

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 1

2.300 ΔΡΧ. / € 6,75

Κύματα και κυκλοφοριακό μποτιλιάρισμα

- Μια σύντομη περιήγηση στα μαθηματικά των 20ού αιώνα
- Η φυσική των χημικών αντιδράσεων
- Η σημαντικότερη εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών
- Σχετικιστικοί νόμοι διατήρησης
- Το κυνήγι των δεκαδικών ψηφίων του π
- Gaspard Monge: Μαθηματικά και Γαλλική Επανάσταση
- Πόσες φυσαλίδες περιέχει το αναψυκτικό σας;





Λάδι σε λινό, 90 × 102 εκ. δωρεά Edgar William και Bernice Chrysler Garbisch, © 2000 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον.

O νόμος της άγριας φύσης (1881), του Charles Raleigh

Ο ΑΙΦΝΙΔΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ για την επιτυχημένη θήρα. Τα ζώα διαθέτουν πολλούς τρόπους για να αποκρύψουν τη φυσική παρουσία τους καθώς πλησιάζουν τη λεία τους. Το λευκό τρίχωμα της πολικής αρκούδας, για παράδειγμα, της επιτρέπει να μη διακρίνεται εύκολα στο αρκτικό τοπίο. Μάλιστα, έχουν θεαθεί πολικές αρκούδες που καλύπτουν τη μαύρη μουσούδα τους με το μπροστινό πόδι τους ενώ προσεγγίζουν αθόρυβα το θήραμά τους —μάλλον για να μη δίνουν στόχο.

Η αρκούδα του πίνακα κατάφερε να διαφύγει όχι μόνο το άγρυπνο βλέμμα αλλά και την οξεία ακοή της φώκιας, και κολυμπώντας την πλησίασε από πίσω. Άλλα ο θηρευτής σύντομα μπορεί να γίνει το θήραμα. Και το πλοίο στο βάθος μοιάζει ακριβώς να ψάχνει για να γεμίσει τα αμπάρια του με δέρματα αρκούδας. Εσείς, λοιπόν, προκειμένου να διερευνήσετε και άλλες συνθήκες υπό τις οποίες θα μπορείτε να πλησιάζετε τα «θύματά» σας, γυρίστε στη σελίδα 54 και διαβάστε το άρθρο «Φωνή κόντρα στον άνεμο».

QUANTUM

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 1



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Αν κάποιος κατόρθωνε να σας βάλει «τα δύο πόδια σ' ένα παπούτσι», τότε η ζωή σας θα γινόταν πραγματικά δύσκολη. Αν όμως αποφασίζατε να μοιραστείτε μαζί του ένα παπούτσι σας ώστε να «συμβαδίζετε» δίπλα-δίπλα, τότε το πράγμα θα γινόταν πολύ ευκολότερο —αρκεί να είχατε την ίδια ταχύτητα. Άλλα ποια ταχύτητα και πόση; Συνεπώς, για να γνωρίσετε τα σχετικά με την «ομαδική» ταχύτητα, δεν σας μένει παρά να γυρίσετε στη σελίδα 58 και να προχωρήσετε στην ανάγνωση του άρθρου —όχι βέβαια «δρομαίως» αλλά βήμα-βήμα, όπως λέμε.

ΑΡΘΡΑ

- 8 Επαναστατικά μαθηματικά
Ισότης, ελευθερία, γεωμετρία!**
V. Lishovsky
- 14 Επιστημονικά εργαλεία
Δείκτης ήχου**
S. Obukhov
- 21 Τα μαθηματικά στον 20ό αιώνα
Μια σύντομη περιήγηση**
Μιχάλης Λάμπρου
- 31 Μόρια σε κίνηση
Η φυσική των χημικών αντιδράσεων**
O. Karpukhin

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Ποιος φταίει γι' αυτό που είστε;
- 7 Σπαζοκεφαλίες**
- 27 Απόψεις**
Τις αγορεύειν βούλεται;
- 36 Καλειδοσκόπιο**
Περί του περίφημου απεριοδικού αριθμού π
- 38 Στο μαυροπίνακα I**
Τριγωνική χειρουργική
- 42 Στα πεδία της φυσικής**
Σχετικιστικοί νόμοι διατήρησης
- 47 Στο εργαστήριο**
Μια γκαζόζα με πολύ διηλεκτρικό
- 51 Πώς λύνεται;**
- 52 Στο μαυροπίνακα II**
Ο αινιγματικός μαγνητικός παλιόφιλος
- 54 Σκόπελοι**
Φωνή κόντρα στον άνεμο
- 58 Στο μαυροπίνακα III**
Ομαδική ταχύτητα
- 62 Βόλτες στο Διαδίκτυο**
Ένας παράξενος «πλανήτης»
- 66 Απαντήσεις, Υποδείξεις
και Λύσεις**
- 70 Πληροφορική**
Τέλειο ανακάτωμα

Ποιος φταίει γι' αυτό που είστε;

ΕΞΕΤΑΣΤΕ ΜΙΑ ΜΥΓΑ, ΟΧΙ ΟΜΩΣ με τη φαντασία σας: βρείτε μια αληθινή μύγα και παρατηρήστε την προσεκτικά. Δείτε πώς τα ποδαράκια της κινούνται με τέλειο ρυθμό, πώς το κεφαλάκι της στρέφεται για να παρακολουθήσει τα γεγονότα. Προσέξτε την απογείωσή της: τη μια στιγμή στέκεται εδώ, την άλλη βρίσκεται στον αέρα διαγράφοντας τροχιές χωρίς να προσκρούει πουθενά. Εάν μπορείτε, παρατηρήστε την προσγείωσή της, το πιο εντυπωσιακό κόλπο της: προσεγγίζει τον τοίχο, παίρνει κλίση, επιβραδύνει την πτήση της, και νά την προσκολλημένη στην επιφάνεια, ατάραχη, να καθαρίζει την προβοσκίδα της με τα μπροστινά της πόδια. Πώς άραγε φτιάχτηκε αυτή η πανέμορφη και καλοκούρδισμένη μηχανή;

Από πού προήλθε αυτή η μύγα, αυτό το συγκεκριμένο άτομο; Από ένα αβγό μύγας, θα μου πείτε. Όχι ακριβώς. Προέκυψε από μία κάμπια, η οποία με τη σειρά της προήλθε από ένα αβγό. Είμαστε τόσο συνηθισμένοι με το ότι οι πολύπλοκοι οργανισμοί προέρχονται από αβγά, που θεωρούμε ότι αυτό αποτελεί ολόκληρη την εξήγηση. Χνουδωτά κοτόπουλάκια βγαίνουν από αβγά κότας που δεν έχουν ξεχωριστά γνωρίσματα: το μόνο που χρειάζεται είναι λίγη ζεστασιά. Ακόμη κι εσείς οι ίδιοι προήλθατε από ένα αβγό.

Ωστόσο, τα αβγά αποτελούν πολύπλοκες βιολογικές δομές. Άλλα σε σύγκριση με το τι «γεννιέται» απ'

«—Φταίει το ζαβό
το ριζικό μας!
—Φταίει ο θεός που
μας μισει!
—Φταίει το κεφάλι
το κακό μας!
—Φταίει πρώτ' απ' όλα
το κρασί!
Ποιος φταίει;...
Ποιος φταίει;...
Κανένα στόμα
δεν το 'βρε και
δεν το 'πε ακόμα.
—Κώστας Βάρναλης

αυτά, τα αβγά είναι πράγματι απλούστατα. Σ' ένα γόνιμο αβγό κότας, τα κύτταρα που βρίσκονται ανά δεκάδες στη λέκιθο, και από τα οποία θα προέλθει το κοτόπουλο, μπορούν στ' αλήθεια να χαρακτηριστούν ασήμαντα, σε σχέση με ένα ελάχιστο τμήμα του εγκεφάλου του κοτόπουλου, του νεφρού του, ακόμη και του δέρματός του. Ένα μόνο φτερό που μεγαλώνει, είναι, όπως κι αν το εξετάσουμε, πολύ πιο σύνθετο από τα κύτταρα από τα οποία προήλθε αρχικά ολόκληρο το πτηνό. Πώς γίνεται αυτό; Πώς μπορεί η πολυπλοκότητα να απορρέει από την απλότητα; Υπάρχει άραγε μία «οργανωτική αρχή», ένα «πνεύμα της ζωής»;

Η συνήθης απάντηση σήμερα είναι ότι όντως υπάρχει. Πρόκειται για το προοχέδιο του DNA, αυτό το επίμηκες μόριο που περικλείει τεράστιες ποσότητες πληροφορίας, γραμμένης σε μια γλώσσα τεσσάρων νουκλεοτιδικών γραμμάτων, μέσα στον

πυρήνα κάθε κυττάρου. Θεωρείται ότι το DNA εξηγεί σε οποιονδήποτε οργανισμό (στη μύγα, στο κοτόπουλο ή σε εσάς) πώς να κατασκευάσει τον ίδιο του τον εαυτό. Σύμφωνα μ' αυτή την απλουστευτική θεώρηση του DNA και της ανάπτυξης, ο οργανισμός είναι η πληροφορία του DNA με σάρκα και οστά. Το DNA της μύγας παράγει μύγες, το DNA της κότας παράγει κότες, το ανθρώπινο DNA παράγει ανθρώπους. Ωστόσο, το DNA δεν λειτουργεί μ' αυτόν ακριβώς τον τρόπο κατά την ανάπτυξη, γεγονός το οποίο δεν διευκρινίζεται επαρκώς στις εκλαϊκευτικές περιγραφές ή ακόμη και σε ορισμένα βιολογικά συγγράμματα.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να εξετάσουμε το DNA. Το διάλυμα ανθρώπινου DNA που έχει τεμαχισθεί σε τμήματα μετρίων διαστάσεων είναι ένα κολλώδες υγρό μέσα στον δοκιμαστικό σωλήνα. Σε κάθε μικροσκοπικό πυρήνα ανθρώπινου κυττάρου υπάρχει ένα νήμα DNA μήκους σχεδόν δύο μέτρων. Αν μεγεθύναμε τον πυρήνα ενός ανθρώπινου κυττάρου κατά χιλιες φορές ώστε να φτάσει στο μέγεθος ενός δισκίου ασπρίνης, θα βλέπαμε ότι περιέχει ένα κουλουριασμένο σύρμα DNA μήκους 1.600 μέτρων! Προφανώς, υπάρχει χώρος για πολλές οδηγίες και πολλά προσχέδια σε ένα τόσο μακρύ νήμα. Ωστόσο, το DNA δεν λειτουργεί ώστε να μετατρέψει την πληροφορία αυτή σε μύγες, κοτόπουλα κι ανθρώπους. Απλώς υπάρχει. Όπως απλώς υπάρ-

χουν και οι συνταγές για ένα λουκούλλειο γεύμα στις σελίδες του τσελεμεντέ στο ράφι της κουζίνας.

Πώς τότε το DNA «φτιάχνει» τη μύγα; Η απλή απάντηση είναι ότι δεν τη φτιάχνει. Πρέπει όμως να σκεφτούμε αρκετά για να συνειδητοποιήσουμε γιατί όχι, κι' αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον οι περισσότεροι πιστεύουν εσφαλμένα ότι το μόνο που χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε ένα δεινόσαυρο είναι λίγο DNA δεινοσαύρου. Οι δεινόσαυροι και οι μύγες δεν κατασκευάζονται από DNA, όπως ακριβώς και ένα γαστρονομικό πιάτο μοσχαρίσιου φιλέτου δεν φτιάχνεται από το χαρτί και το μελάνι του βιβλίου συνταγών.

Όλα τούτα μπορούμε να τα κατανοήσουμε αναφερόμενοι στο DNA των βακτηρίων. Κάθε βακτηρίο ως οργανισμός μοιάζει με μικρό εργαστήριο, γεμάτο χημικά εργαλεία. Ορισμένα από αυτά διαβάζουν την πληροφορία κατά μήκος του νήματος του DNA. Κάποια άλλα κατασκευάζουν νέα εργαλεία, σύμφωνα με τις οδηγίες του νήματος (συμπεριλαμβανομένων των εργαλείων αναγνώσεως του νήματος). Άλλα, πάλι, είναι δομικά στοιχεία ή αποτελούν χημικές αντλίες ή, ακόμη, σχετίζονται με τη διατροφή και την ενέργεια. Αυτό το μικρό «εργαστήριο» παράγει τα περισσότερα από τα ίδια τα δομικά του στοιχεία, τα εργαλεία του, τα τούβλα που αποτελούν τα τοιχώματά του: με άλλα λόγια, αυξάνεται. Μερικά εργαλεία αναδιπλασίζουν το DNA (διαδικασία που μοιάζει αρκετά με την αντιγραφή μιας μαγνητοταπινίας), και συσσωρεύουν αποθέματα και άλλων εργαλείων. Τότε, ειδικά εργαλεία ρυθμίζουν τα της διαιρέσεως, οπότε και η διαδικασία συνεχίζεται στα δύο θυγατρικά βακτηρία.

Ένα αβγό είναι σχετικά πιο πολύπλοκο από ένα βακτηρίο (παραμένει ωστόσο πολύ απλούστερο από κάθε γέννημά του). Αποτελούνται από τα ίδια υλικά και πολλά εργαλεία τους είναι τα ίδια, αλλά οι διαδικασίες της ζωής μέσα στο αβγό διαφέρουν παντελώς. Το αβγό δεν περιορίζεται στην αύξηση και στη διαίρεση, αλλά αναπτύσσεται. Το αποτέλε-

σμα των διεργασιών τις οποίες επιτελούν τα εργαλεία του πρώιμου αβγού είναι μια δομή διαφορετική, συνήθως μεγαλύτερη σε όγκο και πιο πολύπλοκη, που ονομάζεται έμβρυο. Το έμβρυο χρησιμοποιεί τη λέκιθο ως πηγή ενέργειας και δομικών υλικών, για να κατασκευάσει ένα ακόμη πιο διαφορετικό πράγμα. Πρόκειται είτε για μια λάρβα (προνύμφη), όπως είναι η κάμπια της μύγας, είτε για ένα ανθρώπινο έμβρυο, το οποίο θα αναπτυχθεί στη συνέχεια σε νεογνό. Το βακτηριακό εργαστήριο περιορίζεται στο να φτιάχνει αντιγραφα του εαυτού του, ενώ το αβγό κατασκευάζει νέα ειδή εργαλείων και εξοπλισμού σε κάθε νέο στάδιο. Όταν το αβγό της μύγας παράγει μια κάμπια ικανή να τρέφεται από μόνη της, αυτό μοιάζει με ένα βακτηριακό «εργαστήριο» που μετατρέπεται σε φορτηγό και πηγαίνει στην αποθήκη προμηθειών για να βρει ότι χρειάζεται προκειμένου να λειτουργήσει και να μεταπδήσει στο επόμενο στάδιο. Με τον ίδιο τρόπο, το ανθρώπινο έμβρυο κατασκευάζει έναν πλακούντα για να πάρει τροφή και ενέργεια από το αίμα της μητέρας του, ώστε να αναπτυχθεί στο επόμενο στάδιο. Ας προεκτείνουμε τη μεταφορά με την κάμπια, για να δείξουμε πόσο θαυματουργή είναι στ' αλήθεια η ανάπτυξη. Το φορτηγόκαμπια γίνεται όλο και μεγαλύτερο, και τελικά επιλέγει κάποιον ήσυχο επαρχιακό δρόμο όπου χτίζει ένα μικρό γκαράζ (την πούπα —την κάψουλα της νύμφης). Μέσα του αναδιαρθρώνεται και έτσι παράγεται ένα αεροπλάνο —η ενήλικη μύγα. Ένα μικρό, αυτοπρωθούμενο, αυτοελεγχόμενο και αυτοτροφοδοτούμενο αεροπλάνο —και οι μισές μύγες έχουν μέσα τους μικρά εργαστήρια παραγωγής αβγών, έτοιμα να ξαναρχίσουν τη διαδικασία.

Το DNA εμπλέκεται σε κάθε στάδιο, και προσδιορίζει ποια εργαλεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Ορισμένες ακολουθίες του DNA (τα γονίδια) προσδιορίζουν βιοχημικά εργαλεία που μοιάζουν με ρολόγια, με σφιγκτήρες, με κλειδαρίες, με πάγκους εργασίας, με φύλλα εργασίας και χρονοδιαγράμματα που ρυθμίζουν

τον τρόπο εργασίας. Το DNA όμως δεν περιλαμβάνει την περιγραφή της μύγας ή το σχέδιο της κότας ή το αντίγραφο της δικής σας μορφής. Δεν περιλαμβάνει καν το πρότυπο μιας φτερούγας ή μιας μύτης. Είναι πολύ χρησιμότερο να φανταζόμαστε ότι όλα τα γονίδια του DNA συνεισφέρουν σε κάθε χαρακτηριστικό (π.χ. στη μύτη) και ότι κάθε γονίδιο συνεισφέρει σε όλα τα χαρακτηριστικά, παρά να θεωρούμε ότι κάθε χαρακτηριστικό διαθέτει μια δική του μικρή ομάδα γονιδίων που το «κατασκευάζουν». Ωστόσο, έχουμε (θεωρητικά, αλλά σχεδόν και πρακτικά) τη δυνατότητα να καταρτίσουμε έναν κατάλογο όλων των γονιδίων μιας δροσόφιλας (της μύγας των φρούτων) και να σημάνουμε εκείνα τα οποία, όταν μεταλλάσσονται, προκαλούν αλλαγές (συνήθως βλάβες) στις φτερούγες. Πολλοί γενετιστές, και σχεδόν όλοι οι δημοσιογράφοι, πέφτουν στην παγίδα να θεωρήσουν ότι τα γονίδια αυτά αποτελούν το «κιτ φτερούγων» της δροσόφιλας. Δεν πρόκειται για κανένα «κιτ φτερούγων», επειδή σχεδόν όλα αυτά τα γονίδια επηρεάζουν επίσης κι άλλα πράγματα. Για παράδειγμα, μία από τις μεταλλάξεις *vestigial-wing* προκαλεί βλάβες σε μια μοριακή αντλία που βρίσκεται σε όλα τα κύτταρα. Ένα από τα αποτελέσματά της είναι ότι η φτερούγα δεν μπορεί να αναπτυχθεί πλήρως όταν η μύγα βγει από την πούπα. Υπάρχουν ορισμένα γονίδια, που ονομάζονται «ομοιοτικά», και τα οποία επιφέρουν ποιοιςικά και πιο ειδικά αποτελέσματα. Οι αλλαγές σε κάποια ομοιοτική ακολουθία DNA ενδεχομένως να μεταβάλλουν τις προδιαγραφές ενός οργάνου και να παράγουν ένα διαφορετικό όργανο: η μεταλλάξη *antennapedia* προκαλεί την υποκατάσταση μιας κεραίας από ένα πόδι, και η μεταλλάξη *cockeyed* αντικαθιστά τους οφθαλμούς από αρσενικά γεννητικά όργανα. Οι ακολουθίες αυτές —κατά το παράδειγμα του χημικού εργαστηρίου— αφορούν τον καθορισμό της γεωγραφικής διάταξης του εργαστηρίου: πού δηλαδή πρέπει να κατασκευαστεί τι. Οι ομοιοτικές μεταλλάξεις αλλάζουν τα χρώματα

στον εμβρυϊκό χάρτη έτσι ώστε τα κύτταρα που βρίσκονται στην υποτυπώδη κεραία «θεωρούν» ότι βρίσκονται σε θέση υποτυπώδους ποδιού· φτιάχνουν λοιπόν άρτια πόδια, αλλά σε λάθος σημείο.

Πολλά είναι εκείνα που το DNA δεν χρειάζεται —ή δεν μπορεί— να τα καθορίσει. Δεν χρειάζεται να κάνει το νερό υγρό ή τα λίπη αδιάβροχα ή τους κρυστάλλους χλωριούχου νατρίου κυβικούς (μπορεί όμως να μεταβάλει το σημείο πήξεως των υδατικών διαλυμάτων κατασκευάζοντας αντιψυκτικές πρωτεΐνες). Υπάρχουν πολλά φυσικά και χημικά «δεδομένα». Υπάρχουν πολλές βιολογικές κανονικότητες που είναι «δεδομένες», σχεδόν τόσο όσο αυτοί οι φυσικοί και χημικοί μηχανισμοί. Ένα πολύ σημαντικό και πανάρχαιο «κιβώτιο» εργαλείων του DNA αντιγράφει το DNA με σχεδόν απόλυτη ακρίβεια, όπως και μερικοί μηχανισμοί ανταλλαγής ενέργειας υπάρχουν προ πολλού και είναι κοινοί σε πολλά είδη έμβιων όντων. Περίπου το 60% του DNA που μεταφέρει πληροφορίες αποτελείται από αυτές τις «συντηρημένες ακολουθίες», οι οποίες είναι ίδιες στη μύγα, στο κοτόπουλο και στον άνθρωπο. Πράγματι, πολλά από αυτά τα βασικά λειτουργικά γονίδια, που λέγονται *house-keeping genes* (γονίδια του «νοικοκυριού», ή των «βασικών λειτουργιών»), είναι ίδια ακόμη και στις δρυς και στα βακτήρια. Επομένως, τα περισσότερα από αυτά που απαιτούνται για να φτιαχτεί μια μύγα είναι ίδια με αυτά που χρειάζονται για να φτιαχτείτε εσείς.

Αλλά γιατί, τότε, οι οργανισμοί διαφέρουν τόσο πολύ μεταξύ τους; Ας αφήσουμε για λίγο ελεύθερη τη φαντασία μας. Οι διαφορές μεταξύ των οργανισμών, όσο μεγάλες και αν είναι, δεν οφείλονται απαραίτητα σε μεγάλες διαφορές του DNA. Θεωρητικά, μια ελάχιστη διαφορά θα μπορούσε να αρκέσει για να στρέψει την ανάπτυξη προς νέα κατεύθυνση. Η μύγα και η κότα θα μπορούσαν να έχουν το ίδιο DNA, εκτός από αυτό τον μοναδικό αρχικό «διακόπτη», μέσω του οποίου οι κατευθύνσεις αποκλίνουν. Η διαφορά στην ανάπτυξη

—ο φανταστικός αυτός διακόπτης μύγα/κότα, δεν χρειάζεται καν να υπάρχει στο επίπεδο του DNA. Εάν στα κοτόπουλα αρέσει η ζέστη και επωάζουν τα αβγά τους ενώ στις μύγες αρέσει το κρύο, τότε το πρόγραμμα του κοτόπουλου θα μπορούσε να αναπαράγει κανές σε χαμηλή θερμοκρασία, και στις δύο περιπτώσεις θα μπορούσε να χρησιμεύει το ίδιο ακριβώς DNA. Αυτό το είδος «νοητικού περιράματος» αποδεικνύει ότι δεν μπορούμε να πούμε ποιον οργανισμό θα «φτιάξει» μια ιδιαίτερη εργαλειοθήκη DNA ούτε ποιο DNA θα «φτιάξει» έναν ιδιαίτερο οργανισμό. Όπως το θέτουν οι μαθηματικοί, δεν υπάρχει «πλήρης αντιστοιχία» ανάμεσα σε μια ακολουθία DNA και στη δομή του οργανισμού στην ανάπτυξη του οποίου συμβάλλει η ακολουθία αυτή.

Άλλωστε, το DNA μέσα στο αβγό δεν μπορεί, από μόνο του, να ξεκινήσει την ανάπτυξη· οι εργαλειοθήκες που «διαβάζουν το DNA και δρουν ανάλογα» πρέπει να βρίσκονται σε κατάσταση καλής λειτουργίας, και να είναι πράγματι λειτουργικές. Τα εργαλεία αυτά βρίσκονται μέσα στο υπόλοιπο ωάριο, γύρω από τον αρχικό πυρήνα. Η ανάπτυξη σχεδόν όλων των ζώων αρχίζει στις ωοθήκες της μητέρας, με την κατασκευή των ωοκυττάρων. Ακόμη και η ανάπτυξη του εμβρύου δεν χρειάζεται τα μηνύματα του δικού του DNA, παρά μόνο αφού η αρχική δομή του ωαρίου έχει θέσει τα θεμέλια της αρχιτεκτονικής του μελλοντικού ζώου. Μόνο τότε τα οροιοτικά γονίδια αρχίζουν να «γνωρίζουν πού βρίσκονται» και τι πρέπει να κάνουν. Κατά κάποιον τρόπο, η γονιμοποίηση συμβαίνει αρκετά αργά στη διαδικασία της ανάπτυξης. Το ωάριο είναι ήδη έτοιμο να αρχίσει την κατασκευή του ζώου, και το σπερματοζωάριο λειτουργεί απλώς ως σκανδάλη (εκτός από τη συνεισφορά του DNA, το οποίο διαφέρει ελάχιστα από το DNA του ωαρίου). Το ωάριο δηλαδή συμπεριφέρεται όπως ένα οπλισμένο πιστόλι. Μια καλύτερη «μηχανική»

παρομοίωση είναι να θεωρήσουμε τις μη πυρηνικές περιοχές του ωαρίου ως μαγνητόφωνο, και το DNA του πυρήνα ως μαγνητοταινία. Τα πρώτα βήματα της ανάπτυξης περιλαμβάνουν την τοποθέτηση της ταινίας στη σωστή σχισμή του μαγνητοφώνου, τη ρύθμιση του επιπέδου του ήχου, της ταχύτητας αναπαραγωγής κ.λπ., την επιλογή των κομματιών και τη σειρά τους, και τέλος την πίεση στο πλήκτρο «PLAY».

Συνεχίζοντας την ανύπαρκτη φανταστική μας παρομοίωση των προηγούμενων παραγράφων με τα «δύο διαφορετικά ζώα από το ίδιο DNA», θα μπορούσαμε να θέσουμε σε έναν και τον αυτό μηχανισμό του ωαρίου, ως μαγνητοφώνου, τα ζώα που παρουσιάζουν μικρές διαφορές: τα ωάρια της μύγας θα διάβαζαν τα γονιδια του DNA με μια δεδομένη σειρά (π.χ. α , β , γ , δ) και θα έφτιαχναν μια μύγα, της οποίας οι ωοθήκες θα παρήγαγαν ωάρια που θα έκαναν την ίδια ακριβώς δουλειά, ενώ τα ωάρια της κότας θα διάβαζαν την ταινία με τη σειρά φ , χ , ψ , ω και θα έφτιαχναν ένα κοτόπουλο. Αν, στην υποθετική αυτή περίπτωση, ανταλλάσσαμε το DNA της κότας με DNA μύγας, δεν θα υπήρχε διαφορά, επειδή προϋποθέσαμε ότι τα DNA είναι ίδια. Παρότι οι διαφορετικές ωοθήκες (όπως και όλα τα άλλα όργανα) θα ήταν ουσιαστικώς διαφορετικές, οι οργανισμοί θα μπορούσαν και οι δύο να γεννηθούν με σωστό τρόπο.

Για να δείξουμε πόσο παράλογη είναι η ιδέα ότι το DNA «περιέχει τις οδηγίες κατασκευής των ζώων», μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα αντίστροφο επιχείρημα. Ας τοποθετήσουμε DNA μύγας μέσα σε ωάρια κότας. Ακόμη κι αν η ταινία μπορούσε να διαβαστεί αρκετά συστηματικά ώστε να προκύψει ένα έμβρυο, σε τι είδους αποτελέσματα θα καταλήγαμε συνεχίζοντας την ανάπτυξη μιας μύγας χρησιμοποιώντας τη βασική δομή ενός πτηνού; Ακόμη κι αν συνέβαινε ένα θαύμα και καταλήγαμε σε μια προνύμφη, πώς θα μπορούσε η μύγα να βγει από το τσόφλι; Το αντίθετο είναι χειρότερο: ακόμη κι αν το έμβρυο της κότας μπορούσε να αρχίσει να φτιάχνεται με τα

στοιχεία της μύγας, θα «έμενε» γρήγορα από λέκιθο, και το μικροσκοπικό έμβρυο του κοτόπουλου δεν θα είχε μεγάλες δυνατότητες να βρει τροφή για να συνεχίσει την ανάπτυξή του. Έτσι λοιπόν, το DNA δεινοσαύρου, από αίμα δεινοσαύρου διατηρημένο σε ένα τσιμπούρι, μέσα σε κεχριμπάρι, δεν μπορεί να φτιάξει δεινόσαυρο. Για να παίξουμε μια «μαγνητοτανία DNA δεινοσαύρου», χρειαζόμαστε ένα αβγό δεινοσαύρου από το ίδιο είδος —δηλαδή το σωστό μαγνητόφωνο. Το DNA δεν είναι αρκετό, είναι το μισό σύστημα. Τι μπορεί να κάνει μια τανία χωρίς το (αντίστοιχο) μαγνητόφωνό της; Πάντως όχι ένα «Jurassic Park».

Θα μπορούσαμε ίσως να επινοήσουμε πειραματικά συστήματα για να «αναπαραγάγουμε» ένα ζώο που έχει εκλείψει, ίσως μάλιστα πιο προσιτό απ' ό, τι οι δεινόσαυροι, θα ανέκυπταν όμως τεράστιες δυσκολίες, τόσο στη θεωρία όσο και στην πράξη. Υπάρχει διδακτικό ενδιαφέρον να εξετάσουμε τις δυσκολίες μιας τέτοιας βιο-μηχανικής. Τι να πούμε για τα μαμούθ, από τα οποία μπορούμε να βρούμε παγωμένο κρέας, όπου το DNA θα έχει υποστεί σαφώς λιγότερη αποικοδόμηση απ' ό, τι το DNA της διδούς —του περιστερόμορφου πτηνού που ζούσε στη νήσο του Μαυρικίου, στον Ινδικό Ωκεανό, και εξαφανίστηκε τον 17ο αιώνα; Κάτι τέτοιο θα ήταν τουλάχιστον το ίδιο αστείο με το δεινόσαυρο, αλλά και πολύ, μα πολύ πιο εύκολο. Θα ήταν πολύ απλό να επινοήσουμε μια ενέσιμη φαρμακευτική ορμονική αγωγή που θα μας επέτρεπε να παράγουμε βιώσιμα ωάρια ελέφαντα, να υπολογίσουμε τα κατάλληλα διαλύματα αλάτων μέσα στα οποία τα ωάρια του ελέφαντα θα μπορούσαν να ζουν ειδυλλιακά, και να ρυθμίσουμε τη θερμοκρασία και τη συγκέντρωση οξυγόνου και διοξειδίου του άνθρακα ώστε τα εν λόγω ωάρια να αναπτυχθούν. Έχουν χρησιμοποιηθεί περίπου ένα εκατομμύριο ωάρια ποντικού για την επίτευξη του συστήματος του ποντικού (και ακόμη δεν είμαστε σε θέση να ανταλλάξουμε τους πυρήνες του με διαφορετικό DNA)· περίπου δύο εκατομμύρια ωάρια βο-

οειδών για την επίτευξη αυτού του —πολύ διαφορετικού— συστήματος· και ακόμη δεν μπορούμε να το πραγματοποιήσουμε με αξιοποστία στο χάμστερ μετά από καλλιέργεια τεσσάρων εκατομμυρίων ωαρίων. Το σύστημα των «παιδιών του σωλήνα» στον άνθρωπο είναι ιδιαίτερα λειτουργικό, και το αναπτύχξαμε σχετικά εύκολα (μερικές χιλιάδες ωάρια), επειδή οι παράμετροι παρουσιάζουν εκπληκτική ομοιότητα με τις παραμέτρους που ισχύουν στον ποντικό. Ας φαντασθούμε λοιπόν ότι ο «ελέφαντας του σωλήνα» επιτυγχάνεται μόλις με ένα εκατομμύριο ωάρια. Μετά από δέκα χρόνια ενασχόλησης με τη συμβολή χιλίων ελεφάντων, με δέκα πειραματικούς κύκλους επεισώντων κατά τους οποίους θα (υπερ)παράγονται δέκα ωάρια ανά κύκλο, ας υποθέσουμε ότι θα έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύστημα ενδεχομένων ικανό να δεχτεί έναν τέλειο πυρήνα από μαμούθ. (Παρεμπιπτόντως, δεν διαθέτουμε τέλειους πυρήνες κυττάρων από μαμούθ —ο Θεός δεν φρόντισε να τους καταψύξει αρκετά προσεκτικά.) Τότε ανακαλύπτουμε (εφόσον η μητέρα-ελέφαντας δεν αντιδράσει κατά των ξένων πρωτεινών του μαμούθ, που προέρχονται από το έμβρυο) ότι το γάλα του ελέφαντα δεν αρκεί να θρέψει το μαμούθ —και πόσα μωρά μαμούθ θα χρειαστούν άραγε για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα αυτό; Μάλιστα, δεν θα πρόκειται για μωρά μαμούθ, αλλά για ό, τι αναπαράγεται όταν παίζουμε την τανία DNA του μαμούθ σε ένα ωάριο ελέφαντα, και που θα έχει μάλιστα ωριμάσει σε μια μήτρα ελέφαντα! Ένα «σχεδόν-μαμούθ»; Ίσως μάλιστα και να κατορθώναμε να διασταυρώσουμε δύο τέτοια «σχεδόν-μαμούθ», και τότε ίσως η επόμενη γενιά να είχε τη σωστή αρχαία ωθητική, και οι απόγονοί της να ήταν ακόμη πιο «σχεδόν-σχεδόν-μαμούθ» —πώς όμως θα το μαθαίναμε; Ίσως δεν αξίζει να ξοδέψουμε τόσα χρήματα όσα ξοδεύουν οι φυσικοί ή οι αστρονόμοι, για να παραγάγουμε αυτό τον νέο οργανισμό —τα αληθινά μαμούθ έχουν εκλείψει. Τελείωσε. Το ίδιο συμβαίνει και με τη διδώ. Οι προσπάθειες που χρειάζονται για

να ανακατασκευάσουμε ένα αναπτυξιακό πρόγραμμα είναι τεράστιες. Μην πιστεύετε τα απλοϊκά άρθρα κάποιων ανίδεων αρθρογράφων εφημερίδων, ότι δηλαδή μπορούμε να «διατηρήσουμε» ένα ζώο —ή ένα φυτό — συντηρώντας το DNA του. Το παράδειγμα του μαμούθ σάς δείχνει μερικές από τις δυσκολίες.

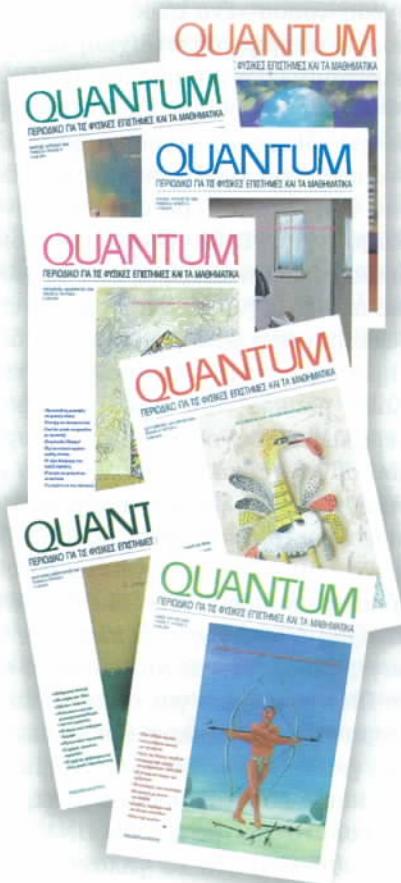
Τα διδιά ισχύουν για την άποψη ότι το DNA προκαθορίζει πώς θα είναι ένας οργανισμός δεν τον προκαθορίζει. Κατ' αρχήν, δεν υπάρχει μια σχέση τύπου «ένα προς ένα», δεν υπάρχει πλήρης αντιστοίχιση των χαρακτηριστικών με ακολουθίες DNA. (Φυσικά, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε διαφορές χαρακτηριστικών —όπως είναι ο αλφισμός ή η νόσος του Πάρκινσον — με συγκεκριμένες διαφορές στο DNA.) Ολόκληρη η διαδικασία της ανάπτυξης, από το «ωάριο που φτιάχνει ωθητική» μέχρι την «ωθητική που φτιάχνει μητέρα», διατηρεί τη συνοχή της από μόνη της. Κάθε μονάδα του πληροφοριακού περιβάλλοντος, όπως οι μηχανισμοί του αβγού, είναι απαραίτητη και ειδική για κάθε μονάδα πληροφοριακού περιεχομένου, όπως το DNA. Εκείνο που φτιάχνει τη μύγα ή εσάς είναι η πλήρης διαδικασία της ανάπτυξης. Ολόκληρη η διαδικασία. Άραγε, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι το DNA ευθύνεται για τα ορνιθοσκαλίσματα του γραφικού του χαρακτήρα, για το πάθος του για τις βιολέτες και για τις βιρμανικές γάτες, για τα γαλανά του μάτια; Το DNA ίσως να ευθύνεται για τα γαλανά μάτια, αλλά σίγουρα όχι για τα προηγούμενα. Το DNA δεν ευθύνεται για το πώς έχετε διαμορφώσει το χαρακτήρα σας. Εσείς —η διαδικασία — ευθύνεστε για το τι είστε, για το τι πράττετε και για το πού θα καταλήξετε.

—Jack Cohen

Ο **Jack Cohen**, βιολόγος της αναπαραγωγής με διεθνή φήμη, υπήρξε πανεπιστημιακός δάσκαλος επί τριάντα χρόνια. Σήμερα εργάζεται ως σύμβουλος σε εργαστήρια ανθρώπινης εξωσωματικής γονιμοποίησης και στεροτύπος, και διδάσκει στο Πανεπιστήμιο του Ουάρικ, στην Αγγλία. Έχει δημοσιεύσει περίπου εκατό επιστημονικές εργασίες και πολλά βιβλία.

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το *Quantum* εισήλθε στον όγδοο χρόνο συνεχούς και συνεπούς έκδοσης του στα ελληνικά —άρχιος να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, επί οκτώ χρόνια προσφέρει μέσα από τις σελίδες του την τεκμηριωμένη γνώση τη γονειά των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα, λοιπόν, έχουν κυκλοφορήσει σαράντα ένα τεύχη του.

Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.

Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχους.

To *Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου.

Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Για την αρχειοθέτηση των τευχών, κυκλοφορούν και οι αντίστοιχες θήκες.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου *Kvant* της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο *Kvant*, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο *Kvant*

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντες (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων
Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του *Quantum*
Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Yevgeniya Morozova, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο *Kvant*

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT
John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοφάντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντειλ, Λουιζάνα
Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα
Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάτηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Γιώργος Μαλάμης-βιολόγος, Γιώργος Κατσιλέρης-φυσικός, Ιωάννα Αποστόλου-βιολόγος και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

Ειδικοί συνεργάτες και Επιστημονικοί σύμβουλοι

Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Οχαίο
Πέτρος Δήμας, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Γιώργος Θηραίος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γλωσσική επιμέλεια
Νίκος Ντάκιος Τυποτεχνική επιμέλεια
Ηρακλής Ντούσης Γραμματεία
Μαρία Κουρή Υπεύθυνη λογιστηρίου
Μαρία Μάραλη

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση
Αβ. Μαχαιρίδης Φίλμ, μοντάζ
Χρ. Μήτσης Εκτύπωση
Ν. Πουλόπουλος Βιβλιοδεσία
Θ. Αρχοντούλακης

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάποπρο Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

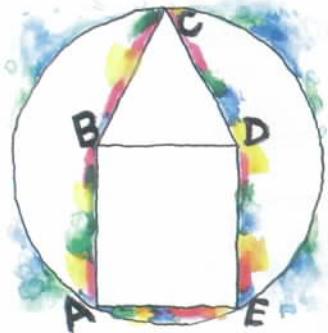
Quantum, διμηνιαίο περιοδικό, ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης,
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάποπρο,
Ιοαννίνων 10 και Δαφνούπολη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο άλλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 12.000 δρχ. για ιδιώτες, 21.000 δρχ.
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.

Για να περνά η ώρα

Σ201

Μέτρηση γωνιών. Η πλευρά AD του τετραπλεύρου $ABCD$ ισούται με τη διαγώνιο BD . Οι άλλες τρεις πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους. Η διαγώνιος BD διαιρεί τη γωνία ADC σε δύο ίσα μέρη. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το μέτρο της γωνίας BAD ;



Σ202

Μέτρηση ακτίνων. Η πλευρά AE του πενταγώνου $ABCDE$ ισούται με τη διαγώνιο BD . Όλες οι άλλες πλευρές του πενταγώνου ισούνται με 1. Ποια είναι η ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , C και E ;



Σ203

Μισθολογικές ανισότητες. Εκατό δημόσιοι υπάλληλοι συμμετείχαν σε μια συνεδρίαση. Τα καθίσματα στην αίθουσα συνεδρίασης σχημάτιζαν ένα τετράγωνο 10 σειρών με 10 καθίσματα η καθεμιά. Η συνεδρίαση δεν άρχισε στην ώρα της, και οι υπάλληλοι άρχισαν να μιλάνε αναμεταξύ τους για τους μισθούς τους. Όσοι έμαθαν ότι ανάμεσα στους διπλανούς τους (δηλαδή σ' αυτούς που κάθονταν δεξιά, αριστερά, εμπρός, πίσω και διαγώνια) υπήρχε το πολύ ένας με ίσο ή μεγαλύτερο μισθό, αποφάσισαν ότι έπρεπε να θεωρούν τους εαυτούς τους υψηλόμισθους. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος υψηλόμισθων υπαλλήλων;



Σ204

Συνάντηση στη γέφυρα. Ο Νίκος έφυγε από τη Νικόπολη στις 10:18 π.μ. και περπατώντας με σταθερή ταχύτητα έφτασε στη Γεωργιούπολη στις 1:30 μ.μ. Την ίδια μέρα, ο Γιώργος έφυγε από τη Γεωργιούπολη στις 9:00 π.μ. και περπατώντας με σταθερή ταχύτητα στον ίδιο δρόμο έφτασε στη Νικόπολη στις 11:40 π.μ. Ο δρόμος διασταυρώνεται με έναν πλατύ ποταμό. Ο Νίκος και ο Γιώργος έφτασαν στη γέφυρα ταυτόχρονα, ο καθένας από τη δική του πλευρά του ποταμού. Ο Νίκος έφυγε από τη γέφυρα 1 λεπτό αργότερα από τον Γιώργο. Πότε έφτασαν στη γέφυρα;

Σ205

Καθαρός αέρας. Κάποτε, έπειτα από ένα σαββατοκύριακο στην εξοχή, επέστρεψα στο σπίτι με το τρένο. Στο βαγόνι επικρατούσε συνωστισμός, και έτοι πήγα στην «ελεύθερη» άκρη του βαγονιού —όπου δεν υπήρχαν καθίσματα—, και εκεί ίμως η κατάσταση δεν ήταν πολύ καλύτερη. Κάθε φορά που το τρένο πλησίαζε σ' ένα σταθμό και μείωνε την ταχύτητά του, έμπαινε καθαρός αέρας από κάποιον αεραγωγό. Όταν το τρένο σταματούσε, έπαιε και η ροή του αέρα. Άλλα κάθε φορά που το τρένο μείωνε την ταχύτητά του πριν τους σταθμούς, πάντα από τον αεραγωγό ερχόταν καθαρός αέρας. Σε τι οφείλεται το φαινόμενο; Βρισκόμουν στην μπροστινή ή στην πίσω άκρη του βαγονιού; Πρέπει να προσθέσω ότι όλα τα παράθυρα και η πόρτα της «ελεύθερης» άκρης του βαγονιού ήταν ανοικτά.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

Ισότης, ελευθερία, γεωμετρία!

Gaspard Monge —ο πατέρας της παραστατικής γεωμετρίας

V. Lishevsky

ΠΟΛΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΕΙΧΑΝ ΑΞΙΟΠΡΟΣΕΚΤΗ ΜΟΙΡΑ, λίγων όμως η ζωή ήταν τόσο συναρπαστική και περιπετειώδης όσο του Gaspard Monge. Ο Monge υπήρξε ταλαντούχος επιστήμονας (μαθηματικός, μηχανικός, χημικός και μεταλλουργός), αλλά και εξέχουσα φυσιογνωμία της Γαλλικής Επανάστασης —για παράδειγμα, υπέγραψε τη θανατική καταδίκη του Λουδοβίκου του ΙΣΤ'. Γόνος φτωχής οικογένειας, ο Monge έγινε επαναστάτης και Ιακωβίνος, αγωνιζόμενος ενάντια στα προνόμια των ευγενών, για να καταλήξει όμως κόμης και προσωπικός φίλος του αυτοκράτορα Ναπολέοντα. Έπειτα από την παλινόρθωση της μοναρχίας, αποπέμφθηκε από τη Γαλλική Ακαδημία Εποτημών και πέθανε στην εξορία.

Ο Gaspard Monge γεννήθηκε στις 10 Μαΐου 1746 σε μια μικρή πόλη της ανατολικής Γαλλίας, την Μπων. Ο πατέρας του ήταν ένας σχεδόν αγράμματος πλανόδιος έμπορος, ο οποίος όμως προσπάθησε να προσφέρει στα παιδιά του την καλύτερη δυνατή μόρφωση που θα μπορούσαν να λάβουν εκείνη την εποχή τα μέλη της τρίτης τάξης (οι λαϊκοί που δεν ήταν ιδιοκτήτες γης). Εκτός από τον Gaspard, και άλλοι δύο αδελφοί του έγιναν καθηγητές: ο νεότερος, ο Jean, καθηγητής των μαθηματικών, της υδρογραφίας και της ναυσιπλοΐας, ενώ ο μεσαίος αδελφός, ο Louis, καθηγητής μαθηματικών και αστρονομίας. Ο Louis Monge συμμετείχε στην αποστολή του Φραγκισκού Λαπερούζ (μια από τις πρώτες επιστημονικές εξερευνήσεις του Ειρηνικού Ωκεανού) και ήταν ο ένας από τους τρεις που επιβίωσαν αυτής της αποστολής.

Ο Gaspard άρχισε το σχολείο σε ηλικία έξι ετών, και σύντομα αναδείχτηκε σε έναν από τους κορυφαίους μαθητές. Αφού τελέιωσε το σχολείο, το 1762, εισήχθη στο Κολέγιο της Αγίας Τριάδας, στη Λυών, όπου παράλληλα με τις σπουδές του διδάσκε φυσική. Το καλοκαίρι του 1764, ο Gaspard περνούσε τις διακοπές του στο σπίτι του, όπως συνήθως, και τότε συνέβη ένα γεγονός που έμελλε να αλλάξει ριζικά τη ζωή του.

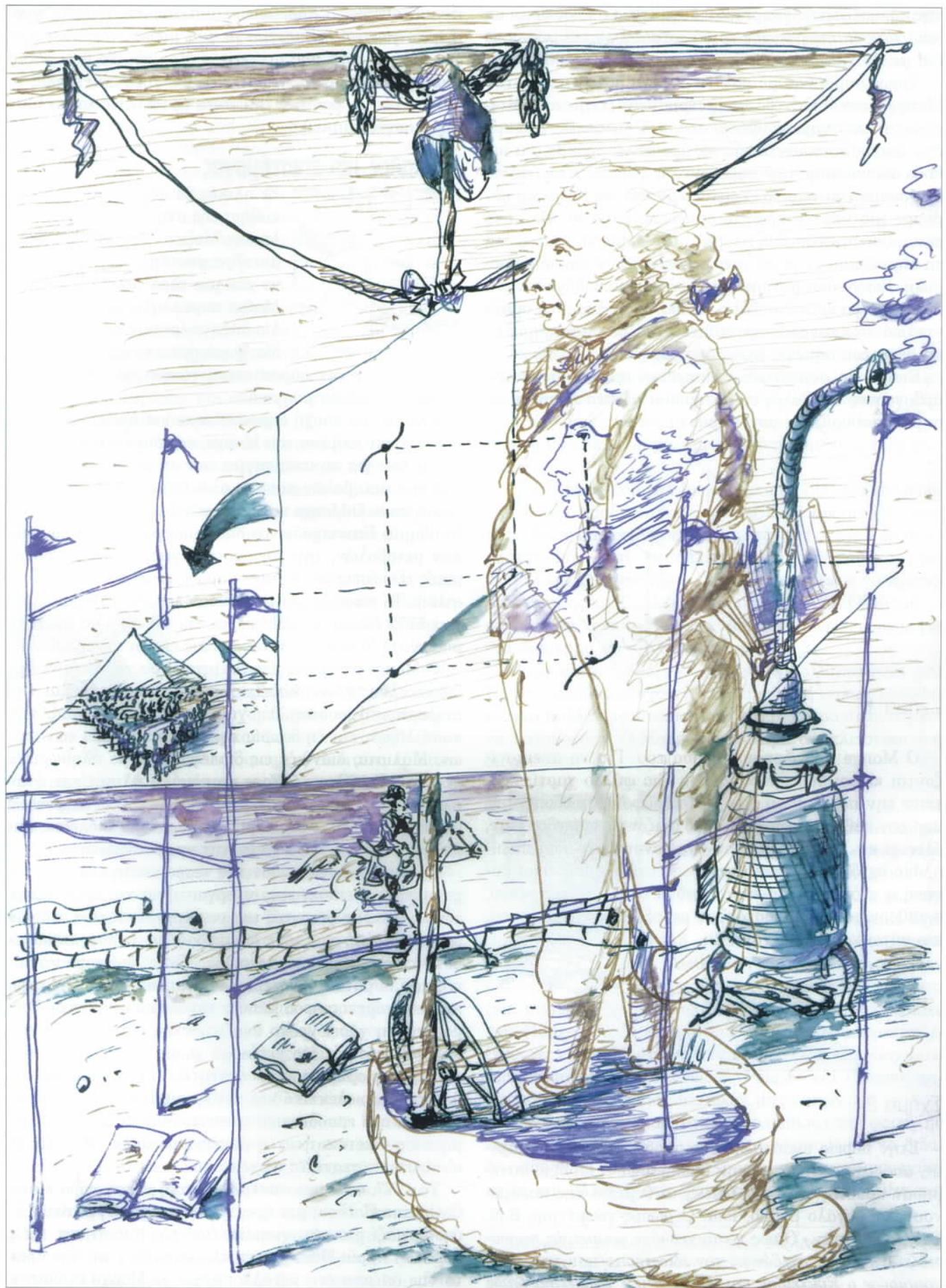
Στη διάρκεια των διακοπών του, λοιπόν, ο Gaspard σχεδίασε μαζί με μερικούς φίλους του ένα χάρτη της γενέτειράς του. Κάποιος μηχανικός του στρατού, ο οποίος ήταν διευθυντής της Στρατιωτικής σχολής της Μεζέρ, έτυχε να δει το χάρτη. Ο διευθυντής κάλεσε τον Gaspard να εγγραφεί στο τμήμα χαρτογραφίας της σχολής. Η συγκεκριμένη σχολή είχε ένα ακόμα τμήμα στο οποίο σπουδάζαν οι μηχανικοί του στρατού, σε αυτό όμως γίνονταν δεκτοί μόνο γόνοι ευγενών.

Ο Monge ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για ένα πρόβλημα που ήταν εξαιρετικά σημαντικό για τη στρατιωτική μηχανολογία: την τοποθέτηση των οχυρώσεων με τέτοιον τρόπο, ώστε να είναι λιγότερο ευάλωτες από πυροβόλα τοποθετημένα σε συγκεκριμένο σημείο. Ο Monge έλυσε το πρόβλημα πολύ γρήγορα, αλλά οι καθηγητές αρνήθηκαν αρχικώς να εξετάσουν τη λύση του, διότι πίστευαν ότι ένας φοιτητής δεν θα ήταν σε θέση να εκτελέσει τους απαιτούμενους πολύπλοκους υπολογισμούς. Όταν κάποιος καθηγητής δέχτηκε τελικά να δει τη λύση του Monge, εντυπωσιάστηκε από την απλότητά της και από την πρωτοτυπία της προσέγγισής του. Η μέθοδος θεωρήθηκε τόσο σημαντική ώστε χαρακτηρίστηκε στρατιωτικό μυστικό. Γι' αυτό το λόγο η μέθοδος του Monge —η οποία αργότερα ονομάστηκε παραστατική γεωμετρία— έμεινε για μεγάλο διάστημα άγνωστη.

Παραστατική γεωμετρία

Η προβολική θεωρία και κάποια στοιχεία της παραστατικής γεωμετρίας ήταν γνωστά ήδη πριν από τον Monge. Το επίτευγμά του συνίστατο στη δημιουργία ενός νέου επιστημονικού πεδίου, βάσει ασύνδετων γεγονότων, μεμονωμένων λύσεων και (όχι πάντα ορθών) μεθόδων απεικόνισης τρισδιάστατων αντικειμένων. Υπό αυτή την έννοια, ο Monge μπορεί να θεωρηθεί ιδρυτής

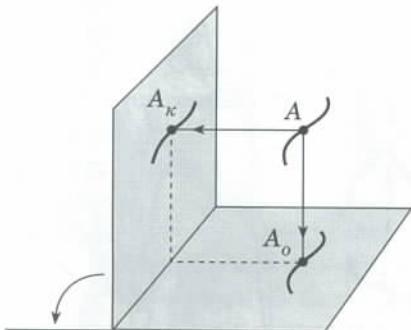




της παραστατικής γεωμετρίας, την οποία ο ίδιος όριζε ως «μια μέθοδο περιγραφής τρισδιάστατων αντικειμένων σε ένα φύλλο χαρτιού δύο μόνο διαστάσεων».

Όπως συμβαίνει με πολλές μεγάλες ιδέες, η ιδέα του Monge ήταν απλή. Τα γεωμετρικά αντικείμενα αποτελούνται από σημεία. Επομένως, για να απεικονίσουμε ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, πρέπει να βρούμε μια μέθοδο απεικόνισης των σημείων του χώρου. Έτσι, ας θεωρήσουμε ένα σημείο A στο χώρο και απ' αυτό ας φέρουμε μια κάθετο προς το οριζόντιο επίπεδο. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η προβολή του σημείου. Όμως, όλα τα σημεία που ανήκουν στην κάθετο έχουν την ίδια προβολή. Για να διακρίνουμε αυτά τα σημεία, εισάγουμε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Τότε, οι δύο προβολές (στο οριζόντιο και στο κατακόρυφο επίπεδο) ορίζουν μονοσήμαντα τη θέση του σημείου στο χώρο (Σχήμα 1).

Επομένως, συμπέρανε ο Monge, αν απεικονίσουμε τις ορθογώνιες προβολές ενός σημείου σε δύο επίπεδα, το σημείο καθορίζεται μονοσήμαντα.



Σχήμα 1

Ο Monge προχώρησε περισσότερο. Για να απεικονίζονται και οι δύο προβολές στο ίδιο φύλλο χαρτί, προτείνε την περιστροφή του κατακόρυφου επιπέδου γύρω από την ευθεία τομής του με το οριζόντιο επίπεδο. Τότε, όλες οι κατασκευές μπορούν να γίνουν στο ίδιο πολύπλοκο σχέδιο. Με αυτό τον τρόπο σχεδιασμού είναι δυνατή η αναπαραγωγή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, ο καθορισμός των αποστάσεων μεταξύ των σημείων του, και ούτω καθεξής (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Στην πορεία ανάπτυξης της παραστατικής γεωμετρίας, από την εποχή που την ανακάλυψε ο Monge, συνέβησαν αρκετές αλλαγές. Όμως, τα θεμέλια της παραμένουν, σε μεγάλο βαθμό, ίδια. Ο ρώσος γεωμέτρης B.N. Delone έγραψε: «Όπως η σπουδαϊδης γεωμετρία παρουσιάζεται σήμερα σχεδόν με τον ίδιο τρόπο που τη χρησιμοποιούσε ο Ευκλείδης και η αναλυτική γεωμετρία όπως

την παρουσίασε ο Kartésios, έτοι και η παραστατική γεωμετρία εμφανίζεται σήμερα με μια μορφή που είναι σχεδόν ίδια με αυτή που πρότεινε ο Monge.» Το βιβλίο του Monge Παραστατική γεωμετρία δημοσιεύτηκε μόλις το 1799, όταν οι βασικές του ιδέες έπαψαν να αποτελούν στρατιωτικό μυστικό.

Δάσκαλος και επιστήμονας

Σε ηλικία 23 ετών ο Monge έγινε καθηγητής στη Στρατιωτική σχολή της Μεζιέρ. Το 1770 κατέλαβε μια έδρα φυσικής και μετά από λίγο και μια έδρα μαθηματικών. Ο Monge παράλληλα με τη διδασκαλία διεξήγε ερευνες σε διάφορα πεδία, χωρίς όμως να κάνει καμιά δημοσίευση για την παραστατική γεωμετρία —η οποία αποτελούσε ακόμα μυστικό.

Εκείνη την εποχή δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά ένα μαθηματικό κείμενο του Monge, και συγκεκριμένα η εργασία του για το ανάπτυγμα των επιφανειών, το λογισμό των μεταβολών και την ολοκλήρωση ορισμένων συναρτήσεων. Ο Monge παρουσίασε τέσσερα μνημόνια στην Ακαδημία Επιστημών, τα οποία αφορούσαν το λογισμό των μεταβολών, την απειροστική γεωμετρία, τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και τη συνδυαστική. Το αποτέλεσμα ήταν να εκλεγεί στις 8 Απριλίου του 1772 αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας των Παρισίων. Ο Monge ήταν τότε μόλις είκοσι πέντε ετών.

Ο Monge αφέρωνε μεγάλο μέρος του χρόνου του στη διδασκαλία. Έδινε διαλέξεις για τη θεωρητική και την πειραματική φυσική, τη χημεία, τα μαθηματικά, την κοπή λίθων, και τη θεωρία της προοπτικής και των σκιών. Μάλιστα, διάνιθζε τις διαλέξεις του με πληθωρικές χειρονομίες. Όταν έφτασε σε μεγάλη ηλικία και ήταν πλέον δύσκολο να περιγράφει τις γεωμετρικές επιφάνειες με τα χέρια του, σταμάτησε να παραδίδει διαλέξεις παρατηρώντας ότι «είχε χάσει την εκφραστικότητά του».

Οι φοιτητές αγαπούσαν τον νεαρό καθηγητή. Ο Monge οργάνωνε επισκέψεις σε εργαστήρια και εργοστάσια, οδηγούσε τους φοιτητές του σε περιπάτους στα περίχωρα της Μεζιέρ και τους διασκέδαζε με πολλές ενδιαφέρουσες και διδακτικές ιστορίες. Ένας από τους φοιτητές του θυμόταν αργότερα ότι μερικές φορές ο Monge, κατευθυνόμενος προς κάποιο εργοστάσιο και προκειμένου να μη χάσει χρόνο αναζητώντας την πλησιέστερη γέφυρα, διέσχιζε ένα χείμαρρο χωρίς να διακόψει ούτε στιγμή την ομιλία του. Οι φοιτητές του τον παρακολούθουσαν (κυριολεκτικά και μεταφορικά) χωρίς να δίνουν σημασία στα εμπόδια που συναντούσαν κατά τη διαδρομή τους —τέτοια ήταν η μαγεία που ασκούσε ο Monge σ' αυτές τις νεανικές ψυχές.

To 1777, ο Monge παντρεύτηκε τη νεαρή χήρα Marie Catherine Horbou, μια ήρεμη και στοργική γυναίκα. Έζησαν μαζί μια ευτυχισμένη ζωή και απέκτησαν τρεις κόρες. Η κυρία Horbou είχε κληρονομήσει από τον πρότο της σύζυγο ένα μεταλλουργείο. Ο Monge ενδιαφέρ-

θηκε για την επεξεργασία των μετάλλων, και το αποτέλεσμα ήταν να οργανώσει ένα εργαστήριο χημείας στη σχολή της Μεζιέρ.

Ενδεικτικό της επιτυχίας του στη χημεία αποτελεί το εξής γεγονός: Ο Monge απέδειξε, πριν από τον Lavoisier, ότι το νερό αποτελείται από υδρογόνο και οξυγόνο. Κατάφερε επίσης να συνθέσει νερό απ' αυτά τα δύο αέρια. (Ο ίδιος ο Lavoisier παραδέχτηκε ότι ο Monge ήταν πρωτόρος σ' αυτό το ζήτημα.)

Αλλά τα μαθηματικά παρέμειναν το κύριο πεδίο ενδιαφέροντος του Monge. Ανέπτυξε πολλές πρακτικές εφαρμογές της παραστατικής γεωμετρίας, μελέτησε τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και διερεύνησε ορισμένες πλευρές της διαφορικής γεωμετρίας.

Ο Monge συμμετείχε επίσης στην πολύπλευρη δραστηριότητα της Ακαδημίας Εποτημών. Λάμβανε μέρος σε συνεδριάσεις, εργάζοταν σε διάφορες επιτροπές και αξιολογούσε εφευρέσεις και επιστημονικά άρθρα. Ταυτόχρονα, εξακολουθούσε να διδάσκει. Το 1783 διορίστηκε εξεταστής των φοιτούντων στο ναυτικό και στο πυροβολικό. Μελετώντας τα αποτελέσματα των εξετάσεων, ανακάλυψε ότι οι γνώσεις των δοκίμων και των ευελπίδων στη θεωρητική μηχανική ήταν περιορισμένες. Έτσι, το 1788, έγραψε ένα εγχειρίδιο για τη στατική.

Η επανάσταση



Το 1789, η επανάσταση πυρπόλησε τη Γαλλία. Στις 14 Ιουλίου, οι κάτοικοι του Παρισιού κατέλαβαν τη Βασιλλίη. Έπειτα από το Παρίσιο, ξεσηκώθηκαν και οι επαρχίες. Οργανώθηκαν νέες δομές εξουσίας καθώς και καινούργιες ένοπλες δυνάμεις πολιτών, η Εθνοφουρά. Στις 26 Αυγούστου, η Συντακτική Συνέλευση υιοθέτησε τη Διακήρυξη των Δικαιωμάτων του Ανθρώπου και του Πολίτη.

Ο μεγάλος γάλλος επιστήμονας Louis Pasteur είχε πει ότι η επιστήμη δεν έχει πατρίδα, αλλά οι επιστήμονες έχουν. Αυτά τα λόγια ισχύουν σίγουρα στην περίπτωση του Gaspard Monge. Δεν ήταν δυνατόν να αγνοήσει τα γεγονότα —έγινε μέλος της Πατριωτικής Εταιρείας, της Εταιρείας των Πολιτών στη συνέχεια, και τέλος της Λέσχης των Ιακωβίνων.

Τα γειτονικά κράτη συνέπτυξαν συμμαχία εναντίον της επαναστατικής Γαλλίας. Ο πόλεμος ξέσπασε, και η Συντακτική Συνέλευση διακήρυξε ότι «η πατρίδα βρίσκεται σε κίνδυνο». Η επανάσταση εισήλθε σε νέο στάδιο στις 10 Αυγούστου 1792. Ο βασιλιάς εκθρονίστηκε, και η εξουσία πέρασε σε ένα «Προσωρινό Εκτελεστικό Συμβούλιο» αποτελούμενο από τους υπουργούς που εξέλεξε η Νομοθετική Συνέλευση. Ο Gaspard Monge διορίστηκε υπουργός Ναυτιλίας και των Αποικιών.

Κατά την πρώτη της συνεδρίαση, στις 21 Σεπτεμβρίου 1792, η νεοεκλεγμένη «Συνέλευση» διακήρυξε την κατάργηση της μοναρχίας και την εγκαθίδρυση της δημοκρατίας. Ο βασιλιάς πέρασε από δίκη και καταδικάστη-

κε σε θάνατο. Ο Monge, ο οποίος εκτελούσε χρέη προέδρου του Συμβουλίου εκείνη την εποχή (οι υπουργοί κατείχαν αυτή τη θέση εκ περιτροπής), υπέγραψε τη θανατική καταδίκη.

Η Γαλλική Δημοκρατία βρισκόταν σε δύσκολη θέση. Υπήρχε έλλειψη όπλων και τροφίμων. Πεινασμένοι στρατιώτες με ελλιπή εκπαίδευση και ανεπαρκή οπλισμό είχαν να αντιμετωπίσουν υπέρτερες εχθρικές δυνάμεις. Ο Monge ανέλαβε για λογαριασμό της επαναστατικής κυβέρνησης να οργανώσει την παραγωγή πυρίτιδας, πυροβόλων όπλων και ξιφών. Βρήκε ένα απόθεμα νιτρικού καλίου —υλικού απαραίτητου για την παραγωγή της πυρίτιδας. Υπό τη διεύθυνσή του, τα σιδηρουργεία άρχισαν να παράγουν όπλα (στο Παρίσι, η ημερήσια παραγωγή έφτασε τα 1.000 όπλα). Οργάνωσε χυτήρια που κατασκεύαζαν τις κάννες των όπλων, βοηθούσε στην εκπαίδευση των εργατών και φρόντιζε για τη διατροφή τους, παρόλο που και ο ίδιος σχεδόν λιμοκτονούσε. Κάποτε αρνήθηκε να πάρει ένα κομμάτι τυριού που του έδωσε η γυναίκα του μαζί με τη συνθηισμένη μεριδια ψωμιού.

Στις 9 Θερμιδόρ (27 Ιουλίου) του 1794, ένα αντιεπαναστατικό πραξικόπημα ανέτρεψε τη δικτατορία των Ιακωβίνων και εκτέλεσε τους ηγέτες της —τον Robespierre, τον Σαιν-Ζυστ, και άλλους. Τους διαδέχθηκε ένα πενταμελές «Διευθυντήριο», το οποίο κατάφερε να κρατήσει ενωμένη τη Γαλλία τα επόμενα χρόνια. Ο Monge, ο οποίος ήταν δραστήριο μέλος των Ιακωβίνων, έπρεπε για ένα διάστημα να κρυφτεί.

Η Συνέλευση έκλεισε την Ακαδημία Εποτημών και τα δευτεροβάθμια σχολεία. Η παραγωγή όπλων μειώθηκε, και πολλά εργοστάσια και υφαντουργεία σταμάτησαν να λειτουργούν. Ο Monge αφιερώθηκε αποκλειστικά στη διδασκαλία.

Η Πολυτεχνική Σχολή



Ο Monge έπαιξε αποφασιστικό ρόλο στην ίδρυση της Πολυτεχνικής Σχολής (École Polytechnique),¹ το 1795, και για ένα μεγάλο διάστημα υπήρξε διευθυντής της. Η Σχολή ήταν το αγαπημένο του έργο. Διέθετε γι' αυτή όλο τον ελεύθερο χρόνο του καθώς και χρήματα (για υποτροφίες). Η Σχολή επαλήθευσε τις προσδοκίες του Monge. Στους αποφοίτους της συγκαταλέγονται εξέχοντες επιστήμονες, όπως ο Ampère, Coriolis, Gay-Lussac, Becquerel, Arago, Fresnel, Poinsot και Poisson, καθώς και πολλές γενιές λαμπρών μηχανικών.

Ο εξέχων μηχανικός Brisson, ο οποίος ήταν φοιτητής του Monge, αναφέρει ότι κανείς δεν μπορούσε να διδάξει τόσο καλά όσο ο Monge. Χρησιμοποιούσε χειρονομίες, πόζες και αλλαγές στη φωνή του για να αναπτύξει και

1. Περισσότερα στοιχεία για την École Polytechnique μπορείτε να διαβάσετε στο άρθρο «Επαναστατική διδασκαλία» του τεύχους Μαΐου/Ιουνίου 1998.

να εξηγήσει τις ιδέες του. Παρακολουθούσε στα μάτια τους φοιτητές του για να διαπιστώσει αν καταλάβαιναν τα όσα έλεγε. Ο Monge ήταν πραγματικός φίλος των φοιτητών —χρησιμοποιούσε κάθε μέσο για να διευρύνει τα ενδιαφέροντά τους και το ταλέντο τους και ήταν πάντα πρόθυμος να τους βοηθήσει. Ένας άλλος φοιτητής του, ο Dupin, περιέγραψε την εμφάνισή του: «*Ήταν ψηλός, δυνατός και μυώδης. Το πρόσωπό του, πλατύ και κοντό, θύμιζε πρόσωπο λιονταριού. Τα μάτια του ήταν μεγάλα, ζωντανά και άστραφταν κάτω από πυκνά, μαύρα φρύδια. Το μέτωπό του, ψηλό, με βαθιές ρυτίδες που φανέρωναν την οξύνοιά του. Το εντυπωσιακό του πρόσωπο παρέμενε συνήθως ήρεμο —το πρόσωπο ενός ανθρώπου σε βαθύ στοχασμό.*»

Ο Monge έγραψε εγχειρίδια παραστατικής, αναλυτικής και διαφορικής γεωμετρίας, τα οποία χρησιμοποίησαν πολλές γενιές φοιτητών.

Ο Monge και ο Ναπολέων



Εν τω μεταξύ, η ιστορία ακολουθούσε την πορεία της. Τον Φεβρουάριο του 1796 το Διευθυντήριο διόρισε διοικητή στην Ιταλία τον 26χρονο στρατηγό Βοναπάρτη. Τον Μάιο του ίδιου χρόνου, ο Monge πήγε στην Ιταλία ως εκπρόσωπος του Διευθυντηρίου. Εκεί συνάντησε τον μελλοντικό αυτοκράτορα, γεγονός το οποίο έπαιξε σημαντικό ρόλο στη ζωή του Monge.

Ο Βοναπάρτης και ο Monge είχαν συναντηθεί νωρίτερα (όταν ο Monge ήταν υπουργός Ναυτιλίας), αλλά ο Monge δεν θυμόταν τον επικεπτή του. Στην Ιταλία όμως ο Βοναπάρτης του θύμισε τη συνάντησή τους: «*Ένας νεαρός αξιωματικός του πυροβολικού επισκέφτηκε τον υπουργό Ναυτιλίας το 1792. Ο υπουργός δεν θυμόταν το γεγονός —είχε πολλούς επισκέπτες. Όμως, εκείνος ο άσημος αξιωματικός θα θυμάται την ενγένεια του για πάντα.*»

Ανάμεσα στο στρατηγό και τον επιστήμονα αναπτύχθηκε γρήγορα μια σχέση εμπιστοσύνης. Ήταν η αραιβαία έλξη δύο ευφυών ανθρώπων. Αργότερα κατέληξε σε θερμή φιλία. Παρόλο που η σχέση τους δεν ήταν πάντα γαλήνια, ο Βοναπάρτης βρήκε στον Monge ένα φίλο που παρέμεινε πιστός μέχρι το θάνατό του.

Όταν ο Βοναπάρτης ανέλαβε την εκστρατεία της Αιγύπτου, το 1798-99, ο Monge τον ακολούθησε. Αυτή η εκστρατεία παρά λίγο να αποδειχτεί μοιραία για τον Monge, ο οποίος αρρώστησε από πανούκλα. Διασώθηκε χάρις στις περιποιήσεις του διάσημου χημικού Berthollet.

Στην Αιγύπτο ήταν που ο Ναπολέων ξεστόμισε την περίφημη φράση: «*Βάλτε τα γαϊδούρια και τους επιστήμονες στη μέση!*» Μερικοί πιστεύουν ότι αυτό φανερώνει την περιφρόνησή του για τους επιστήμονες. Πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη την αίσθηση χιούμορ του μελλοντικού αυτοκράτορα, και να επισημάνουμε ότι τοποθέτησε στη μέση του τετραγώνου της παράταξης τα πιο πολύτιμα πράγματα: τους επιστήμονες και τα ζώα που μετέφεραν όπλα, νερό και τρόφιμα.

Στην Αιγύπτο ο Monge και άλλοι επιστήμονες διεξήγαγαν έρευνες. Σκοπός τους ήταν να συμβάλουν στην πρόοδο και την εκπαίδευση της Αιγύπτου. Γι' αυτό το σκοπό ιδρύθηκε το Ινστιτούτο του Καΐρου, στο οποίο ο Monge εξελέγη πρόεδρος και ο Βοναπάρτης αντιπρόεδρος. Οι γάλλοι επιστήμονες συνέθεσαν μια «Περιγραφή της Αιγύπτου», μελέτησαν τις αρχαιότητες και τη γεωργία της και επεξεργάστηκαν σχέδια κατασκευής ενός καναλιού που θα συνέδεε τη Μεσόγειο με την Ερυθρά Θάλασσα.

Η κατάσταση για τον γαλλικό στρατό όμως χειροτέρευε συνεχώς, και όχι μόνο στην Αιγύπτο. Ο ρώσος στρατηγός Suvorov νίκησε τους Γάλλους στην Ιταλία, και η κατάσταση στα υπόλοιπα μέτωπα ήταν εξίσου άσχημη. Ο Ναπολέων αποφάσισε να επιστρέψει στο Παρίσι. Το 1799 άφησε το στράτευμα και απέπλευσε για τη Γαλλία. Ο Monge, ο Berthollet, ο Murat και άλλοι, τον ακολούθησαν. Στις 9 Οκτωβρίου 1799, ο Βοναπάρτης έφτασε στο Παρίσι, όπου τον υποδέχτηκαν ενθουσιώδη πλήθη λαού.

Τη 18η Μπριμέρ (9 Νοεμβρίου) 1799, καταργήθηκε το Διευθυντήριο και στη συνέχεια το Κοινοβούλιο. Την εξουσία ανέλαβε τριμελής Υπατεία, στην πραγματικότητα όμως βρισκόταν στα χέρια του Πρώτου Υπάτου —του Ναπολέοντα Βοναπάρτη. Στις 24 Δεκεμβρίου 1799, ο Πρώτος Υπάτος διόρισε τον Monge ισόβιο γερουσιαστή.

Ο Monge άφησε τη θέση του διευθυντηρίου της Πολυτεχνικής Σχολής, εξακολούθησε όμως να είναι καθηγητής εκεί. Συνέχισε τις μελέτες του πάνω στην εφαρμογή της άλγεβρας και του απειροστικού λογισμού στη γεωμετρία. Συνέβαλε επίσης σε σημαντικό βαθμό στη θεωρία των μηχανών.

Στις 21 Αυγούστου 1803, διορίστηκε αντιπρόεδρος της Γερουσίας και στις 23 Σεπτεμβρίου γερουσιαστής της Λιέγης. Η Γερουσία ουσιαστικά υλοποιούσε τις εντολές του Πρώτου Υπάτου. Ειδικά στον Monge ανετέθη η οργάνωση της παραγωγής όπλων στη Λιέγη.

Κατά τα τέλη του 1803, ο Ναπολέων επανέφερε το καθεστώς της απονομής προσωπικών τιμών που είχε καταργήσει η επανάσταση. Ο Monge υπήρξε ο πρώτος πολίτης που έλαβε το παράσημο της Βασιλικής Τάξης της Λεγεόνας της Τιμής. Ο Ναπολέων δήλωσε: «*Επιστήμονες σας ζηλεύω· πρέπει να είστε ευτυχείς που γίνεστε διάσημοι χωρίς να χρειάζεται να λερωθείτε με αίμα.*»

Στις 18 Μαΐου 1804 τέθηκε σε ισχύ νέο σύνταγμα της Γαλλίας. Ο Ναπολέων ανακηρύχθηκε ισόβιος Αυτοκράτορας. Ο Monge εκτέλεσε διάφορες εντολές του Αυτοκράτορα. Συγκεκριμένα, μελέτησε το εφικτό της κατασκευής μιας διώρυγας από τον ποταμό Ouseq ώς το Παρίσι. Επίσης, εργάστηκε για ένα σχέδιο επίθεσης από τον αέρα στην Αγγλία με εκατό αερόστατα διαμέτρου 100 μέτρων το καθένα.

Στις 20 Μαΐου 1806, ο Ναπολέων διόρισε τον Monge πρόεδρο της Γερουσίας. Σύντορα έγινε κόμης και έλαβε 100.000 φράγκα για να αγοράσει μια έκταση. Ο Monge βρισκόταν στο απόγειο της σταδιοδρομίας του, αλλά άρχισε να αντιμετωπίζει προβλήματα υγείας. Στις αρχές

του 1809, το ένα χέρι του παρέλυσε. Υποχρεώθηκε να εγκαταλείψει τη διδασκαλία, αλλά συνέχισε να συμβουλεύει τον αυτοκράτορα για διάφορα επιστημονικά θέματα. Το 1810, ο Monge διηγήθηκε μια επιτροπή που μελετούσε πυραύλους. Επίσης έγραψε μια αναφορά για τη μελέτη της θωράκισης και μια μονογραφία για τη μεταλλουργία του σιδήρου και του χάλυβα. Ο αυτοκράτορας ζήτησε τη συμβουλή του για τα χυτήρια της Τοσκάνης και τα μεταλλεία της νήσου Έλβα, την παραγωγή κανονιών, και πολλά άλλα ζητήματα.

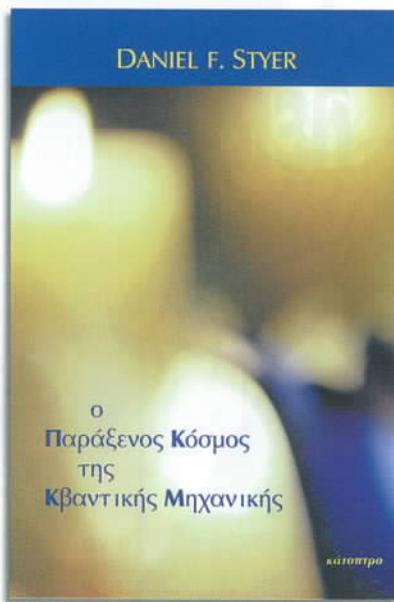
Τελικά, η αυτοκρατορία του Ναπολέοντα περιήλθε σε παρακμή. Η ήττα της μεγάλης στρατιάς στη Ρωσία και στη «μάχη των εθνών», κοντά στη Λειψία (Οκτώβριος 1813), οδήγησε τον Ναπολέοντα στην παραίτηση από το θρόνο και στην εξορία.

Κατά τη σύντομη επιστροφή του Ναπολέοντα από την πρώτη εξορία στην Έλβα, ο Monge τον επισκέφθηκε στο ανάκτορο του Κεραμεικού από την πρώτη μέρα που επανήλθε στο θρόνο. Μετά τη δεύτερη παραίτηση του Ναπολέοντα, ο Monge υποχρεώθηκε να εγκαταλείψει τη Γαλλία και πήγε στο Βέλγιο, όπου πέθανε στις 28 Ιουλίου 1818.

Η σορός του μεταφέρθηκε στο Παρίσι και ετάφη στο φημισμένο κοιμητήριο Père-Lachaise. Δεν έγινε επισημη τελετή, αλλά πολλοί ακαδημαϊκοί, φίλοι και φοιτητές πήγαν να αποτίσουν τιμή.

Ο Monge έμεινε γνωστός στην ιστορία της επιστήμης ως ο εφευρέτης της παραστατικής γεωμετρίας, ως ο άνθρωπος που καθιέρωσε τη σχεδίαση ως εργαλείο του μηχανικού. Πρέπει επίσης να θυμόμαστε το έργο του σε άλλα πεδία των μαθηματικών (απειροστικό λογισμό και διαφορική γεωμετρία), καθώς και στη χημεία, τη μεταλλουργία, τη μετεωρολογία, την οπτική, την υδραυλική και την παραγωγή όπλων και γυαλιού. Ο Monge πρότεινε ακόμα και μια υπόθεση για την απαρχή της ζωής στη Γη. Και εν πάσῃ περιπτώσει, δεν μπορούμε να μην παραδεχτούμε ότι η δική του ζωή αποτελεί ένα εντυπωσιακό παράδειγμα προσφοράς στην επιστήμη.

Η 14η Δεκεμβρίου 1900 θεωρείται η γενέθλια ημέρα της κβαντικής μηχανικής. Εκατό χρόνια μετά, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο σάς παρουσιάζουν ένα υπέροχο βιβλίο:



Daniel Styer

O Παράξενος Κόσμος της Κβαντικής Μηχανικής

Το βιβλίο, αφού συνοψίζει τις θεμελιώδεις διαφορές ανάμεσα στην κλασική και την κβαντική συμπεριφορά, εξετάζει το πείραμα Stern-Gerlach και τα συνακόλουθά του, εκθέτει εν συντομίᾳ τις βασικές έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων, για να περάσει κατόπιν στην ανάλυση του παραδόξου Einstein-Podolsky-Rosen και του θεωρήματος Bell.

Στη συνέχεια, παρουσιάζει την κβαντική συμβολή και εισάγει την έννοια του πλάτους πιθανότητας, οπότε και μας αποκαλύπτει τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις πιθανότητες και τη συμβολή των πλατών.

Τα τελευταία κεφάλαια διερευνούν ορισμένες συναρπαστικές νέες εξελίξεις στην κβαντική υπολογιστική και κρυπτογραφία, αποκαλύπτουν την απροσδόκητη συμπεριφορά του «κβαντικού μπιλιάρδου» και αντιμετωπίζουν την πρόκληση της περιγραφής ενός σωματιδίου «που δεν έχει θέση».

Το βιβλίο περιλαμβάνει πρωτότυπες ερωτήσεις και προβλήματα —ειδικά σχεδιασμένα για να κεντρίσουν τη σκέψη του αναγνώστη—, τις απαντήσεις τους, καθώς και υποδείξεις για περαιτέρω μελέτη.

Ο παράξενος κόσμος της κβαντικής μηχανικής έχει δύο στόχους: οι μεν σπουδαστές να κατανοήσουν βαθύτερα τη σφαίρα του πολύ μικρού, το δε ευρύ φιλομαθές κοινό να γευτεί τη διανοητική περιπέτεια της φυσικής του 20ού αιώνα.

- «Όταν ο Dan Styer μιλά για κβαντική μηχανική, εγώ απλώς σιωπώ και ακούω.» —Edwin Taylor, MIT, Μετάλλιο Oersted

Μια εξαιρετικά βατή, ακριβής και μη τεχνική εισαγωγή στην κβαντική μηχανική

264 σελ., 14,5 × 21,5 εκ., πανόδετο, 7.000 δρχ.

Δείκτης λέιζερ

Pixνοντας φως σ' αυτή την αξιοθαύμαστη μικρή συσκευή

S. Obukhov

ΕΧΕΙ ΠΕΡΙΠΟΥ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΕΝΟΣ στυλό διαρκείας, ή και ακόμη μικρότερο (μερικές φορές τον βρίσκουμε να πουλιέται ως αξεσουάρ για τα μπρελόκ), και αποτελεί πηγή ανεξήγητης απόλαυσης. Γνωρίζω μερικά καθ' όλα αξιοπρεπή και ευπόληπτα πρόσωπα που έσπευσαν να αγοράσουν έναν από την πρώτη στιγμή που τον αντίκρισαν, και έκτοτε τους είναι αδύνατο να σταματήσουν να παιζουν με τούτο το υπέροχο μικρό αντικείμενο —το δείκτη λέιζερ.

Τι τον κάνει τόσο καταπληκτικό; Ας δείξουμε λίγη υπομονή και ας ασχοληθούμε πρώτα με τον σεβάσμιο πρόγονό του, τον ηλεκτρικό φανό.

Όπως θα ξέρετε, ο ηλεκτρικός φανός μάς επιτρέπει να φωτίζουμε αντικείμενα που βρίσκονται σε απόσταση 5-20 μέτρων. Η φωτεινότητα που επιτυγχάνεται κάθε φορά εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την ακρίβεια της εστίασης του φανού. Στον ιδανικά εστιασμένο φανό, το ακτινοβόλο νήμα βολφραμίου του λαμπτήρα πυρακτώσεως πρέπει να βρίσκεται τοποθετημένο ακριβώς στην εστία του παραβολικού ανακλαστήρα. Για να ρυθμίσουμε το φανό, μετατοπίζουμε τον ανακλαστήρα εμπρός-πίσω, ή και τον αφαιρούμε ακόμη και στρέφουμε ελαφρά το λαμπτήρα στην υποδοχή του προτού προσαρμόσουμε εκ νέου τον ανακλαστήρα, επδιώκοντας έτσι να ανακαλύψουμε την καλύτερη δυνατή διάταξη λαμπτήρα-ανακλαστήρα.

Το νήμα έχει μέγεθος λίγων χιλιοστών. Άρα, όποιο τμήμα του νήματος κι αν τοποθετηθεί επί της εστίας, αναγκαστικά θα υπάρχουν κάποια άλλα τμήματά του που θα κείνται εκτός εστίας. Γι' αυτό, άλλωστε, και η δέσμη ενός ηλεκτρικού φανού πάντοτε αποκλίνει. Η γωνιακή απόκλιση μιας τέτοιας δέσμης ισούται (σε ακτίνια) κατά προσέγγιση με το λόγο του μήκους του νήματος προς τη διάμετρο του ανακλαστήρα (αρκετά εκατοστά): $\theta \approx 4 \text{ mm}/4 \text{ cm} = 0,1 \text{ rad}$, ή περίπου 5° .

Στην καθημερινή ζωή, σπάνια βρισκόμαστε στην ανάγκη να μετρήσουμε γωνίες «με το μάτι», εκτός ίσως και αν πρόκειται για σχετικά μεγάλες γωνίες —όπως των 90° , των 45° , κ.ο.κ. Πώς μπορούμε να σχηματίσουμε απτή αντίληψη της γωνίας των 5° ? Οι ερασιτέχνες αστρονόμοι έρουν τον τρόπο —αξιοποιών μέσα που τους είναι «πρόχειρα», για να το πούμε έτοι: τους βραχίονές τους. Τεντώστε το βραχίονά σας μπροστά και ανοίξτε το δείκτη και τον μέσο σας σε σχήμα «V» —το διεθνώς καθιερωμένο σύμβολο της νίκης. Κλείστε κατόπιν το ένα μάτι σας και κοιτάξτε τα ακροδάκτυλά σας με το άλλο. Η γωνία υπό την οποία φαίνονται είναι περίπου 5° , ή $1/10$ του ακτινίου.

Τη μέθοδο που σας περιέγραψα τη χρησιμοποιώ συχνά και ο ίδιος για να μετρήσω το γωνιακό ύψος του Ήλιου πάνω από τον ορίζοντα, προκει-

μένου να προσδιορίσω πόσος χρόνος απομένει ώς τη δύση. Παρεμπιπόντως, η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου ανέρχεται περίπου σε $0,5^\circ$, ή $30'$, και συμπίπτει με εκείνη της Σελήνης. Η γωνία υπό την οποία φαίνεται το νύχι του δείκτη σας όταν έχετε το βραχίονά σας τεντωμένο είναι κατά προσέγγιση τριπλάσια ($1,5^\circ$).

Ορισμένοι ηλεκτρικοί φανοί διαθέτουν μεγάλους ανακλαστήρες (10-12 cm). Η γωνιακή απόκλιση της δέσμης για τέτοιους ηλεκτρικούς φανούς είναι αντιστοίχως μικρότερη (κατά έναν παράγοντα 3). Επίσης, υπάρχουν πολύ μικροί λαμπτήρες υψηλής ισχύος που επιτρέπουν την ακόμη καλύτερη εστίαση της δέσμης.

Σε ποια απόσταση μπορεί κανείς να δει τη δέσμη ενός ηλεκτρικού φανού; Η κατανάλωση ισχύος ενός συμβατικού ηλεκτρικού φανού ανέρχεται στο 1 W περίπου. Μόνο το 1/20 αυτής της ενέργειας ακτινοβολείται υπό τη μορφή ορατού φωτός: το μεγαλύτερο ποσοστό της μετατρέπεται σε θερμότητα και σε θερμική ακτινοβολία. Έστω ότι ένας ηλεκτρικός φανός ακτινοβολεί ισχύ P εντός στερεάς γωνίας $\Omega = \pi\theta^2$. Σε απόσταση R , η ακτινοβολούμενη ισχύς που προσπίπτει σε επιφάνεια μοναδιάριου εμβαδού ισούται με $P/(\Omega R^2)$. Συνεπώς, η ισχύς P του φωτός που εισέρχεται στο μάτι από απόσταση R δίνεται από την έκφραση $PS_\mu/(\Omega R^2)$, όπου με S_μ συμβολίζουμε το εμβαδόν της κό-



ρης. Στο σκοτάδι, η κόρη του ανθρώπινου ματιού έχει διάμετρο 7 mm περίπου, οπότε $S_\mu \equiv 0,5 \text{ cm}^2$. Εάν η ισχύς του προσπίπτοντος φωτός υπερβαίνει μια ορισμένη τιμή κατωφλίου P_{\min} , τότε το φως γίνεται ορατό. Για το ανθρώπινο μάτι, η ελάχιστη τιμή κατωφλίου P_{\min} κατεβαίνει αρκετά χαμηλά, φτάνοντας ώς και τα 10^{-18} W , μια τιμή που σημαίνει πως στον αμφιβληστροειδή προσπίπτουν μερικά φωτόνια ανά δευτερόλεπτο.

Τούτη την αξιοσημείωτη ευαισθησία την επιδεικνύει το μάτι μόνο αφού παρέλθει ο απαιτούμενος για την προσαρμογή του στο σκοτάδι χρόνος. Αν είχαμε τη δυνατότητα να διεξαγάγουμε το οπτικό μας πείραμα σε απόλυτο σκοτάδι και εν απουσίᾳ ατμόσφαιρας, πιθανόν να μπορούσαμε να αντιληφθούμε το φως ενός ηλεκτρικού φανού από απόσταση δέκα χιλιάδων χιλιομέτρων. Σε πραγματικές συνθήκες, όμως, το κατώφλιο του ανθρώπινου ματιού είναι κατά πολλές τάξεις μεγέθους υψηλότερο, κυρίως λόγω της παρουσίας στο οπτικό πεδίο άλλων φωτεινών αντικειμένων —όπως τα φώτα των δρόμων, τα φωταγωγημένα σπίτια, τα άστρα, η Σελήνη, κ.ο.κ. Στο παρόν άρθρο, όπου αναλύουμε οπτικά πειράματα που εκτελούνται στο ύπαιθρο κατά τη διάρκεια μιας ασέληνης νύχτας, θα χρησιμοποιούμε την τιμή $P_{\min} = 10^{-13} \text{ W}$. Έτοι, αν αντικαταστήσουμε με τις αριθμητικές τους τιμές τα μεγέθη που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης

$$R = \sqrt[4]{\frac{PS_\mu}{P_{\min}\Omega}}, \quad (1)$$

παίρνουμε ως αποτέλεσμα $R = 27 \text{ km}$.

Πόσο πρέπει να απέχει το πολύ κάποιο αντικείμενο για να μπορούμε να το φωτίσουμε με έναν ηλεκτρικό φανό; Δυστυχώς, πρόκειται για μια απόσταση που δεν ξεπερνά τις μερικές δεκάδες μέτρα. Όταν φωτίζουμε ένα αντικείμενο —μια γάτα, ας πούμε—, θέλουμε να βλέπουμε το φως που ανακλάται από αυτό. Η ολική ισχύς του φωτός που προσπίπτει σε αντικείμενο το οποίο απέχει από την πηγή απόσταση R δίνεται από τον τύπο $PS/(\Omega R^2)$, όπου το S δηλώνει το εμ-

βαδόν της επιφάνειας του φωτιζόμενου αντικειμένου —στην περίπτωση της γάτας, $S_\gamma \equiv 200 \text{ cm}^2$. Θα υποθέσουμε ότι η γάτα είναι λευκή (όχι γκρίζα ή μαύρη), πράγμα που σημαίνει ότι το μεγαλύτερο μέρος του φωτός, αντί να απορροφάται, διαχέεται. Αν το ανακλώμενο φως σκεδάζεται σε όλες τις κατευθύνσεις, μόνο ένα αμελητέο ποσοστό θα εισέλθει στο μάτι του παρατηρητή. Το εν λόγω ποσοστό ισούται με το λόγο του εμβαδού της κόρης προς το $1/4$ του εμβαδού μιας σφαίρας ακτίνας R —δηλαδή, $S_\mu/(4\pi R^2)$. Ο παράγοντας $1/4$ αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η ανακλαστική επιφάνεια είναι κάθετη τόσο στη δέσμη όσο και στην κατεύθυνση του παρατηρητή. Λαμβάνουμε επίσης υπόψη ότι το συνολικό φως που ανακλάται από την επιφάνεια είναι ανάλογο της στερεάς γωνίας υπό την οποία φαίνεται η επιφάνεια από τον παρατηρητή. Άρα, η ισχύς του φωτός που εισέρχεται στο μάτι ισούται με $PS_\gamma S_\mu / (4\pi \Omega R^4)$. Αν λοιπόν την εξισώσουμε με την P_{\min} , βρίσκουμε:

$$R = \sqrt[4]{\frac{PS_\gamma S_\mu}{P_{\min} \Omega}} = 45 \text{ m}. \quad (2)$$

Επομένως, παρότι μια γάτα μπορεί να δει τη δέσμη ενός ηλεκτρικού φανού από απόσταση δεκάδων χιλιομέτρων, εμείς μπορούμε να τη φωτίσουμε μόνο εφόσον δεν απέχει περισσότερο από 45 m. (Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τις παγίδες της τροχαίας για οδηγούς που αναπτύσσουν υπερβολικές ταχύτητες: ο αστυνομικός χρησιμοποιεί ένα ειδικό φορητό ραντάρ για να εντοπίσει όσους παραβιάζουν το όριο ταχύτητας. Αν το αυτοκίνητο είναι εξοπλισμένο με έναν ανιχνευτή ραντάρ συντονισμένο σε κατάλληλη συχνότητα, ο οδηγός θα αντιληφθεί την παγίδα πολύ προτού το αυτοκίνητό του γίνει «ορατό» στο αστυνομικό ραντάρ.) Η εξίσωση (2) δείχνει ότι, αν θέλετε να διπλασιάσετε τη μέγιστη ακτίνα όπου μπορείτε να δείτε μια γάτα, πρέπει να αυξήσετε την ισχύ του φανού σας $2^4 = 16$ φορές. Αντίστοιχα, η απόσταση από την οποία αντιλαμβάνεται τώρα η γάτα το φανό σας τετραπλασιάζεται.

Δείκτης λέιζερ

Ένας φτηνός δείκτης λέιζερ μπορεί να ρίχνει μια κηλίδα φωτός σε αντικείμενα που απέχουν εκατοντάδες μέτρα και βρίσκονται στο σκοτάδι. Σύμφωνα με τα αναγραφόμενα στην τεχνική περιγραφή που μπορείτε να διαβάσετε πάνω στη συσκευασία του, η εμβέλεια του μπορεί να ανέρχεται στα 200, 500, 800 ή ακόμη και στα 1.200 m. Πρέπει να έχετε υπόψη ότι οι δείκτες λέιζερ δεν καταναλώνουν παρά ελάχιστη ισχύ. Στις ΗΠΑ διατίθενται στην αγορά δείκτες λέιζερ ισχύος έως και 5 mW, ενώ στην Ευρώπη η ανώτατη επιτρεπόμενη ισχύς περιορίζεται στο 1 mW. Η προσδιοριζόμενη παράμετρος αφορά συνήθως την καταναλισκόμενη ισχύ, ενώ η ισχύς της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας ανέρχεται στο 60% της τιμής αυτής.

Η ικανότητα μιας συσκευής τόσο χαμηλής ισχύος να ρίχνει μια φωτεινή κόκκινη βούλα πάνω σε σχεδόν κάθε κτήριο ενός κακοφωτισμένου δρόμου δεν μπορεί παρά να προκαλεί το θαυμασμό. Αναμφίβολα, αυτή η ικανότητα συνδέεται στενά με την απίστευτα μικρή απόκλιση που παρουσιάζουν οι δέσμες λέιζερ. Θεωρητικά, η γωνιακή απόκλιση θ καθορίζεται αποκλειστικά από τη διάμετρο D της εκπεμπόμενης δέσμης και από το μήκος κύματος λ :

$$\theta = \lambda/D. \quad (3)$$

Για την περίπτωση ενός δείκτη λέιζερ που παράγει κόκκινη δέσμη (μήκους κύματος 600-700 nm), μπορούμε να χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$\theta (\text{mrad}) = 1/D (\text{mm}). \quad (4)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ίδια εξίσωση καθορίζει και το γωνιακό διακριτικό όριο του ανθρώπινου ματιού, μόνο που το D συμβολίζει εν προκειμένω τη διάμετρο της κόρης. Εφόσον η διάμετρος της κόρης, όντας και οι δύο ίσες με λίγα χιλιοστά, περίπου συμπίπτουν, η γωνιακή απόκλιση της δέσμης ισούται κατά προσέγγιση με το γωνιακό διακριτικό όριο του ματιού. Στην πραγματικότητα, η απόκλιση της δέσμης λέιζερ παρουσιά-

ζεται καπως μεγαλυτερη: ανερχεται σε περιπου 1 cm ανά 10 m διαδρομής. Επομένως, σε απόσταση 1 km η δέσμη θα έχει διάμετρο 1 m. Μολαταύτα, το ανθρώπινο μάτι βλέπει τη φωτεινή κηλίδα ως σχεδόν σημειακή σε οποιαδήποτε απόσταση, με γωνιακή διάμετρο ίση με εκείνη του Δία στον νυχτερινό ουρανό.

Τώρα μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί η εξίσωση (2) δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιείται για τις δέσμες λείζερ. Κατά την εξαγωγή της, υποθέσαμε ότι η διάμετρος της δέσμης του ηλεκτρικού φανού υπερβαίνει κατά πολύ τις γραμμικές διαστάσεις του μακρινού αντικειμένου στο οποίο ρίχνεται. Έτσι, το αντικείμενο φωτίζεται από ένα μικρό μόνο κλάσμα του συνολικού εκπεμπόμενου φωτός. Αν, ωστόσο, χρησιμοποιήσουμε ένα δείκτη λείζερ για να φωτίσουμε κάποιο μακρινό αντικείμενο που το γωνιακό του μέγεθος υπερβαίνει το διακριτικό όριο του ανθρώπου ματιού, τότε όλο το φως της δέσμης θα πέσει στο αντικείμενο και θα σκεδαστεί. Ως εκ τούτου, ο παράγοντας $S_y/(\Omega R^2)$ πρέπει να αντικατασταθεί από τη μονάδα, οπότε βρίσκουμε:

$$P_{\min} = \frac{PS_{\mu}}{\pi R^2}. \quad (5)$$

Το φυσικό νόημα αυτής της εξίσωσης μπορεί να εξηγηθεί εποπτικά κατά τον εξής τρόπο: Ας φανταστούμε έναν μικροσκοπικό λαμπτήρα ισχύος $P = 0,003$ W «στερεωμένο» στο απότερο άκρο της δέσμης λείζερ. Σε όποιο αντικείμενο και αν κατευθύνουμε τη δέσμη του δείκτη λείζερ, ο λαμπτήρας που φανταζόμαστε «στερεωμένο» στο άκρο της εμφανίζεται πάνω στο ίδιο αντικείμενο και ακτινοβολεί στην κατεύθυνσή μας. Εάν διακρίνουμε το φως από το λαμπτήρα αυτόν, θα το θεωρούμε ως την ανακλώμενη δέσμη από το δείκτη λείζερ. Έτσι, η έκφραση για τη μεγαλύτερη απόσταση από την οποία γίνεται ορατή η ανακλώμενη δέσμη συμπίπτει με την έκφραση για τη μεγαλύτερη απόσταση από την οποία μπορεί κανείς να δει το λαμπτήρα που είναι «στερεωμένος» στην άκρη της δέσμης:

$$R = \sqrt{\frac{PS_{\mu}}{\pi P_{\min}}}. \quad (6)$$

Εισάγοντας τις αριθμητικές τιμές στην παραπάνω εξίσωση, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $R = 700$ m.

Προσέξτε ότι η τελευταία εξίσωση διαφέρει από την εξίσωση (2): Για να διπλασιάσουμε την εμβέλεια του δείκτη λείζερ, αρκεί να αυξήσουμε την ισχύ του κατά έναν παράγοντα 4 (αντί για 16).

Η φωτεινότητα της δέσμης

Όπως γνωρίζετε, η ισχύς των λείζερ που κυκλοφορούν στην αγορά υπόκειται σε αυστηρούς περιορισμούς. Γιατί λοιπόν μερικά φαίνονται φωτεινότερα από κάποια άλλα; Εδώ μπαίνει στο παιχνίδι ένας ακόμη παράγοντας: το μήκος κύματος. Η ευαισθησία των ματιών παρουσιάζει έντονη εξάρτηση από το μήκος κύματος, το οποίο για τους δείκτες λείζερ του εμπορίου μπορεί να έχει τις τιμές 633, 650, 670 ή 680 nm. Η δέσμη ενός δείκτη λείζερ με μήκος κύματος 650 nm φαίνεται δέκα φορές φωτεινότερη από μια δέσμη μήκους κύματος 670-680 nm, ενώ μια δέσμη μήκους κύματος 633 nm φαίνεται δύο φορές φωτεινότερη από μια δέσμη μήκους κύματος 650 nm. Το ανθρώπινο μάτι παρουσιάζει τη μέγιστη ευαισθησία του στην περίπτωση του πράσινου φωτός με μήκος κύματος 555 nm, οπότε τα λείζερ που θα λειτουργούσαν σ' αυτό το μήκος κύματος θα φαίνονταν να ξεπερνούν σε λαμπρότητα όλα τα υπόλοιπα. Και σημείωση, ο φωτεινότερος δείκτης λείζερ, που έκανε την εμφάνισή του στην αγορά πρόσφατα, εκπέμπει μια πράσινη δέσμη με μήκος κύματος 532 nm.

Η φανόμενη λαμπρότητά του ξεπερνά κατά οκτώ περίπου φορές εκείνη του δείκτη λείζερ των 650 nm.

Η εξάρτηση της φανόμενης λαμπρότητας από το μήκος κύματος πρέπει να συνυπολογιστεί κατά την εκτίμηση της απόστασης στην οποία γίνεται ορατή η δέσμη λείζερ. Για να τη λάβουμε υπόψη, δεχόμαστε ότι η ευαισθησία P_{\min} του ματιού μεταβάλλεται συναρτήσει του μήκους κύματος του εκπεμπόμενου φωτός. Οι διαφορμίσεις που προβάλλουν τον ισχυ-

ρισμό ότι ο τάδε δείκτης λείζερ παράγει δέσμη ορατή σε απόσταση X εκατοντάδων μέτρων ($X = 2, 5, 8, 12, \dots$) θα πρέπει να αντιμετωπίζονται με επιφύλαξη, αν όχι γι' άλλο λόγο, επειδή η P_{\min} παρουσιάζει έντονη εξάρτηση από το φως υποβάθρου, το οποίο προέρχεται από τα άστρα, τη Σελήνη, τα φώτα των δρόμων, κ.ο.κ.

Επιπροσθέτως, η λαμπρότητα της κηλίδας λείζερ εξαρτάται έντονα από τις ανακλαστικές ιδιότητες της φωτιζόμενης επιφάνειας. Υποθέσαμε ότι η φωτιζόμενη επιφάνεια σκεδάζει το ανακλώμενο φως προς όλες τις κατευθύνσεις. Τι γίνεται όμως με τα ειδικά ανακλαστικά υλικά που χρησιμοποιούνται για τα σήματα των αυτοκινητοδρόμων και για τα γιλέκα ασφαλείας που φορούν οι εργαζόμενοι στα οδικά έργα; Μια επιφάνεια επικαλυμμένη με τέτοιο υλικό ανακλά το φως σε κατεύθυνση σχεδόν ακριβώς αντίθετη από εκείνη της προσπίπτουσας δέσμης (η γωνία που σχηματίζουν η προσπίπτουσα και η ανακλώμενη δέσμη δεν ξεπερνά τις 3°). Στην προκειμένη περίπτωση, το ανακλώμενο φως έχει λαμπρότητα μεγαλύτερη απ' ό,τι το φως που ανακλάται σε μια συνήθη σκεδάζουσα επιφάνεια κατά έναν παράγοντα περίπου $\pi/(\pi\theta^2) \equiv 400$. Αν μια δέσμη 1-ισχύος 3 mW ανακλαστεί από μια τέτοια ειδική επιφάνεια, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται την ίδια ποσότητα φωτός όπως και αν υπήρχε στερεωμένος στην άκρη της δέσμης λείζερ ένας καλά εστιασμένος ηλεκτρικός φανός με γωνιακή απόκλιση 3° στραμμένος προς την κατεύθυνση του παρατηρητή.

Δυστυχώς, σε μεγάλες αποστάσεις η διάμετρος της δέσμης μπορεί να ξεπεράσει το μέγεθος της επιφάνειας που είναι επικαλυμμένη με ανακλαστικό υλικό. Αν σε απόσταση 1 km η διάμετρος της δέσμης ανέρχεται σε 1 m, ενώ ο ανακλαστικός στόχος (ένα σήμα οδικής κυκλοφορίας, ας πούμε) έχει μέγεθος 0,5 m, τότε μόνο το ένα τέταρτο της ισχύος της δέσμης ανακλάται προς τον παρατηρητή. Για να εκτιμήσουμε την απόσταση ώς την οποία γίνεται ορατό το ανακλώμενο φως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια εξίσωση που μοιάζει με την ε-

ξίσωση (2), η οποία μας χρησιμεύει για μια παρόμοια εκτίμηση στην περίπτωση του ηλεκτρικού φανού:

$$R = \sqrt{\frac{PS_y S_\mu}{P_{\min} \pi \Omega Z}}. \quad (7)$$

Για να πάρουμε αριθμητικό εξαγόμενο από την παραπάνω εξίσωση, μας χρειάζεται η τιμή της $\theta = d/\lambda = 0,0005$, η οποία είναι απαραίτητη για να βρούμε τη στερεά γωνία $\Omega = \pi\theta^2$. επιπλέον, πρέπει να εισαγάγουμε στον παρανομαστή έναν συμπληρωματικό παράγοντα $Z' = 1/400$, που περιγράφει την κατευθυντικότητα της ανακλώμενης δέσμης, και να αντικαταστήσουμε το S_y με το εμβαδόν του σηματοδοτήσεων —περίου 0,2 m². Έτσι, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $R \sim 3,5$ km.

ΔΕΙΚΤΕΣ ΛΕΙΖΕΡ ΚΑΙ ΒΥΧΤΕΡΙΝΗ ΌΡΑΣΗ

Πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα προκύπτουν όταν παρατηρούμε το ανακλώμενο φως τη νύχτα με τη βοήθεια ενός μετατροπέα υπερύθρου. Για να πετύχετε κάτι τέτοιο, στερώστε ένα δείκτη λειζερ με μια λαστιχένια τανίδια στο σώμα του μετατροπέα κατά τέτοιον τρόπο ώστε οι οπτικοί τους άξονες να είναι σχεδόν παράλληλοι.

Ο μετατροπέας υπερύθρου αποτελεί συνδυασμό διοπτρών (κιαλιών) και ενός καθοδικού σωλήνα, ο οποίος ενισχύει το προσπίπτον φως.

Από μόνες τους, οι διόπτρες αυξάνουν σημαντικά τη μέγιστη απόσταση όρασης υπό συνθήκες χαμηλού φωτισμού, καθότι όλο το φως που συλλέγεται από τους αντικειμενικούς φακούς των διοπτρών μεταφέρεται στα μάτια του παρατηρητή. Αν, για παράδειγμα, χρησιμοποιήσουμε διόπτρες με αντικειμενικούς φακούς διαμέτρου 50 mm, το εμβαδόν της συλλέγουσας επιφάνειας θα αυξηθεί κατά έναν παράγοντα $(50/7)^2 \approx 50$ (η διάμετρος της κόρης του ματιού είναι 7 mm).

Για τη νυχτερινή όραση (σκοτοψία) ενδείκνυται η χρήση διοπτρών με μεγάλους αντικειμενικούς φακούς, μόνο που η μεγέθυνση θα πρέπει να είναι μικρή. Για παράδειγμα,

οι διόπτρες 7x (50×7) προσφέρονται περισσότερο γι' αυτό το σκοπό απ' ότι οι διόπτρες 12x (50×12). Τα δύο ζεύγη διοπτρών συλλέγουν την ίδια ποσότητα φωτός, αλλά η εικόνα θα «τρεμουλιάζει» περισσότερο στις διόπτρες 12x απ' ότι στις διόπτρες 7x.

Σημειώστε ότι από τους δύο αριθμούς που περιέχονται στην περιγραφή των διοπτρών ο πρώτος δίνει το άνοιγμα εισόδου και ο δεύτερος τη μεγέθυνση. Η τιμή του ανοίγματος εξόδου καθορίζεται από το λόγο της διαμέτρου εισόδου των διοπτρών προς τη μεγέθυνση. Οι διόπτρες 7x (50×7), για παράδειγμα, έχουν άνοιγμα εξόδου (50 mm)/7 = 7,1 mm. Πρόκειται για μια τιμή κατά προσέγγιση ίση με τη διάμετρο της κόρης του ανθρώπινου ματιού όταν αυτό είναι προσαρμοσμένο στο απόλυτο σκοτάδι. Οι διόπτρες 7x (35×7), από την άλλη, έχουν διάμετρο ανοίγματος εξόδου ίση με (35 mm)/7 = 5 mm, οπότε δίνουν λιγότερο φως. Στο έντονο φως της ημέρας, η διαφορά ανάμεσα στους δύο τύπους διοπτρών είναι αμελητέα, διότι σε τέτοιες συνθήκες η κόρη έχει διάμετρο μόνο 2-3 mm, τιμή η οποία υπολείπεται των ανοιγμάτων εξόδου και για τους δύο τύπους διοπτρών.

Εάν κατά τη νύχτα κάποιο αντικείμενο γίνεται ορατό διά γυμνού οφθαλμού από απόσταση το πολύ ίση με Z , τότε με τη βοήθεια ενός ζεύγους διοπτρών (50×7) θα καταφέρναμε να το δούμε ώς και από απόσταση $7Z$. Ομοίως, εάν όλα τα άστρα του σύμπαντος χαρακτηρίζονταν από την ίδια φωτεινότητα, και αν όλα τα ορατά άστρα απείχαν το πολύ Z έτη φωτός από τη Γη, τότε με τη βοήθεια των διοπτρών (50×7) θα μπορούσαμε να δούμε όλα τα άστρα που βρίσκονται εντός ακτίνας $7Z$ ετών φωτός. Έτσι, ο ορατός σ' εμάς όγκος του σύμπαντος θα αυξανόταν κατά έναν παράγοντα $7^3 = 343$. Προφανώς, κατά τον ίδιο παράγοντα θα αυξανόταν και το πλήθος των ορατών άστρων! Στο πραγματικό σύμπαν, τα άστρα δεν είναι κατανεμημένα ομοιογενώς και δεν έχουν την ίδια φωτεινότητα, όμως η εκτίμηση μας για την αύξηση του πλήθους των ορατών άστρων που επιτυγχάνεται με τη χρήση των

διοπτρών δεν παύει να ισχύει.

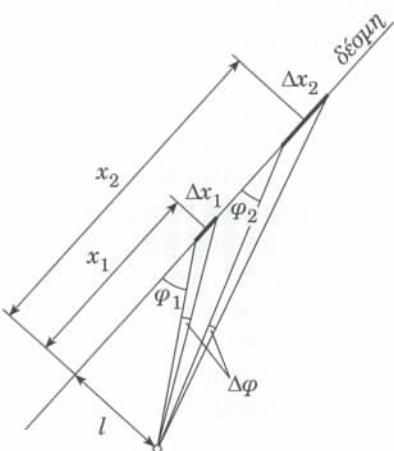
Ο καθοδικός σωλήνας του μετατροπέα υπερύθρου ενισχύει το φως κατά έναν παράγοντα της τάξεως των αρκετών χιλιάδων (ή και δεκάδων χιλιάδων). Επειδή η εν λόγω διάταξη παρουσιάζει την ανώτατη ευαισθησία της στην ερυθρή και την εγγύς υπέρυθρη περιοχή του φάσματος, προσφέρεται εξαιρετικά για την παρατήρηση του ερυθρού φωτός που εκπέμπεται από μια κατηγορία δεικτών λειζερ. Όλοι οι δείκτες λειζερ (από τους φθηνότερους) που παράγουν ερυθρό φως διάφορων αποχρώσεων δεν διαφέρουν ουσιαστικά από την άποψη της (φαινόμενης) λαμπρότητας. Ένας παρατηρητής εξοπλισμένος με μετατροπέα υπερύθρου μπορεί να ανιχνεύσει το φως που εκπέμπεται από μια σημειακή πηγή μόνο εφόσον εισέρχονται στον αντικειμενικό φακό του μετατροπέα μερικά φωτόνια ανά δευτερόλεπτο. Σημειωτέον ότι στην προκειμένη περίπτωση δεν απαιτείται πλήρης προσαρμογή στο σκοτάδι. Το πραγματικό κατώφλιο ευαισθησίας θα μπορούσε να μειωθεί περαιτέρω (κατά έναν παράγοντα 10 ή και περισσότερο), διότι η συλλέγουσα επιφάνεια του μετατροπέα έχει κατά πολύ μεγαλύτερο εμβαδόν από εκείνο της κόρης του ματιού μας. Με τη βοήθεια ενός τέτοιου μετατροπέα, κατάφερα να δώ το φως ενός δείκτη λειζερ που ανακλάτων από χαμηλά σύννεφα.

Μπορούμε να κατευθύνουμε τη δέσμη ενός δείκτη λειζερ πάνω σε ένα πολύ μακρινό αντικείμενο —σε ένα δορυφόρο που εκτελεί τροχιά γύρω από τη Γη, ας πούμε, ή σε κάποιο πολύ απομακρυσμένο πλοίο στην ανοιχτή θάλασσα τη νύχτα; Πρόκειται για αντικείμενα τα οποία απέχουν τόσο πολύ ώστε το φως που ανακλάτων από αυτά αποκλείεται να φτάσει στον παρατηρητή. Μολατάύτα, το πρόβλημα λύνεται με τη βοήθεια ενός μετατροπέα υπερύθρου. Τούτη η υπέροχη συσκευή διαθέτει τόσο υψηλή ευαισθησία ώστε μπορεί να παρακολουθήσει την τροχιά μιας δέσμης λειζερ που διαδίδεται μέσα στον αέρα. Σε τελική ανάλυση, ίσως να μην πρόκειται και για κάτι το τόσο καταπλη-

κτικό. Θα σας έχει τύχει οπωσδήποτε να δείτε φωτεινές δέσμες από προβολείς να σχίζουν τον νυχτερινό ουρανό. Μερικές φορές, μάλιστα, μπορούμε να διακρίνουμε ακόμη και τη δέσμη ενός ηλεκτρικού φανού να αχνοφέγγει μέσα στην ομίχλη. Αυτό σημαίνει ότι η δέσμη χάνει ένα μέρος της ενέργειάς της εξαιτίας είτε των διακυμάνσεων της πυκνότητας του αέρα είτε της σκέδασης από αιωρούμενα μικροσκοπικά σωματίδια.

Το μήκος του τμήματος της τροχιάς μιας δέσμης που μπορεί να παρατηρηθεί από τα πλάγια είναι αναγκαστικά περιορισμένο —βλέπουμε τη δέσμη μόνο όπου παραμένει επαρκώς συγκεντρωμένη. Σε μεγάλες αποστάσεις, η ένταση της δέσμης μειώνεται λόγω της απόκλισής της, οπότε η δέσμη μοιάζει να εξαφανίζεται. Δεδομένου ότι οι δέσμες λέιζερ παρουσιάζουν γωνιακή απόκλιση κατά προσέγγιση ίση με το γωνιακό διακριτικό όριο του ανθρώπινου ματιού, σε μεγάλες αποστάσεις γίνονται ορατές σαν πολύ λεπτές κλωστές φωτός. Και τούτες οι κλωστές παραμένουν ορατές σε κάθε απόσταση από τον παρατηρητή! Ακόμη κι αν δεν βλέπουμε το φως που ανακλάται από το μακρινό πλοίο, θα βλέπουμε τη δέσμη από το δείκτη λέιζερ να σχίζει τον αέρα και να χτυπά το πλοίο (ή ακόμη και το δορυφόρο).

Για να κατανοήσουμε γιατί η λαμπρότητα της τροχιάς της δέσμης λέιζερ δεν εξαρτάται από την απόσταση, ας μελετήσουμε το Σχήμα 1. Δείχνει δύο τμήματα της διαδρομής της δέσμης Δx_1 και Δx_2 , που τα μήκη τους επλέχθηκαν με τέτοιον τρόπο ώστε να φαίνονται από έναν ορισμένο παρατηρητή υπό την ίδια γωνία $\Delta\varphi$. Οι αποστάσεις των εν λόγω τμημάτων από τον παρατηρητή δίνονται προσεγγιστικά από τις εκφράσεις $x_1 = l/\varphi_1$ και $x_2 = l/\varphi_2$, από τις οποίες προκύπτουν με διαφόριση οι σχέσεις $\Delta x_1 = \varphi_1^2 \Delta\varphi / l$ και $\Delta x_2 = \varphi_2^2 \Delta\varphi / l$ ή, ισοδύναμα, $\Delta x_1 = x_1^2 \Delta\varphi / l$ και $\Delta x_2 = x_2^2 \Delta\varphi / l$. Θα υποθέσουμε ότι η ισχύς του διαχεόμενου φωτός ανά μονάδα μήκους της διαδρομής της δέσμης δεν εξαρτάται από την απόσταση x . Εν τοιαύτη περιπτώσει, η ισχύς του σκεδαζόμενου φωτός στα τμήματα 1 και



Σχήμα 1

2 (ΔP_1 και ΔP_2 , αντίστοιχα) είναι ανάλογη προς τα μήκη των τμημάτων ή, ισοδύναμα, προς τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον παρατηρητή: $\Delta P_1 - x_1^2 \Delta\varphi$ και $\Delta P_2 - x_2^2 \Delta\varphi$. Εντούτοις, το κλάσμα της ισχύος του φωτός που φτάνει ως τον παρατηρητή από τα τμήματα 1 και 2 είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο των αποστάσεών τους από αυτόν. Συνεπώς, η ισχύς του φωτός την οποία δέχεται ο παρατηρητής από τα τμήματα της δέσμης 1 και 2, που έχουν το ίδιο γωνιακό μέγεθος, δεν εξαρτάται από την απόστασή τους από αυτόν. Το αποτέλεσμα τούτο σημαίνει πως η τροχιά της δέσμης έχει ομοιόμορφη λαμπρότητα.

Σε αποστάσεις, ωστόσο, δέκα περίπου χιλιομέτρων, οι προσεγγίσεις μας παύουν να ισχύουν. Και τούτο επειδή σε τέτοιες αποστάσεις, λόγω της σκέδασης που υφίσταται η δέσμη στην ατμόσφαιρα, η ένταση της πέφτει από το μέρος. Έτσι, η δέσμη γίνεται αμυδρή. Επιπλέον, αν η δέσμη έχει κατακόρυφη κατεύθυνση, η μείωση της πυκνότητας του αέρα σε μεγάλα ύψη συνοδεύεται από παράλληλη μείωση της ισχύος του διαχεόμενου φωτός, η οποία συνεισφέρει επίσης στην ελάττωση της λαμπρότητας της τροχιάς της δέσμης. Υποθέτοντας ότι το μήκος της ορατής τροχιάς ανέρχεται στα 10 km, οδηγούμαστε στην εκτίμηση ότι το γωνιακό σφάλμα του δείκτη λέιζερ ισούται με 10^{-4} rad για έναν παρατηρητή που στέκεται σε απόσταση 1 m στα πλάγια του δείκτη. Όπως διαπιστώνουμε, πρόκειται για

μια τιμή μικρότερη από τη γωνιακή απόκλιση της δέσμης λέιζερ.

Μπορούν άραγε να δουν το φως ενός δείκτη λέιζερ οι αστροναύτες ενός διαστημοπλοίου που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη; Σαφώς μπορούν. Σύμφωνα με μια εκτίμηση που προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (7), η ακτίνα στην οποία γίνεται ορατή η δέσμη ανέρχεται στα 2.000 km. Τα διάφορα διαστημικά οχήματα περιφέρονται συνήθως γύρω από τη Γη σε πολύ χαμηλότερα υψόμετρα (μερικών εκατοντάδων χιλιομέτρων). Η σκέδαση την οποία υφίσταται η δέσμη λόγω των διακυμάνσεων της πυκνότητας του αέρα είναι υπολογίσιμη μόνο στα χαμηλότερα στρώματα της ατμόσφαιρας, και έτσι το συγκεκριμένο φαινόμενο δεν επηρεάζει ιδιαίτερα την εκτίμηση μας.

Ιδού λοιπόν μια ερώτηση που θα μπορούσατε να θέσετε: Αν καταφέρνουμε να βλέπουμε ένα δορυφόρο στον νυχτερινό ουρανό, πρέπει άραγε να συμπεράνουμε ότι το φως από το δείκτη λέιζερ που χρησιμοποιούμε γίνεται ορατό από το δορυφόρο; Για να απαντήσουμε σε τούτη την ερώτηση, ας συγκρίνουμε την ένταση του φωτός που δέχεται ένας επίγειος παρατηρητής με εκείνη την οποία δέχεται κάποιος αστροναύτης σε ένα δορυφόρο που εκτελεί τροχιά γύρω από τη Γη. Αν εμείς βλέπουμε το δορυφόρο, τούτο σημαίνει ότι το ηλιακό φως που ανακλάται από το δορυφόρο και σκεδάζεται σε όλες τις κατευθύνσεις φτάνει στα μάτια μας σε ικανή ποσότητα. Ας υποθέσουμε ότι ο δορυφόρος έχει διάμετρο 3 m. Η ένταση του φωτός στην επιφάνειά του ανέρχεται σε $1-2 \text{ mW/mm}^2$. Ο χαμηλής ισχύος δείκτης λέιζερ που χρησιμοποιούμε παράγει τόσο φως όσο εκείνο που ανακλάται από 1 mm² της επιφάνειας του δορυφόρου —δηλαδή, όσο το $(1/300)^2 \sim 10^{-5}$ της συνολικής ακτινοβολίας του. Ωστόσο, αυτό το φως συγκεντρώνεται εντός στερεάς γωνίας η οποία υπολείπεται της γωνιακής απόκλισης του φωτός που ανακλάται από το δορυφόρο κατά έναν παράγοντα 10^6 . Άρα, αν εμείς καταφέρνουμε να βλέπουμε το δορυφόρο, τότε και οι αστροναύτες

μπορούν να δουν το φως από το δείκτη λέιζερ που χρησιμοποιούμε.

«Μην κοιτάζετε απευθείας τη δέσμη λέιζερ»

Αυτή την προειδοποίηση τη συναντάμε σε όλα σχεδόν τα εργαστήρια όπου χρησιμοποιούνται λέιζερ. Κάθε επιστήμονας γνωρίζει ότι η ακτινοβολία λέιζερ μπορεί να προκαλέσει ανεπανόρθωτη βλάβη στα μάτια. Για να σχηματίσουμε σαφή αντίληψη των κινδύνων που κρύβεται η δέσμη του δείκτη λέιζερ, ας υπολογίσουμε την έντασή της, η οποία ορίζεται ίση με την προσπίπουσα ισχύ σε 1 mm^2 μιας επιφάνειας που φωτίζεται από το λέιζερ. Αν υποθέσουμε ότι η διάμετρος της δέσμης ισούται με 3 mm και η ισχύς της με 3 mW , καταλήγουμε σε ένταση $I_{\text{d}} = 0,3 \text{ mW/mm}^2$. Για να μπορέσουμε να τη συγκρίνουμε με κάτι οικείο, ας θυμηθούμε ότι η ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας ανέρχεται σε περίπου 1 kW ανά τετραγωνικό μέτρο της γηίνης επιφάνειας: $I_H = 1 \text{ mW/mm}^2$. Κατά συνέπεια, κοιτάζοντας την κηλίδα που δημιουργεί ένας δείκτης λέιζερ δεν φαίνεται να διατρέχουμε μεγαλύτερο κίνδυνο από όταν παρακολουθούμε μια δέσμη ηλιακού φωτός να παίζει στον τοίχο. Ίσως εδώ να βρίσκεται ο λόγος ένεκα του οποίου ορίστηκε το υφιστάμενο ανώτατο όριο ισχύος για τα λέιζερ που μπορούν να προμηθευτούν οι καταναλωτές.

Σας υπενθυμίζω, ωστόσο, ότι οι δείκτες λέιζερ προορίζονται για μια συγκεκριμένη χρήση: για να δείχνουμε πράγματα —ακριβώς όπως και οι παλιότεροι ξύλινοι δείκτες. Δεν είναι για να τους στρέφουμε πάνω σε ανθρώπους. Σε καμία περίπτωση δεν επιτρέπεται να σημαδέψουμε με δείκτη λέιζερ τα μάτια ενός ανθρώπου. Ακριβώς όπως πρέπει να προσέχουμε μήπως τραυματίσουμε κανέναν στο μάτι με την αιχμή του ξύλινου δείκτη, η απρόσεκτη χρήση του δείκτη λέιζερ μπορεί να προκαλέσει βαριά βλάβη στα μάτια κάποιου. Αυτό οφείλεται στο ότι ο φακός του ματιού μοιάζει με φωτογραφικό φακό μεταβλητής εστιακής απόστασης. Αν στο μάτι εισέλθει μια απολύτως πα-

ράλληλη δέσμη φωτός και ο φακός τύχει να είναι εστιασμένος «στο άπειρο», τότε όλο το προσπίπτον φως θα εστιαστεί και θα κατευθυνθεί από το φακό σε μια εξαιρετικά μικρή περιοχή του αμφιβληστροειδούς (με διάμετρο της τάξεως του μήκους κύρατος του προσπίπτοντος φωτός, ή περίπου 1 μm). Αν, ωστόσο, εκείνη τη στιγμή ο φακός είναι εστιασμένος σε ένα αντικείμενο που απέχει 1 m από το μάτι, η δέσμη δεν θα εστιαστεί στον αμφιβληστροειδή (η διάμετρος της ασφούς κηλίδας που θα σχηματιστεί πάνω στον αμφιβληστροειδή θα ανέρχεται σε περίπου 30 μm).

Ας συγκρίνουμε τώρα τις εντάσεις που έχει το φως το οποίο προσπίπτει στον αμφιβληστροειδή στις δύο περιπτώσεις. Στην περίπτωση της ακριβούς εστίασης, $I_e = 3 \text{ kW/mm}^2$, ενώ για την ασφαλή κηλίδα, $I = 3 \text{ W/mm}^2$. Είναι επίσης διδακτικό να συγκρίνουμε τις τιμές αυτές με την ένταση του φωτός που πέφτει στον αμφιβληστροειδή όταν κανείς κοιτάζει απευθείας τον Ήλιο. Η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου ανέρχεται σε περίπου $1/100 \text{ rad}$, και η εστιακή απόσταση του φακού είναι περίπου $0,1 \text{ mm}$. Συνεπώς, το εδώδο του Ήλιου που σχηματίζεται πάνω στον αμφιβληστροειδή έχει διάμετρο περίπου 1 mm . Υποθέτοντας ότι όλο το ηλιακό φως που εισέρχεται στην κόρη (διάμετρος: 2 mm) συγκεντρώνεται σε έναν δίσκο διαμέτρου $0,1 \text{ mm}$, η ένταση του ηλιακού φωτός που προσπίπτει στον αμφιβληστροειδή υπολογίζεται αμέσως: $I_H = 0,4 \text{ W/mm}^2$.

Οι παραπάνω τιμές δείχνουν πειστικά ότι δεν πρέπει να κοιτάζουμε απευθείας ούτε καν τα λέιζερ χαμηλής ισχύος, διότι το φως που προσπίπτει στον αμφιβληστροειδή μπορεί να έχει ένταση κατά 10^4 φορές υψηλότερη από εκείνη του ηλιακού φωτός όταν κοιτάζουμε απευθείας τον Ήλιο, η οποία αντιπροσωπεύει και τη μέγιστη δυνατή ένταση υπό κανονικές συνθήκες. Αντίθετα, αν η δέσμη λέιζερ εισέλθει σε μάτια εστιασμένα σε κάποιο άλλο αντικείμενο (όχι στο λέιζερ), ενδέχεται να προκληθεί μόνο προσωρινή τύφλωση, χωρίς τα μάτια να υποστούν ανεπανόρθωτη βλάβη. Δεν υπάρχει λόγος να α-

ναζητήσετε την οριακή γραμμή ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις. Είναι προτιμότερο να συμμορφώνεστε με τις προειδοποιήσεις και να μη σημαδεύετε ποτέ ανθρώπους με το δείκτη λέιζερ.

Στη δεκαετία του 1990, όταν οι δείκτες λέιζερ ήταν πανάκριβοι, χρησιμοποιούνταν κυρίως για την υπόδειξη στόχων σε σκοπευτήρια. Μη φαντάζεστε ότι είναι τελείως απίθανο βλέποντας κάποιοι άνθρωποι μια κόκκινη κηλίδα στο στήθος σας να αντιδράσουν τραβώντας πιστόλι και πυροβολώντας την —ο συγγραφέας του άρθρου ζει στη Φλόριντα, όπου πολλοί άνθρωποι διαθέτουν άδεια οπλοφορίας. Πολλές πολιτείες των ΗΠΑ έχουν θεσπίσει νόμους που καθιστούν παράνομη την κακή χρήση των δεικτών λέιζερ. Στην Καλιφόρνια, για παράδειγμα, το να στρέψεις το δείκτη λέιζερ πάνω σε έναν άνθρωπο «με απειλητικό τρόπο» τιμωρείται με τριακονθήμερη φυλάκιση.

Κάτι να έχετε να σκέφτεστε

Τι είναι λαμπρότερο: ένας δείκτης λέιζερ 5 mW , ο Ήλιος ή ένας ηλεκτρικός λαμπτήρας 1.000 W ; Η λαμπρότητα ορίζεται ως η φωτεινή ισχύς που εκπέμπεται εντός μιας μοναδιαίας στερεάς γωνίας από ένα τμήμα μοναδιαίου εμβαδού της επιφάνειας του ακτινοβολούντος σώματος. Πάρτε ένα φύλλο χαρτί και φωτίστε το εκ περιτροπής με ένα δείκτη λέιζερ, με μια δέσμη ηλιακού φωτός και με το φως ενός λαμπτήρα υψηλής ισχύος τοποθετημένου σε απόσταση 10 cm και εφοδιασμένου με ανακλαστήρα. Υπολογίστε την ισχύ του φωτός που προσπίπτει στη φωτιζόμενη επιφάνεια ανά μονάδα εμβαδού και συγκρίνατε τα αποτελέσματα. Φανταστείτε τώρα ότι στη θέση του χαρτιού βρίσκεται ένας μικρός φακός. Εκτιμήστε τους λόγους των λαμπροτήτων στο εστιακό επίπεδο του φακού και για τις τρεις περιπτώσεις και δείξτε ότι έτσι έχετε προσδιορίσει τους λόγους των λαμπροτήτων που χαρακτηρίζουν τις τρεις φωτεινές πηγές. Ξέρετε μήπως τώρα γιατί η λαμπρότητα ενός λέιζερ ξεπερνά εκείνη του Ήλιου κατά δεκάδες χιλιάδες φορές; ◻

Μια σύντομη περιήγηση

«Στα μαθηματικά δεν υπάρχει μόνιμη άγνοια.»

—D. Hilbert, Παρίσι, 1900

Μιχάλης Λάμπρου

TA ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ EINAI ENA EYPY KAI BAΘΥ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ιπέδιο, το οποίο κατά τον 20ό αιώνα είχε ραγδαία εξέλιξη. Είναι γεγονός ότι σήμερα υπάρχουν ελάχιστοι μαθηματικοί —αν υπάρχει κανείς— που γνωρίζουν σε ανεκτό επίπεδο όλα τα παρακλάδια της επιστήμης τους. Πολλοί θεωρούν ως τελευταίο καθολικό μαθηματικό τον Henri Poincaré (1854-1912), ενώ άλλοι αποδίδουν αυτή την ιδιότητα στον ακόμη παλαιότερο Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Από την άλλη, όπως γράφει ο David Hilbert (1862-1943), τα μαθηματικά ίσως περισσότερο από κάθε άλλη επιστήμη «είναι ένα αδιάρετο σύνολο, ένας οργανισμός που η ζωντάνια του οφείλεται στις ενδότερες σχέσεις των τημμάτων του. Έτοι, παρ' όλη την ποικιλία της μαθηματικής γνώσης, έχουμε σήμερα μια ακόμα πιο σαφή εικόνα της ομοιότητας των συλλογισμών που τη διέπουν, και της σχέσης των ιδεών στα μαθηματικά ως όλον, καθώς και τις αναλογίες που υπάρχουν στα επιμέρους θέματά τους».

Είναι γεγονός ότι, όσο περισσότερο αναπτύσσεται ένας κλάδος των μαθηματικών, τόσο ανακαλύπτονται ενδότερες και απρόσμενες σχέσεις με άλλους κλάδους, οι οποίοι παλαιότερα θεωρούνταν ανεξάρτητοι. Με άλλα λόγια, όσο διευρύνονται τα μαθηματικά τόσο περισσότερο διαπλέκονται οι επιμέρους κλάδοι τους και διακρίνονται οι μεταξύ τους δεσμοί. Τυπικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών του 20ού αιώνα αποτελεί, ακριβώς, η διαπίστωση των επιμέρους συναφειών τους.

Στο παρόν άρθρο, θα αποτολμήσουμε μια σύντομη περιήγηση στα μαθηματικά του αιώνα που μόλις παρήλθε. Αναμφισβήτητα, μια ολοκληρωμένη εικόνα, που να δείχνει και τις επιμέρους συνοχές, είναι ανέφικτη στα πλαίσια ενός άρθρου. Άλλωστε, και η απλή απαρίθμηση των κυριότερων εννοιών, αποτελεσμάτων και μεθόδων των μαθηματικών κλάδων αποτελεί έργο μόνο των ειδικών, και δεν άπτεται των δικών μας στόχων. Εδώ, ωστόσο, θα αναπτύξουμε το θέμα προβάλλοντας ορισμένες

μόνο συνιστώσες των μαθηματικών του 20ού αιώνα, οι οποίες, ως σύνολο, παρέχουν μια ικανοποιητική εικόνα της υπέροχης αυτής επιστήμης όπως αναπτύχθηκε τα τελευταία εκατό χρόνια. Θα προσεγγίσουμε το θέμα αναφέροντας τα προβλήματα που έθεσε ο Hilbert, τις κατευθύνσεις που απέδωσαν μετάλλιο Fields σε όσους υπέρτησαν αυτό το επιστημονικό ιπέδιο και, τέλος, σε ορισμένα σύγχρονα θέματα που απασχολούν τους ειδικούς.

Τα προβλήματα του Hilbert

Στην αυγή του 20ού αιώνα, διεξήχθη στο Παρίσι το 2ο Παγκόσμιο Συνέδριο των Μαθηματικών, το οποίο παρακολούθησαν οι αξιολογότεροι μαθηματικοί εκείνης της εποχής. Το συνέδριο είχε τέσσερις κύριες θεματικές ενότητες, που αντανακλούσαν τα μαθηματικά ενδιαφέροντα των ειδικών εκείνη τη στιγμή. Ήταν η αριθμητική και η άλγεβρα, ο απειροστικός λογισμός, η γεωμετρία και, τέλος, η μηχανική και η μαθηματική φυσική. Παράλληλα, όμως, υπήρχαν και δύο μικρότερες ενότητες, πάλι δείγμα των τάσεων της εποχής. Η πρώτη ήταν η ιστορία και η βιβλιογραφία, και η δεύτερη η διδασκαλία και η μεθοδολογία.

Ένας από αυτούς που είχαν ειδική πρόσκληση των οργανωτών για εισήγηση, στην ενότητα της ιστορίας και της βιβλιογραφίας, ήταν και ο D. Hilbert. Το θέμα της ομιλίας του αφορούσε τα μαθηματικά προβλήματα που διεβιβάζαν, κατά τη γνώμη του, να απασχολήσουν τους μαθηματικούς του 20ού αιώνα. Ο ίδιος διέθετε όλα τα εχέγγυα να εκτιμήσει τι ήταν ομηρικό και χρήσιμο. Άλλωστε, ήταν καθηγητής στο Göttingen της Γερμανίας, το οποίο είχε την πρωτοκαθεδρία μεταξύ των μαθηματικών σχολών της ουφλίδιου, και ο ίδιος κατείχε άξια την έδρα που νωρίτερα ανήκε στον «πρίγκιπα των μαθηματικών» K.F. Gauss.

Δεν είναι λίγοι αυτοί οι οποίοι ισχυρίζονται ότι οι κατευθυντήριες γραμμές που οδήγησαν τα προβλήματα

του Hilbert οριοθέτησαν τα μαθηματικά του 20ού αιώνα. Επ' ευκαιρία της συμπλήρωσης εκατό χρόνων από τον Αύγουστο του 1900, οπότε έκανε την ομιλία του, ας αποτιμήσουμε συνοπτικά την επιρροή που άσκησαν τα προβλήματα αυτά. Ίσως υπερβάλλουν όσοι πιστεύουν ότι όλα τα μαθηματικά του 20ού αιώνα καθορίστηκαν, στον ένα ή στον άλλο βαθμό, από τη διάσημη ομιλία του Hilbert: ένα όμως είναι βέβαιο: τουλάχιστον στο πρώτο μισό του 20ού αιώνα, ο φορμαλισμός που πρότεινε αποδείχθηκε κυρίαρχο στοιχείο τους και υιοθετήθηκε από τον, πιο σύγχρονο σ' εμάς, δραστήριο και αφοσιωμένο οπαδό του, τον (επονομαζόμενο) Bourbaki.

Στην ομιλία του στο εν λόγω συνέδριο, ο Hilbert διατύπωσε και ανέλυσε 10 προβλήματα, αλλά ο πλήρης κατάλογός τους, όπως δημοσιεύτηκε στα *Πρακτικά* του συνεδρίου περιείχε 23. Τα επιπλέον προβλήματα δεν ήταν σε καμία περίπτωση δευτερεύοντα. Δεν τα είχε συμπεριλάβει στην ομιλία του λόγω του περιορισμένου χρόνου που του αναλογούσε για την εισήγησή του. Μερικά από τα προβλήματα που πρότεινε, λοιπόν, ήταν πολύ συγκεκριμένα, κάποια άλλα όμως συνιστούσαν πλήρη ερευνητικά προγράμματα. Η θεματολογία τους κάλυπτε ευρύ φάσμα, αλλά η θεωρία αριθμών και η αφηρημένη άλγεβρα κατείχαν ιδιαίτερη θέση: οι δύο αυτοί κλάδοι αποτελούσαν το επίκεντρο όχι μόνο των δικών του ερευνητικών ενδιαφερόντων αλλά και των Herman Minkowski (1864-1909) και Adolf Hurwitz (1859-1919), φίλων και συναδέλφων του, —οι οποίοι και μελέτησαν, κατά παράκληση του Hilbert, το κείμενο της εισήγησής του πριν την ανακοίνωσή της. Άλλα προβλήματα υπήρχαν ακόμη και σε κλάδους που μόλις είχαν γεννηθεί ή γίνει αποδεκτοί, όπως η τοπολογία και η θεωρία συνόλων του George Cantor (1845-1918).

Το πρώτο πρόβλημα του Hilbert αφορά την «υπόθεση του συνεχούς». Συγκεκριμένα, ο Cantor είχε προηγουμένως διαπιστώσει ότι μεταξύ απειροσυνόλων έχει νόημα να μιλάμε για «πλήθος» στοιχείων, με την έννοια ότι είχε διατυπώσει κανόνες για το πότε δύο απειροσύνολα έχουν ή όχι το ίδιο πλήθος στοιχείων. Όριος ότι δύο σύνολα θα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο αν υπάρχει μεταξύ τους αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Κατόπιν, με ένα εξαιρετικό «διαγώνιο εγχείρημα» απέδειξε ότι το σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών δεν έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών. Έδειξε ακόμη ότι το δεύτερο αυτό σύνολο έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το σύνολο των υποσυνόλων του \mathbb{N} , το οποίο με τη σειρά του έχει, όπως έδειξε, γνήσια μεγαλύτερο πληθάριθμο από τον ίδιο το \mathbb{N} . Με άλλα λόγια, βλέπουμε ότι, συν τοις άλλοις, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ειδών απειρότητες.

Προκύπτει, λοιπόν, το εύλογο ερώτημα αν σε τούτη την ιεραρχία των απειρών υπάρχει πληθάριθμος μεταξύ εκείνων του \mathbb{N} και του \mathbb{R} . Σε αυτό ακριβώς το θέμα αναφέρεται το ένα σκέλος του πρώτου προβλήματος του Hilbert. Ο ίδιος ο Cantor είχε εντρυφήσει στο εν λόγω θέμα, αλλά δεν μπόρεσε να δώσει απάντηση. Η διαίσθησή του όμως του έλεγε ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσος πλη-

θάριθμος, και τη διατύπωσε μάλιστα ως εικασία η οποία έμεινε στη βιβλιογραφία γνωστή ως «εικασία του συνεχούς». Η τελική απάντηση στο πρόβλημα του Hilbert δόθηκε μόλις το 1963, και ήταν τελείως απρόσμενη και επαναστατική για τα μαθηματικά. Επιγραμματικά, επειδή το ερώτημα αφορά μια από τις πρωταρχικές έννοιες των μαθηματικών, τα σύνολα, έπρεπε πρώτα να θεμελιώθει αυστηρά η συγκεκριμένη έννοια και να απαλλαγεί από παράδοξα όπως αυτά που διατύπωσε ο Bertrand Russell. Η θεμελίωση της επετεύχθη το 1908 από τον Ernst Zermelo (1871-1953) με μια σειρά «βασικών» αξιωμάτων.

Την πρώτη μερική απάντηση στο πρόβλημα του συνεχούς έδωσε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 20ού αιώνα, ο Kurt Gödel (1906-1977), ο οποίος απέδειξε ένα παράδοξο θεώρημα που όμοιο του δεν υπήρχε στα μαθηματικά. Έδειξε ότι, αν η υπόθεση του συνεχούς προσαρτηθεί ως αξιώματα στα βασικά αξιώματα του Zermelo, τότε στην νέα διευρυμένη θεωρία θα υπάρχει αντίφαση μόνο αν ήδη υπάρχει αντίφαση στα βασικά αξιώματα. Με άλλα λόγια, ο Gödel δεν απέδειξε την υπόθεση του συνεχούς, αλλά απλώς έδειξε ότι η εν λόγω υπόθεση δεν καταρρίπτεται από τα υπόλοιπα αξιώματα. Η δεύτερη έκπληξη ήρθε από τον Paul Cohen, το 1963, ο οποίος απέδειξε, τρόπος του λέγειν, το άλλο μισό του θεωρήματος του Gödel: Παραδόξως, ούτε η ίδια η υπόθεση του συνεχούς δεν αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι ανεξάρτητη από τα βασικά αξιώματα της θεωρίας συνόλων, πράγμα που ερμηνεύει και την αποτυχία του Cantor να δώσει απάντηση στο ερώτημά του. Το αν θα δεχτούμε την υπόθεση του συνεχούς ή την άρνησή της ως αξιώματα αποτελεί προσωπική επιλογή του καθενός μας!

Το δεύτερο πρόβλημα του Hilbert αφορά τη συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής. Η ρίζα του προβλήματος ανάγεται στον 19ο αιώνα, οπότε γεννήθηκε η ανάγκη αυστηρής θεμελίωσης των μαθηματικών. Χρειαζόταν δηλαδή να έρθει στο προσκήνιο η αρχαία ελληνική προσέγγιση των μαθηματικών, η οποία, εκκινώντας από αξιώματα, ακολουθούσε αποδεικτική διαδικασία στο κάθε βήμα: «Συλλογισμὸς δὲ ἔστι λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἔτερόν τι τῶν κειμένων ἔξ ανάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι.» (Αριστοτέλης, *Αναλυτικά πρότερα*, 24 β 18).

Τον 18ο και 19ο αιώνα, αυτή η πρακτική της αυστηρής συλλογιστικής είχε περιπέσει σε λήθη, και τα επιμέρους βήματα δεν χαρακτηρίζονταν πάντα από αυστηρότητα. Ο Hilbert πρότεινε ως πρόβλημα να εξεταστεί κατά πόσον τα αξιώματα που διέπουν τους αριθμούς (την πεμπτουσία δηλαδή μεγάλου τρίματος των μαθηματικών) ήταν συνεπή.

Μια δεκαετία αργότερα, εμφανίστηκε ο πρώτος τόμος των *Principia Mathematica* (Αρχές των μαθηματικών) των B. Russell (1872-1970) και Alfred Whitehead (1861-1947), οι οποίοι ανέπτυσσαν τους νόμους της αριθμητικής από ένα καθορισμένο με σαφήνεια σύνολο αξιωμάτων. Στόχος τους ήταν να αποδειχθεί ότι όλο το οικοδό-

μημα των θεωρητικών μαθηματικών πηγάζει από έναν μικρό αριθμό πρωταρχικών κανόνων. Ωστόσο, οι Russell και Whitehead άφησαν αναπάντητα ορισμένα ερωτήματα του δεύτερου προβλήματος του Hilbert. Στην προσπάθειά του να γεφυρώσει τα κενά, ο Gödel έδειξε το 1931 ότι τα κενά είχαν βαθύτερα αίτια. Συγκεκριμένα, έδειξε ότι στο φορμαλιστικό σύστημα των *Principia* υπάρχουν προτάσεις που ούτε οι ίδιες ούτε οι αρνήσεις τους δεν αποδεικνύονται! Με άλλα λόγια, δεν είναι δυνατόν να αποφανθεί κανείς ότι τα απλά αξιώματα της αριθμητικής δεν οδηγούν σε αντιφάσεις. Από τη θεωρία του Gödel γεννήθηκε ένας σημαντικός κλάδος της λογικής, ο οποίος ακόμη και σήμερα παραμένει γόνιμος.

Λόγω έλλειψης χώρου, δεν θα αναφερθούμε στα επόμενα τέσσερα προβλήματα, παρά μόνο στον τίτλο τους: Το τρίτο, λοιπόν, αφορά την ισότητα δύο τετραέδρων με ίσες βάσεις και ίσα ύψη, το τέταρτο τη συντομότερη οδό μεταξύ δύο σημείων, το πέμπτο τη διαφορισμότητα των συναρτήσεων στις ομάδες Lie και το έκτο τη μαθηματική επεξεργασία των αξιωμάτων της φυσικής. Θα αναφερθούμε όμως έκτενέστερα στο έβδομο πρόβλημα.

Ήδη από την αρχαίοτη γνωρίζαμε ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί. Στην οικογένεια των αρρήτων υπάρχουν διαβαθμίσεις, όπως οι άρρητοι που είναι ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές (π.χ. ο $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της $x^2 - 2 = 0$), οι οποίοι ονομάζονται αλγεβρικοί αριθμοί. Υπάρχουν όμως και αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί, οι λεγόμενοι υπερβατικοί. Ο πρώτος που κατασκεύασε έναν υπερβατικό αριθμό ήταν ο Joseph Liouville (1809-1882), το 1851. Το να αποδειξεί κανείς ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι υπερβατικός ή όχι συνιστά συνήθως πολύ δυσκολότερο πρόβλημα: η υπερβατικότητα του ε αποδείχτηκε μόλις το 1873 από τον Charles Hermite (1822-1901), ενώ αυτή του π το 1882 από τον Carl Louis Lindemann (1852-1939). Η τελευταία απόδειξη, μάλιστα, πιστοποίησε ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου δεν επιδέχεται λύση.

Το έβδομο πρόβλημα του Hilbert έθετε το ερώτημα εάν ο αριθμός a^β είναι υπερβατικός όποτε ο α είναι αλγεβρικός (διαφορετικός του 0 ή του 1) και ο β αλγεβρικός αλλά άρρητος. Η απάντηση που δόθηκε το 1934 από τον Aleksandr Gelfond και, ανεξάρτητα, από τον Theodore Schneider ήταν θετική. Τα πορίσματα είναι πάμπολλα: παραδείγματος χάριν, έπειτα το αποτέλεσμα του Lindemann που προαναφέραμε (διότι $e^{i\pi} = -1$, από την ταυτότητα του Euler), καθώς και ότι ο αριθμός e^π είναι υπερβατικός (παίρνουμε $a = \sqrt{-1}$ και $\beta = -2\sqrt{-1}$ και κάνουμε χρήση της $e^{i\pi/2} = \sqrt{-1}$). Ας προσθέσουμε ότι παραμένει ακόμη ανοικτό το εάν οι αριθμοί π^e , e^π και π^π είναι υπερβατικοί ή μη.

Το όγδοο πρόβλημα αφορά την περίφημη «εικασία του Riemann» για τη συνάρτηση $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$, και ουσιαστικά θέτει το ερώτημα αν όλες οι μιγαδικές ρίζες της ζ έχουν πραγματικό μέρος ίσο με 1/2. Σήμερα, έναν αιώνα αργότερα, το πρόβλημα παραμένει άλυτο, και πολλοί το θε-

ωρούν ως το σημαντικότερο ανοικτό πρόβλημα των μαθηματικών. Στη μιγαδική ανάλυση υπάρχει τεράστια βιβλιογραφία που σχετίζεται με τις ιδιότητες της συνάρτησης ζ , και ειδικά με τις ρίζες της. Το ενδιαφέρον των μαθηματικών είναι δικαιολογημένο διότι υπάρχει ένα επίσης τεράστιο πλήθος συμπερασμάτων τα οποία απορέουν από την τελική απάντηση στην εικασία του Riemann, και τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται διάσπαρτα σε πάμπολλους κλάδους των μαθηματικών. Την κορωνίδα αποτελεί μια σειρά ανοικτών προβλημάτων της θεωρίας αριθμών, όπως το τελείως ασύνδετο εκ πρώτης όψεως πρόβλημα των διδυμών πρώτων. Σύμφωνα με αυτό, τίθεται το ερώτημα αν υπάρχουν άπειροι σε πλήθος πρώτοι αριθμοί p τέτοιοι ώστε ο $p + 2$ να είναι επίσης πρώτος (όπως π.χ. οι 11 και 13 ή οι 17 και 19).

Το δέκατο πρόβλημα του Hilbert θέτει το ερώτημα αν υπάρχει αλγόριθμος για να αποφανθεί κανείς ότι μια διοφαντική εξίσωση έχει λύση ή όχι. Το 1970, ο Yuri Matiyasevich, σε ηλικία 22 ετών, απέδειξε ότι το πρόβλημα έχει αρνητική λύση.

Για λόγους οικονομίας, δεν θα αναφερθούμε στα υπόλοιπα προβλήματα του Hilbert. Υπενθυμίζουμε μόνο ότι αφορούν θέματα άλγεβρας, τοπολογίας, γεωμετρίας, λογισμού μεταβολών, ανάλυσης και διαφορικών εξισώσεων.

Παρ' όλη την ευρύτητα των θεμάτων, ο Hilbert δεν εξάντλησε τα προβλήματα που απασχολούσαν τους μαθηματικούς της εποχής του. Δύο από τις πιο αξιοσημείωτες παραλείψεις του είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat, το οποίο λύθηκε πρόσφατα από τον Andrew Wiles, και το πρόβλημα των τριών σωμάτων της δυναμικής, το οποίο διατύπωσε ο Henri Poincaré (1854-1912).

Μετάλλιο Fields

Μια άλλη παράμετρος που σηματοδοτεί την ανάπτυξη των μαθηματικών του 20ού αιώνα είναι το μετάλλιο Fields. Αν και υπάρχουν και άλλα σημαντικά βραβεία για τα μαθηματικά, όπως το Nevanlinna, το Bordin, το Salem, το Wolf, κ.λπ., το Fields θεωρείται το σημαντικότερο. Είναι, όπως χαρακτηριστικά λέγεται, το «Νόμπελ των μαθηματικών».

Οι επιστήμονες που θα βραβευθούν επιλέγονται από διεθνή επιτροπή κορυφαίων μαθηματικών οι οποίοι χάρισουν καθολικής εκτίμησης. Η απονομή γίνεται κατά τη διάρκεια του Διεθνούς Συνεδρίου Μαθηματικών, κάθε 4 χρόνια. Σύμφωνα με τους κανονισμούς, οι αποδέκτες πρέπει να είναι νεαροί μαθηματικοί, κάτω των 40 ετών.

Ιδρυτής του βραβείου υπήρξε ο καναδός μαθηματικός John Fields (1863-1932), ο οποίος έπεισε τη μαθηματική κοινότητα για την ανάγκη καθιέρωσής του. Ο ίδιος ο Fields εργάστηκε στη θεωρία των αλγεβρικών συναρτήσεων, και στην άλγεβρα γενικότερα. Έχει μάλιστα παραγάγει πρωτότυπο ερευνητικό έργο —μια από τις εργασίες του περιέχει την αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος Riemann-Roch.

Το πρώτο βραβείο Fields απονεμήθηκε το 1936 στο Όσλο, μετά το θάνατο του αθλοθέτη. Αποδέκτες ήταν ο Jesse Douglas (1897-1965), για τη λύση του στο πρόβλη-

μα του Joseph Plateau, και ο Lars Ahlfords (1907-1996), για την εργασία του στις επιφάνειες Riemann. Θα αναφερθούμε διεξοδικότερα σ' αυτές στη συνέχεια.

Οι δύο προηγούμενες βραβεύσεις αποτέλεσαν πρότυπο για τις μελλοντικές βραβεύσεις, και συνέβαλαν στο να καταστεί το βραβείο τόσο σημαντικό. Οι υποψήφιοι έπρεπε να έχουν επλύσει κάποιο δύσκολο πρόβλημα και, κυρίως, να έχουν δημιουργήσει νέες θεωρίες και μεθόδους με τις οποίες να διευρύνουν τα μαθηματικά.

Τα ονόματα των κριτών μένουν κρυφά κατά τη διαδικασία επλογής, αλλά ανακοινώνονται μετά τη βράβευση. Στην πρώτη απονομή, στο Όσλο, κριτές ήταν οι εξέχοντες μαθηματικοί Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, George Birkhoff, Eli Cartan, Francesco Severi και Teiji Takagi. Λόγω του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, τα μετάλλια δεν δόθηκαν για αρκετά χρόνια, αλλά από τη δεύτερη βράβευση, το 1950, δίνονται ανελλιπώς. Μέχρι σήμερα έχουν βραβευθεί σαράντα μαθηματικοί. Όλοι πάντως συνέχισαν να είναι παραγωγικοί και μετά την τιμητική τους διάκριση. Για του λόγου το αληθές, και με κίνδυνο να φανούμε επλεκτικοί, αναφέρουμε ορισμένους από τους βραβευθέντες: Laurent Schwartz (1950), Jean-Pierre Serre (1954), Kunihiko Kodaira (1954), John Milnor (1962), Stephen Smale (1966), Michael Atiyah (1966), Alan Baker (1970), Paul Cohen (1966), Sergei Novikov (1970), Charles Fefferman (1978), Alain Connes (1983), Gerd Faltings (1986), Jean Bourgain (1994). Είναι άλλωστε γεγονός ότι πολλοί από τους σαράντα τιμηθέντες έχουν βραβευθεί στη μετέπειτα καριέρα τους και με άλλα βραβεία, που έχουν διαφορετικά κριτήρια επλογής —π.χ., οι Selberg, Ahlfords, Kodaira, Milnor, Hörmander και Thompson έχουν κερδίσει και το βραβείο Wolf.

Ας δούμε συνοπτικά ορισμένες από τις κατευθύνσεις που έδωσαν οι βραβευθέντες με Fields. Εδώ η περιγραφή απαιτεί μεγαλύτερη προσοχή, διότι η θεματολογία είναι πολύ ειδική και οι τεχνικές λεπτομέρειες επίπονες.

Ήδη αναφερθήκαμε στον P. Cohen, που συμπλήρωσε τις προσπάθειες του Gödel στην αντιμετώπιση του πρώτου προβλήματος του Hilbert —γι' αυτή του τη συμβολή, ο Cohen πήρε το μετάλλιο Fields το 1966. Ας έρθουμε όμως στον πρώτο αποδέκτη, τον J. Douglas. Το πρόβλημα που έλυσε ανάγεται στα πειράματα που διεξήγαγε το 1847 ο βέλγος φυσικός J. Plateau, σχετικά με το σχήμα που παίρνει μια σαπουνόφουσκα στο χώρο, η οποία έχει το σύνορό της σε ένα συρράτινο «δακτυλίδι». Λόγω της επιφανειακής τάσης, η επιφάνειά της έχει ελάχιστο εμβαδόν. Έτσι γεννήθηκε ένας νέος κλάδος που αφορά τις ελάχιστες επιφάνειες με δεδομένο σύνορο. Στη γενική του μαθηματική μορφή, το πρόβλημα είναι το εξής: «Αν δοθεί μια καμπύλη Γ του Jordan στο χώρο \mathbb{R}^n , να αποδειχτεί ότι υπάρχει επιφάνεια με ελάχιστο εμβαδόν και με σύνορο τη Γ ». Η δυσκολία έγκειται στο ότι η καμπύλη μπορεί να έχει πολύπλοκο σχήμα και να μην είναι επίπεδη. Πάντως, μισό αιώνα αργότερα, η θεωρία του Douglas βρήκε απρόσμενες εφαρμογές στη φυσική, στη θεωρία των χορδών.

Ο δεύτερος βραβευθείς με το Fields, την ίδια χρονιά

με τον πρώτο, ήταν ο φιλανδός μαθηματικός L. Ahlfords, για την εργασία του σχετικά με τις επιφάνειες Riemann και τις μιγαδικές πολλαπλότητες. Ο ίδιος παρέμεινε επί μισό αιώνα ένας από τους σημαντικότερους ερευνητές στη μιγαδική ανάλυση και εισηγητής νέων εννοιών, όπως μια γενίκευση των σύμμορφων απεικονίσεων. Στην ίδια ευρύτερη περιοχή κινείται και η εργασία του Kodaira, ο οποίος τιμήθηκε το 1954. Δεν θα μπορέσουμε να παρουσιάσουμε την εργασία αυτή εδώ, λόγω των δύσκολων τεχνικών λεπτομερειών της. Θα αρκεστούμε μονάχα να αναφέρουμε ότι διατέμνει τρεις κλάδους των μαθηματικών —την τοπολογία, τη μιγαδική ανάλυση και την αλγεβρική γεωμετρία.

Τα μετάλλια Fields δόθηκαν σε ερευνητές που επέλυσαν πολύ δύσκολα προβλήματα και επινόησαν πολύπλοκα μαθηματικά, των οποίων η απλή διατύπωση και μόνο απαιτεί ειδικές γνώσεις. Γι' αυτό το λόγο, δεν θα επεκταθούμε άλλο στην περιγραφή των επιτευγμάτων των ιδιοφυών αυτών μαθηματικών —αλλιώς θα πρέπει να υπενθύμισμε στα πεδία της τοπολογίας, της αλγεβρικής γεωμετρίας, της αφηρημένης άλγεβρας, της θεωρίας αριθμών και της συναρτησιακής ανάλυσης. Ωστόσο, θα εξετάσουμε μερικά από αυτά τα θέματα από ευρύτερη σκοπιά, όπως αναπτύχθηκαν τον 20ό αιώνα.

Συναρτησιακή ανάλυση

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των μαθηματικών του 20ού αιώνα είναι η προσπάθεια γενίκευσης εννοιών, και κατεξοχήν εκείνων που αποδεικνύονται γόνιμες. Το όφελος έγκειται στο ότι με τη γενίκευση αναδεικνύεται το βάθος μιας έννοιας, ιδίως για εκείνες τις θεμελιώδεις έννοιες των οποίων τα κύρια χαρακτηριστικά μεταφέρονται από την αρχική τους περιοχή σε άλλες, φαινομενικά ασύνδετες με την πρώτη. Συχνά, μια τέτοια γενίκευση δεν είναι απλή, και χρειάζεται μια διαδοχή από διορατικούς μαθηματικούς ώστε να συμβάλει ο καθένας τους στη σταδιακή διεύρυνση κάποιας έννοιας, από την πρωταρχική της μορφή μέχρι τη σύλληψη που τελικά καθιερώνεται. Τα παραδείγματα είναι πάμπολλα στα μαθηματικά των τελευταίων 100 ετών. Μάλιστα, έχουν αναδυθεί ολόκληροι κλάδοι από την προσπάθεια γενίκευσης απλών πρωταρχικών ιδεών. Εδώ, από τα πολλά παραδείγματα που θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε, θα αναφερθούμε στη συναρτησιακή ανάλυση, ώστε ο αναγνώστης να γνωρίσει την πορεία γενίκευσης μίας-δύο κεντρικών εννοιών. Θα μπορούσαμε, εξίσου καλά, να αντλήσουμε τα παραδείγματά μας από άλλες έννοιες ή άλλους κλάδους, αλλά η περίπτωση της συναρτησιακής ανάλυσης είναι ενδεικτική των παράλληλων δρόμων των άλλων σημαντικών τομέων.

Ένα από τα βασικότερα θεωρήματα της γεωμετρίας είναι το πυθαγόρειο θεώρημα. Σε μια εκδοχή του, στο καρτεσιανό επίπεδο, έχει ως απόρροια ότι το μήκος του διανύσματος (x_1, x_2) του \mathbb{R}^2 είναι $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Ομοίως, στις τρεις διαστάσεις, το μήκος τού (x_1, x_2, x_3) του \mathbb{R}^3 είναι $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Η έννοια του μήκους έχει τη γενίκευ-

οη της στις n διαστάσεις, όπου, κατ' αναλογίαν με το \mathbb{R}^2 και το \mathbb{R}^3 , ορίζουμε ότι το μήκος της n -άδας (x_1, x_2, \dots, x_n) είναι $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Με αυτή την απλή γενίκευση, το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκεται στη βάση των χώρων διάστασης μεγαλύτερης του 3, αλλά η γενίκευση δεν σταματά εκεί. Η ιδέα του Hilbert ήταν να την προωθήσει σε διανυσματικούς χώρους άπειρης διάστασης, όπου τα στοιχεία τους είναι ακολουθίες της μορφής $x = (x_1, x_2, \dots)$. Όρισε, λοιπόν, ως μήκος $\|x\|$ τού x την ποσότητα

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2},$$

με την προϋπόθεση ότι το άπειρο άθροισμα συγκλίνει. Η ιδέα γενικεύεται και άλλο. Αντί τα στοιχεία του χώρου να είναι ακολουθίες, θα μπορούσαν να ήταν συναρτήσεις —λόγου χάρη, συνεχείς συναρτήσεις $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, και τώρα το «μήκος» τους f να ορίζεται, κατ' αναλογίαν, ως

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Από την έννοια του «μήκους» μπορούμε να ορίσουμε και την «απόσταση». Παραδείγματος χάριν, για συναρτήσεις f, g όπως οι παραπάνω, η απόστασή τους ορίζεται ως $\|f - g\|$.

Πριν συνεχίσουμε, ας επανέλθουμε για λίγο στη γεωμετρία του χώρου \mathbb{R}^2 , των δύο διαστάσεων. Είναι απλό να δούμε ότι, αν δύο διανύσματα (x_1, x_2) και (y_1, y_2) είναι κάθετα, τότε μια εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο με κορυφές την αρχή των αξόνων και τα προαναφερθέντα σημεία δίνει

$$(x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$$

Μετά τις απλοποιήσεις, το τελευταίο ισοδυναμεί με το $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$. Ανάλογα στις τρεις διαστάσεις, η συνθήκη είναι: $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. Όπως γενικεύσαμε την έννοια του μήκους, έτσι επεκτείνουμε τώρα την καθετότητα, τόσο στο \mathbb{R}^n όσο και σε χώρους ακολουθιών ή συναρτήσεων στις άπειρες διαστάσεις. Συγκεκριμένα, ορίζουμε πρώτα το εσωτερικό γινόμενο ακολουθιών και συναρτήσεων ως

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i \text{ και } \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

αντίστοιχα, ενώ δύο στοιχεία ονομάζονται κάθετα αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0.

Το πρώτο μας μέλημα είναι να ορίσουμε αυστηρά τους χώρους για τους οποίους εφαρμόζονται τα παραπάνω. Αυτοί, μαζί με άλλες απαιτήσεις που προέρχονται από διαφορετικό δρόμο (όπως, π.χ., η «πληρότητα»), οδήγησαν στους χώρους που σήμερα λέγονται «χώροι Hilbert». Η ονομασία και ο αφηρημένος ορισμός δόθηκαν το 1929 από τον John von Neumann, έναν από τους μεγαλύτερους σύγχρονους μαθηματικούς, ο οποίος ασχολήθηκε με ευρύ φάσμα μαθηματικών —όπως τη θεωρία συνόλων,

τη θεωρία ομάδων, τη θεωρία τελεστών, τη θεωρία παγγίων (την οποία, μαζί με τον Morgenstern, επινόσησε το 1944), την κυβερνητική, τη θεωρία πιθανοτήτων, τη μαθηματική λογική, τη μελέτη των θεμελίων των μαθηματικών και τους υπολογιστές. Στους χώρους Hilbert περιλαμβάνονται χώροι ακολουθιών και χώροι συναρτήσεων (γενικότεροι από αυτό των συνεχών συναρτήσεων που αναφέραμε και όπου, γενικότερα, η ολοκλήρωση είναι τύπου Lebesgue).

Έτσι, σε συνδυασμό με άλλους παράγοντες που εξηγούμε παρακάτω, προέκυψε η συναρτητική ανάλυση. Σε αυτή, μεταξύ άλλων πλεονεκτημάτων, χρησιμοποιείται γεωμετρική γλώσσα και διαίσθηση για τη μελέτη συναρτήσεων. Κατά κάποιον τρόπο, αυτή χρησιμοποιεί την αντίθετη οπτική από την αναλυτική γεωμετρία, όπου εξετάζονται γεωμετρικές ιδιότητες με χρήση άλγεβρας. Στους χώρους Hilbert, η γεωμετρική γλώσσα είναι εμφανής μιλά κανείς για σημεία, υποχώρους, υπερεπίπεδα, σφαίρες, κ.λπ. Άλλα οι γενικεύσεις από τη διαστηματική μας αντίληψη του χώρου που μας περιβάλλει στις άπειρες διαστάσεις δεν είναι απλές. Η επιλογή της κατάλληλης ιδιότητας υπήρξε έργο σημαντικών μαθηματικών —όπως οι Erhard Schmidt, Frigyes Riesz, Stephan Banach (1892-1945) κ.ά.— και βασίστηκε στο έργο μαθηματικών με έργο ήδη από τον 19ο αιώνα —όπως οι William Hamilton (1805-1865), Hermann Grassmann (1809-1877), Giuseppe Peano (1858-1932) κ.ά. Από τη στιγμή όμως που διατυπώθηκε η κατάλληλη έννοια, οι εφαρμογές ήταν τεράστιες, σε κλάδους όπως οι διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις, η κβαντική μηχανική, η αριθμητική ανάλυση, η θεωρία κατανομών κ.λπ.

Γενίκευση των χώρων Hilbert αποτελούν οι χώροι Banach, ενός ιδιαίτερα ισχυρού και καθολικού εργαλείου των σύγχρονων μαθηματικών. Δεν θα αποτολμήσουμε την περιγραφή τους: θα αρκεστούμε να αναφέρουμε ότι ορισμένα προβλήματα που διατύπωσε πριν από 70 χρόνια ο Banach απέδωσαν το μετάλλιο Fields το 1998 στον άγιο μαθηματικό Timothy Gowers, (1963-) ο οποίος τα επέλυσε προσφάτως.

Απλές ομάδες

Μεγάλο τμήμα των μαθηματικών του 20ού αιώνα ασχολείται με τις «δομές», όπως είναι οι ομάδες, οι δακτύλιοι, τα σώματα, οι διανυσματικοί χώροι, οι τοπολογικοί χώροι, οι μετρικοί χώροι, οι χώροι Hilbert, οι άλγεβρες Lie, οι άλγεβρες Banach και δεκάδες άλλες. Κάθε τέτοια δομή έχει πάμπολλες εφαρμογές σε πολλά πεδία των μαθηματικών. Οι ομάδες, για παράδειγμα, βρίσκουν εφαρμογές στη θεωρία εξισώσεων, στη θεωρία αριθμών, στη διαφορική γεωμετρία, στη θεωρητική φυσική, στην κρυσταλλογραφία, κ.ά.

Δεν θα είχε νόημα να ασχοληθούμε περισσότερο εδώ με όλες αυτές τις δομές ή τις εφαρμογές τους. Για να σχηματίσει όμως ο αναγνώστης μια εικόνα από τα μαθηματικά του αιώνα που πέρασε, θα αναφερθούμε σε ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα που λύθηκε μόλις το 1980. Πρόκειται για τη λεγόμενη ταξινόμηση των «απλών ομάδων».

Οι απλές ομάδες (δεν χρειάζεται να δώσουμε τον ορισμό) είναι κάτι ανάλογο με τους πρώτους αριθμούς μεταξύ των ακεραίων, όπου κάθε ακέραιος γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων. Οι πεπερασμένες ομάδες έχουν την ιδιότητα να γράφονται κατά μοναδικό τρόπο ως «γινόμενο» απλών ομάδων. Οπότε γεννήθηκε, από τη δεκαετία του 1940, το πρόβλημα της εύρεσης και ταξινόμησης όλων των απλών ομάδων.

Τα αποτελέσματα υπήρξαν εκπληκτικά. Για την εύρεση των απλών ομάδων χρειάστηκε το συλλογικό έργο τουλάχιστον εκατό μαθηματικών, γράφτηκαν τουλάχιστον 500 σχετικά άρθρα συνολικής έκτασης 15.000 σελίδων. Την τελευταία σελίδα, με την οποία έκλεινε το πρόβλημα, την έγραψε το 1980 ο αμερικανός μαθηματικός Ronald Solomon.

Πολλές από τις απλές ομάδες είχαν κοινές ιδιότητες. Παραδείγματος χάριν, οι αντιμεταθετικές απλές ομάδες βρέθηκαν ότι ήταν όλες της μορφής \mathbb{Z}_p (ακέραιοι με πράξη την πρόσθεση mod p , όπου p πρώτος). Τελικά βρέθηκαν 18 οικογένειες απλών ομάδων όμως, εκτός από αυτές, υπήρχαν και ομάδες που δεν ανήκαν σε καμία από τις συγκεκριμένες οικογένειες. Ονομάστηκαν σποραδικές, και είχαν η καθεμία τα δικά της μοναδικά χαρακτηριστικά. Οι πέντε πρώτες σποραδικές ομάδες ήταν γνωστές από τη δεκαετία του 1860, αλλά η έκτη βρέθηκε έναν αιώνα αργότερα, το 1965. Τελικά βρέθηκαν όλες οι σποραδικές ομάδες, 26 τον αριθμό. Μερικές από αυτές έχουν τεράστιο πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα, η μεγαλύτερη έχει περίπου $8 \cdot 10^{53}$ στοιχεία!

Το σημαντικότερο βήμα στην ταξινόμηση των απλών ομάδων έγινε το 1962 από τους Walter Feit και John Thompson, οι οποίοι απέδειξαν, σε μια εργασία 255 σελίδων, ότι κάθε απλή ομάδα είναι είτε «κυκλική» είτε έχει άρτιο πλήθος στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό, απέδειξαν μια εικασία του μεγάλου αλγεβριστή Burnside, την οποία είχε διατυπώσει παρατηρώντας τις γνωστές κατά την εποχή του σποραδικές ομάδες. Ως αναγνώριση της προσφοράς τους, τους απονεμήθηκε το βραβείο Cole στην αλγεβρα, το 1965.

Όταν πάντως έβαλε την «τελεία και παύλα» ο Solomon, το 1980, είχε αποδειχτεί το μεγαλύτερο (σε πλήθος σελίδων) θεώρημα όλων των μαθηματικών. Σύμφωνα μ' αυτό, κάθε απλή ομάδα είναι είτε στοιχείο μιας των 18 οικογενειών είτε μία από τις 26 σποραδικές.

Διάφορα προβλήματα

Θα κλείσουμε το παρόν άρθρο κάνοντας μια σύντομη αναφορά σε ορισμένα προβλήματα που λύθηκαν τον 20ό αιώνα αλλά προηγουμένως είχαν απασχολήσει πολλές γενιές μαθηματικών καθώς και σε ορισμένα που παραμένουν ανοικτά.

Το πρώτο είναι το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων. Σύμφωνα με αυτό, σε κάθε επίπεδο χάρτη επαρκούν τέσσερα χρώματα για να χρωματιστούν οι χώρες έτσι ώστε όμορες χώρες να φέρουν διαφορετικό χρώμα. Το πρόβλημα είχε διατυπωθεί το 1852 από τον Francis Guthrie και λύθηκε το 1976 από τους Kenneth Appel και Wolfgang

Haken του Πανεπιστημίου του Ιλινόις στις ΗΠΑ. Η λύση του περιείχε ένα στοιχείο που δεν υπήρχε μέχρι τότε στα μαθηματικά: Μεγάλο τμήμα των συλλογισμών των Appel και Haken πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Ο λόγος ήταν ότι απαιτούνταν πολύ κοπιαστικοί υπολογισμοί, οι οποίοι ήταν αδύνατο να γίνουν με το χέρι. Στην αρχή, πολλά μέλη της μαθηματικής κοινότητας αντέβρασαν, ισχυριζόμενα ότι η απόδειξη δεν θα έπρεπε να γίνει αποδεκτή αφού τα βήματα των υπολογιστών δεν μπορούσαν να ελεγχθούν. Σήμερα, ύστερα από πολλαπλούς ελέγχους των πράξεων με ανεξάρτητους υπολογιστές, οι περισσότεροι αποδέχονται την απόδειξη.

Αναφέραμε παραπάνω ότι στη μιγαδική ανάλυση παραμένει ανοικτό πρόβλημα η «εικασία του Riemann». Στον ίδιο κλάδο, όμως, έκλεισε θετικά, το 1984 από τον Louis de Branges στις ΗΠΑ, η περίφημη «εικασία του Bieberbach», διατυπωμένη το 1916. Σύμφωνα με αυτή, κάθε σειρά της μορφής

$$f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

που συγκλίνει για $|x| < 1$ (όπου x μιγαδικός) και όπου ηf είναι ένα προς ένα συνάρτηση, ικανοποιεί την $|a_n| \leq n$ για κάθε $n \geq 2$. Η πιο «ακραία» τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση Koebe,

$$k(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots,$$

που ισούται με $\frac{x}{(1-x)^2}$ —και άρα είναι ένα προς ένα.

Επίσης, έκλεισε πριν από λίγα χρόνια, και με καθυστέρηση τριών αιώνων, το «τελευταίο θεώρημα του Fermat». Η ιστορία του έγινε τόσο γνωστή που δεν υπάρχει λόγος να αναφέρουμε περισσότερα για αυτό το επίτευγμα του Wiles.

Αυτά λοιπόν είναι, εν συντομίᾳ, ορισμένα από τα επιτεύγματα των μαθηματικών του 20ού αιώνα. Εάν ήμασταν λίγο πιο αναλυτικοί ή αν αναφέραμε έστω και λίγα από αυτά που παραλείψαμε, όπως το έργο του Poincaré, το έργο του Bourbaki, τα φράκτα, τη θεωρία κόμβων, την τοπολογία, τις διαφορικές εξισώσεις, τη θεωρία μέτρου, την αρμονική ανάλυση, την αλγεβρική γεωμετρία, τη διαφορική γεωμετρία, τη θεωρία αριθμών, την αριθμητική ανάλυση, τις μηχανές Turing και τόσους άλλους κλάδους, δεν θα επαρκούσε ούτε ένας ογκώδης τόμος για να τα συμπεριλάβουμε όλα.

Ανοικτά προβλήματα υπάρχουν πολλά. Ήδη μνημονεύσαμε το πρόβλημα των διδυμών πρώτων. Άλλο εξίσου γνωστό είναι η «εικασία του Goldbach», διατυπωμένη το 1742, που ρωτά αν κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 3 γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων. Έχει ελεγχθεί με υπολογιστή ότι η απάντηση είναι καταφατική μέχρι τον τεράστιο αριθμό $4 \cdot 10^{10}$. Με υπολογιστή, επίσης, έχει ελεγχθεί μέχρι τον ασύλληπτα μεγάλο 10^{300} ότι δεν υπάρχει περιττός τέλειος αριθμός, αλλά το γενικό ερώτημα παραμένει ανοικτό. Και την απάντηση σ' αυτό, και σε τόσα άλλα, πιθανόν να φανούμε τυχεροί να τη δούμε στη νέα εκατονταετία που ήδη διανύουμε. □

Τις αγορεύειν βούλεται;

Ποια είναι κατά τη γνώμη σας η σημαντικότερη εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών;*

Το τυπογραφικό πιεστήριο

Προσωπικά, αυτή θεωρώ ως την πιο σημαντική εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών. Όταν τον 15ο αιώνα ο William Caxton εξέδωσε τις *Istorieς του Καντέρμπερυ* του Τζέφρου Τσώσερ χάρη στη νεοεφευρεθείσα τυπογραφική μηχανή του, επιτάχυνε δραματικά το διαχωρισμό του ανθρώπινου πολιτισμού από τη φύση αντικαθιστώντας την άμεση εμπειρία των φυσικών διαδικασιών που μεταδίδοταν μέσω της προφορικής παράδοσης με τον γραπτό λόγο.

Αυτή η καινοτομία είχε δύο συνέπειες. Αφενός, κατέστη δυνατή η συστηματική συγκέντρωση γνώσεων ώστε να έχουμε τη φύση υπό τον έλεγχό μας, να μην εξαρτώμαστε άμεσα από αυτήν και να απελευθερώσουμε τη φαντασία μας. Αφετέρου, αντιμετωπίσαμε ταυτόχρονα τη φύση ως κάτι περισσότερο από ένα σύνολο μηχανισμών τους οποίους μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για τους δικούς μας σκοπούς —έτοι πρωτάρχισε η «λεηλασία της φύσης».

Στις μέρες μας δρέπουμε ίδιους καρπούς: από τη μια έχουμε την ολοένα αυξανόμενη δυνατότητα γραπτής επικοινωνίας μέσω του Διαδικτύου, από την άλλη έναν υπερβολικά υποβαθμισμένο πλανήτη ο οποίος, σύμφωνα με όλες τις ενδείξεις, δεν θα μας συντηρεί για πολύ ακόμα. Όλοι αναγνωρίζουμε την αύξηση της θερμοκρασίας του πλανήτη, τη χημική μόλυνσή του, την υποβάθμιση βασικών για την επιβίωση πόρων, την εξαφάνιση πολ-

λών ειδών και τον ανθρώπινο υπερπληθυσμό ως απτά σημεία της κρίσης.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα οφέλη για να αποφύγουμε την καταστροφή; Σήμερα, είναι δυνατή, όσο ποτέ άλλοτε, η μεταξύ μας επικοινωνία· τι γίνεται όμως με την υπόλοιπη φύση; Θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας προκειμένου να αποκαταστήσουμε τους δεσμούς αμοιβαίας εξάρτησης μεταξύ των ανθρώπων και των άλλων μελών της πλανητικής κοινωνίας μας; Θα πάψουμε να δρούμε ως εκμεταλλευτές, συμμετέχοντας πλέον υπεύθυνα στο δημιουργικό γίγνεσθαι, διαδικασία που αφορά όλους μας; Θα χρησιμοποιήσουμε τη φαντασία μας για να απελευθερώσουμε από την πολιτισμική παραμόρφωση που προέκυψε από την αντικατάσταση της φύσης με σύμβολα σε μια σελίδα;

—Brian C. Goodwin, καθηγητής βιολογίας
στο Κολλέγιο Schumacher του Ντάρλινγκτον,
στο Ντέβον της Αγγλίας.

Ο σανός

Καλή ερώτηση. Κατά την άποψή μου, η σπουδαιότερη εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών υπήρξε ο σανός. Στους κλασικούς χρόνους της Ελλάδας και της Ρώμης, και σε όλες τις πρότερες περιόδους, δεν υπήρχε σανός. Πολιτισμός ήταν δυνατόν να αναπτυχθεί μόνο στα θερμά κλίματα, όπου τα άλογα μπορούσαν να βόσκουν και κατά τη διάρκεια του χειμώνα. Ελλείψει χορτονομής το χειμώνα, ο άνθρωπος δεν μπορούσε να εκθρέψει άλογα, και χωρίς αυτά δεν υπήρχε πολεομορφικός πολιτισμός. Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα, κάποια ανώνυμη ιδιοφυΐα ανακάλυψε το σανό· τα δάσος μετατράπηκαν σε λιβάδια, ο σανός θεριζόταν και αποθηκευόταν, και ο πολιτισμός μετακινήθηκε βόρεια, πέρα από τις Άλπεις. Έτσι, ο σανός επέτρεψε να δημιουργηθεί η Βιέννη, το Παρίσι, το Λονδίνο, και αργότερα η Μόσχα και η Νέα Υόρκη.

—Freeman Dyson, καθηγητής φυσικής
στο Ινστιτούτο Ανωτέρων Σπουδών
του Πρίντον, στο Νιού Τζέρσον.

* Εφευρίσκω σημαίνει επινοώ· σημαίνει ότι βρίσκω κάτι για πρώτη φορά· κάτι που δεν υπήρχε πριν. (Έτσι, λέμε ότι «Ο Έντισον εφηύρε το φωνόγραφο.») Το εφευρίσκω/εφεύρεση διαφέρει σημαντικά από το ανακαλύπτω/ανακάλυψη. Ανακαλύπτω σημαίνει ότι βρίσκου και για πρώτη φορά κάνω γνωστό ευρύτερα κάτι που ήδη υπήρχε. (Έτσι, λέμε ότι «Ο Κολόμβος ανακάλυψε την Αμερική.»)

Την ερώτηση «Ποια είναι κατά τη γνώμη σας η σημαντικότερη εφεύρεση των τελευταίων 2.000 ετών;» υπέβαλε σε πλήθος επιστημόνων —κυρίως Αμερικανών— ο John Brockman, συγγραφέας, εκδότης, και φίλος του περιοδικού μας. Έτσι, για όλο το 2001, από τις σελίδες του ελληνικού *Quantum* θα μπορέσετε να απολαύσετε τις σχετικές απαντήσεις, αλλά και όσες θα μας παραχωρήσουν έλληνες επιστήμονες.

Ο ηλεκτρικός κινητήρας

Ναι, ο ηλεκτρικός κινητήρας, σε όλες τις μορφές του με τις οποίες ο ηλεκτρισμός παράγει μηχανική κίνηση.

Η βιομηχανική επανάσταση περιορίστηκε στους χώρους της εργασίας και της παραγωγικής δραστηριότητας, έως ότου ο σχετικά μικρός και «καθαρός» ηλεκτρικός κινητήρας κατέστησε δυνατή την προσφορά των ωφελειών του στο σπίτι: ψύξη, αυτόματος καθαρισμός, κλιματισμός, καλύτερη θέρμανση, ψυχαγωγία, μαζική αποθήκευση δεδομένων, ιατρική περιθαλψη κατ' οίκον, και πολλά άλλα.

Είναι γεγονός πως πολλά από αυτά τα αγαθά υπήρχαν ήδη στο σπίτι χάρη σε απλούστερες μορφές τεχνολογίας —για παράδειγμα, υδραυλικές εγκαταστάσεις οι οποίες λειτουργούσαν μέσω της φυσικής ροής του νερού από ψηλότερα σε χαμηλότερα σημεία, ή η θέρμανση του χώρου με ρεύμα αέρα—, αλλά ο ηλεκτρικός κινητήρας συνέβαλε στην ευρεία διάδοσή τους. Η μεταμόρφωση του δυτικού τρόπου ζωής υπήρξε ριζική και μετέβαλε εντελώς την προοπτική της προσαρμογής μας στο καθημερινό περιβάλλον.

—Rodney Brooks, διευθυντής του Εργαστηρίου Τεχνητής Νοημοσύνης στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης (MIT).

Το ινδοαραβικό σύστημα αριθμησης

Η αγαπημένη μου εφεύρεση είναι το σύστημα θέσης για τη γραφή των αριθμών σε συνδυασμό με τη χρήση του συμβόλου 0 για το μηδέν, που ενέχει την έννοια ενός ανύπαρκτου αριθμού. Ο συγκεκριμένος τρόπος αριθμησης, που σηματοδοτεί τη γέννηση των μαθηματικών, επινοήθηκε στην Ινδία πιθανόν κατά το 1000 π.Χ., συστηματοποιήθηκε, για πρώτη φορά, από τον ινδό μαθηματικό και αστρονόμο Aryabhata I, προς το τέλος του 5ου αιώνα μ.Χ., και στη συνέχεια μεταδόθηκε στη Δύση μέσω των Αράβων (εξ ου και η έκφραση «αραβικοί αριθμοί»). Πριν από αυτή την περίοδο, ακόμη και οι απλές αριθμητικές πράξεις ήταν κουραστικές και χρονοβόρες (καθώς τότε, οι Ρωμαίοι και οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τους δύσχρηστους «ρωμαϊκούς αριθμούς» —που καμιά φορά χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα). Τα μαθηματικά είναι βέβαια απαραίτητα για όλες τις επιστήμες. Χωρίς την αρχική επινόηση του μηδενός και του συστήματος θέσης δεν θα λάμβαναν χώρα οι μεταγενέστερες πρόσδοι. Δεν θα υπήρχε ο απειροστικός λογισμός, η επιστήμη του Νεύτωνα και του Γαλιλαίου, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές και, ουσιαστικά, ο σύγχρονος κόσμος.

—V. Ramachandran, καθηγητής νευροεπιστημών και ψυχολογίας στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, στο Σαν Ντιέγκο.

Η έννοια της εκπαίδευσης

Η πο σημαντική ανθρώπινη εφεύρεση δεν είναι κάποιο τεχνούργημα —σαν να λέμε, το αντισυλληπτικό χάπι ή

η ηλεκτρική ξυριστική μηχανή. Είναι μια ιδέα· εκείνη η ιδέα που κατέστησε δύνατά όλα τα τεχνολογικά επενδύματα: η έννοια της εκπαίδευσης.

Ο εγκέφαλός μας δεν αποτελεί παρά μια συλλογή από δίκτυα νευρώνων και συνάψεων —δίκτυα που σχεδιάσεις και ανέπτυξε η εξέλιξη για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Όμως, μέσω της εκπαίδευσης και του πολιτισμού, ανακαλύψαμε τρόπους «ανακύκλωσης» αυτών των δίκτυων για άλλες χρήσεις. Με την επινόηση της γραφής χρησιμοποιήσαμε το οπτικό μας σύστημα για την ανάγνωση. Με την επινόηση των μαθηματικών, προσαρμόσαμε τα σχετιζόμενα με την αντίληψη των αριθμών, του χώρου και του χρόνου δίκτυα, ώστε να αντιμετωπίσουμε κάθε ειδούς πρόβλημα που ξεπερνούσε την αρχική σχετική σφαίρα δραστηριότητάς τους. Η εκπαίδευση αποτελεί τη θεμελιώδεστερη εφεύρεση, η οποία καθιστά δυνατές όλες αυτές τις ανακαλωδιώσεις που συμβαίνουν στη φάση της ζωής κατά την οποία ο εγκέφαλος ακόμα μπορεί να τροποποιείται επί τα βελτίων.

Σκεφτείτε ότι χωρίς εκπαίδευση θα χρειάζονταν περίπου 25 χρόνια (μία γενιά ανθρώπων) για να εξαφανιστούν από τον πλανήτη μας όλες οι εφευρέσεις τις οποίες πιθανόν να μνημονεύσουν όσοι άλλοι απαντήσουν στο ερώτημά σας.

—Stanislas Dehaene, γνωστακός νευροεπιστήμων στο Εθνικό Ινστιτούτο Υγείας και Ιατρικής Έρευνας της Γαλλίας, στο Ορέ.

Η άρνηση προς το υπερφυσικό

Πριν απαντήσω, θα ήθελα να σχολιάσω ότι δεν είμαι σίγουρος πως η επιλογή μου αρμόζει στην ερώτησή σας. Πρώτα πρώτα, δεν είμαι βέβαιος πως πρέπει να θεωρηθεί εφεύρεση και όχι ανακάλυψη. Επίσης, δεν γνωρίζω αν αποτελεί καινοτομία των τελευταίων 2.000 ετών. Είναι πιθανόν πολλοί να είχαν καταλήξει σ' αυτή προ Χριστού· κι αν όντως συνέβη έτσι, μερικοί απ' αυτούς τους ανθρώπους μπορεί να είχαν ξεπέρασε τον ευνόητο φόβο της συζήτησης των ιδεών τους δημοσίως. Κατά συνέπεια, πιθανόν να υπάρχουν τεκμηριωμένες μαρτυρίες εδώ και περισσότερα από 2.000 χρόνια.

Εν πάσῃ περιπτώσει, η πιο σημαντική «εφεύρεση» που μπορώ να σκεφτώ είναι η άρνηση μας να πιστεύουμε στο υπερφυσικό —η συνειδητοποίηση ότι αποτελούμε μέρη ενός σύμπαντος που διέπεται πλήρως από τους φυσικούς νόμους και την τύχη. (Βέβαια, ο θεμελιώδης ρόλος του τυχαίου παράλληλα με το νόμο δεν είχε γίνει επαρκώς αντιληπτός πριν την ανακάλυψη της κβαντικής μηχανικής. Σ' αυτή την πρώιμη εποχή, το τυχαίο μπορούσε να θεωρηθεί, εξ ολοκλήρου, ως απόρροια της άγνοιας μας για τις αρχικές συνθήκες σε έναν απόλυτα αιτιοκρατικό κόσμο.)

—Murray Gell-Mann, θεωρητικός φυσικός, κάτοχος του βραβείου Νόμπελ για το 1969 στη φυσική, συνιδρυτής του Ινστιτούτου της Σάντα Φε, όπου είναι καθηγητής.

Ο προσδιορισμός της νουκλεοτιδικής αλληλουχίας

Οι λειτουργίες του ανθρώπινου σώματος και του εγκεφάλου υποστηρίζουν όλα τα βιώματα που συνθέτουν την ύπαρξή μας. Οι ανακαλύψεις, λοιπόν, που θα μας επιτρέψουν να ελέγξουμε πλήρως αυτές τις λειτουργίες και να τις προσαρμόσουμε στις επιθυμίες μας, είναι βέβαιο ότι αξίζουν να αναγορευθούν ως οι σημαντικότερες των δύο τελευταίων χιλιετιών.

Αυτή η άποψη απορρέει γενικώς από τον τομέα της επιστήμης που τώρα αποκαλείται μοριακή βιολογία. Αλλά, αν θα έπρεπε να ξεχωρίσω την πιο σημαντική εφεύρεση που καθιστά την προαναφερθείσα διαδικασία δυνατή, θα επέλεγα τον προσδιορισμό της νουκλεοτιδικής αλληλουχίας. Οι νέες τεχνικές που αναπτύχθηκαν από τον Fred Sanger στο Καΐμπριτζ και από τον Walter Gilbert στο Χάρβαρντ, στα μέσα της δεκαετίας του 1970, μας επέτρεψαν να «διαβάσουμε» ταχύτατα και με ακρίβεια τις πληροφορίες που υπάρχουν «αποθηκευμένες» στα γονιδιά μας, καθώς και αυτές όλων των άλλων έμβιων όντων της Γης.

Οι νέες μέθοδοι υποκίνησαν μια έκρηξη επιστημονικής δραστηριότητας, η οποία θα κορυφωθεί τη δεκαετία που διανύουμε, όταν η αλληλουχία περίπου 3 δισεκατομμυρίων χαρακτήρων του DNA οι οποίοι κωδικοποιούν έναν τυπικό άνθρωπο θα αποκρυπτογραφηθούν πλήρως από το Πρόγραμμα Χαρτογράφησης του Ανθρώπινου Γονιδιώματος. Σε επακόλουθες έρευνες θα προσδιορίσουμε πώς τα άτομα διαφέρουν δύον αφορά την κληρονομικότητα και πώς αυτή η πληροφορία εκφράζεται ώστε να δημιουργηθεί το ανθρώπινο σώμα.

Ως τώρα, οι συνέπειες του προσδιορισμού της νουκλεοτιδικής αλληλουχίας είχαν αντίκτυπο σε εμάς μέσω κάποιων γεγονότων που προβλήθηκαν εκτενώς από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης, όπως η ταυτοποίηση της κηλίδας στο φόρεμα της Μόνικα Λεβίνσκι, η επικύρωση της ταυτότητας των οστών των Ρομανώφ, και η επιβεβαίωση της ερωτικής σχέσης μεταξύ του Τόμας Τζέφερσον και της Σάλυ Χέμινγκκες. Όμως, έπονται πολλά βήματα προόδου. Η αποπεράτωση του Προγράμματος Χαρτογράφησης του Ανθρώπινου Γονιδιώματος θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε, σε μοριακό επίπεδο, τις κληρονομικές ασθένειες του ανθρώπου· ήδη γνωρίζουμε αρκετά για τη νόσο του Huntington, την κυστική ίνωση κ.ά. Επιπλέον, με τη χρήση και άλλων «εργαλείων» της μοριακής βιολογίας, θα μπορέσουμε να δράσουμε έναντι αυτών των ασθενειών στο άμεσο μέλλον. Θα θεραπευτούν και (αν η κοινωνία το επιτρέψει) θα «διορθωθούν» σε γενετικό επίπεδο. Πέραν τούτου, θα κατανοήσουμε και πιθανόν θα ελέγξουμε πολλές ατυχείς πλευρές της ανθρώπινης κατάστασης, που μέχρι σήμερα λαμβάναμε ως δεδομένες —τα πάντα, από τη φαλάκρα ώς το γήρας. Εν τέλει, θα μπορούμε να επλέγουμε την επαναγραφή του γενετικού μας «κειμένου», αλλάζοντας τόσο τον εαυτό μας όσο και τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε το σύμπαν.

Θα ήθελα να σημειώσω πως κάθε σφυγμομέτρηση της

κοινής γνώμης που θα γινόταν σήμερα δεν θα δικαίωνε αυτή την εφεύρεση, καθώς οι περισσότερες από τις συνέπειες της δεν έχουν ακόμα διερευνηθεί. Ισως θα έπρεπε να αποφασίσουμε μια άλλη σφυγμομέτρηση για το έτος 4000, εφόσον τότε η πάροδος δύο επιπλέον χιλιετιών θα μας παράσχει περισσότερες προοπτικές.

—Robert Shapiro, καθηγητής χημείας στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης.

Ο διαφορικός λογισμός

Σε μια κρίση ειλικρίνειας, απείχα ελάχιστα από το να ενδώσω στον πειρασμό και να προτείνω το ηλεκτρονικό σύστημα κεντρικού κλειδώματος των σύγχρονων αυτοκινήτων ως τη μέγιστη συνεισφορά στην άνεση της σύγχρονης ζωής· όμως αυτή είναι μια κοινότοπη εφεύρεση.

Εν τέλει, δεν έχω καμία αμφιβολία ότι η επινόηση του διαφορικού λογισμού από τον Νεύτωνα και, ανεξάρτητα, από τον σύγχρονό του Leibniz είναι η σημαντικότερη των τελευταίων 2000 ετών. Ο διαφορικός λογισμός έθεσε τις βάσεις όλων των τομέων της σύγχρονης επιστήμης. Επιπλέον, δεν ήταν μία κοινότοπη επινόηση. Ο Νεύτων γνώριζε πως η ταχύτητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η απόσταση (συναρτήσει του χρόνου) και πως η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα (συναρτήσει του χρόνου). Απείχε όμως πολύ από το αυταπόδεικτο, ότι αυτά τα μεγέθη μπορούσαν να συναχθούν από τα γεωμετρικά σχήματα των πλανητικών τροχιών του Kepler. Στις μέρες μας, βέβαια, οι μαθητές του λυκείου μπορούν να παίξουν το «παιχνίδι» του Νεύτωνα —είναι απλώς θέμα «αλλαγής των μεταβλητών», όπως οι δύοι λένε.

Κατά τον 17ο αιώνα, δεν ήταν προφανές ότι ο διαφορικός λογισμός θα ασκούσε μέγιστη επιρροή στην επιστήμη, όπως απέδειξαν τα μεταγενέστερα γεγονότα. Πράγματι, ο Daniel Bernoulli υποστήριξε πως ο Νεύτων χρησιμοποίησε σκόπιμα δυσονόητους όρους για να περιγράψει τη δική του «μέθοδο των ροών», ώστε να κρατήσει το μυστικό για τον εαυτό του. Άλλα και η τεχνική του Leibniz δεν ήταν ιδιαίτερα διαφανής. Έτσι, ο Bernoulli ανέλαβε μόνος του να ερμηνεύσει τις συγκαλυμμένες θεωρίες —όπως, ας πούμε, έπραξε ο Freeman Dyson καθιστώντας κατανοητή την ηλεκτροδυναμική θεωρία του Feynman, τη δεκαετία του 1940.

Και ο Νεύτων και ο Leibniz αντελήφθησαν ότι η αντιστροφή της διαφοριστικής οδηγεί στον υπολογισμό του «υπό την καμπύλη εμβαδού» (για τον οποίο ο Νεύτων είχε νωρίτερα αφιερώσει πολύ χρόνο), ωστόσο αυτός που επινόησε το σύμβολο του ολοκληρώματος, που τώρα το βρίσκουμε σε όλα τα μαθηματικά συγγράμματα, ήταν ο Leibniz. Το ότι αυτές οι εξελίξεις μεταμόρφωσαν εντελώς τα μαθηματικά συνιστά γεγονός αδιαμφιθήτητο.

Άλλα η επίδραση του διαφορικού λογισμού στη φυσική και τελικά σε όλους τους τομείς της επιστήμης, υπήρξε ακόμα πιο καταλυτική. Θα μπορούσαν άραγε να διατυπωθούν και οι σύγχρονες θεωρίες —από αυτές του Maxwell και του Αϊνστάιν ώς εκείνες των Schrödinger/

Feynman/Schwinger/Weinberg κ.λπ.— χωρίς τον διαφορικό λογισμό;

Τα ίδια θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε και για την επινόηση της αριθμητικής, αλλά τούτη χρονολογείται πριν τα τελευταία 2000 έτη. Μετά απ' αυτή, λοιπόν, ο διαφορικός λογισμός αποτέλεσε το επόμενο μεγάλο άλμα προς τα εμπρός.

—John Maddox, φυσικός, επίτιμος διευθυντής συντάξεως του περιοδικού *Nature*.

Το «χάπ», το όπλο και η υδραυλική

Συλλογίστηκα την ερώτησή σας αρκετά, και θα ήθελα να αποκλίνω λίγο, δίνοντας περισσότερες από μία απαντήσεις.

Επιλέγω λοιπόν το αντισυλληπτικό χάπ. Είναι επαναστατικό για δύο λόγους. Πρώτον, συνιστά σημαντικό άλμα στην αποτελεσματικότητα των προσπαθειών για έλεγχο της ανθρώπινης γονιμότητας —προσπάθειες τις οποίες συναντάμε σε κάθε γνωστό πολιτισμό και που πιθανόν χρονολογούνται εδώ και τουλάχιστον εκατό χιλιετίες. Το χάπ και τα παρεπόμενα εξαρτήματα προμήνυναν μια επανάσταση στη ζωή των γυναικών ανά τον κόσμο, από την εφηβεία έως την εμμηνόπαυση, καθιστώντας ικανό το ήμισυ του ανθρώπινου πληθυσμού να ορίζει την ενήλικη ζωή του με το να ελέγχει τη γονιμότητά του.

Επιπλέον, αυτά τα εξαρτήματα μπορεί να σώσουν τη Γη από τους τεράστιους κινδύνους —παρόντες και μελλοντικούς— που συνεπάγεται ο ανθρώπινος υπερπληθυσμός: μαζική ένδεια, πανδημίες, πόλεμοι, βίαιες συγκρούσεις για τους λιγοστούς πόρους, περιβαλλοντική υποβάθμιση και ομαδικές εξαφανίσεις ειδών.

Η επόμενη επλογή μου για το πιο σημαντικό τεχνολογικό επίτευγμα των τελευταίων 2.000 ετών είναι το όπλο —ή ακριβέστερα μια σειρά ευρωπαϊκών εφευρέσεων αποτελεσματικής φονικής τεχνολογίας. Το κανόνι πλοίου με κιλλίβαντα, ο ισπανικός καταπέλτης και το βρετανικό τουφέκι με ραβδωτή κάννη τύπου Snider είναι μόνο μερικά από τα όπλα του πρόσφατου παρελθόντος. Αυτά, στα χέρια των ευρωπαϊκών αυταρχικών κοινωνιών, των οποίων οι πληθυσμοί δεν μπορούσαν πλέον να συντηρηθούν από τους πόρους της πατρίδας τους, υπήρχαν το μέσο για την κατάκτηση μεγάλων ηπειρωτικών εκτάσεων, πόρων και ανθρώπινων πληθυσμών ανά τον πλανήτη. Αποφασισμένοι να κατακτήσουν και νέα εδάφη, οι Ευρωπαίοι διέσχισαν τον Ατλαντικό και τον Ειρηνικό ωκεανό, με πλοία κατασκευασμένα σύμφωνα με την πιο προηγμένη ναυπηγική τεχνολογία της εποχής τους. Οι βαρυσήμαντες επιπτώσεις των κατακτήσεων αυτών θα συνεχίσουν να επηρεάζουν κάθε τομέα της ανθρώπινης ζωής ανά τον κόσμο και την επόμενη χιλιετία.

Η τελευταία επλογή μου είναι οι επαναστατικές βελτιώσεις της εφαρμοσμένης υδραυλικής στα τέλη του 19ου αιώνα, οι οποίες έδωσαν λύση στο, μοναδικό και σημαντικότατο για χιλιετίες, πρόβλημα της αστικής ζωής: πώς να γίνει η υδροδότηση με καθαρό νερό και πώς να

απομακρυνθούν οι ανθρώπινοι ρύποι ενός μεγάλου οικισμού. Ενώ τα ρωμαϊκά υδραγωγεία ήταν ευφυώς σχεδιασμένα (εγκαταστάσεις που χρονολογούνται πριν το όριο των τελευταίων 2000 ετών που θέσατε στο ερώτημά σας), βελτιώσεις στην υγιεινή πραγματοποιήθηκαν μόλις πριν από έναν περίπου αιώνα —γεγονός που οδήγησε τις βιομηχανικές κοινωνίες, όπως αυτές της Βρετανίας και των ΗΠΑ, σε μια κατακόρυφη μείωση του ρυθμού των θανάτων από λοιμώδεις ασθένειες μεταδιδόμενες μέσω περιττωματικής μόλυνσης του πόσιμου νερού. Αυτές οι πρόδοις στην υδραυλική μηχανολογία αύξησαν το προσδόκιμο επιβίωσης του ανθρώπου περισσότερο και από τη μεταγενέστερη ανακάλυψη των αντιβιοτικών.

Η εν λόγω τεχνολογία εξαπλώθηκε παγκοσμίως, αλλά με αργό ρυθμό, καθώς συνάντησε εμπόδια που προήλθαν από την άνιση κατανομή του πλούτου και της εξουσίας. Παρ' όλα αυτά, αποτελεί τραγική ειρωνεία το γεγονός ότι τα αποτελέσματα αυτής της εξάπλωσης, τα οποία οδήγησαν στη σημερινή μακροζωία, και ο έλεγχος της γονιμότητας, ο οποίος ελαττώνει τους ρυθμούς της θνησιμότητας (όταν αυτοί δεν εξαρτώνται από άλλους παράγοντες), συμβάλλουν τα μέγιστα στη συνεχώς αυξανόμενη κρίση του ανθρώπινου υπερπληθυσμού. Και αυτό καθιστά την ευρεία διαθεσιμότητα της προηγμένης αντισυλληπτικής τεχνολογίας —που εφευρέθηκε δύο γενιές αργότερα— ακόμα πιο σημαντική για την επιβίωση και την ευημερία του ειδους μας και ολόκληρου του πλανήτη.

—Maria Lepowsky, καθηγήτρια στο Τμήμα Ανθρωπολογίας του Πανεπιστημίου του Ουισκόνσιν, στο Μάντισον των ΗΠΑ.

Η οργανωμένη επιστήμη

Η σπουδαιότερη εφεύρεση της σύγχρονης εποχής είναι η οργανωμένη επιστήμη: οι επιστημονικές εταιρείες και τα περιοδικά που καλλιεργούν τη συσσώρευση αλλά και τη διασπορά της επιστημονικής γνώσης —γνώσης η οποία βασίζεται σε ενδείξεις παρά σε αυθεντίες ή θεία αποκάλυψη. Πριν από την επινόηση αυτών των οργανισμών, η συσσώρευση της επιστημονικής γνώσης ήταν πολύ αργή, καθώς δεν υπήρχαν καθιερωμένοι «χώροι» για την επικοινωνία και την κριτική —βασικές διαδικασίες που γεννούν νέες ιδέες, ανασκευάζουν το κατεστημένο, και παρέχουν ένα σύστημα αναγνώρισης και επιβράβευσης το οποίο βασίζεται στην αξία και στα πραγματικά επτεύγματα. Οι οργανισμοί αυτοί, αν και έχουν αρχίσει να γίνονται πολύ μεγάλοι και απρόσωποι (γεγονός το οποίο επιβάλλει την κατάτμησή τους σε τμήματα ώστε να είναι δυνατές οι αλληλεπιδράσεις σε επίπεδο ατόμων) παραμένουν οι θεμελιώδεις κοινωνικές δομές στην καρδιά της επιστήμης —το λαμπρό επινόημα που καθιστά δυνατή την καθημερινή αύξηση της γνώσης την οποία τόσο εξ ημών απολαμβάνουν.

—Samuel Barondes, καθηγητής ψυχιατρικής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, στο Σαν Φρανσίσκο.

Η φυσική των χημικών αντιδράσεων

Μην παραβλέπετε τις αλληλεπιδράσεις

O. Karpukhin

ΣΕ ΚΑΘΕ ΧΗΜΙΚΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ, ΚΑΠΟΙΟ ΣΥΝΟΛΟ ΟΥΣΙΩΝ ΜΕΤΑΤΡΕΠΕΤΑΙ ΣΕ ΈΝΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΟΥΣΙΩΝ. ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ, Η ΚΑΥΣΗ ΚΑΠΟΙΟΥ ΣΔΡΟΓΟΝΑΝΘΡΑΚΑ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΧΗΜΙΚΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ ΠΟΥ ΔΙΝΕΙ ΝΕΡΟ ΚΑΙ ΔΙΟΞΕΙΔΙΟ ΤΟΥ ΑΝΘΡΑΚΑ. Η ΑΝΑΜΕΙΧΗ ΕΝΟΣ ΟΞΕΟΣ ΜΕ ΚΑΠΟΙΟ ΑΛΚΑΛΙΟ ΟΔΗΓΕΙ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΆΛΑΤΟΣ. ΌΤΑΝ ΜΕΛΕΤΑΜΕ ΧΗΜΕΙΑ, ΣΥΝΗΘΩΣ «ΚΛΕΙΝΟΥΜΕ ΤΑ ΜΑΤΙΑ» ΔΟΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΟΥΝ ΤΑ ΜΟΡΙΑ, ΓΙΑ ΝΑ ΤΑ ΞΑΝΑΝΟΙΞΟΥΜΕ ΜΟΝΟ ΑΦΟΥ έΧΟΥΝ ήδη οχηματιστεί ΤΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ. ΚΑΙ ΤΟΥΤΟ ΠΑΡΑ ΤΟ ΓΕΓΟΝΟΣ ΌΤΙ ΤΗ Σύσταση ΤΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΤΗΣ ΧΗΜΙΚΗΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ ΤΗΝ ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ ΟΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΜΟΡΙΩΝ.

Κάθε χημική αντιδραση συνίσταται από δύο βασικά στάδια: πρώτον, ΤΑ ΑΝΤΙΔΡΩΝΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΣΥΝΑΝΤΗΘΟΥΝ· ΔΕΥΤΕΡΟΝ, ΛΑΜΒΑΝΕΙ ΧΩΡΑ ΜΙΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΧΗΜΙΚΗ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ, ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΑΝΑΔΙΑΤΑΣΣΟΝΤΑΙ ΤΑ ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΜΟΡΙΑΚΑ ΤΡΟΧΙΑΚΑ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΑΡΧΙΚΑ ΜΟΡΙΑ ΟΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΒΕΑ. ΈΤΟΙ, Η ΦΥΣΙΚΟΧΗΜΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ ΣΕ ΔΥΟ ΜΕΙΖΟΝΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ: ΣΤΗ ΧΗΜΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ.

Η χημική κινητική μελετά πώς συναντιούνται ΤΑ ΑΝΤΙΔΡΩΝΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ, ΠΟΙΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΠΕΝΔΥΡΟΥΝ ΠΑΝΩ ΤΟΥΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΠΟΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΠΟΥ ΣΦΙΣΤΑΝΤΑΙ ΟΙ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩ-

ΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΔΡΩΣΩΝ ΟΥΣΙΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ. ΕΠΙΠΛΕΟΝ, ΜΕΛΕΤΑΙ ΤΗΝ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΜΙΑΣ ΧΗΜΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΔΡΩΝΤΩΝ (ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΟΥΣΙΩΝ ΠΟΥ ΣΥΜΜΕΤΈΧΟΥΝ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ), ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΥΠΟΛΟΙΠΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΉΠΟΥ ΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ Η ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ.

Η θεωρία των στοιχειωδών γεγονότων της χημικής μετατροπής διερευνά αυτή καθαυτή τη διαδικασία της αλληλεπιδρασης των συγκρουόμενων σωματιδίων καθώς και τις αλλαγές που επέρχονται σε ό,τι αφορά τη δομή των κβαντικών μοριακών τροχιακών και τις αποστάσεις οι οποίες χωρίζουν τα άτομα στο εσωτερικό των μορίων.

Το παρόν άρθρο είναι αφιερωμένο στη χημική κινητική. Το μείζον πρόβλημα της χημικής κινητικής συνίσταται στον προσδιορισμό του ρυθμού με τον οποίο πραγματοποιούνται οι συναντήσεις (δηλαδή οι συγκρουσεις) των αντιδρώντων σωματιδίων.

Ας διευκρινίσουμε λοιπόν ευθύς εξαρχής ότι ΤΑ ΜΟΡΙΑ ΔΕΝ ΕΞΑΝΤΛΟΥΝ ΌΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΠΟΥ ΣΥΜΜΕΤΈΧΟΥΝ ΣΤΙΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ. Σε μια αντιδραση μπορεί κάλλιστα να λαμβάνουν μέρος και ουδέτερα άτομα, φορτισμένα ιόντα ή και κάποια άλλα σωματιδία. Προτού λοιπόν καταπαστούμε με συγκεκριμένες αντιδρώσες ουσίες, θα εξετάσουμε την αλληλεπί-

δραση μεταξύ τυχόντων σωματιδίων στη γενικότερη της δυνατή μορφή.

Ας υποθέσουμε ότι μια αντιδραση ανάμεσα σε σωματιδία των τύπων A και B πραγματοποιείται σε κάποιον δύκο όπου τα αντιδρώντα κατανέμονται ομοιόμορφα. Μια τέτοια αντιδραση καλείται διμοριακή. Θεωρούμε όλα τα σωματιδία ως σφαίρες ακτίνας r , και έστω ότι κάθε κυβικό εκατοστό του χώρου όπου συντελείται η αντιδραση περιέχει a_0 σωματίδια του τύπου A , και b_0 σωματιδία του τύπου B . Όπως ξέρουμε, τα σωματιδία των αερίων κινούνται χαοτικά, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους μεταβάλλονται διαρκώς. Ωστόσο, η ρίζα του μέσου τετραγώνου της ταχύτητας όλων των σωματιδίων $\langle v \rangle$, που θα αναφέρεται στο εξής ως «στατιστική σωματιδιακή ταχύτητα», παραμένει κατ' ουσίαν σταθερή. Η τιμή της εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία T του αερίου μέσου και από τη μάζα του σωματιδίου m :¹

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Στη διάρκεια χρονικού διαστήματος

1. Πρόκειται για την απλή αναδιάταξη μιας εξίσωσης που κατά πάσαν πιθανότητα θα την έχετε συναντήσει στο σχολικό σας εγχειρίδιο φυσικής: $E = m\langle v \rangle^2/2 = 3kT/2$.

τος t , τα σωματίδια του τύπου A διανύουν κατά μέσο όρο απόσταση

$$s = \sqrt{\frac{3kT}{m}} t.$$

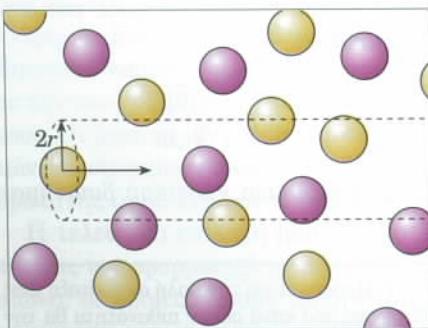
Υποθέτουμε ότι τα σωματίδια του τύπου B παραμένουν ακίνητα και ότι οι ταχύτητες των σωματιδίων του τύπου A διατηρούν σταθερό το μέτρο τους στην πορεία των συγκρούσεων.

Κατά την κίνησή του, λοιπόν, κάθε σωματίδιο του τύπου A συγκρούεται με όλα τα σωματίδια του τύπου B των οποίων το κέντρο δεν απέχει από την τροχιά του περισσότερο από $2r$ —δηλαδή, με όλα τα σωματίδια του τύπου B όσα περιέχονται εντός του κυλίνδρου που φαίνεται στο Σχήμα 1. Επομένως, κατά τη διάρκεια χρονικού διαστήματος t κάθε σωματίδιο A συγκρούεται με όλα τα σωματίδια B που κείνται εντός του όγκου

$$V = 4\pi r^2 s.$$

Φυσικά, ένα σωματίδιο A ενδέχεται να συναντήσει στην πορεία του όχι μόνο σωματίδια B αλλά και άλλα σωματίδια A. Δεν αποκλείεται, μάλιστα, να συγκρουστεί και με άλλα αντικείμενα που ενδεχομένως περιέχει το μέσο. Αυτές οι συγκρούσεις, ωστόσο, δεν μας ενδιαφέρουν, καθότι δεν οδηγούν σε χημική αντίδραση μεταξύ των ουσιών A και B.

Όπως προαναφέραμε, κάθε κυβικό εκατοστό του μέσου περιέχει b_0 το πλήθος σωματιδίων τύπου B. Συνεπώς, κάθε σωματίδιο A θα συγκρουστεί με $b_0 V$ σωματίδια B. Εφόσον το πλήθος των σωματιδίων A ανά κυβικό εκατοστόμετρο ανέρχεται σε a_0 , ο ολικός αριθμός των συγκρούσεων μεταξύ σωματιδίων A και B κατά τη



Σχήμα 1

διάρκεια του διαστήματος t θα ισούται με:

$$n = Va_0 b_0.$$

Ως εκ τούτου, ανά μονάδα χρόνου και όγκου σημειώνονται n/t συγκρούσεις μεταξύ σωματιδίων A και B:

$$\frac{n}{t} = 4\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}} a_0 b_0.$$

Στον παραπάνω υπολογισμό παραβλέψαμε, πρώτον, ότι και τα σωματίδια B κινούνται δεύτερον, ότι οι ταχύτητες των σωματιδίων αλλάζουν έπειτα από κάθε σύγκρουση και, τρίτον, ότι η κατανομή των σωματιδίων στον όγκο είναι μόνο κατά μέσο όρο ομογενής. Εντούτοις, η ακριβής θεωρία, όπου συνυπολογίζονται όλοι οι προαναφερθέντες παράγοντες, διορθώνει τα αποτελέσματά μας κατά έναν παράγοντα που δεν υπερβαίνει το 10%.

Θα έπρεπε επίσης να επισημανθεί πως δεν οδηγούν όλες οι συγκρούσεις μεταξύ σωματιδίων A και B σε χημικές μετατροπές. Το πλήθος των στοιχειώδων χημικών γεγονότων, ωστόσο, βρίσκεται σε σταθερή αναλογία με το πλήθος αυτών των συγκρούσεων.

Το πλήθος των χημικών μετατροπών που πραγματοποιούνται σε μοναδιά όγκο ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται ταχύτητα της χημικής αντίδρασης. Η ταχύτητα της αντίδρασης μεταξύ των σωματιδίων A και B καθορίζεται από την έκφραση:

$$w = \lambda 4\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}} a_0 b_0, \quad (1)$$

όπου το λ παριστάνει έναν αδιάστατο συντελεστή αναλογίας που συνδέει το πλήθος των συγκρούσεων με το πλήθος των συντελούμενων χημικών μετατροπών.

Η παράμετρος λ ουσιαστικά εκφράζει την πιθανότητα να αντιδράσουν δύο σωματίδια εφόσον τύχει να συγκρουστούν. Η τιμή της πιθανότητας αυτής, και η φύση των παραγόντων από τους οποίους εξαρτάται στο πλαίσιο της θεωρίας των στοιχειώδων χημικών μετατροπών, συνιστούν ζητήματα που υπερβαίνουν τους ορίζοντες του παρόντος άρθρου.

Η εξίσωση (1) περιγράφει το νόμο δράσης των μαζών: ανά πάσαν στιγμή η ταχύτητα κάθε χημικής αντίδρασης είναι ανάλογη της συγκεντρωσης των αντιδρώντων κατά την ίδια στιγμή. Ο συντελεστής αναλογίας K που εμφανίζεται μπροστά από το γινόμενο των συγκεντρώσεων ονομάζεται σταθερά ταχύτητας (ή ειδική ταχύτητα) της χημικής αντίδρασης στη δεδομένη θερμοκρασία.

Σε μια διμοριακή αντίδραση ανάμεσα σε σωματίδια ίσων μαζών, η σταθερά ταχύτητας δίνεται από την έκφραση:

$$K = 4\lambda \pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τη σταθερά ταχύτητας για μια απλή χημική αντίδραση:

Πρόβλημα 1. Σε ιδανικό αέριο υπό κανονικές συνθήκες (πίεση 760 mm Hg και θερμοκρασία 0°C) λαμβάνει χώρα μια διμοριακή αντίδραση. Οι συγκεντρώσεις των δύο αντιδρώντων είναι ίσες, ενώ στο μέσο δεν υπάρχουν άλλες ουσίες. Η (κοινή) μάζα των μορίων A και B ανέρχεται σε περίπου 30 μονάδες ατομικής μάζας ($1 \text{ amu} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$). Η ακτίνα των μορίων ισούται με:

$$r = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Βρείτε την ταχύτητα της αντίδρασης.

Λύση. Ως πρώτο βήμα, ας προσδιορίσουμε τη μάζα των μορίων:

$$m = 30 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \equiv 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ kg.}$$

Η στατιστική μοριακή ταχύτητα ισούται με:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \sqrt{\frac{3kT}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 273 \text{ K}}{0,5 \cdot 10^{-25} \text{ kg}}} \\ &= 480 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Η σταθερά ταχύτητας της αντίδρασης είναι:

$$\begin{aligned} K &= 4\lambda \pi r^2 \langle v \rangle = \\ &= 4\lambda \pi (2,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm})^2 \cdot (4,8 \cdot 10^4 \text{ cm/s}) \\ &\equiv 3,8 \lambda \cdot 10^{-10} \text{ cm}^3/\text{s}. \end{aligned}$$

Όπως διαπιστώνουμε, στην περίπτωση της διμοριακής αντιδρασης η σταθερά ταχύτητας εκφράζεται σε μονάδες cm^3/s . Σύμφωνα με την υπόθεση Avogadro, κάθε γραμμούριο ιδανικού αερίου ($6 \cdot 10^{23}$ σωματίδια) υπό κανονικές συνθήκες καταλαμβάνει όγκο 22,4 lt. Επομένως, 1 cm^3 αερίου περιέχει $2,7 \cdot 10^{19}$ μόρια, δηλαδή περιέχει από $1,3 \cdot 10^{19}$ μόρια του κάθε τύπου A και B ($a_0 = b_0 = 1,3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$).

Άρα, η ταχύτητα της αντιδρασης ισούται με:

$$w = 3,8\lambda(10^{-10} \text{ cm}^3/\text{s}) \cdot (1,3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3})^2 \approx 6,5\lambda \cdot 10^{28} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι σε κάθε κυβικό εκατοστό του αερίου πραγματοποιούνται ανά μονάδα χρόνου $6,5 \cdot 10^{28}$ συγκρούσεις μεταξύ των μορίων A και B.

Ας δούμε τώρα τι θα συνέβαινε αν κάθε σύγκρουση οδηγούσε και σε χημική μετατροπή. Εν τοιαύτη περιπτώσει, όλα τα μόρια θα αντιδρούσαν μέσα σε βραχύτατο χρονικό διάστημα (με w' συμβολίζουμε την ταχύτητα της αντιδρασης για $\lambda = 1$):

$$\begin{aligned} t' &= \frac{a_0}{w'} = \frac{1,3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}}{6,5 \cdot 10^{28} \text{ s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}} \\ &= 2 \cdot 10^{-10} \text{ s}. \end{aligned}$$

Σας φαίνεται ρεαλιστική μια τέτοια πρόβλεψη;

Η μάζα των 30 περίπου αμυ αντιστοιχεί στα μόρια του αιθανίου (30 αμυ) ή του οξυγόνου (32 αμυ). Συνεπώς, η αντιδραση που περιγράφαμε παραπάνω αντιπροσωπεύει ένα μοντέλο για την καύση αερίου σε έναν συμβατικό φούρνο αερίου. Όπως πολύ καλά γνωρίζετε, το αέριο δεν καίγεται από μόνο του —χρειάζεται να προκαλέσουμε την ανάφλεξή του με ένα αναμμένο σπίρτο ή με κάποιο άλλο μέσο. Από την παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι στην αντιδραση αιθανίου και οξυγόνου ο συντελεστής λέχει πολύ μικρή τιμή.

Εφόσον μια συγκεκριμένη χημική διαδικασία συντελείται υπό σταθερή θερμοκρασία, για να καθορίσουμε το πώς μεταβάλλονται οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων καθ' όλη τη διάρ-

κειά της, δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τίποτε άλλο από τη σταθερά ταχύτητας K . Έτσι, ο νόμος της δράσης των μαζών μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$w = K[A][B], \quad (2)$$

όπου τα σύμβολα $[A]$ και $[B]$ παριστάνουν τις συγκεντρώσεις των αντιδρώντων, οι οποίες μεταβάλλονται στην πορεία της αντιδρασης.

Επειδή η ακριβής τιμή της σταθεράς ταχύτητας για μια χημική αντιδραση δύσκολα υπολογίζεται θεωρητικά, στις περισσότερες περιπτώσεις ο προσδιορισμός της γίνεται πειραματικά.

Πρόβλημα 2. Βρείτε τη σταθερά ταχύτητας της χημικής αντιδρασης μεταξύ των ουσιών R και S στηριζόμενοι σε πειραματικά δεδομένα τα οποία δείχνουν ότι ανά δευτερόλεπτο υφίσταται χημική μετατροπή το 10% κάθε ουσίας. Οι αρχικές συγκεντρώσεις και των δύο αντιδρώντων ήταν 1 mole/lit.

Λύση. Σε 1 lit του αντιδρώντος μείγματος, υφίστανται μετατροπή ανά δευτερόλεπτο 0,1 mole από κάθε ουσία. Επομένως, σε όγκο 1 cm^3 λαμβάνουν χώρα $6 \cdot 10^{19}$ στοιχειώδη γεγονότα χημικής αλληλεπίδρασης ανά δευτερόλεπτο, πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα της αντιδρασης ισούται με:

$$w = 6 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Εισάγοντας τις τιμές των αρχικών συγκεντρώσεων και την ταχύτητα της αντιδρασης w στην εξίσωση (2), βρίσκουμε την τιμή της σταθεράς ταχύτητας για τη συγκεκριμένη αντιδραση:

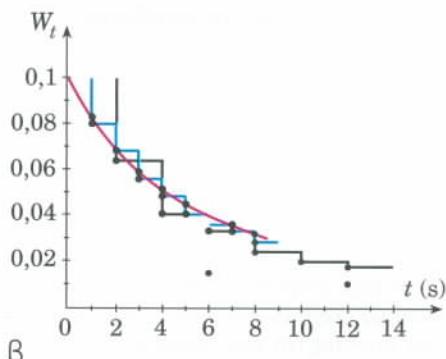
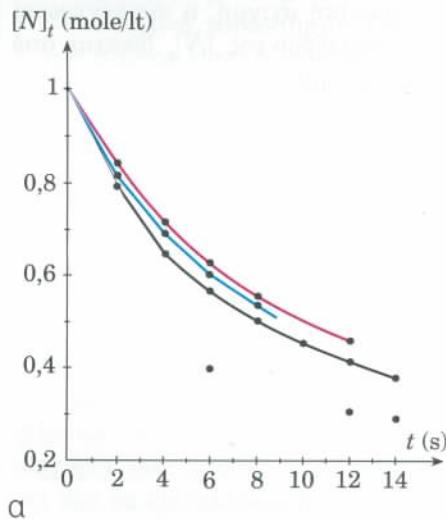
$$\begin{aligned} K &= \frac{w}{[R]_0[S]_0} = 0,1 \frac{\text{lt}}{\text{mole} \cdot \text{s}} \\ &= 1,7 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Προσδιορίσαμε την τιμή της σταθεράς ταχύτητας K που αντιστοιχεί σε σταθερές συγκεντρώσεις $[R]_0$ και $[S]_0$. Αν η ταχύτητα αυτής της διαδικασίας διατηρούνταν σταθερή, τα αντιδρώντα R και S θα καταναλώνονταν μέσα στα 10 πρώτα δευτερόλεπτα. Στα πραγματικά πειράματα

χημείας, όμως, δεν παρατηρείται κάτι τέτοιο —οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων μειώνονται κατά την πορεία της αντιδρασης, οπότε μειώνεται αντίστοιχα και ο ρυθμός κατανάλωσής τους (με άλλα λόγια, η ταχύτητα της αντιδρασης).

Πρόβλημα 3. Δεδομένης της τιμής της σταθεράς ταχύτητας για τη διμοριακή αντιδραση μεταξύ των ουσιών R και S (βλ. Πρόβλημα 2), προσδιορίστε πώς μεταβάλλονται οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων με την πάροδο του χρόνου.

Λύση. Για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της συγκέντρωσης των αντιδρώντων με την πάροδο του χρόνου, ας διαιρέσουμε το χρόνο σε μικρά ισομήκη διαστήματα. Λόγω του μικρού μήκους των εν λόγω διαστημάτων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στη διάρκεια του καθενός τους η



Σχήμα 2

ταχύτητα της αντιδρασης παραμένει σταθερή.

Καταρχάς, ας διαλέξουμε χρονικά διαστήματα t ίσα με 6 s, 2 s και 1 s. Στο Σχήμα 2a, η πράσινη γραμμή δείχνει τη συγκέντρωση για $t = 6$ s, ενώ η μαύρη και η μπλε γραμμή αντιστοιχούν σε $t = 2$ s και $t = 1$ s. Το Σχήμα 2β δείχνει την ταχύτητα της αντιδρασης συναρτήσει του χρόνου όπως υπολογίζεται βάσει αυτών των προσεγγίσεων.

Σε μια πραγματική αντιδραση, οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο, και έτσι οι υπολογισμοί μας αναμένεται να γίνονται όλο και ακριβέστεροι όσο μειώνεται η τιμή του t . Για να προσδιορίσουμε τις ακριβείς τιμές των συγκεντρώσεων για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, πρέπει να περάσουμε στο όριο όπου το t τείνει στο 0, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ταχύτητα της αντιδρασης μεταβάλλεται συνεχώς.

Ο διαφορικός λογισμός μάς επιτρέπει να λύνουμε επακριβώς παρόμοια προβλήματα. Για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, η συγκέντρωση ενός αντιδρώντος $[N]_t$, δίνεται από την εξίσωση:

$$[N]_t = \frac{[N]_0}{1 + K[N]_0 t}, \quad (3)$$

όπου με $[N]_0$ συμβολίζουμε την αρχική συγκέντρωση, ενώ το t δηλώνει το χρόνο που παρήλθε από την έναρξη της αντιδρασης.²

Αν εισαγάγουμε τις τιμές της σταθεράς ταχύτητας και των αρχικών συγκεντρώσεων στην (3), καταλήγουμε στους τύπους που περιγράφουν πώς μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου οι συγκεντρώσεις και η ταχύτητα της αντιδρασης:

$$\begin{aligned} [R]_t &= [S]_t = \frac{1}{1 + 0,1t} \text{ mole/lit} \\ &= \frac{6 \cdot 10^{20}}{1 + 0,1t} \text{ cm}^{-3}, \end{aligned}$$

2. Όσοι γνωρίζουν διαφορικό λογισμό μπορούν να ελέγχουν την ορθότητα του τύπου μας λύνοντας την εξής διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d[N]}{dt} = -K[N]^2.$$

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{0,1}{(1 + 0,1t)^2} \text{ mole/(lit · s)} \\ &= \frac{6 \cdot 10^{19}}{(1 + 0,1t)^2} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

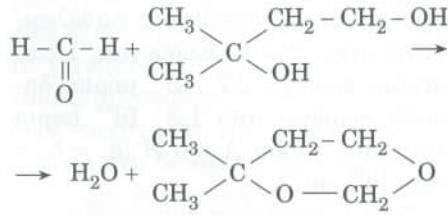
Οι κόκκινες γραμμές στα Σχήματα 2a και 2β δείχνουν τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Έτσι, μπορείτε να διαπιστώσετε τη διαφορά μεταξύ των καμπυλών που μας έδωσε η μέθοδος του διαφορικού λογισμού και εκείνων που κατασκευάσαμε με τη βοήθεια της προσεγγιστικής μεθόδου.

Η εξίσωση (3) καθιστά δυνατό τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων των αντιδρώντων και της ταχύτητας της αντιδρασης σε κάθε χρονική στιγμή και για οποιαδήποτε αρχική συγκέντρωση των αντιδρώντων. Στη γενική περίπτωση, ωστόσο, οι χημικές διαδικασίες δεν συνίστανται από μία μόνο στοιχειώδη αντιδραση αμοιβαίας αλληλεπιδρασης μεταξύ των αρχικών ουσιών. Οι χημικές διαδικασίες είναι συνήθως πολύ πιο περίπλοκες: ενσωματώνουν αρκετές στοιχειώδεις αντιδράσεις που πραγματοποιούνται συγχρόνως. Μπορεί, ας πούμε, τα προϊόντα μιας αντιδρασης να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους ή να αντιδράσουν με τις αρχικές ουσίες. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η εξίσωση (3) προφανώς δεν περιγράφει την κινητική της διαδικασίας. Χρειάζεται να αναπτύξουμε μια πιο περίπλοκη εξίσωση όπου θα υπεισέρχονται οι σταθερές ταχύτητας όλων των εμπλεκόμενων στοιχειωδών αντιδράσεων.

Δεν αρκεί όμως να προσδιορίσουμε τις σταθερές ταχύτητας για όλες τις στοιχειώδεις διαδικασίες: πρέπει να βεβαιωθούμε ότι η διαδικασία όντως πραγματοποιείται σύμφωνα με το δεδομένο σύνολο αντιδράσεων.

Πρόβλημα 4. Στο Σχήμα 3a, τα σημεία παριστούν μετρήσεις της συγκέντρωσης του υδροχλωρικού οξείου καθώς το κυκλοεξένιο χλωριώνεται εν παρουσίᾳ καταλύτη.

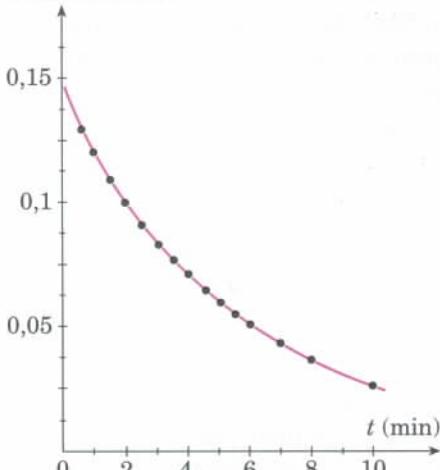
Στο Σχήμα 3β, τα σημεία των δεδομένων παριστούν πειραματικές μετρήσεις της συγκέντρωσης της φορμαλδεΰδης κατά τη σύνθεση διμεθυλικής διοξανής.



Ποια από τις δύο αυτές αντιδράσεις περιγράφεται μέσω της εξίσωσης που διέπει τις διμοριακές αντιδράσεις;

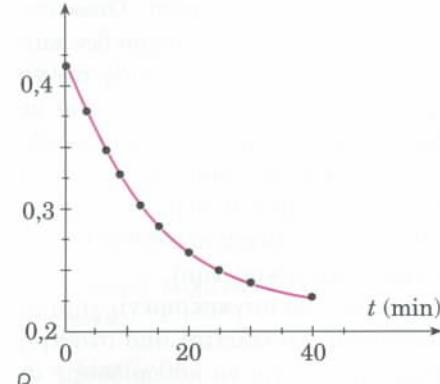
Άνση. Εφόσον πρόκειται για αντιδραση διμοριακή, η μεταβολή της συγκέντρωσης των αντιδρώντων με την πάροδο του χρόνου θα περιγράφεται από την εξίσωση (3). Ας την ξαναγράψουμε, λοιπόν, υπό διαφορετική μορφή:

$$[\text{HCl}] (\text{mole/lit})$$

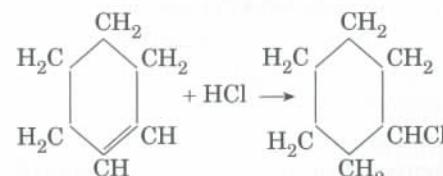


a

$$[\text{CH}_2\text{O}] (\text{mole/lit})$$



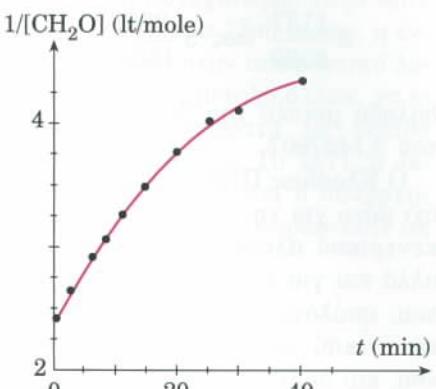
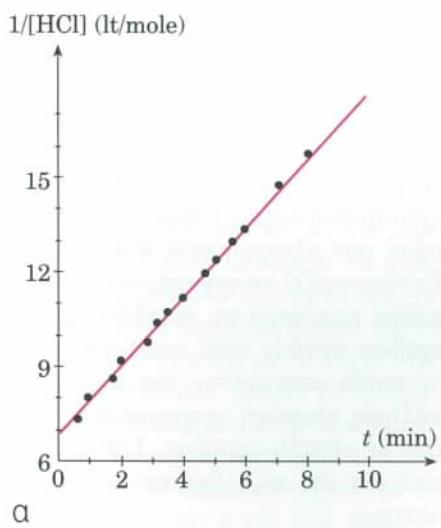
Σχήμα 3



$$\frac{1}{[N]_t} = \frac{1}{[N]_0} + Kt. \quad (4)$$

Αν στο επίπεδο θεωρήσουμε ως τετμημένη το χρόνο και ως τεταγμένη την αντίστροφη συγκέντρωση, η συγκεκριμένη εξίσωση περιγράφει, ως γνωστόν, μια ευθεία γραμμή. Η σταθερά ταχύτητας της διμοριακής αντίδρασης ισούται με την κλίση τής εν λόγω ευθείας.

Χρησιμοποιώντας τις τιμές των συγκεντρώσεων που δίνονται στα Σχήματα 3α και 3β, σχεδιάζουμε τα γραφήματα των αντίστροφων συγκεντρώσεων των αρχικών ουσιών συναρτήσει του χρόνου (Σχήματα 4α και 4β). Και πράγματι, στην περίπτωση της χλωρίωσης του κυκλοεξίνιου προκύπτει ευθεία γραμμή. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συγκεκριμένη αντίδραση είναι διμοριακή. Η αντίστοιχη σταθερά ταχύτητας ισούται με:



Σχήμα 4

$$K \approx 0.02 \text{ lt/(mole} \cdot \text{s)}.$$

Κατ' αντιδιαστολή, η γραφική παράσταση που περιγράφει τη δεύτερη αντίδραση πολύ απέχει απ' το να είναι γραμμική. Επομένως, πρόκειται για μια αντίδραση περίπλοκη, που για να τη χαρακτηρίσουμε δεν αρκεί μία μόνο σταθερά ταχύτητας. Όπως αποκάλυψαν ειδικές μελέτες, τα προϊόντα αυτής της αντίδρασης (διμεθυλική διοξάνη και νερό) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και δίνουν πάλι τις αρχικές ουσίες. Με άλλα λόγια, η εν λόγω διαδικασία συμπεριλαμβάνει δύο στοιχειώδεις διμοριακές αντίδρασεις που πραγματοποιούνται συγχρόνως.

Τώρα γνωρίζουμε πώς συντελείται το απλούστερο είδος χημικής αντίδρασης μεταξύ δύο ουσιών. Γνωρίζουμε επίσης πώς μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου η ταχύτητα της αντίδρασης και οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των συγκεντρώσεων για οποιαδήποτε χρονική στιγμή, αρκεί να γνωρίζουμε τη σταθερά ταχύτητας και τις αρχικές συγκεντρώσεις των αντιδρώντων. Επιπλέον, μπορούμε να διακρίνουμε τις διμοριακές αντίδρασεις από οποιαδήποτε άλλα είδη χημικών διαδικασιών.

Στην πραγματικότητα, στις περισσότερες χημικές διαδικασίες συντελούνται ταυτόχρονα αρκετές στοιχειώδεις αντίδρασεις, και τα προϊόντα τους αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Για να αναλύσουμε εξαντλητικά ένα σύνολο τέτοιων αντιδράσεων, απαιτούνται πιο σύνθετες εξισώσεις, ικανές να περιγράψουν την πορεία μιας πραγματικής χημικής διαδικασίας. Μερικές από αυτές τις εξισώσεις αποδεικνύονται εξαιρετικά δύσκολες ακόμη και για τους έμπειρους επαγγελματίες, οι οποίοι, για να τις αντιμετωπίσουν, επιστρατεύουν ολόκληρο το οπλοστάσιο των σύγχρονων μαθηματικών και των τεχνικών αριθμητικού υπολογισμού. Όπως αντιλαμβάνεστε, οι σύγχρονοι χημικοί πρέπει να έχουν άριστη κατάρτιση τόσο στη φυσική όσο και στα μαθηματικά!

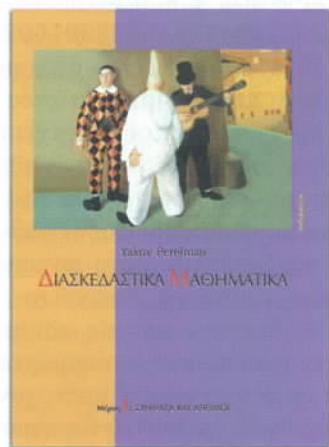
• «Ο Perelman γράφει με τρόπο καταπληκτικό, εκλαϊκεύοντας δύσκολα ζητήματα της φυσικής, των μαθηματικών και της αστρονομίας. Τα βιβλία του είναι ευφυή, τερπνά και ωφέλιμα.»

—K. Tsiolkovsky (1857-1935), πατέρας της αστροναυτικής

176 σελ., 17.5 × 24 εκ., δίχρωμο, πανόδετο, 5.700 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Yakov Perelman
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
—Μέρος 1

Το βιβλίο περιλαμβάνει εξαιρετικής ποικιλίας θέματα των στοιχειώδων μαθηματικών: από γρίφους και μαθηματικές σπαζοκεφαλίες, πνευματικές προκλήσεις και μαθηματικές τεχνικές μέχρι προβλήματα απαρίθμησης και μέτρησης.

Καταφανή χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι η πρωτοτυπία των θεμάτων του (στοιχείο αναγνωρίσιμο και σήμερα, δεκαετίες μετά τη συγγραφή του), ο γοητευτικός τρόπος παρουσίασής τους και η υπέροχη εικονογράφησή τους.

Ο συγγραφέας έχει καταβάλει κάθε δυνατή προσπάθεια για να κάνει το βιβλίο ζωηρό και διασκεδαστικό, ο αναγνώστης δε,

για να το παρακολουθήσει, δεν χρειάζεται να γνωρίζει παρά τους κανόνες της αριθμητικής και της στοιχειώδους γεωμετρίας. Τα προβλήματα συνοδεύονται πάντα από τις λύσεις τους.

• «Ο Perelman γράφει με τρόπο καταπληκτικό, εκλαϊκεύοντας δύσκολα ζητήματα της φυσικής, των μαθηματικών και της αστρονομίας. Τα βιβλία του είναι ευφυή, τερπνά και ωφέλιμα.»

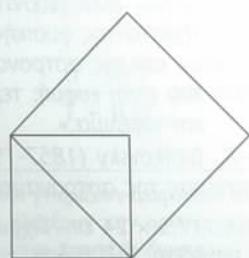
—K. Tsiolkovsky (1857-1935), πατέρας της αστροναυτικής

O ΑΡΙΘΜΟΣ $\pi = 3,141592653589$
793238462643383297502884
1971..., ο οποίος ισούται με το λόγο της περιμέτρου ενός κύκλου προς τη διάμετρό του, έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθηματικών επί χιλιάδες χρόνια. Για μια μεγάλη χρονική περίοδο, οι μαθηματικοί ασχολούνταν μόνο με ακεραίους και κλάσματα ακεραίων — με τους λεγόμενους ρητούς αριθμούς. Όλες οι προσπάθειες αναπαράστασης του π σε τέτοια μορφή απέτυχαν.

Ο αριθμός π εμφανίζεται στον τύπο του εμβαδού ενός κύκλου, $S = \pi R^2$, και πολλοί μαθηματικοί, επαγγελματίες και ερασιτέχνες, προσπάθησαν να λύσουν ένα διάσημο πρόβλημα: την κατασκευή τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με αυτό δεδομένου κύκλου χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη. Η φήμη του προβλήματος υπήρξε τόσο μεγάλη ώστε κάθε άλλο δύσκολο πρόβλημα το συνέκριναν με αυτό, ενώ η φράση τετραγωνισμός του κύκλου έγινε συνώνυμη του άλυτου προβλήματος.

Το σύμβολο π προέρχεται από το αρχικό γράμμα της ελληνικής λέξης περίμετρος.

Οι μαθηματικοί στην αρχαία Ελλάδα γνώριζαν τον τρόπο κατασκευής ενός τετραγώνου με εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν δεδομένου τετραγώνου: αρκεί να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με τη διαγώνιο του δεδομένου τετραγώνου (Σχήμα 1). Όμως, όλες οι προσπάθειες να εκφραστεί το μήκος της πλευράς του νέου τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της πλευράς του δεδομένου τετραγώνου, με τη βοήθεια μόνο ρητών αριθμών, απέτυχαν. Οι πυθαγόρειοι συνειδητοποίησαν αυτό το γεγονός, το οποίο υπο-



Σχήμα 1

περί του ερίφημου

νόμευσε την πεποίθηση των τότε μαθηματικών ότι ο αριθμός π μπορεί να παρασταθεί ως κλάσμα δύο ακεραίων. Από εκείνη τη στιγμή άρχισε η προσπάθεια υπολογισμού του π με δύλιο και πο μεγάλη ακρίβεια.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έθεταν συχνά το π ίσο με 3. Αυτό ισοδυναμεί με το να θεωρήσουμε την περίμετρο του κύκλου ίση με την περίμετρο του εγγεγραμμένου του εξαγώνου. Από την άλλη, πάλι, για να υπολογίσουν οι Αιγύπτιοι το εμβαδόν του κύκλου, χρησιμοποιούσαν τον τύπο:

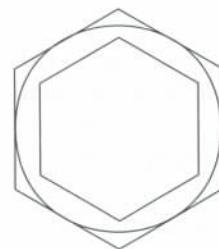
$$S = \left(\frac{8}{9} d \right)^2,$$

όπου d η διάμετρός του. Ουσιαστικά, με αυτό τον τρόπο θεωρούσαν το π ίσο με

$$\left(\frac{16}{9} \right)^2 = 3,16049\dots$$

Σε κείμενα αρχαίων πολιτισμών ανακαλύπτουμε και άλλες προσεγγίσεις του π . Στα ιερά βιβλία των Ζαΐνιστών (ινδουιστική αίρεση), το π προσεγγίζεται από τον αριθμό $\sqrt{10} = 3,1622777\dots$, ενώ σε αρχαία κινεζικά κείμενα μερικές φορές το π προσεγγίζεται από τον κλασματικό αριθμό $355/113 = 3,1415929\dots$ —εντυπωσιακά υψηλός βαθμός ακρίβειας! Όμως, η επιτυχία αυτής της προσέγγισης έγινε φανερή μόνο τη σύγχρονη εποχή, όταν κατέστη δυνατός ο υπολογισμός του π με ακρίβεια πολλών δεκαδικών ψηφίων. Εκείνη την εποχή δεν γνώριζαν αν είναι καλύτερη προσέγγιση το $355/113$ ή το απλούστερο κλάσμα $22/7$, που γνώριζαν οι αρχαίοι Έλληνες. Επισημαίνουμε ότι $22/7 = 3,1428571\dots$.

Τον 5ο και τον 4ο αιώνα π.Χ., για να προσέγγιστεί ο αριθμός π , οι έλληνες μαθηματικοί πρότειναν τη



Σχήμα 2

χρήση εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων (Σχήμα 2). Παρατήρησαν ότι η περίμετρος του περιγεγραμμένου πολυγώνου είναι μεγαλύτερη (και του εγγεγραμμένου μικρότερη) από την περίμετρο του κύκλου. Για να εφαρμόσει αυτή την ιδέα ο Αρχιμήδης, υπολόγισε τις περιμέτρους εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων 6-γώνων, 12-γώνων, 24-γώνων, 48-γώνων και 96-γώνων, χρησιμοποιώντας τύπους διπλασιασμού των πλευρών ενός πολυγώνου. Εντυπωσιάζει το γεγονός ότι ο Αρχιμήδης κατάφερε να εκτελέσει με ακρίβεια αυτούς τους υπολογισμούς, οι οποίοι απαιτούσαν την κατ' επανάληψη εξαγωγή τετραγωνικών ριζών με μεγάλη ακρίβεια. Τελικά, συμπέραν ότι το π βρίσκεται στο διάστημα:

$$3 \frac{1137}{8069} \text{ έως } 3 \frac{2669}{18693},$$

δηλαδή μεταξύ του 3,14090965 και του 3,1427807.

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, διάσημος όχι μόνο για την επινόηση του γεωκεντρικού πλανητικού συστήματος αλλά και για τη μαθηματική έρευνά του, υπολόγισε την περίμετρο ενός κανονικού εγγεγραμμένου 720-γώνου, και βρήκε για το π την προσέγγιση $377/120 = 3,14166\dots$. Ο Πτολεμαίος κατήρτησε επίσης πίνακες «χορδών» αντίστοιχων των σημερι-

Τεριοδικού αριθμού

νών τριγωνομετρικών πινάκων ημιτόνου.*

Το επόμενο βήμα έγινε έπειτα από 1.500 χρόνια, από τον Francois Viète, ο οποίος υπολόγισε την περίμετρο των κανονικών εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων 393.216-γώνων και κατέληξε στην προσέγγιση:

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926537.$$

Η συγκεκριμένη προσέγγιση μας δίνει 10 σωστά δεκαδικά ψηφία του π . Ο ολλανδός μαθηματικός Adrian van Roomen χρησιμοποίησε ένα 2³⁰-γώνο (1.073.741.824-γώνο) και βρήκε 17 σωστά δεκαδικά ψηφία. Ο τελευταίος μαθηματικός που χρησιμοποίησε αυτή τη μέθοδο ήταν ο Ολλανδός Ludolf van Ceulen. Επί δέκα έτη υπολόγιζε την περίμετρο κανονικών πολυγώνων διπλασιάζοντας το πλήθος των πλευρών τους —ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με τον Archimedes. Ο Ludolf κατάφερε να φτάσει στο 32.512.254.720-γώνο και να βρει 20 σωστά δεκαδικά ψηφία του π . Έκλεισε το έργο του με τα λόγια «Ο ποιος το επιθυμεί, μπορεί να προχωρήσει περισσότερο». Στην πραγματικότητα, συνέχισε αργότερα ο ίδιος βρίσκοντας 35 δεκαδικά ψηφία του π .

Η ιστορία του π και των προσεγγίσεών του συνεχίστηκε. Λίγο πριν από την αυγή του 17ου αιώνα, η έννοια του ορίου στον απειροστικό λογισμό επέτρεψε, μεταξύ άλλων, να εξεταστούν αθροίσματα με άπειρο πλήθος προσθετών. Το 1671, ο James Gregory βρήκε ότι η συνάρτηση τοξεφχ μπορεί να παρασταθεί ως άπειρη σειρά:

$$\text{τοξεφχ} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

* Για περισσότερα, βλ. M. Λάμπρου, «Το μαθηματικό έργο του Πτολεμαίου», Μάρτιος/Απρίλιος 2000. (Σ.τ.μ.)

Για $x = 1$, αυτή η σειρά (η οποία καλείται σειρά του Leibniz προς τιμήν του ενός από τους εφευρέτες του απειροστικού λογισμού) μας δίνει:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους όρους αυτής της σειράς με δύο τρόπους:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \dots \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \dots \end{aligned}$$

Προφανώς, οι όροι μέσα στις παρενθέσεις είναι θετικοί. Επομένως, από την πρώτη απ' αυτές τις ισότητες διαπιστώνουμε ότι αν θεωρήσουμε άρτιο πλήθος όρων της σειράς προκύπτει ένας αριθμός λίγο μικρότερος του $\pi/4$. Από τη δεύτερη διαπιστώνουμε ότι αν θεωρήσουμε περιττό πλήθος όρων προκύπτει ένας αριθμός λίγο μεγαλύτερος από το $\pi/4$.

Αυτή η σειρά διευκόλυνε εξαιρετικά τον υπολογισμό του π , παρόλο που χρειάζονται 50 όροι της για να βρούμε τρία σωστά δεκαδικά ψηφία, και περίπου 300 όροι για τέσσερα.

Ο Abraham Sharp παρατήρησε ότι για $x = \sqrt{3}/3$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \dots\right), \end{aligned}$$

και οι πρώτοι έξι όροι αυτής της σειράς δίνουν το π με σφάλμα μικρότερο του 0,0005.

Στον υπολογισμό του π συμμετείχε και ο Leonard Euler, ο οποίος χρησιμοποίησε τη σχέση:

$$\frac{\pi}{4} = \text{τοξεφ} \frac{1}{2} + \text{τοξεφ} \frac{1}{3},$$

και έτοι βρήκε ότι ο Lagny, ο οποίος είχε υπολογίσει προηγουμένως 128 δεκαδικά ψηφία του π , είχε κάνει λάθος στο 113ο ψηφίο (συνεπώς και στα υπόλοιπα).

Ο τύπος

$$\pi = 24 \text{τοξεφ} \frac{1}{8} + 8 \text{τοξεφ} \frac{1}{57} + 4 \text{τοξεφ} \frac{1}{239}$$

αποδείχτηκε ακόμα πιο εύχρηστος, διότι οι όροι της σειράς μικραίνουν γρηγορότερα όσο μειώνεται το όρισμα του τόξου εφαπτομένης.

Το μέσο του 19ου αιώνα χαρακτηρίστηκε από το κυνήγι περισσότερων δεκαδικών ψηφίων τού π:

- 1844: 200 ψηφία (Dase),
- 1847: 248 ψηφία (T. Klausen),
- 1853: 330 ψηφία (Richter),
- 1853: 440 ψηφία (Dase),
- 1853: 519 ψηφία (W. Shanks).

Εκατό χρόνια αργότερα, μετά την ανακάλυψη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η κούρσα συνεχίστηκε.

1949: 2.037 ψηφία (von Neumann, ENIAC),

1958: 10.000 ψηφία (F. Jenuit, IBM-704),

1961: 100.000 ψηφία (D. Shanks, IBM-7090),

1973: 1.000.000 ψηφία (J. Guiyu, M. Boiye, CDC-7600),

1986: 29.360.000 ψηφία (D. Bailey, Cray-2),

1987: 134.217.000 ψηφία (J. Kanada, NEC SX-2),

1989: 1.011.196.691 ψηφία (D. και G. Chudnovsky, Cray-2 + IBM-3040).

Ωστόσο, το κυνήγι είναι πλέον περισσότερο ένα είδος σπορ παρά μαθηματική εργασία. Δεν αποτελεί παράδοξο ότι το τελευταίο αποτέλεσμα, που έχει εκπληκτικά μεγάλο πλήθος ψηφίων του π , έχει περιληφθεί στο Βιβλίο ρεκόρ Γκίνες. Ένα ενδιαφέρον γεγονός που προέκυψε από τη μελέτη της ακολουθίας των ψηφίων του π είναι ότι όλα τα ψηφία εμφανίζονται σε αυτή με την ίδια στατιστική συχνότητα.

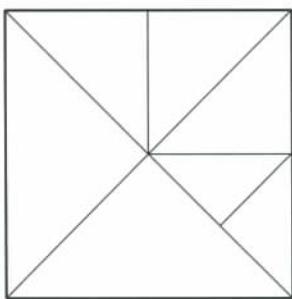
Τριγωνική χειρουργική

«Και πάντα τα δεόμενα χειρουργικής επιστήμης.»

—Αριστοτέλης, Πολιτικά, Η, 6, 3

O. Izhboldin και L. Kurlyandchik

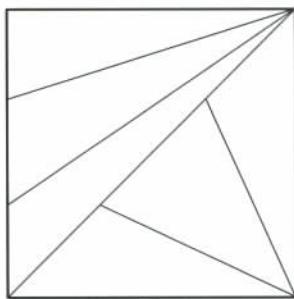
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΘΑ ΕΞΕΤΑΣΟΥΜΕ διάφορα προβλήματα τεμαχισμού πολυγώνων σε τρίγωνα. Για παράδειγμα, υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι χωρισμού ενός τετραγώνου σε τρίγωνα (δείτε τα Σχήματα 1-4).



Σχήμα 1

Ας εξετάσουμε αυτά τα σχήματα προσεκτικά. Για παράδειγμα, όλα τα τρίγωνα των Σχημάτων 1 και 4 είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα τρίγωνα του

Σχήματος 2 είναι αμβλυγώνια. Εύλογα προκύπτει το επόμενο ερώτημα: Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε οξυγώνια τρίγωνα;



Σχήμα 3

Επιπλέον, και στα τέσσερα προηγούμενα σχήματα υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρίγωνα με κοινή πλευρά. Ισχύει πάντοτε αυτό:

Στα Σχήματα 3, 5 και 6 έχουμε άρτιο πλήθος τριγώνων, κάθε φορά, όλα με το ίδιο εμβαδόν. Είναι δυνατόν να

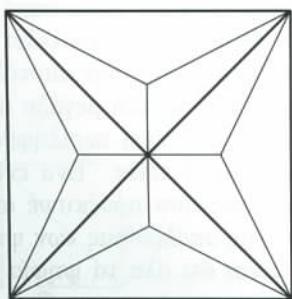
χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε περιττό πλήθος τριγώνων ίσου εμβαδού;

Γενικότερα, θα ήταν ενδιαφέρον να βρούμε αν είναι δυνατός ο χωρισμός ενός τετραγώνου σε τρίγωνα υπό συγκεκριμένους περιορισμούς. Αυτοί μπορεί να αφορούν τις γωνίες των τριγώνων, το πλήθος τους, τη διευθέτησή τους, κ.ο.κ.

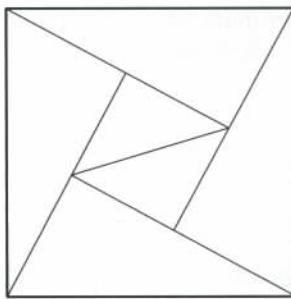
Οξυγώνια τρίγωνα

Πρόβλημα 1. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε οξυγώνια τρίγωνα;

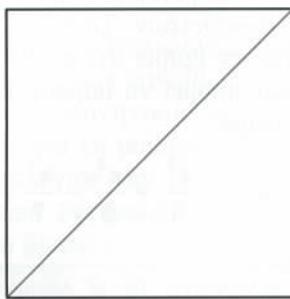
Είναι απολύτως φυσικό να αρχίσουμε να λύνουμε αυτό το πρόβλημα προσπαθώντας να χωρίσουμε ένα τετράγωνο με τον ζητούμενο τρόπο. Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε χωρίζοντας το τετράγωνο κατά μήκος μίας (Σχήμα 5) ή δύο (Σχήμα 6) διαγωνίων του. Και στις δύο περιπτώσεις, το πρόβλημά μας ανάγεται στο χωρισμό ενός ορθογώνιου τριγώνου σε οξυγώνια τρίγωνα. Πώς μπορού-



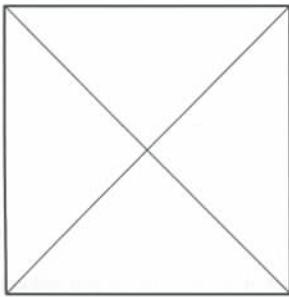
Σχήμα 2



Σχήμα 4



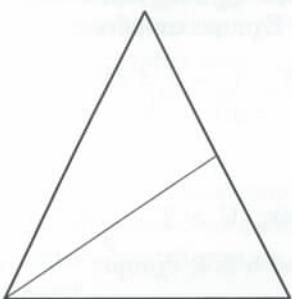
Σχήμα 5



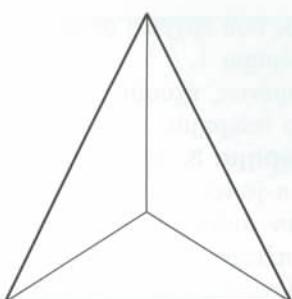
Σχήμα 6

με να χωρίσουμε ένα τρίγωνο σε άλλα τρίγωνα; Υπάρχουν τρεις απλές περιπτώσεις (Σχήματα 7-9).

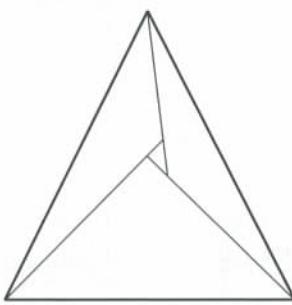
Και στα τρία σχήματα, τουλάχιστον ένα από τα τρίγωνα που προκύπτουν δεν είναι οξυγώνιο! Καλούμε τους αναγνώστες να προσπαθήσουν να τεμαχίσουν μερικά τρίγωνα —κατά πάσαν πιθανότητα θα καταλήξετε στην υπόθεση ότι η απάντηση στο ερώτημά μας είναι αρνητική. Αντιμετωπίζουμε λοιπόν μια κατάσταση οικεία σε κάθε μαθηματικό: Μπορούμε είτε να συνεχίσουμε τις προσπάθειες ανεύρεσης του ζητούμενου αποτέλεσματος είτε να αναζητήσουμε μια απόδειξη ότι τούτο το αποτέλεσμα είναι αδύνατο. Μπορείτε να σκεφτείτε για λίγο αυτό το πρόβλημα —την απάντηση θα τη δώσουμε παρακάτω. Εν τω μεταξύ, συνεχίζουμε με ένα άλλο πρόβλημα.



Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9

Τρίγωνα με καθαρά σύνορα

Σε όλα τα προηγούμενα σχήματα υπάρχει ένα τρίγωνο, οι πλευρές του οποίου δεν περιέχουν κορυφές των άλλων τριγώνων. Θα λέμε ότι τέτοια τρίγωνα έχουν καθαρό σύνορο.

Πρόβλημα 2. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα κυρτό n -γωνο σε τρίγωνα, κανένα από τα οποία να μην έχει καθαρό σύνορο;

Θα αποδείξουμε ότι είναι αδύνατος ένας τέτοιος χωρισμός. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το αντίθετο. Έστω T το πλήθος των τριγώνων που δημιουργούνται με το χωρισμό του n -γώνου και έστω $V_{\text{εω}}$ το πλήθος των «εσωτερικών» κορυφών —δηλαδή, των κορυφών που ανήκουν σε πλευρές τριγώνων. Προφανώς, $V_{\text{εω}} \geq T$, διότι, λόγω της υπόθεσής μας, σε κάθε τρίγωνο μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια εσωτερική κορυφή η οποία να ανήκει στο σύνορο του. Επισημαίνουμε ότι διαφορετικά τρίγωνα αντιστοιχούν σε διαφορετικές κορυφές, διότι μια κορυφή δεν μπορεί να είναι εσωτερική σε δύο τρίγωνα ταυτοχρόνως.

Ας υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών όλων των τριγώνων. Αφενός, ισούται με $180^\circ \cdot T$. Αφετέρου, το άθροισμα των γωνιών που πρόσκεινται σε εσωτερικές κορυφές ισούται με $180^\circ \cdot V_{\text{εω}}$, ενώ το άθροισμα των γωνιών που πρόσκεινται σε κορυφές του πολυγώνου ισούται με $180^\circ \cdot (n - 2)$. Επομένως, το συνολικό άθροισμα των γωνιών των τριγώνων είναι τουλάχιστον

$$180^\circ \cdot V_{\text{εω}} + 180^\circ \cdot (n - 2).$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{aligned} 180^\circ \cdot T &\geq 180^\circ \cdot V_{\text{εω}} + \\ &\quad + 180^\circ \cdot (n - 2) > 180^\circ \cdot V_{\text{εω}}, \end{aligned}$$

γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την ανισότητα $V_{\text{εω}} \geq T$.

Άρα, αποδειξάμε το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 1. Κάθε φορά που χωρίζουμε ένα κυρτό n -γωνο σε τρίγωνα, τουλάχιστον ένα τρίγωνο έχει καθαρό σύνορο.

Άσκηση 1. Αληθεύει το προηγούμενο θεώρημα για μη κυρτά πολύγωνα;

Χωρίς κοινές πλευρές

Πρόβλημα 3. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα κυρτό n -γωνο σε τρίγωνα έτσι ώστε να μην υπάρχει ζεύγος τριγώνων με κοινή πλευρά;

Θα αρχίσουμε με την απλούστερη περίπτωση, όταν $n = 3$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.

Προσπαθήστε τώρα να χωρίσετε ένα κυρτό τετράπλευρο με τον ζητούμενο τρόπο. Είναι λογικό να ξεκινήσουμε με το τετράγωνο. Στα Σχήματα 1-4 παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει ένα ζεύγος τριγώνων με κοινή πλευρά.

Και πάλι αντιμετωπίζουμε το δίλλημμα: είτε να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν να επιτύχουμε έναν τέτοιο χωρισμό είτε να συνεχίσουμε να αναζητούμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αποδεικνύεται ότι είναι αδύνατο να επιτύχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα —δηλαδή, ανεξάρτητα από τον τρόπο χωρισμού ενός κυρτού n -γώνου ($n \geq 4$), θα υπάρχουν πάντα δύο τρίγωνα με κοινή πλευρά. Όμως, η απόδειξη είναι μάλλον περίπλοκη.

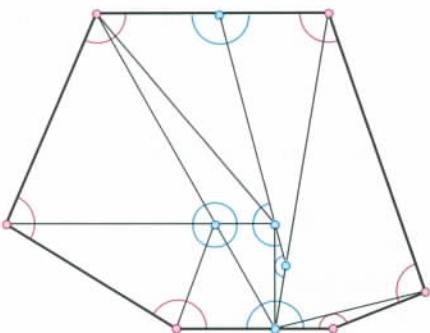
Θα αρχίσουμε με μια σημαντική βοηθητική πρόταση.

Η ανισότητα $V \leq T + 2$

Θεώρημα 2. Έστω ότι χωρίζουμε ένα κυρτό n -γωνο σε T τρίγωνα. Έστω V το συνολικό πλήθος των κορυφών αυτών των τριγώνων. Τότε $V \leq T + 2$.

Απόδειξη. Το άθροισμα των γωνιών όλων των τριγώνων ισούται με $180^\circ \cdot T$. Θα υπολογίσουμε στη συνέχεια αυτό το άθροισμα με διαφορετικό τρόπο. Χωρίζουμε το σύνολο των κορυφών όλων των τριγώνων σε δύο κλάσεις.

Στην πρώτη κλάση θα συμπερι-



Σχήμα 10

λάβουμε όλες τις κορυφές του δεδομένου n -γώνου (στο Σχήμα 10 εμφανίζονται με κόκκινο χρώμα). Όλες οι υπόλοιπες κορυφές ανήκουν στη δεύτερη κλάση (στο Σχήμα 10 εμφανίζονται με μπλε χρόμα).

Προφανώς, το άθροισμα των γωνιών που πρόσκεινται στις κόκκινες κορυφές ισούται με το άθροισμα των γωνιών του n -γώνου. Άρα,

$$\text{άθροισμα των «κόκκινων» γωνιών} = 180^\circ \cdot (n - 2).$$

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μπλε κορυφή. Το άθροισμα των προσκείμενων γωνιών ισούται είτε με 180° είτε με 360° (βλ. Σχήμα 10). Ούτως ή άλλως, είναι τουλάχιστον 180° . Αφού υπάρχουν $V - n$ μπλε κορυφές, έχουμε:

$$\text{άθροισμα των «μπλε» γωνιών} \geq 180^\circ \cdot (V - n).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} 180^\circ \cdot T &= \\ &= (\text{άθροισμα όλων των γωνιών} \\ &\quad \text{όλων των τριγώνων}) = \\ &= (\text{άθροισμα των «κόκκινων»} \\ &\quad \text{γωνιών}) + (\text{άθροισμα} \\ &\quad \text{των «μπλε» γωνιών}) \\ &\geq 180^\circ \cdot (n - 2) + 180^\circ \cdot (V - n) \\ &= 180^\circ \cdot (V - 2). \end{aligned}$$

Άρα, έπειτα η ζητούμενη ανισότητα

$$V \leq T + 2,$$

και το θεώρημα αποδείχτηκε.

Λύση του Προβλήματος 3

Ας υποθέσουμε ότι χωρίζαμε ένα κυρτό n -γωνο έτσι ώστε να μην υπάρχει ζεύγος τριγώνων με κοινή πλευρά.

Ας υπολογίσουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους το πλήθος των τμημάτων που αποτελούν πλευρές των

τριγώνων. Θα καλούμε αυτά τα τμήματα «πλευρές» και θα συμβολίσουμε το πλήθος τους με S . Είναι προφανές ότι

$$S = 3T,$$

διότι κάθε τρίγωνο έχει τρεις πλευρές, και καμία πλευρά τριγώνου δεν συμπίπτει με κάποια άλλη.

Χωρίζουμε το πλήθος των κορυφών και το πλήθος των πλευρών σε δύο κλάσεις:

(i) συνοριακές κορυφές και πλευρές —δηλαδή, αυτές που ανήκουν στο σύνορο του δεδομένου n -γώνου. Θα συμβολίσουμε το πλήθος των συνοριακών κορυφών με V_o και το πλήθος των συνοριακών πλευρών με S_o .

(ii) εσωτερικές κορυφές και πλευρές —δηλαδή, όλες όσες δεν είναι συνοριακές. Αυτές συμβολίζονται με V_{eo} και S_{eo} , αντίστοιχα.

Είναι προφανές ότι

$$V = V_o + V_{eo},$$

και

$$S = S_o + S_{eo}.$$

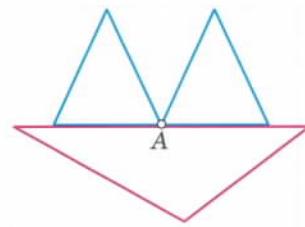
Θα προσδιορίσουμε τώρα μια σχέση μεταξύ του πλήθους των συνοριακών πλευρών, S_o , και του πλήθους των συνοριακών κορυφών, V_o . Αυτό θα το επιτύχουμε κάνοντας μια «περιήγηση» γύρω από το σύνορο του δεδομένου n -γώνου. Κατά τη διάρκεια αυτού του «ταξιδιού» μας συναντάμε εναλλάξ «κορυφές» και «πλευρές», και επομένως τα δύο πλήθη είναι ίσα μεταξύ τους:

$$V_o = S_o.$$

Υπάρχει επίσης μια σχέση μεταξύ του πλήθους των εσωτερικών πλευρών, S_{eo} , και του πλήθους των εσωτερικών κορυφών, V_{eo} . Αυτή όμως είναι πιο περίπλοκη:

$$3V_{eo} \geq S_{eo}.$$

Για να αποδείξουμε αυτή την ανισότητα, θα επλέξουμε εκείνες τις εσωτερικές κορυφές που ανήκουν στο εσωτερικό μιας πλευράς. Τέτοιες κορυφές θα τις ονομάζουμε εσωτερικές και θα συμβολίζουμε το πλήθος τους ως V_{eo} . Προφανώς, $V_{eo} \geq V_{eo}$. Επομένως, για να αποδείξουμε την ανισότητα $3V_{eo} \geq S_{eo}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι



Σχήμα 11

Η κορυφή A αντιστοιχεί σε μια κόκκινη πλευρά, στην οποία αυτή η κορυφή είναι εσωτερική, και σε δύο μπλε πλευρές.

$$3V_{eo} \geq S_{eo}.$$

Αυτή η ανισότητα θα αποδειχτεί αν καταφέρουμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε εσωτερική κορυφή τρεις εσωτερικές πλευρές με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε εσωτερική πλευρά να αντιστοιχεί σε μία τουλάχιστον κορυφή. Υπάρχει μια τέτοια αντιστοιχία και παρουσιάζεται στο Σχήμα 11.

Πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι κάθε εσωτερική πλευρά αντιστοιχεί σε μία τουλάχιστον εσωτερική κορυφή. Αυτό ισχύει προφανώς για κάθε πλευρά που περιέχει μια κορυφή. Αν μια εσωτερική πλευρά δεν περιέχει κορυφή, τότε αποτελεί τμήμα πλευράς ενός άλλου τριγώνου. Τότε, ένα τουλάχιστον από τα άκρα της είναι εσωτερική κορυφή, και η εν λόγω κορυφή είναι αυτή που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη πλευρά.

Άρα, $3V_{eo} \geq S_{eo}$ και, συνεπώς, $3V_{eo} \geq S_{eo}$. Έχουμε επομένως

$$\begin{aligned} 3T &= S = S_o + S_{eo} \leq 3V_{eo} + V_o \\ &= 3(V_{eo} + V_o) - 2V_o \\ &= 3V - 2V_{eo} \leq 3V - 2n. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $V \geq T + \frac{2}{3}n$.

Αφού $n \geq 4$, έχουμε:

$$V \geq T + \frac{8}{3} > T + 2,$$

γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με το Θεώρημα 1.

Επομένως, έχουμε αποδείξει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3. Όταν χωρίζουμε ένα κυρτό n -γωνο ($n \geq 4$) σε τρίγωνα, υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρίγωνα με κοινή πλευρά.

Μελετήστε προσεκτικά την προηγούμενη απόδειξη και προσπαθήστε να λύσετε τις επόμενες ασκήσεις.

Ασκήσεις

2. Χωρίζουμε ένα τρίγωνο σε T τρίγωνα με τέτοιον τρόπο ώστε να μην υπάρχει ζεύγος τριγώνων με κοινή πλευρά. Έστω V το συνολικό πλήθος των κορυφών των τριγώνων αυτής της ανάλυσης. Αποδείξτε ότι

$$V = T + 2.$$

3. Χωρίζουμε ένα n -γωνο ($n \geq 4$) σε τρίγωνα. Αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $n - 3$ τμήματα, καθένα από τα οποία αποτελεί κοινή πλευρά σε δύο τρίγωνα.

4. Στα Θεωρήματα 2 και 3 περιλαμβάνεται η συνθήκη ότι το πολύγωνο είναι κυρτό. Ισχύουν τα θεωρήματα αυτά στην περίπτωση των μη κυρτών πολυγώνων;

Επιστροφή στα οξυγώνια τρίγωνα

Σε δύο από τα προηγούμενα προβλήματα, η ζητούμενη ανάλυση των πολυγώνων σε τρίγωνα δεν υπήρχε. Όταν δεν μπορούμε να επιτύχουμε με την πρώτη προσπάθεια τη ζητούμενη ανάλυση, είναι πιθανόν να σκεφτούμε ότι ο ζητούμενος χωρισμός είναι αδύνατος. Όμως αυτό δεν ισχύει! Πράγματι, ας επιστρέψουμε στο Πρόβλημα 1, όπου ζητούσαμε να χωριστεί ένα τετράγωνο σε οξυγώνια τρίγωνα. Παρόλο που οι πρώτες μας προσπάθειες υπήρξαν αποτυχημένες, η ανάλυση αυτή είναι δυνατή και παρουσιάζεται στο Σχήμα 12.

Ασκήσεις

5. Στο Σχήμα 12, υπάρχουν 24 τρίγωνα. Είναι δυνατόν να επιτύχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα με λιγότερα τρίγωνα;

6. Αποδείξτε ότι κάθε κυρτό πολύ-

γωνο μπορεί να χωριστεί σε οξυγώνια τρίγωνα.

Τρίγωνα ίσου εμβαδού

Πρόβλημα 4. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε περιπτώπλήθος τριγώνων ίσου εμβαδού;

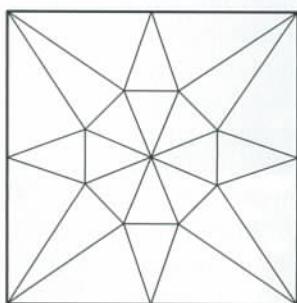
Η διατύπωση του προβλήματος είναι παρόμοια με αυτές των προβλημάτων που λύσαμε προηγουμένως. Όμως, το εν λόγω πρόβλημα χαρακτηρίζεται πολύ δυσκολότερο. Η απάντηση είναι αρνητική. Οι συγγραφείς του άρθρου δεν μπόρεσαν να αποδείξουν αυτό το γεγονός με τη βοήθεια στοιχειωδών μεθόδων, και θα ήταν ευγνώμονες σε όποιον μπορέσει να βρει μια τέτοια λύση. Οι προσεκτικοί αναγνώστες μπορεί να θυμούνται μια πολύ δύσκολη λύση που δόθηκε στο άρθρο «2-αδικοί αριθμοί» του τεύχους Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1999.

Μια πληθώρα αναλύσεων

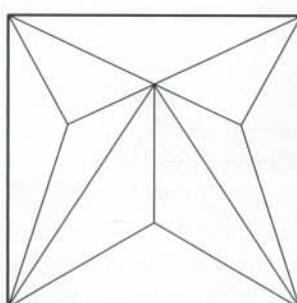
Μέχρι στιγμής έχουμε απλώς αγγίξει την επφάνεια του προβλήματος της ανάλυσης των πολυγώνων σε τρίγωνα. Μπορούμε να διατυπώσουμε πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα σε αυτό το πεδίο, καθένα από τα οποία θα άξιζε να αποτελέσει θέμα ενός ερευνητικού άρθρου. Οι παραλλαγές είναι πολυάριθμες —δεν έχουμε καν εξαντλήσει την ανάλυση του τετραγώνου. Καλούμε λοιπόν τους αναγνώστες να δοκιμάσουν να λύσουν τα επόμενα προβλήματα.

Προβλήματα

5. Το τετράγωνο του Σχήματος 2 έχει χωριστεί σε 12 αμβλυγώνια τρίγωνα, και του Σχήματος 13 σε 10. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε μικρότερο πλήθος αμβλυ-



Σχήμα 12



Σχήμα 13

γώνιων τριγώνων; Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος τριγώνων σε μια τέτοια ανάλυση;

6. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε τρίγωνα έτσι ώστε να μην υπάρχει κάποιο ζεύγος ίδιων τριγώνων, και όλα τα τρίγωνα να είναι

- (i) ορθογώνια,
- (ii) ισοσκελή,
- (iii) ισοσκελή ορθογώνια,
- (iv) άριστα μεταξύ τους,
- (v) ισοπεριμετρικά,
- (vi) ισεμβαδικά;

7. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε

(i) «πολύ αμβλυγώνια» τρίγωνα —δηλαδή σε τρίγωνα που έχουν μία γωνία μεγαλύτερη από 120° ; Σε τρίγωνα με μία γωνία μεγαλύτερη από 179° ;

(ii) «σχεδόν ισόπλευρα τρίγωνα», των οποίων όλες οι γωνίες είναι μικρότερες από 70° ;

(iii) τρίγωνα με δεδομένες γωνίες α, β και γ (για παράδειγμα, με γωνίες $30^\circ, 60^\circ$ και 90°);

(iv) Βρείτε όλες τις γωνίες a για τις οποίες ένα τετράγωνο μπορεί να αναλυθεί σε τρίγωνα που έχουν όλες τις γωνίες τους μικρότερες από την a .

8. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε τρίγωνα έτσι ώστε κάθε τρίγωνο να έχει ακριβώς

- (i) δύο γείτονες,
- (ii) τρεις γείτονες,
- (iii) n γείτονες (όπου n δεδομένος αριθμός);

Δύο τρίγωνα είναι γείτονες αν έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο (αυτή είναι η μία εκδοχή του ορισμού) ή ένα κοινό τμήμα (αυτή είναι μια άλλη εκδοχή του). ◻

Γ. ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

Το πιο ενημερωμένο
φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο,
τώρα και στα ξενόγλωσσα

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,
Τηλ.-Fax: 3628492

Σχετικιστικοί νόμοι διατήρησης

«Στα μαθηματικά, κάποια πράγματα δεν τα κατανοείς. Απλώς τα συνηθίζεις.»

—Johann von Neumann

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΑΧΟΥ παρόντες! Η αρχή διατήρησης της ενέργειας, για παράδειγμα, αποτελεί έναν από τους χρησιμότερους νόμους σε όλους τους κλάδους της επιστήμης. Και βέβαια υπάρχουν οι νόμοι διατήρησης του φορτίου, της ορμής, της στροφορμής, καθώς και ορισμένων κάπως πιο μυστηριωδών ιδιοτήτων όπως ο βαρυονικός και ο λεπτονικός αριθμός. Ωστόσο, οι νόμοι διατήρησης δεν εξαντλούνται μ' αυτό τον σύντομο κατάλογο: είναι εξαιρετικά πολύμορφοι και διαπερνούν τα πάντα. Βρίσκουν εφαρμογή ακόμη και στο πόκερ. Σε κάθε παρτίδα, ο αριθμός των τραπουλόχαρτων προφανώς διατηρείται. Μάλιστα, εφόσον ρυθμίστουν κατάλληλα οι κανονισμοί διεξαγωγής του παιχνιδιού, μπορεί να διατηρείται επίσης και το συνολικό χρηματικό ποσό.

Το Παγκόσμιο Τουρνουά Πόκερ διοργανώνεται κάθε χρόνο στο Λας Βέγκας. Φυσικά, δεν είναι ούτε για φτωχούς ούτε για καρδιακούς. Στην τελική φάση των αγώνων, κάθε παίκτης «μπαίνει» με 10.000 δολάρια! Φέτος συμμετείχαν 512 παίκτες, οπότε το συνολικό χρηματικό ποσό που παίχτηκε ανήλθε στα 5.120.000 δολάρια. Οι κανονισμοί βάσει των οποίων διεξάγεται το παιχνίδι δεν επιτρέπουν στους συμμετέχοντες ούτε να

αποσύρουν ούτε και να προσθέτουν χρήματα —να «βάζουν τα ρέστα τους», όπως μερικές φορές λέγεται— κατά τη διάρκειά του.

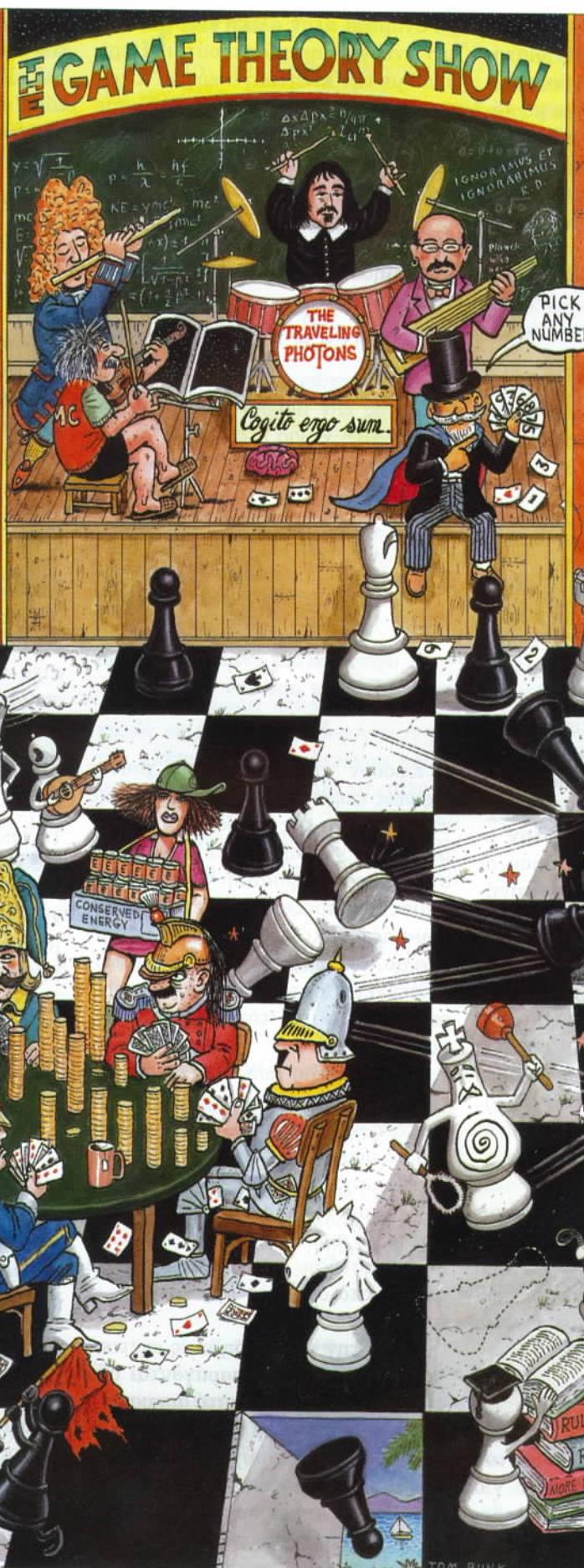
Καθώς εξελίσσεται το παιχνίδι, μερικοί παίκτες συσσωρεύουν μεγάλα κέρδη ενώ άλλοι χάνουν. Ωστόσο, το ολικό χρηματικό ποσό που παίζεται παραμένει σταθερό κάθε στιγμή —5,12 εκατομμύρια δολάρια. Οι παίκτες που χάνουν όλες τους τις μάρκες οφείλουν να εγκαταλείψουν τον αγώνα. Έτσι, σε αντίθεση με το χρηματικό ποσό, ο αριθμός των παικτών δεν διατηρείται.

Αφού χάσουν τις μάρκες τους άλλοι οι παίκτες πλην ενός, ο νικητής έχει συγκεντρώσει 5.120.000 δολάρια. Μπορείτε να φανταστείτε σε τι ύψη φτάνουν τα χτυπήματα όταν στο τραπέζι έχουν απομείνει μόνο δύο παικτες. Όχι, ο νικητής δεν κρατά όλα τα κέρδη του: το συνολικό ποσό μοιράζεται στους παίκτες ανάλογα με το πότε εγκατέλειψαν το παιχνίδι. Φυσικά, όσοι τέθηκαν εκτός μάχης νωρίς παίρνουν λιγότερα, ενώ εκείνος που μένει ώς το τέλος αποκομίζει τη μερίδα του λέοντος. Φέτος, ο νικητής «τοέπιωσε» 1.500.000 δολάρια, ενώ ο δεύτερος πήρε το όχι ευκαταφρόνητο ποσό των 896.500 δολαρίων. Ακόμη και οι παίκτες που τερμάτισαν στην τριακοστή έβδομη ώς και την τεσσαρακοστή πέμπτη θέση δεν έμει-

ναν παραπονούμενοι —κέρδισαν από 15.000 δολάρια.

Το πόκερ ως μέσο πλουτισμού πιθανόν να μην ενδιαφέρει τους περισσότερους αναγνώστες: εντούτοις, αποτελεί ένα μικρό παράδειγμα για το είδος των προβλημάτων με τα οποία καταγίνεται ένας σχετικά νεοσύστατος κλάδος των μαθηματικών που ονομάζεται θεωρία παιγνίων. Τα παιγνία (στα μαθηματικά) θεωρούνται ως καταστάσεις όπου εμπλέκονται άνθρωποι ή μηχανές με αντιτιθέμενα συμφέροντα. Τα απλά παιγνία επιδέχονται πλήρεις «λύσεις», και έτοι αυτά καθαυτά στερούνται πρακτικής αξίας: μολαταύτα, λειτουργούν ως πηγές ιδεών που αφορούν παιγνία πιο πολύπλοκα, όπως η ντάμα και το σκάκι, ή και σοβαρότερα, όπως η πολιτική, οι στρατιωτικές αναμετρήσεις και η νομοθεσία περί ιδιοκτησίας. Άλλα ας διευκρινίσουμε ότι υπάρχουν και παιγνία μη μηδενικού αθροίσματος. Για παράδειγμα, το χρηματιστήριο ή η εθνική οικονομία μπορεί με την πάροδο του χρόνου να κερδίσουν σε αξία.

Οι νόμοι διατήρησης της κλασικής μηχανικής μάς είναι εξαιρετικά οικείοι. Μολονότι στην ειδική θεωρία της σχετικότητας τα χρονικά διαστήματα, τα μήκη, οι ενέργειες, οι ορμές, οι στροφορμές, κ.ο.κ. δεν διατηρούν τις τιμές τους καθώς περνά-



με από το ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άλλο, οι νόμοι διατήρησης εξακολουθούν να ισχύουν. Ωστόσο, απαιτείται να επιφέρουμε κάποιες τροποποιήσεις στις κλασικές μας εκφράσεις για την ορμή και την ενέργεια έτσι ώστε να τις προσαρμόσουμε στο σχετικιστικό εννοιολογικό πλαίσιο.

Η σχετικιστική ορμή p δίνεται από τον τύπο:

$$p = \gamma m v,$$

όπου με m συμβολίζουμε τη μάζα (ηρεμίας) του σωματιδίου και με v την ταχύτητά του, ενώ ο συντελεστής γ ισούται με

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

όπου το $\beta = v/c$ παριστάνει το λόγο της ταχύτητας του σωματιδίου προς την ταχύτητα του φωτός. Σημειωτέον ότι η σχετικιστική ορμή ανάγεται στην αντίστοιχη κλασική έκφραση στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων —δηλαδή, όταν $v/c \rightarrow 0$. Αυτό πρέπει να ισχύει αναγκαστικά, επειδή γνωρίζουμε ότι οι νευτώνειοι νόμοι της κίνησης αποδίδουν άριστα όταν εφαρμόζονται σε φαινόμενα όπου οι ταχύτητες δεν ξεπερνούν τα «συνήθη» μέτρα.

Όπως ξέρουμε, το φωτόνιο έχει ορμή, αλλά δεν διαθέτει μάζα ηρεμίας. Συνεπώς, επιβάλλεται να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική έκφραση για την ορμή του:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c},$$

όπου $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s είναι η σταθερά του Planck ενώ τα λ και ν συμβολίζουν αντίστοιχα το μήκος κύματος και τη συχνότητα του φωτονίου.

Η σχετικιστική ενέργεια ενός σωματιδίου μη μηδενικής μάζας δίνεται από τον τύπο:

$$E = \gamma mc^2.$$

Όταν το σωματίδιο ηρεμεί, ισχύει $\gamma = 1$, οπότε η ενέργεια ηρεμίας του ισούται με $E_0 = mc^2$. Πρόκειται για την περίφημη εξίσωση του Αϊνστάιν που περικλείει την αρχή της ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας. Η διαφο-

ρά ανάμεσα στην ολική ενέργεια και την ενέργεια ηρεμίας ισούται εξ ορισμού με την κινητική ενέργεια K του σωματιδίου. Μπορούμε να δείξουμε ότι και αυτή ανάγεται στην κλασική έκφραση για την κινητική ενέργεια καθώς $v/c \rightarrow 0$:

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2.$$

Ας θυμηθούμε τώρα το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx,$$

το οποίο ισχύει όταν $x \ll 1$. Εφαρμόζοντας την προσέγγιση αυτή στο συντελεστή γ (για $n = -1/2$, $x = -\beta^2$), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) mc^2 \\ &\approx \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1 \right) mc^2 = \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

Η σχετικιστική ενέργεια του φωτονίου δίνεται από τον τύπο:

$$E = h\nu = pc.$$

Εφόσον χρησιμοποιούμε τούτες τις νέες εκφράσεις, η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής λειτουργούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στην κλασική φυσική. Μόνο οι μαθηματικές πράξεις ενδέχεται να παρουσιάζουν κάπως μεγαλύτερη δυσκολία, επειδή στις εκφράσεις μας υπεισέρχεται ο παράγοντας γ ο οποίος εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου.

Το πρόβλημα που θα θέσουμε στο τρέχον τεύχος μάς έρχεται από τη δεύτερη εξέταση για την επλογή των μελών που θα στελέχωνται την ομάδα φυσικής των ΗΠΑ για την εφετινή Ολυμπιάδα. Το συνέθεσε ο Leaf Turner, ο οποίος εργάζεται στο Εθνικό Εργαστήριο του Λος Άλαμος και ανήκει στο ανώτερο προπονητικό επιτελείο της ομάδας.

Κατά την εξαύλωση ενός σχετικιστικού σωματιδίου παράγονται δύο φωτόνια. Το ένα από αυτά απομακρύνεται κινούμενο κατά τον θετικό ημιάξονα των x με συχνότητα ν_1 , ενώ το δεύτερο φεύγει κατά την αντίθετη κατεύθυνση με συχνότητα $\nu_2 < \nu_1$.

A. Προσδιορίστε την ταχύτητα v του αρχικού σωματιδίου.

B. Προσδιορίστε τη μάζα ηρεμίας του αρχικού σωματιδίου.

G. Ποιες συχνότητες έχουν τα φωτόνια στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου;

Σας δίνεται ο τύπος

$$p'_x = F_1 p_x + F_2 \frac{E_\gamma}{c},$$

όπου με p'_x συμβολίζουμε τη x συνιστώσα της ορμής οποιουδήποτε από τα δύο φωτόνια στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, ενώ E_γ και p_x είναι αντίστοιχα η ενέργεια και η x συνιστώσα της ορμής του ίδιου φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του αρχικού σωματιδίου.

D. Προσδιορίστε τους συντελεστές F_1 και F_2 ως συναρτήσεις του β .

Κυριόμενοι τροχοί

Στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 2000 ζητούσαμε από τους αναγνώστες να λύσουν τρία προβλήματα τα οποία αφορούσαν την κύλιση τριών διαφορετικών στερεών εκ περιστροφής πάνω σε κεκλιμένα επίπεδα.

A. Για να δείξουμε ότι όλες οι ομογενείς, στερεές σφαίρες, ανεξάρτητα από τις ακτίνες τους και τις μάζες τους, φτάνουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με την ίδια ταχύτητα, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η απώλεια σε δυναμική ενέργεια αντισταθμίζεται από ισόποσο κέρδος σε κινητική ενέργεια —τόσο λόγω μεταφοράς όσο και λόγω περιστροφής:

$$mgh = mv^2/2 + \Theta\omega^2/2,$$

η

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right).$$

Επομένως,

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

B. Η ροπή αδράνειας οποιουδήποτε στερεού εκ περιστροφής μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή kmR^2 , όπου το k παριστάνει έναν σταθερό συντελεστή που εξαρτάται από το ακριβές σχήμα του στερεού. Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τους ζη-

τούμενους λόγους των ταχυτήτων ενός κυλίνδρου ($k = 1/2$), μιας στεφάνης ($k = 1$) και μιας σφαίρας ($k = 2/5$) της αυτής μάζας, χρειάζεται να επαναλάβουμε τη διαδικασία του μέρους Α για τη γενική εξίσωση:

$$mgh = mv^2/2 + \Theta\omega^2/2,$$

η οποία δίνει τον γενικό τύπο:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}.$$

Παρατηρήστε ότι οι μάζες των στερεών δεν εμφανίζονται στο αποτέλεσμα, οπότε δεν επηρεάζουν καθόλου την ταχύτητα. Όλα τα στερεά ίδιου σχήματος έχουν και την ίδια κίνηση. Για τα τρία αντικείμενα που μας απασχολούν, βρίσκουμε:

$$\text{κύλινδρος: } v = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

$$\text{στεφάνη: } v = \sqrt{gh},$$

$$\text{σφαίρα: } v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Γ. Μας ζητείται να συγκρίνουμε τις γραμμικές και τις γωνιακές επιταχύνσεις τριών συγκεκριμένων κυλίνδρων όταν κατέρχονται κυλιόμενοι κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως a . Και οι τρεις κύλινδροι έχουν την ίδια μάζα, το ίδιο μήκος και την ίδια εξωτερική ακτίνα. Ο πρώτος είναι στερεός, ο δεύτερος έχει μορφή κοίλου σωλήνα με τοιχώματα πεπερασμένου πάχους, ενώ ο τρίτος είναι επίσης κοίλος σωλήνας με τοιχώματα του ίδιου πεπερασμένου πάχους όπως και ο δεύτερος, που όμως έχει γεμιστεί με υγρό πυκνότητας ίδιας με εκείνη των τοιχωμάτων του.

Για να λύσουμε τούτο το πρόβλημα, χρειάζεται να αναλύσουμε τη δυναμική της κύλισης των κυλίνδρων. Πιο συγκεκριμένα, είναι ανάγκη να προσδιορίσουμε την τριβή η οποία απαιτείται ώστε να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, καθότι η στατική τριβή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μικρότερη ή ίση της μF_κ .

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση:

$$\sum F = mg,$$

ή

$$mg\eta\mu a - F_{tp} = mg.$$

Για την περιστροφική κίνηση, από την άλλη, ισχύει:

$$\Sigma M = \Theta\omega'$$

ή

$$RF_{tp} = \Theta\omega' = \Theta\gamma/R.$$

Συνεπώς,

$$\gamma = \frac{R^2 F_{tp}}{\Theta}.$$

Δύνοντας για τη δύναμη της τριβής F_{tp} και την επιτάχυνση γ , βρίσκουμε:

$$F_{tp} = mg\eta\mu a \frac{\Theta/mR^2}{1 + \Theta/mR^2}$$

και

$$\gamma = g\eta\mu a \frac{1}{1 + \Theta/mR^2}.$$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση είναι δυνατόν να έχουμε μόνο εφόσον η γωνία κλίσεως του κεκλιμένου επιπέδου δεν υπερβαίνει μια μέγιστη οριακή τιμή a_{op} . Γι' αυτή την οριακή τιμή, η δύναμη τριβής γίνεται ίση με το γινόμενο μF_κ , όπου F_κ η κάθετη δύναμη:

$$m\mu g\sin a_{op} = mg\eta\mu a_{op} \frac{\Theta/mR^2}{1 + \Theta/mR^2},$$

η οποία δίνει:

$$\epsilon\mu a_{op} = \mu(1 + mR^2/\Theta).$$

Τώρα μας μένει να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας του κάθε κυλίνδρου.

1. Ο πρώτος κύλινδρος έχει ροπή αδράνειας $\Theta = mR^2/2$. Εισάγοντας την έκφραση αυτή στις παραπάνω εξισώσεις, καταλήγουμε ότι

$$\gamma = \frac{2}{3}g\eta\mu a$$

και

$$\epsilon\mu a_{op} = 3\mu.$$

2. Ο δεύτερος κύλινδρος έχει ροπή αδράνειας $\Theta = m(R^2 + r^2)/2$, όπου με r ουμβολίζουμε την εσωτερική ακτίνα του κυλίνδρου. Μπορούμε να

προσδιορίσουμε την r στηριζόμενοι στο γεγονός ότι ο στερεός κύλινδρος και αυτός ο κοίλος σωλήνας έχουν την ίδια μάζα, πράγμα που σημαίνει πως οι πυκνότητές τους πρέπει να διαφέρουν κατά έναν συγκεκριμένο παράγοντα n , όπου

$$\rho_{vol} = n\rho_{st} = n\rho.$$

Εξισώνοντας τη μάζα του στερεού κυλίνδρου με εκείνη του κοίλου σωλήνα

$$\rho\pi R^2 l = n\rho\pi(R^2 - r^2)l,$$

καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$r^2 = R^2 \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

Συνεπώς,

$$\Theta = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) = \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{2n-1}{n} \right).$$

Η αντίστοιχη επιτάχυνση και οριακή γωνία κλίσεως είναι:

$$\gamma = \frac{2n}{4n-1}g\eta\mu a$$

και

$$\epsilon\mu a_{op} = \frac{4n-1}{2n-1}\mu.$$

3. Ο τρίτος κύλινδρος έχει τις ίδιες διαστάσεις με τον δεύτερο, μόνο που στην προκειμένη περίπτωση η μάζα που εκτελεί περιστροφική κίνηση είναι λιγότερη με άλλα λόγια, το υγρό δεν περιστρέφεται, επειδή ανάμεσα σ' αυτό και τα τοιχώματα δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής:

$$r^2 = R^2 \left(\frac{n-1}{n} \right),$$

$$m_{vol} = \frac{\rho\pi(R^2 - r^2)l}{\rho\pi R^2 l} m = \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) m.$$

Η ροπή αδράνειας ισούται με

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2}m_{vol}(R^2 + r^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) m(R^2 + r^2) \\ &= \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{2n-1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη επιτάχυνση και η οριακή γωνία ισούνται με:

$$\gamma = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g\eta\mu a$$

και

$$\varepsilon\varphi a_{op} = \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1} \mu.$$

Εφόσον όλες οι γωνιακές επιτάχυνσεις συνδέονται με τις αντίστοιχες γραμμικές επιτάχυνσεις μέσω της σχέσης $\omega' = \gamma/R$, οι λόγοι γραμμικών και γωνιακών επιτάχυνσεων συμπίπτουν και ισούνται με:

$$1 + \frac{3n}{4n - 1} \div \frac{3n^2}{2n^2 + 2n - 1}.$$

Οι λόγοι των εφαπτομένων για τις οριακές γωνίες κλίσεως είναι:

$$1 + \frac{4n - 1}{3(2n - 1)} \div \frac{2n^2 + 2n - 1}{3(2n - 1)}.$$

Όταν οι κύλινδροι κυλίονται σε κεκλιμένα επίπεδα με γωνία κλίσεως μεγαλύτερη από τη μέγιστη των τριών οριακών γωνιών, όποτε σε κανέναν τους δεν ασκείται δύναμη τριβής ικανή να εξασφαλίσει κύλιση χωρίς ολίσθηση, τότε όλοι τους έχουν την ίδια γραμμική επιτάχυνση:

$$mg\eta\mu a - F_{tp} = mg,$$

$$F_{tp} = \mu mg \text{ συνα.}$$

Οι γωνιακές επιτάχυνσεις δίνονται για όλες τις περιπτώσεις από την έκφραση:

$$\omega' = \frac{RF_{tp}}{\Theta} = \frac{R\mu mg \text{ συνα}}{\Theta}.$$

Εφόσον κάθε κύλινδρος έχει και διαφορετική ροπή αδράνειας, οι αντίστοιχες γωνιακές επιτάχυνσεις ισούνται με:

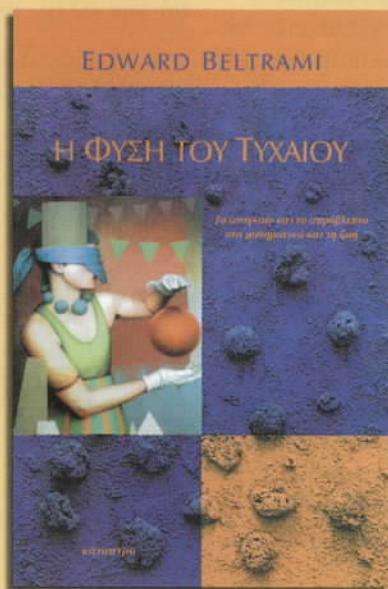
$$\omega'_1 = \frac{2\mu g \text{ συνα}}{R},$$

$$\omega'_2 = \frac{2\mu g \text{ συνα}}{R} \frac{n}{2n - 1}$$

και

$$\omega'_3 = \frac{2\mu g \text{ συνα}}{R} \frac{n^2}{2n - 1}. \quad \blacksquare$$

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Edward Beltrami

Η φύση του τυχαίου

Το αναγκαίο και το απρόβλεπτο στα μαθηματικά και τη ζωή

Η τυχαιότητα αποδεικνύεται πως ανήκει στην κατηγορία εκείνων των εννοιών που, ενώ φαίνονται καθ' όλα ικανοποιητικές όσο παραμένουμε στο επίπεδο της καθημερινότητας, μοιάζουν κυριολεκτικά να εξαφανίζονται μυστηριωδώς όταν αρχίσουμε να ερευνούμε προσεκτικά τη λεπτή υφή τους.

Έτσι, το παρόν βιβλίο γράφτηκε με σκοπό να προκαλέσει, να τέρψει και να πληροφορήσει, ανατρέποντας τις ιδέες τού αναγνώστη περί τυχαίου. Μέσα από τις σελίδες του μας δίνεται η ευκαιρία να δούμε πώς συμβάλλουν στο διάλογο που διεξάγεται για την έννοια της τυχαιότητας τα μαθηματικά, η θεωρία της επικοινωνίας, η επιστήμη των υπολογιστών, η φιλοσοφία, η φυσική και η ψυχολογία.

Μερικά από τα θέματα που αναπτύσσονται στο βιβλίο:

- Τύχη και πιθανότητες
- Νόμοι των μεγάλων αριθμών και στατιστική κανονικότητα
- Αβεβαιότητα και πληροφορία
- Μηνύματα, κώδικες και εντροπία
- Η φευδαρισθηση του ντετερμινισμού
- Ψευδοτυχαιότητα και γεννήτριες τυχαίων αριθμών
- Αλγορίθμική τυχαιότητα
- Τάξη και αταξία
- DNA και λογικό βάθος
- Αυτοομοιότητα και πολυπλοκότητα
- Η αντίληψη του τυχαίου στην ιστορία και στον μέσο σημερινό άνθρωπο.

Ο Edward Beltrami είναι καθηγητής εφαρμοσμένων μαθηματικών και στατιστικής στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης.

Σελ.: 228, 14 × 21 εκ., Α/Μ, πανόδετο, 7.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Μια γκαζόζα με πολύ διηλεκτρικό

Πόσες φυσαλίδες περιέχει το αναψυκτικό σας;

A. Stasenko

MΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ κάποιο υγρό να «αναβράζει» χωρίς εμφανή λόγο. Το φαινόμενο παρουσιάζεται όταν αντλούμε υγρά από βαθιά φρέατα, όταν διαφρργγύνονται σωλήνες που μεταφέρουν ψυκτικό υγρό σε εγκαταστάσεις παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας ή όταν ανοίγεται κάποια φιάλη σαμπάνιας, μπύρας ή γκαζόζας. Υπάρχει άραγε άνθρωπος που μια ζεστή καλοκαιρινή μέρα να μην έχει κοιτάξει με λαχτάρα κάποιο παγωμένο αεριούχο αναψυκτικό, γεμάτο με φυσαλίδες σε τρελό χορό;

Στις περιπτώσεις όπου τέτοια υγρά μεταφέρονται μέσω σωληνώσεων, έχει μεγάλη σημασία να ξέρουμε ποιος όγκος του διαλελυμένου αερίου που περιέχουν έχει αποχωριστεί από το υγρό σχηματίζοντας φυσαλίδες. Φυσικά, κανείς θα μπορούσε να καταφύγει στη μέθοδο της δειγματοληψίας. Όσουπον να αναλυθεί το δείγμα, ωστόσο, ποιος ξέρει τι σχέση θα έχει με το μείγμα κατά τη στιγμή της δειγματοληψίας. Μια πολύ αποτελεσματικότερη μέθοδος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο —η πληροφορία σχετικά με τις μεταβολές του μεταδίδεται με ταχύτητα παραπλήσια εκείνης του φωτός, οπότε η πραγματοποιούμενη τεχνολογική διαδικασία εμφανίζεται ως «παγωμένη» ή, για να μεταχειριστώ τον επιστημονικό όρο, ως οιονεί στατική.

Ας εξετάσουμε πώς ένας συνήθης

πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς μπορεί να ελέγξει σχεδόν στιγμιαία τις ιδιότητες ενός υγρού που ρέει διαμέσου του. Έστω λοιπόν ότι το υγρό έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ και περιέχει φυσαλίδες αερίου (διαφόρων μεγεθών) με $\epsilon_1 = 1$ (Σχήμα 1). Μια φυσαλίδα θα θεωρείται «μεγάλη» εφόσον οι διαστάσεις της είναι συγκρίσιμες με το μήκος l και το πλάτος d του πυκνωτή· συνακόλουθα, ως «μικρές» θα αντιμετωπίζουμε τις φυσαλίδες που οι διαστάσεις τους υπολείπονται κατά πολύ του d .

Υποθέτετε ότι συνδέουμε τους οπλισμούς ενός πυκνωτή με τους πόλους μιας ηλεκτρικής πηγής σταθερής ηλεκτρεγερτικής δύναμης V . Έστω ότι το εμβαδόν καθενός οπλισμού ισούται με S . Διαισθητικά αναμένουμε ότι σε κάτι θα διαφέρει ο πυκνωτής που είναι γεμάτος με υγρό απ' ότι αν ήταν γεμάτος με αέριο. Σε τι ακριβώς συνίσταται αυτό το αινιγματικό «κάτι» και πώς θα έπρεπε να το μετρήσουμε;

Αν αγνοήσουμε την αντίσταση των καλωδιώσεων και την εσωτερική αντίσταση της πηγής, η τάση ανάμεσα στους οπλισμούς θα παραμένει πάντα αμετάβλητη και ίση με τη σταθερή τιμή V . Για να γίνουμε ακριβέστεροι, η αγωγιμότητα του μείγματος αερίου-υγρού υποτίθεται αμελητέα σε σύγκριση με την αγωγιμότητα των καλωδίων ή την εσωτερική αγωγιμότητα της ηλεκτρικής

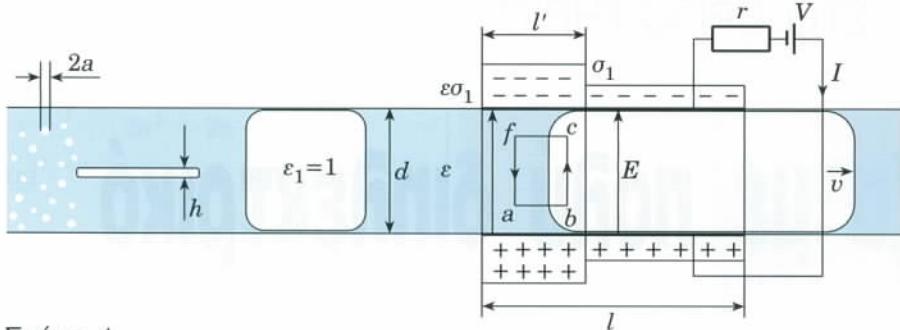
πηγής. Συνεπώς, στις ακραίες περιπτώσεις που εξετάζουμε (πυκνωτής γεμάτος με υγρό ή με αέριο), η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή παραμένει η ίδια: $E = V/d$. Απεναντίας, το φορτίο των οπλισμών του πυκνωτή θα διαφέρει στις δύο περιπτώσεις. Πράγματι, ένας κενός πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς έχει χωρητικότητα $C_1 = \epsilon_0 S/d$, ενώ η χωρητικότητα ενός πανομοιότυπου πυκνωτή γεμάτου με διηλεκτρικό είναι κατά ϵ φορές μεγαλύτερη: $C_\epsilon = \epsilon C_1$. Το φορτίο του «γεμάτου» πυκνωτή ισούται με $q_\epsilon = C_\epsilon V$. Με άλλα λόγια, στις περιπτώσεις που εξετάζουμε, το φορτίο και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στους οπλισμούς θα διαφέρουν κατά παράγοντα ϵ :

$$q_\epsilon = \epsilon q_1, \quad \sigma_\epsilon = \epsilon \sigma_1,$$

όπου

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S} = \epsilon_0 \frac{V}{d}.$$

Ας επισημάνουμε, παρεμπιπτόντως, ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στον μεταξύ των οπλισμών χώρο θα είναι σταθερή παντού, ακόμη κι αν η διηλεκτρική ουσία καταλαμβάνει μέρος μόνο του πυκνωτή (Σχήμα 1). Και τούτο επειδή, σε αντίθετη περίπτωση, το έργο που θα έπρεπε να παραγάγει κανείς για να μετατοπίσει ένα δοκιμαστικό φορτίο κατά μήκος της κλειστής γραμμής $abcfa$ δεν θα ισούνταν με μηδέν



Σχήμα 1

—κάτι το οποίο απαγορεύεται αυστηρά στην ηλεκτροστατική.

Όπως εύκολα διαπιστώνουμε, αν σε μια δεδομένη στιγμή το διηλεκτρικό καταλαμβάνει τμήμα μήκους l' του πυκνωτή, το ολικό φορτίο του πυκνωτή λαμβάνει την τιμή:

$$q = q_1 \left(1 - \frac{l'}{l}\right) + q_e \frac{l'}{l} = \frac{\varepsilon_0 SV}{d} \left[1 + \frac{l'}{l} (\varepsilon - 1)\right]. \quad (1)$$

Επομένως, στην περίπτωση όπου το διηλεκτρικό εισέρχεται στον πυκνωτή με σταθερή ταχύτητα v ($l' = vt$), το κύκλωμα θα διαρρέεται από συνεχές ρεύμα:

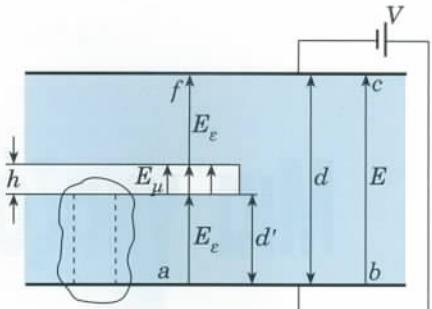
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon_0 SV}{d} \frac{v}{l} (\varepsilon - 1), \quad (2)$$

για $0 < t < 1/v$.

Όταν το υγρό γεμίσει τον πυκνωτή καθ' όλο του το μήκος, το φορτίο φτάνει στη μέγιστη τιμή του, $q_e = \varepsilon q_1$, και παραμένει εκεί.

Αντίθετα, όταν στον πυκνωτή εισέρχεται μια (μεγάλη) φυσαλίδα, το φορτίο του μειώνεται με τον ίδιο ρυθμό, και το ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει τώρα το κύκλωμα κατά την αντίθετη φορά (Σχήμα 2). Συνεπώς, ακόμη κι αν ο «σωλήνας» μας είναι αδιαφανής, μπορούμε να «δούμε» την κίνηση των αερίων και των υγρών μερών του ρευστού μείγματος παρακολουθώντας τις μεταβολές που υφίσταται το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Από την τεχνολογική σκοπιά, ο συγκεκριμένος τύπος ροής —ένα εστερογενές μείγμα αερίου και υγρού όπου μεγάλες φυσαλίδες γεμίζουν τη διατομή του σωλήνα— θεωρείται ανεπιθύμητος. Στην παραγωγή αερί-



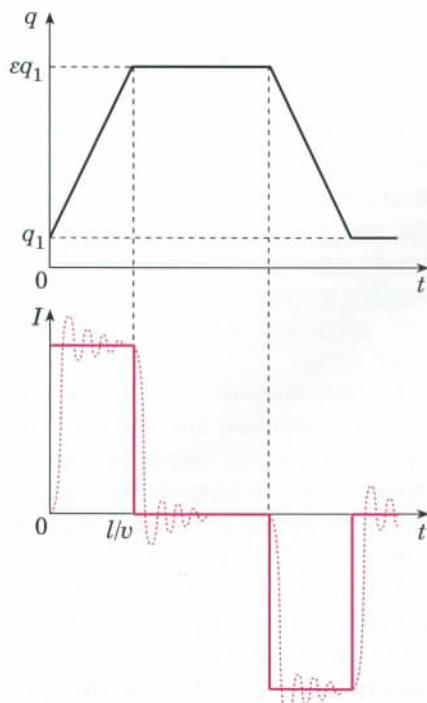
Σχήμα 3

ση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σχισμής και με E_μ το ίδιο μέγεθος εντός του διηλεκτρικού (δηλαδή, εντός του υγρού) και από τις δύο πλευρές της σχισμής. Επιπλέον δε, ισχύει η σχέση:

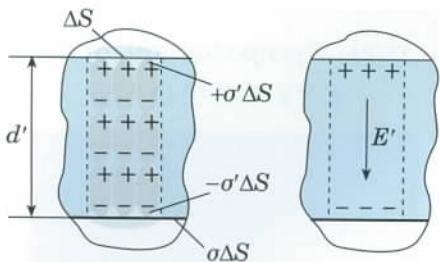
$$E_\mu = \varepsilon E_e. \quad (4)$$

Ας σημειώσουμε παρεμπιπτόντως ότι δεν κάναμε τίποτε περισσότερο από το να προσδώσουμε συμβολική μορφή στον ορισμό που θα βρείτε γραμμένο σε αρκετά βιβλία φυσικής λυκειακού επιπέδου: σχετική διηλεκτρική σταθερά ενός μέσου ονομάζουμε το φυσικό μέγεθος που δείχνει κατά ποιον παράγοντα υπολείπεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (E_e) σε ομογενές διηλεκτρικό τής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο κενό. Και στη συνέχεια προστίθεται ο εξής περιορισμός: Ο ορισμός ισχύει σε συγκεκριμένες μόνο περιπτώσεις —για πλάκες εντός ομογενούς πεδίου, ας πούμε (και χάνει την εγκυρότητά του στην περίπτωση της κοιλης σφαίρας). Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να σκεφτούμε πιο προσεκτικά το φυσικό νόημα της διηλεκτρικής σταθεράς ε . Νωρίτερα τη θεωρήσαμε ως τον παραγόντα κατά τον οποίον αυξάνεται η χωρητικότητα ενός «κενού» πυκνωτή όταν τον γεμίσουμε με διηλεκτρικό.

Φανταστείτε ότι από το διηλεκτρικό εκτέμνουμε ένα πρίσμα με εμβαδόν εγκάρσιας διατομής ΔS (Σχήμα 4). Ο οπλισμός του αντίστοιχου πυκνωτή έχει ηλεκτρικό φορτίο $\sigma \Delta S$, και στο κενό το ηλεκτρικό πεδίο πάνω από τον οπλισμό ισούται με $E_\mu = \sigma / \varepsilon_0$ (κάτω από τον οπλισμό —δηλαδή έξω από τον πυκνωτή— το πεδίο μηδενίζεται). Το διηλεκτρικό πρίσμα βρίσκεται εντός εξωτερικού πεδίου E_μ , το οποίο και το πολώνει. Αυτή η



Σχήμα 2



Σχήμα 4

ιδιότητα συνδέεται με την εμφάνιση ηλεκτρικών διπόλων, τα οποία προσανατολίζονται κατακόρυφα.

Στο εσωτερικό του πρίσματος, τα επερώνυμα φορτία των γειτονικών διπόλων αλληλοεξουδετερώνονται, ενώ οι «ουρές» τους με φορτία $\pm \sigma' \Delta S$ προεξέχουν από το πρίσμα. Επομένως, η διπολική ροπή του πρίσματος έχει μέτρο $\Delta p = d' \sigma' \Delta S$ και κατευθύνεται προς τα πάνω —δηλαδή από το αρνητικό φορτίο προς το θετικό. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που παράγουν αυτά τα δέσμια φορτία λόγω πόλωσης έχει μέτρο $E' = -\sigma'/\epsilon_0$ και κατεύθυνσην αντίθετη από εκείνη της διπολικής ροπής και του εξωτερικού πεδίου. Έτσι, η ένταση του ολικού ηλεκτρικού πεδίου ισούται με:

$$E_\varepsilon = E' + E_\mu = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Μας υπολείπεται ένα βήμα ακόμη. Ας εισαγάγουμε την έννοια της χωρικής πυκνότητας της διπολικής ροπής:

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta S d'} = \sigma' = -\epsilon_0 E'.$$

Αυτό το φυσικό μέγεθος συνδέεται με το ολικό πεδίο εντός του διηλεκτρικού μέσω της εξίσωσης

$$P = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_\varepsilon,$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως γενικός ορισμός της τοπικής σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς, ο οποίος ισχύει σε κάθε σημείο ενός διηλεκτρικού, ανεξαρτήτως αν πρόκειται για ομογενές ή για ανομοιογενές.

Οι εξισώσεις (3) και (4) δίνουν το ηλεκτρικό φορτίο των οπλισμών όταν το μήκος l του πυκνωτή (δηλαδή, όταν η σχισμή προεξέχει από τα άκρα του):

$$q = \epsilon_0 \epsilon S E_\varepsilon = \epsilon_0 S \frac{V}{d} \langle \epsilon \rangle.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό της ενεργούς διηλεκτρικής σταθεράς

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon}{1 + (\epsilon - 1)h/d},$$

όπου λαμβάνεται υπόψη η αναλογία του όγκου (h/d) τον οποίο κατέχει η σχισμή. Με τη βοήθεια των δύο τελευταίων εξισώσεων αντιλαμβανόμαστε ότι καθημία από τις φυσαλίδες τύπου σχισμής ισοδυναμεί με μια ισομήκη φυσαλίδα που καλύπτει άλη τη διατομή του σωλήνα, με τη διαφορά ότι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του αερίου από το οποίο αποτελείται δεν είναι πλέον 1 αλλά $\langle \epsilon \rangle$.

Αν, λοιπόν, χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (1), ανάλογα προσαρμοσμένη, για να εξετάσουμε τη διαδικασία διά της οποίας η «φυσαλίδα» βαθμιαία εισχωρεί στον πυκνωτή με σταθερή ταχύτητα v , το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και με την εξίσωση (2) για να βρούμε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα:

$$I = \frac{-\epsilon_0 S V}{d} \frac{v}{l} \frac{\epsilon(\epsilon - 1)h/d}{1 + (\epsilon - 1)h/d}.$$

Αυτός ο τύπος διαφέρει πολύ από την εξίσωση (2), αν και συμπίπτει μαζί της όταν $h/d \rightarrow 1$.

Οστόσο, έφτασε η ώρα να πούμε λίγα λόγια και για τις μικρές φυσαλίδες (βλ. το αριστερό μέρος του Σχήματος 1). Μολονότι πρόκειται για μικρές φυσαλίδες, ο σχετικός ολικός όγκος τους μπορεί να κυμαίνεται εντός ευρέος φάσματος τιμών —από το μηδέν (όταν η αέρια φάση απουσιάζει παντελώς) έως το 1 (όταν όλες οι μικρές φυσαλίδες συνενώνονται σε μία μεγάλη). Η δυσκολία που παρουσιάζει η περιγραφή ενός τέτοιου ετερογενούς μέσου επιτείνεται ακόμη περισσότερο λόγω του ότι οι φυσαλίδες ενδέχεται να έχουν διαφορετικές ακτίνες και οι μεταξύ τους αποστάσεις μπορεί να μεταβάλλονται κατά τυχαίο τρόπο. Επιπλέον, οι φυσαλίδες είναι δυνατόν να συγκρούονται μεταξύ τους και να συνενώνονται σε μεγαλύτερες, ενώ δεν αποκλείεται να συντελείται παράλληλα και η αντίθε-

τη διαδικασία, δηλαδή κάποια μεγάλη φυσαλίδα να αποσυντίθεται σε μικρότερες. Και για να παραστήσω την εικόνα ακόμη πιο ζοφερή, ας προσθέσω ότι υπάρχει και ένα ηλεκτρικό πεδίο το οποίο πολώνει τις φυσαλίδες, μετατρέποντάς τες σε αλληλεπιδρώντα δίπολα.

Και μια και θίξαμε το ζήτημα αυτό, μήπως ξέρετε μέσα σε ποιο πεδίο βρίσκεται το κάθε δίπολο-φυσαλίδα; Απάντηση: Στο ολικό ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από όλες τις πηγές —από τα ελεύθερα φορτία στους οπλισμούς του πυκνωτή και από τα δέσμια φορτία λόγω πόλωσης. Τι ακριβώς εννοούμε, επομένως, όταν λέμε «μια φυσαλίδα βρίσκεται εντός του ηλεκτρικού πεδίου»; Τισώς η φράση μας να αναφέρεται στο πεδίο που θα υπήρχε στο χώρο τον οποίο κατέχει η φυσαλίδα αν αυτή η ίδια αφαιρούνταν από τη θέση της (ένα φορτίο δεν επιτρέπεται να επιδρά στον εαυτό του) —τότε στο «κενό» που θα άφηνε πίσω της η φυσαλίδα θα απέμενε ένα πεδίο που θα παραγόταν από τις υπολειπόμενες πηγές. Πολλοί εξέχοντες επιστήμονες βασάνισαν το μυαλό τους για να ξεδιαλύνουν αυτό το γρίφο: ο Irving Langmuir, ο Rudolf Clausius, ο Ottaviano Mossotti, ο Hendrik Lorentz...

Όπως βλέπετε, αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα κάθε άλλο παρά τετριμένο. Σε παρόμοιες περιπτώσεις, οι φυσικοί συχνά λένε: Ας αναλύσουμε το πρόβλημα σε στοιχειωδέστερα μέρη. Καταρχάς, θα θεωρήσουμε μία μόνο σφαιρική φυσαλίδα σε έναν άπειρο όγκο υγρού, εντός του οποίου και σε αρκούντως μεγάλη απόσταση από τη φυσαλίδα (στο «άπειρο») παράγεται ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E_r . Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι υπάρχουν πολλές τέτοιες φυσαλίδες στο υγρό (N φυσαλίδες ανά κυβικό μέτρο) που κατά μέσον όρο ισαπέχουν μεταξύ τους (η απόσταση που τις χωρίζει θα ισούται κατά προσέγγιση με $1/\sqrt[3]{N}$). Βάσει αυτών των υποθέσεων, θα υπολογίσουμε μία ενεργό διηλεκτρική σταθερά, η οποία θα αντιπροσωπεύει μία μέση τιμή πάνω σε ολόκληρο τον όγκο του μέσου και θα χαρακτηρίζει το μείγμα υγρού-φυσαλίδων.

Οστόσο, ακόμη και τούτο το μετριοπαθές επιστημονικό πρόγραμμα παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες στην πραγματοποίησή του. Έτσι, θα μπορούσαμε να παρατηθούμε από τη μέχρι τέλους υλοποίησή του: τα δύο παραδείγματα που παρουσιάσαμε παραπάνω μας έδειξαν ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον ολικό όγκο των φυσαλίδων στο χώρο μεταξύ των οπλισμών. Συνεπώς, φαίνεται λογικό να αναμένουμε ότι το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θα εξαρτάται από το χρόνο με διαφορετικό τρόπο απ' ότι στα δύο παραδείγματά μας.

Λάβαμε άραγε υπόψη μας όλους τους σημαντικούς παράγοντες; Ο πιο σύνθετος όχι. Για παράδειγμα, η διηγετική ουσία θα τραβηγκτεί μέσα στον πυκνωτή λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των φορτισμένων οπλισμών και των επαγόμενων φορτίων της ουσίας. Τούτο σημαίνει ότι, στην πρώτη περίπτωση (μεγάλες φυσαλίδες σαν αχηράδες), τη φυσαλίδα που βρίσκεται στον πυκνωτή θα τη συμπέζουν από δεξιά και αριστερά δύο «έμβολα» υγρού. Παρόμοια συμπίεση παρατηρείται και στο μείγμα υγρού-αερίου αν ο ολικός όγκος των φυσαλίδων παρουσιάζει διακυμάνσεις στο χώρο, οπότε η κίνηση του ρευστού αποκλίνει από την ομοιομορφία.

Επίσης, η αντίσταση των καλωδίων σύνδεσης και η εσωτερική αντίσταση της πηγής τάσης δεν είναι στην πραγματικότητα αμελητέες. Αν οι δύο αντιστάσεις ισούνται αθροιστικά με r , η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{q}{C(t)} = V - rI(t),$$

οπότε, σε αντίθεση με την προηγούμενη προσέγγισή μας, η τιμή της δεν παραμένει σταθερή. Για να συνθέσουμε μια ακριβή θεωρία, θα έπρεπε ακόμη να λάβουμε υπόψη το συντελεστή αυτεπαγωγής του κυκλώματος και την αντίστοιχη ΗΕΔ εξ επαγωγής $-LdI/dt$, και έτσι ο νόμος του Kirchhoff θα έπαιρνε τη μορφή μιας «αντιπαθητικής» διαφορικής εξίσωσης για το φορτίο:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = V,$$

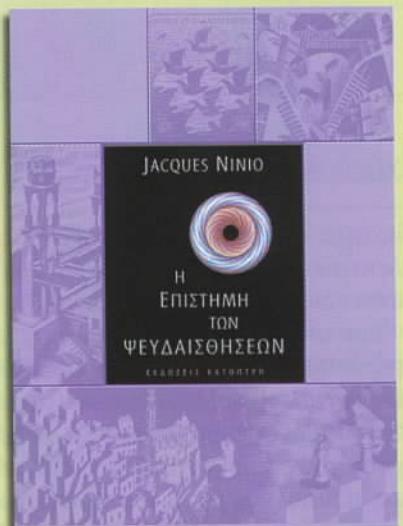
και η οποία περιγράφει τις φθίνουσες ταλαντώσεις. Πρόκειται για εξίσωση που λύνεται δύσκολα, επειδή η χωρητικότητα C μεταβάλλεται κατά την πάροδο του χρόνου (αυτή η μεταβολή αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της μεθόδου μας για τον έλεγχο του μείγματος υγρού-αερίου). Ωστόσο, η μορφή της εξίσωσης μας κάνει να αναμένουμε ότι οι απλές εξαρτήσεις του φορτίου και του ρεύματος (οι συνεχείς γραμμές στο Σχήμα 2) από το χρόνο θα τροποποιηθούν αποκτώντας κάποια ταλαντωτικά χαρακτηριστικά (οι διακεκομένες γραμμές στο ίδιο σχήμα).

Θα μπορούσαμε να προτείνουμε και εναλλακτικές μεθόδους μέτρησης. Για παράδειγμα, μπορούμε να φορτίσουμε τον πυκνωτή μέχρι κάποιας τάσης και να αποσυνδέσουμε την πηγή. Εφόσον το υγρό έχει αφελητέα αγωγιμότητα (και η αγωγιμότητα του αερίου είναι ακόμη μικρότερη), το φορτίο των οπλισμών του πυκνωτή θα διατηρείται σταθερό. Όταν διαμέσου ενός τέτοιου πυκνωτή ρέει υγρό διαφορετικής περιεκτικότητας σε φυσαλίδες, η τάση μεταξύ των οπλισμών μεταβάλλεται. Τέτοιες διατάξεις είναι γνωστές ως μεταλλάκτες τύπου πυκνωτή και χρησιμοποιούνται ευρέως στην τεχνολογία.

Οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι οι μετρήσεις του είδους που περιγράφαμε στο παρόν άρθρο μάς παρέχουν μόνο τον ολικό σχετικό όγκο της αέριας φάσης, όχι το πλήθος των φυσαλίδων ανά μονάδα όγκου. Θα επιθυμούσαμε, λοιπόν, να γνωρίζουμε τουλάχιστον άλλο ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό των φυσαλίδων, τον μέσο όγκο τους. Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, χρειάζεται να εκμεταλλευθούμε άλλα φυσικά φαινόμενα και να χρησιμοποιήσουμε άλλα όργανα (για παράδειγμα, οπτικές διατάξεις). Έτσι, προτού ανοίξετε εκείνο το μπουκάλι γκαζόζας που λέγαμε, μην παραλείψετε να προβληματιστείτε, έστω και λίγο, για το πλήθος των φυσαλίδων που περιέχει και για τη σχέση του με τους νόμους της φύσης. Στην υγειά σας! ◻

ΣΕΙΡΑ: *Εγκέφαλος και Νόσον*

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Jacques Ninio

Η επιστήμη των ψευδαισθήσεων

Το βιβλίο δεν επιχειρεί απλώς να δώσει αναλυτικές απαντήσεις σε ερωτήματα όπως

- Τι είναι ψευδαισθήση;
- Πόσα είδη ψευδαισθήσεων υπάρχουν;
- Ποιος ο ρόλος του εγκεφάλου στη δημιουργία τους;
- Ποια είναι η ιστορία τους;

αλλά, χρησιμοποιώντας πλούσια εικονογράφηση, παρουσιάζει και ερμηνεύει πλήθος από ψευδαισθήσεις (γεωμετρικές πλάνες, οπτικές και ακουστικές αισθησης, παράδοξες εικόνες, κ.λπ.). Παράλληλα, διασαφηνίζοντας τα οργανικά αίτια που τις προκαλούν, μας εμβάλλει σε σκέψεις κατά πόσον πολλά απ' όσα βλέπουμε και ακούμε γύρω μας ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα ή οφείλονται σε διαταραχές της αντίληψής μας...

O Jacques Ninio είναι βιολόγος, Διευθυντής ερευνών στο γαλλικό CNRS.

Σελ.: 220, 21 x 29 εκ., Α/Μ & Έγχρ., 7.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M201

Καθίστε και σκεφτείτε. Η κερκίδα μιας πίστας αγώνων περιλαμβάνει μια άπειρη σειρά καθισμάτων, αριθμημένα ως 1, 2, 3, ... Ένας απρόσεκτος ταμίας πούλης μεν εισιτήρια για τις m πρώτες θέσεις, έκοψε όμως περισσότερα από ένα εισιτήρια για ορισμένες θέσεις ενώ για κάποιες άλλες δεν έκοψε κανένα. Συνολικά πούλησε n εισιτήρια, όπου $n > m$.

Οι θεατές πηγαίνουν στις θέσεις τους ένας-ένας. Κάθε θεατής προσπαθεί να καθίσει στη θέση για την οποία έχει εισιτήριο. Αν δεν βρει κάποιον να έχει καταλάβει τη θέση, κάθεται σ' αυτή. Αν όμως τη βρει κατειλημμένη, μετακινείται στη θέση με την αμέσως μεγαλύτερη αριθμητική μουρμουρίζοντας κάτι που ακούγεται σαν «αμάν» και εφόσον τη βρει ελεύθερη, κάθεται σ' αυτή. Διαφορετικά, ξαναμουρμουρίζει «αμάν» και μετακινείται στην αμέσως επόμενη θέση. Αυτό συνεχίζεται έως ότου βρει ελεύθερη θέση για να καθίσει.

Αποδείξτε ότι το πλήθος των «αμάν» που θα ξεστομιστούν είναι ανεξάρτητο από τη σειρά προσέλευσης των θεατών. (A. Shen και N. Vasilyev)

M202

Ομοκυκλικά σημεία. Δίνονται στο επίπεδο δύο τεμνόμενοι κύκλοι. Το A είναι ένα από τα σημεία τομής των κύκλων. Φέρουμε σε κάθε κύκλο μια διάμετρο παράλληλη προς την ευθεία που εφάπτεται στον άλλο κύκλο στο σημείο A . Οι διάμετροι αυτές δεν τέμνονται. Αποδείξτε ότι τα τέσσερα άκρα αυτών των διαμέτρων ανήκουν στον ίδιο κύκλο. (S. Berlov)

M203

Ριζική διερεύνηση. Έστω τα δευτερ-

βάθμια τριώνυμα $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$. Είναι δυνατόν η εξίσωση $f(g(h(x))) = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και 8; (S. Tokarev)

M204

Σχεδίαση ευθείας. Δίνονται στο επίπεδο τρία σημεία A , B και C . Από το σημείο C να φέρετε μια ευθεία τέτοια ώστε το γινόμενο των αποστάσεων των σημείων A και B απ' αυτή να είναι μέγιστο. Υπάρχει πάντοτε μια τέτοια ευθεία; (N. Vasilyev)

M205

Λύτες προβλημάτων. Οκτώ φοιτητές προσπαθούσαν να λύσουν οκτώ προβλήματα. Βεβαιώθηκε ότι κάθε πρόβλημα λύθηκε από ακριβώς πέντε φοιτητές. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο φοιτητές που έλυσαν (ο ένας ή ο άλλος) και τα οκτώ προβλήματα. Τι ισχύει στην περίπτωση που κάθε πρόβλημα λύθηκε από τέσσερις ακριβώς φοιτητές; (N. Vasilyev και S. Tokarev)

Φυσική

Φ201

Μηχανικοί υπολογισμοί σε μοντέλο. Ένα λειτουργούν μοντέλο ελικοπτέρου κατασκευασμένο υπό κλίμακα 1:10 τροφοδοτείται με ιοχύ από κινητήρα 30 W. Πώση ιοχύ πρέπει να παράγει κατ' ελάχιστον ο κινητήρας με τον οποίο θα εφοδιαστεί ένα πραγματικό ελικόπτερο κατασκευασμένο από τα ίδια υλικά ώστε να του παρέχει την απαραίμενη για την πτήση του στήριξη;

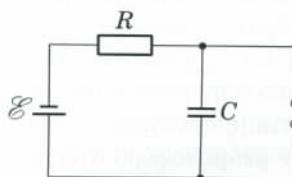
Φ202

Ροή και παράγοντες. Ένα μπαλόνι φέρει μια μικρή τρύπα από την οποία διαρρέει αέριο. Πώσο θα μεταβληθεί η ροή του αερίου αν η θερμοκρασία του αυξηθεί κατά έναν παράγοντα

τέσσερα και η πίεση του κατά έναν παράγοντα οκτώ;

Φ203

Σπινθηριστής. Η απόσταση μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων ενός σπινθηριστή (Σχήμα 1) ρυθμίζεται έτσι ώστε ο σπινθήρας να παράγεται όταν η τάση λαμβάνει την τιμή V . Παράλληλα, επιλέγεται ένας κατάλληλος αντιστάτης R τέτοιος ώστε να προκαλούνται n εκκενώσεις ανά δευτερόλεπτο. Θεωρώντας ότι ο πυκνωτής εκφορτίζεται εντελώς όποτε ξεπά σπινθήρας, υπολογίστε τη μέση ιοχύ την οποία καταναλώνει ο αντιστάτης. (P. Zubkov)



Σχήμα 1

Φ204

Παράγοντας θερμότητα. Ένα επαγγελματικό πηνίο φέρει πολλές περιελίξεις από σύρμα υψηλής ειδικής αντίστασης. Τα άκρα του πηνίου συνδέονται μεταξύ τους. Κοντά στο πηνίο τοποθετείται ένας ισχυρός μόνιμος μαγνήτης. Ο μαγνήτης απομακρύνεται γρήγορα με αποτέλεσμα στο κύκλωμα να παραχθεί ηλεκτρικό ρεύμα. Στα πρώτα 100 ms, εκλύονται 0,01 J θερμότητας: στα επόμενα 100 ms, εκλύονται ακόμη 0,006 J θερμότητας. Πώση θερμότητα θα εκλυθεί στο κύκλωμα κατά την πάροδο ενός μακρού χρονικού διαστήματος;

Φ205

Σκιά στον τοίχο. Μια φωτεινή καλοκαιρινή μέρα, όταν ο Ήλιος έχει ση-

Η συνέχεια στη σελ. 57 ⇨

Ο ανιγματικός μαγνητικός παθιόφιλος

Ας γνωρίσουμε και το φαινόμενο Hall

E. Romishevsky

TO QUANTUM ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕ ΠΡΟσφατα ένα άρθρο με τον τίτλο «Η ανιγματική μαγνητική δύναμη» (Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 2000), το οποίο περιέγραφε τις ιδιότητες της δύναμης Lorentz. Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε την αλληλεπίδραση ανάμεσα στην ηλεκτρική και τη μαγνητική συνιστώσα και θα εξηγήσουμε τη φύση της μαγνητικής δύναμης η οποία δρα σε έναν ρευματοφόρο αγωγό τοποθετημένο εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Ως πρώτο βήμα, λοιπόν, ας διερευνήσουμε τις μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται σε μια αγώγιμη ράβδο η οποία κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} θεωρείται κάθετο προς το σταθερό διάνυσμα της ταχύτητας \mathbf{u} της ράβδου, η οποία έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπέδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Πρόκειται για μια ράβδο λεπτή· η μία της ακμή έχει μήκος d , κατά πολύ μικρότερο από τα μήκη a και b των υπόλοιπων δύο.

Τα θετικά ίόντα κατέχουν σταθερές θέσεις στη ράβδο, ενώ τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κατανέμονται ομοιόμορφα καθ' όλον της τον όγκο. Καθώς η ράβδος κινείται, στα φορτία δρουν μαγνητικές δυνάμεις $\mathbf{F}_\mu = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, με κατευθύνσεις αντίθετες εφόσον ασκούνται σε ετερόνυμα φορτία. Υπό την επίδρασή τους, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια μετακινούνται προς τα κάτω, οπότε στην πάνω και στην κάτω έδρα της ράβδου εμφανίζονται αντιστοίχως οι πυκνότητες φορτίου σ^+ και σ^- .

Όπως συμβαίνει και στους πυκνωτές με παράλληλους οπλισμούς, τούτες οι πυκνότητες φορτίου παράγουν ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στην πάνω και την

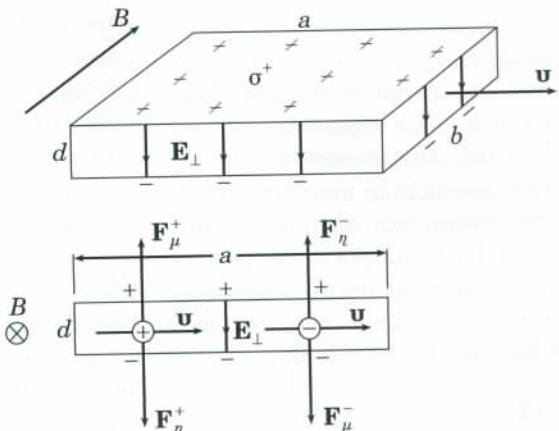


κάτω έδρα της ράβδου. Έτσι, στα φορτία ασκούνται πλέον και ηλεκτρικές δυνάμεις, οι οποίες αντισταθμίζουν τις μαγνητικές. Με άλλα λόγια, η μαγνητική δύναμη παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο που τείνει να αναφέσει τα αποτελέσματα της δράσης της: $F_\mu = F_\eta$, ή $qvB = qE_\perp$ και $E_\perp = \sigma/\epsilon_0$.

Ως όλον, η ράβδος παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερη, επειδή το μαγνητικό πεδίο δεν δημιουργεί νέα φορτία. Το πεδίο απλώς διαχωρίζει τα φορτία που ήδη υπήρχαν στη ράβδο. Συνεπώς, ισχύει $\sigma^+ = |\sigma^-|$, και έτσι σε μια αγώγιμη ράβδο η οποία κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο ασκείται μηδενική

ολική μαγνητική δύναμη.

Ωστόσο, στην περίπτωση όπου η ράβδος επιταχύνεται, ή αν εισέλθει σε κάποια περιοχή όπου καθώς προχωρά



Σχήμα 1

συναντά όλο και ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο, πάνω της ασκείται μια δύναμη πέδησης. Η εμφάνιση της δύναμης αυτής συνοδεύεται από αντίστοιχη αύξηση του ηλεκτρικού πεδίου και των επιφανειακών πυκνοτήτων φορτίου.

Η κινούμενη αγώγιμη ράβδος εντός μαγνητικού πεδίου αποτελεί το πρωτότυπο του βασικού στοιχείου που συναντάμε στις πανίσχυρες γεννήτριες ηλεκτρικής ενέργειας. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) παράγεται από τη μαγνητική δύναμη $\mathbf{F}_\perp = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, με την οποία ασχοληθήκαμε ώς τώρα. Στην περίπτωσή μας, η παραγόμενη ΗΕΔ ισούται με vBd .

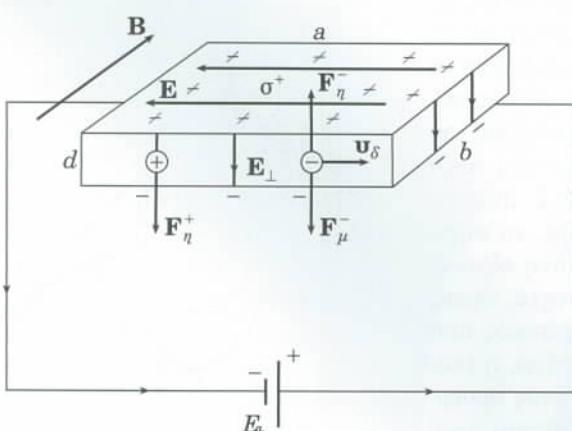
Ας περάσουμε τώρα σε ένα άλλο παράδειγμα του σημαντικού ρόλου του οποίο επιτελεί η μαγνητική δύναμη. Συνδέστε τους πόλους μιας ηλεκτρικής πηγής ΗΕΔ V_b με τις απέναντι έδρες μιας σταθερής μεταλλικής ράβδου όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Αν συμβολίζουμε με R την αντίσταση μεταξύ των εδρών, η ηλεκτρική πηγή θα παράγει ρεύμα $I = V_b/R$, το οποίο ρέει ομοιογενώς διαμέσου οποιασδήποτε διατομής της ράβδου παράλληλης προς τις έδρες. Επειδή η πτώση τάσης ανάμεσα στις απέναντι έδρες ισούται με V_b , στο εσωτερικό της ράβδου υπάρχει ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E κάθετο προς τις έδρες που έχουν συνδεθεί με την ηλεκτρική πηγή.

Το εν λόγω πεδίο θα αναγκάσει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ράβδου να κινηθούν προς τα δεξιά με ταχύτητα v_δ , με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ένα ηλεκτρικό ρεύμα έντασης

$$I = V_b/R = nev_\delta bd = nev_\delta S,$$

όπου με n συμβολίζουμε την πυκνότητα των ελεύθερων ηλεκτρονίων, με e το φορτίο του ηλεκτρονίου, ενώ το γινόμενο bd ισούται με το εμβαδόν S της εγκάρσιας διατομής της ράβδου. Σημειωτέον ότι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων έχει κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη του ηλεκτρικού πεδίου και του ρεύματος.

Στην πορεία αυτής της διαδικασίας, τα θετικά ιόντα που σχηματίζουν το κρυσταλλικό πλέγμα του μετάλλου παραμένουν, φυσικά, ακίνητα. Εν αποστία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, στο σύστημα δεν υπάρχει παρά ένα μόνο μαγνητικό πεδίο: πρόκειται για το εσωτερικό μαγνητικό πεδίο που παράγεται από την κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων, και το οποίο είναι αμελητέο.



Σχήμα 2

Ας ενεργοποιήσουμε τώρα ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο με την ίδια ένταση όπως και πριν. Σημειώστε ότι αυτό το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού ρεύματος. Τα ηλεκτρόνια, κινούμενα με την ταχύτητα διολίσθησης, αισθάνονται μια μαγνητική δύναμη που τα εκτρέπει προς τα κάτω, με αποτέλεσμα τη συσσώρευση πρόσθετου αρνητικού φορτίου στην κάτω έδρα και πρόσθετου θετικού φορτίου στην πάνω.

Η συσσώρευση φορτίου στις έδρες συνεχίζεται ώσπου να παραχθεί ένα εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο με φορά προς τα κάτω το οποίο να εξισορροπεί τη μαγνητική δύναμη, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση όπου η ράβδος κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Η βασική διαφορά στην παρούσα περίπτωση έγκειται στο ότι στην παραγωγή του ηλεκτρικού ρεύματος συμμετέχουν αποκλειστικά και μόνο τα ηλεκτρόνια.

Όταν αποκατασταθεί πλέον η μόνιμη κατάσταση (γεγονός που συμβαίνει πολύ γρήγορα μετά την ενεργοποίηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου), η μέση κίνηση των ηλεκτρονίων αποκτά και πάλι οριζόντια κατεύθυνση, ενώ στο σύστημα αναφοράς όπου η ράβδος πρεμει παρατηρείται ένα εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο $E_\perp = \sigma/\epsilon_0$. Το ηλεκτρικό πεδίο E_\perp εξισορροπεί τη μαγνητική δύναμη $F_\mu = ev_\delta B$ που δρα στα κινούμενα ηλεκτρόνια και παράγει μια δύναμη, με κατεύθυνση προς τα κάτω, στα ακίνητα θετικά ιόντα. Έτσι, λοιπόν, μεταδίδεται η μαγνητική δύναμη στη μεταλλική ράβδο.

Το μέτρο της δύναμης που δρα σε ένα σύρμα μήκους a τοποθετημένο εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου B και διαρρεόμενο από ρεύμα I μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: Σε κάθε θετικό ιόν ασκείται η δύναμη

$$F_\perp = eE_\perp = ev_\delta B.$$

Εφόσον το ολικό πλήθος των θετικών ιόντων στη ράβδο ανέρχεται σε $N = nabd$, όπου με n συμβολίζουμε την πυκνότητα των ηλεκτρονίων ή των θετικών ιόντων, η ολική δύναμη ισούται με:

$$F_{\text{ol}} = ev_\delta Bnabd = IBa,$$

όπου $I = nev_\delta S$ και $S = bd$.

Η εμφάνιση πτώσης τάσης μεταξύ των απέναντι εδρών ενός ρευματοφόρου αγωγού τοποθετημένου εντός μαγνητικού πεδίου ονομάζεται φαινόμενο Hall. Πρόκειται για ένα φαινόμενο που το ανακάλυψε ο Edwin Herbert Hall (1855-1938) το 1879, πολύ προτού ο J.J. Thomson ανακαλύψει το ηλεκτρόνιο. ◻

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- D. Tselykh, «Το μαγνητικό πεδίο», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1998.
- D. Dozorov, «Δυναμική των οιδηροπυρήνων», Μάιος/Ιούνιος 1999.
- A. Stasenko, «Ένας περιστρεφόμενος πυκνωτής», Ιούλιος/Αύγουστος 1999.
- V. Kartsev, «Oersted: μια μαγνητική προσωπικότητα», Ιούλιος/Αύγουστος 1999.

Φωνή κόντρα στον άνεμο

Αιτίες εξασθένησης του ήχου

G. Kotkin

ΟΤΑΝ ΠΑΡΑΓΕΤΑΙ ΚΑΠΟΙΟΣ ΔΥΝΑΤΟΣ θόρυβος κάπου μακριά και ο άνεμος φυσά προς την κατεύθυνση της πηγής, ο ήχος φτάνει στα αφτιά μας εξαιρετικά ασθενής. Γιατί άραγε; Εκ πρώτης όψεως, η απάντηση μοιάζει προφανής. Όταν μια πέτρα εκσφενδονίζεται προς την κατεύθυνση του ανέμου, δεν διανύει τόσο μεγάλη απόσταση ούτε κι ένα πουλί που ακολουθεί πορεία αντίθετη στον άνεμο πετάει τόσο γρήγορα. Άλλα σ' αυτό το περιοδικό δεν έχουμε άλλη επλογή παρά να γίνουμε ποσοτικοί.

Έστω λοιπόν c η ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα και u η ταχύτητα του ανέμου (ως προς το έδαφος). Τότε το ηχητικό σήμα διαδίδεται ως προς το έδαφος με ταχύτητα $c - u$, οπότε για να διανύσει απόσταση l χρειάζεται χρόνο $t = l/(c - u)$. Κατά τον ίδιο χρόνο, το σήμα διαδίδεται (ως προς τον αέρα) σε απόσταση

$$l' = ct = \frac{lc}{c - u}.$$

Η τιμή l' καθορίζει πόσο εξασθενεί το σήμα: Όταν βρισκόμαστε σε απόσταση l από την πηγή του ήχου (ο οποίος διαδίδεται αντίθετα στον άνεμο), ακούμε τον ήχο όπως θα τον ακούγαμε εάν δεν έπνεες άνεμος και απείχαμε από την πηγή κατά απόσταση l' .

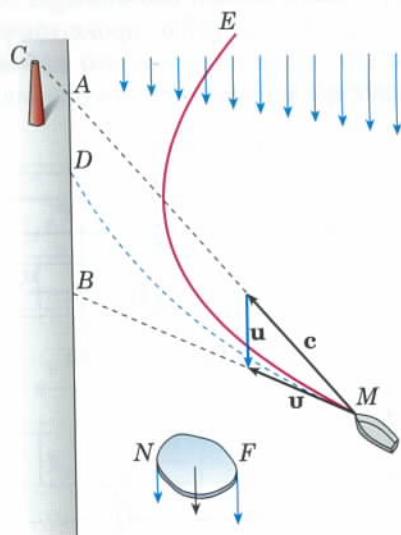
Ας υποθέσουμε ακόμη ότι $u =$

15 m/s (πνέει σχετικά ισχυρός άνεμος), $c = 330$ m/s και $l = 50$ m. Τότε, $l' \approx 52$ m. Ο άνεμος μας «απομακρύνει» σχεδόν 2 m από την πηγή. Πρόκειται για μια μάλλον μικρή διαφορά, που κατά πάσαν πιθανότητα θα περνούσε απαρατήρητη. Στην πραγματικότητα, όμως, η επέδραση του ανέμου είναι πολύ εντονότερη. Πρέπει λοιπόν να υπάρχει κάποια άλλη εξήγηση.

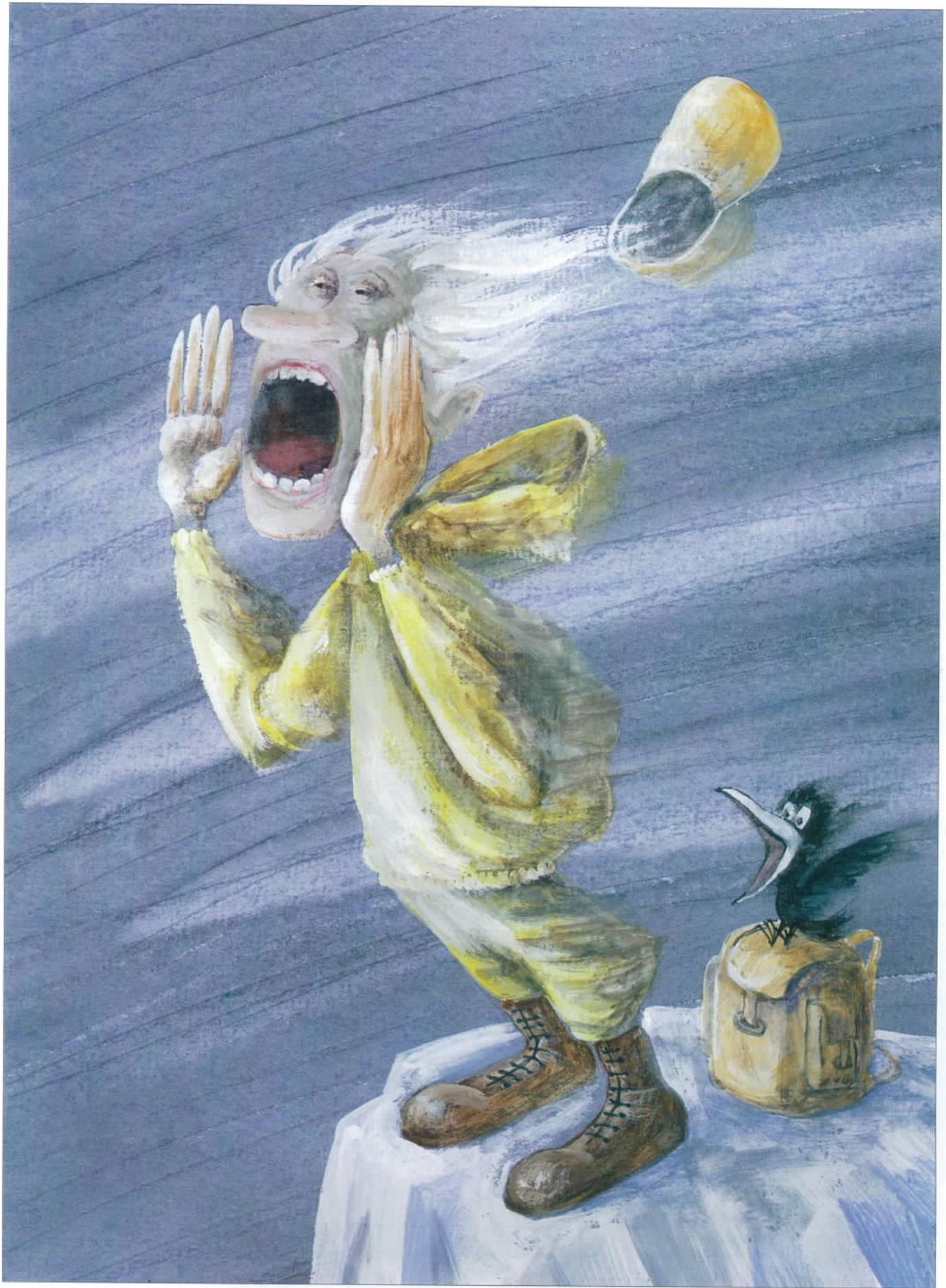
Στην προσπάθειά μας να την ανακαλύψουμε, πιθανόν να μας βοηθήσει η παρατήρηση ότι ο άνεμος δεν πνέει με την ίδια ταχύτητα σε όλα τα υψόμετρα. Πράγματι, όσο ανεβαίνουμε σε μεγαλύτερα ύψη πάνω από το έδαφος, τόσο αυξάνεται και η ταχύτητα του ανέμου. Εκ πρώτης όψεως, βέβαια, τείνουμε να πιστέψουμε πως το φαινόμενο αυτό δεν θα έπρεπε να επηρεάζει τη διάδοση του ήχου εφόσον τόσο η πηγή όσο και ο δέκτης βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αν μειωθεί το ύψος του δέκτη (ή της πηγής) ενός σήματος, τότε το σήμα διανύει ένα μέρος της πορείας του διαδιδόμενο σε στρώματα του αέρα που κινούνται βραδύτερα. Σ' αυτό το τμήμα της διαδρομής του, το σήμα θα υποστεί λιγότερο έντονη εξασθένηση. Στην πραγματικότητα, όμως, διαπιστώνουμε ότι αν κάποιος που αφουγκράζεται καθίσει κάτω, η ικανότητά του να ακούει ήχους προερχόμενους από την κατεύθυνση προς την οποία πνέει ο άνεμος όχι μόνο

δεν βελτιώνεται, αλλά και χειροτερεύει. Παρά το παράδοξο τούτο αποτελεί σημαντικό παράδειγμα για τη λύση του ανίγματος βρίσκεται όντως στην εξάρτηση της ταχύτητας του ανέμου από το υψόμετρο.

Για να διαφωτίσουμε τις ιδιαιτερότητες της διάδοσης του ήχου, ας εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Φανταστείτε μια μηχανοκίνητη βάρκα M η οποία κινείται ως προς το νερό με ταχύτητα c που σχηματίζει ορισμένη γωνία με το ρεύμα του ποταμού (Σχήμα 1). Έστω ότι κάποιος άνθρωπος καθισμένος στη βάρκα (ο καπετάνιος της) έχει βάλει «σημάδι» την καπνοδόχο ενός εργοστασίου, το οποίο μόλις και διακρίνεται μακριά,



Σχήμα 1



και έχει βάλει ρότα προς τα εκεί. Αν δεν υπήρχε το ρεύμα, η βάρκα θα έβγαινε στην όχθη στο σημείο A . Στην πραγματικότητα, ωστόσο, η βάρκα κινείται ως προς την όχθη του ποταμού με ταχύτητα $\mathbf{u} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$. Αν η ταχύτητα του ρεύματος \mathbf{u} παρέμενε σταθερή καθ' όλη την απόσταση ώς την όχθη, η βάρκα θα έβγαινε στο σημείο B . Η ταχύτητα όμως του ρεύματος μειώνεται όσο πλησιάζουμε την όχθη, οπότε το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας \mathbf{u} της βάρκας μεταβάλλονται επίσης. Ως αποτέλεσμα, η βάρκα διαγράφει την καμπύλη MD .

Έστω τώρα ότι τον καπετάνιο τον παίρνει για λίγο ο ύπνος ενώ συνεχίζει να κρατά το πηδάλιο στην ίδια θέση. Ενόσω λοιπόν ο καπετάνιος κοιμάται, εμείς ας στρέψουμε την προσοχή μας σε ένα μικρό κομμάτι πάγου NF που παρασύρεται από το ρεύμα. Καθώς το κομμάτι πάγου ακολουθεί το ρεύμα, το νερό, το οποίο μένει πίσω από τη μία πλευρά του (N) και το προσπερνά από την άλλη (F), το περιστρέφει. Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και στη βάρκα. Η βάρκα περιστρέφεται, με αποτέλεσμα η κατεύθυνση της ταχύτητάς της να μεταβάλλεται, έστω και αν το πηδάλιο της κρατιέται σταθερά στην ίδια θέση. Έτσι, όταν αργότερα ο καπετάνιος θα ξυπνήσει, θα διαπιστώσει πως η βάρκα του κινείται κατά μήκος της καμπύλης ME και ότι πλέον απομακρύνεται από την όχθη.

Η μικρή αυτή προκαταρκτική άσκηση προετοίμασε το έδαφος για την περιγραφή της διάδοσης των ηχητικών σημάτων που θα επιχειρήσουμε ευθύς αμέσως. Οι τροχιές τους (οι ακτίνες) κάμπτονται όπως η τροχιά της βάρκας με τον κοιμούμενο καπετάνιο (Σχήμα 2 —ο άνεμος πνέει από τα δεξιά προς τα αριστερά). Η περιοχή MLN αποτελεί μια «ζώνη σιγής»: οι ηχητικές ακτίνες δεν φτάνουν εκεί. Αν κάποιος βρίσκεται στην περιοχή αυτή, τότε μόλις και μετά δυσκολίας θα ακούσει τον ήχο που πρέρχεται από την πηγή S . (Ο ήχος εν μέρει ακούγεται λόγω ανάκλασης στο έδαφος και των σχετικών φαινομένων περίθλασης.)

Για να προλάβω τυχόν πρόωρους



Σχήμα 2

ενθουσιασμούς, ωστόσο, σπεύδω να σας υπενθυμίσω ότι και η πρώτη μας εξήγηση φαινόταν σωστή από ποιοτική άποψη, τελικά όμως αποδείχτηκε πως δεν συμφωνούσε με τα ποσοτικά πειραματικά δεδομένα. Άρα, επιβάλλεται να ελέγχουμε τη δεύτερη θεωρία μας και ποσοτικά. Ας υπολογίσουμε λοιπόν την απόσταση ώς τη ζώνη σιγής.

Ας θεωρήσουμε την ηχητική ακτίνα SLM (Σχήμα 2) και ας υποθέσουμε ότι είναι σχεδόν οριζόντια. Επιλέγουμε ένα μικρό κατακόρυφο τμήμα AB του μετώπου κύματος, τόσο μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ουσιαστικά ευθύγραμμο (Σχήμα 3). Μετά την παρέλευση χρόνου Δt , το εν λόγω τμήμα θα μετατοπιστεί σε μια νέα θέση $A'B'$ τέτοια ώστε

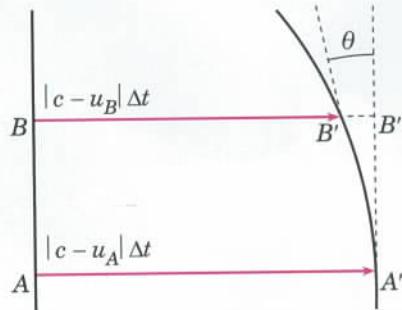
$$AA' = (c - u_A)\Delta t$$

και

$$BB' = (c - u_B)\Delta t,$$

όπου με u_A και u_B συμβολίζουμε την ταχύτητα του ανέμου στο υψόμετρο των σημείων A και B , αντίστοιχα. Τη μετατόπιση αυτή τη συνοδεύει μια στροφή κατά τη μικρή γωνία θ :

$$\begin{aligned} \theta &\approx \text{εφθ} \approx \frac{B'B''}{A'B''} \\ &= \frac{(c - u_A) - (c - u_B)}{\Delta h} = \frac{\Delta u \Delta t}{\Delta h}, \end{aligned}$$



Σχήμα 3

όπου $A'B'' = AB = \Delta h$ και $\Delta u = u_B - u_A$. Συνεπώς, το τμήμα του μετώπου κύματος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{\theta}{\Delta t} \approx \frac{\Delta u}{\Delta h}.$$

Με ίδια γωνιακή ταχύτητα περιστρέφεται και το διάνυσμα \mathbf{c} (η ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα).

Ας υποθέσουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα ω παραμένει σταθερή κατά μήκος όλης της τροχιάς της ηχητικής ακτίνας, έτσι ώστε το τμήμα SLM (Σχήμα 2) να μπορεί να θεωρηθεί τόξο κύκλου. Η ταχύτητα του ηχητικού κύματος ως προς το έδαφος $v = c - u \equiv c$ συνδέεται με την ακτίνα αυτού του κύκλου μέσω της σχέσης $v = \omega r$. Επομένως (Σχήμα 4),

$$SO = OL = r = \frac{v}{\omega} \approx \frac{c \Delta h}{\Delta u}.$$

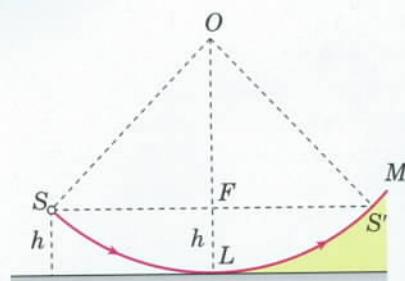
Από το τρίγωνο OSF παίρνουμε

$$\begin{aligned} SF &= \sqrt{OS^2 - OF^2} \\ &= \sqrt{r^2 - (r - h)^2} \\ &\approx \sqrt{2rh} \approx \sqrt{2ch \frac{\Delta h}{\Delta u}}. \end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο ίδιο ύψος h με την ηχητική πηγή θα εισέλθει στη ζώνη σιγής σε απόσταση

$$SS' = 2SF \approx 2\sqrt{2ch \frac{\Delta h}{\Delta u}}.$$

Εφόσον ενδιαφερόμαστε για χονδρικές εκτιμήσεις και όχι για αποτελέσματα ακριβείας, συνήθως αντικαθιστούμε το λόγο των «μικρών μεταβολών» με το λόγο των ίδιων των



Σχήμα 4

τιμών. Έτσι έχουμε $\Delta u / \Delta h \equiv u/h$. Τελικά,

$$SS' = 2h \sqrt{\frac{2c}{u}} \approx 3h \sqrt{\frac{c}{u}}.$$

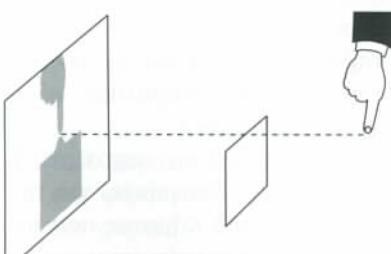
Εισάγοντας στον τελικό μας τύπο τις τιμές $h = 1,5$ m, $c = 330$ m/s και $u = 15$ m/s, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$SS' \approx 20 \text{ m},$$

το οποίο φαίνεται απολύτως εύλογο. Ο ακριβής αριθμητικός υπολογισμός της μορφής της ηχητικής ακτίνας οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

Φυσικά, υπάρχουν πολλοί ακόμη παράγοντες που περιορίζουν την ικανότητά μας να ακούμε κάποιον που φωνάζει αντίθετα στον άνεμο, ο υπολογισμός μας όμως φαίνεται να προσφέρει εχέγγυα ότι έχουμε εντοπίσει τον βασικό «υπαίτιο».

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 51



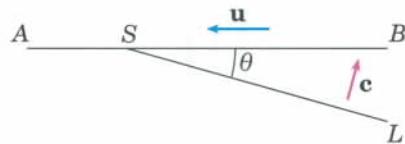
Σχήμα 2

κωθεί ψηλά πάνω από τον ορίζοντα, κοιτάξτε τη σκιά που ρίχνει πάνω σε μια λεία οθόνη (σε έναν λευκό τοίχο, ας πούμε) η ευθύγραμμη ακμή ενός φύλλου χαρτονιού. Τοποθετήστε τώρα το δάκτυλό σας κοντά στο χαρτόνι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Όταν φέρετε το δάκτυλό σας πλησιέστερα στο χαρτόνι, από τη σκοτεινή περιοχή ξεπροβάλλει στο φωτεινό μέρος της οθόνης μια δεύτερη σκιά, πέρα από εκείνη που δημιουργούσε το δάκτυλό σας. Μπορείτε να εξηγήσετε το εν λόγω φαινόμενο; (G. Solovyanyuk)

Ασκήσεις

1. Μια καλοκαιρινή μέρα, κάποιο σκαθάρι αποφάσισε να πετάξει προς τον Ήλιο και απογειώθηκε με ταχύτητα $c = 2$ m/s. Δεν έλαβε υπόψη του, ωστόσο, ότι έπνεε μια ελαφρά αύρα από τα νότια με ταχύτητα $u = 1$ m/s. Κατά ποια γωνία θα αποκλίνει το σκαθάρι από το στόχο του στο σύστημα ηρεμίας ενός σπουργιτιού που παρακολουθεί τα τεκταινόμενα καθισμένο στο κλαδί ενός δέντρου; Η ηρωική πτήση που περιγράφουμε έλαβε χώρα στο Νοβοσιμπίρσκ, όπου το μεσημέρι το γωνιακό ύψος του Ήλιου πάνω από τον ορίζοντα ανέρχεται στην τιμή $\theta = 60^\circ$.

2. Προσδιορίστε την τροχιά του σκαθαριού που πετά προς τον Ήλιο (βλ. προηγούμενο πρόβλημα) στην περίπτωση όπου η ταχύτητα u του ανέμου αυξάνεται συναρπτίσει του ύ-



Σχήμα 5

ψους h σύμφωνα με έναν γραμμικό νόμο: $u = bh$ (όπου b = σταθερά).

3. Το επίπεδο AB χωρίζει μια περιοχή όπου ο αέρας ακινητεί από μια άλλη όπου ο αέρας κινείται με ταχύτητα u (Σχήμα 5). Ένα ηχητικό κύμα φτάνει στο συνοριακό επίπεδο από την περιοχή του ακίνητου αέρα υπό γωνία θ ως προς το AB . Η ταχύτητα του προσπίπτοντος κύματος είναι c . Υπό ποια γωνία ως προς το AB θα προχωρεί το μέτωπο του κύματος μετά τη διάθλαση που θα υποστεί κατά την είσοδό του στην περιοχή του κινούμενου αέρα;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
1όρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
 Μάνης 5, 106 81 Αθήνα, Τηλ.: (01) 38 18 372, Fax: 33 01 583

William Agosta
ΧΗΜΙΚΗ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ
Η γλώσσα των φερομονών

Απόδοση στα ελληνικά:
 Πόππη Καρλέτσα
 σελ. 210, έγχρωμο
 Τιμή: 5.800 δρχ.

οελ. 210, έγχρωμο
 Τιμή: 5.800 δρχ.

Ομαδική ταχύτητα

Μελετώντας το φαινόμενο του κυκλοφοριακού μποτιλιαρίσματος

Helio Waldman

MΑΣ ΑΡΕΣΕΙ ΝΑ ΒΛΕΠΟΥΜΕ ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΘΡΩΠΩΝ ΝΑ βαδίζουν όλοι μαζί «εν ομονοίᾳ» και να ακολουθούν κοινή πορεία, σημάντη πουλιών να διασχίζουν μαζί τον ουρανό, ομάδες από πάπες να κολυμπούν μαζί σε κάποια λίμνη. Πρόκειται για μια συμπεριφορά που μας φαίνεται απολύτως φυσική. Και δύως, γνωρίζουμε ότι αυτή η ομαδική συμπεριφορά απαιτεί από κάθε μέλος της ομάδας να ασκεί κάποιου ειδούς έλεγχο στη θέση του και την ταχύτητά του: η ταχύτητα της ομάδας διαφέρει από τις ταχύτητες που θα είχαν τα μέλη της αν το καθένα τους ταξίδευε μόνο του. Ακολουθούν άραγε κάποιον αρχηγό ή μήπως η ομάδα «διευθύνει εαυτήν»; Τι ειδους κανόνες τηρούν τα επιμέρους άτομα και πώς συνδέονται τούτοι οι κανόνες με τη συλλογική τους, ομαδική συμπεριφορά; Πρόκειται για ερωτήματα που παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον, μα και που μπορεί να αποδειχτούν δύσκολα ή και διασκεδαστικά.

Κύματα

Η έννοια της ομαδικής ταχύτητας εμφανίζεται και στο πλαίσιο της κυματικής κίνησης. Σ' αυτό το πεδίο, σχετίζεται με την ταχύτητα με την οποία κινούνται στο χώρο οι «διαταράξεις» σε κάποιο κύμα, εξεταζόμενες όχι αυτόνομα αλλά πάντα σε αναφορά με τη βασική δομή του. Ένα βασικό κύμα περιγράφεται γενικά από τη σχέση

$$s(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (1)$$

όπου το s παριστάνει το εκάστοτε θεωρούμενο κυματικό μέγεθος (όπως, για παράδειγμα, το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο, την πίεση ή την παραμόρφωση), ενώ με t και x συμβολίζουμε αντίστοιχα το χρόνο και την απόσταση από κάποια δεδομένη αρχή στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος: η κυκλική συχνότητα ω και ο κυματάριθμος k ορίζονται μέσω των σχέσεων $\omega = 2\pi/T$ και $k = 2\pi/\lambda$, όπου το μεν T δηλώνει τη χρονική περίοδο, το δε λ —το οποίο ονομάζεται και μήκος κύματος— είναι η χωρική περίοδος κατά τον άξονα των x .

Τα βασικά κύματα έχουν τη δική τους ταχύτητα, η οποία ονομάζεται φασική ταχύτητα. Θεωρήστε, για παράδειγμα, κάποια από τις κορυφές του κύματος που περιγράφει η εξίσωση (1), δηλαδή ένα σημείο όπου $s = A$. Στην εξίσωση (1), κορυφές εμφανίζονται όποτε το όρισμα της συνάρτησης συνημίτονο ισούται με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Συνεπώς, η κίνηση της κορυφής υπακούει στην εξίσωση:

$$\omega t - kx = m2\pi.$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση ως προς το χρόνο, υπολογίζουμε αμέσως τη φασική ταχύτητα, δηλαδή την ταχύτητα με την οποία κινούνται οι κορυφές, ή και οποιαδήποτε άλλα σημεία «σταθερής φάσης» του κύματος:

$$v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (2)$$



Στην πράξη, ωστόσο, βασικό κύμα στην «καθαρή» του μορφή, όπως την περιγράφει η εξίσωση (1), ουδέποτε συναντά κανείς. Ας δούμε, λοιπόν, τι συμβαίνει όταν υπερτίθενται δύο κύματα (η πιο στοιχειώδης «ομάδα» που μπορεί να διανοηθεί κανείς) με το ίδιο πλάτος αλλά ελαφρώς διαφορετικά μήκη κύματος και περιόδους, σχηματίζοντας έτσι ένα χωροχρονικό μόρφωμα που περιγράφεται από την έκφραση:

$$s_{12}(x, t) = A [\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x)]. \quad (3)$$

Με τη βοήθεια μιας απλής τριγωνομετρικής ταυτότητας, το $s_{12}(x, t)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\begin{aligned} s_{12}(x, t) &= 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \\ &\cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right), \end{aligned} \quad (4)$$

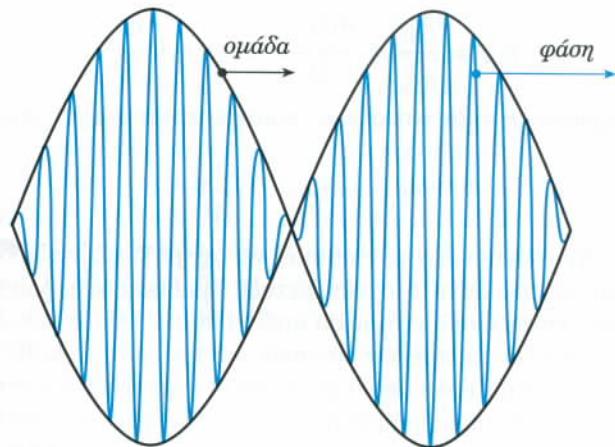
οπότε διαπιστώνουμε ότι περιγράφεται πλέον από ένα γινόμενο δύο κυμάτων! Όπως βλέπουμε, το άθροισμα (η υπέρθεση, ή η επαλληλία) δύο βασικών κυμάτων ισοδυναμεί με το γινόμενο δύο άλλων βασικών κυμάτων (το οποίο παριστάνει τη «διαμόρφωση» του «φέροντος» κύματος). Αυτά τα δύο άλλα βασικά κύματα αναγνωρίζονται με την άμεση επισκόπηση των ημιτονοειδών παραγόντων της εξίσωσης (4). Ο πρώτος παράγοντας, ο οποίος στη γλώσσα των επικοινωνιών ονομάζεται «φέρον κύμα», έχει συχνότητα —χρονική ή χωρική— ίση με τη μέση τιμή των συχνοτήτων —χωρικών ή χρονικών, αντίστοιχα— των βασικών συνιστώντων κυμάτων. Για τον δεύτερο παράγοντα, που μπορεί να ονομαστεί διαμόρφωση του φέροντος κύματος, οι συχνότητές του —χρονική και χωρική— δίνονται από τις ημιδιαφορές των αντίστοιχων συχνοτήτων των βασικών κυμάτων. Αν συμφωνήσουμε να συμβολίζουμε με ω και k τις μέσες τιμές, και με $\Delta\omega$ και Δk τις ημιδιαφορές των κυκλικών συχνοτήτων και των κυματαρίθμων, αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$s_{12}(x, t) = 2A \sin(\omega t - kx) \sin(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x). \quad (5)$$

Το Σχήμα 1 δείχνει ένα στιγμιότυπο του παραπάνω κύματος για μια δεδομένη χρονική στιγμή. Όπως βλέπουμε, το φέρον κύμα πολλαπλασιάζεται από ένα άλλο κύμα που αναπαριστάται μέσω μιας ημιτονοειδούς περιβάλλουσας. Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (2) στο καθένα από τα δύο κύματα, διαπιστώνουμε ότι οι κορυφές κινούνται στη μεν περίπτωση του φέροντος κύματος με ταχύτητα ω/k , στη δε περίπτωση του περιβάλλοντος κύματος με ταχύτητα $\Delta\omega/\Delta k$. Η πρώτη λέγεται φασική ταχύτητα του σύνθετου κύματος: η δεύτερη ονομάζεται ομαδική ταχύτητα, και στο όριο όπου το $\Delta\omega$ γίνεται απειρως μικρό δίνεται από την έκφραση:

$$v_{op} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (6)$$

Το παράδειγμα που παρουσιάσαμε παραμένει τεχνητό, διότι και η ίδια η διαμόρφωση είναι ένα άπειρο κύμα.



Σχήμα 1
«Ομάδα» δύο κυμάτων.

Κάποιο φυσικότερο παράδειγμα του ίδιου φαινομένου μάς παρέχει ένας ηλεκτρομαγνητικός παλμός πεπερασμένης διάρκειας, ο οποίος σχηματίζεται από πεπερασμένο πλήθος κυματικών κορυφών. Στην προκειμένη περίπτωση, είναι δυνατόν να δείξουμε ότι ο παλμός μπορεί να αναλυθεί σε βασικά κύματα της μορφής της εξίσωσης (1), με τη διαφορά ότι στην υπέρθεση πλέον δεν μετέχουν μόνο δύο διακριτές συχνότητες αλλά ένα συνεχές συχνοτήτων, το οποίο καταλαμβάνει μια περιοχή του φάσματος με εύρος που ισούται κατά προσέγγιση με τον αντίστροφο της διάρκειας του παλμού. Παρά την αυξημένη πολυπλοκότητα της κατάστασης, η ομαδική ταχύτητα που δίνεται από την εξίσωση (6) θα εξακολουθήσει να διατηρεί την εγκυρότητά της στο βαθμό που ο παλμός δεν θα έχει παραμορφωθεί τόσο ώστε να γίνει αγνώριστος λόγω της επίδρασης των παραγώγων ανώτερης τάξης της ω ως προς το k .

Αρχίσαμε το άρθρο συζητώντας για την ομαδική κίνηση αυτοτελών αντικειμένων ποικίλης φύσεως (πουλιών, ανθρώπων, κ.ο.κ.), και στη συνέχεια περάσαμε στην ανάλυση των κυμάτων. Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί μήπως κάπου μπλέκουμε τα πράγματα. Υπενθυμίζω, λοιπόν, ότι τα κύματα συνίστανται σε μια διαδοχή ταυτόσημων αντικειμένων, που μπορούμε να τα σκεφτόμαστε ως δίκυκλα, ως κορυφές ή ως άτομα με τυποποιημένη συμπεριφορά. Τα επόμενα τιμήματα του άρθρου δείχνουν ότι η συγκεκριμένη ατομική συμπεριφορά καθορίζει την ταχύτητα οποιασδήποτε ομάδας «μονάδων» που για κάποιο λόγο έχει αποσπαστεί από το κανονικό μόρφωμα μιας περιοδικής «ουράς». Αυτή η «ομαδική» ταχύτητα διαφέρει εν γένει από την ταχύτητα του περιβάλλοντος πλήθους (τη «φασική» ταχύτητα).

Διακροτήματα

Ας δούμε τώρα πώς η ομαδική ταχύτητα που δίνεται από την εξίσωση (6) αναδύεται εντελώς φυσικά από τη συμπεριφορά των μελών της «ομάδας». Προς τούτο, ας βρούμε μια σχέση που να συνδέει τη φασική με την ομαδική ταχύτητα, οι οποίες δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2) και (6):

$$v_{\text{op}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_\varphi)}{dk} = v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{dk}. \quad (7)$$

Εφόσον $\lambda k = 2\pi$ = σταθερά, παίρνουμε αμέσως τη σχέση:

$$v_{\text{op}} = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{dl}. \quad (8)$$

Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να σχηματίσει μια εικόνα για το πώς αυτή η σχέση μεταξύ ομαδικής και φασικής ταχύτητας αναδύεται μέσα από τη συμπεριφορά των διαδοχικών αντικειμένων τα οποία συγκροτούν το κάθε κύμα, του προτείνουμε να εκτελέσει το απλούστατο πείραμα που θα περιγράψουμε. Αρκεί να πάρει κανείς δύο χτένες που τα δόντια τους χωρίζονται από παρεμφερή, αλλά όχι ίσα, διάκενα, και απλώς να τις υπερθέσει: παρατηρώντας τες με το φως να πέφτει από πίσω, μπορεί να διακρίνει ένα μόρφωμα συμβολής (τα λεγόμενα «διακροτήματα») ανάμεσα στις δύο περιοδικές δομές. Αν μετακινήσουμε αργά τη μια χτένα σέρνοντάς την πάνω στην άλλη, θα διαπιστώσουμε ότι αυτή η εικόνα συμβολής κινείται πολύ ταχύτερα από τη χτένα, και όχι αναγκαστικά στην ίδια κατεύθυνση. Αν η χτένα με τα μεγαλύτερα διάκενα κινηθεί προς τα δεξιά ενώ η δεύτερη χτένα παραμένει σταθερή, η εικόνα συμβολής θα κινηθεί προς τα αριστερά.

Ας εξετάσουμε τι ακριβώς συμβαίνει. Έστω λ το μήκος του διάκενου μεταξύ των δοντιών της χτένας A, και $(\lambda + \Delta\lambda)$ το αντίστοιχο μήκος για τη χτένα B (Σχήμα 2). Μπορούμε να συναγάγουμε την κίνηση του διακροτήματος παρακολουθώντας το σημείο σύμπτωσης των δοντιών των δύο χτενών καθώς η μια τους κινείται ως προς την άλλη. Εάν $\Delta\lambda > 0$, όποτε η χτένα B κινείται κατά $\Delta\lambda$ προς τα δεξιά ως προς την A, το σημείο σύμπτωσης μετατοπίζεται στο αμέσως επόμενο δόντι της A προς τα αριστερά: με άλλα λόγια, μετακινείται κατά λ προς τα αριστερά. Συνεπώς, ως προς την A, το μόρφωμα κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη από τη B, αλλά με ταχύτητα κατά $\lambda/\Delta\lambda$ μεγαλύτερη. Ας υποθέσουμε τώρα πώς η A και η B κινούνται κατά την ίδια κατεύθυνση στο χώρο με ταχύτητες v_φ και $v_\varphi + \Delta v_\varphi$, αντίστοιχα. Τότε, το μόρφωμα θα κινείται με ταχύτητα $v_\varphi - (\lambda/\Delta\lambda)\Delta v_\varphi$, τιμή η οποία και συμπίπτει με το δεξιό μέλος της εξίσωσης (8) στο σημείο όπου όλες οι «μικρές μεταβολές» τείνουν στο μηδέν.

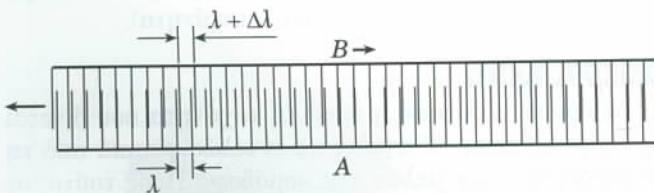
Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι το μόρφωμα που σχηματίζεται από την υπέρθεση δύο περιοδικών δομών κινείται ως προς αυτές με ταχύτητα η οποία εξαρτάται από την παράγωγο της βασικής ταχύτητας του κύματος ως προς τη χωρική του περίοδο (δηλαδή, από το μήκος κύματος). Από τούτη ακριβώς τη διαπίστωση απορρέει η διάκριση ανάμεσα σε φασική και ομαδική ταχύτητα.

Η διάκριση αυτή εξαφανίζεται, φυσικά, στις περιπτώσεις όπου όλα τα βασικά περιοδικά μορφώματα κινούνται με την ίδια ακριβώς ταχύτητα. Κάτι τέτοιο συμβαίνει με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται στο κενό. Εφόσον κινούνται όλα τους με την ίδια ταχύτητα $c = 300.000$ km/s, κάθε μόρφωμα συμβολής που παράγεται από την υπέρθεσή τους κινείται επίσης με την ίδια ταχύτητα c . Στην ύλη, ωστόσο, η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από το μήκος κύματος, καθότι τα άτομα, όταν διεγείρονται από ταλαντούμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, δεν αποκρίνονται ομοιόμορφα αλλά με τρόπο που εξαρτάται από τη συχνότητα του πεδίου. Ως εκ τούτου, η ομαδική ταχύτητα διαφέρει από τη φασική ταχύτητα.

Κυκλοφορία και ομαδική ταχύτητα

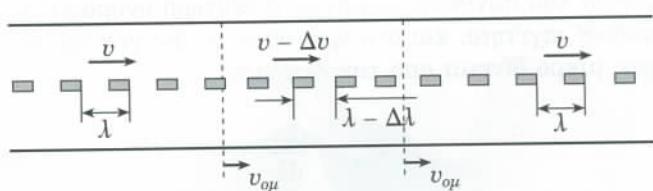
Ας προσπαθήσουμε τώρα να αποκαλύψουμε την ίδια έννοια εστιάζοντας την προσοχή μας στην ατομική συμπεριφορά των αντικειμένων που συγκροτούν μια κινούμενη ουρά. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, μια σειρά αυτοκίνητων σε έναν κυκλοφοριακά κορεούμενο δρόμο, όπου τα οχήματα κινούνται με ταχύτητα v , αφήνοντας μεταξύ τους απόσταση λ . Κατά μήκος της κυκλοφοριακής ροής υπάρχει μια «ζώνη συνωστισμού» —ό,τι συνήθως ονομάζουμε μποτιλιάρισμα—, όπου η απόσταση μεταξύ των οχημάτων μειώνεται σε $\lambda - \Delta\lambda$ και η ταχύτητα σε $v - \Delta v$ (Σχήμα 3). Εν τοιαύτη περιπτώσει, αν κατορθώσουμε να δείξουμε ότι τα σύνορα της ζώνης συνωστισμού κινούνται με την ίδια ταχύτητα και κατεύθυνση, η ζώνη αυτή χαρακτηρίζεται «ομάδα», ενώ η ταχύτητα με την οποία κινούνται τα σύνορα της αντιπροσωπεύει την ομαδική ταχύτητα v_{op} .

Ας θεωρήσουμε το μπροστινό μέτωπο της ζώνης συνωστισμού που προχωρεί με ταχύτητα $v_{\text{op}} < v - \Delta v$. Κάθε αυτοκίνητο κινούμενο εντός της ζώνης συνωστισμού πλησιάζει το μέτωπο με σχετική ταχύτητα $v - \Delta v - v_{\text{op}}$, που είναι και η ταχύτητα με την οποία ο οδηγός του αυτοκίνητου βλέπει να τον πλησιάζει το τέλος του μποτιλιάρισματος. Όταν το αυτοκίνητο φτάνει στο τέλος του μποτιλιάρισματος, αυξάνει την ταχύτητά του σε v , και έτσι απομακρύνεται από το επόμενο αυτοκίνητο με σχετική ταχύτητα Δv . Έπειτα από χρόνο $\Delta/\Delta v$, η μεταξύ τους απόσταση θα έχει αυξηθεί από $\lambda - \Delta\lambda$ σε λ , πράγμα που σημαίνει ότι το μπροστινό μέτωπο της ζώνης συνωστισμού έφτασε στο αμέσως επόμενο αυτοκίνητο· δηλα-



Σχήμα 2

Όταν η χτένα B μετατοπίζεται κατά $\Delta\lambda$ προς τα δεξιά, το μόρφωμα κινείται κατά λ προς τα αριστερά.



Σχήμα 3

Ζώνη «συνωστισμού» σε δρόμο.

δή, όπως φαίνεται από κάθε αυτοκίνητο στη ζώνη συνωστισμού, το μπροστινό μέτωπο μετακινήθηκε κατά λ – $\Delta\lambda$ προς τα πίσω. Επομένως,

$$v - \Delta v - v_{op} = \frac{\lambda - \Delta\lambda}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta v}\right)}.$$

Αν περάσουμε στο όριο των απείρων μικρών μεταβολών, βρίσκουμε:

$$v_{op} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (9)$$

Έτσι, καταλήξαμε σε μια έκφραση πανομοιότυπη με την εξίσωση (8), με την ταχύτητα v της απαρακώλυτης κυκλοφορίας να αναλαμβάνει το ρόλο της φασικής ταχύτητας, και με την ταχύτητα της ζώνης συνωστισμού να παριστάνει την v_{op} . Χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα, μπορούμε να οδηγηθούμε στο ίδιο συμπέρασμα και για τα πίσω σύνορα της ζώνης συνωστισμού.

Στο παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε, βλέπουμε καθαρά πώς η ομαδική ταχύτητα —εν προκειμένω υπό τη μορφή της ταχύτητας της ζώνης συνωστισμού— εξαρτάται από τη συμπεριφορά των οδηγών, και συγκεκριμένα από την απόσταση λ που τηρείται μεταξύ των αυτοκινήτων ως συνάρτηση της ταχύτητας της ροής της κυκλοφορίας. Η συμβατική συμπεριφορά (την οποία συνιστούν οι υπεύθυνες αρχές και που την ακολουθεί ο μέσος οδηγός) είναι να τηρούνται αποστάσεις ανάλογες προς την ταχύτητα, οπότε η v γίνεται ανάλογη του λ . Αν θέσουμε $v = A\lambda$ για οποιαδήποτε σταθερά A , τότε η εξίσωση (9) δίνει $v_{op} = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι εν προκειμένω η ομαδική ταχύτητα μηδενίζεται. Συμπεράνουμε επομένως ότι η συμβατική συμπεριφορά οδήγησης παράγει στατικά μποτιλιαρίσματα, που δεν κινούνται ούτε προς τα εμπρός ούτε προς τα πίσω! Όπως παρατηρεί κανείς στην καθημερινή πραγματικότητα, μερικές φορές οι ζώνες συνωστισμού αυτού του είδους διατηρούνται επί ώρες ολόκληρες, επιμένοντας ακόμη και αφού εκλείψει το αίτιο που τις προκάλεσε.

Ορισμένοι άνθρωποι απορούν γιατί τα μποτιλιαρίσματα δεν προχωρούν προς τα εμπρός ακολουθώντας κατά βήμα τη ροή της κυκλοφορίας. Όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς με τη βοήθεια της εξίσωσης (9), για να συμβεί κάτι τέτοιο ($v_{op} = v$), τα αυτοκίνητα θα έπρεπε να διατηρούν την ταχύτητά τους σταθερή και ανεξάρτητη από την απόσταση λ , πράγμα που σημαίνει ότι οι οδηγοί θα έπρεπε να επιδεικνύουν ή μεγάλη θρασύτητα ή μεγάλη αυτοσυγκράτηση. Αυτή η φανταστική υπόθεση, ωστόσο, υποδεικνύει μερικές ενδιαφέρουσες πιθανότητες. Ενδίδοντας κανείς στον πειρασμό της μελλοντολογίας, θα μπορούσε να φανταστεί μια κατάσταση όπου τα αυτοκίνητα θα οδηγούνται από δίκτυων μένα αυτόματα. Η οδική τους συμπεριφορά, επομένως, θα μπορούσε ακίνδυνα να αναπρογραμματίζεται κατά τέτοιον τρόπο ώστε τα μποτιλιαρίσματα να κινούνται προς τα εμπρός ή προς τα πίσω, έτσι που μετά την παρέλευση ορισμένου χρόνου

να αποκαθίσταται τελικά η ρευστότητα της κυκλοφορίας! Για παράδειγμα, αν μεταξύ των αυτοκινήτων τηρείται απόσταση ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας (η απόσταση διπλασιάζεται όταν η ταχύτητα αυξάνεται κατά μόνο 41,4%), τότε με τη βοήθεια της εξίσωσης (9) διαπιστώνουμε ότι τα μποτιλιαρίσματα θα κινούνται κατά τη φορά της κυκλοφορίας αλλά με τη μισή ταχύτητα ($v_{op} = v/2$). Από την άλλη, μια πιο επιθετική οδική συμπεριφορά όπου τηρείται απόσταση ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της ταχύτητας (η απόσταση διπλασιάζεται όταν η ταχύτητα τετραπλασιάζεται) θα έκανε τα μποτιλιαρίσματα να μετατοπίζονται αντίθετα προς τη ροή της κυκλοφορίας και με ταχύτητα ίση με εκείνη της κυκλοφορίας ($v_{op} = -v$).

Συμπεράσματα

Η ομαδική ταχύτητα αντιμετωπίζεται συνήθως ως μια έννοια που αναδύεται από την ανάλυση της συμπεριφοράς των κυματοομάδων (κυματοπακέτων). Προσπαθήσαμε να αναπτύξουμε μια επιχειρηματολογία που να υποστηρίζει την άποψη ότι η εν λόγῳ έννοια έχει στην πραγματικότητα πολύ ευρύτερο πεδίο εφαρμογής, καθόσον χαρακτηρίζει τη συλλογική κίνηση ομάδων αντικειμένων τα οποία επιδεικνύουν τυπική ατομική συμπεριφορά που δίνεται από μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στην απόσταση και την ταχύτητα. Η ανάλυση αυτών των ομάδων σε επιμέρους άτομα φαίνεται να ταιριάζει πιο φυσικά στη διερεύνηση «κοινωνικών» φαινομένων, όπως η οδική κυκλοφορία. Η ανάλυσή τους σε υπερθέσεις περιοδικών δομών (κυμάτων) αποδεικνύεται βολικότερη, για παράδειγμα, στη μελέτη της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών παλμών σε γραμμικά μέσα. Στη σύγχρονη φυσική, τούτη η αμφιστημία επανεμφανίζεται στο πλαίσιο της διερεύνησης ορισμένων «εξωτικών» ζητημάτων, τέτοιων όπως ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων.

O Helio Waldman είναι καθηγητής στη Σχολή Ηλεκτρικής Μηχανολογίας και Υπολογιστών στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Καμπίνας, στο Σάο Πάολο της Βραζιλίας.



Ένας παράξενος «πλανήτης»

Στατιστικά στοιχεία από και για το Διαδίκτυο

Κώστας Βασιλειάδης

ΟΠΟΤΕ ΕΠΙΣΚΕΠΤΟΜΑΣΤΕ ΤΟ ΧΩΡΟ ΤΟΥ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ, και ειδικότερα το χώρο του ηλεκτρονικού εμπορίου, νιώθουμε σαν να περιδιαβάζουμε στους δρόμους ενός άλλου πλανήτη και φυσικά, δεν εννοούμε τον μυστηριώδη δέκατο πλανήτη του ηλιακού μας συστήματος. Στον νέο τούτο «πλανήτη», οι νόμοι όχι μόνο διαφέρουν από εκείνους που έχουμε συνηθίσει, αλλά και πολλοί απ' αυτούς δεν έχουν καν γραφτεί ακόμη. Επιπλέον, στον «πλανήτη» αυτόν, το ρόλο του χρόνου δεν φαίνεται να σημαδεύει το έτος 2001· η όλη ατμόσφαιρα θυμίζει περισσότερο την κρίσιμη χρονιά του 1789, όταν στη Γαλλία ξεσπούσε ο μεγάλος αγώνας για τη Δημοκρατία. Μια χρονιά γεμάτη κινδύνους και αβεβαιότητες, ταυτόχρονα όμως γεμάτη ενθουσιασμό και αισιοδοξία: το έτος της αρχής της επανάστασης.

Τα δύο τελευταία χρόνια γίναμε μάρτυρες μιας πραγματικά αλματώδους ανάπτυξης στο χώρο του Διαδικτύου, όπου ειδάμε πολλές εταιρείες να εισέρχονται και να δραστηριοποιούνται στο χώρο του ηλεκτρονικού εμπορίου. Μολονότι αληθεύει πως ορισμένες απ' αυτές οδηγήθηκαν στην κατάρρευση, οι περισσότερες όχι μόνο παραμένουν, αλλά και ολοένα εντείνουν την παρουσία τους. Έτσι, ο όγκος των προϊόντων που διακινούνται και των υπηρεσιών που παρέχονται ηλεκτρονικά μέσω του Διαδικτύου συνεχώς αυξάνεται. Βρισκόμαστε στη δεύτερη φάση της επανάστασης, όπου έχει εμπεδωθεί πλέον η αντίληψη ότι η απλή παρουσία μιας επιχείρησης στο Διαδίκτυο, είτε για να προλάβει είτε για να μιμηθεί τους ανταγωνιστές της, δεν εγγυάται αυτόματα και την εμπορική της επιτυχία. Απαιτούνται και άλλες, συμπληρωματικές προϋποθέσεις όπως, επί παραδείγματι, η άψογη εξυπρέτηση των επισκεπτών-πελατών, οι άριστες σχέσεις της επιχείρησης με τους προμηθευτές της, κ.λπ. Σήμερα (Νοέμβριος του 2000), σε παγκόσμια κλίμακα υπάρχουν 400 εκατομμύρια άνθρωποι συνδεδεμένοι στο Διαδίκτυο, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν μόλις το 6,3% του

συνολικού πληθυσμού της Γης. Ο ετήσιος ρυθμός ανάπτυξης από το 1995 μέχρι σήμερα ήταν 100%.

Από τον συνολικό πληθυσμό του Διαδικτύου, τα 110 εκατομμύρια είναι Ευρωπαίοι, τα 90 εκατομμύρια Ασιάτες και τα 150 εκατομμύρια Αμερικανοί. Για το έτος 2002 προβλέπεται ότι ο συνολικός πληθυσμός στο Διαδίκτυο θα ανέλθει στα 650 εκατομμύρια, εκ των οποίων μόνο τα 235 θα χρησιμοποιούν στις επικοινωνίες τους την αγγλική γλώσσα.

	1995	1999	2000	2002
ΗΠΑ	18	110	150	-
Καναδάς	-	-	14	-
Ευρώπη	-	-	110	-
Ασία	-	-	90	-
Ν. Αμερική	-	-	16	-
Αφρική	-	-	3,2	-
Μ. Ανατολή	-	-	2,5	-
Σύνολο	26	200	386	650

Πίνακας 1

Ανάπτυξη συνδρομητών στο Διαδίκτυο. Όλοι οι αριθμοί είναι σε εκατομμύρια. Τα στοιχεία για το 2000 αναφέρονται μέχρι τον Σεπτέμβριο. Ο αριθμός για το 2002 αποτελεί πρόβλεψη.

Συνήθως, όταν μια κρίσιμη τεχνολογία αιχμής πρωτευμανίζεται στην αγορά, οι διάφοροι παρατηρητές την αξιολογούν μετρώντας το χρόνο που θα απαιτηθεί ώσπου να την υιοθετήσουν 50 εκατομμύρια χρήστες. Στην περίπτωση του ραδιοφώνου, για παράδειγμα, ο χρόνος αυτός υπήρξε 38 χρόνια, ενώ για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή και την τηλεόραση ήταν αντίστοιχα 16 και 13 χρόνια. Το Διαδίκτυο σάρωσε όλα τα προηγούμενα ρεκόρ: οι συνδρομητές του έσπασαν το φράγμα των 50 εκατομμυρίων σε 4 μόλις χρόνια.

Αγγλικά	51,0%	Κορεατικά	3,5%
Ιαπωνικά	8,0%	Ιταλικά	3,0%
Γερμανικά	6,0%	Ρωσικά	1,9%
Ισπανικά	5,8%	Ολλανδικά	1,8%
Κινεζικά	5,4%	Πορτογαλικά	1,4%
Γαλλικά	4,0%	Διάφορες	8,2%

Πίνακας 2

Οι δημοφιλέστερες από τις γλώσσες που χρησιμοποιούνται στο Διαδίκτυο. Όλα τα στοιχεία αφορούν τον Ιούλιο του 2000.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το ποσοστό του συνολικού πληθυσμού που αντιπροσωπεύουν οι χρήστες του Διαδικτύου στις διάφορες ευρωπαϊκές χώρες. Τα υψηλότερα ποσοστά συμμετοχής τα συναντούμε στις χώρες της Βόρειας Ευρώπης: Πρώτες έρχονται η Σουηδία και η Νορβηγία με το 51% του πληθυσμού, ακολουθούν η Δανία, η Φινλανδία και η Ολλανδία με το 44% του πληθυσμού, ενώ κάπως χαμηλότερα βρίσκονται το Βέλγιο, η Αυστρία, η Ελβετία και η Αγγλία με το 33% του πληθυσμού. Η μικρότερη συμμετοχή έρχεται από το νότο: Στη Γαλλία, την Ιταλία και την Ισπανία το ποσοστό των χρηστών του Διαδικτύου στο σύνολο του πληθυσμού κυμαίνεται μόλις μεταξύ του 12 και του 15%. Σύμφωνα με τους αναλυτές, οι σημαντικές αυτές διαφορές στα ποσοστά δεν πρέπει να αποδοθούν αποκλειστικά και μόνο στη μεγαλύτερη οικονομική ευημέρεια των βορειοευρωπαίων και στην καλύτερη υποδομή στο βορρά για την ανάπτυξη του Διαδικτύου φαίνεται ότι καίριο ρόλο διαδραματίζουν ο τρόπος ζωής και οι καιρικές συνθήκες, παράγοντες που ενθαρρύνουν τους ανθρώπους εκεί να καταναλώνουν περισσότερο χρόνο μπροστά στην οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή τους. Ο ευρωπαίος χρήστης αφιερώνει στο Διαδίκτυο κατά μέσο όρο 3,2 ώρες την εβδομάδα.

Στην Ελλάδα, οι χρήστες του Διαδικτύου φτάνουν σήμερα στις 800.000, ενώ για το 2004 προβλέπεται ότι θα αυξηθούν στα 3,5 εκατομμύρια. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η σύγκριση με την κινητή τηλεφωνία, η οποία στην Ελλάδα γνώρισε πολύ ταχύτερη ανάπτυξη: οι χρήστες της ξεπερνούν σήμερα τα 5 εκατομμύρια, ενώ πολύ

ΗΠΑ	150,0	Βραζιλία	9,0
Ιαπωνία	28,0	Γαλλία	9,0
Αγγλία	20,0	Ρωσία	9,0
Γερμανία	19,0	Αυστραλία	8,0
Κίνα	17,0	Ολλανδία	7,0
Ν. Κορέα	16,0	Ταϊβάν	6,6
Καναδάς	14,0	Ισπανία	5,0
Ιταλία	12,0	Σουηδία	4,5

Πίνακας 3

Οι χώρες με τους περισσότερους συνδρομητές στο Διαδίκτυο. Όλοι οι αριθμοί είναι σε εκατομμύρια.

σύντομα αναμένεται να υπερβούν και αυτούς της συμβατικής τηλεφωνίας (5,6 εκατομμύρια, αριθμός για τον οποίο χρειάστηκαν σχεδόν 100 χρόνια για να επιτευχθεί).

Στο χώρο του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail) καθημερινά βρίσκεται ενεργοποιημένο το 84% των χρηστών του Διαδικτύου, διακινώντας 26 δισεκατομμύρια μηνύματα ημερησίως.

Στο χώρο του παγκόσμιου ιστού (web) υπάρχουν σήμερα 2 δισεκατομμύρια ιστοσελίδες, ενώ καθημερινά προστίθενται 7 εκατομμύρια καινούργιες. Οι μηχανές αναζήτησης πληροφοριών (search engines) εκτείνουν την έρευνά τους σε ένα μικρό ποσοστό (16%) των ιστοσελίδων, οι οποίες και αντιπροσωπεύουν 19 τρισεκατομμύρια bytes. Φημολογείται ότι κάτω από τον επιφανειακό ιστό (surface web) υπάρχει ένας δεύτερος ιστός (deep web), 30 φορές μεγαλύτερος του πρώτου, ο οποίος αποτελείται από 550 δισεκατομμύρια ιστοσελίδες που ισοδυναμούν με 7.500 τρισεκατομμύρια bytes. Στο χώρο αυτό του δεύτερου ιστού οι μηχανές αναζήτησης πληροφοριών δεν έχουν καμία πρόσβαση. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον δεύτερο ιστό απευθυνθείτε στη διεύθυνση:

<http://www.brightplanet.com>

Επιπλέον, το Διαδίκτυο προσέφερε σε χιλιάδες μικρές επιχειρήσεις την ευκαιρία να προβάλουν την εμπορική τους παρουσία σε παγκόσμιο επίπεδο, κάτι το οποίο έως και πριν μερικά μόλις χρόνια θεωρούνταν εξαιρετικά δύσκολο. Σε παγκόσμια κλίμακα, στο χώρο του ηλεκτρονικού εμπορίου υπάρχουν σήμερα 17 εκατομμύρια εμπορικές διευθύνσεις τύπου «.com», 3 εκατομμύρια διευθύνσεις τύπου «.net» και 2 εκατομμύρια τύπου «.org». Για το έτος 2004 προβλέπεται ότι τα έσοδα από το ηλεκτρονικό εμπόριο θα φτάσουν τα 6,8 τρισεκατομμύρια δολάρια, ποσό που αντιστοιχεί στο 8,6% του συνολικού εμπορίου, ηλεκτρονικού και μη. Δυστυχώς, από την προβλεπόμενη αύξηση των πωλήσεων το 90%, η μερίδα του λέοντος, θα εξακολουθήσει να αναλογεί στις 12 πλουσιότερες χώρες του κόσμου.

Φυσικά, το μεγαλύτερο μέρος από τα έσοδα του ηλεκτρονικού εμπορίου προέρχεται από συναλλαγές μεταξύ επιχειρήσεων (business-to-business, b2b) και όχι από συναλλαγές ανάμεσα σε επιχειρήσεις και ιδιώτες-καταναλωτές (business-to-consumer, b2c). Τα στοιχεία που έχουν δημοσιευθεί μέχρι σήμερα αφορούν την αμερικανική αγορά και οδηγούν στην πρόβλεψη ότι το 2005 το ηλεκτρονικό εμπόριο τύπου b2b θα αντιπροσωπεύει το 42% του συνολικού, ηλεκτρονικού και μη, εμπορίου, ενώ σήμερα μόλις και αντιστοιχεί στο 3%. Το ποσοστό αυτό θα ισοδυναμεί με συναλλαγές αξίας 6,3 τρισεκατομμυρίων δολαρίων.

Όσον αφορά τον ευρωπαϊκό χώρο, τα έσοδα από το ηλεκτρονικό εμπόριο για το 1999 ανήλθαν στα 16,81 δισεκατομμύρια δολάρια, ενώ για το έτος 2003 προβλέπεται ότι θα φτάσουν στα 425 δισεκατομμύρια δολάρια. Το 2004 υπολογίζεται ότι τα έσοδα από το ηλεκτρονικό εμπόριο στην Ευρώπη θα αποτελούν το 22% των εσόδων

του παγκόσμιου ηλεκτρονικού εμπορίου και ταυτόχρονα το 6% του συνολικού ευρωπαϊκού εμπορίου, ηλεκτρονικού και μη.

Στην Ελλάδα, οι αγορές μέσω Διαδικτύου παραμένουν αναμικές. Σύμφωνα με την ελληνική εταιρεία Oneclick (www.oneclick.gr), από τους ελληνες χρήστες μόνο το 5% αξιοποιεί συστηματικά το Διαδίκτυο για αγορές, ενώ μόνο το 16% έχει κάνει τουλάχιστον μία αγορά μέχρι σήμερα.

Στην Ελλάδα των 11 εκατομμυρίων κατοίκων, των 125 δισεκατομμυρίων δολαρίων ακαθάριστου εθνικού εισοδήματος και των 12 χιλιάδων δολαρίων ετήσιου κατά κεφαλήν εισοδήματος, το ελληνικό ηλεκτρονικό εμπόριο βρίσκεται σε ένα στάδιο που στην καλύτερη περίπτωση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί εμβρυϊκό, μην αντιπροσωπεύοντας τίποτε περισσότερο από ένα σύστημα ηλεκτρονικών παραγγελιών.

Άλλες στατιστικές πληροφορίες

Στη συνέχεια, προς χάριν των φιλέρευνων αναγνωστών, παραθέτουμε έναν κατάλογο με ονόματα εταιρειών και με τις διευθύνσεις τους στον παγκόσμιο ιστό όπου μπορεί κανείς να αναζητήσει στατιστικά στοιχεία για τη χρήση του Διαδικτύου:

- Internet Society (ISOC)

<http://www.isoc.org/internet/stats/>

Η ένωση αυτή, στην οποία ανήκουν 150 οργανισμοί και 6.000 μέλη από 100 χώρες, έχει ως σκοπό της να καθοδηγεί τα μέλη της σε θέματα που αφορούν το παρόν και το μέλλον του Διαδικτύου. Στην ιστοσελίδα της μπορείτε να βρείτε πληροφορίες και αναφορές από 30 διαφορετικές πηγές.

- About.com-The Human Internet

<http://internet.about.com/industry/internet/library/archivebl/stats/blstats.htm>

Κέντρο στατιστικής της τεχνολογίας του Διαδικτύου. Εδώ θα βρείτε απαντήσεις σε ερωτήσεις του τύπου: ποιες είναι οι πιο δημοφιλείς ιστοσελίδες στο Διαδίκτυο, ποιες είναι οι πιο δημοφιλείς γλώσσες οι οποίες χρησιμοποιούνται στο Διαδίκτυο, κ.λπ. Η εταιρεία «About.com», που ιδρύθηκε το 1997, διαθέτει 700 οδηγούς από 20 χώρες, οι οποίες καλύπτουν 50.000 θέματα και 1 εκατομμύριο συνδέσεις.

- Nielsen/NetRatings

<http://www.nielsenratings.com>

Εδώ θα βρείτε τα αποτελέσματα μετρήσεων και έρευνας γύρω από τη χρήση του Διαδικτύου, κατανεμημένα κατά ηπείρους. Οι πληροφορίες οι οποίες παρέχονται από την εταιρεία μαζί με τα δωρεάν σεμινάρια είναι πολύτιμες τόσο για τους διαφημιστές όσο και για τους χρήστες του Διαδικτύου.

- eMarketer./e-telligence for business

<http://www.emarketer.com/>

Εδώ θα βρείτε ειδήσεις, στατιστικές και αναφορές για

θέματα που αφορούν την τεχνολογία του Διαδικτύου. Δυστυχώς, οι αναφορές αυτές δεν διατίθενται δωρεάν· η καθεμία τους στοιχίζει περίπου 800 δολάρια. Ωστόσο, από τον κόμβο αυτό μπορείτε να εγγραφείτε δωρεάν ως συνδρομητές σε διάφορα ηλεκτρονικά περιοδικά στατιστικής, όπως το «DailyeStats» και το «QuickeStats».

- PC-Data Online Reports

<http://www.pcdataonline.com>

Η εταιρεία αυτή, ανάμεσα στις άλλες υπηρεσίες, προσφέρει στους επισκέπτες της πολύτιμες αναφορές εντελώς δωρεάν. Στις αναφορές αυτές συμπεριλαμβάνεται μια εβδομαδιαία αξιολόγηση των πλέον δημοφιλών παρουσιών στο Διαδίκτυο, και μια αναφορά για τις εβδομαδιαίες συνήθειες των καταναλωτών που χρησιμοποιούν το Διαδίκτυο για τις αγορές τους.

- CyberAtlas

<http://cyberatlas.internet.com/>

<http://www.internet.com/>

Παράρτημα της εταιρείας internet.com, μιας από τις μεγαλύτερες πύλες στο Διαδίκτυο.

- Nua

<http://www.nua.ie/surveys/>

Η εταιρεία καταμετράει τους συνδρομητές του Διαδικτύου και διαθέτει πλήρη στατιστικά στοιχεία για κάθε γωνιά του πλανήτη. Το εβδομαδιαίο ηλεκτρονικό περιοδικό της το διαβάζουν 250.000 αναγνώστες. Αξίζει να την επισκεφτείτε.

- CyberStats, του εκδοτικού οίκου Ziff Davis.

<http://www.zdnet.com/filters/business>

και μετά διαλέξτε: E-Commerce. Περιέχει στατιστικές πληροφορίες και ειδήσεις γύρω από τη χρήση του Διαδικτύου.

- Gartner Group

<http://gartner12.gartnerweb.com>

Εταιρεία με 1.200 συμβούλους και 35.000 πελάτες.

- IDC Research

<http://www.idcresearch.com>

Η εταιρεία αυτή πραγματοποιεί ανάλυση αγοράς σε όλους τους τομείς της τεχνολογίας της πληροφορικής.

- Forrester Research

<http://www.forrester.com>

Οι επιστημονικές εργασίες που δημοσιεύονται από την εταιρεία αυτή χάρισαν μεγάλης εκτίμησης στην αγορά.

- Ευρωπαϊκή Πρωτοβουλία για το Ηλεκτρονικό Εμπόριο

<http://www.ispo.cec.be/ecommerce/>

Εδώ υπάρχουν στατιστικές πληροφορίες για το Ευρωπαϊκό Διαδίκτυο.

- Internet Traffic report

<http://www.internettrafficreport.com>

Παρέχονται χρήσιμες πληροφορίες, παγκόσμιος χάρτης και πίνακες κυκλοφορίας στο Διαδίκτυο.

Στατιστικές πληροφορίες για το ελληνικό Διαδίκτυο μπορείτε να βρείτε στις ακόλουθες διευθύνσεις:

- Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
- Ερευνητικό Κέντρο Ηλεκτρονικού Επιχειρείν

<http://www.heltrun.aueb.gr>

Ενδιαφέρουσα ερευνητική δουλειά από τον καθηγητή Γ. Δουκίδη και την ομάδα του, με δημοσιεύσεις για την κατάσταση του ηλεκτρονικού εμπορίου στην Ελλάδα.

- OPEN Services.gr domain survey

<http://www.open.gr>

Η εταιρεία ιδρύθηκε το 1992 και ασχολείται με την παροχή συμβουλευτικών υπηρεσιών σε θέματα τεχνολογίας της πληροφορικής, καθώς και με την ανάπτυξη επιχειρηματικών δραστηριοτήτων στο Διαδίκτυο. Πραγματο-

ποιείται επίσης τριμηνιαία καταγραφή του ελληνικού χώρου του Διαδικτύου.

- OneClick

<http://news.oneclick.gr/Technology>

Παρέχει στατιστικά άρθρα σχετικά με τη χρήση του Διαδικτύου στην Ελλάδα. Δύσκολο να καταλάβει κανείς ποιος είναι υπεύθυνος για την πετυχημένη αυτή ελληνική προσπάθεια.

- The Economist Intelligence Unit

<http://www.ebusinessforum.com>

και μετά διαλέξτε: doing business in ...Greece

Εδώ αναλύονται θέματα φορολογίας, υποδομής, νομοθεσίας και ότι άλλο συνδέεται με το ηλεκτρονικό εμπόριο στην Ελλάδα. Αγγλική εταιρεία (www.eiu.com) με εμπειρία 50 χρόνων παρέχει μια ενδιαφέρουσα εικόνα για την κατάσταση του Διαδικτύου στη χώρα μας.

ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ

Οι Εκδόσεις Κάτοπτρο ζητούν έμπειρους συνεργάτες για μετάφραση και επιστημονική επιμέλεια βιβλίων και άρθρων από τον ευρύτερο χώρο της φυσικής, της βιολογίας και των μαθηματικών. Όσοι ενδιαφέρονται πρέπει να αποτελέσουν σύντομο βιογραφικό σημείωμα, στο οποίο θα συμπεριλαμβάνουν περιγραφή του ακριβούς γνωστικού πεδίου στο οποίο μπορούν να ανταποκριθούν και κάθε σχετική εμπειρία τους. Θα επακολουθήσει προσωπική επικοινωνία, με πρωτοβουλία των εκδόσεων.

Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: 3643272, fax: 3641864,
e-mail: info@katoptro.gr

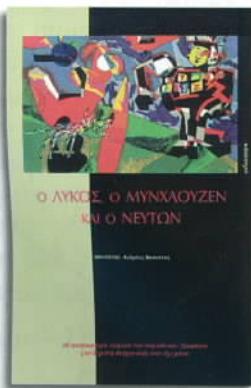
QUANTUM

Το καλύτερο εκπαιδευτικό/επιστημονικό περιοδικό για τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά.

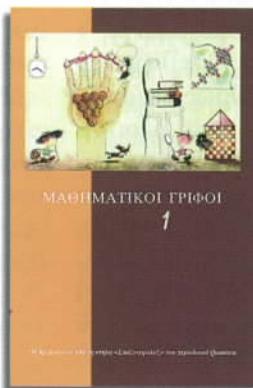
Γραφτείτε συνδρομητής του τώρα.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Μοναδικά εκπαιδευτικά βιβλία από τις ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



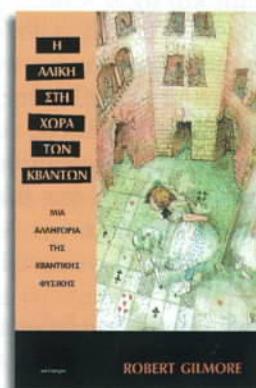
284 σελ., 17 x 25 εκ., A/M, πανόδετο, 6.500 δρχ.



148 σελ., 17 x 25 εκ., A/M & Έγχρ., πανόδετο, 5.400 δρχ.



160 σελ., 17 x 25 εκ., A/M, πανόδετο, 5.500 δρχ.



246 σελ., 17 x 25 εκ., A/M, πανόδετο, 6.500 δρχ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M201

Ας υποθέσουμε ότι $k > 0$ είναι ο μικρότερος αριθμός θέσης για την οποία έχει πουληθεί εισιτήριο. Έστω $K > k$ ο μεγαλύτερος αριθμός με την εξής ιδιότητα: Για κάθε αριθμό i από το k ώς το K , το πλήθος $f(i)$ των εισιτηρίων που έχουν πουληθεί για τις θέσεις που είναι αριθμημένες από το k έως και το i είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος $g(i) = i - k + 1$ αυτών των θέσεων.

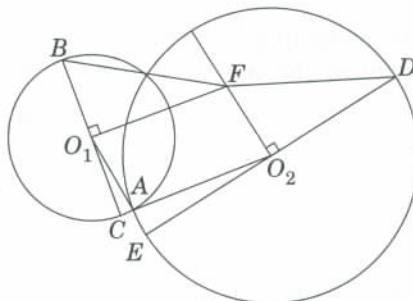
Είναι φανερό ότι από τη στιγμή που θα έχουν καθίσει όλοι οι θεατές, τότε για κάθε $i = k, k+1, k+2, \dots, K$, η i -οστή θέση θα είναι κατειλημμένη, ενώ κατά τη μετακίνηση από την i -οστή στην $(i+1)$ -οστή θέση θα έχουν ακουστεί $f(i) - g(i)$ «αμάν». Αυτό συμβαίνει επειδή το $f(i) - g(i)$ ισούται με το πλήθος των θέσεων που λείπουν για τους θεατές που έχουν αριθμούς εισιτηρίου από k έως i .

Αν υπάρχουν περισσότεροι θεατές απ' αυτούς που κατέλαβαν τις θέσεις k έως K , θεωρούμε ξανά τον ελάχιστο $k' > K$, και επαναλαμβάνουμε τον ίδιο συλλογισμό για τους θεατές που καταλαμβάνουν τις θέσεις k' ώς κάποιο K' (όπου $K' > k'$), και ούτω καθεξής. (Παρατηρήστε ότι αυτό ισχύει ακόμη και αν $n < m$).

Επομένως, δεν είναι μόνο το συνολικό πλήθος των «αμάν» ανεξάρτητο από τη σειρά προσέλευσης των θεατών, αλλά και το πλήθος των «αμάν» που ακούγονται όταν οι θεατές περνάνε από τη θέση i στη θέση $(i+1)$, για κάθε τιμή του i .

M202

Συμβολίζουμε τις δεδομένες διαμέτρους με BC και DE , και τα κέντρα των αντίστοιχων κύκλων με O_1 και O_2 . Από τα O_1 και O_2 φέρουμε κάθετες προς τις αντίστοιχες διαμέτρους, και ονομάζουμε F το σημείο τομής



Σχήμα 1

τους (βλ. Σχήμα 1). Θα αποδείξουμε ότι το F είναι κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

Παρατηρούμε ότι $O_1F \parallel AO_2$, διότι οι O_1F και AO_2 είναι κάθετες στην BC . Ομοίως, $FO_2 \parallel AO_1$. Συνεπώς, το AO_1FO_2 είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $FO_2 = AO_1 = BO_1$ και $FO_1 = AO_2 = DO_2$. Άρα, τα τρίγωνα BO_1F και FO_2D είναι ίσα, οπότε έχουμε $FB = FD$. Επιπλέον, από κατασκευή, το σημείο F ανήκει στις μεσοκαθέτους των τριγώνων BC και DE . Επομένως, $FC = FB = FD = FE$, και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

M203

Η περίπτωση είναι *αδύνατη*. Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και 8 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(g(h(x))) = 0$. Αν η ευθεία $x = a$ είναι ο άξονας της παραβολής που ορίζεται από την εξίσωση $y = h(x)$, τότε $h(x_1) = h(x_2)$ αν και μόνο αν $x_1 + x_2 = 2a$. Το πολυώνυμο $f(g(x))$ έχει το πολύ τέσσερις ρίζες. Όμως, οι αριθμοί $h(1), h(2), \dots, h(8)$ είναι όλοι ρίζες του, και συνεπώς μεταξύ τους εμφανίζονται επαναλήψεις. Έπειτα ότι $a = 4,5$ και $h(4) = h(5), h(3) = h(6), h(2) = h(7)$ και $h(1) = h(8)$. Παρεμπιπόντως, αποδείξαμε ότι οι αριθμοί $h(1), h(2), h(3)$ και $h(4)$ σχηματίζουν μια μονότονη ακολουθία.

Παρομοίως, αν θεωρήσουμε το τριώνυμο $f(x)$ και τις ρίζες του $g(h(1)), g(h(2)), g(h(3))$ και $g(h(4))$, θα βρούμε ότι $h(1) + h(4) = 2b$ και $h(2) + h(3)$

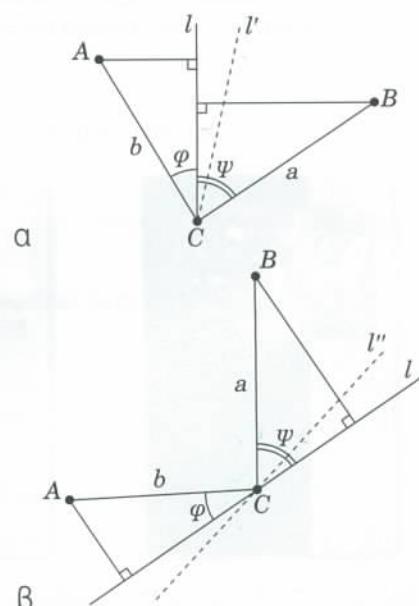
$= 2b$, όπου η ευθεία $x = b$ είναι ο άξονας της παραβολής που ορίζεται από την εξίσωση $y = g(x)$. Όμως, μετά από λίγες πράξεις, βρίσκουμε ότι, αν $h(x) = Ax^2 + Bx + C$ και $h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$, τότε $A = 0$. Συνεπώς, καταλήξαμε σε αντίφαση.

M204

Πρώτα, θεωρούμε μια ευθεία l που διέρχεται από το C και τέμνει το τρίγωνο AB —δηλαδή μια από τις ευθείες που βρίσκονται στο εσωτερικό της γωνίας ACB . Έστω $\angle ACB = 2\gamma$. Το γινόμενο P των αποστάσεων των σημείων A και B από την ευθεία l ισούται (βλ. Σχήμα 2a)

$$P = ab \eta \varphi \eta \psi \\ = ab(\sin(\varphi - \psi) - \sin(\varphi + \psi))/2,$$

όπου φ και ψ είναι οι γωνίες που σχηματίζει η l με τα τρίγωνα AC και BC , αντίστοιχα. Σ' αυτή την παράσταση, οι ποσότητες a , b και $\varphi + \psi = 2\gamma$ είναι σταθερές και, επομένως, το P γίνεται μέγιστο όταν το $\sin(\varphi - \psi)$ γίνεται μέγιστο. Αυτή η μέγιστη τιμή του P είναι



Σχήμα 2

$$P_1 = ab(1 - \cos 2\gamma)/2 = ab \eta \mu^2 \gamma.$$

Αν η l βρίσκεται εκτός της γωνίας ACB , ο τύπος για το P είναι ο ίδιος (βλ. Σχήμα 2β). Σ' αυτή την περίπτωση, το άθροισμα $\varphi + \psi = \pi - 2\gamma = 2\delta$ είναι επίσης σταθερό και ισούται με την εξωτερική γωνία στην κορυφή C του τριγώνου ABC . Η μέγιστη τιμή του P προκύπτει για $\varphi = \psi$ και ισούται με

$$P_2 = ab \eta \mu^2 \delta.$$

Συνεπώς, αν η γωνία $2\gamma = \angle ACB > \pi/2$, τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η διχοτόμος l' της γωνίας ACB (διότι, σε αυτή την περίπτωση, $\eta \mu^2 \gamma > \eta \mu^2 \delta$ και $P_1 > P_2$). Αν $2\gamma < \pi/2$, τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η διχοτόμος l'' της εξωτερικής γωνίας της κορυφής C του τριγώνου ABC ($P_1 < P_2$). Αν $2\gamma = \pi/2$, τότε $P_1 = P_2$, και υπάρχουν δύο ευθείες με το ίδιο μέγιστο γινόμενο P : η l' και η l'' .

M205

Κάθε πρόβλημα δεν λύθηκε από τρεις από τους οκτώ φοιτητές. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν δύο φοιτητές που έχουν λύσει (και οι δύο μαζί) όλα τα προβλήματα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε ζεύγος φοιτητών $\{X, Y\}$ αντιστοιχεί ένα πρόβλημα $P_{(X, Y)}$ το οποίο δεν κατάφερε να λύσει κανένας από τους δύο φοιτητές. Υπάρχουν $8 \cdot 7/2 = 28$ ζεύγη $\{X, Y\}$. Όμως, το καθένα από τα οκτώ προβλήματα μπορεί να παίξει το ρόλο του $P_{(X, Y)}$ σε τρία μόνο ζεύγη $\{X, Y\}$, και $8 \cdot 3 = 24 < 28$. Επομένως, καταλήξαμε σε αντίφαση.

Ο βασικός τρόπος συλλογισμού σε αυτή την περίπτωση ήταν η μετάβαση σε συμπληρωματικά σύνολα και «αρνήσεις». Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν υπάρχουν p προβλήματα και n φοιτητές, τότε, αν κάθε πρόβλημα έχει λυθεί από τουλάχιστον $n - m$ φοιτητές και αν $n(n - 1) > pm(m - 1)$, τότε υπάρχουν δύο φοιτητές που έλυσαν (μαζί) όλα τα προβλήματα. Αν

$$n(n - 1) \dots (n - k + 1) >$$

$$pm(m - 1) \dots (m - k + 1),$$

τότε, για κάποιο $k > 1$, υπάρχουν k φοιτητές που έλυσαν (μαζί) όλα τα προβλήματα.

Φυσική

Φ201

Τόσο το ελικόπτερο όσο και το υπό κλίμακα μοντέλο τα κρατά στον αέρα η δύναμη αντιδραστής που αναπτύσσεται καθώς τα στροφεία ωθούν τον αέρα προς τα κάτω. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη αντιδραστής που ασκείται στα στροφεία και παρέχει την απαιτούμενη στήριξη στο ελικόπτερο έχει το ίδιο μέτρο με τη δύναμη την οποία ασκούν αυτά στο καθοδικό αέριο ρεύμα.

Ας συμβολίσουμε με ρ την πυκνότητα του αέρα, με S το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του καθοδικού αέριου ρεύματος που δημιουργούν τα στροφεία και με v την ταχύτητα του αέρα. Στη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος Δt , τα στροφεία ωθούν προς τα κάτω αέρα δύκου $Sv\Delta t$ και μάζας $m = \rho S v \Delta t$. Συνεπώς, η ορμή του αέρα αυτού, που ενώ αρχικά ηρεμεί αποκτά τελικά ταχύτητα v , παρουσιάζει μεταβολή ίση με:

$$\Delta p = mv = \rho S v^2 \Delta t.$$

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, στον αέρα ασκείται δύναμη F ίση με:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S v^2.$$

Μια δύναμη του ίδιου μέτρου, αλλά αντίθετης κατεύθυνσης, δρα και στο ελικόπτερο. Για να διατηρήσει αυτή η δύναμη το ελικόπτερο στον αέρα, πρέπει να ισούται με το βάρος του:

$$\rho S v^2 = Mg. \quad (1)$$

Η ισχύς P του κινητήρα ισούται με την ενέργεια που προσδίδουν τα στροφεία στο αέριο ρεύμα ανά δευτερόλεπτο:

$$P = \frac{mv^2}{2\Delta t} = \frac{\rho S v^3}{2}.$$

Εισάγοντας στη σχέση αυτή την έκφραση

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}$$

που προκύπτει από την εξίσωση (1), παίρνουμε:

$$P = \frac{1}{2} Mg \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}. \quad (2)$$

Εφόσον η μάζα M του ελικοπτέρου είναι ανάλογη προς τον όγκο του (δηλαδή με την τρίτη δύναμη μιας τυπικής γραμμικής του διάστασης) ($M \sim L^3$, ενώ $S \sim L^2$), η εξίσωση (2) δίνει:

$$P \sim L^{7/2}.$$

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο λόγος της ισχύος του κινητήρα του ελικοπτέρου προς την ισχύ του κινητήρα του μοντέλου πρέπει να ισούται με το λόγο των γραμμικών τους διαστάσεων υψωμένο στη δύναμη $7/2$ —δηλαδή,

$$\frac{P}{P_{μοντ}} = \left(\frac{L}{L_{μοντ}} \right)^{7/2},$$

απ' όπου βρίσκουμε:

$$P = P_{μοντ} \cdot 10^{7/2} \approx 95 \text{ kW}.$$

Φ202

Ο αριθμός Z των μορίων που διαφεύγουν από το μπαλόνι εντός χρόνου t δίνεται από την έκφραση:

$$Z = \frac{1}{4} n S \langle v \rangle t,$$

όπου με $\langle v \rangle$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή του μέτρου της μοριακής ταχύτητας, με S το εμβαδόν της τρύπας και με n τη συγκέντρωση των μορίων του αερίου (το πλήθος των μορίων ανά μονάδα όγκου).

Η $\langle v \rangle$ είναι προφανώς ανάλογη προς τη ρίζα της μέσης τετραγωνικής ταχύτητας $\langle v^2 \rangle$ της θερμικής κίνησης των μορίων. Εφόσον

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3RT}{\mu}$$

(με μ παριστάνουμε τη γραμμομοριακή μάζα του αερίου), $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Επιπλέον, από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων $P = nkT$ παίρνουμε τη σχέση $n = P/kT$.

Επομένως, στηριζόμενοι στις δύο τελευταίες διαπιστώσεις, μπορούμε να γράψουμε:

$$Z \sim \frac{P}{T} \sqrt{T} = \frac{P}{\sqrt{T}}.$$

Η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε μας λέει ότι ο τετραπλασιασμός της θερμοκρασίας του αερίου σε συνδυασμό με τον οκταπλασιασμό της πίεσής του οδηγεί σε αύξηση του ρυθμού διαφροής κατά έναν παράγοντα τέσσερα.

Φ203

Για να διασφαλίζεται η ευσταθής λειτουργία του σπινθηριστή, η παραγωγή σπινθήρα μεταξύ των ηλεκτροδίων του δεν πρέπει να επηρεάζει τη φόρτιση του πυκνωτή. Η προϋπόθεση αυτή εκπληρώνεται μόνο εφόσον ο χρόνος που απαιτείται ώστε να εκφορτιστεί ο πυκνωτής μέσω της εκκένωσης είναι κατά πολύ μικρότερος του χρόνου που χρειάζεται για να τον φορτίσει η πηγή μέχρι τάσης V .

Εν τοιαύτη περιπτώσει, μεταξύ των ηλεκτροδίων του σπινθηριστή δεν υπάρχει ρεύμα όταν η τάση ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι μηδενική. Υπό αυτές τις συνθήκες, οι διηλεκτρικές ιδιότητες του αέρα που παρεμβάλλεται μεταξύ των ηλεκτροδίων προλαβαίνουν να αποκατασταθούν. Έτσι, ο επόμενος σπινθήρας θα ξεσάσει όταν η τάση μεταξύ των ηλεκτροδίων του σπινθηριστή (και μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή) θα φτάσει στην τιμή V .

Ενόσω ο πυκνωτής φορτίζεται μέχρι τάσης V , η ηλεκτρική πηγή παράγει έργο $W = q\mathcal{E}$, όπου με $q = CV$ δηλώνουμε το φορτίο του πυκνωτή. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, $W = Q + CV^2/2$, όπου με Q συμβολίζουμε την ενέργεια που εκλύεται υπό μορφή θερμότητας στον αντιστάτη ενόσω φορτίζεται ο πυκνωτής. Συνεπώς,

$$CV\mathcal{E} = Q + CV^2/2,$$

από όπου παίρνουμε τη σχέση:

$$Q = CV\mathcal{E}(1 - V/2\mathcal{E}).$$

Εφόσον ο σπινθήρας μεταξύ των ηλεκτροδίων διαρκεί ελάχιστα, επιτρέπεται να αγνοήσουμε την ενέργεια που καταναλώνει ο αντιστάτης κατά το χρόνο αυτό.

Δεδομένου ότι ο πυκνωτής φορτίζεται n φορές ανά δευτερόλεπτο, η μέση καταναλισκόμενη ισχύς στον αντιστάτη ανέρχεται σε:

$$P = nCV\mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{V}{\mathcal{E}}\right).$$

Φ204

Ο ρυθμός εξασθένησης του ρεύματος στο κύκλωμα μειώνεται καθώς η ένταση πέφτει, επειδή η ΗΕΔ που αναπτύσσεται εξ επαγωγής ισούται με το γινόμενο του ρεύματος στο κύκλωμα επί την αντίσταση του σύρματος του πηνίου:

$$-L \frac{\Delta I}{\Delta t} = RI$$

ή, ισοδύναμα,

$$-L \frac{\Delta I}{I} = R\Delta t.$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι το ρεύμα μειώνεται κατά τον ίδιο παράγοντα σε ίσα χρονικά διαστήματα. Το συμπέρασμά μας ισχύει εξίσου και για την καταναλισκόμενη ισχύ. Συνεπώς, κατά τα επόμενα 100 ms στο πηνίο θα μετατραπούν σε θερμότητα $0,01 \cdot 0,6^2 J$, κ.ο.κ. Η ολική ποσότητα θερμότητας που εκλύεται, λοιπόν, δίνεται από το ακόλουθο άπειρο άθροισμα:

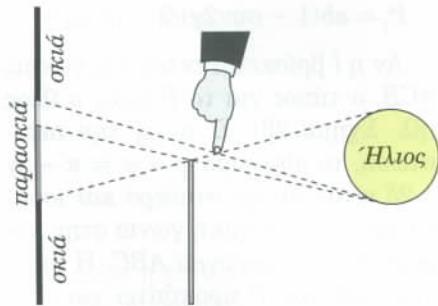
$$Q_{ol} = 0,01(1 + 0,6 + 0,6^2 + 0,6^3 + \dots) J \\ = \frac{0,01}{1 - 0,6} J = 0,025 J.$$

Φ205

Το φαινόμενο των «δύο σκιών» δεν μπορεί να εξηγηθεί με τη βοήθεια της έννοιας της περιθλαστικής, καθότι η εικόνα περιθλαστική σε τέτοια απόσταση έχει τόσο μικρές διαστάσεις ώστε περνά απαρατήρητη.

Το κλειδί για τη λύση του προβλήματός μας είναι να λάβουμε υπόψη μας πως ο Ήλιος δεν αποτελεί σημειακή πηγή φωτός, αλλά έχει μια ορισμένη γωνιακή διάμετρο. Συγκρατώντας στο νου μας την παρατήρηση αυτή, και με τη βοήθεια του Σχήματος 3, θα καταφέρουμε να εξηγήσουμε το παράξενο φαινόμενο της «αντισκιάς».

Η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου ανέρχεται σε περίπου μισή μοίρα. Μολονότι δεν πρόκειται για καμιά τεράστια διάμετρο, αρκεί για να οδηγήσει στο σχηματισμό σκιών με ασαφή ό-



Σχήμα 3

ρια κατά τις ηλιόλουστες μέρες. Ο βαθμός της ασάφειας που παρουσιάζει το περίγραμμα της σκιάς εξαρτάται από την απόσταση που παρεμβάλλεται ανάμεσα στο αντικείμενο και την οθόνη. Αν και το περίγραμμα της σκιάς στο πείραμά μας μοιάζει σαφές, η πραγματικότητα είναι διαφορετική. Εκτός από μια έκταση «απόλυτης σκιάς», υπάρχει επίσης και μια στενή γκρίζα περιοχή, η οποία ονομάζεται παρασκιά. Όταν το δάκτυλό σας πλησιάζει το αντικείμενο, ανακόπτει ορισμένες από τις ακτίνες που πέφτουν στην παρασκιά, και έτσι εμφανίζεται στην οθόνη μια «αντισκιά». Αν κατεβάσετε κι άλλο το δάκτυλό σας, θα παρατηρήσετε ότι η «απόλυτη σκιά» συγχωνεύεται με την παρασκιά στο διαχωριστικό όριο ανάμεσα στο φωτιζόμενο τμήμα της οθόνης και την παρασκιά.

Μετρώντας τις αποστάσεις ανάμεσα στο αντικείμενο (στο χαρτόνι) και τη σκιά, αφενός, και ανάμεσα στο δάκτυλό σας και το αντικείμενο, αφετέρου, καθώς επίσης και το μέγεθος της παρασκιάς μόλις προτού συγχωνευθούν οι δύο σκιές, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γωνιακή διάμετρο του Ήλιου κάνοντας λίγους απλούς γεωμετρικούς υπολογισμούς.

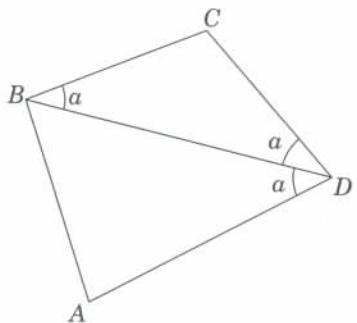
Σπαζοκεφαλίες

Σ201

Έστω ότι $\angle BDA = \angle CDB = a$. Αφού $BC = CD$, έχουμε $\angle CBD = a$. Επομένως, $BC \parallel AD$. Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις (Σχήμα 4).

(1) Η AB είναι παράλληλη της CD . Τότε, το $ABCD$ είναι ρόμβος, το ABD είναι ισόπλευρο τρίγωνο και $\angle BAD = 60^\circ$.

(2) Η AB δεν είναι παράλληλη της

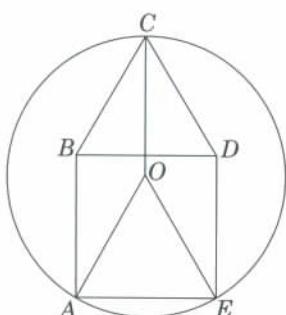


Σχήμα 4

CD. Τότε, το ABCD είναι τραπέζιο. Από τις υποθέσεις του προβλήματος, το τραπέζιο είναι ισοσκελές και $\angle ABD = \angle BAD = 2a$. Επομένως, $a + 2a + 2a = 180^\circ$. Συνεπώς, $a = 36^\circ$ και $\angle BAD = 72^\circ$.

Σ202

Ας κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο AOE ίσο με το BCD, όπως στο Σχήμα 5. Από τις συνθήκες του προβλήματος έπειτα ότι τα ABCO και EDCO είναι ρόμβοι. Πράγματι, στο τετράπλευρο ABDE, έχουμε $BD = AE$ και $AB = DE$. Συνεπώς, είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AB \parallel DE$ και $AE \parallel BD$. Τα CD και OE σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις παράλληλες ευθείες BD και AE , και επομένως $OE \parallel CD$. Ά-



Σχήμα 5

2 1	2 1	2 1	2 1	2 1
3 1	3 1	3 1	3 1	3 1
4 1	4 1	4 1	4 1	4 1
5 1	5 1	5 1	5 1	5 1
6 1	6 1	6 1	6 1	6 1
7 1	7 1	7 1	7 1	7 1
8 1	8 1	8 1	8 1	8 1
9 1	9 1	9 1	9 1	9 1
10 1	10 1	10 1	10 1	10 1
11 1	11 1	11 1	11 1	11 1

Σχήμα 6

ρα, το EDCO είναι ρόμβος. Προφανώς, το O είναι κέντρο του ζητούμενου κύκλου, η ακτίνα του οποίου 1-σούται με 1.

Σ203

Το τετράγωνο διαστάσεων 10×10 μπορούμε να το χωρίσουμε σε είκοσι πέντε τετράγωνα διαστάσεων 2×2 . Είναι προφανές ότι σε κάθε μικρό τετράγωνο μπορεί να υπάρχουν δύο το πολύ υψηλόμισθοι, και επομένως το πλήθος τους δεν υπερβαίνει το 50. Στο Σχήμα 6 βλέπουμε μια διευθετηση των υπαλλήλων και τους μισθούς τους, έτσι ώστε πενήντα από αυτούς να θεωρούν τον εαυτό τους υψηλόμισθο.

Σ204

Ο Νίκος χρειάστηκε 3 ώρες και 12 λεπτά —δηλαδή $16/5$ της ώρας— για να φτάσει στη Γεωργιούπολη, ενώ ο Γιώργος για να φτάσει στη Νικόπολη χρειάστηκε 2 ώρες και 40 λεπτά —δηλαδή $8/3$ της ώρας. Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των πόλεων είναι L χιλιόμετρα. Τότε, ο Νίκος περπα-

τούσε με ταχύτητα $5L/16$ km/h και ο Γιώργος με ταχύτητα $3L/8$ km/h. Ο Νίκος χρειάστηκε ένα λεπτό περισσότερο από τον Γιώργο για να διασχίσει τη γέφυρα και, επομένως, αν το μήκος της γέφυρας ισούται με l , έχουμε ότι $16l/5L - 8l/3L = 1/60$. Άρα, $l = L/32$. Έστω ότι οι δύο τους έφτασαν στη γέφυρα τη χρονική στιγμή t . Η συνολική απόσταση που είχαν διανύσει και οι δύο μέχρι εκείνη τη στιγμή είναι ίση με $L - L/32 = 31L/32$. Από την άλλη πλευρά, αυτή η απόσταση ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων που έχει διανύσει ο καθένας μόνος του —που είναι:

$$\frac{5L}{16} \left(t - \left(10 + \frac{3}{10} \right) \right) + \frac{3L}{8} (t - 9) = \frac{L}{16} \left(11t - \frac{211}{2} \right)$$

Αν εξισώσουμε αυτές τις δύο παραστάσεις, έχουμε:

$$\frac{L}{16} \left(11t - \frac{211}{2} \right) = \frac{31L}{32},$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι $t = 11$ π.μ.

Σ205

Το φαινόμενο οφείλεται στην αδράνεια του αέρα μέσα στο βαγόνι. Όταν το τρένο επιβραδύνεται, ο αέρας συνεχίζει να κινείται προς τα εμπρός. Έτσι, η πίεση στην μπροστινή άκρη του βαγονιού αυξάνεται, και μειώνεται στην πίσω. Επομένως, ο άνθρωπος που διηγείται την ιστορία πρέπει να κάθεται στην πίσω άκρη του βαγονιού, όπου η μειωμένη πίεση προκαλεί την εισροή του αέρα από τον αεραγωγό.



Édouard Driault

ΤΟ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΖΗΤΗΜΑ

Από τις αρχές του έως τη Συνθήκη των Σεβρών

Ένα από τα σημαντικότερα εγχειρίδια για τη γνώση και κατανόηση όλων εκείνων των βαθύτερων αιτίων που προκάλεσαν, και εξακολουθούν να προκαλούν, εντάσεις και τριβές μεταξύ των λαών και των κρατών της Βαλκανικής, διασαλεύοντας την παγκόσμια ειρήνη.

Τόμος Α': 527 σελ., Α/Μ, 14 x 21 εκ., 7.500 δρχ.

Τόμος Β': 440 σελ., Α/Μ, 14 x 21 εκ., 7.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΣΤΟΡΗΤΙΚΗΣ / κάτοπτρο

Τέλειο ανακάτωμα

Χάνει η μάνα το παιδί και το παιδί τη μάνα

Don Piele

ΠΟΣΕΣ ΦΟΡΕΣ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΝΑ ΑΝΑΚΑΤΕΨΕΤΕ ΜΙΑ ΤΡΑΠΟΥΛΑ για να έχετε τη λογική βεβαιότητα ότι τα φύλλα έχουν μπει σε τυχαία σειρά; Αν ανακατεψετε περισσότερες φορές, πιστεύετε ότι η τυχαιότητα αυξάνεται; Αν είστε πολύ καλός στο ανακάτωμα και καταφέρνετε κάθε φορά να «μπλέκετε» τα χαρτιά στον μέγιστο δυνατό βαθμό, η τυχαιότητα θα είναι μεγαλύτερη; Ας διερευνήσουμε αυτά τα ερωτήματα υποθέτοντας ότι κάνουμε ένα «τέλειο ανακάτωμα». Τα αποτελέσματα μπορεί να σας εκπλήξουν.

Τι είναι το τέλειο ανακάτωμα; Ας πάρουμε μια τράπουλα με 52 φύλλα και ας τη χωρίσουμε στη μέση (αυτό ονομάζεται κόψιμο), παίρνοντας δύο σωρούς των 26 φύλλων. Ονομάζουμε τον πάνω σωρό *A* και τον κάτω *B*. Ανακατεύουμε τα φύλλα παίρνοντας ένα φύλλο από το κάτω μέρος του σωρού *A* και ένα από το κάτω μέρος του *B*. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία παίρνοντας φύλλα εναλλάξ από το σωρό *A* και το σωρό *B*, έως ότου βάλουμε όλα τα φύλλα σε ένα σωρό. Πρόκειται για το τέλειο ανακάτωμα.

Ακριβέστερα, αυτό καλείται «τέλειο εσωτερικό ανακάτωμα», διότι όλα τα φύλλα, των δύο ακραίων συμπεριλαμβανομένων, μετακινούνται σε νέες θέσεις στο εσωτερικό της τράπουλας. Αν πάρναμε το πρώτο φύλλο από το κάτω μέρος του σωρού *B*, τότε θα είχαμε ένα «τέλειο εξωτερικό ανακάτωμα». Σ' αυτή την περίπτωση, το πρώτο και το τελευταίο φύλλο παραμένουν στην αρχή και στο τέλος της τράπουλας.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι σε ένα τέλειο εσωτερικό ανακάτωμα όλα τα φύλλα μετακινούνται σε νέες θέσεις. Αν αριθμήσουμε τα φύλλα διαδοχικά από το 1 ώς το 52 (από κάτω προς τα πάνω), τότε το κάτω χαρτί από το σωρό *B* (που ήταν αρχικά στην 1η θέση) μετακινείται στη 2η θέση, ενώ όλα τα υπόλοιπα φύλλα του σωρού *B* μετακινούνται σε υψηλότερες θέσεις από αυτές που είχαν. Όλα τα φύλλα του σωρού *A* μετακινούνται σε χαμηλότερες θέσεις. Επομένως, έπειτα από ένα τέλειο εσωτερικό ανακάτωμα όλα τα φύλλα αλλάζουν θέση. Όλα

τα τέλεια ανακατώματα που θα συναντήσουμε στο άρθρο είναι εσωτερικά, ενώ έχω αφήσει ως άσκηση τη μελέτη των εξωτερικών.

Τι συμβαίνει αν εξακολουθήσουμε να κάνουμε τέλεια ανακατώματα;

Ας πάρουμε μια μικρή τράπουλα με 4 φύλλα διατεταγμένα ως $(1, 2, 3, 4)$ και ας δούμε τι συμβαίνει.

Κόβουμε την τράπουλα και πάρνουμε $A = (3, 4), B = (1, 2)$. Ανακατεύουμε τέλεια και έχουμε $(3, 1, 4, 2)$.

Κόβουμε την τράπουλα και πάρνουμε $A = (4, 2), B = (3, 1)$. Ανακατεύουμε τέλεια και έχουμε $(4, 3, 2, 1)$.

Κόβουμε την τράπουλα και πάρνουμε $A = (2, 1), B = (4, 3)$. Ανακατεύουμε τέλεια και έχουμε $(2, 4, 1, 3)$.

Κόβουμε την τράπουλα και πάρνουμε $A = (1, 3), B = (2, 4)$. Ανακατεύουμε τέλεια και έχουμε $(1, 2, 3, 4)$.

Έναντι πάρνουμε την αρχική σειρά έπειτα από τέσσερα τέλεια ανακατώματα.

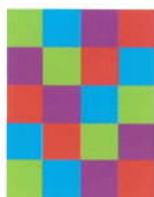
Ο πίνακας PS περιέχει τη σειρά των χαρτιών έπειτα από κάθε τέλειο ανακάτωμα.

$\text{PS} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 1, 4, 2\}, \{4, 3, 2, 1\}, \{2, 4, 1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

1	2	3	4
3	1	4	2
4	3	2	1
2	4	1	3
1	2	3	4

Αν αναπαραστήσουμε κάθε φύλλο με ένα ορθογώνιο και το χρωματίσουμε βάσει της αρχικής του θέσης, μπορούμε να πάρουμε εύκολα μια οπτική αναπαράσταση του πίνακα PS. Παρατηρούμε ότι η πρώτη και η τελευταία γραμμή είναι ίδιες, ενώ η μεσαία είναι αντίστροφη της πρώτης. Προσέξτε επίσης πόσο σύντομος είναι ο κώδικας του *Mathematica* που δημιουργεί αυτή την αναπαράσταση. Η **Hue** αντιστοιχεί ένα χρώμα σε κάθε θέση του πίνακα PS και η **Rectangle** σχεδιάζει το αντίστοιχο ορθογώνιο. Η **AspectRatio** μετατρέπει τα ορθογώνια σε τετράγωνα.

```
Show[Graphics[Table[{Hue[(PS[[j,i]])/4],  
Rectangle[{i, -j}, {1 + i, 1 - j}, {i, 1,  
4}, {j, 1, 5}]], AspectRatio → 5/4]
```



Πόσα άραγε τέλεια ανακατώματα χρειάζονται για να επιστρέψει μια τράπουλα στην αρχική της σειρά; Τί συμβαίνει όταν η τράπουλα έχει n φύλλα; Για να απαντήσουμε, χρειάζεται να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο που θα αυτοματοποιήσει το τέλειο ανακάτωμα. Ας υλοποιήσουμε αυτό τον αλγόριθμο με το *Mathematica* στην περίπτωση μιας μικρής τράπουλας με 6 φύλλα.

Ο αλγόριθμος

Πρώτα κατασκευάζουμε με τη **Range** την τράπουλα των 6 φύλλων.

```
cards = Range[6]
```

```
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
```

Τη μοιράζουμε στα δύο με την **Partition**.

```
Partition[cards, 3]
```

```
(1 2 3)  
(4 5 6)
```

Αρχίζουμε τώρα να παίρνουμε φύλλα εναλλάξ από το κάτω μέρος των δύο σωρών, για να κάνουμε το τέλειο εσωτερικό ανακάτωμα. Με το *Mathematica*, αυτό το επιτυγχάνουμε ως εξής:

```
RotateRight[%]
```

```
(4 5 6)  
(1 2 3)
```

Σημείωση: Για να εκτελέσετε ένα τέλειο εξωτερικό ανακάτωμα δεν θα εναλλάξετε τις γραμμές με τη **RotateRight**.

```
Transpose[%]
```

```
(4 1)  
(5 2)  
(6 3)
```

```
Flatten[%]
```

```
{4, 1, 5, 2, 6, 3}
```

Βρήκαμε λοιπόν το αποτέλεσμα του πρώτου τέλειου ανακάτωματος. Συνδυάζουμε τώρα αυτές τις εντολές για να δημιουργήσουμε μια συνάρτηση ανακατώματος που θα την εφαρμόζουμε επαναληπτικά.

```
shuffle[cards_] := Flatten[Transpose  
[RotateRight[Partition[cards, Length[cards]/2]]]]
```

Η ενωματωμένη συνάρτηση του *Mathematica* **NestList** εφαρμόζει στην τράπουλα τη συνάρτηση ανακατώματος `shuffle` τρεις φορές.

```
NestList[shuffle, cards, 3]
```

```
(1 2 3 4 5 6)  
(4 1 5 2 6 3)  
(2 4 6 1 3 5)  
(1 2 3 4 5 6)
```

Μια τράπουλα έξι φύλλων επανέρχεται στην αρχική σειρά έπειτα από τρία τέλεια ανακατώματα. Επομένως, καταρρίπτεται οποιαδήποτε τυχόν εικασία ότι μια τράπουλα n φύλλων επιστρέφει στην αρχική σειρά έπειτα από n τέλεια ανακατώματα.

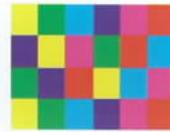
Αν χρησιμοποιήσουμε την εντολή **NestWhileList**, το πρόγραμμά μας μπορεί να γίνει ακόμη πιο εξυπνο. Θα γνωρίζει πότε πρέπει να σταματήσει τη συνάρτηση `shuffle`. Θα τη χρησιμοποιεί εφόσον το αποτέλεσμα του ανακατώματος είναι διαφορετικό απ' όλα τα προηγούμενα.

```
PS = NestWhileList[shuffle, cards, Unequal,  
All]
```

```
(1 2 3 4 5 6)  
(4 1 5 2 6 3)  
(2 4 6 1 3 5)  
(1 2 3 4 5 6)
```

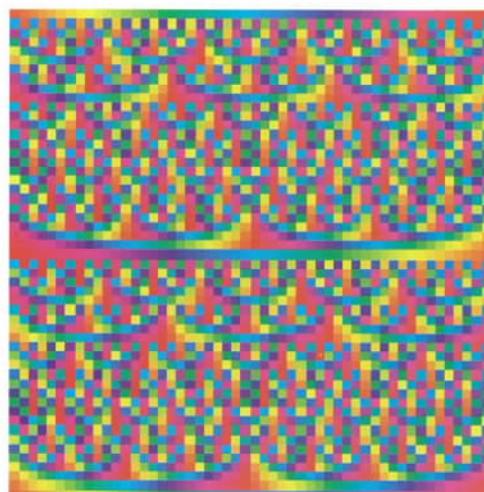
Αν παρουσιάσουμε το γράφημα του πίνακα PS, θα δούμε τα τέλεια ανακατώματα έγχρωμα.

```
Show[Graphics[Table[{Hue[(PS[[j,i]])/6],  
Rectangle[{i, -j}, {1 + i, 1 - j}]], {i, 1,  
6}, {j, 1, 4}]], AspectRatio → 4/6]
```



Ας δούμε τι συμβαίνει με 52 φύλλα.

```
cards = Range[52];  
  
PS = NestWhileList[shuffle, cards, Unequal,  
All];  
  
Show[Graphics[Table[{Hue[(PS[[j,i]])/52],  
Rectangle[{i, -j}, {1 + i, 1 - j}]], {i, 1,  
52}, {j, 1, 53}]], AspectRatio → 1]
```



Η σειρά των φύλλων αντιστρέφεται έπειτα από είκοσι έξι ανακατώματα και η επιστροφή στην αρχική σειρά γίνεται σε πενήντα δύο ανακατώματα.

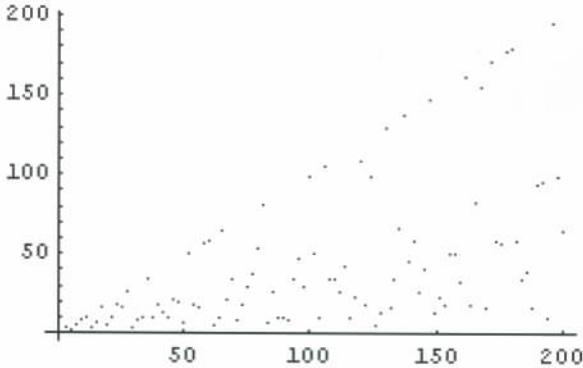
Άλλες τράπουλες

Δεν έχουμε ακόμη τελειώσει. Πρέπει να μελετήσουμε και τράπουλες διαφορετικού μεγέθους. Πρώτα θα ορίσουμε τη συνάρτηση **PerfectShuffle** που θα εξετάζει μια τράπουλα μεγέθους n (το n άρτιο) και θα επιστρέψει το ελάχιστο πλήθος ανακατωμάτων που είναι απαραίτητα για να επανέλθει η τράπουλα στην αρχική σειρά. Θα το καλούμε «πλήθος τέλειων ανακατωμάτων», συμβολικά **PSNumbers**. Συνδυάζουμε τις εντολές σε μια συνάρτηση μίας γραμμής. Η **?EvenQ** ελέγχει αν η είσοδος είναι άρτια. Το μήκος (**Length**) του πίνακα τέλειου ανακατώματος είναι μία μονάδα μεγαλύτερο από το πλήθος τέλειων ανακατωμάτων.

```
PerfectShuffle[n_?EvenQ] := Length
[NestWhileList[shuffle, Range[n], Unequal,
All]] - 1
```

Εφαρμόζουμε τώρα αυτή τη συνάρτηση σε τράπουλες μεγέθους n , όπου το n διατρέχει τις τιμές από το 4 έως το 200 με βήμα 2, και απεικονίζουμε γραφικά τα αποτελέσματα:

```
PSNumbers = Table[{n, PerfectShuffle[n]}, {n, 4, 200, 2}];
ListPlot[PSNumbers]
```



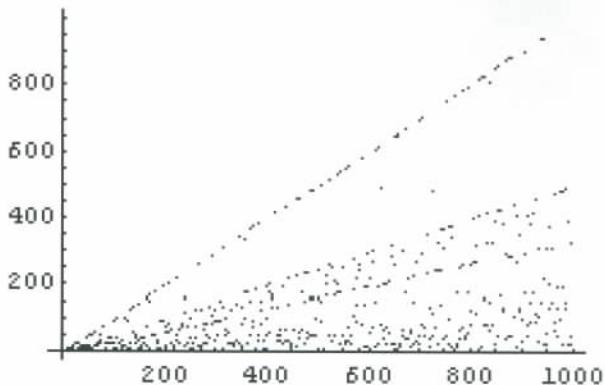
Προφανώς, τα τέλεια ανακατώματα που χρειάζονται για να επανέλθει η τράπουλα στην αρχική κατάσταση δεν είναι σε καμία περίπτωση περισσότερα από το μέγεθος της τράπουλας —τις περισσότερες φορές είναι αρκετά λιγότερα. Όμως, για να μελετήσουμε τράπουλες μεγαλύτερου μεγέθους, χρειαζόμαστε έναν ταχύτερο αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήσαμε επιβραδύνεται από την παρακολούθηση όλων των ανακατωμάτων. Ωστόσο, αρκεί να παρακολουθούμε μόνο το τελευταίο ανακάτωμα. Αυτό επιτυγχάνεται από τον επόμενο, πολύ ταχύτερο, αλγόριθμο.

```
FastPerfectShuffle[n_] := Module[{x, y, i},
x = Range[n]; y = shuffle[x]; i = 1;
While [x ≠ y, y = shuffle[y]; i++]; i]
```

Μπορούμε πλέον να βρούμε πολύ γρήγορα το πλήθος

τέλειων ανακατωμάτων για όλες τις τιμές του n , από το 4 έως το 1.000.

```
PSNumbers = Table[{n,
FastPerfectShuffle[n]}, {n, 4, 1000, 2}];
ListPlot[PSNumbers]
```



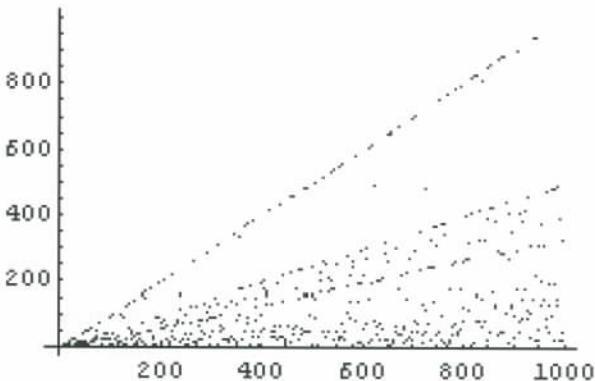
Μια μαθηματική λύση

Υπάρχει τύπος που δίνει το πλήθος τέλειων ανακατωμάτων; Η απάντηση είναι καταφατική —σύμφωνα με όσα αναφέρει ο Martin Gardner στο βιβλίο του *To πανηγύρι των Μαθηματικών*. Το πλήθος των τέλειων εσωτερικών ανακατωμάτων που απαιτούνται για μια τράπουλα μεγέθους n (όπου n άρτιος) ισούται με το μικρότερο x για το οποίο ισχύει $2^x \equiv 1 \pmod{n+1}$. Ας δημιουργήσουμε λοιπόν τη συνάρτηση **MathPerfectShuffle** η οποία χρησιμοποιεί αυτή τη σχέση για να υπολογίσει το πλήθος τέλειων ανακατωμάτων.

```
MathPerfectShuffle[n_] := Module[{x}, x =
2; While[Mod[2^x, n + 1] ≠ 1, x++]; x]
MathPSNumbers = Table[{n,
MathPerfectShuffle[n]}, {n, 4, 1000, 2}];
```

Προκύπτει το ίδιο ακριβώς γράφημα για τους αριθμούς n , από το 4 έως το 1.000.

```
ListPlot[MathPSNumbers]
```



Η σειρά σας

Τι θα συμβεί αν χρησιμοποιήσουμε το εξωτερικό αντί για το εσωτερικό ανακάτωμα; Αναλύστε με παρόμοιο τρόπο αυτή την περίπτωση. Μπορείτε να βρείτε έναν τύπο που θα δίνει το ζητούμενο πλήθος;

ΒΙΒΛΙΟΓΩΝΙΑ

Μόνο για συνδρομητές

Προνόμιο
έκπτωσης 30%

Μην αφήνετε κενά στη βιβλιοθήκη σας. Επιλέξτε τουλάχιστον δύο από τις διπλανές προσφορές και τηλεφωνήστε ή ταχυδρομήστε μας την παραγγελία σας. Θα παραλάβετε τα βιβλία ταχυδρομικά σε λιγότερο από 6 ημέρες. Τα έξοδα συσκευασίας και ταχυδρομικής αποστολής βαρύνουν εμάς, εσάς όμως επιβαρύνουν τα έξοδα αντικαταβολής (περίπου 1.200 δρ. ανά δέμα) και το ΦΠΑ (4% επί της προσφερόμενης τιμής).*

Η προσφορά δεν ισχύει:

- για όσους δεν είναι συνδρομητές του *Quantum* (ακόμη κι αν είναι αναγνώστες του)
- για ιδρύματα, οργανισμούς και βιβλιοθήκες (ακόμη κι αν είναι συνδρομητές)
- αν η παραγγελία σας γίνει μετά τις 28 Φεβρουαρίου 2001
- αν η συνδρομή σας έχει ήδη λήξει.

(Οι παρακάτω τίτλοι θα ανανεώνονται σε κάθε τεύχος.)

* Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνονται δεκτές πιστωτικές κάρτες.



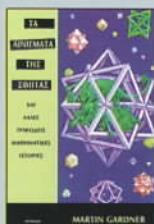
Albert Jacquard
Είμαι αρκετά έξυπνος;
Οικοδομώντας τη νοημοσύνη, την προσωπικότητα και τις ανθρώπινες σχέσεις
Πανόδετο
Σελ.: 86, 4.300 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 3.000 δρχ.



Ο λόκος, ο Μυνχάουζεν και ο Νεύτων
Πανόδετο
Σελ.: 284, 6.500 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 4.550 δρχ.



Martin Gardner
Τα αινίγματα της σφίγγας
και άλλες γριφώδεις μαθηματικές ιστορίες
Σελ.: 168, 5.200 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 3.650 δρχ.



Richard Leakey
Η απαρχή του ανθρώπινου είδους
Μια παλαιοανθρωπολογική εξερεύνηση
Σελ.: 246, 5.500 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 3.850 δρχ.



Gilles Cohen-Tannoudji
Οι παγκόσμιες σταθερές
Σελ.: 138, 3.500 δρχ.

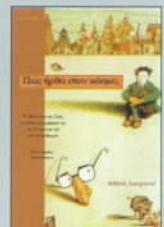
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.450 δρχ.



John Briggs & David Peat
Οι ταραγμένοι καθρέφτης
Σελ.: 232, 7.000 δρχ.

Τιμή για τους συνδρομητές: 4.900 δρχ.

Albert Jacquard
Πώς ήρθα στον κόσμο;
Η προέλευση της ζωής, η εξέλιξη των μορφών της και τα μυστικά της για τον άνθρωπο
Πανόδετο
Σελ.: 86, 4.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.000 δρχ.



Gerald M. Edelman
Αιθέρας θείκος λαμπερή φωτιά
Η μεγάλη σύνθεση των δαρβινισμού
Σελ.: 424, 7.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 5.050 δρχ.



N.Ya. Vilenkin
Αναζητώντας το άπειρο
Σελ.: 218, 5.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.700 δρχ.



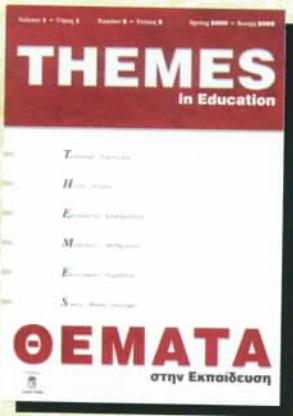
Alan Lightman
Τα ονείρα του Αϊνστάιν
Περί της φύσης του χρόνου
Πανόδετο
Σελ.: 160, 4.800 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.350 δρχ.



L. Gonick & A. Huffman
Τα πάντα για τη φυσική σε κόμικς
Σελ.: 222, 5.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.500 δρχ.



Richard Dawkins
Ο τυφλός φρολογοποιός
Σελ.: 516, 7.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 5.050 δρχ.



THEMES in Education

ΘΕΜΑΤΑ στην Εκπαίδευση

Το περιοδικό «ΘΕΜΑΤΑ στην Εκπαίδευση» στοχεύει μέσα από τη διεπιστημονική προσέγγιση που υιοθετεί να ανοίξει διαύλους επικοινωνίας ανάμεσα στις επιστημονικές κοινότητες των θεματικών περιοχών τις οποίες καλύπτει με σκοπό την πολύπλευρη προσέγγιση των προβλημάτων της εκπαίδευσης. Το περιοδικό είναι τριμηνιαίο. Τα άρθρα του δημοσιεύονται στην Ελληνική ή την Αγγλική γλώσσα μετά από κρίση και αναφέρονται σε θέματα που ενδιαφέρουν τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, καθώς και τους ερευνητές των αντίστοιχων θεματικών περιοχών. Στόχος του περιοδικού είναι η κοινοποίηση στον αναγνώστη πρωτότυπων ερευνητικών εργασιών και κριτικών θεωρήσεων. Το περιοδικό δημοσιεύει επίσης βιβλιοκριτικές, ανακοινώσεις Συνεδρίων, Ημερίδων και γενικώς νέα που ενδιαφέρουν τις αντίστοιχες επιστημονικές κοινότητες.

Στις σελίδες του περιοδικού παρουσιάζονται εργασίες από τις εξής θεματικές περιοχές:

- Εκπαιδευτική Τεχνολογία
- Διδακτική Μαθηματικών
- Ιστορίας & Φιλοσοφίας της Επιστήμης και των Μαθηματικών στην Εκπαίδευση
- Διδακτική των Φυσικών Επιστημών

Συντακτική ομάδα

T. A. Mikropoulos

Technology
Educational

C. Skordoulis

History & Philosophy of Science and
Mathematics in Education

E. Koleza

Mathematics
Education

A. Katsikis

Science Education
(Biology, Geography, Ecology)

A. Jimoyiannis

Science Education
(Physics, Chemistry, Informatics)

Σύμβουλοι Έκδοσης

M. Ahtee (U. Jyvaskyla, Finland), A. Arcavi (Weizmann Inst., Israel), A. Baltas (NTUA, Athens, Greece), G. L. Baron (INRP, France), J. Bliss (U. Sussex, UK), A. Boufi (U. Athens, Greece), Th. Christides (U. Thessaly, Greece), A. Dimitrakopoulou (Aegean U., Greece), C. Dupuis (U. Strasbourg, France), J. Fauvel (Open U., UK), G. Filippou (U. Cyprus), E. Flogaiti (U. Athens, Greece), M. Fort (INFM, France), F. Furinighetti (U. Genova, Italy), A. Georgopoulos (U. Thessaloniki, Greece), M. Grigoriadou (U. Athens, Greece), V. Hatzinikita (Aegean U., Greece), J. B. Haversath (U. Giessen, Germany), F. Kalavassis (Aegean U., Greece), V. Kalfas (U. Crete, Greece), N. Klaoudatos (U. Athens, Greece), P. Kokkotas (U. Athens, Greece), V. Komis (U. Patras, Greece), V. Koulaidis (U. Patras, Greece), C. Laborde (U. Grenoble/CNRS, France), S. Lerman (U. SouthBank, UK), P. Machamer (U. Pittsburgh, USA), J. Mamona (U. Macedonia, Greece), G. Maragos (U. Ioannina, Greece), J-L Martinand (ENS Cachan, France), M. R. Matthews (U. NSW, Australia), T. McGuire (U. Pittsburgh, USA), P. Mihailidis (U. Crete, Greece), M. Niss (U. Roskilde, Denmark), E. Ntziachristos (U. Athens, Greece), K. Ouzounis (U. Thrace, Greece), V. Pantelidis (East Carolina U., USA), E. Papademetriou (U. Ioannina, Greece), V. Papademetriou (U. Thessaly, Greece), E. Pehkonen (U. Turku, Finland), P. Pintelas (U. Patras, Greece), A. Plotnitsky (U. Purdue, USA), J. Porfirio (U. Setubal, Portugal), D. Potari (U. Patras, Greece), A. Raptis (U. Athens, Greece), K. Ravanis (U. Patras, Greece), I. Robottom (Deakin U., Australia), S. Rowlands (U. Plymouth, UK), Ch. Sakonidis (U. Thrace, Greece), H. Schrettenbrunner (U. Nuremberg, Germany), J. Searle (U. Edinburgh, UK), I. Selwood (U. Birmingham, UK), M. K. Siu (U. Hong-Kong), J. Solomon (Open U., UK), Ch. Solomoniou (U. Thessaly, Greece), H. Stavridou (U. Thessaly, Greece), J. Thomas (Open U., UK), S. Tsinorema (U. Crete, Greece), C. Tzanakis (U. Crete, Greece), M. Vicentini (U. La Sapienza, Italy), J. Waterworth (UMEA U., Sweden), D. Whitelock (Open U., UK), W. Winn (U. Washington, USA), T. Wood (U. Purdue, USA)



Publisher: LEADER BOOKS S.A.

17 Panagi Kyriakou Str., GR-11521 Athens, Greece

Tel.: ++30-1-6452825, 6450048 Fax: ++30-1-6449924

[Http:// www.leaderbooks.com](http://www.leaderbooks.com) E-mail: journals@leaderbooks.com