, σχεδόν αμελητέα. Επομένως συμβάλλουν κυρίως οι εντός του τροχιακού σωλήνα τροχιές. Συχνά ο τροχιακός σωλήνας υπό την επίδραση δυνάμεων συστρέφεται και κλείνει στον εαυτό του έτσι ώστε η συνολική έκτασή του να είναι συγκρίσιμη με το πάχος του (π.χ. σαν μια μικροσκοπική σαμπρέλα). Παίρνει τότε διάφορες διακριτές και συγκεκριμένες μορφές (τα ιδιοκύματα ή στάσιμα κύματα που έχει καθιερωθεί να λέγονται, προκειμένου για ηλεκτρόνια, **τροχιακά**). Στο Σχ. 9.3, σελ.203 εικονίζονται πέντε διαφορετικές μορφές του ηλεκτρονιακού τροχιακού 'σωλήνα' γύρω από ένα πρωτόνιο.

μπορούμε με συγκεκριμένους κανόνες να υπολογίσουμε όλα τα φυσικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν. Όμως τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών έχουν εν γένει πιθανοκρατικό χαρακτήρα, βρίσκουμε δηλαδή ποια είναι η πιθανότητα το τάδε μέγεθος να έχει τη δείνα τιμή (σε ορισμένες περιπτώσεις αυτή η πιθανότητα μπορεί να προκύψει μονάδα, όποτε έχουμε βεβαιότητα). Με την εισαγωγή αυτής της σύμφυτης πιθανοκρατικής περιγραφής καταφέρνει κανείς να συμβιβάσει τις έννοιες κύμα και σωμάτιο που μας φαίνονται αντιφατικές. Δεν είναι το ίδιο το σωμάτιο που είναι απλωμένο ως κύμα σε όλο το διαθέσιμο χώρο, άλλα το πλάτος πιθανότητας να το βρούμε στη μια ή στην άλλη θέση. Κατά κάποιο τρόπο, η αναπόφευκτη πιθανοκρατική περιγραφή, καίτοι κάπως άβολη[8], μας επιτρέπει να έχουμε "και την πίτα ολάκερη και το σκύλο χορτάτο". Ο *πιθανοκρατικός χαρακτήρας των προβλέψεων* συνδέεται άρρηκτα με τον καίριο ρόλο που αποδίδεται στη μέτρηση: *Η κάθε μέτρηση τροποποιεί εν γένει την κατάσταση του*

$= \left[\int \psi^* (\hat{E}_K \psi) dV + \int \psi^* \mathcal{V}(\mathbf{r}) \psi dV\right] / \int |\psi|^2 dV$, όπου το σύμβολο $\hat{E}_K \psi$ είναι το εξής: $(\hat{E}_K \psi) \equiv -(\hbar^2 / 2m)\left[(\partial^2\psi / \partial x^2) + (\partial^2\psi / \partial y^2) + (\partial^2\psi / \partial z^2)\right]$.

[8] Θα προτιμούσαμε, για να θυμηθούμε τον Einstein, "ο Θεός να μην παίζει ζάρια".

συστήματος, δηλαδή την ψ, έτσι ώστε αμέσως μετά τη μέτρηση όλα εκείνα τα προϋπάρχοντα της μέτρησης ενδεχόμενα αποτελέσματα που είναι ασύμβατα με το αποτέλεσμα της μέτρησης πάυουν πια να υφίστανται ως δυνατότητες. Με άλλα λόγια, η κάθε μέτρηση δρα ως χρονικό φίλτρο που αφήνει να περάσουν στο μέλλον μόνο εκείνα τα ενδεχόμενα που είναι συμβατά με το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Η ποσότητα ψ αποτελεί τη βάση για έναν εναλλακτικό, αλλά ισοδύναμο με αυτόν των πολλαπλών τροχιών τρόπο περιγραφής της κυματικής διάδοσης. Η πλήρης θεωρία που βασίζεται στον κυματοσωματιδιακό δυισμό και στη χρήση της έννοιας του ψ και της έννοιας των πολλαπλών διαδρομών λέγεται *Κβαντομηχανική*. Η Κβαντομηχανική έχει αναδειχθεί ως μια θεωρία απίστευτης αποτελεσματικότητας για την κατανόηση του Κόσμου (σε ποσοτικό επίπεδο). Στην ειδική περίπτωση που έχουμε κύματα υλικών σωματίων ταχύτητας πολύ μικρότερης αυτής του φωτός, τα οποία αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη ενέργεια[9] E, τότε η περιγραφή μέσω της ψ είναι πολύ πιο βολική έναντι αυτής των πολλαπλών τροχιών. Ο λόγος είναι ότι στην περίπτωση αυτή η ψ ικανοποιεί μια διαφορική κυματική εξίσωση που είναι γνωστή ως *χρονοανεξάρτητη εξίσωση* του Schrödinger **.** Την παρουσιάζουμε εδώ για πληρότητα αλλά δεν θα κάνουμε χρήση της:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+\mathcal{V}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r})}\,. \qquad (2.3)$$

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα σχολιάζοντας μια πρόταση η οποία, παρόλο που είναι παραπλανητική και ουσιαστικά λανθασμένη, λέγεται και γράφεται πολύ συχνά. Η πρόταση είναι η εξής: *Η Κβαντομηχανική ισχύει στο μικρόκοσμο, ενώ στο μακρόκοσμο ισχύει η Κλασική Μηχανική.* (Λάθος!)

Η σωστή διατύπωση είναι η ακόλουθη:

Όσον αφορά σε ***μακροσκοπικές***[10] ***κινήσεις*** *ακόμη και μικροσκοπικών κυματοσωματίων, η Κβαντομηχανική ανάγεται στην πολύ απλούστερη*

---

[9] Κύματα συγκεκριμένης ενέργειας έχουν τη μορφή στάσιμων κυμάτων όπου το $|\psi|^2$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

[10] Μακροσκοπικές είναι οι κινήσεις όταν το μήκος ℓ της κλασικής τροχιάς του Σχ. 2.2 είναι τόσο μεγάλο ώστε το πάχος του τροχιακού "σωλήνα" να θεωρείται συγκριτικά αμελητέο. Τότε ο τροχιακός σωλήνας έχει αναχθεί ουσιαστικά σε κλασική τροχιά. Επί πλέον, όταν το μήκος ℓ είναι τόσο μεγάλο ώστε να τυχαιοποιηθούν οι φάσεις των πλατών πιθανότητας κάθε κβαντικής τροχιάς λόγω αλληλεπιδράσεων

Κλασική Φυσική. Όμως, όσον αφορά στις ***ιδιότητες*** *των δομών της ύλης μικροσκοπικών αλλά και* μακροσκοπικών*, αυτές καθορίζονται από τους νόμους της Κβαντομηχανικής και όχι από αυτούς της Κλασικής Φυσικής.*

Το γεγονός αυτό είναι άμεση συνέπεια της ατομικής ιδέας που ανάγει την αφάνταστη ποικιλία του Κόσμου επομένως και των ιδιοτήτων των δομών του, στις *ιδιότητες* και στις μικροσκοπικές *κινήσεις* των στοιχειωδών συστατικών του. Αλλά οι μικροσκοπικές κινήσεις των στοιχειωδών κυματοσωματίων υπακούουν τους κβαντικούς νόμους και όχι τους κλασικούς. Κατά συνέπεια οι κβαντικοί νόμοι διέπουν και το μακροσκοπικό επίπεδο οργάνωσης της ύλης. Αδιάψευστη μαρτυρία για το ότι οι ιδιότητες των μακροσκοπικών δομών του Κόσμου καθορίζονται από κβαντομηχανικούς νόμους αποτελεί το γεγονός ότι οι τιμές αυτών των ιδιοτήτων εξαρτώνται από το $\hbar$, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια αυτού του βιβλίου. Ας το τονίσουμε λοιπόν όσο πιο εμφαντικά γίνεται:

> *Ο Κόσμος****,*** *όσον αφορά στις ιδιότητες όλων των δομών του (όχι στις κινήσεις τους), είναι κβαντικός****.*** *Αν δεν ήταν, δεν θα υπήρχαμε.*

Το γεγονός αυτό, δυστυχώς, παραμένει terra incognita όχι μόνο για τους μαθητές λυκείου αλλά και για αρκετούς φυσικούς. Πιθανόν αυτό να οφείλεται στο ότι η ακριβής και πλήρης διατύπωση της Κβαντομηχανικής απαιτεί πιο προχωρημένα μαθηματικά και στο ότι οι έννοιές της είναι πιο αφηρημένες και πιο απόμακρες από την καθημερινή εμπειρία, όπως θα έγινε ήδη φανερό από τα προηγούμενα σχόλια. Ίσως να οφείλεται και στο ότι η διδασκαλία της Κβαντομηχανικής επικεντρώνεται συνήθως σε τεχνικές λεπτομέρειες και έτσι με την έμφαση σε επί μέρους 'δένδρα' χάνεται το 'δάσος'. Εντούτοις οι νόμοι της Κβαντομηχανικής είναι τόσο σημαντικοί - αφού η *δομή* του Κόσμου από την πιο μικροσκοπική κλίμακα μέχρι την πιο μεγάλη διέπεται από αυτούς τους νόμους- ώστε να πρέπει να είναι κτήμα κάθε μαθητή λυκείου. Ευτυχώς, είναι δυνατόν να παρουσιάσει κανείς την ουσία της Κβαντομηχανικής παρακάμπτοντας τις εννοιολογικές και τεχνικές δυσκολίες της με το να εστιάσει την προσοχή του σε *τρεις βασικές* και συνάμα *απλές*[11] αρχές της. Αυτές οι αρχές πηγάζουν από τις κεντρικές σχέσεις (2.1 ή 2,1΄) και (2.2 ή 2.2΄) και, όπως θα δείξουμε στα κεφάλαια 5-14 του βιβλίου, έχουν επιπλέον

μεγάλη ερμηνευτική ισχύ χωρίς να απαιτούν
μαθηματικά πέραν αυτών του λυκείου.

Θα τις μνημονεύσουμε λοιπόν από τώρα και θα επανέλθουμε σ' αυτές ξανά και ξανά στο παρόν βιβλίο για να δείξουμε την αποτελεσματικότητά τους ακόμη και σε ποσοτικό επίπεδο:

με το περιβάλλον, χάνεται και η δυνατότητα συμβολής. Έτσι, υπό τις συνθήκες αυτές, η κίνηση ανάγεται πλήρως στην κλασική εικόνα. (Βλ. σχόλιο στη σελ. 74).

[11] Απλές και στη διατύπωση και στη χρήση τους και εντούτοις καίριας σημασίας.

α. Αρχή της απροσδιοριστίας (του Heisenberg)
β. Αρχή απαγορευτική (του Pauli)
γ. Αρχή του διάκριτου ενεργειακού φάσματος (του Schrödinger)[12]

Οι παραπάνω αρχές συνδυασμένες με το γενικό και πολύ σπουδαίο νόμο (3.5) του Κεφ. 3 εξηγεί γιατί οι σύνθετες μικροσκοπικές δομές της ύλης παρουσιάζουν τη θαυμαστή ιδιότητα της σταθερότητας (παρόλο που επιτρέπουν προσωρινές αλλαγές) και έτσι εξασφαλίζουν την υπ' αριθμό 1 συνθήκη για την ύπαρξη προβλέψιμης χημικής και βιοχημικής συμπεριφοράς.

2.3 Αρχή της απροσδιοριστίας (του Heisenberg).

Η απροσδιοριστία στη θέση ενός σωματίου κατά Δx (σε μια ορισμένη διεύθυνση) επί την απροσδιοριστία στην ορμή Δp_x (στην ίδια διεύθυνση) ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2}.\ ^{13} \qquad (2.4)$$

Η αρχή της απροσδιοριστίας είναι συνέπεια του κυματικού χαρακτήρα της ύλης. Ένα κύμα που αντιστοιχεί σε ένα μόνο κυματαριθμό k_x, δηλαδή σε ένα μόνο μήκος κύματος λ, ονομάζεται επίπεδο κύμα. Για το επίπεδο κύμα το $\Delta p_x = \hbar \Delta k_x$ είναι προφανώς μηδέν, αλλά το $\Delta x = \infty$, αφού το επίπεδο κύμα είναι απλωμένο σε όλο το χώρο. Για να έχουμε ένα κύμα που να εκτείνεται σε μια πεπερασμένη περιοχή μήκους Δx θα πρέπει να υπερθέσουμε πολλά επίπεδα κύματα με k_x από μια γκάμα τιμών εύρους Δk_x τέτοιου ώστε $\Delta x \cdot \Delta k_x \approx 1$. Η τελευταία αυτή σχέση συνδυασμένη με την (2.2) οδηγεί περίπου στην (2.4).

Το **φυσικό νόημα** της (2.4) είναι το εξής: *Αν ένα σωμάτιο είναι εγκλωβισμένο σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους της τάξεως του Δx, το σωμάτιο*

---

[12] Όπως θα δούμε πιο κάτω, η αρχή γ είναι συνέπεια του κυματικού χαρακτήρα της ύλης, που εκφράζεται μέσω της εξίσωσης (2.3) του Schrödinger για το ψ, και γι' αυτό την αναφέρουμε εδώ με το όνομα του Schrödinger.

[13] **Μαθηματικό περιεχόμενο της (2.4)**: Τα Δx και Δp_x είναι οι λεγόμενες τυπικές αποκλίσεις που ορίζονται στη Στατιστική από τις σχέσεις $\Delta x^2 \equiv < (x - < x >)^2 >$ και $\Delta p_x^2 \equiv < (p_x - < p_x >)^2 >$. Το σύμβολο $<A>$ δηλώνει τη μέση τιμή του οποιουδήποτε στατιστικού μεγέθους A. Από τον ορισμό της τυπικής απόκλισης προκύπτει η ακόλουθη γενική σχέση: $< A^2 > = < A >^2 + \Delta A^2$. Άρα:

$$< x^2 > = < x >^2 + \Delta x^2 \geq \Delta x^2, \qquad < p_x^2 > = < p_x >^2 + \Delta p_x{}^2 \geq \Delta p_x{}^2.$$

Συνήθως ισχύει $< x > = 0$, $< p_x > = 0$, οπότε $< x^2 > = \Delta x^2$, $< p_x{}^2 > = \Delta p_x{}^2$.

αυτό είναι αδύνατο να ακινητοποιηθεί. Αντίθετα θα κινείται συνεχώς πίσω-μπρος έτσι ώστε το τετράγωνο της ορμής του να είναι κατά μέσον όρο μεγαλύτερο ή ίσο από $\hbar^2/4\Delta x^2$ και το τετράγωνο της ταχύτητάς του να είναι κατά μέσον όρο μεγαλύτερο ή ίσο από $\hbar^2/4m^2\Delta x^2$. Στη ρεαλιστική τριδιάστατη περίπτωση που το σωμάτιο είναι εγκλωβισμένο στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R και όγκου, $V=\frac{4\pi}{3}R^3$, θα έχουμε ότι η μέση τιμή $<\mathbf{p}^2>$ του τετραγώνου του διανύσματος της ορμής $\mathbf{p}$, βάσει της (2.4), θα ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$\left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle \geq \gamma \frac{\hbar^2}{R^2}\ , \tag{2.5}$$

όπου το γ είναι μια αριθμητική σταθερά που προκύπτει υπό ορισμένες εύλογες προϋποθέσεις ίση με (15/4)y=3,506˙ y=2,87/3,07 (βλ. την Άσκηση 2.2, σελ. 51). Το πιο σημαντικό όμως δεν είναι η συγκεκριμένη τιμή του γ αλλά το γεγονός ότι στον παρονομαστή εμφανίζεται η ακτίνα στο τετράγωνο, που σημαίνει ότι όσο πιο μικρή είναι η ακτίνα ή όσο πιο μικρός είναι ο όγκος εντός του οποίου είναι περιορισμένο το σωμάτιο τόσο πιο μεγάλο είναι το τετράγωνο της ορμής του. Όμως από τη σχέση $\varepsilon_K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=$ $=p^2/2m$ μεταξύ της κινητικής ενέργειας ε_K και της ταχύτητας υ ή της ορμής $p=m\upsilon$ ενός σωματίου με μάζα m και ταχύτητα $\upsilon \ll c$ και τη (2.5) έχουμε ότι

$$\boxed{\left\langle \varepsilon_K \right\rangle \geq \gamma \frac{\hbar^2}{2mR^2}}, \tag{2.6}$$

που από φυσική άποψη σημαίνει ότι ένα κυματοσωμάτιο περιορισμένο σε ένα όγκο ακτίνας R είναι αδύνατο να ακινητοποιηθεί. Είναι υποχρεωμένο να κινείται πίσω-μπρος αέναα, χωρίς σταματημό, και να έχει μια μίνιμουμ κινητική ενέργεια που είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερη είναι η μάζα του σωματίου και όσο μικρότερη είναι η ακτίνα ή ο όγκος εντός του οποίου είναι περιορισμένο το κυματοσωμάτιο.

Άσκηση 2.1: Εκφράστε την ανισότητα (2.6) συναρτήσει του όγκου αντί της ακτίνας.

Λύση: Από τη σχέση $V=\frac{4\pi}{3}R^3$, έπεται ότι $R^2=(3/4\pi)^{2/3}V^{2/3}=0,385V^{2/3}$. Αντικαθιστώντας στην (2.6) και θέτοντας γ=3,506 βρίσκουμε

$$\varepsilon_K \geq 4,87y\frac{\hbar^2}{mV^{2/3}},\quad 4,87y=4,553. \tag{2.6΄}$$

Ας σημειωθεί ότι η μίνιμουμ κινητική ενέργεια των τύπων (2.6) και (2.6΄) θα ήταν μηδέν, εάν ίσχυε $\hbar = 0$, εάν ίσχυε δηλαδή η κλασική φυσική αντί της κβαντικής.

.....

Άσκηση 2.2: Αποδείξτε ότι γ=3,75y θεωρώντας ότι $< \mathbf{r} >=< \mathbf{p} >= 0$

Λύση: Έχουμε

$$\left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle = \left\langle p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right\rangle = 3\left\langle p_x^2 \right\rangle = 3\Delta p_x^2 \geq 3(\hbar^2 / 4\Delta x^2),$$

$$\Delta x^2 =< x^2 >= \tfrac{1}{3} < x^2 + y^2 + z^2 >= \tfrac{1}{3} < r^2 > .$$

Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή του r^2 χρειάζεται να ξέρουμε την κατανομή της πιθανότητάς του, δηλαδή την $|\psi^2|$. Αφού η $|\psi^2|$ προσδιορίζεται κατά περίπτωση και επομένως δεν είναι γενικά γνωστή, θα θεωρήσουμε, προκειμένου να έχουμε μια πρώτη εκτίμηση του $< r^2 >$, ότι η πυκνότητα πιθανότητας να βρούμε το σωμάτιο είναι η ίδια για κάθε περιοχή εντός του όγκου *V*, δηλαδή ότι είναι ίση με 1/*V*. Δεδομένου ότι $d^3r = 4\pi r^2 dr$ έχουμε

$$\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{1}{V}\int_0^R d^3r\, r^2 = \frac{4\pi}{V}\int_0^R dr\, r^4 = \frac{4\pi}{\frac{4\pi}{3}R^3}\frac{R^5}{5} = \tfrac{3}{5}R^2 .$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στις δύο προηγούμενες, προκύπτει η (2.5) με *γ*=(15/4)y=3,75y. Το *y* είναι ένας διορθωτικός παράγοντας που η τιμή του προσδιορίζεται από την (2.12) και είναι, όπως θα δούμε σε λίγο, 2,87/3,07.

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η *μέση* κινητική ενέργεια ενός σωματίου μάζας *m* που κινείται εντός όγκου *V* (θεωρώντας το ως μη σχετικιστικό, δηλαδή με $\upsilon \ll c$) θα ικανοποιεί την ανισότητα (2.6) ή την ισοδύναμή της (2.6΄). Οι σχέσεις αυτές σημαίνουν ότι κάθε σωμάτιο που είναι εγκλωβισμένο σ' ένα όγκο *V* έχει κινητική ενέργεια που δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από μια ελάχιστη τιμή. Η ελάχιστη αυτή τιμή είναι αντιστρόφως ανάλογη του $V^{2/3}$ και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας *m* του σωματίου και ανάλογη του $\hbar^2$, όπου το $\hbar$ είναι η σταθερά Planck δια 2π. (Για θερμοκρασία $T > 0\,\mathrm{K}$ συμβάλλει στην ελάχιστη κβαντική κινητική ενέργεια και η θερμική, βλ. Σχ. 2.4, σελ. 57). Επομένως, όσο μικρότερος είναι ο όγκος και όσο μικρότερη είναι η μάζα, τόσο μεγαλύτερη είναι η μίνιμουμ κινητική ενέργεια. Η ύπαρξη αυτής της μίνιμουμ κινητικής ενέργειας:

(α) εμποδίζει την κατάρρευση των σύνθετων δομών της ύλης (που θα επέφερε η δράση των αμοιβαίων ελκτικών δυνάμεων μεταξύ των σωματίων τους), γιατί η κινητική ενέργεια δημιουργεί διασταλτικές πιέσεις,

(β) συνεπάγεται την ύπαρξη ελάχιστης πεπερασμένης συνολικής ενέργειας, όπως θα δούμε πιο κάτω, και

(γ) εξασφαλίζει σε τελική ανάλυση τη σχετική σταθερότητα των μικροσκοπικών δομών του Κόσμου (βλέπε 2.19).

Ποτέ λοιπόν μη ξεχνάτε να περιλαμβάνετε την ελάχιστη εσωτερική κινητική ενέργεια στον υπολογισμό της ολικής εσωτερικής ενέργειας σύνθετων δομών του μικρόκοσμου ή του μεγάκοσμου. Αν δεν το κάνετε (ξεχνώντας ότι ο κόσμος είναι κβαντικός και όχι κλασικός, όπου $\hbar = 0$) θα καταλήξετε σε εντελώς λάθος συμπεράσματα.

Σημειώστε ότι στην ακραία σχετικιστική περίπτωση[14], όπου η μάζα ηρεμίας είναι είτε μηδέν είτε αμελητέα, αντί της σχέσης $\varepsilon_K = p^2 / 2m$ ισχύει η σχέση

---

[14] Η απόδειξη του τύπου (2.6) βασίστηκε στη σχέση, $\varepsilon_K = p^2 / 2m$, μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής. Όμως η ακριβής σχετικιστική σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής, είναι η ακόλουθη (m_o είναι η μάζα ηρεμίας του σωματίου)

$$\boxed{\varepsilon_K = \sqrt{m_o^2 c^4 + c^2 p^2} - m_o c^2}\,, \tag{2.8}$$

η οποία στην περίπτωση όπου $m_0 c^2 \ll c\,p$ ανάγεται στην (2.7). Επομένως για να βρούμε τη μέση τιμή της κινητικής ενέργειας στην ακραία σχετικιστική περίπτωση θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή του $p \equiv |\mathbf{p}|$. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε (ελλείψει ακριβέστερης επιλογής) ότι το p είναι ισοκατανεμημένο στο τριδιάστατο σφαιρικό όγκο $0 < p < P$ οπότε

$$\langle p \rangle = \frac{4\pi}{\frac{4\pi}{3} P^3} \int_0^P dp\, p^3 = \tfrac{3}{4} P\,.$$

Με την ίδια παραδοχή ισοκατανομής η μέση τιμή του p^2 προκύπτει ως εξής:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{4\pi}{\frac{4\pi}{3} P^3} \int_0^P dp\, p^4 = \tfrac{3}{5} P^2\,.$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις και την (2.5) έχουμε ότι

$$\langle p \rangle = \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{5}{3}}\sqrt{\langle p^2 \rangle} = \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{5}{3}}\,\frac{\sqrt{15\mathrm{y}}}{2}\,\frac{\hbar}{R} = 1{,}813\,\frac{\hbar}{R}\,. \tag{2.9}$$

Από την οποία προκύπτει η σχέση (2.10) στην επόμενη σελίδα. Επομένως, με βάση την (2.10) η ενέργεια ενός φωτονίου που το έχουμε περιορίσει σ' ένα όγκο V είναι μεγαλύτερη από ή ίση με $1{,}813\,(\hbar c / R) = 2{,}92\,(\hbar c / V^{1/3})$ και η συχνότητά του ίση με $2{,}92(c / V^{1/3}) = 1{,}813\,(c / R)$ ή μεγαλύτερη. Σημειώστε ότι ο τελευταίος τύπος προκύπτει (εκτός του αριθμητικού παράγοντα), εάν θέσουμε στον τύπο (2.6΄) όπου m την σχετικιστική μάζα $\varepsilon / c^2 = \hbar\omega / c^2$ και $\varepsilon_K \approx \hbar\omega$.

$$\boxed{\varepsilon_K = c\,p}\,. \tag{2.7}$$

Από την (2.7) και την (2.9) (βλ. υποσημείωση) έπεται ότι η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας ενός σωματίου που είναι περιορισμένο εντός ενός όγκου *V* και ακτίνας *R* στην ακραία σχετικιστική περίπτωση δίνεται από τον προσεγγιστικό τύπο

$$\boxed{\left\langle \varepsilon_K \right\rangle \geq 1{,}813\,\frac{\hbar c}{R} = 2{,}92\,\frac{\hbar c}{V^{1/3}}}\,. \tag{2.10}$$

Στην (2.10) η εξάρτηση από τον όγκο δεν είναι πια αντιστρόφως ανάλογη του $V^{2/3}$, αλλά αντιστρόφως ανάλογη του $V^{1/3}$ ή, ισοδύναμα, αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας *R*. Αυτή η αλλαγή στον εκθέτη είναι καίριας σημασίας για να εξηγήσει κανείς την κατάρρευση των λευκών νάνων προς αστέρες νετρονίων και την κατάρρευση των τελευταίων προς μαύρες τρύπες.

2.4 Απαγορευτική αρχή του Pauli

Η βασική αυτή αρχή πηγάζει επίσης από την απουσία τροχιάς. Πράγματι, αν δύο *ίδια* σωμάτια που κινούνται στον ίδιο χώρο είχαν το καθένα τη δική του τροχιά, θα μπορούσαμε να τα ξεχωρίσουμε, να πούμε δηλαδή ποιο είναι το υπ' αρ. 1 και ποιο το υπ' αρ. 2. Όταν όμως τα δύο αυτά ίδια σωμάτια με τις πολλαπλές τροχιές τους καλύπτουν το καθένα όλο το διαθέσιμο χώρο δεν είναι δυνατόν να πει κανείς ποιο είναι το 1 και ποιο είναι το 2. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι φυσικές ιδιότητες θα πρέπει να παραμείνουν αμετάβλητες αν εναλλάξουμε τα ονόματα των δύο ίδιων σωματίων, δηλαδή αν το 1 το πούμε 2 και το 2 το πούμε 1. Μια τέτοια φυσική ιδιότητα είναι και η πιθανότητα ανά μονάδα όγκου $|\psi|^2$. Άρα καταλήγουμε στο ότι $|\psi(1,2)|^2 = |\psi(2,1)|^2$. Από την τελευταία αυτή σχέση έπεται ότι

$$\boxed{\psi(1,2) = \pm\psi(2,1)}\,, \tag{2.11}$$

όπου συμβαίνει το μεν άνω πρόσημο να ισχύει για μποζόνια (δηλαδή για σωμάτια με ακέραιο σπιν, όπως τα σωμάτια-αλ) το δε κάτω για φερμιόνια (δηλαδή για σωμάτια με ημιακέραιο σπιν, όπως τα στοιχειώδη σωμάτια-υ). Η σχέση (2.11) αποτελεί τη γενικευμένη αρχή του Pauli που εξειδικεύεται για φερμιόνια ως απαγορευτική αρχή του Pauli και η οποία προκύπτει ως εξής: Θεωρήστε δύο *ίδια φερμιόνια* που βρίσκονται στην ίδια μονοσωματιδιακή *χωρική/σπιν* κατάσταση ψ_o, πράγμα που σημαίνει ότι $\psi(1,2) = \psi_o(1)\cdot\psi_o(2)$. Αν τώρα εναλλάξουμε τα ονόματα, έπεται από την τελευταία σχέση ότι $\psi(1,2) = \psi(2,1)$, ενώ από την (2.11) ότι $\psi(1,2) = -\psi(2,1)$. Ο μόνος τρόπος να ικανοποιηθούν και οι δύο αυτές σχέσεις είναι να ισχύει ότι $\psi_o(1)\cdot\psi_o(2) = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι η πιθανότητα να βρεθούν δύο *ίδια*

φερμιόνια στην ίδια *χωρική/σπιν* κατάσταση είναι μηδέν**.** Επομένως δύο το πολύ ίδια φερμιόνια με σπιν 1/2 μπορούν να βρεθούν στην ίδια *χωρική* κατάσταση με τα σπιν τους να έχουν αντίθετες κατευθύνσεις :

> *Δύο το πολύ ίδια σωμάτια (στοιχειώδη ή σύνθετα) με σπιν ½ μπορούν να βρεθούν στην ίδια* χωρική *κατάσταση ή (σε μια λιγότερο ακριβή διατύπωση) στην ίδια περιοχή του χώρου*[15].

2.5 Κβαντική κινητική ενέργεια και Pauli

Τι θα συμβεί εάν N *ίδια* σωμάτια με σπιν $1/2$ βρεθούν στον ίδιο ομοιογενή χώρο όγκου V; Η ακριβής απάντηση εξαρτάται από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων και απαιτεί εν γένει περίπλοκους υπολογισμούς. Εν τούτοις καταλήγουμε σε μια αρκετά ικανοποιητική προσεγγιστική απάντηση εάν θεωρήσουμε ότι τα σωμάτια προκειμένου να ικανοποιήσουν την αρχή του Pauli, χωρίζουν τον (ομοιογενή) χώρο σε $N/2$ ίσους υποχώρους (ο καθένας θα έχει όγκο $V/(N/2) = 2V/N$) και ανά δύο (με αντίθετα σπιν) καταλαμβάνουν όλους τους υποχώρους. Όμως τότε, κάθε σωμάτιο κινείται σ' ένα χώρο όγκου $2V/N$ και επομένως, βάσει του τύπου (2.6΄), η *μέση* κινητική ενέργεια[16] του κάθε σωματίου θα είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_K \geq 3{,}07\mathrm{y}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}, \quad 3{,}07\mathrm{y} = 2{,}87\,. \tag{2.12}$$

Εάν είχαμε ακολουθήσει την ορθή, αλλά πιο απαιτητική διαδικασία εποικισμού των καταστάσεων (βλέπε υποσημείωση 16), ο αριθμητικός παράγων θα ήταν 2,87 αντί του 3,07y που προέκυψε από την απλή προσεγγιστική μας μέθοδο. Άρα πράγματι το y πρέπει να επιλεγεί ίσο με 2,87/3,07.

---

[15] Η απαγορευτική αρχή του Pauli ισχύει για όλα τα ίδια σωμάτια με σπιν *s*, *ημιακέραιο* (και όχι μόνο για *s*=1/2). Τότε ο μέγιστος αριθμός ίδιων σωματίων στην ίδια *χωρική* κατάσταση είναι 2*s*+1 (όσες και οι προβολές του σπιν). Εάν το σπιν είναι ακέραιο τα ίδια σωμάτια όχι μόνο δεν αποφεύγουν το ένα το άλλο, αλλά αντίθετα *προτιμούν* να συγκεντρωθούν πολλά μαζί στην ίδια κατάσταση.

[16] Στην πραγματικότητα δεν έχουν όλα τα σωμάτια την ίδια ενέργεια. Λόγω της αρχής του Pauli και της αρχής της ελαχιστοποίησης της ολικής ενέργειας (για $T = 0\,\mathrm{K}$), τα σωμάτια εποικίζουν τις διαθέσιμες καταστάσεις αρχίζοντας από την κατώτερη ενεργειακά και φτάνοντας μέχρι μια μέγιστη, όπως φαίνεται στο Σχ.2.3. Η μέγιστη κατειλημμένη ενέργεια ονομάζεται *Ενέργεια Fermi* και συμβολίζεται με E_F. Η ελάχιστη ολική κινητική ενέργεια E_K διηρημένη με τον αριθμό σωματίων είναι κάπου ενδιάμεσα μεταξύ 0 και E_F. Ένας υπολογισμός για ελευθέρα μη σχετικιστικά σωμάτια σε τριδιάστατο χώρο δείχνει ότι $(E_K / N) = \frac{3}{5}E_F = 0,6E_F$.

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των N σωματίων προκύπτει από την (2.12) πολλαπλασιάζοντάς τη επί N. Θα είναι λοιπόν κατ' ελάχιστο ίση με

$$\boxed{E_K = N\varepsilon_K = 2{,}87N\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}}. \qquad (2.13)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι προκειμένου για ίδια μη σχετικιστικά σωμάτια με σπιν 1/2, η αρχή του Pauli μπορεί να οδηγήσει σε μία τεράστια αύξηση της μίνιμουμ κινητικής ενέργειας κατά ένα παράγοντα $(N/2)^{2/3}$. Π.χ., εάν $N = 2\times10^{24}$, η αύξηση θα είναι της τάξεως του 10^{16}.

Η σχέση (2.13) ισχύει με βάση τη σχέση $\varepsilon_K = p^2/2m$. Εάν ακολουθήσουμε την ίδια προσεγγιστική μέθοδο με προηγουμένως αλλά ξεκινώντας από την (2.10), η οποία ισχύει για την ακραία σχετικιστική περίπτωση, $\varepsilon_K \approx c\,p$, θα βρίσκαμε για N *ίδια* σωμάτια με σπιν 1/2 το εξής αποτέλεσμα για την ελάχιστη ολική κινητική τους ενέργεια

$$\boxed{E_K = 2{,}32\,\hbar c\frac{N^{4/3}}{V^{1/3}}}. \qquad (2.14)$$

Άσκηση 2.3: Εάν ο όγκος V είναι σφαιρικός, όπως σε πλανήτες και άστρα, οι σχέσεις (2.13) και (2.14) μπορούν να διατυπωθούν ισοδύναμα μέσω της ακτίνας R αντί του όγκου V. Δείξτε ότι

$$E_K = N\varepsilon_K = 1{,}105\,\frac{\hbar^2}{m}\frac{N^{5/3}}{R^2}, \qquad \upsilon \ll c \qquad (2.13')$$

και

$$E_K = N\varepsilon_K = 1{,}44\,\frac{\hbar c\,N^{4/3}}{R}, \qquad m_0c^2 \ll c\,p\,. \qquad (2.14')$$

Μια ακόμη σημαντική συνέπεια της αρχής του Pauli[17] είναι ότι περιορίζει τη θερμική (ή άλλης φύσεως) διέγερση ίδιων φερμιονίων, αφού απαιτεί η προς κατάληψη στάθμη να μην είναι ήδη πλήρως κατειλημμένη από *ίδια* φερμιόνια. Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.3, τα σωμάτια που μπορούν να διεγερθούν θερμικά είναι ένα κλάσμα του συνολικού αριθμού N σωματίων. Το κλάσμα αυτό, N^*/N, είναι της τάξεως του $(3/2)\,k_BT/E_F$. Άρα

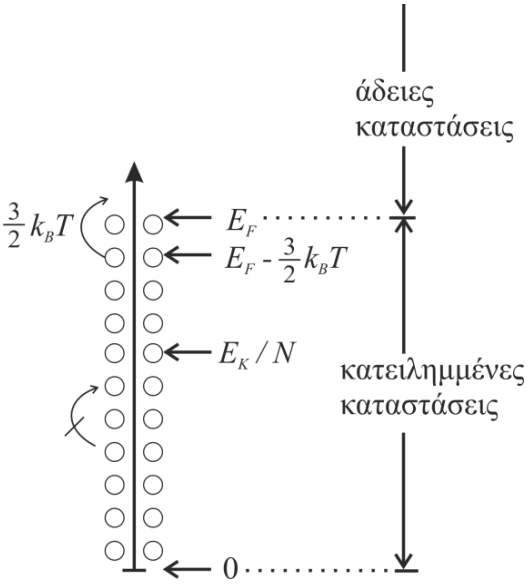
---

[17] Θα πρέπει να τονισθεί ότι σε ίδια σωμάτια με ακέραιο σπιν, που δεν υπακούουν σε απαγορευτική αρχή, ούτε ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $(N/2)^{2/3}$ υπάρχει, ούτε περιορισμός για διέγερση μόνο σε μη κατειλημμένη στάθμη υφίσταται. Αντίθετα ένα σωμάτιο με σπιν ακέραιο προτιμά να μεταβεί σε μία ήδη κατειλημμένη στάθμη από ίδια με αυτό μποζόνια.

στον τύπο του προβλήματος ΙΙΙ.3 για την θερμική ενέργεια (σελ. 392) θα έχουμε το N^* αντί του N και επομένως η θερμική ενέργεια, U_T θα είναι

$$U_T = \frac{3}{2} N^* k_B T \approx \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{k_B^2}{E_F} N T^2 \text{, για } k_B T \ll E_F \,. \qquad (2.15)$$

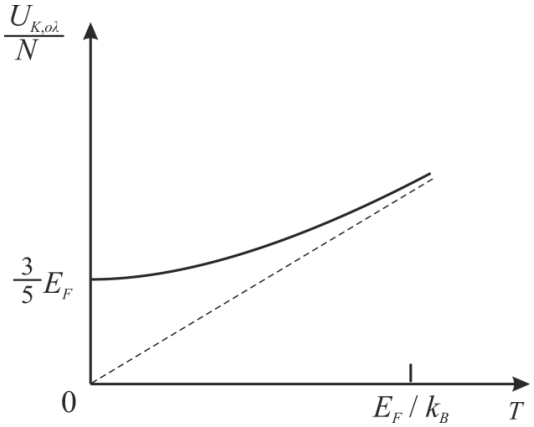
(Ο ακριβής τύπος για το U_T στο όριο $T \to 0$, έχει $\pi^2/4 \approx 2,47$ αντί του $(3/2)^2 = 2,25$). Το αποτέλεσμα είναι ότι (για $k_B T \ll E_F$), οι θερμικές μετρήσεις ερμηνευμένες με βάση την κλασική θεωρία οδηγούν (όπως και οδήγησαν ιστορικά) στο λανθασμένο, παράδοξο και άκρως αντιφατικό συμπέρασμα ότι ο αριθμός των ηλεκτρονίων σθένους N^* είναι πάνω από εκατό φόρες μικρότερος από τις τιμές που δίνουν άλλα πειράματα και μάλιστα ότι αλλάζει με τη θερμοκρασία.



Σχ.2.3 Ίδια σωμάτια με σπιν=1/2 για T=0K εποικίζουν τις κατώτερες καταστάσεις μέχρι να εξαντληθεί ο αριθμός τους στη στάθμη E_F. Λόγω αρχής του Pauli μόνο τα σωμάτια που βρίσκονται στο ανώτερο κατειλημμένο ενεργειακό στρώμα πάχους περίπου $(3/2)k_BT$ μπορούν να διεγερθούν θερμικά. (Για τον παράγοντα 3/2 βλέπε το πρόβλημα ΙΙΙ.3 στο παράρτημα ΙΙΙ)

Για να ισχύσει ο κλασικός τύπος $U_T = (3/2) N k_B T$, θα πρέπει η απόλυτη θερμοκρασία, T, να ικανοποιήσει την ανισότητα $k_B T \gg E_F$. Στο Σχ. 2.4 εικονίζεται (ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας, T) η ολική κινητική ενέργεια $U_{K,ολ.}$ ανά σωμάτιο N ίδιων ελεύθερων σωματίων με σπιν ½ σε

θερμοδυναμική ισορροπία και περιορισμένων σε χώρο όγκου V. Σημειώστε ότι η εξάρτηση της $U_{K,\,ολ.}$ από τη θερμοκρασία μπορεί να *προσεγγισθεί*



Σχ.2.4 Η συνεχής γραμμή δίνει τη μέση κινητική ενέργεια (ανά σωμάτιο) ίδιων ελεύθερων σωματίων με σπιν ½ και συγκέντρωση N/V ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας T. Η διακεκομμένη γραμμή δίνει το κλασικό αποτέλεσμα. Για $T \ll (E_F / k_B)$ η κβαντική ενέργεια του τύπου (2.12) κυριαρχεί σε σχέση με τη θερμική ενέργεια. Όμως για $T \gg (E_F / k_B)$ κυριαρχεί η θερμική (βλ. σελ 74). Για ένα τυπικό μέταλλο $E_F / k_B \approx 80.000\,\mathrm{K}$! Επομένως σ' όλη την περιοχή θερμοκρασιών (όπου έχουμε τη μεταλλική φάση) κυριαρχεί η κβαντική ενέργεια, και η συμβολή της θερμικής ενέργειας είναι πάρα πολύ μικρή (πρακτικά αμελητέα)

χοντρικά από τον απλό τύπο: (στο σχ.2.4 να μπει η (2.16) και η ακριβής)

$$\frac{U_{K,\,ολ.}}{N} \approx \left[\left(\tfrac{3}{5}E_F\right)^2 + \left(\tfrac{3}{2}k_B T\right)^2 \right]^{1/2}, \qquad (2.16)$$

όπου $\frac{3}{5}E_F = E_{K,κβ} / N \approx 2{,}87\hbar^2 N^{2/3} / mV^{2/3}$.

Άσκηση 2.4: Αποδείξτε ότι για ένα σύστημα N ίδιων φερμιονίων στο απόλυτο μηδέν η ενέργεια Fermi E_F και η ολική τους ενέργεια U συνδέονται με τη σχέση

$$E_F = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_V . \qquad (2.17)$$

Λύση: Έστω ότι $U(N)$ είναι η ολική ενέργεια ενός συστήματος N ίδιων φερμιονίων για T=0 K. Εάν προσθέσουμε στο σύστημα ένα επί πλέον ίδιο φερμιόνιο υπό συνθήκες T=0 K, τότε αυτό οφείλει να καταλάβει την κατώτερη διαθέσιμη στάθμη, δηλαδή την E_F. Επομένως η ενέργεια του συστήματος μετά την προσθήκη θα είναι αφενός μεν $U(N)+E_F$, αφετέρου δε $U(N+1)$. Άρα $E_F=U(N+1)-U(N)$. Εάν ισχύει ότι $N \gg 1$, η διαφορά στην τελευταία σχέση συμπίπτει πρακτικά με την παράγωγο ως προς N. ΟΕΔ.

Χρειάζεται να εξετάσουμε πιο προσεκτικά την τιμή της E_F στην ιδιόμορφη αλλά συνήθη περίπτωση όπου εμφανίζεται ενεργειακό χάσμα, δηλαδή στην περίπτωση όπου η ανώτερη κατειλημμένη κατάσταση έχει ενέργεια ε_κ και η αμέσως επόμενη μη κατειλημμένη κατάσταση έχει ενέργεια ε_α με τη διαφορά $\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\kappa \equiv E_g$ να είναι σαφώς διάφορη του μηδενός. Έστω ότι το σπιν των ίδιων φερμιονίων είναι 1/2. Εάν το N είναι άρτιο η κατάσταση ενέργειας ε_κ θα είναι διπλά κατειλημμένη και το επί πλέον φερμιόνιο θα καταλάβει τη στάθμη ενέργειας ε_α. Εάν το N είναι περιττό η κατάσταση ενέργειας ε_κ θα είναι ημικατειλημμένη και το επί πλέον φερμιόνιο θα καταλάβει τη στάθμη ενέργειας ε_κ. Άρα κατά μέσο όρο η ενέργεια Fermi θα είναι στο μέσο του χάσματος, δηλαδή

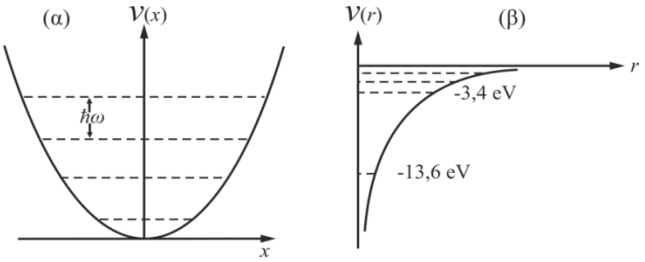
$$E_F = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\kappa)\,. \qquad (2.18)$$

2.6 Αρχή του Schrödinger: Διάκριτο ενεργειακό φάσμα

Η κίνηση ενός κυματοσωματίου σε *περιορισμένο χώρο* όγκου V δημιουργεί (εκτός της ελάχιστης κινητικής ενέργειας) και κβάντωση των επιτρεπομένων ενεργειών, δημιουργεί δηλαδή, διακριτές ενεργειακές στάθμες. Η ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών σταθμών, π.χ. της πρώτης διεγερμένης στάθμης από τη θεμελιώδη (τη στάθμη ελάχιστης ενέργειας) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους όπως και η ελάχιστη κινητική ενέργεια ανά σωμάτιο, δηλαδή, είναι (για μη σχετικιστικά σωμάτια) της τάξης του $\hbar^2 / mV^{2/3}$

$$\boxed{\delta\varepsilon \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_o = a\frac{\hbar^2}{mV^{2/3}}}\,, \qquad (2.19)$$

όπου a είναι της τάξης της μονάδας. Για κυματοσωμάτια με μάζα ηρεμίας μηδέν ή αμελητέα, αντί του $\hbar^2 / mV^{2/3}$ έχουμε $\hbar c / V^{1/3}$. (Βλ. τύπο (2.10), σελ. 53).



Σχ.2.5 (α) Η δυναμική ενέργεια $\mathcal{V}(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2$, ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και οι αντίστοιχες διακριτές ενεργειακές στάθμες ενός ηλεκτρονίου, υπό την επίδραση αυτής της δυναμικής ενέργειας, καθώς και (β) οι αντίστοιχες στάθμες υπό την επίδραση της δυνα-

μικής ενέργειας $\mathcal{V}(r) = -e^2 / r$ στο άτομο του υδρογόνου

Στο Σχ. 2.5 εικονίζονται οι επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες ενός σωματίου μάζας m που κινείται μονοδιάστατα υπό την επίδραση μιας αρμονικής δύναμης της μορφής $-\kappa x$ ($\omega = \sqrt{\kappa / m}$), καθώς και οι ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου. (Σημειώστε ότι σε κάθε ενεργειακή στάθμη αντιστοιχεί εν γένει μία ή *περισσότερες* συγκεκριμένες μορφές της κυματοσυνάρτησης $\psi(\mathbf{r})$). Παρατηρήστε ότι στον αρμονικό ταλαντωτή η ενεργειακή διαφορά μεταξύ διαδοχικών σταθμών παραμένει σταθερή, ίση με $\hbar\omega$, καθώς μεταβαίνουμε σε υψηλότερες στάθμες, ενώ αντίθετα στο άτομο του υδρογόνου οι στάθμες πυκνώνουν με την άνοδο της ενέργειάς τους. Αυτό δείχνει ότι η αδιάστατη «σταθερά» α στον τύπο (2.19) εξαρτάται από τη μορφή του δυναμικού που περιορίζει το κυματοσωμάτιο σε πεπερασμένο όγκο. (Βλ. σχετικά το λυμένο πρόβλημα υπ' αρ. 4 στο τέλος του κεφαλαίου).

Μη ξεχνάτε ότι η κβάντωση των ενεργειών ενός κυματοσωματίου λόγω της κίνησής του σε περιορισμένο χώρο είναι άμεσο αποτέλεσμα του κυματικού χαρακτήρα της κίνησής του. Όλα τα κύματα όταν τα περιορίσουμε χωρικά εμφανίζουν κβάντωση της συχνότητάς τους[18], ω, άρα και της ενέργειας $\hbar\omega$, του κβάντου τους.

Όπως είχαμε την ευκαιρία να τονίσουμε και προηγουμένως, η κβάντωση της ενέργειας, $\varepsilon = \hbar\omega$, ενός εντοπισμένου κυματοσωματίου είναι πολύ σημαντικό φαινόμενο, γιατί δεν αφορά μόνο στοιχειώδη κυματοσωμάτια αλλά και σύνθετα. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ενός μορίου που αποτελείται από ηλεκτρόνια και ιόντα: Το κάθε ηλεκτρόνιο όντας περιορισμένο στον πεπερασμένο όγκο του μορίου εμφανίζει κβαντισμένες στάθμες. Το ίδιο ισχύει για το κάθε ηλεκτρόνιο που ανήκει σε κάποιο ιόν και επομένως περιορίζεται σε πολύ μικρότερο όγκο. Ο πυρήνας του κάθε ιόντος είναι και αυτός περιορισμένος σε ακόμη πιο μικρό όγκο και επομένως έχει και αυτός κβαντισμένες ενέργειες. Το παράδειγμα του μορίου μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: Όλα τα εσωτερικά σωμάτιά του (από τους πυρήνες, τα ιόντα, μέχρι και τα ελεύθερα εντός του μορίου ηλεκτρόνια) έχουν κβαντισμένες ενεργειακές στάθμες λόγω του πεπερασμένου όγκου εντός του οποίου κινούνται και επομένως και το μόριο συνολικά εμφανίζει κβαντισμένες ενερ-

[18] Παράδειγμα η χορδή μιας κιθάρας που οι συχνότητες, ω, τις οποίες παράγει είναι ίσες με $\pi \tilde{c}\, n / L$, όπου L είναι το μήκος της χορδής, n=1,2,3,…, και $\tilde{c}$ είναι η ταχύτητα του κύματος κατά μήκος της χορδής. Το $\tilde{c}$ εξαρτάται από της τάση της χορδής και τη γραμμική πυκνότητα μάζας. Η θεμελιώδης συχνότητα, $\pi \tilde{c} / L$, για n=1 είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τον τύπο (2.10) για την ελάχιστη συχνότητα ενός φωτονίου περιορισμένου σ' ένα χώρο ακτίνας R (βλ. και υποσημείωση 14).

γειακές στάθμες και επομένως συμπεριφέρεται μέχρις ενός ορίου ως να ήταν στοιχειώδες σωμάτιο, όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι έχουμε κβαντισμό του ενεργειακού φάσματος των μικροσκοπικών σύνθετων σωματίων (αγνοώντας την κίνηση του κέντρου μάζας τους). Αυτός ο κβαντισμός οφείλεται στον κυματικό χαρακτήρα που αποδόθηκε σε κυματοσωμάτια που η Κλασική Φυσική τα θεωρεί σωμάτια. (Κάνουμε αυτή τη διευκρίνηση γιατί θα συναντήσουμε και ένα άλλο είδος κβαντισμού[19] που οφείλεται σε σωματιδιακές ιδιότητες που απόδίδονται σε οντότητες που η Κλασική Φυσική τα θεωρεί κύματα). Επανερχόμενοι λοιπόν στον κβαντισμό του ενεργειακού φάσματος σύνθετων μικροσκοπικών υλικών σωματίων (όπως οι πυρήνες, τα άτομα, τα μόρια) τονίζουμε τη σπουδαιότητά του διότι:

Εξασφαλίζει τη σταθερότητα και την προβλέψιμη συμπεριφορά αυτών των σύνθετων μικροσκοπικών υλικών σωματίων παρά το διαφορετικό περιβάλλον στο οποίο μπορεί να βρεθούν. Έχουμε εδώ μια από τις δύο καίριες συνέπειες της κβάντωσης που αξίζει να εγγραφεί ανεξίτηλα στη μνήμη μας. Η κβάντωση με το να δημιουργεί μια μη μηδενική ενεργειακή απόσταση $\delta\varepsilon$ μεταξύ της κατάστασης ελάχιστης ενέργειας και της αμέσως υψηλότερης δεν επιτρέπει καμία αλλαγή, όσο η διαθέσιμη ενέργεια από το περιβάλλον δεν υπερβαίνει το $\delta\varepsilon$. Εάν προσφέρουμε σ' ένα ενεργειακά κβαντωμένο σύστημα, μέσω κάποιας διαταραχής, ενέργεια, $\varepsilon_{\varepsilon\xi}$, το σύστημα θα δοκιμάσει να την απορροφήσει. Εάν η ενέργεια είναι μικρότερη του $\delta\varepsilon$, μη επαρκής δηλαδή για να το διεγείρει στην επόμενη κατάσταση, το σύστημα θα αποβάλλει την ενέργεια *σχεδόν* ακαριαία και θα επιστρέψει στη θεμελιώδη του κατάσταση. Αν ο Κόσμος ήταν κλασικός, οπότε το $\hbar$ και το $\delta\varepsilon$ θα ήταν μηδέν, το ενεργειακό φάσμα θα ήταν συνεχές και επομένως οποιουδήποτε μεγέθους διαταραχή θα απορροφιόταν από το σύστημα και θα το άλλαζε. Άρα τα διάφορα στοιχεία του Περιοδικού Πίνακα θα άλλαζαν συνεχώς λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον που ποτέ δεν μένει το ίδιο. Σε ένα Κλασικό Κόσμο δεν θα υπήρχαν χημικά στοιχεία με δεδομένες

---

[19] Για άρση τυχόν παρεξηγήσεων σημειώνουμε τα εξής:
Τα κυματοσωμάτια κλασικής σωματιδιακής προέλευσης, έχουν τον αριθμήσιμο και αδιαίρετο χαρακτήρα τους (η ενέργεια ενός αριθμού μη αλληλεπιδρώντων σωματίων είναι προφανώς το άθροισμα των ενεργειών ε κάθε σωματίου). Η Κβαντομηχανική με το να τους προσδώσει και κυματικό χαρακτήρα τους κβαντίζει (για κίνηση σε πεπερασμένο όγκο) την ενέργεια ε του κάθε σωματίου που κλασικά ήταν συνεχής. Αντίθετα τα κυματοσωμάτια κλασικής κυματικής προέλευσης έχουν κβαντισμένες συχνότητες, ω, όταν περιορίζονται σε πεπερασμένο χώρο. Η Κβαντομηχανική με το να τους προσδώσει και σωματιδιακό χαρακτήρα καθορίζει ότι η ολική ενέργεια ενός κύματος συχνότητας ω ισούται με *ακέραιες φορές* το $\hbar\omega$. Άρα η ολική ενέργεια του κβαντικού κύματος είναι το άθροισμα των ενεργειών των αντίστοιχων σωματίων-κβάντων του, ενώ κλασικά η ολική ενέργειά του ήταν ανεξάρτητη της συχνότητας και συνεχής (βλέπε σχετικά το Σχ.2.6).

ιδιότητες, επομένως ούτε Χημεία, ούτε Βιοχημεία, ούτε βιολογικοί οργανισμοί. Είναι ακριβώς λόγω της κβάντωσης που τα σύνθετα αυτά σωμάτια συμπεριφέρονται ως στοιχειώδη μέχρι κάποιου ενεργειακού ορίου. Εντούτοις πέραν του ορίου αυτού υπάρχουν δυνατότητες συγκεκριμένων αλλαγών. Μια θαυμαστή πράγματι ισορροπία μεταξύ σταθερότητας και δυνατότητας αλλαγής.

Όταν ένα φυσικό σύστημα βρίσκεται σ' ένα περιβάλλον απόλυτης θερμοκρασίας *T,* κάθε μικροσκοπικός βαθμός ελευθερίας του μπορεί να δεχθεί από το περιβάλλον ή και να δώσει ένα ποσό ενέργειας που δεν υπερβαίνει περίπου το k_BT. Το στοιχειώδες αυτό ποσό, k_BT, της θερμικής ενέργειας, σύμφωνα με τα προηγούμενα, δεν είναι σε θέση να διεγείρει βαθμούς ελευθερίας των οποίων η ενεργειακή διαφορά $\delta\varepsilon$ μεταξύ της πρώτης διεγερμένης κατάστασης και της θεμελιώδους είναι αρκετά μεγαλύτερη από το k_BT. Για κυματοσωμάτια που προήλθαν από τον κβαντισμό κλασικών κυμάτων (όπως, π.χ. στη φασματική κατανομή της ακτινοβολίας μέλανος σώματος[20] ή στη θερμική διέγερση ταλαντωτικών ιοντικών βαθμών ελευθερίας σε στερεά) το αντίστοιχο της διέγερσης υλικών σωματίων από μία στάθμη στην επόμενη είναι η δημιουργία ενός κβαντου ενέργειας $\delta\varepsilon$. Επομένως είναι σύνηθες κάποιοι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος (είτε πρόκειται για μετάβαση μεταξύ σταθμών είτε για δημιουργία κβάντων) να παραμένουν παγωμένοι στη θεμελιώδη στάθμη και κατά συνέπεια να είναι απόντες από τις θερμοδυναμικές ποσότητες Με άλλα λόγια όλοι οι βαθμοί ελευθερίας ενός συστήματος για τους οποίους ισχύει $\delta\varepsilon >> k_BT$ είναι σαν να μην υπάρχουν όσον αφορά στη θερμική συμπεριφορά (παραμένουν «παγωμένοι» στη θεμελιώδη κατάσταση ελάχιστης ενέργειας). Ως συμπλήρωση των παραπάνω επισημαίνουμε ότι, βάσει της σχέσης (2.19), όσο πιο μικροσκοπικό είναι ένα σύνθετο υλικό σωμάτιο, τόσο πιο μεγάλο είναι το $\delta\varepsilon$: Π.χ. για έναν ατομικό πυρήνα ο τύπος (2.19) οδηγεί στο ότι το $\delta\varepsilon$ αναμένεται να είναι της τάξεως μερικών εκατομμυρίων eV, ενώ η προσφορά εξωτερικής ενέργειας λόγω χημικών αντιδράσεων δεν μπορεί να ξεπεράσει μερικά eV, η δε θερμική ενέργεια δεν μπορεί συνήθως να ξεπεράσει μερικά δέκατα του eV. Αυτό δείχνει ότι οι αλχημιστές δεν είχαν ούτε την παραμικρή πιθανότητα να επιτύχουν τη μεταστοιχείωση που επιδίωκαν. (Επί τη

---

[20] Στην ακτινοβολία αυτή συμμετέχουν ουσιαστικά μόνο εκείνα τα φωτόνια που έχουν ενέργεια $\hbar\omega$ μέχρι κάποιο όριο $\hbar\omega_{\max}$ της τάξεως του k_BT, $\hbar\omega_{\max} = ak_BT$. Άρα χρησιμοποιώντας το κλασικό αποτέλεσμα $A\omega^2 k_BT d\omega$ για την ένταση της ακτινοβολίας στην φασματική περιοχή από το ω έως το $\omega+d\omega$, έχουμε για την ολική ακτινοβολία $I = \int_0^{\omega_{\max}} A\omega^2 k_BT\, d\omega \approx Ak_BT\int_0^{ak_BT/\hbar} \omega^2 d\omega \propto T^4$, που είναι και το πειραματικό αποτέλεσμα για την εξάρτηση από τη θερμοκρασία της ολικής ακτινοβολίας (βλέπε σχετικά και το Κεφ. 5).

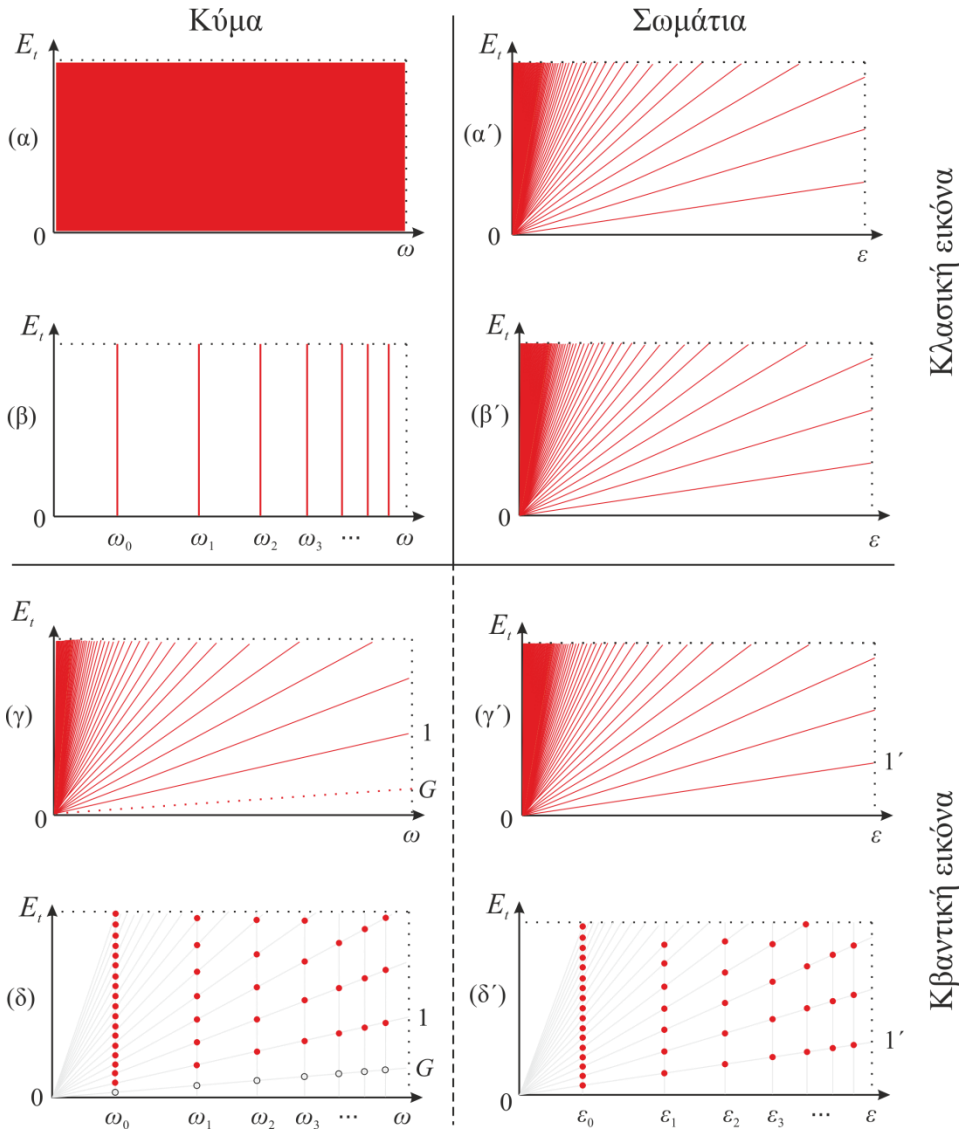
ευκαιρία θυμίζουμε στον αναγνώστη ότι υπάρχει και μια άλλη φυσική αιτία που μπορεί να καταστήσει βαθμούς ελευθερίας οιονεί απόντες από τις θερμοδυναμικές και άλλες μακροσκοπικές ποσότητες. Και αυτή είναι η απαγορευτική αρχή του Pauli για ίδια φερμιόνια, όταν οι τελικές καταστάσεις είναι πλήρως κατειλημμένες (βλ. Σχ.2.3, σελ. 56).

Συνοψίζοντας αναφέρουμε ότι υπάρχουν δύο ειδών κβάντωσης: Η πρώτη αφορά στην ενέργεια $\varepsilon = \hbar\omega$ ενός εκάστου κυματοσωματίου και οφείλεται στον κυματικό του χαρακτήρα· η δεύτερη αφορά στη συνολική ενέργεια $E_t = N\varepsilon$ ενός συστήματος N κυματοσωματίων και οφείλεται στο σωματιδιακό χαρακτήρα τους που είτε είχαν ως κλασικά σωμάτια ή απέκτησαν ως κβάντα κλασικών κυμάτων, όπως π.χ. τα ηλεκτρομαγνητικά (ΗΜ) που περιγράφονται πια μέσω φωτονίων. Αυτό το δεύτερο είδος κβάντωσης εξηγεί αμέσως το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Για να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο από τα δεσμά του στερεού, όπου είναι έγκλειστο, θα πρέπει η ενέργεια του φωτονίου $\hbar\omega$ να είναι μεγαλύτερη από το έργο εξόδου W. Προφανώς η διαφορά $\hbar\omega - W$ (εφόσον είναι θετική) θα εμφανιστεί ως κινητική ενέργεια του εκτός στερεού πια ηλεκτρονίου: $\frac{1}{2}m_e v^2 = \hbar\omega - W$. Σημειώστε ότι μπορεί να υπάρξει έξοδος του ηλεκτρονίου ακόμη και για $\hbar\omega < W$, αρκεί να υπάρχει μια πολύ μεγάλη ροή φωτονίων. Πράγματι, αν κατά τον ελάχιστο χρόνο που το ηλεκτρόνιο δοκιμάζει να δει αν του αρκεί η ενέργεια $\hbar\omega$ για να ξεφύγει από το στερεό, έλθει ένα δεύτερο φωτόνιο, τότε (και εάν $2\hbar\omega > W$) θα έχουμε έξοδο του ηλεκτρονίου και $\frac{1}{2}mv^2 = 2\hbar\omega - W$ (θα έχουμε δηλαδή, μια διφωτονική διέγερση, που παρατηρείται με ΗΜ κύματα ισχυρών λέιζερ).

Στο Σχ. 2.6 επιχειρούμε να διευκρινίσουμε περαιτέρω την κατάσταση εξετάζοντας πώς τα κλασικά κύματα γίνονται κυματοσωμάτια με την προσθήκη σωματιδιακών χαρακτηριστικών και παράλληλα πώς τα κλασικά σωμάτια γίνονται κυματοσωμάτια με την προσθήκη κυματικών ιδιοτήτων. Εξετάζουμε ακόμη εάν υπάρχουν κάποιες διαφορές μεταξύ των κυματοσωματίων ανάλογα με την προέλευση τους από το κλασικό επίπεδο. Είναι απαραίτητο να διακρίνουμε μεταξύ της ολικής ενέργειας E_t ενός συστήματος N ίδιων κυματοσωματίων (για απλότητα τα θεωρούμε μη άλληλεπιδρώντα και έχοντα όλα την ίδια ενέργεια) και της ενέργειας ε ενός εκάστου από τα N κυματοσωμάτια. Η E_t είναι της μορφής $E_t = N\cdot\varepsilon$, όπου N ακέραιο και $\varepsilon = \hbar\omega$ είναι η ενέργεια του κάθε στοιχειώδους σωματίου του συστήματος. Στα οκτώ γραφήματα του Σχ. 2.6 ο κάθετος άξονας παριστά το E_t και ο οριζόντιος το ε ή το ω. Μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τις επιτρεπτές περιοχές, ή τις γραμμές, ή τα σημεία στο επίπεδο E_t, $\varepsilon = \hbar\omega$ ανάλογα με τις διάφορες παραδοχές.

Στο γράφημα (α), άνω αριστερά, που αντιστοιχεί σε κλασικό κύμα απεριόριστης χωρικής έκτασης, η ολική ενέργεια είναι μια συνεχής μετα-

βλητή αφού εξαρτάται μόνο από το τετράγωνο του πλάτους του κύματος. Συνεχής μεταβλητή είναι επίσης και η συχνότητα. Άρα κάθε σημείο του επιπέδου E_t, ω είναι επιτρεπτό. Σε αντιδιαστολή στο γράφημα (α΄), άνω δεξιά,



Σχ.2.6 (α)-(δ): Στο επίπεδο με άξονες τη κυκλική συχνότητα ω και την ολική ενέργεια E_t σημειώνονται οι επιτρεπτές τιμές ενός: (α) Απεριόριστου κλασικού κύματος, όπου όλα τα σημεία του επιπέδου ω, E_t επιτρέπονται. (β) Κλασικού κύματος *περιορισμένου σ' ένα πεπερασμένο χώρο*, όπου μόνο τα σημεία που κείνται πάνω στις κάθετες στον άξονα των συχνοτήτων ευθείες επιτρέπονται (κβάντωση συχνότητας). (γ) Απεριόριστου συστήματος κυματοσωματίων κλασικής κυματικής προέλευσης, όπου μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες

$E_t = n\hbar\omega$, με n φυσικό αριθμό, επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (δ) Συστήματος κυματοσωματίων περιορισμένων σ' ένα πεπερασμένο χώρο, όπου μόνο τα σημεία-κουκίδες επιτρέπονται (κβάντωση συχνότητας και ολικής ενέργειας). (α΄)-(δ΄): Στο επίπεδο με άξονες την ενέργεια ενός σωματίου ε και την ολική ενέργεια E_t σημειώνονται οι επιτρεπτές τιμές ενός συστήματος: (α΄) Από απεριόριστα μη αλληλεπιδρώντα κλασικά σωμάτια καθένα με την ίδια ενέργεια, ε, όπου μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες $E_t=n.\varepsilon$, n=1,2,3,… επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (β΄) Όπως στην (α΄) αλλά περιορισμένα σ' ένα πεπερασμένο χώρο: Μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες $E_t=n\varepsilon$, n=1,2,3,… επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (γ΄) Από απεριόριστα μη αλληλεπιδρώντα κυματοσωμάτια καθένα με την ίδια ενέργεια, όπου μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες $E_t=n\varepsilon$, n=1,2,3,… επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (δ΄) Όπως στην (γ΄) αλλά *περιορισμένα σ' ένα πεπερασμένο χώρο*: Μόνο τα σημεία-κουκίδες επιτρέπονται (κβάντωση ενέργειας ε ενός σωματίου και ολικής ενέργειας). Από όλες τις περιπτώσεις μόνο αυτές (οι γ, γ΄, δ, δ΄,) που αναφέρονται σε κυματοσωμάτια αντιστοιχούν στην πραγματικότητα. Επισημαίνεται ότι, όταν το ω ή το ε τείνει στο μηδέν, τα κλασικά και τα κβαντικά αποτελέσματα τείνουν να συμπέσουν

που αντιστοιχεί σε κλασικό σωμάτιο, η ολική ενέργεια $E_t=N\cdot\varepsilon$, όπου N ακέραιος, είναι κβαντισμένη, ενώ η ενέργεια ε του κάθε σωματίου είναι μια συνεχής μεταβλητή. Επομένως τα επιτρεπτά σημεία κείνται επί της οικογένειας των ευθειών που αντιστοιχούν στη σχέση $E_t=N\cdot\varepsilon$ με N φυσικό αριθμό και ε συνεχή μεταβλητή. Στο γράφημα (β΄), που αντιστοιχεί σε κλασικό σωμάτιο περιορισμένο σε πεπερασμένο όγκο, η κατάσταση παραμένει η ίδια με αυτήν του (α΄), αφού ο χωρικός περιορισμός σε κλασικό σωμάτιο δεν επηρεάζει ούτε το ε ούτε το E_t. Το ίδιο ισχύει και για το γράφημα (γ΄), που αντιστοιχεί σε κυματοσωμάτιο κινούμενο σε απεριόριστο χώρο.

Στο γράφημα (β), που αντιστοιχεί σε κλασικό κύμα περιορισμένο σε πεπερασμενο όγκο, η συχνότητα παίρνει διακριτές τιμές, ενώ η ολική ενέργεια παραμένει συνεχής συνάρτηση ως εξαρτημένη μόνο από το τετράγωνο του πλάτους. Στο γράφημα (γ), που αντιστοιχεί σε κβαντικό κυματοσωμάτιο (δηλαδή σε κύμα που απέκτησε και σωματιδιακό χαρακτήρα) κινούμενο σε απεριόριστο όγκο, η εικόνα είναι όπως αυτή του γραφήματος (γ΄) με μια διαφορά που θα σχολιάσουμε πιο κάτω. Τέλος, στα γραφήματα (δ) και (δ΄), που αντιστοιχούν σε κυματοσωμάτια που κινούνται εντός όγκου περιορισμένης έκτασης, έχουμε διπλή διακριτότητα (διπλό κβαντισμό) και της ολικής ενέργειας (λόγω του σωματιδιακού χαρακτήρα) και της ενέργειας (ή της συχνότητας, λόγω κυματικού χαρακτήρα και πεπερασμένου όγκου κίνησης) κάθε σωματίου. Επομένως οι επιτρεπτές καταστάσεις αντιστοιχούν σε σημεία στο επίπεδο E_t, ε.

Ας έλθουμε τώρα στη διαφορά μεταξύ (γ) και (γ΄) ή μεταξύ (δ) και (δ΄), δηλαδή στη διαφορά μεταξύ κυματοσωματίων κυματικής κλασικής κατάγωγής και αυτών σωματιδιακής κλασικής καταγωγής: πίσω από αυτή τη διαφορά βρίσκεται το γεγονός ότι ο αριθμός των κυματοσωματίων των προερχομένων από κλασικά σωμάτια *διατηρείται*, ενώ αυτών που προέρχονται από κλασικά κύματα *δεν διατηρείται*. Ένα ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να εξαφανισθεί ούτε να δημιουργηθεί από το πουθενά (θεωρούμε ότι δεν υπάρ-

χουν ποζιτρόνια). Αντίθετα ένα φωτόνιο μπορεί να απορροφηθεί από την ύλη ή και να εκπεμφθεί από την ύλη. Με άλλα λόγια για σωμάτια, όπως το ηλεκτρόνιο, και ο αριθμός τους και η ολική τους ενέργεια είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ για σωμάτια όπως τα φωτόνια, ο αριθμός τους δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή αλλά εξαρτάται από την ολική ενέργεια (και τη θερμοκρασία ή τη συχνότητα). Έτσι, π.χ. μπορούμε να θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα μόνο ηλεκτρόνιο και να εξετάζουμε τις μεταβολές της ενέργειάς του δε που αντιστοιχούν σε μετάβαση κατά μήκος της ευθείας 01΄ στο Σχ. 2.6(γ΄) ή από επιτρεπτό σημείο σε επιτρεπτό σημείο κατά μήκος της ευθείας 01΄ στο Σχ. 2.6(δ΄). Αντίθετα, αν εξετάζουμε ένα σύστημα φωτονίων θα το χαρακτηρίζαμε από την ολική του ενέργεια και π.χ. τη θερμοκρασία του. Ιδιαίτερα η ενέργεια της βασικής του κατάστασης E_G, που αντιστοιχεί σε θερμοκρασία T=0 K, δεν περιέχει κανένα φωτόνιο αλλά δεν είναι μηδέν. Αυτό οφείλεται στο ότι η Κβαντομηχανική δεν επιτρέπει να μηδενίζονται ταυτόχρονα το ηλεκτρικό πεδίο **E** και το μαγνητικό πεδίο **B**, για τον ίδιο λόγο, *αρχή απροσδιοριστίας*, που δεν μπορεί να μηδενίζονται ταυτόχρονα το x και το p_x. Κατ' αναλογία με το ότι $< x^2 > \neq 0$ και $< p_x^2 > \neq 0$, έχουμε ότι το <**E**^{2}> και το <**B**^{2}> δεν είναι μηδέν, παρόλο που το <**E**> και το <**B**> είναι μηδέν. Αφού η πυκνότητα ενέργειας του ΗΜ πεδίου συνδέεται με τα τετράγωνα των πεδίων (βλ. τον τύπο (IV.12) στο παράρτημα IV), έπεται ότι η μέση τιμή της πυκνότητας ενέργειας, άρα και η μέση τιμή της ενέργειας του ΗΜ πεδίου για T=0 δεν είναι μηδέν και είναι ίση, για την περίπτωση του Σχ. 2.6(δ), με $\frac{1}{2}\sum_i \hbar\omega_i$, όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλες τις καταστάσεις του ΗΜ πεδίου που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοσυχνότητα ω_i και πάνω σ' όλες τις ιδιοσυχνότητες. (Παράβαλε με τη βασική ενέργεια, $\frac{1}{2}\hbar\omega$, ενός αρμονικού ταλαντωτή). Άρα το κβαντικό κενό, δεν είναι πράγματι κενό γιατί εμφανίζει τις μίνιμουμ διακυμάνσεις του ΗΜ πεδίου, αλλά και των άλλων αλληλεπιδράσεων. Αυτές οι τελευταίες διακυμάνσεις είναι εξαιρετικά βραχύβιες γιατί απαιτούν πολύ υψηλή ενέργεια ΔE και επομένως η εμφάνισή τους διαρκεί για ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt, βάσει της σχέσης $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$.

Οι πρώτες διεγερμένες καταστάσεις του κβαντικού ΗΜ πεδίου δημιουργούνται με τη γένεση ενός φωτονίου, δηλαδή με την *κατακόρυφη* μετάβαση από ένα σημείο της γραμμής 0G, που αντιστοιχεί σε κάποια συχνότητα ω ή ω_i (περίπτωση (γ) ή περίπτωση (δ) αντιστοίχως) σε σημείο της γραμμής 01, οπότε η ολική ενέργεια καθίσταται $E_G + \hbar\omega$. Γενικότερα στον Κβαντικό Κόσμο η ενέργεια του ΗΜ πεδίου έχει πια συνδεθεί με τη συχνότητα βάσει του τύπου $E_t = E_G + n\hbar\omega,\ n = 0,1,2,...$ και όχι με το τετράγωνο του πλάτους.

2.7 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Το παρόν κεφάλαιο είναι το πιο σημαντικό αυτού του βιβλίου γιατί παρουσιάζει και σχολιάζει τα κύρια σημεία της μεγάλης ανατροπής που έφερε η Κβαντική Επανάσταση που μας επέτρεψε για πρώτη φορά να κατανοήσουμε τις δομές του Κόσμου από τις πιο μικρές, τα πρωτόνια, τους ατομικούς πυρήνες, τα άτομα μέχρι τις πιο μεγάλες όπως οι πλανήτες και τα άστρα. Παράλληλα, η Κβαντομηχανική, δεδομένου ότι είναι και πολύ λιγότερο οικεία και πολύ πιο «δυσκολοχώνευτη», απαιτεί από τον αναγνώστη μια ουσιαστική πνευματική προσπάθεια προκειμένου να έχει την ικανοποίηση που συνοδεύει την κατανόηση.

Στην καρδιά της Κβαντικής Φυσικής είναι ασφαλώς η αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg που συνήθως διατυπώνεται μέσω του γινομένου των τυπικών αποκλίσεων θέσεως και ορμής

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2}\,. \tag{2.4}$$

Ο αναγνώστης δεν πρέπει να ξεχνά το *μαθηματικό ορισμό των τυπικών αποκλίσεων*, αλλά κυρίως δεν πρέπει να του διαφεύγει το φυσικό νόημα της παραπάνω σχέσης που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο χωρικός περιορισμός συνεπάγεται ότι το τετράγωνο της ορμής είναι κατ' ανάγκη μη μηδενικό, έχει δηλαδή μια ελάχστη τιμή που ικανοποιεί τη σχέση

$$\left\langle p^2 \right\rangle \propto \frac{\hbar^2}{R^2} \propto \frac{\hbar^2}{V^{2/3}}\,. \tag{2.5}$$

Η σχέση (2.5) συνδυασμένη με το γνωστό τύπο για την κινητική ενέργεια ενός σωματίου, $\varepsilon_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = p^2 / 2m,$ οδηγεί σε μια ελάχιστη τιμή της

$$\boxed{\left\langle \varepsilon_K \right\rangle \propto \frac{\hbar^2}{m R^2} \propto \frac{\hbar^2}{m V^{2/3}}}\,. \tag{2.6}$$

Ο τύπος $\varepsilon_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = p^2 / 2m$ ισχύει για ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό *c*. Στην αντίθετη περίπτωση όπου το $c \cdot p$ είναι πολύ μεγαλύτερο της ενέργειας ηρεμίας $m_0 c^2$ του σωματίου ισχύει ο τύπος $\varepsilon_K = c\, p$, που συνδυαζόμενος με τον (2.5) δίνει

$$\boxed{\left\langle \varepsilon_K \right\rangle \propto \frac{c\,\hbar}{R} \propto \frac{c\,\hbar}{V^{1/3}}}\,. \tag{2.10}$$

Τη μίνιμουμ μη μηδενική κινητική ενέργεια των τύπων (2.6) και (2.10) έρχεται να ενισχύσει η απαγορευτική αρχή του Pauli που αφορά σε *N ίδια φερμιόνια* με σπιν ½ που μοιράζονται τον ίδιο χώρο όγκου *V* τον οποίο χωρίζουν σε *N*/2 ίσους υποχώρους έτσι ώστε η συνολική κινητική ενέργεια των *N ίδιων* φερμιονίων να γίνει κατ' ελάχιστο είτε

$$\boxed{E_K = N\langle\varepsilon_K\rangle = 2{,}87\frac{\hbar^2}{m}\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} = 1{,}105\frac{\hbar^2}{m}\frac{N^{5/3}}{R^2}}, \qquad (2.13)$$

για ταχύτητες πολύ μικρότερες αυτής του φωτός, είτε

$$\boxed{E_K = 2{,}32\,\hbar c\frac{N^{4/3}}{V^{1/3}} = 1{,}44\frac{\hbar cN^{4/3}}{R}}, \qquad (2.14)$$

για ταχύτητες σχεδόν ίσες με αυτήν του φωτός.

Η συνολική ελάχιστη κινητική ενέργεια του τύπου (2.13) αποδεικνύεται επαρκής για να εξισορροπήσει με τη διασταλτική της πίεση τη συνθλιπτική πίεση, που οφείλεται στις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των σωματίων που αποτελούν ένα φυσικό σύστημα, το οποίο έτσι οδηγείται σε σταθερή ισορροπία. Η συνολική κινητική ενέργεια του τύπου (2.14), που βρίσκει εφαρμογή σε Λευκούς Νάνους και Αστέρες Νετρονίων, μπορεί να εξισορροπήσει τη συνθλιπτική πίεση των βαρυτικών δυνάμεων, αλλά μέχρι κάποιου ορίου πέραν του οποίου ο Λευκός Νάνος καταρρέει προς Αστέρα Νετρονίων και ο Αστέρας Νετρονίων προς Μαύρη Τρύπα.

Ο περιορισμός ενός κυματοσωματίου εντός πεπερασμένου όγκου πέραν της ελάχιστης μη μηδενικής κινητικής ενέργειας που προκαλεί, συνεπάγεται επίσης τη διακριτότητα του ενεργειακού φάσματος, το οποίο παύει να είναι συνεχές και συνίσταται από διακριτές ενεργειακές στάθμες που η καθεμία απέχει ενεργειακά από την προηγούμενή της κατά ένα ποσό της τάξεως *δε,* όπου (για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός).

$$\boxed{\delta\varepsilon \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_o = a\frac{\hbar^2}{mV^{2/3}}}. \qquad (2.19)$$

Η φασματική διακριτότητα, που απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα των Σχ. 2.6 (δ) και (δ΄), είναι μεγάλης σημασίας γιατί εξασφαλίζει το ότι σύνθετα μικροσκοπικά σωμάτια, όπως τα άτομα και τα μόρια, συμπεριφέρονται μέχρις ενός ορίου ως στοιχειώδη και αναλλοίωτα.

2.8 Τα βασικά της κβαντομηχανικής ξανά στο προσκήνιο

Οι περίεργες και χαρακτηριστικές ιδιότητες της κβαντομηχανικής, όπως, π.χ. η αρχή της επαλληλίας και το αξίωμα της μέτρησης (βλ. το βιβλίο με αριθμό [4] στη βιβλιογραφία), επανεξετάζονται τα τελευταία χρόνια, όχι μόνο από την ανάγκη περαιτέρω εννοιολογικής διευκρίνισης, αλλά και επειδή η τεχνολογία κινείται όλο και περισσότερο στην αξιοποίηση των περίεργων κβαντικών φαινομένων. Ένα από τα φαινόμενα αυτά, που παίζει σημαντικό ρόλο στις τηλεπικοινωνίες αλλά και στις προσπάθειες για κβαντικούς υπολογιστές, είναι αυτό της σύμπλεξης (entanglement). Δύο κυματοσωμάτια, το 1 και το 2, που περιγράφονται από την κυματοσυνάρτηση

$\Psi(1,2)$, λέγονται σύμπλεκτα (entangled), εάν η συνολική τους κυματοσυνάρτηση είναι τέτοια ώστε $\Psi(1,2) \neq \psi_i(1)\psi_j(2)$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει μια στατιστική συσχέτιση μεταξύ των δύο σωματίων: Μια μέτρηση στο ένα θα τροποποιήσει την κατάσταση όχι μόνο του μετρουμένου σωματίου, αλλά και του άλλου σωματίου έστω και εάν αυτό το άλλο σωμάτιο είναι πολύ μακριά από το πρώτο. Εμφανίζεται δηλαδή μια περίεργη εξ αποστάσεως επίδραση που εκ πρώτης όψεως φαίνεται να μεταφέρεται ακαριαία, δηλαδή ταχύτερα από την ταχύτητα του φωτός. Το θέμα αυτό απασχόλησε τον Einstein (βλ. άρθρο [22] στη βιβλιογραφία). Τελικά η ετυμηγορία του πειράματος (βλ. άρθρο [23] στη βιβλιογραφία) ήταν υπέρ της κβαντομηχανικής εκδοχής: Αυτή η περίεργη εξ αποστάσεως επίδραση όχι μόνο υπάρχει, αλλά είναι και πολύτιμη για τις τηλεπικοινωνίες και απαραίτητη για την επίτευξη κβαντικών υπολογιστών.

Στα κεφάλαια 14 και 15 (που τα συνιστώ θερμά) του βιβλίου με αριθμό [24] στη βιβλιογραφία εξετάζονται και θέματα που σχετίζονται με τη θεμελίωση της κβαντομηχανικής και θέματα που αφορούν παρούσες και μελλοντικές τεχνολογίες βασισμένες ακριβώς στις ιδιομορφίες της κβαντομηχανικής. (Για μια πιο εξειδικευμένη και πολύ πιο εκτενή εξέταση του θέματος ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα μπορούσε να ανατρέξει στο βιβλίο του J. Bub, *Bananaworld*: *Quantum Mechanics for Primates*, Oxford (2016))

2.9 Λυμένες ασκήσεις

1. Για τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή του Σχ.2.5α δείξτε ότι η μέση δυναμική ενέργεια ισούται με $\frac{1}{2}\kappa\Delta x^2$ και η μέση κινητική ενέργεια ισούται κατ' ελάχιστο με $\hbar^2/8m\Delta x^2$. Δείξτε στη συνέχεια ότι η ολική ενέργεια ελαχιστοποιείται όταν $\Delta x^2 = \hbar/(2\sqrt{\kappa m})$, οπότε η ελάχιστη τιμή της ολικής ενέργειας γίνεται $\frac{1}{2}\hbar\omega$, όπου $\omega = \sqrt{\kappa/m}$.

Λύση: Αφού $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ και $\langle x \rangle = 0$ (λόγω συμμετρίας), $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle$. Επομένως, για τη μη σχετικιστική περίπτωση, και θεωρώντας ότι $< p_x >= 0$, οπότε $\langle p_x^2 \rangle = \Delta p_x^2$, έχουμε

$$\langle \varepsilon_{ολ} \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}\kappa \langle x^2 \rangle = \frac{\Delta p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa\Delta x^2 \geq \frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2} + \frac{1}{2}\kappa\Delta x^2 , \qquad (1.1)$$

(λόγω Heisenberg $\Delta p_x \geq (\hbar/2\Delta x)$). Ελαχιστοποιούμε την τελευταία έκφραση στην (1.1) ως προς Δx και βρίσκουμε ότι

$$-\frac{\hbar^2}{4m\Delta x^3}+\kappa\Delta x=0 \Rightarrow \Delta x^4=\frac{\hbar^2}{4m\kappa} \Rightarrow \Delta x^2=\frac{\hbar}{2\sqrt{m\kappa}}.$$

Αντικαθιστούμε το Δx^2 στην έκφραση για τη δυναμική ενέργεια και έχουμε

$$\langle\varepsilon_\Delta\rangle=\tfrac{1}{2}\kappa\Delta x^2=\tfrac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{m}}=\tfrac{1}{4}\hbar\omega, \quad \omega\equiv\sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και την ελάχιστη μέση κινητική ενέργεια

$$\langle\varepsilon_K\rangle=\frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2}=\frac{\hbar^2}{8m}\frac{2\sqrt{m\kappa}}{\hbar}=\tfrac{1}{4}\hbar\omega.$$

Έπεται ότι η ολική ενέργεια της βασικής κατάστασης, που είναι το άθροισμα δυναμικής και κινητικής, ικανοποιεί τη σχέση $\langle\varepsilon_{ολ}\rangle\geq\frac{1}{2}\hbar\omega$. Στην πραγματικότητα ισχύει η ισότητα.

2. Θεωρήστε ένα ουδέτερο άτομο με ατομικό αριθμό $Z\gg1$. Εκτιμήστε την εξάρτηση από το Z της *μέσης* απόστασης a ενός ηλεκτρονίου από τον πυρήνα καθώς και αυτήν της συνολικής ενέργειας E του ατόμου (κβαντικής κινητικής ενέργειας όλων των ηλεκτρονίων και συνολικής ενέργειας Coulomb). Η εμπειρική τιμή του a σε ατομικές μοναδες είναι $a\approx0,424Z^{-1/3}$ και του E είναι $E\approx$ $\approx-0,589Z^{7/3}\approx-16Z^{7/3}$ eV

Λύση: Η ελάχιστη κινητική ενέργεια όλων των ηλεκτρονίων δίνεται από την παρακάτω σχέση με βάση τον τύπο (2.13΄), όπου $R=\tilde{a}$ και $\tilde{a}$ είναι η ενεργός ακτίνα του ατόμου που είναι της ίδιας τάξεως, αλλά σαφώς μεγαλύτερη από το a, δηλαδή $\tilde{a}=xa$ με x μεγαλύτερο της μονάδας.

$$E_K=1,1\frac{\hbar^2}{m_e}\frac{Z^{5/3}}{x^2a^2}.$$

Η ολική δυναμική ενέργεια περιλαμβάνει τον όρο $-Z^2e^2/a$ για την άλληλεπίδραση όλων των Z ηλεκτρονίων με το φορτίο Ze του πυρήνα και τον όρο $[Z(Z-1)/2](e^2/a')\approx Z^2e^2/2a'$, όπου a' είναι η μέση απόσταση μεταξύ δύο ηλεκτρονίων. Το $a'=ya$ όπου y είναι μια αριθμητική σταθερά της τάξεως της μονάδας. Επομένως σε ατομικές μονάδες έχουμε

$$E=1,1\frac{Z^{5/3}}{x^2a^2}-\frac{Z^2}{a}\left(1-\frac{1}{2y}\right). \qquad (2.1)$$

Παραγωγίζοντας την (2.1) ως προς a και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν βρίσκουμε (σε ατομικές μονάδες)

$$a = \frac{2,2}{x^2(1-\frac{1}{2y})} Z^{-1/3} \ . \qquad (2.2)$$

Αντικαθιστώντας την (2.2) στην (2.1) έχουμε

$$E = -\frac{1}{4,4} x^2 (1-\frac{1}{2y})^2 Z^{7/3} \ . \qquad (2.3)$$

Για να επιτύχουμε τις εμπειρικές τιμές θα πρέπει να επιλέξουμε για τα x και y τις εύλογες τιμές x=3,22 και y=1.

3. Θεωρήστε ένα μη σχετικιστικό κυματοσωμάτιο μάζας m κινούμενο σε ένα χώρο ν (ν=1, 2, 3) διαστάσεων υπό την επήρεια ενός 'πηγαδιού' δυναμικού της μορφής

$$\mathcal{V}(r) = -V, \quad r \le a$$
$$= 0, \quad r > a \quad .$$

Μπορεί ένα ρηχό 'πηγάδι' δυναμικού να δημιουργήσει μια δέσμια κατάσταση; Ρηχό σημαίνει ότι $V \ll \varepsilon \equiv (\hbar^2 / ma^2)$. Δέσμια κατάσταση είναι εκείνη που η ιδιοενέργειά της είναι αρνητική και για μεγάλες αποστάσεις σβύνει εκθετικά: $\psi \propto \exp(-r/R)$.

Λύση: Λόγω του ότι το 'πηγάδι' είναι ρηχό περιμένουμε ότι $R \gg a$.

Θα εξετάσουμε πρώτα τη **μονοδιάστατη περίπτωση**, ν=1, όπου η ολική ενέργεια θα έχει τη μορφή (γιατί;)

$$\varepsilon_{o\lambda} = \varepsilon_{\Delta} + \varepsilon_K = -\gamma V(a/R) + \beta \hbar^2 / mR^2 \ , \qquad (3.1)$$

με γ και β αριθμητικούς συντελεστές. Η ακροτατοποίηση του $\varepsilon_{o\lambda}$ οδηγεί σε ένα ελάχιστο ίσο με $\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = -\varepsilon x^2 A$ και μήκος $R=R_m=Ba$ που ελαχιστοποιεί την ενέργεια όπου $\varepsilon \equiv \hbar^2 / ma^2$, $x \equiv V/\varepsilon$, $A = \gamma^2 / 4\beta$ και $B=2\beta/\gamma x$. Η ακριβής λύση, η οποία αντιστοιχεί στις εύλογες τιμές γ=2 και β=1/2 (γιατί εύλογες;), είναι

$$\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = -\frac{V^2}{\hbar^2 / 2ma^2} \quad \text{και} \quad (R_m / a) = \frac{\hbar^2 / 2ma^2}{V} \quad \text{για} \ V \to 0^+ \ . \qquad (3.2)$$

Συμπεραίνουμε ότι στη μονοδιάστατη περίπτωση υπάρχει πάντα μια δέσμια κατάσταση όσο ρηχό και να είναι το 'πηγάδι' δυναμικού.

Ας εξετάσουμε τώρα την **τριδιάστατη περίπτωση**, ν=3. Θα δούμε αμέσως πιο κάτω ότι για ν=3 η ποσότητα $x \equiv V/\varepsilon$ πρέπει να ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή της τάξεως της μονάδας για να έχουμε μια δέσμια κατάσταση. Ο κύριος λόγος για αυτή τη διαφορά από τη μονοδιάστατη περίπτωση είναι ότι η πυκνότητα πιθανότητας $|\psi(r)|^2$ στις τρεις διαστάσεις οφείλει να έχει την εξής μορφή $r^2 |\psi(r)|^2 = $σταθ. (λόγω διατήρησης της 'ροής' πιθανότητας). Ως αποτέλεσμα η κινητική ενέργεια για $r<a$ δεν είναι αμελητέα, αλλά ισούται με $\hbar^2 / 2ma^2$ επί την πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο στην περιοχή του 'πηγαδιού' που είναι ανά-

λογη του $|\psi(a)|^2 a^3 / |\psi(R)|^2 R^3 = a/R$. Προσθέτοντας την κινητική ενέργεια της περιοχής $r>a$, $\hbar^2/2mR^2$, και τη δυναμική ενέργεια, $-V(a/R)$, έχουμε για την ολική ενέργεια

$$\varepsilon_{o\lambda} = \beta \frac{a}{R}\frac{\hbar^2}{2ma^2} + \beta' \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \gamma \frac{a}{R} V \,, \tag{3.3}$$

η ακροτατοποίηση της οποίας δίνει

$$\frac{R}{a} = \frac{2\beta'\varepsilon}{2\gamma V - \beta\varepsilon} \text{ και } \varepsilon_{\varepsilon\lambda} = -\frac{(2\gamma V - \beta\varepsilon)^2}{8\beta'\varepsilon} \,. \tag{3.4}$$

Το ακριβές αποτέλεσμα επιτυγχάνεται για $\gamma=\beta'=1$, $\beta=\pi^2/4$ που σημαίνει ότι το V πρέπει να υπερβεί την κρίσιμη τιμή $\beta\varepsilon/2\gamma = \frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{ma^2}$ προκειμένου να υπάρξει δέσμια κατάσταση.

Η **διδιάστατη περίπτωση**, $\nu=2$, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και γιατί είναι οριακή μεταξύ της περίπτωσης $\nu=1$ (που δίνει μια δέσμια κατάσταση όσο και μικρό να είναι το V) και της περίπτωσης $\nu=3$ (που απαιτεί το V να υπερβεί μια κρίσιμη τιμή για να υπάρξει μια δέσμια κατάσταση), αλλά και γιατί έχει εφαρμογή σε σημαντικά προβλήματα, όπως αυτό της υπεραγωγιμότητας (δημιουργία ζεύγους Cooper) και του φαινομένου Kondo (βλ. E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics,* 3rd ed. Springer, 2006, Berlin, σελ. 127-135).

Εκ πρώτης όψεως θα κατέληγε κανείς ότι για να γίνει το $\varepsilon_{o\lambda}$ αρνητικό θα πρέπει το V να υπερβεί την τιμή $(\beta/\gamma)\varepsilon$, όπως και στην τριδιάστατη περίπτωση. Αλλά, η λεπτομερής επίλυση της εξίσωσης του Schrödinger (βλ. E.N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics,* 3rd ed., Springer, (2006), σελ. 415-417) δείχνει ότι στην ολική ενέργεια εισέρχονται και λογαριθμικοί όροι της μορφής $\ln(R/R_o)$, όπου R_o είναι της τάξεως του a. Μια *προσεγγιστική* έκφραση για την ολική ενέργεια από την οποία με ελαχιστοποίηση προκύπτει η τιμή του R (αλλά *όχι άμεσα* η τιμή του $\varepsilon_{o\lambda}$) βασίζεται στην παραδοχή ότι η κινητική ενέργεια από την περιοχή του 'πηγαδιού' είναι αμελητέα και ότι η δυναμική ενέργεια περιέχει ένα παράγοντα της μορφής $\ln(R/R_o)$:

$$\varepsilon_{o\lambda} \approx \beta \frac{\hbar^2}{mR^2} - \gamma \frac{a^2}{R^2} V \ln\frac{R}{R_0}, \quad \varepsilon \equiv \frac{\hbar^2}{ma^2} \,.$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\frac{\partial \varepsilon_{o\lambda}}{\partial R} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = R_m \equiv \sqrt{e}\, R_0 \exp(\frac{\beta\,\varepsilon}{\gamma V}) \,. \tag{3.5}$$

Η ολική ενέργεια $\varepsilon_{o\lambda}$ μπορεί να εκτιμηθεί ως το μείον της κινητικής για $r>a$:

$$\varepsilon_{o\lambda} \approx -\frac{\hbar^2}{2\,m\,R_m^2} = -\frac{\hbar^2}{2\,m\,e\,R_0^2}\exp(-\frac{2\beta\,\varepsilon}{\gamma V}), \quad 0 < V \ll \varepsilon \,. \tag{3.6}$$

Η ακριβής λύση προκύπτει θέτοντας $\beta=\gamma$ και $\sqrt{e}R_o = e^{\gamma} a/2$, όπου γ=0,577… είναι η σταθερά του Euler.

Επομένως, ένα διδιάστατο πηγάδι δυναμικού δημιουργεί μια δέσμια κατάσταση όσο και μικρό να είναι το βάθος του. Όμως η ενέργεια δέσμευσης στο όριο μικρού V είναι εκθετικά μικρή, όπως δείχνει ο τύπος (3.6) και το μήκος απόσβεσης R_m είναι εκθετικά μεγάλο (βλ. (3.5)). Σημειώστε ότι, όπως προκύπτει από τις (3.5) και (3.6), οι R_m και $\varepsilon_{o\lambda}$ εμφανίζουν μια ουσιώδη μαθηματική ανωμαλία στο όριο $V\to 0$.

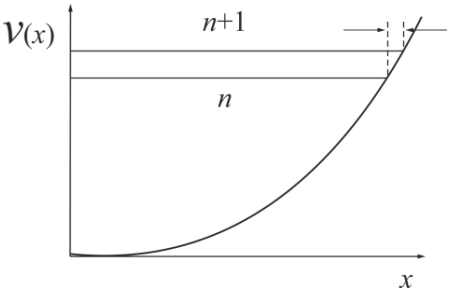
4. Για ένα μονοδιάστατο ελκτικό δυναμικό, $\mathcal{V}(x) \propto \pm|x|^{\beta}$, η ιδιοενέργεια της $n^{\sigma\tau\eta\varsigma}$ στάθμης είναι της μορφής

$$E(n) \propto n^{a}, \tag{4.1}$$

όπου,
$$a = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}}. \tag{4.2}$$

Έτσι

$\beta \to \infty$	$a = 2$	(απειρόβαθμο πηγάδι).
$\beta = 2$	$a = 1$	(αρμονικός ταλαντωτής).
$\beta = -1$	$a = -2$	(δυναμικό Coulomb).



$$\frac{dE}{dn}\delta n \propto \frac{\partial V}{\partial x}\lambda, \quad \lambda \propto E^{-1/2}. \tag{4.3}$$

Εναλλακτικά: Προσέγγιση WKB

Μπορείτε να αποδείξετε τις σχέσεις (4.1) και (4.2) χρησιμοποιώντας την αρχή της αντιστοιχίας και τις αρχές Heisenberg και Schrödinger;

Υπόδειξη: Η κάθε στάθμη n αντιστοιχεί στο ότι το μήκος κύματος ισούται με n φορές την έκταση x της αντίστοιχης κυματοσυνάρτησης

Λύση: Η σχέση (4.3) για δn=1 γίνεται

$$aE/n=\beta\lambda\nu/x, \text{ όπου } x=n\lambda. \tag{4.4}$$

Άρα

$$\alpha E=\beta\nu. \tag{4.5}$$

Έχοντας υπόψη τις σχέσεις

$$E=An^{a},\ \nu=\Gamma x^{\beta},\ \lambda=\Lambda E^{-1/2}=\Lambda A^{-1/2}n^{-a/2}, \tag{4.6}$$

την (4.4) και την (4.6) βρίσκω

$$x=n\lambda=\Lambda A^{-1/2}n^{1-(a/2)}\ , \tag{4.7}$$

όπου

$$x=(\nu/\Gamma)^{1/\beta}=(aE/\beta\Gamma)^{1/\beta}=(a/\beta\Gamma)^{1/\beta}A^{1/\beta}n^{\alpha/\beta}. \tag{4.8}$$

Από (4.7) και (4.8) έχουμε

$$1-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{\beta}\ \text{ή}\ \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\ \text{ή}\ \alpha=\frac{2\beta}{2+\beta}\ .$$

5. Δείξτε ότι η θερμική ενέργεια U_T η οφειλόμενη στη διέγερση ηχητικών κυμάτων (λόγω ιοντικών ταλαντώσεων) είναι όμοια με αυτήν της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες και με τη διαφορά ότι η ταχύτητα του ήχου είναι πολύ πιο μικρή από την ταχύτητα του φωτός). Άρα $U_T \sim T^4$ και επομένως η αντίστοιχη θερμοχωρητικότητα θα είναι $C \sim T^3$

Λύση: Σε ένα στερεό τα ηχητικά κύματα χαμηλής συχνότητας, δηλ. $\lambda \gg d$, όπου d η απόσταση γειτονικών ατόμων στο στερεό, είναι είτε εγκάρσια (με $\omega = c_t k$) είτε διαμήκη (με $\omega = c_\ell k$). Επομένως $\omega = \tilde{c}k$, όπου $\tilde{c}$ κατάλληλος συνδυασμός των c_t και c_ℓ. (Στην πραγματικότητα $3\tilde{c}^{-3} = 2c_t^{-3} + c_\ell^{-3}$). Άρα κατ' αναλογία με την υποσημείωση 20, σελ.61 έχουμε για την ενέργεια U_T λόγω θερμικής διέγερσης ηχητικών κυμάτων

$$U_T = \int_0^{\omega_{\max}} \tilde{A}\omega^2 k_B T\, d\omega \sim T^4\ ,$$

αφού $\hbar\omega_{\max} = ak_BT \ll 2\pi\hbar\tilde{c}/d$ με a της τάξεως της μονάδας.

6. Με βάση το σκεπτικό που οδήγησε στη σχέση (2.13) υπολογίστε την ολική κινητική ενέργεια ενός διδιάστατου συστήματος N ίδιων σωματίων με σπίν ½ που περιορίζονται στο εσωτερικό ενός κύκλου ακτίνας R.

Λύση: Θεωρώντας ότι $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$ έχουμε $\langle \varepsilon \rangle = 2 \times (\langle p_x^2 \rangle / 2m) = \hbar^2 / 4m \langle x^2 \rangle$. Όμως για λόγους συμμετρίας $\langle x^2 \rangle = \langle r^2 \rangle / 2$. Άρα $\langle \varepsilon \rangle = \hbar^2 / (2m \langle r^2 \rangle)$. Το $\langle r^2 \rangle =$

$= \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R dr 2\pi r\, r^2 = R^2/2$, $\langle \varepsilon \rangle = \hbar^2 / mR^2$. Λόγω Pauli $\pi R^2 \to \pi R^2/(N/2)$. Επομένως

$$E_K = N\langle \varepsilon \rangle = N \times \frac{N}{2}\frac{\hbar^2}{mR^2} = \frac{\hbar^2 N^2}{2mR^2} \quad \text{και} \quad E_F = \frac{\partial E_K}{\partial N})_V = \frac{\hbar^2 N}{mR^2}\ .$$

2.10 Άλυτες ασκήσεις

1. Ιστορική σημείωση: Το μοντέλο του Bohr για τις ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου, αν και θεωρήθηκε εξαιρετικά ενδιαφέρον, έγινε πλήρως αποδεκτό μόνο όταν προέβλεψε επίσης ότι οι ηλεκτρονιακές στάθμες στο *ιόν* του ηλίου 4 θα διαφέρουν από αυτές στο υδρογόνο κατά ένα παράγοντα 4, πράγμα που ήταν σε συμφωνία με τα τότε πειραματικά δεδο-

μένα. Όμως, λίγο αργότερα, ακριβέστερα πειράματα έδειξαν ότι ο περί ου ο λόγος δεν είναι 4, αλλά 4,0016, πράγμα που φάνηκε ότι αμφισβητεί το μοντέλο Bohr. Ο Bohr τότε επανήλθε, δείχνοντας ότι η ακριβής τιμή (μέχρι το πέμπτο δεκαδικό ψηφείο) αυτού του λόγου είναι 4,00163. *Δείξτε ότι ο Bohr είχε δίκιο*.

2. Αποδείξτε τις σχέσεις (2.13) και (2.14).

3. Θεωρήστε ένα σωμάτιο μάζας *m* εγκλωβισμενο σ' ένα ελλειψοειδές με κύριους ημιάξονες *a*, *b*, *c*. Ποια είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια αυτού του σωματίου; Πώς συγκρίνεται με την ειδική περίπτωση μιας σφαίρας ίσου όγκου με το ελλειψοειδές;

4. Αποδείξτε το νόμο των Snell-Descartes για τη διάθλαση από την αρχή του ελάχιστου χρόνου διαδρομής μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται σε δύο διαφορετικά ομοιογενή μέσα που τα διαχωρίζει μια επίπεδη επιφάνεια.

5. Θεωρήστε τον προσεγγιστικό τύπο (2.16) για $k_BT \ll E_F$ και υπολογίστε τη συμβολή της κβαντικής και της θερμικής κινητικής ενέργειας ανά σωμάτιο. Κατά τι διαφέρει η τελευταία από τον ακριβή τύπο (2.15) με $\pi^2/4$ στη θέση του $(3/2)^2$. Παρατηρήστε ότι η συμβολή της θερμικής ενέργειας δεν είναι αθροιστική με την έννοια ότι στην κβαντική κινητική ενέργεια ανά σωμάτιο για $T = 0\,\mathrm{K}$, $\frac{3}{5}E_F$, δεν προστίθεται ο θερμικός όρος $\frac{3}{2}k_BT$ αλλά ένας όρος ανάλογος του $\left(\frac{3}{2}k_BT\right)^2 / \left(\frac{3}{5}E_F\right)$. Στο αντίθετο όριο $k_BT \gg E_F$ ισχύει η σχέση $(E_K / N) = \frac{3}{2}k_BT + 0,2(E_F^{3/2} / k_BT^{1/2})$, που πάλι δεν είναι αθροιστική.

Τρεις επισημάνσεις

1.Για το ρόλο της αρχής της απροσδιοριστίας και των άλλων δύο βασικών αρχών, βλ. την εξαίρετη ομιλία του Στ. Τραχανά με τίτλο, *Η αρχή της αβεβαιότητας: Η θεμελιώδης αρχή του Σύμπαντος,* στο site "www.cup.gr" (επιλογή: ομιλίες)
2.Για την ορθή φυσική ερμηνεία της αρχής 'αβεβαιότητας' χρόνου-ενέργειας βλ. σελ. 191 του βιβλίου του Στ. Τραχανά, *Κβαντομηχανική Ι*, ΠΕΚ 2005 (Ηράκλειο).
3.Κάθε σύνθετο συστήμα, που αποτελείται από έναν επαρκώς μεγάλο αριθμό *N* στοιχειωδών σωματίων, όταν κινείται ως ενιαίο σύνολο δεν εμφανίζει στην *κίνησή του αυτή* τα χαρακτηριστικά κυματικά φαινόμενα. Από ποια τιμή του *N* και πάνω και υπό ποιες συνθήκες αυτά τα κυματικά φαινόμενα παύουν να εμφανίζονται είναι ένα ανοικτό θέμα που αποτελεί αντικείμενο σύγχρονης επιστημονικής έρευνας. Πάντως σύνθετες δομές μη μηδενικής έκτασης, όπως είναι τα άτομα, εξακολουθούν να διατηρούν τη δυνατότητα εμφάνισης κατά την κίνησή τους των χαρακτηριστικών κυματικών φαινομένων, όπως είναι π.χ. η συμβολή· αντίθετα μακροσκοπικά αντικείμενα, όπως είναι π.χ. ένας κόκκος άμμου, φαίνεται ότι δεν διαθέτουν πλέον μια τέτοια δυνατότητα.

Κεφάλαιο 3

Ισορροπία και ελαχιστοποίηση της Ενέργειας

Σύνοψη: *Ο 1ος και ο 2ος νόμος οδηγούν στην παρακάτω βασική σχέση (3.1), από την οποία προκύπτει ότι οι ευσταθείς δομές της ύλης αντιστοιχούν στο ελάχιστο της εσωτερικής ενέργειας υπό συνθήκες* $TdS = đW = đE_m = 0$ **.**

$$đU \le TdS - đW + đE_m \text{ .} \qquad (3.1)$$

Η ανισότητα στην (3.1) ισχύει κατά την πορεία προς την ισορροπία, ενώ η ισότητα ισχύει για αλλαγές που εμπλέκουν μόνο καταστάσεις ισορροπίας. Από την (3.1) προκύπτουν σχέσεις που αφορούν στις λεγόμενες ελεύθερες ενέργειες, οι οποίες συνδέονται με την άντληση μέγιστου έργου. Οι θερμοδυναμικές ποσότητες διακρίνονται σε εντατικές και εκτατικές.

3.1 Θερμοδυναμική

Οι βασικοί νόμοι της Θερμοδυναμικής και της Στατιστικής Φυσικής (βλ. Παρ. ΙΙΙ) ισχύουν ανεξάρτητα από το είδος των αλληλεπιδράσεων ή από το ποια είναι η μορφή της εξίσωσης που καθορίζει την κίνηση των σωματίων. Έχουν επομένως καθολική ισχύ και δικαιούνται να ονομασθούν υπερνόμοι κατ' αναλογία με τους νόμους διατήρησης (βλ. Παρ. ΙΙ). Οι νόμοι της Θερμοδυναμικής και της Στατιστικής Φυσικής στην ουσία πηγάζουν από την ατομική δομή της ύλης και αναφέρονται σε συστήματα που αποτελούνται από ένα τεράστιο αριθμό μικροσκοπικών σωματίων συνήθως της τάξης του αριθμού του Avogadro, $N_A \approx 6 \times 10^{23}$.

Επειδή η *λεπτομερής μικροσκοπική περιγραφή* τέτοιων συστημάτων αποκλείεται εκ των προτέρων, περιοριζόμαστε αναγκαστικά σε μια *μακροσκοπική περιγραφή* του συστήματος που καθορίζεται από ένα μικρό αριθμό ανεξάρτητων μακροσκοπικών μεταβλητών, όπως είναι, π.χ., ο αριθμός των μικροσκοπικών σωματίων, *N*, του συστήματος, ο όγκος του, *V*, η ολική του

ενέργεια, U κλπ[1]. Είναι προφανές ότι σε κάθε μακροκατάσταση του συστήματος (που χαρακτηρίζεται, π.χ., από τις τιμές των $N,U,V,\ldots$[2]) αντιστοιχεί ένας αφάνταστα μεγάλος (της τάξεως του e^{aN}, όπου a είναι της τάξεως της μονάδας[3]) αριθμός μικροκαταστάσεων που τον συμβολίζουμε με $\Gamma(U,V,N,\ldots)$. (Θυμίζουμε ότι για τον προσδιορισμό κάθε κλασικής μικροκατάστασης χρειάζεται να ξέρουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες όλων των μικροσκοπικών σωματίων του συστήματος). Η σύνδεση μεταξύ της μικροσκοπικής εικόνας και της μακροσκοπικής περιγραφής επιτυγχάνεται μεσω της έννοιας της **Εντροπίας** του συστήματος που ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{S \equiv k_B \ln \Gamma(U,V,N,\ldots)} \,. \qquad (3.2)$$

k_B είναι η σταθερά του Boltzmann, $k_B = 1,38065\times10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$, και $N_A k_B = R = 8,3144\,\mathrm{J/K}$. N_A είναι ο αριθμός του Avogrado και R η σταθερά των ιδανικών αερίων. Όσο μεγαλύτερο είναι το Γ -και επομένως και η εντροπία- τόσο μεγαλύτερη είναι η άγνοιά μας για το σε ποια μικροκατάστασή του βρίσκεται το σύστημά μας. Άρα η εντροπία είναι ένα μέτρο της έλλειψης λεπτομερούς πληροφορίας. Μείωση της εντροπίας σημαίνει αύξηση της πληροφορίας.

---

[1] Το U είναι η ονομαζόμενη εσωτερική ενέργεια που ορίζεται ως η μέση τιμή της ολικής ενέργειας E_t σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου το κέντρο μάζας μένει ακίνητο και η ολική στροφορμή (προκειμένου για μακροσκοπικό σύστημα) είναι μηδέν. Σημειώστε ότι η τιμή του U ή του E_t καθορίζεται πλήρως μόνο αφού επιλέξουμε μια κατάσταση αναφοράς την ενέργεια της οποίας θα ορίσουμε ως μηδέν. Συνήθως η κατάσταση αναφοράς είναι αυτή όπου το καθένα από τα σωμάτια του συστήματος είναι στη βασική του στάθμη και σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Σχεδόν πάντοτε το U ή το E_t έχει τρεις συνεισφορές: Την ενέργεια ηρεμίας των σωματίων του συστήματος $E_o = \sum_j m_{0j}c^2$, την κινητική τους ενέργεια E_K και τη δυναμική ενέργεια E_Δ που οφείλεται σε αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον ή/και μεταξύ των σωματίων του συστήματος. Όταν δεν αναμένουμε αλλαγή στην ενέργεια ηρεμίας την αγνοούμε ενσωματώνοντάς την στην κατάσταση αναφοράς.

[2] Ένα απλό σύστημα όπως ένα ιδανικό αέριο, *όταν είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία*, περιγράφεται μακροσκοπικά από τρεις μόνο ανεξάρτητες φυσικές μεταβλητές που μπορεί να είναι οι N,U,V. Για ένα αέριο φωτονίων οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι μόνο δύο γιατί, όπως αναφέραμε προηγουμένως, το N για τα φωτόνια δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή. Άλλα πιο περίπλοκα φυσικά συστήματα μπορεί να χρειάζονται περισσότερες από τρεις ανεξάρτητες φυσικές μεταβλητές για τη μακροσκοπική περιγραφή τους. Σημειώστε τέλος ότι ένα σύστημα σε μη θερμοδυναμική ισορροπία χρειάζεται περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές από όσες όταν είναι σε ισορροπία.

[3] Το a εξαρτάται από την απόλυτη θερμοκρασία T, το πηλίκο V/N και ενδεχομένως και άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές. Όταν το $T\to0$K (στο απόλυτο μηδέν), το $a\to0$, και η εντροπία τείνει στο μηδέν. Η σχέση $S\to0$ για $T\to0$ αναφέρεται ως ο **Τρίτος Νόμος** της Θερμοδυναμικής.

3.2 Εκτατικές και εντατικές ποσότητες

Θεωρήστε ένα αέριο όγκου V σε ισορροπία και ένα νοητό πέτασμα που το χωρίζει σε δύο ίσα μέρη. Εξ ορισμού ο όγκος του κάθε μέρους είναι ο μισός. Προφανώς και ο αριθμός των σωματίων του κάθε μέρους είναι ο μισός, όπως επίσης και η εσωτερική ενέργεια, καθώς και η εντροπία. Θερμοδυναμικές ποσότητες που είναι ανάλογες με το μέγεθος του συστήματος, όπως οι προηγούμενες, ονομάζονται *εκτατικές*. Είναι προφανές ότι ο αριθμός των σωματίων και ο όγκος είναι εκτατικές ποσότητες. Το ότι η εσωτερική ενέργεια είναι εκτατική βασίζεται στην παραδοχή ότι οι αλληλεπιδράσεις είναι *βραχείας εμβέλειας,* γιατί τότε το κάθε σωμάτιο αλληλεπιδρά με ένα συγκεκριμένο μικρό αριθμό γειτονικών σωματίων και επομένως η ενέργεια όλων μαζί είναι ανάλογη του ολικού αριθμού N των σωματίων του συστήματος. Υπάρχουν όμως και άλλες ποσότητες, όπως είναι η πίεση και η θερμοκρασία, που ο χωρισμός του συστήματος με το νοητό πέτασμα τις αφήνει προφανώς ανεπηρέαστες. Τέτοιου τύπου ποσότητες ονομάζονται *εντατικές*.

Αξίζει να τονισθεί ότι η συνήθης ύλη σε ισορροπία, που η δομή της καθορίζεται από ΗΜ αλληλεπιδράσεις, ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη βραχείας εμβέλειας, καίτοι οι ΗΜ αλληλεπιδράσεις είναι μακράς εμβέλειας. Ο λόγος είναι ότι η ισορροπία συνεπάγεται ολική και τοπική ηλεκτρική ουδετερότητα. Η δε τελευταία μετατρέπει την μακράς εμβέλειας ΗΜ αλληλεπίδραση σε βραχείας εμβέλειας (βλ. π.χ. τη σχέση (10.1)). Η διάκριση των θερμοδυναμικών ποσοτήτων ισορροπίας σε εκτατικές και εντατικές είναι πολύ χρήσιμη γιατί διευκολύνει, όπως θα δούμε, τον προσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ θερμοδυναμικών ποσοτήτων. Ας έχει όμως υπόψη του ο αναγνώστης ότι μπορεί να εμφανιστούν και άλλου τύπου εξαρτήσεις της εσωτερικής ενέργειας από τον αριθμό των σωματίων, *όταν οι αλληλεπιδράσεις είναι μακράς εμβέλειας*. Π.χ., όταν οι πάντοτε μακράς εμβέλειας βαρυτικές αλληλεπιδράσεις καθίστανται σημαντικές, όπως σε ένα ενεργό άστρο, η βαρυτική εσωτερική ενέργεια U_B είναι ανάλογη του $N^{5/3}$ (και όχι ανάλογη του N, όπως θα απαιτούσε η εκτατικότητα, βλ. σελ. 284).

Στο παρόν κεφάλαιο, όπως και στα κεφάλαια 4, 5 και 10, 11, θα περιοριστούμε σε συστήματα όπου οι αλληλεπιδράσεις είναι βραχείας εμβέλειας και επομένως η κάθε θερμοδυναμική ποσότητα θα είναι είτε εκτατική, είτε εντατική. Σημειώστε ότι το πηλίκον δύο εκτατικών ποσοτήτων είναι εντατική ποσότητα. Πιο κάτω θα ορίσουμε αρκετές νέες θερμοδυναμικές ποσότητες, τις οποίες ο αναγνώστης θα πρέπει να κατατάξει σε μια από τις δύο κατηγορίες.

3.3 Ο πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής

Ο 1ος νόμος της θερμοδυναμικής είναι στην ουσία μια επαναδιατύπωση του νόμου της διατήρησης της ενέργειας και λέει ότι η διαφορά της απορροφουμένης από το σύστημα ενέργειας μείον την αποδιδόμενη στο περιβάλλον ισούται με την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος. Το λεπτό σημείο που πρέπει να προσέξει κανείς είναι ότι η μεταφερόμενη ή η μετατρεπόμενη ενέργεια, δηλαδή η καθ' οδόν (όχι η αποθηκευμένη στο σύστημα ενέργεια) διακρίνεται σε *θερμότητα* και *έργο*.

Θερμότητα είναι ενέργεια καθ' οδόν που μεταφέρεται από μικροσκοπικά σωμάτια του συστήματος σε μικροσκοπικά σωμάτια του περιβάλλοντος (ή αντίστροφα) και επομένως η τιμή της δεν μπορεί να προσδιορισθεί ακριβώς. Κατά συνέπεια η γνώση μας γι' αυτήν είναι στατιστικής φύσεως (γνωρίζουμε, π.χ., τη μέση της τιμή, την τυπική της απόκλιση, κλπ). Αντίθετα, όσον αφορά στο έργο, είτε το σύστημα, είτε το περιβάλλον, είτε και τα δύο, δεν κάνουν χρήση της ατομικής τους δομής και επομένως δεν υπεισέρχεται η ανάγκη στατιστικής περιγραφής. Η μαθηματική περιγραφή του πρώτου νόμου είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{dU = đQ - đW + đE_m}\,, \tag{3.3}$$

όπου dU είναι η (απειροστή) μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας (δηλ., της ολικής ενέργειας του συστήματος απουσία *μακροσκοπικών* κινήσεων), $đQ$ είναι η (απειροστή) ποσότητα θερμότητας που δέχτηκε το σύστημα, $đW$ είναι η (απειροστή) ποσότητα έργου που έδωσε το σύστημα και $đE_m$ είναι η (απειροστή) ποσότητα ενέργειας που δέχτηκε το σύστημα λόγω ανταλλαγής ύλης με το περιβάλλον[4]. Η παύλα στα σύμβολα του απειροστού είναι για να τονίσει ότι, π.χ., το $đQ$ δεν είναι η μεταβολή κάποιας συνάρτησης Q. (Τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει). Με άλλα λόγια είναι λάθος να πούμε ότι ένα σύστημα έχει τόση θερμότητα και τόσο έργο. (Σε μια μαθηματική γλώσσα τα $đQ$, $đW$, $đE_m$ δεν είναι τέλεια διαφορετικά αλλά διαφορικές μορφές, ενώ το dU είναι τέλειο διαφορικό).

3.4 Ο δεύτερος νόμος της Θερμοδυναμικής[5]

Ο 2ος νόμος της θερμοδυναμικής αφορά στις μεταβολές της εντροπίας και έχει πολλές ισοδύναμες διατυπώσεις. Ίσως η πιο αποκαλυπτική διατύπωση είναι η ακόλουθη: Η μεταβολή της εντροπίας, dS ενός συστήματος (που

[4] Συνήθως θεωρούμε σιωπηλά ότι δεν υπάρχει ανταλλαγή ύλης, οπότε θέτουμε $đE_m = 0$.

[5] Ένας από τους σπουδαιότερους της Φυσικής.

δεν ανταλλάσει ύλη με το περιβάλλον του) οφείλεται σε δύο λόγους: (α) στην πρόσληψη ή αποβολή θερμότητας και (β) σε εσωτερικές διαδικασίες:

$$dS = đS_{\varepsilon\xi} + đS_{\varepsilon\sigma} \ , \qquad (3.4\alpha)$$

όπου το $đS_{\varepsilon\xi}$ ισούται με την απειροστή πρόσληψη θερμότητας δια της απόλυτης θερμοκρασίας του συστήματος.

$$\boxed{đS_{\varepsilon\xi} = \frac{đQ}{T} \qquad \text{και} \qquad đS_{\varepsilon\sigma} \geq 0} \ . \qquad (3.4\beta)$$

Το $đS_{\varepsilon\xi}$ είναι είτε > 0 (όταν $đQ > 0$, πρόσληψη θερμότητας), είτε < 0 (όταν $đQ < 0,$ αποβολή θερμότητας). Αντίθετα (πράγμα που είναι η καρδιά του δεύτερου νόμου) το $đS_{\varepsilon\sigma}$ **δεν είναι ποτέ αρνητικό**, Ως συνέπεια αυτής της βασικής ιδιότητας προκύπτει και η ανισότητα

$$\boxed{TdS \geq đQ} \ . \qquad (3.4\gamma)$$

Η σχέση (3.4γ) λέει ότι κάποιες διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του συστήματος (όπως π.χ., η διάχυση, ή η μεταφορά θερμότητας) παράγουν εντροπία εκ του μηδενός (και μόνο σε ακραίες οριακές περιπτώσεις δεν παράγουν εντροπία). Άρα οι διαδικασίες αυτές είναι μη αντιστρεπτές γιατί, αν μπορούσαν να αντιστραφούν αυθόρμητα, θα είχαμε $đS_{\varepsilon\sigma} < 0$. Με βάση τα παραπάνω μια άλλη ισοδύναμη διατύπωση του Δεύτερου Νόμου είναι η ακόλουθη:

Σ' ένα σύστημα που δεν ανταλλάσει θερμότητα (και ύλη) με το περιβάλλον του (για το οποίο, δηλαδή ισχύει $đS_{\varepsilon\xi} = đQ = 0$ και επομένως, $dS = dS_{\varepsilon\sigma}$) η εντροπία του ουδέποτε μειώνεται, πάντοτε αυξάνει (ή, σε ακραία οριακή περίπτωση, μένει σταθερή) μέχρι να φτάσει σε ολική θερμοδυναμική ισορροπία οπότε η εντροπία έχει τη μέγιστη τιμή. Επομένως υπό συνθήκες $đQ = 0$ και $đE_m = 0$, η κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχεί στο μέγιστο της εντροπίας.

Ας διευκρινίσουμε ότι μια διαδικασία με αφετηρία μια κατάσταση εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας (π.χ. δύο σώματα σε διαφορετική θερμοκρασία) και κατάληξη σε πλήρη ισορροπία (π.χ. τα δύο σώματα να έχουν ενιαία θερμοκρασία) μπορεί να γίνει αυθόρμητα (π.χ. φέρνοντας απλώς τα δύο σώματα σε επαφή) οπότε η ολική εντροπία θα αυξηθεί και η διαδικασία θα είναι μη αντιστρεπτή. Όμως, η ίδια αφετηρία και κατάληξη μπορεί να γίνει ακολουθώντας μια άλλη πορεία με τη βοήθεια ενός τρίτου σώματος (που επανέρχεται κυκλικά στην αρχική του κατάσταση) και μεταφέρει σε κάθε κύκλο του θερμότητα από το σώμα υψηλής θερμοκρασίας στο σώμα χαμηλής θερμοκρασίας υπό αντιστρεπτές συνθήκες και παράλληλα αποδίδει έργο στο περιβάλλον (κύκλος του Carnot). Αυτή η δεύτερη διαδικασία μπο-

ρεί να διατηρήσει την ολική εντροπία σταθερή και να είναι αντιστρεπτή στο όριο που είναι τόσο αργή ώστε ο απαιτούμενος για τη διαδικασία χρόνος να τείνει στο άπειρο. Από φυσική άποψη ο τελευταίος περιορισμός του άπειρου χρόνου σημαίνει χρόνος πολύ, πολύ μεγαλύτερος από τούς εσωτερικούς χρόνους αποκατάστασης και των δύο σωμάτων και του τρίτου του βοηθητικού (βλ. λυμένη άσκηση 3).

Συνδυάζοντας τον 1ο και τον 2ο νόμο:

Εάν συνδυάσουμε τις σχέσεις (3.3) έως (3.4γ) καταλήγουμε στη σχέση (3.1) που παρουσιάσαμε στη σύνοψη αυτού του κεφαλαίου:

$$dU \le TdS - đW + đE_m \,. \tag{3.1}$$

Από την (3.1) έπεται ότι υπό συνθήκες $TdS = 0$, $đW = 0$ και $đE_m = 0$, η απειροστή ποσότητα dU είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση με το μηδέν, $dU \le 0,$ δηλαδή, υπ' αυτές τις συνθήκες, η ενέργεια του συστήματος μειώνεται με την πάροδο του χρόνου (ή σε ακραία περίπτωση μένει σταθερή) μέχρι να φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία οπότε η ενέργεια έχει την ελάχιστη τιμή. Άρα:

Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας αντιστοιχεί σε ευσταθή ισορροπία υπό συνθήκες $TdS = 0,\ đW = 0,\ đE_m = 0.$	(3.5)

Φτάσαμε λοιπόν στην ακριβή διατύπωση του σπουδαίου νόμου που συνδέει την ευσταθή κατάσταση της ύλης με το ελάχιστο της εσωτερικής ενέργειας (αν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες). Από την (3.5) έχουμε ότι $(\partial U / \partial V) = 0$ στην ισορροπία. Αφού $U = E_K + E_\Delta$ έπεται ότι $(\partial E_K / \partial V) = -(\partial E_\Delta / \partial V)$. Το αριστερό σκέλος της τελευταίας σχέσης παριστά τη διασταλτική πίεση λόγω κινητικής ενέργειας και το δεξί, χωρίς το μείον, παριστά τη συνθλιπτική πίεση λόγω της δυναμικής ενέργειας. Άρα το σύστημα ισορροπεί μηχανικά όταν οι δύο πιέσεις γίνουν ίσες σε απόλυτη τιμή.

Αξίζει να επισημάνουμε ότι συμβαίνει αρκετά συχνά να παραμένει ένα σύστημα για πάρα πολύ μεγάλο (πρακτικά άπειρο) χρόνο σε κατάσταση που δεν είναι κατάσταση ελάχιστης ενέργειας (παρόλο που ισχύουν οι συνθήκες $TdS = đW = đE_m = 0$). Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι δεν έχει το σύστημα μηχανισμό αποβολής της περίσσειας ενέργειας (όπως π.χ., στην εξιδανικευμένη κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο), ή στο ότι το σύστημα βρίσκεται σ' ένα τοπικό ελάχιστο της ενέργειας, τέτοιο ώστε για να μεταπέσει στο απόλυτο ελάχιστο να είναι αναγκασμένο να περάσει από καταστάσεις υψηλότερης ενέργειας (περίπτωση μετασταθούς ισορροπίας). Αξίζει να επισημάνουμε ότι για να έχει αξία ο νόμος (3.5) θα πρέπει να υπάρχει ένα πεπερασμένο ελάχιστο της ενέργειας. Όπως είδαμε, την ύπαρξη πεπερασμένου ελάχιστου της ενέργειας εξασφαλίζουν οι βασικές αρχές της κβαντομηχανικής.

Συνήθως ως στοιχειώδες έργο $đW$ που κάνει το σύστημα επί του περιβάλλοντος λαμβάνεται αυτό που αφορά στην ειδική περίπτωση μηχανικού έργου σε αέρια ή υγρά, $đW = PdV$, αν και, ανάλογα με το υπό μελέτη σύστημα, το έργο έχει διάφορες εκφράσεις (π.χ. βλ. λυμένη άσκηση 2 στο τέλος του κεφαλαίου). Επίσης θεωρούμε συνήθως ότι το σύστημα αποτελείται από και ανταλλάσσει με το περιβάλλον ένα μόνο είδος σωματίου, οπότε το $đE_m$ έχει τη μορφή $đE_m = \mu dN$, όπου το μ είναι το λεγόμενο *χημικό δυναμικό*. Το χημικό δυναμικό είναι μια πολύ σημαντική ποσότητα γιατί έχει ιδιότητες ανάλογες με αυτές της θερμοκρασίας. Όπως η θερμοκρασία στην ισορροπία έχει την ίδια τιμή σε όλη την έκταση του συστήματος, έτσι και το χημικό δυναμικό στην ισορροπία έχει παντού την ίδια τιμή. Επί πλέον σε καταστάσεις μη θερμοδυναμικής ισορροπίας, όπου το χημικό δυναμικό μπορεί να έχει διαφορετικές τιμές σε διαφορετικά μέρη του συστήματος, σωμάτια ρέουν από περιοχές υψηλού μ προς περιοχές χαμηλού μ μέχρι να εξισωθούν οι τιμές του μ.

3.5 Θερμοδυναμικές σχέσεις με αφετηρία την (3.1)

Με τις επιλογές $đW = PdV$, $đE_m = \mu dN$ η σχέση (3.1) γίνεται

$$dU \le TdS - PdV + \mu dN \,. \tag{3.6}$$

Εάν θεωρήσουμε μεταβολές που εμπλέκουν μόνο καταστάσεις ισορροπίας, τότε ισχύει η ισότητα στην (3.6) και προκύπτουν σχέσεις της μορφής

$$\frac{\partial U}{\partial S})_{V,N} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V})_{S,N} = -P, \quad \frac{\partial U}{\partial N})_{S,V} = \mu, \tag{3.7α}$$

καθώς και

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V})_N = -\frac{\partial P}{\partial S})_N = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S})_N = \frac{\partial T}{\partial V})_N \ \text{κλπ} \,. \tag{3.7β}$$

Παρατηρήστε ότι, βάσει της (3.6), οι «φυσιολογικές» ανεξάρτητες μεταβλητές της εσωτερικής ενέργειας U είναι η εντροπία S, ο όγκος V και ο αριθμός N των μικροσκοπικών σωματίων που συναποτελούν το σύστημα.

Πολλές φορές είναι επιθυμητό να έχουμε άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. αντί S την T, αντί V την P, αντί N το μ. Υπάρχει ένα απλό τέχνασμα για να πετύχουμε αυτές τις αλλαγές: Π.χ. εάν προσθέσουμε στο U το εκτατικό γινόμενο $-TS$ διαστάσεων ενέργειας, που έχει διαφορικό $-TdS - SdT$, το μεν $-TdS$ θα απαλείψει τον όρο TdS από το διαφορικό του U και θα μείνει ο όρος $-SdT$. Έτσι ορίσαμε μια νέα ποσότητα, την $U - TS$, που θα συμβολίσουμε με F και θα ονομάσουμε *ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz*. Από τον ορισμό της F και τη σχέση (3.6) έχουμε για το διαφορικό της

$$\boxed{U - TS \equiv F, \quad dF \le -SdT - PdV + \mu dN} . \tag{3.8}$$

Η ποσότητα που συμβολίσαμε ως F έχει ανεξάρτητες φυσιολογικές μεταβλητές τη θερμοκρασία T, τον όγκο V και τον αριθμό N των μικροσκοπικών σωματίων που συναποτελούν το σύστημα. Από την (3.8) έπεται ότι υπό συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας, σταθερού όγκου και μη ανταλλαγής σωματίων με το περιβάλλον, η απειροστή ποσότητα dF είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση με το μηδέν, $dF \le 0$, δηλαδή, υπ' αυτές τις συνθήκες η ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz του συστήματος μειώνεται με την πάροδο του χρόνου (ή σε ακραία περίπτωση μένει σταθερή) μέχρι να φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία οπότε η F έχει την ελάχιστη τιμή.

Αν θέλουμε να έχουμε ως φυσιολογικές ανεξάρτητες μεταβλητές τις S, P, N ακολουθούμε το ίδιο τέχνασμα αλλά αυτή τη φορά προσθέτουμε το γινόμενο PV. Την ποσότητα $U+PV$ που θα προκύψει τη συμβολίζουμε με H και την ονομάζουμε *ενθαλπία*. Η ενθαλπία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\boxed{H \equiv U + PV, \qquad dH \le TdS + VdP + \mu dN} . \tag{3.9}$$

Ό,τι είπαμε προηγουμένως για την εσωτερική ενέργεια U και την ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz F ισχύει και για την ενθαλπία H υπό την προϋπόθεση ότι $TdS = dP = dN = 0$. Επί πλέον εάν συνδυάσουμε τον ορισμό της ενθαλπίας με τον $1^{ο}$ νόμο, σχέση (3.3), και τις συνθήκες $dP = dN = 0$ βρίσκουμε ότι η θερμότητα μιας χημικής αντίδρασης, υπό τις συνθήκες $dP = dN = 0$, ισούται με τη μεταβολή της ενθαλπίας. Γι' αυτό το λόγο στα βιβλία δεδομένων ή στο internet δίνεται, αντί της θερμότητας, η ενθαλπία μιας αντίδρασης υπό σταθερή πίεση, αφού

$$đQ = dH)_{P,N} . \tag{3.10}$$

Χρησιμοποιείται πολύ συχνά και η λεγόμενη *ελεύθερη ενέργεια του Gibbs*, που ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{G \equiv U + PV - TS \equiv H - TS \equiv F + PV, \quad \text{με } dG \le -SdT + VdP + \mu dN} . \tag{3.11}$$

Από τη σχέση (3.11) έπεται ότι υπό τις συνήθεις συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας και πίεσης και μη ανταλλαγής ύλης, η ελεύθερη ενέργεια του Gibbs στην πορεία προς την θερμοδυναμική ισορροπία μειώνεται (ή στην ακραία περίπτωση μένει σταθερή) μέχρι να φτάσει στην ισορροπία οπότε παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Άρα η ευσταθής ισορροπία αντιστοιχεί στο ελάχιστο της ελεύθερης ενέργειας του Gibbs υπό συνθήκες dT=dP=dN=0.

Στην πιο γενική περίπτωση όπου το σύστημα βρίσκεται σε ένα σταθερό περιβάλλον θερμοκρασίας T_o και πίεσης P_o χωρίς το ίδιο να έχει ενιαία θερμοκρασία και πίεση η έννοια της ελεύθερης ενέργειας του Gibbs ανάγεται στη γενικότερη έννοια της ονομαζόμενης διαθεσιμότητας A που ορίζεται ως εξής:

$$A \equiv U + P_o V - T_o S \,. \tag{3.12}$$

Η *διαθεσιμότητα A* μειώνεται μονότονα με την πάροδο του χρόνου (υπό συνθήκες $dE_m = 0$) καθώς πλησιάζει το σύστημα προς τη θερμοδυναμική ισορροπία και γίνεται ελάχιστη όταν επιτευχθεί αυτή η ισορροπία[6].

Η μεγάλη αξία του *G* ή του *A* σχετίζεται με το ότι οι συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας και πίεσης και μη ανταλλαγής ύλης είναι πολύ κοινές στα φυσικά φαινόμενα και εύκολα πραγματοποιήσιμες πειραματικά.

Σημειώστε ότι ο ενθαλπικός όρος $H \equiv U+PV$ ελαχιστοποιείται συνήθως όταν τα στοιχειώδη σωμάτια του συστήματος τοποθετηθούν σε καθορισμένες θέσεις, ενώ αντίθετα, ο εντροπικός όρος *TS*, μεγιστοποιείται όταν τα στοιχειώδη σωμάτια είναι ελεύθερα να κινηθούν σ' όλο το διαθέσιμο χώρο ώστε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των διαθέσιμων μικροκαταστάσεων. Στο *G* εισέρχεται όμως και ο ενθαλπικός όρος *H*, και ο εντροπικός όρος (με μείον). Για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες ο ρόλος του εντροπικού όρου είναι προφανώς ασήμαντος και επομένως κυριαρχεί το *H* που εντέλλεται *τάξη*. Αντίθετα για πολύ υψηλές θερμοκρασίες κυριαρχεί ο εντροπικός όρος που εντέλλεται *αταξία*. Έχοντας υπόψη αυτή την παρατήρηση εξετάστε τις δύο παρακάτω εφαρμογές.

Εφαρμογή 1: Με βάση το νόμο (3.11) και τον ορισμό (3.9) εξηγήστε γιατί μια ουσία με την άνοδο της θερμοκρασίας και υπό σταθερή πίεση περνάει από τη στερεά φάση, στην υγρή φάση (συνήθως αλλά όχι πάντα), και τελικά στην αέρια φάση.

---

[6] Για την απόδειξη αυτής της δήλωσης λαμβάνουμε υπόψη την (3.6) για το περιβάλλον, $dU_o = T_o\, dS_o - P_o\, dV_o$ (για $dE_{mo} = 0$ και $dS_{\varepsilon\sigma,o} = 0$) το ότι σύστημα και περιβάλλον μαζί αποτελούν ένα κλειστό υπερσύστημα για το οποίο προφανώς ισχύουν οι σχέσεις $dU_o + dU = 0,\ dV_o + dV = 0,\ dS_o + dS \geq 0.$ Αντικαθιστώντας τις τελευταίες σχέσεις στην ισότητα για το dU_o καταλήγουμε στην ανισότητα

$$d\,A \equiv d\,(U + P_o\, V - T_o\, S) \leq 0\,. \tag{3.13}$$

Όταν το σύστημα φτάσει στη θερμοδυναμική ισορροπία η ενέργειά του θα είναι προφανώς μια συνάρτηση των μεγεθών *N*, *V*, *S* και άρα το *U* θα είναι $U = U(N,V,S)$. Αναπτύσσοντας αυτή τη συνάρτηση σε σειρά Taylor ως προς *V* και *S* μέχρι και δεύτερου βαθμού όρους και λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαθεσιμότητα *A* στην ισορροπία είναι ελάχιστη, βρίσκουμε ότι $P = P_o,\ T = T_o$ και

$$C_V > 0,\quad C_P > C_V\,,\quad (\partial P / \partial V)_T < 0\,, \tag{3.14}$$

όπου C_V, C_P είναι οι θερμοχωρητικότητες υπό σταθερό όγκο και υπό σταθερή πίεση αντιστοίχως.

Εφαρμογή 2: Γιατί με την άνοδο της θερμοκρασίας μπορεί να καταστραφεί η μαγνήτιση, π.χ. του σιδήρου;

Μέχρι τώρα και με αφετηρία την εσωτερική ενέργεια U έχουμε εισαγάγει την ενθαλπία H, την ελεύθερη ενέργεια του Helnholtz F, την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs, G, και τη διαθεσιμότητα A. Όλες αυτές οι ποσότητες έχουν διαστάσεις ενέργειας και *η κάθε μία* βαίνει μειούμενη στην πορεία προς την ισορροπία και έχει την ελάχιστη τιμή της όταν η ισορροπία έχει επιτευχθεί (με την προϋπόθεση ότι οι φυσιολογικές ανεξάρτητες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κάθε μία τους παραμένουν σταθερές). Οι ποσότητες αυτές αναφέρονται με το κοινό όνομα *θερμοδυναμικά δυναμικά*. Θα κλείσουμε αυτή την παρουσίαση των θερμοδυναμικών δυναμικών αναφέροντας ένα ακόμη, το λεγόμενο *μεγάλο χημικό δυναμικό* το οποίο συμβολίζεται με Ω και έχει ως φυσιολογικές ανεξάρτητες τις T, V και μ. Επομένως έχουμε για τον ορισμό του και για το διαφορικό του

$$\Omega \equiv F - \mu N, \qquad d\Omega \le -SdT - PdV - Nd\mu\,. \tag{3.15}$$

Όπως η σχέση (3.6), η οποία για καταστάσεις ισορροπίας καθίσταται ισότητα, έτσι και οι σχέσεις (3.8), (3.9), (3.11) και (3.15) για μεταβολές που εμπλέκουν μόνο καταστάσεις ισορροπίας καθίστανται ισότητες. Επομένως για κάθε μία από αυτές μπορούμε να βρούμε νέες θερμοδυναμικές ισότητες υπολογίζοντας πρώτες και δεύτερες παραγώγους κατ΄ αναλογία με τις σχέσεις (3.7α) και (3.7β). Π.χ.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T})_{V,\mu} = -S, \text{ ή } \frac{\partial F}{\partial V})_{T,N} = -P \text{ ή } \frac{\partial G}{\partial P})_{T,N} = V\,, \tag{3.16}$$

ή

$$\frac{\partial P}{\partial T})_N = \frac{\partial S}{\partial V})_N \text{ ή } \frac{\partial V}{\partial T})_N = -\frac{\partial S}{\partial P})_N \text{ ή } \frac{\partial S}{\partial \mu})_V = \frac{\partial N}{\partial T})_V\,. \tag{3.17}$$

3.6 Αντλώντας το μέγιστο έργο

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας που βρίσκεται σε ένα περιβάλλον θερμοκρασίας T_o και πίεσης P_o. Το ερώτημα είναι ποιο είναι το μέγιστο έργο που μπορεί κανείς να πάρει από ένα τέτοιο σύστημα εκμεταλλευόμενος το γεγονός ότι είναι εκτός ισορροπίας. Η απάντηση προκύπτει επαναλαμβάνοντας το σκεπτικό που οδήγησε στη σχέση (3.13) με μόνη τη διαφορά ότι αντί της $d(U_o + U) = 0$ θα έχουμε $d(U_o + U) + đW = 0$, όπου το $đW$ είναι το απειροστό έργο που αντλούμε από το σύστημα. Ως αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής έχουμε αντί της (3.13) την εξής σχέση:

$$d A + đ W \le 0 \text{ ή } đ W \le -d A \Rightarrow \boxed{W \le A_{αρχ} - A} . \quad (3.18)$$

Το μέγιστο έργο θα προκύψει, όταν η (3.15) γίνει ισότητα, δηλαδή όταν η εντροπία του συστήματος και του περιβάλλοντος μαζί παραμείνει σταθερή κατά τη διάρκεια άντλησης του έργου. Μ' άλλα λόγια το μέγιστο έργο επιτυγχάνεται υπό ισεντροπικές συνθήκες Εάν η θερμοκρασία και η πίεση του περιβάλλοντος συμπίπτουν με τη θερμοκρασία και πίεση του συστήματος, στη θέση της διαθεσιμότητας θα έχουμε την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs, οπότε,

$$\boxed{W_{\max} = G_{αρχ} - G_{τελ}} . \quad (3.19)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι υπό συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας και όγκου και μη ανταλλαγής σωματίων το μέγιστο έργο που μπορούμε να αντλήσουμε από ένα σύστημα εκτός ισορροπίας επιτυγχάνεται όταν η εντροπία παραμένει σταθερή και ισούται με

$$W_{\max} = F_{αρχ} - F_{τελ} . \quad (3.20)$$

Οι σχέσεις (3.18) έως (3.20) δικαιολογούν και το όνομα διαθεσιμότητα για το A και το όνομα ελεύθερη ενέργεια για το G και το F.

3.7 Σχόλια

Όταν εξετάζουμε μεταβολές θερμοδυναμικών ποσοτήτων θα πρέπει να ξεκαθαρίζουμε αν μιλάμε για μεταβολές του τύπου $đS_{εσ} = 0$ ή του $đS_{εσ} \ge 0$ (με $đQ = đW = đE_m$) ή σύνθετου τύπου όπου $đS_{εσ} \ge 0$ και ένα τουλάχιστον εκ των $đQ, đW, đE_m$ να είναι διάφορο του μηδενός. Στην τελευταία περίπτωση θα έχουμε για τη μεταβολή της εντροπίας: $dS = đS_{εσ} + đS_{εξ} \ge$ $\ge (đQ / T)$, όπου το $S_{εξ}$ δίνεται από τον τύπο (3.4β) και το $đS_{εσ} > 0$.

Δεύτερον, μέχρι τώρα θεωρήθηκε ότι το σύστημα περιέχει μόνο ένα είδος σωματίου, ενώ εν γένει το σύστημα μπορεί να περιέχει περισσότερα είδη σωματίων. Η ποσότητα μ, που ονομάζεται *χημικό δυναμικό*, είναι εξ ορισμού η παράγωγος $(\partial U / \partial N)_{S,V}$ (υπό συνθήκες ισορροπίας), όπως είναι προφανές από την (3.7α). Το μ συνδέεται άμεσα με την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs, $G=N\mu$. Αυτό προκύπτει από το ότι το G όντας εκτατική ποσότητα είναι κατ' ανάγκη της μορφής $G = N\varphi(T,P)$ και από τη σχέση (3.11) $\mu = (\partial G / \partial N)_{T,P}$. Εάν υπάρχουν περισσότερα είδη σωματίων η σχέση $G=N\mu$ γενικεύεται σε $G = \sum_i N_i \mu_i$, όπου $\mu_i \equiv (\partial G / \partial N_i)_{T,P,j\neq i}$. Οι τελευταίες αυτές σχέσεις αποτελούν την αφετηρία για τη μελέτη των χημικών αντιδράσεων. Για τα φωτόνια, και όποια άλλα σωμάτια που ο αριθμός τους δεν διατηρείται, το αντίστοιχο μ_i τους στην ισορροπία είναι ταυτοτικά μηδέν. (Βλ. και

το παράρτημα ΙΙΙ). Ο λόγος είναι ότι ο αριθμός N_i τέτοιων σωματίων δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και ως εκ τούτου το αντίστοιχο $\mu_i\, dN_i$ δεν πρέπει να εμφανισθεί στην έκφραση (3.6) για το dU. Τέλος, το όριο του μ για $T \to 0$ συμπίπτει για φερμιόνια με την ενέργεια Fermi, E_F, αφού $E_F \equiv$ $\equiv (\partial U / \partial N)_{V,T=0} = (\partial U / \partial N)_{V,S=0} = \mu_{T=0}$. Από τη σχέση αυτή και την (2.13) προκύπτει ότι $E_F = \frac{5}{3}\varepsilon_K$.

Το κύριο σημείο αυτού του κεφαλαίου

Συνταγή: Για το όποιο υπό μελέτη σύστημα, βρες την ενέργεια U (υπό συνθήκες $P \approx 0,\ T \approx 0, đE_m = 0$) ή την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs (υπό συνθήκες P και T σταθερά και $đE_m = 0$) ως συνάρτηση διαφόρων παραμέτρων, όπως είναι ο όγκος, οι θέσεις των ατόμων, η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων, $n(\mathbf{r})$ κλπ. Ελαχιστοποίησε την U ή την G ως προς όλες τις ελεύθερες παραμέτρους. Η κατάσταση που θα προκύψει μετά την ελαχιστοποίηση θα είναι αυτή της ευσταθούς ισορροπίας που θα παρατηρηθεί στη φύση.

3.8 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Η εντροπία μιας μακροκατάστασης ορίζεται ως ο λογάριθμος του αριθμού των μικροκαταστάσεων που της αντιστοιχούν

$$S \equiv k_B \ln \Gamma(U,V,N,...)\ . \tag{3.2}$$

Ο $1^{ος}$ νόμος είναι μια επαναδιατύπωση του νόμου διατήρησης της ενέργειας, όπου η *μεταφερόμενη* προς ή από το σύστημα ενέργεια διακρίνεται σε τρεις κατηγορίες: θερμότητα, έργο, ενέργεια λόγω μεταφοράς ύλης

$$dU = đQ - đW + đE_m\ . \tag{3.3}$$

Ο $2^{ος}$ νόμος αφορά στη μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος, η οποία οφείλεται σε δύο λόγους, στην ανταλλαγή θερμότητας και σε μη αντιστρεπτές μεταβολές στο εσωτερικό του συστήματος (θεωρώντας ότι δεν υπάρχει ανταλλαγή σωματίων)

$$dS = đS_{\varepsilon\xi} + đS_{\varepsilon\sigma},\quad đS_{\varepsilon\xi} \equiv \frac{đQ}{T},\quad đS_{\varepsilon\sigma} \geq 0,\quad TdS \geq đQ\ . \tag{3.4}$$

Ο συνδυασμός του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ νόμου οδηγεί στη σχέση

$$dU \leq TdS - đW + đE_m\,, \tag{3.1}$$

η οποία για να γίνει λειτουργική χρειάζεται να εκφράσουμε ρητά και το στοιχειώδες έργο κατά περίπτωση (συνήθως επιλέγουμε την απλή σχέση

$đW = PdV$) και την στοιχειώδη ενέργεια λόγω ανταλλαγής ύλης (που εκφράζεται μέσω των χημικών δυναμικών), $đE_m = \sum_i \mu_i dN_i$. Συνήθως για απλότητα θεωρούμε ένα μόνο είδος σωματίου, οπότε η (3.1) γίνεται

$$dU \le TdS - PdV + \mu dN \,. \qquad (3.6)$$

Προσθέτοντας στο U είτε το $-TS$, είτε το PV, είτε το $-\mu N$, είτε συνδυασμούς τους ορίζουμε τα εξής θερμοδυναμικά δυναμικά και βρίσκουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τα διαφορικά τους από την (3.6):

$$\begin{aligned} &F \equiv U - TS, && dF \le -SdT - PdV + \mu dN, \\ &H \equiv U + PV, && dH \le TdS + VdP + \mu dN, \\ &G \equiv U + PV - TS = H - TS, && dG \le -SdT + VdP + \mu dN, \\ &\Omega \equiv U - TS - \mu N = F - \mu N, && d\Omega \le -SdT - PdV - Nd\mu. \end{aligned}$$

Η ανισότητα στα παραπάνω διαφορικά και στην (3.6) ισχύει όταν αυτές οι στοιχειώδεις μεταβολές αυξάνουν την *εσωτερική* εντροπία, ενώ η ισότητα ισχύει όταν αυτές οι στοιχειώδεις μεταβολές εμπλέκουν μόνο καταστάσεις ισορροπίας. Στην περίπτωση της ισότητας προκύπτει ένα πλήθος θερμοδυναμικών σχέσεων χρησιμοποιώντας ταυτότητες για τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους και των πέντε ως άνω θερμοδυναμικών δυναμικών. Στην περίπτωση της ανισότητας συμπεραίνουμε ότι καθένα από τα πέντε θερμοδυναμικά δυναμικά βαίνει μειούμενο στην πορεία προς την ισορροπία και επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή του όταν η ισορροπία αποκατασταθεί (με την προϋπόθεση ότι για το καθένα τους η μεταβολή γίνεται με σταθερές τις αντίστοιχες φυσιολογικές ανεξάρτητες μεταβλητές).

Το μέγιστο έργο που μπορούμε να αντλήσουμε από ένα σύστημα εκτός ισορροπίας μέχρι να φτάσει στην ισορροπία επιτυγχάνεται όταν η πορεία προς την ισορροπία ρυθμιστεί με κατάλληλο τρόπο ώστε να είναι ισεντροπική. Ανάλογα με ποιες φυσιολογικές ανεξάρτητες μεταβλητές μένουν σταθερές κατά την κατάλληλη αυτή πορεία, το ως άνω μέγιστο έργο ισούται με τη διαφορά του αντίστοιχου θερμοδυναμικού δυναμικού. Π.χ., αν διατηρείται η θερμοκρασία και η πίεση και δεν υπάρχει ανταλλαγή σωματίων, τότε το μέγιστο έργο ισούται με τη διαφορά $G_{\alpha\rho\chi.} - G_{\tau\varepsilon\lambda.}$. Η έννοια της ελεύθερης ενέργειας του Gibbs, *G*, γενικεύεται με την έννοια της διαθεσιμότητας *A* που ορίζεται ως εξής: $A \equiv U + P_0 V - T_0 S$.

3.9 Λυμένες ασκήσεις

1. Δείξτε ότι $\Omega = -PV$

Λύση: Το μεγάλο χημικό δυναμικό Ω είναι εκτατική ποσότητα με "φυσιολογικές" *ανεξάρτητες* μεταβλητές τις *V*, *T* και μ. Άρα $\Omega = V f(T, \mu)$. Όμως $P = -(\partial\Omega / \partial V)_{T,\mu} = -f(T,\mu) \cdot$ $OE\Delta$.

2. Ένα ομοιογενές και ισότροπο υλικό όγκου V και μαγνητικής επιδεκτικότητας χ (όπου εξ ορισμού του χ, η μαγνήτιση M συνδέεται με το βοηθητικό μαγνητικό πεδίο H μέσω της σχέσης $M=\chi H$) τίθεται σε ένα ομοιογενές πεδίο H. Δίνεται ότι $\chi=A/T$, όπου A είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη του H ή του M και ότι $đW = -V\,H\,dM$. Υπολογίστε την εντροπία $S(H,T)$ μέσω της $S(0,T)$ και των λοιπών σχετικών παραμέτρων. Υπολογίστε επίσης την παράγωγο $(\partial T/\partial H)_S$. Έτσι επιτυγχάνονται πολύ χαμηλές θερμοκρασίες με την αδιαβατική μηδένιση του μαγνητικού πεδίου H. Εξηγήστε πώς.
Λύση: (Βλ. [25], σελ. 28-29).

3. Δύο ίδια σώματα, Α και Β βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες $T_A>T_B$. Οι θερμοχωρητικότητες τους είναι ίδιες και ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Τα δύο σώματα (με τη βοήθεια ενός τρίτου βοηθητικού που εκτελεί κυκλικές διαδικασίες) φτάνουν σε ολική θερμοδυναμική ισορροπία υπό συνθήκες άντλησης του μεγίστου έργου (χωρίς ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον). Ποια είναι η τελική θερμοκρασία; Τι ποσοστό της ενέργειας που έχασε το σώμα Α έγινε έργο;
Λύση: Από τη σχέση $\left(\partial S/\partial T\right)_V \equiv C_V/T$ και το ότι το C_V θεωρείται ανεξάρτητο του T, έχουμε

$$S(T) = S_0 + \int_{T_0}^{T} \frac{C_V}{T} dT = S_0 + C_V \ln\frac{T}{T_0}\,.$$

Η άντληση μέγιστου έργου συνεπάγεται ότι $S_{\alpha\rho\chi} = S_{\tau\varepsilon\lambda}$,

$$\text{ή}\quad 2S_0 + C_V \ln\frac{T_A}{T_0} + C_V \ln\frac{T_B}{T_0} = 2S_0 + 2C_V \ln\frac{T}{T_0}\,, \tag{3.1}$$

ή

$$\ln\frac{T_A T_B}{T_0^2} = \ln\frac{T^2}{T_0^2} \quad \text{ή} \quad T = \sqrt{T_A T_B}\,. \tag{3.2}$$

Το 2 στο δεξιό μέλος της (3.1) λόγω του ότι το C_V είναι εκτατική ποσότητα. Για να επιτευχθεί ο ισεντροπικός χαρακτήρας για κάθε μία από τις στοιχειώδεις κυκλικές διαδικασίες του τρίτου βοηθητικού σώματος (ΤΒΣ) θα πρέπει το ΤΒΣ να αντλεί μια στοιχειώδη ποσότητα θερμότητας δQ_{Ai} έχοντας οριακά την ίδια θερμοκρασία με την εκάστοτε θερμοκρασία του Α. Στη συνέχεια το ΤΒΣ θα πρέπει να υφίσταται μια αδιαβατική εκτόνωση μέχρι η θερμοκρασία του να εξισωθεί οριακά με την εκάστοτε του Β. Κατά την εκτόνωση το ΤΒΣ θα μας προσφέρει έργο $\delta W_{\varepsilon i}$ και στη συνέχεια θα αντλήσει μια στοιχειώδη ποσότητα θερμότητας δQ_{Bi} από το Β (το δQ_{Bi} θα είναι αρνητικό). Θα ακολουθήσει μια ισεντροπική συμπίεση (που θα μας προσφέρει στοιχειώδες έργο $\delta W_{\sigma i}$ (που θα είναι αρνητικό)) ώστε η θερμοκρασία του ΤΒΣ να γίνει οριακά ίση με τη θερμοκρασία του Α και να συμπληρωθεί έτσι ο κυκλική διαδικασία του ΤΒΣ. Αφού οριακά το ΤΒΣ επέστρεψε στην αρχική του κατάσταση η εσωτερική του ενέργεια δεν άλλαξε, $\delta U_i=0$ οπότε $\delta Q_{Ai} + \delta Q_{Bi} = \delta W_{Ai} + \delta W_{Bi}$. Αυτή η ισότητα ισχύει οριακά για κάθε στοιχειώδη κύκλο μέχρι να συμπληρωθεί η όλη πορεία

και να φτάσουμε στην τελική θερμοκρασία T. Άρα για το ΤΒΣ ισχύει ότι $Q_{o\lambda}=W_{o\lambda}$, όπου $Q_{o\lambda}=C_V(T_A-T)+C_V(T_B-T)=C_V(T_A+T_B-2T)$. Η ενέργεια που έχασε το σώμα Α είναι προφανώς η συνολική θερμότητα $C_V(T_A-T)$ που έδωσε στο ΤΒΣ και το ποσοστό της που έγινε έργο είναι $W_{o\lambda}/\{C_V(T_A-T)\}$. Το ποσοστό αυτό ονομάζεται συντελεστής απόδοσης η και ισούται εν προκειμένω με

$$\eta=\frac{(\sqrt{T_A}-\sqrt{T_B})^2}{T_A-\sqrt{T_AT_B}}=\frac{\sqrt{T_A}-\sqrt{T_B}}{\sqrt{T_A}}\,. \tag{3.3}$$

4. Θεωρήστε τη σχέση $dG=-SdT+VdP+\mu dN$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη σχέση σχεδιάστε την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs ως συνάρτηση του T υπό σταθερή πίεση P για τη στερεά, την υγρή, και την αέρια φάση μιας ουσίας. Διακρίνετε τρεις περιπτώσεις: πολύ χαμηλή πίεση, ενδιάμεση πίεση, και πολύ υψηλή πίεση. Με βάση τα παραπάνω σχεδιάστε το διάγραμμα των τριών φάσεων της ύλης στο επίπεδο T,P. (Βλέπε Παράρτημα στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου).

5. Δείξτε ότι $G=\sum_i N_i\mu_i$ και ότι $(dG)_{T,P}=\sum_i \mu_i dN_i$.
(Βλ. σελ. 32 του βιβλίου του Ε. Ν. Οικονόμου, *Στατιστική Φυσική*, ΠΕΚ, 2001).

6. Προσδιορίστε τη μεταβολή της θερμοκρασίας και της πίεσης με το υψόμετρο στον ατμοσφαιρικό αέρα θεωρώντας ότι η γήινη ατμόσφαιρα συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο και ότι η εντροπία δεν αλλάζει με το υψόμετρο.
(Βλ. σελ. 36 του βιβλίου του Ε. Ν. Οικονόμου, *Στατιστική Φυσική*, ΠΕΚ, 2001).

7. Η ελεύθερη ενέργεια του Helmholst για το Ar θεωρούμενο ως ιδανικό αέριο έχει τη μορφή $F=Nk_BT\ln\left(CT^xV^\beta N^\gamma\hbar^\delta m^y k_B^\zeta\right)$, όπου C είναι μια αριθμητική σταθερά. Προσδιορίστε όλους τους εκθέτες.
Λύση: $(\partial F/\partial V)_{T,N}=-P=Nk_BT\beta/V \;\Rightarrow\; \beta=-1$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η εντός του λογαρίθμου ποσότητα οφείλει να είναι αδιάστατη και να έχει εντατικό χαρακτήρα συμπεραίνουμε ότι

$$T^xV^\beta N^\gamma\hbar^\delta m^y k_B^\zeta=\left(\frac{k_BT}{\varepsilon}\right)^x\left(\frac{V}{Na^3}\right)^\beta,$$

με, $\gamma=1$, $\zeta=x$ και $\hbar^\delta m^y=\varepsilon^{-x}a^3$. Από διαστατική ανάλυση η τελευταία σχεση δίνει $x=-3/2,\;\delta=3,\;y=-3/2$. Επομένως η F είναι

$$F=-Nk_BT\ln\{C\left(\frac{k_BT}{\varepsilon}\right)^{3/2}\left(\frac{V}{Na^3}\right)\},\quad \varepsilon^{3/2}a^3=\hbar^3m^{-3/2}\,.$$

Υπολογίστε την εντροπία από τη σχέση $(\partial F/\partial T)_{V,N}=-S$ και στη συνέχεια όλες τις άλλες θερμοδυναμικές ποσότητες. Η προκύπτουσα εντροπία είναι πάντοτε θετική; Αν όχι, ποιο το πρόβλημα;

8. Δίνεται ότι η θερμότητα βρασμού του νερού είναι περίπου 43 kJ/mol. Μπορείτε να βρείτε την πιέση του τριπλού σημείου του νερού; [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το διάγραμμα φάσεων στο επίπεδο $P,\,T$.]
Λύση: Θεωρώντας τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ νερού και ατμού έχουμε από την (3.25) του παραρτήματος που ακολουθεί

$\frac{dP}{dT} = \frac{Q_\lambda}{T\Delta V} = \frac{43\times10^3\,\mathrm{J/mol}}{RT^2/P}$ όπου $R = 8,31\,\mathrm{J/K}$ είναι η σταθερά των ιδανικών αερίων, $\Delta V = V_{\alpha\tau\mu} - V_{\upsilon\alpha\rho} \approx V_{\alpha\tau\mu} \approx RT/P$ και Q_λ =σταθ. Άρα $\frac{dP}{dT} = 5,17\times10^3\,\frac{P}{T^2}$ ή $\frac{dP}{P} = 5,17\times10^3\,\frac{dT}{T^2}$, οπότε $\frac{P}{P_0} = \exp[-5170(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})]$.

Για $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$, $T_0 = 373,15$ (σημείο βρασμού). Άρα για $T = T_{\tau\rho} = 273,16$, βρίσκουμε $P_{\tau\rho} = 0,00627\,\mathrm{bar}$ έναντι $0,00611\,\mathrm{bar}$ που είναι η πειραματική τιμή.

3.10 Άλυτες ασκήσεις

1. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $U=U(V,S)$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο V_o, S_o που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή A_o του $A\equiv U+P_oV-T_oS$ μέχρι δεύτερο βαθμό ως προς τις ποσότητες $\delta V=V-V_o$, $\delta S=S-S_o$. Αφού πρόκειται για ανάπτυξη γύρω από το ελάχιστο θα πρέπει οι πρωτοβάθμιοι όροι να μηδενίζονται και το σύνολο των δευτεροβάθμιων όρων να είναι θετικά ορισμένο. Με βάση αυτήν την ανάπτυξη αποδείξτε τις σχέσεις (3.14)

2. Ένα ηλεκτρικό ρεύμα 10Α περνάει από μια αντίσταση 25Ω ενώ η θερμοκρασία της αντίστασης διατηρείται σταθερά στους 27°C.
(α) Πόση είναι η αλλαγή της εντροπίας της αντίστασης;
(β) Πόση είναι η αλλαγή της εντροπίας του Σύμπαντος;
(γ) Εάν η αντίσταση είναι θερμικά μονωμένη πόση είναι η αλλαγή της εντροπίας του Σύμπαντος;
Απαντήσεις: (α) $dS_\alpha/dt=0$, (β) $dS_\Sigma/dt=(RI^2)/T=8,33\mathrm{W/^oK}$, (γ) $0<dS_\Sigma/dt<8,33\mathrm{W/^oK}$,

3. Με βάση ότι οι θερμοδυναμικές ποσότητες είναι είτε εκτατικές είτε εντατικές δείξτε ότι $U=N\varphi_1(V/N,S/N)$, $H=N\varphi_2(P,S/N)$, $F=N\varphi_3(T,V/N)$, $G=N\varphi_4(T,P)=N\mu$, $\Omega=V\varphi_5(T,\mu)=-PV$.

4. Προσδιορίστε το μέγιστο έργο που μπορεί να αντλήσει κανείς συνδέοντας κατάλληλα δύο δοχεία που περιέχουν το ίδιο ιδανικό αέριο με την ίδια θερμοκρασία T_o και τον ίδιο αριθμό σωματίων N το καθένα αλλά διαφορετικών όγκων V_1 και V_2. Ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία; Για ένα ιδανικό μονοατομικό αέριο ισχύουν οι σχέσεις

$$S = N k_B \left\{ \ln\frac{V}{N a^3} + \frac{3}{2}\ln\frac{U}{N\varepsilon} + c_1 \right\} \text{ και } U = \frac{3}{2} N k_B T$$

όπου a είναι η μονάδα μήκους, $\varepsilon = \hbar^2/ma^2$ και c_1 είναι μια αριθμητική σταθερά. Μπορείτε να δικαιολογήσετε τους παραπάνω τύπους; Εάν συνδέσετε τα δύο δοχεία χωρίς να αντλήσετε έργο ή να προσδώσετε θερμότητα ποια θα είναι η τελική τιμή της εντροπίας; (Για διατομικά ιδανικά αέρια ο συντελεστής του όρου $\ln(U/N\varepsilon)$ είναι 5/2 και όχι 3/2. Γιατί;).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Οι τρεις φάσεις της ύλης

Υπό συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας και μη ανταλλαγής ύλης η σχέση (3.11), σελ. 82, γίνεται

$$dG = -SdT + VdP\,, \tag{3.21}$$

από την οποία έπεται ότι η ελεύθερη ενέργεια του Gibbs υπό σταθερή πίεση είναι φθίνουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας T (αφού $(\partial G/\partial T)_P = -S < 0$). Επί πλέον, λόγω του ότι $(\partial^2 G/\partial T^2)_P = -(\partial S/\partial T)_P \equiv -C_P/T < 0$, η καμπύλη G του T έχει τα κοίλα προς τα κάτω. Επίσης υπό σταθερή θερμοκρασία η G είναι αύξουσα συνάρτηση της πίεσης με τα κοίλα προς τα κάτω (αφού $(\partial G/\partial P)_T = V > 0$ και $(\partial V/\partial P)_T = -V/B_T < 0$).

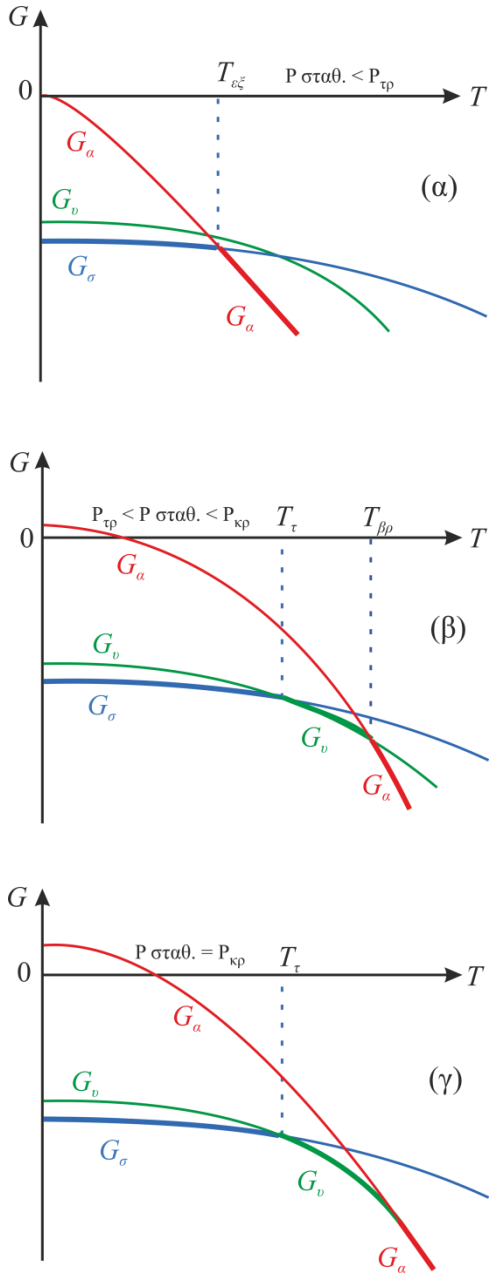
Στο Σχ. 3.1 έχει σχεδιαστεί σε ποιοτικό επίπεδο η ελεύθερη ενέργεια του Gibbs ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας T υπό τρεις διαφορετικές σταθερές πιέσεις για καθεμία από τις τρεις φάσεις της ύλης, (G_a για την αέρια φάση, G_υ για την υγρή φάση και G_σ για τη στερεά). Στα γραφήματα του Σχ. 3.1 ελήφθησαν υπόψη και οι ανισότητες

$$\text{Για } T = 0,\ G_\sigma < G_\upsilon < G_a\,,\ \text{ενώ για } T{>}0\text{K}\ \ S_\sigma(T,P) < S_\upsilon(T,P) < S_a(T,P) \tag{3.22}$$

Οι ανισότητες αυτές προκύπτουν από απλά επιχειρήματα, που αφορούν στη φύση των τριών αυτών φάσεων. (*Βλ. σημ. στο τέλος του Παραρτήματος*).

Παρατηρήστε επίσης ότι μία μικρή αλλαγή της εξωτερικής πίεσης υπό σταθερή θερμοκρασία δημιουργεί μεγάλες αλλαγές στη G_a, ενώ αφήνει πρακτικά ανεπηρέαστα τις G_σ και G_υ. Πράγματι, από τη (3.21) προκύπτει ότι $(\partial G/\partial P)_T = V$. Αλλά ο όγκος V είναι πολύ μεγαλύτερος για την αέρια φάση παρά για την υγρή ή τη στερεά (όσο η πίεση δεν υπερβαίνει κάποια άνω όρια). Άρα μείωση της πίεσης δημιουργεί μεγάλη μείωση της G_a υπό σταθερή θερμοκρασία. Με άλλα λόγια, για πολύ χαμηλές πιέσεις, η G_a μειώνεται αρκετά απότομα και τέμνει την G_σ πριν από το σημείο όπου G_σ και G_υ τέμνονται. Αφού η φάση ισορροπίας είναι αυτή που έχει τη μικρότερη G, έπεται ότι για χαμηλές πιέσεις (Σχ. 3.1(α)) και καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται από το απόλυτο μηδέν η ύλη διατηρείται στη στερεά φάση μέχρι τη θερμοκρασία που αντιστοιχεί στην τομή της G_a με την G_σ (θερμοκρασία εξάχνωσης), όπου λαμβάνει χώρα μια αλλαγή φάσης από τη στερεά στην αέρια φάση συνοδευόμενη από ασυνεχή αύξηση της εντροπίας και του όγκου (αλλαγή φάσης πρώτου είδους). Καθώς η πίεση αυξάνεται, η καμπύλη G_a αυξάνει για κάθε T, ενώ οι καμπύλες G_υ και G_σ ελάχιστα επηρεάζονται[7]. Άρα το σημείο τομής της G_a με την G_σ μετατοπίζεται προς τα δεξιά (και ε-

[7] Για την υγρή και τη στερεά φάση η ισορροπία για εξωτερική πίεση P=0 προϋποθέτει ισότητα της εσωτερικής διασταλτικής με την εσωτερική συμπιεστική πίεση, που η καθεμία τους είναι συνήθως πολλές χιλιάδες ατμόσφαιρες. Επομένως,



Σχ. 3.1 Γράφημα της ελεύθερης ενέργειας του Gibbs ως συνάρτησης της θερμοκρασίας υπό σταθερή πίεση για τις τρεις φάσεις της ύλης ($G_σ$ στερεά, $G_υ$ υγρή, G_a αέρια). Το τμήμα της

μια εξωτερική πίεση P ακόμη και μερικών εκατοντάδων ατμοσφαιρών ελάχιστα θα τροποποιήσει τις καμπύλες $G_υ$ και $G_σ$.

όποιας καμπύλης που έχει την κατώτερη τιμή μεταξύ των τριών για κάθε θερμοκρασιακή περιοχή σημειώνεται με παχύτερη γραμμή για να τονίσει το γεγονός ότι αντιστοιχεί στη φάση ισορροπίας. Για πολύ χαμηλές πιέσεις, (α), η τομή της G_a με την G_σ γίνεται προ της τομής της G_υ με την G_σ και επομένως η φάση ισορροπίας είναι η στερεά μέχρι τη θερμοκρασία, $T_{\varepsilon\xi}(P)$ τομής των G_a και G_σ όπου λαμβάνει χώρα μια αλλαγή φάσης προς την αέρια φάση (εξάχνωση). Για ενδιάμεσες πιέσεις , (β), η φάση ισορροπίας είναι η στερεά μέχρι τη θερμοκρασία τήξεως T_τ, η οποία αντιστοιχεί στο σημείο τομής της G_υ με την G_σ και όπου η αλλαγή φάσης είναι προς την υγρή φάση, η οποία είναι η φάση ισορροπίας μέχρι τη θερμοκρασία βρασμού $T_{\beta\rho}(P)$, όπου η αλλαγή είναι προς την αέρια φάση. Η θερμοκρασία T_τ, σε αντίθεση προς τις $T_{\varepsilon\xi}(P)$ και $T_{\beta\rho}(P)$ ελάχιστα εξαρτάται από την πίεση, όσο η τελευταία δεν έχει υπερβολικά υψηλές τιμές. Καθώς η πίεση αυξάνεται προς μία τιμή που ονομάζεται κρίσιμη, $P_{\kappa\rho}$, η $T_{\beta\rho}(P)$ φτάνει στη μέγιστη τιμή της: $T_{\beta\rho}(P_{\kappa\rho})\equiv T_{\kappa\rho}$. Στην τιμή αυτή η συγχώνευση της G_a με την G_υ γίνεται ομαλά (στο σημείο τομής οι δύο καμπύλες έχουν την ίδια κλίση) και η ποιοτική διάκριση μεταξύ υγρής φάσης και της αέριας παύει να υφίσταται (γ). Για σταθερές τιμές της πίεσης υψηλότερες της $P_{\kappa\rho}$ η μετάβαση από την υγρή στην αέρια φάση γίνεται συνεχώς και σταδιακά καθώς η θερμοκρασία αυξάνει από $T\ll T_{\kappa\rho}$ σε $T_{\kappa\rho}\ll T$.

πομένως η θερμοκρασία εξάχνωσης αυξάνεται) μέχρι μια πίεση, όπου το σημείο τομής της G_a με την G_σ θα συμπέσει με το σημείο τομής των G_υ και G_σ. Έχουμε τότε το λεγόμενο *τριπλό σημείο*, στο οποίο η αέρια, η υγρή και η στερεά φάση συνυπάρχουν (Π.χ., στο τριπλό σημείο του H_2O, το νερό ταυτόχρονα βράζει και παγώνει). Η χαρακτηριστική αυτή για κάθε είδος ύλης πίεση του τριπλού σημείου συμβολίζεται ως $P_{\tau\rho}$ και η αντίστοιχη θερμοκρασία ως $T_{\tau\rho}$.

Για περαιτέρω αύξηση της πίεσης πέραν της $P_{\tau\rho}$ η τομή της G_a με την G_σ και την G_υ λαμβάνει χώρα για μεγαλύτερες θερμοκρασίες από αυτή που αντιστοιχεί στην τομή της G_υ με την G_σ (Σχ. 3.1 (β)). Άρα, υπό τέτοιες πιέσεις, η φάση ισορροπίας για την θερμοκρασιακή περιοχή από 0K μέχρι την T_τ (που αντιστοιχεί στο σημείο τομής της G_υ με την G_σ) είναι η στερεά. Στη θερμοκρασία T_τ το στερεό τήκεται, δηλαδή λαμβάνει χώρα μια αλλαγή φάσης πρώτου είδους από στερεό σε υγρό. Στην περιοχή $T_\tau<T<T_{\beta\rho}$ (όπου η θερμοκρασία βρασμού $T_{\beta\rho}$ αντιστοιχεί στο σημείο τομής της G_a με την G_υ) έχουμε την υγρή φάση, αφού αυτή έχει την χαμηλότερη ελεύθερη ενέργεια του Gibbs. Στη θερμοκρασία $T_{\beta\rho}$ λαμβάνει χώρα μια ακόμη αλλαγή φάσης πρώτου είδους από την υγρή φάση στην αέρια. Πέραν της $T_{\beta\rho}$ η ύλη παραμένει στην αέρια φάση.

Για πολύ μεγάλες πιέσεις, όπου τα άτομα (ή τα μόρια, ή τα ιόντα) στην αέρια φάση αναγκάζονται σχεδόν να ακουμπήσουν με τα γειτονικά τους, όχι μόνο το σημείο τομής της G_a με την G_υ μετατοπίζεται προς τα δεξιά (δηλαδή η $T_{\beta\rho}$ αυξάνει) αλλά και η μεταξύ τους γωνία στο σημείο τομής μικραίνει και τελικά για κάποια κρίσιμη τιμή της πίεσης, $P_{\kappa\rho}$, η γωνία μηδενίζεται και η καμπύλη G_a συγχωνεύεται ομαλά με την G_υ, Σχ. 3.1(γ). Η τιμή της $T_{\beta\rho}$ για $P=P_{\kappa\rho}$ ονομάζεται $T_{\kappa\rho}$ και είναι η μέγιστη τιμή της. Πέραν της τιμής $P_{\kappa\rho}$ δεν υπάρχει πια $T_{\beta\rho}$, αφού δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ της υγρής και της τόσο συμπιεσμένης αέριας φάσης.

Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να συνοψισθεί στο Σχ. 3.2. Στο σχήμα αυτό παρουσιάζεται το διάγραμμα φάσεων στο επίπεδο T,P όπου σε κάθε

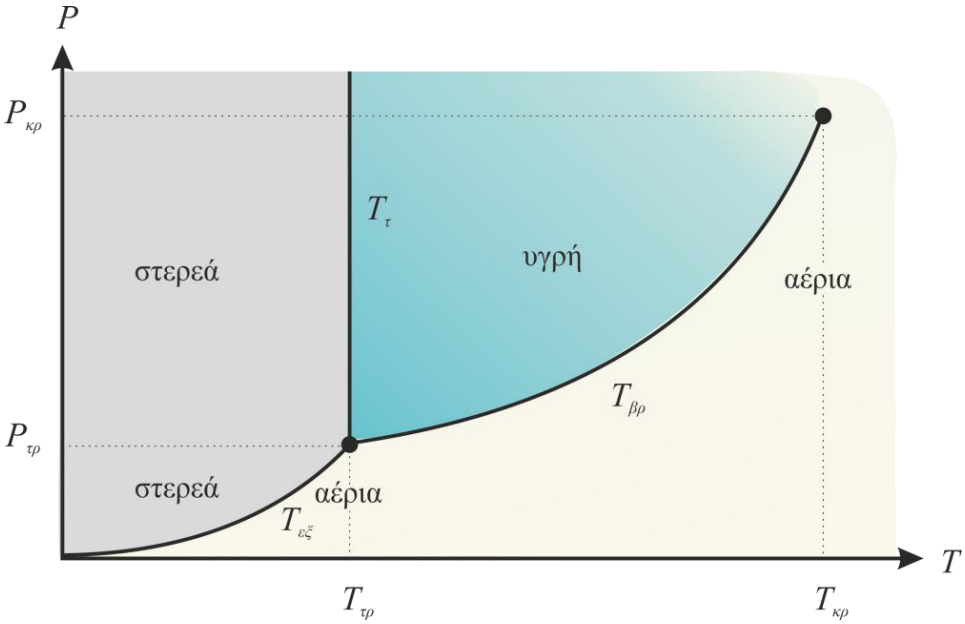
περιοχή, μία από τις τρεις φάσεις έχει την κατώτερη G και επομένως είναι η φάση ισορροπίας. Πάνω σε κάθε διαχωριστική γραμμή, δύο από τις τρεις φάσεις έχουν την ίδια G (μικρότερη από αυτήν της τρίτης) και επομένως οι δύο αυτές φάσεις συνυπάρχουν. Στο τριπλό σημείο, κοινό και των τριών γραμμών, συνυπάρχουν και οι τρεις φάσεις.

Σε οποιοδήποτε σημείο P,T της διαχωριστικής γραμμής μεταξύ της φάσης 1 και της φάσης 2 ισχύει

$$G_1(P,T) = G_2(P,T)\,. \tag{3.23}$$

Σ' ένα διπλανό σημείο $P+\delta P, T+\delta T$ της ίδιας διαχωριστικής γραμμής ισχύει προφανώς

$$G_1(P+\delta P, T+\delta T) = G_2(P+\delta P, T+\delta T)\,. \tag{3.24}$$



Σχ. 3.2 Σχηματικό διάγραμμα των τριών φάσεων της ύλης στο επίπεδο T,P. Σε κάθε περιοχή του μία εκ των τριών $G_σ$, $G_υ$, $G_α$ έχει την κατώτερη τιμή και επομένως καθορίζει τη φάση ισορροπίας. Στις διαχωριστικές γραμμές συνυπάρχουν δύο φάσεις, που διαφέρουν και ως προς τον όγκο και ως προς την εντροπία. Στο τριπλό σημείο συνυπάρχουν και οι τρεις φάσεις. Στο κρίσιμο σημείο τερματίζεται η $T_{βρ}$. Οι $T_{εξ}$ και $T_{βρ}$ είναι αύξουσες συναρτήσεις της πίεσης. Η $T_τ$ ελάχιστα εξαρτάται από την πίεση και επομένως είναι σχεδόν κατακόρυφη με ελαφρά κλίση είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά ανάλογα το υλικό. Για το νερό η κλίση είναι προς τα αριστερά ενώ για το CO_2 είναι προς τα δεξιά. Για ατομικά στερεά η κλίση αναμένεται να είναι προς τα δεξιά. Εάν $P \gg P_{κρ}$, η καμπύλη $T_τ$ κάμπτεται σημαντικά προς τα δεξιά. Ποσοτικά αποτελέσματα για την εξάρτηση της πίεσης από τη θερμοκρασία κατά μήκος των διαχωριστικών γραμμών προκύπτουν από τη σχέση Clayperon-Clausius (βλ. σχέση (3.25)). Για το νερό τα νούμερα είναι: $T_{τρ}$=0,0098°C, $P_{τρ}$=0,006atm και $T_{κρ}$=374°C, $P_{κρ}$=217,8atm $P_{κρ}/P_{τρ}$=36,000 και υπό σωστή κλίμακα το τριπλό σημείο θα ήταν σχεδόν

πάνω στον άξονα της θερμοκρασίας. Για το CO_2 έχουμε $T_{τρ}$=–56,4 °C, $P_{τρ}$=5,11atm και $T_{κρ}$=31,1 °C, $P_{κρ}$=73atm με $P_{κρ}/P_{τρ}$=14,3˙ για P=1atm το στερεό CO_2 εξαχνώνεται.

Αναπτύσσοντας την (3.24) σε δυνάμεις του δP και δT (μέχρι πρώτου βαθμού) και λαμβάνοντας υπόψη την (3.23) έχουμε

$$(\partial G_1/\partial P)\delta P+(\partial G_1/\partial T)\delta T=(\partial G_2/\partial P)\delta P+(\partial G_2/\partial T)\delta T\ ,\ \text{ή}$$

$$V_1\delta P-S_1\delta T=V_2\delta P-S_2\delta T\ ,\ \text{ή}$$

$$\frac{dP}{dT}=\frac{S_2-S_1}{V_2-V_1}=\frac{T\,\Delta S}{T\,\Delta V}=\frac{Q_\lambda}{T\,\Delta V}\ , \qquad (3.25)$$

όπου Q_λ είναι η λανθάνουσα θερμότητα για την αλλαγή φάσης από 1→2, θεωρώντας ότι S_2–S_1≡ΔS>0. Η (3.25) είναι η σχέση Clayperon-Clausius. Επειδή ο όγκος της στερεάς και της υγρής φάσης της ύλης μένει σχεδόν ανεπηρέαστος από τη μεταβολή της πίεσης, δηλ. ΔV≈0, έπεται ότι dT/dP≈0. Άρα η θερμοκρασία κατά μήκος της διαχωριστικής γραμμής στερεάς/υγρής φάσης παραμένει περίπου η ίδια καθώς η πίεση μεταβάλλεται. Επομένως, η διαχωριστική αυτή γραμμή είναι σχεδόν κατακόρυφη με κλίση ελαφρώς θετική όταν V_2>V_1 και κλίση ελαφρώς αρνητική όταν V_2<V_1 όπως στην περίπτωση νερού/πάγου. Το συμπέρασμα είναι ότι η θερμοκρασία του τριπλού σημείου, π.χ. του H_2O, είναι κατά τι μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία τήξης του υπό πίεση μιας ατμόσφαιρας. Πράγματι η θερμοκρασία του τριπλού σημείου του H_2O είναι ίση με 0,01°C=273,16K

Αξίζει να τονισθεί ότι σε περίπτωση που η φάση 2 είναι αέρια και P«$P_{κρ}$, τότε V_2–V_1≈V_2≈Nk_BT/P. Υπό την ίδια προϋπόθεση και για την περίπτωση που η φάση 2 είναι η αέρια, το Q_λ είναι συνήθως κάπως μικρότερο από την ενέργεια συνοχής της στερεάς φάσης και επομένως μπορεί να ληφθεί προσεγγιστικά ως σταθερό (βλ. την λυμένη άσκηση 8, σελ.89).

Σημείωση: Στη στερεά φάση τα άτομα (ή τα μόρια, ή τα ιόντα) περιορίζονται σε μικρές ταλαντώσεις γύρω από καθορισμένες θέσεις στο χώρο. Το κέντρο του καθενός καλύπτει με την κίνησή του έναν όγκο που είναι περίπου $0{,}05\times0{,}05\times0{,}05\approx1/10.000$ του όγκου ανά άτομο. Στην υγρή φάση το κάθε άτομο, ή μόριο, ή ιόν κινείται σε όλο το διαθέσιμο όγκο έχοντας όμως τον περιορισμό λίγο-πολύ σταθερής απόστασης d από τα εκάστοτε διπλανά του (η διακύμανση $\delta d/d$ αυτής της απόστασης είναι γύρω στο 5%). Τέλος, στη συνήθη αέρια φάση, το κάθε άτομο όχι μόνο κινείται σε όλο το διαθέσιμο χώρο, αλλά δεν υπόκειται σε κανένα περιορισμό όσον αφορά στην απόσταση από τα εκάστοτε διπλανά του: $\delta d/d$≈1. Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι ο αριθμός των μικροκαταστάσεων Γ_σ για τη στερεά φάση είναι αρκετά μικρότερος από τον αριθμό Γ_υ για την υγρή φάση, που με τη σειρά του είναι πολύ μικρότερος από τον αριθμό Γ_α της αέριας φάσης. Άρα, λόγω της (3.2), σελ. 76, έπεται η διπλή ανισότητα (3.22). Η άλλη ανισότητα (3.22) για T=0K έπεται από το γεγονός ότι οι καθορισμένες θέσεις γύρω από τις οποίες ταλαντώνονται τα άτομα (ή τα μόρια, ή τα ιόντα) στη στερεά φάση είναι ακριβώς εκείνες που ελαχιστοποιούν το G για T=0K. Άρα το G_σ είναι μικρότερο και από το G_υ και από G_α για T=0K. Όμως η διαφορά από το G_υ είναι συνήθως μικρή (γύρω στο 3%) γιατί το G για T=0K εξαρτάται κυρίως από την απόσταση d μεταξύ γειτονικών ατόμων που είναι περίπου ίδια για τη στερεά και την υγρή φάση (αφού και στις δύο φάσεις τα άτομα

περίπου εφάπτονται με τα γειτονικά τους). Αντίθετα, στην αέρια φάση τα άτομα είναι σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις από τα γειτονικά τους (εκτός εάν η πίεση P γίνει συγκρίσιμη με την $P_{κρ}$) και έτσι δεν αξιοποιούν την ελκτική δυναμική ενέργεια μεταξύ τους

Άσκηση: Δώστε το γράφημα της θερμοχωρητικότητας C_P ενός mol H_2O ως συνάρτησης της θερμοκρασιας T για T από 0 K έως 500 K υπό πίεση μιας ατμόσφαιρας.

Άσκηση: Δείξτε ότι η ολική κβαντική κινητική ενέργεια ενός συστήματος όγκου V και αριθμού σωματίων N είναι εκτατική ποσότητα, είτε ισχύει ο τύπος (2.13) είτε ο (2.14).

Λύση: Η ποσότητα N/V ως λόγος δύο εκτατικών ποσοτήτων είναι εντατική ποσότητα, όπως και οποιαδήποτε συνάρτησή της. Άρα οι ποσότητες $N(N/V)^{2/3}$, $N(N/V)^{1/3}$, ως γινόμενο η καθεμιά τους μιας εκτατικής ποσότητας, της N, και μιας εντατικής είναι κατ'ανάγκη εκτατικές.

Το ως ανω σκεπτικό μπορεί να αντιστραφεί και να οδηγήσει στην εύρεση τύπων. Π.χ. γνωρίζουμε ότι η ολική δυναμική ενέργεια ενός αφόρτιστου μορίου ή ενός αφόρτιστου στερεού είναι ηλεκτροστατικής φύσεως και είναι εκτατική ποσότητα (επειδή η αλληλεπίδραση μεταξύ ουδέτερων ατόμων είναι βραχείας εμβέλειας και επομένως το κάθε άτομο αλληλεπιδρά μόνο με ένα μικρό αριθμό γειτόνων του). Αξιοποιώντας αυτό το σκεπτικό συμπεραίνουμε ότι η εν λόγω δυναμική ενέργεια οφείλει να είναι ανάλογη του e^2 και αντιστρόφως ανάλογη του $V^{1/3}$ (αφού η ηλεκτροστική ενέργεια είναι ανάλογη του e^2/r). Για να είναι εκτατική η ολική δυναμική ενέργεια θα πρέπει με βάση τα προηγούμενα να είναι και ανάλογη του $N^{4/3}$. Άρα

$$E_{\Delta} = -\gamma \frac{e^2 N^{4/3}}{V^{1/3}}$$

όπου γ είναι μια θετική αριθμητική σταθερά που εξαρτάται από το είδος των ατόμων (κυρίως από το σθένος τους) και N είναι ο συνολικός αριθμός των ατόμων που αποτελούν το μόριο ή το στερεό. Το μείον προκύπτει γιατί αν ήταν συν, τότε η ολική ενέργεια θα ήταν θετική, ως άθροισμα δύο θετικών όρων, και επομένως θα συνέφερε ενεργειακά το σύστμα να αυτοδιαλυθεί ($V \to \infty$).

Ισχύει αντίστοιχο σκεπτικό για την ολική βαρυτική δυναμική ενέργεια της Γης;

Κεφάλαιο 4

Διαστατική ανάλυση: Ένα σπουδαίο νοητικό εργαλείο

Σύνοψη: *Παρουσιάζεται η μέθοδος της διαστατικής ανάλυσης και εφαρμόζεται σε διάφορες περιπτώσεις προκειμένου να γίνει κατανοητή η χρήση της. Η μεγάλη αξία της μεθόδου έγκειται στο ότι προσδιορίζει το πώς εξαρτάται ένα φυσικό μέγεθος από τις φυσικές σταθερές ή/και από τις παραμέτρους που το καθορίζουν παρακάμπτοντας τη σχετική θεωρία, η οποία συχνά είναι περίπλοκη ή και άγνωστη. Το αντίτιμο γι' αυτήν την τεράστια διευκόλυνση είναι η ανάγκη να προβληματισθεί κανείς για το ποιες μπορεί να είναι οι φυσικές σταθερές ή/και οι παράμετροι που καθορίζουν το υπό μελέτη φυσικό μέγεθος. Έτσι η μέθοδος προσφέρει και μια πολύτιμη παράπλευρη ωφέλεια: Συνηθίζει το χρήστη της να σκέπτεται αντί να ανατρέχει αποκλειστικά σε έτοιμους τύπους που έχει απομνημονεύσει.*

4.1 Περιγραφή της μεθόδου

Η διαστατική ανάλυση είναι μια ευφυής μέθοδος (χωρίς πολλά προαπαιτούμενα) που μπορεί σε αρκετές περιπτώσεις να δώσει πολύ χρήσιμα και σημαντικά αποτελέσματα. Όμως απαιτείται από όποιον την εφαρμόσει να σκεφτεί και να κατανοήσει από ποιες ανεξάρτητες *φυσικές ποσότητες* και από ποιες *φυσικές σταθερές* ενδεχομένως εξαρτάται το υπό εξέταση μέγεθος Χ.

Αν αυτές οι ποσότητες και οι φυσικές σταθερές είναι συνολικά τρεις ή λιγότερες, π.χ. A_1, A_2, A_3, τότε υπάρχει συνήθως ένας μόνο συνδυασμός τους της μορφής $A_1^{\lambda} A_2^{\mu} A_3^{\nu}$ που να έχει τις ίδιες διαστάσεις[1] με το άγνωστο μεγεθος X. Αυτός ο συνδυασμός πολλαπλασιασμένος με μια αριθμητική

[1] Ίδιες διαστάσεις σημαίνει ότι αν αναλύσουμε και το X και το $A_1^{\lambda} A_2^{\mu} A_3^{\nu}$ σε γινόμενο δυνάμεων των βασικών μεγεθών *μήκους, χρόνου, μάζας* $\ell^a t^b m^c$ οι εκθέτες να είναι ίδιοι.

σταθερά (που η μέθοδος αδυνατεί να προσδιορίσει) ισούται προφανώς με το υπό εξέταση μέγεθος Χ.

Αν οι ανεξάρτητες αυτές ποσότητες είναι περισσότερες από τρεις, τότε με τρεις από αυτές, έστω τις A_1, A_2, A_3 (που ορίζουν όμως ένα πλήρες σύστημα μονάδων[2]) δημιουργούμε ένα συνδυασμό της μορφής $A_1^{\lambda} A_2^{\mu} A_3^{\nu}$ που να έχει τις διαστάσεις του υπό εξέταση μεγέθους X. Δημιουργούμε επίσης και συνδυασμούς αυτών των τριών που έχουν τις διαστάσεις των υπολοίπων ποσοτήτων. Δηλαδή, αν X είναι το υπό εξέταση φυσικό μέγεθος και A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,… είναι οι ποσότητες από τις οποίες ενδεχομένως εξαρτάται, δημιουργούμε τους εξής συνδυασμούς: $X_o = A_1^{\lambda} A_2^{\mu} A_3^{\nu}$ με λ, μ, ν τέτοια ώστε το X_o να έχει τις διαστάσεις του X · $A_{40} = A_1^{\lambda_4} A_2^{\mu_4} A_3^{\nu_4}$ με λ_4, μ_4, ν_4 έτσι επιλεγμένα ώστε το A_{40} να έχει τις διαστάσεις του A_4. Το ίδιο για το A_5 κοκ. (Εάν κάποιο από τα A_4, A_5, είναι αδιάστατο, το αντίστοιχο A_{40}, A_{50} είναι μονάδα.) Τότε το υπό εξέταση μέγεθος X ισούται με:

$$\boxed{X = X_o \cdot \varphi\left(\frac{A_4}{A_{40}}, \frac{A_5}{A_{50}}, \ldots\right)}, \qquad (4.1)$$

όπου φ είναι μια συνάρτηση των αδιάστατων ποσοτήτων A_4/A_{40}, A_5/A_{50},…. Η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να προσδιορισθεί από διαστατική ανάλυση. Χρειάζεται κανείς πρόσθετες πληροφορίες ή και μια πλήρη φυσική θεωρία για την εύρεση της συνάρτησης φ.

Ας δούμε την εφαρμογή της μεθόδου με κάποια παραδείγματα:

4.2 Παραδείγματα

1) *Προσδιορίστε με διαστατική ανάλυση την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης ενός εκκρεμούς (βλέπε Σχ. Ι(α) του Παραρτήματος Ι, σελ. 375) και ενός κυκλώματος LC (βλέπε Σχ. Ι(β)).*

   Λύση: Για την περίπτωση του εκκρεμούς οι σχετικές ποσότητες είναι προφανώς το μήκος ℓ του εκκρεμούς, η μάζα m, και η επιτάχυνση της

[2] Τρεις ποσότητες A_1, A_2, A_3 ορίζουν ένα πλήρες σύστημα μονάδων, εάν υπάρχουν τρεις διαφορετικές εκφράσεις της μορφής $A_1^{\lambda} A_2^{\mu} A_3^{\nu}$ που να έχουν διαστάσεις μήκους, χρόνου και μάζας αντίστοιχα (αυτό ισχύει στο σύστημα μονάδων G-CGS, όπου τα βασικά μεγέθη είναι μόνο τρία, μήκος, χρόνος, μάζα). Αν κανείς χρησιμοποιεί το σύστημα SI, όπου στα τρία ως άνω βασικά μεγέθη προστίθεται ένα τέταρτο, το ηλεκτρικό ρεύμα, τότε αντί τριών ποσοτήτων A_1, A_2, A_3, χρειαζόμαστε τέσσερις A_1, A_2, A_3, A_4, και τέσσερις εκφράσεις της μορφής $A_1^{\lambda} A_2^{\mu} A_3^{\nu} A_4^{\xi}$ που να έχουν διαστάσεις μήκους, χρόνου, μάζας και ηλεκτρικού ρεύματος.

βαρύτητας g (που μαζί με τη μάζα και την απόκλιση από την κατακόρυφο καθορίζει τη δυναμική ενέργεια). Επομένως

$[\omega] \equiv \frac{1}{[t]} = \left[\ell^{\mu} m^{\nu} g^{\xi} \right]$, το σύμβολο [χ] σημαίνει διαστάσεις του χ.

Προφανώς ν=0, αφού δεν υπάρχει μάζα στο αριστερό σκέλος. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $[g] = [\ell]/[t]^2$ προκύπτει $\mu + \xi = 0$ και $\xi = 1/2$, οπότε $\mu = -1/2$. Άρα

$$\omega = c_1 \sqrt{\frac{g}{\ell}} \ , \qquad (4.2)$$

όπου η αριθμητική σταθερά c_1 συμβαίνει να είναι μονάδα.

Για το κύκλωμα LC οι προφανείς σχετικές ποσότητες είναι η αυτεπαγωγή L (με διαστάσεις μήκους στο σύστημα G-CGS[3]) η χωρητικότητα C (με διαστάσεις μήκους στο σύστημα G-CGS) και η ταχύτητα του φωτός c (αφού πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο). Στην παρούσα περίπτωση, όπου εισέρχεται και ο αδιάστατος λόγος L/C έχουμε

$$[\omega] \equiv \frac{1}{[t]} = [L^{\mu} c^{\nu}] \varphi(L/C) \ ,$$

με $\nu + \mu = 0, \nu = 1$ και φ μια αυθαίρετη συνάρτηση του λόγου L/C η οποία από τη θεωρία (αλλά όχι από διαστατική ανάλυση) προκύπτει να είναι $\sqrt{L/C}$. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει το σύστημα SI όπου οι διαστάσεις του L είναι μ_o επί μήκος και του C ϵ_o επί μήκος (μ_o, ϵ_o είναι η διαπερατότητα και η επιτρεπτότητα (βλ. σελ. 115) του κενού αντίστοιχα) θα μπορούσαμε να βρούμε πώς εξαρτάται το ω από τα L, C. Δοκιμάστε το. Λάβετε υπόψη ότι στο SI δεν εμφανίζεται η ταχύτητα του φωτός c αλλά το ϵ_o και μ_o. Είναι όμως $\epsilon_o \mu_o = 1/c^2$. Επίσης στο SI τα βασικά μεγέθη είναι τέσσερα: ℓ, t, m και το ηλεκτρικό ρεύμα I. Οι διαστάσεις του ϵ_o προκύπτουν από τις σχέσεις $([q]^2/[\epsilon_0][l]) = [E] = ([m][l]^2/[t]^2) \Rightarrow [\epsilon_0] = ([q]^2[t]^2/[m][l]^3)$. Οι διαστάσεις του μ_0 προκύπτουν από τη σχέση $[\mu_0] = [t]^2/[l]^2[\epsilon_0] = [m][l]/[q]^2$ η οποία βασίστηκε

[3] Προσοχή! Για αριθμητικές εκτιμήσεις πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιήσετε τις μονάδες του συστήματος στο οποίο εκφράσατε τους τύπους σας. Για να χρησιμοποιήσετε τις οικείες μονάδες του συστήματος SI θα πρέπει οι τύποι σας να είναι εκφρασμένοι σ' αυτό το σύστημα και όχι στο G-CGS.

στη σχέση $\epsilon_0\mu_o = 1/c^2$. Από την τελευταία σχέση έπεται ότι το γινόμενο $[LC] = [\epsilon_0\mu_o][l]^2 = [l]^2/[c]^2 = [t]^2$. Άρα $\omega^2 = c_1/LC$, όπου $c_1 = 1$.

2) *Προσδιορίστε με διαστατική ανάλυση τη φασική ταχύτητα ενός κύματος που οδεύει στο σύστημα των συζευγμένων εκκρεμών του Σχ. Ι(γ) του Παρ. Ι, σελ. 375.*

Λύση: Με απλή παρατήρηση του Σχ. Ι(γ) προκύπτει ότι η ταχύτητα υ του κύματος πρέπει να εξαρτάται από τα μήκη ℓ και a, από τη μάζα m και από τη σταθερά του ελατηρίου κ. Θα εξαρτάται επίσης από την επιτάχυνση της βαρύτητας g και ενδεχομένως από τον κυματαριθμό k. Η ταχύτητα υ λόγω της γενικής σχέσης (Ι.1) ισούται με ω/k, όπου το ω είναι η κοινή κυκλική συχνότητα ταλάντωσης όλων των μαζών m. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν στο σύστημα δύο αθροιστικές συμβολές στη δυναμική ενέργεια: Η μία οφείλεται στη βαρύτητα και η άλλη στα ελατήρια. Αφού η μέση κινητική ενέργεια είναι ανάλογη της μέσης δυναμικής ενέργειας περιμένουμε ότι και η κινητική ενέργεια θα έχει δύο προσθετικές συνεισφορές, τη μία οφειλόμενη στη βαρύτητα και την άλλη στα ελατήρια. Αλλά η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της κυκλικής συχνότητας, λόγω του ότι $\upsilon \propto \omega$. Κατά συνέπεια και το τετράγωνο της συχνότητας θα έχει δύο αθροιστικές συνεισφορές, $\omega^2 = \omega_g^2 + \omega_\kappa^2$, τη μία λόγω βαρύτητας και την άλλη λόγω ελατηρίων. Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι $\omega_g^2 = g/\ell$. Το ω_κ θα εξαρτάται από τις εναπομένουσες τέσσερις ποσότητες: κ, m, a και ενδεχομένως το k. Διευκολύνει τις πράξεις αν παρατηρήσουμε ότι το κ/m έχει διαστάσεις συχνότητας στο τετράγωνο και ότι το ka είναι αδιάστατο. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\omega_\kappa^2 = \frac{\kappa}{m}\varphi(ka)\,.$$

Εδώ εξαντλούνται οι δυνατότητες της διαστατικής ανάλυσης. Μπορούμε όμως να εξετάσουμε από άποψη φυσικής κάποιες οριακές περιπτώσεις. Στο όριο $k \to 0$, που σημαίνει ότι $\lambda \to \infty$, δηλαδή ότι όλα τα εκκρεμή κινούνται εν φάσει, τα ελατήρια παραμένουν ανενεργά και επομένως δεν ασκούν καμία δύναμη. Άρα όταν $k=0$, $\omega_\kappa = 0$. Αντίθετα, όταν οι γειτονικές μάζες κινούνται 100% εκτός φάσεως, πράγμα που συμβαίνει όταν $(\lambda/2) = a$ ή, ισοδύναμα, $ka = \pi$, τότε τα ελατήρια ασκούν τη μέγιστη δύναμη και το $\varphi(ka)$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή. Δεν είναι απίθανο να υποθέσει κανείς ότι μια περιοδική θετική συνάρτηση όπως η $\varphi(ka)$ που έχει αυτά τα όρια είναι της μορφής $c_1\sin^2(ka/2)$, όπου c_1 είναι μια θετική αριθμητική σταθερά. Η λεπτομερής θεωρία επιβεβαιώνει αυτή την εικασία. Έτσι

$$\omega^2 = \omega_g^2 + c_1 \frac{\kappa}{m} \sin^2(ka/2), \qquad \omega_g^2 = g/\ell, \tag{4.3}$$

με το c_1 να προκύπτει ίσο με 4.

Η σχέση (4.3) για τη διάδοση του κύματος από εκκρεμές σε εκκρεμές είναι μαθηματικά όμοια με τον κυματικό τρόπο που μετακινείται ένα ηλεκτρόνιο από άτομο σε άτομο μέσα σ' ένα στερεό, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 11.

Η ίδια σχέση (4.3) απουσία βαρύτητας (g=0) γίνεται

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \xrightarrow[ka \to 0]{} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}\, k\, a\,. \tag{4.4}$$

Η σχέση (4.4) είναι ενδεικτική του τρόπου που διαδίδονται ηχητικά κύματα σε ένα στερεό. Στο όριο $ka \to 0$, δηλαδή στο όριο που το μήκος κύματος λ είναι πολύ μεγαλύτερο από την απόσταση a γειτονικών ατόμων, η ταχύτητα του κύματος $\upsilon=\omega/k$ είναι ανεξάρτητη του k και εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του συστήματος:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}\, a = \sqrt{\frac{\kappa\, a}{m/a}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}\ , \tag{4.5}$$

όπου το $B=\kappa a$ είναι το ανάλογο στη μία διάσταση του μέτρου ελαστικότητας (δηλαδή του αντιστρόφου της συμπιεστότητας) και το ρ είναι η μονοδιάστατη πυκνότητα μάζας $\rho \equiv m/a$. Ο τύπος (4.5) ισχύει για υγρά και αέρια και στις τρεις διαστάσεις.

3) *Βρείτε τη φασική ταχύτητα θαλάσσιου κύματος σε βαθιά νερά.*

Λύση: Η ζητούμενη ταχύτητα, υ, θα πρέπει να εξαρτάται από το μήκος κύματος, λ, από την επιτάχυνση της βαρύτητας g (αφού αν δεν υπήρχε η βαρύτητα δε θα έτεινε η επιφάνεια του νερού να επιστρέψει στη ισορροπία) και ενδεχομένως από την πυκνότητα του νερού, ρ. Δεν φαίνεται να υπάρχει άλλη σχετική ποσότητα. Άρα:

$$\upsilon = c_1 \lambda^{\xi} g^{\mu} \rho^{\nu}\,.$$

Προφανώς, ν=0, αφού στο αριστερό σκέλος δεν υπάρχει μάζα, ενώ στο δεξί θα υπήρχε, εάν $\nu \neq 0$. Το g έχει διαστάσεις $[\ell]/[t]^2$. Άρα οι διαστάσεις του δεξιού μέλους είναι $[\ell]^{\xi+\mu}/[t]^{2\mu}$. Επομένως $\xi+\mu=1$ και $2\mu=1$ για να έχει το δεξιό μέλος τις ίδιες διαστάσεις με το αριστερό. Καταλήξαμε, δηλαδή, στις τιμές μ=1/2 και ξ=1/2 και κατά συνέπεια στον εξής τύπο για την ταχύτητα του θαλάσσιου κύματος

$$\upsilon = c_1 \sqrt{\lambda g}\,. \tag{4.6}$$

Η αριθμητική σταθερά, c_1, δεν μπορεί να προσδιοριστεί από διαστατική ανάλυση. Η λεπτομερής θεωρία δίνει $c_1 = 1/\sqrt{2\pi}$. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει τον κυματαριθμό $k \equiv 2\pi/\lambda$ ο αριθμητικός συντελεστής θα ήταν μονάδα. Συνήθως η χρήση του k αντί του $\lambda = 2\pi/k$ και του ω αντί του $2\pi/T$ (T είναι η περίοδος) κάνει τους αριθμητικούς συντελεστές να έχουν τιμές πιο κοντά στη μονάδα. Επομένως είναι συνήθως προτιμητέα από την άποψη αυτή η χρήση των k και ω αντί των λ και T. Επανερχόμενοι στην ταχύτητα θαλάσσιου κύματος έχουμε τελικά:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \,. \tag{4.7}$$

4) *Το ίδιο με προηγουμένως αλλά σε ρηχά νερά βάθους d*

Λύση: Τώρα, εκτός των τριών ποσοτήτων της προηγούμενης άσκησης, έχουμε και ένα τέταρτο, το d, που έχει διαστάσεις μήκους. Άρα η ποσότητα A_4/A_{40} στην προκειμένη περίπτωση είναι η d/λ και ο τύπος για την ταχύτητα του θαλάσσιου κύματος θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$\upsilon = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\varphi(k\,d) = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}\,\varphi\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right), \tag{4.8}$$

όπου η συνάρτηση φ δεν μπορεί να προσδιοριστεί από διαστατική ανάλυση. Γνωρίζοντας όμως ότι η τοπική ταλάντωση που αντιστοιχεί στο θαλάσσιο κύμα είναι σχεδόν κατακόρυφης διεύθυνσης, αναμένουμε ότι στο όριο $(d/\lambda) \ll 1$ το αποτέλεσμα θα πρέπει να εξαρτάται από το βάθος d, το δε μήκος κύματος δεν θα πρέπει να παίζει ρόλο. Επομένως σε αυτό το όριο το φ πρέπει να είναι ανάλογο του $\sqrt{2\pi\,d/\lambda}$ ή του $\sqrt{k\,d}$, $[\varphi(k\,d) \propto \sqrt{k\,d}]$, προκειμένου να απαλειφθεί το λ ή το k. (Συμβαίνει ο συντελεστής αναλογίας να είναι μονάδα). Άρα στο όριο $(d/\lambda) \ll 1$ ο τύπος για τη φασική ταχύτητα του θαλάσσιου κύματος έχει τη μορφή

$$\upsilon = \sqrt{g\,d} \,. \tag{4.9}$$

Ο τύπος (4.9) έχει εφαρμογή στα τσουνάμι, όπου συνήθως το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το βάθος της θάλασσας.

Από το γενικό τύπο (Ι.1), $\omega = \upsilon k$, για την κυκλική συχνότητα και τον (4.8) βρίσκουμε ότι

$$\omega = \sqrt{g\,k\varphi(k\,d)} \,. \tag{4.10}$$

Η συνάρτηση $\varphi(kd)$ στη γενική περίπτωση και έπειτα από ένα λεπτομερή και εξειδικευμένο υπολογισμό προκύπτει ίση με $\tanh(kd)$. Η $\tanh(kd)$ τείνει στο kd όταν $kd \to 0$ και στη μονάδα όταν $kd \to \infty$.

5) *Περισσότερα για τη φασική ταχύτητα θαλάσσιου κύματος.*
Μέχρι τώρα για τον προσδιορισμό της ταχύτητας θαλάσσιου κύματος λάβαμε υπόψη τη βαρυτική δυναμική ενέργεια που ελαχιστοποιείται όταν η επιφάνεια της θάλασσας είναι τοπικά επίπεδη. Υπάρχει όμως και μια άλλη δυναμική ενέργεια που ευνοεί επίσης επίπεδη επιφάνεια και αυτή είναι η επιφανειακή τάση, η οποία χαρακτηρίζεται από το συντελεστή επιφανειακής τάσης σ με διαστάσεις ενέργεια ανά εμβαδόν επιφάνειας. Οι δύο αυτές δυναμικές ενέργειες είναι αθροιστικές και κατά συνέπεια και το τετράγωνο της κυκλικής συχνότητας έχει δύο αθροιστικές συνεισφορές όπως εξηγήθηκε στο παράδειγμα (2). Άρα γενικά

$$\omega^2 = \omega_g^2 + \omega_\sigma^2 ,$$

όπου έχουμε ήδη βρει στο παράδειγμα (4) ότι $\omega_g^2 = gk\tanh(kd)$. Απόμένει να βρούμε το ω_σ^2 που θα πρέπει να εξαρτάται από το συντελεστή επιφανειακής τάσης σ, από το βάθος της θάλασσας d, από τον κυματαριθμό k ($k \equiv 2\pi/\lambda$) και από την πυκνότητα του νερού ρ. Επομένως το ω_σ^2 θα έχει τη μορφή $\omega_\sigma^2 = \sigma^\mu \rho^\nu k^\xi \tilde{\varphi}(kd)$, οπότε

$$[\omega_\sigma^2] \equiv [t]^{-2} = [\sigma^\mu \rho^\nu k^\xi] .$$

Από τη σχέση αυτή έχουμε[4] ότι

$$\omega_\sigma^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho}\ \tilde{\varphi}(kd) ,$$

όπου το $\tilde{\varphi}(kd)$, όπως προκύπτει από μια λεπτομερή θεωρία, είναι και αυτό ίσο με $\tanh(kd)$. Έχουμε επομένως για τη φασική ταχύτητα υ στην πιο γενική περίπτωση

$$\upsilon^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}\tanh(kd) + \frac{\sigma k}{\rho}\tanh(kd) \ . \qquad (4.11)$$

Για όχι τόσο μικρά μήκη κύματος ($\lambda \gtrsim 5\,\text{cm}$) το ω_σ^2 είναι αμελητέο σε σύγκριση με το ω_g^2, όπως προκύπτει από το λόγο $(\omega_\sigma^2 / \omega_g^2) = = (\sigma k^2 / g\rho)$. Αντίθετα για πολύ μικρά μήκη κύματος ($\lambda \le 2\,\text{cm}$) η συμβολή της επιφανειακής τάσης στο ω^2 γίνεται σημαντική, αφού ο λόγος των δύο,

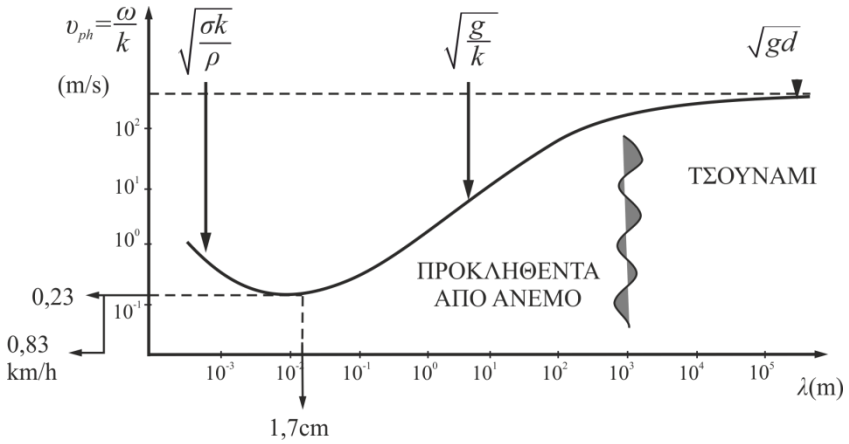
---

[4] Δηλαδή $\dfrac{1}{[t]^2} \equiv \left[\dfrac{m^\mu \ell^{2\mu}}{t^{2\mu}\ell^{2\mu}} \dfrac{m^\nu}{\ell^{3\nu}} \dfrac{1}{\ell^\xi} \right] = \left[m^{\mu+\nu} \ell^{-3\nu-\xi} t^{-2\mu} \right]$.

Άρα:

$$\mu = 1, \quad \mu + \nu = 0 \Rightarrow \nu = -1, \quad -3\nu - \xi = 0 \Rightarrow \xi = -3\nu = 3 .$$

$\omega_\sigma^2/\omega_g^2=(2\pi)^2\sigma/\rho g\lambda^2$, είναι αντιστρόφως ανάλογος του τετραγώνου του μήκους κύματος λ. Στο Σχ. 4.1 δίνουμε τη γραφική παράσταση της φασικής ταχύτητας υ ως συνάρτησης του λ χρησιμοποιώντας για το σ του νερού την εμπειρική τιμή 0,073J/m^2. Από τη γραφική αυτή παράσταση προκύπτει ότι όταν αρχίσει να φυσάει ένα πολύ ελαφρό αεράκι θα διεγείρει πρώτα σε μια απολύτως ήρεμη θάλασσα ένα "ρυτίδωμα" που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος περίπου 1,7cm, δηλαδή στο ελάχιστο της καμπύλης υ έναντι λ. Αυτό γιατί άνεμος ταχύτητας υ_a διεγείρει πολύ πιο έντονα εκείνα τα κύματα για τα οποία ισχύει η συνθήκη συντονισμού $\upsilon_a=\upsilon$.



Σχ. 4.1. Η φασική ταχύτητα θαλάσσιου κύματος ως συνάρτηση του μήκους κύματος λ, όπου $\lambda=2\pi/k$. Τα κύματα πολύ μικρού λ κυριαρχούνται από την επιφανειακή τάση. Η ελάχιστη φασική ταχύτητα είναι περίπου 0,23m/s=0,83km/h. Κύματα με $\lambda \gg d$, όπως τα τσουνάμι, οδεύουν πολύ γρήγορα. Π.χ. για $d \simeq 3\,\mathrm{km}$ θα είναι $\upsilon \approx (gd)^{1/2} = 171,5\,\mathrm{m/s} = 617,6\,\mathrm{km/h}$

4.3 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Όταν το εξεταζόμενο μέγεθος αναφέρεται σε ΗΜ φαινόμενο και το σύστημα G-CGS, που είναι διαστατικά το απλούστερο, δεν παρέχει απάντηση, τότε θα πρέπει να δοκιμασθεί και το σύστημα SI, το οποίο έχει τέσσερις βασικές φυσικές ποσότητες, μήκος, χρόνος, μάζα και ηλεκτρικό ρεύμα (ή ηλεκτρικό φορτίο). Στο SI αντί της ταχύτητας του φωτός στο κενό c εμφανίζεται η επιτρεπτότητα του κενού ϵ_0 και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού μ_0 που έχουν διαστάσεις

$$[\epsilon_0]=([q]^2[t]^2/[m][l]^3),\quad [\mu_0]=[m][l]/[q]^2,\quad [q]=[I][t] \qquad (4.12)$$

και ικανοποιούν τη σχέση

$$\epsilon_0 \mu_0 = (1/c^2)\,. \tag{4.13}$$

Όταν η δυναμική ενέργεια ενός συνήθους (γραμμικού) κύματος συνίσταται από δύο ανεξάρτητες αθροιστικές συνιστώσες, το ίδιο ισχύει και για την κινητική ενέργεια και επομένως και για το τετράγωνο ω^2 της γωνιακής συχνότητας και για το τετράγωνο $v^2 \equiv \omega^2/k^2$ της ταχύτητας διάδοσης του κύματος. Με άλλα λόγια η αθροιστικότητα των δυο συνιστωσών της δυναμικής ενέργειας συνεπάγεται ότι

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2\,, \tag{4.14}$$

όπου το ω_1^2 είναι συνάρτηση μόνο εκείνων των ποσοτήτων που θα εμφανιζόντουσαν εάν υπήρχε μόνο η συνιστώσα 1 και ω_2^2 είναι συνάρτηση μόνο εκείνων των ποσοτήτων που θα εμφανιζόντουσαν εάν υπήρχε μόνο η συνιστώσα 2.

Δύο σημαντικές περιπτώσεις όπου έχει εφαρμογή η σχέση (4.14) είναι η κυματική διάδοση στο σύστημα των συζευγμένων εκκρεμών

$$\omega^2 = \omega_g^2 + \frac{4\kappa}{m}\sin^2(ka/2), \qquad \omega_g^2 = g/\ell \tag{4.15}$$

και της διάδοσης επιφανειακών κυμάτων σε λίμνες ή θάλασσες

$$v^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}\tanh(kd) + \frac{\sigma k}{\rho}\tanh(kd)\,. \tag{4.16}$$

Η σχέση (4.15) είναι μεγάλης σημασίας γιατί αποτελεί τη βάση για τον προσδιορισμό της κίνησης των ιόντων και των ηλεκτρονίων σε ένα στερεό και επομένως τη βάση για τη φυσική της στερεάς κατάστασης της ύλης.

4.4 Λυμένες ασκήσεις

1. Θεωρήστε ένα κινούμενο με ταχύτητα v σφαιρικό στερεό σώμα ακτίνας r μέσα σ' ένα ρευστό μέσο (υγρό ή αέριο). Δύο είναι οι φυσικές αιτίες που απαιτούν δαπάνη ενέργειας για τη διατήρηση της κίνησης: (α) η κινητική ενέργεια που συνεχώς προσφέρει το κινούμενο σώμα στις μάζες του ρευστού. (β) οι τριβές που αναπτύσσονται ανάμεσα στα στρώματα του ρευστού διαφορετικής ταχύτητας, οι οποίες τριβές χαρακτηρίζονται από το ιξώδες η (που έχει διαστάσεις $[P][t]=[m]/[\ell][t]$).

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση βρέστε πώς εξαρτάται η δύναμη αντίστασης F εάν υπήρχε μόνο ο πρώτος μηχανισμός ή εάν υπήρχε μόνο ο δεύτερος μηχανισμός. Ο λόγος της πρώτης δύναμης, F_α, προς τη δεύτερη, F_β, είναι ο λεγόμενος αριθμός του Reynolds,

$$R_e = \frac{F_a}{F_\beta} .$$

Δείξτε ότι για μεγάλα σώματα ή και μεγάλες ταχύτητες κυριαρχεί η δύναμη F_α (που είναι αδρανειακής φύσεως), ενώ για μικρά και χαμηλές ταχύτητες κυριαρχεί η F_β (που οφείλεται στη συνεκτικότητα του ρευστού).

Εκτιμήστε πόση ισχύ καταναλώνει ένα αυτοκίνητο που κινείται με 100 km/h για να υπερνικήσει τη δύναμη αντίστασης του αέρα. Ο λόγος $\nu \equiv \eta/\rho$ του αέρα είναι περίπου ίσος με $1{,}5\times10^{-5}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. $1\mathrm{hp}\approx746\mathrm{W}$ (βλέπε σχετικά το εξαίρετο άρθρο του G. Golitsyn, *Quantum*, Μάρτιος/ Απρίλιος, 2000, σελ. 6).

Λύση: Σύμφωνα με τον πρώτο μηχανισμό, η δύναμη F_a θα εξαρτάται από την ταχύτητα υ (προφανές), από την πυκνότητα του ρευστού ρ (αφού αυτή θα επηρεάσει την κινητική ενέργεια που μεταφέρεται στο ρευστό), από τη διατομή $S=\pi r^2$ του στερεού σώματος (όταν η διατομή τείνει στο μηδέν και η δύναμη τείνει στο μηδέν) και από το σχήμα του σώματος. Άρα:

$$F_a = C\upsilon^\mu \rho^\nu S^\tau ,$$

όπου η ισότητα των διαστάσεων της προηγούμενης σχέσης προσδιορίζει τις τιμές των εκθετών ως εξής: μ=2, ν=1, τ=1 και C έναν αριθμητικό παράγοντα που εξαρτάται από το σχήμα.

Σύμφωνα με τον δεύτερο μηχανισμό, η δύναμη F_β θα εξαρτάται από την ταχύτητα υ (προφανές), το ιξώδες η και τη διατομή $S=\pi r^2$ του στερεού σώματος. Άρα

$$F_\beta = C'\upsilon^\mu \eta^\nu S^\tau .$$

Η διαστατική ισότητα δίνει μ=1, ν=1, τ=1/2. Επομένως ο αριθμός του Reynolds, R, είναι, παραλείποντας τους αριθμητικούς παράγοντες,

$$R = \upsilon l \rho / \eta = \upsilon l / \nu, \qquad \nu \equiv \eta / \rho, \quad l = 2r = d \ \text{(για σφαίρα)},$$

όπου ν είναι το λεγόμενο κινηματικό ιξώδες.

Για αυτοκίνητο τέτοιας ταχύτητας ο αριθμός του Reynolds είναι περίπου 3×10^6.

Άρα κυριαρχεί η F_a και έχουμε, παίρνοντας για $C\approx0{,}3$, $\rho = 1,224\,\mathrm{kg/m}^3$, και $S \approx 1\mathrm{m}^2$,

$$J = F_a \upsilon = 7870\,\mathrm{W} = 10,5\,\mathrm{hp} .$$

2. Βρείτε τον λεγόμενο τύπο του Poiseuille που δίνει τη παροχή υγρού, δηλαδή τον όγκο υγρού ανά μονάδα χρόνου που διέρχεται μέσω μιας οποιασδήποτε νοητής διατομής ενός σωλήνα κυκλικής διατομής ακτίνας r.

Λύση: Η παροχή Π εξαρτάται από τη διατομή του σωλήνα, S, και από το ιξώδες η· σε κάθε στοιχειώδες μήκος dx του σωλήνα εμφανίζονται τριβές λόγω της ύπαρξης του η. Για να υπερνικηθεί το άθροισμα όλων αυτών των στοιχειωδών τριβών και να συνεχιστεί η ροή θα πρέπει να επιβληθεί μια διαφορά πίεσης Δp ανάλογη του αθροίσματος $\sum dx$, δηλαδή ανάλογη του μήκους ℓ του σωλήνα, $\Delta p \propto \ell$. Άρα η ζητούμενη παροχή έχει την ακόλουθη εξάρτηση

$$\Pi = C\,(\Delta p / \ell)^{\mu} \eta^{\nu} S^{\tau} ,$$

οπότε οι εκθέτες προκύπτουν μ=1, ν=–1, τ=2. Για κυκλική διατομή $S=\pi R^2$, $C=1/8\pi$. Έπεται ότι η ροή είναι ανάλογη της τετάρτης δύναμης της ακτίνας.

3. Υψίσυχνα ηλεκτρικά ρεύματα κατά μήκος ενός αγωγού αγωγιμότητας σ δεν καλύπτουν ομοιόμορφα τη διατομή του αγωγού αλλά περιορίζονται σε μια περιοχή κοντά στην επιφάνεια πάχους δ, το οποίο ονομάζεται βάθος διείσδυσης. Χρησιμοποιήστε το σύστημα SI για να βρείτε το δ.

Λύση: Το ζητούμενο μέγεθος δ με διαστάσεις μήκους θα εξαρτάται από την αγωγιμότητα σ και την κυκλική συχνότητα ω, λόγω εκφωνήσεως και από την ταχύτητα του φωτός στο κενό στο σύστημα G-CGS. Σ' αυτό το σύστημα, το σ έχει διαστάσεις $1/[t]$. Αυτό προκύπτει συνδυάζοντας το νόμο του Ohm $j=\sigma E$ με τον ορισμό $j=I/S$, $[S]=[l]^2$ και το νόμο Coulomb $E=q/r^2$, $[r]=[l]$. Επειδή το ω και το σ έχουν τις ίδιες διαστάσεις η απάντηση στο σύστημα G-CGS θα περιέχει μια αυθαίρετη συνάρτηση του αδιάστατου λόγου σ/ω. Επομένως θα πρέπει απαραιτήτως να δοκιμάσουμε το σύστημα SI, όπου τα βασικά ανεξάρτητα μεγέθη είναι τέσσερα επειδή προστίθεται το ηλεκτρικό ρεύμα ή, ισοδύναμα, το ηλεκτρικό φορτίο q. Πέρα από το σ και το ω στο σύστημα SI θα πρέπει να εμφανισθούν η διαπερατότητα του υλικού μ και η διηλεκτρική του συνάρτηση ϵ. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο η διηλεκτρική συνάρτηση εξαρτάται από τη συχνότητα ω και την αγωγιμότητα σ. Επομένως το ϵ δεν θα πρέπει να εμφανισθεί αφού ήδη περιελήφθησαν τα σ και ω. Οι διαστάσεις του σ στο σύστημα SI προκύπτουν από τις σχέσεις που αναφέραμε προηγουμένως με τη διαφορά ότι το $[E]=([q]/[\epsilon][l]^2)$ περιέχει τον έξτρα όρο $1/[\epsilon]$. Άρα λαμβάνοντας υπόψη την (4.12) για τις διαστάσεις του ϵ και του μ, έχουμε

$$[\sigma] = [\epsilon]/[t] = [q]^2[t]/[m][l]^3$$

και

$$\delta = C\sigma^{\alpha}\omega^{\beta}\mu^{\gamma} = C\frac{q^{2a}t^{a}}{m^{a}\ell^{3a}}\frac{1}{t^{\beta}}\frac{m^{\gamma}\ell^{\gamma}}{q^{2\gamma}} . \qquad (3.1)$$

Για να φύγουν τα q,m,t από το δεύτερο μέλος της (1) θα πρέπει $a=\gamma$ και $a=\beta$. Τέλος $\gamma-3a=1$, οπότε $a=\beta=\gamma=-1/2$. Το C συμβαίνει να είναι ίσο με $\sqrt{2}$. Άρα

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} .$$

4. Εκτιμήστε το χρόνο ζωής ενός κλασικού μοντέλου για το άτομο του υδρογόνου θεωρώντας ότι εάν δεν υπήρχε ακτινοβολία το ηλεκτρόνιο θα ακολουθούσε μια κυκλική τροχιά ακτίνας a_B.

Λύση: Για κυκλική τροχιά απουσία ακτινοβολίας έχουμε ότι $m\upsilon^2 = e^2/r$, (όπου $r = a_B$) και $\upsilon=\omega r$, οπότε

(α) $\omega^2 = \dfrac{e^2}{ma_B^3}$ ή $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\dfrac{ma_B^3}{e^2}\right)^{1/2} = 1,52\times10^{-16}$ s και ω=4,13×10^{16}rad/s.

(β) Η ακτινοβολία ενός επιταχυνόμενου σωματίου, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, ισούται με

$$I = \frac{2}{3}e^2a^2 / c^3 ,$$

όπου a η επιτάχυνση. Εδώ, αν υποθέσω ότι $(t_o / T) \gg 1$ (όπου t_o ο χρόνος ζωής), τότε η επιτάχυνση είναι ουσιαστικά η κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{mr^2} .$$

Η ενέργεια του συστήματος,–e^2/2r, μειώνεται λόγω της ακτινοβολίας. Έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{e^2}{2r}\right) = -I = -\frac{2}{3}\frac{e^6}{c^3m^2r^4} , \text{ ή } \frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3r^2} \text{ ή } r^2dr = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}dt ,$$

ή
$$r^3 = a_B^3 - \frac{4e^4}{m^2c^3}t .$$

Ο χρόνος ζωής του ατόμου θα τερματισθεί όταν το ηλεκτρόνιο πέσει πάνω στο πρωτόνιο, δηλαδή όταν r=0

$$\boxed{t_o = \frac{1}{4}\frac{m^2c^3a_B^3}{e^4} = \frac{c^3}{4} \quad \text{α.μ.}} ,$$

ή
$$t_o = 1,55\times10^{-11}\,\text{s} , \qquad \frac{t_o}{T} = \frac{1,55}{1,52}\frac{10^{-11}}{10^{-16}} = 1.02\times10^5 .$$

Άρα η παραδοχή $t_o / T \gg 1$ επαληθεύεται και, αν ίσχυε η κλασική μηχανική, το άτομο του υδρογόνου θα κατέρρεε σε 15,5 τρισεκατομμυριοστά του δευτερολέπτου. Ευτυχώς υπάρχει το $\hbar$ (!)

Διαστατική ανάλυση

Το t_o θα εξαρτάται από:

(α) Το e (εάν δεν υπήρχε το e δεν θα υπήρχε ακτινοβολία και η κίνηση θα συνεχιζόταν για πάντα, θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν συγκρούσεις με άλλα συστήματα, όπως στην περίπτωση της Γης γύρω από τον Ήλιο).

(β) Το a_B (που είναι η αρχική απόσταση, αν a_B=∞, t_o=∞)

(γ) Τη μάζα m του ηλεκτρονίου (αφού το m επηρεάζει την επιτάχυνση που επηρεάζει την ακτινοβολία)

(δ) Την ταχύτητα του φωτός c (αφού πρόκειται για ακτινοβολία· αν το c=∞, τότε θα είχαμε το ηλεκτροστατικό όριο και όχι ακτινοβολία).

Από τα τρία πρώτα φτιάχνουμε δύο μεγέθη με διαστάσεις χρόνου, t_1, και ταχύτητας, υ_1.

$$t_1 = \frac{a_B}{\upsilon_1} = \frac{m^{1/2} a_B^{3/2}}{e}\ , \quad \upsilon_1 = \frac{e}{(m a_B)^{1/2}}\ . \quad \text{Άρα} \quad t_o = \frac{m^{1/2} a_B^{3/2}}{e} f\left(\frac{\upsilon_1}{c}\right),$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι ακόμη άγνωστη. Όμως το c μπαίνει μόνο στην ακτινοβολία και μπαίνει ως c^3. Επομένως $f(x) = C x^{-3}$ (γιατί όχι $f(x)=x^3$; Γιατί όταν $c\to\infty$ το $t_o\to\infty$). Άρα

$$t_o = C \frac{m^{1/2} a_B^{3/2}}{e} \frac{c^3 m^{3/2} a_B^{3/2}}{e^3} = C \frac{m^2 a_B^3 c^3}{e^4}\ .$$

5. Θεωρήστε δύο επίπεδες παράλληλες πλάκες σε απόσταση d μεταξύ τους που αποτελούνται από τέλειο μέταλλο και είναι ηλεκτρικά αφόρτιστες. Ο H. Casimir το 1948 πρότεινε σε μια εργασία του ότι υπάρχει μια ελκτική ΗΜ δύναμη μεταξύ των δύο πλακών καίτοι είναι αφόρτιστες. Η πρόβλεψή του αυτή επαληθεύθηκε πειραματικά αρκετά αργότερα. Με χρήση διαστατικής ανάλυσης βρέστε τον τύπο που δίνει αυτή τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, αφού πρώτα αναρωτηθείτε για το φυσικό μηχανισμό που προκαλεί αυτή την έλξη.

Λύση: Στο χώρο ανάμεσα στις δύο πλάκες υπάρχουν κβαντικές διακυμάνσεις του ΗΜ πεδίου, η ενέργεια των οποίων δίνεται από τη λεγόμενη "κίνηση μηδενικού σημείου" $E_{o\lambda}(d) = \frac{1}{2}\sum_n \hbar\omega_n$. (Βλ. Σχ. 2.6 και σχετικά σχόλια). Η ενέργεια $E_{o\lambda}(d)$ είναι προφανώς μηδέν για d=0 και είναι άπειρη για $d\to\infty$. Επομένως, αν θεωρήσουμε τη διαφορά $\Delta E_{o\lambda}(d) \equiv E_{o\lambda}(d) - E_{o\lambda}(\infty)$ έχουμε ότι $\Delta E_{o\lambda}\to 0$ για $d\to\infty$ και $\Delta E_{o\lambda}\to -\infty$ για $d\to 0$. Η ποσότητα $\Delta E_{o\lambda}$ οφείλει να εξαρτάται από την απόσταση d και από τις παγκόσμιες σταθερές $\hbar$ και c (αφού πρόκειται για κβαντικό, ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο). Δεν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των μεταλλικών πλακών, αφού θεωρήσαμε ότι είναι τέλεια μέταλλα. Προφανώς το $\Delta E_{o\lambda}(d)$ είναι ανάλογο της επιφάνειας S των μεταλλικών πλακών (θεωρούμε ότι $S \gg d^2$). Άρα

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}(d)}{S} = C \hbar^\alpha c^\beta d^\gamma\ , \quad \text{ή} \quad \frac{[E]}{\left[\ell^2\right]} = \left[E^\alpha t^\alpha\right]\left[\ell^\beta / t^\beta\right]\left[\ell^\gamma\right].$$

Η παραπάνω διαστατική σχέση ικανοποιείται για a=β=1 και $\beta + \gamma = -2 \Rightarrow \gamma = -3$. Επομένως

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}(d)}{S} = C \frac{\hbar c}{d^3}\ ,$$

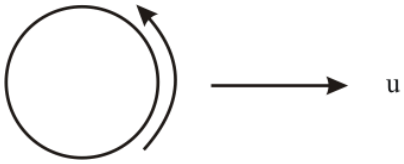
όπου το C είναι αρνητικός αριθμός για να ικανοποιηθούν οι οριακές συνθήκες. Συμβαίνει να είναι $C=-\pi^2/720$ και επομένως η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (δηλ. η ελκτική πίεση) είναι

$$\frac{F}{S} = -\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{\Delta E(d)}{S}\right) = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{d^4} = -1,297\,\text{bar} \quad \text{για } d\text{=}10\text{nm}.$$

4.5 Άλυτες ασκήσεις

1. Εκτιμήστε τη δυναμική άνωση στις πτέρυγες ενός αεροπλάνου ταχύτητας υ. Τις πτέρυγες θεωρήστε τις ως απαραμόρφωτα ορθογώνια μεταλλικά παραλληλόγραμμα.

2. Θεωρήστε μια μπάλα που κινείται στον αέρα με μια αρχική ταχύτητα u ενώ ταυτόχρονα στρέφεται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού (ιδωμένη από πάνω) όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μπάλα θα αποκλίνει προς τα δεξιά ή τα αριστερά; Γιατί;
(Γι' αυτό το πολύ ενδιαφέρον θέμα βλ. *Quantum*, Νοεμβ./Δεκ. 94, σελ. 7-14).



3. Προσδιορίστε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα ως συνάρτηση της θερμοκρασίας του λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.5) και τον ορισμό του B για τριδιάστατα συστήματα: $B_S = -V(\partial P/\partial V)_S$, όπου ο κάτω δείκτης S σημαίνει ότι η παραγώγιση γίνεται υπό σταθερή εντροπία μια και η διάδοση του ήχου γίνεται υπό ισεντροπικές συνθήκες, αφού δεν υπάρχει αρκετός χρόνος ούτε για παραγωγή εντροπίας ούτε για ανταλλαγή θερμότητας. Η εξάρτηση της εντροπίας του αέρα από τον όγκο και τη θερμοκρασία είναι της μορφής $S/Nk_B = \ln V + \frac{5}{2}\ln T + f(N)$. Γιατί 5/2 και όχι 3/2, όπως στην άλυτη άσκηση 3.4;

4. Η αντοχή των ελαστικών ενός αυτοκινήτου θέτει ένα άνω όριο στη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το αυτοκίνητο (που συχνά είναι κατώτερο από αυτό που καθορίζει η ισχύς του κινητήρα). Μπορείτε να εκτιμήσετε αυτό το άνω όριο; (Βλ. Quantum, Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1999, σελ.10).

Κεφάλαιο 5

Φωτόνια: Αγγελιοφόροι και συνδετήρες

Σύνοψη: *Αναφέρονται οι εξισώσεις του Maxwell και τα τρία επίπεδα χειρισμού των ΗΜ αλληλεπιδράσεων (βλ. 5.1,εισαγωγή και παράρτημα IV). Παρουσιάζεται το αέριο φωτονίων σε θερμοδυναμική ισορροπία, η εκπομπή φωτονίων από κάποια υλικά συστήματα, η σκέδασή τους από αυτά, καθώς και η έννοια του μήκους ελεύθερης διαδρομής. Τέλος αναφέρεται η αλληλεπίδραση συμπυκνωμένης ύλης και ΗΜ πεδίου μεσω των αλληλένδετων εννοιών ηλεκτρικής αγωγιμότητας, επιδεκτικότητας και επιτρεπτότητας (διηλεκτρικής συνάρτησης) καθώς και μαγνητικής επιδεκτικότητας και διαπερατότητας.*

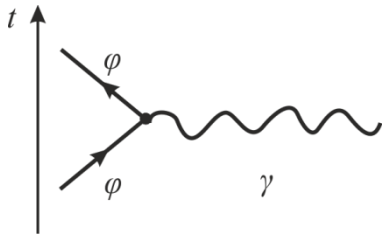
5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε χωριστά τις ηλεκτρομαγνητικές άλληλεπιδράσεις (με άλλα λόγια τα φωτόνια), λόγω του εύρους των εφαρμογών τους τόσο στον φυσικό όσο και στον τεχνολογικό Κόσμο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σύντομα στις υπόλοιπες τρεις βασικές αλληλεπιδράσεις.

Οι ΗΜ αλληλεπιδράσεις μπορούν εν γένει να μελετηθούν σε τρία επίπεδα. *Το πρώτο* και ακριβέστερο επίπεδο είναι αυτό που λαμβάνει ρητά υπόψη τον κυματοσωματιδιακό χαρακτήρα τους, όπως π.χ., στην μετάβαση ενός ηλεκτρονίου από μία διεγερμένη κατάσταση στη θεμελιώδη με ταυτόχρονη εκπομπή ενός φωτονίου. Το επίπεδο αυτό αφενός μεν βασίζεται στις εξισώσεις του Maxwell, αφετέρου δε αποδίδει στο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο κβαντικές ιδιότητες έτσι ώστε τα πεδία αυτά να ικανοποιούν σχέσεις αντίστοιχες με την αρχή της απροσδιοριστίας· ως αποτέλεσμα η ενέργεια, η ορμή και η στροφορμή του ΗΜ πεδίου εκφράζονται ως ακέραια πολλαπλάσια του $\hbar\omega$, του $\hbar\mathbf{k}$ και του $\hbar$ αντιστοίχως (βλ. σχέσεις (IV.14) και (IV.15), σελ. 399). Ο προηγμένος και απαιτητικός φορμαλισμός για τον κβαντικό χειρισμό του ΗΜ πεδίου (που αναφέρεται ως QED=quantum

electrodynamics) καταλήγει συνήθως στους υπολογιστικούς κανόνες που συνοδεύουν τα διαγράμματα Feynman. Όλο αυτό το φορμαλιστικό και υπολογιστικό σχήμα είναι σαφώς πέραν του επιπέδου αυτού του βιβλίου. Έτσι θα αρκεστούμε εδώ στην απλή εικόνα των διαγραμμάτων Feynman, που απεικονίζουν με ενάργεια τη φυσική διαδικασία, χωρίς όμως τους αντίστοιχους υπολογιστικούς κανόνες που τα συνοδεύουν.

Στο Σχ.5.1 παρουσιάζεται το στοιχειώδες διάγραμμα Feynman για την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση. Ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωμάτιο (φ)



Σχ. 5.1 Ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωμάτιο φ είτε ύλης είτε αλληλεπιδράσεων εκπέμπει ή απορροφά ένα φωτόνιο γ. Το ίδιο διάγραμμα Feynman μπορεί να περιγράψει και άλλες στοιχειώδεις φυσικές διαδικασίες αλλάζοντας την κατεύθυνση της φοράς του χρόνου.

(είτε είναι σωμάτιο ύλης, όπως π.χ. το ηλεκτρόνιο ή κάποιο από τα κουάρκ, ή σωμάτιο–φορέας δυνάμεων, όπως τα $W^{\pm}$) μπορεί να εκπέμψει ή να απορροφήσει ένα φωτόνιο (γ) παραμένοντας σωμάτιο φ και διατηρώντας το ηλεκτρικό του φορτίο (αφού το φωτόνιο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο).

Επιλέγοντας τη διεύθυνση του χρόνου οριζόντια και όχι κατακόρυφη, όπως στο Σχ. 5.1, το παραπάνω στοιχειώδες διάγραμμα μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως δίδυμη εξαφάνιση, ή δίδυμη δημιουργία ενός ζεύγους σωματίων/αντισωματίων με αντίστοιχη δημιουργία ή εξαφάνιση ενός φωτονίου.

Η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, όπως και όλες οι άλλες, διατηρεί σε κάθε στοιχειώδη κόμβο αλληλεπίδρασης τα ακόλουθα μεγέθη:
ορμή
στροφορμή (όχι ταυτόχρονα με την ορμή)
ηλεκτρικό φορτίο
χρωματικό φορτίο
βαρυονικό αριθμό
λεπτονικό αριθμό (χωριστά για κάθε μία από τις τρεις οικογένειες λεπτονίων)[1].

[1] Υπάρχουν όμως και κάποιες σπάνιες διαδικασίες ασθενών αλληλεπιδράσεων, όπου είναι δυνατόν μετά την εκπομπή ενός νετρίνου, π.χ., ενός ν_μ αυτό να αλλάζει σε ν_e και πάλι πίσω σε ν_μ, πράγμα που σημαίνει ότι η διατήρηση χωριστά του

Η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση διατηρεί επίσης και άλλα μεγέθη, όπως είναι, π.χ. η ομοτιμία (parity), δηλαδή το αναλλοίωτο σε κατοπτρισμό στο χώρο, ή το αναλλοίωτο σε αντιστροφή του χρόνου (time reversal), ή η συζυγία φορτίου (charge conjugation), που αναφέρεται στη συμμετρία σωματίου/αντισωματίου. Φυσικά η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση είναι διαφορετική όταν το ηλεκτρικό φορτίο είναι διαφορετικό, πράγμα που αναφέρεται στη σχετική βιβλιογραφία ως μη διατήρηση του ισοτοπικού σπιν *I*. Για τη διατήρηση της ενέργειας ο αναγνώστης θα πρέπει να ξαναδεί το σχόλιο στο Κεφ.1, σελ. 34 πριν από το Σχ.1.5 ή, για περισσότερες λεπτομέρειες, τις σελίδες 191-196 της Κβαντομηχανικής Ι του Τραχανά [18].

Το δεύτερο επίπεδο μελέτης είναι προσεγγιστικό γιατί λαμβάνει υπόψη μόνο τον κυματικό χαρακτήρα και όχι τον σωματιδιακό. Η προσέγγιση αυτή είναι απολύτως ικανοποιητική σε αρκετές περιπτώσεις όπου έχουμε ένα πολύ μεγάλο αριθμό κβάντων, όπως π.χ. στο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που μεταφέρει πληροφορίες στο κινητό μας τηλέφωνο ή στην τηλεόραση μας, κλπ.

Για το δεύτερο αυτό επίπεδο μελέτης της ΗΜ αλληλεπίδρασης αρκούν οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell, που παρουσιάζονται στο παράρτημα IV στην ολοκληρωτική τους μορφή και για το κενό, δηλαδή απουσία ύλης. Η παρουσίαση γίνεται και στο σύστημα SI και στο σύστημα G-CGS. Προκειμένου να δούμε πώς οι εξισώσεις του Maxwell τροποποιούνται παρουσία της ύλης, συνήθως συμπυκνωμένης ύλης, θα ξεκινήσουμε με τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό σε διαφορική μορφή και στο σύστημα SI:

$$\nabla\cdot(\epsilon_0\mathbf{E})=\rho, \qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\,, \tag{5.1α}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \qquad \nabla\times(\mu_0^{-1}\mathbf{B})=\mathbf{j}+\tfrac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\mathbf{E})\,. \tag{5.1β}$$

Για τους ορισμούς του ηλεκτρικού πεδίου **E** και του μαγνητικού πεδίου **B** βλ. το παράρτημα IV, σελ. 393. Για το ϵ_0 θα χρησιμοποιήσουμε τον μάλλον ασυνήθιστο στην ελληνική βιβλιογραφία όρο *επιτρεπτότητα* (permittivity) του κενού και για το μ_0 τον καθιερωμένο όρο *διαπερατότητα* (permeability) του κενού.

Ο συνήθης και εύκολος τρόπος για να γενικεύσουμε τις εξισώσεις (5.1) παρουσία ύλης είναι εισάγοντας τις *αδιάστατες* ποσότητες ϵ και μ και κάνοντας τις αντικαταστάσεις $\epsilon_0\to\epsilon\epsilon_0$, $\mu_0\to\mu\mu_0$. Η μεν ϵ ονομάζεται *διηλεκτρική συνάρτηση* και χαρακτηρίζει τις ηλεκτρικές ιδιότητες της όποιας ύλης, η δε μ ονομάζεται *σχετική διαπερατότητα* ή απλώς διαπερατότητα (όταν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης) και χαρακτηρίζει τις μαγνητικές

ηλεκτρονιακού λεπτονικού αριθμού (ή του μιονικού ή του τ) παραβιάζεται σε πολύ μικρό βαθμό. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ταλάντωση των νετρίνων.

ιδιότητες της όποιας ύλης. Είναι επίσης σύνηθες να εισάγουμε δύο νέα πεδία

$$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E} \qquad \mathbf{H} = (\mu\mu_0)^{-1}\mathbf{B}, \tag{5.2}$$

μέσω των οποίων οι εξισώσεις του Maxwell στην ύλη γράφονται ως εξής:

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_{ext}, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j}_{ext} + \tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\text{ , SI} \tag{5.3α}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho_{ext}, \ \nabla\times\mathbf{E} = -\tfrac{\partial}{c\partial t}\mathbf{B}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{H} = \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{ext} + \tfrac{\partial}{c\partial t}\mathbf{D}, \tag{5.3β}$$

Οι (5.3β) είναι στο σύστημα G-CGS. Το ρ_{ext} είναι η πυκνότητα εξωτερικών φορτίων που δεν ανήκουν στην ουδέτερη ύλη εντός της οποίας υπάρχει το ΗΜ πεδίο. Το $\mathbf{j}_{ext}$ είναι η ροή αυτών των εξωτερικών φορτίων.

Το πώς συνδέεται το σύστημα SI με το σύστημα G-CGS εξηγείται στο παράρτημα IV, σελ. 399.

Θα κλείσουμε αυτή τη σύντομη εισαγωγή στις εξισώσεις του Maxwell επισημαίνοντας ότι το **D** συνδέεται με την πόλωση **P** της ύλης (που επάγει ένα ηλεκτρικό πεδίο **E)** και το **H** με τη μαγνήτιση **M** της ύλης (που επάγει ένα μαγνητικό πεδίο **B)** ως ακολούθως:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad \mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{M}\text{ , SI,} \tag{5.4α}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\text{ , G-CGS.} \tag{5.4β}$$

Δεδομένου ότι $\mathbf{P} = \sum \mathbf{r}_i\rho_i$ και $\mathbf{j} = \sum \boldsymbol{\upsilon}_i\rho_i$ έπεται ότι $\mathbf{j} = (\partial\mathbf{P}/\partial t) = -i\omega\mathbf{P}$ (θεωρώντας την συνήθη εξάρτηση από το χρόνο, $\exp(-i\omega t)$). Συνδυάζοντας την (5.2) την (5.4α) με την $\mathbf{P}=(i/\omega)\mathbf{j}$ και τον νόμο του Ohm $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ βρίσκουμε

$$\boxed{\epsilon\epsilon_0 = \epsilon_0 + (i\sigma/\omega)\text{ , SI ή }\epsilon = 1 + (4\pi i\sigma/\omega)\text{, G-CGS.}} \tag{5.5}$$

Η σχέση (5.5) είναι σημαντική γιατί συνδέει δύο πολύ σημαντικές ποσότητες, την διηλεκτρική συνάρτηση ϵ με την αγωγιμότητα σ.

Το τρίτο επίπεδο είναι ακόμη πιο προσεγγιστικό από το δεύτερο γιατί αντικαθιστά τον εξαρτώμενο από το χρόνο χαρακτήρα ενός κλασικού ΗΜ κύματος με ένα ηλεκτρικό πεδίο ανεξάρτητο από το μαγνητικό πεδίο και ένα μαγνητικό πεδίο ανεξάρτητο από το ηλεκτρικό πεδίο. Η μετάβαση από το δεύτερο στο τρίτο επίπεδο γίνεται κατανοητή εάν θέσουμε στις δύο πρώτες εξισώσεις της (5.3β) $c=\infty$ (που σημαίνει ότι η μετάδοση των ηλεκτρικών δυνάμεων γίνεται ακαριαία), οπότε το ηλεκτροστατικό πεδίο προσδιορίζεται από τις σχέσεις

$$\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho_{ext}, \quad \nabla\times\mathbf{E} = 0, \quad \text{G-CGS.} \tag{5.6}$$

Η δεύτερη σχέση από τις (5.6) σημαίνει ότι το πεδίο **E** είναι αστρόβιλο, δηλαδή ότι μπορεί να ορισθεί δυναμικό $\mathcal{V}$ μέσω της σχέσης $\mathbf{E} = -(\partial\mathcal{V}/\partial\mathbf{r})$

που για σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου και κάνοντας χρήση της πρώτης από τις δύο σχέσεις (5.6) οδηγεί στο απλό δυναμικό Coulomb της μορφής $-e^2/r$ (G-CGS) για την αλληλεπίδραση πρωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο. Ακόμη και αυτή η προσέγγιση σε αρκετές περιπτώσεις θεωρείται ικανοποιητική. Π.χ., οι καταστάσεις του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου μελετώνται κατ' αρχή χρησιμοποιώντας το δυναμικό Coulomb και τα αποτελέσματα είναι σε πολύ καλή (όχι άριστη) συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα.

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιώντας κυρίως τη μέθοδο της διαστατικής ανάλυσης θα αποδείξουμε μερικούς πολύ χρήσιμους τύπους για τα φωτόνια και την αλληλεπίδραση τους με φορτισμένα σωμάτια και ουδέτερα άτομα ή μόρια, ή στερεά. Όπου στις τελικές σχέσεις εμφανίζεται το $\hbar$ αυτό σημαίνει ότι ο σωματιδιακός χαρακτήρας της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης είναι "εκ των ων ουκ άνευ". Στην απόδειξη με χρήση της διαστατικής ανάλυσης η παρουσία του $\hbar$ επιβάλλεται σε όλες εκείνες τις περιπτώσεις όπου η κλασική φυσική αποτυγχάνει να δώσει μια διαστατικά ή φυσικά συνεπή απάντηση.

5.2 Φωτόνια σε θερμοδυναμική ισορροπία

α) *Υπολογίστε τις θερμοδυναμικές ποσότητες ενός αερίου φωτονίων σε θερμοδυναμική ισορροπία.*

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, δύο μόνο θερμοδυναμικές μεταβλητές, ο όγκος V και η απόλυτη θερμοκρασία T, αρκούν για τη περιγραφή των φωτονίων σε θερμοδυναμική ισορροπία. Πέρα από τις μεταβλητές αυτές χρειάζονται και κάποιες παγκόσμιες σταθερές για να καταλήξουμε στους τελικούς τύπους. Μια από αυτές τις σταθερές είναι αυτή του Boltzmann, η k_B=1,38×10^{-23}JK^{-1}. Όμως *στα φυσικά φαινόμενα η σταθερά του Boltzmann k_B και η απόλυτη θερμοκρασία T πάνε πάντα 'πακέτο' ως γινόμενο k_BT με διαστάσεις ενέργειας,* $[k_BT]=[E]$**.** Μια άλλη παγκόσμια σταθερά που οφείλει να εμφανισθεί στους τύπους για τις θερμοδυναμικές ποσότητες των φωτονίων είναι προφανώς η ταχύτητα του φωτός στο κενό c, αφού είναι η μόνη παγκόσμια σταθερά που χαρακτηρίζει τα ΗΜ φαινόμενα σε κλασικό επίπεδο. Επιπλέον θα εμφανισθεί και η σταθερά του Planck, $\hbar$, γιατί το κλασικό επίπεδο περιγραφής δεν επαρκεί για να υπάρξει λύση, όπως θα δούμε πιο κάτω. Ας υπολογίσουμε πρώτα την εσωτερική ενέργεια U, η οποία ως εκτατική ποσότητα οφείλει να είναι ανάλογη της μόνης εκτατικής ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή του όγκου V, $U=V\varepsilon$. Η ποσότητα ε, που είναι εξ ορισμού η πυκνότητα ενέργειας, θα εξαρτάται, βάσει των όσων αναφέραμε, από το γινόμενο k_BT, την c και την $\hbar$. Επομένως

$$[\varepsilon]=\left[\left(k_BT\right)^{\mu}c^{\nu}\hbar^{\xi}\right]. \tag{5.7}$$

Για να είναι οι διαστάσεις του αριστερού και του δεξιού σκέλους της (5.7) ίδιες θα πρέπει $\mu+\xi=1$, $2\mu+\nu+2\xi=-1$, $-2\mu-\nu-\xi=-2$ (αποδείξτε το).

Οι παραπάνω σχέσεις συνεπάγονται $\xi=-3$, $\mu=4$, $\nu=-3$, οπότε[2]

$$\boxed{\varepsilon = c_1 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}}, \qquad (5.8)$$

που είναι η σωστή έκφραση με την αριθμητική σταθερά c_1 να προκύπτει ίση με $\pi^2/15$. Παρατηρήστε ότι αν εφαρμόζαμε τη μέθοδο της διαστατικής ανάλυσης στα πλαίσια της κλασικής φυσικής θα έπρεπε να είχαμε θέσει από την αρχή $\xi=0$, οπότε η (5.7) δεν θα είχε λύση.

Από τις σχέσεις $U=V\varepsilon$, $(\partial U/\partial S)_V = T$ και (5.8) βρίσκουμε ότι $S=\frac{4}{3}U/T$. Επομένως η ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz $F\equiv U-TS$ ισούται με $-\frac{1}{3}U$ και η πίεση $P=-(\partial F/\partial V)_T$ είναι ίση με $\frac{1}{3}\varepsilon=\frac{1}{3}(U/V)$. Τέλος η ελεύθερη ενέργεια του Gibbs $G=F+PV$ προκύπτει ίση με μηδέν όπως το περιμέναμε, αφού $G=N\mu$ και το χημικό δυναμικό μ οφείλει να είναι μηδέν για τα φωτόνια ως αποτέλεσμα του γεγονότος ότι ο αριθμός τους N δεν διατηρείται.

β) *Βρείτε τον τύπο ακτινοβολίας μέλανος σώματος διαστατικά*

Η ακτινοβολία I από την επιφάνεια ενός μακροσκοπικού σώματος ορίζεται ως η συνολική ΗΜ ενέργεια που εκπέμπεται προς όλες τις εκτός του σώματος κατευθύνσεις ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου. Επομένως οι διαστάσεις $[I]$ του I είναι $[E]/[\ell^2][t]$.

Μέλαν σώμα θεωρείται εκείνο που απορροφά 100% της ακτινοβολίας που προσπίπτει σε αυτό ανεξάρτητα της συχνότητας της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι για ένα μέλαν σώμα και προκειμένου για τον προσδιορισμό του I, κανένα άλλο χαρακτηριστικό του δεν παίζει κάποιο ρόλο. Τι απομένει επομένως που να προσδιορίζει το I ενός μέλανος σώματος; Προφανώς η θερμοκρασία του (άλλη η θερμότητα που εκπέμπει ένα πυρακτωμένο σώμα και άλλη αυτή που εκπέμπει όταν κρυώσει). Όμως, όπως επισημάναμε προηγουμένως, στα φυσικά φαινόμενα η σταθερά του Boltzmann k_B και η απόλυτη θερμοκρασία T πάνε πάντα 'πακέτο' ως γινόμενο k_BT με διαστάσεις ενέργειας, $[k_BT]=[E]$**.** Περιμένουμε επίσης να εξαρτάται το I από την ταχύτητα του φωτός c (αφού πρόκειται για Η/Μ φαινόμενο). Θα εξαρτάται, τέλος, και από τη σταθερά του Planck $\hbar$ (αφού ο Planck χρειάστηκε να ενσωματώσει για πρώτη φορά την κατά

[2] Στον τύπο (5.8) μπορεί να καταλήξει κανείς πολύ πιο γρήγορα παρατηρώντας ότι το $(\hbar c)/(k_BT)$ έχει διαστάσεις μήκους. Επομένως το $[k_BT]/\left[(\hbar c)/(k_BT)\right]^3$ έχει τις επιθυμητές διαστάσεις ενέργεια /μήκος^3.

κβάντα $\hbar\omega$ εκπομπή της ΗΜ ακτινοβολίας, μια και η κλασική φυσική απετύγχανε πλήρως να ερμηνεύσει το φαινόμενο της εκπομπής ΗΜ από ένα μέλαν σώμα). Η συχνότητα ω δεν θα εμφανισθεί αφού εξετάζουμε τη συνολική ακτινοβολία που περιλαμβάνει όλες τις συχνότητες από το μηδέν μέχρι το άπειρο.

Τα τρία μεγέθη k_BT, c, $\hbar$, όπως είδαμε προηγουμένως, ορίζουν ένα σύστημα μονάδων, αφού $[\hbar]/[k_BT]=[E][t]/[E]=[t]$ και $[\hbar][c]/[k_BT]=[t][c]=[\ell]$. Επομένως ο μόνος συνδυασμός των k_BT, c, $\hbar$, που θα δώσει διαστάσεις $[E]/[\ell^2][t]$ είναι ο ακόλουθος:

$$\boxed{I = c_2 \frac{k_BT}{(\hbar c/k_BT)^2(\hbar/k_BT)} = c_2 \frac{(k_BT)^4}{\hbar^3 c^2}}, \qquad (5.9)$$

όπου η αριθμητική σταθερά c_2 προκύπτει από λεπτομερή θεωρία ότι ισούται με $\pi^2/60$.

Στο αποτέλεσμα (5.9) μπορούμε να καταλήξουμε χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο σύμφωνα με τον οποίο η ροή οποιασδήποτε ποσότητας προς μια κατεύθυνση είναι ίση με το γινόμενο της ταχύτητάς της επί την πυκνότητά της. Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν τον τύπο (5.8) επί c βρίσκουμε τη σχέση (5.9):

$$I = \tfrac{1}{4}\varepsilon c\,. \qquad (5.9\beta)$$

Αποδείξτε ότι ο έξτρα αριθμητικός παράγοντας 1/4 προέρχεται από την ολοκλήρωση ως προς τις εκτός σώματος κατευθύνσεις της ροής (μόνο η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της ροής συμβάλλει στο I).

γ) *Με διαστατική ανάλυση προσδιορίστε τη φασματική κατανομή της ακτινοβολίας ενός μέλανος σώματος.*

Θα αντιμετωπίσουμε αυτό το θέμα κατ' αρχή ως κλασικό πρόβλημα, χωρίς δηλαδή την παρουσία της $\hbar$. Οι φυσικές ανεξάρτητες μεταβλητές είναι το γινόμενο k_BT και η κυκλική συχνότητα ω. Από παγκόσμιες σταθερές έχουμε μόνο την ταχύτητα του φωτός c, μία και αποφασίσαμε προς το παρόν να αγνοήσουμε το σωματιδιακό χαρακτήρα της ΗΜ ακτινοβολίας. Το μέγεθος I_ω που θέλουμε να προσδιορίσουμε έχει διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας, ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα συχνότητας: $[I_\omega]=[E\ell^{-2}]=$ $=[mt^{-2}]$. Έχουμε επομένως $[I_\omega]=[mt^{-2}]=[(k_BT)^\mu\omega^\nu c^\xi]$, οπότε μ=1, ν=2, ξ = –2 και

$$I_\omega = a(k_BT)\omega^2/c^2\,, \qquad (5.10)$$

όπου η αριθμητική σταθερά α προκύπτει ίση με $1/4\pi^2$. Ο τύπος (5.10) είναι σωστός για πολύ μικρές συχνότητες. Δεν μπορεί όμως να ισχύει για όλες τις συχνότητες αφού δεν ικανοποιεί τη σχέση

$$I = \int_0^\infty d\omega I_\omega ,$$

όπου το I δίνεται από τη σχέση (5.9). Αντίθετα, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (5.10), το ολοκλήρωμα θα προκύψει άπειρο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ένας τύπος για το I_ω, που θα ισχύει για όλες τις συχνότητες, θα πρέπει να λάβει υπόψη του τη σωματιδιακή φύση της ΗΜ ακτινοβολίας, θα πρέπει δηλαδή να περιέχει τη $\hbar$ μέσω της αδιάστατης ποσότητας $\hbar\omega / k_B T$. Άρα

$$\boxed{I_\omega = a k_B T (\omega^2 / c^2) \varphi(\hbar\omega / k_B T)}, \qquad (5.11)$$

όπου a=$1/4\pi^2$ και η συνάρτηση $\varphi(\hbar\omega / k_B T)$ θα πρέπει να τείνει στη μονάδα όταν το όρισμά της τείνει στο μηδέν και να τείνει στο μηδέν όταν το όρισμά της γίνεται πολύ μεγαλύτερο από τη μονάδα. Η τελευταία αυτή συμπεριφορά υπαγορεύεται από όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.6 σχετικά με την αδυναμία θερμικής διέγερσης βαθμών ελευθερίας όταν $k_B T \ll \delta\varepsilon = \hbar\omega$. Η λεπτομερής θεωρία οδηγεί στην εξής σχέση:

$$\varphi(\hbar\omega / k_B T) = (\hbar\omega / k_B T)\left[e^{\hbar\omega / k_B T} - 1 \right]^{-1} . \qquad (5.11')$$

Σημειώστε ότι θα μπορούσαμε να πετύχουμε το σωστό αποτέλεσμα για το I ολοκληρώνοντας ως προς ω την (5.10), εάν θέταμε ένα κατάλληλο άνω όριο ω_M στο ολοκλήρωμα, όπου το $\hbar\omega_M$ οφείλει να ισούται με $a' k_B T$ με το a' να είναι μια αριθμητική σταθερά της τάξεως της μονάδας (λόγω του ότι συχνότητες πολύ μεγαλύτερες από $k_B T$ στην ουσία δεν μπορούν να διεγερθούν θερμικά, βλ. ενότητα 2.6). Πράγματι το αποτέλεσμα θα ήταν τότε

$$I = \frac{a}{3a'^3} \frac{(k_B T)^4}{c^2 \hbar^3} ,$$

που συμπίπτει με την (5.9), εάν η αριθμητική σταθερά τεθεί ίση με $\pi^2 / 60$.

5.3 Εκπομπή φωτονίων

α) *Ακτινοβολία από ένα κινούμενο σωμάτιο με ηλεκτρικό φορτίο q*

Η ΗΜ ενέργεια J που εκπέμπεται ανά μονάδα χρόνου από ένα κινούμενο φορτίο q θα εξαρτάται από το q (αφού το ηλεκτρικό φορτίο είναι πηγή και αποδέκτης της ΗΜ αλληλεπίδρασης), από την ταχύτητα του φωτός c (αφού η c χαρακτηρίζει την ΗΜ ακτινοβολία) και από την επιτάχυνση a του σωματίου (αφού από όλες τις κινηματικές παραμέτρους μόνο η επιτάχυνση

συνδέεται άμεσα με τη δύναμη, η οποία παρέχει το αναγκαίο έργο για να αντικαταστήσει την ενέργεια που ακτινοβολείται). Υπάρχει ένας μόνο συνδυασμός των τριών αυτών ποσοτήτων που έχει τις σωστές διαστάσεις, ενέργεια ανά χρόνο: q^2a^2/c^3. Άρα

$$J = \eta q^2 a^2 / c^3, \tag{5.12}$$

όπου η αριθμητική σταθερά η είναι ίση με 2/3 εάν το a^2 είναι η μέση ως προς το χρόνο τιμή του τετραγώνου της επιτάχυνσης.

β) *Ακτινοβολία από ένα ηλεκτρικά ουδέτερο σύστημα που χαρακτηρίζεται από μια ταλαντούμενη διπολική ροπή* $\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}$.

Μπορούμε να βρούμε τον τύπο για την ακτινοβολία διπόλου είτε από την προηγούμενη σχέση (5.12) είτε παρατηρώντας ότι οι σχετικές ποσότητες είναι η διπολική ροπή **p**, η κυκλική συχνότητα ω της ταλαντούμενης διπολικής ροπής και η ταχύτητα του φωτός *c*. Πράγματι μόνο ένας συνδυασμός αυτών των ποσοτήτων έχει διαστάσεις ενέργειας ανά χρόνο. Άρα

$$J = \eta \mathbf{p}^2 \omega^4 / c^3. \tag{5.13}$$

γ) *Χρησιμοποιείστε τη σχέση (5.13) για να εκτιμήσετε το χρόνο ζωής τ μιας διεγερμένης κατάστασης που αποδιεγείρεται μέσω διπολικής αλληλεπίδρασης.*

Το γινόμενο του *J* επί το χρόνο ζωής τ δίνει τη συνολική ενέργεια που εκπέμπεται κατά τη διάρκεια της αποδιέγερσης· η ενέργεια αυτή είναι ίση με την ενέργεια $\hbar\omega$ του εκπεμπομένου φωτονίου όπου $\hbar\omega = \varepsilon_1 - \varepsilon_o$ είναι η διαφορά ενεργειακών σταθμών μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης. Άρα $J \cdot \tau = \hbar\omega$ ή[3]

$$\tau = \hbar\omega / J = \hbar c^3 / \eta \mathbf{p}^2 \omega^3 . \tag{5.14}$$

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο αυτόν για την μετάβαση $2p \rightarrow 1s$ στο άτομο του υδρογόνου, όπου το $\hbar\omega = \varepsilon_{2p} - \varepsilon_{1s} = 10,2\,\text{eV}$, (βλέπε Κεφ. 9, σχέση (9.8)) και αν εκτιμήσουμε ότι $\mathbf{p}^2 \approx e^2 a_B^2$ και η=2/3 βρίσκουμε ότι $\tau \approx 1{,}77 \times 10^{-9}$s έναντι της τιμής $\tau \approx 1{,}59 \times 10^{-9}$s που δίνει ένας λεπτομερής και περίπλοκος κβαντικός υπολογισμός του τ.

---

[3] Υιοθετήσαμε μια ημικλασική εικόνα σύμφωνα με την οποία η αποδιέγερση είναι μια συνεχής διαδικασία κατά τη διάρκεια του χρόνου τ. Σύμφωνα με την κβαντική εικόνα, αυτή η ίδια ενέργεια $\hbar\omega$ εκπέμπεται στο σύνολό της ασυνεχώς μια κάποια χρονική στιγμή, *t*, τέτοια ώστε $\langle t \rangle = \tau$. Άρα κβαντικά στο χρονικό διάστημα τ εκπέμπεται ασυνεχώς κατά μέσο όρο ένα και μόνο ένα φωτόνιο.

Σημειώστε ότι στον τύπο (5.14) ο χρόνος ζωής μιας διεγερμένης κατάστασης είναι αντιστρόφως ανάλογος της τρίτης δύναμης της συχνότητας του εκπεμπομένου φωτονίου. Επομένως όσο μικρότερη η ενεργειακή διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης τόσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος ζωής της διεγερμένης κατάστασης.

(δ) Ακτινοβολία μαγνητικού διπόλου, ηλεκτρικού τετραπόλου και τοροειδούς διπόλου

Ένα ουδέτερο ηλεκτρικά σύστημα πέρα από τη διπολική ηλεκτρική ακτινοβολία εκπέμπει φωτόνια και λόγω άλλων πολυπολικών ροπών μερικές από τις οποίες παρουσιάζουμε πιο κάτω κατά την αναμενόμενη σειρά ισχύος της αντίστοιχης ακτινοβολίας:

$$\text{Μαγνητική διπολική ροπή: } \mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum_i q_i\,\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\upsilon}_i \ \text{, G-CGS.} \qquad (5.15)$$

Η αντίστοιχη μαγνητική διπολική ακτινοβολία οφείλει να εξαρτάται από την μαγνητική διπολική ροπή **m** από τη συχνότητα ω και –φυσικά- από την ταχύτητα του φωτός στο κενό c. Από διαστατική ανάλυση έπεται ότι

$$J_m = \frac{2}{3}\frac{\mathbf{m}^2\omega^4}{c^3} \ . \qquad (5.16)$$

Σημειώστε ότι το μέγεθος αυτής της ακτινοβολίας είναι μικρότερο από αυτό της ηλεκτρικής διπολικής κατά ένα παράγοντα $(\upsilon/c)^2$, όπως προκύπτει από τον ορισμό του **m.**

$$\text{Ηλεκτρική τετραπολική ροπή: } Q_{a\beta} = \sum_i q_i\left[x_{ia}x_{i\beta} - \delta_{a\beta}r_i^2\right]. \qquad (5.17)$$

Η εκπεμπόμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που οφείλεται στην ηλεκτρική τετραπολική ροπή δίνεται από τον επόμενο τύπο:

$$J_D = \eta\frac{Q^2\omega^6}{c^5} = \frac{1}{180}\frac{Q^2\omega^6}{c^5} \ \text{(προκύπτει διαστατικά).} \qquad (5.18)$$

Ο έξτρα παράγοντας $\omega^2/c^2 \propto 1/\lambda^2$ σε σχέση με την διπολική ηλεκτρική ακτινοβολία υπάρχει προκειμένου να αντισταθμίσει τον έξτρα παράγοντα l^2 που οφείλεται στον ορισμό του Q^2.

Θα αναφέρουμε τέλος και την *τοροειδή διπολική ροπή*, η οποία έχει έλθει στο προσκήνιο τα τελευταία χρόνια και αποτελεί αντικείμενο τρέχουσας έρευνας κυρίως επειδή μέσω κατάλληλου συνδυασμού με την ηλεκτρική διπολική ροπή μπορεί να μηδενίσει σχεδόν την ολική ακτινοβολουμένη ενέργεια (επιτυγχάνοντας έτσι το λεγόμενο *δυναμικό ανάπολο*)

$$\text{Τοροειδής διπολική ροπή: } \mathbf{T} = \frac{1}{10c}\sum_i q_i \left\{ (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\upsilon}_i)\mathbf{r}_i - 2r_i^2 \boldsymbol{\upsilon}_i \right\}, \qquad (5.19)$$

με αντίστοιχη ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου

$$J_t = \frac{2}{3}\frac{T^2\omega^6}{c^5}\ . \qquad (5.20)$$

Δικαιολογήστε τον έξτρα παράγοντα $\omega^2/c^2 \propto 1/\lambda^2$ σε σχέση με τον τύπο (5.16).

5.4 Σκέδαση φωτονίων

Οποιαδήποτε διαδικασία σκέδασης χαρακτηρίζεται ποσοτικά κυρίως από τη λεγόμενη ολική ενεργό διατομή σκέδασης, σ_s, που έχει διαστάσεις επιφάνειας. Το σ_s μπορεί να θεωρηθεί ως το εμβαδόν εκείνου του τμήματος του μετώπου μιας προσπίπτουσας δέσμης, το οποίο εμποδίζεται από τον σκεδαστή να συνεχίσει την πορεία του. Ο ακριβής ορισμός του σ_s είναι ο εξής:

$$\boxed{\sigma_s \equiv \frac{\Gamma}{F} = \frac{\text{αριθμός σωματίων που σκεδάζονται/μονάδα χρόνου}}{\text{ροή σωματίων } (\equiv \text{συγκέντρωση σωματίων επί } \upsilon)}}, \qquad (5.21)$$

όπου Γ είναι ο αριθμός των σωματίων της προσπίπτουσας δέσμης ο οποίος σκεδάζεται (γενικότερα δεν συνεχίζει την πορεία του) ανά μονάδα χρόνου και F είναι η ροή των σωματίων της δέσμης. Όπως αναφέραμε στο εδάφιο 5.2(β), η ροή ισούται με τη συγκέντρωση σωματίων της δέσμης επί την ταχύτητα τους. Για τα φωτόνια το Γ είναι προφανώς ίσο με την εκπεμπομένη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου δια της ενέργειας ενός φωτονίου, $\Gamma = J/\hbar\omega$. Το F είναι ίσο με την πυκνότητα ενέργειας $\mathbf{E}^2/4\pi$ (βλ. Παραρτ. IV και λάβε υπόψη ότι η ηλεκτρική ενέργεια είναι ίση με τη μαγνητική) διηρημένη με το $\hbar\omega$ (ώστε να καταστεί συγκέντρωση φωτονίων) και πολλαπλασιασμένη επί την ταχύτητα του φωτός c: $F = c\mathbf{E}^2/4\pi\hbar\omega$. Επομένως

$$\sigma_s = \frac{J}{\hbar\omega}\frac{4\pi\hbar\omega}{c\mathbf{E}^2} = \frac{4\pi J}{c\mathbf{E}^2}. \qquad (5.22)$$

(α) *Σκέδαση φωτονίου από σωμάτιο φορτίου q και μάζας m*

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.22) την έκφραση για το J, όπως δίνεται από την (5.12) και λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιτάχυνση **a** συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο **E**, $\mathbf{a}=q\mathbf{E}/m$, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για την ολική διατομή σκέδασης ενός φωτονίου από ένα σωμάτιο φορτίου q και μάζας m:

$$\sigma_s = \frac{2}{3}\left(\frac{q^2}{c^3}\right)\left(\frac{q^2 E_o^2}{m^2}\right)\frac{4\pi}{E_o^2 c} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 . \qquad \text{G-CGS} \qquad (5.23)$$

Η ποσότητα, $r_o \equiv q^2/mc^2$, έχει διαστάσεις μήκους και είναι γνωστή ως η κλασική 'ακτίνα' του σωματίου. Το r_o δίνει την ακτίνα που θα είχε το σωμάτιο αν θεωρούσαμε (λανθασμένα) ότι όλη η ενέργεια ηρεμίας του σωματίου, mc^2 ισούται με την ηλεκτροστατική ενέργεια q^2/r_o. Για το ηλεκτρόνιο έχουμε ότι η κλασική 'ακτίνα' του είναι ίση με $r_e \equiv e^2/m_e c^2 = 2{,}82\times10^{-15}$m και η αντίστοιχη ενεργός διατομή σκέδασης $\sigma_{se}=(8\pi/3)\,r_e^2$ ισούται με $6{,}65\times10^{-29}\text{m}^2$.

Σημειώστε ότι η ενεργός διατομή σκέδασης φωτονίου από φορτισμένο σωμάτιο ύλης είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μάζας του σωματίου. Επομένως σε ένα πλάσμα από ιόντα και ηλεκτρόνια η σκέδαση του φωτός θα οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στα ηλεκτρόνια.

Ο τύπος (5.23) βγαίνει και διαστατικά: Το σ_s εξαρτάται από το q (αν q=0 δεν θα υπήρχε σκέδαση), από το c (λόγω ΗΜ ακτινοβολίας), από το m (γιατί αν το $m=\infty$, το προσπίπτον κύμα δεν θα μπορούσε να θέσει το σωμάτιο σε ταλάντωση και επομένως δεν θα ακτινοβολούσε) και ενδεχομένως και από την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου $\hbar\omega$. Ο πιο γενικός συνδυασμός των τεσσάρων αυτών ποσοτήτων με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο έχει τη μορφή

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 f\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right), \qquad \text{G-CGS,} \qquad (5.24)$$

όπου αποδεικνύεται ότι $f(0)=1$, $f(\infty)=0$ και $f(x)$ είναι μονότονα φθίνουσα. Η (5.24) με ρητή έκφραση για την $f(x)$ είναι γνωστή ως ο τύπος των Klein-Nishina.

(β) *Σκέδαση φωτονίου από ουδέτερο άτομο ή μόριο*

Αντικαθιστώντας στην (5.22) το J από τη σχέση (5.13), έχουμε

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{c^4}\frac{p^2}{E^2}, \qquad (5.25)$$

όπου p είναι η επαγόμενη διπολική ροπή. Αλλά εξ ορισμού ο λόγος p/E είναι η λεγόμενη **πολωσιμότητα**, a_p, του ατόμου ή του μορίου

$$a_p \equiv \frac{p}{E} . \qquad (5.26)$$

Άρα

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4 a_p^2}{c^4}, \qquad \text{G-CGS.} \tag{5.27}$$

Πρέπει να βρούμε την πολωσιμότητα (που έχει διαστάσεις μήκους στον κύβο (G-CGS), ως προκύπτει από τον ορισμό (5.26)˙ $a_{p,SI} = 4\pi\epsilon_0 a_{p,G-CGS}$). Αφού το βασικό μήκος του ατόμου ή του μορίου είναι η ακτίνα του r_a, περιμένουμε ότι $a_p \propto r_a^3$. Υπάρχει όμως και μια άλλη εξάρτηση του a_p. Είναι αυτή από τη συχνότητα, επειδή η απόκριση του ατόμου ή του μορίου ενέχει τη δυνατότητα συντονισμού, οπότε η επαγόμενη διπολική ροπή είναι πολύ μεγαλύτερη. Αυτό συμβαίνει όταν η ενέργεια, $\hbar\omega$, του προσπίπτοντος φωτονίου συμπέσει με ιδιοσυχνότητα του ατόμου ή του μορίου$\times\hbar$, δηλαδή με διαφορά δύο ενεργειακών σταθμών τους, οπότε το a_p θα γίνει πολύ μεγαλύτερο κατά $\omega\tau$ (όπως θα δούμε σε λίγο), όπου τ είναι ο χρόνος ζωής της διεγερμένης ενεργειακής στάθμης. Επομένως έχουμε

$$a_p = c_1 r_a^3 f_R(\omega). \tag{5.28}$$

Ο αριθμητικός παράγοντας c_1 κυμαίνεται στην περιοχή μεταξύ περίπου 1,5 και 15 (για το άτομο του υδρογόνου c_1=4,5, ενώ για τα μόρια N_2, O_2, $a_p = 11,75a_B^3$ και $10,67a_B^3$ αντίστοιχα και για χαμηλές συχνότητες) και το $f_R(\omega)$ είναι μια τυπική συνάρτηση συντονισμού (θυμηθείτε από το λύκειο τον τύπο για την εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση) που ανάγεται στη μονάδα για $\omega\to 0$ και που μεγαλώνει κατά ένα παράγοντα $\omega_o\tau$ όταν η συχνότητα συμπέσει με τη συχνότητα συντονισμού ω_o τέτοια ώστε $\hbar\omega_o = \varepsilon_1 - \varepsilon_o$. Άρα ο τύπος για το $f_R(\omega)$ είναι περίπου ο εξής:

$$f_R(\omega) \approx \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}, \tag{5.29}$$

όπου τ είναι ο χρόνος ζωής της διεγερμένης στάθμης που δίνεται από την (5.14). Επομένως ο τύπος (5.28) για $\omega \ll \omega_o$ γίνεται

$$a_p = c_1 r_a^3, \tag{5.30α}$$

ενώ για $\hbar\omega = \hbar\omega_o \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_o$

$$|a_p| \approx c_1 r_a^3 \omega_o \tau. \tag{5.30β}$$

Έτσι για $\omega \ll \omega_o$ και για το άτομο του υδρογόνου για το όποιο $c_1 \approx 4,5$ έχουμε, εισάγοντας το $\lambda = 2\pi c/\omega$ και $\lambda_o = 2\pi c/\omega_o$, τα εξής αποτελέσματα

$$\sigma_s \approx 2,6\times10^5 \frac{a_B^6}{\lambda^4}, \quad \lambda \gg \lambda_o \approx 1200\,\text{Å}\,. \tag{5.31}$$

Το αποτέλεσμα του τύπου (5.31) για οπτικά φωτόνια με $\lambda = 6000\,\text{Å}$ είναι $\sigma_s \approx 4,77\times10^{-32}\text{m}^2$, δηλαδή περίπου έντεκα τάξεις μεγέθους μικρότερη από τη γεωμετρική διατομή του ατόμου, $\pi a_B^2 = 8,8\times10^{-21}\text{m}^2$! Για ξηρό ατμοσφαιρικό αέρα ο αριθμητικός συντελεστής στην (5.31) είναι $1,72\times10^6$.

Για τη συχνότητα συντονισμού η σχέση (5.29) σε συνδυασμό με την (5.14) και την αντικατάσταση $\mathbf{p}^2 = c_2\hbar\omega_o r_a^3$ (που πηγάζει από τις $p^2 \approx e^2 r_a^2$ και $e^2/r_a \approx \hbar\omega_o$) γίνεται $|f_R(\omega)| = \omega_o\tau = c^3/(\eta c_2 r_a^3\omega_o^3)$. Αντικαθιστώντας στην (5.30β) και στη συνεχεία στην (5.27) βρίσκομε

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{c_1}{2\pi\eta c_2}\right)^2 \lambda_o^2, \quad \lambda = \lambda_o\,. \tag{5.32}$$

Για το άτομο του υδρογόνου για το οποίο $c_2 \approx 2,66$, $c_1 \approx 4,5$, το αποτέλεσμα είναι

$$\sigma_s \approx 1,36\lambda_o^2 \approx 2\times10^{-14}\,\text{m}^2\,. \tag{5.33}$$

δηλαδή περίπου έξι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τη γεωμετρική διατομή !

(γ) *Σκέδαση Η/Μ κύματος από μακροσκοπικό διαφανές σωματίδιο ακτίνας a και διηλεκτρικής συνάρτησης ϵ (μαγνητικής διαπερατότητας μ=1)*

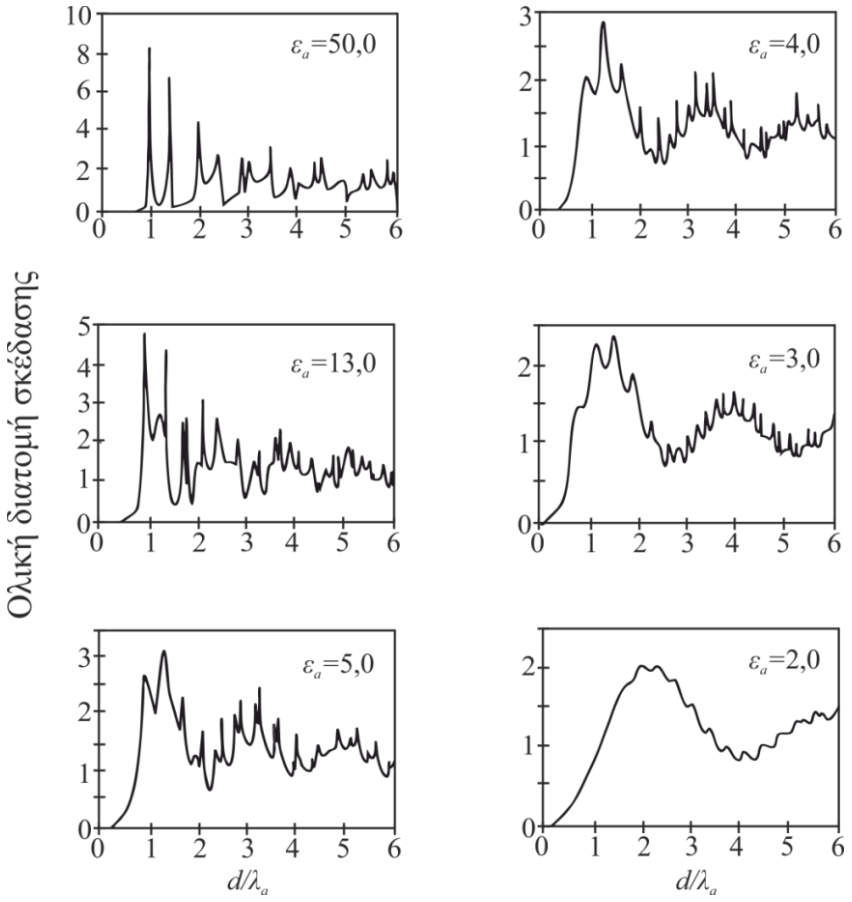
$$\sigma_s \approx \frac{24}{\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{V^2}{\lambda^4}, \quad \lambda \gg a\,, \tag{5.34}$$

όπου $V=(4\pi/3)a^3$ [Τύπος Rayleigh, παράβαλε με τύπο (5.31)]. Μπορείτε να βγάλετε τον τύπο (5.34) με διαστατική ανάλυση και λίγη σκέψη; Όταν το $\lambda_\alpha \equiv 2\pi c/\omega\sqrt{\epsilon}$ γίνει συγκρίσιμο με ακέραιο πολλαπλάσιο της διαμέτρου, $d \equiv 2a$, τότε έχουμε γεωμετρικής φύσεως συντονισμό (σκέδαση Mie, βλ. τα σχήματα στην επόμενη σελίδα). Το λ_a είναι το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας μέσα στο σωματίδιο, όπου $\lambda_\alpha = \lambda/\sqrt{\epsilon} = \lambda/n\cdot$ λ είναι το μήκος κύματος στο κενό και n είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού από το οποίο αποτελείται το σωματίδιο. Σημειώστε ότι για $\lambda_a \ll d$ η ενεργός διατομή σκέδασης είναι περίπου μιάμιση φορά μεγαλύτερη από τη γεωμετρική διατομή πa^2 (για τις περισσότερες τιμές του ϵ).

(δ) *Ελαστική σκέδαση ακτίνων Χ από υλικό*

$$\frac{1}{\ell} = \sigma n_e = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m_e^2 c^4}\frac{Z}{(4\pi/3)r^3}\ , \qquad (5.35)$$

όπου $(4\pi/3)r^3$ είναι ο όγκος ανά άτομο, V/N_a. Μπορείτε να δικαιολογήσετε αυτόν τον τύπο με βάση τον (5.23); Σημείωσε ότι το ℓ (για τον ορισμό του ℓ βλ. την επόμενη ενότητα) είναι αντιστρόφως ανάλογο του ατομικού αριθμού *Z*. Οι ακτίνες X σκεδάζονται κυρίως μη ελαστικά και πολύ λιγότερο ελαστικά. Οι μηχανισμοί μη ελαστικής σκέδασης ακτίνων X είναι δύο: Μέσω φαινομένου Compton και μέσω φωτοηλεκτρικού φαινομένου, που είναι ο κύριος μηχανισμός.



Σχ. 5.2 Ανηγμένη ολική διατομή σκέδασης, $\sigma_s/\pi a^2$, ΗΜ κύματος από μία διαφανή σφαίρα ακτίνας *a* (*d*=2*a*) ως συνάρτηση του λόγου d/λ_a για διάφορες τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_a της σφαίρας. Το $\lambda_a = \lambda/\sqrt{\epsilon} = \lambda/n$ είναι το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας στο υλικό της σφαίρας. Για το νερό στην οπτική περιοχή το ϵ_a ισούται με 1,77

5.5 Ολική ενεργός διατομή σκέδασης και μέση ελεύθερη διαδρομή, ℓ, της ΗΜ ακτινοβολίας.

Το μήκος ελεύθερης διαδρομής είναι πολύ σημαντικό γιατί μέσω αυτού μπορούν να υπολογισθούν ιδιότητες μεταφοράς μεγάλου ενδιαφέροντος και για φωτόνια, από τα οποία εξαρτάται η διάδοση της ΗΜ ακτινοβολίας σε οποιοδήποτε υλικό μέσο, αλλά και για άλλους φορείς, όπως τα ηλεκτρόνια, από τα οποία εξαρτώνται σημαντικά μεγέθη, π.χ. η ηλεκτρική ή η θερμική αγωγιμότητα στερεών σωμάτων. Το ℓ δίνει τη μέση απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σκεδάσεων, ή πιο σαφώς και προκειμένου για ΗΜ ακτινοβολία το μήκος απόσβεσής της καθώς αυτή διαδίδεται στο μέσο.

$$I(x) = I(0)e^{-x/\ell} \ , \tag{5.36}$$

όπου η ένταση I της ΗΜ ακτινοβολίας είναι ανάλογη του τετραγώνου του πεδίου (είτε του ηλεκτρικού είτε του μαγνητικού). Το ℓ εξαρτάται από τη συγκέντρωση των σκεδαστών, $n_s \equiv N_s/V$, και την ενεργό διατομή σκέδασης, σ_s, κάθε σκεδαστή. Εάν το μέσο είναι αέριο έχουμε τον εξής βασικό τύπο:

$$\boxed{\frac{1}{\ell} = n_s \sigma_s} \ . \tag{5.37}$$

Η σχέση (5.37) ισχύει για ασθενή σκέδαση, δηλαδή όταν το προκύπτον μήκος ελεύθερης διαδρομής είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Μπορεί κανείς να αποκτήσει μια φυσική εικόνα του τύπου (5.37) εάν θεωρήσει μια προσπίπτουσα κυλινδρική δέσμη γεωμετρικής διατομής S που διαδίδεται στο μέσο και έχει διασχίσει ένα μήκος d. Στον κυλινδρικό χώρο όγκου $V=Sd$ υπάρχουν $N_s=Sdn_s$ σκεδαστές. Κάθε σκεδαστής κόβει από τη δέσμη ένα τμήμα της ίσο με σ_s. Επομένως όλοι μαζί οι σκεδαστές που είναι μέσα στον όγκο $V=Sd$, *δρώντας ανεξάρτητα*, θα κόψουν ένα τμήμα της δέσμης ίσο με $Sdn_s\sigma_s$. Ορίζουμε το μήκος ελεύθερης διαδρομής έτσι ώστε όταν $d = \ell$ να κοπεί όλη η δέσμη, να είναι δηλαδή $S\ell n_s\sigma_s = S$ ή $\ell n_s\sigma_s = 1$ που είναι η (5.37). Για τον ατμοσφαιρικό αέρα (χωρίς σταγονίδια ή μόρια νερού ή κόκκους σκόνης) το $n_a \equiv N_a/V$ μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο των ιδανικών αερίων

$$\boxed{PV = N_a k_B T} . \tag{5.38}$$

Το $a_p \approx 11{,}52 a_B^3$, $\lambda \approx 6000\,\text{Å}$, για $\omega \ll \omega_o$, οπότε με βάση τους προηγούμενους τύπους βρίσκομε

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \approx 4\times10^{-27}\,\text{cm}^2\,, \\ n_a \approx 2{,}4\times10^{19}\,\text{cm}^{-3}\,, \\ \ell \approx 140\,\text{km}\,, \\ \epsilon \approx 1{,}0005\,, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{ατμοσφαιρικός} \\ \text{αέρας ξηρός} \end{array}$$

Η παραπάνω εκτίμηση για το ℓ είναι ένα εξιδανικευμένο άνω όριο. Στην πραγματικότητα σταγονίδια ή μόρια νερού ή άλλα μακροσκοπικά σωματίδια π.χ. σκόνης προσθέτουν όρους της μορφής $n_{si}\sigma_{si}$, i=1,2…. στο δεξιό σκέλος της (5.37) και επομένως μπορεί να μειώσουν το ℓ πάρα πολύ. Στον τύπο (5.34) δόθηκαν πληροφορίες για την ενεργό διατομή σκέδασης ΗΜ ακτινοβολίας από τέτοια σωματίδια.

5.6 Υπολογισμός της αγωγιμότητας και της διηλεκτρικής συνάρτησης

Μπορούμε να βρούμε το $\sigma(\omega)$, το $\epsilon(\omega)$ (και επομένως και το $n(\omega)$) ενός υλικού ξεκινώντας από το νόμο του Νεύτωνα για την μετατόπιση $x(t)$ ενός δέσμιου σε ιόν ηλεκτρονίου. Έχουμε

$$m_e\ddot{x} = -eE - \kappa x - (m_e/\tau)\dot{x}\,, \tag{5.39}$$

όπου ο όρος $-eE$ δίνει τη δύναμη λόγω ηλεκτρικού πεδίου, ο όρος $-\kappa x$ αντιστοιχεί στη δύναμη επαναφοράς που είναι ανάλογη της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας του δέσμιου σε ιόν ηλεκτρονίου. Ο τελευταίος όρος παριστά τη δύναμη τριβής που για μικρές ταχύτητες και για μικρές μάζες είναι ανάλογη της μέσης ταχύτητας (βλ. λυμένη άσκηση 4.1) με συντελεστή αναλογίας που, κατ' ανάγκη έχει διαστάσεις μάζα/χρόνο. Η μάζα είναι προφανώς η μάζα του ηλεκτρονίου, αφού την κίνηση του ηλεκτρονίου εξετάζουμε και ο χρόνος τ είναι ο λεγόμενος χρόνος αποκαταστάσεως που είναι αντιστρόφως ανάλογος της δύναμης τριβής.

Αφού $x \propto \exp(-i\omega t)$ έχουμε ότι $v=\dot{x}=-i\omega x$ και $\dot{v}=\ddot{x}=-\omega^2 x$. Άρα η (5.39) δίνει

$$x = \frac{-eE}{\kappa - m_e\omega^2 - im_e\dfrac{\omega}{\tau}} = \frac{-eE}{m_e\left[\omega_o^2 - \omega^2 - i\dfrac{\omega}{\tau}\right]}\,, \tag{5.40}$$

όπου ορίσαμε $\omega_o^2 = \kappa/m_e$ (παράβαλε με τη σχέση (5.29)). Επειδή έχουμε πολλά ηλεκτρόνια σε διαφορετικές καταστάσεις, π.χ., ελεύθερα (οπότε $\kappa=\omega_o=0$), ή σε διάφορες δέσμιες καταστάσεις, η συνολική διπολική ροπή είναι $p = -\sum_j e\,x_j$. Σημειώστε ότι η πόλωση P είναι ο λόγος της συνολικής διπολικής ροπής p δια του όγκου V, $P=p/V$. Ο λόγος P/E ισούται εξ ορισμού με την ονομαζόμενη ηλεκτρική *επιδεκτικότητα* χ_e. Προκειμένου για την αέρια φάση η συνολική διπολική ροπή ισούται με την διπολική ροπή p_a κάθε ατόμου ή μορίου επί το συνολικό αριθμό N_a ατόμων ή μορίων, $p=N_a p_a$. Ανακαλώντας τον ορισμό της πολωσιμότητας a_p έχουμε για ένα αέριο ότι $(P/E)\equiv\chi_e=n_a a_p$ όπου $n_a\equiv N_a/V$ είναι η συγκέντρωση των ατόμων ή μορίων στο αέριο Από τον ορισμό του χ_e, τη σχέση (5.4β) και τον ορισμό

της *διηλεκτρικής συνάρτησης*, $\epsilon = D/E$, έχουμε (η τελευταία σχέση ισχύει για αέρια)

$$\boxed{\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e = 1 + 4\pi n_a a_p} \quad \text{G-CGS.} \tag{5.41}$$

Από τη σχέση $p = -\sum_j e x_j$ και την (5.40), προκύπτει η πόλωση $P=p/V$

$$P = -\frac{e^2 E\, n_f}{m_e(\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau_f})} + \sum_i \frac{e^2 E\, n_i}{m_e\left(\omega_{oi}^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_i\right)}\ , \tag{5.42}$$

όπου $n_f \equiv N_f/V$ είναι η συγκέντρωση των ελεύθερων ηλεκτρονίων, $n_i \equiv N_i/V$ είναι η συγκέντρωση των δέσμιων ηλεκτρονίων στη στάθμη i και $\hbar\omega_{oi}$ είναι η ενέργεια διέγερσης της στάθμης i. Σ' ένα στερεό ή υγρό επειδή υπάρχουν πάμπολλες στάθμες πρέπει να σκεπτόμαστε με ενεργειακές ζώνες και όχι στάθμες. Η αγωγιμότητα $\sigma=(j/E)$ και η ηλεκτρική επιδεκτικότητα $\chi_e=(P/E)$ συνδέονται λόγω της σχέσης $j = -i\omega P$ ως εξής: $\sigma = -i\omega\chi_e$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.41), $\chi_e=(P/E)$ και (5.42) έχουμε

$$\boxed{\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pf}^2}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau_f}} - \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{oi}^2 + \frac{i\omega}{\tau_i}}}\ , \tag{5.43}$$

όπου

$$\omega_{pf}^2 \equiv \frac{4\pi e^2 n_f}{m_e},\quad \omega_{pi}^2 \equiv \frac{4\pi e^2 n_i}{m_e}\ ,\ \text{G-CGS.} \tag{5.44}$$

Σημειώστε ότι στο όριο $\omega \to 0$ το άθροισμα στο δεξί σκέλος της (5.43) γίνεται μια θετική σταθερά $\epsilon_b = \sum_i \omega_{pi}^2/\omega_{oi}^2$ που προστίθεται στη μονάδα (βλ. την άλυτη άσκηση 8, σελ. 140 και την V.6, σελ. 412).

Το επιδερμικό φαινόμενο, που αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο προκύπτει στο όριο, όπου $\omega\tau_f \ll 1$ και $\omega_{pf}\tau_f \gg 1$.

5.7 Διάδοση ΗΜ κύματος (με $\lambda \gg a_B$) σε ομοιογενές στερεό ή υγρό.

Στη συμπυκνωμένη ύλη, η διάδοση της ΗΜ ακτινοβολίας εξαρτάται από τη διηλεκτρική συνάρτηση $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\,\epsilon_2(\omega)$ (και τη μαγνητική διαπερατότητα $\mu(\omega)$, $\mu(\omega)=\mu_1(\omega)+i\mu_2(\omega)$, η οποία όμως είναι συνήθως πολύ κοντά στη μονάδα, $\mu(\omega)\approx 1$). Η διαφορά με την περίπτωση των αερίων, που εξετάσαμε προηγουμένως, έγκειται στο ότι το μήκος ελεύθερης διαδρομής δεν δίνεται

συνήθως για τη συμπυκνωμένη ύλη από τη σχέση (5.37) λόγω του ότι η σκέδαση μπορεί να είναι ισχυρή.

Ο δείκτης διάθλασης n ισούται εξ ορισμού με

$$\boxed{n = n_1 + in_2 \equiv \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}}\,, \tag{5.45}$$

$$n_1 = \left[\tfrac{1}{2}(|\epsilon| + \epsilon_1)\right]^{1/2}, \qquad n_2 = \left[\tfrac{1}{2}(|\epsilon| - \epsilon_1)\right]^{1/2}\,. \tag{5.46}$$

Το $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\,\epsilon_2(\omega)$ συνδέεται με την ηλεκτρική αγωγιμότητα σ (βλ. τύπο (5.5)) και την ηλεκτρική επιδεκτικότητα, $\chi_e(\omega)$ (βλ. (5.41)).

Η διάδοση ΗΜ σ' ένα ομοιογενές μέσο είναι όπως στο κενό με τη διαφορά ότι το c, η ταχύτητα του φωτός στο κενό, αντικαθίσταται με το $c/n = c/\sqrt{\epsilon}$. Άρα ο κυματαριθμός $k=\omega/c$ γίνεται

$$\boxed{k = k_1 + ik_2 = \frac{\omega}{c}n = \frac{\omega}{c}(n_1 + in_2)} \tag{5.47}$$

και ο όρος διάδοσης για τα πεδία, $\exp(ikx)$ γίνεται

$$\exp\left(-\frac{\omega}{c}n_2 x\right)\exp\left(i\frac{\omega}{c}n_1 x\right)\,, \tag{5.48}$$

που σημαίνει ότι η *ένταση* $I(x)$ του κύματος θα αποσβένεται σύμφωνα με τον νόμο (παράβαλε με σχέση (5.36))

$$\exp\left(-\frac{2\omega n_2}{c}x\right) \equiv \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)\,. \tag{5.49}$$

Άρα, αντί για τη σχέση (5.37) το μήκος ελεύθερης διαδρομής στη συμπυκνωμένη ύλη (στερεά και υγρά) δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\frac{1}{\ell} = \frac{2\omega n_2}{c} = \frac{4\pi n_2}{\lambda}}\,, \tag{5.50}$$

όπου το λ είναι το μήκος κύματος στο κενό.

Για Lasers, βλέπε Τραχανά, *Κβαντομηχανική Ι* (Έκδοση 2005) Κεφ. 15, σελ. 726-742.

5.8 Περίληψη των κυριοτέρων τύπων

Το ΗΜ πεδίο και η αλληλεπίδρασή του με την ύλη είναι από τα σημαντικότερα θέματα της επιστήμης και της τεχνολογίας, αν όχι το σημαντικότερο. Είναι δύσκολο να βρεί κανείς έστω και ένα επιστημονικό αντικείμενο ή μια δραστηριότητα της καθημερινής ζωής που να μην επεμβαίνουν ΗΜ δυνάμεις ή ΗΜ κύματα. Μάλιστα η τάση της σύγχρονης επιστήμης και τεχ-

νολογίας είναι να κινηθεί προς το κβαντικό επίπεδο του ΗΜ, ώστε να κατανοήσει περαιτέρω και να αξιοποιήσει τις εκπληκτικές, αλλά εξαιρετικά ευαίσθητες και εύθραυστες δυνατότητες που προσφέρει το επίπεδο αυτό.

Είναι λοιπόν απαραίτητο ο φοιτητής να διαπιστώσει και να προσπαθήσει να καλύψει τα όποια κενά έχει στο αντικείμενο του ΗΜ αρχίζοντας με μια προσεκτική ανάγνωση του παραρτήματος IV και της ενότητας 5.1 (εισαγωγή) με έμφαση στους τύπους (IV.1) έως (IV.4), και (IV.10) έως (IV.15) καθώς και τους (5.2) έως (5.5).

Ιδιαίτερης προσοχής χρήζουν οι κβαντικοί τύποι που προκύπτουν εύκολα από διαστατική ανάλυση και επομένως δεν απαιτούν απομνημόνευση:

$$\frac{U}{V}=\frac{\pi^2}{15}\frac{\left(k_BT\right)^4}{\left(\hbar c\right)^3},\qquad P=\frac{1}{3}\frac{U}{V},\qquad I=\frac{c}{4}\frac{U}{V}\ , \tag{5.8, .9}$$

$$\begin{aligned} &I_\omega=\tfrac{1}{4\pi^2}k_BT(\omega^2/c^2)\varphi(\hbar\omega/k_BT),\\ &\varphi(\hbar\omega/k_BT)=(\hbar\omega/k_BT)\left[e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$J=\tfrac{2}{3}q^2a^2/c^3\qquad\qquad J=\tfrac{2}{3}\mathbf{p}^2\omega^4/c^3\ . \tag{5.12, .13}$$

Οι ποσότητες διηλεκτρική συνάρτηση, αγωγιμότητα, ηλεκτρική επιδεκτικότητα και πολωσιμότητα (η τελευταία ειδικά για άτομα ή μόρια) συνδέονται με τις σχέσεις (η τελευταία ισχύει μόνο για την αέρια φάση)

$$\epsilon=1+(4\pi i\sigma/\omega)=1+4\pi\chi_e=1+4\pi n_a a_p\ \text{G-CGS}. \tag{5.5, .41}$$

Ορίζεται και υπολογίζεται η ολική ενεργός διατομή σκέδασης για προσπίπτον ΗΜ κύμα και ο γενικός τύπος εξειδικεύεται για σκέδαση από φορτισμένο σωμάτιο και από ηλεκτρικό δίπολο

$$\sigma_s=\frac{4\pi J}{c\mathbf{E}^2},\Rightarrow\sigma_s=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2,\ \sigma_s=\frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4a_p^2}{c^4}, \tag{5.22, .23, .27}$$

Ορίζεται επίσης η έννοια της μέσης ελεύθερης διαδρομής και συνδέεται (υπό ορισμένες προϋποθέσεις) με τη συγκέντρωση των σκεδαστών και την ολική ενεργό διατομή σκέδασης

$$\frac{1}{\ell}=n_s\sigma_s\ . \tag{5.37}$$

Η διηλεκτρική συνάρτηση δίνεται από τον ακόλουθο τύπο στον οποίο περιλαμβάνεται μόνο η συμβολή των ηλεκτρονίων (και των ελευθέρων και των δέσμιων σε ιόντα· για τη συμβολή των ιόντων βλ. V.6, σελ. 411- 413):

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pf}^2}{\omega^2 + i\dfrac{\omega}{\tau_f}} - \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{oi}^2 + \dfrac{i\omega}{\tau_i}} \ . \qquad (5.43)$$

Στη συμπυκνωμένη ύλη η μέση ελεύθερη διαδρομή φωτονίων δεν δίνεται από τη σχέση (5.37), που ισχύει για την αέρια φάση, αλλά από τον τύπο

$$\frac{1}{\ell} = \frac{2\omega n_2}{c} = \frac{4\pi n_2}{\lambda} \quad \text{(βλ. και λυμένη άσκηση 5.1).} \qquad (5.51)$$

5.9 Λυμένες ασκήσεις

1. Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την ανάκλαση, απορρόφηση και διέλευση ενός ΗΜ κύματος που προσπίπτει καθέτως σε ένα φιλμ πάχους d και διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$. Εξετάζονται δύο περιπτώσεις: (α) το πάχος του φιλμ πολύ μικρότερο του μήκους κύματος· (β) το πραγματικό μέρος της διηλεκτρικής σταθεράς είναι αρνητικό ενώ το φανταστικό είναι μηδέν (περίπτωση πολύ αγώγιμων μετάλλων για $\omega \ll \omega_p$). Δίνεται ότι το πλάτος διέλευσης και το πλάτος ανάκλασης ικανοποιούν τους τύπους αντιστοίχως

$$t = \frac{\rho^{-1} - \rho}{\rho^{-1}e^{-i\psi} - \rho e^{i\psi}} \qquad r = \frac{e^{-2i\psi} - 1}{\rho^{-1}e^{-2i\psi} - \rho} \ ,$$

όπου

$$\rho = \frac{1-n}{1+n} \ , \qquad \psi = \frac{\omega n d}{c} \quad \text{και} \quad n = \sqrt{\epsilon} = n_1 + in_2 \ .$$

Λύση: Περίπτωση (α), όπου το $\psi \ll 1$, αφού το $d \ll \lambda$. Έχουμε τότε ότι $\exp(i\psi)=1+i\psi$, οπότε

$$t = \frac{\rho^{-1} - \rho}{\rho^{-1}(1-i\psi) - \rho(1+i\psi)} = \frac{\rho^{-1} - \rho}{\rho^{-1} - \rho - i\psi(\rho^{-1} + \rho)} = 1 + i\psi\frac{\rho^{-1} + \rho}{\rho^{-1} - \rho} .$$

$$r = \frac{1 - 2i\psi - 1}{\rho^{-1}(1-2i\psi) - \rho} = \frac{-2i\psi}{\rho^{-1} - \rho - 2i\psi\rho^{-1}} = \frac{-2i\psi}{\rho^{-1} - \rho} .$$

$$\rho^{-1} \pm \rho = \frac{1+n}{1-n} \pm \frac{1-n}{1+n} = \frac{1 + n^2 + 2n \pm (1 + n^2 - 2n)}{1 - n^2} , \qquad \text{οπότε}$$

$$\rho^{-1} + \rho = \frac{2(1+n^2)}{1-n^2} , \qquad \rho^{-1} - \rho = \frac{4n}{1-n^2} .$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$t = 1 + i\frac{\omega d n}{c}\frac{1+n^2}{2n} = 1 + i\frac{\omega d(1 + \epsilon_1 + i\epsilon_2)}{2c} = 1 - \frac{\omega d \epsilon_2}{2c} + i\frac{\omega d(1+\epsilon_1)}{2c} \qquad \text{και}$$

$$r = \frac{-2i\psi}{\rho^{-1} - \rho} = \frac{-2i\psi(1-n^2)}{4n} = \frac{-i\omega d(1-\epsilon)}{2c} .$$

Άρα ο συντελεστής διέλευσης $|t|^2$ είναι

$$|t|^2 = (1-\frac{\omega d\epsilon_2}{2c})^2 + (\frac{\omega d(1+\epsilon_1)}{2c})^2 = 1-\frac{\omega d\epsilon_2}{c} + O(d^2)\,,$$

ενώ ο συντελεστής ανάκλασης $|r|^2$ είναι $|r|^2 = 0 + O(d^2)$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι ο συντελεστής απορρόφησης είναι

$$|\alpha|^2 = \frac{\omega d\epsilon_2}{c} + O(d^2)\,.$$

(β) Από τους τύπους (5.46) έχουμε ότι $n_1 = 0$ και $n_2 = \sqrt{-\epsilon_1}$. Επομένως θέτοντας $n_2 \equiv \tan\varphi$

$$\rho = \frac{1-in_2}{1+in_2} = e^{-2i\varphi}, \quad t = \frac{\rho^{-1}-\rho}{\rho^{-1}e^{-i\psi} - \rho e^{i\psi}} = \frac{e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}}{e^{2i\varphi}e^{\chi} - e^{-2i\varphi}e^{-\chi}}\,,$$

όπου θέσαμε $\chi = \omega d n_2 / c$. Επομένως ο συντελεστής διέλευσης είναι

$$|t|^2 = \frac{4\sin^2 2\varphi}{\left|e^{2i\varphi}e^{\chi} - e^{-2i\varphi}e^{-\chi}\right|^2} = \frac{4\sin^2 2\varphi}{e^{2\chi}+e^{-2\chi}-2-e^{4i\varphi}-e^{-4i\varphi}+2} =$$

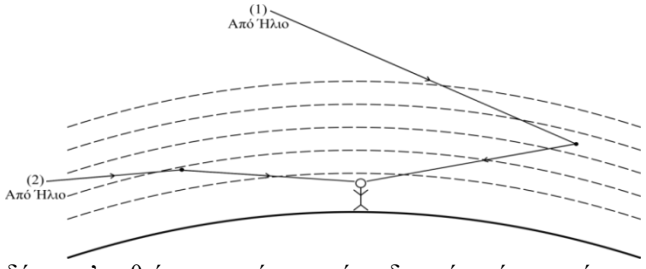
$$= \frac{4\sin^2 2\varphi}{(e^{\chi}-e^{-\chi})^2 - (e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi})^2} = \frac{\sin^2 2\varphi}{\sinh^2\chi + \sin^2 2\varphi} = \frac{4|\epsilon|\left(1+|\epsilon|\right)^{-2}}{\sinh^2\chi + 4|\epsilon|\left(1+|\epsilon|\right)^{-2}}\,.$$

Αφού το ϵ_2 είναι μηδέν δεν υπάρχει απορρόφηση και επομένως $|t|^2 + |r|^2 = 1$, οπότε

$$|r|^2 = \frac{\sinh^2\chi}{\sinh^2\chi + \sin^2 2\varphi} = \frac{\sinh^2\chi}{\sinh^2\chi + 4|\epsilon|\left(1+|\epsilon|\right)^{-2}}\,.$$

2. Γιατί ο ουρανός είναι γαλάζιος; Γιατί στο ηλιοβασίλεμα κοκκινίζει κατά τη δύση; Είναι δυνατό ανεβαίνοντας στη στρατόσφαιρα να βλέπουμε ταυτόχρονα τον Ήλιο και έναστρο ουρανό; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, γιατί;

Λύση: Κατά τη διάρκεια της ημέρας η ακτίνα του Ήλιου (1) σκεδάζεται από μόρια της ατμόσφαιρας, αλλάζει διεύθυνση και φτάνει στο μάτι μας. Η διατομή σκέδασης σ είναι ανάλογη του a^6/λ^4, οπότε η ακτίνα που φτάνει στο μάτι μας είναι το γαλάζιο και το μπλε, που το μήκος κύματος είναι περίπου 1,5 φορά μικρότερο από αυτό του κόκκινου και επομένως σκεδάζεται περίπου 6 φορές περισσότερο απ το κόκκινο. Αντίθετα, κατά το ηλιοβασίλεμα, η ακτίνα (2) που



φτάνει σχεδόν κατ' ευθείαν στο μάτι μας έχει διασχίσει ένα παχύ στρώμα ατμόσφαιρας, οι γαλάζιες και μπλε συνιστώσες έχουν σκεδαστεί πολλές φορές προς

διάφορες κατευθύνσεις και έτσι στο μάτι μας φτάνουν ενισχυμένες οι κόκκινες συνιστώσες που έχουν σχετικά ελάχιστη σκέδαση.

Αν ανέβουμε σε μεγάλο ύψος, τέτοιο που η συγκέντρωση των μορίων της ατμόσφαιρας να είναι ασήμαντη, η συνολική σκέδαση του εξωγήινου φωτός θα είναι σχεδόν αμελητέα. Επομένως το μάτι μας θα δέχεται φωτόνια μόνο κατ' ευθείαν από τις πηγές τους (όπως είναι ο Ήλιος, τα αστέρια, οι πλανήτες, και το φεγγάρι). Άρα, αν δεν κοιτάξουμε κατ' ευθείαν προς τον Ήλιο ή το Φεγγάρι, θα δούμε ένα μαύρο ουρανό κατάστικτο από χιλιάδες άστρα και κάποιους πλανήτες.

3. Υπολογίστε την τιμή του λ_m, όπου εμφανίζεται το μέγιστο της φασματικής κατανομής της ακτινοβολίας μέλανος σώματος ως συνάρτησης του μήκους κύματος. Το ίδιο για το ω_m, το μέγιστο της φασματικής κατανομής ως συνάρτησης της συχνότητας. Ισχύει η σχέση $\omega_m=2\pi c/\lambda_m$; Αν όχι, γιατί;
Λύση: Η φασματική κατανομή μέλανος σώματος έχει τη μορφή, βάσει των τύπων (5.11)

$$I_\omega \propto \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς ω και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν βρίσκουμε το ω_m:

$$3=\frac{xe^x}{e^x-1}, \quad x=\beta\hbar\omega_m. \tag{3.1}$$

Για να βρούμε το λ_m πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την κατανομή ως προς λ, I_λ, που ισούται με

$$I_\lambda = I_\omega\left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right|, \text{ όπου } \lambda=\frac{2\pi c}{\omega}, \quad \text{ή} \qquad I_\lambda \propto \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^y-1}, \quad y=2\pi c\hbar\beta/\lambda.$$

Η σχέση $dI_\lambda/d\lambda=0$ οδηγεί στον τύπο

$$5=\frac{ye^y}{e^y-1}, \qquad y=\frac{2\pi c\hbar\beta}{\lambda_m}. \tag{3.2}$$

Συγκρίνοντας την (3.1) και τη (3.2) είναι φανερό ότι $\lambda_m\neq 2\pi c/\omega_m$ λόγω του 3 στην (3.1) και του 5 στην (3.2). Η διαφορά αυτή οφείλεται στον παράγοντα $(d\omega/d\lambda)$ που εμφανίζεται με την αλλαγή μεταβλητής από ω σε λ.

Το αποτέλεσμα είναι

$$\lambda_m \simeq \frac{1,265\hbar c}{k_B T} \text{ (νόμος του Wien),}$$

ενώ

$$\omega_m = 2,822\frac{k_B T}{\hbar},$$

και

$$\lambda_m\omega_m = 3,57c \text{ και όχι } 2\pi c.$$

Οι εξαρτήσεις $\lambda_m \propto \hbar c / k_B T$ και $\omega_m \propto k_B T / \hbar$ προκύπτουν με διαστατική ανάλυση ως εξής: Το μήκος κύματος λ_m θα εξαρτάται από $k_B T$ (το λέει και η εκφώνηση) από το c (ακτινοβολία ΗΜ κυμάτων) και το $\hbar$ (κβαντικό φαινόμενο). Θυμίζουμε ότι: $[\hbar] = [E][t]$, $[\hbar c] = [E][\ell]$ και $[\hbar c / k_B T] = [E][\ell]/[E] = [\ell]$. Άρα $\lambda_m = C \hbar c / k_B T$, όπου το C συμβαίνει να είναι ίσο με περίπου 1,265, όπως δείξαμε προηγουμένως.

4. Στο ουράνιο τόξο το κόκκινο ή το ιώδες είναι στην πάνω μεριά; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με βάση φυσικούς νόμους και ιδιότητες.
Λύση: $n_{νερού}$=1,33 στο κόκκινο, ενώ $n_{νερού}$=1,346 στο ιώδες. (Επειδή καθώς αυξάνει η συχνότητα αυξάνεται λίγο ο δείκτης διάθλασης n. Γιατί; Βλ. (5.43) για $n_f = 0$ και άλυτη άσκηση 8, σελ. 140.

Στο σχήμα της επόμενης σελίδας φαίνεται η πορεία μιας φωτεινής ακτίνας ΗΑ που εισέρχεται στη σταγόνα της βροχής στο σημείο Α και διαθλάται, στη συνέχεια ανακλάται στο σημείο Β, διαθλάται εκ νέου στο σημείο Γ και φτάνει στο μάτι του παρατηρητή Π υπό γωνία χ ως προς τις ακτίνες του Ήλιου. Φαίνεται επίσης και η ακτίνα του Ήλιου ΗΠ που φτάνει κατ'ευθείαν στον παρατηρητή καθώς και η προέκτασή της ΗΠΚ προς την κατεύθυνση του ουράνιου τόξου.

Η γωνία χ εξαρτάται εν γένει από τη γωνία φ, δηλ. από το σημείο Α εισόδου της ακτίνας στη σταγόνα· όταν όμως η φ έχει τέτοια τιμή φ_0 ώστε

$$d\chi / d\varphi)_{\varphi=\varphi_0} = 0, \tag{4.1}$$

τότε, καθώς η φ αλλάζει σημαντικά περί την φ_0, αφήνει τη χ σχεδόν αμετάβλητη και περίπου ίση με $\chi(\varphi_0)$. Αφού πολλές γωνίες φ αντιστοιχούν περίπου στο ίδιο $\chi(\varphi_0)$, σ' αυτή τη γωνία θα συγκεντρωθεί η μέγιστη ένταση και άρα σ' αυτή τη γωνία θα εμφανισθεί το ουράνιο τόξο ως ένα τόξο κύκλου στον ουρανό (τόξο κύκλου γιατί ο ορίζοντας δεν επιτρέπει οπτική πρόσβαση κάτω από αυτόν). Το κέντρο αυτού του κύκλου βρίσκεται στο σημείο Κ επί της νοητής ευθείας ΗΠΚ. (Γιατί; Θεωρήστε την περιστροφή της ΠΤ περί την ΠΚ).

Ας δούμε ποια είναι η τιμή της φ_0 και της $\chi(\varphi_0)$ στα ακραία χρώματα της ίριδας, που αντιστοιχούν σε τιμές του δείκτη διάθλασης $n_{νερού}$=1,33 και $n_{νερού}$=1,346. Από τις γωνίες στο κέντρο Ο της σταγόνας έπεται η (4.2) και από το νόμο του Snell η (4.3) (επόμενη σελίδα). Διαφορίζουμε την (4.3), οπότε

$$d\theta/d\varphi = \cos\varphi/n\cos\theta. \tag{4.4}$$

Το $d\theta/d\varphi$ συνδέεται μέσω της σχέσης (4.2) με την $d\chi/d\varphi$ ως εξής:

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = 4\frac{d\theta}{d\varphi} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

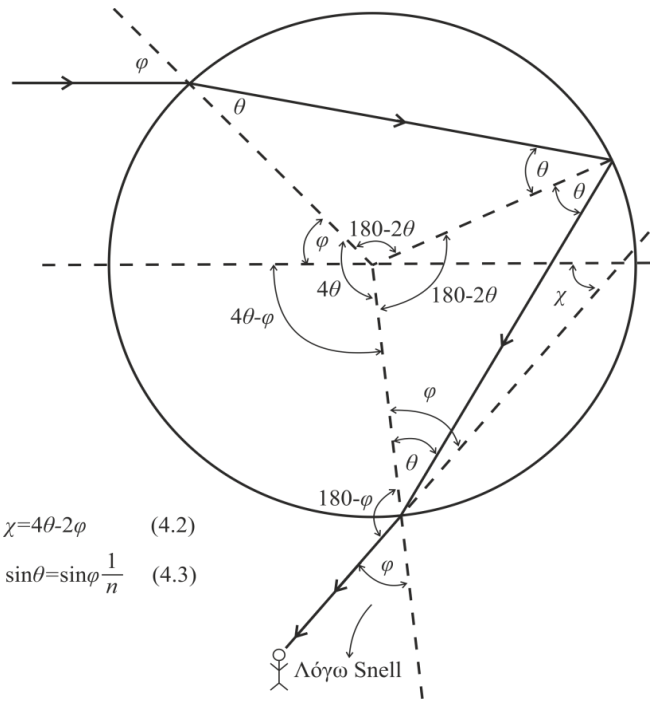
Στην (4.5) λάβαμε υπόψη την (4.1). Συνδυάζοντας τις (4.4) και (4.5), έχουμε

$$\frac{1-\sin^2\varphi}{1-\sin^2\theta}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}. \tag{4.6}$$

Από την (4.6) και την (4.3) βρίσκουμε τη γωνία φ

$$\sin^2\varphi = \frac{4-n^2}{3}, \qquad (4.7)$$

και από την (4.3) τη γωνία θ: $\sin\theta = \sin\varphi / n$ και τη γωνία $\chi = 4\theta - 2\varphi$. Για $n = 1,33$ (που αντιστοιχεί στο κόκκινο) έχουμε $\sin\varphi = 0,86$, $\varphi = 59,58$



$\sin\theta = \sin\varphi / n = 0,6484$, $\theta = 40,422^{\cdot}$ $\chi = 4\theta - 2\varphi = 42,516$. Για $n = 1,346$ (που αντιστοιχεί στο ιώδες) έχουμε $\sin\varphi$=0.8541, φ=58,6$^{\cdot}$ $\sin\theta = 0,6345$, $\theta = 39,3845$ και χ=40,2246. Άρα το ιώδες είναι στο κάτω μέρος του ουράνιου τόξου, το κόκκινο είναι στο πάνω μέρος και τα άλλα χρώματα ενδιάμεσα, επειδή καθώς αυξάνει η συχνότητα αυξάνεται ο δείκτης διάθλασης n και μειώνεται η γωνία χ.

5. Υπολογίστε κατ' εκτίμηση τις τιμές των «πιο» παγκόσμιων σταθερών c και $\hbar$ από παρατηρήσεις και γνώσεις της καθημερινής ζωής και επιλεγμένους τύπους που βγαίνουν με διαστατική ανάλυση: (α) Το κινητό τηλέφωνο εκπέμπει και δέχεται ΗΜ κύματα συχνότητας f=1,8 GHz. Εκτιμήστε την ταχύτητα του φωτός. (β) Η ηλιακή ισχύς I_Γ (ανά τετραγωνικό μέτρο) στη Γη επιτρέπει τη λειτουργία του ηλιακού θερμοσίφωνα, ο οποίος είναι συγκρίσιμος με το συνήθη ηλεκτρικό που έχει ισχύ 2 kW. Αυτό σημαίνει ότι $I_\Gamma \approx$(1-2) kW/m^2. Στην πραγματικότητα

και πάνω από την ατμόσφαιρα είναι $I_\Gamma \approx 1{,}36$ kW/m^2. (γ) Το λ_m (βλέπε πρόβλημα 3 παραπάνω) μπορεί να εκτιμηθεί από τη διακριτική ικανότητα του ανθρώπινου οφθαλμού (πείραμα δύο παράλληλων γραμμών). (δ) Το I_H, στην επιφάνεια του Ήλιου, υπολογίζεται εύκολα από τη γωνία που φαίνεται ο Ήλιος από τη Γη (θ=32′ της μοίρας). Με τα δεδομένα και μόνο των (α) έως (δ) αυτού του προβλήματος εκτιμήστε την τιμή του $\hbar$. (Το πρόβλημα προτάθηκε από το Στέφανο Τραχανά.)

Λύση: α. Οι κεραίες εκπομπής είναι συνήθως διπολικής εκπομπής με κατανομή του ρεύματος όπως στο σχήμα. Επομένως το μήκος της κεραίας ισούται με $\lambda/2$. Στα κινητά το $\lambda/2$ είναι όσο το μήκος του πιο μικρού κινητού. Το δικό μου κινητό έχει μήκος περίπου 9 cm. Άρα $\lambda \simeq 18\,\text{cm}$. Επομένως η εκτίμηση για την ταχύτητα του φωτός είναι

$$\left[c = \lambda \cdot f \simeq 18\,\text{cm} \times 1{,}8 \times 10^9\,\text{m/s} \simeq 3{,}2 \times 10^8\,\text{m/s} \right],$$

πολύ κοντά στην πραγματική τιμή 3×10^8m/s.

β. Όταν μια δέσμη παράλληλων ακτίνων περνάει από ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου d αποκτάει μια γωνιακή απόκλιση της οποίας η τυπική απόκλιση θ δίνεται από τη σχέση

$$\sin\theta = 1{,}22(\lambda / d)\,, \tag{5.1}$$

όπου λ είναι το μήκος κύματος του ΗΜ κύματος[4]. Αυτή η απόκλιση θ είναι υπεύθυνη για τον περιορισμό της διακριτικής ικανότητας των ματιών μας (που δεν μπορούν να ξεχωρίσουν δύο παράλληλες γραμμές που απέχουν μεταξύ τους 3 mm όταν βρίσκονται περίπου15 m μακριά μας)

$$\sin\theta = (\Delta x / x) \simeq (3\,\text{mm}/15\,\text{m})\,. \tag{5.2}$$

Το κυκλικό άνοιγμα d στην προκειμένη περίπτωση είναι η κόρη του ματιού μας που έχει διάμετρο περίπου 3mm. Άρα από (5.1) και (5.2)

$$\lambda = \frac{3}{15\times10^3}\,\frac{3\,\text{mm}}{1{,}22} \simeq 5\times10^{-4}\,\text{mm} = 500\,\text{nm}\,.$$

Το $\lambda \simeq 500\,\text{nm}$ πρέπει να είναι κοντά, αν όχι το ίδιο, με το $\lambda_{\max}$ της ηλιακής ακτινοβολίας λόγω δαρβινικής προσαρμογής στο περιβάλλον.

δ. Το I_H (ανά μονάδα επιφάνειας) συνδέεται με το I_Γ (ανά μονάδα επιφάνειας) με την απλή σχέση $I_H = I_\Gamma(\ell^2 / R_H^2)$ λόγω διατήρησης της ενέργειας. Άρα

[4] Η απόδειξη προκύπτει (εκτός του αριθμητικού παράγοντα) από την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

$$\Delta p_d \cdot d \approx \sqrt{8}\,\hbar\,, \quad \sin\theta = \Delta p_d / p_z \approx [(\sqrt{8}\,\hbar / d) / \hbar(2\pi/\lambda)] = \sqrt{2}\lambda / \pi d\,.$$

$$\frac{\ell}{R_H} = (\tan\frac{\theta}{2})^{-1} \approx \frac{1}{\theta/2} = \frac{60}{16}\frac{180}{\pi} \approx 215\,,\ I_H = 1360\times 215^2\ \mathrm{W} = 6,29\times 10^7\ \mathrm{W/m^2}\,.$$

Συνδυάζοντας τη $I_H = (\pi^2/60)\{(k_BT)^4/\hbar^3c^2\}$ με τη $\lambda_{\max} = 1,27\hbar c/k_BT$ Έχουμε

$$I_H \simeq 0,42\frac{\hbar c^2}{\lambda_{\max}^4}\ . \qquad (5.3)$$

Από την (5.3), αφού γνωρίζουμε όλα τα μεγέθη εκτός του $\hbar$, βρίσκουμε

$$\hbar = 2,38\frac{I_H\lambda_{\max}^4}{c^2} = 2,38\frac{6,29\times 10^7\times 5^4\times 10^{-28}}{9\times 10^{16}}\ \mathrm{J\cdot s} = 1,04\times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\,.$$

Πειραματική τιμή $1,05\times10^{-34}$J·s. Εάν είχαμε παραλείψει όλους τους αριθμητικούς παράγοντες ($\lambda_{\max}\simeq\hbar c/k_BT$, $\Delta x/x=\lambda/d$, $I_\Gamma\simeq 2\,\mathrm{kW}$, $I_H\simeq(k_BT)^4/\hbar^3c^2$) τότε θα βρίσκαμε $\hbar\simeq 1,19\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$, δηλαδή πάλι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή.

6. Από την κορυφή του Ψηλορείτη φαίνονται τα βουνά της Σαντορίνης ($d_{\Psi,\Sigma}\simeq 150\,\mathrm{km}$) όταν η ατμόσφαιρα είναι διαυγής και ξηρή. Εκτιμήστε από την παρατήρηση αυτή, το μέγεθος d των μορίων της ατμόσφαιρας σε Å. (*Υπόδειξη*: Η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου είναι 5750°K και το μάτι μας είναι προσαρμοσμένο στο μήκος κύματος που αντιστοιχεί μέγιστο της ηλιακής ακτινοβολίας $J(\lambda)$. Θεωρήστε ότι $a_p\approx d^3$).

Λύση: Για να φαίνονται αντικείμενα σε απόσταση 150 km σημαίνει ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή, ℓ, των φωτονίων είναι συγκρίσιμη με αυτή την απόσταση. Έστω ότι $\ell\approx 100\,\mathrm{km}$. Το ℓ δίνεται από τη σχέση

$$\ell = \frac{1}{n\sigma}\,,$$

όπου n η συγκέντρωση των μορίων N_2 και O_2 της ατμόσφαιρας και σ η ολική ενεργός διατομή σκέδασης φωτονίου από το μόριο N_2 ή το O_2. Δείξαμε ότι (a_p είναι η πολωσιμότητα)

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{c^4}a_p^2 \simeq \frac{8\pi}{3}\frac{(2\pi)^4}{\lambda^4}d^6, \quad \lambda\gg r\ ,$$

όπου d είναι το ζητούμενο μέγεθος και λ το μήκος κύματος του φωτονίου. Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε

$$d^6 = A(\lambda^4/n\ell),\ A = 3/(128\pi^5).$$

Η εκφώνηση και το πρόβλημα 5.3 μας δίνει το λ ως εξής (αφού ο Ήλιος είναι η πηγή, $T=T_H$):

$$\lambda \simeq 1,27\frac{\hbar c}{k_B T} = 1,27\frac{137}{5750/(27,2\times 11600)}\cdot 0,529\,\text{A} = 5050\,\text{Å} = 505\,\text{nm}\,.$$

Τη συγκέντρωση n θα την βρούμε από το νόμο των ιδανικών αερίων $PV = Nk_BT \Rightarrow N/V \equiv n = P/k_BT$. Σ' ένα υψόμετρο 1.000m το $P \simeq 0,8\,\text{atm}$ και η θερμοκρασία 285°Κ. Άρα $n \simeq 2\times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$ και

$$d^6 = 3,829\times 10^{-15}\lambda^4 = 2,49\,\text{Å}^6 \Rightarrow d = 1,16\,\text{Å}\,.$$

Το μήκος του δεσμού του N_2 είναι $1,01\,\text{Å}$ και του O_2 1,21 Å. Μέσος όρος 1,05 Å.

5.10 Άλυτες ασκήσεις

1. Ποια είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή ορατού φωτός σ' ένα μέταλλο; Ισχύει ο συνδυασμός των σχέσεων (5.27) και (5.37); Αν όχι, τι ισχύει; Αν ναι, γιατί;

2. Θεωρήστε ένα αέριο φωτονίων σε θερμοδυναμική ισορροπία με ζεύγη ηλεκτρονίων/ποζιτρονίων. Η θερμοκρασία είναι πολύ υψηλότερη από $m_e c^2/k_B$ και ο συνολικός λεπτονικός αριθμός είναι μηδέν. Η ενέργεια κάθε είδους σωματίων είναι: $E_e = E_{e^+} = 2\sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_{\boldsymbol{k}} f_{\boldsymbol{k}}$, $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = c\hbar k$, $E_{ph} = 2\sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}$, όπου f_k και b_k είναι οι κατανομές Fermi/Dirac και Bose/Einstein αντιστοίχως. (Βλέπε Παράρτημα ΙΙΙ). Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\sum_{\boldsymbol{k}} = (V/(2\pi)^3)\int d^3k$ δείξτε ότι E_{ph}=(8/7)E_e.

3. Αποδείξτε τον τύπο (5.35).

4. Αποδείξτε τους τύπους (5.46).

5. Εκτιμήστε το μήκος ελεύθερης διαδρομής ℓ κίτρινου φωτός στον άργυρο με $\hbar\omega_{pf} = 9,9\,\text{eV}$ και $\omega\tau_f \gg 1$. Την τιμή του τ_f εκτιμήστε την από την ειδική ηλεκτρική αντίστασή του που είναι 1,61μΩ.cm για ω=0. Το άθροισμα στην (5.43) χωρίς το μείον είναι ίσο με –5,8.

6. Υπολογίστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή φωτός σε υγρό αέρα που περιέχει 10^6 σταγονίδια νερού ανά m^3. Κατά μέσο όρο το κάθε σταγονίδιο έχει διάμετρο 0.1 mm. Η διηλεκτρική συνάρτηση του νερού για λ=600nm είναι 1,78.

7. Χαρακτηρίζουμε ως ομίχλη ένα σύννεφο που είναι σε επαφή με το έδαφος και περιορίζει την ορατότητα σε λιγότερο από ένα χιλιόμετρο. Θεωρήστε ότι το σύννεφο αποτελείται από σταγονίδια νερού διαμέτρου 1μm. Υπολογίστε τη συγκέντρωσή τους όταν η ορατότητα είναι στο όριο του ενός km.

8. Με βάση τον τύπο (5.43), δείξτε ότι η συμβολή των *δέσμιων ηλεκτρονίων* στη διηλεκτρική συνάρτηση ικανοποιεί μια σχέση της μορφής $\epsilon(\omega) - 1 = \epsilon_b = \epsilon_b(0) + \alpha\omega^2 + i\beta\omega$, $\alpha, \beta > 0$ για $\omega \ll \omega_{oi}$. Αυτός είναι ο λόγος που για το νερό (λυμένη άσκηση 4, σελ. 136) $n_{\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o} < n_{\iota\acute{\omega}\delta\varepsilon\varsigma}$.

Κεφάλαιο 6

Οι άλλες αλληλεπιδράσεις

Σύνοψη: *Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα διαγράμματα Feynman που αφορούν στις ισχυρές και στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Οι πρώτες είναι υπεύθυνες για το σχηματισμό αδρονίων και πυρήνων, ενώ οι δεύτερες για μετασχηματισμούς στοιχειωδών και σύνθετων σωματίων. Παρουσιάζονται επίσης οι βαρυτικές δυνάμεις στο πλαίσιο της νευτώνειας μηχανικής καθώς και η σύνδεσή τους με τη τετραδιάστατη γεωμετρία του χωρόχρονου στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ). Τέλος αναφέρεται και το σύστημα μονάδων Planck.*

6.1. Οι στοιχειώδεις διαδικασίες

Στο παρόν κεφάλαιο θα δώσουμε μερικές συμπληρωματικές πληροφορίες για τις ισχυρές και τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις σε επίπεδο στοιχειωδών διαδικασιών όπου ο κυματοσωματιδιακός χαρακτήρας αυτών των αλληλεπιδράσεων είναι καίριας σημασίας. Τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις δεν θα τις εξετάσουμε σ'αυτό το επίπεδο, αφού δεν υπάρχει μια αποδεκτή κβαντική θεωρία της βαρύτητας. Θα δώσουμε μόνο κάποιους τύπους της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, προκειμένου να αποκτήσει ο αναγνώστης μια πρώτη αμυδρή εικόνα της πιο όμορφης ίσως φυσικής θεωρίας, χωρίς όμως να κάνουμε χρήση των τύπων αυτών.

Όπως φαίνεται από τα Σχ. 1.1 έως 1.5, και το Σχ. 6.1, οι φυσικές διαδικασίες μπορούν να αναλυθούν σε στοιχειώδεις διαδικασίες όπου συνήθως συντρέχουν σ' ένα κόμβο δύο γραμμές λεπτονίων (ή δύο γραμμές κουάρκ) και μια γραμμή σωματίου-φορέα δυνάμεων.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, σε κάθε στοιχειώδη κόμβο αλληλεπίδρασης διατηρούνται τα ακόλουθα μεγέθη:

- ορμή
- στροφορμή (όχι ταυτόχρονα με ορμή, αφού δεν αντιμετατίθενται)
- ηλεκτρικό φορτίο
- χρωματικό φορτίο (6.1)

- βαρυονικός αριθμός
- λεπτονικός αριθμός (χωριστά για κάθε μία από τις τρεις οικογένειες λεπτονίων). Υπάρχουν όμως και κάποιες σπάνιες διαδικασίες, όπου τα νετρίνα, αφού δημιουργηθούν, είναι δυνατόν να αλλάξουν π.χ., ένα ν_e να αλλάζει σε ν_μ ή αντίστροφα, πράγμα που σημαίνει ότι η διατήρηση της κάθε οικογένειας νετρίνου παραβιάζεται σε πολύ μικρό βαθμό.

Ορισμένες αλληλεπιδράσεις (αλλά όχι όλες) διατηρούν επίσης και άλλα μεγέθη, όπως είναι, π.χ. η ομοτιμία (parity), δηλαδή το αναλλοίωτο σε κατοπτρισμό στο χώρο, ή το αναλλοίωτο σε αντιστροφή του χρόνου (time reversal), ή η συζυγία φορτίου (charge conjugation), που αναφέρεται στη συμμετρία σωματίου/αντισωματίου. Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι η ενέργεια διατηρείται προφανώς σε κάθε *φυσική* διαδικασία, όχι όμως κατ' ανάγκη και σε κάθε στοιχειώδη κόμβο, εάν έχει γίνει η επιλογή να θεωρήσουμε ότι η ενέργεια είναι συνάρτηση της ορμής. Η φυσική αιτιολόγηση είναι ότι κάθε στοιχειώδης διαδικασία διαρκεί ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα Δt και επομένως υπάρχει μια αβεβαιότητα ΔE στη συνολική τιμή της ενέργειας σε κάθε στοιχειώδη κόμβο, όπου $\Delta E \approx \hbar / \Delta t$, σύμφωνα με μια οιονεί αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg. (Βλέπε την *Κβαντομηχανική Ι*, Στ.Τραχανά (ΠΕΚ, 2005), σελ.57-62 για σχολιασμό της σχέσης $\Delta E \approx \hbar / \Delta t$). Αντίθετα όμως, εάν θεωρήσουμε ότι οι τρεις συνιστώσες της ορμής και η ενέργεια είναι τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η ενέργεια οφείλει να διατηρείται σε κάθε στοιχειώδη κόμβο, ακριβώς όπως και οι τρεις συνιστώσες της ορμής.

Κλείνοντας αυτήν την εισαγωγή θα τονίσουμε για μια ακόμη φορά την αξία και τη χρησιμότητα των διαγραμμάτων Feynman, η οποία οφείλεται σε δύο κυρίως λόγους:

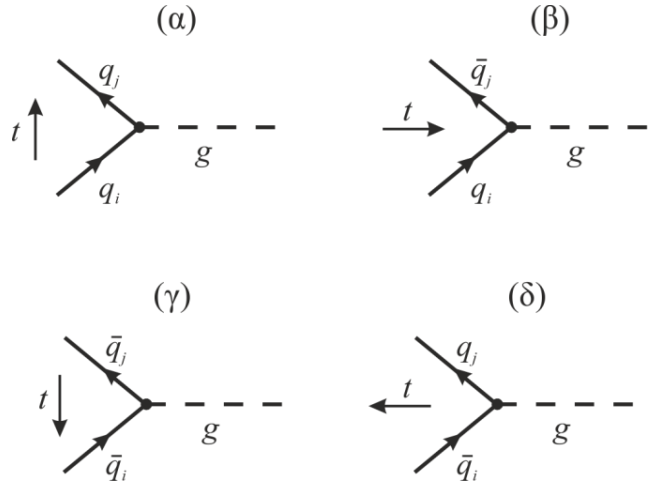
(α) Τα διαγράμματα παρέχουν μια πολύ εύκολη, άμεση, και εποπτική εικόνα για τις φυσικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα μεταξύ στοιχειωδών σωματίων (και της ύλης και των φορέων δυνάμεων).

(β) Τα διαγράμματα παρέχουν επίσης τη δυνατότητα ποσοτικών υπολογισμών μεγάλης ακριβείας ακολουθώντας ορισμένους κανόνες. Οι κανόνες αυτοί είναι αρκετά περίπλοκοι για να τους παρουσιάσουμε σ' αυτό το εισαγωγικό βιβλίο. Ο αναγνώστης όμως θα πρέπει να γνωρίζει ότι με βάση τα διαγράμματα μπορεί κανείς να πετύχει ποσοτικά αποτελέσματα και να τα συγκρίνει με πειραματικά δεδομένα.

6.2. Ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κουάρκ και γλοιονίων με φορέα τα γλοιόνια

Το παρακάτω σχήμα 6.1α παριστά την κύρια στοιχειώδη διαδικασία όπου ένα κουάρκ τύπου q ($q=u, d, c, s, t, b$) εκπέμπει ή απορροφά ένα γλοιόνιο

παραμένοντας το ίδιο κουάρκ q (εκτός ενδεχομένως από το χρωματικό του φορτίο).



Σχ. 6.1 Το βασικό διάγραμμα Feynman για την ισχυρή αλληλεπίδραση, όπου στον κόμβο προστρέχουν δύο γραμμές κουάρκ και μία γραμμή γλοιονίου. Ανάλογα με το σχετικό προσανατολισμό του βέλους του χρόνου το ίδιο διάγραμμα απεικονίζει τέσσερις διαφορετικές φυσικές διαδικασίες, όπως αναφέρεται στο παρακάτω κείμενο.

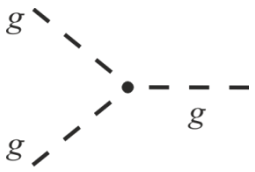
Αν η διεύθυνση του βέλους του χρόνου είναι οριζόντια και με φορά από αριστερά προς τα δεξιά (6.1β), το ίδιο διάγραμμα παριστά τον αφανισμό ενός ζεύγους κουάρκ q_i και του αντίστοιχου αντικουάρκ $\bar{q}_j$ ($q_{i=}u, d, c, s, t, b$) με ταυτόχρονη δημιουργία ενός γλοιονίου. Επίσης, αν αντιστρέψουμε την αρχική φορά του χρόνου, όπως στο (6.1γ), το ίδιο διάγραμμα παριστά μια διαδικασία όπου ένα αντικουάρκ $\bar{q}_i$ ($\bar{q}_i = \bar{u}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{b}$) εκπέμπει ή απορροφά ένα γλοιόνιο με ενδεχόμενη αλλαγή αντιχρωματικού φορτίου παραμένοντας όμως κατά τα άλλα το ίδιο αντικουάρκ. Τέλος, αν η διεύθυνση του βέλους του χρόνου είναι οριζόντια και με φορά από δεξιά προς τα αριστερά (6.1δ), το ίδιο διάγραμμα παριστά τον αφανισμό ενός γλοιονίου με ταυτόχρονη δημιουργία ενός ζεύγους κουάρκ q_j και αντικουάρκ $\bar{q}_i$ (q_j=u, d, c, s, t, b). Το αντικουάρκ είναι πάντα εκείνο που η φορά του βέλους του είναι αντίθετη με το βέλος του χρόνου, σύμφωνα με τους κανόνες των διαγραμμάτων Feynman (βλ. [21], σελ. 576-578).

Θυμίζουμε στον αναγνώστη ότι κάθε κουάρκ q (q=u, d, c, s, t, b) φέρει χρωματικό φορτίο που είναι ένα εκ των τριών τύπων R, G, B. Επίσης κάθε αντικουάρκ $\bar{q}$ ($\bar{q} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{b}$) φέρει αντιχρωματικό φορτίο που είναι ένα εκ των τριών τύπων: $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$. Τέλος το κάθε γλοιόνιο φέρει ζεύγος χρωματικού-αντιχρωματικού, φορτίου που είναι ένα εκ των οκτώ τύπων:

$$R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R}-G\bar{G}), \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R}+G\bar{G}-2B\bar{B}) . \qquad (6.2)$$

Σε κάθε κόμβο του Σχ. 6.1 διατηρείται το χρωματικό φορτίο. Π.χ., αν το κουάρκ q που προσέρχεται στον κόμβο, είναι τύπου R και το ίδιο κουάρκ που απομακρύνεται από τον κόμβο είναι τύπου B, τότε το γλοιόνιο που εκπέμπεται θα είναι τύπου $R\bar{B}$ (ή το γλοιόνιο που απορροφάται θα είναι τύπου $B\bar{R}$) προκειμένου να διατηρηθεί το χρωματικό φορτίο. Σημειώστε, ότι, λόγω του ότι τα γλοιόνια φέρουν χρωματικό φορτίο–αντιφορτίο, το χρωματικό φορτίο του κάθε κουάρκ θα αλλάξει λόγω της ισχυρής αλληλεπίδρασης, εάν το γλοιόνιο που εκπέμπεται ή απορροφάται είναι των έξη πρώτων τύπων του (6.2). Γλοιόνια των δύο τελευταίων τύπων αφήνουν αναλλοίωτο το χρωματικό φορτίο του κουάρκ.

Τα γλοιόνια, επειδή φέρουν χρωματικό-αντιχρωματικό φορτίο, αλληλεπιδρούν κατ' ευθείαν μεταξύ τους όπως δείχνουν τα δύο στοιχειώδη διαγράμματα που ακολουθούν



άμεση αλληλεπίδραση τριών γλοιονίων

άμεση αλληλεπίδραση τεσσάρων γλοιονίων

Σχ.6.2 Διαγράμματα που απεικονίζουν στοιχειώδεις διαδικασίες οφειλόμενες στην ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ μόνο γλοιονίων

Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις διατηρούν σε κάθε κόμβο, πέραν των μεγεθών που αναφέρονται στον κατάλογο (6.1), την ομοτιμία (parity), δηλαδή το αναλλοίωτο σε κατοπτρισμό στο χώρο, την συζυγία φορτίου (charge conjugation), το αναλλοίωτο σε αντιστροφή του χρόνου, και το λεγόμενο ισοτοπικό σπιν και την τρίτη προβολή του, που από φυσική άποψη σημαίνει ότι δεν κάνει διαφορά για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις το ηλεκτρικό φορτίο. Με άλλα λόγια για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις το πρωτόνιο και το νετρόνιο είναι σαν διαφορετικές καταστάσεις του ίδιου σωματίου. Τέλος, οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις, αφού δεν αλλάζουν το είδος του quark, διατηρούν

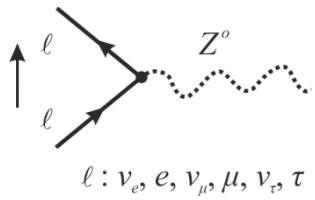
το κάτω, το άνω, την παραδοξότητα (strangeness), τη χάρη (charm), τη πυθμενικότητα (bottomness), και το κορυφαίο (topness).

Όπως φαίνεται από τα στοιχειώδη διαγράμματα της προηγούμενης παραγράφου μόνο τα κουάρκ (από τα σωμάτια ύλης) και μόνο τα γλοιόνια (από τα σωμάτια-φορείς αλληλεπιδράσεων) είναι πηγές και αποδέκτες της ισχυρής αλληλεπίδρασης.

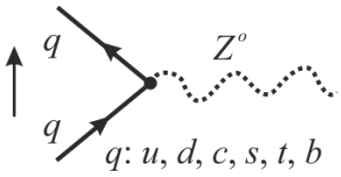
Η κύρια διαφορά μεταξύ ισχυρών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων είναι ότι οι πρώτες είναι τόσο πολύ περίπλοκες (λόγω των τριών ειδών χρωματικού φορτίου και των διαγραμμάτων του Σχ. 6.2) και τόσο ισχυρές ώστε ακριβείς υπολογισμοί της ολικής ενέργειας είναι πολύ δυσχερείς. Τέλος θα πρέπει να τονισθεί ότι οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις εμφανίζονται ως βραχείας εμβέλειας, παρόλο που τα γλοιόνια έχουν μηδενική μάζα και ως εκ τούτου θα έπρεπε να είναι άπειρης εμβέλειας βάσει του γνωστού τύπου που συνδέει την εμβέλεια με το αντίστροφο της μάζας ηρεμίας του φορέα. Η εξήγηση αυτού του φαινομένου συνδέεται με την ιδιότητα του **εγκλωβισμού**, η οποία απορρέει από την ισχυρή αλληλεπίδραση και η οποία θα εξετασθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

6.3. Ασθενείς αλληλεπιδράσεις με φορέα τα διανυσματικά μποζόνια

Ο κύριος ρόλος των ασθενών αλληλεπιδράσεων είναι να μετασχηματίζουν λεπτόνια και κουάρκ καθώς και να αφανίζουν, ή να δημιουργούν ζεύγη κουάρκ/αντικουάρκ και ζεύγη λεπτονίων/αντιλεπτονίων, όπως δείχνουν τα στοιχειώδη διαγράμματα Feynman που ακολουθούν:

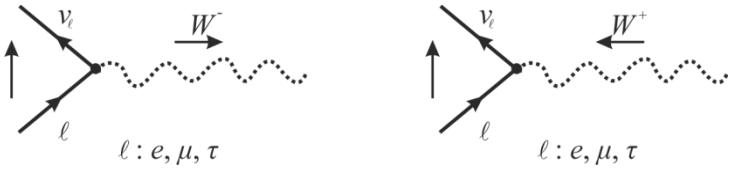


Σχ. 6.3



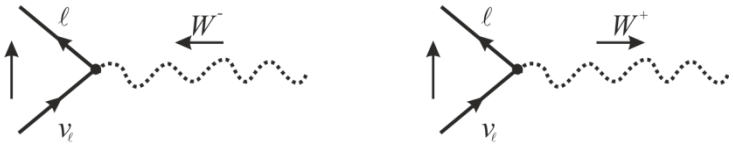
Σχ. 6.4

Όπως φαίνεται στα σχήματα 6.3 και 6.4 ένα οποιοδήποτε λεπτόνιο ή ένα οποιοδήποτε κουάρκ μπορεί να εκπέμψει ή να απορροφήσει ένα διανυσματικό μποζόνιο Z^o, παραμένοντας το ίδιο λεπτόνιο ή το ίδιο κουάρκ και διατηρώντας το ηλεκτρικό του φορτίο (και το χρωματικό του φορτίο προκειμένου για κουάρκ). Το ουδέτερο διανυσματικό μποζόνιο δεν συμμετέχει σε άλλες διαδικασίες (με λεπτόνια ή κουάρκ) εκτός αυτών που εικονίζονται στα Σχ. 6.3 και 6.4, τα οποία όμως περιγράφουν και άλλες φυσικές διαδικασίες ανάλογα με τη φορά και τη διεύθυνση (κάθετη ή οριζόντια) που έχει το βέλος του χρόνου. Σημειώστε ότι ο ρόλος του Z^o προκειμένου για ηλεκτρικά φορτισμένα σωμάτια είναι ο ίδιος όπως του φωτονίου με μόνη τη διαφορά ότι η συμβολή του είναι πολύ ασθενέστερη αυτής του φωτονίου (λόγω του ότι (ασθενείς)/(ΗΜ)≈(1/20000) και επομένως οι διαδικασίες όπου εμπλέκεται το Z^o αποτελούν μια πολύ μικρή διόρθωση στις αντίστοιχες ΗΜ. Αν το σωμάτιο ℓ στο Σχ. 6.3 είναι νετρίνο, η διαδικασία δεν μπορεί να γίνει ΗΜ.



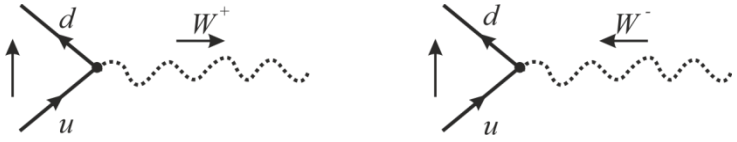
Σχ. 6.5

Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.5 ένα λεπτόνιο ℓ ($\ell = e, \mu, \tau$) , μπορεί να εκπέμψει ένα διανυσματικό μποζόνιο W^- ή να απορροφήσει ένα διανυσματικό μποζόνιο W^+ μετατρεπόμενο ταυτόχρονα στο αντίστοιχο νετρίνο ν_ℓ. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο στον κόμβο διατηρείται. Αντίστοιχη εικόνα ισχύει και για τα αντισωμάτια.



Σχ. 6.6

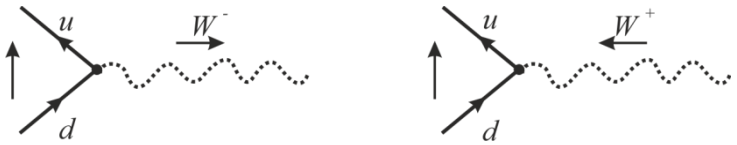
Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.6, ένα νετρίνο ν_ℓ ($\ell : e, \mu, \tau$) μπορεί να απορροφήσει ένα διανυσματικό μποζόνιο W^- ή να εκπέμψει ένα διανυσματικό μποζόνιο W^+ και να μετατραπεί στο αντίστοιχο λεπτόνιο ℓ ($\ell = e, \mu, \tau$).Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο στον κόμβο διατηρείται. Αντίστοιχη εικόνα ισχύει και για τα αντισωμάτια.



Σχ. 6.7

Στο Σχ. 6.7 παρουσιάζεται η διαδικασία (μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων) όπου ένα κουάρκ *u* μετατρέπεται σε κουάρκ *d* εκπέμποντας ένα διανυσματικό μποζόνιο W^+ ή απορροφώντας ένα διανυσματικό μποζόνιο W^-.

Αντί του ζεύγους (*u*,*d*) μπορούμε να έχουμε στα παραπάνω διαγράμματα είτε το ζεύγος (*c*,*s*) είτε το ζεύγος (*t*,*b*).

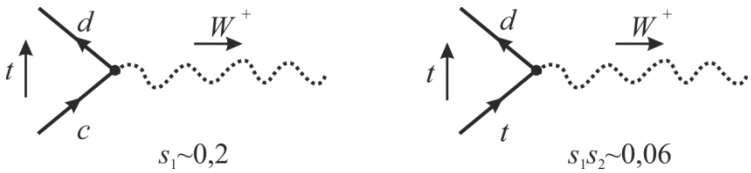


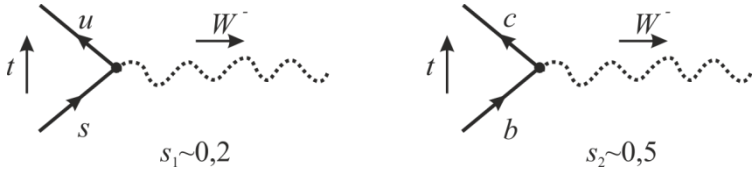
Σχ. 6.8

Στο Σχ. 6.8 παρουσιάζεται αντίστοιχη διαδικασία όπου ένα κουάρκ *d* μετατρέπεται σε κουάρκ *u* (ή ένα κουάρκ *s* μετατρέπεται σε κουάρκ *c*, ή ένα κουάρκ *b* μετατρέπεται σε κουάρκ *t*) εκπέμποντας ένα W^- ή απορροφώντας ένα W^+.

Σημειώστε ότι οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις επιτρέπουν επίσης και αλλαγές του τύπου των Σχ. 6.7 και 6.8 μεταξύ *διαφορετικών οικογενειών κουάρκ*. Π.χ., στο Σχ. 6.7 το κουάρκ *u*, μπορεί να αντικατασταθεί από κουάρκ *c* ή κουάρκ *t*, ή, π.χ. στο Σχ. 6.8 το *d* μπορεί να αντικατασταθεί από το *s*, ή το *b* και το *u* από το *t* ή το *c*. Παραδείγματα τέτοιων διαδικασιών παρουσιάζονται στο Σχ. 6.9.

Σημειώστε ότι σ' όλα τα διαγράμματα των Σχ. 6.3 έως και 6.9, η φορά του χρόνου μπορεί να αντιστραφεί και τα ίδια διαγράμματα μπορούν να περιγράψουν διαδικασίες με αντισωμάτια (βάσει του κανόνα ότι γραμμές λεπτονίων ή κουάρκ με βέλος αντίθετο της φοράς του χρόνου αντιστοιχούν σε αντισωμάτια).

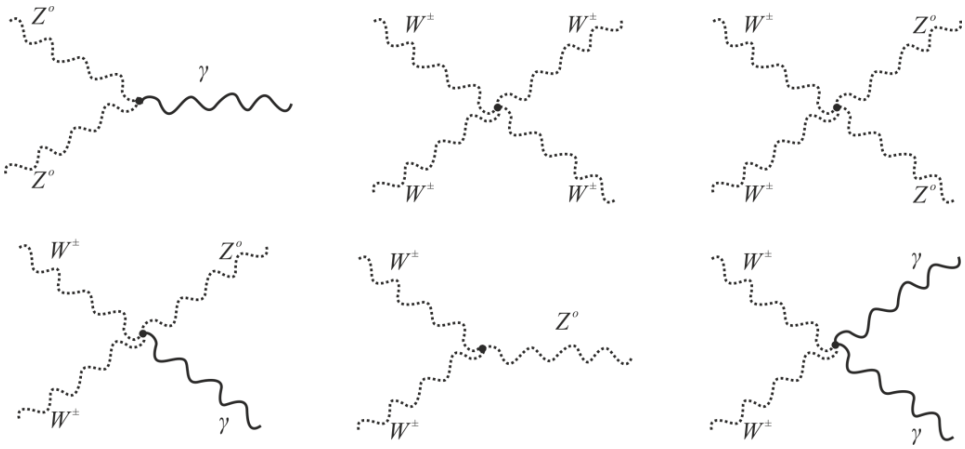




Σχ. 6.9 Στοιχειώδεις διαδικασίες όπου με εκπομπή διανυσματικών μποζονίων W^+ ή W^- έχουμε μετατροπές κουάρκ μεταξύ μελών διαφορετικών οικογενειών. Οι στοιχειώδεις αυτές διαδικασίες έχουν μικρότερο πλάτος πιθανότητας να συμβούν (σε σύγκριση με αυτές της ίδιας οικογένειας) κατά ένα παράγοντα $s_1 \approx 0,2$ (η πρώτη και η τρίτη), ή $s_2 \approx 0,5$ ή $s_1 s_2 \approx 0,06$. Σημειώστε ότι οι διαδικασίες αυτές δεν διατηρούν την ιδιότητα του χαρίσματος (η πρώτη) ή του κορυφαίου (η δεύτερη) ή του παράξενου (η τρίτη) ή του πυθμενικού (η τέταρτη)

Εάν η διεύθυνση του βέλους του χρόνου γίνει οριζόντια τα αντίστοιχα διαγράμματα περιγράφουν αφανισμό λεπτονίου-αντιλεπτονίου ή κουάρκ-αντικουάρκ με δημιουργία διανυσματικού μποζονίου ή αφανισμό διανυσματικού μποζονίου με δημιουργία ζεύγους σωματίου αντισωματίου.

Παρατηρήστε ότι οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις επιτρέπουν στοιχειώδεις διαδικασίες μεταξύ σωματίων–φορέων της ασθενούς αλληλεπίδρασης ή και φωτονίων, όπως οι εικονιζόμενες στο Σχ. 6.10



Σχ. 6.10

6.4. Βαρυτικές αλληλεπιδράσεις και βαρυτικά κύματα

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, δεν χρησιμοποιούνται διαγράμματα Feynman για τη μελέτη των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων γιατί δεν υπάρχει μια αποδεκτή κβαντική θεωρία της βαρύτητας ακόμη, παρά τις πολλές προσπάθειες. Με άλλα λόγια δεν έχει διατυπωθεί μια γενικά αποδεκτή θεωρία που να ενσωματώνει και το σωματιδιακό και τον κυματικό χαρακτήρα της βαρύτητας. Αυτό είναι εντυπωσιακό δεδομένου ότι η βαρύτητα είναι η

πιο οικεία δύναμη, την οποία υφιστάμεθα όλοι μας ανά πάσα στιγμή και η οποία είναι η πρώτη που μελετήθηκε ποσοτικά εδώ και τρακόσια τριάντα χρόνια αποτελώντας τη ληξιαρχική πράξη γέννησης της σύγχρονης επιστημονικής μεθοδολογίας. Αναφέρομαι φυσικά στη θεωρία της παγκόσμιας έλξης του Newton και στη συνακόλουθη ενοποίηση επίγειων και ουράνιων φαινομένων. Παρόλο τον κοσμοϊστορικό της ρόλο η νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας, που θεωρεί ακαριαία τη μετάδοση των δυνάμεων, δεν περιέχει ούτε καν το κυματικό χαρακτήρα που κάθε φυσική θεωρία στοιχειωδών άλληλεπιδράσεων οφείλει να ενσωματώνει, σύμφωνα με τον κυματοσωματιδιακό δυισμό. Ο κυματικός χαρακτήρας της βαρύτητας απεκατεστάθη με τη διατύπωση της θαυμαστής Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ) πριν από εκατό περίπου χρόνια με τη δημοσίευση της εργασίας ενός μόνου ανθρώπου, του Albert Einstein, και μάλιστα χωρίς να υπάρχουν πειραματικές ενδείξεις που να υποδεικνύουν την ανάγκη για τροποποίηση της νευτώνειας θεωρίας. Πράγματι η τελευταία περιγράφει επαρκώς όλα τα επίγεια βαρυτικά φαινόμενα καθώς και την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, όπως και την κίνηση των δορυφόρων των πλανητών (η κίνηση του περιηλίου του Ερμή παρουσίαζε μια μικρή ανωμαλία τα αίτια της οποίας παρέμεναν ασαφή). Έτσι η ΓΘΣ, που αρκετοί τη θεωρούν την πιο κομψή και «όμορφη» φυσική θεωρία, αποτελεί χωρίς αμφιβολία ένα μνημειώδες επίτευγμα του ανθρώπινου νού, το οποίο έχει περάσει με επιτυχία πάμπολλους παρατηρησιακούς ελέγχους αστρονομικής κυρίως φύσεως[1]. Ένα θέμα που εκκρεμούσε και απέμενε να αποδειχθεί πειραματικά ήταν το αν ο κυματικός χαρακτήρας των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων που ενυπάρχει στη ΓΘΣ ήταν όντως έτσι, με άλλα λόγια απέμενε να ανιχνευθούν πειραματικά τα **βαρυτικά κύματα**, τα οποία προβλέπονται από τη θεωρία του Einstein. Η πειραματική διαπίστωση της ύπαρξης βαρυτικών κυμάτων εμφανίζει τεράστιες δυσκολίες: (α) Θα πρέπει κάπου στο Σύμπαν να λάβει χώρα ένα δυναμικό γεγονός που να περιλαμβάνει τεράστιες επιταχύνσεις γιγάντιων μαζών και να εκπεμφθεί έτσι υπό μορφή βαρυτικών κυμάτων ένα αστρονομικό ποσό ενέργειας σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα. (β) Το γεγονός αυτό θα πρέπει ή να είναι σχετικά κοντά στη Γη ή να είναι τέτοιας κατακλυσμιαίας κλίμακας ώστε το ποσοστό της ενέργειας που θα περάσει από τη Γη σε ένα διάστημα δευτερολέπτων ή και κλάσματος αυτών να είναι ανιχνεύσιμο. (γ) Εκτιμώντας ευνοϊκές πιθανότητες για τα (α) και (β) και

[1] Τα επίγεια πειράματα δεν είναι ικανά να διακρίνουν τα ποσοτικά αποτελέσματα της ΓΘΣ από αυτά της νευτώνειας θεωρίας, λόγω της ακραίας ασθενικότητας των βαρυτικών δυνάμεων. Εξαίρεση αποτελεί το σύστημα GPS, η ορθή λειτουργία του οποίου απαιτεί να ληφθεί υπόψη η διαφορά ροής του χρόνου μεταξύ των επίγειων και των δορυφορικών συστημάτων (βλ. το παρακάτω εδάφιο 6.4.3α και τη λυμένη άσκηση 6.2). Σε αστρονομικά φαινόμενα, όπου εμπλέκονται τεράστιες μάζες, τα βαρυτικά πεδία γίνονται σημαντικά και οι διαφορές της νευτώνειας μηχανικής από τη ΓΘΣ μπορεί να γίνουν όχι μόνο μετρήσιμες αλλά πολύ μεγάλες.

λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα βαρυτικό κύμα συμπιέζει το χώρο σε μία κατεύθυνση και τον διαστέλλει στην κάθετή της κατεύθυνση καταλήγει κανείς στο συμπέρασμα ότι πρέπει να δημιουργηθούν διατάξεις ικανές να μετρήσουν σχετικές διαφορές μηκών της τάξεως του 10^{-18} m που σημαίνει μεγαλύτερη ακρίβεια από ένα δισεκατομμυριοστό του μέτρου στην απόσταση Γης-Σελήνης! Δύο τέτοιες συσκευές ικανές να μετρήσουν τόσο μικρές διαφορές σε δύο κάθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις είχαν εγκατασταθεί σε δύο διαφορετικές πολιτείες των ΗΠΑ αναμένοντας το μεγάλο γεγονός της ενδεχόμενης άφιξης βαρυτικών κυμάτων.

Το μεγάλο γεγονός επιτέλους ήλθε:

Στις 14 Σεπτεμβρίου 2015 έφτασε στη Γη ένας παλμός βαρυτικών κυμάτων που ξεκίνησε από τα πέρατα του Σύμπαντος πριν από περίπου 1,3 δισεκατομμύρια έτη. Η εντοπισμένη πηγή αυτού του παλμού ήταν ένα διπλό σύστημα μαύρων οπών (με μάζες αντιστοίχως 36 και 29 φορές τη μάζα του Ήλιου) οι οποίες συγχωνεύτηκαν σε μία εκλύοντας περίπου το ισοδύναμο 3 μαζών Ήλιου σε ενέργεια υπό μορφή βαρυτικών κυμάτων. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, τα τελευταία συμπιέζουν το χώρο σε μια διεύθυνση και τον διαστέλλουν στην κάθετή της. Αναφέραμε επίσης προηγουμένως ότι για να μετρηθούν αυτές οι ανεπαίσθητες σχετικές συμπιέσεις και διαστολές του χώρου στη Γη απαιτείται ακρίβεια μέτρησης της τάξεως ενός εκατοστού στην απόσταση ενός έτους φωτός! Δύο τέτοιας ακρίβειας μετρητικές διατάξεις, γνωστές με το όνομα LIGO, ήσαν εγκατεστημένες στις πολιτείες Λουιζιάνα και Ουάσινγτον των ΗΠΑ και *μέτρησαν* αυτό το ανεπαίσθητο σήμα που διήρκεσε περίπου 0,2 δευτερόλεπτα και έφτασε πρώτα στη Λουιζιάνα και μετά 6,9 χιλιοστά του δευτερολέπτου στην Ουάσινγτον. Στους ακόλουθους μήνες τα καταγραφέντα σήματα αναλύθηκαν εξαντλητικά από εκατοντάδες ερευνητές πριν ανακοινωθεί επισήμως η μεγάλη αυτή ανακάλυψη. Ανακάλυψη που αποτελεί όχι μόνο την πειραματική ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων (ένα αιώνα μετά τη θεωρητική πρόβλεψή τους από τον Einstein), αλλά και την αναμφισβήτητη επιβεβαίωση ύπαρξης μαύρων οπών, όπως και της ύπαρξης διπλού συστήματός τους. Ας σημειωθεί ότι η λεπτομερής ανάλυση των δεδομένων είναι σε πλήρη συμφωνία με τις θεωρητικές προβλέψεις.

Τρεις μήνες αργότερα, στις 26/12/ 2015, ένας άλλος παλμός βαρυτικών κυμάτων καταγράφηκε από το σύστημα LIGO. Η λεπτομερής ανάλυσή του έδειξε ότι η πηγή και αυτού του παλμού ήταν ένα διπλό σύστημα μαύρων οπών (με μάζες 14,2 και 7,5 φορές τη μάζα του Ήλιου σε απόσταση από τη Γη περίπου 1,4 δισεκατομμύρια έτη φωτός) που συγχωνεύτηκαν σε μία, εκλύοντας βαρυτικά κύματα ενέργειας ίσης με το ισοδύναμο μιας μάζας Ηλίου.

Στις 17/8/2017 κατεγράφησαν από το σύστημα LIGO και το αντίστοιχο ευρωπαϊκό σύστημα VIRGO βαρυτικά κύματα των οποίων η πηγή ήταν η συγχώνευση δύο αστέρων νετρονίων σε απόσταση 130 εκατομμυρίων ετών

φωτός (βλ. Κεφ. 13, μέρος 13.3). Η εκπομπή των βαρυτικών κυμάτων συνοδεύθηκε και από εκπομπή ενός παλμού ακτίνων γάμμα που έφτασε στη Γη 1,7 δευτερόλεπτα μετά την έλευση των βαρυτικών κυμάτων. Η ταυτόχρονη εκπομπή βαρυτικών και ΗΜ κυμάτων επιτρέπει την εξαγωγή πολλών συμπερασμάτων π.χ. για τη δημιουργία βαρέων στοιχείων, για τη τιμή της σταθεράς του Hubble, για την πηγή των λεγομένων GRBs κλπ (βλ. 13.3).

Φαίνεται λοιπόν ότι ένα νέο παράθυρο στο Σύμπαν άνοιξε για την ανθρωπότητα. Μέχρι τώρα μοναδικό μέσο για να βρούμε το τι συμβαίνει «εκεί-έξω» ήταν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Στη νέα εποχή υπάρχει πια ένα νέο μέσο (σε συνδυασμό ενδεχομένως και με τα ΗΜ κύματα) πολύ πιο διεισδυτικό, τα βαρυτικά κύματα, που θα μας επιτρέπει να «βλέπουμε» και να κατανοούμε αυτόν τον Κόσμο, τον Μέγα.

Θα κλείσουμε αυτό το μέρος του παρόντος κεφαλαίου επισημαίνοντας για μία ακόμη φορά τα τρία χαρακτηριστικά της βαρυτικής αλληλεπίδρασης: (α) Τον οικουμενικό της χαρακτήρα, το ότι δηλαδή όλα τα σωμάτια και αυτά της ύλης και αυτά των αλληλεπιδράσεων (συμπεριλαμβανομένου και του υπό ανακάλυψη στοιχειώδους σωματίου της βαρυτικής αλληλεπίδρασης) υπόκεινται στη βαρύτητα, είναι δηλαδή πηγές αλλά και αποδέκτες της βαρυτικής δύναμης. Αυτή η οικουμενικότητα ενισχύεται στο πλαίσιο της ΓΘΣ, αφού η τελευταία συνδέει τη βαρύτητα με τη γεωμετρία (του χωρόχρονου) στην οποία προφανώς υπόκειται το καθετί. (β) Το αδιανόητα ασθενές των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων σχετικά με όλες τις άλλες αλληλεπιδράσεις. (γ) Ο πάντα ελκτικός μακράς εμβέλειας χαρακτήρας των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων που δημιουργεί τεράστια συσσωματώματα ύλης (πλανήτες, άστρα, γαλαξίες, μαύρες τρύπες κλπ), τα οποία καθιστούν τελικά την βαρύτητα από σημαντική έως καθοριστική σ' αυτή την κλίμακα μαζών.

6.4.1. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις κατά τον Newton

Η βαρύτητα, που είναι η πιο οικεία αλληλεπίδραση αλλά και η λιγότερο κατάνοητή σε μικροσκοπικό επίπεδο, είναι υπεύθυνη, όπως αναφέραμε, για το σχηματισμό μεγάλων δομών, μέσω των οποίων γίνεται αισθητή έως και κυρίαρχη.

Το πεδίο βαρύτητας σύμφωνα με τη νευτώνεια θεωρία περιγράφεται από τις ακόλουθες δύο γενικές σχέσεις:

$$\boxed{\Phi_A = -4\pi G M_A}\,, \tag{6.3}$$

$$K_L = 0\,, \tag{6.4}$$

όπου M_A είναι η ολική μάζα που περικλείει η οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια A, μέσω της οποίας καθορίσθηκε η ροή Φ_A. (Για τον ορισμό της ροής και της κυκλοφορίας K_L διανυσματικού πεδίου βλέπε το Παράρτημα IV, σελ.395). Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις (5.6) της ηλεκτροστατικής, όπου το ρόλο του πεδίου βαρύτητας τον έχει το

ηλεκτρικό πεδίο και τον ρόλο του *GM* τον έχει το ρ_{ext}/ϵ. Επομένως η ίδια μαθηματική επεξεργασία που οδήγησε στο νόμο του Coulomb και στο δυναμικό Coulomb είναι εφαρμόσιμη και στο βαρυτικό πεδίο. Πράγματι, από την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις, (6.3), γνωστή ως νόμος του Gauss, ενόψει και της (6.4), έπεται αμέσως η ακόλουθη[2] σχέση της παγκόσμιας έλξης:

$$\boxed{\mathbf{F}_m = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{r}_o} \quad . \tag{6.5}$$

Αλλά και σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις όπου η κατανομή μάζας έχει σφαιρική ή κυλινδρική συμμετρία, ο νόμος του Gauss μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε πολύ εύκολα το πεδίο, ενώ ο κατ' ευθείαν προσδιορισμός αθροίζοντας ή ολοκληρώνοντας σχέσεις του τύπου (6.5) είναι πολύ πιο κοπιώδης. Ως εφαρμογή υπολογίστε το βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί η Γη και στο εσωτερικό της και στο εξωτερικό της. Στην συνέχεια υπολογίστε το δυναμικό (και στο εσωτερικό και στο εξωτερικό της) καθώς και την βαρυτική αυτοενέργεια της Γης. Θεωρήστε ότι η πυκνότητα της Γης μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο της (από 14g/cm^3 στο κέντρο σε 2,69gr/cm^3 στην επιφάνειά της). Υπολογίστε και την πίεση που ασκούν τα υπερκείμενα στρώματα σε απόσταση *r* από το κέντρο της, βλ. ενότητα 12.4.

Η δεύτερη, (6.4), από τις δύο βασικές σχέσεις σημαίνει ότι το βαρυτικό πεδίο είναι αστρόβιλο. Ακριβώς επειδή είναι αστρόβιλο, είναι εφικτό να ορίσουμε το δυναμικό $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ και στη συνέχεια τη δυναμική ενέργεια.

6.4.2. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις κατά τον Einstein: ΓΘΣ*

Η νευτώνεια θεωρία για το βαρυτικό πεδίο έχει τροποποιηθεί από την ακριβέστερη θεωρία της βαρύτητας του Einstein (τη λεγόμενη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, (ΓΘΣ)). Η βασική ιδέα της ΓΘΣ είναι η σύνδεση της κα-

---

[2] Εάν για επιφάνεια *A* θεωρήσουμε μια σφαίρα ακτίνας *R* με κέντρο την μάζα *M*, το πεδίο **E** θα είναι εν γένει παράλληλο (ή αντιπαράλληλο) με το διάνυσμα $d\mathbf{A} = \mathbf{r}_o\, dA$ (αν δεν ήταν, τότε θα παραβιαζόταν η (6.4) ενόψει και της σφαιρικής συμμετρίας). Το **E** θα είναι επίσης και σταθερού μεγέθους (για σταθερή απόσταση *r* από την *M*), όπου $\mathbf{r}_o$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την ακτινική κατεύθυνση. Επομένως

$$\Phi_A = E 4\pi r^2 (\pm 1) = -4\pi G M \Rightarrow \mathbf{E} = -(G M / r^2)\mathbf{r}_o \Rightarrow \mathbf{F} = -(G M m / r^2)\mathbf{r}_o \ .$$

(Το πρόσημο συν θα ίσχυε εάν τα **E** και $\mathbf{r}_o$ ήσαν παράλληλα και το πρόσημο μείον όταν είναι αντιπαράλληλα, όπως συμβαίνει στην πραγματικότητα για ελκτικές δυνάμεις). Από τη σχέση για την ένταση του πεδίου **E** προκύπτει με ολοκλήρωση ο γνωστός τύπος για το βαρυτικό δυναμικό: $\mathcal{V} = -GM/r$.

*Η ενότητα αυτή μπορεί να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

τανομής της σχετικιστικής μάζας (=ενέργειας/c^2) *και της ορμής της* με τη γενικευμένη γεωμετρία του τετραδιάστατου χωρόχρονου (τρεις διαστάσεις για το χώρο και μία για το χρόνο). Ο Einstein διευκολύνθηκε ασφαλώς στην πραγμάτωση της ιδέας του από το γεγονός ότι μαθηματικοί είχαν ήδη αναπτύξει το φορμαλισμό για γενικευμένες μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Φυσικά απέμενε στη μεγαλοφυία του Einstein να βρει το ποια ακριβώς έκφραση της κατανομής της σχετικιστικής μάζας και της ορμής της συνδέεται με ποια από τις πολλές εκφράσεις που χαρακτηρίζουν τη γενικευμένη γεωμετρία του χωρόχρονου, η οποία εξαρτάται από τις 16 βασικές ποσότητες g_{ij} που είναι εν γένει συναρτήσεις των x^i $(i = 0,1,2,3)$ και ορίζουν το τετράγωνο ds^2 της στοιχειώδους απόστασης μεταξύ δύο σημείων στον τετραδιάστατο χωρόχρονο· ο δείκτης μηδέν αναφέρεται στο χρόνο και οι δείκτες 1,2,3 αναφέρονται στις τρεις διαστάσεις του χώρου:

$$ds^2 \equiv g_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 0,1,2,3. \tag{6.6}$$

Στην (6.6) υπονοείται άθροιση πάνω σε επαναλαμβανόμενους δείκτες. Για ευκλείδειο χώρο και χρόνο ανεξάρτητο της θέσης και της ταχύτητας (που ονομάζεται χωρόχρονος Minkowsky), έχουμε ότι g_{oo}=1 και g_{11}= g_{22}= g_{33}= = –1, με όλα τα άλλα g_{ij} να είναι μηδέν και dx^o=cdt, dx^1=dx, dx^2=dy, dx^3=dz. Από τις βασικές γεωμετρικές ποσότητες g_{ij} ορίζονται μεταξύ άλλων και ο λεγόμενος 4×4 τανυστής του Riemann R^k_j καθώς και το βαθμωτό μέγεθος του Riemann R. Μέσω αυτών ο Einstein όρισε τον 4×4 τανυστή $G^k_j \equiv R^k_j - \frac{1}{2}\delta^k_j R$, τον οποίο συνέδεσε με τον 4×4 τανυστή που δίνει την κατάνομή σχετικιστικής μάζας και ορμής και ο οποίος δεν είναι άλλος από τον λεγόμενο τανυστή ενέργειας-ορμής:

$$T^k_j = (\varepsilon + p)u_j u^k - p\delta^k_j, \tag{6.7}$$

όπου ε είναι η πυκνότητα της ενέργειας, p είναι η πίεση και u_j είναι οι τεσσερις συνιστώσες της ταχύτητας (διηρημένες με την ταχύτητα του φωτός). Σημειώστε ότι ως πηγή της γενικευμένης γεωμετρίας δεν είναι μόνο η πυκνότητα της ενέργειας (που είναι ισοδύναμη με την πυκνότητα της σχετικιστικής μάζας), αλλά και η πίεση καθώς και το γινόμενο των ταχυτήτων $u_j u^k$. Επομένως η βασική εξίσωση της ΓΘΣ έχει την ακόλουθη μορφή

$$-\Lambda\delta^k_j - \frac{8\pi G}{c^4}T^k_j = G^k_j \equiv R^k_j - \frac{1}{2}\delta^k_j R, \qquad \text{(βλ. σελ. 160)} \tag{6.8}$$

όπου ο τανυστής του Einstein $G^k_j \equiv R^k_j - \frac{1}{2}\delta^k_j R$ συνδέεται με ένα περίπλοκο τρόπο (που δεν παρουσιάσαμε) με τα g_{jk}. Ο όρος $-\Lambda\delta^k_j$ είναι ο όρος της λεγόμενης κοσμολογικής σταθεράς, που προσετέθη εκ των υστέρων από

τον Einstein προκειμένου να επιτύχει χρονοανεξάρτητες λύσεις της εξισώσεώς του που να είναι συνεπείς με την εικόνα ενός αιώνιου και αμετάβλητου Σύμπαντος. Όταν η εικόνα αυτή ανετράπη μετά την παρατηρησιακή διαπίστωση του Hubble ότι το Σύμπαν διαστέλλεται, ο ίδιος ο χώρος διαστέλλεται, ο Einstein απέσυρε τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς, η οποία όμως επανήλθε στις μέρες μας, αφού φαίνεται να είναι ισοδύναμη με την πυκνότητα της λεγόμενης σκοτεινής ενέργειας. (Βλ. κεφ. 14).

6.4.3. Δύο μοντέλα που επιτρέπουν ακριβείς λύσεις της ΓΘΣ

α) Σφαιρικά συμμετρικό, αφόρτιστο, μη περιστρεφόμενο σώμα μάζας M *και ακτίνας* R_M:
Στην περίπτωση αυτή η λύση της εξίσωσης (6.8) δίνει για τον τανυστή g_{ij} μια διαγώνια απλή μορφή τέτοια ώστε η σχέση (6.6) γίνεται (σε σφαιρικές χωρικές συντεταγμένες)

$$ds^2 = (1-\frac{r_S}{r})c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-(r_S/r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \qquad r \geq r_S,\, R_M\,, \quad (6.9)$$

που διαφέρει από το μη σχετικιστικό χωρόχρονο, τον χωρόχρονο του Minkowski, μόνο κατά τη ροή του χρόνου που εξαρτάται από τη θέση r και κατά την ακτινική διεύθυνση (που το στοιχειώδες μήκος της αυξάνει όσο το r μειώνεται). Οι διαφορές αυτές οφείλονται στον όρο $1–(r_S/r)$ όπου η ποσότητα r_S δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{r_S \equiv 2GM/c^2} \qquad (6.10)$$

και ονομάζεται ακτίνα του **ορίζοντα γεγονότων** του σώματος. Η ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων, ή ακτίνα του Schwarzschild, όπως αλλιώς ονομάζεται, είναι ένα μέτρο της απόκλισης από τη γεωμετρία Minkowski του χωρόχρονου. Επαναλαμβάνουμε ότι στη σχέση (6.9) το χωρικό μέρος έχει γραφεί μέσω σφαιρικών αντί καρτεσιανών συντεταγμένων. Όταν ο λόγος r_S / r είναι αμελητέος σε σχέση με τη μονάδα η σχέση (6.9) περιγράφει τη μη σχετικιστική γεωμετρία Minkowski του χωρόχρονου. Μερικές άμεσες φυσικές συνέπειες της (6.9) είναι οι εξής:

- Ο χρόνος κυλάει πιο αργά για πεπερασμένο r (που πρέπει να είναι μεγαλύτερο του r_S) από όσο στο $r=\infty$. Όσο πιο μικρό το r τόσο πιο αργά κυλάει ο χρόνος και όταν $r=r_S$ ο χρόνος δεν κυλάει πια.
- Αν ως μήκος της ακτίνας μέχρι τη θέση r ληφθεί το άθροισμα των στοιχειωδών μηκών κατά την ακτινική διεύθυνση μέχρι τη θέση r, τότε το γινόμενο $4\pi\times$(μήκος ακτίνας)^2 που στην ευκλείδεια γεωμετρία ισούται με το εμβαδόν της αντίστοιχης σφαίρας, εδώ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της επιφάνειας της αντίστοιχης σφαίρας που είναι ίσο με $4\pi r^2$.

- Όταν $r_S \geq R_M$ έχουμε τη δημιουργία μαύρης τρύπας, αφού τότε το σώμα είναι εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του ορίζοντα γεγονότων. Οι ακτίνες των οριζόντων γεγονότων μερικών αστρονομικών αντικειμένων είναι οι εξής:
  - $r_{S,ΓΗ}$=0,887cm,
  - $r_{S,ΗΛΙΟΣ}$=2,96km,

Γενικά ο ορίζοντας ενός σφαιρικά συμμετρικού, αφόρτιστου, μη περιστρεφόμενου σώματος μάζας M δίνεται από τη σχέση (r_S σε km, M σε kg)

$$r_S = 1,485\times10^{-30}\times M \ .$$

β) Κοσμολογικό μοντέλο των Robertson-Walker:
Το μοντέλο αναφέρεται σε ένα ομογενές, ισότροπο μέσο, χωρίς όρια με πυκνότητα ενέργειας ε και πίεση p. Το μοντέλο αυτό μπορεί να περιγράψει το Σύμπαν σε μια πρώτη προσέγγιση και σε κλίμακα σήμερα άνω των 100 εκατομμυρίων ετών φωτός όπου εξομαλύνονται οι τοπικές διακυμάνσεις της πυκνότητας της σχετικιστικής μάζας. Στην παρούσα περίπτωση η λύση της εξίσωσης (6.8) δίνει την εξής απλή μορφή για τη σχέση (6.6):

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left[\frac{du^2}{1-\kappa u^2} + u^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \qquad (6.11)$$

όπου η ακτίνα r έχει γραφεί ως $r=R(t)u$, με το $R(t)$ να καθορίζει την *μεταβαλλόμενη με το χρόνο* κλίμακα μηκών (δηλαδή τη διαστολή ή και τη συστολή του Σύμπαντος), και το u να είναι ένα αδιάστατο μήκος. Ο τύπος (6.11), πέρα από τη δυνατότητα διαστολής ή συστολής, περιγράφει από φυσική άποψη τις ακόλουθες γεωμετρίες:

κ=1, κλειστός χωρίς όρια χώρος (όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας στις 2 διαστάσεις),

κ= –1 ανοικτός χώρος (γεωμετρία όπως το υπερβολοειδές στις 2 διαστάσεις),

κ=0 ευκλείδεια γεωμετρία (όπως ένα άπειρο επίπεδο στις 2 διαστάσεις).

Η ανηγμένη ταχύτητα $(dR/dt)/R=(dr/dt)/r$ μεταβολής των αποστάσεων είναι ανεξάρτητη της θέσης r και ονομάζεται **σταθερά του Hubble** στην Κοσμολογία και συμβολίζεται με H. Δεδομένου ότι οι παρατηρήσεις δίνουν θετική τιμή για το H προσδιορίζουμε έτσι τον ανηγμένο ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος (βλ. κεφ. 14).

6.5. Σχόλια πάνω στις παγκόσμιες φυσικές σταθερές και το σύστημα Planck

Η σταθερά του Planck $\hbar$ (ή $h=2\pi\hbar$) και η ταχύτητα του φωτός, c, στο κενό είναι οι πιο «παγκόσμιες» φυσικές σταθερές. Αυτό διότι δεν συνδέ-

ονται με κάποιο συγκεκριμένο στοιχειώδες σωμάτιο ούτε με κάποια συγκεκριμένη από τις τέσσερις αλληλεπιδράσεις. Το μεν $\hbar$ θέτει ένα κάτω όριο στο μέγεθος της δράσης, ή πιο σωστά ένα κάτω όριο στο πόσο μικρός μπορεί να γίνει ο όγκος στον φασικό χώρο. Το «μήκος» στο φασικό χώρο ισούται με το γινόμενο μήκους στον πραγματικό χώρο επί «μήκος» στο χώρο των ορμών, $\delta x \times \delta p_x$ και το ελάχιστο μέγεθος αυτού είναι $2\pi\hbar \equiv h$· το ελάχιστο εμβαδόν στο φασικό χώρο είναι $(2\pi\hbar)^2 \equiv h^2$ και ο ελάχιστος όγκος στο χώρο αυτόν είναι $(2\pi\hbar)^3 \equiv h^3$. Αντίστοιχα το c θέτει ένα άνω όριο στην ταχύτητα μεταφοράς της ύλης ή της ενέργειας ή της πληροφορίας· θα πρόσθετα ότι το $\hbar$ είναι ακόμη πιο «παγκόσμιο» και από την ταχύτητα του φωτός γιατί εμφανίζεται σε όλες τις κλίμακες της δομής της ύλης (από το πιο στοιχειώδες συστατικό της μέχρι τα άστρα και τα αστρικά **πτώματα** (καφέ νάνοι, λευκοί νάνοι, αστέρες νετρονίων, μαύρες τρύπες). Αντίθετα, η ταχύτητα του φωτός περιθωριακό μόνο ρόλο παίζει στη δομή των πυρήνων, των ατόμων, των μορίων, των στερεών και των υγρών. Φυσικά, η ταχύτητα του φωτός κυριαρχεί στα ΗΜ και στα σχετικιστικά φαινόμενα.

Οι άλλες παγκόσμιες σταθερές (μάζες των στοιχειωδών σωματίων, αδιάστατες εντάσεις των αλληλεπιδράσεων, κλπ, βλ. Πίνακες 1.1 και 1.2 του κεφαλαίου 1) είναι πιο εξειδικευμένες. Ίσως μια μελλοντική θεωρία να αναδείξει την παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας, G, σε κάτι πιο βασικό που ενδεχομένως να έχει σχέση με την υπόθεση του ότι ο ίδιος ο χώρος είναι προικισμένος με άγνωστες απροσδόκητες ιδιότητες. Η βαρύτητα επίσης ξεχωρίζει από τις άλλες αλληλεπιδράσεις κυρίως λόγω της οικουμενικότητάς της αλλά και λόγω των άλλων ιδιαιτεροτήτων της. Η θεωρία των χορδών φαίνεται να ενισχύει τον ιδιαίτερο ρόλο της βαρύτητας. Επί πλέον η βαρύτητα κυριαρχεί σε αστρικά και γαλαξιακά φαινόμενα καθώς και στο επίπεδο του Σύμπαντος. Είναι επομένως λογικό να ξεχωρίσουμε τις τρεις σταθερές $\hbar, c, G$, οι οποίες ορίζουν ένα άλλο (από το ατομικό) σύστημα μονάδων (το λεγόμενο *σύστημα μονάδων Planck) ως εξής:*

$$\text{Μονάδα μήκους: } \ell_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1{,}6161 \times 10^{-35}\,\text{m}, \tag{6.12}$$

$$\text{Μονάδα χρόνου: } t_P = \frac{\ell_P}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5{,}3907 \times 10^{-44}\,\text{s}, \tag{6.13}$$

$$\text{Μονάδα μάζας: } m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2{,}1766 \times 10^{-8}\,\text{kg}, \tag{6.14}$$

$$\text{Μονάδα ενέργειας: } \varepsilon_P = m_P c^2 = 1{,}9562 \times 10^{9}\,\text{J} \tag{6.15}$$

$$\text{Μονάδα θερμοκρασίας: } T_p = \frac{m_p c^2}{k_B} = 1,4196\times 10^{32}\ ^{o}\text{K}\,, \qquad (6.16)$$

Αποδείξτε τις παραπάνω σχέσεις. Επίσης δείξτε ότι:

$$\frac{e^2}{Gm_u^2} = 1,2537\times 10^{36}, \qquad \left(\frac{e^2}{Gm_u^2}\right)^{3/2} = 1,4037\times 10^{54}, \quad \text{G-CGS}$$

6.6. Περίληψη των κυριοτέρων τύπων

Ο πρώτος βασικός τύπος της νευτώνειας βαρύτητας συνδέει τη ροή του πεδίου βαρύτητας δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας A με τη μάζα M_A που περιέχεται στο εσωτερικό της (νόμος του Gauss):

$$\boxed{\Phi_A = -4\pi G M_A\ .} \qquad (6.3)$$

Ο δεύτερος βασικός τύπος της νευτώνειας βαρύτητας λέει ότι το βαρυτικό πεδίο είναι αστρόβιλο, που σημαίνει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά του από το αυθαίρετο σημείο Α στο αυθαίρετο σημείο Β είναι ανεξάρτητο της καμπύλης που συνδέει τα δύο σημεία. Επομένως μπορεί κανείς να ορίσει το δυναμικό στο αυθαίρετο σημείο **r** ως μείον το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του βαρυτικού πεδίου από το σημείο αναφοράς (συνήθως το άπειρο) μέχρι το σημείο **r**. Προφανώς το αστρόβιλο του πεδίου βαρύτητας είναι ισοδύναμο με το ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου βαρύτητας σε μια κλειστή καμπύλη είναι μηδέν:

$$K_L = 0\,. \qquad (6.4)$$

Από τις (6.3, .4) έπεται ο νόμος της παγκόσμιας έλξης:

$$\boxed{\mathbf{F}_m = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{r}_o\ .} \qquad (6.5)$$

Από τη ΓΘΣ είναι χρήσιμο να έχετε υπόψη σας το πρόβλημα ενός σφαιρικά συμμετρικού, αφόρτιστου, μη περιστρεφόμενου σώματος μάζας M και ακτίνας R_M. Για ένα τέτοιο σώμα ο μεν χρόνος στο σημείο r κυλάει πιο αργά σχετικά με το σημείο $r=\infty$ (το $r = 0$ είναι το κέντρο του σφαιρικού σώματος)

$$t(r) = t(\infty)[1-\frac{r_S}{r}]^{1/2}, \quad r \geq R_M\,,\, r_S\,, \qquad (6.17)$$

όπου το r_S δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{r_S \equiv 2GM\,/\,c^2\ .} \qquad (6.10)$$

Επίσης το στοιχειώδες μήκος *dr* κατά τη ακτινική κατεύθυνση στο σημείο *r* είναι μεγαλύτερο από όσο στο σημείο $r=\infty$:

$$dr(r) = dr(\infty)\frac{1}{(1-\frac{r_S}{r})^{1/2}}. \qquad (6.18)$$

Οι τύποι (6.17) και (6.18) ισχύουν μόνο για *r* μεγαλύτερο και του R_M και του r_S. Όταν το R_M γίνει μικρότερο του r_S, όταν δηλαδή ολόκληρο το σώμα βρεθεί στο εσωτερικό της σφαίρας με ακτίνα r_S, τότε το σώμα έχει μετατραπεί σε μαύρη τρύπα και το r_S είναι η ακτίνα του σφαιρικού ορίζοντα της μαύρης τρύπας. Τίποτε δεν μπορεί να διασχίσει τον ορίζοντα της μαύρης τρύπας από το εσωτερικό της προς τον έξω χώρο. Η όποια ενδεχόμενη ροή μπορεί να γίνει μόνο προς την αντίθετη κατεύθυνση.

6.7. Λυμένες ασκήσεις

1. Βρείτε την απόσταση *R* Γης–Σελήνης γνωρίζοντας ότι η τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι σχεδόν κυκλική, ότι η περίοδος είναι 27,32 ημέρες και ότι η περιφέρεια του ισημερινού της Γης είναι 4×10^7m.
Λύση: Η επιτάχυνση της Σελήνης είναι $v^2/R=GM_\Gamma/R^2$ όπου $v=2\pi R/t_o$, t_o είναι η περίοδος περιφοράς της γύρω από τη Γη και *R* είναι η ζητούμενη απόσταση. Άρα $4\pi^2R^3/t_o^2 = GM_\Gamma$. Αλλά $g = GM_\Gamma/r^2$, όπου *r* είναι η ακτίνα της Γης: $2\pi r = 4\times10^7\,\mathrm{m}$. Επομένως

$$\frac{4\pi^2R^3}{t_o^2} = gr^2.$$

Τελικά

$$R = \left(\frac{gr^2t_o^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 382,8\times10^6\,\mathrm{m}.$$

2. Ένας από τους δορυφόρους που χρησιμοποιούνται για τη λειτουργία του συστήματος GPS είναι σε κυκλική τροχιά ακτίνας $25,37\times10^6$ m, ενώ η ακτίνα της Γης είναι $6,37\times10^6$ m. Ποια είναι η σχετική διαφορά χρόνου μεταξύ των επίγειων σταθμών και του ως άνω δορυφόρου λόγω της ΓΘΣ;
Λύση: Σύμφωνα με τον τύπο (6.16) η διαφορά χρόνου είναι $t_\Delta-t_\Gamma=t(\infty)\times\{[1-(r_S/r_\Delta)]^{1/2}-[1-(r_S/r_\Gamma)]^{1/2}\}\approx t(\infty)\frac{1}{2}\{(r_S/r_\Gamma)-(r_S/r_\Delta)\}$, όπου κάναμε χρήση της σχέσης $(1-x)^{1/2}\approx1-\frac{1}{2}x$ για $x<<1$. Λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο για την ακτίνα r_S έχουμε τελικά

$$\frac{t_\Delta - t_\Gamma}{t(\infty)} = \frac{GM_\Gamma}{c^2}\left(\frac{1}{r_\Gamma}-\frac{1}{r_\Delta}\right) = 0,5212\times10^{-9}$$ ή 45031 ns/d,

όπου 1d=86400s. Είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη αυτή η διαφορά χρόνου για να έχουμε ακρίβεια του GPS μερικών μέτρων.

3. Η συνήθης περίπτωση βαρυτικής ακτινοβολίας είναι αυτή όπου δύο σώματα με πολύ μεγάλη μάζα m_1, m_2 σε κοντινή απόσταση r περιφερονται γύρω από το κέντρο μάζας τους. Με διαστατική ανάλυση και λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο (6.7) βρείτε την βαρυτική ενέργεια J που ακτινοβολείται ανά μονάδα χρόνου.
Λύση: Θα ξεκινήσουμε χρησιμοποιώντας την αναλογία με την ΗΜ ακτινοβολία από ζεύγος επιταχυνόμενων φορτίων q_1, q_2 όπου η ανά μονάδα χρόνου ακτινοβολουμένη ενέργεια είναι ανάλογη του $q_1q_2a^2/c^3$ (τύπος (5.12)) και η επιτάχυνση a είναι q_1q_2/mr^2 με $m=m_1m_2/M$, $M=m_1+m_2$. Για τη βαρυτική περίπτωση η αντίστοιχη ποσότητα της q_1q_2 είναι η Gm_1m_2 και επομένως θα μπορούσε κανείς να συμπεράνει *πρόωρα* ότι η ακτινοβολουμένη ισχύς είναι

$$J \propto Gm_1m_2\left(\frac{Gm_1m_2}{mr^2}\right)^2\frac{1}{c^3}=\frac{G^3\left(m_1m_2\right)M^2}{r^4c^3}, \qquad (1)$$

Όμως από τον τύπο (6.7) η πηγή του βαρυτικού πεδίου δεν είναι απλώς η κατανομή των μαζών, αλλά ο τανυστής της ενέργειας ορμής που περιλαμβάνει τον επί πλέον παράγοντα $\upsilon_1\upsilon_2/c^2$. Επομένως για να είναι η αντιστοιχία ΗΜ και βαρύτητας πλήρης θα πρέπει να θέσουμε $q_1q_2 \Leftrightarrow xGm_1m_2\upsilon_1\upsilon_2/c^2$, όπου το x είναι ένας αριθμητικός παράγοντας. [*Στο σημείο αυτό δεν είναι άσκοπο να θυμίσουμε το πώς αντιμετωπίζει η κλασική μηχανική το πρόβλημα των δύο σωμάτων με μάζες m_1, m_2 και θέσεις* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$. *Ορίζει κανείς τη σχετική θέση* $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, *την ολική μάζα* $M=m_1+m_2$ *και την ανηγμένη μάζα* $m=m_1m_2/M$ *καθώς και τη θέση του κέντρου μάζας* $\mathbf{R}=(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2)/M$. *Με αυτούς τους μετασχηματισμούς το πρόβλημα των δύο σωμάτων έχει αναχθεί σε δύο ανεξάρτητα προβλήματα ενός σώματος: Το ένα αφορά στην κίνηση του κέντρου μάζας με θέση* **R** *και μάζα M (που συνήθως είναι τετριμμένο, αν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη, οπότε επιλέγουμε* $\mathbf{R}=0$*) και το άλλο αφορά στη σχετική κίνηση με θέση* **r** *και μάζα την ανηγμένη μάζα m. Έχοντας λύσει αυτά τα δυο ανεξάρτητα προβλήματα προκύπτουν και οι αρχικές θέσεις* $\mathbf{r}_1=\mathbf{R}+(m_2/M)\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2=\mathbf{R}-(m_1/M)\mathbf{r}$ *και οι ταχύτητες* $\boldsymbol{\upsilon}_1=(m_2/M)\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{\upsilon}_2=-(m_1/M)\boldsymbol{\upsilon}$ *στο σύστημα όπου το κέντρο μάζας είναι ακίνητο. Η σχετική ταχύτητα* $\boldsymbol{\upsilon}$ *ικανοποιεί τη σχέση ότι η σχετική κινητική ενέργεια* $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ *είναι ίση με μείον το μισό της δυναμικής που είναι* $\frac{1}{2}(Gm_1m_2/r)$]. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω έκφραση (1) για την ακτινοβολούμενη βαρυτική ισχύ J με τον επί πλέον όρο $\upsilon_1\upsilon_2/c^2 = m_1m_2\upsilon^2/M^2c^2 = = m_1m_2Gm_1m_2/mrM^2c^2 = Gm_1m_2/Mrc^2$ και τον αριθμητικό παράγοντα x βρίσκομε τελικά

$$J = x\frac{G^3\left(m_1m_2\right)M^2}{r^4c^3}\frac{Gm_1m_2}{Mrc^2}=x\frac{G^4(m_1m_2)^2M}{r^5c^5}, \qquad (2)$$

όπου μια λεπτομερής θεωρητική επεξεργασία δίνει για τον αριθμητικό παράγοντα $x=32/5$.

Θα επιχειρήσουμε να εκτιμήσουμε και την ολική βαρυτική ενέργεια I που εκπέμπεται κατά τη διαδικασία συγχώνευσης αυτών των δύο μαζών όταν η τελική απόσταση των κέντρων τους, r_τ, είναι φυσικά μικρότερη του αθροίσματος των αρχικών τους ακτίνων $r_\tau = y(R_1+R_2)$, όπου y είναι προφανώς μικρότερο της μονάδος. Θα υποθέσουμε ακολουθώντας την κλασική μηχανική ότι η σχετική κινητική ενέργεια ισούται με μείον το μισό της δυναμικής ενέργειας $(m_1 m_2 / M)\upsilon^2 = G m_1 m_2 / r \;\Rightarrow\; \upsilon^{-1} = (r/GM)^{1/2}$. Άρα

$$I = \int_{r_a}^{r_\tau} J dt = \int_{r_a}^{r_\tau} J \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_a}^{r_\tau} \frac{J}{\upsilon} dr = x \frac{G^4 (m_1 m_2)^2 M}{c^5 (GM)^{1/2}} \int_{r_a}^{r_\tau} \frac{dr}{r^{4,5}} \approx \Gamma \frac{1}{3,5 r_\tau^{3,5}},$$

όπου το Γ συμβολίζει όλο τον παράγοντα μπροστά από το σύμβολο της ολοκλήρωσης. Προκειμένου για μαύρες τρύπες όπως αυτές που παρήγαν το μετρηθέν σήμα το $r_\tau = \{2yG(m_1+m_2)/c^2\} \approx 2yGM/c^2$. Αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο έχουμε

$$I = \frac{\Gamma}{3,5(2y)^{3,5}} \frac{c^7}{(GM)^{3,5}} = \frac{x}{3,5(2y)^{3,5}} \frac{G^4 (m_1 m_2)^2 M}{c^5 (GM)^{1/2}} \frac{c^7}{(GM)^{3,5}} = \frac{0,16 (m_1 m_2)^2 c^2}{y^{3,5} M^3}.$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση $m_1 = 36 M_H$, $m_2 = 29 M_H$, $M = 65 M_H$ οπότε

$$I = \frac{0,63}{y^{3,5}} M_H c^2 = 3 M_H c^2, \quad \text{για } y = 0,64.$$

6.8. Άλυτες ασκήσεις

1. Θεωρήστε ένα Κόσμο που οι χωρικές του διαστάσεις είναι περισσότερες από ή ίσες με τέσσερα. Θεωρήστε ακομη ότι οι νόμοι (6.3) και (6.4) για τον προσδιορισμό του βαρυτικού πεδίου (και οι αντίστοιχοι για τον προσδιορισμό του ηλεκτροστατικού πεδίου) εξακολουθούν να ισχύουν. Θα υπήρχαν τότε ευσταθείς τροχιές των πλανητών γύρω από τον Ήλιο; Θα υπήρχε τότε το άτομο του υδρογόνου ως μια σταθερή βασική μονάδα της ύλης; Μπορεί να συμπεράνει κανείς ότι ο Κόσμος οφείλει να είναι χωρικά τριδιάστατος;

Βιβλιογραφία για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας :

1) Σωτ. Περσίδης, *Εισαγωγή στην Ειδική και Γενική Θεωρία της Σχετικότητας*, Εκδόσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Πάτρα, 1998.

2) J. L. Martin, *Γενική Σχετικότητα*, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο, 2005.

Σημαντική σημείωση: Τα πρόσημα στις εξισώσεις (6.7) και (6.8) εξαρτώνται από τρεις διαφορετικές συμβάσεις οι δύο εκ των οποίων αφορούν στο πώς ορίζονται ορισμένα μεγέθη της καμπυλόγραμμης τετραδιάστατης γεωμετρίας και το τρίτο αφορά στην επιλογή των προσήμων στο χώρο Minkovski (αν δηλαδή είναι -1,1,1,1 ή 1,-1,-1,-1).

Κεφάλαιο 7

Από τα Κουάρκ στα Αδρόνια

Σύνοψη: *Τα αδρόνια είναι δύο ειδών: (α) Τα βαρυόνια που αποτελούνται από τρία κουάρκ χρωματικού φορτίου R, G, B αντιστοίχως ώστε να είναι συνολικά άχρωμα, όπως π.χ. τα πρωτόνια και τα νετρόνια. (β) Τα μεσόνια, που αποτελούνται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ αντίθετου χρωματικού φορτίου ώστε να είναι συνολικά άχρωμα. Οι αλληλεπιδράσεις των κουάρκ και των γλοιονίων εμφανίζουν τα χαρακτηριστικά φαινόμενα της ασυμπτωτικής ελευθερίας και του εγκλωβισμού. Στον τελευταίο οφείλεται το γεγονός ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα κουάρκ ή γλοιόνια ούτε συνολικά έγχρωμοι σχηματισμοί από κουάρκ ή γλοιόνια. Ο εγκλωβισμός δεν επιτρέπει επίσης στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις να εκδηλώσουν την άπειρη εμβέλειά τους που αλλιώς η μηδενική μάζα των γλοιονίων θα τους προσέδιδε. Η ενέργεια ηρεμίας των αδρονίων οφείλεται σε σημαντικό βαθμό στην κινητική ενέργεια των εγκλωβισμένων σε αυτά κουάρκ ή και αντικουάρκ. Μερικές ιδιότητες κάποιων βαρυονίων και μεσονίων παρουσιάζονται στους πίνακες 7.1 και 7.2.*

7.1 Εισαγωγή

Είναι λογικό να αρχίσει κανείς τη διαδικασία σχηματισμού σύνθετων δομών της ύλης ξεκινώντας από την ισχυρή αλληλεπίδραση που είναι δύο με τρεις τάξεις μεγέθους ισχυρότερη από οποιαδήποτε άλλη. Όπως αναφέραμε στο Κεφ.1 και όπως προκύπτει από το Σχ. 6.1 και το Σχ. 6.2 του προηγούμενου κεφαλαίου, μόνο τα κουάρκ (από τα σωμάτια ύλης) και μόνο τα γλοιόνια (από τα σωμάτια-φορείς αλληλεπιδράσεων) είναι πηγές και αποδέκτες αυτής της ισχυρής αλληλεπίδρασης.

Προσπαθώντας να συνδυάσουμε κουάρκ για σχηματισμό συνθετότερων δομών παρατηρούμε ότι ουσιαστικά υπάρχουν δύο μόνο βεβαιωμένα είδη συνδυασμών. (Όμως βλ.σελ. 176). Είτε έχουμε ένα σύνθετο *μεταστάθές* σωμάτιο αποτελούμενο από ένα ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ μηδενικού συνολικού χρωματικού φορτίου (οπότε το προκύπτον σωμάτιο ονομάζεται

μεσόνιο), είτε έχουμε τρία αλληλοπαγιδευμένα κουάρκ με χρωματικά φορτία *R, G, B* αντιστοίχως έτσι ώστε το συνολικό χρωματικό φορτίο να είναι μηδενικό (οπότε το προκύπτον σύνθετο σωμάτιο ονομάζεται **βαρυόνιο**). Από τα βαρυόνια το μόνο που είναι σταθερό, είτε όντας απομονωμένο είτε ως συστατικό μη ραδιενεργού πυρήνα, είναι το πρωτόνιο που αποτελείται από δύο κουάρκ *u* και ένα κουάρκ *d*. Η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου είναι $1836{,}15m_e = 938{,}27\text{MeV}$ και η ακτίνα του $0{,}84\,\text{fm}$. Το νετρόνιο, που αποτελείται από δύο κουάρκ *d* και ένα *u*, είναι μετασταθές όταν είναι απομονωμένο (βλ. Πιν.7.1), αλλά είναι σταθερό ως συστατικό μη ραδιενεργού πυρήνα. Η μάζα του είναι $1838{,}68m_e = 939{,}565\text{MeV}$ και η ακτίνα του $0{,}84\,\text{fm}$. Τα μεσόνια και τα βαρυόνια ονομάζονται από κοινού **αδρόνια,** επειδή σχηματίστηκαν με τη μεσολάβηση της ισχυρής αλληλεπίδρασης (αδρός ≡ ισχυρός). Σημειώστε ότι, αν και η δημιουργία των αδρονίων (βαρυονίων και μεσονίων) οφείλεται αποκλειστικά στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, ο μετασχηματισμός τους καθώς και ο αφανισμός τους μπορεί να συντελείται κατά περίπτωση με τη μεσολάβηση είτε των ισχυρών, είτε των ασθενών, είτε των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων.

Οι στοιχειώδεις διαδικασίες υπεύθυνες για το σχηματισμό αδρονίων ή ενδεχομένως και άλλων σύνθετων σωματίων από κουάρκ με τη μεσολάβηση γλοιονίων είναι αυτές που εικονίζονται στα Σχ. 6.1 και 6.2. Με κατάλληλους για κάθε περίπτωση συνδυασμούς αυτών των στοιχειωδών διαγραμμάτων και με τη χρήση των υπολογιστικών κανόνων που συνοδεύουν τα διαγράμματα Feynman μπορούμε *κατ' αρχήν* να βρούμε θεωρητικά τις τιμές διαφόρων μετρήσιμων μεγεθών, όπως είναι π.χ. η μάζα ηρεμίας και η μαγνητική ροπή του πρωτονίου και του νετρονίου, ο μέσος χρόνος ζωής ενός απομονωμένου νετρονίου κλπ.

Πριν όμως επιχειρήσουμε να σχολιάσουμε τέτοιου είδους υπολογισμούς θα πρέπει να θέσουμε μερικά καίρια ερωτήματα:

(α) Γιατί οι όποιοι συνδυασμοί κουάρκ και γλοιονίων, σταθεροί ή μετασταθείς οφείλουν να είναι άχρωμοι (δηλαδή με μηδενικό συνολικά χρωματικό φορτίο);

(β) Γιατί να μην υπάρχουν άχρωμοι έστω συνδυασμοί από 3ν κουάρκ, όπου ν=2, 3,…, ή με άλλα λόγια γιατί να μη μπορούν να συντηχθούν σε ένα ενιαίο σωμάτιο περισσότερα από ένα βαρυόνια; Επίσης γιατί να μη μπορούν να συντηχθούν σε ένα ενιαίο σωμάτιο περισσότερα από ένα μεσόνια, ή ένα μεσόνιο και ένα βαρυόνιο; (Βλ. σελ. 176).

(γ) Είναι δυνατόν να έχουμε σχηματισμούς που να αποτελούνται μόνο από γλοιόνια (πραγματικά, όχι όπως αυτά που εκπέμπονται και απορροφούνται σχεδόν ακαριαία, δηλαδή τα εικονικά) ή από πραγματικά γλοιόνια και κουάρκ;

Η απάντηση σε τέτοιου είδους ερωτήματα θα πρέπει να βασισθεί στον υπολογισμό της ενέργειας του κάθε ενδεχόμενου σχηματισμού προκειμένου να διαπιστωθεί αν αυτή η ενέργεια είναι ελάχιστη συνολικά ή τοπικά (οπότε

θα έχουμε σταθερή ή μετασταθή δομή αντίστοιχα) ή αν δεν εμφανίζει ελάχιστο αλλά αντίθετα πάρα πολύ υψηλές τιμές (οπότε θα αντιστοιχεί σε μη πραγματοποιήσιμες δομές).

7.2 Ενεργειακοί υπολογισμοί και οι δυσκολίες τους

Η εφαρμογή αυτής της γενικής μεθόδου στην προκειμένη περίπτωση αντιμετωπίζει ένα σοβαρό πρακτικό πρόβλημα: Όχι μόνο δεν υπάρχει ένας σχετικά εύκολος τρόπος να εκτιμηθεί η ενέργεια διαφόρων σχηματισμών κουάρκ/γλοιονίων στο πνεύμα τούτου του βιβλίου, αλλά και ο λεπτομερής υπολογισμός ο βασισμένος στα διαγράμματα Feynman (ο τόσο επιτυχής στην περίπτωση ηλεκτρονίων/φωτονίων) συναντά ανυπέρβλητες δυσκολίες [33, 34]. Για να καταλάβει κανείς αυτές τις δυσκολίες είναι χρήσιμο να συγκρίνει τη θεωρία που βασίζεται στο στοιχειώδες διάγραμμα του Σχ. 5.1 και που είναι γνωστή ως κβαντική ηλεκτροδυναμική (quantum electrodynamics, QED) με τη θεωρία που βασίζεται στα στοιχειώδη διαγράμματα των Σχ. 6.1 και 6.2, που είναι γνωστή ως κβαντική χρωμοδυναμική, (quantum chromodynamics, QCD). Η μία διαφορά είναι ότι στην QCD τα στοιχειώδη διαγράμματα είναι περισσότερα και επομένως και οι συνδυασμοί τους πολύ περισσότεροι. Η δεύτερη είναι ότι έχουμε τριών ειδών χρωματικά φορτία και τρία αντιφορτία. Η τρίτη και πιο σημαντική διαφορά αφορά στην ένταση της αδιάστατης σταθεράς σύζευξης a_s, η οποία είναι περίπου 1 για την QCD, ενώ είναι 1/137 για την QED.

Δεδομένου ότι η συμβολή κάθε σύνθετου διαγράμματος Feynman στο τελικό αποτέλεσμα είναι ανάλογη του a_s^n, όπου n είναι ο αριθμός των κόμβων στο σύνθετο διάγραμμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για την QED αρκεί να κρατήσουμε και να υπολογίσουμε μόνο μερικά σχετικά απλά διαγράμματα (τα πιο σύνθετα με πολλούς κόμβους θα δώσουν ασήμαντη συμβολή λόγω του παράγοντα $(1/137)^n$). Αντίθετα στην QCD, πολύ περίπλοκα διαγράμματα με μεγάλο αριθμό n κόμβων θα δώσουν μια συμβολή της τάξεως του $1^n = 1$, δηλαδή εξίσου σημαντική με τα απλούστερα. Επομένως η μέθοδος της άθροισης διαγραμμάτων Feynman, που είναι εντυπωσιακά επιτυχής στην QED, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί στην QCD, γιατί θα απαιτούσε την άθροιση ενός τεράστιου αριθμού περίπλοκων όρων. Εν τούτοις έχει αναπτυχθεί για την QCD ένα πολύ περίπλοκο και εξαιρετικά απαιτητικό από υπολογιστική άποψη σχήμα για τον θεωρητικό προσδιορισμό διαφόρων μεγεθών, όπως, π.χ., των μαζών βαρυονίων και μεσονίων σε σχετικά καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα.

7.3 Εγκλωβισμός και ασυμπτωτική ελευθερία

Με βάση αυτό το υπολογιστικό σύστημα αλλά και θεωρητικά επιχειρήματα, χωρίς όμως μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη, έχουμε "καταλήξει" στο

συμπέρασμα ότι η ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο κουάρκ (ή γενικότερα μεταξύ δύο σωματίων με μη μηδενικό συνολικό χρωματικό φορτίο) τείνει στο συν άπειρο όταν η απόσταση τους τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια που χρειάζεται να καταβάλει κανείς για να απομονώσει ένα κουάρκ (ή γενικότερα ένα μη άχρωμο σύστημα) είναι άπειρη, πράγμα που δίνει μια πειστική απάντηση στο αρχικό ερώτημα (α). Άρα τα κουάρκ, ή όποια άλλα σύνθετα μη άχρωμα σωμάτια, είναι για πάντα εγκλωβισμένα σε σύνθετους άχρωμους σχηματισμούς, όπως είναι π.χ. το πρωτόνιο. Αυτή η χαρακτηριστική ιδιότητα της ισχυρής αλληλεπίδρασης είναι γνωστή με το όνομα **εγκλωβισμός** (confinement).

Ο εγκλωβισμός εξηγεί αμέσως το γιατί η ισχυρή αλληλεπίδραση εμφανίζεται ως βραχείας εμβέλειας, παρόλο που η μάζα των γλοιονίων είναι μηδέν και θα περίμενε κανείς να εμφάνιζε άπειρη εμβέλεια (λόγω της γνωστής σχέσης $r_o = \hbar / mc$), εάν τα γλοιόνια ήσαν ελεύθερα και όχι εγκλωβισμένα.

Πράγματι, αν προσπαθήσουμε να αποσπάσουμε ένα κουάρκ από ένα βαρυόνιο, π.χ., από ένα πρωτόνιο, προσφέροντας ένα μεγάλο ποσό ενέργειας θα συμβούν τα εξής: Το βαρυόνιο θα παραμορφωθεί, θα επιμηκυνθεί και τελικά, αν η προσφερόμενη ενέργεια ξεπεράσει κάποιο όριο, ένα από τα εικονικά γλοιόνια που συγκρατούν το πρωτόνιο ενιαίο θα διαρραγεί παράγοντας στην τομή του ένα ζεύγος κουάρκ/αντικουάρκ (βλ. Σχ.6.1δ). Το παραχθέν αντικουάρκ μαζί με το προϋπάρχον κουάρκ που βρίσκεται στην "άκρη" του γλοιονίου θα εγκαταλείψουν το αρχικό βαρυόνιο υπό τη μορφή ενός μεσονίου αφήνοντας πίσω το παραχθέν κουάρκ που μαζί με τα δύο αρχικά κουάρκ θα σχηματίσει πάλι ένα βαρυόνιο. Με άλλα λόγια αυτό που απεσπάσθη ήταν ένα μεσόνιο, δηλαδή ένα άχρωμο σωμάτιο. Μια παρόμοια φυσική διαδικασία είναι υπεύθυνη και για την έλξη δύο νουκλεονίων (π.χ. ενός πρωτονίου και ενός νετρονίου) όταν βρεθούν σε αποστάσεις d μεταξύ τους στην περιοχή τιμών από περίπου 1fm έως περίπου 4fm: Κάποιο εικονικό γλοιόνιο που είναι υπεύθυνο για την αλληλεπίδραση δύο κουάρκ που δεν ανήκουν στο ίδιο νουκλεόνιο αφανίζεται (καθώς τα δύο νουκλεόνια απομακρύνονται) δημιουργώντας ένα ζεύγος κουάρκ/αντικουάρκ, δηλαδή ένα πιόνιο που μεταφέρεται έτσι είτε στο ένα είτε στο άλλο από τα δύο νουκλεόνια. Αυτή η εικόνα της έλξης μεταξύ δύο νουκλεονίων μέσω ανταλλαγής πιονίου είναι αρκετά ικανοποιητική όσο η απόσταση d δεν πλησιάζει το μηδέν, οπότε η πιο θεμελιώδης περιγραφή μέσω γλοιονίων είναι απαραίτητη.

Επανερχόμενοι στο φαινόμενο του εγκλωβισμού θα πρέπει να επισημάνουμε ότι αποτελεί άμεση συνέπεια μιας άλλης ιδιότητας της αλληλεπίδρασης δύο κουάρκ. Για να γίνει κατανοητή θα χρησιμοποιήσουμε μια αναλογία με τον ηλεκτρισμό: Θεωρήστε δύο αντίθετα ηλεκτρικά φορτία, e, $-e$. Στο κενό η ενέργεια αλληλεπίδρασής τους ισούται με $-e^2/r$, όπου r είναι η μεταξύ τους απόσταση. Αν τα δύο αυτά φορτία τα βάλουμε μέσα σ' ένα μέταλλο, η ενέργεια αλληλεπίδρασής τους θα γίνει $(-e^2/r)\exp(-\kappa r)$, πράγμα

που σημαίνει ότι για μικρές αποστάσεις ($\kappa r << 1$) δεν υπάρχει αξιοσημείωτη αλλαγή, αλλά καθώς η απόσταση μεγαλώνει η ενέργεια αλληλεπίδρασης μειώνεται σε σύγκριση με αυτή στο κενό και τελικά γίνεται ασύγκριτα πιο μικρή έναντι αυτή του κενού. Από φυσική άποψη αυτή η έξτρα εξάρτηση από την απόσταση οφείλεται στο ότι τα ηλεκτρόνια του μετάλλου, με την περίπλοκη συμπεριφορά τους, θωρακίζουν το πεδίο του θετικού φορτίου με το να συγκεντρωθούν στη γειτονιά του. Το αποτέλεσμα είναι ως η σταθερά της σύζευξης e^2 να έχει αντικατασταθεί από μια ενεργό σταθερά σύζευξης που είναι συνάρτηση της απόστασης r: $e^2 \rightarrow e^{*2}(r) = e^2 \exp(-\kappa r)$.

Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με την ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ δύο κουάρκ: Το αποτέλεσμα όλων αυτών των περίπλοκων διαγραμμάτων, που το άθροισμά τους δίνει την αλληλεπίδραση δύο κουάρκ, είναι ως η σταθερά σύζευξης a_s να έχει αντικατασταθεί με μια ενεργό σταθερά σύζευξης που είναι συνάρτηση της μεταξύ τους απόστασης: $a_s \rightarrow a_s^*(r) = a_s f(r)$. Στην περίπτωση της ισχυρής αλληλεπίδρασης η συμπεριφορά του $f(r)$ είναι αντίθετη από αυτή του $\exp(-\kappa r)$: Το $f(r)$ τείνει στο μηδέν όταν $r \rightarrow 0$ (μια ιδιότητα που είναι γνωστή ως **ασυμπτωτική ελευθερία** (asymptotic freedom), αφού στο όριο αυτό τα κουάρκ δεν υφίστανται πια καμία δύναμη, είναι δηλαδή ελεύθερα). Στο άλλο όριο, $r \rightarrow \infty$, το $f(r)$ τείνει στο άπειρο (πράγμα που συνεπάγεται τον εγκλωβισμό). Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι η ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ δύο κουάρκ εμφανίζει τη συμπεριφορά μιας έντονης *αντιθωράκισης*.

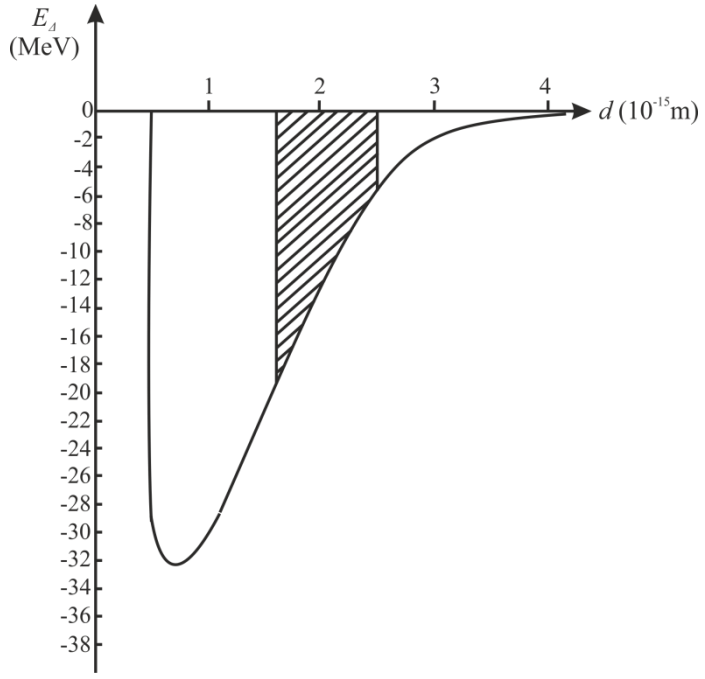
Οι ως άνω αναπάντεχες ιδιότητες του εγκλωβισμού και της ασυμπτωτικής ελευθερίας που εμφανίζει η ισχυρή αλληλεπίδραση μπορούν να δικαιολογηθούν με χρήση της εικόνας των δυναμικών γραμμών που έχουν ως αφετηρία ένα σωμάτιο και καταλήγουν σε ένα παρόμοιο σωμάτιο δίνοντας έτσι μια ημιποσοτική εκτίμηση της αλληλεπίδρασής τους:

Ας θεωρήσουμε πρώτα την οικεία περίπτωση της ηλεκτρικής άλληλεπίδρασης πρωτονίου/ηλεκτρονίου, Οι δυναμικές γραμμές του πρωτονίου έχουν σφαιρική συμμετρία, πράγμα που συνεπάγεται –βάσει του νόμου του Gauss– ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι της μορφής $1/r^2$ και επομένως, ολοκληρώνοντας, το δυναμικό έχει τη γνωστή εξάρτηση $1/r$.

Στην περίπτωση της ισχυρής αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο κουάρκ οι δυναμικές γραμμές δεν έχουν το χαρακτήρα σφαιρικής συμμετρίας, όπως οι ηλεκτρικές, αλλά αντίθετα περιορίζονται στο εσωτερικό ενός σωλήνα σχεδόν σταθερής διατομής κατά τη διεύθυνση που ενώνει τα δύο κουάρκ. Αυτό οφείλεται στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των γλοιονίων – φορέων της ισχυρής δύναμης – οι οποίες συμπιέζουν τα γλοιόνια (και επομένως και τις δυναμικές γραμμές) στο εσωτερικό του ως άνω σωλήνα. Η εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss σε συνδυασμό με τη σταθερότητα της διατομής του σωλήνα συνεπάγεται ότι το πεδίο είναι σταθερό, ανεξάρτητο της απόστασης r. Άρα το δυναμικό είναι περίπου της μορφής, $A \cdot r$, όπου A σταθερό. Αυτή η εξάρτηση από το r με A θετικό έχει ως συνέπεια προφανώς και την

ασυμπτωτική ελευθερία (για r=0 το δυναμικό είναι 0) και τον εγκλωβισμό (για r=∞ το δυναμικό είναι άπειρο).

Ας έλθουμε τώρα στο ερώτημα (β): Γιατί δεν συντήκονται δύο ή περισσότερα αδρόνια σε ένα ενιαίο σωμάτιο; Φαίνεται ότι η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι και πάλι ενεργειακής φύσεως. Το ενεργειακό κόστος μιας τέτοιας σύντηξης μοιάζει να είναι πολύ μεγάλο αν όχι άπειρο. Ας θεωρήσουμε την συγκεκριμένη περίπτωση ενός πρωτονίου και ενός νετρονίου που βρίσκονται σε μια απόσταση d μεταξύ των κέντρων τους. Τι θα συμβεί καθώς η απόσταση d αρχίζει να μειώνεται; Υπάρχουν πολλές ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κουάρκ που ανήκουν σε διαφορετικά νουκλεόνια. Οι περισσότερες δίνουν μια αρνητική (ελκτική) και κάποιες άλλες μια θετική (απωστική) ενδεχομένως συμβολή στην ενέργεια ισχυρής αλληλεπίδρασης πρωτονίου/νετρονίου. Φυσικά η απωστική συμβολή μπορεί να οφείλεται στην κινητική ενέργεια των έξη κουάρκ όταν αυτά συγχωνευτούν σε ένα ενιαίο σωμάτιο και όχι στη δυναμική τους ενέργεια. Συνολικά αυτή η ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι αρνητική και μειούμενη όσο η απόσταση d εξακολουθεί να μικραίνει. Αυτή η συμπεριφορά συνεχίζεται όσο $d \gtrsim 0,5\,\mathrm{fm}$, ενώ για $d \lesssim 0,5\,\mathrm{fm}$ εμφανίζεται μια πολύ απότομη αυξηση της ενέργειας. Βλέπε σχετικά το Σχ. 7.1, όπου εικονίζεται μια πολύ απλουστευμένη μορφή της εξάρτησης της ισχυρής δυναμικής ενέργειας άλληλεπίδρασης δύο νουκλεονίων από την μεταξύ τους απόσταση. Στο σχήμα αυτό εμφανίζεται μια πολύ ισχυρή άπωση για $d \lesssim 0{,}5\mathrm{fm}$, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι η σύντηξη δύο νουκλεονίων σε ένα ενιαίο σωμάτιο έξη κουάρκ συνεπάγεται ένα πολύ μεγάλο ενεργειακό κόστος και επομένως δεν είναι εφικτή. Όμως το Σχ. 7.1 δείχνει επίσης ότι δύο τριάδες R, G, B που δεν έχουν συνενωθεί σε μια εξάδα (αφού δεν συμφέρει ενεργειακά) αλλά βρίσκονται η μία κοντά στην άλλη υφίστανται μια *εναπομένουσα* ελκτική ισχυρή δύναμη, η δυναμική ενέργεια της οποίας έχει περίπου τη μορφή που εικονίζεται στο Σχ. 7.1 και η οποία, όπως αναφέραμε προηγουμένως, μπορεί να αποδοθεί στην ανταλλαγή πιονίων. Η εμβέλεια αυτής της εναπομένουσας ελκτικής ισχυρής δύναμης είναι περίπου 1.4fm με βάση τη μάζα των πιονίων (βλ. Πιν. 7.2). Επομένως, αν ξεκινήσουμε από αυτή τη βραχείας εμβέλειας δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο βαρυονίων, το συμπέρασμα είναι ότι συμφέρει ενεργειακά να πλησιάσουν αρκετά τα δύο βαρυόνια, αλλά όχι τόσο κοντά ($d \lesssim 0,5\,\mathrm{fm}$) ώστε να συγχωνευτούν σε ένα ενιαίο σωμάτιο. Ας έλθουμε τώρα στο τρίτο ερώτημα αυτό που αφορά στη δυνατότητα ύπαρξης σύνθετων σωματίων που να αποτελούνται μόνο από γλοιόνια (πραγματικά, όχι εικονικά) ή από πραγματικά γλοιόνια και κουάρκ. Η απάντηση είναι ότι υπάρχουν θεωρητικές προβλέψεις βασισμένες σε εκτενείς αριθμητικούς υπολογισμούς για την ύπαρξη άχρωμης δέσμιας κατάστασης με δύο γλοιό-



Σχ. 7.1 Μια απλοποιημένη μέση τιμή του δυναμικού ισχυρής αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο νουκλεονίων ως συνάρτηση της αποστάσεώς τους. Υπάρχει μια ισχυρή έλξη για περίπου $1\text{f} \lesssim d \lesssim 4\text{f}$. Για $d \lesssim 0{,}5\text{f}$ εμφανίζεται μια πολύ ισχυρή άπωση που εμποδίζει τη σύντηξή τους σ' ένα ενιαίο σωμάτιο έξη κουάρκ, ενώ για $d \gtrsim 4\text{f}$ το δυναμικό έχει γίνει πολύ μικρό και σβήνει εκθετικά. Η ισχυρή άπωση οφείλεται στο ότι δεν συμφέρει ενεργειακά η συνένωση δύο νουκλεονίων σε ένα ενιαίο σωμάτιο αποτελούμενο από έξη κουαρκ. Η διαγράμμιση δείχνει την περιοχή όπου κυμαίνεται η απόσταση μεταξύ γειτονικών νουκλεονίων σ' ένα πυρήνα. Το 1f (που γράφεται και ως 1fm) ισούται εξ ορισμού με 10^{-15}m. Η έλξη είναι βραχείας εμβέλειας πράγμα που είναι συνεπές με την είκονα ότι οφείλεται στην ανταλλαγή πιονίων των οποίων η μάζα είναι περίπου 270 φορές τη μάζα του ηλεκτρονίου

να (gg), μάζας ~1550±95MeV και spin 0 καθώς και μιας άλλης κατάστασης δύο πραγματικών γλοιονίων με μάζα 2270±100MeV και spin 2. Υπάρχουν ακόμη προβλέψεις για άχρωμες δέσμιες καταστάσεις $q\bar{q}g$. Τέλος, υπάρχουν μετασταθή σύνθετα σωμάτια που έχουν παρατηρηθεί και που θα μπορούσαν να ερμηνευθούν ως κάποια από τις παραπάνω κατάστάσεις. Είναι επίσης αποδεκτό ότι υπό συνθήκες πολύ υψηλής θερμοκρασίας και πίεσης, όπως αυτές που θεωρείται ότι επικρατούσαν σε αρχικές στιγμές του Σύμπαντος (βλ. Κεφ.14), ένας πολύ μεγάλος αριθμός κουάρκ και γλοιονίων δημιουργούν μια 'καυτή σούπα' που ονομάζεται **πλάσμα κουάρκ/γλοιονίων.** Αυτή η κατάσταση της ύλης μελετάται εντατικά και θεωρητικά αλλά και σε πειράματα μετωπικής σύγκρουσης βαρέων ιόντων με ταχύτητες που είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός.

Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται κάποια πειραματικά δεδομένα για μερικά από τα εκατοντάδες βαρυόνια (Πιν.7.1) και μεσόνια (Πιν.7.2) που έχουν παραχθεί στους μεγάλους επιταχυντές και έχουν μελετηθεί με τη βοήθεια εξειδικευμένων ανιχνευτών. Δεν θα ήταν άσκοπο να 'ρίξει μια ματιά' ο αναγνώστης στους μέσους χρόνους ζωής των διαφόρων αδρονίων και στις φυσικές διαδικασίες 'θανάτου' τους και να προβληματισθεί για τις μεγάλες διαφορές που παρατηρούνται.

Πίν. 7.1: Μερικά από τα βαρυόνια που έχουν παρατηρηθεί και μελετηθεί

Όνομα/ Σύμβολο	Σύνθεση	Μάζα /m_e	Μέγεθος (fm)	Ηλεκτρικό φορτίο ($\|e\|$)	Μέσος χρόνος ζωής (s)	Κύρια διαδικασία διάσπασης
πρωτόνιο/p	uud	1836,15	0,84	1	$>10^{32}$yrs	Δεν διασπάται
νετρόνιο/n	udd	1838,68	0,84	0	889	$\rightarrow pe\,\bar{\nu}_e$
Δ^{++}	uuu	2411	-	2	$5{,}5\times10^{-24}$	$\rightarrow p\pi^+$
Λ^o	uds	2183		0	$2{,}63\times10^{-10}$	$p\pi^-$, $n\pi^o$
Σ^o	uds	2334		0	6×10^{-20}	$\rightarrow \Lambda^o\gamma$
Σ^+	uus	2318		1	$0{,}8\times10^{-10}$	$\rightarrow p\pi^o$, $n\pi^+$
Σ^-	dds	2343		-1	$1{,}48\times10^{-10}$	$\rightarrow n\pi^-$
Ξ^o	uss	2573		0	$2{,}9\times10^{-10}$	$\rightarrow \Lambda^o\,\pi^o$
Ξ^-	dss	2586		-1	$1{,}64\times10^{-10}$	$\rightarrow \Lambda^o\,\pi^-$
Ω^-	sss	3273		-1	$0{,}82\times10^{-10}$	Λ^oK^-, $\Xi^o\pi^-$
Λ_c	udc	4471		0	$2{,}1\times10^{-13}$	$pK^-\pi^+$

7.4 Η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου και του νετρονίου είναι σε σημαντικό βαθμό κινητική ενέργεια των κουάρκ τους.

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με μία προσπάθεια εκτίμησης της μάζας ηρεμίας του πρωτονίου ή του νετρονίου. Θα αποδεχτούμε στην αρχή ότι ισχύει στο ακραίο όριο η ασυμπτωτική ελευθερία για τα κουάρκ που είναι εγκλωβισμένα στο πρωτόνιο ή το νετρόνιο, πράγμα που συνεπάγεται ότι η ενέργεια αλληλεπίδρασης τους είναι αμελητέα. Πέρα από την ενέργεια ηρεμίας των τριών κουάρκ, η οποία είναι περίπου εκατό φόρες μικρότερη από αυτήν του πρωτονίου ή του νετρονίου, η μόνη άλλη προφανής ενέργεια που απομένει είναι η κινητική ενέργεια των κουάρκ λόγω του εγκλωβισμού τους. Επειδή το κέντρο μάζας των τριών κουάρκ είναι ελεύθερο να κινείται σε όλο το χώρο, οι τρεις βαθμοί ελευθερίας που του αναλογούν δεν υπόκεινται σε κανένα χωρικό περιορισμό και επομένως η αντίστοιχη κινητική ενέργεια είναι μηδέν. Απομένουν οι υπόλοιποι έξη βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν σε δύο σωμάτια. Άρα η κινητική ενέργεια εγκλωβισμού ε των κουάρκ μπορεί να θεωρηθεί ότι ισούται με το διπλάσιο της κινητικής ενέργειας ενός σωματίου εγκλωβισμένου στο χώρο του πρωτονίου

$$\varepsilon_K \simeq 2cp \approx 2\frac{1,813\hbar c}{r}, \qquad (7.1)$$

όπου $r \simeq 0,84\text{fm}$ είναι η ακτίνα του πρωτονίου ή του νετρονίου. Για να καταλήξουμε στη σχέση (7.1) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ενέργεια ηρεμίας των κουάρκ είναι αμελητέα σε σχέση με τις *cp* καθώς και τη σχέση (2.10). Επομένως το ε_K είναι περίπου ίσο με την ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου ή του νετρονίου. Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές βρίσκουμε για την κινητική ενέργεια των εγκλωβισμένων στο πρωτόνιο ή στο νετρόνιο κουάρκ $\approx 850\,\text{MeV}$. Η διαφορά μεχρι τις πειραματικές τιμές

Πίν. 7.2 Μερικά από τα μεσόνια που έχουν παρατηρηθεί και μελετηθεί

Σύμ-βολο	Σύνθεση	Μάζα /m_e	Ηλεκτρικό φορτίο (e)	Σπιν	Μέσος χρόνος ζωής (s)	Κύριος τρόπος διάσπασης
π^o	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$	264	0	0	$0,84\times10^{-16}$	$\gamma\gamma$
π^+	$u\,\bar{d}$	273	1	0	$2,603\times10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu$
π^-	$d\,\bar{u}$	273	-1	0		$\mu^-\bar{\nu}_\mu$
K^o	$d\,\bar{s}$	974	0	0	$K_L^o\ 5,17\times10^{-8}$	$\pi^o\,\pi^o\,\pi^o$
$\overline{K}^o$	$s\,\bar{d}$		0	0	$K_s^o\ 0,892\times10^{-10}$	$\pi^+\,\pi^-$
K^+	$u\,\bar{s}$	966	1	0	$1,237\times10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu$
K^-	$s\bar{u}$		-1	0		$\mu^-\bar{\nu}_\mu$
J/ψ	$c\bar{c}$	6060	0	1	$7,5\times10^{-15}$	Κυρίως αδρόνια e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, ή $(\pi^+\pi^-)\pi^o$
D^o	$c\bar{u}$	3649	0	0	$4,15\times10^{-13}$	$K^-\pi^+\pi^o$, κ.α.
$\overline{D}^o$	$u\bar{c}$		0	0		
D^+	$c\bar{d}$	3658	1	0	$1,07\times10^{-12}$	$\overline{K}^o$ +διάφορα
D^-	$d\bar{c}$		-1	0		
B^+	$u\bar{b}$	10330	+1	0	$1,62\times10^{-15}$	$\overline{D}^o\pi^+$, κ.α.
B^-	$b\bar{u}$		-1	0		
B_d^o	$d\bar{b}$	10321	0	0	$1,56\times10^{-12}$	D^o+διάφορα
$\overline{B}_d^o$	$b\bar{d}$		0	0		
B_s^o	$s\bar{b}$	10502	0	0	$1,47\times10^{-12}$	D_s^- +διάφορα
$\overline{B}_s^o$	$b\bar{s}$		0	0		

των 938,3MeV και 939,6MeV αντιστοίχως μπορεί να αποδοθεί στη δυναμική ενέργεια που έχει περίπου τη μορφή $A \cdot r$. Στην πραγματικότητα η συμβολή της κινητικής ενέργειας των κουάρκ προκύπτει από λεπτομερείς υπολογισμούς [34] μικρότερη από τα 850 MeV που έδωσε η δική μας εκτίμηση. Σε οποιαδήποτε περίπτωση η διαφορά μεταξύ της ενέργειας ηρεμίας του πρωτονίου ή του νετρονίου και της ε_K οφείλεται στα εικονικά γλοιόνια που συμμετέχουν σε αυτά και που αντιπροσωπεύουν τη δυναμική ενέργεια μεταξύ των τριών κουαρκ. Βλ. σχετικά λυμένη άσκηση 5.

7.5 Λυμένες ασκήσεις

1. Δώστε τη σύνθεση σε κουάρκ των εξής βαρυονίων (p, n, Λ^o, Σ^o, Σ^+, Ω^-) και των εξής μεσονίων (π^o, π^+, K^o, K^-, J/ψ, B^-)
Λύση: Βλ. πίνακες 7.1 και 7.2

2. Ποια από τις ακόλουθες αντιδράσεις παρατηρούνται και ποιες όχι και γιατί;

$$K^- + p \to \Sigma^- + \pi^+ , \qquad K^+ + p \to \pi^+ + K^+ + n , \qquad K^- + p \to \Lambda^o + \pi^o ,$$

$$\Lambda^o \to \pi^- + p , \qquad K^- + p \to \Lambda^o + K^o , \qquad \pi^0 \to \mu^- + e^+ + \nu_e ,$$

$$\mu^- \to e + \gamma , \qquad p + p \to p + p + n , \qquad \gamma + p \to n + \pi^0 ,$$

Λύση:

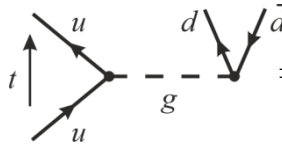
$K^- + p \to \Sigma^- + \pi^+$	ΝΑΙ, ισχυρή
$K^+ + p \to \pi^+ + K^+ + n$	ΝΑΙ, ισχυρή
$K^- + p \to \Lambda^o + \pi^o$	ΝΑΙ, ισχυρή
$\Lambda^o \to \pi^- + p$	ΝΑΙ, ασθενής, $\lvert\Delta S\rvert = 1$
$K^- + p \to \Lambda^o + K^o$	ΝΑΙ, ασθενής, $\lvert\Delta S\rvert = 1$
$\pi^0 \to \mu^- + e^+ + \nu_e$	ΟΧΙ, παραβίαση μιονικού λεπτονικού αριθμού
$\mu^- \to e + \gamma$	ΟΧΙ, παραβίαση μιονικού και ηλεκτρονικού λεπτονικού αριθμού
$p + p \to p + p + n$	ΟΧΙ, παραβίαση βαρυονικού αριθμού
$\gamma + p \to n + \pi^0$	ΟΧΙ, παραβίαση φορτίου

3. Αδρόνιο έχει σπιν=1, ηλεκτρικό φορτίο q=+1, παραδοξότητα S=0 και μάζα μικρότερη από τη μάζα του πρωτονίου. Από τι quarks ή/ και antiquarks αποτελείται;
Λύση: Πρόκειται για το μεσόνιο ρ^+ που είναι μια διεγερμένη κατάσταση του π^+. Η σύνθεση του είναι $u\bar{d}$ και η ενέργεια ηρεμίας του είναι 775, 4±0,4. Ανήκει στην τριάδα ρ^o, $\rho^\pm$.

4. Δώστε το διάγραμμα Feynman της κύριας διαδικασίας αφανισμού των εξής βαρυονίων Σ^o, Δ^{++}, Ξ^- και των εξής μεσονίων $\pi^o, \pi^+, \pi^-, K^o, \bar{K}^o, K^+, J/\psi$. Μπορείτε να εκτιμήσετε το χρόνο ζωής τους;

Λύση:

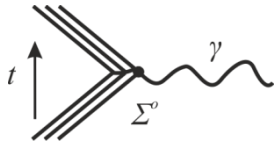
4α. $\Delta^{++} \equiv uuu$



$\Rightarrow uuu \to uuud\bar{d} = uud + u\bar{d} = p + \pi^+$

strong interaction $\Rightarrow t \sim 10^{-24} - 10^{-23}$s

4β. $\Sigma^o \equiv uds$, $\Lambda^o \equiv uds$

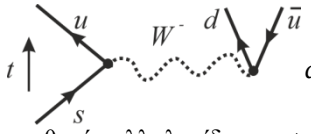


$\Sigma^o \to \Lambda^o + \gamma$ (αντίστοιχη διαδικασία με την εκπομπή ενός φωτονίου από διεγερμένο άτομο)

1192MeV 1115

ΗΜ αλληλεπίδραση με **ένα μόνο** κόμβο, $t \approx 10^{-19}$s, $t = 7,4 \times 10^{-20}$

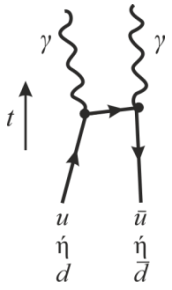
4γ. $\Xi^- \equiv dss$



$dss \to dsud\bar{u} = uds + \bar{u}d = \Lambda^o + \pi^-$

ασθενής αλληλεπίδραση, $t \sim 10^{-10}s$

4δ. $\pi^o \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$



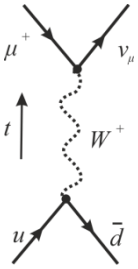
$\pi^o \to 2\gamma$

ΗΜ αλληλεπίδραση με **δύο** κόμβους

Αναμενόμενη τιμή $t \approx 10^{-16}$s

Παρατηρούμενη τιμή $t = 8,4 \times 10^{-17}$s

4ε. $\pi^+ \equiv u\bar{d}$



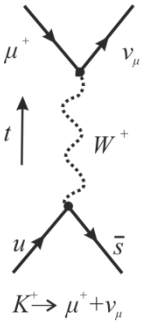
$\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$

Ασθενής με **δύο** κόμβους

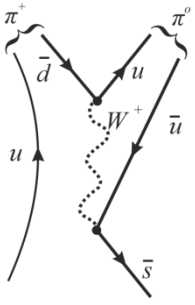
$t \approx 10^{-8}\text{s} \cdot \qquad t = 2,6\times10^{-8}\text{s}$

4στ. $\pi^- \equiv \bar{u}d$ (ισχύουν αντίστοιχα με 4ε) $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, $t \sim 10^{-8}$

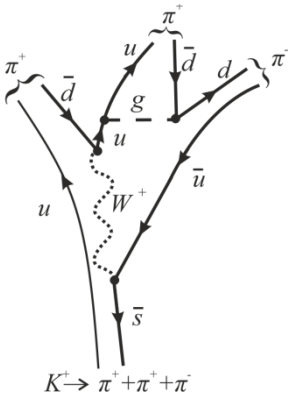
4ζ. $K^+ \equiv u\bar{s}$, $t \sim 1{,}283\times10^{-8}$s



(α)



(β)

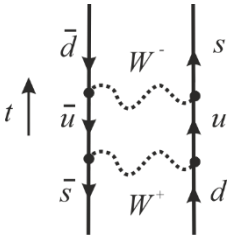


(γ)

4θ. $K^o \equiv d\bar{s}$, $\bar{K}^o \equiv s\bar{d}$, $K_1 \equiv K_s \to 2\pi$, βραχύβιο, $CPK_s = K_s$

$K_2 \equiv K_L \to 3\pi$, μακρόβιο, $CPK_L = -K_L$

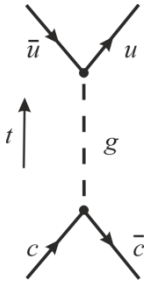
K^o μπορεί να αλλάξει σε $\bar{K}^o$ (και αντίστροφα) μέσω της ακόλουθης διαδικασίας: Επομένως οι ιδιοκαταστάσεις είναι $K_1 \equiv K_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^o + \bar{K}^o)$



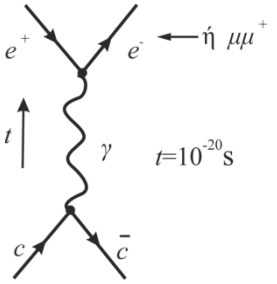
και $K_2 \equiv K_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^o - \bar{K}^o)$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές του τελεστή *CP* (charge, conjugation και parity)+1 και –1.Η αντίδραση $K_s \to \pi^+ + \pi^-$ ή $\pi^o + \pi^o$ διατηρεί την *CP*, ενώ η $K_L \to \pi^+ + \pi^-$ δεν διατηρεί την *CP* και επομένως πρέπει ή $K_L \to \pi^o + \pi^o + \pi^o$ ή $\pi^\pm + e^\mp + \nu_e$. Άρα το K_L είναι

πιο μακρόβιο (t~5,116×10^{-8}s) ενώ το K_s πιο βραχύβιο, t=8,95×10^{-11}s. Το K_s αφανίζεται με ένα διάγραμμα ανάλογο του 4ζ(β), ενώ το K_L με ένα διάγραμμα ανάλογο του 4ζ(γ).

4ι. $J/\psi \equiv c\bar{c}$



Η ισχυρή αυτή διαδικασία αδυνατίζει λόγω του κανόνα OZI $\delta\varepsilon$=93,2±2,1KeV



5. Θεωρήστε το εξής απλό μοντέλο για το πιόνιο π^+: Η δυναμική ενέργεια E_Δ μεταξύ των δύο κουάρκ που το αποτελούν είναι της μορφής $A\cdot r$ με A θετικό και r την απόστασή τους η οποία ισούται προφανώς με δύο φορές την ακτίνα R του πιονίου. Θεωρώντας ότι η κινητική ενέργεια ε_K της σχετικής κίνησης των δύο κουάρκ δίνεται από το γνωστό τύπο (2.10), B/r, με B=1,813$\hbar c$, υπολογίστε την δυναμική, την κινητική και την ολική ενέργεια συναρτήσει της ακτίνας R. Χρησιμοποιώντας την εμπειρική τιμή της ολικής ενέργειας του π^+ εκτιμήστε το μέγεθος της ακτίνας του.

Λύση: Η ολική ενέργεια του π^+στο σύστημα που το κέντρο μάζας ακινητεί είναι $E_t=Ar+(B/r)$. Ελαχιστοποιώντας ως προς r έχουμε ότι $r=\sqrt{B/A}$, $E_\Delta = E_K = \sqrt{AB}$. Άρα η ολική ενέργεια είναι διπλάσια της κινητικής $E_t = 2E_K = (2B/r) = (B/R)$ και αντικαθιστώντας το B καθώς και την εμπειρική τιμή της ολικής ενέργειας έχουμε

$$\frac{1,813\hbar c}{R} = 139,5\,\text{MeV} = 5,13\times10^6\ \text{α.μ.},$$

$$\text{ή}\quad R = 4,8\times10^{-5}\ \text{α.μ.} = 2,56\ \text{fm}\ .$$

Η προκύπτουσα τιμή R της ακτίνας του πιονίου είναι περίπου 3 φορές μεγαλύτερη από αυτήν του πρωτονίου, δηλαδή φαίνεται να είναι πολύ υπερεκτιμήμενη. Αυτό θα μπορούσε να διορθωθεί αν θεωρηθεί ότι η δυναμική ενέργεια δεν έχει την απλή μορφή Ar, που υποθέσαμε, αλλά μια τροποποιημένη εξάρτηση από το r, π.χ. του τύπου $Dr^n/(1+G\cdot r^{n-1})$ με κατάλληλες επιλογές για τις σταθερές D, G, n.

7.6 Άλυτες ασκήσεις

1. Διατυπώστε μέσω στοιχειωδών διαδικασιών τις κύριες φυσικές διαδικασίες αφανισμού των βαρυονίων του Πιν. 7.1. Εξηγήστε την τάξη μεγέθους του παρατηρούμενου μέσου χρόνου ζωής.

2. Διατυπώστε μέσω στοιχειωδών διαδικασιών τις κύριες φυσικές διαδικασίες αφανισμού των μεσονίων του Πιν. 7.2. Εξηγήστε την τάξη μεγέθους του παρατηρούμενου μέσου χρόνου ζωής.

Σημείωση: πεντακουάρκ

Το συνεργατικό πείραμα LHCb στο CERN αναλύοντας ενδεχόμενες ενδιάμεσες καταστάσεις κατά την αποσύνθεση αδρονίων διαπίστωσε το 2015 και πολύ πρόσφατα, το 2019, την ύπαρξη σπάνιων καταστάσεων αποτελούμενων από τέσσερα κουάρκ και ένα αντι-κουάρκ: την ύπαρξη δηλαδή δέσμιων καταστάσεων που ονομάζονται *πεντακουάρκ*, $\mathrm{uudc\bar{c}}$. Οι διαπιστωμένες καταστάσεις πεντακουάρκ είναι οι εξής: $P_c^+(4312)$, $P_c^+(4380)$, $P_c^+(4440)$, $P_c^+(4457)$, όπου οι εντός παρενθέσεως αριθμοί δηλώνουν την ενέργεια των καταστάσεων αυτών σε MeV.

Κεφάλαιο 8

Από τα νουκλεόνια στους πυρήνες

Σύνοψη: *Εάν Α νουκλεόνια προσέλθουν προς σχηματισμό πυρήνα, το ποσοστό των πρωτονίων, Z/A, και των νετρονίων, N/A, αλλάζει εν γένει έτσι ώστε να μειωθεί η ολική ενέργεια, $Zm_pc^2+Nm_nc^2-B$ του συστήματος. Σε ό,τι ακολουθεί, υπολογίζεται η μείωση –B, το ποσοστό, Z/A, που την ελαχιστοποιεί και δίνεται το γράφημα του –B/A ως συνάρτησης του A. Από αυτό το γράφημα προκύπτει η έκλυση ενέργειας κατά τη σχάση μεγάλων πυρήνων και κατά τη σύντηξη μικρών, όπως και άλλα σημαντικά πυρηνικά φαινόμενα.*

8.1. Η ολική πυρηνική ενέργεια

Θεωρήστε ότι έχουμε ένα πυρήνα που αποτελείται από A νουκλεόνια. Υποθέτουμε ότι από τα A νουκλεόνια τα Z είναι πρωτόνια και τα $A–Z=N$ είναι νετρόνια. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ολική ενέργεια αυτού του πυρήνα, η οποία αποτελείται από την ενέργεια ηρεμίας $Zm_pc^2+Nm_nc^2$ των νουκλεονίων (όταν είναι απομονωμένα) συν την κινητική ενέργεια E_K των νουκλεονίων εντός του πυρήνα (βάσει των αρχών του Heisenberg και του Pauli) συν τη δυναμική τους ενέργεια E_Δ. Η ποσότητα E_K+E_Δ, που είναι κατ' ανάγκη αρνητική, συμβολίζεται συνήθως με $–B$. Η θετική ποσότητα B ονομάζεται *ενέργεια σύνδεσης*. Άρα

$$E_{ολ} = Zm_pc^2 + Zm_nc^2 + E_\Delta + E_K = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - B\,. \qquad (8.1)$$

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του $E_{ολ}$ χρειάζεται να αναφερθούμε στην ακτίνα R του πυρήνα και στον όγκο του V ο οποίος είναι ανάλογος του αριθμού, A, των νουκλεονίων επί τον όγκο, V_o, κάθε νουκλεονίου.

$$V = aAV_o\,, \qquad (8.2)$$

όπου η 'σταθερά' αναλογίας *a* είναι προφανώς μεγαλύτερη από τη μονάδα (αφού μεταξύ των νουκλεονίων υπάρχει ακάλυπτος χώρος: η διάμετρος κάθε νουκλεονίου είναι 1,68 fm, ενώ η μέση απόσταση των κέντρων δύο γειτονικών νουκλεονίων είναι γύρω στα 2 fm). Ο όγκος V_o, του κάθε νουκλεονίου, ισούται με $V_o=(4\pi/3)\,r_o^3$, όπου η ακτίνα r_o του κάθε νουκλεονίου είναι ίση με 0,84f [1].

Η ακτίνα του πυρήνα *R* συνδέεται με τον όγκο του, *V*: $V=(4\pi/3)R^3$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις για το *V* και το V_o στην (8.2) έχουμε ότι

$$\boxed{R = a^{1/3}A^{1/3}r_o\ .} \qquad (8.2')$$

Η εμπειρική τιμή του $a^{1/3}r_o$ είναι περίπου 1,24±0,06f που αντιστοιχεί στη μέση τιμή a=3,22 και αλλάζει λίγο με το μέγεθος του πυρήνα. Οι μικρότερες τιμές του *a* αντιστοιχούν στα μεγάλα *A*, ενώ οι μεγαλύτερες στα μικρά *A*. Η τιμή του *a* για κάθε πυρήνα, όπως και όλων των ελεύθερων παραμέτρων, πρέπει να μπορεί να προκύψει θεωρητικά, από την ελαχιστοποίηση της ολικής ενέργειας στην οποία θα επανέλθουμε έχοντας υπόψη την (8.1):

Η *δυναμική ενέργεια* αποτελείται από την *απωστική ενέργεια Coulomb*, $E_{\Delta C}$, μεταξύ των πρωτονίων και την *ελκτική ενέργεια,* $E_{\Delta I}$, λόγω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων μεταξύ γειτονικών νουκλεονίων. Η $E_{\Delta C}$ ισούται με τον αριθμό, $Z(Z-1)/2$, των ζευγών πρωτονίων επί μια μέση τιμή e^2/r, της δυναμικής ενέργειας Coulomb ανά ζεύγος).

$$\boxed{E_{\Delta C} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{Z}\frac{e^2}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{Z(Z-1)e^2}{r},\ \ r \approx \frac{5}{6}R\ .\ \ r = 5R/6} \qquad (8.3)$$

Η τιμή $r = 5R/6$ προκύπτει θεωρώντας ότι η μέση συγκέντρωση των πρωτονίων στον πυρήνα είναι ομοιογενής.

Η $E_{\Delta I}$ ισούται με μια μέση ισχυρή ενέργεια, $-\varepsilon$ μεταξύ ενός ζεύγους *διπλανών*[2] νουκλεονίων επί τον αριθμό των ζευγών *διπλανών* νουκλεονίων. Παρατηρήστε όμως ότι ένα νουκλεόνιο που βρίσκεται στην επιφάνεια του πυρήνα έχει κατά μέσο όρο λιγότερους γείτονες, έστω *K΄*, από ένα που βρίσκεται στο εσωτερικό του πυρήνα και έχει κατά μέσο όρο *K* γείτονες. Εάν A_s είναι ο αριθμός των νουκλεονίων που βρίσκονται στην επιφάνεια και A_B ο αριθμός αυτών που βρίσκονται στο εσωτερικό, τότε ο αριθμός όλων των ζευγών ισούται με $\frac{1}{2}A_sK' + \frac{1}{2}A_BK$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $A_s+A_B=A$

[1] $1\text{f} \equiv 1\text{fm} \equiv 10^{-15}\,\text{m}$.

[2] Λόγω του ότι οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ νουκλεονίων είναι βραχείας εμβέλειας, γίνονται αισθητές *μόνο* μεταξύ *γειτονικών* νουκλεονίων, σε αντίθεση με τις αλληλεπιδράσεις Coulomb, που ασκούνται μεταξύ όλων των ζευγών πρωτονίων.

($\Rightarrow A_B=A-A_s$) έχουμε για την συνολική ελκτική ισχυρή δυναμική ενέργεια $E_{\Delta I}$:

$$E_{\Delta I} = -\tfrac{1}{2}(A-A_s)K\varepsilon - \tfrac{1}{2}A_s K'\varepsilon . \qquad (8.4)$$

Για τα K και K' μια εύλογη επιλογή είναι $K\approx 8$ και $K'\approx 5$. Δεδομένου ότι η απόσταση μεταξύ γειτονικών νουκλεονίων κυμαίνεται από περίπου 1,5f έως 2,5f με μέση τιμή γύρω στα 2,1f μια λογική τιμή του ε, βάσει του Σχ. 7.1, είναι $\varepsilon\approx 11{,}4$ MeV. Ο αριθμός A_s των νουκλεονίων που βρίσκονται στην επιφάνεια του πυρήνα είναι προφανώς ανάλογος του εμβαδού αυτής της επιφάνειας, το οποίο εμβαδόν ισούται με $4\pi R^2$. Λόγω της (8.2΄) το R^2 είναι ανάλογο του $A^{2/3}$. Άρα και το A_s είναι ανάλογο του $A^{2/3}$. Θα επιλέξουμε το συντελεστή αναλογίας ίσο με τη μονάδα. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω αριθμητικές τιμές, έχουμε για τη συνολική ισχυρή δυναμική ενέργεια μεταξύ όλων των ζευγών γειτονικών νουκλεονίων το εξής αποτέλεσμα:

$$E_{\Delta I} = -4\varepsilon A + 1{,}5\varepsilon A^{2/3} = -45{,}6A + 17{,}1A^{2/3}\text{MeV} . \qquad (8.4')$$

Απομένει να υπολογίσουμε την *ελάχιστη κινητική ενέργεια* (που ποτέ δεν πρέπει να τη ξεχνάμε). Βάσει του τύπου (2.13) έχουμε:

$$E_K = 2{,}87Z\frac{\hbar^2}{m_p}\left(\frac{Z}{V'}\right)^{2/3} + 2{,}87N\frac{\hbar^2}{m_n}\left(\frac{N}{V'}\right)^{2/3} , \qquad (8.5)$$

όπου V' είναι ο *διαθέσιμος*[3] όγκος, που είναι περίπου το 0,5 του συνολικού όγκου του πυρήνα: $V' \approx \tfrac{1}{2}V = (2\pi/3)a\,r_o^3 A$.

Ασκηση 8.1 Αντικαταστήστε την έκφραση για το V' στην (8.5) και δείξτε ότι:

$$E_K = 0{,}804\frac{\hbar^2}{m r_0^2}\frac{Z^{5/3}+N^{5/3}}{A^{2/3}} , \qquad (8.5')$$

θεωρώντας ότι $m_p\approx m_n\approx m\approx 1837{,}4\, m_e$.

Άσκηση 8.2 Λαμβάνοντας υπόψη ότι $Z=\tfrac{1}{2}[A-(N-Z)]$ και $N=\tfrac{1}{2}[A+(N-Z)]$ αναπτύξτε την ποσότητα $(Z^{5/3}+N^{5/3})/A^{2/3}$ σε σειρά Taylor μέχρι και τη δεύτερη δύναμη ως προς τη διαφορά $N-Z$ για A=σταθ. και δείξτε ότι:

---

[3] Ο όγκος που καταλαμβάνει ένας σχηματισμός από ίσες εφαπτόμενες σφαίρες σε τυχαία διάταξη δεν μπορεί να είναι μικρότερος από περίπου 2 φορές το άθροισμα των όγκων τους, γιατί πάντοτε θα υπάρχουν τα διάκενα μεταξύ σφαιρών που εφάπτονται. Άρα ο όγκος που **δεν** είναι διαθέσιμος στα νουκλεόνια είναι περίπου διπλάσιος του όγκου των νουκλεονίων· επομένως ο διαθέσιμος όγκος είναι περίπου, βάσει του (8.2), $(\alpha-2)AV_0 = 1{,}22AV_0$ και όχι $(\alpha/2)AV_0 = 1{,}61AV_0$, όπως προσεγγιστικά θεωρήσαμε.

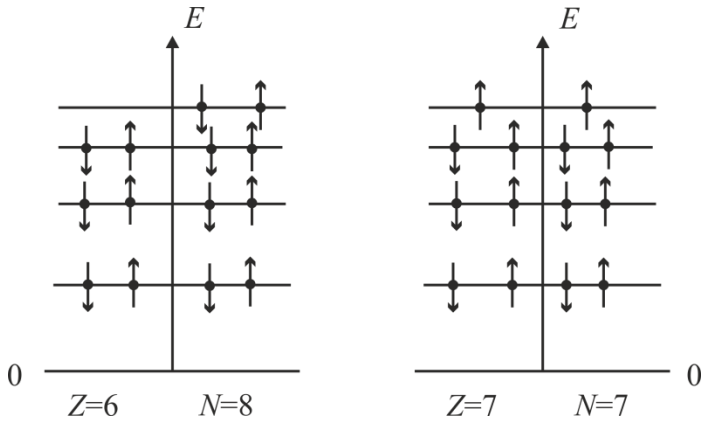
$$\frac{Z^{5/3}+N^{5/3}}{A^{2/3}} \approx \frac{1}{2^{2/3}}[A+\frac{5}{9}\frac{(N-Z)^2}{A}]. \qquad (8.5'')$$

Η (8.5΄΄) δείχνει ότι το ελάχιστο της ολικής κινητικής ενέργειας για σταθερό αριθμό νουκλεονίων, επιτυγχάνεται όταν $Z=N=A/2$.

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές για τα $\hbar$, m, r_o, a=3,22, $\varepsilon\approx$11,4MeV στις σχέσεις (8,3), (8,4΄), (8.5΄), (8.5΄΄), έχουμε το εξής αποτέλεσμα για την ενέργεια σύνδεσης B (σε MeV) ενός πυρήνα με A νουκλεόνια εκ των οποίων Z είναι πρωτόνια

$$\begin{aligned} B &= 45,6A - 17,1A^{2/3} && (\text{λόγω ισχυρής έλξης}) \\ &-0,71\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} && (\text{λόγω άπωσης Coulomb}) \\ &-29,74A \\ &-16,52\frac{(N-Z)^2}{A} && \Big\} (\text{λόγω κινητικής ενέργειας Heisenberg-Pauli}) \\ &+\delta. \end{aligned} \qquad (8.6)$$

όπου το δ είναι μια διόρθωση που οφείλεται στο ότι οι πυρήνες με Z και N άρτιο αξιοποιούν πιο αποτελεσματικά τις ενεργειακές στάθμες σε σχέση με τους πυρήνες με Z και N περιττό (όπως φαίνεται στο Σχ. 8.1). Οι πυρήνες με



Σχ. 8.1 Και οι δύο εικονιζόμενοι πυρήνες έχουν A=14. Ο πυρήνας όμως με Z=6 και N=8 έχει περίπου την ίδια ενέργεια με τον πυρήνα με $Z=N$=7, παρόλο που ο δεύτερος έχει ήδη κερδίσει, βάσει του τύπου (8.6), 5 MeV περίπου λόγω του ότι $N=Z$. Επομένως οι πυρήνες με Z, N άρτιους έχουν ένα ενεργειακό πλεονέκτημα κατά δ έναντι αυτών με A περιττό και κατά 2δ έναντι αυτών με N, Z περιττούς

A περιττό είναι σε ενδιάμεση ενεργειακή κατάσταση. Η ποσότητα δ δίνεται από τον εμπειρικό τύπο:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{34}{A^{3/4}}\,\text{MeV}, && \text{όταν } Z, N \text{ είναι άρτια}\\ &= 0, && \text{όταν } A \text{ περιττός}\\ &= -\frac{34}{A^{3/4}}\,\text{MeV}, && \text{όταν } Z, N \text{ είναι περιττά}.\end{aligned} \qquad (8.7)$$

Συνδυάζοντας τον πρώτο όρο της ισχυρής έλξης με τον πρώτο όρο της κινητικής ενέργειας καταλήγουμε στον τύπο:

$$B = 15{,}86A - 17{,}1A^{2/3} - 0{,}71\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - 16{,}52\frac{(N-Z)^2}{A} + \delta \quad \text{όλα σε MeV.} \qquad (8.6')$$

Ο τύπος (8.6΄) προέκυψε με βάση τη μάλλον στοιχειώδη ανάλυση της παρούσας ενότητας. Στη βιβλιογραφία δίνεται ένας όμοιος τύπος, όπου όμως οι συντελεστές έχουν προσαρμοσθεί με βάση εμπειρικά δεδομένα. Ο τύπος αυτός είναι ο ακόλουθος:

$$B = (a_{I\Delta} - a_{K0})A - \beta A^{2/3} - \gamma\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_K\frac{(N-Z)^2}{A} + \delta \ \text{ MeV}, \qquad (8.6'')$$

όπου $(a_{I\Delta}–a_{K0})$=15,75, β=17,8, γ=0,71, a_K=23,69. Πιο πρόσφατες εναλλακτικές τιμές των συντελεστών είναι αντιστοίχως: 15,5 16,8 0,72 23. Είναι εντυπωσιακό πόσο λίγο διαφέρει ο δικός μας τύπος (8.6΄) από τον ημιεμπειρικό τύπο (8.6΄΄) (διαφέρει κυρίως στο συντελεστή του όρου $(N–Z)^2$/A).

8.2. Ελαχιστοποιώντας την ολική ενέργεια

Έχοντας την ολική ενέργεια $Zm_pc^2+Nm_nc^2-B$ μπορούμε να την ελαχιστοποιήσουμε ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους προκειμένου να υπολογίσουμε τις ιδιότητες του κάθε πυρήνα. Οι ελεύθερες παράμετροι είναι οι εξής:

(α) Ο αριθμός των πρωτονίων Z και των νετρονίων $N=A–Z$ για δεδομένο A. Οι αριθμοί αυτοί είναι ελεύθεροι, αφού λόγω των ασθενών αλληλεπιδράσεων νετρόνια μπορούν να μετατραπούν σε πρωτόνια (βλέπε Σχ.1.5) ή πρωτόνια να μετατραπούν σε νετρόνια (βλέπε Σχ.1.6 και κείμενο που ακολουθεί) ανάλογα με το ποια από τις δύο διαδικασίες μειώνει την *ολική* ενέργεια του πυρήνα.

(β) Ο αριθμός των νουκλεονίων A μέσω διάσπασης του πυρήνα σε δύο ή περισσότερα θραύσματα[4]:

$$A \to A_1 + A_2 + \ldots \ . \tag{8.8}$$

(γ) Το μέγεθος του πυρήνα, που χαρακτηρίζεται από την παράμετρο a, του τύπου (8.2) ή (8.2΄). Για να υπολογίσουμε το a χρειαζόμαστε την εξάρτηση του ε, στον τύπο (8.4΄), από το a. Αν δεχτούμε ότι $\varepsilon \approx$ $\approx -78/d^{2,5} \approx -32{,}5/a^{0,83}$MeV για d γύρω στα 2f προκύπτει η θεωρητική τιμή, $a \approx 3{,}3$ που συμπίπτει πρακτικά με την εμπειρική τιμή a=3,22.

Για να ελαχιστοποιήσουμε ως προς Z την ολική ενέργεια υπό σταθερό A, την παραγωγίζουμε ως προς Z (αφού θέσουμε $N=A-Z$ και αφού παραλείψουμε για απλότητα τον όρο δ) και μηδενίζουμε την παράγωγο, οπότε προκύπτει το ποσοστό των πρωτονίων ως συνάρτηση του A:

$$\boxed{\frac{Z}{A} = \frac{1 + \dfrac{(m_n - m_p)c^2}{4\alpha_K} + \dfrac{\gamma A^{-1/3}}{4\alpha_K}}{2 + \dfrac{\gamma A^{2/3}}{2\alpha_K}}}\ , \tag{8.9}$$

ή, αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές, έχουμε

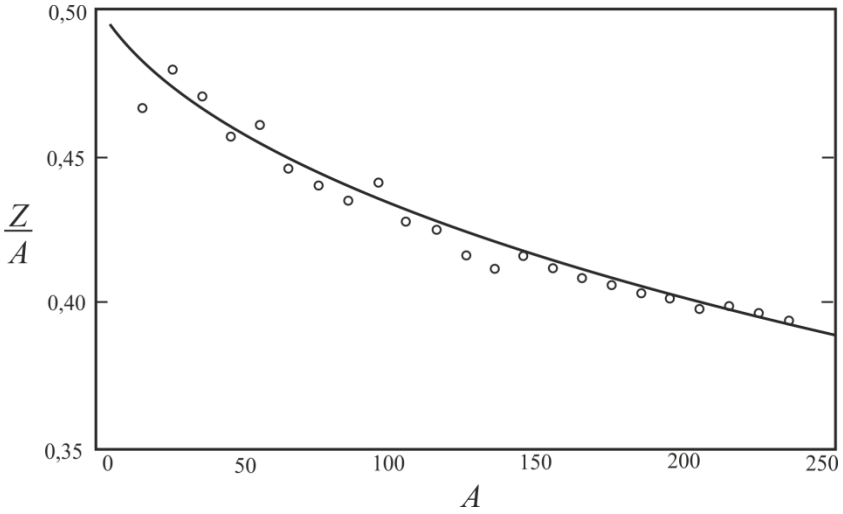
$$\frac{Z}{A} = \frac{1{,}0136 + 0{,}0075 / A^{1/3}}{2 + 0{,}015A^{2/3}} \ \text{ ή, απλούστερα, } \ \frac{Z}{A} \approx \frac{1}{2 + 0{,}015A^{2/3}}\,. \tag{8.9΄}$$

Από τον τύπο (8.9) προκύπτει ότι η απόκλιση του λόγου Z/A από την τιμή 1/2 οφείλεται κυρίως στο γ/a_K και ιδιαίτερα στον όρο $\gamma A^{2/3}/2a_K$ στον παρανομαστή της σχέσης (8.9). Από φυσική άποψη ο λόγος γ/a_K εκφράζει τον ανταγωνισμό μεταξύ ενέργειας Coulomb (που είναι ανάλογη του γ) και της απόκλισης από την τιμή Z/A=1/2 (που είναι ανάλογη του a_K και οφείλεται στην κινητική ενέργεια, η οποία ευνοεί την επιλογή $N=Z$). Έπεται ότι για τους μικρούς πυρήνες θα έχουμε $Z/A \approx 0{,}5$, δηλαδή ίσο αριθμό πρωτονίων και νετρονίων. Καθώς εξετάζουμε μεγαλύτερους πυρήνες (μεγαλύτερο A) ο όρος της άπωσης (Coulomb) (που είναι υπεύθυνος για τον προσθετέο $\gamma A^{2/3}/2a_K$ στον παρανομαστή του τύπου (8.9) παίζει όλο και μεγαλύτερο ρόλο ευνοώντας φυσικά όσο το δυνατόν λιγότερα πρωτόνια. Με άλλα λόγια το ποσοστό των πρωτονίων καθορίζεται από τον ανταγωνισμό της κινητικής ενέργειας που ευνοεί $N=Z=A/2$ και της ενέργειας Coulomb που ευνοεί $N=A-1$, $Z=1$. Για μικρούς πυρήνες κυριαρχεί η

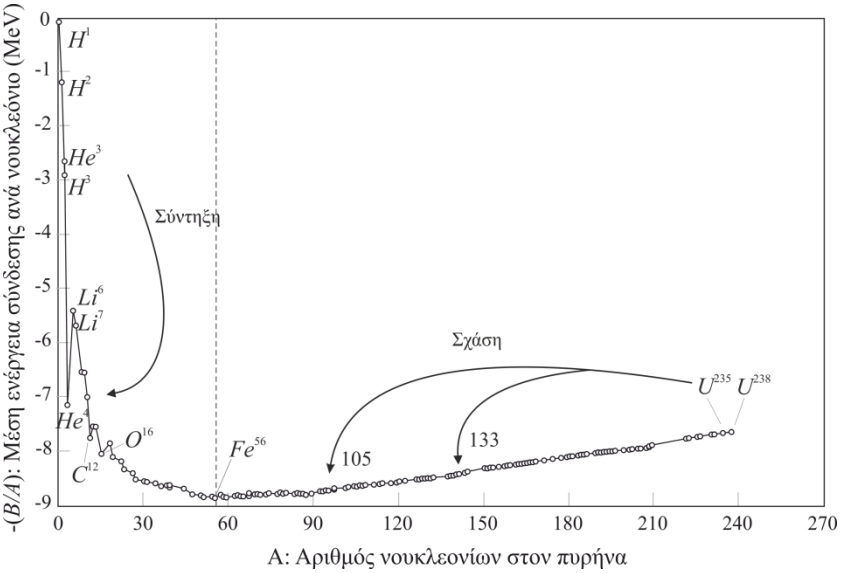
[4] Το ένα από τα δύο θραύσματα μπορεί να είναι ο πυρήνας του Ηλίου 4 με $A_1 = 4$, $N_1 = Z_1 = 2$ επειδή για το μέγεθός του έχει πολύ χαμηλή ενέργεια. Έχουμε τότε τη λεγόμενη ακτινοβολία α. Άλλη περίπτωση είναι η σχάση (για πολύ μεγάλους πυρήνες) όπου τα θραύσματα A_1, A_2 είναι παρόμοιου μεγέθους.

κινητική ενέργεια και έχουμε $N \approx Z$. Για μεγάλους πυρήνες ο σχετικός ρόλος των απώσεων Coulomb έναντι της κινητικής ενέργειας αυξάνει επειδή οι απώσεις αυτές είναι ανάλογες του $Z(Z-1)/A^{1/3} \propto A^{5/3}$, ενώ η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του A. Επομένως ο λόγος τους είναι ανάλογος του $A^{5/3}/A = A^{2/3}$ και έτσι δικαιολογείται ο παράγοντας $A^{2/3}$ που εμφανίζεται στον όρο $\gamma A^{2/3}/2a_K$. Πιο συγκεκριμένα ο λόγος ενέργειας Coulomb προς την απόκλιση της κινητικής ενέργειας από την τιμή $Z/A=1/2$ κυμαίνεται από 0,0378 για το He–4 έως 0,29 για το U–238.

Στο Σχ. 8.2 συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον τύπο (8.9) με τα πειραματικά δεδομένα για διάφορους πυρήνες με A περιττό (ώστε να είναι $\delta=0$). Είναι πράγματι εντυπωσιακό πόσο καλά συμφωνεί η απλοϊκή μας θεωρία με τα πειραματικά δεδομένα (παρόλες τις αποκλίσεις).



Σχ. 8.2 Ο λόγος Z/A, όπως δίνεται από τον τύπο (8.9) (συνεχής γραμμή) και όπως προσδιορίζεται από το πείραμα για πυρήνες με A περιττό (ώστε να αποφευχθεί ο ρόλος του όρου δ που δεν ελήφθη υπόψη στον τύπο (8.9)). Leighton[38], σελ. 548



Σχ. 8.3 Η ποσότητα $-B/A$ (σε MeV) ως συνάρτηση του A. Η συνεχής γραμμή είναι βάσει των τύπων (8.6΄΄), (8.9) (χωρίς τον όρο δ) και τα σημεία είναι τα πειραματικά δεδομένα Παρατηρήστε ότι οι μικροί άρτιοι–άρτιοι πυρήνες (και ιδίως το He^4) έχουν αισθητά χαμηλότερη τιμή του $-B/A$, λόγω του όρου δ (Για το He^4, $-B/A = -4.3$ MeV (χωρίς τον όρο δ), ενώ με τον όρο $\delta / A = 34/4^{7/4} = 3$MeV η τιμή γίνεται $-B/A = -7{,}3$ MeV, δηλαδή, πολύ κοντά στην πειραματική τιμή $-B/A \approx -7{,}074$ MeV. Εν γένει η συμφωνία πειραματικών δεδομένων και απλοϊκής θεωρίας είναι εντυπωσιακά καλή. Σημειώστε ότι για μεγάλα A, $A \gtrsim 100$, η καμπύλη μπορεί να προσεγγισθεί αρκετά καλά από τη σχέση $-B/A \approx -9{,}45 + 0{,}008A$

Στο σχήμα 8.3 συγκρίνονται τα πειραματικά δεδομένα για την ποσότητα[5], $-B/A$, ως συνάρτηση του A, με τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα, βάσει του τύπου (8.6΄΄), και αφού γίνει η αντικατάσταση του Z και του $N = A - Z$ από τον τύπο (8.9)· ο τύπος αυτός έχει βασιστεί στο ότι ο λόγος Z/N έχει φτάσει την τιμή ισορροπίας και επομένως περιλαμβάνει την ενέργεια και όποιων ραδιενεργών μετατροπών προηγήθηκαν. Παρατηρήστε ότι για $A \gtrsim 100$, η σχέση $-B/A$ έναντι A είναι γραμμική: $-B/A \approx -9{,}45 + 0{,}008A$.

8.3. Απαντώντας σε μερικές εύλογες ερωτήσεις

[5] Συνήθως, στα περισσότερα βιβλία, δίνεται η γραφική παράσταση του B/A και όχι του $-B/A$. Είναι, νομίζω, προτιμότερο να σχεδιάζουμε το $-B/A$ γιατί το $-B/A$ δίνει ουσιαστικά την εικόνα της ολικής ενέργειας ανά νουκλεόνιο, $E_{ολ}/A$ (εκτός από μία σταθερά, αφού $E_{ολ}/A \approx m_p c^2 - (B/A)$) και συνδέει το ελάχιστο με τη μεγαλύτερη σταθερότητα. Δίνει επίσης πιο παραστατικά γιατί παίρνουμε ενέργεια από τη σύντηξη ή τη σχάση.

Ο τύπος για την ολική ενέργεια του πυρήνα επιτρέπει να έχουμε απαντήσεις σε ορισμένες βασικές ερωτήσεις που αφορούν στη συμπεριφορά των διαφόρων πυρήνων.

1. *Γιατί οι πυρήνες είναι τέτοιοι τεράστιοι ενεργειακοί γίγαντες;*
   Επειδή είναι τέτοιοι μικροσκοπικοί νάνοι σε μέγεθος: Πράγματι η ενεργειακή κλίμακα των πυρήνων καθορίζεται από την ενεργειακή κλίμακα της κινητικής ενέργειας ανά νουκλεόνιο, η οποία δίνεται περίπου από τη βασική σχέση: $\varepsilon_K \approx \hbar^2 / m_p r_o^2$ που για $r_o \approx 1\text{fm}$ ισούται με περίπου 41,5 MeV.
2. *Γιατί δεν υπάρχουν πυρήνες με* $A \gtrsim 240$*;*
   Επειδή συμφέρει ενεργειακά (και είναι και εφικτή) η διάσπαση ενός πυρήνα με $A \gtrsim 240$ *σε δύο κομμάτια.* Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που το ένα κομμάτι είναι ο πυρήνας του He^4, μια διαδικασία που είναι γνωστή ως *διάσπαση–α*. Για να συμβεί αυτή η διάσπαση θα πρέπει κατ' αρχήν η ενέργεια ηρεμίας των προϊόντων να είναι μικρότερη της ενέργειας ηρεμίας του αρχικού πυρήνα: $E(A)>E(A–4)+E(4)$ ή

$$B(A) < B(A-4) + B(4) \tag{8.10}$$

   όπου τα B στην περιοχή μεγάλων τιμών του A ή του A–4 μπορεί να προσεγγισθούν από τις σχέσεις

$$B(A) \approx A(9,45 - 0,008A), \quad B(A-4) \approx (A-4)\left[9,45 - 0,008(A-4)\right], \tag{8.11}$$

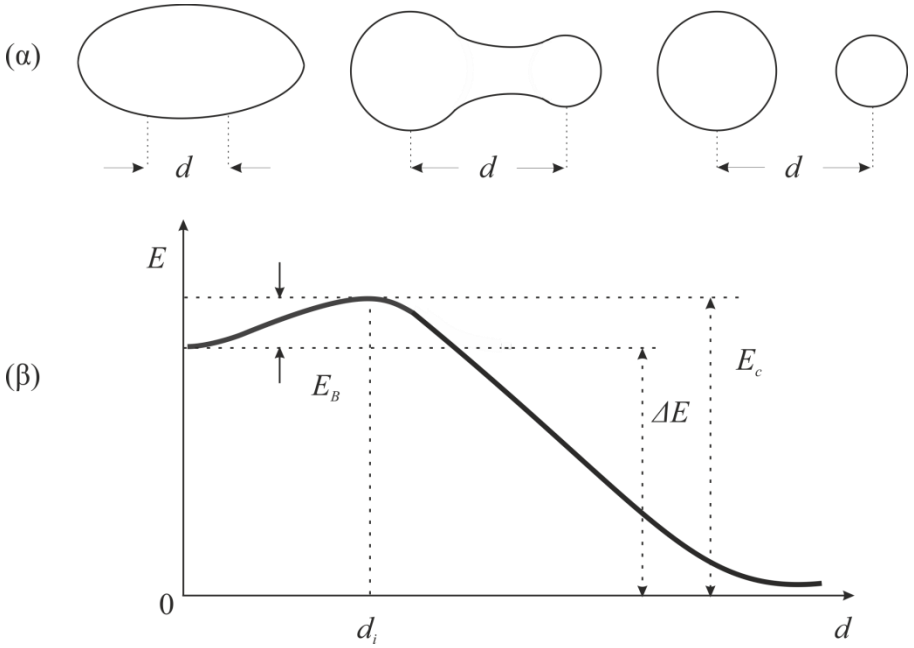
   ενώ $B(4)=4\times7,074=28,3$MeV. Αντικαθιστώντας στην ανισότητα (8.10) βρίσκομε $A\geq150,4$. Όμως η ύπαρξη ενεργειακού κέρδους δεν εξασφαλίζει το ότι η διάσπαση θα λάβει χώρα. Είναι και θέμα ενεργειακού φράγματος που αν είναι υψηλό και φαρδύ μπορεί να αποτρέψει πρακτικά τη διάσπαση. Άρα από τον προηγούμενο υπολογισμό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν θα πρέπει να υπάρχει διάσπαση–α σε πυρήνες με A μικρότερο ή περίπου ίσο με 150, ενώ μπορεί να γίνει για πυρήνες με $A\geq150$. Τα πειραματικά δεδομένα είναι συμβατά με αυτά τα θεωρητικά συμπεράσματα: Δεν υπάρχει πυρήνας με $A<144$ που να υφίσταται αυθόρμητη διάσπαση–α. Μεταξύ $144\leq A\leq151$ υπάρχουν μόνο πέντε πυρήνες που υπόκεινται σε διάσπαση–α, αλλά με τεράστιους χρόνους ζωής (της τάξεως του 10^{11} έτη!). Για A μεταξύ 152 και 208 είναι μερικοί πυρήνες που υφίστανται αυθόρμητη διάσπαση–α, αλλά οι περισσότεροι είναι σταθεροί. Για $A>208$ όλοι οι πυρήνες είναι μετασταθείς. Π.χ. το U^{238} μέσω μιας σειράς διασπάσεων–α και μετασχηματισμών–β καταλήγει στο σταθερό πυρήνα Pb^{206}.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση της *αυθόρμητης σχάσης*, δηλαδή του να σπάσει ο πυρήνας σε δύο κομμάτια παρόμοιου μεγέθους. Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι τα δύο κομμάτια είναι ίσου μεγέθους, αν και άνισα κομμάτια έχουν μικρότερη ανηγμένη μάζα και επομένως μεγα-

λύτερη πιθανότητα να ξεπεράσουν ένα ενδεχόμενο φράγμα δυναμικού μέσω του κβαντομηχανικού φαινομένου σήραγγος. Η διαφορά ενέργειας ΔE μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης ισούται με $\Delta E = =(0{,}37\gamma Z^2/A^{1/3})-(0{,}26\beta A^{2/3})$. Για να φτάσουμε στη σχέση αυτή χρησιμοποιήσαμε τον τύπο (8.6΄΄) και προσεγγίσαμε το $Z-1$ με Z στον τύπο αυτό. Χρησιμοποιώντας τις τιμές $\beta=17{,}8$ και $\gamma=0{,}71$ βρίσκουμε ότι το ΔE γίνεται θετικό όταν $Z^2/A \geq 17{,}62$ που αντιστοιχεί περίπου στο Ζιρκόνιο με $Z=40$, $A=91$ και $Z^2/A=17{,}58$. Αυτό που διασώζει τους πυρήνες των υπόλοιπων στοιχείων του Περιοδικού Πίνακα από $Z=41$ έως $Z=92$ είναι το φράγμα δυναμικού που αποτρέπει την αυθόρμητη σχάση τους και καθιστά το φαινόμενο σήραγγας πολύ απίθανο δεδομένου ότι η ανηγμένη μάζα των θραυσμάτων είναι πολύ μεγάλη, μεγαλύτερη του $24m_p$. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το ύψος E_B του φράγματος αυτού για να βεβαιωθούμε ότι έχει πράγματι την απαιτούμενη τιμή.

Άσκηση 8.3 Υπολογίστε το φράγμα δυναμικού για τη σχάση μεγάλων πυρήνων.

Λύση: Όπως φαίνεται στο Σχ. 8.4 (επόμενη σελίδα) το E_B ισούται με τη διαφορά $E_c-\Delta E$, όπου το ΔE είναι η ενεργειακή διαφορά που μόλις υπολογίσαμε και E_c είναι η μέγιστη τιμή της άπωσης Coulomb που προκύπτει εάν αντιστρέψουμε την πορεία των δύο θραυσμάτων και τα υποχρεώσουμε να πλησιάσουν μεταξύ τους όχι όμως τόσο κοντά ώστε η ισχυρή πυρηνική δύναμη να γίνει σημαντική. Η ενέργεια αυτή Coulomb δίνεται από το γνωστό τύπο $E_c = Z_1 Z_2 e^2 / d_i$, όπου η απόσταση d_i που αντιστοιχεί στο μέγιστο μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής:



Σχ.8.4. (α) Η σχάση ενός πυρήνα ακολουθεί το στάδιο της επιμήκυνσης, της ανάπτυξης ενός «λαιμού» και τέλος αυτό του διαχωρισμού συνήθως σε δύο θυγατρικούς πυρήνες με τον μικρότερο να έχει A γύρω στο 95 και τον μεγαλύτερο να έχει A γύρω στο 140 (Βλ. Eisberg and Resnick, Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles, J. Wiley, New York, 1974, p. 654). (β) Η μεταβολή της ενέργειας ενός σχάσιμου πυρήνα ως συνάρτησης της απόστασης d, όπως προσδιορίζεται από το (α)

$d_i \approx R_1 + R_2 + 4\text{fm}$ όπου R_1 και R_2 είναι οι ακτίνες των δύο θραυσμάτων και η απόσταση 4fm εξασφαλίζει ότι η πυρηνική έλξη δεν έχει πάρει σημαντικές τιμές. Λαμβάνοντας υπόψη την (8.2΄) και υποθέτοντας ότι η τελική τιμή του A θα είναι γύρω στο 300 μπορούμε να εκφράσουμε το d_i στην πιο βολική μορφή $d_i \approx$ $\approx 1,62(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \approx 2,58A^{1/3}$, αφού $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}A$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του d_i στον τύπο για τη μέγιστη άπωση Coulomb βρίσκουμε $E_c \approx 0,1394Z^2A^{-1/3}$ και επομένως το ύψος του ενεργειακού φράγματος προκύπτει ίσο με $E_B = 4,628A^{2/3} - 0,1233Z^2A^{-1/3}$. Το φράγμα αυτό μηδενίζεται σύμφωνα με τα παραπάνω όταν $Z^2/A \approx 38$. Άλλοι υπολογισμοί δινουν διαφορετικές αλλά παρόμοιες τιμές.

Για το U^{238} ο λόγος Z^2/A είναι ίσος με 35,56, δηλαδή σαφώς κάτω από το υπολογισθέν όριο του 38. Επομένως, το όριο άνω του οποίου κανένας πυρήνας δεν μπορεί να υπάρξει γιατί θα υποστεί άμεση[6] σχάση προκύ-

[6] Σχάση μπορεί να υπάρξει και κάτω του ορίου $Z^2/A=38$ λόγω κβαντομηχνικού φαινομένου σήραγγας. Αυτό όμως θα οδηγήσει σε μετασταθείς καταστάσεις με μη μηδενικό χρόνο ζωής, ενώ η άμεση σχάση σημαίνει ασταθείς καταστάσεις με μηδενικό χρόνο ζωής.

πτει από τους υπολογισμούς μας (με βάση τον παρακάτω πίνακα) ότι είναι ο τρανσουράνιος πυρήνας Z=98, A=250.

A	Z/A(8.9΄)	Z	Z^2/A
250	0,393	98	38,42
270	0,388	105	40,83
275	0,387	106	40,85
285	0,3827	109	41,69
290	0,3816	111	42,49
295	0,3805	112	42,52
300	0,3795	114	43,32
305	0,3784	115	43,36

Στο φυσικό περιβάλλον της Γης δεν υπάρχει κανείς πυρήνας με A μεγαλύτερο του 250. Πειραματικά έχουν δημιουργηθεί μεγαλύτεροι μεταστα-θείς, εξαιρετικά βραχύβιοι πυρήνες, όπως αυτός με Z=116 και A=292 (Z^2/A=46) ή αυτός με Z=114 και A=298 (Z^2/A=43,61). Το συμπέρασμα είναι ότι η απλοϊκή μας θεωρία παράγει αποτελέσματα κοντά στην πραγματικότητα, η οποία δείχνει ότι το άνω όριο αστάθειας λόγω άμεσης αυθόρμητης σχάσης είναι κοντά στο A=300 και ότι δεν εξαρτάται μόνο από το λόγο Z^2/A αλλά και από από άλλους παράγοντες όπως είναι π.χ. οι λεπτομέρειας των ενεργειακών σταθμών.

3. *Πόση ενέργεια εκλύεται κατά τη σχάση του* U^{235}*;*
Ο τύπος $\Delta E=0{,}2627Z^2/A^{1/3}-4{,}628A^{2/3}$ *δίνει* ΔE=184,1MeV *ανά πυρήνα* U^{235} *έναντι* 180,9MeV *που είναι η πειραματική τιμή.* Οι παραπάνω τιμές δεν περιλαμβάνουν την ενέργεια των 30,4MeV που εκλύεται στη συνέχεια λόγω ραδιενεργού διάσπασης των θραυσμάτων. Από αυτά τα 30,4MeV ένα μέρος ίσο με 21,6MeV μένει στον αντιδραστήρα και προστίθεται στα 180,9 για να δώσει συνολικά 202,5MeV ανά πυρήνα U^{235}, ενώ τα υπόλοιπα 8,8MeV είναι η ενέργεια των αντινετρίνων τα οποία την μεταφέρουν στο Σύμπαν. Η συνολική τιμή 180,9+30,4=211,3MeV θα πρέπει να είναι περίπου ίση με αυτήν που προκύπτει από τον τύπο για το –B/A που αναγράφεται στη λεζάντα του Σχ. 8.3.

Για τη μέγιστη ενέργεια Coulomb βρίσκουμε από τον τύπο $E_c\approx 0{,}1394Z^2/A^{1/3}$, E_c=191,2MeV, ενώ η πειραματική τιμή είναι 186,9MeV. Επομένως η πειραματική τιμή για το ύψος του φράγματος δυναμικού στο U^{235} είναι περίπου 6MeV, ενώ η πειραματική τιμή για το U^{238} είναι κατά τι μεγαλύτερη (γύρω στο 6,2MeV).

4. *Γιατί το* U^{235} *είναι σχάσιμο ενώ το* U^{238} *δεν είναι;*
Επειδή η αύξηση της ενέργειας του U^{235} *με την ενσωμάτωση ενός νετρονίου μηδενικής κινητικής ενέργειας υπερβαίνει το φράγμα δυναμικού, ενώ στο* U^{238} *δεν το υπερβαίνει*. Είδαμε ότι στα ισότοπα του Ουρανίου υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού της τάξεως των 6MeV που

αποτρέπει την άμεση αυθόρμητη σχάση. Η τελευταία μπορεί να συμβεί μόνο μέσω του φαινομένου της σήραγγας και αυτό σπάνια λόγω του ότι η ανηγμένη μάζα των θραυσμάτων, $m\approx 56m_p$, είναι πολύ μεγάλη (για κάθε 50 εκατομμύρια διασπάσεις–α συμβαίνει κατά μέσο όρο μια μόνο αυθόρμητη σχάση). Όμως η σχάση μπορεί να γίνει άμεση αν στον πυρήνα A, Z ενσωματωθεί ένα νετρόνιο. Ο νέος πυρήνας που θα προκύψει, $A+1,Z$, θα έχει ενέργεια $E^*(A+1,Z)$ ίση με $E(A,Z)+m_{\rm n}c^2+\varepsilon_K$, λόγω διατήρησης της ενέργειας, όπου ε_K είναι η κινητική ενέργεια του νετρονίου προ της ενσωμάτωσής του και ο αστερίσκος σημαίνει ότι νέος πυρήνας μπορεί να είναι σε διεγερμένη κατάσταση ενεργειακής απόστασης $\delta E\equiv E^*(A+1,Z)-E(A+1,Z)=E(A,Z)+m_{\rm n}c^2+\varepsilon_K-E(A+1,Z)$.Η απόσταση αυτή μπορεί να γραφεί $\delta E\equiv -B(A, Z)+\varepsilon_K+B(A+1,Z)$ αν και από τα δύο μέλη της διαφοράς αφαιρεθεί η ενέργεια $(N+1)m_nc^2+Zm_pc^2$. Χρησιμοποιώντας τη προσεγγιστική σχέση (8.11) που ισχύει για μεγάλα A, $B=9{,}45A-0{,}008A^2+\delta$ έχουμε ότι

$$\delta E=\varepsilon_K+9{,}45-0{,}016A+\delta(A+1)-\delta(A)\,. \qquad (8.12)$$

Όταν η κινητική ενέργεια του νετρονίου είναι πρακτικά μηδέν[7], έχουμε δE=6,25MeV για το U^{235} και 5,08MeV για το U^{238}. Η διαφορά κατά 1,14 MeV στο δE μεταξύ των δύο ισοτόπων οφείλεται κυρίως στο ότι για A μονό (όπως το U^{235}) το $+\delta(A+1)-\delta$(A) είναι θετικό και περίπου ίσο με $34/A^{3/4}$=0,57MeV, ενώ για A ζυγό το $+\delta(A+1)-\delta(A)$ είναι αρνητικό και ίσο με $-34/A^{3/4}$=–0,56MeV. Με άλλα λογια ένας πυρήνας με Z ζυγό και N μονό (όπως ο U^{235}) με την ενσωμάτωση ενός νετρονίου γίνεται ζυγός/ζυγός και η ενέργεια της βασικής του κατάστασης *μειώνεται* κατά το πρόσθετο ποσό $|\delta|\approx 0{,}57\,\text{MeV}$, το οποίο *προστίθεται* στο 9,45-0,016A=5,69MeV για να δώσει τη συνολική διαφορά από την ενέργεια της βασικής του κατάστασης δE=6,25MeV. Αντίθετα ένας ζυγός/ζυγός πυρήνας (όπως ο U^{238}) με την ενσωμάτωση ενός νετρονίου γίνεται ζυγός/μονός και ως αποτέλεσμα η ενέργεια της βασικής του κατάστασης *αυξάνεται* κατά το πρόσθετο ποσό $|\delta|\approx 0{,}56\,\text{MeV}$, το οποίο *αφαιρείται* από το 9,45-0,016A=5,64MeV για να δώσει τη συνολική διαφορά από την ενέργεια της βασικής του κατάστασης δE=5,08MeV. Βλέπουμε λοιπόν ότι το δE είναι μεγαλύτερο από το φράγμα δυναμικού E_B για το U^{235} και επομένως ο πυρήνας U^{235} θα οδηγηθεί σε άμεση σχάση με την ενσωμάτωση ενός νετρονίου ακόμη και μηδενικής κινητικής ενέργειας, είναι δηλαδή εξ ορισμού σχάσιμος, όπως σχάσιμοι είναι και οι μονοί τεχνητοί πυρήνες Pu^{239} και U^{233}. Αντίθετα το U^{238} δεν είναι σχάσιμο

[7] Όσο πιο μικρή η κινητική ενέργεια του νετρονίου τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα ενσωμάτωσής του στον πυρήνα. Γι' αυτό το λόγο στους πυρηνικούς αντιδραστήρες επιβραδύνουμε τα νετρόνια.

γιατί η ενσωμάτωση ενός νετρονίου μηδενικής κινητικής ενέργειας δεν του προσδίδει αρκετή ενέργεια ώστε να ξεπεράσει το φράγμα δυναμικού. Για να υποστεί άμεση σχάση το U^{238} θα πρέπει το νετρόνιο που θα ενσωματωθεί να έχει κινητική ενέργεια τουλάχιστον ίση με 6,2–5,08≈1,1MeV, που είναι και η πειραματική τιμή. Αλλά και τότε το αμιγές U^{238} δεν μπορεί να θεωρηθεί σχάσιμο γιατί η πιθανότητα ενσωμάτωσης ενός νετρονίου τόσο υψηλής κινητικής ενέργειας είναι πολύ μικρή για να οδηγήσει σε αλυσωτή αντίδραση.

5. *Γιατί τα θραύσματα της σχάσης μεγάλων πυρήνων είναι ραδιενεργά*;
Επειδή το ποσοστό νετρονίων τους είναι αυτό του μητρικού πυρήνα U^{235}*, δηλ. ανώτερο του ποσοστού ισορροπίας που αντιστοιχεί στο μέγεθός τους.*
Πράγματι τα θραύσματα έχουν αρχικά το ποσοστό των νετρονίων που κληρονόμησαν από το μητρικό πυρήνα που είναι περίπου 61%, ενώ η ισορροπία για το μέγεθός τους απαιτεί ποσοστό χαμηλότερο, γύρω στο 55% με 58% (βλέπε Σχ.8.2). Άρα στην πορεία προς ισορροπία των θυγατρικών πυρήνων, νετρόνια θα μετατραπούν σε πρωτόνια μέσω της αντίδρασης–*β*, εκπέμποντας ηλεκτρόνια και αντινετρίνα. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις μετά τη διάσπαση–*β* ο πυρήνας είναι σε διεγερμένη κατάσταση και αποδιεγείρεται εκπέμποντας φωτόνιο υψηλής ενέργειας, δηλαδή ακτίνες γ. Οι συνέπειες της ραδιενέργειας οφείλονται στην εκπομπή ηλεκτρονίων και ακτίνων γ.

6. *Πόσοι σταθεροί πυρήνες υπάρχουν με διαφορετικό A*;
Περίπου 270. Αφού για κάθε A υπάρχει μια τιμή του Z που ελαχιστοποιεί την ολική ενέργεια, είναι λογικό να περιμένουμε ότι θα υπάρχουν τόσοι διαφορετικοί πυρήνες όσο είναι το μέγιστο A που αντιστοιχεί σε σταθερό πυρήνα. Μία προφανής εξαίρεση σε αυτό το συμπέρασμα είναι η περίπτωση που το Z το οποίο ελαχιστοποιεί την ενέργεια να πέφτει ακριβώς στη μέση μεταξύ δύο διαδοχικών ακέραιων έτσι ώστε και οι δύο αυτοί ακέραιοι να δίνουν την ίδια συνολική ενέργεια. Αυτό συμβαίνει σε τέσσερις περιπτώσεις μονών πυρήνων (Γιατί δεν θα μπορούσε να συμβεί σε ζυγό πυρήνα;): $A=87$ και $Z=38$ ή 37. $A=113$ και $Z=49$ ή 48. $A=115$ και Z=50 ή 49. A=123 και Z=51 ή 52. Όμως οι ζυγοί πυρήνες είναι αρκετά περισσότεροι από ό,τι θα περίμενε κανείς με βάση το επιχείρημα του Z που ελαχιστοποιεί την ολική ενέργεια. Για να δείτε το λόγο θεωρήστε τρεις ζυγούς πυρήνες με το ίδιο A: (Z, N), (Z–1, N+1), (Z–2, N+2) και με το Z ζυγό. Υποθέστε ακόμη ότι ο πυρήνας (Z, N) έχει τη μικρότερη ενέργεια ανάμεσα στους τρεις. Λόγω του όρου δ είναι δυνατόν ο μονός/μονός πυρήνας (Z–1, N+1) να έχει τη μεγαλύτερη ενέργεια και από τους τρεις. Αυτό όμως καθιστά τον πυρήνα (Z–2, N+2) σταθερό, γιατί η μετάβασή του στον πυρήνα (Z, N) μέσω δύο *διαδοχικών* διασπάσεων–*β* είναι απαγορευμένη αφού περνάει από τον υψηλότερης ενέργειας πυρήνα (Z–1, N+1), εκτός εάν μια ταυτόχρονη διπλή διάσπαση–*β* είναι εφικτή. Έτσι για το ίδιο

ζυγό A είναι δυνατό να έχουμε δύο ή και τρεις σταθερούς ζυγούς/ζυγούς πυρήνες.

Το αποτέλεσμα είναι ότι ο συνολικός αριθμός σταθερών πυρήνων που αντιστοιχεί σε τιμές του A από 1 έως 208 και τιμές του Z από 1 έως 82 (με εξαίρεση τους τεχνητούς ραδιενεργούς πυρήνες Z=43 (Tc) και Z=61 (Pm)) είναι περίπου 270.

Για πιο λεπτομερείς απαντήσεις βλ. το βιβλίο, *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος ΙΙ, σελ. 69–84, καθώς και το βιβλίο [38] του Leighton, *Principles of Modern Physics*, McGraw–Hill, New York (1959).

8.4. Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Η ακτίνα R ενός πυρήνα με A νουκλεόνια ($A=N+Z$) δίνεται από τον μάλλον προφανή τύπο

$$\boxed{R = a^{1/3} A^{1/3} r_o}\,, \qquad (8.2')$$

όπου r_o=0,84fm είναι η ακτίνα του πρωτονίου ή του νετρονίου και a=3,22. Η ολική ενέργεια ενός πυρήνα αποτελείται από την ενέργεια ηρεμίας των συστατικών του μείον την ενέργεια σύνδεσής τους, $E_{o\lambda}=Zm_pc^2+Nm_nc^2-B$, όπου το B δίνεται από τον τύπο

$$B = (a_{I\Delta} - a_{K0})A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_K \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta \ \text{MeV}\,, \quad (8.6'')$$

με τυπικές τιμές τις εξής: $(a_{I\Delta}-a_{K0})$=15,75, β=17,8, γ=0,71, a_K=23,69. Η προέλευση του κάθε όρου στον παραπάνω τύπο παρουσιάζεται στις σχέσεις (8.3) έως (8.7). Για δεδομένο αριθμό νουκλεονίων το ποσοστό πρωτονίων (άρα και νετρονίων) είναι ελεύθερο να πάρει εκείνη την τιμή που θα ελαχιστοποιήσει την ολική ενέργεια. Η ελευθερία αυτή υφίσταται λόγω των ασθενών αλληλεπιδράσεων που μπορούν να μετατρέψουν νετρόνια σε πρωτόνια ή πρωτόνια σε νετρόνια. Σημειώστε ότι το ποσοστό ισορροπίας των νετρονίων αυξάνεται με το A (και το ποσοστό ισορροπίας των πρωτονίων αντιστοίχως μειώνεται) λόγω του ότι όσο μεγαλύτερο είναι το A, τόσο ενισχύεται ο ρόλος των απώσεων Coulomb που ευνοούν μικρότερο ποσοστό πρωτονίων. Αυτό γίνεται εμφανές από την ποσοτική σχέση η οποία προκύπτει από το μηδενισμό της παραγώγου της ολικής ενέργειας $E_{o\lambda}$ ως προς Z υπό A σταθερό (δηλ. για αριθμό νετρονίων $N=A-Z$) που δίνει το ποσοστό ισορροπίας

$$\frac{\partial E_{o\lambda}}{\partial Z})_A = 0 \ \Rightarrow \ \frac{Z}{A} \approx \frac{1,01}{2 + 0,015A^{2/3}}\,. \qquad (8.9')$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή του Z (και την αντίστοιχη τιμή του $N=A-Z$) στη σχέση (8.6΄΄) βρίσκομε το B ως συνάρτηση μόνο του A. Πιο

συγκεκριμένα βρίσκομε το $-B/A$ που δίνει την ενεργειακή μείωση ανά νουκλεόνιο λόγω σχηματισμού του όποιου πυρήνα (διευκολύνει η ανά νουκλεόνιο τιμή γιατί επιτρέπει συγκρίσεις μεταξύ πυρήνων διαφορετικού A). Ουσιαστικά το $-B/A$ δίνει την ολική ενέργεια του πυρήνα ανά νουκλεόνιο $E_{ολ}/A$ (εκτός από ένα σταθερό προσθετέο mc^2, όπου m είναι ένας μέσος όρος των μαζών του πρωτονίου και του νετρονίου). Στο Σχ.8.3 δίνεται η γραφική παράσταση του $-B/A$ ως συνάρτηση του A. Και στο γράφημα του Σχ. 8.3 (το βασισμένο στις σχέσεις (8.6΄΄) και (8.9΄)) και στις σχέσεις αυτές ο προσθετέος $\delta = \pm 34/A^{3/4}$ (για A άρτιο) και μηδέν (για A περιττό) έχει παραλειφθεί. Το δ ευνοεί πυρήνες με Z, N άρτιους επειδή σ΄ αυτούς αντιστοιχεί το πρόσημο συν, ενώ το πρόσημο μείον αντιστοιχεί στους πυρήνες με Z, N περιττούς. Η καμπύλη $-B/A$ ως συνάρτηση του A χρήζει ιδιαίτερης προσοχής. Οφείλει κανείς να γνωρίζει ότι εμφανίζεται ένα ελάχιστο για A=56 (πυρήνας του σιδήρου), όπως επίσης και μια σχετικά απότομη άνοδος για πολύ μικρούς πυρήνες και μια ομαλή γραμμική άνοδο για πυρήνες με $A \gtrsim 100$,

$$-B/A \approx -9,45 + 0,008A \text{ MeV}, \; A \gtrsim 100. \qquad (8.13)$$

Με βάση τις παραπάνω λίγες σχέσεις μπορεί κανείς να εξηγήσει σε ποσοτικό επίπεδο πολλές από τις ιδιότητες των πυρήνων: Γιατί εκλύεται ενέργεια και πόση από τη σύντηξη μικρών πυρήνων και από τη σχάση μεγάλων; Γιατί το ουράνιο 235 είναι σχάσιμο, ενώ το ουράνιο 238 δεν είναι; Γιατί δεν υπάρχουν πυρήνες με $A \gtrsim 240$; Γιατί οι θυγατρικοί πυρήνες της σχάσης είναι ραδιενεργοί; κλ., κλ.

8.5. Λυμένες ασκήσεις

1. Το ουράνιο 238 έχει χρόνο υποδιπλασιασμού ίσο με $4,51 \times 10^9$ έτη. Πόσες διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο (δηλαδή πόσα Bequerel) συμβαίνουν σ' ένα γραμμάριο ουρανίου 238; Γιατί το ουράνιο είναι ραδιενεργό; Ποια είναι η ηλεκτρονική δομή του ατόμου του ουρανίου; Από πόσα νετρόνια και από πόσα πρωτόνια αποτελείται ο πυρήνας του ουρανίου 238; Το ουράνιο 238 έπειτα από μια σειρά α– και β- διασπάσεων (εκπέμποντας συνολικά 8α και 6β σωμάτια) καταλήγει σε μόλυβδο 206. Πόση ενέργεια απελευθερώνεται συνολικά ανά διάσπαση ουρανίου 238 μέχρι να καταλήξει στο Pb–206; (Δίνεται ότι η διαφορά $Mc^2 – Am_uc^2$ είναι 116,6 MeV, 36,15 MeV και 3,607 MeV για το U–238, το Pb–206 και το He–4 αντιστοίχως. Προσέξτε ο τύπος $Mc^2 – Am_uc^2$ περιέχει τη μάζα m_u και όχι τη μάζα του πρωτονίου ή του νετρονίου). Σε τι διαφέρει το U–235 από το ουράνιο 238; Ποια είναι η περιεκτικότητα του φυσικού ουρανίου σε U–238 και U–235; Τι είναι το απεμπλουτισμένο ουράνιο (*Depleted Uranium, DU*); Πώς επιτυγχάνεται; Με φυσικές ή χημικές μεθόδους; Με ποιες;

Λύση: Ο αριθμός διασπάσεων κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος από μηδέν έως t δίνεται από τη σχέση

$$\delta N(t)=N_o(1-e^{-t/\tau})\approx N_o t/\tau \text{ για } (t/\tau)<<1,$$

όπου N_o είναι ο αριθμός των πυρήνων για $t=0$. Στην προκείμενη περίπτωση το N_o για 1g U–238, είναι $N_o=N_A/238=2{,}53\times10^{21}$. Ο μέσος χρονος ζωής του ειναι

$$\tau=4{,}51\times10^{9}\times365{,}25\times24\times3600/0{,}693=2{,}0537\times10^{17}\text{ s}.$$

Άρα $\delta N(\tau)=12321$ διασπάσεις το δευτερόλεπτο σ' ένα γραμμάριο ουρανίου 238. Οι απαντήσεις σε κάποιες από τις ερωτήσεις θα πρέπει να δοθούν από τον αναγνώστη.

Η αρχική ενέργεια του ατόμου του ουρανίου 238 είναι, με βάση τα δεδομένα

$$E_{\alpha\rho\chi}=238m_uc^2+116{,}6\text{ MeV}.$$

Η τελική ενέργεια είναι αυτή ενός ατόμου μολύβδου 206 συν αυτή οκτώ ατόμων ηλίου 4 συν την ενέργεια ηρεμίας των 6 ηλεκτρονίων συν τη συνολική κινητική ενέργεια E_K που απελευθερώθηκε

$$E_{\tau\varepsilon\lambda}=206m_uc^2+36{,}15+8\times[4m_uc^2+3{,}607]+3{,}066\text{MeV}+E_K\ .$$

Το 3,066MeV είναι η ενέργεια ηρεμίας των 6 e. Από τη σχέση $E_{\alpha\rho\chi}=E_{\tau\varepsilon\lambda}$ έχουμε

$$E_K=116{,}6-36{,}15-8\times3{,}607-3{,}066=48{,}52\text{MeV}.$$

Έστω ότι έχουμε ένα kg φυσικού ουρανίου που αποτελείται από 993g ουρανίου 238 και 7g ουρανίου 235. Έστω ότι με φυγοκέντρηση ή διάχυση καταφέραμε να αποσπάσουμε 10g υλικού εμπλουτισμένου σε ουράνιο 235 και σε ποσοστό 50% (δηλαδή ένα μείγμα 5g ουρανίου 235 και 5g ουρανίου 238). Τα εναπομείναντα 990g αποτελούνται από 988g U–238 και 2g U–235. Στο εναπομείναν αυτό μίγμα το ποσοστό του U–235 είναι 2/990=0,2% αντί του 0,7% που είναι στο φυσικό ουράνιο, δηλ. το εναπομείναν μίγμα είναι απεμπλουτισμένο σε ουράνιο 235.

2. Γιατί οι πυρηνικοί αντιδραστήρες χρησιμοποιούν κάποιο υλικό ως επιβραδυντή; Γιατί το βαρύ ύδωρ είναι ο προτιμότερος επιβραδυντής (αγνοώντας το κόστος);
Λύση: Όσο πιο αργό το νετρόνιο τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα ενσωμάτωσης του στον πυρήνα U–235 και επομένως τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα σχάσης. Από το λύκειο γνωρίζουμε ότι η μέγιστη μεταφορά ενέργειας κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων (εν προκειμένω αφενός μεν του νετρονίου αφετέρου δε του πυρήνα του υλικού που δρα ως επιβραδυντής νετρονίων) επιτυγχάνεται όταν τα δύο σώματα έχουν ίση μάζα. Επομένως θα έλεγε κανείς ότι το υδρογόνο (δηλαδή το συνηθισμένο νερό) είναι ο καλύτερος επιβραδυντής. Όμως όχι: Το πρωτόνιο έχει σοβαρή πιθανότητα να απορροφήσει το νετρόνιο και να σχηματίσει δευτέριο με αποτέλεσμα να χαθεί έτσι ένα σοβαρό ποσοστό νετρονίων. Το βαρύ ύδωρ, που περιέχει ήδη πυρήνες δευτερίου, δεν απορροφά νετρόνια, ενώ έχει τον ελαφρότερο πυρήνα μετά το υδρογόνο.

3. Το φυσικό ουράνιο αποτελείται από U^{238} σε ποσοστό 99,3% και από U^{235} σε ποσοστό 0,7%. Οι αντίστοιχοι χρόνοι ημισείας ζωής είναι $4{,}51\times10^{9}$ έτη και $7{,}1\times10^{8}$ έτη. Δώστε κάποια όρια για την ηλικία του Σύμπαντος και για την ηλικία του πλανητικού μας συστήματος.
Λύση: Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το U–238 και το U–235 δημιουργήθηκαν σε περίπου ίσα ποσοστά κατά κάποια βίαια έκρηξη σουπερνόβα, που

έλαβε χώρα στο απώτερο παρελθόν, $t=t_o$. Εάν N_1 είναι ο αριθμός των πυρήνων U–238 και N_2 του U–235 σήμερα, $t=0$, έχουμε

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{t_o/\tau_1}}{e^{t_o/\tau_2}} = \exp\left[t_0 \left(\frac{0,693}{t_1} - \frac{0,693}{t_2} \right) \right], \quad \text{ή}$$

$$0,693 t_o \left(\frac{1}{4,51\times10^9} - \frac{1}{7,1\times10^8} \right) = \ln\frac{99,3}{0,7}, \quad \text{ή} \quad t_o \frac{0,693}{10^{10}} \left(\frac{10}{4,51} - \frac{100}{7,1} \right) = 4,9548 :$$

$$t_o \approx -6\times10^9 \text{ έτη}$$

Προφανώς η ηλικία του Σύμπαντος είναι μεγαλύτερη από το $|t_o|$ και η ηλικία του πλανητικού μας συστήματος μικρότερη του $|t_o|$:

$$t_{\pi\lambda.συστ} < 6 \text{ δις έτη} < t_{Συμπ.} .$$

4. Ποια πυρηνική αντίδραση αποτελεί το πρώτο βήμα στη θερμοπυρηνική σύντηξη του υδρογόνου προς ήλιο (κύκλος καύσης pp) και ποια η σημασία της; Ποια χαρακτηριστική θερμοκρασία απαιτείται για την έναρξη της καύσης του κύκλου pp; Ποιος είναι ο ρυθμός καύσης υδρογόνου προς ήλιο στο εσωτερικό του Ήλιου (σε τόνους/sec);

Λύση: Το πρώτο βήμα για την τελική σύντηξη 4p προς He–4, σύμφωνα με τον κύκλο pp, είναι η αντίδραση $p+p\rightarrow(pn)+e^{+}+\nu_e$, όπου το ($pn$) συμβολίζει το δευτέριο. Για την απαιτούμενη θερμοκρασία βλέπε σελ.320-321. Η σύντηξη 4$p\rightarrow$He–4 απελευθερώνει περίπου 7x4MeV. Εκτός από τον κύκλο pp, σε μεγάλα και επομένως θερμότερα άστρα λειτουργεί και ο κύκλος CNO που ξεκινάει με τη σύλληψη ενός πρωτονίου από τον πυρήνα του άνθρακα-12 για να δώσει άζωτο-13 που στη συνέχεια μέσω της αντίδρασης $p \rightarrow n + e^{+} + \nu_e$ γίνεται άνθρακας-13, ο οποίος συλλαμβάνει ένα πρωτόνιο για να γίνει άζωτο-14. Η διαδικασία συνεχίζεται με παρόμοιο τρόπο μέχρι να φτάσει στο O-16 που διασπάται σε άνθρακα-12 και ήλιο-4 για να επαναληφθεί ο κύκλος CNO. Έστω ότι N τετράδες πρωτονίων συντήκονται προς ήλιο ανά δευτερόλεπτο, ελευθερώνοντας έτσι ενέργεια 28N MeV/sec. Η ισχύς αυτή πρέπει να ισούται με την ακτινοβολουμένη ισχύ $4\pi R^2\sigma T^4 \simeq 3,9\times10^{26}$ W. Αφού $1\text{MeV/s} \simeq 1,6\times10^{-13}$ W και $m_p \simeq 1,67\times10^{-27} kg$, βρίσκουμε ότι περίπου 0,58 δισεκατομμύρια τόνοι υδρογόνου συντήκονται προς He–4 ανά δευτερόλεπτο στον Ήλιο.

5. Η κατανομή του μαζικού αριθμού των θραυσμάτων της σχάσης που οφείλεται σε ενσωμάτωση νετρονίου εξαρτάται από την ενέργεια του νετρονίου. Σ' ένα πυρηνικό αντιδραστήρα αυτή η κατανομή παρουσιάζει δύο μέγιστα για $A \approx 92$ και $A \approx 140$ και ένα έντονο ελάχιστο στο μέσο ($A \approx 116$). Αντίθετα στην περίπτωση πυρηνικών όπλων και τα μέγιστα και το ελάχιστο είναι «στρογγυλεμένα» μέχρι σημείου να είναι δυσδιάκριτα. Έχετε κάποια εξήγηση;

Πιθανή εξήγηση: Την κατανομή των θραυσμάτων καθορίζει η *διαφορά ενέργειας* μεταξύ αρχικής κατάστασης (μετά την ενσωμάτωση του νετρονίου) και τελικής κατάστασης (που ευνοεί περίπου ίσου μεγέθους θραύσματα) αλλά

κυρίως το *ύψος του ενεργειακού φράγματος*. Όταν το τελευταίο είναι συγκρίσιμο με την αρχική ενέργεια (μετά την ενσωμάτωση του νετρονίου), όπως στην περίπτωση των αντιδραστήρων, το φαινόμενο σήραγγας γίνεται σημαντικό και ευνοεί άνισα θραύσματα προκειμένου η ανηγμένη μάζα $m_1m_2/(m_1+m_2)$ να γίνει όσο το δυνατόν πιο μικρή. Αντίθετα, όταν η αρχική ενέργεια είναι αρκετά πιο μεγάλη από το ύψος του φράγματος, όπως στις πυρηνικές βόμβες, σχάσεως, τότε η ανηγμένη μάζα δεν παίζει τόσο σημαντικό ρόλο.

8.1. Άλυτες ασκήσεις

1. Γιατί τα ραδιενεργά κατάλοιπα ενός πυρηνικού αντιδραστήρα σχάσεως εκπέμπουν ακτινοβολία β (δηλαδή ηλεκτρόνια;).

2. Ένα ελεύθερο νετρόνιο διασπάται σύμφωνα με την εξώθερμη αντίδραση, $n \to p + e + \bar{\nu}_e + 0,78\,\text{MeV}$. Γιατί όλα τα νετρόνια κάθε πυρήνα δεν μετατρέπονται σε πρωτόνια;

3. Η ενέργεια συνδέσεως ενός πυρήνα είναι περίπου 8 MeV ανά νουκλεόνιο.Γιατί είναι τόσο μεγάλη;

4. Γιατί το He^4 είναι τόσο έξω από τη συνεχή καμπύλη του Σχ. 8.3;

Κεφάλαιο 9

Από τον πυρήνα και τα ηλεκτρόνια, στα άτομα

Σύνοψη: *Εξηγείται η σταθερότητα των ατόμων ως αποτέλεσμα της ελάχιστης ενέργειάς τους και του διακριτού φάσματός τους. Ελαχιστοποιώντας την ενέργεια του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου προσδιορίζεται η μέση ακτίνα και η ενέργεια του θεμελιώδους τροχιακού του. Η ακτίνα των ατόμων και το έργο ιονισμού τους είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους με αυτά του ατόμου του υδρογόνου. Προσδιορίζεται η γωνιακή εξάρτηση των ατομικών τροχιακών τα οποία κατατάσσονται με βάση την ενέργειά τους και έτσι προκύπτει ο περιοδικός πίνακας των στοιχείων αξιοποιώντας και την αρχή του Pauli.*

9.1 Εισαγωγή

Αν τα άτομα ήταν πλανητικά συστήματα εν μικρογραφία που ακολουθούσαν τους κλασικούς νόμους, ο χρόνος ζωής τους δεν θα ήταν μεγαλύτερος από κλάσμα του δισεκατομμυριοστού του δευτερολέπτου! Τα ηλεκτρόνια περιστρεφόμενα γύρω από τον πυρήνα θα εξέπεμπαν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, θα έχαναν κατά συνέπεια ενέργεια και θα κατέληγαν σε κλάσμα του νανοδευτερολέπτου πάνω στον πυρήνα. Αυτό όμως δεν γίνεται. Τα ηλεκτρόνια όχι μόνο δεν πέφτουν πάνω στον πυρήνα αλλά διατηρούν με θαυμαστή σταθερότητα τα χαρακτηριστικά τους, παρόλο που υφίστανται συνεχώς κρούσεις με άλλα άτομα ή με άλλα σωμάτια (κυρίως φωτόνια). Τι τους προσδίδει αυτή την εντυπωσιακή σταθερότητα; Μα φυσικά οι αρχές της κβαντομηχανικής (Heisenberg, Schrödinger) που πηγάζουν από τον κυματικό χαρακτήρα των ηλεκτρονίων και την συνακόλουθη ενεργειακή απόσταση της κατώτερης διεγερμένης στάθμης από τη θεμελιώδη. Η τελευταία καθορίζεται από τον ανταγωνισμό της κβαντικής κινητικής ενέργειας που εντέλλεται διάλυση και της ελκτικής δυναμικής ενέργειας Coulomb που εντελλεται σύνθλιψη· το ηλεκτρόνιο (ή τα ηλεκτρόνια) επιλέγουν εκείνη την κατάσταση όπου η απωστική πίεση της κινητικής ενέργειας εξισορρο-

πείται από τη συνθλιπτική πίεση της ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης. Αυτή η κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας είναι μοναδική και οποιαδήποτε άλλη κατάσταση (μετασταθούς) ισορροπίας απέχει ενεργειακά κατά ένα πεπερασμένο ποσό. Έτσι το άτομο είναι υποχρεωμένο να επιστρέφει νομοτελειακά στη μοναδική κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας.

Σκεφτείτε: Γιατί το παραπάνω σκεπτικό δεν εφαρμόζεται στο Ηλιακό Πλανητικό Σύστημα ή σε ένα τεχνητό δορυφόρο της Γης;

9.2 Το άτομο του υδρογόνου

Το απλούστερο άτομο, το άτομο του υδρογόνου, αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο παγιδευμένο γύρω του λόγω της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Η ακριβής κινητική ενέργεια της σχετικής κίνησης πρωτονίου/ηλεκτρονίου εξαρτάται από τις παγκόσμιες σταθερές e και $\hbar$ και την ανηγμένη μάζα, $m_r \equiv m_e m_p / (m_e + m_p)$, η οποία είναι σχεδόν ίση με τη μάζα του ηλεκτρονίου, $m_r \approx m_e$. Η τελευταία αυτή ισότητα είναι ισοδύναμη με τη σχέση $m_p / m_e \approx \infty$, που συνεπάγεται ότι το πρωτόνιο μπορεί να θεωρηθεί ως ακίνητο σε σχέση με το ηλεκτρόνιο. Η ενέργεια του συστήματος αυτού αποτελείται από την κβαντική κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, $p^2 / 2m_e$, όπου m_e είναι η μάζα του ηλεκτρονίου (μετά από την παραπάνω προσέγγιση) και από την ηλεκτροστατική ενέργεια Coulomb, $E_{\Delta} = -e^2/r$ (στο σύστημα G-CGS, στο σύστημα SI $E_{\Delta} = -e^2/4\pi\epsilon_0 r$). Το r είναι η εκάστοτε απόσταση πρωτονίου-ηλεκτρονίου, Άρα

$$E_{o\lambda} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} \ . \qquad (9.1)$$

Άσκηση 9.1 Υπολογίστε τη μέση τιμή του r που εξασφαλίζει την ελάχιστη μέση τιμή της ολικής ενέργειας του τύπου (9.1).

Λύση: Για τον υπολογισμό των μέσων τιμών χρειαζόμαστε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου, η οποία για τη θεμελιώδη κατάστασή του έχει τη μορφή $\psi \propto \propto \exp(-r/a)$. Αυτή η ψ περιγράφει πράγματι ένα ηλεκτρόνιο δέσμιο γύρω από το πρωτόνιο και σε μέση απόσταση από αυτό της τάξεως του a. Κάνοντας χρήση της παραπάνω ψ προκύπτουν τα ακόλουθα ακριβή αποτελέσματα για τις μέσες τιμές που χρειαζόμαστε:

$$\langle 1/r \rangle = 1/a, \quad \langle p^2 \rangle = \hbar^2 / a^2, \quad \text{οπότε} \quad \langle E_{o\lambda} \rangle = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} - \frac{e^2}{a} \ . \qquad (9.2)$$

Ελαχιστοποιούμε την τιμή της ενέργειας ως προς a θέτοντας $\partial \langle E_{o\lambda} \rangle / \partial a = 0$ και

βρίσκουμε[1]

$$a = a_B \equiv \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad \text{G-CGS.} \tag{9.3}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή ισορροπίας, $a = a_B$ στην $\langle E_{o\lambda} \rangle$ και έχουμε:

$$E_{o\lambda} = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_B^2} = -\frac{e^2}{2a_B} = -\frac{e^4 m_e}{2\hbar^2} = -13,6\,\text{eV}, \quad \text{G-CGS.} \tag{9.4}$$

Σημειώστε ότι η ολική ενέργεια στην ισορροπία ισούται με μείον την κινητική ενέργεια, ή με το μισό της δυναμικής ενέργειας, όπως περιμένει κανείς από το γενικό θεώρημα virial (βλ. το βιβλίο των Landau and Lifshitz, *Mechanics)* ή από την ελαχιστοποίηση της ενέργειας. Άρα η κινητική ενέργεια στην ισορροπία ισούται με μείον το μισό της δυναμικής ενέργειας. Αυτή είναι μια γενική σχέση που ισχύει για συστήματα όπου η δυναμική ενέργεια είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης μεταξύ των σωματίων του συστήματος και πηγάζει από την ελαχιστοποίηση της ολικής ενέργειας.

Η σχέση (9.3) είναι πολύ σημαντική γιατί καθορίζει την κλίμακα μεγέθους των ατόμων (βλ. σελ. 210 μετά την (9.3΄). Η ποσότητα a_B, που ονομάζεται ακτίνα του Bohr, ισούται με $0,529\,\text{Å} = 0,529\times10^{-10}\,\text{m}$. Το μέγεθος όλων των ατόμων είναι της τάξεως του Angstrom. Πιο συγκεκριμένα η ακτίνα των 90 περίπου ατόμων που υπάρ-χουν στη φύση κυμαίνεται στα ακόλουθα όρια:

$$r_a = \bar{r}_a a_B, \quad 1 \lesssim \bar{r}_a \lesssim 5. \tag{9.3΄}$$

Τα πιο μεγάλα (σε όγκο) άτομα είναι κάτω αριστερά στον περιοδικό πίνακα και τα πιο μικρά πάνω δεξιά (βλ. Πιν. 6, σελ. 418).

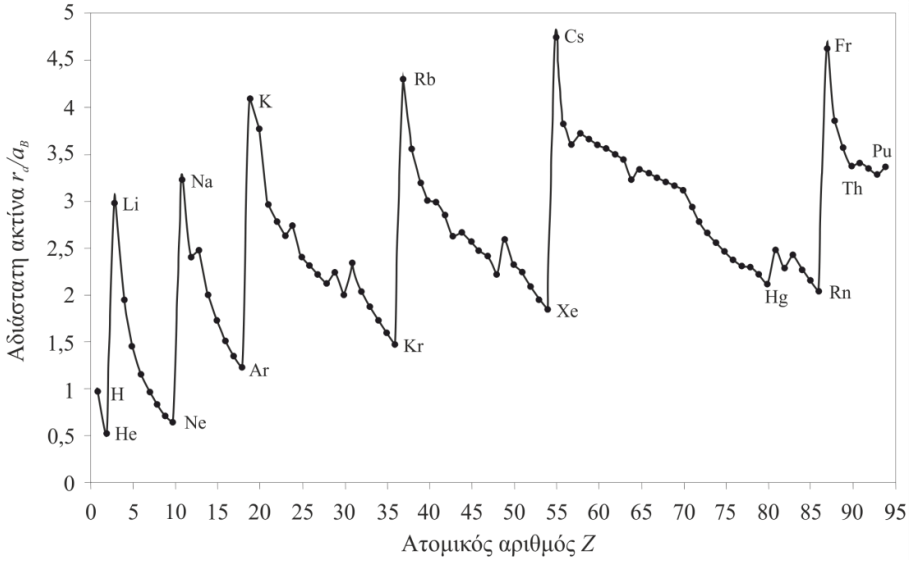
Η σχέση (9.4) είναι επίσης πολύ σημαντική γιατί καθορίζει την ενεργειακή κλίμακα των ηλεκτρονίων σθένους όλων των ατόμων. Η ποσότητα, $\hbar^2 / 2m_e a_B^2$, που ισούται με[2] 13,6eV, δίνει την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δώσουμε για να αποσπάσουμε το ηλεκτρόνιο από το άτομο του υδρογόνου. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται *έργο ιονισμού*. Το πρώτο έργο ιονισμού[3], *I*, των διαφόρων ατόμων κυμαίνεται ως εξής:

---

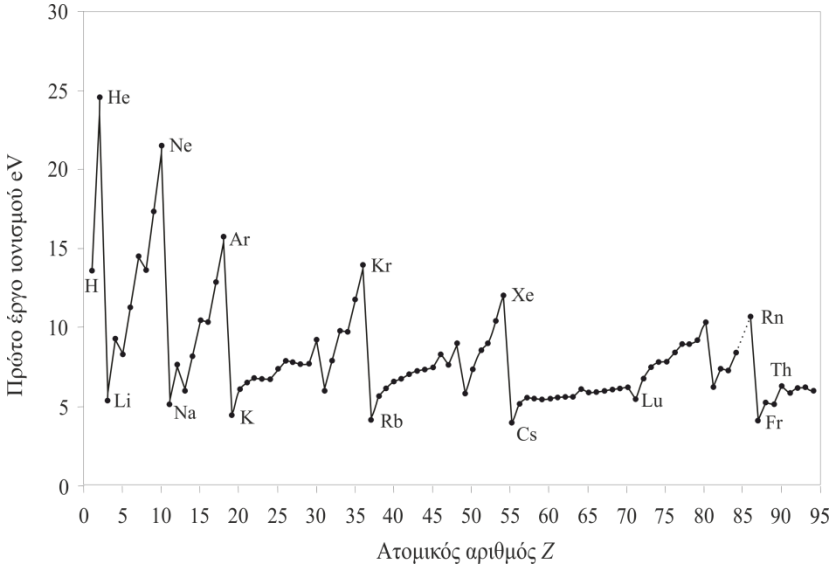
[1] Στο SI $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ και $E_{o\lambda} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} = -\frac{e^4 m_e}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}$.

[2] Βλέπετε ότι η ατομική κλίμακα ενέργειας είναι έξη τάξεις μεγέθους μικρότερη από την πυρηνική κλίμακα μεγέθους. Θα μπορούσατε να βρείτε αυτή τη σχέση εκ των προτέρων;

[3] Το πρώτο έργο ιονισμού ενός ατόμου είναι η ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια για την απόσπαση ενός ηλεκτρονίου από το ουδέτερο άτομο (όταν αυτό το άτομο βρίσκεται στην κατάσταση ελάχιστης ολικής ενέργειας). Το δεύτερο έργο ιονισμού



Σχ.9.1 Η αδιάστατη ακτίνα $\overline{r}_a \equiv r_a / a_B$ των διαφόρων ατόμων (στη βασική τους κατάσταση) ως συνάρτηση του ατομικού αριθμού *Z*. Τα τοπικά μέγιστα εμφανίζονται στα αλκάλια και τα τοπικά ελάχιστα στα ευγενή αέρια



Σχ. 9.2 Το πρώτο έργο ιονισμού των διαφόρων ατόμων ως συνάρτηση του ατομικού αριθμού Z. Τα τοπικά ελάχιστα εμφανίζονται στα αλκάλια και τα τοπικά μέγιστα στα ευγενή αέρια

ενός ατόμου είναι η ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια για την απόσπαση ενός ηλεκτρονίου από το ιόν +1 του ατόμου αυτού, κ.ο.κ.

$$I = \bar{I}\,\frac{\hbar^2}{2m_e a_B^2}, \qquad 0{,}3 \lesssim \bar{I} \lesssim 2\,. \tag{9.4΄}$$

Όπως φαίνεται στα σχήματα της σελ. 200, οι πιο μεγάλες τιμές του $\bar{r}_a$ παρατηρούνται στη στήλη των αλκαλίων, ενώ οι πιο μικρές στη στήλη των ευγενών αερίων. Το αντίθετο συμβαίνει με το πρώτο έργο ιονισμού $I \equiv \bar{I}(e^2/2a_B)$.

Στο Γενικό Περιοδικό Πίνακα των στοιχείων (Πιν. 3, εσωτερικό οπισθόφυλλο) δίνονται πληροφορίες για όλα τα υπάρχοντα άτομα καθώς και για τα αντίστοιχα μονοστοιχειακά στερεά (ή υγρά ή αέρια). Ο ατομικός αριθμός Z δίνει τον αριθμό των πρωτονίων στον πυρήνα του ατόμου που ισούται με τον αριθμό των ηλεκτρονίων στο ουδέτερο άτομο. Την ηλεκτρονιακή διάταξη θα σχολιάσουμε σύντομα στην επόμενη ενότητα.

Εφαρμογή 9.1: Εάν στη θέση του πρωτονίου είχαμε ένα ποζιτρόνιο (με μάζα ίση με αυτή του ηλεκτρονίου), ποια θα ήταν η αντίστοιχη ακτίνα του Bohr και ποιο το έργο ιονισμού ;

Εφαρμογή 9.2 : Με θεωρία μεταβολών υπολογίστε το πρώτο και το δεύτερο έργο ιονισμού του He. Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις για τις μέσες τιμές υδρογονοειδούς κυματοσυνάρτησης με το a ως μεταβολική παράμετρο. Δίνεται ότι $< e^2/r_{12} > \approx \frac{3}{5}(e^2/a)$, όπου r_{12} είναι η εκάστοτε απόσταση μεταξύ των δύο ηλεκτρονίων (βλ. λυμένη άσκηση 2).

9.3 Τα ατομικά τροχιακά και η γωνιακή τους εξάρτηση

Η μέθοδος της ελαχιστοποίησης της ολικής ηλεκτρονιακής ενέργειας στο άτομο του υδρογόνου μας επιτρέπει να βρούμε ορισμένα χαρακτηριστικά της θεμελιώδους κατάστασης, της κατάστασης, δηλαδή, που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ενέργεια. Όσο πολύτιμη και να είναι αυτή η γνώση, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που μας χρειάζονται πληροφορίες και για τις διεγερμένες καταστάσεις, δηλαδή και για τα άλλα τροχιακά του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου. Π.χ., όταν η θερμοκρασία επί τη σταθερά του Boltzmann, $k_B T$, είναι συγκρίσιμη ή μεγαλύτερη από την ενεργειακή διαφορά μεταξύ της πρώτης διεγερμένης κατάστασης και της θεμελιώδους, τότε, η πιθανότητα διέγερσης του συστήματος είναι σημαντική και η εντροπία θα εξαρτηθεί από τις ενέργειες των διεγερμένων τροχιακών. Μια άλλη περίπτωση που η γνώση των διεγερμένων τροχιακών είναι απαραίτητη εμφανίζεται όταν μελετάμε την αλληλεπίδραση της ύλης (σε όποια μορφή της) με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Όμως ο κυριότερος λόγος για τον οποίο μας χρειάζονται και τα διεγερμένα τροχιακά είναι για να επεκτείνουμε τη μελέτη σε πολυηλεκτρονικά άτομα, όπως π.χ. στο άτομο του άνθρακα που έχει 6 ηλεκτρόνια περιφερόμενα γύρω από ένα πυρήνα με 6 πρωτόνια και 6

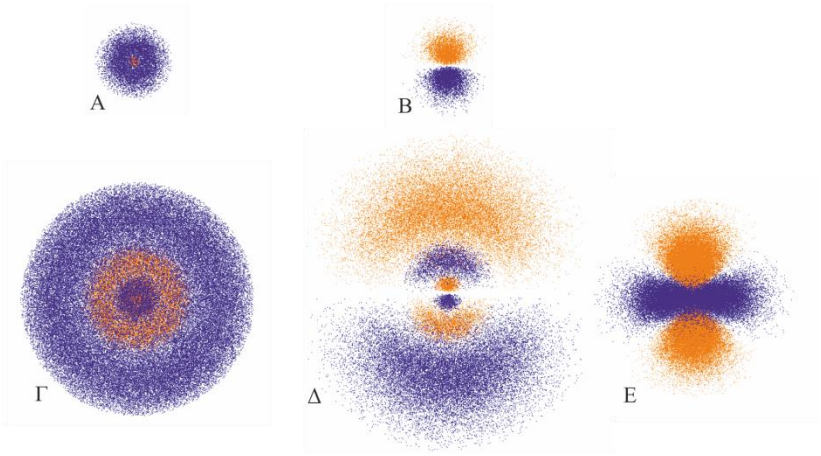
νετρόνια. Δύο από αυτά τα έξη ηλεκτρόνια θα καταλάβουν το κατώτερο ενεργειακά τροχιακό. Τα υπόλοιπα τέσσερα θα καταλάβουν αναγκαστικά, λόγω της αρχής του Pauli, άλλα τροχιακά. Είναι προφανές ότι, αν υπάρχουν Z ηλεκτρόνια σε ένα άτομο, μας χρειάζονται τα $Z/2$ ενεργειακά κατώτερα τροχιακά, τα οποία θα εποικίσουμε με τα Z ηλεκτρόνια προκειμένου να βρούμε την ελάχιστη συνολική ενέργεια του ατόμου. Εάν ενδιαφερόμαστε και για ανώτερες ενεργειακές καταστάσεις συνολικά του ατόμου, μας χρειάζονται περισσότερα από $Z/2$ τροχιακά του ενός ηλεκτρονίου. Για να μην υπάρχει παρανόηση θα πρέπει να γίνεται διάκριση μεταξύ καταστάσεων ενός ηλεκτρονίου (δηλαδή των τροχιακών) και καταστάσεων του συνόλου των Z ηλεκτρονίων (δηλαδή συνολικών καταστάσεων του ατόμου). Οι τελευταίες προκύπτουν εποικίζοντας με τα Z ηλεκτρόνια κάποια από τα τροχιακά. Είναι λοιπόν ανάγκη να βρούμε όσο το δυνατόν περισσότερα τροχιακά, αν όχι όλα, προκειμένου να προσδιορίσουμε τις συνολικές καταστάσεις του ατόμου και αυτήν της ελάχιστης συνολικής ενέργειας και αυτές υψηλοτέρων συνολικά ενεργειών. Η εύρεση των τροχιακών σε ένα πολυηλεκτρονιακό άτομο είναι δυσχερής γιατί η δυναμική ενέργεια $\mathcal{V}$ που υφίσταται το κάθε ηλεκτρόνιο είναι πολύ πιο περίπλοκη από αυτήν στο άτομο του υδρογόνου, αφού είναι το άθροισμα της ελκτικής ενέργειας, $-Ze^2/r_i$, από τον πυρήνα και της απωστικής $\sum_j e^2/r_{ij}$ από όλα τα άλλα ηλεκτρόνια. Όμως αυτό το άθροισμα *κατά μέσο όρο* εμφανίζει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή εξαρτάται μόνο από την απόσταση r και όχι από τις γωνίες θ και φ που προσδιορίζουν τον προσανατολισμό.

Όταν η δυναμική ενέργεια $\mathcal{V}(r)$ στη εξίσωση του Schrödinger έχει αυτή τη σφαιρική συμμετρία τότε η *γωνιακή εξάρτηση* των διαφόρων τροχιακών (που περιγράφονται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(r,\theta,\varphi)$) *δεν* εξαρτάται από τη μορφή ή τις τιμές του $\mathcal{V}(r)$. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε έτσι το $\mathcal{V}(r)$ ώστε να έχουμε $\mathcal{V}(r)\,\psi(\mathbf{r}) = E\,\psi(\mathbf{r})$, οπότε η εξίσωση του Schrödinger παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0\,, \tag{9.5}$$

που είναι γνωστή ως *εξίσωση του Laplace*. Επαναλαμβάνουμε ότι η *γωνιακή εξάρτηση* των λύσεων της (9.5) είναι η ίδια με τη γωνιακή εξάρτηση των λύσεων της εξίσωσης του Schrödinger, όταν το $\mathcal{V}(r)$ είναι συνάρτηση μόνο του μέτρου $r=|\mathbf{r}|$. Αρκεί επομένως να βρούμε τις λύσεις της (9.5), που όπως θα δούμε αμέσως είναι εύκολη δουλειά, και να αντλήσουμε από αυτές τη γωνιακή εξάρτηση των λύσεων της εξίσωσης του Schrödinger. Μια λύση της (9.5) είναι προφανώς η ψ=σταθ. Η λύση αυτή δεν έχει καμία γωνιακή εξάρτηση.

Άρα υπάρχουν και λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger που δεν έχουν καμία γωνιακή εξάρτηση είναι, δηλαδή, σφαιρικά συμμετρικές. Οι λύσεις αυτές ονομάζονται τύπου *s* και μπορεί να δείξει κανείς ότι αντιστοιχούν σε στροφορμή μηδέν. Μια απεικόνιση τροχιακών τύπου *s* δίνεται στο παρακάτω σχήμα 9.3.Α, Γ.



Σχ. 9.3 Απεικόνιση της γωνιακής και της ακτινικής εξάρτησης ατομικών τροχιακών, δηλαδή λύσεων της εξίσωσης του Schrödinger σε ατομικό δυναμικό (που έχει σφαιρική συμμετρία). (Α) Το ατομικό τροχιακό 2*s*, όπου το 2 δίνει την τιμή του κύριου κβαντικού αριθμού (βλ. παρακάτω) και το γράμμα που ακολουθεί δίνει τον τύπο της γωνιακής εξάρτησης. (Β) Το ατομικό τροχιακό $2p_z$. (Γ) Το ατομικό τροχιακό $4s$. (Δ) Το ατομικό τροχιακό $4p_z$. (Ε) Το ατομικό τροχιακό $3d$ τύπου $z^2 - \frac{1}{3}r^2$. Τα τροχιακά (Γ) και (Ε) παρά τη διαφορά τους στο μέγεθος έχουν περίπου την ίδια ενέργεια του ηλεκτρονίου. Σημειώστε την εντυπωσιακή αύξηση του μεγέθους του ατομικού τροχιακού με την αύξηση του κύριου κβαντικού αριθμού. Το πορτοκαλί χρώμα σημαίνει θετικές τιμές, ενώ το μπλε αρνητικές

Μια άλλη κατηγορία λύσεων της (9.5) είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού ως προς *x*,*y*,*z*. Υπάρχουν τρεις *ανεξάρτητες* τέτοιες λύσεις: $\psi_x = c_1 x$, $\psi_y = c_2 y$, $\psi_z = c_3 z$, με αντίστοιχη γωνιακή εξάρτηση:

$$\psi_x / r = c_1 \frac{x}{r} = c_1 \sin\theta\cos\phi \ , \qquad (9.6\alpha)$$

$$\psi_y / r = c_2 \frac{y}{r} = c_2 \sin\theta\sin\phi \ , \qquad (9.6\beta)$$

$$\psi_z / r = c_3 \frac{z}{r} = c_3 \cos\theta \ . \qquad (9.6\gamma)$$

Επομένως υπάρχουν και τρεις κατηγορίες λύσεων της εξίσωσης του Schrödinger που η γωνιακή τους εξάρτηση δίνεται από τις σχέσεις (9.6α),

(9.6β) και (9.6γ). Οι λύσεις αυτές ονομάζονται τροχιακά p_x, p_y και p_z αντιστοίχως (Βλέπε το Σχ. 9.3 Β και Δ για απεικονίσεις του τροχιακού p_z). Οι λύσεις (9.6) αντιστοιχούν σε μέτρο του τετραγώνου της στροφορμής ίσο με $\hbar^2\ell(\ell+1)$, με $\ell=1$. Υπάρχουν, δηλαδή, τρεις ανεξάρτητες κατηγορίες λύσεων που αντιστοιχούν σε πολυώνυμα πρώτου βαθμού και επομένως στην τιμή $\ell=1$, που προσδιορίζει επίσης και το τετράγωνο της στροφορμής.

Μια τρίτη κατηγορία λύσεων είναι πολυώνυμα αμιγώς δευτέρου βαθμού[4] ως προς *x*, *y*, *z*. Όχι όμως όλα τα πολυώνυμα. Υπάρχουν πέντε και μόνο πέντε *ανεξάρτητα* πολυώνυμα που ικανοποιούν την εξίσωση (9.5), τα εξής: $\psi_{xy}=c_1xy$ $\psi_{yz}=c_2yz$, $\psi_{zx}=c_3zx$, $\psi_{x^2-y^2}=c_4(x^2-y^2)$ και $\psi_{y^2-z^2}=$ $=c_5(y^2-z^2)$ που έχουν την ακόλουθη γωνιακή εξάρτηση

$$d_{xy}\equiv\psi_{xy}/r^2=c_1xy/r^2=c_1\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\,, \tag{9.7α}$$

$$d_{yz}\equiv\psi_{yz}/r^2=c_2yz/r^2=c_2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\,, \tag{9.7β}$$

$$d_{zx}\equiv\psi_{zx}/r^2=c_3zx/r^2=c_3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,, \tag{9.7γ}$$

$$d_{x^2-y^2}\equiv\psi_{x^2-y^2}/r^2=c_4\sin^2\theta(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,, \tag{9.7δ}$$

$$d_{y^2-z^2}\equiv\psi_{y^2-z^2}/r^2=c_5(\sin^2\theta\sin^2\varphi-\cos^2\theta)\,. \tag{9.7ε}$$

Οι παραπάνω πέντε ανεξάρτητες κατηγορίες λύσεων αντιστοιχούν σε μέτρο του τετραγώνου της στροφορμής ίσο πάλι με $\hbar^2\ell(\ell+1)$, αλλά τώρα με $\ell=2$, όσος είναι ο βαθμός των πολυωνύμων από τα οποία προήλθαν. Αυτές οι πέντε λύσεις συμβολίζονται με το γράμμα *d*, όπως φαίνεται στους τύπους (9.7). Υπάρχουν δηλαδή πέντε ανεξάρτητες κατηγορίες λύσεων που αντιστοιχούν σε $\ell=2$ και προέρχονται από αμιγώς δευτέρου βαθμού πολυώνυμα και αντιστοιχούν σε τετράγωνο της στροφορμής ίσο με $6\hbar^2$.

Ο υπομονετικός και φιλότιμος αναγνώστης μπορεί δοκιμάζοντας να δείξει ότι υπάρχουν επτά και μόνο επτά ανεξάρτητα πολυώνυμα αμιγώς τρίτου βαθμού[5] που ικανοποιούν την εξίσωση (9.5). Επομένως υπάρχουν επτά ανεξάρτητες κατηγορίες λύσεων της εξίσωσης του Schrödinger, ή επτά ανεξάρτητα τροχιακά που αντιστοιχούν σε μέτρο του τετραγώνου της στροφορμής ίσο με $\hbar^2\ell(\ell+1)$ με $\ell=3$. Τα τροχιακά αυτά συμβολίζονται με το γράμμα f και κάποιον δείκτη που δηλώνει ποιον από τους εφτά τύπους τροχιακών έχουμε.

---

[4] Το αμιγώς σημαίνει ότι περιέχουν όρους μόνο του ίδιου (εν προκειμένω δευτέρου) βαθμού

[5] Το αμιγώς σημαίνει ότι περιέχουν όρους μόνο του ίδιου (εν προκειμένω τρίτου) βαθμού. Βλέπε λυμένη άσκηση 5.

Γενικότερα υπάρχουν $2\ell+1$ και μόνο $2\ell+1$ ανεξάρτητα πολυώνυμα αμιγώς βαθμού[6] ℓ που ικανοποιούν τη σχέση (9.5). Η γωνιακή εξάρτηση αυτών δινει τη γωνιακή εξάρτηση των αντιστοίχων ατομικών τροχιακών με μέτρο του τετραγώνου της στροφορμής ίσο με $\hbar^2\ell(\ell+1)$.

Συμπερασματικά για να προσδιορίσουμε μονότροπα τη χωρική εξάρτηση ενός τροχιακού σε *σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό*, όπως αυτό του ατόμου κατά μέσο όρο, χρειαζόμαστε τρεις αριθμούς: τον ℓ (που προσδιορίζει το μέτρο της στροφορμής και παίρνει τιμές ℓ=0,1,2,3,...και αντιστοιχεί στο βαθμό των πολυωνύμων που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace), τον *m* που παίρνει για κάθε ℓ, $2\ell+1$ τιμές για να προσδιορίσει για ποιο από τα $2\ell+1$ τροχιακά που έχουν το ίδιο ℓ μιλάμε, και ένα ακόμη αριθμό τον n_r που προσδιορίζει την ακτινική εξάρτηση του τροχιακού, την εξάρτησή του, δηλαδή, από την απόσταση *r*. Ο n_r παίρνει τιμές 0,1,2,3,... Αντί του ακτινικού αριθμού n_r εισάγουμε τον λεγόμενο *κύριο κβαντικό αριθμό* $n \equiv n_r + \ell + 1$. Έπεται από τα παραπάνω ότι ο n για δεδομένο ℓ παίρνει τιμές $\ell+1$, $\ell+2$, $\ell+3$,...

9.4 Ενεργειακή κατάταξη των ατομικών τροχιακών και ο ΠΠΣ

Έχοντας χαρακτηρίσει μονοσήμαντα τα τροχιακά των ηλεκτρονίων σε ένα άτομο (από τους αριθμούς n,ℓ,m) είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη σχετική κατάταξη των ενεργειακών τους σταθμών προκειμένου να τις εποικίσουμε με ηλεκτρόνια αρχίζοντας από την κατώτερη ενεργειακά στάθμη, ανεβαίνοντας σταδιακά και ικανοποιώντας πάντα την αρχή του Pauli. Πράγματι, για να βρούμε τη θεμελιώδη ολική ενέργεια ενός ατόμου με *Z* ηλεκτρόνια θα πρέπει να τοποθετήσουμε δύο ηλεκτρόνια (ένα με σπιν πάνω και ένα με σπιν κάτω) σε κάθε τροχιακό αρχίζοντας από το τροχιακό κατώτερης ενέργειας και προχωρώντας στα αμέσως ανώτερα μέχρι εξαντλήσεως των ηλεκτρονίων. Έτσι, και την αρχή του Pauli σεβόμαστε και την κατώτερη ολική ενέργεια επιτυγχάνουμε. *Προκειμένου για το άτομο του υδρογόνου η ενέργεια του κάθε τροχιακού* n,ℓ,m *εξαρτάται ουσιαστικά <u>μόνο</u> από τον κύριο κβαντικό αριθμό* n *και μάλιστα με τον απλό τύπο του Bohr:*

$$\varepsilon_{n,\ell,m} = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_B^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{2a_B}\frac{1}{n^2} = -\frac{e^4 m_e}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}\ \text{eV}\,. \qquad (9.8)$$

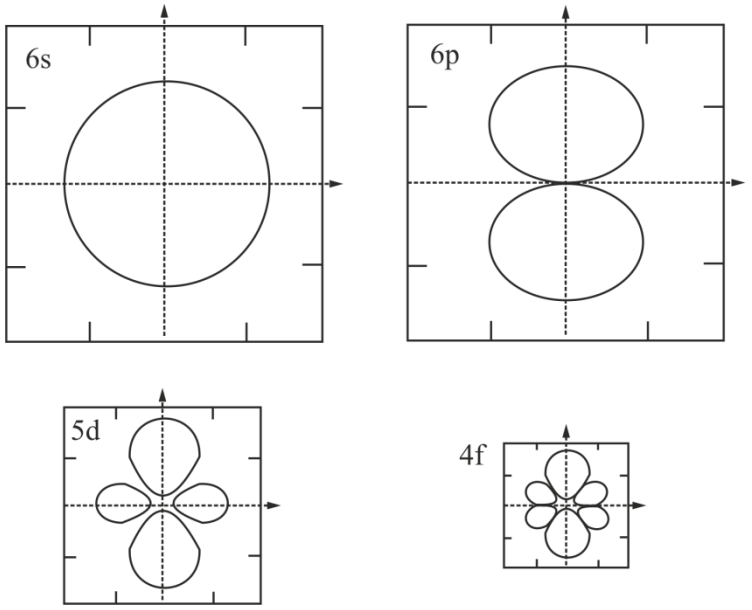
Για τα άλλα όμως άτομα (που έχουν περισσότερα από ένα ηλεκτρόνια) η ενέργεια του κάθε τροχιακού εξαρτάται εκτός από τον κύριο κβαντικό αριθμό *n* και από τον κβαντικό αριθμό της στροφορμής ℓ και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε

[6] Το αμιγώς σημαίνει ότι περιέχουν όρους μόνο του ίδιου (εν προκειμένω ℓ) βαθμού.

$$\varepsilon_{n,\ell,m} > \varepsilon_{n,\ell',m} \quad \text{για} \quad \ell > \ell' \ . \tag{9.9}$$

Μ' άλλα λόγια για τον ίδιο κύριο κβαντικό αριθμό n το τροχιακό που έχει μεγαλύτερο ℓ έχει και μεγαλύτερη ενέργεια. Έτσι το np, ($p \Leftrightarrow \ell = 1$) έχει υψηλότερη ενέργεια από το $ns (s \Leftrightarrow \ell = 0)$ (αλλά σαφώς μικρότερη από το $n+1,s$), το nd ($d \Leftrightarrow \ell = 2$) έχει υψηλότερη ενέργεια από το np και συγκρίσιμη ενέργεια με το $n+1,s$, το τροχιακό nf έχει υψηλότερη ενέργεια από το τροχιακό nd και μάλιστα συγκρίσιμη με το τροχιακό $n+2,s$ και το τροχιακό $n+1,d$. Επομένως τα τροχιακά $n+2,s$ $n+1,d$, nf είναι περίπου ισοενεργειακά (αλλά σαφώς κατώτερα του *n*+2, *p*) παρόλο που διαφέρουν κατά δύο ή μία μονάδα στον κύριο κβαντικό αριθμό, ο οποίος καθορίζει το ακτινικό μέγεθος του τροχιακού. Το αποτέλεσμα είναι ότι τα τροχιακά *d* που έχουν περίπου την ίδια ενέργεια με τα *s* έχουν μικρότερο κατά ένα τον κύριο κβαντικό αριθμό και επομένως έχουν αρκετά μικρότερη ακτινική έκταση από αυτήν των σχεδόν ισοενεργειακών *s* και επομένως κείνται σχεδόν εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό τους (Λόγω του ότι η έκταση εξαρτάται από τον κύριο κβαντικό αριθμό n περίπου ως n^2 . Βλέπε το Σχ.9.3). Τα δε περίπου ισοενεργειακά (με τα *s*) *f* έχουν ακόμη πιο μικρή έκταση, είναι ακόμη πιο εσωτερικά (όπως φαίνεται στο Σχ. 9.4) και γι' αυτό δεν παίζουν σημαντικό ρόλο στη χημεία. Αυτός είναι ένας λόγος που, π.χ., οι λανθανίδες (Z=58 έως Z=71) παρουσιάζονται στον περιοδικό πίνακα των στοιχείων εν είδει υποσημείωσης. Στον Πίν.9.1 (επόμενη σελίδα) εικονίζονται σχηματικά οι ενεργειακές στάθμες των διαφόρων τροχιακών n,ℓ,m . Ο πίνακας αυτός μας επιτρέπει να βρούμε για τη θεμελιώδη κατάσταση κάθε ατόμου,[7] πώς κατανέμονται τα ηλεκτρόνια στα διάφορα τροχιακά. Π.χ., για το πυρίτιο (Si με Z=14) θα έχουμε κατά σειρά 2 ηλεκτρόνια στο τροχιακό 1s, 2 ηλεκτρόνια στο τροχιακό 2s, 6 ηλεκτρόνια στα τρία τροχιακά 2p, 2 ηλεκτρόνια στο τροχιακό 3s και τα τελευταία 2 ηλεκτρόνια σε κάποια από τα τρία τροχιακά 3p. Η κατανομή αυτή συμβολίζεται ως εξής: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$. Η κατανομή των ηλεκτρονίων στα ατομικά τροχιακά, που αναφέρεται ως *ηλεκτρονιακή διάταξη*, δίνεται για κάθε άτομο στον Πιν.9.2 (σελ. 208). Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης χρησιμοποιώντας τον Πιν.9.1 μπορεί να βρει μόνος του[7] την κατανομή των ηλεκτρονίων για τα στοιχεία που υπάρχουν στη φύση ακόμη

[7] Λόγω του περίπου ισοενεργειακού των $n+2,s$, $n+1,d$ και nf δεν είναι προφανής η σειρά με την οποία καταλαμβάνονται οι στάθμες $n+1,d$ και $n+2,s$ στα μεταβατικά στοιχεία (Z=21-28, Z=39-46, Z=57 και Z=72-78) και η σειρά με την οποία καταλαμβάνονται οι στάθμες $n+2,s$, $n+1,d$ και n,f στις λανθανίδες (Z=58-71) και στις ακτινίδες (Z=90-103). Η σειρά αυτή εξαρτάται από τον αριθμό των ηλεκτρονίων. Βλέπε σχετικά τον ΠΠΣ στο έσω οπισθόφυλλο.



Σχ. 9.4 Σχηματική απεικόνιση των περίπου ισοενεργειακών τροχιακών 6s, 5d, 4f που δείχνει ότι τα τροχιακά 5d βρίσκονται λίγο-πολύ στο εσωτερικό του 6s και τα τροχιακά 4f στο εσωτερικό των 5d. Έχει σχεδιασθεί και το τροχιακό $6p_z$ που έχει περίπου την ίδια έκταση με το 6s αλλά σαφώς υψηλότερη ενέργεια από αυτήν των 6s, 5d, 4f. Δες και το Σχ.9.3.

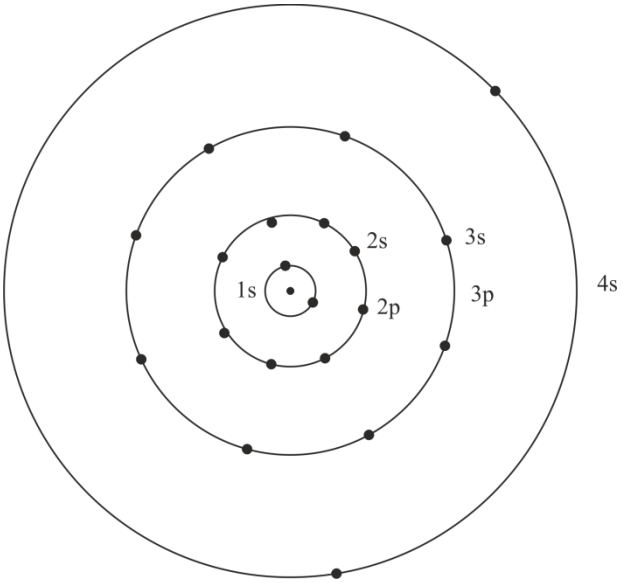
Πίνακας 9.1 Ηλεκτρονιακές στάθμες μη υδρογονοειδών ατόμων. Από τον πίνακα αυτόν και την αρχή του Pauli έπεται η δομή του Περιοδικού Πίνακα των Στοιχείων (ΠΠΣ) που αποτελεί το θεμέλιο της Χημείας. (Οι γραμμουλες να γινουν πιο εντονες)

ΕΝΕΡΓΕΙΑ

				Αριθμός ηλεκτρονίων στον κλειστό φλοιό	Συνολικός αριθμός ηλεκτρονίων	
*7s*_____	*7p*_____	*6d*_____	*5f*_____	*32*	*32+86=118*	*7ος φλοιός, 7η γραμμή*
*6s*_____	*6p*_____	*5d*_____	*4f*_____	*32*	*32+54=86*	*6ος φλοιός, 6η γραμμή*
*5s*_____	*5p*_____	*4d*_____		*18*	*18+36=54*	*5ος φλοιός, 5η γραμμή*
*4s*_____	*4p*_____	*3d*_____		*18*	*18+18=36*	*4ος φλοιός, 4η γραμμή*
*3s*_____	*3p*_____			*8*	*8+10=18*	*3ος φλοιός, 3η γραμμή*
*2s*_____	*2p*_____			*8*	*8+2=10*	*2ος φλοιός, 2η γραμμή*
*1s*_____				*2*	*2*	*1ος φλοιός, 1η γραμμή στον Π.Π.Σ.*
s $\Leftrightarrow$ $\ell = 0$	*p* $\Leftrightarrow$ $\ell = 1$	*d* $\Leftrightarrow$ $\ell = 2$	*f* $\Leftrightarrow$ $\ell = 3$			
2	*6*	*10*	*14*	⇐ *μέγιστος αριθμός ηλεκτρονίων σε κάθε* ℓ		

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2
ΓΕΝΙΚΟΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
Ο χαρακτηρισμός των ομάδων σε Α και Β ακολουθεί τη σύμβαση της Διεθνούς Ένωσης Χημικών και Εφαρμοσμένης Χημείας. Άλλοι συγγραφείς ή οργανώσεις χρησιμοποιούν διαφορετικό χαρακτηρισμό.
* Τιμές κατ' εκτίμηση
** ή Αργίλιο
* ΣΕΙΡΑ ΛΑΝΘΑΝΙΔΙΩΝ (οι σπάνιες γαίες περιλαμβάνουν, εκτός από τα λανθανίδια, και το Sc και Y).
** ΣΕΙΡΑ ΑΚΤΙΝΙΩΝ
† Για την αέρια φάση (που υποβιλώνεται με το σύμβολο μονάδα είναι g/l, για T=273K και P=1atm.

και πέραν του ουρανίου με[8] Z=92. Από τον Πιν. 9.2 έπεται ότι η κάθε γραμμή του περιοδικού πίνακα των στοιχείων (ΠΠΣ) αρχίζει με τροχιακό *s* και τερματίζεται (εκτός από την πρώτη) με την πλήρη συμπλήρωση και των τριών τροχιακών *p* που έχουν τον ίδιο κύριο κβαντικό αριθμό με το αρχικό *s*. Ο τερματισμός μιας γραμμής του ΠΠΣ με το τροχιακό *n,p* και η έναρξη της επόμενης γραμμής με το ενεργειακά ανώτερο τροχιακό $n+1,s$ υπαγορεύεται από το γεγονός ότι η ενεργειακή απόσταση μεταξύ των δύο αυτών τροχιακών είναι η μεγαλύτερη από οποιοδήποτε άλλο ζεύγος ενεργειακά διαδοχικών τροχιακών. Εν γένει μεταξύ του τροχιακού που αντιστοιχεί σε πλήρως συμπληρωμένο ℓ και του αμέσως επόμενου ενεργειακά τροχιακού εμφανίζεται μια σημαντική ενεργειακή διαφορά, που όμως δεν είναι τόσο μεγάλη όσο αυτή που αντιστοιχεί στη διαφορά μεταξύ *n,p* και *n*+1,*s* (όπου αλλάζει όχι μόνο το ℓ αλλά και ο κύριος κβαντικός αριθμός, βλέπε σχετικά το Σχ.9.2). Γι' αυτό άλλωστε τα άτομα με τα πλήρως συμπληρωμένα τροχιακά *p* είναι τα σταθερότερα (τα στοιχεία αυτά αντιστοιχούν στα ευγενή αέρια). Με βάση τα παραπάνω σχόλια καθορίζεται και ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε γραμμή του ΠΠΣ: 2 στην 1^{η} γραμμή, 8 στην 2^{η} και 3^{η}, 18 στην 4^{η} και 5^{η}, και 32 στις δύο τελευταίες (αν και η τελευταία γραμμή δεν συμπληρώνεται γιατί ξεμείναμε από πυρήνες).



Σχ. 9.5 Σχηματική κατανομή των 20 ηλεκτρονίων του ατόμου του Ασβεστίου (Ca) προκειμένου να τονισθεί ότι τα δύο ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην εσωτερική στάθμη 1s

[8] Ο λόγος που δεν υπάρχουν στοιχεία στη φύση με Z>92 είναι γιατί οι πυρήνες με Z>92 είναι είτε μετασταθείς με σχετικά μικρό χρόνο ζωής είτε εντελώς ασταθείς, όπως προκύπτει από την ανάλυση στο κεφ. 8.

είναι πλησιέστερα στον πυρήνα από όλα τα άλλα ηλεκτρόνια με μεγάλη πιθανότητα της τάξης του 95% και άνω. Άρα το καθένα τους αισθάνεται σχεδόν το πλήρες φορτίο του πυρήνα (περίπου 20 $|e|$) και την άπωση από το άλλο ηλεκτρόνιο 1s, ενώ δέχεται πρακτικά αμελητέα δύναμη από τα άλλα ηλεκτρόνια. Αντίθετα, τα δύο ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην κατάσταση 4s δέχονται μια δύναμη που οφείλεται περίπου σε φορτίο (20-18)*e* από τον πυρήνα και τα εσωτερικά ηλεκτρόνια καθώς και την αμοιβαία άπωσή τους

Το δεύτερο σημείο που πρέπει να προσέξει ο αναγνώστης είναι ότι η ενεργειακή ταξινόμηση των ατομικών τροχιακών (που οδήγησε στις επτά γραμμές του περιοδικού πίνακα) συνεπάγεται επίσης μια δομή των ηλεκτρονίων κατά φλοιούς (ή κατά στοιβάδες) και στον πραγματικό χώρο. Αυτό γιατί μεγαλύτερος κύριος κβαντικός αριθμός *n* σημαίνει μεγαλύτερη ακτίνα του τροχιακού ($r \propto n^2$). Και είναι τα *εξώτερα κατειλημμένα* τροχιακά (δηλαδή το *s* ή/και τα *p*) που παίζουν τον κύριο ρόλο όταν δύο ή περισσότερα άτομα πλησιάσουν μεταξύ τους προς σχηματισμό μορίου. Με άλλα λόγια, η δομή του περιοδικού πίνακα των στοιχείων, η προσεγγιστική περιοδικότητα των χημικών ιδιοτήτων με βάση τον αριθμό 8 (αλλά και το 2 για την πρώτη γραμμή, και το 18 για την τέταρτη και την πέμπτη και το 32 για την έκτη) και σε τελική ανάλυση όλη η χημεία, προκύπτουν αβίαστα από τις ιδιότητες των ατομικών τροχιακών (και κυρίως από τη γωνιακή τους εξάρτηση που προσδιορίζεται τόσο εύκολα).

9.5 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Η ακτίνα των ατόμων δίνεται από τον τύπο

$$r_a = \bar{r}_a a_B, \quad 1 \lesssim \bar{r}_a \lesssim 5, \text{ όπου } a_B \equiv \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0{,}529\,\text{Å} \text{ (βλ. Σχ. 9.1)} . \qquad (9.3')$$

Η ακτίνα του κάθε ατόμου ορίζει περίπου τον σφαιρικό χώρο εντός του οποίου κινούνται τα ηλεκτρόνια γύρω από τον ατομικό πυρήνα.

Το έργο ιονισμού των ατόμων δίνεται από τον τύπο

$$I = \bar{I}\, I_0, \quad 0{,}3 \lesssim \bar{I} \lesssim 2 \text{ όπου } I_0 \equiv \frac{\hbar^2}{2m_e a_B^2} = 13{,}6\,\text{eV} \text{ (βλ. Σχ. 9.2).} \qquad (9.4')$$

Η γωνιακή εξάρτηση των ατομικών τροχιακών είναι ίδια με αυτήν των πολυωνυμικών λύσεων της εξίσωσης του Laplace (9.5). Ο βαθμός ℓ των πολυωνυμικών λύσεων δίνει τον αριθμό $2\ell+1$ των λύσεων με το ίδιο ℓ και το μέτρο του τετραγώνου της στροφορμής ως $\hbar^2\ell(\ell+1)$.

Για το άτομο του υδρογόνου και μόνο γι' αυτό οι ενεργειακές στάθμες εξαρτώνται μόνο από τον κύριο κβαντικό αριθμό (με επαρκή ακρίβεια):

$$\varepsilon_n \approx -\frac{I_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}\,\text{eV}\,. \tag{9.7}$$

Η ενεργειακή κατάταξη των ατομικών τροχιακών για τα άλλα άτομα ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_{n+2,s} \approx \varepsilon_{n+1,d} \approx \varepsilon_{n,f} < \varepsilon_{n+2,p} < \varepsilon_{n+3,s}\,,\ \text{βλ. Πιν. 9.1}, \tag{9.8}$$

όπου $n \geq \ell + 1, \quad \ell = 0 \Leftrightarrow s, \quad \ell = 1 \Leftrightarrow p, \quad \ell = 2 \Leftrightarrow d, \ \ell = 3 \Leftrightarrow f$

9.6 Λυμένες ασκήσεις

1. Πόσο θα άλλαζε η πυκνότητα του σώματός σας εάν η μάζα του ηλεκτρονίου ήταν η μισή;
Λύση: Αφού $r_a \sim 1/m_e$, η διάμετρος του κάθε ατόμου θα διπλασιαζόταν και ο όγκος του θα οκταπλασιαζόταν. Επομένως ο όγκος μας θα γινόταν 8 φορές μεγαλύτερος και η πυκνότητά μας 8 φορές μικρότερη.

2. Υπολογίστε με χρήση θεωρίας μεταβολών το πρώτο και το δεύτερο έργο ιονισμού του He. Δίδεται ότι $\langle 1/r_{12} \rangle \approx 3/5a$, όπου a είναι η ακτίνα του υδρογονοειδούς τροχιακού $1s$. Θεωρήστε ως μεταβολική παράμετρο το $x \equiv a_B / a$, όπου a_B είναι η ακτίνα του Bohr. (Πειραματική τιμή για το πρώτο έργο ιονισμού, $I = 24,59\,\text{eV}$). Σημείωση: *Για ασυσχέτιστη κίνηση των δύο ηλεκτρονίων το αποτέλεσμα για το* $\langle 1/r_{12} \rangle$ *είναι, για μεν το τροχιακό 1s,* $5/8$, *για δε ομοιόμορφη κατανομή, ακτίνας a,* $3/5a$. *Όμως, επειδή η κίνηση είναι συσχετισμένη με αποτέλεσμα το* $\langle 1/r_{12} \rangle$ *να είναι μικρότερο του* $5/8a$, *το* $3/5a$ *είναι πλησιέστερα στην πραγματική τιμή.*
Λύση: Η ενέργεια του ουδέτερου ατόμου του ηλίου είναι βάσει της (9.2)

$$\begin{aligned} E_{o\lambda} &= \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} + \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} - \frac{2e^2}{a} - \frac{2e^2}{a} + \frac{3e^2}{5a} = \left(\text{για } \hbar = m_e = e = 1\right) \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - 2x - 2x + \tfrac{3}{5}x = x^2 - \tfrac{17}{5}x \quad x = 1/a \ \text{ σε α.μ.}\,. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_{o\lambda}}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 1,7 \ \text{ και } \ E_{o\lambda} = -1,7^2\,\text{α.μ.} = -78,64\,\text{eV}\,.$$

Το έργο ιονισμού του ιόντος του ηλίου, I_2, είναι I_2=4×13,6eV=54,422eV (γιατί;). Άρα

$$\left|E_{o\lambda}\right| = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = \left|E_{o\lambda}\right| - I_2 = 24,22\,\text{eV}\,.$$

Η πειραματική τιμή είναι 24,5874 eV

3. Ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο μπορούν να αλληλοπαγιδευτούν (για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα πριν εξαϋλωθούν). Υπολογίστε την ακτίνα και την ενέργεια σύνδεσης του προκύπτοντος "ατόμου" θεωρώντας ότι βρίσκεται στην κατάσταση $1s$. Πόση είναι η μέση κινητική ενέργεια και πόση η μέση δυναμική ενέργεια;

Λύση: Η ανηγμένη μάζα $m_r = m_e^2 / 2m_e = m_e / 2$. Άρα $a=2a_B$, $I_1 = \frac{1}{2} I_H = 6,8\,\text{eV}$.

4. Θεωρήστε ένα άτομο που αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα μιόνιο (για όσο χρόνο ζει το μιόνιο). Ποια είναι η ακτίνα του; Ποιο το έργο ιονισμού του; Μπορεί ένα τέτοιο άτομο να διευκολύνει την πυρηνική σύντηξη εν ψυχρώ;
Λύση: Η ανηγμένη μάζα είναι

$$m_r = m_p m_\mu / \left(m_p + m_\mu\right) = \left[1836,15 \times 206,77 / \left(1836,15 + 206,77\right)\right] m_e = 185,84 m_e .$$

Άρα η ακτίνα του μιονικού ατόμου είναι $a_B(m_e / m_r) = a_B$ / 185,84=284,7fm. Το έργο ιονισμού είναι $I = I_0(m_r / m_e) = 13,6\text{x}185,84 = 2527,4\text{eV}$. Επειδή δύο μιονικά άτομα μπορούν να πλησιάσουν σε απόσταση περίπου 250fm χωρίς να αισθανθούν καμία άπωση Coulomb διευκολύνεται σημαντικά η σύντηξη των δύο πρωτονίων με τη βοήθεια του κβαντικού φαινομένου σήραγγος. (Βλ. Nature, Vol. **321**, p.127, 8 May 1986).

5. Ποια είναι η γωνιακή εξάρτηση τών επτά ανεξάρτητων τροχιακών f;
Λύση: 1. xyz, 2. $(x^2 - y^2)z$, 3. $(y^2 - z^2)x$, 4. $(z^2 - x^2)y$, 5. $x^2 y - \frac{1}{3} y^3$. Τα υπ' αρ. 6 και 7 επαφίονται στον αναγνώστη.

9.7 Άλυτες ασκήσεις

1. Θεωρήστε δύο άτομα υδρογόνου σε απόσταση R μεταξύ των κέντρων τους. Δώστε σε λογαριθμική κλίμακα την ολική ενέργεια του συστήματος ως συνάρτηση της απόστασης R ($1\,\text{fm} \le R \le 20\,\text{A}$). Σημειώστε στους δύο λογαριθμικούς άξονες τις χαρακτηριστικές τιμές. (Τα πρωτόνια θεωρούνται με μηδενική κινητική ενέργεια).

2. Ποια είναι τα ονόματα των 11 πρώτων στοιχείων του περιοδικού πίνακα (Z=1 έως 11); Από πόσα πρωτόνια, ηλεκτρόνια, και νετρόνια αποτελείται το άτομο καθενός από τα παραπάνω δέκα στοιχεία; Ποια από αυτά τα άτομα και ποιοι από αυτούς τους πυρήνες είναι μποζόνια και ποια ή ποιοι φερμιόνια;

3. Υπολογίστε το δεύτερο και το τρίτο έργο ιονισμού του Li.

4. Τα $2\ell+1$ τροχιακά που βρήκαμε ως πολύωνυμικές λύσεις της εξίσωσης του Laplace για δεδομένο ℓ μπορούν να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός των λεγομένων σφαιρικών αρμονικών $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$, $m = -\ell, \ldots \ell$. Για $\ell = 1$ γράψτε αυτόν το γραμμικό συνδυασμό.

Κεφάλαιο 10

Από τα άτομα στα μόρια

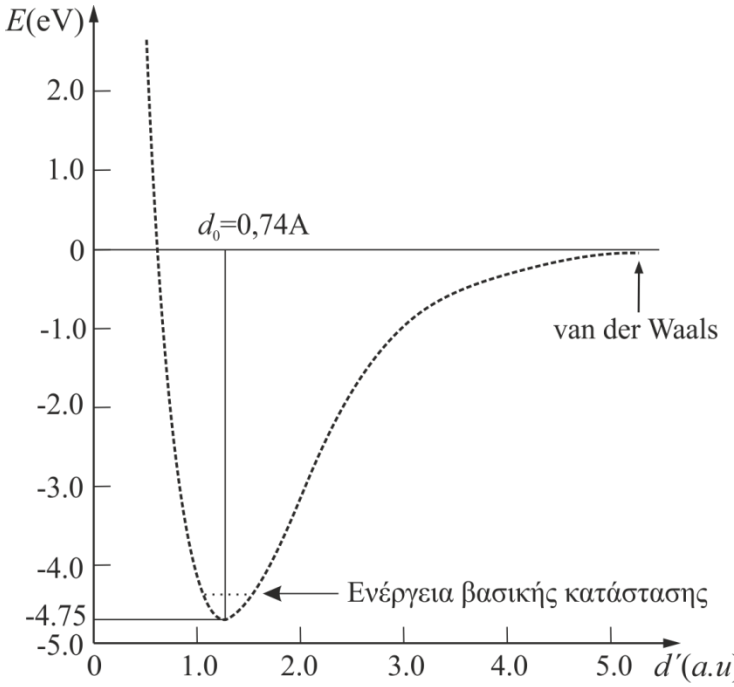
Σύνοψη: *Δύο ουδέτερα άτομα σε απόσταση της τάξεως 1nm (=10 Å) υφίστανται την ελκτική αλληλεπίδραση van der Waals, ενώ για απόσταση μικρότερή του 0,5 Å υφίστανται έντονη άπωση. Άρα σε κάποια ενδιάμεση απόσταση της τάξεως του 1 με 3 Å θα εμφανισθεί ένα ελάχιστο της συνολικής ενέργειας με αποτέλεσμα να ισορροπούν τα άτομα στην απόσταση αυτή που είναι το μήκος του δεσμού του προκύπτοντος διατομικού μορίου (βλ. όμως λυμένη άσκηση 10.1). Η διαστατική ανάλυση μας επιτρέπει να έχουμε ρεαλιστικές εκτιμήσεις για το μήκος του δεσμού, για την ενέργεια σύνδεσης, και για το περιστροφικό και ταλαντωτικό φάσμα του διατομικού μορίου. Ακριβέστερες εκτιμήσεις επιτυγχάνονται με βάση τη μέθοδο του γραμμικού συνδυασμού ατομικών τροχιακών, η οποία επεκτείνεται και σε πολυατομικά μόρια αξιοποιώντας την ιδέα του υβριδισμού ατομικών τροχιακών. Η ιδέα του υβριδισμού συχνά μας επιτρέπει να προβλέψουμε τη στερεοχημεία των πολυατομικών μορίων.*

10.1 Η ενέργεια ενός συστήματος δύο ατόμων

Όταν δύο άτομα βρεθούν σχετικά κοντά το ένα στο άλλο, γίνεται μια ανακατάταξη των ηλεκτρονίων (κυρίως αυτών που βρίσκονται στα εξώτερα κατειλημμένα τροχιακά) η οποία οδηγεί κατ' αρχήν σε μία αμοιβαία έλξη και στη συνέχεια στο σχηματισμό διατομικού μορίου. Αυτό σημαίνει συνένωση των δύο ατόμων με την έννοια ότι η απόσταση d_0 μεταξύ των πυρήνων των δύο ατόμων διατηρείται σταθερή και περίπου ίση με το άθροισμα των ατομικών τους ακτίνων, $d_0 \approx r_{a1} + r_{a2}$.

Για σχετικά μεγάλες αποστάσεις d ($d_0 \ll d$) η ανακατάταξη των ηλεκτρονίων λαμβάνει χώρα εντός του κάθε ατόμου χωρίς να υπάρχει καμία μεταφορά ηλεκτρονίου από το ένα άτομο στο άλλο (η δυνατότητα μεταφοράς εμφανίζεται μόνο όταν το d πλησιάσει το d_0). Αυτή η εντός κάθε ατόμου ανακατάταξη δημιουργεί μια διπολική ροπή εξ επαγωγής και μια αμοιβαία έλξη που μειώνει την ολική ενέργεια κατά ΔE, όπου:

$$\boxed{\Delta E(d) = -A/d^6, \quad d_0 \ll d \ll a_B(hc/e^2)} \ . \tag{10.1}$$



Σχ. 10.1 Η ενέργεια $\Delta E \equiv E_{o\lambda}(d) - E_{o\lambda}(\infty)$ ως συνάρτηση της απόστασης d μεταξύ των κέντρων δύο ατόμων υδρογόνου. Για $d \gg d_0$ η έλξη είναι τύπου van der Waals. Η κινητική ενέργεια, E_K, των δύο πρωτονίων έχει αγνοηθεί. Αν ληφθεί υπόψη, το ελάχιστο $\Delta E(d_0)$ της καμπύλης του Σχ. 10.1 ανέρχεται κατά $\hbar\omega/2$, ορίζοντας έτσι την ενέργεια της βασικής κατάστασης του μορίου· ω είναι η συχνότητα ταλάντωσης του μορίου

Η ποσότητα A ισούται με $A = \tilde{c}\, a_1 a_2 \{I_1 I_2/(I_1+I_2)\} \approx \frac{1}{2}\tilde{c}\, a_1 a_2 e^2 (r_{a1}+r_{a2})^{-1}$, όπου $\tilde{c}$ είναι αριθμητική σταθερά (για το Η/Η $\tilde{c}$=1,28), a_i (i=1, 2) είναι η πολωσιμότητα του ατόμου i και το I_i είναι το έργο ιονισμού του. ($I_i \approx e^2/2r_{ai}$).

Αυτή η ασθενική αλληλεπίδραση, $-A/d^6$, $d_0 \ll d$, (που υπολογίζεται βάσει όλης της δυναμικής ενέργειας καθώς και της κινητικής ενέργειας μόνο των ηλεκτρονίων) ονομάζεται *αλληλεπίδραση Van der Waals*[1] και είναι

[1] Η αλληλεπίδραση van der Waals ΔE οφείλεται σε διπολικές ροπές που επάγει το ένα άτομο στο άλλο, όταν η απόσταση d είναι πολύ μεγαλύτερη από το μέγεθος του κάθε ατόμου. Αυτή η εξ επαγωγής αλληλεπίδραση είναι ίση με το γινόμενο

ισοδύναμη με μια ελκτική δύναμη ίση με $-(6A/d^7)$. Καθώς τα άτομα πλησιάζουν ξεκινώντας από μεγάλες τιμές του d, φτάνουν τελικά σε μια απόσταση ισορροπίας d_0 όπου η ενέργεια ΔE έχει ελάχιστο (για το H_2, $d_0 = 0{,}74$A και $\Delta E(d_0) = -4{,}74$eV).

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, για αποστάσεις μεταξύ των πυρήνων των δύο ατόμων συγκρίσιμες με το d_0 υπάρχει εν γένει μεταφορά ηλεκτρονίων από το άτομο 1 στο άτομο 2 και από το άτομο 2 στο άτομο 1. Διακρίνουμε δύο ακραίες περιπτώσεις ανακατάταξης των ηλεκτρονίων εντός του σχηματισθέντος μορίου: Στην πρώτη περίπτωση η μεταφορά ηλεκτρονίων από το 1 στο 2 είναι ίση με την μεταφορά από το 2 στο 1 και επομένως κανένα από τα δύο άτομα δεν υφίσταται καθαρή απώλεια ηλεκτρονίων· λέμε τότε ότι ο δεσμός μεταξύ των δύο ατόμων είναι καθαρά *ομοιοπολικός*, όπως, π.χ. στο μόριο O_2. Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει απώλεια ενός ηλεκτρονίου από το ένα άτομο και καθαρό κερδος ενός ηλεκτρονίου από το άλλο και έτσι το ένα άτομο καθίσταται κατιόν και το άλλο ανιόν. Τα προκύπτοντα ιόντα υφίστανται μία αμοιβαία ελκτική δύναμη Coulomb που οδηγεί στο σχηματισμό διατομικού μορίου, όπως, π.χ. στην περίπτωση του

$-\frac{1}{2}\mathbf{E}_1(d)\cdot\mathbf{p}_1$ της διπολικής ροπής $\mathbf{p}_1$ του ενός διπόλου στη θέση 1 επί μείον το πεδίο $\mathbf{E}_1(d)$ στη θέση 1 που οφείλεται στη διπολική ροπή $\mathbf{p}_2$ του άλλου, $|\mathbf{E}_1(d)| \approx$ $\approx p_2/d^3$, όπου $p_2^2 \approx 3e^2 r_{a2}^2$. Αφού $\mathbf{p}_1 = a_1\mathbf{E}_1(d)$, όπου a_1 είναι η πολωσιμότητα του ατόμου 1, έχουμε $\Delta E = -\frac{1}{2}a_1\mathbf{E}_1^2 \approx -\frac{1}{2}a_1 p_2^2/d^6 = -\frac{3}{2}a_1 e^2 r_{a2}^2/d^6$. Ήδη αναφέραμε στο κεφ.5 ότι η πολωσιμότητα έχει διαστάσεις μήκους στην τρίτη δύναμη· άρα είναι ανάλογη της τρίτης δύναμης της ακτίνας του κάθε ατόμου, αφού δεν υπάρχει άλλο ανεξάρτητο μήκος που να χαρακτηρίζει το άτομο, $a_1 \approx c_1 r_{a1}^3$. Επομένως $A \approx \frac{3}{2}a_1 e^2 r_{a2}^2 = \frac{3}{2}a_1 e^2 r_{a2}^3/r_{a2} = \frac{3}{2}a_1 a_2 e^2/c_1 r_{a2}$. Θέτοντας $I_2 \approx e^2/2r_{a2}$ για το πρώτο έργο ιονισμού καταλήγουμε στο $A \approx 3a_1 a_2 I_2/c_1$. Αν είχαμε αρχίσει με την ισοδύναμη σχέση $\Delta E = -\frac{1}{2}\mathbf{E}_2(d)\cdot\mathbf{p}_2$, θα είχαμε βρει $A \approx 3a_1 a_2 I_1/c_1$. Προφανώς κάποιο είδος μέσου όρου των δύο εκφράσεων θα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει ότι ο αρμονικός μέσος όρος $2I_1I_2/(I_1+I_2)$ των I_1, I_2 είναι ο ενδεδειγμένος, επιλογή που είναι ισοδύναμη με $A \approx 3a_1 a_2 e^2/c_1(r_{a1}+r_{a2})$. Επομένως τελικά το αποτέλεσμα για το A είναι

$$A \approx \frac{6}{c_1}\frac{I_1 I_2}{I_1+I_2}a_1 a_2 .$$

Για το άτομο του υδρογόνου η σταθερά $c_1 = 4{,}5$, ενώ ο λεγόμενος τύπος του London για το A δίνει $c_1 = 4$. Τέλος για το σύστημα H/H η σωστή αριθμητική σταθερά $6/c_1$ ισούται με 1,284, οπότε το $c_1 \approx 4{,}673$.

μορίου NaCl˙ λέμε τότε ότι έχουμε έναν ακραίο *ετεροπολικό* δεσμό. Είναι σύνηθες –και συμβατό με τον κυματοσωματιδιακό δυισμό– να έχουμε μόνο μερική καθαρή μεταφορά του ηλεκτρονίου κατά a_p, $0 \le a_p \le 1$, από το ένα άτομο στο άλλο, όπως π. χ. στο μόριο HCl. Όπως θα δούμε στην ενότητα 10.3, το a_p ονομάζεται *δείκτης ιοντικότητας*.

Όπως φαίνεται και από το Σχ. 10.1, και την υποσημείωση 1 αντί να υπολογίσει κανείς την ελκτική δύναμη που ευθύνεται για το σχηματισμό διατομικού μορίου, είναι πιο χρήσιμο και σχετικά πιο εύκολο να υπολογίσει την μείωση ΔE της ολικής ενέργειας των δύο ατόμων (όταν βρίσκονται σε απόσταση d) σχετικά με την ολική τους ενέργεια όταν $d=\infty$ (που λαμβάνεται ως το μηδέν της ενέργειας). Στην περίπτωση ισχυρού ετεροπολικού δεσμού ο υπολογισμός του ΔE για $d= d_0$ είναι απλός. Βρίσκουμε πρώτα το ενεργειακό κόστος για τον σχηματισμό κατιόντος και ανιόντος που ισούται με τη διαφορά του έργου ιονισμού (του ατόμου που θα γίνει κατιόν, 5,14 eV για το Na) μείον την ηλεκτρονική συγγένεια (του ατόμου που θα γίνει ανιόν, 3,61 eV για το Cl)˙ έτσι το ενεργειακό κόστος για το σχηματισμό των Na^+ και Cl^- είναι ίσον με 1,53 eV. Η ελκτική ενέργεια Coulomb είναι ίση (σε α. μ.) με $-1/\overline{d}_0 = -0,224\,\alpha.\mu. = -6,1\,\text{eV}$ για μήκος του δεσμού $d_0 = 2,36$ Å και επομένως ΔE=1,53–6,1= –4,57 eV για το NaCl.

Για τιμές του d μικρότερες του d_0 και μειούμενες, το ΔE αυξάνεται πολύ γρήγορα πράγμα που σημαίνει ότι ασκούνται ισχυρές απωστικές δυνάμεις. Αυτή η συμπεριφορά οφείλεται και στη άπωση Coulomb μεταξύ των πυρήνων των δύο ατόμων (που τείνει στο άπειρο για $d \to 0$, ενώ αυτές μεταξύ των ηλεκτρονίων και ηλεκτρονίων/πυρήνων παραμένουν πεπερασμένες) και στην αύξηση της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων (που στριμώγνονται πια περισσότερα στον ίδιο χώρο). Καταλήγουμε λοιπόν στην εξής εικόνα: Καθώς δύο ουδέτερα άτομα πλησιάζουν από μεγάλη απόσταση ασκείται κατ' αρχήν ελκτική δύναμη μεταξύ τους μέχρι μια απόσταση d_0 όπου η δύναμη μηδενίζεται. Για μικρότερες αποστάσεις από d_0 η δύναμη γίνεται ισχυρά απωστική για τους λόγους που αναφέραμε.

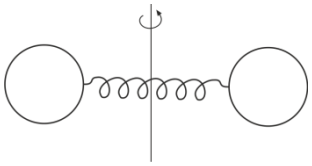
Βάσει της αρχής της ελαχιστοποίησης της ενέργειας το σύστημα των δύο ατόμων θα ισορροπήσει για $d= d_0$ και θα σχηματίσει ένα διατομικό μόριο. Όμως, λόγω της αρχής της απροσδιοριστίας υπάρχουν μικρές διακυμάνσεις, Δd, γύρω από την απόσταση ισορροπίας d_0, την οποία οι χημικοί ονομάζουν *μήκος του δεσμού*)[2]. Θα δείξουμε ότι, ως αποτέλεσμα των

[2] Με άλλα λόγια η απόσταση ισορροπίας δεν είναι ακριβώς d_0 γιατί κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι η σχετική κίνηση των δύο πυρήνων κατά τον άξονα που τους ενώνει θα ήταν μηδέν, πράγμα που θα παραβίαζε την αρχή της απροσδιοριστίας $\Delta d \cdot \Delta p_d \ge$

διακυμάνσεων, εμφανίζεται μία αύξηση κατά $\hbar\omega/2$ της ενέργειας $\Delta E(d=d_0)$ και κατά συνέπεια μια μείωση κατά $\hbar\omega/2$ (όπου ω είναι η κυκλική ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης) της ενέργειας σύνδεσης του μορίου: $D = |\Delta E(d_0)| - \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Η καμπύλη ΔE ως συνάρτηση του d είναι πολύτιμη γιατί παρέχει βασικές πληροφορίες για διατομικά μόρια: Το μήκος d_0 όπου εμφανίζεται το ελάχιστο της καμπύλης δίνει το μήκος του δεσμού. Λόγω της αρχής του Heisenberg εμφανίζεται η διακύμανση κατά Δd γύρω από την τιμή d_0, που θα αυξήσει τη δυναμική συνιστώσα της ενέργειας $\Delta E(d=d_0)$ των ιόντων κατά $\frac{1}{2}\kappa\Delta d^2$, όπου το $\kappa \equiv (\partial^2\Delta E/\partial d^2)_{d=d_0}$. Ως αποτέλεσμα του Δd θα υπάρξει όμως και μια μη μηδενική τιμή της ορμής των ιόντων κατά τη διεύθυνση της ευθείας που τα ενώνει με τυπική απόκλιση $\Delta p_d = \hbar/2\Delta d$ και επομένως και μια αντίστοιχη κινητική ενέργεια των ιόντων ίση με $\hbar^2/8m_r\Delta d^2$, όπου $m_r = m_1m_2/(m_1+m_2)$ είναι η ανηγμένη μάζα των δύο ατόμων. Η αύξηση ε της ολικής ενέργειας λόγω και της *κίνησης* και της *μετατόπισης* των ιόντων ισούται με $(\hbar^2/8m_r\Delta d^2)+\frac{1}{2}\kappa\Delta d^2$. Ελαχιστοποιώντας το ε ως προς Δd βρίσκουμε ότι $\Delta d^2 = \hbar/2m_r\omega$, όπου $\omega \equiv \sqrt{\kappa/m_r}$ και $\varepsilon_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Σημειώστε ότι το Δd είναι ανάλογο του $m_r^{-1/4}$ και ότι το $\Delta d/d_0$ είναι περίπου ίσο ή μικρότερο του 4% .

Συνοψίζοντας έχουμε: Το μήκος d_0 όπου εμφανίζεται το ελάχιστο της καμπύλης ΔE έναντι d δίνει το μήκος του δεσμού, καθώς και τις *διεγερμένες στάθμες λόγω περιστροφής* του μορίου, $L^2/2J = \hbar^2\ell(\ell+1)/2J$, όπου L^2



είναι το τετράγωνο της στροφορμής του μορίου γύρω από το κέντρο μάζας του, $\ell = 0,1,2,...$ και $J \equiv m_r d_0^2$ είναι η ροπή αδρανείας του μορίου ως προς το κέντρο μάζας του.

Η δεύτερη παράγωγος αυτής της καμπύλης για $d=d_0$ δίνει το κ και επομένως την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης $\omega \equiv \sqrt{\kappa/m_r}$ καθώς και τις διεγερμένες στάθμες λόγω ταλάντωσης, $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, $n=1,2,...$ Τέλος η

$\geq \hbar/2$. Υπάρχουν επομένως μικρές διακυμάνσεις, Δd, γύρω από την τιμή d_0, που αυξάνουν την ενέργεια, όπως φαίνεται στο Σχ. 10.1.

ποσότητα $D \equiv \Delta E(d_0) - \frac{1}{2}\hbar\omega$ δίνει την ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια για τη διάσπαση του μορίου (όταν αυτό είναι στη θεμελιώδη του κατάσταση) σε δύο ανεξάρτητα άτομα (dissociation energy).

Μια αναλυτική μορφή που περιγράφει συνήθως αρκετά ικανοποιητικά την καμπύλη ΔE έναντι d (για d γύρω στο d_0, $|x| \le 5$) είναι η εξής:

$$\Delta E = \Delta E(d_0)\varphi(x), \quad \varphi(x) = e^{-x}(1 + x + 0,05x^2), \quad x \equiv (d - d_0)/\ell. \qquad (10.2)$$

Η παραπάνω έκφραση καθορίζεται από τρεις παραμέτρους, Την τιμή της ελάχιστης ενέργειας $\Delta E(d_0)$, την τιμή του d_0, και το μήκος ℓ που συνδέεται με την τιμή του κ και του $\Delta E(d_0)$ ως εξής:

$$\ell^2 = 0,9|\Delta E(d_0)|/\kappa. \qquad (10.3)$$

Το μήκος ℓ είναι της τάξεως του μήκους του δεσμού δια 5: $\ell \approx d_0/5$.

10.2 Εκτιμήσεις βασισμένες στη διαστατική ανάλυση

Η διαστατική ανάλυση μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το μέγεθος ορισμένων βασικών ποσοτήτων των διατομικών μορίων ως εξής:

1) *Μήκος δεσμού* d_0: Αφού κατά το σχηματισμό μορίων τα διπλανά άτομα περίπου εφάπτονται, περιμένομε ότι το μήκος του δεσμού d_0 θα είναι

$$d_0 = c_d(r_{a1} + r_{a2}) = c_d(\overline{r}_{a1} + \overline{r}_{a2})a_B. \qquad (10.4)$$

Τα $\overline{r}_{a1}$, $\overline{r}_{a2}$ δίνονται προσεγγιστικά στο Σχ. 9.1 (για ακριβέστερες τιμές βλ. Πιν. 6, σελ. 418, ή από το internet). Ο αριθμητικός συντελεστής c_d είναι γύρω στη μονάδα: Σε κάποια μόρια είναι μικρότερος του 1 και σε άλλα μεγαλύτερος. Για τα ευγενή αέρια, και όταν ακόμη φτιάξουν μόριο για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες, ο συντελεστής είναι αρκετά μεγαλύτερος από 1.

2) *Ενέργεια διάσπασης D*: Η ενέργεια διάσπασης $D = |\Delta E(d_0)| - \frac{1}{2}\hbar\omega$ αναμένεται να εξαρτάται κυρίως από τις παγκόσμιες σταθερές $\hbar$, m_e και a_B, αφού είναι τα ηλεκτρόνια κυρίως που συμβάλλουν στην εσωτερική κινητική ενέργεια του μορίου (στο σύστημα που το κέντρο μάζας είναι ακίνητο). Ο μόνος[3] συνδυασμός των τριών αυτών ποσοτήτων που έχει

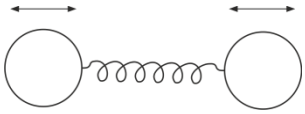
---

[3] Ο συνδυασμός e^2/a_B είναι ίσος με τον $\hbar^2/m_e a_B^2$, αφού $a_B = \hbar^2/m_e e^2$. Θα εμφανισθεί όμως διαφορά όταν γίνει η αντικατάσταση $a_B \to d_0$, που στην πρώτη

διαστάσεις ενέργειας είναι ο εξής: $\hbar^2 / m_e a_B^2$. Θα ακολουθήσουμε, όπως και στην ατομική περίπτωση, την αντικατάσταση του a_B με το κύριο χαρακτηριστικό μήκος του διατο-μικού μορίου, που είναι το μήκος του δεσμού d_0. Έχουμε τότε

$$D \approx |\Delta E(d_0)| = c_D \frac{\hbar^2}{m_e d_0^2} = c_D \frac{\hbar^2}{m_e a_B^2} \frac{a_B^2}{d_0^2} = c_D \frac{27,2\,\text{eV}}{\overline{d}_0^2}. \qquad (10.5)$$

3) *Ιδιοσυχνότητα ω ταλάντωσης του μορίου :* Στην περίπτωση αυτή εκτός από τις βασικές



φυσικές σταθερές $\hbar$, m_e, a_B (ή $\hbar$, m_e, e,) θα πρέπει να εμφανισθεί και η ατομική μάζα (πιο σωστά η ανηγμένη μάζα m_r των δύο ατόμων ή ιόντων), αφού είναι τα άτομα (ή τα ιόντα) που ταλαντεύονται. Η ποσό-τητα $\hbar\omega$ έχει διαστάσεις ενέργειας και επομένως πρέπει να έχει την μορφή $\hbar\omega = (\hbar^2 / m_e a_B^2) f_2(m_r / m_e)$ ή, ισοδύναμα, τη μορφή $\hbar\omega = (e^2 / a_B) f_1(m_r / m_e)$, όπου f_i είναι μια συνάρτηση του αδιάστατου λό-γου m_r / m_e. Η αντικατάσταση $a_B \to d_0$ προσεγγίζει καλύτερα τα πει-ραματικά δεδομένα αν γίνει στην πρώτη έκφραση παρά στη δεύτερη. Η συνάρτηση $f_i(m_r / m_e)$ μπορεί να προσδιορισθεί αμέσως (με τη αορι-στία ενός αριθμητικού συντελεστή) εάν θυμηθούμε από τη στοιχειώδη φυσική ότι στην αρμονική ταλάντωση η μάζα m του ταλαντευόμενου υλικού σημείου εμφανίζεται ως $1/\sqrt{m}$. Επομένως $f_i(m_r / m_e) = = c_i \sqrt{m_e / m_r}$. Εναλλακτικά μπορούμε να αποφύγουμε την απροσδιο-ριστία του αριθμητικού συντελεστή και να καταλήξουμε στην $\hbar\omega = (\hbar^2 / m_e d_0^2) f(m_r / m_e)$, εάν ξεκινήσουμε από την ακριβή σχέση $\omega = (\kappa / m_r)^{1/2}$, χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (10.3), $\kappa = 0,9 D / \ell^2$, για το κ και θέσουμε $\ell \approx d_0 / 5$, $m_r = 1823 m_e A_{B,r}$, οπότε

περίπτωση θα δώσει $(e^2 / a_B)(a_B / d_0)$ ενώ στη δεύτερη $(\hbar^2 / m_e a_B^2)(a_B^2 / d_0^2)$. Για κάθε ποσότητα επιλέγουμε μεταξύ των δύο εκφράσεων αυτή που συνολικά προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα (συνήθως η δεύτερη).

$$\hbar\omega = \frac{\hbar}{\ell}\sqrt{\frac{0,9D}{1823 m_e A_{B,r}}} = \frac{\hbar}{\ell}\sqrt{\frac{0,9\hbar^2}{1823 m_e A_{B,r} m_e d_0^2}} = \frac{3023}{\bar{d}_0^{\,2}\sqrt{A_{B,r}}}\,\text{meV}\,. \qquad (10.6)$$

Επανερχόμενοι στη δεύτερη έκφραση για το $\hbar\omega$ (που περιέχει έναν απροσδιόριστο αριθμητικό παράγοντα c_1), έχουμε

$$\hbar\omega = c_1 \frac{e^2}{a_B}\frac{a_B}{d_0}\sqrt{\frac{m_e}{m_r}} = 27,2\,\text{eV} \times c_1 \frac{a_B}{d_0}\sqrt{\frac{m_e}{m_r}} = c_1 \frac{637}{\bar{d}_0\sqrt{A_{B,r}}}\,\text{meV}\,. \quad (10.6')$$

Συγκρίνοντας την (10.5) με την (10.6) βλέπουμε ότι η κλίμακα των ταλαντωτικών ενεργειών είναι μικρότερη από αυτήν των ηλεκτρονικών κατά ένα παράγοντα της τάξεως του $4,7\sqrt{m_e / m_r}$, που περιέχει το λόγο της ηλεκτρονικής μάζας προς την ιοντική υψωμένο στη δύναμη 1/2. Σημειώστε ότι η κλίμακα της περιστροφικής ενέργειας $\hbar^2 / J = \hbar^2 / m_r d^2$ είναι μικρότερη από αυτήν της ηλεκτρονικής ενέργειας κατά ένα παράγοντα m_e / m_r. Αν θεωρήσουμε μια τυπική περίπτωση όπου $m_e / m_r \approx 1/22500$, $d_0 / a_B \approx 3$, $E_{\eta\lambda} \simeq 5\,\text{eV} = 5000\,\text{meV}$, έχουμε

$$E_{\eta\lambda} : E_\tau : E_\pi = 5000 : 150 : 0,22\,\text{meV}\,. \qquad (10.7)$$

Αν συγκρίνουμε αυτές τις τυπικές τιμές με την τιμή της θερμικής ενέργειας $k_B T$, που για $T = 295^o\,\text{K}$ ισούται με $25,4\,\text{meV}$, συμπεραίνουμε ότι σε θερμοκρασία δωματίου οι περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας είναι πλήρως διεγερμένοι, ενώ οι ταλαντωτικοί –τουλάχιστον για μικρά, ελαφριά μόρια όπως αυτά του ατμοσφαιρικού αέρα– είναι σχεδόν πλήρως "παγωμένοι". Φυσικά πλήρως "παγωμένοι" είναι και οι ηλεκτρονικοί βαθμοί ελευθερίας εκτός περιπτώσεων που η βασική στάθμη εμφανίζει δομή λεπτής υφής (βλ. [24], σελ. 416–424).

4) *Μήκος* ℓ του τύπου (10.2): Το μήκος ℓ μπορεί να υπολογισθεί από τα πειραματικά δεδομένα για τα $D, \hbar\omega, m_r$ βάσει του τύπου (10.3), $\ell^2 = 0,9\left|\Delta E(d_0)\right| / \kappa$, και με τη βοήθεια των τύπων $\left|\Delta E(d_0)\right| = D + \frac{1}{2}\hbar\omega$ $\omega = \sqrt{\kappa / m_r}$. Με όμοιο τρόπο μπορεί να εκτιμηθεί η αντίστοιχη τιμή του ℓ με βάση τους προσεγγιστικούς τύπους (10.5) και (10.6) της διαστατικής ανάλυσης.

Στον Πιν. 10.1 συγκρίνονται οι πειραματικές τιμές των μεγεθών d_0, D, $\hbar\omega$, (και ℓ / d_0) με τις εκτιμήσεις που προέκυψαν από την δια-

στατική ανάλυση για πέντε χαρακτηριστικά μόρια. Στις στήλες εκτιμήσεις (εκτ.) οι αναφερόμενες τιμές προέκυψαν από τον τύπο (10.4) με $c_d = 1$ και από τους τύπους (10.5) με $c_D = 1$, (10.6΄) με $c_1 = 1$ και (10.6), βασισμένο στον τύπο, $\ell^2 = 0,9\left|E(d_0)\right| / \kappa$, χρησιμοποιώντας παντού την εκτιμηθείσα τιμή του d_0 με $c_d = 1$. Στον Πιν. 10.1 έχουν επίσης αναγραφεί και οι τιμές των c_d που θα καθιστούσαν τις εκτιμη-θείσες τιμές ίσες με τις πειραματικές τιμές. Οι αποκλίσεις αυτών των αριθμητικών συντελεστών από τη μονάδα οφείλονται στην ποικιλία των χημικών δεσμών που θα αναφέρουμε πιο κάτω (τριπλός, διπλός, μονός χημικός δεσμός) όπως και ομοιοπολικός και ιοντικός χημικός δεσμός. Σε πολυατομικά μόρια η κατάσταση είναι φυσικά πιο περί-πλοκη. Οι τύποι (10.4) και (10.5) εξακολουθούν να δίνουν μια χον-τρική εκτίμηση του μήκους του δεσμού και της ενέργειας του δεσμού αντιστοίχως. Σ' ένα μόριο που έχει N_a άτομα, υπάρχουν εν γένει $3N_a - 6$ (ή $3N_a - 5$) ιδιοταλαντώσεις. Ο τύπος (10.6) μπορεί να δώσει μια χοντρική εκτίμηση της μέγιστης ιδιοσυχνότητας μεταξύ όλων αυτών των ιδιοταλαντώσεων. Ο αριθμός τους, $3N_a - 6$, προκύπτει από τους 3 βαθμούς ελευθερίας ανά άτομο μείον τους έξη βαθμούς ελευ-θερίας που αντιστοιχούν σε 3 ανεξάρτητες μετατοπίσεις ως στερεό

Πιν. 10.1 Σύγκριση πειραματικών δεδομένων για ορισμένα χαρακτηριστικά διατομικά μόρια με εκτιμήσεις βασισμένες σε διαστατική ανάλυση που προέκυψαν ως εξής: 1η γραμμή από (10.4) με c_d=1, 3η γραμμή από (10.5) με c_D=1 και $\overline{d}_0$ όπως οι εκτιμήσεις, 5η γραμμή από (10.6) με $\overline{d}_0$ όπως οι εκτιμήσεις, 6η γραμμή από (10.6΄) με $\overline{d}_0$ όπως οι εκτιμήσεις και $c_1 = 1$. Η (10.6) παράγει εν γένει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από αυτά της (10.6΄).

	H_2		N_2		O_2		Na_2		AgI	
	πειρ.	εκτ.	πειρ.	εκτ.	πειρ.	εκτ.	πειρ.	εκτ.	πειρ.	εκτ.
d_0(A) c_d	0,74	1,06 0,7	1,098	1,04 1,06	1,21	0,96* 1,26	3,08	3,426 0,899	2,54	2,33 1,09
D(eV)	4,48	6,78	9,79	7,04	5,165	8,27	0,775	0,649	2,42	1,40
$A_{B,r}$	0,5		7		8		11,5		58,3	
$\hbar\omega$(meV) $\hbar\omega$(meV)	516	1066 450	292	296 123	196	325 116	19,7	21,3 29	25,6	20,4 19
ℓ / d_o	0,47		0,23		0,21		0,26		0,19	

*Η εκτίμηση 0,96 Å βασίστηκε στην υπολογισμένη τιμή $r_a = 0,48$ Å (πηγή: internet). Εάν χρησιμοποιηθεί η λεγόμενη εμπειρική τιμή του $r_a = 0,60$ Å τότε: $d_0 = 1,2$ Å, $c_d \approx 1$, D = = 5, 29 eV, $\hbar\omega$ = 208 meV.

σώμα και σε 3 ανεξάρτητες περιστροφές ως στερεό σώμα. (Για γραμμικά μόρια οι ανεξάρτητες περιστροφές ως στερεό σώμα είναι 2).

10.3 Γραμμικός συνδυασμός ατομικών τροχιακών (Linear Combination of Atomic Orbitals (LCAO))

Η φυσική αιτία που οδηγεί στη μείωση της ολικής ενέργειας κατά *D* (και επομένως στο σχηματισμό μορίου) όταν δύο άτομα πλησιάζουν μεταξύ τους είναι η αναδιοργάνωση των ατομικών τροχιακών (κυρίως των κατειλημμένων με την υψηλότερη ενέργεια) με στόχο την ελαχιστοποίηση της ολικής ενέργειας για την όποια δεδομένη τιμή της απόστασής τους *d*. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, όταν η απόσταση, *d*, είναι πολύ μεγαλύτερη του d_0, η αναδιοργάνωση του κάθε ατομικού τροχιακού περιορίζεται στα όρια του κάθε ατόμου και είναι υπεύθυνη για τη μείωση της ενέργειας που δίνεται από τον τύπο (10.1). Όταν τα άτομα πλησιάσουν σε απόσταση *d* συγκρίσιμη με το άθροισμα των ακτίνων τους, η αναδιοργάνωση είναι πολύ πιο δραστική: Το ατομικό τροχιακό του ατόμου 1 απλώνεται σε κάποιο βαθμό και στο άτομο 2 και αντιστρόφως[4]. Προκύπτουν έτσι δύο **μοριακά τροχιακά**, ένα με ενεργειακή στάθμη χαμηλότερη από τις στάθμες και των δύο αρχικών ατομικών τροχιακών και ένα με ενεργειακή στάθμη υψηλότερη από τις στάθμες και των δύο αρχικών ατομικών τροχιακών. Εάν τα αρχικά ατομικά τροχιακά ήσαν πλήρως συμπληρωμένα με ηλεκτρόνια (όπως στα ευγενή αέρια) και τα δύο προκύπτοντα μοριακά τροχιακά θα είναι πλήρως συμπληρωμένα με αποτέλεσμα να μην προκύψει μείωση της ολικής ενέργειας (πέραν της van der Waals) και να μη σχηματισθεί μόριο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Αντίθετα, εάν το καθένα από τα δύο αρχικά ατομικά τροχιακά ήταν εν μέρει μόνο κατειλημμένο (με ένα ηλεκτρόνιο) (όπως, π.χ. στο μόριο Na_2 ή στο μόριο KI) τότε και τα δύο ηλεκτρόνια θα εποικίσουν το κατώτερο μοριακό τροχιακό και επομένως θα προκύψει μια σαφής ενεργειακή μείωση και κατά συνέπεια σχηματισμός διατομικού μορίου. Αυτές οι ιδέες μπορούν να ποσοτικοποιηθούν ως εξής: Εάν ϕ_1 και ϕ_2 είναι τα υψηλότερης ενέργειας κατειλημμένα ατομικά τροχιακά του ατόμου 1 και του ατόμου 2 με αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες ε_1 και ε_2, ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$), τότε ένα μοριακό τροχιακό, ψ, που θα είναι απλωμένο και στο ένα άτομο και στο άλλο θα έχει, στην απλούστερη δυνατή περίπτωση, την ακόλουθη μορφή[5]:

---

[4] Όταν το άπλωμα είναι εξίσου στα δύο άτομα έχουμε τον λεγόμενο ομοιοπολικό δεσμό. Όταν το άπλωμα είναι ανισομερές, οπότε προκύπτει καθαρή μεταφορά μερική ή ολική ηλεκτρονίου, έχουμε τον ετεροπολικό ή ιοντικό δεσμό.

[5] Η μορφή αυτή δικαιολογεί το όνομα γραμμικός συνδυασμός ατομικών τροχιακών για το μοριακό τροχιακό ψ.

$$\psi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 , \tag{10.8}$$

όπου η ποσότητα $c_1^2 / (c_1^2 + c_2^2)$ δίνει την πιθανότητα να είναι το ηλεκτρόνιο στο άτομο 1 και η ποσότητα $c_2^2 / (c_1^2 + c_2^2)$ να είναι στο άτομο 2. Η ενέργεια του μοριακού τροχιακού (όπως και κάθε άλλη παρατηρήσιμη ποσότητα) εξαρτάται διγραμμικά από το ψ (δηλαδή εξαρτάται από ένα συνδυασμό της μορφής $\psi^* X \psi$ (βλ. υποσ. 7, σελ. 45)). Χωρίς να παρουσιάσουμε τα ενδιάμεσα βήματα θα δώσουμε το τελικό αποτέλεσμα για την ενέργεια που αντιστοιχεί στο μοριακό τροχιακό ψ του τύπου (10.8):

$$\varepsilon = \frac{c_1^2 \varepsilon_1 + c_2^2 \varepsilon_2 + 2 c_1 c_2 V_2}{c_1^2 + c_2^2} , \tag{10.9}$$

όπου ο όρος $2c_1 c_2 V_2$ προέρχεται από το «διπλάσιο γινόμενο» στην ανάπτυξη του «$\psi^* X \psi$» και η ποσότητα $V_2 \equiv \langle \phi_1 | \hat{H} | \phi_2 \rangle$ (που έχει διαστάσεις ενέργειας) είναι *τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η επικάλυψη των ατομικών τροχιακών* ϕ_1 *και* ϕ_2. Όπως φαίνεται από τη σχέση (10.9), η τιμή του ε εξαρτάται από το λόγο[6] $c_2 / c_1 \equiv x$. Εφαρμόζοντας (για μια ακόμη φορά)

---

[6] Αντί να διαιρέσουμε με c_1^2 και μετά να παραγωγίσουμε ως προς $x = c_2 / c_1$, θα μπορούσαμε να παραγωγίσουμε εξ αρχής ως προς c_1 και και ως προς c_2 και να θέσουμε τις μερικές αυτές παραγώγους ίσες με μηδέν. Θα είχαμε τότε:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} = \frac{(2c_1\varepsilon_1 + 2c_2 V_2)(c_1^2 + c_2^2) - (c_1^2 \varepsilon_1 + c_2^2 \varepsilon_2 + 2c_1 c_2 V_2) 2c_1}{(c_1^2 + c_2^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{c_1^2 + c_2^2} [2c_1\varepsilon_1 + 2c_2 V_2 - 2\varepsilon c_1] = 0 , \text{ λόγω (10.9)},$$

ή

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow (\varepsilon_1 - \varepsilon) c_1 + c_2 V_2 = 0 .} \tag{10.10}$$

Όμοια:

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} = 0 \Rightarrow (\varepsilon_2 - \varepsilon) c_2 + c_1 V_2 = 0 .} \tag{10.10΄}$$

την αρχή ελαχιστοποίησης της ενέργειας, παραγωγίζουμε το ε ως προς x και θέτουμε την παράγωγο ίση με μηδέν. Βρίσκουμε τότε (ορίζοντας το V_3 ως τη θετική ημιδιαφορά των ε_1 και ε_2, $V_3 \equiv (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2 \geq 0$) ,ότι

$$V_2 x^2 - 2V_3 x - V_2 = 0, \quad V_3 \equiv \{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2\} \geq 0 . \tag{10.11}$$

Άσκηση 10.1: Λύστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση (10.11) και για κάθε λύση προσδιορίστε το λόγο $c_j^2/(c_1^2 + c_2^2)$, $j = 1, 2$ που δίνει την πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στο άτομο *j* όντας στην ψ.

Η εξίσωση (10.11) έχει δύο λύσεις: Η πρώτη έχει ως εξής:

$$x \equiv \frac{c_2}{c_1} = -\frac{V_2}{|V_2|}\frac{1+a_p}{\sqrt{1-a_p^2}} \;\Rightarrow\; \frac{c_2^2}{c_1^2 + c_2^2} = \frac{1+a_p}{2} \quad \text{και} \quad \frac{c_1^2}{c_1^2 + c_2^2} = \frac{1-a_p}{2}, \tag{10.12}$$

όπου

$$a_p \equiv \frac{V_3}{\sqrt{V_3^2 + V_2^2}}, \tag{10.13}$$

είναι εξ ορισμού *ο δείκτης ιοντικότητας ή ετεροπολικότητας* **του δεσμού**. Όταν $a_p \to 1$, ο δεσμός είναι σχεδόν 100% ιοντικός, ενώ όταν $a_p \to 0$, ο δεσμός είναι 100% ομοιοπολικός. Η ενέργεια, ε, που αντιστοιχεί στη λύση (10.12) ισούται με

$$\varepsilon = \varepsilon_b = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \sqrt{V_3^2 + V_2^2} \tag{10.14}$$

και είναι προφανώς μικρότερη από την ατομική στάθμη ε_2 (που εξ ορισμού ελήφθη ως η μικρότερη μεταξύ των ε_1 και ε_2· όταν V_2=0, τότε ε_b=ε_2). Άρα η λύση (10.12) δίνει το μοριακό τροχιακό με την ελάχιστη ενέργεια που ονομάζεται **δεσμικό μοριακό τροχιακό** (αφού ο σχηματισμός του χημικού δεσμού αντιστοιχεί σ' αυτό το τροχιακό).

Η δεύτερη λύση της εξίσωσης (10.11) έχει ως εξής:

Για να έχει λύση διάφορη του μηδενός το σύστημα, (10.10,.10΄) θα πρέπει $(\varepsilon_1 - \varepsilon)(\varepsilon_2 - \varepsilon) - V_2^2 = 0$ από την οποία προκύπτει ότι το ε είναι αυτό της σχέσης (10.14) ή αυτό της σχέσης (10.16). Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές του ε σε οποιαδήποτε από τις δύο πιο πάνω σχέσεις βρίσκουμε το λόγο c_2/c_1, όπως αυτός δίνεται στις σχέσεις (10.12) ή (10.15).

$$\boxed{x \equiv \frac{c_2}{c_1} = \frac{V_2}{|V_2|}\frac{1-a_p}{\sqrt{1-a_p^2}}, \;\Rightarrow\; \frac{c_2^2}{c_1^2+c_2^2} = \frac{1-a_p}{2} \;\text{ και }\; \frac{c_1^2}{c_1^2+c_2^2} = \frac{1+a_p}{2}}, \quad (10.15)$$

με ενέργεια ε ίση με

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_a = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + \sqrt{V_3^2+V_2^2}} \quad (10.16)$$

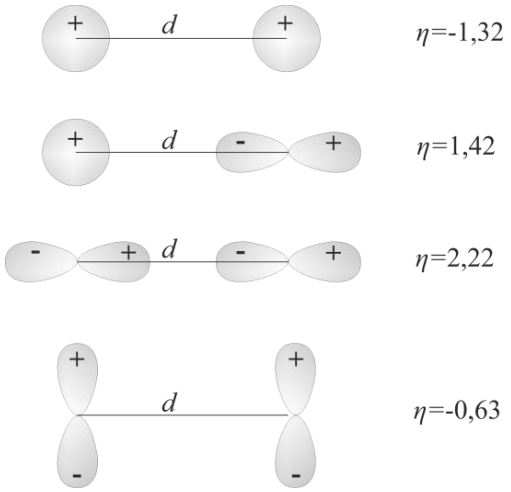
και αντιστοιχεί στο μοριακό τροχιακό με την υψηλότερη ενέργεια[7] το οποίο ονομάζεται **αντιδεσμικό μοριακό τροχιακό**, λόγω του ότι δεν οδηγεί σε δημιουργία χημικού δεσμού.

Η ενεργειακή διαφορά των δύο μοριακών σταθμών ισούται με $2\sqrt{V_3^2+V_2^2}$, που στην περίπτωση 100% ομοιοπολικού δεσμού (δηλαδή V_3 =0) γίνεται $2|V_2|$. Η ποσότητα $2\sqrt{V_3^2+V_2^2}$ δίνει στην παρούσα περίπτωση την ενεργειακή διαφορά μεταξύ της θεμελιώδους κατάστασης του μορίου και της πρώτης διεγερμένης. Το ενεργειακό κέρδος, λόγω του σχηματισμού μορίου (όπως προκύπτει από τον πιο πάνω υπολογισμό), ισούται με $|2\varepsilon_b - (\varepsilon_1+\varepsilon_2)| = 2\sqrt{V_3^2+V_2^2}$. Στη πραγματικότητα το ενεργειακό κέρδος είναι σημαντικά μικρότερο (περίπου το μισό ή και ακόμη μικρότερο) γιατί το να έλθουν τα δύο ηλεκτρόνια στο ίδιο μοριακό τροχιακό δημιουργεί μια πρόσθετη απωστική ενέργεια Coulomb μεταξύ τους. Η πρόσθετη αυτή απωστική ενέργεια για ομοιοπολικό δεσμό, είναι περίπου ίση με $|V_2| d_0^3 / d^3$, όταν το d δεν διαφέρει πολύ από το d_0. Εάν κανείς θελήσει να υπολογίσει αριθμητικές τιμές προκειμένου να συγκρίνει τα θεωρητικά αποτελέσματα με τα πειραματικά δεδομένα (και να ελέγξει έτσι την αξιοπιστία της θεωρίας και των σχετικών προσεγγίσεων) θα πρέπει να γνωρίζει τις τιμές των V_3 και V_2. Οι τιμές του $V_3 \equiv (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$ προκύπτουν από τις τιμές των ε_1, ε_2 που έχουν υπολογισθεί για τα διάφορα άτομα και δίνονται στον σχετικό πίνακα στο τέλος του κεφαλαίου, σελ. 244-245. Οι τιμές του V_2, προκειμένου για τα εξώτερα κατειλημμένα (ή ημικατειλημμένα) τροχιακά *s* και *p*, μπορούν να εκτιμηθούν από τους προσεγγιστικούς τύπους του Harrison (βλέπε Σχ. 10.2 στη επόμενη σελίδα).

$$\boxed{V_2 = \eta \frac{\hbar^2}{m_e d^2}, \;\; d \approx d_0}, \quad (10.17)$$

[7] Ο μηδενισμός της παραγώγου δίνει και το ελάχιστο και το μέγιστο.

όπου η είναι αριθμητικός παράγοντας, που εξαρτάται από το είδος και τον προσανατολισμό των ατομικών τροχιακών και d_0 είναι το μήκος του δεσμού. Οι αριθμητικές τιμές του η δίνονται στο Σχ. 10.2



Σχ. 10.2 Τα μη διαγώνια στοιχεία της χαμιλτονιανής μεταξύ άμεσων γειτόνων δίνονται από τον γενικό τύπο $V_2 = \eta\hbar^2 / m_e d_0^2$,όπου το d_0 είναι το μήκος του δεσμού και το η εξαρτάται από το είδος των ατομικών τροχιακών (*s*, *p*) και τον προσανατολισμό του *p* (ή των *p*) σχετικά με τη κατεύθυνση του δεσμού, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για την περίπτωση όπου το p_x είναι στα αριστερά του *s*, η=–1,42. Εάν ο προσανατολισμός του *p* (ή των *p*) είναι άλλος από τους εικονιζόμενους αναλύστε το κάθε *p* σε κάθετη και παράλληλη ως προς δεσμό συνιστώσα και προσέξτε πού η συμμετρία συνεπάγεται μηδενισμό

10.4 Υβριδισμός ατομικών τροχιακών

Συνήθως στο χημικό δεσμό δεν μετέχει ένα μόνο τροχιακό από κάθε άτομο, αλλά περισσότερα. Επίσης δεν έχουμε μόνο διατομικά μόρια αλλά και πολυατομικά. Στη γενική λοιπόν περίπτωση ένα μοριακό τροχιακό ψ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός πολλών ατομικών τροχιακών

$$\boxed{\psi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{a} c_{ia}\phi_{ia}} \ , \qquad (10.18)$$

όπου ϕ_{ia} είναι το ατομικό τροχιακό τύπου a ($a \equiv n, \ell, m$) του ατόμου υπ' αρ. i (i=1,...,N , όπου N ο αριθμός των ατόμων στο υπό μελέτη μόριο). *Τα ατομικά τροχιακά που συμμετέχουν στην (10.18) είναι εκείνα που είναι ημικατειλημμένα στο κάθε άτομο και ενδεχομένως τα γειτονικά τους από ενεργειακή άποψη.* Μπορούμε και πάλι να υπολογίσουμε την ενέργεια ε του μοριακού τροχιακού ψ (που θα είναι συνάρτηση των διαφόρων c_{ia}) και να

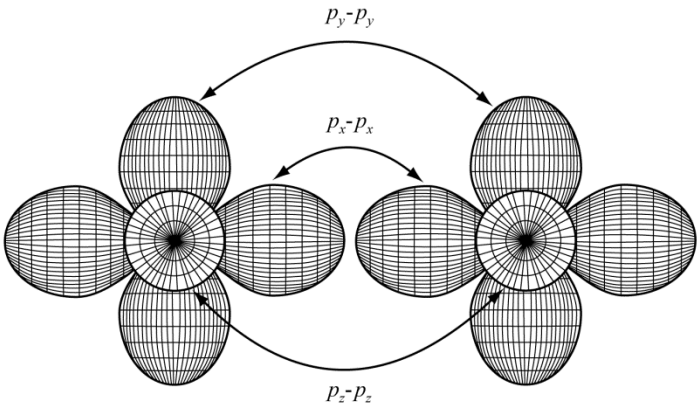
την ακροτατοποιήσουμε ως προς τις μεταβλητές c_{ia}. Θα προκύψει τότε ένα σύστημα πρωτοβάθμιων εξισώσεων για τις ποσότητες c_{ia} (ανάλογο των εξισώσεων (10.10) και (10.10΄) στην υποσημείωση 6 της σελ. 223) που θα έχει τόσες λύσεις όσες και ο ολικός αριθμός των ατομικών τροχιακών που εισέρχονται στον τύπο (10.18). Είναι φανερό ότι εν γένει θα χρειασθεί ηλεκτρονικός υπολογιστής για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων αυτών. Στις περιπτώσεις αυτές είναι κανείς διατεθειμένος να θυσιάσει την ακρίβεια προκειμένου να πετύχει απλοποίηση των πράξεων (έτσι που να μπορούν να γίνουν σε λίγες γραμμές και με το χέρι) και να έχει κατά συνέπεια μια άμεση φυσική εικόνα και ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Η κεντρική ιδέα είναι να προσπαθήσει να αναγάγει κανείς το περίπλοκο πρόβλημα (10.18) στο απλούστερο (10.9) χρησιμοποιώντας *ανεξάρτητα* ζεύγη τροχιακών, τέτοια ώστε το κάθε ζεύγος να αποτελείται από ένα τροχιακό από ένα άτομο και ένα από ένα άλλο γειτονικό άτομο. Το κάθε ζεύγος, αφού είναι *ανεξάρτητο* (ή σχεδόν ανεξάρτητο) από τα υπόλοιπα τροχιακά, μπορεί να εξετασθεί από μόνο του χωριστά από τα άλλα ζεύγη και έτσι για κάθε ανεξάρτητο ζεύγος αναγόμαστε στο απλό πρόβλημα (10.9) που έχουμε ήδη λύσει. Η ανεξαρτησία απαιτεί ότι τα δύο τροχιακά που αποτελούν το κάθε ζεύγος πρέπει να έχουν μηδενική ή ελάχιστη επικάλυψη με τα τροχιακά των άλλων ζευγών[8]. Επίσης το κάθε τροχιακό του κάθε ζεύγους θεωρούμε συνήθως ότι φέρει ένα ηλεκτρόνιο (βλ. όμως και άλυτη άσκηση 10.3). Επί πλέον μεταξύ τους τα δύο τροχιακά του κάθε ζεύγους πρέπει να έχουν όσο το δυνατόν *μεγαλύτερη επικάλυψη* ώστε να παράγουν μεγάλες τιμές του αντίστοιχου $|V_2|$ και να οδηγήσουν έτσι σε ελαχιστοποίηση της ολικής ενέργειας. Αυτές οι απαιτήσεις για τα τροχιακά του κάθε ζεύγους ικανοποιούνται σε ορισμένες περιπτώσεις από τα ατομικά τροχιακά. Π.χ., για το μόριο N_2 τα ημικατειλημμένα τροχιακά $2p_x$ και $2p_y$ και $2p_z$ του κάθε ατόμου μπορούν να φτιάξουν τρία ζεύγη δεσμικών μοριακών τροχιακών ($2p_{x1}$ και $2p_{x2}$, $2p_{y1}$ και $2p_{y2}$, $2p_{z1}$ και $2p_{z2}$) που το καθένα τους θα εποικισθεί από δύο ηλεκτόνια και επομένως θα εμφανισθεί ένας *τριπλός δεσμός,* όπως φαίνεται στο Σχ. 10.3. Είναι φανερό από το σχήμα ότι τα τρία ζεύγη είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους και ότι το V_2 που αντιστοιχεί στο ζεύγος p_{x1} και p_{x2} θα είναι κατ' απόλυτο τιμή αρκετά μεγαλύτερο (λόγω μεγαλύτερης αμοιβαίας επικάλυψης) από το $|V_2|$ που αντιστοιχεί στο ζεύγος p_{y1} και p_{y2} ή στο ζεύγος p_{z1} και p_{z2}. Πράγματι, ο συντελεστής η στον τύπο (10.17) είναι ίσος με 2,22 για το ζεύγος p_{x1}, p_{x2} και –0,63 για τα ζεύγη p_{y1}, p_{y2} και p_{z1}, p_{z2}.

[8] Σε πιο τεχνική γλώσσα ο περιορισμός αυτός σημαίνει ότι το κάθε τροχιακό του κάθε ζεύγους πρέπει να είναι *ορθογώνιο* με όλα τα άλλα τροχιακά. Επί πλέον το στοιχείο πίνακα της χαμιλτονιανής μεταξύ δύο τροχιακών που ανήκουν σε διαφορετικά ζεύγη πρέπει να είναι *πολύ μικρότερο* από το $|V_2|$ του (κάθε) ζεύγους ώστε να μπορεί να παραλειφθεί σε πρώτη προσέγγιση.

Αντίστοιχη είναι και η περίπτωση του μορίου O_2 όπου εμφανίζεται ένας διπλός δεσμός μεταξύ p_{x1} και p_{x2} καθώς και p_{y1} και p_{y2} (τα ατομικά τροχιακά p_{z1} και p_{z2} είναι διπλά κατειλημένα στο οξυγόνο και γι' αυτό δεν συμμετέχουν στο δεσμό).

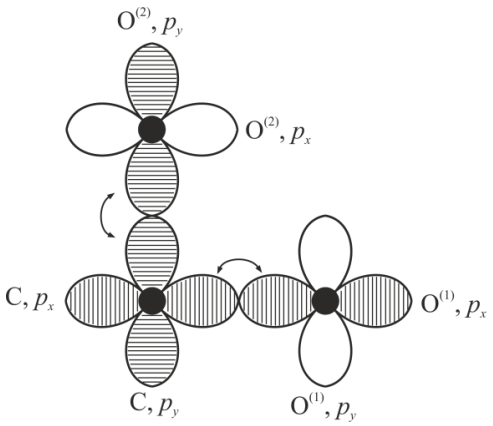
Συνήθως δεν είμαστε τόσο τυχεροί ώστε η δημιουργία των σχεδόν ανεξάρτητων ζευγών να είναι τόσο προφανής όσο στην περίπτωση του N_2 ή

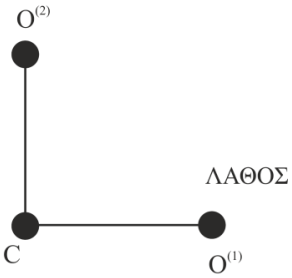


:N≡N:

Σχ. 10.3 Τα ημικατειλημμένα τροχιακά p_{x1}, p_{y1} και p_{z1} του ατόμου 1 και p_{x2}, p_{y2} και p_{z2} του ατόμου 2 (τα τροχιακά p_{z1} και p_{z2} είναι κάθετα στο επίπεδο της σελίδας και εικονίζονται ως κύκλοι στην κάτοψη) δημιουργούν στο άζωτο ένα τριπλό δεσμό. (Βλ. [42]). Εικονίζεται και ο συμβολισμός κατά Lewis του N_2 με το κάθε ζεύγος τελειών να παριστά το ζεύγος ηλεκτρονίων που είναι στο τροχιακό 2s του κάθε ατόμου και δεν συμμετέχει σε δεσμό

του O_2. Ας θεωρήσουμε το σημαντικό μόριο του διοξιδείου του άνθρακα, CO_2 Αν ακολουθήσουμε τον κανόνα ότι τα μόνα *ατομικά* τροχιακά που μπορούν να συμμετάσχουν σε χημικό δεσμό είναι εκείνα που φέρουν ένα





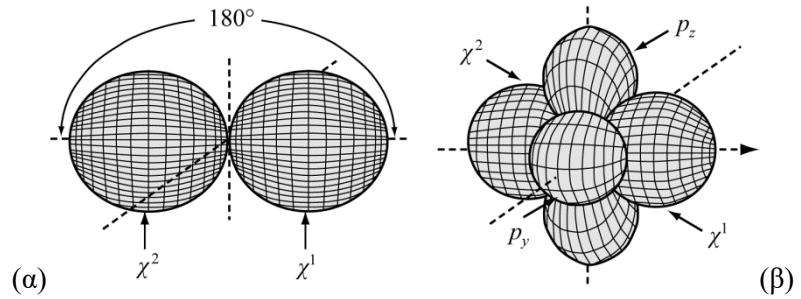
Σχ. 10.4 Η δομή που θα είχε το μόριο του διοξειδίου του άνθρακα αν χρησιμοποιούσαμε μόνο ατομικά τροχιακά που φέρουν ένα μόνο ηλεκτρόνιο. Η δομή αυτή με γωνία 90 μοιρών δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα

μόνο ηλεκτρόνιο, τότε το μόριο CO_2 θα είχε τη μορφή του Σχ. 10.4 με ένα δεσμό μεταξύ του p_x του άνθρακα και του p_x του ενός οξυγόνου, του υπ' αρ. 1 (κάθετα διαγραμμισμένα ατομικά τροχιακά στο Σχ. 10.4) και ένα άλλο δεσμό μεταξύ του p_y του άνθρακα και του p_y του άλλου οξυγόνου, του υπ' αριθμ. 2 (οριζόντια διαγραμμισμένα ατομικά τροχιακά στο Σχ. 10.4). Αυτή η υποτιθέμενη δομή του CO_2, που προβλέπει γωνία 90 μοιρών, αφήνει εντελώς αναξιοποίητα δύο τροχιακά, το τροχιακό p_y του οξυγόνου υπ'αρ. 1 και το τροχιακό p_x του οξυγόνου υπ'αριθμ. 2 και επομένως δεν φαίνεται να επιτυγχάνει την ελαχιστοποίηση της ενέργειας, πράγμα που σημαίνει ότι η δομή αυτή δεν είναι η πραγματική. Για να αξιοποιηθούν και τα τέσσερα τροχιακά των δύο οξυγόνων θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν τέσσερα τροχιακά από τον άνθρακα, και η μόνη επιλογή είναι τα τρία $2p_x$, $2p_y$, $2p_z$ και το $2s$ που είναι όμως διπλά κατειλημμένο. Τα τέσσερα αυτά τροχιακά του άνθρακα θα πρέπει όμως να αναμιχθούν εν μέρει ή εν όλω ώστε το καθένα από αυτά τα αναμιγμένα τέσσερα τροχιακά να εποικισθεί από ένα ηλεκτρόνιο από τα τέσσερα του άνθρακα που ήσαν δύο στο $2s$ και από ένα στα $2p_x$ και $2p_y$. Έτσι έχουμε την ιδέα των **υβριδικών ατομικών τροχιακών,** τα οποία είναι κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός ατομικών τροχιακών του *ίδιου* ατόμου[9] που το καθένα τους εποικίζεται από ένα μόνο ηλεκτρόνιο.

Για να δευκρινίσουμε την ιδέα των υβριδικών ατομικών τροχιακών ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του μορίου CO_2 και ας υβριδίσουμε μεταξύ τους τα τροχιακά $2s$ και $2p_x$ του ατόμου του άνθρακα και ας αφήσουμε ανυβρίδιστα τα τροχιακά του, $2p_y$ και $2p_z$. Οι συντελεστές των $2s$ και $2p_x$ θα επιλεγούν ισοβαρώς και έτσι τα δύο υβριδικά ατομικά τροχιακά του άνθρακα είναι τα ακόλουθα: $\chi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + p_x)$, και $\chi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s - p_x)$, με κατεύθυνση το μεν πρώτο κυρίως προς τον θετικό άξονα των x, το δε δεύτερο κυρίως προς τον αρνητικό άξονα των x όπως φαίνεται στο Σχ. 10.5α. Αυτά τα δύο υβριδικά τροχιακά είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Ο συντελεστής $1/\sqrt{2}$ εξασφαλίζει ότι και τα δύο υβριδικά τροχιακά είναι νορμαλισμένα. Συνοψίζοντας τα προηγούμενα μπορούμε να πούμε ότι το άτομο του άνθρακα προσέρχεται για το σχηματισμό του μορίου CO_2 όχι με τα τέσσερα ανυβρίδιστα ατομικά του τροχιακά $2s$, $2p_x$, $2p_y$, $2p_z$, αλλά έχοντας κάνει τη

[9] Είναι, δηλαδή, μια *εύλογη προεπιλογή* των συντελεστών c_{ia} στο άθροισμα ως προς a (δηλαδή ως προς τα τροχιακά του κάθε ατόμου i) στη γενική σχέση (10.18) με βάση τα κριτήρια που αναφέραμε πιο πάνω. Η προεπιλογή, αν είναι επιτυχής. μειώνει τον αριθμό των αγνώστων στην (10.18) σε ζεύγη δύο μόνο τροχιακών, χωρίς σημαντικά λάθη.

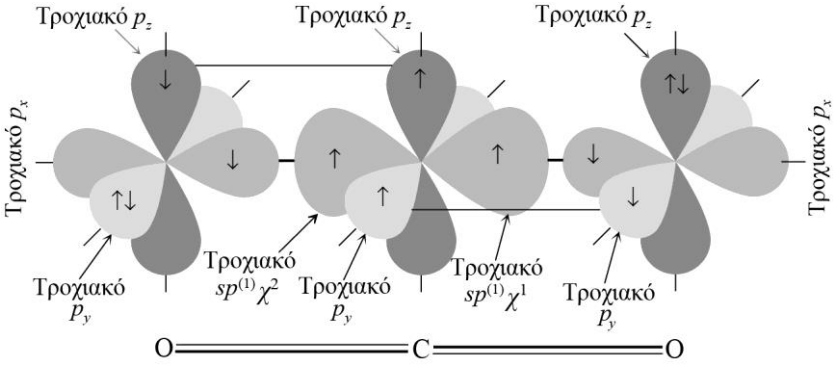
συγκεκριμένη προεπιλογή των τεσσάρων τροχιακών (δύο υβριδισμένων και δύο ανυβρίδιστων) χ^1, χ^2, $2p_y$, $2p_z$, όπως φαίνεται στο Σχ. 10.5β. Τα χ^1, χ^2, $2p_y$, $2p_z$, είναι όλα τους ορθογώνια μεταξύ τους και το καθένα τους φέρει από ένα ηλεκτρόνιο. Η συγκεκριμένη προεπιλογή ονομάζεται υβριδισμός $sp^{(1)}$ επειδή εμπλέκει στον κάθε υβριδισμό ίσου βάρους ατομικό τροχιακό τύπου s και p. Θα δούμε σε λίγο ότι υπάρχουν δύο ακόμη προεπιλογές υβριδισμού που εμπλέκουν σε κάθε υβριδισμένο ατομικό τροχιακό η μεν



Σχ. 10.5 (α) Τα 2 ορθογώνια μεταξύ τους υβριδικά ατομικά τροχιακά $sp^{(1)}$, $\chi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + p_x)$, $\chi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s - p_x)$, αποτελούνται από ισοβαρή γραμμικό συνδυασμό των τροχιακών $2s$ και $2p_x$ του ατόμου του άνθρακα. (β) Η πλήρης προεπιλογή $sp^{(1)}$ των τεσσάρων τροχιακων χ^1, χ^2, $2p_y$, $2p_z$ με την οποία προσέρχεται το άτομο του άνθρακα για το σχηματισμό του μορίου του διοξειδίου του άνθρακα. Η μέση ενέργεια που αντιστοιχεί στα υβριδικά $sp^{(1)}$ είναι $\varepsilon_h = (\varepsilon_s + \varepsilon_p)/2$. Τα υβριδικά τροχιακά εικονίζονται συνήθως για λόγους απλότητας με ένα μόνο (τον πιο μεγάλο) λοβό. (Βλ. [42] σελ.31)

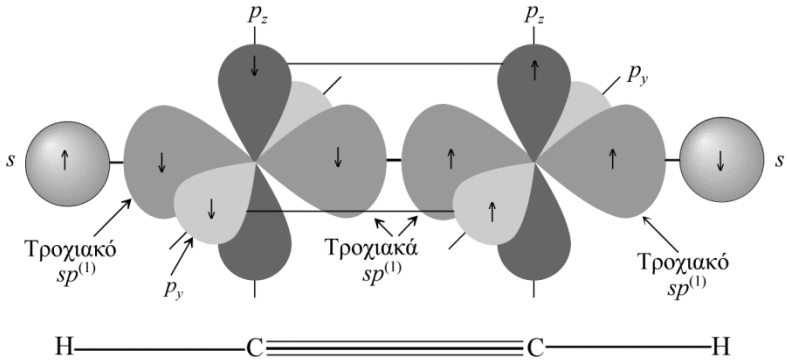
πρώτη τροχιακά τύπου p διπλάσιου βάρους από το s (και γι'αυτό ονομάζεται $sp^{(2)}$), η δε δεύτερη τροχιακά τύπου p τριπλάσιου βάρους από το s (και γι'αυτό ονομάζεται $sp^{(3)}$). Ξαναγυρίζοντας στην προεπιλογή $sp^{(1)}$ ας δούμε, με τη βοήθειά της, πώς σχηματίζεται πραγματικά το μόριο του CO_2 . Όπως φαίνεται στο Σχ. 10.6 σχηματίζονται τώρα τέσσερις δεσμοί, δύο στα δεξιά του ατόμου του άνθρακα (ο ένας μεταξύ του υβριδικού ατομικού τροχιακού χ^1 του άνθρακα και του τροχιακού p_x του ατόμου του οξυγόνου και ο άλλος μεταξύ των τροχιακών p_y του άνθρακα και του οξυγόνου) και δύο στα αριστερά (ο ένας μεταξύ του υβριδικού χ^2 του άνθρακα και του p_x του οξυγόνου και ο άλλος μεταξύ των τροχιακών p_z του άνθρακα και του οξυγόνου· φυσικά τα p_z μπορεί να είναι στα δεξιά και τα p_y στα αριστερά). Έχουμε επομένως δύο ισχυρούς δεσμούς μέσω των υβριδικών χ^1, χ^2 του άνθρακα (ο συντελεστής η γι' αυτά είναι 2,57, αποδείξτε το) και δύο ασθενέστερους δεσμούς (με συντελεστή η=–0,63). Είναι φανερό ότι οι δεσμοί που εικονίζονται στο Σχ. 10.6 θα δώσουν πολύ χαμηλότερη συνολική ενέργεια του μορίου CO_2 από αυτήν του Σχ. 10.4, παρόλο που ο υβριδισμός

$sp^{(1)}$ κόστισε ενέργεια $2\varepsilon_h - 2\varepsilon_s = (\varepsilon_s + \varepsilon_p) - 2\varepsilon_s = = \varepsilon_p - \varepsilon_s = 8{,}32$ eV. Αυτό το κόστος ήταν μια ενεργειακή επένδυση για να προκύψει ένα ακαθάριστο ενεργειακό κέρδος περίπου 20 eV και ένα καθαρό περίπου 12 eV ανά μόριο.



Σχ. 10.6 Η δομή του διοξειδίου του άνθρακα χρησιμοποιεί τα υβριδικά τροχιακά $sp^{(1)}$ του άνθρακα (δηλαδή τα χ^1, χ^2) εκ των οποίων το μεν χ^1 δημιουργεί με το τροχιακά p_x του δεξιού οξυγόνου ένα ισχυρό δεσμό, το δε χ^2 κάνει το ίδιο με το p_x του αριστερού οξυγόνου. Τα τροχιακά p_y στα δεξιά του άνθρακα και τα τροχιακά p_z στα αριστερά του άνθρακα σχηματίζουν δύο συμμετρικούς ασθενείς δεσμούς. Έτσι το μόριο CO_2 προκύπτει γραμμικό

Με τη βοήθεια των υβριδικών τροχιακών $sp^{(1)}$ μπορούμε να κατανοήσουμε επίσης πώς σχηματίζεται το μόριο του ακετυλενίου C_2H_2 (βλέπε Σχ. 10.7).

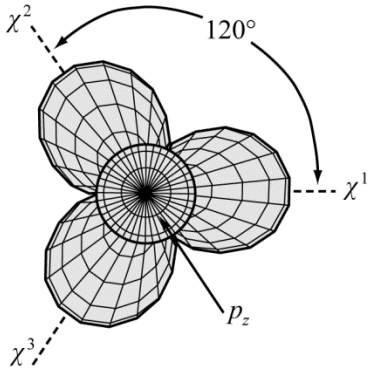


Σχ. 10.7 Η δομή του C_2H_2 όπως προκύπτει με τη βοήθεια των υβριδικών ατομικών τροχιακών $sp^{(1)}$ του άνθρακα. Μεταξύ των δύο ατόμων άνθρακα έχουμε τρία ανεξάρτητα ζεύγη που δημιουργούν τρία δεσμικά μοριακά τροχιακά: Το ζεύγος χ^1, χ^2 των τροχιακών $sp^{(1)}$, το ζεύγος p_{y1}, p_{y2} (κάθετα στη σελίδα) και το ζεύγος p_{z1}, p_{z2}. Το $|V_2|$ που αντιστοιχεί στο πρώτο ζεύγος είναι πολύ μεγαλύτερο ($|\eta| = 3{,}19$, αποδείξτε το) από τα $|V_2|$ των άλλων δύο ζευγών. Έχουμε δύο ακόμη ζεύγη: Το s_1, χ_1^2 μεταξύ του τροχιακού 1s του υδρογόνου αριστερά και

του υβριδικού χ_1^2 του ατόμου 1 του άνθρακα, και το χ_2^1, *s* μεταξύ του υβριδικού χ_2^1 του ατόμου 2 του άνθρακα και του τροχιακού 1*s* του ατόμου του υδρογόνου δεξιά. Στο κάτω μέρος του σχήματος οι δεσμοί εικονίζονται ως γραμμές (η παχύτερη για τον πιο ισχυρό δεσμό).

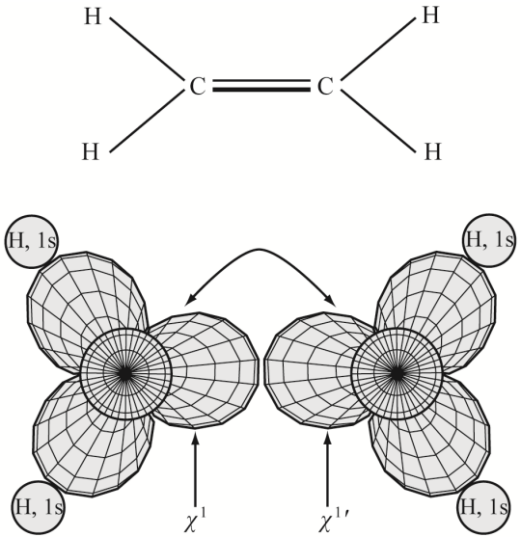
Σημειώστε ότι με τη βοήθεια των υβριδικών ατομικών τροχιακών ένα σύστημα δέκα εξισώσεων με δέκα αγνώστους (ο συνολικός αριθμός τροχιακών που παίζουν ρόλο στο σχηματισμό του C_2H_2 είναι δέκα) έχει αναχθεί προσεγγιστικά σε πέντε ανεξάρτητα συστήματα δύο αγνώστων με δύο εξισώσεις, το καθένα εκ των οποίων λύνεται πολύ εύκολα (βλέπε την ενότητα 10.3 για τη λύση). Επί πλέον χωρίς κανένα υπολογισμό προέκυψε η στερεοχημεία του μορίου, δηλαδή, η πρόβλεψη ότι το C_2H_2 είναι γραμμικό μόριο.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, εκτός από τη συγκεκριμένη προεπιλογή των υβριδικών ατομικών τροχιακών $sp^{(1)}$, αρκετά συχνά μας χρειάζονται και άλλες δύο προεπιλογές, δηλ. και άλλα ατομικά υβριδικά τροχιακά, όπως τα ατομικά υβριδικά τροχιακά $sp^{(2)}$ και τα ατομικά υβριδικά τροχιακά $sp^{(3)}$. Τα πρώτα αποτελούνται από το τροχιακό *s* και από ένα ή δύο τροχιακά *p* (π.χ. το p_x ή τα p_x, p_y), με διπλάσιο βάρος σχετικά με το s, εξού και ο συμβολισμός $sp^{(2)}$. Τα τρία υβριδικά ατομικά τροχιακά $sp^{(2)}$, που εικονίζονται στο Σχ. 10.8 και ορίζονται στη λεζάντα του, είναι συνεπίπεδα και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 120°. Και στα τρία υβριδικά $sp^{(2)}$ το βάρος του (ή των) *p* είναι διπλάσιο από του *s*. Τα υβριδικά $sp^{(2)}$ εμφανίζονται στη δομή, π.χ., του αιθυλενίου, C_2H_4 όπως φαίνεται στο Σχ. 10.9.



Σχ. 10.8 Τα τρία υβριδικά ατομικά τροχιακά $sp^{(2)}$, που είναι ορθογώνια μεταξύ τους, σχηματίζονται από το τροχιακό *s* και δύο από τα τροχιακά *p* (τα p_x και p_y), $\chi^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s + \sqrt{2}p_x\right)$, $\chi^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}p_x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}p_y\right)$, $\chi^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}p_x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}p_y\right)$. Η μέση ενέργεια, ε_h, κάθε υβριδικού $sp^{(2)}$ ισούται με $\varepsilon_h = (2\varepsilon_p + \varepsilon_s)/3$. Με κατάλληλες αλλαγές στους παραπάνω συντελεστές, μπορούμε να περιστρέψουμε και τα τρία τροχιακά του σχήματος διατηρώντας το συνεπίπεδο και τη γωνία των 120°. Π.χ. η αλλαγή $p_x \rightarrow -p_x$ και p_y

$\rightarrow -p_y$ αντιστοιχεί σε στροφή κατά γωνία 180°. Δείξτε ότι τα τρία υβριδικά ατομικά τροχιακά $sp^{(2)}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους. (Βλ. και [42], σελ. 27)

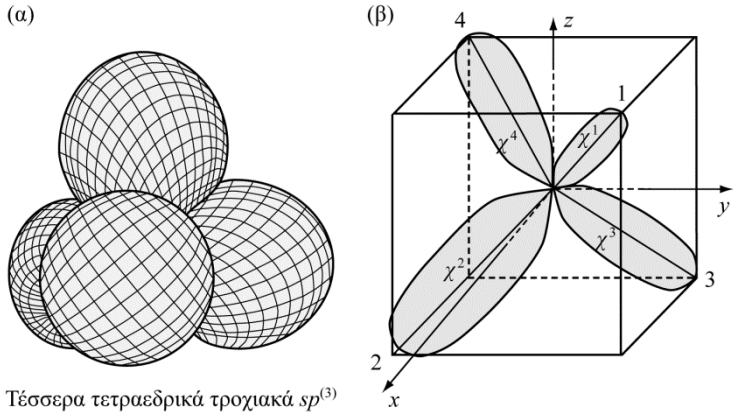


Σχ. 10.9 Τα 12 ατομικά τροχιακά που συμμετέχουν στο σχηματισμό του μορίου C_2H_4 χωρίζονται (με τη βοήθεια των έξη υβριδικών $sp^{(2)}$ των δύο ατόμων του άνθρακα) σε έξη σχεδόν ανεξάρτητα ζεύγη που το καθένα τους δημιουργεί ένα δεσμικό και ένα αντιδεσμικό μοριακό τροχιακό. Το έκτο ζεύγος αποτελείται από τα τροχιακά p_z των δύο ατόμων άνθρακα που εικονίζονται και αυτά στο σχήμα ως κύκλοι. Στο πάνω σχήμα το μοριακό δεσμικό τροχιακό μεταξύ του χ^1 και του $\chi^{1'}$ (που δίνει τον ισχυρό δεσμό) παριστάνεται με μια πιο παχειά γραμμή, ενώ ο ασθενέστερος δεσμός μεταξύ των δύο τροχιακών p_z με μια λεπτότερη γραμμή. (Βλ. [42], σελ.29)

Στα υβριδικά ατομικά τροχιακά $sp^{(3)}$ αναμιγνύονται το τροχιακό *s* και ένα ή δύο ή και τα τρία τροχιακά *p* (το p_x, το p_y και το p_z). Σε κάθε περίπτωση το βάρος των *p* είναι τριπλάσιο του *s*. Τα εικονιζόμενα στο Σχ. 10.10 υβριδικά ατομικά τροχιακά $sp^{(3)}$ ενός ατόμου έχουν κατευθυντικότητα προς τις τέσσερις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου (θεωρώντας ότι ο πυρήνας βρίσκεται στο κέντρο βάρους του τετραέδρου), όπως φαίνεται στο Σχ. 10.10α. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δει ότι τα υβριδικά τροχιακά $sp^{(3)}$ είναι αυτά που εμφανίζονται στο μόριο του μεθανίου CH_4 ή στο μόριο του αιθανίου C_2H_6 ή στο μόριο του σιλανίου SiH_4 (Στον άνθρακα ο κύριος κβαντικός αριθμός είναι n=2, ενώ στο πυρίτιο είναι n=3).

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με μια σημαντική παρατήρηση: Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο σχηματισμός υβριδικών ατομικών τροχιακών κοστίζει ενέργεια. Στην περίπτωση των δύο υβριδικών $sp^{(1)}$ η ολική τους ενέργεια είναι

$$\boxed{2\varepsilon_h = 2\{(\varepsilon_p + \varepsilon_s)/2\} = \varepsilon_p + \varepsilon_s,} \qquad (10.19)$$



Σχ. 10.10 (α) Τα τέσσερα ορθογώνια μεταξύ τους υβριδικά ατομικά τροχιακά $sp^{(3)}$ με διευθύνσεις κατά τις κορυφές κανονικού τετραέδρου. Οι άξονες των τροχιακών αυτών σχηματίζουν ανά δύο έξη ίσες γωνίες 109,47°. Η μέση ενέργεια ε_h, κάθε υβριδικού sp^3 ισούται με $\varepsilon_h = (\varepsilon_s + 3\varepsilon_p)/4$. (β) Για να έχετε καλύτερη γεωμετρική εποπτεία των κατευθύνσεων των τεσσάρων sp^3 ατομικών τροχιακών θεωρήστε τον πυρήνα του ατόμου στο κέντρο ενός κύβου, ενώστε το κέντρο με τις δύο επάνω απέναντι κορυφές και με τις δύο κάτω απέναντι κορυφές (αλλά όχι συνεπίπεδες με τις επάνω). Οι τέσσερις αυτές γραμμές δίνουν τις σχετικές κατευθύνσεις των υβριδικών ατομικών τροχιακών sp^3 (βλ. Σχ. 10.10β). Αποδείξτε τις παραπάνω σχέσεις για τις γωνίες και το ε_h. (Βλ. [42], σελ. 23)

ενώ προ του υβριδισμού τα δύο ηλεκτρόνια ήταν στο τροχιακό *s* και είχαν ενέργεια $2\varepsilon_s$. Άρα υπάρχει ενεργειακό κόστος $\varepsilon_p - \varepsilon_s$. Για τον υβριδισμό $sp^{(2)}$ το κόστος είναι το ίδιο (επειδή $3\varepsilon_h - 2\varepsilon_s - \varepsilon_p = 3\{(2\varepsilon_p + \varepsilon_s)/3\} - 2\varepsilon_s - \varepsilon_p = \varepsilon_p - \varepsilon_s$), όπως και για τον υβριδισμό $sp^{(3)}$ ($4\varepsilon_h - 2\varepsilon_s - 2\varepsilon_p = 4\{(3\varepsilon_p + \varepsilon_s)/4\} - 2\varepsilon_s - 2\varepsilon_p = \varepsilon_p - \varepsilon_s$). Ορίζουμε το V_1 ως το ενεργειακό κόστος *ανά υβριδικό τροχιακό*. Σημειώστε ότι το V_1 αναφέρεται στο ίδιο άτομο ενώ τα V_2 και V_3 εμπλέκουν και τα δύο άτομα του κάθε ζεύγους. Έχουμε επομένως:

$$V_1 \equiv \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_s}{2} \text{ για τα } sp^1, \qquad (10.20\alpha)$$

$$V_1 \equiv \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_s}{3} \text{ για τα } sp^2, \qquad (10.20\beta)$$

$$V_1 \equiv \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_s}{4} \text{ για τα } sp^3. \qquad (10.20\gamma)$$

Το κόστος αυτό του υβριδισμού είναι μια ενεργειακή επένδυση του ατόμου την οποία "σκοπεύει" να ανακτήσει και με το παραπάνω κατά το σχηματισμό μορίου γιατί ο υβριδισμός αναμένεται να δώσει περισσότερους και ισχυρότερους δεσμούς (μεγαλύτερο $|V_2|$). Φυσικά, όταν το κόστος είναι μεγάλο (δηλαδή όταν το V_1 είναι μεγάλο) και το κέρδος (δηλαδή το $|V_2|$) όχι τόσο μεγάλο, μπορεί να μη συμφέρει ενεργειακά ο υβριδισμός και επομένως να μην πραγματοποιηθεί. Ο λόγος $(\varepsilon_p - \varepsilon_s)/2\sqrt{V_2^2 + V_3^3}$, που συμβολίζεται ως a_m και ανάγεται στο $(\varepsilon_p - \varepsilon_s)/2|V_2|$, όταν $V_3 \equiv (\varepsilon_c - \varepsilon_a)/2 = 0$,

$$\boxed{a_m \equiv \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_s}{2\sqrt{V_2^2 + V_3^2}}}, \qquad (10.21)$$

είναι ένας δείκτης του κατά πόσο συμφέρει ή όχι ο υβριδισμός. Βάσει του τύπου (10.17) έχουμε μεγάλο $|V_2|$ όταν το μήκος του δεσμού d_0 είναι μικρό. Επομένως το πιο ευνοημένο άτομο για δημιουργία υβριδισμών είναι το άτομο του άνθρακα που κατέχει ένα μοναδικό συνδυασμό ευνοϊκών ιδιοτήτων: Έχει μεγάλο σθένος (δηλαδή, τη μέγιστη δυνατότητα τεσσάρων δεσμών ανά άτομο), σχετικά μικρή διαφορά, ε_p–ε_s, και –λόγω του μικρού του μεγέθους– σχηματίζει δεσμούς με μικρό d_0, άρα μεγάλο $|V_2|$. Επομένως για τον άνθρακα η ενεργειακή επένδυση του υβριδισμού είναι σχετικά μικρή, ενώ το ενεργειακό κέρδος από το σχηματισμό μοριακών δεσμών με υβριδικά ατομικά τροχιακά πολύ μεγάλο. Επομένως το άτομο του άνθρακα μπορεί να σχηματίσει κάθε είδους υβριδισμό με τη βεβαιότητα ότι θα ανακτήσει και με το παραπάνω την ενεργειακή του επένδυση. Αυτή η ποικιλία των επικερδών υβριδισμών του ατόμου του ανθρακα (που είναι αποτέλεσμα της προνομιακής του θέσης στην κορυφή της τέταρτης στήλης του περιοδικού πίνακα) εξηγεί την τεράστια ποικιλία των μορίων στα οποία συμμετέχει και το μοναδικό του ρόλο στη χημεία, στη βιοχημεία και στη βιολογία.

10.5 Περίληψη των σημαντικότερων τύπων

Ενέργεια van der Waals αλληλεπιδράσεως δύο ατόμων σε απόσταση $d \gg d_0$

$$\boxed{\Delta E(d) = -A/d^6, \quad d_0 \ll d \ll a_B(hc/e^2)}. \qquad (10.1)$$

Από διαστατική ανάλυση έχουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για:
α) το μήκος του δεσμού

$$d_0 = c_d(r_{a1} + r_{a2}) \simeq c_d(\overline{r}_{a1} + \overline{r}_{a2})a_B,\ c_d \approx 1, \qquad (10.4)$$

β) την ενέργεια διάσπασης

$$D \approx \left|\Delta E(d_0)\right| = c_D \frac{\hbar^2}{m_e d_0^2} = c_D \frac{27,2\,\text{eV}}{\overline{d}_0^{\,2}}, \quad c_D \approx 1\,, \tag{10.5}$$

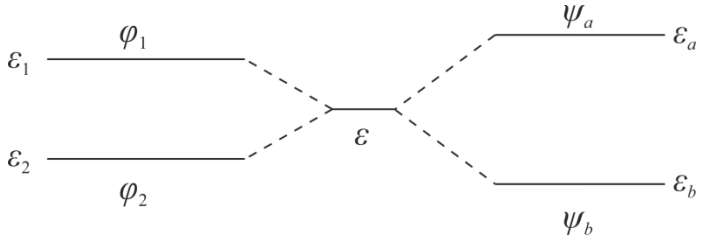
γ) τη συχνότητα ταλάντωσης

$$\hbar\omega = \frac{\hbar}{\ell}\sqrt{\frac{0,9D}{1823 m_e A_{B,r}}} = \frac{3023}{\overline{d}_0^{\,2}\sqrt{A_{B,r}}}\,\text{meV}\,. \tag{10.6}$$

LCAO 1: Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση διατομικού μορίου, όπου το άτομο υπ' αρ. 1 κάνει χρήση ενός μόνο τροχιακού τύπου *s*, του ϕ_1 ενέργειας ε_1 και το άτομο υπ' αρ. 2 κάνει επίσης χρήση ενός μόνο τροχιακού τύπου *s*, του ϕ_2 ενέργειας ε_2. Ορίζοντας τα εξής μεγέθη

$$\varepsilon \equiv \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),\ V_3 \equiv \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq 0,\ V_2 = \eta\hbar^2 / m_e d_0^2,\ a_p \equiv \frac{V_3}{\sqrt{V_3^2 + V_2^2}} \tag{10.22}$$

όπου d_0 το μήκος του δεσμού, έχουμε τα εξής αποτελέσματα:



Δεσμική μοριακή στάθμη:

$$\varepsilon_b = \varepsilon - \sqrt{V_2^2 + V_3^2}\,. \tag{10.14}$$

Δεσμικό μοριακό τροχιακό:

$$\psi_b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1 - a_p}\,\phi_1 + \sqrt{1 + a_p}\,\phi_2\right]. \tag{10.23}$$

Αντιδεσμική μοριακή στάθμη:

$$\varepsilon_a = \varepsilon + \sqrt{V_2^2 + V_3^2}\,. \tag{10.16}$$

Αντιδεσμικό μοριακό τροχιακό:

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1 + a_p}\,\phi_1 - \sqrt{1 - a_p}\,\phi_2\right]. \tag{10.24}$$

Ενέργεια διέγερσης:

$$\delta\varepsilon \approx 2\sqrt{V_2^2 + V_3^2}\ . \tag{10.25}$$

Ενέργεια δεσμού :

$$D \approx 2\sqrt{V_2^2 + V_3^2} - U \approx (0,5 \leftrightarrow 1,5)\sqrt{V_2^2 + V_3^2}\ . \tag{10.26}$$

Ειδική περίπτωση:

$$\boxed{V_3 = 0 \Rightarrow a_p = 0 \Rightarrow \varepsilon_{b,a} = \varepsilon \mp |V_2| \qquad c_1 = \pm c_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ .}$$

Κόστος υβριδισμού:

$$\varepsilon_p - \varepsilon_s\ . \tag{10.27}$$

LCAO 2: Για την περίπτωση όπου και τα τέσσερα ατομικά τροχιακά, *ns*, np_x, np_y, np_z ενός ατόμου συμμετέχουν στους δεσμούς πολυατομικών μορίων, έχουμε τρεις προεπιλογές για υβριδισμό, πέρα από την ανυβρίδιστη, τις εξής:

(α) $sp^{(1)}$: χ^1, χ^2, p_y, p_z, όπου $\chi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + p_x)$, $\chi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s - p_x)$,

(β) $sp^{(2)}$: χ^1, χ^2, χ^3, p_z, όπου $\chi^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s + \sqrt{2}p_x\right)$, $\chi^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}p_x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}p_y\right)$,

$\chi^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}p_x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}p_y\right)$,

(γ) $sp^{(3)}$: $\chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^4$, όπου $\chi^1 = \frac{1}{2}(s + p_x + p_y + p_z)$, $\chi^2 = \frac{1}{2}(s + p_x - p_y - p_z)$ κλπ με κυκλική εναλλαγή των δεικτών *x, y, z.*

10.6 Λυμένες ασκήσεις

1. Η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ατόμων ευγενών αερίων που βρίσκονται σε απόσταση *d* δίνεται από τον τύπο

$$V_{ij}(d) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{d}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{d}\right)^{6}\right].$$

Για το Ar, ε=10 meV και σ=3,4Å. Μπορεί να υπάρξει το μόριο Ar_2 στο απόλυτο μηδέν; Αν ναι, ποιο είναι το μήκος του δεσμού; Ποια η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης; Θα επιβιώσει το μόριο Ar_2 σε θερμοκρασία περιβάλλοντος;

Λύση: Ορίζοντας $u \equiv \sigma/d$ έχουμε στο σημείο ελαχίστου του $V_{ij}(d)$:

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial d} = -4\varepsilon(12u^{11} - 6u^5)\frac{\sigma}{d^2} = 0 \Rightarrow u = (1/2)^{1/6} \Rightarrow d = 2^{1/6}\sigma = 3,8164\ \text{Å}\ .$$

$$\kappa \equiv \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial d^2} = 4\varepsilon\{(12\times 11u^{10} - 6\times 5u^4)\frac{\sigma^2}{d^4} + 8\varepsilon(12u^{11} - 6u^5)\frac{\sigma}{d^3} =$$

$$= 4\varepsilon u^4(132u^6 - 30)\frac{\sigma^2}{d^4} = 4\varepsilon u^4 \times 36u^2 / d^2 = 72\varepsilon / d^2 = 57,1464\varepsilon / \sigma^2.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ε, σ και $m_r = (A_B / 2)1823m_e = 36410m_e$ στον τύπο για τη συχνότητα ταλάντωσης ω έχουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m_r}} = \sqrt{\frac{57,1464\varepsilon}{\sigma^2 36410m_e}} = 0,0396\sqrt{\frac{10/27211}{(3,4/0,529)^2}}\ \text{a.μ.} = 3,2\,\text{meV}.$$

Αφού η τιμή του $V_{ij}(d)$ στην ισορροπία είναι $-\varepsilon$ =–10 meV, η ενέργεια δέσμευσης για T=0K είναι 10–1,6=8,4meV. Για θερμοκρασία δωματίου, το $k_BT \approx 25$ meV είναι αρκετά μεγαλύτερο από 8,4meV. Άρα το μόριο Ar_2 δεν θα επιβιώσει για $T \approx 300$K.

2. Η ενέργεια E του μορίου H_2 ως συνάρτηση της απόστασης d μεταξύ των δύο πυρήνων δίνεται από τη σχέση (E, d σε ατομικές μονάδες):

$$E = \frac{0,343}{d^2} - \frac{0,49}{d}.$$

Υπολογίστε κατά σειρά τα εξής:

(α) το μήκος του δεσμού d_0 (σε Å).

(β) τη δονητική ιδιοσυχνότητα $\hbar\omega$ (σε meV) του H_2.

(γ) την ελάχιστη ενέργεια , D, διάσπασης σε δύο ανεξάρτητα άτομα (σε eV).

(δ) δώστε τη γραφική παράσταση της E ως συνάρτησης του d. (Πειραματικές τιμές: $d_0 = 0,74117$ Å , $\hbar\omega = 516$ meV , $D = 4,4775$ eV).

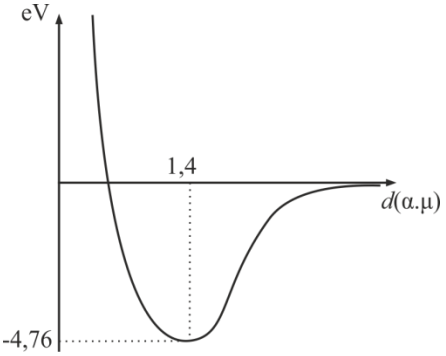
Λύση: (α) $\frac{\partial E}{\partial d} = 0 \Rightarrow -\frac{2\times 0,343}{d^3} + \frac{0,49}{d^2} \Rightarrow d_0 = 1,4\,\text{a.μ.} = 0,74\,\text{Å}$.

(β) $\frac{\partial^2 E}{\partial d^2} = 6\frac{0,343}{d^4} - \frac{2\times 0,49}{d^3} = \frac{3}{d}\frac{2\times 0,343}{d^3} - \frac{2}{d}\frac{0,49}{d^2} = \frac{1}{d}\frac{0,49}{d^2} = 0,1786\,\text{α.μ.}.$

$\hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{\kappa}{m_r}} = \sqrt{\frac{0,1786}{918,5}} = 0,01394\,\alpha.\mu. = 379\text{meV}$ (πειρ. τιμή 516meV).

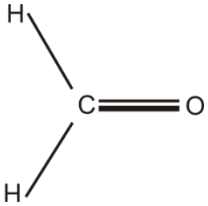
(γ) $D = |E(d_o)| - \frac{\hbar\omega}{2} = 4,76 - \frac{0,379}{2}\text{eV} = 4,57\text{eV}$, πειρ. $D = 4,76 - 0,259 = 4,5\text{eV}$.

(δ)



3. Επικαλεστείτε τη θεωρία του υβριδισμού για να προβλέψετε την ακριβή γεωμετρική μορφή των ακόλουθων μορίων σ' όλες τις δυνατές μορφές τους α)CH_2O, (β) C_4H_{10}, (γ) C_4H_6

Λύση: (α) Ο άνθρακας θα κάνει χρήση του υβριδισμού $sp^{(2)}$ ώστε να σχηματίσει τρεις δεσμούς $\chi^1/p_{x,O}$, $\chi^2/s_{,H}$, $\chi^3/s_{,H}$ καθώς και ένα μεταξύ των p_z του άνθρακα και του οξυγόνου.



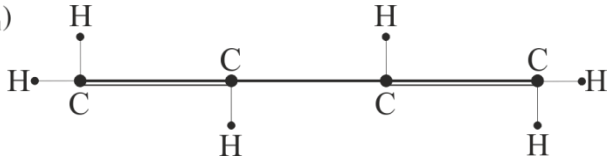
(β) Και οι τρεις υβριδισμοί μπορούν να παράγουν μια αλυσίδα από τέσσερα άτομα άνθρακα. Η επιλογή $sp^{(1)}$ θα δώσει μια ευθύγραμμη αλυσίδα ατόμων άνθρακα με τα οκτώ υδρογόνα να αξιοποιούν τα τροχιακά p_y, p_z των ατόμων άνθρακα για το δεσμό τους και τα δύο τελευταία υδρογόνα να χρησιμοποιούν και τα υβριδικά των ακραίων ατόμων άνθρακα.

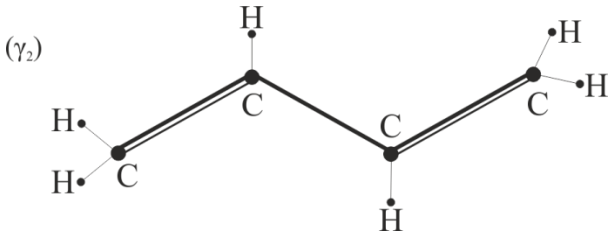
Αν χρησιμοποιηθεί η επιλογή $sp^{(2)}$, η αλυσίδα των ατόμων άνθρακα θα είναι μεν επίπεδη αλλά όχι ευθύγραμμη και τα τέσσερα υδρογόνα θα αξιοποιήσουν τα p_z των τεσσάρων ατόμων άνθρακα και τα υπόλοιπα 6 τα $sp^{(2)}$ των τεσσάρων ατόμων άνθρακα. Τέλος η επιλογή $sp^{(3)}$ θα παράγει μια μη επίπεδη αλυσίδα ατόμων άνθρακα και όλα τα δέκα υδρογόνα θα χρησιμοποιήσουν τα δέκα διαθέσιμα τροχιακά $sp^{(3)}$ των τεσσάρων ατόμων άνθρακα.

Το ποια επιλογή θα λάβει πράγματι χώρα θα είναι εκείνη που θα δώσει την χαμηλότερη ολική ενέργεια. Φαίνεται ότι αυτό θα εξαρτηθεί κυρίως από το να είναι οι αποστάσεις των γειτονικών υδρογόνων όσο το δυνατόν μεγαλύτερες για να μειωθούν οι μεταξύ τους απώσεις Coulomb (ο δεσμός C–H θα είναι σε κάποιο βαθμό ετεροπολικός). Αυτό το κριτήριο αποκλείει την επιλογή $sp^{(1)}$ και πιθανόν ευνοεί την επιλογή $sp^{(3)}$.

(γ) Η μία επιλογή είναι η $sp^{(1)}$ που θα δώσει τη δομή του σχήματος (γ1) και η άλλη είναι η $sp^{(2)}$ που θα δώσει το σχήμα (γ2). Με βάση το επιχείρημα της μεγαλύτερης απόστασης γειτονικών υδρογόνων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η επιλογή $sp^{(2)}$είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα.

(γ_1)





4. Θεωρήστε ότι έχουμε 6 όμοια τροχιακά τοποθετημένα στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου. Το διαγώνιο στοιχείο της χαμιλτονιανής είναι ε_o και τα μη διαγώνια που συνδέουν κάθε τροχιακό με τα διπλανά του είναι V_2. Βρείτε τις ιδιοενέργειες $\varepsilon(\varphi)$ και τις ιδιοκαταστάσεις $\psi(\varphi)=\sum_{n=1}^{6} c_n\chi_n$ αυτού του μοντέλου δεδομένου ότι $c_n = c\exp(i\varphi n),\ n=1,...,6.$

Λύση: Γενικεύοντας τη σχέση (10.10) (στην υποσημείωση της σελ. 223) έχουμε

$$\{\varepsilon_0-\varepsilon(\varphi)\}c_n+V_2(c_{n+1}+c_{n-1})\}=0\,. \qquad (4.1)$$

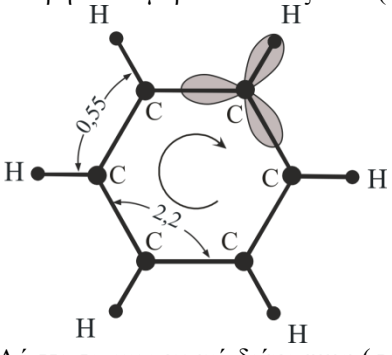
Η μόνη ουσιαστική διαφορά από την (10.10) είναι ότι η σύζευξη μέσω του V_2 είναι όχι μόνο στο επόμενο τροχιακό χ_{n+1} αλλά και στο προηγούμενο χ_{n-1}. Θέτοντας στην (4.1) την προτεινόμενη λύση για τα c_n βρίσκουμε

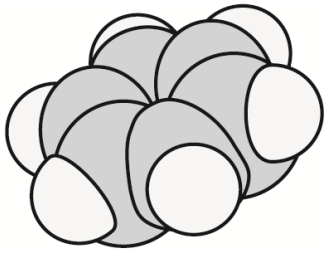
$$\varepsilon(\varphi)=\varepsilon_0+2V_2\cos\varphi\,. \qquad (4.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη συνοριακή συνθήκη $c_7\equiv c_1$ έχουμε $7\varphi=\varphi+2\pi\ell$ ή $\varphi=(2\pi\ell/6)$ ή $\varphi=0,\pm\pi/3,\pm2\pi/3,\pi.$ Αντικαθιστώντας τις έξη αυτές τιμές του φ (όλες οι άλλες δεν δίνουν διαφορετικές λύσεις) στην (4.2) έχουμε τις εξής ιδιοτιμές της ενέργειας δεδομένου ότι $V_2<0$:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_0-2|V_2|,\ \varepsilon_{2,3}=\varepsilon_0-|V_2|,\ \varepsilon_{4,5}=\varepsilon_0+|V_2|,\ \varepsilon_6=\varepsilon_0+2|V_2|\,. \qquad (4.3)$$

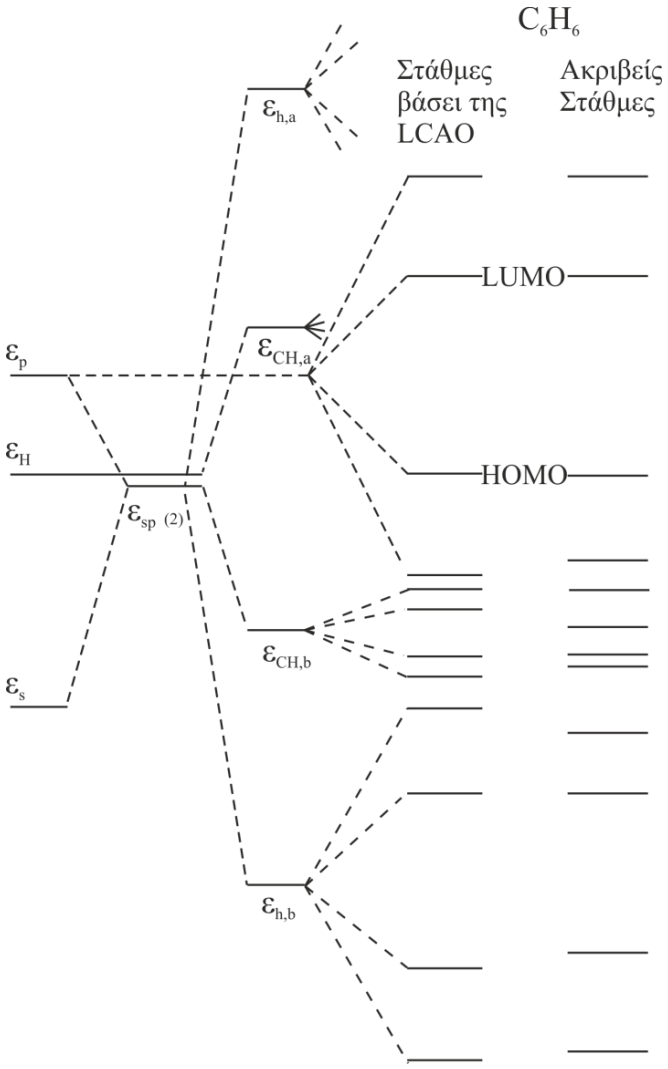
5. Θεωρήστε το μόριο του Βενζολίου (C_6H_6)





Δώστε το ενεργειακό διάγραμμα (σε σωστή κλίμακα) των ηλεκτρονικών σταθμών του μορίου αυτού σημειώνοντας τον εκφυλισμό κάθε στάθμης και το βαθμό κατάληψής της. Δίδονται τα: $V_{2h}=-10\,\text{eV}$, $V_{2,hH}=-3,805$ eV, $d_{CC}=1,39\,\text{Å}$, $d_{CH}=1,076\,\text{Å}$, $V_{2,bb}=-2,2\,\text{eV}$, $V_{2,bbCH}=-0,55\,\text{eV}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Λύση: Ο άνθρακας κάνει υβριδισμό $sp^{(2)}$, που σημαίνει τρία συνεπίπεδα ατομικά υβριδικά τροχιακά όμοια μεταξύ τους με γωνίες 120° μοιρών, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Αυτός ο υβριδισμός οδηγεί στην εικονιζόμενη



στερεοχημική δομή του μορίου και σε 6 ισχυρούς δεσμούς C–C, έξη σχετικά ισχυρούς δεσμούς C–H και σε τρεις ασθενέστερους δεσμούς C–C (μεταξύ των έξη p_z τροχιακών–έναν για κάθε άνθρακα–, που είναι κάθετα στο επίπεδο του μορίου και που τελικά απεντοπίζονται καλύπτοντας ομοιόμορφα και τα 6 άτομα άνθρακα του δακτυλίου· βλ. την παραπάνω άσκηση 4). Είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς άλλους υβριδισμούς ή/και δομές που να δίνουν τόσους πολλούς και ισχυρούς δεσμούς και συνεπώς κατώτερη ενέργεια από αυτή που δίνει η δομή του σχήματος.

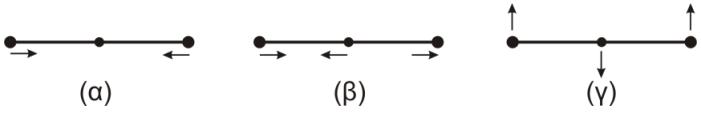
Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις απεντοπισμένες καταστάσεις των 6 τροχιακών p_z μπορείτε να βρείτε στην παραπάνω λυμένη άσκηση 4.

Στο παραπάνω σχήμα (σελ. 241) παρουσιάζονται στα –13,6eV η ατομική στάθμη του υδρογόνου, οι ατομικές στάθμες του άνθρακα ε_p=–11,07eV και $\varepsilon_{c,s}$=–19,37eV, η υβριδική ατομική στάθμη του $sp^{(2)}$ στα –13,837eV, η δεσμική και η αντιδεσμική μοριακή στάθμη μεταξύ γειτονικών $sp^{(2)}$ τροχιακών άνθρακα στα –23,837eV και –3,837eV αντιστοίχως, η δεσμική και η αντιδεσμική μοριακή στάθμη μεταξύ $sp^{(2)}$ του άνθρακα και του υδρογόνου στα –17,53eV και –9,91eV αντιστοίχως. Καθεμία από τις στάθμες $\varepsilon_{h,b}$, $\varepsilon_{CH,b}$, ε_p, $\varepsilon_{CH,a}$, $\varepsilon_{h,a}$ σπάει (λόγω της εξαγωνικής συμμετρίας) σε τεσσερις στάθμες (εκ των οποίων οι δύο διπλά εκφυλισμένες) σύμφωνα με τα αποτελέσματα της λυμένης άσκησης 4, οπότε προκύπτει το παραπάνω (σελ. 241) διάγραμμα των ενεργειακών σταθμών του βενζολίου.

Θα υπάρξει περαιτέρω μετατόπιση των σταθμών λόγω του ότι η κάθε ομάδα τεσσάρων σταθμών (εκ των οποίων δύο διπλά εκφυλισμένες) δεν είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες. Παρόλα αυτά οι κατειλημμένες στάθμες, όπως υπολογίστηκαν με τη μέθοδο LCAO και τα στοιχεία πίνακα της εκφώνησης, δεν διαφέρουν πολύ από τις αντίστοιχες ακριβείς κατειλημμένες στάθμες με εξαίρεση τις 4 στάθμες (εκ των οποίων δύο είναι διπλά εκφυλισμένες) που προκύπτουν από την $\varepsilon_{CH,a}$. Αυτές οι 4 στάθμες θα έπρεπε να κείνται εκτός της περιοχής από HOMO έως LUMO. Η συντομογραφία HOMO σημαίνει *Highest Occupied Molecular Orbital* και η συντομογραφία LUMO σημαίνει *Lowest Unoccupied Molecular Orbital.*

6. Βρείτε τις τέσσερις ιδιοταλαντώσεις του μορίου CO_2. Κατατάξτε τις σύμφωνα με το μέγεθος της αντίστοιχης ιδιοσυχνότητας. Ποια από τις τέσσερις είναι υπεύθυνη για το φαινόμενο θερμοκηπίου; Ποια είναι η τιμή της;

Λύση: Σύμφωνα με την παρακάτω εικονιζόμενη ταλάντωση (α), ο άνθρακας μένει ακίνητος και τα δύο οξυγόνα κινούνται αντίθετα. Άρα $\omega = \sqrt{\kappa / m_{\mathrm{O}}}$



Στην ταλάντωση (β), εάν x είναι η μετακίνηση του κάθε οξυγόνου και y του άνθρακα θα πρέπει $2xm_{\mathrm{O}}+ym_{\mathrm{C}}=0$ ή $y= -(2m_{\mathrm{O}}/m_{\mathrm{C}})x$ προκειμένου να μείνει το κεντρο «βάρους» ακίνητο. Επιπλέον $m_{\mathrm{O}}\omega_\beta^2 x = \kappa'(x-y)$. Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε $\omega_\beta = \sqrt{\frac{\kappa'}{m_{\mathrm{O}}}}\sqrt{\frac{2m_{\mathrm{O}}+m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{C}}}} = \sqrt{\frac{\kappa'}{m_{\mathrm{O}}}}1,91 = 1,91\omega_a$, εάν $\kappa'=\kappa$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε για την ταλάντωση (γ), που είναι διπλά εκφυλισμένη,

$$\omega_\gamma == \sqrt{\frac{\kappa''}{m_{\mathrm{O}}}}\sqrt{\frac{2m_{\mathrm{O}}+m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{C}}}} = 1,91\sqrt{\frac{\kappa''}{m_{\mathrm{O}}}} ,$$

με το $\kappa'' \ll \kappa, \kappa'$, γιατί είναι πολύ πιο εύκολο να λυγίσουμε το μόριο παρά να το συμπιέσουμε. Άρα έχουμε για τα μεγέθη των ιδιοσυχνοτήτων

$$\omega_\gamma < \omega_a < \omega_\beta .$$

Μόνο οι ταλαντώσεις (γ) και (β) δημιουργούν διπολική ροπή και επομένως είναι σε θέση να απορροφήσουν φωτόνια. Ας εκτιμήσουμε το μέγεθος της ω_α με βάση τον τύπο (10.6) και για d=1,21 Å

$$\hbar\omega_\alpha = \frac{3023}{\overline{d}^2}\sqrt{\frac{1}{A_B}} = 144\,\text{meV} ,$$

ενώ η πειραματική τιμή είναι 165meV. Η $\hbar\omega_B$ προκύπτει ίση με 276meV έναντι 291meV της πειραματικής τιμής. Το μέγιστο της εκπεμπόμενης από τη Γη ακτινοβολίας υπό θερμοκρασία 290K αντιστοιχεί σε $2{,}82k_BT \simeq 70\text{meV}$. Άρα δεν είναι η ταλάντωση ω_β που είναι υπεύθυνη για το φαινόμενο θερμοκηπίου. Απομένει επομένως μόνο η ταλάντωση (γ) που πρέπει να έχει μια συχνότητα γύρω στα 70meV για να απορροφά υπό συνθήκες σχεδόν συντονισμού. Πράγματι η πειραματική τιμή των $\hbar\omega_\gamma$ είναι 82,7meV που αντιστοιχεί σε $\kappa'' = 0{,}08\kappa'$, όπου κ' είναι η τιμή που αναπαράγει την τιμή 291meV για την (β).

10.1 Άλυτες ασκήσεις

1. Για το μόριο του υδρογόνου με μήκος δεσμού 0,74Α υπολογίστε το κβάντο της περιστροφικής κίνησης και εκτιμήστε το κβάντο της ταλαντωτικής.

2. Για το μόριο NaCl με μήκος δεσμού d=2,36 Å , προσδιορίστε τη δεσμική και την αντιδεσμική μοριακή στάθμη, το δείκτη πολικότητας και τη μεταφορά φορτίου από το Na στο Cl. Δεδομένου ότι το έργο ιονισμού του Na είναι 5,14 eV και η χημική συγγένεια του Cl 3,61eV, βρείτε την ενέργεια διάσπασης του NaCl.

3. Παρόμοια με την περίπτωση του μορίου N_2 είναι η περίπτωση του πολύ τοξικού μορίου CO (μονοξείδιο του άνθρακα) στο οποίο δημιουργείται επίσης ένας τριπλός δεσμός που εποικίζεται από τα 2 ηλεκτρόνια 2p του άνθρακα και τα τέσσερα 2p του οξυγόνου (αντί 3 συν 3 από κάθε άτομο του αζώτου στο N_2). Ποιος είναι ο τύπος για το ενεργειακό κέρδος από το σχηματισμό του CO; Είναι το μόριο CO πολικό; Γιατί το CO είναι τόσο τοξικό;

Πιν. 10.2 Θεωρητικές τιμές των ενεργειών, $-E_{ns}$, $-E_{np}$, $-E_{nd}$ και $V_1 \equiv (E_{np}-E_{ns})/4$ (σε eV) σύμφωνα με τη μέθοδο Hartree-Fock (από το βιβλίο W.A. Harrison, *Elementary Electronic Structure*, World Scientific, 1999). Τα E_{ns}, E_{np}, είναι αυτά που στο κείμενο αναφέρονται ως ε_1, ε_2.

H								
Li 5,34 – –	**Be** 8,42 – –							
Na 4,96 – –	**Mg** 6,89 – –							
K 4,01 – –	**Ca** 5,32 – –	**Sc** 5,71 9,35	**Ti** 6,04 11,05	**V** 6,33 12,54	**Cr** 6,59 13,88	**Mn** 6,84 15,27	**Fe** 7,08 16,54	**Co** 7,31 17,77
Rb 3,75 – –	**Sr** 4,86 – –	**Y** 5,33 6,80	**Zr** 5,67 8,46	**Nb** 5,95 9,98	**Mo** 6,19 11,49	**Tc** 6,39 13,08	**Ru** 6,58 14,61	**Rh** 6,75 16,16
Cs 3,37 – –	**Ba** 4,29 – –	**La** 4,35 – 	**Hf** 5,71 8,14	**Ta** 5,97 9,57	**W** 6,19 10,97	**Re** 6,38 12,35	**Os** 6,56 13,74	**Ir** 6,71 15,12
Fr	**Ra**	**Ac**						
			Ce	**Pr**	**Nd**	**Pm**	**Sm**	**Eu**
			Th	**Pa**	**U**	**Np**	**Pu**	**Am**

Μη μεταβατικά στοιχεία

C
19,38 ←$-E_{n's}$
11,07 ←$-E_{n'p}$
2,08 ←V_1

Μεταβατικά στοιχεία

Fe
7,08 ←$-E_{n's}$
16,54 ←$-E_{n'-1,d}$

								He 24,98 –	
			B 13,46 8,43 1,26	**C** 19,38 11,07 2,08	**N** 26,22 13,84 3,10	**O** 34,02 16,77 4,31	**F** 42,79 19,87 5,73	**Ne** 52,51 23,14 7,35	$n'=2$
			Al 10,71 5,71 1,25	**Si** 14,79 7,59 1,80	**P** 19,22 9,54 2,42	**S** 24,02 11,60 3,11	**Cl** 29,20 13,78 3,85	**Ar** 34,76 16,08 4,67	$n'=3$
Ni 7,54 18,97	**Cu** 6,49 13,36	**Zn** 7,96 3,98 0,99	**Ga** 11,55 5,67 1,47	**Ge** 15,16 7,33 1,96	**As** 18,92 8,98 2,48	**Se** 22,86 10,68 3,05	**Br** 27,01 12,44 3,64	**Kr** 31,37 14,26 4,28	$n'=4$
Pd 6,91 17,70	**Ag** 5,98 14,62	**Cd** 7,21 3,89 0,83	**In** 10,14 5,37 1,19	**Sn** 13,04 6,76 1,57	**Sb** 16,03 8,14 1,97	**Te** 19,12 9,54 2,40	**I** 22,34 10,97 2,84	**Xe** 25,70 12,44 3,31	$n'=5$
Pt 6,85 16,47	**Au** 6,01 14,17	**Hg**(α) 7,10 3,83 0,82	**Tl** 9,83 5,24 1,15	**Pb** 12,49 6,53 1,49	**Bi** 15,19 7,79 1,85	**Po** 17,97 9,05 2,23	**At** 20,82 10,34 2,62	**Rn** 23,78 11,65 3,04	$n'=6$

Gd	**Tb**	**Dy**	**Ho**	**Er**	**Tm**	**Yb**	**Lu**
Cm	**Bk**	**Cf**	**Es**	**Fm**	**Md**	**No**	**Lr**

Κεφάλαιο 11

Στερεά κατάσταση της ύλης

Σύνοψη: *Παρουσιάζονται οι συνήθεις κρυσταλλικές δομές bcc, fcc και αυτή του αδάμαντα. Με βάση τις παγκόσμιες σταθερές* $\hbar, m_e, a_B$ *η διαστατική ανάλυση μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε βασικά φυσικά μεγέθη της συμπυκνωμένης ύλης. Το λεγόμενο μοντέλο Jellium προσφέρει μια εκτίμηση της ακτίνας ανά άτομο και του υδροστατικού μέτρου ελαστικότητας. Η γνωστή από τα μόρια μέθοδος LCAO είναι αρκετά ευέλικτη για τη μελέτη όχι μόνο των μετάλλων αλλά και άλλων κατηγοριών στερεών, όπως είναι οι σπουδαίας σημασίας ημιαγωγοί. Για τους τελευταίους προσδιορίζεται το ενεργειακό χάσμα που χωρίζει την ανώτερη ενεργειακή περιοχή κατειλημμένων καταστάσεων, τη ζώνη σθένους (ΖΣ), από την κατώτερη περιοχή άδειων, τη ζώνη αγωγιμότητας (ΖΑ). Παρουσιάζονται επίσης στο Παράρτημα V έννοιες, όπως η ενεργός μάζα, η πυκνότητα καταστάσεων, οι οπές, οι προσμίξεις αντικατάστασης, η ευκινησία και η συγκέντρωση ηλεκτρονίων στη ΖΑ και οπών στη ΖΣ. Αυτές οι συγκεντρώσεις ρυθμίζουν τη μεταβολή της αγωγιμότητας στους ημιαγωγούς σε ευρύτατα όρια και είναι η αφετηρία για το σύγχρονο τεχνολογικό πολιτισμό.*

11.1 Στερεά Ύλη Ι: Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Ένας τεράστιος αριθμός[1] από άτομα (ή και μόρια) έρχονται σε επαφή μεταξύ τους προς σχηματισμό στερεών, υγρών και άλλων ενδιάμεσων καταστάσεων μεταξύ της στερεάς και της υγρής ύλης, όπως είναι π.χ. τα πολύμερή. Όλοι αυτοί οι μακροσκοπικοί σχηματισμοί είναι γνωστοί με το κοινό όνομα *συμπυκνωμένη ύλη***.** Στα στερεά, τα άτομα (ή και τα μόρια) έχουν καθορισμένες θέσεις στο χώρο και εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από τις θέσεις αυτές. Αντίθετα, κάθε άτομο στα υγρά κινείται τείνοντας να καλύψει όλη την έκταση του υγρού όντας σε επαφή με όποια άλλα άτομα συμβαίνει να είναι ανά πάσα στιγμή γύρω του. Τα βασικά χαρακτηριστικά της συμπυκνωμένης ύλης (δηλαδή των στερεών, των υγρών και των ενδιάμεσων καταστάσεων που φέρουν το όνομα *χαλαρή* (soft)) συμπυκνωμένη

[1] Κάθε κιλό του ανθρώπινου σώματος περιέχει περίπου $0,96\times10^{26}$ άτομα.

ύλη) είναι η *πυκνότητά* της (που κυμαίνεται για συμπαγή υλικά σε σχετικά στενά όρια από περίπου 1 gr/cm^3 μέχρι περίπου 20 gr /cm^3, παρόλο που η μάζα των ατόμων κυμαίνεται από 1m_p μέχρι περίπου[2] 238 m_u) και το *σχεδόν ασυμπίεστό της*. Το τελευταίο χαρακτηρίζεται από την ποσότητα B, που ονομάζεται *υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας*, και ορίζεται ως το πηλίκο της πίεσης δP, η οποία προκαλεί μια σχετική μεταβολή του όγκου δV/V, δια της απόλυτης τιμής του δV/V. Ο ορισμός αυτός σε μαθηματική γλώσσα έχει ως εξής: $B \equiv -V(\partial P / \partial V)$. Στην παραγώγιση κρατάμε είτε τη θερμοκρασία σταθερή, οπότε γράφουμε B_T είτε την εντροπία σταθερή, οπότε γράφουμε B_S. (Ισχύει γενικά $B_S = C_P B_T / C_V$. Μπορείτε να το αποδείξετε;). Τα ισότροπα στερεά χαρακτηρίζονται επίσης από την αντίσταση που προβάλλουν σε διατμητικές τάσεις οι οποίες τείνουν να αλλάξουν το σχήμα του στερεού αλλά όχι τον όγκο του. Η αντίσταση αυτή ποσοτικοποιείται από το λεγόμενο *διατμητικό μέτρο ελαστικότητας,* που συμβολίζεται με το γράμμα, μ ή G. Το μ είναι συγκρίσιμο σε μέγεθος με το B για σκληρά υλικά με τυπική τιμή $\mu/B \approx 1/3$ (στο βηρύλιο ο λόγος μ/B έχει τη μέγιστη τιμή ίση με 1,33), ενώ στα υγρά το μ είναι ίσο με μηδέν.

Όπως αναφέραμε επανειλημμένα, το στερεό σχηματίζεται από τον ανταγωνισμό της ελκτικής ενέργειας Coulomb (που χαρακτηρίζεται πρωτίστως από το φορτίο του πρωτονίου e) και της κβαντικής κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων (που χαρακτηρίζεται από τη σταθερά του Planck $\hbar$ και τη μάζα του ηλεκτρονίου, m_e). Οι τρεις βασικές σταθερές $e, \hbar, m_e$ ορίζουν ένα σύστημα μονάδων με μήκος την ακτίνα του Bohr[3], $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$, ενέργεια το λεγόμενο Hartree, $E_0 = \hbar^2 / m_e a_B^2$, πίεση την $E_o / a_B^3 = \hbar^2 / m_e a_B^5$, ταχύτητα την $\hbar / m_e a_B$, κ.ο.κ[4]

Συνήθως, αλλά όχι πάντα, τα άτομα ενός στερεού τοποθετούνται στο χώρο με ένα περιοδικό τρόπο επαναλαμβάνοντας μια μονάδα που ονομάζεται μοναδιαία κυψελίδα. Τα στερεά αυτά ονομάζονται κρυσταλλικά. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τρία συνήθη παραδείγματα μοναδιαίων κυψελίδων:

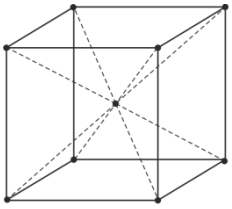
---

[2] Το m_u είναι το 1/12 της μάζας του ατόμου του άνθρακα 12, $m_u = 1823 m_e$.

[3] Στο σύστημα SI το e^2 πρέπει να αντικατασταθεί με το $e^2/4\pi\epsilon_0$.

[4] Εάν ο αναγνώστης το επιθυμεί, μπορεί να αντικαταστήσει το a_B με το $\hbar^2 / m_e e^2$ ώστε να εκφράσει όλες τις μονάδες συναρτήσει των $e, \hbar, m_e$. Θα δούμε, όμως, ότι αντί του e^2 είναι βολικότερο συνήθως να κρατήσουμε το a_B.

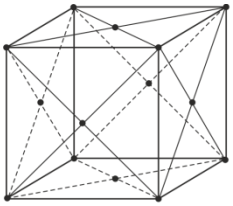
Χωροκεντρωμένη κυβική κυψελίδα (body centered cubic, bcc)



bcc

a: πλεγματική σταθερά
$d = \sqrt{3}a/2$: απόσταση πλησιέστερων γειτόνων
$r = \bar{r}\, a_B = 0,4924a = 0,5685d$ (Βλ. ορισμό (11.3))
2 άτομα ανά μοναδιαία κυψελίδα

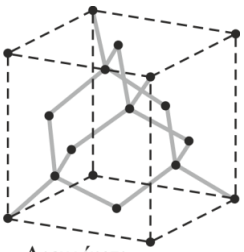
Εδροκεντρωμένη κυβική κυψελίδα (face centered cubic, fcc)



fcc

a: πλεγματική σταθερά
$d = a/\sqrt{2}$
$r = \bar{r}\, a_B = 0,3908a = 0,5527d$
4 άτομα ανά μοναδιαία κυψελίδα

Δομή αδάμαντα (και πυριτίου)



Διαμάντι

Δύο αλληλοεισχωρούντα πλέγματα fcc μετακινημένα κατά $(a/4)(1,1,1)$
$d = \sqrt{3}a/4$
$r = \bar{r}\, a_B = 0,3102a = 0,7163d$
8 άτομα ανά μοναδιαία κυψελίδα

Για το πυρίτιο (*Si*) οι διαστάσεις είναι: $a = 5,43\text{Å}$, $d = 2,35\text{Å}$, $r = 1,68\text{Å}$. Παρατηρήστε ότι σε όλα τα πλέγματα το r είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{2}d$. Γιατί;

11.2 Στερεά Ύλη ΙΙ: Διαστατική ανάλυση

Η απλούστερη προσέγγιση στις ιδιότητες των στερεών είναι η διαστατική ανάλυση με βάση τις παγκόσμιες σταθερές $e, \hbar, m_e$ ή, ισοδύναμα, τις $\hbar, m_e, a_B$. Ανάλογα με την ποσότητα X που εξετάζει κανείς μπορεί να εμφανισθεί εξάρτηση και από τις μάζες m_{ai} των διαφόρων ατόμων που συμμετέχουν στο σχηματισμό του στερεού και φυσικά από το είδος τους, όπως αυτό χαρακτηρίζεται από τον ατομικό αριθμό τους Z_i. Η εξωτερική θερμοκρασία T και πίεση P καθώς και η ταχύτητα του φωτός c μπορεί επίσης να παίξουν κάποιο ρόλο. Επομένως με βάση τη γενική σχέση (4.1)

καταλήγουμε στο ότι η οποιαδήποτε ποσότητα X που αφορά στη συμπυκνωμένη ύλη θα έχει την εξής μορφή:

$$\boxed{X = X_0 \varphi_x(Z_i,\, m_{ai}/m_e,\, T/T_0,\, P/P_0,\, c/\upsilon_0, ...)\ ,} \qquad (11.1)$$

όπου

$$\boxed{\begin{array}{l} X_0 = \hbar^{\mu} m_e^{\nu} a_B^{\xi}, \quad T_0 = \hbar^2/m_e a_B^2 k_B = 315775\,\mathrm{K}, \\ P_0 = \hbar^2/m_e a_B^5 = 294\times 10^6\,\mathrm{bar}, \quad \upsilon_0 = \hbar/m_e a_B = c/137. \end{array}} \qquad (11.2)$$

Τα μ, ν, ξ είναι τέτοια ώστε οι διαστάσεις του X_0 να είναι ίδιες με αυτές του X. Το T_0 είναι η μονάδα θερμοκρασίας στο ατομικό σύστημα μονάδων (που βασίζεται στις παγκόσμιες σταθερές $\hbar, m_e, a_B$), το P_0 είναι η μονάδα πίεσης στο ατομικό σύστημα μονάδων και $\upsilon_0 = e^2/h = \hbar/m_e a_B = 2187,7\,\mathrm{km/s}$, είναι η μονάδα ταχύτητας στο ατομικό σύστημα μονάδων. $\upsilon_o/c \equiv \alpha = 1/137$.

Είδαμε ήδη ότι το μέγεθος των ατόμων και το μήκος του δεσμού των μορίων είναι της τάξεως του a_B (αν και αρκετά μεγαλύτερο, βλέπε σχέση (10.3)). Επομένως και το χαρακτηριστικό μήκος της μικροσκοπικής δομής των στερεών θα είναι της τάξεως του a_B (αφού ένα στερεό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υπεργιγάντιο μόριο). Ένας τρόπος να ορίσουμε το χαρακτηριστικό μήκος, r, της μικροσκοπικής δομής ενός στερεού είναι η ακτίνα μιας νοητής σφαίρας που έχει όγκο ίσο με τον *όγκο ανά άτομο*, V/N, του στερεού. Μ' άλλα λόγια το μήκος r ορίζεται από τη σχέση

$$\boxed{\frac{4\pi}{3} r^3 \equiv \frac{V}{N_a},} \qquad (11.3)$$

όπου V είναι ο όγκος του στερεού και N_a ο συνολικός αριθμός των ατόμων που το αποτελούν. Βάσει του ό,τι αναφέραμε προηγουμένως, περιμένουμε ότι το $\bar{r} \equiv r/a_B$ να είναι κάπως μεγαλύτερο από το r_a/a_B, αφού ο όγκος V/N_a, μια και περιλαμβάνει και τα ενδιάμεσα κενά μεταξύ ατόμων (που είναι σφαιρικάου σχήματος), είναι μεγαλύτερος από τον (μέσο) όγκο του ατόμου. (Για τον ίδιο λόγο $r > \frac{1}{2} d$). Πράγματι, ενώ η μέση τιμή του $\langle r_a/a_B \rangle$ για τα στοιχεία του περιοδικού πίνακα είναι $\approx 2,6$, το $\bar{r}$ κυμαίνεται ως εξής, $1 \lesssim \bar{r} \lesssim 6$ με μέση τιμή γύρω στο 3.

Η πυκνότητα, ρ_{M}, του στερεού εκφράζεται εύκολα μέσω του r ή του $\bar{r}$

$$\boxed{\rho_M = \frac{M_{o\lambda}}{V} = \frac{N_a m_a}{V} = \frac{m_a}{(V/N_a)} = 0,239\frac{m_a}{r^3} \approx 2,675\frac{A_B}{\bar{r}^3}\,\mathrm{gr/cm^3},} \qquad (11.4)$$

Όπου $m_a = A_B m_u$ και A_B είναι το (μέσο) ατομικό βάρος των ατόμων που απότελούν το στερεό ($A_B \approx A$ και A είναι ο μαζικός αριθμός του πυρήνα).

Για την ενέργεια σύνδεσης του στερεού ανά άτομο, $|\delta E| = |\delta E_{ολ}| / N_a$, και για το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας B, θα δοκιμάσουμε το αποτέλεσμα της διαστατικής ανάλυσης με την *πρόσθετη και αναμενόμενη αντικατάσταση* $a_B \to r = \bar{r}\, a_B$.

$$\boxed{|\delta E| = c_c \frac{\hbar^2}{m r^2} = c_c \frac{\hbar^2}{m a_B^2} \frac{1}{\bar{r}^2} = c_c \frac{27,2}{\bar{r}^2} \text{ eV}, \quad c_c \approx 1,} \tag{11.5}$$

$$B = c_B \frac{\hbar^2}{m r^5} = c_B \frac{\hbar^2}{m a_B^5} \frac{1}{\bar{r}^5} = c_B \frac{294}{\bar{r}^5} \times 10^6 \text{ bar}, \quad c_B \approx 0,6 \ , \tag{11.6}$$

Ο αριθμητικός παράγοντας, 0,6, δεν προκύπτει φυσικά από τη διαστατική ανάλυση, αλλά έχει τεθεί εκ των υστέρων για βελτίωση της ποσοτικής συμφωνίας με τα πειραματικά δεδομένα. Το B δίνεται συνήθως σε μονάδες Pa= N/m^2 ή σε dyn/cm^2, όπου $1\text{bar} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 10^6 \text{ dyn/cm}^2$.

Το διατμητικό μέτρο ελαστικότητας μ για τα περισσότερα μέταλλα είναι μεταξύ του 0,3 και του 0,6 του B. Η κρίσιμη διατμητική τάση τ_c υπό την επίδραση της οποίας ένα στερεό αστοχεί (που σημαίνει ότι είτε σπάει είτε υφίσταται πλαστική παραμόρφωση, δηλ. αρχίζει να ρέει ως να ήταν ένα πολύ παχύρρευστο υγρό) εξαρτάται όχι μόνο από τη μικροσκοπική του δομή αλλά και από την ύπαρξη και την ευκινησία των λεγομένων *εξαρμόσεων* που είναι ελαττώματα στη σύνδεση γειτονικών ατόμων κατά μήκος γραμμών στο εσωτερικό του στερεού. Μια πολύ χονδρική εκτίμηση της τιμής του τ_c είναι

$$\tau_c \approx 0,005\mu \approx B/500 \ . \tag{11.7}$$

Αφού το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υπεργιγάντιο μόριο, ο αριθμός των ιδιοταλαντώσεων των ατόμων του (ή των ιόντων του) ισούται με $3N_a$-6 $\approx 3N_a$ (βλέπε ενότητα 10.2, σελ. 221). Ήδη αναφέραμε ότι οι τύποι (10.6, .6΄) δίνουν μια εύλογη εκτίμηση της μέγιστης ιδιοσυχνότητας των ιοντικών ιδιοταλαντώσεων σ' ένα μόριο. Είναι λογικό παρόμοιοι τύποι να ισχύουν και για τη μέγιστη ιοντική ιδιοσυχνότητα ενός στερεού με τις εύλογες αντικαταστάσεις $d_0 \to r$, $m_r \to m_a$.

$$\omega_{\max,2} = c_2 \frac{\hbar}{m_e a_B^2 \bar{r}^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_a}} = c_2 \frac{96,8}{\bar{r}^2 \sqrt{A_B}} \times 10^{13} \text{ rad/s}, \tag{11.8}$$

ή

$$\omega_{\max,1} = c_1 \frac{e^2}{\hbar r}\sqrt{\frac{m_e}{m_a}} = c_1 \frac{96,8}{\overline{r}\sqrt{A_B}} \times 10^{13}\,\mathrm{rad/s}. \qquad (11.8')$$

Όπως και στην περίπτωση των διατομικών μορίων, η αριθμητική σταθερά c_1 θα ληφθεί ίση με τη μονάδα, ενώ η c_2 θα επιλεγεί ίση με 2,8, δεδομένου ότι στα περισσότερα στερεά το c_2 κυμαίνεται μεταξύ 2,25 και 3,2. Με αυτές τις επιλογές οι αντίστοιχες τιμές του μέγιστου ταλαντωτικού κβάντου είναι

$$\hbar\omega_{\max,2} = \frac{1790}{\overline{r}^2\sqrt{A_B}}\,\mathrm{meV}, \quad \text{ή} \quad \hbar\omega_{\max,1} = \frac{637}{\overline{r}\sqrt{A_B}}\,\mathrm{meV}\,. \qquad (11.9)$$

Ορίζουμε επίσης μια χαρακτηριστική θερμοκρασία $\Theta_D \equiv \hbar\omega_{\max}/k_B$ που ονομάζεται *θερμοκρασία Debye* και η οποία παίζει καθοριστικό ρόλο για τις θερμοδυναμικές ιδιότητες των στερεών τις οφειλόμενες στις ιοντικές ταλαντώσεις.

$$\Theta_{D,2} = \frac{20700}{\overline{r}^2\sqrt{A_B}}\,\mathrm{K}, \quad \text{ή} \quad \Theta_{D,1} = \frac{7390}{\overline{r}\sqrt{A_B}}\,\mathrm{K}\,. \qquad (11.10)$$

Η ταχύτητα του ήχου σ'ένα υγρό[5] προκύπτει από τη μονάδα της ταχύτητας $\upsilon_0 = e^2/\hbar = \hbar/m_e a_B$ στο ατομικό σύστημα μονάδων με την αντικατάσταση $a_B \to r = \overline{r}\,a_B$ και με τον πολλαπλασιασμό επί τον παράγοντα $\sqrt{m_e/m_a}$, αφού ο ήχος διαδίδεται από (δονούμενο) άτομο σε (δονούμενο) γειτονικό άτομο και ισχύει το επιχείρημα της σελ. 219. Επομένως έχουμε ότι

$$\upsilon \approx c_\upsilon\sqrt{\frac{m_e}{m_a}}\frac{\hbar}{m_e r} = \frac{c_\upsilon}{\overline{r}}\sqrt{\frac{m_e}{m_a}}\frac{\hbar}{m_e a_B} = \frac{51 c_\upsilon}{\overline{r}\sqrt{A_B}}\,\mathrm{km/s}, \qquad (11.11)$$

όπου η αριθμητική «σταθερά» c_υ είναι γύρω στο 1,6 για στερεά και υγρά με ισχυρούς χημικούς δεσμούς, όπως ο ομοιοπολικός, ο ιοντικός και ο μεταλλικός δεσμός, και γύρω στο 0,5 για υγρά όπως το νερό που τα μόριά του συγκρατούνται με τους ασθενέστερους υδρογονικούς δεσμούς.

---

[5] Σ΄ ένα ισοτροπικό στερεό υπάρχουν δύο διαφορετικές ταχύτητες του ήχου, η υ_t (για εγκάρσια ηχητικά κύματα) και η υ_ℓ (για διαμήκη κύματα), ενώ σε υγρά υπάρχουν μόνο διαμήκη ηχητικά κύματα και επομένως μόνο η διαμήκης ταχύτητα. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

Σημειώστε ότι η ποσότητα $\sqrt{B/\rho_M}$, όπως προσδιορίζεται από τις σχέσεις (11.6) και (11.4) είναι ίση με την ταχύτητα υ , όπως δίνεται από τη σχέση (11.11)˙ αυτό δεν είναι τυχαίο. Η ταχύτητα του ήχου στα υγρά πράγματι ικανοποιεί, ακριβώς, την ακόλουθη σχέση (11.11΄):

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{B/\rho_M}\ .} \qquad (11.11')$$

Στον Πίν. 11.1 συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των τύπων (11.5), (11.6), (11.10) και (11.11) χρησιμοποιώντας την εμπειρική τιμή του $\bar{r}$ μέσω του τύπου (11.4) με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για τέσσερα σημαντικά μονοστοιχειακά στερεά.

Πίν. 11.1 *Σύγκριση των αποτελεσμάτων των τύπων (11.5), (11.6), (11.10) και (11.11) με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για τέσσερα πολύ σημαντικά στερεά. Στην τελευταία γραμμή το πρώτο νούμερο είναι το $\Theta_{D,2}$ και το δεύτερο το $\Theta_{D,1}$*

	Fe		**Al**		**Cu**		**Si**	
	Πειρ.	«Θεωρία»	Πειρ.	«Θεωρία»	Πειρ.	«Θεωρία»	Πειρ.	«Θεωρία»
$\bar{r}$	2,70		2,99		2,67		3,18	
A_B	55,85		26,98		63,55		28,09	
$\lvert\delta E\rvert$ (eV)	4,28	3,73	3,39	3,04	3,49	3,82	4,63	2,69
B(Mbar)	1,68	1,29	0,722	0,73	1,37	1,29	0,998	0,54
υ (km/s)	4,63	4,06	5,68	5,28	3,93	3,85	6,48	4,87
$\Theta_D(K)$	464	380, 366	426	445, 476	344	364, 347	645	386, 438

υ αέρα (20° C) = 343 m/s έναντι 380 m/s του τύπου (11.11).

Σχόλιο: Η πιο μεγάλη διαφοροποίηση μεταξύ πειράματος και «θεωρίας» εμφανίζεται στο πυρίτιο. Ο κύριος λόγος είναι η διαφορά στην κρυσταλλική δομή των τεσσάρων στερεών: Το πυρίτιο έχει τη δομή του αδάμαντα, μια «ανοικτή» δομή με τέσσερις μόνο άμεσους γείτονες και με ποσοστό κατάληψης του όγκου από τα άτομα μόνο 34%. Αντίθετα το αλουμίνιο και ο χαλκός έχουν μια χωροπληρούσα δομή, την fcc, με 12 άμεσους γείτονες και ποσοστό κατάληψης 74%. Ο σίδηρος είναι μια ενδιάμεση περίπτωση με 8 άμεσους γείτονες και ποσοστό κατάληψης 68%. Ως αποτέλεσμα αυτών των δομικών διαφορών ο λόγος r/r_a εμφανίζεται υπερτιμημένος (1,57) για το πυρίτιο έναντι των Fe, Al, Cu που είναι αντιστοίχως 1,17, 1,17, 1,18. Εάν το πυρίτιο είχε τη δομή fcc, ο παραπάνω λόγος θα ήταν $1,57(0,34/0,74)^{1/3} = 1,21$, δηλαδή συγκρίσιμος με αυτόν των άλλων στερεών. Αν λοιπόν αντί του $\bar{r} = 3,18$ είχαμε χρησιμοποιήσει το $\tilde{r} = \bar{r}(0,34/0,74)^{1/3} = 2,45$, θα βρίσκαμε για το πυρίτιο $|\delta E| = 4,52,\ B = 1,98,\ \upsilon = 6,27$ και $\Theta_D = 568$ αντί αυτών που εμφανίζονται στη στήλη «θεωρία», δηλαδή πιο κοντά στα πειραματικά δεδομένα. Το συμπέρασμα είναι ότι το μήκος $\tilde{r}$, που ορίζεται

από τη σχέση $(4\pi/3)\times(\tilde{r}\,a_B)^3 = \tilde{V}/N$, όπου $\tilde{V}$ είναι ο όγκος του στερεού επί το ποσοστό κατάληψης διηρημένο με το μέγιστο ποσοστό κατάληψης 0,74, είναι ίσως το πιο αντιπροσωπευτικό και κατάλληλο μήκος για να χαρακτηρίσει το κάθε στερεό. Για το Fe το $\tilde{r} = \overline{r}\,(0,68/0,74)^{1/3} = 2,62$ και οι εκτιμήσεις μας με βάση το $\tilde{r}$ αντί του $\overline{r}$ θα ήσαν 3,84, 1,49, 4,18, 404 αντίστοιχα.

Η διαστατική ανάλυση δεν έχει μόνο επιτυχίες, όπως αυτές του Πιν. 11.1. Υπάρχουν και εντυπωσιακές αποτυχίες με πιο χαρακτηριστική αυτή της *ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης*, ρ_η. Η μονάδα της ηλεκτρικής αντίστασης προκύπτει από το νόμο του Ohm, $R=V/I$ οπότε $[R]=[V]/[I]=([E]/[Q])/([Q]/[t])=[E][t]/[Q]^2=\hbar/e^2$. Επειδή $R=\rho_\eta\ell/S$, έχουμε για τις διαστάσεις του $[\rho_\eta]=[R][L]=\hbar a_B/e^2=\hbar^3/e^4m_e$. Το $\hbar a_{\mathbf{B}}/e^2$ ισούται με 21,74 $\mu\Omega\times\mathrm{cm}$. Με την αντικατάσταση $a_B \Rightarrow r=\overline{r}\,a_B$ η τιμή του ρ_η θα γίνει της τάξεως του 60 $\mu\Omega\times\mathrm{cm}$. Η τιμή αυτή είναι αρκετά μεγαλύτερη από την πειραματική τιμή του ρ_η των περισσοτέρων μετάλλων σε θερμοκρασία T=300K όπως φαίνεται στον Πίν. 11.2.

Πιν. 11.2 *Ειδική ηλεκτρική αντίσταση μερικών μετάλλων σε θερμοκρασία T=300* K

Μέταλλο	*Li*	*Na*	*K*	*Cs*	*Cu*	*Ag*	*Au*	*A ℓ*	*Mg*	*Pb*	*Mn*
ρ_η(μΩ·cm)	9,55	4,93	7,47	21	1,73	1,63	2,27	2,73	4,51	21,3	139

Όμως η κατάσταση γίνεται πολύ χειρότερη για χαμηλές θερμοκρασίες μερικών βαθμών Kelvin, όπου η ειδική ηλεκτρική αντίσταση, π.χ., του χαλκού μπορεί να μειωθεί σε[6] 10^{-6}μΩ×cm δηλαδή να γίνει οκτώ τάξεις μεγέθους μικρότερη από την εκτίμηση τη βασισμένη στη διαστατική ανάλυση. Αντίθετα σε μονωτές η ειδική ηλεκτρική αντίσταση μπορεί να γίνει πρακτικά άπειρη (της τάξεως του 10^{25}μΩ×cm**)**. Είναι φανερό ότι για ένα μέγεθος, που οι τιμές του κυμαίνονται από στερεό σε στερεό μέχρι και τριάντα τάξεις μεγέθους, η παραπάνω απλή διαστατική ανάλυση είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Η ερμηνεία του γιατί η ειδική ηλεκτρική αντίσταση έχει ένα τέτοιο τεράστιο εύρος τιμών και εξαρτάται τόσο πολύ από τη θερμοκρασία και την καθαρότητα του στερεού ανάγεται και πάλι στην κβαντομηχανική, όπως θα δείξουμε στη μεθεπόμενη ενότητα.

[6] Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε μέση ελεύθερη διαδρομή των ηλεκτρονίων της τάξεως των 10^9 Å =10cm! Ενώ η τιμή $\rho_n \approx 60\,\mu\Omega\times\mathrm{cm}$ της διαστατικής ανάλυσης αντιστοιχεί σε μέση ελεύθερη διαδρομή περίπου 10 Å όσο, δηλαδή, θα περίμενε κανείς από ηλεκτρόνια που προχωρούν στο στερεό συγκρουόμενα με άτομα που απέχουν μεταξύ τους το πολύ μερικά Angstrom.

11.3 Στερεά Ύλη ΙΙΙ: Το μοντέλο των ελεύθερων ηλεκτρονίων

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι η απλή διαστατική ανάλυση (βάσει των σταθερών $e, \hbar, m$ και της αντικατάστασης $a_B \Rightarrow r = \bar{r}\, a_B$ δίνει τη σωστή τάξη μεγέθους για πολλές (αλλά όχι για όλες) τις ποσότητες που χαρακτηρίζουν τη στερεά φάση. Μάλιστα όταν χρησιμοποιήσαμε την πειραματική τιμή για το $\bar{r}$ ή, ακόμη καλύτερα, αυτή του $\tilde{r}$, η συμφωνία διαστατικής εκτίμησης και πειραματικών δεδομένων έγινε αρκετά καλή. Το ερώτημα που τίθεται είναι εάν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\bar{r}$ (ή το $\tilde{r}$) από πρώτες αρχές. Η απάντηση είναι καταφατική και μάλιστα αρκετά απλή και οικεία, εάν χρησιμοποιήσουμε το *μοντέλο των ελεύθερων ηλεκτρονίων*. Το μοντέλο αυτό θεωρεί ότι κατά το σχηματισμό του στερεού αποκολλώνται από κάθε άτομο ζ ηλεκτρόνια (όπου ζ είναι το χημικό σθένος) αφήνοντας πίσω ένα ιόν με φορτίο $\zeta|e|$. Τα ηλεκτρόνια που έχουν αποκολληθεί θεωρούμε ότι κινούνται σ' όλο το στερεό ελεύθερα, δηλαδή, σαν να μην υφίστανται καμία δύναμη. Για να βρούμε λοιπόν, το $\bar{r}$ αρκεί να υπολογίσουμε την ολική ενέργεια του στερεού, που αποτελείται από την κινητική ενέργεια των ελευθέρων ηλεκτρονίων (η οποία, όπως έχουμε αναφέρει επανειλημμένως, είναι ανάλογη του $1/r^2 \sim 1/\bar{r}^2$) και τη συνολική ενέργεια Coulomb μεταξύ ελευθέρων ηλεκτρονίων-ελευθέρων ηλεκτρονίων, μεταξύ ιόντων-ιόντων και μεταξύ ελευθέρων ηλεκτρονίων-ιόντων. Η συνολική δυναμική ενέργεια είναι ανάλογη του $1/r \sim 1/\bar{r}$, αφού πρόκειται για ενέργεια Coulomb, και είναι ελκτική (γιατί αλλιώς η ολική ενέργεια θα ήταν θετική και το στερεό δεν θα σχηματιζόταν). Έτσι η συνολική ενέργεια του στερεού (ανά άτομο) δίνεται από ένα τύπο της μορφής[7]:

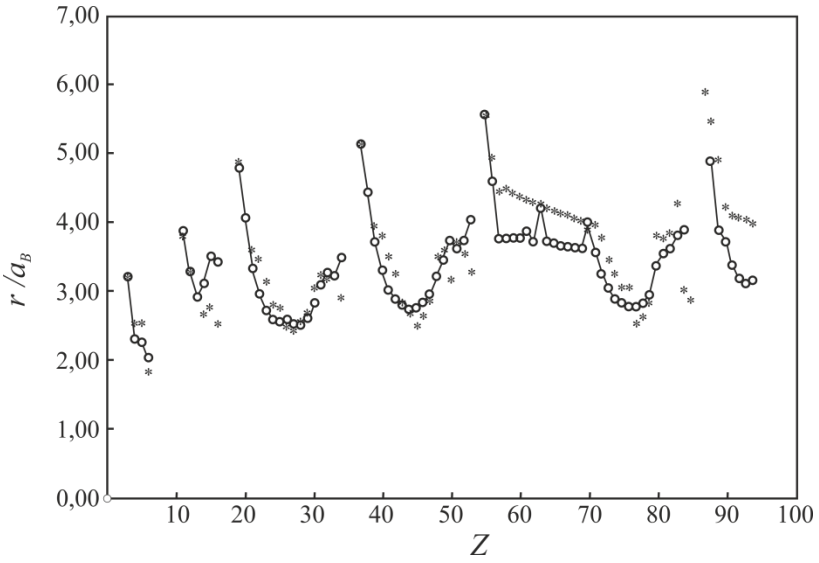
$$\boxed{\frac{U}{N} = \left(\frac{a}{\bar{r}^2} - \frac{\gamma}{\bar{r}}\right)\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 \equiv \frac{\hbar^2}{m a_B^2}} \tag{11.12}$$

Ελαχιστοποιώντας το *U/N* ως προς $\bar{r}$ έχουμε την τιμή ισορροπίας του $\bar{r}$, $\bar{r} = 2a/\gamma$. Π.χ., για το Al, όπου οι τύποι της υποσημείωσης δίνουν a

---

[7] Η ποσότητα *a* στον τύπο (11.12) ισούται με $1{,}3\zeta^{5/3} + \eta\,\zeta^2 \bar{r}_c$ και η ποσότητα γ με $0{,}56\,\zeta^{4/3} + 0{,}9\zeta^2$ (βλέπε, Ε.Ν. Οικονόμου, *Επίτομη Φυσική Στερεάς Κατάστασης*, ΠΕΚ, Ηράκλειο, 2018, σελ.46-47). Το ζ είναι το ενεργό σθένος του ατόμου, το $\bar{r}_c$ είναι *η ακτίνα του ιόντος* διηρημένη με το a_B, και το η=0,4+0,5$\left|\left(\left|\zeta_0 - \zeta\right| / \zeta_1\right) - 1\right|$ κυμαίνεται από 0,4 έως 0,9 , όπου ζ_0 είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων στους εξώτερους ημισυμπληρωμένους φλοιούς του ατόμου και ζ_1=1 για τις τρεις πρώτες γραμμές του περιοδικού πίνακα και ζ_1=6 για τις υπόλοιπες γραμμές. *Το* r_c, που είναι η ακτίνα του *ιόντος*. *δεν πρέπει να συγχέεται με το* r *!*

=13,6 και γ=9,03, το $\overline{r}$ προκύπτει ίσο με 3,01, ενώ η πειραματική τιμή είναι 2,99. Ακόμη και για το Si (όπου το μοντέλο των ελεύθερων ηλεκτρονίων δεν είναι κατάλληλο) βρίσκουμε a=24,5, γ=17,95 και $\overline{r}$ =2,73 ενώ η πειραματική τιμή είναι 3,18. Από τον τύπο (11.12) μπορεί κανείς να υπολογίσει το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας[8].



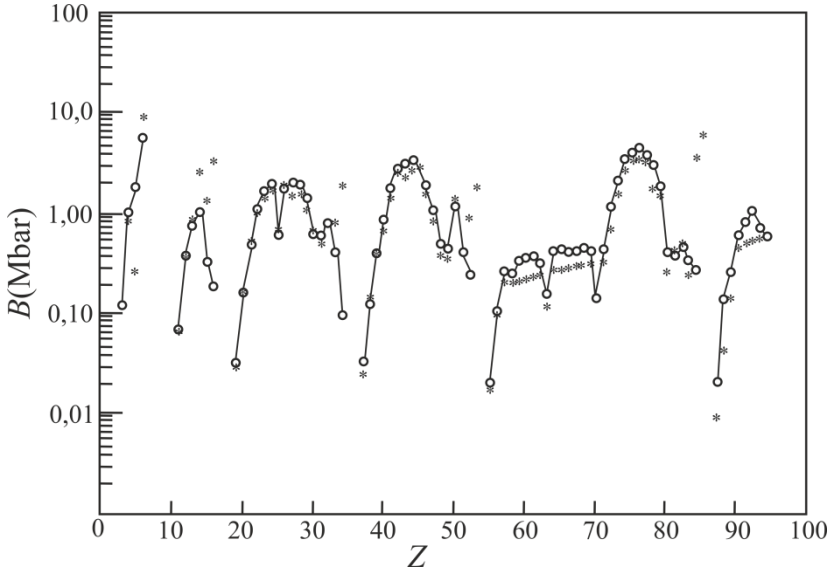
Σχ. 11.1 Η ακτίνα $\overline{r} \equiv r / a_B$ ανά άτομο για όλα τα μονοστοιχειακά στερεά του Περιοδικού Πίνακα. Οι κυκλίσκοι είναι πειραματικά δεδομένα και οι αστερίσκοι θεωρητικά αποτελέσματα βασισμένα στην (11.12) και στην υποσημείωση 7. Η συνεχής γραμμή περνάει από τα πειραματικά σημεία

Άσκηση 11.1 Για τα σημαντικά μέταλλα Fe(bcc), Cu(fcc) και Al(fcc) υπολογίστε την ακτίνα $\overline{r}$, την πλεγματική σταθερά *a*, το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας *B* και την πυκνότητα ρ χρησιμοποιώντας τους τύπους των υποσημειώσεων 7 και 8, σελ. 255, 256. Δίνεται το ενεργό σθένος ζ και η ακτίνα $\overline{r_c}$ του αντίστοιχου ιόντος: Fe(3, 1,26) Cu(2,57, 1,12) Al(2,76, 1,1).

Λύση: Δίνονται κατά σειρά τα η, a, $\overline{r}$, B: Fe (0,483, 13,59, 2,58, 1,85) Cu (0,603, 10,73, 2,72, 1,14) Al (0,78, 13,6, 3,01, 0,85)

---

[8]Δείξτε ότι $B = +V\partial^2 U / \partial V^2$ (για T=0K). Αφού θέσετε $(a\varepsilon_0 / \overline{r}^2) - (\gamma\varepsilon_0 / \overline{r}) = = (A / V^{2/3}) - (\Gamma / V^{1/3})$, εκτελέστε τις παραγωγίσεις, λάβετε υπόψη ότι η πίεση P=0 και μετά θέσατε $(A / V^{2/3}) = (a\varepsilon_0 / \overline{r}^2)$, $(\Gamma / V^{1/3}) = (\gamma\varepsilon_0 / \overline{r})$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι $B = (1/6\pi)(a / \overline{r}^5)(\hbar^2 / m_e a_B^5) = 15,6\, a / \overline{r}^5$ Mbar.



Σχ. 11.2 Το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας *B* για όλα τα στερεά του περιοδικού πίνακα. Οι κυκλίσκοι είναι πειραματικές τιμές και οι αστερίσκοι θεωρητικές τιμές βάσει των υποσημειώσεων 7 και 8. Η συνεχής γραμμή περνάει από τα πειραματικά σημεία

11.4 Στερεά Ύλη IV: Η μέθοδος LCAO του γραμμικού συνδυασμού ατομικών τροχιακών (LCAO: Linear Combination of Atomic Orbitals).)

11.4.1 Μονοδιάστατο μοντέλο για μέταλλα

Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υπεργιγάντιο μόριο στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο LCAO. Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα μονοδιάστατο 'στερεό' όπου *N* όμοια άτομα (*N* πολύ μεγάλος αριθμός, π.χ. $N=10^8$) είναι παρατεταγμένα *περιοδικά* το ένα δίπλα στο άλλο δημιουργώντας μια αλυσίδα της οποίας (επίσης για απλότητα) ενώνουμε τα δύο άκρα έτσι ώστε το υπ' αρ. 1 και το υπ' αρ. *N* να είναι άμεσοι γείτονες. Η απόσταση μεταξύ άμεσων γειτόνων συμβολίζεται με *d* και φυσικά το *d* είναι της τάξεως του a_B (αλλά αρκετά μεγαλύτερο). Το παρόν μοντέλο είναι παρόμοιο με αυτό των τροχιακών p_z στο μόριο του βενζολίου με τη διαφορά ότι αντί για 6 τροχιακά στη σειρά που είχαμε στο μόριο του βενζολίου, εδώ έχουμε *N*. Σύμφωνα με τον τύπο (10.18) το κάθε ηλεκτρονιακό τροχιακό του στερεού, ψ, θα είναι εν γένει απλωμένο σ' όλο το στερεό και θα αποτελείται από κάποιο γραμμικό συνδυασμό των ατομικών τροχιακών όλων των *N* ατόμων. Προς το παρόν θα υποθέσουμε ότι στο σχηματισμό του στερεού μετέχει ένα μόνο (και του ίδιου τύπου)

τροχιακό, ϕ_n, από κάθε άτομο (το n καθορίζει τη θέση $x_n = nd$ του κάθε ατόμου) . Επομένως τα τροχιακά του στερεού θα είναι της μορφής:

$$\boxed{\psi = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \,.} \qquad (11.13)$$

Η σχέση που ικανοποιούν οι συντελεστές c_n, η μορφή τους και η αντίστοιχη τιμή της ενέργειας είναι ακριβώς όπως στην περίπτωση της λυμένης άσκησης 10.4. Αξιοποιώντας λοιπόν αυτή την άσκηση μπορούμε να καταλήξουμε αμέσως στις παρακάτω σχέσεις (11.14) έως (11.17). Εναλλακτικά μπορούμε να αγνοήσουμε την επίλυση αυτής της άσκησης και να ξεκινήσουμε από την αρχή με βάση την ελαχιστοποίηση της ενέργειας· η ενέργεια που αντιστοιχεί στο ψ θα έχει την ακόλουθη μορφή που είναι άμεση γενίκευση του τύπου (10.9)[9].

$$\varepsilon = \frac{A}{\Pi} \,, \qquad (11.14)$$

όπου

$$A = \sum_{n=1}^{N} c_n^* c_n \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n^* c_{n+1} + c_n^* c_{n-1}) V_2 \,, \qquad (11.14')$$

$$\Pi = \sum_{n=1}^{N} c_n^* c_n \,. \qquad (11.14'')$$

Στον τύπο (11.14′) θεωρήσαμε ότι το ατομικό τροχιακό του ατόμου n συζεύγνυται μέσω της ποσότητας V_2 με το ατομικό τροχιακό του αριστερού του ατόμου n-1 και με το ατομικό τροχιακό του δεξιού του ατόμου, n+1 (το N+1 άτομο ταυτίζεται με το υπ' αρ. 1). Σημειώστε ότι οι ποσότητες ε_0 και V_2 είναι κοινές για κάθε τροχιακό και για κάθε ζεύγος γειτονικών ατομικών τροχιακών αντιστοίχως, επειδή θεωρήσαμε όμοια άτομα σε *περιοδική* μονοδιάστατη διάταξη. Θα ακροτατοποιήσουμε την ενέργεια ε ως προς την καθεμία μεταβλητή c_n^* (n=1,…,N) (που τη χειριζόμαστε ως ανεξάρτητη από τη c_n) θέτοντας τις μερικές παραγώγους $\partial\varepsilon / \partial c_n^*$ ίσες με μηδέν και λαμβάνοντας υπόψη ότι από την (11.14), $A=\varepsilon\Pi$. Εκτελώντας αυτές τις

[9] Τα c_n είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί και το c_n^* συμβολίζει το συζυγή μιγαδικό του c_n.

πράξεις, βρίσκουμε το ακόλουθο σύστημα N εξισώσεων για τις N μεταβλητές c_n

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon)c_n + V_2 c_{n+1} + V_2 c_{n-1} = 0 \ , \ n=1,\ldots N. \qquad (11.15)$$

Η (11.15) είναι ακριβώς η ίδια με τη σχέση (4.1) της λυμένης άσκησης 4 του Κεφ.10.

Λόγω της περιοδικότητας, λόγω, δηλαδή, του ότι τα ε_0 και V_2 είναι τα ίδια για όλες τις N εξισώσεις (11.15), υπάρχει ένα μαθηματικό θεώρημα (το *θεώρημα Bloch-Floquet***)** που λέει ότι οι λύσεις του συστήματος (11.15) μπορούν πάντοτε να γραφούν στη μορφή

$$c_n = e^{i\varphi n}, \ n = 1,\ldots, N \ , \qquad (11.16)$$

οπότε η (11.15) γίνεται

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + V_2(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \varepsilon_0 + 2V_2 \cos\varphi \, , \qquad (11.17)$$

όπου το φ είναι προς το παρόν αυθαίρετο . Η (11.17) συμπίπτει με την (4.2) της λυμένης άσκησης 4 του Κεφ. 10. Ο αναγνώστης μπορεί να βεβαιωθεί ότι οι (11.16) και (11.17) είναι πράγματι λύσεις της (11.15). Το φ θα προσδιοριστεί από τη σχέση $c_{N+1} \equiv c_1$ που δίνει $\exp(i\varphi N) = 1$ η οποία είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη σχέση

$$\varphi = \frac{2\pi}{N}\ell \, , \qquad (11.17')$$

όπου ℓ ακέραιος που παίρνει N διαδοχικές τιμές[10], π.χ., από $-(N/2)+1$ έως $N/2$.

Βρήκαμε επομένως N διαφορετικές λύσεις του συστήματος (11.15), δηλαδή όλες τις λύσεις (και αυτό χάρις στην περιοδικότητα). Η λύση (11.16), που εξαρτάται από το φ, μπορεί να γραφεί μ' ένα ισοδύναμο τρόπο, ο οποίος αναδεικνύει μια πολύ σημαντική ιδιότητά της. Ορίζοντας τον κυματαριθμό k από τη σχέση $k \equiv \varphi / d$ και γράφοντας $n\,d = x_n$ έχουμε ότι η (11.16) γίνεται

$$c_n^{(k)} = e^{ikx_n}, \qquad k \equiv \varphi / d \qquad (11.16')$$

πράγμα που σημαίνει ότι τα τροχιακά σ' ένα περιοδικό στερεό έχουν στην ουσία τη μορφή επίπεδου κύματος. Άρα ένα ηλεκτρόνιο σ' ένα περιοδικό στερεό προχωράει σαν να ήταν εντελώς ελεύθερο παρόλη την παρουσία των

[10] Οι υπόλοιπες τιμές του ℓ θα προσθέσουν ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π σε ήδη επιλεγμένη τιμή του φ και επομένως δεν αντιστοιχούν σε νέες λύσεις.

ατόμων, τα οποία όντας περιοδικά τοποθετημένα δεν δημιουργούν τριβή στην ηλεκτρονιακή κίνηση[11]. Αυτό εξηγεί το γιατί η ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων μπορεί να γίνει τόσο μεγάλη ώστε να αντιστοιχεί σε μήκος ελεύθερης διαδρομής μέχρι και πολλά εκατομμύρια φορές[12] την ατομική απόσταση d. Γιατί όμως η ηλεκτρική αντίσταση δεν γίνεται ακριβώς μηδέν, όπως θα περίμενε κανείς από λύσεις της μορφής (11.16΄); Δύο είναι οι λόγοι: Πρώτον, στα πραγματικά στερεά υπάρχουν πάντα κάποιες ξένες προσμίξεις και κάποια δομικά σφάλματα στην τοποθέτηση των ατόμων, που προκαλούν αποκλίσεις από την περιοδικότητα και επομένως καταστρέφουν εν μέρει την τέλεια εποικοδομητική συμβολή και οδηγούν σε τριβές. Δεύτερον, σε τριβές επίσης οδηγεί και το ότι τα άτομα δεν είναι ακίνητα, αλλά ταλαντώνονται γύρω από τις θέσεις ισορροπίας προκαλώντας έτσι αποκλίσεις

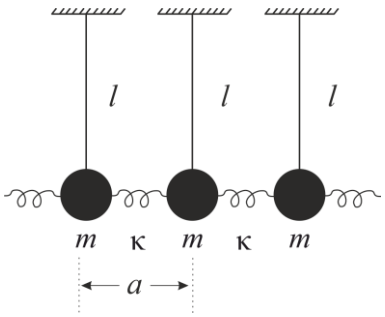
---

[11] Το αναπάντεχο αυτό φαινόμενο είναι αποτέλεσμα της **κυματικής** φύσης της ύλης (που είναι σύμφυτη με τη σωματιδιακή σύμφωνα με την κβαντομηχανική). Τα ηλεκτρόνια υφίστανται σκέδαση όταν βρίσκονται στη γειτονιά ενός ατόμου. Τα σκεδαζόμενα όμως κύματα μπορούν να συμβάλλουν εποικοδομητικά με *συστηματικό τρόπο* (λόγω της περιοδικής θέσης των ατόμων) και να αναιρέσουν έτσι στην ουσία τη σκέδαση και να αποκαταστήσουν την οιονεί ελεύθερη κίνηση των ηλεκτρονίων.

[12] Ο F. Bloch (που πρώτος συνέλαβε την ιδέα ότι η κυματική φύση της κίνησης των ηλεκτρονίων ερμηνεύει τις τεράστιες τιμές του μήκους ελεύθερης διαδρομής) διηγήθηκε με τα εξής λόγια το πώς οδηγήθηκε στην εξήγηση αυτή και στο ομώνυμο θεώρημά του:

«...Το γεγονός ότι η περιοδικότητα του κρυστάλλου θα ήταν ουσιαστικής σημασίας μου ήλθε στο νου ανακαλώντας στη μνήμη μου μια επίδειξη στο μάθημα της στοιχειώδους φυσικής, όπου πολλά ίδια και ομοίως συζευγμένα εκκρεμή ήσαν αναρτημένα από μια ράβδο σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις και την κίνηση του ενός εκκρεμούς τη βλέπαμε να «μεταναστεύει» κατά μήκος της αλυσίδας από εκκρεμές σε εκκρεμές. Με τέτοιες ασαφείς ιδέες στο νου μου γύρισα στο νοικιασμένο δωμάτιό μου ένα βραδάκι στις αρχές Ιανουαρίου (1928) και έπιασα μολύβι και χαρτί...»

Πιάστε, λοιπόν, και σεις μολύβι και χαρτί και λύστε –με βάση το νόμο του Νεύτωνα, $F=ma$– το περιοδικό σύστημα των συζευγμένων εκκρεμών του σχήματος που ακολουθεί. (Υποθέστε ότι το $n=N+1$ συμπίπτει με το $n=1$και το $n=0$ συμπίπτει με το $n=N$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Bloch).



από την περιοδικότητα. Το πλάτος των ταλαντώσεων αυτών αυξάνει με τη θερμοκρασία και επομένως περιμένουμε ότι η ειδική ηλεκτρική αντίσταση των μετάλλων θα αυξάνει με τη θερμοκρασία και μάλιστα γραμμικά, όπως πράγματι συμβαίνει[13] για θερμοκρασίες υψηλότερες του $\Theta_D / 5$. Μέχρι τώρα η κβαντομηχανική μας ερμήνευσε την ηλεκτρική συμπεριφορά των μετάλλων[14]. Μπορεί όμως να ερμηνεύσει και τη συμπεριφορά των ημιαγωγών και των μονωτών; Η απάντηση είναι και πάλι καταφατική: Η περιοδική τοποθέτηση των ατόμων, όπως επιτρέπει συστηματική εποικοδομητική συμβολή και αναιρεί έτσι στην ουσία τη σκέδαση, εξ ίσου καλά επιτρέπει και συστηματική καταστρεπτική συμβολή, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να υπάρξει καν τροχιακό υπό συνθήκες καταστρεπτικής συμβολής. Με άλλα λόγια στις ενεργειακές περιοχές, όπου έχουμε εποικοδομητική συμβολή υπάρχουν τροχιακά του στερεού, τα οποία είναι οιονεί επίπεδα κύματα. Στις ενεργειακές περιοχές, όπου έχουμε καταστρεπτική συμβολή δεν υπάρχουν καν τροχιακά του στερεού. Οι απαγορευμένες αυτές περιοχές ονομάζονται **χάσματα**. Οι επιτρεπτές ενεργειακές περιοχές ονομάζονται **ενεργειακές ζώνες**. Έτσι το ενεργειακό φάσμα ενός στερεού αποτελείται από μια εναλλαγή ενεργειακών ζωνών και χασμάτων, όπως φαίνεται στο Σχ. 11.3.

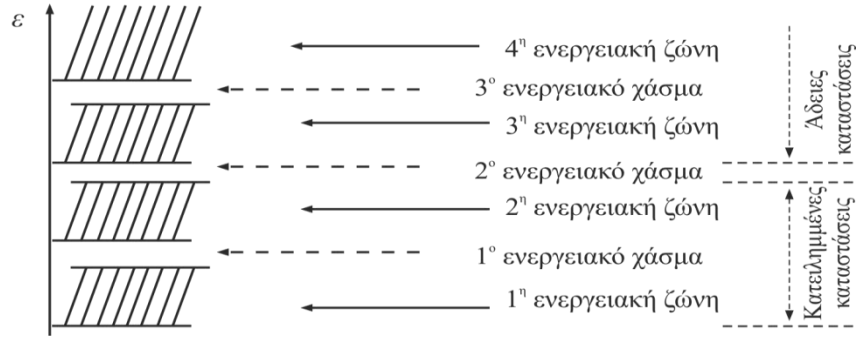
Η σχέση (11.17), καθώς το φ μεταβάλλεται από $\varphi = -\pi$ έως $\varphi = \pi$ δίνει μια ενεργειακή ζώνη, η οποία εκτείνεται από $\varepsilon_0 - 2|V_2|$ έως $\varepsilon_0 + 2|V_2|$. Άρα έχει συνολικό ενεργειακό εύρος ίσο με $4|V_2|$ και περιέχει N τροχιακά του στερεού τα οποία μπορούν να δεχτούν μέχρι $2N$ ηλεκτρόνια. Εάν θεωρήσουμε ότι το κάθε άτομο φέρει ένα μόνο ηλεκτρόνιο, τότε τα N συνολικά ηλεκτρόνια θα γεμίσουν την ενεργειακή ζώνη ακριβώς μέχρι τη μέση[15]. Σημειώστε ότι, όποτε συμβαίνει αυτό, όποτε δηλαδή η κατανομή ελάχιστης *ολικής* ενέργειας αφήνει κάποια ενεργειακή ζώνη εν μέρει μόνο γεμάτη (και επομένως εν μέρει άδεια), το στερεό θα είναι *πολύ καλός αγωγός* του ηλεκτρικού ρεύματος.

---

[13] Είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι η αντίσταση που προβάλλει το δονούμενο άτομο στη ροή των ηλεκτρονίων είναι ανάλογη της ενεργού διατομής του λόγω μετακίνησης, δηλαδή ανάλογη του u^2, όπου u είναι το μέσο πλάτος ταλάντωσης. Όμως το u^2 είναι ανάλογο της δυναμικής ενέργειας (και επομένως και της ολικής ενέργειας, η οποία για υψηλές θερμοκρασίες ισούται με $3k_B T$ ανά άτομο). Από δω και πέρα χρησιμοποιήστε διαστατική ανάλυση μαζί με $a_B \to r = \bar{r}\, a_B$ για να εκτιμήσετε την τιμή της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης στα μέταλλα.

[14] Η κλασική φυσική είναι σε πλήρη διάσταση με αυτή τη συμπεριφορά.

[15] Για T=0K, οπότε το «στερεό» είναι στη θεμελιώδη κατάσταση ελάχιστης συνολικής ενέργειας $E_{ολ.}$.



Σχ. 11.3 Τα τροχιακά ενός περιοδικού στερεού μπορούν να υπάρξουν μόνο όταν η ενέργειά τους, ε, ανήκει σε κάποια ενεργειακά επιτρεπτή περιοχή, τη ζώνη. Όταν το ε ανήκει σε απαγορευμένη περιοχή, δηλ. σε χάσμα, δεν υπάρχει αντίστοιχο τροχιακό. Οι ενεργειακές ζώνες και τα χάσματα εναλλάσσονται. Η εικονιζόμενη κατάληψη αντιστοιχεί σε ημιαγωγούς

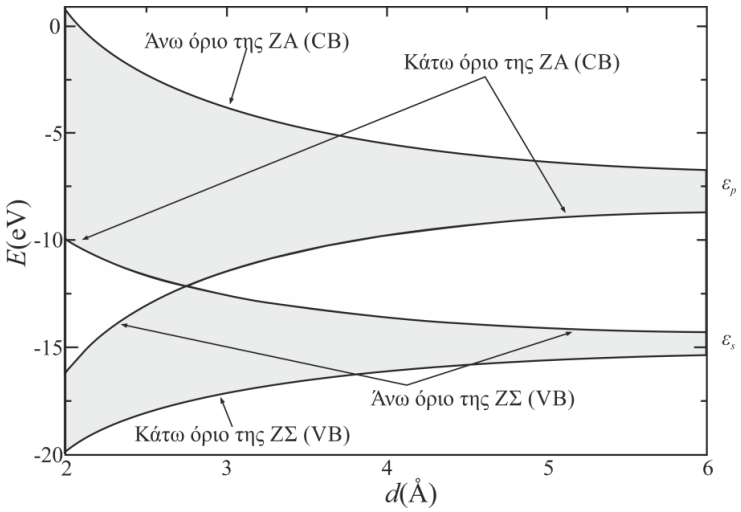
Ο λόγος είναι ότι η παρουσία άδειων τροχιακών με μηδενική πρακτικά ενεργειακή απόσταση από τα κατειλημμένα επιτρέπει εύκολη ανακατανομή των ηλεκτρονίων μεταξύ των τροχιακών, εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου, και κατά συνέπεια ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τους ημιαγωγούς και τους μονωτές.

11.4.2 Μονοδιάστατο μοντέλο για ημιαγωγούς

Στο μοντέλο που εξετάσαμε βρήκαμε μία μόνο ενεργειακή ζώνη γιατί ξεκινήσαμε από τη μη ρεαλιστική παραδοχή ότι κάθε άτομο έχει ένα μόνο ατομικό τροχιακό. Αν είχαμε ξεκινήσει με δύο τροχιακά ανά άτομο, ένα τύπου *s* και ένα τύπου p_x (στη διεύθυνση του μονοδιάστατου «στερεού») και δύο ηλεκτρόνια ανά άτομο, θα βρίσκαμε δύο ενεργειακές ζώνες με ένα χάσμα μεταξύ τους. Η άνω ζώνη (που, όπως θα δούμε, είναι άδεια) ονομάζεται **ζώνη αγωγιμότητας,** ΖΑ **(**conduction band, CB). Η κάτω ζώνη (που είναι πλήρως γεμάτη) ονομάζεται **ζώνη σθένους,** ΖΣ **(**valence band, VB). Στο Σχ. 11.4 εικονίζεται το πώς μεταβάλλονται τα όρια των δύο ενεργειακών ζωνών (και επομένως και τα όρια του μεταξύ τους χάσματος) καθώς αλλάζουμε το μήκος *d* και κατά συνέπεια αλλάζουν τα διάφορα V_2 (όπως το V_{2ss} μεταξύ των γειτονικών ατομικών τροχιακών *s*, το V_{2pp} μεταξύ γειτονικών τροχιακών p_x, και το $V_{2sp_x} = -V_{2p_xs}$ μεταξύ γειτονικών τροχιακών *s* και p_x. Για τις λεπτομέρειες βλ. το πρόβλ. 3, σελ. 274 του παρόντος κεφαλαίου.

Για μεγάλες τιμές του *d*, δηλαδή μικρές τιμές των V_2 δημιουργούνται δύο στενές ενεργειακές ζώνες γύρω από το ε_s (με εύρος ίσο περίπου με $4|V_{2ss}|$) και το ε_p (με εύρος περίπου ίσο με $4|V_{2pp}|$). Στη συνέχεια καθώς το *d* μικραίνει οι ενεργειακές ζώνες διευρύνονται και το χάσμα κατά συνέπεια συρρικνώνεται μέχρι πλήρους εξαφάνισης. Όμως αμέσως μετά, το χάσμα

εμφανίζεται πάλι. Τώρα όμως η κεντρική ενέργεια των δύο ενεργειακών ζωνών είναι περίπου $[(\varepsilon_p + \varepsilon_s)/2] \pm |V_{2h}|$, όπου V_{2h} είναι το V_2 μεταξύ του υβριδικού $sp_+^{(1)}$ ενός ατόμου και του υβριδικού $sp_-^{(1)}$ του ατόμου που βρίσκεται δίπλα του. Μ' άλλα λόγια, για μικρές τιμές του d, δηλαδή, για μεγάλες τιμές του $|V_{2h}|$ σχετικά με το $V_1 \equiv (\varepsilon_p - \varepsilon_s)/2$, οι ενεργειακές ζώνες σχηματίζονται γύρω από τη δεσμική και την αντιδεσμική μοριακή στάθμη που δημιουργούν τα υβριδικά τροχιακά $sp_+^{(1)}$ και $sp_-^{(1)}$ δύο διαδοχικών ατόμων· το εύρος της κάθε ζώνης στην περίπτωση αυτή είναι περίπου ίσο με $2V_1 = (\varepsilon_p - \varepsilon_s)$: Βλέπουμε λοιπόν ότι οι ρόλοι του V_{2h} και V_1 αντιστρέφονται: Για $|V_{2h}| << V_1$ η απόσταση των κέντρων των δύο ενεργειακών ζωνών είναι $2V_1$ και και το εύρος της κάθε μιας είναι περίπου ίσο με $4|V_{2jj}|$ j=*s* ή *p*. Για $V_1 << |V_{2h}|$ η απόσταση των κέντρων των δύο ενεργειακών ζωνών είναι ίση με $2|V_{2h}|$ και το εύρος της κάθε ενεργειακής ζώνης είναι περίπου ίσο με $2V_1$. Η σημασία αυτών των παρατηρήσεων έγκειται στο ότι



Σχ. 11.4 Δημιουργία δύο ενεργειακών ζωνών (γκρίζες περιοχές) σ' ένα μονοδιάστατο «στερεό» όμοιων ατόμων τοποθετημένων περιοδικά (που το καθένα τους έχει ένα ατομικό τροχιακό *s* και ένα p_x). Υπάρχει μια μόνο τιμή του *d* για την οποία κλείνει το χάσμα. Το ZA σημαίνει Ζώνη Αγωγιμότητας (Conduction band), ενώ το ZΣ σημαίνει Ζώνη Σθένους (Valence Band)

γενικεύονται στις τρεις διαστάσεις (όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω) και επομένως μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε το εύρος του χάσματος, E_g, για τη

ρεαλιστική περίπτωση $(\varepsilon_p - \varepsilon_s) \lesssim 2|V_{2h}|$. Το E_g καθορίζει καίριες ιδιότητες των ημιαγωγών και των μονωτών, όπως είναι η ηλεκτρική συμπεριφορά, η διαφάνεια ή μη των υλικών αυτών, το χρώμα τους, κλπ.

Σημειώστε ότι, αφού στο μονοδιάστατο μοντέλο μας το κάθε άτομο φέρει δύο τροχιακά, ένα *s* και ένα p_x, και δύο ηλεκτρόνια (και τα δύο στο ατομικό τροχιακό *s* και κανένα στο p_x) τότε, για T=0K, τα $2N$ ηλεκτρόνια θα γεμίσουν ακριβώς και τα N τροχιακά της κάτω ενεργειακής ζώνης του Σχ. 11.4 (περίπτωση $(\varepsilon_p - \varepsilon_s) < 2|V_2|$) και θα αφήσουν τελείως άδεια όλα τα N τροχιακά της πάνω ενεργειακής ζώνης. Όποτε συμβαίνει αυτό έχουμε είτε ημιαγωγό (εάν το εύρος του χάσματος, E_g είναι μικρότερο ή περίπου ίσο με 3eV) είτε μονωτή (εάν το $E_g \gtrsim 3$eV)[16]. Ο λόγος είναι απλός: Για να υπάρξει ηλεκτρικό ρεύμα θα πρέπει η κατανομή ισορροπίας των ηλεκτρονίων στα διάφορα τροχιακά του στερεού να τροποποιηθεί ως αποτέλεσμα της επιβολής του ηλεκτρικού πεδίου. Γιατί αλλιώς, αν η κατάσταση μείνει όπως και πριν από την επιβολή του ηλεκτρικού πεδίου, τότε το ηλεκτρικό ρεύμα θα μείνει όπως και πριν, δηλαδή μηδέν. Όμως η τροποποίηση αυτή (στην περίπτωση που η ανώτερη κατειλημμένη ενεργειακή ζώνη είναι πλήρης) απαιτεί την ενεργειακή μετακίνηση ηλεκτρονίων τουλάχιστον κατά E_g (πράγμα που δεν είναι εφικτό, όταν $E_g >> k_B T$, εκτός εάν το ηλεκτρικό πεδίο είναι τόσο τεράστιο ώστε να οδηγήσει στη διάσπαση του ημιαγωγού ή του μονωτή). Άρα το υλικό θα συμπεριφερθεί ως μονωτής ή ημιαγωγός και η ειδική ηλεκτρική του αντίσταση θα έχει τη μορφή

$$\boxed{\rho_\eta \sim T^s \exp(E_g / 2k_B T),} \qquad (11.18)$$

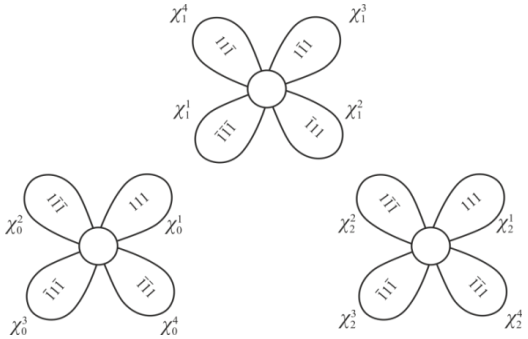
με $s \approx 0$ για καθαρό ημιαγωγό και $T > \Theta_D / 5$.

Το συμπέρασμα λοιπόν είναι, ότι η κβαντομηχανική μας παρέχει ποιοτική και ποσοτική ερμηνεία της ποικίλης ηλεκτρικής συμπεριφοράς των στερεών, τόσο των αγωγών όσο και των μονωτών.

11.4.3 Τριδιάστατοι ημιαγωγοί

Οι ημιαγωγοί συνήθως κρυσταλλώνονται στο πλέγμα του αδάμαντα, όπου κάθε άτομο έχει τέσσερα γειτονικά άτομα σε τετραεδρικές διευθύνσεις ως αποτέλεσμα υβριδισμού sp^3. Στο Σχ. 11.5 φαίνεται μια διδιάστατη απεικόνιση τριών ατόμων Si, με τα τέσσερα τροχιακά sp^3 για κάθε ένα άτομο. Έτσι μπορεί να αναπαραστήσει κανείς νοητά το πώς απλώνονται τα ηλεκ-

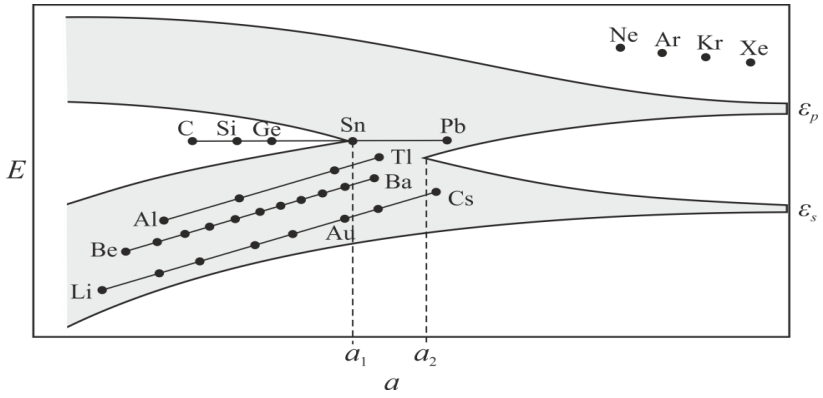
[16] Όταν το χάσμα γίνει μηδέν ή λίγο αρνητικό (που σημαίνει πολύ μικρή επικάλυψη των δύο ζωνών) έχουμε ημιμεταλλική ηλεκτρική συμπεριφορά.



Σχ.11.5 Διδιάστατη απεικόνιση των 4 μη συνεπίπεδων υβριδικών ατομικών τροχιακών sp^3 του ατόμου (0) στη θέση (0,0,0,), του ατόμου (1) στη θέση (α/4)(1,1,1), και του ατόμου (2) στη θέση (α/2)(0,1,1). Για κάθε υβριδικό τροχιακό σημειώνεται η κατεύθυνσή του στον τριδιάστατο χώρο. Το $\bar{1}$ σημαίνει –1

τρόνια σε όλη την έκταση του στερεού από διπλανό σε διπλανό άτομο μέχρι να διατρέξουν όλο τον ημιαγωγό κυρίως κατά μήκος των δεσμών.

Το Σχ. 11.6 δείχνει πώς γενικεύεται η εικόνα του Σχ. 11.4 για πραγματικά υλικά με τριδιάστατη[17] δομή[18]. Σημειώστε ότι υπάρχει μια ολόκληρη



Σχ. 11.6 Γραφική παράσταση των ενεργειακών ζωνών (γκρίζες περιοχές) σε ποιοτικό επίπεδο ενός απλού μονοστοιχειακού στερεού με τριδιάστατη ατομική δομή, ως συνάρτηση του λόγου $V_1/|V_{2h}|$ που εξαρτάται από την πλεγματική σταθερά a (με V_1 σταθερό). Το a_1

[17] Θυμίζουμε στον αναγνώστη ότι για τριδιάστατα στερεά το $V_1 \equiv (\varepsilon_p - \varepsilon_s)/4$. Το $|V_{2h}|$ για υβριδικά sp^3 ισούται με $3,22\hbar^2/md^2$ (αποδείξτε το).

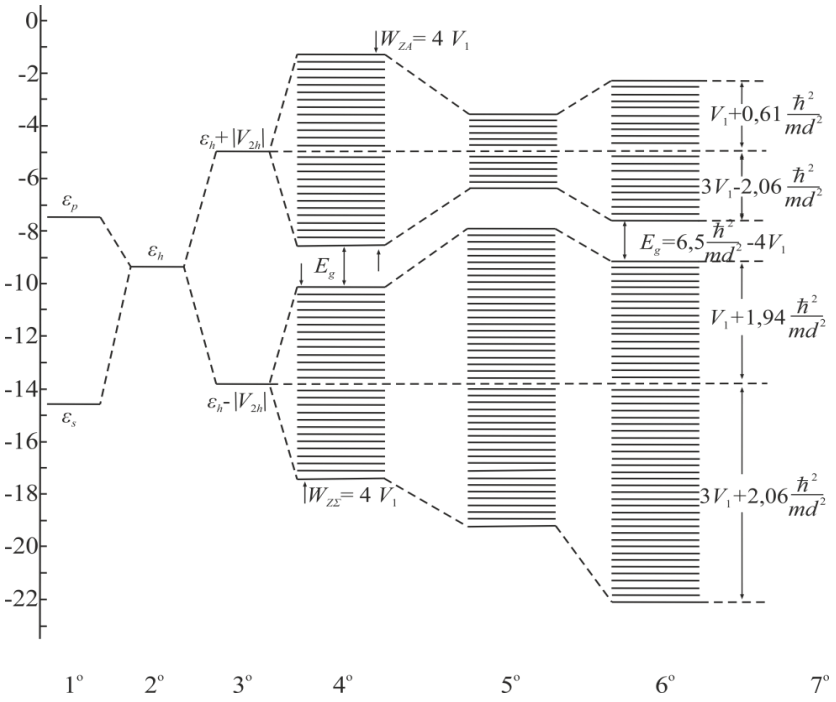
[18] Υπάρχουν πραγματικά υλικά που η δομή τους είναι κατά βάση διδιάστατη ή μονοδιάστατη και τα φύλλα ή οι αλυσίδες αντιστοίχως συνδέονται μεταξύ τους με ασθενείς δεσμούς van der Waals.

αντιστοιχεί σε λόγο $V_1 / |V_{2h}| = x_1$ και το a_2 σε λόγο x_2. Οι κουκίδες δηλώνουν τη θέση της ενέργειας Fermi, E_F, του αντίστοιχου στερεού. Προκειμένου για ημιαγωγούς ή μονωτές η ενέργεια Fermi τοποθετείται στο μέσο του χάσματος και όχι στο άνω άκρο της ζώνης σθένους

περιοχή, $x_1 < V_1 / |V_{2h}| < x_2$, όπου το χάσμα έχει εξαφανισθεί. Οι δύο ζώνες δεξιά αυτής της περιοχής σχηματίζονται γύρω περίπου από το ε_s (η κάτω ζώνη που έχει συνολικά N τροχιακά) και γύρω περίπου από το ε_p (η πάνω ζώνη που έχει συνολικά $3N$ τροχιακά που αντιστοιχούν στα p_x, p_y, p_z). Οι δύο ζώνες αριστερά αυτής της περιοχής [x_1, x_2] σχηματίζονται γύρω περίπου από τη στάθμη του δεσμικού και το αντιδεσμικού μοριακού τροχιακού αντιστοίχως. Όπως θα εξηγήσουμε πιο λεπτομερώς παρακάτω το δεσμικό μοριακό τροχιακό αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό του τύπου (10.8), σελ. 223, όπου στη θέση των ϕ_1, ϕ_2 βρίσκονται τα δύο ατομικά υβριδικά τροχιακά sp^3 που ανήκουν σε δύο γειτονικά άτομα, π.χ. τα χ_0^1 και χ_1^1 του Σχ. 11.5 και τα c_1, c_2 δίνονται από τον τύπο (10.12), σελ. 224 με το $V_{3h} \equiv \frac{1}{2}(\varepsilon_{hc} - \varepsilon_{ha})$ στη θέση του V_3 και στη θέση του V_2 το $V_{2h} = -3,22(\hbar^2 / m_e d^2)$. Σημειώστε ότι για μονοστοιχειακό ημιαγωγό το V_{3h} είναι προφανώς μηδέν· είναι όμως διάφορο του μηδενός για σύνθετο ημιαγωγό που συνίσταται από δύο διαφορετικά άτομα, το ένα εκ των οποίων καθίσταται κατιόν και το άλλο ανιόν. Κάθε κατιόν περιβάλλεται από τέσσερα ανιόντα και αντιστρόφως. Τα ε_{hc}, ε_{ha} είναι οι ενέργειες του υβριδικού sp^3 του ατόμου 0 (του κατιόντος) και του ατόμου 1 (του ανιόντος) αντιστοίχως. Το αντιδεσμικό μοριακό τροχιακό δίνεται επίσης από τον τύπο (10.8), σελ. 223, με τις ίδιες αντικαταστάσεις, αλλά με τα c_1, c_2 να δίνονται από τον τύπο (10.15) (σελ. 224) και πάλι με τις ίδιες ως άνω αντικακαταστάσεις. Το εύρος της κάθε ζώνης για σύνθετο ημιαγωγό είναι περίπου ίσο με $4\bar{V}_1 \equiv \frac{1}{2}(\varepsilon_{pc} - \varepsilon_{sc} + \varepsilon_{pa} - \varepsilon_{sa})$ και κάθε μία τους έχει $2N$ τροχιακά. Στο σχήμα 11.6 έχει τοποθετηθεί επίσης η ενέργεια E_F του ανώτερου κατειλημμένου τροχιακού (κουκίδα) για διάφορα υλικά. Όταν το E_F είναι στο εσωτερικό ζώνης το υλικό παρουσιάζει μεταλλική ηλεκτρική συμπεριφορά, όπως στην περίπτωση του μοντέλου που εξετάσαμε στο εδάφιο 11.4.1. Όταν το E_F είναι στο μέσο του χάσματος το υλικό είναι ημιαγωγός ή μονωτής. Υπάρχουν, σύμφωνα με το Σχ. 11.6 τρεις περιπτώσεις όπου ένα μονοστοιχειακό τριδιάστατο στερεό θα είναι ημιαγωγός ή μονωτής. Η πρώτη περίπτωση (όχι συνήθης) είναι όταν έχουμε δύο ηλεκτρόνια ανά άτομο (όπως στη στήλη του Be και στη στήλη Zn) και εάν

επιπλέον το $V_1 > x_2 |V_{2h}|$ (δεξιά του a_2). Η δεύτερη περίπτωση (ή πιο συνήθης για ημιαγωγούς) είναι όταν έχουμε τέσσερα ηλεκτρόνια ανά άτομο (όπως στη στήλη του C) και όταν επί πλέον το $V_1 < x_1 |V_{2h}|$. Η τρίτη περίπτωση είναι όταν έχουμε οκτώ ηλεκτρόνια ανά άτομο και ανά κύριο αριθμό *n* (όπως στη στήλη των ευγενών αερίων). Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν εφόσον η δομή είναι τριδιάστατη και το στερεό είναι μονοστοιχειακό.

Στο πολύ σημαντικό Σχ. 11.7 φαίνεται πώς από τις στάθμες ε_p και ε_s του ατόμου καταλήγουμε στις ενεργειακές ζώνες του αντίστοιχου μονοστοιχειακού ημιαγωγού ακολουθώντας μερικά απλά βήματα. Σύμφωνα με το πρώτο βήμα το κάθε άτομο αναδιατάσσει τα τέσσερα ανυβρίδιστα



Σχ. 11.7 Σχηματισμός των ενεργειακών ζωνών ενός μονοστοιχειακού τετρασθενούς ημιαγωγού (εν προκειμένω του πυριτίου) από μια διαδοχή βημάτων. Μέχρι και το 4ο στάδιο οι υπολογισμοί είναι εντελώς στοιχειώδεις. Από κει και πέρα κάθε ένα από τα επόμενα βήματα προσεγγίζει όλο και καλύτερα την πραγματικότητα, αλλά παράλληλα απαιτείται σταδιακή αύξηση της περιπλοκότητας των υπολογισμών. Το $\varepsilon_h = (3\varepsilon_p + \varepsilon_s)/4$ είναι η στάθμη του υβριδικού ατομικού τροχιακού $sp^{(3)}$. Τα $\varepsilon_h \pm |V_{2h}|$ είναι οι στάθμες του αντιδεσμικού και του δεσμικού μοριακού τροχιακού μεταξύ συγγραμμικών τροχιακών $sp^{(3)}$ που ανήκουν σε

γειτονικά άτομα. Το χάσμα, E_g, σύμφωνα με τον απλό αυτό υπολογισμό ισούται περίπου με

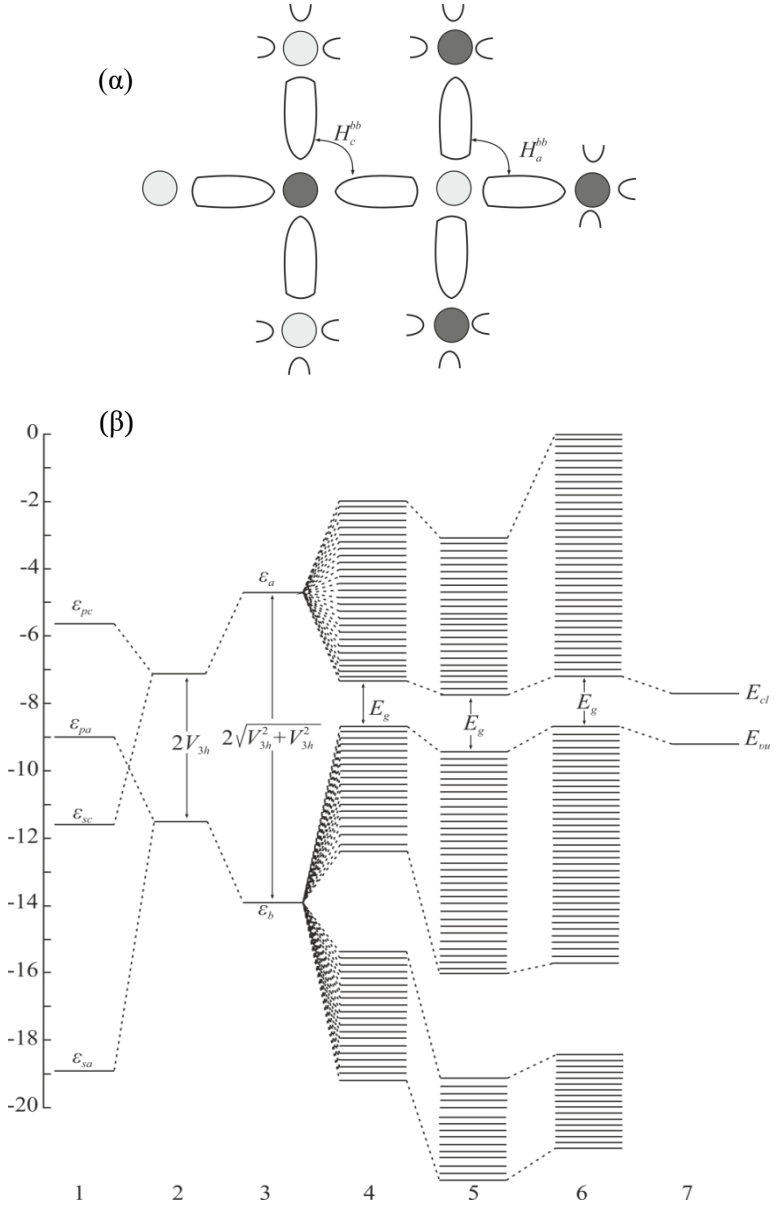
$$E_g = 2|V_{2h}| - (\varepsilon_p - \varepsilon_s) \approx 6,44(\hbar^2 / m_e d^2) - (\varepsilon_p - \varepsilon_s)$$

τροχιακά του s, p_x, p_y, p_z ώστε να πάρουν τη μορφή των τεσσάρων υβριδικών sp^3 που εικονίζονται στο Σχ. 11.5˙ η ενεργειακή στάθμη του κάθε υβριδικού είναι $\varepsilon_h = \frac{1}{4}(\varepsilon_s + 3\varepsilon_p)$ και εικονίζεται στο Σχ.11.7 ως $2^{ο}$ στάδιο. Το επόμενο βήμα είναι να δημιουργηθούν από κάθε ζεύγος συγγραμμικών sp^3 τροχιακών που ανήκουν σε γειτονικά άτομα (π.χ. του χ_0^1 και του χ_1^1 ή του χ_1^2 και του χ_2^2 στο Σχ.11.5) ένα δεσμικό και ένα αντιδε-σμικό μοριακό τροχιακό που είναι εντοπισμένα στον αντίστοιχο δεσμό (π.χ. στο δεσμό (01) ή στο δεσμό (12) προκειμένου για τα παραδείγματα από το Σχ. 11.5 που μόλις αναφέραμε) και έχουν ενεργειακές στάθμες $\varepsilon_h \mp |V_{2h}|$, όπως φαίνεται στο Σχ.11.7. Γύρω από τη δεσμική μοριακή στάθμη θα δημιουργηθεί η ζώνη σθένους και από τη αντιδεσμική η ζώνη αγωγιμότητας με εύρος η κάθε μία περίπου $4V_1 \equiv \varepsilon_p - \varepsilon_s$, βλ. Σχ.11.7, από το οποίο προκύπτει αμέσως ότι το εύρος του χάσματος είναι

$$E_g \approx 2|V_{2h}| - (\varepsilon_p - \varepsilon_s) \approx 6,44\frac{\hbar^2}{m_e d^2} - (\varepsilon_p - \varepsilon_s)\,. \qquad (11.19)$$

Επισημαίνεται ότι η δημιουργία της ΖΣ γύρω από τη στάθμη του δεσμικού μοριακού τροχιακού, όπως και η δημιουργία της ΖΑ γύρω από τη στάθμη του αντιδεσμικού μοριακού τροχιακού, αντιστοιχεί στο σχηματισμό διαδιδόμενων τροχιακών που απλώνονται σε όλο τον τριδιάστατο χώρο του στερεού. Αυτό το άπλωμα από το μοριακό τροχιακό, που είναι εντοπισμένο σε ένα δεσμό, σε όλο το χώρο συμβαίνει επειδή υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο της χαμιλτονιανής που συνδέει ένα μοριακό τροχιακό με τα μοριακά τροχιακά που βρίσκονται στους γειτονικούς του δεσμούς. Π.χ. το δεσμικό μοριακό τροχιακό που βρίσκεται στο δεσμό (01) του Σχ.11.5 θα απλωθεί στους έξη γειτονικούς του δεσμούς, δηλαδή στους τρεις άλλους δεσμούς που έχει το άτομο (0) και στους τρεις άλλους δεσμούς που έχει το άτομο (1) κ.ο.κ., δημιουργώντας έτσι τη ζώνη σθένους.

Αντίστοιχες διαδικασίες συμβαίνουν και στην περίπτωση ενός σύνθετου ημιαγωγού, όπως φαίνεται στο Σχ. 11.8. Αφού το στερεό αποτελείται από δύο διαφορετικά άτομα το *a* (γκρι, που στο στερεό θα γίνει ανιόν) και το *c*



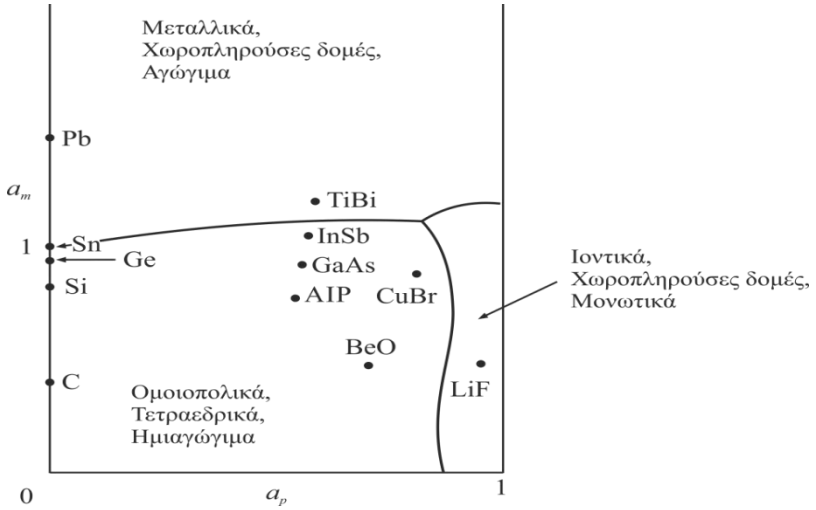
Σχ. 11.8 (α) Μοριακά δεσμικά τροχιακά και (β) στάθμες και ενεργειακές ζώνες σε σύνθετο ημιαγωγό (π.χ. GaAs). Τα εικονιζόμενα στοιχεία H_c^{bb}, H_a^{bb} είναι υπεύθυνα για τη μεταφορά των ηλεκτρονίων που καταλαμβάνουν τα δεσμικά μοριακά τροχιακά από δεσμό σε δεσμό και τελικά σε όλο το στερεό και στον συνακόλουθο σχηματισμό της ΖΣ. Παρόμοια ισχύουν και για τα αντιδεσμικά μοριακά τροχιακά και το σχηματισμό της ΖΑ. Διακρίνονται στο Σχ. (β) (1) οι ατομικές στάθμες ε_s, ε_p του ανιόντος (α, As) και του κατιόντος (c, Ga), (2) οι αντίστοιχες ατομικές υβριδικές στάθμες $sp^{(3)}$, (3) οι δεσμικές και αντιδεσμικές

μοριακές στάθμες και (4) η ζώνη σθένους (που αποτελείται από δύο υποζώνες, λόγω του ότι $H_c^{bb} \neq H_a^{bb}$) και η ζώνη αγωγιμότητας σε διάφορες υπολογιστικές εκδοχές (4, 5, 6, 7) .

(μαύρο, που στο στερεό θα γίνει κατιόν), το καθένα τους θα έχει προφανώς διαφορετικά υβριδικά τροχιακά με διαφορετικές υβριδικές στάθμες $\varepsilon_{hc} =$ $= \frac{1}{4}(\varepsilon_{sc} + 3\varepsilon_{pc})$ και $\varepsilon_{ha} = \frac{1}{4}(\varepsilon_{sa} + 3\varepsilon_{pa})$. Το ζεύγος συγγραμμικών υβριδικών τροχιακών δύο γειτονικών αλλά διαφορετικών ατόμων (μαύρο και γκρι στο Σχ. 11.8) δημιουργούν ένα μη συμμετρικό (με μεγαλύτερο βάρος προς το ανιόν, βλ. Σχ.11.8) δεσμικό τροχιακό και ένα αντιδεσμικό μοριακό τροχιακό επίσης μη συμμετρικό (αλλά με μεγαλύτερο βάρος προς το κατιόν) που δεν εικονίζεται. Και τα δύο μοριακά τροχιακά είναι εντοπισμένα στο δεσμό μεταξύ των δύο διαφορετικών γειτονικών ατόμων και έχουν τις εξής ενέργειες βάσει των γνωστών τύπων (10.14) και (10.16): $\varepsilon_{h,\delta} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{hc} + \varepsilon_{ha})$ $-\sqrt{(V_{2h}^2 + V_{3h}^2)}$, $V_{3h} \equiv \frac{1}{2}(\varepsilon_{hc} - \varepsilon_{ha})$ και $\varepsilon_{h,\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{hc} + \varepsilon_{ha}) + \sqrt{(V_{2h}^2 + V_{3h}^2)}$. Γύρω από την πρώτη ενέργεια δημιουργείται η ζώνη σθένους (χάρις στα στοιχεία της χαμιλτονιανής H_c^{bb} και H_a^{bb}, βλ. Σχ. 11.8) με εύρος τον μέσο όρο $4\overline{V}_1 = \frac{1}{2}(4V_{1c} + 4V_{1a}) \equiv \frac{1}{2}\{(\varepsilon_{pc} - \varepsilon_{sc}) + (\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{sa})\}$. Με όμοιο τρόπο σχηματίζεται και η ζώνη αγωγιμότητας γύρω από την αντιδεσμική μοριακή ενέργεια (χάρις σε αντίστοιχα στοιχεία της χαμιλτονιανής H_c^{aa} και H_a^{aa} που δεν εικονίζονται στο Σχ.11.8). Το εύρος της ΖΑ είναι περίπου το ίδιο, δηλ. $4\overline{V}_1$. Απλή παρατήρηση του Σχ.11.8β οδηγεί στον ακόλουθο προσεγγιστικό τύπο για το εύρος του χάσματος σε σύνθετους ημιαγωγούς

$$\boxed{E_g \approx 2\sqrt{(V_{2h}^2 + V_{3h}^2)} - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{p,c} - \varepsilon_{s,c} + \varepsilon_{p,a} - \varepsilon_{s,a}),} \qquad (11.20)$$

όπου $V_{2h} = -3,22\,\hbar^2 / m_e d^2$, $V_{3h} = \frac{1}{8}(\varepsilon_{s,c} + 3\varepsilon_{p,c} - \varepsilon_{s,a} - 3\varepsilon_{p,a})$. Στο Σχ. 11.9 δίνεται το είδος του στερεού με βάση τις τιμές των *δεικτών πολικότητας*, $a_p = V_{3h} / \sqrt{V_{2h}^2 + V_{3h}^2}$, και *μεταλλικότητας* $a_m = 2\overline{V}_1 / \sqrt{V_{2h}^2 + V_{3h}^2}$, όπου $2\overline{V}_1 =$ $= (V_{1c} + V_{1a}) \equiv \frac{1}{4}\{(\varepsilon_{pc} - \varepsilon_{sc}) + (\varepsilon_{pa} - \varepsilon_{sa})\}$. Οι παραπάνω δείκτες ορίστηκαν στο κεφάλαιο 10, σχέσεις (10.13) και (10.21). Με βάση τον ορισμό του a_m ο τύπος (11.20) για το χάσμα σύνθετου ημιαγωγού γίνεται $E_g \approx$ $\approx 2\sqrt{(V_{2h}^2 + V_{3h}^2)}(1 - a_m)$ πράγμα που δικαιολογεί το όνομα δείκτης μεταλλικότητας για το a_m, αφού για $a_m > 1$ το χάσμα γίνεται αρνητικό και το στερεό γίνεται μέταλλο.



Σχ. 11.9 «Φασικό» διάγραμμα στο επίπεδο των δεικτών πολικότητας και μεταλλικότητας, α_p a_m αντιστοίχως, των απλών τετρασθενών στοιχειακών στερεών και των τετρασθενών (κατά μέσο όρο) ενώσεων. (Βλ. [47], σελ. 44)

11.5 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Οι φυσικές ποσότητες που αφορούν στη συμπυκνωμένη ύλη μπορούν να προσεγγιστούν σε τρία επίπεδα, κατά σειρά αυξανόμενης δυσκολίας. Το πρώτο και απλούστερο επίπεδο είναι αυτό της διαστατικής ανάλυσης που απαιτεί ελάχιστη προτέρα γνώση. Σύμφωνα με αυτή την ανάλυση, το οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος X ικανοποιεί τη βασική σχέση

$$X = X_0 \varphi_x(Z_i,\ m_{a\,i} / m_e,\ T / T_0,\ P / P_0,\ c / v_0, ...)\,. \qquad (11.1)$$

Τα δεύτερο είναι αυτό του λεγομένου μοντέλου Jellium, που θεωρεί ότι τα αποκολληθέντα από τα μητρικά άτομα ηλεκτρόνια δεν υφίστανται καμία δύναμη· το μοντέλο αυτό, παρόλη τη δραστική απλοποίησή του, έχει αρκετές επιτυχίες όσον αφορά σε ιδιότητες των μετάλλων. Το τρίτο επίπεδο είναι αυτό του γραμμικού συνδυασμού ατομικών τροχιακών (LCAO) που είναι αρκετά ευέλικτο ώστε να περιγράφει τα βασικά χαρακτηριστικά όλων των κατηγοριών στερεών (βλ. σχετικά τη λυμένη άσκηση 11.3).

Αφού τα άτομα στη συμπυκνωμένη ύλη σχεδόν εφάπτονται, το μήκος δεσμού d μεταξύ των κέντρων γειτονικών ατόμων ισούται περίπου με το άθροισμα των ακτίνων των ατόμων, $d \approx r_{a1} + r_{a2}$.

Το χαρακτηριστικό μικροσκοπικό μήκος της συμπυκνώμενης ύλης είναι η ακτίνα ανά άτομο $r \equiv \overline{r}a_B$ (που είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του ατόμου με συνέπεια $2r>d$) και η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \equiv \frac{V}{N_\alpha} \ . \tag{11.3}$$

Το *r* προσδιορίζεται εύκολα από την πυκνότητα $\rho_{\rm M}$ μέσω της σχέσης

$$\rho_M = 2,675 \frac{A_B}{\bar{r}^3} \, \text{gr/cm}^3, \quad \bar{r} \equiv r / a_B . \tag{11.4}$$

Μέσω της $\bar{r}$ η ενέργεια σύνδεσης ανά άτομο $|\delta E|$, το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας *B*, η θερμοκρασία Debye Θ_D και η ταχύτητα του ήχου υ δίνονται από τις σχέσεις:

$$|\delta E| \approx \frac{27,2}{\bar{r}^2} \ \text{eV}, \tag{11.5}$$

$$B = c_B \frac{294}{\bar{r}^5} \times 10^6 \ \text{bar}, \quad c_B \approx 0,6 \ \ \text{ή} \ \ c_B \approx 0,06 , \tag{11.6}$$

$$\Theta_{D,2} = \frac{20700}{\bar{r}^2 \sqrt{A_B}} \, \text{K} \quad \text{ή} \quad \Theta_{D,1} = \frac{7390}{\bar{r} \sqrt{A_B}} \, \text{K} , \tag{11.10}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho_{\rm M}}} \approx \frac{51 c_\upsilon}{\bar{r} \sqrt{A_B}} \, \text{km/s}, \quad c_\upsilon \approx 1,6 \ \ \text{ή} \ \ c_\upsilon \approx 0,45 . \tag{11.11}$$

Το μοντέλο Jellium επιτρέπει τον προσεγγιστικό προσδιορισμό του $\bar{r}$ και του *B*

$$\bar{r} = 2a / \gamma, \quad B = 15,6 a / \bar{r}^5 \ \text{Mbar} ,$$

όπου τα *a* και *γ* δίνονται στην υποσημείωση 7 της σελίδας 255.

Η μέθοδος LCAO, στην απλούστερη εκδοχή της, προσδιορίζει το κάθε τροχιακό του στερεού από τη σχέση

$$\psi = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n , \tag{11.12}$$

όπου οι συντελεστές c_n ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon) c_n + V_2 c_{n+1} + V_2 c_{n-1} = 0 , \ n=1, 2, 3,\ldots,\text{N}, \tag{11.15}$$

των οποίων οι λύσεις είναι οι εξής:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 2V_2 \cos kd , \ c_n^{(k)} = e^{ikx_n} , \ x_n = nd . \tag{11.15, .16}$$

Η μέθοδος LCAO μας επιτρέπει να μελετήσουμε και άλλες κατηγορίες υλικών, πέραν των μετάλλων, όπως ιοντικά στερεά, μοριακά στερεά και ιδιαίτερα ημιαγωγούς (βλ. και τη λυμένη άσκηση 11.3), η σημασία των οποίων δεν είναι δυνατόν να υπερεκτιμηθεί. Αφετηρία για τον καίριο ρόλο των ημιαγωγών στο σύγχρονο τεχνολογικό πολιτισμό είναι η δυνατότητα που παρέχουν για την τεράστια αύξηση της ηλεκτρικής τους αγωγιμότητας από την ελάχιστη τιμή

$$\boxed{\sigma \propto \exp(-E_g / 2k_B T)}, \tag{11.17}$$

για καθαρούς ημιαγωγούς (ενδογενής περίπτωση) μέχρι μια αύξηση κατά ένα παράγοντα που ξεπερνάει το εκατομμύριο. Το E_g είναι το ενεργειακό εύρος του χάσματος που χωρίζει τις κατειλημμένες καταστάσεις από τις άδειες. Το E_g δίνεται από τους ακόλουθους τύπους για μονοστοιχειακούς και για σύνθετους ημιαγωγούς αντιστοίχως

$$\boxed{E_g \approx 6,44 \frac{\hbar^2}{m\, d^2} - (\varepsilon_p - \varepsilon_s)}, \tag{11.19}$$

$$\boxed{E_g \approx 2\sqrt{(V_{2h}^2 + V_{3h}^2)} - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{p,c} - \varepsilon_{s,c} + \varepsilon_{p,a} - \varepsilon_{s,a})}. \tag{11.20}$$

Για να γίνει κατανοητός ο ρόλος των ημιαγωγών σε επίπεδο γενικών αρχών χρειάστηκε να περιληφθεί στο Παρ. V κάποιο πρόσθετο υλικό προκειμένου να παρουσιασθούν ορισμένες έννοιες-κλειδιά, όπως η *ενεργός μάζα*, η *πυκνότητα καταστάσεων*, η έννοια της *οπής*, ο ρόλος των *προσμίξεων αντικατάστασης*, η έννοια της *ευκινησίας* και της *συγκέντρωσης* ηλεκτρονίων στη ΖΑ και οπών στη ΖΣ. Η *αγωγιμότητα* εξαρτάται από το γινόμενο ευκινησίας μ_i (i=e,h) και συγκέντρωσης φορέων ηλεκτρικού ρεύματος n ή p,

$$\sigma = |e|(n|\mu_e| + p|\mu_h|). \tag{11.21}$$

11.6 Λυμένες ασκήσεις

1. Με βάση το σκεπτικό της υποσημείωσης 13, σελ. 261, δείξτε ότι η *θερμική συμβολή* στην ειδική ηλεκτρική αντίσταση ενός μετάλλου έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\rho_T = \text{"σταθ"} \frac{\hbar a_B \overline{r}}{e^2} \frac{3k_B T}{(\hbar^2 / m_e a_B{}^2 \overline{r}^2)} = \text{"σταθ"}\, 2,07 \times 10^{-4}\, \overline{r}^3 T\ \mu\text{ohm} \times \text{cm}.$$

Εκτιμήστε την ειδική ηλεκτρική αντίσταση του χαλκού για T=300 K.

Λύση: Η ειδική ηλεκτρική αντίσταση των *μετάλλων* είναι ανάλογη του όρου $\hbar a_B \overline{r} / e^2$, που εξασφαλίζει τις σωστές διαστάσεις και, για $T > \Theta_D / 5$, της

θερμικής ενέργειας λόγω διέγερσης ιοντικών ταλαντώσεων. Η ενέργεια αυτή ανά ιόν ισούται με $3k_BT$ (για αρκετά υψηλές θερμοκρασίες) και -προκειμένου να γίνει αδιάστατη- θα πρέπει να διαιρεθεί με τη μονάδα της ενέργειας $\hbar^2 / m_e a_B^2 \bar{r}^2$ (περιλαμβανομένης της διόρθωσης $a_B \to a_B \bar{r}$)). Άρα

$$\rho_\tau = C \frac{\hbar a_B \bar{r}}{e^2} \frac{3k_B T}{(\hbar^2 / m_e a_B{}^2 \bar{r}^2)} = 3C \frac{m_e a_B^3 \bar{r}^3 k_B T}{e^2 \hbar} = 2,07 \times 10^{-4} C\ \bar{r}^3 T\ \mu\text{ohm} \times \text{cm}\ .$$

Για το χαλκό με $\bar{r} = 2,67$ και $T = 300\,\text{K}$ έχουμε $\rho_\eta = 1,18C\ \mu\text{Ohm} \times \text{cm}$ έναντι $\rho_\eta = 1,73$ που είναι η πειραματική τιμή. Καλή συμφωνία αν C=1,45.

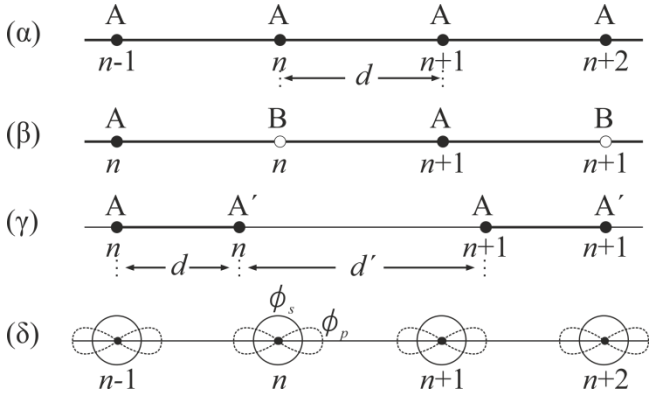
2. Θεωρήστε το σχήμα της υποσημείωσης 12 (που είναι το ίδιο με εκείνο του Σχ. Ιγ του παραρτήματος Ι) και δείξτε από το Νευτώνειο νόμο ότι

$$m\ddot{u}_n = -(m g / l) u_n - 2\kappa u_n + \kappa (u_{n-1} + u_{n+1})\ .$$

Στη συνέχεια συγκρίνετε την παραπάνω σχέση με την (11.15) και προσδιορίστε την μαθηματική ισοδυναμία των δύο. Χρησιμοποιώντας αυτή την ισοδυναμία και τις σχετικές αντιστοιχίες βρείτε τη λύση του ενός προβλήματος όταν γνωρίζετε τη λύση του άλλου (Βλέπε παράδειγμα 2 στο κεφ.4).
Λύση: Βλ. [43], σελ. 105, σχέση (6.12) και σελίδες 102-105.

3. Στο παρακάτω σχήμα (α) εικονίζεται το μοντέλο που εξετάσαμε στις σχέσεις (11.13−.17). Στο σχήμα (β) εικονίζεται η περίπτωση ενός μονοδιάστατου ιοντικού «στερεού» με ένα ηλεκτρόνιο και ένα τροχιακό ανά άτομο, όπου $\varepsilon_A \gg \varepsilon_B$. Στο σχήμα (γ) έχουμε την περίπτωση μοριακού μονοδιάστατου «στερεού», με ένα ηλεκτρόνιο και ένα τροχιακό ανά άτομο αλλά με $|V_2| \gg |V_2'|$. Τέλος στο σχήμα (δ) έχομε την περίπτωση μονοδιάστατου «ημιαγωγού» με δύο τροχιακά και δύο ηλεκτρόνια ανά άτομο. Ο αναγνώστης καλείται να διατυπώσει και να επιλύσει εξισώσεις αντίστοιχες με την (11.15) για τις περιπτώσεις (β)−(δ). Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις θα βρείτε δύο ζώνες και ένα χάσμα. Σημειώστε ότι το θεώρημα Bloch ισχύει για τροχιακά που η θέση τους διαφέρει κατά ακέραιες φορές την περίοδο. Π.χ. για την περίπτωση (δ) έχουμε $\psi = \sum_n [c_s(n)\phi_{s,n} + c_p(n)\phi_{p,n}],\ c_s(n) = c_{s,k} \exp(i\,kdn),\ c_p(n) = c_{p,k} \exp(i\,kdn)$

$$\left(\varepsilon_p + 2V_{pp\sigma} \cos kd - \varepsilon\right) c_{p,k} + \left(2iV_{sp\sigma} \sin kd\right) c_{s,k} = 0\ ,$$
$$\left(-2iV_{sp\sigma} \sin kd\right) c_{p,k} + \left(\varepsilon_s + 2V_{ss\sigma} \cos kd - \varepsilon\right) c_{s,k} = 0\ .$$



Λύση: Βλ. την αναφορά [43]: Για την περίπτωση (β) σελ. 109-111˙ για την περίπτωση (γ) σελ. 112˙ για την περίπτωση (δ) που αφορά σε μονοδιάστατο «ημιαγωγό» βλ. σελ. 113-115. Λάβετε υπόψη ότι $V_{ps\sigma} = -V_{sp\sigma}$.

4. Η ταχύτητα του ήχου είναι μεγαλύτερη στο αλουμίνιο ή στο μόλυβδο; Γιατί;

Λύση: Η ταχύτητα του ήχου, που είναι της τάξεως του $\sqrt{B/\rho}$, είναι προφανώς μεγαλύτερη στο αλουμίνιο παρά στο μόλυβδο γιατί και $B_{Al} \gg B_{Pb}$ (αφού ο μόλυβδος είναι πιο εύπλαστος από το αλουμίνιο) και $\rho_{Al} \ll \rho_{Pb}$ (αφού ο μόλυβδος είναι πολύ πιο βαρύς από το αλουμίνιο).

5. Εκτιμήστε την τάξη μεγέθους της θερμοκρασίας τήξης ενός στερεού λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαφορά ενέργειας σύνδεσης μεταξύ υγρού και στερεού είναι περίπου 3% της ενέργειας σύνδεσης του στερεού.

Λύση: Έχουμε τήξη όταν $G_\upsilon = G_{\sigma\tau}$, που σημαίνει $U_\upsilon - TS_\upsilon = U_{\sigma\tau} - TS_{\sigma\tau}$, αφού $PV_\upsilon \approx PV_{\sigma\tau}$. Άρα

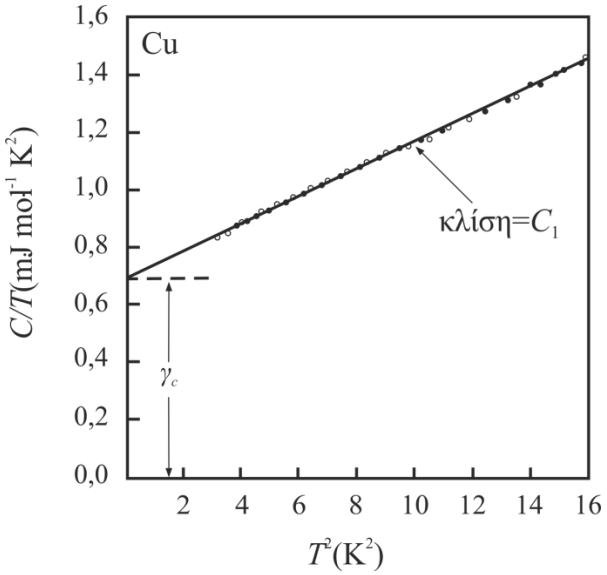
$$T = \frac{U_\upsilon - U_{\sigma\tau}}{S_\upsilon - S_{\sigma\tau}},$$

όπου $U_\upsilon - U_{\sigma\tau} = 0,03N\hbar^2 / m_e r^2$, $S_\upsilon - S_{\sigma\tau} \approx Nk_B$. Επομένως η θερμοκρασία τήξεως είναι της τάξεως

$$T = \frac{\hbar^2}{m_e a_B^2 k_B}\frac{0,03}{\bar{r}^2} \approx 1050\,\mathrm{K}, \quad \text{για } \bar{r} = 3.$$

6. Η ειδική θερμότητα του χαλκού (ο οποίος έχει πυκνότητα $\rho_M = 8,9\,\mathrm{gr/cm^3}$ και ατομικό βάρος 63,55) σε χαμηλές θερμοκρασίες δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δικαιολογήστε γιατί η εξάρτηση της ειδικής θερμότητας από τη θερμοκρασία είναι της μορφής $(C/T) = \gamma_c + C_1 T^2$, $T \ll \Theta_D$ (βλέπε (2.15) και υποσημείωση 20 του Κεφ.2). Έχοντας υπόψη το σχήμα υπολογίστε τις ταχύτητες του ήχου στο χαλκό γνωρίζοντας ότι ο λόγος διαμήκους προς εγκάρσια ταχύτητα του ήχου στο χαλκό είναι 2,05. Οι ταχύτητες διαμήκους και εγκάρσιου ηχητικού κύματος δίνονται από τους τύπους αντιστοίχως:

$$v_\ell = v\sqrt{1+\tfrac{4}{3}x}, \quad v_t = v\sqrt{x}, \quad x = \mu / B, \quad v = \sqrt{B/\rho_M}\ .$$



Λύση: Δείξαμε στον τύπο (2.15) ότι η ενέργεια λόγω θερμικής διέγερσης των ηλεκτρονίων σ' ένα μέταλλο είναι $U_{eT} \propto T^2$. Επίσης για την ενέργεια λόγω θερμικής διέγερσης των ιοντικών ταλαντώσεων και για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες έχουμε $U_{iT} \propto T^4$. Άρα η συνολική ειδική θερμότητα $C = (\partial U/\partial T) = \gamma_c T + c_1 T^3$ όπου $\gamma_c = \pi^2 k_B^2 N_e / 2E_F$. Για να βρούμε τη "σταθερά" c_1 θα πρέπει να ξεκινήσουμε από τη σχέση

$$U_{iT} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{k\ell}\, \bar{n}_\ell + 2\sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{kt}\, \bar{n}_t\,,$$

όπου $\omega_{k\ell} = c_\ell k$, $\omega_{kt} = c_t k$, $n_j = \{\exp(\hbar\omega_j / k_B T) - 1\}^{-1}$. Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε τις ίδιες πράξεις όπως στη λύση της παραγράφου 5.2.γ του κεφ. 5. Για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες το άνω όριο των ολοκληρωμάτων που θα προκύψουν μπορεί να τεθεί ίσο με ∞. Εκτελώντας αυτές τις πράξεις βρίσκουμε

$$c_1 = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\Theta_D^3}, \qquad R = N_A k_B\,, \tag{1}$$

$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} = \frac{\hbar c' q_D}{k_B}, \tag{2}$$

όπου $q_D = (6\pi^2 n_a)^{1/3}$, $n_a = 3/4\pi a_B^3 \overline{r}^3$, $\overline{r} = 2,67$, $3c'^{-3} = c_l^{-3} + 2c_t^{-3} =$ $= 2,116 c_t^{-3} \Rightarrow c' = 1,12\, c_t$. Από το σχήμα υπολογίζουμε την κλίση $c_1 =$ $= (1,48 - 0,7) \times 10^{-3} / 16 = 4,875 \times 10^{-5}$· στη συνέχεια από τον τύπο (1) και γνωρίζοντας ότι $R = 8,31 \text{J/mol} \times \text{K}$ βρίσκουμε ότι η θερμοκρασία Debye Θ_D ισούται με 341,5 K. Τη θερμοκρασία Debye μπορούμε όμως να την εκφράσουμε μέσω της c_t κάνοντας χρήση της σχέσης (2) και της $c' = 1,12\, c_t$. Συγκρίνοντας αυτό τον θεωρητικό τύπο για τη Θ_D με την τιμή που προέκυψε από την κλίση της καμπύλης βρίσκουμε ότι $c_t = 2336 \text{m/s}$ και στη συνέχεια $c_l =$ $= 2,05 \times 2336 \text{m/s} = 4789 \text{m/s}$ και $x = 0,3485$. Οι πειραματικές τιμές είναι $c_t = 2325 \text{ m/s}$ και $c_l = 4760 \text{ m/s}$.

7. Η κρυσταλλική δομή των τετρασθενών ημιαγωγών (μονοστοιχειακών, ή IV-IV, ή III-V, ή II-VI) είναι τετραεδρική και στη μεγάλη πλειονότητα των περιπτώσεων αποτελείται από δύο υποπλέγματα fcc μετατοπισμένα το ένα ως το προς το άλλο κατά το διάνυσμα $\mathbf{d} = (1,1,1)(a/4)$, όπου a είναι το μήκος της ακμής της μοναδιαίας κυβικής fcc κυψελίδας. Δείξτε ότι τα υβριδικά τροχιακά sp^3 του ατόμου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (βλέπε Σχ.11.5) δίνονται από τους τύπους:

$$\chi_1^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\phi_s^{(0)} + \phi_{p_x}^{(0)} + \phi_{p_y}^{(0)} + \phi_{p_z}^{(0)}\right],$$

$$\chi_2^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\phi_s^{(0)} + \phi_{p_x}^{(0)} - \phi_{p_y}^{(0)} - \phi_{p_z}^{(0)}\right].$$

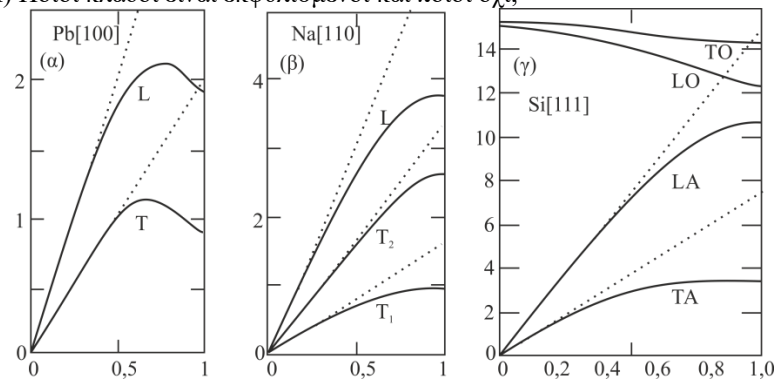
Τα $\chi_3^{(0)}$ και $\chi_4^{(0)}$ προκύπτουν από $\chi_2^{(0)}$ με κυκλική εναλλαγή των αρνητικών πρόσημων μεταξύ των $\phi_{p_x}^{(0)}$, $\phi_{p_y}^{(0)}$ και $\phi_{p_z}^{(0)}$.

Λύση: Τα υβριδικά sp^3 ενός ατόμου που βρίσκεται στης αρχή των αξόνων προκύπτουν από το Σχ. 10.10 και τη λεζάντα του καθώς και από το Σχ. 11.5. Εκεί δίνονται ο διευθύνσεις των τροχιακών *p* σε συνδυασμό με το ότι η πιθανότητα αθροιστικά των *p* πρέπει να είναι τριπλάσια του τροχιακού *s*. Παρατηρήστε ότι και τα τέσσερα sp^3 είναι νορμαλισμένα και ότι είναι ανά δύο ορθογώνια.

8. Στα σχήματα που ακολουθούν δίνονται, με βάση πειραματικά δεδομένα, οι γραφικές παραστάσεις της συχνότητας $\nu = \omega/2\pi$ (σε 10^{12} Hz) ιοντικών ταλαντώσεων ως συνάρτηση του ανηγμένου μέτρου του κυματανύσματος, $|q|/|q|_{\max}$. Στην περίπτωση (α) $\mathbf{q}$=$q\mathbf{i}$ και $q_{\max} = 2\pi/a$. Στην περίπτωση (β) $\mathbf{q} \propto (\mathbf{i} + \mathbf{j})$ και $q_{\max} = \sqrt{}2\pi/a$. Στην περίπτωση (γ) $\mathbf{q} \propto (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ και $q_{\max} =$ $= \sqrt{}3\pi/a$.

(i) Ποιοι κλάδοι είναι οι εγκάρσιοι και ποιοι οι διαμήκεις και γιατί;

(ii) Ποιοι κλάδοι είναι οι οπτικοί (*O*) και ποιοι οι ακουστικοί (*A*);
(iii) Ποιοι κλάδοι είναι εκφυλισμένοι και ποιοι όχι;



Λύση: (i) Οι εγκάρσιοι κλάδοι σημειώνονται με το γράμμα T (transverse), ενώ οι διαμήκεις με το γράμμα L (longitudinal). Οι ακουστικοί εγκάρσιοι κλάδοι έχουν χαμηλότερη συχνότητα από τους αντίστοιχους διαμήκεις ακουστικούς. Σημειώστε ότι γενικά για αυθαίρετη διεύθυνση και μέγεθος q, οι κλάδοι έχουν μεικτό εγκάρσιο/διαμήκη χαρακτήρα.
(ii) Οι ακουστικοί κλάδοι είναι εκείνοι που για $q \to 0$ έχουν συχνότητα που τείνει στο μηδέν. Οι οπτικοί κλάδοι είναι εκείνοι που $\omega \neq 0$ για $q \to 0$.
(iii) Οι διπλά εκφυλισμένοι κλάδοι είναι μόνο ο *T* του Pb, και οι *TA* και *TO* του Si.

9. Υπολογίστε για το νερό: (α) Το μέγεθος $\overline{r} \equiv r / a_B$ όπου το r ορίζεται από τη σχέση $(V / N_{\text{μόρια}}) = (4\pi / 3) r^3$. (β) Την ταχύτητα του ήχου στο νερό. (γ) Το μέτρο ελαστικότητας *B* του νερού.
(α) Από τη σχέση για την πυκνότητα

$$\rho_M \equiv \frac{M}{V} = \frac{N_a m_a}{V} = \frac{m_u A_B}{\frac{4\pi}{3}\overline{r}^3 a_B^3} = \frac{2,675 A_B}{\overline{r}^3}$$

και λαμβάνοντας υποψη ότι για το νερό $\rho_M = 1\,\text{gr/cm}^3$ και $A_B = 18$ έχουμε

$$\overline{r} = 3,64 .$$

(β) Από διαστατική ανάλυση και τη φύση του **ακουστικού** κύματος έχουμε δείξει ότι

$$\upsilon_o = c_1 \frac{\hbar}{m_e a_B \overline{r}} \sqrt{\frac{m_e}{m_a}} ,$$

όπου $m_a = m_u \cdot 18$, $\overline{r} = 3,64$, $c_1 = 0,47$, $(\hbar / m_e a_B) = c / 137$. Το c_1 ελήφθη ίσο με 0,47 γιατί τα μόρια του νερού συνδέονται με τον ασθενή υδρογονικό δεσμό. Άρα

$$\upsilon_o = 0,47\frac{c}{137\times 3,64}\sqrt{\frac{1}{18\times 1823}} = 1561\,\text{m/s}\ .$$

(γ) $$\upsilon_o = \sqrt{\frac{B}{\rho_M}} \Rightarrow B = \rho_M \upsilon_o^2 = 2,4363\times 10^9\,\frac{\text{Nt}}{\text{m}^2} = 24363\,\text{bar}\ .$$

10. Για ένα υγρό εκτιμήστε το μέγεθος του συντελεστή επιφανειακής τάσης.

Λύση: Η επιφανειακή τάση είναι ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας. Οφείλεται στο ότι τα μόρια της επιφάνειας είναι προσδεδεμένα λιγότερο ισχυρά από αυτά στο εσωτερικό γιατί έχουν λιγότερους γείτονες. Η διαφορά ενέργειας ανά μόριο νερού (στην προκειμένη περίπτωση) ισούται με $\frac{1}{2}(K-K')\varepsilon$ όπου ε είναι η μέση ενέργεια σύνδεσης ανά ζεύγος μορίων νερού, K είναι ο αριθμός των γειτόνων για εσωτερικό μόριο και K' για μόριο της επιφάνειας ($K\approx 8$ και $K'\approx 5$). (Σημειώστε την αντιστοιχία με την ενέργεια του πυρήνα). Το $\frac{1}{2}K\varepsilon$ για το νερό ισούται με περίπου $0,45\text{eV}/\text{μόριο}$[19]. Επομένως $\varepsilon\approx 0,1\text{eV}$. Το εμβαδόν ανά επιφανειακό μόριο πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από την $\pi r^2 = \pi a_B^2\bar{r}^2$. Έστω $2\times\pi r^2 = 2\times\pi a_B^2\bar{r}^2$. Άρα για $\bar{r}_{\text{νερού}} = 3,64$

$$\sigma = \frac{1,5\times 0,1\text{eV}}{2\pi\times 3,64^2 a_B^2} \approx \frac{2,4\times 10^{-20}\,\text{J}}{23.3\times 10^{-20}\,\text{m}^2} \approx 0,1\frac{\text{J}}{\text{m}^2}\ .$$

Πειραματική τιμή στους 20^0 C $0,073\,\text{J/m}^2$.

11. Για ένα ρευστό εκτιμήστε το μέγεθος του ιξώδους ξ

Λύση: Το ιξώδες συνδέεται με την εμφάνιση τριβών όταν υπάρχει μακροσκοπική ροή. Οι τριβές δημιουργούνται επειδή τα μόρια που βρίσκονται κοντά στα τοιχώματα κινούνται με μικρότερη ταχύτητα από αυτά που βρίσκονται πιο μακριά. Το ιξώδες ξ θα προσπαθήσουμε να το βρούμε από διαστατική ανάλυση:

Επειδή $[\xi] = [\text{πίεση}]\times[\text{χρόνος}]$, έχουμε ότι $\xi = \gamma B\times\frac{2\pi}{\omega}$, όπου το γ είναι μια αριθμητική σταθερά, το B είναι το μέτρο ελαστικότητας που είναι το μόνο που έχει διαστάσεις πίεσης και $2\pi/\omega$ είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος που συνδέεται με την κίνηση των μορίων. Το ω διαστατικά θα πρέπει να έχει τη μορφή (λαμβάνουμε υπόψη οτι $M_B = 18$ και $\bar{r} = 3,64$ για το νερό)

$$\omega = \gamma'\frac{\hbar}{m_e a_B^2\bar{r}^2}\sqrt{\frac{m_e}{m_a}} = \gamma'\frac{4,13\times 10^{16}}{\bar{r}^2}\sqrt{\frac{1}{18\times 1823}} = 1,72\gamma'\times 10^{13}\ \text{rad/s}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον τύπο για το B από τη λυμένη άσκηση 11.9

[19] Εύλογη τιμή για υδρογονικό δεσμό, (βλ. και άσκηση 8, σελ. 89).

$$\xi = 2\pi \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{2,4363\times10^{9}\ \text{kg}}{1,72\times10^{13}\ \text{ms}} = \frac{\gamma}{\gamma'} 0,9\times10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{ms}}.$$

Πειραματική τιμή για το νερό 1×10^{-3} kg/m×s.

12. Λογω της επιβολής ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου ρέει ρεύμα 16 A σε ένα σύρμα χαλκού διατομής $1\ \text{mm}^2$. Σε πυρίτιο τύπου *n*, με $N_d = 5\times10^{16}\ \text{cm}^{-3}$ θερμοκρασίας 300 K, η πυκνότητα ρεύματος είναι $0,1\ \text{A}/\text{cm}^2$. Υπολογίστε και για τις δύο περιπτώσεις τη μέση συστηματική ταχύτητα των ηλεκτρονίων στην οποία οφείλεται το ρεύμα.

Λύση: Η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος δίνεται από τη σχέση $j \equiv I / S = e n \upsilon$, όπου *I* είναι το ηλεκτρικό ρεύμα, *S* το εμβαδόν της διατομής, *n* η συγκέντρωση των ελεύθερων ηλεκτρονίων και υ η ζητούμενη ταχύτητα. Για τον χαλκό το $n = [(4\pi / 3)\bar{r}^3 a_B^3]^{-1}$ με $\bar{r} = 2,67$. Άρα, για τον χαλκό

$$\upsilon = \frac{4\pi}{3} \frac{I}{S e} \bar{r}^3 a_B^3 = 1,18\,\text{mm/s}.$$

Για το πυρίτιο είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\upsilon = \mu|\mathbf{E}|$, όπου η ευκινησία για το πυρίτιο σε 300 K και για τη ZA είναι 1450 $\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι $0,01\,\text{V}\cdot\text{cm}^{-1}$ η ταχύτητα που θα προκύψει θα είναι $14,5\,\text{cm/s}$. Με τα δεδομένα της άσκησης θα είχαμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\upsilon = j / e n = 0,1 / (1,602\times10^{-19}\times5\times10^{16}) = 12,5\,\text{cm/s}.$$

13. Γιατί ένα μέταλλο το αισθανόμαστε πιο «κρύο» από ένα ξύλο παρόλο που και τα δύο είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία με το περιβάλλον και ως εκ τούτου οφείλουν να έχουν την ίδια θερμοκρασία; (Βλέπε Quantum, Ιανουάριος/ Φεβρουάριος 1998, σελ. 12)

11.7 Άλυτες ασκήσεις

1. Εκτιμήστε το μέγεθος του χάσματος για τους ημιαγωγούς αδάμαντα, πυρίτιο, γερμάνιο, κασσίτερο, και για το μόλυβδο. Θεωρήστε ότι όλοι τους έχουν τη δομή του αδάμαντα. Στον Πιν. 3, οπισθόφυλλο δίνεται η πυκνότητα του καθενός από τα παραπάνω στερεά. Για τις τιμές των ε_p, ε_s βλ. σελ. 245.

2. Εκτιμήστε τον χωρικό συντελεστή θερμικής διαστολής a_b ενός στερεού στους 300 K. Ο συντελεστής $a_b \equiv V^{-1}(\partial V / \partial T)_P = B_T^{-1}(\partial P / \partial T)_V$. Βλ. [43], σελ.55.

Εισαγωγικά Σχόλια

Μέχρι τώρα η δύναμη της βαρύτητας δεν έπαιξε κανένα ρόλο στη δομή των διαφόρων επιπέδων οργάνωσης της ύλης που εξετάσαμε. Ο λόγος γι' αυτό το γεγονός είναι απλός. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η δύναμη της βαρύτητας είναι αφάνταστα πιο ανίσχυρη απ' όσο οι άλλες δυνάμεις της φύσης, όπως φαίνεται στον παρακάτω Πιν. Β.1. Στην τελευταία γραμμή αυτού του πίνακα συγκρίνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο πρωτονίων που βρίσκονται σε απόσταση ίση με την ακτίνα του Bohr με την αντίστοιχη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, e^2 / a_B, (που λαμβάνεται ως μονάδα) και με ένα μέτρο, g_S^2 / a_B, της ισχυρής πυρηνικής ενέργειας.

Πίν.Β.1. Σύγκριση της έντασης της βαρυτικής, της ηλεκτρικής και της ισχυρής πυρηνικής αλληλεπίδρασης. (*G* είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και *c* είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό). Η αδιάστατη ένταση της ασθενούς πυρηνικής αλληλεπίδρασης είναι περίπου $3x10^{-7}$ (Βλέπε Πιν.1.2, σελ. 30).

Βαρυτική	*Ηλεκτρική*	*Ισχυρή Πυρηνική*
$\alpha_G \equiv \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 5,9\times10^{-39}$	$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$	$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{\hbar c} \approx 1$
$\alpha_G / \alpha = 8,09\times10^{-37}$	$\alpha / \alpha = 1$	$\alpha_s / \alpha \approx 137$

Παρόλο το ασήμαντο μέγεθός της, η βαρυτική δύναμη έχει δύο χαρακτηριστικά που τη φέρνουν από κάποιο επίπεδο και πάνω στο προσκήνιο της δομής του Κόσμου και της επιτρέπουν τελικά να κυριαρχήσει σε αστρικό και κοσμολογικό επίπεδο.
Ποια είναι αυτά τα χαρακτηριστικά**;**

Πρώτον, η **άπειρη εμβέλειά** της και δεύτερον ο **πάντοτε ελκτικός** χαρακτήρας της. Ο συνδυασμός των δύο αυτών χαρακτηριστικών έχει ως αποτέλεσμα το ότι η βαρυτική δυναμική αυτοενέργεια ενός συστήματος N_ν νουκλεονίων (και επομένως μάζας $M = N_\nu m_u$) είναι ανάλογη του N_ν^s ή ισοδύναμα M^s, όπου *s* είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Σε αντίθεση η δυναμική αυτοενέργεια όλων των άλλων δυνάμεων (εκτός της ηλεκτρικής μεταξύ πρωτονίων σ' ένα πυρήνα) είναι ανάλογη του N_ν ως αποτέλεσμα της βραχείας εμβέλειας των άλλων δυνάμεων. Άρα ο λόγος της βαρυτικής αυτοενέργειας προς την αυτοενέργεια της όποιας άλλης αλληλεπίδρασης είναι ανάλογος του N_ν^{s-1} με *s*-1 θετικό αριθμό. Επομένως, παρόλο που ο

συντελεστής αναλογίας είναι πάρα πολύ μικρός, όταν ο αριθμός των νουκλεονίων γίνει επαρκώς μεγάλος η βαρύτητα θα κυριαρχήσει. (Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί και η ηλεκτρική δύναμη, που μεταξύ δύο φορτισμένων σωματίων είναι άπειρης εμβέλειας, δεν συμπεριφέρεται όπως η βαρυτική; Η απάντηση είναι η εξής: Η ηλεκτρική δύναμη, σε αντίθεση με τη βαρυτική, πηγάζει και από θετικά και από αρνητικά φορτία (εξαίρεση οι πυρήνες) με ετερώνυμα να έλκονται και ομώνυμα να απωθούνται· ως αποτέλεσμα η ηλεκτρική δύναμη δημιουργεί κατ' ανάγκη μικροσκοπικές *ουδέτερες* δομές που η ηλεκτρική αλληλεπίδρασή τους είναι βραχείας εμβέλειας ακριβώς λόγω της ηλεκτρικής ουδετερότητάς τους.

Ας δούμε πιο συγκεκριμένα ποια είναι η βαρυτική και ποια η ηλεκτρική αυτοενέργεια ενός μεγάλου συστήματος N_ν νουκλεονίων και όγκου V. Ας θεωρήσουμε ένα ζεύγος δύο νουκλεονίων του συστήματος που βρίσκονται σε τυχαίες θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ εντός του όγκου V. Η βαρυτική ενέργειά τους είναι $-Gm_u^2 / r_{12}$· υπάρχουν όμως συνολικά $N_\nu(N_\nu - 1)/2 \approx N_\nu^2/2$ ζεύγη αλληλεπιδρώντων νουκλεονίων (αφού το καθένα νουκλεόνιο αλληλεπιδρά με όλα τα άλλα $N_\nu - 1$ νουκλεόνια· το δύο στον παρανομαστή διορθώνει τη διπλομέτρηση κάθε νουκλεονίου). Άρα η συνολική βαρυτική ενέργεια του συστήματος είναι $-Gm_u^2 N_\nu^2 / 2r$, όπου το r είναι ένα είδος μέσου όρου της απόστασης r_{12}. Για σφαιρικό σχήμα ακτίνας R, το r θα είναι της τάξεως του R αλλά μικρότερο του $2R$. Εάν η πυκνότητα μάζας είναι παντού η ίδια μέσα στο σύστημα, μπορεί να αποδείξει κανείς ότι $r = \frac{5}{6}R$ (βλ. (8.3) και ενότητα 12.4). Επομένως, στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη ότι $M = N_\nu m_u$ έχουμε για τη συνολική βαρυτική ενέργεια E_B του συστήματος

$$\boxed{E_B = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -\frac{3}{5}\frac{Gm_u^2 N_\nu^2}{R}} \qquad \text{(B.1)}$$

Εάν η πυκνότητα μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο, όπως γίνεται στους πλανήτες και τα άστρα ο αριθμητικός παράγοντας είναι μεγαλύτερος από το 3/5. Π.χ. για τη Γη ο παράγοντας αυτός είναι 0,615 (βλέπε (12.14) και σχόλια που ακολουθούν).

Άσκηση: Εκφράστε το R μέσω της μάζας ή του αριθμού νουκλεονίων.

Στη συνήθη δομή της ύλης η μέση πυκνότητα μπορεί να δοθεί είτε ως το πηλίκον της ολικής μάζας δια του ολικού όγκου είτε ως το πηλίκον της μέσης μάζας ανά άτομο δια του μέσου όγκου ανά άτομο, οπότε

$$\rho_M = \frac{M}{V} = \frac{M}{(4\pi/3)R^3} = \frac{A_B m_u}{(4\pi/3)\bar{r}^3 a_B^3} \Rightarrow R^3 = \bar{r}^3 a_B^3 \frac{M}{A_B m_u} = \bar{r}^3 a_B^3 \frac{N_\nu}{A_B}.$$

Άρα:

$$R = \bar{r} a_B \frac{M^{1/3}}{(A_B m_u)^{1/3}} = \bar{r} a_B \frac{N_\nu^{1/3}}{A_B^{1/3}} \Rightarrow E_B \propto -M^{5/3} \propto -N_\nu^{5/3}, \quad s = \frac{5}{3} \qquad \text{(B.2)}$$

θεωρώντας ότι το $\bar{r}$ είναι ανεξάρτητο του M και A_B είναι το μέσο ατομικό βάρος.

Ο υπολογισμός της ολικής ενέργειας Coulomb ακολουθεί την ίδια πορεία με αυτήν της βαρύτητας με μια βασική διαφορά: Επειδή η αλληλεπίδραση Coulomb μεταξύ ατόμων (ή γενικότερα μεταξύ ουδέτερων μικροσκοπικών δομών) είναι βραχείας εμβελείας, το κάθε άτομο αλληλεπιδρά με ένα συγκεκριμένο αριθμό K άλλων ατόμων (ο οποίος δεν εξαρτάται από το μέγεθος του συστήματος αλλά μόνο από την εμβέλεια) και επομένως ο αριθμός των ζευγών αλληλεπιδρώντων ατόμων είναι ίσος με $N_a K / 2$ και η ολική ενέργεια Coulomb $E_C = -N_a K \varepsilon_C / 2$, όπου ε_C είναι η μέση ενέργεια Coulomb ανά ζεύγος αλληλεπιδρώντων ατόμων. Το αποτέλεσμα του ρητού υπολογισμού για το E_C και για συμπυκνωμένη ύλη δόθηκε στο Κεφ. 11, υποσημείωση 7, σελ.255 και είναι

$$\begin{aligned} E_C &= -N_a E_0 \left\{ \frac{0,9\zeta^2 + 0,56\zeta^{4/3}}{\bar{r}} - \frac{\eta \bar{r}_c \zeta^2}{\bar{r}^2} \right\} \approx \\ &\approx -N_a E_0 \left\{ \frac{0,7\zeta^2 + 0,56\zeta^{4/3}}{\bar{r}} \right\} \end{aligned} \qquad \text{(B.3)}$$

όπου $N_a = N_\nu / A_B$ και $E_0 = (e^2 / a_B) = 27,2$ eV. Στην τελευταία σχέση της (B.3) το $\eta \bar{r}_c \zeta^2 / \bar{r}^2$ προσεγγίστηκε για απλότητα από το $0,2\zeta^2 / \bar{r}$.

Για να βρούμε τον αριθμό νουκλεονίων ενός συστήματος που θα καταστήσει την ολική βαρυτική ενέργεια ίση με την ολική ενέργεια Coulomb θα θέσουμε $E_B = E_C$ με το E_B να δίνεται από τους τύπους (B.1), (B.2) και το E_C να δίνεται από τον τύπο (B.3). Από την ισότητα των δύο ενεργειών προκύπτει ο αριθμός N_ν των νουκλεονίων που την ικανοποιεί:.

$$\begin{aligned} N_\nu &= \left\{ \frac{5}{3} e^2 \frac{\left(0,7\zeta^2 + 0,56\zeta^{4/3}\right)}{G m_u^2 A_B^{4/3}} \right\}^{3/2} = \\ &= \frac{\left\{ \frac{5}{3} \left(0,7\zeta^2 + 0,56\zeta^{4/3}\right) \right\}^{3/2}}{A_B^2} \left(\frac{e^2}{G m_u^2} \right)^{3/2} \end{aligned} \qquad \text{(B.4)}$$

Ο αριθμός αυτός, όπως φαίνεται από την (B.4), είναι της τάξεως του λόγου ένταση ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης προς ένταση βαρυτικής αλληλεπίδρα-

σης υψωμένου στη δύναμη 3/2. Τον εκθέτη 3/2 θα τον συναντήσουμε συχνά στο παρόν πέμπτο μέρος του βιβλίου.

Ο αδιάστατος αυτός λόγος $e^2 / G m_u^2$ ισούται με $1,25368\times10^{36}$. Η ακτίνα R που αντιστοιχεί στον αριθμό N_ν της σχέσης (Β.4) ισούται βάσει του τύπου (Β.2) με

$$R = \bar{r}\, a_B N_a^{1/3} = \bar{r}\, a_B N_\nu^{1/3} / A_B^{1/3} \qquad \text{(Β.5)}$$

Εάν επιλέξουμε $A_B \approx 40$, $\zeta \approx 1,1$ και $\bar{r} = 2,69$ (όσο στη Γη), βρίσκουμε

$$N_\nu \approx 3,41\times10^{51} \text{ και } R \approx 6,26\times10^6 \text{ m} \qquad \text{(Β.6)}$$

ενώ οι αντίστοιχες τιμές για τη Γη είναι $N_\nu = 3,5967\times10^{51}$ και $R = 6,3706\times10^6$ m. (Για τη Γη με τα ως άνω δεδομένα για N_ν, A_B και ζ, δείξτε ότι $E_B / E_C = 1,073$).

Εάν επιλέξουμε $A_B \approx 1,81$, $\zeta \approx 0,9$ και $\bar{r} \approx 1,6$, τιμές που περίπου αντιστοιχούν στο Δία, έχουμε

$$N_\nu \approx 1\times10^{54} \text{ και } R \approx 6,95\times10^7 \text{ m} \qquad \text{(Β.7)}$$

ενώ οι αντίστοιχες τιμές για τον Δία είναι $N_\nu = 1,139\times10^{54}$ και $R = 6,99\times10^7$ m. Το συμπέρασμα είναι ότι τόσο για τη Γη, όσο και για τον Δία η συνολική βαρυτική ενέργεια E_B είναι περίπου ίση με τη συνολική ενέργεια αλληλεπίδρασης Coulomb μεταξύ των ατόμων.

Για τον Ήλιο, θεωρώντας ότι οι τιμές των παραμέτρων του είναι παρόμοιες με αυτές του Δία, ο λόγος E_B / E_C προκύπτει ίσος με

$$\left(\frac{E_B}{E_C}\right)_H = \left(\frac{E_B}{E_C}\right)_\Delta \left(\frac{N_{\nu H}}{N_{\nu\Delta}}\right)^{2/3} \approx 100 \qquad \text{(Β.8)}$$

Στον Πιν. Β.2 δίνεται ο αριθμός νουκλεονίων, N_ν, σε ορισμένα ουράνια σώματα.

Πιν.Β.2. Αριθμός νουκλεονίων που περιέχονται στα ακόλουθα σώματα

Σελήνη	Γη	Δίας	Ήλιος	Το μικρότερο άστρο	Το μεγαλύτερο άστρο	Σύμπαν
$4,424\text{x}10^{49}$	$3,597\text{x}10^{51}$	$1,139\text{x}10^{54}$	$1,1975\text{x}10^{57}$	$\approx 10^{56}$	$\approx 5\text{x}10^{59}$	$\approx 10^{80}$

Οι τύποι (Β.2), (Β.3) και (Β.5) λόγω της παρουσίας του $a_B \equiv \hbar^2 / m_e e^2$ υποδεικνύουν ότι το $\hbar$ είναι και στην ουράνια κλίμακα παρόν.

Κεφάλαιο 12

Πλανήτες

Σύνοψη: *Γιατί οι βραχώδεις πλάνητες, που έχουν σχήμα σφαιρικό, παρουσιάζουν αποκλίσεις από τη σφαιρικότητα, όπως είναι τα βουνά και τα μεγάλα ρήγματα; Τι καθορίζει τη θερμοκρασία της επιφάνειας ενός πλανήτη; Γιατί υπάρχουν άνεμοι στην ατμόσφαιρα ενός πλανήτη και τι καθορίζει τη μέση έντασή τους; Πώς αλλάζει η πυκνότητα και η πίεση στο εσωτερικό ενός πλανήτη με την απόσταση από το κέντρο του; Σ' αυτά τα ερωτήματα το παρόν κεφάλαιο δίνει κάποιες απαντήσεις.*

Οι πλανήτες είναι αστρικά σώματα αρκετά μεγάλης μάζας ώστε οι βαρυτικές συνθλιπτικές πιέσεις να είναι συγκρίσιμες με τις ηλεκτροστατικές, όπως είδαμε προηγουμένως. Ως αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος οι πλανήτες έχουν σχήμα σφαιρικό[1]. Υπάρχουν πλανήτες με σύσταση πετρώδη (όπως η Γη, ο Άρης, κλπ) και πλανήτες που δεν αποτελούνται από στερεά ύλη (όπως ο Δίας, ο Κρόνος, κλπ.). Η διαφορά οφείλεται στη χημική σύνθεση: Οι πρώτοι περιέχουν κυρίως πυρίτιο, οξυγόνο και βαρύτερα στοιχεία, ενώ οι δεύτεροι αποτελούνται κυρίως από υδρογόνο και κάποιο ποσοστό ηλίου. Στο Σχ. 12.1 δίνεται η εξάρτηση της πυκνότητας ρ, της πίεσης P και της επιτάχυνσης, g της βαρύτητας της Γης από την απόσταση r (από το κέντρο της και για r μικρότερο ή ίσο της ακτίνας της Γης).

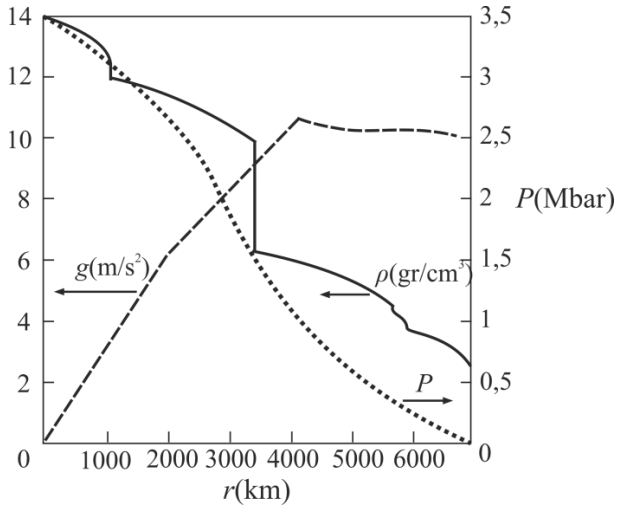
12.1 Αποκλίσεις από τη σφαιρικότητα[1]: Τα βουνά και το μέγιστο επιτρεπτό ύψος τους

Στους πετρώδεις πλανήτες, όπως η Γη, υπάρχουν *τοπικές* αποκλίσεις από τη σφαιρικότητα: τα βουνά και τα ρήγματα. Είναι φανερό ότι τα βουνά δεν μπορεί να έχουν αυθαίρετα μεγάλο ύψος, H, γιατί, αν το ύψος τους ήταν

[1] Η Γη είναι κάπως πεπλατυσμένη στους πόλους και λίγο εξογκωμένη στον Ισημερινό. Μπορείτε να εξηγήσετε σε τι οφείλεται αυτή η απόκλιση από τη σφαιρικότητα; Αν ναι, πώς θα ποσοτικοποιούσατε την ποιοτική σας εξήγηση;

συγκρίσιμο με την ακτίνα R, τότε δεν θα είχαμε ούτε κατά προσέγγιση σφαιρικό σχήμα.

Τίθεται όμως το ερώτημα γιατί να δημιουργηθούν και να υπάρχουν βουνά, αφού η ελαχιστοποίηση της ενέργειας ευνοεί σφαιρικό σχήμα; Η απάντηση συνδέεται με το ότι η Γη και οι άλλοι πετρώδεις πλανήτες δεν ήταν

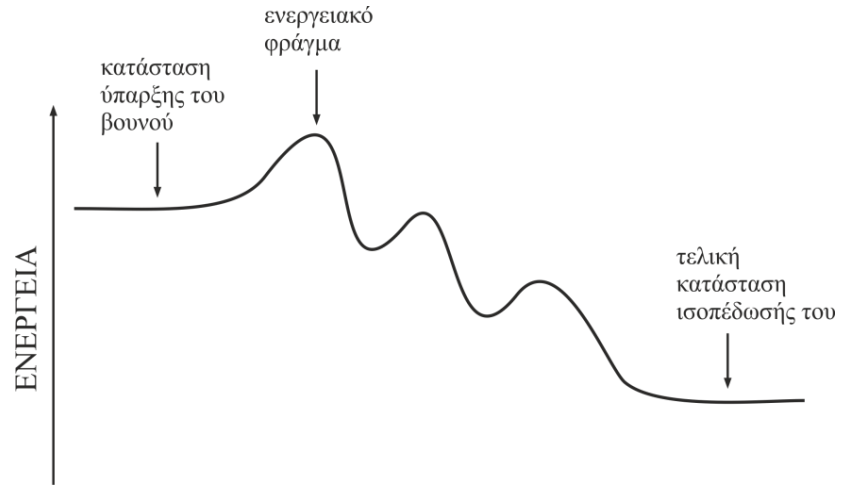


Σχ. 12.1 Η μεταβολή με την απόσταση r από το κέντρο της Γης της πυκνότητας, ρ (συνεχής γραμμή), της πίεσης P (στικτή γραμμή), και της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g(r)$ (διακεκομμένη γραμμή)

στο παρελθόν και δεν είναι ακόμη και τώρα σε θερμοδυναμική ισορροπία.

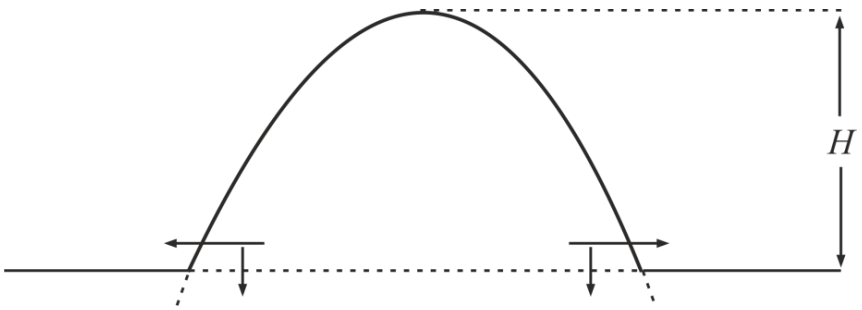
Έτσι τα βουνά εμφανίστηκαν είτε κατά την αρχική φάση σχηματισμού/στερεοποίησης του πλανήτη, είτε μετέπειτα λόγω διαδικασιών έντονων γεωλογικών μεταβολών. Γιατί όμως εξακολουθούν να υπάρχουν τα βουνά και δεν καταρρέουν; Η απάντηση είναι απλή: Στην πορεία προς τη θερμοδυναμική ισορροπία παρεμβάλλεται συνήθως ένα ενεργειακό φράγμα υψηλότερης ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή, το βουνό θα έπρεπε πρώτα να «ανέβει ένα ενεργειακό βουνό», πράγμα αδύνατο, πριν «κατρακυλήσει στην ενεργειακή πεδιάδα» της ισορροπίας, όπως φαίνεται στο Σχ. 12.2.

Όσο υψηλότερο το βουνό τόσο μικρότερο είναι το ενεργειακό φράγμα μέχρι που για κάποιο κρίσιμο ύψος, H, το ενεργειακό φράγμα μηδενίζεται και το βουνό αυθόρμητα θα μειώσει το ύψος του λόγω πλαστικής ροής στη βάση του, όπως φαίνεται στο Σχ.12.3. Το ενεργειακό φράγμα υπάρχει γιατί τα στερεά, σε αντίθεση με τα υγρά, προβάλλουν αντίσταση στις διατμητικές τάσεις (οι οποίες τείνουν να αλλάξουν το σχήμα του στερεού). Η αντίσταση αυτή μηδενίζεται (και μαζί της και το ενεργειακό φράγμα) όταν το μέγεθος των διατμητικών τάσεων ξεπεράσει το όριο θραύσεως ή το όριο πλαστικής ροής (όπου το στερεό αρχίζει να συμπεριφέρεται σαν πολύ πυκνόρρευστο



Σχ. 12.2 Η διαδικασία αυθόρμητης ισοπέδωσης ενός βουνού δεν μπορεί να συμβεί αν πρέπει να περάσει από καταστάσεις υψηλότερης ενέργειας πριν καταλήξει στην τελική κατάσταση ελάχιστης ενέργειας

υγρό). Οι διατμητικές τάσεις στη βάση ενός βουνού είναι της τάξεως του βάρους του, $W = V\rho g \approx \frac{1}{3} S H \rho g$, δια της επιφάνειας, S, στη βάση του. Η κρίσιμη τιμή πλαστικής ροής, τ_c, είναι περίπου 200 φορές μικρότερη από την ελαστική διατμητική σταθερά, μ, η οποία με τη σειρά της, όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 11, είναι γύρω στο $B/3$, όπου B είναι η υδροστατική ελαστική σταθερά, που δίνεται προσεγγιστικά από τον τύπο



Σχ. 12.3 Το βουνό θα βυθιστεί (κατακόρυφα βέλη) ή και θα διαχυθεί (οριζόντια βέλη), όταν οι διατμητικές τάσεις στη βάση του λόγω του βάρους του υπερβούν την κρίσιμη τάση πλαστικής ροής. Το αποτέλεσμα είναι να μειωθεί το ύψος του

$0,6\hbar^2 / mr^5$ (βλέπε σχέση 11.6) που αποτελεί υπερεκτίμηση προκειμένου για πετρώματα. Επομένως $\tau_c \approx B/500$. Εξισώνοντας, λοιπόν τη διατμητική τάση στη βάση του βουνού με την κρίσιμη τιμή πλαστικής ροής έχουμε:

$$x\frac{\rho H g}{3} = y\frac{0,6}{500}\frac{\hbar^2}{m r^5}, \qquad (12.1)$$

όπου x και y είναι αριθμητικές σταθερές της τάξεως της μονάδας (y<1). Η μέση πυκνότητα, ρ, έχει ήδη εκτιμηθεί στο κεφ. 11, $\rho = m_a / (\frac{4\pi}{3} r^3)$, όπου η ακτίνα ανά άτομο r γράφεται συνήθως ως $r = \bar{r}\, a_B$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας, g, ισούται προφανώς με

$$GM / R^2 = G\rho'(\tfrac{4\pi}{3} R^3) / R^2 = \tfrac{4\pi}{3} G\rho' R,$$

όπου ο τόνος δηλώνει ότι αναφερόμαστε σε όλο τον πλανήτη και όχι στον εξωτερικό φλοιό του που δηλώνεται χωρίς τόνο. Η πυκνότητα, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, δίνεται από τους τύπους

$$\rho = A_B m_u / (\tfrac{4\pi}{3} a_B^3 \bar{r}^3) \quad \text{και} \quad \rho' = A'_B m_u / (\tfrac{4\pi}{3} a_B^3 \bar{r}'^3).$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στην σχέση (12.1) έχουμε τελικά

$$\frac{RH}{a_B^2} = 0,015\frac{y}{x}\frac{\bar{r}'^3}{\bar{r}^2}\frac{1}{A_B A'_B}\frac{e^2}{G m_u^2}, \qquad (12.2)$$

όπου $e^2 / G m_u^2 \equiv \alpha / \alpha_G = 1,2537\times 10^{36}$, που σημαίνει με λόγια ότι το γινόμενο RH διηρημένο με την ακτίνα του Bohr στο τετράγωνο ισούται χοντρικά με το λόγο της ηλεκτροστατικής προς τη βαρυτική δύναμη. Αν δεχτούμε ότι $y / x \approx 1$ και θέσουμε τις τιμές που αντιστοιχούν στη Γη, $\bar{r} = 2,89,\ \bar{r}' = 2,69,\ A_B = 24,25,\ A'_B = 40$, βρίσκουμε την ακόλουθη αριθμητική τιμή για το γινόμενο RH:

$$RH \lesssim 10^{11}\,\mathrm{m}^2, \qquad (12.3)$$

που για τη Γη σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρξουν βουνά με ύψος μεγαλύτερο των 15 περίπου χιλιομέτρων.

12.2 Θερμοκρασία της επιφάνειας ενός πλανήτη

Η ενεργός θερμοκρασία της «επιφάνειας»[2] ενός πλανήτη προσδιορίζεται εύκολα από το συνολικό ενεργειακό ισοζύγιο στον πλανήτη: Η ισχύς, Q, που απορροφά ο πλανήτης λόγω της ακτινοβολίας του κεντρικού άστρου (του Ήλιου στην περίπτωση του δικού μας πλανητικού συστήματος) πρέπει να ισούται με την ισχύ, L_π, που ακτινοβολεί ο πλανήτης. Όπως εξηγήσαμε

[2] Ως «επιφάνεια» νοείται ο όγκος ενός σφαιρικού φλοιού ακτίνων R και $R' = R + h$ που περιλαμβάνει και τον κύριο όγκο της ατμόσφαιρας του πλανήτη ύψους h. Ο λόγος (h/R)<0,01 και επομένως $R' \approx R$.

στο κεφάλαιο 5, η ποσότητα L_π ισούται περίπου με $4\pi R_\pi^2 \sigma T_\pi^4$ (το περίπου αφού ο πλανήτης δεν είναι ακριβώς μέλαν σώμα), όπου το σ είναι η σταθερά των Stefan-Boltzmann ($\sigma = \pi^2 k_B^4 / 60\hbar^3 c^2$) και T_π είναι η ζητούμενη ενεργός θερμοκρασία της επιφάνειας του πλανήτη. Απομένει να υπολογίσουμε την ποσότητα Q. Η συνολική ισχύς, L_a, που εκπέμπει το κεντρικό άστρο ισούται με $4\pi R_a^2 \sigma T_a^4$, όπου R_α είναι η ακτίνα του κεντρικού άστρου και T_α η ενεργός θερμοκρασία της «επιφάνειάς» του (για τον Ήλιο $T_\alpha \approx$ 5800 K). Η ισχύς, q_o, που δέχεται από το κεντρικό άστρο μια επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού τοποθετημένη κάθετα στις ακτίνες του και σε απόσταση ℓ ισούται με $q_o = L_a / 4\pi\ell^2$, αφού από κάθε ομόκεντρη με το κεντρικό άστρο σφαίρα ακτίνας $\ell > R_\alpha$ περνάει η ίδια ισχύς L_a. (Για την περίπτωση της Γης, $q_o = 1360\,\mathrm{W/m^2}$). Επομένως ένας πλανήτης σε απόσταση ℓ από το κεντρικό άστρο δέχεται συνολικά ισχύ ίση με το q_o επί τη *διατομή* πR^2 του πλανήτη. Άρα η ισχύς που απορροφά, Q, ισούται με $Q = (1-A)\pi R^2 q_o$, όπου A είναι το Albedo (συντελεστής ανάκλασης, για τη Γη $A \approx 0{,}3$).

Θέτοντας, λοιπόν το $Q = (1-A)\pi R^2 (4\pi R_a^2 \sigma T_a^4) / 4\pi\ell^2$ ίσο με το $L_\pi = 4\pi R^2 \sigma T_\pi^4$ βρίσκουμε

$$\boxed{T_\pi = (1-A)^{1/4} \sqrt{\frac{R_a}{2\ell}}\, T_a \ .} \qquad (12.4)$$

Ο ευφυής κάτοικος ενός πλανήτη δεν χρειάζεται να γνωρίζει το R_α του άστρου του και το ℓ του δικού του πλανήτη προκειμένου να υπολογίσει την ενεργό θερμοκρασία της «επιφάνειάς» του. Πράγματι, εάν θ είναι η γωνία υπό την οποία φαίνεται το κεντρικό άστρο από τον εν λόγω πλανήτη, έχουμε την εξής σχέση

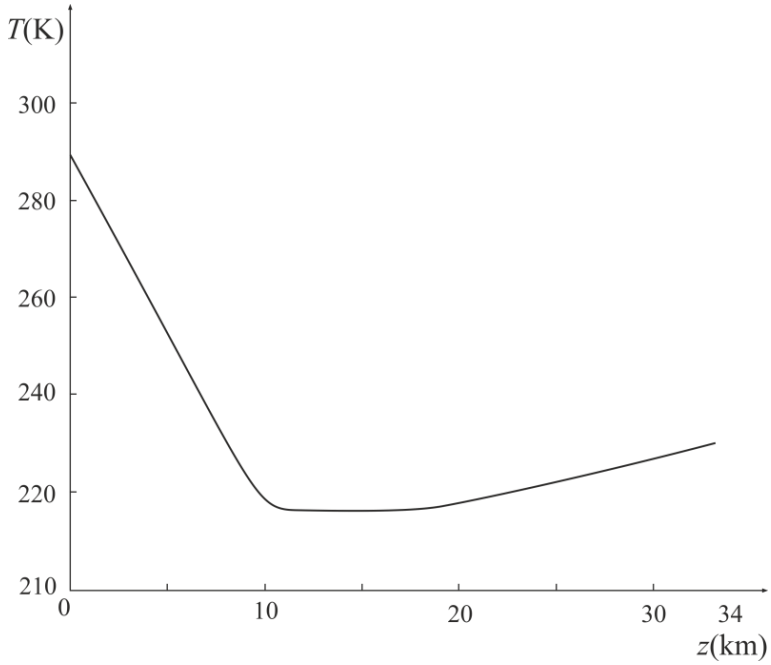
$$\boxed{\frac{R_a}{\ell} = \tan\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2} \ \text{(το } \theta \text{ σε ακτίνια)} .} \qquad (12.5)$$

Στην περίπτωση Γης-Ήλιου, $\theta \approx 32'$ (δηλαδή ο Ήλιος φαίνεται υπό γωνία περίπου μισής μοίρας) και επομένως $R_\alpha / \ell = (16/60)(\pi/180) \approx 0{,}00465$. Θέτοντας $A \approx 0{,}3$ και $T_\mathrm{H} \approx 5800\mathrm{K}$, βρίσκουμε ότι η ενεργός θερμοκρασία ακτινοβολίας της Γης ισούται με

$$T \approx 256^\mathrm{o}\,\mathrm{K} \ . \qquad (12.6)$$

Η αντίστοιχη μετρημένη τιμή είναι $254^\mathrm{o}\mathrm{K}$. Αν αυτή ήταν η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας στην ξηρά και στους ωκεανούς της Γης, το H_2O του

πλανήτη μας θα είχε τη μορφή πάγου και η ύπαρξη ζωής (τουλάχιστον με την παρούσα της μορφή) κάθε άλλο παρά πιθανή θα ήταν. Ευτυχώς για μας, διατηρείται μια διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των ανωτάτων στρωμάτων της τροπόσφαιρας (ύψους περίπου 10 km), όπου η θερμοκρασία είναι περίπου $T_p \approx 220$ K , των νεφών (σε ύψος γύρω στα 3 km συνήθως), όπου η θερμοκρασία είναι $T_c \approx 265$ K, και της επιφάνειας της Γης, όπου η θερμοκρασία είναι περίπου $T_g \approx 290$ K. Οι διαφορές αυτές οφείλονται κατά κύριο λόγο στο φαινόμενο θερμοκηπίου χάρις στο οποίο έχουμε στην επιφάνεια της Γης άφθονο νερό σε υγρή και όχι σε στερεά μορφή. Οι τιμές του T_p , του T_c και του T_g προκύπτουν και θεωρητικά[3] . Στο Σχ. 12.4 εικονίζεται η



Σχ. 12.4 Μεταβολή της μέσης θερμοκρασίας της Γής με το υψόμετρο z

μέση θερμοκρασία στην ατμόσφαιρα της Γης ως συνάρτηση του υψομέτρου z από την επιφάνεια της θάλασσας. Το φαινόμενο της διάδοσης της ακτινοβολίας από την επιφάνεια της Γης μέχρι την κορυφή της ατμόσφαι-

[3] Η μεταβολή (πτώση) της θερμοκρασίας και της πίεσης της γήινης ατμόσφαιρας με το υψόμετρο z μπορεί να υπολογισθεί αρκετά ικανοποιητικά (για $z \lesssim 10$ km) αν δεχτούμε ότι η μεταβολή αυτή είναι ισεντροπική (δηλαδή ότι η εντροπία είναι ανεξάρτητη του υψομέτρου). Μπορείτε να κάνετε αυτόν τον υπολογισμό; (Βλέπε το βιβλίο, *Στατιστική Φυσική* του Ε. Ν. Οικονόμου, σελ. 36-38)

ρας είναι αρκετα περίπλοκο (βλ. [29]), αφού κάθε σφαιρικός φλοιός της ατμόσφαιρας απορροφά αλλά και εκπέμπει (και προς τα κάτω και προς τα πάνω). Εντούτοις, έχουμε μια ικανοποιητική προσεγγιστική εικόνα, αν δεχτούμε ότι η μισή περίπου ενέργεια εκπέμπεται από την κορυφή της τροπόσφαιρας και από ένα τέταρτο από τα σύννεφα και το έδαφος, οπότε

$$q_o(1-A)\pi R^2 = Q = 4\pi\sigma R^2[\tfrac{1}{2}T_p^4 + \tfrac{1}{4}T_c^4 + \tfrac{1}{4}T_g^4] = 4\pi\sigma R^2 T_{eff}^4 . \qquad (12.7)$$

Ήδη υπολογίσαμε την τιμή 256 K για την θερμοκρασία T_{eff}. Από το Σχ. 12.4 έχουμε ότι $T_p \approx T_g - 70\,\mathrm{K}$, $T_c \approx T_g - 25\,\mathrm{K}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές T_p, T_c στην (12.7) βρίσκουμε ότι $T_g \approx 290\,\mathrm{K}$.

12.3 Γιατί υπάρχουν άνεμοι στην ατμόσφαιρα των πλανητών; Πόση είναι η μέση ταχύτητα των ανέμων;

Οι άνεμοι υπάρχουν επειδή η απορρόφηση της ηλιακής ενέργειας από ένα πλανήτη είναι ανομοιόμορφη. Η ανομοιομορφία οφείλεται στο σφαιρικό σχήμα των πλανητών (η περιοχή του ισημερινού απορροφά πολύ περισσότερο από όσο οι περιοχές των πόλων) αλλά και στην εναλλαγή ημέρας-νύκτας λόγω περιστροφής του πλανήτη περί τον άξονά του.

Έπειτα από πολύχρονες παρατηρήσεις στην ατμόσφαιρα της Γης αλλά και άλλων πλανητών του ηλιακού μας συστήματος είχε βρεθεί ότι η μέση τιμή του τετραγώνου της ταχύτητας, υ^2, των ανέμων σ' ένα πλανήτη δίνεται από τον ακόλουθο περίπλοκο εμπειρικό τύπο:

$$\sqrt{\upsilon^2} = \alpha\,\sigma^{1/16} q^{7/16} c_p^{-1/4} R^{1/2} \mu^{-1/2}, \qquad (12.8)$$

όπου α είναι αριθμητική σταθερά της τάξης της μονάδας (για τη Γη, α≈0,6), σ είναι η σταθερά των Stefan-Boltzmann, $q=q_o(1-\frac{1}{4}A)$, $c_p=C_p/M_a$ είναι η ανά μονάδα μάζας θερμοχωρητικότητα της ατμόσφαιρας, R η ακτίνα του πλανήτη και $\mu=M_\alpha/4\pi R^2$, όπου M_α είναι η συνολική μάζα της ατμόσφαιρας του πλανήτη. Αργότερα βρέθηκε ότι ο περίπλοκος εμπειρικός τύπος (12.8) προκύπτει θεωρητικά αν εξισώσει κανείς την μέση μακροσκοπική κινητική ενέργεια της ατμόσφαιρας, $\frac{1}{2}M_a\upsilon^2$, με την απορροφούμενη από τον πλανήτη ηλιακή ισχύ πολλαπλασιασμένη επί ένα χαρακτηριστικό χρόνο, τ_π, αποκατάστασης. Ο συντομότερος τέτοιος χρόνος σε κλίμακα πλανητική για να επικοινωνήσει η νυκτερινή περιοχή ελάχιστης απορρόφησης με την ημερήσια περιοχή μέγιστης απορρόφησης είναι ο χρόνος που χρειάζεται ένα ηχητικό κύμα για να διασχίσει την ημιπεριφέρεια του πλανήτη: $\tau_\pi = \pi R/\tilde{c}$, όπου $\tilde{c}$ είναι η ταχύτητα του ήχου στην ατμόσφαιρα του πλανήτη και η

οποία δίνεται από τον τύπο (11.11΄), $\tilde{c} = \sqrt{B/\rho}$. Το B ορίζεται ως $-V(\partial P/\partial V)$, όπου η παράγωγος λαμβάνεται υπό σταθερή εντροπία, αφού κατά τις ηχητικές ταλαντώσεις δεν υπάρχει χρόνος για ανταλλαγή θερμότητας ή για σημαντική παραγωγή εντροπίας. Έχοντας υπόψη τις σχέσεις $B_S = (C_P/C_V)B_T$, (βλέπε ενότητα 11.1), και $\rho = N_a A_B m_u / V$, όπου το σύμβολο A_B δηλώνει είτε το ατομικό είτε το μοριακό βάρος (για τη γήινη ατμόσφαιρα $A_B = 28,96$) καθώς και το νόμο των τελείων αερίων, βρίσκουμε ότι η ταχύτητα του ήχου στην ατμόσφαιρα της Γης δίνεται από τον τύπο

$$\tilde{c} = \sqrt{\frac{C_P}{C_V}\frac{RT}{1\mathrm{g}\times A_B}}\,, \tag{12.9}$$

όπου $R \equiv N_A k_B = 8,31\mathrm{J/mol\times K}$. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε, έπειτα από κάμποσες πράξεις, στο συμπέρασμα ότι ο εμπειρικός τύπος (12.8) προκύπτει από την απλή και εύλογη σχέση

$$\tfrac{1}{2}M_a\upsilon^2 = (2\alpha^2)Q\tau_\pi\,, \tag{12.10}$$

όπου το $2\alpha^2$ είναι αριθμητικός παράγοντας της τάξεως της μονάδας. Μπορείτε να εξάγετε τον τύπο (12.8) από τη βασική σχέση (12.10) με τη βοήθεια και των λοιπών παραπάνω σχέσεων;

12.4 Πίεση και άλλες ποσότητες στο εσωτερικό ενός πλανήτη

Θα δεχθούμε ότι η πυκνότητα μάζας του πλανήτη εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο του. Για τους τελικούς υπολογισμούς θα δεχτούμε αρχικά ότι η πυκνότητα είναι η ίδια παντού στο εσωτερικό του πλανήτη και μετά θα εξετάσουμε μια πιο ρεαλιστική περίπτωση όπου η εξάρτηση της τοπικής πυκνότητας ρ του πλανήτη από την απόσταση r είναι γραμμική.

Θεωρήστε δύο ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς ακτίνας r και r' $(r \le r')$ αντιστοίχως και στοιχειωδών όγκων $d^3r = 4\pi r^2 dr$, $d^3r' = 4\pi r'^2 dr'$. Ο εσωτερικός φλοιός σε κάθε σημείο r' του εξωτερικού φλοιού θα δημιουργήσει ένα δυναμικό ίσο με $-G\rho d^3r/r'$. Επομένως η βαρυτική ενέργεια αλληλεπίδρασης των δύο φλοιών θα είναι $-(G\rho d^3r/r')\rho' d^3r'$. Άρα η ολική βαρυτική αυτοενέργεια του πλανήτη θα προκύψει ολοκληρώνοντας

$$E_B = -G\int_0^R \frac{\rho' d^3r'}{r'}\int_0^{r'} \rho d^3r\,, \tag{12.11}$$

Για σταθερή πυκνότητα το ολοκλήρωμα ως προς r θα δώσει $\frac{4\pi}{3}r'^3\rho$ και στη συνέχεια αυτό ως προς r' θα δώσει

$$E_B = -G\rho^2\,\tfrac{4\pi}{3}\int_0^R 4\pi r'^4 dr' = -\tfrac{(4\pi)^2}{3\times 5}G\rho^2R^5 = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\,. \tag{12.12}$$

Στην τελευταία σχέση ελήφθη υπόψη ότι $M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$.

Άσκηση: Θεωρήστε ότι η πυκνότητα μάζας είναι της ακόλουθης μορφής

$$\rho = \rho_o - ar\ ,\ a = (\rho_o - \rho_\phi)/R\,, \tag{12.13}$$

παρόλο που η εξάρτηση μπορεί να είναι πολύ πιο περίπλοκη (βλέπε Σχ. 12.1) . Το ρ_ϕ είναι η πυκνότητα στον εξώτερο φλοιό. Η μέση πυκνότητα $\bar\rho$ προκύπτει εύκολα και ισούται με $\rho_o - (3aR/4) = \frac{1}{4}\rho_o + \frac{3}{4}\rho_\phi$. Με βάση τον τύπο (12.11) και αφού εκτελέσετε τις ολοκληρώσεις δείξτε ότι

$$E_B = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\left(1 + \frac{5}{48}\frac{\rho_o - \rho_\phi}{\rho_o} - \frac{5}{56}\left(\frac{\rho_o - \rho_\phi}{\rho_o}\right)^2\right). \tag{12.14}$$

Τέλος, η πίεση $P(r)$ μπορεί να υπολογισθεί ως το βάρος ανά μονάδα διατομής ενός *κυλινδρικού* σωλήνα κατά μήκος της ακτινικής κατεύθυνσης από το r έως το R

$$P(r) = \int_r^R g(r')\rho(r')dr'\,. \tag{12.15}$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g(r') = -GM(r')/r'^2$, όπου $M(r')$ είναι η μάζα που περικλείεται μέσα στη σφαίρα ακτίνας r'. Εκτελώντας τις πράξεις για την περίπτωση (12.13) βρίσκουμε ότι η πίεση για r=0, δηλαδή στο κέντρο του πλανήτη είναι

$$P(0) = \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}\bar\rho RF = \tfrac{1}{2}F\,g(R)\,\bar\rho R\,. \tag{12.16}$$

όπου $F = (\rho_o/\bar\rho)^2 - \frac{7}{6}\left[\rho_o(\rho_o - \rho_\phi)/\bar\rho^2\right] + \frac{3}{8}\left[(\rho_o - \rho_\phi)^2/\bar\rho^2\right]$. Στη Γη όπου $\bar\rho = 5{,}515\,\mathrm{g/cm^3}$, $R = 6371\,\mathrm{km}$, έχουμε $\rho_o = 14\,\mathrm{g/cm^3}$ και $\rho_\phi = 2{,}69\,\mathrm{g/cm^3}$ (βλ. Σχ. 12.1). Το αποτέλεσμα των υπολογισμών είναι $P(0) = 3{,}36\,\mathrm{Mbar}$

έναντι $3,51\text{Mbar}$ που είναι η πραγματική τιμή. Ο διορθωτικός παράγοντας εντός αγκύλης στην (12.14) ισούται με 1,026.

12.5 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Το μέγιστο εφικτό ύψος H ενός βουνού ή το βάθος ενός ρήγματος σε ένα βραχώδη πλανήτη και η ακτίνα του R συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{RH}{a_B^2} \approx 0,015 \frac{\bar{r}'^3}{\bar{r}^2} \frac{1}{A_B A_B'} \frac{e^2}{G m_u^2}, \tag{12.2}$$

όπου τα τονούμενα μεγέθη αναφέρονται σε όλο τον πλανήτη και τα άτονα στο στερεό φλοιό του.

Η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας ενός πλανήτη T_π καθορίζεται από την ισότητα της ΗΜ ενέργειας που απορροφά ο πλανήτης (η οποία προέρχεται από το κεντρικό άστρο) και αυτής που εκπέμπει. Στον παρακάτω τύπο εισέρχονται ο συντελεστής ανάκλασης A του πλανήτη, ο λόγος της ακτίνας του κεντρικού άστρου προς την απόσταση άστρου-πλανήτη και η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας του άστρου.

$$\boxed{T_\pi = (1-A)^{1/4} \sqrt{\frac{R_a}{2\ell}}\, T_a}\ . \tag{12.4}$$

Η μέση τιμή του τετραγώνου της ταχύτητας υ^2 των ανέμων σε ένα πλανήτη οφείλεται στον ανομοιόμορφο τρόπο απορρόφησης της ενέργειας (άλλη τη νύχτα, άλλη την ημέρα). Καθορίζεται δε από την ισότητα της μέσης κινητικής ενέργειας $\frac{1}{2} M_a \upsilon^2$ όλης της ατμόσφαιρας με το γινόμενο της απορροφουμένης μέσης ισχύος επί τον απαιτούμενο χρόνο για τη διάδοση του ήχου στην ατμόσφαιρα κατά μήκος της ημιπεριφέρειας του πλανήτη.

$$\sqrt{\upsilon^2} = \alpha \sigma^{1/16} q^{7/16} c_p^{-1/4} R^{1/2} \mu^{-1/2}\ . \tag{12.8}$$

Ο τύπος που δίνει τη βαρυτική αυτοενέργεια ενός σφαιρικού αντικειμένου συναρτήσει της πυκνότητάς του $\rho(r)$ είναι ο εξής:

$$E_B = -G \int_{r'}^{R} \frac{\rho' d^3 r'}{r'} \int_0^{r'} \rho d^3 r\ . \tag{12.11}$$

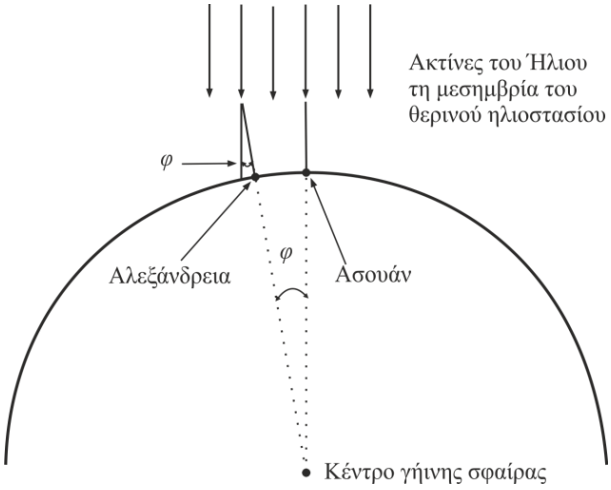
Η δε βαρυτική πίεση στο εσωτερικό ενός σφαιρικού αντικειμένου συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο του δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$P(r)=\int_r^R g(r')\rho(r')dr',\ g(r)=-G\{\int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')dr'\}/r^2. \qquad (12.15)$$

12.6 Λυμένες ασκήσεις

1. Πώς δικαιολογείτε το ότι έχουμε πανσέληνο κάθε 29,5 ημέρες, ενώ η περίοδος της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι 27,32 ημέρες; Επιβιώνει η εξήγησή σας σε ποσοτικό έλεγχο;
Λύση: Έχουμε πανσέληνο όταν ο Ήλιος(Η), η Γη(Γ) και η Σελήνη(Σ) (με αυτή τη σειρά) βρεθούν στην ίδια περίπου ευθεία (γιατί τότε μόνο όλος ο φωτισμένος από τον Η δίσκος της Σ είναι ορατός από τη Γ). Κατά το διάστημα των 29,5 ημερών η Γ έχει περιστραφεί περί τον Η κατά γωνία φ= (29,5/365,25)x360=29 μοίρες. Η Σ για να βρεθεί ξανά στην ίδια περίπου ευθεία Η-Γ-Σ (ώστε να έχουμε την επόμενη πανσέληνο) θα πρέπει να κάνει μια πλήρη περιστροφή 360 μοιρών συν τις 29 μοίρες, δηλαδή 389 μοίρες συνολικά και θα χρειαστεί 29,5 ημέρες. Επομένως ο χρόνος για να κάνει η Σ μια πλήρη περιστροφή 360 μοιρών γύρω από τη Γ θα είναι (απλή μέθοδος των τριών): 29,5x(360/389)=27,3 ημέρες.

2. Τι ενδείξεις είχαν οι αρχαίοι για το ότι η Γη είναι σφαιρική; Πώς μέτρησε ο Ερατοσθένης την ακτίνα της Γης;
Λύση: Μια ένδειξη ήταν ότι πρώτα χανόταν στον ορίζοντα το σκάφος και μετά το κατάρτι. Μια άλλη ήταν ότι στη μερική έκλειψη της Σελήνης, η προβολή της Γης εμφανιζόταν ως μέρος κυκλικού τόξου (βλ. άσκηση 3).

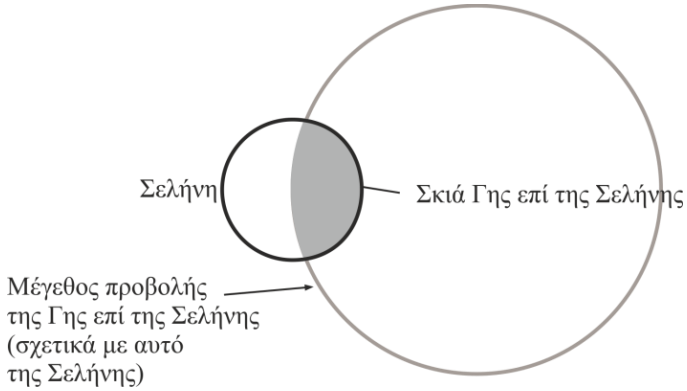


Μέτρηση της περιφέρειας της Γης από τον Ερατοσθένη. Θεωρήστε δύο κατακόρυφες ράβδους τη μία τοποθετημένη στο Ασουάν της σημερινής Αιγύπτου και την άλλη στην Αλεξάνδρεια. Κατά τη μεσημβρία του θερινού ηλιοστασίου (21 Ιουνίου) οι ακτίνες του Ήλιου πέφτουν κατακόρυφα στο Ασουάν (επομένως η ράβδος στο Ασουάν δεν έχει ίσκιο εκείνη την στιγμή), ενώ η ράβδος στην Αλεξάνδρεια την ίδια στιγμή δημιουργεί γωνία φ με τις ακτίνες του Ήλιου. Η γωνία φ μπορεί να μετρηθεί εύκολα ξέροντας το μήκος της ράβδου και το μήκος

της σκιάς της: $\varphi = 7^o9'$. Επειδή οι ακτίνες του Ήλιου στο Ασουάν και στην Αλεξάνδρεια είναι πρακτικά παράλληλες, έπεται ότι η γωνία που σχηματίζουν οι προεκτάσεις των κατακόρυφων προς το εσωτερικό της Γης, που τέμνονται στο κέντρο της, είναι επίσης φ. Ο Ερατοσθένης εκτίμησε την απόσταση Ασουάν-Αλεξάνδρεια σε 5000 στάδια από το χρόνο που του πήρε να διασχίσει με καμήλα αυτή την απόσταση. Απλή μέθοδος των τριών δείχνει ότι η περιφέρεια της Γης (που αντιστοιχεί σε 360°) έχει μήκος $(360^o / 7^o9')5000 \approx 252000$ στάδια. Αν δεχτούμε ότι ο Ερατοσθένης είχε κατά νου το αιγυπτιακό στάδιο, που ισοδυναμεί με περίπου 157,5 μέτρα, προκύπτει ότι η περιφέρεια της Γης είναι 39.690 χιλιόμετρα. Η ακριβέστερη εκτίμηση της περιφέρειας της Γης κατά μήκος μεσημβρινού είναι 40.008 χιλιόμετρα. Η ακρίβεια της εκτίμησης του Ερατοσθένη για την περιφέρεια της Γης είναι 0,8%, δηλαδή καλύτερη από 1%! Ένα πράγματι εντυπωσιακό αποτέλεσμα δεδομένων των ατελών μέσων της εποχής .

3. Πώς μέτρησαν οι αλεξανδρινοί την απόσταση Γης- Σελήνης; (Βλέπε Quantum, Ιανουάριος/ Φεβρουάριος 2000, σελ. 29).

Λύση:



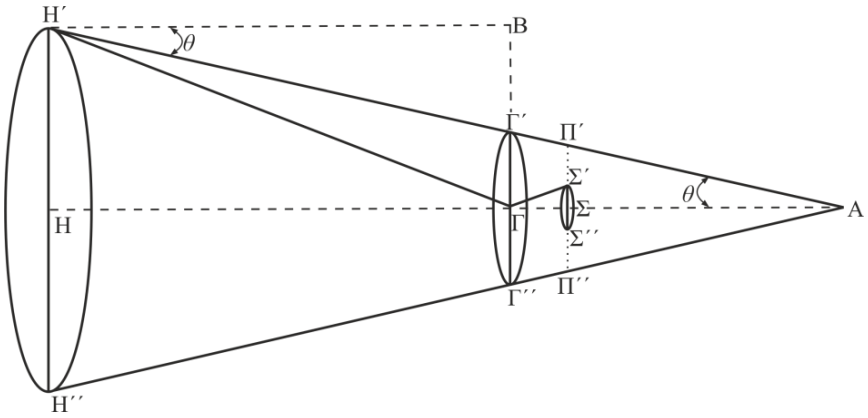
Η μέθοδος των Αρίσταρχου-Ίππαρχου για τη μέτρηση της απόστασης Γης-Σελήνης. Η μέθοδος αυτή είναι ευκολότερη να κατανοηθεί αλλά λιγότερο ακριβής από μια άλλη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Ίππαρχος.

Στο σχήμα απεικονίζεται η Σελήνη σε μια φάση μερικής έκλειψής της. Επεκτείνοντας νοητά το τόξο που διαχωρίζει σκοτεινή και φωτεινή πλευρά μπορεί να εκτιμήσει κανείς πόσο μεγαλύτερη είναι η προβολή της διαμέτρου της Γης επί της Σελήνης από την διάμετρο της Σελήνης. Η εκτίμηση αυτή, αν γίνει με γυμνό μάτι ανθρώπου, όπως στην αρχαιότητα περιέχει κάποια περιθώρια λάθους. Η σημερινή τιμή αυτής της προβολής της διαμέτρου της Γης είναι 2,63 φορές μεγαλύτερη από αυτή της Σελήνης. Λόγω του ότι οι ακτίνες του Ήλιου που προβάλουν τη Γη επί της Σελήνης δεν είναι παράλληλες, προκύπτει ότι η διάμετρος της Γης είναι μεγαλύτερη από την προβολή της κατά 39% (βλ. τις επόμενες 2 σελίδες). Επομένως η διάμετρος της Γης είναι μεγαλύτερη από αυτήν της Σελήνης κατά 2,63×1,39=3,66 φορές. Η μέση γωνία υπό την οποία φαίνεται η Σελήνη από τη Γη είναι 31΄, δηλαδή περίπου μισή

μοίρα. Από το ισοσκελές τρίγωνο που έχει για βάση τη διάμετρο της Σελήνης (δηλαδή τη διάμετρο της Γης δια 3,66) και γωνία κορυφής 31΄μπορούμε να βρούμε το ύψος του, δηλαδή την απόσταση Γης-Σελήνης, που προκύπτει 110,9 φορές μεγαλύτερο από τη βάση του. Επομένως η μέση απόσταση Γης-Σελήνης είναι 110,9:3,66=30,3 φορές μεγαλύτερη από τη διάμετρο της Γης ή 30,3 × 2=60,6 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης, ή, χρησιμοποιώντας την τιμή του Ερατοσθένη για την περιφέρεια της Γης, 383.000 km.

Αμέσως πιο κάτω εικονίζεται ο Ήλιος (Η), η Γη (Γ) και η Σελήνη (Σ) καθώς και η ακτίνα της Γης (ΓΓ΄) και η ακτίνα (ΣΠ΄) της προβολής της Γης επί του επιπέδου της Σελήνης. Εκτελούνται επίσης οι σχετικοί υπολογισμοί.

$\varphi_{\text{Η}} = \varphi_{\text{ΗΓΗ}'}$, $\varphi_{\Sigma} \equiv \varphi_{\Sigma\Gamma\Sigma'}$, $\Gamma\Gamma' = R_{\Gamma}$, $\Sigma\Sigma' = R_{\Sigma}$, $\Gamma\text{A} = \ell$, $\Gamma\Sigma = x$, $\Sigma\Pi' = R'_{\Gamma}$:



$$\varphi_{H} = 16,22' = \frac{1}{60}16,22 = 0,27^{\circ} = \frac{\pi}{180} \times 0,27 = 0,00472 \,\text{ακτίνια},$$

$$\varphi \equiv \varphi_{\Sigma} = 15,567' = 0,26^{\circ} = 0,00453 \,\text{ακτίνια},$$

Σημερινά δεδομένα για το σύστημα Γη, Σελήνη και Ήλιος:

	Γη	Σελήνη	Ήλιος
R(km)	6.371	1.738	695.956
d(km)		383.800	147.500.000
φ		15,567΄	16,22΄
2φ		31,13΄	32,44΄
$\tan\varphi$		4,5283x10^{-3}	4,7182x10^{-3}
$\tan\theta = \frac{R_{\text{Η}} - R_{\Gamma}}{\text{ΗΓ}}$	4,6775x10^{-3}		
θ	16,08΄		

$$\tan\theta = \frac{R_{\Gamma}}{\ell} = \frac{R'_{\Gamma}}{\ell - x} = \frac{B\Gamma'}{BH'} = \frac{R_{H} - R_{\Gamma}}{\Gamma H} \quad (1), \quad \frac{R'_{\Gamma}}{R_{\Sigma}} = a = 2,63 \quad (2), \quad \tan\varphi_{\Sigma} = \frac{R_{\Sigma}}{x} \quad (3) .$$

Από (1), (2) και (3) έπεται ότι

$$\tan\theta = \frac{a\,R_{\Sigma}}{\ell - x} \underset{(3)}{=} \frac{a\,x\tan\varphi_{\Sigma}}{\ell - x} \underset{(1)}{=} \frac{a\,x\tan\varphi_{\Sigma}}{(R_{\Gamma}/\tan\theta) - x}\,. \qquad (4)$$

Από το πρώτο και τελευταίο μέλος της (4) έχουμε $R_{\Gamma} - x\tan\theta = a\,x\tan\varphi_{\Sigma}$

ή $$x = \frac{R_{\Gamma}}{\tan\theta + \alpha\tan\phi_{\Sigma}}\,. \qquad (5)$$

Επειδή $R_{\text{Η}} \gg R_{\text{Γ}}$ έπεται ότι $R_{\text{Η}} - R_{\text{Γ}} \approx R_{\text{Η}}$. Άρα $\tan\theta \approx \tan\varphi_H \approx \tan\varphi_{\Sigma}$. Στην πραγματικότητα $\theta = 16,08'$. Επομένως, με δεδομένα της εποχής Ερατοσθένη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\tan\varphi_{\Sigma} \approx \varphi_{\Sigma}$ (σε ακτίνια), *όταν* $\varphi_{\Sigma} \ll 1$, έχουμε

$$x \approx \frac{R_{\Gamma}}{(\alpha+1)\tan\varphi_{\Sigma}} = \frac{R_{\Gamma}}{3,63\tan\varphi_{\Sigma}} \approx 60,8\,R_{\Gamma} \approx 383.760\,\text{km}\,. \quad (5\alpha)$$

Από (3) και (5) έχουμε

$$\frac{R_{\Gamma}}{R_{\Sigma}} = \frac{x(\tan\theta + a\tan\varphi_{\Sigma})}{x\tan\varphi_{\Sigma}} = a + \frac{\tan\theta}{\tan\varphi_{\Sigma}} = 3,66 \approx a + 1\,. \qquad (6)$$

4. Ο δίσκος του Ήλιου φαίνεται από τη Γη υπό γωνία $\theta \simeq 32' = 0,53$ της μοίρας. Η ενέργεια του Ήλιου που φτάνει στη Γη ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας είναι 1,36kW/m^2. Εκτιμήστε από τα δεδομένα αυτά τη θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου.

Λύση: Από την εξής βασική σχέση έχουμε

$$\frac{4\pi\sigma R_H^2 T_H^4}{4\pi R_{H\Gamma}^2} = 1,36\,\text{kW/m}^2 \;\Rightarrow\; T_H^4 = \frac{1,36\,\text{kW/m}^2}{\sigma(R_H^2/R_{H\Gamma}^2)}\,.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις ακόλουθες τιμές $(R_H / R_{H\Gamma}) = \tan(\theta/2) \approx (\theta/2) = (0,53/2)(\pi/180)$, $\sigma = (\pi^2 k_B^4 / 60c^2\hbar^3) = 5,67\times10^{-8}$ σε μονάδες SI, βρίσκουμε

$$T_H = 5787\,\text{K}\,.$$

5. Υποθέτοντας αδιαβατική συμπεριφορά υπολογίστε την εξάρτηση της πίεσης, *P*(*z*), και της θερμοκρασίας, *T*(*z*), της γήινης ατμόσφαιρας από το υψόμετρο *z*. Συμφωνούν τα αποτελέσματά σας με τα δεδομένα που ξέρετε; [Δείξτε ότι $dP/P = -(28,96\text{gr})g\,\text{d}z/RT$]

Λύση: Βλέπε [25], σελ. 36-38.

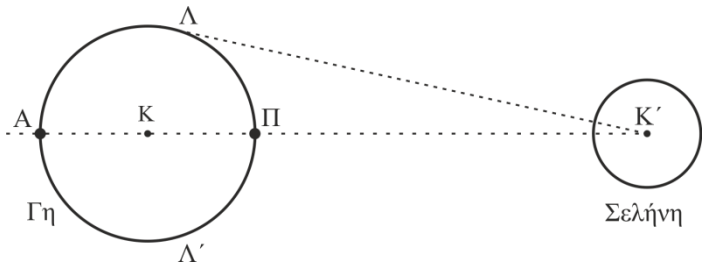
6. Στα παλιρροιακά φαινόμενα η περίοδος είναι περίπου 12 ώρες. Εξηγήστε γιατί. Πότε έχουμε πιο έντονα παλιρροιακά κύματα, όταν έχουμε πανσέληνο, νέα σελήνη, ή σελήνη 14 ημερών; (Συγκρίνετε και τις τρεις περιπτώσεις).

Λύση: Για κινήσεις πάνω στη Γη έχουμε δύο ισοδύναμους τρόπους μελέτης: Είτε σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς εκτός Γης είτε με ένα

σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με τη Γη και επομένως είναι μη αδρανειακό αφού η Γη ακολουθεί μια περίπλοκη επιταχυνομένη κίνηση ως εξής: (α)Το κέντρο μάζας (ΚΜ) της Γης διαγράφει μια καμπύλη τροχιά που καθορίζεται από το άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων και ως όλη η μάζα της Γης να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας της. (β) Περιστρέφεται περί άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας. (γ) Επειδή η Γη δεν είναι απολύτως απαραμόρφωτο σώμα τμήματά της εκτελούν περιορισμένης εκτάσεως κινήσεις όπως είναι οι παλίρροιες. Τις τελευταίες βολεύει να τις εξετάσουμε από ένα αδρανειακό σύστημα εκτός Γης. Ας εξετάσουμε πρώτα το σύστημα Γη-Σελήνη. Το σημείο Π του σχήματος δέχεται από τη Σελήνη μια μεγαλύτερη δύναμη από αυτήν που δέχεται το κέντρο μάζας (ΚΜ) και επομένως τείνει να ακολουθήσει μια τροχιά πλησιέστερη στη Σελήνη από αυτήν του ΚΜ (στο βαθμό που η συνοχή της Γης ως ενιαίο αλλά όχι απολύτως απαραμόρφωτο σώμα το επιτρέπει). Αντίστοιχα το σημείο Α δέχεται από τη Σελήνη μια ασθενέστερη δύναμη από αυτήν που δέχεται το ΚΜ και επομένως τείνει να ακολουθήσει μια τροχιά πιο απομακρυσμένη από τη Σελήνη από αυτήν του ΚΜ. Επομένως και τα δύο σημεία Π και Α τείνουν να απομακρυνθούν από το ΚΜ και να ανυψωθούν. Αφού κάθε 12 ώρες οι θέσεις των Π και Α εναλλάσσονται η παλίρροια επαναλαμβάνεται κάθε 12 ώρες.

Σημείωση: Στον παραπάνω υπολογισμό της περιόδου της παλίρροιας δεν ελήφθη υπόψει ότι κατά τη διάρκεια των 12 ωρών η Σελήνη έχει προωθηθεί κατά μήκος της τροχιάς της περί τη Γη κατά ένα ποσοστό της πλήρους στροφής ίσο με 12/(27,32x24)=1,83%. Κατά το ίδιο ποσοστό έχει προωθηθεί και το αντίστοιχο σημείο Π στην επιφάνεια της Γης που βρίσκεται στην ευθεία ΚΚ΄. Αυτή η αλλαγή αντιστοιχεί σε 24x60x0,0183=26,35 λεπτά της ώρας. Άρα η περίοδος της παλίρροιας είναι περίπου 12 ώρες και 26 λεπτά.

Ας μελετήσουμε τώρα το φαινόμενο των παλιρροιών σε ένα μη αδρανειακό σύστημα που ακολουθεί την κίνηση του ΚΜ της Γης. Σε αυτό το σύστημα θα πρέπει σε κάθε σημείο της Γης μάζας m να προστεθεί στις πραγματικές δυνάμεις και μια αδρανειακή δύναμη (βλέπε το βιβλίο [9] των Landau-Lifshitz, *Classical Mechanics*, σελ 126-129) που σ' αυτή την περίπτωση ισούται με τη m επί τη φυγόκεντρο επιτάχυνση του συστήματος αναφοράς (η οποία συμπίπτει εξ ορισμού με αυτήν του ΚΜ). Η επιτάχυνση αυτή λόγω Σελήνης είναι ίση με GM_{Σ} / L^2 και με φορά από Κ΄ προς Κ. L είναι η απόσταση του κέντρου της Σελήνης από το κέντρο της Γης. Η πραγματική δύναμη που δέχεται από τη Σε-



λήνη μια μάζα νερού *m* στο σημείο Π είναι ίση με $GM_{\Sigma}m/x^2$, $x=(\Gamma'\Pi)$ και με φορά προς τη Σελήνη. Η φυγόκεντρος δύναμη στο *m*, όπως ήδη αναφέρθηκε είναι ίση με $GM_{\Sigma}m/L^2$ και με φορά προς το κέντρο της Γης. Η *συνισταμένη* των δύο είναι $GM_{\Sigma}m(x^{-2}-L^{-2})$ και με φορά προς τη Σελήνη. Αλλά $(x^{-2}-L^{-2})=(L^2-x^2)/x^2L^2=(L-x)(L+x)/x^2L^2\approx R_{\Gamma}2L/L^4$ και η συνισταμένη είναι με φορά προς τη Σελήνη και με μέγεθος $2GM_{\Sigma}mR_{\Gamma}/L^3$. Για υδάτινη μάζα *m* στο σημείο Α η **συνισταμένη** φυγόκεντρης και έλξης Σελήνης είναι $GM_{\Sigma}m(x'^{-2}-L^{-2})\approx 2GM_{\Sigma}mR_{\Gamma}/L^3$ όπου $x'\equiv(\Gamma'\Alpha)$ με διεύθυνση αντίθετη από αυτήν προς τη Σελήνη. Έτσι η συνισταμένη αυτή ωθεί την υδάτινη μάζα ώστε να κινηθεί απομακρυνόμενη από το κέντρο της Γης.

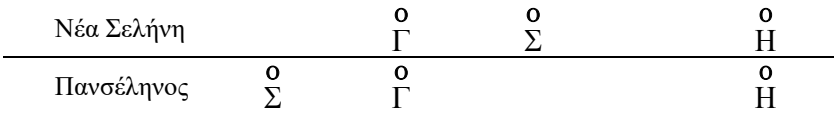
Το συμπέρασμα είναι ότι αν λάβουμε υπόψη (όπως πρέπει) τη φυγόκεντρο δύναμη, η συνισταμένη έλξη Σελήνης και φυγόκεντρης είναι προς ανύψωση της υδάτινης μάζας και στο σημείο Π και στο σημείο Α και με μέγεθος

$$2GM_{\Sigma}mR_{\Gamma}/L^3 .$$

Αντίθετα στα σημεία Λ, Λ΄ η συνισταμένη είναι πρακτικά μηδέν αφού (Κ΄Λ)=(Κ΄Λ΄)≈(Κ΄Κ). Στα ίδια συμπεράσματα θα καταλήγαμε και αν εξετάζαμε την επίδραση του Ήλιου. Ο λόγος των συνισταμένων δυνάμεων από Σελήνη F_{Σ} και από Ήλιο F_H στα σημεία Π και Α είναι

$$\frac{F_{\Sigma}}{F_H}=\frac{M_{\Sigma}}{M_H}\frac{L_{H\Gamma}^3}{L_{\Sigma\Gamma}^3}\ \text{(όταν Γ, Σ, Η είναι επ' ευθείας)} .$$

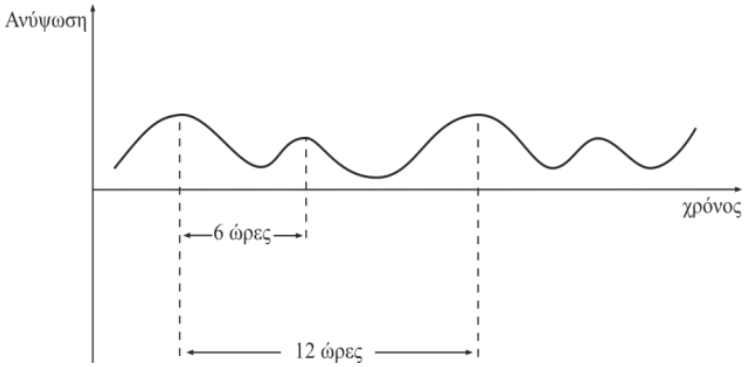
$$\frac{F_{\Sigma}}{F_H}=\frac{M_{\Sigma}}{M_H}\frac{L_{H\Gamma}^3}{L_{\Sigma\Gamma}^3}=\frac{7{,}35\times10^{22}}{1{,}989\times10^{30}}\left(\frac{1{,}496\times10^{11}}{3{,}84\times10^{8}}\right)^3=2{,}185 \text{ ή } \frac{F_H}{F_{\Sigma}}=45{,}8\% .$$



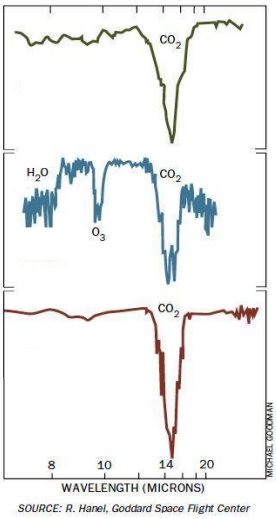
Στο πιο πάνω σκίτσο φαίνεται η σχετική θέση Γης, Σελήνης, Ήλιου για Νέα Σελήνη και Πανσέληνο. Και στις δυο περιπτώσεις και στο σημείο Α και στο σημείο Π οι συνισταμένες από Ήλιο και Σελήνη αθροίζονται και το φαινόμενο της παλίρροιας είναι πιο έντονο.

Για Σελήνη 14 ημερών η κατάσταση έχει ως εξής:

Επομένως, πρακτικά ο Ήλιος δεν συμβάλει στην παλίρροια που δημιουργεί η Σελήνη, ούτε η Σελήνη σε αυτή που δημιουργεί ο Ήλιος. Το φαινόμενο είναι τότε ασθενέστερο και με περιοδικότητα 12 ωρών η κάθε μία συμβολή. Η σχετική χρονική διαφορά μεταξύ των δύο συμβολών είναι 6 ώρες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα που αφορά σε Σελήνη 14 ημερών.



7. Δίνεται παραπλεύρως το φάσμα απορρόφησης ΗΜ ακτινοβολίας από την ατμόσφαιρα 3 πλανητών του ηλιακού μας συστήματος. Ποιο φάσμα αντιστοιχεί στη γήινη ατμόσφαιρα; Γιατί; (Δίνονται τα μήκη κύματος (σε μ=μm) των δονητικών συχνοτήτων των εξής μορίων: CO_2 (15μ, 7,5μ, 4,26μ), H_2O (6,27μ, 2,73μ, 2,66μ), O_3 $(9,07\mu,\ 9,6\mu,\ 14,3\mu)$.



Λύση: Στο σχήμα και οι τρεις πλανήτες έχουν μια ισχυρή απορρόφηση για $\lambda = 15\,\mu\text{m}$ (η οποία αντιστοιχεί σε $\hbar\omega = 82,7\,\text{meV}$) και οφείλεται στην ταλάντωση (γ) του μορίου του CO_2 (βλ. πρόβλημα 6, κεφ.10). Μόνο ένας πλανήτης παρουσιάζει μια διπλή γραμμή απορρόφησης λίγο πιο πάνω από τα 9μm που αντιστοιχεί στις ταλαντώσεις του μορίου του όζοντος για $\lambda = 9,1\,\mu\text{m}$ ($\hbar\omega = 136\,\text{meV}$) και για $\lambda = 9,6\,\mu\text{m}$ $(129\,\text{meV})$· υπάρχει επίσης μια ισχυρή απορρόφηση στον ίδιο πλανήτη από 6,5μ μεχρι 7,5μ που οφείλεται κυρίως στην ταλάντωση του μορίου του νερού (του τύπου του Σχ. 29c, του βιβλίου [9]) με μήκος κύματος περίπου 6,27μ. Αυτός ο πλανήτης που έχει νερό και όζον είναι προφανώς η Γη.

8. Η Γη είναι πεπλατυσμένη στον ισημερινό και συμπιεσμένη στους πόλους. Γιατί; Εκτιμήστε το λόγο της ακτίνας στον ισημερινό προς τη μέση ακτίνα της Γης.

Λύση: Ο λόγος της διαπλάτυνσης στον Ισημερινό είναι η μη αδρανειακή φυγόκεντρος δύναμη λόγω της περιστροφής της Γης περί τον άξονά της $(F_\varphi / m) = (\upsilon^2 / R) = \omega^2 R$. Η μη αδρανειακή αυτή επιτάχυνση θα πρέπει να συγκριθεί με την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = GM / R^2$, η οποία ευθύνεται για το σφαιρικό σχήμα

$$q \equiv \frac{F_\varphi}{mg} = \frac{\omega^2 R^3}{GM} = \frac{3\pi}{T^2 G\rho},$$

όπου $\omega = 2\pi / T$, $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$, $\rho = 5{,}52\,\mathrm{g/cm^3}$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $q = 1/292$. Η ακτίνα στον Ισημερινό θα είναι μεγαλύτερη από την πολική ακτίνα της Γης κατά $q \cdot R = 6370/292 = 21{,}8\,\mathrm{km}$ (μετρημενη τιμή 21,38 km)

9. Η διάρκεια του έτους του πλανήτη Άρη είναι κατά 1,88 φορές μεγαλύτερη της; διάρκειας του έτους της Γης. Ποια είναι η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας του Άρη;
Λύση: Βάσει του τύπου (12.4) έχουμε

$$\frac{T_A}{T_\Gamma} = \frac{(1-A_A)^{1/4}\sqrt{\ell_\Gamma}}{(1-A_\Gamma)^{1/4}\sqrt{\ell_A}}.$$

Αλλά ο λόγος των μεγάλων ημιαξόνων των τροχιών Γης και Άρη συνδέεται με την περίοδο περιφοράς τους περί τον Ήλιο $\ell_j \propto t_j^{2/3}$, $j = A,\ \Gamma$.Άρα

$$\frac{T_\mathrm{A}}{T_\Gamma} = \left(\frac{1-A_\mathrm{A}}{1-A_\Gamma}\right)^{1/4}\left(\frac{t_\Gamma}{t_\mathrm{A}}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{t_\Gamma}{t_\mathrm{A}}\right)^{1/3} \approx (1/1{,}88)^{1/3} \Rightarrow T_\mathrm{A} \approx 0{,}81 T_\Gamma \approx 206\,\mathrm{K}$$

12.7 Άλυτες ασκήσεις

1. Τι είναι η "ψυχρή παγίδα" στην ατμόσφαιρα της Γης, σε τι ύψος περίπου συμβαίνει και ποιος είναι ο βασικός της ρόλος; Κατά ποιο τρόπο ο συνδυασμός ψυχρής παγίδας και οζονόσφαιρας έχουν κατορθώσει να διατηρήσουν το νερό και συνεπώς και τη ζωή στην επιφάνεια της Γης;

2. Γιατί οι πλανήτες και τα άστρα έχουν σχήμα σφαιρικό; Γιατί οι αστεροειδείς δεν έχουν;

3. Η ελλειπτικότητα (δηλ. ο λόγος $(R_\iota - R_\pi)/R_\iota$, όπου R_ι, R_π είναι οι ακτίνες στον ισημερινό και στους πόλους αντιστοίχως) της Γης είναι 0,0034, ενώ για τον Ήλιο είναι 0,00005. Είναι η παραπάνω τιμή για τη Γη συνεπής με το αποτέλεσμα της λυμένης άσκησης 8; Πώς εξηγείτε την τόσο μικρή ελλειπτικότητα του Ήλιου;

4. Χρησιμοποιώντας το ότι σε μια έλλειψη με a και b το μεγάλο και το μικρό ημιάξονα, το εμβαδόν της ισούται με πab και η ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο που ο μεγάλος άξονας τέμνει την έλλειψη είναι $R = b^2/a$, δείξτε τον 3ο νόμο του Kepler, ότι δηλαδή, η περίοδος T περιστροφής ενός πλανήτη περί τον Ήλιο δίνεται από τον τύπο $T = (2\pi a^{3/2})/\sqrt{GM_H}$. Ο 2ος νόμος του Kepler λέει ότι η επιβατική ακτίνα που ενώνει τον πλανήτη με τον Ήλιο διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.

Βιβλιογραφία *Ανύψωση Σελήνη 14 ημερών 6ώρες και 13 λεπτά 12 ωρες και26λεπτά*

ALEXEY BYALKO, Παίρνοντας τη θερμοκρασία της Γης, Quantum, Μάρτιος-Απρίλιος 1995, σελ. 4-9. *Αλλαγή στο σχημα σελ. 303*

Κεφάλαιο 13

Άστρα και αστρικά πτώματα: Όταν η βαρύτητα κυριαρχεί

Σύνοψη: *Εξετάζονται πρώτα τα νεκρά άστρα που είναι τριών κατηγοριών: Λευκοί νάνοι, αστέρες νετρονίων και μαύρες τρύπες. Η θερμοδυναμική ισορροπία τους καθορίζεται από τη συνθλιπτική πίεση της βαρύτητας που έχει μέγεθος ανάλογο του* GM^2 / R^4 *και τη διασταλτική πίεση της κβαντικής κινητικής ενέργειας που είναι ανάλογη του* $(\hbar^2 M^{5/3} m^{-1}) / R^5$ *στη μη σχετικιστική περίπτωση και του* $(\hbar c M^{4/3}) / R^4$ *στην ακραία σχετικιστική περίπτωση. Όσο βρισκόμαστε στην πρώτη περίπτωση είναι προφανές ότι θα υπάρξει ισορροπία με ακτίνα R ανάλογη του* $M^{-1/3}$*. Όταν περάσουμε στη δεύτερη περίπτωση είναι επίσης φανερό ότι η βαρυτική πίεση θα υπερισχύσει όταν η μάζα υπερβεί μια κρίσιμη τιμή και άρα θα έχουμε κατάρρευση είτε από λευκό νάνο προς αστέρα νετρονίων είτε κατάρρευση του τελευταίου προς μαύρη τρύπα, στην οποία αποδίδουμε και θερμοκρασία και εντροπία και ακτινοβολία. Τα ενεργά άστρα βρίσκονται σε μια προσωρινή δυναμική ισορροπία, όπου η θερμική κινητική πίεση, που τροφοδοτείται από τις πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης, εξισορροπεί τη βαρυτική συνθλιπτική πίεση. Η δυναμική αυτή ισορροπία (και επομένως και το ενεργό άστρο) δεν μπορεί να υπάρξει απουσία πυρηνικής σύντηξης· η σύντηξη όμως για να συμβεί χρειάζεται μια κρίσιμη θερμοκρασία στο κέντρο του άστρου, η οποία θερμοκρασία απαιτεί μια μίνιμουμ μάζα του άστρου για να επιτευχθεί. Από την άλλη μεριά, αν η μάζα του υπό σχηματισμό άστρου είναι πάρα πολύ μεγάλη, η θερμοκρασία του γίνεται τόσο υψηλή που η βαρυτική πίεση δεν μπορεί να υπερνικήσει την πίεση της ΗΜ ακτινοβολίας και το άστρο δεν σχηματίζεται καν. Αλλά και στην περίπτωση που η μάζα του άστρου έχει τιμή στην ευνοϊκή περιοχή για την ύπαρξή του, η τελευταία έχει ημερομηνία λήξεως όταν εξαντληθούν τα πυρηνικά του καύσιμα.*

13.1 Εισαγωγικά σχόλια

Ο σχηματισμός ενός άστρου λαμβάνει χώρα σε μεσοαστρικά αέρια, πιο συγκεκριμένα σε περιοχές αυξημένης πυκνότητας που ονομάζονται *μοριακά μεσοαστρικά νέφη*. Μεταξύ αυτών τα πιο μεγάλα, που αποκαλούνται

γιγάντια νέφη, εμφανίζουν συγκεντρώσεις της τάξεως των 100 σωματίων ανά cm^3 (έναντι της τυπικής τιμής του 0,1 έως 1 σωματίων ανά cm^3 για τη μεσοαστρική ύλη). Η έκταση αυτών των γιγάντιων μεσοαστρικών νεφών (ΓΜΝ) είναι περίπου 100 έτη φωτός και η συνολική τους μάζα γύρω στις $6x10^6$ ηλιακές μάζες. Μέσα σ' ένα ΓΜΝ υπάρχουν αρκετές περιοχές κάπως αυξημένης συγκέντρωσης που αποτελούν κέντρα έλξης της περιβάλλουσας ύλης και επομένως παράλληλες εστίες γένεσης νέων άστρων. Καθώς όλο και περισσότερη ύλη, υπό μορφή συνήθως μορίων υδρογόνου και ατόμων ηλίου, συσσωρεύεται σε κάθε μία από αυτές τις περιοχές με όλο και μεγαλύτερες ταχύτητες, δημιουργούνται σταδιακά σφαιρικά αέρια σώματα ακτίνας *R*, μάζας *M* και θερμοκρασίας *T*. Η τελευταία οφείλεται στο ότι η μακροσκοπική κινητική ενέργεια της προσπίπτουσας ύλης μετατρέπεται σε θερμική κινητική ενέργεια μέσω συγκρούσεων των σωματίων. Η θερμοκρασία *T* συνεχίζει να αυξάνεται όσο επί πλέον ύλη συγκεντρώνεται στο υπό γένεση άστρο, ενώ η ακτίνα του συρρικνώνεται[1]. Η εξέλιξη αυτή τερματίζεται όταν ο υπό δημιουργία αστρικός σχηματισμός απορροφήσει όλη την περιβάλλουσα ύλη. Εάν η τελική τιμή της συσσωρευμένης μάζας υπερβαίνει μια κρίσιμη τιμή M_1, η θερμοκρασία *T* στο κέντρο του σφαιρικού σώματος είναι αρκετά υψηλή ώστε να αρχίσουν πυρηνικές συντήξεις υδρογόνου προς ήλιο μέσω μιας σειράς ενδιάμεσων αντιδράσεων, πράγμα που σηματοδοτεί την γέννηση ενός νέου άστρου. Η σύντηξη απελευθερώνει αρκετή ενέργεια για να αναπληρώνει αυτήν που εκπέμπεται κυρίως ως ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Παράλληλα διατηρεί υψηλή θερμοκρασία έτσι ώστε, μέσω κυρίως της θερμικής κινητικής ενέργειας, αλλά και της πίεσης της ακτινοβολίας, να αντιμετωπίζεται η βαρυτική συνθλιπτική πίεση και να επικρατεί έτσι μια δυναμική ισορροπία. Η τελευταία θέτει περιορισμούς στο πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η μάζα ενός ενεργού άστρου. Πράγματι, εάν η μάζα *M*, υπερβεί μια άλλη κρίσιμη τιμή M_2, η πίεση ακτινοβολίας κυριαρχεί έναντι αυτής που οφείλεται στη θερμική κινητική ενέργεια και εμποδίζει το σχηματισμό του άστρου, όπως θα δείξουμε στην ενότητα 13.6. Έτσι η μάζα των ενεργών άστρων κυμαίνεται σε σχετικά στενά όρια περίπου μεταξύ $M_1 \approx 10^{29}$ και $M_2 \approx 5\times10^{32}$ kgr.

Η ως άνω δυναμική ισορροπία διατηρείται όσο λαμβάνουν χώρα πυρηνικές αντιδράσεις. Όταν τα πυρηνικά καύσιμα εξαντληθούν, το άστρο εισέρχεται σε μια κατάσταση αστάθειας, η οποία περιλαμβάνει μια φάση διόγκωσης (δηλ., τη φάση του *κόκκινου γίγαντα*) και η οποία, αν το άστρο έχει μεγάλη μάζα, γύρω στις 10 έως 20 ηλιακές μάζες, μπορεί να καταλήξει

[1] Η διαδικασία σχηματισμού του άστρου είναι πολύ πιο περίπλοκη από όσο υπονοεί η παρούσα περιγραφή. Π.χ. η ύλη που συγκεντρώνεται δεν έχει εν γένει ακτινική κατεύθυνση, πράγμα που τελικά σημαίνει ότι ο σχηματισμός έχει στροφορμή που μπορεί να οδηγήσει σε δημιουργία διπλού συστήματος αστέρων ή σε πλανητικά συστήματα ενδεχομένως με την παρέμβαση και πιο βίαιων γεγονότων.

σε μια έκρηξη γνωστή ως σουπερνόβα. Κατά την έκρηξη ένα μέρος της μάζας του άστρου εκτοξεύεται στο διάστημα Αν το άστρο έχει σχετικά μικρή μάζα, όπως στην περίπτωση του Ήλιου, η απώλεια μάζας (που φτάνει μέχρι και το 50%) γίνεται μέσω του λεγομένου **αστρικού ανέμου**[2]. Π.χ., ο Ήλιος μας θα καταλήξει μετά 4,5 δισεκατομμύρια χρόνια περίπου σε ένα λευκό νάνο μάζας $0{,}54M_H$. Το υπόλοιπο 46% της τωρινής του μάζας, M_H, θα έχει διαχυθεί στο διάστημα μέσω του ηλιακού ανέμου, *κυρίως προς το τέλος της ζωής του*, σχηματίζοντας για μια σύντομη περίοδο το λεγόμενο πλανητικό νεφέλωμα.

Η εναπομένουσα στο νεκρό πια άστρο μάζα, μη έχοντας πλέον πυρηνικά καύσιμα και επομένως επαρκή θερμική κινητική ενέργεια, αρχίζει να συνθλίβεται υπό την επίδραση του ίδιου του βάρους της. Η σύνθλιψη αυτή μπορεί να σταματήσει αν η μάζα, *M*, που έχει απομείνει στο τέλος, δεν υπερβαίνει κάποια όρια. Όπως θα δούμε πιο κάτω, αν η μάζα του άστρου *M,* που έχει απομείνει, είναι μικρότερη από περίπου 1,4 φορές τη μάζα του Ήλιου, τότε η βαρυτική σύνθλιψη αντιμετωπίζεται επιτυχώς από την κβαντική κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, τα οποία, λόγω της μεγάλης συμπίεσης, έχουν αποκολληθεί πλήρως από τους πυρήνες. Το αστρικό αντικείμενο που προκύπτει ονομάζεται **λευκός νάνος**. Οι λευκοί νάνοι έχουν μάζα της τάξης της μάζας του Ήλιου, ακτίνα όση περίπου η ακτίνα της Γης και μέση πυκνότητα της τάξης του 10^6 gr/cm^3 (δηλαδή, περίπου πέντε τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τη συνηθισμένη ύλη). Η κατάσταση της ύλης σε ένα λευκό νάνο μοιάζει κάπως με αυτήν ενός μετάλλου. Και στις δύο περιπτώσεις την συνθλιπτική πίεση εξισορροπεί η απωστική πίεση η οφειλόμενη στην κβαντική κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων. Η διαφορά είναι ότι στα μέταλλα η συμπίεση οφείλεται στην έλξη Coulomb, ενώ στους λευκούς νάνους στη βαρυτική έλξη που είναι στην προκείμενη περίπτωση πολύ ισχυρότερη. Ως αποτέλεσμα η τελική συμπίεση ισορροπίας είναι πολύ μεγαλύτερη και ο ιονισμός είναι πλήρης.

Εάν η μάζα *M, που έχει απομείνει* στο νεκρό άστρο, είναι μεγαλύτερη από $1{,}4M_{\rm H}$, η πίεση λόγω της κβαντικής κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων δεν είναι ικανή για να ανακόψει τη βαρυτική σύνθλιψη, η οποία συνεχίζεται και υποχρεώνει *σχεδόν* όλα τα ηλεκτρόνια να αντιδράσουν με τα πρωτόνια και να δώσουν νετρόνια ($e^- + p \rightarrow n + \nu_e$). Η τεράστια αυτή σύνθλιψη σταματάει, εάν η ολική μάζα *M* είναι μικρότερη του $2{,}5M_{\rm H}$ (περίπου). Τότε η κβαντική κινητική ενέργεια των νετρονίων (και των ηλεκτρονίων και πρωτονίων που έχουν απομείνει), σε αντίθεση με αυτήν των ηλεκτρονίων μόνο, είναι σε θέση να σταματήσει την βαρυτική κατάρρευση. Αυτό γιατί ο αριθμός των νετρονίων που προκύπτουν είναι περίπου

[2] Ο αστρικός άνεμος είναι η συνεχής εκροή ύλης από το άστρο λόγω της πίεσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Στη φάση της αστάθειας αυτή η εκροή γίνεται πολύ πιο έντονη.

κατά A_B/Z μεγαλύτερος από τον αριθμό των ηλεκτρονίων. Προκύπτει έτσι ένα αστρικό αντικείμενο που ονομάζεται **αστέρας νετρονίων** (οι πάλσαρ δεν είναι τίποτε άλλο παρά περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων) με ακτίνα R της τάξης των 10km και μέση πυκνότητα της τάξης του $10^{16}\mathrm{gr/cm}^3$! (Δηλαδή, μεγαλύτερη από την πυκνότητα της ύλης μέσα σ' ένα πυρήνα). Ο αστέρας νετρονίων είναι κατά κάποιο τρόπο ένας υπεργιγάντιος συμπιεσμένος πυρήνας που υπάρχει λόγω των βαρυτικών δυνάμεων ακριβώς επειδή είναι τόσο υπεργιγάντιος.

Εάν η μάζα M είναι μεγαλύτερη από περίπου $2{,}5M_{\mathrm{H}}$ δεν φαίνεται να υπάρχει κατάσταση της ύλης ικανή να αντιμετωπίσει την βαρυτική κατάρρευση, η οποία συνεχίζεται χωρίς όριο δημιουργώντας έτσι τη λεγόμενη **μελανή οπή (**ή **μαύρη τρύπα)**.

13.2 Λευκοί Νάνοι

Έστω ότι R είναι ακτίνα του λευκού νάνου (οπότε ο όγκος του είναι $V = 4\pi R^3/3$) και $M = N_\nu m_u$ η μάζα του. Εάν η πυκνότητά του ήταν η ίδια σ' όλη την έκτασή του (που δεν είναι) τότε η μεν βαρυτική ενέργεια θα ήταν

$$U_B = -\frac{3}{5}\frac{GN_\nu^2 m_u^2}{R}, \tag{13.1}$$

η δε κβαντική κινητική ενέργεια θα δινόταν από τον τύπο[3]

$$U_K = 1{,}105 N_e^{5/3}\frac{\hbar^2}{m_e R^2}\ , \tag{13.2}$$

όπου N_e είναι ο συνολικός αριθμός ηλεκτρονίων. Ελαχιστοποιώντας το άθροισμα $U_{o\lambda} = U_\kappa + U_B$, θέτοντας δηλαδή $\partial U_{o\lambda}/\partial R = 0$ (που συνεπάγεται $U_K = \frac{1}{2}|U_B|$), έχουμε

$$\boxed{R = A\frac{\hbar^2}{G m_u^2 m_e}\frac{1}{N_\nu^{1/3}},\quad A = 3{,}68\left(\frac{N_e}{N_\nu}\right)^{5/3},\ 3{,}68 \to 4{,}51\,.} \tag{13.3}$$

Εάν είχαμε λάβει υπόψη μας ότι η πυκνότητα δεν είναι ίδια αλλά μειώνεται καθώς κινούμαστε από το κέντρο του λευκού νάνου προς την επιφάνειά του, το αποτέλεσμα θα ήταν παρόμοιο με μόνη τη διαφορά ότι ο αριθμη-

[3] Υποθέτουμε ότι οι κινητικές ενέργειες των ηλεκτρονίων δεν έχουν φτάσει σε σχετικιστικές τιμές. Αν είχαν φτάσει, αντί της (2.13΄) θα έπρεπε να είχαμε ξεκινήσει από τον τύπο (2.14΄). Υποθέτουμε ακόμη ότι η θερμική ενέργεια είναι αμελητέα σε σύγκριση με την U_K του τύπου (13.2), πράγμα που ισχύει.

τικός συντελεστής αντί να ήταν $2\times1{,}105/(3/5)=3{,}68$ θα ήταν 4,51. Σημειώστε ότι η ακτίνα του λευκού νάνου είναι *αντιστρόφως* ανάλογη της 1/3 δύναμης του αριθμού των νουκλεονίων και επομένως ο όγκος του είναι αντιστρόφως ανάλογος της μάζας του. Βλέπουμε δηλαδή ότι η σχέση όγκου-μάζας σ' ένα λευκό νάνο, είναι $V\propto 1/M$ αντί να είναι $V\propto M$ (όπως είναι στη συνηθισμένη στερεά ή υγρή ύλη, όπου η ισορροπία επιτυγχάνεται εξισώνοντας την ηλεκτροστατική συνθλιπτική πίεση με την πίεση λόγω κβαντικής κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων). Επομένως σε ένα λευκό νάνο η μέση πυκνότητα είναι ανάλογη του τετραγώνου της συνολικής μάζας (αυτή η ασυνήθης συμπεριφορά οφείλεται στο ότι η βαρυτική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της μάζας δια *R*, δηλαδή στο ότι τελικά $U_B\propto M^{7/3}$ σε αντίθεση με τη συνήθη περίπτωση της κυριαρχίας της ΗΜ ενέργειας όπου η συνθλιπτική ενέργεια είναι ανάλογη του αριθμού των ατόμων, δηλαδή ανάλογη της μάζας. Αυτές οι διαφορές οφείλονται αφενός μεν στην μακράς εμβέλειας βαρυτική δυναμη, αφετέρου δε στην βραχείας εμβέλειας ΗΜ δύναμη μεταξύ ουδέτερων δομών (π.χ. ατόμων), όπως είναι αυτές της ισορροπίας).

Στην *κατάσταση ισορροπίας* (λαμβάνοντας υπόψη την αριθμητική διόρθωση λόγω της μεταβολής της πυκνότητας[4]) έχουμε για τις ενέργειες ότι

$$U_B=-\frac{6}{7}\frac{GM^2}{R},\quad U_K=\frac{3}{7}\frac{GM^2}{R},\quad U_{o\lambda}=-\frac{3}{7}\frac{GM^2}{R}, \qquad (13.4)$$

όπου το *R* δίνεται από τον τύπο (13.3). Παρατηρήστε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις $|U_{o\lambda}|=U_K$ και $|U_B|=2U_K$, σύμφωνα με το θεώρημα virial. (Το θεώρημα virial προκύπτει και από την ελαχιστοποίηση της ολικής ενέργειας, εάν $E_K=A/R^{2n}$ και $E_\Delta=-B/R^n$, όπου *A*, *B* σταθερές και *n* αυθαίρετο. Αποδείξτε το).

Από τις προηγούμενες σχέσεις έπεται ότι η μέση κινητική ενέργεια ανά νουκλεόνιο U_K/N_ν αυξάνει ανάλογα με τη μάζα *M* στην 4/3 δύναμη. Επομένως καθώς η μάζα αυξάνει οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων θα γίνουν σχετικιστικές. Για να διευκολύνουμε τις πράξεις θα θεωρήσουμε ότι είμαστε στο ακραίο σχετικιστικό όριο, όπου $\varepsilon_K=cp$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ο τύπος (2.14΄)

---

[4] Δεδομένου ότι η πυκνότητα στο κέντρο του λευκού νάνου είναι 5,99 φορές τη μέση πυκνότητα, δείξτε ότι η μέγιστη κινητική ενέργεια ανά ηλεκτρόνιο στο κέντρο ενός λευκού νάνου ισούται με $E_F=0,3\frac{Gm_u^2}{a_B}\left(\frac{Gm_u^2}{e^2}\right)\left(\frac{N_\nu}{N_e}\right)^4 N_e^{4/3}$, G-CGS. (13.5)

$$U_K = \alpha_K \frac{c\hbar N_e^{4/3}}{R}, \qquad (13.6)$$

όπου ο αριθμητικός παράγοντας α_K ισούται με 1,44 για ομοιόμορφη πυκνότητα. Στην περίπτωση του τύπου (13.6) τόσο η ολική κινητική ενέργεια όσο και δυναμική βαρυτική ενέργεια είναι ανάλογες του $1/R$: $U_K = A/R$, $U_B = -\Gamma/R$. Εάν $A>\Gamma$ κερδίζει η απωστική πίεση και ο λευκός νάνος θα παραμείνει στη μη σχετικιστική περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως. Εάν, πάλι $\Gamma > A$, (έστω και κατ' ελάχιστο) ο λευκός νάνος θα συρρικνωθεί μέχρι να γίνει αστέρας νετρονίων ή μελανή οπή. Όταν $A=\Gamma$, έχουμε την ακραία περίπτωση ύπαρξης λευκού νάνου. Η σχέση $A=\Gamma$ (θέτοντας, $A = \alpha_K c\hbar N_e^{4/3}$ και $\Gamma = \gamma G N_\nu^2 m_u^2$) είναι ισοδύναμη με την

$$\boxed{N_{\nu 3} = \Lambda\left(\frac{c\hbar}{Gm_u^2}\right)^{3/2}, \quad \Lambda = \left(\frac{\alpha_K}{\gamma}\right)^{3/2}\left(\frac{N_e}{N_\nu}\right)^2 \approx 0,77,} \qquad (13.7)$$

όπου ο κάτω δείκτης 3 δηλώνει την κρίσιμη τιμή της μάζας πέραν της οποίας ο λευκός νάνος θα καταρρεύσει σε αστέρα νετρονίων. Από τον τύπο (13.7) βρίσκουμε την κρίσιμη αυτή τιμή. Εάν η πυκνότητα ήταν η ίδια σ' όλη την έκταση του λευκού νάνου ο λόγος α_K/γ θα ήταν 1,44/0,6=2,4 ενώ για την πραγματική μεταβολή της πυκνότητας έχουμε ότι a_K/γ =2,126. Χρησιμοποιώντας την τελευταία αυτή τιμή και επιλέγοντας την εύλογη τιμή N_e/N_ν=1/2 βρίσκουμε την τιμή $\Lambda = 0,77$ που δίνει το λεγόμενο όριο Chandrasekhar (13.7), $M_3 = N_{\nu 3} m_u = 1,44 M_H$. Πράγματι, το ανώτατο όριο μάζας λευκού νάνου που έχει παρατηρηθεί είναι 1,4 φορές τη μάζα του Ήλιου. Εάν ο λόγος N_e/N_ν επιλεγεί ίσος με 0,486, τότε $M_3 = 1,4 M_H$.

13.3 Αστέρες Νετρονίων (ή Pulsars)

Όταν ξεπεραστεί το όριο Chandrasekhar, η ακραία σχετικιστική κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων δεν επαρκεί πια για την αντιμετώπιση της συνθλιπτικής βαρυτικής πίεσης και επομένως ο όγκος του λευκού νάνου συρρικνώνεται δραματικά. Αυτή η συρρίκνωση οδηγεί στα εξής φαινόμενα: (α) Αυξάνεται η διασταλτική πίεση της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων (ως $1/R^4$) που καθίστανται όλο και πιο ακραίως σχετικιστικά· όμως, αυτή η αύξηση δεν βοηθάει στην αντιμετώπιση της βαρυτικής συμπίεσης γιατί η τελευταία αυξάνεται επίσης με τον ίδιο ρυθμό (ως $1/R^4$). (β) Αυτό που βοηθάει είναι η πολύ πιο γρήγορη αύξηση (ως $1/R^5$) της διασταλτικής πίεσης των νετρονίων και των πρωτονίων που, ως πολύ βαρύτερα των ηλεκτρονίων, παραμένουν μη σχετικιστικά (μέχρι κάποιο όριο). Αυτή η μη

ηλεκτρονιακή διασταλτική πίεση ήταν αμελητέα προηγουμένως στη κατάσταση του λευκού νάνου, όπου είχαμε πυρήνες μικρής συγκέντρωσης και όχι ξεχωριστά νετρόνια και πρωτόνια τεράστιας συγκέντρωσης, όπως μετά τη συρρίκνωση. (γ) Ο αστέρας νετρονίων καταλήγει να αποτελείται κυρίως από νετρόνια λόγω των εξής διαδικασιών: (i) Οι πυρήνες εισδύουν εν μέρει ο καθένας μέσα στους διπλανούς τους και επομένως χάνουν την αυτοτελή ύπαρξή τους. (ii) Τα ηλεκτρόνια επίσης εισδύουν μέσα στο συμπιεσμένο και ενοποιημένο αυτό σύστημα νουκλεονίων και αντιδρούν με τα πρωτόνια δίνοντας νετρόνια. (iii) Όμως, επειδή λαμβάνει χώρα και η αντίστροφη αντίδραση, $(n \to p + e^- + \bar{\nu}_e)$, η χημική ισορροπία οδηγεί στο να υπάρχει και ένα μικρό ποσοστό ηλεκτρονίων που ισούται με το ποσοστό πρωτονίων λόγω ηλεκτρικής ουδετερότητας[5]. Η ύπαρξη πρωτονίων και ηλεκτρονίων είναι ο λόγος που οι αστέρες νετρονίων ακτινοβολούν ραδιοκύματα καθώς περιστρέφονται. Αν αποτελούνταν μόνο από νετρόνια αυτό δεν θα συνέβαινε.

Σημειώστε ότι για να υπάρξει ισορροπία του αστέρα νετρονίων θα πρέπει τα νουκλεόνια να μην έχουν φτάσει σε σχετικιστικές τιμές της ταχύτητάς τους, γιατί αλλιώς η συνολική ενέργεια θα κατέληγε και πάλι στη μορφή $(A-\Gamma)/R$, σχέση που οδηγεί αναγκαστικά σε αστάθεια. Θεωρώντας λοιπόν τα νουκλεόνια ως μη σχετικιστικά (τα ηλεκτρόνια είναι ούτως ή άλλως σχετικιστικά) και έχοντας τα ποσοστά νετρονίων, πρωτονίων και ηλεκτρονίων (βλέπε υποσ. 5) βρίσκουμε ότι η κβαντική κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι περίπου το 6% της συνολικής βαρυτικής ενέργειας, ενώ η κινητική ενέργεια των πρωτονίων είναι περίπου 1,2% αυτής των νετρονίων, οπότε ελαχιστοποιώντας την ολική ενεργεια έχουμε $(1-0,06)U_B = 2(1+0,012)U_{K,n}$ ή $(0,94\gamma G m_n^2 N_\nu^2 / R) \equiv 2,02(a_K \hbar^2 N_n^{5/3} / m_n R^2)$, όπου για ομοιόμορφη πυκνότητα και διαθέσιμο όγκο ίσο με τον ολικό όγκο του αστέρα νετρονίων, $a_K = 1,105$ και $\gamma = 0,6$. Από αυτήν την ισότητα βρίσκουμε την ακτίνα του αστέρα νετρονίων:

---

[5] Η χημική ισορροπία συνεπάγεται ότι $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ (το χημικό δυναμικό των νετρίνων δεν εμφανίζεται γιατί τα νετρίνα δεν παραμένουν στον αστέρα νετρονίων). Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με το θεώρημα virial $U_K = -\frac{1}{2}U_B$ και τις σχέσεις $\mu_{Ki} = (\partial U_{Ki} / \partial N_i)_{S,V}$, $i = n, p, e$ οδηγεί υπό συνθήκες ισορροπίας στα εξής ποσοστά: $N_n / N_\nu = 93,4\%$, $N_p / N_\nu = N_e / N_\nu = 6,6\%$, τα οποία ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι τα νετρόνια και τα πρωτόνια δεν έχουν φτάσει σε σχετικιστικές τιμές της ταχύτητας. Στο ακραίο σχετικιστικό όριο οι παραπάνω λόγοι είναι 88,88% και 11,11%. Μπορείτε να το αποδείξετε;

$$R = A' \frac{\hbar^2}{G m_n^3} \frac{1}{N_\nu^{1/3}}, \quad A' = \frac{2{,}15 a_K}{\gamma} \left(\frac{N_n}{N_\nu}\right)^{5/3} = 4{,}32 \to 3{,}28. \qquad (13.8)$$

(Θεωρήσαμε ότι η μάζα του αστέρα νετρονίων είναι ίση με $N_n m_n + N_p m_p \approx N_\nu m_n$ και όχι με $N_\nu m_u$. Γιατί;). Συγκρίνοντας την ακτίνα του αστέρα νετρονίων (τύπος 13.8) με αυτήν του λευκού νάνου (τύπος 13.3) βλέπουμε ότι η πρώτη προκύπτει από τη δεύτερη πολλαπλασιάζοντας με τον λόγο $(A' m_u^2 / A m_n^2)(m_e / m_n) \approx 2{,}27(m_e / m_n) = 1{,}23 \times 10^{-3}$, που σημαίνει ότι η ακτίνα του αστέρα νετρονίων είναι κατά τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερη από αυτήν του λευκού νάνου δηλαδή περίπου 10 km.

Σχετικά πρόσφατα (2010) εκτιμήθηκε η μάζα και η ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων στο διπλό σύστημα 4U1820-30 και ευρέθη ότι ή μεν μάζα είναι $(1{,}58 \pm 0{,}06)\, M_H$ η δε ακτίνα $(9{,}11 \pm 0{,}4)\,\mathrm{km}$. Για να πετύχουμε αυτές τις παρατηρησιακές τιμές ο λόγος a_K / γ =2,25 πρέπει να αντικατασταθεί από τον λόγο $a'_K / \gamma' = 1{,}71$ οπότε $A' = 3{,}28$ στον τύπο (13.8).

Όπως και για τους λευκούς νάνους, έτσι και για τους αστέρες νετρονίων, η κβαντική κινητική ενέργεια ανά νουκλεόνιο των μη σχετικιστικών νουκλεονίων αυξάνει ανάλογα με την ολική μάζα στην 4/3 δύναμη. Επομένως, για μεγαλύτερες τιμές της μάζας του αστέρα νετρονίων, και τα νουκλεόνια θα αποκτήσουν σχετικιστικές ταχύτητες και, τελικά, ακραίες σχετικιστικές ταχύτητες. Ο υπολογισμός προκειμένου για αυτό το ακραίο σχετικιστικό όριο είναι παρόμοιος με αυτόν για τους λευκούς νάνους. Η μόνη διαφορά είναι ότι η κινητική ενέργεια είναι αυξημένη, αφού τώρα συμβάλλουν N σωμάτια: τα νετρόνια N_n που είναι το 80% του συνόλου των σωματίων, τα πρωτόνια N_p που είναι το 10% του συνόλου, και τα ηλεκτρόνια N_e που είναι το 10% του συνόλου, ενώ προηγουμένως στο λευκό νάνο συνέβαλαν μόνο τα ηλεκτρόνια που ήσαν $(Z/A)N_\nu \approx \frac{1}{2} N_\nu$. Επειδή ο αριθμητής της βαρυτικής ενέργειας είναι ανάλογος του τετραγώνου του συνολικού αριθμού N_ν νουκλεονίων είναι βολικό να εκφράσουμε και τον αριθμητή της συνολικής κινητικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού N_ν των νουκλεονίων. Ο εν λόγω αριθμητής είναι ίσος με

$$\alpha'_K \hbar c\{N_n^{4/3} + N_p^{4/3} + N_e^{4/3}\} = \alpha'_K \hbar c\{(0{,}8/0{,}9)^{4/3} + 2(0{,}1/0{,}9)^{4/3}\} N_\nu^{4/3} = \\ = 0{,}9615 \alpha'_K \hbar c N_\nu^{4/3}.$$

Το όριο Chandrasekhar $N_{\nu 3}$ για την κατάρρευση ενός λευκού νάνου προς αστέρα νετρονίων (τύπος 13.7) προσδιορίστηκε από την ισότητα των αριθμητών A=Γ $(\alpha_K c \hbar N_{\nu 3}^{4/3} / 2^{4/3} = \gamma G N_{\nu 3}^2 m_u^2)$, όπου ο λόγος a_K / γ =2,126. Με όμοιο τρόπο το όριο $N_{\nu 4}$ για την κατάρρευση ενός αστέρα νετρονίων

προς μαύρη τρύπα θα προσδιοριστεί επίσης από την ισότητα των αντιστοίχων αριθμητών $(0,9615\alpha'_K c\hbar N_{\nu 4}^{4/3} = \gamma' G N_{\nu 4}^2 m_n^2)$, όπου τα α'_K, γ' είναι αριθμητικές σταθερές της τάξεως της μονάδος, διαφορετικές από αυτές του λευκού νάνου. Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες που προσδιορίζουν τις κρίσιμες τιμές κατάρρευσης βρίσκουμε την κρίσιμη τιμή $N_{\nu 4}$ συναρτήσει της $N_{\nu 3}$

$$\boxed{N_{\nu 4} = \tilde{\Lambda} N_{\nu 3}, \quad \tilde{\Lambda} = \left(2,4228 \frac{\alpha'_K \gamma}{\alpha_K \gamma'} \frac{m_u^2}{m_n^2} \right)^{3/2}}. \tag{13.9}$$

Εάν επιλέξουμε $(\alpha'_K \gamma) / (\alpha_K \gamma') = 1,71 / 2,25 = 0,76$ το όριο $N_{\nu 4}$ για κατάρρευση αστέρα νετρονίων προς μαύρη τρύπα προκύπτει ίσο με 2,43 επί το όριο Chandrasekhar, δηλαδή ίσο με

$$N_{\nu 4} \approx 1,87 \left(\frac{c\hbar}{G m_u^2} \right)^{3/2} \approx 3,4 N_{\nu H}. \tag{13.10}$$

Η παραπάνω τιμή για το άνω οριο, πέραν του οποίου η ύλη οδηγείται σε μαύρη τρύπα, είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτήν που είναι αποδεκτή σήμερα, βάσει πιο λεπτομερών θεωριών για την κατάσταση της ύλης σε αστέρα νετρονίων και, επομένως, και για το λόγο $(\alpha'_K \gamma) / (\alpha_K \gamma')$. Το άνω όριο μάζας για αστέρι νετρονίων είναι γνωστό ως το όριο *Oppenheimer-Volkoff,* οι οποίοι έκαναν τους πρώτους σχετικούς υπολογισμούς το 1939.

Μια πιο αξιόπιστη εκτίμηση της κρίσιμης τιμής για κατάρρευση αστέρα νετρονίων προς μαύρη τρύπα βασίζεται στην ακτίνα του αστέρα νετρονίων για την οποία υπάρχουν ανεξάρτητα παρατηρησιακά δεδομένα που προσδιορίζουν τον αριθμητικό συντελεστή (βλ. (13.8) και σχόλια που ακολουθούν). Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 6, ένα αντικείμενο καταρρέει σε μαύρη τρύπα όταν συμπιεσθεί τόσο πολύ ώστε η ακτίνα του να γίνει ίση με την ακτίνα r_S του ορίζοντα γεγονότων, η οποία δίνεται από τον τύπο (6.10)

$$r_S = \frac{2GN_\nu m_n}{c^2}. \tag{13.11}$$

Εξισώνοντας την ακτίνα του τύπου (13.8) με $A' = 3,28$ με αυτήν του τύπου (13.11) έχουμε μια καλύτερη εκτίμηση για την κρίσιμη τιμή $N_{\nu 4}$ από αυτήν της σχέσης (13.10). Για να είμαστε πιο ακριβείς η ακτίνα R_4 του αστέρα νετρονίων στην κρίσιμη τιμή $N_{\nu 4}$ είναι μικρότερη από αυτήν του τύπου (13.8) γιατί η συρρίκνωση έχει ήδη αρχίσει. Επομένως η εξίσωση της R_4 με την r_S οδηγεί στην εξής ανισότητα (αφού $R_4 < 3,28(\hbar^2 / G m_n^3) N_\nu^{-1/3}$)

$$\boxed{N_{\nu 4} < 1,45(\frac{c\hbar}{Gm_n^2})^{3/2} = 3,18\times 10^{57}\,.} \qquad (13.12)$$

Δεδομένου ότι ο Ήλιος αποτελείται από $1,1975\times 10^{57}$ νουκλεόνια έπεται ότι η κρίσιμη μάζα M_4 για την κατάρρευση αστέρα νετρονίων προς μαύρη τρύπα ικανοποιεί (λαμβάνοντας υπόψη και τη διαφορά $m_n - m_u$) τη σχέση

$$\boxed{M_4 < 2,65 M_H\,.} \qquad (13.13)$$

Στις 17/8/2017 παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά τα φαινόμενα που αναμένεται να συνοδεύουν τη συγχώνευση ενός συστήματος δύο αστέρων νετρονίων περίπου ίσης μάζας οι οποίοι περιστρέφονται ο ένας γύρω από τον άλλο πριν αποτελέσουν ένα ενιαίο σώμα. Τα φαινόμενα αυτά είναι αφενός μεν η ισχυρή εκπομπή ΗΜ ακτινοβολίας των τύπων που χαρακτηρίζονται ως εκρηκτικές εκπομπές ακτίνων γάμμα (gama ray bursts-GRBs) και αφετέρου η σημαντική εκπομπή βαρυτικών κυμάτων. Σύμφωνα με την επίσημη ανακοίνωση της 16/10/2017 και οι δύο εκπομπές κατεγράφησαν από επίγειους σταθμούς, η μεν δεύτερη από το σύστημα LIGO και το αντίστοιχο ευρωπαϊκό VIRGO, η δε πρώτη από πολλά τηλεσκόπια, προσφέροντας έτσι και μια εξήγηση του εντυπωσιακού φαινομένου των GRBs. Το διπλό σύστημα αστέρων νετρονίων που συγχωνεύτηκε βρισκόταν και βρίσκεται ως ενιαίο σώμα πια σε απόσταση 130 εκατομμυρίων ετών φωτός, η δε διαδικασία για την ολοκλήρωση της συγχώνευσης διήρκησε περίπου 100 δευτερόλεπτα λόγω της πολύ μικρότερης μάζας του συστήματος σχετικά με την πρώτη παρατήρηση βαρυτικών κυμάτων που οφειλόταν σε συγχώνευση δύο μαύρων οπών (βλ. την ενότητα 6.4).

13.4 Μαύρες Τρύπες (Μ.Τ.)

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε εν συντομία την απλούστερη περίπτωση μαύρης τρύπας, δηλαδή αυτήν που είναι ηλεκτρικά ουδέτερη και δεν περιστρέφεται περί τον άξονά της. Η μη κβαντομηχανική μελέτη των Μ.Τ. γίνεται στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας· ειδικότερα η ΓΘΣ για το μοντέλο 6.4.3α (σελ.154) προβλέπει ότι κάθε τέτοια Μ.Τ. περιβάλλεται από μια νοητή σφαιρική επιφάνεια που ονομάζεται ορίζοντας γεγονότων και έχει ακτίνα $r_s = 2GM/c^2$ (ακτίνα του Schwarzschild). Από φυσική άποψη ο ορίζοντας γεγονότων είναι η τέλεια ημιδιαπερατή επιφάνεια με την έννοια ότι οτιδήποτε μπορεί να τη διασχίσει από έξω προς τα μέσα, ενώ τίποτε, ούτε καν το φως, δεν μπορεί να τη διασχίσει από μέσα προς τα έξω. Παρόλα αυτά, πιστεύεται ότι μια Μ.Τ. εκπέμπει ακτινοβολία από μια περιοχή λίγο έξω από τον ορίζοντα γεγονότων μέσω ενός κβαντομηχανικού μηχανισμού που προτάθηκε από τον Hawking. Ο

μηχανισμός βασίζεται στον κβαντικό χαρακτήρα του κενού σύμφωνα με τον οποίο διαρκώς δημιουργούνται και καταστρέφονται ζεύγη σωματίου/αντισωματίου που 'ζουν' για ένα χρονικό διάστημα $\Delta t \approx \hbar / \Delta\varepsilon$, όπου $\Delta\varepsilon$ είναι η ενέργεια του ζεύγους. Από όλα τα είδη των ζευγών, τα φωτόνια που έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας, είναι τα πιο μακρόβια. Όταν αυτές οι διακυμάνσεις του κενού συμβούν πολύ κοντά στον ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας, όπου επικρατεί ένα τεράστιο ελκτικό βαρυτικό πεδίο, είναι πολύ πιθανό ένα από τα δύο σωμάτια του ζεύγους να το καταπιεί η Μ.Τ. αφήνοντας το άλλο αζευγάρωτο και άρα ανίκανο να εξαφανισθεί. Επομένως η Μ.Τ. μετέτρεψε ένα εικονικό ζεύγος σε ένα πραγματικό σωμάτιο. Το ενεργειακό κόστος αυτής της μετατροπής το πλήρωσε η Μ.Τ. ελαττώνοντας κατά το αντίστοιχο ποσό την ολική της ενέργεια. Ένας λεπτομερής υπολογισμός βασισμένος στον παραπάνω φυσικό μηχανισμό καταλήγει στο συμπέρασμα ότι τα σωμάτια που εκπέμπονται είναι κυρίως φωτόνια και έχουν κατανομή μέλανος σώματος. Άρα κάθε μαύρη τρύπα συμπεριφέρεται ως να ήταν μέλαν σώμα θερμοκρασίας T. Η θερμοκρασία αυτή μπορεί να προσδιορισθεί (εκτός από ένα αριθμητικό παράγοντα) με διαστατική ανάλυση. Πράγματι, μια Μ.Τ., όπως αυτή που εξετάζουμε, χαρακτηρίζεται μόνο από τη μάζα της. Άρα η θερμοκρασία T οφείλει να εξαρτάται από τη μάζα M. Θα εξαρτάται επίσης από τη παγκόσμια σταθερά G της βαρύτητας, αφού η Μ.Τ. είναι το κατ' εξοχήν βαρυτικό φαινόμενο και από την ταχύτητα του φωτός c ως το κατ' εξοχήν σχετικιστικό φαινόμενο. Τέλος θα εξαρτάται και από τη σταθερά του Planck, αφού η θερμοκρασία που επιχειρούμε να προσδιορίσουμε είναι ρητά κβαντομηχανικής φύσεως. Λάβετε υπόψη ότι η θερμοκρασία θα εμφανισθεί στη μορφή $k_B T$, η δε βαρύτητα ως το γινόμενο GM, που καθορίζει το πεδίο βαρύτητας. Ο μόνος συνδυασμός των GM, c, $\hbar$, που έχει διαστάσεις ενέργειας όπως το $k_B T$, είναι ο εξής:

$$\boxed{k_B T = \eta \frac{\hbar c^3}{GM} = 2\eta \frac{\hbar c}{r_s},} \tag{13.14}$$

όπου η αριθμητική σταθερά 2η ισούται με $1/4\pi$, ένα εύλογο νούμερο για ακτινοβολία προς όλες τις κατευθύνσεις. Υπενθυμίζουμε ότι και η ακτίνα του Schwarzschild προκύπτει από διαστατική ανάλυση. Επί πλέον δε, συμβαίνει ο μη σχετικιστικός τύπος για την ταχύτητα διαφυγής από σφαιρικό σώμα μάζας M και ακτίνας R να δίνει ακριβώς την ακτίνα r_s, εάν ως ταχύτητα διαφυγής θέσουμε την c.

Αφού αποδόθηκε θερμοκρασία στη μαύρη τρύπα είναι αναμενόμενο να αποδοθεί και εντροπία στη μαύρη τρύπα με βάση τον πρώτο νόμο $dU = c^2 dM = TdS$· γνωρίζοντας την ενέργεια $c^2 M$ και τη θερμοκρασία

$T \sim M^{-1}$, το αποτέλεσμα προκύπτει ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση και είναι

$$\boxed{\frac{S}{k_B} = 4\pi \frac{G M^2}{\hbar c} = \frac{c^3}{G\hbar} \pi r_s^2,} \tag{13.15}$$

το οποίο προκύπτει και διαστατικά (εκτός από τους αριθμητικούς παράγοντες). Παρατηρήστε ότι η εντροπία μιας Μ.Τ. προέκυψε ανάλογη της επιφάνειας του ορίζοντα γεγονότων και όχι του όγκου που περικλείει, όπως θα περίμενε κανείς από την εμπειρία της συνήθους θερμοδυναμικής. Το μάλλον παράδοξο αυτό αποτέλεσμα έχει προβληματίσει τους ερευνητές και έχει συνδεθεί με το πιο βασικό ερώτημα, αν η πτώση ύλης σε μια μαύρη τρύπα και στη συνέχεια η σταδιακή εξαέρωση της Μ.Τ. μέσω της ακτινοβολίας Hawking διατηρεί την πιθανότητα ή όχι. Φαίνεται ότι συγκλίνουν οι απόψεις στο ότι η πιθανότητα διατηρείται όπως απαιτεί η Κβαντομηχανική αν και παραμένουν προτάσεις που υποστηρίζουν το αντίθετο.

Όπως ήδη αναφέρθηκε η ακτινοβολία Hawking έχει ως συνέπεια την συνεχή απώλεια ενέργειας της Μ.Τ. και επομένως και τη συνεχή μείωση της σχετικιστικής της μάζας μέχρι την πλήρη εξαφάνισή της. Έχουμε πράγματι ότι

$$c^2 dM / dt = -4\pi r_s^2 \sigma T^4 = -C M^{-2},$$

όπου

$$C = \frac{1}{15360\,\pi} \frac{\hbar c^6}{G^2}.$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση λύνεται εύκολα πολλαπλασιάζοντας και τα δύο της μέλη με το M^2 και διαιρώντας με το c^2. Το αποτέλεσμα είναι

$$M^3 = M_o^3 - \frac{1}{5120\,\pi} \frac{\hbar c^4}{G^2} t. \tag{13.16}$$

Από την (13.16) προκύπτει ότι ο χρόνος ζωής μιας Μ.Τ. με αρχική μάζα M_o ειναι

$$t_{\zeta\omega ns} = 5120\,\pi \frac{G^2}{\hbar c^4} M_o^3. \tag{13.17}$$

Σε μονάδες Planck (βλέπε σελ. 156, Κεφ.6) έχουμε τους παρακάτω τύπους

$$\frac{r_s}{\ell_P} = 2\frac{M}{m_P} \;\; \text{ή} \;\; \tilde{r}_s = 2\tilde{M}\,, \text{όπου} \;\; \tilde{r}_s = \frac{r_s}{\ell_P}\,, \text{κλπ,} \tag{13.11}$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{8\pi\tilde{M}} = \frac{1}{4\pi\tilde{r}_s}, \tag{13.14′}$$

$$\frac{S}{k_B} = 4\pi\tilde{M}^2 = \frac{A}{4\ell_P^2} = \frac{\tilde{A}}{4}, \quad \tilde{A} = 4\pi\tilde{r}_s^2, \tag{13.15′}$$

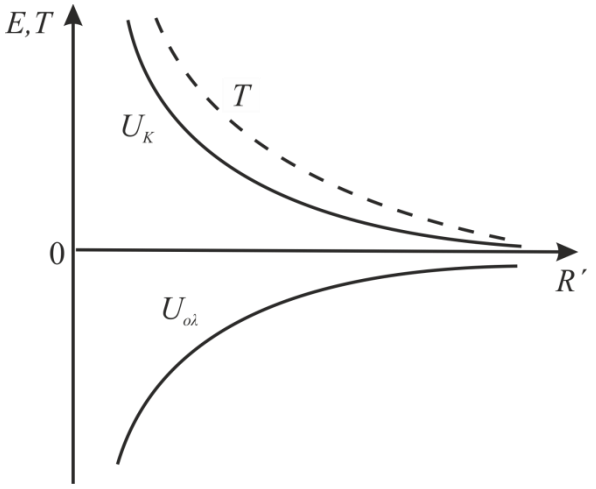
$$\tilde{t}_{\zeta\omega\acute{\eta}\varsigma} = 16085\tilde{M}_o^3 = 2010,6\tilde{r}_S^3. \tag{13.17′}$$

13.5 Ελάχιστο μέγεθος ενός ενεργού άστρου

Θεωρήστε μία περιοχή ενός μεσοαστρικού νέφους ύλης σφαιρικού σχήματος μάζας M και ακτίνας R, η οποία αρχίζει να συμπυκνώνεται υπό την επίδραση της βαρύτητάς της. Η μάζα M είναι αρκετά μεγάλη ώστε η ενέργεια Coulomb να είναι αμελητέα σε σύγκριση με τη βαρυτική. Θεωρούμε ότι η διαδικασία συμπύκνωσης είναι αρκετά αργή ώστε τα σωμάτια της ύλης συγκρουόμενα το ένα με το άλλο να φτάνουν σε μια προσωρινή ισορροπία και να αποκτούν μια ενιαία θερμοκρασία T που αλλάζει φυσικά καθώς μειώνεται σταδιακά το R . Σύμφωνα με το θεώρημα virial, η συνολική κινητική ενέργεια των σωματίων είναι για κάθε τιμή του R ίση με μείον την ολική (κινητική και δυναμική) ενέργεια του συστήματος.

Θα εξετάσουμε τρία σενάρια για το τι μπορεί να συμβεί καθώς η ύλη του υπό σχηματισμό άστρου συμπιέζεται από την ίδια του τη βαρύτητα. Μόνο το τρίτο σενάριο είναι ρεαλιστικό. Εν τούτοις η εξέταση των άλλων δύο διευκολύνει την κατανόηση του τι θα συμβεί στην πραγματικότητα.

Σύμφωνα με το πρώτο σενάριο ο Κόσμος είναι κλασικός (όχι κβαντικός) και δεν υπάρχουν πυρηνικές αλληλεπιδράσεις (ούτε ισχυρές, ούτε ασθενείς). Στο Σχ.13.1α εικονίζεται το τι θα συνέβαινε σύμφωνα με το σενάριο



Σχ. 13.1α. Σύμφωνα με το πρώτο μη ρεαλιστικό σενάριο η ολική ενέργεια όντας αρνητική θα μειώνεται συνεχώς λόγω ακτινοβολίας (σε απόλυτη τιμή θα αυξάνεται). Αυτό συνεπάγεται ότι η κινητική ενέργεια θα αυξάνεται συνεχώς, (μια και $2U_K = |U_{ολ}|$) πράγμα που σημαίνει αύξηση της θερμοκρασίας (αφού $U_K = \frac{3}{2} N k_B T$)

αυτό. Η ακτίνα R θα συρρικνωνόταν συνεχώς χωρίς όριο, μάλιστα με επιταχυνόμενο ρυθμό (αφού η απώλεια ενέργειας θα ήταν ανάλογη του $R^2 T^4 \propto 1/R^2$ λόγω του ότι η κινητική ενέργεια $\frac{3}{2} N k_B T = \frac{1}{2} \gamma G M^2 / R$, ($\gamma \geq 0.6$)). Έτσι η ύλη θα κατέρρεε και θα κατέληγε σε μία μελανή οπή[6]. Μ' άλλα λόγια όλα τα αντικείμενα του Σύμπαντος με μάζα της τάξεως του 10^{30} kg ή μεγαλύτερη θα κατέρρεαν σε μια ή περισσότερες μελανές οπές σύμφωνα με αυτό το σενάριο (που είναι ούτως ή άλλως ανεπαρκές και για τον πρόσθετο λόγο ότι παρελείφθη η ενέργεια των φωτονίων).

Το δεύτερο σενάριο ενσωματώνει ένα κύριο στοιχείο της φυσικής πραγματικότητας: Το γεγονός ότι ο Κόσμος είναι κβαντικός. Πάσχει όμως από το ότι οι ισχυρές και οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις εξακολουθούν να θεωρούνται απούσες. Η βασική διαφορά από το πρώτο σενάριο είναι ότι η σχέση κινητικής ενέργειας U_K και θερμοκρασίας δεν είναι πια η κλασική ($U_K = \frac{3}{2} N k_B T$, $N = N_e + (N_v/A_B)$, όπου N_v/A_B=αριθμός πυρήνων), αλλά η κβαντική, που δίνεται από τον απλό αλλά *προσεγγιστικό* τύπο (βλέπε (2.16))

$$U_\kappa = N_e \sqrt{(\tfrac{3}{5} E_F)^2 + (\tfrac{3}{2} \nu k_B T)^2}, \; \nu = 1 + \frac{1}{Z}. \qquad (13.18)$$

Από το θεώρημα virial για βαρυτικές αλληλεπιδράσεις και για το υπό μελέτη σύστημα, το οποίο δεν υφίσταται εξωτερική πίεση, έχουμε ότι $U_K = -U_{ολ}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $U_K = \frac{1}{2}|U_B|$ και επομένως βρίσκουμε ότι η θερμοκρασία δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\tfrac{3}{2} \nu k_B T = \left[\frac{\Gamma^2}{R^2} - \frac{A^2}{R^4}\right]^{1/2}. \qquad (13.19)$$

Άσκηση 13.1: Δείξτε ότι οι ποσότητες Γ και A στη σχέση (13.19) είναι οι εξής:

[6] Μπορείτε να σκεφτείτε ποια αρχική συνθήκη θα μπορούσε να εμποδίσει για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα την κατάρρευση σε μελανή οπή στα πλαίσια του κλασικού σεναρίου;

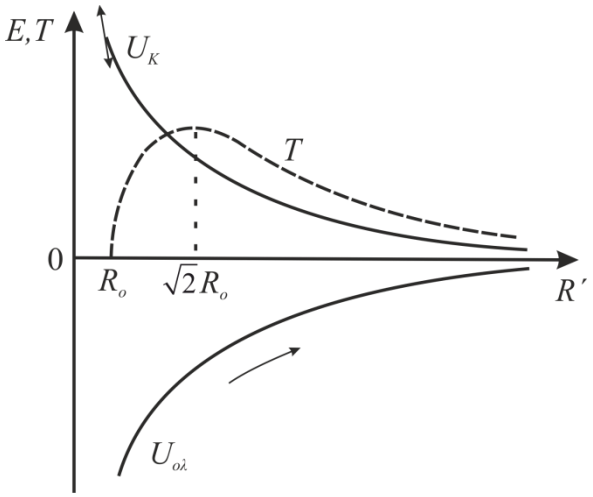
$$\Gamma = \frac{\gamma}{2}\frac{G m_u^2 N_\nu^2}{N_e}, \quad A = \tilde{a}_K \frac{\hbar^2 N_e^{2/3}}{m_e} \ . \tag{13.20}$$

Λύση: Υψώνοντας την ισότητα $U_K = \frac{1}{2}|U_B|$ στο τετράγωνο, αντικαθιστώντας το $|U_B|$ από τη σχέση $|U_B| = \gamma G N_\nu^2 m_u^2 / R$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{3}{5}E_F = \tilde{a}_K \hbar^2 N_e^{2/3} / m_e R^2$ καταλήγουμε στις ζητούμενες σχέσεις (13.20). (Για ομοιόμορφη πυκνότητα, γ=0,6 και $\tilde{a}_K$=1,105).

Από την (13.19) προκύπτει ότι το υπόρριζο μηδενίζεται όταν η ακτίνα R γίνει ίση με R_o όπου

$$R_o = \frac{A}{\Gamma} = \frac{2\tilde{a}_K}{\gamma}\frac{\hbar^2 N_e^{5/3}}{G N_\nu^2 m_u^2 m_e}. \tag{13.21}$$

Επομένως αντί του Σχ. 13.1α θα έχουμε το 13.1β. Ο λόγος N_ν / N_e ισούται με περίπου 1,35 για ενεργό άστρο και περίπου 2 για λευκό νάνο.



Σχ. 13.1β. Παρουσία κβαντικών φαινομένων και απουσία πυρηνικών αλληλεπιδράσεων το σύστημα θα ακτινοβολήσει ενέργεια μέχρι να μηδενισθεί η θερμοκρασία του, οπότε θα ισορροπήσει σε ακτίνα $R = R_o$ τέτοια ώστε η πίεση λόγω της κβαντικής κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων θα εξισορροπηθεί από τη συνθλιπτική πίεση της βαρύτητας. Το σημείο ισορροπίας, $R = R_o$, είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας γιατί η κινητική ενέργεια (για $T \approx 0$K) μεταβάλλεται πια ως $1/R^2$, όπως δείχνουν τα βέλη. Έχουμε θεωρήσει ότι τα ηλεκτρόνια δεν έχουν φτάσει σε σχετικιστικές ταχύτητες

Η μέγιστη θερμοκρασία εμφανίζεται όταν $(dT/dR)=0$, δηλαδή, βάσει του τύπου (13.19), για $R=R_m=\sqrt{2}R_o$. Αντικαθιστώντας έχουμε $\frac{3}{2}\nu k_B T_{\max} = = \Gamma^2/2A$, όπου τα Γ, A προκύπτουν από τους τύπους (13.20).

$$T_{\max}=X\frac{G^2 m_u^4 m_e}{\hbar^2 k_B}N_\nu^{4/3},\quad X\equiv\frac{\gamma^2}{12\tilde{a}_K\nu}\left(\frac{N_\nu}{N_e}\right)^{8/3}. \tag{13.22}$$

Ας εξετάσουμε τώρα το τρίτο, το ρεαλιστικό, σενάριο, όπου έχει ενσωματωθεί και η δυνατότητα πυρηνικών αντιδράσεων. Για να υπάρξει άστρο θα πρέπει να τεθεί σε λειτουργία η σύντηξη ελαφρών πυρήνων, πράγμα που απαιτεί κινητικές ενέργειες αρκετά υψηλές ώστε με τη βοήθεια και του κβαντικού φαινομένου σήραγγας να υπερπηδηθεί το ηλεκτροστατικό φράγμα δυναμικού. Η θερμοκρασία, $T_{\rm ign}$, έναρξης της σύντηξης δύο πρωτονίων δίνεται από την ακόλουθη σχέση που προκύπτει και από διαστατική ανάλυση[7]

$$T_{ign}=\eta\frac{e^4 m_p}{\hbar^2 k_B}, \tag{13.23}$$

όπου λεπτομερείς υπολογισμοί δίνουν για το η περίπου την τιμή 0,02, λόγω του ότι η κατανομή των ταχυτήτων των σωματίων επιτρέπει και τιμές πολύ μεγαλύτερες από τον μέσο όρο. Άλλωστε το γεγονός ότι γίνονται θερμοπυρηνικές συντήξεις στο εσωτερικό του Ήλιου, όπου η θερμοκρασία είναι $1{,}57\times10^7\,\mathrm{K}$, σημαίνει ότι το η είναι μικρότερο από 0,027.

Για να υπάρξει λοιπόν άστρο θα πρέπει να αρχίσει η σύντηξη αρκετά πριν φτάσουμε στη μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας. Θα πρέπει δηλαδή

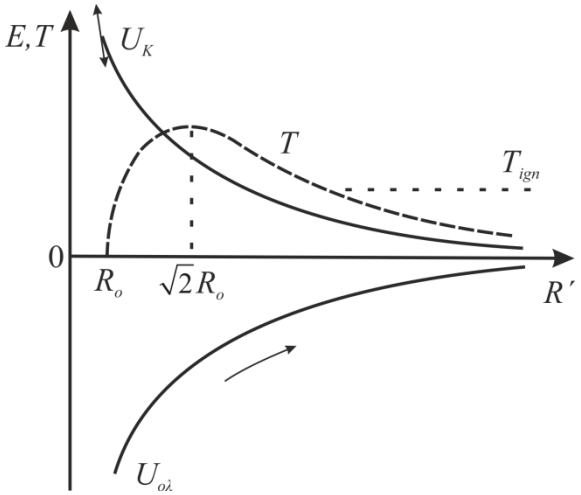
$$T_{\max}\geq\Lambda T_{ign}, \tag{13.24}$$

όπου Λ μεγαλύτερο από τη μονάδα (π.χ., $\Lambda\approx1{,}1$), όπως φαίνεται στο Σχ. 13.1γ. Αντικαθιστώντας στην (13.24) τις σχέσεις (13.22) και (13.23) έχουμε τελικά στο σύστημα G-CGS

[7] Η κινητική ενέργεια για τη σύντηξη δύο πρωτονίων θα πρέπει να εξαρτάται από το ηλεκτρικό τους φορτίο e, από την ανηγμένη μάζα τους $m_p/2$, και από τη σταθερά του Planck, $\hbar$, αφού πρόκειται για το κβαντικό φαινόμενο σήραγγας. Από τις ποσότητες αυτές μόνο ένας συνδυασμός έχει διαστάσεις ενέργειας, δηλαδή ο $e^4 m_p/2\hbar^2$. Άρα η θερμοκρασία $T_{\rm ign}$ έναρξης της σύντηξης δίνεται πράγματι από τον τύπο (13.23). Προφανώς η θερμοκρασία αυτή θα πρέπει να είναι σαφώς μικρότερη της μέγιστης θερμοκρασίας του τύπου (13.22) για να υπάρξει σύντηξη.

$$N_v \geq \Pi(\frac{e^2}{G\sqrt{m_e m_u^3}})^{3/2} \approx 0{,}52(\frac{e^2}{G\sqrt{m_e m_u^3}})^{3/2},\ \Pi = (\frac{12\Lambda\eta\nu\tilde{a}_K}{\gamma^2})^{3/4}(\frac{N_e}{N_v})^2, \quad (13.25)$$

όπου ο αριθμητικός παράγοντας προέκυψε παίρνοντας Λ=1,1, η=0,02, ν≈1,83, $\tilde{a}_K \approx 1{,}105$ $\gamma \approx 0{,}6$ και $N_e / N_\nu = 0{,}625$. Βλέπουμε λοιπόν ότι το ελάχιστο μέγεθος ενός άστρου προκύπτει από το λόγο της ηλεκτροστατικής δύναμης προς τη βαρυτική δύναμη υψωμένο στη 3/2 δύναμη. Ο λόγος $e^2 / G\sqrt{m_e m_u^3}$ ισούται με $0{,}5354\times 10^{38}$ και επομένως ο ελάχιστος αριθμός νουκλεονίων σ' ένα ενεργό άστρο είναι περίπου ίσος με 2×10^{56}, δηλαδή



Σχ. 13.1γ Στο παρόν σχήμα έχει προστεθεί η θερμοκρασία, T_{ign} έναρξης των πυρηνικών αντιδράσεων σύντηξης. Το άστρο θα βρει μια δυναμική ισορροπία όταν η απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας εξισωθεί με την προσφορά ενέργειας λόγω πυρηνικών αντιδράσεων. Η δυναμική αυτή ισορροπία είναι ευσταθής: Εάν, π.χ. υπάρξει κάποια στιγμή μια υπερπροσφορά πυρηνικής ενέργειας, η ολική ενέργεια θα αυξηθεί, το άστρο επομένως θα διασταλεί (όπως δείχνει το βελάκι), η κινητική ενέργεια θα μειωθεί, η θερμοκρασία θα χαμηλώσει και επομένως οι πυρηνικές αντιδράσεις θα επιβραδυνθούν και θα επανέλθει το άστρο στο σημείο ισορροπίας

περίπου έξη φορές μικρότερος από τον αριθμό νουκλεονίων στον Ήλιο. Τα παρατηρησιακά δεδομένα δείχνουν ότι ο ελάχιστος αριθμός νουκλεονίων σ' ένα ενεργό άστρο είναι περίπου 10^{56} δηλαδή δώδεκα φορές μικρότερος από αυτόν του Ήλιου. Το ότι η θεωρητική μας εκτίμηση προέκυψε περίπου δύο φορές μεγαλύτερη από την πραγματικότητα οφείλεται κυρίως στο ότι υποθέσαμε μια ενιαία θερμοκρασία για όλο το άστρο, ενώ στην πραγματικότητα η θερμοκρασία στο κέντρο είναι πολύ υψηλότερη από τη μέση θερμοκρασία με συνέπεια οι πυρηνικές συντήξεις να αρχίσουν στο κέντρο

του άστρου πολύ πριν η μέση θερμοκρασία φτάσει την κρίσιμη τιμή T_{ign}. Αν υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία στο κέντρο είναι β φορές μεγαλύτερη από την ενιαία θερμοκρασία $T_{\max}$ που υπολογίσαμε, τότε το αριστερό σκέλος της (13.24) θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί επί β και επομένως η (13.25) θα γίνει, θέτοντας για το β την εύλογη τιμή 2,5,

$$N_\nu \geq N_{\nu,\min} \approx 0,26\left(\frac{e^2}{G\sqrt{m_e m_u^3}}\right)^{3/2}. \qquad (13.25')$$

Από την ισότητα $2E_{K,\theta\varepsilon\rho\mu} = |E_B|$ και για μικρής μάζας ενεργά άστρα (όπου $T \approx T_{ign}$) προκύπτει η σχέση $R \propto M$. Η σχέση αυτή δεν ισχύει για μεγαλύτερα άστρα με μάζα στην περιοχή από περίπου $2M_H$ έως περίπου $20M_H$ γιατί η κινητική τους ενέργεια $E_{K,\theta\varepsilon\rho\mu}$ είναι της μορφής M^β με $\beta \approx 1,25$ ή και μεγαλύτερο και επομένως η εξάρτηση της ακτίνας από τη μάζα έχει τη μορφή $R \sim M^s$ όπου το $s = 2 - \beta$ είναι περίπου 0,75 ή και ακόμη μικρότερο για πολύ μεγάλα άστρα. Στην περιοχή μαζών $(0,5M_H, 20M_H)$ η επιφανειακή θερμοκρασία του άστρου T είναι περίπου ανάλογη της $M^{1/2}$. Άρα η λαμπρότητα $L \equiv 4\pi R^2 I \sim R^2 T^4$ (για το I βλέπε τη σχέση (5.9)) είναι περίπου ανάλογη της M^{2s+2} με $0,5 \lesssim s \lesssim 1$ για πολύ μεγάλα και μικρά ενεργά άστρα αντιστοίχως. Η λαμπρότητα καθορίζει και το χρόνο ζωής t_ζ του ενεργού άστρου. Πράγματι κάνοντας την εύλογη παραδοχή ότι η διαθέσιμη ενέργεια E_a για ακτινοβολία είναι ανάλογη του πυρηνικού καυσίμου που με τη σειρά του είναι ανάλογο της μάζας του άστρου, έχουμε

$$t_\zeta = \frac{E_a}{L} \sim \frac{M}{M^{2s+2}} \sim M^{-(2s+1)}, \qquad (13.26)$$

όπου το $-(2s+1)$ ισούται με -3 για μικρά άστρα και μέχρι -2 για πολύ μεγαλύτερα. Το συμπέρασμα είναι ότι τα μεγάλα άστρα είναι πολύ βραχύβια. Π.χ., αν ο Ήλιος είχε μάζα τρεις φορές μεγαλύτερη, ο συνολικός χρόνος ενεργού ζωής του αντί των 9 περίπου δισεκατομμυρίων ετών θα ήταν περίπου 600 εκατομμύρια έτη, θα είχε δηλαδή 'πεθάνει' προ πολλού.

13.6 Μέγιστο μέγεθος ενός άστρου

Υπάρχουν ελάχιστα παρατηρησιακά δεδομένα για το μέγιστο μέγεθος ενός ενεργού άστρου για δύο κύριους λόγους. Ο πρώτος είναι ότι τα πολύ μεγά-

λα άστρα δημιουργούνται μάλλον σπάνια και ο δεύτερος είναι ότι πεθαίνουν νέα, αφού $t_\zeta \propto M^{-2}$. Επομένως ελάχιστα είναι διαθέσιμα προς παρατήρηση για μια δεδομένη χρονική περίοδο. Π.χ. πρόσφατα (2018) ανακαλύφθηκε το ενεργό άστρο Icarus σε απόσταση περίπου 9 byrs με μάζα που υπερβαίνει τις 33 φορές τη μάζα του Ήλιου.

Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός ενεργού άστρου τόσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία του. Για υψηλές όμως θερμοκρασίες παρεμβαίνουν στην ισορροπία και τα φωτόνια που μέχρι τώρα τα είχαμε αγνοήσει:

$$P_\Phi + P_K = |P_B| \,. \tag{13.27}$$

Η παραπάνω σχέση λέει απλά ότι η συνθλιπτική πίεση της βαρύτητας σ' ένα άστρο πρέπει να εξισορροπήσει το άθροισμα δύο απωστικών πιέσεων: της πίεσης λόγω κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων και των πυρήνων (που λάβαμε υπόψη μας προηγουμένως θεωρώντας ότι είναι κυρίως θερμικής φύσεως) καθώς και της πίεσης που ασκούν τα φωτόνια (που μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι είναι αμελητέα). Η σχέση (13.27) συνεπάγεται ότι

$$U_\Phi + 2U_K = -U_B \,, \tag{13.28}$$

λόγω του ότι $U_\Phi = 3V P_\Phi$ (βλ. ενότητα 5.2α), $U_B = 3V P_B$ (αφού $U_B = -\text{σταθ.}/V^{1/3}$ και $P_B = -\partial U_B / \partial V$) και $U_K = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} PV$. Είναι φανερό ότι σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες η ενέργεια των φωτονίων, που είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης, T^4, του T, θα κυριαρχήσει έναντι της θερμικής ενέργειας των σωματίων που είναι ανάλογη της πρώτης δύναμης του T. Αν λοιπόν παραλείψουμε την U_K στην (13.28) θα έχουμε $U_\Phi \approx -U_B$ από την οποία έπεται ότι

$$U_\Phi + U_B \approx 0 \,. \tag{13.29}$$

Άρα , όταν η πίεση ακτινοβολίας κυριαρχεί, δεν υπάρχει ενεργειακό κέρδος (βλέπε (13.29)) και το άστρο δεν έχει λόγο να σχηματισθεί.

Ας εξετάσουμε το θέμα σε πιο ποσοτικό επίπεδο θεωρώντας ότι $P_\Phi = \Lambda P_K$, από την οποία έπεται ότι

$$k_B T = \hbar c (45 \Lambda x n_\nu / \pi^2)^{1/3} \,, \tag{13.30}$$

όπου $x n_\nu = \{(N_e + N_a)/N_\nu\}\{N_\nu / V\}$.

Άσκηση 13.2: Αποδείξτε την σχέση (13.30)

Λυση: Αν λάβουμε υπόψη ότι $P_\Phi = \kappa (k_B T)^4$ με τη σταθερά κ να είναι $\kappa \equiv \frac{\pi^2}{45} (\hbar c)^{-3}$ και $P_K = x n_\nu (k_B T)$, η σχέση $P_\Phi = \Lambda P_K$ είναι ισοδύναμη με την (13.30)

Από τη σχέση ισορροπίας $|P_B| = P_\Phi + P_K = (\Lambda+1)P_K$ έπεται ότι

$$k_B T = c_2 N_\nu^{2/3}, \quad c_2 = \{(4\pi/3)^{1/3}(\gamma/3) G\, m_u^2 n_\nu^{1/3}\} / \{x(1+\Lambda)\}. \qquad (13.31)$$

Άσκηση 13.3: Αποδείξτε την (13.31)

Λύση: Αντικαθιστώντας στη σχέση ισορροπίας $|P_B| = P_\Phi + P_K = (\Lambda+1)P_K$ τις εκφράσεις $P_B = -(\partial U_B / \partial V) = -(4\pi/3)^{1/3}(\gamma/3) G\, m_u^2 n_\nu^{4/3} N_\nu^{2/3}$, $P_K = x\, n_\nu (k_B T)$ έχουμε την σχέση (13.31)

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των σχέσεων (13.30) και (13.31) καταλήγουμε σε μια σχέση που προσδιορίζει τη μέγιστη επιτρεπτή τιμή του N_ν που τη συμβολίζουμε ως $N_{\nu,2}$

$$N_{\nu,2} = C_2 \left(\frac{\hbar c}{G\, m_u^2} \right)^{3/2}, \qquad (13.32)$$

όπου ο συντελεστής C_2 προκύπτει, όπως αποδεικνύεται εύκολα, ίσος με

$$C_2 = 5,42 \left(\frac{\Lambda^{1/3}(1+\Lambda)}{\gamma} \right)^{3/2} \left(\frac{N_e + N_a}{N_\nu} \right)^2. \qquad (13.32')$$

Ο τύπος (13.32), που δίνει το άνω όριο της μάζας ενός ενεργού άστρου, είναι γνωστός ως *όριο Eddington*. Επιλέγουμε, $(N_e + N_a)/N_\nu = 1{,}14$ (για ύλη πλούσια σε υδρογόνο, 80% υδρογόνο, 20% ήλιο), $\gamma \approx 0,6$ $\Lambda \approx 2,5$ ή Λ=1, και βρίσκουμε $C_2 \approx 160$ ή $C_2 \approx 43$ αντιστοίχως. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (13.32) καταλήγουμε στις ακόλουθες εκτιμήσεις για τη μέγιστη μάζα ενός ενεργού αστέρα :

$$N_{\nu,max} \approx 3,6 \times 10^{59} \approx 300 N_{\nu,H}, \quad \Lambda = 2,5, \qquad (13.33)$$

$$N_{\nu,max} \approx 0,965 \times 10^{59} \approx 80\, N_{\nu,H}, \quad \Lambda = 1. \qquad (13.33')$$

Επομένως ο μέγιστος αριθμός νουκλεονίων σ' ένα ενεργό άστρο ισούται περίπου με το λόγο της ισχυρής προς τη βαρυτική αλληλεπίδραση στη 3/2 δύναμη πολλαπλασιασμένο με ένα αριθμητικό συντελεστή της τάξεως του 150. Λεπτομερείς θεωρητικοί υπολογισμοί καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η μέγιστη μάζα ενεργού άστρου είναι περίπου 150 φορές τη σημερινή μάζα του Ήλιου, παρόλο που η μεγαλύτερη μάζα ενεργού άστρου που έχει βρεθεί είναι περίπου 350 φορές τη μάζα του Ήλιου. Ο δε ελάχιστος αριθμός νουκλεονίων σ' ένα ενεργό άστρο ισούται περίπου με το λόγο της ηλεκτρομαγνητικής προς την τροποποιημένη βαρυτική αλληλεπίδραση (βλέπε (13.25΄)) στη 3/2 δύναμη.

13.7 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Όταν η μάζα που έχει απομείνει σε ένα άστρο μετά την εξάντληση των πυρηνικών του καυσίμων είναι μικρότερη από το όριο Chandrasekhar,

$$M \le M_3 \approx 0,77\left(\frac{c\hbar}{Gm_u^2}\right)^{3/2} \approx 1,4M_H\,, \qquad (13.7)$$

το άστρο θα καταλήξει σε αυτό που ονομάζεται λευκός νάνος του οποίου η ακτίνα καθορίζεται από την ισορροπία μεταξύ της συνθλιπτικής πίεσης των βαρυτικών δυνάμεων και της διασταλτικής πίεσης της οφειλόμενης στην κινητική ενέργεια όλων των ηλεκτρονίων τα οποία έχουν απελευθερωθεί από τους πυρήνες (πλήρης ιονισμός). Η ακτίνα του δίνεται από τον τύπο

$$R = A\frac{\hbar^2}{G\,m_u^2 m_e}\frac{1}{N_\nu^{1/3}}, \quad A = 4,51(\frac{N_e}{N_\nu})^{5/3} = 1,42. \qquad (13.3)$$

Παρατηρήστε ότι η ακτίνα του λευκού νάνου είναι περίπου ίση με την παγκόσμια σταθερά $(\hbar^2 / G\,m_u^2 m_e)$ μήκους $6,6342\times10^{25}$ m διηρημένη με τον αριθμό των νουκλεονίων στην 1/3 δύναμη.

Όταν η εναπομείνουσα μάζα M του νεκρού άστρου ξεπεράσει το όριο (13.7), τα ηλεκτρόνια δεν είναι πια σε θέση να αντιμετωπίσουν τη συνθλιπτική βαρυτική πίεση. Κατά συνέπεια, η συμπίεση συνεχίζεται πολύ πέραν αυτής του λευκού νάνου μέχρι που η ακτίνα του να μειωθεί σε σχέση με αυτήν του τύπου (13.3) κατά ένα παράγοντα της τάξης του (m_e / m_n) (ή, ακριβέστερα, κατά ένα παράγοντα $2,27(m_e / m_n) = 1,23\times10^{-3}$). Ως αποτέλεσμα το νεκρό άστρο καταλήγει σε αστέρα νετρονίων με την προϋπόθεση ότι η μάζα του M ικανοποιεί τη σχέση $M_3 \lesssim M \lesssim M_4$). Η κρίσιμη μάζα M_4 ικανοποιεί την ανισότητα

$$M_4 < 2,65M_H = 1,45(\frac{c\hbar}{Gm_u^2})^{3/2}\,. \qquad (13.12)$$

Η τεράστια συμπίεση του 1/1000 οφείλεται, από φυσική άποψη, στο ότι η κινητική ενέργεια των νετρονίων στο συμπιεσμένο νεκρό άστρο αντικαθιστά την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων στους λευκούς νάνους. Αυτή η συμπίεση υποχρεώνει τους πυρήνες να διαλυθούν, τα ηλεκτρόνια να αντιδράσουν με τα πρωτόνια και να προκύψει μια σύνθεση της μάζας κατά 93,4% περίπου νετρόνια και 6,6% πρωτόνια· επιζούν και ηλεκτρόνια που εξασφαλίζουν την συνολική ηλεκτρική ουδετερότητα. Λόγω αυτής της σύνθεσης το προκύπτον νεκρό άστρο ονομάζεται αστέρι νετρονίων. Η ακτίνα του δίνεται από τη σχέση

$$R = A' \frac{\hbar^2}{G m_n^3} \frac{1}{N_\nu^{1/3}} = \frac{1{,}15 \times 10^{23}}{N_\nu^{1/3}} \text{m}, \qquad A' = 3{,}2 \,. \tag{13.8}$$

Όταν η μάζα του αστέρα νετρονίων ξεπεράσει ένα όριο M_4 που είναι μικρότερο του $2{,}65 M_H$ η κινητική ενέργεια των νετρονίων καθώς και των λοιπών σωματίων (που μέχρι αυτό το όριο αντιμετώπιζε την βαρύτητα) γίνεται και αυτή ακραία σχετικιστική με την ίδια εξάρτηση από την ακτίνα όπως και η βαρυτική ενέργεια και ο αστέρας νετρονίων καταρρέει χωρίς σταματημό προς μαύρη τρύπα. Η τελευταία χαρακτηρίζεται από τη μάζα της και την ακτίνα του ορίζοντά της r_S , όπου

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \,.$$

Στη μαύρη τρύπα αποδίδουμε επίσης θερμοκρασία *T*, εντροπία *S* και χρόνο ζωής t_ζ ως εξής:

$$T = \frac{1{,}129 \times 10^{31}}{\tilde{r}_s} \text{K}, \qquad \frac{S}{k_B} = \pi \tilde{r}_s^2, \qquad t_{\zeta\omega\acute{\eta}\varsigma} = 1{,}0838 \times 10^{-40} \, \tilde{r}_S^3 \text{ s} \,, \tag{13.34}$$

όπου

$$\tilde{r}_S = 2\tilde{M}, \quad \tilde{M} = \sqrt{\frac{G}{c\hbar}} M, \qquad \tilde{r}_{S\,H} = 1{,}82728 \times 10^{38} \,. \tag{13.11}$$

Η ελάχιστη μάζα για να υπάρξει ένα ενεργό άστρο δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$N_{\nu,\min} \approx 0{,}26 \left(\frac{e^2}{G\sqrt{m_e m_u^3}} \right)^{3/2} , \tag{13.25΄}$$

που ουσιαστικά είναι ο λόγος της ΗΜ έντασης προς την ένταση του βαρυτικού πεδίου υψωμένος στην δύναμη 3/2. Για μάζα κατώτερη της ελάχιστης, η θερμοκρασία στο κέντρο του υποψηφίου άστρου δεν είναι αρκετά υψηλή ώστε να αρχίσουν οι πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης. Χωρίς αυτές τις αντιδράσεις εξ ορισμού δεν έχουμε άστρο.

Όμως δεν μπορεί να έχουμε άστρο και όταν η μάζα του υπερβαίνει ένα άνω όριο. Ο λόγος είναι ότι πάνω από αυτό το άνω όριο, η θερμοκρασία του άστρου είναι τόσο υψηλή ώστε η διασταλτική πίεση της ΗΜ ακτινοβολίας είναι τόσο ισχυρή που η βαρύτητα δεν μπορεί να την υπερνικήσει. Αυτό το άνω όριο μάζας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$N_{\nu,\max} = C_2 \left(\frac{\hbar c}{G m_u^2} \right)^{3/2}, \qquad (13.32)$$

όπου ο αριθμητικός παράγοντας είναι της τάξεως του 150. Όπως φαίνεται από τον τύπο (13.32) ουσιαστικά το άνω όριο μάζας για την ύπαρξη ενεργού άστρου καθορίζεται από το αντίστροφο της αδιάστατης έντασης του βαρυτικού πεδίου υψωμένου στην 3/2 δύναμη.

13.8 Λυμένες ασκήσεις

1. Για τα ενεργά άστρα της κύριας ακολουθίας ισχύουν οι παρακάτω προσεγγιστικοί τύποι. **(**Λέμε ότι ένα άστρο βρίσκεται στην κύρια ακολουθία, εάν στον πυρήνα του Η μετατρέπεται σε He). Αποδείξτε τους δύο πρώτους τύπους:

		Τιμές για τον Ήλιο
▪ Πίεση στον πυρήνα τους:	$P_c \approx \frac{F}{2} \overline{\rho} \frac{GM}{R}$	$\approx 2,48 \times 10^{16}$ Pa
▪ Θερμοκρασία στο κέντρο τους:	$T_c \approx P_c \frac{N_\nu m_u}{\nu N_e k_B \rho_c}$	$\approx 1,57 \times 10^7$ ^{o}K
▪ Ακτίνα:	$R \propto M^s$, $\frac{1}{2} \le s \le 1$	$6,96 \times 10^8$ m
▪ Θερμοκρασία στην επιφάνεια:	$T_E \propto M^\beta$, $\beta \approx \frac{1}{2}$	5800 ^{o}K
▪ Ισχύς ακτινοβολίας:	$L \propto R^2 T_E^4 \propto M^{2s+2}$	$3,828 \times 10^{26}$ J / s
▪ Χρόνος ζωής:	$t_\zeta \approx \frac{M}{L} \propto M^{-(2s+1)}$	≈ 9 Gyr

Για τον Ηλιο, $\overline{\rho} = M / (4\pi / 3) R^3 = 1,408\,\text{gr} / \text{cm}^3$ και $1 + Z^{-1} \approx 1,5$, $M_H = 1,98855 \times 10^{30}$ kg. Ενεργός αριθμός νουκλεονίων στο Ήλιο $N_{\nu H} \equiv M_H / m_u = 1,1975 \times 10^{57}$.

Λύση: Ο τύπος για την πίεση έχει ήδη αποδειχθεί (τύπος (12.16), σελ. 295). Η τιμή της ποσότητας F καθορίζεται από την εξάρτηση της πυκνότητας με την απόσταση από το κέντρο του άστρου. Επειδή η πυκνότητα στο κέντρο του άστρου είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τη μέση του πυκνότητα (λόγω της μεγάλης μάζας και της πλούσιας σε υδρογόνο σύνθεσης) το F αναμένεται να είναι μερικές δεκάδες ή και εκατοντάδες. Για τον Ήλιο είναι 185. Ο τύπος για τη θερμοκρασία στο κέντρο του άστρου είναι ο τύπος των ιδανικών αερίων $P_c V = N k_B T_c$, όπου $N = N_e + N_a = \nu N_e$ και $\rho_c = (N_\nu m_u / V)_c \Rightarrow V = N_\nu m_u / \rho_c$.

2. Εξηγήστε τη σημασία της ελάχιστης μάζας, $M_{\text{κρ}}$, που μπορεί να έχει ένα ενεργό άστρο. Δώστε την αριθμητική της τιμή. Γιατί αντικείμενα με $M < M_{\text{κρ}}$ αποκλείεται να γίνουν άστρα;

Λύση: Για $M \le M_{\kappa\rho}$ η θερμοκρασία στο κέντρο του υπό δημιουργία άστρου δεν φτάνει την τιμή T_{ign} και έτσι δεν αρχίζουν οι πυρηνικές αντιδράσεις.

3. Γιατί δεν υπάρχουν άστρα με πολύ μεγάλη μάζα ($M \gtrsim 300 M_{\rm H}$);

Λύση: Για μάζα $M \gtrsim 300 M_{\rm H}$ η θερμοκρασία είναι τόσο υψηλή ώστε η πίεση της ακτινοβολίας, που είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της θερμοκρασίας, υπερνικά τη συνθλιπτική πίεση της βαρύτητας και δεν αφήνει το άστρο να σχηματισθεί.

4. Υπολογίστε την παραγομένη ισχύ ανά kg στον Ήλιο λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακτίνα του Ηλίου είναι $6,96\times10^{8}\,\mathrm{m}$, ότι το σ ισούται με $5,67\times10^{-8}$ σε μονάδες SI, ότι η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ηλίου είναι 5800K, και ότι η μάζα του Ηλίου ισούται με 1,9885x10^{30} kg. Πώς συγκρίνεται η παραπάνω ποσότητα με την ισχύ που διακινεί το ανθρώπινο σώμα ανά kg;

Λύση: Η ισχύς του Ήλιου ανά kg ισούται με $4\pi\sigma R^2T^4 / M = 4\pi(6,96)^2\times10^{16}\times$ $\times5,67\times10^{-8}\times5800^4 / (1.9885\times10^{30}) = 1,964\times10^{-4}\,\mathrm{W/kg}$. Ένας άνθρωπος 80kg διακινεί περίπου 2000 kcal/24h. Άρα $2\times4,184\times10^{6}\,\mathrm{J}/(80\mathrm{kg}\times24\times3600\,\mathrm{s}) = 1,21$ W / kg , δηλαδή 6161 φορές περισσότερα βατ ανά κιλό από ότι ο Ήλιος.

5. Αν η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας διπλασιαζόταν, κατά πόσο θα άλλαζε η περιοχή τιμών της μάζας των άστρων; Κατά πόσο η ακτινοβολία τους ανά μονάδα χρόνου; Κατά πόσο ο χρόνος ζωής τους; (Θεωρήστε ότι η πυκνότητα τους δεν αλλάζει).

Λύση: Τόσο η ελάχιστη όσο και η μέγιστη μάζα ενός ενεργού άστρου είναι ανάλογη του $G^{-3/2}$. Άρα θα υπάρχει μια μείωση της περιοχής μαζών κατά ένα παράγοντα $2^{-3/2} = 0,3536$. Η ακτίνα των μικρών άστρων είναι ανάλογη του γινομένου $GN_{\nu} \propto GG^{-3/2} \propto G^{-1/2}$. Άρα η ως άνω ακτίνα θα μειωθεί κατά $2^{-1/2} =$ $= 0,707$. Είναι δύσκολο να βρει κανείς τι θα συμβεί με την επιφανειακή θερμοκρασία. Ένας τρόπος να επιχειρηματολογήσει κανείς είναι ο ακόλουθος: Θεωρούμε ότι η πυκνότητα ρ_c στο κέντρο του άστρου μένει ανεξάρτητη της αλλαγής του *G*. Κατά συνέπεια η πίεση στο κέντρο του άστρου που είναι τότε ανάλογη του *GM*/*R* μένει ανεξάρτητη της αλλαγής του *G* (άρα και η θερμοκρασία). Επομένως, δεν είναι παράλογο να θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός έκλυσης πυρηνικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας δεν επηρεάζεται από την αλλαγή του *G*. Άρα η συνολική έκλυση πυρηνικής ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, που ισούται με $L = 4\pi R^2\sigma T^4$, είναι ανάλογη της μάζας του άστρου, δηλαδή θα μειωθεί κατά $2^{-3/2} = 0,3536$.Επομένως, αν η προηγούμενη επιχειρηματολογία είναι σωστή, προκύπτει ότι ο χρόνος ζωής του άστρου, $t_{\zeta} \propto M / L$, θα έμενε ανεπηρέαστος από την αλλαγή του *G*.

6. Θεωρήστε μια αστρική μαύρη τρύπα μάζας $M = 6,014 M_H$. Υπολογίστε την ακτίνα της r_S, την θερμοκρασία της, την εντροπία της και το συνολικό χρόνο

ζωής της. Το ίδιο για την πρόσφατα ανακαλυφθείσα μαύρη τρύπα σε απόσταση 12,4 δις έτη φωτός και με μάζα $M = 2\times10^9 M_H$.

Λύση: Η ακτίνα r_S του ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας είναι ανάλογη της μάζας M της μαύρης τρύπας (βλ. (6.2)) και για τον Ήλιο είναι 2,96 km. Άρα για τις μαύρες τρύπες του παρόντος προβλήματος είναι

$$r_S = 6r_{SH} = 17,76\,\text{km} \Rightarrow \tilde{r}_S = 1,0989\times10^{39}$$
$$r_S = 5,92\times10^9\ \text{km} \Rightarrow \tilde{r}_S = 3,663\times10^{47}$$

Βάσει των τύπων (13.14΄), (13.15΄), (13.17΄) και (6.15), (6.13) έχουμε αντιστοίχως

$$T = 7,24\times10^{-41}\times1,4196\times10^{32} = 1,028\times10^{-8}\,\text{K}$$
$$T = 2,17\times10^{-49}\times1,4196\times10^{32} = 3,084\times10^{-17}\,\text{K}$$

$$S/k_B = \pi\tilde{r}_S^2 = 3,79\times10^{78}, \quad S/k_B = \pi\tilde{r}_S^2 = 4,215\times10^{95}$$

$$t_\zeta = 2010\tilde{r}_S^3\times5,3907\times10^{-44} = 1,438\times10^{77}\,\text{s} = 4,557\times10^{69}\,\text{y}$$
$$t_\zeta = 2010\tilde{r}_S^3\times5,3907\times10^{-44} = 5,327\times10^{102}\,\text{s} = 1,688\times10^{97}\,\text{y}.$$

7. Θεωρήστε ένα αέριο φωτονίων σε ισορροπία σφαιρικού όγκου V και θερμοκρασίας T. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται ώστε το αέριο αυτό να καταλήξει σε μαύρη τρύπα υπό την επίδραση του δικού του βάρους;

Λύση: Έχουμε τις εξής σχέσεις

$$E_{ph} = V\frac{\pi^2}{15}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}, \quad M = \frac{E_{ph}}{c^2} = V\frac{\pi^2}{15}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3c^2}, \quad r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$r_S \geq R \quad \Rightarrow \quad R^2(k_BT)^4 \geq \frac{45}{8\pi^3}\frac{\hbar^3c^7}{G}$$

8. Αν η Γη γινόταν μαύρη τρύπα ποια θα ήταν η εντροπία της; Θα ήταν μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη σημερινή τιμή της εντροπίας της Γης;

Λύση: **Αν** η Γη γινόταν μαύρη τρύπα το r_S θα ήταν 0,887cm, οπότε $\tilde{r}_S = 0,887\times10^{-2}/(1,6161\times10^{-35}) = 7,254\times10^{32}$. Άρα η εντροπία θα ήταν: $S/k_B = \pi\tilde{r}_S^2 = 1,653\times10^{66}$. Αν όλα τα άτομα της Γης (θεωρούμενα ως μη ιονισμένα) ήταν σε μορφή ιδανικού αερίου η εντροπία τους θα ήταν προφανώς μεγαλύτερη από τη σημερινή εντροπία της Γης. Ο αριθμός των ατόμων της Γης ισούται με $N_{\nu\Gamma}/A_B = (3,6/40)\times10^{51} = 9\times10^{49}$. Η εντροπία τους υπό μορφή ιδανικού αερίου θα ήταν $(S/k_B) = N_a\ln(0,77T^{3/2}m_a^{3/2}\nu_a)$ όπου $\nu_a = V/N_a = \frac{4\pi}{3}\bar{r}^3$ και όλες οι ποσότητες εντός του ln είναι σε ατομικές μονάδες. Αν δεχτούμε ότι η μέση θερμοκρασία της Γης είναι 1000 K= $3,17\times10^{-3}$ α.μ. τότε η εντροπία του

ιδανικού αερίου θα ήταν $S / k_B = 1{,}1 \times 10^{51}$, τιμή που αποτελεί άνω όριο της εντροπίας της Γης. Επομένως η μετατροπή της Γης σε μαύρη τρύπα θα αύξανε την εντροπία της τουλάχιστον για 15 τάξεις μεγέθους.

13.9 Άλυτες ασκήσεις

1. Πείτε αν ένα άστρο μας πλησιάζει ή απομακρύνεται στην κάθε μια από τις παρακάτω 5 περιπτώσεις για τις οποίες ξέρουμε ότι μια φασματική γραμμή μετατοπίστηκε:

i. Από το κίτρινο στο ερυθρό
ii. Από το υπέρυθρο στο ερυθρό
iii. Από το μπλε στο υπεριώδες
iv. Από τις ακτίνες γ στις ακτίνες X
v. Από το πράσινο στο μπλε

2. Το στοιχείο Be με A=8 είναι ραδιενεργό με χρόνο υποδιπλασιασμού περίπου 10^{-15} s, ενώ το Be με A=9, Z=4, N=5 είναι σταθερό. Με βάση το συμπέρασμα ότι για μικρούς πυρήνες, N=Z=A/2, θα περίμενε κανείς ότι το Be με A=8 θα έπρεπε να είναι σταθερό. Πώς εξηγείτε αυτή την 'ανωμαλία'; Δημιουργεί αυτή η ανωμαλία πρόβλημα στο σενάριο πυρηνοσύνθεσης στα άστρα; Πώς ο Hoyle υπερκέρασε αυτό το πρόβλημα;

3. Η φασματική γραμμή $2p \rightarrow 1s$ του ατόμου του υδρογόνου (με λ=122 nm) διαφέρει κατά $1{,}8 \times 10^{-12}$ m μεταξύ δύο αντιδιαμετρικών σημείων του ισημερινού του Ήλιου. Ποια είναι η ταχύτητα ενός σημείου στον ισημερινό του Ήλιου σε km/s;

4. Από την εξισορρόπηση θερμικής και βαρυτικής πίεσης στην επιφάνεια ενός άστρου, δείξτε ότι η επιφανειακή του θερμοκρασία είναι ανάλογη του $M^{2/3}$. Δεχτείτε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή. Πώς εξαρτάται η λαμπρότητα ενός άστρου από τη μάζα του με βάση τα παραπάνω;

Κεφάλαιο **14**

Κοσμολογία: Το Σύμπαν και η ιστορία του

Σύνοψη: *Ποιο ακριβώς είναι το αντικείμενο της σύγχρονης Κοσμολογίας; Με βάση ποια παρατηρησιακά δεδομένα και ποιες αποδεκτές θεωρίες καταλήξαμε στο μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης; Τι είναι η σταθερά του Hubble; Τι είναι η ΚΑΜ; Ποια είναι η γωνιακή κατανομή της μέσης θερμοκρασίας του Σύμπαντος; Τι είναι ο πληθωρισμός; Ποια εξίσωση διέπει τη χρονική εξέλιξη της ακτίνας του παρατηρήσιμου Σύμπαντος; Σε ποιες συνιστώσες αναλύεται η μέση πυκνότητα ενέργειας του Σύμπαντος και ποια η χρονική τους εξέλιξη; Τι είναι η σκοτεινή ενέργεια και ποια η σχέση της με τη κοσμολογική σταθερά; Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποιες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα. Έχοντας αυτές τις απαντήσεις και κάνοντας χρήση γνωστών νόμων της Φυσικής αποκαλύπτονται μερικά κύρια γεγονότα που συνέβησαν στις διάφορες περιόδους της Ιστορίας του Σύμπαντος, η οποία περνάει από τη Φωτοκρατία στην Υλοκρατία (με επιστέγασμα την εμφάνιση ευφυούς ζωής) και ενδεχομένως καταλήγει στην προβλεπόμενη σταδιακή αυτοδιάλυση του Σύμπαντος.*

14.1 Μια Εισαγωγή στην Κοσμολογία

Το αντικείμενο της Κοσμολογίας είναι η μελέτη του Σύμπαντος, της δημιουργίας του και της εξέλιξής του από την χρονική αφετηρία του, το σημείο μηδέν, μέχρι τη σύγχρονη κοσμική εποχή και πέραν αυτής. Η εν λόγω χρονική εξέλιξη αφορά στο μέγεθός του, στη μέση θερμοκρασία του, στη σύνθεσή του (στην οποία συγκαταλέγεται το πώς και πότε δημιουργήθηκαν τα στοιχειώδη κυματοσωμάτια) και στις μεγάλης κλίμακας δομές του. Αυτή η εξελικτική πορεία του Σύμπαντος διέπεται κυρίως από τη βαρυτική αλληλεπίδραση, την οποία με θαυμαστό τρόπο εξετάζει η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ), παρόλο που η θεωρία αυτή δεν περιλαμβάνει τον κβαντικό χαρακτήρα της πραγματικότητας, ο οποίος θεωρείται απαραίτητος για την κατανόηση της πρώιμης νηπιακής ηλικίας του Σύμπαντος.

Για να είναι εφικτή η θεωρητική μελέτη του Σύμπαντος καταφεύγουμε επίσης σε ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές, όπως το ότι, σε μεγάλη

κλίμακα, της τάξεως των 500 εκατομμυρίων ετών φωτός, το Σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο καθώς και ότι δεν έχει όρια (που σημαίνει ότι είτε είναι άπειρο, είτε δεν έχει αρχή και τέλος, όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας στις δύο διαστάσεις).

Χωρίς να υποτιμά κανείς το ρόλο της θεωρίας θα πρέπει να τονισθεί ότι η μεγάλη πρόοδος που έχει επιτευχθεί στην Κοσμολογία τα τελευταία πενήντα περίπου χρόνια, 1965-2020, οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στις εντυπωσιακές παρατηρησιακές ανακαλύψεις, όπως η κοσμική ακτινοβολία μικροκυμάτων (ΚΑΜ), η πλήρης φασματική της ανάλυση και, πιο πρόσφατα, ο προσδιορισμός από τις δορυφορικές αποστολές WMAP και Planck των ελάχιστων γωνιακών της διακυμάνσεων.

Και οι παρατηρήσεις και η ΓΘΣ δείχνουν ότι το Σύμπαν διαστέλλεται -ο ίδιος ο χώρος διαστέλλεται- με ρυθμό $\dot{R} \equiv dR/dt$ που είναι ανάλογος της απόστασης R μεταξύ δύο σημείων[1]. Ο συντελεστής αναλογίας, που δεν εξαρτάται από την απόσταση, ονομάζεται σταθερά του Hubble και συμβολίζεται με το γράμμα $H, H \equiv \dot{R}/R$. Ο χαρακτηρισμός σταθερά για την ποσότητα H δικαιολογείται από το γεγονός ότι αυτή έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα του ποια είναι η απόσταση R, όσο η απόσταση ικανοποιεί την ανισότητα $R \gg 100$ εκατομμύρια έτη φωτός. Όμως δεν πρέπει να μας διαφεύγει το γεγονός ότι η σταθερά του Hubble, H, εξαρτάται από το χρόνο και ότι η βασική σχέση που διέπει τη χρονική της εξέλιξη είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{G}{c^2}\varepsilon} \ , \qquad (14.1)$$

όπου ε είναι η μέση πυκνότητα ενέργειας στο Σύμπαν (συμπεριλαμβανομένης και της ενέργειας ηρεμίας των σωματίων, αλλά χωρίς τη βαρυτική ενέργεια). Ας σημειωθεί ότι το ε είναι ανεξάρτητο της όποιας θέσης στο Σύμπαν (λόγω της παραδοχής ότι το Σύμπαν είναι ομογενές), αλλά και το ε και το H εξαρτώνται από το χρόνο. Από αυτή την παρατήρηση συνάγεται ότι στο παρελθόν το Σύμπαν θα ήταν πυκνότερο και θερμότερο. Ακολουθώντας αυτό το νοητό ταξίδι στο παρελθόν θα καταλήξουμε στο τέλος (βάσει της ΓΘΣ) σε κάποια χρονική στιγμή όπου όλο το Σύμπαν μαζί και ο χώρος θα είχαν συρρικνωθεί σε κάτι άπειρα μικρό, άπειρα πυκνό και άπειρα θερμό. Η χρονική αυτή στιγμή αποτελεί το χρονικό σημείο μηδέν. Αν αντιστρέψουμε την πορεία και αν κινηθούμε προς το μέλλον με αφετηρία αυτό το χρονικό σημείο μηδέν, τι θα ακολουθήσει; Φυσικά μια ταχύτατη διαστολή του Σύμπαντος, τόσο ταχύτατη που μπορεί να θεωρηθεί ως

[1] Τα σμήνη των γαλαξιών που περιέχουν εκατοντάδες γαλαξιών, όπως και οι δομές μικρότερου μεγέθους από αυτά τα σμήνη, δεν ακολουθούν το χώρο στη διαστολή του, γιατί η αμοιβαία βαρυτική τους έλξη διατηρεί τη μεταξύ τους απόσταση λίγο-πολύ σταθερή τουλάχιστον στην παρούσα κοσμική εποχή.

εκρηκτικού χαρακτήρα, συνοδευόμενη από μια αντίστοιχη και συνεχή πτώση της θερμοκρασίας. Θα ακολουθήσει δηλαδή αυτό που έχει ονομασθεί η Μεγάλη Έκρηξη, το **Big Bang.** Στη συνέχεια, καθώς η διαστολή και η ψύξη συνεχίζεται, μπορούμε να εφαρμόσουμε τους γνωστούς νόμους της φυσικής και να παρακολουθήσουμε έτσι σε χονδρικές γραμμές το πώς εξελίσσεται χρονικά το μέγεθος του Σύμπαντος, η θερμοκρασία του, η πυκνότητά του, τα συστατικά του και οι δομές του μέχρι και την παρούσα κοσμική εποχή. Φτάνουμε έτσι σε θεωρητικά συμπεράσματα για το ποια πρέπει να είναι «σήμερα» η σύνθεση της πυκνότητας ενέργειας στο Σύμπαν, ποια πρέπει να είναι η τιμή της σταθεράς του Hubble, ποια τα χημικά στοιχεία και ποια τα ποσοστά τους, ποια η φασματική και η γωνιακή κατανομή της ΚΑΜ, ποιες οι μεγάλες δομές, κλπ. Σημειώστε ότι στην παρατηρησιακή αστροφυσική και κοσμολογία ο παρών χρόνος περιλαμβάνει και τον παρελθόντα χρόνο, αφού παρατηρώντας ένα γεγονός σε απόσταση d, στην πραγματικότητα βλέπουμε τι συνέβαινε εκεί σε χρόνο $t \approx d / c$ πριν από τώρα. Συγκρίνοντας λοιπόν τα θεωρητικά συμπεράσματα με μια σωρεία παρατηρησιακών δεδομένων έχουμε πια τη δυνατότητα, για πρώτη φορά στον ανθρώπινο πολιτισμό, να δώσουμε αξιόπιστες απαντήσεις στα αρχέγονα αλλά πάντα επίκαιρα ερωτήματα: Πώς έγινε ο Κόσμος; Πώς εξελίχθηκε; Πώς είναι φτιαγμένος;

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε στην αρχή μερικές ιστορικές πληροφορίες για το πεδίο της Κοσμολογίας καθώς και μερικά από τα πιο πρόσφατα εντυπωσιακά παρατηρησιακά δεδομένα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τη βασική σχέση (14.1) χρησιμοποιώντας νευτώνεια μηχανική, καίτοι τα αποτελέσματα της τελευταίας είναι αξιόπιστα μόνο στο βαθμό που συμφωνούν με τα αντίστοιχα της ΓΘΣ. Το επόμενο βήμα θα είναι να λύσουμε τη (14.1) αξιοποιώντας πληροφορίες για τη σύνθεση της ενεργειακής πυκνότητας του Σύμπαντος και να προσδιορίσουμε έτσι τη χρονική εξέλιξη της θερμοκρασίας του και της ακτίνας του. Τέλος, έχοντας αυτά τα αποτελέσματα θα αναβιώσουμε κάποιους από τους σημαντικούς σταθμούς στην ιστορία του Σύμπαντος.

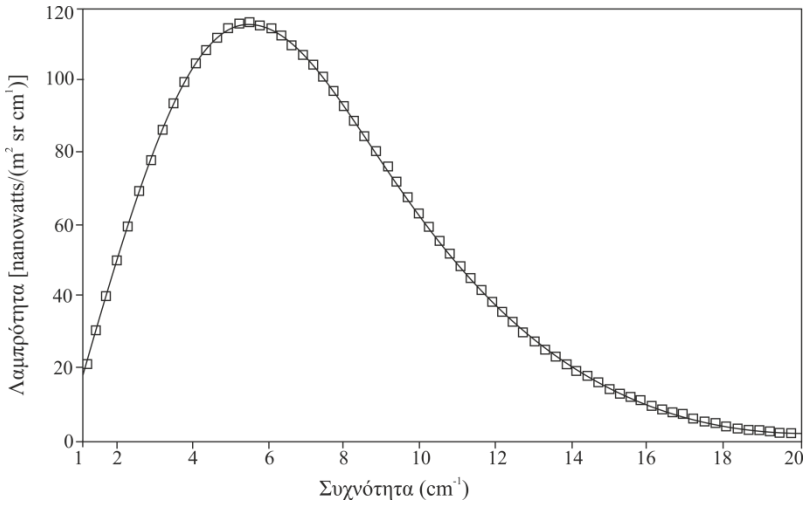
14.2 Πώς φτάσαμε στην παρούσα εικόνα για το Σύμπαν;

- Η σύγχρονη κοσμολογία έχει ως αφετηρία τη ΓΘΣ και την εφαρμογή της στη μελέτη του Σύμπαντος από τον ίδιο τον Einstein (1917). Ο Einstein, προκειμένου να βρει στατικές λύσεις (δηλαδή λύσεις ανεξάρτητες από το χρόνο) πρόσθεσε στις εξισώσεις του έναν όρο που έγινε γνωστός ως κοσμολογική σταθερά. Οι λύσεις που βρήκε ο Einstein ήταν ασταθείς και ως εκ τούτου μη παραδεκτές.
- Αργότερα (αρχές της δεκαετίας του 1920) ο Φρίντμαν (Alexander Friedmann) και στη συνέχεια ο Λεμέτρ (Georges Lemaitre) καθώς και άλλοι βρήκαν χρονοεξαρτημένες λύσεις των εξισώσεων της ΓΘΣ (χω-

ρίς την κοσμολογική σταθερά) που έδειχναν ότι το Σύμπαν διαστέλλεται. (Ο Λεμέτρ πρότεινε ουσιαστικά και το μοντέλο του Big Bang).

- Ο μεγάλος επόμενος σταθμός ήταν οι παρατηρήσεις του Χαμπλ (Edwin Hubble) για την απομάκρυνση μακρινών γαλαξιών με ταχύτητα ανάλογη της απόστασής τους από τη Γη, πράγμα που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το Σύμπαν διαστέλλεται. (Δεύτερο μισό της δεκαετίας του 1920).
- Μια σημαντική συμβολή ήταν η εργασία των Γκάμοφ (George Gamow), Άλφερ (Ralph Alpher) και Χέρμαν (Robert Herman) για την πρόβλεψη ύπαρξης Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων (ΚΑΜ), που δεν αξιολογήθηκε στον καιρό της (1948) όσο της έπρεπε.
- Η παρατήρηση που μετέτρεψε την Κοσμολογία από ένα σχεδόν μεταφυσικό αντικείμενο σε ένα αυθεντικό θέμα Φυσικής ήταν η εργασία των Πενζίας (Arno Penzias) και Ουΐλσον (Robert Wilson) που ανακάλυψαν την ύπαρξή της ΚΑΜ (1965) χάρις στην εξονυχιστική επιμονή τους και την καλή τους τύχη.
- Αποφασιστική υπήρξε η λεπτομερής παρατήρηση και μέτρηση της φασματικής κατάνομής της ΚΑΜ από τους Σμούτ (George Smoot) και Μάθερ (John Mather) (Βραβείο Nobel 2006) μέσω του δορυφόρου COBE, που εκτοξεύτηκε το 1989. Τα παρατηρησιακά δεδομένα για τη φασματική κατανομή της ΚΑΜ ήταν σε εντυπωσιακή συμφωνία με τη θεωρητική κατανομή της ακτινοβολίας μέλανος σώματος θερμοκρασίας 2,725 ^{o}Κ (βλ. Σχ. 14.1). Παράλληλα τα δεδομένα έδειξαν ότι υπήρχαν κάποιες πολύ μικρές διακυμάνσεις στην φασματική κατανομή από κατεύθυνση παρατήρησης σε κατεύθυνση παρατήρησης, πράγμα που ερμηνεύεται ως πολύ μικρές διακυμάνσεις της πυκνότητας στο πρώιμο Σύμπαν.

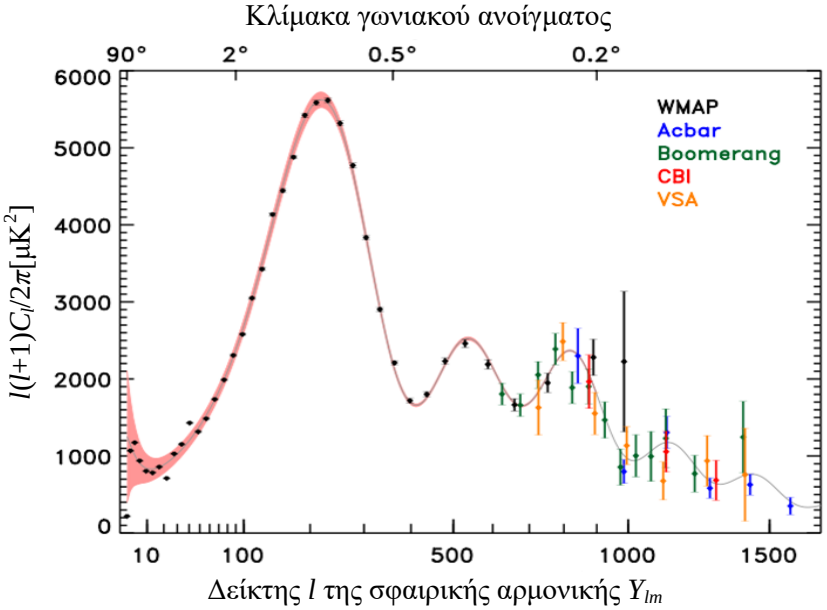
  Με έναυσμα αυτές τις πρώτες παρατηρήσεις των ελάχιστων διακυμάνσεων στην γωνιακή κατανομή της ΚΑΜ, σχεδιάστηκαν διάφορα πειράματα για τη λεπτομερή μέτρησή τους και την ανάλυσή τους στη συνέχεια. Μεταξύ αυτών, το πιο καρποφόρο και εντυπωσιακό ήταν αυτό της διαστημικής αποστολής WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) που εκτοξεύτηκε στις 30.6.2001. Τα όργανα του WMAP μέτρησαν μεταξύ άλλων με μεγάλη ακρίβεια τη φασματική κατανομή της ΚΑΜ για όλες τις κατευθύνσεις του ουράνιου θόλου (που καθορίζονται από δύο γωνίες θ και φ). Έτσι προσδιόρισαν για κάθε θ, φ τη θερμοκρασία $T(\theta,\varphi)$, η οποία είναι η μόνη παράμετρος που καθορίζει την κατανομή μέλανος σώματος (βλ. σχέση (5.11)). Η διακύμανση $\delta T(\theta,\varphi)$ αυτής της θερμοκρασίας αναλύθηκε σε σταθμισμένο άθροισμα των συναρτήσεων $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$, που συναντήσαμε στο Κεφ.9 (βλ. άλυτη άσκηση 4). Ο μέσος όρος του τετραγώνου της απόλυτης τιμής



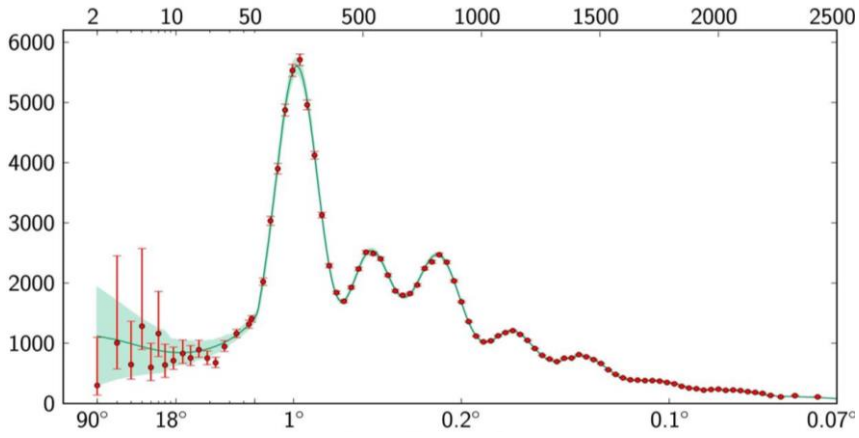
Σχ. 14.1 Φασματική κατανομή της κοσμικής ακτινοβολίας μικροκυμάτων. Το διάγραμμα παριστάνει τη λαμπρότητα (σε nanowatts/m^2·sr·cm^{-1}) ως συνάρτηση της συχνότητας (σε cm^{-1}) για την κοσμική ακτινοβολία μικροκυμάτων. Η τελευταία αποτελεί το αρχαιότερο εύρημα-απομεινάρι από τη 'δημιουργία' του Σύμπαντος. Τα τετραγωνάκια παριστάνουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων της περιόδου 1990-91 από ειδικό φασματόμετρο τοποθετημένο στο δορυφόρο COBE (Cosmic Background Explorer), που εκτοξεύτηκε το Νοέμβριο του 1989. Η συνεχής καμπύλη (κατανομή ακτινοβολίας μέλανος σώματος) αποτελεί τη θεωρητική πρόβλεψη, βάσει της κβαντικής θεωρίας, που αποδίδει στο φως και σωματιδιακές ιδιότητες. Η μοναδική ελεύθερη παράμετρος στη θεωρία, που καθορίζει και το σχήμα και το μέγεθος της καμπύλης, είναι η θερμοκρασία T. Στη προκειμένη περίπτωση T=2,725° K, σε συμφωνία με το ισχύον κοσμολογικό μοντέλο. Η εντυπωσιακή αυτή σύμπτωση των παρατηρησιακών δεδομένων (που αφορούν το Σύμπαν και την Ιστορία του) με τα πιο θεμελιακά θεωρητικά αποτελέσματα δημιουργεί συγκλονιστικά αισθήματα δέους και θαυμασμού για την εμβέλεια της επιστημονικής μεθοδολογίας και τη δύναμη της ανθρώπινης διάνοιας.

του κάθε συντελεστή αυτού του αθροίσματος, $\delta T(\theta,\phi) = \sum_{\ell,m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi)$, που συμβολίζεται ως C_ℓ ($C_\ell = <|a_{\ell m}|^2>$) δίνεται ως συνάρτηση του ℓ στο Σχ. 14.2.

Οι εντυπωσιακές μετρήσεις του WMAP βελτιώθηκαν περαιτέρω με τη δορυφορική αποστολή Planck της Ευρωπαϊκής Επιτροπής Διαστήματος Τα αποτελέσματα της αποστολής Planck, που ανακοινώθηκαν το Μάρτιο του 2013 και αφορούν επίσης στη γωνιακή κατανομή της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου (ΚΑΜ), παρουσιάζονται στο παρακάτω Σχ.14.3. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Σχ.14.3 με αυτά του Σχ. 14.2, παρατηρούμε ότι η γωνιακή διακριτική ικανότητα έχει επεκταθεί μέχρι τις 0,07 μοίρες (που αντιστοιχούν σε ℓ =2500) και ότι τα σφάλματα ιδίως για μεγάλα ℓ έχουν μειωθεί δραστικά.



Σχ. 14.2 Ανάλυση των διακυμάνσεων της θερμοκρασίας της ΚΑΜ (στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο) ανάλογα με τη διεύθυνση παρατήρησης. Οι διακυμάνσεις αυτές έχουν αναλυθεί ως άθροισμα (σταθμισμένο) σφαιρικών αρμονικών $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ και εδώ δίνεται η εξάρτηση των συντελεστών από το ℓ. Η θεωρία προβλέπει -και η παρατήρηση επιβεβαιώνει- ότι το μέγιστο θα εμφανιστεί για $\ell = 200$, εάν η γεωμετρία του Σύμπαντος είναι ευκλείδεια. Οι διακυμάνσεις για $\ell > 300$ οφείλονται στις αρμονικές. Η σύμπτωση θεωρίας και παρατηρήσεων επιτρέπει να προσδιορίσουμε ποσοτικά πολλά βασικά χαρακτηριστικά του Σύμπαντος.



Σχ. 14.3 Η ποσότητα $\ell(\ell+1)C_\ell / 2\pi$ (που ορίσθηκε προηγουμένως), ως συνάρτηση του δείκτη ℓ ο οποίος χαρακτηρίζει τις σφαιρικές αρμονικές. Οι μετρήσεις αντιστοιχούν στα σημεία (τα σφάλματα αντιστοιχούν στο μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων γύρω από κάθε σημείο (error bars)· όπου δεν υπάρχουν error bars σημαίνει ότι τα σφάλματα είναι πολύ μικρά για να απεικονισθούν). Η συνεχής γραμμή είναι το αποτέλεσμα της επικρατούσας θεωρίας που περιλαμβάνει έξη παραμέτρους, οι οποίες έχουν επιλεγεί ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα

Πριν σχολιάσουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα Σχ. 14.2 και 14.3 είναι σκόπιμο να ξαναγυρίσουμε στην αρχή της ιστορικής μας αναδρομής για να συνοψίσουμε τα φυσικά συμπεράσματα που πηγάζουν από τις μετρήσεις και τους θεωρητικούς υπολογισμούς που αφορούν στο ερώτημα του πώς έγινε ο Κόσμος. Η Επιστήμη, με εξαίρεση τα τελευταία 100 χρόνια, είχε αποφύγει να εμπλακεί σοβαρά με αυτό το θέμα. Ο λόγος είναι απλός: Το όποιο ιστορικό θέμα, δηλαδή το πώς έγινε και το πώς εξελίχθηκε κάτι, είναι πολύ πιο δύσκολο να απαντηθεί από το ερώτημα του πώς είναι κάτι, για δύο κυρίως λόγους:

Πρώτον, γιατί το ιστορικό θέμα απαιτεί συνήθως μια ολιστική προσέγγιση, δεν προσφέρεται, δηλαδή, για μια ανεξάρτητη εξέταση του κάθε επί μέρους τμήματος του υπό μελέτη αντικειμένου, όπως κάνουμε συνήθως για θέματα του πώς είναι. Μ' άλλα λόγια η τόσο βολική και χρήσιμη αναγωγική μέθοδος αποτυγχάνει συνήθως εφαρμοζόμενη σε ιστορικά θέματα. Δεύτερον, είναι πολύ πιο δύσκολο να βρεις σε ιστορικά σενάρια δοκιμασίες διάψευσης/επιβεβαίωσης, αφού δεν μπορείς να κάνεις πειράματα και εξαρτάσαι μόνο από τα απομεινάρια του παρελθόντος.

Για την ιστορία του Σύμπαντος υπάρχει το ενδεχόμενο μιας πολύ εύκολης απάντησης: Να δεχτούμε ότι το Σύμπαν δεν έχει ιστορία. Ότι, δηλαδή, το Σύμπαν είναι άπειρο σε έκταση, ομοιογενές και ισότροπο (κατά μέσον όρο) και αιώνιο, χωρίς αρχή και τέλος μένοντας σε αδρές γραμμές αναλλοίωτο. Η ιδέα του αιώνιου και χωρίς αρχή Σύμπαντος ήταν τόσο ελκυστική, ώστε ο Einstein τροποποίησε τις εξισώσεις του, προσθέτοντας έναν όρο–που είναι γνωστός ως *κοσμολογική σταθερά*–έτσι ώστε οι τροποποιημένες εξισώσεις να μπορούν να δώσουν ένα αιώνιο, σταθερό Σύμπαν. Όπως είδαμε προηγουμένως η προσπάθεια αυτή του Einstein απέτυχε, αφού παρήγαγε ένα ασταθές μοντέλο για το Σύμπαν.

Είδαμε επίσης ότι λίγο αργότερα, στο τέλος της δεκαετίας του 1920, ο μεγάλος αμερικανός αστρονόμος Hubble διαπίστωσε ότι όλοι οι μακρινοί γαλαξίες απομακρύνονται από τη Γη με ταχύτητα που είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η απόστασή τους από τη Γη. Μ' άλλα λόγια ο Hubble διαπίστωσε ότι το Σύμπαν διαστέλλεται. Ο ίδιος ο χώρος διαστέλλεται παρασύροντας μαζί του και τη μάζα του Σύμπαντος. Είναι σαν όλο το Σύμπαν να βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια ενός μπαλονιού (η επιφάνεια αυτή είναι το αντίστοιχο του τριδιάστατου χώρου) που φουσκώνει συνεχώς καθώς ο χρόνος κυλάει. Η ειρωνεία του θέματος είναι ότι η αρχική μορφή

των εξισώσεων του Einstein –χωρίς τη κοσμολογική σταθερά– προέβλεπε μια τέτοια διαστολή του Σύμπαντος, όπως απέδειξαν πρώτοι οι Friedmann και Lemaitre. Έσπευσε, λοιπόν, ο Einstein να αποκαθάρει τις εξισώσεις του από το "μίασμα" της κοσμολογικής σταθεράς, αποκαλώντας την προσθήκη της "τη μεγαλύτερη επιστημονική γκάφα της ζωής μου".

Αυτή η αξιοσημείωτη σύμπτωση των συμπερασμάτων της ΓΘΣ και των αστρονομικών παρατηρήσεων του Hubble δημιούργησε σε κάποιους φυσικούς –πολύ λίγους είναι αλήθεια– την ελπίδα ότι η ιστορία του Σύμπαντος είναι προσιτή στην Επιστήμη. Έτσι προχώρησαν σιγά-σιγά στην ιδέα ότι ένα διαστελλόμενο Σύμπαν θα γίνεται όλο αραιότερο και ψυχρότερο στο μέλλον και θα ήταν όλο πυκνότερο, συμπαγέστερο και θερμότερο στο παρελθόν, μέχρι κάποια στιγμή στο απώτερο παρελθόν, όπου όλος ο χώρος και μαζί του όλη η μάζα του Σύμπαντος θα ήταν συγκεντρωμένη στο ίδιο "σημείο" (όλο το 'μπαλόνι' θα είχε συρρικνωθεί σε ένα "σημείο"), η πυκνότητά του και η θερμοκρασία του θα ήταν άπειρα υψηλές και οι διαστάσεις του απίστευτα μικρές. Αυτό το χρονικό σημείο θα ήταν κατά κάποιο τρόπο η απαρχή του Σύμπαντος και από κει και πέρα ό,τι ακολουθεί είναι μια απίστευτα γρήγορη διαστολή, κάτι σαν έκρηξη, το μεγάλο Bang (Big Bang) που φυσικά συνεχίζεται, ως διαστολή, και στις μέρες μας. Αυτό ακριβώς το μοντέλο προέκυπτε αβίαστα από της εξισώσεις του Einstein, όπως έδειξαν οι Friedmann και Lemaitre, και εύρισκε στήριξη από τις παρατηρήσεις του Hubble.

Έχοντας, λοιπόν, σε γενικές γραμμές αυτό το μοντέλο για τη θερμοκρασία, τη πυκνότητα και το μέγεθος του Σύμπαντος (όπως προκύπτει από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας) μπορεί κανείς να κατασκευάσει –πράγμα που έγινε– ένα κατά το δυνατόν λεπτομερές σενάριο για την εξέλιξη του, χρησιμοποιώντας τους γνωστούς νόμους της Φυσικής. Το σενάριο προβλέπει πότε και σε ποια αναλογία δημιουργήθηκαν τα νετρόνια και τα πρωτόνια από τα κουάρκ, πότε τα νετρόνια και τα πρωτόνια συνενώθηκαν για να φτιάξουν κάποιους μικρούς πυρήνες (π.χ., πυρήνες του στοιχείου ήλιο με δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια), πώς οι υπόλοιποι πυρήνες φτιάχτηκαν μέσα στα άστρα ή κατά τον εκρηκτικό τους θάνατο, ή σε άλλα κατάκλυσμικά αστρονομικά συμβάντα, όπως η συγχώνευση δύο αστέρων νετρονίων (βλέπε ενότητα 13.3), πώς οι διάφοροι πυρήνες παγίδευσαν ηλεκτρόνια για να φτιάξουν άτομα, πότε δημιουργήθηκαν τα άστρα και οι γαλαξίες, κλπ. Δεν απομένει παρά να μελετήσει κανείς τι προβλέπει αυτό το κάπως λεπτομερές σενάριο για την τωρινή κοσμική εποχή ώστε να δούμε αν οι αστρονομικές παρατηρήσεις το επιβεβαιώνουν, το απορρίπτουν ή οδηγούν στην ενδεχόμενη αποδοχή του με κάποιες ίσως σημαντικές τροποποιήσεις.

Το σενάριο προβλέπει, π.χ., ότι η κατά βάρος αναλογία υδρογόνου προς ήλιο στο Σύμπαν είναι περίπου 3 προς 1 με τα άλλα στοιχεία να αποτελούν ένα πολύ-πολύ μικρό ποσοστό. Αυτή η πρόβλεψη είναι σε συμφωνία με τις

παρατηρήσεις. Παρόλη αυτή και κάποιες άλλες επιτυχίες, η επιστημονική κοινότητα παρέμενε ιδιαίτερα επιφυλακτική στο να αποδεχθεί το Big Bang ως φυσική πραγματικότητα. Έμοιαζε περισσότερο με μεταφυσική υπόθεση παρά με ελέγξιμη φυσική θεωρία. Αυτό μέχρι το 1965 και την τυχαία ανακάλυψη της κοσμικής ακτινοβολίας μικροκυμάτων (ΚΑΜ). Τι είναι, όμως, η ΚΑΜ;

Το σενάριο του Big Bang, όπως είχαν επισημάνει ήδη από το 1948 οι Gamov, Alpher και Hermann προέβλεπε ότι στο πρώιμο Σύμπαν, λόγω της πολύ υψηλής θερμοκρασίας, υπήρχε ακτινοβολία που όμως ήταν παγιδευμένη στην ύλη του Σύμπαντος, η οποία ήταν ιονισμένη λόγω της πολύ υψηλής θερμοκρασίας. Σε κάποιο χρονικό σημείο, που σήμερα το υπολογίζουμε στα 380 χιλιάδες χρόνια μετά το σημείο μηδέν της Μεγάλης Έκρηξης, καθώς το Σύμπαν ψυχόταν αυτή η κοσμική ακτινοβολία απελευθερώθηκε από την ύλη (λόγω του ότι η τελευταία έπαψε πια να είναι ιονισμένη) και ακολούθησε (η κοσμική ακτινοβολία) το δικό της δρόμο, τη δική της εξέλιξη, τις λεπτομέρειες της οποίας προβλέπει το σενάριο. Προβλέπει, δηλαδή, το σενάριο ποια είναι η ένταση της κοσμικής ακτινοβολίας και ποια είναι η κατανομή της στις διάφορες φασματικές περιοχές. Υπήρχε όμως τόση δυσπιστία και για το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης και για το λεπτομερές σενάριο που βασίζεται σ' αυτό, ώστε η πρόβλεψη των Gamov, Alpher και Hermann να αγνοηθεί σχεδόν πλήρως και έτσι να μην επιχειρηθεί καν ο στοχευμένος έλεγχος αυτής της τόσο σημαντικής ιδέας (παρά μόνο όταν ήταν ήδη αργά), μέχρις ότου σε δύο φυσικούς του εργαστηρίου Bell των ΗΠΑ, τους Penzias και Wilson, ειδικούς στην ραδιοαστρονομία, δόθηκε η ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν μια μεγάλη χωνοειδή αντένα του εργαστηρίου για να μελετήσουν γαλαξίες που εκπέμπουν ραδιοκύματα. Η αντένα αυτή είχε κατάσκευασθεί για άλλο πρακτικό τηλεπικοινωνιακό σκοπό, ο οποίος στη συνέχεια εγκαταλείφθηκε. Οι δύο φυσικοί στην προετοιμασία για τις μετρήσεις τους αντιμετώπισαν ένα τεχνικό, όπως νόμισαν, πρόβλημα. Η αντένα τους εμφάνιζε παράσιτα από τα οποία, παρόλες τις προσπάθειές τους, δεν μπόρεσαν να απαλλαγούν. Εξέτασαν μήπως η Νέα Υόρκη με της ποικίλες δραστηριότητές της ήταν η αιτία των παρασίτων. Απηλλάγησαν και από τη «λευκή διηλεκτρική ουσία», δηλαδή τις κουτσουλιές δύο περιστεριών που είχαν κτίσει τη φωλιά τους μέσα στην αντένα. Αλλά τίποτε· τα παράσιτα παρέμεναν. Τελικά απεδείχθη ότι αυτά τα «παράσιτα» δεν ήταν τίποτε άλλο παρά η αρχέγονη κοσμική ακτινοβολία, το αρχαιότερο απομεινάρι από τη Δημιουργία του Κόσμου. Μ' άλλα λόγια, τα "παράσιτα", από τα οποία προσπαθούσαν να απαλλαγούν, απεδείχθη ότι αποτελούσαν τη σημαντικότερη ίσως πειραματική ανακάλυψη στην Ιστορία της Επιστήμης. Όταν αυτή η κοσμική ακτινοβολία μετρήθηκε πολύ πιο προσεκτικά από ειδικό δορυφόρο, (τα απότελέσματα ανακοινώθηκαν το 1992), η σύμπτωση του θεωρητικού σεναρίου της μεγάλης έκρηξης και των δεδομένων της παρατήρησης ήταν τόσο εντυπωσιακή (βλ. Σχ. 14.1) ώστε το Big Bang

αντιμετωπίστηκε πια όχι ως μια μεταφυσική υπόθεση, αλλά ως μια σοβαρή επιστημονική θεωρία.

Η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης έπρεπε να περάσει μια ακόμη σημαντική δοκιμασία. Η ύπαρξη των γαλαξιών και των άστρων συνεπάγεται ότι στο πρώιμο Σύμπαν η πυκνότητα της ύλης δεν μπορεί να ήταν απολύτως ομοιόμορφη παντού. Κάποιες, έστω και μικρές αυξημένες συγκεντρώσεις ύλης έπρεπε να υπάρχουν για να αποτελέσουν το σπέρμα της δημιουργίας των γαλαξιών. Όμως αυτές οι αυξομειώσεις όφειλαν να αποτυπωθούν στην ΚΑΜ, ως μικρές διαφορές ανάλογα με την κατεύθυνση απ' όπου έρχεται αυτή η κοσμική ακτινοβολία. Οι δορυφορικές παρατηρήσεις που ανακοινώθηκαν το 1992 επιβεβαίωσαν για πρώτη φορά την ύπαρξη αυτών των μικροδιαφορών στην ΚΑΜ. Πιο πρόσφατα (τα πρώτα αποτελέσματα της αποστολής WMAP ανακοινώθηκαν το 2003 και αυτά του Planck το 2013) έγιναν, όπως αναφέραμε προηγουμένως, πολύ πιο λεπτομερείς μετρήσεις, οι οποίες προσδιόρισαν σε ποσοτικό επίπεδο το πώς το μέγεθος των μικροδιακυμάνσεων στην ΚΑΜ εξαρτάται από την κατεύθυνση παρατήρησης και από το γωνιακό άνοιγμα του οργάνου παρατήρησης (βλ. Σχ. 14.2 και 14.3). Η συμφωνία των δεδομένων αυτών με τις προβλέψεις του σεναρίου της Μεγάλης Έκρηξης όχι μόνο επιβεβαίωσε την ύπαρξη μικρομεταβολών στην πυκνότητα του Σύμπαντος κατά την πρώτη, "νηπιακή" φάση της εξέλιξής του, πριν η ακτινοβολία αποσυνδεθεί από την ύλη· αλλά μας επέτρεψε να προσδιορίσουμε και τη φύση αυτών των μικροδιακυμάνσεων της πυκνότητας. Διαπιστώθηκε δηλαδή ότι κατά την εξέλιξη του πρώϊμου Σύμπαντος, η ύλη/ενέργειά του παλλόταν από ακουστικά κύματα και ενός βασικού μήκους κύματος (της βασικής αρμονικής) και των υποπολλαπλασίων του (με άλλα λόγια των ανώτερων αρμονικών), που αφενός μεν αποτέλεσαν τις περιοχές συμπύκνωσης της ύλης ώστε να δώσουν αργότερα τους γαλαξίες και αφετέρου αποτυπώθηκαν στην ΚΑΜ. Έτσι η ΚΑΜ έχει "γραμμένη" μέσα της την αρχέγονη κοσμική "μουσική", με τη βασική "νότα" της και τις αρμονικές της, που δονούσαν το αδιαμόρφωτο ακόμη Σύμπαν και καθόρισαν την μετέπειτα δομή του. Και ο ανθρώπινος πολιτισμός μπορεί πια να "αφουγκραστεί" τον απόηχο αυτής της αρχέγονης Κοσμικής "μουσικής". Φαντάζομαι ότι οι Πυθαγόρειοι θα ήσαν ευτυχείς να δουν ότι η ιδέα τους για την ακουστική αρμονία των πλανητών, επανέρχεται στο προσκήνιο, όχι βέβαια στο επίπεδο των πλανητών, αλλά ως ακουστική αρμονία του νεογέννητου Σύμπαντος από την οποία ξεπήδησαν οι γαλαξίες, τα άστρα, οι πλανήτες, και –σε τελική ανάλυση– και οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι.

Μετά αυτήν τη μάλλον εκτενή ιστορική παρένθεση επανερχόμαστε για να αναφέρουμε και να σχολιάσουμε δύο βασικά σημεία που προκύπτουν από τις πρόσφατες παρατηρήσεις των αποστολών WMAP και Planck σε συνδυασμό με άλλα αστρονομικά δεδομένα:

1. Η διαστολή του Σύμπαντος, ενώ ήταν επιβραδυνόμενη στο παρελθόν, έχει γίνει επιταχυνόμενη (γίνεται, δηλαδή, με όλο και πιο γρήγορο ρυθ-

μό) εδώ και τουλάχιστον 5 δισεκατομμύρια χρόνια. *Το Σύμπαν "πατάει όλο και περισσότερο το γκάζι" της αυτόδιάλυσής του.* Αυτή είναι μια επαναστατική διαπίστωση γιατί φαίνεται να καταρρίπτει την προφανή θέση ότι ο ελκτικός χαρακτήρας της βαρύτητας οφείλει να επιβραδύνει τη διαστολή, όπως η γήινη βαρύτητα επιβραδύνει ένα αντικείμενο που εκτοξεύεται κατακόρυφα. Μια εύλογη εξήγηση αυτού του φαινομένου είναι να θεωρήσει κανείς ότι υπάρχει ένας απωστικός μηχανισμός που από κάποιο χρονικό σημείο και πέρα υπερκεράζει την βαρύτητα. Και αυτός ο μηχανισμός υπάρχει ως δυνατότητα: Είναι η κοσμολογική σταθερά, η οποία μπορεί να δώσει την απαιτούμενη επιτάχυνση.

2. Η γνωστή ύλη, πρωτόνια, νετρόνια, ηλεκτρόνια, κλπ δεν αποτελεί παρά μόνο το 5% περίπου της συνολικής ύλης/ενέργειας του Σύμπαντος! Το υπόλοιπο 95% δεν μας έχει αποκαλύψει ακόμη τη φύση του. Ξέρουμε, όμως, ότι χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: Σ' αυτό που ονομάζεται *Σκοτεινή Ύλη* και είναι περίπου το 25% της συνολικής ύλης/ενέργειας και σ' αυτό που αποκαλούμε *Σκοτεινή Ενέργεια* και συνιστά περίπου το 70% της ολικής ύλης/ενέργειας του Σύμπαντος. Η σκοτεινή ύλη αποτελείται ενδεχομένως από βαρέα σωμάτια που προβλέπονται από κάποιες θεωρίες αλλά τα οποία δεν έχουν παρατηρηθεί πειραματικά. Η σκοτεινή ενέργεια αποτελεί το μεγάλο μυστήριο. Ξέρουμε ότι συμπεριφέρεται παρόμοια με την κοσμολογική σταθερά του Einstein (η οποία έτσι αναβίωσε πρόσφατα· ίσως τελικά να αποδειχθεί ότι δεν ήταν καθόλου γκάφα η εισαγωγή της). Δεν έχουμε όμως ιδέα ποια είναι η ενδεχόμενη φυσική υπόστασή της. Κατά κάποιο τρόπο η σκοτεινή ενέργεια αποτελεί –τουλάχιστον προς το παρόν- τη σύγχρονη εκδοχή της Πεμπτουσίας (της πέμπτης, άγνωστης, ουσίας) του Αριστοτέλη.

Συνοψίζοντας λοιπόν την παρούσα εικόνα για την *πυκνότητα ενέργειας* ε στο Σύμπαν έχουμε:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_b + \varepsilon_e + \varepsilon_{ph} + \varepsilon_\nu + \varepsilon_{dm} + \varepsilon_{de} \equiv \varepsilon' + \varepsilon_{de}} \ , \qquad (14.2)$$

όπου η ε_b οφείλεται στα βαρυόνια, δηλαδή στα πρωτόνια και στα νετρόνια, η ε_e στα ηλεκτρόνια, η ε_{ph} στα φωτόνια, η ε_ν στα νετρίνα, η ε_{dm} στη λεγόμενη σκοτεινή ύλη και η ε_{de} στη λεγόμενη σκοτεινή ενέργεια. Ο χωρισμός της ε σε $\varepsilon' + \varepsilon_{de}$ έχει νόημα αν θεωρήσουμε ότι η ε_{de} είναι ανεξάρτητη του χρόνου και του τόπου, δηλαδή μια παγκόσμια σταθερά, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους όρους της (14.2) που μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Η πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας, εάν δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, είναι ακριβώς ισοδύναμη με την κοσμολογική σταθερά, όπως θα δείξουμε παρακάτω. Θα πρέπει επίσης να τονίσουμε ότι το ποσοστό της συμβολής του κάθε προσθετέου στην ολική πυκνότητα ενέργειας του Σύμπαντος δεν μένει

σταθερό. Άλλο ήταν λίγο μετά το Big Bang και άλλο σήμερα. Ιδιαίτερα το ποσοστό της σκοτεινής ενέργειας στη συνολική πυκνότητα ενέργειας αυξάνει συνεχώς, επειδή η μεν ε_{de} μένει σταθερή, οι δε άλλοι όροι στην (14.2) μειώνονται διαρκώς καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται. Σημειώστε ακόμη ότι ο συνολικός αριθμός των φωτονίων N_{ph} στο Σύμπαν δεν έχει αλλάξει αισθητά με την πάροδο του χρόνου και είναι 1,66 δισεκατομμύρια φορές μεγαλύτερος από το πόσα βαρυόνια υπάρχουν σήμερα στο Σύμπαν (και $1,66\times(8/7)\approx 1,9$ δισεκατομμύρια φορές μεγαλύτερος από το συνολικό αριθμό των ηλεκτρονίων)[2]. Ας θεωρήσουμε τώρα μια πρώιμη φάση όπου η θερμοκρασία ήταν πολύ υψηλότερη από την $T_e \equiv$ $\equiv m_e c^2 / k_B = 5,93\times 10^9\,\mathrm{K}$. Σε τέτοιες θερμοκρασίες λαμβάνει χώρα η αντίδραση της δίδυμης γένεσης, $\gamma \rightleftarrows e^- + e^+$, και επομένως δημιουργείται ένας μεγάλος αριθμός ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων συγκρίσιμος με τον αριθμό των φωτονίων. Όπως αναφέρεται στο πρόβλημα 14.1, οι αριθμοί έχουν ως εξής: $N_{e^-} \approx N_{e^+} \approx 0,75\,N_\varphi$. Παράλληλα όμως $N_{e^-} - N_{e^+} =$ $= N_\ell \approx 0,53\times 10^{-9}\,N_\varphi$, αφού ο λεπτονικός αριθμός N_ℓ οφείλει να είναι ίδιος τότε και σήμερα μια και διατηρείται. Παρόμοιες σχέσεις, αλλά σε θερμοκρασίες πολύ υψηλότερες από την $T_p \equiv m_p c^2 / k_B = 1,09\times 10^{13}\,\mathrm{K}$, ισχύουν και για τα ζεύγη πρωτονίου/αντιπρωτονίου και νετρονίου/αντινετρονίου, κ.ο.κ. Λόγω του παράγοντα 10^{-9}, που είναι εντελώς αμελητέος σε σύγκριση με τη μονάδα, είναι εύλογο και κομψό να υποθέσουμε ότι σε μια πολύ πρώιμη φάση ο λεπτονικός, ο βαρυονικός , κ.ο.κ αριθμός ήταν ακριβώς μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι όλη η ύλη (με τη στενή έννοια) δημιουργήθηκε μέσω δίδυμης γένεσης από τα φωτόνια, δηλαδή από την υψηλή θερμοκρασία. Στη συνέχεια θα πρέπει να υποθέσουμε ότι κάτι παρενέβη και έσπασε τη συμμετρία ύλης/αντιύλης σε πολύ μικρό βαθμό (ένα στο δισεκατομμύριο) ώστε από την εν συνεχεία δίδυμη εξαφάνιση (καθώς η θερμοκρασία έπεσε σε πολύ χαμηλότερα επίπεδα από τις παραπάνω χαρακτηριστικές θερμοκρασίες) να επιβιώσει ένα πολύ μικρό ποσοστό ύλης (ένα στο δισεκατομμύριο). Δεδομένου ότι υπάρχουν διαδικασίες που παραβιάζουν σε πολύ μικρό βαθμό τη συμμετρία ύλης/αντιύλης, αυτό το σενάριο μοιάζει εύλογο και πολύ επιθυμητό καθώς ερμηνεύει το γιατί τα φωτόνια είναι σήμερα περίπου ένα δισεκατομμύριο φορές περισσότερα από τα βαρυόνια και τα ηλεκτρόνια. Παράλληλα, βάσει του σεναρίου αυτού, δεν χρειάζεται να θεωρήσει κανείς

[2] Ο αριθμός των ηλεκτρονίων λόγω ηλεκτρικής ουδετερότητας είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων, που είναι επταπλάσιος από τον αριθμό των νετρονίων.

ότι τα διάφορα σωμάτια ύλης φτιάχτηκαν μαζί με το Big Bang, αλλά ότι δημιουργήθηκαν φυσιολογικά και αναπόφευκτα στην πορεία.

Βιβλιογραφία:

1. Simon Singh: "Big Bang", Εκδόσεις Τραυλός, Αθήνα 2004. Σοβαρό εκλαϊκευτικό βιβλίο που το συνιστώ ένθερμα.
2. Scientific American, Ελληνική Έκδοση, Μάιος 2004, σελ.22-32.
3. Scientific American, Ελληνική Έκδοση, Ιούλιος 2006, σελ.56.
4. Scientific American, Ελληνική Έκδοση, Οκτώβριος 2005, σελ.64.
5. Ε.Ν. Οικονόμου: «Η Φυσική Σήμερα, Τόμος ΙΙ, 5η Έκδοση, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο 2004, σελ.451-464
6. Ομιλίες Στ. Τραχανά, βλέπε σελ. 74.

14.3 Κοσμολογία σύμφωνα με το μοντέλο Robertson-Walker στα πλαίσια της Γ.Θ.Σ.

Δύο είναι οι πυλώνες της Κοσμολογίας:

1) Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) και
2) Η παραδοχή ότι το Σύμπαν δεν έχει όρια και ότι σε αρκετά μεγάλη κλίμακα (περίπου μισό δισεκατομμύριο έτη φωτός) είναι ομοιογενές και ισότροπο με πυκνότητα ενέργειας ε και πίεση p.

Από τη βασική εξίσωση (6.8) και τις παραδοχές του μοντέλου R-W (βλ. κεφ. 6, ενότητα 6.4.3β) προκύπτουν οι εξής δύο εξισώσεις για τη χρονική εξέλιξη της απόστασης R μεταξύ δύο απομακρυσμένων σημείων ($\dot{R} \equiv \equiv dR/dt$)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -\frac{\kappa c^2}{R^2} + \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon' + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \text{κοσμολογική σταθερά} \qquad (14.3)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon' + 3p') + \frac{\Lambda c^2}{3}, \qquad (14.4)$$

όπου η κοσμολογική σταθερά μπορεί να γραφεί ισοδύναμα μέσω της πυκνότητας της σκοτεινής ενέργειας[3]. Για πληρότητα χρειαζόμαστε επίσης μια σχέση μεταξύ της πυκνότητας ενέργειας ε και της πίεσης p που γράφεται ως εξής:

$$p = w\varepsilon, \qquad (14.5)$$

---

[3] Ο όρος $\Lambda c^2/3$ στις (14.3) και (14.4) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με την ακόλουθη μορφή, εισάγοντας την έννοια της πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας, ε_{de} (θεωρώντας ότι $d\varepsilon_{de}/dt \equiv 0$): $(\Lambda c^2/3) \equiv (8\pi G\varepsilon_{de}/3c^2)$.

(τα ε και p δεν εξαρτώνται από τη θέση $\mathbf{r}$ λόγω της παραδοχής 2).

Εναλλακτικά χρειαζόμαστε μια σχέση μεταξύ R και ε' για να λύσουμε την (14.3) και να βρούμε την εξάρτηση του R από το χρόνο. Η σχέση (14.4) μεταξύ του $\ddot{R}$, του R, του ε και του p προκύπτει από την (14.3) και από τον $1^{ο}$ νόμο της θερμοδυναμικής, $dU = -pdV$ (για $dS = 0$) και έχει ως ενδιάμεσο βήμα το εξής:

$$\frac{d\varepsilon}{dR} = -\frac{3}{R}(\varepsilon + p)\,. \qquad (14.6)$$

(Για την αποδειξη της (14.6) βλέπε υποσημείωση 6, σελ. 346).

14.4 Πώς να 'αποδείξετε' με σχετικά απλό τρόπο τις σχέσεις (14.3, .4)

1. Το βασικό μέγεθος που ενδιαφέρει είναι η *σταθερά του Hubble,* $H(t) \equiv (\dot{R}/R)$. Το $H(t)$ είναι σταθερό ως προς το χώρο, δηλαδή δεν εξαρτάται από την τιμή της απόστασης *R*, αλλά εξαρτάται από το χρόνο εν γένει. (Δεν έχει την ίδια τιμή "σήμερα" με αυτή που είχε πριν από, π.χ., 10 δις χρόνια).

2. Διαστατικά συμπεραίνουμε ότι το *H* θα πρέπει να εξαρτάται από τη συνολική πυκνότητα μάζας ρ ($= \varepsilon / c^2$, όπου ε η συνολική πυκνότητα ενέργειας), και τη σταθερά της βαρύτητας *G* (και μάλιστα από το συνδυασμό *Gρ,* αφού αυτός ο συνδυασμός καθορίζει το πεδίο βαρύτητας). Άρα θα έχουμε

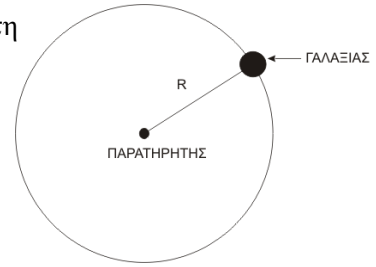
$$\dot{R}/R = \sqrt{G\rho(t)}\, f_1(x_1, ...), \quad \ddot{R}/R = G\rho(t)\, f_2(x_1, x_2, ...)\,, \qquad (14.7)$$

μια και οι διαστάσεις του $\sqrt{G\rho(t)}$ είναι 1/[*t*], δηλαδή ό,τι και του $\dot{R}/R$. Οι ποσότητες x_1, x_2 οφείλουν να είναι αδιάστατες. Μια προφανής επιλογή για το x_1 είναι ο λόγος p/ε. Το x_2 μπορεί να είναι ο λόγος $(c^2/R^2)/(G\rho)$, που δεν μπορεί όμως να εμφανισθεί στη σταθερά του Hubble, αφού η τελευταία είναι ανεξάρτητη από το *R*. Οι συναρτήσεις f_1, f_2 προσδιορίζονται αξιόπιστα με χρήση της ΓΘΣ, όπως ήδη αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Στα ίδια αποτελέσματα μπορεί να κατάλήξει κανείς χρησιμοποιώντας νευτώνεια μηχανική παρόλο που υπάρχουν κάποιες όχι τόσο εμφανείς ασυνέπειες. Η εξοικείωση με την νευτώνεια μηχανική και η απλότητά της υπερκαλύπτουν τις όποιες αδυναμίες της. Άλλωστε έχοντας τους τύπους της ΓΘΣ δεν διατρέχουμε κίνδυνο να αποδεχτούμε λανθασμένο τύπο της απλής «απόδειξης» που ακολουθεί.

3. Θεωρώντας το παρακάτω σχήμα έχουμε για την κίνηση του μακρινού γαλαξία μάζας *m* την κλασική εξίσωση του Νεύτωνα

$$m\ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2}, \tag{14.8}$$

όπου *M* είναι η μάζα που περικλείεται στη σφαίρα ακτίνας *R*. Ολοκληρώνοντας[4] την (14.8), με την παραδοχή ότι το *M* είναι σταθερό, βρίσκομε ότι το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι σταθερό:



$$\tfrac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{GMm}{R} = -C_1, \tag{14.9}$$

όπου C_1 είναι η σταθερά ολοκλήρωσης επί 2. Η σχέση (14.9), λαμβάνοντας υπόψη ότι $M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{C_1}{R^2}, \tag{14.10}$$

που είναι ίδια με την (14.3) αν θέσουμε $C_1 \equiv \kappa c^2$, $\rho = \varepsilon / c^2$, $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{de}$ (βλ. (14.2)) και λάβουμε υπόψη ότι $(\Lambda c^2/3) \equiv (8\pi G\varepsilon_{de}/3c^2)$. Σημειώστε ότι το C_1, όπως και το κ (βλ. τα σχόλια της ενότητας 6.4.3β), καθορίζει τη γεωμετρία του χώρου. Εάν $C_1 = 0$, σημαίνει ότι η καμπυλότητα του χώρου είναι μηδέν ή, ισοδύναμα, ότι η γεωμετρία του χώρου είναι η συνήθης ευκλείδεια γεωμετρία. Ο μηδενισμός της C_1, που συνεπάγεται ότι η συνολική ενέργεια του τύπου (14.9) περιλαμβανομένης και της βαρυτικής ισούται με μηδέν, είναι άμεση συνέπεια του λεγόμενου **μοντέλου του πληθωρισμού.** Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο σχεδόν αμέσως μετά το χρόνο μηδέν του Big Bang και συγκεκριμένα κατά την περίοδο $t \approx 10^{-35}$s έως $t \approx 10^{-33}$s υπήρξε μια πολύ πιο γρήγορη διαστολή εκθετικής φύσεως, $R \propto \exp(at)$, που μέσα στο απειροελάχιστο αυτό

---

[4] Από (14.8) έχουμε $\frac{d}{dt}\dot{R} = -\frac{GM}{R^2}$ ή $dR\frac{d\dot{R}}{dt} = -\frac{GM}{R^2}dR$ ή $\frac{dR}{dt}d\dot{R} = -\frac{GM}{R^2}dR$ ή, θεωρώντας ότι M =σταθερό, $\frac{1}{2}d\left(\dot{R}^2\right) = GM\,d(\frac{1}{R})$.

διάστημα αύξησε τις χωρικές διαστάσεις 10^{30} φορές! Έχουν προταθεί θεωρητικά μοντέλα κβαντικής φύσεως που αποδίδουν την ύπαρξη του πληθωρισμού σε μια αλλαγή φάσης. Όμως ο κύριος λόγος που το μοντέλο του πληθωρισμού έχει ενσωματωθεί στην αποδεκτή κοσμολογική θεωρία είναι το ότι εξηγεί αρκετά παρατηρησιακά δεδομένα, όπως: (α) Το γεγονός ότι η θερμοκρασία της ΚΑΜ σε αντιδιαμετρικά σημεία στις εσχατιές του Σύμπαντος είναι η ίδια, ενώ αυτά τα σημεία χωρίς τη φάση του πληθωρισμού ποτέ δεν θα είχαν τη δυνατότητα επικοινωνίας. (β) Το γεγονός ότι η γεωμετρία του Σύμπαντος είναι ευκλείδεια, πράγμα που προκύπτει αμέσως από τον πληθωρισμό, αφού μια αύξηση του R^2 στον παρονομαστή της (14.10) κατά 60 τάξεις μεγέθους καθιστά τον τελευταίο όρο στο δεξιό σκέλος της (14.10) απολύτως αμελητέο. (γ) Το ότι οι κβαντικές διακυμάνσεις κατά τη φάση του πληθωρισμού έχουν τέτοιο χαρακτήρα και τέτοιο μέγεθος ώστε να εξηγήσουν τη μετέπειτα δημιουργία γαλαξιών και πρωταστέρων καθώς και τις σχετικές παρατηρήσεις της ΚΑΜ από τις αποστολές WMAP και Planck. Παρόλες αυτές τις επιτυχίες υπάρχει μια μικρή μειονότητα ειδικών που προτείνει εναλλακτικά του πληθωρισμού σενάρια. Πάντως το θέμα του τι ακριβώς συνέβη σχεδόν αμέσως μετά τη στιγμή μηδέν πρέπει να θεωρηθεί ανοικτό γιατί ούτε μια αξιόπιστη θεωρία διαθέτουμε που να παντρεύει κβαντομηχανική και ΓΘΣ ούτε η κλίμακα των ενεργειών αυτής της περιόδου είναι εφικτή πειραματικά ώστε να έχουμε άμεσο έλεγχο.

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι, μετά την αρχική και εξαιρετικά σύντομη περίοδο του πληθωρισμού, η διαστολή του Σύμπαντος διέπεται από την ακόλουθη βασική σχέση:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3c^2} G\varepsilon = \frac{8\pi}{3c^2} G\varepsilon' + \frac{\Lambda c^2}{3} \ , \qquad (14.11)$$

όπου η $\Lambda c^2/3$ μπορεί να εκφρασθεί ισοδύναμα μέσω της ε_{de} (βλ. υποσημείωση 3). Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής $dU = -pdV$ και θεωρώντας αμελητέα την παραγωγή εντροπίας[5] έχουμε[6] τη σχέση (14.6).

---

[5] Η παραγωγή εντροπίας είναι αμελητέα σχετικά με τον ενεργειακό όρο που περιλαμβάνει και την ενέργεια ηρεμίας

[6] Η απόδειξη της σχέσης (14.6) έχει ως εξής:

$$U = \varepsilon V = \varepsilon \tfrac{4\pi}{3} R^3, \quad dV = 4\pi R^2 dR, \quad dU = Vd\varepsilon + \varepsilon dV = -pdV \ \text{ή}$$

$$\left(\varepsilon + p\right) dV = -Vd\varepsilon, \ 4\pi\left(\varepsilon + p\right) R^2 dR = -\tfrac{4\pi}{3} R^3 d\varepsilon \ \text{που είναι η (14.6).}$$

Αξίζει να τονισθεί ότι από την (14.6) προκύπτει ότι, εάν μια συνιστώσα της πυκνότητας ενέργειας, όπως η ε_{de}, είναι ανεξάρτητη του *R*, τότε η αντίστοιχη πίεση ισούται με μείον την πυκνότητα ενέργειας (βλ. και (14.5)):

$$d\varepsilon_{de}/dt = 0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_{de} = -p_{de} \;\Leftrightarrow\; w_{de} = -1 \,. \tag{14.12}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (14.11) επί R^2, παραγωγίζοντάς την ως προς το χρόνο, και συνδυάζοντάς την με την (14.6) και τη σχέση $d\varepsilon/dt = (d\varepsilon/dR)\cdot(dR/dt)$ βρίσκουμε τελικά[7]

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p) = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon' + 3p') + \frac{\Lambda c^2}{3} \,. \tag{14.13}$$

Για να καταλήξουμε στο τελευταίο σκέλος χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_{de}$, $p = p' + p_{de}$, την (14.12) και τη (14.5). Οι (14.11) και (14.13) είναι οι βασικές σχέσεις της σύγχρονης Κοσμολογίας.

- Από την (14.11) μπορούμε να βρούμε πώς μεταβάλλεται το μέγεθος R με το χρόνο, αν ξέρουμε ποια είναι η εξάρτηση της ολικής πυκνότητας ενέργειας από το *R*. Στη συνέχεια, πάλι από την (14.11), μπορούμε να βρούμε πώς εξαρτάται η ε από το χρόνο.
- Στη συνέχεια, είτε από την (14.6), είτε από την (14.13) μπορούμε να βρούμε την εξάρτηση της πίεσης είτε από το *R*, είτε από το χρόνο.
- Η (14.13) δίνει την επιτάχυνση $\ddot{R}$, της διαστολής του Σύμπαντος. Η επιτάχυνση αυτή είναι αρνητική (είναι δηλαδή, επιβράδυνση) *εκτός εάν το p είναι αρνητικό, όπως το* p_{de}, *και μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή από το ε/3.*

14.5 Ποια είναι λοιπόν η σύνθεση της μάζας/ενέργειας του ορατού Σύμπαντος σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις; Ποια η εξέλιξή του;

Ας εξετάσουμε σύντομα τις διάφορες συνιστώσες της πυκνότητας ενέργειας του Σύμπαντος, δηλαδή από τι αποτελείται η ενέργειά του :

i. Από βαρυόνια (δηλ. πρωτόνια και νετρόνια· τα τελευταία μετά τα πρώτα 20 λεπτά από τη Μεγάλη Έκρηξη είναι κατά 50% τα συστατικά του

---

[7] $2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left[\dot{\varepsilon}R^2 + \varepsilon 2R\dot{R}\right] = \frac{8\pi G}{3c^2}\left[2R\varepsilon\dot{R} + R^2\left(-\frac{3}{R}(\varepsilon + p)\right)\dot{R}\right] =$

$$= -\frac{8\pi G}{3c^2} R\dot{R}(\varepsilon + 3p) \,.$$

He/4): Για θερμοκρασίες $T \ll T_p \equiv m_p c^2 / k_B = 1,09 \times 10^{13}\,\mathrm{K}$, η πυκνότητα ενέργειας των βαρυονίων είναι $\varepsilon_b \approx m_p c^2 n_b$ και η πίεσή τους $p_b \approx 0$, όπου $n_b = N_b / V$ είναι η μέση συγκέντρωση των βαρυονίων.

ii. Από <u>ηλεκτρόνια</u>: Αφού $m_e \ll m_p$ μπορούμε να παραλείψουμε τη συμβολή των ηλεκτρονίων για $T \ll T_e \equiv m_e c^2 / k_B = 5,93 \times 10^9\,\mathrm{K}$.

iii. Από <u>φωτόνια</u> (βλ. ενότητα 5.1): $\varepsilon_{ph} = (\pi^2 / 15 c^3 \hbar^3)(k_B T)^4$, $p_{ph} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ph}$. Ο αριθμός των φωτονίων μπορεί να υπολογισθεί ακριβώς με τη βοήθεια των τύπων του παραρτήματος III, ή να εκτιμηθεί διαιρώντας την ολική ενέργεια των φωτονίων $V\varepsilon_{ph}$ με τη μέση ενέργεια ανά φωτόνιο $\alpha k_B T$ (όπου προκύπτει ότι $\alpha \approx 2,701$). Άρα $N_{ph} \approx 1,0204 \left(k_B T / c\hbar\right)^3 R^3$. Δεδομένου ότι η εντροπία των φωτονίων, που ισούται με $S_{ph} \approx$ $\approx 3,67 \left(k_B T / c\hbar\right)^3 R^3$, διατηρείται, έπεται ότι και ο αριθμός των φωτονίων διατηρείται καθώς και το γινόμενο RT. Έτσι

$$\{(k_B T R) / (c\hbar)\} = 0,9933 N_{ph}^{1/3} = \sigma\tau\alpha\theta\,. \qquad (14.14)$$

iv. Από τη λεγόμενη <u>ελαφριά σκοτεινή ύλη, δηλαδή τα νετρίνα</u>: Για τα οποία έχουμε τα εξής: για $T \gtrsim 2,5 T_e$, (όπου $T \equiv T_{ph}$, $T_e \equiv m_e c^2 / k_B$), η θερμοκρασία των νετρίνων είναι ίση με τη θερμοκρασία των φωτονίων, $T_\nu = T$, ενώ για $T \lesssim 2,5 T_e$, τα νετρίνα αποσυνδέονται από όλα τα λοιπά σωμάτια. Για $T \lesssim T_e$, $T_\nu = (4/11)^{1/3} T \approx 0,714 T$ (επειδή τα ηλεκτρόνια και τα ποζιτρόνια αλληλοεξαφανίζονται αυξάνοντας τη θερμοκρασία των φωτονίων, ενώ αυτή των νετρίνων παραμένει ως είχε). Επομένως για $m_\nu c^2 \lesssim k_B T_\nu \lesssim k_B T_e$, $\varepsilon_\nu = \frac{7}{8}\nu (T_\nu / T)^4 \varepsilon_{ph} \approx 0,68 \varepsilon_{ph} \propto T^4$· το 7/8 οφείλεται στο ότι τα νετρίνα είναι φερμιόνια, ενώ τα φωτόνια είναι μποζόνια, το $\nu \approx 3$ στο ότι υπάρχουν τρία είδη νετρίνων. Για χαμηλές θερμοκρασίες, $k_B T_\nu \lesssim m_\nu c^2$, έχουμε $\varepsilon_\nu = 3 N_\nu m_\nu c^2 / V$ και $p_\nu \approx 0$, όπου $3N_\nu \approx$ $\approx 0,81 N_{ph}$ είναι ο συνολικός αριθμός νετρίνων στο Σύμπαν. Το πρόβλημα είναι ότι η μάζα των νετρίνων είναι πολύ-πολύ μικρή χωρίς να είναι επακριβώς γνωστή. Ίσως $3 m_\nu c^2 \approx 0,06\,\mathrm{eV}$.

v. Από <u>σωμάτια που συνιστούν τη σκοτεινή ύλη:</u>

Ενώ ξέρουμε ότι υπάρχει σκοτεινή ύλη, δεν ξέρουμε από τι είδους σωμάτια αποτελείται. Υπάρχουν υποθέσεις, αλλά όχι πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξης των σωματίων αυτών. Η πιο πιθανή υπόθεση είναι ότι πρόκειται για βαριά στοιχειώδη σωμάτια που υπόκεινται στην βαρυτική και πιθανόν την ασθενή αλληλεπίδραση. Κατά συνέπεια για θερμοκρασίες $T \ll 10^{15}\,^{o}\mathrm{K}$ έχουμε κατά πάσα πιθανότητα ότι $\varepsilon_{d\,m} = m_{d\,m} c^2 n_{d\,m}$, $p_{d\,m} \approx 0$. Πάντως έχουμε πειστικές ενδείξεις ότι η συμβολή της σκοτεινής ύλης στην ενέργεια είναι περίπου πενταπλάσια αυτών των βαρυονίων ($\varepsilon_{dm} / \varepsilon_b \approx 5,36$).

vi. Από <u>σωμάτια (;) που συνιστούν τη σκοτεινή ενέργεια</u>:
Η τελευταία παραμένει ένα μυστήριο όσον αφορά στη φύση της. Η ύπαρξή της όμως επιβεβαιώνεται από ποσοτικές παρατηρήσεις και θεωρητικά συμπεράσματα. Για να είναι η σκοτεινή ενέργεια ισοδύναμη με τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς θα πρέπει $d\varepsilon_{de} / dt = 0$, που συνεπάγεται βάσει της (14.6) ότι $p_{de} = -\varepsilon_{de}$, δηλαδή ότι $w_{de} = -1$. Τα παρατηρησιακά δεδομένα δείχνουν ότι $p_{de} = w_{de}\,\varepsilon_{de}$ όπου το w_{de} είναι πολύ κοντά, αν δεν είναι ίσο με -1. Σ' ότι ακολουθεί θα δεχτούμε ότι $w_{de} = -1$, δηλαδή $p_{de} = -\varepsilon_{de}$ και ισοδυναμία με τον όρο κοσμολογικής σταθεράς,.

Τα ποσοστά συμμετοχής της κάθε συνιστώσας στην πυκνότητα ενέργειας ε και στην πίεση p αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου από την Μεγάλη Έκρηξη, αφού τόσο η ακτίνα R του ορατού Σύμπαντος, όσο και η μέση θερμοκρασία T (ορισμένη με βάση τα φωτόνια) αλλάζουν. Επειδή, όμως, η εντροπία παραμένει σταθερή, και $S_{ph} \propto V T^3 \propto (RT)^3$ σημαίνει, όπως αναφέραμε ήδη, ότι

$$RT = \text{σταθερο} = 1,1864 \times 10^{27}\,\mathrm{m \cdot K}\,, \qquad (14.14')$$

(το N_{ph} επελέγη ίσο με $1,43 \times 10^{89}$, βλέπε εδάφιο (5) πιο κάτω), όπου T είναι η θερμοκρασία των φωτονίων. Άρα

$$\varepsilon_{ph} \propto T^4 \propto \frac{1}{R^4}\,, \qquad (14.15)$$

$$\varepsilon_b \propto \frac{1}{R^3}\,, \qquad (14.16)$$

λόγω διατήρησης του αριθμού τους (ισχύει όταν $k_B T \ll m_p c^2$)

$$\varepsilon_{\nu} \propto \frac{1}{R^4}, \quad \text{όταν } k_B T \gg m_{\nu} c^2, \tag{14.17}$$

$$\varepsilon_{\nu} \propto \frac{1}{R^3}, \text{ όταν } \quad k_B T \ll m_{\nu} c^2, \tag{14.17′}$$

$$\varepsilon_{dm} \propto \frac{1}{R^3}, \text{ όταν } k_B T \ll m_{dm} c^2, \tag{14.18}$$

$$\varepsilon_{de} = \text{σταθ.} \tag{14.19}$$

Με βάση τις σχέσεις (14.11) και (14.13), τη σύσταση της πυκνότητας ενέργειας και πίεσης, όπως αναλύθηκε παραπάνω και γνωστούς νόμους των στοιχειωδών σωματίων μπορούμε να ανασυνθέσουμε με αρκετή σιγουριά την ιστορία του Σύμπαντος, (σε χοντρικές γραμμές) ως συνάρτησης του χρόνου t από τη Μεγάλη Έκρηξη. Με βάση το ποια συνιστώσα κυριαρχεί στη χρονική εξέλιξη μπορούμε να διακρίνουμε τρεις «εποχές» μετά τον πληθωρισμό:

(1) Εποχή της φωτοκρατίας, όπου τα φωτόνια (καθώς και διάφορες συμβολές από νετρίνα και ύλη/αντιύλη, ανάλογα με τη θερμοκρασία) κυριαρχούν στην ολική πυκνότητα ενέργειας. Η εποχή αυτή χαρακτηρίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon \propto \frac{1}{R^4}. \tag{14.20}$$

"Τελειώνει" η κυριαρχία της περίπου στα 40 χιλιάδες χρόνια μετά τη Μεγάλη Έκρηξη (μΜΕ), όταν η συμβολή στην πυκνότητα ενέργειας των όρων της μορφής R^{-4} (τύπου φωτονίων) ισούται με αυτή των όρων της μορφής R^{-3} (τύπου ύλης)· τότε η θερμοκρασία των φωτονίων ήταν γύρω στους 11500K (που αντιστοιχούν στο 1eV) και η ακτίνα του παρατηρήσιμου Σύμπαντος ήταν περίπου $10^{23}\text{m} \approx 11$ εκατομμύρια έτη φωτός.

(2) Εποχή της υλοκρατίας, όπου έπειτα από μια μεταβατική περίοδο η συμβολή της σκοτεινής και της βαρυονικής ύλης είναι η καθοριστική. Η σχέση πυκνότητας ενέργειας και ακτίνας του παρατηρήσιμου Σύμπαντος είναι κατά την εποχή αυτή

$$\varepsilon \propto \frac{1}{R^3}. \tag{14.21}$$

Η εποχή αυτή "τερματίζεται" στα 10 δισεκατομμύρια έτη μΜΕ, όταν η συμβολή της σκοτεινής ενέργειας έχει ανέλθει στο 50% της ολικής πυκνότητας ενέργειας· τότε η θερμοκρασία των φωτονίων ήταν 3,75 K

(που αντιστοιχεί στα 0,32 meV) και η ακτίνα του Σύμπαντος ήταν 3,2 $\times 10^{26}$ m.

(3) Εποχή της σκοτεινής ενέργειας, όπου τελικά θα κυριαρχήσει αυτού του είδους η ενέργεια και η σχέση θα γίνει

$$\varepsilon = \text{σταθερά.} \tag{14.22}$$

Η παρούσα κοσμική εποχή, 13,8 δισεκατομμύρια έτη μΜΕ, είναι ακόμη μεταβατική και χαρακτηρίζεται από μια εξαιρετικά αργή μετάβαση από τη δεύτερη στην τρίτη εποχή. Το ποσοστό της σκοτεινής ενέργειας είναι στην εποχή μας περίπου 70%.

Ας δούμε τώρα πώς εξελίχτηκε το Σύμπαν σε κάθε μια από τις τρεις αυτές εποχές:

(1) Εποχή φωτοκρατίας

Για αυτή την πρώτη περίοδο η βασική σχέση (14.11) γίνεται ενόψει της (14.20) $R\dot{R} = \text{σταθ.}$ με λύσεις της εξής μορφής:

$$R(t) \propto t^{1/2}, \quad T(t) \propto 1/R(t) \propto t^{-1/2}, \quad \varepsilon(t) \propto t^{-2} \ . \tag{14.23}$$

(2) Εποχή υλοκρατίας

Για τη δεύτερη περίοδο, η οποία εκτείνεται από περίπου 1 Myr έως περίπου 1 Gyr και όπου κυριαρχεί η ύλη, βαρυονική, σκοτεινή και (πιθανόν) αυτή των νετρίνων, η βασική σχέση (14.11) γίνεται, ενόψει της (14.21), $R^{1/2}\dot{R} = \text{σταθ.}$ που οι λύσεις της είναι της μορφής

$$R(t) \propto t^{2/3}, \quad T(t) \propto 1/R(t) \propto t^{-2/3}, \quad \varepsilon(t) \propto t^{-2} \ . \tag{14.24}$$

(3) Μελλοντική εποχή σκοτεινής ενέργειας

Για αυτή την τρίτη μελλοντική περίοδο η βασική σχέση (14.11) γίνεται, ενόψει της (14.22), $\dot{R} \propto R$ με λύσεις της εξής μορφής:

$$R(t) \propto e^{H_{de}t}, \quad T(t) \propto e^{-H_{de}t}, \tag{14.25}$$

όπου $H_{de} = [(8\pi G/3c^2)\varepsilon_{de}]^{1/2}$ είναι η τότε τιμή της σταθεράς του Hubble που θα είναι σταθερά όχι μόνο ως προς το χώρο αλλά και ως προς το χρόνο, δηλ. μια παγκόσμια φυσική σταθερά.

Για να βρούμε ρητά αριθμητικά αποτελέσματα θα πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση (14.11) και κατά τις μεταβατικές περιόδους από την εποχή της φωτοκρατίας στην εποχή της υλοκρατίας και από την τελευταία στην εποχή της σκοτεινής ενέργειας. Αυτό απαιτεί εν γένει αριθμητική επίλυση της (14.11) στον υπολογιστή, εάν ληφθούν υπόψη διάφορες περιπλοκές. Εν τούτοις και η μετάβαση $1 \to 2$ και η μετάβαση $2 \to 3$ επιδέχονται αναλυτική λύση, εάν οι συντελεστές στις

σχέσεις (14.15) έως (14.19) θεωρηθούν σταθεροί. *Όμως, επειδή η επίλυση απαιτεί κάποιες πρόσθετες αναλυτικές πράξεις, θα μπορούσε ο αναγνώστης να παραλείψει κατά την πρώτη ανάγνωση τα παρακάτω τμήματα τα γραμμένα με μικρότερα στοιχεία.*

---

(4) Από την υλοκρατία στη κυριαρχία της σκοτεινής ενέργειας

Ας αρχίσουμε με την επίλυση της μετάβασης $2 \to 3$ που περιλαμβάνει τη τωρινή κοσμική εποχή για την οποία υπάρχουν πολλά παρατηρησιακά δεδομένα. Η (14.11) στη μεταβατική περίοδο $2 \to 3$ έχει τη μορφή

$$\dot{R}^2 = \frac{a}{R} + gR^2 , \tag{14.26}$$

όπου $a \equiv 6,36 \times (3/4\pi) \times b\, N_b m_p c^2$, $b \equiv 8\pi G / 3c^2$, $g \equiv b\, \varepsilon_{de}$. Ο πρώτος όρος του δεξιού σκέλους της (14.26) οφείλεται στη συμβολή της ύλης και ο δεύτερος στη συμβολή της σκοτεινής ενέργειας. Το 6,36 στον ορισμό του *a* λαμβάνει υπόψη ότι η σκοτεινή ύλη συμβάλλει στην πυκνότητα ενέργειας του Σύμπαντος κατά 5,36 φορές περισσότερο από όσο η βαρυονική και επομένως η ολική συνεισφορά της ύλης είναι 6,36 φορές μεγαλύτερη της βαρυονικής.

Μπορείτε να επαληθεύσετε, παραγωγίζοντας την επόμενη σχέση (14.27) και υψώνοντας το αποτέλεσμα στο τετράγωνο, ότι η λύση της (14.26) είναι η ακόλουθη

$$R(t) = (a/g)^{1/3} [\sinh(\tfrac{3}{2}\sqrt{g}\, t)]^{2/3} . \tag{14.27}$$

Άσκηση 14.1: Δείξτε ότι στο όριο $\sqrt{g}\, t \ll 1$, $R(t) \to (\tfrac{3}{2})^{2/3} a^{1/3} t^{2/3}$ σε συμφωνία με την (14.24), ενώ στο αντίθετο όριο $\sqrt{g}\, t \gg 1$, $R(t) \to 2^{-2/3} \times$ $\times (a/g)^{1/3} \exp(\sqrt{g}\, t)$ σε συμφωνία με την (14.25).

Λαμβάνοντας υπόψη τα σημερινά δεδομένα της αποστολής Planck (βλ. Πίνακες 14.1 και 14.2) έχουμε από την (14.26) την εξής σχέση: $(a/R_0)/g R_0^2 = \varepsilon'/\varepsilon_{de} \approx 30,75/69,11 \approx 0,445$, όπου το R_0 είναι η σημερινή ακτίνα του παρατηρήσιμου Σύμπαντος. Από την παραπάνω σχέση προσδιορίζεται ο λόγος $(a/g) = 0,445 R_0^3$. Χρειαζόμαστε άλλη μια σχέση για να βρούμε τις τιμές των a και g. Αυτή προκύπτει από τη σημερινή τιμή $H_o = 67,74\,\mathrm{km/(s \times Mpc)} = 2,1953 \times 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$, της σταθεράς του Hubble, και τις σχέσεις $g \equiv b\varepsilon_{de} = b \times 0,6911\varepsilon = 0,6911 H_0^2$. Άρα $\sqrt{g} = 1,25 \times 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1} =$ $= 0,05759\,\mathrm{Gyr}^{-1}$. Υπενθυμίζουμε ότι $b \equiv 8\pi G/3c^2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (14.27) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση που ισχύει για *t* μεγαλύτερο του $1\,\mathrm{Myr}$:

$$\boxed{R(t) = 0,7634\,R_0[\sinh(0,08639\,t/1\text{Gyr})]^{2/3}, \quad t \gtrsim 1\text{Myr}}\ . \quad (14.28)$$

Ας επιχειρήσουμε τους εξής ελέγχους της ακρίβειας του τύπου (14.28):

α. Αναπαράγει τη σημερινή τιμή $R = R_o$ για τη σημερινή τιμή του χρόνου μΜΕ, $t_0 = 13,799\text{Gyr}$;

Απ. $R(t = t_0 = 13,799) = 0.998R_0$. Εντυπωσιακή επιτυχία.

β. Πόση ήταν η ακτίνα του Σύμπαντος σχετικά με τη σημερινή για $t = 0,38\text{Myr}$;

Απ. $R(t = 0,38\text{Myr}) = R_o/1276$ έναντι $R_o/1089$ που είναι η αποδεκτή τιμή ένα λάθος 15%, απολύτως δικαιολογημένο όμως, δεδομένου ότι χρησιμοποιήσαμε τον τύπο (14.28) πέραν της περιοχής ισχύος του. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα 14.1(σελ. 361) για $t = 0,38\text{Myr}$, τα νετρίνα και τα φωτόνια καλύπτουν το 25% περίπου της ενέργειας και η ύλη το υπόλοιπο 75%· δεν έχουμε δηλαδή μπει ακόμη στην χρονική περίοδο κυριαρχίας της ύλης.

γ. Πότε η συμβολή της σκοτεινής ενέργειας έγινε ίση με αυτήν της ύλης;

Απ. Από την (14.26) προκύπτει ότι για $t \gtrsim 1\text{Myr}$ ισχύει γενικά η σχέση $(a/g)^{1/3} = (\varepsilon'/\varepsilon_{de})^{1/3} R$ και ειδικά ότι $(a/g)^{1/3} = 0,7634\,R_0$. Άρα $R = 0,7634\,R_0(\varepsilon_{de}/\varepsilon')^{1/3}$. Από την τελευταία σχέση σε συνδυασμό με την (14.28) συνάγεται ότι, $\sinh(0.08639\times t) = 1$ όταν $\varepsilon_{de} = \varepsilon'$, και επομένως $t = 10,2\text{Gyr}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ κοντά στην αποδεκτή τιμή (βλ. Σχ. 14.5, σελ. 358).

δ. Πότε πέρασε το Σύμπαν από επιβραδυνόμενη σε επιταχυνόμενη διαστολή;

Απ. Από τον τύπο (14.13) έπεται ότι η επιτάχυνση μηδενίζεται όταν $\varepsilon + 3p = 0$ που σημαίνει ότι $\varepsilon' + \varepsilon_{de} + 3p = \varepsilon' + \varepsilon_{de} - 3\varepsilon_{de} = 0$, αφού $p' = 0$ και $p_{de} = -\varepsilon_{de}$. Η σχέση $\varepsilon' = 2\varepsilon_{de}$ σε συνδυασμό με την (14.26) οδηγεί στην $a = 2gR^3$· από την τελευταία λαμβάνοντας υπόψη την (14.27) έχουμε ότι $\sinh(0,08639t) = 1/\sqrt{2}$ και άρα $t = 7,62\,\text{Gyr}$, που είναι πολύ κοντά στην αποδεκτή τιμή t=7,83Gyr.

---

(5) Από τη φωτοκρατία στην υλοκρατία

Η γενική σχέση (14.11) για την περίοδο αυτή, λόγω των (14.15) και (14.16), εξειδικεύεται ως εξής:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = b\left[\frac{a_{ph}}{R^4} + \frac{a_m}{R^3}\right], \quad b \equiv \frac{8\pi G}{3c^2}, \quad \frac{a_m}{R^3} = \varepsilon_m . \tag{14.29}$$

Για μικρές τιμές του χρόνου t, που αντιστοιχούν σε θερμοκρασίες T_ν των νετρίνων τέτοιες ώστε $k_B T_\nu \gg m_\nu c^2$, τα νετρίνα συνεισφέρουν αποκλειστικά στην φωτονική συνιστώσα οπότε, λαμβάνοντας υπόψη και τα σχόλια μετά τη σχέση (14.14), έχουμε για την ποσότητα a_{ph}

$$\begin{aligned} \frac{a_{ph}}{R^4} &= \varepsilon_{ph} + \varepsilon_\nu = \varepsilon_{ph} + 0,68\varepsilon_{ph} = 1,68\varepsilon_{ph} = \\ &= 1,68\frac{\pi^2}{15}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \Rightarrow a_{ph} \approx 1,076 c\hbar N_{ph}^{4/3} . \end{aligned} \tag{14.30}$$

Η τελευταία σχέση στην (14.30) προέκυψε λαμβάνοντας υπόψη την (14.14).

Για πολύ μεγάλες τιμές του χρόνου t, που αντιστοιχούν σε θερμοκρασίες T_ν των νετρίνων τέτοιες ώστε $k_B T_\nu \ll m_\nu c^2$, τα νετρίνα δεν συνεισφέρουν καθόλου στην φωτονική συνιστώσα (βλ. (14.17΄)) οπότε

$$a_{ph} \approx 0,6405 c\hbar N_{ph}^{4/3}, \quad k_B T_\nu \ll m_\nu c^2 . \tag{14.30΄}$$

Η ποσοτητα a_m προσδιορίζεται συγκρίνοντας την τιμή του $R \approx \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} b^{1/3} a_m^{1/3} t^{2/3}$ που προκύπτει από την (14.29) για $t \gg 1\text{Myr}$ (όπου κυριαρχεί η συμβολή της ύλης, ενώ η φωτονική συμβολή είναι αμελητέα) με την τιμή του $R(t) \approx (\frac{3}{2})^{2/3} a^{1/3} t^{2/3}$ που προκύπτει από την (14.27) για $t \ll 1\text{Gyr}$ (όπου κυριαρχεί η συμβολή της ύλης, ενώ η συμβολή της σκοτεινής ενέργειας είναι αμελητέα). Άρα

$$a_m = a / b = 0,4463 R_0^3 \varepsilon_{de}, \quad k_B T_\nu \ll m_\nu c^2 . \tag{14.31}$$

Όπως μπορεί να επαληθεύσει ο αναγνώστης ή η αναγνώστρια (παραγωγίζοντας την επόμενη σχέση), η (πεπλεγμένη) λύση της διαφορικής εξίσωσης (14.29) είναι η ακόλουθη (θεωρώντας τα a_{ph}, a_m σταθερά):

$$\boxed{\begin{aligned} &t = t_0\left[\frac{1}{3}(1 + y\frac{R}{R_0})^{3/2} - (1 + y\frac{R}{R_0})^{1/2} + \frac{2}{3}\right], \\ &b = \frac{8\pi G}{3c^2},\ t_0 = \frac{2a_{ph}^{3/2}}{b^{1/2} a_m^2},\ y = \frac{a_m R_0}{a_{ph}}. \end{aligned}} \tag{14.32}$$

Επειδή η ποσότητα a_{ph} είναι διαφορετική για πολύ μικρούς χρόνους (πολύ μεγάλες θερμοκρασίες) και πολύ μεγάλους χρόνους (πολύ μικρές

θερμοκρασίες) και οι ποσότητες t_0 και y είναι διαφορετικές ανάλογα με τη χρονική περίοδο. Ας σημειωθεί ότι και το a_m θα μειωθεί κατά περίπου 1,5% για μικρούς χρόνους, αφού η συνεισφορά των νετρίνων αφαιρείται από την ύλη και προστιθεται στον φωτονικού τύπου όρο.

Έτσι για $k_B T_\nu \gg m_\nu c^2$ $(t \ll 40\,\mathrm{kyr})$ *έχουμε:*

Επικρατεί απόλυτη φωτοκρατία, η λύση της (14.29) είναι της μορφής $R = At^{1/2}$, όπου $A = 2^{1/2} b^{1/4} a_{ph}^{1/4}$ με το a_{ph} να δίνεται από τη σχέση (14.30). Η επιλογή για τον αριθμό των φωτονίων στο Σύμπαν, $N_{ph} = 1,43 \times 10^{89}$, που αναφέρθηκε προηγουμένως, αναπαράγει, μέσω της (14.30) την τιμή $A = 8,9 \times 10^{16}\,\mathrm{m/s^{-1/2}} = 5 \times 10^{20}\,\mathrm{m/yr^{-1/2}}$ που είναι αποδεκτή για τη σταθερά *A*, καθώς και την τιμή $a_{ph} = 2,5 \times 10^{93}\,\mathrm{m/s^{1/2}}$. Έχοντας τις παραπάνω τιμές βρίσκουμε:

$$t_0 = 272\,\mathrm{kyr}, \quad y = 3329, \qquad k_B T_\nu \gg m_\nu c^2 . \tag{14.33}$$

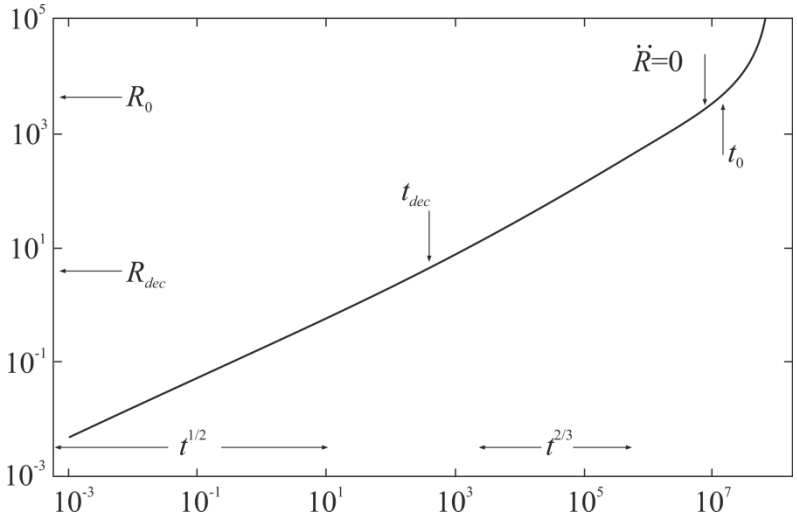
Για $k_B T_\nu \ll m_\nu c^2$ $(t \gg 5\,Myr)$ έχουμε με βάση τις (14.30΄) και (14.31):

$$t_0 = 121\,\mathrm{kyr}, \quad y = 5678, \qquad k_B T_\nu \ll m_\nu c^2 . \tag{14.33΄}$$

Επί πλέον ο αριθμός των φωτονίων ικανοποιεί τη σχέση $(R^3 / N_{ph}) = 0,9801(\hbar c / k_B T)^3$ (βλ. λυμένο πρόβλημα 14.1) από την οποία, θέτοντας την αξιόπιστα καθορισμένη τωρινή τιμή της θερμοκρασίας του Σύμπαντος, $T = 2,725\,\mathrm{K}$, προσδιορίζεται η ακτίνα του σήμερα, $R_0 = 4,36 \times 10^{26}\,\mathrm{m}$.

Ένα τεστ για τον τύπο (14.32) με την επιλογή (14.33) ή την επιλογή (14.33΄) είναι το αν αναπαράγει την τιμή *t*=377,7 kyr για την τιμή 1/1089 του R / R_0. Αντικαθιστώντας τις τιμές των t_0, y από την (14.33) βρίσκουμε $t = 374\,\mathrm{kyr}$, μια απόκλιση περίπου 1%, ενώ αν χρησιμοποιηθούν οι τιμές από την (14.33΄) βρίσκουμε ότι *t*=404 kyr, απόκλιση της τάξεως του 7%. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι για *t*=378 kyr οι πραγματικές τιμές των t_0, y είναι μεταξύ αυτών που δίνονται στις (14.33) και (14.33΄) πιθανόν πλησιέστερα σε αυτές της (14.33), πράγμα που ίσως υποδεικνύει ότι η τιμή της ενεργού ενέργειας ηρεμίας των νετρίνων είναι της τάξεως του 0,06eV.

Στο Σχ. 14.4 συνοψίζονται τα αποτελέσματα των τύπων (14.28) και (14.32) για την εξάρτηση της ακτίνας του Σύμπαντος *R* από το χρόνο *t* από το Big Bang.



Σχ. 14.4 Η ακτίνα R (σε 10^{23} m) του παρατηρήσιμου Σύμπαντος ως συνάρτηση του χρόνου t (σε kyrs) από το Big Bang. Σημειώνονται τα σημεία (t, R) που αντιστοιχούν στην αποσύζευξη ύλης/ακτινοβολίας, στον μηδενισμό της επιτάχυνσης και στη σημερινή εποχή

14.6 Πώς και πότε σχηματίσθηκαν οι βασικές δομές του Σύμπαντος ;

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε το σχηματισμό δομών του Σύμπαντος αρχίζοντας από τη στιγμή $t = 10^{-14}\text{s}$, όπου η ακτίνα του παρατηρήσιμου Σύμπαντος ήταν περίπου $8{,}5$ εκατομμύρια χιλιόμετρα, η θερμοκρασία του περίπου $1{,}5\times10^{17}\,\text{K}$ και η αντίστοιχη ενέργεια $k_BT = 12{,}9\,\text{TeV}$. Την περιοχή αυτή ενεργειών προσεγγίζουν σήμερα οι πιο μεγάλοι επιταχυντές σωματίων και επομένως οι καταστάσεις του Σύμπαντος για $t \gtrsim 10^{-13}\text{s}$ είναι άμεσα ελέγξιμες πειραματικά. Όσον αφορά στην εξάρτηση της ακτίνας R και της θερμοκρασίας T ισχύει περίπου ο τύπος (14.23), αφού είμαστε στην εποχή της φωτοκρατίας.

Μέχρι περίπου τη χρονική στιγμή 10^{-6}s, όταν η θερμοκρασία είχε πέσει περίπου στους $1{,}5\times10^{13}\text{K}$ και η ενέργεια k_BT στα $1{,}29\,GeV$, η βαρυονική ύλη σχημάτιζε μια πυκνή και πολύ θερμή «σούπα» από κουάρκ και γλοιόνια που ονομάζεται *πλάσμα κουάρκ/ γλοιονίων*. Σημειωτέον ότι το πλάσμα κουάρκ/ γλοιονίων είναι πραγματοποιήσιμο πειραματικά με μετωπική σύγκρουση βαρέων πυρήνων με ταχύτητες σχεδόν αυτήν του φωτός.

Βαρυογένεση, $10^{-6}\text{s} \lesssim t \lesssim 150\,\text{s}$: Τα quarks συντίθενται σε πρωτόνια, νετρόνια και λοιπά αδρόνια. Τα τελευταία δεν επιζούν πέραν του 1ms. Κατά

την περίοδο $t \approx 10^{-5}$ s έως 2×10^{-4} s, όπου η θερμοκρασία είναι περίπου 10^{12} K και η ακτίνα του ορατού Σύμπαντος είναι περίπου $R \approx 1,7\times10^{15}$ m, αποκαθίσταται θερμοδυναμική ισορροπία νετρονίων/πρωτονίων, μέσω των αντιδράσεων $p + e^- \rightleftarrows n + \nu_e$, $n + e^+ \rightleftarrows p + \bar{\nu}_e$ η οποία οδηγεί στον ακόλουθο λόγο των συγκεντρώσεων νετρονίων προς πρωτονίων

$$(n_n / n_p) = \exp(-\Delta\varepsilon / k_B T), \quad \Delta\varepsilon = (m_n - m_p)c^2 = 1,2934\,\text{MeV}. \qquad (14.34)$$

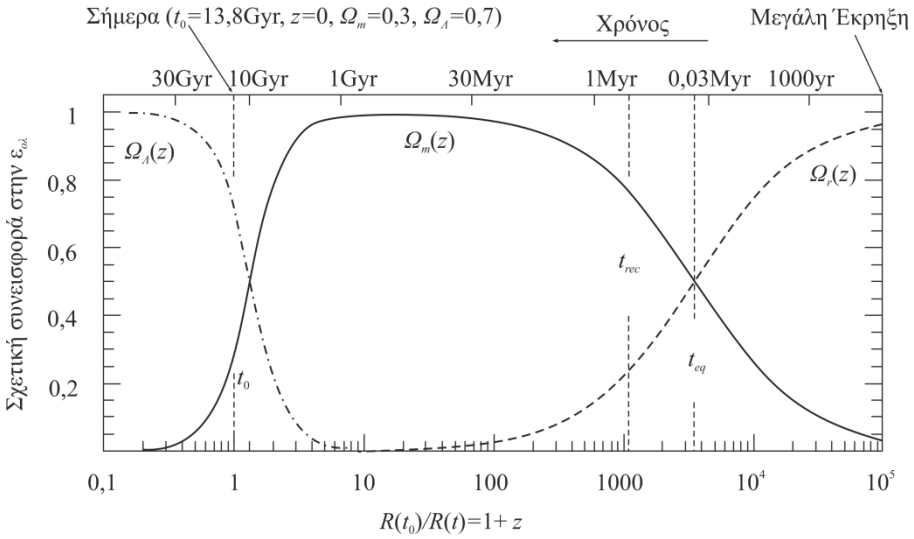
Για $t \approx 3$s, όταν $k_B T \approx 0,75$MeV, η ταχύτητα των παραπάνω αντιδράσεων είναι αρκετά μικρότερη από την ταχύτητα διαστολής του Σύμπαντος και, επομένως ο λόγος n_n / n_p *'παγώνει'* στην τιμή περίπου $\exp(-1,3/0,75) \approx$ 1/6. Στη συνέχεια τα νετρόνια, όντας ελεύθερα, αρχίζουν να αποσυντίθενται βάσει της αντίδρασης $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, η οποία όμως διακόπτεται για $t \approx 150$s, λόγω του ότι ξεκινά η πυρηνοσύνθεση. Εντωμεταξύ ο λόγος n_n/n_p έχει πέσει στο 1/7.

Πυρηνοσύνθεση, $120\text{s} \lesssim t \lesssim 1200\text{s}$: Ξεκινά γύρω στα 120s με την αντίδραση $p + n \rightleftarrows d + \gamma$, και συνεχίζεται με μια σειρά αντιδράσεων που καταλήγουν μετά περίπου 1200s στη δημιουργία He-4 με ίχνη δευτερίου. Στο He-4 (και στο δευτέριο) έχουν παγιδευτεί όλα τα νετρόνια και το 1/7 των πρωτονίων. Τα υπόλοιπα 6/7 των πρωτονίων παραμένουν ελεύθερα. Ετσι η αναλογία *κατά βάρος* He-4/H προκύπτει 2/6 (=25/75), που συμφωνεί με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

Καθώς το Σύμπαν συνέχιζε να διαστέλλεται και να ψύχεται τα ηλεκτρόνια έχαναν σιγά-σιγά θερμική κινητική ενέργεια και έτσι έγινε δυνατή η παγίδευσή τους γύρω από τους πυρήνες του He-4 και από τα πρωτόνια προς σχηματισμό των αντιστοίχων ουδέτερων ατόμων. Αυτή η διαδικασία έλαβε χώρα για $t \approx 380000$ έτη μΕ, όταν η θερμοκρασία ήταν περίπου 3000K και η ακτίνα του παρατηρήσιμου Σύμπαντος 1089 φορές μικρότερη από τη σημερινή. Η ύλη τότε αποτελείτο κυρίως από ουδέτερα άτομα και άλλα αφόρτιστα σωμάτια έτσι ώστε για $t \gtrsim 380000$ ύλη και «φως» αποσυνδέονται και το μεν «φως» συνεχίζει ανεξάρτητο την διαστολή του, η δε ουδέτερη ύλη έπαψε πια να εκπέμπει φωτόνια. Άρχισε έτσι η λεγόμενη *σκοτεινή περίοδος* της ιστορίας του Σύμπαντος. Για να θεμελιώσει κανείς αυτή την εικόνα της αποσύνδεσης ύλης/φωτονίων θα πρέπει να δείξει ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή των φωτονίων έγινε μεγαλύτερη από ή συγκρίσιμη με την τότε διάμετρο του Σύμπαντος, όταν η ύλη έπαψε να είναι ιονισμένη, ενώ αντίθετα ότι ήταν πολύ μικρότερη της διαμέτρου, όσο ήταν πλήρως ιονισμένη. (Βλ. σχετικά το πρόβλημα 14.4)

Επαναϊονισμός, $t \approx 150\,\mathrm{Myr}$: Η ύλη αρχίζει να επαναϊονίζεται με τη δημιουργία των πρώτων αστέρων. (Το 2018 διαπιστώθηκε παρατηρησιακά ότι ήδη υπήρχαν άστρα 180 Myr μΜΕ: Βλέπε Nature, **555**, 67, 2018). Ακολούθησε ο σχηματισμός γαλαξιών και φυσικά αστέρων εντός αυτών. Τα άστρα στη διάρκεια της ζωής τους συνενώνουν πρωτόνια τελικά προς πυρήνες ηλίου και τους πυρήνες ηλίου προς βαρύτερα στοιχεία μέχρι τον σίδηρο, που έχει την χαμηλότερη ενέργεια ανά νουκλεόνιο και επομένως αποτελεί την ακραία περίπτωση όπου η σύντηξη είναι εξώθερμη. Σύντηξη πέραν του σιδήρου προς σχηματισμό βαρύτερων από το σίδηρο στοιχείων απαιτεί εξωτερική προσφορά ενέργειας. Αυτή η έξτρα ενέργεια παρέχεται είτε κατά τον εκρηκτικό θάνατο μεγάλων αστέρων μέσω της διαδικασίας σουπερνόβα ΙΙ, είτε από άλλα κατακλυσμιαία γεγονότα, όπως η παρατηρηθείσα (το 2017) συγχώνευση δύο αστέρων νετρονίων. Έτσι μέσα στα άστρα λαμβάνει χώρα η *δεύτερη φάση της πυρηνοσύνθεσης* που δημιουργεί πυρήνες όχι βαρύτερους από αυτόν του σιδήρου. Οι βαρύτεροι πυρήνες συντίθενται κατά τις εκρήξεις σουπερνόβα ή κατά τη διάρκεια άλλων βίαιων γεγονότων, δηλαδή κατά την *τρίτη και τελευταία φάση της πυρηνοσύνθεσης*, Το υλικό που εκτοξεύεται όταν συμβαίνουν τέτοια γεγονότα περιέχει πια όλα τα στοιχεία του περιοδικού πίνακα· η βαρύτητα τα ανακυκλώνει προς σχηματισμό άστρων δεύτερης ή τρίτης γενιάς ενδεχομένως με πλανήτες όπως η Γη που αποτελούν τα υποψήφια λίκνα της ζωής, ίσως και ευφυούς ζωής, η οποία να αναρωτιέται για αυτόν

τον Κόσμο το μικρό το Μέγα.



Σχ. 14.5 Η πυκνότητα ενέργειας, Ω_j, ως ποσοστό της ολικής κρίσιμης πυκνότητας ενέργειας (j=r=radiation, j=m=particle mass, j=Λ=dark energy). Ο χρόνος (στην πάνω κλίμακα)

αυξάνει από δεξιά προς αριστερά, ενώ το αντίστροφο της ακτίνας του ορατού Σύμπαντος (νορμαλισμένο με την σημερινή τιμή του, $R(t_0)$, (κάτω κλίμακα) αυξάνει από αριστερά προς τα δεξιά. Οι σημερινές τιμές έχουν επιλεγεί: $\Omega_r \approx 0$, $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$. Ο τύπος (14.32) για $t = 38500$ έτη δίνει $\Omega_r = \Omega_m$, Το 1+z ισούται εξ ορισμού με $\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$, όπου $\beta \equiv \upsilon / c$ (βλέπε σελ. 381, (II.10)) και δίνει το λόγο $\lambda_\pi / \lambda_\varepsilon = R_o / R_\varepsilon$,όπου λ_π είναι το μήκος κύματος που παρατηρούμε σήμερα και λ_ε το μήκος κύματος κατά τη στιγμή της εκπομπής . Το R_ε είναι η ακτίνα του Σύμπαντος τη στιγμή της εκπομπής. (Από το βιβλίο των L.S. Sparke & J.S. Gallagher III, *Galaxies in the Universe*, 2nd edition, Cambridge Univ. Press, 2007)

14.7 Περίληψη των κυριοτέρων σχέσεων

Η σύγχρονη Κοσμολογία βασίζεται στη παρατηρούμενη διαστολή του Σύμπαντος, στη ΓΘΣ και στην παραδοχή ότι το Σύμπαν δεν έχει όρια και ότι σε μεγάλη κλίμακα είναι ομογενές και ισότροπο.

Με αφετηρία τα παραπάνω και με την πρόσθετη υπόθεση του πληθωρισμού προκύπτει ότι η διαστολή του Σύμπαντος διέπεται από τις επόμενες δύο διαφορικές εξισώσεις

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon' + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{14.3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon' + 3p') + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{14.4}$$

όπου R είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων (αρκετά απομακρυσμένων ώστε στο χώρο που μεσολαβεί να ικανοποιείται η παραδοχή της ομοιογένειας και της ισοτροπίας)· το $\dot{R} \equiv dR/dt$ και το $\ddot{R} \equiv d^2R/dt^2$· το $\varepsilon' = \varepsilon'_b + \varepsilon'_e + \varepsilon'_{ph} + \varepsilon'_\nu + \varepsilon'_{dm}$ είναι η πυκνότητα ενέργειας του Σύμπαντος, η οποία αποτελείται από διάφορες συνιστώσες (τη βαρυονική, την ηλεκτρονιακή, την φωτονική, αυτή των νετρίνων και αυτή της σκοτεινής μάζας). Η μορφή και το μέγεθος κάθε συνιστώσας εξαρτάται εν γένει από τις αντιδράσεις που είναι επιτρεπτές αλλά και εφικτές υπό τις εκάστοτε συνθήκες κυρίως θερμοκρασίας αλλά και πίεσης· η πίεση που επικρατεί στο Σύμπαν αναλύεται και αυτή σε διάφορες συνιστώσες ακριβώς όπως και η πυκνότητα ενέργειας· η ποσότητα Λc^2 είναι μια παγκόσμια φυσική σταθερά που ονομάζεται κοσμολογική σταθερά και γράφεται υπό την ακόλουθη μορφή ώστε να καταστεί ισοδύναμη με μια πυκνότητα ενέργειας ε_{de} η οποία αναφέρεται ως πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας:

$$\frac{\Lambda c^2}{3} \equiv \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_{de}, \quad p_{de} = -\varepsilon_{de}\,. \tag{14.34}$$

Η σχέση $p_{de} = -\varepsilon_{de}$ είναι συνέπεια του ότι η ε_{de} είναι ανεξάρτητη από τη μεταβολή της απόστασης *R* (βλ. (14.6)). Από τον ορισμό (14.34) προκύπτει ότι μπορούμε να ορίσουμε μια ολική πυκνότητα ενέργειας ε του Σύμπαντος, $\varepsilon \equiv \varepsilon' + \varepsilon_{de}$, τέτοια ώστε οι εξισώσεις (14.3,.4) να έχουν μια πιο συμπαγή μορφή:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon\,, \tag{14.3′}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p), \quad p \equiv p' + p_{de}\,. \tag{14.4′}$$

Έχοντας τα ως άνω θεωρητικά εργαλεία και τα πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα καταλήξαμε σε δύο σχέσεις που δίνουν την εξάρτηση της ακτίνας του παρατηρήσιμου Σύμπαντος από τη χρονική στιγμή 100 περίπου δευτερολέπτων μΜΕ και μετά

$$t = t_0\left[\frac{1}{3}(1 + y\frac{R}{R_0})^{3/2} - (1 + y\frac{R}{R_0})^{1/2} + \frac{2}{3}\right],$$
$$t_0 = 272\,\text{kyr},\ y = 3329,\ 100\,\text{s} \lesssim t \lesssim 0{,}3\text{Myr}, \tag{14.32}$$

$$\boxed{R(t) = 0{,}7634\,R_0[\sinh(0{,}08639\ t/1\text{Gyr})]^{2/3}, \quad t \gtrsim 1\text{Myr}\ .} \tag{14.28}$$

Στην πραγματικότητα και το t_0 και το *y* εξαρτώνται από το χρόνο λόγω του ότι τα νετρίνα, ενώ συνεισφέρουν μόνο στην φωτονική συνιστώσα για μικρές τιμές του χρόνου *t*, για πολύ μεγάλες τιμές του χρόνου *t* συνεισφέρουν μόνο στην υλική συνιστώσα με αποτέλεσμα να υπάρχει μια σταδιακή μείωση του t_0 και μια σταδιακή αύξηση του *y* με την πάροδο του χρόνου. Αυτές οι μεταβολές των t_0 και *y* επιτρέπουν την ομαλή μετάβαση από την (14.32) στην (14.28).

Πιν. 14.1: Σύνθεση του Σύμπαντος «σήμερα» **(** $t \approx 13,8$ δις έτη μΜΕ**)** [Δεδομένα WMAP, 2011 (1ος αριθμός) και Planck, 2013 (2ος αριθμός)]

Είδος Ύλης	Βαρυονική, ηλεκτρόνια	Ελαφριά σκοτεινή μάζα	Βαριά σκοτεινή μάζα	Η/Μ ακτινοβολία	Σκοτεινή ενέργεια
Είδος σωμάτιων	Πρωτόνια Νετρόνια (όχι ελεύθερα)	Νετρίνα	Υπερσυμμετρικά σωμάτια;	Φωτόνια	(Βαθμωτά σωμάτια;)
Μάζα σωμάτιων (eV)	$\approx 9,39\times10^{8}$	$3\varepsilon_{\nu o} \approx 0,06$;;;	10^{11} ;;;	0	(10^{-32} ;;;)
Αριθμός σωματίων στο ορατό Σύμπαν	$0,86\times10^{80}$	$1,16\times 10^{89}$	5×10^{78} ;;;	$1,43\times10^{89}$	(10^{122} ;;;)
Ποσοστό στην ενέργεια του Σύμπαντος %	4,56% ± 0,16% (WMAP) 4,86% ± 0,1% (Planck)	<1% ;	22,7% ± 1,4% (WMAP) 25,89% ± 0,57% (Planck)	0,005%	72,8% ± 1,5% (WMAP) 69,11% ± 0,62% (Planck)
Πσοσοστό στην πίεση	0	0	0	0	100%
Ποσοστό ενέργειας για =379000 έτη	12%	10%	63%	15%	≈0%

Σημείωση

Πρόσφατα δεδομένα οδηγούν σε μεγαλύτερες τιμές της Σταθεράς του Hubble, μεγαλύτερες κατά περίπου 6% πάνω από τις εκτιμήσεις βάσει του WMAP.

Πιν.14.2: Βέλτιστες τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων (WMAP, 2011) και (Planck, 2013)

Ολική πυκνότητα ενέργειας	$\Omega_{tot} \equiv \varepsilon / \varepsilon_{cr} = 1,0023 \pm 0,0055$
Κρίσιμη πυκνότητα	$\rho_{Cr} \equiv \varepsilon_{cr} / c^2 = 3H_o^2 / 8\pi G = 0,9335 \times 10^{-26}\ \text{kg/m}^3 \simeq 5,58\, m_p/\text{m}^3$ (WMAP) $= 0.8629 \times 10^{-26}\ \text{kg/m}^3 \simeq 5,16\, m_p/\text{m}^3$ (Planck)
Πυκνότητα βαρυονίων	$\rho_B \equiv \varepsilon_B / c^2 = 4,257 \times 10^{-28}\ \text{kg/m}^3 = 0,254\, m_p/\text{m}^3$ (WMAP) $= 4,19 \times 10^{-28}\ \text{kg/m}^3 = 0,25\, m_p/\text{m}^3$ (Planck)
Σταθερά του Hubble	$H_o = 0,2269 \times 10^{-17}\ \text{s}^{-1} = (70 \pm 1,3)$ km/(s × Mpc) (WMAP) $= 0,2195 \times 10^{-17}\ \text{s}^{-1} = (67,74 \pm 0,46)$ km/(s × Mpc) (Planck)
Ηλικία του Σύμπαντος	$t_o = 13,77 \pm 0,059\,\text{Gyr}$ (WMAP) $= 13,799 \pm 0,021$ (Planck)
Χρόνος αποσύζευξης	$t_{dec} = 377,7\,\text{kyr}$
Χρόνος εμφάνισης του πρώτου άστρου	$t_s \approx 108\,\text{Myr}$
Ακτίνα παρατηρήσιμου Σύμπαντος σήμερα	$R_o \approx 4,36 \times 10^{26}\ \text{m} \approx 46$ δισ. έτη φωτός
Διαστολή από την εποχή της αποσύζευξης	$R_0 / R_{dec} = 1089$
Όγκος του παρατηρήσιμου Σύμπαντος σήμερα	$V_o \approx 3,47 \times 10^{80}\ \text{m}^3$
Λόγος φωτονίων προς βαρυόνια	$N_{ph} / N_B \approx 1,66 \times 10^9$
Θερμοκρασία της ΚΑΜ σήμερα	$T_{\text{CBR}} = 2,725\,\text{K}$
Θερμοκρασία νετρίνων σήμερα	T_ν =1,95 K
Πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας	$\varepsilon_{de} \approx \{6,1(\text{WMAP}),\ 5,36(\text{Planck})\} \times 10^{-10}\ \text{J/m}^3$, $\tilde{\varepsilon}_{de} \approx \{1,32(\text{WMAP}),\ 1,16(\text{Planck})\} \times 10^{-123}$ (σε μονάδες Planck)
Κοσμολογική σταθερά	$\tilde{\Lambda} \approx \{3,32(WMAP),\ 2,92(Planck)\} \times 10^{-122}$ (σε μονάδες Planck)

14.8 Λυμένες ασκήσεις

1. Υπολογίστε για $k_B T \gg m_e c^2$ το συνολικό αριθμό φωτονίων, ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων καθώς και την ολική ενέργειά τους.

Λύση: Στην περιοχή αυτή θερμοκρασιών λαμβάνει χώρα η αντίδραση $e^- + e^+ \rightleftarrows \gamma$ από την οποία έπεται ότι τα χημικά δυναμικά μ_{e^-}, μ_{e^+}, μ_γ ικα-

νοποιούν τη σχέση $\mu_{e^-}+\mu_{e^+}=\mu_\gamma$ που σε συνδυασμό με την $\mu_{e^-}=\mu_{e^+}$ (λόγω του ότι $N_{e^-}=N_{e^+}$) και την $\mu_\gamma=0$ καταλήγει στην $\mu_{e^-}=\mu_{e^+}=0$. Άρα

$$N_{e^-}=N_{e^+}=2\Sigma_{\mathbf{k}}\frac{1}{e^{\beta\hbar ck}+1}=\frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty dkk^2\frac{1}{e^{\beta\hbar ck}+1}$$
$$=\frac{V}{\pi^2}\frac{1}{(\beta\hbar c)^3}\int_0^\infty\frac{dxx^2}{e^x+1}=1{,}803\frac{V}{\pi^2}\frac{(k_BT)^3}{(\hbar c)^3}.$$

$$N_{ph}=\frac{V}{\pi^2}\frac{1}{(\beta\hbar c)^3}\int_0^\infty\frac{dxx^2}{e^x-1}=2{,}404\frac{V}{\pi^2}\frac{(k_BT)^3}{(\hbar c)^3}.$$

Με όμοιο τρόπο έχουμε

$$U_{e^-}=U_{e^+}=2\Sigma_{\mathbf{k}}\frac{\hbar ck}{e^{\beta\hbar ck}+1}=\frac{V}{\pi^2}\frac{\hbar c}{(\beta\hbar c)^4}\int_0^\infty\frac{dxx^3}{e^x+1}=5{,}682\frac{V}{\pi^2}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}$$

και

$$U_{ph}=2\Sigma_{\mathbf{k}}\frac{\hbar ck}{e^{\beta\hbar ck}-1}=\frac{V}{\pi^2}\frac{\hbar c}{(\beta\hbar c)^4}\int_0^\infty\frac{dxx^3}{e^x-1}=6{,}494\frac{V}{\pi^2}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}.$$

Άρα

$$\frac{U_{e^-}}{N_{e^-}}=3{,}151k_BT,\quad \frac{U_{ph}}{N_{ph}}=2{,}701k_BT,\quad \frac{N_e}{N_{ph}}=\frac{1{,}803}{2{,}404}=0{,}75\ (T_e=T_{ph}).$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση των νετρίνων υπό την προϋπόθεση ότι $k_BT_\nu\gg m_\nu c^2$. Έχουμε τότε

$$N_\nu=6\Sigma_{\mathbf{k}}\frac{1}{e^{\beta(\hbar ck-\mu)}+1}=\frac{3V}{\pi^2}\frac{1}{(\beta\hbar c)^3}\int_0^\infty\frac{dxx^2}{e^{x-z}+1},\ z=\beta\mu,$$
$$U_\nu=6\Sigma_{\mathbf{k}}\frac{\hbar ck}{e^{\beta(\hbar ck-\mu)}+1}=\frac{3V}{\pi^2}\frac{\hbar c}{(\beta\hbar c)^4}\int_0^\infty\frac{dxx^3}{e^{x-z}+1}.$$

Εάν το αέριο των νετρίνων είναι αραιό, η κατανομή Fermi-Dirac μπορεί να προσεγγισθεί από την Boltzmann, οπότε τα ολοκληρώματα στις δύο τελευταίες σχέσεις γίνονται

$$\int_0^\infty\frac{dxx^2}{e^{x-z}+1}=e^z\int_0^\infty dxe^{-x}x^2=2,\ \int_0^\infty\frac{dxx^3}{e^{x-z}+1}=e^z\int_0^\infty dxe^{-x}x^3=6$$

και επομένως

$$\frac{U_\nu}{N_\nu}=3k_BT_\nu.$$

2. Δώστε τη γραφική παράσταση και την αναλυτική έκφραση της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου ως συνάρτησης της συχνότητας. Δεδομένου ότι το μέγιστο εμφανίζεται για συχνότητα $\hbar\omega_m=0{,}665\,\text{meV}$, ποια είναι η θερμοκρασία της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου;

Λύση: Σχ. 14.1. Η αναλυτική έκφραση δίνεται από τον τύπο (5.11) όπου το $\varphi(\hbar\omega / k_B T)$ δίνεται από τον τύπο (5.11΄). Το μέγιστο αντιστοιχεί στο $\hbar\omega_m = 2{,}822 k_B T$, οπότε για θερμοκρασία $2{,}725\,\mathrm{K}$ έχουμε $\hbar\omega_m = 0{,}66\,\mathrm{meV}$ ή $5{,}345\,\mathrm{cm}^{-1}$.

3. Αποδείξτε ότι η (14.27) είναι λύση της (14.26) που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες.
Λύση: Αντικαταστήστε την (14.27) στην (14.26) και εκτελέστε τις πράξεις.

4. Δίδεται ότι η ακτίνα του Σύμπαντος τη στιγμή της αποσύζευξης (t=378 kyr) ήταν 1089 φορές μικρότερη από τη σημερινή. Υπολογίστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή των φωτονίων τότε υποθέτοντας ότι (α) Η ύλη αποτελείται από ουδέτερα άτομα. (β) Η ύλη είναι πλήρως ιονισμένη.
Υποδείξεις Θεωρήστε ότι όλα τα φωτόνια έχουν μήκος κύματος όσο αντιστοιχεί στο μέγιστο της φασματικής κατανομής τότε. Η σχετική ενεργός διατομή σκέδασης από το άτομο του υδρογόνου δίνεται από τον τύπο (5.31), ενώ αυτή από το άτομο του ηλίου είναι το 9% του υδρογόνου.
Λύση: Από τον Πιν. 14.2 (δεδομένα του WMAP) προκύπτει ότι η συγκέντρωση των ατόμων υδρογόνου σήμερα είναι $(3/4)\times 0{,}254/\mathrm{m}^3 = 0{,}1905/\mathrm{m}^3$, ενώ αυτή του $\mathrm{He}-4$ είναι $0{,}01587/\mathrm{m}^3$. Έχουμε δηλαδή, σήμερα 0,1905 υδρογόνα ανά m^3 και 0,01588 $\mathrm{He}-4$ ανά m^3. Οι συγκεντρώσεις αυτές τη χρονική στιγμή $t = 380\,\mathrm{ky}$ μΜΕ θα ήταν 1089^3 μεγαλύτερες ήτοι

$$2{,}46\times 10^{8}\ \mathrm{m}^{-3},$$
$$2{,}05\times 10^{7}\ \mathrm{m}^{-3},$$

για το υδρογόνο και το ήλιο αντιστοίχως. Η ενεργός διατομή σκέδασης από το ουδέτερο άτομο του υδρογόνου δίνεται από τον τύπο (5.31) όπου το λ που αντιστοιχεί (για $T = 2{,}725\times 1089 = 2967{,}5\,\mathrm{K}$) στο μέγιστο της φασματικής κατανομής ισούται με $32480\,a_B$. Άρα

$$\sigma_H = 6{,}537\times 10^{-34}\ \mathrm{m}^2,$$
$$\sigma_{He} = 0{,}588\times 10^{-34}\ \mathrm{m}^2.$$

Άρα η μέση ελεύθερη διαδρομή των φωτονίων σ' ένα ουδέτερο σύμπαν για $t = 380\,\mathrm{ky}$ μΜΕ θα ήταν

$$\frac{1}{l} = 6{,}537\times 10^{-34}\times 2{,}46\times 10^{8} + 0{,}588\times 10^{-34}\times 2{,}05\times 10^{7} =$$
$$= 1{,}608\times 10^{-25} + 1{,}205\times 10^{-27} = 1{,}62\times 10^{-25},$$

ή

$$l \approx 6{,}17\times 10^{24}\ \mathrm{m}.$$

Η ακτίνα του σύμπαντος για $t = 378\,\mathrm{ky}$ ήταν $4{,}36\times 10^{26}/1089 = 4\times 10^{23}\ \mathrm{m}$. Άρα $l \gg R$ για το ουδέτερο σύμπαν το οποίο επομένως θα ήταν διαφανές.

Ας δούμε ποια θα ήταν η κατάσταση για $t = 378\,\mathrm{ky}$ στην ακραία περίπτωση που η ύλη ήταν πλήρως ιονισμένη, οπότε η σκέδαση θα οφειλόταν κυρίως στα ηλεκτρόνια με συγκέντρωση $2,665\times10^{8}\ \mathrm{m}^{-3}$. Η ενεργός διατομή σκέδασης έχει υπολογισθεί στο κεφ.5 (σελ. 124) και είναι $6,65\times10^{-29}\ \mathrm{m}^{2}$. Άρα

$$\frac{1}{l} = 2,665\times10^{8}\times6,65\times10^{-29} = 1,77\times10^{-20},$$

ή

$$l = 5,64\times10^{19}\ \mathrm{m} \ \text{ ή } \ l \ll R.$$

Μπορεί κανείς να εκτιμήσει τη μέση ελεύθερη διαδρομή των φωτονίων για $t = 378\,\mathrm{ky}$ μΜΕ με μεγαλύτερη ακρίβεια, αν υπολογίσει το βαθμό ιονισμού του υδρογόνου (Ο βαθμός ιονισμού του ηλίου, λόγω του πολύ μεγαλύτερου έργου ιονισμού του, είναι αμελητέος σε σύγκριση με αυτόν του υδρογόνου). Ο βαθμός ιονισμού a, που ορίζεται από το λόγο $c_p/(c_p + c_H)$, όπου c_p είναι η συγκέντρωση των πρωτονίων και c_H αυτή των ατόμων υδρογόνου, δίνεται από τη σχέση (βλ. [28], σελ. 313-314))

$$a = \frac{1}{[1+PK]^{1/2}}\ ,\ \text{όπου}$$

$PK = 8\pi^{3/2}(Na_B^3/V)(I/k_BT)^{3/2}\exp\left(I/k_BT\right)$ και $I = 13,6\,\mathrm{eV}$. Έχουμε

$$N/V = 2,46\times10^{8}m^{-3},\ Na_B^3/V = 3,64\times10^{-23},\ I/k_BT = 53,1,$$
$$\exp(I/k_BT) = 1,247\times10^{23},\ PK = 78239,\ a = 0,003575,$$
$$c_p = 2,46\times10^{8}a = 8,7945\times10^{5}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Η κύρια συμβολή στη μέση ελεύθερη διαδρομή οφείλεται στη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων $c_e = c_p$. Άρα

$$l \approx \frac{1}{8,7945\times10^{5}\times6,65\times10^{-29}} = 1,71\times10^{22}\ \mathrm{m}.$$

Αν λάβουμε υπόψη και τις άλλες συμβολές στο $1/l$ το l θα προκύψει $1,7\times10^{22}\ \mathrm{m}$. Επομένως, παρόλο το μικρό βαθμό ιονισμού, προκύπτει από τον υπολογισμό μας ότι το Σύμπαν δεν είναι ακόμη διαφανές, αφού $R/\ell \approx 23$ για $t = 378\,\mathrm{kyr}$ μΜΕ. Μία ενδεχόμενη ερμηνεία αυτής της απόκλισης μπορεί να οφείλεται στο ότι τα φωτόνια έχουν μια κατανομή ενεργειών και όχι μια ενιαία τιμή, όπως υποθέσαμε. Μια άλλη είναι η δυνατότητα ένα μεγάλο ποσοστό των ατόμων του υδρογόνου να έχει σχηματίσει διατομικά μόρια και έτσι να έχει μειώσει τη συγκέντρωση των μορίων μέχρι το μισό έναντι αυτών των ατόμων και επί πλέον να αυξήσει το I/k_BT κατά 13,4% πράγμα που θα αύξανε το *PK* μέχρι και 1372 φορές και τη συγκέντρωση των ελεύθερων ηλεκτρονίων μέχρι και 74 φορές, οπότε το l θα ήταν σαφώς μεγαλύτερο του *R*.

5. Δίνεται ότι τα σημερινά ποσοστά στην ενέργεια του Σύμπαντος είναι: $E_{ph} : E_{\nu} : E_b : E_{dm} : E_{de} = 0,0054 : 0,16 : 4,83 : 25,87 : 69,14$. Δίνεται ακόμη ότι (α) η ενέργεια ηρεμίας των νετρίνων είναι 0,06 eV, (β) η θερμοκρασία τους $T_{\nu} = 0,714 T_{ph}$ (γ) η ενέργεια τους E_{ν} για $k_B T \gg m_{\nu} c^2$ είναι $E_{\nu} = 0,68 E_{ph}$. Ποια ήσαν τα ποσοστά $E_{ph} : E_{\nu} : E_b : E_{dm} : E_{de}$ για $t = 378$ kyr;

Λύση: Για $t = 378\,\text{kyr}$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι το $R \cdot T$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου έχουμε για τη συνολική ενέργεια των φωτονίων

$$E_{\phi} \sim VT^4 \sim (R^3 T^3) T \sim T \, .$$

Άρα $U_{ph} / U_{ph0} = 1089$, όπου ο δείκτης 0 αναφέρεται στις σημερινές τιμές. Θα δεχτούμε ότι για *t*=378 kyr η σχέση μεταξύ ενέργειας νετρίνων και φωτονίων θα είναι κάπως αυξημένη έναντι αυτής που ίσχυε για μικρούς χρόνους και θα έχει φτάσει περίπου την τιμή $\varepsilon_{\nu} = 0,72 \varepsilon_{ph}$. Η ολική ενέργεια της ύλης (βαρυονικής και σκοτεινής) είναι σήμερα ίση με αυτήν που ήταν για *t*=378 kyr. Τέλος, η ολική ενέργεια της σκοτεινής ενέργειας για *t*=378 kyr ήταν τελείως αμελητέα, αφού ήταν κατά $(1089)^3$ φορές μικρότερη από τη σημερινή. Άρα για *t*=378 kyr είχαμε τα εξής ποσοστά για την ενέργεια του Σύμπαντος :

$$p_{ph} = U_{ph} / U_t, \quad p_{\nu} = U_{\nu} / U_t, \quad p_m = U_m / U_t, \quad p_{de} = U_{de} / U_t \approx 0,$$

όπου

$$U_t = U_{ph} + U_{\nu} + U_m = U_m \left(1 + \frac{1,72 U_{ph}}{U_m}\right) .$$

Αλλά

$$\frac{U_{ph}}{U_m} = 1089 \frac{U_{ph0}}{U_{m0}} = 1089 \times \frac{0,0054}{30,7} = 0,1915 \;\Rightarrow\; U_t = 1,33 U_m \, ,$$

οπότε με βάση τις δύο προηγούμενες σχέσεις και τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τα ζητούμενα ποσοστά

$$p_{ph} = 14,4\%, \quad p_{\nu} = 10,4\%, \quad p_m = 75,2\%, \quad p_b = \frac{4,83}{30,7} 75,2 = 11,8\%, \quad p_{dm} = 63,4\% \, ,$$

τα οποία είναι πολύ κοντά στις αποδεκτές τιμές, όπως αυτές αποτυπώνονται στον πίνακα 14.1. Ας έχει υπόψη του ο αναγνώστης ότι τα ως άνω αποτελέσματα εξαρτώνται από τις τιμές των σημερινών ποσοστών, οι οποίες δεν είναι απολύτως γνωστές.

6. Ελεξτε κατά πόσον οι τύποι (14.28) και (14.32) για την ακτίνα του Σύμπαντος έναντι του χρόνου από το Big Bang είναι συμβατοί μεταξύ τους.

Επίλογος

Η Ανθρωπική Αρχή

Εντολή σου, είπε,
αυτός ο Κόσμος
και γραμμένος μες
στα σπλάχνα σου είναι

Ο. Ελύτης

Σύνοψη: *Η βιολογική καταλληλότητα των φυσικών νόμων είναι γεγονός: Οι βασικοί νόμοι της Φύσης είναι έτσι 'επιλεγμένοι' ώστε να είναι το φαινόμενο της Ζωής εφικτό. Επί πλέον οι τιμές των παγκόσμιων (θεμελιωδών) φυσικών σταθερών είναι οι βιολογικά κατάλληλες: Μικρές αλλαγές στις τιμές αυτές θα οδηγούσαν σίγουρα σ' ένα Κόσμο χωρίς Ζωή και πιθανόν χωρίς τις δομές που συναντήσαμε στις προηγούμενες σελίδες. Μ' άλλα λόγια η δήλωση 'υπάρχει Ζωή' δεν είναι μόνο η πιο σύντομη, αλλά και η πιο περιεκτική εμπειρική πληροφορία για τον Κόσμο ολόκληρο που 'γραμμένος μες στα σπλάχνα μας είναι'. Γιατί, όμως; Υπάρχει, άραγε κάποια 'εξήγηση' γι' αυτό το συγκλονιστικό γεγονός;*

Στις προηγούμενες σελίδες κάναμε ένα σύντομο νοητό ταξίδι στις δομές του Κόσμου, από τις πιο απειροελάχιστες μέχρι το Σύμπαν ολόκληρο. Στο ταξίδι μας αυτό -θα πρόσεξε ο αναγνώστης- ότι προσπεράσαμε σιωπηλά τις πιο ενδιαφέρουσες, απ' όλες τις δομές: Αυτές που αφορούν την ζώσα, την έμβια ύλη. Και ο λόγος είναι απλός. Οι έμβιες δομές είναι αφενός μεν εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας, αφετέρου δε τόσο περίπλοκες ώστε δεν μπορούν να χωρέσουν στο περιορισμένο πλαίσιο αυτού του βιβλίου που ο σκοπός του είναι: *Να αντλήσει μερικά σημαντικά ποσοτικά (ή ημιποσοτικά) συμπεράσματα γύρω από τις δομές της ύλης με απλό και στοιχειώδη τρόπο, ξεκινώντας από μερικούς θεμελιώδεις γενικούς νόμους της Φυσικής και τις τιμές των παγκόσμιων φυσικών σταθερών.* Επαναλαμβάνουμε ότι η εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας έμβια ύλη είναι αφάνταστα πολυποίκιλη και περίπλοκη για να προσεγγισθεί σε ποσοτικό επίπεδο από αυτή τη νοητική

πορεία με αφετηρία μερικούς βασικούς νόμους της φυσικής και μόνα εφόδια τις τιμές των παγκόσμιων φυσικών σταθερών.

Ωστόσο, η νοητική πορεία κατά την αντίθετη κατεύθυνση, από το γεγονός ότι 'υπάρχει Ζωή' προς το στόχο άντλησης κάποιων συμπερασμάτων που αφορούν στους 'φυσικούς νόμους και στις τιμές των φυσικών σταθερών' δεν είναι χωρίς κάποια αξία [βλ. τις αναφορές 3 και 59]. Πρέπει να παραδεχτούμε ότι το θέμα αυτό, γνωστό ως η **ανθρωπική αρχή,** είναι μάλλον αμφιλεγόμενο, αφού αφενός είναι ιδεολογικά φορτισμένο και αφετέρου δεν παράγει συνήθως συγκεκριμένα ποσοτικά συμπεράσματα. Παρόλα αυτά, σε αυτόν τον σύντομο επίλογο θα αναφέρουμε μερικά επιχειρήματα από τα οποία προκύπτει ότι μπορεί κανείς να συναγάγει μερικούς θεμελιώδεις φυσικούς νόμους, ή τουλάχιστον να αποδείξει την αναγκαιότητά τους, από το γεγονός ότι υπάρχει ζωή. Στην παρουσίασή μας αυτή θα αναφερθούμε κυρίως στο σύστημα Γη/Ήλιος όπου υπάρχει ζωή βασισμένη στον άνθρακα. Ωστόσο, τα επιχειρήματα μας είναι στην πλειονότητά τους εφαρμόσιμα σε οποιοδήποτε σύστημα πλανήτη/άστρο ή δορυφόρο/άστρο, που διατηρεί ζωή παρόμοια με αυτή της Γης.

Η αξιοθαύμαστα ακριβής αναπαραγωγιμότητα των έμβιων δομών, από γενιά σε γενιά υποδεικνύει ότι οι δομές της ύλης είναι 'ψηφιακές', όχι 'αναλογικές', που σημαίνει ότι είναι διακριτού, όχι συνεχούς χαρακτήρα. Είναι πολύ δύσκολο να φανταστεί κανείς ένα συνεχές περίπλοκο σύστημα σε επαφή με ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον να αναδύεται ξανά και ξανά διατηρώντας την ίδια μορφή και τα ίδια χαρακτηριστικά. Για να συμβεί αυτό το εντυπωσιακό φαινόμενο, η τεράστια ποσότητα πληροφοριών αποθηκευμένη στη 'κεντρική τράπεζα' του μορίου του DNA θα πρέπει να διατηρηθεί ανέπαφη-άθικτη. Αυτό με τη σειρά του απαιτεί τη διπλή διακριτοποίηση, που φαίνεται στο Σχ.2.6 (δ) ή (δ΄), επειδή αλλιώς το μόριο του DNA θα υφίστατο συνεχείς αλλαγές και δεν θα ήταν ποτέ το ίδιο. Με άλλα λόγια, από την ακριβή αναπαραγωγιμότητα των έμβιων δομών οδηγούμαστε στη διακριτοποίηση και ως προς τους δύο άξονες του Σχ.2.6 δ ή δ΄. Η διακριτοποίηση ως προς τον κάθετο άξονα οδηγεί στην ατομική ιδέα. Ομοίως, η διακριτοποίηση ως προς τον οριζόντιο άξονα συνδέεται με τον κυματοσωματιδιακό δυϊσμό (Βλ. [59]). Έτσι η ακριβής αναπαραγωγιμότητα των έμβιων δομών αφενός μεν οδηγεί στην ατομική ιδέα, αφετέρου δε προκύπτει από τον κυματοσωματιδιακό δυϊσμό.

Η ύπαρξη μιας εξαιρετικά αδύναμης, ελκτικής, μακράς εμβέλειας δύναμης, όπως η *βαρύτητα*, φαίνεται να είναι απαραίτητη προκειμένου να διατηρηθεί η ατμόσφαιρα, οι λίμνες, οι ωκεανοί, και η έμβια ύλη επάνω στη Γη. Είναι απαραίτητη επίσης και για τη διατήρηση της πορείας της Γης γύρω από τον Ήλιο ώστε να αντλείται από αυτόν η ενέργεια και η πληροφορία (με την έννοια μείωσης της ολικής εντροπίας) που απαιτούνται για την εμφάνιση και τη διατήρηση της ζωής. Αυτό οδηγεί στη αναγκαιότητα μιας άλλης δύναμης, της *ηλεκτρομαγνητικής*, που έχει διπλό καθήκον: Αφενός

μεν να μεταφέρει ενέργεια από τον Ήλιο στη Γη και να διατηρεί θετική εκροή εντροπίας από τη Γη και αφετέρου να δρα ως συνδετήρας σωματίων. Ετσι συγκροτεί και διατηρεί στη Γη σύνθετες δομές της ύλης, περιλαμβανομένων και των έμβιων οργανισμών. Η ισχύς της Η/Μ δύναμης πρέπει να είναι τεράστια σε σχέση με τη βαρυτική. Αυτό μπορούμε να το αντιληφθούμε αν σκεφτούμε ποιο θα ήταν το μέγεθος ενός μονοκύτταρου οργανισμού αν το συγκρατούσαν βαρυτικές δυνάμεις και όχι ηλεκτρομαγνητικές: Η διάμετρός του θα ήταν ένα παράλογο μέγεθος της τάξης του $10^{14}\,\mathrm{m}$ (βλ. σελ.372), αντί του πραγματικού $10^{-5}\,\mathrm{m}$! Επιπλέον, η Η/Μ δύναμη, ούσα και ελκτική και απωστική επιτυγχάνει να είναι και μεγάλης εμβέλειας στη μεταφορά ενέργειας από τον Ήλιο και στη θετική ροή πληροφορίας προς τη Γη, αλλά και μικρής εμβέλειας ως συνδετήρας, όταν συγκρατεί μαζί τα συστατικά της έμβιας ύλης.

Η ζωή στη Γη απαιτεί τη ροή ενέργειας από τον Ήλιο καθώς και τη θετική ροή πληροφορίας για μεγάλο χρονικό διάστημα (της τάξεως των μερικών δισεκατομμυρίων ετών). Μια τέτοια προσφορά ενέργειας δεν μπορεί να είναι χημική, γιατί θα εξαντλούνταν σε μερικές χιλιάδες χρόνια. Θα πρέπει να υπάρχει μια άλλη πηγή ενέργειας περίπου ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερη από τη χημική. Υποθέτοντας ότι η ενέργεια αυτή είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους με την κινητική της ενέργεια και λαμβάνοντας υπόψη την αρχή του Heisenberg, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η απαιτούμενη ποσότητα ενέργειας E ανά σωματίδιο πρέπει να προέρχεται από περιοχή μεγέθους r και από σωματίδια μάζας m έτσι ώστε $E / E_{\chi\eta\mu} \approx (m_e a_B^2 / m r^2) \approx 10^6$. Το πυρηνικό μέγεθος $r = 1\mathrm{fm}$ και η μάζα πρωτονίων $1836 m_e$ παράγει την απαιτούμενη ενίσχυση κατά ένα παράγοντα του $1{,}5 \times 10^6$. Ως εκ τούτου, είναι ξεκάθαρο ότι οι πυρήνες είναι η πηγή ενέργειας του Ήλιου (και κάθε άλλου ενεργού άστρου). Αυτό συνεπάγεται ότι οι πυρήνες είναι σύνθετα σωματίδια που συγκρατούνται μεταξύ τους από μια δύναμη τρίτου τύπου - την *ισχυρή πυρηνική* δύναμη- ικανή να ξεπεράσει την κινητική ενέργεια των νουκλεονίων και την άπωση Coulomb μεταξύ των πρωτονίων. Τελικά, απαιτείται και μια τέταρτη αλληλεπίδραση, η λεγόμενη *ασθενής πυρηνική*, προκειμένου να επιτραπεί η δυνατότητα μετατροπής από πρωτόνιο σε νετρόνιο και αντίστροφα. Χωρίς αυτήν, δεν θα ήταν δυνατή η σύντηξη δύο πρωτονίων σε ένα δευτέριο (με την εκπομπή ενός ποζιτρονίου και ενός νετρίνου), ούτε θα ήταν δυνατή η τελική σύντηξη τεσσάρων πρωτονίων σε ένα πυρήνα ηλίου, δηλαδή η κύρια αντίδραση απελευθέρωσης ενέργειας στα άστρα.

Ας εξετάσουμε τώρα τις τιμές κάποιων παγκόσμιων φυσικών σταθερών. Η μάζα του ηλεκτρονίου είναι μικρότερη από τη διαφορά μάζας του νετρονίου και του πρωτονίου. Αυτό επιτρέπει στο νετρόνιο, αν είναι ελεύθερο να μετασχηματισθεί σε ένα πρωτόνιο, ένα ηλεκτρόνιο και ένα

αντινετρίνο. Εάν αυτό δεν συνέβαινε, τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια θα συνδυάζονταν σε ελεύθερα νετρόνια στο πρώιμο Σύμπαν αφήνοντας πολύ λίγα πρωτόνια να λειτουργήσουν ως καύσιμα στα άστρα. Έτσι, ένα νετρόνιο θα πρέπει να είναι βαρύτερο από το άθροισμα ενός ηλεκτρονίου και ενός πρωτονίου, αλλά όχι πολύ βαρύτερο, επειδή σε αυτή στην περίπτωση πολύ λίγα νετρόνια θα παράγονταν κατά την βαρυογένεση ή μέσα στον πυρήνα (βλ.(8.9)). Ως αποτέλεσμα του μεγαλύτερου ποσοστού πρωτονίων, τα βαρύτερα στοιχεία τα απαραίτητα για τη ζωή, θα ήταν ασταθή. Στοιχεία βαρύτερα από το He και μέχρι το Fe φτιάχνονται, όπως ήδη αναφέραμε, από σύντηξη μέσα σε ενεργά άστρα. Αυτή η αστρική νουκλεοσύνθεση περνάει από μία στενωπό στη διαδικασία δημιουργίας των πυρήνων του άνθρακα. Ο λόγος είναι ότι οι πυρήνες Be-8 που αποτελούνται από τέσσερα πρωτόνια και τέσσερα νετρόνια είναι εξαιρετικά μετασταθείς με χρόνο ζωής της τάξεως του 10^{-15}s , επειδή διασπώνται ο καθένας τους σε δύο πυρήνες He-4. Έτσι, φαίνεται εξαιρετικά απίθανο στο απειροελάχιστο αυτό χρονικό διάστημα που υπάρχει ένας πυρήνας Be-8 ένα άτομο He να προλάβει να ενσωματωθεί στο Be-8 και να παραχθεί έτσι το κρίσιμο για τη ζωή άτομο του άνθρακα. Τη λύση μπορεί να προσφέρει ένα φαινόμενο συντονισμού, που -όπως είναι γνωστό από τη στοιχειώδη φυσική- δίνει τη δυνατότητα να μεγαλώσει κατά πολύ ένα ασθενές γεγονός. Πραγματικά, εμφανίζεται ένας τέτοιος συντονισμός με την έννοια ότι η ενέργεια του Be-8 συν την ενέργεια του τρίτου πυρήνα He-4 συμπίπτει περίπου με ένα διεγερμένο ενεργειακό επίπεδο του πυρήνα του άνθρακα στα $7,65\,\mathrm{MeV}$ πάνω από τη βασική στάθμη. Αυτή η σύμπτωση ενισχύει κατά πολύ την πιθανότητα της ενσωμάτωσης του τρίτου πυρήνα He στο Be-8 και έτσι -ευτυχώς για μας και για τη Ζωή γενικότερα- σχηματίζεται, χάρις σ' αυτή τη σύμπτωση, ο πυρήνας του άνθρακα. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Fred Hoyle *προέβλεψε* την ύπαρξη ενός τέτοιου διεγερμένου ενεργειακού επιπέδου στον πυρήνα του άνθρακα πριν αυτό βρεθεί πειραματικά. Μια εντυπωσιακή περίπτωση, όπου το γεγονός 'υπάρχει Ζωή', άρα δημιουργούνται πυρήνες άνθρακα στα άστρα, οδήγησε στον ακριβή προσδιορισμό μιας διεγερμένης στάθμης.

Η ύπαρξη ζωής υπονοεί επίσης ότι η αδιάστατη βαρυτική σταθερά $a_G = 5,9\times10^{-39}$ πρέπει να έχει μία τιμή της τάξεως του 10^{-38} ή 10^{-39}. Πραγματικά, έχει εκτιμηθεί ότι χρειάζονται περίπου 10 δισεκατομμύρια χρόνια ώστε να δημιουργηθεί ζωή στο Σύμπαν, αφού η Ζωή είναι το έσχατο στάδιο στην οργάνωση της ύλης και η κορωνίδα της κοσμικής εποχής όπου κυριαρχεί η ύλη. Από την άλλη πλευρά, η Ζωή όφειλε να εμφανισθεί και να εξελιχθεί πριν κυριαρχήσει η σκοτεινή ενέργεια, αφού η τελευταία τείνει να διαλύσει τις δομές της ύλης. Αυτές οι δύο προϋποθέσεις δείχνουν ότι $\sqrt{g}\,t\approx1$ για $t\approx10^{10}\,\mathrm{yrs}$ (βλέπε (14.28)). Αυτό ακολούθως σημαίνει ότι $a_G\approx1,9\times10^{-38}$, δηλαδή της ίδιας τάξης μεγέθους με τη μετρημένη τιμή

$a_G = 5{,}9\times10^{-39}$. (Η τιμή του $\rho_{de} = \varepsilon_{de}/c^2 \approx 0{,}6914\times0{,}8629\times10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3} = 6\times10^{-27}\,\mathrm{kg/m^3}$ χρησιμοποιήθηκε στην παραπάνω εκτίμηση της τιμής του a_G).

Όπως προαναφέραμε, οι εκρήξεις supernova, κυρίως οι εκρήξεις supernova τύπου II κατάρρευσης του κεντρικού τμήματος ενός άστρου (βλέπε παρακάτω) είναι σημαντικές για τη δημιουργία και την ανακύκλωση των στοιχείων γενικά και για την εμφάνιση της ζωής πιο συγκεκριμένα. Τα βαρύτερα από το σίδηρο στοιχεία δημιουργούνται ως συνέπεια τέτοιων εκρήξεων ή άλλων αντίστοιχης ισχύος αστρικών γεγονότων, όπως είναι η συγχώνευση δύο αστέρων νετρονίων. Επιπλέον, όλα τα στοιχεία διασπείρονται εξαιτίας τέτοιων γεγονότων πολύ αποτελεσματικά στο μεσοαστρικό χώρο, έτσι ώστε να ανακυκλωθούν από τη βαρύτητα για την δημιουργία επόμενης γενιάς άστρων. Χονδρικά, μία έκρηξη supernova τύπου II λαμβάνει χώρα ως εξής: Σε ένα μεγάλο αστέρι μετά την εξάντληση των πυρηνικών του καυσίμων, καταρρέει το εσωτερικό του τμήμα και γίνεται τόσο πυκνό που ακόμη και τα νετρίνα παγιδεύονται μέσα του. Αυτό το υπέρπυκνο κεντρικό τμήμα έλκει το εξωτερικό μέρος του άστρου, το οποίο συγκρούεται με το κεντρικό τμήμα με πολύ μεγάλη ταχύτητα. Αυτή η εσωτερική σύγκρουση αναγκάζει το εξωτερικό τμήμα να αναπηδήσει και ταυτόχρονα απελευθερώνει τα νετρίνα που σπρώχνουν βίαια το εξωτερικό τμήμα με μια εκρηκτικής ισχύος δύναμη. Προκειμένου η ροή των νετρίνων να μπορέσει να εκτοξεύσει το εξωτερικό τμήμα του άστρου αντίθετα από την βαρυτική δύναμη, πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση που συνδέει την αδιάστατη ασθενή σταθερά σύζευξης, a_W, με την αντίστοιχη βαρυτική, a_G,:

$$a_W^4 \approx a_G (m_p/m_e)^6 \Rightarrow a_W \approx 2.18\times10^{-5}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα για τη σταθερά a_W αποτελεί μια υπερεκτίμηση της αποδεκτής τιμής της κατά ένα παράγοντα του 100 περίπου.

Θα κλείσουμε αυτόν τον επίλογο επικεντρώνοντας την προσοχή μας στο μυστήριο της κοσμολογικής σταθεράς Λ, ή, ισοδύναμα, στο μυστήριο της σκοτεινής ενέργειας ε_{de}. Αν δεχθούμε την καθιερωμένη τιμή της βαρυτικής σταθεράς, G, η πειραματικά προσδιορισμένη τιμή του Λ είναι τέτοια ώστε να περάσουμε από το τελικό στάδιο της κυριαρχίας της ύλης στο αρχικό της κυριαρχίας της σκοτεινής ενέργειας (δηλαδή να έχουμε $\varepsilon' \approx \varepsilon_{de}$) γύρω στα 10 δισεκατομύρια χρόνια, όταν ο χρόνος ήταν ώριμος ώστε να δημιουργηθεί Ζωή. Αυτή η τόσο εύλογη -από την άποψη της ανθρωπικής αρχής- πειραματική τιμή του Λ είναι σε κραυγαλέα αντίφαση με θεωρητικά μοντέλα που οδηγούν σε τιμές του Λ 10^{120} μεγαλύτερες από τις πραγματικές! Οποιοσδήποτε θεωρητικός μηχανισμός αλληλοεξουδετέρωσης όρων θα

πρέπει να είναι αφάνταστα ακριβής για να παράγει αυτό το πειραματικό/ παρατηρησιακό αποτέλεσμα ξεκινώντας από αυτήν την εξωφρενικά μεγάλη θεωρητική εκτίμηση.

Σημείωση: Το μέγεθος της τάξης του 10^{14} m που αναφέρθηκε στη σελ. 369 προέκυψε θεωρώντας ότι τα άτομα είναι στοιχειώδη σωμάτια φερμιονικού χαρακτήρα με μάζα ιση με $20\,m_u$. Έχει υποτεθεί επί πλέον ότι ο αριθμός τους είναι περίπου 4×10^{16} και οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις είναι μόνο βαρυτικής φύσεως.

Παράρτημα I

Ταλαντώσεις και κύματα

Οι **ταλαντώσεις** είναι *τοπικές* κινήσεις που η μορφή της ενέργειάς τους αλλάζει περιοδικά από κινητική σε δυναμική και αντίστροφα. Ένα τυπικό μηχανικό παράδειγμα είναι αυτό του εκκρεμούς στο Σχ. Ι(α) και ένα τυπικό ηλεκτρικό παράδειγμα είναι αυτό του κυκλώματος LC στο Σχ. Ι (β). Στην τελευταία περίπτωση το ρόλο της δυναμικής ενέργειας τον παίζει η έκφραση $\frac{1}{2}(Q^2 / C)$, όπου το Q είναι το ηλεκτρικό φορτίο στον πυκνωτή που έχει χωρητικότητα C· τον ρόλο της κινητικής ενέργειας έχει η έκφραση $\frac{1}{2}LI^2 / c^2$ η οποία περιλαμβάνει και τη συστηματική κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, $\frac{1}{2}N_e m_e v^2 = \frac{1}{2}n_e \ell S m_e v^2$ (που είναι υπεύθυνη για το ρεύμα $I = dQ / dt = (N_e / \ell) e v$) και τη μαγνητική ενέργεια την οφειλόμενη στο ρεύμα I. Η μαγνητική συνιστώσα της ολικής αυτεπαγωγής L είναι ανάλογη του ολικού μήκους ℓ του σύρματος, ενώ η κινητική συνιστώσα είναι ανάλογη του λόγου $\lambda_p^2 \ell / S$, όπου $\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$ και ω_p είναι η κυκλική συχνότητα πλάσματος (βλ. (5.44)) του υλικού του σύρματος· c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό[1]. Ως αποτέλεσμα αυτής της εξάρτησης, η μαγνητική συνιστώσα κυριαρχεί για διατομές S αρκετά μεγαλύτερες του λ_p^2.

Για μακροσκοπικές ταλαντώσεις, όπως αυτές των σχημάτων Ι(α) και Ι(β), η μακροσκοπική κινητική ενέργεια μετατρέπεται σταδιακά, μέσω συγκρούσεων μικροσκοπικών σωματίων, σε εσωτερική ενέργεια και του συστήματος και του περιβάλλοντος. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται μακροσκοπικά ως η δράση δυνάμεων τριβής. Απουσία τέτοιων δυνάμεων το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας $E_K + E_\Delta$ διατηρείται σταθερό

[1] Το λ_p είναι της τάξεως των 150 nm. Χρησιμοποιούμε το σύστημα G-CGS. Τους σημαντικούς τύπους θα τους διατυπώσουμε και στο σύστημα SI.

και η ταλάντωση παραμένει αμείωτη. Άρα $E_{KM} + E_{\Delta m} = E_{Km} + E_{\Delta M}$, όπου οι δείκτες M και m δηλώνουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή αντίστοιχα. Στην περίπτωση του κυκλώματος LC η τελευταία σχέση έχει τη μορφή

$$\tfrac{1}{2}\frac{L I_M^2}{c^2} = \tfrac{1}{2}\frac{Q_M^2}{C},$$

από την οποία έπεται ότι (λαμβάνοντας υπόψη ότι $I^2 = \omega^2 Q^2$)

$$\omega^2 = \frac{c^2}{LC}, \quad \text{G-CGS},$$

ή

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad \text{SI}.$$

Τα **κύματα** είναι ταλαντώσεις που "μεταναστεύουν" από τοπικό υποσύστημα σε γειτονικό υποσύστημα στο πλαίσιο ενός εκτεταμένου μέσου και, επομένως, απλώνονται και απεντοπίζονται. Το μέσο μπορεί να είναι διάκριτης φύσεως, όπως αυτό των συζευγμένων εκκρεμών του Σχ. Ι(γ), ή συνεχές, όπως στην περίπτωση θαλάσσιων κυμάτων που απεικονίζονται εντελώς σχηματικά στο Σχ. Ι(δ), ή ακόμη και το κενό (περίπτωση ΗΜ κυμάτων). Ένα κύμα, πέρα από την κυκλική συχνότητα ω της διαδιδόμενης ταλάντωσής του, χαρακτηρίζεται συνήθως και από το μήκος κύματος λ (ή, ισοδύναμα, από τον κυματαριθμό[2] του $k \equiv 2\pi / \lambda$) και τη φασική ταχύτητα διάδοσής του υ. Τα τρία μεγέθη ω, k, υ συνδέονται με τη γενική σχέση

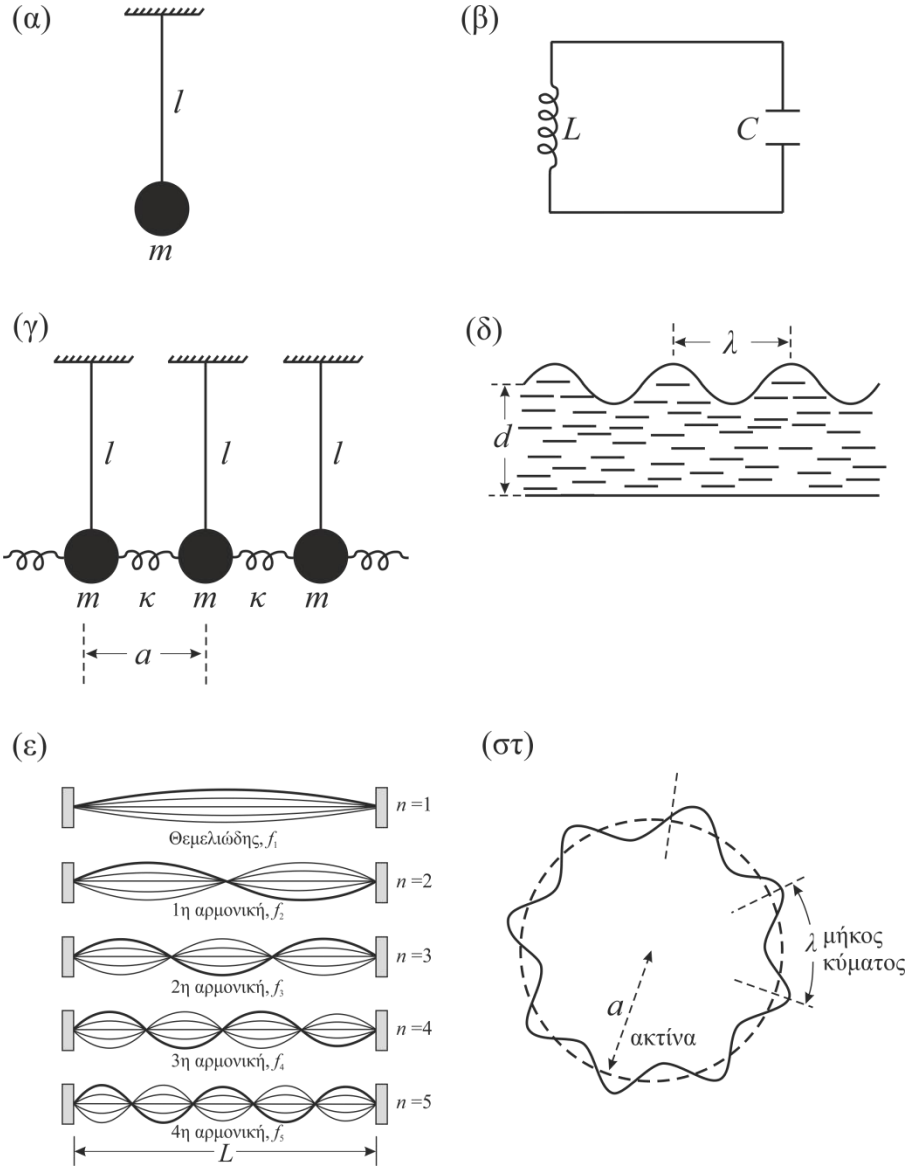
$$\boxed{\omega = \upsilon k \qquad \text{ή, ισοδύναμα,} \qquad \omega = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda}.} \tag{Ι.1}$$

Η ταχύτητα υ εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου και ενδεχομένως από τον κυματάριθμο k.

Κύματα περιορισμένα σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου οφείλουν να ικανοποιούν ορισμένες συνοριακές συνθήκες, οι οποίες περιορίζουν τις επιτρεπτές κυκλικές συχνότητες σ' ένα διάκριτο σύνολο, ω_1, ω_2, ω_3,... Σε κάθε τιμή ω_i αντιστοιχεί ένα ή περισσότερα κύματα, τα οποία έχοντας απλωθεί σε όλο τον πεπερασμένο διαθέσιμο χώρο δεν μπορούν να συνεχίσουν να οδεύουν. Αυτού του είδους τα κύματα τα ονομάζουμε *στάσιμα κύματα* ή και με το πιο τεχνικό όνομα *ιδιοκύματα*. Παραδείγματα στάσιμων κυμάτων δίνονται στο Σχ. Ι(ε) (εγκάρσια στάσιμα

[2] Είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τις ποσότητες ω και k αντί των $T \equiv 2\pi / \omega$ και $\lambda \equiv 2\pi / k$, διότι ένα οδεύον κύμα μέσω των ω και k έχει την απλούστερη μορφή $\varphi(k\,x - \omega t)$, αντί της $\varphi(\{2\pi / \lambda\}x - \{2\pi / T\}t)$, όπου φ είναι μια συνάρτηση, συνήθως ημιτονοειδής.

κύματα σε μια χορδή με ακίνητα άκρα) και στο Σχ. Ι(στ) (στάσιμο κύμα κατά μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου).



Σχ. Ι: (α) Ένα εκκρεμές. (β) Ένα κύκλωμα LC. (γ) Ένα σύστημα συζευγμένων εκκρεμών. (δ) Θαλάσσια κύματα, σχηματικά. (ε) Στάσιμα κύματα σε μια χορδή με ακίνητα άκρα. (στ) Στάσιμο κύμα στην περιφέρεια ενός κύκλου.

Παράρτημα II

Οι μεγάλοι υπερνόμοι διατήρησης

Σύνοψη: *Υπάρχουν κάποιες γενικές συνθήκες, που πηγάζουν από καθολικές ιδιότητες που αποδίδουμε στο χώρο και στο χρόνο ή από οικουμενικά πειραματικά δεδομένα. Οι συνθήκες αυτές ισχύουν ανεξάρτητα του ποια είναι η φύση των αλληλεπιδράσεων και ανεξάρτητα αν ο νόμος κίνησης είναι ο νευτώνειος, ή αυτός του Einstein, ή κβαντικός. Επομένως οι συνθήκες αυτές αναδεικνύονται σε υπερνόμους που έχουν καθολική ισχύ.*

II.1 Διατήρηση της Ενέργειας

Η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται, δεν αλλάζει, δηλαδή με την πάροδο του χρόνου.

Η διατήρηση της ενέργειας οφείλεται στην ομοιογένεια του χρόνου, στο ότι, δηλαδή, θεωρούμε ότι όλες οι χρονικές στιγμές είναι καθαυτές ισοδύναμες, ή με άλλα λόγια, στο ότι οι φυσικοί νόμοι είναι οι ίδιοι οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Σε πιο αυστηρή τεχνική γλώσσα η ομοιογένεια του χρόνου συνεπάγεται το ότι οι φυσικοί νόμοι μένουν αναλλοίωτοι στο μαθηματικό μετασχηματισμό: $t \to t' = t + t_o$.

Υπάρχει ένα γενικό θεώρημα (θεώρημα της Noether) που λέει ότι:
"Κάθε μαθηματικός μετασχηματισμός (όπως, π.χ. ο $t \to t' = t + t_o$) που αφήνει αμετάβλητους τους φυσικούς νόμους, οδηγεί σ' ένα μέγεθος που διατηρείται, και για το οποίο δίνεται και ο αλγόριθμος υπολογισμού του" (όχι, όμως, στο παρόν βιβλίο).

Η λογική σειρά που οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας είναι, λοιπόν, η ακόλουθη:

Θεωρούμε ότι ο χρόνος είναι ομοιογενής που σημαίνει ότι όλες οι χρονικές στιγμές είναι καθαυτές ισοδύναμες $\Leftrightarrow$ όποιοι και να 'ναι οι φυσικοί νόμοι θα πρέπει να μείνουν αμετάβλητοι στο μετασχηματισμό $t \to t' = t + t_o$ $\Rightarrow$ το αντίστοιχο μέγεθος που διατηρείται το ονομάζουμε ενέργεια. (Στο βιβλίο, Ε. Ν. Οικονόμου, *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος Ι, $5^{η}$ έκδοση, ΠΕΚ,

Ηράκλειο, 2003, σελ. 33 δείχνεται πώς το αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό $t \to t' = t + t_o$ οδηγεί στον ορισμό και στη διατήρηση της ενέργειας).

Συνήθως η εσωτερική ενέργεια (βλέπε σελ. 76, υποσ. 1) ενός συστήματος αναλύεται σε τρεις συνιστώσες: Ενέργεια ηρεμίας, E_o, κινητική ενέργεια, E_K και δυναμική ενέργεια, E_Δ των σωματίων που αποτελούν το σύστημα. Η τελευταία συνιστώσα εξαρτάται από τις συγκεκριμένες αλληλεπιδράσεις και την εξετάζει κανείς κατά περίπτωση. Για τις δύο πρώτες, θεωρώντας ένα σύστημα N σωματίων, μάζας ηρεμίας m_{oi}, σχετικιστικής μάζας m_i και ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon_i}$, έχουμε:

$$E_o = \sum_i m_{oi} c^2 , \tag{II.1}$$

$$\boxed{E_K = \tfrac{1}{2}\sum_i m_{oi}\boldsymbol{\upsilon}_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum_i \mathbf{p}_i^2 / m_{oi}} . \tag{II.2}$$

Η σχέση (II.2) ισχύει στο πλαίσιο της Κλασικής Μηχανικής. Στο πλαίσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας οι παραπάνω σχέσεις τροποποιούνται ως εξής:

$$\boxed{E_o + E_K = \sum_i m_i c^2 = \sum_i (m_{oi}^2 c^4 + c^2 p_i^2)^{1/2}} , \tag{II.3}$$

όπου η σχετικιστική μάζα m_i και η ορμή, $\boldsymbol{p}_i$ συνδέονται με τη μάζα ηρεμίας m_{oi} με τις σχέσεις

$$\boxed{m_i = m_{oi}(1 - \frac{\boldsymbol{\upsilon}_i^2}{c^2})^{-1/2}} , \tag{II.4}$$

$$\boxed{\mathbf{p}_i = m_i \cdot \boldsymbol{\upsilon}_i .} \tag{II.5}$$

II.2 Διατήρηση της ορμής

Η ολική ορμή, $\mathbf{P}_{o\lambda}$, ενός απομονωμένου συστήματος, όπου[1]

$$\mathbf{P}_{o\lambda} = \sum_i \mathbf{p}_i , \tag{II.6}$$

διατηρείται, δηλαδή, δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου.

[1] Το άθροισμα (II.6) περιλαμβάνει όλα τα σωμάτια ύλης και όλα τα σωμάτια αλληλεπιδράσεων που αποτελούν το απομονωμένο σύστημα. Εάν οι αλληλεπιδράσεις περιγραφούν ως κλασικά πεδία, τότε, αντί των αντιστοίχων $\mathbf{p}_i$ πρέπει να τεθούν οι ορμές των κλασικών πεδίων για τις οποίες δεν ισχύει ο τύπος (II.5). Βλέπε, π.χ. , σελ. 398 του παρόντος, ή Serway I, σελ. 241-251.

Η διατήρηση της ορμής οφείλεται στο ότι θεωρούμε ότι όλα τα σημεία του κενού χώρου είναι καθεαυτά ισοδύναμα, δηλ. ο κενός χώρος είναι ομοιογενής, που συνεπάγεται ότι οι φυσικοί νόμοι είναι ίδιοι σ' όλα τα σημεία του κενού χώρου ή, με άλλα λόγια, ότι οι φυσικοί νόμοι μένουν αναλλοίωτοι στο μαθηματικό μετασχηματισμό $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}$. Το αντίστοιχο μέγεθος που διατηρείται το ονομάζουμε ορμή. (Για την απόδειξη βλέπε το βιβλίο, Ε. Ν. Οικονόμου, *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος Ι, 5η έκδοση, ΠΕΚ, Ηράκλειο, 2003, σελ. 31,32,37,38).

ΙΙ.3 Διατήρηση της στροφορμής (Προσοχή!)

Η ολική στροφορμή, $\mathbf{L}$*, ενός απομονωμένου συστήματος* (*ορισμένη ως προς ένα σταθερό σημείο, συνήθως το κέντρο της μάζας του*) *διατηρείται, δηλαδή, δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου.*

Η διατήρηση της στροφορμής οφείλεται στην ισοτροπία του κενού χώρου, δηλαδή, στο ότι όλες οι διευθύνσεις του κενού χώρου είναι ισοδύναμες (για την απόδειξη βλ. το βιβλίο Ε. Ν. Οικονόμου, *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος Ι, 5η έκδοση, ΠΕΚ, Ηράκλειο, 2003, σελ. 39). Η ισοτροπία αυτή συνεπάγεται ότι οι φυσικοί νόμοι παραμένουν αναλλοίωτοι σε στροφές, δηλαδή, στο μαθηματικό μετασχηματισμό $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i' = R_\phi \mathbf{r}_i$, όπου R_ϕ είναι η πράξη της στροφής κατά γωνία φ γύρω από κάποιο αυθαίρετο άξονα. Το αντίστοιχο μέγεθος που διατηρείται το ονομάζουμε στροφορμή.
Η ολική στροφορμή σωματίων δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\upsilon}_i = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega},} \qquad \text{(II.7)}$$

όπου $\boldsymbol{\omega}$ είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας και $\mathbf{I}$ είναι ο τανυστής της ολικής ροπής αδράνειας που δίνεται από το γενικό τύπο:

$$I_{\mu\nu} = \sum_i \{\delta_{\mu\nu}\mathbf{r}_i^2 - x_i^{(\mu)} x_i^{(\nu)}\} m_i,$$

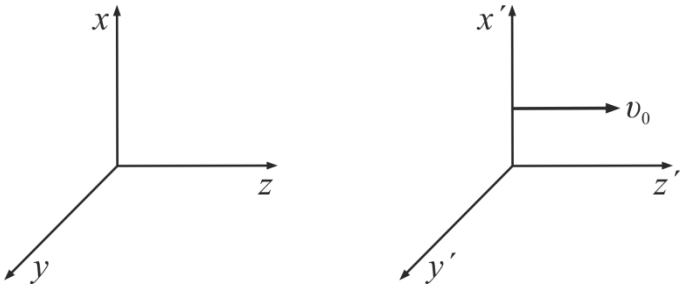
όπου $x_i^{(\mu)}$, $x_i^{(\nu)}$ $\mu, \nu = 1, 2, 3$ είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματίου *i*.

Εάν οι καρτεσιανοί άξονες συμπίπτουν με τους κύριους άξονες, ο τανυστής $\mathbf{I}$ είναι διαγώνιος και η στροφορμή, $\mathbf{L} = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$ όπου $I_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$, κλπ. (Συμβουλευτείτε σχετικά το εξαίρετο βιβλίο των Landau και Lifshitz: *Mechanics,* 3rd edition, Elsevier, Amsterdam, 1976).

ΙΙ.4 Διατήρηση της ταχύτητας του κέντρου μάζας

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται και μάλιστα ισούται με το πηλίκο της ολικής ορμής δια της ολικής σχετικιστικής μάζας.

Η διατήρηση αυτής της ταχύτητας οφείλεται στο ότι οι φυσικοί νόμοι παραμένουν οι ίδιοι για δύο παρατηρητές που κινούνται ο ένας σχετικά με τον άλλο με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_o$. Με άλλα λόγια οι φυσικοί νόμοι παραμένουν αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς σταθερής ταχύτητας. Οι μετασχηματισμοί αυτοί, γνωστοί ως μετασχηματισμοί Lorentz, αποτελούν τη βάση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας και έχουν την ακόλουθη, μάλλον περίπλοκη, μορφή (για την απόδειξη βλ. το βιβλίο Ε. Ν. Οικονόμου, *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος Ι, 5η έκδοση, ΠΕΚ, Ηράκλειο, 2003, σελ. 128, 142-144).



$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \gamma(z - c\beta t), \\ ct' &= \gamma(ct - \beta z), \end{aligned} \qquad \text{(II.8)}$$

όπου

$$\beta = \upsilon_o / c\,,$$

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}\,,$$

υ_o είναι η ταχύτητα κατά τη διεύθυνση z που έχει το σύστημα αναφοράς (με τις τονούμενες χωροχρονικές συντεταγμένες) ως προς το άλλο σύστημα. Στο όριο όπου η ταχύτητα του φωτός τείνει στο άπειρο, οι μετασχηματισμοί του Lorentz ανάγονται στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

$$x' = x,\;\; y' = y,\;\; t' = t,\;\; z' = z - \upsilon_o t\,. \qquad \text{(II.9)}$$

Σημειώστε ότι κάθε τετραδιάνυσμα (όπως είναι, π.χ. το τετραδιάνυσμα ορμής-ενέργειας ($p_x,\, p_y,\, p_z,\, E/c$), ή το τετραδιάνυσμα κυματανύσματος-συχνότητας ($k_x,\, k_y,\, k_z,\, \omega/c$) μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως το

τετραδιάνυσμα (x, y, z, ct). Μπορούμε επομένως να βρούμε αμέσως τον τύπο για το φαινόμενο Doppler στην πλήρη σχετικιστική του διατύπωση (Το φαινόμενο αυτό μας αφορά άμεσα, αφού έτσι προσδιορίζει η τροχαία την ταχύτητα του αυτοκινήτου μας).

$$k_z' = \gamma(k_z - \beta\frac{\omega}{c}),$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_z\right) \Rightarrow \omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \qquad \text{(II.10)}$$

II.5 Μένουν οι φυσικοί νόμοι αναλλοίωτοι σε κατοπτρισμό στο χώρο και στο χρόνο;

Με άλλα λόγια, ένα σύστημα και το κατοπτρικό του ακολουθούν τους ίδιους ακριβώς νόμους; Επίσης, όσον αφορά στους βασικούς νόμους της φύσης, είναι η φορά προς το παρελθόν, ισοδύναμη με τη φορά προς το μέλλον; Θα έλεγε κανείς ότι τίποτε δεν ξεχωρίζει το αριστερά από το δεξιά στο χώρο ή ακόμη και τις δύο αντίθετες κατευθύνσεις στο χρόνο και επομένως θα περίμενε ότι οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα να είναι καταφατικές. Τα πειραματικά δεδομένα έδειξαν όμως ότι οι ασθενείς άλληλεπιδράσεις (και μόνο αυτές) παραβιάζουν σε κάποιο πολύ μικρό βαθμό την ισοδυναμία αριστερά-δεξιά ή την ισοδυναμία παρελθόντος- μέλλοντος (βλέπε το βιβλίο, *Η Φυσική σήμερα*, Τόμος Ι, σελ. 42,43). Κατά συνέπεια οι βασικοί νόμοι της φύσης δεν παραμένουν στην ολότητά τους απολύτως αναλλοίωτοι σε κατοπτρισμούς στο χώρο (οι οποίοι συμβολίζονται με το γράμμα P) , ή στο χρόνο (που συμβολίζονται με το γράμμα T), ή σε συνδυασμένο κατοπτρισμό και στο χώρο και στο χρόνο (PT). Όμως, εάν αυτός ο τελευταίος σύνθετος μαθηματικός μετασχηματισμός ακολουθηθεί από το μετασχηματισμό από σωμάτια σε αντισωμάτια (ή αντιστρόφως) που συμβολίζεται με C τότε ο συνδυασμένος μετασχηματισμός CPT αφήνει αναλλοίωτους τους φυσικούς νόμους. Το αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό CPT έπεται από το αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz.

II.6 Διατήρηση εσωτερικών ιδιοτήτων των σωματίων

Είδαμε ήδη ότι τα σωμάτια με τη βοήθεια των αλληλεπιδράσεων μπορούν να εξαφανισθούν δημιουργώντας άλλα σωμάτια. Αυτές οι διαδικασίες αφανισμού και δημιουργίας οφείλουν να σεβασθούν τους νόμους διατήρησης που αναφέραμε μέχρι τώρα. Σέβονται όμως και κάποιους άλλους νόμους, διατήρησης που αφορούν εσωτερικές ιδιότητες των σωματίων. Τέτοιοι νόμοι διατήρησης που έχουν διαπιστωθεί εμπειρικά, είναι μεταξύ άλλων και οι ακόλουθοι:

Διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου: Το ηλεκτρικό φορτίο ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός ούτε αφανίζεται. Επομένως σε κάθε διαδικασία το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο των εισερχόμενων σωματίων πρέπει να είναι ίσο με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο των εξερχόμενων. Άρα σ' ένα σύστημα που δεν ανταλλάσσει ηλεκτρικά φορτισμένα σωμάτια με το περιβάλλον του, το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου.

Διατήρηση του χρωματικού φορτίου: Το χρωματικό φορτίο ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός ούτε αφανίζεται.

Διατήρηση του βαρυονικού αριθμού: Σε κάθε διαδικασία ο συνολικός βαρυονικός αριθμός των εισερχομένων σωματίων οφείλει να είναι ίσος με το συνολικό βαρυονικό αριθμό των εξερχομένων.

Διατήρηση χωριστά του ηλεκτρονιακού λεπτονικού αριθμού, του μιονικού λεπτονικού αριθμού, και του λεπτονικού αριθμού ταυ[2]**.**

Παρατηρήστε ότι στο διάγραμμα του Σχ. 1.3 (σελ. 29) διατηρείται και ο μιονικός λεπτονικός αριθμός και ο ηλεκτρονιακός λεπτονικός αριθμός.

ΙΙ.7 Επίλεκτα προβλήματα

1. Θεωρήστε ότι το αστρικό κατάλοιπο αμέσως μετά μια έκρηξη σουπερνόβα έχει σφαιρικό σχήμα ακτίνας R=10^9m, ομοιόμορφη κατανομή μάζας, ολική μάζα M=4x10^{30} kg και περιστρέφεται περί τον άξονά του με περίοδο t =2x10^6 s. Στη συνέχεια το αστρικό κατάλοιπο καταρρέει βαρυτικά διατηρώντας τη μάζα του και την ομοιόμορφη κατανομή της μέχρι να γίνει αστέρας νετρονίων με ακτίνα R=10km. Υπολογίστε τη περίοδο περιστροφής του αστέρα νετρονίων που προέκυψε.

2. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της στροφορμής (και αγνοώντας την επίδραση των άλλων πλανητών) δείξτε ότι η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι επίπεδη.

3. Δείξτε το 2° νόμο του Kepler, που λέει ότι η επιβατική ακτίνα που ενώνει τη Γη με τον Ήλιο σαρώνει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.

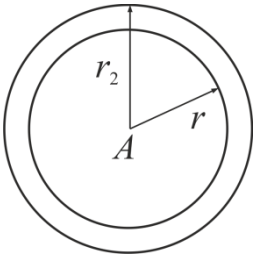
4. Μετρώντας το μήκος κύματος της φασματικής γραμμής H_a σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία του ισημερινού του ηλιακού δίσκου βρίσκουμε μια διαφορά ίση με δλ=$1{,}8\times10^{-12}$ m . Ποια είναι η περίοδος περιστροφής του Ήλιου γύρω από τον άξονά του δεδομένου ότι η ακτίνα του ισούται με 6,96x10^8m.;

5. Αποδείξτε τους ακόλουθους τύπους για τις ροπές αδράνειας των παρακάτω σωμάτων:

---

[2] Βλέπε σελ 33, υποσ. 6 του παρόντος.

(1) Κυκλικού σωλήνα ακτίνων r_1, r_2 ως προς άξονα Α διερχόμενο από το κέντρο του και παράλληλο προς τον σωλήνα



$$\frac{I}{M} = \frac{1}{2}(r_2^2 + r_1^2)\,,\ M = \pi\rho\ell(r_2^2 - r_1^2)\,,$$

ρ : πυκνότητα μάζας,, ℓ : μήκος σωλήνα,
M : μάζα σωλήνα

(2) Σφαιρικό κέλυφος ακτίνων r_1 *και* r_2 ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο του $\dfrac{I}{M} = \dfrac{2}{5}\dfrac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}$

(3) Σφαιρικό κέλυφος ακτίνων r_1 *και* r_2 ως προς άξονα εφαπτόμενο στην εξωτερική επιφάνεια του

$$I' = I + M\,r_2^2$$

όπου I είναι το αποτέλεσμα στο υπ' αρ. 2.

6. Εξηγήστε γιατί δεν πέφτει η κεκλιμένη περιστρεφόμενη σβούρα, αλλά αντίθετα ο άξονας περιστροφής της περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα (αγνοήστε τις τριβές).

7. Μια συμπαγής ομοιογενής σφαίρα ακτίνας *R* και μάζας *M* και ένα στεφάνι ίσης ακτίνας και μάζας κυλίονται χωρίς ολίσθηση σε ένα κεκλιμένο επίπεδο ξεκινώντας από το ίδιο ύψος *h* και με μηδενική αρχική ταχύτητα και στροφορμή. Ποιο σώμα θα φτάσει πρώτο στο υψόμετρο μηδέν και με τι ταχύτητα;

8. Θεωρήστε ένα άπειρο τετραγωνικό περιοδικό πλέγμα που κάθε σημείο του ενώνεται με τα τέσσερα διπλανά του με ίσες αντιστάσεις *R*. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων.

9. Εκτιμήστε το μέγιστο μέγεθος μιας σταγόνας βροχής (που έχει φτάσει σε οριακή ταχύτητα) θεωρώντας ότι καθορίζεται από τη βαρύτητα και την επιφανειακή τάση σ ($\sigma \approx 0,07\,\mathrm{Nt/m}$). Βλ. Quantum, Μάιος/Ιούνιος 94, σελ. 12-15.

Γενική παρατήρηση για θέματα Μηχανικής: Σε μη αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων θα πρέπει να προστεθούν και μη αδρανειακές δυνάμεις όπως είναι η φυγόκεντρος, η Coriolis, κλπ (Βλέπε Landau-Lifshitz, *Mechanics*, 3$^{\eta}$ έκδοση Elsevier, σελ. 126-129).
Π. χ., γιατί δεν πλήττονται από τυφώνες οι δυτικές ακτές των ΗΠΑ, ενώ πλήττονται οι ανατολικές;

10. Υπολογίστε την ανά μονάδα χρόνου περιστροφή του επιπέδου ταλάντωσης του εκκρεμούς του Foucault (βλ. [9], σελ. 129).

11. Θεωρήστε ένα δοχείο σχήματος ορθού πρίσματος με διατομή ορθογωνίου τριγώνου γεμάτο με νερό. Το δοχείο δεν υφίσταται καμία τριβή. Από το προφανές γεγονός ότι το δοχείο δεν κινειίαι (ούτε περιστρέφεται) προκύπτει το πυθαγόρειο θεώρημα. Εξηγήστε πώς.

Παράρτημα III

Στατιστική Φυσική (ΣΦ)

Σύνοψη: *Σκοπός της Στατιστικής Φυσικής είναι αφενός μεν να θεμελιώσει τη Θερμοδυναμική και αφετέρου να δώσει συνταγές για τον υπολογισμό των θερμοδυναμικών ποσοτήτων με αφετηρία τους νόμους της κβαντομηχανικής και τις στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις. Στο παρόν παράρτημα θα περιοριστούμε στην εξέταση συστημάτων που ικανοποιούν και τις δύο ακόλουθες συνθήκες:*
(1) Βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία και
(2) Είναι στατιστικά ανεξάρτητα.

III.1. Η πιθανότητα P_I

Πριν διευκρινίσουμε την έννοια της στατιστικής ανεξαρτησίας θα τονίσουμε ότι η κορυφαία έννοια στη ΣΦ είναι αυτή της πιθανότητας P_I να βρεθεί το υπό εξέταση σύστημα (Σ) στη μικροκατάσταση (μK) Ψ_I , που είναι ιδιοκατάσταση της χαμιλτονιανής του συστήματος με ενέργεια E_I .

Η στατιστική ανεξαρτησία σημαίνει ότι η πιθανότητα P_I δεν εξαρτάται από το σε ποια κατάσταση βρίσκεται ένα οποιοδήποτε άλλο γειτονικό σύστημα Σ΄. Η στατιστική ανεξαρτησία συνεπάγεται ότι η σύνθετη πιθανότητα $\Pi_{I\,J}$ να βρεθεί το μεν σύστημα μας στην κατάσταση Ψ_I και το σύστημα Σ΄ στην κατάσταση $\Psi_J^{(\Sigma')}$ ισούται με

$$\Pi_{I\,J} = P_I P_J^{(\Sigma')} . \qquad \text{(III.1)}$$

Η στατιστική ανεξαρτησία απαιτεί (α) το αμελητέο των αλληλεπιδράσεων του συστήματός μας με τα γειτονικά συστήματα (δηλαδή $E_{\text{int}} \ll E_K$), όπου E_K είναι η ολική εσωτερική κινητική ενέργεια του συστήματός μας και (β) τη διακρισιμότητα του Σ και επομένως την παράκαμψη της γενικευμένης αρχής του Pauli (η οποία δημιουργεί, όπου εφαρμόζεται, στατιστικές εξαρτήσεις).

Η σχέση (III.1) συνεπάγεται ότι ο $\ln \Pi_{I\,J} = \ln P_I + \ln P_J^{(\Sigma')}$. Επιπλέον η P_I και επομένως και ο $\ln P_I$ ικανοποιεί το θεώρημα του Liouville που λέει ότι για ένα κλειστό σύστημα η ποσότητα P_I (άρα και ο $\ln P_I$) διατηρείται (δηλαδή δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου).

Όμως γνωρίζουμε από τη Μηχανική ότι οι μόνες[1] ποσότητες που είναι αθροιστικές και ταυτόχρονα διατηρούνται για ένα κλειστό σύστημα είναι η ενέργεια (όταν $E_{\rm int}$ είναι αμελητέα) και ο αριθμός των σωματίων (όταν δεν υπάρχουν φυσικές διαδικασίες που να εξαφανίζουν ή να δημιουργούν σωμάτια (όπως είναι, π.χ. οι χημικές αντιδράσεις)). Άρα ο $\ln P_I$, που είναι αθροιστικός και διατηρείται, οφείλει να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της ενέργειας και του αριθμού των σωματίων

$$\boxed{\ln P_I = -\alpha - \beta E_I + \gamma N_I}\,, \qquad \text{(III.2)}$$

όπου *α, β, γ* σταθερές (οι *β* και *γ*, αλλά όχι κατ' ανάγκη η *α*, οφείλουν να είναι ίδιες για το Σ και για όλα τα στατιστικώς ανεξάρτητα υποσυστήματά του) και N_I είναι ο αριθμός σωματίων του Σ στην $\mu K\ \Psi_I$. Εάν ο αριθμός των σωματίων δεν διατηρείται (επειδή υπάρχουν φυσικές διαδικασίες που δημιουργούν ή εξαφανίζουν σωμάτια) τότε το N_I δεν πρέπει να εμφανισθεί στον τύπο (III.2) και επομένως *γ*=0.

Ο τύπος (III.2) αποτελεί την *κορυφαία σχέση* της στατιστικής μηχανικής. Ανάλογα με τον τρόπο που ορίζουμε (ή περιορίζουμε) το σύστημα Σ, ο τύπος (III.2) εμφανίζεται συνήθως υπό τρείς διαφορετικές αλλά ισοδύναμες μορφές:

(α) Το σύστημα είναι έτσι ορισμένο (ή περιορισμένο) ώστε να ανταλλάσσει και ενέργεια και σωμάτια με το περιβάλλον. Στην περίπτωση αυτή ούτε το E_I ούτε το N_I είναι εκ των πρότερων δεδομένα και επομένως η (III.2) γράφεται

$$\boxed{P_I = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta E_I + \gamma N_I}}\,, \qquad \text{(III.2α)}$$

όπου η σταθερά Z_G $(\alpha \equiv \ln Z_G)$ προσδιορίζεται από τη συνθήκη νορμαλισμού $\left(\sum_I P_I = 1\right)$

$$Z_G = \sum_I e^{-\beta E_I + \gamma N_I}\ . \qquad \text{(III.3α)}$$

---

[1] Η ολική ορμή και η ολική στροφορμή διατηρούνται επίσης και είναι και αθροιστικές, αλλά σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων η τιμή τους μπορεί να μηδενισθεί και έτσι να απαλειφθούν από την έκφραση για το P_I.

Σημειώστε ότι η άθροιση στην (ΙΙΙ.3α) περιλαμβάνει και άθροιση πάνω σε όλες τις μK για δεδομένο N_I και άθροιση πάνω σε όλα τα N_I από $N_I = 0$ μέχρι $N_I = \infty$. Η ποσότητα Z_G ονομάζεται **μεγάλη συνάρτηση επιμερισμού** (grand partition function), η δε συναρτησιακή εξάρτηση της P_I σύμφωνα με τον τύπο (ΙΙΙ.2α) ονομάζεται **μεγαλοκανονική συλλογή** (ΜΚΣ, grand canonical ensemble).

(β) Το σύστημα είναι έτσι ορισμένο (ή περιορισμένο) ώστε να ανταλλάσσει ενέργεια αλλά *όχι* σωμάτια με το περιβάλλον. Στη περίπτωση αυτή το N_I είναι σταθερό (ίσο με N) και ο όρος γN_I μπορεί να ενσωματωθεί μαζί με τη σταθερά $-\alpha$ στο βασικό τύπο (ΙΙΙ.2), ο οποίος στην περίπτωση αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\boxed{P_I = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_I},\ N_I = \text{σταθ.} = N}, \qquad \text{(ΙΙΙ.2β)}$$

όπου η σταθερά Z προσδιορίζεται πάλι από τη συνθήκη νορμαλισμού $\left(\sum_I P_I = 1\right)$:

$$Z = \sum_I e^{-\beta E_I}. \qquad \text{(ΙΙΙ.3β)}$$

Η παραπάνω άθροιση είναι πάνω σε όλες τις μK του Σ που έχουν αριθμό σωματίων εκ των προτέρων δεδομένο ($\equiv N$). Το Z ονομάζεται **συνάρτηση επιμερισμού** και η εξάρτηση (ΙΙΙ.2β) είναι γνωστή ως **κανονική συλλογή** (ΚΣ). Συγκρίνοντας την (ΙΙΙ.2α) με την (ΙΙΙ.2β) έπεται ότι $Z = Z_G \exp(-\gamma N)$.

(γ) Το σύστημα είναι έτσι ορισμένο (ή περιορισμένο) ώστε να μην ανταλλάσει ούτε σωμάτια ούτε ενέργεια με το περιβάλλον. Στην περίπτωση αυτή τόσο το E_I όσο και το N_I είναι εκ των προτέρων δεδομένα και επομένως το δεξιό μέλος της βασικής σχέσης (ΙΙΙ.2) αποτελείται από σταθερούς όρους. Άρα

$$\boxed{P_I = \frac{1}{\Gamma},\ \ N_I = N,\ \ E_I = U}. \qquad \text{(ΙΙΙ.2γ)}$$

όπου η σταθερά Γ προσδιορίζεται ξανά από τη συνθήκη νορμαλισμού $\left(\sum_I P_I = 1\right)$, η οποία στη προκειμένη περίπτωση οδηγεί στη σχέση:

$$\Gamma = \text{συνολικός αριθμός μικροΚαταστάσεων του } \Sigma \text{ που έχουν δεδομένη ενέργεια } (E_I = U) \text{ και δεδομένο αριθμό σωματίων } (N_I = N). \qquad \text{(ΙΙΙ.3γ)}$$

Η σχέση (ΙΙΙ.2γ) σημαίνει ότι όλες οι μικροΚαταστάσεις του Σ που αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια και στον ίδιο αριθμό σωματίων είναι ισοπίθανες. Η ισοπίθανη αυτή κατανομή ονομάζεται **μικροκανονική συλλογή** (μΚΣ).

Από τις σχέσεις (ΙΙΙ.2α), (ΙΙΙ.2β), και (ΙΙΙ.2γ) έπεται ότι $\Gamma = Z\exp(\beta U) =$ $= Z_G \exp(\beta U - \gamma N)$

ΙΙΙ.2. Σύνδεση με την εντροπία και τη θερμοδυναμική

Σύμφωνα με τη σχέση (3.2) η εντροπία *S* για τη *μικροκανονική συλλογή* ορίζεται από τη σχέση

$$S \equiv k_B \ln \Gamma \,, \tag{ΙΙΙ.4}$$

ή λόγω της σχέσης (ΙΙΙ.2γ)

$$S = -k_B \ln P_I \,. \tag{ΙΙΙ.4α}$$

Η γενίκευση για τις άλλες συλλογές, όπου το P_I δεν είναι το ίδιο για όλα τα Ψ_I, βασίζεται στη εύλογη επιλογή να χρησιμοποιηθεί στη θέση του $\ln P_I$ η μέση τιμή $\langle \ln P_I \rangle$ των διαφόρων τιμών του $\ln P_I$. Αλλά $\langle \ln P_I \rangle \equiv \Sigma_I P_I \ln P_I$. Επομένως ο πιο γενικός ορισμός της εντροπίας που ανάγεται στον (ΙΙΙ.4) για τη μικροκανονική συλλογή είναι ο ακόλουθος

$$\boxed{S \equiv -k_B \Sigma_I P_I \ln P_I} \,. \tag{ΙΙΙ.5}$$

Έχοντας δώσει το γενικό ορισμό της εντροπίας μέσω της P_I (η P_I συνδέεται με τη χαμιλτονιανή του συστήματος) είμαστε πια σε θέση να ορίσουμε όλες τις θερμοδυναμικές ποσότητες. Έτσι η θερμοκρασία ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{T} \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} , \tag{ΙΙΙ.6}$$

όπου στη γενική περίπτωση η εσωτερική ενέργεια δίνεται από τη σχέση $U \equiv \sum_I P_I E_i$ και ο μέσος αριθμός σωματίων από τη σχέση $N \equiv \sum_I P_I N_I$. Από την (ΙΙΙ.6) και την (ΙΙΙ.2β) έπεται ότι

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \,. \tag{ΙΙΙ.6΄}$$

Η πίεση προκύπτει από τη σχέση:

$$\frac{P}{T} \equiv (\frac{\partial S}{\partial V})_{U,N} . \qquad \text{(III.7)}$$

Από τη μερική παράγωγο $(\partial S / \partial N)_{U,V}$ ορίζουμε το *χημικό δυναμικό* μ:

$$\frac{\mu}{T} \equiv - (\frac{\partial S}{\partial N})_{U,V} . \qquad \text{(III.8)}$$

Από την (III.8) και την (III.2α) προκύπτει ότι

$$\gamma = \beta \mu \equiv \frac{\mu}{k_B T} . \qquad \text{(III.8΄)}$$

Θυμίζουμε την αξία του χημικού δυναμικού μ που έγκειται μεταξύ άλλων στο ότι συνδέεται άμεσα με την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs, *G*, με την απλή σχέση $G = N \mu$. Επί πλέον σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας το χημικό δυναμικό έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο του συστήματος (όπως και η θερμοκρασία). Εάν δε, σε καταστάσεις μη ισορροπίας υπάρχουν διαφορές στις τιμές του μ από θέση σε θέση, θα υπάρχει ροή[2] *σωματίων* από την περιοχή υψηλού μ προς την περιοχή χαμηλού μ μέχρι να εξισωθούν οι τιμές του μ. (Αντίστοιχα συμβαίνουν όταν εμφανίζονται θερμοκρασιακές διαφορές, οπότε υπάρχει ροή *ενέργειας* μέχρι να εξισωθούν οι τιμές της θερμοκρασίας).

Από τη σχέση

$$dS = (\partial S / \partial \mathrm{U})_{V,N} dU + (\partial S / \partial V)_{U,N} dV + (\partial S / \partial N)_{U,V} dN \qquad \text{(III.9)}$$

και τις σχέσεις (III.6) έως (III.8) προκύπτει η σχέση[3]:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN , \qquad \text{(III.10)}$$

που είναι ουσιαστικά ο Πρώτος Νόμος (σχέση (3.3) (*με μια διαφορά που θα σχολιάσουμε αμέσως μετά)*. Για την απόδειξη αρκεί να θέσουμε $đ\, W=PdV$, $đ\, E_m=\mu dN$, και $đ\, \mathrm{Q} = TdS$. Αυτή η τελευταία σχέση συμπίπτει με την (3.4γ) εάν $đ\, S_{\varepsilon\sigma}=0$. Και εδώ έγκειται η διαφορά. Η σχέση (III.5) δίνει την Εντροπία για κατάσταση *θερμοδυναμικής ισορροπίας*. Επομένως όλες οι (απειροστές) μεταβολές που εμφανίζονται στους τύπους (III.6) έως και (III.10) αφορούν φυσικές διαδικασίες όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές *U, V, N* αλλάζουν τόσο αργά ώστε να μη βγούμε καθόλου από τη θερμοδυναμική ισορροπία και επομένως να έχουμε $đ\, S_{\varepsilon\sigma}=0$ και $dS=dS_{\varepsilon\xi}$. Δεν πρέπει

---

[2] Η ροή σωματίων είναι ανάλογη της ποσότητας $-\partial\mu / \partial x$, όπως η ροή ενέργειας είναι ανάλογη της ποσότητας $-\partial T / \partial x$. (Το μείον πρόσημο βολεύει επειδή η ροή είναι από τις υψηλότερες τιμές προς τις χαμηλότερες).

[3] και αντίστροφα από τη σχέση (III.10) προκύπτουν οι τύποι (III.6) έως (III.8)

να ξεχνάμε όμως ότι υπάρχουν και άλλες διαδικασίες (όπως είναι η διάχυση, η μεταφορά θερμότητας υπό διαφορά θερμοκρασίας, οι χημικές αντιδράσεις, κλπ) που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του συστήματος και δημιουργούν μεταβολές στην εντροπία έστω και αν οι μεταβλητές U, V, N μένουν σταθερές. Επομένως όταν εξετάζουμε μεταβολές θερμοδυναμικών ποσοτήτων θα πρέπει να ξεκαθαρίζουμε αν μιλάμε για μεταβολές του τύπου $đ S_{\varepsilon\sigma}=0$ ή του τύπου $đ S_{\varepsilon\sigma}>0$ *(με* $đ Q= đ W= đ E_m=0$*)* ή σύνθετου τύπου όπου $đ S_{\varepsilon\sigma}>0$ και ένα τουλάχιστον εκ των $đ Q$, $đ W$, $đ E_{\rm m}$ να είναι διάφορο του μηδενός. Σ' αυτήν την τελευταία περίπτωση θα έχουμε για τη μεταβολή της εντροπίας: $dS = đ S_{\varepsilon\xi}+ đ S_{\varepsilon\sigma}$ όπου το $đ S_{\varepsilon\xi}$ δίνεται από τον τύπο $đ S_{\varepsilon\xi} = đ Q / T$ και το $đ S_{\varepsilon\sigma} >0$. Επομένως ο τύπος (ΙΙΙ.10) θα γίνει:

$$dU = T\,dS - P\,dV + \mu\,dN - T\,đ S_{\varepsilon\sigma}\,, \qquad \text{(III.10′)}$$

από τον οποίο έπεται η σχέση (3.1), εάν λάβουμε υπόψη ότι $đ W= PdV$, $đ E_m=\mu dN$ και $đ S_{\varepsilon\sigma} \geq 0$.

ΙΙΙ.3. Ιδανικά αέρια: Κατανομές Fermi-Dirac, Bose-Einstein, Boltzmann

Με τον όρο ιδανικά αέρια εννοούμε ένα σύνολο *μη αλληλεπιδρώντων* N σωματίων που το καθένα τους καταλαμβάνει έναν όγκο V. Χρειάζεται να θεωρήσουμε ότι τα σωμάτια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους για να ισχύει η στατιστική ανεξαρτησία του κάθε υποσυστήματος που θα εξετάσουμε. Το κάθε σωμάτιο χαρακτηρίζεται από την ορμή του $\hbar\mathbf{k}$ και την προβολή s_z του σπιν του. Η ενέργεια του κάθε σωματίου ε είναι μια συνάρτηση του $\mathbf{k}$ και ενδεχομένως του s_z. Τα σωμάτια μπορεί να είναι φερμιόνια (δηλαδή με ημιακέραιο σπιν) ή μποζόνια (με ακέραιο σπιν). Θέλουμε να βρούμε υπό συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας το μέσο αριθμό σωματίων που βρίσκονται στην κατάσταση $\mathbf{k}$, s_z με ενέργεια ε.

Θα ξεκινήσουμε με τον τύπο (ΙΙΙ.2α) που τον εφαρμόζουμε στο σύστημα που αποτελείται *από το σύνολο των σωματίων που βρίσκονται στην μονοσωματιδιακή μικροκατάσταση* $i \equiv \mathbf{k}, s_z$. Δηλαδή το μεν σύστημα χαρακτηρίζεται από τους δείκτες $\mathbf{k}, s_z$, η δε κατάστασή του από τα πόσα σωμάτια έχει. Έστω ότι τα σωμάτια είναι ημιακέραιου σπιν: Μια δυνατότητα είναι να μην υπάρχει κανένα σωμάτιο στην μικροκατάσταση i. Τότε, στον τύπο (ΙΙΙ.2α) πρέπει να θέσουμε $E_I = 0$ και $N_I = 0$, επομένως $P_I = 1/Z_G$. Μία άλλη δυνατότητα είναι να έχουμε ένα μόνο σωμάτιο στη μικροκατάσταση i. Τότε στον τύπο (ΙΙΙ.2α) πρέπει να θέσουμε $E_I = \varepsilon_i$,

N_I=1, οπότε έχουμε $P_I = \exp[-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T]/Z_G$. Λόγω της αρχής του Pauli δεν υπάρχει καμιά άλλη δυνατότητα. Εξαιτίας του ότι $\sum_I P_I = 1$ έχουμε:

$$(1 + e^{-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T})/Z_G = 1,$$

από την οποία προκύπτει η τιμή του Z_G. Η μέση τιμή $\bar{n}_i$ ισούται με

$$\bar{n}_i = 0 \cdot \frac{1}{Z_G} + 1 \cdot \frac{e^{-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T}}{Z_G} = \frac{e^{-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T}}{e^{-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T} + 1}$$

και είναι γνωστή ως κατανομή **Fermi-Dirac**.

Για σωμάτια με ακέραιο σπιν, οι δυνατότητες δεν σταματάνε στο ένα σωμάτιο αλλά συνεχίζονται μέχρι το άπειρο. Η προκύπτουσα σειρά είναι του τύπου γεωμετρικής σειράς και αθροίζεται πολύ εύκολα οπότε προκύπτει ο τύπος

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T} \pm 1}}, \qquad \text{(III.11)}$$

με το κάτω πρόσημο, ο οποίος είναι γνωστός ως κατανομή **Bose-Einstein.** Εάν το σύστημα είναι τόσο αραιό ώστε $\bar{n}_i \ll 1$, τότε ο παρονομαστής είναι πολύ μεγαλύτερος από 1 και επομένως το ± 1 στη σχέση (III.11) μπορεί να παραλειφθεί, οπότε έχουμε την προσεγγιστική σχέση

$$\boxed{\bar{n}_i \approx e^{-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T}, \quad \bar{n}_i \ll 1}, \qquad \text{(III.12)}$$

που είναι γνωστή ως **κατανομή Boltzmann** και αποτελεί το κοινό όριο των κατανομών Fermi-Dirac και Bose-Einstein, όταν το ιδανικό αέριο είναι τόσο αραιό ώστε η πιθανότητα κατάληψης μιας μονοσωματιδιακής μικροκατάστασης από περισσότερα από ένα σωμάτια να είναι τελείως αμελητέα. Αυτή ακριβώς είναι η περίπτωση των συνήθων ατομικών ή μοριακών αερίων. Η κατανομή Boltzmann είναι συνήθως επαρκής και για τα ηλεκτρόνια στη ΖΑ ή τις οπές στη ΖΣ ενός ημιαγωγού. Αντίθετα τα 'ελεύθερα' ηλεκτρόνια ενός μετάλλου απαιτούν τη χρήση της κατανομής Fermi-Dirac.

Σημειώστε ότι το χημικό δυναμικό που εμφανίζεται στους τύπους (III.11) και (III.12) μπορεί και πρέπει να εκφρασθεί μέσω του συνολικού μέσου αριθμού N σωματίων του αερίου χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$N = \sum_i \bar{n}_i = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \rho(\varepsilon)\, \bar{n}_i(\varepsilon). \qquad \text{(III.13)}$$

Για τον ορισμό του $\rho(\varepsilon)$ και για το πώς το άθροισμα πάνω σε όλες τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις μετατρέπεται σε ένα ολοκλήρωμα ως προς την ενέργεια, βλέπε το Παράρτημα V που ακολουθεί.

ΙΙΙ.4. Επίλεκτα προβλήματα

1. Αποδείξτε τις σχέσεις (ΙΙΙ.6΄) και (ΙΙΙ.8΄).
(Βλέπε το βιβλίο Ε. Ν. Οικονόμου, *Στατιστική Φυσική και Θερμοδυναμική*, 2η έκδοση, ΠΕΚ, Ηράκλειο, 2001, σελ. 80, 81)

2. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μεταξύ Γ και Z_G ή Z δείξτε ότι

$$F = -k_B T \ln Z, \qquad \Omega = -k_B T \ln Z_G .$$

3. Θεωρήστε ένα σωμάτιο μάζας m που κινείται ελεύθερα σ' ένα χώρο όγκου V και του οποίου το μέτρο της ταχύτητάς του κυμαίνεται από μηδέν μέχρι μία μέγιστη τιμή $|\boldsymbol{v}_o|$, όπου $\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_o|^2 = U/N$. Οι διάφορες θέσεις που μπορεί να βρεθεί είναι ανάλογες του όγκου V και οι διάφορες ταχύτητες που μπορεί να έχει είναι ανάλογες του όγκου στο χώρο των ταχυτήτων, $\frac{4\pi}{3}|\boldsymbol{v}_o|^3 \propto (U/N)^{3/2}$. Άρα $\Gamma_1 \propto V(U/N)^{3/2}$.
Έστω τώρα ότι έχουμε N όμοια *ανεξάρτητα* σωμάτια. Τότε κάθε μία από τις Γ_1 καταστάσεις του ενός σωματίου μπορεί να συνδυασθεί με οποιαδήποτε από τις Γ_1 καταστάσεις ενός άλλου, κοκ., ώστε τελικά $\Gamma_N \propto \{V(U/N)^{3/2}\}^N$. Επομένως η εντροπία θα ισούται με:

$$S = Nk_B \ell nV + \frac{3}{2} Nk_B \ell nU + \sigma\tau\alpha\theta .^{4}.$$

Η παραπάνω σχέση συνδυαζόμενη με την (ΙΙΙ.7) δίνει το νόμο των τελείων αερίων:

$$\frac{P}{T} = \frac{Nk_B}{V}, \text{ ή } PV = Nk_B T .$$

Επίσης σε συνδυασμό με την (ΙΙΙ.6) δίνει:

$$\frac{1}{T} = \frac{3}{2} Nk_B \frac{1}{U}, \text{ ή } U = \frac{3}{2} Nk_B T .$$

Σημειώστε ότι για την απόδειξη του τύπου (ΙΙΙ.11) ως σύστημα θεωρήσαμε όχι ένα σωμάτιο (γιατί λόγω Pauli τα κάθε σωμάτιο δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητο), αλλά το όποιο σύνολο των σωματίων που καταλαμβάνουν μια οποιαδήποτε μονοσωματιδιακή μικροκατάσταση. Εντούτοις, υπό συνθήκες όπου ισχύει η κατανομή Boltzmann, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονική συλλογή για κάθε ένα σωμάτιο (γιατί;). Συγκρίνοντας τότε την (ΙΙΙ.3β) με την (ΙΙΙ.12) υπολογίστε τη *σταθ.* στον παραπάνω τύπο για την εντροπία.

---

[4] Η σταθερά αυτή εξαρτάται από το *N,* παγκόσμιες σταθερές και τα φυσικά χαρακτηριστικά των σωματίων, όπως, π.χ., τη μάζα. Μπορείτε να προσδιορίσετε αυτήν την εξάρτηση;

Παράρτημα IV

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Το ηλεκτρομαγνητικό (ΗΜ) πεδίο καθορίζεται από δύο διανυσματικά μεγέθη, το ηλεκτρικό, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, και το μαγνητικό, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Το ΗΜ πεδίο δρα σε κάθε σωμάτιο που φέρει ηλεκτρικό φορτίο, έστω q, και του ασκεί μια δύναμη, $\mathbf{F}$, που δίνεται από τον λεγόμενο τύπο του Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}), \text{ SI}, \tag{IV.1}$$

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\boldsymbol{\upsilon}}{c} \times \mathbf{B}\right), \text{ GCGS}. \tag{IV.2}$$

Σημειώστε ότι οι τιμές των πεδίων $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ εξαρτώνται από τη σταθερή ταχύτητα του συστήματος συντεταγμένων, από την οποία εξαρτάται το $\boldsymbol{\upsilon}$ και σε ορισμένες περιπτώσεις, για κατάλληλη τιμή αυτής της ταχύτητας, είναι δυνατόν να έχουμε μόνο μαγνητικό, ή μόνο ηλεκτρικό πεδίο.

Πηγές του ηλεκτρικού πεδίου είναι τα ηλεκτρικά φορτία και οι μεταβολές του μαγνητικού πεδίου.

Πηγές του μαγνητικού πεδίου είναι τα ηλεκτρικά ρεύματα και οι μεταβολές του ηλεκτρικού πεδίου.

Έτσι, έστω και αν δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα, η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου γεννάει (μεταβαλλόμενο) μαγνητικό πεδίο που με τη σειρά του γεννάει ηλεκτρικό πεδίο, κοκ. Με αποτέλεσμα το ΗΜ πεδίο να αυτοσυντηρείται, να προχωράει στο χώρο (με την ταχύτητα του φωτός) και να αποκτάει ουσιαστική φυσική οντότητα.

Οι σχέσεις που προσδιορίζουν το ΗΜ πεδίο είναι οι περίφημες τέσσερις εξισώσεις του Maxwell, που έχουν κι αυτές υδροδυναμικό χαρακτήρα με την έννοια ότι η ροή και η κυκλοφορία (και του $\mathbf{E}$ και του $\mathbf{B}$) συνδέονται άμεσα με τις πηγές των πεδίων αυτών:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_o} Q, \tag{IV.2α}$$

$$K_{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \varphi_B}{\partial t}, \qquad \text{(IV.2β)}$$

$$\Phi_{\mathbf{B}} = 0, \qquad \text{(IV.2γ)}$$

$$K_{\mathbf{B}} = \mu_o I + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \varphi_{\mathbf{E}}}{\partial t}. \qquad \text{(IV.2δ)}$$

Οι εξισώσεις (IV.2α-δ)[1] είναι διατυπωμένες στο σύστημα SI. Στο σύστημα G-CGS έχουν της εξής μορφή:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = 4\pi Q, \qquad \text{(IV.2α′)}$$

$$K_{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_B}{\partial t}, \qquad \text{(IV.2β′)}$$

$$\Phi_{\mathbf{B}} = 0, \qquad \text{(IV.2γ′)}$$

$$K_{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_{\mathbf{E}}}{\partial t}. \qquad \text{(IV.2δ′)}$$

Η εξίσωση (IV.2 α) λέει ότι η ροή $\Phi_{\mathbf{E}}$ του πεδίου **E** (βλέπε την επόμενη σελίδα για τον ορισμό της ροής) μέσω μιας κλειστής επιφάνειας ισούται με το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια αυτή δια της επιτρεπτότητας του κενού ϵ_o. Η εξίσωση (IV.2β) λέει ότι η κυκλοφορία του **E** σε μια κλειστή γραμμή (που δεν είναι τίποτε άλλο παρά η γνωστή μας ηλεκτρεργετική δύναμη) ισούται με μείον τη χρονική παράγωγο της ροής του μαγνητικού πεδίου δια μέσου μιας οποιασδήποτε επιφάνειας που καταλήγει στην υπόψη κλειστή γραμμή. Η εξίσωση αυτή είναι ο γνωστός νόμος του Faraday, στον οποίο βασίζεται η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Η εξίσωση (IV.2γ) λέει ότι η μαγνητική ροή σε μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν, επειδή δεν υπάρχουν μαγνητικά φορτία. Τέλος, η εξίσωση (IV.2δ) λέει ότι η κυκλοφορία του μαγνητικού πεδίου σε μια κλειστή γραμμή ισούται με τη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος μέσω μιας επιφάνειας που καταλήγει στην κλειστή γραμμή (επί τη μαγνητική διαπερατότητα του κενού μ_o στο SI) συν τη χρονική παράγωγο της ροής του ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου μιας επιφάνειας που καταλήγει στην υπόψη κλειστή γραμμή (επί την ποσότητα $\epsilon_o \mu_o$ στο SI). Η εξίσωση αυτή είναι ο νόμος του Ampere όπως συμπληρώθηκε από τον Maxwell.

[1] Ο εξοικειωμένος αναγνώστης καλείται να επαναδιατυπώσει τις εξισώσεις (IV.2α-,2δ) και (IV.2α′-.2δ′) σε διαφορική μορφή (βλέπε Κεφ. 5).

Οι έννοιες της ροής και της κυκλοφορίας μπορούν να ορισθούν για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, ως εξής:

Ροή μέσω μιας επιφάνειας A:

$$\varphi_A \equiv \int\int_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}\,. \tag{IV.3}$$

Κυκλοφορία (ή στροβιλισμός) σε μια κλειστή γραμμή L:

$$K_L \equiv \oint_L \mathbf{E}\cdot d\ell\,. \tag{IV.4}$$

Εάν η επιφάνεια A είναι κλειστή χρησιμοποιούμε το σύμβολο Φ_A. Υπάρχει ένα μαθηματικό θεώρημα που λέει ότι, εάν γνωρίζουμε τη ροή ενός διανυσματικού πεδίου σε οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια και την κυκλοφορία σε οποιαδήποτε κλειστή γραμμή, τότε το πεδίο είναι μονότροπα καθορισμένο.

Οι παγκόσμιες σταθερές ϵ_o και μ_o ισούνται με:

$$\epsilon_o = 8{,}854187\ \ldots\quad \mathrm{F\,m^{-1}}, \tag{IV.5}$$

$$\mu_o = 4\pi\times 10^{-7}\qquad \mathrm{N\,A^{-2}}, \tag{IV.6}$$

$$\epsilon_o\mu_o = \frac{1}{c^2}\,,\quad \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = Z_o = 376{,}73\ \Omega\,. \tag{IV.6′}$$

Βάσει του θεωρήματος για τη ροή και την κυκλοφορία που αναφέραμε προηγουμένως, οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell προσδιορίζουν μονοσήμαντα τα αλληλένδετα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ (με την προϋπόθεση ότι τα Q και I καθώς και οι αρχικές συνθήκες είναι γνωστά).

Θα εξετάσουμε αμέσως παρακάτω μια ειδική κατηγορία λύσεων των εξισώσεων του Maxwell θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν φορτία και ρεύματα. Η κατηγορία αυτή έχει ιδιαίτερη αξία γιατί πιο γενικές λύσεις μπορούν να ευρεθούν ως υπέρθεση των ειδικών αυτών λύσεων. Η κάθε λύση, που ονομάζεται *επίπεδο κύμα*, χαρακτηρίζεται κατ' αρχή από ένα κυματάνυσμα $\mathbf{k}$ και από μια συχνότητα ω. Η κατεύθυνση του $\mathbf{k}$ δείχνει την κατεύθυνση διάδοσης του ΗΜ κύματος και το μέτρο του συνδέεται με το μήκος κύματος, $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$. Το ω συνδέεται με την περίοδο του κύματος T, με τη γνωστή σχέση $\omega = 2\pi/T$. Η εξάρτηση των διανυσμάτων $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ και $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ από τη θέση και το χρόνο θα υποτεθεί ότι είναι της μορφής ενός επίπεδου κύματος και στη συνεχεία θα ελέγξουμε εάν και υπό ποιες προϋποθέσεις τα επίπεδα κύματα ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell. Τα επίπεδα κύματα έχουν τη μορφή

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_o e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}+\mathbf{E}_o^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\ , \tag{IV.7}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_o e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}+\mathbf{B}_o^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\ . \tag{IV.8}$$

Η γραφή μέσω εκθετικών αντί μέσω ημιτόνων ή συνημίτονων διευκολύνει τις πράξεις τις οποίες θα εκτελέσουμε κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο του δεξιού σκέλους των σχέσεων (IV.7-8). Εάν αυτός ο πρώτος όρος ικανοποιεί τις εξισώσεις του Maxwell, θα τις ικανοποιεί αναγκαστικά και ο δεύτερος (αφού οι συντελεστές των εξισώσεων του Maxwell είναι πραγματικοί αριθμοί), άρα και το άθροισμα τους (αφού οι εξισώσεις του Maxwell είναι γραμμικές).

Έχουμε λοιπόν, λαμβάνοντας υπόψη τις (IV.2) και τις (IV.7 και .8)

$$\Phi_{\mathbf{E}}=0\Rightarrow\mathbf{E}_o\perp\mathbf{k}\ , \tag{IV.9α}$$

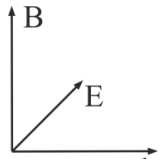
$$\Phi_{\mathbf{B}}=0\Rightarrow\mathbf{B}_o\perp\mathbf{k}\ , \tag{IV.9β}$$

$$K_{\mathbf{E}}=-\frac{\partial\varphi_{\mathbf{B}}}{\partial t}\Rightarrow\mathbf{k}\times\mathbf{E}_o=\omega\mathbf{B}_o\ , \tag{IV.9γ}$$

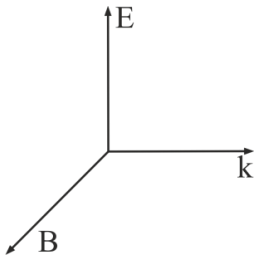
$$K_{\mathbf{B}}=\mu_o\epsilon_o\frac{\partial\varphi_{\mathbf{E}}}{\partial t}\Rightarrow\mathbf{k}\times\mathbf{B}_o=-\omega\epsilon_o\mu_o\mathbf{E}_o\ . \tag{IV.9δ}$$

(Η απόδειξη των σχέσεων (IV.9α-δ) γίνεται πολύ εύκολα, εάν οι εξισώσεις του Maxwell γραφούν σε διαφορική μορφή. Βλέπε Κεφ.5).

Οι παραπάνω σχέσεις[2] σημαίνουν ότι τα **E** και **B** είναι κάθετα στο **k** και κάθετα μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχ. IV.1α



Σχ. IV.1β

[2] Θυμίζουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα κάθετο και στα δύο διανύσματα με μέτρο το γινόμενο των μέτρων τους επί το ημίτονο της γωνίας τους και φορά που καθορίζεται από τον αντίχειρα του δεξιού χεριού για στροφές από το πρώτο διάνυσμα προς το δεύτερο.

Πολλαπλασιάζοντας την (IV.9γ) εξωτερικά επί $\mathbf{k}$ (από αριστερά), χρησιμοποιώντας τη μαθηματική ταυτότητα $\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_o)=-\mathbf{k}^2\mathbf{E}_o$ και τη σχέση (IV.9δ) βρίσκουμε ότι

$$-\mathbf{k}^2\mathbf{E}_o=\omega\mathbf{k}\times\mathbf{B}_o=-\omega^2\epsilon_o\mu_o\mathbf{E}_o\,,$$

από την οποία έπεται ότι

$$\frac{\omega}{k}=\frac{\lambda}{T}=\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_o\mu_o}}\ , \tag{IV.10}$$

όπου υ είναι η ταχύτητα διάδοσης του ΗΜ κύματος στο κενό. Αντικαθιστώντας τις τιμές των ε_o και μ_o βρίσκουμε ότι $\upsilon=c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Δύσκολα θα αποφύγει κανείς την υπόθεση (η οποία επιβεβαιώνεται από μία σειρά πειραμάτων) ότι και το ορατό φως δεν είναι τίποτε άλλο παρά ηλεκτρομαγνητικό κύμα (μιας ορισμένης περιοχής συχνοτήτων ή μηκών κύματος) όπως και τα άλλα κύματα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος το οποίο εικονίζεται στο Σχ. IV.2

Το ΗΜ κύμα φέρει και μεταφέρει ενέργεια, ορμή και στροφορμή. Η ροή της ενέργειας $\mathbf{S}$, (δηλαδή η ΗΜ ενέργεια που διασχίζει μια επιφάνεια τοποθετημένη κάθετα στο $\mathbf{k}$ ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας) δίνεται από τον τύπο (*διάνυσμα του Poynting*):

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_o}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\ \text{, SI}\,, \tag{IV.11}$$

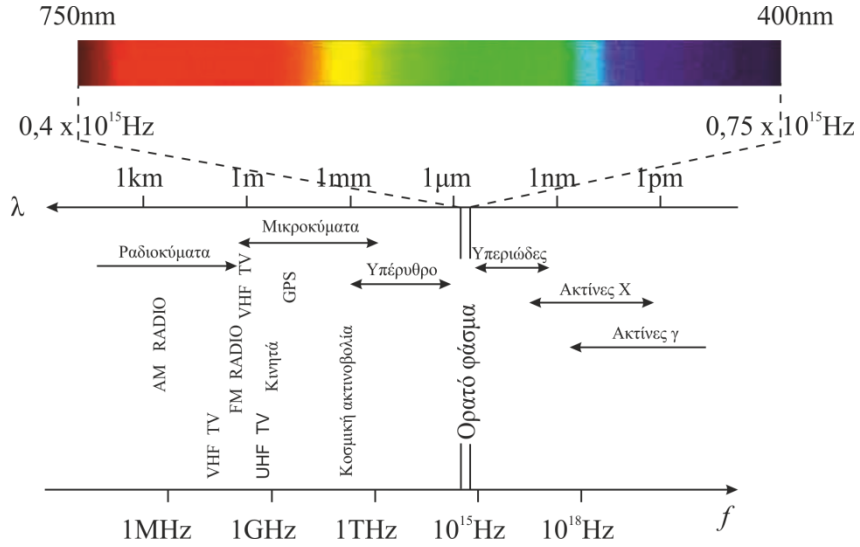
$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\ \text{, G-CGS}\,. \tag{IV.11΄}$$

Αλλά η ροή της ενέργειας ισούται με την πυκνότητα της ενέργειας, u επί την ταχύτητα[3] c, $|\mathbf{S}|=u\,c$. Επομένως συνδυάζοντας τις σχέσεις (IV.11) και (IV.9γ,δ) βρίσκουμε για την πυκνότητα ΗΜ ενέργειας, u, την εξής σχέση που ισχύει γενικά:

$$u=\tfrac{1}{2}\epsilon_o\mathbf{E}^2+\tfrac{1}{2}\frac{1}{\mu_o}\mathbf{B}^2\ \text{SI (για G-CGS, βλ. (IV.12) και (IV.12')).}$$

Λόγω της σχέσης (II.3), η οποία στην περίπτωση όπου η μάζα ηρεμίας είναι μηδέν, γίνεται $E=c\,p$, έπεται ότι η πυκνότητα του μέτρου της ορμής $\mathbf{P}$

[3] Η ροή οποιουδήποτε μεγέθους ισούται με την πυκνότητα του μεγέθους αυτού επί την ταχύτητά του. Π.χ. η ροή μάζας ενός υγρού ισούται με $\rho_m\boldsymbol{\upsilon}$, η ροή ηλεκτρικού φορτίου (δηλαδή το ηλεκτρικό ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας) ισούται με $\rho_q\boldsymbol{\upsilon}$.



Σχ. IV.2 *Διαμερισμός της συχνότητας* $f = \omega / 2\pi$ *(ή του μήκους κύματος* λ*) σε περιοχές και αντίστοιχες ονομασίες των ΗΜ κυμάτων για κάθε περιοχή. (*$\lambda \cdot f = c \approx 3\times 10^8$ m*).*

του ΗΜ κύματος, p, ισούται με $u / c = |\mathbf{S}| / c^2$.

Ολοκληρώνοντας ως προς τον όγκο, βρίσκουμε την συνολική ενέργεια και ορμή του ΗΜ κύματος:

$$U = \frac{\epsilon_o}{2}\int dV \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_o}\int dV \mathbf{B}^2 \ , \text{SI} \ , \qquad \text{(IV.12)}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_o \int (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\, dV \ , \text{SI} \ . \qquad \text{(IV.13)}$$

Στο σύστημα G-CGS οι παραπάνω σχέσεις έχουν την εξής διατύπωση:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int dV\, \mathbf{E}^2 + \frac{1}{8\pi}\int dV\, \mathbf{B}^2 \ , \text{G-CGS} \ , \qquad \text{(IV.12′)}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c}\int dV (\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \ , \text{G-CGS} \ . \qquad \text{(IV.13′)}$$

Η συνολική ενέργεια, U, και η συνολική ορμή, P, ενός επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι στην πραγματικότητα κβαντισμένες σε ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής αδιαίρετης μονάδας που έχει ενέργεια $\varepsilon = \hbar\omega$ και ορμή $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, (όπου $\hbar$ είναι η λεγόμενη σταθερά του Planck διαιρεμένη με το 2π). Αυτή η βασική αδιαίρετη μονάδα (για δεδομένο $\mathbf{k}$ και επομένως $\omega = ck$) είναι το στοιχειώδες κυματοσωμάτιο της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης και ονομάζεται **φωτόνιο**. Επομένως για την ολική

ενέργεια και την ολική ορμή ενός επιπέδου ΗΜ κύματος κυκλικής συχνότητας ω και κυματανύσματος $\mathbf{k}$ έχουμε:

$$U = N\hbar\omega = cP\,,$$

$$\mathbf{P} = N\hbar\mathbf{k}\,, \qquad \text{(IV.14)}$$

όπου N είναι ο αριθμός των φωτονίων (που φυσικά είναι ακέραιος μη αρνητικός. Για τις κβαντικές διακυμάνσεις του ΗΜ πεδίου βλέπε σελ. 65).

Η στροφορμή του ΗΜ δίνεται από τον προφανή τύπο:

$$\mathbf{L} = \epsilon_o \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, dV \quad , \text{SI}\,.$$

Εάν δημιουργήσουμε κατάλληλη υπέρθεση επίπεδων κυμάτων μπορούμε να δείξουμε ότι η στροφορμή του ΗΜ κύματος έχει διεύθυνση παράλληλη ή αντιπαράλληλη με το $\mathbf{k}$ και μέγεθος που δίνεται από τη σχέση

$$\frac{L}{U} = \frac{1}{\omega}\,. \qquad \text{(IV.15)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $U = N\hbar\omega$ βρίσκουμε ότι $L = N\hbar$. Άρα η ιδιοστροφορμή (το σπιν) ενός φωτονίου έχει διεύθυνση παράλληλη ή αντιπαράλληλη με το $\mathbf{k}$ και μέγεθος ίσο με $\hbar$. Κατά συνέπεια το σπιν του φωτονίου είναι μονάδα σε συμφωνία με την τιμή που δίνεται στον Πιν.1.2.

Θα κλείσουμε αυτό το παράρτημα τονίζοντας ότι οι οικείες μονάδες του συστήματος SI πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο σε τύπους ΗΜ που είναι διατυπωμένοι στο σύστημα SI. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι κανόνες μετατροπής από το σύστημα SI στο σύστημα G-CGS (το πρώτο G από το όνομα του Gauss).

Πιν. IV.1 Για να μετατρέψετε έναν τύπο από το ένα σύστημα στο άλλο κάνετε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις

G-CGS	$1/(4\pi)$	$4\pi/c^2$	$D/(4\pi)$	B/c	$cH/(4\pi)$	cM	$4\pi\chi_e$	q^2/r	L/c^2
SI	ϵ_0	μ_0	D	B	H	M	χ_e	$q^2/(4\pi\epsilon_0 r)$	L

Πχ. Οι ακόλουθοι τύποι έχουν μετατραπεί από το σύστημα G-CGS στο σύστημα SI.

$$J = \frac{2}{3}\frac{q^2a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad (5.12), \qquad J = \frac{2}{3}\frac{p^2\omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad (5.13), \qquad \sigma_s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \quad (5.23)$$

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{a_p\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right)^2 \quad (5.27), \qquad \epsilon_{G-CGS} = \frac{\epsilon_{SI}}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e = 1 + \frac{n_a a_p}{\epsilon_0} \quad (5.41),$$

$$\epsilon_{G-CGS} = \frac{\epsilon_{SI}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} \quad (5.5), \qquad \omega_{pj}^2 = \frac{e^2 n_j}{\epsilon_0 m_e},\ j = f, i \quad (5.44).$$

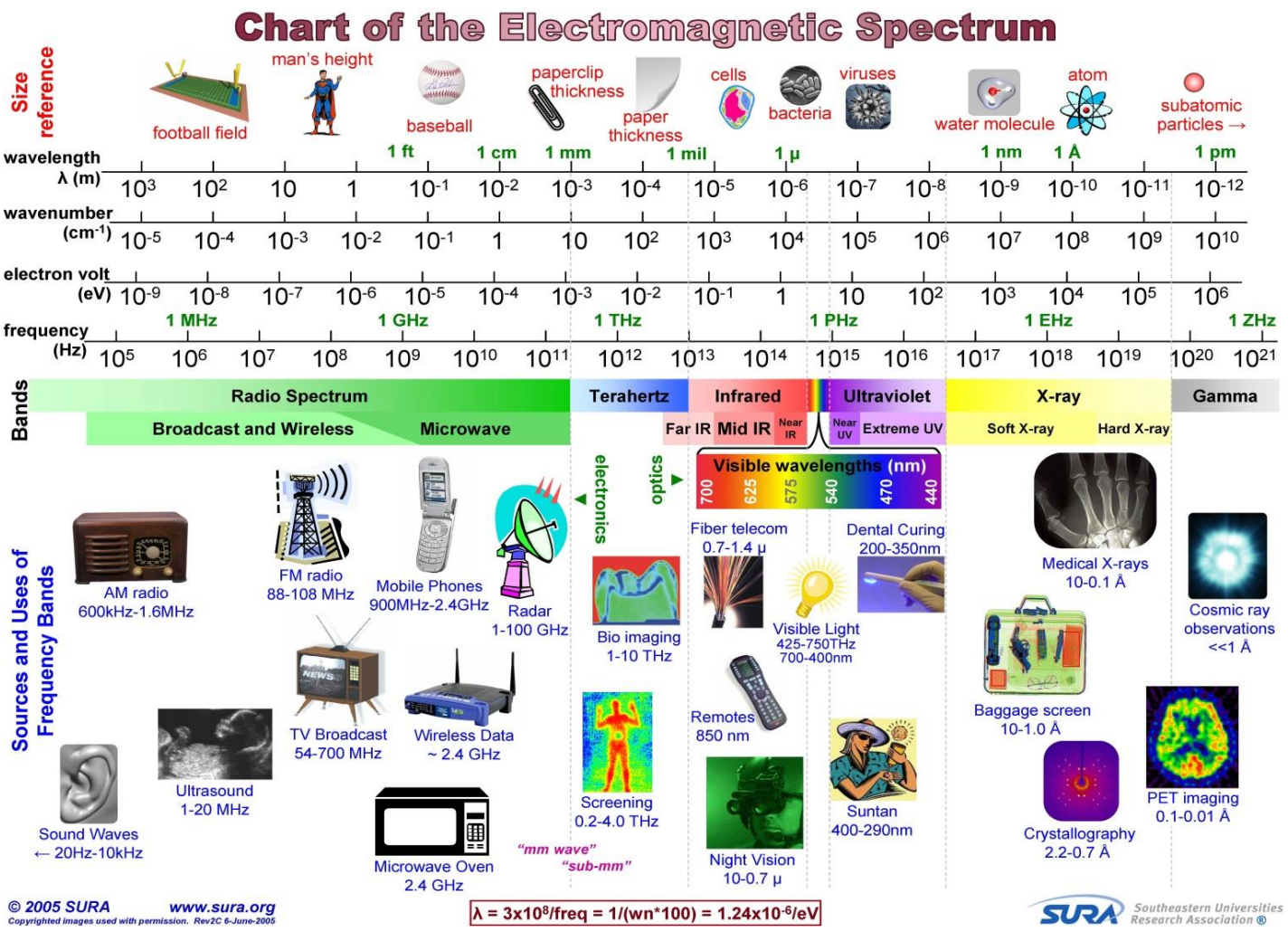


Chart of the Electromagnetic Spectrum
Size reference
football field
man's height
baseball
paperclip thickness
paper thickness
cells
bacteria
viruses
water molecule
atom
subatomic particles →
wavelength λ (m)
1 ft
1 cm
1 mm
1 mil
1 μ
1 nm
1 Å
1 pm
wavenumber (cm-1)
electron volt (eV)
frequency (Hz)
1 MHz
1 GHz
1 THz
1 PHz
1 EHz
1 ZHz
Bands
Radio Spectrum
Broadcast and Wireless
Microwave
Terahertz
Infrared
Far IR
Mid IR
Near IR
Ultraviolet
Near UV
Extreme UV
X-ray
Soft X-ray
Hard X-ray
Gamma
Visible wavelengths (nm)
700
625
575
540
470
440
electronics
optics
Sources and Uses of Frequency Bands
AM radio
600kHz-1.6MHz
FM radio
88-108 MHz
Mobile Phones
900MHz-2.4GHz
Radar
1-100 GHz
Fiber telecom
0.7-1.4 μ
Dental Curing
200-350nm
Medical X-rays
10-0.1 Å
Cosmic ray observations
<<1 Å
Bio imaging
1-10 THz
Visible Light
425-750THz
700-400nm
Baggage screen
10-1.0 Å
TV Broadcast
54-700 MHz
Wireless Data
~ 2.4 GHz
Remotes
850 nm
Ultrasound
1-20 MHz
Screening
0.2-4.0 THz
PET imaging
0.1-0.01 Å
Sound Waves
← 20Hz-10kHz
Microwave Oven
2.4 GHz
"mm wave"
"sub-mm"
Night Vision
10-0.7 μ
Suntan
400-290nm
Crystallography
2.2-0.7 Å
© 2005 SURA
www.sura.org
Copyrighted images used with permission. Rev2C 6-June-2005
λ = 3x10^8/freq = 1/(wn*100) = 1.24x10^-6/eV
SURA
Southeastern Universities Research Association ®

Παράρτημα V

Περισσότερα για τους ημιαγωγούς και άλλα τινά

V.1 Ενεργός μάζα

Η σχέση (11.17) με την αντικατάσταση $\varphi = kd$ γράφεται ως εξής:

$$\varepsilon = \varepsilon_o - 2|V_2|\cos kd, \quad V_2 < 0 . \tag{V.1}$$

Για $kd \ll 1$, δηλαδή κοντά στο κάτω άκρο της ενεργειακής ζώνης, το $\cos kd \approx 1 - \frac{1}{2}(kd)^2$, οπότε

$$\varepsilon - \varepsilon_o + 2|V_2| \approx |V_2| d^2 k^2 \ , \ kd \ll 1 . \tag{V.2}$$

Παρατηρήστε ότι η ενέργεια $\delta\varepsilon \equiv \varepsilon - \varepsilon_o + 2|V_2| \approx |V_2| d^2 k^2$ εξαρτάται από τον λεγόμενο κρυσταλλικό κυματαριθμό k με τον ίδιο τετραγωνικό τρόπο όπως και στην περίπτωση ελεύθερου ηλεκτρονίου, $\delta\varepsilon = (\hbar^2 / 2m)k^2$. Επομένως είναι δυνατόν για ηλεκτρόνιο που κινείται σ' ένα περιοδικό δυναμικό να ορίσουμε μια ενεργό μάζα, m^*, συγκρίνοντας την (V.2) με την $\delta\varepsilon = (\hbar^2 / 2m)k^2$:

$$|V_2| d^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*} \Rightarrow m^* = \frac{\hbar^2}{2|V_2| d^2} \ , \ k \approx 0 . \tag{V.3}$$

Με όμοιο τρόπο, κοντά στο άνω άκρο της ενεργειακής ζώνης, $k = \pm(\pi / d) \mp \delta k$, $d\delta k \ll 1$, βρίσκουμε ότι

$$\delta\varepsilon \equiv \varepsilon - \varepsilon_o - 2|V_2| = -|V_2| d^2 \delta k^2 \ , \ d\delta k \ll 1 \tag{V.4}$$

και επομένως η ενεργός μάζα για το άνω πέρας της ζώνης προκύπτει αρνητική

$$m^* = -\frac{\hbar^2}{2|V_2|d^2} \ . \qquad \text{(V.5)}$$

Η έννοια της ενεργού μάζας, που μπορεί να γενικευθεί με βάση τη σχέση μεταξύ της ιδιοενέργειας $\varepsilon(k)$ και του κρυσταλλικού κυματαριθμού k,

$$\frac{1}{m^*} \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\hbar^2 \partial k^2} \ , \qquad \text{(V.6)}$$

έχει άμεσο φυσικό αντίκρισμα γιατί δίνει την επιτάχυνση a την οφειλόμενη σε μια *πρόσθετη* δύναμη F_ε επί πλέον από αυτήν του περιοδικού δυναμικού:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varepsilon}{\hbar \partial k} = \frac{dk}{dt}\frac{\partial}{\partial k}\frac{\partial \varepsilon}{\hbar \partial k} = \frac{\hbar dk}{dt}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\hbar^2 \partial k^2} = \frac{F_\varepsilon}{m^*} \ . \qquad \text{(V.7)}$$

Στην τελευταία σχέση της (V.7) λάβαμε υπόψη ότι ο ρυθμός μεταβολής της κρυσταλλικής ορμής $p = \hbar k$ ισούται με την πρόσθετη δύναμη: $dp/dt = \hbar dk/dt = F_\varepsilon$.

Σε ένα πραγματικό (δηλ. τριδιάστατο) περιοδικό στερεό, που οι κατάστάσεις του χαρακτηρίζονται από το κυματάνυσμα **k** και τον δείκτη n της ζώνης, ορίζονται εν γένει περισσότερες από μία ενεργές μάζες ανάλογα με τη διεύθυνση και το δείκτη n:

$$\frac{1}{m^*_{i,n}} \equiv \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_n(\mathbf{k})}{(\partial k_i)^2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ είναι οι κύριες διευθύνσεις.} \quad \text{(V.6΄)}$$

Η σχέση (V,7), που απλοποιεί δραστικά τους υπολογισμούς, μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την πολύ συνηθισμένη περίπτωση της κίνηση ενός σωματίου (π.χ. ενός ηλεκτρονίου) στο εσωτερικό ενός κρυσταλλικού στερεού παρουσία ενός πρόσθετου δυναμικού $\mathcal{V}_\varepsilon$ επί πλέον του $\mathcal{V}_\pi$ που οφείλεται στην περιοδική δομή του κρυσταλλικού στερεού (βλέπε, π.χ. την ενότητα V.4 αυτού του παραρτήματος). Αντί να επιχειρήσουμε να λύσουμε δια μιας το δύσκολο πρόβλημα της κίνησης υπό την επίδραση του ολικού δυναμικού $\mathcal{V}_{o\lambda} = \mathcal{V}_\pi + \mathcal{V}_\varepsilon$, λύνουμε πρώτα το πολύ ευκολότερο πρόβλημα της κίνησης παρουσία μόνο του $\mathcal{V}_\pi$ και βρίσκουμε τη σχέση $\varepsilon(\mathbf{k})$, τη λεγόμενη σχέση διασποράς. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την ενεργό μάζα βάσει της σχέσης (V.6΄) και μετά λύνουμε το πρόβλημα της κίνησης μόνο υπό την επίδραση του πρόσθετου δυναμικού $\mathcal{V}_\varepsilon$ ξεχνώντας μεν το περιοδικό δυναμικό αλλά αντικαθιστώντας δε την πραγματική μάζα με την ενεργό μάζα. Με άλλα λόγια η πλήρης

χαμιλτονιανή $H=(p^2/2m)+\mathcal{V}_\pi+\mathcal{V}_\varepsilon$ έχει αντικατασταθεί (υπό ορισμένες προϋποθέσεις) από τη χαμιλτονιανή $H_e=p^2/2m^*+\mathcal{V}_\varepsilon$:

$$\boxed{\frac{p^2}{2m}+\mathcal{V}_\pi+\mathcal{V}_\varepsilon\approx\frac{p^2}{2m^*}+\mathcal{V}_\varepsilon}\ . \qquad \text{(V.8)}$$

V.2 Πυκνότητα καταστάσεων (Density of States, DOS)

Όπως θα δούμε παρακάτω, αρκετά συχνά εμφανίζονται κατά τον υπολογισμό ποσοτήτων που αφορούν μονοδιάστατα «στερεά», αθροίσματα του τύπου $\Sigma_k g(\varepsilon)$ όπου το ε εξαρτάται από το k. Τα αθροίσματα αυτά στο θερμοδυναμικό όριο μετατρέπονται σε ολοκληρώματα:

$$\Sigma_k g(\varepsilon(k))\xrightarrow[L\to\infty]{}\frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\kappa\, g(\varepsilon(\kappa))\,, \qquad \text{(V.9)}$$

όπου L είναι το μήκος του μονοδιάστατου[1] μακροσκοπικού συστήματος.

Συνήθως βολεύει να μετατρέψουμε την ολοκλήρωση ως προς k στην (V.9) σε ολοκλήρωση ως προς ε. Αυτό στη μονοδιάστατη[2] περίπτωση επιτυγχάνεται πολύ εύκολα

$$\frac{L}{2\pi}\int dk\, g(\varepsilon(k))=\frac{L}{2\pi}\int d\varepsilon\,\frac{2}{|d\varepsilon/dk|}\,g(\varepsilon)=\int d\varepsilon\,\rho(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,, \qquad \text{(V.10)}$$

όπου $\rho(\varepsilon)\equiv(L/\pi)\cdot|d\varepsilon/dk|^{-1}$ και το $d\varepsilon/dk$ εκφράζεται ως συνάρτηση του ε αντί[3] του k. Το 2 στον αριθμητή της σχέσης (V.10) εμφανίζεται επειδή οι δύο τιμές $\pm k$ δίνουν την ίδια τιμή του ε. Η συνάρτηση $\rho(\varepsilon)$

---

[1] Για διδιάστατο σύστημα ο τύπος (V.9) γίνεται $\Sigma_{\mathbf{k}} g(\varepsilon(\mathbf{k}))=(S/(2\pi)^2)\times$ $\times\int d^2k\, g(\varepsilon(\kappa))$ και για τριδιάστατο $\Sigma_{\mathbf{k}} g(\varepsilon(\mathbf{k}))=(V/(2\pi)^3)\int d^3k\, g(\varepsilon(\kappa))$, όπου S είναι το εμβαδόν του διδιάστατου συστήματος ($S\to\infty$) και V είναι ο όγκος του τριδιάστατου συστήματος ($V\to\infty$).

[2] Και στη διδιάστατη και στη τριδιάστατη περίπτωση έχουμε $\Sigma_{\mathbf{k}} g(\varepsilon(\mathbf{k}))=\int d\varepsilon\rho(\varepsilon)g(\varepsilon)$, αν και η έκφραση για την πυκνότητα καταστάσεων $\rho(\varepsilon)$ είναι διαφορετική για κάθε διάσταση.

[3] Πχ. για $\varepsilon(k)=\varepsilon_o+2V_2\cos kd$ έχουμε $|d\varepsilon/dk|=2|V_2||\sin kd|\,d=2|V_2|\,d\times$ $\times\sqrt{1-\cos^2 kd}=2|V_2|\,d\sqrt{1-[(\varepsilon-\varepsilon_o)/2V_2]^2}=d\sqrt{(2V_2)^2-(\varepsilon-\varepsilon_o)^2}$. Άρα, εν προκειμένω, $\rho(\varepsilon)=(L/\pi d)/\sqrt{(2V_2)^2-(\varepsilon-\varepsilon_o)^2}=(N/\pi)/\sqrt{(2V_2)^2-(\varepsilon-\varepsilon_o)^2}$ όπου $N=$ $=L/d$ είναι ο συνολικός αριθμός ατόμων.

ονομάζεται **πυκνότητα καταστάσεων** (DOS) και χαρακτηρίζει το σχεδόν συνεχές φάσμα των ιδιοενεργειών ενός σωματίου που κινείται εντός του στερεού. Στις περιοχές των χασμάτων η συνάρτηση $\rho(\varepsilon)$ είναι μηδέν, ενώ εντός των ενεργειακών ζωνών $\rho(\varepsilon)>0$. Ο τρόπος που μηδενίζεται η πυκνότητα καταστάσεων στα άκρα των ενεργειακών ζωνών εξαρτάται από τη διάσταση του χώρου. Για τριδιάστατα συστήματα έχουμε

$$\rho(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_\alpha]{}\frac{V|m*|^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}|\varepsilon-\varepsilon_a|^{1/2}, \qquad \text{(V.11)}$$

όπου ε_a είναι η κάτω ή η άνω άκρη της ενεργειακής ζώνης

V.3 Οπές

Σ' ένα απόλυτα καθαρό και τέλεια περιοδικό ημιαγωγό θερμοκρασίας $0\,\mathrm{K}$, η *ΖΣ* είναι πλήρως κατειλημμένη από ηλεκτρόνια και η *ΖΑ* απολύτως άδεια. Εν τούτοις οι εντυπωσιακές εφαρμογές των ημιαγωγών οφείλονται στη διέγερση κάποιων ηλεκτρονίων από τη *ΖΣ* και τη συνακόλουθη εμφάνιση κάποιων άδειων καταστάσεων στο άνω μέρος της *ΖΣ* ή/και στην κατάληψη κάποιων καταστάσεων στο κάτω μέρος της *ΖΑ* από ηλεκτρόνια.

Δεδομένου ότι μια πλήρως κατειλημμένη ενεργειακή ζώνη είναι αδρανής[4], μπορούμε να περιγράψουμε τη *ΖΣ* υπό ρεαλιστικές συνθήκες χωρίζοντας τις χωρικές/σπιν καταστάσεις στις κατειλημμένες (κ), που είναι η συντριπτική πλειονότητα, και στις λίγες άδειες (α). Η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος $\mathbf{j}$ δίνεται από την έκφραση $\mathbf{j}=-(|e|/V)\Sigma^{(\kappa)}\boldsymbol{\upsilon}_k$, όπου το $\Sigma^{(\kappa)}$ δηλώνει άθροισμα στις κατειλημμένες χωρικές/σπιν καταστάσεις. Προσθέτοντας και αφαιρώντας ένα παρόμοιο άθροισμα στις άδειες καταστάσεις έχουμε ότι

$$\mathbf{j}=-(|e|/V)\{\Sigma^{(\kappa)}\boldsymbol{\upsilon}_k+\Sigma^{(a)}\boldsymbol{\upsilon}_k-\Sigma^{(a)}\boldsymbol{\upsilon}_k\}=(|e|/V)\Sigma^{(a)}\boldsymbol{\upsilon}_k,$$

αφού το άθροισμα πάνω σ' όλες τις καταστάσεις, $\Sigma^{(\kappa)}\boldsymbol{\upsilon}_k+\Sigma^{(a)}\boldsymbol{\upsilon}_k=0$.

Επομένως μια "λίγο άδεια" *ΖΣ* μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα όσον αφορά στο ηλεκτρικό ρεύμα, ως οι άδειες καταστάσεις να ήσαν κατειλημμένες από σωμάτια με θετικό φορτίο $|e|$. Εξετάζοντας με τον ίδιο τρόπο και τις άλλες φυσικές ποσότητες, όπως το συνολικό σπιν, τη συνολική κρυσταλλική ορμή και την πυκνότητα του συνολικού ενεργειακού ρεύματος, βρίσκουμε ότι συνολικά μια "λίγο άδεια" *ΖΣ* μπορεί να

[4] Με την έννοια ότι το συνολικό σπιν, η συνολική κρυσταλλική ορμή, η πυκνότητα του συνολικού ηλεκτρικού ρεύματος και η πυκνότητα του συνολικού ενεργειακού ρεύματος είναι μηδέν.

περιγραφεί από ιδεατά σωμάτια που ονομάζονται **οπές** (holes) και καταλαμβάνουν τις άδειες καταστάσεις και έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$e_h = |e|\,, \tag{V.12α}$$

$$\mathbf{k}_h = -\mathbf{k}_e\,, \tag{V.12β}$$

$$s_h = -s_e\,, \tag{V.12γ}$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_h(\mathbf{k}_h) = \boldsymbol{\upsilon}_e(\mathbf{k}_e)\,, \tag{V.12δ}$$

$$E_h(\mathbf{k}_h) = -E_e(\mathbf{k}_e)\,, \tag{V.12ε}$$

όπου ο κάτω δείκτης h αναφέρεται στις οπές και ο κάτω δείκτης e αναφέρεται στα ηλεκτρόνια που λείπουν. Η τελευταία σχέση (V.12ε) σε συνδυασμό με τον ορισμό (V.6΄) συνεπάγεται ότι η ενεργός μάζα της οπής έχει αντίθετο πρόσημο από αυτήν του αντίστοιχου ηλεκτρονίου, $m_h^* = -m_e^*$. Επομένως η ενεργός μάζα μιας οπής που βρίσκεται στο άνω μέρος της *ΖΣ* είναι θετική (αφού αυτή του ηλεκτρονίου είναι αρνητική).

V.4 Ξένες προσμίξεις αντικατάστασης

Ας θεωρήσουμε τον ημιαγωγό πυρίτιο και ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο πυριτίου έχει αντικατασταθεί από ένα πεντασθενές άτομο, π.χ. φωσφόρου. Τότε τα τέσσερα από τα πέντε ηλεκτρόνια σθένους του φωσφόρου θα χρησιμοποιηθούν για να συμμετάσχουν στους δεσμούς με τα άλλα άτομα πυριτίου και επομένως να εποικίσουν καταστάσεις στη *ΖΣ*, ακριβώς όπως έκαναν και τα τέσσερα ηλεκτρόνια του ατόμου του πυριτίου πριν αυτό αντικατασταθεί από το άτομο του φωσφόρου. Το πέμπτο ηλεκτρόνιο του ατόμου του φωσφόρου δεν έχει τη δυνατότητα να μετάσχει σε κάποιο δεσμό ούτε να καταλάβει κατάσταση στη ΖΣ, αφού είναι όλες κατειλημμένες. Θα μπορούσε ίσως να καταλάβει κάποια κατάσταση στη ΖΑ˙ όμως δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι υφίσταται την έλξη Coulomb από το έξτρα πρωτόνιο στον πυρήνα του φωσφόρου σε σύγκριση με τον πυρήνα του πυριτίου. Όταν το πέμπτο ηλεκτρόνιο είναι πολύ κοντά στο ιόν του φωσφόρου, το δυναμικό Coulomb είναι της μορφής

$$\mathcal{V}_\varepsilon = -\frac{e^2}{r}\ ,\ r \approx r_a\,,\quad \text{G-CGS}, \tag{V.13α}$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ πυρήνα φωσφόρου και πέμπτου ηλεκτρονίου και r_a είναι η ακτίνα του ατόμου του φωσφόρου, ενώ για $r \gg r_a$ το δυναμικό Coulomb έχει μειωθεί και είναι της μορφής

$$\mathcal{V}_{\varepsilon} = -\frac{e^2}{\epsilon r}\,,\ r \gg r_a\,,\quad \text{G-CGS}, \tag{V.13β}$$

όπου ϵ είναι η διηλεκτρική σταθερά του πυριτίου που ισούται με 12,1. Η ύπαρξη του ϵ στον παρονομαστή περιγράφει τη μείωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ πέμπτου ηλεκτρονίου και έξτρα πρωτονίου λόγω επαγόμενης πόλωσης των ατόμων του πυριτίου που βρίσκονται μεταξύ του ατόμου του φωσφόρου και του πέμπτου ηλεκτρονίου. Σύμφωνα με τη σχέση (V.8) η κίνηση του πέμπτου ηλεκτρονίου διέπεται από τη χαμιλτονιανή

$$\frac{p^2}{2m^*} - \frac{e^2}{\epsilon r}\ ,\ r \gg r_a\,,\quad \text{G-CGS}, \tag{V.14}$$

που είναι όμοια με αυτή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου με τις ακόλουθες αντιστοιχίες

$$m_e \to m^*,\quad e^2 \to e^2/\epsilon,\quad 0\ \text{eV} \to \text{κάτω άκρο ZA},\quad E_n \to E_n^*$$

και επομένως και τις

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \to a^* = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} = \frac{\epsilon}{(m^*/m_e)} a_B = 19{,}9\,\text{A}\,, \tag{V.15}$$

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{a_B}\frac{1}{n^2} \to E_n^* = E_n \frac{(m^*/m_e)}{\epsilon^2},\ E_1^* = -30\,\text{meV}\,, \tag{V.16}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε για τις αριθμητικές εκτιμήσεις τις τιμές $\epsilon = 12{,}1$ και $m^*/m_e = 0{,}329$. Ο τύπος (V.15) δείχνει ότι η ανισότητα $a^* \gg r_a$ ικανοποιείται σε επαρκή βαθμό ακόμη και για τη βασική κατάσταση, ενώ ο τύπος (V.16) δείχνει ότι η παγίδευση του πέμπτου ηλεκτρονίου γύρω αλλά αρκετά μακριά από το κατιόν του φωσφόρου δημιουργεί μια κατώτατη στάθμη στο χάσμα περίπου $30\,\text{meV}$ χαμηλότερα από το κάτω άκρο της ZA[5]. Αυτή η στάθμη ονομάζεται τύπου n (από την αγγλική λέξη negative) επειδή καταλαμβάνεται από ένα ηλεκτρόνιο (αρνητικού φορτίου). Ημιαγωγός που φέρει τέτοιες στάθμες ονομάζεται τύπου n.

Τι θα συμβεί αν ένα άτομο πυριτίου αντικατασταθεί από ένα τρισθενές άτομο, π.χ. ένα άτομο αλουμινίου. Πρώτον, θα υπάρχει ένα πρωτόνιο λιγότερο, δηλαδή, μια μονάδα αρνητικού φορτίου σε σχέση με το άτομο του Si. Δεύτερον, θα υπάρχει έλλειψη ενός ηλεκτρονίου, δηλαδή μια οπή. Σύμφωνα

[5] Η πειραματική τιμή είναι $45{,}58\,\text{meV}$, πράγμα που δείχνει ότι το ηλεκτρόνιο όντας στη βασική κατάσταση ξοδεύει κάποιο ποσοστό του χρόνου του κοντά στο κατιόν του φωσφόρου, όπου το ενεργό ϵ είναι μεταξύ 12,1 και 1.

με όσα αναφέραμε στην παράγραφο V.3, η οπή (με θετικό φορτίο) θα αλληλεπιδράσει ελκτικά με την έλλειψη πρωτονίου και η κίνηση της θα προσδιορισθεί από τη χαμιλτονιανή

$$\frac{p^2}{2m_h^*} - \frac{e^2}{\epsilon r}\ ,\ r \gg r_a\,, \quad \text{G-CGS}, \tag{V.17}$$

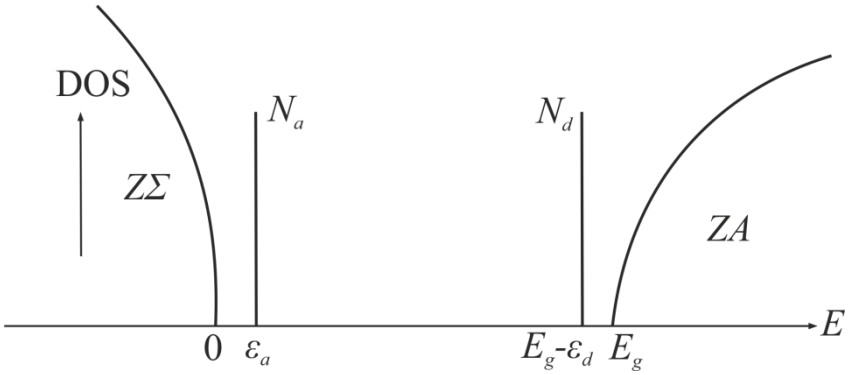
και επομένως, έχοντας υπόψη τις σχέσεις (V.14)-(V.16), η βασική της κατάσταση θα είναι μια υδρογονοειδής κυματοσυνάρτηση με

$$a_h = \frac{\epsilon}{(m_h^*/m_e)} a_B = 15{,}7\,\text{A} \tag{V.18}$$

και

$$E_{1,h} = -\frac{e^2}{2a_B}\frac{(m_h^*/m_e)}{\epsilon^2} = -37{,}8\,\text{meV}\,. \tag{V.19}$$

Έχοντας υπόψη τη σχέση (V.12ε) συμπεραίνουμε ότι η αντίστοιχη ηλεκτρονιακή στάθμη $E_{1,e} = -E_{1,h}$ θα είναι $37{,}8\,\text{meV}$ πάνω από το άνω πέρας της ΖΣ, δηλαδή μέσα στο χάσμα και κοντά στη ΖΣ[6]. Στάθμες αυτού του τύπου ονομάζονται στάθμες p (από τη λέξη positive) επειδή καταλαμβάνονται από οπές που έχουν θετικό φορτίο. Ημιαγωγοί με τέτοιες στάθμες ονομάζονται ημιαγωγοί τύπου p.



Σχ. V.1 Εικονίζεται η πυκνότητα καταστάσεων (ΠΚ, DOS) στο άνω μέρος της Ζώνης Σθένους (ΖΣ) και στο κάτω μέρος της Ζώνης Αγωγιμότητας (ΖΑ), καθώς και η στάθμη πρόσμιξης τύπου p, ε_a, με συγκέντρωση ατόμων N_a (**αποδέκτες**) και η στάθμη πρόσμιξης τύπου n, $E_g - \varepsilon_d$, με συγκέντρωση ατόμων N_d (**δότες**).

[6] Η πειραματική τιμή γι' αυτή τη στάθμη είναι $69\,\text{meV}$.

Στο Σχ. V.1 εικονίζεται η πυκνότητα ηλεκτρονιακών καταστάσεων γύρω από το άνω πέρας της *ΖΣ* και από το κάτω πέρας της *ΖΑ* καθώς και στάθμες τύπου n με το E_1 γραμμένο ως ε_d και στάθμες τύπου p με το $E_{1,h}$ γραμμένο[7] ως ε_a.

V.5 Συγκέντρωση φορέων και αγωγιμότητα

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα, που είναι το αντίστροφο της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης, και η δυνατότητα μεταβολής της κατά παραγγελία είναι καίριας τεχνολογικής σημασίας. Οι ημιαγωγοί με τις ξένες προσμίξεις τύπου p ή n προσφέρουν ακριβώς αυτή τη δυνατότητα και γι' αυτό αποτελούν τη βάση του σύγχρονου τεχνολογικού πολιτισμού.

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα στους ημιαγωγούς εξαρτάται από δύο παράγοντες: Πρώτον, από τη συγκέντρωση των φορέων, δηλαδή από τη *συγκέντρωση* n των ηλεκτρονίων στη ΖΑ και από τη *συγκέντρωση* p των οπών στη ΖΣ, και δεύτερον από μια ποσότητα μ_i $(i = e, h)$ που ονομάζεται **ευκινησία** (mobility) η οποία αποτελεί ένα μέτρο του πόσο εύκολα κινούνται οι φορείς του ηλεκτρικού ρεύματος (ηλεκτρόνια στη *ΖΑ* και οπές στη *ΖΣ*) υπό την επίδραση ενός εξωτερικού πεδίου. Η ευκινησία ορίζεται ως ο λόγος της συστηματικής οριακής ταχύτητας που αποκτούν οι φορείς υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου δια του πεδίου αυτού:

$$\boldsymbol{v}_i \equiv \mu_i \boldsymbol{E}, \quad i = e, h\,. \tag{V.20}$$

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\sigma = |e|(n|\mu_e| + p|\mu_h|)\,. \tag{V.21}$$

Όπως θα δούμε, η αγωγιμότητα ενός πολύ καθαρού ημιαγωγού μπορεί να αυξηθεί κατά 1.000.000 φορές με την προσθήκη ξένων ατόμων τύπου δοτών ή τύπου αποδεκτών σε αναλογία 1 στο 1.000.000! Ας δούμε πώς:

Οι ευκινησίες των ηλεκτρονίων και των οπών ελάχιστα θα επηρεασθούν από μια πολύ μικρή συγκέντρωση ξένων ατόμων. Αντίθετα οι συγκεντρώσεις n και p, των ηλεκτρονίων στη ΖΑ και των οπών στη ΖΣ που δίνονται από τους τύπους,

---

[7] Ο δείκτης d στο ε_d είναι από τη λέξη donor (≡ δότης) επειδή το ηλεκτρόνιο της στάθμης αυτής μπορεί να δοθεί στη ΖΑ λόγω θερμικής διέγερσης. Ο δείκτης a στο ε_a είναι από τη λέξη acceptor (≡ αποδέκτης) επειδή, η στάθμη αυτή μπορεί να δεχτεί ένα ηλεκτρόνιο από τη ΖΣ, δημιουργώντας μια οπή σ' αυτήν.

$$n \cong A_e (k_B T)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g - \mu}{k_B T}\right], \quad A_e = \left(\frac{m_e^*}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{(V.22α)}$$

$$p \cong A_h (k_B T)^{3/2} \exp\left[-\frac{\mu}{k_B T}\right], \qquad A_h = \left(\frac{m_h^*}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{(V.22β)}$$

αλλάζουν δραματικά ακόμη και με τις ελάχιστες συγκεντρώσεις N_a ατόμων τύπου αποδεκτών ή N_d ατόμων τύπου δοτών, γιατί αλλάζει σημαντικά το χημικό δυναμικό μ που είναι στον *εκθέτη* των τύπων (V.22). Το μ προσδιορίζεται από τη σχέση διατήρησης του αριθμού των ηλεκτρονίων, που έχει τη μορφή

$$n + n_d - N_d = p + p_a - N_a, \qquad \text{(V.23)}$$

όπου n_d, p_a είναι η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων και των οπών στις στάθμες $E_g - \varepsilon_d$ και ε_a αντιστοίχως (βλ. Σχ. V.1). Ο τύπος (V.23) προκύπτει ως εξής: Υποθέτοντας ότι η συγκέντρωση των αποδεκτών N_a είναι μεγαλύτερη από τη συγκέντρωση των δοτών N_d έχουμε ότι για $T = 0\,\mathrm{K}$, $n = n_d = p = 0$ και $p_a = N_a - N_d$. Για θερμοκρασίες μη μηδενικές, τα ηλεκτρόνια που εποικίζουν τις στάθμες δοτών και τη ΖΑ, $(n + n_d)V$, θα πρέπει να ισούνται με τον πρόσθετο αριθμό οπών που δημιουργήθηκε στη ΖΣ και στις στάθμες αποδεκτών, $\{p + p_a - (N_a - N_d)\}V$. Διαιρώντας με V προκύπτει η (V.23). Το ίδιο αποτέλεσμά θα είχαμε, αν είχαμε υποθέσει ότι $N_a < N_d$.

Ας υποθέσουμε ότι οι συγκεντρώσεις αποδεκτών και δοτών N_a, N_d είναι απολύτως αμελητέες (μια περίπτωση που ονομάζεται *ενδογενής* (*intrinsic*)). Τότε η (V.23) θα γίνει $n=p$ που σε συνδυασμό με το γινόμενό τους από τις σχέσεις (V.22),

$$n \cdot p = A_e A_h (k_B T)^3 \exp(-E_g / k_B T), \qquad \text{(V.24)}$$

θα δώσει

$$n_i = p_i = \sqrt{A_e A_h}\,(k_B T)^{3/2} \exp\left[-E_g / 2k_B T\right], \qquad \text{(V.25α)}$$

$$\mu_i = (E_g / 2) + (3k_B T / 4) \ln(m_h^* / m_e^*). \qquad \text{(V.25β)}$$

Το χημικό δυναμικό μ_i στην ενδογενή περίπτωση είναι στο μέσο του χάσματος για T=0 K, όπως το περιμέναμε αφού για T=0 K το μ_i συμπίπτει με την ενέργεια Fermi καθαρού (χωρίς προσμίξεις) ημιαγωγού. Με τη άνοδο

της θερμοκρασίας το χημικό δυναμικό στην ενδογενή περίπτωση μετακινείται (λίγο) είτε προς τη *ZA* εάν $m_h^* > m_e^*$ είτε προς τη *ZΣ* εάν $m_h^* < m_e^*$. Για το ενδογενές Si και για 300 K η μετακίνηση είναι προς τη *ZΣ* κατά περίπου 10 meV.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη λεγόμενη *εξωγενή* περίπτωση (*extrinsic*) που χαρακτηρίζεται από τη σχέση $\delta N \equiv |N_d - N_a| \gg n_i$ και ας υποθέσουμε ότι $N_a < N_d$. Εάν επί πλέον τα ηλεκτρόνια έχουν μετακινηθεί από τη στάθμη $E_g - \varepsilon_d$ (Σχ.V.1) σχεδόν εξ ολοκλήρου προς τη ZA και οι οπές από τη στάθμη ε_a προς τη ZΣ, τότε θα ισχύει $n_d \ll N_d$ και $p_a \ll N_a$ και επομένως η (V.23) θα γίνει n-p=δN που σε συνδυασμό με τη σχέση $np = n_i^2$ θα οδηγήσει στα εξής αποτελέσματα:

$$n \approx \frac{1}{2}\left[\left(\delta N^2 + 4n_i^2\right)^{1/2} + \delta N\right],\ p \approx \frac{1}{2}\left[\left(\delta N^2 + 4n_i^2\right)^{1/2} - \delta N\right], \quad \text{(V.26α)}$$

$$\mu \approx \mu_i + k_B T \sinh^{-1}\frac{\delta N}{2n_i} \approx \mu_i + k_B T \ln(\delta N / n_i)\,. \quad \text{(V.26β)}$$

Για τον πιο σημαντικό ημιαγωγό, το πυρίτιο, έχουμε τις εξής τιμές: $E_g = 1{,}12\,\text{eV}$, $\mu_e = 1450\,\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, $\mu_h = 505\,\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, (για $T = 300\,^o\text{K}$) $n_i = p_i = 7\times10^9\,\text{cm}^{-3}$, Η συγκέντρωση των *ατόμων* στο πυρίτιο είναι $5\times$ $\times10^{22}\,\text{cm}^{-3}$. Αν για κάθε εκατομμύριο ατόμων πυριτίου αντικαταστήσουμε ένα μόνο με ένα άτομο φωσφόρου, η συγκέντρωση των τελευταίων θα είναι $5\times10^{16}\,\text{cm}^{-3}$. Ας υπολογίσουμε, με χρήση της σχέσης (V.21), το πηλίκο της αγωγιμότητας $\sigma^{(n)}$ του πυριτίου τύπου n (με τις προσμίξεις φωσφόρου) με την αγωγιμότητα σ του καθαρού πυριτίου: Από τον τύπο (V.26α) η συγκέντρωση n είναι πρακτικά ίση με δN και η συγκέντρωση p είναι αμελητέα. Άρα $\sigma^{(n)}/\sigma = (1450/1955)\times(5\times10^{16}/7\times10^9) = 5{,}3\times10^6$.

Άσκηση V.1: Αποδείξτε τους τύπους (V.22) και τους (V.26)

Λύση: Η πυκνότητα καταστάσεων (ΠΚ) στη ΖΣ και στη ΖΑ είναι αντιστοίχως βάσει της (V.11) και του Σχ.V.1:

$$\rho_{Z\Sigma} = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2}\left(\frac{m_h^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}(-E)^{1/2},\quad E \le 0\ , \quad \text{(V.27α)}$$

$$\rho_{ZA} = \frac{V}{\sqrt{2}\,\pi^2}\left(\frac{m_c^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}(E - E_g)^{1/2},\quad E \ge E_g\,. \quad \text{(V.27β)}$$

Η συγκέντρωση ηλεκτρονίων στη ΖΑ, n, δίνεται από τον τύπο

$$n = \frac{2}{V}\int_{E_g}^{\infty} dE\,\rho_{ZA}(E)\,f(E)\,, \qquad \text{(V.28)}$$

λόγω του ότι πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των καταστάσεων $dE\rho_{ZA}(E)$ μεταξύ E και $E+dE$ επί τον μέσο αριθμό ηλεκτρονίων ανά κατάσταση, $f(E)$, και επί 2 λόγω σπιν. Η συγκέντρωση οπών στη $Z\Sigma$ δίνεται κατ' αναλογία από τον τύπο

$$p = \frac{2}{V}\int_{-\infty}^{0} dE\,\rho_{Z\Sigma}(E)\big[1 - f(E)\big]\,. \qquad \text{(V.29)}$$

Προσεγγίζοντας την κατανομή Fermi με αυτήν του Boltzmann (βλ. Παραρτ. ΙΙΙ) έχουμε

$$f(E) \approx \exp\big[-\beta(E-\mu)\big], \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}\,, \qquad \text{(V.30)}$$

όπου μ είναι το χημικό δυναμικό. Αντικαθιστώντας την (V.30) στις σχέσεις (V.28) και (V.29) βρίσκουμε τις (V.22).

Για την απόδειξη των σχέσεων (V.26α) λαμβάνουμε υπόψη ότι γνωρίζουμε τη διαφορά και το γινόμενο των n και p. Είναι επομένως θέμα στοιχειώδους άλγεβρας να καταληξουμε στις (V.26α).

Για την απόδειξη του τύπου (V.26β) έχουμε ότι οι τύποι (V.22) οδηγούν στις σχέσεις

$$\frac{n}{n_i} = \exp\frac{\mu-\mu_i}{k_B T}, \qquad \frac{p}{n_i} = \exp\{-\frac{\mu-\mu_i}{k_B T}\} \qquad \text{(V.31)}$$

Αφαιρώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις, διαιρώντας δια του δύο, λαμβάνοντας υπόψη οι $n - p = \delta N$ και εφαρμόζοντας τη συνάρτηση $\sinh^{-1}$ καταλήγουμε στην (V.26β).

V.6 Συμπλήρωμα 1: Η διηλεκτρική συνάρτηση (για $\omega \gg \upsilon k$)

Η διηλεκτρική συνάρτηση, $\epsilon(\omega)$, που ορίζεται από τη σχέση (5.2) και εξαρτάται από την τιμή της συχνότητας ω, είναι μια πολύ σημαντική ποσότητα γιατί χαρακτηρίζει τις οπτικές ιδιότητες της συμπυκνωμένης ύλης, π.χ., ο δείκτης διάθλασης δίνεται από τη σχέση $n = \sqrt{\epsilon}$, (όταν η σχετική διαπερατότητα έχει τη συνήθη τιμή περίπου 1)˙ επίσης, η διαφάνεια ή μη ενός υλικού, το χρώμα του κλπ εξαρτώνται από τη διηλεκτρική συνάρτηση. Ακόμη οι προσεγγιστικοί μηδενισμοί ή απειρισμοί της διηλεκτρικής συνάρτησης προσδιορίζουν τις διαμήκεις ή τις εγκάρσιες αντιστοίχως ιδιοταλαντώσεις της συμπυκνωμένης ύλης. Η εξάρτηση της $\epsilon(\omega)$ από τη συχνότητα ω ποικίλει από κατηγορία σε κατηγορία υλικού.

Για **μέταλλα** η διηλεκτρική συνάρτηση έχει την ακόλουθη προσεγγιστική μορφή (τύπος του Drude)

$$\epsilon(\omega) = 1 + \epsilon_b - \frac{\omega_{pf}^2}{\omega^2 + i(\omega / \tau_f)}, \qquad \omega \ll \omega_p \tag{V.32}$$

όπου το ϵ_b, που οφείλεται στα δέσμια ηλεκτρόνια, είναι περίπου μια σταθερά (ελαφρώς αύξουσα) συνάρτηση του ω και μεγαλύτερη της μονάδας (βλ. άλυτη άσκηση 8, σελ. 140). Ο τελευταίος όρος στην (V.32) είναι η συμβολή των ελεύθερων ηλεκτρονίων και το ω_p^2 είναι ανάλογο της συγκέντρωσής τους. (Βλέπε σελ. 130). Το $\hbar\omega_{pf}$ είναι της τάξεως μερικών eV και το τ_f είναι ο χρόνος αποκατάστασης. Η συχνότητα $\omega_{pf} / \sqrt{1+\epsilon_b}$ μηδενίζει προσεγγιστικά την $\epsilon(\omega)$ σύμφωνα με τον τύπο (V.32) (για $(1/\tau_f)=0$) και επομένως δίνει την ιδιοσυχνότητα μιας διαμήκους συλλογικής ταλάντωσης των ελευθέρων ηλεκτρονίων του μετάλλου που ονομάζεται ιδιοταλάντωση *πλάσματος*.

Για **μονοστοιχειακούς ημιαγωγούς** και $\hbar\omega < E_g$, η διηλεκτρική συνάρτηση είναι περίπου σταθερά, $\epsilon = 1 + \epsilon_b$, (ελαφρώς αύξουσα συνάρτηση του ω, βλ. άλυτη άσκηση 8, σελ. 140) και μεγαλύτερη της μονάδας (όσο μικρότερο το χάσμα τόσο μεγαλύτερη η ϵ, γιατί;).

Στη διηλεκτρική συνάρτηση *σύνθετων ημιαγωγών και ιοντικών στερεών* συμβάλλουν εκτός των δέσμιων ηλεκτρονίων και κάποιες *ιοντικές* ταλαντώσεις που ονομάζονται οπτικές (γιατί είναι σχετικά υψηλής συχνότητας (της τάξεως μερικών δεκάδων meV) και οφείλονται στο ότι τα ανιόντα ως σύνολο κινούνται αντίθετα από τα κατιόντα. Οι οπτικές ιοντικές ταλαντώσεις είναι είτε διαμήκεις (L) είτε εγκάρσιες (T) και έχουν μέγιστες ιδιοσυχνότητες ω_{LO} και ω_{TO} αντιστοίχως. (Βλέπε σελ. 278). Ο δείκτης O δηλώνει τον οπτικό χαρακτήρα της ιοντικής ταλάντωσης. Η συχνότητα ω_{LO} είναι πάντα υψηλότερη από την ω_{TO}: $\omega_{LO}^2 = \omega_{TO}^2 + (4\pi q_A^2 n_A / \epsilon(\infty) m_r)$.

Η διηλεκτρική συνάρτηση στη περιοχή συχνοτήτων $\omega_{LO} \ll \omega \ll E_g / \hbar$ είναι περίπου σταθερά, συμβολίζεται συνήθως ως $\epsilon(\infty)$ και δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση $\epsilon(\infty) = 1 + 2{,}13\gamma_A\gamma_B a_c^3 \bar{d}$, $a_c^2 \equiv 1 - a_p^2$, $\bar{d} \equiv d / a_B$, όπου το γινόμενο $\gamma_A\gamma_B$ είναι της τάξεως της μονάδας. Για **σύνθετους ημιαγωγούς και ιοντικά στερεά** και για $\omega \ll E_g / \hbar$ ισχύει ο τύπος

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty)\frac{\omega^2 - \omega_{LO}^2}{\omega^2 - \omega_{TO}^2}, \qquad \omega \ll E_g / \hbar, \tag{V.33}$$

όπου $\epsilon(\infty) = 1 + \epsilon_b$ και το ϵ_b είναι η συμβολή των δέσμιων στα ιόντα ηλεκτρονίων. Ο τύπος (V.33) ανάγεται, για μονοστοιχειακούς ημιαγωγούς για

τους οποίους $\omega_{LO} = \omega_{TO}$, σε μια περίπου σταθερά (βλ. άλυτη άσκηση 8, σελ. 140). Ο τύπος (V.33) οδηγεί στη λεγόμενη σχέση των Lyddane-Sachs-Teller (LST)

$$\epsilon(0) = \epsilon(\infty)\frac{\omega_{LO}^2}{\omega_{TO}^2} \qquad \text{(V.34)}$$

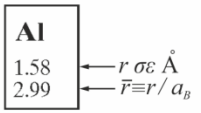
V.7 Συμπλήρωμα 2: Νέο ρεκόρ στην κρίσιμη θερμοκρασία υπεραγώγιμης μετάβασης

Αρκετά μονοστοιχειακά στερεά και πολλές χημικές ενώσεις εμφανίζουν ακριβώς μηδενική ηλεκτρική αντίσταση για θερμοκρασίες μικρότερες μιας κρίσιμης T_c, που ποικίλει από στερεό σε στερεό. Το φαινόμενο αυτό, που πρωτοπαρατηρήθηκε το 1911 και ονομάζεται *υπεραγωγιμότητα*, είναι εντυπωσιακό, αναπάντεχο και δυσεξήγητο (χρειάστηκαν πάνω από 50 χρόνια προσπαθειών για να δοθεί μια εξήγηση το 1956 με τη θεωρία που φέρει το όνομα BCS). Σκεφτείτε: ό,τι προκαλεί την ηλεκτρική αντίσταση για $T > T_c$ (κυρίως τοπικές ατέλειες και ιοντικές ταλαντώσεις) εξακολουθεί φυσικά να υπάρχει και για θερμοκρασίες κατώτερες της T_c και όμως τα ηλεκτρόνια φαίνεται ξαφνικά να μένουν ανεπηρέαστα. Πέρα από την ερμηνεία του φαινομένου της υπεραγωγιμοτητας, το όνειρο των φυσικών ήταν και είναι να βρεθεί στερεό με όσο το δυνατό πιο υψηλή κρίσιμη θερμοκρασία. Μέχρι το 1986 το ρεκόρ ήταν γύρω στους 20 K. Σε διάστημα λίγων ετών το ρεκόρ ανέβηκε στους 135 K με την ανακάλυψη μιας κατηγορίας κεραμικών υλικών, η συμπεριφορά των οποίων παραμένει ακόμη και σήμερα όχι πλήρως κατανοητή. Ας σημειωθεί ότι στον αγώνα για νέο ρεκόρ T_c το πρωταγωνιστικό ρόλο για 100 χρόνια (1911-2014) είχε το πείραμα και όχι η θεωρία. Η τελευταία επέμενε ότι το στερεό υδρογόνο, αν μπορούσε να σταθεροποιηθεί σε μεταλλική δομή (αντίστοιχη του σχήματος (α) στη σελ. 275) και όχι στη συνήθη μοριακή του μορφή (αντίστοιχη του σχήματος (γ) στην ίδια σελίδα), τότε η κρίσιμη θερμοκρασία θα ήταν πάνω από 200 K και ίσως να έφτανε και τη θερμοκρασία περιβάλλοντος των 300 K. Η δυσκολία ήταν και είναι ότι η σταθεροποίηση της μεταλλικής δομής του υδρογόνου φαίνεται να απαιτεί πολύ υψηλές πιέσεις. Αρχικά η εκτίμηση ήταν για 250.000 ατμόσφαιρες. Σήμερα γνωρίζουμε ότι απαιτούμενη πίεση είναι γύρω στις 20 φορές μεγαλύτερη.

Το 2014 η θεωρία πήρε το πάνω χέρι με την πρόβλεψη ότι η ένωση υδρογόνου/θείου, H_3S, σε πολύ υψηλή πίεση θα γίνει υπεραγώγιμη με κρίσιμη θερμοκρασία γύρω στους 205 K. Η πρόβλεψη αυτή, που βασίστηκε στη θεωρία BCS, επαληθεύθηκε πειραματικά το 2015: Πράγματι το υδρόθειο/Η υπό την τεράστια πίεση του 1,5 εκατομμυρίου ατμοσφαιρών

έγινε υπεραγώγιμο με κρίσιμη θερμοκρασία 203,5 K. Ακόμη πιο πρόσφατα εμφανίσθηκε δημοσίευση (Dias, RP & Silvera, IF, Science, *355*, 715 (2017)) για επίτευξη μεταλλικού υδρογόνου υπό πίεση 4,95 εκατομμυρίων ατμοσφαιρών, πράγμα που έχει εγείρει σημαντικές προσδοκίες αλλά και αρκετές αμφισβητήσεις.

Πίνακας 4: Η ακτίνα r, της σφαίρας, που αναλογεί σε κάθε άτομο για τα στοιχειακά στερεά



H 4K 1.64 3.09																	**He** 2K 1.97 3.73
Li 78K 1.72 3.25	**Be** 1.24 2.35											**B** 1.22 2.31	**C** Diamond 1.11 2.09	**N** 1.89 3.57	**O** 1.83 3.46	**F**	**Ne** 1.75 3.30
Na 5K 2.08 3.93	**Mg** 1.77 3.34											**Al** 1.58 2.99	**Si** 1.68 3.18	**P** 1.89 3.57	**S** 1.83 3.46	**Cl**	**Ar** 4K 2.07 3.92
K 5K 2.57 4.86	**Ca** 2.18 4.12	**Sc** 1.81 3.42	**Ti** 1.61 3.05	**V** 1.49 2.82	**Cr** 1.42 2.68	**Mn** 1.43 2.70	**Fe** 1.43 2.70	**Co** 1.38 2.61	**Ni** 1.38 2.60	**Cu** 1.41 2.67	**Zn** 1.54 2.90	**Ga** 1.67 3.16	**Ge** 1.75 3.32	**As** 1.73 3.27	**Se** 1.87 3.53	**Br** 1.99 3.75	**Kr** 2.20 4.16
Rb 5K 2.75 5.20	**Sr** 2.38 4.49	**Y** 1.99 3.76	**Zr** 1.77 3.35	**Nb** 1.63 3.07	**Mo** 1.55 2.93	**Tc** 1.50 2.85	**Ru** 1.48 2.80	**Rh** 1.49 2.81	**Pd** 1.52 2.87	**Ag** 1.60 3.02	**Cd** 1.73 3.27	**In** 1.84 3.48	**Sn** (α) 2.01 3.80	**Sb** 1.93 3.65	**Te** 2.01 3.80	**I** 2.17 4.10	**Xe** 2.40 4.53
Cs 5K 2.98 5.62	**Ba** 2.47 4.67	**La** 2.07 3.92	**Hf** 1.74 3.30	**Ta** 1.63 3.07	**W** 1.56 2.94	**Re** 1.52 2.88	**Os** 1.50 2.83	**Ir** 1.50 2.83	**Pt** 1.53 2.89	**Au** 1.59 3.01	**Hg** (α) 1.78 3.36	**Tl** 1.90 3.59	**Pb** 1.93 3.66	**Bi** 2.04 3.85	**Po** 2.07 3.92	**At**	**Rn**
Fr	**Ra** 2.62 4.95	**Ac** 2.08 3.92															

Ce 2.02 3.81	**Pr** 2.02 3.82	**Nd** 2.01 3.81	**Pm** 2.07; 3.91;	**Sm** 1.99 3.77	**Eu** 2.26 4.26	**Gd** 1.99 3.76	**Tb** 1.97 3.72	**Dy** 1.96 3.70	**Ho** 1.95 3.69	**Er** 1.94 3.67	**Tm** 1.93 3.65	**Yb** 2.14 4.05	**Lu** 1.92 3.62
Th 1.99 3.75	**Pa** 1.81 3.42	**U** (α) 1.70 3.22	**Np** 1.66 3.14	**Pu** 1.66 3.14	**Am** 2.01 3.79	**Cm**	**Bk**	**Cf**	**Es**	**Fm**	**Md**	**No**	**Lr**

Πίνακας 5: Κρυσταλλικές δομές και γεωμετρικές διαστάσεις των στοιχειακών στερεών (κυρίως από το βιβλίο του Kittel)

[4K] **H** hcp 3.75 6.12 3.75 5.37 18.6									
[78K] **Li** bcc 3.491 – 3.023 4.70 21.3	**Be** hcp 2.27 3.59 2.22 12.5 8.01								
[5K] **Na** bcc 4.225 – 3.66 2.652 37.7	**Mg** hcp 3.21 5.21 3.20 4.30 23.3								
[5K] **K** bcc 5.225 – 4.525 1.402 71.3	**Ca** fcc 5.58 – 3.95 2.30 43.4	**Sc** hcp 3.31 5.27 3.25 4.0 25	**Ti** hcp 2.95 4.68 2.89 5.67 17.6	**V** bcc 3.03 – 2.62 7.2 13.9	**Cr** bcc 2.88 – 2.50 8.33 12.0	**Mn** comp. cub. – – 2.24 8.18 12.2	**Fe** bcc 2.87 – 2.48 8.50 11.8	**Co** hcp 2.51 4.07 2.50 9.0 11.1	
[5K] **Rb** bcc 5.585 – 4.837 1.148 87.1	**Sr** fcc 6.08 – 4.30 1.78 56.2	**Y** hcp 3.65 5.73 3.55 3.02 33.1	**Zr** hcp 3.23 5.15 3.17 4.29 23.3	**Nb** bcc 3.30 – 2.86 5.56 17.9	**Mo** bcc 3.15 – 2.72 6.42 15.6	**Tc** hcp 2.74 4.40 2.71 7.0 14.3	**Ru** hcp 2.71 4.28 2.65 7.36 13.6	**Rh** fcc 3.80 – 2.69 7.26 13.7	
[5K] **Cs** bcc 6.045 – 5.235 0.905 110	**Ba** bcc 5.02 – 4.35 1.58 63.2	**La** hex. 3.77 – 3.73 2.68 37.4	**Hf** hcp 3.19 5.05 3.13 4.5 22.2	**Ta** bcc 3.30 – 2.86 5.55 18.0	**W** bcc 3.16 – 2.74 6.30 15.9	**Re** hcp 2.76 4.46 2.74 6.80 14.7	**Os** hcp 2.74 4.32 2.68 7.14 14.0	**Ir** fcc 3.84 – 2.71 7.06 14.2	
Fr –	**Ra** –	**Ac** fcc 5.31 – 3.76 2.66 37.6							

Ce fcc 5.16 – 3.65 2.91 34.4	**Pr** hex. 3.67 – 3.63 2.92 34.2	**Nd** hex. 3.66 – 3.66 2.93 34.1	**Pm** hex. – – – 3.02 33.2	**Sm** rh. – – 3.59 3.03 33.0	
Th fcc 5.08 – 3.60 3.04 32.9	**Pa** tetr. 3.92 3.24 3.21 4.01 24.9	**U** orc. – – 2.75 4.80 20.8	**Np** orc. – – 2.62 5.20 19.2	**Pu** comp. – – 3.1 4.99 20.0	

Fe bcc 2.87 – 2.48 8.49 11.78	← κρυσταλλική δομή ← a, σταθερά πλέγματος (σε Å) ← c, σταθερά πλέγματος (σε Å) ← d, απόσταση γειτόνων (σε Å) ← n, συγκέντρωση ιόντων (σε 10^{22} cm^{-3}) ← V_i, όγκος ανά ιόν (σε Å^3)								

comp. ≡ περίπλοκο
hex. ≡ εξαγωνικό
orc. ≡ ορθορομβικό
rh. ≡ ρομβοειδές
tetr. ≡ τετραγωνικό

								^{2K} **He** hcp 3.57 5.83 3.57 3.11 32.22
			B tetr. – – – 13.0 7.69	**C** dia 3.567 – 1.54 17.6 5.68	^{20K}**N** cub. 5.66 (N_2)	**O** cub. (O_2)	**F** cub. – – 1.44 – –	^{4K}**Ne** fcc 4.46 – 3.16 4.51 22.2
			Al fcc 4.05 – 2.86 6.02 16.6	**Si** dia 5.430 – 2.35 5.00 20.0	**P** cub.	**S** orc.	^{93K}**Cl** orc. – – 2.02 (Cl_2) 29	^{4K}**Ar** fcc 5.31 – 3.76 2.66 37.5
Ni fcc 3.52 – 2.49 9.14 10.9	**Cu** fcc 3.61 – 2.56 8.45 11.8	**Zn** hcp 2.66 4.95 2.66 6.55 15.2	**Ga** orc. – – 2.44 5.10 19.6	**Ge** dia 5.658 – 2.45 4.42 22.6	**As** rh. – – 3.16 4.64 21.5	**Se** hex. – – 2.32 3.67 27.3	^{123K}**Br** orc. – – – 3.05 32.8	^{4K}**Kr** fcc 5.64 – 4.00 2.22 44.9
Pd fcc 3.89 – 2.75 6.80 14.7	**Ag** fcc 4.09 – 2.89 5.85 17.1	**Cd** hcp 2.98 5.62 2.98 4.64 21.6	**In** tetr. 3.25 4.95 3.25 3.83 26.1	**Sn** dia (α) 6.49 – tetr. 2.81 (b) 2.92 34.2	**Sb** rh. – – 2.91 3.31 30.2	**Te** hex. – – 2.86 2.95 34.0	**I** comp. – – 3.54 2.35 42.6	^{4K}**Xe** fcc 6.13 – 4.34 1.73 57.7
Pt fcc 3.92 – 2.77 6.62 15.1	**Au** fcc 4.08 – 2.88 5.90 16.9	**Hg** rh. – – 3.01 4.28 23.4	**Tl** hex. 3.46 5.52 3.46 3.50 28.6	**Pb** fcc 4.95 – 3.50 3.30 30.3	**Bi** rh. – – 3.07 2.82 35.4	**Po** sc 3.34 – 3.34 2.68 37.3	**At** –	**Rn** –

Eu bcc 4.58 – 3.96 2.08 48	**Gd** hcp 3.63 5.78 3.58 3.02 33	**Tb** hcp 3.60 5.70 3.52 3.13 32	**Dy** hcp 3.59 5.65 3.51 3.17 31.5	**Ho** hcp 3.58 5.62 3.49 3.21 31.2	**Er** hcp 3.56 5.59 3.47 3.26 30.7	**Tm** hcp 3.54 5.56 3.54 3.32 30.2	**Yb** fcc 5.48 – 3.88 2.43 41.2	**Lu** hcp 3.50 5.55 3.43 3.39 29.4
Am hex. 3.64 – 3.61 2.94 34	**Cm** –	**Bk** –	**Cf** –	**Es** –	**Fm** –	**Md** –	**No** –	**Lr** –

Πίνακας 6: Ατομική ακτίνα*, r_a, και λόγος $d/2r_a$, όπου d η απόσταση μεταξύ άμεσων γειτόνων στα στοιχειακά στερεά.

H 0.529 –																	**He** 0.291 6.13
Li 1.586 0.95	**Be** 1.040 1.09											**B** 0.776 –	**C** 0.620 1.24	**N** 0.521 –	**O** 0.450 –	**F** 0.396 –	**Ne** 0.354 4.46
Na 1.713 1.07	**Mg** 1.279 1.25											**Al** 1.312 1.09	**Si** 1.068 1.10	**P** 0.919 –	**S** 0.810 –	**Cl** 0.725 –	**Ar** 0.659 2.85
K 2.162 1.05	**Ca** 1.690 1.17	**Sc** 1.57 1.05	**Ti** 1.477 1.0	**V** 1.401 0.94	**Cr** 1.453 0.86	**Mn** 1.278 0.88	**Fe** 1.227 1.01	**Co** 1.181 1.06	**Ni** 1.139 1.09	**Cu** 1.191 1.07	**Zn** 1.065 1.25	**Ga** 1.254 0.97	**Ge** 1.090 1.12	**As** 1.001 1.58	**Se** 0.918 1.26	**Br** 0.851 –	**Kr** 0.795 2.52
Rb 2.287 1.06	**Sr** 1.836 1.17	**Y** 1.693 1.08	**Zr** 1.593 1.01	**Nb** 1.589 0.90	**Mo** 1.520 0.89	**Tc** 1.391 0.98	**Ru** 1.410 0.96	**Rh** 1.364 0.99	**Pd** 1.325 1.01	**Ag** 1.286 1.12	**Cd** 1.184 1.26	**In** 1.382 1.18	**Sn** (a) 1.240 1.13	**Sb** 1.193 1.22	**Te** 1.111 1.29	**I** 1.044 1.70	**Xe** 0.986 2.20
Cs 2.518 1.04	**Ba** 2.060 1.06	**La** 1.915 0.98	**Hf** 1.476 1.08	**Ta** 1.413 1.01	**W** 1.360 1.00	**Re** 1.310 1.05	**Os** 1.266 1.08	**Ir** 1.227 1.10	**Pt** 1.221 1.13	**Au** 1.187 1.21	**Hg** (α) 1.126 1.34	**Tl** 1.319 1.31	**Pb** 1.215 1.44	**Bi** 1.295 1.19	**Po** 1.212 1.38	**At** 1.146 –	**Rn** 1.090 –
Fr 2.447 –	**Ra** 2.042 –	**Ac** 1.895 0.99															

Ce 1.978 0.92	**Pr** 1.942 0.94	**Nd** 1.912 0.96	**Pm** 1.882 –	**Sm** 1.854 0.97	**Eu** 1.826 1.08	**Gd** 1.713 1.06	**Tb** 1.775 1.01	**Dy** 1.75 1.03	**Ho** 1.727 1.04	**Er** 1.703 1.05	**Tm** 1.681 1.05	**Yb** 1.658 1.17	**Lu** 1.553 1.13
Th 1.788 1.01	**Pa** 1.804 0.89	**U** (α) 1.775 0.77	**Np** 1.741 0.75	**Pu** 1.784 0.87	**Am** 1.757 1.03	**Cm** 1.657 –	**Bk** 1.626 –	**Cf** 1.598 –	**Es** 1.576 –	**Fm** 1.557 –	**Md** 1.527 –	**No** 1.581 –	**Lr**

Fe
1.227 ← ατομική ακτίνα, r_a (σε Å)
1.01 ← λόγος $d/2r_a$

*Η ατομική ακτίνα δεν είναι μια ποσότητα σαφώς μετρήσιμη πειραματικά. Εδώ το r_a έχει ορισθεί ως η ακτίνα όπου εμφανίζεται το κύριο μέγιστο της πυκνότητας του πιο εξωτερικού κατειλημμένου ατομικού τροχιακού. Για σχετικά μεγάλου Z άτομα η ακτίνα r_a είναι ένα εύλογο μέτρο του μεγέθους του ατόμου. Οι τιμές του r_a στον πίνακα είναι βάσει των υπολογισμών των J.T. Nader and D.T. Cromer, j. chem. phys. **42**, 4116 (1965). Για τα ευγενή αέρια χρησιμοποιείται και η ακτίνα r'_a όπου η ηλεκτρονιακή πυκνότητα είναι σχεδόν μηδέν. Συνήθεις τιμές της r'_a (σε Α): 1,58 (Ne), 1,88 (Ar), 2,00 (Kr), 2,17 (Xe)

Πίνακας 7: Ενέργειες συνοχής των στοιχείων (από το βιβλίο του Kittel).

Η ενέργεια που χρειάζεται για να χωρισθεί το στερεό (υπό πίεση 1atm και θερμοκρασία 0 K) σε ουδέτερα άτομα στη θεμελιώδη ηλεκτρονιακή κατάσταση.

Al
327 ← kJ/mol
3.39 ← eV/atom
78.1 ← kcal/mol

Li 158 1.63 37.7	**Be** 320 3.32 76.5											**B** 561 5.81 134	**C** 711 7.37 170	**N** 474 4.92 113.4	**O** 251 2.60 60.03	**F** 81.0 0.84 19.37	**Ne** 1.92 0.020 0.46
Na 107 1.113 25.67	**Mg** 145 1.51 34.7											**Al** 327 3.39 78.1	**Si** 446 4.63 106.7	**P** 331 3.43 79.16	**S** 275 2.85 65.75	**Cl** 135 1.40 32.2	**Ar** 7.74 0.080 1.85
K 90.1 0.934 21.54	**Ca** 178 1.84 42.5	**Sc** 376 3.90 89.9	**Ti** 468 4.85 111.8	**V** 512 5.31 122.4	**Cr** 395 4.10 94.5	**Mn** 282 2.92 67.4	**Fe** 413 4.28 98.7	**Co** 424 4.39 101.3	**Ni** 428 4.44 102.4	**Cu** 336 3.49 80.4	**Zn** 130 1.35 31.04	**Ga** 271 2.81 64.8	**Ge** 372 3.85 88.8	**As** 285.3 2.96 68.2	**Se** 237 2.46 56.7	**Br** 118 1.22 28.18	**Kr** 11.2 0.116 2.68
Rb 82.2 0.852 19.64	**Sr** 166 1.72 39.7	**Y** 422 4.37 100.8	**Zr** 603 6.25 144.2	**Nb** 730 7.57 174.5	**Mo** 658 6.82 157.3	**Tc** 661 6.85 158	**Ru** 650 6.74 155.4	**Rh** 554 5.75 132.5	**Pd** 376 3.89 89.8	**Ag** 284 2.95 68.0	**Cd** 112 1.16 26.73	**In** 243 2.52 58.1	**Sn** 303 3.14 72.4	**Sb** 265 2.75 63.4	**Te** 211 2.19 50.34	**I** 107 1.11 25.62	**Xe** 15.9 0.16 3.80
Cs 77.6 0.804 18.54	**Ba** 183 1.90 43.7	**La** 431 4.47 103.1	**Hf** 621 6.44 148.4	**Ta** 782 8.10 186.9	**W** 859 8.90 205.2	**Re** 775 8.03 185.2	**Os** 788 8.17 188.4	**Ir** 670 6.94 160.1	**Pt** 564 5.84 134.7	**Au** 368 3.81 87.96	**Hg** 65 0.67 15.5	**Tl** 182 1.88 43.4	**Pb** 196 2.03 46.78	**Bi** 210 2.18 50.2	**Po** 144 1.50 34.5	**At**	**Rn** 19.5 0.202 4.66
Fr	**Ra** 160 1.66 38.2	**Ac** 410 4.25 98															

Ce 417 4.32 99.7	**Pr** 357 3.70 85.3	**Nd** 328 3.40 78.5	**Pm**	**Sm** 206 2.14 49.3	**Eu** 179 1.86 42.8	**Gd** 400 4.14 95.5	**Tb** 391 4.05 93.4	**Dy** 294 3.04 70.2	**Ho** 302 3.14 72.3	**Er** 317 3.29 75.8	**Tm** 233 2.42 55.8	**Yb** 154 1.60 3.71	**Lu** 428 4.43 102.2
Th 598 6.20 142.9	**Pa**	**U** 536 5.55 128	**Np** 456 4.73 109	**Pu** 347 3.60 83.0	**Am** 264 2.73 63	**Cm** 385 3.99 92.1	**Bk**	**Cf**	**Es**	**Fm**	**Md**	**No**	**Lr**

Πίνακας 8: Ισόθερμα μέτρα ελαστικότητας (B) και συμπιεστότητας των στοιχείων σε θερμοκρασία δωματίου (από το βιβλίο του Kittel)

Cu
1.37 ← Μέτρο υδροστατικής συμπίεσης σε μονάδες 10^{12}dyn/cm^2=10^{11}N/m^2=1Mbar
0.73 ← Συμπιεστότητα σε μονάδες 10^{-12}cm^2/dyn=10^{-11}m^2/N

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι κατ΄ εκτίμηση. Τα γράμματα στις αγκύλες αναφέρονται στη θερμοκρασία ως εξής:

[a] = 75 K, [b] = 273 K, [c] = 1 K, [d] = 4 K, [e] = 81 K.

H [d] 0.002 500																	**He** [d] 0.001 1168
Li 0.116 8.62	**Be** 1.003 0.997											**B** 1.78 0.562	**C** [d] 4.43 0.226	**N** [e] 0.012 80	**O**	**F**	**Ne** [d] 0.010 100
Na 0.068 14.7	**Mg** 0.354 2.82											**Al** 0.722 1.385	**Si** 0.988 1.012	**P** (b) 0.304 3.29	**S** (r) 0.178 5.62	**Cl**	**Ar** [a] 0.013 79
K 0.032 31	**Ca** 0.152 6.58	**Sc** 0.435 2.30	**Ti** 1.051 0.951	**V** 1.619 0.618	**Cr** 1.901 0.526	**Mn** 0.596 1.68	**Fe** 1.683 0.594	**Co** 1.914 0.522	**Ni** 1.86 0.538	**Cu** 1.37 0.73	**Zn** 0.598 1.67	**Ga** [b] 0.569 1.76	**Ge** 0.772 1.29	**As** 0.394 2.54	**Se** 0.091 11.0	**Br**	**Kr** [a] 0.018 56
Rb 0.031 32	**Sr** 0.116 8.62	**Y** 0.366 2.73	**Zr** 0.833 1.20	**Nb** 1.702 0.587	**Mo** 2.725 0.366	**Tc** (2.97) (0.34)	**Ru** 3.208 0.311	**Rh** 2.704 0.369	**Pd** 1.808 0.553	**Ag** 1.007 0.993	**Cd** 0.467 2.14	**In** 0.411 2.43	**Sn** (g) 1.11 0.901	**Sb** 0.383 2.61	**Te** 0.230 4.35	**I**	**Xe**
Cs 0.020 50	**Ba** 0.103 9.97	**La** 0.243 4.12	**Hf** 1.09 0.92	**Ta** 2.00 0.50	**W** 3.232 0.309	**Re** 3.72 0.269	**Os** (4.18) (0.24)	**Ir** 3.55 0.282	**Pt** 2.783 0.359	**Au** 1.732 0.577	**Hg** [c] 0.382 2.60	**Tl** 0.359 2.79	**Pb** 0.430 2.33	**Bi** 0.315 3.17	**Po** (0.26) (3.8)	**At**	**Rn**
Fr (0.020) (50)	**Ra** (0.132) (7.6)	**Ac** (0.25) (4)															

Ce (γ) 0.239 4.18	**Pr** 0.306 3.27	**Nd** 0.327 3.06	**Pm** (0.35) (2.85)	**Sm** 0.294 3.40	**Eu** 0.147 6.80	**Gd** 0.383 2.61	**Tb** 0.399 2.51	**Dy** 0.384 2.60	**Ho** 0.397 2.52	**Er** 0.411 2.43	**Tm** 0.397 2.52	**Yb** 0.133 7.52	**Lu** 0.411 2.43
Th 0.543 1.84	**Pa** (0.76) (1.3)	**U** 0.987 1.01	**Np** (0.68) (1.5)	**Pu** 0.54 1.9	**Am**	**Cm**	**Bk**	**Cf**	**Es**	**Fm**	**Md**	**No**	**Lr**

Πίνακας 9: Θερμοκρασία Debye, Θ_D, στους 0 K, και θερμική αγωγιμότητα

Fe
464
470
0.80

← Θερμοκρασία Debye σε K (CRC)
← Θερμοκρασία Debye σε K (Kittel)
← Θερμική αγωγιμότητα στους 300 K, σε W $cm^{-1}K^{-1}$ (Kittel)

H																	**He**
Li – 344 0.85	**Be** 1160 1440 2.00											**B** – – 0.27	**C** 2340 2230 1.29	**N**	**O**	**F**	**Ne** – 75 –
Na 158 158 1.41	**Mg** 406 400 1.56											**Al** 426 428 2.37	**Si** 645 645 1.48	**P**	**S**	**Cl**	**Ar** – 92 –
K – 91 1.02	**Ca** – 230 (2.00)	**Sc** 345 360 0.16	**Ti** 420 420 0.22	**V** – 380 0.31	**Cr** 610 630 0.94	**Mn** 476 410 0.08	**Fe** 464 470 0.80	**Co** – 445 1.00	**Ni** 440 450 0.91	**Cu** 344.5 343 4.01	**Zn** 300 327 1.16	**Ga** – 320 0.41	**Ge** 374 374 0.60	**As** – 282 0.50	**Se** – 90 0.02	**Br**	**Kr** – 72 –
Rb – 56 0.58	**Sr** – 147 0.353	**Y** 244 280 0.17	**Zr** – 291 0.23	**Nb** 320 275 0.54	**Mo** 440 450 1.38	**Tc** – – 0.51	**Ru** – 600 1.17	**Rh** 478 480 1.50	**Pd** 274 274 0.72	**Ag** 225 225 4.29	**Cd** 186 209 0.97	**In** 109 108 0.82	**Sn** w 195 200 0.67	**Sb** – 211 0.24	**Te** – 153 0.02	**I** 0.0045	**Xe** – 64 –
Cs – 38 0.36	**Ba** – 110 (0.184)	**La** β 140 142 0.14	**Hf** – 252 0.23	**Ta** 250 240 0.58	**W** 405 400 1.74	**Re** – 430 0.48	**Os** – 500 0.88	**Ir** – 420 1.47	**Pt** 240 240 0.72	**Au** 165 165 3.17	**Hg** – 71.9 0.0834	**Tl** – 78.5 0.46	**Pb** 96 105 0.35	**Bi** 118 119 0.08	**Po** (0.2)	**At** (0.017)	**Rn**
Fr	**Ra** (0.186)	**Ac** (0.12)															

Ce α 179 – 0.11	**Pr** α 153 – 0.12	**Nd** α 163 – 0.16	**Pm** α (0.18)	**Sm** α 169 – 0.13	**Eu** 118 – (0.14)	**Gd** α 169 200 0.11	**Tb** α´ 170 – 0.11	**Dy** α´ – 210 0.11	**Ho** 190 – 0.16	**Er** 188 – 0.14	**Tm** 200 – 0.17	**Yb** α 118 120 0.35	**Lu** 183 210 0.16
Th – 163 0.54	**Pa** – – (0.47)	**U** – 207 0.28	**Np** – – 0.063	**Pu** – – 0.07	**Am**	**Cm**	**Bk**	**Cf**	**Es**	**Fm**	**Md**	**No**	**Lr**

Πίνακας 10: Ηλεκτρική αγωγιμότητα και ειδική αντίσταση των στοιχειακών μετάλλων σε 295 K (από το βιβλίο του Kittel)

Li 1.07 9.32	**Be** 3.08 3.25											**B**	**C**	**N**	**O**	**F**	**Ne**
Na 2.11 4.75	**Mg** 2.33 4.30											**Al** 3.65 2.74	**Si**	**P**	**S**	**Cl**	**Ar**
K 1.39 7.19	**Ca** 2.78 3.6	**Sc** 0.21 46.8	**Ti** 0.23 43.1	**V** 0.50 19.9	**Cr** 0.78 12.9	**Mn** 0.072 139	**Fe** 1.02 9.8	**Co** 1.72 5.8	**Ni** 1.43 7.0	**Cu** 5.88 1.70	**Zn** 1.69 5.92	**Ga** 0.67 14.85	**Ge**	**As**	**Se**	**Br**	**Kr**
Rb 0.80 12.5	**Sr** 0.47 21.5	**Y** 0.17 58.5	**Zr** 0.24 42.4	**Nb** 0.69 14.5	**Mo** 1.89 5.3	**Tc** ~0.7 ~14	**Ru** 1.35 7.4	**Rh** 2.08 4.8	**Pd** 0.95 10.5	**Ag** 6.21 1.61	**Cd** 1.38 7.27	**In** 1.14 8.75	**Sn** (w) 0.91 11.0	**Sb** 0.24 41.3	**Te**	**I**	**Xe**
Cs 0.50 20.0	**Ba** 0.26 39	**La** 0.13 79	**Hf** 0.33 30.6	**Ta** 0.76 13.1	**W** 1.89 5.3	**Re** 0.54 18.6	**Os** 1.10 9.1	**Ir** 1.96 5.1	**Pt** 0.96 10.4	**Au** 4.55 2.20	**Hg** liq. 0.10 95.9	**Tl** 0.61 16.4	**Pb** 0.48 21.0	**Bi** 0.086 116	**Po** 0.22 46	**At**	**Rn**
Fr	**Ra**	**Ac**															

Ce 0.12 81	**Pr** 0.15 67	**Nd** 0.17 59	**Pm**	**Sm** 0.10 99	**Eu** 0.11 89	**Gd** 0.070 134	**Tb** 0.090 111	**Dy** 0.11 90.0	**Ho** 0.13 77.7	**Er** 0.12 81	**Tm** 0.16 62	**Yb** 0.38 26.4	**Lu** 0.19 53
Th 0.66 15.2	**Pa**	**U** 0.39 25.7	**Np** 0.085 118	**Pu** 0.070 143	**Am**	**Cm**	**Bk**	**Cf**	**Es**	**Fm**	**Md**	**No**	**Lr**

Ag
6.21 ← Αγωγιμότητα σε μονάδες 10^5 $(\Omega\cdot cm)^{-1}=10^7$ S/m
1.61 ← Ειδική αντίσταση σε μονάδες $\mu\Omega\cdot cm=10^{-8}$ $\Omega\cdot m$

Ο Πίνακας 11 στην επόμενη σελίδα, ο πρώτος μεταξύ τριών (που συνοψίζουν τις προαπαιτούμενες γνώσεις), παραθέτει τις βασικές έννοιες και ορισμούς που ο αναγνώστης ή η αναγνώστρια είναι πιθανόν να συναντήσουν κατά τη μελέτη αυτού του βιβλίου.

Ο Πίνακας 12, περιέχει περί τους 25 βασικούς νόμους της Φυσικής, τους περισσότερους των οποίων ή και σχεδόν όλους θα χρειαστεί ο Φυσικός σε κάποια φάση της επαγγελματικής του ζωής.

Τέλος ο Πίνακας 13 περιλαμβάνει περί τα τριάντα νούμερα με τα οποία θα πρέπει να είναι κανείς εξοικειωμένος.

Η υπόδειξη του συγγραφέα προς τον αναγνώστη ή την αναγνώστρια αυτού του βιβλίου είναι η ακόλουθη: Πριν αρχίσετε τη μελέτη σας ρίξτε μια ματιά στους τρεις πίνακες που ακολουθούν, ώστε να εντοπίσετε από την αρχή ενδεχόμενα κενά στις γνώσεις σας και να φροντίσετε να τα καλύψετε ενισχύοντας τη μνήμη σας. Με άλλα λόγια οι Πίνακες 11, 12, 13 αποτελούν λίγο-πολύ τα 'προαπαιτούμενα' όχι μόνο για τη μελέτη του παρόντος βιβλίου αλλά και τα εφόδια με τα οποία ο νέος φυσικός θα ξεκινήσει το ταξίδι της επαγγελματικής του ζωής.

Αλλαγές στο σύστημα μονάδων

Από το Μάιο του 2019 όλες οι μονάδες, Μέτρο, Δευτερόλεπτο, Χιλιόγραμμο, Ampere, Αριθμός του Avogrado, κλπ ορίζονται βάσει των ακόλουθων παγκόσμιων σταθερών των οποίων οι τιμές έχουν φιξαρισθεί ως εξής:

$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$, $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{A \cdot s}$, $k_B = 1,380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot K^{-1} \cdot s^{-2}}$

$N_A = 6,022\,140\,76 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$, $\Delta\nu(^{133}\mathrm{Cs})_{\mathrm{hfs}} = 9\,192\,631\,770\,\mathrm{s^{-1}}$

$K_{cd} = 683\,\mathrm{cd \cdot sr \cdot s^3 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2}}$

Πίνακας 11: Έννοιες και ορισμοί Μονάδες

Μήκος, ℓ
Χρόνος, t
Μάζα, m

Κυκλική συχνότητα: $\omega \equiv 2\pi/t = 2\pi\nu$ ..... $[\omega] = 1/[t]$

Ταχύτητα: $\boldsymbol{\upsilon} \equiv d\mathbf{r}/dt$ ..... $[\upsilon] = [\ell]/[t]$

Επιτάχυνση: $\mathbf{a} \equiv d\boldsymbol{\upsilon}/dt$ ..... $[a] = [\ell]/[t]^2$

Γωνιακή επιτάχυνση: $\dot{\boldsymbol{\omega}} \equiv d\boldsymbol{\omega}/dt$ ..... $\boldsymbol{a} \equiv d\boldsymbol{\upsilon}/dt$

Πυκνότητα μάζας: $\rho_M \equiv dm/dV$ ..... $[\rho_M] = [m]/[\ell]^3$

Ορμή: $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon} = (\varepsilon/c^2)\boldsymbol{\upsilon}$ ..... $[p] = [m][\ell]/[t]$

Στροφορμή: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ..... $[L] = [m][\ell]^2/[t]$

Δύναμη, $\mathbf{F}$ ..... $[F] = [E]/[\ell] = [m][\ell]/[t]^2$

Ενέργεια: $E = E_o + E_K + E_\Delta$ ..... $[E] = [m][\ell]^2/[t]^2$

Ενέργεια ηρεμίας: $E_o \equiv m_o c^2$

Κινητική ενέργεια: $E_K \approx p^2/2m$, $cp \ll m_o c^2$

$E_o + E_K = \sqrt{m_o^2 c^4 + c^2 p^2}$

Δυναμική ενέργεια, E_Δ

Εσωτερική ενέργεια, U

Έργο: $W = \int \boldsymbol{F} \cdot d\ell$

Θερμότητα, Q

Θερμοκρασία, T : εμφανίζεται φυσικά ως $k_B T$ ..... $[k_B T] = [E]$

Εντροπία: $S = k_B \ell n\, \Delta\Gamma_N(U,V) = -k_B \sum_I P_I \ell n P_I$ ..... $[S] = [E]/[T] = [k_B]$

Χημικό δυναμικό: $\mu = (\partial U/\partial N)_{S,V}$ ..... $[\mu] = [E]$

Πίεση: $P = F/A = -\partial E/\partial V)_{S,N}$ ..... $[P] = [F]/[\ell]^2 = [E]/[\ell]^3$

Ροπή Δύναμης : $\mathbf{M} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ..... $[M] = [E]$

Ηλεκτρικό φορτίο, q ..... $\boxed{[q] = *}$

Πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου: $\rho_q = dq/dV$ ..... $[q]/[\ell]^3$

Ηλεκτρικό ρεύμα: $I \equiv dq/dt$ ..... $[I] = [q]/[t]$

Πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος: $\mathbf{j} \equiv I/A$ ..... $[j] = [q]/[t][\ell]^2$

Πίνακας 11: Έννοιες και ορισμοί (συνέχεια)

Ηλεκτρικό πεδίο: $\mathbf{E} \equiv \mathbf{F}_e / q$ ..... $[\boldsymbol{E}] = [E]/[\ell][q]$

ΗΕΔ $\equiv \oint \mathbf{E} \cdot d\ell$ ..... $[\text{ΗΕΔ}] = [E]/[q]$

Μαγνητικό πεδίο: $\mathbf{B} \equiv \mathbf{F}_m (c) / q|\boldsymbol{\upsilon}|, \quad \mathbf{F}_m \perp \boldsymbol{\upsilon}$

Ροή διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$: φ_A ή $\Phi_A = \iint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$

Κυκλοφορία διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$: $K = \oint d\ell \cdot \mathbf{A}$

⟶ Πυκνότητα ροής του βαθμωτού μεγέθους Α: $\mathbf{j}_A = \rho_A \cdot \boldsymbol{\upsilon}_A$

<u>Παράγωγα μεγέθη</u>

Ροπή αδράνειας**:** $I \equiv \sum_i m_i \rho_i^2$

Θερμοχωρητικότητα: $C \equiv \dfrac{dQ}{dT} = \dfrac{TdS}{dT}$

Μέτρα ελαστικότητας B, μ_s: $B = -V\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)$, $[B] = [P]$

Διπολική ροπή $\mathbf{p}_e$: $[p_e] = [q][\ell]$

Ηλεκτρική αντίσταση: $R = V_e / I$, $[V_e] = [\text{ΗΕΔ}]$

Ειδική ηλεκτρική αντίσταση: ρ_e: $R = \rho_e \ell / A$, $\sigma_e \equiv 1/\rho_e$,

Χωρητικότητα: $C_e = q / V_e$

Αυτεπαγωγή: $L_e = \varphi_B / I$, φ_B ροή του $\mathbf{B}$

Επιτρεπτότητα ή διηλεκτρική συνάρτηση, ϵ

Μαγνητική διαπερατότητα, μ

Επιφανειακή τάση, σ: $[\sigma] = [\text{E}]/[\ell]^2$

Ιξώδες, η: $[\eta] = [P][t]$

Δείκτης διάθλασης: $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, G-CGS

Πολωσιμότητα: $a = \mathbf{p}_e / \mathbf{E}$, $[a] = [\ell]^3$, G-CGS

Επιδεκτικότητα χ: $\epsilon = 1 + 4\pi\chi$, G-CGS

*Ξεκαθαρίστε τη σχέση των συστημάτων SI και G-CGS για τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη. Το SI έχει τις πιο οικείες μονάδες, ενώ το G-CGS έχει συνήθως πιο απλούς τύπους, γιατί, αντί των ϵ_o και μ_o στις εξισώσεις του Maxwell, χρησιμοποιεί την ταχύτητα του φωτός c.

Πίνακας 12: Βασικοί νόμοι

1. Διατήρηση στροφορμής , **L**, απομονωμένου συστήματος

$$\left(\mathbf{L}=\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i=\mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega}\right)\quad I=\sum_i \Delta m_i\rho_i^2=\int dV\rho_M\rho^2$$

2. Διατήρηση ορμής, **P**, απομονωμένου συστήματος ($\mathbf{P}=\sum_i \mathbf{p}_i$,

$$\mathbf{p}_i=m_i\boldsymbol{\upsilon}_i\,,\ m_i=m_{oi}/\sqrt{1-\left(\upsilon_i^2/c^2\right)}\ )$$

3. Διατήρηση ενέργειας, *E*, απομονωμένου συστήματος

$$E=E_o+E_K+E_\Delta\,,\ E_o+E_K=\sum_i\sqrt{m_{oi}^2c^4+c^2p_i^2}=\sum_i m_ic^2$$

4. **1ος νόμος:** $dU=đQ-đW+đE_m$ **,** $đW=PdV$, $đE_m=\mu dN$

$$G\equiv U+PV-TS\equiv H-TS\,,\ dG\le -SdT+VdP+dE_m$$

5. Διατήρηση εσωτερικών χαρακτηριστικών (φορτίο, βαρυονικός αριθμός, λεπτονικοί αριθμοί κ.α.) parity, time reversal (όχι πάντα)

6. Εντροπία και ο 2ος νόμος

$$dS=đS_{\varepsilon\xi}+đS_{\varepsilon\sigma}\ \text{(όταν}\ đE_m=0\text{), όπου}\ đS_{\varepsilon\xi}=\frac{đQ}{T}\,,$$

$$\boxed{đS_{\varepsilon\sigma}\ge 0\ \ [\mathbf{2^{ος}\ νόμος}]\quad\Rightarrow\quad đQ\le TdS}\qquad(\text{όταν}\ đE_m=0)$$

7. $P_I=\dfrac{e^{-E_I/k_BT}}{Z}\,,\ Z=\sum_I e^{-E_I/k_BT}$,

8. $n_i=\dfrac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_BT}\pm 1}$, προϋποθέσεις ισχύος;

9. $x'=x\,,\ y'=y$
$z'=\gamma\left(z-\upsilon_o t\right)\,,\ ct'=\gamma\left(ct-\upsilon_o z/c\right)$ } Lorentz
$\gamma=1/\sqrt{1-\left(\upsilon_o/c\right)^2}$

10. $\mathbf{F}_m=-\dfrac{GmM}{r^2}\mathbf{r}_o$, ΓΘΣ και η ημινευτώνεια εκδοχή της

11. $\mathbf{F}_{HM}=q\left(\mathbf{E}+\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}\right)$, SI

12. $\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}$ (μη κβαντικός) , $\dfrac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}$

Πίνακας 12: Βασικοί νόμοι (συνέχεια)

13. Εξισώσεις Maxwell

$$\left.\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{1}{\epsilon_o} Q && \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o}\rho_e \\ K_E &= -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} && \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Phi_B &= 0 && \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ K_B &= \mu_o I + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \phi_E}{\partial t} && \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \text{(SI)}$$

14. $c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$, $\mathbf{S} = \dfrac{1}{\mu_o}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, $u = \dfrac{1}{2}\epsilon_o \mathbf{E}^2 + \dfrac{1}{2\mu_o}\mathbf{B}^2$,

$\mathbf{p} = \epsilon_o \mathbf{E}\times\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{S}}{c^2}$

15. $U = \int u dV = N\hbar\omega$, $\mathbf{P} = \int \mathbf{p} dV = N\hbar\mathbf{k}$, $L = \dfrac{U}{\omega} = n\hbar$

16. $\varepsilon = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, $|\boldsymbol{k}| = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

17. $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \mathcal{V}(\mathbf{r})\psi = i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ (κβαντικός)

18. $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2}$

19. $\varepsilon_K \gtrsim \sqrt{m_o^2 c^4 + 9{,}12\dfrac{\hbar^2 c^2}{V^{2/3}}} - m_o c^2 \underset{c\to\infty}{\to} 4{,}56\dfrac{\hbar^2}{m_o V^{2/3}} \underset{m_o c^2 \ll cp}{\to} 2{,}92\hbar c / V^{1/3}$

20. Απαγορευτική αρχή του Pauli (για όμοια σωμάτια με ημιακέραιο σπιν)

21. $E_K \geq 2{,}87 N\dfrac{\hbar^2}{m}\left(\dfrac{N}{V}\right)^{2/3}$ ή $E_K \geq 2{,}32 c\hbar N\dfrac{N^{1/3}}{V^{1/3}}$ για $m_o c^2 \ll cp$

22. $\delta E = c_1 \hbar^2 / m V^{2/3}$: σύγκριση του δE με $k_B T$ ή $\hbar\omega$

Αριθμός μονοσωματιδιακών καταστάσεων: $\dfrac{V V_{\boldsymbol{k}}}{(2\pi)^3}$, όπου $V_{\boldsymbol{k}}$ είναι ο όγκος στο χώρο των **k.** **Και ο μακρόκοσμος είναι κβαντικός**

Πίνακας 13: Νούμερα να θυμόσαστε

Ταχύτητα φωτός, $c \approx 3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$

Μάζα ηλεκτρονίου, $m_e c^2 \approx 0,511\,\mathrm{MeV},\ m_e = 9,11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$

Μάζα πρωτονίου, $m_p \approx 1836,15\,m_e$

Μάζα νετρονίου, $m_n \approx 1838.68\,m_e$

Μάζα $m_u \equiv u \equiv \mathrm{Da}$ (1/12 άνθρακα-12), $m_u \approx 1822,89\,m_e$. Da=Dalton

Σταθερά βαρύτητας {στο σύστημα $(\hbar = m_e = e = 1)$}, $G = 2,4\times10^{-43}$

Επιτάχυνση βαρύτητας στη Γη, $g \approx 9,81\,\mathrm{m/s^2}$

Σταθερά του Avogadro, $N_A \approx 6\times10^{23}$

Σταθερά λεπτής υφής, $a \equiv e^2/\hbar c = \hbar/m_e a_B c = \upsilon_0/c \approx 1/137$

Σταθερά τελείων αερίων, $R \equiv N_A k_B \approx 8,3144\,\mathrm{J/K}$

Ακτίνα του Bohr, $a_B \equiv \hbar^2/m_e e^2 \approx 0,53\,\text{Å}$

Ατομική μονάδα ενέργειας, $E_0 \equiv e^2/a_B = \hbar^2/m_e a_B^2 \approx 27,2\,\mathrm{eV}$

Ατομική μονάδα χρόνου, $\hbar/E_0 \approx 2,42\times10^{-17}\,\mathrm{s}$

$290^{\circ}\mathrm{K} \Leftrightarrow (1/40)\,\mathrm{eV},\quad 273^{\circ}\mathrm{K} = 0^{\circ}\mathrm{C}$

Ατομική μονάδα πίεσης, $P_0 \equiv E_0/a_B^3 \approx 294\,\mathrm{Mbar}$

Αδιάστατες εντάσεις βασικών αλληλεπιδράσεων

Βαρυτική, $G m_p^2/\hbar c \approx 5,9\times10^{-39}$

Ηλεκτρομαγνητική, $e^2/\hbar c = \alpha \approx 1/137$

Ασθενής, $\alpha_w \approx 3\times10^{-7}$

Ισχυρή, $\alpha_s \approx 1$

Περιφέρεια της Γης, $\Pi \approx 4\times10^{7}\,\mathrm{m}$

Μάζα του Ήλιου $M_H \approx 1,99\times10^{30}\,\mathrm{kg}$

Μάζα της Γης $M_\Gamma = 5,97\times10^{24}\,\mathrm{kg}$

$N_A m_u = 1\,\mathrm{g}$

$1\,\mathrm{eV}/\text{άτομο} \approx 96,48\,\mathrm{kJ/mol} = 23,06\,\mathrm{kcal/mol}$

$1\,\mathrm{eV} = 1,6\times10^{-19}\,\mathrm{J} \leftrightarrow 12400\,\text{Å} \leftrightarrow 8065\,\mathrm{cm^{-1}} \leftrightarrow 2,42\times10^{14}\,\mathrm{Hz} \leftrightarrow 11600\,\mathrm{K}$

$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa} = 0,987\,\mathrm{atm} = 750\,\mathrm{torr} = 750\,\mathrm{mm\,Hg}$

$1\,\mathrm{AU} = 1,496\times10^{11}\,\mathrm{m},\ 1\,\mathrm{ly} = 9,46\times10^{15}\,\mathrm{m},\ 1\,\mathrm{pc} = 3,0857\times10^{16}\,\mathrm{m} = 3,2616\,\mathrm{ly}$

Περιοχή του ορατού φάσματος:

$1,66\,\mathrm{eV}\{400\,\mathrm{THz}\} \le \hbar\omega\{f\} \le 3,1\,\mathrm{eV}\{750\,\mathrm{THz}\},\ 750\,\mathrm{nm} \ge \lambda \ge 400\,\mathrm{nm}$

Πίνακας 1: Πίνακας φυσικών σταθερών (Δεδομένα 2018). (Οι εντός παρενθέσεως αριθμοί δηλώνουν την τυπική απόκλιση στα δύο τελευταία ψηφία). Για πρόσφατες αλλαγές (Μάιος 2019) βλ. σελ. 423

Ποσότητα	**Σύμβολο**	**Τιμή** (έτους 2018)	**Μονάδες**
Σταθερά του Planck δια 2π	$\hbar = h / 2\pi$	$1,054\ 571\ 818\ (13) \times 10^{-34}$	$J \cdot s$
	$\hbar$	$6,582\ 119\ 514(40) \times 10^{-16}$	$eV \cdot s$
Ταχύτητα του φωτός	c	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$
Σταθερά παγκόσμιας έλξης	G	$6,674\ 08(31) \times 10^{-11}$	$m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Φορτίο πρωτονίου	e	$1,602\ 176\ 634(98) \times 10^{-19}$	C
Μάζα ηλεκτρονίου	m_e or m	$9,109\ 383\ 56(11) \times 10^{-31}$	kg
Μάζα πρωτονίου	m_p	$1,672\ 621\ 898(21) \times 10^{-27}$	kg
Μάζα νετρονίου	m_n	$1,674\ 927\ 471(21) \times 10^{-27}$	kg
Ατομική μάζα $\frac{1}{12} m(C^{12})$	m_u (ή u ή Da)	$1,660\ 539\ 040(20) \times 10^{-27}$	kg
Επιτρεπτότητα (ή διηλεκτρική σταθερά) του κενού	ϵ_0	$8,854\ 187\ 817... \times 10^{-12}$	$F \cdot m^{-1}$
Διαπερατότητα του κενού	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$N \cdot A^{-2}$
Σταθερά του Boltzmann	k_B	$1,380\ 649 \times 10^{-23}$	$J \cdot K^{-1}$
Σταθερά του Avogadro	N_A	$6,022\ 140\ 857(74) \times 10^{23}$	mol^{-1}
Σταθερά λεπτής υφής	α^*	$(137,035\ 999\ 139(31))^{-1}$	
Κβάντο μαγνητικής ροής	Φ_0^*	$2,067\ 833\ 831(13) \times 10^{-15}$	Wb
Κβαντική αντίσταση Hall	R_H^*	$25\ 812,807\ 4555(59)$	Ω
Μαγνητόνη του Bohr	μ_B^*	$927,400\ 9994(57) \times 10^{-26}$	$J \cdot T^{-1}$
Πυρηνική μαγνητόνη	μ_N^*	$5,050\ 783\ 699(31) \times 10^{-27}$	$J \cdot T^{-1}$
Μαγνητική ροπή ηλεκτρονίου	μ_e	$-1,001\ 159\ 652\ 180\ 91(26)$	μ_B
Μαγνητική ροπή πρωτονίου	μ_p	$2,792\ 847\ 3508(85)$	μ_N
Μαγνητική ροπή νετρονίου	μ_n	$-1,913\ 042\ 73\ (45)$	μ_N
Σταθερά τελείων αερίων	$R \equiv N_A k_B$	$8,314\ 4598(48)$	$J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
Ακτίνα του Bohr	$a_B \equiv 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2$	$0,529\ 177\ 210\ 67(12) \times 10^{-10}$	m

* $\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c$, $\Phi_0 = h / 2e$, $R_H \equiv h / e^2$, $\mu_B \equiv e\hbar / 2m_e$, $\mu_N \equiv \left(m_e / m_p\right) \mu_B$ (Όλα στο SI).

$\alpha = e^2 / \hbar c$, $\Phi_0 = hc / 2e$, $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$, $\mu_B = e\hbar / 2m_e c$, $\mu_N \equiv \left(m_e / m_p\right) \mu_B$ (Όλα στο G-CGS).

Πίνακας 2: Ατομικό σύστημα μονάδων ($m_e = 1;\ e = 1;\ a_B = 1;\ k_B = 1$)

$c = 1/\alpha$ στο G – CGS; $\varepsilon_0 = 1/4\pi$, $\mu_0 = 4\pi\alpha^2$ στο SI.

Μήκος	$l_0 = a_B$
Μάζα	$m_0 \equiv m_e$
Ηλεκτρικό φορτίο	$q_0 \equiv e$
Χρόνος	$t_0 \equiv m_e a_B^2 / \hbar = 2,418\,884 \times 10^{-17}\ s$
Ενέργεια	$E_0 \equiv \hbar^2 / m_e a_B^2 = 4,359\,744 \times 10^{-18}\ \text{J} = 27,211\,384\ \text{eV}$
Γωνιακή συχνότητα	$\omega_0 \equiv \hbar / m_e a_B^2 = 4,134\,137 \times 10^{16}\ \text{rad/s}$
Ταχύτητα	$\upsilon_0 \equiv a_B / t_0 = \hbar / m_e a_B = \alpha c = 2\,187,691\ \text{km/s}$
Πυκνότητα μάζας	$\rho_0 = m_e / a_B^3 = 6,147\,315\ \text{kg/m}^3$
Θερμοκρασία	$T_0 \equiv E_0 / k_B = \hbar^2 / m_e a_B^2 k_B = 315\,775\ \text{K}$
Πίεση	$P_0 \equiv E_0 / a_B^3 = \hbar^2 / m_e a_B^5 = 2,942\,101 \times 10^{13}\ \text{N/m}^2$ $= 2,942\,101 \times 10^8\ \text{bar}$
Ηλεκτρική αντίσταση	$R_0 \equiv \hbar / e^2 = R_H / 2\pi = 4\,108,2359\ \Omega$
Ειδική ηλεκτρική αντίσταση	$\rho_{\rho 0} = R_0 a_B = \hbar a_B / e^2 = 21,739\,848\ \mu\Omega \times \text{cm}$
Αγωγιμότητα	$\sigma_0 = 1/\rho_{c0} = e^2 / \hbar a_B = 4,599\,848 \times 10^6\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$
Ηλεκτρικό ρεύμα	$i_0 \equiv e / t_0 = 6,623\,618 \times 10^{-3}\ \text{A}$
Τάση ή ηλεκτρικό δυναμικό	$V_0 \equiv E_0 / e = 27,211\,384\ \text{V}$
Ηλεκτρικό πεδίο	$E_O \equiv V_0 / a_B = 5,142\,206 \times 10^{11}\ \text{V/m}$
Μαγνητικό πεδίο	$B_0 \equiv \hbar / e a_B^2 = 2,350\,517 \times 10^5\ \text{T},\ \text{SI}$
Ηλεκτρική πολωσιμότητα	$a_{e0} = 4\pi\epsilon_0 a_B^3 = 1,648\,777 \times 10^{-41}\ \text{Fm}^2,\ \text{SI}$
Ηλεκτρική μετατόπιση	$D_0 \equiv e / a_B^2 = 57,214\,762\ \text{C/m}^2,\ \text{SI}$
Μαγνητική ροπή	$\mu_0 \equiv 2\mu_B \equiv e\hbar / m_e = 1,854\,802 \times 10^{-23}\ \text{JT}^{-1},\ \text{SI}$
Μαγνήτιση	$M_0 \equiv \mu_0 / a_B^3 = 1,251\,682 \times 10^8\ \text{A/m},\ \text{SI}$
Μαγνητικό πεδίο (βοηθητικό)	$H_0 \equiv M_0 = 1,251\,682 \times 10^8\ \text{A/m},\ \text{SI}$

Για οποιαδήποτε ποσότητα X ορίζουμε $\bar{X} = X / X_0$ (see (1.16)).

[1]Στο SI, θέσε $c = 1$. [2]Στο G-CGS, θέσε $4\pi\epsilon_0 = 1$. $\boldsymbol{G \approx 2,4 \times 10^{-43}}$ α.μ.