

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2000

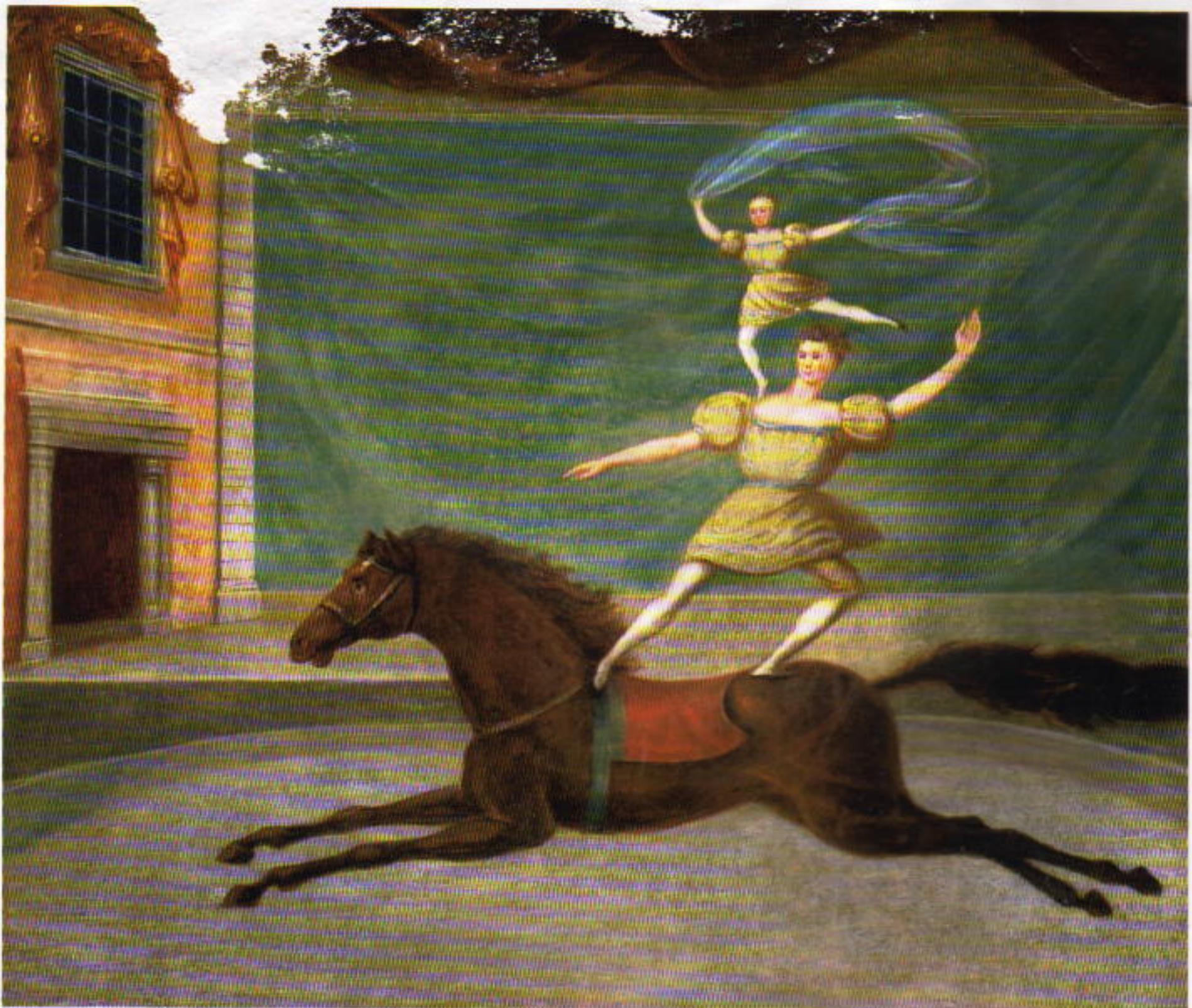
ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 5

2.300 ΔΡΧ.

*Αλγεβρικοί και υπερβατικοί αριθμοί*

- Ορθολογισμός και πίστη
- 1001-2000: Μια γιλιτία φυσικής
- Αυτοόμοιες πλακοστρώσεις
- Η αινιγματική μαγνητική δύναμη
- Απλά κυκλώματα με φυκιές αντιστάσεις
- Το θεώρημα Borsuk-Ulam
- Κίματα και ο νόμος των Stefan-Boltzmann
- Το πρόβλημα του Απολλωνίου
- Χτίζοντας πάνω στον πάγο





Λάδι σε ξύλο, 40 × 48 εκ. · δωρεά Edgar William και Bernice Chrysler Garisch, © 2000 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον

### *Ιππεύουσες ακροβάτιδες (περίπου 1825), αγγώστου Αμερικανού*

**Τ**Ο ΤΣΙΡΚΟ, ΜΕ ΤΙΣ ΕΠΙΔΕΙΞΕΙΣ ΑΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΜΕΝΩΝ ζώων, αλλά και με τις παραστάσεις ταχυδακτυλουργών, ακροβατών, κλόουν, σιαμαίων και φακίριδων, έχει τέρψει το κοινό κοντά διακόσια χρόνια. Ωστόσο, δεν γοητεύονται όλοι με την ιδέα ότι τα ζώα βασανίζονται για να μάθουν να δίνουν παραστάσεις κάτω από την τέντα. Υπάρχουν δύο διαμετρικά αντίθετες οπτικές για το κατά πόσον η χρησιμοποίηση ζώων στο τσίρκο είναι η-

θικά αποδεκτή. Κατά σύμπτωση, υπάρχουν και δύο αντιδιαμετρικά σημεία στην κυκλική τροχιά του αλόγου όπου μια συνεχής συνάρτηση λαμβάνει ίσες τιμές —πρόκειται για το «θεώρημα Borsuk-Ulam». Συνεπώς, νομίζουμε πως πρέπει να διαβάσετε το σχετικό άρθρο της σελίδας 38. Μετά απ' αυτό, είμαστε σίγουροι πως την επόμενη φορά που θα βρεθείτε σε κερκίδα τσίρκου δεν θα ξαναδείτε ιππικές επιδείξεις και παρελάσεις ελεφάντων με το ίδιο μάτι.

# QUANTUM

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2000

/ ΤΕΥΧΟΣ 5



Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

Το πιο πιθανό ερώτημα που θα μπορούσαν να διατυπώσουν οι αναγνώστες μας καθώς κοιτούν το εξώφυλλο του παρόντος τεύχους είναι «Η κότα έκανε το αβγό ή το αβγό την κότα;». Ωστόσο, η ξεπουπουλιασμένη φίλη μας δεν φαίνεται να έχει «υπερβατικές» ανησυχίες. Αντί να αναρωτιέται για την προέλευσή της, απολαμβάνει μάλλον το τοιμπολόγημα υπερβατικών αριθμών. Αν λοιπόν εσείς δεν θέλετε να κρέμεστε από το ράμφος της, ανατρέξτε στο άρθρο της σελίδας 18 («Αλγεβρικοί και υπερβατικοί αριθμοί»), και θα ανταμειφθείτε πλουσιοπάροχα.

## ΑΡΘΡΑ

- 6 Μαθηματικό μωσαϊκό  
**Αυτοόμοιες πλακοστρώσεις**  
*N. Dolbilin*
- 15 Μια χιλιετία φυσικής  
**Ένα δύσκολο ερώτημα**  
*Π. Δήτσας*
- 18 Διασημότητες  
**Αλγεβρικοί και υπερβατικοί αριθμοί**  
*N. Feldman*
- 38 Αντιδιαμετρικά σημεία  
**Το θεώρημα Borsuk-Ulam**  
*M. Krein και A. Nudelman*
- 56 Μουσικές νότες  
**Η μελανή όψη των κυμάτων**  
*A. Stasenko*

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων  
*Ορθολογισμός και πίστη*
- 14 Σπαζοκεφαλιές
- 23 Scripta manent
- 27 Πώς λύνεται;
- 28 Στο μαυροπίνακα I  
*Χτίζοντας παλάτια στον πάγο*
- 32 Στο μαυροπίνακα II  
*Κοινά σημεία*
- 36 Καπειδοσκόπιο  
*Γεωμετρικές εκπλήξεις*
- 43 Στο μαυροπίνακα III  
*Η αινιγματική μαγνητική δύναμη*
- 46 Στα πεδία της φυσικής  
*Μπαταρίες και λαμπτήρες*
- 52 Όπερ έδει δείξαι  
*Με κανόνα και διαβήτη  
(μέρος γ')*
- 62 Στο εργαστήριο  
*Μεταφέροντας νερό  
μ' ένα σουρωτήρι*
- 65 Απαντήσεις, Υποδείξεις  
και Λύσεις
- 70 Πληροφορική  
*Αγροτικές εργασίες*

# Δρθολογισμός και πίστη

«Δεν είμαστε οπισθοδρομικοί ούτε φανατικοί, αλλά δεν δεχόμενοι να παραιτηθούμε από τα ιερά πιστεύματά μας.»

—Αρχιεπίσκοπος Χριστόδουλος

**Α**ΓΑΠΗΤΗ ΤΖΟΥΛΙΑ,  
Τώρα πα που έγινες δέκα χρονών, θέλω να σου γράψω σχετικά με κάτι το οποίο θεωρώ πολύ σημαντικό. Έχεις αναρωτηθεί ποτέ πώς μάθαμε όλα όσα ξέρουμε; Πώς είμαστε βέβαιοι, ας πούμε, ότι τα αστέρια, που μοιάζουν με μικροσκοπικά λαμπτόντα πάνω στον ουρανό θόλο, είναι στην πραγματικότητα τεράστιες σφαίρες φωτιάς —όπως ο Ήλιος μας—, μιας και βρισκόμαστε τόσο μακριά απ' αυτά; Και πώς γνωρίζουμε ότι η Γη είναι μια πολύ μικρή μπάλα που στροβιλίζεται γύρω από ένα αστέρι —τον Ήλιο;

Η απάντηση, με μια λέξη, είναι: «ενδείξεις». Μερικές φορές ένδειξη σημαίνει στην κυριολεξία να δούμε (ή να ακούσουμε, να αγγίξουμε, να μυρίσουμε...) ότι κάτι όντως ισχύει. Οι αστροναύτες, για παράδειγμα, ταξίδεψαν αρκετά μακριά από τη Γη και είδαν με τα ίδια τους τα μάτια ότι είναι στρογγυλή. Εντούτοις, τα μάτια μας χρειάζονται μερικές φορές βοήθεια. Ο «αποσπερίτης» μοιάζει με λαμπερή σπίθα στον ουρανό, αλλά με τη βοήθεια ενός τηλεσκοπίου μπορούμε να δούμε πώς στην πραγματικότητα δεν είναι κι αυτή παρά μια μπάλα —ο πλανήτης που ονομάζουμε Αφροδίτη. Έτοι λοιπόν, αυτό που μαθαίνουμε για κάτι βλέποντάς το άμεσα (ή ακούγοντάς το ή ακουμπώντας το), ονομάζεται «παρατήρηση».

Πολλές φορές μια ένδειξη δεν φαίνεται να σχετίζεται με κάποια παρα-

τήρηση· ωστόσο, πάντα πίσω από τις ενδείξεις κρύβονται παρατηρήσεις. Αν, λόγου χάρη, γίνει κάπου ένα έγκλημα, συνήθως κανείς άλλος, εκτός από το δολοφόνο και το θύμα, δεν θα έχει παρατηρήσει τι πραγματικά συνέβη. Οι αστυνομικοί μπορούν ωστόσο να συνεκτιμήσουν ένα σωρό άλλες παρατηρήσεις, οι οποίες ίσως τους οδηγήσουν σε έναν συγκεκριμένο ύποπτο. Αν τα δακτυλικά αποτυπώματα κάποιου ταυριάζουν μ' αυτά που βρέθηκαν στο μαχαίρι, τούτο αποτελεί ισχυρή ένδειξη ότι το κρατούσε αυτός. Δεν αποδεικνύει ότι ο ίδιος διέπραξε το έγκλημα, μπορεί όμως να βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση εφόσον συνδυαστεί και με άλλες ενδείξεις.

Οι επιστήμονες —οι ειδικοί να ανακαλύπτουν τι είναι αληθινό σχετικά με τον κόσμο και το σύμπαν— δουλεύουν συχνά όπως οι αστυνομικοί. Διατυπώνουν μια εικασία για το τι μπορεί να είναι αληθινό (κάτι που φαίνεται πιθανό να συμβεί ή να συνέβη), και αυτό ονομάζεται «υπόθεση». Μετά λένε από μόνοι τους: αν αυτό αληθεύει πραγματικά, τότε θα πρέπει να ισχύει τούτο και τ' άλλο. Η διαδικασία ονομάζεται «πρόβλεψη». Για παράδειγμα, αν η Γη είναι πράγματι στρογγυλή, μπορούμε να προβλέψουμε ότι ένας ταξιδιώτης, προχωρώντας συνεχώς προς τα εμπρός και στην ίδια κατεύθυνση, θα πρέπει τελικά να βρεθεί πίσω, εκεί απ' όπου ξεκίνησε. Όταν ένας για-

τρός λέει πως έχεις ιλαρά, δεν το διαβάζει γραμμένο στο μέτωπό σου. Η πρώτη ματιά τον κάνει να υποθέσει ότι μπορεί και να έχεις ιλαρά. Μετά σκέφτεται: «Αν η μικρή έχει πράγματι ιλαρά, θα πρέπει να δω μήπως παρουσιάζει αυτά κι εκείνα τα συμπτώματα.» Εξετάζει, λοιπόν, στα γρήγορα μερικές προβλέψεις με τα μάτια του (Έχει ασπροκόκκινες κηλίδες;), με τα χέρια του (Είναι ζεστό το μέτωπό της;), με τα αυτιά του (Έχει τον χαρακτηριστικό ξερό βήχα;). Μόνο τότε καταλήγει σε συμπέρασμα και λέει: «Η διάγνωσή μου είναι ότι το παιδί έχει ιλαρά.» Μερικές φορές οι γιατροί χρειάζεται να ελέγξουν κι άλλα πράγματα —να κάνουν εξετάσεις αίματος ή ακτινογραφίες— που στις παρατηρήσεις βοηθούν τα μάτια, τα χέρια και τ' αυτιά τους.

Φυσικά, ο τρόπος με τον οποίο οι επιστήμονες χρησιμοποιούν τις ενδείξεις για να μάθουν σχετικά με τον κόσμο και το σύμπαν είναι πολύ πιο έξυπνος και πιο σύνθετος απ' ότι μπορώ να σου περιγράψω σ' ένα σύντομο γράμμα. Πάντως —πρόσεξε το αυτό— η ένδειξη αποτελεί καλό λόγο για να πιστέψουμε σε κάτι. Τώρα όμως θέλω να σε προειδοποιήσω να φυλάγεσαι από τρεις κακούς λόγους για να πιστεύεις το οτιδήποτε. Ονομάζονται «παράδοση», «αυθεντία» και «αποκάλυψη».

Πρώτα, λοιπόν, η παράδοση. Πριν από λίγους μήνες συμμετείχα σε μια τηλεοπτική συζήτηση με καμιά πε-

νηνταριά παιδιά. Ανήκαν σε διαφορετικές θρησκείες, και γι' αυτό τα είχαν καλέσει στην εκπομπή. Μερικά ήταν χριστιανοί, άλλα μουσουλμάνοι, κάποια ιουδαϊστές, ινδουιστές, σιχ. Ο κύριος με το μικρόφωνο πήγαινε από παιδί σε παιδί και τα ρωτούσε τι πίστευαν στη δική τους θρησκεία. Οι απαντήσεις τους μας δείχνουν ακριβώς τι εννοώ με τον όρο «παράδοση» —τα πιστεύω τους, πάντως, ήταν ολοφάνερο ότι δεν είχαν καμία σχέση με ενδείξεις. Απλώς τα παιδιά αναμασούσαν τις πεποιθήσεις των γονιών και των παππούδων τους —που κι αυτές δεν βασίζονταν σε ενδείξεις. Έλεγαν πράγματα όπως «Εμείς οι σιχ πιστεύουμε αυτό κι αυτό»· «Εμείς οι μουσουλμάνοι πιστεύουμε τούτο κι εκείνο»· «Εμείς οι χριστιανοί πιστεύουμε κάτι άλλο».

Φυσικά, από τη στιγμή που όλοι πίστευαν διαφορετικά πράγματα, δεν θα μπορούσε να έχουν όλοι δίκιο. Ο κύριος με το μικρόφωνο φαινόταν να μην προβληματίζεται γι' αυτό και δεν προσπάθησε να βάλει τα παιδιά να συζητήσουν μεταξύ τους με επιχειρήματα και να υποστηρίξουν τη γνώμη τους. Άλλα δεν θέλω να τονίσω εδώ αυτό. Εγώ θέλω να ρωτήσω απλά από πού προερχόταν η πίστη των παιδιών. Προερχόταν από την παράδοση. Παράδοση σημαίνει πεποιθήσεις που μεταφέρονται από γενιά σε γενιά —από τον παππού στον πατέρα, μετά στο παιδί, και πάει λέγοντας. Ή από βιβλία που επιζούν μες στους αιώνες. Οι παραδοσιακές πεποιθήσεις συχνά ξεκινούν σχεδόν από το τίποτα· πιθανόν κάποιος στην αρχή τις πλάθει σαν ιστορίες, σαν τους μύθους για τον Θωρ και τον Δία. Άλλα το μακρύ ταξίδι τους μέσα στο χρόνο, το ότι επιζούν για πολλούς αιώνες, τις κάνει να φαίνονται αληθινές. Ο κόσμος πιστεύει σε πράγματα απλώς επειδή προγενέστεροι άνθρωποι πίστευαν στα ίδια πράγματα για ολόκληρους αιώνες. Αυτό είναι η παράδοση.

Εδώ, στην Αγγλία, το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού έχει βαφτιστεί στην Αγγλικανική Εκκλησία, αλλά αυτή δεν είναι παρά ένα από τα πολλά δόγματα της χριστιανικής θρησκείας. Υπάρχουν κι άλλα δόγ-

ματα (η Ορθόδοξη Εκκλησία, η Ρωμαιοκαθολική Εκκλησία, η Εκκλησία των μεθοδιστών, κ.ά.)· όλα τους διαφοροποιούνται σημαντικά. Οι διαφοροποιησεις ανάμεσα στην ιουδαική θρησκεία και τον ισλαμισμό είναι ακόμη πιο έντονες. Οπότε, πιστοί σε πράγματα που ελάχιστα διαφέρουν μεταξύ τους διεξάγουν πολέμους εξαιτίας των διαφωνιών τους. Δικαιολογείται λοιπόν να σκεφτείς πως όλοι αυτοί πρέπει να έχουν σοβαρούς λόγους —ικανές ενδείξεις, δηλαδή για να πιστεύουν αυτά που πιστεύουν. Άλλα στην πραγματικότητα, οι διαφορετικές πεποιθήσεις τους οφείλονται εξ ολοκλήρου στις διαφορετικές παραδόσεις τους.

Ας δούμε μια συγκεκριμένη παράδοση. Οι ρωμαιοκαθολικοί πιστεύουν πως η Παρθένος Μαρία, η μητέρα του Ιησού, ήταν τόσο ξεχωριστή, ώστε δεν πέθανε· «μετέστη εν σώματι εις τους Ουρανούς». Άλλες χριστιανικές παραδόσεις διαφωνούν, και θεωρούν πως η Μαρία πέθανε όπως κάθε θνητός. Η Βίβλος δεν λέει τίποτα σχετικά με το πώς ή το πότε πέθανε στην πραγματικότητα, η κανόνη γυναικά μόλις και αναφέρεται πού και πού σ' ολόκληρη τη Βίβλο. Η απόψη ότι το σώμα της μετέστη στους Ουρανούς δεν διατυπώθηκε παρά μόλις έξι περίπου αιώνες μετά την εποχή του Ιησού. Στην αρχή, ειπώθηκε έτσι απλά, με τον ίδιο τρόπο που λέγεται κάθε ιστορία σαν της Χιονάτης. Άλλα με το πέρασμα των αιώνων, μεταβλήθηκε σε παράδοση· ο κόσμος άρχισε να την παίρνει στα σοβαρά απλώς επειδή η ιστορία επέζησε και διατηρήθηκε κατά τη διάρκεια τόσο πολλών γενεών. Εν τέλει καταγράφηκε ως επίσημο ρωμαιοκαθολικό «πιστεύω» μόλις πρόσφατα, το 1950 —όταν είχα την ηλικία που έχεις εσύ τώρα. Άλλα η ιστορία δεν ήταν πιο αληθινή το 1950 απ' ότι όταν εφευρέθηκε, εξακόσια χρόνια μετά το θάνατο της Μαρίας.

Θα επανέλθω στην παράδοση, αλλά πρώτα πρέπει να αναφερθώ στους δύο άλλους κακούς λόγους για να πιστεύεις οτιδήποτε.

Συχνά πιστεύουμε σε κάτι επειδή το είπε κάποιο σημαντικό πρόσωπο —μια αυθεντία. Στη Ρωμαιοκαθολι-

κή Εκκλησία, ο Πάπας είναι το πιο σημαντικό κρύσταλλο, και οι πιστοί θεωρούν πως έχει αποσδήποτε δίκιο απλώς και μάλιστα είδη είναι ο Πάπας. Οπότε, διάσημη η Μαρία μετέστη στους οποίους απλά το 1950 ο Πάπας αγοράστηκε από την Καθολικούς πως είπε ο ίδιος προστάτης της πιστεύουν. Τελεία και παύλο πας έχει το αλάθητο, κι αυτή γιατί να είναι η αλήθεια! Τώρα, ενδεχομένως πολλά απ' όσα είπε ο Πάπας στη ζωή του να ήταν αλήθειες και κάποια να μην ήταν. Όμως, δεν υπάρχει κανένας καλός λόγος που να εξηγεί γιατί εμείς πρέπει πιστεύουμε ότι λέει αυτός, απλά και μόνο επειδή είναι ο Πάπας, παρά οποιοσδήποτε άλλος συνάνθρωπος. Ο τωρινός Πάπας έχει διατάξει το πλήρωμα της Εκκλησίας του να μην αποδεχτεί κανένα όριο στον αριθμό των παιδιών που θα επιθυμούσε να φέρει στον κόσμο. Αν το χριστεπώνυμο πλήθος ακολουθούσε την αυθεντία του με τη δουλική υπακοή που θα επιθυμούσε ο ίδιος, το αποτέλεσμα θα ήταν λιμοί, ασθένειες και πόλεμοι, εξαιτίας φυσικά του υπερπληθυσμού.

Βεβαίως, ακόμη και στην επιστήμη, πολλές φορές δεν έχουμε δει με τα ίδια μας τα μάτια τις ενδείξεις, και πρέπει να δεχτούμε τις μαρτυρίες άλλων γι' αυτές. Εγώ, ας πούμε, δεν έχω δει και δεν γνωρίζω τις ενδείξεις ότι το φως ταξιδεύει με ταχύτητα 300.000 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο. Από την άλλη, πιστεύω τα επιστημονικά βιβλία που λένε ποια είναι η ταχύτητα του φωτός. Αυτό σαν να μοιάζει με την αυθεντία του Πάπα· στην πραγματικότητα, όμως, είναι πολύ σοβαρότερο από κάθε αυθεντία: οι συγγραφείς των βιβλίων γνωρίζουν τις ενδείξεις: μάλιστα, ο καθένας μας είναι ελεύθερος να τις εξετάσει προσεκτικά όποτε το θελήσει. Πολύ καθησυχαστικό, αλήθεια, όταν ούτε καν οι ιερείς δεν ισχυρίζονται πως υπάρχει έστω μία ένδειξη για την ιστορία της Θεοτόκου.

Το τρίτο κακό λόγου για να πιστεύεις οτιδήποτε ονομάζεται «αποκάλυψη». Αν το 1950 είχες ρωτήσει τον Πάπα πώς γνωρίζε ότι το σώμα της Μαρίας μετέστη στους Ουρανούς, θα έλεγε πιθανόν πως αυτό

ελλας των είναι, ο-  
ντος καὶ οὐ νιώθουν αποκά-  
λει μόνο οι πάπες που  
νιάται πας ἔχουν υπάρξει  
μάρτυρες θείων απεκαλύψεων· το ί-  
διο συμβαίνει με πολλούς θρησκευό-  
μενους. Πρόκειτι· ι εναν απ' τους  
κυριότερους λόγους, ούτε ούτε, ούτε  
να πιστέψουν όλα όσα πιστεύουν.  
Μα είναι ένας καλός λόγος γι' αυτό;

Ας υποθέσουμε ότι σου έλεγα πως ο σκύλος σου σκοτώθηκε. Θα αναστατωνόσουν, και μάλλον θα με ρώταγες: «Είσαι σίγουρος; Πώς το ξέρεις; Πώς συνέβη;» Κι ας πούμε πως εγώ σου απαντούσα: «Δεν ξέρω ότι ο Πέπε πράγματι σκοτώθηκε. Δεν έχω ενδείξεις. Έχω απλώς βαθιά μέσα μου μια παράξενη προαισθηση.» Θα τα 'βαζες για τα καλά μαζί μου που σε τρόμαξα, διότι ξέρεις πως μια εσωτερική «αίσθηση» από μόνη της δεν αρκεί για να πιστέψεις πως ένα σκυλάκι έχει σκοτωθεί. Χρειάζεσαι σοβαρές ενδείξεις. Όλοι μας κάποια στιγμή προαισθανόμαστε ότι κάτι θα συμβεί· και μερικές φορές τυχαίνει να επιβεβαιωνόμαστε, άλλες πάλι όχι. Πολλοί άνθρωποι νιώθουν ταυτόχρονα αντίθετες προαισθήσεις· οπότε, ποιες απ' όλες ευσταθούν;

Μερικές φορές ο κόσμος λέει πως πρέπει να πιστεύουμε σ' αυτά που νιώθουμε βαθιά μέσα μας, γιατί αλλιώς δεν θα είμαστε ποτέ σίγουροι για πράγματα όπως η αγάπη του συντρόφου μας. «Το νιώθω μέσα μου πως η γυναίκα μου με αγαπάει». Αυτό όμως αποτελεί φαιδρό επιχείρημα. Μπορείς να έχεις άφθονες ενδείξεις ότι κάποιος σε αγαπάει: κοιτάγματα στα μάτια, νότες τρυφερότητας στη φωνή, μικροχαρούλες και ευγένειες. Δεν είναι απλώς κάτι που νιώθεις μέσα σου, σαν την αίσθηση που οι ιερείς ονομάζουν αποκάλυψη.

Οι εσωτερικές αισθήσεις είναι πολύτιμες και στην επιστήμη, μόνο ομως για να μας δίνουν ιδέες που αρ-

γύτερα θα διασταυρώσουμε ψάχνοντας για ενδείξεις. Ένας επιστήμονας μπορεί να έχει μια προαίσθηση ότι κάτι είναι σωστό. Από μόνη της, διως, δεν στηνιστά για τον επιστήμονα επαρκή λόγο να το πιστέψει. Άλλα μπορεί να είναι καλός λόγος για να αφιερώσει χρόνο εκτελώντας πειράματα ή ψάχνοντας για ενδείξεις. Οι επιστήμονες στηρίζονται σ' αυτά που νιώθουν μέσα τους για να ανακαλύπτουν νέες ιδέες. Άλλα αυτά δεν αξίζουν μέχρις ότου υποστηρίχτονται από επαρκείς ενδείξεις.

Θέλοντας να οσυ εξηγήσω γιατί η παράδοση είναι τόσο σημαντική, ζαναγυρίζω σ' αυτή για να τη δοί με μια διαφορετική ματιά. Όλα τα ζώα είναι φτιαγμένα (μέσω της διαδικασίας που ονομάζουμε εξέλιξη) έτσι που να επιβιώνουν στο φυσικό χώρο που ζει το είδος τους. Τα λιοντάρια έχουν φτιαχτεί για να μπορούν να επιβιώνουν στις στέπες της Αφρικής. Οι καραβίδες είναι φτιαγμένες για να τα καταφέρνουν να επιβιώνουν στο γλυκό νερό, ενώ οι αστακοί διαμορφώθηκαν έτσι που να επιβιώνουν στην αλμυρή θάλασσα. Εμείς οι άνθρωποι, σημαίνοντα μέλη του ζωικού βασιλείου, είμαστε φτιαγμένοι για να επιβιώνουμε με επιτυχία μέσα σε έναν κόσμο γεμάτο από... άλλους ανθρώπους. Οι περισσότεροι από μας δεν κυνηγάμε για την τροφή μας, όπως τα λιοντάρια και οι αστακοί· την αγοράζουμε από άλλους ανθρώπους, οι οποίοι με τη σειρά τους την αγόρασαν από άλλους ανθρώπους. «Κολυμπάμε» μέσα σε μια «ανθρωποθάλασσα». Όπως ακριβώς το ψάρι χρειάζεται τα βράγχια για να επιβιώσει μέσα στο νερό, οι άνθρωποι χρειάζονται τον εγκέφαλο για να μπορούν να συνεννοούνται με τους άλλους ανθρώπους. Και όπως η θάλασσα είναι γεμάτη αλμυρό νερό, η ανθρωποθάλασσα είναι γεμάτη από δύσκολα πράγματα που πρέπει να μάθουμε. Πάρε για παραδειγμα την υλόσσα.

Εσύ μιλάς αγγλικά, αλλά η φίλη σου η Ανν-Κατρίν μιλά γερμανικά. Και οι δυο σας μιλάτε τη γλώσσα που θα σας βοηθήσει περισσότερο να «κολυμπήσετε» στη δική σας ξεχωριστή ανθρωποθάλασσα. Η γλώσσα με-

ταφέρεται με την παράδοση. Δεν υπάρχει άλλος τρόπος. Στην Αγγλία, ο Πέπε είναι *a dog*: στη Γερμανία, *ein Hund*. Καμία απ' αυτές τις λέξεις δεν είναι πιο σωστή ή πιο αληθινή από την άλλη. Απλά, και οι δύο μεταδόθηκαν μέσω της παράδοσης. Για να τα καταφέρουν καλά σ' αυτό το ιδιότυπο «κολύμπι», τα παιδιά πρέπει να μάθουν τη γλώσσα της δικής τους χώρας, αλλά και ένα σωρό άλλα πράγματα σχετικά με τον δικό τους λαό· αυτό σημαίνει ότι ο εγκέφαλός τους πρέπει να ρουφά, σαν σφουγγάρι, τεράστιες ποσότητες πληροφοριών γύρω από την παράδοση. Και δεν μπορούμε να περιμένουμε από το παιδί να διαχωρίζει τις καλές και τις χρήσιμες πληροφορίες της παράδοσης (όπως τις λέξεις της γλώσσας) από τις κακές ή τις ανόητες (όπως το να πιστεύει σε μάγισσες, διαβόλους και αθάνατες παρθένους).

Είναι κρίμα, αλλά δεν μπορεί να αλλάξει, το ότι τα παιδιά —ακριβώς επειδή πρέπει να ρουφούν τις πληροφορίες της παράδοσης— πιστεύουν διότι τους λένε οι μεγάλοι, είτε αλήθειες ή ψέματα είτε σωστά ή λάθη. Και πολλά απ' αυτά που τους λένε οι μεγάλοι είναι αληθινά και βασίζονται σε ενδείξεις, ή είναι τουλάχιστον λογικά. Αλλά αν κάποια δεν ευσταθούν, αν είναι ανόητα ή κακοήθη, τίποτα δεν θα σταματήσει το παιδί από να τα πιστέψει με τον ίδιο τρόπο. Και τι κάνουν τα παιδιά όταν μεγαλώνουν; Επαναλαμβάνουν τα ίδια πράγματα στην επόμενη γενιά. Έτσι, από τη στιγμή που κάτι θα αποτελέσει ισχυρή πεποίθηση —και το ψευδές και το ανυπόστατο— θα συνεχίσει να υφίσταται για πάγια.

Μήπως τελικά το ίδιο έχει συμβεί με τις θρησκείες; Πίστη ότι υπάρχει ένας ή πολλοί θεοί, πίστη στον παράδεισο, πίστη ότι η Θεοτόκος Μαρία ποτέ δεν πέθανε, πίστη ότι ο Ιησούς δεν γεννήθηκε από άνθρωπο πατέρα, πίστη ότι οι προσευχές εισακούγονται, πίστη ότι το κρασί μετατρέπεται σε αίμα —καμία απ' αυτές τις πεποιθήσεις δεν βασίζεται σε μια καλή ένδειξη. Κι όμως, όλα τούτα τα πιστεύουν δισεκατομμύρια άνθρωποι· και αυτό, επειδή τους είπαν να τα πιστέψουν όταν ήταν τόσο μικροί

που θα πίστευαν το στιδήποτε. Τα παιδιά των μουσουλμάνων και των χριστιανών μεγαλώνουν πεπεισμένα απόλυτα ότι τα μεν έχουν δίκιο και τα δε άδικο. Ακόμη και μεταξύ των χριστιανών, οι ρωμαιοκαθολικοί πιστεύουν διαφορετικά πράγματα από τους αγγλικανούς ή τους επισκοπικούς ή τους κουακέρους ή τους μορμόνους, και πάει λέγοντας: και όλοι τους είναι πεπεισμένοι ότι αυτοί έχουν δίκιο και οι άλλοι άδικο. Πιστεύουν επερόκλιτα πράγματα ακριβώς για τον ίδιο λόγο που εσύ μιλάς αγγλικά και η Άνν-Κατρίν γερμανικά —καθεμιά απ' αυτές τις γλώσσες είναι η σωστή στη χώρα της. Άλλα δεν μπορεί να αληθεύει ότι οι διαφορετικές θρησκείες είναι σωστές στη δική τους χώρα, αφού διαφορετικές θρησκείες υποστηρίζουν ως σωστά αντίθετα πράγματα. Η Θεοτόκος δεν μπορεί να είναι ζωντανή στην καθολική Ιρλανδία, και ταυτόχρονα νεκρή στην προτεσταντική Ιρλανδία.

Θα αναρωτιέσαι, υποθέτω, τι μπορούμε να κάνουμε για όλα αυτά. Για σένα δεν είναι εύκολο να κάνεις κάτι, αφού μόλις πάτησες τα δέκα. Άλλα θα μπορούσες να δοκιμάσεις το εξής. Την επόμενη φορά που κάποιος θα σου πει κάτι που ακούγεται σημαντικό, σκέψου: «Ανήκει στο είδος πληροφοριών που οι άνθρωποι πιστεύουν λόγω ενδείξεων; Ή μήπως στο είδος που οι άνθρωποι πιστεύουν βασιζόμενοι στην παράδοση, τις αυθεντίες ή την αποκάλυψη;» Και την επόμενη φορά που κάποιος θα σου πει πως κάτι είναι αληθινό, γιατί να μην τον ρωτήσεις: «Τι ενδείξεις υπάρχουν γι' αυτό;» Κι αν δεν μπορεί να σου δώσει μια ικανοποιητική απάντηση, ελπίζω να σκεφτείς πολύ προσεκτικά προτού πιστέψεις έστω και μία λέξη απ' όσα λέει.

Σε φιλό καλή μου,  
Ο μπαμπάς.

—Richard Dawkins

**O Richard Dawkins είναι εξελικτικός βιολόγος, καθηγητής ζωολογίας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Στα ελληνικά κυκλοφορούν τα βιβλία του Το εγωιστικό γονιδίο (1988) [Σύναλμα], Ο τυφλός ωρολογοποιός (1994) και Ο ποταμός της ζωής (1996) [Κάτοπτρο].**

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Κεντρικής Ρωτικής Ακαδημίας Επιστημών,  
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCSM).

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης  
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντιπροσώπευση Έκδότης  
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κνετ, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

## Ιεραρχικοί Διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κνετ, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

## Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

## Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης  
Sergey Ivanov

Αντιπροσώπευση Αρχισυντάκτρια

Jennifer M. Wang

Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων

Kenneth L. Roberts

## Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του Quantum

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Yevgeniya Morozova, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

## Συμβουλευτική επιροπή

Bernard V. Khourey, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντειλ, Λουιζάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίσιγκαν

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης / Διευθυντής  
Αλέκος Μάραλης

### Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός,

Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός,

Γιολάντα Γεωργίου και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

### Ειδικοί συνεργάτες και Επιστημονικοί σύμβουλοι

Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Οχαίο

Πέτρος Δήμους, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Γιώργος Θηραίος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πλαισική επιμέλεια  
Νίκος Ντάκιος

Τυπογραφική επιμέλεια  
Ηρακλής Ντούσης

Γραμματεία  
Μαρία Κουρή

Υπεύθυνη λογιστρίδιο  
Μαρία Μάραλη

Στοιχειοθεσία, σειριδοποίηση  
Αβ. Μαχαιρίδης

Φιλμ, μοντάζ  
Χρ. Μήτος

Εκτύπωση  
Ν. Πουλόπουλος

Βιβλιοθεσία  
Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο  
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης  
Διαφραγμές και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Ισαύρων 10 και Δαφνονήση, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου 49),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο δλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.  
Ετήσια συνδρομή: 12.000 δρχ. για ιδιώτες, 21.000 δρχ.  
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.

# Αυτοόμοιες πλακοστρώσεις

Όταν το όλον είναι άθροισμα των μερών του

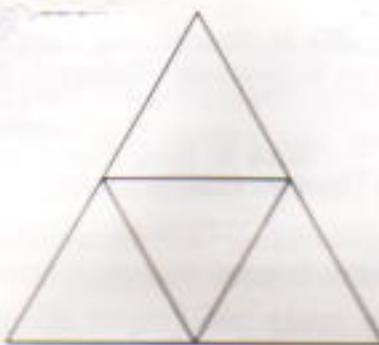
N. Dolbilin

**Ο**Ι ΠΛΑΚΟΣΤΡΩΣΕΙΣ, Η ΜΩΣΑΪΚΑ, που αποτελούνται από τμήματα όμοια με τη συνολική πλακόστρωση καλούνται αυτοόμοιες. Ένα από τα πρώτα διάσημα παραδείγματα αυτοόμοιας πλακόστρωσης κατασκευάστηκε από τον άγγλο μαθηματικό Roger Penrose. Μετά την ανακάλυψη των ημικρυστάλλων, το 1984, οι διατάξεις Penrose κατέστησαν ένα γενικώς αναγνωρισμένο μοντέλο για την ανάλυση των γεωμετρικών ιδιοτήτων τους.<sup>1</sup> Οι μαθηματικοί John Conway και William Thurston ανακάλυψαν νέες και απρόσμενες σχέσεις αυτών των πλακοστρώσεων με άλλα πεδία των μαθηματικών. Η αυτοομοιότητα παίζει σημαντικό ρόλο σε σύγχρονα πεδία των μαθηματικών, όπως τα δυναμικά συστήματα, τα φράκταλ και οι ημικρύσταλλοι.

## Αυτοόμοια σχήματα

Είναι γνωστό ότι οι μεσοπαράλληλες (τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου) διαιρούν το τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα (Σχήμα 1). Κάθε ένα από αυτά τα μικρά τρίγωνα είναι όμοιο με το αρχικό. Υπό αυτή την έννοια, το τρίγωνο είναι αυτοόμοιο σχήμα.

Ένα σχήμα  $F$  είναι αυτοόμοιο αν



Σχήμα 1

διαιρείται σε διάφορα σχήματα  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , καθένα από τα οποία είναι όμοιο με το αρχικό. Αφού κάθε  $F_i$  είναι όμοιο με το  $F$ , υπάρχει ένας μετασχηματισμός ομοιότητας  $h_i$  που μεταφέρει το  $F$  στο  $F_i$ :  $h_i(F) = F_i$ . Οι λόγοι αυτών των μετασχηματισμών ομοιότητας δεν είναι υποχρεωτικά ίσοι, είναι όμως όλοι μικρότεροι του 1.

## Μετασχηματισμοί ομοιότητας

Υπενθυμίζουμε ότι μετασχηματισμός ομοιότητας είναι ένας μετασχηματισμός,  $h$ , του επιπέδου (ή του χώρου) που μεταβάλλει την απόσταση  $d(x, y)$  μεταξύ δύο τυχαίων σημείων  $x$  και  $y$  κατά τον ίδιο λόγο  $k$ :

$$d(x, y) = kd(h(x), h(y)), \quad k > 0.$$

Όταν  $k = 1$ , ο μετασχηματισμός ομοιότητας ισοδυναμεί με μια στερεά μετατόπιση. Μερικές στερεές μετατοπίσεις —για παράδειγμα, η παράλληλη μετατόπιση κατά ένα μη μηδενικό διάνυσμα— μεταφέρει κάθε σημείο σε διαφορετικό σημείο. Άλλες —για παράδειγμα, η περιστροφή  $g$  του επιπέδου γύρω από το σημείο  $O$  κατά μία συγκεκριμένη γωνία— α-

ορισμένα σημεία στη θέση του. Ένα τέτοιο σημείο (για το οποίο  $g(O) = O$ ) καλείται σταθερό σημείο για ταςγιατισμού  $g$ . Έτσι, μια ιεριστροφή για ω από ένα σημείο έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο. Κινήσεις ενός τρίτου τύπου, οι συμμετρίες ως προς μια ευθεία  $l$ , έχουν άπειρο πλήθος σταθερών σημείων: τα σημεία της ευθείας  $l$ . Συνέπως, ορισμένες στερεές μετατοπίσεις δεν έχουν σταθερά σημεία, άλλες έχουν ένα μοναδικό σταθερό σημείο ενώ μερικές άλλες έχουν άπειρα.

Αυτή η κατάσταση αλλάζει αν εξετάσουμε ένα μετασχηματισμό ομοιότητας  $h$  που δεν είναι στερεά μετατόπιση. Αυτό συμβαίνει όταν ο λόγος ομοιότητας,  $k$ , δεν ισούται με 1. Σε αυτή την περίπτωση, ο μετασχηματισμός  $h$  έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.<sup>2</sup> Αν  $O$  το μοναδικό σταθερό σημείο, αποδεικνύεται ότι κάθε μετασχηματισμός ομοιότητας μπορεί να θεωρηθεί ομοιοθεσία<sup>3</sup> (με κέντρο  $O$  και κάποιο λόγο  $k$ ) ακολουθούμενη

2. Αυτό το αξιοσημείωτο θεώρημα δεν ισχύει μόνο για τους μετασχηματισμούς ομοιότητας, αλλά και για έναν γενικότερο τύπο απεικονίσεων: τις συσταλές. Συσταλή είναι μια απεικόνιση  $f(x)$  για την οποία ισχύει  $d(x, y) \leq kd(h(x), h(y))$ , για κάποιο  $k$ , με  $0 < k < 1$ .

3. Ομοιοθεσία με κέντρο  $O$  και λόγο  $k$  είναι ένας μετασχηματισμός που μεταφέρει κάθε σημείο  $P$  σε ένα  $P'$ , έτσι ώστε τα  $O, P$  και  $P'$  να είναι συγγραμμικά και  $OP = k \cdot OP'$ . Αν το  $k$  είναι θετικό, τα  $P, P'$  βρίσκονται από την ίδια πλευρά του  $O$ , ενώ αν το  $k$  είναι αρνητικό, βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές.

1. Δείτε το άρθρο «Διατάξεις Penrose και ημικρύσταλλοι» στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1994.

από μια περιστροφή γύρω από το  $O$  κατά συγκεκριμένη γωνία και ίσως από μια συμμετρία ως προς μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $O$ . Ειδικότερα, ένας τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να είναι απλή ομοιοθεσία χωρίς καμία περιστροφική συνιστώσα.

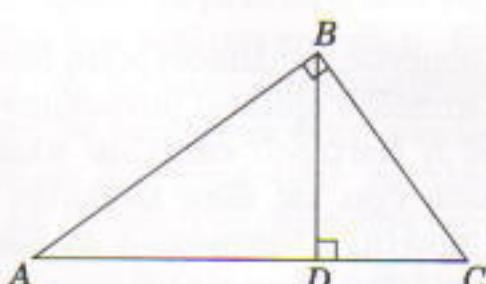
## Παραδείγματα αυτοόμοιων σχημάτων

**Το τρίγωνο.** Είδαμε ότι κάθε τρίγωνο αναλύεται από τις μεσοπαραλλήλους σε τέσσερα όμοια τρίγωνα. Ποιοι μετασχηματισμοί ομοιότητας απεικονίζουν το αρχικό τρίγωνο σε αυτά τα μικρότερα τρίγωνα; Οι τρεις είναι ομοιοθεσίες με κέντρο τις κορυφές του τριγώνου και λόγο  $1/2$ . Το τεταρτος είναι μια ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου και λόγο  $-1/2$ . Ο τελευταίος μετασχηματισμός περιγράφεται επίσης, ως μια ομοιοθεσία<sup>4</sup> με κέντρο το σημείο τομής των διαμέσων και θετικό λόγο  $1/2$ , ακολουθούμενη από μια περιστροφή γύρω από το ίδιο σημείο κατά  $180^\circ$ .

**Το ορθογώνιο τρίγωνο.** Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο διαμερίζεται σε δύο όμοια τρίγωνα (Σχήμα 2). Ας απεικονίσουμε το τρίγωνο  $ABC$  στο τρίγωνο  $ABD$ . Θεωρούμε το μετασχηματισμό ομοιότητας  $g_1$  που είναι η σύνθεση της ομοιοθεσίας  $h_1$  με κέντρο το  $A$  και λόγο  $k_1 = AB/AC$  ακολουθούμενη από τη συμμετρία ως προς τη διχοτόμη της  $\angle BAC$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$g_1(ABC) = ABD.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι



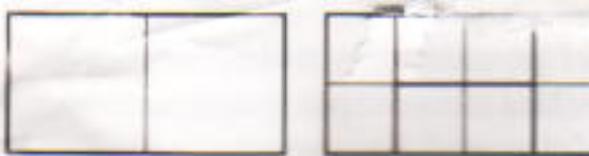
Σχήμα 2

4. Αυτή η παρατήρηση στηρίζεται στο γεγονός ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου (το σημείο τομής των διαμέσων του) διαιρεί κάθε διάμεσο σε λόγο  $2+1$ .

ο μετασχηματισμός  $g_2$  που απεικονίζει το τρίγωνο  $ABC$  στο τρίγωνο  $BDC$  είναι η σύνθεση της ομοιοθεσίας με κέντρο  $C$  και λόγο  $k_2 = BC/AC$  και της συμμετρίας ως προς τη διχοτόμη της  $\angle ACB$ .

Επισημαίνουμε μια διαφορά μεταξύ αυτού και του προηγούμενου παραδείγματος. Στην περίπτωση του ορθογώνιου τριγώνου, οι λόγοι των μετασχηματισμών έχουν διαφορετικές απόλυτες τιμές.

**Ντόμινο.** Το σχήμα του ντόμινο αποτελείται από δύο ίσα τετράγωνα. Διαμερίζεται εύκολα σε τέσσερα κομμάτια όμοια με το ίδιο (Σχήμα 3).

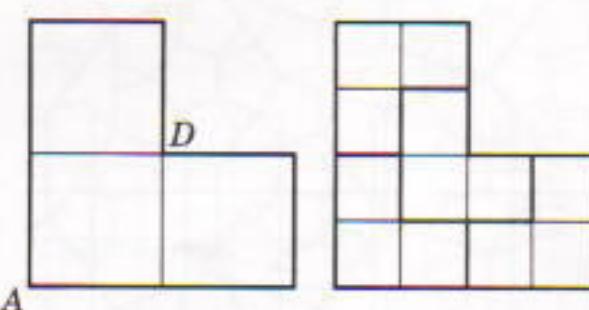


Σχήμα 3

**Πρόβλημα 1.** Βρείτε το σταθερό σημείο για καθέναν από τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς ομοιότητας.

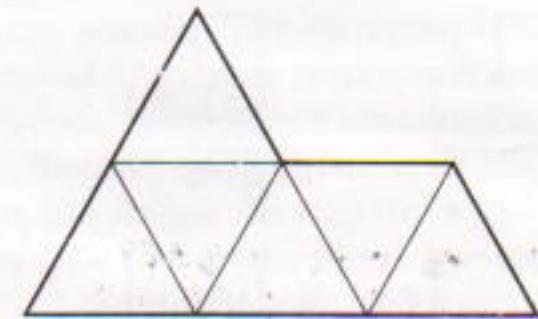
**Πρόβλημα 2.** Βρείτε άλλον τρόπο διαμέρισης του ντόμινο σε τέσσερα κομμάτια, το καθένα όμοιο με το αρχικό.

**Καρέκλα.** Το σχήμα της καρέκλας (τρίόμινο) αποτελείται από τρία ίσα τετράγωνα. Διαμερίζεται σε τέσσερα όμοια αντίγραφα του εαυτού του:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  και  $F_4$  (Σχήμα 4). Έστω  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  και  $h_4$  οι μετασχηματισμοί ομοιότητας που μεταφέρουν τη «μεγάλη» καρέκλα στα αντίστοιχα μέρη της. Όλοι έχουν λόγο  $1/2$ . Οι ομοιοθεσίες  $h_1$  και  $h_2$  έχουν κέντρα στα σημεία  $A$  και  $D$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 4

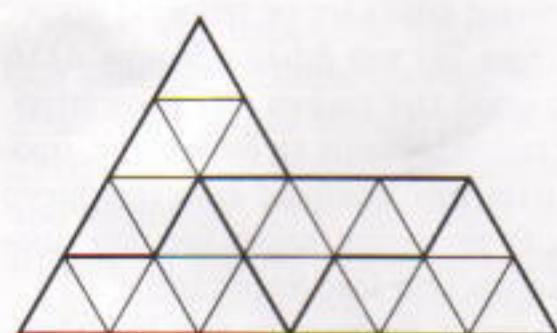
**Σφίγγα.** Το σχήμα της σφίγγας (εξόμινο) αποτελείται από έξι ισόπλευρα τρίγωνα (Σχήμα 5) και διαμερίζε-



Σχήμα 5

ται σε τέσσερα όμοια αντίγραφα (Σχήμα 6).

**Πρόβλημα 3.** Βρείτε το σταθερό σημείο για τους μετασχηματισμούς ομοιότητας που μεταφέρουν την αργική σφίγγα σε κάθε μικρότερο σχή-

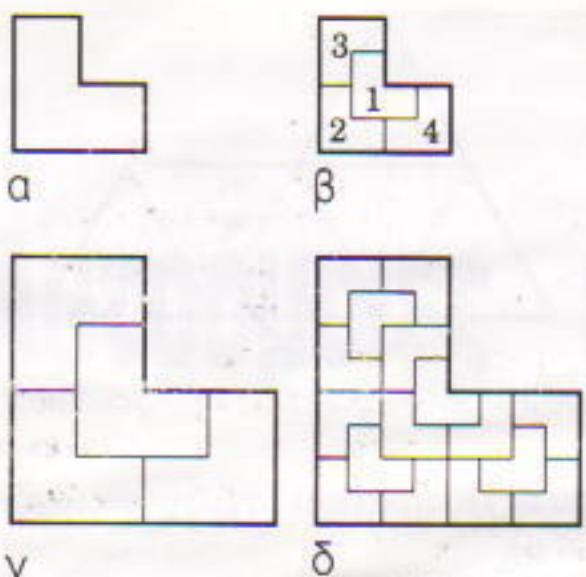


Σχήμα 6

## Αυτοόμοια σχήματα και πλακόστρωσης

Ας θεωρήσουμε ένα «καλό» αυτοόμοιο σχήμα  $F$  — δηλαδή, ένα που δεν περιέχει τρύπες. Μερικά παραδείγματα είναι το τρίγωνο, το παραλληλόγραμμο ή και κάθε άλλο πολύγωνο που αναλύεται σε ίσα πολύγωνα όμοια με το αρχικό. Τότε, μπορούμε να καλύψουμε ολόκληρο το επίπεδο με αντίγραφα του  $F$ , χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Μια κάλυψη ολόκληρου του επιπέδου με μη επικαλυπτόμενα «πλακίδια» ονομάζεται **πλακόστρωση**, ή **μωσαϊκό**. Αν όλα τα πλακίδια είναι ίσα, καλείται **απλή**.

Πώς μπορεί να προκύψει μια απλή πλακόστρωση από ένα αυτοόμοιο σχήμα  $F$ ? Υπάρχουν αρκετοί τρόποι. Ένας απ' αυτούς φαίνεται ο απλούστερος, στην πραγματικότητα όμως κρύβει ένα λεπτό σημείο. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, μια καρέκλα  $F$  συγκεκριμένου μεγέθους (Σχήμα 7a) και ας την αναλύσουμε σε τέσσερις μικρές καρέκλες, όπως στο Σχήμα 7b. Διπλασιάζουμε τώρα αυτή την εικόνα έτσι ώστε κάθε μικρή καρέ-



Σχήμα 7

κλα να γίνει ίση με την αρχική (Σχήμα 7γ). Στη συνέχεια, χωρίζουμε τις τέσσερις καρέκλες σε τέσσερις μικρές (Σχήμα 7δ) και διπλασιάζουμε άλλη μία φορά την εικόνα που προκύπτει. Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία, προκύπτει ένα απείρως επεκτεινόμενο χωρίο με σχήμα καρέκλας που αποτελείται από ίσες καρέκλες.

Αυτή η διαδικασία έχει ένα ιδιαίτερο όνομα: *σύμπτυξη-επέκταση*. Η *επέκταση* αντιστοιχεί στην αύξηση του μεγέθους των πλακιδίων. Η *σύμπτυ-*

ξη

αντιστοιχεί στην ανάλυση των μεγάλων πλακιδίων σε μικρότερα. Η διαδικασία αυτή (που καλείται και *d*-διαδικασία) οδηγεί, στο όριό της, σε μια απλή πλακόστρωση. Αυτό όμως το όριο είναι το λεπτό σημείο που αναφέραμε προηγουμένως. Ποιο είναι τελικά όριο σε αυτή την περίπτωση; Προφανώς, από τη *d*-διαδικασία προκύπτει μια ακολουθία χωρίων αυξανόμενου μεγέθους που καλύπτονται από όμοια πλακίδια. Όμως, δεν είναι μια ακολουθία τμημάτων που αυξάνονται με την προσθήκη νέων πλακιδίων στην πλακόστρωση που έχει κατασκευαστεί στα προηγούμενα βήματα. Πάντως, αποδεικνύεται ότι η πλακόστρωση μπορεί πάλι με αυτοόμοια πολυγωναία μορφή να αποτελείται από ίσες καρέκλες.

Μια πλακόστρωση που κατασκευαστεί από ένα αυτοόμοιο σχήμα ονομάζεται *αυτοόμοια* αν

- τα πλακιδιά της (ας τα ονομάσουμε *πλακίδια πρώτου επιπέδου*) ενώνονται για να σχηματίσουν μεγαλύτερα (πλακίδια δεύτερου επιπέδου) που είναι όμοια με τα πλακιδιά του πρώτου επιπέδου και τέτοια ώστε να

αποτελούν και αυτά *πλακόστρωση* (Σχήμα 8α)

- αυτή η «ακολουθιακή ολοκλήρωση» επιτυγχάνεται για κάθε επίπεδο (Σχήμα 8β).

Λόγω της ιεραρχίας που υπάρχει μεταξύ των πλακιδίων διαδοχικών επιπέδων, οι αυτοόμοιες πλακοστρώσεις καλούνται και *ιεραρχικές*. Αυτή η ιεραρχία μπορεί να είναι *ισχυρή* ή *ασθενής*. Λέμε ότι η ιεραρχία είναι *ισχυρή* όταν η πλακόστρωση του επόμενου επιπέδου κατασκευάζεται από τα πλακίδια του προηγούμενου με μονοσήμαντα οριζόμενο τρόπο. Όταν, αντίθετα, τα πλακίδια του επόμενου επιπέδου προκύπτουν από την ένωση των πλακιδίων του προηγούμενου με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους, λέμε ότι η ιεραρχία είναι *ασθενής*.

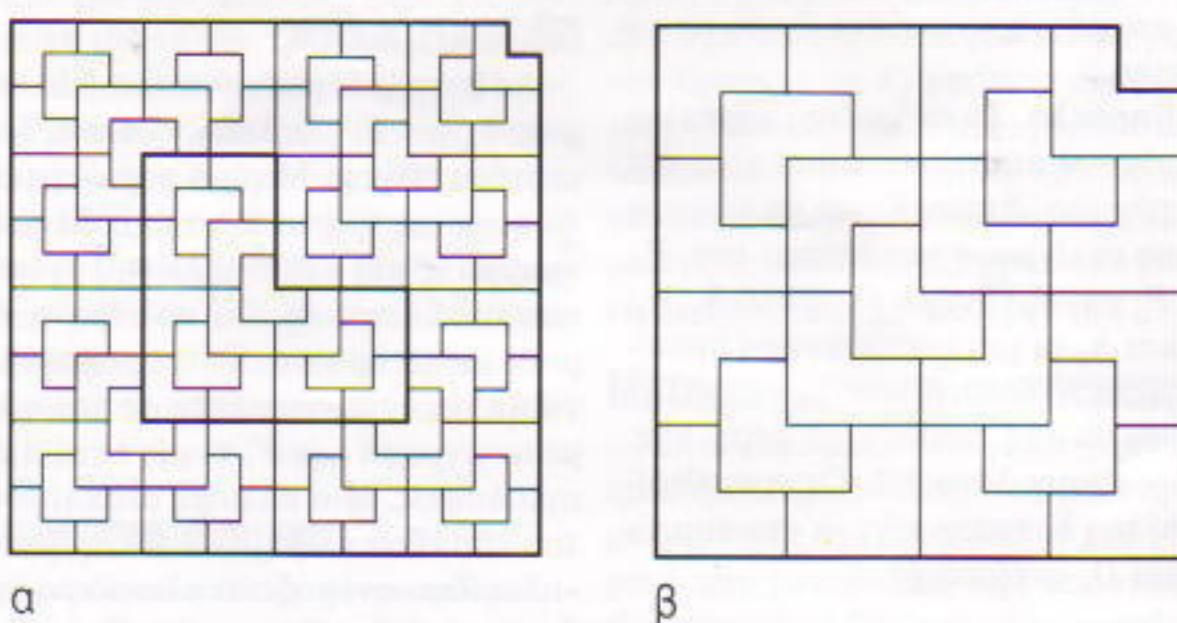
Η *ισχυρή* ή *ασθενής* φύση της ιεραρχίας καθορίζεται κυρίως από το ίδιο το σχήμα *F*. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο παράγει ασθενή ιεραρχία. Πράγματι, μια πλακόστρωση που αποτελείται από τετράγωνα (Σχήμα 9α) μπορεί να σχηματίσει τη δεύτερου επιπέδου πλακόστρωση με πολλούς διαφορετικούς τρόπους —δηλαδή, ένα δεδομένο τετράγωνο *A* μπορεί να εμφανίζεται σε διαφορετικές θέσεις των πλακιδίων του δεύτερου επιπέδου (Σχήμα 9β και 9γ).

Ωστόσο, η καρέκλα, η σφίγγα και το ντόμινο παράγουν ισχυρή ιεραρχία. Ας θεωρήσουμε ένα πλακίδιο σχήματος καρέκλας στην αντίστοιχη πλακόστρωση. Αυτό, μαζί με άλλα τρία, συνθέτει μια καρέκλα δεύτερου επιπέδου και κάθε πλακίδιο του πρώτου επιπέδου προσδιορίζει μονοσήμαντα τρία άλλα συμπληρωματικά πλακίδια.

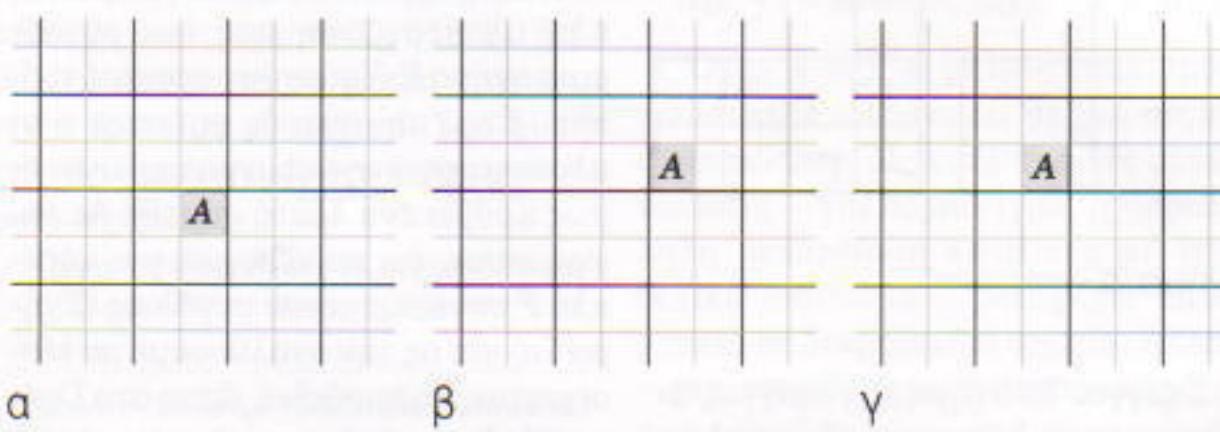
Επομένως, η πλακόστρωση δεύτερου επιπέδου ορίζεται μονοσήμαντα. Αφού η δεύτερη επιπέδου πλακόστρωση έχει τις ίδιες ιδιότητες με την πρώτη, η αυτοόμοια ανάλυση του επιπέδου σε καρέκλες είναι *ισχυρώς* ιεραρχική.

## Ιδιότητες των ισχυρώς ιεραρχικών πλακοστρώσεων

Οι ισχυρώς ιεραρχικές πλακοστρώσεις έχουν ένα πλήθος ιδιαίτε-



Σχήμα 8



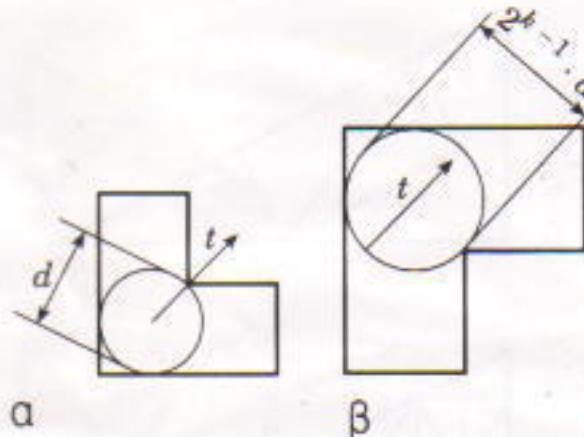
Σχήμα 9

ρων ιδιοτήτων που διαφέρουν από τις ιδιότητες των ασθενώς ιεραρχικών πλακοστρώσεων.

**Απεριοδικότητα.** Μια πλακοστρωση καλείται περιοδική όταν υπάρχει μία τουλάχιστον παράλληλη μετατόπιση η οποία απεικονίζει την πλακοστρωση στον εαυτό της. Όπως διαπιστώνουμε στο παράδειγμα της πλακοστρωσης με τετράγωνα, μια ασθενώς ιεραρχική πλακοστρωση μπορεί να είναι περιοδική. Κάθε πλακίδιο της πλακοστρωσης με τετράγωνα μετατοπίζεται παράλληλα σε οποιοδήποτε άλλο πλακίδιο, μαζί με ολόκληρη την πλακοστρωση.

Η σημαντικότερη ιδιότητα των ισχυρώς ιεραρχικών πλακοστρώσεων είναι η απεριοδικότητά τους. Ας αποδείξουμε ότι μια τέτοια πλακοστρωση δεν μπορεί να είναι περιοδική. Έστω ότι υπάρχει μια παράλληλη μετατόπιση  $t$  που απεικονίζει την πλακοστρωση στον εαυτό της. Τότε, η  $t$  μεταφέρει το πλακίδιο  $F_1$  σε ένα άλλο πλακίδιο  $F_2$ . Αφού η πλακοστρωση που αποτελείται από πλακίδια δεύτερου επιπέδου ορίζεται μονοσήμαντα, η παράλληλη μετατόπιση  $t$  απεικονίζει και τη δεύτερη επιπέδου πλακοστρωση στον εαυτό της. Και πάλι, λόγω του μονοσήμαντου ορισμού των πλακίδιων του τρίτου επιπέδου από τα πλακίδια του δευτέρου, η παράλληλη μετατόπιση  $t$  που απεικονίζει τη δεύτερη επιπέδου πλακοστρωση στον εαυτό της μεταφέρει και την τρίτου επιπέδου πλακοστρωση στον εαυτό της και, γενικότερα, απεικονίζει την πλακοστρωση οποιουδήποτε επιπέδου  $k$  στον εαυτό της, για κάθε  $k$ .

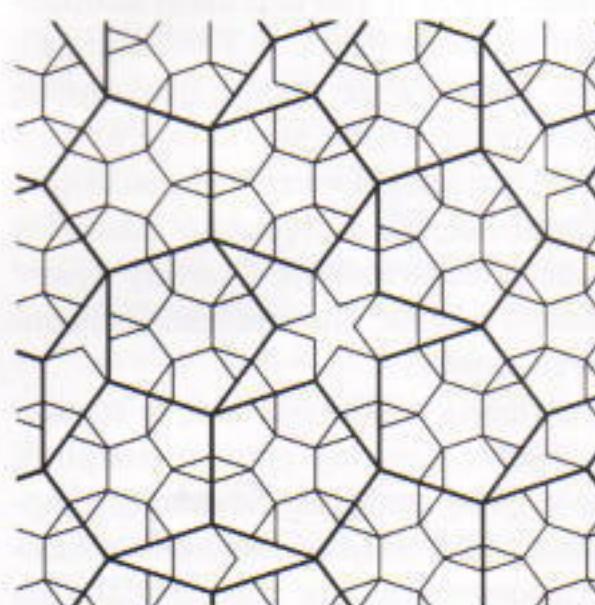
Τα πλακίδια του  $k$  επιπέδου είναι  $2^{k-1}$  φορές μεγαλύτερα από τα πλακίδια του πρώτου επιπέδου. Επομένως, αν τα πλακίδια του πρώτου επιπέδου περιέχουν έναν κύκλο διαμέτρου  $d$  (Σχήμα 10a), τα πλακίδια του  $k$  επιπέδου θα περιέχουν έναν κύκλο διαμέτρου  $2^{k-1} \cdot d$ . Για κατάλληλα μεγάλο  $k$ , έχουμε ότι το  $2^{k-1} \cdot d$  θα είναι μεγαλύτερο από το διάνυσμα  $t$  της παράλληλης μετατόπισης (Σχήμα 10β). Αυτό σημαίνει ότι η παράλληλη μετατόπιση κατά  $t$  απεικονίζει έναν κύκλο διαμέτρου  $2^{k-1} \cdot d$  σε έναν κύκλο που επικαλύπτεται με τον



Σχήμα 10

αρχικό. Από την άλλη πλευρά, αυτοί οι κύκλοι πρέπει να ανήκουν σε διαφορετικά πλακίδια του  $k$  επιπέδου του, συνεπώς, δεν μπορεί να τέμνονται από την ίδια πλακοστρωση σε διαφορετικά πλακίδια. Έτσι, έχουμε ένα φραγμένο σχήμα δεύτερου επιπέδου που είνα απεικονίζεται στον επιπέδου του μέσω μιας παράλληλης μετατόπισης και, αφού τα διαφορετικά πλακίδια της πλακοστρωσης  $k$  επιπέδου δεν επικαλύπτονται, δεν θα μπορεί να επικαλύπτονται και οι κύκλοι στο εσωτερικό τους. Άρα καταλήξαμε σε αντίφαση. Συνεπώς, γνωρίζουμε ότι όλες οι ισχυρώς ιεραρχικές πλακοστρώσεις είναι απεριοδικές.

Οι περιοδικές πλακοστρώσεις παρέχουν ένα καλό μοντέλο των κρυστάλλων, ενώ οι ισχυρώς ιεραρχικές πλακοστρώσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των ημικρυστάλλων. Σε αντίθεση με τους κρυστάλλους, αυτές οι δομές είναι απεριοδικές. Ειδικότερα, οι διάσημες διατάξεις Penrose<sup>5</sup> (Σχήμα 11), το γνωστό



Σχήμα 11

5. Δείτε το άρθρο της υποσημείωσης 1.

τέρο μοντέλο των ημικρυστάλλων, αποτελούν άμεσες γενικεύσεις των ισχυρώς ιεραρχικών πλακοστρώσεων.

**Τοπική ομοιότητα.** Ας εξετάσουμε μία ακόμα ιδιαιτερότητα των ισχυρώς ιεραρχικών πλακοστρώσεων: Η πλακοστρωση κάθε επόμενου επιπέδου κατασκευάζεται μονοσήμαντα από την πλακοστρωση του προηγούμενου επιπέδου. Έτσι, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι μια ισχυρώς ιεραρχική πλακοστρωση — για παράδειγμα, η καρέκλα — καθορίζεται μονοσήμαντα. Εντούτοις, υπάρχουν πολλές αυτόμοιες πλακοστρώσεις αποτελούμενες από πλακίδια λιγότεροι από τέσσερα καρέκλας — και μάλιστα, το πλήθος τους δεν είναι καν αριθμήσιμο. Θα θεωρούμε ταυτόσημες δύο (άπειρες) πλακοστρώσεις του επιπέδου αν η μία ταυτίζεται με την άλλη μέσω μιας στερεάς μετατόπισης του επιπέδου. Στην αντίθετη περίπτωση, θα θεωρούνται διαφορετικές.

Ας εξηγήσουμε πώς προκύπτει ένα μη αριθμήσιμο πλήθος αυτόμοιων πλακοστρώσεων από την καρέκλα. Αναλύουμε μια καρέκλα σε τέσσερις μικρότερες, στις οποίες αντιστοιχίζουμε τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4 (δείτε το Σχήμα 7β). Έστω ότι μια καρέκλα εμφανίζεται στη μεγαλύτερη καρέκλα αριθμημένη ως  $a_1$  κατά το πρώτο στάδιο της  $d$ -διαδικασίας. Στο δεύτερο στάδιο, αυτή η καρέκλα θα εμφανίζεται στην καρέκλα του δεύτερου επιπέδου ως  $a_2$ , και ούτω καθεξής. Συνεπώς, η πλακοστρωση που δημιουργείται από τη δεδομένη καρέκλα καθορίζει μια ακολουθία αποτελούμενη από τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4. Η ίδια πλακοστρωση δημιουργείται από οποιοδήποτε άλλο πλακίδιο της, αλλά η ακολουθία που παραγεται είναι διαφορετική. Αφού η πλακοστρωση αποτελείται από ένα αριθμήσιμο σύνολο πλακίδιων και το πλήθος των διαφορετικών ακολουθιών είναι μη αριθμήσιμο, το πλήθος των διαφορετικών αυτόμοιων πλακοστρώσεων που αποτελούνται από καρέκλες είναι επίσης μη αριθμήσιμο.

Αφού το πλήθος των ισχυρώς ιεραρχικών πλακοστρώσεων που κατασκευάζονται από ένα αυτόμοιο πλακίδιο είναι μη αριθμήσιμο, οι πλακοστρώσεις αυτές δεν είναι δυνατόν

να αριθμηθούν με φυσικούς αριθμούς όπως τα στοιχεία μιας ακολουθίας. Μπορεί όμως να αριθμηθούν με πραγματικούς αριθμούς.

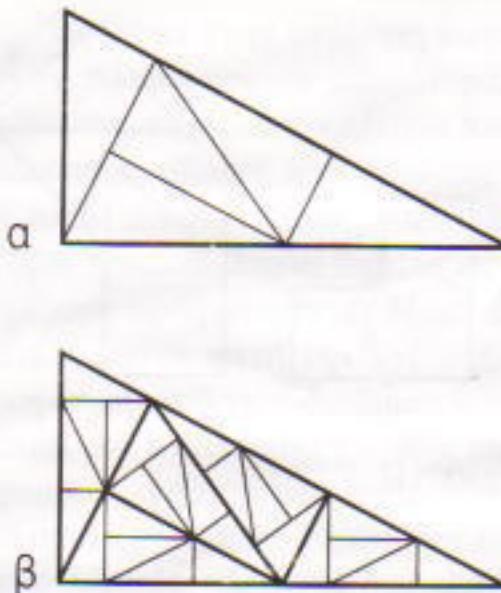
Ας υποθέσουμε ότι όλες οι πλακοστρώσεις της μη αριθμήσιμης οικογένειας «Καρέκλα» έχουν αποκτήσει το όνομά τους, δηλαδή από έναν πραγματικό αριθμό. Έστω ότι θέλουμε ... Ήμιουργήσουμε ένα οικογενειακό άλμπουμ με αυτές τις πλακοστρώσεις. Κάθε πλακόστρωση είναι άπειρη, οπότε δεν χωρά σε μια πεπερασμένη φωτογραφία. Συνεπώς, η φωτογραφία κάθε πλακόστρωσης παρουσιάζει αναπόφευκτα ένα μικρό τμήμα της, και κάθε πλακόστρωση μπορεί να έχει άπειρο πλήθος φωτογραφιών. Ας υποθέσουμε ότι ο φωτογράφος επέλεξε για το άλμπουμ μια φωτογραφία από κάθε πλακόστρωση, αλλά ξέχασε να γράψει το όνομά της όταν έβγαζε τη φωτογραφία και αναγκάστηκε να το γράψει αργότερα στην τύχη. Όσο παράδοξο και αν φαίνεται, δεν έχει κάνει κανένα λάθος, διότι κάθε πεπερασμένο τμήμα μιας πλακόστρωσης της οικογένειας «Καρέκλα» εμφανίζεται σε όλες τις άλλες πλακοστρώσεις της οικογένειας, και μάλιστα άπειρες φορές σε κάθε πλακόστρωση. Επομένως, παρότι όλες οι ισχυρώς ιεραρχικές πλακοστρώσεις διαφέρουν ως σύνολο, τοπικά είναι ταυτόσημες.

## Πλακοστρώσεις Conway

Υπενθυμίζουμε ότι μια αυτοόμοια πλακόστρωση μπορεί να είναι περιοδική. Οι ισχυρώς ιεραρχικές πλακοστρώσεις είναι απεριοδικές. Όμως, παρά την έλλειψη περιοδικότητας, το πλήθος των σχετικών θέσεων των πλακιδίων τους ως προς μια παράλληλη μετατόπιση είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση του ντόμινο, για παράδειγμα, κάθε πλακίδιο ανήκει σε μία από δύο κλάσεις παράλληλων πλακιδίων. Στην περίπτωση των καρεκλών υπάρχουν τέσσερις κλάσεις πλακιδίων.

**Πρόβλημα 4.** Πόσες κλάσεις παράλληλων πλακιδίων υπάρχουν στην ιεραρχική πλακόστρωση της σφίγγας;

Θα είχε ενδιαφέρον να βρούμε αν υπάρχουν πλακοστρώσεις αποτελούμενες από όμοια πλακίδια με άπειρο



Σχήμα 12

πλήθος διαφορετικών προσανατολισμών. Το 1992 ο Conway παρουσίασε μια αυτοόμοια, ισχυρώς ιεραρχική πλακόστρωση, τα πλακίδια της οποίας είναι ίσα τρίγωνα που έχουν άπειρο πλήθος διαφορετικών προσανατολισμών. Η βασική ιδέα είναι πολύ απλή. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με 1 και 2 και υποτείνουσα ίση με  $\sqrt{5}$ . Αυτό το τρίγωνο αναλύεται σε πέντε ίσα και αυτοόμοια τρίγωνα (Σχήματα 12α και 12β). Η οξεία γωνία του τριγώνου είναι  $a = \text{τοξεφ}(1/2)$ . Αυτή η ανάλυση παράγει μια αυτοόμοια πλακόστρωση που ονομάζεται πλακόστρωση Conway. Αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε ακέραιο  $t$  και για κάθε πλακίδιο της πλακόστρωσης Conway υπάρχει ένα άλλο πλακίδιο προσανατολισμένο έτσι ώστε να σχηματίζει γωνία  $ta$  με το αρχικό πλακίδιο. Αφού η γωνία  $a$  είναι ασύμμετρη με το  $2\pi$  (δείτε το Πρόβλημα 5), δύο τρίγωνα με προσανατολισμούς που σχηματίζουν γωνία  $ta$  μεταξύ τους δεν μπορεί να είναι παράλληλα. Επομένως, τα τριγωνικά πλακίδια μιας πλακόστρωσης Conway έχουν άπειρο πλήθος διαφορετικών προσανατολισμών.

Αποδεικνύεται ότι όλες οι πλακοστρώσεις Conway είναι αυτοόμοιες με ισχυρή ιεραρχία. Συνεπώς, υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων πλακοστρώσεων και όλες τους περιλαμβάνουν τρίγωνα με άπειρο πλήθος διαφορετικών προσανατολισμών.

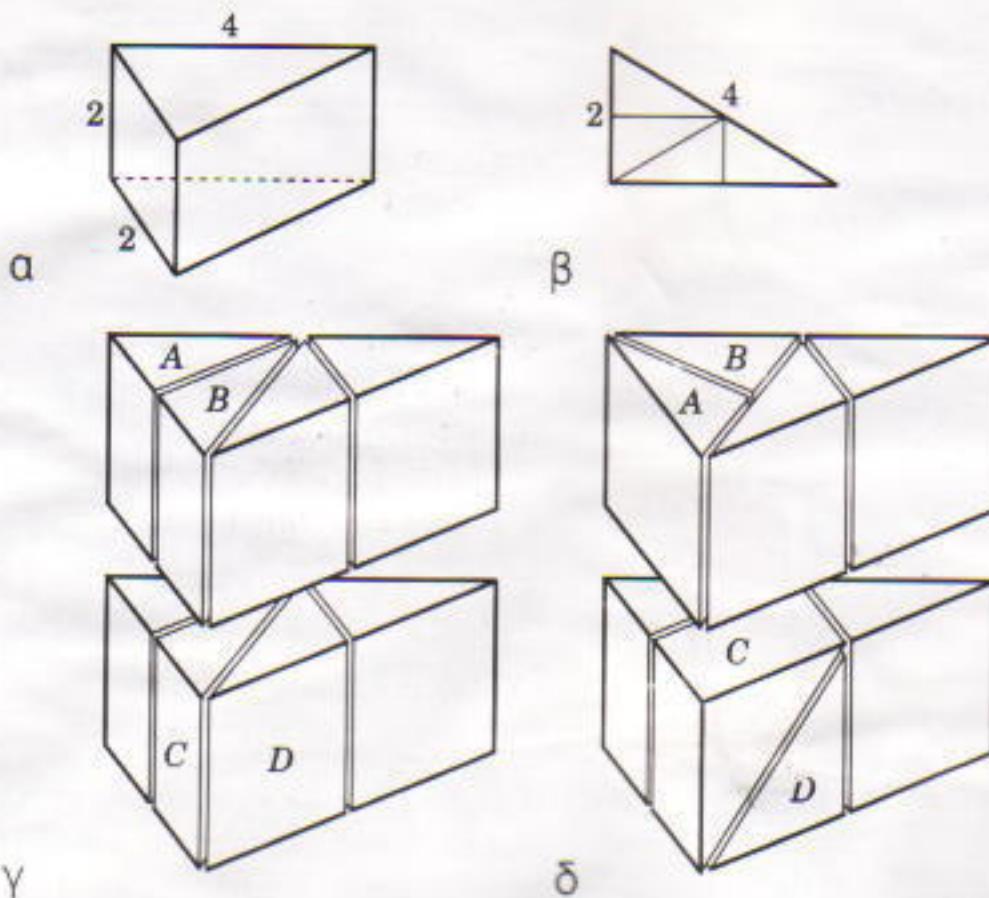
**Πρόβλημα 5.** Αποδείξτε ότι η γωνία  $\text{τοξεφ}(1/2)$  είναι ασύμμετρη με το  $\pi$  — δηλαδή, ότι δεν υπάρχουν φυσι-

κοί αριθμοί  $(p, m)$  που να είναι λύσεις της εξίσωσης  $\text{πτοξεφ}(1/2) = mp$ .

Ας διατυπώσουμε διαφορετικά την κύρια ιδιότητα των πλακοστρώσεων Conway: Για κάθε δυνατό προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου Conway,  $\Delta$ , και για κάθε μικρό θετικό αριθμό  $\varepsilon$ , υπάρχει ένα πλακίδιο  $\Delta_\varepsilon$  που είναι «σχεδόν παράλληλο» (με ακρίβεια ίση έως  $\varepsilon$ ) με το  $\Delta$ . Δηλαδή, οι γωνίες μεταξύ των αντίστοιχων πλευρών των τριγώνων  $\Delta$  και  $\Delta_\varepsilon$  είναι μικρότερες του  $\varepsilon$ . Με άλλα λόγια, οι προσανατολισμοί των πλακιδίων κατανέμονται παντού πυκνά στο σύνολο όλων των δυνατών προσανατολισμών.

Ο Conway κατασκεύασε αργότερα (μαζί με τον Charles Radin) μια πλακόστρωση στο χώρο αποτελουμένη από πρίσματα, οι προσανατολισμοί των οποίων κατανέμονται παντού πυκνά στο σύνολο όλων των δυνατών προσανατολισμών. Ο προσανατολισμός ενός πολυεδρου μπορεί να καθοριστεί με τη χρήση μιας τριάδας διανυσμάτων που είναι, ας πούμε, κάθετα μεταξύ τους και συνδέονται σταθερά με το πολύεδρο. Η ιδιότητα «παντού πυκνό» σημαίνει ότι για κάθε προσανατολισμό του πολυεδρου  $P$  και για κάθε, οσοδήποτε μικρό,  $\varepsilon > 0$  υπάρχει ένα τρισδιάστατο πλακίδιο  $P_\varepsilon$  τέτοιο ώστε οι γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων της τριάδας του και των διανυσμάτων της τριάδας του  $P_\varepsilon$  να είναι μικρότερες του  $\varepsilon$ .

Ως αρχικό αντικείμενο χρησιμοποιούμε ένα ορθό τριγωνικό πρίσμα που έχει ύψος 2 και βάση ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με 2 και  $2\sqrt{3}$ , αντίστοιχα, και υποτείνουσα ίση με 4 (Σχήμα 13α). Το τρίγωνο της βάσης αναλύεται σε τέσσερα όμοια τρίγωνα, όπως στο Σχήμα 13β. Άρα, το αρχικό πρίσμα αναλύεται σε οκτώ όμοια πρίσματα, όπως στο Σχήμα 13γ. Τα πρίσματα  $A$  και  $B$  στον πάνω «όροφο» αποτελούν ένα κανονικό τριγωνικό πρίσμα. Συνεπώς, αυτό το ζεύγος (θεωρούμενο ως σύνολο) μπορεί να περιστραφεί κατά  $120^\circ$  και να επιστρέψει στη θέση του (Σχήμα 13δ). Τα πρίσματα  $C$  και  $D$  του κάτω «όροφου» αποτελούν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τετραγωνική έδρα διαστάσεων  $1 \times 1$ .



Σχήμα 13

Αυτό το ζεύγος μπορεί να περιστραφεί κατά  $90^\circ$  και να επιστρέψει στη θέση του (Σχήμα 13δ).

Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται η κατασκευή μιας πλακόστρωσης Conway-Radine. Επισημαίνουμε ότι τα πρίσματα που περιστρέφονται κατά γωνίες  $120^\circ$  και  $90^\circ$  ως προς αμοιβαία κάθετους άξονες είναι ταυτόσημα. Ας υποθέσουμε ότι κατασκευάζουμε με τη διαδικασία επέκτασης-σύμπτυξης μια αυτοόμοια πλακόστρωση που αποτελείται από πρίσματα Conway-Radine. Τότε, αυτή η πλακόστρωση, μαζί με κάθε πρίσμα  $P$ , θα περιέχει όλα τα πρίσματα που έχουν περιστραφεί ως προς το  $P$  κατά γωνίες που προκύπτουν από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς της μορφής

$$g_1^{m_1} \cdot g_2^{m_2} \cdot g_1^{m_3} \cdot g_2^{m_4} \cdot \dots \cdot g_1^{m_n} \cdot g_2^{m_{n+1}},$$

όπου  $g_1$  και  $g_2$  είναι περιστροφές κατά  $120^\circ$  και  $90^\circ$  ως προς αμοιβαία κάθετους άξονες.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως τριάδα προσανατολισμού τις τρεις κάθετες ακμές που συντρέχουν στην κορυφή της ορθής γωνίας στη βάση του πρίσματος. Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα (χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι άξονες περιστροφής των  $g_1$  και  $g_2$  είναι κάθετοι μεταξύ τους) ότι το σύνολο των διαφορετικών προ-

σανατολισμών είναι άπειρο. Δυσκολότερα αποδεικνύεται ότι το σύνολο των προσανατολισμών είναι παντού πυκνό. Η απόδειξη απαιτεί τη χρήση της θεωρίας ομάδων.

### «Χάος» και αυτοόμοιες πλακόστρωσεις

Το παιχνίδι «Χάος» μάς παρέχει μια απρόσμενη και απλή μέθοδο κατασκευής αυτοόμοιων πλακόστρωσεων με τη βοήθεια του υπολογιστή.

Ας δούμε τους κανόνες του παιχνιδιού. Επιλέγουμε ένα αρχικό σύνολο μετασχηματισμών. Στην παρούσα περίπτωση θα επιλέξουμε αυτούς που απεικονίζουν το τρίγωνο Conway στα πέντε τρίγωνα που το συνθέτουν. Συμβολίζουμε τους μετασχηματισμούς με  $h_1, h_2, h_3, h_4$  και  $h_5$  (Σχήμα 12β). Έστω μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών η οποία παράγει τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5. Σημειώνουμε ένα τυχαίο σημείο  $x_0$  στο επίπεδο.

**Βήμα 1.** Έστω ότι η γεννήτρια τυχαίων αριθμών παράγει τον αριθμό 2. Θέτουμε  $x_1 = h_2(x_0)$ .

**Βήμα 2.** Έστω ότι η γεννήτρια τυχαίων αριθμών παράγει τον αριθμό 1. Θέτουμε  $x_2 = h_1(x_1)$ .

**Βήμα n.** Έστω ότι η γεννήτρια τυχαίων αριθμών παράγει τον αριθ-

μό  $a_n$ , όπου  $a_n = 1, 2, 3, 4$  ή 5. Θέτουμε  $x_n = h_{a_n}(x_{n-1})$ .

Αυτή η διαδικασία παράγει την ακολουθία των σημείων

$$x = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}.$$

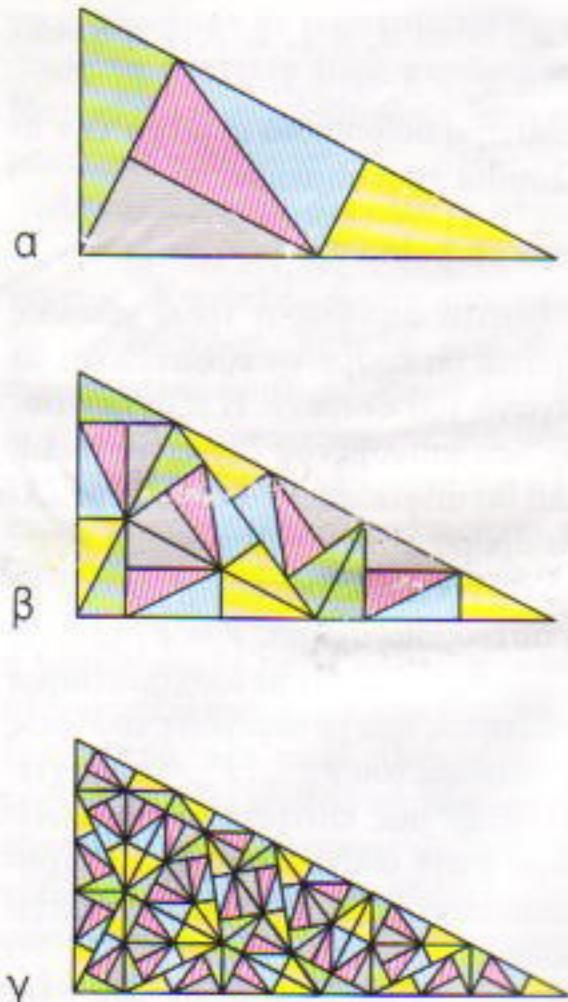
Έπειτα από δύο ή τρεις χιλιάδες βήματα, θα δούμε να εμφανίζεται το τρίγωνο του Conway. Η εξήγηση αυτού του φαινομένου δεν είναι απλή, αλλά θα αποτελέσει το θέμα ενδιαφέροντος αλλού άρθρου.

Στη γενική περίπτωση, έστω  $F$  είναι αυτοόμοιο σχήμα,  $F = F_1 \cup \dots \cup F_m$  και  $h_1, \dots, h_m$  οι μετασχηματισμοί ομοιότητας που μεταφέρουν το  $F$  στις συνιστώσες του  $F_1, \dots, F_m$ . Το παιχνίδι «Χάος» μάς επιτρέπει να εμφανίσουμε στην οθόνη το σχήμα  $F$  χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς  $h_i$ .

Για να δημιουργήσουμε την πλακόστρωση, θα χρωματίσουμε το σημείο  $x_n = h_{a_n}(x_{n-1})$  ανάλογα με την τιμή του  $a_n$ . Ας υποθέσουμε ότι αντιστοιχούμε στο 1 το πράσινο, στο 2 το κόκκινο, στο 3 το μπλε, στο 4 το πορτοκαλί και στο 5 το γκρι. Χρωματίζουμε το σημείο  $x_n = h_{a_n}(x_{n-1})$  με το χρώμα που αντιστοιχεί στην τιμή του  $a_n$ . Τότε εμφανίζεται στην οθόνη η έγχρωμη εικόνα του Σχήματος 14α. Είναι το πρώτο τμήμα μιας αυτοόμοιας πλακόστρωσης Conway. Αν χρωματίσουμε το σημείο  $x_n$  με το χρώμα που αντιστοιχεί στο  $a_{n-1}$ , θα προκύψει μια λεπτομερέστερη έγχρωμη εικόνα της ίδιας πλακόστρωσης (Σχήμα 14β). Ακόμη πιο λεπτομερής εικόνα προκύπτει αν χρωματίσουμε το σημείο  $x_n$  με το χρώμα που αντιστοιχεί στο  $a_{n-2}$  (Σχήμα 14γ), και ούτω καθεξής.

### Το πρόβλημα του Conway

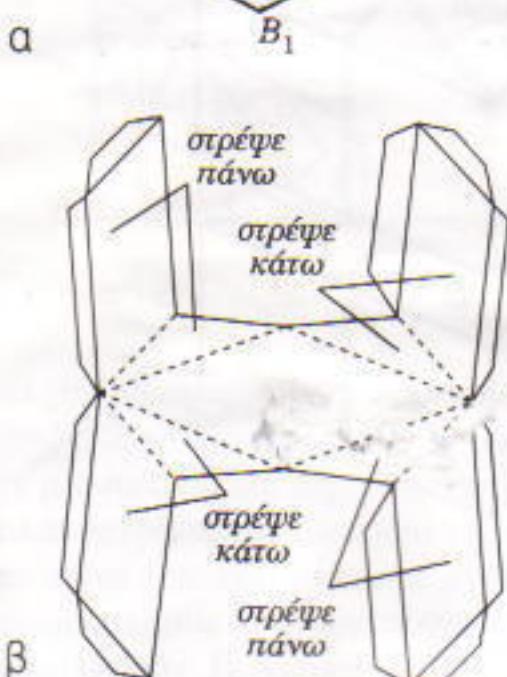
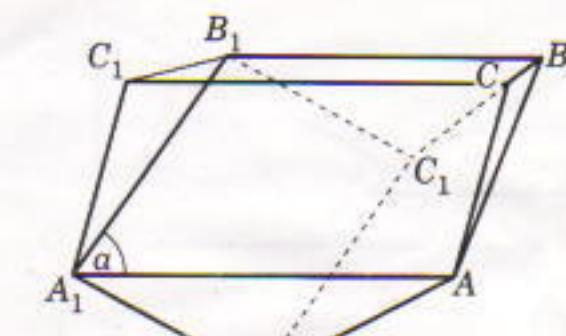
Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας. Αν ένα πολύγωνο είναι αυτοόμοιο, τότε μπορούμε να πλακόστρωσουμε με αντίγραφά του ολόκληρο το επίπεδο. Αν η πλακόστρωση που αποτελείται από αυτά τα πολύγωνα είναι ισχυρώς iεραρχική, τότε είναι απεριοδική —για παράδειγμα, οι αυτοόμοιες πλακόστρωσεις που αποτελούνται από καρέκλες. Όμως, δεν θα ήταν σωστός ο ισχυρισμός ότι από τα πλακίδια σχήματος καρέκλας κατα-



Σχήμα 14

σκευάζονται μόνο απεριοδικές πλακοστρώσεις. Στο Σχήμα 15 παρουσιάζεται μια απλή περιοδική πλακοστρωση αποτελούμενη από καρέκλες. Επομένως, υπάρχει το ενδεχόμενο τα αυτόμοια πολύγωνα να παράγουν περιοδικές καθώς και απεριοδικές, ισχυρώς μεραρχικές πλακοστρώσεις.

Ο John Conway έθεσε το ερώτημα: Υπάρχει πολύγωνο ή έστω καμπυλόγραμμο επίπεδο σχήμα που παράγει μόνο απεριοδικές πλακοστρώσεις; Έχει ενδιαφέρον ότι πρόσφατα δόθηκε καταφατική απάντηση σε αυτό το ερώτημα με τη μορφή του καλούμενου διπρίσματος Schmidt-Conway-Danzer (Σχήμα 16α). Το εν λόγω δίπρισμα κατασκευάζεται με τον τρό-

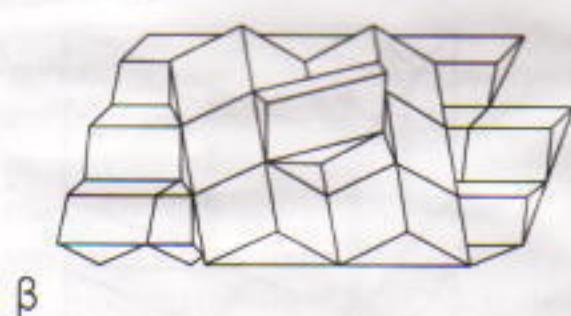
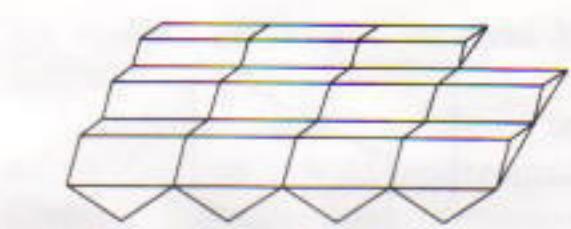


Σχήμα 16

πο που απεικονίζεται στο Σχήμα 16β. Επομένως ότι το συγκεκριμένο ανάπτυγμα του πολυέδρου δεν είναι συνηθισμένου τύπου. Περιέχει ένα ρόμβο που δεν είναι εδρα του πολυέδρου αλλά βοηθητικό στοιχείο της κατασκευής.

Το δίπρισμα κατασκευάζεται ως εξής. Πρώτα θεωρούμε ένα τριγωνικό πρίσμα  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  του οποίου η παράπλευρη έδρα  $ABB_1A_1$  είναι ρόμβος (με οξεία γωνία  $a$ ). Στη συνέχεια, τοποθετούμε πάνω σε αυτή την παράπλευρη έδρα ένα ίδιο πρίσμα, στραμμένο κατά  $180^\circ$  ως προς τη διαγώνιο του ρόμβου. Επομένως ότι οι παράπλευρες ακμές του δεύτερου πρίσματος σχηματίζουν γωνία  $a$  με τις παράπλευρες ακμές του πρώτου. Ένα ζεύγος τέτοιων πρισμάτων, συνδεδεμένων με αυτό τον τρόπο, αποτελεί το ζητούμενο δίπρισμα.

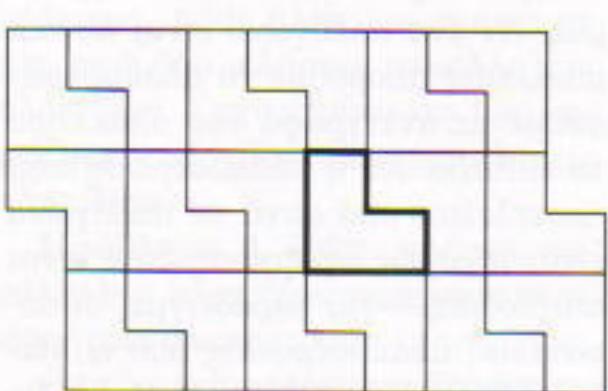
Μπορούμε εύκολα να διαποτώσουμε ότι ο χώρος καλύπτεται με τέτοια διπρίσματα χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Η κατασκευή τέτοιων πλακοστρώσεων είναι από πολλές απόψεις προκαθορισμένη. Αν θέλουμε να πλακοστρώσουμε το χώρο με τέτοια διπρίσματα πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε ένα στρώμα από αυτά



Σχήμα 17

(Σχήμα 17α). Σε ένα τέτοιο στρώμα, όλα τα διπρίσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Επιπλέον, το στρώμα αποτελεί μια περιοδική οικογένεια διπρισμάτων. Στη συνέχεια, όλος ο χώρος καλύπτεται με τέτοια στρώματα (Σχήμα 17β). Κάθε διαδοχικό στρώμα προκύπτει από το προηγούμενο με την περιστροφή του γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του στρώματος κατά γωνία ίση με την οξεία γωνία του ρόμβου. Στη συνέχεια, το στρώμα μετατοπίζεται παράλληλα. Επομένως, αν η γωνία του ρόμβου είναι ασύμμετρη με το  $\pi$  (δηλαδή, αν το  $a$  δεν μπορεί να γραφεί ως  $(m/n)\pi$ , όπου  $m$  και  $n$  ακέραιοι), τότε δύο διπρίσματα διαφορετικών στρωμάτων δεν μπορεί να είναι παράλληλα. Από την άλλη πλευρά, κάθε παράλληλη μετατόπιση που απεικονίζει ένα στρώμα στον εαυτό του δεν μπορεί να απεικονίσει κανένα άλλο στρώμα στον εαυτό του. Συνεπώς, αν η γωνία  $a$  είναι ασύμμετρη ως προς το  $\pi$ , δεν υπάρχουν παράλληλες μετατοπίσεις που απεικονίζουν τη διαμέριση που περιγράφαμε στον εαυτό της.

Σε ό,τι αφορά τα επίπεδα σχήματα, η απάντηση στο ίδιο ερώτημα δεν είναι ακόμη γνωστή. Είναι πιθανόν να μην υπάρχουν στο ευκλείδειο επίπεδο τέτοια απεριοδικά πλακίδια. Στο επίπεδο Lobachevski έχει ήδη ανακαλυφθεί ένα ανάλογο απεριοδικού πλακίδιου. Θα ήταν υπέροχο αν ένας αναγνώστης του *Quantum* ανακάλυπτε ένα απεριοδικό πλακίδιο στο ευκλείδειο επίπεδο. ◻



Σχήμα 15

# Για να περνά η ώρα

Σ191

**Σλεβίστικα προβλήματα.** Ένας δάσκαλος παρουσίασε στην τάξη ένα πεντάεδρο (πολύτιτρο με πέντε εδρες). Δύο από τις εδρες ήταν τρίγωνα, ενώ οι άλλες τρεις τετράπλευρα. Η Τζένη υχεδίασε μια κάτοψη του πολυέδρου (δείτε το σχήμα). Είναι σωστό το σχέδιό της;



Σ192

Συνδέστε τις τελείες. Είναι δυνατόν να σημειώσετε έξι σημεία του επιπέδου και να συνδέσετε ορισμένα ζεύγη από αυτά με τμήματα που δεν τέμνονται μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε σημείο να συνδέεται με τέσσερα άλλα;



Σ193

**Ειλικρινής πλειοφηφία.** Εκατό άνθρωποι —χημικοί και αλχημιστές— συμμετείχαν σε ένα συνέδριο. Τους ετέθη το εξής ερώτημα: Ποια ομάδα είναι πολυπληθέστερη σε αυτή τη συνάντηση (χωρίς να περιλάβετε τον εαυτό σας), οι χημικοί ή οι αλχημιστές; Οι πρώτοι πενήντα απάντησαν ότι περισσότεροι ήταν οι αλχημιστές. Γνωρίζουμε ότι οι αλχημιστές λένε πάντοτε ψέματα ενώ οι χημικοί λένε πάντοτε αλήθεια. Πόσοι χημικοί συμμετείχαν στο συνέδριο;



Σ194

**Εξάγωνος προβληματισμός.** Δίνονται έξι ίσα κανονικά εξάγωνα. Τα τρία από τα εξάγωνα κόψτε τα στα δύο, έτσι ώστε με τα εννέα κομμάτια που προκύπτουν (τα έξι «μισά» και τα άλλα τρία εξάγωνα) να μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τσόπλευρο τρίγωνο.



Σ195

**Ανορθόδοξος υδράργυρος.** Απομακρύνουμε γρήγορα ένα θερμόμετρο από ένα δοχείο με λειωμένο κασσίτερο. Στην αρχή ο υδράργυρος, αντί να κατέβει, ανεβαίνει! Εξηγήστε αυτό το παράδοξο φαινόμενο.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

# Ένα δύσκολο ερώτημα

«Αν το παρελθόν μάς έδωσε πολλά, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι το μέλλον θα μας προσφέρει πολύ περισσότερα.»

—Henri Poincaré

Πέτρος Δήτσας

**K**ΑΤΑ ΤΟΥΣ ΠΡΟΣΦΑΤΟΥΣ ΜΗΝΕΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ στον νέο αιώνα και παράλληλα στη νέα χιλιετία, έγινα μερικές φορές αποδέκτης ερωτημάτων που μπορούν να συνοψιστούν στο εξής: Ποια είναι τα επιτεύγματα-ορόσημα στη φυσική κατά τη χιλιετία ή την εκατονταετία που έφυγε; Υπονοούνταν βέβαια ότι η απάντηση έπρεπε να αποφύγει κάθε χρήση μαθηματικών, αλλά και της πο τεχνικής ορολογίας της φυσικής.

Η κύρια δυσκολία ενός τέτοιου ερωτήματος δεν έγκειται στο πρόβλημα της έντιμης εκλαϊκευσης, αλλά στη μεγάλη ευρύτητα ή γενικότητά του και στον αξιολογικό χαρακτήρα του. Θα καταλάβουμε καλύτερα αυτή τη δυσκολία αν ανακαλέσουμε περιληπτικά την «επιστημονική ιδιομορφία» της φυσικής στην ιστορική της διάσταση. Η σημερινή φυσική είναι η ιστορική και συλλογική μορφοποίηση μιας προσπάθειας κατανόησης των φυσικών φαινομένων, που εναποθέτει την εγκυρότητά της κυρίως στη συνεχή διεύρυνση μιας συστηματικής απόπειρας εξειδικευμένης επικοινωνίας με τη φύση, ενός διαλόγου μαζί της βασισμένου σε κατάλληλα πειράματα ή παρατηρήσεις και στη λεπτομερή επεξεργασία και μελέτη των αποκρίσεων της. Οι επιτυχείς προσπάθειες «αποκωδικοποίησης» των αποκρίσεων αυτών στο πλαίσιο μιας εξειδικευμένης θεωρίας, εμπλουτίζουν —και κατά καιρούς «επαναδομούν»— εννοιολογικά και μεθοδολογικά τη φυσική, με αποτέλεσμα βέβαια τη σύλληψη και εκτέλεση νέων πο φιλόδοξων πειραμάτων και παρατηρήσεων. Όταν λοιπόν σκύψουμε πάνω στην πραγματική εξέλιξη της φυσικής, αντιλαμβανόμαστε γρήγορα ότι η αξιολόγηση ενός «ορόσημου» εξαρτάται άμεσα από την κατανόηση μιας συγκεκριμένης ιστορικής πορείας, η οποία μάλιστα διέπεται από την αναπόφευκτη διαπλοκή δύο ευδιάκριτων κατηγοριών επιτευγμάτων, εκείνων στη θεωρητική φυσική και εκείνων στους πειραματικούς σχεδιασμούς και τεχνικές. Είναι πραγματικά δύσκολο να αποκτήσει κανείς για αυτό το πολύπτυχο σύνολο μια κάπως βαθύτερη, και

ταυτόχρονα ισορροπημένη, γνώση και γνώμη: ακόμα και η σχετική ιστορική έρευνα παρουσιάζει αρκετά κενά, ενώ υπάρχει κάποια καθυστέρηση στη μελέτη και ανάδειξη των επιτευγμάτων της πειραματικής φυσικής.

Ωστόσο, το ερώτημα που διατυπώθηκε στην αρχή του άρθρου είναι από εκείνα που, άπαξ και σου τεθεί, δεν σε αφήνει ήσυχο. Σε προκαλεί να αναμετρηθείς μαζί του, έστω και μόνο από την περιέργεια να δεις διαμορφωμένη την προσωπική σου άποψη. Θα το επιχειρήσουμε λοιπόν με το παρόν (και ένα επόμενο) άρθρο στο *Quantum*, περιοριζόντας όμως κάπως και συγκεκριμενοποιώντας το περιεχόμενό τους, ώστε να το φέρουμε πο κοντά στα μέτρα των γνώσεων και ενδιαφερόντων μας. Συγκεκριμένα, στο σημερινό άρθρο θα προτείνουμε τα κατά τη γνώμη μας βασικά επιτεύγματα της απερχόμενης χιλιετίας στην ανάπτυξη της φυσικής ως θεωρίας, επισημαίνοντας μερικές φορές την αλληλεπίδραση πειράματος-θεωρίας, αλλά αφήνοντας ρητά κατά μέρος τα επιτεύγματα της φυσικής ως πειραματικής επιστήμης (αν και για τέτοια επιτεύγματα απονέμονται συχνά βραβεία Νόμπελ). Ακόμη κι έτσι, όμως, η έκταση του θέματος είναι τόση ώστε μας υποχρεώνει σε πολύ συνοπτικές διατυπώσεις, που στοχεύουν στην ανάδειξη μόνο των πιο ουσιωδών στοιχείων: δοοι αναγνώστες δεν έχουν συναφείς γνώσεις συμπληρωματικές των στοιχείων αυτών, ίσως νιώσουν μερικές στιγμές όπως οι κινηματογραφόφιλοι όταν διαβάζουν την περίληψη μιας ενδιαφέρουσας ταινίας που δεν έχουν δει. Έτσι ή αλλιώς, η συνοπτική ιστορική οριοθέτηση του παρόντος άρθρου θα είναι πολύ χρήσιμη για την κατανόηση ενός επόμενου άρθρου μας, όπου θα αναπτυχθούν αναλυτικότερα τα επιτεύγματα της φυσικής κατά τον 20ό αιώνα, καθώς και σε ποιες βασικές αλλαγές του κοσμοειδώλου μάς οδηγούν.

Μια αποτίμηση των επιτευγμάτων στη φυσική κατά τη χιλιετία που έφυγε θα γίνει καλύτερα κατανοητή αν ξεκινήσουμε συνοψίζοντας πώς οι ίδιοι οι φυσικοί ορι-

οθετούν σήμερα το στόχο τους. Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι μέχρι πριν εκατό περίπου χρόνια οι όροι φυσική και φυσική φιλοσοφία χρησιμοποιούνταν εναλλακτικά. Σήμερα, μετά τον ιστορικό διαχωρισμό της χημείας και της γεωλογίας (για λόγους κυρίως προγραμματικών διαφορών), ο στόχος των φυσικών παραμένει μεγαλεπήβολος αλλά κάπως αυστηρότερα προσδιορισμένος: η ενιαία κατανόηση κάθε φυσικού φαινομένου, οποιασδήποτε χωρικής, χρονικής και ενεργειακής κλίμακας ή συστασιακής πολυπλοκότητας (συμπεριλαμβανομένης της ιστορίας του σύρπεντες), εκκινώντας από τους θεμελιώδεις νόμους της μικροσκοπικής ύλης. Εκτός από την ανακάλυψη των θεμελιώδων αυτών νόμων, το «πρόγραμμα» λοιπόν περιλαμβάνει τα συναρπαστικά προβλήματα κατανόησης των συλλογικών δυναμικών και ιδιοτήτων που αναδύονται σε ποικιλόμορφα συσσωματώματα ύλης υπό διάφορες συνθήκες, καθώς και την επίμονη συναγωγή προβλέψεων που τροφοδοτούν την αλληλεπίδραση με την πειραματική έρευνα και την τεχνολογία. Η ευγενής άμιλλα πειράματος και θεωρίας, η εμμονή στην οικουμενική και ταυτόχρονα λεπτομερή κατανόηση, η καθιέρωση μιας ακριβολόγου επικοινωνίας και κριτικής, είναι μερικά από τα «μυστικά» της επιτυχίας των φυσικών τους τελευταίους αιώνες.

Αν κοιτάξουμε πίσω στη χιλιετία που έφυγε, θα δούμε ότι ξεκίνησε με πολύ διαφορετικές συνθήκες: για ιστορικούς λόγους που θα προσπεράσουμε, η περίοδος από τον 5ο μ.Χ. έως τον 11ο μ.Χ. αιώνα χαρακτηρίζεται από μια πρωτοφανή κάμψη της λατινόγλωσσης επιστήμης στη Δυτική Ευρώπη, ενώ και στο ελληνόγλωσσο Βυζάντιο η αρχαιοελληνική επιστήμη μελετάται χωρίς δημιουργική πνοή. Τους πρώτους αιώνες της χιλιετίας μας αρχίζει μια βαθμιαία ανατροπή αυτού του κλίματος, αφενός με την εμφάνιση των πρώτων ευρωπαϊκών πανεπιστημίων και αφετέρου με την έκδηλη δίψα για πρόσβαση στην ελληνική κληρονομιά, που μεταφράζεται με ξέφρενους ρυθμούς στα λατινικά (κυρίως από τις αντίστοιχες αραβικές μεταφράσεις του 8ου και 9ου μ.Χ. αιώνα). Ωστόσο, παρά την ανάπτυξη των επιστημονικών κέντρων της εποχής, μέχρι τα μέσα του 16ου αιώνα δεν επιτυγχάνεται κάποια σημαντική πρόδος στις φυσικές επιστήμες. Μερικές σημαντικές αιτίες αυτής της καθυστέρησης ήταν η υπερβολική έμφαση στην αριστοτελική αυθεντία, η σύγχυση επιστήμης και θεολογίας (και οι συνακόλουθες εκκλησιαστικές παρεμβάσεις), το ελάχιστο ενδιαφέρον για την τεχνολογική πρόδος, και μια πνευματική νοοτροπία ταλαντευόμενη μεταξύ σχολαστικού και ενός υπονομευμένου από την αγνωσιαρχία εμπειρισμού, που της έλειπε η δημιουργική πεποίθηση στο εφικτό και ελέγχιμο μιας έγκυρης γνώσης των φυσικών φαινομένων.

Από εδώ και πέρα έρχονται, με ολοένα ταχύτερο ρυθμό, διαδοχικά δημιουργικά βήματα-ορόσημα, που άλλαξαν ριζικά την κατανόησή μας του κόσμου, την αντίληψή μας για τη σχέση ανθρώπου-κόσμου, αλλά τελικά και τις συνθήκες της καθημερινής ζωής μας. Στη συνέχεια θα συνοψίσω σχηματικά, κατά εύλογες ενότητες και τη-

ρώντας τη χρονολογική σειρά, το περιεχόμενο των επιτευγμάτων που θεωρώ χαρακτηριστικά ορόσημα στην ανάπτυξη της φυσικής. Όχι τυχαία, η εκκίνηση σχετίζεται με την αστρονομία, που είχε σημαντική ανάπτυξη ήδη από την αρχαιότητα.

1. **Περίοδος 1540-1650:** Υποστήριξη του ηλιοκεντρικού προτύπου του πλανητικού μας συστήματος (Κοπέρνικος), κατανόηση της επιστημονικής σημασίας των αστρονομικών παρατηρήσεων ακριβείας και συστηματική συλλογή τους (Tycho Brahe), μαθηματική επεξεργασία των δεδομένων του τελευταίου από τον Kepler και συναγωγή των τριών ομώνυμων νόμων των πλανητικών κινήσεων. Τελειοπόίηση και χρήση του ιηλεσκοπίου (Γαλιλαίος και άλλοι). Ανακάλυψη του νόμου της ελεύθερης πτώσης και μαθηματική διατύπωση της ομαλής και της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης (Γαλιλαίος). Ανακάλυψη και κατανόηση της θεμελιώδους σημασίας της αρχής της αδράνειας (Γαλιλαίος, Καρτέσιος). Διατύπωση της αναλυτικής γεωμετρίας (Καρτέσιος). Στο τέλος αυτής της περιόδου έχει γίνει πλέον συνειδηση το ενιαίο των επίγειων και των ουράνιων φυσικών φαινομένων, η σημασία της μαθηματικής περιγραφής των κινήσεων και της αρχής της αδράνειας, και οι νόμοι των πλανητικών κινήσεων έχουν διατυπωθεί σε μορφή που «καλεί» για μια δυναμική εξήγηση.

2. **Περίοδος 1670-1700:** Διατύπωση και συστηματική αξιοποίηση των (ακόμη και σήμερα χρησιμοποιούμενων) νόμων της κλασικής δυναμικής από τον Νεύτωνα: η κλασική μηχανική του είναι η πρώτη φυσική θεωρία διατυπωμένη με λογική και μαθηματική πληρότητα. Καθιερώνονται οι έννοιες της δύναμης, της μάζας και της ορμής, καθώς και η νευτώνεια μορφή της βαρυτικής δύναμης. Βάσει της τελευταίας, ο Νεύτων εξήγησε τους νόμους του Kepler, τη μετάπτωση των ισημεριών, το φαινόμενο των παλιρροιών (από το παρατηρηθέν ύψος των οποίων προσδιόρισε μάλιστα τη μάζα της Σελήνης). Κατά την ίδια περίοδο μορφοποιείται ο απειροστικός λογισμός (Νεύτων, Leibniz).

3. **Περίοδος 1780-1870:** Πειραματική μελέτη και μαθηματική διατύπωση των επιμέρους νόμων του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού (Coulomb, Ampère, Faraday) και της κυματικής οπτικής (T. Young, Fresnel), και η ολοκλήρωσή τους στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία από τον Maxwell. Ο ηλεκτρομαγνητισμός καθιέρωσε την έννοια του πεδίου ως αυθύπαρκτης οντότητας, και με το χρόνο αναδείχτηκε σε πρότυπη θεωρία κλασικών πεδίων. Παράλληλα, ενοποίησε όλα τα ηλεκτρικά, μαγνητικά και οπτικά φαινόμενα.

4. **Περίοδος 1820-1870:** Ανακάλυψη του νόμου διατήρησης της ενέργειας (Joule, Mayer, Helmholtz). Ανακάλυψη του Δεύτερου Νόμου της θερμοδυναμικής και εισαγωγή της έννοιας της εντροπίας (S. Carnot, Clausius, W. Thomson).

5. **Περίοδος 1870-1905:** Διατύπωση της στατιστικής θεωρίας της μοριακής δυναμικής και της μικροσκοπικής

στατιστικής ερμηνείας της εντροπίας από τον Boltzmann. Συστηματοποίηση της κλασικής στατιστικής μηχανικής (Gibbs, Planck, Αϊνστάιν), με τις μεθόδους της οποίας ελλιπής (μακροσκοπική) αρχική πληροφορία για ένα πολυσωματιδιακό σύστημα επιτρέπει την πρόβλεψη της εξέλιξης του στο ίδιο (μακροσκοπικό) επίπεδο περιγραφής. Καθιέρωση της ατομικής θεωρίας του χημικού δεσμού.

6. 1905: Διατύπωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας από τον Αϊνστάιν, στο πλαίσιο της οποίας οι νόμοι της μηχανικής μεταλλάσσονται κατάλληλα ώστε να γίνουν συμβατοί με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Συνειδητοποιείται ότι ανάμεσα στις βασικές υποθέσεις μιας θεωρίας είναι και το πώς αλλάζουν τα βασικά φυσικά μεγέθη που μετράει ένας παρατηρητής όταν αλλάζει η κινητική κατάσταση του παρατηρητή. Αναδεικνύεται ο οριακός χαρακτήρας της ταχύτητας του φωτός, η ισοδυναμία μάζας και εσωτερικής ενέργειας, και η βαθύτερη σχέση μεταξύ αφενός χώρου και χρόνου και αφετέρου ορμής και ενέργειας.

7. 1916: Διατύπωση από τον Αϊνστάιν της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, δηλαδή της σχετικιστικής θεωρίας του κλασικού βαρυτικού πεδίου. Ο χωρόχρονος αναδεικνύεται σε εύκαμπτο —δυναμικά μεταβαλλόμενο— συνεχές με φυσική υπόσταση, που η καμπυλότητά του σχετίζεται με το βαρυτικό πεδίο των μαζών.

8. Περίοδος 1900-1927: Ανάδειξη της ανάγκης να τροποποιηθεί η κλασική φυσική για να εξηγηθούν φαινόμενα ατομικής κλίμακας (Planck, Αϊνστάιν, Rutherford, Bohr) και τελική διατύπωση της κβαντικής μηχανικής (Heisenberg, De Broglie, Schrödinger, Dirac, Born). Ριζική αλλαγή της κλασικής περιγραφής του στοιχειώδους σωματιδίου και της κίνησής του: όλη η πληροφορία για το σωματίδιο εμπεριέχεται στην κυματοσυνάρτησή του, ενώ η χρονική εξέλιξη αυτής της κυματοσυνάρτησης περιγράφει την κίνησή του. Ακριβώς αυτός ο «κυματοσωματιδιακός» χαρακτήρας της μικροσκοπικής ύλης εξήγησε για πρώτη φορά την ευστάθεια των ατόμων και των μορίων. Ωστόσο, για παραδοσιακού χαρακτήρα μετρήσεις, όπως π.χ. της θέσης ή της ορμής ενός «σωματιδίου», μπορούν να γίνουν εν γένει μόνο στατιστικές προβλέψεις. Μετά τη σύζευξη της κβαντομηχανικής με τη στατιστική μηχανική (Bose, Αϊνστάιν, Fermi, Dirac), οι φυσικοί αποκτούν για πρώτη φορά μια θεωρία για τη δομή της ύλης σε μικροσκοπικό επίπεδο και για τα φαινόμενα εκπομπής-απορρόφησης της ακτινοβολίας, που έχει και λογική συνοχή και εντυπωσιακή συμφωνία με το πείραμα. Με βάση την κβαντική μηχανική, αναπτύχθηκε με επιτυχία κατά τις επόμενες δεκαετίες η ατομική και μοριακή φυσική, η φυσική συμπυκνωμένης ύλης, εξηγήθηκαν αναπάντεχα φαινόμενα, όπως η υπερρευστότητα και η υπεραγωγιμότητα, και αναπτύχθηκαν τεχνολογικές εφαρμογές μεγάλης σημασίας (τεχνολογία ημιαγωγών, εφαρμογές των λέιζερ, κ.λπ.).

9. Περίοδος 1930-1950: Διατύπωση της κβαντικής θεωρίας πεδίων, όπου επιτυγχάνεται η εναρμόνιση της κβα-

ντικής θεωρίας με την ειδική σχετικότητα (Dirac, Heisenberg, Pauli, Jordan, Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson). Το κυματοσωμάτιο θεωρείται πλέον ως διέγερση ενός κβαντικού πεδίου: οι κλασικές έννοιες του σωματιδίου και του πεδίου συντίθενται σε μια δυναμικότερη φυσική οντότητα. Κάθε αντιδραση σωματιδίων που δεν παραβιάζει ορισμένους νόμους διατήρησης είναι κατ' αρχήν δυνατή, ακόμη και αν αλλάζει τις ταυτότητες και τον αριθμό των σωματιδίων. Επίσης, η ισχύς σύζευξης κάθε θεμελιώδους αλληλεπιδρασης μεταξύ στοιχειωδών σωματιδίων παύει να είναι σταθερή παράμετρος κει αποκτά μια αναπόφευκτη ενεργειακή εξάρτηση, χαρακτηριστική της συνολικής δυναμικής της θεωρίας.

10. Περίοδος 1920-1975: Ανάδυση της σύγχρονης αστροφυσικής, κυρίως της θεωρίας της αστρικής δομής και εξέλιξης, της κοσμολογίας του διαστελλόμενου σύμπαντος από υπέρθερμη αρχική κατάσταση, και της θεωρίας της κοσμικής πυρηνοσύνθεσης (Hubble, Eddington, Bethe, Gamow, Chandrasekhar, Hoyle, Hayashi, Zeldovich και άλλοι).

11. Περίοδος 1960-1995: Διατύπωση και πειραματική επιβεβαίωση μιας συνεπούς κβαντικής θεωρίας όλων των γνωστών θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων πλην της βαρυτικής, θεωρίας ευρύτερα γνωστής ως Καθιερωμένο Πρότυπο (Gell-Mann, Glashow, Weinberg, Salam, t'Hooft, Rubbia, Van der Meer). Τόσο το είδος των στοιχειωδών σωματιδίων (κουάρκ, λεπτόνια, μποζόνια βαθμίδας κ.λπ.) όσο και οι αλληλεπιδράσεις τους, αντανακλούν σε μεγάλο βαθμό τις (κατάλληλα ορισμένες) κινηματικές και δυναμικές συμμετρίες που διέπουν τη θεωρία. Γενικότερα (όπως θα εξηγηθεί αναλυτικότερα στο επόμενο άρθρο), μια από τις κατακτήσεις της φυσικής του 20ού αιώνα είναι η ανακάλυψη και κατανόηση των ποικίλων συμμετριών των φυσικών νόμων, καθώς και των «μεταμορφώσεων» των συμμετριών αυτών για δυναμικούς λόγους.

Στις τελευταίες παραγράφους μπορέσαμε ολοένα και λιγότερο να αποφύγουμε τη χρήση κάποιας εξειδικευμένης ορολογίας. Ελπίζουμε όμως ότι θα καταφέρουμε να τη διευκρινίσουμε σε μεγάλο βαθμό στο όχι μακρινό μέλλον.

Κλείνοντας τούτη τη συνοπτική παρουσίαση της «ιστορίας των οροσήμων» της φυσικής, αξίζει να τονίσουμε ότι —παρά την όποια χρησιμότητά της για μια συνολική εποπτεία της πορείας της φυσικής σε αδρές γραμμές— παρέχει αναπόφευκτα μια υπερβολικά σχηματική εικόνα αυτής της δημιουργικής πορείας. Και ακόμη να ξαναθυμίσουμε ότι αποτελεί απλώς μια προσωπική απάντηση του γράφοντα σε ένα όντως δύσκολο ερώτημα! ☐

**Ο Πέτρος Δήτσας** είναι επίκουρος καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα αφορούν τη θεωρία των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων και τη φαινομενολογία της φυσικής υψηλών ενέργειών. Η ηλεκτρονική του διεύθυνση είναι ditsas@physics.uoc.gr.

# Αλγεβρικοί και υπερβατικοί αριθμοί

Μας συναρπάζουν επί χιλιάδες χρόνια

N. Feldman

**Φ**

ΥΣΙΚΟΙ, ΑΚΕΡΑΙΟΙ, ΡΗΤΟΙ, ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΚΑΙ μιγαδικοί αριθμοί —αυτή η επεκτεινόμενη αλυσίδα,

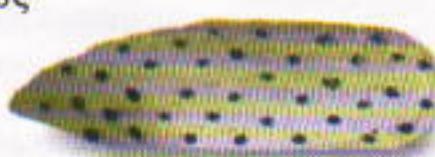
$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C},$$

είναι γνωστή στους μαθηματικούς εδώ και πολύ καιρό.

Πιθανόν να γνωρίζετε πόσο δύσκολο ήταν να γίνουν οι αρνητικοί ( $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ ) και οι μιγαδικοί ( $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ ) αριθμοί αποδεκτοί ως κρίκοι αυτής της αλυσίδας. Στο παρόν άρθρο θα πούμε κάποια πράγματα για έναν άλλο κρίκο της —τον  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

Έχετε σίγουρα ακούσει για τους άρρητους αριθμούς (δηλαδή, τους αριθμούς που δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε ως κλάσμα  $m/n$ , όπου  $m \in \mathbf{Z}$  και  $n \in \mathbf{N}$ ). Αυτοί οι αριθμοί είχαν ήδη ανακαλυφθεί στην αρχαιότητα. Το γεγονός ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι ασύμμετρη προς την πλευρά του (σε αλγεβρική γλώσσα, αυτό σημαίνει ότι το  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος αριθμός) ήταν μια από τις πιο συναρπαστικές (και ενοχλητικές) επιστημονικές ανακαλύψεις εκείνης της εποχής. Σήμερα, η απόδειξη αυτού του γεγονότος παρατίθεται σε στοιχειώδη διδακτικά εγχειρίδια. Αν σας συγκινεί ο μαθηματικός τρόπος σκέψης, είναι αδύνατο να σας αφήσει αδιάφορους η κομψότητα και η απατηλή απλότητα αυτής της απόδειξης.

Οι πραγματικοί αριθμοί, εκτός από ρητοί και άρρητοι, ταξινομούνται και ως αλγεβρικοί (όπως οι  $2/3$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $5 - \sqrt{7}$  ή ο  $\sqrt[3]{4}$ ) και υπερβατικοί (όπως οι  $\pi$ ,  $e$  ή  $\log 2$ ). Τούτη η ταξινόμηση δεν είναι πολύ γνωστή, όμως είναι πολύ σημαντική. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αυτές τις δύο κλάσεις αριθμών, τις ιδιότητές τους και την (εξελισσόμενη) ιστορία τους.



## Αλγεβρικοί αριθμοί

Κάθε ρητός αριθμός  $\tau = a/b$  ( $a \in \mathbf{Z}$ ,  $b \in \mathbf{Z}$ ) είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές —για παράδειγμα, του πολυωνύμου  $bx - a$ . Κάθε άρρητος αριθμός της μορφής  $\sqrt[n]{a}$  ( $a \in \mathbf{Z}$ ) είναι επίσης ρίζα ενός πολυωνύμου του ίδιου ειδους —για παράδειγμα, του πολυωνύμου  $x^n - a$ . Θα εξετάσουμε τώρα αριθμούς μόνο αυτού του ειδους —δηλαδή, ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

Εξ ορισμού, ένας πραγματικός αριθμός καλείται αλγεβρικός αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές το οποίο δεν είναι ίσο με το ταυτοικά μηδενικό πολυώνυμο.<sup>1</sup> Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών με  $\mathbf{A}$ . Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει,  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{R}$ . Για να αντιληφθείτε καλύτερα την έννοια των αλγεβρικών αριθμών αποδείξτε τις επόμενες προτάσεις.

1. Αν  $a \in \mathbf{A}$  ( $a \neq 0$ ), τότε  $1/a \in \mathbf{A}$ .

2. Αν το  $a$  είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές, τότε  $a \in \mathbf{A}$ .

3. Αν  $a \in \mathbf{A}$  και  $\tau \in \mathbf{Q}$ , τότε  $a\tau \in \mathbf{A}$  και  $a + \tau \in \mathbf{A}$ .

Αποδεικνύεται ότι αν  $a \in \mathbf{A}$  και  $\beta \in \mathbf{A}$ , τότε  $a + \beta \in \mathbf{A}$ ,  $a - \beta \in \mathbf{A}$ ,  $a \cdot \beta \in \mathbf{A}$  και  $a/\beta \in \mathbf{A}$  (στην τελευταία περίπτωση το  $\beta$  δεν μπορεί να είναι 0). Με άλλα λόγια, οι αριθμητικές πράξεις δεν μας οδηγούν έξω από το σύνολο

1. Το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές συμβολίζεται με  $\mathbf{Z}[x]$ . Σε αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε μόνο πολυώνυμα που είναι διαφορετικά από το μηδενικό πολυώνυμο, χωρίς να επισημαίνουμε το γεγονός κάθε φορά. Για τους αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με τους μιγαδικούς αριθμούς επισημαίνουμε ότι μπορούμε επίσης να εισάγουμε και να μελετήσουμε μιγαδικούς αλγεβρικούς αριθμούς.

λο των αλγεβρικών αριθμών. (Η απόδειξη αυτού του γεγονότος είναι πιο περίπλοκη από την απόδειξη των πρώτων τριών προβλημάτων και έτσι δεν θα την παρουσιάσω εδώ.) Συνεπώς, το σύνολο **A** με τις πράξεις + και ×, όπως και το σύνολο **Q** με τις ίδιες πράξεις, αποτελεί ένα **σώμα** —δηλαδή, ένα σύνολο αριθμών στο οποίο είναι εφοδιασμένο με όλες τις αριθμητικές πράξεις (εκτός, φυσικά, από τη διαίρεση με το 0) και στο οποίο όλες οι πράξεις έχουν τις συνηθισμένες ιδιότητες που έχουν στην αριθμητική.

Προκύπτει ένα φυσικό ερώτημα: Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί; Για να απαντήσουμε, χρειαζόμαστε μια έννοια που θα εξηγήσουμε στο επόμενο μέρος του άρθρου.

## Ο βαθμός ενός αλγεβρικού αριθμού

Αν το  $a$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ , τότε είναι ρίζα και του πολυωνύμου  $P(x)Q(x)$ , όπου  $Q(x)$  τυχαίο πολυώνυμο. Επομένως, κάθε αλγεβρικός αριθμός  $a$  είναι ρίζα ενός άπειρου συνόλου πολυωνύμων που ανήκουν στο  $\mathbf{Z}[x]$ . Είναι προφανές ότι μπορούμε να βρούμε μεταξύ τους τα πολυώνυμα με τον ελάχιστο βαθμό. Αν ο ελάχιστος βαθμός είναι  $n$ , θα λέμε ότι το  $a$  είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n$  και θα γράψουμε  $\deg a = n$ . Διαπιστώνουμε ότι  $\deg a = 1$  αν και μόνο αν  $a \in \mathbf{Q}$ . Είναι επίσης προφανές ότι ο βαθμός ενός άρρητου αριθμού της μορφής  $\sqrt[n]{a}$  ( $a \in \mathbf{Z}$ ) είναι 2 —δηλαδή,  $\deg \sqrt[n]{a} = 2$ .

Για να συνεχίσουμε θα χρειαστούμε το επόμενο απλό, αλλά σημαντικό, θεώρημα.

**Θεώρημα του υπολοίπου (1779).** Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  διά του  $x - y$  ισούται με  $P(y)$ .

**Απόδειξη.** Ας διαιρέσουμε το  $P(x)$  διά του  $x - y$ . Το υπόλοιπο είναι μια σταθερά, την οποία θα συμβολίσουμε με  $c$ :

$$P(x) = (x - y)P_0(x) + c,$$

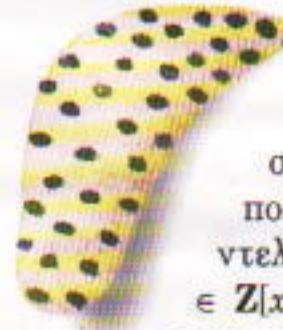
όπου  $P_0(x)$  είναι ένα πολυώνυμο. Αν θέσουμε  $x = y$  στον προηγούμενο τύπο, βρίσκουμε  $P(y) = c$ .

Βάσει αυτού του θεωρήματος μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα.** Αν ο αλγεβρικός αριθμός  $a$  βαθμού  $n \geq 2$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ , βαθμού  $n$ , τότε το  $P(x)$  δεν έχει ρητές ρίζες.

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα,  $P(p/q) = 0$ , όπου  $p \in \mathbf{Z}$ , και  $q \in \mathbf{N}$ . Βάσει του θεωρήματος του υπολοίπου, το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  διά του  $x - p/q$  είναι 0. Επομένως, το  $P(x)$  διαιρείται διά του  $x - p/q$ :

$$P(x) = \left( x - \frac{p}{q} \right) P_0(x),$$



όπου προφανώς το  $P_0(x)$  έχει ρητούς συντελεστές (αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν σχηματίσετε το ανάπτυγμα στο δεξιό μέλος). Αν  $M$  είναι ένα κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των συντελεστών του  $P_0(x)$ , τότε το  $P_1(x) = MP_0(x) \in \mathbf{Z}[x]$ . Αφού  $P(a) = 0$  και  $a \neq p/q$  (ο βαθμός του  $a$  είναι μεγαλύτερος του 1) έχουμε ότι  $P_0(a) = 0$ . Άρα,  $P_1(a) = 0$ . Όμως, ο βαθμός του πολυωνύμου  $P_1(x)$  είναι  $n - 1 < n = \deg a$ . Άρα, καταλήξαμε σε αντίφαση.

Το αποφασιστικό βήμα στην αναζήτηση αριθμών που δεν είναι αλγεβρικοί, ήταν το επόμενο θεώρημα.

## Θεώρημα του Liouville

Σε πρώτη ματιά, η διατύπωση αυτού του θεωρήματος δεν έχει σχέση με την ύπαρξη «μη αλγεβρικών» αριθμών.

**Θεώρημα του Liouville (1844).** Αν  $a$  είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n \geq 2$ , τότε υπάρχει ένας αριθμός  $c > 0$  τέτοιος ώστε, για κάθε  $p \in \mathbf{Z}$  και  $q \in \mathbf{N}$ ,

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

Ουσιαστικά, αυτό το θεώρημα μας λέει ότι ένας άρρητος αλγεβρικός αριθμός  $a$  δεν μπορεί να προσεγγιστεί «πολύ καλά» από ρητά κλάσματα. Επομένως, αν βρούμε έναν άρρητο αριθμό που μπορεί να προσεγγιστεί «πολύ καλά» από ρητούς αριθμούς, δεν είναι αλγεβρικός.

**Απόδειξη.** Εστω  $a$  ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n \geq 2$ . Τότε, υπάρχει ένα πολυώνυμο

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

με ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε  $P(a) = 0$ . Συμβολίζουμε με  $H$  τη μέγιστη των απολύτων τιμών  $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$ . Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός

$$c = \frac{1}{n^2 H (1 + |a|)^{n-1}}$$

διαθέτει την επιθυμητή ιδιότητα. Παρατηρούμε ότι  $c < 1$ . Ας θεωρήσουμε τυχαίους αριθμούς  $p \in \mathbf{Z}$  και  $q \in \mathbf{N}$ . Τότε,

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n} = \frac{s}{q^n},$$

όπου συμβολίσαμε τον αριθμητή του κλάσματος, που είναι ακέραιος αριθμός, με  $s$ .

Από το λήμμα έχουμε

$$P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0.$$

Επομένως,  $s \neq 0$ . Αφού  $s \in \mathbf{Z}$ , έχουμε ότι  $|s| \geq 1$ . Άρα

$$P\left(\frac{p}{q}\right) \geq \frac{1}{q^n}.$$

Αφού  $P(a) = 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^n} &\leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| P(a) - P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \\ &= \left| a_n \left( a^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n \right) + a_{n-1} \left( a^{n-1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \right) + \dots + a_1 \left( a - \frac{p}{q} \right) \right|. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

Αν, πρώτον,  $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq 1$ , τότε

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^n} > \frac{c}{q^n}$$

και η πρόταση του θεωρήματος ισχύει. Από την άλλη μεριά, αν

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < 1, \text{ τότε}$$

$$\left| \frac{p}{q} \right| < |a| + 1.$$

Προφανώς,  $|a| < |a| + 1$ . Άρα, για κάθε  $1 \leq k \leq n$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), βρίσκουμε

$$\left| a^k - \left(\frac{p}{q}\right)^k \right| = \left| a - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| a^{k-1} + a^{k-2} \cdot \frac{p}{q} + \dots + \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} \right|$$

$$\leq \left| a - \frac{p}{q} \right| k(|a| + 1)^{k-1} \leq \left| a - \frac{p}{q} \right| n(|a| + 1)^{n-1},$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$\frac{1}{q^n} \leq \left| a - \frac{p}{q} \right| n^2 (|a| + 1)^{n-1} H = \left| a - \frac{p}{q} \right| \cdot \frac{1}{c},$$

και άρα  $\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}$ .

Το θεώρημα αποδείχτηκε.

Μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα του Liouville έτοις ώστε να εξαλειφθεί η συνθήκη  $\deg a \geq 2$ .

**Θεώρημα.** Αν  $a$  είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού  $n$ , τότε υπάρχει ένας αριθμός  $c_0 > 0$  τέτοιος ώστε, για κάθε  $p \in \mathbb{Z}$  και κάθε  $q \in \mathbb{N}$  για τα οποία έχουμε  $a \neq p/q$ , να ισχύει

$$a - \frac{p}{q} \geq \frac{c}{q^n}. \quad (1)$$

**Απόδειξη.** Προηγουμένως εξετάσαμε την περίπτωση

$\deg a \geq 2$ . Έστω  $\deg a = 1$  — δηλαδή,  $a = s/t$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ). Τότε, ο αριθμός  $c' = 1/t$  έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Πράγματι, αν  $p/q \neq s/t$ , τότε  $|pt - qs| \neq 0$  και, επομένως,  $|pt - qs| \geq 1$ . Άρα,

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{s}{t} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|pt - qs|}{tq} \geq \frac{1}{tq} = \frac{c'}{q}.$$

Αν θέσουμε ως  $c_0$  τον μικρότερο εκ των αριθμών  $c$  και  $c'$ , καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα.

Το θεώρημα του Liouville μπορεί επίσης να αποδειχτεί αν εξετάσουμε τη διαφορά  $P(a) - P(p/q)$  και χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής (του Lagrange). Προσπαθήστε να βρείτε αυτή την απόδειξη!

## Προσέγγιση αλγεβρικών αριθμών με ρητούς αριθμούς

Θα λέμε ότι ο αριθμός  $a$  επιτρέπει προσέγγισεις τάξης  $m$  αν, για μια συγκεκριμένη σταθερά  $\gamma$ , υπάρχει άπειρο πλήθος ρητών κλασμάτων  $p/q$  που ικανοποιούν την ανισότητα

$$0 < \left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{\gamma}{q^m}. \quad (2)$$

Το θεώρημα του Liouville μάς δείχνει ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί βαθμού  $n$  δεν επιτρέπουν προσέγγισεις τάξης μεγαλύτερης του  $n$ . Πράγματι, αν το  $a$  επιτρέπει προσέγγισεις τάξης  $m$ , τότε από τις (1) και (2) έπειτα ότι, για κάθε άπειρη ακολουθία φυσικών αριθμών  $q$ , ισχύει η ανισότητα

$$\frac{c}{q^n} < \frac{\gamma}{q^m}.$$

Η τελευταία ανισότητα μετασχηματίζεται στην

$$\frac{1}{q^{m-n}} > \frac{c}{\gamma}, \text{ η οποία όμως δεν μπορεί να ισχύει για } m > n \text{ και για κατάλληλα μεγάλο } q.$$

## Παράδειγμα υπερβατικού αριθμού<sup>2</sup>

Διαθέτουμε πλέον ένα εργαλείο κατασκευής πραγματικών αριθμών που δεν είναι αλγεβρικοί (τέτοιοι αριθμοί καλούνται υπερβατικοί). Για να το πετύχουμε, αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αριθμό που επιτρέπει προσέγγισεις οσοδήποτε μεγάλης τάξης. Θα ορίσουμε έναν τέτοιο αριθμό ως μια άπειρη δεκαδική ακολουθία  $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ , όπου

2. Αν γνωρίζετε την έννοια της αριθμητικότητας, μπορείτε εύκολα να αποδείξετε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμητικό. Αν γνωρίζετε επίσης ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμητικό, συμπεραίνετε αμέσως ότι υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί. Αυτή η απόδειξη όμως δεν μας προσφέρει ούτε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα υπερβατικού αριθμού.

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = m! \quad (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{αν } i \neq m!. \end{cases} \quad (3)$$

Συγκεκριμένα, θα έχουμε  $a_1 = a_2 = a_6 = a_{24} = a_{120} = a_{720} = \dots = 1$  και  $a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = \dots = a_{23} = a_{25} = \dots = a_{119} = a_{121} = \dots = 0$ . Τότε, για κάθε  $m > 1$ ,

$$a = 0.a_1a_2a_3\dots a_{(m-1)!} + 0,0\dots 0a_m a_{m!+1}\dots = \frac{p_m}{q_m} + \beta_m,$$

όπου

$$p_m = a_1a_2a_3\dots a_{(m-1)!}, \quad q_m = 10^{(m-1)!}, \quad \beta_m = 0,0\dots 0a_m a_{m!+1}\dots$$

Έχουμε

$$0 < \beta_m = 10^{-m!} \cdot a_{m!}a_{m!+1}\dots = 10^{-m!} \cdot 1, \dots < 2 \cdot 10^{-m!} = \frac{2}{(q_m)^m}.$$

Συνεπώς,

$$0 < \left| a - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{2}{(q_m)^m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

και επομένως ο  $a$  δέχεται προσεγγίσεις οποιαδήποτε τάξης. Άρα δεν μπορεί να είναι αλγεβρικός.

**Ασκήσεις**

4. Αποδείξτε ότι αν στη θέση της (3) έχουμε

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = m^m \quad (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{αν } i \neq m^m, \end{cases}$$

τότε ο  $a$  είναι υπερβατικός.

5. Βρείτε άλλους υπερβατικούς αριθμούς με τη βοήθεια του θεωρήματος του Liouville.

## Το Θεώρημα του Dirichlet

Το 1955 ο αγγλος μαθηματικός Klaus Roth απέδειξε ότι ουδείς άρρητος αλγεβρικός αριθμός προσεγγίζεται με τάξη μεγαλύτερη του 2. (Για αυτή την ανακάλυψη ο Roth πήρε το βραβείο Φιλντς.)

Από την άλλη πλευρά, κάθε άρρητος αριθμός προσεγγίζεται με τάξη 2. Αυτό το γεγονός αποδείχτηκε από τον γερμανό μαθηματικό Peter Dirichlet, ο οποίος χρησιμοποίησε μια αρχή που πλέον φέρει το όνομά του. Η εν λόγω αρχή (που λέγεται και «αρχή του περιστερώνα») είναι απλή, αλλά γόνιμη: αν  $n$  στοιχεία κατανέμονται σε  $n-1$  κουτιά, τότε ένα τουλάχιστον κουτί περιέχει 2 ή περισσότερα στοιχεία.

**Άσκηση 6.** Κατασκευάστε διάφορους υπερβατικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Roth.

**Θεώρημα του Dirichlet (1824).** Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$  και κάθε φυσικό αριθμό  $m$ , υπάρχουν  $p \in \mathbf{Z}$  και  $q \in \mathbf{N}$  τέτοια ώστε  $q \leq m$  και

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q \cdot m}. \quad (4)$$

**Απόδειξη.** Το διάστημα  $[0, 1]$  είναι ένωση των  $m$  διαστημάτων

$$\left[ 0, \frac{1}{m} \right], \left[ \frac{1}{m}, \frac{2}{m} \right], \dots, \left[ \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m} \right], \left[ \frac{m-1}{m}, 1 \right]. \quad (5)$$

Θεωρούμε τους αριθμούς  $\{ka\}$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ), όπου με  $\{x\}$  συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του αριθμού  $x$ . (Υπενθυμίζουμε ότι, εξ ορισμού,  $\{x\} = x - [x]$ , όπου  $[x]$  είναι το ακέραιο μέρος του  $x$  —δηλαδή, ο μέγιστος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το  $x$ .) Καθένας απ' αυτούς τους αριθμούς ανήκει σε ένα από τα διαστήματα (5). Έχουμε  $m+1$  αριθμούς και  $m$  διαστήματα και, επομένως, βάσει της αρχής του Dirichlet, ένα τουλάχιστον από τα διαστήματα (5) περιέχει δύο ή περισσότερους απ' αυτούς τους αριθμούς. Εστω ότι είναι οι  $\{k_1a\}$  και  $\{k_2a\}$  ( $k_1 > k_2$ ). Τότε,

$$\frac{1}{m} > |\{k_1a\} - \{k_2a\}| = |k_1a - [k_1a] - k_2a + [k_2a]| = |(k_1 - k_2)a - ([k_1a] - [k_2a])|.$$

Αν θέσουμε τώρα  $q = k_1 - k_2$  και  $p = [k_1a] - [k_2a]$ , λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι  $0 \leq k_1 - k_2 \leq m$  και διαιρέσουμε την προηγούμενη ανισότητα με το  $q$ , θα καταλήξουμε στην επιθυμητή ανισότητα.

**Πόρισμα.** Κάθε άρρητος αριθμός  $a$  προσεγγίζεται με τάξη 2.

**Απόδειξη.** Για κάθε  $m \in \mathbf{N}$ , υπάρχουν  $p \in \mathbf{Z}$  και  $q \in \mathbf{N}$  τέτοια, ώστε  $q \leq m$  και να ισχύει η ανισότητα (4). Αφού  $q \leq m$  και ο  $a$  είναι άρρητος, από την (4) έχουμε

$$0 < \left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (6)$$

Από την (4) έπειτα ότι η ποσότητα  $|a - p/q|$  μπορεί να πάρει οσοδήποτε μικρή τιμή καθώς αυξάνει το  $m$ . Αφού δεν μπορεί να είναι ίση με μηδέν, όσο αυξάνει το  $m$  το κλάσμα  $p/q$  πλησιάζει όλο και περισσότερο τον  $a$ . Συνεπώς, η (6) ισχύει για άπειρο πλήθος ρητών αριθμών  $p/q$ .

## Διάσημοι υπερβατικοί αριθμοί

Αν και τα θεωρήματα του Liouville και του Roth μάς επιτρέπουν να κατασκευάσουμε άπειρους υπερβατικούς αριθμούς, δεν έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι στιγμής για την άμεση απόδειξη της υπερβατικότητας γνωστών υπερβατικών αριθμών όπως οι  $\pi$ ,  $e$ ,  $\ln 2$ ,  $\log 2$  κ.λπ. Αυτοί οι αριθμοί προσελκύουν το ενδιαφέρον μας για αιώνες.

Ο αριθμός  $\pi$  είναι εξαιρετικά διάσημος. Οι μαθηματικοί της αρχαίας Ελλάδας έθεσαν το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου: δοθέντος ενός κύκλου, κατασκεύαστε με κανόνα και διαβήτη ένα τετράγωνο ίσου εμβαδού. Αυτό το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ενός δια-



στήματος μήκους π, όταν δίνεται ένα διάστημα μοναδιαίου μήκους. Επί 2.000 χρόνια όλες οι προσπάθειες επλυσης αυτού του περιβόητου προβλήματος αποδείχτηκαν μάταιες. Τελικά, φάνηκε ότι η λύση του προβλήματος ήταν αδύνατη και, για να αποδειχτεί το γεγονός, αρκεί να αποδειχτεί ότι το  $\pi$  είναι υπερβατικός αριθμός (στην πραγματικότητα, αρκεί να αποδείξουμε ότι το  $\pi$  δεν είναι αλγεβρικός αριθμός κάποιου συγκεκριμένου τύπου).

Το 1766 ο J. Lambert απέδειξε ότι οι αριθμοί  $e$  και  $\pi$  είναι άρρητοι. Το 1873 ο C. Hermite απέδειξε ότι ο  $e$  είναι υπερβατικός. Η μέθοδος που ανέπτυξε για να το επιτύχει εξακολουθεί να παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία αριθμών. Το 1882 ο F. Lindemann βελτίωσε τη μέθοδο του Hermite και απέδειξε ότι ο  $\pi$  είναι υπερβατικός. Απέδειξε επίσης ότι ο αριθμός  $e^{\alpha}$  είναι υπερβατικός για κάθε  $\alpha \in \mathbb{A}$ . Από αυτό έπειτα ότι οι φυσικοί λογάριθμοι όλων των αλγεβρικών αριθμών των διάφορων του 1 είναι υπερβατικοί (προσπαθήστε να αποδείξετε αυτή την πρόταση).

Το 1748 ο Euler ισχυρίστηκε ότι  $a, b \in \mathbb{Q}$  και ο  $\log_a b$  είναι άρρητος, τότε θα είναι και υπερβατικός. Βεβαίως, είναι προφανές ότι ο  $\log_a b$  μπορεί να είναι ρητός — για παράδειγμα,  $\log_2 8 = 3/2$ . Κατά τον 18ο και τον 19ο αιώνα αυτή η εικασία έμεινε αναπόδεικτη.

Το 1900, στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών των Παρισίων, ο David Hilbert διατύπωσε είκοσι τρία προβλήματα τα οποία θεωρούσε ότι θα εδίναν ώθηση στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Το έβδομο πρόβλημα ήταν το εξής: Άν  $a$  και  $\beta$  είναι αλγεβρικοί αριθμοί, ο  $a$  δεν είναι 0 ή 1 και ο  $\beta$  είναι άρρητος, τότε ο  $a^{\beta}$  είναι υπερβατικός. Ιδιαίτερα, ο Hilbert ζητούσε να αποδειχτεί ότι

ο  $2^{\sqrt{2}}$  και ο  $e^{\pi}$  είναι υπερβατικοί (ο δεύτερος αριθμός ανάγεται στη μορφή  $a^{\beta}$ , όπου  $a, \beta \in \mathbb{A}$  όμως αυτό απαιτεί γνώσεις των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής).

**Άσκηση 7.** Αποδείξτε ότι από την πρόταση του Hilbert έπειται η εικασία του Euler.

Η πρώτη μερική λύση του έβδομου προβλήματος του Hilbert δόθηκε το 1929 από έναν μεταπτυχιακό φοιτητή του Πανεπιστημίου της Μόσχας, τον A. Gelfond, ο οποίος, μεταξύ άλλων, απέδειξε ότι ο  $e^{\pi}$  είναι υπερβατικός.

Έναν χρόνο αργότερα, ο σοβιετικός μαθηματικός R.O. Kuzmin απέδειξε ότι με τη μέθοδο του Gelfond, έπειτα από ορισμένες βελτιώσεις της, μπορούσε

να αποδειχτεί ότι οι αριθμοί  $a^{\beta}$  είναι υπερβατικοί —όπου το  $a$  αλγεβρικός αριθμός διάφορος του 0 ή του 1 και  $\beta = \sqrt{d}$  (το  $d$  είναι φυσικός αριθμός αλλά όχι τέλειο τετράγωνο). Ειδικά, απέδειξε ότι ο αριθμός  $2^{\sqrt{2}}$  είναι υπερβατικός.

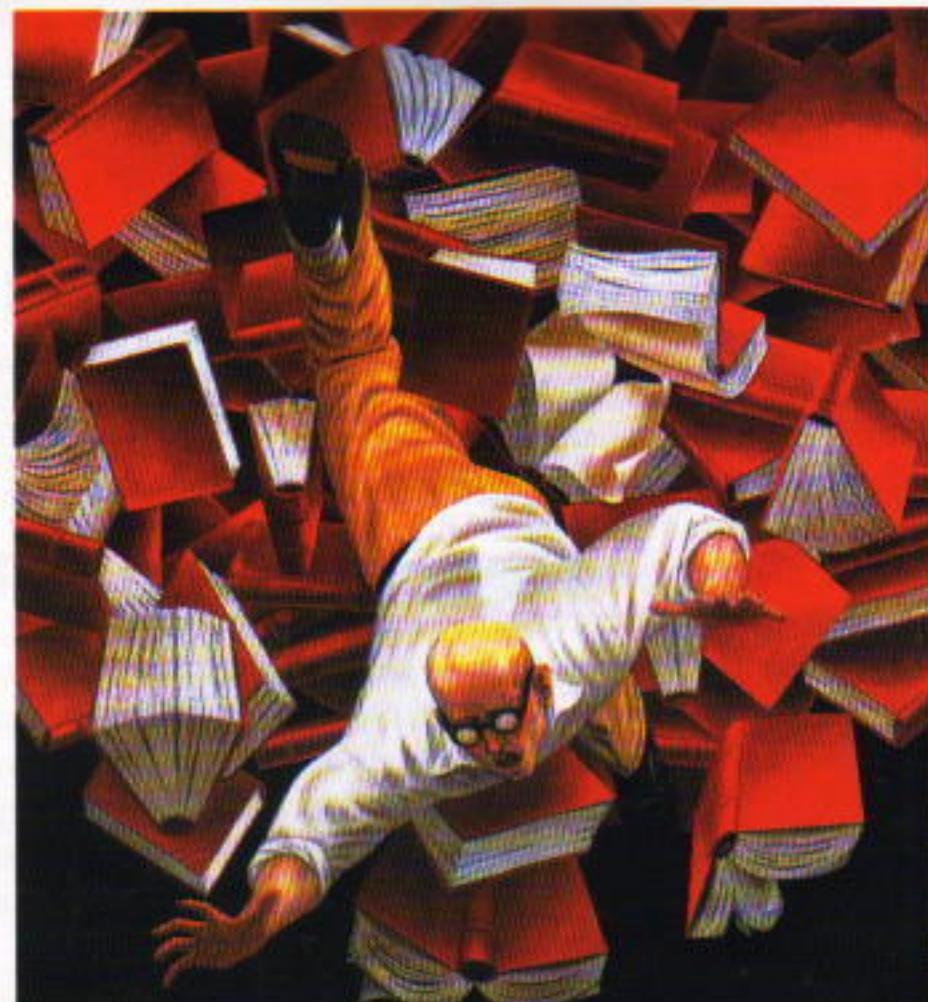
Η πλήρης λύση του έβδομου προβλήματος του Hilbert δόθηκε από τον A.O. Gelfond το 1934 μέσω μιας νέας μεθόδου η οποία ονομάστηκε δεύτερη μέθοδος του Gelfond.<sup>3</sup>

**Θεώρημα Gelfond.** Έστω  $a, \beta \in \mathbb{A}$ . Αν ο  $a$  δεν είναι 0 ή 1 και ο  $\beta$  είναι άρρητος, τότε ο  $a^{\beta}$  είναι υπερβατικός.

**Άσκηση 8.** Αποδείξτε ότι αν οι αριθμοί  $a, \beta$  και  $p$  είναι τέτοιοι ώστε να ορίζεται η παράσταση  $\log_p a / \log_p \beta$  και οι  $a, \beta \in \mathbb{A}$ , τότε ο αριθμός  $\log_p a / \log_p \beta$  είναι είτε υπερβατικός είτε ρητός.

Η δεύτερη μέθοδος του Gelfond επέτρεψε την απόδειξη πλήθους θεωρημάτων. Μια βελτίωσή της από τον A. Baker, το 1966, οδήγησε σε σημαντικές προόδους στη θεωρία αριθμών. Η εργασία σε αυτή την περιοχή απέχει ακόμη πολύ από το να θεωρείται ολοκληρωμένη. □

3. Την ίδια χρονιά, αλλά ανεξάρτητα και με διαφορετική μέθοδο, δόθηκε η πλήρης λύση του έβδομου προβλήματος του Hilbert και από τον Th. Schneider. (Σ.τ.ε.)



**κάτοπτρο** ΒΙΒΛΙΟΠΟΛΕΙΟ

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Πανεπιστημίου & Πειραιώς 5, 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785  
Web site: www.katoptro.gr e-mail: katoptro@otenet.gr

# Ανθολόγιο λέξεων και φράσεων

«Ἐν παροιμίαις λαλεῖς καὶ οὐκ οἰδαμεν τι λέγεις.»

—ρήση που αποδίδεται στους πρωτοχριστιανούς

Μιχάλης Λάμπρου

**Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω.** Θρυλούμενη περίφημη επιγραφή στην είσοδο της Ακαδημίας του Πλάτωνος. Η παλαιότερη αναφορά είναι στο *Περί ειδών φιλοσοφίας* του ψευδο-Γαληνού. Πρόκειται για κείμενο που φέρει το όνομα του σπουδαίου ιατρού και φιλοσόφου Γαληνού (~130 μ.Χ. –~200 μ.Χ.), πατέρα της συγκριτικής ανατομίας, της γενικής παθολογίας και της πειραματικής φυσιολογίας, αλλά η σύγχρονη έρευνα το αποδίδει σε μεταγενέστερο άτομο του 2ου αι. μ.Χ. ή αργότερα. Στο εν λόγω έργο ο συγγραφέας του αναφέρει ότι η φιλοσοφία διαιρείται σε θεωρητική και πρακτική, αλλά η θεωρητική υποδιαιρείται από τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη με διαφορετικό τρόπο. Στη συζήτησή του αυτή, ο ψευδο-Γαληνός βρίσκει την ευκαιρία να μιλήσει για την περίφημη επιγραφή, αλλά και να ερμηνεύσει την αιτία ύπαρξής της. Το σχετικό χωρίο είναι το εξής: «Εἰς θεωρητικὸν καὶ πρακτικὸν τῆς φιλοσοφίας διαιρουμένης ἄλλως ὁ Πλάτων καὶ ἄλλως ὁ Ἀριστοτέλης ὑποδιαιρεῖ τὸ θεωρητικὸν. Ό μὲν οὖν Πλάτων εἰς φυσιολογικὸν καὶ θεολογικὸν αὐτὸ διαιρεῖ· τὸ γὰρ μαθηματικὸν οὐκ ἡδούλετο εἶναι μέρος τῆς φιλοσοφίας, ἀλλὰ προγύμνασμά τι ὥσπερ ἡ γραμματικὴ καὶ ἡ φητορικὴ ὅθεν καὶ πρὸ τοῦ ἀκροατηρίου τοῦ οἰκείου ἐπέγραψεν "ἀγεωμέτρητος μηδείς εισίτω". τοῦτο δὲ ὁ Πλάτων ἐπέγραψεν, ἐπειδὴ εἰς τὰ πολλὰ θεολογεῖ καὶ περὶ θεολογίαν καταγίνεται· συμβάλλεται δὲ εἰς εἰδησιν τῆς θεολογίας τὸ μαθηματικόν, οὗτονός ἔστιν ἡ γεωμετρία. Ἀριστοτέλης δὲ ὑποδιαιρεῖ τὸ θεωρητικὸν εἰς φυσιολογικὸν, μαθηματικὸν καὶ θεολογικὸν καὶ γὰρ τὸ μαθηματικὸν μέρος τῆς φιλοσοφίας ἐδόξαζεν εἶναι· καὶ γὰρ τοῦτο ἐπιστήμη ἔστιν.»

Μια έμμεση αναφορά στην επιγραφή κάνει και ο θαυμαστής της αρχαίας ελληνικής παιδείας, αυτοκράτορας Ιουλιανός (331-363 μ.Χ.), ο επονο-



Τμήμα της σπάντζας του Ραφαήλ, «ἡ Σχολὴ των Αθηνῶν». Εδώ εικονίζονται ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης. (Στον Πλάτωνα ο Ραφαήλ έχει προσδώσει τη μορφή του Ντα Βίντοι)

μαζόμενος Αποστάτης ή Παραβάτης, στο λόγο του «Κατά κυνικού Ηρακλείου» που εκφωνήθηκε το 361 μ.Χ., χωρίς όμως να αναφέρει το περιεχόμενο της επιγραφής. Συγκεκριμένα γράφει «εἰ δὲ ἀνεγνώσκεις τὸν συστατικὸν αὐτοῦ λόγον ὃς, ὥσπερ τῆς Πλάτωνος, οὗτος δὴ καὶ τῆς ἐκείνου διατριβῆς προυγέγραπτο, ἔγνως ἄν πρὸ πάντων ὅτι τὰ πρὸς τοὺς θεοὺς εὔσεβεῖς εἶναι καὶ μεμνῆσθαι πάντα τὰ μυστήρια καὶ τετελέσθαι τὰς ἀγιωτάτας τελετὰς καὶ διὰ πάντων τῶν μαθημάτων ἡχθαι τοῖς εἴσω τοῦ Περιπάτου βαδίζουσι προηγορεύετο (εάν είχες διαβάσει τη φράση που είναι γραμμένη στην είσοδο της Σχολῆς του, όπως και στη σχολή του Πλάτωνα, θα ήξερες ότι δοι ήθελαν να γίνουν μέλη των περιπατητικών ἐπρεπε να είναι ευσεβείς προς τους θεούς και να μυηθούν σε όλα τα μυστήρια, να πάρνουν μέρος στις ιερότερες τελετές και να έχουν εντρυφήσει σε όλες τις επιστήμες).»

Παρεμπιπτόντως, εδώ γίνεται μνεία για επιγραφή και στην είσοδο της Περιπατητικής Σχολῆς (του Αριστοτέλη), όμως η πληροφορία αυτή δεν διασταυρώνεται από καμία άλλη αρχαία πηγή.

Σχεδόν σύγχρονος του Ιουλιανού είναι ο ρήτορας Σώπατρος (4ος αι. μ.Χ.), στον οποίο αποδίδονται σχόλια στο έργο *Προς Πλάτωνα υπέρ των τεττάρων του Αίλιου Αριστείδη* (2ος αι. μ.Χ.). Τα σχόλια αυτά αναγράφονται σε διάφορα χειρόγραφα που σήμερα βρίσκονται σε βιβλιοθήκες της Δύστης, όπως στη Μαρκιανή της Βενετίας (το χειρόγραφο Marc. graec. 423), στη Λαυρεντιανή της Φλωρεντίας (το Laur. LX9), στου Βατικανού (τα Vat. gr. 1298 και Vat. gr. 76) και στην Αμβροσιανή του Μιλάνου (το Ambr. A 175 sup.). Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι ένα σχόλιο που όχι μόνο περιέχει την επιγραφή, αλλά δικαιολογεί και την ύπαρξή της. Συγκεκριμένα δίπλα στο στίχο «εἰ δὲ ἡ γεωμετρία καλὸν καὶ ἡ καταύτην ίσότης» του Αίλιου Αριστείδη, ο Σώπατρος συμπληρώνει «ἐπεγέγραπτο δὲ ἐμπροσθεν τῆς διατριβῆς τοῦ Πλάτωνος ὅτι ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ, ἀντὶ ἀνισος καὶ ἀδικος ἡ γάρ γεωμετρία τὴν ίσότητα καὶ τὴν δικαιοσύνην ζητεῖ».

Ας προσθέσουμε ότι και στο Βυζάντιο ήταν σύνηθες να αναγράφεται στις εισόδους των ιερών χώρων η προτροπή να μην εισέρχονται άδικοι κ.λπ. Σταχυολογούμε μερικές από τις σωζόμενες: «Δικαιοσύνη ἐνθάδε κατοικεῖ, μηδὲν εἰσίτω κακόν», «πενία ἐνθάδε κατοικεῖ, μηδὲν εἰσίτω κακόν» ή, όπως βλέπουμε στην είσοδο της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη, «ὁ ἄ(γιος) Θεός ἐνθάδε κατοικεῖ, μηδεὶς βέβηλος εἰσίτω». Την ίδια σημασία έχει και το παραπάνω σχόλιο του Σώπατρου, ο οποίος φαίνεται να υπονοεί ότι κατά την αρχαιότητα το «αγεωμέτρητος» αντικαθιστά το «ἀνισος καὶ ἀδικος». Άλλωστε, στους διαλόγους του Πλάτωνα υπάρχουν εκφράσεις που σχετίζουν τη γεωμετρία με την ισότητα, όπως το χωρίο 508a στον Γοργία όπου γράφει για «γεωμετρικὴ ίσότητα»· γι' αυτό, λέει ο Σωκράτης, οι σοφοί καλούν το σύμπαν «κόσμον», δηλαδή «τάξη πραγμάτων».

Στο ίδιο πνεύμα κινείται και η γνωστότερη πληροφορία για την επιγραφή του Πλάτωνα, από τον βυζαντινό

πολυϊστορα Ιωάννη Τζέτζη (1110-1180) ο οποίος σε έμμετρη μορφή στις Χιλιάδες (VIII, 974-977) του γράφει

Πρὸ τῶν προθύρων τῶν αὐτοῦ γράψας  
ὑπῆρχε Πλάτων

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην·  
Τουτέστιν, ἀδικος μηδεὶς παρεισερχέσθω τῇδε·  
Ίσότης γάρ καὶ δίκαιον ἔστι γεωμετρία.

Υπάρχουν και άλλες αναφορές στην επιγραφή του Πλάτωνα, οι οποίες όμως δίνουν διαφορετική ερμηνεία από τις παραπάνω για την αιτία της αναγραφής της. Σε πολλές απ' αυτές εντοπίζουμε την άποψη, συμβατή με την *Πολιτεία* του Πλάτωνα, ότι ο ίδιος θεωρούσε τη γεωμετρία ως προπαρασκευαστικό μάθημα για τη φιλοσοφία. Είναι παραστατικότερο να αναφέρουμε ένα σχετικό ανέκδοτο που αφορά τον δεύτερο, μετά το θάνατο του Πλάτωνα, Σχολάρχη της Ακαδημίας και διάδοχό του, τον Ξενοκράτη (~396-315 π.χ.).

Κατά τον Διογένη τον Λαέρτιο (*Φιλοσόφων βίοι κεφ. IV*), όταν ένας νέος ζήτησε να εγγραφεί στην Ακαδημία, ο Ξενοκράτης τον ρώτησε αν ήξερε γεωμετρία. Στην αρνητική απάντηση του νέου ο Σχολάρχης απάντησε «Πορεύου, λαβάς ούκ ἔχεις φιλοσοφίας», δηλαδή «πήγαινε, δεν έχεις τις προαπαιτούμενες γνώσεις στη φιλοσοφία».

Πριν παραθέσουμε τα σχετικά χωρία αξίζει να αναφέρουμε ότι ο σημαντικός διδάσκαλος του Γένους Βενιαμίν ο Λέσβιος (1759-1824) φαίνεται να κάνει έμμεση αναφορά στο παραπάνω ανέκδοτο στον πρόλογό του στα *Στοιχεία αριθμητικῆς* (Βιέννη, 1818). Εκεί συνοψίζει την κατάντια του υπόδουλου έθνους κατά την εποχή της Τουρκοκρατίας και τις πρώτες προσπάθειες κάποιων πεφωτισμένων διδασκάλων να ενισχύσουν τη χειμαζόμενη εκπαίδευση των νέων, λειαίοντας έτσι το έδαφος για την επικείμενη επανάσταση. Γράφει σχετικά «Ἡ Ἑλλὰς [...] καὶ ημιθανῆς ούσα ἐκ τῶν ἀμέτρων καιρίων πληγῶν, ἀσπερ κατὰ διαφόρους καιροὺς ἐκ τῶν διαφόρων ἐπιδρομῶν τῶν ἐπὶ τοῦ ιεροῦ αὐτῆς ἐδάφους ὑπὸ τῶν βαρδάρων ἐπιγενομένων ἔλαβε, ἡσθάνθη τέλος πάντων μετὰ παρέλευσιν πολλῶν αἰώνων ἐπαφῆς χειρός τινος οὐρανίου ἐπιφερομένης ἐπ' αὐτῆς [...]. Ποῖος καὶ οιδήρεον καρδίαν ἔχων βλέπων τὰ ἐμὰ τέκνα ἐξ Ὁμηρων, ἐκ Πυθαγόρων, ἐξ Ἀριστοτελῶν, ἐκ Πλατώνων, ἐξ Ἀρχιμηδῶν νὰ μεταμορφωθῶσιν εἰς αὐτόχρημα κτήνη, νὰ μὴ κινηθῆ εἰς ἔλεος [...]». Απασαι αἱ τέχναι καὶ ἐπιστῆμαι ἐξωρίσθησαν ἐκ τοῦ ἐμοῦ ἐδάφους, αἱ μούσαι ὁμοῦ πᾶσαι ἀπέπτησαν, καὶ ἐγὼ γέγονα οἰκητήριον θηρίων», και συνεχίζει διερωτώμενος «Ἄλλα πρέπει ἀράγε διὰ τοῦτο ἡμεῖς οἱ Ἑλληνες να διαμείνωμεν, εἰς ἣν περ ἡδη εύρισκόμεθα κατάστασιν;». Εννοείται όχι, οπότε συμπληρώνει: «Ωστε πρέπει νὰ ἀνακληθῇ εἰς τὴν ἑαυτὴν πατρίδα ἡ φιλοσοφία [...]. Καὶ τὰ προσκλητήρια εἶναι οὐδέν ἄλλο, ἢ ὅπερ ὁ Ξενοκράτης ὠνόμασε "λαβάς φιλοσοφίας": τουτέστι τὰ μαθηματικά.»

Επανερχόμενοι στις αρχαίες πηγές που αναφέρουν την περίφημη επιγραφή, ας συνοψίσουμε τα αναγραφόμενα του Ολυμπιόδωρου, του Ηλία και του Δαυΐδ.

Ο Ολυμπόδωρος (βος αι. μ.Χ.) στα *Προλεγόμενά* του γράφει ότι υπάρχουν τέσσερις απόψεις για το «πόθεν ἀρκτέον» τα συγγράμματα του Αριστοτέλη: «καὶ περὶ τούτου τέσσαρες δόξαι γεγόνασιν καὶ οἱ μὲν τῆς πρώτης δόξης φασὶν ὅτι τῆς ἡθικῆς δεῖ ἀρξασθαι, οἱ δὲ τῆς δευτέρας τῆς φυσιολογικῆς, οἱ δὲ τῆς μαθηματικῆς οἱ δὲ τῆς λογικῆς (περὶ αυτού υπάρχουν τέσσερις γνώμες, καὶ οἱ μὲν υποστηρικτές της πρώτης γνώμης ισχυρίζονται ότι η διδασκαλία των συγγραμμάτων πρέπει να ξεκινά από τη μελέτη της ηθικής, οἱ δὲ της δεύτερης από τη μελέτη της φύσης, οἱ ἄλλοι από τα μαθηματικά, ενώ οι υπόλοιποι από τη λογική)». Αφού παραθέσει ακροθιγώς τα επιχειρήματα που επικαλούνταν όλοι αυτοί, στη συνέχεια γράφει: «οἱ δὲ λέγοντες τὴν μαθηματικὴν ἔφασαν διὰ τούτο δεῖν προηγήσασθαι τὰ μαθηματικὰ διὰ τὸ ἐπιγεγράφθαι ἐν τῷ τοῦ Πλάτωνος μουσείῳ “ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω” (αυτοὶ οἱ οποίοι ισχυρίζονταν ότι πρέπει να προηγούνται τα μαθηματικά το ἐλεγαν επειδή στον οίκο των μουσών του Πλάτωνα υπήρχε η επιγραφή “ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω”)».

Ο Ηλίας (βος αι. μ.Χ.) στο έργο του *Υπόμνημα εἰς Αριστοτελούς κατηγορίας συζητά*, σε ένα χωρίο που μοιάζει με του Ολυμπόδωρου, για το πώς πρέπει να ξεκινούν τα συγγράμματα του Αριστοτέλη. Όπως ο προηγούμενος, αφού αναφέρει επιγραμματικά τις τέσσερις απόψεις, λέει για τους μεν «οἱ δὲ λέγοντες ὅτι δεῖ ἀπὸ τῶν μαθηματικῶν ἀρχεσθαι φασὶν ὅτι δεῖ ταῦτα πρῶτον ἀναγιγνώσκειν διὰ τὸ θάρρος τῶν ἀποδείξεων [...] καὶ ὅτι ἐν τούτοις διδασκόμεθα πῶς δεῖ μανθάνειν, ὅτι γραμματικὰς ἀνάγκαις οὐκ ἀξιοποτίᾳ προσώπων ἀναπαυόμενοι, καὶ διὰ Πλάτωνα ἐπιγράψαντα πρὸ τοῦ μουσείου “ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω”» (αυτοὶ που λένε ότι η διδασκαλία πρέπει να ξεκινά από τα μαθηματικά υποστηρίζουν πως αυτά πρέπει να μελετήσει κανείς στην αρχῇ, διότι ἔτι αποκτά θάρρος στο τι είναι απόδειξη [...] καὶ ότι από αυτά διδασκόμεθα πῶς πρέπει να μαθαίνουμε, διότι από τη γεωμετρική απόδειξη (μαθαίνουμε) να μην επαναπαύμαστε στην αξιοποτίᾳ των ανθρώπων, καὶ μάλιστα ο Πλάτωνας επέγραψε στην είσοδο του οίκου των μουσών “ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω”).»

Τέλος, ο Δαυΐδ (βος αι. μ.Χ.) στα *Προλεγόμενα Φιλοσοφίας* του λέει ότι ο Πλάτωνας δεν θεωρούσε τα μαθηματικά ως μέρος της φιλοσοφίας αλλά προγύμνασμα: «καὶ γάρ οὗτος (ο Πλάτων) τὸ μαθηματικὸν οὐ δοξάζει μέρος τῆς φιλοσοφίας ἀλλὰ προγύμνασμά τι, ὥσπερ τὴν γραμματικὴν καὶ τὴν ḁητορικὴν. “Οθεν καν τῷ ἀκροατηρίῳ ἐπέγραφεν “ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω”.

Στα αραβικά κείμενα υπάρχει μια παραφθορά της ιστορίας για την επιγραφή, που θεωρεί ως κεντρικό πρόσωπο όχι τον Πλάτωνα αλλά τον Ευκλείδη. Την καταγράφει ο al-Qifti (-1248) στο έργο του *Tarikh al-Hukama* όπου, μετά από μια επιγραμματική βιογραφία (κατά πάσαν πιθανότητα εσφαλμένη) του Ευκλείδη, γράφει «γι' αυτό το λόγο οι Ἑλληνες φιλόσοφοι συνήθιζαν να αναρτούν στις εισόδους των σχολών τους τη γνωστή επιγραφή «να μη μπει κανείς στη σχολή μας αν δεν έχει μάθει τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη».

Θα κλείσουμε με μια παραλλαγή της πλατωνικής επιγραφής στη νεότερη Ελλάδα. Την πληροφορία μάς την παρέχει ο Κωνσταντίνος Κούμας (1777-1836) στην *Ιστορία των Ανθρωπίνων Πράξεων* (Βιέννη, 1832) (τόμος ΙΒ, σελ. 561) στο σημείο όπου βιογραφεί τον μεγάλο διδάσκαλο του Γένους Ευγένιο Βούλγαρη (1716-1805). Γράφει ότι η Ιερά Σύνοδος «ἔκρινεν ώφελιμον νὰ συστήσῃ σχολεῖον τοῦ γένους εἰς τὸν Ἀθωνα [...]». Μὲ τιμὴν μεγάλην ἐπροσκαλέσθη ὁ Εὐγένιος εἰς τὸ Πατριαρχεῖον (1753) [...]. Ἐκεῖ συνετάχθησαν καὶ ἐδιδάχθησαν τὰ συγγράμματά του ἐκεῖνα, τὰ ὅποια ἔκαμαν ἐποχὴν εἰς τὴν παιδείαν τοῦ γένους, ἡ *Λογικὴ* (ἐν Λειψίᾳ 1766), ἡ *Μεταφυσικὴ* (ἐν Βενετίᾳ 1805), ἡ *Γεωμετρία* του Τακουετίου, τὸ *Περὶ Συστήματος τοῦ Παντός* κ.τ.λ. Ὁ διδάσκαλος ἐγραφεν εἰς τὴν πύλην τοῦ Σχολείου του κατὰ μίμησιν τοῦ Πλάτωνος ἐπιγραφὴν ἀνάλογην τῆς χρείας τῶν μαθητῶν του;

Γεωμετρήσων εἰσίτω, οὐ χωλύω

Τῷ μὴ θέλοντι συζητώσω τὰς θύρας ἐπειδή οἱ μαθηταί του ἡσαν ἀγεωμέτρητοι, καὶ χωρὶς γεωμετρίας δὲν ἥδύνατο νὰ τοὺς εἰσάξῃ εἰς ὑψηλότερα μαθήματα».

**Μαγικά τετράγωνα.** Τα μαγικά τετράγωνα είναι οποιαδήποτε διάταξη αριθμών σε τετράγωνο όμοιο με σκακιέρα, όπου το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, κάθε στήλη και κάθε διαγώνιο είναι το ίδιο (Σχήμα 1). Ειδικά αν οι αριθμοί είναι διαδοχικοί, από 1 έως  $n^2$ , τότε το

4	9	2
3	5	7
8	1	6

α

To αρχαιότερο μαγικό τετράγωνο (διαδοχικοί αριθμοί).

71	59	53	113	131	107
139	11	109	101	37	137
13	163	223	7	61	67
89	17	23	83	149	173
43	181	79	73	127	31
179	103	47	157	29	19

β

Μαγικό τετράγωνο αποτελούμενο από πρώτους αριθμούς. Η μαγική σταθερά είναι 534.

Σχήμα 1

κοινό αυτό άθροισμα είναι φυσικά  $(1/2)n(n^2 + 1)$ . Δεν χρειάζεται να επεκταθούμε περισσότερο στο θέμα γιατί είναι ευρέως γνωστό. Εμπίπτει πάντως στον ενδιαφέροντα τομέα των διασκεδαστικών μαθηματικών, και έχουν κατασκευαστεί μαγικά τετράγωνα με απίστευτες επιπρόσθετες ιδιότητες (π.χ. όλοι οι εμφανιζόμενοι αριθμοί να είναι πρώτοι ή να παραμένει μαγικό τετράγωνο αν αναποδογυριστεί: σ' αυτή την περίπτωση όλοι οι αριθμοί αποτελούνται από τα ψηφία 1, 6, 8, 9 που αναποδογυρισμένα γίνονται 1, 9, 8, 6). Ας ανατρέξει ο αναγνώστης σε βιβλία διασκεδαστικών μαθηματικών για περισσότερες λεπτομέρειες. Στο παρόν λήμμα θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στην ιστορία των μαγικών τετραγώνων και, κυρίως, θα ερμηνεύσουμε γιατί καλούνται «μαγικά».

Τα πρώτα μαγικά τετράγωνα προέρχονται από την αρχαία Κίνα σε κείμενο με τίτλο *I-King* (βιβλίο των συνδυασμών) του 12ου αι. π.Χ. Φαίνεται όμως να περιέχει γνώση ακόμη αρχαιότερη, χαμένη στην κινεζική μυθολογία. Η αναφορά των μαγικών τετραγώνων στο *I-King* γίνεται για μυστικιστικούς λόγους, και η χρήση τους από τότε μέχρι σήμερα είναι ευρεία μεταξύ των οιωνοσκόπων της ανατολής. Από την Κίνα η χρήση των μαγικών τετραγώνων πέρασε στους Ινδούς και στους Αραβες, πάντα ως μυστικιστικό σύμβολο, φυλακτό και εργαλείο των οιωνοσκόπων. Ως τέτοιο περιγράφεται σε ινδικά και αραβικά έργα τουλάχιστον 1200 ετών.

Στον χριστιανικό κόσμο υπήρχαν, ως κατάλοιπα εθνικών πρακτικών, τετράγωνες διατάξεις γραμμάτων ή λέξεων που χρησιμοποιούνταν ως φυλακτά ή ξόρκια. Το ασυνήθιστο στις διατάξεις αυτές είναι ότι σχηματίζονται λέξεις που «δένουν» μεταξύ τους ώστε οι δεισιδαίμονες χρήστες τους να τις θεωρούν ως ισχυρό κατάδεσμο για επίτευξη ευχής ή κατάρας. Στο Σχήμα 2(a) εικονίζεται η γνωστότερη από τις ελληνικές τέτοιες διατάξεις, που διαβάζεται και οριζόντια και κάθετα. Πιο εκπληκτική είναι μια ανάλογη λατινική διατάξη του Σχήματος 2(β) που διαβάζεται οριζόντια, κάθετα και καρκινικά, και όλες οι λέξεις έχουν νόημα.

A L Φ A	S A T O R
Λ E Ω N	A R E P O
Φ Ω Ν H	T E N E T
A N H P	O P E R A
	R O T A S

α                          β

Σχήμα 2

Σώζονται εκατοντάδες πάπυροι, που ονομάζονται μαγικοί, με προσευχές, ξεματιάσματα, επικλήσεις δαιμόνων (ιδίως από τις αρχαίες ιουδαιϊκές θεότητες του υποκόσμου), αμπρακατάμπρες, διάφορα ακαταλαβίστικα σύμβολα που, μεταξύ των άλλων, περιέχουν διατάξεις όπως του Σχήματος 2. Παραδείγματος χάριν, υπάρχει ένας αιγυπτιακός γραμμένος στα κοπτικά, που χρονολογείται από τον 6ο ή 7ο αι. μ.Χ., και η χρήση του ήταν να προ-

φυλάσσει από τα δαγκώματα φιδιών. Σ' αυτόν βρίσκουμε τις δύο παραπάνω διατάξεις λέξεων, τα ονόματα Μελχιώρ, Τθασία, και Φαθισόρα (δηλαδή τα ονόματα των τριών Μάγων, στα κοπτικά), διάφορα άλλα ονόματα καθώς και περικοπές από την Αγία Γραφή που περιέχουν τη λέξη «όφις» π.χ. «ὅφεις ἀροῦσι· καν θανάσιμον τι πίωσιν, οὐ μὴ αὐτοὺς βλάψει» (Μαρκ. ιστ', 18), «Ἴδού δίδωμι ὑμῖν τὴν ἔξουσίαν τοῦ πατεῖν ἐπάνω ὄφεων καὶ σκορπίων...» (Λουκ. ί', 19), ή από τους Ψαλμούς της Παλαιάς Διαθήκης, το χωρίο ριθ, 105.

Υπό αυτό το πρίσμα, το «δέσιμο» των αριθμών στα μαγικά τετράγωνα θεωρείται από τους ρέποντες προς το μυστικισμό ως διάταξη που εγκλείει υπερφυσικές ιδιότητες. Σήμερα αυτό μπορεί να ηχεί παράδοξο αλλά σε άλλες εποχές, όπου η ορθολογική θεώρηση ήταν ολωσδιόλου άγνωστη, ήταν ο κανόνας. Έτσι, παραδείγματος χάριν, ο σπουδαίος αλχημιστής Cornelius Agrippa (1486-1535) κατασκεύασε για τις αστρολογικές του μελέτες μαγικά τετράγωνα τάξης 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9, τα οποία συσχέτιζε με τους τότε γνωστούς επτά «πλανήτες» (Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ήλιος, Άρης, Ζευς, Κρόνος). Ο πρώτος ο οποίος φέρεται να εισήγαγε τα μαγικά τετράγωνα στη Δύση είναι ο βυζαντινός φιλόλογος Μανουήλ Μοσχόπουλος (~1265-~1315). Σώζονται αρκετά αντίτυπα του ολιγοσέλιδου συγγράμματός του, όπως το MS2428 στη Bibliothèque Nationale των Παρισίων, από όπου το εξέδωσε με παράλληλη γαλλική μετάφραση ο P. Tanneguy το 1886. Η συγγραφή του κειμένου έγινε κατά προτροπή του μαθηματικού Νικολάου Αρταβάσδου, ή Ραβδά. Αυτό τεκμαίρεται από την εισαγωγή, όπου γράφει «Τοῦ λογιωτάτου καὶ μακαριωτάτου χυροῦ Μανουήλ τοῦ Μοσχοπούλου παράδοσις εἰς τὴν εὔρεσιν τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν, ἣν ἐποιήσατο διασθείς παρὰ Νικολάου Σμυρναίου Αρταβάσδου ἀριθμητικοῦ καὶ γεωμέτρου, τοῦ Ραβδᾶ».

Στο κείμενο που ακολουθεί υπάρχουν περιγραφές για κατασκευή μαγικών τετραγώνων τάξεως  $n$  όπου  $n = 2m + 1$  ή  $n = 4m$ . Αν και στο κείμενο υπάρχει η διαβεβαίωση ότι θα υποδειχθεί μέθοδος και για την εναπομείνουσα περίπτωση  $n = 4m + 2$ , τέτοια μέθοδος δεν συμπεριλαμβάνεται.

Επειδή το κείμενο έχει αρκετά χαμηλό μαθηματικό υπόβαθρο (ο Μοσχόπουλος ήταν φιλόλογος, χωρίς τίποτα άλλο να τεκμηριώνει ότι είχε μαθηματικές γνώσεις) θα μπορούσε κανείς να υποθέσει (άλλοι όμως διαφωνούν) ότι η κατασκευή μαγικών τετραγώνων στο κείμενο του Μοσχόπουλου δεν αποτελεί πρωτότυπη σύλληψη. Βέβαια, δεν μπορεί να υποστηριχθεί με ασφάλεια η μία ή η άλλη άποψη, όμως η ευρεία κυκλοφορία μαγικών τετραγώνων στους μυστικιστικούς κύκλους οθεί τον υπογράφοντα να κλίνει προς την άποψη της μη πρωτοτυπίας από τον Μοσχόπουλο. Πιστεύω, δηλαδή, ότι το σύγγραμμά του ήταν απλώς καταγραφή γνωστών στους Αραβες θεμάτων. Προς τιμήν του πάντως, ο Μοσχόπουλος δεν απέδωσε καμία μαγική ιδιότητα στα τετράγωνα αυτά. Πέραν του τίτλου, πουθενά στο κείμενο δεν υπάρχει η λέξη «μαγικός» ή τα παράγωγα και συνώνυμά της. ◻

# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

M191

**Σημασία στην ακρίβεια.** Έστω  $a^3 - a - 1 = 0$ . Βρείτε την ακριβή τιμή της παράστασης

$$\sqrt[3]{3a^2 - 4a} + a\sqrt[4]{2a^2 + 3a + 2}.$$

M192

**Χάλκινο αίνιγμα.** Δύο μεταλλικά σώματα έχουν μάζα 1 kg και 2 kg, αντίστοιχα. Και τα δύο είναι κράματα χαλκού με κάποια άλλα μέταλλα. Λειώνουμε και τα δύο σώματα μαζί και σχηματίζουμε δύο νέα σώματα. Το ένα έχει μάζα 0,5 kg και περιέχει 40% χαλκό, ενώ το δεύτερο έχει μάζα 2,5 kg και περιέχει 88% χαλκό. Ποιο είναι το ποσοστό του χαλκού στα αρχικά σώματα;

M193

**Γραμμική σκέψη.** Η κάθετος που φέρουμε από την κορυφή  $B$  ενός παραλληλογράμμου  $ABCD$  επί την πλευρά  $AD$  τέμνει την ευθεία  $CD$  στο σημείο  $M$ , ενώ η κάθετος που φέρουμε από την κορυφή  $B$  επί την πλευρά  $CD$  τέμνει την ευθεία  $AD$  στο σημείο  $N$ . Αποδείξτε ότι η κάθετος που φέρουμε από την κορυφή  $B$  επί την διαγώνιο  $AC$  διέρχεται από το μέσο του τρίγματος  $MN$ .

M194

**Κυκλική σκέψη.** Ένας κύκλος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό δεδομένης γωνίας. Κατασκευάστε κύκλο που εφάπτεται στον πρώτο καθώς και στις πλευρές της γωνίας. Πόσοι τέτοιοι κύκλοι υπάρχουν;

M195

**Σκεφτείτε οικονομικά.** Έστω μια ευθεία  $m$  κάθετη σε ένα επίπεδο  $L$ . Τρεις σφαίρες που εφάπτονται ανά

δύο, εφάπτονται επίσης στο επίπεδο  $L$  και στην ευθεία  $m$ . Η ακτίνα της μεγαλύτερης σφαίρας ισούται με 1. Βρείτε τη μικρότερη δυνατή ακτίνα της μικρότερης σφαίρας.

## Φυσική

Φ191

**Εκκρεμής γρίφος.** Ένα συρμάτινο τόξο μήκους  $L$  και ακτίνας  $R$  αναρτάται από τα άκρα του με τη βοήθεια δύο ελαφρών μη εκτατών νημάτων ίδιου μήκους  $R$ . Να βρεθεί η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων που εκτελεί αυτό το εκκρεμές αν τα νήματα και το τόξο παραμένουν πάντα στο ίδιο επίπεδο. (M. Yermilov)



Φ192

**Εξωγήινο όζον.** Σύμφωνα με κάποιες εκτιμήσεις, η μάζα του όζοντος ( $O_3$ ) που περιέχει η ατμόσφαιρα της Αφροδίτης αντιπροσωπεύει κλάσμα  $a = 10^{-5}$  της συνολικής μάζας της. Πόσο πάχος θα είχε το στρώμα όζοντος που θα σχηματίζοταν αν το εν λόγω αέριο συγκεντρωνόταν στην επιφάνεια του πλανήτη και είχε την ίδια θερμοκρασία και πίεση που επικρατούν εκεί όταν η ατμόσφαιρα βρίσκεται στη συνήθη της κατάσταση; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην Αφροδίτη  $g = 8,2 \text{ m/s}^2$  και η θερμοκρασία στην επιφάνεια της  $T = 800 \text{ K}$ . (A. Sheronov)

Φ193

**Ζεύγος πλακών σπέσιαλ.** Ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $C$  με παραλληλους οπλισμούς αποτελείται από δύο αγώγιμες πλάκες: η καθεμιά απ' αυτές συνίσταται από δύο λεπτά με-

ταλλικά φύλλα τα οποία πινδέονται αγώγιμα. Οι πλάκες φορτίζονται με ομώνυμα φορτία  $Q$  και  $2Q$ . Στη συνέχεια αποσυνδέομε το εξωτερικό μεταλλικό φύλλο της πλάκας με το μεγαλύτερο φορτίο, το απομακρύνουμε διατηρώντας το συνεχώς παράλληλο προς τις υπόλοιπες πλάκες, και τελικά το φέρνουμε και το προσθέτουμε ως τρίτο φύλλο στην εξωτερική πλευρά της πλάκας που έχει φορτίο  $Q$ . Ανάμεσα στην πλάκα αυτή και στο τρίτο φύλλο φροντίζουμε να αφήσουμε ένα πολύ στενό διάκενο, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι δεν υφίσταται αγώγιμη επαφή ανάμεσά τους. Πόσο έργο πρέπει να δαπανήσουμε για να πραγματοποιήσουμε αυτό το μετασχηματισμό; (Όλες μας οι ενέργειες γίνονται σε μεγάλη απόσταση από τον πυκνωτή, έτσι ώστε να μην επηρεαστεί η κατανομή των φορτίων στις πλάκες.) (A. Zilberman)

Φ194

**Φωτεινή κηλίδα.** Ένας επιπεδόκυρτος φακός από γυαλί έχει δείκτη διάθλασης  $n = 1,5$  και διάμετρο  $D = 5 \text{ cm}$ . Η ακτίνα της κυρτής σφαιρικής επιφάνειάς του είναι  $R = 5 \text{ cm}$ . Μια παράλληλη και μεγάλου εύρους δέσμη φωτός προσπίπτει στην επίπεδη πλευρά του φακού παράλληλα προς τον οπτικό του άξονα. Υπολογίστε το μέγεθος της φωτεινής κηλίδας που σχηματίζεται σε μια οθόνη τοποθετημένη πίσω από το φακό και κάθετα προς την προσπίπτουσα δέσμη. Η απόσταση της οθόνης από το φακό έχει επιλεγεί έτσι ώστε, στην περίπτωση μιας στενής δέσμης (περιοριζόμενης από ένα διάφραγμα) που κατευθύνεται κατά μήκος του οπτικού άξονα, να σχηματίζεται πάνω της η μικρότερη δυνατή φωτεινή κηλίδα.

H συνέχεια στη σελ. 64

# Χτίζοντας παλάτια στον πάγο

Προβλήματα θεμελιώσης στις πολικές περιοχές

A. Tokarev

**Ο**ΜΕΓΑΛΟΣ ΙΤΑΛΟΣ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΑΣ Αντρέα Παλλάντιο (1518-1580) πίστευε ότι κάθε κτήριο αξιο δημόσιου θαυμασμού πρέπει να πληροί τρεις προϋποθέσεις: χρησιμότητα (και άνεση), καλαιοθησία και ανθεκτικότητα. Εδώ θα μας απασχολήσει η τελευταία, η οποία αφορά τη σταθερότητα και την ασφάλεια των κτηρίων.

Όλοι γνωρίζουμε λίγο-πολύ ότι η ανέγερση ενός κτηρίου ξεκινά με την κατασκευή των θεμελίων του. Τα γερά θεμέλια αποτελούν το πρώτο βήμα για τη μετέπειτα επιτυχία του έργου. Τι σημαίνει όμως «γερά θεμέλια»;

Η κατασκευή των θεμελίων συνιστά μία από τις πολλές δυσκολίες τις οποίες αντιμετωπίζουν οι κατασκευαστές κτηρίων κυρίως σε πολικές περιοχές με έδαφος ή υπέδαφος μονίμως παγωμένο (περιοχές πέρμαφροστ - «αειπαγείς»). Πολλά κτήρια σε τέτοιες περιοχές υφίστανται ρωγμές λόγω της τήξης του πάγου.

Μπορούμε όμως να εμποδίσουμε ή έστω να ελαχιστοποιήσουμε την τήξη του αειπαγούς εδάφους κάτω από τα κτήρια;

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος, θα βασιστούμε στους πιο απλούς νόμους και κανόνες της φυσικής. Ας ξεκινήσουμε αναλύοντας τις συνθήκες του προβλήματος. Γιατί λιώνει το έδαφος κάτω από ένα κτήριο; Προφανώς επειδή από τα θε-

μέλια διαδίδεται θερμότητα προς αυτό. Κατά συνέπεια, τα θεμέλια πρέπει να αποτελέσουν το κέντρο της μελέτης μας.

Καταρχάς, είναι απαραίτητο να μειωθεί η επιφάνεια επαφής ανάμεσα στο έδαφος και τα θεμέλια. Γι' αυτό, πολλά κτήρια σε περιοχές πέρμαφροστ χτίζονται πάνω σε (κατακόρυφες) κολόνες, αντί των συμβατικών θεμελίων. Ωστόσο αυτό δεν αρκεί.

Υπάρχουν άλλοι τρόποι μείωσης της ροής θερμότητας προς το έδαφος; Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η θερμότητα διαδίδεται αποκλειστικά με αγωγή (αγωγιμότητα). Άρα, οι κολόνες πρέπει να κατασκευάζονται από υλικό με την κατά το δυνατόν μικρότερη θερμική αγωγιμότητα. Ποιο είναι όμως αυτό το υλικό;

Η θερμική αγωγιμότητα των διαφόρων υλικών περιγράφεται μέσω μιας ειδικής φυσικής παραμέτρου, το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, ο οποίος εξαρτάται από το κάθε υλικό. Τα μέταλλα έχουν μεγαλύτερο συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, ενώ είναι μικρότερος για τα υγρά και ακόμη πιο μικρός για τα αέρια. Για τους σκοπούς της ανάλυσής μας είναι αδιάφορος τόσο ο τρόπος υπολογισμού του εν λόγω συντελεστή όσο και οι μονάδες μέτρησής του. Ενδιαφέρον παρουσιάζει μόνο η σύγκριση της ικανότητας που έχουν τα διάφορα υλικά να άγουν τη θερμότητα. Με τη βοήθεια ενός εγχειριδίου α-

ναφοράς συντάσσουμε έναν πίνακα (Πίνακας 1), όπου αναγράφονται οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας διάφορων υλικών σε σχέση με αυτόν του νερού.

Κοιτάζοντας προσεκτικά τον Πίνακα 1, διαπιστώνουμε ότι, από τα στερεά, το βαμβάκι και ο φελλός έχουν τις μικρότερες τιμές θερμικής αγωγιμότητας. Ακολουθούν το ξύλο και τα τούβλα. Δεδομένου όμως ότι

Υλικό	Σχετικός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας
βενζίνη	0,2
βαμβάκι	0,07
νερό	1
αέρας	0,04
υαλοβάμβακας	0,1
ξύλο	0,2-0,6
σίδηρος	122
κηροζίνη	0,2
τούβλα	1,1
πάγος	3,7
φελλός	0,07
οινόπνευμα	0,3

Πίνακας 1



η κολόνα πρέπει να είναι ανθεκτική στο χρόνο και γερή, τα υλικά με τις μικρότερες δυνατές τιμές δεν ενδείκνυνται. Τι θα συμβεί όμως αν η κολόνα αποτελείται από έναν ατσάλινο σωλήνα γεμάτο με βαμβάκι, υαλοβάμβακα ή άλλη πορώδη ουσία; Ισως να έχουμε βρει τη λύση!

*Οι κολόνες πρέπει να κατασκευάζονται από ανθεκτικό στο χρόνο συμπαγές υλικό παραγεμισμένο με πορώδη ουσία.*

Αναλύοντας το παραπάνω απότελεσμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μια **τέτοια κολόνα**, λόγω της μικρής θερμικής της αγωγιμότητας, θα μειώσει τελικά τη θερμική ροή από τον περιβάλλοντα χώρο προς το έδαφος (δηλαδή «προς τα κάτω») κατά τη θερινή περίοδο. Ωστόσο θα επιτύχουμε ακόμη περισσότερα με μια σωστά μελετημένη κολόνα η οποία το χειμώνα, και σε θερμοκρασίες πολύ χαμηλότερες από το μηδέν, θα μπορούσε να μειώσει τη θερμοκρασία του εδάφους (διαδίδοντας τη θερμότητα «προς τα πάνω»). Μ' αυτό τον τρόπο θα ενισχυθεί η αντοχή του εδάφους, αλλά και θα περιοριστεί η τήξη του κατά την ερχόμενη θερινή περίοδο.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να διατυπώσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις λεπτομέρειες της περιγραφόμενης φυσικής διαδικασίας, τόσο το χειμώνα όσο και το καλοκαίρι. Κατά τη θερινή περίοδο, το πάνω μέρος της κολόνας θερμαίνεται εξαιτίας της επαφής του με τον θερμό περιβάλλοντα χώρο. Σταδιακά θερμαίνεται και το κάτω μέρος της, το οποίο βρίσκεται σε θερμική επαφή με το έδαφος. Όσο λιγότερο θερμαίνεται το κάτω μέρος της, άρα και το παρακείμενο έδαφος, τόσο το καλύτερο. Το χειμώνα, ο αέρας ψύχει το πάνω μέρος της κολόνας, με αποτέλεσμα να ψύχεται σταδιακά και το κάτω μέρος της μαζί με το παρακείμενο έδαφος. Όσο περισσότερο ψύχεται το έδαφος, τόσο το καλύτερο.

Κατά συνέπεια, η κολόνα πρέπει να διαθέτει τις εξής ιδιότητες:

(α) αν η θερμοκρασία του πάνω μέρους της είναι υψηλότερη από αυτή του κάτω, τότε η κολόνα να άγει ελάχιστα τη θερμότητα.

(β) αν η θερμοκρασία του πάνω μέρους της είναι χαμηλότερη από αυτή του κάτω, τότε η κολόνα να άγει αποδοτικά τη θερμότητα.

Με άλλα λόγια, η «προς τα κάτω» διάδοση της θερμότητας πρέπει να είναι περιορισμένη, σε αντίθεση με την «προς τα πάνω» διάδοση. Δηλαδή, η κολόνα πρέπει να λειτουργεί ως «ημιαγώγος θερμότητας».

Ως γνωστόν, η ανταλλαγή θερμότητας στα στερεά οφείλεται αποκλειστικά σε αγωγή, η οποία είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση διάδοσης. Η ιδανική κολόνα λοιπόν δεν πρέπει να αποτελείται εξ ολοκλήρου από στερεό υλικό. Το προηγούμενο μοντέλο του μεταλλικού αγωγού που περιέχει πορώδη ουσία στο εσωτερικό του είναι ανεπαρκές, δεδομένου ότι το πορώδες περιεχόμενό του άγει ελάχιστα τη θερμότητα, τόσο το καλοκαίρι όσο (φεύ) και το χειμώνα.

Τι γίνεται όμως αν γεμίσουμε το εσωτερικό ενός γερού και ανθεκτικού στο χρόνο σωλήνα (ή άλλου κοίλου μεταλλικού περιβλήματος) με ρευστό — υγρό ή αέριο; Στην περίπτωση αυτή, η θερμότητα διαδίδεται όχι μόνο λόγω της μοριακής αγωγιμότητας, αλλά και λόγω μεταφοράς. Ας δούμε πώς συμπεριφέρεται μια τέτοια κολόνα.

Το χειμώνα, το ανώτερο στρώμα του ρευστού ψύχεται και, δεδομένου ότι το ψυχρό ρευστό έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το αντίστοιχο θερμό, κατέρχεται. Τα πιο θερμά και άρα μικρότερης πυκνότητας στρώματα του ρευστού ανέρχονται, απελευθερώνοντας θερμότητα στον περιβάλλοντα χώρο. Στη συνέχεια, η ποσότητα αυτή του ρευστού αντικαθίσταται από άλλη ψυχρή, η οποία προέρχεται από το κάτω μέρος, κ.ο.κ. Κατά συνέπεια, το κάτω μέρος της κολόνας και το παρακείμενο έδαφος ψύχονται, αποκτώντας τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Προσέξτε ότι δεν είναι απαραίτητη η χρήση ειδικών καταψυκτών για την ψύξη των θεμελίων — κάτι που συνεπάγεται σπατάλη ενέργειας. Τα πάντα γίνονται «εις βάρος» του φυσικού ψυχρού χειμερινού περιβάλλοντος.

Το καλοκαίρι, τα ανώτερα στρώματα του ρευστού στην κολόνα θερ-

μαίνονται. Επειδή όμως έχουν μικρότερη πυκνότητα, παραμένουν στο πάνω μέρος της. Κατά συνέπεια, την εποχή αυτή δεν παρατηρείται μεταφορά θερμότητας: η θερμότητα διαδίδεται προς τα κάτω μόνο εξαιτίας της μοριακής αγωγιμότητας, η οποία στα ρευστά είναι ελάχιστη. Έτσι, αφού ο συγκεκριμένος τύπος κολόνας άγει ελάχιστα τη θερμότητα το καλοκαίρι, η θερμοκρασία του παρακείμενου εδάφους αυξάνει ανεπαίσθητα.

*Καταλήγουμε λοιπόν σε ένα ακόμη σημαντικό συμπέρασμα: η κολόνα, η οποία κατασκευάζεται από ανθεκτικό στο χρόνο υλικό πρέπει να περιέχει κάποιου είδους ρευστό (αέριο ή υγρό).*

Παραμένει ωστόσο το εξής ερώτημα: τι υλικό πρέπει να περιέχεται στην κολόνα; Το χειμώνα, οι ιδιότητες του ρευστού δεν παιζουν καθοριστικό ρόλο, αφού το έδαφος είναι ψυχρό, έχοντας αποκτήσει τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος: το καλοκαίρι, όμως, που η θερμοκρασία είναι υψηλή, το έδαφος πρέπει να θερμαίνεται όσο το δυνατόν λιγότερο. Γι' αυτό, πρέπει να χρησιμοποιείται ρευστό του οποίου η θερμοκρασία να αυξάνεται όσο το δυνατόν λιγότερο. Από τον θεμελιώδη νόμο της θερμοδιαδικασίας

$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1)$$

προκύπτει ότι η μεταβολή θερμοκρασίας  $\theta_2 - \theta_1$  εξαρτάται όχι μόνο από την ποσότητα της μεταφερόμενης θερμότητας, αλλά και από την ειδική θερμότητα  $c$  και τη μάζα  $m$  του ρευστού.

Δεδομένου ότι η μάζα ενός υγρού είναι πάντα μεγαλύτερη από αυτή ενός αερίου στον ίδιο όγκο, είναι προτιμότερη η χρήση υγρού ως περιεχομένου της κολόνας. Ας συγκρίνουμε τώρα τις ειδικές θερμότητες διάφορων υγρών (ένα εγχειρίδιο αναφοράς είναι και πάλι απαραίτητο). Βλέπουμε στον Πίνακα 2 ότι όχι μόνο η πυκνότητα αλλά και η ειδική θερμότητα των υγρών είναι μεγαλύτερη από αυτή των αερίων. Ασφαλές συμπέρασμα: Οι κολόνες πρέπει να περιέχουν κάποιο υγρό.

Ποιο υγρό όμως είναι το καλύτερο γι' αυτή την περίπτωση; Παρότι το νερό είναι φθηνό και άμεσα δια-

Υλικό	Ειδική θερμότητα, kJ/(kg · K)
βενζίνη	1,4
νερό	4,2
αέρας	1
γλυκερίνη	2,4
κηροζίνη	2,1
ορυκτέλαιο	1,9

Πίνακας 2

θέσιμο, δεν είναι κατάλληλο, γιατί το χειμώνα γίνεται πάγος. Τόσο η γλυκερίνη όσο και το ορυκτέλαιο γίνονται πιο παχύρρευστα στις χαμηλές θερμοκρασίες, δυσχεραίνοντας έτσι τη μεταφορά θερμότητας. Καταλήγουμε έτσι στην επιλογή της βενζίνης και της κηροζίνης, τα σημεία πήξεως των οποίων είναι κάτω από τους  $-50^{\circ}\text{C}$ . Τούτο σημαίνει ότι και τα δύο υγρά είναι ανθεκτικά στις χαμηλές θερμοκρασίες της Αλάσκας και της Σιβηρίας. Η κηροζίνη όμως φαίνεται να υπερέχει της βενζίνης, διότι είναι φθηνότερη και έχει μεγαλύτερη ειδική θερμότητα.

Τελικά μπορούμε να δώσουμε οριστική λύση στο συγκρεκριμένο πρόβλημα: *Για να περιορισθεί η τήξη του εδάφους κάτω από τα κτήρια σε περιοχές πέρμαφροστ, αυτά πρέπει να χτίζονται πάνω σε κολόνες οι οποίες να συντίθενται από κοῦλο ανθεκτικό στο χρόνο υλικό, γεμάτες με κηροζίνη.*

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι αυτή η μέθοδος ισχυροποίησης των θεμελίων σε έδαφος πολύ χαμηλής θερμοκρασίας δεν είναι απλώς υποθετική. Έχει διαμορφωθεί επί τη βάσει θεωρητικών υπολογισμών και έχει δοκιμαστεί με επιτυχία από την κατασκευαστική βιομηχανία στις πολικές περιοχές: τα έξοδα κατασκευής μάλιστα έχουν μειωθεί σημαντικά.

## Γ. ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

Το φυσικομαθηματικό  
βιβλιοπωλείο, τώρα και  
στα ξενόγλωσσα

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,  
Τηλ.-Fax: 36 28 492

**ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ**

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 39 τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης: φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

# Κοινά σημεία

«ΕΙ καὶ τῶν τριῶν εν οἰσομαι!»

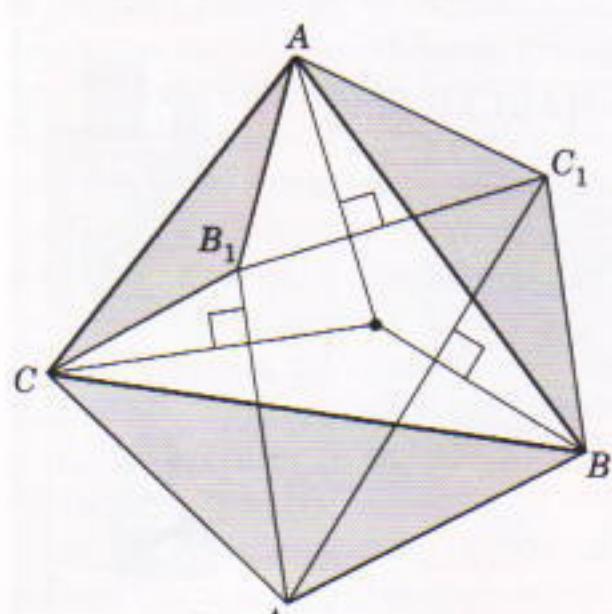
—Σοφοκλέους, απόσπ. 754

I. Sharygin

**Α**ΡΚΕΤΑ ΣΥΧΝΑ ΣΥΝΑΝΤΑΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑτα όπου πρέπει να αποδείξουμε ότι τρεις ή περισσότερες ευθείες συντρέχουν σε ένα σημείο. Για παράδειγμα:

**Πρόβλημα.** Κατασκευάζουμε τρία ισοσκελή τρίγωνα στις πλευρές ενός τριγώνου  $ABC$ , όπως στο Σχήμα 1. Αποδείξτε ότι οι κάθετες που φέρουμε από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$  προς τις ευθείες  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  και  $A_1B_1$  συντρέχουν σε ένα σημείο.

Ιδού μια μέθοδος χρήσιμη για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων: Αποδεικνύουμε ότι δύο από τις δεδομένες ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη συνθήκη και μετά αποδεικνύουμε ότι όλα τα σημεία της τρίτης ευθείας, και μόνο αυτά, ικανοποιούν την ίδια συνθήκη. Τα επόμενα πασίγνωστα θεω-



Σχήμα 1

ρήματα αποδεικνύονται με αυτή τη μέθοδο: οι τρεις διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο: οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο.

Ομοίως, αν πρέπει να αποδείξουμε ότι τρία ή περισσότερα σημεία ανήκουν σε μία ευθεία, μπορούμε να

αποδείξουμε ότι όλα τα δεδομένα σημεία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη συνθήκη και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι όλα τα σημεία της ευθείας, και μόνο αυτά, ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη (ο ίδιος τρόπος συλλογισμού μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση κύκλων).

Ας δούμε λοιπόν πώς μπορούμε να

βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που θα μας βοηθήσει να λύσουμε αυτό τον τύπο προβλήματος.

## Διατύπωση των προτάσεων

**Πρόταση 1.** Έστω  $A_1$  και  $A_2$  δύο σταθερά (διαφορετικά) σημεία του επιπέδου και  $k, k_1, k_2$  πραγματικοί αριθμοί. Τότε, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k \quad (*)$$

είναι:

(α) ένας κύκλος, ένα μοναδικό σημείο ή το κενό σύνολο αν  $k_1 + k_2 \neq 0$ ,

(β) μια κάθετη επί το τμήμα  $A_1A_2$  αν  $k_1 + k_2 = 0$  (και  $k_1 \neq 0$ ).

Στην περίπτωση πολλών σημείων ισχύει η επόμενη γενίκευση της Πρότασης 1.

**Πρόταση 2.** Έστω  $A_1, A_2, \dots, A_n$  σταθερά σημεία του επιπέδου και  $k_1, k_2, \dots, k_n$  πραγματικοί αριθμοί ( $k_i \neq 0$ , για κάθε  $i$ ). Τότε, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  για τα οποία το άθροισμα

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + \dots + k_n(A_nM)^2$$

είναι σταθερό έχει την εξής μορφή:

(α) είναι ένας κύκλος, ένα μοναδικό σημείο ή το κενό σύνολο αν  $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ ,

(β) είναι μια ευθεία ή ολόκληρο το επίπεδο αν  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 0$ .

Με τη βοήθεια της Πρότασης 1β μπορούμε να αποδείξουμε την επόμενη χρήσιμη συνθήκη.

**Πρόταση 3.** Φέρουμε κάθετες από τα σημεία  $A_1, B_1$  και  $C_1$  στις πλευρές  $BC, AC$  και  $AB$ , αντίστοιχα, ενός τριγώνου  $ABC$ . Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συντρέχουν αυτές οι κάθετες σε ένα σημείο είναι η εξής ισότητα:

$$(A_1B)^2 - (BC_1)^2 + (CA_1)^2 - (AB_1)^2 + (B_1C)^2 - (CA_1)^2 = 0. \quad (1)$$

Από την πρόταση αυτή έπειται η επόμενη.

**Πρόταση 4.** Έστω ότι οι κάθετες που φέρουμε από τις κορυφές  $A_1, B_1$  και  $C_1$  ενός τριγώνου  $A_1B_1C_1$  στις πλευρές  $BC, AC$  και  $AB$  του τριγώνου  $ABC$  συντρέχουν σε ένα σημείο. Τότε και οι κάθετες που φέρουμε από τα σημεία  $A, B$  και  $C$  στις ευθείες  $B_1C_1$ ,

$A_1C_1$  και  $A_1B_1$  συντρέχουν επίσης σε ένα σημείο.

Προσπαθήστε να αποδείξετε όλες αυτές τις προτάσεις. Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις Προτάσεις 3 και 4 για να λύσουμε το πρόβλημα που ετέθη στην αρχή του άρθρου. Έπειτα θα αποδείξουμε και τις ίδιες τις προτάσεις.

## Λύση του προβλήματος

Σύμφωνα με την Πρόταση 3, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι

$$(AB_1)^2 - (B_1C)^2 + (CA_1)^2 - (A_1B)^2 + (BC_1)^2 - (CA_1)^2 = 0.$$

(Δείτε το Σχήμα 1. Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε πολλαπλασιάσει την ισότητα της Πρότασης 3 επί  $-1$ .) Πράγματι, η ισότητα αυτή ισχύει διότι

$$AB_1 = B_1C, \quad CA_1 = A_1B, \quad BC_1 = C_1A.$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4. Σε αυτή την περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι κάθετες που φέρουμε από τα σημεία  $A_1, B_1$  και  $C_1$  στις πλευρές του τριγώνου  $ABC$  διέρχονται από τα μέσα των πλευρών του  $ABC$  και, επομένως, συντρέχουν στο σημείο που είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABC$ .

Ας αποδείξουμε τώρα τις προτάσεις που διατυπώσαμε.

## Απόδειξη των προτάσεων

**Πρόταση 1α.** Έστω  $k_1 > 0$  και  $k_2 > 0$ . Θεωρούμε το σημείο  $D$  που διαιρεί το τμήμα  $A_1A_2$  σε λόγο  $k_2 + k_1$ . Τότε,  $k_1(A_1D) = k_2(A_2D)$ . Έστω ότι  $\angle MDA_1 = \varphi$  (δείτε το Σχήμα 2). Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο  $M$  του επιπέδου και φέρουμε τις  $MA_1, MD, MA_2$ . Μπορούμε να εφαρμόσουμε το

νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα  $MDA_1$  και  $MDA_2$ :

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2 - 2MD \cdot DA_1 \cdot \text{συνφ},$$

$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2 + 2MD \cdot DA_2 \cdot \text{συνφ}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί  $k_1$ , τη δεύτερη επί  $k_2$  και τις προσθέτουμε κατά μέλη. Παίρνουμε

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k_1(A_1D)^2 + k_2(A_2D)^2 + (k_1 + k_2)(MD)^2. \quad (2)$$

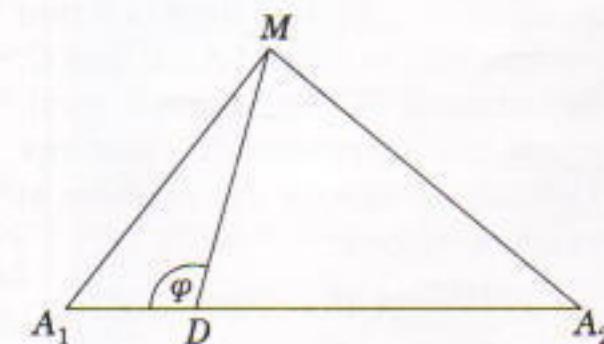
Συνεπώς, αν το  $M$  ικανοποιεί την  $(*)$ , τότε

$$(MD)^2 = \frac{k - k_1(A_1D)^2 - (A_2D)^2}{k_1 + k_2} = C.$$

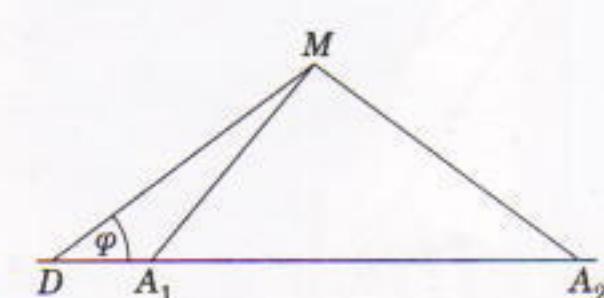
Το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του  $M$  και επομένως είναι σταθερό. Άρα και το  $(MD)^2$  είναι σταθερό. Συνεπώς, αν  $C > 0$ , το σημείο  $M$  ανήκει σε έναν κύκλο ακτίνας  $\sqrt{C}$  με κέντρο το  $D$ . Αν  $C = 0$ , το σημείο  $M$  συμπίπτει με το  $D$ , ενώ αν  $C < 0$ , δεν υπάρχουν σημεία  $M$  που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε την αντίστροφη πρόταση — δηλαδή, ότι κάθε σημείο  $M$  του συνόλου που πρέκυψε ικανοποιεί την εξίσωση  $k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$ . Αρκεί να αντικαταστήσουμε το  $(MD)^2$  στην εξίσωση (2).

Εξετάσαμε την περίπτωση  $k_1 > 0$  και  $k_2 > 0$ . Η περίπτωση  $k_1 < 0$  και  $k_2 < 0$  ανάγεται στην προηγούμενη, αν αντιστρέψουμε τα πρόσημα των  $k_1, k_2$  και  $k$ . Η περίπτωση  $k_1 > 0, k_2 < 0$  (όπως και η  $k_1 < 0, k_2 > 0$ ) αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο, αλλά πρέπει να θεωρήσουμε το σημείο  $D$  εκτός του τμήματος  $A_1A_2$  (δείτε το Σχήμα 3 — προσπαθήστε να κάνετε



Σχήμα 2



Σχήμα 3

όλους τους υπολογισμούς). Η εξίσωση (2) εξακολουθεί να ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις, γεγονός που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

### Πρόταση 1β. Η σχέση

$$k_1(A_1M)^2 - k_2(A_2M)^2 = k$$

είναι ισοδύναμη της

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

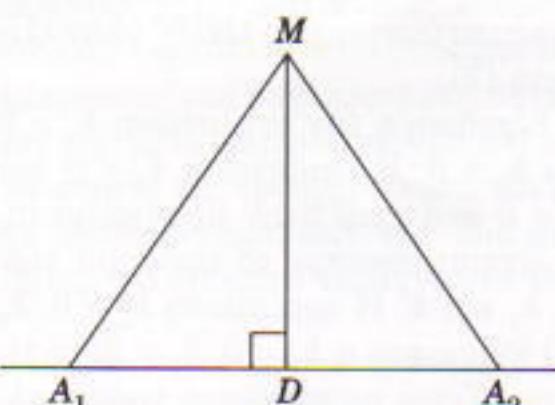
Επλέγουμε ένα τυχαίο σημείο  $M$  του επιπέδου, και έστω  $D$  η προβολή του  $M$  στην ευθεία  $A_1A_2$ . Τότε, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε (βλ. Σχήματα 4 και 5)

$$\begin{aligned}(A_1M)^2 &= (A_1D)^2 + (MD)^2, \\ (A_2M)^2 &= (A_2D)^2 + (MD)^2.\end{aligned}$$

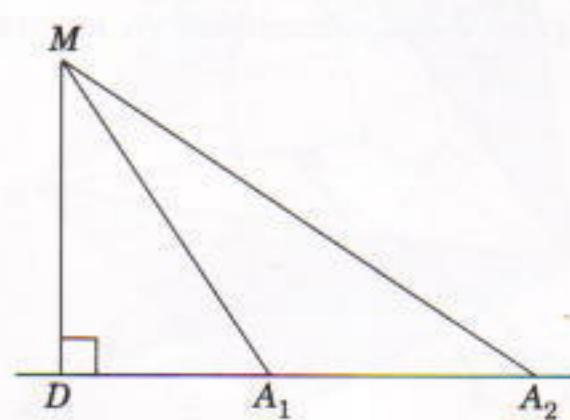
Επομένως,

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = (A_1D)^2 - (A_2D)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

Έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των σημείων  $D$  της ευθείας  $A_1A_2$  που ικανοποιούν την τελευταία ισότητα. Προφανώς, αυτό το σημείο είναι μοναδικό και μπορούμε εύκολα να το βρούμε. Άρα, το σημείο  $M$  πρέπει να ανήκει στην ευθεία που φέρουμε στο σημείο  $D$ , κάθετη επί την  $A_1A_2$ . Αφήνουμε τις υπόλοιπες λεπτομέρειες της απόδειξης για τον αναγνώστη.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Και η αντίστροφη πρόταση είναι αληθής: Για κάθε σημείο της καθέτου επί την  $A_1A_2$ , η διαφορά των αποστάσεών του από το  $A_1$  και το  $A_2$  είναι σταθερή. Αφήνουμε την απόδειξη αυτής της πρότασης για τον αναγνώστη.

Άρα, η Πρόταση 1 αποδείχτηκε.

**Πρόταση 2.** Θα αποδείξουμε την πρόταση με τέλεια επαγωγή. Για  $n = 2$ , η πρόταση έχει ήδη αποδειχτεί. (Αν  $n = 2$  και  $k_1 + k_2 = 0$ , ο γεωμετρικός τόπος των σημείων συμπίπτει με ολόκληρο το επίπεδο ενώ το σημείο  $A_1$  συμπίπτει με το  $A_2$ . Σε αυτή την περίπτωση, για όλα τα σημεία του επιπέδου ισχύει  $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = 0$ .)

Υποθέτουμε τώρα ότι η Πρόταση 2 ισχύει για  $n = N$  και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n = N + 1$ . Παρατηρούμε ότι αν  $N \geq 2$  και αν όλα τα  $k_1, k_2, \dots, k_{N+1}$  είναι διάφορα του μηδενός, τότε υπάρχουν δύο από αυτά που έχουν άθροισμα διάφορο του μηδενός. Έστω ότι αυτά είναι τα  $k_1$  και  $k_2$ . Θεωρούμε το σημείο  $D$  που κατασκευάσαμε κατά την απόδειξη της Πρότασης 1 και εφαρμόζουμε τον τύπο (2). Η ισότητα

$$\begin{aligned}k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + k_3(A_3M)^2 + \dots \\ + k_{N+1}(A_{N+1}M)^2 = k\end{aligned}$$

μπορεί να γραφτεί ως

$$(k_1 + k_2)(DM)^2 + k_3(A_3M)^2 + \dots \\ + k_{N+1}(A_{N+1}M)^2 = k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2.$$

Στο δεξιό μέλος αυτής της ισότητας έχουμε μια σταθερά, το πλήθος των σημείων στο αριστερό μέλος έχει μειωθεί κατά ένα, και το άθροισμα των συντελεστών παραμένει το ίδιο. Επομένως, βάσοι της επαγωγικής υπόθεσης, η Πρόταση 2 ισχύει για την τελευταία εξίσωση. Άρα, ισχύει για  $(N + 1)$  σημεία. Συνεπώς, η Πρόταση 2 αποδείχτηκε.

**Πρόταση 3.** Αναγκαίο: Έστω  $P$  το σημείο τομής των καθέτων που φέρουμε από τα σημεία  $A_1, B_1$  και  $C_1$  στις πλευρές  $BC, AC$  και  $AB$ , αντίστοιχα, του τριγώνου  $ABC$ . Από την Πρόταση 1β έχουμε ότι ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\begin{aligned}(A_1B)^2 - (CA_1)^2 &= (PB)^2 - (CP)^2, \\ (B_1C)^2 - (AB_1)^2 &= (PC)^2 - (AP)^2, \\ (C_1A)^2 - (BC_1)^2 &= (PA)^2 - (BP)^2.\end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε αυτές τις εξισώσεις, βλέπουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (1).

Ικανό: Έστω ότι ικανοποιείται η συνθήκη (1) και έστω  $P$  το σημείο τομής των καθέτων που φέρουμε από τα σημεία  $A_1$  και  $B_1$  στις  $BC$  και  $AC$ , αντίστοιχα. Από την Πρόταση 1β έπειται ότι

$$\begin{aligned}(A_1B)^2 - (CA_1)^2 + (B_1C)^2 - (AB_1)^2 \\ = (PB)^2 - (AP)^2.\end{aligned}$$

Από τη συνθήκη (1) έπειται ότι το αριστερό μέλος αυτής της ισότητας ισούται με  $(BC_1)^2 - (C_1A)^2$ . Δηλαδή,  $(BC_1)^2 - (C_1A)^2 = (PB)^2 - (AP)^2$ , πράγμα που σημαίνει ότι το σημείο  $P$  ανήκει στην κάθετη που φέρουμε από το  $C_1$  στην  $AB$  —δηλαδή, αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

**Πρόταση 4.** Η ισχύς αυτής της πρότασης έπειται από το γεγονός ότι η συνθήκη (1) είναι συμμετρική ως προς τα  $A$  και  $A_1$ ,  $B$  και  $B_1$ ,  $C$  και  $C_1$ .

### Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 3 για να αποδείξετε ότι τα τρία ύψη ενός τριγώνου συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

2. Διδούνται τρεις κύκλοι οι οποίοι τέμνονται ανά δύο. Αποδείξτε ότι οι κοινές χορδές τους συντρέχουν σε ένα σημείο.

3. Αν οι κάθετες που φέρουμε από τα σημεία  $A_1, A_2, \dots, A_n$  στις ευθείες  $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_nB_1$  συντρέχουν σε ένα σημείο, τότε

$$\begin{aligned}(B_1A_1)^2 - (A_1B_2)^2 + (B_2A_2)^2 - (A_2B_3)^2 + \dots \\ + (B_nA_n)^2 - (A_nB_1)^2 = 0.\end{aligned}$$

4. Παρεγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που εφαπτεται σε μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των άλλων δύο πλευρών (και επομένως το κέντρο του βρίσκεται εκτός του τριγώνου). Αποδείξτε ότι οι τρεις κάθετοι που φέρουμε στις πλευρές του τριγώνου, στα σημεία επαφής των πλευρών με έναν από τους παρεγγεγραμμένους κύκλους, συντρέχουν σε ένα σημείο.

5. Έστω  $a, b$  και  $c$  οι αποστάσεις ενός σημείου  $M$  από τις κορυφές  $A, B$  και  $C$ , αντίστοιχα, ενός τριγώνου  $ABC$ . Αποδείξτε ότι, για κάθε  $d \neq 0$ , οι αποστάσεις οποιουδήποτε σημείου

του επιπέδου από τις κορυφές  $A$ ,  $B$  και  $C$  δεν είναι ποτέ ίσες, αντίστοιχα, με

$$\sqrt{a^2 + d}, \quad \sqrt{b^2 + d}, \quad \sqrt{c^2 + d}.$$

**6.** Έστω ισόπλευρο τρίγωνο  $ABC$  και ένα τυχαίο σημείο  $D$ . Έστω  $A_1$ ,  $B_1$  και  $C_1$  τα κέντρα των κύκλων που είναι εγγεγραμμένοι στα τρίγωνα  $BCD$ ,  $ACD$  και  $ABD$ . Αποδείξτε ότι οι κάθετες που φέρουμε από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$  στις  $B_1C_1$ ,  $A_1C_1$  και  $A_1B_1$ , αντίστοιχα, συντρέχουν σε ένα σημείο.

**7.** Έστω  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  και  $A_4$  τυχαία σημεία του επιπέδου. Αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις αριθμοί  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  (ο ένας τουλάχιστον διαφορετικός του μηδενός) τέτοιοι ώστε, για οποιοδήποτε σημείο  $M$  του επιπέδου, το άθροισμα

$$x_1(A_1M)^2 + x_2(A_2M)^2 + x_3(A_3M)^2 + x_4(A_4M)^2$$

να είναι σταθερό.

**8.** Διδεται τρίγωνο  $ABC$ . Θεωρούμε δύλα τα ζεύγη σημείων  $M_1$  και  $M_2$  για τα οποία ισχύει  $AM_1 + BM_1 + CM_1 = AM_2 + BM_2 + CM_2$ . Αποδείξτε ότι όλες οι ευθείες  $M_1M_2$  συντρέχουν σε ένα σημείο.

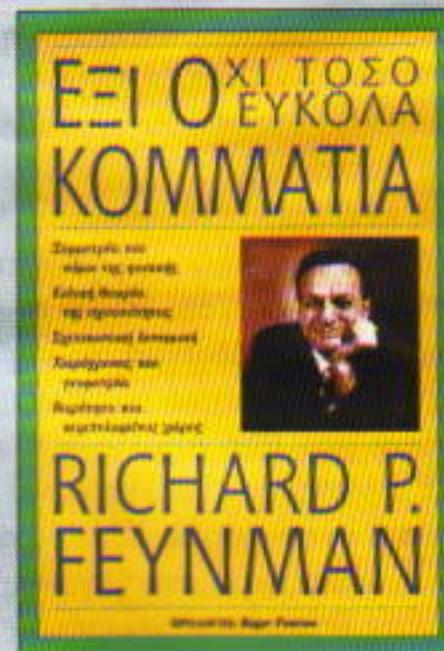
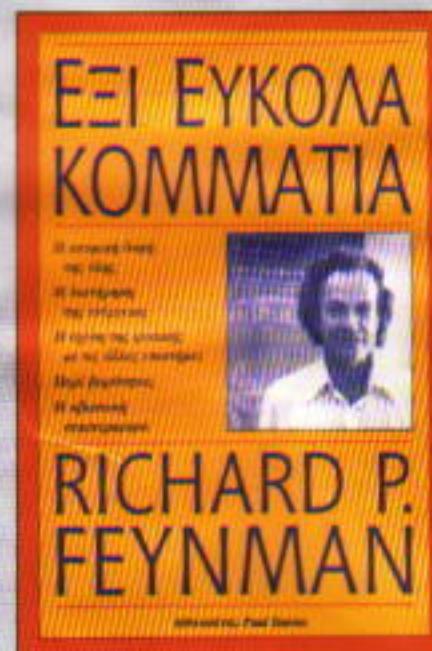
**9.** Ένας κύκλος εφάπτεται στην πλευρά  $AB$  ενός τριγώνου  $ABC$  και στις προεκτάσεις των πλευρών  $AC$  και  $CB$  στα σημεία  $M$  και  $N$ , αντίστοιχα. Ένας άλλος κύκλος εφάπτεται στην πλευρά  $AC$  και στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $BC$  στα σημεία  $P$  και  $K$ , αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το σημείο τομής των ευθειών  $MN$  και  $PK$  ανήκει στο ύψος του τριγώνου  $ABC$  που φέρουμε από την κορυφή  $A$ .

**10.** Διδονται δύο ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $CD$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  για τα οποία το άθροισμα εμβαδών  $(ABM) + (CDM)$  είναι σταθερό.

**11.** Χρησιμοποιείστε το προηγούμενο πρόβλημα για να αποδείξετε ότι τα μέσα των διαγωνίων ενός περιγράψιμου τετραπλεύρου και το κέντρο του εγγεγραμμένου σε αυτό κύκλου ανήκουν στην ίδια ευθεία (Πρόβλημα του Νεύτωνα —δείτε το «Καλειδοσκόπιο» στο παρόν τεύχος).

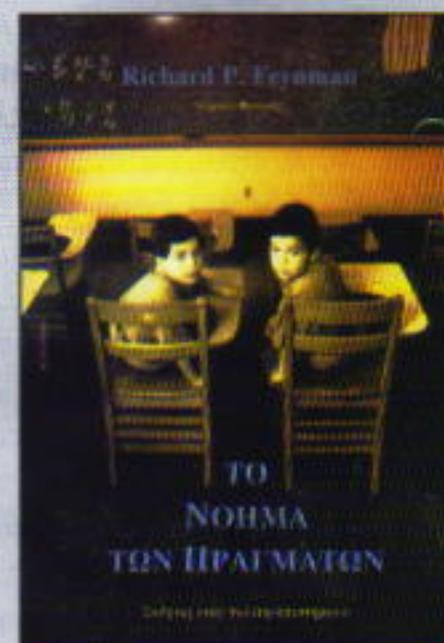
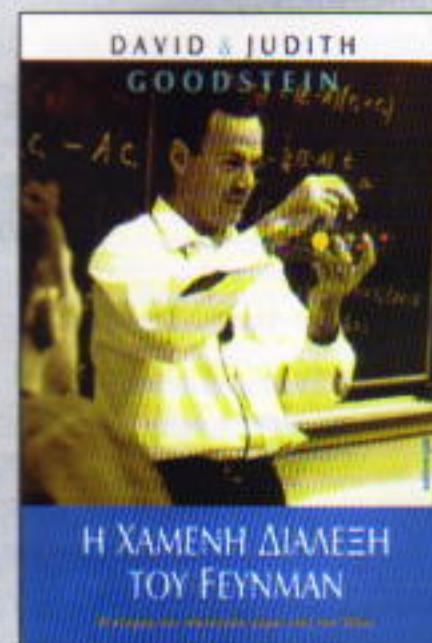
**12.** Αποδείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία ο λόγος των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου είναι σταθερός, διάφορος της μονάδας, είναι κύκλος (ο ονομαζόμενος κύκλος του Απολλώνιου). ◻

## Richard Feynman, ο δάσκαλος

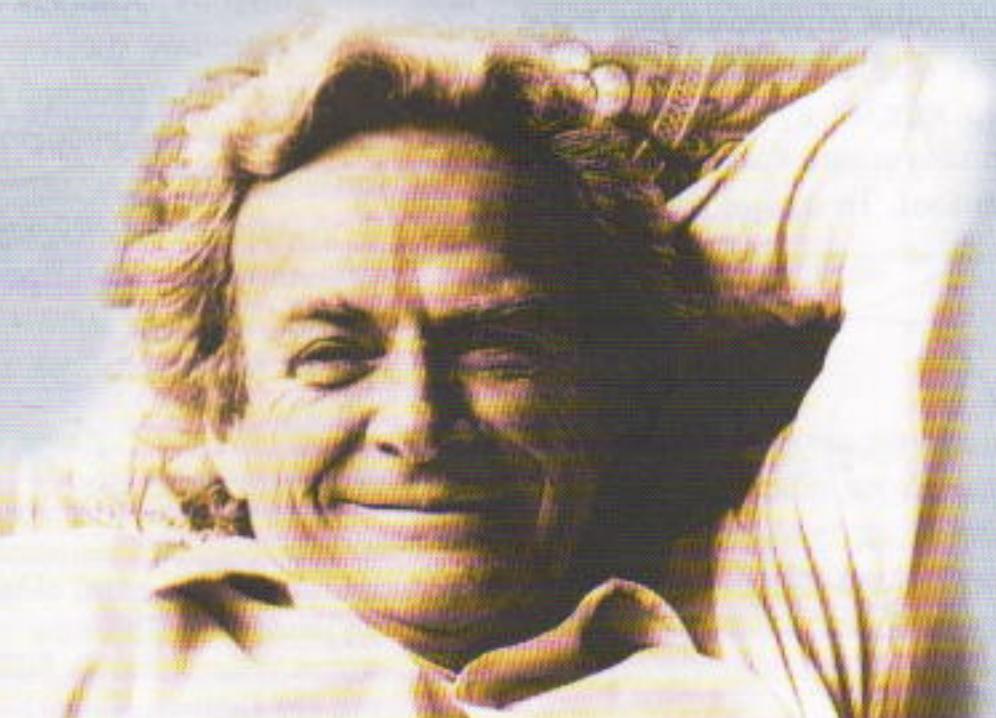


«Οι ιδιοφυείς επιστήμονες ανήκουν σε δύο κατηγορίες: Από τη μια υπάρχουν οι "συνηθισμένοι", που πετυχαίνουν μεν σπουδαία πράγματα, αλλά είσαι σίγουρος πως θα τα κατάφερνες κι εσύ αν προσπαθούσες στον ίδιο τομέα. Από την άλλη υπάρχουν οι "μάγοι", την πηγή έμπνευσης των οποίων αδυνατείς να ανακαλύψεις: απλώς τους ακούς και ταξιδεύεις στα ουράνια. Ένας τέτοιος "μάγος" ήταν ο Feynman...»

—Hans Bethe, βραβείο Νόμπελ Φυσικής



κάποτε



# Γεωμετρικές

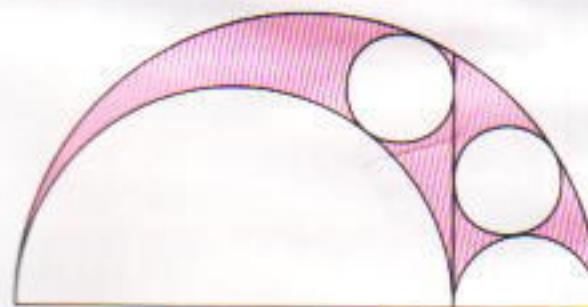
**Ο**ΤΑΝ ΠΡΩΤΟΜΑΘΑΙΝΟΥΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ στο σχολείο, συχνά αποδεικνύουμε θεωρήματα τα οποία είναι τελείως διαισθητικά — για παράδειγμα, το γεγονός ότι δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες. Αντίθετα, όσο προχωράμε στη γεωμετρία, τα πράγματα γίνονται λιγότερο διαισθητικά. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι τα τρία ύψη ενός τριγώνου συντρέχουν στο ίδιο σημείο δεν είναι εξίσου προφανές. Μάλιστα, οι μαθηματικοί στην αρχαία Ελλάδα αγνοούσαν το συγκεκριμένο γεγονός, παρότι ήταν θαυμάσιοι γεωμέτρες και γνώριζαν τις αντίστοιχες προτάσεις για τις τρεις διχοτόμους και τις τρεις διαμέσους του τριγώνου.

Όταν ένα μαθηματικό γεγονός είναι απρόσποτο αποκτά μια ιδιαίτερη γοητεία. Είναι κάτι που, όπως οι απρόσμενες και κομψά σύντομες αποδείξεις, προσφέρει ομορφία στα μαθηματικά.

Σε αυτό το άρθρο θα γνωρίσετε μερικά απροσδόκητα γεωμετρικά γεγονότα.

Ας κατασκευάσουμε δύο κύκλους και ας φέρουμε εφαπτόμενες από το κέντρο κάθε κύκλου προς τον άλλο κύκλο (Σχήμα 1). Συνδέουμε τα σημεία τομής αυτών των εφαπτομένων με τους κύκλους. Το τετράπλευρο που προκύπτει αποδεικνύεται ορθογώνιο! Δεν γνωρίζουμε ποιος ανακάλυψε πρώτος τούτο το απρόσμενο γεγονός. Προσπαθήστε να το αποδείξετε — δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο.

Στον Αρχιμήδη οφείλουμε την επόμενη γεωμετρική έκπληξη. Όταν μελετούσε μηνίσκους που σχηματίζονται από κύκλους, ανακάλυψε ότι δύο κύκλοι εγγεγραμμένοι σε «καμπυλόγραμμα τρίγωνα» (Σχήμα 2) είναι ίσοι. Το σχήμα που προκύπτει ο

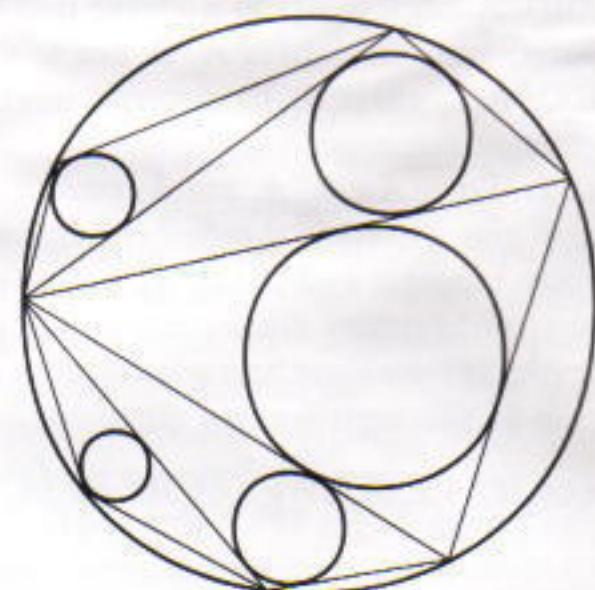


Σχήμα 2

ταν αφαιρέσουμε τα δύο μικρότερα ημικύκλια από το μεγαλύτερο μου θυμίζει μεσαιωνικό πέλεκυ. Ο Αρχιμήδης, ο οποίος έζησε πολύ παλιότερα, πίστευε ότι αυτό το σχήμα μοιάζει με το μαχαίρι του τσαγκάρη που ονομαζόταν άρβηλος. Έτσι, αυτό το θεώρημα είναι γνωστό στα μαθηματικά ως το θεώρημα της αρβήλου.<sup>1</sup>

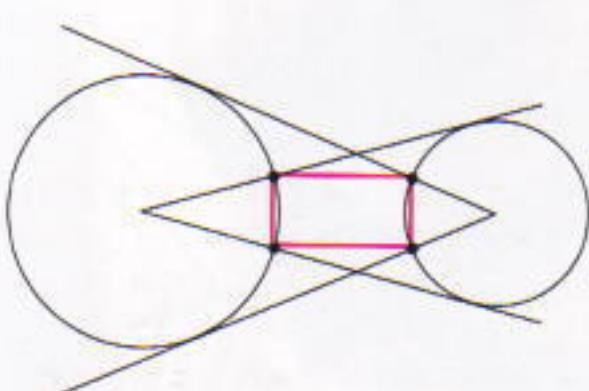
Είναι ενδιαφέρον ότι πολλά εντυπωσιακά μαθηματικά γεγονότα απεικονίζονται στους τοίχους ιαπωνικών ναών. Οι ιάπωνες μαθηματικοί τα ανακάλυψαν πριν από πολλούς αιώνες. Τον 18ο αιώνα σε έναν τέτοιο ναό χαράχτηκε η επόμενη παρατήρηση: Χωρίζουμε ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο σε τρίγωνα φέροντας όλες τις διαγωνίους από μια κορυφή του (Σχήμα 3). Στη συνέχεια, εγγράφουμε κύκλους σε όλα τα τρίγωνα που προκύπτουν. Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των ακτίνων αυτών των κύκλων είναι σταθερό και ανεξάρτητο από την επιλεγόμενη κορυφή του πολυγώνου.

Αργότερα αποδείχτηκε ότι το ίδιο άθροισμα ακτίνων προκύπτει για οποιαδήποτε ανάλυση του εγγεγραμμένου πολυγώνου σε τρίγωνα (Σχήμα 4).

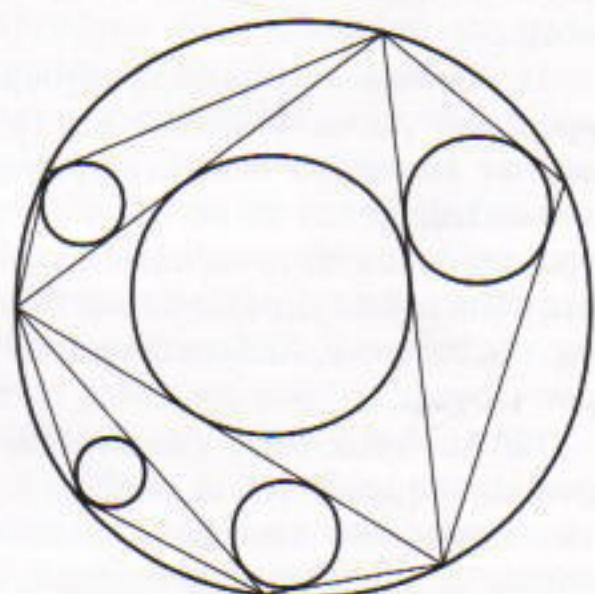


Σχήμα 3

Έχετε οπωσδήποτε ασχοληθεί με τετράπλευρα εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα σε κύκλο. Τα τετράπλευρα αυτά έχουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Μια τέτοια ιδιότητα ανακάλυψε ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, ο οποίος έζησε τον 2ο αιώνα μ.Χ. Είναι γνωστός ως εξέχων αστρονόμος, αλλά συνέβαλε και στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Ανακάλυψε ότι το άθροισμα των γινομένων των μηκών των απέναντι πλευρών ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου (Σχήμα 5) ισούται με το γινόμενο των μηκών των διαγωνίων του. Ο Πτολεμαίος



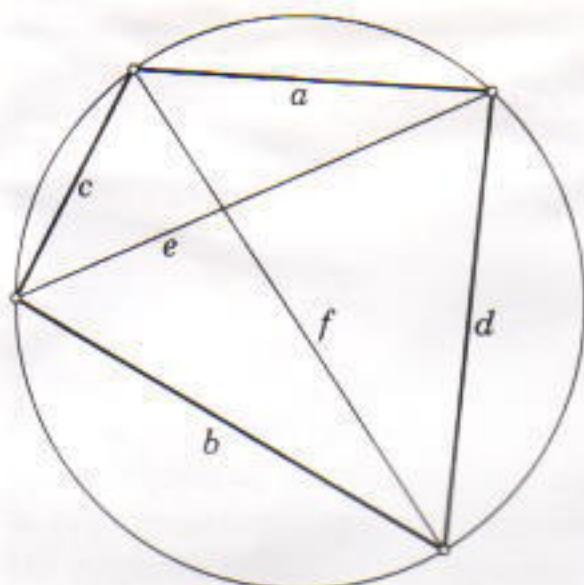
Σχήμα 1



Σχήμα 4

1. Το θεώρημα αυτό υπάρχει στα Λήμματα του Αρχιμήδη, του οποίου το ελληνικό πρωτότυπο έχει χαθεί, αλλά υπάρχει αραβική μετάφραση. Το όνομα «άρβηλος» για το σχήμα υπάρχει στο 4ο βιβλίο της Συναγωγής του Πάππου. (Σ.τ.ε.)

# ΕΚΠΛΗΞΕΙΣ



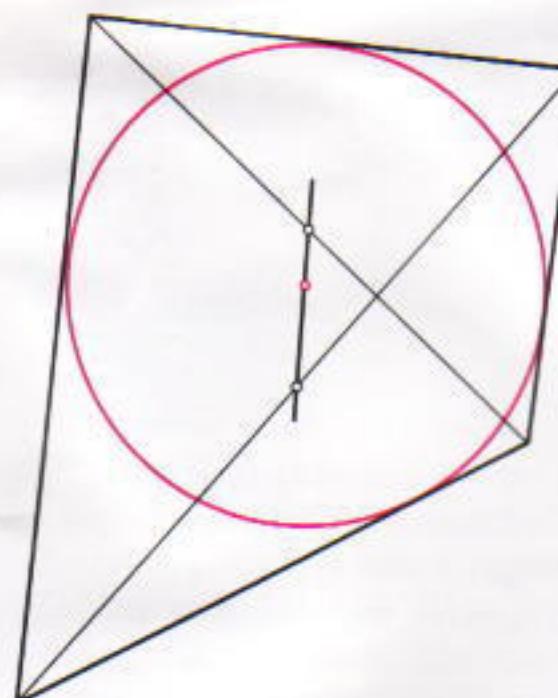
Σχήμα 5

χρησιμοποίησε ειδικές περιπτώσεις αυτού του θεωρήματος (το οποίο είναι πλέον γνωστό ως θεώρημα του Πτολεμαίου) στους αστρονομικούς υπολογισμούς του.<sup>2</sup>

Ένα άλλο ενδιαφέρον θεώρημα που αφορά περιγράφιμα τετράπλευρα ανήκει στον Νεύτωνα, ο οποίος παρατήρησε ότι το κέντρο του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τετράπλευρο ανήκει στην ευθεία η οποία διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του (Σχήμα 6).

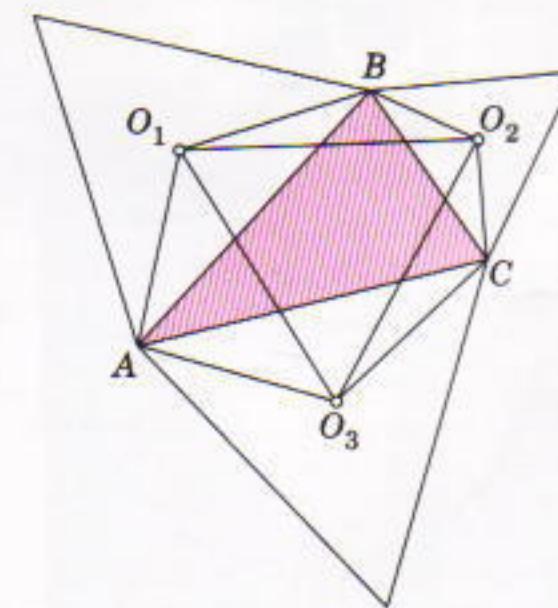
Επόμενος στον κατάλογο των διασημοτήτων που ανακάλυψαν απρόσμενες ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων είναι ο Ναπολέοντας, ο οποίος ήταν σοβαρός μελετητής της γεωμετρίας και μάλιστα ανακοίνωσε ένα άρθρο του στην Ακαδημία Επιστημών των Παρισίων. Το θεώρημα που του αποδίδεται είναι το εξής: Στις πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα και σημειώνουμε τα κέντρα τους  $O_1$ ,  $O_2$  και  $O_3$  (Σχήμα 7). Αποδεικνύεται ότι το τρίγωνο  $O_1O_2O_3$  είναι ισόπλευρο.

Η απόδειξη αυτού του γεγονότος

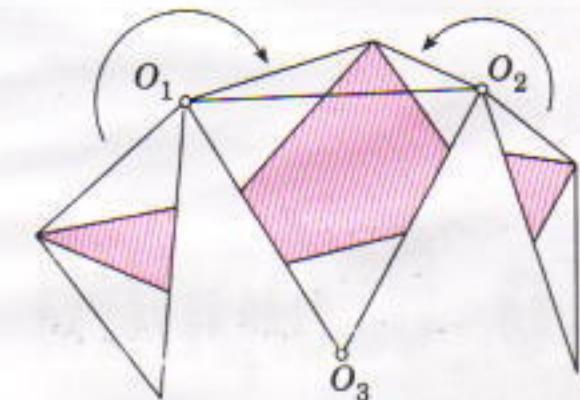


Σχήμα 6

είναι απλή και κομψή. Συνδέουμε τα σημεία  $O_1$ ,  $O_2$  και  $O_3$  με τις πλησιέστερες κορυφές του τριγώνου  $ABC$ . Κατόπιν περιστρέφουμε γύρω από τα σημεία  $O_1$  και  $O_2$  δύο από τα τρίγωνα που προκύπτουν, όπως στο Σχήμα 8. Το τρίγωνο που σχηματίζεται τώρα από αυτά τα τρία τρίγωνα έχει τις ίδιες πλευρές με το τρίγωνο  $O_1O_2O_3$ , και αποδεικνύεται εύκολα ότι οι γωνίες του είναι ίσες με  $60^\circ$ . Άρα, το πάνω τρίγωνο του Σχήματος 9 είναι ισόπλευρο· επομέ-

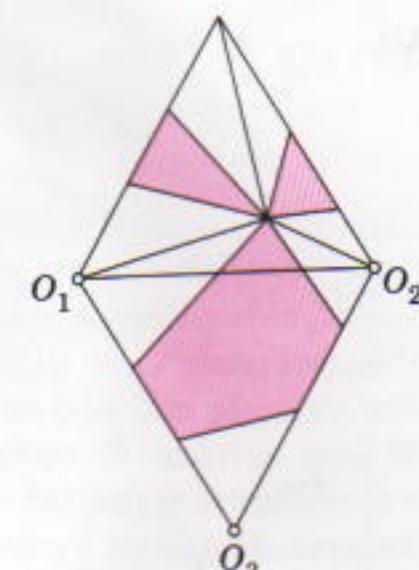


Σχήμα 7



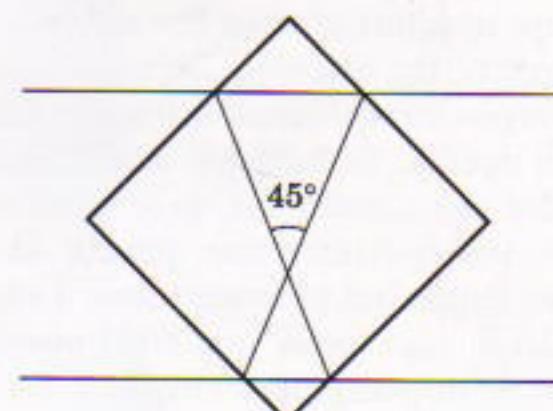
Σχήμα 8

νως, το τρίγωνο  $O_1O_2O_3$  είναι επίσης ισόπλευρο.



Σχήμα 9

Θέλω να ολοκληρώσω τούτη τη συλλογή απρόσπτων μαθηματικών γεγονότων με μια κομψή μινιατούρα του μοσχοβίτη μαθηματικού V. Proizvolov. Θεωρούμε μια λωρίδα που σχηματίζεται από δύο παράλληλες ευθείες. Τοποθετούμε πάνω στη λωρίδα ένα τετράγωνο, οι πλευρές του οποίου έχουν μήκος ίσο με το πλάτος



Σχήμα 10

της λωρίδας. Στη συνέχεια συνδέουμε «σταυρωτά» τα σημεία τομής των πλευρών του τετραγώνου με τα σύνορα της λωρίδας (Σχήμα 10). Οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές οι ευθείες ισούνται με  $45^\circ$ . Εντυπωσιακό, ε;

—A. Savin

2. Β.λ. Μ. Λάμπρου, «Το μαθηματικό έργο του Πτολεμαίου», *Quantum*, Μάρτ./Απρ. 2000. (Σ.τ.ε.)

# Το θεώρημα Borsuk-Ulam

Κλιματολογικές συνθήκες, ιπποδρόμια και συνεχείς συναρτήσεις

M. Krein και A. Nudelman

**Ο**ΚΑΙΡΟΣ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΤΡΟΠΟΣ. ΟΙ παράμετροι που τον περιγράφουν (για παράδειγμα, η πίεση, η θερμοκρασία και η υγρασία) αλλάζουν συνεχώς από ώρα σε ώρα και από τόπο σε τόπο. Οι ισοθερμικές και οι ισοβαρείς καμπύλες στους μετεωρολογικούς χάρτες έχουν παράδοξο (και, δυστυχώς, συχνά απρόβλεπτο) σχήμα. Και όμως, όσο περιπλοκή μορφή και αν έχουν οι μετεωρολογικοί χάρτες, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

**Μετεωρολογικό θεώρημα.** Κάθε χρονική σπιγμή, υπάρχει ένα ζεύγος διαμετρικά αντίθετων σημείων της υδρογείου («αντίποδες») που έχουν την ίδια θερμοκρασία και πίεση.

Αν και διατυπώσαμε αυτή την πρόταση με μετεωρολογικούς όρους, στην πραγματικότητα δεν αφορά ιδιότητες της ατμόσφαιρας αλλά των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στη σφαίρα. Το θεώρημα ανήκει στο πεδίο της τοπολογίας, ενός κλάδου των μαθηματικών που, μεταξύ άλλων, ασχολείται με συναρτήσεις ή σύνολα συναρτήσεων που είναι συνεχείς σε συγκεκριμένα σύνολα.

Μερικές ιδιότητες τέτοιων συναρτήσεων καθορίζονται από τη δομή του συνόλου επί του οποίου ορίζονται. Για παράδειγμα, το επόμενο θεώρημα ισχύει για τις πραγματικές συναρτήσεις που μελετάμε στο λύκειο:

**Θεώρημα ριζών.** Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$  και στα άκρα αυτού του διαστήματος λαμβάνει τιμές με αντίθετα πρόσημα,

τότε υπάρχει σημείο  $x_0$  μεταξύ του  $a$  και του  $b$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .

Δεν πρόκειται να αποδείξουμε το θεώρημα — γεωμετρικώς μοιάζει προφανές αλλά, παραδόξως, η απόδειξή του δεν είναι καθόλου τετριμμένη.

Για να αληθεύει το «θεώρημα ριζών» είναι απαραίτητες και η συνέχεια της συνάρτησης και η συνεκτικότητα του διαστήματος. Οι αναγνώστες μπορούν να ερευνήσουν για ποιο λόγο χρειαζόμαστε τη συνέχεια. Με τη «συνεκτικότητα» εννοούμε ότι δεν υπάρχουν «χάσματα» στο διάστημα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(4 - x^2)} + 2x$$

είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της  $[-2, -1] \cup [1, 2]$ , είναι αρνητική στο  $[-2, -1]$  και θετική στο  $[1, 2]$ . Όμως, σε κανένα σημείο δεν παίρνει τιμή μηδέν.

Σε αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε μερικές ιδιότητες ζευγών συνεχών

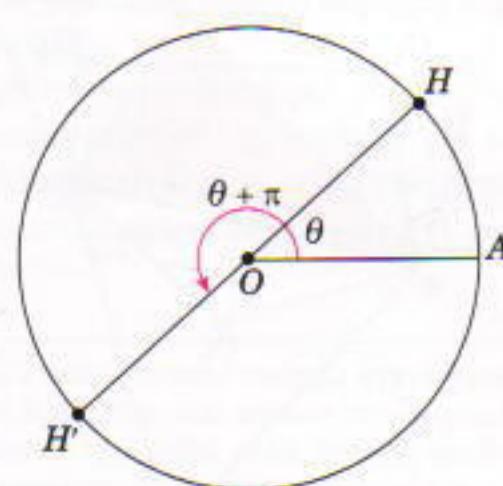
συναρτήσεων που ορίζονται σε σφαίρα. Πρώτα όμως θα ασχοληθούμε με μια απλούστερη περίπτωση: μια απρόσμενη ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στον κύκλο.

## Η επίδειξη ενός αλόγου του τσίρκου

Ας υποθέσουμε ότι ένα άλογο του τσίρκου αρχίζει ομαλά να τρέχει γύρω από την κυκλική πίστα και σταματά ομαλά στο ίδιο σημείο απ' όπου ξεκίνησε. Αποδεικνύεται ότι ανεξάρτητα από το πόσο αυξομειώνεται η ταχύτητα του αλόγου κατά την κούρσα του, υπάρχει ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων στα οποία το άλογο έχει την ίδια ταχύτητα.

Δεν χρειάζεται να αναφέρουμε ότι η αιτία αυτού του φαινομένου δεν είναι το άλογο — στη συνέχεια, μάλιστα, θα μετατρέψουμε το άλογο σε σημείο. Το φαινόμενο οφείλεται σε μια ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του αλόγου  $H$  πάνω στον κύκλο μέσω του μέτρου της γωνίας  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) που σχηματίζει η ακτίνα  $OH$  με την ακτίνα  $OA$  (όπου  $A$  είναι το σημείο εκκίνησης του αλόγου — βλ. Σχήμα 1). Θα συμβολίσουμε την αντίστοιχη ταχύτητα με  $v(\theta)$ . Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $v$  είναι συνεχής στο  $[0, 2\pi]$  (το άλογο αρχίζει και σταματά να τρέχει με ομαλό τρόπο) και σύμφωνα με την εκφόνη-



Σχήμα 1

Fantastic Power of Mathematician



Tishkowsky 2000

17 Sept.

ση του προβλήματος  $v(0) = 0$ ,  $v(2\pi) = 0$ . Το σημείο  $H'$ , το αντιδιαμετρικό του  $H$ , ορίζεται από τη γωνία  $\theta + \pi$  (όπου  $0 \leq \theta \leq \pi$ ). Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει  $\theta_0 \in [0, \pi]$ , τέτοιο ώστε  $v(\theta_0 + \pi) = v(\theta_0)$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $u(\theta) = v(\theta + \pi) - v(\theta)$ . Θέλουμε να βρούμε ένα  $\theta_0 \in [0, \pi]$ , τέτοιο ώστε  $u(\theta_0) = 0$ . Η συνάρτηση  $u$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, \pi]$  (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) και οι τιμές που λαμβάνει στα άκρα αυτού του διαστήματος είτε έχουν αντίθετο πρόσημο (αν  $v(\pi) \neq 0$ ) είτε είναι και οι δύο μηδέν (αν  $v(\pi) = 0$ ). Πράγματι,  $u(0) = v(\pi) - v(0) = v(\pi)$  και  $u(\pi) = v(2\pi) - v(\pi) = -v(\pi)$ . Αν  $v(\pi) = 0$ , μπορούμε να θέσουμε  $\theta_0 = 0$ , διαφορετικά η ύπαρξη του  $\theta_0$  έπειτα από το θεώρημα ριζών.

Παρατηρούμε ότι για την απόδειξη του θεώρηματος δεν πρέπει απαραίτητη η συνάρτηση  $v(\theta)$  να είναι μη αρνητική. (Δηλαδή, το άλογο μπορεί μερικές φορές να τρέχει προς την αντίθετη κατεύθυνση.) Από τις συνθήκες  $v(0) = 0$  και  $v(2\pi) = 0$ , μόνο η ισότητα  $v(0) = v(2\pi)$  έχει ουσιαστική σημασία. (Το άλογο μπορεί να διέλθει από το αρχικό σημείο  $A$  με μη μηδενική ταχύτητα. Αυτό που έχει σημασία είναι να επιστρέψει σε αυτό το σημείο με την ίδια ταχύτητα.)

Είναι φανερό ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τη  $v$  συνάρτηση του σημείου  $H$  αντί για συνάρτηση του αριθμού  $\theta$ . Επομένως, το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής.

**Θεώρημα του «αλόγου».** Έστω μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη επί ενός κύκλου. Τότε υπάρχουν δύο αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου στα οποία η συνάρτηση παίρνει ίσες τιμές.

## Μαθηματικές διατυπώσεις του μετεωρολογικού θεώρηματος

Ας διατυπώσουμε το μετεωρολογικό θεώρημα συναρτήσει μαθηματικών όρων. Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, σε κάθε σημείο  $P$  της επιφάνειας  $S$  της Γης μπορούν να προσαρτηθούν δύο αριθμοί —η πίεση  $f(P)$  και η θερμοκρασία  $g(P)$ . Συνεπώς, στη σφαίρα ορίζονται δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς. Πραγματικά, οι τιμές αυτών των συ-

ναρτήσεων δεν μπορεί να αλλάζουν ουσιαστικά όταν η θέση του σημείου  $P$  μεταβάλλεται ελαφρώς.

Ο ακριβής ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης που ορίζεται σε ένα τυχαίο σύνολο σημείων  $X$  (της ευθείας, του επιπέδου ή του χώρου) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. Η συνάρτηση  $\varphi$  είναι συνεχής στο σημείο  $P_0 \in X$  αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε, για κάθε σημείο  $P \in X$  που απέχει από το  $P_0$  λιγότερο από  $\delta$ , να ισχύει η ανισότητα  $|\varphi(P) - \varphi(P_0)| < \epsilon$ . Η συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο  $X$  αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο αυτού του συνόλου.

Θα συμβολίζουμε με  $P'$  το άκρο της διαμέτρου μιας σφαίρας με άλλο άκρο το σημείο  $P$ .

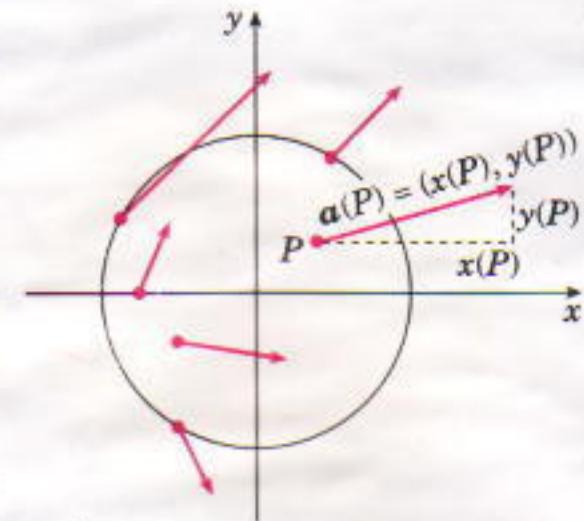
Αφήνοντας κατά μέρος τη «μετεωρολογική» σημασία των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ , θα διατυπώσουμε το θεώρημα στη γενική του μορφή.

**Θεώρημα Borsuk-Ulam.**<sup>1</sup> Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ορίζονται σε μια σφαίρα  $S$  και είναι συνεχείς, τότε υπάρχουν δύο αντιδιαμετρικά σημεία  $P_0$  και  $P'_0$  της σφαίρας τέτοια ώστε  $f(P'_0) = f(P_0)$  και  $g(P'_0) = g(P_0)$ .

Θα εισαγάγουμε δύο συναρτήσεις: την  $F(P) = f(P') - f(P)$  και την  $G(P) = g(P') - g(P)$ . Και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς και αντισυμμετρικές:  $F(P') = -F(P)$  και  $G(P') = -G(P)$ . Για παράδειγμα,  $F(P') = f((P')') - f(P') = f(P) - f(P') = -F(P)$ . Για τα σημεία  $P_0 \in S$  τα οποία είναι τέτοια ώστε  $f(P'_0) = f(P_0)$  και  $g(P'_0) = g(P_0)$ , και μόνο γι' αυτά, έχουμε  $F(P_0) = 0$  και  $G(P_0) = 0$ .

Επομένως, το θεώρημα Borsuk-Ulam προκύπτει από το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα της κοινής ρίζας.** Αν οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι συνεχείς και αντισυμμετρικές σε μια σφαίρα  $S$ , τότε υπάρχει ένα σημείο  $P_0$  στο οποίο και οι δύο αυτές συναρτήσεις παίρνουν



Σχήμα 2

πιμή ίση με το μηδέν:  $F(P_0) = G(P_0) = 0$ .

## Θεώρημα μηδενισμού των διανυσματικών πεδίων

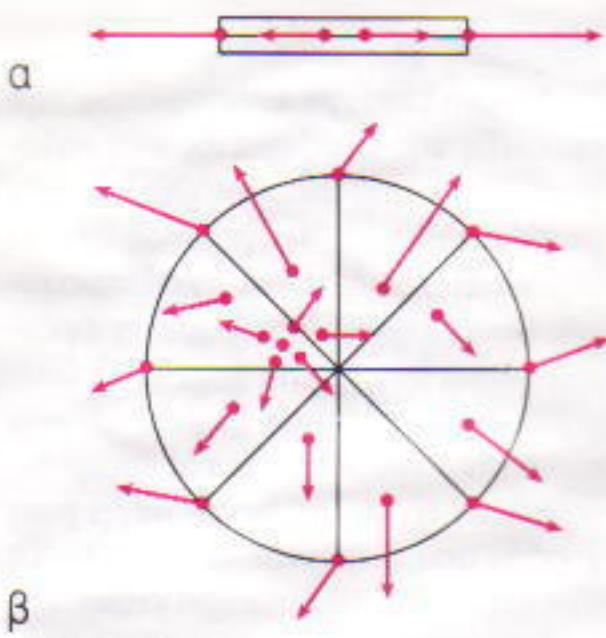
Το θεώρημα ριζών δίνει τις ικανές συνθήκες για να μηδενίζεται σ' ένα διάστημα μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε αυτό. Το θεώρημα που θα διατυπώσουμε τώρα μας προσφέρει ένα κριτήριο για την ύπαρξη κοινής ρίζας δύο συναρτήσεων που είναι συνεχείς σε έναν κύκλο.

Έστω ότι σε κάθε σημείο  $Q$  ενός συνόλου  $K$  του επιπέδου (που για μας θα είναι συνήθως κύκλος) αντιστοιχούμε ένα διάνυσμα  $a(Q)$  του ίδιου επιπέδου. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχει οριστεί ένα διοδιάστατο διανυσματικό πεδίο επί του  $K$  (Σχήμα 2). Ένα διάνυσμα του επιπέδου ορίζεται από δύο συντεταγμένες. Επομένως, ο ορισμός ενός διοδιάστατου διανυσματικού πεδίου είναι ισοδύναμος με τον ορισμό δύο συναρτήσεων:  $a(Q) = (x(Q), y(Q))$ .

Το διανυσματικό πεδίο καλείται συνεχές στο σημείο  $Q_0$  όταν και οι δύο συναρτήσεις,  $x(Q)$  και  $y(Q)$ , είναι συνεχείς σε αυτό το σημείο. Το διανυσματικό πεδίο είναι συνεχές σε ένα δεδομένο σύνολο αν είναι συνεχές σε κάθε σημείο αυτού του συνόλου. Θα λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο εκφυλίζεται στο σύνολο  $K$  αν  $a(Q_0) = 0$  για κάποιο συγκεκριμένο σημείο  $Q_0 \in K$ . Θέλουμε να βρούμε ικανές συνθήκες για να εκφυλίζεται ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε έναν κύκλο.

Πρώτα θα δώσουμε μια διανυσματική ερμηνεία του θεώρηματος ριζών. Ένα διάνυσμα ορισμένο επί μιας ευ-

1. Ο Karol Borsuk (γεννήθηκε το 1915) είναι πολωνός μαθηματικός, και ασχολήθηκε κυρίως με την τοπολογία. Ο Stanisław Ulam (1909-1984) ήταν αμερικανός μαθηματικός (πολωνικής καταγωγής) ασχολήθηκε με ευρύ φάσμα θεμάτων στα μαθηματικά, και με τις ιδέες του συνέβαλε στη δημιουργία της υδρογονοβόμβας. (Σ.τ.ε.)



Σχήμα 3

θείας ορίζεται από μια μοναδική συντεταγμένη. Επομένως, μια συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα μπορεί να θεωρηθεί μονοδιάστατο διανυσματικό πεδίο (αποτελούμενο από διανύσματα που έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με τη δεδομένη ευθεία). Συνεπώς, το θεώρημα ριζών μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

**Θεώρημα ριζών ενός μονοδιάστατου διανυσματικού πεδίου.** Αν ένα συνεχές μονοδιάστατο διανυσματικό πεδίο ορίζεται σε ένα διάστημα και τα διανύσματα που αντιστοιχούν στα άκρα αυτού του διαστήματος έχουν αντίθετες διευθύνσεις, τότε το διανυσματικό πεδίο είναι εκφυλισμένο (βλ. Σχήμα 3α).

Τούτο το θεώρημα επεκτείνεται στην περίπτωση του δισδιάστατου διανυσματικού πεδίου ως εξής.

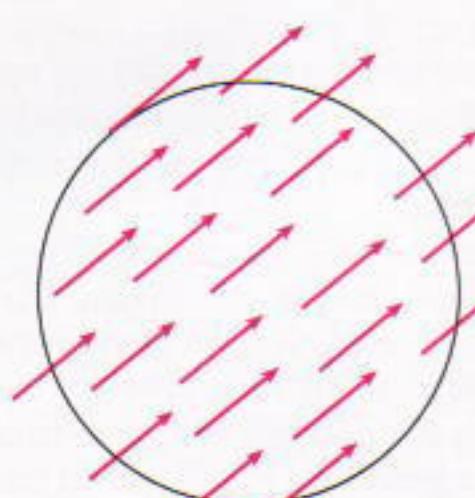
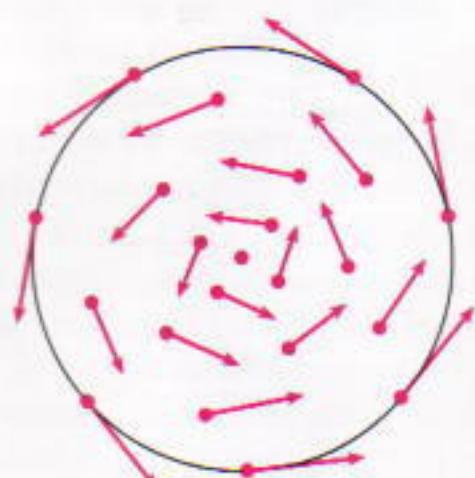
**Θεώρημα ριζών ενός δισδιάστατου διανυσματικού πεδίου.** Αν ένα συνεχές δισδιάστατο διανυσματικό πεδίο ορίζεται σε έναν κύκλο και τα διανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της περιφέρειάς του έχουν αντίθετες διευθύνσεις, τότε αυτό το διανυσματικό πεδίο είναι εκφυλισμένο (βλ. Σχήμα 3β).

Οι αποδείξεις του «μονοδιάστατου» και του «δισδιάστατου» θεωρήματος ριζών θα μας απομάκρυναν πολύ από τη σχολική ύλη. Ενώ όμως είναι εύκολο να αντιληφθούμε οπτικά το μονοδιάστατο θεώρημα, δεν συμβαίνει το ίδιο και στην περίπτωση του δισδιάστατου διανυσματικού πεδίου. Θα δώσουμε όμως μια «ευλογοφανή εξηγηση», που κατά κάποιον τρόπο πεί-

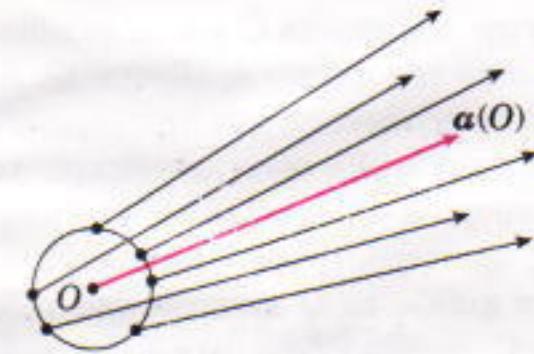
θει για την ισχύ του θεωρήματος.

Έστω  $O$  το κέντρο ενός κύκλου  $K$  και  $r$  η ακτίνα του. Θα συμβολίσουμε την περιφέρεια του κύκλου με  $C$  και, για κάθε αριθμό  $a$ , θα συμβολίζουμε με  $C_a$  την περιφέρεια του κύκλου με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $a$ . Έστω  $\alpha$  ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο στο  $K$ . Υποθέτουμε ότι  $\alpha(Q) \neq 0$ , για κάθε  $Q \in C_a$ . Ας παρακολουθήσουμε τη διεύθυνση του διανύσματος  $\alpha(Q)$  καθώς το σημείο  $Q$  κινείται πάνω στην  $C_a$ . Ας συμβολίσουμε με  $v(C_a)$  το πλήθος των αριστερόστροφων πλήρων περιστροφών που εκτελεί το διάνυσμα  $\alpha(Q)$  καθώς το σημείο  $Q$  κινείται αριστερόστροφα επί της  $C_a$ . Ο ακέραιος  $v(C_a)$  μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν. Επισημαίνουμε ότι αν το  $\alpha(Q)$  εκτελεί ορισμένες αριστερόστροφες και ορισμένες δεξιόστροφες περιστροφές καθώς το  $Q$  κινείται σε ένα τόξο της  $C_a$ , οι περιστροφές αυτές μπορεί να «αλληλοεξουδετερώνονται». Σας προτείνουμε να προσπαθήσετε να βρείτε το  $v(C)$  για τα πεδία που απεικονίζονται στο Σχήμα 4 (το πεδίο ταχυτήτων ενός περιστρεφόμενου κύκλου και το πεδίο που αντιστοιχεί σε μια παράλληλη μετατόπιση).

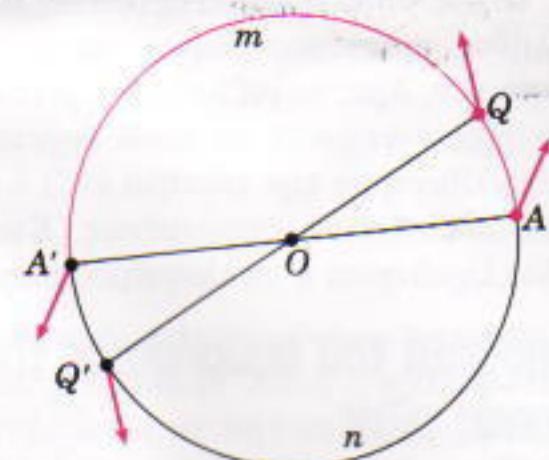
Έστω  $\alpha(Q)$  (όπου  $Q \in K$ ) ένα δια-



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

νυσματικό πεδίο που ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος —δηλαδή, ότι  $\alpha(Q) \neq 0$  για κάθε  $Q \in K$ . Τότε, θα έχουμε  $\alpha(0) \neq 0$ . Λόγω της συνέχειας του πεδίου, σε κοντινές περιοχές του  $0$ , η διεύθυνση όλων των διανυσμάτων  $\alpha(Q)$  θα είναι κοντά στη διεύθυνση του  $\alpha(0)$ . Επομένως, για κάποιο κατάλληλα μικρό  $\varepsilon_0 > 0$  έχουμε  $v(C_{\varepsilon_0}) = 0$ , διότι η διεύθυνση των διανυσμάτων στο  $C_{\varepsilon_0}$  είναι «σχεδόν ίδια» με τη διεύθυνση του  $\alpha(0)$  (βλ. Σχήμα 5) και το διάνυσμα  $\alpha(Q)$  δεν εκτελεί καμιά πλήρη περιστροφή καθώς το  $Q$  μετακινείται επί του  $C_{\varepsilon_0}$ . Αυξάνουμε τώρα σταδιακά το  $\varepsilon$  μέχρι την ακραία του τιμή  $\varepsilon = 1$ . Αφού  $\alpha(Q) \neq 0$ , το  $v(C_\varepsilon)$  ορίζεται για κάθε τιμή του  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Δηλαδή, η συνάρτηση  $v(C_\varepsilon)$  (θεωρούμενη ως συνάρτηση του  $\varepsilon$ ) ορίζεται για κάθε  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής (αφού το πεδίο μας είναι συνεχές) και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Όμως, μια συνάρτηση με ακέραιες τιμές αλλάζει μόνο με άλματα (κάθε άλμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1). Συνεπώς, είναι μη συνεχής ή σταθερά. Άρα, στην περίπτωσή μας έχουμε  $v(C_\varepsilon) =$  σταθερά και, επομένως,  $v(C) = v(C_{\varepsilon_0}) = 0$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο

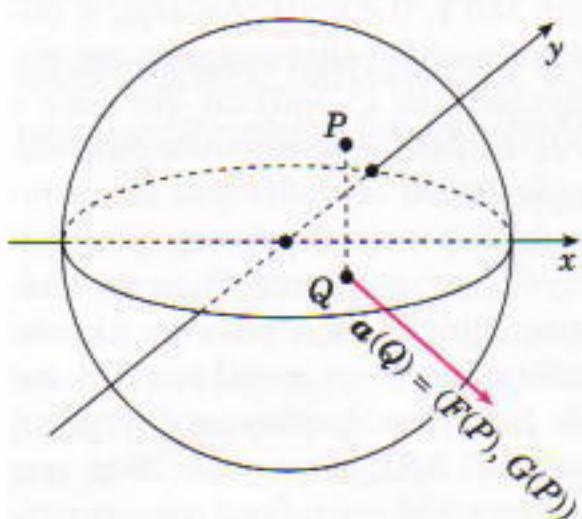
Α στην περιφέρεια  $C$  και το αντιδιαμετρικό του σημείο  $A'$  (Σχήμα 6). Αφού οι διευθύνσεις των διανυσμάτων  $a(A)$  και  $a(A')$  είναι αντίθετες, το διάνυσμα  $a(Q)$  εκτελεί περιττό πλήθος αριστερόστροφων ημιπεριστροφών καθώς το  $Q$  κινείται στο τόξο  $AaA'$ , από το  $A$  στο  $A'$ . Όταν το  $Q$  κινηθεί στο τόξο  $A'nA$ , από το  $A'$  στο  $A$ , το διάνυσμα  $a(Q)$  θα εκτελέσει ίσο πλήθος αριστερόστροφων ημιπεριστροφών. Άρα, το  $v(C)$  είναι περιττός αριθμός —γεγονός το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την ισότητα  $v(C) = 0$  που αποδείξαμε προηγουμένως. Έτσι ολοκληρώνεται ο συλλογισμός μας.

### Απόδειξη του θεωρήματος της κοινής ρίζας

Έστω ότι οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι συνεχείς και αντισυμμετρικές στη σφαίρα  $S$ :

$$F(A') = -F(A), \quad G(A') = -G(A).$$

Κατασκευάζουμε ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο  $O$  της  $S$ . Η εγκάρσια τομή είναι ένας κύκλος  $K$ , και έστω  $C$  η περιφέρειά του. Ας εισαγάγουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο τέμνον επίπεδο με αρχή το κέντρο της σφαίρας. Σε κάθε σημείο  $Q \in K$  αντιστοιχίζουμε ένα διάνυσμα  $a(Q)$  με συντεταγμένες  $F(P)$  και  $G(P)$ , όπου  $P$  είναι το σημείο του άνω ημισφαιρίου που προβάλλεται στο  $Q$  (Σχήμα 7). Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι αυτό το διανυσματικό πεδίο είναι συνεχές στο  $K$ . Λόγω της αντισυμμετρικής ιδιότητας των συναρτήσεων  $F$  και  $G$  βρίσκουμε, για κάθε  $Q \in C$ , ότι ισχύει



Σχήμα 7

$$a(Q) = -a(Q').$$

Από το θεώρημα ριζών για τα δισδιάστατα διανυσματικά πεδία έχουμε ότι υπάρχει ένα σημείο  $Q_0 \in K$  τέτοιο ώστε  $a(Q_0) = \mathbf{0}$ . Επομένως,  $F(P_0) = 0$  και  $G(P_0) = 0$ , όπου  $P_0$  είναι το σημείο της σφαίρας που προβάλλεται στο σημείο  $Q_0$ . Άρα, το θεώρημα αποδείχτηκε.

### Μια γεωγραφική συνέπεια

Υπάρχει μια συνέπεια του θεωρήματος Borsuk-Ulam που είναι μάλλον ενοχλητική για τους γεωγράφους. Η θέση ενός σημείου πάνω στη Γη δίνεται από τις γεωγραφικές του συντεταγμένες: το γεωγραφικό πλάτος  $\theta$  και το γεωγραφικό μήκος  $\varphi$ . Αυτά μπορούν να θεωρηθούν συναρτήσεις ενός σημείου της υδρόγειας σφαίρας. Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων οι πόλοι έχουν μια ξεχωριστή ιδιότητα: το γεωγραφικό πλάτος που αντιστοιχεί στους πόλους είναι  $90^\circ$  (βόρειο ή νότιο) αλλά το γεωγραφικό μήκος μπορεί να είναι οποιοδήποτε. Έτσι, αν κατευθυνθούμε προς τον Βόρειο Πόλο κινούμενοι κατά μήκος ενός μεσημβρινού και, αφού φτάσουμε στον πόλο, συνεχίσουμε την πορεία μας πάνω σε έναν άλλο μεσημβρινό, η κίνησή μας θα είναι συνεχής και το γεωγραφικό πλάτος θα μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο αλλά στο γεωγραφικό μήκος θα υπάρξει ασυνέχεια. Αν αντιστοιχίσουμε θετικές τιμές στα ανατολικά μήκη και αρνητικές στα δυτικά, τότε το μήκος εμφανίζει ασυνέχεια μόλις διασχίσουμε το μεσημβρινό του Γκρίνουιτς. Ανακύπτει επομένως το ερώτημα: Είναι δυνατόν να εισαγάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων σε ολόκληρη τη σφαίρα, έτσι ώστε οι συντεταγμένες να είναι συνεχείς συναρτήσεις του αντίστοιχου σημείου της σφαίρας; Φυσικά, τα διαφορετικά σημεία πρέπει να έχουν διαφορετικές συντεταγμένες.

Από το θεώρημα Borsuk-Ulam έπειται ότι αυτό είναι αδύνατο. Πράγματι, αν εισαγάγουμε συνεχείς συντεταγμένες  $x(P)$  και  $y(P)$  στη σφαίρα, θα υπάρχει ένα ζεύγος αντιποδικών σημείων  $P_0, P'_0 \in S$  για τα οποία θα έχουμε  $x(P_0) = x(P'_0)$  και  $y(P_0) = y(P'_0)$ .

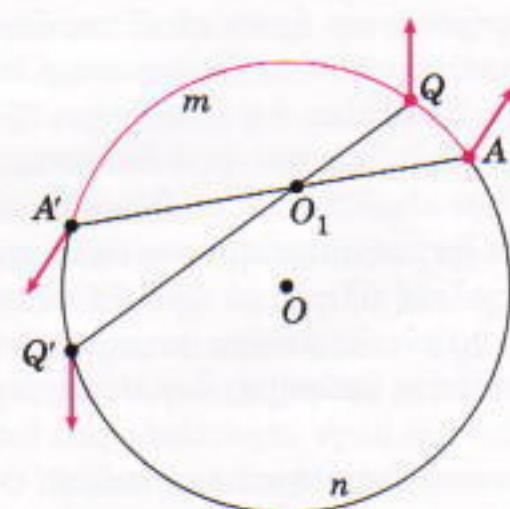
### Μερικές γενικεύσεις

Αν αναλύσουμε επισταμένως την απόδειξη του θεωρήματος του «αλόγου», θα διαπιστώσουμε ότι δεν έχει μεγάλη σημασία το γεγονός ότι τα σημεία  $H$  και  $H'$  είναι αντιδιαμετρικά. Ο συλλογισμός παραμένει έγκυρος ακόμα και αν αντί για το  $O$  θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο  $O_1$  στο εσωτερικό του κύκλου και ερμηνεύσουμε τα  $H$  και  $H'$  ως τα άκρα μιας χορδής που διέρχεται από το  $O_1$ . Το ίδιο ισχύει για το θεώρημα ριζών του δισδιάστατου πεδίου και για το θεώρημα Borsuk-Ulam (Σχήμα 8). Το μόνο που έχει σημασία είναι να ισχύει η ιδιότητα  $(P')' = P$  και για τον νέο ορισμό του σημείου  $P'$ .

Κάθε συνεχής απεικόνιση  $P \rightarrow P'$  με αυτή την ιδιότητα καλείται ενέλιξη. Ο σοβιετικός μαθηματικός A. Fet χρησιμοποίησε ευφυείς και ισχυρές τοπολογικές μεθόδους για να αποδείξει ότι το θεώρημα Borsuk-Ulam (ακόμα και η  $n$ -διάστατη εκδοχή του) παραμένει αληθές για οποιαδήποτε ενέλιξη  $P \rightarrow P'$  στη σφαίρα. Ιδού η ακριβής διατύπωση αυτού του θεωρήματος για τον τρισδιάστατο χώρο.

Δίνεται μια τυχαία ενέλιξη  $P \rightarrow P'$  σε μια σφαίρα  $S$ . Για κάθε ζεύγος συνεχών συναρτήσεων  $f(P)$  και  $g(P)$ , οριζόμενων στην  $S$ , υπάρχει ένα σημείο  $P_0 \in S$  τέτοιο ώστε  $f(P_0) = f(P'_0)$  και  $g(P_0) = g(P'_0)$ .

Συνιστούμε στους αναγνώστες που ενδιαφέρονται να κατανοήσουν βαθύτερα τις βασικές έννοιες της τοπολογίας να διαβάσουν το έξοχο βιβλίο των W. Chinn και N. Steenrod, *The Geometry of Mappings of Segments, Curves, Circles and Disks* (Νέα Υόρκη, Random House, 1966). ◻



Σχήμα 8

# Η ανιγματική μαγνητική δύναμη

E. Romishevsky

**H**ΠΕΙΡΑ ΜΑΣ ΕΧΕΙ ΔΙΔΑΞΕΙ ΟΤΙ, εν γένει, η δύναμη που δρα σε ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο  $q$  το οποίο βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία εξαρτάται τόσο από τη θέση του όσο και από την ταχύτητά του. Έχει επικρατήσει η εν λόγω δύναμη να αναλύεται σε δύο συνιστώσες: στην ηλεκτρική δύναμη  $F_q = qE$ , αφενός, που είναι ανεξάρτητη από την κίνηση του φορτίου, και στη μαγνητική δύναμη  $F_\mu$ , αφετέρου, η οποία εξαρτάται καθοριστικά από την ταχύτητα του φορτίου. Στο παρόν άρθρο θα επιχειρήσουμε να αναλύσουμε τόσο τη φύση της μαγνητικής δύναμης όσο και τη σχέση της με την ηλεκτρική.

Σε όποιο σημείο του χώρου κι αν βρίσκεται το ηλεκτρικό φορτίο, η μαγνητική δύναμη ασκείται κάθετα στην ταχύτητά του. Επιπλέον, η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη και σε μια ειδική κατεύθυνση, η οποία επισης ορίζεται σε κάθε σημείο του χώρου. Η μαγνητική δύναμη έχει μέτρο ανάλογο προς τη συνιστώσα εκείνη της ταχύτητας του φορτίου που είναι κάθετη στην «ειδική κατεύθυνση». Τούτη η ιδιότητα μπορεί να περιγραφεί και με διαφορετικό τρόπο αν επικαλεστούμε την έννοια του μαγνητικού πεδίου. Η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου συμπίπτει με την ειδική κατεύθυνση που ορίζεται σε κάθε σημείο του χώρου.

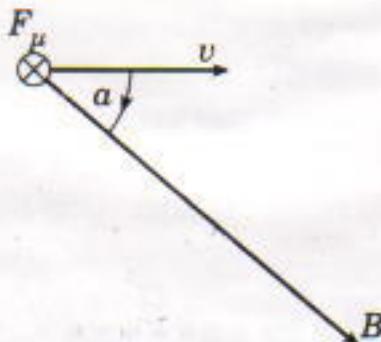
Το μέτρο και η κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης δίνονται από τον τύπο

$$F_\mu = qvB \text{ ήμα } \zeta,$$

όπου με  $v$  και  $B$  συμβολίζουμε αντιστοίχως τα μέτρα της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου, ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα  $\zeta$  (το οποίο ορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού) χρησιμεύει για να υπο-

δεικνύει την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης. Αυτή η κατεύθυνση συμπίπτει με την προχώρηση ενός δεξιόστροφου κοχλία που η κεφαλή του κείται στο επίπεδο των διανυσμάτων  $v$  και  $B$  και τον στρέφουμε





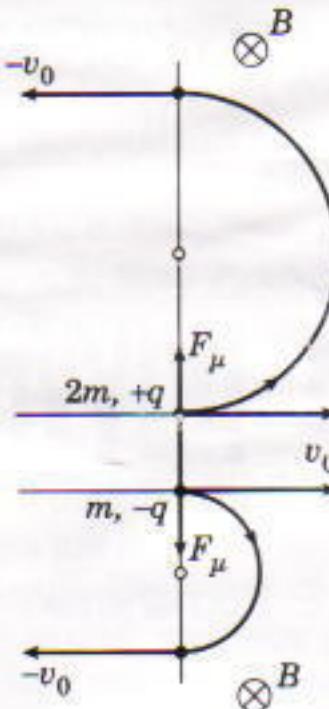
Σχήμα 1

με φορά κατά την οποία πρέπει να στρέψουμε το διάνυσμα **u** για να φτάσει στο διάνυσμα **B** σαρώνοντας την ελάχιστη δυνατή γωνία (Σχήμα 1). Η μαγνητική δύναμη  $F_\mu$  είναι λοιπόν κάθετη σε αμφότερα τα διανύσματα **u** και **B**.

Η ολική ηλεκτρομαγνητική δύναμη  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_\mu$  που δρα σε ένα σωματίδιο φορτίου  $q$  ονομάζεται «δύναμη Lorentz». Μετρώντας κανείς τη δύναμη Lorentz που ασκείται σε ένα δοκιμαστικό φορτίο γνωστού προσήμου (θετικό ή αρνητικό), μπορεί να υπολογίσει τα μέτρα και τις κατεύθυνσεις των διανυσμάτων **E** και **B**.

Αξίζει να υπογραμμίσουμε ότι η μαγνητική δύναμη δεν επηρεάζει τα ηλεκτρικά φορτία που ηρεμούν. Η κατεύθυνση της αποτελεί ένα ακόμη σημαντικό χαρακτηριστικό της η μαγνητική δύναμη ασκείται πάντοτε κάθετα στην ταχύτητα, και έτσι δεν παράγει έργο σύσσωμο δρά στο φορτίο. Συνεπώς, εντός στατικού (σταθερού στο χρόνο) μαγνητικού πεδίου η κινητική ενέργεια ενός φορτισμένου σωματιδίου παραμένει αμετάβλητη, δημοσιεύοντας μορφής κίνησης και αν εκτελεί το εν λόγω σωματίδιο.

Εν ειδεί παραδείγματος, ας θεωρήσουμε την κίνηση δύο σωματιδίων με αντίθετα φορτία  $+q$  και  $-q$  και με διαφορετικές μάζες  $M_1 = 2m$  και  $M_2 = m$ . Αρχικά, τα δύο αυτά σωματίδια κείνται στο σύνορο μιας περιοχής όπου υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο **B** και κινούνται προς το εσωτερικό της με ταχύτητα  $v_0$ , η οποία έχει κατεύθυνση κάθετη στο σύνορο του **B** (Σχήμα 2) (το διάνυσμα **B** είναι κάθετο στο επίπεδο της σελίδας και έχει φορά από τον αναγνώστη προς το περιοδικό). Όταν το θετικά φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο, του ασκείται μαγνητική δύναμη μέτρου  $F_\mu = qv_0B$ , η



Σχήμα 2

οποία αρχικά έχει κατεύθυνση προς τα επάνω. Το αρνητικό σωματίδιο «αισθάνεται» μια μαγνητική δύναμη ίσου μέτρου, μόνο που τούτη κατεύθυνται αρχικά προς τα κάτω. Κάθε σωματίδιο διαγράφει ένα ημικύκλιο και στη συνέχεια εγκαταλείπει την περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Οι ακτίνες των δύο τροχιών προσδιορίζονται εύκολα με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, ο οποίος στην περίπτωση της κίνησης ενός σωματιδίου μάζας  $M$  και φορτίου  $q$  εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου  $B$  λαμβάνει την απλούστατη μορφή

$$qv_0B = \frac{Mu_0^2}{R},$$

από όπου προκύπτει ο τύπος

$$R = \frac{Mu_0}{qB}.$$

Η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου και η περίοδος του δίνονται από τις εκφράσεις

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{M}$$

και

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi M}{qB}.$$

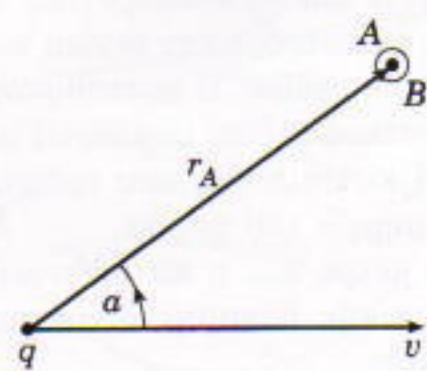
Όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις, το θετικό σωματίδιο ( $M_1 = 2m$ ) διαγράφει ημικύκλιο διπλάσιας ακτίνας από εκείνο που διαγράφει το αρνητικό σωματίδιο ( $M_2 = m$ ), το οποίο κινείται κατά την αντίθετη φο-

ρά. Το βαρύτερο θετικό σωματίδιο θα επιστρέψει στην ελεύθερη πεδίου περιοχή μετά την παρέλευση μίας ημι-περιόδου, η οποία είναι διπλάσια από το αντίστοιχο χρονικό διάστημα για την περίπτωση του ελαφρότερου αρνητικού σωματιδίου. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έχει την ικανότητα να διαχωρίζει, «εν χώρω και εν χρόνω», σωματίδια τα οποία ανήκουν στην ίδια δέσμη αλλά που οι μάζες τους και τα φορτία τους διαφέρουν. Πρόκειται για μια ιδιότητα που αξιοποιείται στους φασματογράφους μάζας, οι οποίοι καθιστούν δυνατό το διαχωρισμό των ισοτόπων του ίδιου στοιχείου (δηλαδή ατόμων που έχουν τον ίδιο ατομικό αριθμό αλλά διαφορετικό μαζικό).

Τα κινούμενα φορτία (δηλαδή, τα ηλεκτρικά ρεύματα) παράγουν μαγνητικά πεδία. Τα αναρίθμητα πειράματα που εκτελέστηκαν με αντικείμενο τις μαγνητικές δυνάμεις απέφεραν —και επαλήθευσαν κατ' επανάληψη— έναν απλό νόμο, ο οποίος δίνει το μαγνητικό πεδίο **B** που παράγεται από ένα σταθερό φορτίο  $q$  κινούμενο με σταθερή ταχύτητα **u** μέτρου πολύ μικρότερου από την ταχύτητα **c** του φωτός. Ο εν λόγω νόμος μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qu \text{ ημα}}{r^2} \boldsymbol{\zeta},$$

όπου  $a$  καλούμε τη γωνία μεταξύ της ταχύτητας **u** του φορτίου και της διανυσματικής ακτίνας **r** που άγεται από το φορτίο προς το σημείο παρατήρησης, ενώ με  $\boldsymbol{\zeta}$  παριστάνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που προκύπτει όταν ο κανόνας του δεξιού χεριού εφαρμοστεί στα διανύσματα **u** και **r** (Σχήμα 3). Η σταθερά  $1/(\epsilon_0 c^2)$  συμβολίζεται με  $\mu_0$  και ονομάζεται μαγνη-



Σχήμα 3

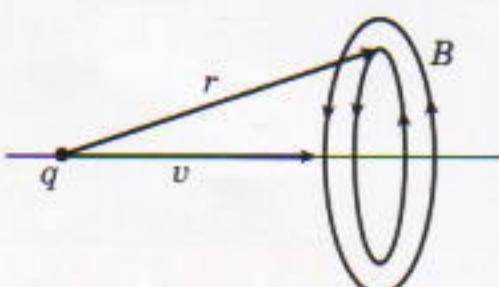
τική διαπερατότητα του κενού.

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο τα μέλη αυτού του τύπου με το πλήθος των ηλεκτρονίων  $\Delta N = nS\Delta l$  που περιέχει ένα τμήμα σύρματος μήκους  $\Delta l$ , πυκνότητας ηλεκτρονίων  $n$  και εμβαδού διατομής  $S$ , το οποίο διαφέρεται από το ρεύμα έντασης  $I = qnS$ , καταλήγουμε στον περίφημο νόμο των Biot-Savart για τη συνεισφορά  $\Delta B$  στο μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε ένα στοιχείο ηλεκτρικού ρεύματος  $I\Delta l$ :

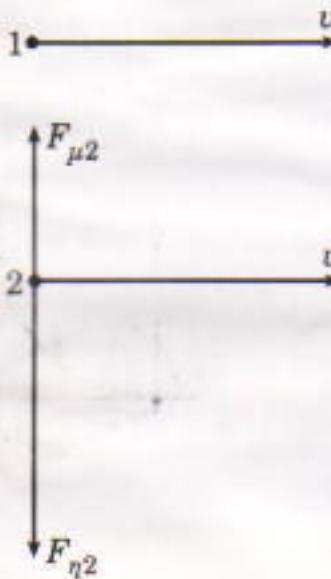
$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l \text{ ημα}}{r^2} \zeta$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι που περικλείουν την τροχιά των κινούμενων φορτίων (Σχήμα 4). Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου φθίνει αυξανόμενης της απόστασης ως  $1/r^2$ , ακριβώς όπως και το μέτρο του ηλεκτροστατικού πεδίου που παράγεται από ένα σημειακό φορτίο. Η αναλογία, ωστόσο, ανάμεσα στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να επεκταθεί σε όλα τα χαρακτηριστικά τους: το μαγνητικό πεδίο δεν έχει «πηγές» ή «καταβόθρες», και έτσι οι δυναμικές γραμμές του είναι πάντοτε κλειστές. Ένα τέτοιο φυσικό διανυσματικό πεδίο παρουσιάζει ιδιάζοντα χαρακτηριστικά και στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως σωληνοειδές πεδίο.

Ας περάσουμε στη συνέχεια σε ένα άλλο παράδειγμα. Έστω ότι δύο σημειακά σωματίδια 1 και 2 σχετικώς μεγάλης μάζας και του αυτού φορτίου  $q$  κινούνται παράλληλα το ένα προς το άλλο με την ίδια μη σχετικιστική ταχύτητα  $v$  (Σχήμα 5). Σε κάθε σωματίδιο επενεργεί μια απωστική ηλεκτρική δύναμη (δύναμη Coulomb)  $F_q = qE$  και μια ελκτική



Σχήμα 4



Σχήμα 5

μαγνητική δύναμη  $F_\mu = qvB$  (η ταχύτητα του ενός σωματιδίου είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο που παράγει το άλλο σωματίδιο). Ας συγκρινουμε λοιπόν τις δύο αυτές συνιστώσες της ολικής ηλεκτρομαγνητικής δύναμης (της δύναμης Lorentz) που δρα, ας πούμε, στο σωματίδιο 2:

$$\frac{F_{\mu 2}}{F_{\eta 2}} = \frac{qvB_{21}}{qE_{21}},$$

όπου με  $B_{21}$  και  $E_{21}$  συμβολίζουμε αντίστοιχα το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το φορτίο 1 στη θέση του φορτίου 2. Αν εισαγάγουμε τις αντίστοιχες εκφράσεις για τα δύο πεδία στον παραπάνω λόγο, λαμβάνουμε:

$$F_{\mu 2} + F_{\eta 2} = qv \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} + q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = v^2 + c^2.$$

Ο λόγος που μόλις υπολογίσαμε δείχνει ότι, εφόσον πρόκειται για φορτία κινούμενα με μη σχετικιστικές ταχύτητες, οι μαγνητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσά τους υστερούν κατά πολύ των ηλεκτρικών δυνάμεων τις οποίες ασκούν το ένα στο άλλο. Ή, για να το διατυπώσουμε διαφορετικά, υπό αυτές τις συνθήκες η μαγνητική δύναμη αντιπροσωπεύει μια ελάσσονα συνεισφορά στην ολική ηλεκτρομαγνητική δύναμη.

Πώς θα εμφανιστεί η κατάσταση αν επιλέξουμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς του οποίου η ταχύτητα  $v$  συμπίπτει με εκείνη των σωματιδίων μας. Στο συγκεκριμένο κινούμενο σύ-

στημα αναφοράς τα σωματίδια μας ηρεμούν, με αποτέλεσμα τόσο τα μαγνητικά τους πεδία όσο και οι μαγνητικές δυνάμεις να εξαφανίζονται!

Πρόκειται για ένα παράδοξο που κάλλιστα θα μπορούσαμε να είχαμε προβλέψει ότι θα παρουσιάζοταν ευθύς εξαρχής: η μαγνητική συνιστώσα της δύναμης Lorentz εξαρτάται από την ταχύτητα του θεωρούμενου φορτισμένου σωματιδίου, ταχύτητα η οποία προφανώς μεταβάλλεται όταν αντικαθιστούμε το ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς με κάποιο άλλο. Απεναντίας, η ολική δύναμη Lorentz, ακριβώς όπως και κάθε άλλη δύναμη, δεν εξαρτάται από την επιλογή του μη σχετικιστικού αδρανειακού συστήματος. Κατά συνέπεια, στο σύστημα αναφοράς όπου η μαγνητική συνιστώσα της δύναμης Lorentz μηδενίζεται, η ηλεκτρική συνιστώσα πρέπει να μεταβληθεί κατά τέτοιον τρόπο ώστε να αντισταθμιστεί η απώλεια αυτή. Με άλλα λόγια, η ανάλυση της ολικής δύναμης Lorentz σε ηλεκτρική και μαγνητική συνιστώσα στερείται νοήματος εφόσον δεν προσδιορίζεται το εκάστοτε χρησιμοποιούμενο σύστημα αναφοράς.

Το τελευταίο παράδειγμα εγείρει το ερώτημα κατά πόσον αξίζει να μελετούμε και να λαμβάνουμε υπόψη δυνάμεις τόσο μικρού (σε σχέση με τις ηλεκτρικές) μέτρου όπως οι μαγνητικές. Η απάντηση είναι φυσικά καταφατική, και θα εκθέσουμε ευθύς αμέσως τους λόγους στους οποίους στηρίζεται.

Πρώτον, η τιμή του λόγου στην οποία καταλήξαμε παραμένει η ίδια και όταν οι ταχύτητες γίνονται σχετικιστικές ( $v \sim c$ ). Εν τοιαύτη περιπτώσει, οι μαγνητικές δυνάμεις καθίστανται συγκρίσιμες με τις ηλεκτρικές. Ως παράδειγμα της σημασίας που αποκτούν οι μαγνητικές δυνάμεις στις σχετικιστικές ταχύτητες μπορεί κανείς να επικαλεστεί τον καίριο ρόλο τον οποίο διαδραματίζουν στη δυναμική μιας δέσμης από ταχέα φορτισμένα σωματίδια.

Δεύτερον, υπάρχουν περιπτώσεις όπου κάποια «αμελητέα» μαγνητική δύναμη αποτελεί τη μοναδική δύνα-

Η συνέχεια στη σελ. 69

# Μπαταρίες και λαμπτήρες

«Η συνήθεια της ανάλυσης έχει μια τάση να διαβρώνει τα αισθήματα.»

—John Stuart Mill

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

**Ο**Ι ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΟΥ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΟΥ είναι οι ίδιοι για τους πάντες, είτε πρόκειται για κάποιο πολλά υποσχόμενο ταλέντο που αγωνίζεται στο εφηβικό πρωτάθλημα είτε για τα μεγάλα αστέρια τα οποία μας ενθουσιάζουν με τις αριστοτεχνικές ενέργειές τους όταν παρακολουθούμε κάποιον υπέρμητο της Α' Εθνικής καρφωμένο στους τηλεοπτικούς μας δέκτες. Εντούτοις, τρέφουμε την πεποίθηση ότι οι ικανότητες του παικτη θα ωριμάσουν με την ηλικία. Ομοίως, οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για όλους, αλλά πιστεύουμε ότι οι ενήλικες μπορούν να αντιμετωπίσουν προβλήματα δυσκολότερα από εκείνα που θέτουμε στα παιδιά ή τους εφήβους. Αυτό συνήθως αληθεύει, αλλά όχι πάντοτε.

Ας πάρουμε για παράδειγμα το πρόβλημα όπου στον εξεταζόμενο δίνονται μια μπαταρία φακού, ένας λαμπτήρας φακού και ένα κομμάτι σύρμα, και του ζητείται να τα συνδέσει έτσι ώστε να ανάψει ο λαμπτήρας. Όσο απίστευτο και αν ακούγεται, έχουμε δει ενηλίκους να παιδεύονται περισσότερο από μία ώρα ώσπου να καταφέρουν να κάνουν το λαμπτήρα να ανάψει! Και όμως, πρόκειται για το πρώτο πράγμα που μαθαίνει κανείς στη φυσική των κυκλωμάτων και των ηλεκτρικών ρευμάτων που διδάσκεται στην πέμπτη δημοτικού. Η πείρα μάς έχει πείσει ότι οι μαθη-

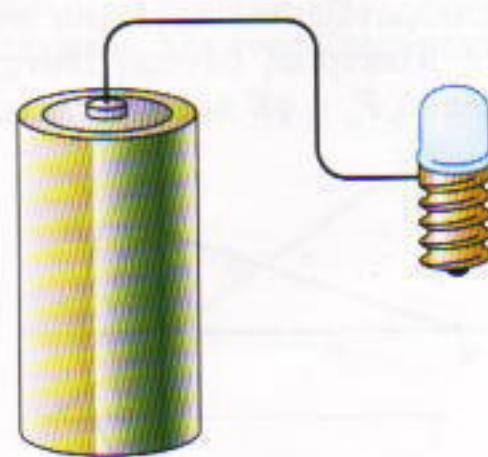
τές της πέμπτης δημοτικού τα καταφέρνουν πολύ καλύτερα σε τέτοια ζητήματα απ' ό,τι οι ενήλικοι. Η πείρα μάς έχει πείσει επίσης πως δεν αρκεί να μελετήσει κανείς το νόμο του Ohm για να αποκτήσει την ικανότητα να αναλύει σωστά κυκλώματα που περιέχουν λαμπτήρες και μπαταρίες. Σπουδαστές οι οποίοι έτυχε να μελετήσουν το *Batteries and Bulbs* (Μπαταρίες και λαμπτήρες) ενώ παρακολουθούσαν προγράμματα μαθημάτων φυσικών επιστημών στο κολέγιο ανέφεραν σε πολλές περιπτώσεις ότι όταν φοιτούσαν στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, δύσκολα από το περιβάλλον τους είχαν κάποια σχέση με την ηλεκτρολογία δεν διέθεταν την απαιτούμενη κατανόηση των σχετικών εννοιών ώστε να τους συνδράμουν στην κατ' οίκον εργασία τους.

Το *Μπαταρίες και λαμπτήρες* αναπτύχθηκε και γράφτηκε στο πλαίσιο του προγράμματος Μελέτη των Στοιχείων των Θετικών Επιστημών, στα μέσα της δεκαετίας του 1960. Το 1968 ο Gerry Wheeler, υπν διοικητικός διευθυντής της Εθνικής Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών των ΗΠΑ (NSTA), συνέγραψε την τελευταία εκδοχή αυτού του δημοφιλούς βιβλίου, το οποίο αποδίδει ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάπτυξη ενός λογικού πλαισίου για την κατανόηση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και υπήρξε ένα από τα πρώτα δείγματα

του είδους της έρευνας που προωθούσε το Εθνικό Ίδρυμα Θετικών Επιστημών (NSF).

Οι περισσότεροι σπουδαστές, αφού προσπαθήσουν ανεπιτυχώς να ανάψουν το λαμπτήρα δοκιμάζοντας διατάξεις όπως η απεικονιζόμενη στο Σχήμα 1, ανακαλύπτουν τελικά ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουν δύο τμήματα από κάθε αντικείμενο: τα δύο άκρα του σύρματος, τους δύο πόλους της μπαταρίας και τα δύο μεταλλικά τμήματα του λαμπτήρα. Όταν όλα αυτά συνδεθούν ανά δύο —με όποιον τρόπο κι αν γίνει η σύνδεση—, ο λαμπτήρας ανάψει. Μια τέτοια συνδεσμολογία εικονίζεται στο Σχήμα 2. Μπορείτε να βρείτε τους υπόλοιπους τρεις τρόπους σύνδεσης που θα κάνουν το λαμπτήρα να ανάψει;

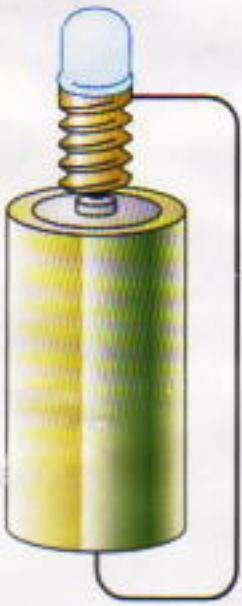
Και οι τέσσερις δυνατοί τρόποι παρουσιάζουν ένα κοινό χαρακτηριστικό —μια συνεχή αγώγιμη διαδρομή



Σχήμα 1



C I R C U I T M A X I M U S



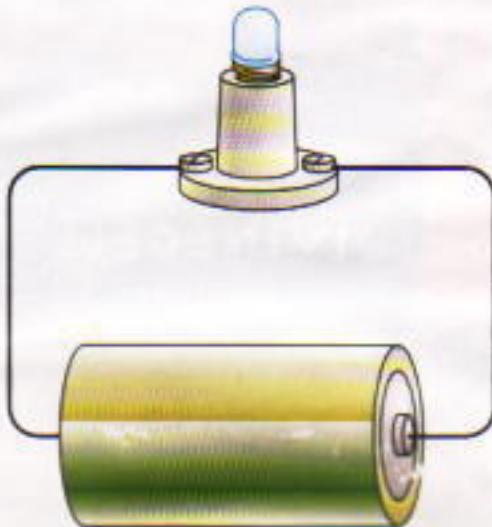
Σχήμα 2

η οποία επιτρέπει στα φορτία να ρέουν μέσω του λαμπτήρα από τον ένα πόλο της μπαταρίας προς τον άλλο. Αυτή η διαδρομή είναι γνωστή ως πλήρες κύκλωμα. Εξετάζοντας έναν σπασμένο λαμπτήρα φακού (Σχήμα 3) θα διαπιστώσετε ότι στο εσωτερικό του υπάρχει μια συνεχής αγώγιμη διαδρομή η οποία συνδέει το ένα μεταλλικό τμήμα του με το άλλο και περιλαμβάνει ως τμήμα της το νήμα, το οποίο, θερμαινόμενο λόγω της διέλευσης ηλεκτρικού ρεύματος, πυρακτώνεται και φωτοβολεί. (Το πλήρες κύκλωμα διατηρείται ακόμη και όταν οι λαμπτήρες είναι βιδωμένοι στις ειδικές βάσεις όπως συμβαίνει στα υπόλοιπα σχήματα.)

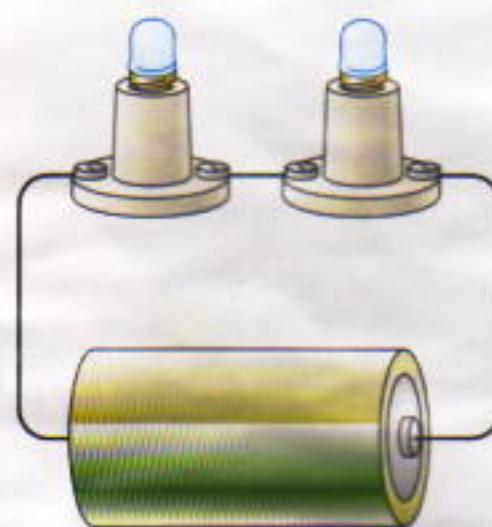
Εάν συνδυάσουμε την έννοια του πλήρους κυκλώματος με το νόμο διατήρησης του φορτίου, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει από τον έναν πόλο της μπαταρίας στον άλλο. Όλο το φορτίο που εγκαταλείπει τον έναν πόλο επιστρέφει στην μπαταρία από τον άλλο. Στη διαδρομή δεν σημειώνεται καμία απώλεια φορτίου.



Σχήμα 3



Σχήμα 4



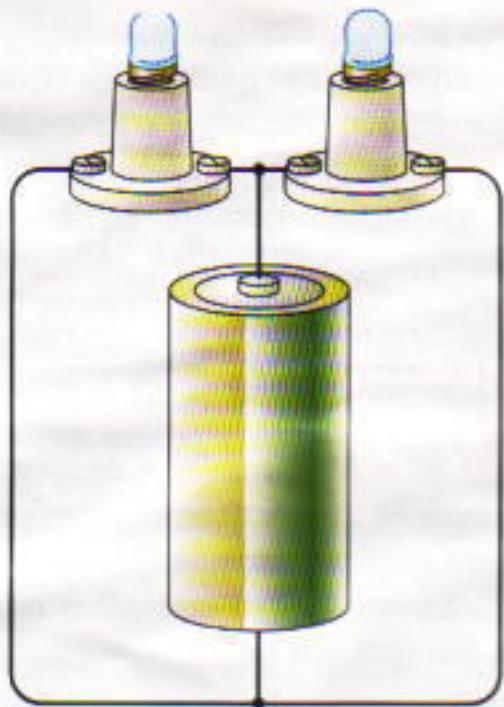
Σχήμα 5

Αν ανάψουμε ένα λαμπτήρα χρησιμοποιώντας μια μπαταρία όπως δείχνει το Σχήμα 4, διαπιστώνουμε ότι η μπαταρία «αδειάζει» σε χρόνο κατά τι μικρότερο της μίας ημέρας. (Ο ακριβής χρόνος εξαρτάται τόσο από τον τύπο της μπαταρίας όσο και από τον τύπο του λαμπτήρα.) Ωστόσο, αν συνδέσουμε με ένα σύρμα κατευθείαν τους δύο πόλους της μπαταρίας (ή αν τους βραχυκυκλώσουμε, όπως λέμε), η μπαταρία εξαντλείται σε λιγότερο από μία ώρα, ενώ η θερμοκρασία του σύρματος ανεβαίνει τόσο ώστε να είναι αδύνατο να το αγγίξει κανείς. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το σύρμα το διαρρέει μεγαλύτερο ρεύμα απ' ό,τι το λαμπτήρα. Λέμε, λοιπόν, ότι σε σύγκριση με το σύρμα ο λαμπτήρας παρουσιάζει μεγαλύτερη αντίσταση στη ροή του φορτίου. Έστω ότι ορίζουμε ως πρότυπη φωτεινότητα αυτή ενός λαμπτήρα συνδεδεμένου με μία μπαταρία.

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί αν επιχειρήσουμε να χρησιμοποιήσουμε μία μπαταρία για να ανάψουμε δύο πανομοιότυπους λαμπτήρες. Ξεκινάμε συνδέοντας τους δύο λαμπτήρες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5, μια διάταξη γνωστή ως συνδεσμολογία σε σειρά. Επειδή υπάρχει μόνο μία διαδρομή που διέρχεται και από τους δύο λαμπτήρες, όσο φορτίο ρέει διαμέσου του ενός λαμπτήρα τόσο ακριβώς ρέει και διαμέσου του άλλου. Αν χρησιμοποιήσουμε πανομοιότυπους λαμπτήρες, θα παρατηρήσουμε ότι και οι δύο έχουν την ίδια φωτεινότητα. Θα διαπιστώσουμε επίσης ότι οι λαμπτήρες φωτοβολούν αμυδρότερα εν συγκρίσει προς την πρότυπη φωτει-

νότητα. Επιπλέον, αν αφήσουμε τους λαμπτήρες αναμμένους, θα ανακαλύψουμε ότι η μπαταρία διαρκεί περισσότερο από εκείνη του πρότυπου κυκλώματος. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το κύκλωμα διαρρέεται από ασθενέστερο ρεύμα, πράγμα που σημαίνει ότι οι δύο λαμπτήρες συνδεδεμένοι σε σειρά έχουν αντίσταση μεγαλύτερη απ' ό,τι ο καθένας τους ξεχωριστά. (Υποθέτουμε ότι η έννοια της αντίστασης σας είναι ήδη οικεία. Ειδάλλως, θα αφιερώναμε περισσότερο χρόνο στη διεξοδικότερη ανάπτυξη της εν λόγω έννοιας.) Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συνάγουμε ότι η φωτεινότητα ενός λαμπτήρα μάς παρέχει ένα πρόχειρο, χονδρικό μέτρο του ρεύματος που διέρχεται από αυτόν. Πρόκειται για μια παραδοχή που στα επόμενα θα τη θεωρήσουμε ισχύουσα.

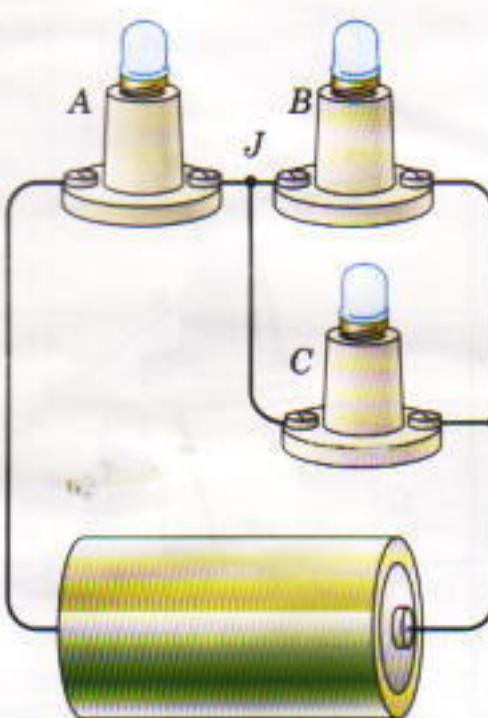
Δύο πανομοιότυποι λαμπτήρες είναι επίσης δυνατόν να συνδεθούν με μια μπαταρία έτσι ώστε κάθε λαμπτήρας να βρίσκεται στη δική του, ιδιαίτερη διαδρομή από τον ένα πόλο της μπαταρίας στον άλλο, μια συνδεσμολογία γνωστή ως παράλληλη. (Σημειωτέον ότι οι δύο διαδρομές μπορεί να έχουν κοινά κάποια τμήματα σύρματος, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.) Στη συγκεκριμένη περίπτωση, και οι δύο λαμπτήρες φωτοβολούν με φωτεινότητα ίση με την πρότυπη. Το ρεύμα που διαρρέει τον ένα λαμπτήρα δεν περνά από τον άλλο. Πρόκειται για έναν ισχυρισμό που η αλήθεια του ελέγχεται πανεύκολα: αρκεί να αποσυνδέσετε τον ένα λαμπτήρα και να παρατηρήσετε ότι ο άλλος παραμένει ανεπηρέαστος. Έτσι, συμπεραί-



Σχήμα 6

νουμε ότι τη μπαταρία τη διαρρέει ρεύμα διπλάσιο απ' ό, τι στο πρότυπο κύκλωμα, οπότε η ολική αντίσταση του συνδυασμού θα πρέπει να ισούται με το μισό της αντίστασης που έχει ένας μόνο λαμπτήρας. Αυτό μπορείτε να το επιβεβαιώσετε και πειραματικά αφήνοντας την μπαταρία να εξαντληθεί. Γενικά, με κάθε προσθήκη μιας επιπλέον παράλληλης διαδρομής προκύπτει κύκλωμα μικρότερης αντίστασης από το αρχικό.

Ας θέσουμε, λοιπόν, σε εφαρμογή τις παραπάνω ιδέες για να αναλύσουμε το κύκλωμα του Σχήματος 7, το οποίο περιέχει τρεις πανομοιότυπους λαμπτήρες. Ποιος από τους τρεις λαμπτήρες φωτοβολεί περισσότερο και γιατί; Τι αποτελέσματα θα δώσει η σύγκριση των φωτεινοτήτων των δύο άλλων λαμπτήρων; Παρατηρήστε ότι όλο το ρεύμα της μπαταρίας διέρχεται αναγκαστικά από το λαμπτήρα  $A$ : επομένως, αυτός θα έχει και τη μεγαλύτερη φωτεινότητα. Στον κόμβο  $J$  το ρεύμα θα διαιρεθεί. Επειδή και οι δύο διαδρομές μετά τον κόμβο περιέχουν μόνο ένα λαμπτήρα η καθεμία, είναι ισοδύναμες, πράγμα που σημαίνει ότι το ρεύμα θα διαιρεθεί ισομερώς. Από την αρχή διατήρησης του φορτίου προκύπτει ότι καθένα από τα ρεύματα που διαρρέουν τους λαμπτήρες  $B$  και  $C$  ισούται με το μισό αυτού το οποίο διέρχεται από το λαμπτήρα  $A$ . Άρα, οι λαμπτήρες  $B$  και  $C$  φωτοβολούν το ίδιο έντονα αλλά αμυδρότερα από το λαμπτήρα  $A$ .



Σχήμα 7

Ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει το βαθμό στον οποίο κατανόησε το μοντέλο που σκιαγραφήσαμε, απαντώντας στα ακόλουθα ερωτήματα αναφορικά με το κύκλωμα του Σχήματος 7. (1) Πώς θα επηρεαστεί η φωτεινότητα των λαμπτήρων  $B$  και  $C$  αν αφαιρεθεί από τη βάση του ο λαμπτήρα  $A$ ; (2) Ποιες επιπτώσεις θα έχει στη φωτεινότητα των λαμπτήρων  $A$  και  $C$  η αφαίρεση του λαμπτήρα  $B$  από τη βάση του; (3) Πώς θα μεταβληθεί η φωτεινότητα των λαμπτήρων αν ενώσουμε με σύρμα τους ακροδέκτες της βάσης  $A$ ; (4) Πώς θα μεταβληθεί η φωτεινότητα των λαμπτήρων αν ενώσουμε με σύρμα τους ακροδέκτες της βάσης  $C$ ; Προτού συνεχίσετε το διάβασμα, βεβαιωθείτε ότι καταγράψατε τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα.

Τώρα που έχετε διατυπώσει γραπτώς τις δικές σας απαντήσεις (*scripta manent!*), μπορούμε πλέον να δούμε και ποιες είναι οι σωστές.

(1) Οι λαμπτήρες  $B$  και  $C$  θα σβήσουν, διότι διακόπηκε η μοναδική διαδρομή προς την μπαταρία και έτσι δεν υπάρχει ρεύμα.

(2) Αφού αφαιρεθεί ο λαμπτήρας  $C$ , οι λαμπτήρες  $A$  και  $B$  είναι συνδεδεμένοι σε σειρά και φωτοβολούν εξίσου έντονα. Η αφαίρεση του λαμπτήρα  $C$  ισοδύναμει με την αποσύνδεση μιας παράλληλης διαδρομής στα δεξιά του κόμβου και, συνεπώς, αυξάνει την αντίσταση εκείνου του τμήματος του κυκλώματος. Τούτο, με τη

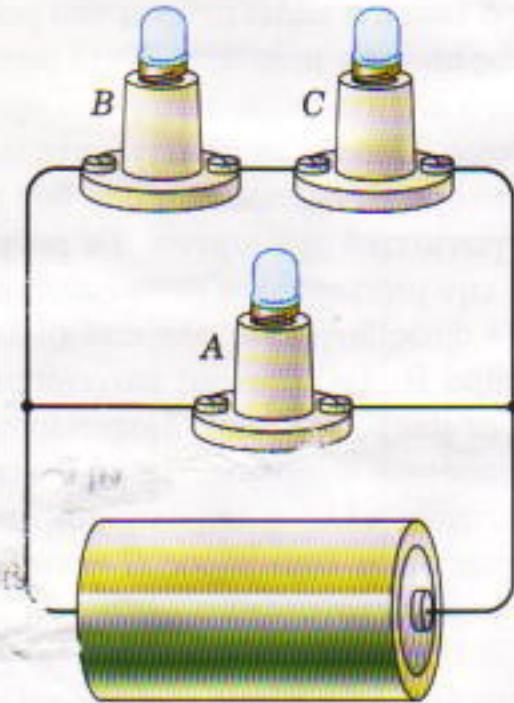
σειρά του, προκαλεί μείωση του ρεύματος από την μπαταρία. Κατά συνέπεια, ο λαμπτήρας  $A$  φωτοβολεί αμυδρότερα. Όσο για τη φωτεινότητα του λαμπτήρα  $B$ , καθορίζεται από δύο ανταγωνιστικά φαινόμενα. Το ρεύμα από την μπαταρία ναι μεν μειώνεται, πλην όμως διέρχεται όλο από το λαμπτήρα  $B$ . Τα ποιοτικά επιχειρήματα δεν μπορούν να μας διαφωτίσουν περισσότερο αναφορικά με τη σωστή απάντηση, αλλά η παρατηρηση μας δείχνει ότι ο λαμπτήρας  $B$  φωτοβολεί τώρα εντονότερα.

(3) Η ένωση των ακροδεκτών της βάσης τού  $A$  με σύρμα ισοδύναμει με μια πολύ χαμηλής αντίστασης διαδρομή παράκαμψης του λαμπτήρα  $A$ , οπότε ο λαμπτήρας  $A$  σβήνει. Η συγκεκριμένη παρέμβαση στο κύκλωμα έχει επίσης ως συνέπεια τη μείωση της αντίστασης, οπότε το ρεύμα από την μπαταρία αυξάνεται. Έτσι, οι λαμπτήρες  $B$  και  $C$  φωτοβολούν εντονότερα.

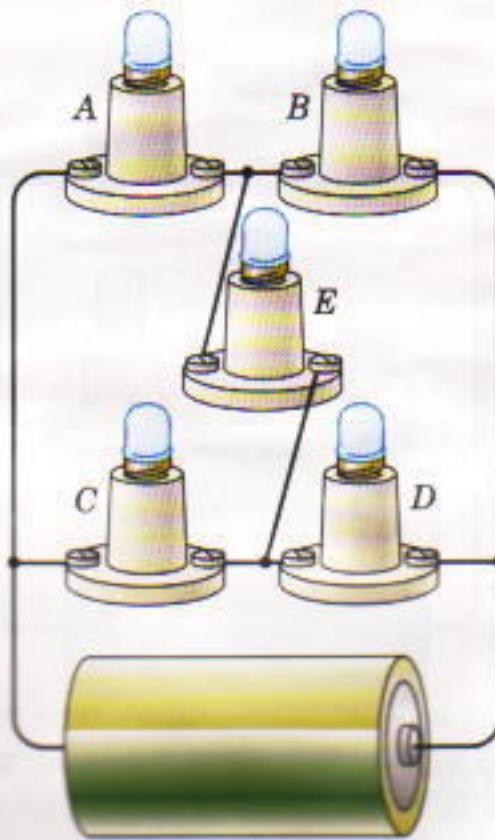
(4) Η ένωση των ακροδεκτών της βάσης  $C$  με σύρμα παρέχει μια πολύ χαμηλής αντίστασης διαδρομή παράκαμψης τόσο του λαμπτήρα  $C$  όσο και του  $B$ , οι οποίοι, ως εκ τούτου, σβήνουν. Επειδή μάλιστα μειώνεται ταυτόχρονα και η αντίσταση του κυκλώματος, ο λαμπτήρας  $A$  φωτοβολεί εντονότερα.

**A.** Ως πρώτο μέρος του προβλήματος αυτού του τεύχους, σας καλούμε να μελετήσετε τα κυκλώματα που εικονίζονται στα Σχήματα 8 και 9. Ποιοι λαμπτήρες φωτοβολούν εντονότερα και ποιοι ασθενέστερα στην καθεμία από τις δύο περιπτώσεις; Επαναλάβετε τα ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω για το καθένα από τα δύο κυκλώματα.

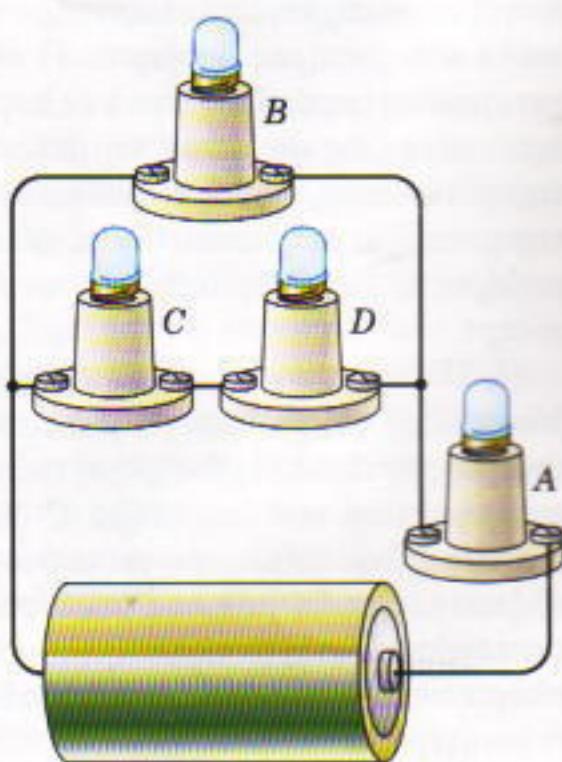
**B.** Το δεύτερο μέρος του προβλήματος μας αποτελεί διασκευή ενός από τα ερωτήματα που τέθηκαν στις εξετάσεις για την επλογή των μελών από τα οποία θα απαρτίζεται η Ομάδα Φυσικής των ΗΠΑ για το 2000. Ποιοι από τους πανομοιότυπους λαμπτήρες του κυκλώματος που βλέπετε στο Σχήμα 10 φωτοβολούν εντονότερα; Ποιοι φωτοβολούν πο αμυδρά; Πώς επηρεάζεται η φωτεινότητα των λαμπτήρων σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις; (1) Αφαι-



Σχήμα 8



Σχήμα 10



Σχήμα 9

ρείται από τη βάση του ο λαμπτήρας A. (2) Αφαιρείται από τη βάση του ο λαμπτήρας E. (3) Αφαιρούνται από τις βάσεις τους οι λαμπτήρες A και E. (4) Αφαιρούνται από τις βάσεις τους οι λαμπτήρες A και D. (5) Ενώνουμε με σύρμα τους ακροδέκτες της βάσης τού A. (6) Ενώνουμε με σύρμα τους ακροδέκτες της βάσης τού E. (7) Ενώνουμε με σύρματα τους ακροδέκτες των βάσεων του C και του E. (8) Ενώνουμε με σύρματα τους ακροδέκτες των βάσεων του A και του D.

### ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΠΤΩΣΕΙΣ ΣΕ ΟΠΡΑΓΓΕΣ

Το πρόβλημα που θέσαμε στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 2000 αφορούσε τη βαρύτητα και την κατασκευή

μάζα που γεμίζει την κοιλότητα. (Η θετική και η αρνητική μάζα προστιθέμενες στην περιοχή της κοιλότητας θα έδιναν μηδενική πυκνότητα.) Ας χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη προσέγγιση:

$$F_1 = \frac{GMm}{d^2}, \quad F_2 = \frac{GM'm}{(d - R/2)^2},$$

όπου  $M' = M/8$ , επειδή η ακτίνα της σφαιρικής κοιλότητας ισούται με το ήμιου εκείνης της μολύβδινης σφαίρας. Συνεπώς, στο σφαιρίδιο ασκείται δύναμη ίση με

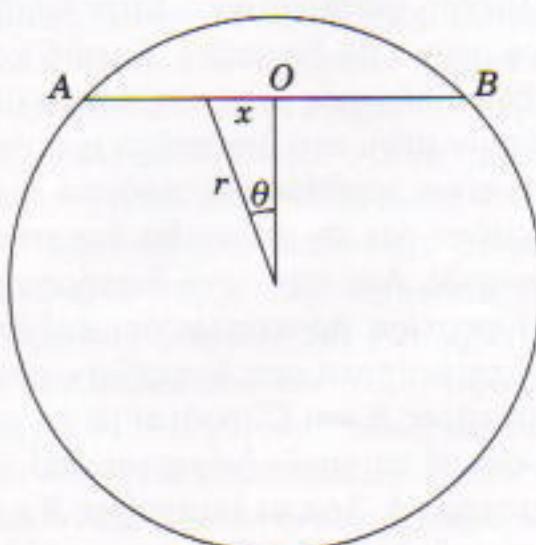
$$F_1 - F_2 = \frac{GMm}{d^2} \left[ 1 - \frac{1}{8(1 - R/2d)^2} \right].$$

Στο μέρος Β ζητούσαμε να αναλυθεί η κίνηση ενός αντικειμένου υπό την επίδραση της βαρύτητας σε μια σήραγγα εκτεινόμενη κατά μήκος της χορδής της Γης που συνδέει τα σημεία A και B της γήινης επιφάνειας όλα τα στοιχεία του προβλήματος αποτυπώνονται στο Σχήμα 11. Στη θέση που υποδεικνύεται στο σχήμα, η βαρυτική δύναμη έχει μια συνιστώσα παράλληλη προς τη σήραγγα. Η εν λόγω συνιστώσα είναι ανάλογη με τη γήινη μάζα που περικλείεται εντός της σφαίρας ακτίνας  $r$  και κέντρου το κέντρο του πλανήτη:

$$F = \frac{GM'm}{r^2} \text{ ήμθ} = \frac{G\rho \frac{4}{3}\pi r^3 m}{r^2} \text{ ήμθ}$$

$$= \frac{G\rho \frac{4}{3}\pi r^3 m}{r^2} \frac{x}{r} = \left( \frac{4\pi G\rho m}{3} \right) x = kx.$$

Όταν η  $m$  κείται προς τα αριστερά



Σχήμα 11

τού  $O$ , η δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, οπότε η εξίσωσή μας πρέπει να γραφεί με τη μορφή

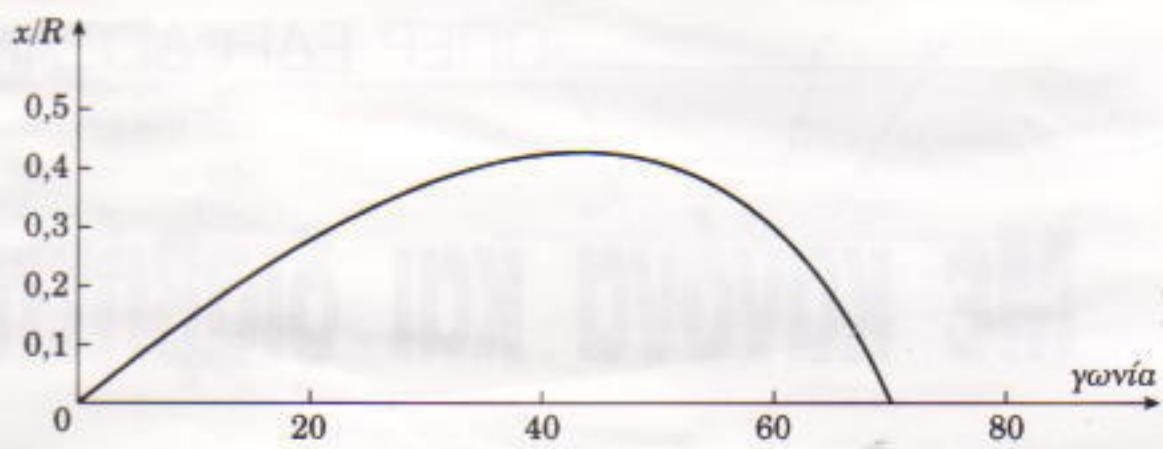
$$F = -kx.$$

Και πάλι, διαπιστώνουμε ότι η κίνηση μέσα στη σήραγγα είναι αρμονική ταλάντωση με την ίδια περίοδο (84 λεπτά) όπως και για τις σήραγγες κατά μήκος των διαμέτρων της Γης, η οποία ισούται περίπου με την περίοδο ενός δορυφόρου που εκτελεί τροχιά γύρω από τη Γη σε χαμηλό ύψος.

Η κατασκευή της σήραγγας πολύ δύσκολα θα μπορούσε να επιτευχθεί στην πράξη, λόγω των σημαντικών δυσχερειών που θα παρουσιάζει η διάτρηση της Γης —δεδομένων των τριβών, των εξαιρετικά υψηλών θερμοκρασιών και της αντίστασης του αέρα. Άλλα κι αν ακόμη οι τεχνικοί κατόρθωναν να επινοήσουν κάποιες λύσεις για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που αναμένεται να δημιουργήσει ο ρευστός πυρήνας της Γης, δεν θα εξέλειπε ποτέ η ανησυχία μήπως και λιώσουν τα τοιχώματα της σήραγγας με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

Στο μέρος Γ ρωτούσαμε τους αναγνώστες κατά πόσον η ευθύγραμμη σήραγγα αντιπροσωπεύει την ταχύτερη δυνατή διαδρομή από το  $A$  στο  $B$ . Προηγουμένως βρήκαμε ότι η περίοδος της κίνησης κατά μήκος μιας οποιαδήποτε χορδής της Γης ανέρχεται σε 84 λεπτά, πράγμα που σημαίνει ότι η μετάβαση από το ένα άκρο της χορδής στο άλλο (άνευ επιστροφής) απαιτεί χρόνο 42 λεπτών. Ωστόσο, η χορδή δεν είναι η ταχύτερη διαδρομή από το  $A$  στο  $B$ . Για να ελαχιστοποιήσουμε τη διάρκεια της μετάβασης από το  $A$  στο  $B$  πρέπει να ακολουθήσουμε μια καμπύλη διαδρομή που διέρχεται πλησιέστερα από το κέντρο της Γης απ' ό,τι η χορδή. Για να προσδιορίσει κανείς αυτή την καμπύλη διαδρομή χρειάζεται να προσφύγει στο λογισμό των μεταβολών. Εμείς θα θέσουμε μετριοπαθέστερους στόχους: θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια ταχύτερη διαδρομή που να αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Ας θεωρήσουμε τη διαδρομή που



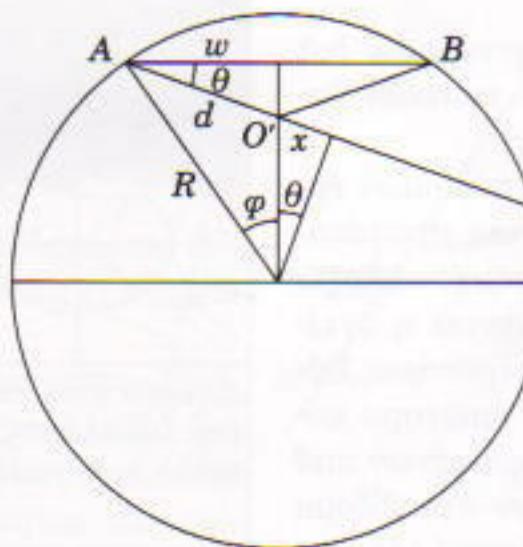
Σχήμα 13

ξεκινά από το  $A$  και ακολουθεί τη δύναμη το σημείο  $O'$  όπου αυτή τέμνεται από τη μεσοκάθετο της χορδής  $AB$ , για να τραπεί κατόπιν προς το  $B$ , δημιουργώντας στο Σχήμα 12. Εφόσον για τη διάνυση κάθε χορδής χρειάζονται 42 λεπτά, για τη διαδρομή  $w$  θα απαιτηθεί το μισό αυτού του χρόνου, δηλαδή 21 λεπτά. Ο ίδιος ακριβώς χρόνος, 21 λεπτά, απαιτείται όμως και για να διανυθεί η διαδρομή  $d + x$ , διαπίστωση η οποία μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για τη διαδρομή  $d$  απαιτείται χρόνος μικρότερος από 21 λεπτά.

Για να βρούμε την ταχύτερη ανάμεσα στις διαδρομές του τύπου που θεωρούμε, πρέπει να προσδιορίσουμε τη διαδρομή  $d + x$  για την οποία μεγιστοποιείται το  $x$ . Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι οι υπόλοιπες ποσότητες που υπεισέρχονται στο πρόβλημα μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των  $R$ ,  $\varphi$  και  $\theta$  με τη βοήθεια απλών τριγωνομετρικών σχέσεων:

$$\eta\mu\varphi = \frac{w}{R}, \quad \eta\mu(\theta + \varphi) = \frac{d + x}{R},$$

$$\text{συν}\theta = \frac{w}{d}.$$



Σχήμα 12

Στη συνέχεια γράφουμε μια εκφραση για το  $x$ :

$$x = R \eta\mu(\theta + \varphi) - d,$$

$$x = R \eta\mu(\theta + \varphi) - \frac{w}{\text{συν}\theta}$$

$$= R \eta\mu(\theta + \varphi) - \frac{R \eta\mu\varphi}{\text{συν}\theta}.$$

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της παραπάνω έκφρασης ως προς  $\theta$ , να τη θέσουμε ίση με μηδέν για  $\theta = \theta_0$  και να λύσουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς  $\theta_0$ . Η συγκεκριμένη μέθοδος, ωστόσο, δεν οδηγεί σε κάποια απλή λύση. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους χρησιμοποιώντας ένα λογιστικό φύλλο για να υπολογίσουμε το λόγο  $x/R$  για διάφορες τιμές της  $\theta$  για κάθε δεδομένη τιμή της  $\varphi$ . Έτσι, κάνοντας τη γραφική παράσταση του  $x/R$  συναρτήσει της  $\theta$  θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την τιμή  $\theta_0$  για την οποία το  $x/R$  καθίσταται μέγιστο. Ως συγκεκριμένο παράδειγμα, ας επιλέξουμε την περίπτωση  $\varphi = 20^\circ$ .

Από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 13 διαπιστώνουμε ότι το  $x/R$  παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο  $\theta_0 = 45^\circ$ , όπου η απόσταση  $x$  λαμβάνει την τιμή  $0.43R$ . Η προκύπτουσα οικονομία χρόνου μπορεί να προσδιοριστεί με την ανάλυση των εξισώσεων της αρμονικής κίνησης πρόκειται όμως για έργο αρκετά επίπονο, ώστε να πιστεύουμε ότι θα πρέπει να αποτελέσει από μόνο του ξεχωριστό πρόβλημα. □

# Με κανόνα και διαβήτη (μέρος γ')

«Διά το θαυμάσιον των υπ' αυτού δεδειγμένων κωνικών θεωρημάτων μέγαν γεωμέτρην εκάλουν»

—Ευτοκίου, Υπόμνημα εις τα Κωνικά του Απολλωνίου

Μιχάλης Λάμπρου

ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ ΕΞΕΤΑΣΑΜΕ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ με κανόνα και διαβήτη που περιέχονται σε ορισμένα σωζόμενα αρχαία ελληνικά μαθηματικά κείμενα. Ειδικά, αναφερθήκαμε στις κατασκευές που υπάρχουν στα *Στοιχεία* και στο *Περί διαιρέσεων* του Ευκλείδη. Στο τελευταίο, το κεντρικό πρόβλημα είναι η διαιρεση ενός τριγώνου σε δοθέντα λόγο από ευθεία που διέρχεται από δοθέν σημείο. Στο παρόν τεύχος θα εξετάσουμε, μεταξύ άλλων, προβλήματα του Απολλωνίου όπου το βασικό σχήμα είναι το ίδιο αλλά η ζητούμενη ευθεία αντί να μερίζει το τρίγωνο σε δοθέντα λόγο, απαιτείται να ικανοποιεί άλλες ιδιότητες. Επίσης, θα μελετήσουμε το λεγόμενο «πρόβλημα του Απολλωνίου» που υπήρχε σε —χαμένη σήμερα— διατριβή του ιδίου.

Το γνωστότερο έργο του Απολλωνίου του Περγαίου (~262-190 μ.Χ.) είναι βέβαια τα περίφημα *Κωνικά* του. Τόσο αξιοσημείωτη ήταν η συμβολή του στα μαθηματικά με αυτά ώστε απέκτησε τον τίτλο του «μεγάλου γεωμέτρη». Ιδού το σχετικό χωρίο του Ευτοκίου (6ος αι. μ.Χ.) στο *Υπόμνημά του στα Κωνικά*, ο οποίος κατά μαρτυρία του άντλησε την πληροφορία από το —χαμένο σήμερα— *Μαθημάτων θεωρία του Γερμίνου* (ακμή περί το 70 π.Χ.).

«δν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ' αὐτὸν γενόμενοι διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων μέγαν γεωμέτρην ἐκάλουν».

Δυστυχώς, εκτός από τα *Κωνικά*, των υπόλοιπων έργων του Απολλωνίου έχει χαθεί το ελληνικό πρωτότυπο. Ενός μόνον εξ αυτών, του *Λόγου αποτομῆς*, υπάρχει αραβική μετάφραση από την οποία προέρχεται η αντίστοιχη λατινική που εξέδωσε το 1706 ο αστρονόμος Edmund Halley, ευρύτερα γνωστός από τον ομώνυμο κομήτη. Λίγες πληροφορίες και περιλήψεις ορισμένων από τα χαμένα έργα του Απολλωνίου υπάρχουν στο έβδομο βιβλίο της περίφημης *Συναγωγῆς* του Πάππου (4ος αι. μ.Χ.). Συγκεκριμένα εκεί γίνεται αναφορά στα ακόλου-



Aristippus Philosopher Socratus, naufragio cum ejectus ad Rhodensem litus animadversus Geometrica schemata descripta, exclamavit ad comites ita dicitur, Bene speremus, Hominum enim vestigia video.  
Vitruvii Architecte lib.6. Pref.

Γκραβούρα από έκδοση του 1564 των Κωνικών του Απολλωνίου.

θα εξι βιβλία του Απολλωνίου πέρα των *Κωνικών*: στο προαναφερθέν *Λόγου αποτομή*, στο *Χωρίου αποτομή*, στο *Διωρισμένη τομή*, στο *Περί επαφών*, στο *Νεύσεις* και στο *Επιπέδων τόπων*. Οι κατασκευές που θα εξετάσουμε παρακάτω είναι όλες παραμένες από τις περιλήψεις του Πάππου στη *Συναγωγή* των αντίστοιχων έργων του Απολλωνίου. Άλλα έργα του ίδιου όμως, όπως τα *Κοχλίας*, *Ωκυτόκιον*, *Περί του πυρείου*, *Καθόλου πραγματεία*, *Προς τους κατοπτρικούς* και άλλα, ακόμη και αστρονομικά, έχουν χαθεί.

Ας αρχίσουμε από το μόνο, εκτός από τα *Κωνικά*, σωζόμενο έργο του Απολλωνίου, το *Λόγου αποτομή*. Η μετάφρασή του στα αραβικά έγινε τον 9ο ή 10ο αιώνα από άγνωστο λόγιο. Της μετάφρασης αυτής σώζονται δύο αντίτυπα του 13ου αιώνα, το ένα από τα οποία βρίσκεται σήμερα στη Βοδλειανή βιβλιοθήκη της Οξφόρδης (χειρόγραφο Seld. 3140) και το άλλο στη βιβλιοθήκη της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη (χειρόγραφο 4830). Η μετάφραση και έκδοση του Halley βασίστηκε στο πρώτο. Για το ίδιο πρόβλημα που επλύνεται στο *Λόγου αποτομή* έχουμε τη διατύπωσή του και στα ελληνικά αφού την καταγράφει ο Πάππος στη *Συναγωγή* του. Είναι η εξής: «διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν τῇ θέσει δοθεισῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις λόγον ἔχουσαν τὸν αὐτῶν τῷ δοθέντι». Με άλλα λόγια, αν  $O$  δοθέν σημείο και  $\varepsilon, \varepsilon'$  δύο ευθείες στις οποίες έχουν επλεγεί δύο σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, ζητείται να αχθεί ευθεία  $OMN$  από το  $O$  που να τέμνει τις  $\varepsilon, \varepsilon'$  στα  $M$  και  $N$  αντίστοιχα έτσι ώστε ο λόγος  $AM+BN$  να είναι ίσος με δοθέντα.

Φυσικά, πρέπει να εξετάσουμε πολλές περιπτώσεις ανάλογα με τη σχετική θέση των ευθειών και των σημείων, και να διερευνήσουμε το πρόβλημα, όπως άλλωστε γράφει ο Πάππος, «τὰς δὲ γραφὰς διαφόρους γενέσθαι καὶ τὸ πλῆθος λαβεῖν συμβέδηκεν [...] ἔνεκα τῆς τε πρὸς ἄλλήλας θέσεως τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῶν διαφόρων πτώσεων τοῦ δεδομένου σημείου [...] καὶ τῶν διορισμῶν».

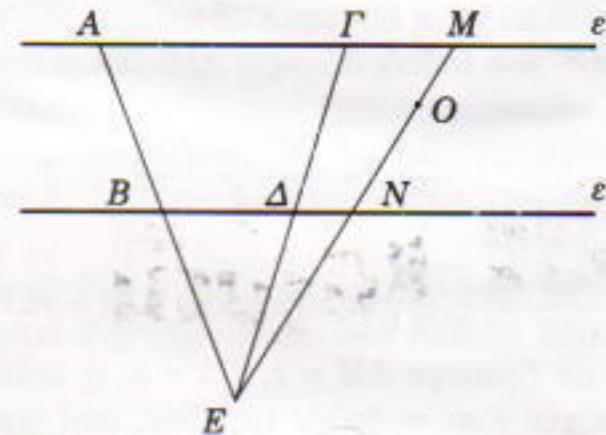
Οι ακριβείς λεπτομέρειες υπάρχουν βέβαια όλες, αφού σώζεται η αραβική και η λατινική μετάφραση. Πέραν όμως αυτών, το έργο δεν έχει μεταφραστεί σε σύγχρονη γλώσσα, οπότε πρέπει να ανατρέξει κανείς στα δυσπρόσιτα αυτά αντίτυπα για το πλήρες κείμενο. Εδώ ακολουθεί μια επιλογή του περιεχομένου τους.

Η πρώτη περίπτωση που εξετάζει ο Απολλώνιος είναι όταν οι ευθείες  $\varepsilon, \varepsilon'$  είναι παράλληλες, που είναι αρκετά απλή.

**Άσκηση 1.** Επιλύστε το παραπάνω πρόβλημα του *Λόγου αποτομή* στην περίπτωση που οι ευθείες  $\varepsilon, \varepsilon'$  είναι παράλληλες (Σχήμα 1).

(Υπόδειξη — λίγο διαφορετική από του κειμένου: Βρείτε σημεία  $\Gamma, \Delta$  επί των  $\varepsilon, \varepsilon'$  αντίστοιχα με  $AG+BD$  ίσο με τον δοθέντα λόγο. Αν η  $\Gamma\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο  $E$ , τότε η  $EO$  είναι η ζητούμενη λόγω της ομοιότητας των τριγώνων  $EA\Gamma, EB\Delta$  και  $EAM, EBN$ .)

Εννοείται ότι το πρόβλημα χρειάζεται διερεύνηση.



Σχήμα 1

παραδείγματος χάριν, ενδέχεται η  $\Gamma\Delta$  να είναι παράλληλη της  $AB$ . Σε αυτή την περίπτωση η ζητούμενη ευθεία είναι και αυτή παράλληλη της  $AB$ . Επίσης, μπορεί το  $O$  να είναι επί της  $AB$ . Σ' αυτή την περίπτωση το πρόβλημα δεν έχει λύση εκτός αν τύχει και το  $E$  να συμπίπτει με το  $O$  (ισοδύναμα, αν  $OA+OB$  ισούται με τον δοθέντα λόγο). Η πλήρης διερεύνηση υπάρχει στον Απολλώνιο, αλλά δεν θα την αναφέρουμε για να μη μακρηγορούμε.

Η δεύτερη περίπτωση στο *Λόγου αποτομή* είναι εξίσου απλή και ασφαλώς βρίσκεται εκεί χάριν πληρότητας. Αφορά την περίπτωση που οι ευθείες  $\varepsilon, \varepsilon'$  τέμνονται και τα σημεία  $A, B$  συμπίπτουν και τα δύο με το σημείο τομής των ευθειών.

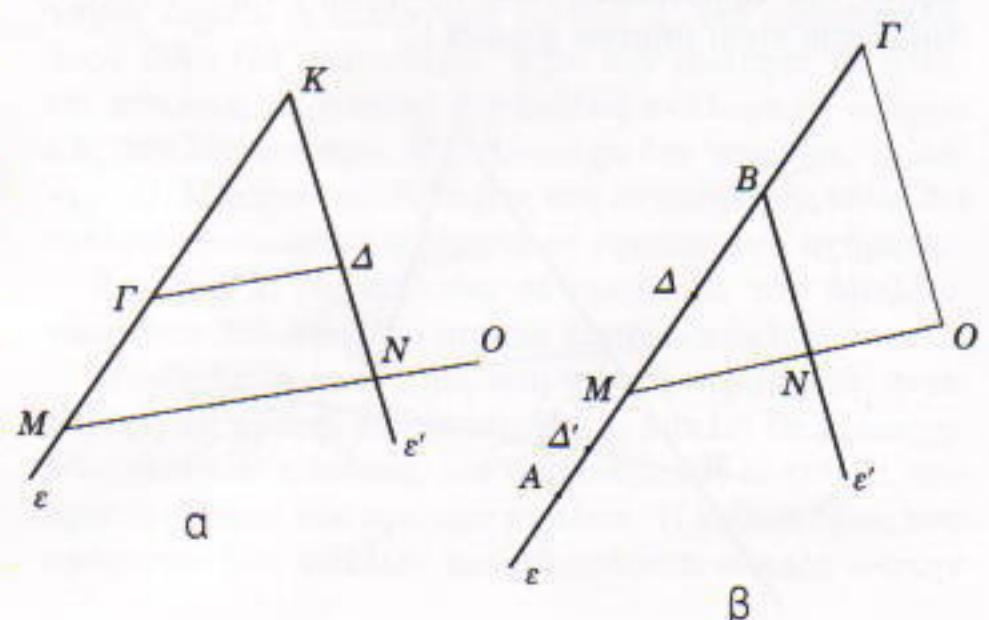
**Άσκηση 2.** Εστω  $\varepsilon, \varepsilon'$  δύο ευθείες του επιπέδου που τέμνονται στο  $K$  και έστω  $O$  δοθέν σημείο. Να αχθεί τέμνουσα  $OMN$  επί των  $\varepsilon, \varepsilon'$  έτσι ώστε ο λόγος  $KM+KN$  να ισούται με δοθέντα λόγο (Σχήμα 2a).

(Υπόδειξη: Κατασκευάστε με κανόνα και διαβήτη σημεία  $\Gamma, \Delta$  στις  $\varepsilon, \varepsilon'$  αντίστοιχα έτσι ώστε ο λόγος  $KG+KD$  να ισούται με τον δοθέντα. Η ζητούμενη τέμνουσα  $OMN$  είναι παράλληλη της  $\Gamma\Delta$ ).

Η πρώτη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η επόμενη, όπου οι ευθείες τέμνονται και το ένα από τα δύο σημεία συμπίπτει με το κοινό τους σημείο.

**Άσκηση 3.** Κατασκευάστε τη ζητούμενη τέμνουσα στο *Λόγου αποτομή* όταν το σημείο  $B$  συμπίπτει με το κοινό σημείο των  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  (Σχήμα 2β).

(Η ανάλυση που υπάρχει στο κείμενο είναι η εξής: Εστω ότι το σημείο  $M$  έχει κατασκευαστεί. Φέρουμε από



Σχήμα 2

το  $O$  την παράλληλη  $OG$  της  $\varepsilon'$ . Επιλέγουμε το  $\Delta$  επί της  $\varepsilon$  με  $A\Delta+OG = \text{o}$  δοθείς λόγος  $= AM+BN$ . Είναι λοιπόν

$$\frac{AD}{AM} = \frac{OG}{BN} = \frac{GM}{BM}$$

άρα και  $\frac{AD}{AM} = \frac{GM}{BG}$ , δηλαδή  $AM \cdot GM = AD \cdot BG$ .

Έτσι, αν θέσουμε  $AM = x$ ,  $GD = a$ , η τελευταία ισότητα λέει  $x + a = \text{δοθέν εμβαδόν, από όπου ευκελά προσδιορίζεται το } x$ . Η σύνθεση τώρα είναι απλή.

Τέλος, η γενική περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη, αν ακολουθήσουμε τα βήματα του Απολλωνίου.

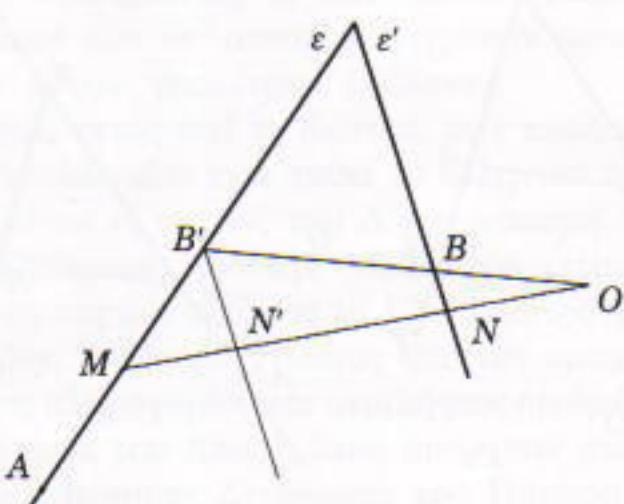
**Τάξηση 4.** Κατασκευάστε τη ζητούμενη τέμνουσα του Λόγου αποτομή, στη γενική περίπτωση (Σχήμα 3).

(Ανάλυση: Έστω ότι η τέμνουσα  $MNO$  είναι γνωστή. Φέρουμε την  $OB$  που τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $B'$ , και φέρουμε την  $B'N'$  παράλληλη της  $\varepsilon$ . Έχουμε  $BN+B'N'=OB+OB'=$  σταθερός και γνωστός λόγος. Άρα,

$$\frac{AM}{B'N'} = \frac{AM}{BN} \cdot \frac{OB}{OB'} = \text{γνωστός λόγος.}$$

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα ανάγεται στο προηγούμενο όπου οι δοθείσες ευθείες είναι οι  $\varepsilon$  και  $B'N'$ , και το ένα σημείο είναι η τομή τους  $B'$ . Η σύνθεση είναι τώρα απλή).

Αυτό είναι λίγο πολύ (χωρίς τις διερευνήσεις) το περιεχόμενο του Λόγου αποτομή. Ας σημειώσουμε ότι η παράθεση της μεθόδου «ανάλυση και σύνθεση» στις δύο τελευταίες ασκήσεις δεν είναι τυχαία αλλά έγινε για να διατηρηθεί, έστω ακροθιγώς, το ύφος του κειμένου. Συγκεκριμένα, η αιτία που ο Πάππος συμπεριέλαβε το παραπάνω έργο στο βιβλίο 7 της Συναγωγής του είναι ακριβώς επειδή εκεί μελετά τη μέθοδο της «ανάλυσης και σύνθεσης». Για το λόγο αυτό, το βιβλίο 7 τιτλοφορείται *Analynomenos topos*. Σε αυτόν ο Πάππος περιλαμβάνει αρχαία μαθηματικά έργα που προσεγγίζουν το θέμα τους κάνοντας ανάλυση και σύνθεση. Ως τέτοια συμπεριλαμβάνει τα προαναφερθέντα εξιά έργα του Απολλωνίου καθώς και τα Δεδομένα και το Επιπέδων τόπων του Ευκλείδη, το Στερεών τόπων του Αρισταίου και το Περί μεσοτήτων του Ερατοσθένη. (Με εξαίρεση τα Δεδομένα, τα υπόλοιπα είναι σήμερα χαμένα.)



Σχήμα 3

Δεν υπάρχει λόγος να επεκταθούμε εδώ στα, γνωστά άλλωστε, περί της μεθόδου της «ανάλυσης και σύνθεσης», για την οποία ο Πάππος λέει ότι είναι «δύναμις εὐρετική τῶν προτεινομένων προβλημάτων». Θα αρκεστούμε στο να παραθέσουμε λίγες γραμμές από την εισαγωγή του στο βιβλίο 7 της Συναγωγής: «ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητούμενου, ὡς ὁμολογούμενου, διὰ τῶν ἔξῆς ακολούθων, ἐπὶ τι ὁμολογούμενον συνθέσει. Ἐν γὰρ τῇ ἀναλύσει, τὸ ζητούμενον ὡς γεγονός ὑποθέμενοι τὸ ἔξ οὖ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα, καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἔως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἰς τι τῶν ἥδη γνωριζομένων ἢ τάξιν ἀρχῆς ἔχόντων καὶ τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλούμενην, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. Ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἔξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὑστατὸν ὑποστησάμενοι γεγονός ἥδη, καὶ ἐπόμενα τὰ ἐκεῖ, ἐνταῦθα, προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητούμενου κατασκευῆς καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν (ανάλυση είναι η μέθοδος σύμφωνα με την οποία πάρνουμε το ζητούμενο ως δεδομένο και από εκεί πηγαίνουμε διαδοχικά σε αυτά που έπονται έως εκείνο το οποίο δεχόμεθα ως αποτέλεσμα της σύνθεσης. Διότι για την ανάλυση υποθέτουμε το ζητούμενο σαν να έχει γίνει και αναρωτιόμαστε ποιο είναι εκείνο από το οποίο προέρχεται, και ξανά ποια είναι η αιτία του προηγούμενου, έως ότου, πηγαίνοντας προς τα πίσω, φτάσουμε σε κάτι ήδη γνωστό ή που έχει θέση αρχῆς και τέτοια μέθοδο την ονομάζουμε ανάλυση ή ανάποδη λύση. Στη δε σύνθεση, πηγαίνοντας αντίθετα, υποθέτουμε ότι έχει γίνει ήδη εκείνο στο οποίο καταλήξαμε με την ανάλυση, και από εκεί πηγαίνοντας με τη φυσική φορά σε εκείνα που ήταν προηγούμενα και συνδέοντάς τα μαζί, στο τέλος καταλήγουμε στη ζητούμενη κατασκευή και αυτό το ονομάζουμε σύνθεση).»

Το δεύτερο έργο του Απολλωνίου στον *Analynomeno topos* της Συναγωγής του Πάππου είναι το *Xaríou apotomή*. Εδώ το γεωμετρικό σχήμα είναι όμοιο με αυτό του Λόγου αποτομή, μόνο που τώρα η ζητούμενη διατέμνουσα  $OMN$  απαιτείται να αποκόπτει τμήματα  $AM$ ,  $BN$  με δοθέν γινόμενο (αντί δοθέντα λόγο). Από τα συμφραζόμενα και την περιληψη του Πάππου, φαίνεται ότι ο Απολλωνίος ακολουθεί παρόμοια πορεία στο *Xaríou apotomή* με αυτή του Λόγου αποτομή. Έτσι τουλάχιστον υποστηρίζει, με επιχειρήματα, ο Halley ο οποίος δημοσίευσε μια ευλογοφανή αποκατάσταση του χαμένου κείμενου.

Οι αντίστοιχες των Ασκήσεων 1 και 2 αλλά για δοθέν γινόμενο αντί δοθέντα λόγο είναι απλές, όπως δεν είναι δύσκολο να προσαρμοστεί το αντίστοιχο της Άσκησης 4 ώστε η γενική περίπτωση να αναχθεί στην περίπτωση, όπως στην Άσκηση 3, όπου το ένα δοθέν σημείο είναι στην τομή των δύο ευθειών.

**Άσκηση 5.** Κατασκευάστε τη ζητούμενη τέμνουσα στο *Xaríou apotomή* όταν το σημείο  $B$  συμπίπτει με το κοινό σημείο των  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  (Σχήμα 2β).

(Ανάλυση: Αν η  $MN$  είναι γνωστή, φέρουμε  $O\Gamma/\varepsilon'$  και λαμβάνουμε  $\Delta'$  στην ε με  $A\Delta' \cdot O\Gamma =$  το δοθέν γινόμενο  $= AM \cdot BN$ . Έτοι θέλουμε  $AM \cdot BN = A\Delta \cdot O\Gamma$ , δηλαδή  $A\Delta + AM = BN + O\Gamma = BM + GM$ . Άρα και

$$\frac{AM}{GM} = \frac{A\Delta'}{BM} = \frac{AM - A\Delta'}{GM - BM} = \frac{\Delta'M}{BG}$$

Με άλλα λόγια,  $\Delta'M \cdot BM = A\Delta' \cdot BG$  που σημαίνει ότι αν θέσουμε  $\Delta'M = x$ ,  $B\Delta' = a$  έχουμε  $x(a - x) =$  δοθέν εμβαδόν, από όπου εύκολα προσδιορίζεται το  $x$ . Η σύνθεση είναι τώρα απλή).

Το πιο γνωστό από τα προβλήματα κατασκευών του Απολλωνίου είναι από το χαμένο σήμερα έργο του *Περί επαφών*. Η γενική του διατύπωση υπάρχει στην περίληψη του Πάππου στο έβδομο βιβλίο της *Συναγωγής* του και είναι η εξής: «σημείων καὶ εύθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὅποιωνοῦν θέσει δοθέντων κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἐκάστου τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθεῖη, ἡ ἐφαπτόμενον ἐκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν (εάν δοθούν θέσει τρία στοιχεία που το καθένα μπορεί να είναι σημείο, ευθεία ή κύκλος, να γραφεί κύκλος που να διέρχεται από τα σημεία, εάν έχουν δοθεί σημεία, ή που να εφάπτεται κάθε μιας από τις δοθείσες (ευθείες ή κυκλικές γραμμές).»

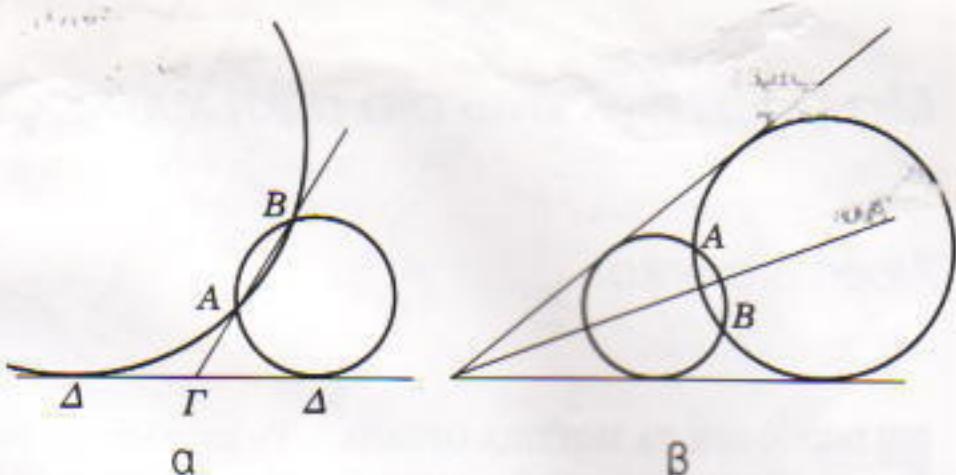
Αν συμβολίσουμε με « $\sigma$ », « $\varepsilon$ » και « $\kappa$ » καθένα από τα δοθέντα σημεία, ευθείες ή κύκλους αντίστοιχα, τότε έχουμε δέκα διαφορετικές περιπτώσεις, «κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίγνεσθαι δέκα», τις  $\sigma\sigma$ ,  $\sigma\varepsilon$ ,  $\varepsilon\varepsilon$ ,  $\varepsilon\kappa$ ,  $\sigma\kappa$ ,  $\kappa\kappa$ ,  $\varepsilon\kappa\kappa$ ,  $\kappa\kappa\kappa$ . Οι περιπτώσεις  $\sigma\sigma$  και  $\varepsilon\varepsilon$  δεν είναι τίποτα άλλο από την κατασκευή περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου που επιλύονται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (βιβλίο δ', Προτάσεις 5 και 4 αντίστοιχα). Για τα υπόλοιπα, ιδίως το  $\kappa\kappa$ , έχουν ασχοληθεί μαθηματικοί ακόμη και της πρώτης γραμμής, και έχουν προταθεί πάμπολλες ευφυέστατες λύσεις. Δυστυχώς, εδώ δεν μπορούμε παρά να παραθέσουμε ελάχιστα ψήγματα από τις προταθείσες λύσεις (οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να ανατρέξουν σε άρθρο του E. Lemoine στο *Nouvelles Annales Mathématiques* του 1852, σελ. 447, για αναγραφή και σύγκριση πολλών μέχρι τότε γνωστών αντιμετωπίσεων). Επιγραμματικά, υπάρχουν λύσεις όπως του Vietā (τη δημοσίευση το 1600 στο έργο του *Apollonius Gallus*), του Νεύτωνα (τη συμπεριέλαβε στο έργο του *Arithmetica Universalis* γραμμένο μεταξύ 1673 και 1683 αλλά δημοσιευμένο το 1707), του Gauss, του Gergonne, του Petersen, του Bobillier, του Fouché, του Mannheim, του Poncelet και πολλών άλλων. Επίσης υπάρχουν ενδιαφέρουσες λύσεις με χρήση κωνικών, όπως του Adrianus Romanus (1561-1615) και του Νεύτωνα, ο οποίος την κατέγραψε στα περίφημα *Principia* του.

Από την περίληψη του *Περί επαφών* στη *Συναγωγή* του Πάππου μπορούμε να κάνουμε, έστω κατ' εκτίμηση, ανασύσταση των τεχνικών του. Λαμβάνοντας υπόψη και ειδικές περιπτώσεις όπως π.χ. δύο από τις δοθείσες ευθείες να είναι παράλληλες, οι παραπάνω δέκα περιπτώσεις μαζί με τις υποπεριπτώσεις γίνονται 60, οι πε-

ρισσότερες αρκετά απλές. Όταν τα δοθέντα τρία στοιχεία είναι σημεία ή και ευθείες, οι τεχνικές του Απολλωνίου φαίνεται να είναι αυτές που έχουν καθιερωθεί στα σύγχρονα βιβλία γεωμετρίας. Ας θυμηθούμε μερικές.

**Άσκηση 6.** Να λυθεί το πρόβλημα του Απολλωνίου όταν

- α) δίδονται δύο σημεία και μία ευθεία
- β) δίδονται ένα σημείο και δύο ευθείες (Σχήμα 4)



Σχήμα 4

(Η καθιερωμένη λύση είναι: α) αν η ευθεία  $AB$  που ορίζουν τα δοθέντα σημεία  $A, B$  είναι παράλληλη της δοθείσης  $\varepsilon$ , το πρόβλημα είναι απλό. Άλλιώς, αν  $\Gamma$  το κονό τους σημείο και αν  $\Delta$  σημείο της  $\varepsilon$  με  $\Gamma\Delta^2 = GA \cdot GB$  (υπάρχουν δύο τέτοια σημεία  $\Delta$ ), τότε ο κύκλος  $A, B, \Delta$  είναι ο ζητούμενος. β) Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, το πρόβλημα είναι απλό. Άλλιώς, το συμμετρικό  $B$  του σημείου  $A$  ως προς τη διχοτόμο των δοθεισών ευθειών είναι επίσης στον ζητούμενο κύκλο. Έτοι το πρόβλημα ανάγεται στο προηγούμενο).

Όταν ένα από τα δοθέντα στοιχεία είναι κύκλος, οι κατασκευές έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Θα περιγράψουμε ορισμένες περιπτώσεις που τα τρία στοιχεία είναι σημεία ή κύκλοι (δηλαδή, όχι ευθείες). Οι τεχνικές που θα ακολουθήσουμε είναι πολύ διαφορετικές από τις απολλώνεις, παρ' όλο που οι τελευταίες είναι εξαιρετικές. Από τις επιλογές που έχουμε, θα βασίσουμε τις κατασκευές μας στο ισχυρό εργαλείο της αντιστροφής.

Υπενθυμίζουμε ότι αντιστροφή ως προς δοθέν κέντρο  $O$  είναι ο μετασχηματισμός του επιπέδου που στέλνει το τυχόν σημείο  $A$  (πλην του  $O$ ) στο  $A'$  της ευθείας  $OA$ , όπου  $OA \cdot OA' =$  σταθερό. Έχει την ιδιότητα να στέλνει κύκλους σε ευθείες ή κύκλους ανάλογα αν ο αρχικός κύκλος περιέχει, ή αντίστοιχα δεν περιέχει, το κέντρο  $O$ . Μία από τις ιδιότητες της αντιστροφής είναι ότι στέλνει εφαπτόμενα σχήματα σε εφαπτόμενα σχήματα.

**Άσκηση 7.** Να επιλυθεί το πρόβλημα του Απολλωνίου όταν δίδονται ένα σημείο και δύο κύκλοι.

(Υπόδειξη: Αν κάνουμε, στη γενική περίπτωση, αντιστροφή ως προς το δοθέν σημείο, οι κύκλοι θα μετασχηματισθούν σε κύκλους, και ο ζητούμενος σε ευθεία που εφαπτεται των δύο πρώτων κύκλων. Η ευθεία όμως που εφαπτεται δύο κύκλων κατασκευάζεται εύκολα —στην

# Η μελανή όψη των κυμάτων

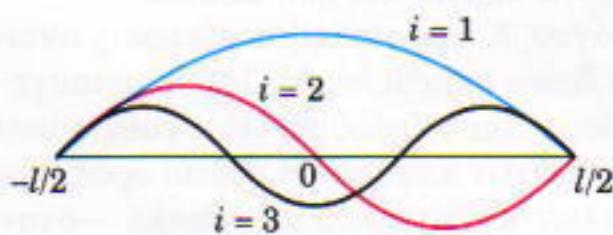
Μια ραψω, ιάνω στα μήκη κύματα το νόμο των Stefan-Boltzmann

Albert Stasenko

**Γ**ΙΑΤΙ ΑΡΑΓΕ ΤΑ ΜΟΥΣΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ παράγουν μουσικούς ήχους και δχι τον ασυνάρτητο θόρυβο που ακούγεται όταν χτυπάμε άρρυθμα ένα κουτάλι πάνω σε μια κατσαρόλα; Διότι, βεβαίως, τα μουσικά δργανα δεν παράγουν τυχαίους ήχους κάθε δυνατής συχνότητας. Εκπέμπουν ήχους μόνο συγκεκριμένων συχνοτήτων —τους λεγόμενους απλούς, ή μονοχρωματικούς, ήχους.

Αν η συχνότητα ενός απλού ήχου είναι  $v$ , το αντίστοιχο μήκος κύματος στον αέρα ισούται με  $\lambda = v/v$ , όπου με  $v$  συμβολίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα. Το μήκος μιας χορδής πάνου ή ενός αυλού εκκλησιαστικού οργάνου καθορίζει τα μήκη κύματος του παραγόμενου ήχου. Το Σχήμα 1 θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε αυτή την ιδέα στην περίπτωση των χορδών. Δείχνει τρεις διαφορετικές μορφές στάσιμων κυμάτων (ή κανονικούς τρόπους ταλάντωσης) σε μια χορδή. Όπως βλέπουμε, το καθένα από τα απεικονιζόμενα στάσιμα κύματα περιέχει έναν ακέραιο αριθμό ημιμηκών κύματος:

$$l = i \frac{\lambda_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$



Σχήμα 1

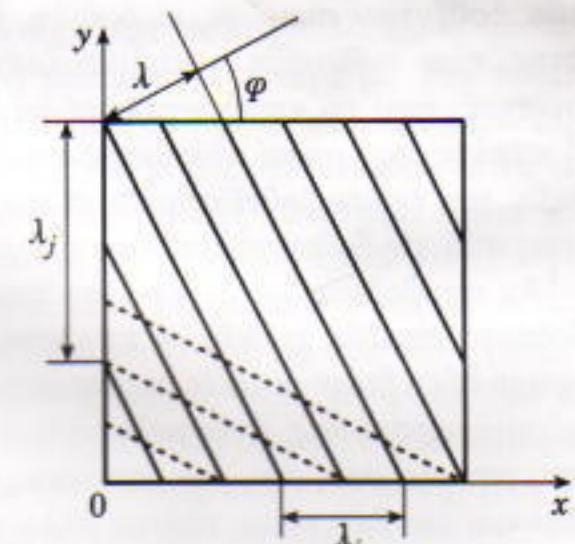
Το μεγαλύτερο δυνατό μήκος κύματος ισούται με  $2l$  ( $i = 1$ ), ενώ όλα τα υπόλοιπα στάσιμα κύματα, που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες τιμές του  $i$ , έχουν μικρότερα μήκη κύματος. Ο αριθμός  $i$  φανερώνει πόσα ημιμηκή κύματος υπάρχουν στη χορδή.

Αλλά ας στραφούμε τώρα στο ερώτημα πώς θα διαμορφωνόταν η κατάσταση αν αντί της χορδής είχαμε μια τετράγωνη πλάκα εμβαδού ίσου με  $l \times l$  (Σχήμα 2). Τότε, κατά μήκος κάθε άξονα θα είχαμε τους εξής αριθμούς ημιμηκών κύματος:

$$i = 2 \frac{l}{\lambda_i}$$

κατά τον άξονα των  $x$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) και

$$j = 2 \frac{l}{\lambda_j} \quad (2)$$



Σχήμα 3

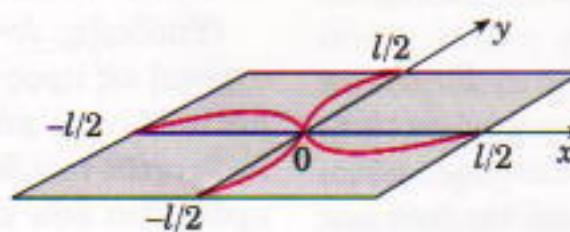
ορισμένη γωνία  $\varphi$  με τον άξονα των  $x$  (οι κεκλιμένες συνεχείς γραμμές στο Σχήμα 3). Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{\sin \varphi} = \frac{2l}{i}, \quad \lambda_j = \frac{\lambda}{\cos \varphi} = \frac{2l}{j}.$$

Όποτε ο φυσικός συναντά σε κάποιους τύπους το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας, αμέσως τον καταλαμβάνει η έντονη επιθυμία να τα τετραγωνίσει και να αθροίσει τα δύο τετράγωνα:

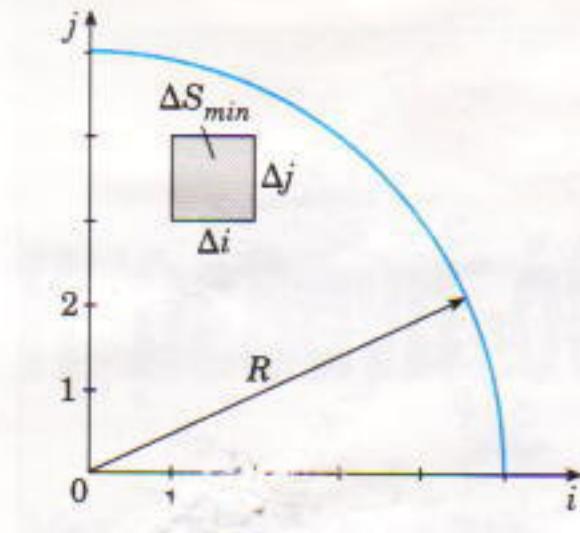
$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 = \frac{\lambda^2}{4l^2} (i^2 + j^2).$$

Είναι φανερό πως η ανωτέρω εξίσωση ικανοποιείται από περισσότερα του ενός ζεύγη τιμών των αριθμών  $i$  και  $j$ . Για παράδειγμα, οι διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 3 παριστούν ένα διαφορετικό κύμα που περιγράφεται από την ίδια εξίσωση:



Σχήμα 2





Σχήμα 4

$$i^2 + j^2 = 4\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = R^2. \quad (3)$$

Κοιτάζοντάς τη λίγο προσεκτικότερα, αντιλαμβανόμαστε αμέσως ότι πρόκειται για την εξίσωση ενός κύκλου ακτίνας  $R$  στο επίπεδο  $(i, j)$  (Σχήμα 4). Ωστόσο, τόσο η τετυμημένη όσο και η τεταγμένη σ' αυτό το διάγραμμα επιτρέπεται να λάβουν μόνο ακέραιες τιμές, οπότε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου διαμερίζεται σε τετραγωνίδια, και το εμβαδόν του ελάχιστου τετραγωνίδιου ισούται με  $\Delta S_{min} = \Delta i \cdot \Delta j = 1$  (το σκιασμένο τετράγωνο). Η ακτίνα του κύκλου δεν μετριέται σε μέτρα — ανήκει στην επικράτεια των αδιάστατων ποσοτήτων. Πόσα τέτοια τετραγωνίδια θα μπορούσαν να χωρέσουν σε ένα τεταρτημέριο του κύκλου; (Γιατί μόνο στο ένα τεταρτημέριο; Μα επειδή οι αριθμοί  $i$  και  $j$  θεωρούνται θετικοί.) Για να απαντήσουμε στο συγκεκριμένο ερώτημα, πρέπει να διαιρέσουμε το εμβαδόν του πρώτου τεταρτημορίου διά του  $\Delta S_{min} = 1$  (όπως βλέπετε, δεν θα χρειαστεί καν να μπούμε στον κόπο να κάνουμε μια πραγματική διαίρεση). Έτσι,

$$N = \frac{\pi R^2 / 4}{1} = \pi \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Το σημείο = μάς υπενθυμίζει ότι δεν είναι εύκολο να καλύψουμε ένα κυκλικό τμήμα του πατώματος με τετράγωνα πλακάκια.

Ας περάσουμε τώρα στον τρισδιάστατο χώρο και ας θεωρήσουμε ένα στερεό σχήμα (ας πούμε, έναν κύβο με ακμή μήκους  $l$ ). Για να περιγράψουμε τη διάδοση των κυμάτων μάς

χρειάζονται πλέον τρεις άξονες (των  $x$ , των  $y$  και των  $z$ ), και επομένως οφείλουμε να προσθέσουμε μία νέα εξίσωση στο σύστημα (2):

$$k = 2 \frac{l}{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

οπότε η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή:

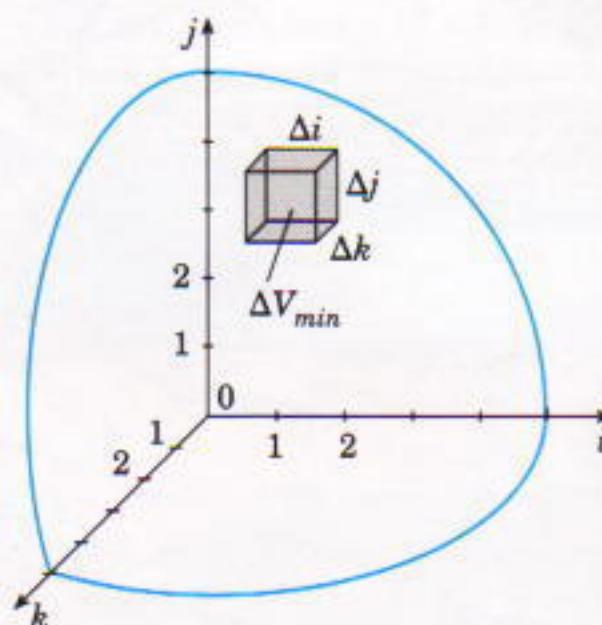
$$i^2 + j^2 + k^2 - 4\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = R^2.$$

Ως ανεμένετο, πρόκειται για την εξίσωση μιας σφαίρας στο σύστημα συντεταγμένων  $i, j, k$  (Σχήμα 5). Αυτός ο χώρος εμφανίζεται επίσης διαμερισμένος, σε κυβικές κυψελίδες τούτη τη φορά, και έχει έναν ελάχιστο όγκο  $\Delta V_{min} = \Delta i \cdot \Delta j \cdot \Delta k = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ . Συνεπώς, το ένα όγδοο μιας σφαίρας ακτίνας  $R$  (μαντέψτε γιατί ασχολούμαστε μόνο με το ένα όγδοο της) — το πρώτο ογδοημέριο, όπως λέγεται — περιέχει

$$N = \frac{(1/8)(4\pi R^3 / 3)}{1} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^3. \quad (4)$$

το πλήθος τέτοιες κυψελίδες.

Όσο μικρότερη τιμή λαμβάνει το  $\lambda$  τόσο μεγαλύτερο γίνεται το  $N$ . Σας υπενθυμίζω ότι κάθε κυψελίδα ( $i, j, k$  ισοδύναμα, κάθε τριάδα αριθμών  $i, j$  και  $k$ ) περιγράφει και ένα ξεχωριστό στάσιμο κύμα. Συνεπώς, έχουμε προδιορίσει το ολικό πλήθος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης — δηλαδή, το πλήθος των στάσιμων κυμάτων με μήκη κύματος μικρότερα



Σχήμα 5

του  $l$  — που παράγονται στο εσωτερικό ενός κύβου με ακμή μήκους  $l$ .

Ωστόσο, οι οντότητες στις οποίες μπορεί να αποδοθεί ο χαρακτηρισμός μουσικές δεν εξαντλούνται στους ήχους. Υπό μίαν έννοια, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και το ορατό φως παρουσιάζουν επίσης «μουσική» υφή. Αυτή η «μουσικότητα» ονομάζεται χρώμα, και κάθε χρώμα χαρακτηρίζεται από την ιδιαίτερη του συχνότητα  $v$  και το ιδιαίτερο του μήκος κύματος  $\lambda = c/v$ , όπου  $c$  η ταχύτητα διάδοσης του φωτός. Στην προκειμένη περίπτωση, το ανάλογο του αυλού του εκκλησιαστικού οργάνου η της χρονής του πάνου μάς το προσφέρει ένα λείζερ που παράγει μονοχρωματική ακτινοβολία. Αν η απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων κατόπτρων του λείζερ ισούται με  $l$ , το λείζερ παράγει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με μήκος κύματος που περιγράφεται από την εξίσωση (1).

Είναι άραγε δύσκολο να κατασκευάσουμε μια κυβική κοιλότητα γεμάτη με ηλεκτρομαγνητικά κύματα; Καθόλου. Δεν χρειάζεται παρά να απαντλήσουμε από μια κυβική κοιλότητα όγκου  $l^3$  τα πάντα — αέρα, υδρατμούς, διοξειδίου του άνθρακα, κ.ο.κ. Θα μείνει τότε η κοιλότητα εντελώς άδεια; Παραδόξως, δχ. Θα την πληροί η λεγόμενη «ακτινοβολία ισορροπίας» που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία  $T$  των τοιχωμάτων της. Σ' αυτή τη θερμοκρασία τα τοιχώματα εκπέμπουν και απορροφούν την ίδια ποσότητα ενέργειας ανά μονάδα χρόνου. Το κάθε κυβικό εκατοστό του χώρου της κυβικής κοιλότητας το διαπερνούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται προς κάθε κατεύθυνση. Πρόκειται για κύματα κάθε λογής — υπεριώδη κύματα, ορατό φως, υπέρυθρη ακτινοβολία... Φυσικά, όλα τους έχουν μήκος κύματος μικρότερο από  $2l$ .

Αν ένας τέτοιος «κλίβανος» θερμανθεί μόνο μέχρι θερμοκρασίας δωματίου, θα ισοδυναμεί με ένα «ραδιοσταθμό» πολύ μικρής ισχύος, που κυρίως εκπέμπει «χλιαρή» (υπέρυθρη) ακτινοβολία. Μια κάμινος ανοικτής εστίας, από την άλλη, η οποία έχει θερμανθεί ώς τους 1.000 K περίπου, δεν παράγει μόνο υπέρυθρη

ακτινοβολία αλλά και ορατό φως. Τα μήκη κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σ' αυτή την περιοχή του φάσματος κυμαίνονται από κάποιο κλάσμα του μικρού ( $\mu\text{m}$ ) έως και μερικά μικρά, οπότε η απόσταση μεταξύ των γειτονικών φασματικών γραμμών (με μήκη κύματος  $\lambda_i$  και  $\lambda_{i+1}$ ) που δίνονται από την εξίσωση (1) είναι πολύ μικρή. Συνεπώς, το σύνολο των μηκών κύματος (ή των συχνοτήτων) μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχές αντί ως διακριτό. Τότε, η εξίσωση (4) λέει ότι το πλήθος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ισορροπίας που γεμίζουν τον όγκο  $l^3$  ενός «κλιβάνου» δίνεται από την έκφραση

$$N(\lambda) = \frac{4\pi l^3}{3\lambda^3} = \frac{4\pi l^3}{3c^3} v^3 = N(v). \quad (5)$$

Κάθε φωτόνιο συχνότητας  $v$  μεταφέρει ενέργεια  $hv$  (όπου  $h$  η σταθερά του Planck). Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ισορροπίας ενίστε ονομάζεται «αέριο φωτονίων». Πρόκειται για ένα φυσικό σύστημα που μοιάζει με τα συμβατικά αέρια κατά το ότι τα φωτόνια κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις όπως και τα μόρια. Εντούτοις, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στην περίπτωση των μορίων, τα φωτόνια δεν «συγκρούονται» μεταξύ τους —απλώς και μόνο «χτυπούν» στα τοιχώματα του δοχείου που τα περιέχει (του «κλιβάνου» μας). Επιπλέον, όλα τα φωτόνια κινούνται με την ίδια ταχύτητα (η οποία ισούται με την ταχύτητα του φωτός), οπότε οι φυσικοί περιγράφουν το σύστημα λέγοντας ότι τα φωτόνια έχουν μια συγκεκριμένη κατανομή συχνοτήτων (ενώ τα μόρια ενός αερίου θεωρούνται κατανεμημένα στις διάφορες ταχύτητες). Ευλόγως, λοιπόν, ανακύπτει το ερώτημα: Ποια είναι η μέση ενέργεια των φωτονίων;

Κατ' αρχάς ας θεωρήσουμε ένα μοριακό αέριο. Έστω  $n$  η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του και  $m$  η μάζα του καθενός τους. Όπως γνωρίζουμε, η μέση κινητική ενέργεια ενός μορίου του αερίου σε θερμοκρασία  $T$  είναι ανάλογη της ποσότητας  $kT$ , όπου  $k$  η σταθερά του Boltzmann:

$$\frac{mv^2}{2} \sim kT. \quad (6)$$

Έτσι, η ενεργειακή πυκνότητα του εν λόγω αερίου ισούται με

$$n \frac{mv^2}{2} \sim nkT = P,$$

όπου με  $P$  συμβολίζουμε την πίεση.

Στην ατμόσφαιρα της Γης η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του αερίου μεταβάλλεται συναρτήσει του ιψομέτρου σύμφωνα με τον τύπο του Boltzmann:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgy}{kT}}.$$

Ο εν λόγω τύπος μάς δίνει το χαρακτηριστικό υψόμετρο όπου η πυκνότητα του αέρα μειώνεται στο  $1/e$  της τιμής που έχει στην επιφάνεια της Γης (με  $M$  συμβολίζουμε τη γραμμομοριακή μάζα του αέρα):

$$H_e = \frac{kT}{mg} = \frac{RT}{Mg} \\ = \frac{8,31 \cdot 300}{2,9 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8} \text{ m} \approx 8,8 \text{ km.}$$

Στο συγκεκριμένο υψόμετρο η δυναμική ενέργεια ενός μορίου ισούται με  $mgH_e = kT$ . Όλως παραδόξως, η τιμή αυτή συμπίπτει με τη μέση δυναμική ενέργεια των μορίων της ατμόσφαιρας εάν δεχτούμε ότι η θερμοκρασία της δεν εξαρτάται από το υψόμετρο (ισόθερμη ατμόσφαιρα):

$$\overline{mgy} = kT \quad (\text{ή } H_e = \bar{y}). \quad (7)$$

Σύμφωνα με τον μαθηματικό ορισμό της μέσης τιμής, ισχύει

$$\overline{mgy}N = mg \int_0^{\bar{y}} y dN(y),$$

όπου με  $N$  συμβολίζουμε το ολικό πλήθος των μορίων που περιέχει μια στήλη αέρα με διατομή μοναδιαίου εμβαδού και με  $dN(y) = n(y)dy$  το πλήθος των μορίων που περιέχει ένα στοιχείο της ίδιας στήλης το οποίο εκτείνεται μεταξύ των υψομέτρων  $y$  και  $y + dy$ :

$$N = \int_0^{\bar{y}} dN(y)$$

Η ανωτέρω σχέση μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$\overline{mgy} = mg \frac{\int_0^{\bar{y}} y dN(y)}{\int_0^{\bar{y}} dN(y)}.$$

Για να υπολογίσουμε το δεξιό μέλος, ας θεωρήσουμε πρώτα τον παρονομαστή

$$I_1 = \int_0^{\bar{y}} dN(y) = n_0 \int_0^{\bar{y}} e^{-\frac{mgy}{kT}} dy.$$

Εισάγοντας τη νέα μεταβλητή  $z = \frac{mgy}{kT}$

$$z = \frac{mgy}{kT}, \quad dz = \frac{mg}{kT} dy,$$

παίρνουμε (κάνοντας την απλή παρατήρηση ότι  $(-e^{-z})' = e^{-z}$ ):

$$I_1 = \frac{n_0 kT}{mg} \int_0^{\bar{y}} e^{-z} dz = \\ \frac{n_0 kT}{mg} [-e^{-z}]_0^{\bar{y}} = \frac{n_0 kT}{mg}.$$

Εν συνεχείᾳ, προχωράμε στον παρονομαστή

$$I_2 = \int_0^{\bar{y}} y dN(y) = n_0 \int_0^{\bar{y}} y e^{-\frac{mgy}{kT}} dy.$$

Κάνοντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής ολοκληρώστης όπως και προηγουμένως, έχουμε

$$I_2 = n_0 \left( \frac{kT}{mg} \right)^2 \int_0^{\bar{y}} z e^{-z} dz.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες δηλαδή παρατηρώντας ότι  $ze^{-z} = -z(e^{-z})' = -(ze^{-z})' + e^{-z}$  καταλήγουμε στην έκφραση:

$$I_2 = n_0 \left( \frac{kT}{mg} \right)^2 \left[ [-z e^{-z}]_0^{\bar{y}} + \int_0^{\bar{y}} e^{-z} dz \right].$$

Ο πρώτος όρος του εντός αγκίστρων αθροίσματος στο δεξιό μέλος μηδενίζεται (προσπαθήστε να το αποδείξετε σαν άσκηση στα μαθηματικά), οπότε

$$I_2 = n_0 \left( \frac{kT}{mg} \right)^2 \int_0^{\bar{y}} e^{-z} dz = \frac{kT}{mg} I_1.$$

Έτσι, καταλήγουμε τελικά στο αποτέλεσμα:

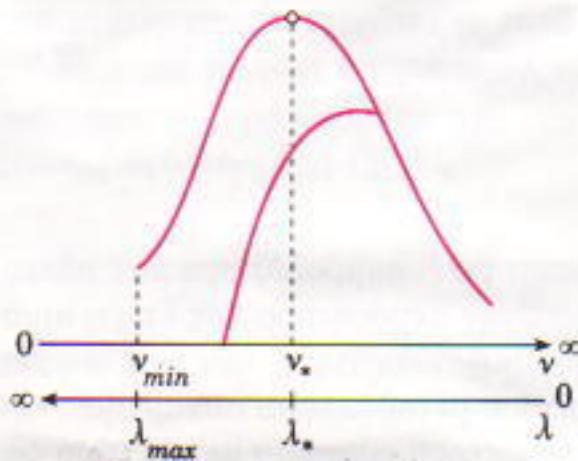
$$\overline{mgy} = kT.$$

Οι εξισώσεις (6) και (7) δείχνουν ότι τόσο οι κινητικές όσο και οι δυναμικές ενέργειες των μορίων του αερίου έχουν μέσες τιμές της τάξεως του  $kT$ . Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει επίσης για κάθε άλλη περίπτωση όπου επικρατεί θερμοδυναμική ισορροπία σε ένα σύστημα αποτελούμενο από μεγάλο αριθμό χαοτικά κινούμενων μορίων.

Τι μπορούμε να πούμε για την ακτινοβολία ισορροπίας; Σύμφωνα με την εξισώση (1), το μεγαλύτερο μήκος κύματος είναι  $\lambda = 2l$ , οπότε για έναν κλίβανο με πλευρά μήκους  $l \sim 1$  m έχουμε  $\lambda_{max} \sim 2$  m. Η συγκεκριμένη τιμή κείται στην περιοχή των ραδιοκυμάτων. Το ελάχιστο μήκος κύματος ενδέχεται να είναι τόσο μικρό ώστε να βρίσκεται ακόμη και στην περιοχή των ακτίνων X. Φυσικά, ουδείς θα διανούνταν να χρησιμοποιήσει έναν κλίβανο ως πηγή ακτίνων X ή ως ραδιοσταθμό. Εντούτοις, για κάθε δεδομένη θερμοκρασία θα υπάρχει μια συγκεκριμένη συχνότητα  $v_*$  που θα είναι η πιο χαρακτηριστική («που θα τη συναντάμε πιο συχνά ανάμεσα στα φωτόνια», «που θα είναι η πιθανότερη», «που θα αντιπροσωπεύει τη μέση συχνότητα» —διαλέξτε όποια ορολογία προτιμάτε). Έτσι, φαίνεται εύλογο να αναμένουμε ότι η μεν αντίστοιχη ενέργεια των φωτονίων που αποτελούν την ακτινοβολία ισορροπίας θα είναι επίσης της τάξεως του  $kT$  —οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$hv_* - kT \quad (8)$$

η δε κατανομή συχνοτήτων της ενέργειας ακτινοβολίας θα περιγράφεται από μια κωδωνοειδή καμπύλη (Σχήμα 6). Η συγκεκριμένη καμπύλη μάς δείχνει ότι στις πολύ μεγάλες και στις πολύ μικρές συχνότητες δεν υπάρχει παρά ελάχιστη μόνο ενέργεια. Αντίθετα, το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας το φέρουν τα φωτόνια με συχνότητες που κείνται πλησίον της χαρακτηριστικής συχνότητας  $v_* - kT/h$ . Συνεπώς, η ολική ενέργεια της ακτινοβολίας ισορροπίας στο εσωτερικό του κλίβανου μπορεί να υπολογιστεί κατά προσέγγιση μέσω του τύπου



$$U \sim N(v_*) \cdot hv_* - kT \quad \dots$$

Αντίστοιχα, η πυκνότητα ενέργειας (η ενέργεια ανά μονάδα όγκου) περιγράφεται από τον τύπο:

$$u = \frac{U}{l^3} = \frac{1}{c^3 h^3} (kT)^4. \quad (9)$$

Για χάρη αυτού του τύπου, της έκφρασης

$$u = aT^4,$$

χρειάστηκε να διανύσουμε μακρό δρόμο. Τούτο οφείλεται στο ότι δεν αρκεστήκαμε απλώς να διατυπώσουμε το νόμο των Stefan-Boltzmann αλλά, κατά μία έννοια, τον εξαγάγαμε. Σημειωτέον ότι οι τύποι μας περιγράφουν μόνο τις διαστάσεις και την ποιοτική εξάρτηση των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν. Η ορθή κατανομή συχνοτήτων των φωτονίων δίνεται από τον τύπο του Planck, ο οποίος περιέχει τον αδιάστατο παράγοντα  $1/(e^{hv/kT} - 1)$ . Εντούτοις, στο παρόν άρθρο οι φιλοδοξίες μας περιορίζονται στο να εκτιμήσουμε τις τιμές των φυσικών μεγεθών (κάτι το οποίο αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό βήμα για τη διερεύνηση οποιουδήποτε προβλήματος). Όπως σημειώσαμε ήδη, ο προαναφερόμενος συντελεστής είναι αδιάστατος και, ως εκ τούτου, δεν πρόκειται να επηρεάσει τις διαστάσεις του τύπου μας για την πυκνότητα ενέργειας  $u$ . Έχουμε, επομένως, κάθε λόγο να αισιοδοξούμε ότι βαδίζουμε στη σωστή κατεύθυνση.

Βρισκόμαστε πλέον σε θέση να κάνουμε ένα ακόμη βήμα και να υπολογίσουμε την ενέργεια που ακτινοβολείται ανά μονάδα χρόνου από ένα

τμήμα μοναδιαίου εμβαδού της επιφάνειας κάποιου σώματος το οποίο τελεί σε θερμική ισορροπία (δηλαδή, βρίσκεται σε σταθερή θερμοκρασία). Όπως επισημάναμε νωρίτερα, ένα τέτοιο σώμα ακτινοβολεί και απορροφά την ίδια ποσότητα ενέργειας ανά μονάδα χρόνου. Αν πολλαπλασιάσουμε την πυκνότητα ενέργειας  $u$  με την ταχύτητα διάδοσης της (δηλαδή με την ταχύτητα του φωτός  $c$ ), παίρνουμε την πυκνότητα ροής ενέργειας  $uc$  (οι διαστάσεις της είναι  $J/m^3(m/s) = J/(m^2 \cdot s)$ ). Τα φωτόνια κινούνται προς κάθε κατεύθυνση, οπότε φαίνεται λογικό να αναμένουμε ότι το 1/6 από αυταυτέουν προς την επιφάνεια του σώματος (επειδή πρόκειται για τη μία από τις έξι δυνοτέρες κατευθύνσεις: εμπρός, πίσω, πάνω, κάτω, δεξιά και αριστερά). Συνεπώς, η πυκνότητα της ροής ενέργειας ισούται με

$$I = \frac{1}{6} uc = \frac{k^4}{c^2 h^3} T^4. \quad (10)$$

Ο ανωτέρω τύπος μάς παρέχει μιαν ενολλακτική μορφή του νόμου των Stefan-Boltzmann.

Αν εμβαθύνουμε κάπως περισσότερο στο πρόβλημα, πιθανόν να μαντέψουμε ότι ο σωστός συντελεστής είναι 1/4, και όχι 1/6. Το ζήτημα αυτό, όμως, αποτελεί καθαρή λεπτομέρεια και δεν πρόκειται να μας απασχολήσει περισσότερο στο παρόν άρθρο. Ο σκοπός μας ήταν να εξαγάγουμε όχι μόνο το νόμο των Stefan-Boltzmann με τη μορφή  $u = aT^4 \sim I = aT^4$  (όπου ο η σταθερά των Stefan-Boltzmann), αλλά και τη μάλλον σημαντική και διόλου τετριμένη σχέση μεταξύ των συντελεστών αναλογίας  $a$  και  $I$  και των θεμελιωδών φυσικών σταθερών:

$$a = \frac{k^4}{c^3 h^3}, \quad I = \frac{k^4}{c^2 h^3}.$$

Η ακριβής τιμή της σταθεράς των Stefan-Boltzmann ισούται με  $a = 5,67 \cdot 10^{-8} J/(m^2 \cdot s \cdot K^4)$ . Σημειωτέον ότι οι ανωτέρω συνδυασμοί των θεμελιωδών σταθερών θα ήταν δυνατόν να εξαχθούν (όπως έχει γίνει ουκ ολίγες φορές στις σελίδες του Quantum) με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης, με την προϋπόθεση ότι

γνωρίζουμε το σύνολο των σταθερών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα (στην περίπτωσή μας, πρόκειται για τις  $h$ ,  $k$  και  $c$ ). Στο παρόν άρθρο, όμως, προχωρήσαμε ένα βήμα παραπέρα και δείξαμε πώς μπορεί κανείς να εξαγάγει τους τύπους παίζοντας με τους βασικούς νόμους αντί με τις θεμελιώδεις σταθερές.

Όπως διαπιστώνουμε, η  $I$  εξαρτάται πολύ έντονα από την  $T$ : αν διπλασιάσουμε τη θερμοκρασία, η  $I$  θα αυξηθεί κατά έναν παράγοντα 16.

Αφ' ης στιγμής έχουμε στα χέρια μας έναν τόσο ισχυρό νόμο, φυσικό είναι να μας δημιουργηθεί η δύναμη να τον χρησιμοποιήσουμε ευθέας αμέσως. Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία που επικρατεί στην επιφάνεια του Ήλιου στηριζόμενοι αποκλειστικά και μόνο στη γνώση της γωνιακής διαμέτρου του Ήλιου  $\theta_H = D_H/L$  (με  $D_H$  συμβολίζουμε τη διάμετρο του Ήλιου και με  $L$  την απόσταση που τον χωρίζει από τη Γη) και της μέσης θερμοκρασίας του πλανήτη μας. Πράγματι, η ενέργεια που ακτινοβολείται από ολόκληρη την επιφάνεια του Ήλιου ανά μονάδα χρόνου ισούται με

$$P_H = I_H \cdot 4\pi R_H^2 = \sigma T_H^4 \pi D_H^2.$$

Ο γήινος δίσκος, που έχει εμβαδόν  $\pi R_G^2$ , δέχεται μικρό μόνο κλάσμα αυτής της ενέργειας, το οποίο ισούται με  $(\pi R_G^2)/(4\pi L^2)$ . Όλη τούτη η «εισερχόμενη» ενέργεια ακτινοβολείται εκ νέου στο Διάστημα από ολόκληρη την επιφάνεια της Γης, που έχει εμβαδόν  $4\pi R_G^2$ . Εξισώνοντας την ηλιακή ενέργεια που προσπίπτει στη Γη με την ενέργεια που ακτινοβολείται από αυτήν, παίρνουμε

$$\sigma T_H^4 \pi D_H^2 \frac{\pi R_G^2}{4\pi L^2} = 4\pi R_G^2 \sigma T_H^4.$$

Παρατηρήστε ότι δεν μας χρειάζεται η ακριβής τιμή της σταθεράς των Stefan-Boltzmann, επειδή απλοποιείται. Έτσι, καταλήγουμε στον ζητούμενο τύπο

$$T_H = T_G \sqrt{\frac{16}{(D_H/L)^2}} = T_G \frac{2}{\sqrt{\theta_H}}.$$

Εισάγοντας τις αριθμητικές τιμές  $T_G$

$= 300 \text{ K}$  και  $\theta_H \approx 0,5^\circ \approx 10^{-2} \text{ rad}$ , βρίσκουμε

$$T_H \approx 20T_G = 6.000 \text{ K}.$$

Εφόσον γνωρίζουμε πλέον τη θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός ηλιακού «ιστίου» ικανού να προσφέρει σε ένα διαστημόπλοιο πρωτική δύναμη  $F$ . Θα υποθέσουμε ότι το διαστημόπλοιο τη Γη κινείται σε μια από τις από τον Ήλιο, επίσης, ότι η επιφάνεια του ιστίου είναι επικαλυμμένη με απόλυτα ανακλαστικό στρώμα κάποιου υλικού. Κάθε φωτόνιο που προσπίπτει στο ιστίο κάθετα στην επιφάνεια του ανακλάται ελαστικά, οπότε η ορμή του μεταβάλλεται κατά  $hv/c - (-hv/c) = 2hv/c$ . Εφόσον η ενέργεια που προσπίπτει σε ένα ιστίο εμβαδού  $S$  ανά μονάδα χρόνου ισούται με

$$P_{\downarrow} = \sigma T_H^4 \pi D_H^2 \frac{S}{4\pi L^2},$$

(δείξαμε προηγουμένως πώς μπορεί να εξαχθεί ένας τέτοιος τύπος), για να προσδιορίσουμε τη μεταβολή της ορμής όλων των φωτονίων που προσκρούουν στο ιστίο (η οποία ισούται με την πρωτική δύναμη  $F$ ) δεν έχουμε παρά να πολλαπλασιάσουμε την έκφραση αυτή επί 2 και να τη διαιρέσουμε διά  $c$ :

$$F = \frac{2P_{\downarrow}}{c} = \frac{2}{c} \sigma T_H^4 \theta_H^2 \frac{S}{4},$$

από όπου βρίσκουμε

$$S = \frac{4Fc}{2\theta_H^2 \sigma T_H^4} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6.000^4} \text{ m}^2 \\ \sim 10^5 \text{ m}^2.$$

Πρόκειται, επομένως, για μια επιφάνεια εμβαδού δέκα περίπου εκταρίων, για να μιλήσουμε με γεωργικούς δρους.

Εφόσον γνωρίζουμε τη θερμοκρασία του Ήλιου, μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στη σχέση (8) και να την καταστήσουμε ακριβέστερη. Επειδή  $v = c/\lambda$ , μπορούμε να την ξα-

ναγράψουμε με τη μορφή

$$\lambda \cdot T \sim \frac{hc}{k}.$$

Όπως διαπιστώνουμε, το γινόμενο της θερμοκρασίας και του χαρακτηριστικού μήκους κύματος της ακτινοβολίας ισούται με μια σταθερά που αντιπροσωπεύει ένα συνδυασμό θεμελιώδων φυσικών σταθερών. Εφό-

το θερμοκρασία του Ήλιου ανέρχεται σε περίπου 6.000 K κα. το χαρακτηριστικό μήκος του ορατού φωτός είναι περίπου 0,5 μμ, η εν λόγω σταθερά έχει κατά προσέγγιση την τιμή

$$0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 6.000 \text{ K} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}.$$

Η σχέση ανάμεσα στη θερμοκρασία και το χαρακτηριστικό μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι γνωστή ως νόμος μετατόπισης του Wien, και πρόκειται για έναν από τους παγκόσμιους φυσικούς νόμους.

Από τον συγκεκριμένο νόμο έπειται ότι σε θερμοκρασία δωματίου δύλα τα σώματα εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατά κύριο λόγο στο μήκος κύματος

$$\lambda_* = (3 \cdot 10^{-3}/300) \text{ m} = 10 \text{ μμ},$$

δηλαδή στην περιοχή του υπέρυθρου. Πρόκειται, επομένως, για μια ακτινοβολία που δεν γίνεται αντιληπτή στο σκοτάδι (από το ανθρώπινο μάτι). Ωστόσο, αν υπήρχε στην πραγματικότητα κάποιο ον όπως ο «αόρατος άνθρωπος» (του H.G. Wells), μια κάμερα υπερύθρου θα ανήγνευε πανεύκολα το «θερμό» αυτό αντικείμενο να διαγράφεται στο φόντο της ακτινοβολίας που προέρχεται από το περιβάλλον και αντιστοιχεί σε θερμοκρασία δωματίου.

Από τους συλλογισμούς μας μπορεί να εξαχθεί ένα ακόμη συμπέρασμα. Ένας μικροσκοπικός κλίβανος ή ένας κόκκος σκόνης που βρίσκεται σε ορισμένη θερμοκρασία υπό συνθήκες θερμικής ισορροπίας θα πρέπει να εκπέμπει ακτινοβολία σε μήκη κύματος τα οποία υπόκεινται στους περιορισμούς της συνθήκης (1): Το μεγαλύτερο μήκος κύματος θα ισούται

Η συνέχεια στη σελ. 69

# Μεταφέροντας νερό μ' ένα σουρωτήρι

Διασκεδαστικά πειράματα για την τριχοειδική συμπεριφορά και την επιφανειακή τάση

A. Dozorov

**ΝΩΡΙΖΕΤΕ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΜΙΚΡΟΥ ΜΥΡΜΗΓΚΙΟΥ** που βιαζόταν να επιστρέψει στο σπίτι του;

Πολλά ζώα το βοήθησαν στην προσπάθειά του, όπως, για παράδειγμα, μια νεροαράχνη, η οποία μετέφερε το μυρμήγκι από τη μία όχθη του ποταμού στην άλλη. Τσως να έχετε δει το έντομο αυτό. Η νεροαράχνη στέκεται ήρεμα στην επιφάνεια του νερού, το οποίο κάμπτεται ελαφρά κάτω από το βάρος του. Γιατί όμως το έντομο δεν βυθίζεται; Και το νερό πράγματι «κάμπτεται»;

Αποδεικνύεται ότι η επιφανειακή στιβάδα του νερού διαθέτει ορισμένες ξεχωριστές ιδιότητες, τις οποίες μπορούμε να μελετήσουμε με τη βοήθεια μερικών απλών πειραμάτων.

1. *Η επιφάνεια του νερού μπορεί να συγκρατεί διάφορα αντικείμενα.*

Γεμίστε ένα μικρό πάτο με νερό. Στη συνέχεια τοποθετήστε προσεκτικά πάνω στην επιφάνεια του νερού μια βελόνα του ραψίματος. Θα διαπιστώσετε ότι δεν βυθίζεται. Αν το πείραμα αποτύχει, ξαναπροσπαθήστε. Τρίψτε με τα δάχτυλά σας τη βελόνα (ή αλείψτε τη με λίγο λάδι ή περάστε τη με κερί). Επαναλάβετε το πείραμα και παρατηρήστε προσεκτικά την επιφάνεια· βλέπετε ότι αυτή τη φορά όντως παραμορφώνεται; Η βελόνα φαίνεται τώρα σαν να βρίσκεται τοποθετημένη πάνω σε μια λεπτή ελαστική μεμβράνη.

Η ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού μπορεί πολύ εύστοχα να συγκριθεί με ένα κομμάτι τεντωμένο σελοφάν, αν και οι ιδιότητες των δύο υλικών διαφέρουν αρκετά. Ας προσπαθήσουμε να μαντέψουμε γιατί.

Κάθε μόριο στο εσωτερικό ενός υγρού περιστοιχίζεται από άλλα μόρια, τα οποία το έλκουν εξίσου προς κάθε κατεύθυνση. Αντίθετα, τα μόρια της ελεύθερης επιφάνειας έλκονται μόνο από τα υποκείμενα μόρια, αφού δεν υπάρχουν αντίστοιχα υπερκείμενα. Φαίνεται ότι τα υγρά «προσπαθούν» να έχουν τον μικρότερο δυνατό αριθμό μορίων στην επιφάνειά τους. Κατά συνέπεια, η επιφανειακή στιβάδα των υγρών είναι «τεντωμένη» όπως το σελοφάν.

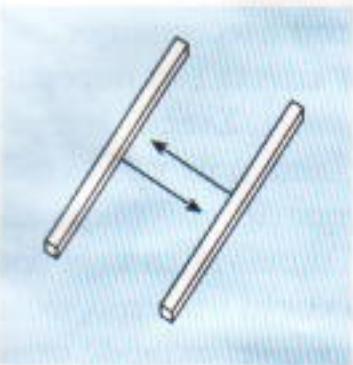
Παρατηρούμε ότι όχι μόνο οι νεροαράχνες αλλά και πο συμπαγή σώματα, όπως η μεταλλική βελόνα, παραμένουν στην επιφάνεια χωρίς να βυθίζονται. Παρόλα αυτά δεν κολυμπούν ούτε επιπλέουν υπό τη συνήθη έννοια· απλώς συγκρατούνται από την επιφανειακή τάση των υγρών. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε όλο και πιο χοντρές βελόνες, θα βρεθεί κάποια της οποίας το βάρος θα υπερβαίνει τη δύναμη που οφείλεται στην επιφανειακή τάση. Φυσικά, η βελόνα αυτή, όπως και οι βαρύτερες, θα βυθιστεί. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι το μήκος της βελόνας στην πραγματικότητα δεν επηρεάζει

καθόλου την ικανότητά της να «επιπλέει».

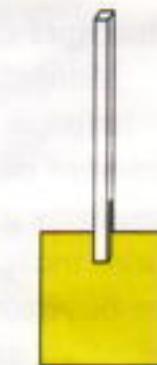
2. *Η επιφανειακή τάση εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο υγρό.*

Τοποθετήστε τη βελόνα στην επιφάνεια του νερού. Στη συνέχεια αφαιρέστε από ένα σπίρτο την κεφαλή του, περάστε την άκρη του με σαπούνι και αγγίξτε με αυτή το νερό σε απόσταση 1 εκατοστού από την πλευρά της βελόνας. Αμέσως η βελόνα θα «τιναχτεί» μακριά από το σπίρτο. Ξέρετε γιατί συμβαίνει αυτό; Πολύ απλά, επειδή τη στιγμή που βυθίσατε το σπίρτο στο νερό δημιουργήσατε διάλυμα σαπουνιού κοντά στη μία πλευρά της βελόνας. Τα μόρια του σαπουνοδιαλύματος δεν έλκουν τη βελόνα τόσο ισχυρά όσο τα μόρια του καθαρού νερού που βρίσκονται στην αντίθετη πλευρά της. Συνεπώς η βελόνα κινείται προς την κατεύθυνση της μεγαλύτερης δύναμης. Με άλλα λόγια, η επιφανειακή τάση του καθαρού νερού είναι μεγαλύτερη από αυτή του σαπουνοδιαλύματος.

Με το παραπάνω κόλπο μπορείτε να κατευθύνετε τη βελόνα οπουδήποτε μέσα στο πάτο. Κατευθύνετε την προς την άκρη του και παρακολουθήστε πώς αντιδρά. Μην ξεχνάτε ότι το σαπούνι απλώνεται πολύ γρήγορα στην επιφάνεια του νερού, γι' αυτό πρέπει να αλλάζετε συχνά το νερό στο πάτο. Αντί για βελόνα χρησιμοποιήστε ένα σπίρτο και επαναλά-



Σχήμα 1



Σχήμα 2

βετε το πείραμα. (Μια βελόνα που βυθίζεται συνεχώς δεν είναι ό, τι το καλύτερο για να εξαγάγετε συμπεράσματα απ' το εν λόγω πείραμα.)

Τοποθετήστε προσεκτικά στην επιφάνεια του νερού δύο σπίρια παράλληλα μεταξύ τους. Τι συμβεί; Διαπιστώνετε ότι τα ένα πλησιάζει προς το άλλο (Σχήμα 1). Απομακρύνετε τα σπίρτα και αγγίξτε το νερό που βρίσκεται ανάμεσά τους με τη «μύτη» ενός τρίτου, την οποία έχετε περάσει με σαπούνι όπως προηγουμένως. Τι παρατηρείτε τώρα;

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, μπορείτε να φτιάξετε μερικά απλά παιχνίδια για παιδιά. Κάντε μια σχισμή στην άκρη ενός σπίρτου και στερεώστε στο σημείο αυτό ένα κομμάτι χαρτί (Σχήμα 2). Επαλείψτε το χαρτί με μια σταγόνα υγρού σαπουνιού που χρησιμοποιούμε στο πλύσιμο των πάτων, και αφήστε το αυτοσχέδιο «βαρκάκι» στην ελεύθερη επιφάνεια νερού. Θα δείτε ότι αρχίζει να κινείται. Προσέξτε την κατεύθυνση της πορείας του; Στη συνέχεια σχίστε κατά τον ίδιο τρόπο ένα σπίρτο και από τις δυο άκρες του και στερεώστε από ένα κομμάτι χαρτί σε κάθε άκρη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Επαλείψτε τα με υγρό σαπούνι, και τοποθετήστε προσεκτικά το «ιστιοφόρο» σας στην επιφάνεια νερού. Αυτό αρχίζει να περιστρέφεται σαν προπέλα. Στο Σχήμα 4 βλέ-

Σχήμα 4

πετε (από πάνω) ένα κομμάτι χαρτόνι σε σχήμα «όπλου». Για να «εκπυρσοκροτήσει», αγγίξτε την επιφάνεια του νερού στο σημείο Α με την άκρη ενός σπίρτου που έχετε περάσει με σαπούνι.

Χρησιμοποιήστε και άλλες ουσίες εκτός από σαπούνι. Θυμηθείτε την εξής νοσταλγική σκηνή από την καλοκαιρινή κατασκήνωση: Μια παρέα παιδιών έχουν συγκεντρωθεί γύρω από μια μικρή στέρνα με νερό (ή, εν ανάγκη, γύρω από μια λακούβα). Έχουν πάρει μικρά κομμάτια ξύλου, έχουν περάσει τα άκρα τους με ρετσίνι από πεύκο ή έλατο, και κάνουν αγώνες για το ποιο κινείται γρηγορότερα. Τα ξύλα γλιστρούν με ταχύτητα στην επιφάνεια του νερού, διαγράφοντας πολύπλοκες τροχιές.

3. Η επιφανειακή τάση μπορεί να ανυψώσει το υγρό αρκετά ψηλά.

Χρησιμοποιήστε για το πείραμα ένα γυάλινο σωλήνα με πολύ μικρή εσωτερική διάμετρο (πολύ μικρότερη του 1 mm), δηλαδή έναν «τριχοειδή σωλήνα». Βυθίστε το ένα άκρο του σε δοχείο με νερό, και παρατηρήστε ότι το νερό μέσα στο σωλήνα φτάνει σε ύψος μεγαλύτερο από τη στάθμη του νερού στο δοχείο. Όσο πιο λεπτός είναι ο σωλήνας τόσο περισσότερο ανέρχεται το νερό. Σε όσους από εσάς έχουν πάρει αίμα απ' το δάχτυλο, θα έχετε δει τη νοσοκόμα να χρησιμοποιεί «τριχοειδή βελόνα» για την άντληση του αίματος. Τριχοειδικά φαινόμενα παρατηρούνται παντού: το τσάι ανέρχεται μέσα στις μικρές οπές ενός κύβου ζάχαρης, το πετρέλαιο ανέρχεται και διαποτίζει το φυτίλι μιας λάμπας, το νερό απορροφάται από τις ρίζες των φυτών στο έδαφος, κ.λπ.

Μπορείτε να εκτελέσετε ένα πολύ πείραμα με σωλήνα μεγαλύτερης διαμέτρου. Κλείστε λοιπόν το κά-

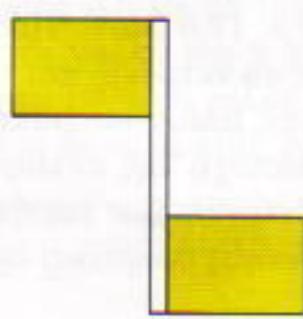
τω στόμιο του με το δάχτυλό σας και ρίξτε μέσα του λίγο νερό (Σχήμα 5). Θα διαπιστώσετε ότι η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο σωλήνα καμπυλώνεται. Η καμπύλη αυτή —λέμε ότι είναι ένας κοίλος «μηνίσκος»— προκύπτει επειδή τα μέρια του νερού έλκονται περισσότερο από τα τοιχώματα του σωλήνα παρά μεταξύ τους. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το υγρό διαβρέχει την επιφάνεια του δοχείου.

Μπορείτε να κάνετε ένα ακόμη πείραμα. Σε ένα φλυτζάνι τσάι αφήστε μικρή ποσότητα αφεψήματος, μαζί με μερικά φύλλα στον πυθμένα. Αγγίξτε προσεκτικά την επιφάνεια του υγρού με ένα κουτάλι ή ένα σπίρτο. Θα δείτε ότι η επιφάνεια «έρπει» γρήγορα προς τα πάνω, παρασύροντας στην πορεία της και τα φύλλα τσαγιού.

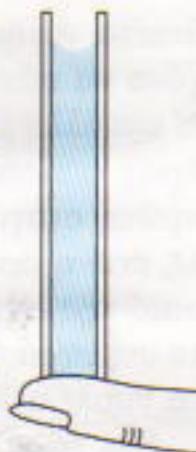
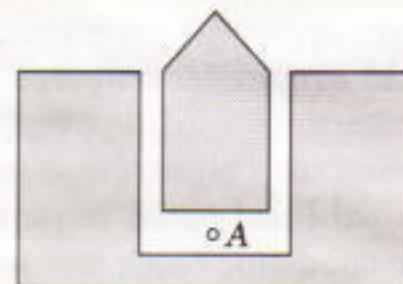
4. Δεν διαβρέχουν όλα τα υγρά τα τοιχώματα του σωλήνα και δεν συμβαίνει αυτό σε κάθε σωλήνα.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, το υγρό δεν ανέρχεται μέσα στον τριχοειδή σωλήνα: η ελεύθερη επιφάνεια σχηματίζει έναν κυρτό μηνίσκο. Ξέρετε γιατί συμβαίνει αυτό; Επειδή το συγκεκριμένο υγρό δεν διαβρέχει την επιφάνεια των τοιχωμάτων —αφού η αροιβαία έλξη μεταξύ των μορίων του υγρού είναι μεγαλύτερη από την έλξη ανάμεσα στα μέρια του και τα μέρια των τοιχωμάτων του σωλήνα. Με αυτό τον τρόπο συμπεριφέρεται ο υδράργυρος μέσα σε έναν τριχοειδή σωλήνα (Σχήμα 6).

Κρατείστε λίγο νερό μέσα σε μια



Σχήμα 3



Σχήμα 5

πετε (από πάνω) ένα κομμάτι χαρτόνι σε σχήμα «όπλου». Για να «εκπυρσοκροτήσει», αγγίξτε την επιφάνεια του νερού στο σημείο Α με την άκρη ενός σπίρτου που έχετε περάσει με σαπούνι.

Χρησιμοποιήστε και άλλες ουσίες εκτός από σαπούνι. Θυμηθείτε την εξής νοσταλγική σκηνή από την καλοκαιρινή κατασκήνωση: Μια παρέα παιδιών έχουν συγκεντρωθεί γύρω από μια μικρή στέρνα με νερό (ή, εν ανάγκη, γύρω από μια λακούβα). Έχουν πάρει μικρά κομμάτια ξύλου, έχουν περάσει τα άκρα τους με ρετσίνι από πεύκο ή έλατο, και κάνουν αγώνες για το ποιο κινείται γρηγορότερα. Τα ξύλα γλιστρούν με ταχύτητα στην επιφάνεια του νερού, διαγράφοντας πολύπλοκες τροχιές.

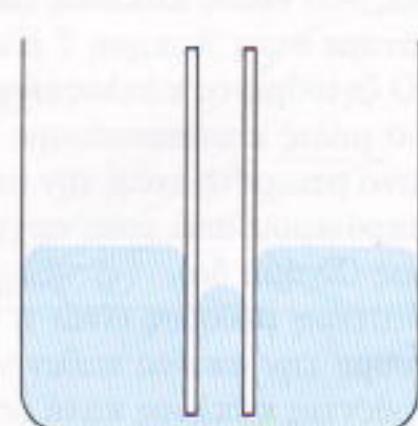
3. Η επιφανειακή τάση μπορεί να ανυψώσει το υγρό αρκετά ψηλά.

Χρησιμοποιήστε για το πείραμα ένα γυάλινο σωλήνα με πολύ μικρή εσωτερική διάμετρο (πολύ μικρότερη του 1 mm), δηλαδή έναν «τριχοειδή σωλήνα». Βυθίστε το ένα άκρο του σε δοχείο με νερό, και παρατηρήστε ότι το νερό μέσα στο σωλήνα φτάνει σε ύψος μεγαλύτερο από τη στάθμη του νερού στο δοχείο. Όσο πιο λεπτός είναι ο σωλήνας τόσο περισσότερο ανέρχεται το νερό. Σε όσους από εσάς έχουν πάρει αίμα απ' το δάχτυλο, θα έχετε δει τη νοσοκόμα να χρησιμοποιεί «τριχοειδή βελόνα» για την άντληση του αίματος. Τριχοειδικά φαινόμενα παρατηρούνται παντού: το τσάι ανέρχεται μέσα στις μικρές οπές ενός κύβου ζάχαρης, το πετρέλαιο ανέρχεται και διαποτίζει το φυτίλι μιας λάμπας, το νερό απορροφάται από τις ρίζες των φυτών στο έδαφος, κ.λπ.

4. Δεν διαβρέχουν όλα τα υγρά τα τοιχώματα του σωλήνα και δεν συμβαίνει αυτό σε κάθε σωλήνα.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, το υγρό δεν ανέρχεται μέσα στον τριχοειδή σωλήνα: η ελεύθερη επιφάνεια σχηματίζει έναν κυρτό μηνίσκο. Ξέρετε γιατί συμβαίνει αυτό; Επειδή το συγκεκριμένο υγρό δεν διαβρέχει την επιφάνεια των τοιχωμάτων —αφού η αροιβαία έλξη μεταξύ των μορίων του υγρού είναι μεγαλύτερη από την έλξη ανάμεσα στα μέρια του και τα μέρια των τοιχωμάτων του σωλήνα. Με αυτό τον τρόπο συμπεριφέρεται ο υδράργυρος μέσα σε έναν τριχοειδή σωλήνα (Σχήμα 6).

Κρατείστε λίγο νερό μέσα σε μια



Σχήμα 6

πιπέτα. Αφήστε προσεκτικά μια σταγόνα να πέσει πάνω σε καθαρό γυαλί και άλλη μια πάνω σε βούτυρο που έχετε επαλείψει σε μια φέτα ψωμί. Η πρώτη σταγόνα απλώνεται στο γυαλί, ενώ η δεύτερη διατηρεί το σφαιρικό της σχήμα. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι το νερό διαβρέχει το γυαλί αλλά δχι το βούτυρο.

Και τώρα η στιγμή της αλήθειας: Ποια απάντηση θα δίνατε εσείς στην ερώτηση «Μπορείτε να μεταφέρετε νερό με ένα σουρωτήρι (ή ένα κόσκινο); Για να απαντήσετε, αλείψτε με βούτυρο το πλέγμα του σκεύους ή καλύτερα περάστε το με κερί. Αν ρίξετε νερό, δεν χύνεται! Το συγκρατεί μια «επιφανειακή μεμβράνη» που σχηματίζεται επειδή το νερό δεν διαβρέχει τις άκρες των μικροσκοπικών οπών του σκεύους. Αν δεν έχετε σουρωτήρι, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα κουτί κονσέρβας με μια μικρή τρύπα στο κάτω μέρος.

Όπως είδαμε, ένα υγρό που δεν

διαβρέχει την επιφάνεια δεν απλώνεται, αλλά σχηματίζει σταγόνες. Στην περίπτωση αυτή όσο μικρότερη είναι η σταγόνα τόσο περισσότερο μοιάζει με σφαίρα. Γιατί όμως; Λόγω της ισχυρής αμοιβαίας έλξης των μορίων του υγρού, η σταγόνα αποκτά το σχήμα με το μικρότερο δυνατόν εμβαδόν επιφανείας —δηλαδή σφαίρα. Το καλύτερο αποτέλεσμα —τέλειες σφαιρικές σταγόνες— μπορείτε να διαπιστώσετε σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας. Έτσι, αν σε ένα διάστημα πλοιο που βρίσκεται σε τροχιά ο στροναύτης απελευθερώσει νερό από ένα δοχείο (δεδομένου ότι το νερό δεν χύνεται προς τα κάτω, όπως στη Γη), αυτό αποκτά αμέσως σφαιρικό σχήμα. Οι συνθήκες έλλειψης βαρύτητας που ισχύουν κατά την πτώση σταγόνων λιωμένου μετάλλου από ψηλό πύργο βρίσκουν εφαρμογή εδώ και δεκαετίες στην κατασκευή σκαγιών: κατά την πτώση του το μέταλλο αποκτά σφαιρικό σχήμα, το οποίο και

διατηρεί έως το χρόνο στερεοποιηθεί.

Μπορείτε να κάνετε ένα παρόμοιο πείραμα στο σπίτι. Στάξτε λειωμένο κερί σε μια λεκάνη με κρύο νερό. Θα δείτε ότι σχηματίζονται μικρά κέρινα σκάγια. Πλησιάστε το κερί όσο το δυνατόν πιο κοντά στο νερό, ώστε αυτό να στερεοποιηθεί ακριβώς στην επιφάνειά του.

5. Η επιφανειακή τάση είναι τόσο ισχυρή που μερικές φορές μπορείτε κυριολεκτικά να τη «νιώσετε».

Πάρτε δύο ίδια γυάλινα πάτα. Καθαρίστε τα προσεκτικά και τοποθετήστε τα το ένα πάνω στο άλλο. Θα δείτε ότι μπορείτε εύκολα να τα ξεχωρίσετε. Κατόπιν βρέξτε με νερό το ένα και τοποθετήστε τα όπως προηγουμένως, έτσι ώστε το βρεγμένο πάτο να βρίσκεται από κάτω. Προσπαθήστε και πάλι να τα ξεχωρίσετε χωρίς να γλιττήσει το ένα πάνω στο άλλο. Αυτή τη φορά δεν είναι και τόσο εύκολο, σωστά; Ιδού η επιφανειακή τάση εν δράσει!

#### ⇒ Συνέχεια από τη σελ. 55

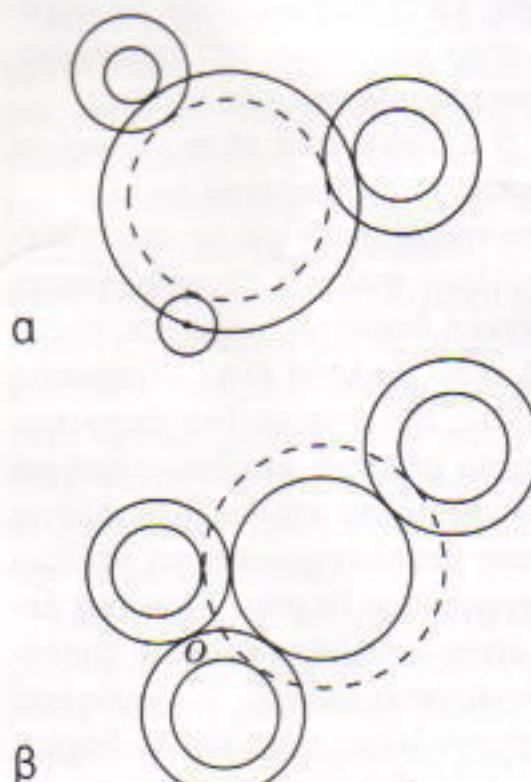
πραγματικότητα έχουμε τέσσερις τέτοιες. Τέλος, αντιστρέφουμε πίσω).

Θα κλείσουμε με δύο μεθόδους, και οι δύο με αντιστροφή, του γενικού προβλήματος.

**Άσκηση 8.** Να επιλυθεί το πρόβλημα του Απολλωνίου όταν δίδονται τρεις κύκλοι.

Η πρώτη μέθοδος είναι η εξής: Μειώνουμε τις ακτίνες των τριών κύκλων κατά ποσότητα ίση με την ακτίνα του μικρότερου. Ο ένας από τους κύκλους θα γίνει σημείο και οι άλλοι θα γίνουν ομόκεντροι τους αλλά μικρότεροι. Λύνουμε το πρόβλημα του Απολλωνίου για το σημείο αυτό και τους δύο νέους κύκλους (είτε όπως κάναμε στην Άσκηση 7 είτε αλλιώς). Ο ζητούμενος κύκλος είναι αυτός που μόλις κατασκευάσαμε αλλά με ακτίνα μειωμένη κατά την ακτίνα του μικρότερου από τους αρχικούς κύκλους (Σχήμα 5α).

Η δεύτερη μέθοδος είναι η εξής: Αυξάνουμε την ακτίνα καθενός από τους δοθέντες κύκλους κατά ίση ποσότητα έτσι ώστε οι δύο από αυτούς να εφάπτονται, έστω στο O. Αντι-



Σχήμα 5

στρέφουμε το σχήμα ως προς το O. Οι δύο εφαπτόμενοι κύκλοι, αφού περιέχουν το O, θα μετασχηματιστούν σε παράλληλες ευθείες (κάθετες στη διάκεντρο τους), και ο τρίτος κύκλος θα μετασχηματιστεί σε κύκλο. Είναι εύκολο να λύσουμε το πρόβλημα του Απολλωνίου όταν δίνονται δύο παράλληλες ευθείες και ένας κύκλος. Αντιστρέφουμε πίσω και αυξάνουμε

την ακτίνα του απολλώνειου εφαπτόμενου κύκλου κατά την ίδια ποσότητα που αυξήσαμε τους αρχικούς.

**Ο Μιχάλης Λάμπρου** είναι αναπληρωτής καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Κρήτης. Το e-mail του είναι: lambrou@itia.math.uch.gr.

#### ⇒ Συνέχεια από τη σελ. 27

### Φ195

**Σύντηξη ή σύγχυση:** Οι πυρήνες του δευτερίου D( $^2_1H$ ) και του τριτίου T( $^3_1H$ ) είναι δυνατόν να συντηχθούν σύμφωνα με την αντιδραση  $D + T \rightarrow ^4_2He + ^1_0n$ , παράγοντας έτσι ένα νετρόνιο και ένα σωματίδιο  $a(^4_2He)$ . Επιπλέον, το κάθε ζεύγος αλληλεπιδρώντων πυρήνων απελευθερώνει ενέργεια  $E = 17.6$  MeV. Πόση ενέργεια έχουν το νετρόνιο και το σωματίδιο α όταν πλέον απομακρυνθούν από την περιοχή της αντιδρασης; Η κινητική ενέργεια των πυρήνων πριν από τη σύντηξη θεωρείται αμελητέα.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

### Μαθηματικά

**M191**

Από τη δεδομένη εξίσωση έπειται ότι  $a = a^3 - 1$ . Συνεπώς,  $3a^2 - 4a = 3a^2 - 3a - a^3 + 1 = (1 - a)^3$ . Άρα κυβική ρίζα ισούται με  $(1 - a)$ . Ας μετασχηματίσουμε την παράσταση στο δεύτερο ριζικό. Έχουμε  $2a^2 + 3a + 2 = a^2 + (a^2 + a) + 2(a + 1) = a^2 + a(a + 1) + 2(a + 1) = a^2 + a^4 + 2a^3 = (a^2 + a)^2 = a^2(a + 1)^2 = a^8$  (έχουμε ότι  $a^3 = 1 + a$ ). Επομένως, η δεδομένη παράσταση ισούται με 2.

**M192**

Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο εξής ερώτημα: Πόσο μέρος από κάθε παλιό σώμα χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή του μεγαλύτερου από τα δύο νέα σώματα; Αν χρησιμοποιήθηκε ολόκληρο το παλιό σώμα των 2 kg, τότε το μεγαλύτερο από τα νέα σώματα περιέχει 0,5 kg από αυτό του 1 kg. Αν χρησιμοποιήθηκε ολόκληρο το παλιό σώμα του 1 kg, τότε θα περιέχει 1,5 kg από αυτό των 2 kg. Σε κάθε περίπτωση, το νέο σώμα των 2,5 kg περιέχει τουλάχιστον 0,5 kg από κάθε παλιό σώμα.

Οι αναγνώστες καλούνται τώρα να αποδείξουν ότι από τα δύο παλιά σώματα, τουλάχιστον το ένα περιέχει το πολύ 40% χαλκό.

Εφοδιασμένοι με αυτές τις δύο προτάσεις μπορούμε τώρα να απαντήσουμε στο ερώτημα ποιο είναι το μέγιστο δυνατό ποσοστό χαλκού στο σώμα των 2,5 kg. Αυτό προκύπτει αν αναμίξουμε 0,5 kg με περιεκτικότητα 40% σε χαλκό και 2 kg με περιεκτικότητα 100% σε χαλκό. Επομένως, η μέγιστη δυνατή τιμή είναι

$$\frac{0,5 \cdot 0,4 + 2}{2,5} \cdot 100\% = 88\%.$$

Αυτή είναι ακριβώς η τιμή που μας δίνεται από το πρόβλημα για το σώ-

μα των 2,5 kg. Συνεπώς, τα αρχικά σώματα περιείχαν 40% και 100% χαλκό, αντίστοιχα.

**L193**

Ας θεωρήσουμε ότι η γωνία  $ABC$  είναι αμβλεία (Σχήμα 1). (Η περίπτωση που η γωνία είναι οξεία αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.) Έστω  $P$  το συμμετρικό του  $M$  ως προς το σημείο  $B$ . Θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα τρίγωνα  $ABC$  και  $BNP$  είναι όμοια. Παρατηρούμε ότι  $\angle ABC = \angle PBN$ , διότι και οι δύο προκύπτουν με την πρόσθεση μίας ορθής στη γωνία  $CBN$ . Τα τρίγωνα  $CBM$  και  $ABN$  είναι όμοια ορθογώνια τρίγωνα και, επομένως,

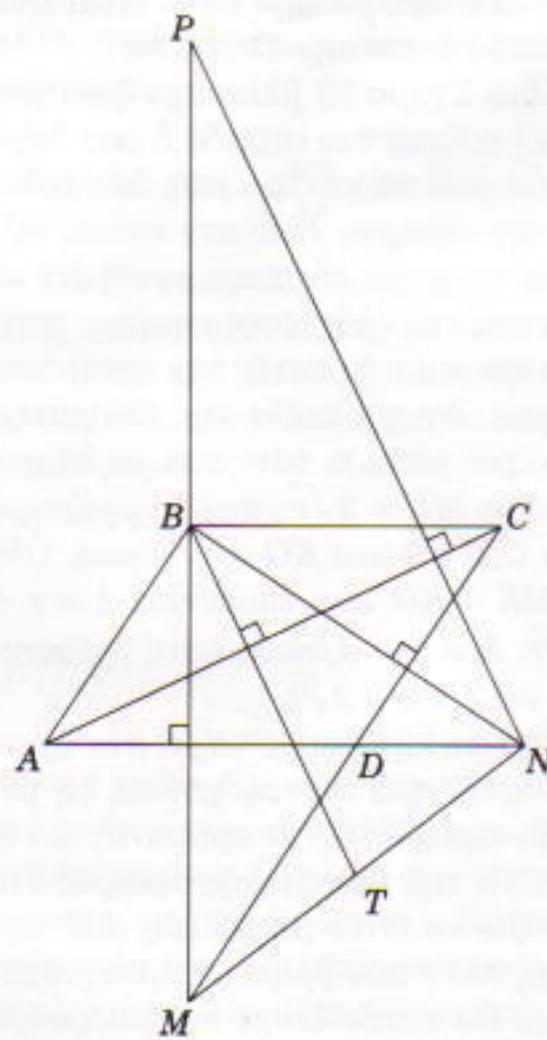
$$\frac{BP}{BN} = \frac{BM}{BN} = \frac{BC}{AB}.$$

Άρα, τα τρίγωνα  $BNP$  και  $ABC$  είναι όμοια.

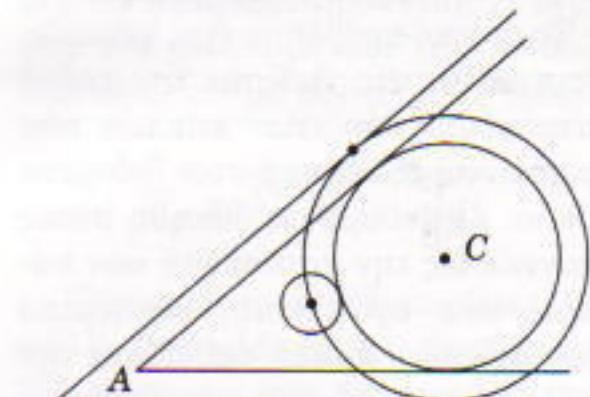
Το τρίγωνο  $BNP$  προκύπτει από το τρίγωνο  $ABC$  έπειτα από μια περιστροφή του κατά  $90^\circ$  και, στη συνέχεια, μια ομοιοθεσία ως προς το σημείο  $B$ . Με αυτό το μετασχηματισμό η ευθεία  $AC$  μεταφέρεται στην κάθετη  $PN$ . Άρα, η  $BN$  είναι κάθετη στην  $AC$ . Όμως,  $BT \perp AC$  από κατασκευή, οπότε  $BT \parallel PN$  και η  $BT$  διέρχεται από το μέσο της πλευράς  $PM$  του τριγώνου  $PMN$ . Από το θεώρημα του Θαλή έπειται ότι η  $BT$  διέρχεται από το μέσο του  $MN$ .

**M194**

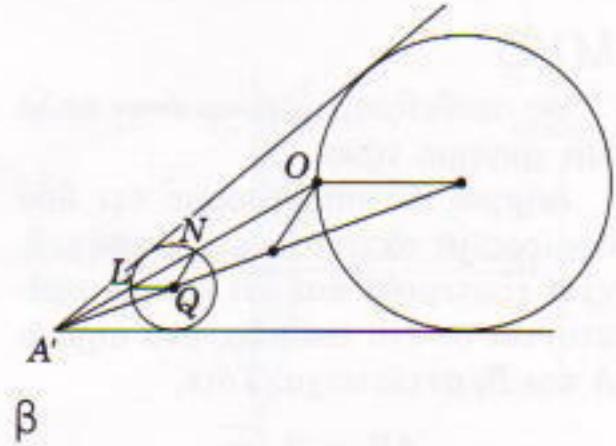
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη κατασκευάσει τον ζητούμενο κύκλο  $C$  (βλ. Σχήμα 2a). Φέρουμε έναν τρίτο κύκλο, με κέντρο το  $C$  και ακτίνα ίση με το άθροισμα των ακτίνων των δύο άλλων κύκλων. Τότε, ο νέος κύκλος θα διέρχεται από το κέντρο του δεδομένου κύκλου και θα είναι εγγε-



Σχήμα 1



α



β

Σχήμα 2

γραμμένος σε μια γωνία (την  $A_1$  στο Σχήμα 2α) οι πλευρές της οποίας είναι παράλληλες προς τις πλευρές της δεδομένης γωνίας και απέχουν από αυτές απόσταση ίση με την ακτίνα του αρχικού κύκλου.

Αν κατασκευάσουμε αυτό τον τρίτο κύκλο, μπορούμε στη συνέχεια να ελαττώσουμε την ακτίνα του κατά γνωστή ποσότητα και να βρούμε τον κύκλο που ζητά το αρχικό πρόβλημα. Άρα έχουμε αναγάγει το πρόβλημά μας στην κατασκευή ενός κύκλου (του νέου κύκλου) που εφάπτεται σε μια γωνία (τη γωνία  $A_1$ ) και διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο στο εσωτερικό της γωνίας (το κέντρο του αρχικού κύκλου).

Αυτό το πρόβλημα λύνεται με τη βοήθεια της ομοιότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2β.

(1) Πρώτα εγγράφουμε στη δεδομένη γωνία έναν τυχαίο κύκλο ω κέντρου  $Q$ .

(2) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας  $A'Q$  και του κύκλου  $\omega$ . Τα ονομάζουμε  $L$  και  $N$ .

(3) Από το σημείο  $O$  φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την  $LQ$  και τη  $NQ$  και βρίσκουμε την τομή τους με τη διχοτόμο  $A'Q$  της γωνίας  $A'$ . Το καθένα από τα σημεία αυτά είναι κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

Το αρχικό πρόβλημα έχει, γενικώς, τέσσερις λύσεις. Δείξαμε τον τρόπο κατασκευής δύο νέων κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά στον δεδομένο κύκλο. Αφήνουμε ως άσκηση στους αναγνώστες την κατασκευή των κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά στον δεδομένο κύκλο, καθώς και την ανάλυση των ειδικών περιπτώσεων όπου ο δεδομένος κύκλος εφάπτεται ο ίδιος σε μία ή και στις δύο πλευρές της δεδομένης γωνίας.

### M195

Θα αποδείξουμε πρώτα έναν απλό και χρήσιμο τύπο.

Λήμμα: Ας υποθέσουμε ότι δύο σφαίρες, με ακτίνες  $x$  και  $y$ , εφάπτονται εξωτερικά και ότι επίσης εφάπτονται σε ένα επίπεδο, στα σημεία  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Τότε,

$$AB = 2\sqrt{xy}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι τα κέντρα

των σφαιρών είναι  $O_1$  και  $O_2$ . Στο Σχήμα 3α παρουσιάζεται η εγκάρσια τομή της δεδομένης κατάστασης που έχει ληφθεί ως προς το επίπεδο που ορίζουν τα  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $A$  και  $B$ . (Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι αυτά τα σημεία είναι πράγματι ομοεπίπεδα. Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι η ευθεία που συνδέει τα κέντρα δύο εφαπτόμενων κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής τους.) Αν φέρουμε  $O_2C \perp O_1A$ , τότε  $CO_2 = AB$ ,  $O_1O_2 = x + y$  και  $CO_1 = |x - y|$ . Τότε, από το πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

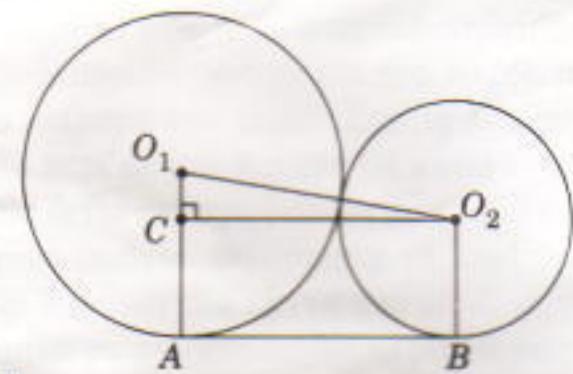
$$\begin{aligned} CO_2 &= \sqrt{O_1O_1^2 - CO_1^2} \\ &= \sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

(Επισημαίνουμε ότι το εν λόγω αποτέλεσμα αποτελεί στην πραγματικότητα ιδιότητα των εφαπτόμενων κύκλων και όχι των εφαπτόμενων σφαιρών.)

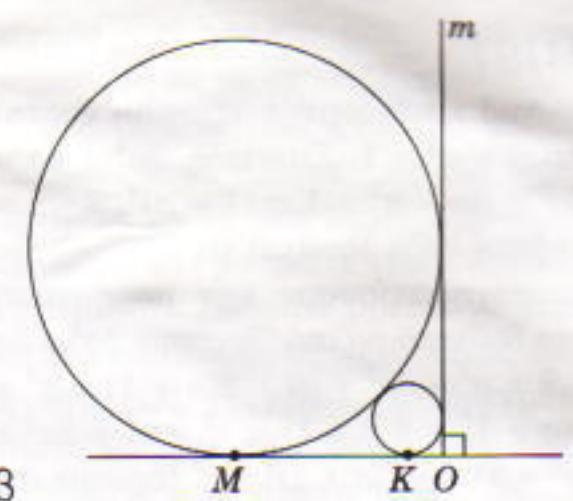
Πριν συνεχίσουμε με το πρόβλημά μας, θα λύσουμε μια απλοποιημένη εκδοχή του. Ας αγνοήσουμε προς στιγμήν τη μεσαία (σε μέγεθος) σφαίρα του αρχικού προβλήματος. Ποια είναι τότε η ελάχιστη δυνατή ακτίνα μιας σφαίρας που εφάπτεται στο επίπεδο  $L$ , την ευθεία  $m$  και τη μοναδιαία σφαίρα που εφάπτεται στο επίπεδο  $L$  και την ευθεία  $m$ ;

Στο Σχήμα 3β βλέπουμε ξανά μια τομή κάθετη στο επίπεδο  $L$  που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δεδομένων σφαιρών (και την ευθεία  $m$ ). Από το σχήμα είναι προφανές ότι το κέντρο της ελάχιστης σφαίρας ανήκει στο επίπεδο αυτής της εγκάρσιας τομής. Αν η ακτίνα της ελάχιστης σφαίρας είναι  $r$ , τότε από το λήμμα έχουμε  $MK = 2\sqrt{r}$ , ενώ γνωρίζουμε ότι  $OM = 1$  και  $KO = r$ . Όμως,  $OM = MK + KO$  και, επομένως,  $1 = r + 2\sqrt{r}$ . Από την εξίσωση αυτή βρίσκουμε ότι  $r = 3 - 2\sqrt{2}$ .

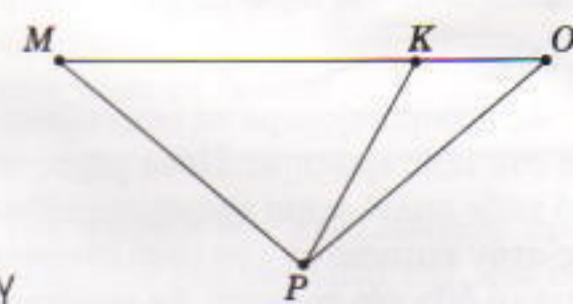
Ας επιστρέψουμε τώρα στο αρχικό πρόβλημα επαναφέροντας τη μεσαία σφαίρα. Είναι προφανές ότι η ακτίνα της μικρότερης σφαίρας δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την τιμή του  $r$  που βρήκαμε προηγουμένως. Θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να εισαγάγουμε μια ενδιάμεση σφαίρα έτσι ώστε η ακτίνα της μικρότε-



α



β



Σχήμα 3

ρης σφαίρας να ισούται ακριβώς με  $r$ .

Αν υπάρχει μια τέτοια ενδιάμεση σφαίρα, πρέπει να εφάπτεται στο επίπεδο  $L$  σε κάποιο σημείο  $P$ . Θα βρούμε ένα σημείο  $P$  και μια ακτίνα  $R$  για τη μεσαία σφαίρα, έτσι ώστε να εφάπτεται στις δύο σφαίρες του βοηθητικού μας προβλήματος.

Στο Σχήμα 3γ παρουσιάζεται η κατάσταση πάνω στο επίπεδο  $L$ . Τα σημεία  $M$ ,  $K$  και  $O$  είναι τα ίδια με του Σχήματος 3β, ενώ  $P$  είναι το σημείο επαφής της νέας σφαίρας με το επίπεδο  $L$ . Αν υπάρχει ένα τέτοιο σημείο  $P$  μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι  $OP = R$ , και από το λήμμα μας έχουμε ότι  $MP = 2\sqrt{R}$  και  $KP = 2\sqrt{Rr}$ .

Θέτουμε συν  $\angle POK = \lambda$  και εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων. Στο τρίγωνο  $POK$  έχουμε  $4Rr = R^2 + r^2 - 2\lambda Rr$ , ενώ στο τρίγωνο  $POM$  έχουμε  $4R = R^2 + 1 - 2\lambda R$ . Αν πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη εξίσωση

επί  $r$  και την αφαρέσουμε από την πρώτη, βρίσκουμε  $R = \sqrt{r}$ . Ας σημειωθεί ότι  $R > r$  (διότι  $r < 1$ ).

Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε τη μεσαία σφαίρα. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, αν αντιστοιχίσουμε στα ευθύγραμμα τμήματα τα μήκη που υπολογίσαμε προηγουμένως,  $MO < MP + OP$ . Συνεπώς, μπορούμε να κατασκευάσουμε το τρίγωνο  $MOP$  και να βρούμε το σημείο  $P$ . Τότε το  $R$  θα έχει την κατάλληλη τιμή έτσι ώστε μια σφαίρα ακτίνας  $R$  και εφαπτόμενη του επιπέδου  $L$  στο σημείο  $P$  να εφάπτεται στις άλλες δύο σφαίρες. Αφού το  $R$  είναι μικρότερο του 1 και μεγαλύτερο από το  $r = 3 - 2\sqrt{2}$ , αυτή η τελευταία τιμή του  $r$  είναι η ελάχιστη δυνατή.

## Φυσική

### Φ191

Ας μετατοπίσουμε το τόξο από τη θέση ισορροπίας του κατά πολύ μικρή γωνία  $\varphi$ . Η ροπή επαναφοράς που ασκεί η δύναμη της βαρύτητας ως προς το σημείο ανάρτησης του εκκρεμούς καθορίζεται από το «πλεόνασμα» μάζας  $m$  που υπάρχει από τη μια πλευρά και απ' το ισόποσο «έλλειμμα» που υπάρχει από την άλλη:

$$2mgR \text{ ημα} = 2 \left( \frac{M}{L} R\varphi \right) gR \text{ ημα},$$

όπου με  $2a$  συμβολίζουμε τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο χορδές και με  $M$  τη μάζα του συρμάτινου τόξου.

Η ροπή αδράνειας του συστήματος σχετικά με το σημείο ανάρτησης μπορεί να υπολογιστεί αμέσως, διότι όλα τα τμήματα που έχουν μάζα απέχουν εξίσου απ' αυτό:

$$I = MR^2.$$

Το επόμενο βήμα συνίσταται στο να γράψουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση:

$$MR^2\varphi'' = - \frac{2MR^2g \text{ ημα}}{L} \varphi,$$

από τον οποίο βρίσκουμε την περίοδο της ταλάντωσης:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g \text{ ημα}}},$$

όπου η γωνία  $a$  δίνεται από την έκφραση  $a = L/(2R)$ .

Στην περίπτωση κατά την οποία το τόξο είναι μικρό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση ημα  $\approx a$  και να λάβουμε τη συνήθη έκφραση για την περίοδο του απλού, ή μαθηματικού, εκκρεμούς — κάτι το αναμενόμενο.

Το πρόβλημά μας διαθέτει μια εναλλακτική, και πολύ κομψή, λύση που βασίζεται αποκλειστικά στη διατήρηση της ενέργειας, και στην οποία δεν χρειαζόμαστε την έκφραση για τη ροπή αδράνειας. **Υπόδειξη:** Συγκρίνετε τις μέγιστες τιμές της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του εκκρεμούς και ανακαλέστε στη μνήμη σας μια ανάλογη σχέση που ισχύει στις αρμονικές ταλαντώσεις.

### Φ192

Έστω  $m$  η μάζα της ατμόσφαιρας της Αφροδίτης,  $M = 48 \text{ g/mol}$  η γραμμομοριακή μάζα του οξυγόνου, και  $R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$  η παγκόσμια σταθερά των αερίων. Στην επιφάνεια του πλανήτη το στρώμα του οξυγόνου καταλαμβάνει όγκο  $V = 4\pi r^2 h$  υπό πίεση  $P$  και θερμοκρασία  $T$ . Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος,  $P = mg/(4\pi r^2)$ , όπου με  $r$  συμβολίζουμε την ακτίνα του πλανήτη. Από την άλλη, η καταστατική εξίσωση για το οξυγόνο είναι

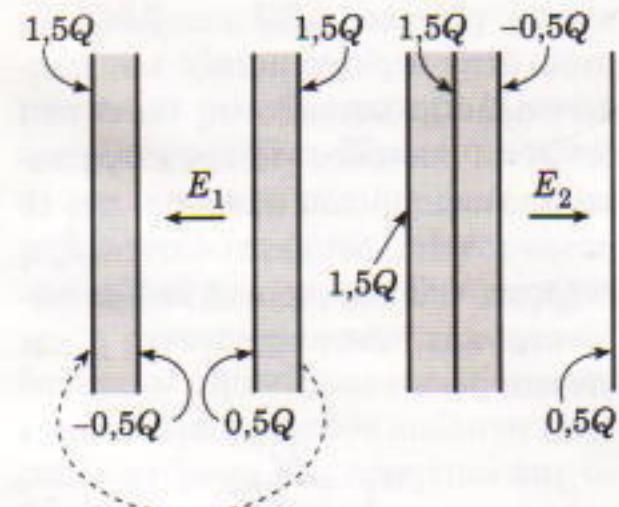
$$PV = \frac{am}{M} RT.$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις που βρήκαμε προηγουμένως για τα  $V$  και  $P$  σ' αυτή την εξίσωση, καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα για το πάχος του στρώματος του οξυγόνου:

$$h = \frac{aRT}{gM} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

### Φ193

Για τα δεδομένα φορτία, το ηλεκτρικό πεδίο έξω από τον πυκνωτή δεν μηδενίζεται (σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει όταν το ολικό φορτίο των πλακών ισούται με μηδέν). Κάθε αναδιάταξη των πλακών τροποποιεί αποκλειστικά και μόνο το εσωτερικό πεδίο του πυκνωτή το εξωτερικό πεδίο παραμένει παντελώς ανεπηρέα-



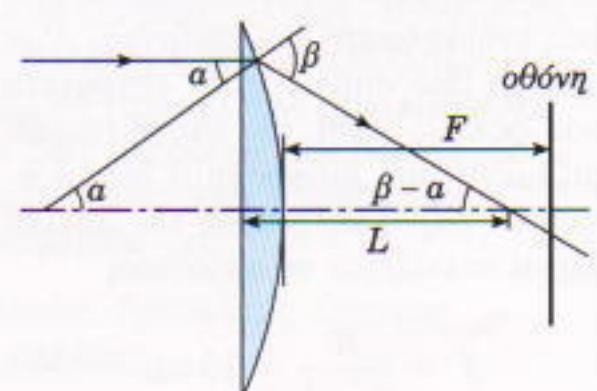
Σχήμα 4

στο. Τα εξωτερικά μεταλλικά φύλλα και των δύο πλακών (Σχήμα 4) συγκεντρώνουν ομώνυμα και ίσα κατ' απόλυτη τιμή φορτία, που το καθένα τους ισούται με το ήμισυ του ολικού φορτίου του πυκνωτή (σε κάθε «σωστά» φορτισμένο πυκνωτή αυτό το ημιάθροισμα των φορτίων έχει μηδενική τιμή). Στην περίπτωσή μας το ημιάθροισμα των φορτίων ισούται με  $1,5Q$ .

Συνεπώς, τα εσωτερικά φύλλα των πλακών έχουν φορτία  $-0,5Q$  και  $+0,5Q$ . Το εσωτερικό πεδίο του πυκνωτή καθορίζεται αποκλειστικά από τα φορτία των εσωτερικών φύλλων, διότι στην υπόψη περιοχή τα πεδία που οφείλονται στα εξωτερικά φορτία αλληλοαναρούνται. Η ενέργεια του πεδίου μεταξύ των πλακών υπολογίζεται με τον συνήθη τρόπο:

$$W_1 = \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{8C}.$$

Όταν αποσυνδεθεί το εξωτερικό φύλλο της πλάκας που έχει φορτίο  $2Q$ , το φορτίο που έφερε μένει εκεί, κι έτσι μεταφέρεται στην άλλη πλευρά του πυκνωτή. Τώρα τα φορτία των πλακών του τροποποιημένου πυ-



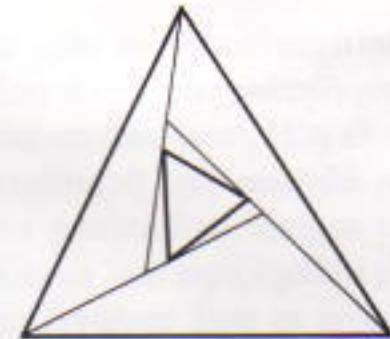
Σχήμα 5

## Σπαζοκεφαλιές

### Σ191

Το σχέδιο είναι λάθος. Τα τετράπλευρα που παρουσιάζει δεν μπορεί να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

Πράγματι, για τρία επίπεδα μπορεί να ισχύει ένα από τα εξής: είτε (1) τέμνονται σε ένα σημείο — και σε αυτή την περίπτωση οι ευθείες κατά τις οποίες τέμνονται δύο από αυτά διέρχονται από αυτό το σημείο —, είτε (2) δεν τέμνονται σε ένα σημείο — και σε αυτή την περίπτωση οι ευθείες κατά τις οποίες τέμνονται δύο από αυτά είναι παράλληλες. Όμως, οι «ευθείες τομής» των «επιπέδων» των τριών τετραπλεύρων του σχεδίου δεν τέμνονται σε ένα σημείο ούτε είναι ανά δύο παράλληλες (Σχήμα 6).

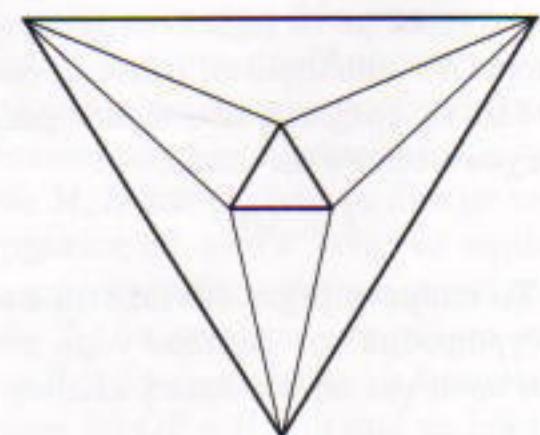


Σχήμα 6

Πρόκληση: Πώς θα μπορούσε να είναι η κάτοψη του τετραπλεύρου του δασκάλου;

### Σ192

Είναι δυνατόν (δείτε το Σχήμα 7).



Σχήμα 7

### Σ193

Ας υποθέσουμε ότι οι χημικοί ήταν περισσότεροι από τους αλχημιστές. Αφού το συνολικό πλήθος των συνέδρων είναι 100 (άρτιο), το πλή-

κνωτή γίνονται  $2,5Q$  και  $0,5Q$ . Το πεδίο στην περιοχή μεταξύ των πλακών αλλάζει κατεύθυνση (κάτι που δεν είναι ουσιώδες για τον ενεργειακό υπολογισμό που κάνουμε) και το μέτρο του διπλασιάζεται. Συνεπώς, η ενέργεια του εσωτερικού πεδίου αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 4 και γίνεται

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

Εφόσον το εξωτερικό πεδίο παραμένει αμετάβλητο, το έργο που δαπανήσαμε καταναλώθηκε στην αύξηση του εσωτερικού πεδίου ανάμεσα στις πλάκες. Ως εκ τούτου, το απαιτούμενο έργο για τη μεταφορά του φορτίου 100 τούται με

$$W = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{8C} = \frac{3Q^2}{8C}.$$

### Φ194

Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, ο φακός είναι τοποθετημένος με τέτοιον τρόπο ώστε να απλουστεύονται οι υπολογισμοί μας: η παράλληλη δέσμη προσπίπτει στην επίπεδη πλευρά του φακού κάθετα προς την επιφάνειά του, κι έτσι δεν διαθέλλεται εκεί. Συνεπώς, δεν χρειάζεται παρά να μελετήσουμε τη διάθλαση στη σφαιρική διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα. Ας αρχίσουμε υπολογίζοντας το πάχος  $d$  του φακού κατά μήκος του οπτικού του άξονα:

$$R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (R - d)^2,$$

από όπου βρίσκουμε

$$d = 0,67 \text{ cm.}$$

Το πάχος του φακού θα μας φανεί απαραίτητο επειδή οι αποστάσεις που μας ενδιαφέρουν δεν ορίζονται όλες από το ίδιο σημείο στην επιφάνεια του φακού. Έτσι, μια στενή (περιοριζόμενη από διάφραγμα) δέσμη ακτίνων παράλληλη προς τον οπτικό άξονα εστιάζεται σε απόσταση

$$f = \frac{R}{n - 1} = 10 \text{ cm.}$$

Ας εξετάσουμε τώρα την ακτίνα

που απέχει περισσότερο από τον οπτικό άξονα (Σχήμα 5). Η γωνία προσπτωσης της εν λόγω ακτίνας, η οποία μετράται από την ακτίνα που άγεται προς το σημείο της διάθλασης στη σφαιρική επιφάνεια, είναι  $a = 30^\circ$ , διότι  $\eta_m = (D/2)/R = 0,5$ . Η γωνία διάθλασης υπολογίζεται με τη βοήθεια του νόμου του Snell:  $\eta_m = n \cdot \eta_a = 0,75$ , από όπου βρίσκουμε  $\beta = 48,6^\circ$ . Για να προσδιοριστεί το σημείο όπου η ακτίνα εστιάζει στον κύριο άξονα μετά τη διάθλαση της, αρκούν μερικές τετριμμένες μαθηματικές πράξεις. Το συγκεκριμένο σημείο βρίσκεται σε απόσταση

$$L = (D/2)\operatorname{σφ}(\beta - a)$$

από την επίπεδη πλευρά του φακού. Λαμβάνοντας υπόψη το πάχος του φακού, διαπιστώνουμε ότι οι εξώτατες ακτίνες της δέσμης τέμνονται σε απόσταση 3,2 cm από την οθόνη, οπότε η διάμετρος της φωτεινής κηλίδας είναι περίπου 2,2 cm.

Θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθεί το εξής ερώτημα: Μήπως υπάρχουν ακτίνες οι οποίες παράγουν κάποια κηλίδα με μεγαλύτερη διάμετρο από εκείνη που δημιουργούν οι εξώτατες ακτίνες που μελετήσαμε εδώ;

### Φ195

Εφόσον τόσο η ορμή όσο και η ενέργεια του συστήματος πριν από τη σύντηξη των πυρήνων είναι μηδενικές, τα σωματίδια που θα σχηματιστούν θα απομακρυνθούν σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίσες κατ' απόλυτη τιμή ορμές (πρόκειται για ένα συμπέρασμα που απορρέει άμεσα από το νόμο διατήρησης της ορμής):

$$p_n = \sqrt{2m_n E_n} = p_a = \sqrt{2m_a E_a}.$$

Η διατήρηση της ενέργειας οδηγεί στην εξίσωση

$$E = E_n + E_a.$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα εξισώσεων ως προς  $E_n$  και  $E_a$ , παίρνουμε

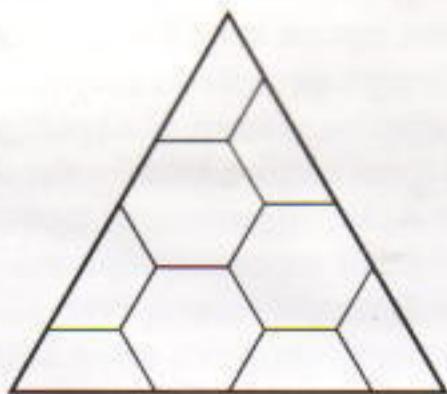
$$E_a = \frac{m_n}{m_a + m_n} E = 3,5 \text{ MeV},$$

$$E_n = \frac{m_a}{m_a + m_n} E = 14,1 \text{ MeV}.$$

θος των χημικών θα ήταν τουλάχιστον 51· επομένως υπήρχαν το πολύ 49 αλχημιστές. Άρα, μεταξύ αυτών που απάντησαν υπήρχε ένας τουλάχιστον χημικός, ο οποίος δήλωσε ότι οι χημικοί είναι περισσότεροι. Αν πάλι υποθέσουμε ότι υπήρχαν περισσότεροι αλχημιστές, πρέπει να υπήρχε τουλάχιστον ένας αλχημιστής ανάμεσα σε αυτούς που απάντησαν στην ερώτηση, και συνεπώς δήλωσε ότι οι χημικοί είναι περισσότεροι. Άρα, στο συνέδριο συμμετείχαν 50 χημικοί και 50 αλχημιστές.

### Σ194

Δείτε το Σχήμα 8.



Σχήμα 8

### Σ195

Όταν απομακρύνουμε το θερμόμετρο από τον λειωμένο κασσίτερο, η θερμοκρασία της γυάλινης σφαίρας που περιέχει τον υδράργυρο πέφτει απότομα. Η σφαίρα συστέλλεται και πιέζει τον υδράργυρο προκαλώντας την ανύψωσή του στο σωλήνα. Για

να ποσοτικοποιήσετε το φαινόμενο, μπορείτε να συγκρίνετε τους συντελεστές θερμικής διαστολής του γυαλιού και του υδραργύρου. ◻

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 45

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 61

περίπου με τη γραμμική διάσταση του κόκκου. Συνεπώς, το φάσμα των ακτινοβολούμενων συχνοτήτων θα παρουσιάσει «εποκοπής» από την πλευρά των πυγλών συχνοτήτων, όπως δείχνει η ιοιοτικά η διακεκομένη γραμμή στο Σχήμα 6 —δηλαδή, υφίσταται κάποια μετατόπιση προς το «ιώδες» τμήμα του φάσματος. Αν υπήρχε περίπτωση οι κόκκοι σκόνης να αποκτήσουν θερμοκρασία αντίστοιχη με εκείνη του Ήλιου, τότε όσοι μικρότεροι θα ήταν, τόσο πιο κυανοί θα φαίνονταν (στην ορατή περιοχή του φάσματος).

Όλα τούτα τα ζητήματα βρίσκουν πεδίο εφαρμογής σε πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας: για παράδειγμα, μπορούμε να αναφέρουμε τις έρευνες που αφορούν το ενεργειακό ισοζύγιο των πλανητικών ατμοσφαιρών, τις μεταλλουργικές καμίνους, τα πυραυλοκίνητα αεροπλάνα, κ.ο.κ. Όπως διαπιστώνουμε, λοιπόν, τα κύματα που παράγονται από μια χορδή πιάνου ανοίγουν το δρόμο για την κατανόηση μιας πληθώρας συναφών κατά βάθος φαινομένων που ανακύπτουν σε πολυποίκιλα ερευνητικά πεδία. ◻

μη σε ένα φυσικό σύστημα η οποία δεν εξισορροπείται. Μια τέτοια κατάσταση αντιμετωπίζουμε όταν μελετούμε την κίνηση των ηλεκτρονίων σε ένα αγώγιμο σύρμα. Εν προκειμένω, η συνισταμένη των ηλεκτρικών δυνάμεων μηδενίζεται επειδή στον αγωγό επικρατεί σχεδόν απόλυτη ισορροπία ανάμεσα στα αρνητικά και τα θετικά φορτία. Αρκεί να σκεφτούμε ότι για να εμφανιστεί παρατηρήσιμο ρεύμα στα μέταλλα πρέπει να τεθεί σε κίνηση ένα πραγματικά τεράστιο πλήθος φορτισμένων σωματιδίων —περίπου  $10^{23}$  στοιχειώδη φορτία ανά κυβικό εκατοστό! Αυτό το τεράστιο πλήθος παράγει μια πολύ ισχυρή μαγνητική δύναμη, της οποίας τα αποτελέσματα γίνονται αντιληπτά, για παράδειγμα, στους ηλεκτρικούς κινητήρες (ρεύματα Foucault).

Τρίτον, τα ηλεκτρικά φορτία κινούνται ενίοτε υπό την επίδραση διαφόρων συνδυασμών ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων που παράγονται από ποικίλες πηγές. Εν γένει, οι μαγνητικές και οι ηλεκτρικές δυνάμεις μπορεί να βρίσκονται μεταξύ τους σε κάθε λογής σχέσεις, χωρίς μάλιστα να αποκλείεται καθόλου και η περίπτωση όπου η μαγνητική δύναμη κυριαρχεί επί της ηλεκτρικής. Το τελικό μας συμπέρασμα, λοιπόν, μοιάζει απόλυτα ασφαλές: Η γνώση του μαγνητισμού αποτελεί αφ' εαυτής εργαλείο αναντικατάστατο! ◻

JACQUES NINIO  
Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ  
ΤΩΝ  
ΨΕΥΔΑΙΣΘΗΣΕΩΝ

Jacques Ninio

### Η επιστήμη των ψευδαισθήσεων

Το βιβλίο δεν επιχειρεί απλώς να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως • Τι είναι ψευδαισθηση; • Πόσα είδη ψευδαισθήσεων υπάρχουν; • Ποιος ο ρόλος του εγκεφάλου στη δημιουργία τους; • Ποια η ιστορία τους; αλλά, χρησιμοποιώντας εξαίρετη εικονογράφηση, παρουσιάζει και ερμηνεύει πλήθος από ψευδαισθήσεις (γεωμετρικές πλάνες, οπτικές και ακουστικές αυταπάτες, παράδοξες εικόνες, κ.λπ.). Παράλληλα, διασαφηνίζοντας τα οργανικά αίτια που τις προκαλούν, μας εμβάλλει σε σκέψεις κατά πόσον πολλά απ' όσα βλέπουμε και ακούμε γύρω μας ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα ή οφείλονται σε διαταραχές της αντίληψής μας...

O Jacques Ninio είναι νευροβιολόγος, διευθυντής έρευνας στο CNRS της Γαλλίας.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Αγροτικές εργασίες

Ξεπλένεις, αρμέγεις, τελειώσαμε (σχεδόν)

Don Piele

**Κ**ΑΘΕ ΑΝΟΙΞΗ, ΤΟ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ ΠΟΥ ΕΜΠΛΕΚΕΤΑΙ ΣΤΗ διοργάνωση της Αμερικανικής Ολυμπιάδας Πληροφορικής αντιμετωπίζει την πρόκληση της δημιουργίας ενός συνόλου προβλημάτων για τον εθνικό διαγωνισμό. Αυτά τα προβλήματα είναι παρόμοια με τις προγραμματιστικές προκλήσεις που παρουσιάζονται στις Διεθνείς Ολυμπιάδες Πληροφορικής. Εστιάζονται σε εργασίες που επιλύονται με κάποιον αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος μπορεί να αντιμετωπίσει γρήγορα 10 δοκιμαστικά σύνολα δεδομένων. Ένα βέλτιστο πρόγραμμα για να πάρει τη μέγιστη βαθμολογία πρέπει να βρίσκει τη λύση για κάθε σύνολο δεδομένων μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα. Προγράμματα λιγότερο αποδοτικά παίρνουν χαμηλότερη βαθμολογία, ανάλογα με το πλήθος των δοκιμαστικών περιπτώσεων που αντιμετωπίζουν μέσα στα δεδομένα χρονικά περιθώρια. Ο υπολογισμός της βαθμολογίας γίνεται με ένα αυτόματο σύστημα αξιολόγησης.

Η δημιουργία των προβλημάτων απέχει πολύ από το να είναι αυτοματοποιημένη. Σε αυτή συμμετέχει όλο το προσωπικό, υποβάλλοντας ιδέες για νέα προβλήματα στον αρχηγό της ομάδας —τον Rob Kolstad. Καταρτίζεται ένας κατάλογος με δέκα, πάνω-κάτω, υποψήφια προβλήματα, και τελικά επιλέγονται πέντε από αυτά για το διαγωνισμό. Και κατόπιν αρχίζει η διασκέδαση: Τα προβλήματα γίνονται «βουκολικά» —δηλαδή, από σύνηθες προγραμματιστικό έργο μετασχηματίζονται σε μια... αγροτική εργασία. Στη σημερινή στήλη παρουσιάζουμε ένα από τα ευκολότερα προβλήματα του τελευταίου διαγωνισμού.

## Το πρόβλημα

Η οικογένεια του αγρότη Τζων αρχίζει τις προετοιμασίες για το άρμεγμα. Πρέπει να συγκεντρώσουν τις αγελάδες, να τις βάλουν στο παχνί τους, να πλύνουν τους μαστούς τους, και να κάνουν πολλές ακόμη δουλειές. Η οργάνωση αυτών των εργασιών και η ολοκλήρωσή τους δύο το δυνατόν συντομότερα είναι πάντοτε επιθυμητή, διότι τους αφήνει περισσότερο ελεύθερο χρόνο να διασκεδάσουν μαζί με τις αγελάδες. Βέβαια, ορισμένες εργασίες δεν μπορούν να γίνουν αν δεν ολοκληρωθούν πρώτα κάποιες άλλες. Για παράδειγμα, είναι αδύνατο να πλύ-

νεις τους μαστούς μιας αγελάδας αν δεν μπει πρώτα στο παχνί της; δεν πρέπει να χρησιμοποιήσεις την αμελκτική μηχανή αν δεν πλύνεις πρώτα τους μαστούς της αγελάδας. Ο αγρότης Τζων έχει καταρτίσει έναν κατάλογο με  $N$  εργασίες που πρέπει να γίνουν. Η ολοκλήρωση κάθε εργασίας απαιτεί ακέραιο πλήθος λεπτών της ώρας, ενώ μπορεί να υπάρχουν άλλες εργασίες που πρέπει να ολοκληρωθούν πριν από αυτή (προαπαιτούμενες). Μία τουλάχιστον εργασία δεν έχει προαπαιτούμενες: είναι η πρώτη απ' όλες τις εργασίες, αριθμημένη με το 1. Ο κατάλογος του αγρότη Τζων είναι καλά διατεταγμένος, και η εργασία  $K$  ( $K > 1$ ) μπορεί να έχει ως προαπαιτούμενες μόνο κάποιες από τις εργασίες 1, ...,  $K - 1$ . Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα διαβάζει τον κατάλογο με τις  $N$  εργασίες, το χρόνο που απαιτείται για καθεμία από αυτές, καθώς και τον κατάλογο με τις προαπαιτούμενες κάθε εργασίας. Υπολογίστε ποιος είναι ο συντομότερος χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση και των  $N$  εργασιών. Οι ανεξάρτητες εργασίες μπορούν, βεβαίως, να εκτελούνται παράλληλα. Στην πραγματικότητα, ένα μεγάλο πλήθος εργασιών είναι δυνατόν να διεξάγονται ταυτόχρονα.

### ΜΟΡΦΗ ΕΙΣΟΔΟΥ:

Γραμμή 1: Ένας ακέραιος,  $N$ , το πλήθος των εργασιών ( $3 \leq N \leq 10.000$ )

Γραμμή 2, ..., Γραμμή  $N + 1$ :  $N$  γραμμές, καθεμία με αρκετούς ακεραίους:

τον αύξοντα αριθμό της εργασίας (1, ...,  $N$ , σε αύξουσα σειρά στο αρχείο εισόδου),

τη διάρκεια της εργασίας σε λεπτά ( $1 \leq \text{διάρκεια} \leq 100$ ),

έναν κατάλογο με αύξοντα αριθμό 100 το πολύ προαπαιτούμενων εργασιών (αν υπάρχουν).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΡΧΕΙΟΥ ΕΙΣΟΔΟΥ (αρχείο CHORES.IN): 7

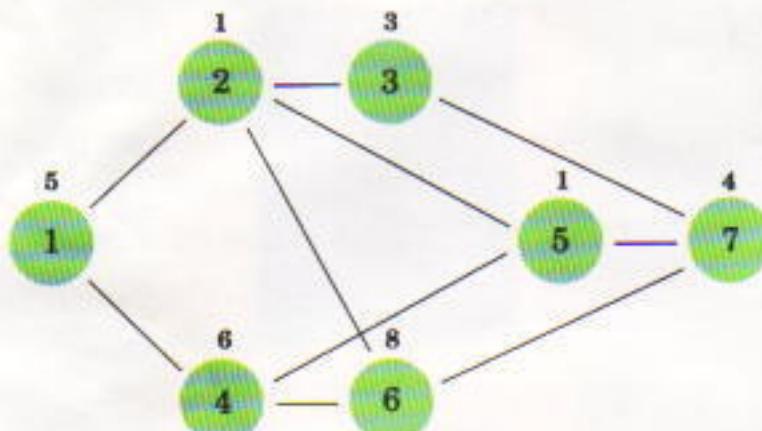
1 5
2 1 1
3 3 2
4 6 1
5 1 2 4
6 8 2 4
7 4 3 5 6

## ΜΟΡΦΗ ΕΞΟΔΟΥ:

Μια μοναδική γραμμή με έναν μόνο ακέραιο, ο οποίος είναι ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση όλων των εργασιών.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΡΧΕΙΟΥ ΕΞΟΔΟΥ

(Αρχείο CHORES.OUT): 23.



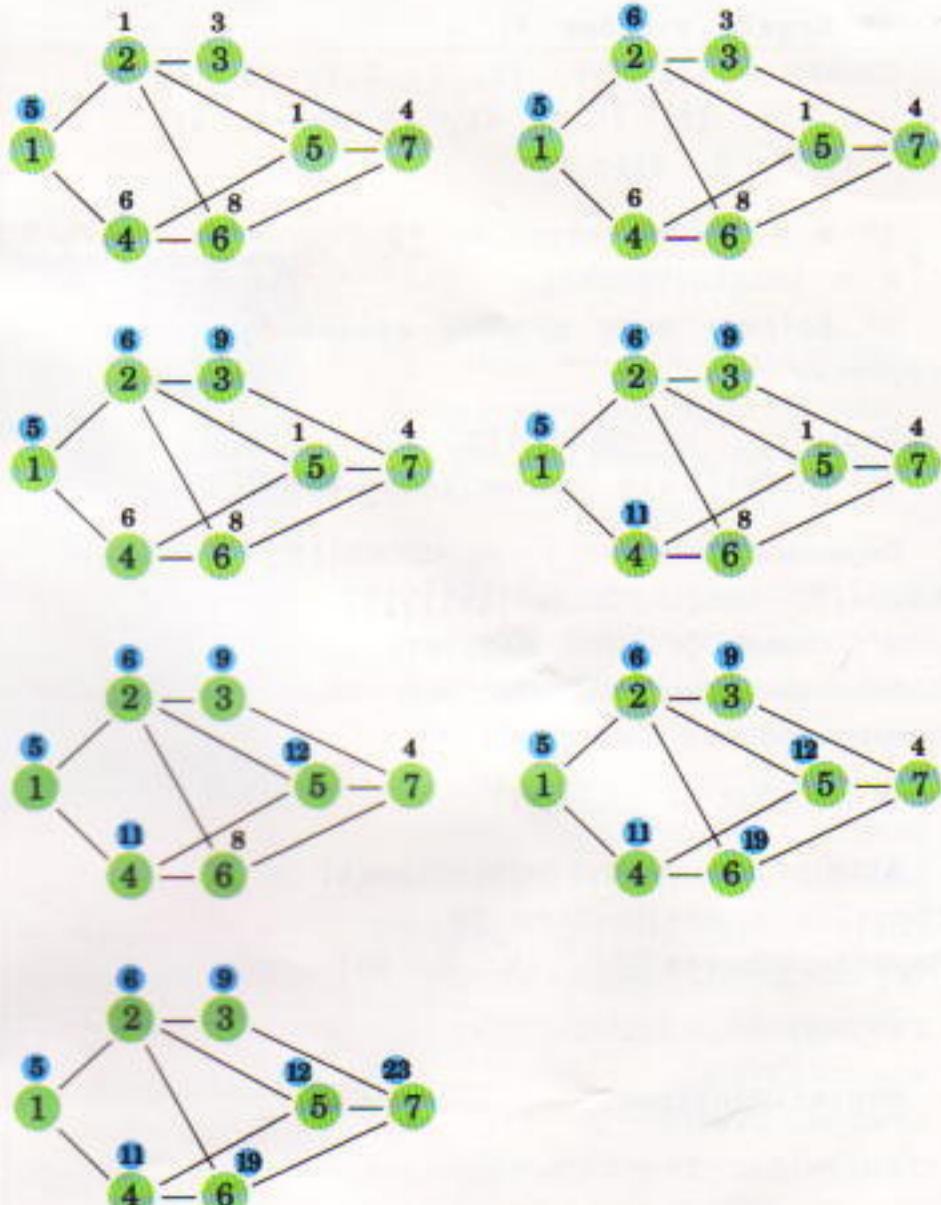
Σχήμα 1

Το αρχείο εισόδου του παραδείγματός μας παρουσιάζεται διαγραμματικά στο Σχήμα 1. Οι εργασίες είναι αριθμημένες από το 1 έως το 7 και είναι χρωματισμένες πράσινες. Ο απαιτούμενος για κάθε εργασία χρόνος εμφανίζεται πάνω από την πράσινη κουκίδα. Οι γραμμές μεταξύ των εργασιών υποδηλώνουν εξάρτηση. Οι εργασίες με τη μικρότερη αριθμηση πρέπει να ολοκληρωθούν πριν από τις εργασίες με τη μεγαλύτερη αριθμηση.

Από το Σχήμα 1 γίνεται φανερό ότι οι εργασίες 1, 4, 6 και 7 αποτελούν μια διαδοχή εξαρτημένων εργασιών, η οποία απαιτεί  $5 + 6 + 8 + 4 = 23$  λεπτά για να ολοκληρωθεί. Αυτή είναι η χειρότερη περίπτωση και, επομένως, αυτός είναι ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση όλων των εργασιών.

## Η λύση

Αναζητούμε έναν αλγόριθμο που θα βρίσκει τη λύση χωρίς να προσθέτει όλες τις «διαδρομές» εργασιών. Αν έχουμε  $n$  εργασίες, η πρόσθετη όλων των διαδρομών θα ήταν —στη χειρότερη περίπτωση όπου κάθε εργασία εξαρτάται από όλες σχεδόν τις προηγούμενες— ένας αλγόριθμος τάξης  $(n - 1)!$ . Μια αποδοτικότερη λύση χρησιμοποιεί την αναδρομή και λειτουργεί ως εξής. Αν έχουμε να ολοκληρώσουμε μόνο μια εργασία, η λύση είναι γνωστή: είναι ο χρόνος που απαιτείται για να εκτελεστεί η πρώτη εργασία. Ας υποθέσουμε τώρα ότι γνωρίζουμε τον ελάχιστο απαιτούμενο χρόνο για να ολοκληρωθούν η εργασία  $k - 1$  και όλες οι προαπαιτούμενες εργασίες. Ο συντομότερος χρόνος μέσα στον οποίο μπορεί να ολοκληρωθεί η εργασία  $k$  ισούται με το μέγιστο όλων των συντομότερων χρόνων που χρειάζονται οι προαπαιτούμενες εργασίες τής  $k$  συν τον απαιτούμενο χρόνο για την ολοκλήρωση της  $k$ . Στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται αυτοί οι χρόνοι με μπλε χρώμα, έτσι όπως υπολογίζονται για όλες τις εργασίες  $k = 1$  έως 7. Κάθε τμήμα του Σχήματος 2 παρουσιάζει ένα βήμα της διαδικασίας υπολογισμού του ελάχιστου χρόνου που απαιτείται για την ολοκλήρωση μιας εργασίας και όλων των προαπαιτουμένων της.



Σχήμα 2

Γνωρίζουμε πλέον, και για τις  $n$  εργασίες, τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μια εργασία και όλες οι προαπαιτούμενές της. Για να λύσουμε το πρόβλημα, αρκεί να πάρουμε τη μέγιστη από αυτές τις τιμές, που στην περίπτωση μας είναι 23.

## ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Ιδού ο ψευδοκώδικας ο οποίος υλοποιεί τον αλγόριθμο που περιγράψαμε προηγουμένως.

- 1) Καθορισμός αρχικών τιμών

$\text{Εργασία}[k] = \text{Χρόνος για την ολοκλήρωση της εργασίας } k.$

$\text{ΠροαπαιτούμενεςΕργασίες}[k] = \text{Κατάλογος των εργασιών που προηγούνται της εργασίας } k.$

- 2) Αναδρομικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό τής  $\text{ΕλάχιστοςΧρόνος}[k] = \text{Ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση της εργασίας } k \text{ και όλων των προαπαιτουμένων εργασιών.}$

Για  $k = 1$  έως  $n$

$\text{ΕλάχιστοςΧρόνος}[k] = \text{Εργασία}[k] + \text{Μέγιστος}[\text{ΕλάχιστοςΧρόνος}[j], j \in \text{ΠροαπαιτούμενεςΕργασίες}[k]]$

- 3) Λύση = Μέγιστος $[\text{ΕλάχιστοςΧρόνος}[k]$ , για  $k = 1$  έως  $n$ ]

## Κώδικας Mathematica

Ιδού ο πραγματικός κώδικας *Mathematica* που αντιστοιχεί στον προηγούμενο ψευδοκώδικα:

```

(* Αρχείο εισόδου *)
CHORES = {{1, 5}, {2, 1, 1}, {3, 3, 2},
{4, 6, 1}, {5, 1, 2, 4}, {6, 8, 2, 4},
{7, 4, 3, 5, 6}};

(* n = πλήθος εργασιών *)
n = Length[CHORES];
(* Βρίσκει τους χρόνους εκτέλεσης των εργασιών *)

Chore[k_] := CHORES[[K, 2]];
(* Βρίσκει τις προαπαιτούμενες εργασίες *)

DependentChores[k_] := CHORES[[k,
Range[3, Length[Chores[[k]]]]];
(* Υπολογίζει τον ελάχιστο χρόνο για την ολοκλήρωση κάθε εργασίας και όλων των προαπαιτούμενων εργασιών *)

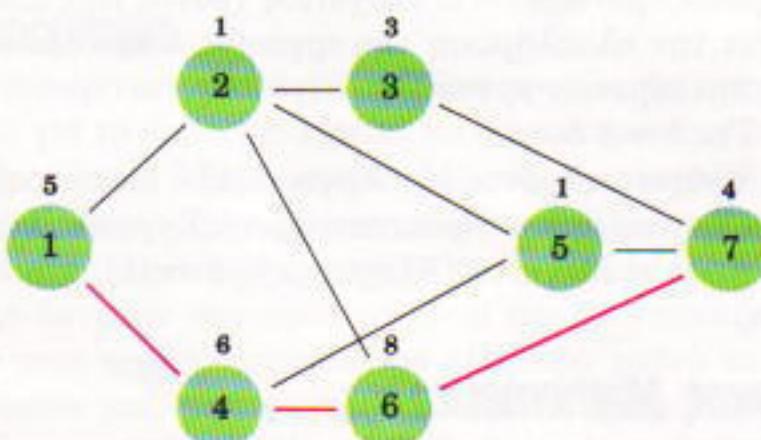
MinTime[1] = Chore[1];
AllMinTimes = Table[MinTime[k] =
Chore[k] + Max[MinTime /@ DependentChores[k]], {k, 2, n}]
{6, 9, 11, 12, 19, 23}
Max[AllMinTimes]

```

23

## Η σειρά σας

Ορισμένες ακολουθίες εργασιών αποτελούν διαδοχή εξαρτώμενων εργασιών οι οποίες απαιτούν για την ολοκλήρωσή τους χρονικό διάστημα ίσο με αυτό που χρειάζεται η ολοκλήρωση όλων των εργασιών. Αυτές οι ακολουθίες καλούνται κρίσιμες διαδρομές και μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία. Δική σας δουλειά είναι να τροποποιήσετε τον προηγούμενο κώδικα έτσι ώστε να βρίσκει μια κρίσιμη διαδρομή. Στο παράδειγμά μας, η ακολουθία {1, 4, 6, 7} είναι κρίσιμη διαδρομή, διότι η εργασία 7 εξαρτάται από την εργασία 6 η οποία εξαρτάται από την 4 η οποία εξαρτάται από την 1, ενώ ο χρόνος για την ολοκλήρωσή τους είναι 23 —δηλαδή, ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση όλων των εργασιών. Η έξοδός σας πρέπει να είναι ένας κατάλογος εργασιών. Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται μια κρίσιμη διαδρομή.



Σχήμα 3

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Jayant Narlikar

## Η φωτεινή πλευρά της Βαρύτητας

Από το μήλο του Νεύτωνα στη σύγχρονη κοσμολογία

Η βαρύτητα, η πιο αινιγματική από τις θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης, διέπει τα πάντα —από την κίνηση των ακεάνιων παλιρροιών μέχρι τη διαστολή του Σύμπαντος.

Στο παρόν βιβλίο το θέμα της βαρύτητας παρουσιάζεται ολοκληρωμένα, με απόλυτη σαφήνεια και χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες. Οικείες αναλογίες, ενδιαφέρουσες ιστορίες και πολλές εικόνες αποσαφηνίζουν λεπτά νοήματα και δύσκολα σημεία.

Η δεύτερη έκδοση του βιβλίου είναι πλήρως αναθεωρημένη και διευρυμένη, ώστε να περιλαμβάνει την ανακάλυψη γιγαντιαίων βαρυτικών φακών, τα ευρήματα του δορυφόρου COBE και του προγράμματος MACHO, τις έρευνες για το πρώιμο Σύμπαν και άλλες νέες ιδέες της κοσμολογίας.

- «Μακάρι να υπήρχαν περισσότεροι επιστήμονες που να μπορούσαν να γράψουν τόσο όμορφα όσο ο Narlikar.»  
—The New Scientist

Ένα ευανάγνωστο και ελκυστικό βιβλίο για τη «φωτεινή» όψη της πιο σκοτεινής δύναμης στο Σύμπαν μας.

Σελ.: 252, 17 x 25 εκ., Α/Μ, 6.600 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ