Η ΑΤΟΜΙΚΗ ΙΔΕΑ: Ο θρίαμβος του Δημόκριτου

Εάν, σ' ένα παγκόσμιο κατακλυσμό, όλη η επιστημονική γνώση επρόκειτο να καταστραφεί εκτός από μια μόνο πρόταση που θα περνούσε στις επόμενες γενιές, ποια θα ήταν αυτή η πρόταση που θα περιείχε τη μέγιστη πληροφορία με τις ελάχιστες λέξεις;
Πιστεύω ότι είναι η ατομική ιδέα ότι, δηλαδή, τα πάντα είναι φτιαγμένα από άτομα - μικροσκοπικά σωμάτια που κινούνται γύρω-γύρω αέναα, έλκοντας άλληλα όταν είναι σε κοντινή απόσταση, αλλά απωθώντας άλληλα όταν συμπιεσθούν το ένα πάνω στο άλλο.
Σ' αυτή τη μια πρόταση ενυπάρχει μια τεράστια ποσότητα πληροφορίας για τον Κόσμο, εάν διαθέσει κανείς λίγη φαντασία και σκέψη.

R. P. Feynman

Σύμφωνα με την ατομική ιδέα το καθετί αποτελείται από στοιχειώδη (δηλαδή αδιαίρετα) μικροσκοπικά σωμάτια[1] που αλληλοέλκονται και αλληλοπαγιδεύονται χωρίς όμως να συνθλίβονται *γιατί κινούνται αέναα*. Έτσι σχηματίζεται, σε διαδοχικά στάδια, η τεράστια ποικιλία του Κόσμου. Τα σωμάτια αυτά θα τα ονομάσουμε στοιχειώδη σωμάτια ύλης (**σωμάτια-υ**) για να τα διακρίνουμε από τα στοιχειώδη μικροσκοπικά σωμάτια που είναι οι φορείς των διαφόρων ειδών δυνάμεων. Με άλλα λόγια η ατομική δομή δεν περιορίζεται μόνο στην ύλη αλλά επεκτείνεται και στις δυνάμεις ή, πιο σωστά, και στις αλληλεπιδράσεις, οι οποίες ασκούνται μέσω ανταλλαγής αυτών των σωματίων-φορέων που θα τα ονομάσουμε στοιχειώδη σωμάτια-φορείς αλληλεπιδράσεων (**σωμάτια-αλ**).

Η ατομική δομή του Κόσμου είναι πράγματι η πιο βασική ιδέα της Επιστήμης. Γιατί σ' αυτήν ενυπάρχει, όπως προσφυώς επισημαίνει ο Feynman, μια τεράστια ποσότητα πληροφορίας. Γιατί σ' αυτήν βρίσκεται η κρυμμένη απλότητα ενός Κόσμου που εμφανίζεται τόσο αφάνταστα ποικίλος και περίπλοκος στις δομές του. Γιατί αυτές οι δομές, τουλάχιστον όσες είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία, μπορούν να κατανοηθούν σε ποσοτικό επίπεδο με βάση τις *ιδιότητες* και τις *κινήσεις* των μικροσκοπικών σωματίων που τις αποτελούν. Μ' άλλα λόγια, οι δομές αυτές εξαρτώνται μόνο από κάποιους λίγους αριθμούς μετρημένους στα δάχτυλα του ενός χεριού που χαρακτηρίζουν τα στοιχειώδη σωμάτια και τις αλληλεπιδράσεις τους. Π.χ., οι ποικίλες ιδιότητες των *διαφόρων* μετάλλων, όπως η πυκνότητα τους, η ηλεκτρική τους αντίσταση, η θερμική τους αγωγιμότητα, η μηχανική τους αντοχή, η τήξη τους, η σκληρότητα τους, το αν σκουριάζουν ή όχι, το αν μαγνητίζονται ή όχι, η αδιαφάνεια τους στο φως, το πόσο γρήγορα διαδίδεται ο ήχος σ' αυτά κλπ εξαρτώνται, χάρη στην ατομική ιδέα, από τέσσερις μόνο αριθμούς. Από αυτούς οι τρεις (η λεγόμενη παγκόσμια σταθερά του Planck $\hbar$, το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου e, και η μάζα του ηλεκτρονίου m_e) είναι οι ίδιοι για όλα τα μέταλλα και για όλη την

[1] Όμως η θεωρία χορδών ή μεμβρανών (χωρίς πειραματική επιβεβαίωση μέχρι σήμερα (2011)) δέχεται στοιχειώδη αντικείμενα όχι σημειακά, αλλά γραμμικά, ή διδιάστατα, κ.ο.κ.

οικεία υλη και μόνο ο τέταρτος –ένας ακέραιος αριθμός που συμβολίζεται με Z και ονομάζεται ατομικός αριθμός- διαφέρει από στοιχείο σε στοιχείο. Στις ποσότητες αυτές θα επανέλθουμε σε λίγο.

Για να αποκτήσει «σάρκα και οστά» η ατομική ιδέα χρειάζεται να γνωρίζουμε ποια είναι τα διάφορα είδη των στοιχειωδών σωματίων ύλης (σωματίων-υ) και ποια τα διάφορα είδη των στοιχειωδών σωματίων των αλληλεπιδράσεων (σωματίων-αλ), τι ιδιότητες έχουν, πώς τα πρώτα αλληλεπιδρούν με τα δεύτερα και επομένως ποιες αλληλοπαγιδεύσεις είναι εφικτές ώστε να προχωρήσουμε έτσι στα επόμενα στάδια οργάνωσης της ύλης.

1.1. Τα στοιχειώδη σωμάτια της ύλης σήμερα[2]

Η ύλη που μας περιβάλλει (στην παρούσα φάση της ιστορίας του Σύμπαντος) ή μας αποτελεί δημιουργείται από δύο είδη **κουάρκ**[3] **(**το ***πάνω*** κουάρκ (u) και το **κάτω** κουάρκ (d)) και μόνο ένα είδος **ηλεκτρονίου** που το σύμβολό του είναι e ή e^-. Στην πραγματικότητα τα κουάρκ δεν έχουν παρατηρηθεί ελεύθερα αλλά πάντοτε ως συστατικά σύνθετων σωματίων ύλης όπως, π.χ. τα πρωτόνια.

Το ηλεκτρόνιο κατά τις αλληλεπιδράσεις του με σωμάτια–φορείς αλληλεπιδράσεων δημιουργεί αυτοκαταστρεφόμενο σε ορισμένες περιπτώσεις ένα σωμάτιο που λέγεται **νετρίνο** και συμβολίζεται ως ν_e, το οποίο όμως διαφεύγει στο διάστημα και δεν παγιδεύεται στην ύλη. Τα ραδιενεργά κατάλοιπα της σχάσης στους πυρηνικούς αντιδραστήρες εκπέμπουν νετρίνα μέσω της ως άνω αντίδρασης. Τα ηλεκτρόνια και τα νετρίνα έχουν το κοινό όνομα **λεπτόνια**.

Έτσι η συνήθης ύλη περιλαμβάνει τρία μόνο είδη σωματίων ύλης: δύο κουάρκ και ένα λεπτόνιο, το ηλεκτρόνιο. (Αν θέλουμε να μετρήσουμε και το νετρίνο, παρόλο που δεν συμμετέχει στην συνήθη ύλη, τότε τα λεπτόνια είναι και αυτά δύο). Οι ιδιότητές των σωματίων αυτών (περιλαμβανομένου και του νετρίνου) φαίνονται στην πρώτη οικογένεια του Πιν**.** ΙΙΙ (σελ. 14). Και τα τέσσερα σωμάτια ύλης έχουν μια εσωτερική ιδιότητα που ονομάζεται **σπιν** και έχει την τιμή 1/2 (ημιακέραιο). Το σπιν συνδέεται με την εσωτερική στροφορμή του

---

[2] Η μέχρι τώρα εμπειρία έχει δείξει ότι αυτά που κατά καιρούς θεωρούσαμε στοιχειώδη αποδείχτηκαν σύνθετα. Το κάθε άτομο δεν είναι στοιχειώδες, όπως αρχικά εθεωρείτο, αφού συνίσταται από πυρήνα και ηλεκτρόνια. Ο κάθε πυρήνας δεν είναι στοιχειώδης, αφού συνίσταται από πρωτόνια και νετρόνια (εκτός αυτού του απλού υδρογόνου). Τα πρωτόνια και τα νετρόνια δεν είναι στοιχειώδη, αφού συνίστανται από τρία κουάρκ. Ίσως με τα ηλεκτρόνια και τα κουάρκ να φτάσαμε επιτέλους στο τέλος. Έστω και αν τα ηλεκτρόνια, τα κουάρκ και όλα τα άλλα σωμάτια του Πιν. ΙΙΙ είναι πράγματι στοιχειώδη, μπορεί να υπάρχουν και άλλα στοιχειώδη σωμάτια ύλης στο Σύμπαν που δεν έχουν βρεθεί πειραματικά. Αστρονομικές παρατηρήσεις συνηγορούν υπέρ της ύπαρξης τέτοιων μη ανακαλυφθέντων σωματίων, που αποτελούν τη λεγόμενη σκοτεινή ύλη.

[3]Το κάθε κουάρκ εκτός από ηλεκτρικό φορτίο φέρει και ένα άλλο είδος φορτίου που έχει καθιερωθεί να ονομάζεται **χρωματικό φορτίο** (αν και δεν έχει καμία σχέση με χρώμα). Όπως το ηλεκτρικό φορτίο είναι πηγή και αποδέκτης της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης, έτσι και το χρωματικό φορτίο είναι πηγή και αποδέκτης της λεγόμενης ισχυρής δύναμης (βλ. Πιν. IV, σελ. 17). Σε αντίθεση με το ηλεκτρικό φορτίο (που είναι ενός μόνο τύπου) το χρωματικό φορτίο είναι τριών τύπων «κόκκινο»(R), «πράσινο» (G) και «μπλε» (B). Έτσι κάθε κουάρκ μπορεί να φέρει μια μονάδα, «κόκκινου» χρωματικού φορτίου, ή «πράσινου» χρωματικού φορτίου ή «μπλε» χρωματικού φορτίου. Το κάθε αντικουάρκ φέρει αντίθετο χρωματικό φορτίο από το αντίστοιχο κουάρκ. Έχουμε έτσι για κάθε αντικουάρκ τη δυνατότητα «αντικόκκινου» ($\overline{R}$), ή «αντιπράσινου» $\overline{G}$, ή «αντιμπλέ» $\overline{B}$ χρωματικού φορτίου. Οι συνδυασμοί κουάρκ-αντικουάρκ ή τριών κουάρκ, $R\overline{R}$, $G\overline{G}$, $B\overline{B}$, RGB, $\overline{RGB}$ που εμφανίζονται στη φύση αντιστοιχούν πάντοτε σε μηδενικό συνολικό χρωματικό φορτίο.

σωματίου βάσει του τύπου: εσωτερική στροφορμή=σπιν $\times\hbar$, όπου $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck.

Δύο πάνω και ένα κάτω κουάρκ με την παρουσία και τη βοήθεια σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων αλληλοπαγιδεύονται και δημιουργούν το πρωτόνιο,

$$\boxed{p = u, u, d} \tag{1.1}$$

Δύο κάτω και ένα πάνω κουάρκ με την παρουσία και με τη βοήθεια σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων αλληλοπαγιδεύονται και δημιουργούν το νετρόνιο, *n*:

$$\boxed{n = u, d, d} \tag{1.2}$$

Τα πρωτόνια, τα νετρόνια και άλλα παρόμοια σύνθετα σωμάτια που αποτελούνται από τρία κουάρκ φέρουν το κοινό όνομα **βαρυόνια** και τους αποδίδεται ο βαρυονικός αριθμός 1. Κατά συνέπεια αποδίδουμε στο κάθε κουάρκ **βαρυονικό αριθμό** 1/3. Η τιμή μηδέν, για το λεπτονικό αριθμό των κουάρκ, δείχνει απλώς ότι τα κουάρκ δεν είναι λεπτόνια. Το αντίθετο συμβαίνει για τα λεπτόνια: Το κάθε λεπτόνιο φέρει **λεπτονικό αριθμό** 1 και βαρυονικό αριθμό μηδέν.

Θυμίζουμε ότι για κάθε ένα από τα παραπάνω τέσσερα σωμάτια [4] υπάρχει το **αντισωμάτιό** του που συμβολίζεται ως $\bar{u}$, $\bar{d}$, $e^{+}, \bar{\nu}_e$ αντιστοίχως. Η μάζα, το σπιν και το μέγεθος του κάθε αντισωματίου είναι ακριβώς ίδια με αυτά του αντίστοιχου σωματίου, ενώ το ηλεκτρικό φορτίο, το χρωματικό φορτίο, ο βαρυονικός αριθμός και ο λεπτονικός αριθμός είναι ακριβώς αντίθετα. Σημειώστε ότι τα αντισωμάτια δεν συμμετέχουν στη δομή της συνηθισμένης ύλης, τα παράγουμε όμως πειραματικά στους επιταχυντές-αντιδραστήρες υψηλής ενέργειας και προκύπτουν υποχρεωτικά και αβίαστα από τη θεωρία. Ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ σχηματίζουν σύνθετα σωμάτια που ονομάζονται **μεσόνια**. Τα μεσόνια είναι μετασταθή σωμάτια και άρα βραχύβια. Παράγονται κατά τις συγκρούσεις των κοσμικών ακτίνων με σωμάτια της ατμόσφαιρας ή, τεχνητά, σε επιταχυντές-αντιδραστήρες. Πρωτόνια και νετρόνια αλληλοπαγιδεύονται (με τη βοήθεια πάντοτε κάποιων σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων) και δημιουργούν τους ατομικούς πυρήνες.

Οι πυρήνες, που είναι θετικά φορτισμένοι, παγιδεύουν γύρω τους ηλεκτρόνια (με τη βοήθεια των σωματίων-φορέων των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων) δημιουργώντας έτσι τα ουδέτερα άτομα (όταν ο αριθμός πρωτονίων στον πυρήνα και ηλεκτρονίων είναι ίσος) ή τα ιόντα (όταν ο αριθμός πρωτονίων διαφέρει από τον αριθμό ηλεκτρονίων).

Η φύση φαίνεται ότι στάθηκε σπάταλη και δημιούργησε εκτός από την πρώτη οικογένεια των τεσσάρων σωματίων στον Πιν. ΙΙΙ, και άλλες δύο παρόμοιες οικογένειες στοιχειωδών σωματίων, που η κάθε μια τους αποτελείται από τέσσερα σωμάτια ύλης (δύο κουάρκ και δύο λεπτόνια), όπως φαίνεται στον Πιν. ΙΙΙ. Το κάθε ένα από τα κουάρκ *c, s, t, b* φέρει επίσης χρωματικό φορτίο που είναι τριών τύπων: *R, G, B*.

Τα σωμάτια των οικογενειών 2 και 3 του Πιν. ΙΙΙ. δεν μετέχουν στο σχηματισμό της ύλης, λόγω του ότι δεν είναι σταθερά. Αυτό γιατί είναι βαρύτερα από τα αντίστοιχα της οικογένειας 1 του Πιν. ΙΙΙ και επομένως διαθέτουν

---

[4] Τονίζουμε ότι το νετρίνο επειδή δεν παγιδεύεται μαζί με άλλα σωμάτια, δεν συμμετέχει στη δομή των επόμενων επιπέδων οργάνωσης της ύλης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ: ΤΑ ΓΝΩΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ ΤΗΣ ΥΛΗΣ. Τα στοιχειώδη σωμάτια ύλης (σωμάτια-υ) είναι δύο τύπων (λεπτόνια και κουάρκ) και τριών “οικογενειών” ($1^{η}$, $2^{η}$, $3^{η}$). Η συνήθης ύλη αποτελείται από τρία μόνο είδη σωματίων (*e, u, d*). Τα νετρίνα είναι πολύ ελαφριά και πολύ ασθενώς αλληλεπιδρώντα για να παγιδευτούν στην ύλη και επομένως κυκλοφορούν παντού ελεύθερα. Τα σωμάτια-υ των οικογενειών 2 και 3 έχουν περίσσεια ενέργειας ηρεμίας και ως εκ τούτου είναι μετασταθή και μετασχηματίζονται σε σωμάτια της $1^{ης}$ οικογένειας. Αστροφυσικές και κοσμολογικές παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι θα πρέπει να υπάρχουν και άλλα σωμάτια-υ, που προβλέπονται από κάποιες θεωρίες, αλλά δεν έχουν βρεθεί (ακόμη;). Σημειώστε ότι όλα τα σωμάτια-υ έχουν σπιν ½. Τα κουάρκ φέρουν χρωματικό φορτίο τριών ειδών (R,G, B), εξού και οι αντίστοιχοι κάτω δείκτες που συνοδεύουν το σύμβολό τους.

	ΛΕΠΤΟΝΙΑ						ΚΟΥΑΡΚ					
	Όνομα/ Σύμβολο	Μάζα (MeV)	Σπιν	Ηλεκτρικό φορτίο	Βαρυονικός αριθμός	Λεπτονικός αριθμός	Όνομα/ Σύμβολο	Μάζα (MeV)	Σπιν	Ηλεκτρικό φορτίο	Βαρυονικός αριθμός	Λεπτονικός αριθμός
1η Οικογένεια	Νετρίνο ηλεκτρονίου ν_e	$\approx 2\times10^{-9}$?????	1/2	0	0	1_e	πάνω κουάρκ u_{RGB}	1,5-4,5	1/2	2/3	1/3	0
	Ηλεκτρόνιο e	0,511 0,5109989	1/2	-1	0	1_e	κάτω κουάρκ d_{RGB}	5-8,5	1/2	-1/3	1/3	0
2η Οικογένεια	Νετρίνο μιονίου ν_μ	$\approx 8\times10^{-9}$?????	1/2	0	0	1_μ	χαρισματικό c_{RGB}	1000-1400	1/2	2/3	1/3	0
	Μιόνιο μ	105,658	1/2	-1	0	1_μ	παράξενο s_{RGB}	80-155	1/2	-1/3	1/3	0
3η Οικογένεια	Νετρίνο του τ ν_τ	$\approx 5\times10^{-8}$?????	1/2	0	0	1_τ	κορυφαίο t_{RGB}	174000	1/2	2/3	1/3	0
	Σωμάτιο τ τ	1777,05	1/2	-1	0	1_τ	πυθμενικό b_{RGB}	4000-4500	1/2	-1/3	1/3	0

Άλλα σωμάτια ??? Μάζα νετρίνων ???

περίσσεια ενέργειας ηρεμίας ώστε με τη βοήθεια σωματίων-φορέων αλληλεπιδράσεων να μετασχηματίζονται σε σωμάτια της πρώτης οικογένειας (του Πιν. ΙΙΙ.). Άρα τα σωμάτια των οικογενειών 2 και 3 του Πιν. ΙΙΙ είναι μετασταθή με την έννοια ότι χαρακτηρίζονται από ένα πεπερασμένο **μέσο χρόνο ζωής** (mean lifetime) τ, ή **χρόνο υποδιπλασιασμού** $t_{1/2}$. Ο χρόνος τ χαρακτηρίζει την εκθετική μείωση ενός αρχικού πληθυσμού N_o με την πάροδο του χρόνου t, $N(t) = N_o \exp(-t/\tau)$. Ο χρόνος $t_{1/2}$ είναι ο απαιτούμενος χρόνος για να υποδιπλασιαστεί ο αρχικός πληθυσμός: $N(t_{1/2}) \equiv N_o \exp(-t_{1/2}/\tau) = N_o/2$. Έπεται ότι $t_{1/2} = (\ln 2)\tau \approx 0{,}693\tau$. Π.χ., το μιόνιο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\mu \to e + \nu_\mu + \overline{\nu_e} \tag{1.3}$$

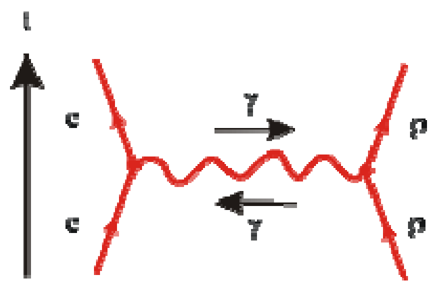
με χρόνο υποδιπλασιασμού $1{,}523 \times 10^{-6}$ sec.

Όλα τα σωμάτια του Πιν. ΙΙΙ έχουν τα αντισωμάτιά τους , όπως απαιτεί η θεωρία και επιβεβαιώνει το πείραμα. Και τα σωμάτια και τα αντισωμάτια του Πιν. ΙΙΙ έχουν παρατηρηθεί και αναλυθεί πειραματικά. Κλείνοντας αυτήν την ενότητα, ας επισημάνουμε ξανά, ότι από τα 12 σωμάτια του Πιν. ΙΙΙ και τα 12 αντισωμάτιά τους μόνο τρία (το άνω κουάρκ, *u*, το κάτω κουάρκ, *d*, και το ηλεκτρόνιο, *e*, μετέχουν στη δομή της ύλης που μας αποτελεί και μας περιβάλλει).

Αν λάβουμε υπόψη και το χρωματικό φορτίο ο αριθμός των κουάρκ και των αντικουάρκ τριπλασιάζεται. Σημειώστε ότι όλα τα σωμάτια ύλης του Πιν. ΙΙΙ έχουν σπιν ½, πράγμα που συνεπάγεται ότι υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli (βλ. σελ. 32). Σωμάτια. με σπιν ημιακέραιο ονομάζονται **φερμιόνια**.

1.2 Τα στοιχειώδη σωμάτια των δυνάμεων (ή αλληλεπιδράσεων)

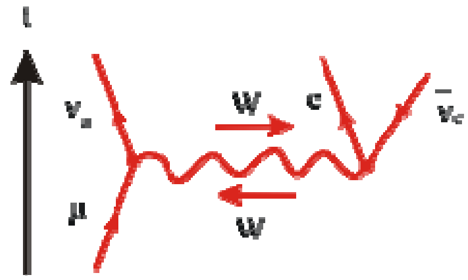
Υπάρχουν τεσσάρων ειδών στοιχειώδεις δυνάμεις ή, πιο σωστά, στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές εκτός από τη δημιουργία ελκτικών ή απωστικών δυνάμεων μπορούν να παίξουν ένα γενικότερο ρόλο με το να συμμετέχουν στο μετασχηματισμό σωματίων. Κάθε στοιχειώδες σωμάτιο (επομένως και κάθε σύνθετο) είναι πηγή αλλά και αποδέκτης μιας τουλάχιστον από τις παραπάνω τέσσερις στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις. Πηγή με την έννοια ότι μπορεί να εκπέμψει ένα σωμάτιο-φορέα της υπόψη αλληλεπίδρασης και αποδέκτης με την έννοια ότι μπορεί να απορροφήσει ένα σωμάτιο-φορέα της υπόψη αλληλεπίδρασης. Π.χ. η ηλεκτρική έλξη μεταξύ ενός



Σχήμα 1.1. *Η ηλεκτρομαγνητική (ΗΜ) αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου- πρωτονίου οφείλεται στην ανταλλαγή ενός σωματίου-φορέα της ΗΜ αλληλεπίδρασης, που ονομάζεται* ***φωτόνιο*** *(γ). Στην περίπτωση αυτή ούτε το ηλεκτρόνιο ούτε το πρωτόνιο μετασχηματίζεται σε άλλο σωμάτιο. Η προκύπτουσα δυναμική ενέργεια στην περίπτωση αυτή είναι της γνωστής μορφής Coulomb,* $\mathcal{V} \approx -e^2/r$, *όπου* e *είναι το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου,* $-e$ *αυτό του ηλεκτρονίου και* r *η μεταξύ τους απόσταση. Το φωτόνιο στην παρούσα περίπτωση δεν εμφανίζεται ούτε στην αρχική ούτε στην τελική κατάσταση. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε ότι το φωτόνιο εν προκειμένω (ή το σωμάτιο-αλ εν γένει) είναι* ***εικονικό.***

ηλεκτρονίου και ενός πρωτονίου μπορεί να θεωρηθεί ότι οφείλεται στο ότι το ηλεκτρόνιο εκπέμπει τον φορέα της ηλεκτρομαγνητικής (ΗΜ) αλληλεπίδρασης, που ονομάζεται **φωτόνιο**, και στο ότι το πρωτόνιο απορροφά αυτό το φωτόνιο ή αντίστροφα. Η διαδικασία αυτή μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.1.

Ένα παράδειγμα μετασχηματισμού που οφείλεται στη μεσολάβηση ενός σωματίου φορέα αλληλεπίδρασης είναι αυτό της σχέσης (1.3), η οποία μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά, όπως στο Σχ. 1.2.



Σχ. 1.2. *Ο αφανισμός του μιονίου με την τελική δημιουργία ενός ηλεκτρονίου και ενός ζεύγους νετρίνου-αντινετρίνου επιτυγχάνεται με τη εκπομπή ενός σωματίου, που συμβολίζεται με* W^- *και είναι ένας από τους φορείς της λεγόμενης ασθενούς αλληλεπίδρασης (το* W^- *στη συνέχεια αφανίζεται με τη δημιουργία ζεύγους ηλεκτρονίου-αντινετρίνου). Ο μετασχηματισμός αυτός γίνεται και με την απορρόφηση ενός* W^+*, εάν αυτό έχει ήδη εκπεμφθεί ταυτόχρονα με τη δημιουργία του ζεύγους ηλεκτρονίου-αντινετρίνου . Σημειώστε ότι τα αντισωμάτια τα παριστάνουμε με φορά αντίθετη από αυτή του βέλους του χρόνου, ως να προχωρούν προς το παρελθόν (βλ. [20], σελ. 576-578). Διαγράμματα όπως αυτά των σχημάτων 1.1, 1.2 και αυτών που ακολουθούν ονομάζονται* ***διαγράμματα Feynman****. Τα διαγράμματα αυτά είναι πολύ χρήσιμα γιατί αφενός μεν δίνουν μια εναργή εικόνα της φυσικής διαδικασίας, αφετέρου δε επιτρέπουν μέσω συγκεκριμένων κανόνων τον υπολογισμό ποσοτήτων όπως είναι, π.χ., ο χρόνος ζωής του μιονίου.*

Σημειώστε ότι και η διαδικασία του Σχ. 1.1 μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τετριμμένος (ταυτοτικός) μετασχηματισμός όπου το αρχικό ζεύγος ηλεκτρονίου-πρωτονίου μετασχηματίζεται σε ένα τελικό ζεύγος πάλι ηλεκτρονίου-πρωτονίου με τη βοήθεια ενός εικονικού φωτονίου.

Στον Πιν**. IV** (επόμενη σελίδα) δίνονται κάποια στοιχεία για τις τέσσερις βασικές αλληλεπιδράσεις. Τα σύμβολα που εμφανίζονται στην τρίτη στήλη του Πιν. IV έχουν ως εξής: G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck (δια 2π), το «σήμα κατατεθέν» της Κβαντομηχανικής. c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. g_w είναι ένα μέτρο της έντασης της ασθενούς αλληλεπίδρασης, m_w είναι η μάζα του σωματίου-αλ, W^+. g_s είναι ένα μέτρο της έντασης της ισχυρής αλληλεπίδρασης.

ΠΙΝΑΚΑΣ IV: ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΣΩΜΑΤΙΑ-ΦΟΡΕΙΣ ΤΟΥΣ

ΟΝΟΜΑ	ΕΜΒΕΛΕΙΑ (m)	ΑΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΝΤΑΣΗ	ΣΩΜΑΤΙΟ (A) ΦΟΡΕΑΣ (ΕΙΣ)	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΜΑΖΑ ΗΡΕΜΙΑΣ (MeV)	ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ	ΣΠΙΝ	ΧΡΩΜΑΤΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ	ΠΟΙΑ ΣΩΜΑΤΙΑ ΕΙΝΑΙ ΠΗΓΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΚΤΕΣ
ΒΑΡΥΤΗΤΑ	∞	$a_G = Gm_p^2/\hbar c = 5{,}9\times10^{-39}$	Βαρυτόνιο	–	0	0	2	0	ΟΛΑ (Λεπτόνια, κουάρκ και αυτά του παρόντος πίνακα)
ΗΛΕΚΤΡΟ ΜΑΓΝΗΤΙ-ΚΗ (HM)	∞ (αλλά +και -)	$a = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$	Φωτόνιο	γ	0	0	1	0	ΟΛΑ ΟΣΑ ΕΧΟΥΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ
ΑΣΘΕΝΗΣ, ΠΥΡΗΝΙΚΗ	10^{-18}	$a_w = \frac{g_w^2}{\hbar c}\frac{\sqrt{2}m_p^2}{m_w^2} \approx 10^{-5}$	Διανυσματικά μποζόνια	W^+ W^- Z^o	80000 80000 91000	1 −1 0	1 1 1	0	QUARK ΚΑΙ ΛΕΠΤΟΝΙΑ, ΦΩΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΜΠΟΖΟΝΙΑ
ΙΣΧΥΡΗ, ΠΥΡΗΝΙΚΗ	10^{-15}	$a_s = \frac{g_s^2}{\hbar c} \approx 1$	Γλοιόνια*	g	0	0	1	Ναι*	QUARK ΚΑΙ ΓΛΟΙΟΝΙΑ

ΣΩΜΑΤΙΟ $HIGGS$: Δεν έχει βρεθεί ακόμη (2011), $114\,\mathrm{GeV} \le m_H \le 150\,\mathrm{GeV}$, σπιν=0, Ηλ.φορτίο=0. Αναμένεται να βρεθεί τα προσεχή χρόνια ή και μήνες.

*Τα γλοιόνια είναι πάντοτε παγιδευμένα όπως και τα κουάρκ και δεν έχουν παρατηρηθεί ελεύθερα. Σημειώστε ότι τα γλοιόνια φέρουν συνδυασμό χρωματικού φορτίου και αντιφορτίου (σε αντίθεση με τα φωτόνια που είναι ηλεκτρικά ουδέτερα). Το αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι ότι και τα ίδια τα γλοιόνια είναι πηγές και αποδέκτες της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Ένα ακόμη αποτέλεσμα είναι ότι η ισχυρή αλληλεπίδραση δεν διατηρεί κατ' ανάγκη το χρωματικό φορτίο *ενός κουάρκ*. Π.χ. ένα «κόκκινο (R) κουάρκ u μπορεί να γίνει «μπλε» (B) κουάρκ u εκπέμποντας ένα γλοιόνιο $R\overline{B}$ ή απορροφώντας ένα γλοιόνιο $B\overline{R}$. Αν λάβουμε υπόψη το χρωματικό φορτίο υπάρχουν οκτώ είδη γλοιονίων: $R\overline{B}, R\overline{G}, G\overline{R}, G\overline{B}, B\overline{R}, B\overline{G}, (R\overline{R} - G\overline{G})/\sqrt{2}$ και $(R\overline{R} + G\overline{G} - 2B\overline{B})/\sqrt{6}$. Σημειώστε ότι το σπιν όλων των σωματίων-αλ είναι ακέραιο σε αντίθεση με αυτό των σωματίων-υ που έχουν σπιν ημιακέραιο. Ως συνέπεια του γεγονότος αυτού τα σωμάτια-αλ δεν υπόκεινται στην απαγόρευση του να βρεθούν περισσότερα από ένα όμοια στην ίδια κατάσταση. Αντίθετα, τα σωμάτια με ακέραιο σπιν, που ονομάζονται **μποζόνια**, προτιμούν να βρεθούν μαζί με άλλα όμοια τους στην ίδια κατάσταση.

Οι αριθμητικές τιμές αυτών των παγκόσμιων σταθερών δίνονται στον πίνακα 1 στο εσώφυλλο του βιβλίου. Η εμβέλεια r_o των αλληλεπιδράσεων (εκτός της ισχυρής) συνδέεται με τη μάζα *m* των φορέων τους ως εξής: $r_o = \hbar / mc$.

Σημειώστε ότι το σπιν όλων των σωματίων-αλ είναι ακέραιο σε αντίθεση με αυτό των σωματίων-υ που έχουν σπιν ημιακέραιο. Ως συνέπεια του γεγονότος αυτού τα σωμάτια-αλ δεν υπόκεινται στην απαγόρευση του να βρεθούν περισσότερα από ένα όμοια στην ίδια κατάσταση. Μάλιστα, τα σωμάτια με ακέραιο σπιν, που ονομάζονται **μποζόνια**, προτιμούν να βρεθούν μαζί με άλλα όμοια τους στην ίδια κατάσταση.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα σωμάτια φορείς των αλληλεπιδράσεων δεν είναι απλώς ένα νοητικό εργαλείο για να υπολογίζουμε σωστά τα αποτελέσματα των αλληλεπιδράσεων. Τα σωμάτια αυτά έχουν πραγματική υπόσταση και έχουν παρατηρηθεί και μετρηθεί[1] στις πειραματικές διατάξεις που συνοδεύουν τους αντιδραστήρες υψηλών ενεργειών.. Σημειώστε ότι η τρέχουσα προσπάθεια είναι να αναπτυχθεί μια ενιαία θεωρία και για τις τέσσερις αλληλεπιδράσεις έτσι ώστε να εμφανιστούν ως διαφορετικές «όψεις» μιας μόνο ενοποιημένης αλληλεπίδρασης (κατ' αντιστοιχία με την ενοποίηση των ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων που επέτυχαν οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού του Maxwell). Η προσπάθεια ενοποίησης έχει αποδώσει καρπούς με τη δημιουργία του λεγόμενου **καθιερωμένου προτύπου** που εξετάζει με ενιαίο τρόπο τις τρεις από τις τέσσερις βασικές αλληλεπιδράσεις. (Η βαρύτητα «αρνείται» προς το παρόν να ενταχθεί στο ενιαίο σχήμα).

Σημειώστε ότι τα σωμάτια–φορείς των αλληλεπιδράσεων, καίτοι τα περισσότερα δεν έχουν μάζα ηρεμίας, εντούτοις έχουν ενέργεια, *E*, και επομένως βάσει της σχέσης του Einstein, $E = mc^2$, έχουν και σχετικιστική μάζα (π.χ. το φωτόνιο έχει σχετικιστική μάζα $m = \hbar\omega / c^2$, παρόλο που έχει μάζα ηρεμίας μηδέν). Επομένως και τα σωμάτια- φορείς αλληλεπιδράσεων μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σωμάτια (με την ευρεία όμως έννοια) και ως εκ τούτου υπόκεινται στις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

Σημειώστε επίσης ότι σε αρκετές περιπτώσεις χειριζόμαστε τις αλληλεπιδράσεις ως κλασικά κύματα ή ακόμη και ως κλασικές δυνάμεις με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συνήθως λαμβάνουμε υπόψη τον κυματοσωματιδιακό χαρακτήρα των αλληλεπιδράσεων, όταν πρόκειται για μετασχηματισμούς ή για υπολογισμούς υψηλής ακρίβειας. **Στο παρόν βιβλίο θα χειριστούμε τις αλληλεπιδράσεις ως επί το πλείστον ως κλασικά κύματα ή ακόμη και ως κλασικές δυνάμεις**.
Στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου θα επανέλθουμε στα στοιχειώδη σωμάτια των Πιν. III και IV, (που είναι στην πραγματικότητα κυματοσωμάτια) για να αναφέρουμε πώς αλληλοπαγιδεύονται και πώς μετασχηματίζονται. Προς το παρόν θα περιοριστούμε σε κάποιες επισημάνσεις που πρέπει να έχει υπόψη του ο αναγνώστης.

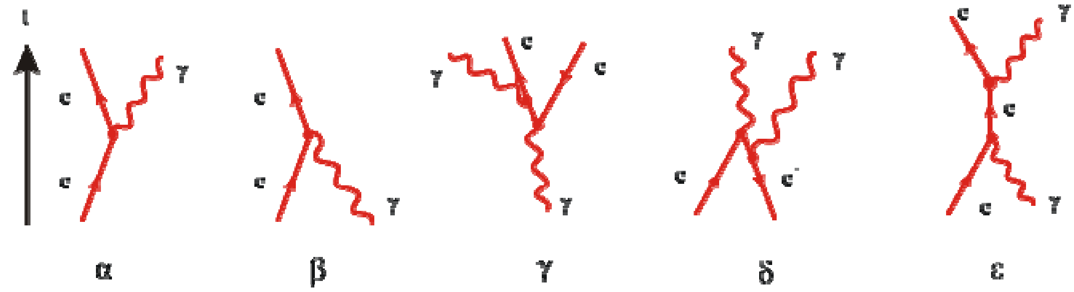
1.3 Σχόλια

Η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι αφάνταστα πιο ασθενική από οποιαδήποτε άλλη. Κάθε φορά που ανασηκώνετε ένα αντικείμενο οι μύες σας, μάζας της τάξεως ενός κιλού που λειτουργούν με υπόλοιπα των Η/Μ αλληλεπιδράσεων, υπερνικούν την βαρύτητα που ασκεί όλη η Γη πάνω στο αντικείμενο που ανασηκώνετε. Εντούτοις αυτή η απίστευτα ασήμαντη βαρυτική αλληλεπίδραση γίνεται συγκρίσιμη και φτάνει στο σημείο να κυριαρχήσει ενεργειακά σε αντικείμενα πολύ μεγάλου αριθμού στοιχειωδών σωματίων-υ, όπως είναι ένας πλανήτης (όπου ο αριθμός N_ν πρωτονίων και νετρονίων μαζί είναι της

[1] Εξαίρεση αποτελεί το βαρυτόνιο που δεν έχει παρατηρηθεί λόγω της απειροελάχιστης ισχύος αλληλεπίδρασής του.

τάξεως του $10^{50}-10^{54}$) ή ένα άστρο όπου το N_ν είναι της τάξεως $10^{56}-10^{59}$. Αυτό οφείλεται στο μοναδικό συνδυασμό δύο παραγόντων που χαρακτηρίζουν τη βαρύτητα: Του *πάντοτε* ελκτικού χαρακτήρα της και της μακράς εμβέλειάς της. Ένα άλλο μοναδικό χαρακτηριστικό της βαρύτητας είναι το ότι *όλων* των ειδών τα σωμάτια- και τα σωμάτια-υ και τα σωμάτια-αλ (περιλαμβανομένων και των ίδιων των βαρυτονίων) είναι και πηγές και αποδέκτες της βαρυτικής αλληλεπίδρασης, αφού όλα τους έχουν μη μηδενική ενέργεια, άρα και μη μηδενική σχετικιστική μάζα. Αυτή η οικουμενικότητα της βαρύτητας φαίνεται κάπως δικαιολογημένη με βάση την κεντρική ιδέα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein. Σύμφωνα με αυτήν την ιδέα η βαρύτητα δεν είναι τίποτε άλλο παρά η *τροποποιημένη γεωμετρία του χωροχρόνου* λόγω της παρουσίας ενέργειας. Επομένως, αφού στη γεωμετρία υπόκειται το καθετί, το ίδιο θα ισχύει και για τη βαρύτητα. Θα κλείσω αυτήν την παράγραφο με την παρατήρηση ότι από τις τέσσερις στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις η λιγότερο κατανοητή είναι η βαρύτητα, παρόλο που είναι η πιο οικεία και παρόλο που προηγήθηκε κατά 200 χρόνια στην ποσοτική της μελέτη.

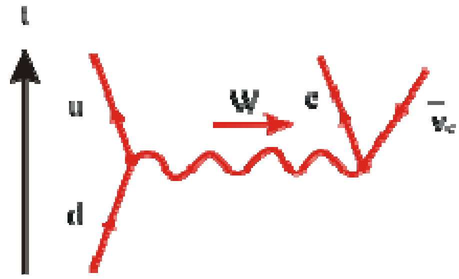
Η Η/Μ αλληλεπίδραση παρουσιάζει επίσης κάποιες μοναδικές ιδιότητες. Πρώτον, είναι η μόνη που καθορίζει τη δομή της ύλης από την κλίμακα του ατόμου ($10^{-10}\,\mathrm{m}$) έως αυτήν ενός αστεροειδούς ($10^{5}\,\mathrm{m}$), είναι, δηλαδή, αυτή που "βασιλεύει" για 15 τάξεις μεγέθους. Δεύτερον, το στοιχειώδες σωμάτιο-αλ της Η/Μ αλληλεπίδρασης, το φωτόνιο, πέρα από το να "μεσιτεύει" την Η/Μ δύναμη, μπορεί να ταξιδεύει ελεύθερο στο χώρο μεταφέροντας σε μεγάλες αποστάσεις *ενέργεια* και *πληροφορία*. Κανένα άλλο σωμάτιο-αλ δεν είναι σε θέση να το κάνει αυτό: Το βαρυτόνιο είναι πολύ αδύναμο για να γίνει αισθητό. Τα διανυσματικά μποζόνια είναι πολύ βραχύβια για ένα τέτοιο ρόλο. Τέλος τα γλοιόνια είναι για πάντα εγκλωβισμένα στα βαρυόνια και τα μεσόνια. Τρίτον, τα φωτόνια μπορούν εύκολα να εκπεμφθούν και να ανιχνευτούν (βλ. Σχ. 1.3). Αυτές οι μοναδικές ιδιότητες των φωτονίων τα καθιστούν καίριας σημασίας για τον Κόσμο: Π.χ., υπάρχει ζωή στη Γη και χάρη στα φωτόνια που μεταφέρουν ενέργεια και πληροφορία από τον Ήλιο. Βλέπουμε τα διάφορα αντικείμενα χάρη στα εκπεμπόμενα από αυτά φωτόνια που καταλήγουν στα μάτια μας. Τα κινητά τηλέφωνα, οι τηλεοράσεις, το ασύρματο internet, οι τομογραφίες, τα τηλεκοντρόλ κλπ λειτουργούν χάρη σε φωτόνια που μεταφέρουν πληροφορίες με τις οποίες ξεκίνησαν από την πηγή ή τις οποίες συνέλεξαν στην πορεία τους. Στα φωτόνια θα επανέλθουμε σε επόμενο κεφάλαιο.



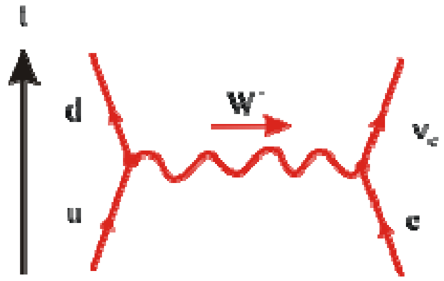
Σχ. 1.3 *Διαδικασίες όπου μετέχει ένα ελεύθερο φωτόνιο: (α) Εκπομπή ενός φωτονίου από ηλεκτρόνιο (όπως στην παραγωγή ακτίνων Χ). (β) Απορρόφηση ενός φωτονίου από ηλεκτρόνιο (όπως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο). (γ) Δίδυμη γένεση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με αφανισμό ενός φωτονίου και εκπομπή ενός φωτονίου. (δ) Δίδυμος αφανισμός ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με δημιουργία δύο φωτονίων (στην περιοχή των ακτίνων γ με εφαρμογή στην ιατρική διαγνωστική μέθοδο PET), (ε) Απορρόφηση και εκπομπή φωτονίου από ηλεκτρόνιο (όπως στη σκέδαση Raman).*

Ο κύριος ρόλος της ασθενούς αλληλεπίδρασης, είναι ο μετασχηματισμός ενός λεπτονίου (όπως στο Σχ. 1.2) ή ενός κουάρκ (όπως στο Σχ. 1.4) ή και ενός ζεύγους κουάρκ-λεπτονίου (όπως στο Σχ. 1.5) σε κάποια άλλα λεπτόνια/αντιλεπτόνια ή/και σε άλλα κουάρκ. Αυτοί οι μετασχηματισμοί επιτυγχάνονται με την εκπομπή ενός σωματίου-αλ του τύπου W^- ή του τύπου W^+ ή ακόμη και του τύπου Z^o και τη σχεδόν άμεση απορρόφησή του. Όλα τα λεπτόνια και τα κουάρκ καθώς και τα W^+, W^-, Z^o, υπόκεινται στην ασθενή αλληλεπίδραση. Σημειώστε το πόσο μεγάλη είναι η μάζα ηρεμίας των σωματίων W^+, W^-, Z, πράγμα που εξηγεί την εξαιρετικά μικρή εμβέλεια της ασθενούς αλληλεπίδρασης.

Σε κάθε *στοιχειώδη κόμβο*, όπου εκπέμπεται ή απορροφάται ένα σωμάτιο-αλ ορισμένες ποσότητες, όπως το ηλεκτρικό φορτίο, το χρωματικό φορτίο, ο βαρυονικός αριθμός, ο λεπτονικός αριθμός (για κάθε οικογένεια χωριστά[1]), η ορμή κλπ διατηρούνται. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε στοιχειώδη κόμβο το συνολικό, π.χ. ηλεκτρικό φορτίο των σωματίων που εισέρχονται στον κόμβο πρέπει να είναι ίσο με αυτό εκείνων που εξέρχονται. Ανάλογα με το είδος της αλληλεπίδρασης υπάρχουν και άλλες επί πλέον ποσότητες που διατηρούνται Σημειώστε τέλος ότι η ενέργεια δεν είναι ανάγκη να διατηρείται σε κάθε στοιχειώδη κόμβο, οφείλει όμως να διατηρείται συνολικά, που σημαίνει ότι η ενέργεια των σωματίων πριν από την έναρξη μιας οποιασδήποτε αντίδρασης οφείλει να είναι ίση με την ενέργεια των προϊόντων της αντίδρασης μετά την ολοκλήρωσή της. Προφανώς οι νόμοι διατήρησης επιβάλλουν περιορισμούς στο ποιες διαδικασίες μετασχηματισμού είναι εφικτές και ποιες όχι. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε σε μελλοντικό κεφάλαιο.



Σχ. 1.4 *Η στοιχειώδης διαδικασία που οδηγεί στη λεγόμενη διάσπαση β. Η τελευταία είναι η βασική αντίδραση που συμβαίνει στους θυγατρικούς πυρήνες που προκύπτουν από τη σχάση του ουρανίου στους πυρηνικούς αντιδραστήρες και είναι υπεύθυνη για τη ραδιενέργειά τους. Η εικονιζόμενη αντίδραση, που οφείλεται στην ασθενή αλληλεπίδραση, μετατρέπει ένα κουάρκ d σε κουάρκ u (και επομένως ένα νετρόνιο σε πρωτόνιο) με ταυτόχρονη εκπομπή ενός σωματίου-αλ* W^- *το οποίο σχεδόν αμέσως αφανίζεται δημιουργώντας ένα ζεύγος ηλεκτρονίου και αντινετρίνου.*



Σχ. 1.5 *Ένα κουάρκ u εκπέμπει ένα σωμάτιο-αλ* W^+ *και ταυτόχρονα μετατρέπεται σε κουάρκ d, πράγμα που μετατρέπει ένα πρωτόνιο σε νετρόνιο. Το σωμάτιο-αλ* W^+ *σχεδόν αμέσως απορροφάται από ένα προϋπάρχον ηλεκτρόνιο που μετατρέπεται έτσι σε νετρίνο. Η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να γίνει σε ένα άτομο υδρογόνου γιατί θα παραβίαζε τη διατήρηση της ενέργειας, αφού η ενέργεια ηρεμίας του νετρονίου και του νετρίνου είναι*

[1] Σε σπάνιες περιπτώσεις εμφανίζεται κάποια παραβίαση αυτού του νόμου διατήρησης.

μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου μαζί. Μπορεί όμως να γίνει μέσα σε ένα πυρήνα, εάν οδηγεί σε μείωση της συνολικής ενέργειας ηρεμίας του πυρήνα. Η παραπάνω διαδικασία δεν οδηγεί σε ραδιενεργές συνέπειες. Γιατί;

Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις πραγματοποιούνται με την ανταλλαγή σωματίων-αλ που λέγονται **γλοιόνια**. Από όλα τα σωμάτια μόνο τα κουάρκ και τα ίδια τα γλοιόνια είναι πομποί και αποδέκτες των γλοιονίων˙ άρα μόνο τα γλοιόνια και τα κουάρκ συμμετέχουν στην ισχυρή αλληλεπίδραση, η οποία είναι υπεύθυνη για την σύνδεση τριών κουάρκ προς σχηματισμό των λεγομένων βαρυονίων, όπως είναι το πρωτόνιο, το νετρόνιο και πολλά άλλα βραχύβια βαρυόνια.

Ακόμη και το νετρόνιο όταν είναι ελεύθερο είναι μετασταθές λόγω της διαδικασίας που εικονίζεται στο Σχ. 1.4, $d \to u + e^- + \overline{\nu}_e$, η οποία μετατρέπει ένα νετρόνιο σε πρωτόνιο, συν ηλεκτρόνιο, συν αντινετρίνο ηλεκτρονίου. Επειδή η ενέργεια ηρεμίας ενός ελεύθερου νετρονίου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ενεργειών ηρεμίας των προϊόντων της αντίδρασης ($p + e^- + \overline{\nu}_e$), η αντίδραση ικανοποιεί τη διατήρηση της ενέργειας (με την προσθήκη της κινητικής ενέργειας των προϊόντων της αντίδρασης). Ένα ελεύθερο πρωτόνιο δεν υφίσταται την αντίδραση $p \to n + e^+ + \nu_e$ γιατί τότε θα παραβιαζόταν η διατήρηση της ενέργειας συνολικά. Αντίθετα, μέσα σε ένα πυρήνα πρωτόνια μπορούν να μετατραπούν σε νετρόνια μέσω της αντίδρασης $p \to n + e^+ + \nu_e$ ή μέσω της αντίδρασης $p + e^- \to n + \nu_e$, που εικονίζεται σε επίπεδο κουάρκ στο Σχ. 1.5, όπως και νετρόνια μπορούν να μετατραπούν σε πρωτόνια βάσει της $d \to u + e^- + \overline{\nu}_e$. Από όλες αυτές τις αντιδράσεις μόνο εκείνες μπορούν να γίνουν *μέσα σε ένα πυρήνα*, οι οποίες μειώνουν την *συνολική* ενέργεια ηρεμίας του πυρήνα. Έτσι, σε ένα πυρήνα, νετρόνια μπορούν να αλλάξουν σε πρωτόνια και αντίστροφα μέχρι ο πυρήνας να αποκτήσει την ελάχιστη ενέργεια ηρεμίας. Από κει και πέρα ο πυρήνας είναι σταθερός. Αλλιώς ο πυρήνας είναι ραδιενεργός μέχρι να καταλήξει σε κάποιο σταθερό πυρήνα μέσω κάποιας από τις παραπάνω αντιδράσεις και ενδεχομένως μέσω εκπομπής ελεύθερου φωτονίου.

Εκτός από βαρυόνια (σταθερά ή ασταθή), η ισχυρή αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό των λεγόμενων μεσονίων που αποτελούνται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ. Τα μεσόνια είναι όλα τους ασταθή. Τα μεσόνια που σχηματίζονται από κουάρκ της πρώτης οικογένειας λέγοντα **πιόνια** και είναι τα εξής τρία: $\pi^+ \equiv u\overline{d}$, $\pi^- \equiv d\overline{u}$, $\pi^o \equiv \left(u\overline{u} - d\overline{d}\right)/\sqrt{2}$.

Οι ιδιότητες και οι μετασχηματισμοί των στοιχειωδών σωματίων καθώς και των βαρυονίων και των μεσονίων που μελετώνται πειραματικά στους μεγάλους επιταχυντές είναι σε πλήρη συμφωνία με τους θεωρητικούς υπολογισμούς που βασίζονται στην αποδεκτή θεωρία η οποία είναι γνωστή ως το **καθιερωμένο πρότυπο (ή μοντέλο**). Το μοντέλο αυτό απαιτεί την ύπαρξη ενός ακόμη είδους στοιχειώδους σωματίου, που αποκαλείται **σωμάτιο Higgs** και είναι υπεύθυνο για το ότι τα στοιχειώδη σωμάτια έχουν ως επί το πλείστον μη μηδενική μάζα ηρεμίας. Το σωμάτιο Higgs δεν έχει ανιχνευθεί πειραματικά μέχρι τώρα (2011). Η ενέργεια ηρεμίας του αναμένεται να είναι την περιοχή 114000 έως 150000MeV και το σπιν του να είναι μηδέν. Υπολογίζεται ότι ο νέος επιταχυντής LHC στο CERN θα δώσει αρκετή ενέργεια στα πρωτόνια που επιταχύνει ώστε κατά τη μετωπική σύγκρουσή τους να παραχθεί το σωμάτιο Higgs, προσφέροντας έτσι μια ακόμη επαλήθευση για το καθιερωμένο μοντέλο.

Το καθιερωμένο μοντέλο παρ' όλες τις επιτυχίες του αφήνει αναπάντητα κάποια θεμελιώδη ερωτήματα: Γιατί υπάρχουν τρεις οικογένειες κουάρκ και λεπτονίων και όχι μόνο μία ή π.χ. πέντε; Γιατί οι μάζες ηρεμίας των σωματίων-υ έχουν τις συγκεκριμένες τιμές ; Γιατί οι εντάσεις των διαφόρων αλληλεπιδράσεων έχουν τις τιμές που έχουν; Υπάρχει σ' ένα βαθύτερο επίπεδο και σε πολύ πιο μικρή κλίμακα μήκους μια δομή του Κόσμου από την οποία να προκύπτουν απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα; Μ' άλλα λόγια υπάρχει μια πιο θεμελιώδης θεώρηση του Κόσμου από την οποία να προκύπτουν οι μάζες των στοιχειωδών σωματίων-υ και οι εντάσεις των διαφόρων αλληλεπιδράσεων;

Δεν υπάρχει έλλειψη ιδεών και θεωρητικών προτάσεων πέρα από το καθιερωμένο μοντέλο που αποβλέπουν στο να απαντήσουν σε κάποια τουλάχιστον από τα παραπάνω ερωτήματα. Ένα τέτοιο θεωρητικό σχήμα, γνωστό ως **υπερσυμμετρικό**, συγκεντρώνει κάποιες σοβαρές ενδείξεις υπέρ του αλλά όχι άμεση πειραματική επιβεβαίωση. Το μοντέλο αυτό προβλέπει ότι οι αλληλεπιδράσεις για πάρα πολύ υψηλή ενέργεια ενοποιούνται έχοντας ένα κοινό μέγεθος έντασης. Το υπερσυμμετρικό μοντέλο προβλέπει επίσης μια συμμετρία μεταξύ ύλης και δυνάμεων με την έννοια ότι για κάθε ένα από τα φερμιόνια του Πιν. ΙΙΙ υπάρχει ένα αντίστοιχο δίδυμο σωμάτιο που είναι μποζόνιο και για κάθε μποζόνιο του Πιν. IV υπάρχει ένα αντίστοιχο δίδυμο σωμάτιο που είναι φερμιόνιο. Επί πλέον το μοντέλο θεωρεί ότι οι φυσικοί νόμοι που ισχύουν για τα σωμάτια των πινάκων ΙΙΙ και IV ισχύουν επίσης και για τα αντίστοιχα δίδυμά τους σωμάτια. Ένα προσόν της υπερσυμμετρικής υπόθεσης είναι ότι παρέχει υποψήφια σωμάτια από τα οποία ενδεχομένως να συνίσταται η λεγόμενη σκοτεινή ύλη που εμφανίζεται σε γαλαξιακές και κοσμολογικές παρατηρήσεις.

Ένα άλλο θεωρητικό μοντέλο, στενά συνδεδεμένο με το υπερσυμμετρικό και γνωστό ως **θεωρία χορδών,** υποθέτει ότι οι στοιχειώδεις μονάδες του Κόσμου δεν είναι σημειακά σωμάτια αλλά ότι έχουν διαστάσεις, είτε μία (χορδές) είτε δύο (μεμβράνες) είτε και περισσότερες. Το μέγεθος τους είναι πολύ πιο μικρό από οτιδήποτε είναι προσιτό στη σύγχρονη τεχνολογία: 10^{-35}m, δηλαδή 17 τάξεις μεγέθους μικρότερο από τα σημερινά τεχνολογικά όρια. Το θεωρητικό αυτό σχήμα, χωρίς πειραματική στήριξη μέχρι σήμερα, έχει ορισμένες πολύ επιθυμητές ιδιότητες, π.χ., ανάγεται στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας στο όριο που η σταθερά του Planck, $\hbar$, τείνει στο μηδέν. Κάποια επιχειρήματα υπέρ του υπερσυμμετρικού μοντέλου και του μοντέλου των χορδών μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο πρόσφατο βιβλίο των Hawking και Mlodinow, *Το Μεγάλο Σχέδιο*[3].

1.4 Σύνοψη

Η καθιερωμένη και επιβεβαιωμένη ιεραρχική δομή της ύλης ξεκινά από τα δύο κουάρκ της πρώτης οικογένειας, τα οποία με τη βοήθεια της ισχυρής αλληλεπίδρασης, δηλαδή μέσω ανταλλαγής γλοιονίων, συντίθεται σε δύο ειδών σύνθετα σωμάτια: Στο πρωτόνιο που αποτελείται από δύο πάνω κουάρκ και ένα κάτω κουάρκ˙ το πρωτόνιο συνολικά φέρει μια μονάδα θετικού ηλεκτρικού φορτίου, μηδέν συνολικά χρωματικό φορτίο (είναι δηλαδή, "άχρωμο"), έχει ενέργεια ηρεμίας 938,27 MeV και ακτίνα $0,84\times10^{-15}\,\mathrm{m}$. Και στο νετρόνιο που αποτελείται από δύο κάτω κουάρκ και ένα πάνω κουάρκ˙ το νετρόνιο έχει συνολικά μηδέν ηλεκτρικό φορτίο και χρωματικό φορτίο, ενέργεια ηρεμίας 939,56 MeV και ακτίνα $0,84\times10^{-15}\,\mathrm{m}$. Τόσο το πρωτόνιο όσο και νετρόνιο έχουν σπιν ½, είναι δηλαδή, φερμιόνια. Το ελεύθερο νετρόνιο είναι μετασταθές με μέσο χρόνο ζωής 14,76 λεπτά ή χρόνο υποδιπλασιασμού 10,23 λεπτά.

Το επόμενο βήμα στην ιεραρχική δομή της ύλης επιτυγχάνεται με το συνδυασμό πρωτονίων και νετρονίων προς σχηματισμό ατομικών πυρήνων με τη βοήθεια πάλι της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Υπάρχουν περίπου 270 διαφορετικοί πυρήνες από τον μικρότερο που έχει μόνο ένα πρωτόνιο (και είναι ο πυρήνας του συνήθους ατόμου του υδρογόνου) μέχρι τον μεγαλύτερο που έχει 92 πρωτόνια και 146 νετρόνια (και είναι ο πυρήνας του ατόμου του ουρανίου με 238=92+146 **νουκλεόνια**, όπως λέγονται από κοινού τα πρωτόνια και τα νετρόνια). Υπάρχει και ο μικρότερος πυρήνας του ουρανίου με 92 πρωτόνια και 143 νετρόνια, το ουράνιο 235.

Οι θετικά φορτισμένοι πυρήνες έλκουν ηλεκτρικά τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια και τα παγιδεύουν γύρω τους σε αποστάσεις όμως που κυμαίνονται από εκατό έως εκατό χιλιάδες φορές μεγαλύτερες από αυτές του πυρήνα. Έτσι σχηματίζονται τα 92 είδη ατόμων. Το κάθε είδος ατόμου χαρακτηρίζεται μόνο από τον αριθμό των πρωτονίων στον πυρήνα του, ο οποίος ονομάζεται **ατομικός αριθμός** και συμβολίζεται με Z κεφαλαίο. Άτομα με το ίδιο Z αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων στον πυρήνα τους ονομάζονται **ισότοπα** του ίδιου στοιχείου. Π.χ. το ουράνιο 238 και το ουράνιο 235 είναι ισότοπα του ουρανίου με το ίδιο Z=92 αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων.

Η διαδικασία συνεχίζεται με τη συνένωση ατόμων προς σχηματισμό μορίων, ατόμων ή/και μορίων προς σχηματισμό στερεών, υγρών, ιστών, οστών, φυτών, αστεροειδών ή και ακόμη μεγαλύτερων αντικειμένων όπως είναι οι πλανήτες, τα άστρα, κλπ όπου επεμβαίνουν και οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

Η ιεραρχική δομή της ύλης, που βασίζεται στην ύπαρξη ελκτικών *συνολικά* αλληλεπιδράσεων, οδηγεί σε ένα συμπέρασμα και σε ένα καίριο ερώτημα:

Οι αλληλεπιδράσεις από μόνες τους αναμένεται να οδηγήσουν στη σύνθλιψη και κατάρρευση των δομών της ύλης λόγω του συνολικά ελκτικού χαρακτήρα τους (όπως συμβαίνει στις μαύρες τρύπες). Επομένως κάτι πρέπει να αντιτίθεται στις αλληλεπιδράσεις και να εμποδίζει την κατάρρευση της ύλης.

Τι εμποδίζει λοιπόν την κατάρρευση των δομών της ύλης και εξασφαλίζει την ύπαρξή τους;
Σε τι οφείλεται η σταθερότητά τους χωρίς εντούτοις να αποκλείεται η δυνατότητα αλλαγής ;

Η απάντηση βρίσκεται στη $2^{η}$ βασική ιδέα της Φυσικής :

ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΣ ΔΥΙΣΜΟΣ !

Επίλεκτα προβλήματα

1. Καταρτίστε ένα πίνακα των τριών οικογενειών λεπτονίων και κουάρκ δίνοντας κατά σειρά το όνομα, το σύμβολο, τη μάζα, το σπιν, και το ηλεκτρικό φορτίο.
2. Καταρτίστε ένα πίνακα των τεσσάρων βασικών δυνάμεων της φύσης δίνοντας το όνομά τους, την εμβέλεια, την σχετική έντασή τους, τα σωμάτια φορείς τους (μαζί με τη μάζα τους, το ηλεκτρικό τους φορτίο, το σπιν τους και τις πηγές τους).
3. Το μεσόνιο π^o διασπάται με πιθανότητα 99% σε δύο φωτόνια, $\pi^o \to \gamma\gamma$. Ποια είναι η ορμή και η ενέργεια των φωτονίων στο σύστημα όπου το π^o ακινητεί; Ποια η σχετική διεύθυνσή τους; Από ποια quarks αποτελείται το π^o; Ποιο είναι πιο μακρόβιο, το π^0 ή τα $\pi^{\pm}$;

4. Καταρτίστε ένα πίνακα των βασικών δομών της ύλης ξεκινώντας από τα θεωρούμενα στοιχειώδη σωμάτια και καταλήγοντας στο Σύμπαν ολόκληρο. Για κάθε δομή αναφέρετε το χαρακτηριστικό της μέγεθος, τα συστατικά της και τις αλληλεπιδράσεις που την καθορίζουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ο ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΣ ΔΥΙΣΜΟΣ: (Η 2η κεντρική ιδέα)

Τόσο εύλογο το ακατανόητο
Ο. Ελύτης

2.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή

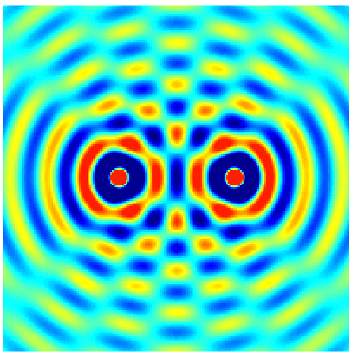
2.1.1. Τι είναι και πώς οδεύει το φως;

Ο Is. Newton (1642-1727) επηρεασμένος ίσως από την εικόνα της φωτεινής ακτίνας θεωρούσε ότι το φώς αποτελείται από στοιχειώδη **σωμάτια**, δηλαδή από οντότητες που:

α. Είναι αδιαίρετες
β. Οδεύουν από το σημείο Α στο σημείο Β ακολουθώντας μια τροχιά[1].

Ο Ch. Huygens (Χοΐχενς) (1629-1695) υποστήριζε ότι το φώς δεν αποτελείται από στοιχειώδη σωμάτια αλλά αντίθετα ότι είναι κύμα, δηλαδή μία οντότητα που:

α΄. Είναι συνεχής (και επομένως άπειρα διαιρετή).
β΄. Οδεύει από το σημείο Α στο σημείο Β όχι με το μονοδιάστατο τρόπο της τροχιάς αλλά απλωμένη στο διαθέσιμο χώρο[2] και εμφανίζουσα το χαρακτηριστικό κυματικό φαινόμενο της συμβολής. [Σχ..2.1.]



Σχ. 2.1 *Κύματα από δύο πηγές διαδίδονται σε όλο το χώρο και εμφανίζουν το φαινόμενο της συμβολής που έγκειται αλλού στην έντονη ενίσχυση (δυο φορές το άθροισμα των ενεργειών) και αλλού στην αλληλοαναίρεση των ενεργειών*

Το κυματικό μοντέλο του φωτός εξηγεί όχι μόνο τα φαινόμενα της γεωμετρικής οπτικής αλλά και άλλα, όπως είναι η συμβολή, όπου η σωματιδιακή εικόνα αποτυγχάνει. Έτσι επικράτησε η αμιγής κυματική εικόνα για το φως μέχρι και τις αρχές του 20ου αιώνα.

[1] Για τα 'σωμάτια' του φωτός η τροχιά από το Α στο Β καθορίζεται από την αρχή του ελάχιστου χρόνου, του Fermat (1601-1665). Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι η αρχή αυτή εξηγεί τα φαινόμενα της λεγόμενης γεωμετρικής οπτικής (ευθύγραμμη διάδοση σε ομοιογενή μέσα, ανάκλαση, διάθλαση, νόμοι φακών κλπ).

[2] Σε ορισμένες περιπτώσεις η διάδοση περιορίζεται σε κάτι σαν τροχιακό 'σωλήνα' με ασαφή όρια (βλ. Σχ.2.2).

Οι M. Planck (1858-1947) και A. Einstein (1879-1955) προκειμένου να εξηγήσουν ο μεν πρώτος την ακτινοβολία του λεγομένου μέλανος σώματος , ο δε δεύτερος το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο αναγκάστηκαν να δεχθούν ότι το φώς έχει ένα μικτό χαρακτήρα: Ότι αποτελείται δηλαδή, από στοιχειώδη σωμάτια που έχουν την ιδιότητα (α), αλλά δεν έχουν την ιδιότητα (β)˙ αντίθετα έχουν την κυματική ιδιότητα (β΄). Επομένως το φώς είναι εν μέρει σωμάτιο (λόγω της ιδιότητας (α)) και εν μέρει κύμα (λόγω της ιδιότητας (β΄)). Είναι δηλαδή, **κυματοσωμάτιο**.

2.1.2. Τι είναι και πώς οδεύουν τα υλικά σωμάτια;

Μέχρι και τη δεκαετία του 1920 τα στοιχειώδη υλικά σωμάτια εθεωρούντο οντότητες που είχαν και τις δύο θεμελιώδεις σωματιδιακές ιδιότητες και την (α) και την (β)[3]. Ο N. Bohr (1885-1962) προκειμένου να δικαιολογήσει την παρατηρούμενη θαυμαστή σταθερότητα των ατόμων και την επιλεκτική εκπομπή ΗΜ ακτινοβολίας από άτομα μόνο σε ορισμένες διάκριτες συχνότητες θεώρησε *αυθαίρετα* ότι από όλες τις δυνατές τροχιές ενός ηλεκτρονίου γύρω από τον ατομικό πυρήνα μόνο εκείνες είναι πραγματοποιήσιμες που η στροφορμή τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck $\hbar$. Η παραδοχή του Bohr είχε μεγάλη επιτυχία: Προσδιόρισε την τάξη μεγέθους των ατομικών διαστάσεων ($a_B = \hbar^2 / e^2 m$ στο G-CGS ή $a_B = 4\pi\varepsilon_o \hbar^2 / e^2 m$ στο SI, $a_B = 0,529\,\mathrm{A}$) καθώς και το έργο ιονισμού του ατόμου του υδρογόνου. Ερμήνευσε ποιοτικά και ποσοτικά τις φασματικές γραμμές του ατομικού υδρογόνου και, φυσικά, ήρε το παράδοξο της σταθερότητας των ατόμων (βάσει της αρχής της κβάντωσης του Schrödinger, βλέπε εδάφιο 2.5 πιο κάτω). Παρέμενε όμως μια αυθαίρετη παραδοχή μέχρι που ο Louis-Victor de Broglie πρότεινε το 1924 την εξής ιδέα:

> Αφού τα κλασικά κύματα έχουν και σωματιδιακά χαρακτηριστικά, γιατί να μην έχουν και τα κλασικά σωμάτια κυματικά χαρακτηριστικά; Μ' άλλα λόγια, όπως στη συχνότητα ω και το κυματάνυσμα, $\boldsymbol{k}$, του κύματος αντιστοιχίσαμε μια ενέργεια $\varepsilon = \hbar\omega$ και μια ορμή $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$, γιατί να μην αντιστοιχήσουμε στην ενέργεια του σωματίου, ε, μια συχνότητα $\omega = \varepsilon / \hbar$ και στην ορμή του σωματίου $\boldsymbol{p}$ ένα κυματάνυσμα $\boldsymbol{k} = p / \hbar$;

Αν το τολμήσουμε, η αυθαίρετη παραδοχή του Bohr αντιστοιχεί σε στάσιμα ηλεκτρονιακά κύματα γύρω από το πρωτόνιο, όπως στο Σχ. Ι(στ) του παραρτήματος Ι, μετατρέπεται, δηλαδή σε μια εύλογη απαίτηση. Με άλλα λόγια η παραδοχή του Bohr προκύπτει αβίαστα αν δεχτεί κανείς ότι τα υλικά σωμάτια, όπως και τα φωτόνια, είναι οντότητες που έχουν μεν την ιδιότητα (α) αλλά αντί της (β), έχουν την ιδιότητα (β΄). Είναι, δηλαδή στην πραγματικότητα και αυτά **κυματοσωμάτια**. Η ιδέα ότι τελικά **όλα είναι κυματοσωμάτια** έχει ελεγχθεί πειραματικά πάμπολλες φορές και με διάφορους τρόπους και έχει πάντοτε επιβεβαιωθεί. Έτσι αποτελεί μαζί με την ατομική ιδέα το πιο θεμελιώδες βάθρο της Επιστήμης. Λοιπόν, ας την συνοψίσουμε και ας τη σχολιάσουμε:

---

[3] Η τροχιά ενός υλικού σωματίου από το σημείο Α στο σημείο Β καθορίζεται σύμφωνα με την κλασική Φυσική, από το νόμο του Νεύτωνα, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, ή, ισοδύναμα, από την αρχή της ελάχιστης δράσης. Η δράση είναι το ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο της διαφοράς κινητικής και δυναμικής ενέργειας κατά μήκος της τροχιάς.

2.2 Όλα είναι κυματοσωμάτια: Σωμάτια ως προς τη φύση τους, κύματα ως προς την κίνησή τους.

Σύμφωνα με τον κυματοσωματιδιακό δυισμό τα υλικά σωμάτια είναι είτε στοιχειώδη (δηλαδή αδιαίρετα) είτε σύνθετα (δηλαδή αποτελούμενα από έναν ακέραιο αριθμό στοιχειωδών σωματίων). Όμως, κάθε υλικό σωμάτιο ενέργειας ε και ορμής $\boldsymbol{p}$ *δεν ακολουθεί στην κίνησή του μια συγκεκριμένη τροχιά, όπως θεωρεί η κλασική Φυσική, αλλά οδεύει ως κύμα (βλέπε (β΄)) κυκλικής συχνότητας ω, όπου*

$$\boxed{\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}} \qquad (2.1)$$

και κυματανύσματος[4] $\boldsymbol{k}$, *όπου*

$$\boxed{\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}} \qquad (2.2)$$

$\hbar$ *είναι η σταθερά του Planck, η πιο "παγκόσμια" φυσική σταθερά.*

Επί πλέον κάθε οντότητα που οδεύει ως κύμα (βλέπε (β΄)*) με κυκλική συχνότητα ω και κυματάνυσμα* $\boldsymbol{k}$ *αποτελείται από έναν ακέραιο αριθμό αδιαίρετων στοιχειωδών ποσοτήτων, των λεγόμενων και κβάντων. Η κάθε τέτοια στοιχειώδης ποσότητα έχει ενέργεια*

$$\varepsilon = \hbar\omega \qquad (2.1΄)$$

και ορμή

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k} \qquad (2.2΄)$$

Μ άλλα λόγια αυτά που η κλασική Φυσική θεωρεί ως σωμάτια οδεύουν όπως τα κύματα παραμένοντας όμως σωμάτια. Και αυτά που η κλασική Φυσική θεωρεί ως κύματα αποτελούνται από στοιχειώδη αδιαίρετα σωμάτια, ενώ εξακολουθούν να οδεύουν ως κύματα.

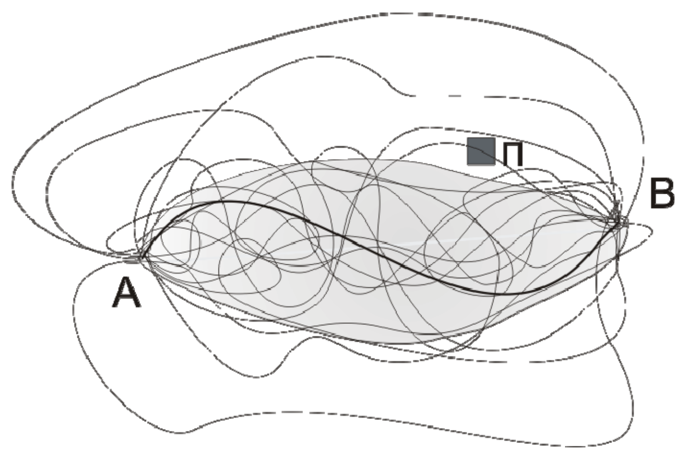
Δεν είναι εύκολο να συμφιλιωθεί κανείς με την επιβεβλημένη από το πείραμα "συγκατοίκηση", κάτω από τη στέγη "κυματοσωμάτιο", των εννοιών κύμα και σωμάτιο που μας μοιάζουν αντιφατικές. Για να συνειδητοποιήσει κανείς αυτή τη δυσκολία και τελικά να την αποδεχθεί κάπως θα ήταν χρήσιμο να μελετήσει το ιδεατό πείραμα των δύο σχισμών[5], που αποτελεί εξιδανίκευση πραγματικών πειραμάτων. Η μετάβαση από την οικεία έννοια ενός σωματίου που κινείται σε τροχιά στην παράδοξη έννοια ενός σωματίου που διαδίδεται ως κύμα διευκολύνεται κάπως αν θεωρήσουμε την εξής εικόνα: Το σωμάτιο ακολουθεί για την μετακίνησή του από το αρχικό σημείο Α στο τελικό σημείο Β όχι μία αλλά πολλές τροχιές, πιο σωστά, όλες τις δυνατές τροχιές, αλλά κάθε μία με διαφορετικό **πλάτος πιθανότητας**[6] (Βλέπε Σχ. 2.2). Η κλασική τροχιά έχει τη μεγαλύτερη συμβολή στην πιθανότητα. Αυτές που είναι κοντά της έχουν κάπως μικρότερη συμβολή. Και αυτές που είναι πολύ μακριά της έχουν πάρα πολύ μικρή συμβολή. Τελικά έχουμε μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση αν περιοριστούμε

---

[4] Η φορά του $\boldsymbol{k}$ δίνει τη κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και το μέτρο του, $|\boldsymbol{k}|$, ισούται εξ ορισμού με $2\pi/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος.

[5] Η περιγραφή αυτού του ιδεατού πειράματος, που οφείλεται στον Feynman, παρουσιάζεται στο βιβλίο του Ε.Ν. Οικονόμου, *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος Ι, σελ. 178-186.

[6] Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος των πλατών πιθανότητας υψωμένη στο τετράγωνο δίνει εξ ορισμού την πιθανότητα μετάβασης από το Α στο Β.



Σχ. 2.2 *Ένα κυματοσωμάτιο για τη μετακίνησή του από το αρχικό σημείο Α στο τελικό σημείο Β ακολουθεί όχι μία τροχιά (την κλασική, σημειωμένη με παχύτερη γραμμή), αλλά όλες τις δυνατές τροχιές κάθε μία με διαφορετικό πλάτος πιθανότητας. Θεωρήστε ένα "σωλήνα" με άξονα την κλασική τροχιά και πάχος της τάξεως του μήκους κύματος λ (διαγραμμισμένη περιοχή). Η συμβολή των τροχιών που βρίσκονται εκτός του "σωλήνα" είναι πάρα πολύ μικρή, σχεδόν αμελητέα. Επομένως συμβάλλουν κυρίως οι εντός του τροχιακού σωλήνα τροχιές. Συχνά ο τροχιακός σωλήνας υπό την επίδραση δυνάμεων συστρέφεται και κλείνει στον εαυτό του έτσι ώστε η συνολική έκτασή του να είναι συγκρίσιμη με το πάχος του (π.χ. σαν μια μικροσκοπική σαμπρέλα). Παίρνει τότε διάφορες διάκριτες και συγκεκριμένες μορφές (τα λεγόμενα* ***τροχιακά****). Στο Σχ. 9.3, σελ. 120 εικονίζονται πέντε διαφορετικές μορφές του ηλεκτρονιακού τροχιακού 'σωλήνα' γύρω από ένα πρωτόνιο.*

στη συμβολή των τροχιών που κείνται στο εσωτερικό του 'σωλήνα' του Σχ. 2.2. Επίσης η συμβολή των τροχιών που σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t καταλήγουν στο εσωτερικό μιας περιοχής π.χ. της έντονα διαγραμμισμένης περιοχής Π του Σχ. 2.2 δίνει το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο στην περιοχή αυτή γύρω από τη θέση $\boldsymbol{r}$ τη χρονική στιγμή t. Αυτό το πλάτος πιθανότητας[7] το συμβολίζουμε με το ελληνικό γράμμα ψ. Το $\psi(\boldsymbol{r},t)$ είναι το αντίστοιχο της τροχιάς $\boldsymbol{r}(t)$ της κλασικής φυσικής, με την έννοια ότι από το $\psi(\boldsymbol{r},t)$ μπορούμε με συγκεκριμένους κανόνες να υπολογίσουμε όλα τα φυσικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν. Τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών έχουν εν γένει πιθανοκρατικό χαρακτήρα, βρίσκουμε δηλαδή ποια είναι η πιθανότητα το τάδε μέγεθος να έχει τη δείνα τιμή (σε ορισμένες περιπτώσεις αυτή η πιθανότητα μπορεί να προκύψει μονάδα, όποτε έχουμε βεβαιότητα). Με την εισαγωγή αυτής της σύμφυτης πιθανοκρατικής περιγραφής καταφέρνει κανείς να συμβιβάσει τις έννοιες κύμα και σωμάτιο που μας φαίνονται αντιφατικές. Δεν είναι το ίδιο το σωμάτιο που είναι απλωμένο ως κύμα σε όλο το διαθέσιμο χώρο, άλλα το πλάτος πιθανότητας να το βρούμε στη μια ή στην άλλη θέση. Κατά κάποιο τρόπο, η

[7] Η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο κατά τη χρονική στιγμή t σε μια μικρή περιοχή όγκου δV γύρω από το σημείο $\boldsymbol{r}$ ισούται εξ ορισμού με $\left|\psi(\boldsymbol{r},t)\right|^2 \delta V / \int |\psi|^2 dV$. Η μέση τιμή της ενέργειας δίνεται από τον τύπο $\langle E \rangle = \left[(\int \psi^* (\hat{E}_K \psi) dV + \int \psi^* V(r) \psi dV) \right] / \int |\psi|^2 dV$, όπου $(\hat{E}_K \psi) \equiv -(\hbar^2 / 2m) \left[(\partial^2 \psi / \partial x^2) + (\partial^2 \psi / \partial y^2) + (\partial^2 \psi / \partial z^2) \right]$.

αναπόφευκτη πιθανοκρατική περιγραφή, καίτοι κάπως άβολη[8], μας επιτρέπει να έχουμε "και την πίτα ολάκερη και το σκύλο χορτάτο".

Η ποσότητα ψ αποτελεί τη βάση για έναν εναλλακτικό, αλλά ισοδύναμο με αυτόν των πολλαπλών τροχιών τρόπο περιγραφής της κυματικής διάδοσης. Η πλήρης θεωρία που βασίζεται στον κυματοσωματιδιακό δυισμό και στη χρήση της έννοιας του ψ και της έννοιας των πολλαπλών διαδρομών λέγεται **Κβαντομηχανική**. Η Κβαντομηχανική έχει αναδειχθεί ως μια θεωρία απίστευτης αποτελεσματικότητας για την κατανόηση του Κόσμου (σε ποσοτικό επίπεδο). Στην ειδική περίπτωση που έχουμε κύματα υλικών σωματίων τα οποία αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη ενέργεια[9] E τότε η περιγραφή μέσω της ψ είναι πολύ πιο βολική έναντι αυτής των πολλαπλών τροχιών. Ο λόγος είναι ότι στην περίπτωση αυτή η ψ ικανοποιεί μια διαφορική κυματική εξίσωση που είναι γνωστή ως **χρονοανεξάρτητη εξίσωση του** Schrödinger. Την παρουσιάζουμε εδώ για πληρότητα αλλά δεν θα κάνουμε χρήση της:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+\mathcal{V}(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \qquad \boxed{}^{*}$$

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα σχολιάζοντας μια πρόταση η οποία, παρόλο που είναι παραπλανητική και ουσιαστικά λανθασμένη, λέγεται και γράφεται πολύ συχνά. Η πρόταση είναι η εξής: *Η Κβαντομηχανική ισχύει στο μικρόκοσμο, ενώ στο μακρόκοσμο ισχύει η Κλασική Μηχανική.* (ΛΑΘΟΣ)

Η σωστή διατύπωση είναι η ακόλουθη:

Όσον αφορά σε **μακροσκοπικές**[10] **κινήσεις** ακόμη και μικροσκοπικών κυματοσωματίων, η Κβαντομηχανική ανάγεται στην πολύ απλούστερη Κλασική Φυσική.

Όμως, όσον αφορά στις **ιδιότητες** των δομών της ύλης μακροσκοπικών και μη, αυτές καθορίζονται από τους νόμους της Κβαντομηχανικής και όχι από αυτούς της Κλασικής Φυσικής.

Το γεγονός αυτό είναι άμεση συνέπεια της ατομικής ιδέας που ανάγει την αφάνταστη ποικιλία του Κόσμου επομένως και των ιδιοτήτων των δομών του, στις **ιδιότητες** και στις μικροσκοπικές **κινήσεις** των στοιχειωδών συστατικών του. Αλλά οι μικροσκοπικές κινήσεις των στοιχειωδών κυματοσωματίων υπακούουν τους κβαντικούς νόμους και όχι τους κλασικούς. Κατά συνέπεια οι κβαντικοί νόμοι διέπουν το μακροσκοπικό επίπεδο οργάνωσης της ύλης. Αδιάψευστη μαρτυρία για το ότι οι ιδιότητες των μακροσκοπικών δομών του Κόσμου καθορίζονται από κβαντομηχανικούς νόμους αποτελεί

[8] Θα προτιμούσαμε, για να θυμηθούμε τον Einstein, "ο Θεός να μην παίξει ζάρια".

[9] Κύματα συγκεκριμένης ενέργειας έχουν τη μορφή στάσιμων κυμάτων όπου το $|\psi|^2$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

[10] Όταν το μήκος ℓ της κλασικής τροχιάς του Σχ. 2.2 είναι τόσο μεγάλο ώστε το πάχος του τροχιακού "σωλήνα" να θεωρείται αμελητέο, ο τροχιακός σωλήνας έχει αναχθεί ουσιαστικά σε κλασική τροχιά. Επί πλέον, όταν το μήκος ℓ είναι τόσο μεγάλο ώστε να τυχαιοποιηθούν οι φάσεις των πλατών πιθανότητας κάθε κβαντικής τροχιάς λόγω αλληλεπιδράσεων με το περιβάλλον, χάνεται και η δυνατότητα συμβολής. Έτσι αναγόμαστε πλήρως στην κλασική εικόνα.

*** Το λευκό πλαίσιο τίθεται για εξισώσεις που είναι βασικές αλλά δεν θα χρησιμοποιηθούν στο παρόν βιβλίο. Το γκρι πλαίσιο για εξισώσεις που θεωρούνται γνωστές (και πολύ χρήσιμες για το παρόν βιβλίο αλλά και γενικότερα (π.χ. η (2.7)).**

το γεγονός ότι οι τιμές αυτών των ιδιοτήτων εξαρτώνται από το $\hbar$, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια αυτού του βιβλίου. Ας το τονίσουμε λοιπόν όσο πιο εμφαντικά γίνεται:

Ο Κόσμος, όσον αφορά στις ιδιότητες όλων των δομών του, **είναι κβαντικός. Αν δεν ήταν, δεν θα υπήρχαμε.**

Το γεγονός αυτό, δυστυχώς, παραμένει terra incognita όχι μόνο για τους μαθητές λυκείου αλλά και για αρκετούς φυσικούς. Πιθανόν αυτό να οφείλεται στο ότι η ακριβής και πλήρης διατύπωση της Κβαντομηχανικής απαιτεί πιο προχωρημένα μαθηματικά και στο ότι οι έννοιές της είναι πιο αφηρημένες και πιο απόμακρες από την καθημερινή εμπειρία, όπως θα έγινε ήδη φανερό από τα προηγούμενα σχόλια. Ίσως να οφείλεται και στο ότι η διδασκαλία της Κβαντομηχανικής επικεντρώνεται συνήθως σε τεχνικές λεπτομέρειες και έτσι με την έμφαση σε επί μερους 'δένδρα' χάνεται το 'δάσος'. Εντούτοις οι νόμοι της Κβαντομηχανικής είναι τόσο σημαντικοί - αφού η **δομή** του Κόσμου από την πιο μικροσκοπική κλίμακα μέχρι την πιο μεγάλη διέπεται από αυτούς τους νόμους - ώστε να πρέπει να είναι κτήμα κάθε μαθητή λυκείου. Ευτυχώς, είναι δυνατόν να παρουσιάσει κανείς την ουσία της Κβαντομηχανικής παρακάμπτοντας τις εννοιολογικές και τεχνικές δυσκολίες της με το να εστιάσει την προσοχή του σε *τρεις βασικές* και συνάμα *απλές*[11] αρχές της. Αυτές οι αρχές πηγάζουν από τις κεντρικές σχέσεις (2.1 ή 2,1΄) και (2.2 ή 2.2΄) και, όπως θα δείξουμε στα κεφάλαια 5-14 του βιβλίου, έχουν επιπλέον

μεγάλη ερμηνευτική ισχύ χωρίς να
απαιτούν μαθηματικά πέραν αυτών του λυκείου.

Θα τις μνημονεύσουμε λοιπόν από τώρα και θα επανέλθουμε σ' αυτές ξανά και ξανά στο παρόν βιβλίο:

a. Αρχή της απροσδιοριστίας (του Heisenberg)
b. Αρχή απαγορευτική (του Pauli)
c. Αρχή της κβάντωσης (του Schrödinger) [12]

Οι παραπάνω αρχές συνδυασμένες με το γενικό και πολύ σπουδαίο νόμο (3.0) του κεφ.3 εξηγεί γιατί οι σύνθετες μικροσκοπικές δομές της ύλης παρουσιάζουν τη θαυμαστή ιδιότητα της σταθερότητας (παρόλο που επιτρέπουν προσωρινές αλλαγές) και έτσι εξασφαλίζουν την υπ' αριθμό 1 συνθήκη για την ύπαρξη προβλέψιμης χημικής και βιοχημικής συμπεριφοράς.

2.3 Αρχή της απροσδιοριστίας (του Heisenberg).

Η απροσδιοριστία στη θέση ενός σωματίου κατά Δx (σε μια ορισμένη διεύθυνση) επί την απροσδιοριστία στην ορμή Δp_x (στην ίδια διεύθυνση) ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2}^{13} \tag{2.3}$$

[11] Απλές και στη διατύπωση και στη χρήση τους και εντούτοις καίριας σημασίας.
[12] Όπως θα δούμε πιο κάτω, η αρχή της κβάντωσης είναι συνέπεια του κυματικού χαρακτήρα της ύλης, που εκφράζεται μέσω της εξίσωσης του Schrödinger για το ψ, και γι' αυτό την αναφέρουμε εδώ με το όνομα του Schrödinger.

Η αρχή της απροσδιοριστίας είναι συνέπεια του κυματικού χαρακτήρα της ύλης. Ένα κύμα που αντιστοιχεί σε ένα μόνο κυματάνυσμα k_x, δηλαδή σε ένα μόνο μήκος κύματος λ, ονομάζεται επίπεδο κύμα και είναι απλωμένο σε όλο το χώρο. Για να έχουμε ένα κύμα που να εκτείνεται σε μια πεπερασμένη περιοχή μήκους Δx θα πρέπει να υπερθέσουμε πολλά επίπεδα κύματα με k_x από μια γκάμα τιμών εύρους Δk_x τέτοιου ώστε $\Delta x \cdot \Delta k_x \approx 1$. Η τελευταία αυτή σχέση συνδυασμένη με την (2.2) οδηγεί περίπου στην (2.3).

Το φυσικό νόημα της (2.3) είναι το εξής : Αν ένα σωμάτιο είναι εγκλωβισμένο σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους Δx, το σωμάτιο είναι αδύνατο να ακινητοποιηθεί. Αντίθετα θα κινείται συνεχώς πίσω-μπρος έτσι ώστε το τετράγωνο της ορμής του να είναι κατά μέσον όρο μεγαλύτερο ή ίσο από $\hbar^2 / 4\Delta x^2$ και το τετράγωνο της ταχύτητάς του να είναι κατά μέσον όρο μεγαλύτερο ή ίσο από $\hbar^2 / 4m^2\Delta x^2$. Στη ρεαλιστική τρισδιάστατη περίπτωση που το σωμάτιο είναι εγκλωβισμένο στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας r_o και όγκου $V = (4\pi/3) r_o^3$, θα έχουμε βάσει της (2.3)

$$\left\langle \boldsymbol{p}^2 \right\rangle = \left\langle p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right\rangle = 3\left\langle p_x^2 \right\rangle \geq 3\Delta p_x^2 \geq \tfrac{3}{4}\frac{\hbar^2}{\Delta x^2} \qquad (2.4)$$

αλλά [14], όταν $\langle x \rangle = 0$,

$$3\Delta x^2 = \left\langle x^2 + y^2 + z^2 \right\rangle = \left\langle r^2 \right\rangle = \Delta r^2 = \tfrac{3}{5} r_o^2 \approx 0.23 V^{2/3} \qquad (2.5)$$

Άρα, η (2.4) και η (2.5) δίνουν ότι $\left\langle \boldsymbol{p}^2 \right\rangle \geq 3,75\hbar^2 / r_o^2 \approx 9,74\hbar^2 / V^{2/3}$.

Επομένως η **μέση** κινητική ενέργεια

$$\varepsilon_K \equiv \left\langle \boldsymbol{p}^2 \right\rangle / 2m,$$

του σωματίου αυτού (θεωρώντας το ως μη σχετικιστικό) θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$\boxed{\varepsilon_K \geq 1,875\frac{\hbar^2}{m r_o^2} \approx 4,87\frac{\hbar^2}{m V^{2/3}}} \qquad (2.6)$$

---

[13] Τα Δx και Δp_x είναι οι λεγόμενες τυπικές αποκλίσεις που ορίζονται στη Στατιστική από τις σχέσεις $\Delta x^2 \equiv \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$ και $\Delta p_x{}^2 \equiv \left\langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \right\rangle$. Το σύμβολο $\langle A \rangle$ δηλώνει τη μέση τιμή του οποιουδήποτε στατιστικού μεγέθους A. Ισχύει γενικά ότι η μέση τιμή $\left\langle A^2 \right\rangle = \langle A \rangle^2 + \Delta A^2$. Άρα:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \langle x \rangle^2 + \Delta x^2 \geq \Delta x^2$$

$$\left\langle p_x{}^2 \right\rangle = \langle p_x \rangle^2 + \Delta p_x{}^2 \geq \Delta p_x{}^2$$

Συνήθως οι μέσες τιμές $\langle x \rangle$ και $\langle p_x \rangle$ είναι μηδέν, οπότε $\left\langle x^2 \right\rangle = \Delta x^2$ και $\left\langle p_x{}^2 \right\rangle = \Delta p_x{}^2$.

[14] Η σχέση $\Delta r^2 = 3r_o^2 / 5$ ισχύει υποθέτοντας ίση πυκνότητα πιθανότητας να βρούμε το σωμάτιο σε οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό της σφαίρας.

Η σχέση (2.6) είναι πολύ σημαντική. Λέει ότι κάθε σωμάτιο που είναι εγκλωβισμένο σ' ένα όγκο V έχει κινητική ενέργεια που δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από μια ελάχιστη τιμή. Η ελάχιστη αυτή τιμή είναι αντιστρόφως ανάλογη του $V^{2/3}$ και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας m του σωματίου και ανάλογη του $\hbar^2$, όπου το $\hbar$ (η σταθερά Planck δια 2π) είναι το **σήμα κατατεθέν** της Κβαντομηχανικής.

Όσο μικρότερος ο όγκος και όσο μικρότερη η μάζα, τόσο μεγαλύτερη η μίνιμουμ κινητική ενέργεια. Η ύπαρξη αυτής της μίνιμουμ κινητικής ενέργειας (α) εμποδίζει την κατάρρευση των σύνθετων δομών της φύσης (υπό την επίδραση ελκτικών δυνάμεων), γιατί η κινητική ενέργεια δημιουργεί διασταλτικές πιέσεις, (β) συνεπάγεται την ύπαρξη ελάχιστης πεπερασμένης συνολικής ενέργειας, όπως θα δούμε πιο κάτω, και **(γ) εξασφαλίζει σε τελική ανάλυση τη σταθερότητα των δομών του Κόσμου** (βλέπε 2.5). Μη ξεχνάτε λοιπόν ποτέ να περιλαμβάνετε την ελάχιστη κινητική ενέργεια στον υπολογισμό της ολικής ενέργειας σύνθετων δομών του μικρόκοσμου ή του μεγάκοσμου. Αν δεν το κάνετε (ξεχνώντας ότι ο κόσμος είναι κβαντικός και όχι κλασικός, όπου $\hbar = 0$) θα καταλήξετε σε εντελώς λάθος συμπεράσματα.

Σημειώστε ότι στην ακραία σχετικιστική περίπτωση[15], όπου η μάζα ηρεμίας είναι είτε μηδέν είτε αμελητέα, αντί της (2.6) ισχύει η (2.9). Στη (2.9) η εξάρτηση από τον όγκο δεν είναι πια αντιστρόφως ανάλογη του $V^{2/3}$, αλλά αντιστρόφως ανάλογη του $V^{1/3}$ ή, ισοδύναμα, αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας r_o. Αυτή η αλλαγή στον εκθέτη είναι καίριας σημασίας για να εξηγήσει κανείς την κατάρρευση των λευκών νάνων προς αστέρες νετρονίων και την κατάρρευση των τελευταίων προς μαύρες τρύπες.

2.4 Απαγορευτική αρχή του Pauli

---

[15] Η απόδειξη του τύπου (2.6) βασίστηκε στη σχέση, $\varepsilon_K = p^2/2m$, μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής. Όμως η ακριβής σχετικιστική σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής, είναι η ακόλουθη

$$\varepsilon_K = \sqrt{m_o^2 c^4 + c^2 p^2} - m_o c^2 \qquad \boxed{(2.7)}$$

οπότε, αφού $\langle p^2 \rangle \geq \Delta p^2 \geq 9,74\,\hbar^2/V^{2/3}$, θα έχουμε αντί της (2.6) την ακριβέστερη σχέση (αλλά εν τούτοις προσεγγιστική)

$$\varepsilon_K \geq \sqrt{m_o^2 c^4 + 9\hbar^2 c^2/V^{2/3}} - m_o c^2 \qquad (2.8)$$

Στην ειδική περίπτωση, όπου η μάζα ηρεμίας m_o είναι μηδέν (όπως στα φωτόνια), ή τόσο μικρή, ώστε το $m_o^2 c^4$ να είναι αμελητέο σε σύγκριση με το $9\hbar^2 c^2/V^{2/3}$, τότε η (2.6) δεν ισχύει ούτε προσεγγιστικά και αντί αυτής έχουμε την ακόλουθη ανισότητα:

$$\boxed{\varepsilon_K \geq \frac{1,86\hbar c}{r_o} = \frac{3\hbar c}{V^{1/3}}, \quad \text{όταν} \quad m_o \approx 0} \qquad (2.9)$$

Επομένως η ενέργεια ενός φωτονίου που το έχουμε περιορίσει σ' ένα όγκο V είναι τουλάχιστον $3\hbar c/V^{1/3} = 1,86\,\hbar c/r_o$ και η συχνότητα του τουλάχιστον $3c/V^{1/3} = 1,86\,c/r_o$.

Σημειώστε ότι ο τελευταίος τύπος προκύπτει (εκτός του αριθμητικού παράγοντα), εάν θέσουμε στον τύπο (2.6) όπου m την σχετικιστική μάζα $\varepsilon/c^2 = \hbar\omega/c^2$ και $\varepsilon_K \approx \hbar\omega$.

Η βασική αυτή αρχή πηγάζει επίσης από την απουσία τροχιάς. Πράγματι, αν δύο όμοια σωμάτια που κινούνται στον ίδιο χώρο είχαν το καθένα τη δική του τροχιά, θα μπορούσαμε να τα ξεχωρίσουμε, να πούμε δηλαδή ποιο είναι το υπ' αρ. 1 και ποιο το υπ' αρ. 2. Όταν όμως τα δύο σωμάτια με τις πολλαπλές τροχιές τους καλύπτουν το καθένα όλο το διαθέσιμο χώρο δεν είναι δυνατόν να πει κανείς ποιο είναι το 1 και ποιο είναι το 2. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι φυσικές ιδιότητες θα πρέπει να παραμείνουν αμετάβλητες αν εναλλάξουμε τα ονόματα των δύο σωματίων, δηλαδή αν το 1 το πούμε 2 και το 2 το πούμε 1. Μια τέτοια φυσική ιδιότητα είναι και η πιθανότητα ανά μονάδα όγκου $|\psi|^2$, άρα $|\psi(1,2)|^2 = |\psi(2,1)|^2$. Από την τελευταία αυτή σχέση έπεται ότι

$$\boxed{\psi(1,2) = \pm\psi(2,1),} \tag{2.10}$$

όπου συμβαίνει το μεν άνω πρόσημο να ισχύει για μποζόνια (δηλαδή για σωμάτια με ακέραιο σπιν, όπως τα σωμάτια-αλ) το δε κάτω για φερμιόνια (δηλαδή για σωμάτια με ημιακέραιο σπιν, όπως τα στοιχειώδη σωμάτια-υ). Η σχέση (2.10) αποτελεί τη γενικευμένη αρχή του Pauli που εξειδικεύεται για φερμιόνια ως απαγορευτική αρχή του Pauli και η οποία προκύπτει ως εξής. Θεωρήστε δύο όμοια **φερμιόνια** που βρίσκονται στην ίδια μονοσωματιδιακή χωρική/σπιν κατάσταση ψ_o, πράγμα που σημαίνει ότι $\psi(1,2) = \psi_o(1)\cdot\psi_o(2)$. Αν τώρα εναλλάξουμε τα ονόματα, έπεται από την τελευταία σχέση ότι $\psi(1,2) = \psi(2,1)$, ενώ από την (2.10) ότι $\psi(1,2) = -\psi(2,1)$. Ο μόνος τρόπος να ικανοποιηθούν και οι δύο αυτές σχέσεις είναι να ισχύει ότι $\psi_o(1)\cdot\psi_o(2) = 0,$ πράγμα που σημαίνει ότι **η πιθανότητα να βρεθούν δύο όμοια φερμιόνια στην ίδια χωρική/σπιν κατάσταση είναι μηδέν.** Επομένως δύο το πολύ φερμιόνια με σπιν 1/2 μπορούν να βρεθούν στην ίδια χωρική κατάσταση με τα σπιν τους να έχουν αντίθετες κατευθύνσεις :

Δύο το πολύ όμοια σωμάτια (στοιχειώδη ή σύνθετα) με σπιν ½ μπορούν να βρεθούν στην ίδια χωρική *κατάσταση ή (σε μια λιγότερο ακριβή διατύπωση) στην ίδια περιοχή του χώρου*[16].

Τι θα συμβεί εάν N όμοια σωμάτια με σπιν $1/2$ βρεθούν στον ίδιο ομοιογενή χώρο όγκου V; Η ακριβής απάντηση εξαρτάται από πολλούς παράγοντες και απαιτεί εν γένει περίπλοκους υπολογισμούς. Εν τούτοις καταλήγουμε σε μια αρκετά ικανοποιητική προσεγγιστική απάντηση εάν θεωρήσουμε ότι τα σωμάτια προκειμένου να ικανοποιήσουν την αρχή του Pauli, χωρίζουν τον (ομοιογενή) χώρο σε $N/2$ ίσους υποχώρους (ο καθένας θα έχει όγκο $V/(N/2) = 2V/N$) και ανά δύο (με αντίθετα σπιν) καταλαμβάνουν όλους τους υποχώρους. Όμως τότε, κάθε σωμάτιο κινείται σ' ένα χώρο όγκου $2V/N$

[16] Η απαγορευτική αρχή του Pauli ισχύει για όλα τα όμοια σωμάτια με σπιν s, **ημιακέραιο** (και όχι μόνο για $s = 1/2$). Τότε ο μέγιστος αριθμός όμοιων σωματίων στην ίδια χωρική κατάσταση είναι $2s+1$ (όσες και οι προβολές του σπιν). Εάν το σπιν είναι ακέραιο τα όμοια σωμάτια όχι μόνο δεν αποφεύγουν το ένα το άλλο, αλλά αντίθετα **προτιμούν** να συγκεντρωθούν πολλά μαζί στην ίδια κατάσταση.

και επομένως, βάσει του τύπου (2.6) η *μέση* κινητική του ενέργεια[17] θα είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_K \geq 3{,}05\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad , \quad 3{,}05 \to 2.87 \tag{2.11}$$

Εάν είχαμε ακολουθήσει την ορθή, αλλά πιο απαιτητική διαδικασία εποικισμού των καταστάσεων (βλέπε υποσημείωση), ο αριθμητικός παράγων θα ήταν 2,87 αντί του 3,05 που προέκυψε από την απλή προσεγγιστική μας μέθοδο.
Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των N σωματίων προκύπτει από την (2.11) πολλαπλασιάζοντας επί *N*. Θα είναι λοιπόν κατ' ελάχιστο ίση με

$$\boxed{E_K = N\varepsilon_K = 2{,}87N\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2\,/\,3}} \tag{2.12}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι προκειμένου για όμοια μη σχετικιστικά σωμάτια με σπιν ½, η αρχή του Pauli μπορεί να οδηγήσει σε μία τεράστια αύξηση της μίνιμουμ κινητικής ενέργειας κατά ένα παράγοντα $(N/2)^{2/3}$. Π.χ., εάν $N = 2\times 10^{24}$, η αύξηση θα είναι της τάξεως του 10^{16}.

Η σχέση (2.12) ισχύει με βάση τη σχέση $\varepsilon_K = p^2/2m$. Εάν ακολουθήσουμε την ίδια προσεγγιστική μέθοδο με προηγουμένως αλλά ξεκινώντας από την (2.9), που ισχύει για την ακραία σχετικιστική περίπτωση, $\varepsilon_K \approx c\,p$, θα βρίσκαμε για *N* σωμάτια με σπιν ½ το εξής αποτέλεσμα για την ελάχιστη ολική κινητική τους ενέργεια

$$\boxed{E_K = 2{,}32\,\hbar c\frac{N^{4/3}}{V^{1/3}}} \tag{2.13}$$

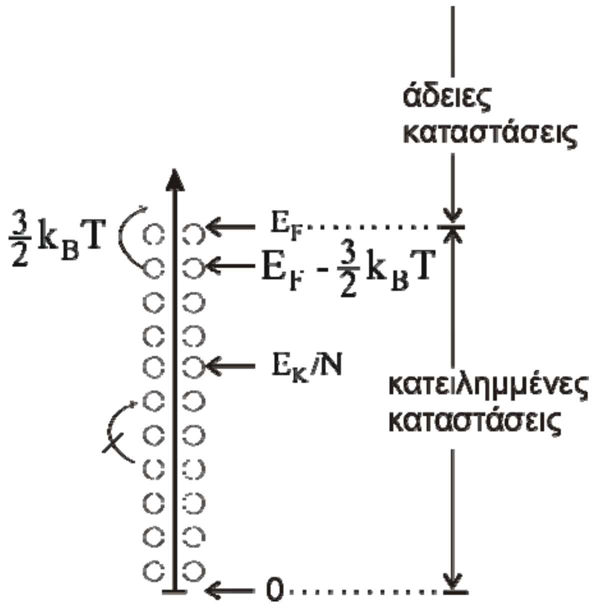
Μια ακόμη σημαντική συνέπεια της αρχής του Pauli[18] είναι ότι περιορίζει τη θερμική (ή άλλης φύσεως) διέγερση φερμιονίων, αφού απαιτεί η προς κατάληψη στάθμη να μην είναι ήδη πλήρως κατειλημμένη από όμοια φερμιόνια. Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.3, τα σωμάτια που μπορούν να διεγερθούν θερμικά είναι ένα κλάσμα του συνολικού αριθμού N σωματίων. Το κλάσμα αυτό, N^*/N, είναι της τάξεως του (3/2)$k_B T/E_F$. Άρα στον τύπο του προβλήματος ΙΙΙ.3 για την θερμική ενέργεια (σελ. 242) θα έχουμε το N^* αντί του N και επομένως η θερμική ενέργεια, U_T θα είναι

[17] Στην πραγματικότητα δεν έχουν όλα τα σωμάτια την ίδια ενέργεια. Λόγω της αρχής του Pauli και της αρχής της ελαχιστοποίησης της ολικής ενέργειας (για $T = 0\,\mathrm{K}$), τα σωμάτια εποικίζουν τις διαθέσιμες καταστάσεις αρχίζοντας από την κατώτερη και φτάνοντας μέχρι μια μέγιστη, όπως φαίνεται στο Σχ.2.3. Η μέγιστη κατειλημμένη ενέργεια ονομάζεται ενέργεια **Fermi** και συμβολίζεται με E_F. Η ελάχιστη ολική κινητική ενέργεια E_K διηρημένη με τον αριθμό σωματίων είναι κάπου ενδιάμεσα μεταξύ *0* και E_F. Ένας μάλλον στοιχειώδης υπολογισμός για ελευθέρα σωμάτια δείχνει ότι $E_K/N = 3E_F/5 = 0{,}6E_F$.

[18] Θα πρέπει να τονισθεί ότι σε σωμάτια με ακέραιο σπιν, που δεν υπακούν σε απαγορευτική αρχή, ούτε ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $(N/2)^{2/3}$ υπάρχει, ούτε περιορισμός για διέγερση σε μη κατειλημμένη στάθμη υφίσταται. Αντίθετα ένα σωμάτιο με σπιν ακέραιο προτιμά να μεταβεί σε μία ήδη κατειλημμένη στάθμη από όμοια του μποζόνια.

$$U_{\mathrm{T}} = \tfrac{3}{2} N^* k_B T \approx \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \frac{k_B^2}{E_F} N T^2 \,, \text{ για } \quad k_B T \ll E_F \qquad (2.14)$$

(Ο ακριβής τύπος για το U_T στο όριο $T \to 0$, έχει $\pi^2/4 \approx 2,47$ αντί του $(3/2)^2 = 2,25$). Το αποτέλεσμα είναι ότι οι θερμικές μετρήσεις (για $k_B T \ll E_F$), ερμηνευμένες με βάση την κλασική θεωρία οδηγούν (όπως και οδήγησαν ιστορικά) στο λανθασμένο, παράδοξο και άκρως αντιφατικό συμπέρασμα ότι ο αριθμός των ηλεκτρονίων σθένους είναι πάνω από εκατό φόρες μικρότερος από τις τιμές που δίνουν άλλα πειράματα και μάλιστα ότι αλλάζει με τη θερμοκρασία.



Σχ.2.3 *Τα σωμάτια με σπιν=1/2 για $T = 0\mathrm{K}$ εποικίζουν τις κατώτερες καταστάσεις μέχρι να εξαντληθεί ο αριθμός τους. Λόγω αρχής του Pauli μόνο τα σωμάτια που βρίσκονται στο ανώτερο ενεργειακό στρώμα πάχους περίπου (3/2)k_BT μπορούν να διεγερθούν θερμικά. (Για τον παράγοντα 3/2 βλέπε το πρόβλημα ΙΙΙ.3)*

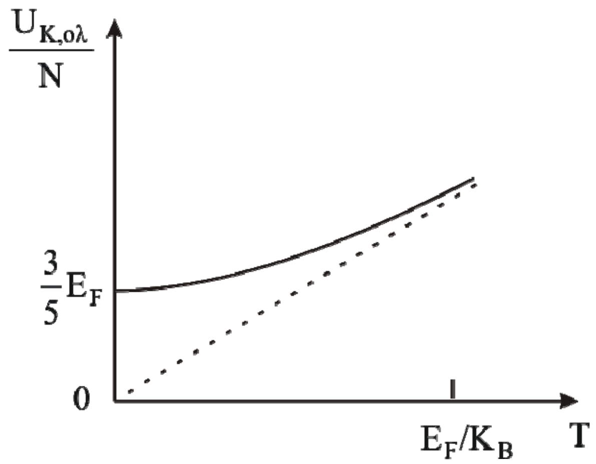
Για να ισχύσει ο κλασικός τύπος $U_{\mathrm{T}} = (3/2) N k_B T$, θα πρέπει η απόλυτη θερμοκρασία, T, να ικανοποιήσει την ανισότητα $k_B T \gg E_F$. Στο σχήμα 2.4 εικονίζεται (ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας, T) η ολική κινητική ενέργεια $U_{K,o\lambda.}$ N ελεύθερων σωματίων με σπιν ½ σε θερμοδυναμική ισορροπία και περιορισμένων σε χώρο όγκου V. Σημειώστε ότι η εξάρτηση της $U_{K,o\lambda.}$ από τη θερμοκρασία μπορεί να *προσεγγισθεί* χοντρικά από τον απλό τύπο:

$$\frac{U_{K,o\lambda.}}{N} \approx \left[\left(\tfrac{3}{5} E_F\right)^2 + \left(\tfrac{3}{2} k_B T\right)^2 \right]^{1/2} \qquad (2.15)$$

όπου $\tfrac{3}{5} E_F = E_{K,\kappa\beta} / N \approx 2,87 \hbar^2 N^{2/3} / m V^{2/3}$

2.5 Αρχή του Schrödinger : Διάκριτες ενεργειακές στάθμες

Η κίνηση ενός κυματοσωματίου σε **περιορισμένο χώρο** όγκου V δημιουργεί (εκτός της ελάχιστης κινητικής ενέργειας) και κβάντωση των επιτρεπόμενων ενεργειών, δημιουργεί δηλαδή, διάκριτες ενεργειακές στάθμες[19]. Η ενεργειακή



Σχ.2.4 *Η συνεχής γραμμή δίνει τη μέση κινητική ενέργεια (ανά σωμάτιο) ελεύθερων σωματίων με σπιν ½ και συγκέντρωση N/V ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας T. Η διακεκομμένη γραμμή δίνει το κλασικό αποτέλεσμα. Για $T \ll (E_F/k_B)$ η κβαντική ενέργεια του τύπου (2.11) κυριαρχεί σε σχέση με τη θερμική ενέργεια. Για $T \gg (E_F/k_B)$ η κβαντική διόρθωση είναι πολύ μικρή. Για ένα τυπικό μέταλλο $E_F/k_B \approx 80.000\,\mathrm{K}$! Επομένως σ' όλη την περιοχή θερμοκρασιών (όπου έχουμε τη μεταλλική φάση) κυριαρχεί η κβαντική ενέργεια, και η θερμική ενέργεια είναι πάρα πολύ μικρή (πρακτικά αμελητέα).*

διαφορά της πρώτης διεγερμένης στάθμης από τη θεμελιώδη (τη στάθμη ελάχιστης ενέργειας) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους όπως και η ελάχιστη κινητική ενέργεια ανά σωμάτιο, δηλαδή, είναι (για μη σχετικιστικά σωμάτια) της τάξης του $\hbar^2/mV^{2/3}$

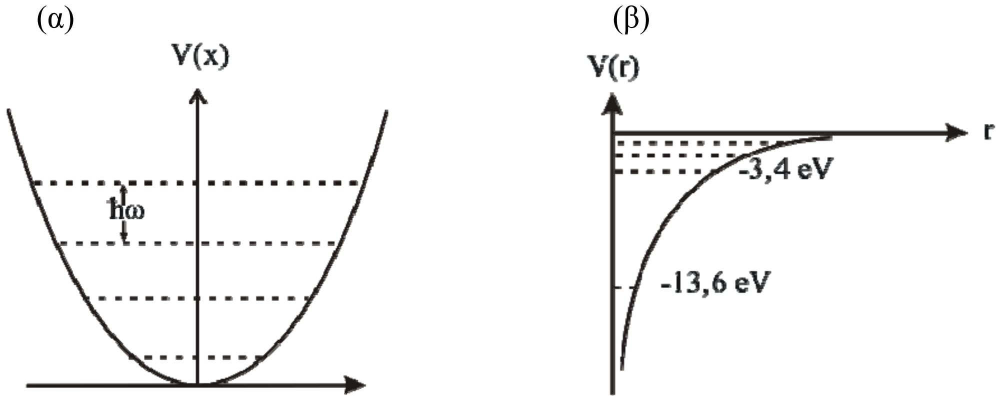
$$\boxed{\delta\varepsilon \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_o = a\frac{\hbar^2}{mV^{2/3}},} \tag{2.16}$$

όπου a είναι της τάξης της μονάδας. Για κυματοσωμάτια με μάζα ηρεμίας μηδέν ή αμελητέα, αντί του $\hbar^2/mV^{2/3}$ έχουμε $\hbar c/V^{1/3}$. (Βλ. υποσημείωση 15 σελ. 32).

Στο παρακάτω Σχ.2.5 εικονίζονται οι επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες ενός σωματίου μάζας m που κινείται μονοδιάστατα υπό της επίδραση μιας αρμονικής δύναμης της μορφής $-\kappa x$ $(\omega = \sqrt{\kappa/m})$, καθώς και οι ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου. (Σημειώστε ότι σε κάθε ενεργειακή στάθμη αντιστοιχεί μία ή *περισσότερες* συγκεκριμένες μορφές της κυματοσυνάρτησης $\psi(\boldsymbol{r})$).

[19] Αυτό συνεπάγεται, όπως θα δούμε πιο κάτω, ότι οι μόνες επιτρεπτές καταστάσεις στο Σχ. 2.6β της σελ. 39 θα είναι διάκριτα σημεία πάνω σε ευθείες, τα οποία προκύπτουν από τις τομές των ευθειών αυτών με κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν τον άξονα των ω στα σημεία ω_0, ω_1, ω_2 …

Μη ξεχνάτε ότι η κβάντωση των ενεργειών ενός κυματοσωματίου λόγω της κίνησής του σε περιορισμένο χώρο είναι άμεσο αποτέλεσμα του κυματικού χαρακτήρα της κίνησης του. Όλα τα κύματα όταν τα περιορίσουμε χωρικά εμφανίζουν κβάντωση της συχνότητάς τους[20], ω , άρα και της ενέργειας $\hbar\omega$, του κβάντου τους[21].



Σχ.2.5 *(α) Η δυναμική ενέργεια $V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2$, ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και οι αντίστοιχες διάκριτες ενεργειακές στάθμες ενός ηλεκτρονίου, υπό την επίδραση αυτής της δυναμικής ενέργειας, καθώς και (β) οι αντίστοιχες στάθμες υπό την επίδραση της δυναμικής ενέργειας $V(r) \equiv -e^2 / r$ στο άτομο του υδρογόνου.*

Όπως είχαμε την ευκαιρία να τονίσουμε και προηγουμένως, η κβάντωση της ενέργειας $\varepsilon = \hbar\omega$, ενός εντοπισμένου κυματοσωματίου είναι πολύ σημαντικό φαινόμενο, γιατί:

- Εξασφαλίζει τη σταθερότητα και την προβλέψιμη συμπεριφορά σύνθετων μικροσκοπικών σωματίων (όπως είναι οι πυρήνες, τα άτομα, τα μόρια) παρά το διαφορετικό περιβάλλον στο οποίο μπορεί να βρεθούν. Έχουμε εδώ μια από τις δύο καίριες συνέπειες της κβάντωσης που αξίζει να εγγραφεί ανεξίτηλα στη μνήμη μας. Η κβάντωση με το να δημιουργεί μια μη μηδενική ενεργειακή απόσταση $\delta\varepsilon$ μεταξύ της κατάστασης ελάχιστης ενέργειας και της αμέσως υψηλότερης δεν επιτρέπει καμία αλλαγή, όσο η διαθέσιμη ενέργεια από το περιβάλλον δεν υπερβαίνει το $\delta\varepsilon$. Εάν προσφέρουμε σ' ένα

---

[20] Παράδειγμα η χορδή μιας κιθάρας που οι συχνότητες, ω, που παράγει είναι ίσες με $\pi\,\tilde{c}\,n / L$, όπου L είναι το μήκος της χορδής, $n = 1, 2, 3, ...,$ και $\tilde{c}$ είναι η ταχύτητα του ήχου στη χορδή. Το $\tilde{c}$ εξαρτάται από της τάση της χορδής και τη γραμμική πυκνότητα μάζας. Η θεμελιώδης συχνότητα, $\pi\,\tilde{c} / L$, για $n = 1$, είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τον τύπο (2.9) για την ελάχιστη συχνότητα ενός φωτονίου περιορισμένου σ' ένα χώρο ακτίνας r_o .

[21] Για άρση τυχόν παρεξηγήσεων σημειώνουμε τα εξής:
Το κλασικό σωμάτιο, λόγω της κλασικής σωματιδιακής προέλευσής του, έχει τον διάκριτο και αδιαίρετο χαρακτήρα του (η ενέργεια ενός αριθμού μη αλληλεπιδρώντων σωματίων είναι προφανώς το άθροισμα των ενεργειών ε κάθε σωματίου). Η Κβαντομηχανική με το να του προσδώσει και κυματικό χαρακτήρα του κβαντίζει (για κίνηση σε πεπερασμένο όγκο) την ενέργεια ε που κλασικά ήταν συνεχής. Το κλασικό κύμα, ακριβώς λόγω της κλασικής κυματικής προέλευσής του έχει κβαντισμένες συχνότητες, ω, όταν περιορίζεται σε πεπερασμένο χώρο. Η κβαντομηχανική με το να του προσδώσει και σωματιδιακό χαρακτήρα λέει ότι η ενέργεια ενός κύματος συχνότητας ω ισούται με **ακέραιες φορές** το $\hbar\omega$. Άρα η ενέργεια του κύματος είναι το άθροισμα των ενεργειών των αντίστοιχων σωματίων-κβάντων του, ενώ κλασικά η ενέργεια ήταν ανεξάρτητη της συχνότητας και συνεχής (βλέπε σχετικά το Σχ.2.6)

ενεργειακά κβαντωμένο σύστημα, μέσω κάποιας διαταραχής ενέργεια, $\varepsilon_{\varepsilon\xi}$, το σύστημα θα δοκιμάσει να την απορροφήσει. Εάν η ενέργεια είναι μικρότερη του $\delta\varepsilon$, μη επαρκής δηλαδή για να το διεγείρει στην επόμενη κατάσταση, το σύστημα θα αποβάλλει την ενέργεια **σχεδόν** ακαριαία και θα επιστρέψει στη θεμελιώδη του κατάσταση. Αν ο Κόσμος ήταν κλασικός, οπότε το $\hbar$ και το $\delta\varepsilon$ θα ήταν μηδέν, το ενεργειακό φάσμα θα ήταν συνεχές και επομένως οποιουδήποτε μεγέθους διαταραχή θα απορροφιόταν από το σύστημα και θα το άλλαζε. Άρα τα διάφορα στοιχεία του Περιοδικού Πίνακα θα άλλαζαν συνεχώς λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον που ποτέ δεν μένει το ίδιο. Σε ένα κλασικό Κόσμο δεν θα υπήρχαν στοιχεία με δεδομένες ιδιότητες, επομένως ούτε Χημεία, ούτε Βιοχημεία, ούτε βιολογικοί οργανισμοί. Είναι ακριβώς λόγω της κβάντωσης που τα σύνθετα αυτά σωμάτια συμπεριφέρονται ως στοιχειώδη μέχρι κάποιου ενεργειακού ορίου.. Εντούτοις πέραν του ορίου αυτού υπάρχουν δυνατότητες συγκεκριμένων αλλαγών. Μια θαυμαστή πράγματι ισορροπία μεταξύ σταθερότητας και δυνατότητας αλλαγής.

- Το στοιχειώδες ποσό, $k_B T$, της θερμικής ενέργειας δεν είναι σε θέση να διεγείρει βαθμούς ελευθερίας εάν η ενεργειακή διαφορά $\delta\varepsilon$ μεταξύ της πρώτης διεγερμένης κατάστασης και της θεμελιώδους είναι αρκετά μεγαλύτερη από το $k_B T$. Επομένως είναι σύνηθες κάποιοι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος να μείνουν παγωμένοι στη θεμελιώδη στάθμη και κατά συνέπεια να είναι απόντες από τις θερμοδυναμικές ποσότητες (όπως, π.χ. στη φασματική κατανομή της ακτινοβολίας μέλανος σώματος[22] ή στη θερμική διέγερση ταλαντωτικών ιοντικών βαθμών ελευθερίας σε μόρια ή στερεά). Με άλλα λόγια όλοι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος για τους οποίους ισχύει $\delta\varepsilon \gg k_B T$ είναι σαν να μην υπάρχουν όσον αφορά στη θερμική συμπεριφορά (παραμένουν «παγωμένοι» στη θεμελιώδη κατάσταση ελάχιστης ενέργειας).

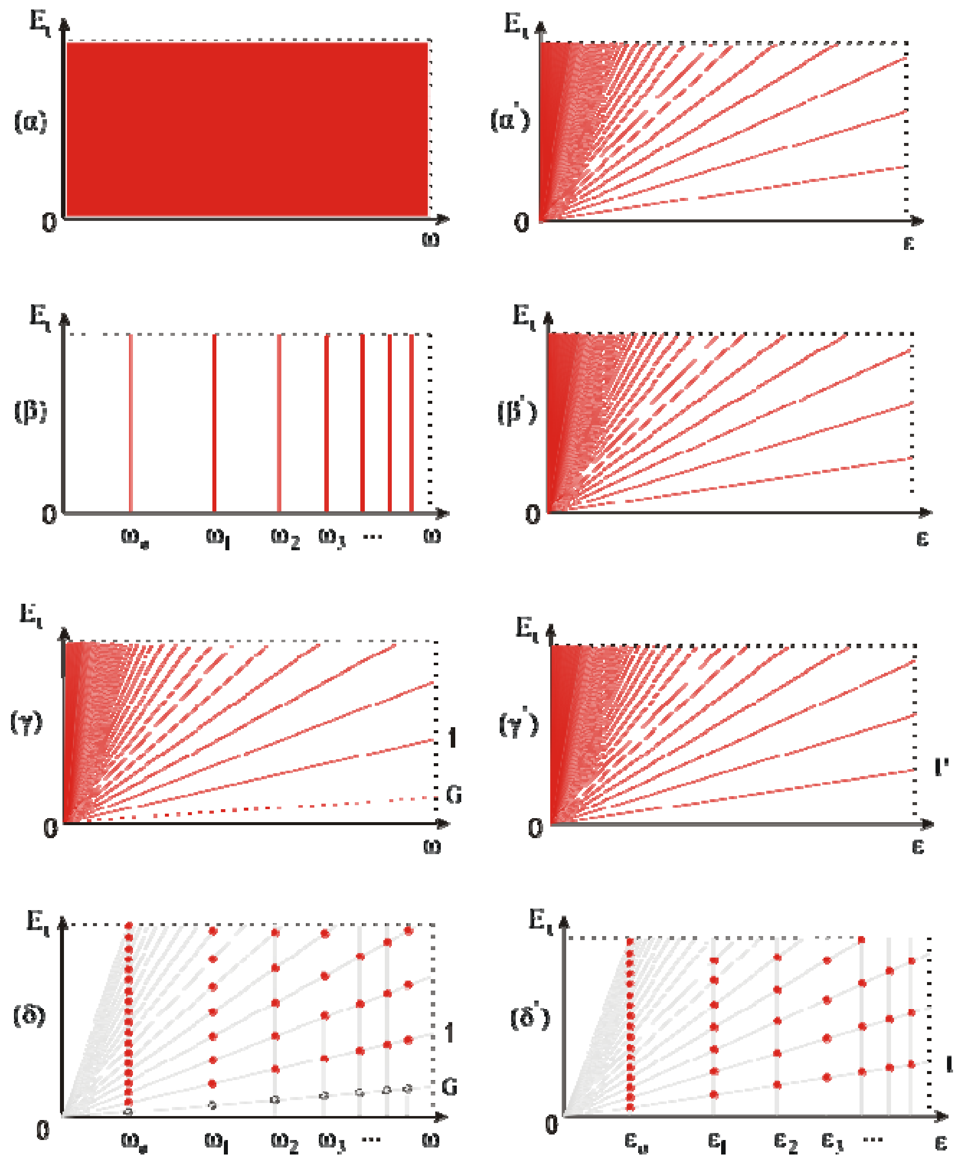
Επί τη ευκαιρία θυμίζουμε στον αναγνώστη ότι υπάρχει και μια άλλη φυσική αιτία που μπορεί να καταστήσει βαθμούς ελευθερίας οιονεί απόντες από τις θερμοδυναμικές και άλλες μακροσκοπικές ποσότητες. Και αυτή είναι η απαγορευτική αρχή του Pauli για φερμιόνια, όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος εξηγεί αμέσως το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Για να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο από τα δεσμά του στερεού, όπου είναι έγκλειστο, θα πρέπει η ενέργεια του φωτονίου $\hbar\omega$ να είναι μεγαλύτερη από το έργο εξόδου W. Προφανώς η διαφορά $\hbar\omega - W$ (εφόσον είναι θετική) θα εμφανιστεί ως κινητική ενέργεια του εκτός στερεού ηλεκτρονίου: $\frac{1}{2} m_e \upsilon^2 = \hbar\omega - W$. Σημειώστε ότι μπορεί να υπάρξει έξοδος του

---

[22] Στην ακτινοβολία αυτή συμμετέχουν ουσιαστικά μόνο τα φωτόνια που έχουν ενέργεια $\hbar\omega$ μέχρι κάποιου ορίου της τάξεως του $k_B T$. Άρα χρησιμοποιώντας το κλασικό αποτέλεσμα $A\omega^2 k_B T d\omega$ για την ένταση της ακτινοβολίας στην φασματική περιοχή από το ω έως το $\omega + d\omega$, έχουμε για την ολική ακτινοβολία I, όπου $I = \int_0^{\omega_{\max}} A\,\omega^2 k_B T\, d\omega \approx A\, k_B T \int_0^{a k_B T} \omega^2 d\omega \propto T^4$, που είναι και το πειραματικό αποτέλεσμα για την εξάρτηση από τη θερμοκρασία της ολικής ακτινοβολίας (βλέπε σχετικά και το Κεφ.5).

ηλεκτρονίου ακόμη και για $\hbar\omega < W$, αρκεί να υπάρχει μια πολύ μεγάλη ροή φωτονίων. Πράγματι, αν κατά τον ελάχιστο χρόνο που το ηλεκτρόνιο δοκιμάζει να δει αν του αρκεί η ενέργεια $\hbar\omega$ για να ξεφύγει από το στερεό, έλθει ένα δεύτερο φωτόνιο, τότε (και εάν $2\hbar\omega > W$) θα έχουμε απελευθέρωση του ηλεκτρονίου και $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = 2\hbar\omega - W$ (θα έχουμε δηλαδή, μια διφωτονική διέγερση, που παρατηρείται σε ΗΜ κύματα ισχυρών λέιζερ).



Σχ.2.6 *(α)-(δ): Στο επίπεδο με άξονες τη κυκλική συχνότητα ω και την ολική ενέργεια E_t σημειώνονται οι επιτρεπτές τιμές ενός: (α) Απεριόριστου κλασικού κύματος, όπου όλα τα σημεία του επιπέδου επιτρέπονται. (β) Κλασικού κύματος περιορισμένου σ' ένα πεπερασμένο χώρο, όπου μόνο τα σημεία που κείνται πάνω στις κάθετες στον άξονα των συχνοτήτων ευθείες επιτρέπονται (κβάντωση συχνότητας). (γ) Απεριόριστου συστήματος κυματοσωματίων, όπου μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες $E_t = n\hbar\omega$, $n = 1,2,3,...$ επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (δ) Συστήματος κυματοσωματίων περιορισμένων σ' ένα πεπερασμένο χώρο, όπου μόνο τα σημεία-κουκίδες επιτρέπονται (κβάντωση συχνότητας και*

ολικής ενέργειας). (α')-(δ'): Στο επίπεδο με άξονες την ενέργεια ενός σωματίου ε και την ολική ενέργεια E_t σημειώνονται οι επιτρεπτές τιμές ενός συστήματος: (α') Από απεριόριστα μη αλληλεπιδρώντα κλασικά σωμάτια καθένα με την ίδια ενέργεια, ε, όπου μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες $E_t = n\varepsilon,\ n = 1,2,3,...$ επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (β') Όπως στην (α') αλλά περιορισμένα σ' ένα πεπερασμένο χώρο: Μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες $E_t = n\varepsilon,\ n = 1,2,3,...$ επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (γ') Από απεριόριστα μη αλληλεπιδρώντα κυματοσωμάτια καθένα με την ίδια ενέργεια, όπου μόνο τα σημεία πάνω στις ευθείες $E_t = n\varepsilon,\ n = 1,2,3,...$ επιτρέπονται (κβάντωση ολικής ενέργειας). (δ') Όπως στην (γ') αλλά περιορισμένα σ' ένα πεπερασμένο χώρο: Μόνο τα σημεία-κουκίδες επιτρέπονται (κβάντωση ενέργειας ε ενός σωματίου και ολικής ενέργειας). Από όλες τις περιπτώσεις μόνο αυτές (οι γ, γ΄, δ, δ΄,) που αναφέρονται σε κυματοσωμάτια αντιστοιχούν στην πραγματικότητα. Παρατηρήστε όμως ότι, όταν το ω ή το ε τείνουν στο μηδέν, τα κλασικά και τα κβαντικά αποτελέσματα τείνουν να συμπέσουν.

Ειδική βιβλιογραφία

Για το ρόλο της αρχής της απροσδιοριστίας και των άλλων δύο βασικών αρχών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εξαίρετη ομιλία του Στ. Τραχανά με τίτλο, *Η αρχή της αβεβαιότητας: Η θεμελιώδης αρχή του Σύμπαντος,* που βρίσκεται στο site cup.gr (επιλογή: ομιλίες)
Για την ορθή φυσική ερμηνεία της αρχής 'αβεβαιότητας' χρόνου-ενέργειας βλέπε σελ. 191-196 του βιβλίου του Στ. Τραχανά, *Κβαντομηχανική Ι*, ΠΕΚ 2005 (Ηράκλειο).

Επίλεκτα προβλήματα

1. **Ιστορική σημείωση:** Το μοντέλο του Bohr για τις ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου, αν και θεωρήθηκε εξαιρετικά ενδιαφέρον, έγινε πλήρως αποδεκτό μόνο όταν προέβλεψε επίσης ότι οι ηλεκτρονιακές στάθμες στο *ιόν* του ηλίου 4 θα διαφέρουν από αυτές στο υδρογόνο κατά ένα παράγοντα 4, πράγμα που ήταν σε συμφωνία με τα τότε πειραματικά δεδομένα. Όμως, λίγο αργότερα, ακριβέστερα πειράματα έδειξαν ότι ο περί ου ο λόγος δεν είναι 4, αλλά 4,0016, πράγμα που φάνηκε ότι αμφισβητεί το μοντέλο Bohr. O Bohr τότε επανήλθε, δείχνοντας ότι η ακριβής τιμή (μέχρι το πέμπτο δεκαδικό ψηφείο) αυτού του λόγου είναι 4,00163.
Δείξτε ότι ο Bohr είχε δίκιο .

2. Αποδείξτε τις σχέσεις (2.11) και (2.12).

3. Δείξτε ότι η θερμική ενέργεια U_T η οφειλόμενη στη διέγερση ηχητικών κυμάτων (λόγω ιοντικών ταλαντώσεων) είναι όμοια με αυτήν της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες με τη διαφορά ότι η ταχύτητα του ήχου είναι πολύ πιο μικρή από την ταχύτητα του φωτός). Άρα $U_T \sim T^4$ και επομένως η αντίστοιχη θερμοχωρητικότητα θα είναι $C \sim T^3$.

4. Για ένα μονοδιάστατο ελκτικό δυναμικό , $V(x) \propto \pm|x|^{\beta}$
Η ιδιοενέργεια της n^{στης} στάθμης είναι της μορφής

$$E(n) \propto n^a \tag{2.17}$$

όπου

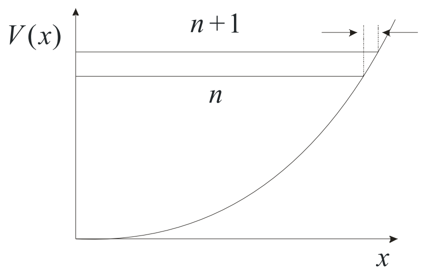
$$a = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}} \tag{2.17΄}$$

Έτσι

$\beta \to \infty$	$a = 2$	(απειρόβαθμο πηγάδι)
$\beta = 2$	$a = 1$	(αρμονικός ταλαντωτής)
$\beta = -1$	$a = -2$	(δυναμικό Coulomb)

Μπορείτε να αποδείξετε τη σχέση (2.17) χρησιμοποιώντας την αρχή της αντιστοιχίας και τις αρχές Heisenberg και Schrödinger;

Υπόδειξη: $V(x) \propto x^{\beta}$, $E(n) \propto n^a$



Αλλά

$$\frac{dE}{dn}\delta n \propto \frac{\partial V}{\partial x}\lambda \tag{1}$$

$$\lambda \propto \frac{1}{E^{1/2}} \tag{2}$$

Εναλλακτικά: Προσέγγιση WKB

5. Θεωρήστε ένα σωμάτιο μάζας *m* εγκλωβισμενο σ' ένα ελλειψοειδές με κύριους ημιάξονες *a, b, c*. Ποια είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια αυτού του σωματίου; Πώς συγκρίνεται με την ειδική περίπτωση μιας σφαίρας ίσου όγκου με το ελλειψοειδές;

6. Αποδείξτε το νόμο των Snell-Descartes για τη διάθλαση από την αρχή του ελάχιστου χρόνου διαδρομής μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται σε δύο διαφορετικά μέσα που τα διαχωρίζει μια επίπεδη επιφάνεια.

7. Για το μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή του Σχ.2.5α δείξτε ότι η μέση δυναμική ενέργεια ισούται με $\frac{1}{2}\kappa\,\Delta x^2$ και η μέση κινητική ενέργεια ισούται με $\hbar^2/8m\Delta x^2$. Δείξτε στη συνέχεια ότι η ολική ενέργεια ελαχιστοποιείται όταν $\Delta x^2 = \hbar/2\sqrt{\kappa m}$, οπότε η ελάχιστη τιμή της ολικής ενέργειας γίνεται $\frac{1}{2}\hbar\omega$, όπου $\omega = \sqrt{\kappa/m}$.

8. Θεωρήστε ένα μη σχετικιστικό κυματοσωμάτιο μάζας *m* κινούμενο σε ένα χώρο ν διαστάσεων υπό την επήρεια ενός 'πηγαδιού' δυναμικού της μορφής

$$\begin{aligned} V(r) &= -V, \quad r \le a \\ &= 0, \quad r > a \end{aligned}$$

Προσδιορίστε την κατάσταση και την τιμή της ελάχιστης ενέργειας.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι λόγω της ύπαρξης του ως άνω ελκτικού δυναμικού το κυματοσωμάτιο εντοπίζεται σε μια περιοχή του χώρου ακτίνας R. Υπάρχουν δύο ακραίες περιπτώσεις. (α) $R \gg a$ (β) $R \approx a$. Δεν συμφέρει ενεργειακά να γίνει το R μικρότερο του a γιατί τότε θα αυξηθεί η κινητική ενέργεια χωρίς να μειωθεί η δυναμική. Στην περίπτωση (α) η ολική ενέργεια θα έχει τη μορφή

$$E = E_{\Delta} + E_K = -\gamma V (a/R)^{\nu} + \beta \hbar^2 / m R^2$$

όπου γ και β αριθμητικοί συντελεστές. Διερευνήστε τη λύση που θα βρείτε σε σχέση με τις παραμέτρους ν (ν=1,2,3,4,…) και V/ε_o όπου $\varepsilon_o \equiv \hbar^2 / m a^2$.

9. Θεωρήστε ένα ουδέτερο άτομο με ατομικό αριθμό $Z \gg 1$. Εκτιμήστε την εξάρτηση από το Z της *μέσης* απόστασης a ενός ηλεκτρονίου από τον πυρήνα καθώς και αυτήν της συνολικής ενέργειας E του ατόμου (κβαντικής κινητικής ενέργειας όλων των ηλεκτρονίων και συνολικής ενέργειας Coulomb). Η εμπειρική τιμή του a σε ατομικές μοναδες είναι $a \approx 0,424\, Z^{-1/3}$ και του E είναι $E \approx -0,589\, Z^{7/3} \approx -16\, Z^{7/3}$ eV

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ (ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ) ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο ανώτατο βάθρο των φυσικών εννοιών και νόμων διεκδικεί ασφαλώς μια θέση και η ακόλουθη βασική αρχή.

Οι ευσταθείς δομές της ύλης αντιστοιχούν στο ελάχιστο της ολικής ενέργειας (3.0)

Η παραπάνω αρχή πηγάζει από το συνδυασμό του 1^{ου} και του 2^{ου} νόμου της θερμοδυναμικής και *ισχύει όταν η πίεση και η απόλυτη θερμοκρασία μπορούν να ληφθούν ως μηδέν.* Τη γενίκευση αυτού του νόμου για αυθαίρετη εξωτερική πίεση και θερμοκρασία θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

3.1 Θερμοδυναμική[1]

Οι βασικοί νόμοι της Θερμοδυναμικής και της Στατιστικής Φυσικής (βλ. Παρ. III) ισχύουν ανεξάρτητα από το είδος των αλληλεπιδράσεων ή από το ποια είναι η μορφή της εξίσωσης που καθορίζει την κίνηση των σωματίων. Έχουν επομένως καθολική ισχύ και δικαιούνται να ονομασθούν υπερνόμοι κατ' αναλογία με τους νόμους διατήρησης (βλ. Παρ. II).

Οι νόμοι της Θερμοδυναμικής και της Στατιστικής Φυσικής στην ουσία πηγάζουν από την ατομική δομή της ύλης και αναφέρονται σε συστήματα που αποτελούνται από ένα τεράστιο αριθμό μικροσκοπικών σωματίων συνήθως της τάξης του αριθμού του Avogadro, $N_{\mathrm{A}} \approx 6\times 10^{23}$.

Η λεπτομερής μικροσκοπική περιγραφή τέτοιων συστημάτων (που στην απλούστερη κλασική περίπτωση θα απαιτούσε τη γνώση της θέσης και της ταχύτητας κάθε μικροσκοπικού σωματίου σε κάθε χρονική στιγμή) αποκλείεται εκ των προτέρων[2].

Περιοριζόμαστε λοιπόν αναγκαστικά σε μια μακροσκοπική περιγραφή του συστήματος που καθορίζεται από ένα μικρό αριθμό ανεξάρτητων μακροσκοπικών μεταβλητών, όπως είναι, π.χ., ο αριθμός των μικροσκοπικών σωματίων, N, του συστήματος, ο όγκος του, V, η ολική του ενέργεια, U, κλπ[3]. Είναι προφανές ότι

---

[1] Για μια σύντομη εισαγωγή στο θέμα βλέπε το βιβλίο *Η Φυσική Σήμερα*, Τόμος Ι, σελ. 85-119.

[2] Μόνο η καταγραφή των δεδομένων μια ορισμένη χρονική στιγμή θα ξεπερνούσε κατά πολύ τη χωρητικότητα όλων των συστημάτων αποθήκευσης της Υφηλίου.

[3] Το U είναι η ονομαζόμενη εσωτερική ενέργεια που ορίζεται ως η μέση τιμή της ολικής ενέργειας E_t σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου το κέντρο μάζας μένει ακίνητο και η ολική στροφορμή (προκειμένου για μακροσκοπικό σύστημα) είναι μηδέν. Σημειώστε ότι η τιμή του U ή του E_t καθορίζεται πλήρως μόνο αφού επιλέξουμε μια κατάσταση αναφοράς την ενέργεια της οποίας θα ορίσουμε ως μηδέν. Συνήθως η κατάσταση αναφοράς είναι αυτή όπου το καθένα από τα σωμάτια του συστήματος είναι στη βασική του στάθμη και σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Σχεδόν πάντοτε το U ή το E_t έχει τρεις συνεισφορές: Την ενέργεια ηρεμίας των σωματίων του συστήματος $E_o = \sum_i m_{oi}c^2$, την κινητική τους ενέργεια E_K και τη δυναμική

σε κάθε μακροκατάσταση του συστήματος (που χαρακτηρίζεται, π.χ., από τις τιμές των $N, U, V, \ldots$[4]) αντιστοιχεί ένας αφάνταστα μεγάλος (της τάξεως του e^{aN}, όπου a είναι της τάξεως της μονάδας[5]) αριθμός μικροκαταστάσεων που τον συμβολίζουμε με $\Gamma(U, V, N, \ldots)$. (Θυμίζουμε ότι για τον προσδιορισμό κάθε κλασικής μικροκατάστασης χρειάζεται να ξέρουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες όλων των μικροσκοπικών σωματίων του συστήματος).
Ορίζουμε την **Εντροπία** του συστήματος από τη σχέση:

$$\boxed{S = k_B \ln \Gamma(U, V, N, \ldots)} \tag{3.1}$$

όπου k_B είναι η σταθερά του Boltzmann, $k_B = 1{,}38065 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ και $N_A k_B = R = 8{,}3144\,\mathrm{J/K}$, όπου N_A είναι ο αριθμός του Avogrado και R η σταθερά των ιδανικών αερίων.
Όσο μεγαλύτερο είναι το Γ -και επομένως και η Εντροπία- τόσο μεγαλύτερη είναι η άγνοιά μας για το σε ποια μικροκατάστασή του βρίσκεται το σύστημά μας. Άρα η Εντροπία είναι ένα μέτρο της έλλειψης λεπτομερούς πληροφορίας. Μείωση της Εντροπίας σημαίνει αύξηση της πληροφορίας.
Ας σημειωθεί ότι στη συνήθη περίπτωση, που το υπό εξέταση σύστημα είναι σε κατάσταση *θερμοδυναμικής ισορροπίας* και οι αλληλεπιδράσεις είναι *βραχείας εμβέλειας* σχετικά με το μέγεθός του, οι ποσότητες U, V, S είναι ανάλογες του *N*. Αυτό σημαίνει ότι αν το *N* ν-πλασιαστεί τα U, V, S επίσης θα ν-πλασιαστούν. Ποσότητες που έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται **εκτατικές**. Άλλες εκτατικές ποσότητες είναι οι G, A, C_P, C_V, F, Ω που θα ορίσουμε παρακάτω. Ποσότητες που παραμένουν αναλλοίωτες όταν οι εκτατικές ποσότητες ν-πλασιαστούν, όπως π.χ. η πίεση, η θερμοκρασία, ή ο λόγος δύο εκτατικών, ονομάζονται **εντατικές**. Αξίζει να τονισθεί ότι η συνήθης ύλη σε ισορροπία, που η δομή της καθορίζεται από Η/Μ αλληλεπιδράσεις, ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη βραχείας εμβέλειας, καίτοι οι Η/Μ αλληλεπιδράσεις είναι μακράς εμβέλειας. Ο λόγος είναι ότι η ισορροπία συνεπάγεται ολική και τοπική ηλεκτρική ουδετερότητα. Η δε τελευταία μετατρέπει την μακράς εμβέλειας Η/Μ αλληλεπίδραση σε βραχείας εμβέλειας (βλ. π.χ. τη σχέση (10.1)). Αυτή η πολύ χρήσιμη (βλ. σελ. 49 και πρόβλημα 3.7) διάκριση των θερμοδυναμικών ποσοτήτων ισορροπίας σε εκτατικές και εντατικές παραβιάζεται, όταν οι πάντοτε μακράς εμβέλειας βαρυτικές αλληλεπιδράσεις καθίστανται σημαντικές, όπως π.χ. σε ένα άστρο,

---

ενέργεια E_Δ που οφείλεται σε αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον ή/και μεταξύ των σωματίων του συστήματος. Όταν δεν αναμένουμε αλλαγή στην ενέργεια ηρεμίας την αγνοούμε ενσωματώνοντάς την στην κατάσταση αναφοράς.

[4] Ένα απλό σύστημα όπως ένα τέλειο αέριο, όταν είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία, περιγράφεται μακροσκοπικά από τρεις μόνο ανεξάρτητες φυσικές μεταβλητές που μπορεί να είναι οι N, U, V. Για ένα αέριο φωτονίων οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι μόνο δύο γιατί το *N* δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή. Άλλα πιο περίπλοκα φυσικά συστήματα μπορεί να χρειάζονται περισσότερες από τρείς ανεξάρτητες φυσικές μεταβλητές για τη μακροσκοπική περιγραφή τους. Σημειώστε τέλος ότι ένα σύστημα σε μη θερμοδυναμική ισορροπία χρειάζεται περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές από όσες όταν είναι σε ισορροπία.

[5] Το a εξαρτάται από την απόλυτη θερμοκρασία T, το πηλίκο V/N και ενδεχομένως και άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές. Όταν το $T \to 0\,\mathrm{K}$ (στο απόλυτο μηδέν), το $a \to 0$, το $\Gamma(U, V, N, \ldots) \to 1$ και η εντροπία τείνει στο μηδέν. Η σχέση $S \to 0$ για $T \to 0\,\mathrm{K}$ αναφέρεται ως ο **Τρίτος Νόμος** της Θερμοδυναμικής.

όπου η βαρυτική ενέργεια U_B είναι ανάλογη του $N^{5/3}$ (και όχι του N, βλ. σελ. 178).

Ο **πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής** είναι στην ουσία μια επαναδιατύπωση του νόμου της διατήρησης της ενέργειας και λέει ότι η διαφορά της απορροφουμένης από το σύστημα ενέργειας μείον την αποδιδόμενη στο περιβάλλον ισούται με την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος. Το λεπτό σημείο που πρέπει να προσέξει κανείς είναι ότι η μεταφερόμενη ή η μετατρεπόμενη ενέργεια (όχι η αποθηκευμένη στο σύστημα) διακρίνεται σε θερμότητα και έργο. Θερμότητα είναι η ενέργεια που μεταφέρεται από μικροσκοπικά σωμάτια του συστήματος σε μικροσκοπικά σωμάτια του περιβάλλοντος (ή αντίστροφα) και επομένως η τιμή της δεν μπορεί να προσδιορισθεί ακριβώς. Κατά συνέπεια η γνώση μας γι' αυτήν είναι στατιστικής φύσεως (γνωρίζουμε, π.χ., τη μέση της τιμή, την τυπική της απόκλιση, κλπ). Αντίθετα, όσον αφορά στο έργο, είτε το σύστημα, είτε το περιβάλλον, είτε και τα δύο, δεν κάνουν χρήση της ατομικής τους δομής και επομένως δεν υπεισέρχεται η ανάγκη στατιστικής περιγραφής. Η μαθηματική περιγραφή του πρώτου νόμου είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{dU = đQ - đW + đE_m} \tag{3.2}$$

όπου dU είναι η (απειροστή) μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας (δηλ., της ολικής ενέργειας του συστήματος απουσία *μακροσκοπικών* κινήσεων), $đQ$ είναι η (απειροστή) ποσότητα θερμότητας που δέχτηκε το σύστημα, $đW$ είναι η (απειροστή) ποσότητα έργου που έδωσε το σύστημα και $đE_m$ είναι η (απειροστή) ποσότητα ενέργειας που δέχτηκε το σύστημα λόγω ανταλλαγής ύλης με το περιβάλλον[6]. Η παύλα στα σύμβολα του απειροστού είναι για να τονίσει ότι, π.χ., το $đQ$ δεν είναι η μεταβολή κάποιας συνάρτησης Q. (Τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει). Με άλλα λόγια είναι λάθος να πούμε ότι ένα σύστημα έχει τόση θερμότητα και τόσο έργο. (Σε μια μαθηματική γλώσσα τα $đQ$, $đW$, $đE_m$ δεν είναι τέλεια διαφορετικά αλλά διαφορικές μορφές, ενώ το dU είναι τέλειο διαφορικό).

Ο **δεύτερος νόμος της Θερμοδυναμικής**[7] αφορά τις μεταβολές της Εντροπίας και έχει πολλές ισοδύναμες διατυπώσεις. Ίσως η πιο αποκαλυπτική διατύπωση είναι η ακόλουθη: Η μεταβολή της εντροπίας, dS ενός συστήματος (που δεν ανταλλάσει ύλη με το περιβάλλον του) οφείλεται σε δύο λόγους: (α) στην πρόσληψη ή αποβολή θερμότητας και (β) σε εσωτερικές διαδικασίες:

$$dS = đS_{\varepsilon\xi} + đS_{\varepsilon\sigma} \tag{3.3α}$$

όπου το $đS_{\varepsilon\xi}$ ισούται με την απειροστή πρόσληψη θερμότητας δια της απόλυτης θερμοκρασίας του συστήματος.

$$đS_{\varepsilon\xi} = \frac{đQ}{T} \tag{3.3β}$$

[6] Συνήθως θεωρούμε σιωπηλά ότι δεν υπάρχει ανταλλαγή ύλης,, οπότε θέτουμε $đE_m = 0$.

[7] Ένας από τους σπουδαιότερους της Φυσικής

Το $đ S_{εξ}$ είναι είτε > 0 (όταν $đ Q > 0$, πρόσληψη θερμότητας), είτε < 0 (όταν $đ Q < 0$, αποβολή θερμότητας). Αντίθετα (πράγμα που είναι η καρδιά του δεύτερου νόμου) το $đ S_{εσ}$ **δεν είναι ποτέ αρνητικό**:

$$\boxed{đ S_{εσ} \geq 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T\, dS \geq đQ} \qquad \boxed{(3.3γ)}$$

Η σχέση (3.3γ) λέει ότι κάποιες διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του συστήματος (όπως π.χ., η διάχυση, ή η μεταφορά θερμότητας) παράγουν εντροπία εκ του μηδενός (και μόνο σε ακραίες οριακές περιπτώσεις δεν παράγουν εντροπία). Άρα οι διαδικασίες αυτές είναι μη αντιστρεπτές γιατί, αν μπορούσαν να αντιστραφούν αυθόρμητα, θα είχαμε $đ S_{εσ} < 0$. Με βάση τα παραπάνω μια άλλη ισοδύναμη διατύπωση του Δεύτερου Νόμου είναι η ακόλουθη:

> Σ' ένα σύστημα που δεν ανταλλάσει θερμότητα (και ύλη) με το περιβάλλον του (για το οποίο, δηλαδή ισχύει $đ S_{εξ} = đ Q = 0$ και επομένως, $d\,S = d\,S_{εσ}$) η εντροπία του ουδέποτε μειώνεται, πάντοτε αυξάνει (ή, σε ακραία οριακή περίπτωση, μένει σταθερή) μέχρι να φτάσει σε ολική θερμοδυναμική ισορροπία οπότε η εντροπία έχει τη μέγιστη τιμή. Επομένως υπό συνθήκες $đ Q = 0$ και $đ E_m = 0$, η κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχεί στο μέγιστο της εντροπίας.

Συνδυάζοντας τον 1^o και τον 2^o νόμο:

Εάν συνδυάσουμε τις σχέσεις (3.2) έως (3.3γ) έχουμε ότι:

$$\boxed{dU \leq TdS - đW + đE_m} \tag{3.4}$$

Από την (3.4) έπεται ότι υπό συνθήκες $TdS = 0$, $đW = 0$ και $đE_m = 0$, η απειροστή ποσότητα dU είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση με το μηδέν, $dU \leq 0$, δηλαδή, υπ' αυτές τις συνθήκες η ενέργεια του συστήματος μειώνεται με την πάροδο του χρόνου (ή σε ακραία περίπτωση μένει σταθερή) μέχρι να φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία οπότε η ενέργεια έχει την ελάχιστη τιμή. Άρα:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας} \\ \text{αντιστοιχεί σε ευσταθή ισορροπία υπό} \\ \text{συνθήκες } TdS = 0,\ đW = 0,\ đE_m = 0\end{array}} \tag{3.5}$$

Φτάσαμε λοιπόν στην ακριβή διατύπωση του σπουδαίου νόμου που συνδέει την ευσταθή κατάσταση της ύλης με το ελάχιστο της ενέργειας (εάν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες). Ως εφαρμογή της (3.5) έχουμε ότι $(\partial U / \partial V) = 0$ στην ισορροπία. Αφού $U = E_K + E_\Delta$ έπεται ότι $(\partial E_K / \partial V) = -(\partial E_\Delta / \partial V)$. Το αριστερό σκέλος της τελευταίας σχέσης παριστά τη διασταλτική πίεση λόγω κινητικής ενέργειας και το δεξί, χωρίς το μείον, παριστά τη συνθλιπτική πίεση λόγω της δυναμικής ενέργειας. Άρα το σύστημα ισορροπεί μηχανικά όταν οι δύο πιέσεις γίνουν ίσες σε απόλυτη τιμή.

Αξίζει να επισημάνουμε ότι συμβαίνει αρκετά συχνά να παραμένει ένα σύστημα για πάρα πολύ μεγάλο (πρακτικά άπειρο) χρόνο σε κατάσταση που δεν είναι κατάσταση ελάχιστης ενέργειας (παρόλο που ισχύουν οι συνθήκες $TdS = đW = đE_m = 0$). Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι δεν έχει το σύστημα μηχανισμό αποβολής της περίσσειας ενέργειας (όπως π.χ., στην εξιδανικευμένη κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο), ή στο ότι το σύστημα βρίσκεται σ' ένα τοπικό ελάχιστο της ενέργειας, τέτοιο ώστε για να μεταπέσει στο απόλυτο ελάχιστο να είναι αναγκασμένο να περάσει από καταστάσεις υψηλότερης ενέργειας (περίπτωση μετασταθούς ισορροπίας). Αξίζει να επισημάνουμε ότι για να έχει αξία ο νόμος (3.5) θα πρέπει να υπάρχει ένα πεπερασμένο ελάχιστο της ενέργειας. Όπως είδαμε, την ύπαρξη πεπερασμένου ελάχιστου της ενέργειας εξασφαλίζουν οι βασικές αρχές της κβαντομηχανικής.

Εάν δεχτούμε ότι $đW = PdV$, τότε, ορίζοντας τη λεγόμενη **ελεύθερη ενέργεια του Gibbs**, G, (και την **ενθαλπία** $H \equiv U + PV$)

$$\boxed{G \equiv U + PV - TS \equiv H - TS} \tag{3.6}$$

μπορούμε να δείξουμε συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.2) έως (3.3γ) ότι

$$dG \leq -SdT + VdP + đE_m \tag{3.7}$$

Επομένως υπό συνθήκες **σταθερής θερμοκρασίας και πίεσης** ($dT = dP$=0) και μη ανταλλαγής ύλης ($đE_m$=0), η ελεύθερη ενέργεια του Gibbs με την πάροδο του χρόνου μειώνεται (ή στην ακραία περίπτωση μένει σταθερή) μέχρι να φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία οπότε η G παίρνει την ελάχιστη τιμή. Άρα υπό συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας και πίεσης (και για dE_m=0), **η ευσταθής ισορροπία αντιστοιχεί στο ελάχιστο της** G.	(3.8)

Στην πιο γενική περίπτωση όπου το σύστημα βρίσκεται σε ένα περιβάλλον θερμοκρασίας T_o και πίεσης P_o χωρίς το ίδιο να έχει ενιαία θερμοκρασία και πίεση η έννοια της ελεύθερης ενέργειας του Gibbs ανάγεται στη γενικότερη έννοια της ονομαζόμενης **διαθεσιμότητας** A που ορίζεται ως εξής:

$$A \equiv U + P_o V - T_o S \tag{3.9}$$

Η διαθεσιμότητα A μειώνεται μονότονα με την πάροδο του χρόνου (υπό συνθήκες $dE_m = 0$) καθώς πλησιάζει το σύστημα προς τη θερμοδυναμική ισορροπία και γίνεται ελάχιστη όταν επιτευχθεί αυτή η ισορροπία[8].

Η μεγάλη αξία του G ή του A σχετίζεται με το ότι οι συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας και πίεσης και μη ανταλλαγής ύλης είναι πολύ κοινές στα φυσικά φαινόμενα και εύκολα πραγματοποιήσιμες πειραματικά.

---

[8] Για την απόδειξη αυτής της δήλωσης λάμβάνουμε υπόψη την (3.4) για το περιβάλλον, $dU_o = T_o dS_o - P_o dV_o$ (για $dE_{mo} = 0$ και $dS_{\varepsilon\sigma,o} = 0$), το ότι σύστημα και περιβάλλον μαζί αποτελούν ένα κλειστό υπερσύστημα για το οποίο προφανώς ισχύουν οι σχέσεις $dU_o + dU = 0,\ dV_o + dV = 0,$ και $dS_o + dS \geq 0$. Καταλήγουμε έτσι στην

$$d\,A \equiv d\,(U + P_o V - T_o S) \leq 0 \tag{3.10}$$

Όταν το σύστημα φτάσει στη θερμοδυναμική ισορροπία η ενέργειά του θα είναι προφανώς μια συνάρτηση των μεγεθών V, S, $U = U(V, S)$. Αναπτύσσοντας αυτή τη συνάρτηση σε σειρά Taylor μέχρι και δεύτερου βαθμού όρους και λαμβάνοντας υπόψη ότι η A στην ισορροπία είναι ελάχιστη βρίσκουμε ότι $P = P_{o,}\ T = T_o$ και

$$C_V > 0, \quad C_P > C_V, \quad (\partial P / \partial V)_T < 0 \tag{3.11}$$

όπου C_V, C_P είναι οι θερμοχωρητικότητες υπό σταθερό όγκο και υπό σταθερή πίεση αντιστοίχως.

Σημειώστε ότι ο ενθαλπικός όρος $H \equiv U + PV$ ελαχιστοποιείται όταν τα στοιχειώδη σωμάτια του συστήματος τοποθετηθούν σε καθορισμένες θέσεις, ενώ αντίθετα, ο εντροπικός όρος TS, μεγιστοποιείται όταν τα στοιχειώδη σωμάτια είναι ελεύθερα να κινηθούν σ' όλο το διαθέσιμο χώρο ώστε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των διαθέσιμων μικροκαταστάσεων. Στο G εισέρχεται όμως και ο ενθαλπικός όρος H, και ο εντροπικός όρος TS (με μείον). Για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες ο ρόλος του εντροπικού όρου είναι προφανώς ασήμαντος και επομένως κυριαρχεί το H που εντέλλεται **τάξη**. Αντίθετα για πολύ υψηλές θερμοκρασίες κυριαρχεί ο εντροπικός όρος που εντέλλεται **αταξία**. Έχοντας υπόψη αυτή την παρατήρηση εξετάστε τις δύο παρακάτω εφαρμογές.

Εφαρμογή 1: Με βάση το νόμο (3.8) και τον ορισμό (3.6) εξηγήστε γιατί μια ουσία με την άνοδο της θερμοκρασίας και υπό σταθερή πίεση περνάει από τη στερεά φάση, στην υγρή φάση (συνήθως αλλά όχι πάντα), και τελικά στην αέρια φάση.

Εφαρμογή 2: Γιατί με την άνοδο της θερμοκρασία μπορεί να καταστραφεί η μαγνήτιση, π.χ. του σιδήρου;

3.2 Σχόλια

3.2.1 Αντλώντας το μέγιστο έργο

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας που βρίσκεται σε ένα περιβάλλον θερμοκρασίας T_o και πίεσης P_o. Το ερώτημα είναι ποιο είναι το μέγιστο έργο που μπορεί κανείς να πάρει από ένα τέτοιο σύστημα εκμεταλλευόμενος το γεγονός ότι είναι εκτός ισορροπίας. Η απάντηση προκύπτει επαναμβάνοντας το σκεπτικό που οδήγησε στη σχέση (3.10) με μόνη τη διαφορά ότι αντί της $d(U_o + U) = 0$ θα έχουμε $d(U_o + U) + đW = 0$, όπου το $đ\,W$ είναι το απειροστό έργο που αντλούμε από το σύστημα. Ως αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής έχουμε αντί της (3.10) την εξής σχέση:

$$d\,A + đW \le 0 \quad \text{ή} \quad đW \le -d\,A \;\Rightarrow\; W \le A_{αρχ} - A \tag{3.12}$$

Το μέγιστο έργο θα προκύψει, όταν η (3.12) γίνει ισότητα, δηλαδή όταν η εντροπία του συστήματος και του περιβάλλοντος μαζί παραμείνει σταθερή κατά τη διάρκεια άντλησης του έργου. Μ' άλλα λόγια το μέγιστο έργο επιτυγχάνεται υπό ισεντροπικές συνθήκες Εάν η θερμοκρασία και η πίεση του περιβάλλοντος συμπίπτουν με τη θερμοκρασία και πίεση του συστήματος, στη θέση της διαθεσιμότητας θα έχουμε την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs, οπότε,

$$W_{\max} = G_{αρχ} - G_{ισορ} \tag{3.13}$$

Οι σχέσεις (3.12) και (3.13) δικαιολογούν και το όνομα διαθεσιμότητα για το A και το όνομα ελεύθερη ενέργεια για το G.

Θερμοδυναμικά δυναμικά

Μέχρι στιγμής έχουμε εισαγάγει 4 διαφορετικές ποσότητες με διαστάσεις ενέργειας. Η πρώτη είναι η εσωτερική ενέργεια που το διαφορικό της είναι

$$dU = T\,dS - P\,dV + đE_m, \qquad đE_m \equiv \mu\,dN \tag{3.14}$$

Η σχέση (3.14) εμπεριέχει ορισμένες παραδοχές.

Πρώτον, είναι ισότητα αντί της γενικής ανισότητας. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει μόνο για φυσικές διαδικασίες που δεν παράγουν εντροπία στο εσωτερικό του συστήματος ή για απειροστές μεταβολές θεωρητικών αποτελεσμάτων που εξήχθησαν για καταστάσεις ισορροπίας. Δεν πρέπει να ξεχνάμε όμως ότι υπάρχουν και άλλες διαδικασίες (όπως είναι η διάχυση, η μεταφορά θερμότητας υπό διαφορά θερμοκρασίας, οι χημικές αντιδράσεις, κλπ) που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του συστήματος και δημιουργούν μεταβολές στην εντροπία έστω και αν οι μεταβλητές *U, V, N* μένουν σταθερές. Επομένως όταν εξετάζουμε μεταβολές θερμοδυναμικών ποσοτήτων θα πρέπει να ξεκαθαρίζουμε αν μιλάμε για μεταβολές του τύπου $đS_{εσ}=0$ ή του τύπου $đS_{εσ}>0$ (με $đQ=đW=đE_m=0$) ή σύνθετου τύπου όπου $đS_{εσ}>0$ και ένα τουλάχιστον εκ των $đ$Q, $đ$W, $đ$E$_m$ να είναι διάφορο του μηδενός. Σ' αυτήν την περίπτωση θα έχουμε για τη μεταβολή της εντροπίας: $dS = đS_{εξ}+đS_{εσ} \geq đQ/T$ όπου το $đS_{εξ}$ δίνεται από τον τύπο (3.3β) και το $đS_{εσ}>0$. Επομένως ο τύπος (3.14) θα γίνει:

$$dU = T\,dS - P\,dV + \mu\,dN - T\,đS_{εσ} \tag{3.14΄}$$

από τον οποίο έπεται η σχέση (3.4), εάν λάβουμε υπόψη ότι $đW= PdV$, $đE_m=\mu dN$ και $đS_{εσ}\geq 0$.

Δεύτερον, το έργο $đW$ θεωρήθηκε ότι περιέχει μόνο τον όρο $P\,dV$, ενώ γενικά μπορεί να περιέχει και άλλους όρους.

Τρίτον, θεωρήθηκε ότι το σύστημα περιέχει μόνο ένα είδος σωματίου, ενώ εν γένει το σύστημα μπορεί να περιέχει περισσότερα είδη σωματίων. Η ποσότητα μ, που ονομάζεται **χημικό δυναμικό,** είναι εξ ορισμού η παράγωγος $(\partial U/\partial N)_{S,V}$ (υπό συνθήκες ισορροπίας), όπως είναι προφανές από την (3.14). Το χημικό δυναμικό είναι μια πολύ σημαντική ποσότητα γιατί έχει ιδιότητες ανάλογες με αυτές της θερμοκρασίας. Όπως η θερμοκρασία στην ισορροπία έχει την ίδια τιμή σε όλη την έκταση του συστήματος, έτσι και το χημικό δυναμικό στην ισορροπία έχει παντού την ίδια τιμή. Επί πλέον σε καταστάσεις μη θερμοδυναμικής ισορροπίας, όπου το χημικό δυναμικό μπορεί να έχει διαφορετικές τιμές σε διαφορετικά μέρη του συστήματος, σωμάτια ρέουν από περιοχές υψηλού μ προς περιοχές χαμηλού μ μέχρι να εξισωθούν οι τιμές του μ. Το μ συνδέεται άμεσα με την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs, $G=N\mu$. Αυτό προκύπτει από το ότι το G όντας εκτατική ποσότητα είναι κατ' ανάγκη της μορφής $G = N\varphi(T,P)$ και από τη σχέση $\mu = (\partial G/\partial N)_{T,P}$, που έπεται από την (3.14) και την (3.7). Εάν υπάρχουν περισσότερα είδη σωματίων η σχέση $G=N\mu$. γενικεύεται σε $G = \sum_i N_i\mu_i$, όπου $\mu_i \equiv (\partial G/\partial N_i)_{T,P}$. Οι τελευταίες αυτές σχέσεις αποτελούν την αφετηρία για τη μελέτη των χημικών αντιδράσεων. Για τα φωτόνια, και όποια άλλα σωμάτια που ο αριθμός τους δεν διατηρείται, το αντίστοιχο μ_i τους είναι ταυτοτικά μηδέν. (Βλ. και το παράρτημα ΙΙΙ). Ο λόγος είναι ότι ο αριθμός N_i τέτοιων σωματίων δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και ως εκ τούτου το αντίστοιχο $\mu_i\,dN_i$ δεν πρέπει να εμφανισθεί στην έκφραση (3.14) για το dU. Τέλος, το όριο του μ για $T \to 0$ συμπίπτει με την ενέργεια Fermi, E_F, αφού $E_F \equiv (\partial U/\partial N)_{V,T=0} = (\partial U/\partial N)_{V,S=0} = \mu_{T=0}$. Από τη σχέση αυτή και την (2.12) προκύπτει ότι $E_F = \frac{5}{3}\varepsilon_K$.

Σημειώστε ότι από την (3.14) έπεται ότι οι φυσιολογικές ανεξάρτητες μεταβλητές για το U είναι οι S, V, και N.. Έπονται επίσης οι ακόλουθες σχέσεις (υπό συνθήκες ισορροπίας πάντα):

$$(\partial U / \partial S)_{V,N} = T, \quad (\partial U / \partial V)_{S,N} = -P, \quad (\partial U / \partial N)_{S,V} = \mu \tag{3.15}$$

Η άλλη ενεργειακή ποσότητα που εισαγάγαμε είναι η ενθαλπία που προέκυψε από την U προσθέτοντας τον όρο PV .Σημειώστε ότι το διαφορικό αυτής της προσθήκης ισούται με $P\,dV + V\,dP.$ Ο πρώτος όρος απαλείφει τον όρο $-P\,dV$ από το διαφορικό dU και μένει ο όρος $VdP.$ Έτσι το διαφορικό της ενθαλπίας είναι (υπό συνθήκες $đS_{εσ} = 0$)

$$dH = TdS + VdP + \mu dN \tag{3.16}$$

με φυσιολογικές ανεξάρτητες μεταβλητές τις $S,\ P,\ N.$ Παρατηρήστε ότι από την (3.14) και την απαίτηση να έχουμε τις $S,\ P,\ N$ ως ανεξάρτητες φυσιολογικές μεταβλητές προκύπτει μονοσήμαντα η μορφή $H = U + PV.$ Με τον ίδιο τρόπο, αν θέλουμε να έχουμε ως ανεξάρτητες μεταβλητές τις $T,\ P,\ N$ θα πρέπει να προσθέσουμε στην H το $-T\,S$ ή στην U το PV (για να πάμε από το V στο P) και το $-T\,S$ (για να πάμε από το S στο T) και έτσι θα βρούμε την $G = U + PV - T\,S.$ Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε το θερμοδυναμικό δυναμικό που έχει ως ανεξάρτητες μεταβλητές τις $T,\ V,\ N$:

$$F = U - T\,S, \quad dF = -SdT - PdV + \mu dN \tag{3.17}$$

Η F ονομάζεται ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz. Αν θέλουμε ως ανεξάρτητες μεταβλητές τις $T,\ V,\ \mu$ θα έχουμε:

$$\Omega = F - N\mu = U - T\,S - N\mu, \quad d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu \tag{3.18}$$

Το Ω ονομάζεται μεγάλο χημικό δυναμικό.

Το κύριο σημείο αυτού του κεφαλαίου

Συνταγή: Για το όποιο υπό μελέτη σύστημα, βρες την ενέργεια U (υπό συνθήκες $P \approx 0,\ T \approx 0,\ đE_m = 0$) ή την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs (υπό συνθήκες P και T σταθερά και $đE_m = 0$) ως συνάρτηση διαφόρων παραμέτρων, όπως είναι ο όγκος, οι θέσεις των ατόμων, η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων, $n(\boldsymbol{r})$ κλπ. Ελαχιστοποίησε την U η′ την G ως προς όλες τις ελεύθερες παραμέτρους. Η κατάσταση που θα προκύψει μετά την ελαχιστοποίηση θα είναι αυτή της ευσταθούς ισορροπίας που θα παρατηρηθεί στη φύση.

Επίλεκτα προβλήματα

1. Αποδείξτε τη σχέση (3.7).
2. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $U = U(V,S)$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο V_o, S_o που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή A_o του $A \equiv$ $\equiv U + P_o V - T_o S$ μέχρι δεύτερο βαθμό ως προς τις ποσότητες $\delta V = V - V_o,\ \delta S = S - S_o.$ Αφού πρόκειται για ανάπτυξη γύρω από το ελάχιστο θα πρέπει οι πρωτοβάθμιοι όροι να μηδενίζονται και το σύνολο των δευτεροβάθμιων όρων να είναι θετικά ορισμένο. Με βάση αυτήν την ανάπτυξη αποδείξτε τις σχέσεις (3.11)
3. Δύο ίδια σώματα, A και B βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες $T_A > T_B$. Οι θερμοχωρητικότητες τους είναι ίδιες και ανεξάρτητες της

θερμοκρασίας. Τα δύο σώματα (με τη βοήθεια ενός τρίτου βοηθητικού που εκτελεί κυκλικές διαδικασίες) φτάνουν σε ολική θερμοδυναμική ισορροπία υπό συνθήκες άντλησης του μεγίστου έργου (χωρίς ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον). Ποια είναι η τελική θερμοκρασία; Τι ποσοστό της ενέργειας που έχασε το σώμα Α έγινε έργο;

Απάντηση: $T = \sqrt{T_A T_B}$, $\eta = (\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B}) / \sqrt{T_A}$)

4. Ένα ηλεκτρικό ρεύμα 10 A περνάει από μια αντίσταση 25 Ω ενώ η θερμοκρασία της αντίστασης διατηρείται σταθερά στους 27 ^oC.

(α) Πόση είναι η αλλαγή της εντροπίας της αντίστασης;

(β) Πόση είναι η αλλαγή της εντροπίας του Σύμπαντος;

(γ) Εάν η αντίσταση είναι θερμικά μονωμένη πόση είναι η αλλαγή της εντροπίας του Σύμπαντος;

Απαντήσεις: (α) $dS_a / dt = 0$, (β) $dS_\Sigma / dt = (RI^2)/T = 8{,}33\ \mathrm{W/^oK}$,

(γ) $0 < dS_\Sigma / dt < 8{,}33\ \ \mathrm{W\,/\,^oK}$

5. Δείξτε ότι $\Omega = -PV$

6. Θεωρήστε τη σχέση $dG = -S\,dT + V\,dP + \mu\,dN$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη σχέση σχεδιάστε την ελεύθερη ενέργεια του Gibbs ως συνάρτηση του *T* υπό σταθερή πίεση P για τη στερεά, την υγρή, και την αέρια φάση μιας ουσίας. Διακρίνετε τρεις περιπτώσεις: πολύ χαμηλή πίεση, ενδιάμεση πίεση, και πολύ υψηλή πίεση. Με βάση τα παραπάνω σχεδιάστε το διάγραμμα των τριών φάσεων της ύλης στο επίπεδο *T*, *P*.

Υπόδειξη: Βλέπε σελ. 259 του βιβλίου του Ε.Ν.Οικονόμου, *Στατιστική Φυσική και Θερμοδυναμική*, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2001.

7. Με βάση ότι οι θερμοδυναμικές ποσότητες είναι είτε εκτατικές είτε εντατικές δείξτε ότι $U = N\varphi_1(V/N, S/N)$, $H = N\varphi_2(P, S/N)$,

$$F = N\varphi_3(T, V/N)\,,\ \ G = N\varphi_4(T,P) = N\,\mu,\ \ \Omega = V\varphi_5(T,\mu)$$

8. Ποια η θερμοκρασία T_τ του τριπλού σημείου του νερού; Είναι η πίεση, P_τ, του τριπλού σημείου του νερού μικρότερη η μεγαλύτερη της 1 ατμόσφαιρας;

Δίνεται ότι η θερμότητα βρασμού είναι περίπου 43 kJ/mol. Μπορείτε να εκτιμήσετε την πιέση του τριπλού σημείου του νερού; Πόση είναι; [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το διάγραμμα φάσεων στο επίπεδο *P, T*.]

9. Ένα ομοιογενές και ισότροπο υλικό όγκου *V* και μαγνητικής επιδεκτικότητας χ (όπου εξ ορισμού του χ, η μαγνήτιση *M* συνδέεται με το βοηθητικό μαμαγνητικό πεδίο *H* μέσω της σχέσης $M = \chi H$) τίθεται σε ένα ομοιογενές πεδίο Η. Δίνεται ότι $\chi = A/T$, όπου *A* είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη του *H* ή του *M* και ότι $đW = -V\,H\,dM$. Υπολογίστε την εντροπία $S(H,T)$ μέσω της $S(0,T)$ και των λοιπών σχετικών παραμέτρων. Υπολογίστε επίσης την παράγωγο $(\partial T / \partial H)_S$. Έτσι επιτυγχάνονται πολύ χαμηλές θερμοκασίες με την αδιαβατική μηδένιση του μαγνητικού πεδιου *H*. Εξηγήστε πώς. (Βλ. [24], σελ.477-485).

Υποδειξη: Ξεκινήστε με τη σχέση $dU = T\,dS - đW$ και αλλάξτε το *U* σε μια άλλη κατάλληλη θερμοδυναμική ποσότητα με διαστάσεις ενέργειας που να έχει τη θερμοκρασία *T* και το *H* ως φυσιολογικές μεταβλητές.

10. Δείξτε ότι $G = \sum_i N_i \mu_i$ και ότι $(dG)_{T,P} = \sum_i \mu_i dN_i$

11. Προσδιορίστε το μέγιστο έργο που μπορεί να αντλήσει κανείς συνδέοντας κατάλληλα δύο δοχεία που περιέχουν το ίδιο ιδανικό αέριο με την ίδια θερμοκρασία T_o και τον ίδιο αριθμό σωματίων N το καθένα αλλά διαφορετικών όγκων V_1 και V_2. Ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία; Για ένα ιδανικό αέριο ισχύουν οι σχέσεις

$$S = N k_B \left\{ \ln \frac{V}{N a^3} + \frac{3}{2} \ln \frac{U}{N\varepsilon} + c_1 \right\} \quad \text{και} \quad U = \frac{3}{2} N k_B T$$

όπου a είναι η μονάδα μήκους, $\varepsilon = \hbar^2 / m a^2$ και c_1 είναι μια αριθμητική σταθερά. Μπορείτε να δικαιολογήσετε τους παραπάνω τύπους; Εάν συνδέσετε τα δύο δοχεία χωρίς να αντλήσετε έργο ή να προσδώσετε θερμότητα ποια θα είναι η τελική τιμή της εντροπίας;

12. Προσδιορίστε τη μεταβολή της θρμοκρασίας και της πίεσης με το υψόμετρο στον ατμοσφαιρικό αέρα θεωρώντας ότι η γήινη ατμόσφαιρα συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο και ότι η εντροπία δεν αλλάζει με το υψόμετρο.
Υπόδειξη: Η μηχανική ισορροπία συνεπάγεται ότι $d P = -g \rho dz$.