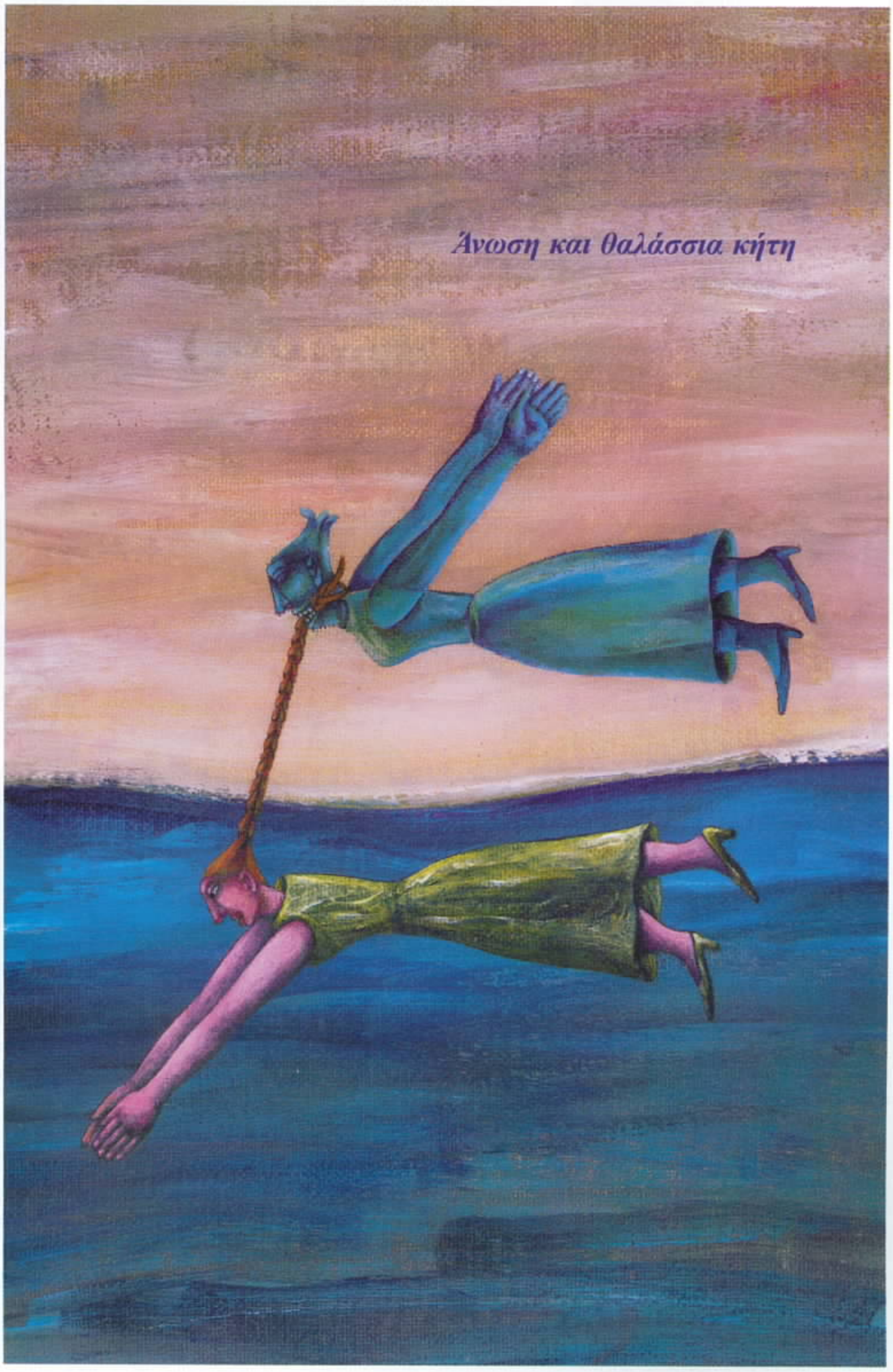
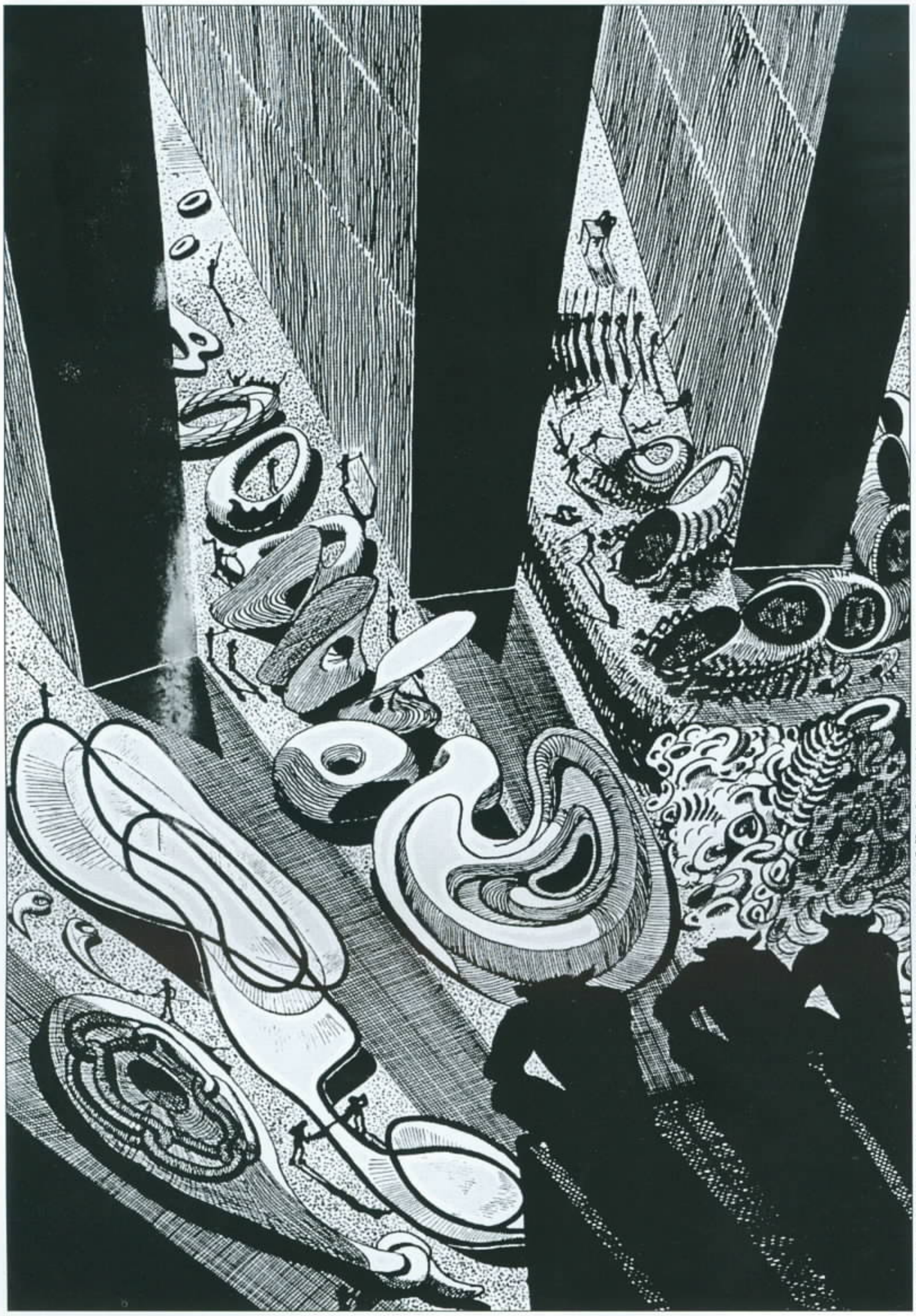
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2000
ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 4
2.300 ΔΡΧ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



Σινική μελάνη σε χαρτί, 21 × 32 εκ.· αναπυπώνεται με την άδεια του Α.Τ. Fomenko

Τοπολογικό πάρκο (1967), του Anatoly Fomenko

ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΗ ΜΕΓΑΛΗ ΑΤΑΞΙΑ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΠΟΥ απεικονίζεται παραπάνω, θα μπορέσετε να διακρίνετε ένα υμένιο σαπουνοδιαλύματος τεντωμένο στο εσωτερικό ενός «κυκλικού» σύρματος. Με προσεκτικότερη παρατήρηση, θα ανακαλύψετε ότι το σχήμα του συρμάτινου πλαισίου προκύπτει από συνδυασμό δύο ταινιών του Möbius, μιας απλής και μιας τριπλής. Εντούτοις, το υμένιο δεν δυσκολεύεται να σχηματίσει μια ελάχιστη επιφάνεια που να καλύπτει το συρμάτινο σύμπλεγμα. Για να μάθετε περισσότερα σχετικά με την καταπληκτική ικανότητα των υμενίων σαπουνοδιαλύματος να αποκαλύπτουν απαστράπτουσες λύσεις σε σύνθετες μαθηματικές προκλήσεις, διαβάστε το άρθρο της σελ. 6. Έκτοτε, η εκτίμησή σας στις σαπουνόφουσκες θα είναι απεριόριστη.

QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2000

ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 4

Εικονογράφηση: Jose Garcia

Το δεύτερο πρόσωπο που ίπταται πάνω από τη λουόμενη κοπέλα του εξωφύλλου μας υπαινίσσεται τον φύλακα-άγγελο που πρέπει να συνοδεύει τον καθένα μας όταν, τώρα το καλοκαίρι, κολυμπά ανέμελα στις δροσερές παραλίες. Δεν αναφερόμαστε τόσο στους πολλούς κινδύνους που εγκυμονούν —δεν είναι απίθανο να βρεθείτε πρόσωπο με πρόσωπο μ' ένα κήτος ή μ' ένα κρις-κραφτ—, αλλά κυρίως για τη φοβία κάποιων ότι η άνωση που δέχονται από το νερό δεν επαρκεί και συνεπώς βουλιάζουν. Ωστόσο, όλα είναι ζήτημα γνώσης. Αν γυρίσετε στη σελίδα 53 και διαβάσετε το σχετικό άρθρο, δεν θα πάψετε μεν να φοβάστε τους καρχαρίες, αλλά τουλάχιστον δεν θα αργήσετε να πετάξετε το σωσίβιο και όλα τα συναφή (πλην ίσως μιας σημαδούρας πάνω απ' το κεφάλι σας που θα δηλώνει ότι είστε άνθρωπος). Τι άλλο, λοιπόν; «Κήτος εν όψει!», ολοταχώς.

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Η κοινωνική ευθύνη των επιστημόνων

«Κύριος στόχος όλων των επιστημονικών και τεχνολογικών προσπαθειών πρέπει να είναι πάντοτε η φροντίδα για τον ίδιο τον άνθρωπο και την τύχη του (...) έτσι ώστε τα πνευματικά μας δημιουργήματα να αποτελούν ευλογία και όχι κατάρα για το ανθρώπινο είδος. Αυτό να μην το ξεχνάτε ποτέ, όταν βρίσκεστε ανάμεσα στα διαγράμματα και τις εξισώσεις σας.»

—Άλμπερτ Αϊνστάιν, Φεβρουάριος 1931

Θα ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΝΔΙΑΦΕρουν τους φυσικούς επιστήμονες οι κοινωνικές επιπτώσεις της εργασίας τους και τα ηθικά ζητήματα που ανακύπτουν από αυτή; Πρέπει να αποδέχονται την ευθύνη για τις συνέπειες της επιστημονικής έρευνας στον άνθρωπο και το περιβάλλον; Τα συγκεκριμένα ερωτήματα δεν είχαν τεθεί στο μακρινό παρελθόν, διότι αυτού του είδους οι συνέπειες ήταν ελάχιστες. Τότε, η επιστήμη δεν έπαιζε κανένα ρόλο στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων ή στην ασφάλεια των κρατών. Το μοναδικό κίνητρο της επιστημονικής αναζήτησης ήταν η περιέργεια —το ίδιο ερέθισμα που δραστηριοποιεί τους επιστήμονες και σήμερα— χωρίς κανέναν φανερό πρακτικό στόχο.

Η απομάκρυνση των επιστημόνων από τις καθολικού ενδιαφέροντος ανθρώπινες υποθέσεις τούς οδήγησε στην κατασκευή ενός τείχους απομόνωσης πίσω από το οποίο βρήκαν καταφύγιο, προσποιούμενοι ότι η εργασία τους δεν είχε οποιαδήποτε σχέση με την ανθρώπινη ευημερία. Ο στόχος της επιστημονικής έρευνας, διαβεβαίωναν, ήταν η κατανόηση των νόμων της φύσης. Εφ' όσον αυτοί είναι αμετάβλητοι και ανεπηρέαστοι από τις αντιδράσεις και τα συναισθήματα των ανθρώπων, οι αντιδράσεις και τα συναισθήματά τους δεν έχουν θέση στη μελέτη της φύσης.

Εξαιτίας αυτού του αποκλεισμού, οι φυσικοί επιστήμονες ανέπτυξαν διάφορες αντιλήψεις και αρχές περί της επιστήμης με στόχο να δικαιολογήσουν το διαχωρισμό από την πραγματικότητα. Σε αυτές περιλαμβάνονται απόψεις όπως: «η επιστήμη για χάρη και μόνο της επιστήμης», «η επιστημονική αναζήτηση δεν γνωρίζει όρια», «η επιστήμη είναι ορθολογική και αντικειμενική», «η επιστήμη είναι ουδέτερη», «η επιστήμη ουδεμία σχέση έχει με την πολιτική», «οι επιστήμονες είναι απλώς εξειδικευμένοι εργάτες» και «δεν πρέπει να κατηγορούμε την επιστήμη για τις κακές εφαρμογές της». Ο John Ziman, επίτιμος καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μπρίστολ, ανέλυσε όλα αυτά τα αξιώματα και βρήκε ότι κανένα δεν ισχύει στον σύγχρονο κόσμο.

Τούτη η νοοτροπία απομόνωσης ήταν ίσως ανεκτή στο παρελθόν, τότε που τα επιστημονικά ευρήματα διαχωρίζονταν σαφώς από τις πρακτικές τους εφαρμογές στο χρόνο και το χώρο. Έπειτα από μια ανακάλυψη απαιτούνταν δεκαετίες για να βρεθεί μια εφαρμογή της, και αυτή πάλι θα την αναλάμβαναν άλλοι, κυρίως μηχανικοί των πολυτεχνικών σχολών ή των βιομηχανικών εργαστηρίων. Στις μέρες μας, είναι εξαιρετικά δύσκολο να διακρίνουμε τη διαφορά μεταξύ καθαρής και εφαρμοσμένης έρευνας. Οι πρακτικές εφαρμογές ακολουθούν κατά πόδας τις επιστημονικές ανακαλύψεις και διεκπεραιώνονται από τους ίδιους ανθρώπους. Πράγματι, οι ερευνητές στις πανεπιστημιακές έδρες παροτρύνονται στην εφαρμοσμένη έρευνα για να εξασφαλίσουν οικονομική αυτάρκεια.

Η τρομακτική πρόοδος της καθαρής επιστήμης κατά τον 20ό αιώνα —ειδικά της φυσικής κατά το πρώτο μισό του αιώνα και της βιολογίας κατά το δεύτερο— έχουν αλλάξει παντελώς τη σχέση μεταξύ επιστήμης και κοινωνίας. Η επιστήμη έχει καταστεί κυρίαρχο στοιχείο της ζωής μας. Προσέφερε τεράστια βελτίωση στην ποιότητα της ζωής, αλλά δημιούργησε και σοβαρότατους κινδύνους. Σε αυτούς περιλαμβάνονται η μόλυνση του περιβάλλοντος, η σπατάλη των ζωτικών πόρων, η αύξηση μεταδοτικών ασθενειών και, πάνω απ' όλα, η απειλή για την ίδια την ύπαρξη του ανθρώπινου είδους λόγω της ανάπτυξης όπλων μαζικής καταστροφής. Οι φυσικοί επιστήμονες δεν είναι δυνατόν πλέον να υποστηρίζουν ότι η εργασία τους δεν έχει καμία σχέση με την ευμάρεια των ατόμων ή την κρατική πολιτική. Παραδόξως, πολλοί είναι αυτοί που επιμένουν σε τέτοιους ισχυρισμούς· πολλοί εμμένουν στη νοοτροπία της απομόνωσης, υπερασπιζόμενοι για την επιστήμη μια πολιτική «ελεύθερης αγοράς». Η λογική τους στηρίζεται κυρίως στη διάκριση μεταξύ καθαρής και εφαρμοσμένης έρευνας. Υποστηρίζουν ότι επιβλαβείς μπορεί να είναι μόνο οι εφαρμογές· οι περί την καθαρή επιστήμη έχουν μοναδική υποχρέωση να δημοσιοποιούν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους. Το τι θα πράξουν οι «άλλοι» με αυτά, είναι δική τους δουλειά, όχι των επιστημόνων.

Ωστόσο, όπως έχει διαπιστωθεί, η διάκριση μεταξύ καθαρής και εφαρμοσμένης έρευνας είναι, σε μεγάλο βαθμό, ανύπαρκτη. Η υιοθέτηση αμοραλιστικής στάσης από τους επιστήμονες είναι απαράδεκτη. Κατά τη δική μου γνώμη, αποτελεί *ανήθικη στάση*, διότι αποφεύγει να δεχτεί την προσωπική ευθύνη για τις πιθανές συνέπειες των πράξεών μας.

Είμαστε πολίτες μιας παγκόσμιας κοινότητας, με όλο και μεγαλύτερη αλληλεξάρτηση —αλληλεξάρτηση οφειλόμενη κυρίως στις τεχνολογικές προόδους που δημιουργεί η επιστημονική έρευνα. Μια αλληλεξαρτώμενη κοινότητα προσφέρει σημαντικά οφέλη στα μέλη της· αλλά, για τον ίδιο λόγο, τα φέρνει αντιμέτωπα με τις μεγάλες ευθύνες τους. Κάθε πολίτης είναι υπόλογος για τα έργα του. Όλοι έχουμε ευθύνη έναντι της κοινωνίας.

Η ευθύνη αυτή είναι βαρύτερη για τους επιστήμονες για το λόγο ακριβώς που αναφέραμε προηγουμένως: τον κυρίαρχο ρόλο που παίζει η επιστήμη στη σύγχρονη κοινωνία. Ο μαθηματικός Michael Atiyah, κάτοχος του μεταλλίου Φιλντς (1966) και σημερινός πρόεδρος των Συνδιασκέψεων της Pugwash* για την Επιστήμη και τις Παγκόσμιες Υποθέσεις, εξήγησε κατά τη διάλεξη Schrödinger του 1997 τους λόγους αυτής της ειδικής ευθύνης των επιστημόνων:

«Πρώτον, υπάρχει το ζήτημα της ηθικής ευθύνης. Αν δημιουργήσεις κάτι, πρέπει να ενδιαφερθείς για τις συνέπειες. Κάτι τέτοιο πρέπει να ισχύει για τις επιστημονικές ανακαλύψεις όπως ακριβώς ισχύει για τα παιδιά που φέρνουμε στον κόσμο.»

Ο Atiyah συνέχισε περιγράφοντας άλλους τέσσερις λόγους για τους οποίους οι φυσικοί επιστήμονες πρέπει να αναλάβουν την ευθύνη των συνεπειών της έρευνάς τους:

- Κατανοούν τα τεχνικά προβλήματα καλύτερα από τον μέσο πολιτικό ή πολίτη —και η γνώση συνοδεύεται από ευθύνη.
- Μπορούν να προσφέρουν τεχνικές συμβουλές και βοήθεια για την επίλυση των απρόοπτων προβλημάτων που ανακύπτουν.
- Μπορούν να προειδοποιήσουν για τους μελλοντικούς κινδύνους που ίσως προκύπτουν από μια τρέχουσα ανακάλυψη.
- Αποτελούν μια διεθνή αδελφότητα που υπερβαίνει τα φυσικά σύνορα κι έτσι είναι σε θέση να έχουν συνολική άποψη για τα συμφέροντα του ανθρώπινου γένους.

Και στη διάλεξη Schrödinger αλλά και στην ομιλία του ως προέδρου της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου, ο Atiyah τόνισε ότι οι επιστήμονες πρέπει να αναλάβουν την ευθύνη των έργων τους και για έναν ακόμη λόγο: τις συνέπειες μιας άσχημης δημόσιας εικόνας για την επιστήμη. Το κοινό θεωρεί τους επιστήμονες υπεύθυνους για τους κινδύνους που συνεπάγεται η επιστημονική πρόοδος: Τα πυρηνικά όπλα αποτελούν σοβαρή απειλή, και ορθώς κατηγορούνται οι επιστήμονες. Η κλωνοποίηση ανθρώπων είναι απεχθής και αντιμετωπίζεται ως ανήθικη· το αποτέλεσμα, η επιστήμη συνολικά δέχεται κατηγορίες εξαιτίας λίγων επιστημόνων που θέλουν να την αναπτύξουν.

Το κοινό έχει τη δυνατότητα, μέσω των εκλεγμένων κυβερνήσεών του, να ελέγξει την επιστήμη είτε σταματώντας τη χρηματοδότηση είτε θέτοντας περιοριστικούς όρους. Προφανώς, είναι προτιμότερο ο οποιοσδήποτε έλεγχος να ασκείται από τους ίδιους τους επιστήμονες.

Η επιστήμη πρέπει συνεχώς να μεριμνά για τη δημόσια εικόνα της, διότι έτσι εμπνέει σεβασμό για την ακεραιότητά της και κερδίζει την εμπιστοσύνη του κοινού στις εξαγγελίες και τους στόχους της. Οι επιστήμονες πρέπει με τη συμπεριφορά τους να αποδείξουν ότι μπορούν να συνδυάζουν τη δημιουργικότητα με την ευσπλαχνία, ότι τη στιγμή που αφήνουν ελεύθερη τη φαντασία τους εξακολουθούν να ενδιαφέρονται για τους συνανθρώπους τους, και ότι είναι πλήρως υπεύθυνοι για τις πράξεις τους όταν παλεύουν με το άγνωστο.

Για όλα τα παραπάνω πρέπει να ληφθούν συγκεκριμένα μέτρα. Το πρώτο είναι ένας ηθικός κώδικας για τη συμπεριφορά των επιστημόνων, ανάλογος με τον όρκο του Ιπποκράτη που δίνουν οι γιατροί. Ο ηθικός κώδικας για τη συμπεριφορά όσων ασκούν την ιατρική υπάρχει εδώ και δυόμισι σχεδόν χιλιάδες χρόνια. Στο παρελθόν, όπως και σήμερα, η ζωή του ασθενούς βρίσκεται κυριολεκτικά στα χέρια του γιατρού· και είναι απαραίτητο να εξασφαλιστεί ότι ο γιατρός χειρίζεται αυτή τη δύναμη υπεύθυνα, έχοντας ως πρώτιστο καθήκον τη φροντίδα του ασθενούς. Σήμερα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι φυσικοί επιστήμονες έχουν σχεδόν παρόμοιο ρόλο σε σχέση με το ανθρώπινο είδος. Είναι επομένως καιρός, όσοι αποκτούν επιστημονικό τίτλο να αρχίσουν να δίνουν κάποιο είδος όρκου ή υπόσχεσης. Αυτό θα είχε μια σημαντική συμβολική αξία, αλλά θα μπορούσε επίσης να αναπτύξει στους νέους επιστήμονες την

* Pugwash ονομαζόταν το χωριό της Νέας Σκωτίας όπου τον Ιούλιο του 1957 συνεκλήθη το πρώτο συνέδριο της κίνησης σε ανταπόκριση έκκλησης που απηύθυναν ο Bertrand Russel, ο Άλμπερτ Αϊνστάιν, ο Frédéric Joliot-Curie και άλλες εξέχουσες επιστημονικές φυσιογνωμίες για την τιθάσευση της κούρσας των εξοπλισμών και τον περιορισμό των οπλοστασίων των δύο αντίπαλων συνασπισμών. (Στη διάρκεια του Ψυχρού Πολέμου η κίνηση αποτέλεσε μία από τις ελάχιστες γραμμές ανοιχτής επικοινωνίας ανάμεσα στις ΗΠΑ και τη Σοβιετική Ένωση.) (Σ.τ.ε.)

επίγνωση και τον προβληματισμό για ευρύτερα ζητήματα.

Τέτοιοι όρκοι έχουν εισαχθεί σε μερικές διακηρύξεις (για παράδειγμα, τούτη του Ινστιτούτου για τις Κοινωνικές Καινοτομίες —ISI), και έχουν προταθεί διάφορες μορφές διατύπωσης, κατάλληλες για ποικίλες περιπτώσεις. Ο παρακάτω όρκος, ο οποίος έχει προταθεί από το φοιτητικό τμήμα της Αμερικανικής Ομάδας της Pugwash, θα ήταν κατάλληλος για την τελετή αποφοίτησης όλων των νέων επιστημόνων:

«Υπόσχομαι να εργαστώ για έναν καλύτερο κόσμο, όπου η επιστήμη και η τεχνολογία θα χρησιμοποιούνται με κοινωνικά υπεύθυνο τρόπο. Δεν θα χρησιμοποιήσω τις γνώσεις μου για οτιδήποτε έχει σκοπό να βλάψει τους ανθρώπους ή το περιβάλλον. Καθ' όλη τη σταδιοδρομία μου θα εξετάζω έγκαιρα τις ηθικές συνέπειες της επιστημονικής δράσης μου. Παρότι οι αξιώσεις της θέσης που θα κατέχω μπορεί να είναι πολύ μεγάλες, αποδέχομαι αυτή τη δήλωση, διότι αναγνωρίζω ότι η ατομική ευθύνη αποτελεί το πρώτο βήμα στο δρόμο για την ειρήνη.»

Αντιλαμβάνεστε ότι ένας τέτοιος όρκος δεν μπορεί να συμβιβαστεί με σταδιοδρομίες που σχετίζονται με χημικά, βιολογικά ή πυρηνικά όπλα.

Θα ήθελα να δω τα πανεπιστήμια σε όλο τον κόσμο να υιοθετούν την πρακτική μιας τέτοιας ορκωμοσίας κατά την αποφοίτηση των φοιτητών τους. Μια προϋπόθεση γι' αυτό θα ήταν η εισαγωγή στην πανεπιστημιακή ύλη μαθημάτων σχετικών με τις ηθικές πλευρές της επιστήμης.

Ενώ λοιπόν είναι ιδιαίτερα σημαντικό να κατανοήσουν την κοινωνική τους ευθύνη όσοι ξεκινούν την επιστημονική τους σταδιοδρομία, είναι εξίσου σημαντικό να έχουν συνείδηση αυτών των ευθυνών και οι παλιότεροι επιστήμονες. Γι' αυτό το λόγο προτείνω οι εθνικές ακαδημίες επιστημών (ή τα αντίστοιχα ιδρύματα στις χώρες όπου δεν υπάρχουν ακαδημίες) να συμπεριλάβουν ρητώς ηθικά ζητήματα στον καθορισμό των αρμοδιοτήτων τους). Τα καταστατικά ορισμένων ακαδημιών ήδη περιλαμβάνουν άρθρα που τους επιτρέπουν να ασχοληθούν με τις κοινωνικές συνέπειες της επιστημονικής έρευνας. Θα ήθελα όμως αυτά τα άρθρα να γίνουν υποχρεωτικά. Θα επιθυμούσα όλες οι εθνικές ακαδημίες να δηλώνουν ρητά ότι τα ηθικά ζητήματα αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του επιστημονικού έργου.

Ως συνέπεια αυτής της γενικής δέσμευσης, προτείνω να αναλάβουν οι ακαδημίες ένα συγκεκριμένο καθήκον: την ίδρυση επιτροπών δεοντολογίας —άλλη μία πρακτική που εφαρμόζεται στην ιατρική. Σε πολλές χώρες τα ερευνητικά προγράμματα που αφορούν ασθένειες πρέπει να εγκρίνονται από επιτροπές δεοντολογίας της πολιτείας ή του νοσοκομείου προκειμένου να εξασφαλισθεί ότι η έρευνα δεν θα θέσει σε κίνδυνο την υγεία του ασθενούς. Θα επιθυμούσα να επεκταθεί αυτή η πρακτική στην ερευνητική εργασία γενικότερα, αρχίζοντας από τη γενετική μηχανική.

Εκτός από τις ακαδημίες επιστημών, σημαντικό ρόλο μπορούν να παίξουν και άλλοι, ανεξάρτητοι οργανισμοί οι οποίοι ενδιαφέρονται ειδικά για τα ηθικά ζητήματα που προκύπτουν από την επιστημονική έρευνα και τις εφαρμογές της. Αυτοί οι οργανισμοί μπορούν να αναπτύξουν δραστηριότητες τις οποίες οι ακαδημίες αδυνατούν να διεξέλθουν, είτε εξαιτίας καταστατικών περιορισμών είτε επειδή είναι, επισήμως ή εμμέσως, κυβερνητικοί οργανισμοί.

Υπάρχουν πολλοί τέτοιοι ανεξάρτητοι οργανισμοί επιστημόνων, αυτός όμως που γνωρίζω καλύτερα είναι η κίνηση Pugwash, η οποία αυτοπροσδιορίζεται ως η «συνείδηση των επιστημόνων» και περιγράφει το ρόλο της ως εξής:

«Η κίνηση Pugwash είναι η έκφραση της επίγνωσης του κοινωνικού και ηθικού καθήκοντος των φυσικών επιστημόνων να βοηθήσουν στην αποτροπή και το ξεπέρασμα των πραγματικών και δυνητικών επιζήμιων αποτελεσμάτων των επιστημονικών και τεχνολογικών ανακαλύψεων και να προωθήσουν τη χρήση της επιστήμης και της τεχνολογίας για ειρηνικούς σκοπούς.»

Στα 42 χρόνια της ύπαρξής της, η κίνηση Pugwash έχει συγκεντρώσει, απ' όλο τον κόσμο, επιστήμονες, διανοούμενους και ανθρώπους με εμπειρία σε κυβερνητικά, διπλωματικά και στρατιωτικά ζητήματα. Σκοπός της είναι η μείωση του κινδύνου ένοπλης σύγκρουσης και η εύρεση συνεργατικών λύσεων σε παγκόσμια προβλήματα που άπτονται της επιστήμης και των διεθνών υποθέσεων.

Η κοινωνική συνείδηση των επιστημόνων της κίνησης Pugwash βρήκε την κύρια έκφρασή της στην ενασχόληση με τη βασική απειλή που προήλθε από την επιστημονική έρευνα: την ανάπτυξη των πυρηνικών όπλων. Για πολλά χρόνια, το κύριο καθήκον της ήταν να εμποδίσει τη μετατροπή του Ψυχρού Πολέμου σε θερμό —κάτι που θα οδηγούσε στην καταστροφή του πολιτισμού μας και πιθανόν του ανθρώπινου είδους. Οι προσπάθειες της κίνησης επικεντρώθηκαν σε μέτρα που θα σταματούσαν την κούρσα των πυρηνικών εξοπλισμών μέσω συμφωνιών περιορισμένης σημασίας, όπως η Συνθήκη μερικής απαγόρευσης των πυρηνικών δοκιμών (1963), η Συνθήκη για τους αντιβαλλιστικούς πυραύλους (1972) και η Συνθήκη για τα πυρηνικά όπλα μέσου βεληνεκούς (1987).

Όταν ο Ψυχρός Πόλεμος τερματίστηκε, η κίνηση Pugwash έστρεψε το ενδιαφέρον της στον κύριο στόχο —την πλήρη εξάλειψη των πυρηνικών όπλων. Οι δημοσιεύσεις που προέκυψαν από αυτή την προσπάθεια είχαν ως συνέπεια να καταστεί αντικείμενο σοβαρής μελέτης το ζήτημα του απαλλαγμένου από πυρηνικά όπλα πλανήτη μας. Άμεσο αποτέλεσμα υπήρξε η ίδρυση της Επιτροπής της Καμπέρα: η αναφορά της επιτροπής, η οποία δημοσιεύτηκε το 1996, αποτελεί το πλέον εύγλωττο επιχείρημα υπέρ της ιδέας της πυρηνικής αποτροπής.

Μπορεί να συμβάλει άμεσα η επιστημονική κοινότητα στην εξάλειψη των πυρηνικών και λοιπών όπλων μαζικής καταστροφής; Νομίζω ότι θα το είχε πράξει ήδη αν πρόσεχε τις εκκλήσεις του νομπελίστα φυσικού Hans Bethe πριν από λίγα χρόνια:

«Εισερχόμαστε σε μιαν εποχή αφοπλισμού και απόσυρσης των πυρηνικών όπλων. Ωστόσο, μερικές χώρες συνεχίζουν να αναπτύσσουν πυρηνικά όπλα. Είναι αβέβαιο αν, και πότε, θα συμφωνήσουν τα έθνη να σταματήσει τούτο το επικίνδυνο παιχνίδι. Όμως, οι μεμονωμένοι επιστήμονες μπορούν να επηρεάσουν αυτή τη διαδικασία αρνούμενοι να συμπράξουν. Γι' αυτό το λόγο, ζητώ από τους επιστήμονες όλων των χωρών να απέχουν από κάθε εργασία δημιουργίας, ανάπτυξης, βελτίωσης και παραγωγής πυρηνικών όπλων, καθώς και οποιουδήποτε άλλου όπλου με δυνατότητες μαζικής καταστροφής, όπως τα χημικά ή τα βιολογικά όπλα.»

Η εξάλειψη των πυρηνικών όπλων θα απομάκρυνε τον άμεσο κίνδυνο για το ανθρώπινο είδος, αλλά δεν εγγυάται την ασφάλεια μακροπρόθεσμα. Τα πυρηνικά όπλα δεν μπορεί να «αποεφευρεθούν»· δεν γίνεται να σβήσουμε απ' τη μνήμη μας τη γνώση της κατασκευής τους. Αν υπάρξει στο μέλλον μια σοβαρή σύγκρουση μεταξύ μεγάλων δυνάμεων, τα πυρηνικά οπλοστάσια θα αναδυθούν και θα επιστρέψουμε στο κλίμα του Ψυχρού Πολέμου. Συνεπώς, θα πρέπει εντέλει να ασχοληθούμε με τη φαινομενικά ουτοπική ιδέα ενός κόσμου χωρίς πόλεμο.

«Η εξάλειψη των αιτιών του πολέμου» θα είναι το θέμα της επόμενης ετήσιας συνδιάσκεψης της Pugwash που θα διεξαχθεί στο Queen's College του Πανεπιστημίου του Καίμπριτζ τον Αύγουστο του 2000. Και αυτό αποτελεί πραγματικά ένα καθήκον για τον νέο αιώνα.

—*Joseph Rotblat*

Ο **Joseph Rotblat** *είναι, από το 1988, επίτιμος πρόεδρος των Συνδιασκέψεων της Pugwash για την Επιστήμη και τις Διεθνείς Υποθέσεις. Το 1995 απονεμήθηκε από κοινού σε αυτόν και την κίνηση Pugwash το βραβείο Νόμπελ για την ειρήνη, σε αναγνώριση των υπηρεσιών που προσέφεραν στην ανθρωπότητα.*

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 12.000 δρχ. για ιδιώτες, 21.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.

Ελάχιστες επιφάνειες

Και η γεωμετρία της σαπουνόφουσκας

A. Fomenko

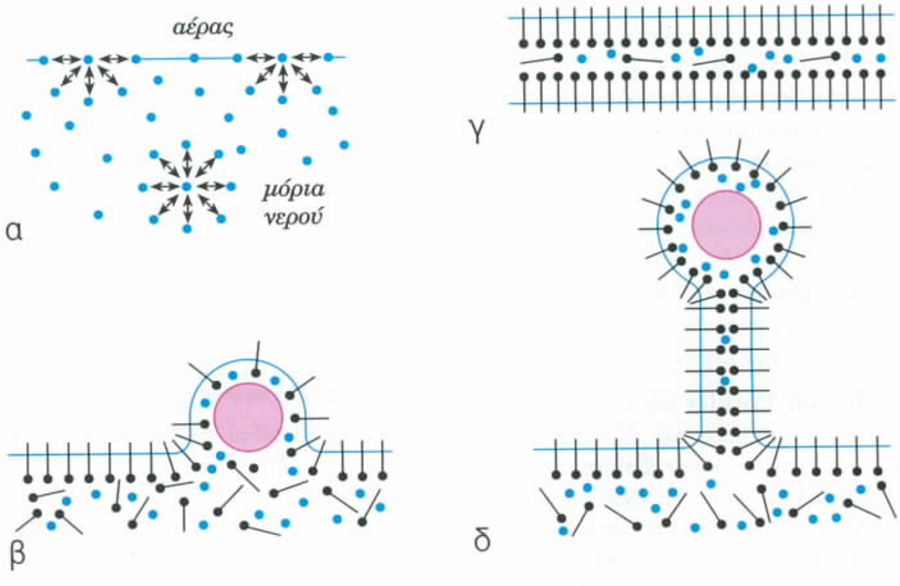
ΟΤΑΝ Ο ΒΕΛΓΟΣ ΦΥΣΙΚΟΣ JOSEph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883) άρχισε να πειραματίζεται με τη μορφή των υμενίων διαλυμάτων σαπουνιού, δεν θα μπορούσε να φανταστεί ότι αυτή η εργασία αποτέλεσε την απαρχή μιας νέας κατεύθυνσης στην επιστημονική έρευνα, η ανάπτυξη της οποίας συνεχίζεται έντονα μέχρι τις μέρες μας και είναι πλέον γνωστή ως «πρόβλημα Plateau». Οι περισσότεροι είμαστε εξοικειωμένοι με τα πειράματα του Plateau από την παιδική μας ηλικία: σε όλα τα παιδιά αρέσει να φτιάχνουν σαπουνόφουσκες και να τις βλέπουν να πετούν ανάλαφρα ή να κατασκευάζουν υμένια σαπουνοδιαλύματος τεντωμένα σε ένα συρμάτινο δαχτυλίδι.

Ιδού μερικές συμβουλές για όσους θέλουν να φτιάξουν όμορφα υμένια σαπουνοδιαλύματος. Θα χρειαστείτε ένα κομμάτι λεπτό, εύκαμπτο σύρμα, υγρό σαπούνι πιάτων, ένα ποτήρι ζεστό νερό και λίγη γλυκερίνη (η τελευταία δεν είναι απαραίτητη, αλλά όταν το μείγμα περιέχει γλυκερίνη τα υμένια είναι περισσότερο σταθερά). Διαλύστε το σαπούνι στο νερό και μετά προσθέστε τη γλυκερίνη. Με το σύρμα φτιάξτε ένα δαχτυλίδι με λαβή· βυθίστε το στο διάλυμα και στη συνέχεια τραβήξτε το προσεκτικά έξω. Θα διαπιστώσετε ότι στο εσωτερικό του θα σχηματιστεί ένα εντυπωσιακό ιριδίζον υμένιο.

Αν αλλάξετε τη μορφή του δαχτυλιδιού, θα αλλάξει και το σχήμα του υμενίου. Το μέγεθος του υμενίου μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο, αλλά όσο μεγαλύτερο είναι τόσο γρηγορότερα σπάει εξαιτίας του βάρους του. Από την άλλη, αν το δαχτυλίδι είναι μικρό, τότε κατά τη μελέτη των υμενίων μπορούμε να αγνοήσουμε τη δύναμη της βαρύτητας —και στη συνέχεια του άρθρου θα πράξουμε ακριβώς αυτό.

Πώς σχηματίζεται ένα υμένιο σαπουνοδιαλύματος;

Ας εξετάσουμε με ποιον τρόπο αλλάζουν οι ιδιότητες του επιφανειακού στρώματος του υγρού όταν προσθέτουμε το σαπούνι. Στο Σχήμα 1α παρουσιάζεται η συνοριακή περιοχή μεταξύ δύο μέσων —του νερού και του αέρα. Τα βέλη υποδηλώνουν τις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων του νερού (διαμοριακές δυνάμεις, ή δυνάμεις van der Waals), τα οποία είναι *πολικά*. Πολικό μόριο θεωρείται αυτό που παρουσιάζει ασύμμετρη κατανομή των ηλεκτρικών φορτίων του. Οι εν λόγω δυνάμεις ευθύνονται για την επιφανειακή τάση που αναπτύσσεται στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Αντίθετα με τα μόρια του νερού, τα μόρια του σαπουνιού αποτελούνται από επιμήκεις, λεπτές, μη πολικές υδρογοναν-



Σχήμα 1

θρακικές αλυσίδες, με μια πολική ομάδα ατόμων (–COONa) στο ένα άκρο κάθε αλυσίδας. Όταν τα μόρια του σαπουνιού προστεθούν στο νερό, έχουν την τάση να έρθουν στην επιφάνεια και να την καλύψουν με ένα ομοιόμορφο στρώμα, με το μη πολικό άκρο του μορίου να κατευθύνεται προς τα πάνω (Σχήμα 1β). Έτσι, τα μόρια του σαπουνιού ωθούν προς τα κάτω τα μόρια του νερού μειώνοντας τις δυνάμεις van der Waals. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το επιφανειακό υμένιο να γίνεται ελαστικότερο· και αυτή η ελαστικότητα επιτρέπει το σχηματισμό του υμενίου όταν βυθίζουμε και στη συνέχεια τραβάμε το συρμάτινο δαχτυλίδι.

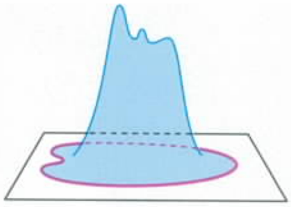
Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται και μια εγκάρσια τομή του σύρματος. Όταν το σύρμα φτάνει στην επιφάνεια, αυτή «φουσκώνει» και το καλύπτει. Τούτο συμβαίνει επειδή προς στιγμήν το πλήθος των μορίων σαπουνιού γύρω από το σύρμα μειώνεται (Σχήμα 1β). Έτσι, όμως, η επιφανειακή τάση, η οποία εξαρτάται από το πλήθος των μορίων νερού στο επιφανειακό στρώμα, αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να γίνεται περισσότερο εύκαμπτη η περιοχή της επιφάνειας γύρω από το σύρμα, και τούτο με τη σειρά του προκαλεί το σχηματισμό του υμενίου σαπουνοδιαλύματος καθώς βγάζουμε το δαχτυλίδι από το νερό.

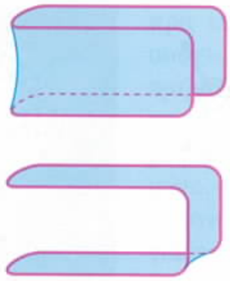
Είναι επίσης προφανές ότι το πάχος του υμενίου που περικλείεται από το δαχτυλίδι δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το άθροισμα του μήκους δύο μορίων σαπουνιού (Σχήμα 1γ). Ο τρόπος σχηματισμού του υμενίου σαπουνοδιαλύματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 1δ. Καθώς απομακρύνουμε το δαχτυλίδι από το νερό, το εύκαμπτο υμένιο καλύπτει το δαχτυλίδι και παρασύρεται μαζί του. Η δύναμη της βαρύτητας περιορίζει το μέγεθος της επιφάνειας, οπότε, όταν το δαχτυλίδι απομακρυνθεί αρκετά από το υγρό, το υμένιο σπάει.

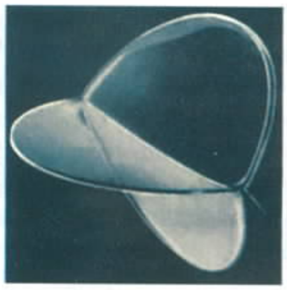
Το μοντέλο των ελάχιστων επιφανειών

Η φυσική αρχή στην οποία στηρίζεται ο σχηματισμός των υμενίων σαπουνοδιαλύματος είναι πολύ απλή. Ένα φυσικό σύστημα δεν αλλάζει το σχήμα του εκτός και αν μπορεί να πάρει εύκολα άλλο σχήμα με μικρότερη δυναμική ενέργεια. Η ενέργεια της επιφάνειας σαπουνοδιαλύματος περιγράφεται συχνά συναρτήσει της επιφανειακής τάσης του υγρού. Εξαρτάται από τις ελκτικές διαμοριακές δυνάμεις και από το γεγονός ότι στο σύνορο της επιφάνειας αυτές οι δυνάμεις δεν εξουδετερώνονται. Από αυτό το γεγονός προκύπτει το εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα: το υγρό υμένιο μετατρέπεται σε ελαστική επιφάνεια που τείνει να ελαχιστοποιήσει το εμβαδόν της, οπότε και να ελαχιστοποιήσει τη δυναμική ενέργειά της ανά μονάδα εμβαδού. Στην τρέχουσα συζήτησή μας αγνοούμε τη δύναμη της βαρύτητας και την ατμοσφαιρική πίεση.

Για τους παραπάνω λόγους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως μοντέλο του υμενίου σαπουνοδιαλύματος μια λεία επιφάνεια ελάχιστου εμβαδού η οποία περικλείεται στο περίγραμμα του σύρματος. Στα μαθηματικά αυτή ονομάζεται *ελάχιστη επιφάνεια*. Η κλασική θεωρία τέτοιων επιφανειών αποτελεί μέρος του *λογισμού των μεταβολών*. Ο συγκεκριμένος κλάδος της μαθηματικής ανάλυσης εμφανίστηκε τον 18ο αιώνα. Σήμερα, αυτή η θεωρία χρησιμοποιεί τις πιο σύγχρονες μεθόδους της τοπολογίας και της διαφορικής γεωμετρίας. Αν και δεν είναι δυνατόν να εξηγήσουμε λεπτομερώς τη θεωρία χρησιμοποιώντας μόνο τα εργαλεία των στοιχειωδών μαθηματικών, πολλά από τα αποτελέσματά της μπορούν να παρουσιαστούν μέσω παραδειγμάτων και να επαληθευθούν πειραματικά. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ανακύπτουν μερικά κομψά γεωμετρικά προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με απλά μαθηματικά.


Σχήμα 2


Σχήμα 3

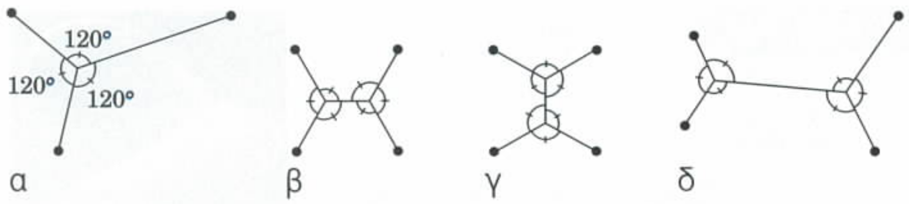

Σχήμα 4

Απλά περιγράμματα

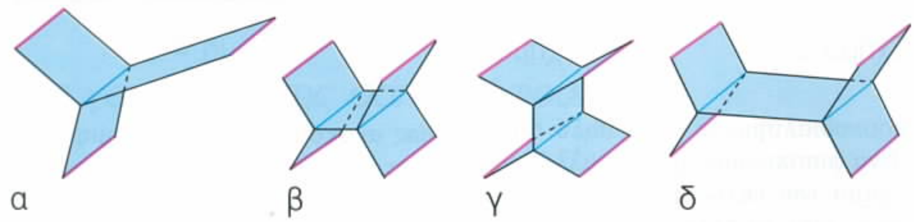
Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση κατά την οποία το περίγραμμα του σύρματος δεν είναι πολύ παραμορφωμένο και κανένα σημείο του δεν βρίσκεται «πάνω» από κάποιο άλλο. Πιο συγκεκριμένα, με αυτό εννοούμε ότι μπορούμε να βρούμε ένα επίπεδο τέτοιο ώστε η προβολή του περιγράμματος πάνω του να είναι κυρτή και κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων του περιγράμματος να προβάλλεται σε διαφορετικά σημεία του επιπέδου. Σε τούτη την περίπτωση, ένα δύσκολο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει μία μοναδική ελάχιστη επιφάνεια που παράγεται από το συγκεκριμένο περίγραμμα. Αν το περίγραμμα είναι επίπεδο, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της ελάχιστης επιφάνειας μοιάζει προφανής: το περίγραμμα φράσσει μια περιοχή του επιπέδου, και είναι φανερό (Σχήμα 2) ότι κάθε άλλη επιφάνεια που παράγεται από αυτό έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από την επίπεδη.

Διαφορετικά υμένια από το ίδιο περίγραμμα

Αν σχηματίσουμε με το σύρμα περιγράμματα πιο περίπλοκα από τα προηγούμενα, το θεώρημα της μοναδικότητας παύει να ισχύει. Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα αυτής της περίπτωσης, το οποίο μπορεί να επαληθευθεί πειραματικά. Παρατηρήστε ότι δεν είναι δυνατόν να προβάλλουμε «όμορφα» το περίγραμμα του Σχήματος 3 σε κάποιο επίπεδο: για κάθε προβολή (σε



Σχήμα 5



Σχήμα 6

οποιοδήποτε επίπεδο) υπάρχουν ζεύγη σημείων ή και ολόκληρα ευθύγραμμα τμήματα που προβάλλονται σε ένα μόνο σημείο.

Πρόβλημα 1. Σχεδιάστε άλλα περιγράμματα που παράγουν διαφορετικές ελάχιστες επιφάνειες. Είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από δύο τέτοιες επιφάνειες;

Αν το περίγραμμα που σχηματίζει το σύρμα συστρέφεται έντονα (για παράδειγμα, αν σχηματίζει κόμβους), η μοναδικότητα της ελάχιστης επιφάνειας παύει να ισχύει, και η δομή της ελάχιστης επιφάνειας μπορεί να γίνει εξαιρετικά πολύπλοκη. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να αναπτυχθούν *σημεία ανωμαλίας* —σημεία κοντά στα οποία η μορφή της επιφάνειας είναι τέτοια ώστε να μην προκύπτει από το δίπλωμα ενός απλού δίσκου, αλλά να περιέχει κλάδους. Με τη βοήθεια των υμενίων σαπουνοδιαλύματος μπορούμε να κατασκευάσουμε μοντέλα τέτοιων επιφανειών, ξεκινώντας από ένα συρμάτινο περίγραμμα που και το ίδιο περιέχει κλάδους.

Διακλαδιζόμενα περιγράμματα

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται ένα απλό περίγραμμα τέτοιου τύπου. Η ελάχιστη επιφάνεια που παράγεται από αυτό το περίγραμμα περιέχει ολόκληρο ευθύγραμμο τμήμα που αποτελείται από σημεία ανωμαλίας. Η επιφάνεια διακλαδίζεται απ' αυτό το τμήμα και δημιουργεί τρία επίπεδα φύλλα τα οποία σχηματίζουν γωνίες 120°. Μπορούμε να διαλευκάνουμε τους παράγοντες που ευθύνονται γι' αυτό το φαινόμενο λύνοντας το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2. (i) Συνδέστε τρία σημεία με ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών τους να είναι ελάχιστο. Λύστε το ίδιο πρόβλημα: (ii) για τις κορυφές ενός τετραγώνου, (iii) για τις κορυφές ενός τυχαίου τετραπλεύρου.

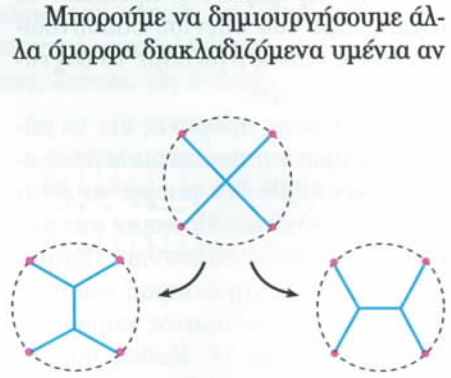
Οι απαντήσεις σε αυτό το πρόβλημα δίνονται στο Σχήμα 5, και τα τμήματα των αντίστοιχων ελάχιστων επιφανειών παρουσιάζονται στο Σχήμα 6. Παρατηρούμε ότι όλες οι γωνίες ισούνται με 120° και ότι στο (ii) υπάρχουν δύο δυνατές απαντήσεις (δείτε τα Σχήματα 5β και 5γ).

Είναι ενδιαφέρον ότι δεν υπάρχει ελάχιστο υμένιο στο οποίο τέμνονται επί του ιδίου ευθύγραμμου τμήματος περισσότερες από τρεις επίπεδες περιοχές. Αυτό το γεγονός εξηγείται με απλά γεωμετρικά επιχειρήματα. Ας υποθέσουμε ότι τέσσερις επίπεδες περιοχές οι οποίες αποτελούν μέρος μιας ελάχιστης επιφάνειας τέμνονται κατά μήκος κάποιου ευθύγραμμου τμήματος. Προβάλλουμε την επιφάνεια σε επίπεδο κάθετο σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα (Σχήμα 7). Θέλουμε να επιβεβαιώσουμε ότι το άθροισμα των τμημάτων που αποτελούν προβολές των επίπεδων περιοχών είναι ελάχιστο. Αντίθετα, όμως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το σημείο τομής των τεσσάρων τμημάτων με δύο σημεία στα οποία τέμνονται τρία τμήματα (Σχήμα 7), και από το Πρόβλημα 2 γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των μηκών τους θα είναι μικρότερο.

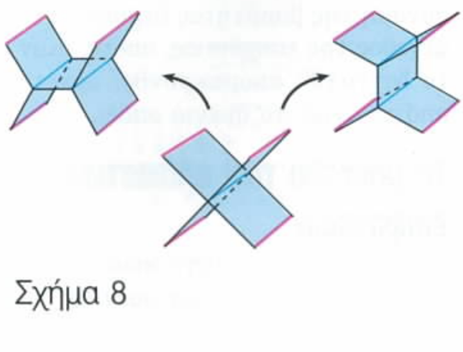
Η τρισδιάστατη κατάσταση που αντιστοιχεί στους προηγούμενους συλλογισμούς παρουσιάζεται στο Σχήμα 8. Ας τη μελετήσουμε λίγο βαθύτερα. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι αν χωρίσουμε την τομή των τεσσάρων επίπεδων περιοχών σε δύο τομές τριών επίπεδων περιοχών, θα μειώσουμε το συνολικό εμβαδόν. Η ελάχιστη επιφάνεια βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία: μικρές διαταράξεις του υμενίου μπορούν μόνο να αυξήσουν το εμβαδόν του. Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε κάθε σημείο του υμενίου είναι μηδέν. Για τα σημεία ανωμαλίας, όπου συγκλίνουν τα τρία επίπεδα, αυτή η παρατήρηση σημαίνει ότι η συνισταμένη των τριών δυνάμεων που δρουν πάνω στις διευθύνσεις αυτών των επιπέδων πρέπει να είναι μηδέν. Έπεται ότι η γωνία μεταξύ των συγκλινόντων επιπέδων είναι 120°.

Πρόβλημα 3. Σχεδιάστε μια πολυγωνική γραμμή ελάχιστου μήκους που συνδέει τις πέντε κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου. Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν;

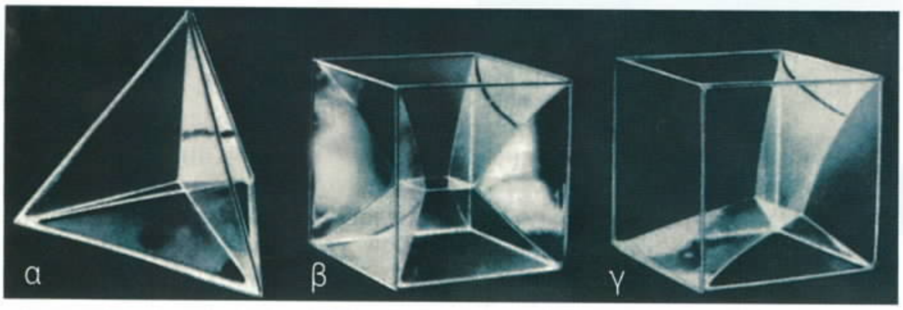
Μπορούμε να δημιουργήσουμε άλλα όμορφα διακλαδιζόμενα υμένια αν



Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9

χρησιμοποιήσουμε ένα τετράεδρο ή ένα κυβικό πλαίσιο (Σχήμα 9). Παρατηρήστε τα σημεία ανωμαλίας στα οποία συγκλίνουν διάφορες έδρες.

Πρόβλημα 4. (i) Βρείτε όλες τις γωνίες μεταξύ των επιπέδων ελάχιστης επιφάνειας που παράγονται από τις ακμές ενός κανονικού τετραέδρου και ενός κύβου (Σχήματα 9α και 9β). Βρείτε το μήκος x της πλευράς του κεντρικού τετραγώνου για την ελάχιστη επιφάνεια που παράγεται από τις πλευρές ενός κύβου (Σχήμα 9β).

Πρόβλημα 5*. Μπορεί τρεις καμπύλες σημείων ανωμαλίας να συγκλίνουν σε ένα σημείο ανωμαλίας μιας ελάχιστης επιφάνειας; Τι μπορούμε να πούμε για την περίπτωση πέντε καμπύλων σημείων ανωμαλίας;

Ανοικτά και πολλαπλά περιγράμματα

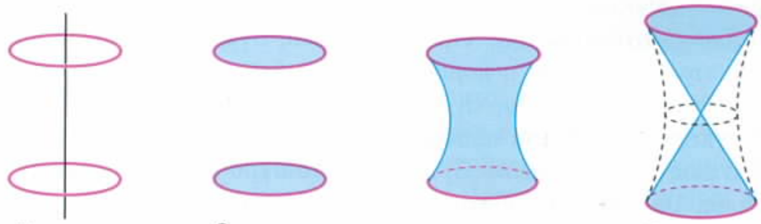
Η αλληλεπίδραση μιας επιφάνειας με το συνοριακό της περίγραμμα αποτελεί πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της επιφάνειας. Διάφορες ειδικές περιπτώσεις αυτής της αλληλεπίδρασης μπορούν να μελετηθούν με τοπολογικές μεθόδους. Από τις φυσικές ιδιότητες μιας ελάχιστης επιφάνειας έπεται ότι δεν μπορεί να έχει τρύπες. Αν είχε, η επιφανειακή τάση θα διεύρυνε την τρύπα έως ότου ολόκληρο το υμένιο, ή τμήμα του, καταρρεύσει στη συνοριακή γραμμή. Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε πειραματικά αυτή την ιδιότητα: απλώς τρυπάμε γρήγορα το υμένιο με την άκρη ενός σύρματος. Σε μη στοιχειώδεις εργασίες, ο μαθηματικός ορισμός του συνόρου ενός υμενίου σαπουνοδιαλύματος βασίζεται στην παραπάνω ιδιότητα.

Αυτό είναι, φυσικά, ένα μαθηματικό μοντέλο που απλοποιεί την πραγματικότητα. Είναι γεγονός ότι υπάρχουν ευσταθείς ελάχιστες επιφάνειες που περιέχουν τρύπες, με την έννοια ότι «κρέμονται» από έναν συρμάτινο βρόχο αλλά αφήνουν κάποια μέρη του ελεύθερα (δείτε το Σχήμα 11α). Αυτό το φαινόμενο εξηγείται από το γεγονός ότι ένα πραγματικό σύρμα δεν έχει αμελητέο πάχος που μπορεί, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, να μετατρέψει σε ευσταθή μια μαθηματικώς ασταθή κατασκευή. Για να συμβεί αυτό, το σύρμα πρέπει να έχει αρκετό πάχος σε σύγκριση με το μέγεθος της ελάχιστης επιφάνειας.

Ένα άλλο παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 11β. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το περίγραμμα είναι μια ανοικτή καμπύλη, τα δύο άκρα της οποίας μπορούν να «ισιώσουν» ώστε να γίνουν ευθύγραμμα τμήματα. Μαθηματικώς είναι αδύνατο να υπάρξει ελάχιστη επιφάνεια παραγόμενη από ένα τμήμα εμφυτευμένο στις τρεις διαστάσεις που δεν αυτοτέμνεται. Αυτή η ανωμαλία εξηγείται από το γεγονός ότι το τμήμα δεν σχηματίζει βρόχο.

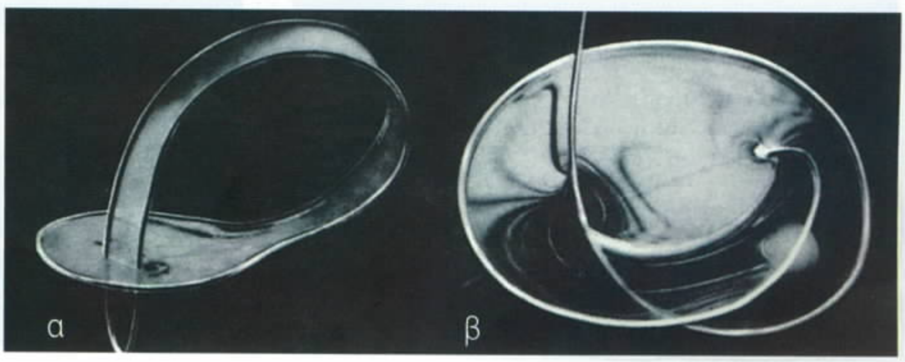
Ας εξετάσουμε τώρα τις ιδιότητες των ελάχιστων επιφανειών των οποίων τα σύνορα αποτελούνται από, ας πούμε, δύο κύκλους. Ας θεωρήσουμε ότι οι δύο κύκλοι ανήκουν σε δύο παράλληλα επίπεδα, κάθετα σε έναν κατακόρυφο άξονα, και ότι τα κέντρα τους ανήκουν στον άξονα (Σχήμα 10α). Αν οι κύκλοι απέχουν αρκετά μεταξύ τους, το ελάχιστο υμένιο συμπίπτει με τους δύο επίπεδους δίσκους που παράγονται από αυτούς τους κύκλους (Σχήμα 10β). Όμως, εάν οι κύκλοι πλησιάσουν μεταξύ τους, αρχίζει να εμφανίζεται μια διαφορετική ελάχιστη επιφάνεια. Αυτή η επιφάνεια, που καλείται *αλυσοειδές*, εκτείνεται μεταξύ των δύο κύκλων (Σχήμα 10γ).

Η συγκεκριμένη επιφάνεια διαθέτει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Για παράδειγμα, προκύπτει από την περιστροφή μιας αλυσοειδούς καμπύλης γύρω από τον άξονα συμμε-



α β γ δ

Σχήμα 10



Σχήμα 11

τρίας της. Για να κατασκευάσουμε αυτή την καμπύλη θεωρούμε δύο σημεία ενός οριζόντιου επιπέδου και συνδέουμε τα άκρα μιας βαριάς αλυσίδας με τα δύο αυτά σημεία. Αν αφήσουμε την αλυσίδα να κρέμεται ελεύθερα υπό τη δύναμη της βαρύτητας, το σχήμα που παίρνει ονομάζεται *αλυσοειδής*. Αν περιστρέψουμε αυτή την καμπύλη γύρω από τον άξονα συμμετρίας της, προκύπτει ένα αλυσοειδές, και αν το τοποθετήσουμε κατακόρυφα, έχουμε την ελάχιστη επιφάνεια του Σχήματος 10γ.

Επισημαίνουμε ότι η ελάχιστη επιφάνεια *δεν είναι* ένας κώνος με κορυφή στο κέντρο των αξόνων. Στο Σχήμα 10δ βλέπουμε πώς θα άλλαζε η μορφή ενός τέτοιου κώνου για να αποκτήσει μια θέση με ελάχιστο εμβαδόν (με την προϋπόθεση ότι οι οριακοί κύκλοι παραμένουν σταθεροί). Ο κώνος γίνεται τελικώς αλυσοειδές. Το φαινόμενο αυτό είναι ίδιο με την περίπτωση που ένα τετραπλό σημείο ανωμαλίας χωρίζεται σε δύο τριπλά σημεία ανωμαλίας. Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το Σχήμα 7 παρουσιάζει το μετασχηματισμό ενός «μονοδιάστατου κώνου», ο οποίος αποτελείται από δύο τεμνόμενα τμήματα σε μια περιπλοκότερη καμπύλη που έχει δύο τριπλά σημεία ανωμαλίας. Θεωρητικά, ένα παρόμοιο φαινόμενο συμβαίνει στην περίπτωση του δισδιάστατου κώνου. Όμως, σε τούτη την περίπτωση, η κορυφή μετασχηματίζεται σε κύκλο, τη στενότερη εγκάρσια τομή του αλυσοειδούς. Και στις δύο περιπτώσεις, η παραμόρφωση του υμενίου (ή της μονοδιάστατης καμπύλης) μειώνει το εμβαδόν του (ή το μήκος), και έχει ως αποτέλεσμα η επιφάνεια (ή η καμπύλη) να πάρουν μια θέση που δίνει το ελάχιστο εμβαδόν (ή μήκος).

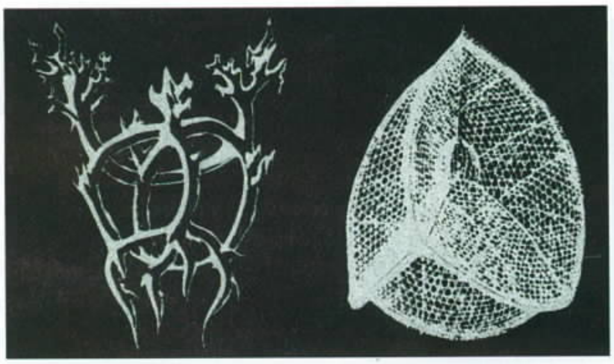
Και μια ματιά στη φύση

Αποδεικνύεται ότι οι ελάχιστες επιφάνειες είναι διαδεδομένες στη φύση διότι αποτελούν τον οικονομικότερο τρόπο σχηματισμού του σκελετού των ζωντανών οργανισμών. Το εντυπωσιακότερο παράδειγμα μας το προσφέρουν οι σκελετοί των *ακτινόζωων* (μικροσκοπικοί θαλάσσιοι οργανισμοί με διάφορα ιδιόμορφα σχήματα). Ο εγγλέζος ζωολόγος D'Arcy Thompson (1860-1948) ήταν ίσως ο πρώτος που παρατήρησε —όπως αναφέρει στο βιβλίο του *On Growth and Shape* (Περί ανάπτυξης και μορφής) — ότι η τριχοειδική δράση παίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό της μορφής αυτών των οργανισμών. Τα ακτινόζωα αποτελούνται από μικρές μάζες πρωτοπλάσματος και σχηματίζουν αφρώδεις μορφές που μοιάζουν με σαπουνόφουσκες ή υμένια. Το σχήμα αυτών των οργανισμών είναι αρκετά περίπλοκο και οι επιφάνειες ελάχιστου εμβαδού που παρουσιάζουν έχουν, γενικώς, πολλά σημεία διακλάδωσης και ακμές που εμφανίζονται εκεί όπου συγκεντρώνεται το κύριο μέρος της υγρής μάζας του οργανισμού. Μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε μια παρόμοια συγκέντρωση υγρού στα υμένια σαπουνοδιαλυμάτων: το υγρό ρέει πάνω στο υμένιο έως ότου συναντήσει μια ακμή όπου ενώνονται τρία επίπεδα. Εκεί το υγρό αυξάνει το πάχος του υμενίου και έτσι οι ακμές ανώμαλων σημείων της ελάχιστης επιφάνειας τονίζονται. Μια παρόμοια διαδικασία εμφανίζεται στα ακτινόζωα. Καθώς το υγρό συγκεντρώνεται στις διακλαδιζόμενες ακμές, επικάθονται σε αυτές στερεά υπολείμματα του θαλάσσιου νερού σχηματίζοντας σταδιακά έναν στερεό σκελετό. Μπορούμε να έχουμε μια εικόνα αυτού του σκελετού αν παρατηρήσουμε τις διακλαδιζόμενες ακμές στον αφρό του σαπουνιού —δηλαδή, τις κοινές ακμές των φυσαλίδων του αφρού. Αυτές συνθέτουν ένα περίπλοκο δίκτυο που αποτελεί τον «υγρό σκελετό» του αφρού. Όταν πεθαίνει ένας οργανισμός με τέτοιο σκελετό, εξαφανίζονται σταδιακά οι μαλακοί ιστοί και απομένει ο στερεός σκελετός, που έχει σχηματιστεί με τον παραπάνω τρόπο.

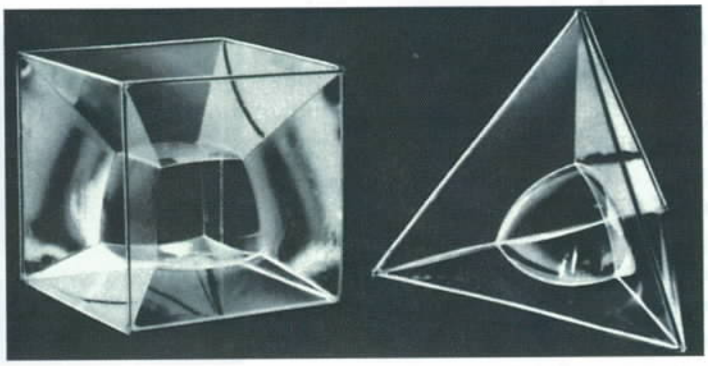
Στο Σχήμα 12 παρουσιάζονται δύο σκελετοί ακτινόζωων. Το Σχήμα 13 παρουσιάζει δύο ελάχιστες επιφάνειες που σχηματίστηκαν από σαπουνόφουσκες σε κυβικά και τετραεδρικά πλαίσια. Η ομοιότητα με το Σχήμα 12 είναι εντυπωσιακή.

Οι ελάχιστες επιφάνειες παίζουν σημαντικό ρόλο στη χημεία, όπου η αλληλεπίδραση στα σύνορα διαφορετικών μέσων ευθύνεται για τη φύση και την ταχύτητα πολλών χημικών αντιδράσεων. Γνωστές μεμβράνες, όπως αυτή του τυμπάνου του αφτιού, οι μεμβράνες που περιβάλλουν τα κύτταρα των έμβιων όντων ή οι μεμβράνες που διαχωρίζουν τα διαφορετικά όργανα, αποτελούν παραδείγματα ελάχιστων επιφανειών.

Όπως διαπιστώσαμε, πολλά ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα αφορούν ελάχιστες επιφάνειες. Η ορθή διατύπωση και ανάλυσή τους θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα αυτό το υπέροχο φαινόμενο.



Σχήμα 12



Σχήμα 13

Για να περνά η ώρα

Σ186

Τετράγωνη λογική. Ο αριθμός 11.111.112.222.222 – 3.333.333 είναι τέλειο τετράγωνο. Βρείτε την τετραγωνική του ρίζα.

Σ187

Ορθή προσέγγιση. Το ευθύγραμμο τμήμα MN είναι η προβολή επί την υποτείνουσα AB του εγγεγραμμένου κύκλου στο ορθογώνιο τρίγωνο ABC. Αποδείξτε ότι η γωνία MCN ισούται με 45°.

Σ188

Πρόβλημα ποτίσματος. Ένας κηπουρός γεμίζει με νερό δύο δοχεία χρησιμοποιώντας δύο λάστιχα. Η παροχή του νερού από το πρώτο λάστιχο είναι 2,9 λίτρα ανά λεπτό ενώ από το δεύτερο 8,7 λίτρα ανά λεπτό. Όταν το νερό φτάσει στη μέση του μικρότερου δοχείου, ο κηπουρός εναλλάσσει τα λάστιχα. Συνεχίζει να βάζει νερό στα δοχεία, οπότε αυτά γεμίζουν τελείως την ίδια στιγμή. Ποιος είναι ο όγκος του μεγαλύτερου δοχείου αν ο όγκος του μικρότερου είναι 12,6 λίτρα;

Σ189

Ανθρωποκυνηγητό. Δεκαέξι σπηλιές βρίσκονται στη σειρά, η μία μετά την άλλη. Ο σερίφης Μεγαλοφρύδης γνωρίζει ότι ένας ληστής, ο Φευγάτος Τζο, κρύβεται σε μία από τις σπηλιές. Ο σερίφης γνωρίζει επίσης ότι οι φίλοι του Φευγάτου Τζο τον έχουν συμβουλέψει να μετακινείται κάθε νύχτα στη διπλανή σπηλιά, είτε δεξιά είτε αριστερά. Ο σερίφης και οι βοηθοί του μπορούν να ερευνήσουν μόνο μία σπηλιά κάθε μέρα. Αν αρχίσουν να ερευνούν τις σπηλιές την πρώτη Μαΐου, θα συλλάβουν τον κακοποιό πριν το τέλος του Μαΐου;

Σ190

Πρόβλημα βρασμού. Τοποθετούμε μια μικρή χύτρα γεμάτη νερό μέσα σε μια μεγάλη χύτρα, επίσης γεμάτη νερό. Τοποθετούμε τη μεγάλη χύτρα στο μάτι μιας κουζίνας και την αφήνουμε έως ότου βράσει το νερό της. Θα βράσει και το νερό της μικρής χύτρας;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Σχέσεις εξ αποστάσεως

Πλατωνικοί έρωτες στον κόσμο των μορίων

G. Myakishev

Αν δεν αναπτυσσονταν ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων, όλη η ύλη θα βρισκόταν σε αέρια κατάσταση υπό οποιεσδήποτε συνθήκες. Το ότι τα μόρια μπορούν να συνδέονται μεταξύ τους και να σχηματίζουν υγρά και στερεά σώματα οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στις ελκτικές δυνάμεις.

Εντούτοις, οι ελκτικές δυνάμεις δεν αρκούν από μόνες τους για να παραχθούν ευσταθείς ατομικές και μοριακές δομές. Η ευστάθεια βασίζεται στην εξισορρόπηση των δυνάμεων, η οποία διασφαλίζεται χάρη στην ύπαρξη απωστικών δυνάμεων εξαιρετικά μικρής εμβέλειας μεταξύ ατόμων και μορίων.

Περί της υπάρξεως των διαμοριακών δυνάμεων ουδεμία αμφιβολία υφίσταται. Ωστόσο, το να προσδιοριστούν οι τιμές των εν λόγω δυνάμεων καθώς και η εξάρτησή τους από την απόσταση των μορίων αποτελεί δυσχερέστατο έργο.

Δυνάμεις van der Waals

Μολονότι δεν διαθέτουμε κάποια μέθοδο που θα μας επέτρεπε να μετρήσουμε άμεσα τις διαμοριακές δυνάμεις για κάθε τιμή απόστασης, σήμερα γνωρίζουμε αρκετά γι' αυτές, έστω κι αν κανείς δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι το θέμα έχει εξαντληθεί.

Την έννοια των διαμοριακών δυνάμεων την εισήγαγε πρώτος ένας ολλανδός φυσικός, ο Johannes Diderik van der Waals (1837-1922), ο οποίος και κατέδειξε τον καθοριστικό ρόλο τους στην περιγραφή των πραγματικών αερίων. Ο van der Waals δεν επεχείρησε να προσδιορίσει πώς ακριβώς εξαρτώνται οι συγκεκριμένες δυνάμεις από την απόσταση, αλλά περιορίστηκε απλώς στο να προβάλει την άποψη ότι στις μικρές μεν αποστάσεις κυριαρχούν οι απωστικές δυνάμεις, στις δε μεγαλύτερες επικρατούν οι ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες φθίνουν βραδέως καθώς αυξάνει η απόσταση.

Στη βάση αυτών των απλούστατων παραδοχών και επιστρατεύοντας τη λογική και τη διαίσθησή του, ο van der Waals κατόρθωσε να εξαγάγει μια εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση των πραγματικών ρευστών (αερίων και υγρών). Το μοντέλο των πραγματικών αερίων δεν περιγράφει μόνο τα αέρια και τα υγρά, αλλά επίσης τις διαδικασίες της τήξης και της εξαέρωσης. Οι διαμοριακές δυνάμεις συχνά αναφέρονται και ως δυνάμεις van der Waals.

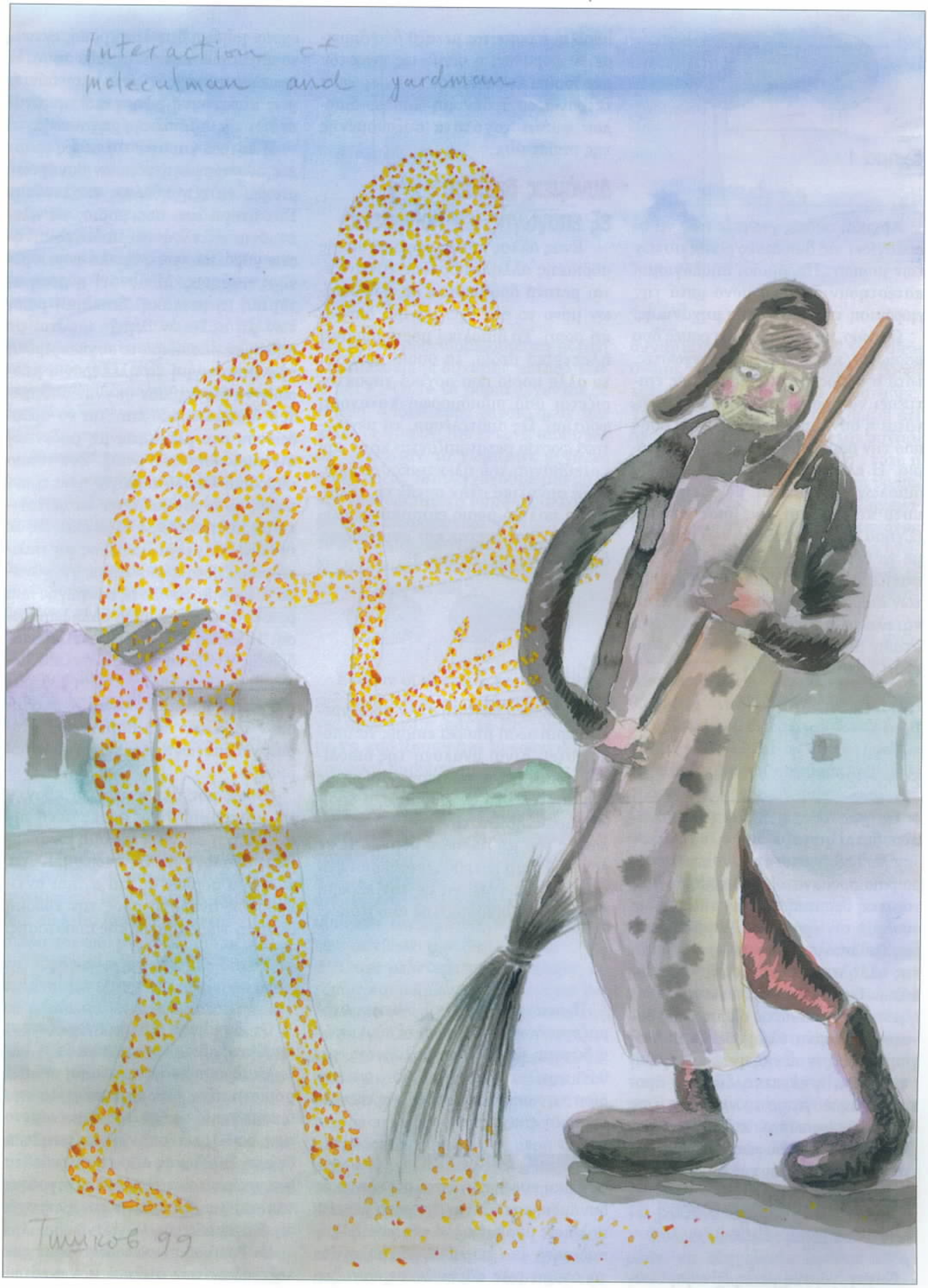
Η ηλεκτρομαγνητική φύση των διαμοριακών δυνάμεων

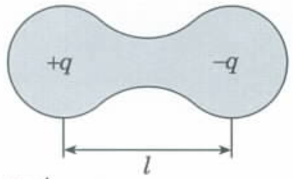
Ώς τις αρχές του 20ού αιώνα, η θεωρητική ανάλυση των διαμοριακών δυνάμεων παρέμενε αδύνατη. Η απλή και γνωστή βαρυτική δύναμη σαφέστατα δεν μπορούσε να αντιπροσωπεύει έναν υπολογίσιμο παράγοντα στην αλληλεπίδραση αντικειμένων με τόσο μικρές μάζες όπως τα μόρια. Κατά συνέπεια, επειδή εκείνη την εποχή η ισχυρή και η ασθενής πυρηνική δύναμη δεν είχαν ανακαλυφθεί ακόμη, δεν φαινόταν να απομένει κάποιος άλλος τρόπος για να εξηγηθεί η προέλευση των μοριακών αλληλεπιδράσεων εκτός από την παραδοχή ότι οι διαμοριακές δυνάμεις ήταν ηλεκτρομαγνητικής φύσεως.

Τα άτομα, πολύ δε περισσότερο τα μόρια, αποτελούν εξαιρετικά πολύπλοκα συστήματα που απαρτίζονται από μεγάλο πλήθος φορτισμένων σωματιδίων. Οι γνώσεις για τη δομή τέτοιων συστημάτων έλειπαν, και οι δυνάμεις που δρούσαν μεταξύ των μορίων σαφώς εξαρτώνταν από τη δομή τους. Ευλόγως, λοιπόν, στην αρχή οι έρευνες στράφηκαν αποκλειστικά στις απλούστερες δυνατές περιπτώσεις.

Δυνάμεις διπόλου-διπόλου

Σε πολλά μόρια (επί παραδείγματι, στο μόριο του νερού) τα θετικά και τα αρνητικά φορτία κατανέμονται κατά τέτοιον τρόπο ώστε οι μέσες θέσεις των «κέντρων βάρους» του θετικού και του αρνητικού φορτίου δεν συμπίπτουν. Σε πρώτη προσέγγιση, ένα τέτοιο μόριο μπορεί να προσομοιωθεί με ένα ηλεκτρικό δίπολο, δηλαδή με ένα σύστημα δύο σημειακών φορτίων $+q$ και $-q$ που τα χωρίζει μικρή απόσταση l (Σχήμα 1). Οι ηλεκτρικές ιδιότητες ενός τέτοιου μορίου χαρακτηρίζονται από τη διπολική ροπή


Interaction of
moleculman and yardman
Тишков 99



Σχήμα 1

$$p = ql.$$

Αρχικά, ουδείς γνώριζε πώς να υπολογίσει τις διπολικές ροπές αυτών των μορίων. Παρόμοιοι υπολογισμοί κατέστησαν δυνατοί μόνο μετά την εμφάνιση της κβαντικής μηχανικής.

Ωστόσο, αν οι διπολικές ροπές δύο μορίων p_1 και p_2 υποτεθούν γνωστές, τότε ο νόμος του Coulomb μάς επιτρέπει να προσδιορίσουμε πώς εξαρτάται η δύναμη της αλληλεπίδρασης από την απόσταση που χωρίζει τα μόρια. Η ελκτική δύναμη μεταξύ δύο διπόλων καθίσταται μέγιστη όταν αυτά κείνται επί της ίδιας ευθείας (Σχήμα 2). Εν προκειμένω, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη εμφανίζεται επειδή η απόσταση μεταξύ των ετερώνυμων φορτίων 2 και 3 είναι ελαφρώς μικρότερη από την απόσταση μεταξύ των ομώνυμων φορτίων 1 και 3 ή 2 και 4.

Σχήμα 2

Ως γνωστόν, η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο ηλεκτρικών διπόλων εξαρτάται έντονα από τον αμοιβαίο προσανατολισμό τους. Η στοχαστική θερμική κίνηση μεταβάλλει συνεχώς τον προσανατολισμό των μοριακών διπόλων. Συνεπώς, η δύναμη της αλληλεπίδρασης μεταξύ των διπόλων θα έπρεπε να υπολογιστεί ως η μέση τιμή πάνω σε όλους τους δυνατούς προσανατολισμούς. Οι υπολογισμοί έδειξαν ότι στην προκειμένη περίπτωση η ελκτική δύναμη προκύπτει ανάλογη με το γινόμενο των διπολικών ροπών p_1 και p_2 των μορίων και αντιστρόφως ανάλογη με την έβδομη δύναμη της διαμοριακής απόστασης:

$$F_{\pi\rho} \sim \frac{p_1 p_2}{r^7}.$$

Συγκρινόμενη με τη δύναμη Coulomb που ασκείται μεταξύ δύο σημειακών φορτίων, η οποία ως γνωστόν ακολουθεί το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου, η δύναμη διπόλου-διπόλου φθίνει ταχύτατα αυξανομένης της απόστασης.

Δυνάμεις διπόλου εξ επαγωγής (εκ πολώσεως)

Ένας άλλος τύπος σχετικά απλής μοριακής αλληλεπίδρασης εμφανίζεται μεταξύ δύο μορίων εκ των οποίων μόνο το ένα έχει μόνιμη διπολική ροπή. Το διπολικό μόριο παράγει ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο πολώνει το άλλο μόριο που αρχικά χαρακτηρίζεται από ομοιόμορφη κατανομή φορτίου. Ως αποτέλεσμα, τα μεν θετικά φορτία μετατοπίζονται κατά την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου, τα δε αρνητικά στην αντίθετη. Έτσι, το μη πολικό μόριο επιμηκύνεται ελαφρώς· πολώνεται και αναπτύσσει διπολική ροπή (Σχήμα 3).

Σχήμα 3

Η ελκτική δύναμη στην προκειμένη περίπτωση μπορεί επίσης να υπολογιστεί. Είναι ανάλογη της διπολικής ροπής p του πολικού μορίου, με ένα συντελεστή αναλογίας α, ο οποίος χαρακτηρίζει την ικανότητα πόλωσης του μη πολικού μορίου. Η εν λόγω δύναμη μεταβάλλεται επίσης αντιστρόφως ανάλογα με την έβδομη δύναμη της διαμοριακής απόστασης:

$$F_{\varepsilon\pi} \sim \frac{p\alpha}{r^7}.$$

Η ανωτέρω ελκτική δύναμη ονομάζεται δύναμη διπόλου εξ επαγωγής ή δύναμη διπόλου εκ πολώσεως, καθότι οφείλεται στην πόλωση του μορίου την οποία προκαλεί η ηλεκτροστατική επαγωγή.

Δυνάμεις διασποράς

Είναι ευρέως γνωστό ότι ελκτικές δυνάμεις ασκούνται όχι μόνο μεταξύ πολικών μορίων αλλά και μεταξύ μη πολικών. Για παράδειγμα, μολονότι τα άτομα των αδρανών αερίων δεν έχουν μόνιμη διπολική ροπή, εντούτοις αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η προέλευση των δυνάμεων αυτών έγινε κατανοητή μόνο μετά την ανάπτυξη της κβαντικής μηχανικής.

Ποιοτικά και σε πολύ αδρές γραμμές, η παραγωγή τέτοιων δυνάμεων μπορεί να εξηγηθεί ως ακολούθως. Στα άτομα και στα μόρια, τα ηλεκτρόνια εκτελούν περίπλοκες κινήσεις γύρω από τους θετικά φορτισμένους πυρήνες. Μολονότι η μέση ατομική (ή μοριακή) διπολική ροπή των μη πολικών δομών ισούται με μηδέν, σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη χρονική στιγμή τα ηλεκτρόνια μπορούν να διαταχθούν σε έναν ασύμμετρο «σχηματισμό» και έτσι να προσδώσουν στο μόριο μια μη μηδενική στιγμιαία διπολική ροπή. Ένα τέτοιο παροδικό δίπολο παράγει ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο πολώνει τα γειτονικά μη πολικά άτομα (ή μόρια). Ως εκ τούτου, τα μέχρι πρότινος μη πολικά μόρια μετατρέπονται σε στοχαστικά στιγμιαία δίπολα εξ επαγωγής που βρίσκονται σε αμοιβαία αλληλεπίδραση. Η ολική δύναμη της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα μη πολικά μόρια προκύπτει από τη μέση αλληλεπίδραση όλων των δυνατών στιγμιαίων διπόλων που δημιουργεί η αμοιβαία επαγωγή των γειτονικών μορίων.

Όπως μας πληροφορεί η κβαντική μηχανική, στην προκειμένη περίπτωση η ελκτική δύναμη είναι ευθέως ανάλογη με τις πολωσιμότητες των δύο μορίων α_1 και α_2 και αντιστρόφως ανάλογη προς την έβδομη δύναμη της διαμοριακής απόστασης:

$$F_{\delta} \sim \frac{\alpha_1 \alpha_2}{r^7}.$$

Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται δυνάμεις «διασποράς», επειδή η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μη πολικά μόρια παίζει καθοριστικό ρόλο στο διασκεδασμό του φωτός —φαινόμενο που οφείλεται στην εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από τη συχνότητα (το χρώμα), και η οποία περιγράφεται από μια εξίσωση γνωστή ως σχέση διασποράς.

Οι δυνάμεις διασποράς δρουν μεταξύ όλων των ατόμων και των μορίων επειδή η φύση τους δεν συναρτάται με το κατά πόσον ένα μόριο έχει διπολική ροπή ή όχι. Συνήθως, οι δυνάμεις διασποράς υπερτερούν των δυνάμεων διπόλου-διπόλου ή των δυνάμεων διπόλου εξ επαγωγής. Ωστόσο, αν στη μοριακή αλληλεπίδραση συμμετέχουν πολωμένα μόρια (όπως τα μόρια του νερού), οι δυνάμεις διπόλου-διπόλου μπορεί κάλλιστα να είναι μεγαλύτερες από τις δυνάμεις διασποράς (κατά έναν παράγοντα 3 στην περίπτωση των μορίων του νερού). Όταν, μάλιστα, τα αλληλεπιδρώντα μόρια έχουν μεγάλες διπολικές ροπές (CO, HCl, κ.λπ.), οι δυνάμεις διπόλου-διπόλου υπερτερούν όλων των υπολοίπων κατά δεκάδες ή και εκατοντάδες φορές.

Το κύριο χαρακτηριστικό και των τριών τύπων δύναμης έγκειται στο ότι ακολουθούν το νόμο $1/r^7$, ο οποίος περιγράφει πώς εξασθενούν αυξανομένης της απόστασης. Ωστόσο, σε αποστάσεις που υπερβαίνουν τη μοριακή διάμετρο, αρχίζει να παίζει σημαντικό ρόλο και ένας ακόμη παράγοντας: η πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Ως εκ τούτου, σε αποστάσεις της τάξεως των 10^{-5} cm οι ελκτικές δυνάμεις φθίνουν ακόμη ταχύτερα, και συγκεκριμένα, ανάλογα προς το $1/r^8$.

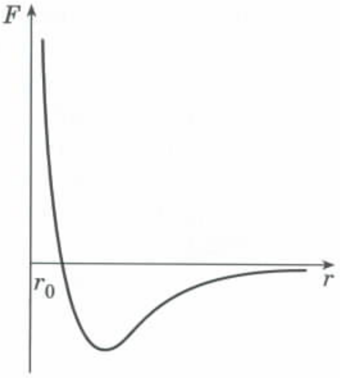
Απωστικές δυνάμεις

Ας περάσουμε τώρα στις απωστικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των μορίων σε πάρα πολύ μικρές αποστάσεις. Πρόκειται για πρόβλημα που από μια άποψη φαίνεται απλούστερο και από μια άλλη πιο περίπλοκο. Εφόσον οι απωστικές δυνάμεις αυξάνονται εξαιρετικά γρήγορα όταν τα μόρια πλησιάζουν μεταξύ τους, στην ανάλυση πολλών μοριακών φαινομένων δεν απαιτείται να γνωρίζουμε τον ακριβή νόμο που ακολουθεί η εν λόγω αύξηση.

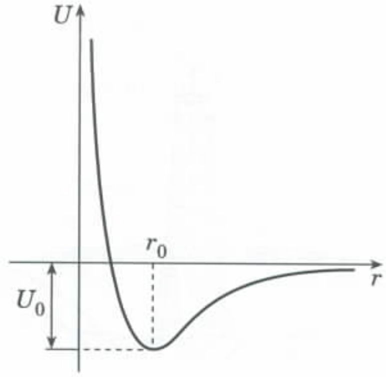
Ωστόσο, σε αντίθεση με τις ελκτικές δυνάμεις, οι απωστικές δυνάμεις επιδεικνύουν πολύ εντονότερη «ατομικότητα», δηλαδή παρουσιάζουν ισχυρή εξάρτηση από τη δομή των αλληλεπιδρώντων μορίων. Ακόμη και αν γνωρίζουμε πώς το μόριο A απωθεί τα μόρια B και $Γ$, τούτο δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε τη μορφή της απωστικής δύναμης μεταξύ των B και $Γ$. Όταν τα μόρια έρχονται σε επαφή, ο ιδιαίτερος χαρακτήρας του καθενός γίνεται πιο έντονα αισθητός απ' ό,τι όταν τα χωρίζουν μεγάλες αποστάσεις. Επιτυγχάνουμε μια μάλλον ικανοποιητική συμφωνία ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα και τους θεωρητικούς υπολογισμούς αν δεχτούμε ότι οι απωστικές δυνάμεις μεταβάλλονται ως

$$F_{απ} \sim \frac{1}{r^{13}}.$$

Εφόσον οι ελκτικές και οι απωστικές δυνάμεις είναι αντίστοιχα ανάλογες προς το $1/r^7$ και το $1/r^{13}$, μπορούμε να χαράξουμε μια προσεγγιστική γραφική παράσταση της ολικής διαμοριακής δύναμης συναρτήσει της απόστασης ανάμεσα στα μόρια ή τα άτομα. Στο Σχήμα 4, οι απωστικές δυνάμεις θεωρούνται θετικές και οι ελκτικές αρνητικές. Η ολική δύναμη μηδενίζεται σε μια απόσταση r_0, η οποία ισούται περίπου με το άθροισμα των ακτίνων των δύο μορίων.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Όταν μελετάμε μεγάλα πλήθη ατόμων και μορίων, αποδεικνύεται βολικότερο να χρησιμοποιούμε αντί της δύναμης αλληλεπίδρασης τη δυναμική ενέργεια. Στην προκειμένη περίπτωση, στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τα μέσα χαρακτηριστικά του μοριακού συστήματος. Όπως θα διαπιστώσουμε σύντομα, η μέση δυναμική ενέργεια καθορίζει πολλά από τα γνωρίσματα της δομής και των ιδιοτήτων της ύλης.

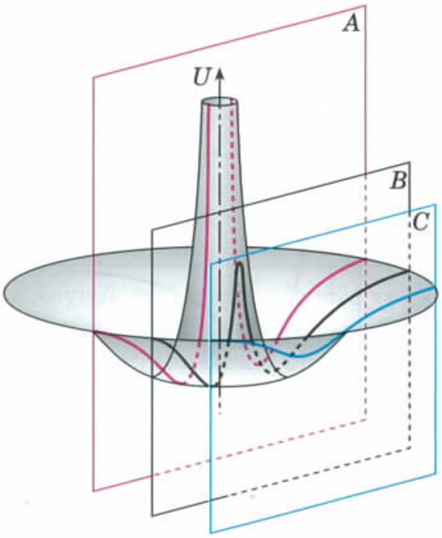
Εφόσον η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ισούται με το έργο που παράγει η δύναμη, η εξάρτηση της δυναμικής ενέργειας από την απόσταση μπορεί να καθοριστεί βάσει της σχέσης δύναμης και απόστασης. Υπάρχει ένας κανόνας που ορίζει ότι αν μια δύναμη μεταβάλλεται συναρτήσει της απόστασης ως $1/r^n$, τότε η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια θα μεταβάλλεται ως $U \sim 1/r^{n-1}$. Σημειωτέον ότι ο συγκεκριμένος κανόνας συμφωνεί και με τη διαστατική ανάλυση (από διαστατική άποψη, η ενέργεια ισούται με το γινόμενο δύναμης επί απόσταση).

Η δυναμική ενέργεια, όπως γνωρίζουμε, ορίζεται πάντα ως προς κάποια κατάσταση όπου θεωρούμε αυθαιρέτως ότι λαμβάνει την τιμή μηδέν. Συνήθως θεωρείται ότι $U \to 0$ καθώς $r \to \infty$, και αν υιοθετήσουμε τη συγκεκριμένη σύμβαση, οδηγούμαστε στη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας που φαίνεται στο Σχήμα 5 —όπου με U_0 σημειώνεται το βάθος του πηγαδιού δυναμικής ενέργειας.

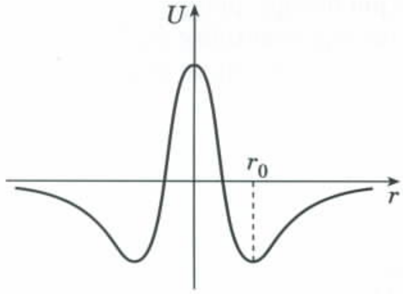
Ωστόσο, η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας (Σχήμα 5) θα έχει αυτή τη μορφή μόνο εφόσον τα δύο μόρια πλησιάζουν το ένα το άλλο κινούμενα κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα κέντρα τους (για παράδειγμα, αν τα μόρια πλησιάζουν μεταξύ τους στο επίπεδο A του Σχήματος 6). Σε άλλες περιπτώσεις, η καμπύλη δυναμικού μοιάζει με εκείνη στο Σχήμα 7 (όταν τα μόρια κινούνται στο επίπεδο B) ή στο Σχήμα 8 (όταν κινούνται στο επίπεδο C).

Το βασικό πρόβλημα

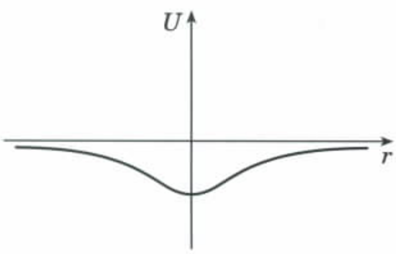
Πολλές ιδιότητες μιας ουσίας μπορούν να εξηγηθούν εφόσον είναι γνωστός ο χαρακτήρας της αλληλε-



Σχήμα 6



Σχήμα 7



Σχήμα 8

πίδρασης ανάμεσα στα μόριά της. Εδώ θα περιοριστούμε στην ανάλυση ενός πολύ γενικού προβλήματος: Πώς μπορεί να αξιοποιηθεί η εξάρτηση της δυναμικής ενέργειας από τη διαμοριακή απόσταση προκειμένου να προσδιοριστεί ποσοτικά η διαφορά ανάμεσα σε ένα αέριο, ένα υγρό και ένα στερεό στη βάση της κινητικής θεωρίας. Ως πρώτο βήμα, όμως, θα εξετάσουμε την ενέργεια της μοριακής κίνησης.

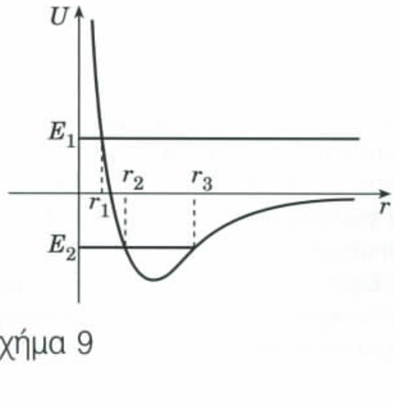
Αν γνωρίζουμε την εξάρτηση της δυναμικής ενέργειας από την απόσταση, μπορούμε να προσδιορίσουμε το χαρακτήρα της κίνησης στηριζόμενοι αποκλειστικά και μόνο στο νόμο διατήρησης της ενέργειας. Ας υποθέσουμε ότι το ένα μόριο ηρεμεί ενώ το άλλο βρίσκεται σε κίνηση. Το τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το μόριο εξαρτάται από την ολική του ενέργεια, η οποία —σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας— παραμένει σταθερή:

$$E = E_{κιν} + U = \text{σταθερά},$$

όπου με $E_{κιν}$ συμβολίζουμε την κινητική ενέργεια και με U τη δυναμική.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $E = E_1 > 0$ (Σχήμα 9). Η ολική ενέργεια παριστάται ως μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των r, δεδομένου ότι έχει την ίδια τιμή για κάθε r. Όταν το μόριο κινείται κατά μήκος του άξονα των r, η κινητική και η δυναμική του ενέργεια μεταβάλλονται: όσο υψηλότερη τιμή λαμβάνει η δυναμική ενέργεια τόσο μικρότερη γίνεται η κινητική ενέργεια, και αντιστρόφως (εφιστούμε την προσοχή στο αρνητικό πρόσημο της δυναμικής ενέργειας!). Αν το μόριο κινείται εκ δεξιών προς τα αριστερά, η κινητική του ενέργεια αυξάνεται και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της για $r = r_0$, όπου η δυναμική ενέργεια παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια, η κινητική ενέργεια βαίνει μειούμενη και μηδενίζεται για $r = r_1$, όπου η ολική ενέργεια ισούται με τη δυναμική ενέργεια. Το μόριο δεν μπορεί να εισέλθει στην περιοχή όπου $r < r_1$. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, η δυναμική του ενέργεια θα υπερέβαινε την ολική, πράγμα που θα σήμαινε ότι η κινητική του ενέργεια θα έπρεπε να λαμβάνει αρνητική τιμή. Η κινητική ενέργεια, όμως, είναι εξ ορισμού θετική.

Στο σημείο $r = r_1$ το μόριο σταματά στιγμιαία και κατόπιν αρχίζει να κινείται κατά την αντίθετη κατεύθυνση υπό την επίδραση της απωστικής δύναμης. Αυτό είναι το λεγόμενο σημείο αναστροφής της τροχιάς του μορίου. Στη συνέχεια, το μόριο εξακολουθεί να κινείται στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα των r και απομακρύνεται στο άπειρο.



Σχήμα 9

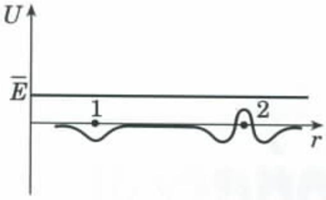
Εντελώς διαφορετικά έχουν τα πράγματα στην περίπτωση όπου $E = E_2 < 0$ (Σχήμα 9). Στην προκειμένη περίπτωση, το μόριο βρίσκεται παγιδευμένο μέσα στο πηγάδι δυναμικής ενέργειας και αποκλείεται να διαφύγει από εκεί. Εδώ έχουμε μια δέσμια κατάσταση, στην οποία τα δύο μόρια ταλαντώνονται κοντά στη θέση ισορροπίας. Ο διαχωρισμός του συστήματος σε δύο ανεξάρτητα σωματίδια είναι αδύνατος αν δεν αυξήσουμε την ολική του ενέργεια σε $E > 0$.

Η μοριακή αλληλεπίδραση στα στερεά, υγρά και αέρια

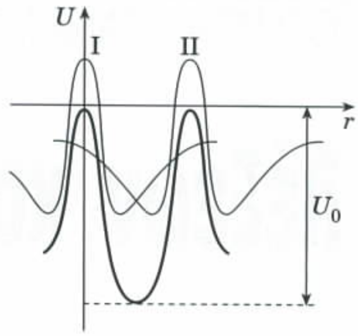
Ας καθορίσουμε τώρα το ποσοτικό κριτήριο που θα μας επιτρέψει να διακρίνουμε ανάμεσα στα αέρια, τα υγρά και τα στερεά στη βάση της κινητικής θεωρίας.

Αέρια. Περισσότερες πληροφορίες για την κατάσταση ενός πραγματικού αερίου θα μας αποκαλύψει η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ενός μορίου του συναρτήσει της απόστασής του από τους πλησιέστερους γείτονές του (Σχήμα 10). Η δυναμική ενέργεια αυτού του μορίου παραμένει μηδενική κατά μήκος του μεγαλύτερου μέρους της τροχιάς του, επειδή η μέση διαμοριακή απόσταση στα αέρια υπερβαίνει κατά πολύ τη χαρακτηριστική γραμμική διάσταση του μορίου. Οι πλησιέστεροι γείτονες του μορίου βρίσκονται στα σημεία 1 και 2. Το μόριο κινείται σε σημαντική απόσταση από το γείτονα 1 και πλησιέστερα προς το γείτονα 2.

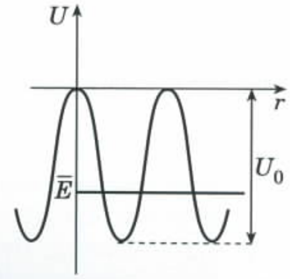
Η μέση δυναμική ενέργεια του μορίου είναι αρνητική και έχει πολύ μικρή απόλυτη τιμή, η οποία ισούται με το εμβαδόν του χώρου που περικλείεται από την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας και τον άξονα των r μεταξύ των σημείων 1 και 2 διαιρεμένο με το μήκος του διαστήμα-



Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12

τος 1-2. Η ολική μέση ενέργεια είναι υποχρεωτικά θετική· ειδάλλως, το μόριο θα δεσμευόταν από τους γείτονές του. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί μόνο εφόσον η ολική μέση ενέργεια του μορίου του αερίου υπερβαίνει την απόλυτη τιμή της μέσης δυναμικής του ενέργειας: $\overline{E_{κιν}} > |\overline{U}|$.
Στην πραγματικότητα, $\overline{E} = \overline{E_{κιν}} + \overline{U}$, όπου το $\overline{U}$ είναι αρνητικό.

Υγρά. Στα υγρά και τα στερεά, τα μόρια βρίσκονται σε μικρές αποστάσεις το ένα από το άλλο. Συνεπώς, κάθε μόριο αλληλεπιδρά με αρκετούς πλησιέστερους γείτονες. Ας εξετάσουμε πώς επηρεάζουν ένα δεδομένο (κεντρικό) μόριο δύο πλησιέστεροι γείτονές του που απέχουν μεταξύ τους απόσταση περίπου $2r_0$.

Η καμπύλη δυναμικής ενέργειας που χρειαζόμαστε στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να ληφθεί αν υπερθέσουμε την καμπύλη του Σχήματος 7 (αλληλεπίδραση δύο μορίων) στην καμπύλη την οποία παίρνουμε μετατοπίζοντας την πρώτη κατά απόσταση ελαφρώς μεγαλύτερη από $2r_0$. Εφόσον οι τιμές της δυναμικής ενέργειας προστίθενται σε κάθε σημείο, το βάθος του πηγαδιού δυναμικής ενέργειας σχεδόν διπλασιάζεται, ενώ το ύψος των κορυφών μειώνεται (Σχήμα 11). Όταν ληφθούν υπόψη και οι αλληλεπιδράσεις με άλλα μόρια, η καμπύλη δυναμικού μοιάζει με τη γραφική παράσταση που βλέπουμε στο Σχήμα 12.

Για να παραμείνει ένα μόριο στο υγρό, η μέση ενέργειά του πρέπει να είναι αρνητική ($\overline{E} < 0$). Πρόκειται για τη συνθήκη την οποία πρέπει να ικανοποιεί ένα μόριο για να παραμείνει στο πηγάδι δυναμικής ενέργειας που σχηματίζουν οι γείτονές του. Αν $\overline{E} > 0$, το μόριο θα διαφύγει από το πηγάδι και θα εγκαταλείψει το υγρό.

Εφόσον $\overline{E} = \overline{E_{κιν}} + \overline{U}$ και $\overline{U} < 0$, το μόριο στο υγρό έχει μέση κινητική ενέργεια μικρότερη από την απόλυτη τιμή της μέσης δυναμικής του ενέργειας: $\overline{E_{κιν}} < |\overline{U}|$. Δεδομένου ότι η τελευταία ανισότητα δεν είναι πολύ ισχυρή, η $\overline{E_{κιν}}$ υπολείπεται ελάχιστα της απόλυτης τιμής της δυναμικής ενέργειας: $\overline{E_{κιν}} \leq |\overline{U}|$ και $|\overline{E}| \leq |U_0|$ (το U_0 δηλώνει την ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας). Γι' αυτό το λόγο ένα μόριο δεν μπορεί να παραμείνει στο πηγάδι επί πάρα πολύ. Ο στοχαστικός χαρακτήρας της μοριακής κίνησης κάνει την ενέργεια των μορίων να μεταβάλλεται συνεχώς, άλλοτε λαμβάνοντας τιμές μεγαλύτερες από τη μέση ενέργεια και άλλοτε μικρότερες.

Όταν η ενέργεια ενός μορίου υπερβαίνει το ύψος του φράγματος δυναμικής ενέργειας που χωρίζει το ένα πηγάδι από το άλλο, το μόριο μεταπηδά από τη μία θέση ισορροπίας στην άλλη. Αυτό είναι το κύριο χαρακτηριστικό που καθορίζει το χαρακτήρα της θερμικής κίνησης και τη ρευστότητα στα υγρά. Η μέση ενέργεια των μορίων αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, με αποτέλεσμα να καθίστανται συχνότερα και τα άλματα από το ένα πηγάδι δυναμικής ενέργειας στο άλλο.

Στερεά. Στα στερεά, η δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης ενός τυπικού μορίου με τους πλησιέστερους γείτονές του μοιάζει εν πολλοίς με τη δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης στα υγρά (Σχήμα 12). Στα στερεά, μολαταύτα, τα πηγάδια δυναμικής ενέργειας είναι ελαφρώς βαθύτερα απ' ό,τι στα υγρά, επειδή εδώ τα μόρια απέχουν λιγότερο μεταξύ τους. Όπως και στην περίπτωση των υγρών, έτσι και στα στερεά ικανοποιείται η συνθήκη $\overline{E_{κιν}} < |\overline{U}|$. Εντούτοις, εδώ η κινητική ενέργεια των μορίων είναι σημαντικά χαμηλότερη απ' ό,τι στα υγρά. Τα στερεά, ως γνωστόν, προκύπτουν από την ψύξη των υγρών. Επομένως, στα στερεά η μέση κινητική ενέργεια των μορίων είναι κατά πολύ χαμηλότερη από την απόλυτη τιμή της δυναμικής ενέργειας: $\overline{E_{κιν}} \ll |\overline{U}|$.

Στο Σχήμα 12, η μέση ενέργεια του μορίου μέσα στο πηγάδι δυναμικής ενέργειας παριστάται με ευθεία που φέρει την ένδειξη $\overline{E}$. Το μόριο ταλαντώνεται στον πυθμένα του πηγαδιού δυναμικής ενέργειας. Τα διαδοχικά πηγάδια χωρίζονται από φράγματα τόσο ψηλά ώστε τα μόρια μένουν περιορισμένα στα πηγάδια και διαφεύγουν από τα «κελιά» τους εξαιρετικά σπάνια. Για να αλλάξουν θέση ισορροπίας (δηλαδή, για να μεταπηδήσουν από το ένα πηγάδι στο άλλο), τα μόρια πρέπει να αποκτήσουν ενέργεια πολύ μεγαλύτερη από τη μέση. Τέτοια γεγονότα συμβαίνουν εξαιρετικά σπάνια. Γι' αυτό το λόγο, άλλωστε, τα στερεά, σε αντίθεση με τα υγρά, διατηρούν το σχήμα τους. ◼

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Σχηματισμός νεφών», Μάρτιος/Απρίλιος 1995.
- B. Yavelov, «Ο van der Waals και η εξίσωσή του», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1998.
- A. Leonovich, «Περί ιδανικών αερίων», Ιούλιος/Αύγουστος 1998.
- V. Meshcheryakov, «Οι δομικοί λίθοι των πλανητών», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1998.
- A. Dozorov, «Ηλεκτρικά πολύπολα», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1999.

Ανθολόγιο λέξεων και φράσεων

«Από γλώσσης μέλιτος γλυκίων ρέεν αυδή.»
—Ιλιάδα, Α' 249

Μιχάλης Λάμπρου

Αυτός έφα. Παροιμιώδης φράση που χρησιμοποιείται, συχνά ειρωνικά, για δογματική αποδοχή ή αδιαφιλονίκητη εγκυρότητα μιας γνώμης. Αποδίδεται στους αρχαίους Πυθαγορείους οι οποίοι, κατά την παράδοση, τη χρησιμοποιούσαν για να επικαλεσθούν την αυθεντία του μεγάλου φιλοσόφου, μαθηματικού και μύστη Πυθαγόρα.

Η αρχαιότερη πληροφορία για την παραπάνω φράση προέρχεται από λατινική πηγή. Συγκεκριμένα, ο πολυμαθής Κικέρων (106-43 π.Χ.) την αποδίδει μεταφρασμένη ως «ipse dixit» (αυτός ο ίδιος το είπε), η οποία παρέμεινε ως στερεότυπη φράση στη Δύση, ακόμη και σήμερα, με το ίδιο νόημα που έχει και η αρχική ελληνική. Το σχετικό χωρίο του Κικέρωνα από το *De Natura Deorum* (Περί της φύσεως των θεών), βιβλ. Ι, V, 10 είναι «Nec vero probare soleo id quod de Pythagoreis accepimus, quos ferunt, si quid affirmarent in disputando, cum ex iis quaereretur, quare ita esset, respondere solito: *Ipse dixit*; ipse autem erat Pythagoras. Tantum opinio praejudicata poterat, ut etiam sine ratione valeret auctoritas» (Δεν εγκρίνω αυτό που γνωρίζουμε για τους Πυθαγορείους. Όπως λένε, όταν αυτοί ισχυρίζονταν κάτι στις διαφωνίες τους, στην ερώτηση γιατί είναι έτσι, συνήθιζαν να απαντούν: Αυτός έφα. Ο «αυτός» ήταν ο Πυθαγόρας. Τέτοια ήταν η προκατάληψη για την δύναμη της αυθεντίας του, και δεν χρειαζόταν λογική αιτιολογία).

Ο Πυθαγόρας σε γκραβούρα του 1584 από τον γάλλο χαράκτη Trevet.

Ας επιστρέψουμε όμως στις ελληνικές πηγές της στερεότυπης φράσης. Δεν σώζεται καμία σχετική παραπομπή στα έργα της κλασικής εποχής. Όλες μάς παραδίδονται κατά τους μετά Χριστόν χρόνους από τους εμβριθείς μελετητές της κλασικής γραμματείας, τόσο εθνικούς όσο και Πατέρες της Εκκλησίας. Η αρχαιότερη ελληνική πηγή είναι του 2ου αιώνα μ.Χ. όπου ο Κλήμης ο Αλεξανδρεύς στους *Στρωματείς* του αναφέρει «τοὺς μὲν Πυθαγόρου τοῦ Σαμίου ζηλωτὰς τῶν ζητουμένων τὰς ἀποδείξεις παραιτουμένους τὸ "αὐτὸς ἔφα" πίστιν ἡγεῖσθαι καὶ ταύτῃ ἀρκεῖσθαι μόνῃ τῇ φωνῇ πρὸς τὴν βεβαίωσιν ὧν ἀκηκόασι» (οι μεν θαυμαστές του Πυθαγόρα του Σαμίου, παραιτούμενοι από την αναζήτηση των αποδείξεων, οδηγούσαν την πίστη τους από το «αυτός το είπε», και τους αρκούσαν μόνο τα λόγια του για να επιβεβαιώσουν όσα είχαν ακούσει).

Ανάλογες είναι οι αναφορές του Γρηγορίου του Ναζιανζηνού (4ος αιώνας μ.Χ.) στο *Κατά Ευνομιανού* και του Θεοδώρητου του Κύρου (393-458 μ.Χ.) στο *Ελληνικών θεραπευτική παθημάτων* που γράφουν αντίστοιχα «οἱ παρ' ὑμῖν τὰ Πυθαγόρου φιλοσοφοῦντες, οἷς τὸ "αὐτός ἔφα" τὸ πρῶτον καὶ μέγιστον ἐστι τῶν δογμάτων», (και από εσάς οι φιλοσοφούντες όπως ο Πυθαγόρας, των οποίων το «αυτός έφα» είναι το πρώτο και το μεγαλύτερο των δογμάτων) και «εἴ τις ἀπήτησε τῶν λεγομένων ἀπόδειξιν, "αὐτός ἔφα" λέγειν εἰώθεσαν, πάσης ἀποδείξεως ἰσχυροτέραν καὶ εἶναι νομίζοντες καὶ ἔχειν κελεύοντες τὴν Πυθαγόρου φωνήν» (εάν κανείς απαιτούσε απόδειξη των ισχυρισμών, συνήθιζαν να λένε «αυτός έφα», νομίζοντας ότι είναι και προτρέποντας να θεωρούν ισχυρότερη από κάθε απόδειξη τη φωνή του Πυθαγόρα).

Για το ότι η φράση «αὐτός ἔφα» ήταν παροιμιώδης ήδη από την αρχαιότητα, τεκμαίρεται από τη βιογραφία του Πυθαγόρα στο *Βίοι Φιλοσόφων* του Διογένη του Λαερτίου (3ος αι. μ.Χ.). Πραγματικά, σε ένα σημείο της βιογραφίας του Πυθαγόρα γράφει ότι την εποχή που έζησε ο φιλόσοφος ήταν τέσσερα άτομα γνωστά με το ίδιο όνομα. Αφού αναφέρει επιγραμματικά τους άλλους τρεις, προσθέτει «τέταρτος αὐτὸς οὗτος, οὗ φασιν εἶναι τὠπόρρητον τῆς φιλοσοφίας, αὐτῶν διδάσκαλος: ἐφ' οὗ καὶ τὸ "αὐτός ἔφα" παροιμιακὸν εἰς τὸν βίον ἦλθεν» (τέταρτος είναι αυτός ο δικός μας ο φιλόσοφος, για τον οποίο λένε ότι του ανήκουν τα μυστήρια της φιλοσοφίας: από όπου μπήκε στη ζωή η παροιμιώδης φράση «αυτός έφα»).

Ίσως η συνήθεια να αποδίδεται δογματικά στον Πυθαγόρα —χωρίς μάλιστα να αναφέρεται το όνομά του— η απόλυτη αλήθεια, να οφείλεται στο σεβασμό που έτρεφαν στον μεγάλο φιλόσοφο οι μαθητές του, οι οποίοι τον είχαν θεοποιήσει. Όπως γράφει ο Ιάμβλιχος (250-326 μ.Χ.) στον *Πυθαγορικό βίο* (§ 255), «μηδένα τῶν Πυθαγορείων ὀνομάζειν Πυθαγόραν, ἀλλὰ ζῶντα μέν, ὁπότε βούλοιντο δηλῶσαι, καλεῖν αὐτὸν θεῖον, ἐπεὶ δὲ ἐτελεύτησεν, ἐκεῖνον τὸν ἄνδρα» (κανείς από τους Πυθαγορείους δεν ονόμαζε τον Πυθαγόρα με το όνομά του, αλλά όσο ζούσε, όποτε ήθελαν να τον δηλώσουν τον αποκαλούσαν «θεϊκό», και μετά το θάνατό του τον αποκαλούσαν «εκείνος ο άνδρας»). Άλλωστε, για τη θεοποίηση του Πυθαγόρα από τους μαθητές του μιλά και ο Σέξτος Εμπειρικός (3ος αι. μ.Χ.) στο έργο του *Προς μαθηματικούς* (VII, 94-95). Στο σημείο αυτό γίνεται συζήτηση για έναν όρκο που έπαιρναν στο «όνομα εκείνου που μας έδωσε την τετρακτύ» («τὸν ἁμετέρᾳ κεφαλᾷ παραδόντα τετρακτύν») και ερμηνεύει «τὸν μὲν παραδόντα λέγοντες Πυ-θαγόραν, τοῦτον γὰρ ἐθειοποίουν» (λέγοντες «εκείνον που μας έδωσε» εννοούν τον Πυθαγόρα, γιατί τον θεοποιούσαν).

Τέλος, αξίζει να προστεθεί ότι ακόμα και τα έργα τους οι μαθητές του Πυθαγόρα τα απέδιδαν στο δάσκαλό τους. Όπως λέει ο Ιάμβλιχος στον *Πυθαγορικό βίο* (§ 198), «καλὸν δὲ καὶ τὸ πάντα Πυθαγόρᾳ ἀνατιθέναι τε καὶ ἀποκαλεῖν, καὶ μηδεμίαν περιποιεῖσθαι δόξαν ἰδίαν ἀπὸ τῶν εὑρισκομένων, εἰ μή πού τι σπάνιον» (είναι δε ωραία περίπτωση και το ότι αυτοί απέδιδαν το καθετί στον Πυθαγόρα και το ανέφεραν με το όνομά του, και οι ίδιοι δεν καρπώνονταν για τον εαυτό τους τη δόξα για τις επινοήσεις τους, παρά μόνο πολύ σπάνια).

Το τεσσαράγκωνο της αποκατιανής τεντώστρας.

Πληρέστερα, *Το τεσσαράγκωνο της αποκατιανής τεντώστρας κάθε ορθάγκωνου τριάγκωνου πατσίζει με την σούμα των δύο τεσσαράγκωνων στα παίδια που στέκονται σούζα*. Πρόκειται δηλαδή για σκωπτική απόδοση του πυθαγορείου θεωρήματος σε χυδαία δημοτική. Χρονολογείται τουλάχιστον από το 1911 και ήταν απόρροια της διαμάχης για το γλωσσικό ζήτημα. Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή.

Ήδη από την εποχή του Βυζαντίου υπήρχαν εν χρήσει δύο παράλληλες ελληνικές γλώσσες. Από τη μία ήταν η επίσημη γλώσσα του κράτους, της εκκλησίας και των λογίων, ενώ από την άλλη υπήρχε η δημώδης, των λαϊκών κυρίως στρωμάτων. Οι δύο γλώσσες συνυπήρχαν αρμονικά, και συμπλήρωναν η μία την άλλη στις εκφραστικές ανάγκες του ελληνικού λαού. Η πρώτη ήταν η φιλολογικά καλλιεργημένη εξέλιξη της αρχαίας γλωσσικής παρακαταθήκης, ενώ η δεύτερη ήταν η φυσικά εξελιγμένη προφορική γλώσσα, με την ίδια ρίζα.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι στη λόγια γλώσσα συντάχθηκαν αξιόλογα κείμενα, αλλά πρέπει να τονιστεί ότι και στη δημώδη υπήρχαν εξαιρετικά έργα, όπως για παράδειγμα χρονογραφίες, συναξάρια, ακριτική ποίηση και διάφορα έμμετρα ιπποτικά μυθιστορήματα.

Η διττή αυτή γλωσσική πραγματικότητα διατηρήθηκε επί Τουρκοκρατίας. Η λόγια, μάλιστα, γλώσσα χρησίμευσε να εκκαθαρίσει τη χειμαζόμενη τότε (λόγω ελλείψεως οργανωμένης και ευρείας σχολικής παιδείας) ελληνική γλώσσα. Δυστυχώς όμως, όταν αφυπνιζόταν η Νεοελληνική Αναγέννηση, οι προσπάθειες ανανέωσης της γλώσσας μετατράπηκαν σε «γλωσσικό εμφύλιο».

Αυτός ο οποίος φέρεται να άναψε το σπινθήρα του γλωσσικού ζητήματος ήταν ο βαθύς γνώστης της αρχαίας ελληνικής και λατινικής γραμματείας, διδάσκαλος της φιλοσοφίας και των μαθηματικών, Ευγένιος Βούλγαρις (1716-1805). Ο κλεινός Ευγένιος στον πρόλογο της *Λογικής* του (Λειψία, 1769) επιτέθηκε δριμύτατα κατά των προσπαθειών ορισμένων λογίων να εκχυδαΐσουν, όπως χαρακτηριστικά γράφει, την ελληνική γλώσσα. Η αιτία ήταν η τακτική ορισμένων να γράφουν στη δημοτική ακόμα και φιλοσοφικά ή επιστημονικά έργα, και καταλήγει «ἐκσυρικτέον ἄρα τὰ χυδαϊστὶ φιλοσοφεῖν βιβλιδάρια» (εκσυρίσσω: με σφυρίγματα αποδοκιμασίας αναγκάζω κάποιον να κατέβει από τη σκηνή).

Ο ίδιος ο Βούλγαρις υιοθέτησε δυσνόητη αρχαΐζουσα γλώσσα στις μεταφράσεις του, όπως στο *Των μαθηματικών στοιχείων αι πραγματείαι αι αρχοειδέστατοι* (Λειψία, 1767-68) του Ιωάννη Ανδρέα Σεγνέρου (J.A. von Segner), το οποίο, παρεμπιπτόντως, ήταν ένα από τα πρώτα έντυπα μαθηματικά έργα της σύγχρονης Ελλάδας.

Ως προς τη γλώσσα, την εκ διαμέτρου αντίθετη άποψη διατύπωσε ο μαθητής του Βούλγαρη, ο αξιόλογος Ιώσηπος Μοισιόδαξ (1725-1800) στην *Απολογία* του (Βιέννη, 1780). Παραδείγματος χάριν, για τη μετάφραση του Segner αναφέρει «Ὁ μέγας Εὐγένιος ἐκοπίασε πάντως μεγάλως μεταγλωττίζων τὸν εἰρημένον συγγραφέα, πλὴν ἐκοπίασε πρὸς δόξαν μόνον τοῦ Σεγνέρου».

Ο Μοισιόδαξ χρησιμοποίησε δημοτική τόσο στη διδασκαλία του όσο και στα έργα ή μεταφράσεις του. Για να δώσουμε ένα παράδειγμα, τέτοια είναι η μετάφρασή του της *Γεωμετρίας* του Τακουετίου (Andre Tacquet). (Η μετάφραση αυτή δεν ευτύχησε να τυπωθεί. Σώζεται σε ένα μόνο χειρόγραφο κείμενο, στη Βιβλιοθήκη της Ρουμανικής Ακαδημίας, στο Βουκουρέστι.)

Στα χρόνια που επακολούθησαν, οι λόγιοι διαιρέθηκαν σε δύο αντιμαχόμενα στρατόπεδα που ξιφουλκούσαν με φανατισμό το ένα εναντίον του άλλου. Υπέρ της αρχαΐζουσας τάχθηκαν τότε ο Σχολάρχης της Ακαδημίας στο Βουκουρέστι, Λάμπρος Φωτιάδης, ο Στέφανος Κομμητάς, ο Νεόφυτος Δούκας, ο Κωνσταντίνος Κούμας, κ.ά. Υπέρ της δημοτικής ήταν ο Ιωάννης Βηλαράς, ο Δημήτριος Καταρτζής, ο Γρηγόριος Κωνσταντάς, ο Διονύσιος Σολωμός, ο Δημήτριος Φιλιππίδης, ο Αθανάσιος Χριστόπουλος, κ.ά., ενώ υπήρχαν και οι ενδιάμεσοι όπως ο Νικηφόρος Θεοτόκης, ο Παναγιώτης Κοδρικάς, ο Ρήγας Φερραίος, με κορυφαίο τον Αδαμάντιο Κοραή.

Για τη γλωσσική διαμάχη χύθηκαν ποταμοί μελάνης με επιχειρήματα για τη μια ή την άλλη άποψη, τα οποία όμως συχνά παρέκκλιναν από τη χρυσή μέση οδό. Ο Βηλαράς (1771-1823), παραδείγματος χάριν, επιζητούσε όχι μόνο την καθιέρωση της δημοτικής, αλλά πρότεινε και ουσιαστική ορθογραφική απλοποίηση. Το σχετικό του έργο είχε τίτλο (διατηρώ, φυσικά, το ύφος και την ορθογραφία του) «Η ρομεηκη γλοσα η Μηκρη ορμηνια για τα γραμματα και την ορθογραφηα της Ρομεηκης γλοσας» (Κέρκυρα, 1814). Εκεί γράφει ότι μπορούμε να παραλείψουμε το γράμμα «ω» αφού «οσες φονες ληπον μπενουν στη γλοσα μας φτανουν να γραφτουν με τα ηκοσι τρηα γραμματα του αλφαβητου μας [...] Ενας παρομιος αραδιασμος αφτον τον ψηφιον, οπου παραστενουν απο μια φονη, μας δηνη και ταχτηκο γραψημο, η την ορθογραφηα στη γλοσα μας...»

Η ιστορία του γλωσσικού ζητήματος, και οι θύελλες που ξεσηκώθηκαν, είναι ένα πάρα πολύ ενδιαφέρον θέμα, αλλά ξεφεύγει της παρούσας στήλης. Θα πραγματοποιήσουμε, λοιπόν, άλμα ενός αιώνος για να έλθουμε στην κορύφωση της διαμάχης, όπου σημειώθηκαν ακρότητες.

Οι υπερβολές των δημοτικιστών, που αποκλήθηκαν «μαλλιαροί» (γιατί οι πρώτοι δημοτικιστές είχαν μακριά μαλλιά και μούσια), «χυδαϊστές» και «αγελαίοι», γέννησαν την αντίστοιχη αντίδραση των οπαδών της καθαρεύουσας, που αποκλήθηκαν από τους πρώτους «γλωσσαμύντορες», «αρχαιόπληκτοι», «σκοταδιστές», «συντηρητικοί», κ.ά.

Τα επιχειρήματα ξέφυγαν από τα επιστημονικά όρια και οι «γλωσσαμύντορες», με επικεφαλής τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Γεώργιο Μιστριώτη (1839-1916), γόνο οικογένειας αρματωλών και συγγενικής των Κολοκοτρωναίων, κατηγόρησαν τους «μαλλιαρούς» για αθεΐα και για διαπραγματεύσεις με τους Σλαύους για υποδούλωση της πατρίδας. Ένα έρεισμα για τις κατηγορίες δόθηκε όταν η (ρωσικής καταγωγής) βασίλισσα Όλγα (1815-1926) παρήγγειλε να μεταφραστεί η Καινή Διαθήκη στη δημοτική. Αν και στη μετάφραση είχε συναινέσει ο Αρχιεπίσκοπος Αθηνών Προκόπιος, η Ιερά Σύνοδος δεν την ενέκρινε όταν ολοκληρώθηκε, παρά τις πιέσεις των Ανακτόρων. Λίγο αργότερα, όταν άρχισαν να κατευνάζουν τα πνεύματα, η εφημερίδα *Ακρόπολις* άρχισε να δημοσιεύει, από τον Οκτώβριο του 1901, την τολμηρή μετάφραση τμήματος της Καινής Διαθήκης (επονομαζόμενης Νέας Διαθήκης) του Αλέξανδρου Πάλλη (1815-1933). Η μετάφραση αυτή θεωρήθηκε από πολλούς ως προσβολή στις ελληνορθόδοξες αρχές. Παραδείγματος χάριν, η απόδοση της φράσης «Μυστικός Δείπνος» από τον Πάλλη ως «κρυφό τσιμπούσι» θεωρήθηκε από πολλούς προκλητική. (Παρά τις παρωδίες, όμως, η αξία των μεταφράσεων του Πάλλη, ιδίως της *Ιλιάδας*, δεν πρέπει να υποτιμηθεί. Οι όποιες «μεταφραστικές αστοχίες», όπως τις αποκαλούν οι νηφάλιοι οπαδοί του, δεν είναι αρκετές για να μειώσουν τη συμβολή του.)

Η δημοσίευση της μετάφρασης του Πάλλη στην *Ακρόπολη* είχε ως αποτέλεσμα να εξεγερθούν εναντίον της οι φοιτητές του Πανεπιστημίου Αθηνών, οι οποίοι έφθασαν ακόμη και σε κατάληψη των χώρων του Πανεπιστημίου. Στις 8 Νοεμβρίου 1901, η φοιτητική εξέγερση έγινε παλλαϊκό συλλαλητήριο, όπου μετείχε σχεδόν όλη η Αθήνα με διαμαρτυρίες κατά της μετάφρασης και της «Σλάβας βασίλισσας» Όλγας.

Η κυβέρνηση του Γεωργίου Θεοτόκη παρέταξε το στρατό για να σταματήσει τις διαδηλώσεις. Το αποτέλεσμα ήταν να σκοτωθούν 8 άτομα, να τραυματιστούν 80 (συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου του Πρωθυπουργού), και τέλος να παραιτηθεί η κυβέρνηση και να απολυθεί ο Αρχιεπίσκοπος Προκόπιος. Τα δραματικά αυτά γεγονότα έμειναν στην ιστορία ως τα «Ευαγγελικά».

Τον Νοέμβριο του 1903, κατά την επέτειο των Ευαγγελικών, ξέσπασαν νέες ταραχές για το γλωσσικό. Αυτή τη φορά η αφορμή ήταν μια παράσταση στη δημοτική γλώσσα της *Ορέστειας* του Αισχύλου, στο Βασιλικό Θέατρο. Στην απαίτηση των φοιτητών να διακοπούν οι παραστάσεις, η κυβέρνηση του Δημητρίου Ράλλη επενέβη βίαια. Το αποτέλεσμα ήταν να χάσουν τη ζωή τους δύο άτομα και να τραυματιστούν επτά, σε επεισόδια που έμειναν στην ιστορία ως τα «Ορεστειακά».

Επί πρωθυπουργίας Ελευθερίου Βενιζέλου, το θέμα έφθασε το 1911 στη Β' Αναθεωρητική Βουλή, ώστε να καταγραφεί στο Σύνταγμα ποια είναι η επίσημη γλώσσα. Με συντριπτική πλειοψηφία προστέθηκε ως άρθρο 107 του τότε Συντάγματος το εξής: «Ἐπίσημος γλῶσσα τοῦ Κράτους εἶνε ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν συντάσσονται τὸ πολίτευμα καὶ τῆς Ἑλληνικῆς νομοθεσίας τὰ κείμενα· πᾶσα πρὸς παραφθορὰν ταύτης ἐπέμβασις ἀπαγορεύεται». Ας επανέλθουμε όμως στην «αποκατιανή τεντώστρα».

Είναι γεγονός ότι πολλοί ακραίοι χυδαϊσμοί (όχι όμως όλοι!) κατασκευάστηκαν τεχνητά είτε ως ανέκδοτα είτε για να κατηγορηθούν οι δημοτικιστές ως μαλλιαροί. Το ακόλουθο απόσπασμα από την αγόρευση του κατηγόρου των δημοτικιστών βουλευτή Θεμιστοκλή Μιχαλόπουλου (1856-1941), μαθηματικού και σημαντικού εκπαιδευτικού, στη Β΄ Αναθεωρητική Βουλή στις 25 Φεβρουαρίου 1911, συνοψίζει το αίσθημα των περισσότερων βουλευτών της τότε Βουλής: «Δια τούτο, λέγω, ο λαός ησθάνθη ως προσβολήν κατά του αισθήματος αυτού του εθνικού και του θρησκευτικού όσα άλλοτε εν Αθηναϊκώ φύλλω είδομεν υπό τύπον δήθεν μεταφράσεως του Ιερού Ευαγγελίου, εν η την Μεγάλην Πέμπτην ο Χριστός έκαμε "κρυφό τσιμπούσι" και άλλα τοιαύτα [...]. Πρώτος εισηγητής αυτής της γλώσσης ήτο ο Μελαχρινός [εννοεί τον Απόστολο Μελαχρινό (1880-1952)] ο οποίος πλάττων νέας ιδιορρύθμους και αστείας λέξεις της επινοίας του προϋκάλει διά το παράδοξον αυτών την ευθυμίαν και τους γέλωτας κατ' αρχάς στενού κύκλου φιλοπαιγμόνων Αθηναίων φίλων του. Ολίγον βραδύτερον είδομεν παρ' άλλων πλήθη νέων λέξεων, αγνώστων λέξεων. Τότε είδομεν την υποτείνουσαν λεγομένην "αποκατιανήν τεντώστρα" και άλλα τοιαύτα, τα οποία παρήγαγον εις τον λαόν δυσάρεστον αίσθησιν και βδελυγμίαν και εθεωρήθησαν, σοβαρώς λεγόμενα, ως προσβάλοντα το εθνικόν αυτού αίσθημα και τον εθνικόν αυτού χαρακτήρα.»

Αξίζει εδώ να προσθέσουμε μερικές από τις κυκλοφορούσες τότε (τεχνητές ή μη, σοβαρές ή αστείες) αποδόσεις: Θεοφκιάχτρα (Θεοτόκος), Κώτσος ο Παλιοκουβέντας (Κωνσταντίνος ο Παλαιολόγος), Κεχριμπάρα (Ηλέκτρα), Λασπιάς (Πηλεύς), άνοιξε τα στραβά σου ρε (προσέχετε κΰριε), κ.ά. Ειδικά για το «αποκατιανή τεντώστρα» ως απόδοση του πυθαγορείου θεωρήματος, ο μεγάλος γλωσσολόγος Μανόλης Τριανταφυλλίδης στα *Μνημόσυνά* του (Αθήνα, 1939, σελ. 59) γράφει: «Ίσως δεν είναι περιττό να ειπωθεί ακόμη και σήμερα, δυστυχώς, πως και ο όρος αυτός είναι επινόηση καλοθελητών αρχαϊστών.» Πάντως το άτομο που συκοφαντήθηκε ότι απέδωσε (και μάλιστα δίδασκε στους μαθητές του) το πυθαγόρειο θεώρημα ως «αποκατιανή τεντώστρα» ήταν ο Σταμάτης Σταματιάδης (1865-1942), μαθηματικός, δάσκαλος, μουσικολόγος και οινολόγος, γνωστότερος με το ψευδώνυμο Ελισαίος Γιαννίδης. Αυτός, συγγραφέας του δοκιμίου *Γλώσσα και Ζωή* (Αθήνα, 1908), διδάκτωρ των μαθηματικών (η διατριβή του είχε τίτλο *Απόδειξις της υπάρξεως των ριζών του πολυωνύμου*, Αθήνα, 1903) έγραψε στη δημοτική, το 1930 και 1938 αντίστοιχα, τα εγχειρίδια *Στοιχεία Αστρονομίας* και *Στοιχεία Γεωμετρίας*. Το τελευταίο, αν και σε ορισμένα σημεία υιοθετεί δημοτική κάπως τεχνητή για τα σημερινά δεδομένα, είναι εξαιρετικό εισαγωγικό βιβλίο και σε καμιά περίπτωση δεν έχει ακρότητες σαν αυτές για τις οποίες συκοφαντήθηκε.

Οι κίνδυνοι των υψηλών ταχυτήτων

Και η αχίλλειος πτέρνα των διαστημικών προγραμμάτων

I. Vorobyov

ΑΚΟΜΗ ΚΑΙ ΤΑ ΠΛΗΣΙΕΣΤΕΡΑ Αστρα είναι πολύ μακρινά. Όσο για τους γαλαξίες, από αυτούς μας χωρίζουν αποστάσεις τόσο μεγάλες που δεν μπορεί να τις χωρέσει ο νους μας. Για παράδειγμα, το φως χρειάζεται, ούτε λίγο ούτε πολύ, ένα εκατομμύριο χρόνια για να φτάσει από το γαλαξία της Ανδρομέδας ώς το ηλιακό μας σύστημα.

Μπορούμε άραγε να ελπίζουμε πως θα καταστεί ποτέ δυνατόν να περιορίσουμε το χρόνο που απαιτείται για ένα ταξίδι ώς το γαλαξία της Ανδρομέδας, ας πούμε, σε μία μόνο εβδομάδα; Εφόσον εννοούμε το χρόνο έτσι όπως τον μετρούν τα ρολόγια εδώ στη Γη, κάτι τέτοιο είναι απολύτως ανέφικτο, δεδομένου ότι αποκλείεται να υπάρξει διαστημόπλοιο που να ταξιδεύει ταχύτερα από το φως. Δεν είναι, όμως, ανέφικτο αν έχουμε κατά νου το χρόνο τον οποίο μετρά ένας ταξιδιώτης του Διαστήματος, εφόσον βέβαια το διαστημόπλοιό του ταξιδεύει με αρκούντως μεγάλη ταχύτητα. Σε σχετικιστικές ταχύτητες, η λειτουργία των ρολογιών (καθώς και κάθε άλλη φυσική διαδικασία) επιβραδύνεται. Όσο αυξάνεται η ταχύτητα με την οποία κινείται ένα ρολόι τόσο πιο αργά λειτουργεί.

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος πρόκειται να μεταβεί στην Ανδρομέδα και πρέπει να φτάσει στον προορισμό του σε μία εβδομάδα. Πώς θα έπρεπε να σχεδιάσει το ταξίδι του; Η απόσταση του ενός εκατομμυρίου ετών φωτός θα πρέπει να καλυφθεί στο 1/52 του έτους. Εάν κάποιος κάνει τους απαραίτητους υπολογισμούς βάσει της θεωρίας της σχετικότητας, θα καταλήξει σ' ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα: Η πτήση θα πρέπει να γίνει με σταθερή επιτάχυνση $\gamma = 700g$! Το g δηλώνει την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.

Ωστόσο, ανακύπτει αμέσως ένα εύλογο ερώτημα: Πώς θα μπορούσε κανείς να αντιμετωπίσει τέτοιες τεράστιες επιταχύνσεις; Όταν κινούμαστε με επιτάχυνση $700g$, το βάρος μας αυξάνεται κατά 700 φορές! Τέτοια αύξηση του βάρους του διαστημικού ταξιδιώτη ισοδυναμεί, χωρίς υπερβολή, με το να περάσει από πάνω του ένας οδοστρωτήρας. Το αίμα μας, το οποίο πρέπει να κυκλοφορεί σε ολόκληρο το σώμα μας προκειμένου να μην υποστεί βλάβες ο οργανισμός μας, θα γίνει επίσης 700 φορές βαρύτερο. Αλλά οι καρδιές μας δεν θα μπορούσαν να αντέξουν ένα τέτοιο φορτίο. Δεν σπανίζουν οι περιπτώσεις που οι πιλότοι χάνουν παροδικά τις αισθήσεις τους καθώς επιχειρούν απότομες στροφές, επειδή το αίμα δεν φτάνει στον εγκέφαλο, έστω και αν η επιτάχυνση γ δεν ξεπερνά εν προκειμένω τα 5-$10g$. Το φορτίο που δέχεται η καρδιά μπορεί να μειωθεί αν το σώμα του πιλότου τοποθετηθεί σε ύπτια θέση, έτσι ώστε να μειωθεί το ύψος στο οποίο θα πρέπει να ανεβεί το αίμα. Μα ακόμη και σ' αυτή τη θέση, μια επιτάχυνση των $10g$ δεν είναι ανεκτή για περισσότερο από τρία έως πέντε λεπτά.

Υπάρχει άραγε κάποια εναλλακτική μέθοδος για τα ταξίδια που απαιτούν τόσο μεγάλες επιταχύνσεις; Θα μπορούσε να σχεδιαστεί ένα διαστημόπλοιο με τέτοιον τρόπο ώστε να αποφεύγονται οι τόσο μεγάλες αυξήσεις του βάρους;

Για να αντιμετωπίσουμε με επιτυχία τον εχθρό, επιβάλλεται πρώτα να τον γνωρίσουμε καλύτερα. Από πού προέρχεται το βάρος;

Αν τοποθετήσουμε ένα σώμα πάνω σε μια ζυγαριά λουτρού, ο δείκτης θα αποκλίνει από τη μηδενική ένδειξη. Η Γη ναι μεν έλκει το σώμα προς το κέντρο της, αλλά εφόσον το σώμα ηρεμεί σε σχέση με τη ζυγαριά, το ελατήριο μέσα της θα πρέπει να εξισορροπεί αυτή την έλξη. Έτσι, η ζυγαριά δείχνει το βάρος του σώματος $B = mg$ (όπου m είναι η μάζα του).

Ας υποθέσουμε πως μετρούμε το βάρος (την ένδειξη της ζυγαριάς) μέσα σε έναν ανελκυστήρα που ανέρχεται με επιτάχυνση γ. Η ζυγαριά τώρα δείχνει $m(\gamma + g)$, γεγονός που φανερώνει μια αύξηση του βάρους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η δύναμη του ελατηρίου όχι μόνο εξισορροπεί τη βαρυτική έλξη της Γης, αλλά και επιταχύνει το σώμα.

Αν, αντίθετα, ο ανελκυστήρας εκτελεί ελεύθερη πτώση, η ζυγαριά θα δείξει μηδέν, διότι όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση. Έτσι, το σώμα μετατοπίζεται κατά το ίδιο ακριβώς διάστημα όπως και η ζυγαριά, με αποτέλεσμα το ελατήριό της να παραμένει ασυμπίεστο. Εάν


Hydra
Cygnus
LEO
CANCER
210°

βρισκόμασταν σ' έναν ανελκυστήρα που πέφτει ελεύθερα και κρατούσαμε ένα μήλο στην ανοιχτή παλάμη μας, δεν θα αισθανόμασταν το βάρος του, επειδή το μήλο θα έπεφτε ελεύθερα όπως και το χέρι, χωρίς να ασκεί την παραμικρή πίεση πάνω του.

Το απλούστατο πείραμα που μόλις περιγράψαμε δείχνει πως αν η επιτάχυνση κατευθύνεται προς τα επάνω (σε σχέση με τη Γη), τότε το βάρος ισούται με $B = m(g + \gamma)$. Αν, όμως, η επιτάχυνση γ έχει την ίδια κατεύθυνση με την επιτάχυνση g της βαρύτητας, και αν επιπλέον $|\gamma| = |g|$ (ελεύθερη πτώση), τότε έχουμε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας. Ακριβώς μια τέτοια κατάσταση βιώνουν οι αστροναύτες όταν βρίσκονται σε τροχιά γύρω από τη Γη με τους κινητήρες του σκάφους τους εκτός λειτουργίας.

Η διαπίστωση ότι το βάρος καθορίζεται τόσο από την επιτάχυνση όσο και από τη βαρυτική έλξη έχει τεράστια σημασία, διότι έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η μια συνιστώσα μπορεί τώρα να εξουδετερωθεί από την άλλη. Η κατάσταση έλλειψης βαρύτητας καθίσταται εφικτή επειδή η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας δεν εξαρτάται από τη μάζα ή τη σύσταση των σωμάτων που πέφτουν. Πρόκειται για μια θεμελιώδη ιδιότητα που πρώτος την ανακάλυψε ο Γαλιλαίος. Ακόμη και σήμερα, ωστόσο, παρουσιάζονται από καιρού εις καιρόν κάποιοι ερευνητές που αδυνατούν να αντισταθούν στον πειρασμό να υποβάλουν αυτή την ιδιότητα σε ακριβέστερους ελέγχους. Το 1964 οι John Roll, Robert Krotkov και ο Robert Dickey μέτρησαν τη σχετική βαρυτική επιτάχυνση για τον χρυσό και το αλουμίνιο με ακρίβεια της τάξεως του 0,00000000001!

Ας φανταστούμε τώρα ένα σφαιρικό σώμα σχετικά μεγάλης μάζας (το διαστημόπλοιο) το οποίο παράγει επιτάχυνση βαρύτητας γ ίση με την επιτάχυνση που χρειάζεται για το ταξίδι. Ας εφοδιάσουμε το συγκεκριμένο σώμα και με κάποιους κινητήρες ικανούς να του προσδώσουν αυτή την επιτάχυνση. Ο ταξιδιώτης βρίσκεται άνετα τοποθετημένος σε έναν ατομικό θαλαμίσκο, ο οποίος πέφτει ελεύθερα σε σχέση με το σώμα. Ο θαλαμίσκος πέφτει με επιτάχυνση γ, αλλά εφόσον λειτουργούν οι κινητήρες, το σώμα-διαστημόπλοιο κινείται με την ίδια ακριβώς επιτάχυνση. Έτσι, αν η αρχική σχετική ταχύτητα του θαλαμίσκου και του διαστημοπλοίου ήταν μηδενική, η μεταξύ τους απόσταση θα διατηρείται σταθερή. Ο επιβάτης νιώθει αβαρής μέσα στο θαλαμίσκο του, ο οποίος εκτελώντας ελεύθερη πτώση κινείται ταυτόχρονα με την απαιτούμενη επιτάχυνση.

Στα μισά της διαδρομής, όμως, θα πρέπει να αρχίσει η επιβράδυνση του διαστημοπλοίου ώστε να μειωθεί η ταχύτητά του. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή πρέπει να μεθοδευτεί με τέτοιον τρόπο που να μην ανατραπεί ο αρμονικός συνδυασμός της επιτάχυνσης του διαστημοπλοίου και εκείνης της ελεύθερης πτώσης του θαλαμίσκου, έτσι ώστε να αποφευχθεί η πρόσκρουση του θαλαμίσκου στο διαστημόπλοιο. Επιπροσθέτως, υφίσταται ο κίνδυνος ο θαλαμίσκος να μείνει πίσω ή να συγκρουστεί με το διαστημόπλοιο ένεκα κάποιας απρόοπτης μεταβολής της επιτάχυνσης. Άρα καθίσταται προφανής η ανάγκη για αρτιότερη σχεδίαση του διαστημοπλοίου.

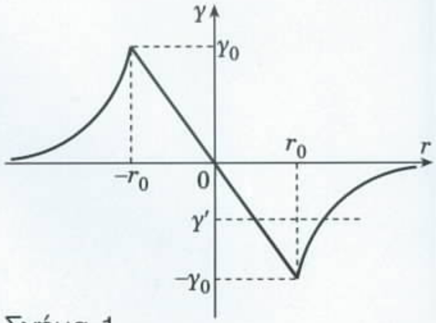
Ας διανοίξουμε μια σήραγγα που να περνά από το κέντρο του σώματος, κατά τη διεύθυνση της επιτάχυνσης. Η επιτάχυνση της βαρύτητας μεταβάλλεται συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο της σφαίρας. Έστω ότι συμβολίζουμε με γ_0 την επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της σφαίρας, της οποίας η ακτίνα θεωρείται ίση με r_0. Το Σχήμα 1 δείχνει πώς μεταβάλλεται η επιτάχυνση γ συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας.

Στο διάστημα τιμών από $-r_0$ έως r_0 (δηλαδή στο εσωτερικό της σφαίρας) η επιτάχυνση βαρύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο

$$\gamma = -\gamma_0 \frac{r}{r_0},$$

ενώ για τιμές της ακτίνας $r > |r_0|$ (έξω από τη σφαίρα) η επιτάχυνση βαρύτητας περιγράφεται από την εξίσωση

$$\gamma = -\gamma_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$



Σχήμα 1

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει πως η επιτάχυνση κατευθύνεται πάντα προς το κέντρο της σφαίρας.

Όταν το σώμα (το διαστημόπλοιο) κινείται ομαλά (χωρίς να επιταχύνεται), το σημείο ευσταθούς ισορροπίας συμπίπτει με το κέντρο του. Μικρές απομακρύνσεις του θαλαμίσκου από το κέντρο του σώματος διορθώνονται από τη δύναμη επαναφοράς. Εφόσον η επιτάχυνση γ' του διαστημοπλοίου παραμένει μικρότερη από γ_0, ο θαλαμίσκος θα βρίσκει πάντα κάποια θέση μέσα στη σήραγγα όπου η επιτάχυνση βαρύτητας ισούται με γ'. Αυτή τη θέση μπορούμε εύκολα να την προσδιορίσουμε με τη βοήθεια του διαγράμματος, σχεδιάζοντας μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των r και σε απόσταση γ' κάτω απ' αυτόν. Οι τετμημένες των δύο σημείων τομής δίνουν δύο πιθανές θέσεις. Ωστόσο, στο σημείο ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχεί το σημείο που βρίσκεται μέσα στη σήραγγα. Εάν η μεταβολή της επιτάχυνσης του διαστημοπλοίου είναι μικρή, ο θαλαμίσκος θα ταλαντώνεται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας όπου οι δύο επιταχύνσεις συμπίπτουν. Ο θαλαμίσκος θα παραμένει σε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας καθ' όλη αυτή τη χρονική περίοδο.

Αν αντί να επιταχύνεται το σώμα επιβραδύνεται με τον ίδιο ρυθμό, το σημείο ισορροπίας θα βρίσκεται από την αντίθετη πλευρά του κέντρου του.

Προτείναμε μια ριζοσπαστική μέθοδο για να αντιμετωπιστούν τα επιβλαβή αποτελέσματα των μεγάλων επιταχύνσεων. Ποια εμπόδια πρέπει να υπερπηδηθούν για να τεθεί σε εφαρμογή αυτό το φανταστικό πρόγραμ-

Η συνέχεια στη σελ. 31 ⇨

Επιστημονικές βάσεις δεδομένων

Και ένας κεραυνοβόλος έρωτας από τις Φιλιππίνες

Κώστας Βασιλειάδης

ΣΤΟ ΠΑΡΟΝ ΑΡΘΡΟ ΔΕΝ ΘΑ ΑΡΧΙΣΩ ΜΕ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ που συνδέονται άμεσα με φυσικομαθηματικά θέματα. Θεώρησα επιτακτική ανάγκη να αναφερθώ εξαρχής σε ζητήματα τα οποία σχετίζονται με την προστασία όλων όσοι ασχολούνται και χρησιμοποιούν το Διαδίκτυο. Το θέμα μας είναι οι ηλεκτρονικοί ιοί, και αφορμή αποτέλεσε ο πρόσφατος κεραυνοβόλος «ιός της αγάπης».

Θα έχετε ακούσει ή, ακόμη χειρότερα, είναι πιθανόν να είχατε μολυνθεί από αυτό τον ηλεκτρονικό ιό. Όπως διαπιστώθηκε εκ των υστέρων, ήταν φιλιππινέζικης καταγωγής, μας χτύπησε διαμέσου του ηλεκτρονικού μας ταχυδρομείου και προξένησε ζημιές 10 δισεκατομμυρίων δολαρίων σε παγκόσμια κλίμακα. Η επιτυχία του προγράμματος το οποίο δημιούργησε τον «ιό της αγάπης» βασίστηκε στην απλότητά του (μια ματιά στο πρόγραμμα του ιού μέσω του Notepad είναι αρκετή για να σας πείσει), ενώ μας εξέπληξε όλους με την ταχύτητα που διαδόθηκε μέσα από το Διαδίκτυο (εντός δύο ημερών κυκλοφορούσαν ήδη οκτώ παραλλαγές του ίδιου ιού). Υπολογίστηκε ότι σε όλο τον κόσμο μολύνθηκε το 20% των ηλεκτρονικών υπολογιστών οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι στο Διαδίκτυο. Ευτυχώς, αυτή τη φορά τα αρχεία που μολύνθηκαν και καταστράφηκαν από τον ιό ήταν μόνο μουσικά (MP3) και φωτογραφικά (.jpg).

Για να αφυπνισθεί ο συγκεκριμένος ιός, έπρεπε να ενεργοποιηθεί από τον παραλήπτη του το αρχείο το οποίο τον περιείχε (το πρόγραμμα του ιού γράφτηκε στη γλώσσα VBScript, η οποία αποτελεί μια διάλεκτο της γλώσσας Visual Basic της Microsoft). Δυστυχώς, ο ελκυστικός τίτλος του αρχείου "I love you" ξεγέλασε πολλούς και το ενεργοποίησαν για να μάθουν από περιέργεια ποιοι είναι αυτοί οι οποίοι τους στέλνουν ερωτικά μηνύματα. Στη συνέχεια, ο ιός, αφού έκλεψε τους κωδικούς μας, διάβασε τις διευθύνσεις φίλων και γνωστών και έστειλε και σ' αυτούς αντίγραφα του εαυτού του μολύνοντάς τους.

Κατά κοινή ομολογία, δεν θα αργήσει να φτάσει η στιγμή —φόβος και τρόμος όλων των χρηστών του Διαδικτύου— κατά την οποία θα λάβουμε πάλι μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου ένα μήνυμα, όπου και μόνο η παρουσία του μέσα στο ηλεκτρονικό γραμματοκιβώτιό μας, χωρίς καν να απαιτηθεί η ενεργοποίησή του, θα είναι αρκετή για να προκαλέσει την καταστροφή του υπολογιστικού μας συστήματος. Ο συγκεκριμένος υπεριός, που θα κινείται με την ταχύτητα του «ιού της αγάπης», θα έχει την ικανότητα να ενεργοποιείται μόνος του (όπως ο γνωστός ιός "Bubbleboy") και επιπλέον θα έχει τις καταστρεπτικές ικανότητες του ιού του "Chernobyl" (ο οποίος εμφανίστηκε πέρυσι και εκτός από πληροφορίες κατέστρεφε και τα προγράμματα BIOS του υπολογιστή). Επειδή όμως δεν με ενθουσιάζει η καταστροφολογία, θα ήθελα να ενθαρρύνω τους αναγνώστες να ανατρέξουν σε άλλες πηγές, όπως για παράδειγμα το CNET, προκειμένου να συλλέξουν πληροφορίες σχετικά με τους πρόσφατους ιούς και για τους τρόπους προστασίας από αυτούς. Αρχίστε με τη διεύθυνση

http://www.cnet.com,

ακολουθώντας τις επιλογές Software Reviews, και αμέσως μετά, Utilities: Antivirus.

Εν τω μεταξύ, όλοι εμείς, ως απλοί χρηστές, επιβάλλεται να υιοθετήσουμε ορισμένα προληπτικά μέτρα προστασίας εναντίον των ηλεκτρονικών ιών:

—Πρώτον, δεν πρέπει να ενεργοποιείτε μηνύματα τα οποία δεν περιμένετε, και ειδικά όταν αυτά εσωκλείουν αρχεία τύπου ".exe" ή ".vbs". Προσοχή και στα αρχεία τύπου ".doc" του Word και τύπου ".xls" του Excel, ειδικά όταν προέρχονται από άγνωστο αποστολέα· δεν αποκλείεται να είναι μολυσμένα. Ακόμη κι αν υποψιάζεστε τον αποστολέα, μην ενεργοποιήσετε το αρχείο που σας έστειλε αν δεν σιγουρευτείτε απόλυτα για την προέλευσή του· αν αμφιβάλλετε, καλύτερα να τον ρωτήσετε.

—Δεύτερον, πρέπει να έχετε εγκαταστήσει στον υπολογιστή σας τα πλέον πρόσφατα προγράμματα προστασίας από ηλεκτρονική μόλυνση (για παράδειγμα, το Norton Anti-Virus 2000 της εταιρείας Symantec —**www.norton.com**— ή το McAfee Virus Scan της εταιρείας Computer Associates —**www.mcafee.com**). Στις διευθύνσεις αυτές θα βρείτε οδηγίες για το πώς θα καταστρέψετε κάποιον ιό που ήδη σας έχει μολύνει.

—Τρίτον, πρέπει να ενημερώνετε συχνότατα τα παραπάνω προγράμματα προστασίας με τις πλέον πρόσφατες εκδόσεις τους (προφανώς, αν είστε από τα πρώτα θύματα ενός νέου ιού, το πρόγραμμα προστασίας που θα διαθέτετε δεν θα σας προστατεύσει· αλλά, αν ο ιός έχει ήδη ανακαλυφθεί, περιορίζετε τις πιθανότητες να γίνετε το εκατομμυριοστό θύμα).

—Και τέταρτον, για όλα τα σημαντικά αρχεία σας πρέπει να διατηρείτε αντίγραφα, ώστε να μπορέσετε να αντιμετωπίσετε την περίπτωση που ένας ιός θα εξαφανίσει τα πάντα από τον σκληρό σας δίσκο.

Και τώρα στο θέμα μας.

• Τον Μάιο εγκαινιάστηκε το νέο κτίριο της κεντρικής βιβλιοθήκης του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Με την ευκαιρία, επισκεφθήκαμε την ιστοσελίδα της βιβλιοθήκης στη διεύθυνση:

http://www.lib.ntua.gr/gmenu.htm

Ανάμεσα στις ενδιαφέρουσες παρεχόμενες υπηρεσίες μάς τράβηξε την προσοχή η δυνατότητα πρόσβασης σε βάσεις δεδομένων και επιστημονικών περιοδικών. Αρκετοί εκδοτικοί οίκοι προσφέρουν περιλήψεις των άρθρων (σε πολλές περιπτώσεις παρατίθενται ολόκληρα τα άρθρα) τα οποία δημοσιεύονται στα περιοδικά που εκδίδουν. Παραθέτουμε μερικούς από τους οίκους μαζί με τις διευθύνσεις των ιστοσελίδων τους —διεθνείς οίκοι, οι οποίοι μας επιτρέπουν την πρόσβαση αν συνδεθούμε ως φιλοξενούμενοι:

Springer Verlag:	**http://link.springer.de**
Kluwer:	**http://www.wkap.nl/kaputml-htm/ONLINEJOURNALS**
Academic Press:	**http://www.europe.idealibrary.com**
OCLC:	**http://firstsearch.oclc.org/FSIP**
MCB:	**http://www.emerald-library.com**
H.W. Wilson:	**http://hwwilsonweb.com**
Elsevier:	**http://www.sciencedirect.com**
John Wiley:	**http://www3.interscience.wiley.com/about.html**

Φυσικά, το ΕΜΠ δεν είναι το μόνο ελληνικό πανεπιστημιακό ίδρυμα η βιβλιοθήκη του οποίου διαθέτει ηλεκτρονική πρόσβαση. Έτσι, αναφέρουμε ενδεικτικά τις βιβλιοθήκες των Πανεπιστημίων της Αθήνας, της Θεσσαλονίκης και της Θράκης, με αντίστοιχες διευθύνσεις

http://www.lib.uoa.gr

http://www.ovo.lib.auth.gr

http://www.lib.duth.gr/main.html

• Οι βιβλιοθήκες του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Μασαχουσέτης (MIT) διαθέτουν καταλόγους δεδομένων για θέματα φυσικής, τους οποίους μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση:

http://libraries.mit.edu/science/Subjects/Physics/databases.html

Ανάμεσά τους διακρίνουμε τον INSPEC (περιέχει θέματα φυσικής, ηλεκτρονικής και υπολογιστών), τον Compendex και τον Applied Science and Technology Abstracts. Δυστυχώς, οι βάσεις αυτές, οι δημοφιλέστερες στο χώρο των θετικών επιστημών, είναι ιδιωτικές και συνήθως απαιτούν κάποιο είδος συνδρομής —εκτός εάν τις επισκεφθείτε μέσω συνδρομής πανεπιστημιακής βιβλιοθήκης.

• Η ψηφιακή βιβλιοθήκη της Καλιφόρνιας, η οποία ανήκει στο σύστημα των Πανεπιστημίων της Καλιφόρνιας, διαθέτει βάσεις δεδομένων που είναι διαθέσιμες στο ευρύ κοινό μαζί με αρκετά εργαλεία για τη συστηματική τους έρευνα. Οι διευθύνσεις της βιβλιοθήκης είναι:

http://www.cdlib.org/collections

http://www.cdlib.org/directory

(Βεβαιωθείτε ότι διαλέξατε θέματα Available to the public, τα οποία είναι διαθέσιμα και για μη συνδρομητές.) Επίσης, μπορείτε να διαλέξετε την επιστήμη η οποία σας ενδιαφέρει και να βρείτε ονομαστές συλλογές ειδικών άρθρων στα αρχεία της βιβλιοθήκης.

• Το Εθνικό Ινστιτούτο Προτύπων και Τεχνολογίας (NIST) των ΗΠΑ, το οποίο υπάγεται στο Υπουργείο Εμπορίου, συνεργάζεται με τις βιομηχανίες για την ανάπτυξη και εφαρμογή τεχνολογίας, μετρήσεων και προτύπων. Το Ινστιτούτο διαθέτει το δικό του Εργαστήριο Φυσικής, με πάμπολλες βάσεις δεδομένων· μπορείτε να τις βρείτε στη διεύθυνση:

http://physics.nist.gov/PhysRefData/contents.html

(Ανάμεσά τους διακρίνουμε τις εξής: φυσικές σταθερές, ατομική και μοριακή φασματοσκοπία, ιονισμός, ακτινοβολία Χ και γ, πυρηνική φυσική, συμπυκνωμένη ύλη, κ.λπ.)

• Σημαντική παρουσία στις πληροφορίες επί παντός επιστημονικού επιστητού έχει και η γνωστή πύλη About.com. Πλούσια συλλογή πληροφοριών γύρω από τη φυσική, και ειδικότερα την ακουστική, την ατομική φυσική, τη θεωρία του χάους, τον ηλεκτρομαγνητισμό, την κβαντική μηχανική, τη ρευστομηχανική, τη θερμοδυναμική, την οπτική, κ.λπ. μπορείτε να βρείτε στις ακόλουθες διευθύνσεις:

http://physics.about.com/education/physics/msubref.htm

http://physics.about.com/education/physics/msubtext.htm

http://physics.about.com/education/physics/msubqm.htm

http://physics.about.com/education/physics/library/weekly/mpreviss.htm

• Σημαντικές πηγές πληροφοριών γύρω από την επιστήμη της αστρονομίας, της βιολογίας, της χημείας, της φυσικής, της περιβαλλοντολογίας, κ.λπ. μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση:

http://csdm.K12.mi.us/pages/crres/science.html

• Η εταιρεία General Electric Atomics, με έδρα το Σαν Ντιέγκο της Καλιφόρνιας, είναι θυγατρική της General Dynamics που ιδρύθηκε το 1955 και διαθέτει βάση δεδομένων φυσικής την οποία ονομάζει DIII-D (και η οποία χρησιμοποιήθηκε από την ομάδα ITER Physics Expert Group). Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση:

http://fusion.gat.com/ITER

• Το Τμήμα φυσικής του Queen Mary and Westfield College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου διατηρεί επιστημονικές βάσεις δεδομένων στις διευθύνσεις:

http://www.library.qmw.ac.uk/phys/physwww.htm

http://www.ph.qmw.ac.uk/resources.html

• Στην Αυστραλία, και συγκεκριμένα στη βιβλιοθήκη της Ακαδημίας Αμυντικών Δυνάμεων, υπάρχει πλούσιος κατάλογος με θέματα φυσικής· μπορείτε να τα βρείτε στη διεύθυνση:

http://www.lib.adfa.edu/web/scieng/physres.htm

• Στο Τμήμα πυρηνικής φυσικής του Πανεπιστημίου Λουντ της Σουηδίας διατίθενται σημαντικές στατιστικές πληροφορίες σχετικά με τα ζητήματα της πυρηνικής φυσικής· μπορείτε να τις βρείτε στη διεύθυνση:

http://nucleardata.nuclear.lu.se/stat.htm

• Μια πύλη η οποία αφορά αποκλειστικά τη φυσική είναι η PhysLINK.com· διαθέτει τμήμα πληροφοριών σχετικά με τις παγκόσμιες σταθερές, την πυρηνική φυσική και τα στοιχειώδη σωματίδια, τις μετατροπές μονάδων, το ηλιακό μας σύστημα, τα ατομικά ρολόγια κ.λπ. Η σχετική διεύθυνση είναι:

http://physlink.com/reference.cfm

• Άλλη ενδιαφέρουσα συλλογή από εκατό σχεδόν πηγές πληροφοριών και υπηρεσιών μπορείτε να βρείτε στον κόμβο PhysicWeb, του οποίου η διεύθυνση είναι

http://physicsweb.org/TIPTOP/paw/paw.phtml?k=Directories&f=l&t=k

Στη συλλογή διακρίναμε βάσεις δεδομένων σχετικές με την υδροδυναμική, τα μαθηματικά, το πλάσμα, τις υψηλές ενέργειες, την οπτική και τα λέιζερ, την πυρηνική φυσική, τη θερμοδυναμική, τους ημιαγωγούς κ.λπ.

• Μια ενδιαφέρουσα συλλογή βάσεων δεδομένων σε θέματα ατομικής και μοριακής φυσικής, φυσικής πλάσματος, αστρονομίας, κ.λπ. υπάρχει στη διεύθυνση:

http://www-cfadc.phy.ornl.gov/databases.html

• Η προσπάθεια του Προγράμματος Open Directory βασίζεται σε εθελοντές και έχει σκοπό να φιλοξενεί όσους επιθυμούν να συμμετέχουν σε συλλογή πληροφοριών. Το εν λόγω Πρόγραμμα διαθέτει τμήμα φυσικής με διάφορα θέματα, όπως π.χ. αυτό της κρυσταλλογραφίας. Η διεύθυνσή του είναι:

http://dmoz.org/Science/Physics

• Η Εταιρεία Ευρωπαίων Φυσικών (EPS) διατηρεί βάσεις δεδομένων για τις αντίστοιχες ενώσεις 36 ευρωπαϊκών κρατών, συμπεριλαμβανομένης της Ελλάδας. Η διεύθυνση της Εταιρείας είναι:

http://www.nikhef.nl/pub/eps/epsa.html

• Η NASA διαθέτει στο κοινό όλες τις επιστημονικές αναφορές από τα προγράμματά της στις διευθύνσεις:

http://techreports.larc.nasa.gov/ntrs/ntrs-faq.html

http://techreports.larc.nasa.gov/cgi/cgi-bin/NTRS

• Υλικό για τη διδασκαλία της φυσικής σε πανεπιστημιακό επίπεδο διατίθεται μέσω του Κέντρου Φυσικής του Πανεπιστημίου του Σάρεϊ, στην Αγγλία. Το υλικό μπορείτε να το βρείτε στη διεύθυνση:

http://www.ph.surrey.ac.uk/cti/catalog

• Το Παγκόσμιο Κέντρο Πληροφοριών Ηλιακής και Πλανητικής Φυσικής βρίσκεται στη διεύθυνση:

http://www.ngdc.noaa.gov/stp

• Η τεχνολογική βάση δεδομένων του Ευρωπαϊκού Κέντρου Πυρηνικών Ερευνών (CERN) βρίσκεται στη διεύθυνση:

http://web1.cern.ch/TTDB/introduction_user.html

• Αν σας ενδιαφέρουν οι διαλέξεις πανεπιστημιακών δασκάλων από όλο τον κόσμο σε όλα τα επιστημονικά θέματα κατανεμημένες αλφαβητικά, θα τις βρείτε στο Πανεπιστήμιο της Πολιτείας του Τέξας, στις διευθύνσεις:

http://www.utexas.edu/world/lecture

http://www.utexas.edu/world/lecture/phy

(Για τη φυσική και μόνο μετρήσαμε περισσότερες από 60 διαλέξεις.)

• Η βάση δεδομένων Aladdin δημιουργήθηκε για την ανταλλαγή και οργάνωση πληροφοριών στα ερευνητικά πεδία της ατομικής και μοριακής φυσικής και στη φυσική του πλάσματος· βρίσκεται στη διεύθυνση:

http://www-amdis.iaea.org/aladdin.html

• Πληροφορίες σχετικές με τη δυναμική των ρευστών είναι συγκεντρωμένες στη διεύθυνση:

http://www.cfd-online.com/Resources/projs.html

• Βάσεις δεδομένων για την ατομική φυσική και τη φυσική πλάσματος θα βρείτε συγκεντρωμένες στη διεύθυνση:

http://plasma-gate.weizmann.ac.il/DBfAPP.html

• Το εργαστήριο του Πανεπιστημίου του Μπέρκλεϊ στην Καλιφόρνια έχει συγκεντρώσει πληροφορίες για τις ακτίνες X στη διεύθυνση:

http://www-cxro.lbl.gov/optical_constants/web.html

• Το Κέντρο γραμμικού επιταχυντή του Πανεπιστημίου του Στάνφορντ διαθέτει περισσότερα από 415.000 άρθρα γύρω από τη φυσική υψηλών ενεργειών στη διεύθυνση:

http://www-spires.slac.stanford.edu/find/hep

• Τεράστιο πλήθος αρχείων που αφορούν την ιστορία των μαθηματικών διατίθενται από τη Μαθηματική Σχολή του Πανεπιστημίου Saint Adrews, στο Φάιφ της Σκωτίας, στη διεύθυνση:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history

• Πάνω από 200.000 μαθηματικά αρχεία είναι οργανωμένα από το Πανεπιστήμιο του Σύδνεϋ, στην Αυστραλία, και μπορείτε να τα ερευνήσετε αρχίζοντας από τη διεύθυνση:

http://www.maths.usyd.edu.au:8000/MathSearch.html

• Στο Διαδίκτυο υπάρχουν όλοι οι νόμοι της φυσικής, οργανωμένοι αλφαβητικά, και μπορείτε να τους βρείτε στη διεύθυνση:

http://www.alcyone.com/max/physics/laws/index.html

• Το αγγλικό επιστημονικό δίκτυο ScienceNet επιτρέπει την αναζήτηση πληροφοριών στις βάσεις δεδομένων του· μπορείτε να τις βρείτε στη διεύθυνση:

http://www.sciencenet.org.uk/Resources/phusresources.html

• Συστηματοποιημένες πληροφορίες για την αστρονομία και την αστροφυσική μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση:

http://www.stsci.edu/astroweb/astronomy.html

• Εντυπωσιακή συλλογή πληροφοριών διατηρεί κάποιος κύριος ονόματι Martindale. (Οι περισσότερες πληροφορίες είναι επιστημονικοί πίνακες και εργαλεία.) Η διεύθυνση της συλλογής είναι:

http://www-sci.lib.uci.edu/~martindale/Ref3.html

• Στην εικονική βιβλιοθήκη του Παγκόσμιου Ιστού μπορείτε να βρείτε περιορισμένο αριθμό θεμάτων φυσικής στη διεύθυνση:

http://www.vlib.org/Physics.html

• Ο κ. Eric Weisstein συγγράφει την *Εγκυκλοπαίδεια της Φυσικής*. Για να δείτε τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα της προσπάθειάς του, επισκεφθείτε τη διεύθυνση:

http://www.treasure-troves.com/physics/physics0.html

• Το Concordia College στο Μούρχεντ της Πολιτείας της Μινεσότα έχει οργανώσει θέματα σύγχρονης φυσικής στη διεύθυνση:

http://www.cord.edu/dept/physics/p244/mpsites.html

• Τον κόσμο του παγκοσμίως γνωστού φυσικού Stephen Hawking μπορείτε να επισκεφθείτε στη διεύθυνση:

http://www.pbs.org/wnet/hawking/html/home.html

• Μάθετε για τη ζωή και το έργο των μεγάλων μαθηματικών και φυσικών όλων των εποχών στις διευθύνσεις:

http://physics.hallym.ac.kr/reference/physicist/physicist/html

http://physics.hallym.ac.kr/reference/physicist/mathematician.html

• Τέλος, τα πλέον συχνά ερωτούμενα θέματα φυσικής (faq) βρίσκονται επιτυχώς οργανωμένα στη διεύθυνση:

http://math.ucr.edu/home/baez/physics/faq.html

Αυτά για το παρόν τεύχος. Καλή περιήγηση.

Το δευτεροβάθμιο τριώνυμο

«...καλείσθω δε η τοιαύτη τομή παραβολή.»
—Απολλωνίου, Κωνικά

A. Bolibruch, V. Uroev και M. Shabunin

Η παράσταση

$$ax^2 + bx + c,$$

όπου a, b και c είναι δεδομένοι αριθμοί και $a \neq 0$, ονομάζεται δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x. Οι τιμές τού x για τις οποίες το δευτεροβάθμιο τριώνυμο μηδενίζεται καλούνται *ρίζες* του τριωνύμου.

Στις εξετάσεις συναντάμε συχνά προβλήματα που απαιτούν γνώση των ιδιοτήτων των δευτεροβάθμιων τριωνύμων. Πολλοί μαθητές μπορούν να γράψουν εύκολα διάφορους τύπους και να σχεδιάσουν το γράφημα της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + c$, ενώ είναι εξοικειωμένοι με τις βασικές της ιδιότητες. Όμως, αυτή η γνώση είναι συχνά επιφανειακή και πολλοί μαθητές δεν είναι σε θέση να την εφαρμόσουν στην επίλυση προβλημάτων.

Σε αυτό το άρθρο θα δείξουμε, μέσω παραδειγμάτων, τη σπουδαιότητα του συνδυασμού αλγεβρικών και γεωμετρικών συλλογισμών στην επίλυση προβλημάτων που αφορούν δευτεροβάθμια τριώνυμα.

1. *Βρείτε τη μέγιστη τιμή του δευτεροβάθμιου τριωνύμου* $y = -2x^2 + 4x - 5$.

Όποιος είναι εξοικειωμένος με τον απειροστικό λογισμό μπορεί να χρησιμοποιήσει παραγώγους για να λύσει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Όμως, μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε εύκολα χωρίς απειροστικό λογισμό. Ας συμπληρώσουμε το τετράγωνο:

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x - 5 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1) + 2 - 5 \\ &= -2(x - 1)^2 - 3. \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη τιμή του τριωνύμου, που προκύπτει για $x = 1$, είναι -3.

Η μέθοδος της συμπλήρωσης του τετραγώνου χρησιμοποιείται για την εύρεση του τύπου που δίνει τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τη σχεδίαση του γραφήματος της γενικής δευτεροβάθμιας συνάρτησης $y = ax^2 + bx + c$. Πράγματι, αν συμπληρώσουμε το τετράγωνο, έχουμε

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι το γράφημα της δευτεροβάθμιας συνάρτησης προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση της παραβολής $y = ax^2$ κατά το διάνυσμα

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

2. *Στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται τέσσερις παραβολές. Καθεμιά περιγράφεται από μία συνάρτηση της μορφής* $y = ax^2 + bx + c$. *Προσδιορίστε, για κάθε περίπτωση, τα πρόσημα των αριθμών* a, b *και* c.

Θα εξετάσουμε λεπτομερώς την περίπτωση (i). Ο συντελεστής a είναι μικρότερος του 0, διότι οι κλάδοι της παραβολής κατευθύνονται προς τα κάτω. Η τετμημένη της κορυφής της παραβολής είναι $-b/2a$. Αφού είναι αρνητική, συμπεραίνουμε ότι $b < 0$. Η τεταγμένη του σημείου στο οποίο η παραβολή τέμνει τον άξονα y ισούται με την τιμή τής $f(x) = ax^2 + bx + c$ για $x = 0$. Επομένως, το $c = f(0)$ είναι θετικό. Άρα, έχουμε $a < 0$, $b < 0$ και $c > 0$.

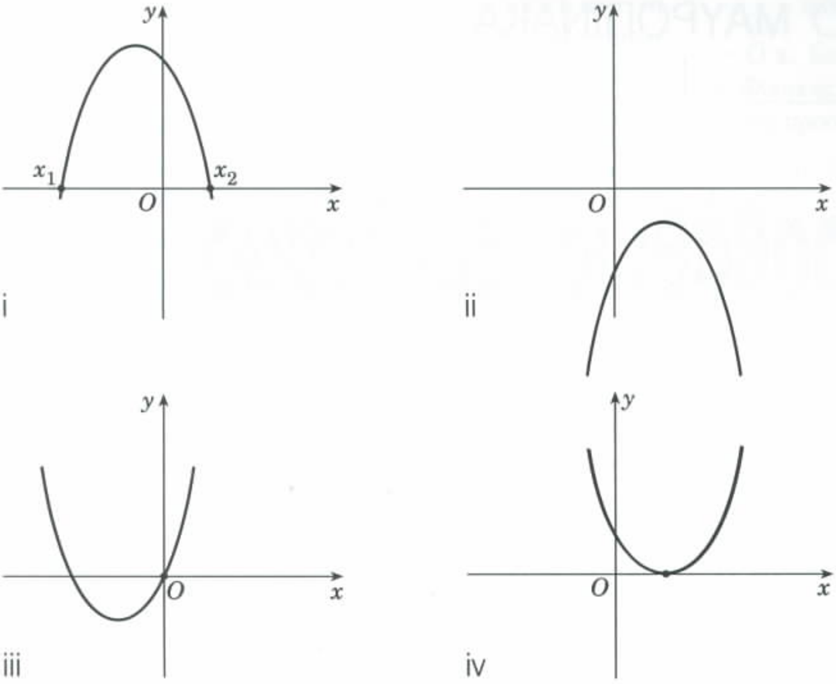
Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$. Όμως, αυτή η μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση (ii), όπου οι ρίζες είναι μιγαδικές.

Οι αναγνώστες μπορούν να αναλύσουν μόνοι τους τις περιπτώσεις (ii), (iii) και (iv).

3. *Έστω ότι οι ρίζες* x_1 *και* x_2 *της δευτεροβάθμιας εξίσωσης* $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$ *ικανοποιούν τη συνθήκη* $x_1^2 + x_2^2 = 18$. *Βρείτε την τιμή τού* r.

Πρώτα εκφράζουμε το $x_1^2 + x_2^2$ συναρτήσει του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών. Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (2r)^2 - 2 \cdot (-7r^2) = 18r^2. \end{aligned}$$



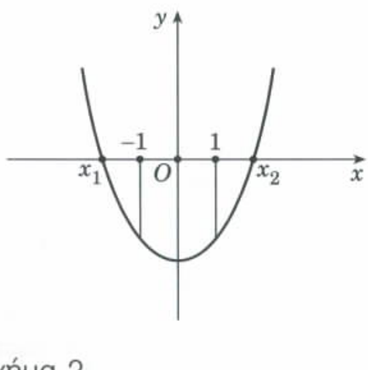
Σχήμα 1

Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης $r^2 = 1$, απ' όπου βρίσκουμε ότι $r_1 = 1$ και $r_2 = -1$. Το μόνο που απομένει είναι να ελέγξουμε ότι οι ρίζες υπάρχουν και για τις δύο αυτές τιμές τού r.

4. *Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε οι ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $f(x) = x^2 + px + q = 0$ να έχουν διαφορετικό πρόσημο και να είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μεγαλύτερες του 1.*

Η λύση που βασίζεται στη διακρίνουσα και τον τύπο των ριζών του τριωνύμου είναι μάλλον επίπονη. Όμως, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί εύκολα με τη βοήθεια γεωμετρικών συλλογισμών.

Πρώτα, θα βρούμε μια αναγκαία συνθήκη. Έστω $x_1 < x_2$ (εδώ οι ρίζες



Σχήμα 2

είναι διαφορετικές). Μας δίνεται ότι $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$ —δηλαδή, το διάστημα $[-1, 1]$ ανήκει στο διάστημα $[x_1, x_2]$ (δείτε το Σχήμα 2). Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με το επόμενο σύστημα ανισοτήτων:

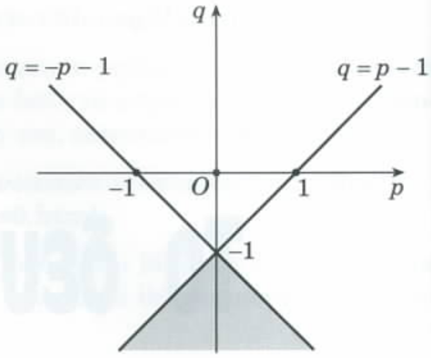
$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα 1 και -1 στην $f(x)$, καταλήγουμε στις αναγκαίες συνθήκες

$$\begin{cases} -p + q < -1, \\ p + q < -1. \end{cases} \qquad (2)$$

Η σχέση μεταξύ των p και q μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά μέσω ενός συνόλου σημείων (p, q) οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν τις ανισότητες (2) (δείτε το Σχήμα 3).

Θα αποδείξουμε ότι οι αναγκαίες συνθήκες (2) είναι και ικανές. Δηλαδή, αν ικανοποιούνται οι ανισότητες (2), οι ρίζες του δευτεροβάθμιου τριωνύμου $f(x) = x^2 + px + q$ ικανοποιούν τις ανισότητες $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$. Αφού οι συνθήκες (2) είναι ισοδύναμες με τις συνθήκες (1), η συνάρτηση $y = f(x)$ λαμβάνει αρνητικές τιμές σε δύο διαφορετικά σημεία ($x = 1$ και $x = -1$). Αφού ο συντελεστής



Σχήμα 3

τού x^2 είναι θετικός, οι κλάδοι της παραβολής $y = f(x)$ κατευθύνονται προς τα πάνω. Επομένως, η παραβολή τέμνει τον άξονα x σε δύο διαφορετικά σημεία x_1 και x_2 ($x_1 < x_2$), και τα σημεία -1 και 1 ανήκουν στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Συνεπώς, $x_1 < -1$ και $x_2 > 1$.

5. *Βρείτε όλες τις τιμές τού r για τις οποίες οι ρίζες της εξίσωσης $(r - 4)x^2 - 2(r - 3)x + r = 0$ είναι μεγαλύτερες του -1.*

Θεωρούμε ξεχωριστά την περίπτωση $r = 4$. Τότε, η εξίσωση γίνεται $-2x + 4 = 0$ και, επομένως, $x = 2$. Αφού $2 > -1$, η τιμή $r = 4$ ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Αν $r \neq 4$, έχουμε μία δευτεροβάθμια εξίσωση.

Θα λύσουμε ένα γενικότερο πρόβλημα: *Θα βρούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι οι ρίζες του δευτεροβάθμιου τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + c$ πραγματικές και μεγαλύτερες δοθέντος πραγματικού αριθμού d.*

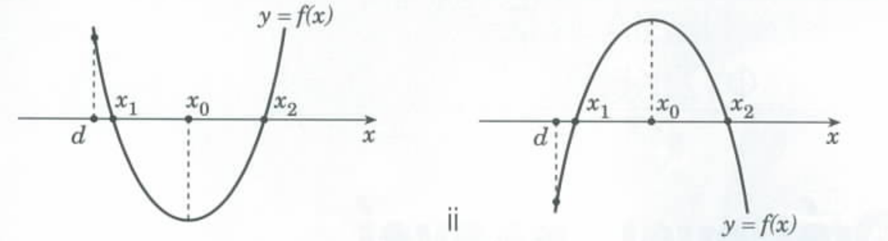
Ιδού μια γεωμετρική λύση. Οι λύσεις x_1 και x_2 πρέπει να υπάρχουν. Συνεπώς,

$$D = b^2 - 4ac \geq 0. \qquad (3)$$

Ας σχεδιάσουμε το γράφημα της $y = f(x)$. Το Σχήμα 4 παρουσιάζει τις δύο δυνατές περιπτώσεις. Αφού και οι δύο ρίζες είναι μεγαλύτερες του d, η τετμημένη της κορυφής της παραβολής είναι μεγαλύτερη του d. Δηλαδή, $x_0 = (x_1 + x_2)/2 > d$. Αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών, βρίσκουμε:

$$-\frac{b}{2a} > d. \qquad (4)$$

Το σημείο $x = d$ δεν ανήκει στο



Σχήμα 4

διάστημα $[x_1, x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι οι κλάδοι της παραβολής στην περίπτωση $a > 0$ και $f(d) > 0$ κατευθύνονται προς τα πάνω (Σχήμα 4i), ενώ στην περίπτωση $a < 0$ και $f(d) < 0$ κατευθύνονται προς τα κάτω (Σχήμα 4ii). Άρα, οι αριθμοί a και $f(d)$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Δηλαδή,

$$af(d) > 0. \qquad (5)$$

Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι οι συνθήκες (3)-(5) δεν είναι μόνο αναγκαίες αλλά και ικανές.

Νά και μια αλγεβρική λύση του ιδίου προβλήματος. Δύο πραγματικοί αριθμοί $x_1 - d$ και $x_2 - d$ είναι και οι δύο θετικοί αν και μόνο αν το άθροισμα και το γινόμενό τους είναι θετικά. Συνεπώς, η συνθήκη που δίνεται από το πρόβλημα ισοδυναμεί με τις επόμενες τρεις συνθήκες:

$$D = b^2 - 4ac \geq 0,$$
$$(x_1 - d) + (x_2 - d) > 0,$$
$$(x_1 - d)(x_2 - d) > 0.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών, μπορούμε να ξαναγράψουμε τη δεύτερη συνθήκη ως

$$x_1 + x_2 - 2d > 0,$$
$$\frac{x_1 + x_2}{2} > d,$$
$$-\frac{b}{2a} > d.$$

Η τρίτη συνθήκη μπορεί να γραφτεί ως

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2)d + d^2 > 0,$$
$$a(ad^2 + bd + c) > 0,$$
$$af(d) > 0.$$

Επομένως, αποδείξαμε ακόμα μία φορά ότι ο συνδυασμός των συνθηκών (1)-(3) είναι ισοδύναμος με τις δεδομένες συνθήκες του γενικότερου προβλήματος.

Επιστρέφουμε στο Πρόβλημα 5 και γράφουμε τις συνθήκες (1)-(3) γι' αυτή την περίπτωση. Καταλήγουμε στο επόμενο σύστημα ανισοτήτων:

$$\begin{cases} (r-3)^2 - r(r-4) = 9 - 2r \geq 0, \\ \dfrac{r-3}{r-4} > -1, \\ (r-4)(4r-10) > 0. \end{cases}$$

Αν επιλύσουμε αυτές τις ανισότητες, βρίσκουμε $r < 5/2$ ή $4 < r \leq 9/2$. Σε αυτές τις λύσεις πρέπει επίσης να προσθέσουμε την τιμή $r = 4$.

Απάντηση:

$$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \left[4, \frac{9}{2}\right].$$

Προβλήματα

6. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + px + q = 0$. Βρείτε τα p και q αν δίνεται ότι $x_1 + 1$ και $x_2 + 1$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - p^2x + pq = 0$.

7. Το γράφημα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $y = ax^2 + bx + c$ τέμνει δύο παράλληλες ευθείες και ορίζει πάνω τους τα τμήματα AB και CD. Αποδείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα αυτών των τμημάτων είναι παράλληλη προς τον άξονα y.

8. Αν το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + c$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και αν οι συντελεστές του ικανοποιούν την ανισότητα $a - b + c < 0$, βρείτε το πρόσημο του c.

9. Έστω ότι οι ρίζες x_1 και x_2 του δευτεροβάθμιου τριωνύμου $ax^2 + bx + c$ είναι διαφορετικές. Αποδείξτε ότι ένας αριθμός x_0 βρίσκεται μεταξύ των ριζών x_1 και x_2 αν και μόνο αν $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$.

10. Έστω ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ έχει θετικές ρίζες και ακόμη ότι $a < 0$. Βρείτε το πρόσημο του c.

11. Έστω ότι οι συντελεστές των εξισώσεων $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ και $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ ικανοποιούν την εξίσωση $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον μία από αυτές τις εξισώσεις έχει πραγματικές ρίζες.

12. Είναι δυνατόν η εξίσωση $x^2 + px + q = 0$, όπου p και q ρητοί αριθμοί, να έχει τις επόμενες ρίζες:

(α) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

(β) $x_1 = \sqrt{3} + 2$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$;

13. Αποδείξτε ότι κάθε ρητή ρίζα της εξίσωσης $x^2 + px + q = 0$, όπου οι συντελεστές p και q είναι ακέραιοι, είναι ακέραιος αριθμός.

14. Έστω ότι οι εξισώσεις $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ και $x^2 + p_2x + q_2 = 0$, με ακέραιους συντελεστές p_i και q_i ($i = 1, 2$), έχουν μία κοινή μη ακέραια λύση. Αποδείξτε ότι $p_1 = p_2$ και $q_1 = q_2$.

15. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ και $S_m = x_1^m + x_2^m$ (όπου m θετικός ακέραιος). Αποδείξτε τη σχέση $aS_m + bS_{m-1} + cS_{m-2} = 0$. ◙

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 24*

μα; Μπορούμε να διαβεβαιώσουμε τον αναγνώστη ότι η πραγματοποίησή του δεν ενέχει καμία καταστρατήγηση των νόμων της φυσικής. Το κύριο πρόβλημα έγκειται στην πηγή ενέργειας. Αλλά αυτή είναι και η «αχίλλειος πτέρνα» σε όλα τα διαστημικά προγράμματα. Πώς θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένα σώμα με τόσο μεγάλη μάζα; Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είτε ένα σώμα με πολύ μεγάλο όγκο είτε ένα υλικό με πολύ μεγάλη πυκνότητα. ◙

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

• A. Stasenko, «Από την άκρη του σύμπαντος στα Τάρταρα», Μάιος/Ιούνιος 1996.

• A. Byalko, «Μια πτήση στον Ήλιο», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1997.

• V. Surdin, «Πηδώντας από άστρο σε άστρο», Μάιος/Ιούνιος 1997.

• V. Mozhaev, «Το πλανητικό δίχτυ», Μάρτιος/Απρίλιος 1998.

• Ser. Pikin, «Συνθήκη έλλειψης βαρύτητας», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1998.

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κυλιόμενοι τροχοί

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

«Το έργο αυτό, έλεγε, είναι σπουδαίο· πρέπει να βρεις τη σωστή κλίση —ολόκληρη επιστήμη! Μήνες παιδευόμουν, μα του κάκου· ο νους του ανθρώπου στα μεγάλα έργα μαθές δε φτάνει, χρειάζεται και Θεού φώτιση...»
—Νίκος Καζαντζάκης, Αλέξης Ζορμπάς

Η ΕΠΙΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΚΑΛΥΤΕΡΟΥ «Ο-χήματος ελεύθερης καθόδου» συνιστά ένα πρόβλημα που εμπίπτει στην αρμοδιότητα των μηχανικών. Εάν συμφωνήσουμε να κρίνουμε την επιτυχία της εκάστοτε προτεινόμενης λύσης βάσει της ταχύτητας με την οποία φτάνει το όχημα στη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου, τότε πώς θα έπρεπε να επιλεγούν οι κατάλληλοι τροχοί; Συμπαγείς τροχοί, ακτινωτοί τροχοί, κύλινδροι, σφαίρες, περιστρεφόμενα καρούλια, καθώς και διάφοροι συνδυασμοί των προαναφερόμενων δυνατοτήτων προβάλλουν ως πιθανές υποψήφιες λύσεις.

Για να λάβει κανείς την ορθή απόφαση ασφαλώς απαιτείται να διαθέτει επαρκή κατανόηση της κύλισης των σωμάτων. Μολονότι οι περισσότεροι άνθρωποι δείχνουν να είναι πολύ εξοικειωμένοι με τους τροχούς, υπάρχουν μερικοί απλοί γρίφοι που αποκαλύπτουν τον μάλλον περίπλοκο και σκοτεινό χαρακτήρα της κίνησης. Ζητήστε από διάφορους ανθρώπους να σας περιγράψουν την τροχιά ενός σημείου του πέλματος τροχού ποδηλάτου. Συγκρίνετε τις απαντήσεις που θα λάβετε με την πραγματική τροχιά, την οποία θα προσδιορίσετε κυλώντας ένα δίσκο και κατασκευάζοντας τη σχετική καμπύλη. Η τροχιά είναι μια κυκλοειδής —κατά πάσαν πιθανότητα, κανένας απ' όσους ρωτήσατε δεν θα σας έδωσε αυτή την απάντηση, ή τουλάχιστον όχι με την πρώτη!

Ιδού ένας απλούστερος γρίφος. Τοποθετήστε δύο πεντάδραχμα το ένα δίπλα στο άλλο με το κεφάλι του Αριστοτέλη προς τα πάνω. Κρατήστε με το ένα χέρι το δεξιό ακίνητο, και με το άλλο αναγκάστε το αριστερό πεντάδραχμο να κυλήσει πάνω του χωρίς να ολισθαίνει. Ποιον προσανατολισμό θα έχει το κεφάλι του Αριστοτέλη όταν το κέρμα θα φτάσει στην αριστερή πλευρά του σταθερού πεντάδραχμου; Κάντε το πείραμα που σας προτείνουμε και κατόπιν προσπαθήστε να εξηγήσετε το αποτέλεσμα.

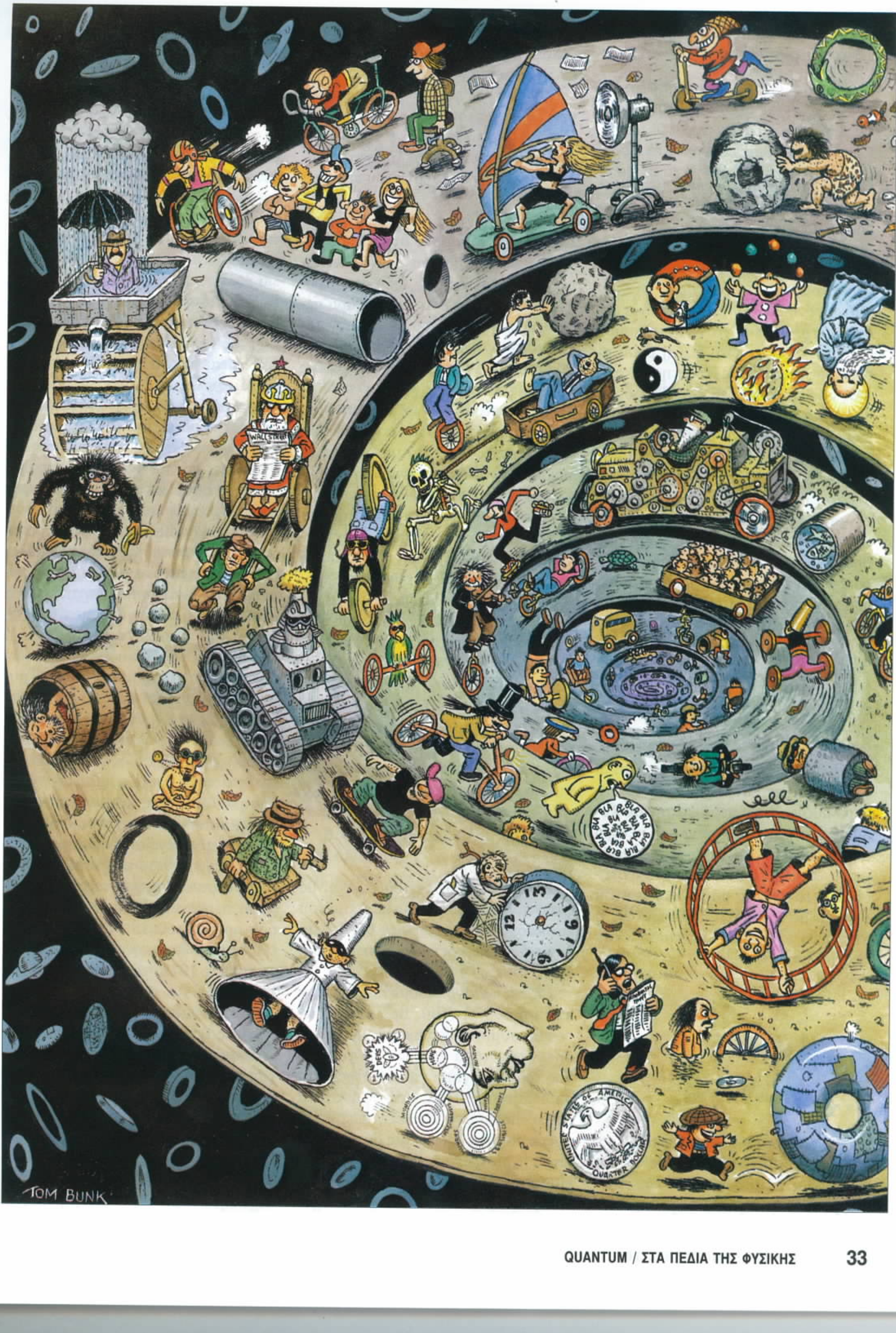
Τέλος, πάρτε μια σανίδα και βάλτε τη να ακουμπήσει στο πάνω μέρος των τροχών ενός παιδικού καροτσιού. Όταν το καρότσι θα κινηθεί προς τα εμπρός, θα κινηθεί μαζί του και η σανίδα; Αν όχι, γιατί;

Όταν παρατηρούμε τον τροχό ενός αυτοκινήτου να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, διαπιστώνουμε ότι το σημείο με το οποίο ο τροχός «πατά» στο έδαφος ακινητεί στιγμιαία ως προς αυτό. Δεν υπάρχει γλίστρημα εδώ. Η ταχύτητα του κέντρου του τροχού συμπίπτει με την ταχύτητα με την οποία κινείται το αυτοκίνητο. Όταν το αυτοκίνητο διανύσει απόσταση ενός μέτρου προς τα δεξιά, το κέντρο του τροχού επίσης μετατοπίζεται κατά ένα μέτρο προς τα δεξιά. Η «κορυφή» του τροχού κινείται ομοίως προς τα δεξιά, αλλά με πόση ταχύτητα;

Στην προσπάθειά μας να εξιχνιάσουμε το μυστήριο της κίνησης του τροχού, θα μας βοηθήσει πολύ η ανάλυση της κινητικής του ενέργειας. Εάν θεωρήσουμε τον τροχό ως έναν στερεό κύλινδρο, τότε, όταν ο συγκεκριμένος κύλινδρος περιστρέφεται περί τον άξονα συμμετρίας του που παραμένει σταθερός στο χώρο, η κινητική ενέργειά του ισούται με την κινητική ενέργεια των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \sum \frac{1}{2} m v^2.$$

Εφόσον όλες τούτες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, η ταχύτητα v της καθεμιάς τους ισούται με $r\omega$, όπου το r


TOM BUNK

δηλώνει την απόστασή της από το κέντρο περιστροφής:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \sum \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m r^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2.$$

Η ποσότητα Θ που εμφανίζεται στην τελική έκφραση ορίζεται ως η ροπή αδράνειας του περιστρεφόμενου σώματος. Πρόκειται για μέγεθος το οποίο μας παρέχει ένα μέτρο της αδράνειας του σώματος ως προς την περιστροφή: όπως η μάζα φανερώνει πόσο δύσκολο είναι να επιταχύνουμε ένα αντικείμενο, έτσι και η ροπή αδράνειας αποτελεί μέτρο της δυσκολίας που παρουσιάζει το να θέσουμε σε περιστροφική κίνηση το αντικείμενο.

Ωστόσο, στην περίπτωση του κυλιόμενου τροχού, η στιγμιαία περιστροφή πραγματοποιείται γύρω από το σημείο επαφής του με το έδαφος. Ο ορισμός της κινητικής ενέργειας προφανώς δεν αλλάζει, μόνο που τώρα χρειάζεται να προσδιορίσουμε τη ροπή αδράνειας γύρω από αυτό το νέο σημείο, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται ευκολότατα με τη βοήθεια του θεωρήματος των παράλληλων αξόνων (το οποίο συχνά αναφέρεται και ως θεώρημα του Steiner)

$$\Theta = \Theta_K + md^2,$$

όπου το d συμβολίζει την απόσταση του άξονα περιστροφής από το κέντρο μάζας. Στην περίπτωση του κυλιόμενου τροχού, το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής είναι το σημείο επαφής με το έδαφος, του οποίου η απόσταση από το κέντρο μάζας του τροχού ισούται με την ακτίνα. Επομένως, η κινητική ενέργεια του κυλιόμενου τροχού ισούται με

$$\begin{aligned} E_{\kappa\iota\nu} &= \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\Theta_K + mR^2\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\Theta_K\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\Theta_K\omega^2 + \frac{1}{2}mv_K^2. \end{aligned}$$

Η ανάλυση του κυλιόμενου τροχού έχει πλέον απλουστευθεί σημαντικά. Η κινητική ενέργειά του ισούται με το άθροισμα δύο όρων που επιδέχονται σαφέστατη φυσική ερμηνεία: Ο πρώτος αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια του τροχού λόγω της περιστροφής του γύρω από το κέντρο μάζας του, ενώ ο δεύτερος περιγράφει την κινητική ενέργεια λόγω της μεταφοράς ολόκληρης της μάζας του με την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Ούτως εχόντων των πραγμάτων, λοιπόν, οδηγούμαστε στη διαπίστωση ότι το κέντρο του τροχού κινείται με την ταχύτητα v_K, και ότι ο τροχός εκτελεί προς στιγμήν καθαρά περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από το σημείο επαφής του με το έδαφος. Συνεπώς, κάθε σημείο του έχει ταχύτητα κάθετη στην επιβατική του ακτίνα ως προς το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής και μέτρου ωr, όπου r το μέτρο τής εν λόγω επιβατικής ακτίνας. Έτσι, ενώ η ταχύτητα του σημείου επαφής με το έδαφος προφανώς μηδενίζεται, για το μεν κέντρο του τροχού η ταχύτητα ισούται με ωR, για τη δε κορυφή του είναι $2\omega R$. Η κορυφή του τροχού, λοιπόν, κινείται με διπλάσια ταχύτητα απ' ό,τι το κέντρο μάζας του.

Ο νόμος διατήρησης της ενέργειας μας επιτρέπει να βρούμε την τελική ταχύτητα ενός τροχού που κυλίεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Η απώλεια δυναμικής ενέργειας ισούται με την αύξηση της κινητικής ενέργειας, τόσο λόγω μεταφοράς όσο και λόγω περιστροφής:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_K^2 + \frac{1}{2}\Theta_K\omega^2.$$

Συνεπώς, διαφορετικοί τροχοί θα φτάσουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με διαφορετικές ταχύτητες λόγω των διαφορετικών ροπών αδράνειάς τους.

Για να κατανοήσουμε πλήρως την κύλιση του τροχού, πρέπει να διερευνήσουμε τη δυναμική της κίνησης. Γιατί τάχα να περιστρέφεται ένας τροχός —γιατί να περιστρέφεται οποιοδήποτε σώμα; Αν άφηνα ένα στυλό πάνω στο τραπέζι, πώς θα έπρεπε να εφαρμόσετε μια δύναμη για να το περιστρέψετε; Μια δύναμη της οποίας ο φορέας θα διερχόταν από το κέντρο μάζας του, απλώς θα επιτάχυνε το στυλό· για να το θέσετε σε περιστροφή, απαιτείται να ασκήσετε δύναμη που ο φορέας της να μη διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Μια τέτοια δύναμη παράγει ροπή ως προς το κέντρο μάζας, η οποία ορίζεται ως το εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο της εφαρμοζόμενης δύναμης $\mathbf{F}$ επί την επιβατική ακτίνα $\mathbf{r}$ (ως προς το κέντρο μάζας) κάποιου σημείου του φορέα τής $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}.$$

Η δύναμη της βαρύτητας εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας του τροχού και, ως εκ τούτου, αποκλείεται να ευθύνεται για την περιστροφή. Ομοίως, ο φορέας της κάθετης δύναμης που ασκεί το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο μάζας και δεν παράγει ροπή. Η περιστροφή οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στη δύναμη της τριβής, που ασκείται στο σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος.

Για να σχεδιαστεί ένας τροχός, απαιτείται να σταθμιστούν και άλλοι παράγοντες που δεν θίχτηκαν στην παραπάνω ανάλυση. Ο μηχανικός θα λάβει υπόψη του την αντοχή των υλικών που χρειάζονται, την ευκολία της κατασκευής, το κόστος πρώτων υλών και παραγωγής, τις ανάγκες συντήρησης και επισκευών, την ανθεκτικότητα στο χρόνο και την αισθητική. Για να συνδυαστεί η μεγιστοποίηση της ταχύτητας του τροχού με την επίτευξη ασφαλούς λειτουργίας, χαμηλού κόστους και ανθεκτικότητας, απαιτούνται λεπτοί συμβιβασμοί και επίδειξη μεγάλης δημιουργικότητας εκ μέρους του μηχανικού.

Το θέμα του τρέχοντος τεύχους εν μέρει προέρχεται από ένα πρόβλημα που αρχικά τέθηκε στην 6η Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής, η οποία διοργανώθηκε το 1972 στο Βουκουρέστι της Ρουμανίας.

Α. Αποδείξτε ότι όλες οι στερεές σφαίρες θα φτάσουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με την ίδια ταχύτητα, ανεξάρτητα από την τιμή της ακτίνας τους και της μάζας τους. Λάβετε υπόψη σας ότι η ροπή αδράνειας μιας στερεάς σφαίρας ισούται με $2mR^2/5$.

Β. Προσδιορίστε τους λόγους των ταχυτήτων με τις οποίες φτάνουν στη βάση κεκλιμένου επιπέδου ένας κύλινδρος, μια στεφάνη και μια στερεά σφαίρα που έχουν την ίδια μάζα. Οι ροπές αδράνειας των τριών σωμάτων είναι αντίστοιχα $mR^2/2$, mR^2 και $2mR^2/5$.

Γ. Θεωρήστε τρεις κυλίνδρους του ίδιου μήκους, της ίδιας εξωτερικής ακτίνας και της ίδιας μάζας. Ο πρώτος κύλινδρος είναι στερεός. Ο δεύτερος έχει μορφή κοίλου σωλήνα με τοιχώματα πεπερασμένου πάχους. Ο τρίτος είναι επίσης ένας κοίλος σωλήνας όμοιος με τον δεύτερο, με τοιχώματα του ίδιου πεπερασμένου πάχους, μόνο που έχει γεμιστεί με ένα υγρό πυκνότητας ίδιας με εκείνη των τοιχωμάτων (τα δύο του άκρα έχουν σφραγιστεί με λεπτούς δίσκους αμελητέας μάζας). Βρείτε και συγκρίνετε τις γραμμικές και γωνιακές επιταχύνσεις των κυλίνδρων όταν αφήνονται να κυλήσουν σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης α. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των κυλίνδρων και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ. Η τριβή μεταξύ του υγρού και των τοιχωμάτων του τρίτου κυλίνδρου θεωρείται αμελητέα.

Ένα ζήτημα πολυπλοκότητας

Το πρόβλημα που θέσαμε στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 2000 προερχόταν από τη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής του περασμένου καλοκαιριού, η οποία διοργανώθηκε στην Πάντοβα της Ιταλίας. Ένας κατακόρυφος κύλινδρος γεμάτος με αέριο και κλεισμένος από πάνω με κινητό γυάλινο έμβολο φωτίζεται από ένα λέιζερ επί πεπερασμένο χρόνο. Καθώς το αέριο απορροφά το φως, παρατηρούμε το γυάλινο έμβολο να κινείται προς τα πάνω.

Α. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την τελική πίεση και θερμοκρασία του αερίου, ας αρχίσουμε από την παρατήρηση ότι η αρχική θερμοκρασία συμπίπτει με εκείνη του δωματίου, η οποία δίνεται και ισούται με 20,0°C. Η αρχική και η τελική πίεση συμπίπτουν. Η διαφορά των πιέσεων που επικρατούν μέσα και έξω από τον κύλινδρο πρέπει να είναι αρκούντως μεγάλη ώστε να αντισταθμίζει το βάρος της γυάλινης πλάκας. Συνεπώς,

$$P_\tau = P_a = P_0 + \frac{mg}{\pi r^2},$$

όπου $P_0 = 101{,}3\ \mathrm{kN/m^2}$ η ατμοσφαιρική πίεση. Εισάγοντας τις τιμές $r = 50$ mm και $m = 800$ g, βρίσκουμε ότι $P_\tau = 102{,}3\ \mathrm{kN/m^2}$.

Ας βρούμε τώρα και τον αρχικό όγκο του αερίου. Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων, έχουμε

$$V_a = \frac{nRT_0}{P_a}.$$

Εφόσον μας δίνεται μόνο η μετατόπιση Δs του γυάλινου εμβόλου, για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον τελικό όγκο θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε και το αρχικό ύψος του εμβόλου:

$$h_a = \frac{V_a}{\pi r^2} = \frac{nRT_0}{P_0\pi r^2 + mg}.$$

Έτσι,

$$V_\tau = V_a\left(\frac{h_a + \Delta s}{h_a}\right).$$

Μέσω της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων, παίρνουμε

$$T_\tau = T_0\left(\frac{V_\tau}{V_a}\right) = T_0\left(1 + \frac{\Delta s}{h_a}\right) =$$
$$T_0 + \frac{\Delta s\left(P_0\pi r^2 + mg\right)}{nR}.$$

Εισάγοντας την τιμή $\Delta s = 30{,}0$ mm, βρίσκουμε $T_\tau = 322$ K, ή $\theta_\tau = 49$°C.

Β. Το μηχανικό έργο που παρήχθη δίνεται από το γινόμενο της δύναμης που ασκούσε το αέριο στο γυάλινο έμβολο επί τη μετατόπιση:

$$W = (P_0\pi r^2 + mg)\Delta s,$$

από όπου παίρνουμε την τιμή 24,3 J.

Γ. Η εσωτερική ενέργεια του αερίου αυξάνεται κατά

$$\Delta U = nc_V\Delta T,$$

οπότε, βάσει του Πρώτου Νόμου της θερμοδυναμικής, η θερμότητα που απορροφήθηκε πρέπει να ισούται με

$$Q = \Delta U + W =$$
$$nc_V\,\frac{T_0\Delta s}{h_a} + \left(P_0\pi r^2 + mg\right)\Delta s =$$
$$\Delta s\left(P_0\pi r^2 + mg\right)\left(\frac{c_V}{R} + 1\right).$$

Η τελική έκφραση δίνει την αριθμητική τιμή 85,3 J.

Δ. Δεδομένου ότι το λέιζερ λειτουργεί μόνον επί 10,0 s, η ισχύς του ισούται με $P = Q/\Delta t = 8{,}53$ W. Το φως του λέιζερ έχει μήκος κύματος $\lambda = 514$ nm, οπότε κάθε φωτόνιο έχει ενέργεια $E = hc/\lambda$, όπου h η σταθερά του Planck. Συνεπώς, ο αριθμός των φωτονίων που εκπέμπονται ανά μονάδα χρόνου ισούται με

$$\frac{P\lambda}{hc} = 2{,}2\cdot 10^{19}\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Ε. Εύκολα πλέον υπολογίζεται ο συντελεστής απόδοσης με τον οποίο αυτή η «θερμική» μηχανή μετατρέπει τη φωτεινή ενέργεια σε βαρυτική δυναμική ενέργεια, και ο οποίος βρίσκεται ίσος με

$$\eta = \frac{mg\Delta s}{Q} = 0{,}28\%.$$

ΣΤ. Όταν στρέψουμε τον κύλινδρο έτσι ώστε ο άξονάς του να προσανατολιστεί οριζόντια, έχουμε μια αδιαβατική μεταβολή της πίεσης από P_τ σε P_0. Όπως γνωρίζουμε, κατά την αδιαβατική εκτόνωση αερίου διατηρείται σταθερή η ποσότητα PV^γ, όπου

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}.$$

Έτσι, ισχύει η σχέση

$$\frac{V_{\sigma\tau\rho}}{V_\tau} = \left(\frac{P_\tau}{P_{\sigma\tau\rho}}\right)^{1/\gamma}.$$

Επειδή κατά τη διαδικασία μεταβάλλονται και η πίεση και η θερμοκρασία του αερίου, η θερμοκρασία μετά τη στροφή βρίσκεται ως εξής:

$$T_{\sigma\tau\rho} = T_\tau\left(\frac{P_{\sigma\tau\rho}}{P_\tau}\right)\left(\frac{V_{\sigma\tau\rho}}{V_\tau}\right) =$$
$$T_\tau\left(\frac{P_{\sigma\tau\rho}}{P_\tau}\right)\left(\frac{P_\tau}{P_{\sigma\tau\rho}}\right)^{1/\gamma} = T_\tau\left(\frac{P_{\sigma\tau\rho}}{P_\tau}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Η έκφραση στην οποία καταλήξαμε δίνει θερμοκρασία 321 K, πράγμα που σημαίνει μια μικρή πτώση κατά έναν μόνο βαθμό Kelvin. ◙

Αν υπηρχε καποιος διαγωνισμός για τις φυσικές έννοιες, τότε ανάμεσα σ' εκείνες που θα έθεταν σοβαρή υποψηφιότητα για το πρώτο βραβείο δεν θα μπορούσε να λείπει η ενέργεια σύνδεσης. Ως ιδιαίτερο γνωστικό αντικείμενο, ο υποψήφιος φυσικός συνήθως τη συναντά στο τελευταίο έτος των σπουδών του, όταν καταπιάνεται με τη μελέτη των ελκτικών δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των σωματιδίων του πυρήνα. Υπό μία ευρύτερη έννοια, όμως, ως ενέργεια σύνδεσης θα μπορούσε να θεωρηθεί το απαιτούμενο έργο ώστε να αποχωριστούν δύο σώματα τα οποία αρχικά βρίσκονται σε μια δέσμια κατάσταση λόγω της αμοιβαίας τους έλξης και να απομακρυνθούν σε τέτοια απόσταση που να μην αναπτύσσεται πλέον κάποια έλξη ανάμεσά τους. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια του άρθρου, εφόσον η ενέργεια σύνδεσης νοηθεί κατ' αυτό τον τρόπο, σε πολλές περιπτώσεις ο ρόλος της αποδεικνύεται ουσιώδης για την κατανόηση των αρχών που διέπουν το σύμπαν μας.

Διότι, αλήθεια, δεν είναι η ενέργεια σύνδεσης που «ευθύνεται» για την ευστάθεια των πλανητικών συστημάτων, των μορίων, των ατόμων και των πυρήνων τους; Εξετάζοντας προσεκτικά φαινόμενα και διαδικασίες όπως η τήξη και η εξαέρωση, ο ιονισμός και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, η πτήση ενός διαστημοπλοίου και η ραδιενεργός διάσπαση, φαινόμενα που εκ πρώτης όψεως δείχνουν ολωσδιόλου ανόμοια, συνειδητοποιούμε ότι η έννοια της ενέργειας σύνδεσης μας βοηθά να ανακαλύψουμε πολλά κοινά γνωρίσματα στον ετερογενή κόσμο που μας περιβάλλει. Με άλλα λόγια, η ενέργεια σύνδεσης είναι έννοια με συμπαντική εμβέλεια που ενοποιεί ποικίλες φυσικές αλληλεπιδράσεις.

Ελπίζουμε ότι το παρόν άρθρο θα βοηθήσει τον αναγνώστη να αντιμετωπίζει πλέον τον φυσικό κόσμο με λιγότερη απαισιοδοξία απ' ό,τι ο ξακουστός άγγλος ποιητής του 17ου αιώνα John Donne. Αναμφίβολα, οι στίχοι του θα απέπνεαν περισσότερη αισιοδοξία αν στην εποχή του ήταν γνωστή μια έννοια τόσο συνθετική όσο εκείνη της ενέργειας σύνδεσης.

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Ένας αστροναύτης βρίσκεται μέσα σε διαστημόπλοιο το οποίο κινείται σε τροχιά γύρω από τη Γη. Το γεγονός ότι βρίσκεται σε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας πιστοποιεί την απώλεια οποιασδήποτε σύνδεσής του με τη Γη;

2. Η κινητική ενέργεια ενός δορυφόρου που κινείται σε κυκλική τροχιά είναι θετική. Ποιο είναι το πρόσημο της ολικής μηχανικής του ενέργειας;

3. Πότε απαιτείται να προσδώσουμε περισσότερη ενέργεια σ' έναν πύραυλο ώστε να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο ενός πλανήτη, όταν εκτοξεύεται από την επιφάνεια του πλανήτη ή όταν εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω του;

4. Όταν εξατμίζεται ένα υγρό που περιέχεται σε ένα δοχείο χωρίς να το θερμαίνουμε παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία του πέφτει. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

5. Γιατί τα «γλυπτά» που φιλοτεχνούν τα παιδιά στην παραλία μπορεί να κατασκευαστούν μόνο με βρεγμένη άμμο και όχι με στεγνή;

6. Κατά τη διάλυση κρυστάλλων αλατιού σε νερό παρατηρείται διάσταση των δομικών μονάδων τους, η οποία επιφέρει αύξηση της δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης των ιόντων. Πού οφείλεται το παραπάνω φαινόμενο;

7. Με ποιον τρόπο είναι δυνατόν να προκληθεί δραστική αύξηση του πλήθους των ζευγών ηλεκτρονίων-οπών σε έναν ημιαγωγό;

8. Δύο ηλεκτρικά ουδέτερες πλάκες από διαφορετικά μέταλλα έχουν ίδιες συγκεντρώσεις ελεύθερων ηλεκτρονίων. Ποια από τις δύο θα αποκτήσει αρνητικό φορτίο αν τεθούν σε αγώγιμη επαφή;

9. Είναι η θερμική εκπομπή ηλεκτρονίων και η εξαέρωση υγρού παρόμοιες διαδικασίες;

10. Με ποιον τρόπο είναι δυνατόν να μεταβληθεί το ρεύμα κόρου σε μια δίοδο λυχνία κενού;

11. Γιατί επαρκεί σχετικά μικρή τάση για να συντηρείται η φωτοβολία ενός βολταϊκού τόξου;

12. Γιατί τα ηλεκτρόνια παίζουν κατά πολύ σημαντικότερο ρόλο από τα βαριά ιόντα (παρόλο που και αυτά επιταχύνονται από το ηλεκτρικό πεδίο) στον ιονισμό κρούσης ο οποίος οδηγεί στις αυτοτελείς εκκενώσεις στα αέρια;

13. Είναι δυνατόν ένα άτομο υδρογόνου να απορροφήσει ένα φωτόνιο με ενέργεια μεγαλύτερη από την ενέργεια σύνδεσης του ατόμου;

14. Πότε απαιτείται να προσφέρουμε περισσότερη ενέργεια; Όταν αποδεσμεύεται το πρώτο ή όταν αποδεσμεύεται το δεύτερο ηλεκτρόνιο από ένα άτομο ηλίου;

15. Είναι δυνατόν ένα πρωτόνιο σε ελεύθερη κατάσταση να ενωθεί με ένα ηλεκτρόνιο (παράγοντας ένα άτομο υδρογόνου) χωρίς να εκπεμφθεί ακτινοβολία;

16. Στον πυρήνα ή στο ηλεκτρονικό νέφος του ατόμου συντελούνται οι διαδικασίες που έχουν ως αποτέλεσμα την εκπομπή ακτινών β;

17. Η συχνότητα του φωτός που εκπέμπεται από την επιφάνεια ενός άστρου είναι υψηλότερη από εκείνη που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής. Σε τι οφείλεται η διαφορά;

Μικροπειραματισμοί

Ρίξτε μερικές σταγόνες ελαιόλαδου ή άλλου φυτικού ελαίου σε μια λεκάνη γεμάτη με νερό. Τι σχήμα θα πάρουν; Ποιες δυνάμεις εξασφαλίζουν τη συνοχή τους και δεν επιτρέ-

ΚΑΛ

Περί ενέρ

«Σε στοιχεία το σύμ
διαλύονται, ο κόσμος

...ιας σύνδεσης

...θρυμματίζεται. Οι δεσμοί ...νεται στα συντρίμμια του.»
—John Donne

...πουν στο ελαιόλαδο να απλωθεί ομοιόμορφα στην επιφάνεια του νερού;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

...οι πολέμιοι της θεωρίας του Κοπέρνικου πίστευαν ότι η Γη είναι τόσο βαριά, τόσο αδρανής και τόσο δυσκίνητη, ώστε απέκλειαν το ενδεχόμενο να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Υποστήριζαν πως στην αντίθετη περίπτωση ο πλανήτης μας θα διαλυόταν εις τα εξ ων συνετέθη όπως ένας σφόνδυλος που η περιστροφή του επιταχύνεται χωρίς όριο. Αργότερα ο Kepler χρειάστηκε να μηχανευτεί κάποιες αόρατες ακτίνες, όπως του ποδηλάτου, οι οποίες συνδέουν τους πλανήτες με τον Ήλιο και τους αναγκάζουν να κινούνται στις τροχιές τους.

...η ενέργεια που απαιτείται για να εκτοξευτεί ένα αντικείμενο μάζας ενός χιλιογράμμου και να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης παράγεται από την καύση 1,5 λίτρου βενζίνης (δίχως να ληφθούν υπόψη οι απώλειες).

...η σταθερότητα των περισσότερων αντικειμένων που μας περιβάλλουν οφείλεται στο γεγονός ότι η ενέργεια της θερμικής κίνησης των μορίων τους δεν επαρκεί για να διασπάσει τους χημικούς δεσμούς που τα κρατούν ενωμένα.

...στη δεκαετία του 1920, η κβαντική μηχανική εφαρμόστηκε στη διερεύνηση της φύσης των χημικών δεσμών. Με τη συνδρομή της, και έπειτα από πολυετείς επίπονους υπολογισμούς, επιτεύχθηκε πλήρης συμφωνία ανάμεσα στη θεωρία και τα πειραματικά δεδομένα. Έτσι γεννήθηκε ένας νέος επιστημονικός τομέας, η κβαντική χημεία, η οποία σήμερα χρησιμοποιεί ισχυρότατους υπολογιστές για να εκτελεί τους αναγκαίους υπολογισμούς στα προβλήματα που την απασχολούν.

...η ανάλυση της ακτινοβολίας του βόρειου σέλαος οδήγησε στο συμπέρασμα ότι στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας τα μόρια του οξυγόνου διασπώνται υπό την επίδραση της υπεριώδους ηλιακής ακτινοβολίας σε άτομα τα οποία, στη συνέχεια, σπινθηροβολούν ξεχωριστά.

...όταν η θερμοκρασία στα αέρια υπερβαίνει τους πέντε ή έξι χιλιάδες βαθμούς, παρατηρείται θερμικός ιονισμός. Τα ηλεκτρόνια αποβάλλονται από τα άτομα και η ύλη μεταβαίνει στην κατάσταση του πλάσματος. Η ανάλυση της ακτινοβολίας που εκπέμπει το πλάσμα επέτρεψε στους επιστήμονες να προσδιορίσουν τη φύση της ιονόσφαιρας, των άστρων, καθώς επίσης και τη φύση της εκκένωσης αερίου. Δεν αποκλείεται, μάλιστα, να μας προσφέρει και το κλειδί για τη λύση του μυστηρίου που αφορά τη φύση του σφαιρικού κεραυνού.

...ο Niels Bohr, ο δημιουργός του πασίγνωστου μοντέλου της δομής του ατόμου, το οποίο φέρει και το όνομά του, δημοσίευσε μια εργασία του για το συγκεκριμένο θέμα με τον τίτλο «Σύνδεση ενός ηλεκτρονίου με έναν θετικά φορτισμένο πυρήνα».

...η χημική αδράνεια των ευγενών αερίων εξηγήθηκε χάρη στη μελέτη των εξωτερικών ηλεκτρονικών φλοιών των ατόμων τους. Όταν αυτοί οι φλοιοί είναι πλήρεις, τότε η σύνδεση του ηλεκτρονίου με τον πυρήνα καθίσταται η ισχυρότερη δυνατή. Στο ήλιο η ενέργεια αυτού του δεσμού είναι η μεγαλύτερη μεταξύ όλων των ατόμων.

...πριν από έναν αιώνα, ένας νεαρός φυσικός που άκουγε στο όνομα Ernest Rutherford κατάφερε να εξηγήσει το φαινόμενο του ιονισμού των αερίων πειραματιζόμενος με τις ραδιενεργές ουσίες που είχαν προσφάτως ανακαλυφθεί. Στα πειράματά του χρησιμοποίησε ένα ηλεκτροσκόπιο που εκφορτιζόταν ταχύτατα στον ιονισμένο αέρα. Αυτή η εκπληκτική συσκευή, που αποτελούνταν από μία μεταξωτή βούρτσα, ηλεκτριζόταν κάθε φορά που ο Rutherford έτριβε ελαφρά τη βάση της με μια «θερμή και στεγνή καπνοσακούλα». Αναλογιστείτε λοιπόν το επίπεδο των πειραματικών τεχνικών που χρησιμοποιούνταν εκατό χρόνια πριν!

...η αναπόφευκτη αποτυχία στην οποία οδηγήθηκαν οι προσπάθειες των αλχημιστών να μετατρέψουν ένα χημικό στοιχείο σε κάποιο άλλο —δηλαδή να μεταστοιχειώσουν τους πυρήνες—, οφείλεται στο γεγονός ότι η ενέργεια σύνδεσης ανά σωματίδιο στους πυρήνες είναι περίπου ένα εκατομμύριο (!) φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια των χημικών δεσμών μεταξύ των ατόμων.

...οι πυρήνες των ατόμων που περιέχουν τους αποκαλούμενους μαγικούς αριθμούς πρωτονίων και νετρονίων έχουν μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης, πράγμα που σημαίνει ότι ανθίστανται περισσότερο στη διάσπασή τους. Η έρευνα για τέτοιου είδους πυρήνες, οι οποίοι αποτελούν «νησίδες σταθερότητας» έξω από τον περιοδικό πίνακα του Mendeleev, μόλις πρόσφατα επιβραβεύτηκε με την παρασκευή του 114ου στοιχείου σε ένα εργαστήριο της πόλης Ντούμπνα, κοντά στη Μόσχα.

...τα κουάρκ, τα μικρότερα δομικά συστατικά του πυρήνα, δεν απαντούν σε ελεύθερη κατάσταση, παρόλο που τα πειράματα έχουν πείσει απόλυτα τους ερευνητές για την ύπαρξή τους. Οι δυνάμεις που τα κρατούν «συγκολλημένα» είναι τόσο ασυνήθιστες και ισχυρές, ώστε δίκαια έχει παρατηρηθεί ότι τα «κουάρκ βρίσκονται υπό περιορισμόν».

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Το μικρό θεώρημα του Fermat

Αποδεικνύοντας την αξία του για τους μαθηματικούς

V. Senderov και A. Spivak

Η ΣΥΝΗΘΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗ ΥΛΗ ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΠΟΛΛΑ πράγματα από τη θεωρία αριθμών. Οποιοσδήποτε όμως ενδιαφέρεται για τα μαθηματικά θα θελήσει τελικά να μελετήσει αυτό το όμορφο κομμάτι τους και θα ζητήσει να μάθει για το μικρό θεώρημα του Fermat. Το συγκεκριμένο θεώρημα δεν είναι μόνο όμορφο· είναι και χρήσιμο. Οι R. Graham, D. Knuth και O. Patashnik, ειδικοί στην επιστήμη των υπολογιστών και συγγραφείς του εγχειριδίου *Concrete Mathematics* που απευθύνεται σε φοιτητές της επιστήμης των υπολογιστών, συμπεριέλαβαν το εν λόγω θεώρημα στο βιβλίο τους.

Το θεώρημα που παρουσιάζουμε στο παρόν άρθρο ανακαλύφθηκε το 1640 από τον Pierre Fermat (1601-1665), ο οποίος ήταν δικηγόρος στην Τουλούζη της Γαλλίας. Η διατύπωσή του ακούγεται εξαιρετικά απλή: *Αν ο p είναι πρώτος και ο a ακέραιος, τότε το $a^p - a$ είναι πολλαπλάσιο του p.* Σε πρώτη ματιά μπορεί να μην καθίσταται φανερός ο λόγος που είναι τόσο σημαντική αυτή η απλή πρόταση. Στην πραγματικότητα όμως αξίζει ιδιαίτερης προσοχής.

Θα αρχίσουμε με μερικές έννοιες που μπορεί εύκολα να κατανοήσει ένας μαθητής του λυκείου και θα καταλήξουμε σε κάποιες πρόσφατες ανακαλύψεις στην κρυπτογραφία.

Ειδικές περιπτώσεις

Μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων a και $a + 1$, ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Επομένως, το γινόμενο $a(a + 1) = a^2 + a$ είναι άρτιο για κάθε ακέραιο a.

Μια διαφορετική απόδειξη του γεγονότος ότι ο $a^2 + a$ διαιρείται διά του 2 προκύπτει αν θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις:

Αν ο a είναι άρτιος, τότε ο a^2 είναι επίσης άρτιος, και το άθροισμα των δύο άρτιων αριθμών a και a^2 είναι άρτιο.

Αν ο a είναι περιττός, τότε ο a^2 είναι επίσης περιττός, και το άθροισμα των δύο περιττών αριθμών a και a^2 είναι άρτιο.

Πρόκειται για αξιοσημείωτη ιδιότητα του πολυωνύμου $a^2 + a$. Μια ειδική περίπτωση του μικρού θεωρήματος του Fermat αφορά παρόμοιο αποτέλεσμα για ένα άλλο πολυώνυμο, το $a^2 - a = (a - 1)a$. Όλες οι ακέραιες τιμές αυτού του πολυωνύμου είναι επίσης άρτιες.

Άσκηση 1. Αποδείξτε το παραπάνω γεγονός.

Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο $a^3 - a$. Η παραγοντοποίησή του είναι απλή:

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1).$$

Τούτο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων και, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, πρέπει να είναι άρτιο. Μπορούμε όμως να πούμε κάτι περισσότερο. Αφού ο ένας από τρεις διαδοχικούς ακεραίους διαιρείται διά του 3, το γινόμενό τους $(a - 1)a(a + 1) = a^3 - a$ είναι πολλαπλάσιο του 3 (επομένως, πολλαπλάσιο του 6).

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι για κάθε ακέραιο a το άθροισμα $a^3 + 5a$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

Ας συνεχίσουμε να εξετάζουμε τις ακέραιες τιμές του πολυωνύμου $a^n - a$ για διάφορους εκθέτες n. Τι συμβαίνει όταν $n = 4$; Για $a = 2$ και $a = 3$, το πολυώνυμο $a^4 - a$ παίρνει τις τιμές $2^4 - 2 = 14$ και $3^4 - 3 = 78$. Αυτές οι τιμές είναι άρτιες και δεν έχουν άλλον κοινό διαιρέτη εκτός του 2 (και του 1). Ατυχία! Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι το 4 είναι σύνθετος αριθμός. Το μικρό θεώρημα του Fermat μάς λέει ότι όλες οι τιμές του πολυωνύμου $a^p - a$, όπου a ακέραιος, έχουν κοινό παράγοντα αν το p είναι πρώτος. Δεν μας δίνει καμιά πληροφορία για το τι συμβαίνει αν το p δεν είναι πρώτος.

Έστω $p = 5$. Ας υπολογίσουμε διάφορες τιμές του πολυωνύμου $a^5 - a$. Για $a = \pm 1$ και για $a = 0$, η τιμή είναι μηδέν. Αν συνεχίσουμε τους υπολογισμούς θα βρούμε ότι $2^5 - 2 = 30$, $3^5 - 3 = 240$, $4^5 - 4 = 1020$, $5^5 - 5 = 3120$,

Εικονογράφηση: Yuri Vaschenko

$6^5 - 6 = 7770$, ... Όλες αυτές οι τιμές είναι πολλαπλάσια του 30.

Ας αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει γενικώς. Έχουμε ότι $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ και, επομένως, η απόδειξη της διαιρετότητας διά του 30 αναλύεται σε τρία μέρη: πρώτα, πρέπει να αποδείξουμε ότι το $a^5 - a$ είναι πολλαπλάσιο του 2, μετά ότι είναι πολλαπλάσιο του 3 και, τέλος, ότι είναι πολλαπλάσιο του 5.

Το πρώτο μέρος δεν είναι δύσκολο: τα a^5 και a έχουν ίδια ισοτιμία: και τα δύο είναι είτε άρτια είτε περιττά. Το δεύτερο μέρος είναι επίσης απλό:

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = \\ a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1),$$

και το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται διά του 3.

Το τρίτο μέρος της απόδειξης είναι λίγο δυσκολότερο. Προφανώς, μεταξύ πέντε διαδοχικών ακεραίων υπάρχει ένα πολλαπλάσιο του 5. Συνεπώς, το γινόμενο $(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 5. Δυστυχώς, αυτή δεν είναι παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $a^5 - a$, το οποίο ισούται με $(a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$.

Τι μπορούμε να κάνουμε; Μια άμεση μέθοδος είναι να εξετάσουμε όλα τα υπόλοιπα που προκύπτουν από τη διαίρεση του a διά του 5: κάθε ακέραιος δίνει υπόλοιπο 0, 1, 2, 3 ή 4. Αν το υπόλοιπο είναι 0, τότε ο δεύτερος παράγοντας στο γινόμενο $(a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$ διαιρείται διά του 5. Αν το υπόλοιπο είναι 1 ή 4, τότε ο πρώτος ή ο τρίτος παράγοντας αντίστοιχα διαιρείται διά του 5. Αν, τέλος, το υπόλοιπο ισούται με 2 ή 3, τότε διαιρείται διά του 5 ο τέταρτος παράγοντας. Για τους μαθητές που δεν έχουν συνηθίσει να εργάζονται με υπόλοιπα, παραθέτουμε την επόμενη εξήγηση: Αν $a = 5b + 2$ —δηλαδή, αν το a δίνει υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθεί διά 5—, έχουμε $a^2 + 1 = (5b + 2)^2 + 1 = 5(5b^2 + 4b + 1)$. Ανάλογα αντιμετωπίζουμε την περίπτωση $a = 5b + 3$.

Μια διαφορετική προσέγγιση που καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα είναι η εξής. Μπορούμε να γράψουμε:

$$a^2 + 1 = (a - 2)(a + 2) + 5.$$

Επομένως, αν μας ενδιαφέρουν μόνο τα υπόλοιπα που προκύπτουν από τη διαίρεση διά του 5, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $a^2 + 1$ με το $(a - 2)(a + 2)$. Για να εκφράσουμε αυτή την ιδέα, χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό:

$$a^2 + 1 \equiv (a - 2)(a + 2) \pmod 5.$$

Το σύμβολο "≡" διαβάζεται «είναι ισότιμο» και το "mod" διαβάζεται «modulo». Ο συμβολισμός αυτός προτάθηκε από τον Gauss το 1801. Εξ ορισμού, το a είναι ισότιμο του b modulo n, αν το $a - b$ είναι πολλαπλάσιο του n — δηλαδή, αν $a - b = kn$, όπου k ακέραιος.

Ο συμβολισμός

$$a \equiv b \pmod n$$

είναι χρήσιμος, διότι οι ιδιότητες των ισοτιμιών μοιάζουν με αυτές των ισοτήτων. Για παράδειγμα, μπορούμε να προσθέτουμε ισοτιμίες: αν $a \equiv b \pmod n$ και $c \equiv d \pmod n$, τότε $a + c \equiv b + d \pmod n$.

Ας αποδείξουμε την τελευταία πρόταση. Εξ ορισμού, $a = b + kn$ και $c = d + ln$, όπου τα k και l ακέραιοι. Συνεπώς,

$$a + c = (b + kn) + (d + ln) = b + d + (k + l)n,$$

όπερ έδει δείξαι.

Κατ' αναλογία, οι τύποι

$$a - c = (b + kn) - (d + ln) = b - d + (k - l)n,$$

$$ac = (b + kn)(d + ln) = \\ bd + knd + bln + kln^2 = bd + (kd + bl + kln)n$$

αποδεικνύουν ότι οι ισοτιμίες αφαιρούνται και πολλαπλασιάζονται. Αφού πολλαπλασιάζονται, είναι δυνατόν να υψωθούν σε ακέραια δύναμη: αν $a \equiv b \pmod n$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό m ισχύει η ισοτιμία $a^m \equiv b^m \pmod n$.

Ωστόσο, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν διαιρούμε ισοτιμίες:

$$6 \equiv 36 \pmod{10},$$

αλλά

$$1 \not\equiv 6 \pmod{10}.$$

Άσκηση 3. Επιλύστε την ισοτιμία $3x \equiv 11 \pmod{101}$.

Άσκηση 4. Ποιοι ακέραιοι ικανοποιούν την ισοτιμία $14x \equiv 0 \pmod{12}$;

Άσκηση 5. Έστω $k \neq 0$. Αποδείξτε ότι

(i) αν $ka \equiv kb \pmod{kn}$, τότε $a \equiv b \pmod n$,

(ii) αν $ka \equiv kb \pmod n$ και οι αριθμοί k και n είναι πρώτοι προς αλλήλους, τότε $a \equiv b \pmod n$.

Ας εξετάσουμε περαιτέρω τα πολυώνυμα $a^p - a$. Θα αποδείξουμε ότι, για κάθε ακέραιο a, το $a^7 - a$ διαιρείται διά του 7. Όπως πριν, μπορούμε να εξετάσουμε τα επτά υπόλοιπα της διαίρεσης διά 7: $0^7 - 0 = 0$, $1^7 - 1 = 0$, $2^7 - 2 = 128 = 7 \cdot 18$, ..., $6^7 - 6 = 279930 = 7 \cdot 39990$. Μάλιστα, είναι δυνατόν να κάνουμε οικονομία: αφού κάθε ακέραιος μπορεί να γραφτεί ως $a = 7b$, $7b \pm 1$, $7b \pm 2$ ή $7b \pm 3$, μπορούμε, όταν εξετάζουμε το μικρό θεώρημα του Fermat, να θεωρήσουμε μόνο τις περιπτώσεις $a = 0, 1, 2$ και 3.

Ο μηχανικός όμως έλεγχος δεν αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμος. Περισσότερο αποκαλυπτική είναι η παραγοντοποίηση του πολυωνύμου:

$$a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^3 - 1)(a^3 + 1) = \\ a(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1).$$

Ισχύει ότι

$$a^2 + a + 1 = (a^2 + a - 6) + 7 \equiv \\ a^2 + a - 6 = (a - 2)(a + 3) \pmod 7$$

και

$$a^2 - a + 1 \equiv a^2 - a - 6 = (a + 2)(a - 3) \pmod 7.$$

Συνεπώς,

$$a^7 - a \equiv a(a - 1)(a - 2)(a + 3)(a + 1)(a + 2)(a - 3) \pmod 7.$$

Το γινόμενο επτά διαδοχικών ακεραίων διαιρείται διά του 7 και, επομένως, το $a^7 - a$ διαιρείται επίσης διά του 7, για κάθε ακέραιο a. Έτσι, το μικρό θεώρημα του Fermat αποδείχτηκε για την περίπτωση $p = 7$.

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι

(i) ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των αριθμών της μορφής $a^7 - a$ είναι το 42,

(ii) ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των αριθμών της μορφής $a^9 - a$ είναι το 30. (Επισημαίνουμε ότι το 30 δεν διαιρείται διά του 9. Αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι το 9 δεν είναι πρώτος αριθμός.)

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $p = 11$. Είναι προφανές ότι

$$a^{11} - a = a(a^{10} - 1) = a(a^5 - 1)(a^5 + 1) =$$
$$a(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1).$$

Αυτή τη φορά δεν είναι τόσο εύκολο να μαντέψουμε τι πρέπει να κάνουμε στη συνέχεια. Αλλά είναι δυνατή η εξαντλητική έρευνα και των έντεκα υπολοίπων. Μια τέτοια αναζήτηση θα μας δείξει ότι οι τιμές του πολυωνύμου $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ διαιρούνται διά του 11 για $a \equiv 3, 4, 5$ και $9 \pmod{11}$, ενώ οι τιμές τού $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$ διαιρούνται διά του 11 για $a \equiv 2, 6, 7$ και $8 \pmod{11}$.

Αν στο γινόμενο $(a - 3)(a - 4)(a - 5)(a - 9)$ εκτελέσουμε τις πράξεις, προκύπτει

$$(a^2 - 7a + 12)(a^2 - 14a + 45) \equiv (a^2 + 4a + 1)(a^2 - 3a + 1)$$
$$= a^4 + a^3 - 10a^2 + a + 1 \equiv a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \pmod{11}.$$

Ομοίως, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$(a - 2)(a - 6)(a - 7)(a - 8) \equiv a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 \pmod{11}.$$

Έτσι, το $a^{11} - a$ είναι ισότιμο με το γινόμενο 11 διαδοχικών ακεραίων, οπότε διαιρείται διά του 11.

Τι θα κάνουμε στη συνέχεια; Για $p = 13$, η μέθοδός μας απαιτεί να υψώσουμε τους αριθμούς 1 έως 12 στη δωδέκατη δύναμη και να κάνουμε τις πράξεις στο γινόμενο των δεκατριών παραγόντων $a - 6, a - 5, ..., a + 5, a + 6$. Αυτό είναι εξαιρετικά επίπονο, ακόμη και αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και 6 και πολλαπλασιάσουμε «μόνο» τις έξι παρενθέσεις $(a^2 - 1)(a^2 - 4)(a^2 - 9)(a^2 - 16)(a^2 - 25)(a^2 - 36)$.

Καθώς αυξάνει το p, αυξάνει και το πλήθος των περιπτώσεων που πρέπει να εξετάσουμε. Για να αποδείξουμε το μικρό θεώρημα του Fermat στη γενική μορφή, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ισχυρότερα επιχειρήματα.

Ασκήσεις

7.(i) Αποδείξτε ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών αριθμών διαιρείται διά του 24.

(ii) Αποδείξτε ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών αριθμών διαιρείται διά του 120.

(iii) Αποδείξτε ότι, για κάθε ακέραιο a, το $a^5 - 5a^3 + 4a$ διαιρείται διά του 120.

8. Αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό a, το a^5 λήγει στο ίδιο ψηφίο όπως το a (στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης).

9. Αποδείξτε ότι, για ακεραίους m και n, το $m^5n - mn^5$ διαιρείται διά του 30.

10. Αποδείξτε ότι, αν το k δεν διαιρείται με κανέναν απ' τους αριθμούς 2, 3 και 5, τότε το $k^4 - 1$ διαιρείται διά του 240.

11. (i) Αποδείξτε ότι το $2222^{5555} + 5555^{2222}$ διαιρείται διά του 7.

(ii) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(13^{14} + 15^{16})^{17} + 18^{19^{20}}$ διά του 7.

12. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $11^{10} - 1$ λήγει σε δύο μηδενικά (δηλαδή, διαιρείται διά του 100).

13. (i) Βρείτε όλους τους ακεραίους a για τους οποίους το $a^{10} + 1$ λήγει σε μηδέν.

(ii) Αποδείξτε ότι, για οποιονδήποτε ακέραιο a, ο αριθμός $a^{100} + 1$ δεν μπορεί να λήγει σε 0.

14. Έστω n ένας άρτιος αριθμός. Βρείτε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη όλων των αριθμών της μορφής $a^n - a$, όπου a ακέραιος.

15. Έστω n ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1. Αποδείξτε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών $a^n - a$, όπου το a παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές, συμπίπτει με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών $a^n - a$, όπου $a = 1, 2, 3, ..., 2^n$. Παρατηρήστε ότι από αυτή την πρόταση έπεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των αριθμών της μορφής $a^n - a$, όπου a ακέραιος, συμπίπτει με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη της μορφής $a^n - a$, αλλά για a φυσικό αριθμό.

Η γενική περίπτωση

Ας γράψουμε τους αριθμούς $1, 2, 3, ..., p - 1$, ας τους πολλαπλασιάσουμε επί a, όπου το a δεν διαιρείται διά του p, και ας θεωρήσουμε τα υπόλοιπα της διαίρεσης αυτών των γινομένων διά του p. Για παράδειγμα, όταν $p = 19$ και $a = 4$, προκύπτει ο Πίνακας 1.

Η τελευταία γραμμή αυτού του πίνακα περιέχει τους ίδιους αριθμούς με την πρώτη, διευθετημένους όμως σε διαφορετική σειρά. Αποδεικνύεται ότι τούτος είναι γενικός κανόνας. Όχι μόνο για $p = 19$ και $a = 4$, αλλά *για κάθε πρώτο αριθμό p και κάθε ακέραιο a που δεν είναι πολλαπλάσιο του p προκύπτουν, με κάποια σειρά, τα ίδια υπόλοιπα*, $1, 2, 3, ..., p - 1$.

Γιατί συμβαίνει αυτό; Πρώτα απ' όλα, η τελευταία γραμμή του πίνακα δεν μπορεί να περιέχει το 0, διότι το γινόμενο δύο αριθμών a και b, κανείς από τους ο-

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$4k$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72
$4k$ mod 19	4	8	12	16	1	5	9	13	17	2	6	10	14	18	3	7	11	15

Πίνακας 1

ποίους δεν διαιρείται διά του πρώτου αριθμού p, δεν μπορεί να διαιρείται διά του p. Δεύτερον, όλοι οι αριθμοί της τελευταίας γραμμής είναι διαφορετικοί. Αυτό το γεγονός μπορεί να αποδειχτεί έμμεσα: Αν οι αριθμοί xa και ya αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι διά του p (όπου x, y διαφορετικοί, μικρότεροι του p), τότε η διαφορά τους $xa - ya = (x - y)a$ διαιρείται διά p. Όμως, αυτό δεν μπορεί να αληθεύει, διότι το $x - y$ δεν διαιρείται διά p (είναι πολύ μικρό). Αυτές οι δύο απλές παρατηρήσεις αρκούν· από τη διαίρεση διά του p προκύπτουν ακριβώς $p - 1$ διαφορετικά υπόλοιπα και πρέπει όλα να εμφανιστούν μία φορά στην κάτω γραμμή του πίνακα.

Ασκήσεις

16. Υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε ο $1999n$ να λήγει στα ψηφία 987654321;

17. Αποδείξτε ότι αν ένας ακέραιος k είναι πρώτος ως προς έναν φυσικό αριθμό n, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός x τέτοιος ώστε ο $kx - 1$ να διαιρείται διά του n.

18. Αποδείξτε ότι αν οι ακέραιοι a και b είναι σχετικά πρώτοι, τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε ακέραιο c ως $c = ax + by$, όπου οι x, y ακέραιοι.

Υπενθυμίζουμε ότι το μικρό θεώρημα του Fermat βεβαιώνει πως, για κάθε ακέραιο a και κάθε πρώτο p, ο αριθμός $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ διαιρείται διά του p. Επομένως, για κάθε αριθμό a που δεν είναι πολλαπλάσιο του p, το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 1. *Αν ο ακέραιος a δεν διαιρείται διά του πρώτου αριθμού p, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του a^{p-1} διά του p ισούται με 1.*

Απόδειξη. Τα υπόλοιπα της διαίρεσης των αριθμών $a, 2a, 3a, ..., (p-1)a$ είναι μια μετάθεση των $1, 2, 3, ..., p-1$. Επομένως,

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) \pmod{p}.$$

Άρα,

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $(p-1)!$, προκύπτει η επιθυμητή ισοτιμία

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Αν δεν χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 5(ii) και τις ισοτιμίες, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον εξής συλλογισμό. Το γινόμενο $(a^{p-1} - 1)(p-1)!$ διαιρείται διά του p και, αφού το $(p-1)!$ δεν διαιρείται διά του p, ο αριθμός $a^{p-1} - 1$ διαιρείται διά του p.

Ασκήσεις

19. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 3^{2000} διά του 43.

20. Αποδείξτε ότι αν ένας ακέραιος a δεν διαιρείται διά του 17, τότε ούτε το $a^8 - 1$ ούτε το $a^8 + 1$ διαιρείται διά του 17.

21. Αποδείξτε ότι το $m^{61}n - mn^{61}$ διαιρείται διά του 56786730, για οποιουσδήποτε ακεραίους m και n.

22. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p που διαιρούν το $5^{p^2} + 1$.

23. Έστω p πρώτος αριθμός, διάφορος του 2. Αποδείξτε ότι το $7^p - 5^p - 2$ διαιρείται διά του $6p$.

24. Αποδείξτε ότι, για κάθε πρώτο αριθμό p, το άθροισμα $1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + (p-1)^{p-1}$ όταν διαιρεθεί διά p δίνει υπόλοιπο $p - 1$.

25. Διαλέξτε έναν τυχαίο εξαψήφιο αριθμό που διαιρείται διά του 7. Αφαιρέστε το τελευταίο αριστερά ψηφίο του και τοποθετήστε το δεξιά. Αποδείξτε ότι ο αριθμός που προκύπτει διαιρείται επίσης διά του 7. Για παράδειγμα, από τον αριθμό 632387, ο οποίος διαιρείται διά του 7, προκύπτει ο 323876, που επίσης διαιρείται διά του 7, ενώ από τον αριθμό 200004 προκύπτει ο 42, που και οι δύο διαιρούνται διά του 7.

26. Έστω p πρώτος αριθμός διάφορος των 2, 3 και 5. Αποδείξτε ότι ο αριθμός που αποτελείται από $p - 1$ μονάδες διαιρείται διά του p (για παράδειγμα, ο 111111 διαιρείται διά του 7).

27*. Αποδείξτε ότι, για κάθε πρώτο αριθμό p, ο αριθμός 11...1122...22...99..99 που αποτελείται από $9p$ ψηφία (στην αρχή p φορές το 1, μετά p φορές το 2, p φορές το 3, ... και, τέλος, p φορές το 9) αφήνει το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενος διά του p με το υπόλοιπο που αφήνει ο αριθμός 123456789 διά p.

Πίνακες πολλαπλασιασμού

Θεωρούμε τα $n - 1$ διαφορετικά υπόλοιπα της διαίρεσης διά του n. Θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα πολλαπλασιασμού θέτοντας το υπόλοιπο που προκύπτει από τη διαίρεση του ab διά του n στην τομή της γραμμής a και στήλης b. Για παράδειγμα, αν $n = 5$, έχουμε τον Πίνακα 2.

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Πίνακας 2

Για $n = 11$, προκύπτει ο Πίνακας 3.

Και στα δύο παραδείγματα, το n είναι πρώτος αριθμός. Άρα, κάθε γραμμή και κάθε στήλη περιέχει μια μετάθεση των αριθμών $1, 2, ..., n - 1$. Όμως, αν θεωρήσουμε έναν σύνθετο αριθμό, ο πίνακας θα περιέχει οπωσδήποτε μηδενικά. Για παράδειγμα, για $n = 4$ έχουμε τον Πίνακα 4.

Παρόμοια είναι η κατάσταση στην περίπτωση όπου $n = 12$ (Πίνακας 5). Και πάλι, μερικές γραμμές περιέχουν μηδενικά! Γενικά, για κάθε σύνθετο $n = ab$, όπου $1 < a < b < n$, η τομή της γραμμής a και της στήλης b περιέχει το υπόλοιπο της διαίρεσης του ab διά του n, το οποίο ισούται με 0.

Επομένως, αν ο n είναι σύνθετος, υπάρχουν *διαιρέτες του μηδενός*, δηλαδή μη μηδενικά υπόλοιπα a και b

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Πίνακας 3

τέτοια ώστε το υπόλοιπο ab να διαιρείται διά του n. Όμως, ακόμη και όταν ο n είναι σύνθετος, μερικές γραμμές του πίνακα πολλαπλασιασμού δεν περιέχουν μηδενικά. Στον Πίνακα 4 είναι η πρώτη και η τρίτη γραμμή, ενώ στον Πίνακα 5 είναι η πρώτη, πέμπτη, έβδομη και ενδέκατη γραμμή. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι γραμμές με αρίθμηση που έχει κοινό διαιρέτη με τον n (διάφορο του 1), και μόνο αυτές, περιέχουν μηδενικά.

×	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Πίνακας 4

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Πίνακας 5

Άσκηση 28. Αποδείξτε την προηγούμενη πρόταση.

Ας αφαιρέσουμε από τον πίνακα όλες τις γραμμές και τις στήλες που περιέχουν μηδέν. (Αν ο n είναι πρώτος, δεν χρειάζεται να αφαιρέσουμε καμία γραμμή.) Για $n = 4$, προκύπτει ένας πίνακας που αποτελείται από δύο μόνο γραμμές και δύο στήλες (Πίνακας 6).

×	1	3
1	1	3
3	3	1

Πίνακας 6

Για $n = 12$, έχουμε έναν πίνακα 4×4 (Πίνακας 7).

×	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Πίνακας 7

Άσκηση 29. Καθένας από τους Πίνακες 2 έως 7 είναι συμμετρικός ως προς τις δύο διαγωνίους του. Αποδείξτε ότι αυτό ισχύει για κάθε n.

Το θεώρημα Euler

Για να γενικεύσουμε το μικρό θεώρημα του Fermat και στην περίπτωση σύνθετων αριθμών n, διατηρούμε στους πίνακες πολλαπλασιασμού μόνο τις γραμμές και τις στήλες που δεν περιέχουν μηδενικά. Με άλλα λόγια, θεωρούμε τα υπόλοιπα που είναι σχετικά πρώτα ως προς τον n και έχουν προέλθει από τη διαίρεση διά n. Στον νέο πίνακα, οι γραμμές (ή οι στήλες) διαφέρουν μόνο ως προς τη σειρά των αριθμών που περιέχουν.

Άσκηση 30. Αν συμβολίσουμε με $a_1, a_2, ..., a_r$ τα υπόλοιπα που προκύπτουν όταν διαιρέσουμε με τον φυσικό αριθμό a και που είναι σχετικά πρώτα ως προς τον n και στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε κάθε υπόλοιπο με κάποιον αριθμό k που είναι σχετικά πρώτος ως προς τον n, προκύπτουν οι αριθμοί $ka_1, ka_2, ..., ka_r$ οι οποίοι είναι επίσης σχετικά πρώτοι ως προς τον n και δίνουν διαφορετικά υπόλοιπα αν διαιρεθούν διά του n. Αποδείξτε αυτή την πρόταση.

Λόγω του αποτελέσματος της Άσκησης 30, η ακολουθία υπολοίπων που προκύπτει από τη διαίρεση των αριθμών $ka_1, ka_2, ..., ka_r$ διά του n θα διαφέρει από την ακολουθία $a_1, a_2, ..., a_r$ μόνο ως προς τη σειρά των στοιχείων. Κατ' αναλογία με την περίπτωση των πρώτων αριθμών p, καταλήγουμε στην επόμενη σχέση για τον σύνθετο αριθμό n:

$$ka_1ka_2...ka_r \equiv a_1a_2...a_r \pmod{n}.$$

Επομένως,

$$(k^r - 1)a_1a_2...a_r \equiv 0 \pmod{n}.$$

Άρα, το γινόμενο $(k^r - 1)a_1a_2...a_r$ διαιρείται διά n. Αφού τα a_1, a_2, ..., a_r είναι σχετικά πρώτα ως προς τον n, ο $k^r - 1$ διαιρείται διά του n. Αν ο n είναι πρώτος αριθμός, έχουμε ότι $r = n - 1$ και καταλήγουμε στο μικρό θεώρημα του Fermat. Η γενική μορφή του θεωρήματος Euler είναι η εξής.

Θεώρημα 2. *Αν ο k είναι ακέραιος σχετικά πρώτος ως προς τον φυσικό n, τότε ο $k^r - 1$ διαιρείται διά n, όπου r το πλήθος των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι και σχετικά πρώτοι ως προς τον n.*

Ασκήσεις

31. Αποδείξτε ότι, αν ο k δεν διαιρείται διά 3, τότε

(i) ο k^3 δίνει υπόλοιπο 1 ή 8 όταν διαιρεθεί διά του 9,

(ii) ο k^{81} δίνει υπόλοιπο 1 ή 242 όταν διαιρεθεί διά του 243.

32. (i) Αποδείξτε ότι, αν το άθροισμα $a^3 + b^3 + c^3$ είναι διαιρετό διά του 9, τότε τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς a, b ή c διαιρείται διά του 3.

(ii) Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων τριών ακεραίων διαιρείται διά του 7 αν και μόνο αν το άθροισμα των τέταρτων δυνάμεων των ίδιων αριθμών διαιρείται διά του 7.

33. Αποδείξτε ότι ο $7^{7^{7^{7^{7}}}} - 7^{7^{7^{7}}}$ διαιρείται διά 10.

34. Ποια είναι τα τελευταία τρία ψηφία του αριθμού 7^{9999};

35. Αποδείξτε ότι, για θετικούς περιττούς ακεραίους n, το $2^{n!} - 1$ διαιρείται διά n.

36*. Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς $n > 1$ για τους οποίους το άθροισμα $1^n + 2^n + ... + (n-1)^n$ διαιρείται διά n.

37*. Για κάθε φυσικό αριθμό s, υπάρχει φυσικός αριθμός n που είναι πολλαπλάσιο του s και τέτοιος ώστε το άθροισμα των ψηφίων του n να ισούται με s.

Η συνάρτηση Euler

Το 1763, ο Leonard Euler (1707-1783) εισήγαγε το συμβολισμό $\varphi(n)$ για το πλήθος r των υπολοίπων (της διαίρεσης διά n) που είναι σχετικά πρώτα ως προς n. Για παράδειγμα, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(4) = 2$ και $\varphi(12) = 4$.

Αν ο p είναι πρώτος, τότε $\varphi(p) = p - 1$. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το $\varphi(p^m)$, όπου m φυσικός αριθμός. Γράφουμε όλα τα p^m δυνατά υπόλοιπα: 0, 1, 2, ..., $p^m - 1$. Από αυτούς τους αριθμούς μόνο τα υπόλοιπα 0, p, $2p$, ..., $p^m - p$, διαιρούνται διά του p. Συνεπώς,

$$\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1} = p^m\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το $\varphi(1000)$, δηλαδή το πλήθος των αριθμών που ανήκουν στην πρώτη χιλιάδα και δεν διαιρούνται ούτε διά 2 ούτε διά 5. Προς τούτο, αφαιρούμε από το 1000 το πλήθος των άρτιων αριθμών της πρώτης χιλιάδας. Επίσης, αφαιρούμε το 200, που είναι το πλήθος των πολλαπλασίων του 5 στην πρώτη χιλιάδα. Πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη μας το γεγονός ότι μερικοί αριθμοί (αυτοί που λήγουν στο ψηφίο 0) διαιρούνται και διά του 2 και διά του 5. Υπάρχουν εκατό τέτοιοι αριθμοί, καθένας από τους οποίους υπολογίστηκε δύο φορές. Επομένως, το ορθό αποτέλεσμα δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(1000) = 1000 - 500 - 200 + 100 = 400.$$

Ασκήσεις

38. Βρείτε το $\varphi(2^a5^b)$, όπου a και b φυσικοί αριθμοί.

39. Έστω p και q διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί. Βρείτε (i) το $\varphi(pq)$ και (ii) το $\varphi(p^aq^b)$, όπου a και b είναι φυσικοί αριθμοί.

40. Λύστε τις εξισώσεις (i) $\varphi(7^x) = 294$, (ii) $\varphi(3^x5^y) = 360$.

Θεωρητικά, η μέθοδος που έχουμε χρησιμοποιήσει μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το $\varphi(n)$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε το $\varphi(300)$ γράφουμε τους αριθμούς από το 1 έως το 300 και αφαιρούμε από τον κατάλογο τους εκατόν πενήντα άρτιους αριθμούς, τους εκατό αριθμούς που διαιρούνται διά 3 και τους εξήντα αριθμούς που διαιρούνται διά 5. Ορισμένοι από αυτούς τους αριθμούς αφαιρέθηκαν δύο φορές (και μερικοί τρεις). Για να επανορθώσουμε την αδικία, πρέπει να προσθέσουμε ξανά πενήντα αριθμούς που διαιρούνται διά του $2 \cdot 3 = 6$, τριάντα αριθμούς που διαιρούνται διά του $2 \cdot 5 = 10$, και δεκαπέντε αριθμούς που διαιρούνται διά του $3 \cdot 5 = 15$. Έτσι όμως οι δέκα αριθμοί που διαιρούνται διά του $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ αφαιρέθηκαν στην αρχή τρεις φορές (διότι καθένας τους διαιρείται διά του 2, 3 και 5) και στη συνέχεια αποκαταστάθηκε τρεις φορές (ως πολλαπλάσιο των 6, 10 και 15). Πρέπει λοιπόν να αφαιρέσουμε αυτούς τους αριθμούς. Καταλήγουμε συνεπώς στην

$$\varphi(300) = 300 - 150 - 100 - 60 + 50 + 30 + 20 - 10 = 80.$$

Όπως διαπιστώνετε, αυτή η μέθοδος είναι αρκετά απλή. Όμως, όσο αυξάνει το πλήθος των πρώτων διαιρετών του n τόσο αυξάνει και το πλήθος των όρων στον τύπο που προκύπτει.

Θεώρημα 3. *Η συνάρτηση Euler είναι* πολλαπλασιαστική. *Δηλαδή, αν m και n είναι σχετικά πρώτοι φυσικοί αριθμοί, τότε*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Πόρισμα. *Αν $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_s^{a_s}$, όπου p_1, p_2, ..., p_s διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί και a_1, a_2, ..., a_s φυσικοί αριθμοί, τότε*

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi\left(p_1^{a_1}\right)\varphi\left(p_2^{a_2}\right) \cdot ... \cdot \varphi\left(p_s^{a_s}\right)\\ &= \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}\right)\left(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}\right) \cdot ... \cdot \left(p_s^{a_s} - p_s^{a_s-1}\right).\end{aligned}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3. Θεωρούμε τους αριθμούς $mx + ny$, όπου $0 \le x < n$ και $0 \le y < m$. Μπορούμε να τους παρουσιάσουμε σε έναν πίνακα διαστάσεων $n \times m$. Για παράδειγμα, για $n = 5$ και $m = 8$, έχουμε τον Πίνακα 8.

x/y	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	5	10	15	20	25	30	35
1	8	13	18	23	28	33	38	43
2	16	21	26	31	36	41	46	51
3	24	29	34	39	44	49	54	59
4	32	37	42	47	52	57	62	67

Πίνακας 8

Τα υπόλοιπα που προκύπτουν από τη διαίρεση των αριθμών αυτού του πίνακα διά mn είναι όλα διαφορετικά. Αν δύο υπόλοιπα ήταν ίσα, τότε θα αλήθευε η επόμενη ισοτιμία:

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod{mn},$$

όπου $0 \leq x_1,\ x_2 < n$ και $0 \leq y_1,\ y_2 < m$. Από αυτή την ισοτιμία έπονται άλλες δύο ισοτιμίες:

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod{m}$$

και

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod{n}.$$

Η πρώτη από αυτές συνεπάγεται την ισοτιμία:

$$ny_1 \equiv ny_2 \pmod{m}.$$

Αφού οι m και n είναι σχετικά πρώτοι, από την τελευταία ισοτιμία έπεται ότι

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{m}.$$

Αφού $0 \leq y_1,\ y_2 < m$, έχουμε $y_1 = y_2$. Ανάλογα, από την ισοτιμία modulo n έπεται ότι $x_1 = x_2$.

Επομένως, οι mn αριθμοί του πίνακα δίνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν διά mn. Όμως το πλήθος των αριθμών του πίνακα ισούται με το πλήθος των διαφορετικών υπολοίπων της διαίρεσης διά mn. Άρα, οι αριθμοί του πίνακα εξαντλούν όλα τα δυνατά υπόλοιπα. Με άλλα λόγια, *για κάθε αριθμό* $d = 0, 1, 2, ..., mn - 1$, *υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος ακεραίων* x, y *για τους οποίους ισχύει* $0 \leq x < n$, $0 \leq y < m$ *και* $d \equiv mx + ny \pmod{mn}$.

Στον Πίνακα 8, οι άρτιοι αριθμοί καταλαμβάνουν τέσσερις στήλες, ενώ τα πολλαπλάσια του 5 καταλαμβάνουν μία μόνο γραμμή. Αυτή είναι υποπερίπτωση ενός γενικότερου κανόνα:

$$\text{ΜΚΔ}(mx + ny, m) = \text{ΜΚΔ}(ny, m) = \text{ΜΚΔ}(y, m).$$

Κατ' αναλογία, έχουμε $\text{ΜΚΔ}(mx + ny, n) = \text{ΜΚΔ}(x, n)$. Γι' αυτό το λόγο, ο πίνακας που εξετάζουμε έχει $\varphi(m)$ στήλες με αριθμούς που είναι σχετικά πρώτοι ως προς τον m (είναι στήλες από αριθμούς y που είναι σχετικά πρώτοι ως προς τον m) και $\varphi(n)$ γραμμές με αριθμούς που είναι σχετικά πρώτοι ως προς τον n.

Μπορούμε τώρα εύκολα να αποδείξουμε το Θεώρημα 3: Για να είναι ο d σχετικά πρώτος ως προς τον mn, πρέπει και αρκεί να είναι ο d σχετικά πρώτος ως προς τον m και τον n. Τέτοιοι αριθμοί d βρίσκονται στην τομή $\varphi(m)$ στηλών (που περιέχουν αριθμούς σχετικά πρώτους ως προς τον m) και $\varphi(n)$ γραμμών (που περιέχουν αριθμούς σχετικά πρώτους ως προς τον n). Έχουμε επομένως ένα «πλέγμα» που περιέχει συνολικά $\varphi(m)\varphi(n)$ αριθμούς· ό.έ.δ.

Ασκήσεις

41. Θεωρήστε τον πίνακα m γραμών και n στηλών του Σχήματος 9, ο οποίος περιέχει τους φυσικούς αριθμούς από 0 έως και $mn - 1$.

Κατασκευάστε έναν τέτοιο πίνακα για $m = 3$ και $n = 4$. Σ' αυτόν, σβήστε όλους τους άρτιους αριθμούς, και από τους υπολοίπους σβήστε τα πολλαπλάσια του 3. Διαπιστώστε ότι οι εναπομείναντες αριθμοί είναι ακριβώς οι σχετικά πρώτοι ως προς τον 12. Διαπιστώστε επίσης ότι οι εναπομείναντες αριθμοί δεν συγκροτούν πλέγμα.

42. Ολοκληρώστε το ακόλουθο περίγραμμα μιας δεύτερης απόδειξης του θεωρήματος Euler.

(1) Οι αριθμοί που είναι σχετικά πρώτοι ως προς τον n καταλαμβάνουν $\varphi(n)$ στήλες στον Πίνακα 9.

(2) Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των m αριθμών οποιασδήποτε γραμμής του Πίνακα 9 διά του m είναι όλα διαφορετικά.

(3) Κάθε στήλη περιέχει ακριβώς $\varphi(m)$ αριθμούς που είναι σχετικά πρώτοι ως προς τον m.

(4) Ένας αριθμός είναι σχετικά πρώτος ως προς τον mn αν και μόνο αν είναι σχετικά πρώτος ως προς τον n (τέτοιοι αριθμοί βρίσκονται σε $\varphi(n)$ στήλες) και σχετικά πρώτος ως προς τον m (κάθε στήλη περιέχει $\varphi(m)$ τέτοιους αριθμούς).

43. Ένας κύκλος χωρίζεται σε n ίσα τμήματα από n σημεία. Πόσες διαφορετικές κλειστές πολυγωνικές διαδρομές υπάρχουν, αποτελούμενες από n ίσα τμήματα, με κορυφές αυτά τα σημεία; (Δύο πολυγωνικές γραμμές θεωρούνται ταυτόσημες αν προκύπτει η μία από την άλλη μέσω περιστροφής. Το Σχήμα 1 παρουσιάζει όλες αυτές τις ευθείες για $n = 20$.)

44. Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών m και n, αποδείξτε τις επόμενες ισότητες:

(i) $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(\text{ΕΚΠ}(m, n))\varphi(\text{ΜΚΔ}(m, n))$.

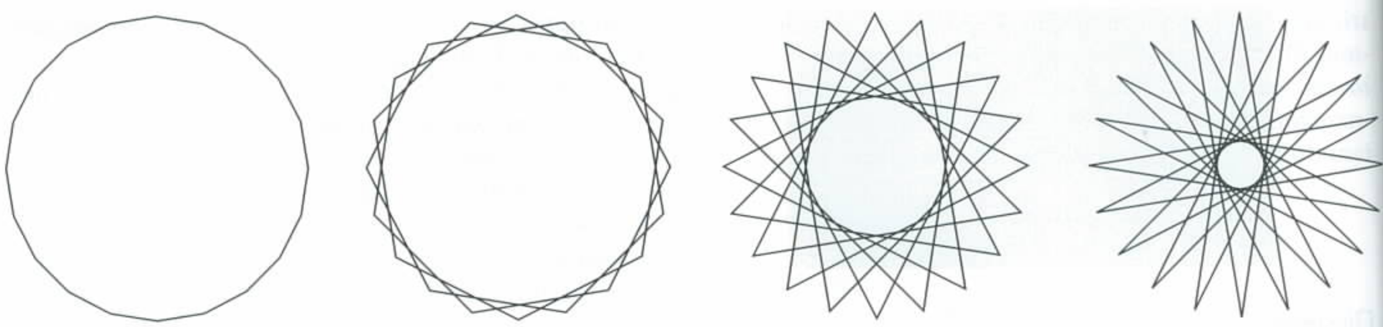
(ii) $\varphi(mn) = \varphi(\text{ΕΚΠ}(m, n))\text{ΜΚΔ}(m, n)$.

(iii) $\varphi(m)\varphi(n)\text{ΜΚΔ}(m, n) = \varphi(mn)\varphi(\text{ΜΚΔ}(m, n))$.

(iv) Έστω, ακόμη, ότι $\text{ΜΚΔ}(m, n) > 1$. Αποδείξτε ότι $\varphi(mn) > \varphi(m)\varphi(n)$.

0	1	2	...	$n-1$
n	$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$
$2n$	$2n+1$	$2n+2$	...	$3n-1$
...	...	...	...	...
$(m-1)n$	$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	...	$mn-1$

Πίνακας 9



Σχήμα 1

45. Να επιλυθούν οι εξισώσεις

(i) $\varphi(x) = 18$.

(ii) $\varphi(x) = 12$.

(iii) $x - \varphi(x) = 12$.

(iv)* $\varphi(x^2) = x^2 - x$.

(v) $\varphi(x) = x/2$.

(vi) $\varphi(x) = x/3$.

(vii)* $\varphi(x) = x/n$, όπου n δοθείς φυσικός αριθμός με $n > 3$.

(viii) $\varphi(nx) = \varphi(x)$, όπου n δοθείς φυσικός αριθμός με $n > 1$.

Κρυπτογράφηση ανοικτού κλειδιού

Ας υποθέσουμε ότι χρειάζεται να λάβουμε ένα κωδικοποιημένο μήνυμα από έναν φίλο, αλλά δεν έχουμε από προηγουμένως συμφωνήσει μαζί του για τον κώδικα που θα χρησιμοποιηθεί. Τι θα κάνουμε; Υπάρχει κάποια μέθοδος που θα μπορούσε να δημοσιοποιηθεί έτσι ώστε οποιοσδήποτε (φίλος ή εχθρός) να μπορεί να κρυπτογραφήσει μηνύματα με αυτή αλλά μόνο οι φίλοι να είναι σε θέση να τα αποκρυπτογραφήσουν; Θα επρόκειτο για αξιοσημείωτη μέθοδο. (Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι κρυπτογράφησης οι οποίες βασίζονται στη χρήση ενός μυστικού κλειδιού τόσο για την κωδικοποίηση όσο και την αποκωδικοποίηση των μηνυμάτων.) Η εν λόγω μέθοδος θα είχε ένα «ανοικτό», ή «δημόσιο», ή «κοινόχρηστο» κλειδί —δηλαδή, όλοι θα μπορούν να κωδικοποιήσουν ένα μήνυμα, αλλά μόνο ο δημιουργός της κρυπτογράφησης θα μπορεί να το αποκωδικοποιήσει.

Κρυπτογράφηση RSA. Μια μέθοδος κρυπτογράφησης ανοικτού κλειδιού εφευρέθηκε το 1978. Εκείνη τη χρονιά, τρεις μαθηματικοί, οι R.A Rivest, A. Shamir και L. Adleman, κρυπτογράφησαν μια φράση της αγγλικής γλώσσας και υποσχέθηκαν αμοιβή 100 δολαρίων στον πρώτο που θα την αποκωδικοποιούσε. Ιδού η κρυπτογραφημένη πρόταση:

y = 96869613754622061477140922254355882905759991 124574319874695120930816298225145708356931476622883989628013391990551829945157815154.

Η μέθοδος κρυπτογράφησης εξηγήθηκε λεπτομερώς. Η αρχική φράση αναπαραστήθηκε πρώτα ως ακολουθία ψηφίων η οποία προέκυψε με άμεση αντικατάσταση (το γράμμα a κωδικοποιήθηκε ως 01, το γράμμα b ως 02, το γράμμα c ως 03, ..., το γράμμα z ως 26 και το κενό ως 00). Έτσι, η αρχική φράση γράφτηκε ως αριθμός x εβδομήντα οκτώ ψηφίων. Στη συνέχεια, ένας πρώτος αριθμός p εξήντα τεσσάρων ψηφίων και ένας πρώτος αριθμός q εξήντα πέντε ψηφίων πολλαπλασιάστηκαν (προφανώς με υπολογιστή) και έδωσαν τον

pq = 11438162575788886766932577997614661201021829672124236256256184293570693524573389783059712 3563958705058989075147599290026879543541.

Ιδού τώρα το βασικό σημείο:

$$y \equiv x^{9007} \pmod{pq}.$$

Το βλέπετε; Δημοσιοποίησαν το γινόμενο pq, τον αριθμό 9007, τη μέθοδο κρυπτογράφησης και, φυσικά, τον αριθμό y. Αποκάλυψαν ακόμη ότι ο αριθμός p αποτελείται από εξήντα τέσσερα ψηφία και ο αριθμός q από εξήντα πέντε. Μόνο οι αριθμοί p και q παρέμεναν άγνωστοι. Το θέμα ήταν να βρεθεί ο x.

Η λύση δόθηκε το 1994 από τους Atkins, Graft, Lenstra και Leiland. Οι αριθμοί ήταν οι εξής:

p = 3490529510847650949147849619903898133417764638493387843990820577,

και

q = 32769132993266709549961988190834461413177642967992942539798288533.

Το βιβλίο, που τιτλοφορείται *Introduction to Cryptography* (Εισαγωγή στην κρυπτογραφία), αναφέρει: «Το αξιοσημείωτο αυτό αποτέλεσμα (η ανάλυση ενός αριθμού εκατόν είκοσι εννέα ψηφίων σε πρώτους παράγοντες) επιτεύχθηκε με τη χρήση ενός αλγορίθμου που ονομάζεται *μέθοδος του δευτεροβάθμιου κόσκινου* (αυτή η μέθοδος σχεδιάστηκε για την ανάλυση αριθμών σε πρώτους παράγοντες). Οι υπολογισμοί απαίτησαν τεράστια μέσα. Στο πρόγραμμα συμμετείχαν 600 περίπου άνθρωποι, υπό τη διεύθυνση των τεσσάρων ατόμων που το σχεδίασαν. Χρησιμοποιήθηκαν περίπου 1600 υπολογιστές, συνδεδεμένοι μέσω του Διαδικτύου.»

Η περιγραφή της μεθόδου του δευτεροβάθμιου κόσκινου θα μας απομάκρυνε σημαντικά από το θέμα του άρθρου. Θα αφήσουμε λοιπόν την περιγραφή της για κάποια άλλη φορά και θα σχολιάσουμε εν συντομία τη βασική ιδέα της μεθόδου κρυπτογράφησης RSA (το ακρώνυμο RSA αντιπροσωπεύει τα ονόματα των δημιουργών της —Rivest, Shamir και Adleman).

Η ιδέα είναι εξαιρετικά κομψή. Πρώτον, αν γνωρίζουμε τους αριθμούς p και q, μπορούμε να βρούμε τον $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$. Δεύτερον (και αυτή είναι μια σημαντική ιδέα), αν $ef = 1 + k\varphi(pq)$, όπου τα e, f και k φυσικοί αριθμοί, τότε για κάθε αριθμό x που είναι σχετικά πρώτος ως προς τον pq βρίσκουμε, από το θεώρημα Euler, ότι

$$x^{ef} = x \cdot \left(x^{k}\right)^{\varphi(pq)} \equiv x \cdot 1 = x \pmod{pq}.$$

Μπορείτε να διακρίνετε τη σπουδαιότητα των αριθμών e και f; Στο παράδειγμά μας, $e = 9007$ (από το e θέλουμε μόνο να είναι σχετικά πρώτο προς το $(p-1)(q-1)$ —δεν θα είναι όμως ιδιαίτερα έξυπνο να χρησιμοποιήσετε $e = 1$ ή $e = (p-1)(q-1)$ αν θέλετε να κρατήσετε κρυφά τα μυστικά σας). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το f είναι η λύση της ισοτιμίας $ef \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}$. Ένας αλγόριθμος για την επίλυση τέτοιων ισοτιμιών που βασίζεται στον αλγόριθμο του Ευκλείδη περιγράφεται στο Παράρτημα που ακολουθεί.

Οι ισοτιμίες

$$y^{f} \equiv x^{ef} \equiv x \pmod{pq}$$

μας δείχνουν ότι για να υπολογίσουμε το x αρκεί να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του y^f διά του pq. Οι αριθμοί επιλέγονται με τέτοιον τρόπο ώστε $x < pq$ και ο x να μη διαιρείται ούτε διά p ούτε διά q. Αυτό όμως δεν μας θέτει κάποιο σοβαρό περιορισμό: αν οι p και q είναι μεγάλοι αριθμοί, η πιθανότητα να διαιρείται ο x διά του p ή του q είναι αμελητέα. Επιπλέον, μπορούμε να κανονίσουμε ώστε ο αλγόριθμος κρυπτογράφησης να αλλάζει ελαφρά, εάν είναι απαραίτητο, το μήνυμα που κρυπτογραφούμε (χωρίς να μεταβάλλει το νόημά του) έτσι ώστε οι x και pq να γίνουν σχετικά πρώτοι.

Γιατί πολλοί θεωρούν ότι ο αλγόριθμος κρυπτογράφησης RSA έχει ανοικτό κλειδί; Διότι οι αριθμοί pq και e μπορούν να δημοσιοποιηθούν. Τότε, οποιοσδήποτε διαθέτει έναν υπολογιστή (και ένα πρόγραμμα που μπορεί να χειριστεί αριθμούς με πολλά ψηφία) έχει τη δυνατότητα να κρυπτογραφήσει ένα μήνυμα. Το μήνυμα μπορεί εύκολα να αποκωδικοποιηθεί όταν είναι γνωστός ο αριθμός f. Όμως, η μοναδική μέθοδος εύρεσης του f απαιτεί τη γνώση των αριθμών p και q. Δηλαδή, ο pq πρέπει να αναλυθεί σε πρώτους παράγοντες. Αυτή τη στιγμή δεν υπάρχει κάποια αποτελεσματική μέθοδος επίλυσης του εν λόγω προβλήματος. Δεν μπορούμε να λάβουμε υπόψη την επιτυχία του 1994: αν οι αριθμοί p και q αποτελούνταν, ας πούμε, από τριακόσια ψηφία ή περισσότερα, δεν θα επαρκούσαν ούτε όλα τα μέσα που προσφέρει το Διαδίκτυο. Από την άλλη πλευρά, δεν έχει αποδειχτεί ότι είναι αδύνατο να βρεθεί ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος (δηλαδή, αλγόριθμος με χρόνο εκτέλεσης που εξαρτάται πολυωνυμικώς από το πλήθος των ψηφίων) για την ανάλυση ακέραιων αριθμών σε πρώτους παράγοντες.

Παράρτημα

Μια μέθοδος ύψωσης σε ανώτερη δύναμη. Για να υψώσουμε έναν αριθμό x στη δύναμη 9007, αρκεί, εξ ορισμού, να εκτελέσουμε 9006 πολλαπλασιασμούς. Όμως, είναι δυνατόν να μειώσουμε το πλήθος των πράξεων: μπορούμε να υπολογίσουμε τα x^2, $(x^2)^2 = x^4$, $(x^4)^2 = x^8$, ..., $(x^{2048})^2 = x^{4096}$ και, τέλος, $(x^{4096})^2 = x^{8192}$, και μετά να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$x^{9007} = x \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^8 \cdot x^{32} \cdot x^{256} \cdot x^{512} \cdot x^{8192},$$

που βασίζεται στη δυαδική αναπαράσταση του 9007:

$$9007_{10} = 10\ 0011\ 0010\ 1111_2.$$

Αναπαραστήσαμε το 9007 ως το άθροισμα $1 + 2 + 4 + 8 + 32 + 256 + 512 + 8192$, και αντί 9006 πολλαπλασιασμούς χρειαστήκαμε μόνο 20 (13 υψώσεις στο τετράγωνο και 7 πολλαπλασιασμούς). Η εξοικονόμηση υπολογιστικής προσπάθειας είναι τεράστια. Για τους παρατηρητικούς αναγνώστες (που μπορούν να εντοπίζουν σφάλματα) επισημαίνουμε ότι στην προηγούμενη συζήτηση θα έπρεπε να αναφερθούμε στον πολλαπλασιασμό modulo pq και όχι στον συμβατικό πολλαπλασιασμό. Σε κάθε βήμα δεν πρέπει να υπολογίσουμε μόνο το γινόμενο, αλλά και το υπόλοιπο της διαίρεσης διά του pq.

Τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου ύψωσης σε δύναμη αυξάνουν όσο μεγαλώνει η δύναμη. Για παράδειγμα, όταν η δύναμη αποτελείται από αρκετές δεκάδες ή εκατοντάδες ψηφίων, είναι αδύνατο να εφαρμόσουμε την άμεση μέθοδο ύψωσης σε δύναμη ακόμη και με τη βοήθεια των ισχυρότερων υπολογιστών. Όμως, η μέθοδος που βασίζεται στη δυαδική αναπαράσταση δουλεύει ακόμη και με τέτοιους μεγάλους αριθμούς.

Άσκηση 46*. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να εκτελέσουμε δύο πράξεις: *πολλαπλασιασμό ενός αριθμού επί 2* και *αύξηση ενός αριθμού κατά 1*. Αν η δυαδική αναπαράσταση ενός αριθμού n είναι $\overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0}$, ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος πράξεων που απαιτούνται ώστε από το 0 να προκύψει (i) ο αριθμός 100, (ii) ο 9907, (iii) ο n;

Αλγόριθμος του Ευκλείδη. Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη είναι μια μέθοδος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη. Βασίζεται στον τύπο

$$\text{ΜΚΔ}(a, b) = \text{ΜΚΔ}(a - bq, b),$$

ο οποίος ισχύει για οποιουσδήποτε ακεραίους a, b και q.

Άσκηση 47. Αποδείξτε αυτό το γεγονός.

Εδώ δεν χρειαζόμαστε τον ίδιο τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, αλλά μια μέθοδο επίλυσης γραμμικών εξισώσεων η οποία θα βασίζεται σε αυτόν.

Ας υποθέσουμε ότι δίνονται οι σχετικά πρώτοι αριθμοί e και m (στην προηγούμενη περίπτωση, $m = \varphi(pq)$). Πρέπει να βρούμε αριθμούς f και k τέτοιους ώστε $ef = 1 + km$. Όταν το m δεν είναι πολύ μεγάλο, είναι δυνατή η εξαντλητική αναζήτηση όλων των m υπολοίπων. Όταν το m είναι μεγάλο, η εξαντλητική αναζήτηση δεν είναι πρακτικά εφικτή. Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος του Ευκλείδη προσφέρει μια ταχεία μέθοδο επίλυσης αυτού του προβλήματος.

Θα επιδείξουμε τη μέθοδο εξετάζοντας ένα παράδειγμα όπου $e = 9007$ και $m = 19876$. (Αρχικά, θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε μια τιμή του m με περισσότερα από εκατό ψηφία, αλλά δειλιάσαμε την τελευταία στιγμή.) Η εξίσωση $9007f = 1 + 19876k$ μπορεί να γραφτεί ως $9007f = 1 + 9007 \cdot 2k + 1862k$, ή ως $9007(f - 2k) = 1 + 1862k$.

Έστω $a = f - 2k$. Τότε, $9007a = 1 + 1862k$. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για εξίσωση του ίδιου τύπου με την αρχική, αλλά με μικρότερους συντελεστές. Το επόμενο βήμα είναι $1862 \cdot 4a + 1559a = 1 + 1862k$, δηλαδή, $1559a = 1 + 1862(k - 4a)$. Έστω $k - 4a = b$. Τότε, $1559a = 1 + 1862b$. Ξαναγράφουμε αυτή την εξίσωση ως $1559(a - b) = 1 + 303b$. Αν θέσουμε $a - b = c$, προκύπτει η εξίσωση $1559c = 1 + 303b$. Με παρόμοιους μετασχηματισμούς βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 44c &= 1 + 303(b - 5c), \\ 44(c - 6d) &= 1 + 39d, \\ 5x &= 1 + 39(d - x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= b - 5c, \\ x &= c - 6d, \\ y &= d - x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44c &= 1 + 303d, \\ 44x &= 1 + 39d, \\ 5x &= 1 + 39y. \end{aligned}$$

Ο υπολογιστής θα συνεχίσει τους υπολογισμούς έως ότου ο συντελεστής ενός από τους αγνώστους γίνει 1. Μπορούμε να σταματήσουμε εδώ, αφού καθίσταται προφανές ότι η λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι $x = 8$, $y = 1$. Με γνωστά τα x και y, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} d &= x + y = 9, \\ c &= x + 6d = 62, \\ b &= d + 5c = 319, \\ a &= b + c = 381, \\ k &= b + 4a = 1843, \\ f &= a + 2k = 4067. \end{aligned}$$

Θριαμβεύσαμε! Ιδού οι τιμές των f και k, και νά η επαλήθευση:

$$9007 \cdot 4067 = 36631469 = 1 + 19876 \cdot 1843.$$

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M186

Χαλασμένα αντίγραφα. Ένας μαθητής έλυσε όλα τα προβλήματα ενός μαθηματικού περιοδικού. Πριν ταχυδρομήσει τις απαντήσεις του στους συντάκτες της στήλης, τις έδωσε σε δύο φίλους του για να τις αντιγράψουν. Την επόμενη ημέρα, οι δύο μαθητές αντέγραψαν τις λύσεις με σκοπό να τις ταχυδρομήσουν και αυτοί στο περιοδικό ως δικές τους. Ευτυχώς ή δυστυχώς, ο καθένας τους έκανε κάποια (διαφορετικά) λάθη αντιγραφής. Πριν ταχυδρομήσουν τις αντιγραμμένες λύσεις, οι δύο μαθητές έδωσαν και αυτοί τις απαντήσεις σε τέσσερις άλλους μαθητές (ο καθένας σε δύο φίλους του). Την επόμενη ημέρα, αυτοί οι τέσσερις μαθητές επανέλαβαν τη διαδικασία, και ούτω καθεξής. Κάθε νέο αντίγραφο διατηρούσε τα παλιά λάθη και ίσως είχε και μερικά καινούργια. Γνωρίζουμε ότι μια μέρα κάθε νέο αντίγραφο θα περιέχει τουλάχιστον δέκα λάθη. Αποδείξτε ότι κάποια μέρα θα γίνουν, συνολικά, τουλάχιστον έντεκα καινούργια λάθη στα αντίγραφα.

M187

Μετρήσεις γωνιών, I. Σε ένα τρίγωνο ABC η γωνία A ισούται με φ. Ο κύκλος που διέρχεται από τα A και B και εφάπτεται στην ευθεία BC τέμνει τη διάμεσο που φέρουμε προς την πλευρά BC (ή την προέκτασή της) σε ένα σημείο M, διαφορετικό από το A. Εκφράστε το μέτρο της γωνίας BMC συναρτήσει του φ.

M188

Οι ρίζες του προβλήματος. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + px + q = 0$. Αποδείξτε ότι αν ο t ικανοποιεί τις ανισότητες

$$x_1 \le \frac{t^2 - q}{2t + p} \le x_2,$$

τότε ο t πρέπει να είναι ίσος είτε με x_1 είτε με x_2.

M189

Μετρήσεις γωνιών, II. Σε ένα τρίγωνο ABC, είναι $\angle BAC = \varphi$ και $\angle ABC = 2\varphi$. Ο κύκλος με κέντρο C και ακτίνα CA τέμνει τη διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας που σχηματίζεται στην κορυφή B στα σημεία M και N. Εκφράστε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου AMN συναρτήσει της φ.

M190

Σκεφτείτε θετικά. Έστω θετικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \ldots + \frac{1}{1 + a_{100}} \le 1.$$

Αποδείξτε ότι $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100} \ge 99^{100}$.

Φυσική

Φ186

Ρυμουλκούμενο σκάφος. Στην απόκρημνη όχθη μιας λίμνης βρίσκεται εγκατεστημένη μια μηχανή έλξεως η οποία τυλίγει με σταθερό ρυθμό στο τύμπανό της το σκοινί, τραβώντας έτσι ένα πλοιάριο κατευθείαν προς την όχθη. Σε μια ορισμένη χρονική στιγμή το σκοινί σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο, και το πλοιάριο κινείται με ταχύτητα v. Την ίδια εκείνη στιγμή, ένας μικρός κόμπος πάνω στο σκοινί απέχει από τη μηχανή ακριβώς διπλάσια απόσταση απ' ό,τι από το σκάφος. Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κόμπου τη δεδομένη στιγμή.

Φ187

Υδάτινος κόσμος. Η επιφάνεια ενός πλανήτη, ο οποίος έχει το ίδιο μέγεθος, την ίδια μάζα και την ίδια σύσταση ατμόσφαιρας με τη Γη, καλύπτεται εξ ολοκλήρου από έναν ωκεανό που η θερμοκρασία του ανέρχεται σε +10°C, ενώ το βάθος του, το οποίο είναι σταθερό σε όλα τα πλάτη και τα μήκη του πλανήτη, ισούται με 230 m. Κάποια εσωτερική διαδικασία προκαλεί τη θέρμανση του ωκεανού μέχρι θερμοκρασίας +100°C, αλλά μετά την περάτωση της εν λόγω διαδικασίας τόσο το βάθος του ωκεανού όσο και οι διαστάσεις του στερεού φλοιού του πλανήτη έχουν τις ίδιες τιμές όπως και πριν. Θεωρώντας ότι οι διαστάσεις του στερεού μέρους του πλανήτη δεν μεταβλήθηκαν διόλου καθ' όλη τη διαδικασία της θέρμανσης, προσδιορίστε τον μέσο συντελεστή κυβικής διαστολής του νερού για την περιοχή των θερμοκρασιών στην οποία αναφέρεται το πρόβλημα. (S. Varlamov)

Φ188

Φορτισμένο καμάκι. Πόση ταχύτητα απαιτείται να έχει ένα μακρύ και λεπτό καμάκι, μάζας M και μήκους L, το οποίο φέρει φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος του ώστε να διαπεράσει τελείως δύο συνεχόμενα στρώματα πάχους h, όπου το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση στο μεν πρώτο αντίθετη από εκείνη της ταχύτητας του καμακιού, στο δε δεύτερο ομόρροπη με αυτήν; Και στις δύο περιπτώσεις το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με E. Θεωρήστε ότι το καμάκι έχει μήκος μεγαλύτερο από το ολικό πάχος των δύο στρωμάτων. (O. Savchenko)

Φ189

Η γένεση της Γης. Στη σημερινή εποχή, το φυσικό ουράνιο περιέχει

Η συνέχεια στη σελ. 68 ⇨

Χτίζοντας πανύψηλους πύργους

«Και είπαν: Δεύτε οικοδομήσωμεν εαυτοίς πόλιν και πύργον, ου η κεφαλή έσται έως του ουρανού...»
—*Γένεσις*, 11:1-9

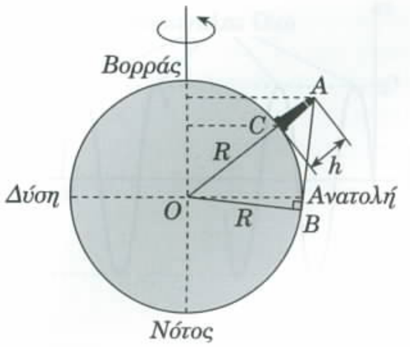
A. Stasenko

ΠΟΙΟΣ ΕΧΕΙ ΑΝΑΓΚΗ ΕΝΑΝ ΠΑΝΥψηλο πύργο; Αναμφίβολα ήταν απαραίτητος στον Γαλιλαίο, ο οποίος εκτέλεσε το πείραμα που σήμανε την απαρχή της σύγχρονης εποχής στην επιστημονική σκέψη. Πήρε μια μπάλα κανονιού και μια σφαίρα μουσκέτου και τις άφησε να πέσουν από ύψος 60 μέτρων. Τα δύο αντικείμενα έφτασαν στο έδαφος ταυτόχρονα, συντρίβοντας έτσι για πάντα την αριστοτελική θεωρία. Σύμφωνα με την παράδοση, ο Γαλιλαίος εκτέλεσε το ξακουστό πείραμά του από την κορυφή του κεκλιμένου πύργου της Πίζας. Αναμφίβολα, για το πείραμα που σχεδίαζε, δύσκολα θα μπορούσε να είχε βρει πιο ταιριαστό μέρος.

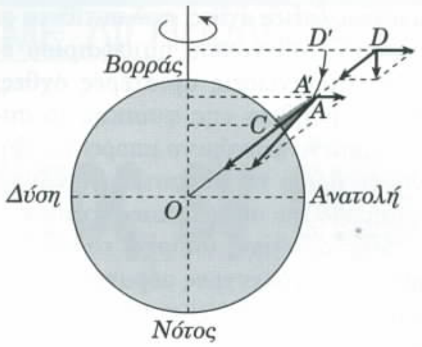
Οι πύργοι, φυσικά, δεν χτίστηκαν αποκλειστικά και μόνο για να γίνονται πειράματα φυσικής. Ανεβαίνοντας κανείς στην κορυφή ενός πύργου, είχε τη δυνατότητα να εποπτεύει τη γύρω περιοχή σε μεγάλες αποστάσεις —δυνατότητα εξαιρετικά σημαντική την εποχή εκείνη, όταν δεν είχαν ανακαλυφθεί ακόμη τα ραδιόφωνα, τα τηλέφωνα (κυρίως τα κινητά) και οι τηλεοράσεις.

Με τη βοήθεια του Σχήματος 1 εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ακτίνα του οπτικού πεδίου δίνεται από τον τύπο

$$CB \approx AB = \sqrt{(R+h)^2 - R^2},$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

όπου $R = 6.400$ km η ακτίνα της Γης. Για να φτάσουμε στον τύπο αυτό, δεν χρειάζεται παρά να εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο *OBA*. Η γωνία *B* είναι ορθή επειδή η οπτική ακτίνα *AB* εφάπτεται της επιφάνειας της Γης, η οποία θεωρείται ως τέλεια σφαίρα. Εφόσον το ύψος του πύργου είναι πάρα πολύ μικρότερο από την ακτίνα της Γης, μπορούμε να απλουστεύσουμε την παραπάνω έκφραση διαγράφοντας τη μικρή ποσότητα h^2 στο υπόρριζο:

$$AB \approx \sqrt{2Rh}.$$

Ας αναφέρουμε, εν είδει παραδείγματος, ότι η ακτίνα του οπτικού πεδίου από την κορυφή του κεκλιμένου πύργου της Πίζας ($h = 60$ m) ανέρχεται στα 28 km περίπου, και δεν ήταν διόλου ευκαταφρόνητη για εκείνη την εποχή. (Ως άσκηση, υπολογίστε την ακτίνα του οπτικού πεδίου από την κορυφή του τηλεοπτικού πύργου του Οστάνκινο της Μόσχας, ο οποίος έχει ύψος $h \cong 300$ m.)

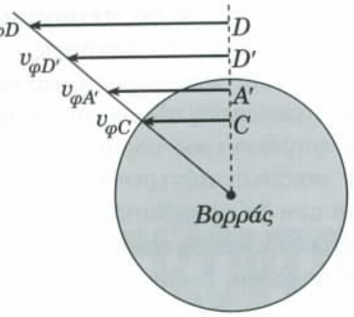
Η ιστορία και ο θρύλος λένε πως οι πρώτες πτήσεις με ανεμόπτερα και τα πρώτα άλματα με αλεξίπτωτο επιχειρήθηκαν, ενίοτε ανεπιτυχώς, από τις κορυφές καμπαναριών και παρατηρητηρίων. Στην εποχή μας, η εγκατάσταση των κεραιών επιδιώκεται να γίνεται όσο το δυνατόν ψηλότερα, επειδή η ανεμπόδιστη ορατότητα αποδεικνύεται σημαντική σ' αυτή την περιοχή των μηκών κύματος.

Ας θεωρήσουμε έναν πύργο που η ανέγερσή του προχωρά βαθμιαία, έτσι ώστε, ενώ κάποτε η κορυφή του βρισκόταν στο σημείο *A*, αργότερα φτάνει στο σημείο *D* (Σχήμα 2). Δεν χωρεί αμφιβολία ότι κάθε οξυδερκής αναγνώστης θα φέρει αμέσως στο νου του το γεγονός ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονα βορρά-νότου. Αυτό σημαίνει ότι κάθε χτίστης που εργάζεται στον συγκεκριμένο πύργο (και μαζί του η μολυβήθρα του νήματος της στάθμης —το οποίο αποτελεί αχώριστο επαγγελματικό σύνεργό του) βρίσκεται ανεβασμένος σε μια γιγαντιαία περιστρεφόμενη πλατφόρμα η οποία, αν εξαιρέσουμε το μέγεθός της, μοιάζει μ' εκείνες που βλέπουμε στα αλογάκια του λούνα παρκ.

Όπως ξέρουμε, κάποιος που στέκεται πάνω σε μια περιστρεφόμενη πλατφόρμα αισθάνεται να ασκείται πάνω του μια ακτινική δύναμη που τείνει να τον απομακρύνει από τον άξονα της περιστροφής. Ωστόσο, ένας παρατηρητής ο οποίος θα τύχει να παρακολουθεί τα συμβαίνοντα ακίνητος από το έδαφος τον βλέπει να κινείται κυκλικά, πράγμα που σημαίνει πως πρέπει να δρα πάνω του μια κεντρομόλος (δηλαδή με κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής) δύναμη. Η δύναμη που αισθάνεται ο άνθρωπος πάνω στην περιστρεφόμενη πλατφόρμα αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό κάθε περιστρεφόμενου συστήματος. Τα περιστρεφόμενα συστήματα ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των μη αδρανειακών συστημάτων. Η ζωή στα μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι πολύ πιο αινιγματική απ' ό,τι στα συνήθη (γαλιλαϊκά). Η εμφάνιση «μυστηριωδών» δυνάμεων, οι οποίες παράγονται «εκ του μηδενός», χωρίς να μπορούν να αποδοθούν στην επίδραση κάποιου υλικού σώματος, συνιστά κοινό χαρακτηριστικό τέτοιων συστημάτων. Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε μερικές από αυτές τις δυνάμεις.

Η δύναμη που εμφανίζεται σε μια περιστρεφόμενη πλατφόρμα ονομάζεται φυγόκεντρος αδρανειακή δύναμη· ασκείται πάντοτε κατά την ευθεία που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής και κατευθύνεται από αυτόν προς την περιφέρεια. Η φυγόκεντρος δύναμη αυξάνεται όσο αυξάνεται και η απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Καθώς λοιπόν ανεβαίνουμε όλο και ψηλότερα στον πύργο, η εν λόγω δύναμη ενισχύεται, ενώ η δύναμη της βαρύτητας εξασθενεί. Επιπλέον, ενώ η δύναμη της βαρύτητας κατευθύνεται προς το κέντρο της Γης, η κεντρομόλος κατευθύνεται προς τον άξονα περιστροφής. Επομένως, όσο αυξάνεται το ύψος του πύργου, το διανυσματικό άθροισμα αυτών των δύο δυνάμεων αποκλίνει βαθμιαία όλο και περισσότερο από την κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης. Εφόσον ο χτίστης συμμορφώνεται σχολαστικά με τις ενδείξεις του νήματος της στάθμης, κατασκευάζει όχι έναν ίσιο (κατακόρυφο) πύργο *CAD*, που να κείται αυστηρά πάνω στην προέκταση της γήινης ακτίνας, αλλά έναν καμπυλωμένο πύργο *CA'D'*, ο οποίος αντιπροσωπεύει τον πιο ίσιο δυνατό πύργο από την άποψη της τέχνης της «πυργοποιίας». Για τον ίδιο λόγο, μάλιστα, δεν είναι απολύτως επίπεδοι και οι τοίχοι των πολύ ψηλών οικοδομημάτων.

Οι πύργοι έχουν ευθύγραμμο κατακόρυφο άξονα μόνο στους πόλους της Γης και στον ισημερινό. Και τούτο, επειδή στη μεν πρώτη περίπτωση η φυγόκεντρος δύναμη απουσιάζει παντελώς, στη δε δεύτερη η κατεύθυνσή της συμπίπτει απολύτως με εκείνη του κατακόρυφου άξονα. Ωστόσο, τι ακριβώς εννοούμε με τη λέξη «απολύτως»; Αν, για παράδειγμα, ο πύργος που θα χτίσουμε στον ισημερινό έχει από τη μία πλευρά του το όρος Κιλιμάντζαρο ενώ από την άλλη δεν υπάρχει αντίστοιχος ορεινός όγκος, τότε ο άξονας του πύργου θα γέρνει ελαφρά προς το όρος Κιλιμάντζαρο. Τις αποκλίσεις αυτές του βαρυτικού πεδίου τις μελετά μια υψηλής ακρίβειας επιστήμη που ονομάζεται βαρυτομετρία. Η βαρυτομε-



Σχήμα 3

τρία μπορεί να ανιχνεύσει όχι μόνο τις επιδράσεις των ορέων (τα οποία είναι σε τελική ανάλυση ορατά), αλλά και εκείνες των υλικών μεγάλης πυκνότητας (όπως των μεταλλοφόρων στρωμάτων, που άλλωστε έχουν και μεγαλύτερη πρακτική σημασία) μέσα στο φλοιό της Γης.

Και για να περάσουμε σε ένα άλλο ενδιαφέρον ζήτημα, πού θα πέσει, αλήθεια, ένα σώμα το οποίο ρίχνεται από την κορυφή του πύργου μας; Ας παρακολουθήσουμε την πτώση του σώματος από ένα σημείο που κείται πάνω στον άξονα περιστροφής και σε μεγάλο ύψος από την επιφάνεια της Γης (Σχήμα 3). Χαράσσουμε τις γραμμικές ταχύτητες σε διάφορα σημεία του πύργου (στο συμβολισμό τους περιλαμβάνουμε και το δείκτη φ, που δηλώνει τη γωνία στροφής γύρω από τον άξονα περιστροφής, τον άξονα βορρά-νότου). Προφανώς, όσο αυξάνεται η απόσταση από τον άξονα περιστροφής τόσο αυξάνεται και η γραμμική ταχύτητα. Σύμφωνα λοιπόν με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, το σώμα που πέφτει θα διατηρήσει την ταχύτητα $\upsilon_{\varphi D'}$ του σημείου από το οποίο ρίχτηκε (εφόσον παραβλέψουμε την αντίσταση του αέρα). Δεδομένου ότι η ταχύτητα στη βάση του πύργου $\upsilon_{\varphi C}$ είναι μικρότερη από τη $\upsilon_{\varphi D'}$, κατά την πτώση του το σώμα θα διανύσει μεγαλύτερη απόσταση προς τα ανατολικά απ' ό,τι η βάση του πύργου, και έτσι δεν πρόκειται να τη συναντήσει, αλλά θα προσγειωθεί κάπως ανατολικότερά της.

Με τη βοήθεια αυτής της απλής συλλογιστικής είναι δυνατόν να εξηγηθούν πολλά ενδιαφέροντα φαινόμενα. Γιατί, φερ' ειπείν, όσοι ποταμοί του βόρειου ημισφαιρίου ρέουν στη διεύθυνση βορρά-νότου έχουν κρημνώδεις δεξιές όχθες, ενώ αντίθετα οι ποταμοί του νότιου ημισφαιρίου έχουν κρημνώδεις αριστερές όχθες; Με τη βοήθεια της φυσικής το συγκεκριμένο φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί χωρίς να παραστεί η ανάγκη να προβούμε σε επιτόπιες έρευνες.

Μήπως, όμως, υπάρχει το ενδεχόμενο η φυγόκεντρος αδρανειακή δύναμη να προκαλέσει και κάποια απόκλιση του σώματος προς νότο; Κάτι τέτοιο όντως θα συνέβαινε αν οι οικοδόμοι κατασκεύαζαν έναν απολύτως κατακόρυφο (ακτινικό) πύργο. Στην πραγματικότητα, χτίζουν όπως τους υπαγορεύει η μολυβήθρα του νήματος της στάθμης, η οποία δεν μπορεί παρά να λαμβάνει υπόψη της αυτή τη δύναμη ως συνιστώσα της ολικής δύναμης (που συνήθως αναφέρεται ως φαινόμενο βάρος).

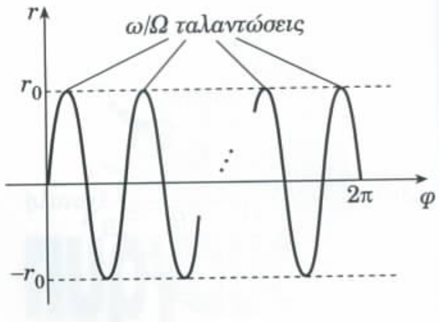
Φανταστείτε τώρα ότι στον Βόρειο Πόλο κατασκευάζεται ο πιο ευθυτενής δυνατός πύργος ύψους h και ότι από την κορυφή του αναρτούμε ένα εκκρεμές μήκους h. Όπως γνωρίζουμε, η περίοδος της ταλάντωσης του εκκρεμούς ισούται με $2\pi\sqrt{h/g}$ και η γωνιακή του συχνότητα με $\omega = \sqrt{g/h}$. Αν η Γη δεν περιστρεφόταν, το εκκρεμές θα ταλαντωνόταν πάντα σε ένα ορισμένο μεσημβρινό επίπεδο, και η απομάκρυνσή του από την κατακόρυφο θα υπάκουε στο νόμο

$$r(t) = r_0 \text{ημ}\omega t,$$

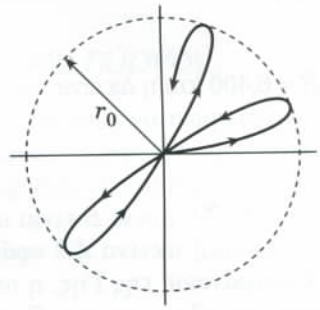
όπου r_0 το πλάτος της ταλάντωσης (δηλαδή, η μέγιστη απομάκρυνση του βαριδιού από την κατακόρυφο). Εντούτοις, εφόσον η Γη κάτω από το ταλαντούμενο εκκρεμές περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω, η κίνησή του ως προς τη Γη καθίσταται περίπλοκη. Στο σύστημα αναφοράς της Γης, η γωνία φ του μεσημβρινού επιπέδου στο οποίο αρχίζει η αιώρηση του εκκρεμούς αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο: $\varphi = \Omega t$.

Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε την απομάκρυνση από την κατακόρυφο συναρτήσει της γωνίας στροφής του επιπέδου της ταλάντωσης (στο μη αδρανειακό σύστημα της Γης) γράφοντας:

$$r(\varphi) = r_0 \text{ημ}\left(\frac{\omega}{\Omega}\varphi\right).$$



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων (φ, r) φαίνεται στο Σχήμα 4. Πρόκειται για μια συνηθισμένη ημιτονοειδή καμπύλη, με τη διαφορά ότι το διάστημα $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ περιέχει ω/Ω ταλαντώσεις αντί για μόνο μία. Ο συγκεκριμένος αριθμός ενδέχεται να μην είναι καν ακέραιος. Η εξάρτηση του r από τη φ παρουσιάζεται σε πολικές συντεταγμένες στο Σχήμα 5 (πρόκειται για καθαρά ποιοτικό διάγραμμα —ένα ακριβέστερο διάγραμμα μπορεί να κατασκευαστεί αν χρησιμοποιήσουμε διάφορες τιμές τού h).

Χτίστε, λοιπόν, ψηλούς πύργους για χάρη της φυσικής, αλλά, προς Θεού, μη ρίχνετε βαριά αντικείμενα από αυτούς.

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- V. Surdin, «Το μυστήριο της Αφροδίτης», Σεπτ./Οκτ. 1996.
- A. Leonovich, «Η σχετικότητα γύρω μας», Νοέμ./Δεκ. 1996.
- M. Emelyanov, A. Zharkov, V. Zagainov και V. Matochkin, «Στα βήματα του Foucault», Ιαν./Φεβρ. 1997.
- L.D. Kirkpatrick και A. Eisenkraft, «Περί στροφικής κινήσεως», Μάιος/Ιούν. 1998.
- A. Stasenko, «Ποτάμια, τυφώνες και μόρια», Σεπτ./Οκτ. 1998.

Κήτος εν όψει!

Λίγη κουβεντούλα χρήσιμη για την παραλία

N. Rodina

Η ΕΙΚΟΝΑ ΜΙΑΣ ΧΗΝΑΣ ΠΟΥ ΠΕΡπατά αδέξια στο έδαφος δίνει την εντύπωση πως το βάρος της αποτελεί μεγάλο εμπόδιο στην κίνησή της. Μα μόλις μπει στο νερό, η χήνα μετακινείται γρήγορα και ελεύθερα: ακόμη και ένα ελαφρό φύσημα του αέρα μπορεί να αλλάξει την ταχύτητά της. Γιατί υπάρχει αυτή η δραματική διαφορά;

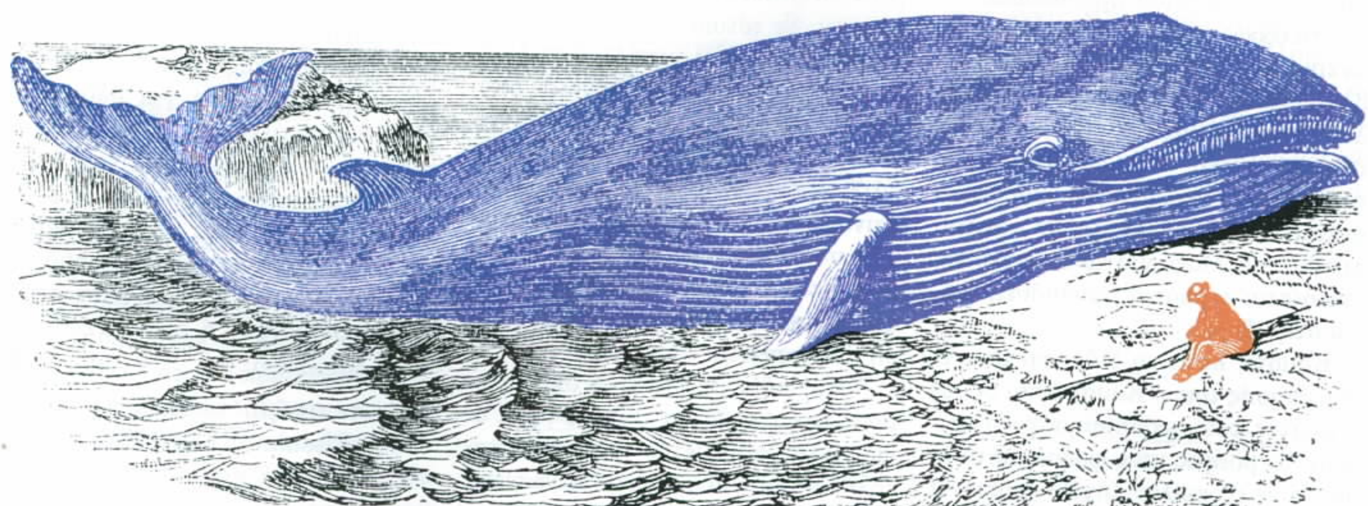
Για να κατανοήσουμε το φαινόμενο καλύτερα, ας τοποθετήσουμε έναν φελλό όρθιο πάνω στο τραπέζι και ας τον φυσήξουμε ελαφρά από τη μια πλευρά του —δεν πρόκειται να μετακινηθεί. Ωστόσο, εάν τον τοποθετήσουμε στο νερό, μια ανάσα αέρα τον μετακινεί εύκολα. Προφανώς, η δύναμη της τριβής μεταξύ του στερεού σώματος και του νερού είναι σημαντικά μικρότερη από την αντίστοιχη μεταξύ των δύο στερεών σωμάτων.

Το μεγαλύτερο θηλαστικό στη Γη, η μπλε φάλαινα, είναι ένας τέλεια σχεδιασμένος οργανισμός για να επιβιώνει μέσα στο νερό. Η μάζα της μπορεί να φτάσει τους 130 τόνους, αλλά μέσα στο νερό μπορεί να φτάσει ταχύτητες 37 χιλιομέτρων ανά ώρα (20 κόμβους). Για σύγκριση, ένα τυπικό κρουαζιερόπλοιο κινείται με ταχύτητα 30 χιλιομέτρων ανά ώρα (16 κόμβους). Οι φάλαινες-φυσητήρες, με μάζα γύρω στους 60 τόνους, συχνά πηδούν αρκετά μέτρα έξω από το νερό. Πώς μπορούν αυτά τα κήτη να μετακινούνται με τέτοια χάρη και ευκολία;

«Η φάλαινα δεν εμπνέει απλώς δέος σε υπερθετικό βαθμό —είναι ο ίδιος ο υπερθετικός βαθμός εν ζωή», έγραψε ο Ζακ Κουστώ στο βιβλίο του *Φάλαινα, ο άρχοντας των θαλασσών*. Το μήκος μιας μπλε φάλαινας μπορεί να φτάσει τα 33 μέτρα, περίπου 10 μέτρα περισσότερο από ένα σιδηροδρομικό βαγόνι. Η μεγαλύτερη φάλαινα που πιάστηκε ποτέ ζύγιζε 150 τόνους, ενώ το μεγαλύτερο ζώο της ξηράς, ο ελέφαντας, ζυγίζει μόλις 3 με 6 τόνους (όσο η γλώσσα μερικών φαλαινών!).

Αν η μάζα ενός ελέφαντα διπλασιαζόταν, θα χρειαζόταν πόδια διπλάσιου πάχους για να μπορεί να υποβαστάζει τον εαυτό του. Η διατομή του κάθε ποδιού είναι 400 τετραγωνικά εκατοστά. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί οι «γίγαντες της ξηράς» χρειάζονται τόσο χοντρά πόδια;

Ένα σώμα ισορροπεί αδιάφορα βυθισμένο μέσα σε υγρό (δεν επιπλέει στην επιφάνεια ούτε βυθίζεται προς



τον πυθμένα) αν η άνωση που δρα πάνω του είναι ίση με το βάρος του (συνθήκη πλεύσης). Ας υπολογίσουμε και ας συγκρίνουμε αυτές τις δύο δυνάμεις. Η άνωση που υφίσταται το σώμα ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει (αρχή του Αρχιμήδη):

$$B = \rho_{\upsilon} g V_{\sigma},$$

όπου το g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας με μέτρο περίπου 10 N/kg, το ρ_{υ} η πυκνότητα του υγρού και το V_{σ} ο όγκος του σώματος (ή, αλλιώς, ο όγκος του εκτοπιζόμενου από το σώμα υγρού). Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο μιας φάλαινας; Αν θεωρήσουμε το σώμα της ως κύλινδρο, τότε ο όγκος της θα ισούται με $V = \pi d^2 h/4$, όπου d είναι η διάμετρος του κυλίνδρου και h το ύψος του —στην περίπτωσή μας, το μήκος της φάλαινας. Ας υποθέσουμε πως η διάμετρος της φάλαινας-κυλίνδρου είναι η μέση διάμετρος του σώματός της· τότε το d θα πρέπει να ισούται περίπου με το ένα δέκατο του μήκους της.

Κάντε μόνοι σας τον υπολογισμό, και θα διαπιστώσετε ότι η άνωση που συγκρατεί τη φάλαινα αδιάφορα βυθισμένη μέσα στο νερό ισούται με εκατομμύρια N. (Φυσικά, όλα αυτά αποτελούν χοντρικά νούμερα, ωστόσο η τιμή της δύναμης βρίσκεται μεταξύ του 1 και των 10 εκατομμυρίων N.) Η δύναμη είναι όντως τεράστια, αλλά συγκρατεί ένα σώμα εκατό περίπου τόνων. Βλέπουμε λοιπόν ότι η φάλαινα στο νερό είναι σαν να μην έχει βάρος, και γι' αυτό κολυμπά χωρίς σχεδόν καθόλου προσπάθεια.

Στο έδαφος, όμως, τέτοιοι γίγαντες αντιμετωπίζουν ανυπέρβλητα προβλήματα. Οι φάλαινες που εξοκέλλουν είναι γνωστό μα όχι ευκολονόητο φαινόμενο. Έξω από το νερό, ο σκελετός της φάλαινας δεν μπορεί να αντέξει το βάρος των μυών και του λίπους της. Μόνο για να αναπνεύσει, χρειάζεται τεράστια προσπάθεια πάνω στην ξηρά.

Κάποτε, κατά τη διάρκεια μιας εξερεύνησής του, ο Κουστώ και οι συνεργάτες του προσπάθησαν να σώσουν το βρέφος μιας φάλαινας το οποίο είχε εξοκείλει· ζύγιζε «μόλις» 2 τόνους. Για να το ανασύρουν πάνω στο σκάφος, χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουν ένα ειδικό δίχτυ, διότι ακόμη και μια νεογέννητη φάλαινα μπορεί να «κοπεί» ή να «σπάσει» υπό την επίδραση της βαρύτητας αν τα υποστηρίγματα που την κρατούν είναι λεπτά και απέχουν ακανόνιστα.

Αν θα παρακολουθούσατε μια φάλαινα να κοιμάται, θα διαπιστώνατε ότι ένα μικρό τμήμα του σώματός της παραμένει έξω από το νερό. Σημαίνει αυτό πως η άνωση που δέχεται τώρα είναι μικρότερη απ' ό,τι αν θα ήταν ολόκληρη μέσα στο νερό (δεδομένου ότι η άνωση ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου νερού). Το βάρος της, βέβαια, παραμένει και στις δύο περιπτώσεις ίδιο. Δηλαδή, δεν ισχύει το προηγούμενο κριτήριο της αδιάφορης ισορροπίας όταν βρίσκεται κάτω από το νερό (η συνθήκη πλεύσης); Καθόλου: η φάλαινα κοιμάται ήσυχη και δεν βουλιάζει. Τόσο όταν επιπλέει όσο και όταν βρίσκεται κάτω από το νερό, η άνωση ισούται με το βάρος της. Πώς, λοιπόν, μπορεί να εξηγηθεί αυτή η φαινομενική αντίθεση;

Είναι η στιγμή να εξηγήσουμε πώς μια φάλαινα βουτά στα βαθιά και πώς ανεβαίνει στην επιφάνεια. Τα οριζόντια πτερύγια στην ουρά της παράγουν ισχύ της τάξεως των 500 ίππων. (Για έναν κολυμβητή, η συνάντησή του με μια φάλαινα θα μοιάζει κάπως σαν να συγκρούεται με νταλίκα.) Με μια δυνατή κίνηση της ουράς της, λοιπόν, οι φάλαινες καταδύονται στα βάθη των ωκεανών. Συνήθως κατεβαίνουν σε βάθη δεκάδων μέτρων· οι φάλαινες-φυσητήρες μπορούν να φτάσουν σε βάθη 1.000-1.200 μέτρων. Σε τέτοια βάθη η πίεση του νερού είναι πολύ μεγάλη (υπολογίστε την μόνοι σας, λαμβάνοντας υπόψη ότι η πυκνότητα του θαλασσινού νερού είναι περίπου 1,03 kg/m^3). Υπό αυτή την πίεση, οι πνεύμονες της φάλαινας συρρικνώνονται και καταλαμβάνουν έναν μικρό όγκο. Αλλά έτσι μειώνεται και ο ολικός όγκος της φάλαινας, οπότε μειώνεται και η άνωση που ασκείται πάνω της.

Όσο, πάλι, η φάλαινα ανεβαίνει προς την επιφάνεια του νερού, η άνωσή της αυξάνεται σταδιακά (καταλαβαίνετε γιατί;). Στην επιφάνεια, μάλιστα, παίρνει μια βαθιά αναπνοή, οπότε αυξάνει ακόμη περισσότερο τον όγκο της. Έτσι, είτε η φάλαινα κολυμπά στην επιφάνεια είτε βαθιά, δέχεται από το νερό την ίδια άνωση, τόση δηλαδή, όσο είναι το βάρος της που πρέπει να εξισορροπηθεί.

Μετά απ' αυτά, σκεφτείτε τις παρακάτω ερωτήσεις:

Αν διαιρέσουμε τη μάζα της φάλαινας διά του όγκου της, θα βρούμε τη μέση πυκνότητά της. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι όπου κι αν κολυμπά —στα βάθη του ωκεανού, σε ενδιάμεσα βάθη ή στην επιφάνεια— η πυκνότητά της είναι πάντα ίση με αυτή του νερού; Ποιος είναι ο μηχανισμός που μεταβάλλει τη μέση πυκνότητα της φάλαινας;

Μερικές φορές οι φάλαινες επισκέπτονται παράκτιες υφάλμυρες λίμνες. Πώς θα μεταβάλλεται η άνωση που δέχονται σ' αυτές τις περιοχές εξαιτίας της διαφορετικής σύστασης του νερού;

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε αερόστατα θερμού αέρα για να παρατηρήσουμε και να φωτογραφήσουμε φάλαινες σε ρηχές λίμνες. Εξηγήστε πώς καταφέρνουν να ανυψώνονται αυτά τα αερόστατα.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε ρυθμίσει τη φλόγα του δικού μας αερόστατου έτσι ώστε, σε κατάσταση άπνοιας, να μένουμε μετέωροι σε ορισμένο ύψος πάνω από το νερό για όσο χρόνο χρειάζεται. Τι μπορείτε να πείτε για τη σχέση ανάμεσα στη μάζα του αέρα που εκτοπίζει το αερόστατο και τη μάζα του αερόστατου;

Θα κλείσουμε με ένα φαινόμενο που παρατήρησε ο Κουστώ: είδε τη θάλασσα να αφρίζει σαν να ήταν σαμπάνια. «Επρόκειτο για ολόκληρο σχολείο από μικρές μαρίδες, που κατέβαιναν και μετά ανέβαιναν στην επιφάνεια, απελευθερώνοντας αέρα από τις κύστες τους.» Γιατί νομίζετε ότι τα ψάρια άφηναν αέρα από τις κύστες τους και πότε το έκαναν, όταν καταδύονταν ή όταν ανέβαιναν στην επιφάνεια; ◙

Δείτε ακόμη το άρθρο:

• A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, «Ψηλά, ψηλά και μακριά», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1998.

Η καταστατική εξίσωση των αερίων

V. Belonuchkin

Η ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ιδανικών αερίων (ή, πιο απλά, ο νόμος των ιδανικών αερίων) περιγράφει τη σχέση που συνδέει την πίεση, τη θερμοκρασία και τον όγκο ενός από τα απλούστερα φυσικά συστήματα. Και επειδή πρόκειται για ένα τόσο απλό σύστημα, η καταστατική του εξίσωση είναι εξίσου απλή:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

όπου με P συμβολίζουμε την πίεση του αερίου, με V τον όγκο του, με T τη θερμοκρασία του και με m τη μάζα του. Όσο για τα υπόλοιπα σύμβολα που εμφανίζονται στην εξίσωση, το μ δηλώνει τη γραμμομοριακή μάζα του αερίου, ενώ το R παριστά την παγκόσμια σταθερά των αερίων.

Σύμφωνα με τον ανωτέρω νόμο, η πίεση ενός ιδανικού αερίου είναι ανάλογη με τη θερμοκρασία. Τι σημαίνει αυτό; Άραγε, θα παρακολουθεί πάντοτε πιστά η πίεση τις αυξομειώσεις της θερμοκρασίας; Φυσικά όχι. Η σχέση αναλογίας ισχύει μόνο εφόσον οι υπόλοιπες παράμετροι —δηλαδή ο όγκος, η μάζα και η γραμμομοριακή μάζα— παραμένουν σταθερές. Έστω και μία από αυτές να μεταβάλλεται, τα πράγματα αλλάζουν άρδην. Για παράδειγμα, ακόμη και όταν η μάζα παραμένει σταθερή, η πίεση μπορεί κάλλιστα να πέφτει καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία αντί να ανεβαίνει, αρκεί το αέριο να διαστέλλεται με αρκούντως ταχύ ρυθμό. Βεβαίως, υπάρχουν και πολλές άλλες δυνατότητες. Θα μας δοθεί η ευκαιρία να τις συζητήσουμε λεπτομερώς καθώς θα λύνουμε μερικά προβλήματα από εισαγωγικές εξετάσεις στο πανεπιστήμιο και το πολυτεχνείο.

Πρόβλημα 1. *Η θερμοκρασία και η πίεση σταθερής μάζας ιδανικού αερίου μεταβάλλονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Μεταβάλλεται και ο όγκος του, και αν ναι, πώς;*

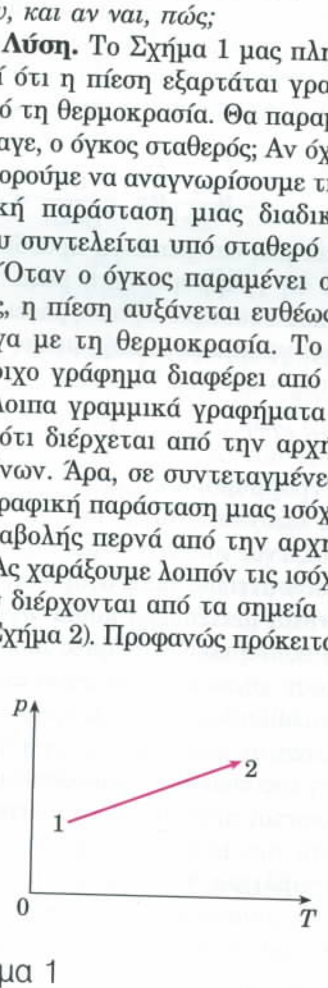
Λύση. Το Σχήμα 1 μας πληροφορεί ότι η πίεση εξαρτάται γραμμικά από τη θερμοκρασία. Θα παραμείνει, άραγε, ο όγκος σταθερός; Αν όχι, πώς μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη γραφική παράσταση μιας διαδικασίας που συντελείται υπό σταθερό όγκο;

Όταν ο όγκος παραμένει σταθερός, η πίεση αυξάνεται ευθέως ανάλογα με τη θερμοκρασία. Το αντίστοιχο γράφημα διαφέρει από τα υπόλοιπα γραμμικά γραφήματα κατά το ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Άρα, σε συντεταγμένες P-T η γραφική παράσταση μιας ισόχωρης μεταβολής περνά από την αρχή.

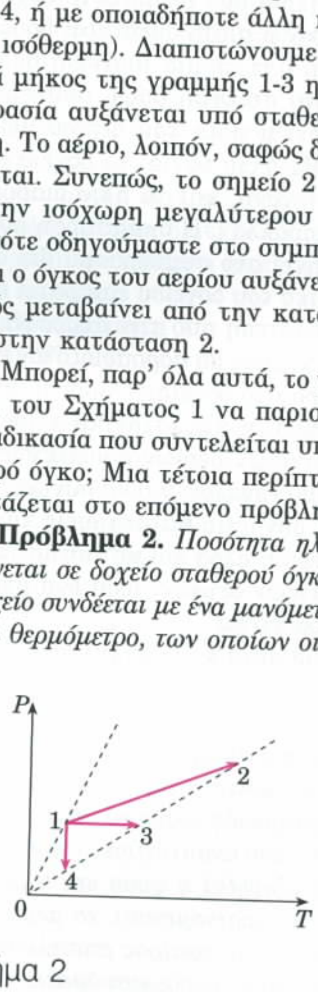
Ας χαράξουμε λοιπόν τις ισόχωρες που διέρχονται από τα σημεία 1 και 2 (Σχήμα 2). Προφανώς πρόκειται για δύο διαφορετικές ισόχωρες, οπότε στις καταστάσεις 1 και 2 αντιστοιχούν επίσης διαφορετικοί όγκοι. Ποιος από τους δύο όμως είναι μεγαλύτερος; Υπάρχει ένας απλός τρόπος για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα χρησιμοποιώντας και πάλι το διάγραμμα. Ας συνδέσουμε τις δύο ισόχωρες με την ισοβαρή 1-3 (ή με την ισόθερμη 1-4, ή με οποιαδήποτε άλλη ισοβαρή ή ισόθερμη). Διαπιστώνουμε ότι κατά μήκος της γραμμής 1-3 η θερμοκρασία αυξάνεται υπό σταθερή πίεση. Το αέριο, λοιπόν, σαφώς διαστέλλεται. Συνεπώς, το σημείο 2 ανήκει στην ισόχωρη μεγαλύτερου όγκου, οπότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο όγκος του αερίου αυξάνεται καθώς μεταβαίνει από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2.

Μπορεί, παρ' όλα αυτά, το γράφημα του Σχήματος 1 να παριστά μια διαδικασία που συντελείται υπό σταθερό όγκο; Μια τέτοια περίπτωση εξετάζεται στο επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2. *Ποσότητα ηλίου εισάγεται σε δοχείο σταθερού όγκου. Το δοχείο συνδέεται με ένα μανόμετρο και ένα θερμόμετρο, των οποίων οι ενδεί-*



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ξεις μεταβάλλονται σύμφωνα με το Σχήμα 1. Τι μπορεί να ειπωθεί για την κατάσταση του αερίου; Ειδικότερα, στο εσωτερικό του δοχείου επικρατεί πίεση υψηλότερη ή χαμηλότερη της ατμοσφαιρικής;

Λύση. Στην προκειμένη περίπτωση, ο όγκος του αερίου παραμένει σταθερός, αλλά η πίεσή του δεν είναι ανάλογη με τη θερμοκρασία. Πώς μπορεί να συμβαίνει κάτι τέτοιο;

Ας επιστρέψουμε στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων και ας τη διαβάσουμε ακόμη μία φορά με απόλυτη σχολαστικότητα. Τότε θα προσέξουμε ότι, εκτός από τις παραμέτρους P, V και T, στην εξίσωση υπεισέρχονται ακόμη τα m και μ. Η γραμμομοριακή μάζα του ηλίου δεν είναι δυνατόν να αλλάζει, διότι το ήλιο, ως μονοατομικό αέριο, αποκλείεται να διασπαστεί. Το ενδεχόμενο να έχουμε υγροποίηση αποκλείεται επίσης, επειδή η θερμοκρασία ανεβαίνει. Έτσι, μόνο μια δυνατότητα απομένει: πρέπει να μεταβάλλεται η μάζα m του ηλίου που περιέχει το δοχείο.

Εφόσον η πίεση αυξάνεται βραδύτερα απ' ό,τι σε μια ισόχωρη διαδικασία για σταθερή μάζα, συμπεραίνουμε ότι η μάζα του αερίου μειώνεται. Με άλλα λόγια, το δοχείο δεν είναι στεγανό, και το ήλιο διαρρέει στο περιβάλλον. Η διαπίστωση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στο εσωτερικό του δοχείου επικρατεί πίεση υψηλότερη από την ατμοσφαιρική —ειδάλλως, θα παρουσιαζόταν εισροή αέρα στο δοχείο.

Ωστόσο, η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων αποδεικνύεται πολύτιμο εργαλείο για να συγκρίνουμε όχι μόνο τις καταστάσεις του ίδιου αερίου αλλά και καταστάσεις διαφορετικών αερίων. Ιδού ένα σχετικό παράδειγμα.

Πρόβλημα 3. *Ο σφαιρικός, ή σφαιροειδής κεραυνός είναι μια αμυδρά φωτοβολούσα αεριώδης σφαίρα που «πλέει» ελεύθερα στον αέρα. Σύμφωνα με το μοντέλο του Stakhanov για τον σφαιροειδή κεραυνό (ένα από τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν προκειμένου να εξηγηθεί η φύση και η μορφή αυτού του φαινομένου), το αέριο στο εσωτερικό της σφαίρας αποτελείται από μοριακά συσσωματώματα: κάθε σύνθετο σωματίδιο αποτελείται από ένα άτομο αζώτου συνδεδεμένο με μερικά μόρια νερού. Τα μόρια του νερού γίνονται αποδέκτες των ηλεκτρονίων που χάνουν τα άτομα του αζώτου, οπότε κάθε σύνθετο «μόριο» είναι ηλεκτρικά ουδέτερο. Προσδιορίστε με πόσα μόρια νερού συνδέεται κάθε άτομο αζώτου αν στο μεν εσωτερικό της σφαίρας επικρατεί θερμοκρασία $T = 600°C$, στον δε περιβάλλοντα αέρα θερμοκρασία $T_0 = 20°C$.*

Λύση. Εφόσον ο σφαιροειδής κεραυνός «πλέει» ελεύθερα στον αέρα, πρέπει να έχει την ίδια πυκνότητα με αυτόν. Κατά πάσαν πιθανότητα, μάλιστα, και η πίεση στο εσωτερικό της σφαίρας θα ισούται με την ατμοσφαιρική πίεση. Οι δύο αυτές συνθήκες μάς δίνουν

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0}, \text{ ή } \frac{PV}{m} = \frac{P_0V_0}{m_0}.$$

Εδώ, όλες οι μεταβλητές που φέρουν το δείκτη 0 αναφέρονται στον ατμοσφαιρικό αέρα ενώ εκείνες χωρίς δείκτες στο αέριο των μοριακών συσσωματωμάτων. Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{T}{\mu} = \frac{T_0}{\mu_0},$$

η οποία μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη γραμμομοριακή μάζα του μοριακού συσσωματώματος βάσει της (μέσης) γραμμομοριακής μάζας του αέρα ($\mu_0 = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ kg/mol):

$$\mu = \mu_0(T/T_0) \approx 8{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ kg/mol}.$$

Η γραμμομοριακή μάζα του ατομικού αζώτου ισούται με $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ kg/mol, ενώ του νερού με $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ kg/mol· συνεπώς, κάθε άτομο αζώτου συνδέεται με τέσσερα μόρια νερού.

Οι εξωτερικές συνθήκες που επικρατούν γύρω από ένα αέριο μπορεί να μεταβληθούν ποικιλοτρόπως· εντούτοις, σε κάθε περίπτωση η κατάσταση του αερίου εξακολουθεί να περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων.

Πρόβλημα 4. *Ένας κύλινδρος, εγκάρσιας διατομής $S = 10$ cm^2, πλήρης αερίου, κλείνεται από πάνω με έμβολο μη αμελητέας μάζας. Ο κύλινδρος κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση $2g$. Όταν η θερμοκρασία του αερίου εξισώνεται με την αρχική, ο όγκος κάτω από το έμβολο έχει μειωθεί κατά μιάμιση φορά. Προσδιορίστε τη μάζα m του εμβόλου. Η εξωτερική πίεση ανέρχεται σε 10^5 N/m^2.*

Λύση. Στην κατάσταση της ηρεμίας, το βάρος του εμβόλου το εξισορροπούσε η ανωστική δύναμη που ασκούνταν σ' αυτό λόγω της διαφοράς των πιέσεων στο εσωτερικό και το εξωτερικό του κυλίνδρου:

$$mg = (P - P_0)S.$$

Όταν ο κύλινδρος επιταχύνεται προς τα πάνω, η ολική δύναμη που εφαρμόζεται στο έμβολο του προσδίδει επιτάχυνση προς τα πάνω μέτρου $2g$. Εφόσον ο όγκος του αερίου έχει μειωθεί κατά μιάμιση φορά στην ίδια θερμοκρασία, η πίεση του αερίου πρέπει να έχει αυξηθεί κατά τον ίδιο παράγοντα. Άρα, μπορούμε να γράψουμε $2mg = (1{,}5P - P_0)S - mg$, ή

$$3mg = (1{,}5P - P_0)S.$$

Έτσι, καταλήγουμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (P και m)· λύνοντάς το, βρίσκουμε το αποτέλεσμα

$$m = \frac{P_0S}{3g} \approx 3{,}4 \text{ kg}.$$

Εξετάσαμε ορισμένα παραδείγματα προβλημάτων όπου βρίσκει εφαρμογή η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων (φυσικά, κατ' ουδένα τρόπο δεν έχουμε εξαντλήσει το φάσμα των προβλημάτων που μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια της εν λόγω εξίσωσης). Ωστόσο, έχει επίσης εξαιρετική σημασία να γνωρίζουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες δεν επιτρέπεται να προσφύγουμε στην περίφημη αυτή εξίσωση (με άλλα λόγια, να προσδιορίσουμε το πεδίο της εφαρμοσιμότητάς της).

Το μοντέλο του ιδανικού αερίου βασίζεται στην παραδοχή ότι η ενέργεια της μοριακής αλληλεπίδρασης είναι αμελητέα σε σύγκριση με τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων. Στην προσέγγιση αυτή τα μόρια προσομοιώνονται με μικρές ελαστικές σφαίρες, οι οποίες αλληλεπιδρούν μόνο όταν συγκρούονται. Η διάμετρος των σφαιρών θεωρείται πολύ μικρότερη από τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων.

Αναμφίβολα, ένα τέτοιο μοντέλο συνιστά υπεραπλούστευση. Αλήθεια, τι ακριβώς εννοούμε όταν μιλούμε για το «μέγεθος» των μορίων; Πολύ εύλογα, η ενεργός διάμετρος του μορίου λαμβάνεται ίση με την απόσταση στην οποία πρέπει να το πλησιάσει ένα άλλο μόριο ώστε να επηρεάσει την κίνησή του. Όπως αντιλαμβάνεστε, στο πλαίσιο του συγκεκριμένου ορισμού, το μέγεθος του μορίου θα εξαρτώνταν από διάφορες φυσικές συνθήκες· ειδικότερα δε, θα παρουσίαζε εξάρτηση από τη θερμοκρασία. Πρόκειται για ένα συμπέρασμα το οποίο επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα των πειραμάτων: αυξανομένης της θερμοκρασίας, η ενεργός μοριακή διάμετρος όντως μειώνεται. Η συμπεριφορά αυτή δεν είναι απροσδόκητη: όσο ανεβαίνει η θερμοκρασία η κινητική ενέργεια αυξάνεται, οπότε τα μόρια πρέπει να πλησιάσουν περισσότερο ώστε η δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασής τους να γίνει συγκρίσιμη με την κινητική ενέργειά τους (αλλιώς οι τροχιές των μορίων δεν θα αλλάξουν σημαντικά). Ωστόσο, η εξάρτηση της ενεργού διαμέτρου από τη θερμοκρασία είναι εξαιρετικά ασθενής, οπότε έχει νόημα να μεταχειριζόμαστε τη διάμετρο ως να επρόκειτο για μια σταθερά.

Οι ιδιότητες των πραγματικών αερίων αρχίζουν να αποκλίνουν αισθητά από το μοντέλο του ιδανικού αερίου όταν επικρατούν συνθήκες τέτοιες ώστε τα μόρια να συγκρούονται συχνά μεταξύ τους (ούτως ώστε να μην ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα η παραδοχή ότι στο συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος του χρόνου τους δεν αλληλεπιδρούν). Σε τέτοιες συνθήκες, η μέση ελεύθερη διαδρομή (η μέση απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων) γίνεται συγκρίσιμη με τη διάμετρο των μορίων. Αφού τα μόρια ενός τέτοιου αερίου περνούν το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου τους ευρισκόμενα το ένα πλησίον του άλλου, η αλληλεπίδρασή τους δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Υπό ποιες συνθήκες παρουσιάζεται η κατάσταση που περιγράψαμε; Θα απαντήσουμε αφού πρώτα λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα.

Πρόβλημα 5. *Εκτιμήστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του αέρα υπό κανονικές συνθήκες. Υποθέστε ότι η μοριακή διάμετρος ισούται με* $d = 3{,}7 \cdot 10^{-10}$ m.

Λύση. Δύο μόρια συγκρούονται όταν τα κέντρα τους πλησιάσουν σε απόσταση μικρότερη από τη μοριακή διάμετρο d. Υποθέστε ότι ένα μόριο διανύει απόσταση s σε ορισμένο χρονικό διάστημα. Στην πορεία του συγκρούεται με τα μόρια που τα κέντρα τους βρίσκονται εντός ενός «τεθλασμένου» κυλίνδρου, όπου τα σημεία θλάσης αντιστοιχούν σε κρούσεις.

Το ολικό μήκος («ύψος») του κυλίνδρου ισούται με s, ενώ το εμβαδόν της βάσης του είναι πd^2. Το πλήθος των μορίων που περιέχονται σ' αυτό τον όγκο ισούται με $ns\pi d^2$ (με n συμβολίζουμε το πλήθος των μορίων ανά μονάδα όγκου) και συμπίπτει με το πλήθος των κρούσεων. Ας υπολογίσουμε τη μέση απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων, δηλαδή τη μέση ελεύθερη διαδρομή που χαρακτηρίζει το αέριο:

$$l = \frac{s}{ns\pi d^2} = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{RT}{N_A P\pi d^2} \approx 8{,}75 \cdot 10^{-8}\ \text{m}.$$

Για να φτάσουμε στο αριθμητικό αποτέλεσμα, χρησιμοποιήσαμε τις τιμές της πίεσης, $P = 10^5\ \text{N/m}^2$, της θερμοκρασίας, $T = 273$ K, του αριθμού του Avogadro, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.

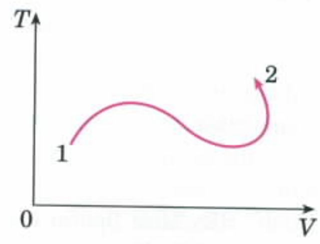
Για τις συγκεκριμένες συνθήκες, το πείραμα δίνει την τιμή $6{,}2 \cdot 10^{-8}$ m. Η διαφορά ανάμεσα στη θεωρητική και την πειραματική τιμή οφείλεται κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι θεωρήσαμε πως όλα τα μόρια (εκτός από εκείνο που παρακολουθούσαμε την κίνησή του) ηρεμούσαν. Μια λεπτομερής ανάλυση (η οποία υπερβαίνει τους ορίζοντες του παρόντος άρθρου) δείχνει ότι, αν ληφθεί υπόψη η σχετική μοριακή κίνηση, η θεωρητική τιμή της μέσης ελεύθερης διαδρομής τροποποιείται κατά τον παράγοντα $1/\sqrt{2}$. Εάν πολλαπλασιάσουμε τη θεωρητική μας τιμή με τον εν λόγω παράγοντα, βρίσκουμε $l = 6{,}19 \cdot 10^{-8}$ m.

Τώρα, όμως, μας ενδιαφέρει περισσότερο ένα άλλο ζήτημα. Υπό κανονικές συνθήκες, η μέση ελεύθερη διαδρομή υπερβαίνει τη μοριακή διάμετρο κατά 200 περίπου φορές, οπότε η προσέγγιση του ιδανικού αερίου λειτουργεί αρκετά ικανοποιητικά. Αντίθετα, όταν η πίεση αυξηθεί κατά έναν παράγοντα 100-200 υπό σταθερή θερμοκρασία, η μέση ελεύθερη διαδρομή καθίσταται συγκρίσιμη με τη μοριακή διάμετρο. Αυτό σημαίνει ότι, όταν έχουμε τόσο υψηλή πίεση (ή, για την ακρίβεια, τόσο υψηλή πυκνότητα), τα μόρια σχεδόν ποτέ δεν απέχουν πολύ, οπότε δεν επιτρέπεται να αμελήσουμε την αλληλεπίδρασή τους. Στην προκειμένη περίπτωση, το μοντέλο του ιδανικού αερίου αποτυγχάνει οικτρά. Παρεμπιπτόντως, οι πυκνότητες των συμπυκνωμένων φάσεων (στερεά ή υγρά) είναι χιλιαπλάσιες περίπου από εκείνες των αερίων. Ένα αέριο, λοιπόν, που έχει πυκνότητα μόνο 5-10 φορές μικρότερη απ' ό,τι τα υγρά δεν μπορεί να θεωρείται ιδανικό. Εντούτοις, αν η θερμοκρασία είναι αρκετά υψηλή, το αέριο μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να θεωρηθεί ιδανικό ακόμη και σε μεγάλες πιέσεις, διότι τον καθοριστικό ρόλο τον παίζει η πυκνότητα και όχι η πίεση.

Προβλήματα

1. Το Σχήμα 3 δείχνει ένα διάγραμμα που παριστά τις μεταβολές κατάστασης ορισμένης μάζας ιδανικού αερίου. Προσδιορίστε τα τμήματα της καμπύλης που αντιστοιχούν σε αύξηση και σε μείωση της πίεσης.

2. Σε ένα δοχείο γεμάτο με οξυγόνο σημειώνεται ηλεκτρική εκκένωση. Ως αποτέλεσμα, όλο το οξυγόνο



Σχήμα 3

Η συνέχεια στη σελ. 68 ⇨

Με κανόνα και διαβήτη (μέρος β΄)

«Ορθώ μετρήσω κανόνι προστεθείς, ίνα ο κύκλος γενηταί σοι τετράγωνο.»
—Αριστοφάνη, Όρνιθες 1004

Μιχάλης Λάμπρου

ΣΤΙΣ *ΟΡΝΙΘΕΣ* ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΦΑΝΗ, ΠΟΥ ΔΙΔΑΧΘΗΚΑΝ ΤΟ 414 π.Χ., ο ποιητής σε ένα σημείο σατιρίζει τον διάσημο αστρονόμο Μέτωνα. Στην πέμπτη σκηνή, όπου ο Μέτων είναι έτοιμος να μετρήσει τον... αέρα, ο αρχηγός των Ορνίθων Πεισθέταιρος τον ρώτησε τι ήταν τα όργανα που κρατούσε. Ακολουθεί η εξής στιχομυθία:

ΜΕΤΩΝ: [...] Προσθεὶς οὖν ἐγὼ τὸν κανόν' ἄνωθεν τουτονὶ τὸν καμπύλον, ἐνθεὶς διαβήτην. Μανθάνεις; (Ετούτον τον γυρτό κανόνα απάνω θα βάλω, μετά τον διαβήτη θα καρφώσω. Καταλαβαίνεις;)

ΠΕΙΣΘΕΤΑΙΡΟΣ: Οὐ μανθάνω. (Δεν καταλαβαίνω τίποτα).

ΜΕΤΩΝ: Ὀρθῷ μετρήσω κανόνι προστεθείς, ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος [...]. (Μετά τον ίσιο κανόνα σε αυτά θα προσθέσω, για να σου γίνει ο κύκλος τετράγωνος).

Το παραπάνω χωρίο δείχνει, τουλάχιστον, ότι η ενασχόληση με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου στην αρχαία Αθήνα, ήταν ένα θέμα του οποίου την ύπαρξη γνώριζε το ευρύ κοινό. Άλλωστε και σε προηγούμενη κωμωδία του, στις *Νεφέλες* που διδάχθηκαν το 423 π.Χ., ο Αριστοφάνης θέτει στο χέρι του Σωκράτη ένα διαβήτη. Βέβαια, η όλη σκηνή είναι δηκτική, και ο ποιητής υπαινίσσεται ότι, πρώτον, γνώριζε τα θέματα που απασχολούσαν τη σχολή του μεγάλου φιλοσόφου και, δεύτερον, ότι ήταν άχρηστα: Αφού πρώτα αναφέρει πώς, δήθεν, μετρήθηκε το πήδημα που έκανε ένας ψύλλος ο οποίος «είχε δαγκώσει το φρύδι του Χαιρεφώντα και μετά πήδηξε στη φαλάκρα του Σωκράτη», στη συνέχεια μας περιγράφει πώς ο φιλόσοφος έλυσε το πρόβλημα της πείνας... με το διαβήτη του.

Ιδού:

ΜΑΘΗΤΗΣ: Χθες βράδυ δεν είχαμε να φάμε.

ΣΤΡΕΨΙΑΔΗΣ: Και τι, λοιπόν, σοφίστηκε ο Σωκράτης;

ΜΑΘΗΤΗΣ: Πασπάλισε με στάχτη το τραπέζι της παλαίστρας [έτοιμος δηλαδή να το χρησιμοποιήσει για να χαράξει πάνω του γεωμετρικά σχήματα, όπως έκαναν οι αρχαίοι], μετά πήρε μια σούβλα, τη λύγισε στα δύο για να φτιάξει ένα διαβήτη, κι ενώ κοίταζαν όλοι τι θα κάνει, [...] σούφρωσε ένα κομμάτι κρέας από το βωμό.

Η ενασχόληση όμως με τη φιλοσοφία, και ειδικότερα με τη γεωμετρία, δεν πρέπει να έχει υλικό όφελος. Έτσι, τουλάχιστον, απάντησε ο Ευκλείδης ειρωνευόμενος ένα μαθητή ο οποίος τον ρώτησε τι έχει να κερδίσει από το πρώτο θεώρημα που έμαθε. Ας δούμε πώς περιγράφει ο Ιωάννης Στοβαίος (5ος αι. μ.Χ.) το περιστατικό στις *Εκλογές* του:

«Παρ' Εὐκλείδη τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην· "τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μαθόντι;" καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας "δός," ἔφη, "αὐτῷ τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν"» (κάποιος που άρχισε να μαθαίνει γεωμετρία από τον Ευκλείδη, μόλις έμαθε το πρώτο θεώρημα, τον ρώτησε «τί έχω να ωφεληθώ με το να μάθω αυτά;». Και ο Ευκλείδης φώναξε το δούλο και είπε «δώσε του μια δεκάρα γιατί αυτός θέλει να κερδίζει από αυτά που μαθαίνει»).

Αντιθέτως, η γεωμετρία ήταν μείζον τμήμα της παιδείας στην αρχαία Αθήνα, μιας παιδείας που ξεχώριζε από την αντίστοιχη των άλλων αρχαίων κοινοτήτων, η οποία απέβλεπε μόνο στις εφαρμογές.

Η ενασχόληση με τη γεωμετρία αργά ή γρήγορα προσέκρουσε στο θέμα των γεωμετρικών κατασκευών. Ο αρχαιότερος για τον οποίο υπάρχει η μαρτυρία ότι έλυσε προβλήματα τέτοιων κατασκευών (και εννοείται, αναμφίβολα, με κανόνα και διαβήτη) ήταν ο αστρονόμος Οινοπίδης ο Χίος (~450 μ.Χ.). Πρόκειται για το πρόβλημα κατασκευής καθέτου σε ευθεία από δοθέν σημείο εκτός αυτής, και το πρόβλημα κατασκευής γωνίας ίσης με δοθείσα. Η πληροφορία είναι από τον Πρόκλο (412-485 μ.Χ.) στο *Υπόμνημά του εις το α' των Στοιχείων*. Συγκεκριμένα, όταν σχολιάζει την Πρόταση α', 12 των *Στοιχείων*, δηλαδή την «Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν», παρατηρεί (σε μετάφραση): «Ο Οινοπίδης κατέστησε πρώτος την πρόταση αυτή ως αντικείμενο της έρευνάς του, γιατί τη θεώρησε χρήσιμη στην αστρονομία. Αλλά την "κάθετο" την ονομάζει με το αρχαίο της όνομα "κατὰ τὸν γνώμονα" γιατί και ο γνώμονας (δηλ. ο δείκτης του ηλιακού ρολογιού) σχηματίζει ορθή γωνία με τον ορίζοντα.»

Όμοια, μετά την Πρόταση α', 23 των *Στοιχείων*, «Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι», ο Πρόκλος γράφει, επικαλούμενος το μαθητή τού Αριστοτέλη Εύδημο τον Ρόδιο (~370-300 π.Χ.), ότι «και εδώ παρουσιάζεται ένα πρόβλημα το οποίο κατά τη μαρτυρία του Ευδήμου, λύθηκε από τον Οινοπίδη».

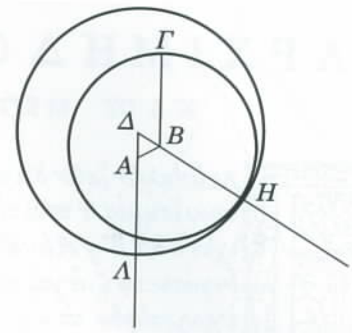
Οι παραπάνω κατασκευές είναι βέβαια απλές, αλλά η αξία τους έγκειται στο γεγονός ότι, πολύ πιθανόν, να προσδιόρισαν τα μέσα που επιτρέπονται στις γεωμετρικές κατασκευές, που είναι η χρήση του κανόνα και διαβήτη (και μόνο αυτών των δύο οργάνων).

Στην αρχαία γεωμετρία η χρήση του διαβήτη είχε έναν περιορισμό που σήμερα τον παραβλέπουμε, γιατί αποδεικνύεται ότι υπάρχει τρόπος παράκαμψής του. Συγκεκριμένα, τα αιτήματα επιτρέπουν να θέσουμε τη μία άκρη του διαβήτη σε ένα σημείο, *μετά να τον ανοίξουμε* ώστε το τμήμα που ορίζουν τα δύο άκρα του να ισούται με δοθέν τμήμα, και μόνο τότε να γράψουμε κύκλο. Με άλλα λόγια, *δεν είναι* στα αιτήματα η εξής διαδικασία: ανοίγουμε πρώτα το διαβήτη στο επιθυμητό άνοιγμα και *μετά τον μεταφέρουμε (ανοικτό)* σε ένα κέντρο (αλλού) για να γράψουμε κύκλο. Όπως χαρακτηριστικά λέγεται στη βιβλιογραφία, «ο διαβήτης του Ευκλείδη κλείνει όταν σηκωθεί», τουλάχιστον όσον αφορά τα αιτήματα.

Το πρώτο μέλημα του Στοιχειωτού στο περίφημο έργο του, είναι να αποδείξει ότι (με τον αρχικό περιορισμό ότι δεν επιτρέπεται να σηκωθεί ο διαβήτης) η μεταφορά ευθύγραμμου τμήματος είναι παρ' όλα αυτά εφικτή.

Άσκηση 1. Με τον περιορισμό ότι ο διαβήτης κλείνει όταν σηκωθεί, αποδείξτε ότι μπορεί να γίνει μεταφορά ευθύγραμμου τμήματος σε όποιο σημείο του επιπέδου επιθυμούμε. Με άλλα λόγια, αποδείξτε την Πρόταση β', του α' Βιβλίου των *Στοιχείων*: «Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ (ευθύγραμμο τμήμα, με σημερινή ορολογία) ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.»

Η κατασκευή στα *Στοιχεία* είναι η εξής: έχει προηγηθεί η πρώτη Πρόταση των *Στοιχείων*, που είναι η κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα («Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι»). Η κατασκευή είναι βέβαια απλή και δεν υπάρχει λόγος να την επαναλάβουμε. Το μόνο που σχολιάζουμε είναι ότι η κατασκευή αυτή είναι εφικτή *χωρίς να σηκωθεί ανοικτός* ο διαβήτης. Με αυτό ως δεδομένο, έστω ότι θέλουμε να τοποθετήσουμε στο A ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το $B\Gamma$. Κατασκευάζουμε, σύμφωνα με το προηγούμενο, το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Delta$. Με κέντρο το B και ακτίνα $B\Gamma$ γράφουμε κύκλο, που τέμνει τη ΔB στο H. Με κέντρο το Δ και



Σχήμα 1

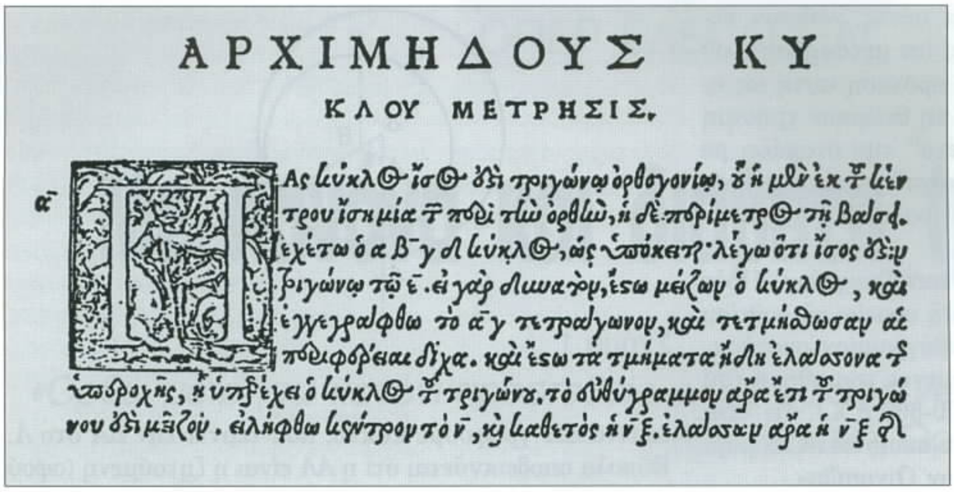
ακτίνα ΔH γράφουμε κύκλο, που τέμνει την ΔA στο Λ. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $A\Lambda$ είναι η ζητούμενη (αφού $\Delta A + A\Lambda = \Delta\Lambda = \Delta H = \Delta B + BH = \Delta A + B\Gamma$, κ.λπ.). Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Στα Βιβλία α', β', γ', δ' και στ' των *Στοιχείων*, που ασχολούνται με επιπεδομετρία, από ένα σύνολο 148 Προτάσεων, οι 43 είναι κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Όλες τους, χωρίς εξαίρεση, είναι κλασικές στη γεωμετρία. Ήδη, στο μέρος α' του παρόντος άρθρου, αναφέραμε τις κατασκευές τετραγώνου ισεμβαδικού προς δοθέν πολύγωνο (*Στοιχεία*, β', 14) και πολυγώνου ομοίου προς δοθέν και ισεμβαδικού προς τρίτο (*Στοιχεία*, στ', 25). Ας απαριθμήσουμε ορισμένες από τις υπόλοιπες κατασκευές στα *Στοιχεία*: «Να τμηθεί ευθύγραμμο τμήμα ώστε το ορθογώνιο που περιέχεται από το τμήμα αυτό και το ένα μέρος να ισούται με το τετράγωνο του άλλου μέρους» (*Στοιχεία*, β', 11), «να αχθεί εφαπτομένη κύκλου» (γ', 17), «να κατασκευασθεί τόξο κύκλου που να βλέπει δοθέν ευθύγραμμο τμήμα υπό δοθείσα γωνία» (γ', 33), «να εγγραφεί κύκλος σε τρίγωνο» (δ', 4), «να περιγραφεί κύκλος σε τρίγωνο (δ', 5), «να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο» (δ', 11), «να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα σε δοθέντα λόγο» (στ', 10), «να βρεθεί η τέταρτη ανάλογος τριών ευθυγράμμων τμημάτων» (στ', 12), «να τμηθεί ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο». Τέλος, υπάρχουν γεωμετρικές κατασκευές που ανάγονται στη λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων όπως της μορφής $ax \pm \frac{\beta}{\gamma}x^2 = E^2$ (όπου a, β, γ δοθέντα μήκη και E δοθέν εμβαδόν). Τέτοια προβλήματα είναι, επί παραδείγματι, τα στ', 28 και στ', 29 των *Στοιχείων*.

Άσκηση 2. Διεκπεραιώστε τις παραπάνω κατασκευές των *Στοιχείων*.

Οι κατασκευές αυτές είναι θεμελιώδεις, βρίσκονται στα περισσότερα βιβλία επιπεδομετρίας, και δεν υπάρχει λόγος να υπενθυμίσουμε εδώ τα βήματα. Όμως, στην αρχαία ελληνική μαθηματική γραμματεία υπάρχουν πολλές άλλες κατασκευές με κανόνα και διαβήτη, μερικές από τις οποίες είναι δύσκολες.

Έργα αρχαίων που περιέχουν κατασκευές είναι, μεταξύ άλλων, το *Περί διαιρέσεων* του Ευκλείδη, το *Λόγου αποτομή*, το *Χωρίου αποτομή*, το *Διωρισμένη τομή* και το *Περί επαφών* του Απολλωνίου και τα τέσσερα, και η περίφημη *Συναγωγή* του Πάππου. Ορισμένων εξ αυτών,



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α΄ Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ αβγδ κύκλος, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τῷ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ αγ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ νξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ νξ τῆς

δυστυχώς, δεν σώζεται το ελληνικό πρωτότυπο πλην μιας περίληψης ή μετάφρασης στα αραβικά ή στα λατινικά. Ας τα δούμε, έστω περιληπτικά.

Το ελληνικό πρωτότυπο του *Περί διαιρέσεων* έχει χαθεί, όμως αναφέρεται από τον Πρόκλο στο *Υπόμνημά* του. Εκεί, μας πληροφορεί για τον Ευκλείδη ότι εκτός από τα *Στοιχεία*, «Πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρός τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. Τοιαύτα γὰρ καὶ τὰ *Ὀπτικά* καὶ τὰ *Κατοπτρικά*, τοιαῦται δὲ καὶ αἱ *κατὰ Μουσικὴν στοιχειώσεις*, ἔτι δὲ τὸ *Περὶ διαιρέσεων* βιβλίον».

Το μόνο σωζόμενο σήμερα χειρόγραφο του *Περί διαιρέσεων* είναι μια αραβική μετάφραση. Το ανακάλυψε ο F. Woepcke στο Παρίσι, ο οποίος το εξέδωσε το 1851 με παράλληλη γαλλική μετάφραση. Το περιεχόμενο όμως του έργου ήταν γνωστό στη Δύση από τον 12ο αιώνα: Ο Λεονάρδος της Πίζας (~1170-~1250), γνωστότερος ως Fibonacci, έγραψε το 1220 ένα σπουδαίο για την εποχή του έργο, με τίτλο *Practica Geometriae*, το οποίο περιέχει (με μικρές μόνο προσθήκες ή γενικεύσεις) το *Περί διαιρέσεων* του Ευκλείδη. Δυστυχώς, ο Fibonacci δεν αναφέρει πουθενά το όνομα του αρχικού συγγραφέα. (Τέτοιου είδους πλαγιαρισμοί αρχαίων έργων, την εποχή του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης, δεν ήταν σπάνια φαινόμενα. Ο συγκεκριμένος αποκαλύφθηκε από τον εμβριθή αμερικανό ιστορικό R.C. Archibald, το 1915).

Τον 16ο αιώνα, ο μελετητής του Ευκλείδη, άγγλος μαθηματικός, αλχημιστής και αστρολόγος John Dee (1527-1608) είχε στη διάθεσή του μια κακή και ελλιπή αραβική μετάφραση του *Περί διαιρέσεων*, από τον Μωάμεθ της Βαγδάτης (;-1141), καθώς και μια λατινική μετάφραση του αραβικού, από τον ακάματο μεταφραστή αραβικών χειρογράφων, Γεράλδο της Κρεμώνας (1114-1187). Της λατινικής αυτής μετάφρασης ο Dee έκανε αντίγραφο το οποίο έδωσε στον σπουδαίο εκδότη δεκάδων σημαντικών αρχαίων έργων, Frederigo Comnandino του Urbino (1509-1575), ο οποίος το τύπωσε το 1570 από κοινού με τον ίδιο.

Από την έκδοση του Woepcke το 1851 και τη λογοκλοπή του Fibonacci, ο Archibald έκανε ανασύσταση του αρχικού κειμένου. Πάντως, στο αραβικό χειρόγραφο υπάρχουν τριάντα έξι προτάσεις, εκ των οποίων μόνο οι τέσσερις, συγκεκριμένα οι Προτάσεις 19, 20, 28, 29, περιέχουν και τις αποδείξεις. Οι υπόλοιπες παραλείφθηκαν από τον άραβα μεταφραστή ως απλές. Ας δούμε ένα δείγμα.

Άσκηση 3. Να γίνουν με κανόνα και διαβήτη οι ακόλουθες κατασκευές, οι οποίες είναι οι Προτάσεις 1, 3, 19 και 26 αντίστοιχα του *Περί διαιρέσεων*: Να διαιρεθεί τρίγωνο σε δύο ίσα μέρη από ευθεία η οποία:

(α) είναι παράλληλη προς τη βάση (*Περί διαιρέσεων*, 1)

(β) διέρχεται από δοθέν σημείο της βάσης (*Περί διαιρέσεων*, 3)

(γ) διέρχεται από δοθέν σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου (*Περί διαιρέσεων*, 19)

(δ) διέρχεται από δοθέν σημείο στο εξωτερικό του τριγώνου (*Περί διαιρέσεων*, 26)

Από τις παραπάνω, το αραβικό κείμενο έχει τη διαδικασία μόνο για τη (γ).

[(Υποδείξεις: (α) Ζητάμε (Σχήμα 2) σημείο M τέτοιο ώστε, λόγω ομοιότητας, $\left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{2}$, κ.λπ. (β) Αν Δ το δοθέν σημείο και M το ζητούμενο, έχουμε $\frac{1}{2} = \frac{(\Delta M\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Delta \cdot \Gamma M}{B\Gamma \cdot A\Gamma}$, οπότε η ΓM προσδιορίζεται με κανόνα και διαβήτη, κατά τα γνωστά. (γ) Η κατασκευή του Ευκλείδη για την περίπτωση αυτή είναι ουσιαστικά η εξής. Έστω Δ το δοθέν σημείο και M, N τα ζητούμενα. Αν θέσουμε $BM = x$, τότε έχουμε, όπως πριν,

$$\frac{1}{2} = \frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{BM \cdot BN}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{x \cdot BN}{AB \cdot B\Gamma} \qquad (1)$$

Αν φέρουμε $\Delta E // B\Gamma$, από ομοιότητα τριγώνων έχουμε

$$\frac{BN}{\Delta E} = \frac{MB}{ME} = \frac{x}{x - BE}.$$

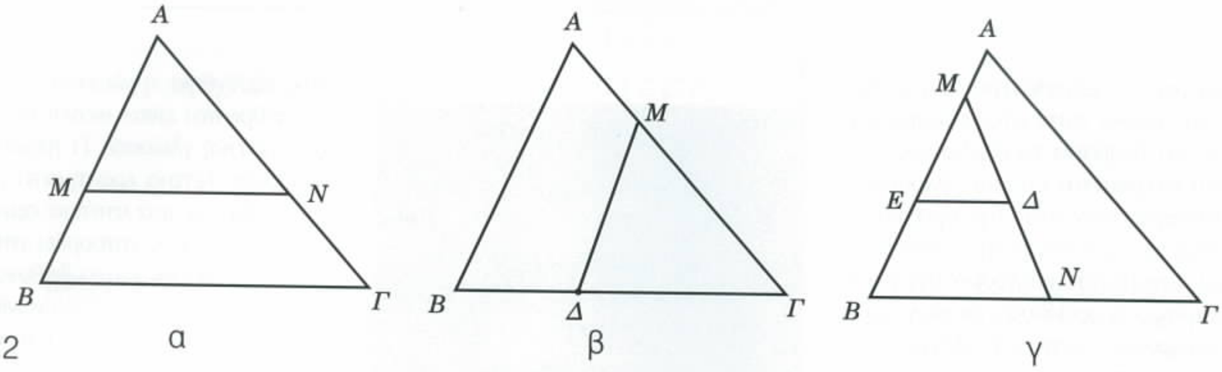
Αντικαθιστούμε τη BN από την τελευταία στην (1), οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x - BE = 2x^2/(AB \cdot B\Gamma),$$

που λύνεται κατά τα γνωστά. Το (δ) αντιμετωπίζεται με παραλλαγή του (γ)).

Άσκηση 4. Να γίνουν οι κατασκευές της προηγούμενης άσκησης, αλλά αντί τα αποκοπέντα τρίγωνα να έχουν εμβαδόν το 1/2 του αρχικού, να έχουν δοθέντα λόγο $\mu \div \nu$ (οι γενικεύσεις αυτές των (α), (γ), (δ) της προηγούμενης άσκησης είναι οι Προτάσεις 30, 20 και 27 του *Περί διαιρέσεων*, αντίστοιχα).

Οι κατασκευές είναι απλές διασκευές των προηγούμενων. Στο *Περί διαιρέσεων* υπάρχουν (χωρίς τις απο-



Σχήμα 2

δείξεις) αντίστοιχα προβλήματα όπου, αντί για δοθέν τρίγωνο, εξετάζονται παραλληλόγραμμα, τραπέζια ή, γενικότερα, τετράπλευρα.

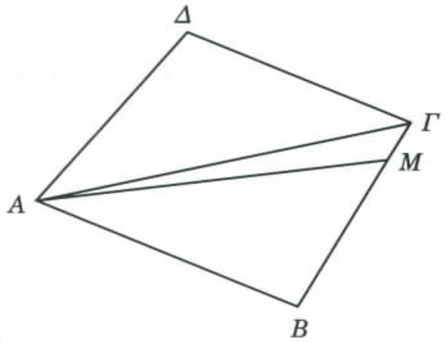
Άσκηση 5. Να διαιρεθεί τετράπλευρο σε δύο ίσα μέρη (γενικότερα σε δύο μέρη με δοθέντα λόγο $\mu \div \nu$) με ευθεία που διέρχεται (α) από κορυφή, (β) από δοθέν σημείο επί πλευράς του τετραπλεύρου (*Περί διαιρέσεων*, 14, 15, 16, 34).

(Υπόδειξη: Αν η διαγώνιος *ΑΓ* μερίζει το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα *ΑΒΓ*, *ΑΓΔ*, τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta) \div (AB\Gamma)$ είναι προσδιοριστέος. Έτσι, ζητάμε *AM* με

$$(ABM) = \frac{\mu}{\mu + \nu}(AB\Gamma\Delta) =$$

$$\frac{\mu}{\mu + \nu}\,\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(AB\Gamma)}(AB\Gamma) = \frac{\alpha}{\beta}(AB\Gamma).$$

Αναγόμαστε έτσι στην Άσκηση 4. Ομοίως τα υπόλοιπα.)

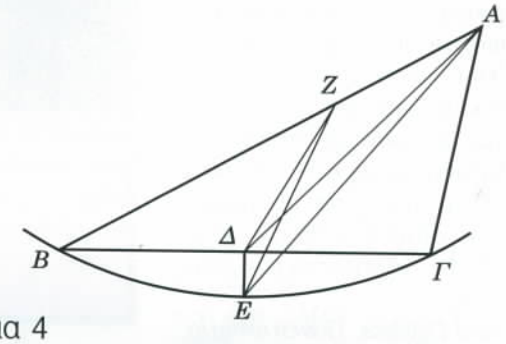


Σχήμα 3

Λίγο πιο ενδιαφέροντα είναι τα επόμενα δύο προβλήματα, αν και τα δύο είναι αρκετά απλά.

Άσκηση 6. (*Περί διαιρέσεων*, 28). Έστω το σχήμα που περικλείεται από τόξο κύκλου, *ΒΕΓ*, και δύο ευθείες *AB*, *ΑΓ*. Να αχθεί ευθεία από το μέσον *E* του τόξου *ΒΕΓ* που να χωρίζει το σχήμα σε δύο ίσα μέρη (Σχήμα 4).

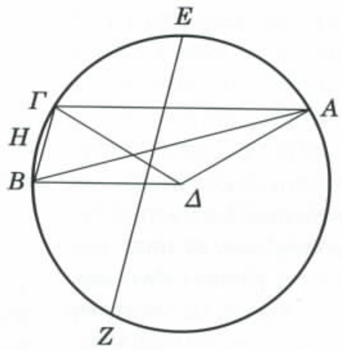
(Υπόδειξη: Ακολουθώντας τον Ευκλείδη, από το μέσον *Δ* της *ΒΓ* φέρουμε παράλληλη *ΔΖ* της *ΑΕ*. Τότε, η *ΕΖ* είναι η ζητούμενη. Πράγματι, προφανώς το μεικτόγραμμο σχήμα *ΑΔΕΓ* ισούται με το μισό του αρχικού. Επίσης, πολύ απλά βλέπουμε ότι το εμβαδόν του μεικτόγραμμου σχήματος *ΑΖΕΓ* ισούται με αυτό του μεικτόγραμμου *ΑΔΕΓ*.)



Σχήμα 4

Άσκηση 7. (*Περί διαιρέσεων*, 29). Σε δοθέντα κύκλο να αχθούν δύο παράλληλες χορδές που να περικλείουν εμβαδόν ίσο με το 1/2 του κύκλου.

(Υπόδειξη: Τα βήματα του Ευκλείδη είναι τα εξής: Έστω τόξο *ΑΓ* ίσο με το 1/3 της περιφέρειας. Από το κέντρο *Δ* του κύκλου φέρουμε *ΒΔ*//*ΑΓ*. Τότε, οι ζητούμενες χορδές είναι η *ΒΓ* και η παράλληλή της *ΕΖ*, όπου *E* το μέσον του τόξου *ΑΕΓ*. Πράγματι, αφού *ΒΖ* = *ΓΕ* = *ΕΑ* έχουμε: 1/3(κύκλου) = τόμεα (*ΔΓΕΑ*) = μεικτόγραμμο σχήμα (*ΒΓΕΑ*) = κυκλικό τμήμα (*ΑΓΒ*) – κυκλικό τμήμα (*ΓΗΒ*) = κυκλικό τμήμα (*ΕΒΖ*) – κυκλικό τμήμα (*ΓΗΒ*) = εμβαδόν μεταξύ των χορδών *ΒΓ* και *ΕΖ*.)



Σχήμα 5

Ας προσθέσουμε ότι στην προηγούμενη άσκηση μπορούσαμε να θέσουμε στη θέση τού 1/3 οποιονδήποτε άλλο λόγο, αρκεί να κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη τόξο ίσο με αυτό το λόγο της περιφέρειας. Παραδείγματος χάριν, θα μπορούσαμε να είχαμε 1/5 διότι το κανονικό πεντάγωνο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη, αλλά όχι 1/7.

Το τελευταίο θα το ερμηνεύσουμε στη συνέχεια του άρθρου μας, στο επόμενο τεύχος.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M186

Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε στάδιο γίνονται το πολύ δέκα καινούργια λάθη. Την πρώτη ημέρα το συνολικό πλήθος των λαθών θα είναι το πολύ δέκα, τη δεύτερη ημέρα θα είναι το πολύ $2 \cdot 10 + 10$, την τρίτη ημέρα θα είναι το πολύ $2(2 \cdot 10 + 10) + 10 = 2^2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 10$, κ.ο.κ. Την n-οστή ημέρα, το πλήθος των λαθών θα είναι το πολύ $(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1)10 = (2^n - 1)10$.

Γνωρίζουμε, όμως, ότι κάποια μέρα κάθε αντίγραφο περιείχε τουλάχιστον δέκα λάθη. Αν αυτό συνέβη τη n-οστή ημέρα, τότε το συνολικό πλήθος λαθών εκείνη την ημέρα θα είναι τουλάχιστον $2^n \cdot 10$ (διότι το πλήθος των μαθητών που έστειλαν λύσεις εκείνη την ημέρα ισούται με 2^n) —και αυτό έρχεται σε αντίφαση με την προηγούμενη εκτίμηση του πλήθους των λαθών.

M187

Συμβολίζουμε με P το μέσο της BC (Σχήμα 1). Από τη δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο AMP είναι $BP^2 = PM \cdot PA$. Όμως, $BP = CP$, οπότε $CP^2 = PM \cdot PA$. Άρα, η PC εφάπτεται του κύκλου AMC. Άρα, ισχύει $\angle MCP = \angle CAP$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης). Συνεπώς, $\angle BMC = 180° - \angle MBC - \angle MCB = 180° - \angle MBP - MCP = 180° - \angle BAP - \angle CAP = 180° - \angle BAC = 180° - \varphi$.

M188

Ας γράψουμε ξανά την αριστερή ανισότητα ως

$$0 \le \frac{t^2 - q}{2t + p} - x_1 = \frac{t^2 - q - 2tx_1 - px_1}{2t + p} =$$

$$\frac{t^2 - 2tx_1 - x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_1}{2t + p} = \frac{t^2 - 2tx_1 + x_1^2}{2t + p} = \frac{(t - x_1)^2}{2t + p}.$$

(Χρησιμοποιήσαμε τους τύπους για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.) Μετασχηματίζουμε με παρόμοιο τρόπο τη δεξιά ανισότητα και καταλήγουμε στο εξής σύστημα ανισοτήτων:

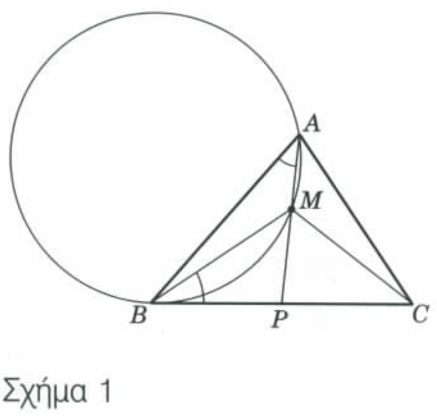
$$\frac{(t - x_1)^2}{2t + p} \ge 0, \quad \frac{(t - x_1)^2}{2t + p} \le 0.$$

Αν ο t δεν είναι ίσος με x_1 ή x_2, τότε έχουμε $2t + p > 0$ και $2t + p < 0$, κάτι που είναι αδύνατο. Άρα, η πρόταση αποδείχτηκε.

M189

Δεν είναι δύσκολο να βρούμε τριγωνομετρική λύση του προβλήματος. Εδώ όμως θα δώσουμε μια περισσότερο γεωμετρική λύση.

Το τμήμα CM τέμνει την πλευρά AB είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά (Σχήμα 2). Ας υποθέσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι την τέμνει εσωτερικά. Θεωρούμε ένα σημείο P της AB τέτοιο ώστε η CM να διχοτομεί τη γωνία BCP. Στο τρίγωνο BCP, το σημείο M είναι η τομή της διχοτόμου της γωνίας C και της διχοτόμου της εξωτερικής γωνίας B.

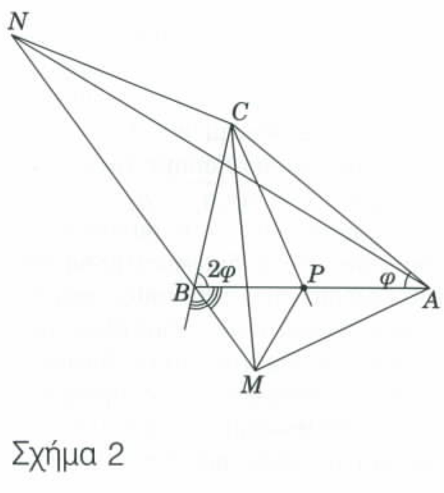


Σχήμα 1

Επομένως, το M ισαπέχει από τις ευθείες CB και CP καθώς και από τις ευθείες CB και PB. Άρα, ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας CPA. (Το σημείο M είναι το κέντρο ενός *παρεγγεγραμμένου* κύκλου του τριγώνου BCP.)

Έστω $\angle BCP = 2x$ και $\angle BPC = 2y$. Έχουμε $2x + 2y + 2\varphi = 180°$. Επίσης, $\angle MCP = x$. Ποιο είναι το μέτρο τής $\angle MPC$; Απ' όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε $\angle MPB = (1/2)\angle APC = (1/2)(180° - 2y) = 90° - y$, και $\angle MPC = \angle MPB + \angle BPC = (90° - y) + 2y = 90° + y$. Τέλος, $\angle CMP = 180° - x - (90° + y) = 90° - x - y = \varphi$. Άρα, $\angle CMP = \angle CAB$. Αυτό το συμπέρασμα, μαζί με το γεγονός ότι $CM = CA$, μας δείχνει ότι το σημείο P ανήκει στο εσωτερικό του τμήματος AB και όχι σε μία από τις προεκτάσεις του.

Θεωρούμε τα τρίγωνα CAP και CMP. Έχουν κοινή πλευρά την CP, οι πλευρές CM και CA είναι ίσες, οι γωνίες στις κορυφές M και A είναι ίσες. Είναι τα δύο τρίγωνα ίσα; Δύο τρίγωνα με ίσες τις δύο πλευρές και τη μία γωνία (που δεν περιέχεται μεταξύ των ίσων πλευρών) μπορεί να είναι ίσα, αλλά μπορεί οι περιεχόμενες γωνίες να είναι παραπληρωματικές. Συνεπώς, είτε $\angle CPM = \angle CPA$, και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα είτε



Σχήμα 2

$\angle CPM + \angle CPA = 180°$. Αν ίσχυε το τελευταίο, το σημείο M θα ανήκε στην ευθεία AB —κάτι που δεν ισχύει. Άρα, τα τρίγωνα CAP και CMP είναι στην πραγματικότητα ίσα.

Έπεται ότι η CP διχοτομεί τη γωνία ACM, γεγονός που σημαίνει ότι οι CM και CP διαιρούν τη γωνία ACB σε τρία ίσα μέρη. Αφού $\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle CBA = 180° - 3\varphi$, καθένα από τα τρία μέρη ισούται με $60° - \varphi$. Έχουμε $\angle CPM = \angle CPA = 180° - (60° - \varphi) - \varphi = 120°$, $\angle CMB = 180° - \angle BCM - \angle CBM = 180° - x - (90° + \varphi) = 90° - x - \varphi = y = (1/2)\angle CPB = 30°$ και $\angle MCN = 120°$. Το σημείο C είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AMN. Επομένως, $\angle MNA = (1/2)\angle MCA = 60° - \varphi$ και $\angle MAN = (1/2)\angle MCN = 60°$. Τέλος, $\angle AMN = 60° + \varphi$.

Οι προσεκτικοί αναγνώστες μπορεί να παρατήρησαν ότι η απόδειξη αυτή είναι καθαρά γεωμετρική εκτός του σημείου που αποδεικνύεται η ισότητα των τριγώνων CPM και CPA. Οι αναγνώστες μπορούν να δοκιμάσουν να αλλάξουν αυτό το σημείο της λύσης ώστε να πάψει η εξάρτησή της από τριγωνομετρικά αποτελέσματα.

M190

Θα παρουσιάσουμε μια λύση του αντίστοιχου προβλήματος για τυχαίο n (στην περίπτωσή μας, $n = 100$). Η διατύπωση του προβλήματος για τη γενική περίπτωση είναι προφανής: Δίνονται n θετικοί αριθμοί, το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι το άθροισμα n κλασμάτων, και πρέπει να αποδείξουμε ότι το γινόμενο των δεδομένων αριθμών ισούται τουλάχιστον με $(n - 1)^n$. Επισημαίνουμε ότι η ανισότητα της πρότασής μας γίνεται ισότητα όταν όλοι οι δεδομένοι αριθμοί είναι ίσοι με $n - 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς: $t = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, S_k είναι το άθροισμα όλων των δυνατών γινομένων από k διαφορετικούς απ' τους δεδομένους αριθμούς, και G_k είναι ο γεωμετρικός μέσος όλων των δυνατών γινομένων από k διαφορετικούς απ' τους δεδομένους αριθμούς. Το γνωστό θεώρημα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου μάς δίνει

$$S_k \geq N_k \cdot G_k, \quad (1)$$

όπου N_k το πλήθος όλων των δυνατών γινομένων των δεδομένων αριθμών που αποτελούνται από k παράγοντες (στην πραγματικότητα, αυτό είναι το πλήθος των συνδυασμών n στοιχείων ανά k, αλλά για τη λύση μας δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε αυτό το πλήθος). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$G_k = t^k. \quad (2)$$

Αυτό έπεται από το γεγονός ότι όλοι οι όροι του G_k έχουν βαθμό k. Επομένως, και το G_k έχει τον ίδιο βαθμό. Αφού όλα τα a_i είναι ισοδύναμα, το G_k μπορεί να γραφτεί ως $G_k = t^\lambda$. Όμως, ο βαθμός του t ισούται με 1. Άρα, $\lambda = k$.

Μετασχηματίζουμε τώρα την ανισότητα στην πρότασή μας (για τυχαίο n) —δηλαδή, απαλείφουμε τους παρονομαστές, ανάγουμε τους όμοιους όρους και μεταφέρουμε στο αριστερό μέλος όλους τους όρους εκτός του μεγιστοβάθμιου $S_n = t^n$. Προκύπτει έτσι η ανισότητα

$$A_0 + A_1 S_1 + \ldots + A_{n-2} S_{n-2} + A_{n-1} S_{n-1} \leq S_n. \quad (3)$$

Μπορούμε εύκολα να εκφράσουμε τους συντελεστές A_i συναρτήσει του n, και ειδικά $A_{n-1} = 0$, αλλά δεν υπάρχει ανάγκη να το πράξουμε. Είναι όμως σημαντικό το ότι όλοι τους είναι μη αρνητικοί. Αν χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα (1) και την ισότητα (2), προκύπτει από την (3) η επόμενη ανισότητα:

$$B_0 + B_1 t + \ldots + B_{n-1} t^{n-1} \leq t^n. \quad (4)$$

Όλοι οι συντελεστές του αριστερού μέλους της (4) είναι μη αρνητικοί. Συνεπώς, για θετική τιμή του t, η λύση της ανισότητας (4) είναι $t \geq t_0$, όπου t_0 είναι ο μοναδικός αριθμός για τον οποίο η ανισότητα (4) γίνεται ισότητα. Αυτό τον αριθμό τον έχουμε βρει ήδη: $t_0 = n - 1$. Γι' αυτό τον αριθμό η ανισότητα της πρότασης του προβλήματός μας γίνεται ισότητα, όπως και η ανισότητα (3) καθώς και όλες οι ανισότητες (1). Επομένως, αποδείξαμε ότι

$$t = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq n - 1$$

και, άρα, $a_1 a_2 \ldots a_n \geq (n - 1)^n$.

ΦΥΣΙΚΗ

Φ186

Ενώ η ταχύτητα του πλοιαρίου κατευθύνεται πάντα παράλληλα προς την ελεύθερη επιφάνεια του νερού (Σχήμα 3), η προβολή της πάνω στο σκοινί παραμένει σταθερή και ίση με την ταχύτητα με την οποία τυλίγεται το σκοινί στο τύμπανο:

$$\upsilon_0 = \upsilon \sigma \upsilon \nu a.$$

Έπειτα από την παρέλευση μικρού χρονικού διαστήματος Δt, το σκοινί έχει στραφεί κατά μια μικρή γωνία

$$\Delta a = \frac{\upsilon \Delta t \eta \mu a}{L}.$$

Έτσι, η γωνιακή ταχύτητα της «περιστροφής» του σκοινιού ισούται με

$$\omega = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\upsilon \eta \mu a}{L}.$$

Η ταχύτητα του κόμπου δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας υ_0 της μεταφορικής κίνησής του κατά μήκος του σκοινιού και της γραμμικής ταχύτητας υ_1 της περιστροφής του, η οποία καθορίζεται από τη θέση του κόμπου:

$$\upsilon_1 = 2L\omega/3 = 2\upsilon \eta \mu a/3.$$

Η ολική ταχύτητα του κόμπου ισούται με

Σχήμα 3

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v^2 \text{συν}^2 a + \frac{4}{9} v^2 \text{ημ}^2 a} = \frac{v}{3}\sqrt{9\text{συν}^2 a + 4\text{ημ}^2 a}.$$

Για να βρούμε και την επιτάχυνση του κόμπου, πρέπει να εισαγάγουμε ακόμη μία παράμετρο, της οποίας η τιμή δεν προσδιορίζεται στην εκφώνηση του προβλήματος.

Ας συμβολίσουμε με H το ύψος της μηχανής έλξεως πάνω από την επιφάνεια του νερού. Η ολική επιτάχυνση του κόμπου ισούται με το άθροισμα τριών επιμέρους συνιστωσών: η πρώτη και η δεύτερη εξ αυτών καθορίζονται αντίστοιχα από την περιστροφή των διανυσμάτων $\mathbf{v}_0$ και $\mathbf{v}_1$, ενώ η τρίτη προκύπτει από τη μεταβολή του μέτρου τού $\mathbf{v}_1$.

Η πρώτη συνιστώσα, η οποία είναι κάθετη στο $\mathbf{v}_0$, έχει μέτρο

$$\gamma_1 = v_0 \omega = v_0 \frac{v \text{ημ} a}{L} = \frac{v_0^2 \text{ημ}^2 a}{H \text{συν} a}.$$

Η δεύτερη συνιστώσα είναι κάθετη στη γραμμική ταχύτητα περιστροφής του κόμπου, δηλαδή κατευθύνεται κατά μήκος του σκοινιού:

$$\gamma_2 = v_1 \omega = \frac{2}{3} v \text{ημ} a \cdot \frac{v \text{ημ} a}{L} = \frac{2}{3} \frac{v_0^2 \text{ημ}^3 a}{H \text{συν}^2 a}.$$

Τέλος, η τρίτη συνιστώσα είναι παράλληλη με την ταχύτητα $\mathbf{v}_1$:

$$\gamma_3 = \frac{2}{3} \frac{v_0 \text{εφ}(a + \Delta a) - v_0 \text{εφ} a}{\Delta t} = \frac{2}{3} \frac{v_0 \text{ημ} \Delta a}{\text{συν}^2 a \cdot \Delta t} = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{\text{συν}^2 a} = \frac{2}{3} \frac{v_0^2 \text{ημ}^2 a}{H \text{συν}^3 a}.$$

Τώρα μπορούμε πλέον να σχηματίσουμε το διανυσματικό άθροισμα των τριών επιταχύνσεων (λαμβάνοντας υπόψη και τα πρόσημα των συνιστωσών) και να υπολογίσουμε το μέτρο του:

$$\gamma = \sqrt{(\gamma_1 - \gamma_3)^2 + \gamma_2^2} = \frac{2 v^2 \text{ημ}^2 a}{3 \quad H} \sqrt{\frac{(1{,}5\ \text{συν}^2 a - 1)^2}{\text{συν}^2 a} + \text{ημ}^2 a}.$$

Φ187

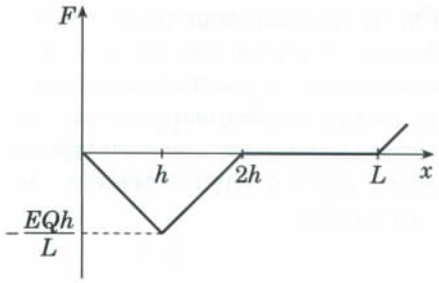
Σε θερμοκρασία +100°C η τάση των κορεσμένων υδρατμών ισούται με 1 Atm ≅ 10^5 N/m^2. Η συγκεκριμένη τιμή αντιπροσωπεύει την υδροστατική πίεση που ασκείται στη βάση μιας υδάτινης στήλης ύψους περίπου 10 m. Αντίθετα, η τάση των κορεσμένων υδρατμών στην αρχική θερμοκρασία των 10°C είναι κατά πολύ χαμηλότερη από 1 Atm. Μπορούμε να υποθέσουμε, επομένως, ότι η εξαέρωση των μορίων του νερού λόγω της θέρμανσης παράγει στην επιφάνεια του ωκεανού που καλύπτει τον πλανήτη μερική πίεση 1 Atm. Προτού εξαερωθούν, αυτά τα μόρια κατελάμβαναν το ύψους 10 m ανώτερο στρώμα του ωκεανού (δεδομένου ότι η ατμόσφαιρα έχει πολύ μικρό πάχος εν συγκρίσει προς την ακτίνα του πλανήτη, οι υδρατμοί έχουν κατά προσέγγιση το ίδιο βάρος με το υδάτινο στρώμα που εξαερώθηκε).

Το υπόλοιπο στρώμα του νερού, το οποίο έχει πάχος 220 m, διαστέλλεται τόσο όσο χρειάζεται για να αναπληρωθεί η απώλεια όγκου λόγω της εξαέρωσης. Ο συντελεστής κυβικής διαστολής ορίζεται ως η σχετική μεταβολή όγκου για αύξηση της θερμοκρασίας κατά ένα βαθμό. Συνεπώς, ο μέσος συντελεστής θερμικής διαστολής στην περιοχή θερμοκρασιών που μας ενδιαφέρει είναι

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V \Delta T} = \frac{10}{230 \cdot 90} \text{K}^{-1} \approx 5 \cdot 10^{-4}\ \text{K}^{-1}.$$

Φ188

Ας εξετάσουμε πώς εξαρτάται η ηλεκτρική δύναμη που δρα στο καμάκι από τη θέση x της αιχμής του (Σχήμα 4). Εφόσον έξω από τα δύο στρώματα δεν υφίσταται πεδίο, η δύναμη ισούται με μηδέν όταν $x > 2h + L$ ή $x < 0$. Καθώς το καμάκι εισδύει στα στρώματα, η επιβραδύνουσα δύναμη αυξάνεται γραμμικά με το x, λαμβάνοντας τη μέγιστη τιμή της όταν η αιχμή εξέρχεται από το πρώτο στρώμα. Όσο η αιχμή εισχωρεί βαθύτερα στο δεύτερο στρώμα, η επιβραδύνουσα δύναμη μειώνεται συνεχώς, για να μηδενιστεί όταν η αιχμή εξέλθει από το δεύτερο στρώμα. Η δύναμη παραμένει μηδενική ώσπου η ουρά του καμακιού να εισέλθει στο πρώτο στρώμα. Από τότε και μετά η ηλεκτρική δύναμη επιταχύνει το καμάκι. Αν, λοιπόν, η ταχύτητά του δεν έχει μηδενιστεί ώς εκείνη τη στιγμή, το καμάκι θα διαπεράσει εντελώς και τα δύο στρώματα.



Σχήμα 4

Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας που απαιτείται για να διαπεράσει το καμάκι και τα δύο στρώματα μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του νόμου διατήρησης της ενέργειας: αρκεί να εξισώσουμε την αρχική κινητική ενέργεια του καμακιού με το έργο που καταναλώνει η δύναμη πέδησης. Λόγω της εξαιρετικά απλής εξάρτησης της δύναμης από την απόσταση, ο υπολογισμός του έργου δεν παρουσιάζει δυσκολία:

$$\frac{M v_0^2}{2} = F_{\mu έ\sigma\eta} \cdot 2h = \frac{1}{2} \frac{EQh}{L} 2h = \frac{EQh^2}{L}.$$

Συνεπώς,

$$v_0 = h\sqrt{\frac{2EQ}{ML}}.$$

Φ189

Ο βασικός νόμος της ραδιενεργού διάσπασης συνίσταται στη σχέση

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau},$$

όπου το $N(t)$ δηλώνει το πλήθος των μητρικών πυρήνων τη χρονική στιγμή t, ενώ N_0 είναι το αρχικό πλήθος των μητρικών πυρήνων και τ ο χρόνος υποδιπλασιασμού τους. Στην περίπτωσή μας, ο χρόνος αρχίζει να μετράει από τότε που δημιουργήθηκε η

Γη. Αν συμβολίσουμε με N_0 το πλήθος των πυρήνων των δύο ισοτόπων που περιέχει το φυσικό ουράνιο κατά τη στιγμή της δημιουργίας της Γης, τότε τα πλήθη των πυρήνων την παρούσα χρονική στιγμή t δίνονται από τις εκφράσεις

$$N_1(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau_1},$$

και

$$N_2(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau_2}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, παίρνουμε

$$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = 2^{t\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)}.$$

Εάν λογαριθμήσουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης, βρίσκουμε εύκολα την ηλικία της Γης:

$$t = \frac{\ln(\eta_1/\eta_2)}{\ln 2}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ έτη}.$$

Φ190

Ένα μέρος της φωτεινής ροής θα απολεσθεί λόγω πολλαπλών ανακλάσεων, αλλά αυτή την απώλεια μπορεί να την αντισταθμίσει η διάθλαση, η οποία «πλησιάζει» την πηγή προς τον φωτοευαίσθητο ανιχνευτή.

Ας εξετάσουμε πρώτα τι συμβαίνει με τις ανακλάσεις. Από τη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-γυαλιού εισέρχεται στην πλάκα μόνο ένα κλάσμα του προσπίπτοντος φωτός ίσο με $1 - (n-1)^2/(n+1)^2 = 8/9$. Εφόσον πανομοιότυπη ανάκλαση συντελείται και στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα, από την πλάκα εξέρχεται μόνο ένα κλάσμα της αρχικής φωτεινής ροής ίσο με $(8/9)(8/9) = 64/81$. Ωστόσο, στην τελική ροή συνεισφέρει και φως που ακολουθεί πιο περίπλοκες διαδρομές. Ένα μέρος του φωτός που υφίσταται πολλαπλές ανακλάσεις διαρρέει τελικά από την πλάκα και φτάνει στον ανιχνευτή. Αρχικά, τα 8/9 του φωτός εισέρχονται στην πλάκα και κλάσμα του ίσο με $(1/9)(8/9)$ ανακλάται προς τα πίσω από τη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα· έτσι, μετά την ανάκλαση στην απέναντι διαχωριστική επιφάνεια που θα ακολουθήσει, μέσα στο γυαλί παραμένει μόνο ένα κλάσμα $(1/9)^3(8/9)$ του φωτός που προσέπεσε στην πλάκα, ενώ το $(1/9)^2(8/9)^2$ διαρρέει προς τα έξω. Αν συνυπολογίσουμε και το φως που διαρρέει έπειτα από περισσότερες των δύο εσωτερικές ανακλάσεις, παίρνουμε το άθροισμα

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right)^4 + \ldots = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \frac{1}{1 - 1/81} = \frac{4}{5}.$$

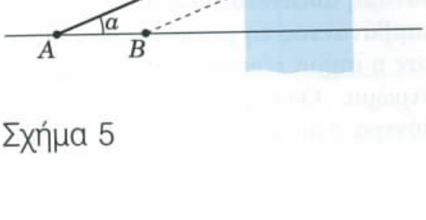
Κατά συνέπεια, από την πλάκα διέρχονται τα 4/5 του προσπίπτοντος φωτός.

Ας έλθουμε τώρα και στη διαθλαστική επίδραση της πλάκας, η οποία «πλησιάζει» την πηγή προς τον ανιχνευτή. Θεωρούμε την ακτίνα που εκπέμπεται από το σημείο A υπό μικρή γωνία a ως προς την οριζόντια (Σχήμα 5). Μετά τη διάθλαση στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-γυαλιού, η γωνία με την οριζόντια θα γίνει a/n. Έτσι, αφού διαθλαστεί ακόμη μία φορά στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα, η ακτίνα τελικά θα εγκαταλείψει την πλάκα και πάλι υπό γωνία a ως προς την οριζόντια, μόνο που τώρα θα φαίνεται να προέρχεται από το σημείο B. Το είδωλο της πηγής σχηματίζεται πλησιέστερα προς τον ανιχνευτή κατά την απόσταση $\Delta L = AB$. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γεωμετρικές γνώσεις και εκμεταλλευόμενοι τις απλουστεύσεις λόγω της μικρής τιμής της γωνίας a, εύκολα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\Delta L = d\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{d}{3},$$

όπου το d συμβολίζει το πάχος της πλάκας.

Επομένως, η απαίτηση να μη μεταβάλλεται η ένδειξη του ανιχνευτή λόγω της παρεμβολής της πλάκας μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή



Σχήμα 5

$$\frac{I}{L^2} = \frac{4}{5}\frac{I}{(L - d/3)^2},$$

όπου με I συμβολίζουμε τη φωτοβολία της πηγής. Λύνοντας αυτή την εξίσωση ως προς d βρίσκουμε

$$d = 3L\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 3{,}2\,\text{cm}.$$

Στην πραγματικότητα, η λύση μας αποτελεί απλώς προσέγγιση, επειδή παραβλέψαμε το γεγονός ότι οι πολλαπλές ανακλάσεις οδηγούν σε ελαφρώς διαφορετικές «μετατοπίσεις» της φωτεινής πηγής προς τον ανιχνευτή. Ωστόσο, η διόρθωση για την ελαφρά ανακρίβεια στην οποία υποπέσαμε είναι πάρα πολύ μικρή.

Στο μαυροπίνακα III

1. Τα τμήματα του γραφήματος τα οποία περιγράφουν αύξηση της πίεσης χωρίζονται όσων αντιστοιχούν σε μείωση της πίεσης από τα σημεία του διαγράμματος (Σχήμα 3, σελ. 57) όπου η ισοβαρής εφάπτεται της καμπύλης.

2. Η πίεση αυξήθηκε κατά τον παράγοντα 4/3.

3. $P = 7mg/S = 3{,}5 \cdot 10^5$ N/m^2.

4. $z = PvSN_A/(RT) \approx 6 \cdot 10^{19}$ s^{-1}. Υπόδειξη: Εφόσον η μέση ταχύτητα της θερμικής κίνησης των μορίων του αερίου υπολείπεται κατά πολύ της τροχιακής ταχύτητας του δορυφόρου, τα μόρια μπορεί να θεωρηθούν ακίνητα.

Σπαζοκεφαλιές

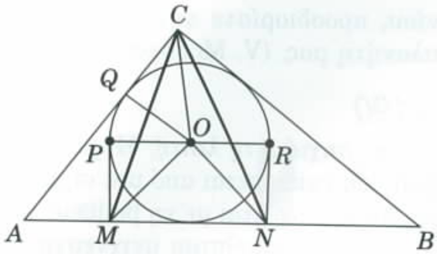
Σ186

Ο πρώτος αριθμός μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο αριθμών που αποτελούνται από δεκατέσσερα και επτά, αντίστοιχα, ψηφία "1". Μπορούμε τότε να γράψουμε τη διαφορά ως εξής

$$\frac{10^{14} - 1}{9} + \frac{10^7 - 1}{9} - \frac{3(10^7 - 1)}{9} = \frac{10^{14} - 2 \cdot 10^7 + 1}{9} = \frac{(10^7 - 1)^2}{9} = (3.333.333)^2.$$

Σ187

Έστω O το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο ABC κύκλου



Σχήμα 6

(Σχήμα 6). Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα POM και QOC είναι ίσα (ως ορθογώνια και ισοσκελή), οπότε $OM = OC$. Ομοίως, $ON = OC$. Άρα, το O είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου MCN. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι τα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα POM και RON είναι ίσα, και, συνεπώς, $\angle MON = 90°$. Έπεται ότι $\angle MCN = 45°$, διότι μια εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το ήμισυ της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Σ188

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: (α) το μικρότερο δοχείο γεμίζει αρχικά από το λάστιχο με τη μικρότερη παροχή ή (β) γεμίζει αρχικά από το λάστιχο με τη μεγαλύτερη παροχή. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση (α). Διαπιστώνουμε ότι θα χρειαστούν 6,3/2,9 λεπτά για να γεμίσει το πρώτο μισό του μικρού δοχείου, και μέσα σ' αυτό το διάστημα το μεγάλο δοχείο θα γεμίσει με (6,3/2,9)(8,7) λίτρα νερού. Στη συνέχεια, θα χρειαστούν 6,3/8,7 λεπτά για να γεμίσει το υπόλοιπο μισό του μικρού δοχείου. Στο ίδιο διάστημα θα γεμίσει τελείως και το μεγάλο δοχείο (τα δοχεία γεμίζουν την ίδια χρονική στιγμή.) Συνεπώς, σε αυτό το διάστημα το μεγάλο δοχείο παίρνει (6,3/8,7)(2,9) λίτρα νερού. Άρα, το μεγάλο δοχείο πρέπει να καταλαμβάνει όγκο

$$(6{,}3/2{,}9)(8{,}7) + (6{,}3/8{,}7)(2{,}9) = 21 \text{ λίτρα.}$$

Αφήνουμε την περίπτωση (β) για τους αναγνώστες (απαιτούνται οι ίδιοι ακριβώς υπολογισμοί όπως στην περίπτωση (α)).

Σ189

Ας αριθμήσουμε διαδοχικά τις σπηλιές από το 1 έως το 16. Θα περιγράψουμε μια στρατηγική που θα επιτρέψει στο σερίφη να συλλάβει τον Φευγάτο Τζο.

Ο σερίφης πρέπει να ερευνήσει τις σπηλιές διαδοχικά, αρχίζοντας από την πρώτη. Κάθε μέρα ψάχνει κάποια σπηλιά, και ο Τζο κρύβεται σε μία από αυτές. Θα αποδείξουμε ότι η ισοτιμία του αθροίσματος των αριθμών που αντιστοιχούν στις δύο σπηλιές δεν αλλάζει (εφόσον ο σερίφης ερευνά τις σπηλιές με τη σειρά).

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ο Τζο ξεκινά από περιττής τάξεως σπηλιά. Ο σερίφης ξεκινά επίσης από περιττής τάξεως σπηλιά (αυτή με αύξοντα αριθμό 1), και επομένως το άθροισμα των δύο αριθμών είναι άρτιο. Κάθε μέρα οι δύο αριθμοί μεταβάλλονται κατά 1, συνεπώς η ισοτιμία του αθροίσματός τους παραμένει άρτια. Ομοίως, αν ο Τζο ξεκινήσει από άρτια σπηλιά, η ισοτιμία παραμένει περιττή.

Ας υποθέσουμε ότι η ισοτιμία είναι άρτια. Θα ξεφύγει ο Τζο από την καταδίωξη του σερίφη; Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν ο Τζο βρεθεί δίπλα από τη σπηλιά που ερευνάται και μετακινηθεί εκείνη τη νύχτα στη σπηλιά που μόλις ερευνήθηκε. Τότε όμως ο σερίφης και ο Τζο θα έχουν βρεθεί σε γειτονικές σπηλιές και η ισοτιμία του αθροίσματός τους δεν θα είναι άρτια. Άρα, όταν η ισοτιμία είναι άρτια, ο Τζο θα συλληφθεί.

Η σύλληψη θα συμβεί όταν ο σερίφης ερευνήσει τη σπηλιά στην οποία κρύβεται ο Τζο, και επομένως το άθροισμα των αριθμών των σπηλιών τους θα ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυτής της σπηλιάς. Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να συμβεί αυτό; Αν ο Τζο τιμήσει το όνομά του, ο σερίφης θα αναγκαστεί να ερευνήσει και τη 14η σπηλιά. Αν τη βρει άδεια, ο Τζο πρέπει να κρύβεται στη 16η σπηλιά (πρέπει να βρίσκεται σε άρτια σπηλιά και δεν μπορεί να έχει ξεφύγει). Την επόμενη ημέρα, στις 15 Μαΐου, ο Τζο θα μετακινηθεί στη 15η σπηλιά και θα συλληφθεί. Αυτό είναι το μέγιστο πλήθος ημερών που μπορεί να διαρκέσει η έρευνα. Επισημαίνουμε ότι κάτι τέτοιο θα συμβεί αν ο Τζο διαλέξει αρχικά περιττής τάξεως σπηλιά.

Τα πράγματα είναι περισσότερο περίπλοκα αν ο Τζο διαλέξει αρχικά άρτια σπηλιά. Τότε, κατά τη διάρκεια της σειραϊκής έρευνας του σερίφη η ισοτιμία είναι περιττή, και ο Τζο μπορεί να ξεφύγει από το σερίφη. Με βάση αυτά που είπαμε προηγουμένως, ο σερίφης (που σκέφτεται το ίδιο σωστά με εμάς) μόλις φτάσει στη 15η σπηλιά και τη βρει άδεια θα καταλάβει τι συνέβη. Την ημέρα που θα γίνει αυτό, ο Τζο θα κρύβεται σε μια διαφορετική σπηλιά, άρτιας τάξης. Την ίδια νύχτα θα πρέπει να μετακινηθεί σε περιττή σπηλιά. Ο σερίφης μπορεί να επιστρέψει και να ερευνήσει ξανά τη 15η σπηλιά (στην οποία είναι πιθανόν να μετακινηθεί ο Τζο), και έτσι το άθροισμα της σπηλιάς του Τζο και της σπηλιάς του σερίφη θα ξαναγίνει άρτιο.

Ο σερίφης τώρα μπορεί να ερευνήσει τις σπηλιές από τη 15η ώς την 1η. Όπως επισημάναμε νωρίτερα, ο Τζο μπορεί να ξεφύγει από μια τέτοια σειραϊκή αναζήτηση μόνο αν η ισοτιμία του αθροίσματος των αριθμών των σπηλιών είναι περιττή. Και πάλι λοιπόν, αφού η ισοτιμία είναι άρτια, θα συλληφθεί. Ουσιαστικά, ο σερίφης άλλαξε την ισοτιμία του αθροίσματος ερευνώντας τη 15η σπηλιά δύο φορές.

Πόσος χρόνος θα χρειαστεί; Η αρχική έρευνα και η διπλή έρευνα της 15ης σπηλιάς διαρκεί 16 ημέρες. Αν ο σερίφης φτάσει στην 3η σπηλιά χωρίς να βρει τον Τζο, τότε ο Τζο κρύβεται στην 1η σπηλιά. Εκείνη τη νύχτα θα μετακινηθεί στη 2η σπηλιά και την επόμενη μέρα θα συλληφθεί. Αυτή θα είναι η 29η μέρα της έρευνας και ο Μάιος έχει 31 ημέρες. Άρα ο σερίφης θα μπορούσε να βρει μέσα σε ένα μήνα τον Τζο, ακόμη και αν αυτός ο μήνας ήταν ο Φεβρουάριος του 2000.

Σ190

Όσο το νερό στη μεγάλη χύτρα βράζει, η θερμοκρασία του παραμένει στους 100°C. Η εξωτερική επιφάνεια του τοιχώματος της μικρής χύτρας θα βρίσκεται επίσης σε θερμοκρασία 100°C, αλλά η εσωτερική του επιφάνεια —λόγω απωλειών— θα έχει θερμοκρασία μικρότερη των 100°C. Άρα, το νερό στη μικρή χύτρα δεν θα βράσει.

Καλειδοσκόπιο

1. Όχι· ο αστροναύτης συνεχίζει να βρίσκεται μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, το οποίο και κρατά σε τροχιά το διαστημόπλοιο.

2. Αρνητικό.

3. Στον πύραυλο που εκτελεί τροχιά γύρω από τον πλανήτη έχει ήδη μεταβιβαστεί τόση ενέργεια όση χρειάζεται για να εγκαταλείψει την επιφάνειά του. Άρα, διαθέτει περισσότερη ενέργεια από έναν πύραυλο που βρίσκεται στο έδαφος και, συνεπώς, χρειάζεται λιγότερη πρόσθετη ενέργεια για να μπορέσει να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο του πλανήτη.

4. Κατά τη διαδικασία της εξάτμισης, στην αέρια φάση περνούν μόνο εκείνα τα μόρια που έχουν κινητική ενέργεια μεγαλύτερη από το έργο το οποίο απαιτείται για να διαφύγουν από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Συνεπώς, κατά τη διάρκεια της εξάτμισης η μέση κινητική ενέργεια των μορίων που απομένουν μειώνεται, οπότε μειώνεται και η θερμοκρασία του υγρού.

5. Οι κόκκοι της άμμου περιβάλλονται από μια λεπτή υγρή μεμβράνη και έλκονται μεταξύ τους εξαιτίας της επιφανειακής τάσης.

6. Είναι αποτέλεσμα της μείωσης στην κινητική ενέργεια της θερμικής κίνησης των δομικών μονάδων, κάτι που ισοδυναμεί με μείωση της θερμοκρασίας.

7. Είτε θερμαίνοντας τον ημιαγωγό, είτε φωτίζοντάς τον, είτε και με τους δύο τρόπους.

8. Θα φορτιστεί αρνητικά η πλάκα της οποίας το υλικό χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερο έργο εξαγωγής.

9. Όπως τα μόρια ενός εξατμιζόμενου υγρού, έτσι και τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου που έχουν κινητική ενέργεια μεγαλύτερη από το έργο εξαγωγής θα μπορέσουν να διαφύγουν από το μέταλλο.

10. Μεταβάλλοντας τη θερμοκρασία της καθόδου.

11. Η θερμική εκπομπή ηλεκτρονίων από την κάθοδο (άνθρακας) είναι τόσο ισχυρή, ώστε η κρούση των ηλεκτρονίων με τα μόρια των αερίων (αέρας και εξαχνωμένος άνθρακας) που υπάρχουν στο χώρο μεταξύ καθόδου και ανόδου να προκαλεί ιονισμό των τελευταίων, με αποτέλεσμα να μειώνεται η ηλεκτρική αντίσταση του χώρου μεταξύ καθόδου και ανόδου.

12. Όσο ελαφρότερο είναι το προσπίπτον σωματίδιο τόσο λιγότερη ενέργεια απαιτείται να έχει για να μπορέσει να ιονίσει ένα άτομο ή ένα μόριο· επιπλέον, ένα τέτοιο σωματίδιο μπορεί να αποκτήσει την ενέργεια αυτή επιταχυνόμενο σε μικρότερες διαφορές δυναμικού από ένα βαρύτερο σωματίδιο.

13. Ναι. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι ο ιονισμός του ατόμου του υδρογόνου.

14. Περισσότερη ενέργεια απαιτείται για να αποδεσμευτεί το δεύτερο ηλεκτρόνιο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ενέργεια σύνδεσης του δεύτερου ηλεκτρονίου αυξάνεται από τη στιγμή που παύει να απωθείται από το πρώτο.

15. Όχι, διότι κατά τη διαδικασία αυτή απελευθερώνεται ενέργεια που ισούται με την ενέργεια σύνδεσης του ατόμου του υδρογόνου.

16. Τα σωματίδια β έχουν τόσο μεγάλη ενέργεια ώστε θα ήταν αδύνατο να προκύψει με οποιεσδήποτε μεταβάσεις των ηλεκτρονίων του ατόμου από τη μία ενεργειακή στάθμη στην άλλη.

17. Τα φωτόνια έλκονται από το άστρο. Στην προσπάθειά τους να διαφύγουν από το πηγάδι δυναμικού του βαρυτικού του πεδίου χάνουν ενέργεια.

Μικροπειραματισμοί

Τα μόρια του λαδιού παραμένουν ενωμένα σε κυκλικούς σχηματισμούς λόγω της επιφανειακής τάσης.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ.* 49

ουράνιο-238 σε ποσοστιαία αναλογία $\eta_1 = 99{,}28\%$ και ουράνιο-235 σε αναλογία $\eta_2 = 0{,}72\%$. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού για τους πυρήνες του ^{238}U και του ^{235}U είναι αντίστοιχα $\tau_1 = 4{,}56 \cdot 10^9$ έτη και $\tau_2 = 0{,}71 \cdot 10^9$ έτη. Υποθέτοντας ότι όταν δημιουργήθηκε η Γη υπήρχαν ίσα πλήθη πυρήνων από τα δύο ισότοπα του ουρανίου, προσδιορίστε την ηλικία του πλανήτη μας. (V. Mozhaev)

Φ190

Την παχιά ή τη λεπτή; Η φωτεινή ροή που εκπέμπεται από μια σημειακή πηγή μετριέται με τη βοήθεια μικρού φωτοευαίσθητου ανιχνευτή εγκατεστημένου σε απόσταση $L = 0{,}1$ m από την πηγή. Μια παραλληλεπίπεδη γυάλινη πλάκα τοποθετείται ανάμεσα στην πηγή και τον ανιχνευτή κατά τρόπον ώστε το επίπεδο της βάσης της να είναι κάθετο στη γραμμή που συνδέει τη φωτεινή πηγή και τον ανιχνευτή. Το γυαλί έχει δείκτη διάθλασης $n = 1{,}5$. Για ποιο πάχος του γυαλιού θα παραμείνει αμετάβλητη η ένδειξη του ανιχνευτή; Το γυαλί θεωρείται διαφανές. Ο συντελεστής ανάκλασης R στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα για κάθετη πρόσπτωση δίνεται από την έκφραση $R = (n - 1)^2/(n + 1)^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

⇨ *Συνέχεια από τη σελ.* 57

μετατρέπεται σε όζον, ενώ η θερμοκρασία διπλασιάζεται. Πώς μεταβλήθηκε η πίεση στο δοχείο; Υποθέστε ότι ο όγκος του είναι σταθερός.

3. Ένα έμβολο μάζας $m = 5$ kg και εγκάρσιας διατομής εμβαδού $S = 10$ cm^2 μπορεί να κινείται εντός ενός ανοικτού από πάνω κυλίνδρου, φράσσοντας έτσι μια περιοχή του γεμάτη με αέριο. Όταν ο κύλινδρος κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση $4g$, ο όγκος του αερίου κάτω από το έμβολο διπλασιάζεται. Προσδιορίστε την εξωτερική πίεση αν η θερμοκρασία του αερίου δεν μεταβληθεί.

4. Ένας τεχνητός δορυφόρος διατομής $S = 1$ m^2 κινείται πλησίον της Γης με τροχιακή ταχύτητα $\upsilon = 7{,}8$ km/s. Στο υψόμετρο των 200 km της τροχιάς του η ατμοσφαιρική πίεση ανέρχεται σε $P = 1{,}37 \cdot 10^{-4}$ N/m^2, ενώ η θερμοκρασία είναι $T = 1.226$ K. Προσδιορίστε με πόσα μόρια του αέρα συγκρούεται ο δορυφόρος σε διάστημα ενός δευτερολέπτου.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Η συντομότερη διαδρομή

Ο αλγόριθμος ενός πρωτοπόρου

Don Piele

ΕΝΩ ΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΧΟΥΝ ΙΣΤΟρία χιλιάδων ετών, οι αλγόριθμοι της πληροφορικής είναι σχετικά νέοι. Οι βασικοί αλγόριθμοι της πληροφορικής δεν είχαν καν εξετασθεί από τις αυθεντίες των μαθηματικών και, κατά συνέπεια, δεν αποτελούν μέρος της σχολικής μας εκπαίδευσης. Η συμβολή των αλγορίθμων της πληροφορικής στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε τον κόσμο γίνεται όλο και μεγαλύτερη, και έτσι είναι ίσως απαραίτητο να αναθεωρήσουμε τα πιστεύω μας σχετικά με το τι είναι θεμελιώδες. Όπως το ηλεκτρονικό εμπόριο αναμορφώνει τον τρόπο που δρουν οι επιχειρήσεις, έτσι και οι νέοι αλγόριθμοι της πληροφορικής αναμορφώνουν τον τρόπο εργασίας των επιστημόνων.

Αξίζει επομένως να αφιερώσουμε τη στήλη αυτού του τεύχους σε έναν από τους πρωτοπόρους των αλγορίθμων της πληροφορικής, τον Edsger Dijkstra. Ο Dijkstra είναι ακόμη εν δράσει επιστήμων και κατέχει την έδρα Schlumberger της επιστήμης των υπολογιστών στο Πανεπιστήμιο του Τέξας, στο Ώστιν. Το 1956, σε ηλικία 26 ετών, ανακάλυψε τον διάσημο αλγόριθμο της συντομότερης διαδρομής. Εκείνη την εποχή, ο προγραμματισμός δεν αναγνωριζόταν επίσημα ως επάγγελμα. Μάλιστα, στην αίτησή του για άδεια γάμου, το 1957, συμπλήρωσε ως επάγγελμα «θεωρητικός φυσικός», διότι πίστευε ότι το «προγραμματιστής» δεν θα γινόταν κατανοητό.

Όταν του ανατέθηκε να αποδείξει την ισχύ του υπολογιστή *ARMAC*, ο οποίος βρισκόταν εγκατεστημένος στο Μαθηματικό Κέντρο του Άμστερνταμ, δημιούργησε ένα πρόγραμμα που κατασκεύαζε τη συντομότερη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος. Χρησιμοποίησε παρόμοιες ιδέες για να ανακαλύψει έναν αλγόριθμο που θα έβρισκε τρόπο μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας σε όλα τα απαραίτητα κυκλώματα, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερο από το ακριβό χάλκινο καλώδιο. Αποκαλούσε αυτό το πρόγραμμα «αλγόριθμο συντομότερου υποπαραγόμενου δέντρου».

Μια απλή διατύπωση

Για να θεωρηθεί θεμελιώδες ένα πρόβλημα, πρέπει να μπορεί να διατυπωθεί με απλό τρόπο. Ιδού μια απλή διατύπωση του προβλήματος της συντομότερης διαδρομής. Ας υποθέσουμε ότι έχετε έναν μεγάλο χάρτη με όλες τις πόλεις των Ηνωμένων Πολιτειών και το τεράστιο οδικό δίκτυο που τις συνδέει. Δίπλα στους δρόμους, που συμβολίζονται με μπλε γραμμή, υπάρχει ένας αριθμός που αντιπροσωπεύει την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών πόλεων. Ο σκοπός σας είναι να ξεκινήσετε από τη Νέα Υόρκη και να βρείτε μια διαδρομή ελάχιστης απόστασης για το Λος Άντζελες. Πώς θα το καταφέρετε;

Αυτό που έχετε είναι ένα τεράστιο σταθμισμένο γράφημα όπου οι κορυφές αντιπροσωπεύουν πόλεις και οι ακμές τους δρόμους μεταξύ των πόλεων. Οι συντελεστές στάθμισης των ακμών εκφράζουν τις αποστάσεις μεταξύ των γειτονικών πόλεων. Δύο πόλεις είναι γειτονικές αν υπάρχει δρόμος που τις συνδέει απευθείας. Αποδεικνύεται ότι για να βρεθεί μια διαδρομή ελάχιστου μήκους από τη Νέα Υόρκη στο Λος Άντζελες είναι απαραίτητο να γνωρίζει κανείς τη συντομότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη στο Λος Άντζελες. Επομένως, πρώτη μας δουλειά είναι να εξετάσουμε τον αλγόριθμο της συντομότερης απόστασης του Dijkstra.

Συντομότερη απόσταση

Μπορούμε να εξηγήσουμε τη βασική ιδέα με απλό τρόπο. Ξεκινάμε από τη Νέα Υόρκη και αρχίζουμε να γράφουμε σε έναν κατάλογο τις πόλεις για τις οποίες γνωρίζουμε τη συντομότερη απόσταση —προσθέτοντας μία πόλη κάθε φορά. Συνεχίζουμε έως ότου μπει στον κατάλογο και το Λος Άντζελες. Πώς όμως το κάνουμε αυτό; Πρώτα κοιτάμε όλες τις γειτονικές πόλεις της Νέας Υόρκης. Σε κάθε γειτονική πόλη αντιστοιχούμε την τρέχουσα μικρότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη. Όμως, στον κατάλογο των πόλεων για τις οποίες γνωρίζουμε τη συντομότερη απόσταση θα καταχωρήσουμε μόνο την πλησιέστερη πόλη —ας πούμε την *A*. Προφανώς, καμία δεν μπορεί να βρίσκεται πιο κοντά. Τώρα διερευνούμε όλες τις γειτονικές πόλεις της *A*. Για καθεμία από αυτές συγκρίνουμε την τρέχουσα συντομότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη με την απόσταση που πρέπει να διανύσουμε για να πάμε στη Νέα Υόρκη μέσω της *A*. Τη μικρότερη από τις δύο την ονομάζουμε νέα τρέχουσα συντομότερη απόσταση της συγκεκριμένης πόλης από τη Νέα Υόρκη. Με άλλα λόγια, αν είναι προτιμότερο να πάμε πρώτα στην A και μετά στη Νέα Υόρκη, τότε χρησιμοποιούμε τον συντομότερο δρόμο, ειδάλλως τον παλιό συντομότερο. Από τις πόλεις για τις οποίες γνωρίζουμε την τρέχουσα μικρότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη επιλέγουμε τώρα την πλησιέστερη, ας πούμε τη B. Την προσθέτουμε στον κατάλογο {Νέα Υόρκη, A}, ο οποίος τώρα γίνεται {Νέα Υόρκη, A, B}. Συνεχίζουμε με ανάλογο τρόπο αναζητώντας την επόμενη πόλη με τη συντομότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη. Μόλις καταχωρήσουμε στον κατάλογο και το Λος Άντζελες, γνωρίζουμε τη ζητούμενη μικρότερη απόσταση.

Ψευδοκώδικας

Ιδού ο ψευδοκώδικας για τη συντομότερη απόσταση.

$G = (V, E)$ ή (Πόλεις, Δρόμοι).

S = Σύνολο πόλεων για τις οποίες είναι γνωστή η μικρότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη.

V-S = Σύνολο πόλεων για τις οποίες δεν είναι ακόμα γνωστή με βεβαιότητα η μικρότερη απόσταση.

d = μια ακολουθία με τις βέλτιστες εκτιμήσεις των μικρότερων αποστάσεων κάθε πόλης από τη Νέα Υόρκη.

adj$M$ = πίνακας αποστάσεων μεταξύ των γειτονικών πόλεων: adj$M[u, v]$ = η απόσταση μέσω του δρόμου που συνδέει απ' ευθείας την u με τη v.

1. Δίνουμε αρχικές τιμές στον d: $d = \{0, \infty, \infty, ..., \infty\}$.
2. Θέτουμε $S = \{\}$.
3. Όσο το Λος Άντζελες δεν ανήκει στον κατάλογο:

   i. Βρείτε την u, την πλησιέστερη στο S πόλη τού V-S και μετακινήστε την από το V-S στο S.

   ii. Ελέγχουμε τις αποστάσεις όλων των πόλεων v για να διαπιστώσουμε αν είναι προτιμότερο να κινηθούμε μέσω της u (συντομότερος δρόμος). Θέτουμε

   $$d[v] = \mathrm{Min}[d[v], d[u] + \mathrm{adj}M[u, v]].$$

Υλοποίηση στο Mathematica

Ας κάνουμε τώρα πραγματικότητα τον αλγόριθμό μας, γράφοντας ένα πρόγραμμα του *Mathematica* που θα παρουσιάσει με κινούμενα σχέδια τη σταδιακή δημιουργία του συνόλου S, από την πρώτη μέχρι την τελευταία κορυφή. Η παρουσίασή μας χρησιμοποιεί επτά πόλεις, αρχίζοντας από τη Νέα Υόρκη και καταλήγοντας στο Λος Άντζελες. Θα ξεκινήσουμε σχεδιάζοντας ένα απλό σταθμισμένο γράφημα με επτά κορυφές στην περιφέρεια ενός κύκλου, χαράζοντας δρόμους μεταξύ συγκεκριμένων πόλεων και αντιστοιχίζοντας μια απόσταση σε κάθε δρόμο. Η αντιστοίχιση των αποστάσεων αποθηκεύεται στον πίνακα *BetweenCityDistances*. Κάθε τριάδα (i, j, k) του πίνακα σημαίνει ότι υπάρχει ένας δρόμος μήκους k μεταξύ των πόλεων i και j.

```
n = 7;
BetweenCityDistances = {{1, 2, 5}, {1, 3, 2},
{1, 5, 7}, {2, 3, 1}, {2, 4, 5}, {3, 4, 8}, {3,
5, 10}, {4, 5, 2}, {4, 6, 10}, {5, 6, 2}, {2, 6,
6}, {1, 4, 12}, {6, 7, 5}, {5, 7, 20}};
```

Όταν σχεδιάσουμε τις εικόνες μας, θα χρησιμοποιήσουμε γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου για να ονομάσουμε τις πόλεις. Χρησιμοποιούμε τον εξής κανόνα αντικατάστασης:

```
alpha = {1 → "NY", 2 → "A", 3 → "B",
4 → "C", 5 → "D", 6 → "E", 7 → "LA"};
```

Οι αποστάσεις και οι δρόμοι επιλέγονται με ευκολία από τον πίνακα *BetweenCityDistances*.

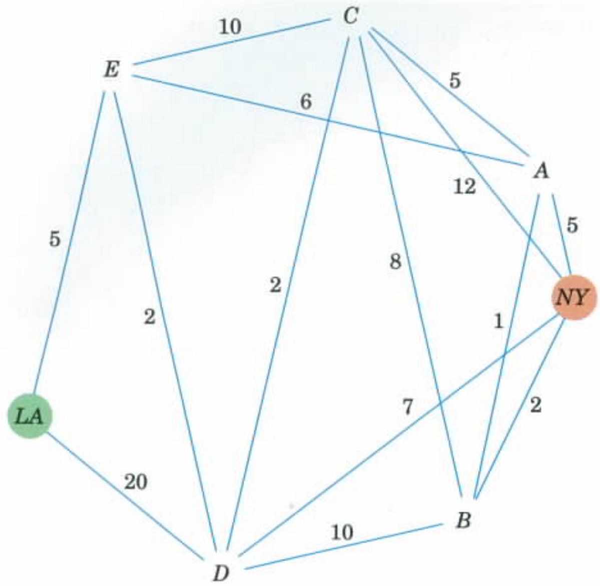
```
distances = BetweenCityDistances /. {i_,
j_, k_} :> k

roads = BetweenCityDistances /. {i_, j_,
k_} :> {i, j};

roads /. alpha

{5, 2, 7, 1, 5, 8, 10, 2, 10, 2, 6, 12,
5, 20}

{{NY, A}, {NY, B}, {NY, D}, {A, B}, {A,
C}, {B, C}, {B, D},{C, D}, {C, E}, {D, E},
{A, E}, {NY, C}, {E, LA}, {D, LA}}
```

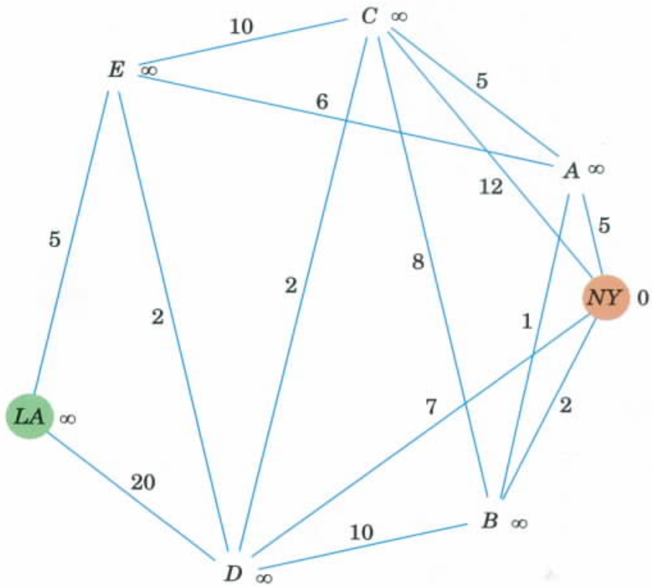
Αν χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα *BetweenCityDistances*, μπορούμε να υπολογίσουμε έναν πίνακα «γειτνίασης», adj$M$, στον οποίο θέτουμε ∞ μεταξύ των πόλεων που δεν συνδέονται, ενώ λαμβάνουμε υπόψη ότι σε κάθε δρόμο μπορούμε να ταξιδέψουμε προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Με άλλα λόγια, η απόσταση από την κορυφή i έως την κορυφή j πρέπει να είναι ίση με την απόσταση από την κορυφή j έως την κορυφή i.

```
cities = {"NY", "A", "B", "C", "D", "E",
"LA"};

adjM[i_, j_] := ∞;

adjM[i_, j_] := adjM[j_, i_] /; i > j;

adjM[i_, j_] := 0 /; i == j;

BetweenCityDistances /. {i_, j_, k_} :>
(adjM[i, j] = k);

TableForm[Array[adjM, {n, n}],
TableHeadings → {cities, cities},
TableSpacing → 1]
```

	NY	A	B	C	D	E	LA
NY	0	5	2	12	7	∞	∞
A	5	0	1	5	∞	6	∞
B	2	1	0	8	10	∞	∞
C	12	5	8	0	2	10	∞
D	7	∞	10	2	0	2	20
E	∞	6	∞	10	2	0	5
LA	∞	∞	∞	∞	20	5	0

Ιδού μια γραφική αναπαράσταση των πόλεων και των δρόμων:

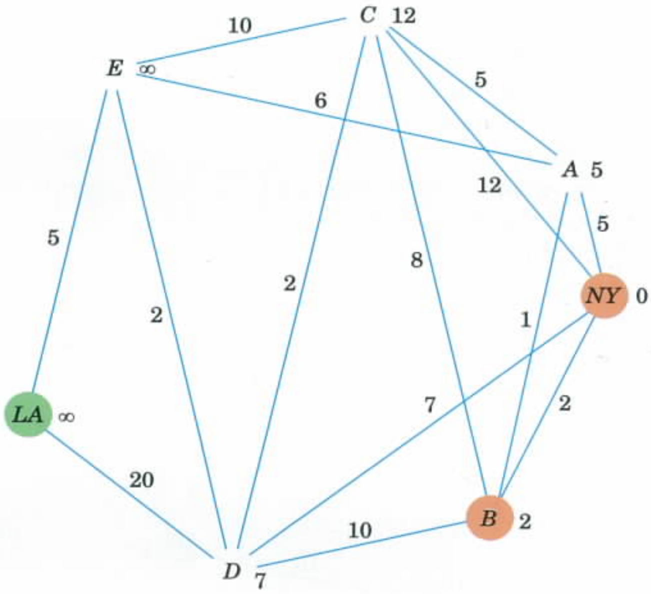


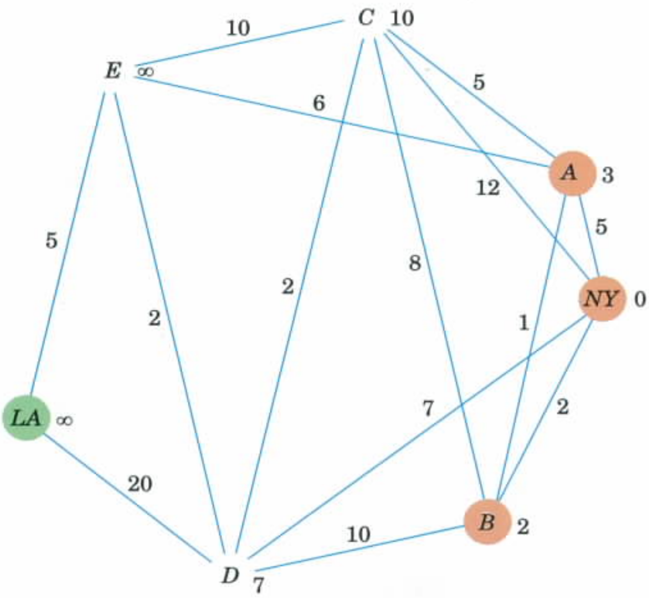


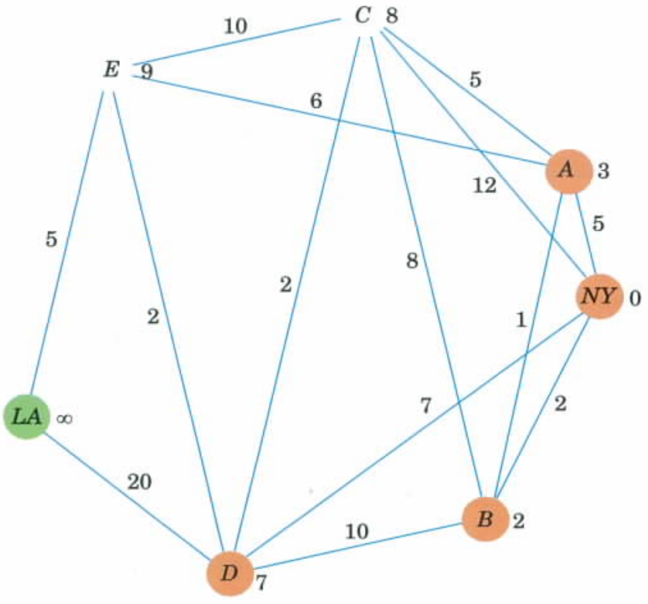
Ο αλγόριθμος του Dijkstra στο Mathematica

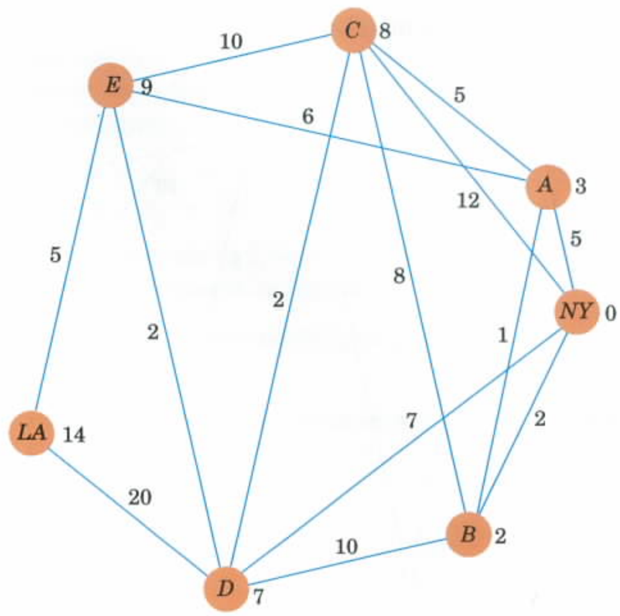
Το πρόγραμμα που ακολουθεί χρησιμοποιεί τον ψευδοκώδικα που δώσαμε προηγουμένως για να παρουσιάσει διαγραμματικά τον συνεχώς επεκτεινόμενο κατάλογο των πόλεων για τις οποίες γνωρίζουμε τη συντομότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη. Κάθε πόλη που προστίθεται, χρωματίζεται κόκκινη. Παρατηρήστε ότι οι πόλεις προστίθενται στον κατάλογο κατά σειρά αύξουσας απόστασης από τη Νέα Υόρκη. Η τρέχουσα βέλτιστη εκτίμηση της απόστασης μιας πόλης από τη Νέα Υόρκη σημειώνεται δίπλα στην πόλη. Αυτή παύει να μεταβάλλεται από τη στιγμή που η πόλη χρωματίζεται κόκκινη. Οι μικροί αριθμοί μεταξύ των πόλεων είναι οι αποστάσεις μεταξύ των γειτονικών πόλεων.

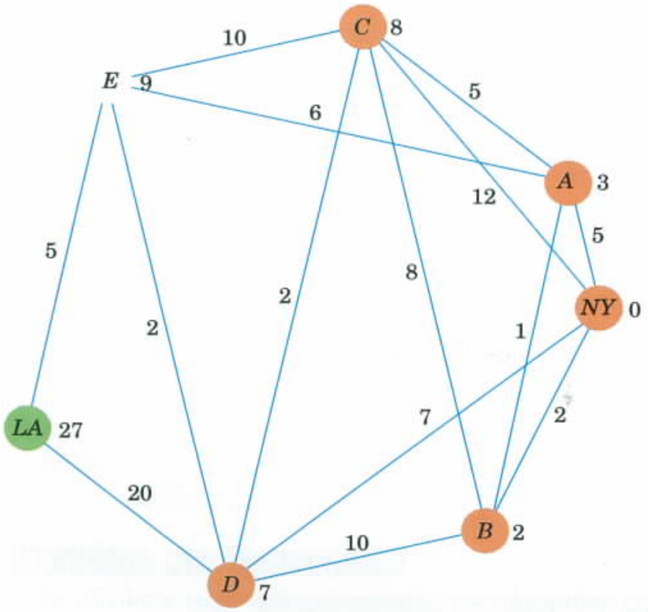
```
  (* 1. Αρχικές τιμές στο d και στις κορυφές
V *)
  d = Join[{0}, Table[∞, {n-1}]];
  V = Range[n];
  LA = n; (*LA είναι η τελευταία πόλη*)
  (*ορισμός της συνάρτησης update*)
  update[v_] := d[[v]] = Min[d[[u]] +
adjM[u, v], d[[v]]];
  S = {};
  currentBest = d;
  While[! MemberQ[S, LA],
   u = V[[Position[currentBest,
Min[currentBest]][[1, 1]]]];
      S = Join[S, {u}];
      V = Complement[V, {u}];
          drawMap;
      currentBest = update /@ V];
```

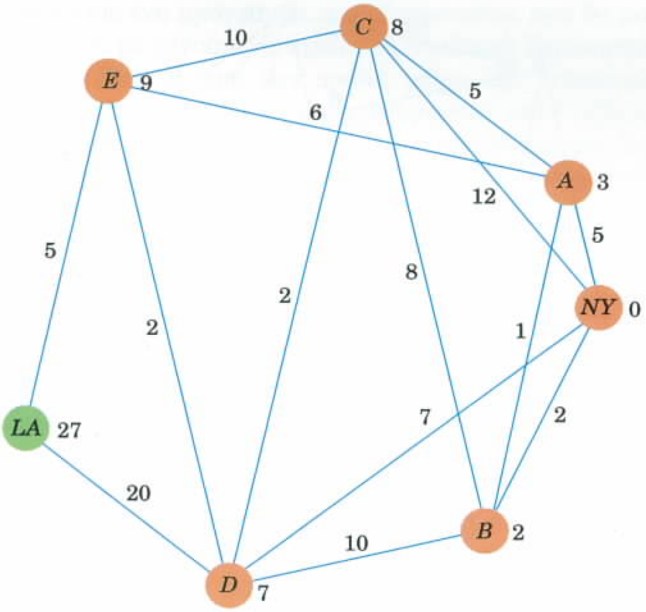












Η σειρά σας

Γνωρίζουμε τη συντομότερη απόσταση από τη Νέα Υόρκη για όλες τις πόλεις, έως και το Λος Άντζελες, αλλά δεν γνωρίζουμε την πραγματική διαδρομή που έχει αυτή την απόσταση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα το αφήνουμε για τους αναγνώστες. Πώς πρέπει να τροποποιηθεί ο προηγούμενος αλγόριθμος για να μας δώσει μια διαδρομή —έναν κατάλογο πόλεων από τη Νέα Υόρκη ώς το Λος Άντζελες— με μήκος ίσο με τη συντομότερη απόσταση;

Διαγωνισμοί στο Διαδίκτυο

Εκατόν πενήντα εννέα σπουδαστές από 34 χώρες έλαβαν μέρος στον χειμερινό διαγωνισμό της USACO, τον Νοέμβριο του 1999. Τα προβλήματα αυτού του διαγωνισμού προγραμματισμού αποστέλλονται μέσω e-mail σε όσους εγγράφονται στον κατάλογο της USACO, στη διεύθυνση **majordomo@delos.com**. Όσοι συμμετέχουν έχουν προθεσμία μίας εβδομάδας για να λύσουν τα προβλήματα και πρέπει να στείλουν τις λύσεις μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου.

Κάθε χρόνο διοργανώνονται στο Διαδίκτυο τρεις διαγωνισμοί, τον Ιανουάριο, τον Μάρτιο και τον Νοέμβριο.

Και τέλος...

Η Carla Lafrra του Πανεπιστημίου Pace δημιούργησε ένα όμορφο Java Applet που παρουσιάζει με κινούμενες εικόνες τη λύση του αλγορίθμου του Dijkstra για την εύρεση της συντομότερης διαδρομής. Βρίσκεται στο Διαδίκτυο, στη διεύθυνση

http://www.mcs.csuhayward.edu/~morgan/notes_CS4590/Dijkstra_SPF_Applet/.

Όλες οι απαντήσεις στα προβλήματα που προτείνει η στήλη υπάρχουν στην ιστοσελίδα μας, στη διεύθυνση

http://www.uwp.edu/academic/mathematics/usaco/informatics/.

ΒΙΒΛΙΟΓΩΝΙΑ

Μόνο για συνδρομητές

Προνόμιο έκπτωσης 30%

Μην αφήνετε κενά στη βιβλιοθήκη σας. Επιλέξτε τουλάχιστον δύο από τις διπλανές προσφορές και ταχυδρομήστε μας ή τηλεφωνήστε μας την παραγγελία σας. Θα παραλάβετε τα βιβλία ταχυδρομικά σε λιγότερο από 8 ημέρες. Τα έξοδα συσκευασίας και ταχυδρομικής αποστολής βαρύνουν εμάς, εσάς όμως επιβαρύνουν τα έξοδα αντικαταβολής (περίπου 900 δρχ. ανά δέμα) και το ΦΠΑ (4% επί της προσφερόμενης τιμής).*

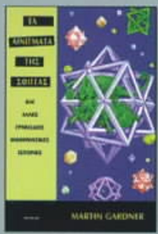
Η προσφορά *δεν ισχύει*:
— για όσους δεν είναι συνδρομητές του *Quantum* (ακόμη κι αν είναι αναγνώστες του)
— για ιδρύματα, οργανισμούς και βιβλιοθήκες (ακόμη κι αν είναι συνδρομητές)
— αν η παραγγελία σας γίνει μετά τις 31 Αυγούστου 2000
— αν η συνδρομή σας έχει ήδη λήξει.

Οι παρακάτω τίτλοι θα ανανεώνονται σε κάθε τεύχος.

* Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνονται δεκτές πιστωτικές κάρτες.

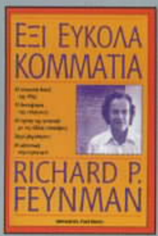
Βασίλιεφ & Γεγκόροφ
Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της ΕΣΣΔ
(1961-1991)
Τόμ. Α και Β
Συν. σελ.: 324, 9.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 6.450 δρχ.

Παύλος Ιωάννου
Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής
(1967-1997)
Σελ.: 364, 6.600 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.600 δρχ.

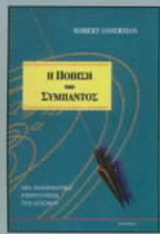


Martin Gardner
Τα αινίγματα της Σφίγγας
και άλλες γριφώδεις μαθηματικές ιστορίες
Σελ.: 168, 5.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.650 δρχ.

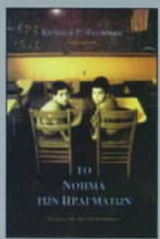
Raymond Smullyan
Την κυρία ή την τίγρη;
και άλλα αινίγματα μαθηματικής λογικής
Πανόδετο
Σελ.: 262, 7.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.900 δρχ.



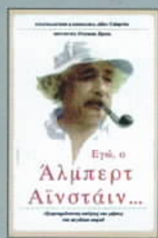
Richard Feynman
Έξι εύκολα κομμάτια
Ανθολόγηση από τις Διαλέξεις
Πανόδετο
Σελ.: 200, 6.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.400 δρχ.



Robert Osserman
Η ποίηση του Σύμπαντος
Μια μαθηματική εξερεύνηση του Κόσμου μας
Πανόδετο
Σελ.: 224, 6.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.400 δρχ.



Richard P. Feynman
Το νόημα των πραγμάτων
Σκέψεις ενός πολίτη-επιστήμονα
Πανόδετο
Σελ.: 142, 4.800 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.350 δρχ.



Alice Calaprice
Εγώ, ο Άλμπερτ Αϊνστάιν
Αξιομνημόνευτες σκέψεις και ρήσεις του μεγάλου σοφού
Πανόδετο
Σελ.: 270, 6.600 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.600 δρχ.

Serge Lang
Μαθηματικές συναντήσεις
με μαθητές γυμνασίου και λυκείου
Σελ.: 228, 5.500 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.850 δρχ.

L. Gonick & A. Huffman
Τα πάντα για τη φυσική σε κόμικς
Σελ.: 222, 5.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.500 δρχ.

Russell Stannard
Ο χρόνος και ο χώρος του Θείου Αλβέρτου
Εισαγωγή στην ειδική θεωρία της σχετικότητας
Πανόδετο
Σελ.: 182, 4.800 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.350 δρχ.

Peter Ward
Ταξιδεύοντας με τον κύριο Δαρβίνο
Εισαγωγή στη θεωρία της φυσικής επιλογής
Πανόδετο
Σελ.: 126, 4.700 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 3.300 δρχ.