

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 3

2.300 ΔΡΧ. / € 6,75

Βαρυτικά κύματα και αστρονομία

- Ένα πρόβλημα του 1870, και η λύση του εκατό χρόνια μετά
- Τοξοβολία και φυσική
- Γιατί ορισμένοι άνθρωποι είναι μαύροι;
- Είδη ισορροπίας
- Μέθοδοι πολλαπλασιασμού αριθμών
- Συγκρίνοντας το τηλεσκόπιο με το μικροσκόπιο
- Τα σημεία Brocard στο τρίγωνο
- Ηλεκτρικές και μηχανικές ταλαντώσεις
- Μενελάου Σφαιρικά



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ





Λάδι σε λινό, 55 × 45 εκ., Συλλογή Chester Dale, © 2001 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον.

Αγόρι στους βράχους (1895/1897), του Henri Rousseau

ΚΑΘΕΝΑΣ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΔΕΙ ΕΝΑ ΝΗΠΙΟ ΝΑ ΤΡΙΚΛΙΖΕΙ ΚΑΘΩΣ προσπαθεί να κάνει τα πρώτα του βήματα στο δωμάτιο, απορεί πώς το παιδί σ' αυτή τη φάση της ανάπτυξής του καταφέρνει να μένει όρθιο παρότι στηρίζεται σε τόσο ασταθή πόδια. Παρόμοια περίεργα φαινόμενα εξισορρόπησης μπορείτε να συναντήσετε και στη φύση, ειδικά σε σχηματισμούς βράχων, όπου ο άνεμος και το νερό, με τη διαβρωτική δράση τους, έχουν λειάνει και

καμπυλώσει τις επιφάνειες στήριξης. Θα ανακαλύψετε ίσως και ογκόλιθους που ισορροπούν τόσο λεπτά ώστε λικνίζονται με το παραμικρό φύσημα του ανέμου (ένας τέτοιος, επονομαζόμενος Κουνόπετρα, υπήρχε στην Κεφαλλονιά μέχρι το σεισμό του 1956). Για να μάθετε περισσότερα σχετικά με τα τεράστια «μνημεία» ευστάθειας, και ειδικότερα για τα διάφορα ειδη ισορροπίας, γυρίστε στη σελίδα 24.

QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Όπως ακριβώς τα αποφάγια προδίδουν τι σερβίριστηκε στο δείπνο της προηγουμένης, έτσι και οι δονήσεις που δημιουργούνται από τα βαρυτικά κύματα παρέχουν στους αστροφυσικούς ενδείξεις για τα πρόσφατα συμβάντα στο Σύμπαν. Στις σημερινές συνθήκες, οι επιστήμονες επινοούν τρόπους για να ανιχνεύουν και να αποκρυπτογραφούν τα εν λόγω κύματα ώστε να αντλούν πληροφορίες για τις μαύρες τρύπες, για τις συγκρούσεις αστέρων νετρονίων και για άλλα κοσμικά γεγονότα, εκατομμύρια έτη φωτός μακριά. Ανατρέξτε λοιπόν στη σελίδα 7 για να μάθετε πώς σκοπεύουμε να συλλαμβάνουμε τα κύματα αυτά στο εγγύς μέλλον.

ΑΡΘΡΑ

- 7** Βαρυτικά κύματα
Ρυτιδώσεις σε μια κοσμική θάλασσα
Shane L. Larson
- 16** Γεωμετρικά γυμνάσματα
Καταμέτρηση τριγώνων
A. Kanel και A. Kovaldzhi
- 24** Ευσταθής ισορροπία
Ταλάντευσην ναι, ανατροπή οχι
A. Mitrofanov
- 32** Τηλεσκόπιο και μικροσκόπιο
Από κοντά και από μακριά
A. Stasenko

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2** Ο κόσμος των κβάντων
Άσπρο ή μαύρο
- 15** Σπαζοκεφαλίες
- 29** Scripta manent
Ανθολόγιο λέξεων και φράσεων
- 36** Καλειδοσκόπιο
Μέθοδοι πολλαπλασιασμού
- 39** Πώς λύνεται;
- 40** Αναδρομές
Εκατό χρόνια πριν
- 44** Στο μαυροπίνακα I
Σημεία Brocard
- 47** Με λίγη φαντασία
Εξωπραγματικά βεληνεκή
- 49** Στο μαυροπίνακα II
Ηλεκτρικές και μηχανικές ταλαντώσεις
- 51** Μαθηματικές αναζητήσεις
Μην το πιστεύετε πριν το αποδείξετε!
- 53** Όπερ έδει δείξαι
Μενελάου Σφαιρικά
- 56** Στα πεδία της φυσικής
Τα θεμελιώδη οωματίδια
- 62** Στο μαυροπίνακα III
Προβλήματα κατασκευών
- 64** Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις
- 69** Πληροφορική
Το πρωτό των πρωταθλητών

Άσπρο ή μαύρο;

«Λευκέ θέλω κι εγώ να ζήσω / κι αν συ λευκός, νέγρος
εγώ / άνθρωπος ίσος με ίσο...»

—Από Τα νέγρικα (Γιάννης Νεγρεπόντης, Μάνος Λοΐζος)

ΓΙΑΤΙ ΟΡΙΣΜΕΝΟΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ ΕΙΝΑΙ μαύροι; Η ερώτηση φαίνεται απλή. Άλλα εάν δεν καταφέρνουμε να δώσουμε μιαν απλή απάντηση, σημαίνει ότι έχουμε κάποιο πρόβλημα στην κατανόηση του εαυτού μας. Και πράγματι, δεν υπάρχει μια ξεκάθαρη εξήγηση γι' αυτό το σημαντικό γεγονός που αφορά το ανθρώπινο είδος. Η απουσία της μας λέει πολλά για τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία της εξελικτικής θεωρίας, καθώς και για τι μπορεί αλλά και τι αδυνατεί να πει η επιστήμη για το παρελθόν.

Κάθε βιβλίο ανατομίας εξηγεί γιατί οι άνθρωποι φαίνονται διαφορετικοί. Οι γιατροί αγαπούν τα πομπώδη λόγια, ιδίως όταν αναφέρονται σε συναδέλφους τους που έζησαν πολλά χρόνια πριν. Οι μαύροι φέρουν μαύρο δέρμα, αναφέρουν στα εγχειρίδιά τους, επειδή έχουν μια χαρακτηριστική μαλπιγγιακή στιβάδα· αυτή συνιστά ένα τμήμα του δέρματος που πήρε το όνομά της από τον ιταλό ανατόμο του 17ου αιώνα, τον Marcello Malpighi. Περιλαμβάνει πολλά κύτταρα τα οποία αποκαλούνται μελανοκύτταρα, μέσα στα οποία υπάρχει μια σκούρα χρωστική που ονομάζεται μελανίνη. Όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητά της τόσο πιο σκούρο εμφανίζεται το δέρμα. Ο Malpighi ανακάλυψε πως το αφρικανικό δέρμα φέρει περισσότερη μελανίνη απ' ότι αυτό των Ευρωπαίων.

Και έτοι φάνηκε τότε πως η απορία λύθηκε.

Το συγκεκριμένο ζήτημα αποτελεί ένα παράδειγμα αυτού που μερικές φορές αποκαλώ «επεξήγηση του Piccadilly». Ένας από τους κεντρικούς δρόμους του Λονδίνου ονομάζεται Piccadilly —μια, περιέργως, μη αγγλική λέξη. Έχω ένα διασκεδαστικό βιβλίο που εξηγεί πώς οι δρόμοι του Λονδίνου πήραν τις ονομασίες τους. Όσα γράφει για το Piccadilly προβάλλουν μια αδυναμία εξήγησης, αφού —όπως στην περίπτωση των ανατόμων— παρατίθεται απλώς μια λεπτομερέστερη περιγραφή του προβλήματος. Αναφέρει, λοιπόν, ότι ο δρόμος πήρε το όνομά του από τους ράφτες που ζούσαν κάποτε εκεί, και έφτιαχναν ψηλά κολάρα τα οποία ονόμαζαν *piccadills*. Πολύ ωραία· ωστόσο το κύριο ερώτημα παραμένει αναπάντητο. Γιατί αποκαλούσαν το κολάρο *piccadill*; Δεν αποτελεί προφανή λέξη για ένα καθημερινό τμήμα ένδυσης. Δυστυχώς, επ' αυτού το βιβλίο σιωπά.

Η εξήγηση λοιπόν του Malpighi μπορεί να ικανοποιεί τους γιατρούς, δεν είναι όμως επαρκής για ένα σκεπτόμενο άτομο. Απαντά στο ερώτημα πώς, αλλά όχι και στο πιο ενδιαφέρον ερώτημα γιατί υπάρχει μεγαλύτερη ποσότητα μελανίνης στο δέρμα των Αφρικανών.

Επειδή οι γονείς, οι παππούδες, οι γιαγιάδες και, ενδεχομένως, οι μα-

κρινοί πρόγονοι των μαύρων ήταν μαύροι —και αυτοί των λευκών, λευκοί—, τη λύση πρέπει να την αναζητήσουμε στο παρελθόν —γεγονός που συνιστά ένα δύσκολο εγχείρημα για την επιστημονική μέθοδο. Είναι αδύνατο να ελέγχουμε άμεσα τι συνέβαινε όταν εμφανίστηκαν στη Γη οι πρώτοι μαύροι ή οι πρώτοι λευκοί. Αντ' αυτού, θα πρέπει να βασιστούμε σε έμμεσες ενδείξεις.

Υπάρχει μια θεωρία που είναι, αν μη τι άλλο, απλή και συνεπής. Έχουμε καταλήξει σ' αυτήν πολλές φορές. Βασίζεται εξ ολοκλήρου στην πίστη· και αν υπάρχει πίστις, δεν τίθεται καν θέμα αποδείξεως. Εξαίτιας τούτου, η συγκεκριμένη θεωρία τοποθετείται εκτός επιστημονικού πλαισίου. Κατ' αυτήν, λοιπόν, κάθε ομάδα δημιουργήθηκε χωριστά από θεία επέμβαση. Η ιουδαιοχριστιανική εκδοχή αναφέρει πως ο Αδάμ και η Εύα πλάστηκαν στον Κήπο της Εδέρη. Αργότερα συνέβη ένας μεγάλος κατακλυσμός· μόνο μία οικογένεια επέζησε —ο Νώε, η γυναίκα του και τα παιδιά τους (ο Χαμ, ο Σημ και ο Ιάφεθ). Ο κάθε γιος δημιούργησε έναν ξεχωριστό κλάδο της ανθρώπινης φυλής (π.χ. ο Σημ, τους Σημίτες). Τα παιδιά του Χαμ είχαν σκούρο δέρμα. Από αυτά προήλθαν οι λαοί της Αφρικής. Τούτο, για πολλούς ανθρώπους, είναι αρκετό ως απάντηση στο κεντρικό μας ερώτημα.

Κατά μια αφρικανική εκδοχή, ο

Θεός έπλασε τους ανθρώπους από πηλό, και εμφύσησε ζωή στα δημιουργήματά του αφού τα έψησε. Άλλα μόνο οι Αφρικανοί ψήθηκαν καλά —γι' αυτό έχουν μαύρο δέρμα. Οι Ευρωπαίοι δεν ήταν ακόμα «έτοιμοι», και έμειναν μ' ένα ξεθωριασμένο ροζ χρώμα.

Το πρόβλημα με αυτού του ειδούς τις ιδέες είναι ότι δεν μπορούν να αποδειχθούν ψευδείς. Λαμβάνω πολλά γράμματα από κόσμο που πιστεύει με πάθος πως η ζωή, με όλη της την ποικιλομορφία, εμφανίστηκε στη Γη μόλις πριν από λίγες χιλιάδες χρόνια ως άμεσο αποτέλεσμα επέμβασης του Θεού. Δεν υπάρχει καμία μαρτυρία που να μπορεί να τους πείσει για το αντίθετο. Ακόμα κι αν αποδεικνύουμε πως υπήρχαν δεινόσαυροι εκατομμύρια χρόνια πριν τους ανθρώπους, αυτοί αντιτείνουν κάποια «αποτυπώματα» πελμάτων σε βράχους τα οποία δείχνουν —όπως λένε οι ίδιοι— ότι οι άνθρωποι και οι δεινόσαυροι έζησαν μαζί σαν φίλοι. Είναι δε τόσο πεπεισμένοι για την αλήθεια των λόγων τους ώστε επιμένουν πως οι απόψεις τους πρέπει να αναφέρονται στα σχολικά βιβλία.

Αν όλες οι ενδείξεις, όποιες κι αν είναι, μπορούν να ερμηνευτούν ώστε να υποστηρίζουν μονάχα μία θεωρία, τότε δεν θα έπρεπε να διαφωνούμε. Πράγματι, αν η πίστη στην παραπάνω θεωρία είναι αρκετά ισχυρή, δεν υπάρχει κατ' αρχήν λόγος να ψάχνουμε για ενδείξεις. Και η βεβαιότητα είναι αυτή που εμπόδισε την πρόσδοτη επιστήμης για αιώνες. Οι επιστήμονες αποτελούν, αν μη τι άλλο, μόνιμη πηγή αβεβαιότητας. Οι ιδέες τους πρέπει συνεχώς να ελέγχονται επί τη βάσει κάθε νέας γνώσης: και, αν αποτυγχάνουν στον έλεγχο, να απορρίπτονται.

Κανένας βιολόγος σήμερα δεν πιστεύει πως οι άνθρωποι δημιουργήθηκαν μέσω κάποιας υπερφυσικής δράσης. Όλοι είναι πεπεισμένοι πως το ανθρώπινο είδος εξελίχθηκε από κάποια πρότερη μορφή ζωής. Αν και η απόδειξη του γεγονότος της εξέλιξης είναι συντριπτική, υπάρχει εντούτοις ευρύ πεδίο για αντιπαρθέσεις σχετικά με το πώς ακριβώς

συνέβη —αντιπαραθέσεις οι οποίες γίνονται περισσότερο εμφανείς στη διαμάχη για το χρώμα του δέρματος.

Η σύγχρονη εξελικτική βιολογία ξεκίνησε τον 19ο αιώνα από τον άγιο βιολόγο Κάρολο Δαρβίνο. Αυτός διαμόρφωσε τις ιδέες του αφού πρώτα μελέτησε τη γεωλογία. Στις μέρες του, πολλοί υπέθεταν ότι τα σημαντικά μορφολογικά χαρακτηριστικά του εδάφους, όπως οι ορεινοί σχηματισμοί ή οι βαθιές κοιλάδες, μπορούσαν να αναδυθούν μόνο μέσω ξαφνικών καταστροφών, όπως οι σεισμοί ή οι ηφαιστειακές εκρήξεις —φαινόμενα που ήταν απίθανο να παρατηρηθούν από τους επιστήμονες, καθώς συνέβαιναν εξαιρετικά σπάνια. Ο Δαρβίνος συνειδητοποίησε ότι στο πέρασμα του χρόνου, ακόμη κι ένα μικρό ρυάκι, διαβρώνοντας βαθμιαία τα βράχια, μπορεί να λαξεύσει ένα βαθύ φαράγγι. Το παρόν, επίει, είναι το κλειδί για το παρελθόν. Παρατηρώντας τα δύο συμβαίνουν στη φύση σήμερα, είναι δυνατόν να συναγάγουμε τα γεγονότα που έλαβαν χώρα πριν από εκατομμύρια χρόνια. Αντίστοιχα, η μελέτη των έμβιων όντων σήμερα μπορεί να μας δείξει τι συνέβη κατά την εξέλιξη.

Στο βιβλίο του *H. προέλευση των ειδών*, που εκδόθηκε το 1859, ο Δαρβίνος πρότεινε ένα μηχανισμό μέσω του οποίου μπορούσαν να εξελίχθουν νέες μορφές ζωής. *H. καταγωγή μέσω τροποποίησης*, όπως την ονόμασε, αποτελεί μια απλή μηχανή με δύο κύρια μέρη.

Το ένα παράγει την κληρονομήσιμη ποικιλομορφία. Αυτή η διαδικασία είναι τώρα γνωστή ως μετάλλαξη. Σε κάθε γενιά, υπάρχει μια μικρή αλλά αξιοσημείωτη πιθανότητα κάποιου λάθους στην αντιγραφή των γονιδίων κατά τη δημιουργία ενός σπερματοζωαρίου ή ενός ωαρίου. Μερικές φορές, μπορούμε να δούμε το αποτέλεσμα μιας μετάλλαξης να σχετίζεται με το χρώμα του δέρματος: ένα άτομο ανάμεσα σε αρκετές χιλιάδες είναι αλφικό —δηλαδή δεν φέρει καθόλου χρωστική δέρματος. Συναντάμε αλφικούς σε όλο τον κόσμο, συμπεριλαμβανομένης και της Αφρικής. Προέρχονται από ωάρια ή από σπερματοζωάρια που υπέστησαν ζη-

μιά στα γονίδια τα υπεύθυνα για τη χρωστική ουσία του δέρματος.

Το δεύτερο μέρος της μηχανής είναι ένα φίλτρο. Διαχωρίζει τις μεταλλάξεις που είναι ικανές να αντεπεξέλθουν στις νέες συνθήκες οι οποίες προκύπτουν από τις αλλαγές του περιβάλλοντος από τις μη ικανές. Οι περισσότερες μεταλλάξεις —ο αλφισμός, για παράδειγμα— είναι επικίνδυνες. Οι άνθρωποι που φέρουν μεταλλαγμένα γονίδια έχουν μικρότερες πιθανότητες επιβίωσης και απόκτησης απογόνων απ' ότι αυτοί που δεν τα φέρουν. Τέτοιου είδους μεταλλάξεις εκλείπουν σύντομα. Μερικές φορές, όμως, κάποια μετάλλαξη επανεμφανίζεται, όντας ικανότερη αυτή τη φορά στην αντιμετώπιση των αντίξοτήτων της ζωής. Ίσως το περιβάλλον να αλλάξει, ή ίσως το τροποποιημένο γονίδιο να είναι πιο αποτελεσματικό. Αυτοί που το κληρονομούν έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες επιβίωσης: θα αποκτήσουν περισσότερα παιδιά, και το γονίδιο θα εμφανίζεται συχνότερα. Μέσω αυτού του απλού μηχανισμού, ο πληθυσμός εξελίχθηκε διά της φυσικής επιλογής. Η εξέλιξη, πίστευε ο Δαρβίνος, υπήρξε μια σειρά από επιτυχημένα λάθη.

Αν υποθέσουμε πως η μηχανή του Δαρβίνου δουλεύει για αρκετό χρόνο, τότε θα έχουν εμφανιστεί νέες μορφές ζωής —νέα είδη. Δοθέντος δηλαδή επαρκούς χρόνου, όλη η ποικιλομορφία της ζωής θα μπορεί να αναδυθεί από μερικούς απλούς προγόνους. Συνεπώς, δεν θα υπάρχει ανάγκη να επικαλούμεθα αρχαία και μοναδικά γεγονότα (όπως ένα μοναδικό περιστατικό Δημιουργίας), τα οποία ούτε θα μπορούσαν να μελετηθούν ούτε να επαναληφθούν. Αντ' αυτού, ο ίδιος ο έμβιος κόσμος θα μπορούσε να αποτελέσει απόδειξη για τη δράση της εξέλιξης.

Τι πληροφορίες μάς δίνει η μηχανή του Δαρβίνου για το χρώμα του δέρματος; Όπως συχνά συμβαίνει στη βιολογία, αυτό το οποίο διαθέτουμε είναι μια σειρά από ενδείξεις που μας προβληματίζουν παρά μια πλήρη εξήγηση.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι ενδείξεων για την εξέλιξη. Ο καλύτερος

σχετίζεται με τα απολιθώματα —τα διατηρημένα απομεινάρια αρχαίων χρόνων. Αυτά εμπεριέχουν τις απαιτούμενες πληροφορίες για την ηλικία τους. Η χημική σύσταση των οστών (ή των πετρωμάτων στα οποία έχουν μεταμορφωθεί) μεταβάλλεται βεβαίως με το χρόνο. Άλλα τα μόρια αποσυντίθενται με γνωστούς ρυθμούς, και ορισμένα ραδιενεργά συστατικά μεταστοιχειώνονται. Το γεγονός αυτό μας παρέχει ενδείξεις για το πότε πέθανε ο οργανισμός στον οποίο ανήκουν τα υπό εξέταση οστά. Έτσι, είναι δυνατή η εξιχνίαση της ιστορίας μιας οικογένειας όντων που έχουν εκλείψει μέσω των αλλαγών που έλαβαν χώρα καθώς τα νέα απολιθώματα διαδέχονταν τα παλαιά.

Το αρχείο των ανθρώπινων απολιθωμάτων δεν είναι ικανοποιητικό —βρίσκεται σε χειρότερη κατάσταση, για παράδειγμα, από αυτό των αλόγων. Ωστόσο, και παρά τα μεγάλα κενά, έχουν διασωθεί αρκετά απολιθώματα που καθιστούν ξεκάθαρο το γεγονός ότι όντα, όχι πολύ διαφορετικά από εμάς, πρωτοεμφανίστηκαν περίπου πριν από εκατόν πενήντα χιλιάδες χρόνια. Πολύ πρωτύτερα υπήρχαν πιθηκόμορφα χώρα που παρουσίαζαν εμφανείς ομοιότητες με τους ανθρώπους, αλλά, εάν ζούσαν σήμερα, δεν θα κατατάσσονταν ως άτομα του δικού μας είδους. Ουδείς έχει εντοπίσει τα ίχνη μιας αδιάλειπτης σύνδεσης μεταξύ αυτών των εξαλειφθέντων χώρων και των ανθρώπων. Μολαταύτα, οι ενδείξεις ότι κάποια αρχαία όντα μετατράπηκαν στους σύγχρονους ανθρώπους είναι συντριπτικές.

Επειδή δεν υπάρχει ανθρώπινο δέρμα απολιθωμένο, τα απολιθώματα δεν μπορούν να μας πληροφορήσουν ευθέως για το χρώμα του δέρματος. Μας δείχνουν, όμως, ότι οι πρώτοι σύγχρονοι ανθρώποι εμφανίστηκαν στην Αφρική. Οι σύγχρονοι Αφρικανοί είναι μαύροι. Ίσως, τότε, το μαύρο δέρμα να εξελίχθηκε πριν από το λευκό. Τα μέρη του πλανήτη όπου οι ανθρώποι έχουν ανοιχτόχρωμο δέρμα (όπως η βόρεια Ευρώπη) δεν είχαν κατοικηθεί ώς πριν από εκατό χιλιάδες χρόνια· συνεπώς το λευκό δέρμα εξελίχθηκε αρκετά ταχύτερα.

Ο Δαρβίνος πρότεινε έναν άλλο τρόπο συναγωγής συμπερασμάτων για το τι συνέβη κατά το παρελθόν: τη σύγκριση ανάμεσα στα όντα που ζουν σήμερα. Αν δύο είδη μοιάζουν σօσον αφορά την ανατομία τους, πιθανόν διαχωρίστηκαν από τον κοινό πρόγονό τους ποι πρόσφατα απ' ότι ένα άλλο είδος που φέρει διαφορετικό σχέδιο σωματικής διάπλασης. Μερικές φορές είναι δυνατόν να εικάσουμε τη δομή ενός όντος που έχει εκλείψει, παρατηρώντας τους εν ζωή απογόνους του.

Αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για τα οστά αλλά και για μόρια —όπως το DNA. Πολλοί βιολόγοι πιστεύουν πως το DNA εξελίσσεται με κανονικό ρυθμό: πως σε κάθε γενιά, δηλαδή, ένα μικρό αλλά προβλέψιμο μέρος των υπομονάδων του αλλάζει μορφή. Αν αυτό αληθεύει (και συχνά αληθεύει), τότε μετρώντας τις αλλαγές μεταξύ δύο ειδών αποκαλύπτουμε πόσο στενά σχετίζονται. Επιπλέον, αν έχουν έναν κοινό πρόγονο ο οποίος χρονολογήθηκε βάσει των απολιθωμάτων, αυτό επιτρέπει τη χρήση του DNA ως «μοριακού ρολογιού» που μετρά την ταχύτητα της εξέλιξης. Και ο ρυθμός με τον οποίο χτυπά το ρολόι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε πότε άλλα είδη διαχωρίστηκαν —συγκρίνοντας το DNA τους— ακόμα και όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμα απολιθώματα.

Οι χιμπατζήδες και οι γορίλες φαίνεται, από τη σωματική τους διάπλαση, πως είναι συγγενείς μας. Τα γονιδιά τους υποδηλώνουν το ίδιο. Πράγματι, το 98% του DNA αυτών των ειδών μοιάζει με το δικό μας, δείχνοντας πως διαχωριστήκαμε πρόσφατα. Το μοριακό ρολόι υποδεικνύει πως ο διαχωρισμός έλαβε χώρα πριν από έξι εκατομμύρια χρόνια περίπου. Και οι χιμπατζήδες και οι γορίλες έχουν μαύρο δέρμα. Αυτό υποδεικνύει επίσης πως οι πρώτοι ανθρώποι είχαν μαύρο δέρμα, και ότι το λευκό δέρμα εξελίχθηκε αργότερα.

Αυτό, ωστόσο, δεν μας εξηγεί γιατί εξελίχθηκε το λευκό δέρμα. Η μόνη υπόνοια που προκύπτει από τα απολιθώματα και τους χιμπατζήδες

είναι ότι η αλλαγή συνέβη όταν οι άνθρωποι απομακρύνθηκαν από τις τροπικές περιοχές. Βασικά είμαστε, χωρίς αμφιβολία, τροπικά ζώα. Είναι πολύ πιο δύσκολο και για τους άντρες και για τις γυναίκες να αντιμετωπίσουν το κρύο παρά τη ζέστη. Ίσως το κλίμα, λοιπόν, να έχει κάποια σχέση με το χρώμα του δέρματος.

Για να ελέγξουμε αυτή την ιδέα, πρέπει, όπως ο Δαρβίνος, να παρατηρήσουμε τα εν ζωή όντα. Γιατί το σκούρο δέρμα ευνοείται στα ζεστά και ηλιόλουστα μέρη ενώ το λευκό στα ψυχρά και νεφοσκεπή; Εύκολα μπορούμε να επινοήσουμε θεωρίες —μερικές εκ των οποίων, μάλιστα, ακούγονται αρκετά πειστικές. Εντούτοις, δύσκολα μπορούμε να τις ελέγξουμε.

Η πιο προφανής σκέψη είναι λανθασμένη. Σύμφωνα μ' αυτή, το μαύρο δέρμα μάς προστατεύει από τη θερμότητα. Οποιοσδήποτε καθίσει σ' ένα μαύρο σιδερένιο παγκάκι μια θερμή ηλιόλουστη ημέρα, ανακαλύπτει αμέσως πως τα μαύρα αντικείμενα θερμαίνονται πιο πολύ από τα λευκά όταν εκτίθενται στον ήλιο. Αυτό συμβαίνει επειδή απορροφούν περισσότερη ηλιακή ενέργεια. Ο ήλιος καθορίζει τη ζωή πολλών όντων. Οι σαύρες πηγαινοέρχονται μεταξύ ήλιου και σκιάς. Στην έρημο της Καλιφόρνιας, αν απομακρυνθούν περισσότερο από ενάμισι μέτρο από το καταφύγιό τους μια ζεστή ημέρα, πεθαίνουν από θερμοπληξία πριν προλάβουν να επιστρέψουν σ' αυτό. Οι σαβάνες της Αφρικής είναι έρημοι τόποι το μεσημέρι, διότι τα περισσότερα χώρα, για να αντιμετωπίσουν τον ήλιο, κρύβονται στη σκιά. Οι πληθυσμοί πολλών όντων οι οποίοι κατοικούν σε θερμές περιοχές είναι πιο ανοιχτόχρωμοι —και όχι πιο σκουρόχρωμοι— ώστε να μειώνουν την απορρόφηση της ηλιακής ενέργειας. Άλλα και για τους ανθρώπους είναι δύσκολο να αντέξουν την έντονη ηλιακή ακτινοβολία —περισσότερο για τους μαύρους παρά για τους λευκούς. Το μαύρο δέρμα δεν προστατεύει, όσους το φέρουν, από τη θερμότητα του ήλιου. Αντιθέτως, χειροτερεύει το πρόβλημα.

Πάντως, με λίγη εφευρετικότητα, είναι πιθανή η αναπροσαρμογή της εν λόγω θεωρίας μέσω μιας μικρής τροποποίησης. Τοπού είναι αποδοτικό το μαύρο δέρμα στην παγωνιά της αφρικανικής αυγής, όταν οι άνθρωποι επιζητούν λίγη ζεστασιά έπειτα από τον νυχτερινό ύπνο. Στην κάψα του μεσημεριού, εξάλλου, καθένας μπορεί να βρει καταφύγιο κάτω από ένα δέντρο.

Οι ακτίνες του ήλιου είναι πολύ δυνατές. Καταστρέφουν το δέρμα. Η μελανίνη, όμως, βοηθά να αποτραπούν οι βλάβες αυτές. (Ένα από τα πρώτα σημάδια της σωματικής βλάβης είναι το ανθυγειενό μαύρισμα.) Το δέρμα λοιπόν αποθέτει μιαν «εκτάκτου ανάγκης» στιβάδα μελανίνης. Οπότε οι άνθρωποι με ανοιχτό χρώμα δέρμα κινδυνεύουν περισσότερο να προσβληθούν από καρκίνο του δέρματος απ' ότι αυτοί με σκούρο. Η ασθένεια παρουσιάζει τη μέγιστη έξαρσή της στο Κουήνολαντ —την Ομόσπονδη Πολιτεία της Αυστραλίας—, όπου οι άνθρωποι με ανοιχτό χρώμα δέρματος εκτίθενται στον πολύ δυνατό ήλιο ξαπλώνοντας στην παραλία.

Αυτός λοιπόν φαίνεται πως είναι ο λόγος που το μαύρο δέρμα είναι σύνηθες στις ηλιόλουστες περιοχές —αλλά για μία ακόμη φορά, κατόπιν σκέψης, τούτο μάλλον δεν ισχύει. Το κακόηθες μελάνωμα, η πιο επικίνδυνη μορφή καρκίνου του δέρματος, αποτελεί νόσο της μέσης ηλικίας. Σκοτώνει τα θύματά της αφού αυτά έχουν κληροδοτήσει τα γονίδια που ευθύνονται για το χρώμα του δέρματος στους απογόνους τους. Η φυσική επιλογή λειτουργεί αποτελεσματικότερα όταν ο θάνατος επέρχεται σε νεαρή ηλικία. Αν οι απόγονοι δεν καταφέρουν να επιβιώσουν, τα γονίδιά τους θα χαθούν μαζί με τους φορείς. Ο θάνατος όμως ενός ηλικιωμένου ατόμου έχει μικρή σημασία, καθώς τα γονίδια (τα υπεύθυνα για το χρώμα του δέρματος) ή για οποιοδήποτε άλλο χαρακτηριστικό) έχουν ήδη κληροδοτηθεί στην επόμενη γενιά.

Το δέρμα είναι ένα όργανο με δική του οντότητα, και εκτελεί λειτουργίες που μας εκπλήσσουν. Μία

από αυτές είναι η σύνθεση βιταμίνης D. Χωρίς αυτήν, τα παιδιά υποφέρουν από ραχίτιδα —έχουν μαλακά, εύκαμπτα οστά. Τις πιο πολλές βιταμίνες (βασικές χημικές ουσίες που χρειαζόμαστε σε μικρή ποσότητα) τις λαμβάνουμε από την τροφή. Η βιταμίνη D είναι σπάνια. Παράγεται στο δέρμα μέσω της δράσης της ηλιακής ακτινοβολίας πάνω σε μια χημική ουσία του σώματος. Προς τούτο, ο ήλιος πρέπει να εισχωρήσει στο σώμα μας. Οπότε οι σκουρόχρωμοι άνθρωποι παράγουν μικρότερη ποσότητα βιταμίνης D απ' ότι αυτοί με το ανοιχτόχρωμο δέρμα. Η βιταμίνη D αποδεικνύεται ιδιαίτερα σημαντική για τα παιδιά, και αυτός είναι ο λόγος που τα μωρά —στην Αφρική ή στην Ευρώπη— έχουν πιο ανοιχτό χρώμα δέρματος από τους ενηλίκους.

Συνεπώς, μπορούμε να υποθέτουμε ότι τα γονίδια για το σχετικά ανοιχτό δέρμα ευνοήθηκαν κατά την εξάπλωση του ανθρώπινου είδους από την Αφρική προς τον νεφοσκεπή και βροχερό βορρά! Τοπού είναι λευκοί —αποκαλύπτει όμως το λόγο για τον οποίο οι Αφρικανοί είναι μαύροι; Η υπερβολική ποσότητα της βιταμίνης D είναι επικίνδυνη. Ωστόσο, ακόμη και το πιο ανοιχτόχρωμο δέρμα δεν παράγει τόση ποσότητα ώστε να προκαλείται βλάβη. Ο ρόλος του μαύρου δέρματος, λοιπόν, δεν μπορεί να είναι η προστασία από την υπερβολική ποσότητα βιταμίνης D.

Μπορεί, όμως, να είναι σημαντικός για τη διατήρηση άλλων βιταμίνων. Το αίμα διατρέχει όλο το σώμα ανά διαστήματα λίγων λεπτών. Κατά τη διαδρομή αυτής, διέρχεται πλησίον της επιφάνειας του δέρματος μέσω λεπτών αιμοφόρων αγγείων. Εκεί, εκτίθεται στις ζημιογόνες συνέπειες του ήλιου. Οι ηλιακές ακτίνες καταστρέφουν τις βιταμίνες —σε τόσο μεγάλο βαθμό, ώστε ένας ανοιχτόχρωμος λάτρης της ηλιοθεραπείας κινδυνεύει από αποβιταμίνωση. Ακόμη χειρότερα, το διεισδυτικό ηλιακό φως καταστρέφει τα αντισώματα —τις αμυντικές πρωτεΐνες που παράγει το ανοσοποιητικό σύστημα.

Στην Αφρική —όπου οι μολύνσεις αποτελούν συνηθισμένο φαινόμενο, και κάποιες φορές η τροφή δεν επαρκεί—, η ισορροπία των βιταμινών και το ανοσοποιητικό σύστημα είναι ήδη καταπονημένα. Η επιβάρυνση που προκαλείται από το εισερχόμενο φως του ήλιου ίσως επαρκεί για την ανατροπή της ισορροπίας μεταξύ υγείας και νόσου. Η χρωστική του σκούρου δέρματος μπορεί να είναι θεμελιώδης για την επιβίωση. Κανείς δεν έχει δεῖξει ευθέως αν αυτό αλληθεύει.

Υπάρχουν πολλές άλλες θεωρίες για το λόγο που ορισμένοι άνθρωποι είναι μαύροι. Για έναν Αφρικανό που προστατεύεται από τον ήλιο κάτω από ένα δέντρο, το μαύρο χρώμα αποτελεί το τέλειο καμουφλάζ. Ακόμα και η προτίμηση για συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του αντίθετου φύλου (φυλοεπιλογή) έχει, ίσως, κάποια σχέση με τη χρωματική εξέλιξη του δέρματος. Αν για τον έναν ή τον άλλο λόγο οι άνθρωποι επιλέγουν τον σύντροφό τους με βάση το χρώμα, τότε τα γονίδια που είναι υπεύθυνα για τα πιο ελκυστικά χαρακτηριστικά θα κληρονομηθούν περισσότερο αποτελεσματικά. Μια μικρή (και ίσως τυχαία) προτίμηση για το σκούρο δέρμα στην Αφρική και για το ανοιχτό δέρμα στην Ευρώπη θα αρκούσε γι' αυτό. Το φαινόμενο τουτό παρατηρείται σίγουρα στα παγώνια —στα οποία τα θηλυκά προτιμούν αρσενικά με έντονα διακοσμημένες ουρές—, αλλά δεν υπάρχει καμία απολύτως ένδειξη ότι συμβαίνει και στους ανθρώπους.

Το τυχαίο μπορεί να είναι σημαντικό και με άλλο τρόπο. Πιθανώς, μόνο ένας μικρός αριθμός ανθρώπων αναγκάστηκε να φύγει από την Αφρική πριν από εκατό και πλέον χιλιάδες χρόνια. Αν, κατά τύχη, κάποιοι από αυτούς έφεραν γονίδια τα οποία έδιναν σχετικά ανοιχτό χρώμα δέρματος, τότε μέρος της διαφοράς στην εμφάνιση μεταξύ των Αφρικανών και των βόρειων απογόνων τους προέρχεται από σύμπτωση. Υπάρχει σήμερα ένα χωριό ινδιάνων της Βορείου Αμερικής όπου ο αλφισμός αποτελεί σύνηθες φαινόμενο. Τυχαία, ένας από το μικρό πλήθος ανθρώπων

πων που ίδρυσαν αυτή την κοινότητα πριν από πολύ καιρό έφερε την εν λόγω μετάλλαξη, και η οποία, στη συγκεκριμένη περιοχή, εξακολουθεί να εμφανίζεται με πολύ μεγάλη συχνότητα.

Όλη αυτή η έκδηλη σύγχυση δείχνει πόσο δύσκολη είναι για την επιστήμη η ανασυγκρότηση της ιστορίας. Η επιστήμη υποχρεούται να ελέγχει —και ίσως να αποδεικνύει λανθασμένες— τις υποθέσεις. Όπως είδαμε, δεν υπάρχει έλλειψη ιδεών σχετικά με την αιτία που οι άνθρωποι διαφέρουν στο χρώμα του δέρματός τους. Ίσως καμία από τις προηγούμενες θεωρίες να μην είναι ορθή; ή, ίσως, να είναι σωστή μία, δύο ή και δύο. Διότι αυτό που δημιούργησε τις διαφορές στο χρώμα του δέρματος στα διάφορα μέρη του κόσμου συνέβη πολύ καιρό πριν, και κανείς δεν μπορεί να το ελέγξει με τρόπο άμεσο.

Αλλά η επιστήμη δεν χρειάζεται πάντοτε άμεσους πειραματικούς ελέγχους. Μια σειρά έμμεσων στοιχείων μπορεί να επαρκεί. Οι υπόνοιες πως οι άνθρωποι εξελίχθηκαν από απλούστερους προγόνους και ότι σχετίζονται με άλλα ζώντα σήμερα σήντα, είναι τόσο πειστικές που δεν μπορούμε να τις αγνοήσουμε. Μέχρι στιγμής, γνωρίζουμε πολύ λίγα γεγονότα, και υπάρχουν πάρα πολλές απόψεις για να είμαστε βέβαιοι για δύο τις λεπτομέρειες του εξελικτικού παρελθόντος μας. Εντούτοις, η ιστορία της μελέτης της εξέλιξης μου δίνει τη σιγουριά ότι κάποια μέρα η σειρά όλων των παραπάνω υπονοιών θα αποτελέσει μια πειστική απόδειξη του λόγου για τον οποίο ορισμένοι άνθρωποι είναι μαύροι και κάποιοι άλλοι λευκοί.

—Steve Jones

O Steve Jones είναι Καθηγητής γενετικής στο University College του Λονδίνου, και επικεφαλής του Τμήματος Γενετικής και Βιομετρίας στο Εργαστήριο Galton του University College του Λονδίνου.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιουντάκτης
Sergey Ivanov

Αντεπιστέλλων Αρχιουντάκτρια
Jennifer M. Wang

Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων
Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχιουντάκτης του Quantum
Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Yevgeniya Morozova, Αρχιουντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβούλευτηκή επιπροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT
John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντειλ, Λουιζιάνα
Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα
Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάτηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός,
Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Ιωάννα Αποστόλους-βιολόγος, Γιώργος Μαλάρης-βιολόγος,
Γιώργος Κατσιλέρης-φυσικός, και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

Ειδικοί συνεργάτες και Επιστημονικοί σύμβουλοι

Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Οχαίου
Πέτρος Δήμας, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Γιώργος Θηράος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Τέρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Εποπτής Α' Βαθμίδας, Τέρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γλωσσική επιμέλεια	Τυποποιητική επιμέλεια	Γραμματεία	Υπεύθυνη λογιστηρίου
Νίκος Ντάκος	Ηρακλής Ντούσης	Μαρία Κουρή	Μαρία Μάραλη

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση	Φιλμ, μοντάζ	Εκτύπωση	Βιβλιοδεσία
-----------------------------	--------------	----------	-------------

Αβ. Μαχαρίδης

Χρ. Μήτσης

N. Πουλόπουλος

Θ. Αρχοντούλακης

To Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάποτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης.
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάποτρο,
Ισαύρου 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπολείο: Στού ο βιβλίου (Πανεπιστήμιο 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο άλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.
Επήμετρα συνδρομή: 12.000 δρχ. για ιδιώτες, 21.000 δρχ.
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.

Ρυτιδώσεις σε μια κοσμική θάλασσα

Η αστρονομία των βαρυτικών κυμάτων είναι επί θύραις

Shane L. Larson

ΨΗΛΑ ΣΤΟ ΟΡΟΠΕΔΙΟ ΚΟΛΟΥΜΠΙΑ, στα ανατολικά της Πολιτείας της Ουάσινγκτον, κατασκευάζεται ένα αξιοθαύμαστο αστεροσκοπείο· το δίδυμό του ανεγέρτει μέσα στα οργιώδη δάση της κεντρικής Λουιζιάνας. Αν με τη φαντασία σας προσπαθείτε να το διακρίνετε μέσα στη στροβιλιζόμενη σκόνη και τους περιφερόμενους ξεριζωμένους από τον άνεμο θάμνους (ή μέσα στο πυκνό κάθυγρο δάσος), μην περιμένετε να δείτε τίποτε θύλους που στεγάζουν ογκώδεις οπτικές διατάξεις ή τεράστια «πάτα» ραδιοτηλεσκοπίων τα οποία παρακολουθούν νυχθημέρον τους ουρανούς. Τούτα τα δύο παρατηρητήρια δεν αναζητούν πληροφορίες στο ορατό φως που στέλνουν στη Γη τα αναρίθμητα άστρα τα οποία καίγονται από τη μια άκρη του Σύμπαντος ώς την άλλη, ούτε όμως και στους αμυδρούς ραδιοκυματικούς ψιθύρους που εκπέμπουν τα φορτισμένα σωματίδια καθώς γυροφέρουν μέσα στο καυτό και βίαιο περιβάλλον τους. Πρόκειται για παρατηρητήρια ενός παντελώς πρωτόγνωρου τύπου που ονομάζονται LIGO (από το ακρωνύμιο της πλήρους αγγλικής τους ονομασίας Laser Interferometer Gravitational-wave Observatories: παρατηρητήρια βαρυτικών κυμάτων μέσω συμβολομετρίας λείζερ).

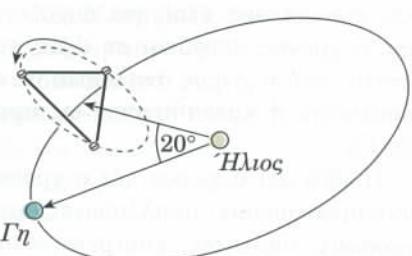
Τα βαρυτικά κύματα υπήρξαν μία από τις ρηξικέλευθες προβλέψεις της

γενικής θεωρίας της σχετικότητας του Αϊνστάιν, ένα εντελώς νέο φαινόμενο που απουσίαζε από την κυρίαρχη έως τότε νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας. Και μόνο στην επόπεδο εκλέπτυνσης που απαιτείται ώστε να καταστεί δυνατή η ανίχνευση αυτής της νέας ακτινοβολίας. Έτσι, παρατηρητήρια τύπου LIGO ξεφυτρώνουν σιγά σιγά παντού στον πλανήτη.

Τα σύγχρονα παρατηρητήρια βαρυτικών κυμάτων είναι ουσιαστικά τεράστια συμβολόμετρα λείζερ (με βραχίονες μήκους που τυπικά κυμαίνεται μεταξύ 0,5 και 4 km, εφόσον περιοριζόμαστε στα σχέδια που εκπονούνται ή που περνούν στο στάδιο της πραγματοποίησης κατά την τρέχουσα περίοδο). Μοιάζουν έντονα με το οικείο συμβολόμετρο Michelson, αλλά μεγεθυσμένο σε πολύ μεγαλύτερη κλίμακα. Οι επιστήμονες θα καταγράφουν προσεκτικά τα σήματα εξόδου των συμβολομέτρων, αναζητώντας απειροελάχιστες μεταβολές στα μήκη των βραχίονων τους, οι οποίες αποτελούν ενδείξεις για τη διέλευση κάποιου βαρυτικού κύματος.

Εκτός από τις επίγειες παρατηρήσεις, οι επιστήμονες της NASA και της Ευρωπαϊκής Υπηρεσίας Διαστήματος έχουν αρχίσει ήδη να εξετάζουν και την προοπτική να διεξαχθεί

έρευνα για βαρυτικά κύματα στο Διάστημα. Πιο συγκεκριμένα, μάλιστα, σχεδιάζουν ένα κατά πολύ μεγαλύτερο συμβολόμετρο, γνωστό ως LISA (ακρωνύμιο του Laser Interferometer Space Antenna, που σημαίνει διαστημική κεραία συμβολομετρίας λείζερ), το οποίο προβλέπεται να αρχίσει να λειτουργεί στο Διάστημα κατά τα τέλη της επόμενης δεκαετίας. Θα απαρτίζεται από τρία διαστημόπλοια διατεταγμένα στις κορυφές ενός τριγώνου, που η κάθε του πλευρά θα έχει μήκος 5 εκατομμυρίων χιλιομέτρων. Αυτά τα τρία διαστημόπλοια θα περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο, διατηρώντας πάντα τον τριγωνικό τους σχηματισμό, ακολουθώντας κατά πόδας τη Γη στην τροχιά της σε απόσταση μόλις μεγαλύτερη των 52 εκατομμυρίων χιλιομέτρων, και με το επίπεδό τους να έχει κλίση 60 μοιρών ως προς την τροχιά του πλανήτη μας (Σχήμα 1). Καταγράφοντας τα σήματα λείζερ



Σχήμα 1

που θα ανταλλάσσουν μεταξύ τους τα διαστημόπλοια, οι επιστήμονες θα είναι σε θέση να επισημάνουν κάθε μεταβολή των αποστάσεων μεταξύ των διαστημοπλοίων στην προσπάθειά τους να ανιχνεύσουν βαρυτικά κύματα.

Ωστόσο, τι είναι ακριβώς τα βαρυτικά κύματα; Γιατί δεν υποψιαζόμασταν καν την ύπαρξή τους πριν από το πρωτοποριακό έργο του Αϊνστάιν και γιατί παρουσιάζει τόσο μεγάλες δυοχέρειες η ανίχνευσή τους; Για να κατανοήσουμε τους λόγους, χρειάζεται να εξετάσουμε τις διαφορές ανάμεσα στη θεωρία της βαρύτητας του Ισαάκ Νεύτωνα και στη γενική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν.

Η βαρύτητα κατά Νεύτωνα

Όταν ο Ισαάκ Νεύτων κάθισε κάτω από την πολυθρύλητη μηλιά εν αναμονή της έξοχης εκείνης πτώσης που σφράγισε την πορεία της σύγχρονης επιστήμης, τον διακατείχε μια αντίληψη για τον κόσμο αρθρωμένη γύρω από την ιδέα ότι ο χώρος και ο χρόνος αποτελούσαν σταθερές και αμετάβλητες ιδιότητες του Σύμπαντος. Βάσει της αντίληψής του αυτής (αλλά και όπως υπαγόρευαν όλα ουσιαστικά τα διαθέσιμα πειραματικά τεκμήρια εκείνης της εποχής), ο χώρος και ο χρόνος έπρεπε να λογίζονται ως σταθερές, απόλυτες οντότητες απανταχού του Σύμπαντος.

Ο Νεύτων εξέθεσε τις ιδέες του περί απολύτου χώρου, χρόνου και κίνησης στο μνημειώδες έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Μαθηματικές αρχές της φυσικής φιλοσοφίας), το οποίο εκδόθηκε το 1687. Τα *Principia* καλύπτουν και τις ιδέες του Νεύτωνα περί σχετικού χώρου και χρόνου, οι οποίοι ορίζονται σε αναφορά προς ανθρώπινες κατασκευές: έτσι, για παράδειγμα, ο χρόνος μετράται σε ώρες και λεπτά, ενώ ο χώρος αναλύεται σε αποστάσεις ή κατευθύνσεις ως προς τη Γη.

Η ιδέα ότι ο χώρος και ο χρόνος αντιμεσοπούνται αναλλοιώτες, παγκόσμιες ιδιότητες, επέτρεψε στον Νεύτωνα να προτείνει τον εξαιρετικά επιτυχή νόμο της παγκόσμιας έλ-

ξης, τον ευρύτερα ίσως γνωστό από όλους τους νόμους της φυσικής:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Η παγκοσμιότητα του χώρου και του χρόνου παρείχε την εγγύηση για την εφαρμοσιμότητα της εξίσωσης (1) σε οποιοδήποτε παρατηρούμενο βαρυτικό σύστημα, συμπεριλαμβανομένων της Σελήνης, των πλανητών αλλά και των προσφάτως τότε ανακαλυφθέντων τεσσάρων μεγαλύτερων δορυφόρων του Δία, που τους παρατήρησε πρώτος ο Γαλιλαίος με το τηλεσκόπιό του το 1610, έστω και αν επρόκειτο για συστήματα πολύ απομακρυσμένα από το χρόνο και το χώρο των οποίων μπορούσε κανείς να έχει άμεση εμπειρία στα επίγεια εργαστήρια.

Η θεωρία παρουσιάζονταν απατηλά απλή στη διατύπωσή της και διέθετε πρωτοφανή δύναμη πρόβλεψης. Το κυριότερο δε, παρείχε μια δυναμική η οποία επέτρεπε να εξαχθούν οι νόμοι του Kepler για την κίνηση των πλανητών (στην πραγματικότητα, άλλωστε, η ανάπτυξη της θεωρίας απέβλεπε ακριβώς στην εξήγηση των εν λόγω νόμων): τούτο αποδεικνύεται ιδιαίτερα εύκολα στην ειδική περίπτωση των κυκλικών τροχιών, αρκεί να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση (1) περιγράφει την κεντρομόλο δύναμη που συγκρατεί μια μάζα (τη μάζα κάποιου αστεροειδούς, για παράδειγμα, ή κάποιας άλλης δοκιμαστικής μάζας) στην τροχιά της περί τον Ήλιο.

Μια αξιοπρόσεκτη όψη της νευτώνειας βαρύτητας έγκειται στην ακαριαία δράση της βαρυτικής δύναμης (πράγμα που σημαίνει ότι οι μεταβολές του βαρυτικού πεδίου διαδίδονται με άπειρη ταχύτητα). Αν η μάζα του Ήλιου τύχαινε να μεταβληθεί αιφνιδίως, ή αν ο Ήλιος άρχιζε να απομακρύνεται από τη θέση του στο κέντρο του ηλιακού συστήματος, ο καθένας από τους πλανήτες θα το «αισθανόταν» αυτοστιγμέι και θα άλλαζε την τροχιά του κατά τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να εναρμονιστεί με τη νέα διαμόρφωση του βαρυτικού πεδίου.

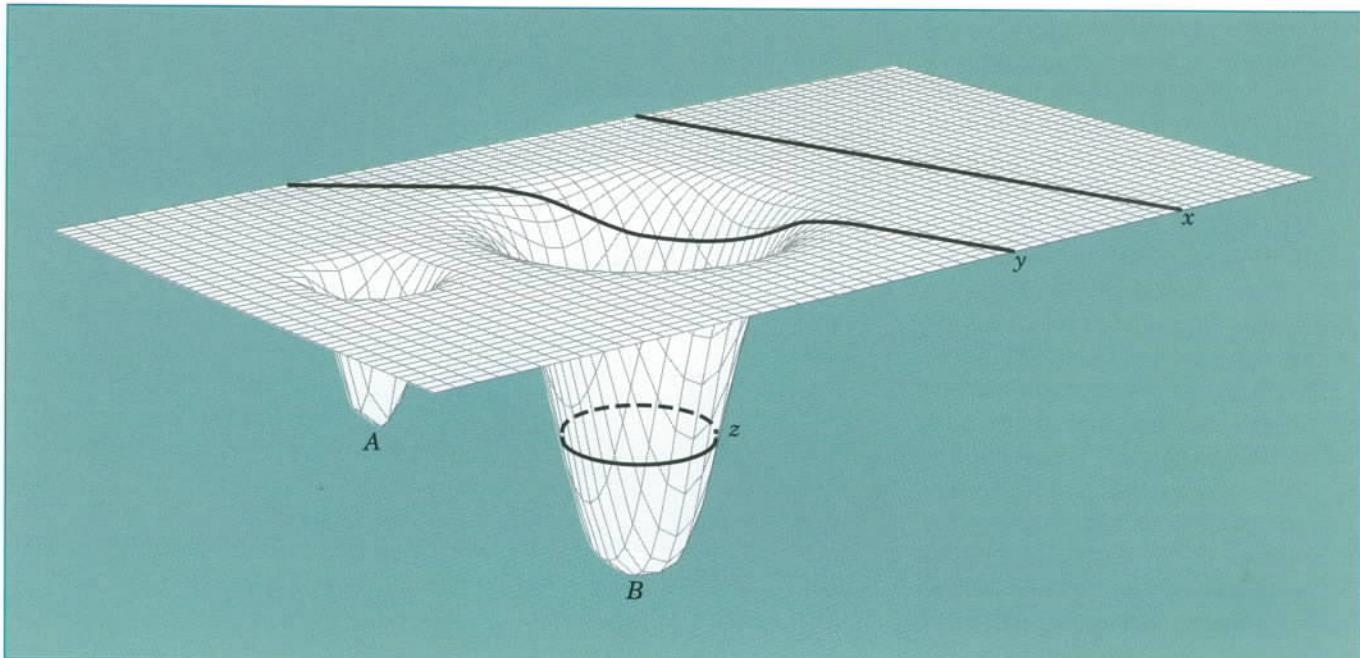
Η βαρύτητα κατά Αϊνστάιν

Η νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας στάθηκε ο ακρογωνιαίος λίθος της φυσικής επί δύο και πλέον αιώνες, ακόμη δε και σήμερα αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμη και ιδιαίτερα κατάλληλη για πολυποίκιλες εφαρμογές, όπως οι υπολογισμοί για τη χάραξη των τροχιών των διαστημοπλοίων ή για την περιγραφή της κίνησης των διπλών αστέρων. Μολατάυτα, η ειδική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, ευθύς μόλις δημοσιεύθηκε το 1905, άρχισε να θέτει προβλήματα για τη νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας.

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας εισήγαγε πλήθος εκπληκτικές και παράδοξες προβλέψεις όσον αφορά τις σχέσεις μεταξύ κινούμενων ρολογιών και ράβδων, πλην όμως η σπουδαιότερη ίσως συνέπειά της έγκειται στην ύπαρξη ενός παγκόσμιου άνω φράγματος για τις ταχύτητες που απαντούν στη φύση: $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s. Κανένα αντικείμενο δεν κινείται, αλλά ούτε και καμία αλληλεπίδραση διαδίδεται, με ταχύτητα υψηλότερη από εκείνη του φωτός. Τουναντίον, η νευτώνεια βαρυτική θεωρία επιτρέπει άπειρες ταχύτητες διάδοσης, οι οποίες σαφώς παραβιάζουν το μεγάλο αλλά πάντως πεπερασμένο άνω φράγμα των ταχυτήτων c .

Έτσι, ο Αϊνστάιν έθεσε ως στόχο του να διατυπώσει μια θεωρία της βαρύτητας συνεπή με την ειδική σχετικότητα, και το 1916 δημοσίευσε τελικά τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Η γενική σχετικότητα έρχεται σε ρήξη με τη νευτώνεια θεωρία ευθύς εξαρχής, απορρίπτοντας την ιδέα την ιδέα του βαρυτικού πεδίου υπέρ μιας νέας έννοιας: της γεωμετρίας του χωροχρόνου. Ο Αϊνστάιν υιοθέτησε ως βασική του αφετηρία την άποψη ότι οι κινήσεις των σωματιδίων δεν επηρεάζονται από κάποια αόρατη δύναμη που δρα πάνω τους έλκοντάς τα προς τα σώματα που έχουν μάζα. Απεναντίας, οι κινήσεις των σωματιδίων καθορίζονται από τη γεωμετρία του χωροχρόνου γύρω τους.

Ένα εποπτικό ανάλογο της αξιοθάυμαστης ιδέας του Αϊνστάιν μπο-



Σχήμα 2

ρείτε να δείτε στο Σχήμα 2, το οποίο απεικονίζει ένα δισδιάστατο μοντέλο της γενικής σχετικότητας, το λεγόμενο μοντέλο της «ελαστικής μεμβράνης». Ο χωροχρόνος είναι «επίπεδος» όταν δεν υπάρχει παρουσία μάζας, όπως φαίνεται στο απότερο δεξιό άκρο του φύλλου. Η παρουσία ενός σώματος με μάζα προκαλεί την καμπύλωση του χωροχρόνου, όπως φαίνεται στο σημείο A (φανταστείτε ότι τοποθετείτε ένα μικρό μολύβδινο βαριδιά πάνω στην ελαστική μεμβράνη). Όσο μεγαλύτερη μάζα έχουν τα σώματα τόσο μεγαλύτερη καμπυλότητα προσδίδουν στο χωροχρόνο, παραμορφώνοντάς τον εντονότερα από, τι οι μικρότερες μάζες (φανταστείτε ότι τοποθετείτε μια μπάλα του μπούσλινγκ στο σημείο B).

Πώς επηρεάζει η μορφή του χωροχρόνου την κίνηση των σωματιδίων; Ας θεωρήσουμε τις τρεις τροχιές που φαίνονται στο Σχήμα 2 και σημειώνονται με τα λατινικά γράμματα x , y και z . Μπορούμε να φανταστούμε την καθεμιά τους ως την τροχιά μιας μπάλας του πινγκ-πονγκ που κυλά πάνω στην ελαστική μεμβράνη· αποτελούν το ανάλογο των τροχιών τις οποίες διαγράφουν σωματίδια (όπως, λόγου χάρη, δορυφόροι, αστεροειδείς και κομήτες) κινούμενα στη γειτονιά

σωμάτων μεγάλης μάζας. Η καμπύλη x αντιπροσωπεύει την πορεία ενός σωματιδίου διαμέσου του χωροχρόνου όταν αυτό παραμένει μακριά από οποιαδήποτε μάζα. Μια τέτοια καμπύλη ονομάζεται γεωδαισιακή. Στο μοντέλο της ελαστικής μεμβράνης, οι γεωδαισιακές αποτελούν τις βραχύτερες καμπύλες που συνδέουν δύο οποιαδήποτε σημεία. Στις επίπεδες περιοχές της μεμβράνης, οι γεωδαισιακές συμπίπτουν με τις συνήθεις ευθείες γραμμές.

Στο χωροχρόνο, όμως, υπάρχουν και άλλες «ευθύγραμμες» καμπύλες, τέτοιες όπως η τροχιά y . Ας φανταστούμε μια μπάλα που κυλά κατά μήκος τής y , η οποία αρχικώς εκτείνεται παράλληλα προς τη x . Όταν η μπάλα συναντά την καμπυλωμένη περιοχή του χωροχρόνου, η γεωδαισιακή καμπύλη βυθίζεται στην καμπυλωμένη περιοχή, για να αναδυθεί κατόπιν εκ νέου και να συνεχίσει σε μια κατεύθυνση η οποία αποκλίνει από τη x . Πρόκειται για μια επίσης γεωδαισιακή καμπύλη, καθότι αποτελεί την ευθύτερη δυνατή διαδρομή που μπορεί να ακολουθήσει η μπάλα περνώντας διαμέσου της περιοχής υψηλής καμπυλότητας. Καρία εξωτερική δύναμη δεν έδρασε στην μπάλα προκειμένου να τροποποιήσει την

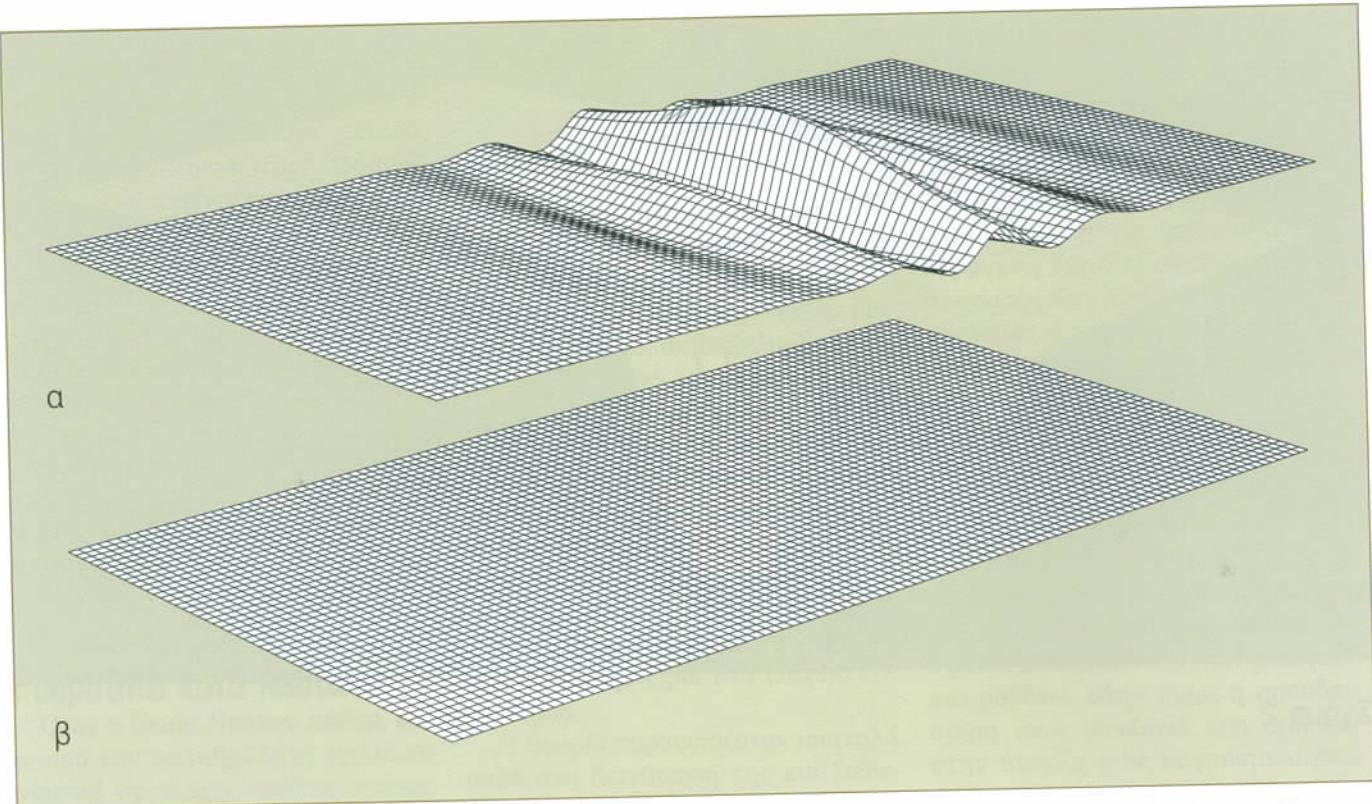
τροχιά της. Η μεταβολή της τροχιάς οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι η μπάλα χρειάστηκε να κυλήσει πάνω σε μια καμπυλωμένη επιφάνεια.

Ας στραφούμε τώρα στην καμπύλη z . Πρόκειται επίσης για μια γεωδαισιακή· η μπάλα κυλά στην τροχιά της ελεύθερη από κάθε εξωτερική δύναμη που να την ωθεί ή να την έλκει, με την πορεία της να καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την καμπυλότητα του χώρου γύρω της.

Η καθεμιά από τις τρεις καμπύλες του Σχήματος 2 είναι ανάλογη και με μια γνώριμη τροχιά σωματιδίου που όλες τους περιγράφονται στη νευτόνεια θεωρία με τη βοήθεια ενός κεντρικού δυναμικού

$$V = -\frac{GM}{r}, \quad (2)$$

όπου με M συμβολίζουμε την κεντρική μάζα η οποία συνιστά την πηγή του δυναμικού. Η καμπύλη x αντιπροσωπεύει την τροχιά που διαγράφει ένα σωματίδιο το οποίο κινείται πολύ μακριά από κάθε πηγή βαρυτικής έλξης, η καμπύλη y είναι η τροχιά ενός σωματιδίου που σκεδάζεται από ένα βαρυτικό δυναμικό, ενώ, τέλος, η καμπύλη z αντιστοιχεί στην



Σχήμα 3

τροχιά ενός σωματιδίου το οποίο περιφέρεται γύρω από μια μεγαλύτερη μάζα.

Αυτός ο τρόπος να σκεφτόμαστε τη γενική θεωρία της σχετικότητας μπορεί να συνοψιστεί στο «άρθρο πίστεως» του σύγχρονου θεωρητικού της βαρύτητας, το οποίο καθιέρωσαν οι Misner, Thorne και Wheeler στο κλασικό τους έργο *Gravitation* (Βαρύτητα): «Η ύλη υπαγορεύει στο χώρο πώς να καμπυλώνεται· ο χώρος υπαγορεύει στην ύλη πώς να κινείται.»

Η ιδέα ότι το «βαρυτικό πεδίο» είναι απλώς η καμπυλότητα του χωροχρόνου πρόκειται να αποτελέσει κεντρικό στοιχείο της φυσικής εικόνας των βαρυτικών κυμάτων που θα επιχειρήσουμε να σκιαγραφήσουμε στη συνέχεια.

Βαρυτικά κύματα

Όπως αναφέραμε ήδη, η ύπαρξη ενός κοσμικού άνω φράγματος για τις ταχύτητες συγκρούεται κατάφωρα με τη νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας, σύμφωνα με την οποία κάποια σήματα επιτρέπεται να διαδίδονται με

άπειρη ταχύτητα. Αν επιβάλλουμε τους περιορισμούς της ειδικής σχετικότητας σε μια θεωρία για τη βαρύτητα, ανακαλύπτουμε ξαφνικά πάμπολλα νέα φαινόμενα, τα οποία μπορούμε να αναζητήσουμε πειραματικά στη φύση —φαινόμενα που την ύπαρξή τους την αγνοούσαμε, διότι απλούστατα η νευτώνεια φυσική αδυνατεί να τα εξηγήσει και, άρα, να τα προβλέψει. Στα σχετικά παραδείγματα συγκαταλέγεται η περίφημη «καμπύλωση των φωτεινών ακτίνων» λόγω των βαρυτικών πεδίων, την οποία επικαλέστηκε ο Αϊνστάιν ως παρατηρησιακό έλεγχο για τη νέα θεωρία της βαρύτητας. Η μέτρηση

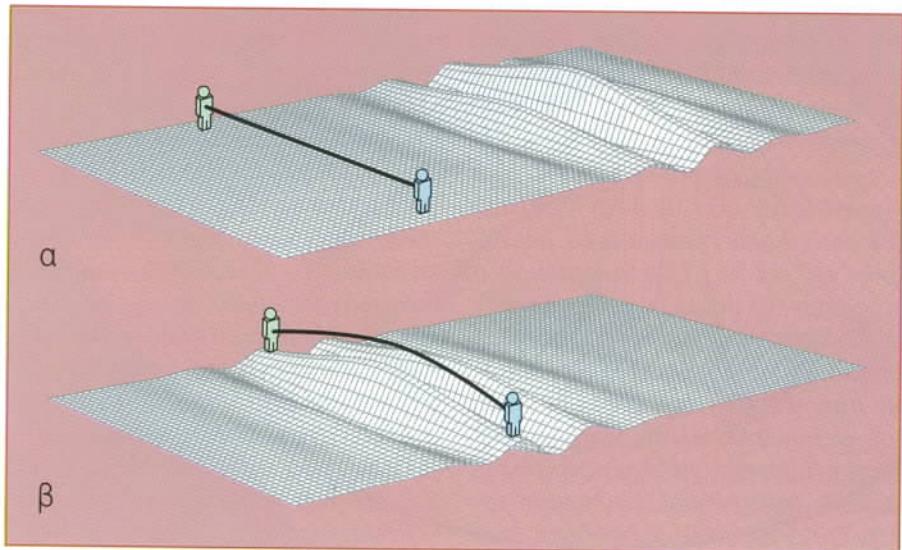
της εκτροπής που υφίσταται το αστρικό φως καθώς διέρχεται διά του βαρυτικού πεδίου του Ήλιου, την οποία πραγματοποίησε ο Eddington κατά τη διάρκεια της ολικής ηλιακής έκλειψης του 1919, επιβεβαίωσε τις προβλέψεις της γενικής σχετικότητας και χάρισε παγκόσμια φήμη στον Αϊνστάιν.

Για να κατανοήσουμε πώς αντιμετωπίζει τα κύματα η σύγχρονη σχετικιστική θεωρία, ας ανακαλέσουμε στη μνήμη μας την κατά Αϊνστάιν περιγραφή της βαρύτητας ως καμπυλότητας του χωροχρόνου. Εφόσον λοιπόν η καμπυλότητα αποτελεί το ανάλογο του βαρυτικού πεδίου, οι μεταβολές του βαρυτικού πεδίου πρέπει να αντιστοιχούν στις μεταβολές της καμπυλότητας του χωροχρόνου. Όταν οι μεταβολές της καμπυλότητας διαδίδονται οδεύοντας διαμέσου του χωροχρόνου, τότε τις ονομάζουμε βαρυτικά κύματα. Στο Σχήμα 3 φαίνεται ένα μοντέλο των βαρυτικών κυμάτων, το οποίο κινείται στο πνεύμα της αναλογίας της ελαστικής μεμβράνης που σκιαγραφήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Όπως και τα κύματα με τα οποία είμαστε περισσότερο εξοικειωμένοι, τα βαρυτικά κύματα έχουν ένα πλάτος (το οποίο συμβολίζεται συνήθως με h), ένα μήκος κύματος λ και μια συχνότητα n . Τα δύο τελευταία χαρακτηριστικά συνδέονται με την ταχύτητα διάδοσης c μέσω της σχέσης

$$c = \lambda n. \quad (3)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι δεν επιλέξαμε τυχαία να συμβολίσουμε την τα-



Σχήμα 4

χύτητα διάδοσης με c' η γενική σχετικότητα προβλέπει ότι τα βαρυτικά κύματα διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός.

Ανίχνευση

Πώς μπορεί να επιχειρηθεί η ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων; Για να επιτύχουμε έναν τέτοιο στόχο, χρειάζεται να αναπτύξουμε κάποια μέθοδο για να μετρούμε τις μεταβολές της καμπυλότητας του χωροχρόνου. Το μοντέλο της ελαστικής μεμβράνης που παρουσιάσαμε νωρίτερα μας παρέχει τη δυνατότητα να φανταστούμε έναν ανιχνευτή βαρυτικών κυμάτων. Ας θεωρήσουμε τους δύο παρατηρητές του Σχήματος 4α. Ζώντας σε έναν ουσιαστικά επίπεδο χωροχρόνο, με τους ηλεκτρικούς φανούς που κρατούν στα χέρια τους αποστέλλουν φωτεινά σήματα ο ένας στον άλλο και μετρούν το χρόνο που χρειάζεται η φωτεινή δέσμη για να διανύσει τη μεταξύ τους απόσταση. Αυτός ο χρόνος αποτελεί μέτρο της ιδιοαπόστασης που τους χωρίζει. Χωρίς να το περιμένουν, τους πλησιάζει ένα κύμα καμπυλότητας, το οποίο πρόκειται να επιδράσει στα αποτελέσματα του πειράματός τους.

Στο Σχήμα 4β, το κύμα έχει πλέον καταφτάσει στους δύο πειραματιστές μας. Δεδομένου ότι το κύμα έχει τροποποιήσει την καμπυλότητα του χωροχρόνου ανάμεσά τους, τα φωτόνια χρειάζονται διαφορετικό χρόνο

για να ταξιδέψουν από τον ένα στον άλλο· οι ατρόμητοι νεαροί πειραματιστές μας μπορούν να μετρήσουν αυτή τη διαφορά χρόνου, κατορθώνοντας έτσι να ανιχνεύσουν το κύμα!

Κατά τον ίδιο εν πολλοίς τρόπο, ανιχνεύουν βαρυτικά κύματα και τα συμβολόμετρα, συγκρίνοντας την απόσταση κατά δύο διαφορετικές κατευθύνσεις του χωροχρόνου. Δύο δέσμες φωτός λέιζερ που διαδίδονται σε διαφορετικές διευθύνσεις συμβάλλουν μεταξύ τους. Όταν τύχει να διέρχεται κάποιο βαρυτικό κύμα, τα μήκη των βραχιόνων του συμβολομέτρου μεταβάλλονται, οπότε η εικόνα συμβολής που σχηματίζουν οι δύο δέσμες λέιζερ παρουσιάζει μετατόπιση.

Το μέγεθος που μετρούν τα παρατηρητήρια βαρυτικών κυμάτων ονομάζεται ανηγμένη μήκυνση και ορίζεται ως

$$s = \frac{\Delta l}{l}, \quad (4)$$

όπου με Δl συμβολίζουμε την παραγόμενη από το βαρυτικό κύμα μεταβολή της ιδιοαπόστασης μεταξύ των δύο παρατηρητών και με l την αδιατάρακτη απόσταση, προτού το κύμα καταφτάσει εκεί. Η ανηγμένη μήκυνση συνδέεται με το πλάτος του κύματος μέων της προσεγγιστικής σχέσης $s \sim h/2$.

Με τα συμβολόμετρα λέιζερ δεν ε-

ξαντλούνται οι δυνατοί τρόποι ανίχνευσης των βαρυτικών κυμάτων. Κανείς θα μπορούσε να φανταστεί ότι οι δύο πειραματιστές του Σχήματος 4 δεν ανταλλάσσουν φωτεινά σήματα με τους ηλεκτρικούς φανούς τους αλλά ότι κρατούν από τα αντίθετα άκρα της μια μακριά μεταλλική ράβδο. Κατά τη διέλευσή του, το βαρυτικό κύμα επιμηκύνει ελαφρώς τη ράβδο. Αφού περάσει το κύμα, η ράβδος επανέρχεται ταχύτατα στο αρχικό της σχήμα, και έτσι αρχίζει να «κουδουνίζει» (δηλαδή αρχίζει να δονείται). Οι συχνότητες που μπορεί να ανιχνεύσει η ράβδος εξαρτώνται από το μήκος της. Σε αδρές γραμμές, η ράβδος επιδεικνύει ευαισθησία σε κύματα που η συχνότητά τους αντιστοιχεί σε κάποιον από τους κανονικούς τρόπους δόνησής της:

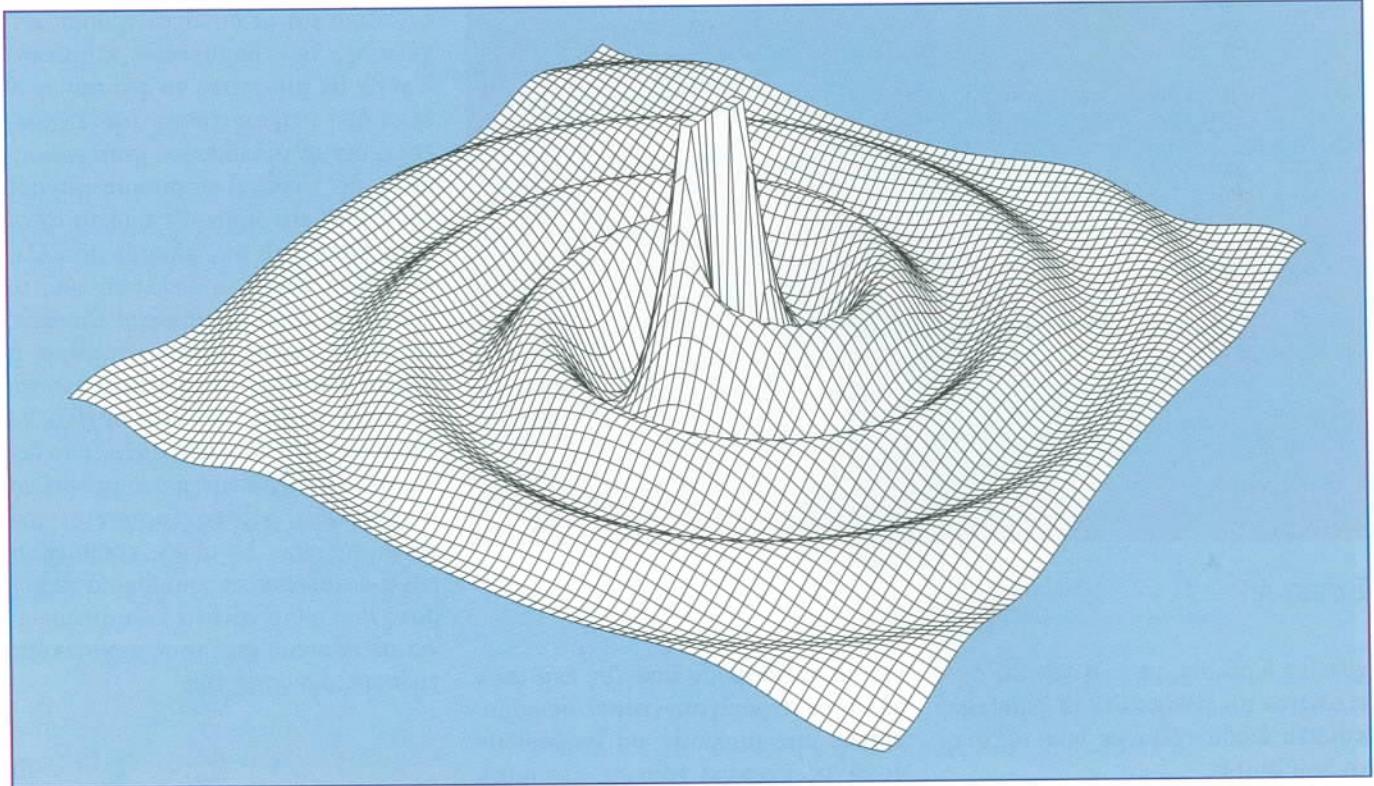
$$v = n \frac{v}{2l}, \quad (5)$$

όπου με v συμβολίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του ήχου στη ράβδο και με l το μήκος της ράβδου, ενώ το n παριστάνει έναν ακέραιο ο οποίος χαρακτηρίζει τον δεδομένο κανονικό τρόπο. Το πλάτος αυτών των ταλαντώσεων εξαρτάται από την ανηγμένη μήκυνση που προκαλεί στη ράβδο το βαρυτικό κύμα.

Οι τέτοιου τύπου ανιχνευτές λέγονται «ραβδόμορφοι ανιχνευτές», και στην ανάπτυξή τους πρωτοστάτης ο Joseph Weber στο Πανεπιστήμιο του Μέρυλαντ κατά τη δεκαετία του 1960. Σήμερα, ο πλέον ευαίσθητος εν λειτουργία ραβδόμορφος ανιχνευτής ονομάζεται ALLEGRO και βρίσκεται εγκατεστημένος στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Λουιζιάνας.

Πηγές

Τα βαρυτικά κύματα δημιουργούνται από τις δυναμικές κινήσεις της μάζας. Κάθε ασύμμετρη επιτάχυνση σε ένα σύστημα μεγάλης μάζας οδηγεί στην παραγωγή βαρυτικών κυμάτων (για να ακριβολογούμε, ένα σύστημα εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία εφόσον έχει μη μηδενική τετραπολική ροπή). Αυτό σημαίνει ότι οι συμμετρικές κινήσεις, όπως οι ακτινικές αναπάλσεις σε σφαιρικά άστρα,



Σχήμα 5

δεν παράγουν βαρυτικά κύματα.

Ως γνωστόν, τα απολύτως συμμετρικά συστήματα αποτελούν εξιδανικεύσεις των φυσικών, και η ύπαρξη τους στη φύση πρέπει να θεωρείται εξαιρετικά απίθανη. Η επισκόπηση των πλέον κοινών αστροφυσικών συστημάτων οδηγεί στη διαπίστωση ότι το Σύμπαν βρίθει από ασύμμετρα δυναμικά συστήματα, ξεκινώντας από τους ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες και τους σπειροειδείς γαλαξίες στις μεγαλύτερες κλίμακες και φτάνοντας έως τους σουπερνόβα και τους συνήθεις διπλούς αστέρες στις μικρότερες.

Αναμένεται ότι τα πάσης φύσεως συστήματα διπλών αστέρων θα αναδειχτούν στις σημαντικότερες πηγές συνεχών αστροφυσικών βαρυτικών κυμάτων. Στους στόχους που παρουσιάζουν ενδιαφέρον για μελέτη περιλαμβάνονται οι διπλοί αστέρες, οι διπλοί αστέρες νετρονίων, οι διπλές μαύρες τρύπες καθώς και οι διάφοροι πιθανοί συνδυασμοί των τριών πραγματικών τύπων ουρανίων σωμάτων. Κατά το μεγαλύτερο μέρος της ζωής τους, τα συστήματα διπλών αστέρων εξελίσσονται βραδέως. Αν

τα μέλη τους περιφέρονται το ένα γύρω από το άλλο σε κατά προσέγγιση κυκλικές τροχιές, τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα θα έχουν συχνότητα διπλάσια από την τροχιακή συχνότητα:

$$\nu = 2\nu_{tp}. \quad (6)$$

Τα κύματα αυτά ονομάζονται *μονοχρωματικά*, κατ' αναλογίαν προς το ορατό φως που δεν περιέχει παρά μόνο συχνότητα. Στο Σχήμα 5 βλέπουμε το πλάτος των βαρυτικών κυμάτων που παράγονται από ένα τυπικό σύστημα διπλών αστέρων. Τα άστρα από τα οποία πηγάζει η ακτινοβολία βρίσκονται στο κέντρο του σχήματος. Τα βαρυτικά κύματα, τα οποία εκπέμπονται ως αποτέλεσμα της τροχιακής κίνησης των εν λόγω άστρων, διαδίδονται προς τα έξω διαμέσου της αχανούς θάλασσας του χωροχρόνου ώσπου να έρθουν απαλά να περικλύσουν τις «ακτές» της Γης.

Για το (αδιάστατο) πλάτος των βαρυτικών κυμάτων που θα φτάσουν στη Γη προερχόμενα από κάποιο σύστημα διπλών αστέρων μια εκτίμηση μας παρέχει ο τύπος

$$|h| = \frac{4G^2 m_1 m_2}{c^4 a R}, \quad (7)$$

όπου με m_1 και m_2 παριστάνουμε τις μάζες των μελών του «διπλού» συστήματος, ενώ με G συμβολίζουμε τη σταθερά του Νεύτωνα, με a τον μεγάλο ημιάξονα της σχετικής τροχιάς του συστήματος, με R την απόστασή του από τη Γη και με c την ταχύτητα του φωτός. Αν ξαναγράψουμε τον a με τη βοήθεια του τρίτου νόμου του Kepler

$$a^3 = T_{tp}^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}, \quad (8)$$

η εξίσωση (7) είναι δυνατόν να εκφραστεί συναρτήσει της τροχιακής συχνότητας ν_{tp} (η οποία συνδέεται με τη συχνότητα ν του βαρυτικού κύματος μέσω της εξίσωσης (6)):

$$|h| = \frac{2\pi^{2/3} (2G)^{5/3}}{c^4 R} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \nu_{tp}^{2/3}. \quad (9)$$

Έμμεσες, αστροφυσικές ενδείξεις για την ύπαρξη των βαρυτικών κυμάτων έχουμε εδώ και μια εικοσαετία από την επισταμένη καταγραφή

της συμπεριφοράς του PSR 1913+16, του περίφημου διπλού πάλσαρ των Hulse και Taylor. Η συνεχής παρατίρηση της σχετικής τροχιάς των μελών αυτού του συστήματος αποκάλυψε ότι η τροχιακή περίοδος βαθμιαία μειωνόταν, πράγμα που σήμαινε ότι τα δύο άστρα προσέγγιζαν σπειροειδώς το ένα το άλλο. Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η τροχιακή περίοδος συμπίπτει ακριβώς με τον προβλεπόμενο από τη γενική σχετικότητα στη βάση του φαινομένου της εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας. Τα βαρυτικά κύματα που οφείλονται στην τροχιακή κίνηση των εν λόγω άστρων απάγουν τροχιακή ενέργεια, επιφέροντας έτσι τη βαθμιαία συρρίκνωση της τροχιάς. Αυτή η ανακάλυψη χάρισε στον Joseph Taylor και τον Russell Hulse το βραβείο Νόμπελ φυσικής για το 1993.

Μπορούμε να εκτιμήσουμε το πλάτος των βαρυτικών κυμάτων που προέρχονται από αυτό τον διπλό αστέρα κατά την άφιξή τους στη Γη με τη βοήθεια της εξίσωσης (9). Το εν λόγω διπλό σύστημα απέχει από τη Γη απόσταση $R = 5 \text{ kpc}$ και συγκροτείται από δύο άστρα που έχουν την ίδια περίπου μάζα $m \sim 1,4 M_{\odot}$, ενώ η τροχιακή του περίοδος ανέρχεται σε περίπου $7,75$ ώρες (που σημαίνει $\nu_p \sim 3,58 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$). Τα δεδομένα αυτά οδηγούν σε ένα αδιάστατο πλάτος $|h| = 6,4 \cdot 10^{-23}$, το οποίο είναι ομολογουμένως πολύ μικρό! Υπολείπεται κατά πολλές τάξεις μεγέθους από το ελάχιστο πλάτος που μπορεί να ανιχνεύσει η LISA στη συγκεκριμένη συχνότητα.

Μήπως όμως υπάρχει η δυνατότητα να ανιχνεύσουμε πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας ευρισκόμενες πολύ πλησιέστερα στη Γη; Οι διπλοί αστέρες, φερ' ειπείν, αναμένεται ότι θα αποδειχθούν αξιόλογες πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας: αλλά μήπως θα έπρεπε να προσβλέψουμε στην ανίχνευση βαρυτικής ακτινοβολίας προερχόμενης από τις τροχιές των δορυφόρων του Δία (της Ιούς, του Γανυμήδη, της Καλλιστώς και της Ευρώπης) που ανακάλυψε ο Γαλιλαίος; Άσ στραφούμε και πάλι στην εξίσωση (9) και ας την εφαρμόσουμε στην περίπτωση της Ιούς, του πιο εσωτε-

ρικού από τους δορυφόρους του Δία. Ο Δίας έχει μάζα περίπου $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$, ενώ η μάζα της Ιούς ανέρχεται σε $8,94 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Η τροχιακή περίοδος της Ιούς ισούται με $1,77$ ημέρες, οπότε προκύπτει μια τροχιακή συχνότητα $\nu_p = 6,54 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}$. Κατά τη στενότερή τους προσέγγιση, ο Δίας και η Γη απέχουν $6,29 \cdot 10^8 \text{ km}$. Αν εισαγάγουμε στην εξίσωση (9) αυτές τις τιμές, καταλήγουμε σε ένα πλάτος $|h| = 1,4 \cdot 10^{-24}$. Παρότι η Ιώ βρίσκεται πολύ πλησιέστερα στη Γη από το προηγούμενο διπλό σύστημα, η βαρυτική ακτινοβολία που εκπέμπει είναι σημαντικά ασθενέστερη. Επομένως, ανιχνεύτες όπως το LIGO ή η LISA δεν αναμένεται να ανιχνεύσουν βαρυτική ακτινοβολία από οποιαδήποτε πηγή εντός του ηλιακού μας συστήματος.

Τι ελπίζουμε να μάθουμε

Τα βαρυτικά κύματα μας υπόσχονται έναν ολότελα διαφορετικό τρόπο θέασης του Σύμπαντος. Όταν κατασκευάστηκαν τα πρώτα ραδιοτηλεσκόπια, μας προσέφεραν πληθώρα νέων γνώσεων για τα απομακρυσμένα αστροφυσικά συστήματα, επειδή τα ραδιοκύματα κομίζουν διαφορετικού είδους πληροφορίες απ' ό,τι το συνηθισμένο φως. Παρομοίως, ελπίζουμε ότι παρατηρώντας το Σύμπαν στα βαρυτικά κύματα θα καταφέρουμε να μάθουμε διαφορετικά πράγματα απ' ό,τι ερευνώντας το στο συνηθισμένο φως. Πιο συγκεκριμένα, προσδοκούμε ότι θα μπορέσουμε να παρατηρήσουμε άκρως συναρπαστικά φαινόμενα όπως συγκρούσεις γιγαντιαίων μαύρων τρυπών ή αστέρων νετρονίων, πτώσεις άστρων μέσα σε μαύρες τρύπες στα κέντρα των γαλαξιών καθώς και εκρήξεις σουπερνόβα.

Στη μεγάλη τους πλειονότητα, οι πηγές της ανιχνεύσμενης βαρυτικής ακτινοβολίας θα είναι κοντινά συστήματα διπλών αστέρων όπως εκείνα που περιγράφαμε παραπάνω. Στα πρώτα τους στάδια, αυτά τα συστήματα θα παρουσιάζουν σχετικά μικρές τροχιακές συχνότητες. Συχνότητες στην περιοχή από 10^{-5} ως 10^{-1} Hz περίπου πρέπει να εμπίπτουν στις ανιχνευτικές δυνατότητες της LISA.

Στα ύστερα στάδια της ζωής τους, τα διπλά συστήματα τείνουν να εξελίσσονται ταχέως, με τα μέλη τους να πλησιάζουν σπειροειδώς μεταξύ τους. Κατά τη διάρκεια της εν λόγω διαδικασίας, η συχνότητα αυξάνεται ραγδαία και ο διπλός αστέρας «τερετίζει». Τελικά, τα δύο αντικείμενα που συγκροτούν το διπλό σύστημα συγχωνεύονται σε ένα σώμα. Τούτη τη φάση της υψησυχνής σπειροειδούς προσέγγισης, του τερετίσματος και της συγχώνευσης πρέπει να μπορεί να την παρατηρήσει το LIGO σε συχνότητες από 10 έως 1.000 Hz περίπου.

Δεδομένου ότι η διαδικασία της συγχώνευσης διακρίνεται για το δυναμισμό και τη βιαιότητά της, οι επιστήμονες προσδοκούν ότι θα παραγάγει άφθονη βαρυτική ακτινοβολία. Όπως ελπίζεται, μελετώντας αυτά τα βαρυτικά κύματα θα καταφέρουμε να πραγματοποιήσουμε τις πρώτες μας άμεσες παρατηρήσεις σχετικά με το τι συμβαίνει όταν συγκρούονται δύο σώματα μεγάλης μάζας, καθώς επίσης και με το πώς αναπαλλέται, τεντώνεται και δονεύται το τελικό αντικείμενο έως ότου καταλήξει στην τελική του κατάσταση. Σύντομοι παλμοί βαρυτικής ακτινοβολίας, όπως οι προερχόμενοι από εκρήξεις σουπερνόβα, είναι γνωστές ως αναλαμπές. Το να προβλέψουμε πώς μπορεί να φαίνονται οι αναλαμπές ακτινοβολίας από βίαια αστρονομικά γεγονότα όταν καταγράφονται από παρατηρητήρια βαρυτικών κυμάτων όπως το LIGO ή η LISA, συνιστά ένα πρόβλημα πρώτης προτεραιότητας για τη σύγχρονη θεωρητική φυσική, το οποίο μελετάται μέσω προηγμένων αριθμητικών προσομοιώσεων σε υπολογιστικά συστήματα υψηλών ταχυτήτων. Το κατά πόσον θα σταθούμε ικανοί να ανιχνεύσουμε πηγές αναλαμπών (η παρατήρησή τους παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερες δυσχέρειες απ' ό,τι εκείνη των διπλών συστημάτων που έχουν εισέλθει στη φάση της σπειροειδούς προσέγγισης) θα εξαρτηθεί τόσο από την ακριβή ισχύ της αναλαμπής ακτινοβολίας καθώς και από το πόσο απέχει από τη Γη το εκρηκτικό αστρονομικό γεγονός το οποίο τη δημιουργησε.

Το μέλλον

Λόγω της ασθενούς φύσης των βαρυτικών κυμάτων, οι αρχικές μας έρευνες με το LIGO ενδέχεται να αποβούν άκαρπες. Μια τέτοια τροπή των πραγμάτων θα οφείλεται κατά κύριο λόγο στους υφιστάμενους τεχνολογικούς περιορισμούς· ωστόσο, όσο θα βελτιώνονται η υπολογιστική ισχύς, η τεχνολογία των λείζερ και η κατανόησή μας για το φαινόμενο των βαρυτικών κυμάτων, θα δημιουργούνται οι προϋποθέσεις για την κατασκευή καλύτερων παρατηρητηρίων βαρυτικών κυμάτων. Μάλιστα, έχουν ήδη προταθεί σχέδια για την αναβάθμιση του LIGO σε LIGO II, η υλοποίηση των οποίων αναμένεται να μετατρέψει την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων σε υπόθεση ρουτίνας.

Όσον δε αφορά τα εγκατεστημένα στο Διάστημα παρατηρητήρια όπως η LISA, μπορεί να θεωρείται βέβαιο ότι θα καταφέρουν να παρατηρήσουν κοντινά διπλά συστήματα αλληλεπιδρώντων λευκών νάνων. Το πληστέρο εξ αυτών, ένα άστρο που ονομάζεται AM CVn, είναι ένας κατα-

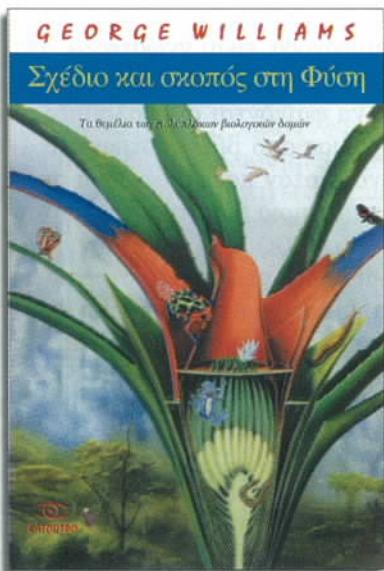
κλυσμικός μεταβλητός αστέρας ηλίου που βρίσκεται στον αστερισμό Θηρευτικοί Κύνες σε απόσταση 100 περίπου parsec από τη Γη, και ο οποίος φαίνεται ακόμη και με μικρά τηλεσκόπια. Δεδομένου ότι τα άστρα όπως ο AM CVn μπορούν να παρατηρηθούν με κοινά τηλεσκόπια, γνωρίζουμε πληθώρα λεπτομερειών για τις μάζες και τις τροχιές αυτών των διπλών συστημάτων. Ως εκ τούτου, γνωρίζουμε ποια μορφή αναμένεται να έχει το βαρυτικό σήμα, οπότε πιστεύουμε ότι θα μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε τέτοια άστρα σχεδόν αμέσως μόλις τεθεί σε λειτουργία η LISA.

Η μελέτη των βαρυτικών κυμάτων που καταφέρουν στη Γη από εκτεταμένες περιοχές του Σύμπαντος υπόσχεται να πυροδοτήσει μια επανάσταση στην αστροφυσική εξίσου θεαματική με εκείνη που προκάλεσε η άνοδος της αστρονομίας των ακτίνων X, των ραδιοκυμάτων και των ακτίνων γ. Αντίθετα με τα φωτόνια, τα βαρυτικά κύματα διαδίδονται πολύ εύκολα διαμέσου περιοχών που καταλαμβάνονται από πυκνό αέριο

και σκόνη. Βαρυτικά κύματα πρέπει να παράγονται και από τη μυστηριώδη «σκοτεινή ύλη» που φαίνεται να εκτείνεται σε μεγάλες εκτάσεις του Σύμπαντος· το σπουδαιότερο δε, τέτοια κύματα θα πρέπει να έχουν εκπεμφθεί και κατά τις πρώτες στιγμές μετά τη Μεγάλη Έκρηξη. Μελετώντας τούτο τον αξιοσημείωτο νέο τύπο ακτινοβολίας, οι αστροφυσικοί θα κατορθώσουν, για πρώτη φορά, να εισδύσουν στους πυκνούς πυρήνες των γαλαξιών, να παρατηρήσουν τη σπειροειδή προσέγγιση και τη σύγκρουση αστέρων νετρονίων χιλιάδες έτη φωτός από τον πλανήτη μας, και να μελετήσουν τις περιοχές που γειτνιάζουν στενά με τους ορίζοντες γεγονότων των μαύρων τρυπών. Η αστρονομία βαρυτικών κυμάτων θα μετατραπεί, όπως φαίνεται, σε ένα από τα πιο καυτά πεδία έρευνας καθώς εισερχόμαστε στον 21ο αιώνα. ◻

O Shane Larson είναι μεταδιδακτορικός συνεργάτης ερευνητής της NASA στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μονάνα και στο Εργαστήριο Αεριώθησης (JPL).

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



254 σελ., 14,5 × 21 εκ., 6.000 δρχ.

- «Ένα ακόμη απολαυστικό βιβλίο από τον Williams —τον εκπρόσωπο του Δαρβίνου επί της Γης.»

—Helena Cronin,
London School of Economics

George Williams

Σχέδιο και σκοπός στη φύση

Μπορεί να θεωρούμε πως ανήκουμε στο πλέον εξελιγμένο είδος του πλανήτη, ωστόσο είναι ο σχεδιασμός του σώματός μας και των λειτουργιών του ο καλύτερος δυνατός; Γιατί διαθέτουμε δύο μόνο μάτια, και μάλιστα στο μέτωπο, ενώ είναι προφανές ότι θα εποπτεύαμε πολύ καλύτερα τον γύρω χώρο με ένα ακόμη μάτι στο πίσω μέρος του κεφαλιού μας; Γιατί έχουμε σχεδιαστεί ώστε να τρώμε με ευχαρίστηση τροφές που περιέχουν ζάχαρη και λιπαρά όταν, όπως αποδεικνύεται, και τα δύο είναι επιβλαβή για την υγεία μας; Γιατί είμαστε τόσο ευάλωτοι στις ασθένειες; Γιατί, όσο γερνάμε, τα σώματά μας φθείρονται τόσο πολύ; Γιατί συνδέονται το αναπνευστικό και το πεπτικό μας σύστημα και κινδυνεύουμε να πνιγούμε κατά τη διάρκεια του φαγητού; Γιατί κατά τον τοκετό τα βρέφη χρησιμοποιούν το κολτικό πέρασμα διαμέσου της στενής λεκάνης και όχι τον κενό και πλατύ χώρο μεταξύ της λεκάνης, των πλευρών και του στέρνου; Ποιες είναι οι φιλοσοφικές συνεπαγωγές της μοχθηρότητας που επικρατεί στη Μητέρα Φύση; Και ποιες είναι οι σχετικές ηθικές πλάνες τις οποίες συντηρούν πολλές παραδοσιακές θρησκείες;

Στο παρόν βιβλίο, ο George Williams —ένας από τους σημαντικότερους εξελικτικούς βιολόγους της εποχής μας— φωτίζει τα ιδιαίτερα σχεδιαστικά χαρακτηριστικά των ανθρώπινων όντων, τις εντυπωσιακές προσαρμογές με τις οποίες μας έχει προικίσει η εξέλιξη και τους λόγους για τους οποίους εξελιχθήκαμε έτσι όπως έχουμε εξελιχθεί.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Κάτοπτρο

Για να περνά η ώρα

Σ211

Στη διάθεσή σας όλο το εικοσιτετράρο. Η βάρδια των υπαλλήλων της ρεσεψιόν ενός ξενοδοχείου διαρκεί από τις 8 π.μ. έως τις 8 μ.μ., ή από τις 8 μ.μ. έως τις 8 π.μ., ή από τις 8 π.μ. έως τις 8 π.μ. την άλλη μέρα. Στην πρώτη περίπτωση, το διάστημα μέχρι την επόμενη βάρδια του υπαλλήλου πρέπει να είναι τουλάχιστον 24 ώρες, στη δεύτερη περίπτωση τουλάχιστον 36 ώρες, και στην τρίτη τουλάχιστον 60 ώρες. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος υπαλλήλων που χρειάζονται για να λειτουργεί η ρεσεψιόν του ξενοδοχείου σε 24-ωρη βάση;



Σ213

Το κυνήγι της πάπιας. Επί πολλά χρόνια, ο βαρόνος Μινχάουζεν πήγαινε καθημερινά στη λίμνη για να κυνηγήσει πάπιες. Την 1η Αυγούστου του 2000 είπε στο μάγειρά του: «Σήμερα πέτυχα περισσότερες πάπιες απ' ό,τι προχθές, αλλά λιγότερες από όσες την ίδια ημέρα την προηγούμενη εβδομάδα.» Επί πόσες ημέρες μπορεί να ισχυρίζεται αυτό το πράγμα ο βαρόνος; (Θυμηθείτε ότι ο βαρόνος δεν λέει ποτέ ψέματα.)



Σ215

Τρικυμία. Γιατί «συστρέφεται» το νερό στην κορυφή των κυμάτων όταν αυτά πλησιάζουν στην παραλία;



Σ212

Πρώτοι σε γλύκα. Ένα σακούλι περιέχει 101 καραμέλες. Η Κυριακή και η Κατερίνα παίζουν ένα παιχνίδι. Παίρνουν εναλλάξ από μία έως δέκα καραμέλες από τη σακούλα (η Κυριακή ξεκινά πρώτη). Μόλις αδειάσει η σακούλα, μετρούν πόσες καραμέλες έχει πάρει συνολικά καθεμιά. Αν το αποτέλεσμα είναι δύο πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί, νικήτρια είναι η Κυριακή· διαφορετικά κερδίζει η Κατερίνα. Ποια θα κερδίσει αυτό το παιχνίδι και τι στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει;



Σ214

Σκακιστικός μαραθώνιος. Διάφοροι σκακιστές έπαιζαν σκάκι στο πάρκο όλη την ημέρα. Επειδή είχαν μόνο μία σκακιέρα, όρισαν τους εξής κανόνες: Ο νικητής μίας παρτίδας δεν έπαιζε για τις επόμενες δύο, ενώ ο ηττημένος δεν έπαιζε για τις επόμενες τέσσερις. Πόσοι παίκτες συμμετείχαν στο πρωτάθλημα, αφού κατάφεραν να ακολουθήσουν αυτούς τους κανόνες; (Όταν η παρτίδα έληγε ισόπαλη, ηττημένος εθεωρείτο ο παίκτης που έπαιζε με τα άσπρα.)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Καταμέτρηση τριγώνων

Βρείτε την απάντηση ανάμεσα σε ένα πλήθος ευθειών

A. Kanel και A. Kovaldzhi

ΔΟΥ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΟΥ ΔΗΜΟΣΙΕΥΤΗΚΕ στο *Kvant* στις αρχές της δεκαετίας του 1970:

Δίνονται η ευθείες σε γενική θέση στο επίπεδο (δηλαδή, δεν υπάρχουν τρεις που να συντρέχουν στο ίδιο σημείο, ούτε δύο που να είναι παράλληλες μεταξύ τους). Οι ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε τμήματα. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε τούτα τα τμήματα υπάρχουν τουλάχιστον (a) $n/3$ τρίγωνα, (β) $(n - 1)/2$ τρίγωνα, και (γ) $n - 2$ τρίγωνα.

Θέλουμε να βρούμε το ακριβές πλήθος των τριγώνων (εδώ θεωρούμε ότι τα τρίγωνα δεν τέμνονται από άλλες δοθείσες ευθείες). Το πρόβλημα είχε τεθεί ήδη από το 1870, και η διατύπωσή του φαίνεται απλή και ελκυστική. Και όμως, είναι τόσο δύσκολο ώστε παρέμεινε άλυτο για περισσότερο από εκατό χρόνια. Το πρόβλημα σε παρασύρει: Πιστεύεις ότι έφτασες στο κατώφλι της λύσης, αλλά κάθε «Εύρηκα!» που αναφωνείς καταλήγει να προστεθεί στον κατάλογο των αδιόρατων σφαλμάτων.

Η πρώτη λύση βρέθηκε το 1979 από τους διάσημους μαθηματικούς Grünbaum και Sheppard. Σε αυτό το άρθρο θα παρουσιάσουμε μια συντομότερη, στοιχειώδη λύση, που ανακάλυψε ο A. Kanel. Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να την παρουσιάσουμε μέσα σε τρεις παραγράφους, αλλά μια τόσο συνοπτική προ-

σέγγιση δεν θα βοηθούσε τον αναγνώστη να κατανοήσει την ουσία του προβλήματος. Γι' αυτό το λόγο, θα προσπαθήσουμε να παρακολουθήσουμε τα βήματα που οδηγούν στη λύση και να αποκαλύψουμε το «κλειδί» της ιδέας. Μερικές φορές θα ακολουθήσουμε πλάγια οδό για να λύσουμε ένα τελείως διαφορετικό πρόβλημα με μια τεχνική που θα βοηθήσει στην αντιμετώπιση του αρχικού.

Απλοποιημένη διατύπωση

Το επόμενο πρόβλημα προτάθηκε στη Μαθηματική Ολυμπιάδα της Μόσχας του 1972.

Πρόβλημα 1. Δίνονται 3.000 ευθείες στο επίπεδο, έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρεις από αυτές που να συντρέχουν στο ίδιο σημείο ούτε να υπάρχουν δύο παράλληλες μεταξύ τους. Οι ευθείες αυτές χωρίζουν το επίπεδο σε τμήματα. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε αυτά τα τμήματα υπάρχουν τουλάχιστον (a) 1.000 τρίγωνα και (β) 2.000 τρίγωνα.

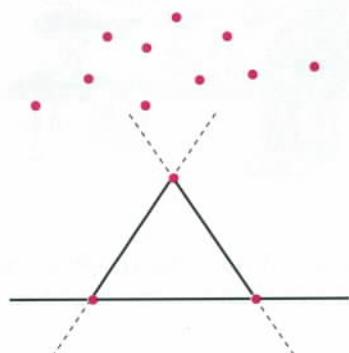
Λύση. Προφανώς, το μέρος (α) αυτού του προβλήματος συμπίπτει με το μέρος (α) του προβλήματος που διατυπώσαμε στην αρχή του άρθρου για $n = 3.000$, ενώ το μέρος (β) είναι μια ισχυρότερη διατύπωση του μέρους (β) του ίδιου προβλήματος, αφού $2.000 > (3.000 - 1)/2$.

Ας αρχίσουμε με μια βασική ιδέα. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ευθεία

υπάρχει ένα τουλάχιστον προσκείμενο τριγωνικό τρίγωνο (δηλαδή, ένα τρίγωνο με πλευρά που ανήκει σε αυτή την ευθεία). Αν καταφέρουμε να αποδείξουμε αυτό το γεγονός, θα έχουμε αποδείξει το μέρος (α), διότι κάθε τρίγωνο πρόσκειται σε τρεις ευθείες.

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε, για κάθε ευθεία, ένα τρίγωνο που πρόσκειται σε αυτή και δεν τέμνεται από άλλες ευθείες. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μια κομψή ιδέα: Θεωρούμε εκείνο το σημείο τομής κάποιων άλλων ευθειών το οποίο είναι το πλησιέστερο στην ευθεία (Σχήμα 1). Οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν ότι αυτό το σημείο μπορεί να επλεγεί ως κορυφή του επιθυμητού τριγώνου.

Για να αποδείξουμε το μέρος (β), αρκεί να βρούμε, για κάθε ευθεία, έ



Σχήμα 1
Το πλησιέστερο σημείο τομής.



να επιπλέον τρίγωνο προσκείμενο σε αυτή. Κάτι τέτοιο φαίνεται απλό. Πράγματι, κάθε ευθεία διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Θα μπορούσαμε ίσως να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ευθεία ένα τρίγωνο από κάθε ημιεπίπεδο. Δυστυχώς, αν επιλέξουμε μια συγκεκριμένη ευθεία, μπορεί όλες οι άλλες ευθείες να τέμνονται στο ένα από τα ημιεπίπεδα που ορίζει. Πόσο συχνά μπορεί να εμφανιστεί μια τέτοια «κακιά» περίπτωση; Ας κάνουμε μια εκτίμηση.

Είναι προφανές ότι μπορεί να εμφανιστούν τρεις κακές ευθείες. Ευτυχώς, αυτή συνιστά τη χειρότερη περίπτωση (όταν το συνολικό πλήθος των ευθειών είναι τρία). Αν $n > 3$, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν το πολύ δύο κακές ευθείες. Ιδού μια απόδειξη του γεγονότος.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τρεις κακές ευθείες. Φέρουμε αυτές τις τρεις ευθείες και μία ακόμη τυχαία ευθεία. Σε κάθε περίπτωση, νέα σημεία τομής εμφανίζονται και στις δύο πλευρές κάθε κακιάς ευθείας. Πράγματι, η τέταρτη ευθεία τέμνει και τις τρεις δεδομένες ευθείες, και ένα από τα τρία σημεία τομής βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο. Έχουμε καταλήξει σε αντίφαση, και τούτο αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Επομένως, για $n > 3$, υπάρχουν το πολύ δύο ευθείες που πρόσκεινται σε ένα μόνο τρίγωνο: όλες οι άλλες ευθείες πρόσκεινται σε δύο τουλάχιστον τρίγωνα. Μπορούμε τώρα να κάνουμε μια εκτίμηση του πλήθους των τριγώνων. Είναι ίσο τουλάχιστον με $(2n - 2)/3$. Αν $n = 3.000$, βρίσκουμε 1.999,33. Όμως, το πλήθος των τριγώνων είναι ακέραιος αριθμός. Επομένως, υπάρχουν τουλάχιστον 2.000 τρίγωνα.

Ταυτόχρονα, αποδείξαμε μια ισχυρότερη εκδοχή του μέρους (β) του αρχικού προβλήματος, διότι $2(n - 1)/3 > (n - 1)/2$.

Ιδού διάφορες ασκήσεις οι οποίες σχετίζονται με το πρόβλημα που λύσαμε.

Ασκήσεις

1. Δίνονται n επίπεδα στη γενική θέση στο χώρο (δηλαδή, τέτοια ώστε οποιαδήποτε τέσσερα από αυτά να σχηματίζουν τετράεδρο). Τα επίπεδα

διαιρούν το χώρο σε διάφορα τμήματα. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε αυτά τα τμήματα υπάρχουν τουλάχιστον (α) $n/4$ τετράεδρα (για $n \geq 4$), και (β) $(2n - 3)/4$ τετράεδρα (για $n \geq 5$).

2. (Αυτό το πρόβλημα εκμεταλλεύεται την ιδέα του «πλησιέστερου σημείου».) Δίνονται n ευθείες του επιπέδου ($n \geq 3$), οι οποίες τέμνονται ανά δύο ενώ από κάθε σημείο τομής διέρχονται τουλάχιστον τρεις ευθείες. Αποδείξτε ότι όλες οι δεδομένες ευθείες συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

3. Δίνονται n επίπεδα στο χώρο τα οποία ανά τρία έχουν ένα κοινό σημείο ενώ από κάθε σημείο τομής διέρχονται τουλάχιστον τέσσερα επίπεδα. Αποδείξτε ότι όλα τα δεδομένα επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο.

Ακριβής εκτίμηση, αδιόρατα σφάλματα

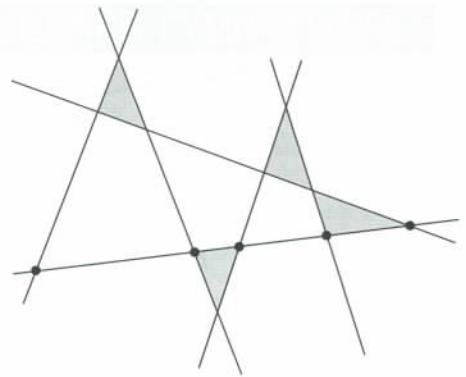
Σε αυτό το μέρος του άρθρου θα θέσουμε το βασικό πρόβλημα:

Δίνονται n ευθείες του επιπέδου στη γενική θέση (δηλαδή, οποιαδήποτε τρία από τις σημειώσεις τρίγωνο). Αυτές χωρίζουν το επίπεδο σε διάφορα τμήματα. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε αυτά τα τμήματα υπάρχουν τουλάχιστον $n - 2$ τρίγωνα και ότι η εκτίμηση αυτή είναι ακριβής.

Ασκητής 4. Σχεδιάστε n ευθείες στη γενική θέση στο επίπεδο έτσι ώστε να σχηματίζουν $n - 2$ τριγωνικά τμήματα.

Βάση των πρώτων προσπαθειών ακριβούς εκτίμησης ήταν η παρατήρηση ότι ένα τρίγωνο δεν μπορεί να καταστραφεί. Με αυτό εννοούμε ότι, αν έχουμε συγκεκριμένο πλήθος ευθειών στο επίπεδο, τότε κάθε καινούργια ευθεία που φέρουμε χωρίζει κάθε τρίγωνο που τέμνει σε δύο μέρη, το ένα από τα οποία είναι οπωδήποτε τρίγωνο. (Ισχύει η αντίστοιχη πρόταση στην περίπτωση της τομής ενός τετραέδρου από ένα επίπεδο;)

Ιδού μια κομψή αλλά εσφαλμένη «λύση»: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n ευθείες του επιπέδου στη γενική θέση και ότι καταφέρνουμε να βρούμε $n - 2$ τριγωνικά τμήματα. Αν σχεδιάσουμε μια νέα ευθεία, δεν θα καταστρέψουμε κανένα από αυτά τα τρί-



Σχήμα 2

Όταν μια ευθεία τέμνει ένα τρίγωνο, αποτέλεσμα είναι ένα μικρότερο τρίγωνο.

γωνα, ενώ το «πλησιέστερο σημείο» στη νέα ευθεία μάς προσφέρει ένα νέο τρίγωνο. Απομένει να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $n - 2$ τρίγωνα. Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια τυχαία ευθεία. Οι άλλες ευθείες την τέμνουν σε $n - 1$ σημεία, τα οποία ορίζουν $n - 2$ τμήματα. Οι ευθείες που διέρχονται από τα άκρα αυτών των τμημάτων σχηματίζουν $n - 2$ τρίγωνα (Σχήμα 2).

Ασκητής 5. Βρείτε το σφάλμα σε αυτή τη «λύση».

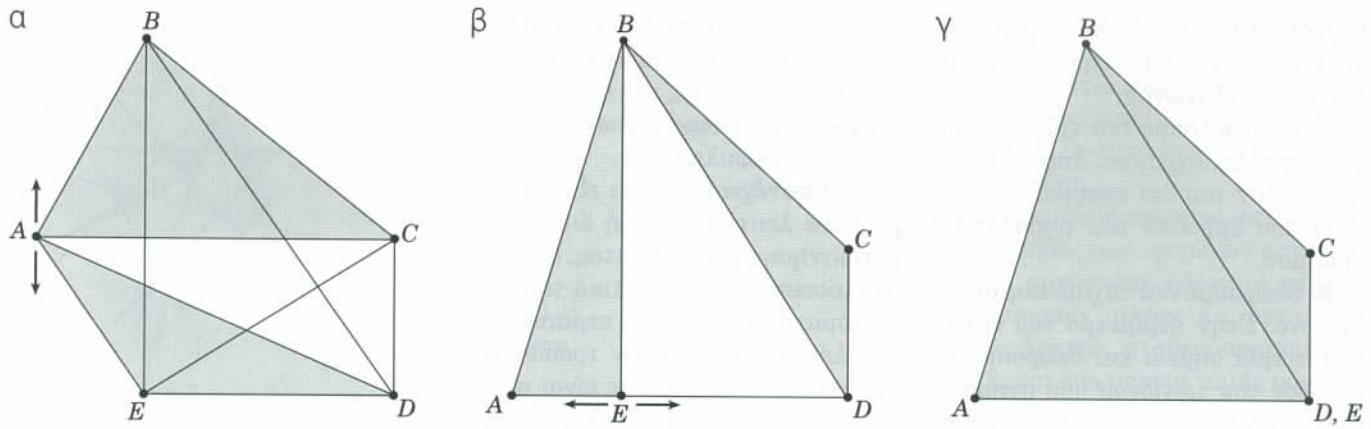
Απόπειρα χρήσης της τέλειας επαγωγής

Αφού τα τρίγωνα δεν καταστρέφονται, φαίνεται λογικό να χρησιμοποιήσουμε τέλεια επαγωγή —παραδείγματος χάριν, για να αποδείξουμε ότι η προσθήκη μίας επιπλέον ευθείας αυξάνει το πλήθος των τριγώνων.

Αυτή η πορεία συλλογισμού οδήγησε σε πολλά σφάλματα. Και τούτο επειδή η βασική της υπόθεση είναι λανθασμένη: Η προσθήκη μίας ευθείας δεν αυξάνει υποχρεωτικά το πλήθος των τριγώνων.

Ασκητής 6. Σχεδιάστε διάφορες ευθείες στη γενική θέση στο επίπεδο, έτσι ώστε η αφαίρεση μίας από αυτές να μη μειώνει το πλήθος των τριγώνων.

Έγιναν προσπάθειες να αποδειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε μία από τις ευθείες η αφαίρεση της οποίας μειώνει το πλήθος των τριγώνων (γεγονός που θα επέτρεπε τη χρήση της τέλειας επαγωγής). Όμως, το πρόβλημα τελικά αντιμετωπίστηκε με άλλες με-



Σχήμα 3
Εκφυλισμός (απλοποίηση) ενός πενταγώνου.

θόδους. Το ερώτημα αν υπάρχει πάντοτε μια τέτοια ευθεία παραμένει αναπάντητο.

Επομένως, η προσθήκη και η αφαίρεση ευθειών δεν ωφελεί. Θα προσπαθήσουμε να ακολουθήσουμε μια άλλη πορεία συλλογισμού.

Ακραίες καταστάσεις

Η έννοια της γενικής θέσης στο επίπεδο προκύπτει από την επιθυμία αποφυγής εκφυλισμένων περιπτώσεων. Η ίδια η λέξη «εκφυλισμένη» παραπέμπει σε κάτι παθολογικό, σε κάτι που πρέπει να αποφευχθεί. Εντούτοις, η ιδέα του εκφυλισμού είναι αυτή που προσφέρει τη βάση για τη λύση του προβλήματος των τριγώνων. Θα κάνουμε μια μικρή παρέκβαση και θα εξετάσουμε ένα νέο πρόβλημα, το οποίο δεν συνδέεται άμεσα με αυτό που μας απασχολεί. Η λύση του θα επιδείξει την ιδέα της «ακραίας κατάστασης».

Πρόβλημα 2. Σε ένα κυρτό πεντάγωνο κάθε διαγώνιος ορίζει ένα τρίγωνο. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των εμβαδών αυτών των τριγώνων είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του πενταγώνου.

Λύση. Είναι μάλλον δύσκολο να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση ενός τυχαίου πενταγώνου. Ίσως είναι δυνατόν να «απλοποιήσουμε» την κατάσταση —όχι εξετάζοντας μια ειδική περίπτωση (κάτι που μπορεί επίσης να φανεί χρήσιμο), αλλά αναγνωρίζοντας τη γενική λύση στη λύση μιας ειδικής περίπτωσης.

Ας μετακινήσουμε την κορυφή ε-

νός τριγώνου κατά μήκος μιας ευθείας παράλληλης προς τη βάση του (Σχήμα 3). Τότε, το εμβαδόν αυτού του τριγώνου και του πενταγώνου παραμένουν σταθερά, αλλά τα εμβαδά των γειτονικών τριγώνων αλλάζουν.

Η ιδέα-«κλειδί» είναι η εξής: εάν μετακινήσουμε την κορυφή ενός τριγώνου κατά μήκος μιας ευθείας, το εμβαδόν του είτε συνεχώς αυξάνεται είτε συνεχώς μειώνεται είτε παραμένει σταθερό. Πράγματι, η βάση του παραμένει η ίδια, ενώ το ύψος είτε συνεχώς αυξάνεται είτε συνεχώς μειώνεται είτε παραμένει σταθερό. Μπορούμε να πούμε και κάτι περισσότερο: Αν η κορυφή κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος μιας ευθείας, τότε και το εμβαδόν του τριγώνου μεταβάλλεται με σταθερή ταχύτητα.

Επομένως, και το άθροισμα των εμβαδών όλων των τριγώνων μεταβάλλεται με σταθερή ταχύτητα. Θα ήταν καλό να μειώνεται το άθροισμα, διότι ελπίζουμε να αποδείξουμε την ανισότητα για το νέο πεντάγωνο και, σε αυτή την περίπτωση, η ανισότητα θα ίσχυε και για το αρχικό.

Τι θα κάνουμε όμως στην περίπτωση που το συνολικό εμβαδόν των τριγώνων αυξάνεται; Είναι απλό: θα μετακινήσουμε την κορυφή προς την αντίθετη κατεύθυνση, και το εμβαδόν θα μειωθεί.

Πόσο μακριά θα μετακινήσουμε την πρώτη κορυφή; Θέλουμε βεβαίως το πεντάγωνο να παραμείνει κυρτό. Ας μετακινήσουμε την κορυφή όσο το δυνατόν πιο μακριά χωρίς το

πεντάγωνο να χάσει αυτή την ιδιότητα. Τότε, μία από τις γωνίες του πενταγώνου (αυτή στην κορυφή E του Σχήματος 3a) θα γίνει 180° . Σε αυτή την ακραία θέση, το πεντάγωνο καταλήγει σε ένα απλούστερο σχήμα: έχει γίνει τετράπλευρο.

Επαναλαμβάνουμε τώρα τη διαδικασία για την κορυφή της ευθείας γωνίας. Όταν φτάσει στην ακραία της θέση, θα συμπέσει με μία από τις γειτονικές της κορυφές.

Μπορούμε να μετακινήσουμε και άλλο τις κορυφές, έως ότου το πεντάγωνο γίνει τρίγωνο (με δύο διπλές ή μία τριπλή κορυφή). Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο, διότι τα τρίγωνα EAB και BCD καλύπτουν ήδη ολόκληρο το πεντάγωνο.

Επομένως, η απόδειξη για το αρχικό πεντάγωνο ανάγεται σε μια ειδική (εκφυλισμένη!) περίπτωση, η οποία λύνεται πολύ εύκολα.

Παρατήρηση. Οι κορυφές του πενταγώνου μπορούν να μετακινηθούν πάνω σε τυχαίες ευθείες. Τότε, όλα τα εμβαδά θα μεταβάλλονται γραμμικά (δηλαδή, με σταθερή ταχύτητα), και το μόνο που χρειάζεται να εξασφαλίσουμε είναι ότι η διαφορά μεταξύ του συνολικού εμβαδού των τριγώνων και του εμβαδού του πενταγώνου (που επίσης μεταβάλλεται γραμμικά) μειώνεται.

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να λύσουμε ένα πλήθος προβλημάτων.

Ασκήσεις

7. Κάθε τρεις προσκείμενες κορυφές ενός κυρτού εξαγώνου σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Το άθροισμα των

εμβαδών όλων αυτών των τριγώνων είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το εμβαδόν του εξαγώνου;

8. Αποκόπτουμε ένα τρίγωνο από ένα παραλληλόγραμμο. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του δεν υπερβαίνει το ήμιου του εμβαδού του παραλληλογράμμου.

9. Θεωρούμε ένα τυχαίο κυρτό πολύγωνο. Στην περίμετρό του επιλέγουμε τρία σημεία και θεωρούμε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν σχηματίζεται όταν τα επιλεγόμενα σημεία συμπίπτουν με τρεις κορυφές του πολυγώνου.

10. Τοποθετούμε ένα κυρτό στερεό στο εσωτερικό ενός κύβου. Τυχαίνει η προβολή αυτού του στερεού σε οποιαδήποτε έδρα του κύβου να καλύπτει την εν λόγω έδρα. Αποδείξτε ότι ο όγκος του στερεού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ενός τρίτου του όγκου του κύβου.

11. Αν μπορούμε να διαλέξουμε η σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, ποιο είναι το μέγιστο δυνατό άθροισμα των αποστάσεων μεταξύ όλων αυτών των σημείων, λαμβανομένων ανά δύο;

12. Αποδείξτε ότι η γραμμική συνάρτηση $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$, με πεδίο ορισμού όλα τα σημεία (x, y, z) στο εσωτερικό ενός κυρτού πολυέδρου, λαμβάνει το μέγιστό της σε μια κορυφή του πολυέδρου.

13. Ο Αλί Μπαμπά έφτασε σε μια σπηλιά όπου υπάρχει χρυσάφι, διαμάντια και ένα μπαούλο. Αν το μπαούλο γεμίσει χρυσάφι, ζυγίζει 200 κιλά. Αν γεμίσει με διαμάντια, ζυγίζει 40 κιλά (θεωρήστε ότι το άδειο μπαούλο δεν έχει βάρος). Ένα κιλό χρυσάφι αξίζει 20 λίρες, και ένα κιλό διαμάντια 60 λίρες. Πόση είναι η αξία του θησαυρού που μπορεί να πάρει μαζί του ο Αλί Μπαμπά αν καταφέρει να μεταφέρει μόνο 100 κιλά;

Έχοντας εμπνευστεί από τη «μέθοδο των άκρων», μπορούμε να επιστρέψουμε στο αρχικό μας πρόβλημα. Σε όλα αυτά τα προβλήματα, τρεις ιδέες αποδείχθηκαν χρήσιμες: (1) η αναγωγή της γενικής περίπτωσης σε μια ειδική, μέσω της μετακίνησης μερικών στοιχείων του σχήματος, (2) η επιλογή ενός τρόπου μετακίνησης

του σχήματος με σταθερή ταχύτητα, που είχε ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της κατάστασης, και (3) η θεωρηση ακραίων καταστάσεων, που συχνά είναι εκφυλισμένες.

Στη συνέχεια, δεν θα εξετάσουμε με κάθε λεπτομέρεια τη διαδικασία μετακίνησης του σχήματος, αλλά θα αναλύσουμε μόνο τα τελικά της αποτελέσματα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, το πλήθος των δυνατών τρόπων μετακίνησης του σχήματος είναι πράγματι τεράστιο, αλλά το τελικό αποτέλεσμα μιας τέτοιας κίνησης μπορεί να αναλυθεί με απλό τρόπο.

Έτσι, στη συνέχεια

(1) θα μετακινήσουμε τις ευθείες έτσι ώστε η αμοιβαία διευθέτηση τους να μας εξυπηρετεί όσο το δυνατόν περισσότερο,

(2) θα χρησιμοποιήσουμε γραμμική κίνηση —δηλαδή, παράλληλη μετατόπιση με σταθερή ταχύτητα, και

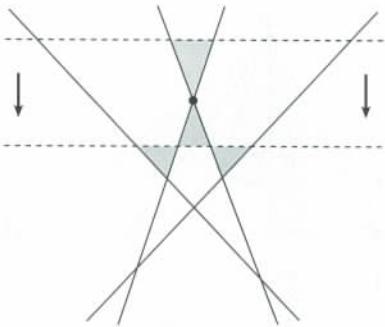
(3) θα αναλύσουμε ακραίες περιπτώσεις της αμοιβαίας διευθέτησης των ευθειών.

Ένα σχέδιο δράσης

Η επιχειρηματολογία που ακολουθεί δεν περιλαμβάνεται στην τελική λύση. Αξίζει όμως να την παρακολουθήσουμε για τρεις λόγους. Ο πρώτος είναι ότι μας δείχνει με ποιον τρόπο οδηγηθήκαμε στη λύση. Ο δεύτερος, ότι παρόμοια επιχειρηματολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση πολλών γνωστών προβλημάτων. Και ο τρίτος, ότι μας βοηθά να δούμε πως «ξακαθαρίζει» η λύση. Σε αυτό το τμήμα του άρθρου θα εκφράσουμε την κατάσταση περισσότερο διαισθητικά. Αργότερα, η επιχειρηματολογία μας θα γίνει πιο αυστηρή, και τέλος θα δώσουμε μια σύντομη, τυπική απόδειξη.

Πού ζουν τα τρίγωνα;

Όλες οι προσπάθειές μας για συστηματική περιγραφή των διευθετήσεων των ευθειών μας έχουν αποτύχει. Ο λόγος είναι απλώς ότι το πλήθος τους είναι τεράστιο. Ας προσπάθησουμε λοιπόν να μετακινήσουμε τις ευθείες. Για να εξασφαλίσουμε τη γραμμικότητα, θα τις μετακινήσουμε παράλληλα προς τον εαυτό τους. Τι μπορεί να συμβεί κατά τη διάρ-



Σχήμα 4

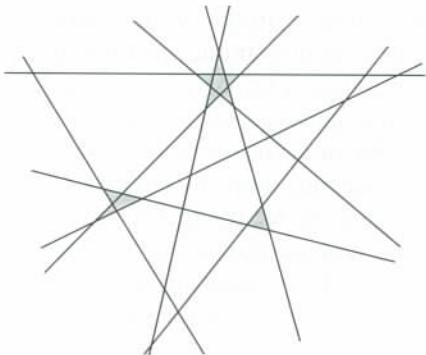
Καθώς μετακινούνται οι διακεκομμένες ευθείες, ένα τρίγωνο καταστρέφεται και άλλα τρίγωνα δημιουργούνται.

κεια μιας τέτοιας κίνησης;

Μέχρι τη στιγμή που οι ευθείες θα φτάσουν σε σημείο τομής άλλων ευθειών, η συνολική εικόνα δεν αλλάζει. Μόλις όμως συγχωνευτούν διάφορα σημεία τομής, επέρχεται μια «καταστροφή» —ένα ή περισσότερα τρίγωνα εξαφανίζονται. Όταν οι ευθείες μετακινηθούν και άλλο, έχουμε μια αναδιοργάνωση, τα αποτέλεσμα της οποίας είναι δύσκολο να προβλεφθούν (Σχήμα 4).

Δεν θέλουμε να κάνουμε «ζημιές», και έτσι θα σταματήσουμε να μετακινούμε τις ευθείες στα πρόθυρα ακριβώς της καταστροφής, όταν δηλαδή τα τρίγωνα δεν έχουν ακόμα εξαφανιστεί η δημιουργήθει, αλλά έχουν γίνει πολύ μικρά. Θα ονομάσουμε εστία τη διευθέτηση που έχουν διάφορες ευθείες ακριβώς πριν τη συγχώνευση των σημείων τομής. Επομένως, η εστία σχηματίζεται από ένα πλήθος ευθειών, τα σημεία τομής των οποίων βρίσκονται σε μια μικρή περιοχή, σχεδόν σημειακή, η οποία δεν διατρέχεται από άλλες ευθείες (Σχήμα 5).

Για την ανάλυση μας είναι ιδιαίτερα σημαντικό το γεγονός ότι η γειτονική περιοχή μιας εστίας αποτελεί μικρογραφία μιας διαμέρισης του επιπέδου από ένα μικρότερο πλήθος ευθειών. Με άλλα λόγια, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τις εστίες ως μικρούς απομονωμένους «κόσμους» που κατοικούνται από μινιατούρες τριγώνων. Επομένως, αν καταφέρουμε να αναλύσουμε τη συνολική εικόνα σε εστίες, η απαρίθμηση των τριγώνων θα είναι ευκολότερη. Και μάλιστα, αν θελήσουμε να εισαγάγουμε



Σχήμα 5
Εστίες.

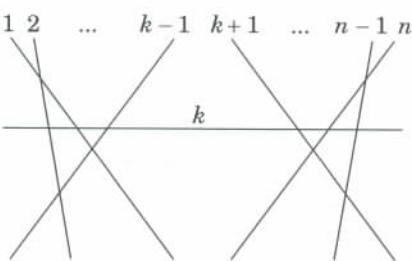
μια επαγωγική υπόθεση (πράγμα που πρόκειται να γίνει σύντομα), θα μπορέσουμε ακόμα και να υποθέσουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί για ένα μικρότερο πλήθος ευθειών.

Επιστροφή στην τέλεια επαγωγή

Ας προχωρήσουμε σε τέλεια επαγωγή. Η επαγωγική υπόθεσή μας θα είναι ότι οποιοδήποτε σύνολο k ευθειών ($k < n$) διαιρεί το επίπεδο σε τμήματα, ανάμεσα στα οποία υπάρχουν τουλάχιστον $k - 2$ τρίγωνα. Έτσι, όταν αναλύσουμε μια εστία που σχετίζεται με $k < n$ ευθείες, θα είμαστε βέβαιοι ότι στη γειτονιά αυτής της εστίας υπάρχουν τουλάχιστον $k - 2$ τρίγωνα.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μετακινώντας τις ευθείες καταφέραμε να τις συγκεντρώσουμε σε δύο εστίες με μια κοινή ευθεία, από τις οποίες η μία σχετίζεται με τις ευθείες 1 έως k και η άλλη με τις ευθείες k έως n (η ευθεία k είναι κοινή και στις δύο εστίες —βλ. Σχήμα 6).

Τότε, το συνολικό πλήθος των τριγώνων και στις δύο ευθείες είναι τουλάχιστον $(k - 2) + (n - k + 1 - 2) = n - 3$. Για να κάνουμε το επαγωγικό βήμα, απομένει να βρούμε ένα επιπλέον τρίγωνο έξω από τις εστίες —κάτι που μπορεί να επιτευχθεί. Όμως, μπορούμε πάντα να συγκεντρώσουμε όλες τις ευθείες σε δύο εστίες; Δυστυχώς, δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι αυτό είναι δυνατόν· και αν υπάρχουν πολλές εστίες, εμφανίζεται μια μεγάλη ποικιλία περιπτώσεων. Τι μπορούμε να κάνουμε σε τέτοιες καταστάσεις;



Σχήμα 6
Δύο εστίες.

Τα όρια του δυνατού

Ας αναλύσουμε τον τρόπο σχηματισμού των εστιών. Αρχικά, οι ευθείες μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα, αλλά, από τη στιγμή που δημιουργείται μια εστία, πρέπει να διατηρηθεί. Δηλαδή, οι ευθείες που συνδέονται με την εν λόγω εστία επιτρέπεται να κινηθούν μόνο από κοινού, σαν σκαντζόχοιρος (δεν πρέπει να επιτρέψουμε στις ευθείες της εστίας να μετακινούνται η μία σε σχέση με την άλλη, διότι μπορεί να συμβεί μια καταστροφή εξαιτίας της οποίας η εστία θα πάψει να αποτελεί μικρογραφία ανάλυσης του επιπέδου). Οι εστίες είναι «ψευδοσημεία», επομένως μπορεί να μεγεθυνθούν με την προσθήκη νέων ευθειών ή να συνδεθούν μεταξύ τους σχηματίζοντας νέα «ψευδοσημεία». Η διατήρηση των εστιών θέτει ολοένα και αυστηρότερους περιορισμούς στην κίνηση των ευθειών, έως ότου καταστεί αδύνατη η οποιαδήποτε μετακίνησή τους.

Κατά τη διαδικασία αυτή, πρέπει να αποφύγουμε τη σμίκρυνση όλης της εικόνας σε μία μόνο εστία (για να είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τέλεια επαγωγή για το πλήθος των ευθειών). Για παράδειγμα, αρκεί να σταθεροποιήσουμε δύο σημεία έτσι ώστε να μην μπορούν να μετακινηθούν και να αποτελέσουν τμήμα της ίδιας εστίας.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να καταλάβουμε με ποιον τρόπο συνδέονται οι ταχύτητες μετακίνησης των ευθειών που ανήκουν σε μία εστία. Δύο ευθείες μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα αν οι ταχύτητες των υπολοίπων ρυθμιστούν κατάλληλα (θεωρήστε την περίπτωση των τριών ευθειών). Με άλλα λόγια, για να διατηρηθεί μια εστία με k ευθείες, απαιτού-

νται $k - 2$ περιορισμοί στις ταχύτητες. Όμως, από την υπόθεσή μας, σε αυτή την εστία υπάρχουν $k - 2$ τρίγωνα —όσοι ακριβώς είναι και οι περιορισμοί. Σε αυτό το γεγονός στηρίζεται η λύση.

Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το πλήθος των τριγώνων κατά την τελική κατάσταση (όταν οι ευθείες δεν μπορούν πλέον να μετακινηθούν). Αρχικά, σταθεροποιούμε μια ευθεία και δύο σημεία τομής πάνω σε αυτή —δηλαδή, τρεις ευθείες. Έχουμε $n - 3$ ευθείες ελεύθερες, και αρχίζουμε να τις μετακινούμε όσο αυτό είναι δυνατόν. Για να διατηρηθεί η εστία, απαιτούνται $n - 3$ περιορισμοί. Βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, το πλήθος των τριγώνων σε κάθε εστία είναι τουλάχιστον ίσο με το πλήθος των περιορισμών. Επομένως, υπάρχουν τουλάχιστον $n - 3$ τρίγωνα.

Η τελευταία πινελιά

Απομένει να βρούμε ένα ακόμη τρίγωνο —μόλις ένα τρίγωνο, κάπου μεταξύ των εστιών. Ο τρόπος όμως που θα βρεθεί δεν είναι προφανής. Ας σκεφτούμε ξανά το ζήτημα: Αν χρειαζόμαστε ένα ακόμη τρίγωνο, γιατί να ψάξουμε γι' αυτό; Γιατί να μη διευθετήσουμε έτσι την κατάσταση ώστε να υπάρχει από την αρχή; Σε τελική ανάλυση, δεν μας ενδιαφέρει ποιες είναι οι τρεις ευθείες που σταθεροποιούμε αρχικά. Επομένως, μπορούμε να σταθεροποιήσουμε τρεις ευθείες που ήδη σχηματίζουν τρίγωνο! Συνεπώς, το πρόβλημα λύθηκε.

Κατασκευή της λύσης

Η εργασία μας απέχει πολύ από το να θεωρηθεί ολοκληρωμένη. Η επιχειρηματολογία μας πρέπει να ξεκαθαρίσει, να βελτιωθεί και να γίνει αυστηρή. Είναι ομαντικό να αποκαλύψουμε τη σχέση μεταξύ των τριγώνων και εστιών, και ειδικότερα να καταλάβουμε γιατί το πλήθος των τριγώνων μιας εστίας είναι τουλάχιστον ίσο με το πλήθος των περιορισμών που απαιτούνται για τη διατήρηση της εστίας.

Άσκηση 14. (Η συγκεκριμένη άσκηση χρησιμοποιεί την ιδέα της εστίας.) Μετακινώντας μία μόνο ευθεία, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τρί-

γωνο προσκείμενο σε αυτή.

Έτοι, αποφασίσαμε να διατηρήσουμε ένα τρίγωνο από την αρχή της διαδικασίας, εξασφαλίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο ότι δεν θα συμβεί καμία καταστροφή και δεν θα εμφανιστεί κάποιο τρίγωνο εξώ από όλες τις εστίες. Μήπως όμως είναι δυνατόν να διατηρήσουμε όλα τα τρίγωνα, δίνοντας ίσα δικαιώματα σε καθένα από αυτά; Σε αυτή την περίπτωση, δεν πρόκειται να εμφανιστεί καμία εστία όταν μετακινούμε τις ευθείες (πράγματι, σε κάθε εστία υπάρχει ένα τρίγωνο που συστέλλεται).

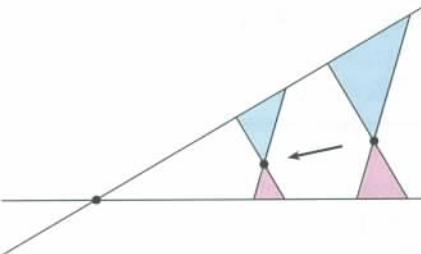
Αν η αρχική διευθέτηση των ευθειών δεν είναι «στερεή», τότε κατά τη διάρκεια κάποιας κίνησης θα εμφανιστεί μια εστία — γεγονός που μας οδηγεί σε αντίφαση. Επομένως, η διατήρηση όλων των τριγώνων μάς εξασφαλίζει ότι η διευθέτηση των ευθειών είναι στερεή, και απομένει να αποδείξουμε ότι είναι αδύνατο να εξασφαλίσουμε στερεή διευθέτηση αν δεν διατηρήσουμε τουλάχιστον $n - 2$ τρίγωνα.

Ας θυμηθούμε πώς διατηρήσαμε μια εστία: της επιτρέψαμε να κινείται ως σύνολο. Η απλούστερη εστία είναι ένα μικρότατο τρίγωνο. Αντιμετωπίζουμε ένα σύνηθες τρίγωνο με παρόμοιο τρόπο: του επιτρέπουμε να κινείται εφόσον διατηρείται το μέγεθός του. (Επαληθεύστε ότι η σταθεροποίηση $n/3$ τριγώνων έχει ως αποτέλεσμα να χάσουν οι ευθείες την κινητικότητά τους.)

Ωστόσο, δεν έχουμε ακόμη σταθεροποιήσει ούτε καν το αρχικό τρίγωνο. Για να αποφύγουμε λοιπόν παράλληλες μετατοπίσεις της συνολικής διευθέτησης που δεν μας προσφέρουν κάτι ουσιαστικό, σταθεροποιούμε δύο ευθείες. (Παρεμπιπόντως, η θέση μιας εστίας καθορίζεται από δύο ευθείες.)

Κάθε τρίγωνο, όπως επίσης η απλούστερη εστία, θέτει έναν περιορισμό στην ταχύτητα κίνησης των ευθειών. Συνεπώς, έχουμε τόσους περιορισμούς όσα και διατηρούμενα τρίγωνα.

Συνεπώς, πρέπει να διαλέξουμε $n - 2$ ταχύτητες, τις οποίες θα ονομάσουμε παραμέτρους. Αν δεν υπάρχουν αρκετά τρίγωνα (αν είναι λιγό-



Σχήμα 7

Είναι αδύνατο να σημικρίνουμε το κόκκινο τρίγωνο χωρίς να μεταβληθεί το μέγεθος του ππλε.

τερα από το πλήθος των παραμέτρων), η διατήρηση του μεγέθους τους δεν μας εξασφαλίζει στερεότητα (Σχήμα 7).

Γιατί είμαστε βέβαιοι ότι, αν η διευθέτηση δεν είναι στερεή, μπορεί να εμφανιστεί εστία; Ο λόγος είναι ότι, όπως και στην περίπτωση του πενταγώνου, μπορούμε να μετακινήσουμε τις ευθείες προς την αντίθετη κατεύθυνση — δηλαδή, να αλλάξουμε την κατεύθυνση όλων των κινήσεων. Άρα, μπορούμε να μετακινήσουμε μία από τις ευθείες προς το σημείο τομής των σταθερών ευθειών και να δημιουργήσουμε, αναπόφευκτα, μια εστία. (Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι, κατά την κατασκευή της λύσης, η τέλεια επαγωγή εξαφανίστηκε, όπως ακριβώς απομακρύνεται η σκαλωσιά έπειτα από την αποπεράτωση ενός κτηρίου.)

Συνοψίζοντας

Πρώτον, σταθεροποιήσαμε δύο ευθείες και επιτρέψαμε σε όλες τις υπόλοιπες να μετακινούνται με σταθερή ταχύτητα, διατηρώντας έτοι το μέγεθος όλων των τριγώνων. Τότε, αν το πλήθος των τριγώνων είναι μικρότερο του $n - 2$, μπορούμε να επιλέξουμε μη μηδενικές ταχύτητες (αυτό το γεγονός θα αποδειχθεί αργότερα). Μπορούμε τότε — αλλάζοντας αν είναι απαραίτητο τη διεύθυνση της κίνησης — να δημιουργήσουμε μια εστία, όπου θα βρεθεί ένα επιπλέον τρίγωνο. Η αντίφαση που προκύπτει λύνει το πρόβλημα.

Τελειοποίηση της επιχειρηματολογίας μας

Για να καταλήξουμε σε μια αυστη-

ρή απόδειξη, πρέπει να βελτιώσουμε τους διαισθητικούς συλλογισμούς μας — πρώτα απ' όλα, τα επιχειρήματά μας που αφορούσαν τη στερεότητα. Θα τα μεταφράσουμε σε αλγεβρική γλώσσα, όπου οι ταχύτητες ερμηνεύονται ως άγνωστοι και οι περιορισμοί ως εξισώσεις. Το γεγονός ότι οι ευθείες μπορούν να κινηθούν σημαίνει πως υπάρχει μη μηδενική λύση του συστήματος εξισώσεων.

Όποιος έχει ασχοληθεί με συστήματα εξισώσεων γνωρίζει ότι γενικός κανόνας είναι ο εξής: Αν το πλήθος των εξισώσεων ισούται με το πλήθος των αγνώστων, τότε το σύστημα έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Αν το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο του πλήθους των αγνώστων (ένα υπερ-προσδιορισμένο σύστημα), τότε δεν υπάρχουν λύσεις. Και τέλος, αν το πλήθος των εξισώσεων είναι μικρότερο από το πλήθος των αγνώστων (απροσδιόριστο σύστημα), τότε το πλήθος των λύσεων είναι άπειρο. Στο πρόβλημά μας θα αντιμετωπίσουμε την τελευταία περίπτωση.

Δυστυχώς, όλα αυτά ισχύουν «κατά κανόνα» — με άλλα λόγια, όχι πάντοτε. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

δεν έχει λύσεις, παρόλο που οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους. Εντούτοις, θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική κατηγορία συστημάτων. Αν όλοι οι άγνωστοι του συστήματος είναι υψηλέμβοντες στην πρώτη δύναμη, και αν το δεξιό μέλος όλων των εξισώσεων ισούται με μηδέν, το σύστημα μας καλείται γραμμικό και ομογενές. Για συστήματα αυτού του ειδους, ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα. Κάθε απροσδιόριστο σύστημα της γραμμικών ομογενών εξισώσεων με n αγνώστους ($m < n$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Το θεώρημα αυτό μπορεί να αποδειχθεί με τέλεια επαγωγή, απαλεύφο-

ντας διαδοχικά τους αγνώστους με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε εγχειρίδιο γραμμικής άλγεβρας.

Ας μεταφράσουμε τις σχέσεις μεταξύ των ταχυτήτων των ευθειών στη γλώσσα των γραμμικών εξισώσεων. Η ταχύτητα μιας ευθείας ερμηνεύεται ως ο ρυθμός απομάκρυνσής της από την αρχική της θέση. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το σημείο τομής δύο ευθειών που κινούνται με σταθερή ταχύτητα κινείται επίσης με σταθερή ταχύτητα, και ότι οι πλευρές του τριγώνου που σχηματίζεται από τις δύο αυτές ευθείες και μία σταθερή μεταβάλλονται με σταθερό ρυθμό. Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι πλευρές των τριγώνων που σχηματίζονται από τρεις ευθείες οι οποίες κινούνται με σταθερή ταχύτητα αλλάζουν επίσης με σταθερό ρυθμό. Συμπεραίνουμε επομένως ότι η συνθήκη της διατήρησης του μεγέθους ενός τριγώνου μπορεί να γραφεί ως μια γραμμική ομογενής εξίσωση ως προς τις ταχύτητες των ευθειών.

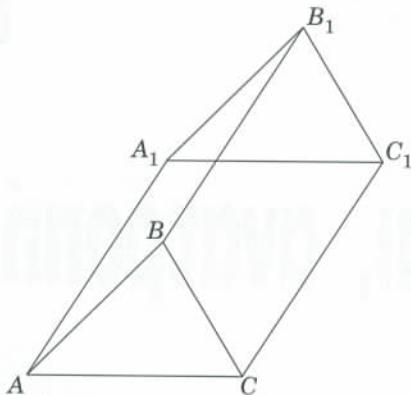
Θα αποδείξουμε αυτή την πρόταση γεωμετρικά. Όταν ένα τρίγωνο μετατοπίζεται παράλληλα, σχηματίζονται τρία παραλληλόγραμμα (Σχήμα 8), και το εμβαδόν του μεγαλύτερου από αυτά ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των άλλων δύο. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο του μήκους της πλευράς του τριγώνου επί την απόσταση που διήνυσε η μετατοπισμένη ευθεία.

Ας υποθέσουμε ότι η κατεύθυνση της μετακίνησης της ευθείας είναι θετική όταν αυξάνεται το εμβαδόν του τριγώνου. Τότε, η συνθήκη ισότητας των εμβαδών των παραλληλογράμμων μπορεί να γραφεί ως γραμμική ομογενής εξίσωση:

$$a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 = 0,$$

όπου a_1, a_2, a_3 είναι οι πλευρές του τριγώνου και h_1, h_2, h_3 οι μετατοπίσεις των ευθειών. Μια παρόμοια εξίσωση συνδέει τις ταχύτητες των ευθειών.

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε τη συνθήκη της διατήρησης των τρι-



Σχήμα 8

Τρία παραλληλόγραμμα.

$$S_{AA_1BB_1} + S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1C_1C}$$

γώνων ως σύστημα γραμμικών ομογενών εξισώσεων. Η γραμμικότητα αποδείχθηκε εξαιρετικά χρήσιμη.

Άσκηση 15. Αποδείξτε ότι στο σύστημα συντεταγμένων (x, y) η εξίσωση μιας ευθείας που κινείται με σταθερή ταχύτητα v μπορεί να γραφεί ως

$$x \eta \mu \theta - y \sigma \nu \theta = c + vt,$$

όπου το t συμβολίζει το χρόνο και θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x .

Αυστηρή απόδειξη

Ολοκληρώνοντας, θα δώσουμε μια αυστηρή απόδειξη, στην οποία έχουμε αποκρύψει όλες τις λεπτομέρειες και τους ελιγμούς της σκέψης —όπως συχνά συμβαίνει στα μαθηματικά περιοδικά. Τέτοιου είδους μαθηματικά κείμενα μοιάζουν με εικονογρίφους ή προγράμματα υπολογιστών χωρίς σχόλια. Ο μεγάλος ρώσος μαθηματικός V.I. Arnold παρατήρησε κάποτε ότι το νόημά τους, όπως το νόημα των παραβολών, εξηγείται στους σπουδαστές μόνο κατ' ίδιαν.

Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των τριγώνων, έστω k , στα οποία αναλύεται το επίπεδο είναι μικρότερο του $n - 2$. Εστω d η ελάχιστη πλευρά των τριγώνων, v_1, \dots, v_n οι ταχύτητες των ευθειών κατά τις κάθετες κατευθύνσεις, και ακόμη $v_1 = v_2 = 0$.

Η συνθήκη διατήρησης του μεγέθους όλων των τριγώνων ισοδυναμεί με ένα σύστημα k γραμμικών ομογενών εξισώσεων ως προς τις ταχύτητες v_i ($i = 3, \dots, n$). Βάσει του προηγούμενου θεωρήματος, αυτό το σύ-

στημα έχει μη μηδενική λύση.

Μπορούμε να υποθέσουμε (αλλάζοντας, αν είναι απαραίτητο, την κατεύθυνση του χρόνου) ότι μια συγκεκριμένη ευθεία l_i κινείται προς το σημείο τομής των ευθειών l_1 και l_2 . Υπάρχει μια χρονική στιγμή (η καταστροφή) κατά την οποία τρεις ή περισσότερες ευθείες θα περάσουν από το ίδιο σημείο. Έστω t η πρώτη από τις εν λόγω στιγμές. Τότε, τη στιγμή

$$t_1 = t - d/(2 \max v_i)$$

υπάρχουν τρεις ευθείες που σχηματίζουν ένα μη τεμνόμενο τρίγωνο με πλευρά μικρότερη του d . Αυτό το γεγονός έρχεται σε αντίθεση με τη συνθήκη ότι το μέγεθος όλων των τριγώνων διατηρείται —και τούτη η αντίθεση ολοκληρώνει την απόδειξη.

Παρατηρήσεις

1. Το πρόβλημα των τριγώνων μπορεί να επεκταθεί σε χώρους οποιασδήποτε διάστασης. Ειδικότερα, αν δοθούν n επίπεδα στη γενική θέση στον τρισδιάστατο χώρο, τα οποία χωρίζουν το χώρο σε διάφορα τμήματα, τότε υπάρχουν ανάμεσά τους τουλάχιστον $n - 3$ τετράεδρα. (Γιατί το πλήθος των τετραέδρων είναι $n - 3$ ενώ των τριγώνων είναι $n - 2$; Ποιο θα είναι το πλήθος στη μονοδιάστατη περίπτωση;)

2. Αν αναλύσουμε τη λύση, θα διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να χαλαρώσουμε τη συνθήκη ότι οι ευθείες βρίσκονται στη γενική θέση στο επίπεδο. Αν όλες οι n ευθείες τέμνονται ανά δύο και δεν διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, τότε ανάμεσα στα τμήματα στα οποία διασπάται το επίπεδο υπάρχουν τουλάχιστον $n - 2$ τρίγωνα.

Η κύρια διαφορά στην απόδειξη αυτής της παραλλαγής είναι ότι τα σημεία στα οποία συντρέχουν πολλές ευθείες μπορούν να καταστραφούν κατά τη μετακίνηση των ευθειών, και έτσι να εμφανιστούν νέα τρίγωνα. Όμως, τα τρίγωνα αυτά αυξάνονται με σταθερό ρυθμό και μπορούμε να τα διακρίνουμε εύκολα από το επιθυμητό τρίγωνο το οποίο συστέλλεται σε ένα μοναδικό σημείο.

Καλούμε τους αναγνώστες να κατασκευάσουν την πλήρη λύση. ◻

Ταλάντευση vai, ανατροπή óχι

«...στα βουνά υπάρχουν ένα σωρό παράξενα πράγματα.»

—Alexander Green

A. Mitrofanov

ΠΡΕΠΕΙ ΕΠΙΣΗΣ ΝΑ ΘΥΜΟΣΑΣΤΕ ότι σ' αυτά τα μέρη δεν είναι ασυνήθιστο να συναντήσει κανείς τις λεγόμενες "κουνόπετρες". Πρόκειται για εξαιρετικά περίεργο φαινόμενο: ένα κομμάτι βράχου έχει αποκτήσει τις αναγκαίες προϋποθέσεις ώστε να βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία. Στηρίζεται συνήθως πάνω σε μια πέτρινη επίπεδη βάση, και, αν κανείς το σπρώξει, εκείνο επιστρέφει στην αρχική του θέση (σαν κάποιο από αυτά τα παιχνίδια που έχουν ένα βάρος στη βάση τους). Μερικές φορές, τούτοι οι βράχοι ζυγίζουν χιλιάδες τόνους, και παρ' όλα αυτά αποκρίνονται στην ώθηση ενός ανθρώπου μέσης μυϊκής δύναμης. Είναι αδύνατο να ανατραπούν, εκτός βέβαια και αν κάποιος τους ανατινάξει με δυναμίτιδα...». Το παραπάνω απόσπασμα προέρχεται από το βιβλίο *The Rocking Cliff* του ρώσου συγγραφέα Alexander Green. Πρόκειται για τη θλιβερή ιστορία ενός φτωχού κυνηγού ο οποίος ανέλαβε, έναντι αδρής αμοιβής, να ρίξει κάτω μια γιγαντιαία πέτρινη στήλη που ταλαντευόταν περί τη θέση ισορροπίας της. Παρά τις προσπάθειες που κατέβαλε, ο κυνηγός δεν κατόρθωσε να φέρει εις πέρας τον άθλο αυτό (μολονότι εξακολούθησε να προσπαθεί) και τελικά έχασε τα λογικά του.

Ας προσπαθήσουμε, λοιπόν, να ε-

ξηγήσουμε την εξαιρετική ευστάθεια που χαρακτηρίζει αυτές τις «κουνόπετρες». Όπως γνωρίζουμε, για να βρίσκεται ένα σώμα σε ισορροπία, πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής δύο συνθήκες:

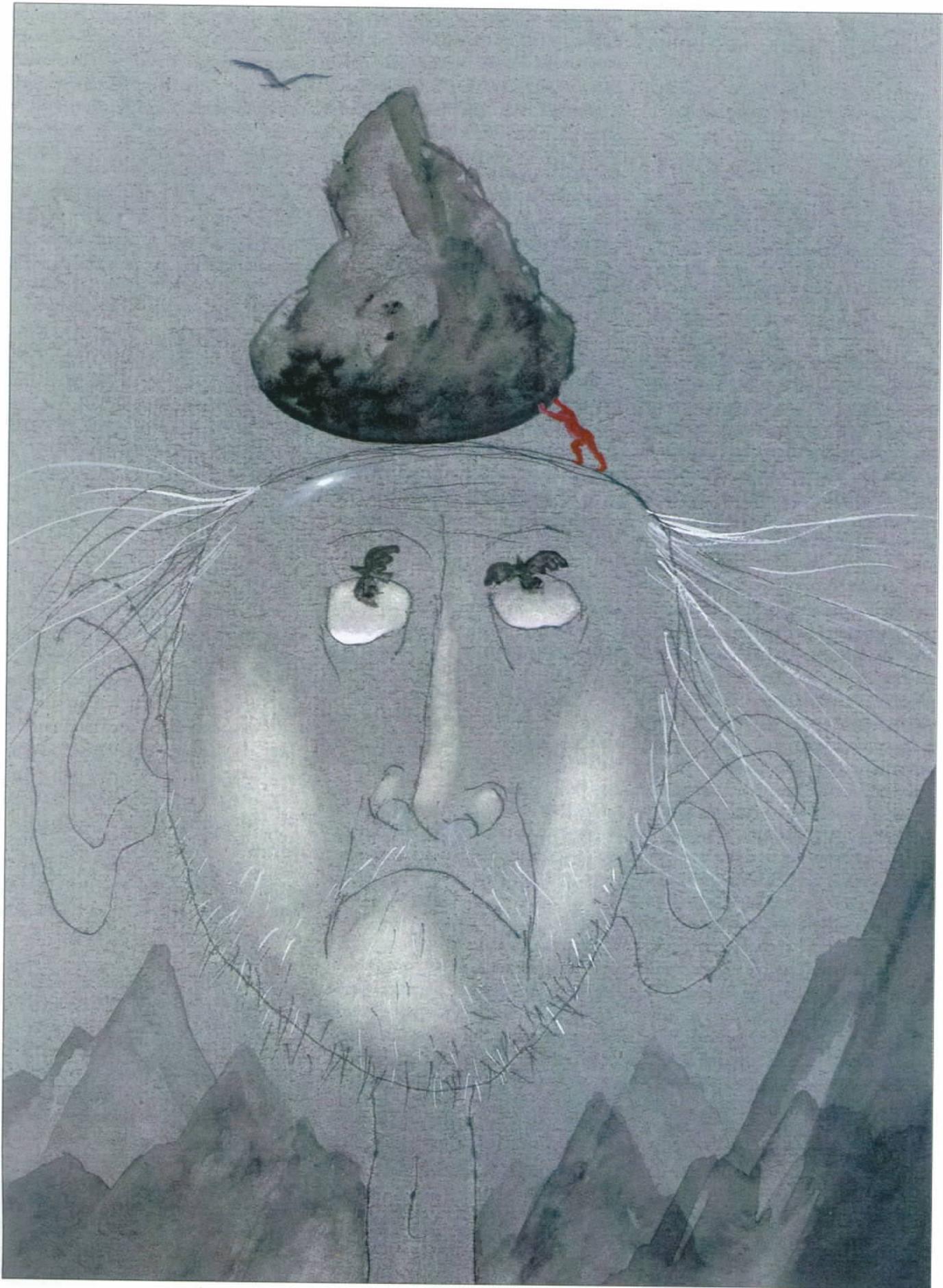
(α) το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που δρουν στο σώμα πρέπει να ισούται με μηδέν·

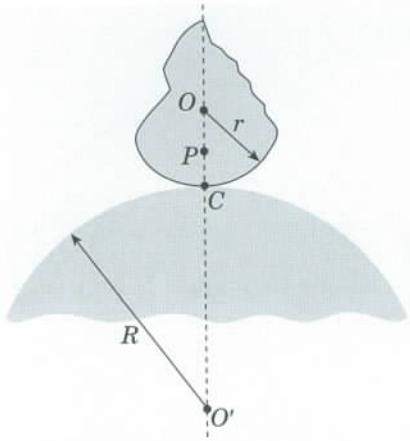
(β) το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών ως προς τυχόντα άξονα πρέπει επίσης να μηδενίζεται.

Ωστόσο, κάθε κατάσταση ισορροπίας δεν είναι κατ' ανάγκην και ευσταθής. Για παράδειγμα, μια βελόνα στην οποία ασκούνται μόνο το βάρος της και μια κάθετη δύναμη αποκλείεται να σταθεί όρθια πάνω στο τραπέζι. Και όμως, εάν η βελόνα τοποθετηθεί απολύτως κατακόρυφη, ικανοποιούνται αμφότερες οι συνθήκες ισορροπίας (α) και (β). Εν προκειμένω, το βασικό είναι ότι κάθε ελαφρά εκτροπή από την κατακόρυφη θέση παράγει ροπές που ρίχνουν τη βελόνα κάτω. Απεναντίας, ένα τούβλο είναι ευσταθές με όποια από τις έδρες του και αν το ακουμπήσουμε στο τραπέζι. Εφόσον διατηρούμε σταθερές τις αναλογίες των διαστάσεων του, μπορούμε να σμικρύνουμε το τούβλο κατά βούληση, οπότε τα μικρότερα τούβλα θα συνεχίζουν να ισορροπούν στο τραπέζι. Ωστόσο, ένα τούβλο ισορροπεί πολύ δυσκολότερα

σε μια κυρτή επιφάνεια (πάνω σε μια μπάλα ποδοσφαίρου, ας πούμε) παρά σε μια επίπεδη ή κοίλη. Συμπερασματικά, οι συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί ένα σώμα προκειμένου να βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία εξαρτώνται τόσο από το σχήμα του ίδιου (ακριβέστερα, από το σχήμα της βάσης του) όσο και από το σχήμα της επιφάνειας στήριξης.

Για να εξαγάγουμε το κριτήριο της ευστάθειας, ας θεωρήσουμε και πάλι την κουνόπετρα, ή έναν ογκόλιθο, και ας υποθέσουμε ότι τόσο ο ογκόλιθος όσο και η επιφάνεια πάνω στην οποία στηρίζεται —το έδαφος— έχουν σφαιρικό σχήμα στο σημείο της επαφής. Μπορούμε να φανταστούμε ότι τόσο ο ογκόλιθος όσο και το έδαφος έχουν διαβρωθεί από τον άνεμο και το νερό. Ως εκ τούτου, οι επιφάνειές τους είναι τοπικά λείες και δεν έχουν προεξοχές. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η περιοχή επαφής μεταξύ των δύο αντικειμένων περιορίζεται σε ένα σημείο. Το Σχήμα 1 δείχνει τη διατομή της πέτρας και του εδάφους κατά το κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο επαφής C. Εδώ O και O' καλούμε αντιστοίχως τα κέντρα των σφαιρικών επιφανειών του ογκόλιθου και του εδάφους στην περιοχή επαφής, ενώ με r και R συμβολίζουμε τις ακτίνες τους. Για να έχουμε ισορροπία, απαιτείται πρωτί-





Σχήμα 1

στως το κέντρο βάρους του ογκόλιθου να κείται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία OO' . Προφανώς, εν τοιαύτη περιπτώσει ικανοποιούνται αμφότερες οι συνθήκες (α) και (β). Ας εξετάσουμε τώρα τι θα συνέβαινε αν ο ογκόλιθος δεχόταν μια ελαφρά ώθηση που θα τον απομάκρυνε λίγο από την αρχική θέση ισορροπίας του.

Έστω λοιπόν ότι η ελαφρά ώθηση μας έφερε τον ογκόλιθο στη θέση που φαίνεται στο Σχήμα 2. Εδώ, Q καλούμε την τομή της ευθείας PO με την κατακόρυφο η οποία διέρχεται από το σημείο A (το νέο σημείο επαφής του ογκόλιθου με το έδαφος). Αν το σημείο P κείται στα αριστερά της κατακορύφου AA' , η ροπή του βάρους θα «προσπαθήσει» να επαναφέρει τον ογκόλιθο στην αρχική του θέση. Αυτό σημαίνει ότι η θέση ισορροπίας του ογκόλιθου είναι ευσταθής.

Έτοι, εάν $CP < CQ$, η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής. Ας εξετάσουμε στην προκειμένη περίπτωση πώς σχετίζονται τα μεγέθη CP , R και r . Από το τρίγωνο OAQ (Σχήμα 2) παίρνουμε:

$$\beta = \frac{CA}{r} = \frac{C'A}{r} = a \frac{R}{r},$$

διότι οι γωνίες θεωρούνται μικρές. Σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων,

$$\begin{aligned} \frac{OQ}{\text{ημ}} &= \frac{r}{\text{ημ}(\pi - (\alpha + \beta))} = \\ &= \frac{r}{\text{ημ}\left(a + a \frac{R}{r}\right)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για πολύ μικρές εκτροπές από τη θέση ισορροπίας. Λέγοντας «μικρή εκτροπή» εννοούμε ότι η απόσταση την οποία «διανύει» το σημείο επαφής κινούμενο πάνω στο έδαφος (ήτοι το τόξο $C'A$, και άρα το ίσο προς αυτό τόξο CA) παραμένει πάντοτε μικρή σε σύγκριση με τις ακτίνες r και R . Και τούτο με τη σειρά του σημαίνει ότι οι γωνίες α και β είναι μικρές:

$$a \ll 1$$

και

$$\beta = a \frac{R}{r} \ll 1.$$

Όπως θα ξέρετε, το ημίτονο μιας μικρής γωνίας ισούται, σε υψηλό βαθμό ακριβείας, με την ίδια τη γωνία (εφόσον, βέβαια, μετράμε τις γωνίες σε ακτίνια, όπως κάνουμε στο παρόν άρθρο). Συνεπώς, η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\frac{OQ}{r} = \frac{1}{1 + R/r},$$

η, εναλλακτικά,

$$OQ = \frac{r^2}{R + r}.$$

Εφόσον

$$CQ = r - OQ = \frac{Rr}{R + r},$$

η συνθήκη για την ευσταθή ισορροπία του ογκόλιθου $CP < CQ$ γίνεται

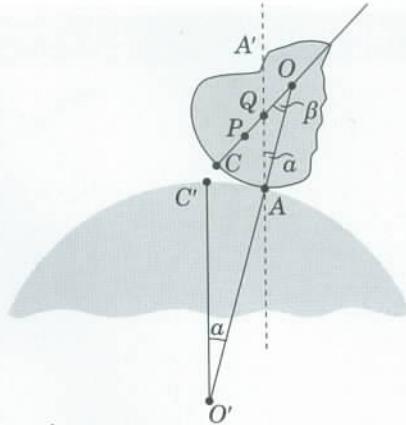
$$CP < \frac{Rr}{R + r}. \quad (2)$$

Στην περίπτωση όπου το έδαφος είναι κοίλο και έχει ακτίνα R , η συνθήκη ευσταθούς ισορροπίας λαμβάνει την εξής μορφή:

$$CP < \frac{Rr}{R - r}. \quad (3)$$

(Προσπαθήστε να εξαγάγετε τούτη τη συνθήκη μόνοι σας.)

Επιβάλλεται τώρα να επισημάνουμε ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του προβλήματος. Ας υποθέσουμε ότι ο ογκόλιθος βρίσκεται σε ευσταθή 1-



Σχήμα 2

σορροπία. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η εκτροπή του από τη θέση ισορροπίας του παράγει μια ροπή που αντιτίθεται στην εκτροπή, επειδή ο ογκόλιθος έχει «ρίξει το βάρος του πίσω» από το νέο σημείο στήριξης (Σχήμα 2). Για να κρατήσουμε τον ογκόλιθο σε ισορροπία στη νέα του θέση, χρειάζεται να ασκήσουμε μια εξωτερική δύναμη τέτοια ώστε η ροπή της ως προς το σημείο επαφής να έχει ίσο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση με τη ροπή του βάρους. Το μέτρο και η κατεύθυνση της εξωτερικής δύναμης καθορίζονται από τη συνθήκη (α).

Όπως αντιλαμβανόμαστε τώρα, για να επιφέρουμε ακόμη και μια μικρή εκτροπή του ογκόλιθου από τη θέση ισορροπίας του, πρέπει να παραγάγουμε κάποιο μηχανικό έργο. Αυτό το έργο καταναλώνεται για να αυξηθεί η δυναμική ενέργεια του ογκόλιθου. Κατά συνέπεια, η δυναμική ενέργεια του ογκόλιθου λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν αυτός βρίσκεται σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας —με άλλα λόγια, στη συγκεκριμένη κατάσταση το κέντρο βάρους βρίσκεται όσο το δυνατόν χαμηλότερα. Αυτό το χαρακτηριστικό μάς επιτρέπει να εξαγάγουμε τη συνθήκη (2) και με έναν ακόμη, διαφορετικό τρόπο: εξετάζοντας τι είδους κίνηση εκτελεί το κέντρο βάρους όταν λαμβάνει χώρα μια μικρή εκτροπή. Οι δύο αυτοί διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπιστης του προβλήματος είναι ισοδύναμοι. Αν ο ογκόλιθος εκτραπεί ελαφρώς από τη θέση ισορροπίας του, θα επιστρέψει και θα την ξεπεράσει λόγω αδράνειας. Έπειτα από λίγο, ο ογκόλιθος θα διέλθει και

πάλι από το σημείο ισορροπίας του. Εν ολίγοις, ο ογκόλιθος θα εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας του.

Εάν μια μικρή εκτροπή κάποιου σώματος από τη θέση ισορροπίας του οδηγεί στο χαμηλώμα του κέντρου βάρους του, η ισορροπία του σώματος χαρακτηρίζεται ασταθής. Και η ελάχιστη ακόμη εκτροπή παράγει ροπή του βάρους η οποία ενεργεί στην ίδια κατεύθυνση και «προσπαθεί» να μεγεθύνει την εκτροπή. Ως εκ τούτου, το σώμα ανατρέπεται.

Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η μετατόπιση ενός αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του δεν μεταβάλλει το ύψος του κέντρου βάρους του σε σχέση με το σημείο στήριξης. Η ισορροπία αυτού του είδους ονομάζεται αδιάφορη. Για παράδειγμα, μια ομογενής σφαίρα τοποθετημένη πάνω σε οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται σε αδιάφορη ισορροπία. Σημειωτέον ότι, όταν έχουμε αδιάφορη ισορροπία, και εφόσον το αντικείμενο και η επιφάνεια στήριξης έχουν σφαιρικό σχήμα στην περιοχή επαφής, ισχύει η εξής συνθήκη:

$$CP = \frac{Rr}{R+r}. \quad (4)$$

Η ίδια εξίσωση ισχύει και στην περίπτωση της ομογενούς σφαίρας που ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, του οποίου η «ακτίνα» λαμβάνεται άπειρη: $R \rightarrow \infty$. Παρεμπιπτόντως, εγείρεται το εύλογο ερώτημα κατά πόσον αυτή η συνθήκη, μολονότι αναγκαία, είναι και ικανή προκειμένου να έχουμε αδιάφορη ισορροπία. Στο συγκεκριμένο ερώτημα πρέπει να απαντήσουμε αρνητικά. Για να αποδείξουμε ότι έτσι έχουν τα πράγματα, δεν χρειάζεται παρά να επικαλεστούμε ένα τουλάχιστον παράδειγμα όπου, ενώ η συνθήκη (4) ικανοποιείται, δεν έχουμε ούτε αδιάφορη ούτε ευσταθή ισορροπία. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα σφαιρικό σώμα τοποθετημένο στην κορυφή μιας ακλόνητης σφαίρας ίδιας ακτίνας. Το σώμα δεν είναι ομογενές, και το κέντρο βάρους του βρίσκεται σε απόσταση από το σημείο επαφής C ίση με το μισό της ακτίνας, οπότε $CP = r/2$. Όπως εύ-

κολα μπορούμε να δείξουμε (το αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη), η ισορροπία ενός τέτοιου σώματος πάνω σε μια σφαίρα δεν είναι ευσταθής, έστω και αν η συνθήκη (4) ικανοποιείται απολύτως. Για κάθε πεπερασμένη γωνία εκτροπής του εν λόγω σώματος από τη θέση ισορροπίας, το κέντρο βάρους του χαμηλώνει, οπότε το σώμα κυλά και εγκαταλείπει την επιφάνεια της σφαίρας. Επιβάλλεται να τονίσουμε ότι κατά την εξαγωγή του κριτηρίου ευστάθειας, θεωρήσαμε μόνο μικρές μετατόπισεις του αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του και στους υπολογισμούς μας δεν λάβαμε υπόψη παρά μόνο τους γραμμικούς όρους που είναι ανάλογοι προς την a . Εφόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες της γραμμικής τούτης προσέγγισης, ένα σώμα ή ένα σύστημα μπορεί να παραμένει σε αδιάφορη ισορροπία. Ωστόσο, αν εξετάσουμε το πρόβλημα διεξοδικότερα λαμβάνοντας υπόψη και τους όρους ανωτέρων τάξεων (τους ανάλογους προς a^2 , a^3 , κ.ο.κ.), η θέση ισορροπίας ενδέχεται να αποδειχθεί ασταθής, όπως εύκολα διαπιστώνουμε στην πράξη.

Τώρα κατανοούμε καλύτερα τι ακριβώς είναι η «κουνόπετρα»: Πρόκειται για έναν ογκόλιθο ο οποίος στέκεται κατακόρυφος και έχει είτε χαμηλό κέντρο βάρους είτε βάση με μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας. Η εκτροπή ενός τέτοιου ογκόλιθου (φυσικά, εφόσον αυτή δεν υπερβαίνει ορισμένα όρια) προκαλεί ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας. Επομένως, η κουνόπετρα δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα πέτρινο εκκρεμές.

Προφανώς, για να μπορεί ένας άνθρωπος μέτριας μυϊκής δύναμης να κάνει μια τεράστια πέτρινη στήλη να ταλαντεύεται, πρέπει να συντρέχουν πολύ ειδικές προϋποθέσεις. Δεν πρόκειται μόνο για το ότι η κουνόπετρα έχει πολύ μεγάλη μάζα, οπότε πρέπει να της ασκηθεί μια αντιστοίχως μεγάλη δύναμη για να της προσδοθεί μια αισθητή επιτάχυνση· επιπλέον, η επιφάνεια στήριξης κάτω από τον ογκόλιθο έχει παραμορφωθεί λόγω του μεγάλου βάρους που δέχεται, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται δυνάμεις αντιδραστηρίας οι οποίες αποτρέπουν την

παραπέρα μετατόπιση από την κατακόρυφη θέση (ισορροπίας). Μολαταύτα, στη φύση υπάρχουν κουνόπετρες. Πιθανώς να έτυχε να δείτε κάποια απ' αυτές με τα ίδια σας τα μάτια.

Ας μελετήσουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα κάπως λεπτομερέστερα. Παρότι δεν θα χρειαστεί να εκδράμουμε σε ορεινές τοποθεσίες, ως προς τη βαθύτερη φυσική τους ουσία δεν διαφέρουν σε τίποτε από τις κουνόπετρες.

Παράδειγμα 1. Το κέντρο βάρους στις ομογενείς σφαίρες συμπίπτει με το γεωμετρικό τους κέντρο —οπότε τα σώματα της συγκεκριμένης κατηγορίας αδυνατούν να ισορροπήσουν ευσταθώς πάνω σε κυρτές επιφάνειες. Ωστόσο, αν από μια τέτοια σφαίρα αποκοπεί το άνω μέρος της, τότε αυτή μπορεί να βρεθεί σε ευσταθή ισορροπία στην κορυφή μιας κυρτής επιφάνειας.

Παράδειγμα 2. Το διασκεδαστικό παιδικό παιχνίδι Weeble Wobbly θυμίζει την κομμένη σφαίρα του Παράδειγματος 1. Ένα αντίβαρο από μολύβι κρυμμένο κοντά στη σφαιρική βάση του προσδίδει στο παιχνίδι καταπληκτική ευστάθεια.

Γνωρίζατε ότι το Weeble Wobbly είχε (και σίγουρα εξακολουθεί να έχει) πάρα πολλούς συγγενείς; «Μια φορά κι έναν καιρό, ήταν είκοσι πέντε μολυβένιοι στρατιώτες, όλοι τους αδέλφια, γιατί προέρχονταν όλοι από το ίδιο παλιό κουτάλι. Ο κάθε άντρας κρατούσε το όπλο στον ώμο του, είχε στραμμένα τα μάτια του προς τα εμπρός και φορούσε την πιο έξυπνη κυανέρυθρη στολή που μπορεί να φανταστεί κανείς».

Τέτοιοι ήταν οι στητοί μολυβένιοι στρατιώτες από το περίφημο παραμύθι του Χανς Κρίστιαν Άντεροεν (1805-1875). Γιατί ήταν τόσο στητοί; Μα, φυσικά, γιατί όσο και αν προσπαθούσες κανείς να τους ρίξει κάτω, εκείνοι επέστρεφαν πάντοτε στην κατακόρυφη θέση —διαρκώς σε εγρήγορση. Όποτε ανοιγόταν το κουτί που περιείχε αυτούς τους στρατιώτες, εκείνοι αμέσως πετάγονταν πάνω λες και τους είχαν διατάξει. Κάθε στρατιώτης ήταν στερεωμένος στην επίπεδη πλευρά ενός μολύβδινου ημισφαιρίου και χαρακτηρίζόταν από

αξιοθαύμαστη ευστάθεια, μένοντας σε στάση προσοχής «για πάντα».

Παράδειγμα 3. Ως γνωστόν, ένα ομογενές ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ένα επιμηκυσμένο σφαιροειδές) —ή, με άλλα λόγια, το στερεό που σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ γύρω από τον μεγάλο της άξονα X ($a > b$)— δεν μπορεί να σταθεί κατακόρυφο πάνω σε επίπεδη επιφάνεια. Τούτο οφείλεται στο ότι η ακτίνα καμπυλότητας της κεφαλής του ελλειψοειδούς (δηλαδή, η ακτίνα της σφαίρας που προσεγγίζει την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στην κορυφή του) 1-σιούται με b^2/a , ενώ το κέντρο βάρους τού εν λόγω σώματος βρίσκεται σε ύψος a . Κατά συνέπεια, το κριτήριο ευστάθειας (2) δεν ικανοποιείται.

Ουτόσο, πώς θα επηρεαστεί η ευστάθεια εάν τροποποιηθεί ελαφρώς το σχήμα του ελλειψοειδούς; Ο δανός μαθηματικός Pit Hein επινόησε ένα σώμα που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης

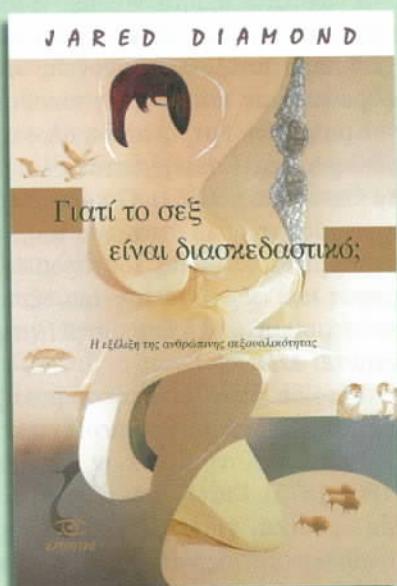
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2.5} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2.5} = 1.$$

Στην ανωτέρω έκφραση, οι αρνητικές τιμές τού x και του y αντικαθίστανται με τις απόλυτες τιμές τους. Υπάρχει μια ευτυχής επιλογή συνδυασμών του ύψους a και του πλάτους b (π.χ. 5 και 4 cm, αντίστοιχα) για τους οποίους το στερεό τού Hein, το λεγόμενο υπερελλειψοειδές, ισορροπεί ευσταθώς όταν το βάλουμε να σταθεί σε έναν από τους πόλους του.

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα της ευστάθειας χαρακτηρίζει κάθε ομογενές σώμα που σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης $(x/a)^n + (y/b)^n = 1$ γύρω από τον άξονα των x , με την προϋπόθεση ότι $n > 2$ και ότι $a > b > 0$. Για μεγάλες τιμές τού n , αυτό το σώμα μοιάζει με κύλινδρο με στρογγυλεμένες βάσεις πάνω και κάτω —θα μπορούσε άραγε να φανταστεί κανείς καταλληλότερο στερεό ως μοντέλο της κουνόπετρας;

Το πρόβλημα της ευστάθειας των σωμάτων απασχόλησε τη σκέψη πολλών εξεχόντων επιστημόνων στο πέρασμα των αιώνων. Το 1644, ο Evangelista Torricelli (1608-1647) διατύπωσε ένα κριτήριο ευσταθούς ισορροπίας για δύο σώματα που βρίσκονται εντός βαρυτικού πεδίου. Αργότερα, ο Christian Huygens (1629-1695) το γενίκευσε για ένα σύστημα αρκετών σωμάτων (αρχή του Torricelli). Το 1788, ο Joseph Lagrange (1736-1813) απέδειξε ένα θεώρημα το οποίο καθορίζει την ικανή συνθήκη για την ισορροπία ενός συστήματος σωμάτων. Αργότερα, ο Peter Dirichlet (1805-1859) έδωσε μια αυστηρότερη απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος. Σύμφωνα με το θεώρημα Lagrange-Dirichlet, αν η δυναμική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος καθίσταται ελάχιστη στη θέση ισορροπίας, τότε αυτή η ισορροπία είναι ευσταθής. ◻

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



220 σελ., 14,5 × 21 εκ., 6.000 δρχ.

- «Ένα σπουδαίο βιβλίο από έναν εκ των παγκοσμίως εξεχόντων φιλοσόφων στο χώρο της βιολογίας.»

—Roger Short,
καθηγητής φυσιολογίας

Jared Diamond

Γιατί το σεξ είναι διασκεδαστικό;

Η εξέλιξη της ανθρώπινης σεξουαλικότητας

Γνωρίζετε ότι το ξώο με την πιο αλλόκοτη σεξουαλική συμπεριφορά είναι ο άνθρωπος; Γιατί; Είμαστε το μόνο ηονιωνικό είδος που επιμένουμε να κάνουμε έρωτα ιδιωτικά, όχι σε κοινή θέα. Κάνουμε σεξ οποιαδήποτε στιγμή, ακόμη και αν το θηλυκό αδυνατεί να γονιμοποιηθεί (λόγου χάρη, όταν κυνοφορεί, ανάμεσα στους γόνιμους κύκλους του ή μετά την εμμηνόπαυση). Η γυναίκα αγνοεί τον ακριβή χρόνο γονιμότητάς της και δεν τον δημοσιοποιεί στους άνδρες εκπέμποντας μυρωδιές ή αλλάζοντας χρώματα σε περιοχές του σώματός της.

Γιατί διαφέρουμε τόσο ριζικά από τους εξαιρετικά κοντινούς συγγενείς μας, τους ανθρωποειδείς πιθήκους; Γιατί απ' όλα τα θηλαστικά η εμμηνόπαυση εμφανίζεται μόνο στις γυναίκες; Γιατί οι άνθρωποι συγκαταλέγονται στα λίγα θηλαστικά όπου το αρσενικό συχνά ή συνήθως μένει δίπλα στο θηλυκό για να το βοηθήσει στην ανατροφή των παιδιών; Άλλα και γιατί το ανδρικό πέος είναι τόσο ανώφελα μεγάλο;

Τις απαντήσεις σ' αυτά και πολλά άλλα ερωτήματα σχετικά με το πώς έδρασαν οι εξελικτικές δυνάμεις στους μακρινούς προγόνους μας ώστε να διαφοροποιηθούμε σεξουαλικά τόσο πολύ απ' αυτούς, θα τις βρείτε σε τούτο το καταπληκτικό βιβλίο ενός από τους διασημότερους επαίοντες του χώρου της φυσιολογίας και της εξελικτικής βιολογίας.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Ανθολόγιο λέξεων και φράσεων

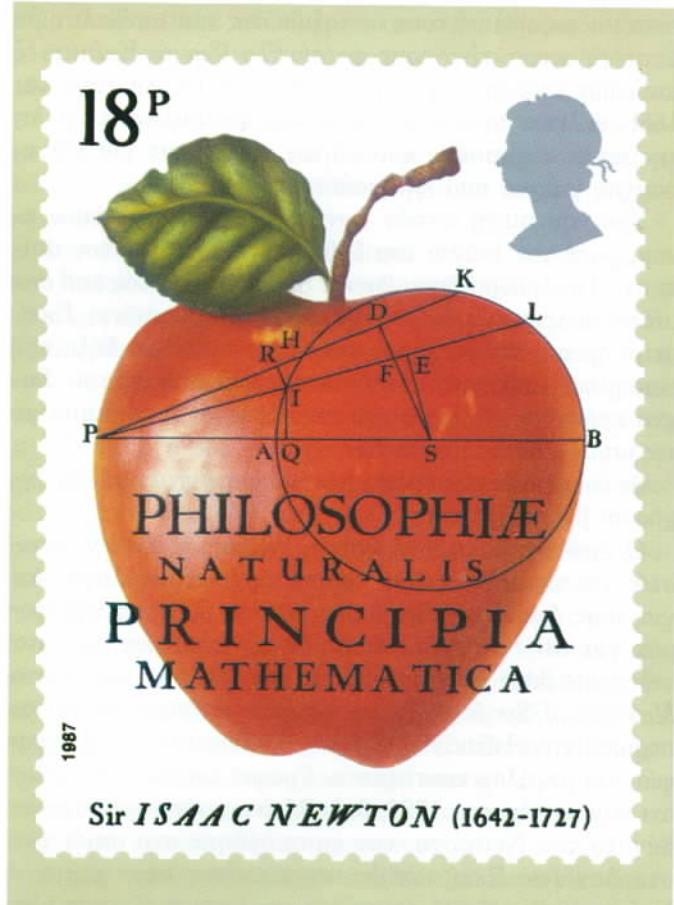
«Σχεδόν είκοσι έτη ταύτα εστίν αφ ου σε ουδέν άλλο ποιούντα εώρακα, ἡ παρά τους διδασκάλους φοιτώντα.»

—Λουκιανού, Περὶ αἰρέσεων, 741

Μιχάλης Λάμπρου

Το μήλο του Νεύτωνα. Η ιστορία ότι ο Ισαάκ Νεύτων (1642-1727) συνέλαβε την ιδέα της βαρύτητας παρατηρώντας την πτώση ενός μήλου είναι πολύ γνωστή. Σε όσα ακολουθούν θα ασχοληθούμε με το πώς διασώθηκε ώς τις μέρες μας αυτή η ιστορία, στη μία ή την άλλη εκδοχή της —ανατρέχοντας στα κείμενα που την πρωτοδημοσίευσαν. Άλλωστε, ως γνωστόν, στόχος της στήλης είναι να θηρεύει στις πηγές για να επεξηγηθούν λέξεις, φράσεις ή εικόνες που έμειναν παροιμιώδεις και προέρχονται από την ιστορία της επιστήμης.

Όσον αφορά τη σύλληψη του νόμου της βαρύτητας από την πτώση ενός μήλου ή όποια άλλη και αν ήταν η αφορμή, ένα είναι βέβαιο: η συστηματοποίηση της αρχικής ιδέας είχε ως αποτέλεσμα τη συγγραφή ενός από τα σημαντικότερα βιβλία στην ιστορία της επιστήμης, το περίφημο *Principia Mathematica* (Μαθηματικές αρχές) (1687). Το έργο αυτό, που δίκαια θεωρείται θεμέλιο της φυσικής επιστήμης, αποτέλεσε τον καρπό πολυετούς έρευνας και μελέτης, και μόνο ένας επιστήμονας σαν τον Νεύτωνα —προκισμένος με διανοητικά χαρίσματα, βαθιά παιδεία, επινοητικότητα, περιέργεια, επιμονή, αυταπάρνηση και αφοσίωση θα μπορούσε να το ολοκληρώσει. Ο ίδιος ο Νεύτων, όταν κάποτε ρωτήθηκε να σχολιάσει πώς έφτασε στις μεγάλες του ανακαλύψεις, δήλωσε: «Κρατώ το θέμα διαρκώς στο νου μου, μέχρι που το αρχικό απαύγασμα, βήμα βήμα, ανάβει για να γίνει ένα λαμπέρο και δυνατό φως.» (από την αλληλογραφία του με τον μαθηματικό Roger Cotes (1682-1716), σελ. xlili-xliii της έκδοσης του J. Edleston, Λονδίνο 1850). Είναι γνωστό πως ο Νεύτων επεξεργαζόταν το *Principia Mathematica* πάνω από είκοσι χρόνια: Στο διάλογο του Λουκιανού που παραθέσαμε στην αρχή του άρθρου, ο ένας συνομιλητής, ο Λύκινος, λέει στον Ερμότιμο ότι τον παρατηρούσε είκοσι χρόνια να μελετά προσεκτικά τους



Βρετανικό γραμματόσημο του 1987, αναμνηστικό για τα τριακόσια χρόνια από την έκδοση των *Principia* του Νεύτωνα.

δασκάλους του. Αντίθετα, ο Νεύτων όχι μόνο μελέτησε τους προκατόχους του, αλλά τους συμπλήρωσε ή και τους αμφιοβήτησε.

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή. Το 1665, έτος αποφοίτησής του από το Trinity College, ο Νεύτων ζούσε στο Καίμπριτζ. Την ίδια χρονιά, στο Λονδίνο ξέσπασε επιδημία βουβωνικής πανώλης, η οποία αποδεκάτισε τον πληθυσμό του. Και αυτό συνέβη σε μια ήδη ταραγμένη εποχή, καθώς ήταν ακόμη νωπές οι μνήμες του Μεγάλου Εμφυλίου. Όταν, μάλιστα, η επιδημία συνέχισε να σκοτώνει κατά το έτος 1666, λόγω της ομοιότητας της χρονολογίας αυτής με τον «αριθμό του θηρίου» της Αποκάλυψης, ο πανικός του πληθυσμού έφτασε στο αποκορύφωμα, και πολλοί ήταν εκείνοι που ερμήνευαν τα γεγονότα ως εκπλήρωση των προφητειών για τις αμαρτίες της ανθρωπότητας. Χαρακτηριστική είναι η εξιστόρηση των συμβάντων λίγο αργότερα, από τον πολυγραφότατο Daniel Defoe (1660-1731), το συγγραφέα του *Ροβίνσων Κρούσου*, ο οποίος αναφέρει σχετικά με την υστερία που κατέλαβε τον πληθυσμό ότι «πολλοί νόμιζαν πώς άκουγαν φωνές που τους παρότρυναν να φύγουν [...] γιατί οι ζωντανοί δεν θα έφταναν να θάψουν τους νεκρούς».

Οι αρχές των αστικών κέντρων, προσπαθώντας να περιορίσουν την εξάπλωση της ασθένειας, υιοθέτησαν μια σειρά μέτρων: για παράδειγμα, απαγόρευσαν να επισκέπτονται τις πόλεις τους οι ταξιδιώτες και υπέβαλαν σε αυστηρή καραντίνα τους φορείς. Το ίδιο το Καίμπριτζ ακύρωσε το ετήσιο πανηγύρι του κατά τα έτη 1665 και 1666, έκλεισε το πανεπιστήμιο και διευκόλυνε τα μέλη της πανεπιστημιακής κοινότητας να φύγουν για την επαρχία, μακριά από την ασθένεια.

Υπό την πίεση αυτών των γεγονότων, ο Νεύτων αναχώρησε τον Ιούνιο του 1665 για το πατρικό του σπίτι στο Γούλσθορπ όπου έμεινε συνεχώς —εκτός από ένα μικρό διάλειμμα το 1666— για δύο περίπου χρόνια. Εκεί, στην ηρεμία της επαρχίας και αναμένοντας τη λήξη της επιδημίας, επιδόθηκε απερίσπαστος στις μελέτες του. Συχνά περνούσε τις ώρες του σκεπτόμενος στον κήπο με τις μηλιές, δίπλα στο σπίτι του.

Ας δούμε πώς περιγράφουν κάποια περιστατικά οι σύγχρονοι βιογράφοι του.

Ο πρώτος βιογράφος ήταν ο William Stukeley, γνωστός για τις μελέτες του για την αρχαία μυθολογία και για τους Δρυΐδες. Ο Stukeley διέθετε άμεσες πληροφορίες για τον Νεύτωνα, αφού τον συναναστρεφόταν στα τελευταία δέκα χρόνια της ζωής του. Τις κατέγραψε στο *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life*, το οποίο θεωρείται περισσότερο εξιδανικευμένη παρά αντικειμενική βιογραφία του μεγάλου εποτήμονα. Γράφει λοιπόν ο Stukeley ότι την άνοιξη του 1726, δηλαδή ένα χρόνο πριν από το θάνατο του Νεύτωνα, τον επισκέφθηκε στο σπίτι του στο Λονδίνο. Εκεί, καθώς περπατούσαν στον κήπο, ο Νεύτων τού ανέφερε ότι σε μια ανάλογη περίσταση είχε συλλάβει την ίδεα της βαρύτητας. Ο Stukeley, όπως γράφει ο ίδιος, εντυπωσιάστηκε από αυτό το γεγονός ώστε συνέχισε τη συζήτηση «στη σκιά μερικών μηλιών, μόνο αυτός (ο Νεύτων) και εγώ». Ιδού τι αναφέρει: «Μεταξύ άλλων συζητήσεων, μου είπε πώς ο περίπατός μας στον κήπο τού θύμισε τη στιγμή που συνέλαβε την έννοια της

βαρύτητας. Αφορμή ήταν η πτώση ενός μήλου, καθώς καθόταν σκεπτόμενος.»

Υπάρχει και άλλη σύγχρονη μαρτυρία, πιο αντικειμενική, από τον Henry Pemberton, στον οποίο ο Νεύτων είχε εμπιστευτεί την επιμέλεια της τρίτης έκδοσης των *Principia*, το 1726. Ο Pemberton εξέδωσε το 1728, ένα χρόνο μετά το θάνατο του Νεύτωνα, το βιβλίο του *A view of Sir Isaac Newton's Philosophy*. Στον πρόλογο του βιβλίου αναφέρει: «Συνέλαβε τις πρώτες ιδέες, που τον οδήγησαν στη συγγραφή των *Principia*, όταν επέστρεψε από το Καίμπριτζ, το 1666, λόγω της πανώλης. Ενώ καθόταν μόνος στον κήπο, άρχισε να στοχάζεται για τη δύναμη της βαρύτητας.» Επίσης την ιστορία με το μήλο αναφέρει και ο μέγας θαυμαστής του Νεύτωνα, ο Boltairos (1694-1778). Ο Boltairos ουδέποτε συνάντησε τον Νεύτωνα, αλλά διέθετε την πληροφορία από έμμεση πηγή. Του την είπε η ανιψιά του Νεύτωνα, η Catherine Barton, και κατόπιν την κατέγραψε στο έργο του *Elements de la philosophie de Newton* (1736).

Η Catherine, για την οποία ο Νεύτων έτρεφε παθολογική αγάπη, ήταν κόρη της αμφιπάτριας αδελφής του, της Hannah Barton. (Ο πατέρας του Νεύτωνα πέθανε πριν ακόμη γεννηθεί αυτός, και η μητέρα του παντρεύτηκε για δεύτερη φορά, κάποιον Barnabas Smith). Ο Boltairos συζήτησε με την Catherine, αργότερα κυρία Conduit, και ίδιού πώς κατέγραψε το περιστατικό με το μήλο: «Μια μέρα, κατά το 1666, ο Νεύτων —που τότε βρισκόταν στην επαρχία— είδε να πέφτουν τα φρούτα ενός δέντρου και περιήλθε —κατά την ανιψιά του, την κυρία Conduit— σε βαθιά αυτοσυγκέντρωση για να προσδιορίσει την αιτία στην οποία οφείλεται η έλξη των σωμάτων κατά μήκος μίας γραμμής η οποία προεκτεινόμενη διέρχεται πολύ κοντά από το κέντρο της Γης.» Έτσι περιγράφουν οι σύγχρονοι του Νεύτωνα την ιστορία με το μήλο.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με φράσεις που αφορούν τον Νεύτωνα, και έμειναν παροιμιώδεις στην ιστορία των εποιημάτων.

Anni mirabiles. Κατά λέξη σημαίνει «θαυμάσια χρονία». Έτσι ονομάζονται στην ιστορία των εποιημάτων τα έτη 1664-1666 από τη ζωή του Νεύτωνα, κατά τα οποία τέθηκαν οι βάσεις όλων σχεδόν των μετέπειτα επαναστατικών του ανακαλύψεων. Πρόκειται κυρίως για τα δύο έτη που έμεινε στο Γούλσθορπ λόγω της πανώλης, αλλά και για το προηγούμενο έτος, όταν ήταν ακόμη φοιτητής, και ήδη είχε συλλάβει σημαντικές ιδέες. Όπως γράφει ο ίδιος πολλά χρόνια αργότερα, «εκείνο τον καιρό ήμουν στην ακμή του διαστήματος των ανακαλύψεων μου» (χειρόγραφο 3968.41 της πανεπιστημιακής βιβλιοθήκης του Καίμπριτζ).

Ο Νεύτων είχε μελετήσει σε βάθος τα μαθηματικά της εποχής του, ιδίως την *Geometrie* του Karpesou (1596-1650), την *In Artem analyticem isagoge* του François Viète (1540-1603) και το *Arithmetica Infinitorum* του John Wallis (1616-1703). Ορμώμενος από αυτά, κατέγραψε μια σειρά «προβλημάτων» τα οποία ήθελε να επλύ-

σει, γιατί τα παραπάνω βιβλία δεν επαρκούσαν να ικανοποιήσουν την επιστημονική του περιέργεια. Τα προβλήματα αφορούσαν κυρίως τη μελέτη καμπυλών της αναλυτικής γεωμετρίας (εύρεση αξόνων, ασυμπτώτων, καμπυλότητας, εφαπτομένης, εμβαδού, κέντρου βάρους, μήκους, κ.λπ.). Κατόπιν τα εφάρμοσε στα προβλήματα κίνησης, ιδίως των πλανητών. Όταν αργότερα ξέσπασε η διαμάχη του με τον Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) για την προτεραιότητα της ανακάλυψης του απειροστικού λογισμού, ιδού πώς περιγράφει ο ίδιος τις μελέτες του τότε: «Στις αρχές του 1665 βρήκα τη μέθοδο της προσέγγισης με σειρές και το ανάπτυγμα του διωνύμου. Τον Μάιο του ίδιου έτους βρήκα τη μέθοδο των εφαπτομένων των Gregory και Slusius: τον Νοέμβριο γνώριζα τη μέθοδο των ροών (τις σημερινές παραγώγους), και τον Ιανουάριο του επόμενου έτους τη θεωρία περί χρωμάτων· τον επόμενο Μάιο κατέληξα στην αντιστροφή μέθοδο των ροών (δηλαδή στην ολοκλήρωση). Το ίδιο έτος άρχισα να σκέπτομαι για το πώς η βαρύτητα εφαρμόζεται και για την τροχιά της Σελήνης [...], από το νόμο του Kepler [...] συμπέρανα ότι η δύναμη που διέπει την τροχιά των πλανητών είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο περιστροφής...» (ενθ. αναφ. χειρόγραφο).

Hypotheses non fingo. Πρόκειται για φράση που έμεινε στην ιστορία της επιστήμης. Κατά λέξη σημαίνει «δεν επινοώ τις υποθέσεις». Εδώ το «επινοώ» έχει την έννοια του «κατασκευάζω», ιδίως τεχνητά. Η φράση περιέχεται σε ένα «Γενικό σχόλιο» στην προτελευταία παράγραφο της αναθεωρημένης έκδοσης του *Principia*, το 1713, ενώ λείπει από την πρώτη έκδοση.

Ως φυσικός, ο Νεύτων προσπάθησε, μεταξύ άλλων, να ερμηνεύσει τα φαινόμενα διατυπώνοντας εκείνες τις αρχικές υποθέσεις που είχαν τα φαινόμενα ως απόρροια. Ειδικά όμως για τη βαρύτητα γράφει: «Έως τώρα έχω ερμηνεύσει τα φαινόμενα του ουρανού και της θάλασσας (εννοεί την παλίρροια) με τη δύναμη της βαρύτητας, αλλά ακόμη δεν έχω προσδιορίσει την αιτία της βαρύτητας.» Ο ίδιος, αφού περιγράφει τις ιδιότητες της βαρύτητας, συμπληρώνει ότι, στην ουσία, είναι λάθος να επινοεί κανείς υποθέσεις που δεν προκύπτουν από τις παρατηρήσεις. Ενδεχομένως σ' αυτό το σημείο, με τη φράση *hypotheses non fingo*, να ελέγχει τον Καρτέσιο ο οποίος στο *Le Monde* (Ο Κόσμος) έγραψε: «Άσε το μυαλό σου να φύγει από αυτό τον κόσμο για να περιπλανηθεί σε άλλον [...], στον φανταστικό χώρο. Νιώθω ελεύθερος να επινοήσω το θέμα κατά το δοκούν, με το να του προσδώσω, αν θέλω, ιδιότητες από τις οποίες δεν υπάρχει τίποτα που να μην μπορούμε να το μάθουμε όσο γίνεται τελειότερα.» Ο Νεύτων δεν ακολουθεί αυτή την άποψη. Αντιθέτως, όπως γράφει ο ίδιος, «δεν έχω ακόμη καταφέρει να συναγάγω από τα φαινόμενα τις αιτίες αυτών των ιδιοτήτων, και ο ίδιος δεν επινοώ τις υποθέσεις. Διότι ότι δεν συνάγεται από τα φαινόμενα πρέπει να ονομαστεί υπόθεση, και οι υποθέσεις, είτε μεταφυσικές είτε φυσικές είτε βασιζόμενες σε υπερφυσικές ιδιότητες είτε μη-

χανικές, δεν έχουν θέση στην πειραματική φιλοσοφία. Σ' αυτή την πειραματική φιλοσοφία, οι προτάσεις συνάγονται από τα φαινόμενα και γενικεύονται επαγωγικά· και εξηγεί ότι ακολούθησε αυτή την οδό και στη θεωρία του για την κίνηση και στο νόμο της βαρύτητας.

Νομίζω ότι τα σχόλια περιττεύουν. Σε λίγες μόνο λέξεις, ο Νεύτων έχει εγκλείσει όλη τη φιλοσοφία που πρέπει να διέπει κάθε φυσικό. Οι απόψεις του, τόσο προοδευτικές για την εποχή του, εξακολουθούν και σήμερα να θεωρούνται αδιαφριστήτες.

Tanguam ex ungue leonem. Η παροιμιώδης αυτή φράση αποτελεί τη λατινική απόδοση της αντίστοιχης ελληνικής «εξ όνυχος τον λέοντα τεκμαίρομαι». Ο πρώτος που την αναφέρει είναι ο μιμογράφος Σώφρων (5ο αι. π.Χ.), τον οποίο τόσο πολύ εκτιμούσε ο Πλάτων ώστε κοιμόταν με τα έργα του στο προσκεφάλι του.

Υπάρχει μια ιστορία στο *Περί Αιρέσεων* (794-795) του Λουκιανού, όπου ο περίφημος γλύπτης Φειδίας, βλέποντας μονάχα το νύχι ενός λιονταριού μπορούσε να υπολογίσει όλες τις διαστάσεις του ζώου, κατ' αναλογίαν με το νύχι. Με την ίδια λογική, η παραπάνω στερεότυπη φράση έχει χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς για διάφορα άτομα όταν κάποια λεπτομέρεια αποτελεί ειδοποιού διαφορά που χαρακτηρίζει γενικά τις ικανότητές τους. Για παράδειγμα, τη χρησιμοποίησε ο Νίτσε, κάνοντας μάλιστα και ένα ενδιαφέρον λογοπαίγνιο, στο έργο του *Ecce Homo* (Ιδού ο Άνθρωπος), όπου γράφει «*ex ungue Napoleonem*» (εξ όνυχος τον Ναπολέοντα) για να τιμήσει τον μεγάλο στρατηλάτη.

Την ίδια φράση χρησιμοποίησε για να χαρακτηρίσει τον Νεύτωνα ο Johann Bernoulli (1667-1748), ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του: Το 1696, ο Bernoulli έγραψε μια επιστολή στους μαθηματικούς της Ευρώπης προσκαλώντας τους (ή μάλλον προκαλώντας τους) να λύσουν δύο δύσκολα προβλήματα (σχετικά με τη βραχυστόχρονη), δίνοντας διορία έξι μήνες. Δεν υπήρχε χρηματικό βραβείο αλλά, όπως αναφέροταν στην επιστολή, «προσφέρουμε ένα βραβείο αντάξιο ενός ανθρώπου που γεννήθηκε ελεύθερος, ένα βραβείο που συναποτελείται από την τιμή, τον έπαινο και το θαυμασμό [...], που θα επικυρώνει τη διορατικότητα ενός προφήτη εφάμιλλου του Απόλλωνα» (βλ. *Allηλογραφία του Νεύτωνα*, τόμ. 4, σελ. 225, Cambridge University Press, 1967). Ο Νεύτων έλυσε τα προβλήματα την ημέρα που τα έλαβε! Η ανιψιά του Catherine αναφέρει σχετικά: «Ο σερ Νεύτων ήταν πολύ απασχολημένος με το νομισματοκοπείο και επέστρεψε σπίτι στις τέσσερις το απόγευμα· ένιωθε πολύ κουρασμένος, αλλά δεν πήγε για ύπνο πριν το λύσει, πράγμα που πέτυχε κατά τις τέσσερις το πρωί.» (χειρόγραφα Keynes, 130151, βιβλιοθήκη του King's College, Καίμπριτζ). Την επόμενη ημέρα, 30 Ιανουαρίου 1697, ο Νεύτων έστειλε τις λύσεις στον πρόεδρο της Βασιλικής Εταιρείας, τον Montagne, ο οποίος τις προώθησε, χωρίς το όνομα του λύτη, στον Bernoulli. Ο τελευταίος, μόλις είδε τις λύσεις του ανώνυμου λύτη, είπε ενθουσιασμένος: «*tanguam ex ungue leonem.*» ◻

Από κοντά και από μακριά

Περιορισμοί των οπτικών οργάνων

A. Stasenko

ΟΚΥΡΙΟΣ LUND ΉΡΩΕ ΣΤΟ ΤΗΛΕΣΚΟΠΟ και άρχισε να κοιτάζει τη Σελήνη.

“Δεν βλέπετε τις αχνές κηλίδες που κινούνται κοντά στη Σελήνη;”

“Θεέ και Κύριε! Μόνο ένας τυφλός δεν θα μπορούσε να δει αυτές τις κηλίδες! Τι είναι όμως;”

“Κηλίδες που δεν φαίνονται παρά μόνο με το τηλεσκόπιο μου. Όμως δεν έχουμε άλλο χρόνο! Ας τ’ αφήσουμε λοιπόν.”

Μισή ώρα αργότερα, ο κύριος William Chatterly, ο John Lund και ο Σκωτσέζος Tom Snipe ξεκινούσαν το ταξίδι τους για τις μυστηριώδεις κηλίδες ανεβασμένοι σε ένα αερόστατο που το σήκωναν δεκαοκτώ μπαλόνια.

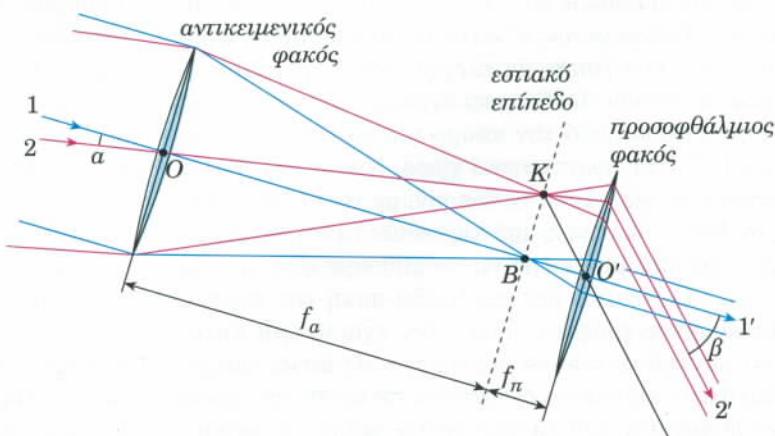
Όσοι αναγνώστες επιθυμούν να μάθουν περισσότερα για τον κύριο Chatterly μπορούν να μελετήσουν την αξιολογότατη πραγματεία του με τον τίτλο “Υπήρχε η Σελήνη πριν από τον Κατακλυσμό; Αν ναι, γιατί δεν καταποντίστηκε;” Παρεμπιπόντως, το εν λόγω βιβλίο περιγράφει επίσης πώς ο συγγραφέας επιβίωσε δύο ολόκληρα χρόνια στα αυστραλιανά έλη, όπου συντηρούνταν οιτιζόμενος με καραβίδες του γλυκού νερού, ιλύ μικροοργανισμών και αβγά κροκοδείλου..., και όπου επινόησε ένα μικροσκόπιο που έμοιαζε πολύ με το κοινό μικροσκόπιο.”

—Αντον Τσέχοφ, Ιπτάμενα νησιά, (μια παρωδία του Ιουλίου Βερν)

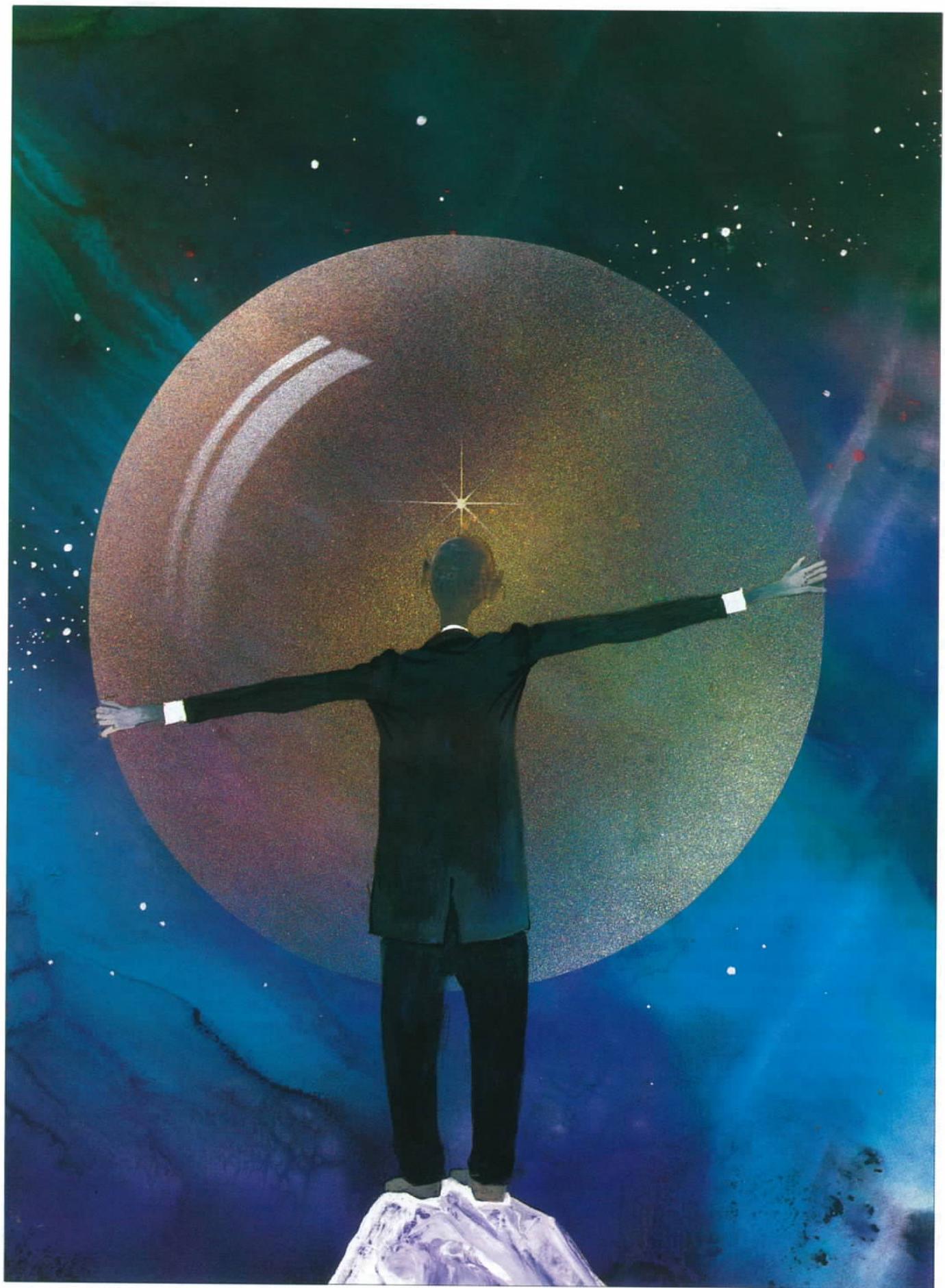
Από όλα τα όργανα που εφηύραν οι φυσικοί, δύο απέκτησαν ευρύτατη φήμη: το τηλεσκόπιο και το μικροσκόπιο. Το πρώτο φιλοδοξεί να μας αποκαλύψει τα βάθη του σύμπαντος, ενώ το δεύτερο μας επιτρέπει να δούμε μικροσκοπικά αντικείμενα που βρίσκονται κυριολεκτικά «κάτω από τη μύτη μας». Ας εξετάσουμε εν τάχει πώς λειτουργούν τούτα τα όργανα.

Από τη σκοπιά της γεωμετρικής οπτικής, το τηλεσκόπιο φαίνεται πολύ απλό. Αποτελείται από δύο ομοαξονικούς φακούς με εστιακές αποστάσεις f_a (για τον αντικειμενικό) και f_n (για τον προσοφθάλμιο), αντιστοίχως (Σχήμα 1). Ας σκοπεύσουμε με αυτό το όργανο ένα ζεύγος αστρων που βρίσκονται το ένα πλησίον του άλ-

λου. Οι ακτίνες οι προερχόμενες από το κάθε άστρο προσπίπτουν στον αντικειμενικό σχεδόν παράλληλες. Όπως προκύπτει από τον ορισμό της εστιακής απόστασης, ο αντικειμενικός φακός εστιάζει το φως στα σημεία B και K του εστιακού του επιπέδου (Σχήμα 1). Στα τηλεσκοπικά συστήματα, όμως, το εν λόγω επίπεδο συμπίπτει με το εστιακό επίπεδο του προσοφθαλμίου, οπότε, αφού διέλθουν από τον προσοφθάλμιο, οι ακτίνες από το κάθε άστρο εξακολουθούν να είναι παράλληλες. Ας καλέσουμε α τη γωνία που σχηματίζουν οι προσπίπτουσες ακτίνες 1 και 2 (από τα δύο άστρα) και β τη γωνία που σχηματίζουν οι εξερχόμενες (διαθλασθείσες) ακτίνες 1' και 2'. Δεν δυσκολευόμαστε τώρα να αντιληφθούμε το



Σχήμα 1



«μυστικό» των τηλεσκοπικών συστημάτων. Εξετάζοντας τα ορθογώνια τρίγωνα OBK και $O'BK$, διαπιστώνουμε ότι η κοινή τους πλευρά ισούται με

$$BK = f_a \text{εφα} = f_n \text{εφβ},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

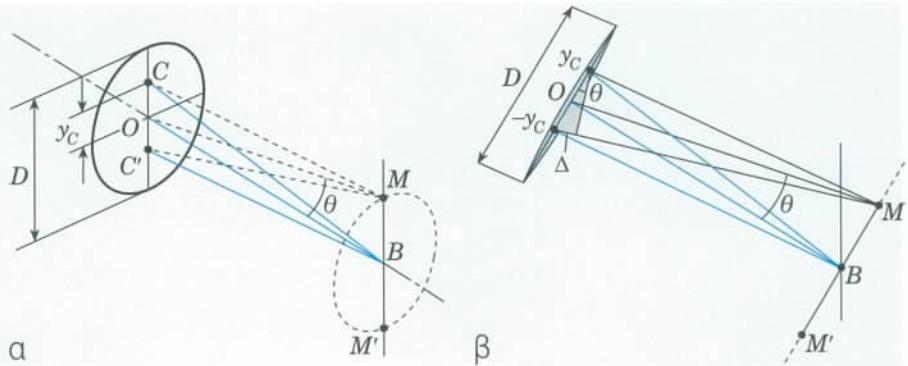
$$\frac{\text{εφβ}}{\text{εφα}} = \frac{f_a}{f_n} \approx \frac{\beta}{a}. \quad (1)$$

Για τις μικρές γωνίες που χαρακτηρίζουν τα περισσότερα οπτικά όργανα, η τελική προσεγγιστική μας εξίσωση ($f_a/f_n = \beta/a$) ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια.

Εκ πρώτης όψεως, η εξίσωση (1) φαίνεται να ανοίγει απεριόριστες δυνατότητες όσον αφορά την αύξηση της μεγέθυνσης των τηλεσκοπίων: Δεν χρειάζεται παρά να χρησιμοποιήσουμε έναν αντικειμενικό φακό με τη μέγιστη δυνατή εστιακή απόσταση (πράγμα που εξηγεί γιατί τα διοπτρικά τηλεσκόπια έχουν τόσο μεγάλο μήκος βάσης) και έναν προσφθάλμιο με την ελάχιστη δυνατή εστιακή απόσταση.

Δυστυχώς, όμως, το φως έχει μια χαρακτηριστική παράμετρο που ανατρέπει τα σχέδιά μας: πρόκειται για το μήκος κύματος λ . Και πώς θα μπορούσε να συμβαίνει διαφορετικά; Μία δέσμη φωτός συνίσταται από ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκη κύματος τα οποία εμπίπτουν στην περιοχή $0,4 \text{ μμ} \leq \lambda \leq 0,8 \text{ μμ}$. Και κάθε κύμα που διέρχεται κοντά σε κάποιο εμπόδιο περιθλάται. Επιπλέον, σύμφωνα με την αρχή Huygens-Fresnel, κάθε τμήμα του πρωτογενούς κύματος (για παράδειγμα, το τμήμα εκείνο που βρίσκεται στο επίπεδο του αντικειμενικού φακού) μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή δευτερογενών κυμάτων, τα οποία συμβάλλουν μεταξύ τους όπου τυχαίνει να συναντώνται —για παράδειγμα, στο εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού.

Ας εφαρμόσουμε λοιπόν την αρχή Huygens-Fresnel για να προσδιορίσουμε προσεγγιστικά το μέγεθος της περιθλαστής την οποία προκαλεί στο προερχόμενο από τα άστρα φως ο αντικειμενικός φακός ενός τηλεσκοπίου. Διαιρούμε τον αντικειμενικό



Σχήμα 2

σε δύο μέρη (Σχήμα 2a), τα οποία θεωρούμε ως πηγές δευτερογενών κυμάτων. Η απόσταση μεταξύ των σημείων C και C' ισούται κατά προσέγγιση με το ήμισυ της διαμέτρου D του αντικειμενικού φακού, οπότε τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο M καλύπτοντας αποστάσεις που διαφέρουν κατά περίπου

$$\Delta = \frac{D}{2} \eta \mu \theta,$$

όπως εύκολα διαπιστώνεται από το μικρό σκιασμένο τρίγωνο στο Σχήμα 2b. Η προκύπτουσα συμβολή ορίζεται από αυτήν ακριβώς τη διαφορά. Για παράδειγμα, στο σημείο B , καθώς και κατά μήκος ολόκληρου του οπτικού άξονα OB , έχουμε $\theta = 0$ και $\Delta = 0$. Επομένως, κατά μήκος του οπτικού άξονα τα κύματα αλληλοενισχύονται. Εάν τοποθετήσουμε μια οθόνη στο κάθετο προς τον οπτικό άξονα επίπεδο το οποίο διέρχεται διά του εστιακού σημείου (πρόκειται για το λεγόμενο εστιακό επίπεδο), θα παρατηρήσουμε μια λαμπρή κηλίδα.

Μπορούμε να γράψουμε μια ακριβέστερη έκφραση για τη διαφορά δρόμου στο σημείο M θεωρώντας τα σημεία C και C' ως τα κέντρα μάζας των δύο ημίσεων του φακού. Είναι δυνατόν να δειχθεί πειραματικά (αν κόψουμε ένα ημικύκλιο από χαρτόνι και το ισορροπήσουμε στη μέση ενός μαχαιριού) ότι το κέντρο μάζας ενός ημικύκλιου διαμέτρου D βρίσκεται σε ύψος

$$y_C = \frac{4}{3\pi} \frac{D}{2}$$

πάνω από τη βάση του. Συνεπώς, για

κάθε σημείο κείμενο επί ευθείας η οποία διέρχεται από το κέντρο του φακού και σχηματίζει γωνία θ με τον οπτικό άξονα, η διαφορά δρόμου Δ των δύο σφαιρικών κυμάτων που εκπέμπονται από τα σημεία C και C' δίνεται από την έκφραση

$$\Delta = 2y_C \eta \mu \theta = \frac{8}{3\pi} \frac{D}{2} \eta \mu \theta. \quad (2)$$

Ας μετατοπίσουμε τώρα το σημείο παρατήρησης όπου εξετάζουμε τη συμβολή προς τα πάνω ή προς τα κάτω, παραμένοντας όμως πάντα στο εστιακό επίπεδο του φακού. Μας ενδιαφέρει πρωτίστως να βρούμε τη γωνία $\theta_{1\min}$ για την οποία η διαφορά δρόμου γίνεται $\Delta_{1\min} = \lambda/2$, έτσι ώστε τα κύματα να αλληλοαναρούνται. Εν προκειμένω, η εξίσωση (2) δίνει:

$$\eta \mu \theta_{1\min} = \frac{3\pi}{8} \frac{\lambda}{D} = 1,18 \frac{\lambda}{D} \approx \theta_{1\min}.$$

Φυσικά, η ορθή εφαρμογή της αρχής Huygens-Fresnel θα απαιτούσε να λάβουμε υπόψη και να αθροίσουμε (δηλαδή να ολοκληρώσουμε) όλα τα στοιχειώδη κύματα που εκπέμπονται από κάθε απειροστή περιοχή του πρωτογενούς κύματος. Σ' αυτή τη διαδικασία θα παρίστατο η ανάγκη να κάνουμε χρήση των συναρτήσεων Bessel, οι οποίες στην περίπτωση ενός συστήματος με αξονική συμμετρία παρουσιάζονται ως τα ανάλογα των «συμβατικών» ημιτόνων και συνημιτόνων που υπεισέρχονται στην περιγραφή αρκετών παρεμφερών μονοδιάστατων προβλημάτων (τέτοιων όπως η δύνηση της χορδής μιας κιθάρας). Η ακριβής τούτη λύση οδηγεί στην εξής έκφραση:

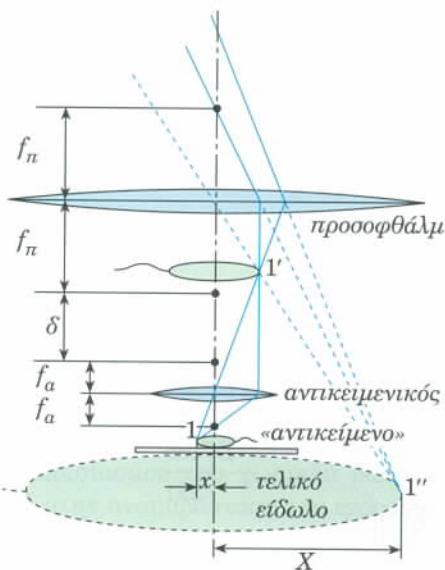
$$\text{ημ} \theta_{1\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (3)$$

Η απλουστευμένη προσέγγισή μας διαφέρει από το ακριβές θεωρητικό αποτέλεσμα κατά μόνο τέσσερα εκατοστά —διόλου άσχημα. Γιατί όμως μας ενδιαφέρει τόσο πολύ αυτή η γνώση; Μα διότι αντιστοιχεί στην ακτίνα $BM = f_a \theta_{1\min}$ του πρώτου σκοτεινού κροσσού που περιβάλλει τη φωτεινή κηλίδα —δηλαδή το ειδώλο του άστρου — στο εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού. Όπως διαπιστώνουμε, το εν λόγω ειδώλο πολύ απέχει από το να είναι μια απέριως μικρή κουκκίδα, ένα σημείο, όπως θα το ίθελε η γεωμετρική οπτική. Τούτο σημαίνει πως το δεύτερο άστρο, το οποίο απέχει από τον οπτικό άξονα κατά γωνιακή απόσταση a , επίσης παράγει μια φωτεινή κηλίδα στο εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού· έτσι, ανακύπτει το πρόβλημα να προσδιορίσουμε την ελάχιστη απόσταση που πρέπει να χωρίζει αυτό το δεύτερο ειδώλο από το πρώτο ώστε να μπορούμε να διακρίνουμε το ένα άστρο από το άλλο. Ο εξέχων φυσικός σερ John Rayleigh (1842-1919) πρότεινε ένα απλό κριτήριο για τη διάκριση των δύο ειδώλων:

$$a \gtrsim \theta_{1\min}. \quad (4)$$

Εφόσον δεν ικανοποιείται η ανωτέρω συνθήκη, τα ειδώλα των δύο άστρων θα επικαλύπτονται ακόμη και στο εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού. Όσο και αν προσπαθήσουμε, θα σταθεί αδύνατο να τα διακρίνουμε.

Αλλά ας πάρουμε τώρα τα μάτια μας από τα ουράνια και ας τα «κολλήσουμε» στους φακούς ενός μικροσκοπίου. Εφαρμόζοντας την προσέγγιση των λεπτών φακών, μπορούμε να βρούμε γραφικά τα ειδώλα του αντικειμένου τα οποία σχηματίζονται από τον αντικειμενικό και τον προσφθάλμιο φακό (Σχήμα 3). Μια λεπτομέρεια οφείλουμε να προσέξουμε ιδιαίτερα. Αφενός μεν, το αντικείμενο πρέπει να κείται πέραν της εστίας του αντικειμενικού φακού, έτσι ώστε να σχηματίζεται το πραγματικό ειδώλο $1'$ αφετέρου δε, για να παράγεται το τελικό φανταστικό ειδώλο $1''$, αυτό το πραγματικό ειδώλο πρέπει



Σχήμα 3

να βρίσκεται ανάμεσα στον προσφθάλμιο και την εστία του.

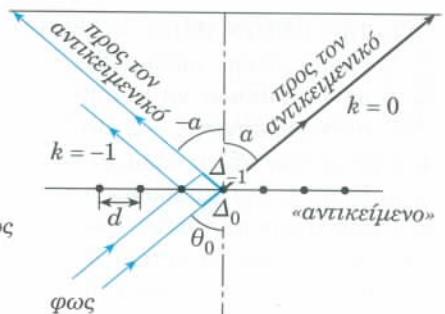
Η γεωμετρική οπτική μάς οδηγεί στον ακόλουθο τύπο για τη μεγέθυνση του απλού μας μικροσκοπίου (βλ. Σχήμα 3):

$$\frac{X}{x} = \frac{D_0 \delta}{f_a f_n},$$

όπου με δ παριστάνεται η απόσταση ανάμεσα στις εστίες του αντικειμενικού και του προσφθαλμίου φακού, ενώ D_0 είναι η ελάχιστη απόσταση ευκρινούς οράσεως του ματιού —η ελάχιστη απόσταση στην οποία μπορεί να εστιάσει το μάτι. Η μεγέθυνση του μικροσκοπίου μπορεί να γίνει εξαιρετικά μεγάλη. Για παράδειγμα, για τις εύλογες τιμές $f_a = 2 \text{ mm}$, $f_n = 15 \text{ mm}$, $\delta = 160 \text{ mm}$, $D_0 = 250 \text{ mm}$, προκύπτει μεγέθυνση $X/x = 1.333$.

Θα έτεινε κανείς να σκεφτεί ότι η παραπάνω τιμή δεν αντιπροσωπεύει κάποιο ανώτατο όριο· η μεγέθυνση θα μπορούσε να αυξηθεί με τη βελτίωση της ποιότητας των φακών (με καλύτερη στιλβωση) και με την άρση των σφαλμάτων τους —της κόμης, του αστιγματισμού, της χρωματικής και της σφαρικής εκτροπής, της παραμόρφωσης, κ.ο.κ. Ωστόσο, το μήκος κύματος λ εμφανίζεται για μία ακόμη φορά στο προσκήνιο για να μας χαλάσει και πάλι τα σχέδια!

Τη θεωρία της διακριτικής ικανότητας των μικροσκοπίων την ανέ-



Σχήμα 4

πιτυξε ο Ernst Abbe (βλ. το σχετικό άρθρο στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου). Ο Abbe είχε την έμπνευση να κοιτάξει ένα φράγμα περιθλασης κάτω από το μικροσκόπιο (Σχήμα 4). Ποια χαρακτηριστικά ενός τέτοιου φράγματος μπορούμε να μάθουμε; Λοιπόν, πρώτα απ' όλα μπορούμε να επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε την περίοδο του d .

Όπως γνωρίζουμε, όταν από ένα φράγμα περιθλασης διέρχεται φως μήκος κύματος λ , παράγει μια φωτεινή εικόνα που παρουσιάζει ένα σύνολο μεγίστων περιθλασης. Αν το φως προσπίπτει στο φράγμα υπό κάποια γωνία θ_0 , οι κατευθύνσεις των εν λόγω μεγίστων καθορίζονται από την εξίσωση

$$\Delta_k - \Delta_0 = d \eta \mu \theta_{k\max} - d \eta \mu \theta_0 = k \lambda. \quad (5)$$

Το μικροσκόπιο μπορεί να μας παράσχει πληροφορίες για την περίοδο d μόνο εφόσον στον αντικειμενικό του φτάνουν δύο τουλάχιστον δέσμες, οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικά μέγιστα της εικόνας περιθλασης (στα μέγιστα, ας πούμε, με $k = 0$ και με $k = -1$). Τούτη η οριακή περίπτωση με $a = \theta_0$ και $-a = \theta_{-1\max}$ φαίνεται στο Σχήμα 4. Σας υπενθυμίζω ότι η προς προσδιορισμό περίοδος d του φράγματος είναι πολύ μικρή —της τάξεως του μμ. Σε σύγκριση με τέτοια μικροσκοπικά μήκη, οι διαστάσεις του αντικειμενικού φακού και η εστιακή του απόσταση (μερικά mm) είναι τόσο μεγάλες ώστε ο αντικειμενικός θα έπρεπε στην πραγματικότητα να σχεδιαστεί έξω από τα περιθώρια των σελίδων του

H συνέχεια στη σελ. 38

Μέθοδοι πο

ΟΤΑΝ ΉΜΟΥΝ ΠΑΙΔΙ, ΔΥΣΚΟΛΕΥ-
όμουν με την προπαίδεια. Μπο-
ρούσα εύκολα να θυμηθώ ορι-
ομένους κανόνες —2 επί 2 ίσον
4, 5 επί 5 ίσον 25—, αλλά το 7 επί 8
ή το 9 επί 6 δεν μπορούσε να μπει
στο κεφάλι μου με τίποτα. Ιδού ο τρό-
πος που υπολόγιζα τέτοια δύσκολα
γινόμενα: Το 5 επί 8 ισούται με 40,
και το 2 επί 8 ισούται με 16. Αυτά τα
δύο μας δίνουν άθροισμα 56. Όμως,
ο δάσκαλός μου ήθελε να του απα-
ντάμε γρήγορα, και έτσι ήμουν υπο-
χρεωμένος να μάθω την προπαίδεια
«απ' έξω κι ανακατωτά». Δεν ήμουν
ο μοναδικός που υπέφερε από τους
πίνακες πολλαπλασιασμού —και αν
κρίνω από το τωρινό επίπεδο της
γνώσης της προπαίδειας μερικών
φοιτητών μου στο Ινστιτούτο Φυσι-
κής και Τεχνολογίας της Μόσχας,
κάποιοι άνθρωποι ουδέποτε μπορούν
να ξεπεράσουν το πρόβλημα.

Τελικά κατάφερα να μάθω την
προπαίδεια, και αποδείχθηκε ότι ό-
ντως ήταν χρήσιμη —και όχι μόνο
για να απαντώ στο δάσκαλο. Με τη
βοήθειά της, μπορούσα να πολλαπλα-
σιάσω οποιουσδήποτε αριθμούς συ-
ναντούσα, και μάλιστα, με μεγάλη τα-
χύτητα.

Για πολλά χρόνια ήμουν βέβαιος
ότι δεν μπορείς να κάνεις πολλαπλα-
σιασμούς γρήγορα χωρίς να χρησι-
μοποιήσεις τον πίνακα πολλαπλασια-
σμού. Η πεποίθησή μου αυτή έγινε
ακόμα ισχυρότερη όταν γνώρισα τις
διάφορες μεθόδους πολλαπλασιασμού
που χρησιμοποιούσαν στην Ινδία,
στην Κίνα και στην Ευρώπη της Α-
ναγέννησης.

Κάποτε ανακάλυψα και μια παλιά
ρωσική μέθοδο, την οποία χρησιμο-
ποιούσαν οι χωρικοί πριν από διακό-
σια περίπου χρόνια, και διαπίστωσα
ότι δεν απαιτούσε να γνωρίζεις τον
πίνακα πολλαπλασιασμού. Το μόνο
που χρειαζόταν ήταν να γνωρίζεις
πολλαπλασιασμό και διαιρέση με το
2 και πρόσθεση αριθμών. Ιδού ο τρό-
πος που το πετύχαιναν.

Ας γράψουμε τους αριθμούς σε μια
γραμμή, έναν αριστερά και έναν δε-
ξιά. Θα διαιρέσουμε τον αριστερό α-
ριθμό με το 2, και θα διπλασιάσουμε
τον δεξιό. Θα γράψουμε τα αποτελέ-
σματα κάτω από κάθε αριθμό, όπως

13	17
6	34
3	68
1	136
	221

Σχήμα 1

στο Σχήμα 1. Όποτε διαιρούμε διά 2 έναν περιττό αριθμό, αγνοούμε το υ-
πόλοιπο. Όταν στην αριστερή στήλη
καταλήξουμε στον αριθμό 1, δια-
γράφουμε όλες τις γραμμές στις ο-
ποίες εμφανίζεται άρτιος αριθμός
στην αριστερή τους πλευρά. Κατό-
πιν, προσθέτουμε τους αριθμούς που
έχουν απομείνει στη δεξιά πλευρά.
Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι
το γινόμενο των δύο αρχικών αριθμών!

Φυσικά, στην αρχή δεν πίστεψα
τη μέθοδο. Άρχισα να πειραματίζο-
μαι, και πολλαπλασίασα το 13 επί 17.
Η απάντηση ήταν σωστή: 221.
Μετά άλλαξα τη σειρά των παραγό-
ντων και πολλαπλασίασα ξανά τους
αριθμούς. Η απάντηση ήταν και πάλι
σωστή (Σχήμα 2).

17	13
8	26
4	52
2	104
1	208
	221

Σχήμα 2

Δεν πίστευα στα μάτια μου. Ήταν
σαν αυτά τα μαθηματικά τεχνάσμα-
τα όπου λανθασμένες πράξεις οδη-
γούν σε σωστές απαντήσεις (δείτε,
για παράδειγμα, το Σχήμα 3).

$$\frac{18}{64} = \frac{1}{4}, \quad \frac{48}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Σχήμα 3

Η μέθοδος όμως αποδείχθηκε α-

πολύτως σωστή. Πριν συνεχίσετε το
διάβασμα του άρθρου, προσπαθήστε
να πολλαπλασιάσετε διάφορα ζεύγη
αριθμών με αυτή τη μέθοδο, για να
πειστείτε για την ορθότητά της.

Και τώρα θα σας δείξω γιατί η μέ-
θοδος αυτή οδηγεί πάντα σε σωστό
αποτέλεσμα.

Σε προηγούμενα τεύχη του περιο-
δικού μας έχουν δημοσιευτεί άρθρα
που εξέτασαν το δυαδικό σύστημα α-
ριθμητης (για παράδειγμα, το άρθρο «Συστήματα αριθμητης» του I.M. Yaglom στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Ο-
κτωβρίου 1995). Σε αυτό το σύστη-
μα, κάθε αριθμός εκφράζεται ως μια
ακολουθία από μηδέν και ένα —για
παράδειγμα, $32 = 100000_2$, $13 = 1101_2$, $17 = 10001_2$. Ο δείκτης 2 δη-
λώνει ότι ο αριθμός είναι γραμμένος
στο δυαδικό σύστημα αριθμητης. Οι
αναπαραστάσεις αυτές ερμηνεύονται
ως εξής:

$$\begin{aligned} 32 &= 100000_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + \\ &\quad + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0, \\ 13 &= 1101_2 = 1 \cdot 2^3 + \\ &\quad + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1, \\ 17 &= 10001_2 = 1 \cdot 2^4 + \\ &\quad + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1. \end{aligned}$$

Ας γράψουμε κάτω από κάθε ψη-
φίο της δυαδικής αναπαράστασης του
αριθμού 13 τον αντίστοιχο αριθμό α-
πό την αριστερή στήλη που σχημα-
τίζεται κατά τον πολλαπλασιασμό με
τη μέθοδο «του ρώσου χωρικού», και
ας επαναλάβουμε το ίδιο για τον α-
ριθμό 17 (Σχήμα 4). Διακρίνετε μη-
ππως κάποιο μοτίβο; Ναι, έχετε δίκιο.
Αν σε κάποια θέση το δυαδικό ψηφίο
είναι το 1, τότε κάτω από αυτό υπάρ-

1	1	0	1
1	3	6	13

1	0	0	1
1	2	4	8

Σχήμα 4

Πολλαπλασιασμού

χει περιττός αριθμός. Διαφορετικά, ο αριθμός είναι άρτιος. Προσπαθήστε να αποδείξετε το γεγονός.

Ας αναδιατυπώσουμε τον κανόνα του χωρικού για τον πολλαπλασιασμό. Στο δεξιό μέρος γράφουμε τους αριθμούς που ισούνται με το γινόμενο του δεύτερου παράγοντα επί το 2 υψωμένο σε μια δύναμη η οποία είναι μικρότερη κατά 1 από την αρίθμητη της γραμμής στην οποία γράφουμε τον αριθμό. Κατόπιν, πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα επί 1 αν ο αριθμός στην αριστερή στήλη είναι περιττός, και με το 0 αν είναι άρτιος. Για να γίνει πιο ξεκάθαρο αυτό το σημείο, προτείνω να προσθέσουμε μία ακόμη στήλη ανάμεσα στις δύο πρώτες, στην οποία θα γράφουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αντίστοιχου αριστερού αριθμού διά του 2 (Σχήμα 5). Επομένως, η μέθοδος του χωρικού έγκειται ουσιαστικά στον πολλαπλασιασμό, γραμμή προς γραμμή, της μεσαίας και της δεξιάς στή-

13	1	17
6	0	17×2
3	1	17×2^2
1	1	17×2^3
		221

Σχήμα 5

λης και στην πρόσθεση των αποτελεσμάτων. Στο παράδειγμα του πολλαπλασιασμού του 13 επί το 17, έχουμε:

$$\begin{aligned} 17 \cdot 1 \cdot 1 + 17 \cdot 0 \cdot 2 + 17 \cdot 1 \cdot 2^2 + 17 \cdot 1 \cdot 2^3 \\ = 17(1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3) \\ = 17 \cdot 1101_2 = 17 \cdot 13. \end{aligned}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τους παράγοντες με την αντίστροφη σειρά, έχουμε

$$\begin{aligned} 13 \cdot 1 \cdot 1 + 13 \cdot 0 \cdot 2 + 13 \cdot 0 \cdot 2^2 + \\ + 13 \cdot 0 \cdot 2^3 + 13 \cdot 1 \cdot 2^4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 13(1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4) \\ &= 13 \cdot 10001_2 = 13 \cdot 17. \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι η μέθοδος πολλαπλασιασμού του χωρικού βασίζεται στην αναπαράσταση του ενός από τους δύο παράγοντες σε δυαδική μορφή. Δεν είναι απλό και κομψό;

Ας δούμε τώρα πόσο καλά αποδίδει αυτή η μέθοδος με μεγάλους αριθμούς —ας πούμε τον 567 και τον 3984. Στο αριστερό μέρος του Σχήματος 6 παρουσιάζεται η μέθοδος του χωρικού και στο δεξιό η συμβατική. Διαπιστώνουμε ότι στη συμβατική μέθοδο απαιτούνται λιγότερες προσθέσεις, αλλά οι προσθετέοι προκύπτουν με πιο περίπλοκο τρόπο. Στη μέθοδο του χωρικού, ότι κερδίζουμε από την απλοποίηση των υπολογισμών το χάνουμε σε χρόνο και, επομένως, η συμβατική μέθοδος είναι μάλλον προτιμότερη.

567	3984
283	7968
141	15936
70	31872
35	63744
17	127488
8	254976
4	509952
2	1019904
1	2039808
	2258928
	2258928

Σχήμα 6

«Όχι!», θα διαμαρτυρηθούν όσοι δεν τα πάνε και τόσο καλά με την προπαίδεια. «Με τη μέθοδο του χωρικού δεν χρειάζεται να απομνημονεύσει τόσες πράξεις, και αυτό είναι οπωσδήποτε σημαντικό!» Θα μπορούσα να απαντήσω με το εξής επιχείρημα για την αξία που έχει η απομνημόνευση του πίνακα πολλαπλασιασμού: Πιστεύω ότι δεν βολεύει ιδιαίτερα να γράψεις πάντα την μέθοδο του χωρικού στην πάνε πάντα, αλλά με την αριθμητική σημαντικότητα της μέθοδος του χωρικού να αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος της μέθοδος πολλαπλασιασμού.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Σχήμα 7

τερα να ψάχνουμε για χαρτί και μολύβι ή για ένα αντίγραφο του «πυθαγόρειου πίνακα» (Σχήμα 7) κάθε φορά που θέλουμε να υπολογίσουμε πόσο κοστίζουν 7 τυρόπιτες των 300 δραχμών.

Ο πίνακας του Σχήματος 7 είναι πράγματι αρχαίος: Έχουν περάσει περισσότερο από 2.000 χρόνια από τότε που τον χρησιμοποιούσαν οι πυθαγόρειοι. (Πρόσφατα, ο μαθηματικός A. Azasmon, από την Τασκένδη, παρατήρησε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα αυτού του πίνακα: Αν διαλέξουμε τέσσερις αριθμούς του πίνακα οι θέσεις των οποίων σχηματίζουν τις κορυφές τετραγώνου, και αν υπάρχει αριθμός στο κέντρο του τετραγώνου, τότε αυτός είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών που βρίσκονται στις κορυφές του τετραγώνου. Παραδείγματος χάριν, για τους τέσσερις αριθμούς που είναι τονισμένοι στο Σχήμα 7 έχουμε: $42 = (25 + 48 + 63 + 32)/4$.)

Στη διάρκεια των χιλιάδων χρόνων μαθηματικής έρευνας, επινοήθηκαν πολλές μέθοδοι πολλαπλασιασμού. Το 1494, ο ιταλός μαθηματικός Luca Pacioli παρουσίασε στη μαθηματική του εγκυκλοπαδίεια *Summa di Arithmeticā, Geometriā, Proportioni et Proportionalitā* οκτώ διαφορετικές μεθόδους πολλαπλασιασμού. Θα παρουσιάσω τις δύο που θεωρώ πιο ενδιαφέρουσες.

Στην πρώτη μέθοδο, που ονομάζεται *το μικρό κάστρο*, τα ψηφία του πάνω αριθμού πολλαπλασιάζονται, ένα-ένα, με τον κάτω αριθμό, αρχίζοντας από το πιο σημαντικό ψηφίο. Τα αποτελέσματα γράφονται σε μια

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 3984 \\ \times 567 \\ \hline 1701000 \\ + 510300 \\ + 45360 \\ + 2268 \\ \hline 2258928 \end{array}
 \end{array}$$

Σχήμα 8

στήλη, και κατά τη διάρκεια της διαδικασίας προστίθεται στο τέλος κάθε αριθμού το αντίστοιχο πλήθος μηδενικών (Σχήμα 8). Στο τέλος, προσθέτουμε τα αποτελέσματα. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι βρίσκουμε πρώτα τα πιο σημαντικά ψηφία, γεγονός που έχει σημασία σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς.

Η δεύτερη μέθοδος καλείται *ζήλια*. Σε αυτή, σχεδιάζουμε ένα πλέγμα όπου καταχωρούνται τα αποτελέσματα των ενδιάμεσων υπολογισμών (αυτά τα αποτελέσματα είναι, στην ουσία, τμήματα του πίνακα πολλαπλασιασμού). Το πλέγμα είναι ένα ορθογώνιο χωρισμένο σε κελιά, το καθένα από τα οποία διαιρείται από μια διαγώνιο (Σχήμα 9). Σύμφωνα με τον Luca Pacioli, το πλέγμα αυτό μοιά-

	5	6	7	
4	2	0	4	2
8	4	0	8	5
9	4	5	4	6
3	1	5	1	8
	2	2	1	8
	2	2	5	

Σχήμα 9

ζει με τα καφασωτά παραθυρόφυλλα που χρησιμοποιούσαν στα σπίτια της Βενετίας για να εμποδίζουν τους διαβάτες να βλέπουν τις γυναίκες που καθόντουσαν πίσω από τα παράθυρα.

Ας πολλαπλασιάσουμε με αυτή τη μέθοδο το 567 επί το 3984. Γράφουμε τον έναν παράγοντα στο πάνω μέρος του πλέγματος και τον δεύτερο, από κάτω προς τα πάνω, στο αριστερό. Στη συνέχεια γράφουμε το γινόμενο των ψηφίων των παραγόντων στο κελί που βρίσκεται στη διασταύρωση της αντίστοιχης γραμμής και

στήλης. Το ψηφίο των δεκάδων γράφεται στο κάτω αριστερά τρίγωνο του κελιού, και το ψηφίο των μονάδων στο πάνω δεξιά τρίγωνο του κελιού. Αφού συμπληρωθεί το πλέγμα, προσθέτουμε τους αριθμούς κατά μήκος των διαγωνίων (αρχίζοντας από τη δεξιά γωνία και μεταφέροντας τα κρατούμενα, όποτε υπάρχουν). Η μέθοδος είναι πολύ απλή. Πράγματι, τα κελιά συμπληρώνονται κατευθείαν με τη βοήθεια του πίνακα πολλαπλασιασμού και μένει μόνο να τα προσθέσουμε.

Οι υπόλοιπες εξι μέθοδοι που περιγράφει ο Pacioli βασίζονται, όπως και οι δύο πρώτες, στον πίνακα πολλαπλασιασμού. Υπάρχουν πολλές άλλες μέθοδοι πολλαπλασιασμού που ανακαλύφθηκαν κατά καιρούς σε διάφορες χώρες, δεν γνωρίζω όμως ούτε μία, εκτός από τη ρωσική και μια αρχαϊκή αιγυπτιακή, που να μη χρησιμοποιεί τον πίνακα πολλαπλασιασμού. ◻

—Anatoly Savin

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 35

περιοδικού —σε απόσταση μερικών μέτρων. Έτσι, η απόσταση ότι τον αντικειμενικό παριστάνεται σχηματικά με τη διακεκομένη γραμμή, ενώ οι ακτίνες που κατευθύνονται προς αυτόν από το φράγμα έχουν σχεδιαστεί σχεδόν παράλληλες.

Για την περίπτωση δύο γειτονικών μεγίστων, η εξίσωση (5) παίρνει τη μορφή $2d\eta\mu = \lambda$, όπου με a συμβολίζουμε το γωνιακό άνοιγμα. Συνεπώς, για το δεδομένο μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός, η ελάχιστη περίοδος του φράγματος την οποία μπορούμε να διακρίνουμε και να δούμε με ένα μικροσκόπιο ανέρχεται σε $d_{\min} = \lambda/(2\eta\mu)$.

Μπορούμε να βελτιώσουμε λίγο τα πράγματα παρεμβάλλοντας μεταξύ της οθόνης και του αντικειμενικού ένα διαφανές μέσο με δείκτη διάθλασης n (μια σταγόνα κάποιου υγρού, ας πούμε). Ως αποτέλεσμα, η διαφορά των δρόμων θα αυξηθεί, καθότι στο μέσο αυτό η ταχύτητα του φωτός και το μήκος κύματος μειώνονται κατά έναν παράγοντα n . Έτοιμος, παίρνουμε:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n\eta\mu}. \quad (6)$$

Ας συγκρίνουμε τώρα τη διακριτική ισχύ ενός τηλεσκοπίου με εκείνη του μικροσκοπίου. Για να βελτιώσουμε αυτή τη σημαντική παράμετρο και στα δύο οπτικά όργανα, χρειάζεται να ικανοποιήσουμε δύο αντιτιθέμενες απαιτήσεις: Για το μεν τηλεσκόπιο, ο λόγος $\lambda/D \equiv a_{\min}$ πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, για το δε μικροσκόπιο, ο λόγος $\lambda/d \equiv 2\eta\mu$ πρέπει να μεγιστοποιηθεί.

Είναι πλέον σαφές γιατί τα τηλεσκόπια κατασκευάζονται με τη μέγιστη δυνατή διάμετρο της «κόρης» εισόδου (του αντικειμενικού), ενώ τα μικροσκόπια έχουν αντικειμενικούς με την ελάχιστη δυνατή εστιακή απόσταση (ώστε το ημα να πλησιάζει σύντομα γίνεται τη μονάδα). Επιπροσθέτως, ο χώρος μεταξύ του αντικειμενικού και του αντικειμένου γεμίζεται με κάποιο υγρό το οποίο έχει τον μέγιστο δυνατό δείκτη διάθλασης n (οπότε ο αντικειμενικός φακός χαρακτηρίζεται ως καταδυτικός).

Τι αποτελέσματα απέφεραν οι προσάθειες των επιστημόνων και των τεχνικών να αυξήσουν τη διακριτική ικανότητα των οπτικών οργάνων; Η μέγιστη διάμετρος οπτικού τηλεσκοπίου ανέρχεται σε $D \sim 6$ m. Οι εξισώσεις (3) και (4) δίνουν $a_{\min} \sim 10^{-7}$ για το «μέσο» μήκος κύματος του ορατού φωτός $\lambda \sim 0,6$ μμ. Υποθέτοντας ότι η ακτίνα του σύμπαντος είναι $R \sim 10^{26}$ m, η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο διακρίσιμων σημείων στα «σύνορά» του πρέπει να ισούται με $l_{\min} \sim Ra_{\min} \sim 10^{19}$ m.

Για να εκτιμήσουμε τη διακριτική ισχύ ενός τυπικού μικροσκοπίου, υποθέτουμε ότι $\eta\mu \leq 1$ και $n \equiv 1,6$ (ο δείκτης διάθλασης της ανιλίνης). Εν τοιαύτη περίπτωση, η εξίσωση (6) δίνει: $d_{\min} \geq \lambda/4 \sim 0,1$ μμ = 10^{-7} m.

Τώρα γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά όρια των δυνατοτήτων αυτών των υπέροχων οπτικών οργάνων. Για να βελτιώσουμε περαιτέρω την ικανότητά μας να παρατηρούμε το πολύ μακρινό και συνάρματο πολύ μικρό, πρέπει να στραφούμε σε άλλες τεχνικές (όπως η αστρονομία ακτίνων X και η ηλεκτρονική μικροσκοπία). ◻

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M211

Σύνθετοι μετά τον όγδοο. Έστω η ακολουθία των φυσικών αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ για την οποία ισχύει

$$a_{k+2} = a_k a_{k+1} + 1,$$

για κάθε $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \geq 9$, ο αριθμός $a_k - 22$ είναι σύνθετος. (S. Genkin)

M212

Υπερβολικό ισόπλευρο. Δίνονται τα σημεία $M(x_0, y_0)$ και $N(-x_0, -y_0)$ της υπερβολής $y = 1/x$. Τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Φέρουμε έναν κύκλο με κέντρο M ο οποίος διέρχεται από το σημείο N . Ο κύκλος αυτός τέμνει την υπερβολή σε τρία άλλα σημεία. Αποδείξτε ότι τα σημεία αυτά είναι κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου.

M213

Πρώτοι διαιρέτες. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n , ο αριθμός

$$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$$

έχει τουλάχιστον n διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες. (N. Vasilyev και V. Senderov)

M214

Ο κύκλος με τις πέτρες. Ένας κύκλος έχει χωριστεί σε n τομείς. Μερικοί τομείς περιέχουν πέτρες, ενώ το συνολικό πλήθος των πετρών είναι $n + 1$. Στη συνέχεια, αναδιατάσσουμε τις πέτρες σύμφωνα με τον εξής κανόνα: Επλέγουμε δύο τυχαίες πέτρες που βρίσκονται στον ίδιο τομέα και τις μετακινούμε στους δύο διπλανούς τομείς —μία αριστερά και μία δεξιά. Αποδείξτε ότι έπειτα από συγκεκριμένο πλήθος τέτοιων μετακινήσεων οι μισοί τουλάχιστον τομείς θα περιέ-

χουν πέτρες. (N. Konstantinov και N. Vasilyev).

M215

Maximin και *minimax*. Σε ένα φύλλο χαρτί χύθηκε μελάνι. Μετρήσαμε, για κάθε σημείο της κηλίδας, τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση του σημείου από το σύνορο της κηλίδας. Έστω r η μέγιστη από τις μικρότερες αποστάσεις και R η ελάχιστη από τις μεγαλύτερες. Ποια είναι η μορφή της κηλίδας αν $r = R$;

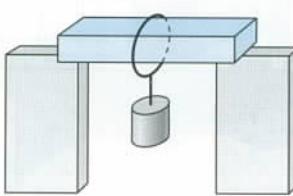
Φυσική

Φ211

Βαρίδι εξαρτημένο από νήμα. Ένα βαρίδι μάζας m εξαρτάται από ελαστικό, αβαρές νήμα που χαρακτηρίζεται από ελαστική σταθερά k . Η μέγιστη δύναμη την οποία μπορεί να αντέξει το νήμα χωρίς να σπάσει ισούται με T . Το βαρίδι ονεβάζεται σε ύψος x πάνω από τη θέση ισορροπίας του και κατόπιν αφήνεται να πέσει από εκεί. Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή του x για την οποία θα σπάσει το νήμα.

Φ212

Σύρμα κόβει πάγο. Ένας συρμάτινος βρόχος από τον οποίο κρέμεται ένα βαρίδι περνιέται γύρω από μια οριζόντια παγοκολόνα (Σχήμα 1). Βαθμιαία το σύρμα «κόβει» τον πάγο. Τούτο οφείλεται στο ότι η πίεση που ασκεί το σύρμα προκαλεί ταπείνωση του σημείου τήξης του πάγου, με αποτέλεσμα ο πάγος να λιώνει κάτω

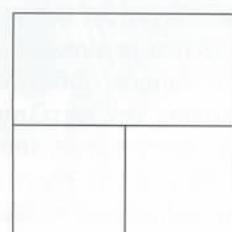


Σχήμα 1

από το σύρμα και να πήγει πάνω από αυτό. Αν, ωστόσο, το μεταλλικό σύρμα αντικατασταθεί από νάλον πετονιά ίσης ή μικρότερης διαμέτρου, τότε και αυτή θα διαπεράσει τον πάγο, με τη διαφορά όμως ότι τώρα η διαδικασία θα εκτυλίσσεται πολύ αργά. Γιατί συμβαίνει αυτό; Εκτελέστε το πείραμα μόνοι σας.

Φ213

Δοχείο με διαμερίσματα. Ένα ψηλό κατακόρυφο δοχείο με τετραγωνική διατομή, το οποίο διαιρείται από κατακόρυφα διαχωρίσματα σε τρία διαμερίσματα (Σχήμα 2), γερίζεται με τρία διαφορετικά υγρά ώς το ίδιο ύψος. Το μεγάλο διαμέρισμα περιέχει καυτή σούπα (65°C), ενώ τα δύο μικρά γερίζονται με ζεστό βρασμένο φρουτοχυμό στους 35°C το ένα και με δροσερό ρωσικό κβας στους 20°C το άλλο. Τα εξωτερικά διαχωρίσματα έχουν το ίδιο πάχος και είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από μάλλον χαμηλή θερμική αγωγιμότητα. Έπειτα από λίγο, η θερμοκρασία της σούπας παρουσιάζει μείωση κατά 1°C . Θεωρώντας ότι και τα τρία υγρά συμπεριφέρονται, από θερμική άποψη, ακριβώς όπως το νε-



Σχήμα 2

Η συνέχεια στη σελ. 46 ⇨

Εκατό χρόνια πριν

Διασκεδαστικές ιστορίες με κούκλες, κρυστάλλινα ποτήρια και καθρέφτες

A. Varlamov

ΠΟΛΛΕΣ ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ διατηρούν μια στήλη όπου ανατυπώνονται ιστορίες οι οποίες εμφανίστηκαν στις σελίδες τους ακριβώς εκατό χρόνια πριν. Εκεί ο αναγνώστης μπορεί να ψυχαγωγηθεί διαβάζοντας για ενδιαφέροντα, ή ακόμη και αλλόκοτα (στα μάτια των συγχρόνων) περιστατικά που συνέβησαν τους «παλιούς καλούς καιρούς». Το *Quantum* έχει μακρύ δρόμο να διανύσει ακόμη ώσπου να γιορτάσει την πρώτη εκατονταετηρίδα του (Ζωή να έχει), οπότε η χρησιμοποίηση ενός τέτοιου τίτλου θα φάνταζε ανάρμοστα πρόωρη. Παρά ταύτα, ας προσπαθήσουμε να φανταστούμε τι θα είχε γράψει ένα περιοδικό σαν το δικό μας πριν από εκατό ακριβώς χρόνια.

Την εποχή εκείνη, τα φαινόμενα της υπεραγωγιμότητας και της υπερρευστότητας δεν είχαν ανακαλυφθεί ακόμη, και ουδείς υποψιαζόταν ότι θα ήταν ποτέ δυνατόν να κατασκευαστούν λείζερ, θερμοπυρηνικοί αντιδραστήρες, τεχνητοί δορυφόροι και πυραυλοκίνητα αεροσκάφη. Εκ πρώτης οψεως, λοιπόν, πιθανόν να σχηματίσει κανείς την αντίληψη ότι οι φιλέρευνοι αναγνώστες του σωτηρίου έτους 1901 δεν θα είχαν σπουδαία πράγματα να διαβάσουν. Και όμως, οι άνθρωποι αυτοί πράγματι διάβαζαν, και μάλιστα με εξαιρετικό ενδιαφέρον, διότι την ίδια εκείνη εποχή ανδρωνόταν μια γενιά σημαντικών φυ-

σικών —η γενιά που δημιούργησε τη σύγχρονη φυσική.

Πρόσφατα, έπεισε στα χέρια μου ένα παλιό, καταταλαιπωρημένο αντίτυπο του *Physikalisches Spielbuch für die Jugend* (*spiel* = παιχνίδι, *Jugend* = νιάτα —αφήνω σ' εσάς την αποκρυπτογράφηση του υπόλοιπου τίτλου) του Bruno Donath, το οποίο εκδόθηκε στα τέλη του 19ου αιώνα. Εκείνη την εποχή, η σπουδή της φυσικής βασιζόταν κυρίως σε εργαστηριακές επιδείξεις, οι οποίες ήταν ταυτόχρονα σαγηνευτικές και πολύ διδακτικές.

Στη συνέχεια θα έχετε την ευκαιρία να διαβάσετε τις περιγραφές μερικών από τα υπέροχα πειράματα που παρουσιάζονται σ' αυτό το έξοχο βιβλίο.

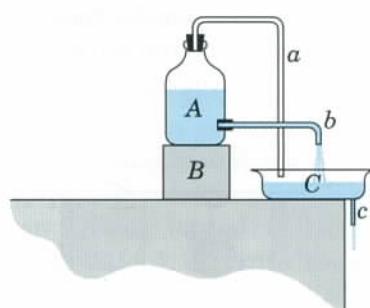
Μη, κρήνη, μη!

Το σχέδιο μιας τέτοιας κρήνης φαίνεται στο Σχήμα 1. Ένας αποστάκτηρας *A* (ύγκου περίπου ενός λί-

τρου) έχει δύο ανοίγματα, ένα στην κορυφή και ένα στο πλευρικό τοίχωμα. Τοποθετείται πάνω σε μια βάση *B* ευρισκόμενη πλησίον ενός δοχείου *C*, το οποίο λειτουργεί ως συλλέκτης νερού. Και τα δύο ανοίγματα φράσονται με ελαστικά πώματα στα οποία μπήγονται οι καμπυλωμένοι σωλήνες *a* και *b*. Ο σωλήνας *b* αποτελεί τη βασική οδό εξόδου της κρήνης, ενώ ο σωλήνας *a* (του οποίου η άκρη κατεβαίνει σχεδόν ώς τον πιθμένα του δοχείου συλλογής) παίζει το ρόλο αυτοσχέδιου κρουνού διακοπής.

Όσο ο σωλήνας *a* παραμένει ανοικτός, στον αποστάκτηρά εισέρχεται αέρας, οπότε το νερό εκρέει ελεύθερα από αυτόν μέσω του σωλήνα *b*, με αποτέλεσμα να ανυψώνεται η στάθμη του νερού στο δοχείο συλλογής. Μόλις η στάθμη του νερού φτάσει ώς το στόμιο του σωλήνα *a*, η εισροή του αέρα διακόπτεται, και το νερό παύει πλέον να τρέχει —η κρήνη στερεύει!

Για να της ξαναδώσει κανείς ζωή, πρέπει να αποφράξει το στόμιο του σωλήνα *a*. Ο σωλήνας *c*, ο οποίος βρίσκεται στον πιθμένα του δοχείου συλλογής, αυτόν ακριβώς το σκοπό εξυπηρετεί. Αν η διάμετρός του υπολείπεται εκείνης του σωλήνα *b*, η εισροή νερού στο δοχείο συλλογής υπερβαίνει την εκροή από αυτό ενόσω η κρήνη συνεχίζει να αναβρύζει. Αυτό σημαίνει ότι θα έρθει κάποτε μια στιγμή που το άνοιγμα του σωλήνα



Σχήμα 1



α θα φραχθεί, οπότε και η κρήνη αυτομάτως θα πάψει να λειτουργεί. Όταν από το δοχείο συλλογής θα έχει εκρεύσει αρκετό νερό, η κρήνη θα αρχίσει να αναβρύζει και πάλι.

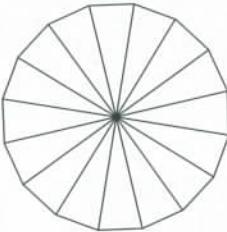
Αν αποκρύψουμε τον εσωτερικό μηχανισμό της πηγής μας από τα μάτια των θεατών —περιτυλίγοντας, για παράδειγμα, τον αποστακτήρα με χαρτί—, μπορούμε να μετατρέψουμε την επιδειξη σε «ταχυδακτυλουργικό νούμερο». Δεν χρειάζεται παρά μόνο να παρουσιάσουμε αντεστραμμένη τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος. Παρότι στην πραγματικότητα η συμπεριφορά της πηγής δεν εξαρτάται καθ' οιονδήποτε τρόπο από τα λόγια σας, μπορείτε να παρακολουθείτε διακριτικά το άνοιγμα του σωλήνα *a* και την κατάλληλη στιγμή να διατάζετε: «Κρήνη, ανάβρυσε! Κρήνη, στρεψε!

Οικιακά κούκλα

Αυτό το πείραμα βασίζεται στην κυματική φύση του ήχου. Για να το πραγματοποιήσουμε, χρειάζεται να ετοιμάσουμε δύο κοιλά σφαιρικά κάτοπτρα με ακτίνα καμπυλότητας περίπου ενός μέτρου.

Εφόσον τα κάτοπτρά μας προορίζονται να ανακλούν ήχο αντί για φως, δεν συντρέχει ιδιαίτερος λόγος να λειάνουμε σχολαστικά τις επιφάνειές τους. Αρκεί να κάνουμε τις διαστάσεις των εξοχών και των πάσης φύσεως ανωμαλιών πολύ μικρότερες από το μήκος κύματος του ήχου. Τα χαρακτηριστικά μήκη κύματος της ανθρώπινης ομιλίας κυμαίνονται από λίγες δεκάδες εκατοστών ώς και μερικά μέτρα, οπότε από τις επιφάνειες των κατόπτρων πρέπει να λείπει κάθε ανωμαλία με διαστάσεις μεγαλύτερες από 1-2 cm. (Σκεφτείτε μήπως μπορείτε να δώσετε κάποια αντίστοιχη εκτίμηση για την ανεκτή τραχύτητα στα οπτικά κάτοπτρα.)

Η κατασκευή ενός ηχητικού κάτοπτρου δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. Πάρτε ένα κομμάτι χαρτόνι και κόψτε το σε πανομοιότυπα οξυγώνια ιοσοκελή τρίγωνα (όσο περισσότερα τόσο καλύτερα). Με τα τρίγωνα αυτά φτιάξτε μια πυραμιδοειδή επιφάνεια κολλώντας τα το ένα με το άλλο στα σκέλη (Σχήμα 2). Όσο μα-

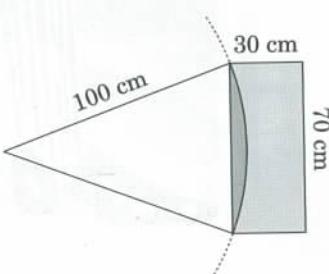


Σχήμα 2

κρύτερα είναι τα τρίγωνα τόσο μεγαλύτερο θα βγει το κάτοπτρό μας. Για το πείραμά μας θα αρκεσει να χρησιμοποιήσουμε τρίγωνα με σκέλη μήκους περίπου 30-40 cm.

Υγράντε το συγκολλημένο χαρτόνι για να γίνει μαλακό και εκτατό, και κατόπιν πέστε το πάνω σε ένα μεγάλο επίπεδο πάτο. Τέλος, πατικώστε τις ανωμαλίες και φινιρίστε την επιφάνεια με τη βοήθεια ενός προτύπου, το οποίο επίσης μπορείτε να κατασκευάσετε μόνοι σας. Χαράξτε ένα τόξο ακτίνας 1 m πάνω σε χαρτόνι μήκους περίπου 70 cm και πλάτους 30 cm έτσι ώστε να καλύπτει ολόκληρο το μήκος του χαρτονιού (Σχήμα 3). Στη συνέχεια, αποκόψτε το κυκλικό τμήμα που σχηματίστηκε —το πρότυπό σας είναι έτοιμο. Εφαρμόστε το πρότυπο κάθετα στο κάτοπτρο και εξομαλύντε την επιφάνεια του κατόπτρου, ώσπου να μπορείτε να το περιστρέψετε χωρίς να «μαγκώνει» σε καμία ανωμαλία. Κατόπιν, αφήστε το κάτοπτρο στη σκιά για να στεγνώσει.

Για το πείραμά μας χρειαζόμαστε δύο κάτοπτρα όσο το δυνατόν πιο όμοια. Κρεμάστε τα στους απέναντι τοίχους δύο επικοινωνούντων δωματίων. Τα κάτοπτρα μπορεί να απέχουν έως και 10 m. Ωστόσο, πρέπει να είναι απόλυτα ευθυγραμμισμένα, ειδάλλως το πείραμα δεν πρόκειται να πετύχει. Για να ελέγχετε κατά πόσον ικανοποιείται η προϋπόθεση αυ-



Σχήμα 3

τή, τοποθετήστε ένα αναλογικό ρολόι στην εστία ενός από τα κάτοπτρα (η οποία βρίσκεται σε απόσταση ίση με τη μισή ακτίνα από την κορυφή του κατόπτρου). Οι κτύποι του πρέπει να ακούγονται με τη μεγαλύτερη ένταση στην εστία του άλλου κατόπτρου.

Αφού έχετε πα ρυθμίσει το ακουστικό σύστημα, τοποθετήστε μια κούκλα ή ένα αγαλματίδιο στην εστία του ενός κατόπτρου, και πείτε στους φίλους σας ότι αυτή η κούκλα μπορεί να απαντήσει σε κάθε ερώτηση που θα της ψιθυρίσουν στο αφτί. Φυσικά, θα πρέπει να έχετε κρύψει από τη θέα του κοινού το δεύτερο κάτοπτρο (για παράδειγμα, καλύψτε την πόρτα με μια κουρτίνα ή φωτίστε έντονα το δωμάτιο όπου βρίσκεται η κούκλα αφήνοντας το διπλανό δωμάτιο σκοτεινό).

Φυσικά, για να «κάνετε το κόλπο» θα χρειαστείτε βοήθεια —ένας συνεργάτης σας πρέπει να βρίσκεται κοντά στο κρυμμένο κάτοπτρο. Από το διπλανό δωμάτιο ο βοηθός σας θα ακούει καθετί που ψιθυρίζετε στο αυτή της κούκλας και θα απαντά στις ερωτήσεις. Οι απαντήσεις θα ακούγονται κοντά στην κούκλα, δημιουργώντας την ψευδαίσθηση ότι πρόκειται για ένα πλάσμα που μιλά.

Η εξήγηση του φαινομένου (όταν φτάσει η ώρα γι' αυτή) δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. Εάν η πηγή κάποιου ήχου είναι τοποθετημένη στην εστία του ενός κατόπτρου, τα ηχητικά κύματα θα ανακλαστούν σ' αυτό και θα σχηματίσουν μια ηχητική δέσμη που διαδίδεται παράλληλα προς τον άξονα του ακουστικού μας συστήματος. Όταν αυτό το κύμα φτάσει στο δεύτερο κάτοπτρο, θα ανακλαστεί και θα συγκλίνει στην εστία του.

Ο συνεργάτης σας μπορεί να πετύχει ακόμη καλύτερα αποτελέσματα αν αντικαταστήσει το κρυμμένο κάτοπτρο με ένα μεγάφωνο. Το μεγάφωνο θα του επιτρέπει τόσο να κρυφακούει τις ερωτήσεις όσο και να ψιθυρίζει τις απαντήσεις. Στην προκειμένη περίπτωση, το τέχνασμα θα προκαλέσει ακόμη μεγαλύτερη εντύπωση, καθότι το μεγάφωνο όχι μόνο ενισχύει τους ήχους, αλλά και τους αλλοιώνει.

Το ποτήρι που τραγουδά

Μπορείτε να παραγάγετε διάφορους μουσικούς ήχους με ένα λεπτότοιχο κολονάτο ποτήρι, και μάλιστα όχι μόνο χτυπώντας το. Πώς; Για να μάθετε, συνεχίστε την ανάγνωση!

Πλύνετε τα χέρια σας με ζεστό νερό και καθαρίστε σχολαστικά τα δάκτυλά σας από κάθε είδους λιπαρή ουσία. Βουτήξτε το δάκτυλό σας σε λίγο νερό και σύρετε το πάνω στο χειλός του ποτηριού· επιμείνετε σ' αυτό, βρέχοντας επανειλημμένα το δάκτυλό σας. Στην αρχή το ποτήρι θα βγάζει δυσάρεστους, τοιριχτούς ήχους. Εντούτοις, όταν το χειλός θα έχει πλέον τριψεί αρκετά, ο ήχος θα γίνει πιο ευχάριστος και μουσικός. Μεταβάλλοντας την πίεση του δάκτυλου σας, μπορείτε να αλλάξετε τον τόνο του ήχου του ποτηριού. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν το ηχητικό αποτέλεσμα: το ύψος του ήχου εξαρτάται και από το μέγεθος του ποτηριού, από το πάχος των τοιχωμάτων του καθώς και από την ποσότητα του υγρού που περιέχει.

Παρεμπιπτόντως, μουσικούς ήχους δεν είναι ικανό να παράγει κάθε ποτήρι. Επομένως, η αναζήτηση του κατάλληλου ποτηριού ενδέχεται να αποβεί μακρά και επίπονη. Οι ωραιότεροι μουσικοί ήχοι παράγονται από πολύ λεπτά, υψηλής ποιότητας ποτήρια σε σχήμα παραβολοειδούς και με μακρύ, λεπτό πόδι. Το ύψος μεταβάλλεται με την προσθήκη υγρού —όσο περισσότερο υγρό περιέχει το ποτήρι τόσο χαμηλότερος είναι ο παραγόμενος τόνος.

Ιδού μία ακόμη παράξενη ιδιότητα: Αν η στάθμη του νερού φτάνει στη μέση περίπου του ποτηριού, στην υγρή επιφάνεια εμφανίζονται ρυτιδώσεις, οι οποίες παράγονται από τη δόνηση του τοιχώματος του ποτηριού. Οι ρυτιδώσεις θα έχουν μεγαλύτερο πλάτος κοντά στο κινούμενο δάκτυλό σας.

Έχει ενδιαφέρον ότι ο Βενιαμίν Φραγκλίνος (1706-1790) —ο οποίος, εκτός από τη φήμη που απέκτησε ως πολιτικός, έγινε παγκοσμίως γνωστός επειδή ανακάλυψε τον ατμοσφαιρικό ηλεκτρισμό, αλλά και χάρη σε ορισμένες ομηραντικές επνοήσεις του ό-

πως το αλεξικέραυνο και οι σύγχρονες καμινάδες— δημιούργησε ένα εντυπωσιακά πρωτότυπο μουσικό όργανο που βασίζοταν στο φαινόμενο το οποίο περιγράφαμε. Ο Φραγκλίνος πήρε μερικά καλογυαλισμένα φλιτζάνια, άνοιξε τρύπες στα κέντρα τους και τα στερέωσε σε όρθιους άξονες, σε ίσες αποστάσεις. Αυτό το σύστημα περιστρέφοταν με τη βοήθεια ενός ποδοκίνητου τροχού (παρόμοιου με εκείνον των ραπτομηχανών). Αγγίζοντας κανείς τα περιστρέφομενα φλιτζάνια με τα υγρά δάκτυλά του, μπορούσε να παραγάγει ευρύ φάσμα ήχων, από έναν φορτίσιμο ώς έναν σβησμένο ψίθυρο.

Δύσκολα φαντάζεται κανείς πώς ηχούσε αυτό το υπέροχο μουσικό όργανο, αλλά όσοι έτυχε να το ακούσουν λένε ότι η αρμονία των ήχων του συνάρπαζε το ακροατήριο. Το 1763, ο Φραγκλίνος παρουσίασε τούτο το μουσικό θαύμα σε μια Αγγλίδα ονόματι Davis. Εκείνη περιέφερε και επέδειξε το εν λόγω όργανο σε πολλές ευρωπαϊκές χώρες, προτού αυτό εξαφανιστεί χωρίς να αφήσει το παραμικρό ίχνος.

Ένα σύνθετο κάτοπτρο

Πάρτε δύο συνηθισμένους καθρέφτες (χωρίς κορνίζα) και τοποθετήστε τους κάθετα μεταξύ τους, με τις ακμές τους σε επαφή και τις ανακλαστικές επιφάνειές τους στραμμένες προς το εσωτερικό της σχηματιζόμενης δίεδρης γωνίας. Τώρα, κοιταχθείτε σ' αυτό το σύνθετο κάτοπτρο κατά τη διεύθυνση της διχοτόμου. Θα αντικρίσετε το ειδώλο σας. Κλείστε το δεξιό σας μάτι —το ειδώλο θα σας μημθεί. Σηκώστε ψηλά τον αριστερό σας βραχίονα —το ειδώλο θα επαναλάβει την κίνησή σας και θα υψώσει το αριστερό του χέρι. Όπως καταλαβαίνετε, το οπτικό όργανο που μόλις φτιάξατε είναι ένα «τέλειο» κάτοπτρο —δεν μπερδεύει το «αριστερό» με το «δεξιό». Άλλα πώς γίνεται αυτό;

Η απάντηση είναι απλούστατη. Αδυνατείτε να παρατηρήσετε το ειδώλο της αριστερής σας πλευράς στο αριστερό κάτοπτρο, καθόσον ο νόμος της ανάκλασης ορίζει πως αυτό ανακλά τις προσπίπουσες ακτίνες όχι

προς εσάς, αλλά προς το προσκείμενό του κάτοπτρο. Έτσι, το τελικό είδωλο της αριστερής πλευράς του σώματός σας σχηματίζεται από το δεξιό κάτοπτρο και, επομένως, θα βρίσκεται δεξιά. Με άλλα λόγια, τα κάτοπτρα «ανταλλάσσουν» ειδώλα, οπότε το τελικό είδωλο αποτελεί προϊόν δύο ανακλάσεων αντί μίας, όπως συμβαίνει στα κοινά κάτοπτρα. Ως εκ τούτου, η αριστερή πλευρά ενός αντικειμένου θα μετασχηματίστει «φυσικώ τω τρόπω» στο αριστερό τμήμα του ειδώλου, και αντιστρόφως.

Αρχίστε τώρα να αυξάνετε βαθμιαία τη γωνία που σχηματίζουν τα δύο κάτοπτρα. Σε πρώτη φάση, από τα μάτια σας θα εξαφανιστεί η μύτη σας μαζί με το κεντρικό τμήμα του προσώπου σας: κατόπιν, θα έρθει μια στιγμή που δεν θα βλέπετε παρά μόνο τα αφτιά σας, ενώ για μια συγκεκριμένη γωνία το ειδώλο θα χαθεί τελείως. Όταν όμως η γωνία μεταξύ των δύο κατόπτρων φτάσει να γίνει περίπου 180°, στο επίπεδο πλέον σύνθετο κάτοπτρο θα εμφανιστεί το συνηθισμένο ειδώλο του προσώπου σας.

Το πείραμα μπορεί να εκτελεστεί και με την αντίστροφη σειρά. Προφανώς, θα αντιστραφεί και η χρονική αλληλουχία των γεγονότων: Πρώτα το πρόσωπό σας πλαταίνει, κατόπιν η μύτη σας πρήζεται, το στόμα σας τεντώνεται, ένα τρίτο μάτι εμφανίζεται πάνω από τη μύτη σας..., κ.ο.κ. Προσπαθήστε να κατανοήσετε την παράδοξη συμπεριφορά του ειδώλου και σχεδιάστε τις τροχιές των φωτεινών ακτίνων σ' αυτό το σύστημα κατόπτρων για διάφορες τιμές της μεταξύ τους γωνίας. ◻

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- S. Kuzmin, «Περιστροφή μέσα σε ρεύμα αέρα», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.
- I. Mazin, «Φυσική στην κουζίνα», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1997.
- N. Paravyan, «Κάλαντα στο εργαστήριο», Ιούλιος/Αύγουστος 1998.
- P. Kanaev, «Πειράματα με σαπουνόφουσκες», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1998.
- S. Krotov και A. Chernoutsan, «Ψυχρός βρασμός», Μάρτιος/Απρίλιος 1999.

Σημεία Brocard

«Καλόν εν παντὶ το ἰσον· υπερβολή καὶ ἐλλειψὶς οὐ μοι δοκέει.»
—Δημόκριτος

V. Prasolov

ΣΕ ΚΑΘΕ ΤΡΙΓΩΝΟ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΠΟΛΛΑ ένδιαιφέροντα σημεία: το σημείο τομής των διαμέσων, το σημείο τομής των υψών, τα κέντρα του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου, κ.ο.κ. Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε δύο τέτοια σημεία —τα επονομαζόμενα σημεία Brocard.

Ένα σημείο P στο εσωτερικό ενός τριγώνου ABC καλείται πρώτο σημείο Brocard αν ισχύει η διπλή ισότητα

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$$

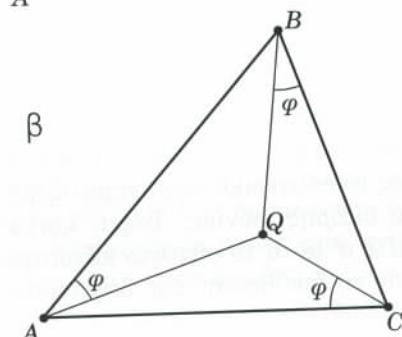
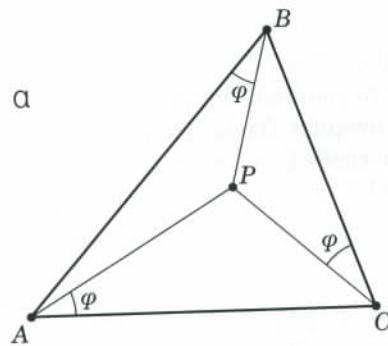
(βλ. Σχήμα 1α). Ένα σημείο Q στο εσωτερικό ενός τριγώνου ABC καλείται δεύτερο σημείο Brocard αν ισχύει η διπλή ισότητα

$$\angle QAB = \angle QBC = \angle QCA$$

(βλ. Σχήμα 1β).

Πριν εξετάσουμε τις ιδιότητες αυτών των σημείων, ας αποδείξουμε ότι σε κάθε τρίγωνο υπάρχει μόνο ένα πρώτο και μόνο ένα δεύτερο σημείο Brocard. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση του πρώτου σημείου.

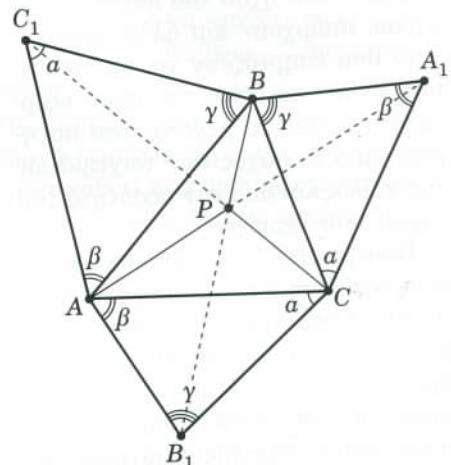
Αρχίζουμε κατασκευάζοντας το πρώτο σημείο Brocard. Στο τρίγωνο ABC θέτουμε $\angle BAC = a$, $\angle ABC = \beta$ και $\angle ACB = \gamma$. Η βασική ιδέα είναι να κατασκευάσουμε τα τρίγωνα A_1BC , AB_1C και ABC_1 εξωτερικά του τριγώνου ABC , έτσι ώστε τα τρία αυτά τρίγωνα να είναι όμοια με το αρχικό και οι γωνίες τους να έχουν τη



Σχήμα 1

διευθέτηση που βλέπουμε στο Σχήμα 2 (οι αναγνώστες πρέπει να αποδείξουν ότι αυτό είναι πράγματι δυνατό).

Το σχέδιό μας είναι να αποδείξουμε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι αυτών των τριγώνων διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο έχει την πρώτη ιδιότητα Brocard. Για να το πετύχουμε, θεωρούμε το άλλο σημείο τομής (εκτός του C) των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων A_1BC και B_1AC —έστω P . Υπενθυμίζουμε



Σχήμα 2

ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν και μόνο αν οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Έχουμε επομένως:

$$\angle BPC = 180^\circ - \beta,$$

$$\angle APC = 180^\circ - \gamma,$$

$$\begin{aligned} \angle APB &= 360^\circ - \angle BPC - \angle APC \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \beta) - (180^\circ - \gamma) \\ &= \beta + \gamma = 180^\circ - a, \end{aligned}$$

γεγονός που σημαίνει ότι το P ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AC_1B . Συνεπώς, οι τρεις περιγεγραμμένοι κύκλοι τέμνονται στο σημείο P .

Φέρουμε τώρα τις PA , PB και PC , και, βάσει ίσων εγγεγραμμένων γωνιών, παρατηρούμε ότι $\angle PAC =$

$\angle PB_1C = \gamma - \angle ACP = \angle PCB$. Μπορούμε παρομοίως να αποδείξουμε ότι $\angle PCB = \angle PBA$. Επομένως, το P έχει την ιδιότητα του πρώτου σημείου Brocard.

Είναι όμως και μοναδικό; Μπορούμε να αποδείξουμε ότι πράγματι είναι, αντιστρέφοντας τον προηγούμενο συλλογισμό μας. Ας υποθέσουμε ότι P' είναι ένα σημείο τέτοιο ώστε $\angle P'AC = \angle P'CB = \angle P'BA$. Τότε, $\angle ACB = \gamma = \angle P'CA + \angle P'CB = \angle P'AC + \angle P'CA = 180^\circ - \angle AP'C$.

Από την τελευταία σχέση έπειται ότι το P' ανήκει στον κύκλο που διέρχεται από τα A , B_1 και C . Όμως, και το σημείο P ανήκει στον κύκλο που διέρχεται από τα A , B_1 και C και, επομένως, το P' συμπίπτει με το P . Αυτό σημαίνει ότι το σημείο P που ικανοποιεί την πρώτη ιδιότητα Brocard είναι πράγματι μοναδικό.

Επισημαίνουμε παρεμπιπτόντως ότι αν φέρουμε τις PA_1 , PB_1 και PC_1 , τότε $\angle APB_1 = \angle ACB_1 = a$. Παρομοίως, $\angle CPA_1 = \gamma$ και $\angle B_1PC = \beta$. Συνεπώς, $\angle APA_1 = a + \beta + \gamma = 180^\circ$, και άρα τα A , P , A_1 είναι συγγραμμικά. Παρομοίως, τα B , P και B_1 είναι συγγραμμικά όπως και τα C , P και C_1 .

Πρόβλημα 1. Στις πλευρές του τριγώνου ABC κατασκευάστε τρίγωνα A_1BC , AB_1C και ABC_1 όμοια με αυτό και τέτοια ώστε τα τρίγματα AA_1 , BB_1 και CC_1 να τέμνονται στο δεύτερο σημείο Brocard.

Αποδείξαμε ότι σε κάθε τρίγωνο υπάρχει ένα μοναδικό πρώτο σημείο Brocard. Μπορούμε λοιπόν τώρα να εξετάσουμε μερικές ιδιότητες των εν λόγω σημείων. Υπενθυμίζουμε ότι αν φέρουμε από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC τις ευθείες OA , OB και OC , αυτές τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο σε σημεία A_1 , B_1 και C_1 τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABC και $A_1B_1C_1$ να είναι ίσα (είναι συμμετρικά ως προς το O). Τα σημεία Brocard έχουν μια παρόμοια ιδιότητα.

Πρόβλημα 2. (a) Έστω P το πρώτο σημείο Brocard. Οι ευθείες PA , PB και PC τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στα σημεία A_1 , B_1 και C_1 , αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ABC και $A_1B_1C_1$ είναι ίσα.

(b) Διατυπώστε και αποδείξτε μια παρόμοια πρόταση για το δεύτερο σημείο Brocard.

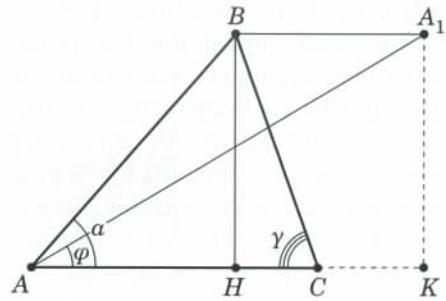
Αν φέρουμε από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ABC τις ευθείες OA' , OB' και OC' κάθετες προς τις πλευρές του, τα σημεία A' , B' και C' είναι μέσα των πλευρών και μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το τρίγωνο ABC είναι όμοιο με το τρίγωνο $A'B'C'$. Το σημείο Brocard P έχει μια παρόμοια ιδιότητα.

Πρόβλημα 3. Από το πρώτο σημείο Brocard φέρουμε κάθετες PA' , PB' και PC' προς τις πλευρές του τριγώνου ABC . Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABC είναι όμοιο με το $A'B'C'$.

Από τη στιγμή που έχουμε επιλύσει το Πρόβλημα 2, το Πρόβλημα 3 αποτελεί κατά μία έννοια πλεονασμό. Το γεγονός είναι ότι ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόβλημα 4. Έστω ότι οι ευθείες AX , BX και CX τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στα σημεία A_1 , B_1 και C_1 , αντίστοιχα. Έστω επίσης A' , B' και C' οι προβολές του σημείου X στις πλευρές του τριγώνου ABC . Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ είναι όμοιο με το $A'B'C'$.

Θα εξετάσουμε τώρα τη γωνία $\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$. Μπορούμε να εκφράσουμε τη φ συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ABC . Για να το πετύχουμε, οβήνουμε στο Σχήμα 2 όλες τις ευθείες που χρησιμοποιήσαμε στην κατασκευή μας και φέρουμε από το σημείο A_1 την ευθεία A_1K κάθετη προς την ευθεία AC (βλ. Σχήμα 3). Τότε, από τα τρίγωνα AKA_1 και A_1CK έχουμε:



Σχήμα 4

$$\begin{aligned} \sigma\varphi\varphi &= AK/A_1K \\ &= AC/A_1K + CK/A_1K \\ &= AC/A_1K + \sigma\varphi\beta. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι η BA_1 είναι παράλληλη προς την AC και, επομένως, η A_1K ισούται με το ύψος επί την πλευρά AC του τριγώνου ABC . Έστω BH αυτό το ύψος (Σχήμα 4). Τότε:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{A_1K} &= \frac{AC}{BH} = \frac{AH}{BH} + \frac{HC}{BH} \\ &= \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\gamma. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

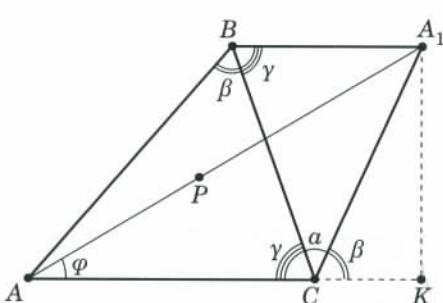
$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma.$$

Η ίδια σχέση προκύπτει και για το δεύτερο σημείο Brocard. Οι γωνίες που κυμαίνονται από 0° έως 180° είναι ίσες αν και μόνο αν είναι ίσες οι συνεφαπτόμενές τους. Επομένως, και για το δεύτερο σημείο Brocard έχουμε την ίδια γωνία φ . Η γωνία αυτή ονομάζεται γωνία Brocard.

Πρόβλημα 5. (a) Αποδείξτε ότι η γωνία Brocard φ είναι μικρότερη ή ίση των 30° .

(b) Δίνεται ένα σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου ABC . Αποδείξτε ότι μία από τις γωνίες ABM , BCM ή CAM είναι μικρότερη ή ίση των 30° . (Αυτό το πρόβλημα είχε τεθεί στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1991.)

Ας σχολιάσουμε εκτενέστερα το γεγονός ότι οι γωνίες του πρώτου και του δεύτερου σημείου Brocard είναι ίσες. Έστω P και Q τα εν λόγω σημεία. Θεωρούμε τις συμμετρικές ευθείες AP , BP και CP ως προς τις διχοτόμους των γωνιών A , B και C , αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο Q . Όμως, η συγκεκριμένη ιδιότητα δεν ανήκει από-



Σχήμα 3

κλειστικά στα σημεία Brocard: Έστω X ένα τυχαίο σημείο που δεν ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC . Αν θεωρήσουμε τις συμμετρικές ευθείες των AX , BX και CX ως προς τις διχοτόμους των αντίστοιχων γωνιών, οι ευθείες που προκύπτουν συντρέχουν σε ένα σημείο. Δεν θα εξετάσουμε αυτό το αξιοσημείωτο γεγονός εδώ —αξίζει να του αφιερώσουμε ένα ξεχωριστό άρθρο. Θα επισημάνουμε μόνο το εξής:

Πρόβλημα 6. Έστω O το περίκεντρο του τριγώνου ABC . Αποδείξτε ότι οι συμμετρικές ευθείες των AO , BO και CO ως προς τις διχοτόμους των γωνιών A , B και C , αντίστοιχα, διέρχονται από το σημείο τομής των υψών του τριγώνου.

Αφήνουμε για τους αναγνώστες τα επόμενα προβλήματα που αναφέρονται στις ιδιότητες των σημείων και των γωνιών Brocard.

Προβλήματα

7. Έστω P το σημείο Brocard του τριγώνου ABC και R_1 , R_2 και R_3 οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ABP , BCP και CAP , αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $R^3 = R_1 R_2 R_3$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC .

8. Έστω Q το δεύτερο σημείο Brocard του τριγώνου ABC , O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του, και A_1 , B_1 και C_1 τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων CAQ , ABQ και BCQ , αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $A_1 B_1 C_1$ είναι όμοιο με το ABC , και ότι το O είναι το πρώτο σημείο Brocard του τριγώνου $A_1 B_1 C_1$.

9. Αποδείξτε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο $A_1 B_1 C_1$ από τις διαμέσους ενός τριγώνου ABC , και ότι οι γωνίες Brocard των δύο αυτών τριγώνων είναι ίσες.

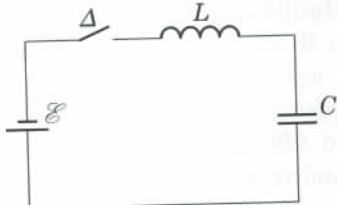
10. Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC με κέντρο το σημείο O . Αποδείξτε ότι η γωνία Brocard του τριγώνου που σχηματίζουν οι προβολές ενός τυχαίου σημείου X πάνω στις πλευρές του τριγώνου ABC εξαρτάται μόνο από το μήκος της OX . ◻

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 39

ρό, προσδιορίστε τη θερμοκρασία του φρουτοχυμού και του κβασ. Σημειώτεν ότι και το κβασ και ο φρουτοχυμός έχουν τον ίδιο όγκο, ο οποίος μάλιστα ισούται με το ύμισυ του όγκου της σούπας. (A. Zilberman)

Φ214

Ηλεκτρικά μέγιστα σε κύκλωμα LC . Στο κύκλωμα που φαίνεται στο Σχήμα 3, κλείνουμε το διακόπτη Δ . Βρεί-

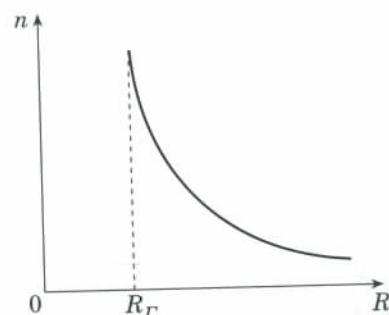


Σχήμα 3

τε τη μέγιστη τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα καθώς και τη μέγιστη τάση ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. (P. Zubkov)

Φ215

Σπινθηροβόλος πλανήτης. Κατά την εκτόξευσή τους, οι αστροναύτες παρατήρησαν ένα λεπτό λαμπερό στρώμα σε υψόμετρο H_0 , που οφειλόταν στην ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός στη γήινη ατμόσφαιρα. Στο διαστημόπλοιο είχαν ένα καλό εγχειρίδιο αναφοράς, το οποίο περιέχει μια γραφική παράσταση (Σχήμα 4) της εξάρτησης του δείκτη διάθλασης n από την απόσταση ώς το κέντρο της Γης (με R_Γ συμβολίζεται η ακτίνα της Γης). Πώς μπορεί να προσδιορίσει κανείς την τιμή του H_0 στηριζόμενος στη γραφική παράσταση;



Σχήμα 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

To *Quantum* διανύει τον όγδοο χρόνο συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, επί οκτώ χρόνια προσφέρει μέσα από τις σελίδες του την τεκμηριωμένη γνώση, αποκαλύπτοντας στο ελληνικό κοινό τη γοητεία των φυσικών επιστημάν και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα, λοιπόν, έχουν κυκλοφορήσει σαράντα τρία τεύχη του.

Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή τα βιβλιοπωλεία του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.

Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχων.

To *Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου.

Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Για την αρχειοθέτηση των τευχών, διατίθενται και οι αντίστοιχες θήκες.

Εξωπραγματικά βεληνεκή;

Η τοξοβολία στοχεύει τη φυσική



MΟΛΟΝΟΤΙ ΤΑ ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΤΑ ΒΕΛΛΗ έπαψαν εδώ και πολύ καιρό να χρησιμεύουν ως μέσα διεξαγωγής πολέμου, παραμένουν ανάμεσα στα αγαπημένα παιχνίδια των αγοριών και χρησιμοποιούνται σε ειδικά κυνήγια και ολυμπιακά αγωνίσματα. Πρόσφατα αναφέρθηκε ότι ένα βέλος που ρίχτηκε από απόσταση 536 μέτρων πέτυχε το στόχο στο κέντρο. Πρόκειται για μια απόσταση που ηχεί εξωπραγματική αν τη συγκρίνουμε με τα 50 μέτρα, όσο είναι πάνω-κάτω το βεληνεκές για

ένα βέλος το οποίο εκτοξεύεται από κάποιο ερασιτεχνικό τόξο.

Για να ελέγχουμε λοιπόν την αληθοφάνεια της ειδησης αυτής, ας επιχειρήσουμε να εκτιμήσουμε τις δυνατότητες ενός πολεμικού τόξου εφαρμόζοντας τους νόμους της φυσικής. Όλα τα στοιχεία που απαιτούνται για το χαρακτηρισμό ενός τόξου μπορούν να ανευρεθούν στη βιβλιογραφία. Τα τόξα υποδιαιρούνται συνήθως σε κατηγορίες αναλόγως της δύναμης F η οποία απαιτείται για την πλήρη τάνυσή τους. Στη βρετανική

ταξινόμηση υπάρχουν τόξα μικρής, μεσαίας και μεγάλης τάσης. Σε σύγχρονες μονάδες, αυτή η υποδιαίρεση αντιστοιχεί σε δυνάμεις 648, 864 και 1.079 N, αντίστοιχα. Κατά κανόνα, το μήκος l ενός τόξου ανέρχεται σε 60-100 cm, ενώ η διάμετρός του d κυμαίνεται μεταξύ 0,5 και 1,2 cm.

Ας υποθέσουμε ότι το τόξο είναι ένα ελαστικό σώμα που υπακούει στο νόμο του Hooke. Εν τοιαύτη περιπτώσει, το θεώρημα έργου-μεταβολής της κινητικής ενέργειας μας επιτρέπει να γράψουμε την εξίσωση

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{F(l-h)}{2},$$

όπου με v_0 συμβολίζουμε την αρχική ταχύτητα του βέλους και με m τη μάζα του, ενώ με h παριστάνουμε το μέγιστο «βέλος κάμψης» του τόξου όταν αυτό βρίσκεται σε προένταση (δηλαδή, όταν απλώς του έχει περαστεί η χορδή). Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, υποθέτουμε ότι $h = l/2$.

Προφανώς, η πτήση του βέλους επηρεάζεται έντονα από την αντίσταση του αέρα (ειδάλλως, για ποιο λόγο θα είχε πτερύγια το βέλος;). Εφόσον ο ακριβής υπολογισμός της αντίστασης του αέρα παρουσιάζει πολλές περιπλοκές, θα αρκεστούμε να δώσουμε μια χονδρική εκτίμηση που, όπως θα ανακαλύψουμε, δεν θα διαφέρει σημαντικά από τα πειραματικά δεδομένα.

Θα υπολογίσουμε το μέγιστο βεληνεκές L του τόξου στηριζόμενο στην ακόλουθη συλλογιστική. Αν ανατρέξουμε στα βιβλία φυσικής, διαβάζουμε ότι η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να εκτοξευθεί ένα σώμα εν απουσίᾳ αέρα ισούται με v_0^2/g (αποδειξτε το μόνοι σας). Το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να ανέλθει ένα σώμα που βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με την ίδια αρχική ταχύτητα ισούται με $v_0^2/(2g)$, είναι δηλαδή το μισό αυτής της απόστασης. Ας δεχτούμε τώρα ότι ο ίδιος λόγος εξακολουθεί να ισχύει και όταν λαμβάνεται υπόψη η αντίσταση του αέρα. Πρόκειται για υπόθεση μάλλον εύλογη, καθότι η αντίσταση του αέρα επηρεάζει τόσο την κατακόρυφη όσο και την οριζόντια κίνηση του σώματος.

Κατ' αρχάς, λοιπόν, ας εξετάσουμε την κίνηση ενός βέλους που βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Το ύψος της τροχιάς του μπορεί να καθοριστεί βάσει του θεωρήματος έργου-μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$mgH - \frac{mv_0^2}{2} = W,$$

όπου με W παριστάνουμε το έργο που παράγει η αντίσταση του αέρα κατά την ανοδική κίνηση του βέλους. Όταν το βέλος κινείται με μεγάλη τα-

χύτητα (αν και πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του ίχου), η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητας: $F_{\text{avr}} = kv^2$. Δεδομένου ότι επιχειρούμε απλώς να εκτιμήσουμε το βεληνεκές, δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το έργο επακριβώς. Ας δεχτούμε λοιπόν ότι

$$W = -F_{\text{avr},\mu} H,$$

όπου με

$$F_{\text{avr},\mu} = \frac{kv_0^2}{2}$$

συμβολίζουμε τη «μέση» αντίσταση του αέρα.

Εν τοιαύτη περιπτώσει, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$H = \frac{v_0^2}{2g + \frac{k}{m} v_0^2}.$$

Συνακόλουθα, το μέγιστο βεληνεκές του τόξου ισούται με:

$$L = \frac{v_0^2}{g + \frac{k}{2m} v_0^2}.$$

Παρότι η ταχύτητα εμφανίζεται τόσο στον αριθμητή όσο και στον παρονομαστή της ανωτέρω έκφρασης, μπορεί ευκολότατα να αποδειχθεί ότι το μέγιστο βεληνεκές αυξάνεται μονοτονικά με την αρχική ταχύτητα (συμπέρασμα που συνηγορεί υπέρ της εγκυρότητας της εκτίμησής μας).

Ο συντελεστής αναλογίας k που παρουσιάζεται στον τύπο για τη δύναμη της αντίστασης γράφεται συνήθως με τη μορφή

$$k = \frac{c}{2} \rho S,$$

όπου με ρ συμβολίζουμε την πυκνότητα του ρευστού μέσου (εν προκειμένω του αέρα) και με S το μέγιστο εμβαδόν διατομής του σώματος στο επίπεδο το κάθετο προς την ταχύτητά του, ενώ το c παριστάνει έναν αδιάστατο παράγοντα (κατά κανόνα, $c < 1$). Σημειωτέον ότι η σχέση αναλογίας της αντίστασης με το γινόμενο $\rho S v^2$ συνάγεται εύκολα με τη βόηθεια της διαστατικής ανάλυσης. Ας

υπενθυμίσουμε επίσης τη μεγάλη συχνότητα με την οποία καταπίνονται με την αντίσταση του αέρα τα άρθρα του *Quantum*.

Όπως σαφώς προκύπτει από την εμπειρία μας, όταν η ταχύτητα του βέλους είναι παράλληλη προς τον διαμήκη άξονά του, τότε η αντίσταση του αέρα γίνεται ελάχιστη και $S = \pi d^2/4$. Απεναντίας, αν η ταχύτητα του βέλους είναι κάθετη προς τον διαμήκη άξονά του, η αντίσταση του αέρα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της και $S = ld$. Κατά την πτήση του βέλους, η γωνία που σχηματίζει το βέλος με την ταχύτητά του συνεχώς μεταβάλλεται. Ποια τιμή τού S θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε; Δεδομένου του προσεγγιστικού χαρακτήρα των υπολογισμών μας, δεν θα λεπτολογήσουμε το ζήτημα της ακριβούς τιμής των παραμέτρων και απλώς θα θέσουμε $c = 1$ και $S = \pi d^2/4$.

Επί τη ευκαιρία, επιβάλλεται να σημειώσουμε ότι η αιχμή του βέλους επιτελεί διττή λειτουργία. Δεν αποτελεί μόνο μέσον τρώσεως, αλλά συνάμα συντελεί στην αύξηση του βεληνεκούς μειώνοντας τη γωνία μεταξύ του βέλους και της ταχύτητάς του (πράγμα που εύκολα αποδεικνύεται πειραματικά).

Στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τρία δρύινα βέλη (Πίνακας 1): ένα κοντό βέλος ($l = 60$ cm, $d = 0,5$ cm, μάζα αιχμής 3 g) που ρίχνεται με τόξο μικρής τάσης: ένα βέλος μεσαίου μήκους ($l = 80$ cm, $d = 0,85$ cm, μάζα αιχμής 4 g) που ρίχνεται με τόξο μέσης τάσης: και ένα μακρύ βέλος ($l = 100$ cm, $d = 1,2$ cm, μάζα αιχμής 5 g) που ρίχνεται με τόξο μεγάλης τάσης. Όπως διαπιστώνουμε, το βεληνεκές για το οποίο έγινε λόγος στην αρχή του παρόντος άρθρου είναι πολύ ρεαλιστικό. ◉

	κοντό βέλος	μεσαίο βέλος	μακρύ βέλος
m (g)	11,24	35,76	84,13
v_0 (m/s)	131,5	98,3	80,1
L (m)	885	655	509,6

Πίνακας 1

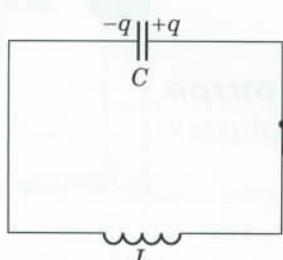
Ηλεκτρικές και μηχανικές ταλαντώσεις

Mia πολύ γόνιμη περίπτωση αναλογίας

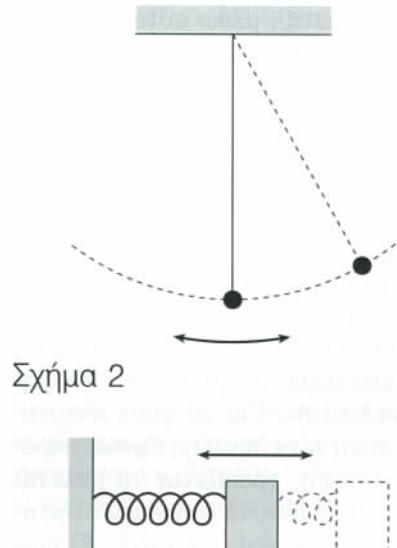
A. Kikoyin

Tο 1853, ο ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΟΣ ΒΡΕΤΑΝΟΣ φυσικός William Thomson (μετέπειτα λόρδος Κέλβιν) δημοσίευσε μια εργασία η οποία έφερε τον τίτλο «Περί των μη στάσιμων ηλεκτρικών ρευμάτων». Στην εν λόγω εργασία, ο Thomson κατεδείκνυε ότι ένα κύκλωμα αποτελούμενο από έναν πυκνωτή χωρητικότητας C και από ένα πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L (το λεγόμενο κύκλωμα LC —βλ. Σχήμα 1) παράγει ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Η λέξη «ταλάντωση» φέρνει συνήθως στο νου το μαθηματικό εκκρεμές (Σχήμα 2) ή μια μάζα προσδεδεμένη στην άκρη κάποιου ελατηρίου (Σχήμα 3). Ο όρος «ταλάντωση», ωστόσο, δεν αναφέρεται αποκλειστικά και μόνο σε ένα συγκεκριμένο είδος μηχανικής κίνησης των υλικών σωμάτων. Οι φυσικοί χρησιμοποιούν τον ίδιο όρο υπό μια διευρυμένη έννοια που αγκαλιάζει κάθε περιοδική μεταβολή



Σχήμα 1



Σχήμα 3

οποιασδήποτε παραμέτρου. Περιοδικότητα σημαίνει, υπ' αυτή την έννοια, ότι η τιμή κάποιας παραμέτρου επαναλαμβάνεται έπειτα από την παρέλευση ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος —το οποίο ονομάζεται «περίοδος» των ταλαντώσεων.

Η μηχανική ταλάντωση ενός αντικειμένου αποτελεί την πλέον οφθαλμοφανή μορφή περιοδικής διαδικασίας. Στην προκειμένη περίπτωση, το ρόλο της περιοδικής παραμέτρου τον παίζει η συντεταγμένη x του κινούμενου σημείου.

Στην περίπτωση του κυκλώματος LC , μία από τις περιοδικές παραμέ-

τρους είναι το φορτίο q στους οπλισμούς του πυκνωτή. Υποτίθεται ότι αρχικά ο πυκνωτής φορτίστηκε από μια μπαταρία και ότι ακολούθως συνδέθηκε με το πηνίο. Κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου, το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή μειώνεται σταδιακά ώσπου να μηδενιστεί, μεταβάλλει πρόσημο και εν συνεχείᾳ αυξάνεται (κατ' απόλυτη τιμή). Για να συμπληρωθεί ο κατάλογος των περιοδικών μεταβλητών, οφελούμε να προσθέσουμε σ' αυτές την τάση $V = q/C$ στους οπλισμούς του πυκνωτή και το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα. Η περιοδική μεταβολή του τελευταίου πιθανόν να φαίνεται πρόδηλη σε όσους διαθέτουν γνώσεις απειροστικού λογισμού, δεδομένου ότι ισχύει

$$V = L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (1)$$

(Αν δεν έτυχε να συναντήσετε ποτέ παρόμοιες εξισώσεις, συνεχίστε να διαβάζετε και συγκρίνετε την εξίσωση (1) με την εξίσωση (2), παρακάτω.) Η αλγεβρική τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή ταλαντώνεται επίσης (καθόσον $E = V/d$, όπου d η απόσταση μεταξύ των οπλισμών), καθώς και το μαγνητικό πεδίο B στο εσωτερικό του πηνίου (δεδομένου ότι είναι ανάλογο προς το ρεύμα I).

Η όλη κατάσταση εν προκειμένω μας θυμίζει τα όσα γνωρίζουμε για τις μηχανικές ταλαντώσεις, όπου δεν μεταβάλλεται περιοδικά μόνο η συντεταγμένη του ταλαντούμενου σώματος, αλλά παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η ταχύτητά του, η επιτάχυνση, η κινητική και η δυναμική ενέργεια, κ.ο.κ. Θα μπορούσαμε να πούμε πως όλες τούτες οι παράμετροι «ταλαντώνονται».

Ξεφυλλίζοντας ένα εγχειρίδιο φυσικής, είναι πολύ πιθανόν να συναντήσετε κάποιες αναφορές στην αναλογία μεταξύ των μηχανικών και των ηλεκτρικών ταλαντώσεων. Πρόκειται για ακριβή αναλογία, αφού η εξίσωση (1) έχει την ίδια μορφή με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, όπως αυτός διατυπώνεται για την περίπτωση ενός σώματος που ταλαντώνεται προσδεδεμένο στην άκρη ελατηρίου:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (2)$$

όπου $\Delta v / \Delta t = \gamma$ είναι η επιτάχυνση του σώματος. Συνεπώς, στηριζόμενοι στον κανόνα ότι «ταυτόσημες εξισώσεις έχουν ταυτόσημες λύσεις», έχουμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε την εξίσωση (1) υπό το φως της εξίσωσης (2), την οποία γνωρίζουμε διεξοδικά.

Η σύγκριση των εξισώσεων (1) και (2) αποκαλύπτει ότι η τάση V αντιστοιχεί στην ελαστική δύναμη F , το ρεύμα I που διαρρέει το πηνίο στην ταχύτητα v του ταλαντούμενου σώματος, ενώ ο συντελεστής αυτεπαγωγής L του πηνίου αποτελεί το ομόλογο της μάζας m του σώματος. Τέλος δε, οι εξισώσεις

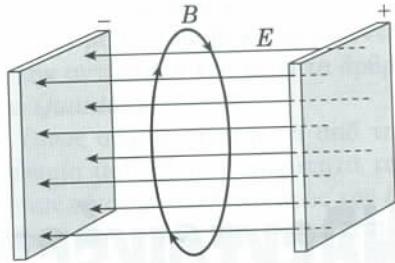
$$V = q/C \text{ και } F = kx$$

δείχνουν ότι η αντίστροφη χωρητικότητα $1/C$ αντιστοιχεί στη σταθερά του ελατηρίου k , και το φορτίο q στην επιμήκυνση x του ελατηρίου (υπενθυμίζω ότι $I = \Delta q / \Delta t$ και $v = \Delta x / \Delta t$). Σας συμβουλεύω να κατατίσετε έναν πίνακα των μεγεθών που συνδέονται με σχέση αντιστοιχίας στο πλαίσιο της ηλεκτρομηχανικής αναλογίας, και να τον συγκρίνετε με εκείνους που θα βρείτε στα εγχειρίδια φυσικής.

Η αναλογία αποτελεί ένα εξαιρετικά πολύτιμο εργαλείο. Ο ιδιοφυής ιρλανδός μαθηματικός σερ William Hamilton (1805-1865) εκμεταλλεύθηκε μια αναλογία ανάμεσα στην οπτική και τη μηχανική, η οποία του επέτρεψε να διατυπώσει την κλασική μηχανική με αυτοπέρβλλητα κομψό τρόπο. Σχεδόν μισό αιώνα αργότερα, η ίδια αναλογία βοήθησε τον εξέχοντα αυστριακό φυσικό Erwin Schrödinger (1887-1961) να διατυπώσει τη βασική εξίσωση της κβαντικής μηχανικής (την περίφημη εξίσωση Schrödinger).

Εν κατακλειδί, ας εξετάσουμε ένα ενδιαφέρον ερώτημα το οποίο αφορά το ρεύμα που διαρρέει ένα κύκλωμα σε ταλάντωση. Παρότι πρόκειται για ένα κύκλωμα «ανοιχτό» (δεν υπάρχει αγώγιμο μέσο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή), μέσω αυτού του κυκλώματος συντελείται ροή φορτίου. Μάλιστα, εάν το πηνίο και οι αγώγοι σύνδεσης είχαν μηδενική ωμική αντίσταση (δηλαδή, αν το κύκλωμα ψυχόταν στη θερμοκρασία όπου θα μετέπιπτε στην υπεραγώγιμη κατάσταση), το ρεύμα που δημιουργεί η εκφροτιση του πυκνωτή θα συνέχιζε να ταλαντώνεται επ' απειρον.

Όσο παράξενο κι αν ακούγεται, ένα κύκλωμα LC μπορεί να θεωρηθεί «κλειστό». Για να γίνει κατανοητή αυτή η εκ πρώτης όψεως παράδοξη άποψη, χρειάζεται να μελετήσουμε εις βάθος το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής. Ο βρετανός φυσικός σερ James Clerk Maxwell (1831-1879) υπήρξε ο πρώτος που έδειξε πως η ουσία τού τον λόγω φαινομένου δεν έγκειται στο ότι το χρονομεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει ρεύμα, αλλά στο ότι επάγει ένα στροβιλό ηλεκτρικό πεδίο (δηλαδή, ένα πεδίο με κλειστές δυναμικές γραμμές). Κατά συνέπεια, το μαγνητικά επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως φαινόμενο δευτερογενές σε σχέση με την παραγωγή του ηλεκτρικού πεδίου που κινεί τα φορτισμένα σωματίδια μέσα στους αγωγούς. Επιπλέον, σε μια επιδειξη ιδιοφυΐας, ο Maxwell αντέστρεψε αυτή τη διατύπωση: υποστήριξε ότι ισχύει εξίσου και το αντίστροφο —με άλλα λόγια, ότι κάθε

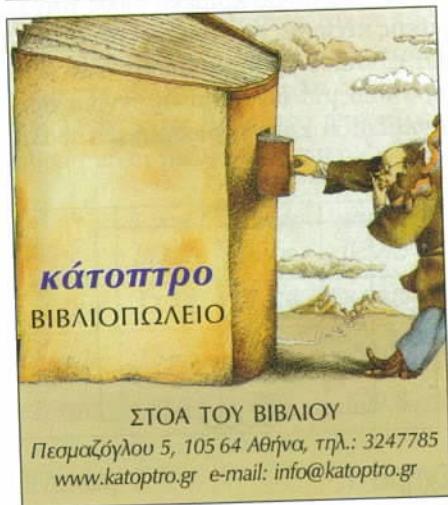


Σχήμα 4

χρονομεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει ένα μαγνητικό πεδίο.

Στο κύκλωμα LC που εξετάζουμε, μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε μια περιοχή όπου δεν υπάρχει τίποτε άλλο εκτός από χρονομεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Πρόκειται για το χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. Σύμφωνα με τον Maxwell, ο εν λόγω πυκνωτής πρέπει να περιβάλλεται από ένα μαγνητικό πεδίο (Σχήμα 4). Από την άλλη πλευρά, γνωρίζουμε ότι τα ρεύματα παράγουν μαγνητικά πεδία γύρω τους. Ως εκ τούτου, το χρονομεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο εμφανίζεται ανάλογο με τη ροή φορτισμένων σωματιδίων (δηλαδή, με το ρεύμα). Έτσι, από την εποχή του Maxwell έχει επικρατήσει ο ρυθμός αλλαγής ενός μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου να ονομάζεται ρεύμα, και συγκεκριμένα ρεύμα μετατόπισης.

Ιδού, λοιπόν, πώς θα μπορούσαμε να περιγράψουμε τι συμβαίνει: το «συνθισμένο» ρεύμα στο αγώγιμο μέρος του ταλαντούμενου κυκλώματος συνεχίζεται μέσα στον πυκνωτή ως ρεύμα άνευ φορτίου (ρεύμα μετατόπισης). ◻



Μην το πιστεύετε πριν το αποδείξετε!

«Με την αλήθεια έχει να κάνει η επιστήμη· με την πλάνη, η γνώμη.»

—Κέλσος, Αληθής λόγος

Vladimir Dubrovsky

ΣΤΟ ΑΡΘΡΟ «ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ» που είχε δημοσιευτεί σε παλιότερο τεύχος του *Quantum* (Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1996), είχαμε αντιμετωπίσει το πρόβλημα υπολογισμού του πλήθους των ριζών της εξίσωσης $a^x = \log_a x$. Σε εκείνο το άρθρο, βρήκαμε την απάντηση με τη βοήθεια γραφημάτων, αλλά, όσο το σκέφτεται κανείς, αντιλαμβάνεται πως η συμβουλή να πιστεύει μόνο τα μισά απ' όσα βλέπει, εφαρμόζεται κι εδώ. Η λύση ήταν αρκετά πειστική, αλλά η ακριβής δικαιολόγηση ότι το πλήθος των ριζών είναι αυτό που προκύπτει από το γράφημα δεν αποτελεί τόσο εύκολη δουλειά. Στο παρόν σύντομο άρθρο θα παρουσιάσουμε μια αυστηρή απόδειξη.

Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση $a > 1$. Εδώ παρατηρούμε, με οδηγό το γράφημα, ότι η εξίσωση

$$a^x = \log_a x \quad (1)$$

είναι ισοδύναμη με την απλούστερη εξίσωση

$$a^x = x. \quad (2)$$

Πράγματι, λογαριθμίζοντας την εξίσωση (2), εύκολα βλέπουμε ότι αυτή συνεπάγεται την εξίσωση (1). Η απόδειξη του ότι η εξίσωση (1) συνεπάγεται την εξίσωση (2) μπορεί να γίνει έμμεσα. Έστω ότι $a^x = \log_a x$. Είναι τότε δυνατόν το a^x να είναι μι-

κρότερο του x ; Αν ίσχυε αυτό, θα μπορούσαμε να πάρουμε τους λογαρίθμους των δύο μελών της ανισότητας (η οποία διατηρείται διότι $a > 1$), και επομένως θα είχαμε $x < \log_a x$, και άρα $a^x < x < \log_a x$, το οποίο συνιστά αντίφαση. Παρομοίως, αν υποθέσουμε ότι $a^x > x$, τότε έπειται πως $a^x > \log_a x$. Συνεπώς, αν $a^x = \log_a x$, η μόνη δυνατότητα που απομένει είναι να ισχύει $a^x = x$.

Η εξίσωση (2) έχει ήδη συζητηθεί στο άρθρο «Παράγωγοι σε αλγεβρικά προβλήματα». Το μόνο ζήτημα που χρειάζεται να εξηγηθεί είναι το γιατί δεν έχει περισσότερες από δύο ρίζες όταν $1 < a < e^{1/e}$. Αυτό το ερώτημα όμως μπορεί να απαντηθεί εύκολα αν εξετάσουμε τη συνάρτηση $f(x) = a^x - x$, η οποία μηδενίζεται στις ρίζες της εξίσωσης (2). Η παράγωγός της, $f'(x) = a^x \ln a - 1$, είναι αύξουσα και μηδενίζεται μόνο για $x_0 = -\ln \ln a$. Επομένως, η συνάρτηση είναι φθίνουσα για $x \leq x_0$, έχει ελάχιστο στο x_0 , και είναι αύξουσα για $x \geq x_0$. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να έχει το πολύ μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_0]$ και $[x_0, \infty)$. Το πραγματικό πλήθος των ριζών εξαρτάται από την ελάχιστη τιμή $f(x_0)$: Θα έχουμε καμία, μία ή δύο ρίζες αν, αντίστοιχα, $f(x_0) > 0$, $f(x_0) = 0$, ή $f(x_0) < 0$ (ή, όπως διαπιστώνουμε από τα γραφήματα της a^x για διαφορετικές τιμές τού α, αν $a > a_0$, $a = a_0$ ή $a < a_0$, όπου

$a_0^{x_0} = x_0$). Επισημαίνουμε ότι όλα αυτά βρίσκονται σε απόλυτη συμφωνία με όσα είχαμε βρει στο προαναφερθέν άρθρο, όπου αποδείξαμε ότι $a_0 = e^{1/e}$.

Η περίπτωση $0 < a < 1$ χρειάζεται διεξοδικότερη μελέτη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, αν $f(x) = a^x - x$, τότε $f'(x) = a^x \ln a - 1$. Για $0 < a < 1$ και $x > 0$, έχουμε $a^x > 0$ και $\ln a < 0$. Επομένως, $f'(x) < 0$ για $x > 0$, και η $f(x)$ φθίνει από το 1 στο $-\infty$ όταν το x κυμαίνεται από το 0 έως το ∞ . Αφού εξακολουθεί να ισχύει (και για $0 < a < 1$) ότι η εξίσωση (2) συνεπάγεται την εξίσωση (1), θα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης (1). Αφού τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = \log_a x$ και $y = a^x$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$, κάθε άλλη ρίζα x της εξίσωσης (1) πρέπει να έχει μία αντίστοιχη, $x' = a^x = \log_a x'$ (οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι αυτό ισχύει πράγματι). Τα σημεία (x, x') και (x', x) του επιπέδου είναι συμμετρικά σημεία τομής των δύο γραφημάτων.

Ας ξαναγράψουμε τώρα την εξίσωση (1) ως $x = \log_a \log_a x$, και ας χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\log_a u = \ln u / \ln a$. Αν λάβουμε υπόψη ότι $\ln a < 0$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\ln(-\ln x) - x \ln a = \ln(-\ln a). \quad (3)$$

Το δυνατό πλήθος ριζών της εξίσωσης (3) μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε προηγου-

μένως, με τη διαφορά ότι τώρα είναι καλύτερο να παραγωγίσουμε δύο φορές διαδοχικά το αριστερό μέλος της εξίσωσης (3), το οποίο θα συμβολίσουμε με $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln x} - \ln a,$$

$$g''(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}.$$

Η $g''(x)$ μηδενίζεται μόνο στο σημείο $x = 1/e$ στο οποίο αλλάζει το πρόσημό της από θετικό σε αρνητικό. Άρα, η $g'(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 1/e$ (βλ. Σχήμα 1), το οποίο ισούται με $-e - \ln a$. Αυτό είναι το απόλυτο μέγιστο για το διάστημα $0 < x < 1$, το πεδίο ορισμού της εξίσωσης (3). Επομένως, για $\ln a \geq -e$ (δηλαδή, για $a \geq e^{-e}$), έχουμε ότι $g'(x) \leq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $g(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $0 < x < 1$, και άρα η εξίσωση (3) (όπως και η εξίσωση (1)) έχει ακριβώς μία ρίζα —αυτή της εξίσωσης (2). Όταν το a γίνεται μικρότερο του e^{-e} , το πάνω γράφημα του Σχήματος 1 μετατοπίζεται ακόμη ψηλότερα. Προφανώς, υπάρχουν δύο ρίζες όταν $a < e^{-e}$, και επομένως η $g(x)$ έχει τρία διαστήματα μονοτονίας, άρα τρεις το πολύ ρίζες.

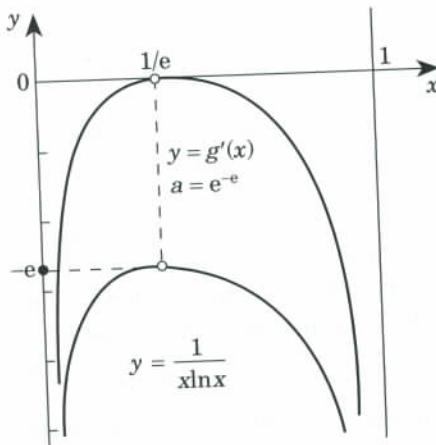
Απομένει να αποδείξουμε ότι για $0 < a < e^{-e}$, η εξίσωση (1) έχει πραγματικά τρεις ρίζες. Για να το πετύχουμε, θα αποδείξουμε ότι γι' αυτές τις τιμές του a , η συνάρτηση $\varphi(x) = a^x - \log_a x$ είναι φθίνουσα σε μια μικρή περιοχή της ρίζας $x_0 = x_0(a)$ της εξίσωσης (2). Από αυτό το γεγονός, θα συμπεράνουμε ότι $\varphi(x_1) < \varphi(x_0) = 0$

για κάποιο $x_1 > x_0$. Αφού $\varphi(1) = a > 0$, η συνάρτηση φ πρέπει να μηδενίζεται κάπου ανάμεσα στο x_1 και στο 1 και, επιπλέον, να έχει —όπως γνωρίζουμε— ένα ακόμη αντίστοιχο σημείο μηδενισμού μικρότερο του x_0 .

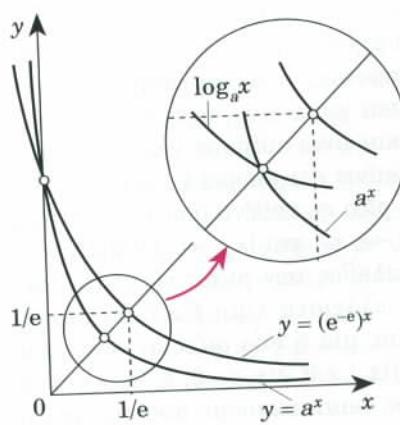
Ας εξετάσουμε την τιμή $s(a)$ της παραγώγου $a^x \ln a$ της a^x στο σημείο $x_0(a)$ καθώς το a παίρνει τιμές μικρότερες του e^{-e} . Για $a = e^{-e}$, έχουμε $x_0 = 1/e$ και $s(a) = -1$. Για $a < e^{-e}$, το γράφημα της $y = a^x$ μετατοπίζεται χαμηλότερα από το αντίστοιχο γράφημα στην περίπτωση που $a = e^{-e}$ και, επομένως, $x_0(a) < 1/e$ (Σχήμα 2). Συνεπώς, $s(a) = a^{x_0} \ln a = x_0 \ln a < (\ln e^{-e})/e = -1$. Όμως, $\varphi'(x_0) = s(a) - s(a)^{-1}$, διότι $(\log_a x)' = (x \ln a)^{-1}$, και $s(a)^{-1} > -1$. Επομένως, $\varphi'(x_0) < (-1) - (-1) = 0$, γεγονός που σημαίνει ότι η $\varphi'(x)$ είναι αρνητική σε μια περιοχή τού x_0 —και έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη.

Συνοψίζοντας, έχουμε αποδείξει ότι η εξίσωσή μας έχει τρεις ρίζες για $0 < a < e^{-e}$: μία ρίζα για $e^{-e} \leq a < 1$ και $a = e^{1/e}$, δύο ρίζες για $1 < a < e^{1/e}$, και καμία ρίζα για $a > e^{1/e}$.

Αυτό το πρόβλημα προσφέρει μια θαυμάσια (και όχι τετριμένη) ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε γραφικά υπολογιστών π και άλλα, περισσότερο εξελιγμένα, υπολογιστικά εργαλεία. Χρειάζεται πραγματικά προσπάθεια για να καταφέρουμε να μας δείξει ο υπολογιστής τις τρεις ρίζες στην περίπτωση που $0 < a < e^{-e}$ ή να υπολογίσει τις ρίζες, ακόμα και όταν $a = 1/16$ (οπότε οι δύο από αυτές είναι $1/2$ και $1/4$). ◻



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Yakov Perelman
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Yakov Perelman
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
—Μέρη 1 και 2

Το βιβλίο περιλαμβάνει εξαιρετικής ποικιλίας θέματα των στοιχειωδών μαθηματικών: από γρίφους και μαθηματικές σπαζοκεφαλίες, πνευματικές προκλήσεις και μαθηματικές τεχνικές μέχρι προβλήματα χρήσης της άλγεβρας σε καθημερινές δραστηριότητες και διασκεδαστικές αναδρομές στην ιστορία των μαθηματικών.

Καταφανή χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι η πρωτοτυπία των θεμάτων του, ο γοητευτικός τρόπος παρουσίασής τους και η υπέροχη εικονογράφησή τους. Ο συγγραφέας έχει καταβάλει κάθε δυνατή προσπάθεια για να κάνει το βιβλίο ζωηρό και διασκεδαστικό, ο αναγνώστης δε, για να το παρακολουθήσει, δεν χρειάζεται να γνωρίζει παρά τους κανόνες της στοιχειωδούς άλγεβρας και γεωμετρίας. Τα προβλήματα συνοδεύονται πάντα από τις λύσεις τους.

• «Ο Perelman γράφει με τρόπο καταπληκτικό, εκλαϊκεύοντας δύσκολα ζητήματα της φυσικής, των μαθηματικών και της αστρονομίας. Τα βιβλία του είναι ευφυή, τερπνά κι ωφέλιμα.»

—K. Tsiolkovsky (1857-1935), πατέρας της αστροναυτικής

Κάθε τόμος: 202 σελ., 17.5 × 25 εκ., δίχρωμος, πανόδετος, 6.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Μενελάου Σφαιρικά

«Τελειότατον η σφαίρα των σχημάτων. Ούτε γαρ προσθήκην
ούτε αφαιρεσιν δέχεται. Οικείον ἄρα το σφαιρικόν σχήμα τω κόσμω.»
—Αλέξανδρος ο Αφροδισιεύς

Μιχάλης Λάμπρου

Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΑΣΤΡΟΝΟΜΟΣ ΜΕΝΕΛΑΟΣ ΕΔΡΑΣΕ κυρίως στην Αλεξανδρεία στα τέλη του 1ου αιώνα μ.Χ. αλλά έζησε και στη Ρώμη. Θεωρείται ο πατέρας της σφαιρικής τριγωνομετρίας. Υπήρξε ο πρώτος που μελέτησε την τριγωνομετρία ως ανεξάρτητο μαθηματικό κλάδο, διαχωρίζοντάς την από την αστρονομία.

Κανένα από τα έργα του δεν σώζεται στο ελληνικό πρωτότυπο. Τα Σφαιρικά του σώζονται, σε αρκετά χειρόγραφα, σε αραβική μετάφραση του 10ου αιώνα. Από τα αραβικά μεταφράστηκαν στα εβραϊκά, γύρω στο 1273, και στα λατινικά από τον Γεράρδο της Κρεμώνας (1114-1187), τον Φραγκίσκο Μαυρόλυκο (1494-1575), ο οποίος τα εξέδωσε το 1558, και από τον Edmund Halley (1656-1742) —γνωστός από τον φερώνυμο κομήτη— ο οποίος μάλιστα χρησιμοποίησε το αραβικό και το εβραϊκό κείμενο σε μία έκδοση που είδε το φως της δημοσιότητας το 1758, μετά το θάνατό του. Στη σύγχρονη εποχή, με βάση κυρίως το κείμενο του Halley, το έργο του Μενελάου μελετήθηκε από τον Axel Anthon Björn, το 1902, ενώ μεταφράστηκε και στα γερμανικά από τον Max Krause, το 1936.

Σώζεται ένα ακόμη έργο του Μενελάου, αλλά μόνο στα αραβικά, όπου πραγματεύεται το ειδικό βάρος. Βρίσκεται στο Εσκοριάλ της Ισπανίας (χειρόγραφο υπ' αριθμόν 960) και παραμένει ανέκδοτο.

Ένας κατάλογος βιβλίων, ο περίφημος *Φιχρίστ ουλ-Ουλούμ*, γραμμένος τον 10ο αιώνα από τον Ibn al-Nadim, δίνει τις εξής πληροφορίες για τον Μενελαο (σε ελεύθερη απόδοση):

«Ἐζησε πριν από τον Πτολεμαίο, αφού ο τελευταίος τον μνημονεύει. Ἐγραψε τα Σφαιρικά, ένα έργο για το βάρος και την κατανομή διαφορετικών σωμάτων, κατά παραγγελία του Δομιτιανού, τρία βιβλία για τα Στοιχεία γεωμετρίας, που εκδόθηκαν από τον Thabit Ibn Quorra,

και το Περί τριγώνων. Μερικά από αυτά έχουν μεταφραστεί στα αραβικά.»

Τον Μενέλαο αναφέρουν, φυσικά, και αρχαίες ελληνικές πηγές, οι οποίες διασώζουν ορισμένες περικοπές ή πληροφορίες για το έργο του. Για παράδειγμα, ο Θέων ο Αλεξανδρεύς αναφέρει ότι ο Μενέλαος έγραψε 6 βιβλία περί «τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν» (δηλαδή, με σύγχρονη ορολογία, περί ημιτόνων), όπως είχε κάνει πριν από αυτόν ο αστρονόμος Ίππαρχος. Τον αναφέρει και ο Πάππος στη Συναγωγή του, καθώς και ο Πλούταρχος σε ένα διάλογό του, τον Περί του εμφαινομένου προσώπου τω κύκλῳ της Σελήνης.

Ας έρθουμε όμως στο περιεχόμενο των Σφαιρικών, που αποτελούνται από τρία βιβλία.

Στο α' βιβλίο των Σφαιρικών του, ο Μενέλαος ορίζει το σφαιρικό τρίγωνο (ο όρος που χρησιμοποιεί είναι, σύμφωνα με τον Πάππο, τρίπλευρον) ως το χωρίο που περικλείεται από τρεις μέγιστους κύκλους της σφαίρας (με την προϋπόθεση ότι οι πλευρές του τριγώνου είναι μικρότερες του ημικυκλίου).

Στο Σχήμα 1α φαίνεται ένα σφαιρικό τρίγωνο *ΑΒΓ* με πλευρές τα τόξα *α*, *β*, *γ*, τα οποία, σύμφωνα με τον ορισμό, ανήκουν σε μέγιστους κύκλους. Γωνία ενός σφαιρικού τριγώνου ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από τα επίπεδα στα οποία ανήκουν οι πλευρές της. Για παράδειγμα, η γωνία *Α* του *ΑΒΓ* (Σχήμα 1β) ισούται με τη γωνία των επιπέδων *OAB* και *OAG*, όπου *O* το κέντρο της σφαίρας: Αν φέρουμε το επίπεδο *ΟΔΕ* κάθετο στην *OA*, τότε η γωνία *A* ισούται με τη γωνία *ΔΟΕ*. Είναι απλό να αποδειχθεί ότι η τελευταία ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες *Ax*, *Ay* στο σημείο *A* των κύκλων *ABΔ*, *AGE*, αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ακόμη ότι το τόξο *a* απέναντι από την *A* ανήκει στην επίκεντρη γωνία *BOΓ*.

Μετά τους ορισμούς, ο Μενέλαος αποδεικνύει διάφο-

ρες ιδιότητες των σφαιρικών τριγώνων, τις οποίες διαθέτουν και τα επίπεδα τρίγωνα. Για παράδειγμα, αποδεικνύει ότι δύο σφαιρικά τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν: (α) δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, αντίστοιχα, ίσες ή (β) τρεις πλευρές, αντίστοιχα, ίσες. Οι προτάσεις αυτές, όπως και οι αποδείξεις τους, είναι ανάλογες με τις προτάσεις 4 και 8 στο α' βιβλίο των Στοιχείων. Άλλες πάλι ιδιότητες των επίπεδων τριγώνων μεταφέρονται σε σφαιρικά τρίγωνα, αλλά με διαφορετικές αποδείξεις. Λόγου χάρη, αποδεικνύεται (Σφαιρικά, α', Προτάσεις 7 και 9) ότι απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά αντιστοιχεί μεγαλύτερη γωνία, και αντίστροφα (Στοιχεία, α', Προτάσεις 18 και 19).

Τα σφαιρικά τρίγωνα, όμως, δεν έχουν πάντα τις ανάλογες ιδιότητες με τα επίπεδα τρίγωνα. Έτσι, δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι μια εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές.

Άσκηση 1. Δώστε παράδειγμα σφαιρικού τριγώνου όπου μία εξωτερική γωνία είναι: (α) μεγαλύτερη, (β) ίση, (γ) μικρότερη από μία απέναντι εσωτερική.

(Υπόδειξη: Στο Σχήμα 1β η εξωτερική γωνία E του ΔODE είναι 90° , αλλά η ΔODE μπορεί να είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.)

Στα Σφαιρικά υπάρχει απλός χαρακτηρισμός που διακρίνει ποια από τις τρεις εκδοχές της Άσκησης 1 ισχύει σε ένα συγκεκριμένο τρίγωνο.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι σε ένα σφαιρικό τρίγωνο ABG η εξωτερική γωνία G είναι μικρότερη (αντίστοιχα, ίση ή μεγαλύτερη) της A αν και μόνον αν το $a + \gamma$ είναι με-

γαλύτερο (αντίστοιχα, ίσο ή μικρότερο) από 180° .

(Υπόδειξη: Έστω ότι $a + \gamma > 180^\circ$. Αν Δ το αντιδιαμετρικό τού A , τότε (Σχήμα 2) έχουμε τόξο $AB +$ τόξο $B\Delta = 180^\circ$ και, άρα, $a >$ τόξο $B\Delta$. Οπότε, στο σφαιρικό τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ έχουμε ότι η γωνία Δ , που ισούται με την A , είναι μεγαλύτερη της γωνίας $B\Gamma\Delta$, που ισούται με την εξωτερική Γ .)

Από το προηγούμενο, ο Μενέλαος εξάγει το πόρισμα ότι σε σφαιρικά τρίγωνα ισχύει $A + B + \Gamma > 180^\circ$, όπως ακριβώς ισχύει στη λεγόμενη μη ευκλειδεία ελλειπτική γεωμετρία.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180° .

(Υπόδειξη: Φέρνουμε τον μέγιστο κύκλο BE έτσι ώστε $\angle EBD = \angle EAD$, οπότε και τόξο $BE =$ τόξο ED . Έχουμε τότε τόξο $GE +$ τόξο $BE =$ τόξο $GE +$ τόξο $ED =$ τόξο $GD < 180^\circ$. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση στο σφαιρικό τρίγωνο BGE , έχουμε ότι η εξωτερική γωνία Γ του BGE είναι μεγαλύτερη της γωνίας GBE . Άλλα τότε:

$$\begin{aligned} A + B + \Gamma &= B\Delta E + B + (\text{εξωτερική γωνία } \Gamma \text{ του } BGE) \\ &> B\Delta E + ABG + GBE = 180^\circ. \end{aligned}$$

Δείζει να προσθέσουμε ότι, αφού οι A, B, Γ είναι μικρότερες των 180° , έχουμε $180^\circ < A + B + \Gamma < 540^\circ$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι το άνω φράγμα 540° είναι το καλύτερο δυνατό για το άθροισμα $A + B + \Gamma$ σφαιρικού τριγώνου.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε τα A, B σε έναν μέγιστο κύκλο, και το Γ στην άλλη μεριά της σφαίρας και πολύ κοντά στον προηγούμενο κύκλο. Τότε οι γωνίες A, B, Γ είναι σχεδόν 180° η καθεμία, και το σφαιρικό τρίγωνο σχεδόν καλύπτει ένα ημισφαίριο.)

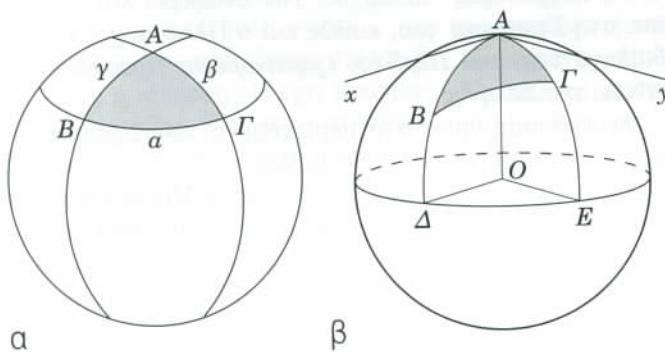
Μία ακόμη πιο ενδιαφέρουσα πρόταση των σφαιρικών τριγώνων που δεν έχει το αντίστοιχο της στα επίπεδα είναι η Πρόταση α', 17 των Σφαιρικών: Δύο σφαιρικά τρίγωνα με αντίστοιχα ίσες τις τρεις γωνίες τους είναι ίσα. (Φυσικά, στα επίπεδα τρίγωνα, μπορούμε μόνο να συναγάγουμε ότι είναι ίσα.)

Στο β' βιβλίο των Σφαιρικών, υπάρχουν προτάσεις σχετικές με την αστρονομία, οι οποίες όμως δεν θα μας απασχολήσουν εδώ. Αναφέρουμε απλώς ότι οι προτάσεις αυτές είναι κυρίως γενικεύσεις —αλλά με κομψότερες αποδείξεις— προτάσεων από τα Σφαιρικά του Θεοδοσίου (~150 π.Χ.). Ας έρθουμε, όμως, στο πολύ σημαντικό γ' βιβλίο.

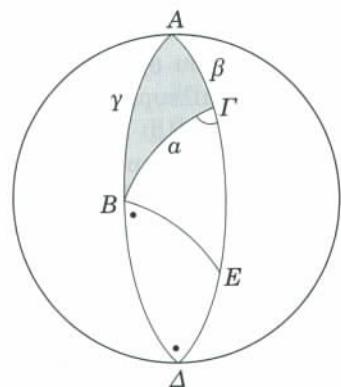
Αναμφίβολα, το πιο γνωστό θεώρημα του Μενελάου είναι το θεώρημα της επίπεδης γεωμετρίας, σύμφωνα με το οποίο σε ένα τρίγωνο ABG το οποίο διατέμνεται από ευθεία ΔEZ (Σχήμα 3) ισχύει:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BE}{EG} \cdot \frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = 1.$$

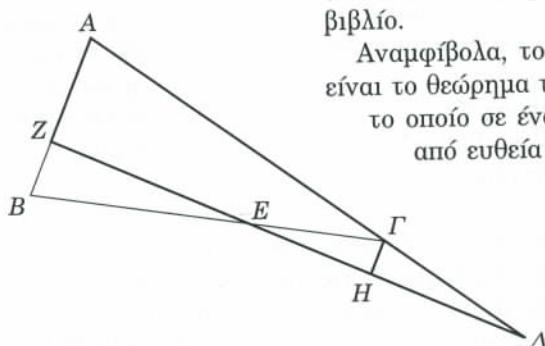
(Συνήθως, το θεώρημα διατύπωνται με προσεσημασμένα μεγέθη, οπότε το 1 πρέπει να αντι-



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

κατασταθεί με -1 . Εδώ, όμως, τα μεγέθη μας δεν θα τα λαμβάνουμε σε σημασμένα, αφού στην αρχαιότητα δεν χρησιμοποιούσαν αρνητικές ποσότητες.)

Το παραπάνω θεώρημα δεν αποδεικνύεται στα *Σφαιρικά*, αλλά χρησιμοποιείται για την απόδειξη άλλου θεωρήματος. Προφανώς, ο Μενέλαος το θεωρούσε γνωστό και ενδεχομένως να υπήρχε στο χαμένο έργο του *Περὶ τριγώνων*. Ωστόσο, σώζεται μια απόδειξη, χωρίς ρητή αναφορά στον Μενέλαο, στη *Μεγίστη Σύνταξη* του Πτολεμαίου (α' βιβλίο, Πρόταση 13).

Άσκηση 5. Αποδείξτε το θεώρημα του Μενέλαου για επίπεδα τρίγωνα.

(Υπόδειξη: Φέρουμε (βλ. Σχήμα 3) τη $\Gamma H \parallel AB$. Από το θεώρημα του Θαλῆ έχουμε: $BE : EG = ZB : GH$ και $\Gamma D : DA = GH : AZ$.)

Άλλο ένα θεώρημα που χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη από τον Μενέλαο στα *Σφαιρικά* είναι το ακόλουθο —διατυπωμένο με σύγχρονη ορολογία. (Οι απόδειξεις υπάρχουν στη *Μεγίστη Σύνταξη*.)

Άσκηση 6. Έστω κύκλος κέντρου O , και AB μια διατέμνουσα. Αν δύο ακτίνες $OD, O\Delta'$ τέμνουν την AB στα Γ και Γ' αντίστοιχα (Σχήμα 4), δείξτε ότι

$$\frac{AG}{GB} = \frac{\text{ημ}(τόξο }AD\text{)}{\text{ημ}(τόξο }DB\text{)}, \quad \frac{AG'}{G'B} = \frac{\text{ημ}(τόξο }A\Delta'\text{)}{\text{ημ}(τόξο }D\Delta'\text{)}.$$

(Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα AOG και BOG , έχουμε: $AG : OA = \text{ημ}(\text{τόξο }AD) : \text{ημ}(\text{τόξο }AO)$, $GB : OB = \text{ημ}(\text{τόξο }DB) : \text{ημ}(\text{τόξο }BO)$. Διαιρούμε τώρα κατά μέλη, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι παραπληρωματικές γωνίες AGO, BGO έχουν ίσα ημίτονα.)

Ας έλθουμε στο πολύ σημαντικό ανάλογο του θεωρήματος του Μενέλαου (Άσκηση 5) για τα σφαιρικά τρίγωνα.

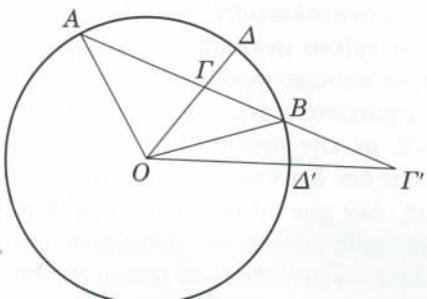
Άσκηση 7. Έστω ABG ένα σφαιρικό τρίγωνο και ΔEZ ένας διατέμνων μέγιστος κύκλος. Τότε, για τα τόξα $AZ, ZB, \Delta A$, κ.λπ., ισχύει:

$$\frac{\text{ημ}(AZ)}{\text{ημ}(ZB)} \cdot \frac{\text{ημ}(BE)}{\text{ημ}(EG)} \cdot \frac{\text{ημ}(GD)}{\text{ημ}(DA)} = 1.$$

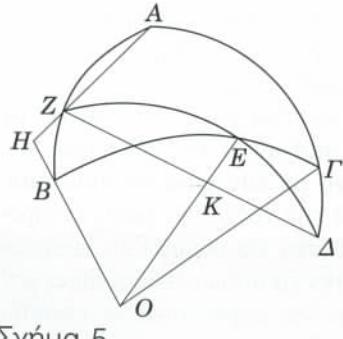
(Υπόδειξη: Έστω O το κέντρο της σφαίρας. Φέρουμε τις OB, OE, OG, AZ .

(α) Οι AZ, OB , ως βρισκόμενες στο ίδιο επίπεδο (του τόξου AZB), τέμνονται, έστω, στο H .

(β) Οι OG, AD τέμνονται, έστω, στο Θ .



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(γ) Οι $OE, Z\Delta$ τέμνονται, έστω, στο K .

(δ) Τα σημεία H, K, Θ είναι συνευθειακά γιατί βρίσκονται συγχρόνως στο επίπεδο του τόξου $BE\Gamma$ και του τριγώνου $AZ\Delta$.

(ε) Εφαρμόστε το θεώρημα του Μενέλαου για το (επίπεδο) τρίγωνο $AH\Theta$ με διατέμνουσα τη $ZK\Delta$.

(στ) Εφαρμόστε τώρα την Άσκηση 6.)

Το παραπάνω θεώρημα των *Σφαιρικών* κατέχει δεσπόζουσα θέση στη *Μεγίστη Σύνταξη*, όπως και το ακόλουθο πόρισμά του (με σύγχρονα σύμβολα): Αν ABG σφαιρικό τρίγωνο με τη γωνία A ορθή (Σχήμα 6), τότε ισχύει:

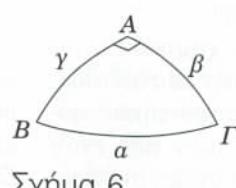
$$\frac{\text{ημ}(a + \beta)}{\text{ημ}(a - \beta)} = \frac{1 + \text{συν}\Gamma}{1 - \text{συν}\Gamma}$$

ή, ισοδύναμα, $\epsilon\phi\beta = \epsilon\varphi\alpha \cdot \text{συν}\Gamma$.

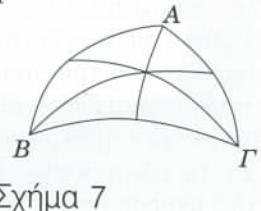
Άσκηση 8. Αποδείξτε την ισοδυναμία των δύο μορφών του προηγούμενου θεωρήματος.

Άλλα ενδιαφέροντα θεωρήματα στα *Σφαιρικά* είναι τα εξής: Οι «διχοτόμοι» και τα «ύψη» σφαιρικού τριγώνου (Σχήμα 7) συγκλίνουν (όπου η έννοια της «διχοτόμου» και του «ύψους» είναι οι προφανείς μέγιστοι κύκλοι).

Εν κατακλείδι, αξίζει να αναφέρουμε μία ακόμη μνεία που κάνει στον Μενέλαο ο Πτολεμαίος στη *Μεγίστη Σύνταξη*, περιγράφοντας κάποια πολύ σημαντική αστρονομική παρατήρηση. Γράφει λοιπόν ο Πτολεμαίος ότι ο Μενέλαος αναφέρει πως οκτακόσια σαράντα πέντε χρόνια μετά τη βασιλεία του Ναβουχοδονόσορα (που χρονολογείτε σήμερα κατά το 747-734 π.Χ.), και ώρα 11 το βράδυ της 18ης προς τη 19η του μηνός Μεχίρ (του αιγυπτιακού ημερολογίου), το νότιο κέρας της Σελήνης ευθυγραμμίστηκε με το νότιο και το μεσαίο άστρο της «μετώπης» του Σκορπιού, ενώ το βόρειο άστρο της μετώπης βρισκόταν σε μία συγκεκριμένη θέση την οποία ο Μενέλαος είχε υπολογίσει. Επίσης, αναφέρει ότι ο Μενέλαος διέθετε ένα αρχαίο κείμενο του αστρονόμου Τιμοχάρη, ο οποίος τετρακόσια πενήντα τέσσερα χρόνια μετά τη βασιλεία του Ναβουχοδονόσορα (δηλαδή 391 χρόνια νωρίτερα από την προηγούμενη παρατήρηση) τοποθέτησε τα ίδια άστρα $3^\circ 55'$ ανατολικότερα. Από αυτά, ο Μενέλαος επιβεβαίωσε τη θεωρία του μεγάλου αστρονόμου Ίππαρχου για τη μετάπτωση των ισημεριών. Με άλλα λόγια, συμπέρανε ότι οι αστερισμοί μετακινούνται κατά $3^\circ 55'$ ανά 391 χρόνια, δηλαδή περίπου 1° τον αιώνα (η ακριβής μετακίνηση είναι 1° ανά 72 χρόνια). ◻



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Τα θεμελιώδη σωματίδια

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

ΗΕΡΕΥΝΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ δομικούς λίθους στη φύση συνεχίζεται επί δύο και πλέον χιλιετίες. Ο Αριστοτέλης διαισθάνθηκε ότι όλα τα υλικά πράγματα γύρω μας συνίστανται από τέσσερα βασικά στοιχεία —από γη, φωτιά, αέρα και νερό—, αναμεμειγμένα σε διαφορετικές ποσότητες και αναλογίες. Εκ των υστέρων, μια τέτοια αντίληψη πιθανόν να μας φαίνεται υπεραπλουστευτική. Πώς μπορεί να πιστέψει κανείς ότι οι αναρίθμητες ιδιότητες όλων των υλικών απορρέουν από τέσσερα μόνο βασικά στοιχεία, τα οποία μάλιστα δεν μοιράζονται αυτές τις ιδιότητες; Και μια τέτοια άποψη είναι πράγματι πιο παράξενη από την πεποίθηση πως τα πάντα συνίστανται από ένα περιορισμένο πλήθος χημικών στοιχείων; Λόγου χάρη, το υδρογόνο —μια εξόχως εύφλεκτη ουσία— και το οξυγόνο —ένα αέριο απολύτως αναγκαίο για να λάβει χώρα οποιαδήποτε καύση— ενώνονται σχηματίζοντας νερό, το οποίο χρησιμοποιείται για την κατάσβεση των πυρκαγιών!

Με το πλήθος των χημικών στοιχείων να υπερβαίνει την εκατοντάδα, οι επιστήμονες ανακουφίστηκαν πολύ ανακαλύπτοντας, πριν από έναν περίπου αιώνα, ότι τα άτομα συγκροτούνται από τρία ακόμη θεμελιώδεστερα σωματίδια —από ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια. Για παράδειγμα, το πλέον κοινό ουδέτερο άτομο του άνθρακα συντίθεται από έξι η-

λεκτρόνια, έξι πρωτόνια και έξι νετρόνια. Έτσι, λοιπόν, οι ποικίλοι συνδυασμοί τριών μόνο βασικών σωματιδίων καθορίζουν τις μυριάδες των χημικών ιδιοτήτων που απαντούν στη φύση.

Αρχής γενομένης από το 1932, οι επιστήμονες ανακάλυψαν πολύτιμα νέα «θεμελιώδη σωματίδια» —όπως το μιόνιο, το πιόνιο και το καόνιο. Το 1932 ανακαλύφθηκε και το πρώτο από τα «αντισωματίδια». Το ποζιτρόνιο (ή αντιηλεκτρόνιο) είναι καθ' όλα ταυτόσημο με το ηλεκτρόνιο, με μοναδική διαφορά ότι έχει αντίθετο φορτίο. Στην πορεία των δεκαετιών που ακολούθησαν, ανακαλύφθηκαν περισσότερα από εκατό νέα σωματίδια, γεγονός το οποίο αναθέρμανε τις προσπάθειες για την ανεύρεση ενός απλούστερου συνόλου θεμελιώδων δομικών λίθων.

Τα στοιχειώδη σωματίδια κατατάσσονται σε δύο οικογένειες —στα λεπτόνια και τα αδρόνια. Η οικογένεια των λεπτονίων αποτελείται από έξι μέλη: το ηλεκτρόνιο, ένα βαρύ ηλεκτρόνιο που ονομάζεται μιόνιο, ένα ακόμη βαρύτερο ηλεκτρόνιο γνωστό ως *tau*, καθώς και από τρία νετρίνα, που το καθένα τους αντιστοιχεί σε κάποιο από αυτά τα «ηλεκτρόνια». Σύμφωνα με την επικρατούσα άποψη κατά την τρέχουσα φάση, τα προαναφερθέντα έξι σωματίδια θεωρούνται αυθεντικά θεμελιώδη, διότι δεν φαίνεται να παρουσιάζουν οποιουδήποτε είδους εσωτερική δομή.

Τα υπόλοιπα στοιχειώδη σωματίδια είναι σύνθετα. Οι Murray Gell-Mann και George Zweig διατύπωσαν την υπόθεση ότι τούτα τα σωματίδια αποτελούν συνδυασμούς κάποιων θεμελιώδεστερων σωματιδίων γνωστών ως κουάρκ. Οι θεωρητικοί πίστευαν (και εξακολούθουν να πιστεύουν) ότι πρέπει να υπάρχουν ακριβώς τέσσερα κουάρκ όσα και λεπτόνια. Συνεπώς το γεγονός ότι τελικά ανακαλύφθηκαν έξι κουάρκ πρέπει να τους προσέφερε μεγάλη ικανοποίηση. Για να ανταποκρίνονται στα ίδια γνωστά αδρόνια, τα κουάρκ πρέπει να έχουν βαρυονικό αριθμό 1/3, σπιν 1/2 και τις ιδιότητες που παρατίθενται στο Πίνακα 1.

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα του οποίο θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε πώς λειτουργεί η όλη ιδέα. Το πρωτόνιο είναι ένα βαρύνιο με σπιν 1/2 και φορτίο +1. Όλα τα βαρύνια συντίθενται από τρία κουάρκ —όθια και η απόδοση βαρυονικού αριθμού 1/3 στα κουάρκ. Κάθε κουάρκ έχει σπιν 1/2. Εάν τα σπιν δύο εξ αυτών προσανατολιστούν παράλληλα κατά του τρίτου αντιπαράλληλα, τότε τρία κουάρκ συνδυάζονται ώστε σχηματίσουν ένα σωματίδιο με σπιν 1/2, με την προϋπόθεση ότι κανένας τους δεν διαθέτει τροχιακή στροφομή. Δεν μας μένει λοιπόν παρά μάλιστα ρυθμίσουμε τα πράγματα ώστε να προκύψει το σωστό φορτίο. Μελετώντας τον Πίνακα 1, δεν γιούμε να διαπιστώσουμε ότι ο συν-



Όνομα	Σύμβολο	Φορτίο	Άλλες ιδιότητες
Κάτω	d	-1/3	
Πάνω	u	+2/3	
Παράδοξο	s	-1/3	Παραδοξότητα = -1
Γοητευτικό	c	+2/3	Γοητεία = +1
Πιθμένας (ή όμορφο)	b	-1/3	Ομορφιά = +1
Κορυφή (ή αληθινό)	t	+2/3	Αλήθεια = +1

Πίνακας 1

δυασμός υπόριθμος ουδέτερο φορτίο +1. Θα μπορούσαμε βέβαια να σκεφτούμε να χρησιμοποιήσουμε και κάποια από τα υπόλοιπα κουάρκ: ωστόσο, το πρωτόνιο είναι το ελαφρότερο βαρυσύνιο, οπότε προσδοκούμε να περιέχει μόνο τα ελαφρότερα από τα κουάρκ, δηλαδή το πάνω και το κάτω.

Το αντιπρωτόνιο, από την άλλη, ανήκει στα αντιβαρύνια και, ως εκ τούτου, αποτελείται από τρία αντικουάρκ. Τα αντικουάρκ τα χαρακτηρίζουν οι ίδιες ιδιότητες όπως και τα κουάρκ, μόνο που πολλές απ' αυτές τις ιδιότητες έχουν τώρα αντίθετο πρόσημο, κάτι το οποίο ειδικότερα αληθεύει για τον βαρυσύνιο αριθμό, το φορτίο και τις «άλλες» ιδιότητες του Πίνακα 1. Το αντιπρωτόνιο έχει την ίδια ακριβώς σύνθεση όπως και το πρωτόνιο, με τη διαφορά ότι όλα τα κουάρκ αντικαθίστανται από τα αντίστοιχα αντικουάρκ. Συνεπώς, η σύνθεση του αντιπρωτονίου είναι υπόριθμη —όπου το κάθε αντικουάρκ δηλώνεται με το σύμβολο του αντίστοιχου κουάρκ και με μια παύλα από πάνω. Η συγκεκριμένη σύνθεση δίνει βαρυσύνιο αριθμό -1, σπιν 1/2 και φορτίο -1.

Τα μέλη του άλλου κλάδου της οικογένειας των αδρονίων είναι γνωστά ως μεσόνια. Τα μεσόνια συντίθενται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ, οπότε ο ολικός βαρυσύνιος αριθμός προκύπτει ίσος με μηδέν. Για παράδειγμα, το θετικά φορτισμένο πόνιο έχει μηδενικό σπιν και φορτίο +1. Δεν θα δυσκολευθείτε να επαληθεύσετε μόνοι σας ότι ο συνδυασμός υπόριθμης παρουσιάζει όλες τις ζητούμενες

ιδιότητες. Για να βγει το ολικό σπιν ίσο με μηδέν, τα σπιν των δύο κουάρκ πρέπει να προσανατολιστούν αντιπαράλληλα.

Το θετικά φορτισμένο καόνιο είναι ένα μεσόνιο με μηδενικό σπιν, παραδοξότητα +1 και φορτίο +1. Η σύνθεσή του είναι υ. Το ουδέτερο πόνιο αποτελεί μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση, καθότι συντίθεται από δύο συνδυασμούς, τους υ⁰ και d̄d̄.

A. Από ποιους συνδυασμούς των πάνω, κάτω και παράδοξων κουάρκ συντίθενται τα σωματίδια του Πίνακα 2;

Υπάρχει ένα πρόβλημα στο οποίο παραλείψαμε ώς τώρα να αναφερθούμε. Το ωμέγα μείον (Ω^-) είναι ένα βαρυσύνιο με σπιν 3/2 και παραδοξότητα -3. Στις συγκεκριμένες ιδιότητες δεν ανταποκρίνεται παρά ένας μόνο συνδυασμός κουάρκ: ο sss. Προκειμένου να λάβουμε σπιν 3/2, και τα τρία σπιν πρέπει να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Εδώ ακριβώς βρί-

σκεται και η ρίζα του προβλήματος. Σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli, κανένα αδρόνιο δεν επιτρέπεται να περιέχει δύο κουάρκ με το ίδιο σύνολο ιδιοτήτων —δηλαδή, κανένα από τα κουάρκ δεν πρέπει να φέρει το ίδιο σύνολο κβαντικών αριθμών με κάποιο άλλο. Στην περίπτωση του Ω^- , ωστόσο, η αρχή αυτή φαίνεται να παραβιάζεται, καθότι και τα τρία κουάρκ έχουν το ίδιο σύνολο κβαντικών αριθμών.

Τούτη η δυσκολία οδήγησε στην ιδέα ότι στην περιγραφή των κουάρκ πρέπει να υπεισέρχεται ένας ακόμη κβαντικός αριθμός. Ο εν λόγω κβαντικός αριθμός λέγεται χρώμα και λαμβάνει τρεις τιμές. Στην προκειμένη περίπτωση, όμως, οι τιμές δεν είναι αριθμοί· ονομάζονται κόκκινο, πράσινο και μπλε. Εάν φανταστούμε ότι αυτοί οι κβαντικοί αριθμοί συνδυάζονται ως έγχρωμες φωτεινές δέσμες, όλα τα αδρόνια πρέπει να έχουν λευκό χρώμα. Κατά συνέπεια, από τα κουάρκ που συνθέτουν το Ω^- το ένα πρέπει να είναι κόκκινο, το άλλο πράσινο και το τρίτο μπλε.

Τα αντικουάρκ φέρουν τα συμπληρωματικά χρώματα των αντίστοιχων κουάρκ: συγκεκριμένα, το κόκκινο έχει ως συμπληρωματικό του το κυανό τετραχρωμίας (cyan), το πράσινο έχει ως συμπληρωματικό του το κόκκινο τετραχρωμίας (magenta), ενώ το συμπληρωματικό του μπλε είναι το κίτρινο τετραχρωμίας (yellow). Συνεπώς, το θετικό πόνιο συντίθεται από ένα συνδυασμό

$$u_{\text{κόκκ.}} \bar{d}_{\text{cyan}} + u_{\text{πράσ.}} \bar{d}_{\text{magenta}} + u_{\text{μπλ.}} \bar{d}_{\text{yellow}}.$$

B. Από ποιους συνδυασμούς των

Όνομα	Σύμβολο	Βαρυσύνιος αρ.	Σπιν	Φορτίο	Παραδοξότητα
Νετρόνιο	n	+1	1/2	0	0
Αρνητικό πόνιο	π^-	0	0	-1	0
Ουδέτερο καόνιο	K^0	0	0	0	+1
Ουδέτερο Λ-υπερόνιο	Λ^0	+1	1/2	0	-1
Αντινετρόνιο	\bar{n}	-1	1/2	0	0
Αρνητικό Ξ-υπερόνιο	Ξ^-	+1	1/2	-1	-2

Πίνακας 2

Όνομα	Σύμβολο	Βαρυονικός αρ.	Σπιν	Φορτίο	Παραδοξότητα
Νετρόνιο	n	+1	1/2	0	0
Αντινετρόνιο	ñ	-1	1/2	0	0
Αρνητικό πιόνιο	π-	0	0	-1	0
Αρνητικό Ξ-υπερόνιο	Ξ-	+1	1/2	-1	-2
Διπλά θετικά φορτισμένο Δ-υπερόνιο	Δ ⁺	+1	3/2	+2	0
Ουδέτερο αντιλάμδα	Λ ⁰	-1	1/2	0	+1

Πίνακας 3

πάνω, κάτω και παράδοξων κουάρκ συγκροτούνται τα σωματίδια του Πίνακα 3;

Καμπυλωμένη πραγματικότητα

Στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 2000 αρχίσαμε να εξερευνούμε τα διάφορα σχήματα που συναντάμε τακτικά στη φύση. Σ' αυτά τα σχήματα περιλαμβάνονταν οι κατακόρυφες ευθείες γραμμές τις οποίες διατρέχουν τα σώματα όταν αφεθούν να πέσουν ελεύθερα, οι παραβολικές τροχιές των βολών εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου, οι κύκλοι τους οποίους διαγράφουν τα φορτισμένα σωματίδια που θα τύχει να παγιδευτούν σε κάποιο ομογενές μαγνητικό πεδίο, οι ελλείψεις των πλανητών που περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο, οι υπερβολές των σωματιδίων άλφα που σκεδάζονται από έναν πυρήνα και η κυκλοειδής καμπύλη την οποία ακολουθεί κατά την κίνησή του ένα σημείο της περιφέρειας κάποιου κυλιόμενου τροχού.

Στο Μέρος 1 του προβλήματος ζητούσαμε από τους αναγνώστες να εξαγάγουν την εξίσωση που περιγράφει την τροχιά την οποία διαγράφει ένα σώμα καθώς κινείται στο βαρυτικό πεδίο της Γης υπό την επίδρασης μιας δύναμης τριβής ανάλογης με την ταχύτητά του. Ζητούσαμε επίσης τα σκαριφήματα των τροχιών για διάφορες τιμές της σταθεράς αναλογίας b . Η πλέον ενδεδειγμένη ίσως πορεία είναι να ξεκινήσουμε από το μονοδιάστατο πρόβλημα μιας σφαίρας που πέφτει υπό την επίδραση μιας επιβραδύνουσας δύναμης. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα δίνεται από την έκφραση

όπου η σταθερά b εξαρτάται στη γενική περίπτωση από το σχήμα και το μέγεθος του εκάστοτε θεωρούμενου σώματος καθώς και από το ιξώδες του αέρα. Εισάγοντας τούτη την έκφραση για τη δύναμη στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv.$$

Χωρίζοντας τις μεταβλητές και υποθέτοντας την αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν, παίρνουμε:

$$\int_0^v \frac{dv}{uv - (mg/b)} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt.$$

Εν συνεχείᾳ, υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα και λύνουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς v :

$$v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m})$$

Καθώς ο χρόνος t αυξάνεται απεριόριστα, η ταχύτητα τείνει στην τιμή mg/b , η οποία λέγεται *ορική ταχύτητα*.

Περνώντας τώρα στο διοδιάστατο πρόβλημα, διαπιστώνουμε αμέσως πως η αρχική ταχύτητα αποκλείεται να ισούται με μηδέν επιπλέον, αντιλαμβανόμαστε ότι η αντίσταση του αέρα κατά τη μεν άνοδο του σώματος αντιτίθεται στην ανύψωση, κατά τη δε κάθοδό του αντιτίθεται στην πτώση. Εφόσον η ταχύτητα διαθέτει οριζόντια συνιστώσα, αντίσταση του αέρα θα ασκείται τόσο κατά την οριζόντια όσο και κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.

Για ένα σώμα λοιπόν που κινείται στο επίπεδο xy , οι απαιτούμενες εξισώσεις έχουν ως εξής:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt}$$

και

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - b \frac{dy}{dt}.$$

Αν λύσουμε τις εξισώσεις αυτές υποθέτοντας ότι η αφετηρία του σώματος συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις για την ταχύτητα και τη θέση:

$$v_x = v_{x0} e^{-bt/m},$$

$$x = \frac{mv_{x0}}{b} (1 - e^{-bt/m}),$$

$$v_y = \left(\frac{mg}{b} - v_{y0} \right) e^{-bt/m} - \frac{mg}{b},$$

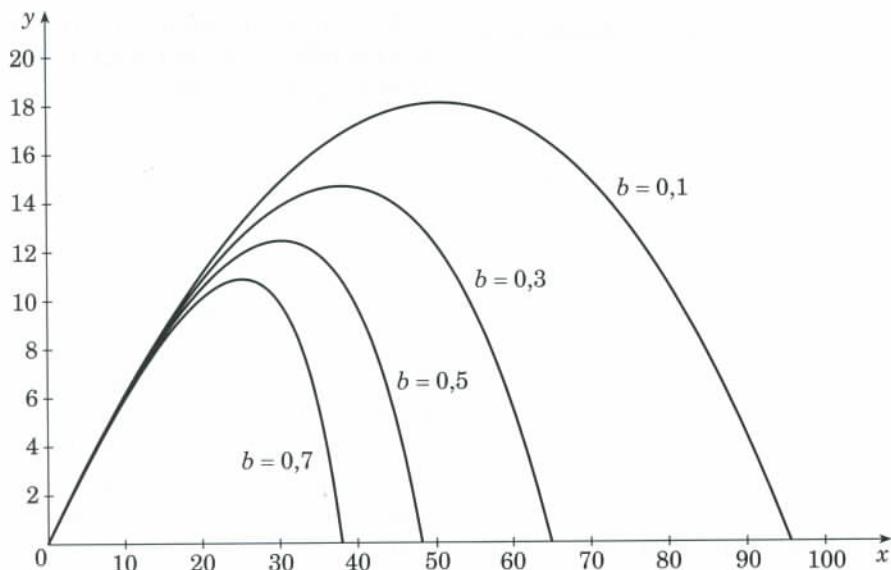
$$y = \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{mv_{y0}}{b} \right) (1 - e^{-bt/m}) - \frac{mg}{b} t.$$

Εάν απαλείψουμε το χρόνο t εργαζόμενοι κατά τον ίδιο τρόπο όπως όταν συνδυάσαμε τις εξισώσεις των συντεταγμένων για να βρούμε τις παραβολικές τροχιές στις βολές εν απουσία αέρα, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση για την τροχιά στην περίπτωση όπου είναι παρούσα και η αντίσταση του αέρα:

$$y = \left(\frac{mg}{bv_{x0}} + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \right) x - \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(\frac{mv_{x0}}{mv_{y0} - bx} \right).$$

Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά την ανωτέρω συνάρτηση για ποικίλες τιμές του b χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου.

Όπως διαπιστώνουμε από τις καμπύλες του Σχήματος 1, η τροχιά, που για χαμηλή αντίσταση του αέρα ($b = 0,1$) έχει κατά προσέγγιση μορφή παραβολής, πέφτει πιο απότομα από παραβολή όταν η αντίσταση του



Σχήμα 1

αέρα αυξάνεται ($b = 0,7$). Αν τσαλκώσετε ένα κομμάτι χαρτί και το πετάξετε υπό γωνία ως προς το οριζόντιο επίπεδο, θα διαπιστώσετε ότι η πορεία που ακολουθεί μοιάζει πολύ με εκείνη την οποία προβλέπει ο θεωρητικός μας υπολογισμός.

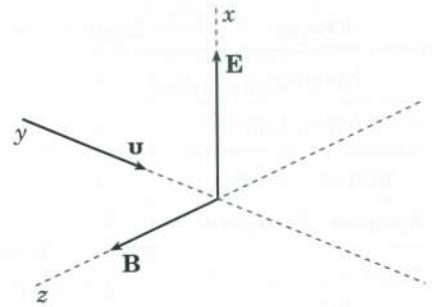
Στο Μέρος 2 του προβλήματός μας ζητούσαμε από τους αναγνώστες να προσδιορίσουν την τροχιά ενός σωματιδίου που εισέρχεται σε μια περιοχή όπου υπάρχουν ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο, κάθετα μεταξύ τους. Όσον αφορά το ερώτημα (α), η απάντηση δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. Προκειμένου το σωματίδιο να κινηθεί ευθύγραμμα χωρίς να υποστεί την παραμικρή εκτροπή, η ταχύτητά του πρέπει να ισούται με E/B . Το ότι έτσι έχουν τα πράγματα μπορούμε να το αποδείξουμε πολύ εύκολα, επισημαίνοντας απλούστατα ότι, για να μηδενίζεται η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο, η ηλεκτρική και η μαγνητική δύναμη πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο,

$$qE = qvB,$$

και, επομένως,

$$v = E/B.$$

Το ερώτημα (β) αφορούσε το τι θα συνέβαινε αν το σωματίδιο εισερχόταν στην περιοχή των κάθετων πεδίων κινούμενο με ταχύτητα μέτρου E/B κατά την αντίθετη κατεύθυνση.



Σχήμα 2

ναφοράς που κινείται με ταχύτητα E/B κατά τον αρνητικό ημιάξονα των y , απαιτούνται οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$v_x = v'_x, \quad v_y = -E/B + v'_y,$$

όπου οι τονούμενες μεταβλητές αναφέρονται στο κινούμενο σύστημα αναφοράς.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στις εξισώσεις των επιταχύνσεων, παίρνουμε:

$$\gamma'_x = \left(\frac{qB}{m} \right) v'_y, \quad \gamma'_y = \left(-\frac{qB}{m} \right) v'_x. \quad (1)$$

Όπως εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, οι εξισώσεις στις οποίες καταλήξαμε περιγράφουν μια ομαλή κυκλική κίνηση (η επιτάχυνση είναι κάθετη προς την ταχύτητα, της οποίας το μέτρο διατηρείται σταθερό).

Εάν διαλέξουμε ένα σωματίδιο που εισέρχεται στην περιοχή των πεδίων με ταχύτητα διαφορετική από E/B (στο σύστημα του εργαστηρίου), τότε αυτό θα διαγράψει μια κυκλοειδή, την ίδια δηλαδή καμπύλη με εκείνη που διαγράφει ένα δεδομένο σημείο της περιφέρειας κάποιου τροχού ο οποίος κυλίεται με σταθερή ταχύτητα E/B χωρίς να ολισθαίνει. Τούτο μπορεί να αποδεικνύεται εύκολα στην ειδική περίπτωση όπου υποθέτουμε ότι το σωματίδιο αρχικά ηρεμεί στην αρχή των x . Μόλις αποκτήσει κάποια ταχύτητα κατά τον άξονα των x , θα εκτραπεί εξαιτίας της μαγνητικής δύναμης. Έτσι, θα κινηθεί κατά μήκος μιας κυκλοειδούς ώσπου να βρεθεί και πάλι να ηρεμεί στιγμαία σε κά-

Εν τοιαύτη περιπτώσει, το σωματίδιο δεν θα περνούσε χωρίς να υποστεί εκτροπή, καθότι η ηλεκτρική δύναμη θα εξακολουθούσε να έχει την ίδια κατεύθυνση όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, σε αντίθεση με τη μαγνητική δύναμη, της οποίας η κατεύθυνση θα αντιστρέφοταν.

Στο ερώτημα (γ), οι αναγνώστες καλούνταν να προσδιορίσουν την τροχιά που θα διέγραφε το σωματίδιο αν η ταχύτητά του είχε κάποια τιμή διαφορετική από E/B . Ποιοτικά, η κίνηση μπορεί να μελετηθεί σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με ταχύτητα E/B ως προς το (ακίνητο) σύστημα του εργαστηρίου. Στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, το σωματίδιο θα διαγράφει κύκλο. Την αλήθεια του ισχυρισμού μας είναι δυνατόν να την αποδείξουμε εξετάζοντας τις γενικές εξισώσεις δύναμης για το σωματίδιο, αλλάζοντας συστήματα αναφοράς και αναλύοντας τις προκύπτουσες εξισώσεις.

Ορίζοντας τους άξονες όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 2, μπορούμε να γράψουμε:

$$\gamma_x = \frac{q}{m} E + \frac{q}{m} v_y B$$

και

$$\gamma_y = -\frac{q}{m} v_x B.$$

Για να μεταβούμε σε ένα σύστημα α-

ποιο σημείο του άξονα των y από εκεί και πέρα η κίνησή του επαναλαμβάνεται.

Όλα τα παραπάνω είναι δυνατόν να αποδειχθούν και με αυστηρό μαθηματικό τρόπο. Αν «μαντέψουμε» τις λύσεις των εξισώσεων (1), μπορούμε στη συνέχεια να τις μετασχηματίσουμε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και να αναλύσουμε τις τελικές εξισώσεις. Αν αναζητήσουμε λύσεις των εξισώσεων (1) που να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες ότι για $t = 0$ η ταχύτητα έχει μηδενική x -συνιστώσα και y -συνιστώσα ίση με E/B , καταλήγουμε στις εξής εκφράσεις:

$$v'_x = \frac{E}{B} \eta \mu \left(\frac{qB}{m} \right) t,$$

$$v'_y = \frac{E}{B} \sigma \nu \left(\frac{qB}{m} \right) t.$$

Μπορούμε να παραγώγουμε τις παραπάνω συναρτήσεις και να αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις (1), έτσι ώστε να επιβεβαιώσουμε ότι όντως τις ικανοποιούν. Μετασχηματίζοντας και πάλι στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου τις εξισώσεις που περιγράφουν την ταχύτητα στο κινούμενο σύστημα, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$v_x = \frac{E}{B} \eta \mu \left(\frac{qB}{m} \right) t,$$

$$v_y = \frac{E}{B} \sigma \nu \left(\frac{qB}{m} \right) t - \frac{E}{B}.$$

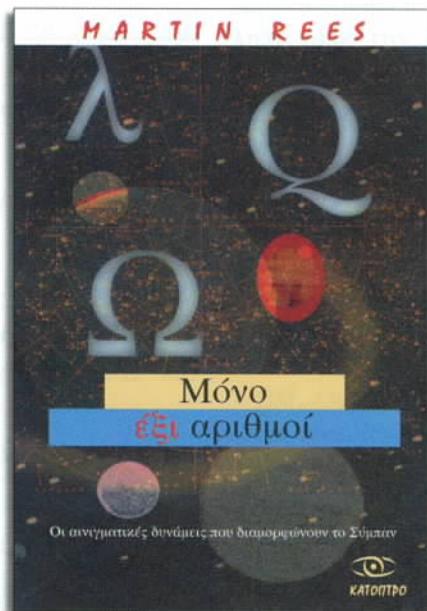
Αν ολοκληρώσουμε τις τελευταίες εξισώσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες ότι $x = y = 0$ για $t = 0$, και εισαγάγουμε τις παραμέτρους $\omega = qB/m$ και $R = E/\omega B$, παίρνουμε:

$$x = R(1 - \sigma \nu \omega t),$$

$$y = R(-\omega t + \eta \mu \omega t).$$

Όπως δείξαμε στο άρθρο, αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν μια κυκλοειδή. Ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες και το μέτρο του E , η τροχιά του σωματιδίου θα είναι μια κυκλοειδής με βρόχους, με αιχμές ή με κοιλάδες (ομαλά σημεία ελαχίστου). □

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



Martin Rees

Μόνο έξι αριθμοί

Οι θεμελιώδεις δυνάμεις που διαμορφώνουν το Σύμπαν

Σε αυτό το βιβλίο, το οποίο προκάλεσε αντιπαραθέσεις πριν καν εκδοθεί, ο βασιλικός αστρονόμος της Βρετανίας M. Rees διατυπώνει μια νέα θεωρία για τον Κόσμο μας. Θεωρεί ότι ζούμε μέσα σε ένα

πολυσύμπαν, όπου το δικό μας Σύμπαν υπάρχει παράλληλα με εκατομμύρια άλλα σύμπαντα, πολλά από τα οποία θα μπορούσε να φιλοξενούν άλλες μορφές ζωής (με πιθανότερη αυτή των εντόμων,

των μόνων οργανισμών που μπορούν να αντέξουν την ισχυρή βαρύτητα). Ο Rees μάς εξηγεί πώς έξι μόνο αριθμοί, «εντυπωμένοι»

στη Μεγάλη Έκρηξη, μπορούν να προσδιορίζουν τα θεμελιώδη

χαρακτηριστικά του φυσικού κόσμου. Και πώς από τις τιμές

των έξι αυτών αριθμών εξαρτάται, με εκπληκτική ευαισθησία, η κοσμική εξέλιξη —αν οποιοσδήποτε από τους εν λόγω αριθμούς

«είχε ρυθμιστεί» διαφορετικά, δεν θα μπορούσε να

υπάρξουν ούτε άστρα ούτε ζωή.

Το γεγονός μάς παρέχει τη δυνατότητα να αντιληφθούμε ριζικά νέες προοπτικές για το Σύμπαν και τη δική μας θέση μέσα σ' αυτό, καθώς και για την υπόσταση των φυσικών νόμων.

- «Το βιβλίο αποπνέει το λεπτό άρωμα της μοντέρνας φυσικής και κοσμολογίας, παρότι λόγω του μεγέθους του δεν μας φανερώνει όλες τις λεπτομέρειες...»

—Lawrence Krauss, στο *The New Scientist*

- «Ο Rees συχνά αναφέρεται ως ο αστροφυσικός των "αστρο"φυσικών. Τώρα, μετά το έξοχο βιβλίο του, μπορεί να θεωρείται το αστέρι όλων μας.»

—Lee Smolin, στο *Natural History*

224 σελ., A/M, 14 × 21 εκ., 6.000 δρχ.. € 17,61

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **Κάτοπτρο**

Προβλήματα κατασκευών

Αντιμέτωποι με ένα απρόσιτο σημείο

Boris Pritsker

ΠΟΣΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΧΕΙ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ; Γιατί είναι σημαντικό να βρίσκουμε διαφορετικές λύσεις του ίδιου προβλήματος; Γιατί μένουμε μερικές φορές ανικανοποίητοι από τις λύσεις που έχουμε ήδη ανακαλύψει και γιατί αξίζει να αναζητήσουμε ακόμη μία;

Η ανακάλυψη πολλών λύσεων του ίδιου προβλήματος μας επιτρέπει να κατανοήσουμε βαθύτερα το θέμα του και μας βοηθά να γίνουμε πιο ευέλικτοι και ικανότεροι στην επίλυση προβλημάτων. Η διαδικασία αυτή διεγείρει επίσης τη φαντασία και τη δημιουργικότητα, και επιπλέον μας επιτρέπει να αποκτήσουμε μια πλατιά εμπειρία που θα φανεί χρήσιμη κατά την επίλυση δυσκολότερων προβλημάτων.

Στο παρόν άρθρο θα θέσουμε ένα ενδιαφέρον πρόβλημα κατασκευής και θα παρουσιάσουμε αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις για τη λύση του.

Πρόβλημα. Δίνεται μια γωνία με κορυφή O —κορυφή η οποία βρίσκεται έξω από το χαρτί που εργαζόμαστε. Δίνονται επίσης δύο τυχαία σημεία K και N σε διαφορετικές πλευρές της γωνίας, και ένα σημείο M στο εσωτερικό της. Κατασκευάστε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία M και O .

Πριν παρουσιάσω οποιαδήποτε λύση του προβλήματος, θέλω να τονίσω ότι το σημείο O δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί —είναι απρόσιτο, α-

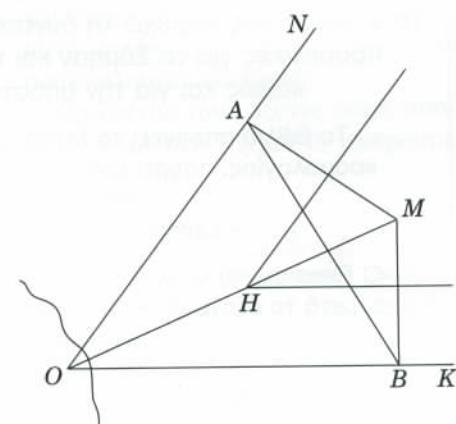
φού βρίσκεται έξω από το χαρτί μας. Το στοιχείο που μου αρέσει στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι το γεγονός ότι μπορεί να χρειαστεί να το λύσουμε στην πραγματική ζωή, για παράδειγμα κατά την κατασκευή ενός κτηρίου, στις εργασίες πεδίου στη γεωλογία ή στην τοπογραφία (γεωδαισία).

Λύση 1. Κατασκευάζουμε την κάθετη από το σημείο M προς την ON και ονομάζουμε A το σημείο τομής των δύο ευθειών (Σχήμα 1). Κατασκευάζουμε την κάθετη από το σημείο M προς την OK και ονομάζουμε B το σημείο τομής των δύο ευθειών. Τα ορθογώνια τρίγωνα OAM και OBM έχουν κοινή υποτείνουσα την OM : επομένως, τα σημεία A , M , B και O ανήκουν σε έναν κύκλο με κέντρο το μέσο του τμήματος OM και

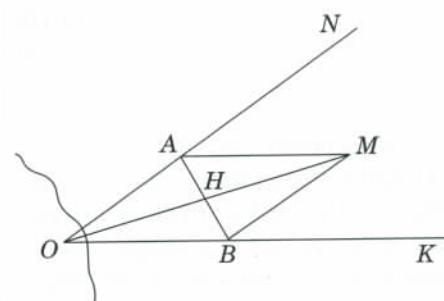
ακτίνα ίση με $OM/2$. Βρίσκουμε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABM , το οποίο συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου που είναι περιγεγραμμένος στα τρίγωνα OAM και OBM . Το κέντρο αυτό είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των AM και BM —το σημείο H . Άρα, η MH είναι η ζητούμενη ευθεία.

Λύση 2. Φέρουμε τη $MA \parallel OK$ και τη $MB \parallel ON$. Το $OAMB$ είναι παραλληλόγραμμο (Σχήμα 2), και οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Επομένως, αν βρούμε το μέσον της διαγώνιου AB (το σημείο H), αυτό θα είναι και μέσον της διαγώνιου OM . Η ευθεία MH είναι η ζητούμενη.

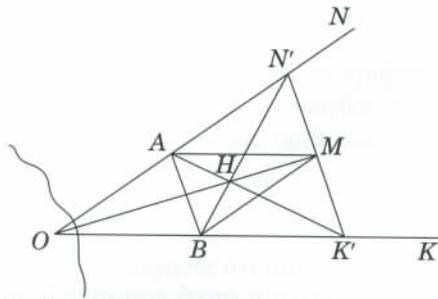
Λύση 3. Φέρουμε τη $MA \parallel OK$ και τη $MB \parallel ON$. Φέρουμε από το σημείο M την ευθεία $N'K'$ παράλληλη προς την AB (Σχήμα 3). Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το M είναι μέσον του τμήματος $N'K'$. Πράγματι, το $AN'MB$ είναι παραλληλόγραμμο,



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

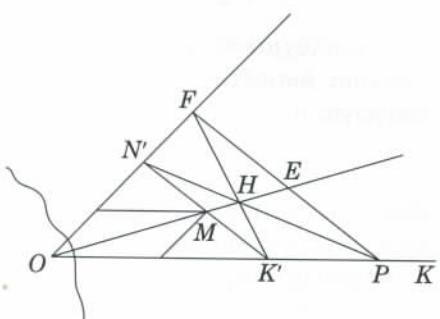
και επομένως $AB = MN'$. Επίσης, το $AMK'B$ είναι παραλληλόγραμμο, και επομένως $AB = MK'$. Άρα, $MN' = MK'$. Παρομοίως, αν επιλέξουμε ένα άλλο ζεύγος παραλληλογράμμων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το A είναι μέσον του ON' , και το B μέσον του OK' . Άρα, οι $K'A$ και $N'B$ είναι διάμεσοι του τριγώνου $ON'K'$. Το σημείο τομής τους, H , είναι το βαρύκεντρο αυτού του τριγώνου, και συνεπώς η τρίτη διάμεσος OM διέρχεται από αυτό. Οπότε, η MH είναι η ζητούμενη ευθεία.

Λύση 4. Πρώτα αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα. Σε κάθε τραπέζιο, τα μέσα των βάσεων ανήκουν στην ίδια ευθεία με το σημείο τομής των διαγωνίων καθώς και με το σημείο τομής των μη παραλληλών πλευρών.

Απόδειξη. Θεωρούμε το τραπέζιο $K'N'PF$ (βλ. Σχήμα 4), και έστω H και O τα σημεία τομής των διαγωνίων του και των μη παραλληλών πλευρών του, αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι η OH τέμνει τη βάση $N'K'$ στο σημείο M . Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε αλλεπάλληλα όμοια τρίγωνα.

Από τα όμοια τρίγωνα $K'MO$ και PEO , βρίσκουμε:



Σχήμα 4

$\frac{KM}{PE} = \frac{OM}{OE}$.

Από τα όμοια τρίγωνα MON' και EOP , βρίσκουμε:

$$\frac{OM}{OE} = \frac{MN'}{EP}.$$

Από τα όμοια τρίγωνα $K'HM$ και FHE , βρίσκουμε:

$$\frac{KM}{EF} = \frac{MH}{EH}.$$

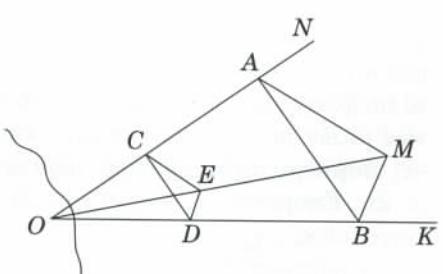
Από τα όμοια τρίγωνα $MN'H$ και EPH , βρίσκουμε:

$$\frac{MH}{EH} = \frac{MN'}{PE}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε αυτές τις αναλογίες, θα βρούμε —έπειτα από τις απλοποιήσεις— ότι $(KM)^2 = (MN')^2$, απ' όπου συνεπάγεται ότι $KM = MN'$, δηλαδή ότι το M είναι μέσον του $K'N'$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι το E είναι το μέσον του FP .

Επιστρέφουμε στη λύση του προβλήματός μας. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της Λύσης 3 και κατασκεύαζουμε το τρίγωνο $N'K'$ με μέσον το σημείο M και άκρα πάνω στις πλευρές της δεδομένης γωνίας (Σχήμα 4). Φέρουμε ένα τυχαίο τμήμα FP παραλληλό προς το $N'K'$ και με άκρα πάνω στις πλευρές της δεδομένης γωνίας. Τότε, το $FN'K'P$ είναι τραπέζιο. Αν H είναι η τομή των $N'P$ και FK' , έχουμε από το λήμμα ότι η ευθεία HM θα διέρχεται από το σημείο O .

Λύση 5. Κατασκευάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο MAB με κορυφές A και B στις πλευρές ON και OK της δεδομένης γωνίας, αντίστοιχα (Σχήμα 5). Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο C του τμήματος OA και φέρουμε την

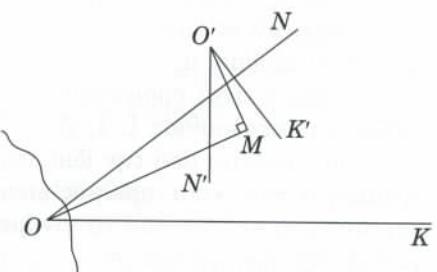


Σχήμα 5

CD παράλληλη προς την AB (όπου το σημείο D ανήκει στην ευθεία OB). Από το σημείο C φέρουμε την παραλληλή προς την AM , και από το σημείο D την παραλληλή προς τη MB . Έστω ότι αυτές οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο E . Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ME διέρχεται από το σημείο O .

Πράγματι, τα τρίγωνα COD και AOB είναι όμοια: επομένως, $CD : AB = OD : OB$. Τα τρίγωνα CDE και ABM είναι όμοια: συνεπώς, $CD : AB = DE : BM$. Οπότε, $OD : OB = DE : BM$. Οι γωνίες $\angle ODE$ και $\angle OBM$ είναι ίσες από κατασκευής. Άρα, τα τρίγωνα ODE και OBM είναι όμοια, διότι έχουν μία γωνία ίση και τις πλευρές που την περιέχουν ανάλογες. Αυτό σημαίνει ότι $\angle DOE = \angle BOM$. Αφού τα σημεία O , D και B είναι συγγραμμικά, έπειτα ότι και τα σημεία O , E και M είναι επίσης συγγραμμικά, οπότε η ME είναι η ζητούμενη ευθεία.

Λύση 6. Σε αυτή τη λύση θα εκτελέσουμε μια περιστροφή 90° γύρω από το σημείο M (Σχήμα 6). Ας υποθέσουμε ότι μια τέτοια περιστροφή μεταφέρει τη δεδομένη γωνία NOK στη γωνία $N'O'K'$, όπου το σημείο N' ανήκει στην ευθεία OK (επισημαίνουμε ότι αυτή η περιστροφή μπορεί να εκτελεστεί χωρίς να γνωρίζουμε πού βρίσκεται το σημείο O : μπορούμε απλώς να περιστρέψουμε τα προσπελάσιμα τμήματα των πλευρών της δεδομένης γωνίας). Τότε, η OM είναι κάθετη στη MO' . Οπότε φέρνουμε την κάθετο στη MO' στο M , που είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 6

Λύση 7. Αυτή τη φορά θα εκτελέσουμε μια περιστροφή 180° γύρω

H συνέχεια στη σελ. 68 ↗

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M211

Έστω $k > 8$ και έστω $m = a_{k-6}$. Θεωρούμε τα υπόλοιπα της διαίρεσης των a_i διά του m (όπου $i > k-6$). Θα χρησιμοποιήσουμε τον συνήθη συμβολισμό $a \equiv b \pmod{m}$ για να δηλώσουμε το γεγονός ότι οι αριθμοί a και b δίνουν ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενο διά του m . Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το γεγονός ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αθροίσματος (ή ενός γινομένου) ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος (ή αντίστοιχα του γινομένου) των υπολοίπων των προσθετέων (ή των παραγόντων).

Αφού

$$a_{k-5} = a_{k-6}a_{k-7} + 1 \equiv 1 \pmod{m}$$

και

$$a_{k-4} = a_{k-5}a_{k-6} + 1 \equiv 1 \pmod{m},$$

έπειτα ότι

$$a_{k-3} = a_{k-4}a_{k-5} + 1 \equiv 2 \pmod{m},$$

$$a_{k-2} = a_{k-3}a_{k-4} + 1 \equiv 3 \pmod{m},$$

$$a_{k-1} = a_{k-2}a_{k-3} + 1 \equiv 7 \pmod{m},$$

$$a_k = a_{k-1}a_{k-2} + 1 \equiv 22 \pmod{m}.$$

Διαπιστώνουμε επομένως ότι ο a_{k-22} διαιρείται διά του a_{k-6} . Μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να αποδείξουμε ότι, αρχίζοντας από ένα συγκεκριμένο k , οι αριθμοί $a_k - b$ είναι σύνθετοι, όπου b είναι οποιοσδήποτε αριθμός της ακολουθίας 1, 1, 2, 3, 7, 22, ... που ορίζεται από την ίδια αναδρομική σχέση: κάθε αριθμός είναι μεγαλύτερος κατά 1 από το γινόμενο των δύο προηγούμενων.

M212

Για να λύσουμε το πρόβλημα, θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο λήμμα:

Λήμμα. Έστω ότι τα σημεία A , B και C ανήκουν στον κύκλο με κέντρο

το σημείο M . Τότε, το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο εάν και μόνο εάν $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM}$.

Απόδειξη. Από τη δεδομένη ισότητα, έπειτα άμεσα ότι

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο M συμπίπτει με το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC —δηλαδή, με το σημείο τομής των διαμέσων του (αποδείξτε αυτό το γεγονός). Συνεπώς, τα μήκη των διαμέσων του τριγώνου (ως ακτίνες του ίδιου κύκλου) είναι ίσα, γεγονός που συνεπάγεται ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Η αντίστροφη πρόταση αποδεικνύεται εύκολα.

Περνάμε τώρα στη λύση του προβλήματός μας. Έστω ότι οι συντεταγμένες των σημείων A , B , C και M είναι (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_C, y_C) και (x_M, y_M) , αντίστοιχα. Από τη διατύπωση του προβλήματος, έχουμε:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2). \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 1/x$. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση, και μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στην εξής εξίσωση ως προς x :

$$x^4 - 2x_0x^3 + \dots = 0.$$

(Έχουμε γράψει μόνο τους δύο πρώτους όρους της εξίσωσης, διότι οι υπόλοιποι δεν έχουν ενδιαφέρον για το πρόβλημά μας.) Το άθροισμα όλων των ριζών αυτής της εξίσωσης (της $-x_0$ συμπεριλαμβανομένης) ισούται με $2x_0$. Επομένως, $x_A + x_B + x_C = 3x_0$. Παρομοίως, $y_A + y_B + y_C = 3y_0$. Αυτές οι ισότητες συνεπάγονται ότι

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM},$$

όπου O είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Απομένει μόνο να εφαρμόσουμε το λήμμα που αποδείξαμε προηγουμένως.

M213

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής παραγοντοποίηση:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$x = 2^{2^{n-1}},$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 &= (2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1). \end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι οι αριθμοί

$$2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1$$

και

$$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$$

είναι σχετικά πρώτοι, για κάθε φυσικό n . Πράγματι, αν είχαν έναν κοινό (περιττό) διαιρέτη $q > 1$, η διαφορά τους

$$2^{2^{n-1}+1} - 2^A,$$

για κάποιο A , θα είχε τον ίδιο διαιρέτη. Άτοπο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο αριθμός

$$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$$

έχει τουλάχιστον n διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες. Τότε, με τέλεια επαγωγή, ο

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$$

έχει τουλάχιστον $(n+1)$ διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες.

Παρατήρηση 1. Για $n > 4$, ο εν λόγω αριθμός έχει τουλάχιστον $n+1$ διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες, διότι

$$2^2 + 2^2 + 1 = 97 \cdot 673.$$

Παρατήρηση 2. Από το πρόβλημα αυτό έπειται ότι το πλήθος των διαφορετικών πρώτων αριθμών είναι απέιρο.

M214

Είναι προφανές ότι υπάρχει πάντα ένας τομέας που περιέχει περισσότερες από μία πέτρες.

Θα αποδείξουμε μια ισχυρότερη πρόταση: Έπειτα από συγκεκριμένο πλήθος βημάτων, δεν θα υπάρχει πλέον κανένα ζεύγος διαδοχικών ελεύθερων τομέων (από αυτό το γεγονός έπειται άμεσα ότι οι μισοί τουλάχιστον τομείς περιέχουν πέτρες). Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι αν ένα ζεύγος τομέων είναι ελεύθερο, τότε θα ήταν ελεύθερο και στο προηγούμενο βήμα —με άλλα λόγια, δεν μπορεί να εμφανιστούν νέα ελεύθερα ζεύγη κατά τη διάρκεια τούτης της διαδικασίας.

Ας αποδείξουμε τώρα την ισχυρότερη πρόταση. Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο. Έστω ότι έπειτα από κάθε n -οστό βήμα υπάρχει πάντα ένα ελεύθερο ζεύγος. Αυτό σημαίνει ότι ένα ελεύθερο ζεύγος υπάρχει για άπειρο χρονικό διάστημα.

Ας κόψουμε τον κύκλο κατά μήκος της ακτίνας που χωρίζει τους τομείς αυτού του ελεύθερου ζεύγους και ας εξετάσουμε το πρόβλημά μας για την ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση, το ρόλο των τομέων παίζουν ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1, ενώ υποθέτουμε ότι οι πέτρες βρίσκονται στο κέντρο των αντίστοιχων τμημάτων. Ας θεωρήσουμε το άθροισμα των αποστάσεων ανάμεσα σε όλες τις πέτρες. Έπειτα από κάθε βήμα, αυτό το άθροισμα αυξάνεται τουλάχιστον κατά 2. Πράγματι, έστω ότι μετακινούνται οι πέτρες A και B , η A προς τα αριστερά και η B προς τα δεξιά. Οι αποστάσεις ανάμεσα στην A και σε όλες τις πέτρες που βρίσκονται αριστερά της μειώνονται, ενώ οι αποστάσεις ανάμεσα στις ίδιες πέτρες και στη B αυξάνονται κατά την ίδια ποστητα. Οι αποστάσεις των A και B από τις πέτρες που παραμένουν στον τομέα ο οποίος περιέχει προηγουμένως τις A και B αυξάνονται (ή παρα-

μένουν ίδιες αν ο τομέας είναι πλέον κενός). Τέλος, η απόσταση ανάμεσα στις A και B αυξάνει κατά 2. Αφού μπορούμε να εκτελέσουμε άπειρο πλήθος βημάτων, το άθροισμα των αποστάσεων θα αυξάνεται επ' άπειρον. Ωστόσο, αυτό το άθροισμα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο του μήκους του διαστήματος επί το πλήθος των πετρών. Τούτη η αντίφαση αποδεικνύει ότι τελικά όλα τα ελεύθερα ζεύγη τομέων θα εξαφανιστούν.

M215

Η κηλίδα είναι ένας κύκλος ακτίνας $r = R$.

Έστω A το σημείο της κηλίδας του οποίου η μικρότερη απόσταση από το σύνορο ισούται με r . Τότε, η κηλίδα περιέχει έναν κύκλο με κέντρο A και ακτίνα r , διότι όλα τα σημεία του ορίου της κηλίδας βρίσκονται έξω από αυτό τον κύκλο (Σχήμα 1). Ομοίως, αν B είναι το σημείο της κηλίδας του οποίου η μεγαλύτερη απόσταση από το σύνορο ισούται με R , τότε ο κύκλος με κέντρο B και ακτίνα R περιέχει το σύνορο και, συνεπώς, και την ίδια την κηλίδα. Αφού ο κύκλος B περιέχει την κηλίδα και η κηλίδα με τη σειρά της πε-

ανισότητα $T > mg$ ειδάλλως, το βαριδί δεν θα μπορούσε να ισορροπήσει. Στη θέση ισορροπίας η επιμήκυνση του νήματος ανέρχεται σε

$$\Delta l_0 = mg/k. \quad (1)$$

Όταν το βαριδί αφεθεί να πέσει από ύψος x πάνω από τη θέση ισορροπίας του, αρχίζει να κινείται προς τα κάτω. Αφού περάσει τη θέση που αντιστοιχεί στο μήκος του ελεύθερου (αφόρτιστου) ελαστικού νήματος, το βαριδί θα αρχίσει να τεντώνει το νήμα. Έστω Δl η μέγιστη επιμήκυνση του νήματος. Η συνθήκη θραύσης του νήματος υπαγορεύει ότι

$$k\Delta l = T, \text{ ή } \Delta l = T/k. \quad (2)$$

Αναλόγως με τη σχέση στην οποία βρίσκονται τα T και m , ανακύπτουν δύο διαφορετικές δυνατές περιπτώσεις: (1) $x < \Delta l_0$, και (2) $x > \Delta l_0$. Ας εξετάσουμε την καθεμία ξεχωριστά.

(1) $x < \Delta l_0$. Χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας, θεωρώντας τη δυναμική ενέργεια στη θέση του αφόρτιστου νήματος ως μηδενική:

$$-mg(\Delta l_0 - x) + \frac{k}{2}(\Delta l_0 - x)^2 = \\ -mg\Delta l + \frac{k}{2}(\Delta l)^2.$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις για το Δl_0 και Δl από τις εξισώσεις (1) και (2), αντιστοίχως, βρίσκουμε αμέσως το x :

$$x = \frac{T - mg}{k}.$$

Προφανώς, η συνθήκη $x \leq \Delta l_0$ είναι ισοδύναμη με την $T \leq 2mg$.

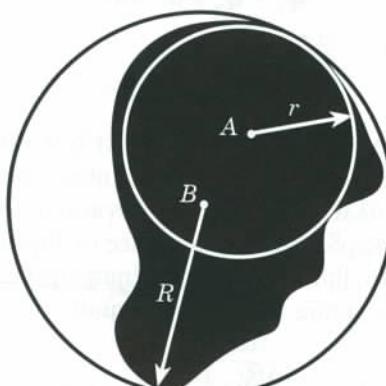
(2) $x > \Delta l_0$. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, παίρνουμε:

$$mg(x - \Delta l_0) = -mg\Delta l + \frac{k}{2}(\Delta l)^2.$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση, σε συνδυασμό με τις (1) και (2), βρίσκουμε:

$$x = \frac{mg}{2k} \left[\left(\frac{T}{mg} - 1 \right)^2 + 1 \right],$$

Σχήμα 1



F211

Κατ' αρχάς, προσέξτε ότι ισχύει η για $T \geq 2mg$.

Φ212

Το σημείο τήξης του πάγου πράγματι ελαττώνεται υπό αυξημένη πίεση. Ωστόσο, για να συντελεστεί η τήξη απαιτείται ενέργεια, οπότε η θερμοκρασία κάτω από το σύρμα μειώνεται. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου η θερμοκρασία της περιοχής του πάγου η οποία δέχεται την αυξημένη πίεση πέσει ώς το σημείο τήξης που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη τιμή της πίεσης. Η περαιτέρω τήξη του πάγου ελέγχεται από το ρυθμό με τον οποίο προσάγεται θερμότητα στην περιοχή χαμηλής θερμοκρασίας.

Στην περίπτωση του μεταλλικού σύρματος, αυτή η θερμότητα, η οποία προέρχεται από το νερό που παγώνει πάνω από το σύρμα, μεταφέρεται ταχέως στην περιοχή χαμηλής θερμοκρασίας χάρη στην υψηλή θερμική αγωγιμότητα του μετάλλου. Έτσι, το σύρμα διαπερνά την παγοκολόνα με γοργό ρυθμό. Απεναντίας, η νάιλον πετονιά χαρακτηρίζεται από αμελητέα θερμική αγωγιμότητα, οπότε η μεταφορά θερμότητας συντελείται κυρίως μέσω της ψύξης ολόκληρης της παγοκολόνας. Ως εκ τούτου, η πετονιά διαπερνά τον πάγο με πολύ βραδύ ρυθμό.

Φ213

Σ' αυτό το πρόβλημα, που εντάσσεται στο ευρύτερο πεδίο της λεγόμενης «φυσικής της κουζίνας», θα αγνοήσουμε τη θερμοχωρητικότητα του δοχείου, κάτι το οποίο φαίνεται εξαιρετικά εύλογο αν τα τοιχώματά του είναι λεπτά και η μάζα του μικρή σε σύγκριση με εκείνη των υγρών. Μάλιστα, για να παράσχουμε πρόσθετη στήριξη στην επιλογή μας αυτή, μπορούμε να επικαλεστούμε το γεγονός ότι τα μέταλλα χαρακτηρίζονται από ειδικές θερμότητες σημαντικά μικρότερες από εκείνη του νερού (μιας όμως και η συγκεκριμένη θερμική παράμετρος δεν αναφέρεται καθόλου στην εκφώνηση του προβλήματος, και εφόσον δεν προτιθέμεθα να την υπολογίσουμε, απλώς θα την αγνοήσουμε).

Ως γνωστόν, η θερμότητα η οποία μεταβιβάζεται ανά μονάδα χρόνου από το ένα ρευστό στο άλλο μέσω ενός

διαχωρίσματος είναι ανάλογη με το εμβαδόν της επιφάνειας του διαχωρίσματος και με την πτώση θερμοκρασίας ανάμεσα στις δύο όψεις του. Στο πρόβλημά μας, τα εμβαδά των επιφανειών μέσω των οποίων συντελούνται οι μεταβιβάσεις θερμότητας συμπίπτουν ως προς την τιμή τους για όλα τα ζεύγη υγρών. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τους ακόλουθους τύπους για τις μεταβιβασθείσες ποσότητες θερμότητας:

(1) από τη σούπα στο φρουτοχυμό:

$$Q_1 = k(65^\circ - 35^\circ)$$

(2) από τη σούπα στο κβασ:

$$Q_2 = k(65^\circ - 20^\circ)$$

και, τέλος,

(3) από το φρουτοχυμό στο κβασ:

$$Q_3 = k(35^\circ - 20^\circ)$$

Το k παριστάνει μια σταθερά αναλογίας, ίδια και για τις τρεις μεταβιβάσεις θερμότητας.

Συνεπώς, η απώλεια θερμότητας για τη σούπα ισούται με

$$Q_1 + Q_2 = k \cdot 75^\circ$$

ενώ τα κέρδη σε θερμότητα για το φρουτοχυμό και το κβασ ανέρχονται αντίστοιχα σε

$$Q_1 - Q_3 = k \cdot 15^\circ$$

και

$$Q_2 + Q_3 = k \cdot 60^\circ$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η σούπα έχει διπλάσια μάζα από καθένα από τα άλλα δύο υγρά, και συγκρίνοντας τα κέρδη και τις απώλειες σε θερμότητα, βρίσκουμε την αύξηση της θερμοκρασίας του φρουτοχυμού:

$$\Delta\theta_2 = \frac{\Delta\theta_1 \cdot 15 \cdot 2}{75} = 0,4^\circ\text{C}$$

καθώς και εκείνη του κβασ:

$$\Delta\theta_3 = \frac{\Delta\theta_1 \cdot 60 \cdot 2}{75} = 1,6^\circ\text{C}$$

όπου $\Delta\theta_1 = 1^\circ\text{C}$ η πτώση θερμοκρασίας της σούπας.

Κατ' αρχήν, οι υπολογισμοί μας θα μπορούσαν να γίνουν με μεγαλύτερη ακρίβεια. Οι πτώσεις θερμο-

κρασίας ανάμεσα στις όψεις των διαχωρισμάτων μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια των διαδικασιών ανταλλαγής θερμότητας, πράγμα που σημαίνει ότι οι ανωτέρω τύποι για τις Q_1 , Q_2 και Q_3 δεν αποτελούν παρά μόνο προσεγγίσεις. Εντούτοις, η συγκεκριμένη μείωση της θερμοκρασίας για τη σούπα (1°C) υπολείπεται κατά πολύ από όλες τις υπόλοιπες θερμοκρασιακές διαφορές που υπεισέρχονται στο πρόβλημα, οπότε οι όποιες διορθώσεις δεν αναμένονται σημαντικές. Εν πάσῃ περιπτώσει, θα επρέαζαν το τελικό αποτέλεσμα πολύ λιγότερο από τους δύο άλλους παράγοντες τους οποίους αγνοήσαμε, και συγκεκριμένα από τη θερμοχωρητικότητα του μεταλλικού δοχείου και τη μεταφορά θερμότητας που συντελείται σ' αυτό.

Φ214

Ηλεκτρικό ρεύμα εμφανίζεται στο κύκλωμα αμέσως μόλις κλείσουμε το διακόπτη Δ . Εντούτοις, το ρεύμα αυτό δεν μπορεί να λάβει αμέσως τη μέγιστη τιμή του λόγω της παρουσίας του πηνίου, το οποίο, όπως κάθε επαγγειακό στοιχείο «που σέβεται τον εαυτό του», απεχθάνεται τις μεταβολές του ρεύματος που το διαρρέει (μολονότι επιδεικνύει «μεγάλη επείθεια» απέναντι σε κάθε σταθερό ρεύμα). Παρά ταύτα, το ρεύμα θα αυξάνεται σταθερά ώσπου να φτάσει σε κάποια μέγιστη τιμή.

Το εν λόγω ρεύμα φορτίζει τον πυκνωτή. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, λοιπόν, για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CV^2}{2} = q\mathcal{E} = CV\mathcal{E}, \quad (*)$$

όπου με I συμβολίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος και με L το συντελεστή αυτεπαγγής του πηνίου. Ως γνωστόν, οι όροι $LI^2/2$ και $CV^2/2$ αντιπροσωπεύουν, αντίστοιχα, την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που βρίσκεται αποθηκευμένη στο πηνίο και την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου η οποία συσσωρεύεται στον πυκνωτή. Τέλος, $q = CV$ είναι το φορτίο που παρέχει η ηλεκτρική πηγή,

παράγοντας το αντίστοιχο έργο $q\mathcal{E}$.

Η τάση ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή γίνεται ίση με \mathcal{E} όταν το ρεύμα λαμβάνει μια συγκεκριμένη τιμή I_0 . Εκείνη τη χρονική στιγμή, η ηλεκτρική πηγή αδυνατεί να στείλει ρεύμα προς τον πυκνωτή, οπότε στη συνέχεια τον πρωταγωνιστικό ρόλο τον αναλαμβάνει το πηνίο. Ως συνήθως, το πηνίο προβάλλει αντίσταση σε οποιαδήποτε μεταβολή του ρεύματος (και έτσι «προσπαθεί» να το διατηρήσει στην εκάστοτε υφιστάμενη τιμή του). Συνεπώς, η φόρτιση του πυκνωτή πραγματοποιείται εις βάρος του μαγνητικού πεδίου που υπάρχει εντός του πηνίου. Εφόσον τούτη η πηγή ενέργειας δεν είναι ανεξάντλητη, το ρεύμα δεν μπορεί παρά βαθμιαία να φθίνει.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, η I_0 αντιπροσωπεύει τη ζητούμενη μέγιστη τιμή του ρεύματος. Εάν στην εξίσωση (*) θέσουμε $V = \mathcal{E}$, παίρνουμε:

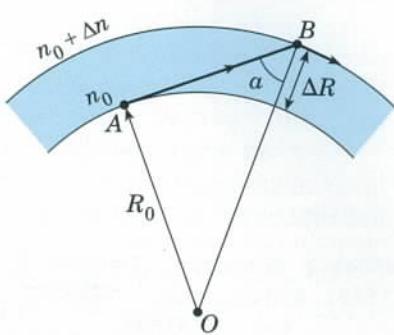
$$I_0 = \mathcal{E} \sqrt{C/L}.$$

Η φόρτιση του πυκνωτή θα συνεχιστεί έως ότου το ρεύμα μηδενιστεί. Κατά συνέπεια, η μέγιστη τάση ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή δίνεται από την εξίσωση (*) εάν θέσουμε $I = 0$:

$$V_{\max} = 2\mathcal{E}.$$

Φ215

Υποθέστε ότι το στρώμα εντός του οποίου λαμβάνει χώρα η ολική εσωτερική ανάκλαση «αιωρείται» σε απόσταση R_0 από το κέντρο της Γης (σημείο O στο Σχήμα 2) και έχει πάχος ΔR . Έστω n_0 ο δείκτης διάθλασης του εν λόγω στρώματος. Εφόσον το



Σχήμα 2

στρώμα είναι λεπτό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δείκτης διάθλασης δεν μεταβάλλεται εντός του (δηλαδή για αποστάσεις μικρότερες από το πάχος ΔR).

Ας θεωρήσουμε τώρα τη φωτεινή δέσμη AB που κατευθύνεται προς το εξωτερικό σύνορο του λαμπερού στρώματος, και η οποία εφάπτεται του εσωτερικού συνόρου, τότε και κάθε άλλη δέσμη που διαδίδεται εντός του λαμπερού στρώματος θα ανακλάται επίσης στο εξωτερικό σύνορο.

Η συνθήκη ολικής εσωτερικής ανάκλασης για τη δέσμη AB είναι

$$\frac{\eta_{ma}}{1} = \frac{n_0 + \Delta n}{n_0} = 1 + \frac{\Delta n}{n_0},$$

όπου γράψαμε το δείκτη διάθλασης έξω από το άνω σύνορο του λαμπερού στρώματος ως $n_0 + \Delta n$. Εφόσον το εν λόγω στρώμα θεωρείται λεπτό, μπορούμε να διευκολύνουμε το έργο μας αγνοώντας όρους ανώτερους της πρώτης τάξης ως προς ΔR , οπότε οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \eta_{ma} &= \frac{R_0}{R_0 + \Delta R} = 1 - \frac{\Delta R}{R_0 + \Delta R} \\ &\approx 1 - \frac{\Delta R}{R_0}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$1 + \frac{\Delta n}{n_0} = 1 - \frac{\Delta R}{R_0},$$

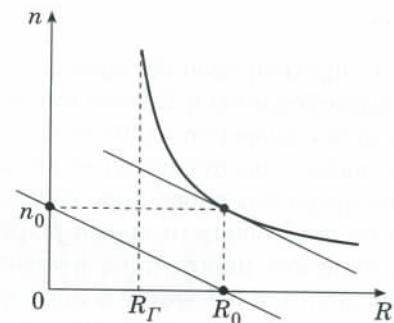
απ' όπου παίρνουμε:

$$\frac{\Delta n}{n_0} = -\frac{\Delta R}{R_0},$$

ή

$$\frac{\Delta n}{\Delta R} = -\frac{n_0}{R_0} = n'(R_0).$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $n(R)$ στο σημείο που αντιστοιχεί στις τιμές n_0 και R_0 πρέπει να σχηματίζει γωνία κλίσης φ με τον άξονα των R , τέτοια ώστε



Σχήμα 3

$$\varepsilon \varphi \varphi = -\frac{n_0}{R_0}.$$

Με άλλα λόγια, η εφαπτομένη αυτή πρέπει να είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία με συντεταγμένες $(0, n_0)$ και $(R_0, 0)$ (βλ. Σχήμα 3).

Επομένως, από τη στιγμή που γνωρίζουμε το R_0 , το ζητούμενο ύψος H_0 βρίσκεται αμέσως:

$$H_0 = R_0 - R_\Gamma.$$

Σπαζοκεφαλίες

Σ211

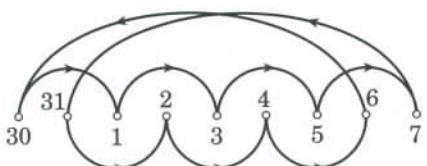
Είναι προφανές ότι τέσσερις υπάλληλοι επαρκούν. Πράγματι, μπορεί να εφαρμοστεί το επόμενο πρόγραμμα: Όλοι δουλεύουν επί 24 ώρες και μετά αναπαύονται για τρεις ολόκληρες ημέρες (72 ώρες). Θα αποδειξουμε ότι το πλήθος των υπαλλήλων δεν μπορεί να είναι μικρότερο. Πράγματι, αν ένας υπάλληλος δουλέψει για περίοδο 24 ώρων, τότε απαιτούνται τουλάχιστον τρεις υπάλληλοι για να δουλέψουν στη διάρκεια του διαλειμματός του (60 ώρες). Αν κανείς δεν δουλεύει περισσότερο από 12 ώρες, τότε χρειάζονται τουλάχιστον τρεις υπάλληλοι για να καλύψουν το διάστημα που δεν εργάζεται ο υπάλληλος της βραδινής βάρδιας.

Σ212

Ο αριθμός 101 είναι πρώτος. Επομένως, αν $101 = a + b$, τότε τα a και b είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί (διότι, αν είχαν έναν κοινό διαιρέτη d , αυτός θα διαιρούσε και το άθροισμά τους). Άρα η Κυριακή κερδίζει πάντα, ανεξάρτητα από τη στρατηγική που θα ακολουθήσει.

Σ213

Η απάντηση είναι έξι ημέρες. Για να αποδείξουμε ότι η δήλωση του βαρόνου δεν μπορεί να αληθεύει επί επτά ημέρες, θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε ημέρα ένα σημείο μιας ευθείας και θα συνδέσουμε τα σημεία με βέλη σύμφωνα με τον εξής κανόνα: στην αρχή του βέλους αντιστοιχεί ημέρα για την οποία γνωρίζουμε ότι ο βαρόνος πέτυχε λιγότερες πάπες απ' ό, τι στην ημέρα που αντιστοιχεί το τέλος του βέλους. Προκύπτει το Σχήμα 4. Η αλυσίδα των βελών είναι κλειστή, πράγμα που σημαίνει ότι η



Σχήμα 4

υπόθεση πως ο Μινχάουζεν μπορεί να κάνει αυτή τη δήλωση επί επτά ημέρες είναι εσφαλμένη. Αν θεωρήσουμε έξι μόνο ημέρες, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ένα παράδειγμα που θα ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Στις 30 Ιουλίου και κάθε προηγούμενη ημέρα, πέτυχε από πέντε πάπες. Από την 31η Ιουλίου μέχρι και την 6η Αυγούστου, πέτυχε διαδοχικά 1, 1, 2, 2, 3, 3 και 4 πάπες.

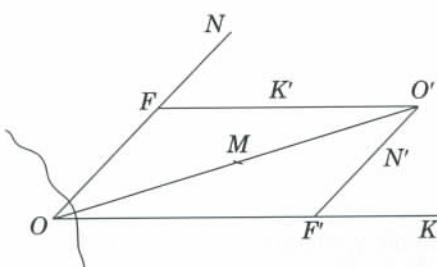
Σ214

Η απάντηση είναι οκτώ παικτες. Πράγματι, από την έκτη παρτίδα και μετά, τα ζεύγη των αντιπάλων καθορίζονται πλήρως από τα αποτελέσματα των προηγούμενων παρτίδων. Στην έκτη παρτίδα θα παίξουν ο ηττημένος της πρώτης και ο νικητής της τρίτης. Στην έβδομη παρτίδα, ο ηττημένος της δεύτερης και ο νικητής της τέταρτης, και ούτω καθεξής. Αυτό σημαίνει ότι έπειτα από την πέμπτη παρτίδα δεν μπορεί να συμπετάσχει στο πρωτάθλημα νέος παίκτης. Κατά τις πέντε πρώτες παρτίδες, στο πρωτάθλημα έπαιχαν οκτώ παικτες —δύο στην πρώτη παρτίδα, δύο στη δεύτερη, δύο στην τρίτη, ένας στην τέταρτη και ένας στην πέμπτη.

Σ215

Η θάλασσα κοντά στην ακτή είναι ρηχή. Το νερό στη βάση του κύματος επιβραδύνεται λόγω της τριβής με τον πυθμένα, και έτσι τα ανώτερα στρώματα του κύματος «ξεπερνάνε» σε ταχύτητα τα κατώτερα. Οπότε, μόλις το ανώτατο στρώμα ξεπέρασε το στρώμα που βρίσκεται από κάτω του, χάνει τη στήριξή του σ' αυτό και πέφτει λόγω της βαρύτητας.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 63



Σχήμα 7

από το σημείο M (Σχήμα 7). Η γωνία NOK (παρόλο που δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε την κορυφή της O) μεταφέρεται σε μια γωνία $FO'F'$, όπου το σημείο F ανήκει στην ημιευθεία ON και το σημείο F' στην ημιευθεία OK . Τότε, το $OFO'F'$ είναι παραλληλόγραμμο (το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε χωρίς να χρειάζεται να προσεγγίσουμε το σημείο O), και το σημείο M είναι το μέσον της διαγωνίου OO' . Άρα, η ευθεία $O'M$ διέρχεται από το σημείο O και επιλύει το πρόβλημά μας.

Ολοκληρώνοντας, αξίζει να συγκρίνουμε τις λύσεις που παρουσιάστηκαν. Κατά τη γνώμη μου, η Λύση 1 είναι η κομψότερη, όμως οι Λύσεις 2, 6 και 7 είναι απλούστερες και απαιτούν λιγότερα βήματα κατά την κατασκευή τους. Επίσης, χρησιμοποιούν πιο στοιχειώδεις ιδέες. Οι Λύσεις 3, 4, 5 φαίνονται δυσκολότερες. Και αυτές όμως βοηθούν πολύ στην ανάπτυξη του τρόπου σκέψης και της δημιουργικότητας.

Αν προσπαθήσουμε να βρούμε νέες λύσεις αυτού του προβλήματος, μπορεί να οδηγηθούμε σε ενδιαφέρουσες γενικεύσεις. Μπορούμε, για

παράδειγμα, να συνδυάσουμε τα αποτελέσματα των Λύσεων 1, 3 και 6 για να αποδείξουμε ότι το περίκεντρο, το βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι συγγραμμικά. Τα τρία αυτά σημεία ορίζουν την καλούμενη ευθεία του Euler. Οι αναγνώστες μπορούν να δοκιμάσουν να αποδείξουν ότι το βαρύκεντρο διαιρεί την απόσταση μεταξύ ορθόκεντρου και περίκεντρου σε λόγο $2 : 1$. Θα ήταν ενδιαφέρον να βρείτε πολλές διαφορετικές αποδείξεις του συγκεκριμένου γεγονότος.

Στις Λύσεις 3 και 6 μάθαμε πώς κατασκευάζουμε ένα τμήμα με άκρα στις πλευρές μιας δεδομένης γωνίας, το οποίο διέρχεται από δεδομένο σημείο στο εσωτερικό της γωνίας και διχοτομείται από το εν λόγῳ σημείο. Επίσης, μάθαμε πώς κατασκευάζεται μια ευθεία που διέρχεται από δεδομένο σημείο στο εσωτερικό μιας δεδομένης γωνίας και είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της γωνίας και το δεδομένο σημείο. Πιστεύω ότι θα είναι καλή εξάσκηση αν προσπαθήσετε να βρείτε και άλλες λύσεις αυτών των προβλημάτων. ◻

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ

Οι Εκδόσεις Κάτοπτρο ζητούν έμπειρους συνεργάτες για μετάφραση και επιστημονική επιμέλεια βιβλίων και άρθρων από τον ευρύτερο χώρο της φυσικής, της βιολογίας και των μαθηματικών. Όσοι ενδιαφέρονται πρέπει να αποστείλουν σύντομο βιογραφικό σημείωμα, στο οποίο θα συμπεριλαμβάνουν περιγραφή του ακριβούς γνωστικού πεδίου στο οποίο μπορούν να ανταποκριθούν και κάθε σχετική εμπειρία τους. Θα επακολουθήσει προσωπική επικοινωνία, με πρωτοβουλία των εκδόσεων.

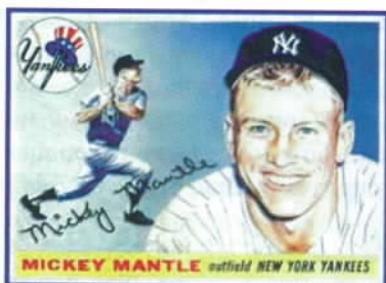
**Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10,
11471 Αθήνα, τηλ.: 3643272,
fax: 3641864,
e-mail: info@katoptro.gr**

Το πρωινό των πρωταθλητών

Ένας αλγόριθμος για μανιάδεις συλλέκτες

Don Piele

ΟΤΑΝ ΉΜΟΥΝ ΜΙΚΡΟΣ, ΤΗ ΔΕΚΑΕΤΙΑ ΤΟΥ 1950, Η ΣΥΛΛΟΓΗ ΚΑΡΤΩΝ ΜΕ ΠΑΪΚΤΕΣ ΤΟΥ ΜΠΕΙΖΜΠΟΛ ΚΑΙ ΤΟΥ ΡΑΓΚΜΠΙ ΑΠΟΤΕΛΟΥΣΕ ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΕΞΩΣΧΟΛΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ. Όλα τα παιδιά της γειτονιάς μιλούσαμε με υπερηφάνεια για τις συλλογές μας από κάρτες με τις φωτογραφίες των διάσημων παικτών στην μπροστινή μεριά και τα σύντομα βιογραφικά τους στην πίσω. Η κάρτα με τον Mickey Mantle ήταν μια από τις πιο πολύτιμες κάρτες παικτών του μπειζμπολ, ενώ του Doak Walker θεωρούνταν η καλύτερη κάρτα παίκτη του ράγκμπι. Η κύρια πηγή αυτών των πολυπόθητων καρτών ήταν τα Wheaties, «Το πρωινό των πρωταθλητών».



Κάθε τέτοιο κουτί δημητριακών υποσχόταν ότι περιέχε μία κάρτα ενός διάσημου αθλητή, αλλά για να μάθεις ποιος ήταν αυτός έπρεπε πρώτα να το αγοράσεις.

Και έτσι, η μητέρά μου αγόραζε τα δημητριακά όποτε της το ζητούσα. Άλλωστε, δεν την πείραζε εφόσον ήμουν πρόθυμος να φάω το περιεχόμενο του κουτιού —αφού βέβαια έφαχνα πρώτα να βρω την κάρτα που ήταν θαμμένη στις νιφάδες. Αν είχα ήδη την κάρτα στη συλλογή μου, θα μπορούσα να την ανταλλάξω με τις κάρτες των φίλων μου. Φυσικά, ήλπιζα ότι αυτό δεν θα ήταν απαραίτητο. Εκείνη την εποχή, ποτέ δεν διανοήθηκα ότι υπήρχε μαθηματικός τρόπος υπολογισμού του πλήθους των κουτιών που θα έπρεπε να αγοράσει η μητέρα μου

—κατά μέσο όρο— έως ότου συμπληρωθεί η συλλογή με όλους τους παίκτες που προσφέρονταν.

Η ανάμνηση εκείνων των ημερών μάς οδηγεί να διερευνήσουμε το εξής πρόβλημα. Κάθε αγωνιστική περίοδο, η General Mills, η κατασκευαστρια των Wheaties, προσέφερε n κάρτες για συλλογή. Αν έχουμε στόχο να συλλέξουμε όλες τις κάρτες, πόσα κουτιά πρέπει να αγοράσουμε —κατά μέσο όρο—, για να ολοκληρώσουμε τη συλλογή μας; Για να απλοποιήσω την κατάσταση, θα υποθέσω ότι δεν γίνονται ανταλλαγές καρτών με τους φίλους.

Προσομοίωση

Εξοπλισμένοι με έναν υπολογιστή που έχει φορτωμένο το *Mathematica*, ας δούμε πώς μπορούμε να δώσουμε εύκολα απάντηση στο εν λόγω ερώτημα με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης. Ας υποθέσουμε ότι για τη συγκεκριμένη περίοδο προσφέρονται $n = 12$ κάρτες. Αρχικά, αντιστοιχίζουμε σε κάθε κάρτα έναν αριθμό.

$n=12;$

`cards=Range[1, n]`

`{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}`

Αμέσως μετά, επιλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό από το σύνολο των καρτών

`drawOne:=Random[Integer,{1, n}]`

`drawOne`

`4`

Στη συνέχεια, θα απομακρύνουμε αυτή την κάρτα από τη λίστα με τις υπόλοιπες. Αυτό το επιτυγχάνουμε παίρνοντας το συμπλήρωμα του συνόλου των καρτών ως προς το μονομελές σύνολο $\{4\}$ που αποτελείται από την κάρτα που επιλέξαμε.

```

cards=Complement[cards,{4}]
{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

```

Το μόνο που έχουμε να κάνουμε τώρα είναι να επαναλάβουμε τη διαδικασία έως ότου επλεγούν όλες οι κάρτες, και να δούμε πόσο θα διαρκέσει. Θα παρακολουθούμε πόσες κάρτες απομένει να βρούμε μέσω μιας λίστας που ονομάζεται cardsLeft.

```

cards=Range[1,n];
cardsLeft={};

While[Length[cards] != 0, cards=
Complement[cards,{drawOne}];
cardsLeft=Join[cardsLeft,{Length[cards]}]];

cardsLeft
{11, 11, 10, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 6, 6,
6, 6, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
1, 1, 1, 0}

```

Το μήκος της λίστας cardsLeft μάς δίνει το πλήθος των κουτιών που πρέπει να αγοράσει η μητέρα μέχρι να ολοκληρώσουμε τη συλλογή μας.

```

Length[cardsLeft]
30

```

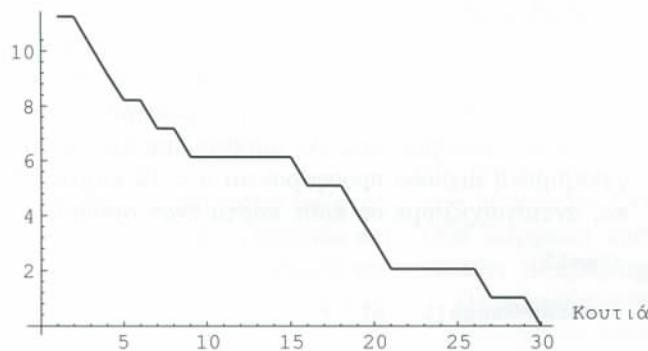
Αν κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα σημείων γι' αυτή τη λίστα, μπορούμε να παρατηρήσουμε την πρόοδο στη συλλογή των καρτών.

```

ListPlot[cardsLeft, PlotJoined → True,
AxesLabel → {"Κουτιά", "Κάρτες που απομένουν"}]

```

Κάρτες που απομένουν



Είμαι πλέον έτοιμος να γράψω το πρόγραμμα που θα συγκεντρώσει όλα αυτά σε μία συνάρτηση, η οποία θα μου ζητά το πλήθος των καρτών της συλλογής και θα επιστρέψει το πλήθος των κουτιών που αγοράστηκαν κατά την προσομοίωση μέχρι να ολοκληρωθεί η συλλογή. Ονομάζω αυτή τη συνάρτηση BOC (από τα αρχικά του «Breakfast Of Champions» —δηλαδή, «πρωινό των πρωταθλητών»). Φυσικά, η BOC είναι μια τυχαία μεταβλητή, διότι το αποτέλεσμά της ποικίλλει σε κάθε προσομοίωση.

```

BOC[n_] := Module[{cards, boxes = 0},
cards = Range[1, n];

```

```

While[Length[cards] != 0,
cards=Complement[cards,{drawOne}];boxes++];
boxes

```

Ας εκτελέσουμε το BOC για καθέναν από τους δέκα φιλαράκους μου.

```
Table[BOC[12], {10}]
```

```
{32, 28, 41, 45, 24, 30, 35, 31, 40, 55}
```

Ο πιο τυχερός ολοκλήρωσε τη συλλογή του με 28 κουτιά, ενώ ο πιο άτυχος με 55. Η διαφορά είναι μεγάλη. Για να έχουμε μια καλή εκτίμηση του αναμενόμενου πλήθους των απαιτούμενων κουτιών, ας βάλουμε τους δέκα φίλους μου να εκτελέσουν ο καθένας το πρόγραμμα εκατό φορές και να μας αναφέρουν το μέσο τους αποτέλεσμα.

```
Table[Apply[Plus,Table[BOC[12],{100}]]/100//N,{10}]
```

```
{35.02, 38.03, 36.56, 36.86, 35.83, 38.94,
35.5, 37.4, 38.7, 38.05}
```

Τα πράγματα είναι πιο καθαρά τώρα. Θα υπολογίσω τη μέση τιμή αυτών των αποτελεσμάτων, για να καταλήξω στη βέλτιστη εκτίμηση για το απαιτούμενο πλήθος κουτιών.

```
Apply[Plus,%]/10//N
```

```
37.089
```

Πριν λοιπόν ολοκληρωθεί η συλλογή μου με τις δώδεκα κάρτες αυτής της περιόδου, η μαμά θα πρέπει να αγοράσει, κατά μέσο όρο, 37 κουτιά.

Αυτή η προσομοίωση απαίτησε τη χρήση εννέα εντολών του *Mathematica*: **Range**, **Random**, **Complement**, **Length**, **While**, **Module**, **Apply**, **Table**, **Plus**. Όλες αυτές οι εντολές χρησιμοποιούνται συχνά από τους αρχάριους χρήστες του *Mathematica*. Το *Mathematica* αξιοποιεί την ισχύ του προγραμματισμού και δίνει σε οποιονδήποτε τη δυνατότητα να τη χρησιμοποιήσει —ακόμη και στους φιλαράκους της γειτονιάς μου.

Πιθανότητα

Η μέθοδος της προσομοίωσης μας προσέφερε έναν απλό και άμεσο τρόπο για να απαντήσουμε με μια καλή εκτίμηση στο ερώτημά μας. Αν κατανοείτε αρκετά τις πιθανότητες, τότε μπορείτε να απαντήσετε σε αυτό το πρόβλημα συναγάγοντας μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που θα δίνει την αναμενόμενη τιμή του πλήθους των απαιτούμενων κουτιών. Όμως, λόγω της πολυπλοκότητας της συνάρτησης κατανομής, είναι σχεδόν αδύνατο να καταλήξουμε σε μια απάντηση χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή. Ας ρίξουμε μια ματιά.

Η ευκολότερη περίπτωση είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας να ολοκληρώσουμε όλη τη συλλογή με τα πρώτα 12 κουτιά. Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά βρίσκουμε μια νέα κάρτα —και αυτό επι δώδεκα συνεχείς φορές. Η πιθανότητα επιτυχίας στην πρώτη δοκιμή εί-

vai 1, στη δεύτερη είναι 11/12, στην τρίτη 10/12, και ούτω καθεξής, έως την τελευταία δοκιμή όπου η πιθανότητα επιτυχίας είναι 1/12. Συνεπώς, η πιθανότητα να συμβούν όλα αυτά τα γεγονότα διαδοχικά είναι $(12/12) \times (11/12) \times \dots \times (1/12)$.

Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι πολύ μικρή.

$$\frac{12!}{12^{12}}$$

$$\frac{1925}{35831808}$$

$\%/\mathbb{N}$

$$0.0000537232$$

Αυτό είναι περίπου 1 στις 20.000. Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει και διαφορετικά, μέσω μιας αναδρομικής συνάρτησης p που υπολογίζει την πιθανότητα να έχουμε n διαδοχικές επιτυχίες (καινούργια κάρτα) βασιζόμενοι στη γνώση της πιθανότητας $n - 1$ επιτυχιών. Με άλλα λόγια, αν $p(3)$ η πιθανότητα για τρεις επιτυχίες στη σειρά, τότε η πιθανότητα μίας ακόμη επιτυχίας είναι $p(3) \times \frac{(12-3)}{12}$. Αυτό εκφράζεται αναδρομικά στο *Mathematica* ως εξής:

$$p[1] = 1; \\ p[n_] := p[n - 1] * \frac{(12 - n + 1)}{12}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα 12 διαδοχικών επιτυχιών.

$$p[12]/\mathbb{N}$$

$$0.0000537232$$

Έως εδώ ήταν εύκολο. Όμως, χρειαζόμαστε πολλούς υπολογισμούς ακόμα. Στην πραγματικότητα, αυτό που συμβαίνει μέχρι να έχουμε 12 συνολικά επιτυχίες είναι μια σειρά επιτυχιών και αποτυχιών. Επομένως, πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p[j, k]$, η οποία εκφράζει την πιθανότητα j επιτυχιών και k αποτυχιών. Θα παραγάγουμε αυτή την κατανομή αναδρομικά, κάνοντας τις εξής παρατηρήσεις.

Η πιθανότητα μίας επιτυχίας και καμίας αποτυχίας είναι 1. Αυτό σημαίνει ότι το πρώτο κουτί που αγοράζετε έχει μέσα μία νέα κάρτα.

$$Clear[p]$$

$$p[1, 0] = 1;$$

Αν έχετε μία επιτυχία ακολουθούμενη από $k - 1$ αποτυχίες, τότε η πιθανότητα μίας ακόμα αποτυχίας ισούται με την τρέχουσα πιθανότητα επί 1/12. Για να αποτύχετε και πάλι, πρέπει να επλέξετε την κάρτα που έχετε ήδη (να μη βρείτε νέα κάρτα).

$$p[1, k_] := p[1, k] = p[1, k - 1] \frac{1}{12}$$

Επίσης, εάν έχετε μια ακολουθία $j - 1$ επιτυχιών,

χωρίς καμία αποτυχία, τότε, όπως και προηγουμένως, η πιθανότητα να προστεθεί μία ακόμη επιτυχία ισούται με την τρέχουσα πιθανότητα επί $(12 - (j - 1))/12$, ή $(12 - j + 1)/12$. Οι κάρτες που σας λείπουν είναι $12 - j + 1$.

$$p[j_, 0] := p[j, 0] \\ = p[j - 1, 0] \frac{(12 - j + 1)}{12}$$

Η βασική αναδρομή έγκειται στο να γνωρίζετε πώς φτάνετε σε j επιτυχίες και k αποτυχίες. Αυτό μπορεί να συμβεί με δύο μόνο τρόπους: (1) έχετε j επιτυχίες και $k - 1$ αποτυχίες, και αποτυγχάνετε ακόμα μία φορά με πιθανότητα $j/12$, ή (2) έχετε $j - 1$ επιτυχίες και k αποτυχίες, και καταγράφετε μία ακόμα επιτυχία με πιθανότητα $(12 - j + 1)/12$. Αυτά συνοψίζονται στην εξής αναδρομή:

$$p[j_, k_] := p[j, k] \\ = p[j, k - 1] \frac{j}{12} + p[j - 1, k] \frac{(12 - j + 1)}{12}$$

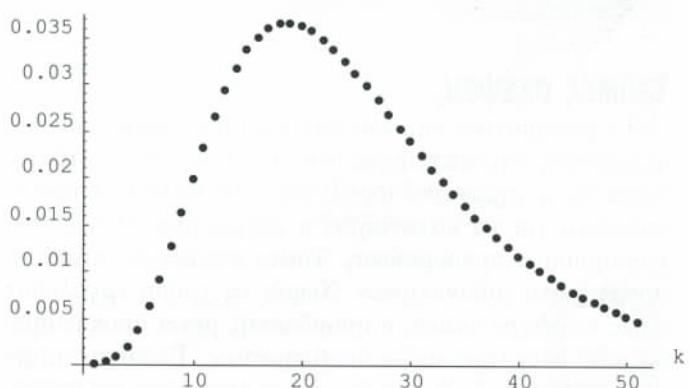
Τέλος, μπορείτε να φτάσετε σε 12 επιτυχίες και k αποτυχίες από μόνο μία κατεύθυνση. Έπειτα από 11 επιτυχίες και k αποτυχίες, βρίσκετε την τελική κάρτα. Δεν είναι δυνατόν να φτάσετε σε 12 επιτυχίες και $k - 1$ αποτυχίες, διότι από τη στιγμή που έχετε επιτύχει 12 επιτυχίες, το παιχνίδι σταματά. Η τελική αναδρομή εκφράζεται ως εξής:

$$p[12, k_] := p[12, k] = p[11, k] \frac{1}{12}$$

Ιδού ένα διάγραμμα της κατανομής πιθανότητας της $p(12, k)$ όταν το πλήθος των αποτυχιών κυμαίνεται από 0 έως 50.

```
pd=Table[p[12, k], {k, 0, 50}]; \\ pd[[1]] = 0.0000537232
ListPlot[pd, AxesLabel → {"k", "Prob"}, PlotStyle → PointSize[.02]]
```

Πιθανότητα



Η συνολική πιθανότητα είναι

Apply[Plus, pd]

Επομένως, στο 94,6% των περιπτώσεων, η συλλογή ολοκληρώνεται έπειτα από $12 + 50$, δηλαδή 62, κουτιά. Το αναμενόμενο πλήθος κουτιών είναι το άθροισμα των γινομένων των πιθανοτήτων $p[12, k]$ επί το πλήθος των κουτιών ($12 + k$). Η άθροιση γίνεται για όλες τις τιμές του k , επειδή όμως πρέπει κάπου να σταματήσουμε, ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να έχουμε περισσότερες από 200 αποτυχίες είναι απειροελάχιστη.

$$\sum_{k=0}^{200} p[12, k] (12 + k) // n$$

37.2385

Τι βλέπουμε εδώ; Πήραμε σχεδόν το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που μας έδωσε η απλή μας προσομοίωση! Πιστεύει κανείς ότι θα μπορούσαμε να είχαμε βρει αυτή την απάντηση χωρίς υπολογιστή;

Η εικόνα της κατανομής

Για να έχουμε μια εικόνα του τρόπου που μεταβάλλεται η $p[j, k]$ όταν το j κυμαίνεται από 1 έως 12 και το k από 0 έως 70, χρωματίζουμε απλώς ένα ορθογώνιο με την τιμή της $p[j, k]$. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί στο j , ένα αυξανόμενο πλήθος επιτυχιών, και κάθε στήλη στο k , ένα αυξανόμενο πλήθος αποτυχιών. Η μεγάλη κόκκινη περιοχή αντιστοιχεί σε μικρές πιθανότητες. Η πράσινη, η μπλε και η μοβ σε ολοένα μεγαλύτερες πιθανότητες. Η τελευταία γραμμή δίνει μια εικόνα της τελικής κατανομής $p[12, k]$. Στην πραγματικότητα, σταμάτησα στην $p[11, k]$, διότι τα χρώματα φαίνονται καλύτερα και η $p[12, k]$ ισούται με το γινόμενο της $p[11, k]$ επί τη σταθερά 1/12.

```
Show[Graphics[Table[{Hue[(p[j,k])* 2.1],  
Rectangle[{k, -j},{1 + k, 1 - j}],{k, 0,  
70},{j, 1, 11}}],  
AspectRatio → 1/4]
```

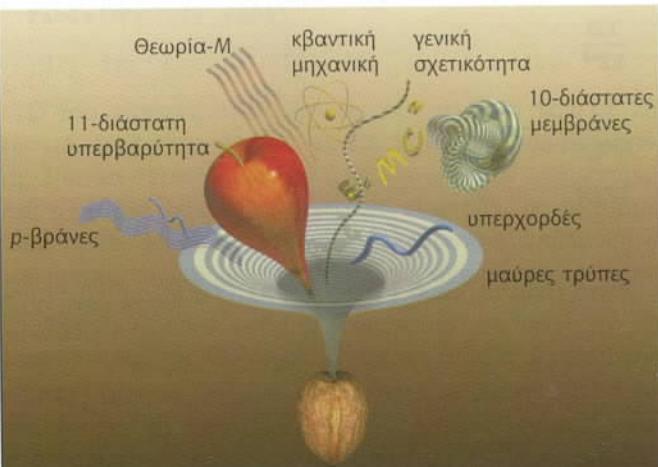


Τελικές σκέψεις

Το μαθηματικό επίπεδο το οποίο απαιτείται για την κατανόηση της επιχειρηματολογίας που αφορά πιθανότητες είναι σημαντικά υψηλότερο από αυτό το οποίο απαιτείται για να κατανοηθεί η επιχειρηματολογία που χρησιμοποιεί προσομοίωση. Τούτο συμβαίνει συχνά σε προβλήματα πιθανοτήτων. Χωρίς τη χρήση εργαλείων όπως το *Mathematica*, ο οπουδαστής μένει αποκλεισμένος από ολόκληρο πεδίο προβλημάτων. Το συγκεκριμένο παράδειγμα δείχνει πόσο σημαντικό είναι να γνωρίζει όποιος φιλοδοξεί να γίνει ολοκληρωμένος λύτης προβλημάτων ένα αλγεβρικό σύστημα προγραμματισμού σαν το *Mathematica*.

Μέσα στο χρόνο, και σε όλο τον κόσμο, θα κυκλοφορήσει η συνέχεια ενός λαμπρού χρονικού... Πρόκειται για ένα χρονικό του Κόσμου, εικονογραφημένο:

STEPHEN HAWKING
Το Σύμπαν σ' ένα καρυδότσουφλο



Με το νέο βιβλίο του, ο Stephen Hawking, ένας από τους σπουδαιότερους θεωρητικούς φυσικούς της εποχής μας και σημαίνων διανοητής, μας οδηγεί στην πρώτη γραμμή της έρευνας στη θεωρητική φυσική για να μας διασφαλίσει τα μυστήρια των εντυπωσιακών ανακαλύψεων που συνέβησαν

στο χρονικό διάστημα από την έκδοση του πρώτου δημοφιλούς βιβλίου του (Το χρονικό του Χρόνου, 1988).

Με το προστό και συχνά παιγνιώδες ύφος του, μας ταξιδεύει από την υπερβαρύτητα στην υπερσυμμετρία, από την κβαντική μηχανική στη Θεωρία-M, από την ολογραφία στο δυϊσμό. Μας γνωρίζει τη Θεωρία των υπερχορδών και τις p-διάστατες μεμβράνες —τα τρομερά πεδία έρευνας στα έσχατα σύνορα της επιστήμης. Μας αφηγείται τις νοητικές περιπέτειες τις οποίες διέρχεται η προσπάθεια να

συνδυαστεί η γενική σχετικότητα του Αΐνσταϊν με την άθροιση ιστοριών του Feynman σε μια πλήρη, ενοποιημένη Θεωρία, η οποία θα περιγράφει καθετί που υπάρχει στο

Σύμπαν. Με άφθονες εικόνες, μας ξεναγεί στον

υπερρεαλιστικό χώρο της σύγχρονης φυσικής, όπου σωματίδια, φύλλα και χορδές κινούνται στις 11 διαστάσεις, όπου μαύρες τρύπες εξαερώνονται και χάνονται μαζί με τα μυστικά τους, και όπου ο αρχικός κοσμικός σπόρος από τον οποίο βλάστησε το Σύμπαν μας δεν ήταν παρά

ένα μικροσκοπικό καρύδι.



ΒΙΒΛΙΟΓΩΝΙΑ

Μόνο για συνδρομητές

Προνόμιο
έκπτωσης 30%

Μην αφήνετε κενά στη βιβλιοθήκη σας. Επιλέξτε τουλάχιστον δύο από τις διπλανές προσφορές και τηλεφωνήστε ή ταχυδρομήστε μας την παραγγελία σας. Θα παραλάβετε τα βιβλία ταχυδρομικά σε λιγότερο από 6 ημέρες. Τα έξοδα συσκευασίας και ταχυδρομικής αποστολής βαρύνουν εμάς, εσάς όμως επιβαρύνουν τα έξοδα αντικαταβολής (περίπου 1.200 δρ. ανά δέμα) και το ΦΠΑ (4% επί της προσφερόμενης τιμής).*

Η προσφορά δεν ισχύει:

- για όσους δεν είναι συνδρομητές του *Quantum* (ακόμη κι αν είναι αναγνώστες του)
- για ιδρύματα, οργανισμούς και βιβλιοθήκες (ακόμη κι αν είναι συνδρομητές)
- αν η παραγγελία σας γίνει μετά τις 30 Ιουνίου 2001
- αν η συνδρομή σας έχει ήδη λήξει.

(Οι παρακάτω τίτλοι θα ανανεώνονται σε κάθε τεύχος.)

* Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνονται δεκτές πιστωτικές κάρτες.



John D. Barrow
Η απαρχή του Σύμπαντος
Περιήγηση στη μοντέρνα κosmολογία
Σελ.: 172, 5.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.650 δρχ.



P.W. Atkins
Η Δημιουργία
—αναθεωρημένη
Σελ.: 200, 5.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.700 δρχ.



Pavlos Ioannou
ΑΙΓΑΙΟΝ: ΟΙ ΑΙΓΑΙΟΙ ΜΕΣΟΧΩΡΙΑ Η ΒΑΘΟΣ ΤΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ
Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής 1967-1997
Σελ.: 364, 6.600 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.600 δρχ.



Jayant Narlikar
Quantum Φυσικής γυμνάσματα Πανόδετο
Σελ.: 160, 5.500 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.850 δρχ.



Michális St. Makrákis
Το ξεκίνημα Ανδρέας Γ. Παπανδρέου, 1933-1943
Σελ.: 212, 4.500 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.150 δρχ.



Edward Driault
Το ανατολικό ζήτημα
Από τις αρχές του έως τη Συνθήκη των Σεβρών (τόμ. A' και B')
Συν. σελ.: 974, 14.500 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 10.150 δρχ.



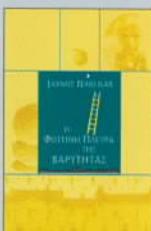
Alain Prochiantz
Η βιολογία στο μπουντουάρ
Ένας διάλογος για το ζέβιο
Σελ.: 188, 4.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.800 δρχ.



John Z. Young
Ο εγκέφαλος και οι φιλόσοφοι
Από τους νευρώνες στη συνείδηση
Σελ.: 380, 6.800 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.750 δρχ.



Lewis Epstein
Εικόνες της Σχετικότητας
Ειδική θεωρία (τόμ. A')
Γενική θεωρία (τόμ. B')
Συν. σελ.: 258, 9.400 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 6.600 δρχ.



Jayant Narlikar
Η φωτεινή πλευρά της βαρύτητας
Έκδοση αναθεωρημένη και επηρεζμένη
Σελ.: 252, 6.600 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.600 δρχ.



E. Βιζέλ & F. Μιττεράν
Ενθυμήσεις για δύο φωνές
Σελ.: 180, 3.900 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.730 δρχ.



Edward Driault
Η Μεγάλη Ιδέα
Σελ.: 296, 6.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.350 δρχ.

Το περιοδικό «ΘΕΜΑΤΑ στην Εκπαίδευση» στοχεύει μέσα από τη διεπιστημονική προσέγγιση που νιοθετεί να ανοίξει διαύλους επικοινωνίας ανάμεσα στις επιστημονικές κοινότητες των θεματικών περιοχών τις οποίες καλύπτει με σκοπό την πολύπλευρη προσέγγιση των προβλημάτων της εκπαίδευσης. Το περιοδικό είναι τριμηνιαίο. Τα άρθρα του δημοσιεύονται στην Ελληνική ή την Αγγλική γλώσσα μετά από κρίση και αναφέρονται σε θέματα που ένδιαφέρουν τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, καθώς και τους ερευνητές των αντίστοιχων θεματικών περιοχών. Στόχος του περιοδικού είναι η κοινοποίηση στον αναγνώστη πρωτότυπων ερευνητικών εργασιών και κριτικών θεωρήσεων. Το περιοδικό δημοσιεύει επίσης βιβλιοκριτικές, ανακοινώσεις Συνεδρίων, Ημερίδων και γενικώς νέα που ενδιαφέρουν τις αντίστοιχες επιστημονικές κοινότητες.

Στις σελίδες του περιοδικού παρουσιάζονται εργασίες από τις εξής θεματικές περιοχές:

- Εκπαιδευτική Τεχνολογία
- Διδακτική Μαθηματικών
- Ιστορίας & Φιλοσοφίας της Επιστήμης και των Μαθηματικών στην Εκπαίδευση
- Διδακτική των Φυσικών Επιστημών

Συντακτική ομάδα

T. A. Mikropoulos

Technology Educational

C. Skordoulis

History & Philosophy of Science and Mathematics in Education

E. Koleza

Mathematics Education

A. Katsikis

Science Education(Biology, Geography, Ecology)

A. Jimoyiannis

Science Education (Physics, Chemistry, Informatics)

Σύμβουλοι Έκδοσης

M. Ahtee (U. Jyvaskyla, Finland), A. Arcavi (Weizmann Inst., Israel), A. Baltas (NTUA, Athens, Greece), G. L. Baron (INRP, France), J. Bliss (U. Sussex, UK), A. Boufi (U. Athens, Greece), Th. Christides (U. Thessaly, Greece), A. Dimitrakopoulou (Aegean U., Greece), C. Dupuis (U. Strasbourg, France), J. Fauvel (Open U., UK), G. Filippou (U. Cyprus), E. Flogaiti (U. Athens, Greece), M. Fort (INFM, France), F. Furinghetti (U. Genova, Italy), A. Georgopoulos (U. Thessaloniki, Greece), M. Grigoriadou (U. Athens, Greece), V. Hatzinikita (Aegean U., Greece), J. B. Haversath (U. Giessen, Germany), F. Kalavassis (Aegean U., Greece), V. Kalfas (U. Crete, Greece), N. Klaoudatos (U. Athens, Greece), P. Kokkotas (U. Athens, Greece), V. Komis (U. Patras, Greece), V. Koulaidis (U. Patras, Greece), C. Laborde (U. Grenoble/CNRS, France), S. Lerman (U. SouthBank, UK), P. Machamer (U. Pittsburgh, USA), J. Mamona (U. Macedonia, Greece), G. Maragos (U. Ioannina, Greece), J-L Martinand (ENS Cachan, France), M. R. Matthews (U. NSW, Australia), T. McGuire (U. Pittsburgh, USA), P. Mihaelidis (U. Crete, Greece), M. Niss (U. Roskilde, Denmark), E. Ntziachristos (U. Athens, Greece), K. Ouzounis (U. Thrace, Greece), V. Pantelidis (East Carolina U., USA), E. Papademetriou (U. Ioannina, Greece), V. Papademetriou (U. Thessaly, Greece), E. Pehkonen (U. Turku, Finland), P. Pintelas (U. Patras, Greece), A. Plotnitsky (U. Purdue, USA), J. Porfirio (U. Setubal, Portugal), D. Potari (U. Patras, Greece), A. Raptis (U. Athens, Greece), K. Ravanis (U. Patras, Greece), I. Robottom (Deakin U., Australia), S. Rowlands (U. Plymouth, UK), Ch. Sakonidis (U. Thrace, Greece), H. Schrettenbrunner (U. Nuremberg, Germany), J. Searle (U. Edinburgh, UK), I. Selwood (U. Birmingham, UK), M. K. Siu (U. Hong-Kong), J. Solomon (Open U., UK), Ch. Solomonidou (U. Thessaly, Greece), H. Stavridou (U. Thessaly, Greece), J. Thomas (Open U., UK), S. Tsinorema (U. Crete, Greece), C. Tzanakis (U. Crete, Greece), M. Vicentini (U. La Sapienza, Italy), J. Waterworth (UMEA U., Sweden), D. Whitelock (Open U., UK), W. Winn (U. Washington, USA), T. Wood (U. Purdue, USA)

Publisher: LEADER BOOKS S.A.

στην Εκπαίδευση

17 Panagi Kyriakou Str., GR-11521 Athens, Greece

Tel.: ++30-1-6452825, 6450048 Fax: ++30-1-6449924

[Http:// www.leaderbooks.com](http://www.leaderbooks.com) E-mail: journals@leaderbooks.com

