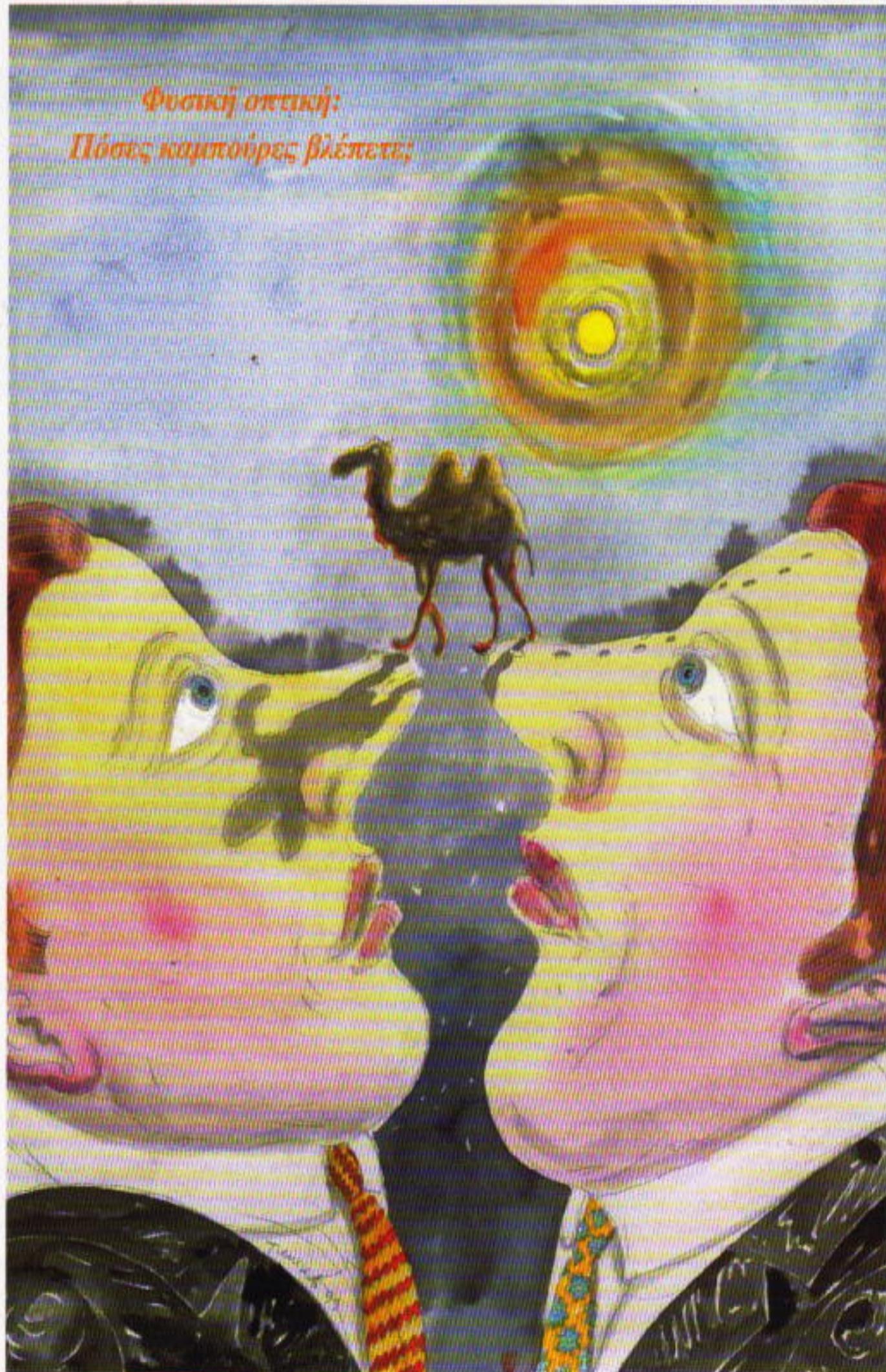


# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1999  
ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 6  
2.000 ΔΡΧ.

Φυσική απόκομψη:  
Πόσες κυριτούρες βρέπετε;



- Αντιστροφή: ένα εξαιρετικά χρήσιμο είδος μετασχηματισμού
- Ηλεκτρικά πολύπολα
- Διοφαντικές εξισώσεις και ελλειπτικές καμπύλες
- Το μήλο, οι κομήτες και ο νόμος της παγκόσμιας έλξης
- Μαθηματικές αποδείξεις και κομψότητα
- Ελληνοτρωικές αναμετρήσεις στο Διάστημα
- Σχάση και το μοντέλο της υγρής σταγόνας



Ελαιογραφία, 137,5 × 172 εκ., Συλλογή H. Kress © Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη Ουάσινγκτον

### Ο Λαοκόων (περίπου 1610-1614), του Ελ Γκρέκο

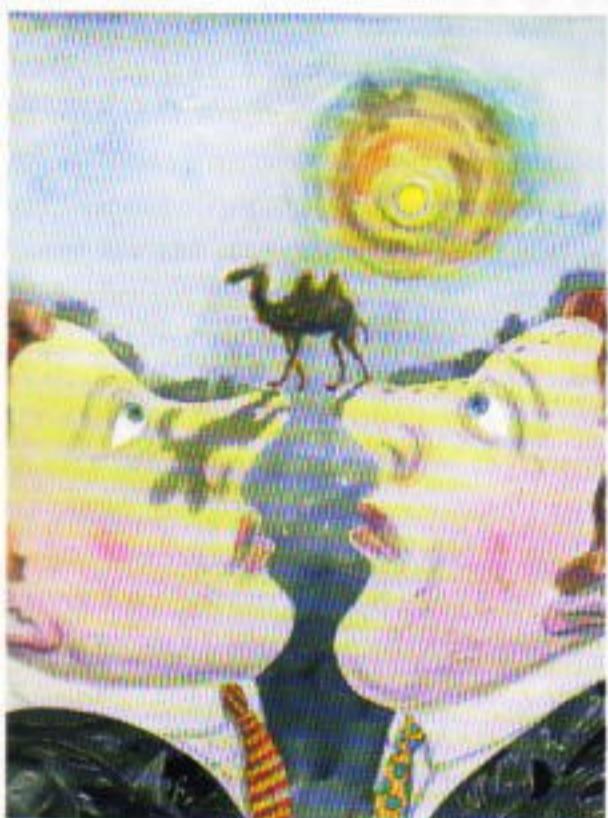
Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΖΕΙ ΤΟΝ ΛΑΟΚΟΟΝΤΑ, ΜΥΘΙΚΟ ΙΕΡΕΑ του Απόλλωνος στην Τροία, στο έλεος της οργής της θεάς Αθηνάς. Το αμάρτημά του; Χτύπησε με το ραβδί του τα πλευρά του δούρειου ίππου για να αποδειξει πως ήταν κούφιος. Δυστυχώς για τον Λαοκόοντα, το άλλο γένος ήταν αφιερωμένο στη θεά Αθηνά, η οποία προσθεβλημένη από τη βεβήλωση του ιερού αντικειμένου έστειλε φίδια που θανάτωσαν τον ίδιο και έναν από τους γιους του.

Επειδή αγνοήθηκαν οι προειδοποιήσεις του Λαοκόοντος, η Τροία έπεσε και οι κάτοικοι της χάθηκαν στο χωνευτήρι του πανδαμάτορα χρόνου. Ωστόσο, κοιτάζοντας ψηλά (όπως ο πεσμένος Λαοκόων) μπορεί κανείς να ανακαλύψει τους Τρώες ακόμη και στους σύγχρονους καιρούς. Για να μάθετε πώς αναβιώνουν οι σφαιρερές επιρροής των αρχαίων στη σύγχρονη αστρονομία, διαβάστε το άρθρο «Ελληνοτρωικές αναμετρήσεις», στη σελίδα 22.

# QUANTUM

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1999

ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 6



Εικονογράφηση: Leonid Tishkov

Μία ή δύο καμπούρες; Καμήλα βακτριανή ή αραβική; Δυστυχώς, η απάντηση δεν είναι πάντοτε «οφθαλμοφανής», ακόμη και αν δεν ανήκετε σε όσους «δεν μπορούν να δουν πέρα από τη μύτη τους». Οι νόμοι της φυσικής οπτικής καθορίζουν σε πόση απόσταση πρέπει να βρίσκεστε από την καμήλα ώστε να διακρίνετε πόσους ύβους λίπους φέρει στην πλάτη της, άρα και σε ποιο είδος ανήκει.

Βεβαίως, το ζήτημα δεν είναι να «διυλιζετε τον κώνωπα» και να «καταπίνετε την κάμηλο». Προκειμένου λοιπόν να ενημερωθείτε σωστά, ανατρέξτε στο άρθρο της σελίδας 60.

## ΑΡΘΡΑ

- 8 Ιδιάζοντα συστήματα  
**Ηλεκτρικά πολύπολα**  
A. Dozorov
- 22 Προβληματικοί πλανήτες  
**Ελληνοτρωικές αναμετρήσεις**  
I. Vorobyov
- 30 Αιώνιες εξισώσεις  
**Ο εξαιρετικά σύγχρονος Διόφαντος**  
Y. Solov'yov
- 44 Πολυωνυμική ποικιλία  
**Παιχνίδια με τα πολυώνυμα Chebyshev**  
N. Vasil'yev και A. Zelevinsky

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 **Ο κόσμος των κβάντων**  
Η γεύση και η γνώση
- 4 **Μαθηματικές αναζητήσεις**  
Απόδειξη και ομορφιά
- 14 **Σκόπελοι**  
Αντιστροφή
- 27 **Στο μαυροπίνακα I**  
Ηλεκτρικά ρεύματα σε όρη δυναμικού
- 36 **Καθειδοσκόπιο**  
Γνωρίζετε πραγματικά το χρόνο;
- 39 **Αναδρομές**  
Ο μέγας νόμος
- 52 **Στα πεδία της φυσικής**  
Η διάσπαση είναι δύσκολη υπόθεση
- 58 **Πώς πήνεται;**
- 59 **Σπαζοκεφαλιές**
- 60 **Στο μαυροπίνακα II**  
Οι δύο καμήλες
- 64 **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 70 **Ιππολογισμοί**  
Αποχαιρετισμός

# Η γεύση και η γνώση

**Α**ΟΠΟΝ, ΟΣΟ ΠΙΟ ΚΟΤΙΝΕΣ, ΠΑΡΟΜΟΙΕΣ φαίνονται οι λέξεις, κι όσο αποσπούν χυμό από τις ίδιες ρίζες ή γειτονικές, τόσο βαθαίνει η άβυσσος που τις χωρίζει· σχολή και σχόλη, λόγου χάρη, παιδεία και παιδί, και βέβαια παιδεία και εκπαίδευση, τέλος —αλλ' όχι, ίσως από εδώ ν' αρχίζουν όλα— γνώση και γεύση ακόμη κι αν η αναλογία που εμφανίζει το ζεύγος γνώση-γεύση εξαντλείται στον ήχο (στα ελληνικά, αλλά και στα ιταλικά: sapere = γιγνώσκω, επίσταμαι, και sapore = γεύση), ο νους δικαιούται τους συνειρμούς και τις ελεύθερες διαδρομές του.

Γεύση στυφή, αποθαρρυντική, βαραίνει τη γνώση στην ημερήσια σχολική πράξη. Τα μαθήματα, ακριβώς όπως και οι δάσκαλοι τους, υπάρχουν παράλληλα, δεν τέμνονται, δεν διασταυρώνονται, δεν συναπτίζουν κόσμο. Μοιάζουνε κάπως με τα ράφια μιας βιβλιοθήκης, όπου οι αυστηρές πινακίδες ορίζουν το αδύνατο της συνύπαρξης και της συλλειτουργίας: εδώ η λογοτεχνία, πάνω η ιστορία, κάτω η φυσική, δίπλα η γλωσσολογία· μόνο ένα «λάθος» μπορεί να τα οδηγήσει εις γάμου κοινωνίαν. Και τα μαθήματα, έτσι τελούνται: σαν οριοτικώς απομονωμένοι τομείς ενός όλου, το οποίο, ωστόσο, δεν θα υπάρξει ποτέ ως όλον, παρά μόνο σε κάποιες ευλογημένες σπιγμές (ένα «λάθος» κι αυτές...) που ερεθίζουν την όρεξη αλλά δεν αρκούν για να την οδηγήσουν στην πληρότητα.

Η σύμβαση, ανυπέρβατη, επιτάσ-

Στης Χρισταινας της καφετζούς προχθές νωρίς νωρίς μια φιλολογική εδόθη εσπερίς...

Η Κώσταινα εμίλησε για την μπουγάδα και την πλύση κι επεκαλέσθη και τον Πλίνιον.

Ο Χρήστος ο αμανετζής ομίλησε περί του Μπαχ

εν σχέσει με το αχ και βαχ.

Ο κανονιέρης ο Στρατής περί Δανίας και Δανών κι

ο καρβουνιάρης ο Λουκάς περί λευκών μικρών κλινών.

Η Διαμαντούλα έπειτα, με μια εισήγηση λαμπρά, ανέλυσε τον Ντεκομπρά και είπε

και περί φωτός και ουρανού ενάστρου.

Και, τέλος, η κυρία Κάστρου, κρατούσα εγχειρίδιον περί φιλοσοφίας, μετά χάριτος απείρου απήγγειλε τεμάχια εκ του Ομήρου.

—Τίμος Μωραΐτηνς

σει να μιλάει ο φυσικός αποκλειστικά για φυσική και αποκλειστικά στο περιχαρακωμένο ιδιόλεκτο της φυσικής, ο χημικός μόνο για χημεία και αποκλειστικά στο δικό της ιδιόλεκτο, ο φιλόλογος για αρχαία και για νέα, και πάλι με τον δεδομένο, τον ανελαστικό λόγο με τον οποίο τον έχει τυπικά εξοπλίσει η δική του άμουση —δηλαδή μερικευμένη και στενή— παιδεία. Παράνομες οι διασταυρώσεις, παράνομες οι αλληλο-

περιχωρήσεις, παράνομο, βεβαιότατα, το σμίξιμο των αλλοτρίων. Και τούτο όχι βέβαια επειδή πρέπει να υπάρχει «διάκριση εξουσιών, ειδών και γλωσσών», ούτε επειδή, όπως το όρισε ο Νίκος Εγγονόπουλος, «πρέπει να έχει / ο στρατιώτης το τσιγάρο του / το μικρό παιδί / την κούνια του / κι ο ποιητής / τα / μανιτάρια / του», αλλά επειδή δεν πρέπει να απειληθεί το ασφαλέστατο μεν, ανοστο δε καθεστώς της μονοτονίας, της συνήθειας, της ακίνδυνης επανάληψης.

Δεν λέω ότι τελεσφορεί οπωσδήποτε η μείζη των διδακτικών ειδών, διότι υπάρχει πάντοτε το ενδεχόμενο να εμφανιστεί απειλητική η σύγχυση ή να χρησιμοποιηθεί ένας κάποιος λυρισμός, φτενός και βεβιασμένος, σαν επικάλυμμα της ισχνής σκέψης. Κι ωστόσο, η ανοιχτή διδασκαλία, η προφορική, την ώρα του μαθήματος, ή η γραπτή, διά των βιβλίων, η διδασκαλία δηλαδή που υποψιάζεται και αποδέχεται ότι ο κόσμος δεν εξαντλείται στην ύλη του ενός μαθήματος ή του ενός «νομίμου» συγγράμματος, η διδασκαλία που αποπειράται να αφηγηθεί μιαν ιστορία, μιαν ανακάλυψη, μια εφεύρεση με γλώσσα αδογμάτιστη και απελευθερωμένη από την τυπολατρία, έχει περισσότερες πιθανότητες να αφυπνίσει την κοιμωμένη όρεξη του ειδέναι· η τάξη, η εκπαιδευτική τάξη, θέλει τη λίγη αταξία της για να ομορφύνει, θέλει το απρόβλεπτο, εκείνο που δεν έχει προδιαγραφήσεις.

Η αταξία αυτή είναι, ίσως, το άλ-

λο όνομα του πειραματισμού, του νοητικού πειραματισμού. Γιατί, τελικά, με όσους τρόπους κι αν την «προφέρουμε την πραγματικότητα» (για να θυμηθούμε τον Ελύτη του Μικρού Ναυτίλου), αυτή θα επρέψει να διαφεύγει και από τα ερμηνευτικά μας σχήματα, όσο αλαζονικά και βέβαια για τον εαυτό τους κι αν εμφανίζονται αυτά, και από τις γλώσσες μας. Για να παρακολουθήσουμε, λοιπόν, έστω και από μεγάλη απόσταση, την ατίθαση ποικιλία της, οφείλουμε να γίνουμε επινοητικοί, αναλόγως ποικίλοι, ιδιότροποι.

Χρήσιμη οπωδήποτε και εσωτερικώς αναγκαία η αυστηρότητα της επιστημονικής γλώσσας. Μολαταύτα δεν θα τη ζημιώναμε αθεράπευτα αν, την ώρα ακριβώς που τη σεβόμαστε και την ενστερνίζομαστε, δεν παύαμε να έχουμε στην άκρη άκρη της μνήμης μας (κι όχι σαν δόγμα σιδηρούν) την επίσης χρήσιμη απόφανση του Αριστοτέλη, ότι, δηλαδή, «η ποίησις φιλοσοφώτερον και σπουδαιότερον της ιστορίας», πθανόν και της φυσικής, και της γεωγραφίας, και της χημείας. Κι όχι, φυσικά, για ν' αλατίσουμε πρόχειρα το κατά τα άλλα ξηρό μάθημα με κάποιους στίχους και για να προσποιηθούμε μια κάποια λογοτεχνικότητα ούτε για να απομιμηθούμε, άνευ λόγου και άνευ γόνων πλέον, το *Περί φύσεως σύγγραμμα* του Εμπεδοκλή, ο οποίος παρέδωσε έμμετρη τη φυσιογνωσία του σε μια γενετική εποχή, όταν ο Λόγος δεν είχε αποφασίσει ακόμη τη διάσπασή του. Άλλος θα ήταν ο στόχος· ας πούμε, να υποδείξουμε πως όταν διασπάμε τον κόσμο, όταν τον κερατίζουμε και προσπαθούμε να «ξεκλειδώσουμε» κάθε τμήμα του με ένα κλειστό, αυτοσυντηρούμενο και εν τέλει ναρκισσεύμενο ιδίωμα, τότε αδυνατούμε να κατανοήσουμε ως ενιαία την ομορφιά του και ως ενιαία ακριβώς να την κοινωνήσουμε και, ίσως, να την αποδώσουμε.

—Παντελής Μπουκάλας

**Ο Παντελής Μπουκάλας** είναι δημοσιογράφος, ποιητής και κριτικός.

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ενωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,  
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ενωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεποτέλλων εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντες (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μιέρκλεϊ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης

Mike Donaldson

Αντεποτέλλουσα αρχισυντάκτρια

Jennifer Wang

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Sergey Ivanov

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του Quantum

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Yevgeniya Morozova, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιφορμή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκπλεοτικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιόνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέττη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοφάντο, Κολοφάντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής

Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός,

Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Κώστας Σκανδάλης-μαθηματικός,

Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός, Αθηνά Τσαγκογέωργα-φυσικός

και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

Ειδικός συνεργάτης Τυπογραφικές διορθώσεις Τυποτεχνική επιμέλεια Υπεύθυνη λογοτεινίου  
Γ. Ευαγγελόπουλος Ν. Μαρίνου Θ. Ντούσης Μ. Μάραλη

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ιδρυμα Τεχνολογίας και Ερευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση Φίλμ, μοντάζ  
Αβ. Μαχαιρίδης Χρ. Μήτσης

Εκτύπωση Ν. Πουλόπουλος  
Βιβλιοδεσία Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο  
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης  
Διορθώσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Ισαύρων 10 και Δαφνονήση, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αροακείου (Πανεπιστήμιο 49),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάβοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθε τεύχου στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.  
Ετήσια συνδρομή: 10.500 δρχ. για ιδιώτες, 18.500 δρχ.  
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.

# Απόδειξη και ομορφιά

«Δεν χρειάζεται καν να πιστεύεται στο Θεό· χρειάζεται απλώς να πιστεύετε στο βιβλίο Του.»

—Paul Erdős

Ian Stewart

**Α**ΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΥΧΝΑ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ μόνον επτά τρόποι αφήγησης μιας ιστορίας, όλοι γνωστοί στους αρχαίους Έλληνες. Υπάρχουν ακόμη λιγότεροι τρόποι γραφής μιας μαθηματικής απόδειξης, και οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν μόνο τον έναν από αυτούς: ήταν ο σύντομος, γοητευτικός, συναρπαστικός τρόπος επιχειρηματολογίας που έκανε διάσημο τον Ευκλείδη. Ουδείς θα αναρωτηθεί γιατί είναι απαραίτητες τέτοιες αποδείξεις. Έτσι, αν διατυπώσετε μια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση και αποδείξετε ότι είναι ορθή μέσω μιας λαμπρής, περιεκτικής ιδέας που πάνει λίγες μόνο γραμμές, τότε η φήμη σας θα είναι εξασφαλισμένη. Οι πάντες εκθειάζουν την κομψότητα των μαθηματικών, την ομορφιά του μαθηματικού κόσμου. Άρα όλοι θα κατανοούν επακριβώς γιατί η πρότασή σας είναι σωστή. Και όλοι θα ευτυχούν.

Ο Paul Erdős, ο εκκεντρικός αλλά λαμπρός μαθηματικός και πανεπιστημιακός δάσκαλος (που συνεργάστηκε επιστημονικά με περισσότερους ανθρώπους από οποιονδήποτε άλλο στον πλανήτη), είχε την ίδια άποψη. Πίστευε ότι ψηλά στον ουρανό ο Θεός έχει ένα βιβλίο που περιέχει όλες τις καλύτερες μαθημα-

τικές αποδείξεις. Αν μια απόδειξη εντυπωσίαζε πραγματικά τον Erdős, δήλωνε ότι προέρχεται «από το βιβλίο Του». Εππλέον, πίστευε ότι η δουλειά του μαθηματικού είναι να κρυφοκοιτάζει πάνω από τον ώμο του Θεού και να μεταδίδει την ομορφιά της δημιουργίας Του στα υπόλοιπα πλάσματά Του.

Ωστόσο, στις μέρες μας φαίνεται ότι αυτή η απλή, κομψή προσέγγιση δεν είναι παρά ένας μόνο από τους δυνατούς τρόπους διατύπωσης μιας μαθηματικής απόδειξης. Ας πάρουμε για παράδειγμα τις αποδείξεις που έχουν συγκεντρώσει τα φώτα της δημοσιότητας τα τελευταία έναδύο χρόνια. Αντί της σύντομης, συναρπαστικής αφηγήσης των Ελλήνων, έχουμε εκθέσεις εκατοντάδων ή και χιλιάδων σελίδων. Τι απέγινε η ομορφιά των θεϊκών δημιουργημάτων; Όντως είναι απαραίτητες αυτές οι τεράστιες αποδείξεις; Και είναι τόσο αχανείς μόνο και μόνο επειδή οι μαθηματικοί είναι πολύ ανόητοι για να ανακαλύψουν τις περισσότερο σύντομες και πραγματικά έξυπνες εκδοχές που περιέχονται «στο βιβλίο»;

Λοιπόν, μια πρώτη απάντηση είναι ότι τίποτε δεν μας εξασφαλίζει πως κάθε σύντομη, απλή και αληθής πρόταση πρέπει να έχει μια σύ-

ντομη και απλή απόδειξη. Στην πραγματικότητα, έχουμε αρκετούς λόγους να πιστεύουμε το αντίθετο. Ο αυστριακός μαθηματικός Kurt Gödel απέδειξε ότι σύντομες προτάσεις μπορεί μερικές φορές να απαιτούν μεγάλες αποδείξεις. Δυστυχώς, δεν γνώριζε ποιες προτάσεις ήταν αυτές —και ούτε κάποιος άλλος το γνωρίζει.

Πολλές από τις σημαντικότερες αποδείξεις των τελευταίων ετών ήταν αναμφίβολα μακροσκελείς και περίπλοκες. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, το τελευταίο θεώρημα του Fermat, το οποίο απέδειξε ο άγγλος μαθηματικός του Πανεπιστημίου του Πρίστον Andrew Wiles, το 1996, κερδίζοντας παγκόσμια φήμη. Για να λύσει το πρόβλημα, ο Wiles έπρεπε να χρησιμοποιήσει ένα πανίσχυρο μαθηματικό οπλοστάσιο, σφυροκοπώντας ανελέητα το υπό εξέταση ερώτημα. Η προκύπτουσα απόδειξη, πλούσια και όμορφη, δεν είναι ούτε στο ελάχιστο βαρετή ή άχρηστη. Άλλα δεν είναι και μια σύντομη ιστορία —όπως οι αποδείξεις «του βιβλίου» μοιάζει περισσότερο με το *Πόλεμος και Ειρήνη*.

Αξίζει να διηγηθούμε, για μία ακόμη φορά, την ιστορία της γέννησης του τελευταίου θεωρήματος του Fermat. Το 1637, ο Pierre de Fer-

mat, ένας γάλλος δικηγόρος που το μικρό του δάχτυλο διέθετε περισσότερη μαθηματική ικανότητα απ' όση έχουμε οι περισσότεροι στο κεφάλι μας, έγραψε ένα μοιραίο σχόλιο στο προσωπικό του αντίγραφο των *Arithmetik* του Διόφαντου. Η σημείωσή του σχετίζεται με το πυθαγόρειο θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο, για συγκεκριμένους ακέραιους αριθμούς  $a$ ,  $b$  και  $c$ , ισχύει  $a^2 + b^2 = c^2$ . Υπάρχουν πολλές διαφορετικές τιμές των  $a$ ,  $b$  και  $c$  που ικανοποιούν τη συγκεκριμένη σχέση. Και μάλιστα, κάθε συνδυασμός αποτελεί τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα  $c$ .

Ο Fermat προσπάθησε να ανακαλύψει το ίδιο είδος σχέσης μεταξύ κύβων ή και τέταρτων δυνάμεων, αλλά δεν κατέληξε σε κανένα παράδειγμα. Με άλλα λόγια, δεν μπόρεσε να βρει μια ισότητα της μορφής  $a^n + b^n = c^n$ , όπου τα  $a$ ,  $b$  και  $c$  είναι ακέραιοι αριθμοί και ο  $n$  ακέραιος μεγαλύτερος του 2. Άραγε αυτό σημαίνε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει τέτοια ισότητα; Στο περιθώριο του βιβλίου του ο Fermat έγραψε ότι είχε ανακαλύψει την θαυμασία απόδειξη πως η πυθαγόρεια σχέση ισχύει μόνο για δυνάμεις του 2-ωστόσο πρόσθεσε ότι «το περιθώριο του βιβλίου είναι πολύ μικρό για να τη χωρέσει».

## Μυστική στρατηγική

Θα πρέπει να υποθέσουμε ότι μια τέτοια απόδειξη, ακόμη και αν δεν χωρούσε στο περιθώριο, θα ήταν οπωσδήποτε αρκετά συνοπτική και κομψή ώστε να κερδίσει μια θέση στο καλαιοθητικό βιβλίο του Θεού. Και όμως, επί τρισήμισυ αιώνες όλοι οι μαθηματικοί που προσπάθησαν να την ανακαλύψουν βρέθηκαν, ο ένας μετά τον άλλον, αντιμέτωποι με την αποτυχία. Τότε, στα τέλη της δεκαετίας του 1980, ο Andrew Wiles εξαπέλυσε μια ευρύτατη επίθεση εναντίον του προβλήματος. Δούλεψε μόνος στη σοφίτα του σπιτιού του και μίλησε σχετικά σε ορισμένους μόνο συναδέλφους του, οι οποίοι ορκίστηκαν να μην αποκαλύψουν το μυστικό.

Η στρατηγική του Wiles, όπως

και πολλών άλλων πριν από αυτόν, ήταν να υποθέσει ότι η ισότητα ισχυε για κάποια  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $n$ , και στη συνέχεια να «παίξει» αλγεβρικά με τους αριθμούς ελπίζοντας ότι θα οδηγηθεί σε αντίφαση. Το σημείο εκκίνησής του ήταν μια ιδέα που οφείλεται, μεταξύ άλλων, στον Gerhard Frey, του Πανεπιστημίου του Έσσεν, στη Γερμανία. Ο Frey συνειδητοποίησε ότι από τις τρεις ρίζες  $a$ ,  $b$  και  $c$  της «αδύνατης» εξίσωσης του Fermat είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε έναν τύπο κυβικής εξίσωσης που είναι γνωστή ως ελλειπτική καμπύλη.\* Αυτό αποτελεί λαμπρή ιδέα, διότι οι μαθηματικοί ασχολούνταν με τις ελλειπτικές εξίσωσεις για περισσότερο από έναν αιώνα και είχαν αναπτύξει πολλούς τρόπους χειρισμού τους. Εππλέον, τότε οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν ότι η ελλειπτική καμπύλη που θα δημιουργούνταν από τις ρίζες του Fermat έχει τόσο παράξενες ιδιότητες ώστε θα ερχόταν σε αντίφαση με μια άλλη εικασία —γνωστή ως εικασία Taniyama-Shimura-Weil— σχετική με τη συμπεριφορά τέτοιων καμπυλών.

Οι ρίζες της εξίσωσης του Fermat θα παραβίαζαν την εικασία Taniyama-Shimura-Weil, πράγμα που σημαίνει ότι, αν αυτή η εικασία αποδεικνύοταν ορθή, οι περιβόλτες ρίζες δεν θα μπορούσαν να υπάρχουν. Έτσι, για επτά χρόνια, ο Wiles χρησιμοποίησε κάθε βαρύ όπλο της θεωρίας αριθμών εναντίον της εικασίας, έως ότου ανακάλυψε τη στρατηγική η οποία οδήγησε στην παράδοση του αντιπάλου. Αν και εργάζόταν μόνος, δεν ανακάλυψε τα πάντα ο ίδιος. Κράτησε στενή επαφή με όλες τις νέες προόδους στις ελλειπτικές καμπύλες και, κατά πάσαν πιθανότητα, δεν θα είχε επιτύχει αν δεν υπήρχε η ισχυρή κοινότητα των αριθμοθεωρητικών που δημιουργούσε σταθερά νέες τεχνικές. Άλλα ακόμη και έτσι, πρέπει να παραδεχθούμε ότι η δική του συνεισφορά είναι τεράστια, και οδηγεί το ζήτη-

\* Βλ. το άρθρο «Ο εξαιρετικά σύγχρονος Διόφαντος» στο παρόν τεύχος. (Σ.τ.ε.)

μα σε μια καινούργια και συναρπαστική περιοχή.

Η απόδειξη του Wiles έχει πλέον εκδοθεί ολόκληρη. Είναι λίγο μεγαλύτερη από 100 σελίδες —σίγουρα πολύ μεγάλη για να χωρέσει στο περιθώριο ενός βιβλίου! Άξιζε την προσπάθεια; Οπωσδήποτε ναι. Ο μηχανισμός που ανέπτυξε ο Wiles για να αντιμετωπίσει το θεώρημα του Fermat είναι εξαιρετικά πλούσιος και όμορφος. Οι ιδέες του διανοιγουν νέες περιοχές έρευνας στη θεωρία αριθμών. Άλλα χωρίς αμφιβολία, η ιστορία που έπρεπε να μας διηγηθεί ήταν μεγάλη —και μόνο οι ειδικοί του πεδίου μπορούν να κατανοήσουν τις λεπτομέρειές της. Μάλιστα, δεν έχει νόημα να παραπονιόμαστε γι' αυτό, όπως δεν θα είχε νόημα να παραπονεθούμε επειδή για να διαβάσουμε Τολστού στο πρωτότυπο πρέπει να γνωρίζουμε τη ρωσική.

Υπάρχει ένας ακόμη αφηγηματικός τρόπος μαθηματικής απόδειξης —ένας τρόπος που εμφανίστηκε μόνο τα τελευταία τριάντα χρόνια. Είναι η απόδειξη με τη βοήθεια υπολογιστή, και μοιάζει με ένα κατάστημα φαστ-φουντ που σερβίρει εκατομμύρια άγευστα, πανομοιότυπα χάμπουργκερ. Πρέπει να παραδεχτούμε ότι κάνει τη δουλειά, αλλά όχι όμορφα. Μερικές φορές υπάρχουν έξυπνες ιδέες, αλλά στόχος τους είναι να ανάγουν το πρόβλημα σε έναν μαζικό υπολογισμό ρουτίνας. Τότε εμπιστευόμαστε το θέμα σε έναν υπολογιστή, και αν ο υπολογιστής πει το «ναι», η απόδειξη θεωρείται πλήρης.

## Συσκευασία

Ένα παράδειγμα αυτού του είδους αποδείξεων εμφανίστηκε την περασμένη χρονιά. Το 1611, ο Johannes Kepler μελέτησε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να στοιβάξουμε σφαίρες. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η αποδοτικότερη μέθοδος —αυτή που μας επιτρέπει να τοποθετήσουμε το μεγαλύτερο πλήθος σφαιρών σε δεδομένο χώρο— ήταν αυτή που χρησιμοποιούσαν οι μανάβιδες για να στοιβάζουν τα πορτοκάλια. Δημιουργούμε ένα

επίπεδο στρώμα, τοποθετώντας τα πορτοκάλια έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα μόρφωμα παρόμοιο με της κυρήθρας· μετά στοιβάζουμε από πάνω ένα δεύτερο στρώμα, που στηρίζεται στα βαθουλώματα του πρώτου, και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Το εν λόγω μόρφωμα βέλτιστης συσκευασίας εμφανίζεται σε πολλούς κρυστάλλους, και οι φυσικοί το ονομάζουν ενδοκεντρωμένο κυβικό πλέγμα.

Λέγεται συχνά ότι η πρόταση του Kepler είναι προφανής, αλλά όποιος οκέφτεται έτσι δεν κατανοεί τα λεπτά σημεία του προβλήματος. Για παράδειγμα, δεν είναι καν προφανές ότι η αποδοτικότερη διευθέτηση περιλαμβάνει ένα επίπεδο στρώμα σφαιρών. Οι μανάβηδες αρχίζουν το στοιβαγμα από μια επίπεδη επιφάνεια, αλλά εσείς δεν είστε υποχρεωμένοι να κάνετε το ίδιο. Ακόμη και η δισδιάστατη εκδοχή του προβλήματος, όπου το μόρφωμα της κερήθρας είναι ο βέλτιστος τρόπος συσκευασίας ίσων κύκλων στο επίπεδο, δεν αποδείχθηκε παρά το 1947 από τον ούγγρο μαθηματικό Laszlo Fejes Toth. Πριν δέκα περίπου χρόνια, ο Wu-Yi-Hsiang, του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Μπέρκλεϋ, ανακοίνωσε μια λύση του τριοδιάστατου προβλήματος, μεγέθους περίπου 200 σελίδων (αλλά λόγω των κενών που εμφανίστηκαν σε αυτήν οι άλλοι μαθηματικοί αρνήθηκαν τελικά να την αποδεχθούν). Τον περασμένο χρόνο, όμως, ο Thomas Hales, του Πανεπιστημίου του Μίσιγκαν στο Ann Arbor, ανακοίνωσε μια απόδειξη με χρήση υπολογιστή η οποία περιλαμβάνει εκατοντάδες σελίδων μαθηματικών και τεράστια ποσότητα πράξεων υπολογιστή που την υποστηρίζουν. Αρχικά εμφανίστηκε στην ιστοσελίδα του και τώρα υπόκειται σε προσεκτικό έλεγχο για να εκδοθεί σε μαθηματικό περιοδικό.

Ο Hales προσέγγισε το πρόβλημα γράφοντας έναν κατάλογο με όλους τους δυνατούς τρόπους διευθέτησης μικρών ομάδων σφαιρών. Στη συνέχεια απέδειξε ότι, όταν μια μικρή ομάδα δεν αποτελεί ενδοκεντρωμένο κυβικό πλέγμα, μπορεί να συμπιε-

στεί μέσω ελαφράς αναδιάταξης των σφαιρών της. Συμπέρασμα: η μοναδική ασυρπίεστη διευθέτηση —αυτή που γεμίζει τον χώρο αποδοτικότερα— δεν είναι άλλη από αυτή της υπόθεσής μας. Με τον ίδιο τρόπο είχε αντιμετωπίσει ο Toth το δισδιάστατο πρόβλημα και χρειάστηκε να καταγράψει περίπου πενήντα διαφορετικές δυνατότητες. Ο Hales έπρεπε να αντιμετωπίσει χιλιάδες, και ο υπολογιστής να επαληθεύσει έναν τεράστιο κατάλογο ανισοτήτων —που καταλάμβαναν 3 GB μνήμης.

Μια από τις πρώτες αποδείξεις που χρησιμοποίησαν αυτή τη μέθοδο (της εξαντλητικής καταγραφής όλων των περιπτώσεων με χρήση υπολογιστή) ήταν η απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων. Πριν από ενάμιση περίπου αιώνα, ο βρετανός μαθηματικός Francis Guthrie έθεσε το ερώτημα αν είναι δυνατόν να χρωματίσουμε κάθε δισδιάστατο χάρτη που περιέχει οποιαδήποτε διευθέτηση χωρών με τέσσερα μόνο χρώματα, υπό την προϋπόθεση οι γειτνιάζουσες χώρες να έχουν διαφορετικά χρώματα. Ακούγεται απλό, αλλά οι προσπάθειες να αποδείχθει απέβησαν άκαρπες. Τελικά, το 1976, οι αμερικανοί μαθηματικοί Kenneth Appel και Wolfgang Haken τα κατάφεραν. Δουλεύοντας στην αρχή με το χέρι και μέσω της διαδικασίας δοκιμής και λάθους, κατέληξαν σε έναν κατάλογο με 2.000 περίπου δυνατούς σχηματισμούς χωρών. Στη συνέχεια ανέθεσαν στον υπολογιστή να αποδείξει ότι ο κατάλογος είναι «αναπόφευκτος» —ότι δηλαδή, κάθε χάρτης περιέχει χώρες διευθετημένες με τον ίδιο τρόπο όπως ένας τουλάχιστον από τους σχηματισμούς του καταλόγου. Το επόμενο βήμα ήταν να αποδείξουν ότι καθένας από αυτούς τους σχηματισμούς είναι «αναγώγιμος» —δηλαδή, ένα τμήμα του μπορεί να συρρικνωθεί έως ότου εξαφανιστεί, αφήνοντας έναν απλούστερο χάρτη. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι η συρρικνωση γίνεται κατά τρόπον ώστε, αν ο απλούστερος χάρτης που απομένει χρωματίζεται με τέσσερα χρώματα, τότε το ίδιο ισχύει και για τον αρχικό χάρτη.

Ας φανταστούμε τώρα τον απλούστερο δυνατό χάρτη που απαιτεί πέντε ή και περισσότερα χρώματα —τον επονομαζόμενο «ελάχιστο δράστη». Όπως κάθε άλλος χάρτης, πρέπει και αυτός να περιέχει τουλάχιστον έναν από τους 2.000 αναγώγιμους σχηματισμούς. Εάν συρρικνώσουμε αυτό το σχηματισμό, καταλήγουμε σ' ένα χάρτη απλούστερο που είναι «αθώος» και, επομένως, χρειάζεται τέσσερα μόνο χρώματα. Αυτό σημαίνει όμως ότι και ο «ελάχιστος δράστης» απαιτεί μόνο τέσσερα χρώματα. Ο μόνος τρόπος να ξεφύγουμε από την αντίφαση είναι να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν «δράστες».

Στην πραγματικότητα, η διαδικασία περιλαμβάνει τεχνικές γενικότερες από την απλή συρρίκνωση περιοχών, πήρατε όμως μια ιδέα της απόδειξης. Η αντιστοίχιση κάθε σχηματισμού σε μια μέθοδο συρρικνωσης απαιτεί τεράστιο πλήθος υπολογισμών, οι οποίοι διήρκεσαν περίπου δύο χιλιάδες ώρες στον ταχύτερο υπολογιστή εκείνης της εποχής, ενώ στις μέρες μας χρειάζεται μόνο μία ώρα περίπου. Τελικά, όμως, οι Appel και Haken κέρδισαν την απόδειξη.

Οι αποδείξεις με τη βοήθεια υπολογιστή θέτουν ένα πλήθος προβλημάτων: ζητήματα καλαισθησίας, δημιουργικότητας, τεχνικής και φιλοσοφίας. Ορισμένοι φιλόσοφοι πιστεύουν ότι στην πραγματικότητα οι μέθοδοι αποδείξεων πλήρους καταγραφής τεράστιου πλήθους περιπτώσεων μέσω υπολογιστή δεν είναι, σύμφωνα με την παραδοσιακή έννοια, καν αποδείξεις. Άλλοι επισημαίνουν ότι αυτό το είδος μαζικής και μονότονης επεξεργασίας είναι το πράγμα που καταφέρνουν πολύ καλά οι υπολογιστές και πολύ άσχημα οι άνθρωποι. Αν, μάλιστα, ένας άνθρωπος και ένας υπολογιστής εκτελέσουν τον ίδιο μαζικό υπολογισμό και καταλήξουν σε διαφορετική απάντηση, καλά θα κάνετε να στοιχηματίσετε υπέρ του υπολογιστή.

Κάθε μεμονωμένη πράξη του υπολογιστή είναι συνήθως τετριμμένη και βαρετή. Μόνο όταν τις συν-

δυάσετε όλες μαζί αποκτούν την όποια αξία τους. Αν η απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat από τον Wiles είναι πλούσια σε ιδέες και μορφή —όπως το *Πόλεμος και Ειρήνη*— οι αποδείξεις με υπολογιστή μοιάζουν περισσότερο με τους τηλεφωνικούς καταλόγους. Ποιος θα ήθελε ποτέ να τους διαβάσει; Η ζωή είναι κυριολεκτικά πολύ σύντομη για να διαβάσει κανείς τις αποδείξεις των Appel-Haken και Hales —πόσο μάλλον να τις ελέγξει.

Ωστόσο, οι εν λόγω αποδείξεις δεν στερούνται κομψότητας και έμπνευσης. Σε τελευταία ανάλυση, χρειάζεται εξυπνάδα για να προσαρμόσετε το πρόβλημα έτσι ώστε να μπορέσει να το αντιμετωπίσει ο υπολογιστής. Και κάτι σημαντικότερο: από τη στιγμή που γνωρίζετε ότι η εικασία είναι ορθή μπορείτε να προσπαθήσετε να ανακαλύψετε μια κομψότερη λύση. Αυτό ίσως ακούγεται παράδοξο, όμως είναι πολύ ευκολότερο να αποδείξουμε κάτι όταν γνωρίζουμε ότι είναι σωστό. Σε συναντήσεις μαθηματικών θα ακούσετε κατά καιρούς κάποιον να υποστηρίζει —και όχι μόνο για αστείο— πως θα ήταν καλή ιδέα να διαδώσουν φήμες ότι λύθηκε ένα σημαντικό πρόβλημα, με την ελπίδα ότι κατ' αυτό τον τρόπο θα βοηθήσουν κάποιον να ανακαλύψει τη λύση. Σημαίνει τούτο άραγε ότι οι μαθηματικοί θα βρουν τις θεϊκές αποδείξεις για τις προτάσεις του Kepler, του Fermat και για όλα τα άλλα προβλήματα; Θα ήταν θαυμάσιο, αλλά ίσως δεν το καταφέρουν. Μπορεί να μην υπάρχουν αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων «στο βιβλίο». Δεν πρέπει να πιστεύουμε ότι κάθε απλό στη διατύπωσή του πρόβλημα έχει οπωσδήποτε απλή λύση. Γνωρίζουμε ότι πολλά άλλα, εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα, έχουν απατηλά απλή διατύπωση: «να προσεδαφιστούμε στη Σελήνη», «να θεραπεύσουμε τον καρκίνο»... Γιατί να είναι διαφορετικά στα μαθηματικά;

Οι ειδικοί εκφράζουν συχνά ακραίες θέσεις σχετικά με τις πθανές αποδείξεις: είτε πιστεύουν ότι η καλύτερη γνωστή λύση δεν μπορεί

να απλοποιηθεί είτε ότι η εναλλακτική μέθοδος που προτείνει κάποιος δεν μπορεί να «δουλέψει». Συχνά έχουν δίκιο, αλλά μερικές φορές η κρίση τους επηρεάζεται από το γεγονός ότι γνωρίζουν πάρα πολλά. Φανταστείτε ένα βουνό. Ο φυσικός τρόπος αναρρίχησης είναι ένα τεθλασμένο μονοπάτι που ανεβαίνει στις πλαγιές· αλλά όταν το βουνό είναι ψηλό, με παγετώνες, χαράδρες, απότομες πλαγιές και τα παρόμοια, το «προφανές» μονοπάτι μπορεί να είναι εξαιρετικά μακρύ και περίπλοκο. Και μπορεί η απότομη πλαγιά, που μοιάζει να αποτελεί τη μοναδική εναλλακτική διαδρομή, να είναι εντελώς απρόσιτη. Ωστόσο, ίσως είναι δυνατόν κάποιος να επινόησε «ένα ελικόπτερο» που θα μας ανυψώσει γρήγορα και εύκολα μέχρι την κορυφή. Οι ειδικοί μπορεί να κοιτάζουν εναγωνίως, επίμονα και αποκλειστικά τον γκρεμό και την πλαγιά, και ίσως παραβλέψουν μια καλή ιδέα για το σχεδιασμό ενός ελικοπτέρου. Περιστασιακά, κάποιος ανακαλύπτει ένα τέτοιο εργαλείο, και διαφεύδει αμέσως όλους τους ειδικούς.

## ΤΟ ΚΥΝΙΓΙ ΤΗΣ ΙΣΤΕΡΟΦΠΙΑΣ

Από την άλλη πλευρά, θυμηθείτε τον Gödel και την ανακάλυψή του ότι μερικές αποδείξεις υποχρεωτικά πρέπει να είναι μεγάλες. Ίσως το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων και το τελευταίο θεώρημα του Fermat είναι παραδείγματα τέτοιων αποδείξεων. Για το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων μπορούμε να κάνουμε μερικούς προσεγγιστικούς υπολογισμούς που δείχνουν ότι, αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την τρέχουσα προσέγγιση —δηλαδή τον εντοπισμό των αναπόφευκτων σχηματισμών και την εξάλειψή τους μέσω κάποιας διαδικασίας «συρρικνώσης»—, τότε είναι αδύνατον να επιτευχθεί κάποια αξιόλογη συντόμευση. Αυτό όμως ουσιαστικά μοιάζει σαν να μετράμε τους πιθανούς γκρεμούς. Δεν αποκλείει το ελικόπτερο.

Τούτο μας ξαναφέρνει στη χειρόγραφη σημείωση του Fermat. Αν το καλύτερο που μπορούμε να πε-

τύχουμε είναι αυτοί οι ογκώδεις τόμοι, τότε γιατί την έγραψε ο Fermat; Δεν είναι δυνατόν να είχε βρει μια απόδειξη 200 σελίδων και να έγραψε ότι δεν χωρούσε στο περιθώριο του βιβλίου.

Έχω μια εναλλακτική θεωρία. Ο Godfrey Hardy, ο λαμπρός μαθηματικός του Καίμπριτζ, σίγουρα δεν ήταν άθεος αλλά ούτε και ο συμβατικός θρησκευόμενος. Ο Hardy ήταν πεπεισμένος πως ο Θεός τα είχε μαζί του. Έτσι, κάθε φορά που επρόκειτο να ταξιδεύσει με πλοίο —κάτι που απεχθανόταν— έστελνε το εξής τηλεγράφημα: «Μόλις απέδειξα την υπόθεση Riemann. Δεν έχω επαρκή χώρο εδώ να γράψω τις λεπτομέρειες.» Η υπόθεση Riemann, που συνδέει τους πρώτους αριθμούς με τη μιγαδική ανάλυση, ήταν, και εξακολουθεί να είναι, το σημαντικότερο άλυτο πρόβλημα των μαθηματικών. Ο Hardy είχε τη βεβαιότητα πως ο Θεός δεν θα άφηνε το πλοίο να βυθιστεί, διότι, εάν συνέβαινε κάτι τέτοιο, ο Hardy θα κέρδιζε τη μεταθανάτια δόξα ότι είχε βρει την απόδειξη!

Ίσως να κατέτρεχε τον Fermat μια παρόμοια εμμονή. Ή και μπορεί να ήθελε απλώς να γίνει διάσημος. Αν ισχύει το τελευταίο, τότε σίγουρα το πέτυχε. ◻

*O Ian Stewart είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Ουάρικ, στην Αγγλία.*

*Το παρόν άρθρο πρωτοδημοσιεύθηκε στο αγγλικό περιοδικό The New Scientist (26 Ιουνίου 1999).*

## ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

*To Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 34 τεύχη του.*

*Αυτά, για δύο χρόνια θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.*

*Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.*

*To Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.*

# Ηλεκτρικά πολύποδα

Πώς μπορείτε να εξασθενίσετε το δυναμικό ενός συστήματος φορτίων επιβάλλοντας λίγη τάξη

A. Dozorov

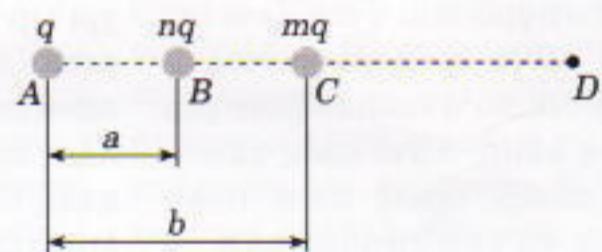
**Ε**ΝΑ ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΠΑΡΑΓΕΙ ΣΕ ΚΑΠΟΙΟ ΣΗΜΕΙΟ του χώρου ηλεκτρικό δυναμικό αντιστρόφως ανάλογο προς την απόσταση που χωρίζει το θεωρούμενο σημείο από το φορτίο. Εκ πρώτης όψεως, λοιπόν, φαίνεται λογικό να ποτέψουμε ότι κάθε σύνολο ηλεκτρικών φορτίων τα οποία κείνται σε κάποια πεπρασμένη περιοχή του χώρου θα παρήγαγε ένα δυναμικό επίσης αντιστρόφως ανάλογο προς την απόσταση από τη θεωρούμενη συνάθροιση φορτίων. Στην πραγματικότητα, όμως, κάτι τέτοιο δεν αληθεύει πάντοτε. Εφόσον τα φορτία διευθετηθούν με ορισμένη τάξη, είναι δυνατόν να προκύψει ένα δυναμικό αντιστρόφως ανάλογο προς οποιαδήποτε ακέραια δύναμη της απόστασης.

Για να καταδείξουμε αυτό το περίεργο χαρακτηριστικό του ηλεκτρικού δυναμικού δεν απαιτείται παρά μόνον ένα οικείο αποτέλεσμα από τα μαθηματικά: εάν η απόλυτη τιμή του  $x$  είναι μικρότερη από τη μονάδα, ισχύει ο τύπος:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (1)$$

Πρόκειται για την πασίγνωστη έκφραση που δίνει το άθροισμα μιας άπειρης φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.

Θα θεωρήσουμε τώρα διάφορα συστήματα ηλεκτρικών φορτίων. Το δυναμικό  $V$  που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο  $q$  σε κάποια απόσταση  $r$  είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης: δίνεται από τον τύπο  $V = kq/er$ , όπου με  $e$  συμβολίζουμε τη σχετική διηλεκτρική σταθερά του μέσου, ενώ η σταθερά αναλογίας  $k$  εξαρτάται από το εκάστοτε χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων. Στο SI (το Διεθνές σύστημα μονάδων),  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ . Ωστόσο, οι θεωρητικοί προτιμούν να χρησιμοποιούν το Ηλεκτροστατικό σύστημα μονάδων (CGSes), επειδή στο συγκεκριμένο σύστημα  $k = 1$ . Για να απλουστεύσουμε ακόμη περισσότερο το πρόβλημά μας, θα υ-



Σχήμα 1

ποθέσουμε ότι τόσο τα φορτία μας όσο και το σημείο όπου μελετάμε το δυναμικό βρίσκονται στο κενό ( $\epsilon = 1$ ).

Ας θεωρήσουμε, χάριν παραδείγματος, τρία σημειακά φορτία τα οποία κείνται επί της αυτής ευθείας και απέχουν μεταξύ τους δεδομένες αποστάσεις (Σχήμα 1). Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι  $AB = a$ ,  $AC = b$ , και ακόμη ότι οι αντίστοιχες τιμές των φορτίων είναι  $q$ ,  $nq$  και  $mq$ , όπου  $n$  και  $m$  ακέραιοι. Θα υπολογίσουμε τώρα το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $D$  το οποίο κείται στην προέκταση του τρίματος  $AC$  και σε απόσταση  $r$  από το σημείο  $A$  —η οποία θεωρείται αρκούντως μεγάλη εν συγκρίσει με τις αποστάσεις που χωρίζουν τα φορτία. Η δεύτερη συνθήκη μπορεί να γραφεί με τη μορφή  $r \gg a + b$ . Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, το δυναμικό  $V$  στο σημείο  $D$  ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών που οφείλονται σε κάθε φορτίο χωριστά:

$$V = \frac{q}{r} + \frac{nq}{r-a} + \frac{mq}{r-b} = \frac{q}{r} \left( 1 + \frac{n}{1-\frac{a}{r}} + \frac{m}{1-\frac{b}{r}} \right).$$

Εφόσον μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου  $r \gg a + b$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (1). Έτσι, παίρνουμε την έκφραση



$$V = \frac{q}{r} \left[ 1 + n \left( 1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3} + \dots \right) + m \left( 1 + \frac{b}{r} + \frac{b^2}{r^2} + \frac{b^3}{r^3} + \dots \right) \right] = q \frac{1 + n + m}{r} + q \frac{na + mb}{r^2} + q \frac{na^2 + mb^2}{r^3} + q \frac{na^3 + mb^3}{r^4} + \dots \quad (2)$$

Η ανωτέρω εξίσωση μας δείχνει ότι σε μεγάλες αποστάσεις η απόλυτη τιμή καθενός από τους διαδοχικούς όρους είναι πολύ μικρότερη από εκείνη του προηγούμενού του, αρκεί βέβαια ο αριθμητής του προηγούμενου όρου να μη μηδενίζεται. Για παράδειγμα, εάν το άθροισμα των φορτίων δεν μηδενίζεται ( $q + nq + mq \neq 0$ ), τον σπουδαιότερο ρόλο στην εξίσωση (2) τον παίζει ο πρώτος όρος, οπότε το ολικό δυναμικό του συστήματος των φορτίων θα είναι αντιστρόφως ανάλογο προς την πρώτη δύναμη της απόστασης. Απεναντίας, αν το άθροισμα των φορτίων ισούται με μηδέν (το σύστημα είναι ουδέτερο ως όλον), τον κύριο ρόλο τον διαδραματίζει ο δεύτερος όρος: θα προκύψει ένα δυναμικό αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο της απόστασης που χωρίζει τα φορτία από το σημείο παρατήρησης. Ωστόσο, μπορούμε να τοποθετήσουμε τα φορτία με τέτοιον τρόπο, ώστε να μηδενίζονται τόσο ο πρώτος όσο και ο δεύτερος όρος. Όπως δείχνει η εξίσωση (2), πρέπει να ικανοποιήσουμε τις εξής δύο συνθήκες:

$$q + nq + mq = 0 \quad (3a)$$

και

$$q(na + mb) = 0. \quad (3b)$$

Η συνθήκη (3a) απαιτεί το ολικό φορτίο του συστήματος να ισούται με μηδέν συνεπώς, αποκλείεται όλα τα φορτία να είναι ομώνυμα. Εάν απαλείψουμε το αυθαίρετο φορτίο  $q$  από τις εξίσωσεις (3a) και (3b), καταλήγουμε σε δύο εξίσωσεις οι οποίες περιέχουν τις τέσσερις παραμέτρους  $n$ ,  $m$ ,  $a$  και  $b$ . Κατά συνέπεια, υπάρχουν άπειρες παραλλαγές των διατάξεων και των τιμών των φορτίων οι οποίες ικανοποιούν τις εξίσωσεις (3). Μπορούμε να επλέξουμε δύο παραμέτρους κατά βούληση. Ας θέσουμε λοιπόν  $b = 2a$  (δηλαδή  $AB = BC$ ). Εν τοιαύτη περιπτώσει, οι εξίσωσεις (3a) και (3b) δίνουν  $n = -2$  και  $m = 1$ . Επομένως, στο σημείο  $A$  πρέπει να τοποθετηθεί φορτίο  $q$ , στο σημείο  $B$  φορτίο  $-2q$  και στο σημείο  $C$  φορτίο  $q$  (Σχήμα 1). Επιπροσθέτως, τα γειτνιάζοντα φορτία πρέπει να απέχουν κατά ίσες αποστάσεις:  $AB = AC = a$ .

Ένα τέτοιο σύστημα φορτίων παράγει δυναμικό που περιγράφεται (σε μεγάλες αποστάσεις) από τον εξής τύπο (βλ. εξίσωση (2)):

$$V = \frac{2qa^2}{r^3} + \frac{6qa^3}{r^4} + \dots$$

Εδώ, τον κύριο ρόλο τον διαδραματίζει ο πρώτος όρος, οπότε το δυναμικό είναι αντιστρόφως ανάλογο με την τρίτη δύναμη της απόστασης.

Όταν εκτός των (3a) και (3b) ισχύει και η επιπρόθετη απαίτηση

$$na^2 + mb^2 = 0, \quad (3g)$$

τότε ο τύπος (2) δίνει ένα δυναμικό ανάλογο της  $r^4$ . Ωστόσο, το σύστημα των εξισώσεων (3a-3g) δεν διαθέτει λύσεις. Για να το διαπιστώσουμε, ας πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3b) επί  $a$  και ας συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με την εξίσωση (3g). Έτσι προκύπτει ότι  $a = b$ , οπότε η (3b) ανάγεται στην εξίσωση  $n + m = 0$ . Τότε όμως η (3a) οδηγεί ευθέως στην αντίφαση  $1 = 0$  (βεβαίως, η απόδειξη μας στηρίζεται στην προϋπόθεση ότι  $q \neq 0$ , αλλά η περίπτωση  $q = 0$  στερείται φυσικού ενδιαφέροντος). Σε ανάλογα αποτελέσματα καταλήγουμε και για όλους τους άλλους όρους του τύπου (2).

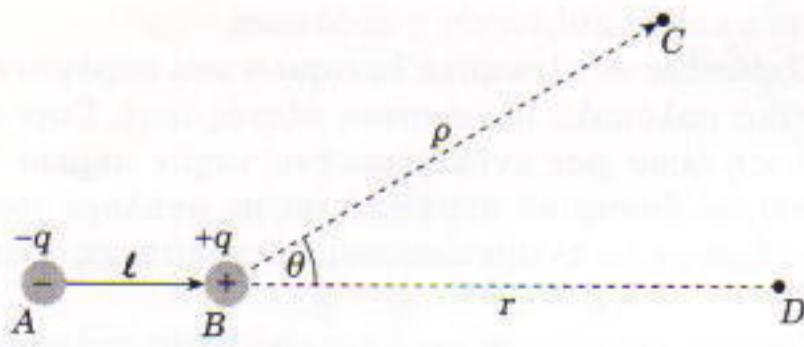
Συνεπώς, αναλόγως των τιμών τους και των σχετικών τους θέσεων, τα τρία φορτία που εικονίζονται στο Σχήμα 1 μπορεί να παράγουν μόνο δυναμικά τα οποία σε μεγάλες αποστάσεις είναι ανάλογα των  $1/r$ ,  $1/r^2$  ή  $1/r^3$ .

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να μελετηθεί και ένα πεδίο που παράγεται από οποιαδήποτε εντοπισμένη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου. Πέραν τούτου, υπάρχει και μια κομψή μέθοδος που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα σύστημα φορτίων το οποίο σε μεγάλες αποστάσεις παράγει πεδίο με δυναμικό

$$V = \frac{C_n}{r^{n+1}}, \quad (4)$$

όπου το  $n$  είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και το  $C_n$  μια σταθερά που καθορίζεται από τις τιμές των φορτίων και τη διάταξή τους. Το σύστημα των φορτίων που παράγει ένα πεδίο με το δυναμικό (4) ονομάζεται ηλεκτρικό πολύπολο  $n$ -στής τάξεως, ή  $2^n$ -πολο. Η απλούστερη περίπτωση  $n = 0$  (πολύπολο μηδενικής τάξεως, ή μονόπολο) αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημειακό φορτίο. Στη γενική περίπτωση, το πολύπολο  $n$ -στής τάξεως σχηματίζεται από  $2^n$  φορτία. Όπως αποδεικνύεται, αν έχουμε ένα πολύπολο  $n$ -στής τάξεως ( $2^n$ -πολο), η κατασκευή ενός πολυπόλου  $(n+1)$ -στής τάξεως δεν παρουσιάζει την παραμικρή δυσκολία. Προς τούτο, δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε στο αρχικό πολύπολο  $n$ -στής τάξεως ( $2^n$ -πολο) το ίδιο πολύπολο  $n$ -στής τάξεως αλλά μετατοπισμένο συμμετρικά σε κάποια απόσταση και με τα φορτία του να έχουν αντικατασταθεί ένα προς ένα από τα αντίθετά τους. Τοιουτοτρόπως, λαμβάνουμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από δύο αντίθετα  $2^n$ -πολα. Το εν λόγω σύστημα αντιπροσωπεύει ένα πολύπολο  $(n+1)$ -στής τάξεως το οποίο απαρτίζεται από  $2(n+1)$  φορτία ( $2^{n+1}$ -πολο).

Ας εξετάσουμε μερικά παραδείγματα. Ένα σημειακό φορτίο  $-q$  αποτελεί πολύπολο μηδενικής τάξεως. Ως πρώτο βήμα, θα το χρησιμοποιήσουμε για να κατα-



Σχήμα 2

σκευάσουμε ένα πολύπολο πρώτης τάξεως (2-πολο), το λεγόμενο δίπολο. Προς τούτο, μετατοπίζουμε προς τα δεξιά το φορτίο  $-q$  κατά απόσταση  $\ell$  και του αλλάζουμε πρόσημο. Ως αποτέλεσμα, λαμβάνουμε το δίπολο που εικονίζεται στο Σχήμα 2. Το δίπολο αυτό χαρακτηρίζεται από τη λεγόμενη διπολική ροπή  $p_{\text{dl}} = q\ell$  (το διάνυσμα  $\ell$  έχει κατεύθυνση από το αρνητικό φορτίο προς το θετικό, το δε μέτρο του ισούται με την απόσταση  $\ell$  που χωρίζει τα φορτία).

Ας υπολογίσουμε τώρα το δυναμικό  $V_1$  που παράγει το δίπολο σε ένα απομεμακρυσμένο σημείο  $D$  επί της προέκτασης του ευθύγραμμου τμήματος το οποίο συνδέει τα δύο φορτία ( $AD = r \gg \ell$ ):

$$V_1 = \frac{-q}{r} + \frac{q}{r - \ell} = \frac{q}{r} \left( -1 + \frac{1}{1 - \frac{\ell}{r}} \right).$$

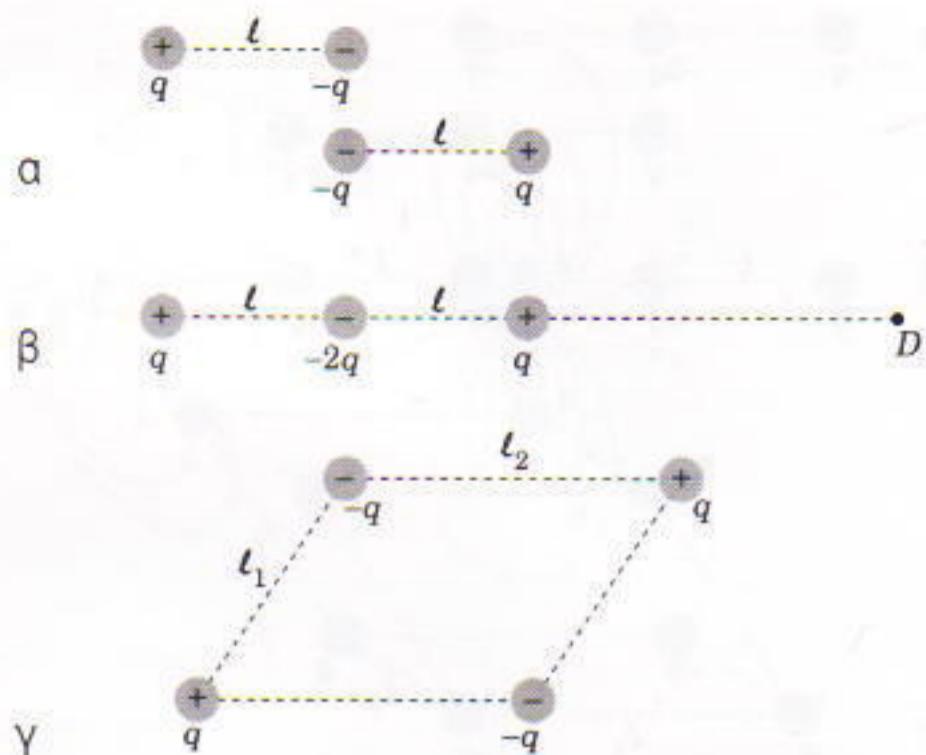
Εφαρμόζοντας τον τύπο (1), παίρνουμε αμέσως τον κύριο όρο του δυναμικού που παράγει το δίπολο:

$$V_1 \equiv \frac{q\ell}{r^2} = \frac{P_{\text{dl}}}{r^2}. \quad (5)$$

Εάν το σημείο παρατήρησης δεν κείται επί της προέκτασης του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα φορτία, χρειαζόμαστε δύο συντεταγμένες για να καθορίσουμε η θέση του. Η πρώτη συντεταγμένη είναι η απόστασή του από ένα εκ των φορτίων (για ένα απομεμακρυσμένο σημείο παρατήρησης για το οποίο ισχύει  $r \gg \ell$  δεν έχει σημασία από ποιο φορτίο θα μετρήσουμε αυτή την απόσταση). Ως δεύτερη συντεταγμένη μπορεί να ληφθεί η γωνία που σχηματίζουν η διπολική ροπή και το διάνυσμα θέσης που άγεται από το ένα φορτίο (και πάλι, εφόσον  $r \gg \ell$ , δεν έχει σημασία ποιο από τα δύο φορτία θα επιλέξουμε) προς το σημείο παρατήρησης. Επομένως, το σημείο  $C$  (Σχήμα 2) χαρακτηρίζεται από την απόσταση  $\rho = BC$  και τη γωνία  $\theta$ . Στην προκειμένη περίπτωση, ο υπολογισμός του δυναμικού παρουσιάζει μεγαλύτερη δυσκολία. Θα αρκεσθούμε λοιπόν στην παρουσίαση του αποτελέσματος:

$$V_1 = \frac{P_{\text{dl}} \sin \theta}{\rho^2}. \quad (5a)$$

Για να κάνουμε το δεύτερο βήμα και να κατασκευά-



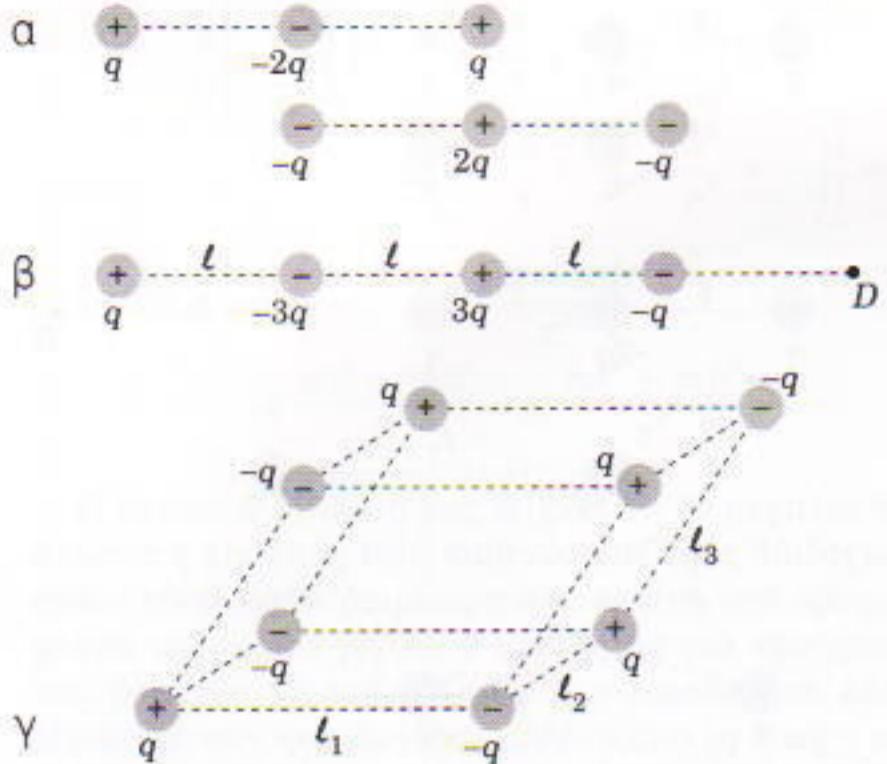
Σχήμα 3

σουμε ένα πολύπολο δευτέρας τάξεως ( $2^2$ -πολο), ή τετράπολο, πρέπει να προσθέσουμε στο δίπολό μας ένα παρόμοιο δίπολο με αντίθετα φορτία και μετατοπισμένο κατά ορισμένη απόσταση από το αρχικό (σημειωτέον ότι δεν πρέπει να περιστρέψουμε το αρχικό δίπολο: αμφότερα τα φορτία του υφίστανται την ίδια μετατόπιση). Ας μετατοπίσουμε λοιπόν το δίπολό μας κατά απόσταση  $\ell$  πάνω στην προέκταση της γραμμής που συνδέει τα φορτία του (Σχήμα 3a). Προτού προχωρήσουμε, πάντως, επιβάλλεται να διευκρινίσουμε ότι ο μοναδικός λόγος που υπαγορεύει τη συγκεκριμένη επιλογή μας για την τιμή της απόστασης έγκειται στη διευκόλυνση των υπολογισμών· εν γένει, θα μπορούσαμε να έχουμε επιλέξει μια διαφορετική τιμή, μικρότερη ή και μεγαλύτερη, χωρίς να αλλάξουμε τον ουσιώδη χαρακτήρα του αποτελέσματός μας.

Όταν όλα τα φορτία κείνται επί της αυτής ευθείας, το πολύπολο λέγεται αξονικό. Το Σχήμα 3b δείχνει ένα τέτοιο αξονικό τετράπολο, το οποίο προέκυψε από το σύστημα φορτίων που φαίνεται στο Σχήμα 3a. Στη γενική περίπτωση (Σχήμα 3c), το τετράπολο αποτελείται από ετερόνυμα φορτία ίσης απόλυτης τιμής τοποθετημένα εναλλάξ στις κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Σύμφωνα με τον τύπο (4), το δυναμικό του τετραπόλου πρέπει να είναι ανάλογο του  $1/r^3$ . Συνεπώς, στη σειρά (1) χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας μόνον τους όρους τάξεως έως και  $x^2$ .

Ας υπολογίσουμε τώρα το συντελεστή  $C_2$  για το αξονικό τετράπολο που εικονίζεται στο Σχήμα 3b. Για ένα απομεμακρυσμένο σημείο  $D$  επί του άξονος του τετραπόλου, έχουμε

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{q}{r} + \frac{-2q}{r - \ell} + \frac{q}{r - 2\ell} \equiv \\ &\equiv \frac{q}{r} \left[ 1 - 2 \left( 1 + \frac{\ell}{r} + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + \left( 1 + \frac{2\ell}{r} + \frac{4\ell^2}{r^2} \right) \right] = \frac{2q\ell^2}{r^3}. \end{aligned}$$



Σχήμα 4

Το επόμενο βήμα συνίσταται στην κατασκευή του πολυπόλου τρίτης τάξεως, το οποίο λέγεται οκτάπολο επειδή εν γένει απαρτίζεται από οκτώ φορτία ίσης απόλυτης τιμής. Προς τούτο, προσθέτουμε στο αξονικό τετράπολο (Σχήμα 3β) ένα συμμετρικό αξονικό τετράπολο όπως δείχνει το Σχήμα 4α. Ως αποτέλεσμα, παίρνουμε ένα αξονικό οκτάπολο (Σχήμα 4β). Στη γενική περίπτωση, ένα τετράπολο (Σχήμα 3γ) παράγει ένα οκτάπολο (Σχήμα 4γ) με τα φορτία του τοποθετημένα στις κορυφές ενός παραλληλεπίδου. Σύμφωνα με την εξίσωση (4), σε μεγάλες αποστάσεις το δυναμικό  $V_3$  του ηλεκτροστατικού πεδίου του οκταπόλου πρέπει να είναι ανάλογο του  $1/r^4$ . Ας προσδιορίσουμε τώρα το δυναμικό στο σημείο  $D$  που οφείλεται στο αξονικό οκτάπολο:

$$V_3 = \frac{q}{r} + \frac{-3q}{r-\ell} + \frac{3q}{r-2\ell} + \frac{-q}{r-3\ell} = \\ \frac{q}{r} \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{\ell}{r} + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\ell^3}{r^3} \right) + 3 \left( 1 + \frac{2\ell}{r} + \frac{4\ell^2}{r^2} + \frac{8\ell^3}{r^3} \right) - \left( 1 + \frac{3\ell}{r} + \frac{9\ell^2}{r^2} + \frac{27\ell^3}{r^3} \right) \right] = \\ = -\frac{6q\ell^3}{r^4}.$$

Με παρεμφερή τρόπο υπολογίζονται τα πεδία και τα δυναμικά και των πολυπόλων ανωτέρας τάξεως.

Το πεδίο οποιουδήποτε συστήματος ηλεκτρικών φορτίων μπορεί να παρασταθεί σε μεγάλες αποστάσεις ως άθροισμα πεδίων που παράγονται από πολύπολα διαφόρων τάξεων. Όσο υψηλότερη γίνεται η τάξη του πολυπόλου με το οποίο προσεγγίζεται το υπό ανάλυση σύστημα σε μεγάλες αποστάσεις, τόσο πιο «ουδέτερο» είναι το σύστημα και τόσο ταχύτερα εξασθενεί το πε-

δίο του καθώς αυξάνεται η απόσταση.

Εξετάσαμε τα ηλεκτρικά δυναμικά που παράγουν τα αξονικά πολύπολα πάνω στους άξονές τους. Στην περίπτωση όπου μας ενδιαφέρει ένα τυχόν σημείο του χώρου, το δυναμικό υπολογίζεται με ανάλογο τρόπο, όμως έχουμε να αντιμετωπίσουμε μεγαλύτερες δυσκολίες.

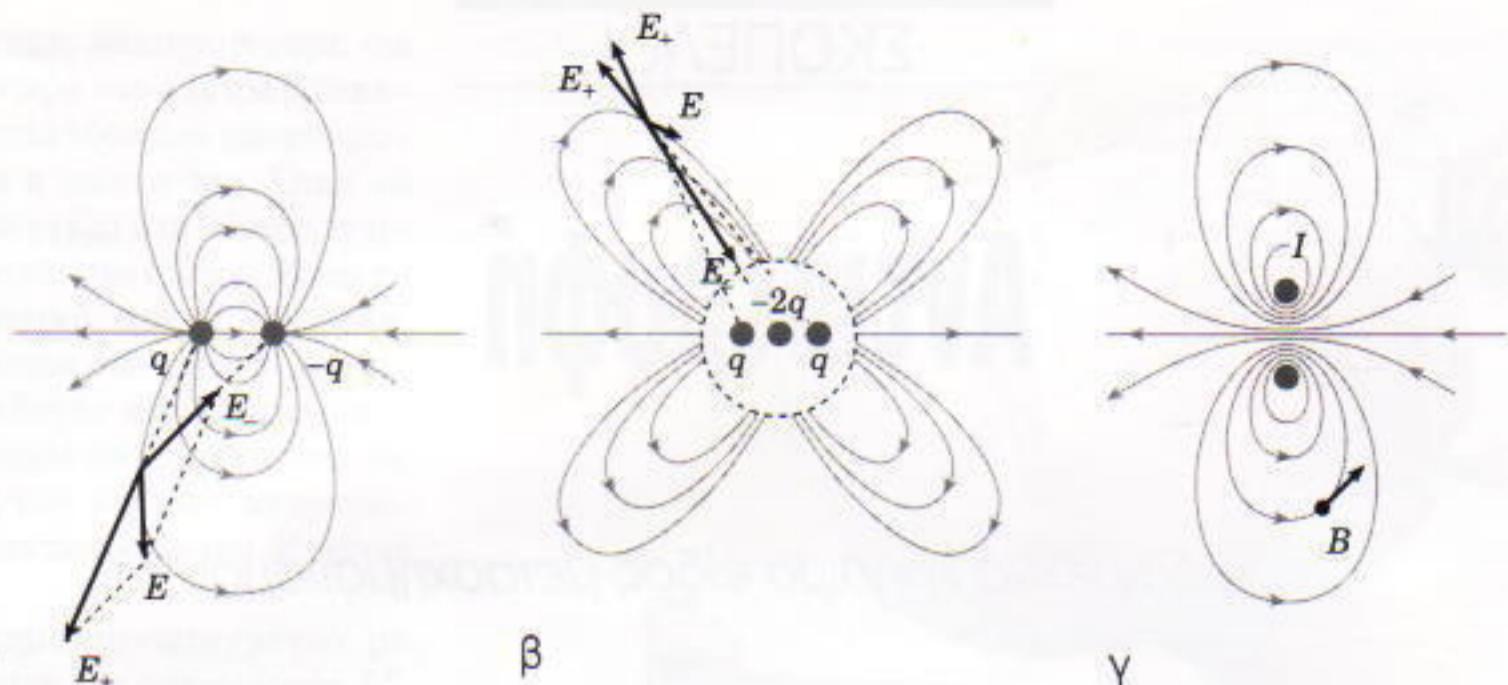
Εφόσον γνωρίζουμε το δυναμικό ενός πολυπόλου ( $V_n = C_n / r^{n+1}$ ), αυτομάτως καθορίζονται όχι μόνο οι τιμές του ηλεκτρικού πεδίου  $E$ , αλλά και της δύναμης  $F = qE$  την οποία ασκεί το πολύπολο σε ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q$ . Δεδομένου ότι για κάθε πολύπολο  $n \geq 0$ , για το ηλεκτρικό πεδίο ισχύει η προσεγγιστική έκφραση

$$E \equiv \frac{1}{r^{n+2}}. \quad (6)$$

Παραλείποντας τις μαθηματικές λεπτομέρειες, ας εξετάσουμε τις δυναμικές γραμμές του διπόλου και του αξονικού τετραπόλου τα οποία εικονίζονται στα Σχήματα 5α και 5β, αντίστοιχα. Για το διπόλο (Σχήμα 5α), το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να υπολογιστεί σε κάθε σημείο αν σχηματίσουμε το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων  $\mathbf{E}_+$  και  $\mathbf{E}_-$  που οφείλονται αντίστοιχα στο θετικό και το αρνητικό φορτίο:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ . Το Σχήμα 5α δείχνει αυτά τα διανύσματα σε ένα σημείο του χώρου. Ενα παρόμοιο διάγραμμα για την περίπτωση του αξονικού τετραπόλου παρουσιάζεται στο Σχήμα 5β. Σε κάθε σημείο το ολικό πεδίο  $\mathbf{E}$  είναι το άθροισμα τριών διανυσμάτων: δύο διανύσματα έντασης  $\mathbf{E}$ , παράγονται από τα θετικά φορτία, ενώ ένα διάνυσμα  $\mathbf{E}$  αντίστοιχεί στο αρνητικό φορτίο, του οποίου η απόλυτη τιμή ισούται με το άθροισμα των δύο θετικών φορτίων. Τα τρισδιάστατα διαγράμματα των δυναμικών γραμμών για το ηλεκτρικό διπόλο και το τετράπολο λαμβάνονται με περιστροφή των Σχημάτων 5α και 5β περί τον άξονα συμμετρίας ενός εκάστου.

Εκτός από ηλεκτρικά, μπορούμε να θεωρήσουμε και μαγνητικά πολύπολα: πρόκειται για συστήματα που αποτελούνται από μαγνήτες ή κλειστά ρεύματα. Ωστόσο, τα μαγνητικά συστήματα παρουσιάζουν μια σημαντικότατη διαφορά: δεδομένου ότι ουδέποτε παρατηρήθηκαν στη φύση μεμονωμένα μαγνητικά φορτία (μονόπολα), η στοιχειώδης μονάδα των μαγνητικών συστημάτων είναι το μαγνητικό διπόλο. Το Σχήμα 5γ δείχνει τις δυναμικές γραμμές ενός μαγνητικού διπόλου που παράγεται από ρεύμα έντασης  $I$  το οποίο διαρρέει έναν κυκλικό αγώγιμο βρόχο στο κάθετο προς τη σελίδα επίπεδο. Παρατηρήστε ότι σε μεγάλες αποστάσεις τα διαγράμματα των δύο πεδίων που εικονίζονται στα Σχήματα 5α και 5γ συμπίπτουν.

Υπάρχει ένα ακόμη εύγλωττο παράδειγμα το οποίο καταδεικνύει την ομοιότητα μεταξύ μαγνητικού και ηλεκτρικού διπόλου. Η βελόνα μιας μαγνητικής πυξίδας είναι μαγνητικό διπόλο προσανατολισμένο παράλληλα προς τις γραμμές ενός μαγνητικού πεδίου. Ομοίως, όταν



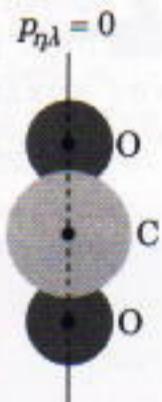
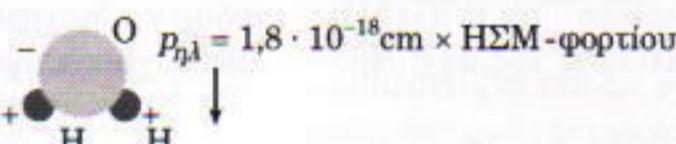
Σχήμα 5

το ηλεκτρικό δίπολο τοποθετηθεί εντός ηλεκτρικού πεδίου, περιστρέφεται ώσπου να γίνει τελικά ομόρροπο με τις δυναμικές γραμμές, παίζοντας έτσι το ρόλο μιας «ηλεκτρικής πυξίδας» (Σχήμα 6).

Παραδείγματα ηλεκτρικών πολυπόλων αποτελούν τα άτομα και τα μόρια. Εάν, κατά το σχηματισμό ενός μορίου, τα ηλεκτρόνια ανακατανεμηθούν μεταξύ των μορίων έτσι ώστε τα «κέντρα βάρους» του θετικού και του αρνητικού φορτίου να μη συμπίπτουν, το μόριο αποκτά μιαν εγγενή και μόνιμη διπολική ροπή και ονομάζεται πολικό. Τα μόρια του υδροχλωρικού οξέος, παραδείγματος χάριν, είναι πολικά (Σχήμα 7). Εάν δεχτούμε ότι τα επερώνυμα φορτία ενός τέτοιου μορίου τα χωρίζει απόσταση περίπου ίση με την ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου ( $\ell = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ), η διπολική ροπή του μορίου είναι της τάξεως του  $p_{\eta\lambda} = e\ell \equiv 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ cm} \cdot \text{ΗΕΜ-φορτίου}$ . (Στο Ηλεκτροστατικό σύστημα μονάδων, το φορτίο του ηλεκτρονίου ισούται με  $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ΗΕΜ-φορτίου}$ .) Ως προς την τάξη μεγέθους, η συγκεκριμένη τιμή βρίσκεται σε συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.

Ουτόσο, προκειμένου για μόρια που συντίθενται από όμοια άτομα (όπως το  $O_2$ , το  $H_2$  ή το  $Cl_2$ ), τα ηλεκτρόνια αδυνατούν να «αναγνωρίσουν» το άτομο «καταγωγής» τους, οπότε κατανέμονται συμμετρικά μεταξύ των δύο ατόμων. Έτσι, το μόριο έχει μηδενική διπολική ρο-

$$p_{\eta\lambda} \approx 10^{-18} \text{ cm} \times \text{ΗΕΜ-φορτίου}$$



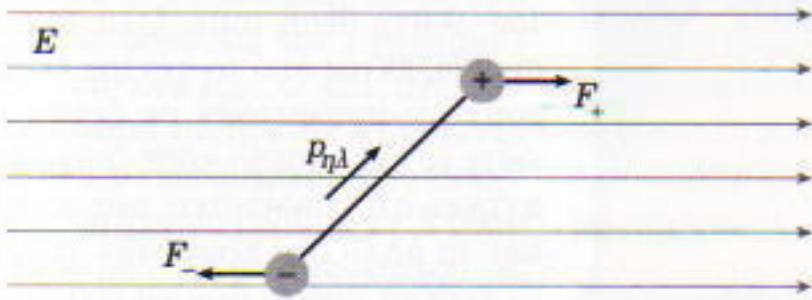
Σχήμα 7

πή. Τέτοια μόρια ονομάζονται μη πολικά, ή άπολα. Το Σχήμα 7 δείχνει ένα γραμμικό μόριο διοξειδίου του άνθρακα ( $CO_2$ ), το οποίο είναι μη πολικό. Από την εμφάνιση αυτού του μορίου πρέπει να αναμένεται ότι η ανακατανομή των ηλεκτρονίων μεταξύ των ατόμων θα οδηγήσει στο σχηματισμό ενός αξονικού τετραπόλου (συγκρίνετε με το Σχήμα 3β). ως εκ τούτου, το ηλεκτρικό πεδίο του μορίου του διοξειδίου του άνθρακα πρέπει να μοιάζει με εκείνο που εικονίζεται στο Σχήμα 5β (με τη διαφορά ότι οι δυναμικές γραμμές του θα έχουν την αντίθετη κατεύθυνση).

Περισσότερο πολύπλοκες κατανομές ατόμων και ηλεκτρονίων στα άτομα οδηγούν στην εμφάνιση πολυπόλων ανωτέρων τάξεων. □

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- A. Stasenko, «Αγάπη και μίσος στον μοριακό κόσμο», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1995.
- J. Wylie, «Μαγνητικό μονοπόλιο», Ιούλιος/Αύγουστος 1995.
- A. Mitrofanov, «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997.



Σχήμα 6

# Αντιστροφή

Ένα εξαιρετικά χρήσιμο είδος μετασχηματισμού

Vladimir Dubrovsky

**ΤΟ ΣΧΗΜΑ 1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΝΤΑΙ** οι δραματικές αλλαγές που υφίσταται μια επίπεδη σκακιέρα όταν αντιστρέφεται ως προς έναν κύκλο. Παρόλο που ο ανελέητος μετασχηματισμός της αντιστρο-

φής βγάζει το εσωτερικό του κύκλου έξω (και φέρνει το εξωτερικό του μέσα) και λυγίζει τις ευθείες σε κύκλους, καταφέρνει με κάποιον τρόπο να διατηρήσει ορισμένα θεμελιώδη χαρακτηριστικά των σχημά-

των (για παράδειγμα, τα μεγέθη των γωνιών μεταξύ καμπυλών), ενώ συνήθως μπορούμε να αναγνωρίσουμε ένα αντικείμενο στο αντίστροφό του —στην είκονα του μέσω της αντιστροφής. Λόγω των αξιοσημείωτων ιδιοτήτων της, η αντιστροφή συχνά βοηθά να απλοποιηθούν ορισμένες δύσκολες γεωμετρικές αποδείξεις.

## Αντιστροφή σημείων

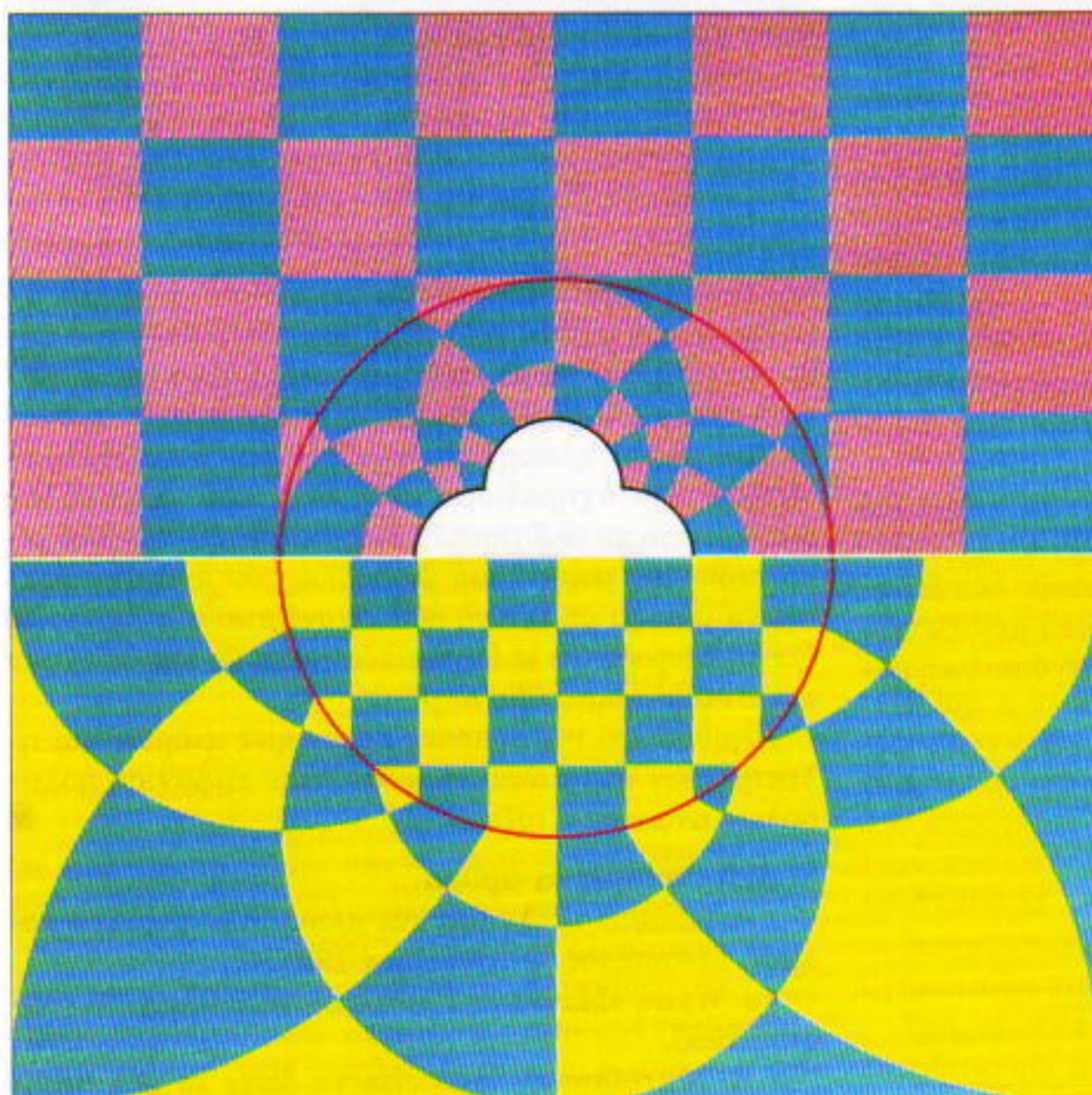
Το αντίστροφο ενός σημείου  $X$  ως προς έναν κύκλο  $\omega$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$  είναι, εξ ορισμού, το σημείο  $X'$  της ημιευθείας  $OX$ , για το οποίο έχουμε

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX} = R^2.$$

Ο μετασχηματισμός  $I_{\omega}$  (ή  $I_O^R$ ) που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο το αντίστροφό του, ονομάζεται αντιστροφή. Τα  $\omega$ ,  $O$  και  $R$  είναι, αντίστοιχα, ο κύκλος, το κέντρο και η ακτίνα αντιστροφής.

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η αντιστροφή διατηρεί όλα τα σημεία του  $\omega$  στη θέση τους. Όλα τα άλλα σημεία, εκτός από το κέντρο  $O$ , μπορούν να μοιραστούν σε ζεύγη έτοι ώστε το ένα σημείο κάθε ζεύγους να ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου και το άλλο στο εξωτερικό του, και το καθένα από τα δύο να είναι αντίστροφο του άλλου.

Για να αντιληφθείτε καλύτερα τι συμβαίνει σε ένα επίπεδο όταν το



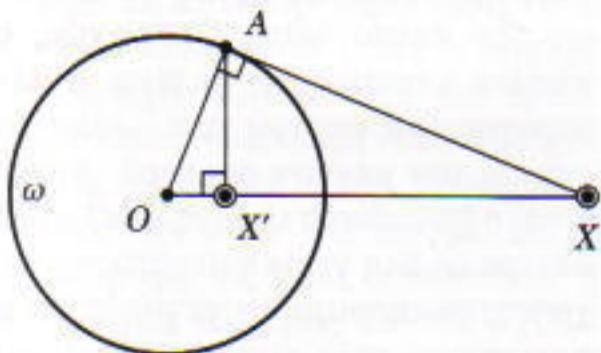
Σχήμα 1

αντιστρέφουμε, επισημαίνουμε ότι όσο πλησιέστερα στο κέντρο βρίσκεται ένα σημείο τόσο πιο απομακρυσμένη είναι η εικόνα του. Όταν το σημείο προσεγγίζει στο κέντρο, η εικόνα του τείνει στο άπειρο. Είναι επομένως λογικό, και εξυπηρετικό, να προσθέσουμε στο επίπεδο ένα ειδικό κατ' εκδοχήν σημείο στο άπειρο,  $P_\infty$ , το οποίο θα χρησιμεύσει ως αντίστροφο του κέντρου αντιστροφής  $O$ . (Το αντίστροφο του  $P_\infty$  είναι το  $O$ .)

Στο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο της αντιστροφής  $I_O^R$ , το αντίστροφο ενός σημείου  $(x, y)$  δίνεται από τον τύπο

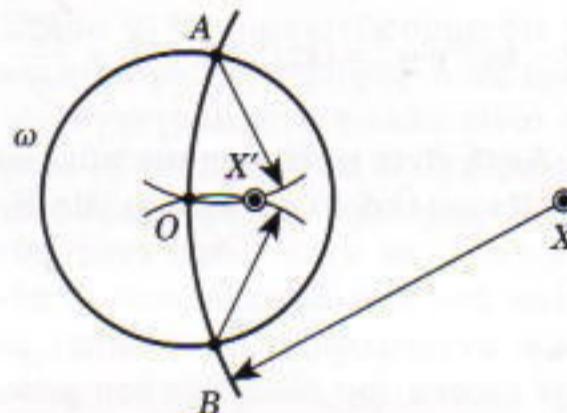
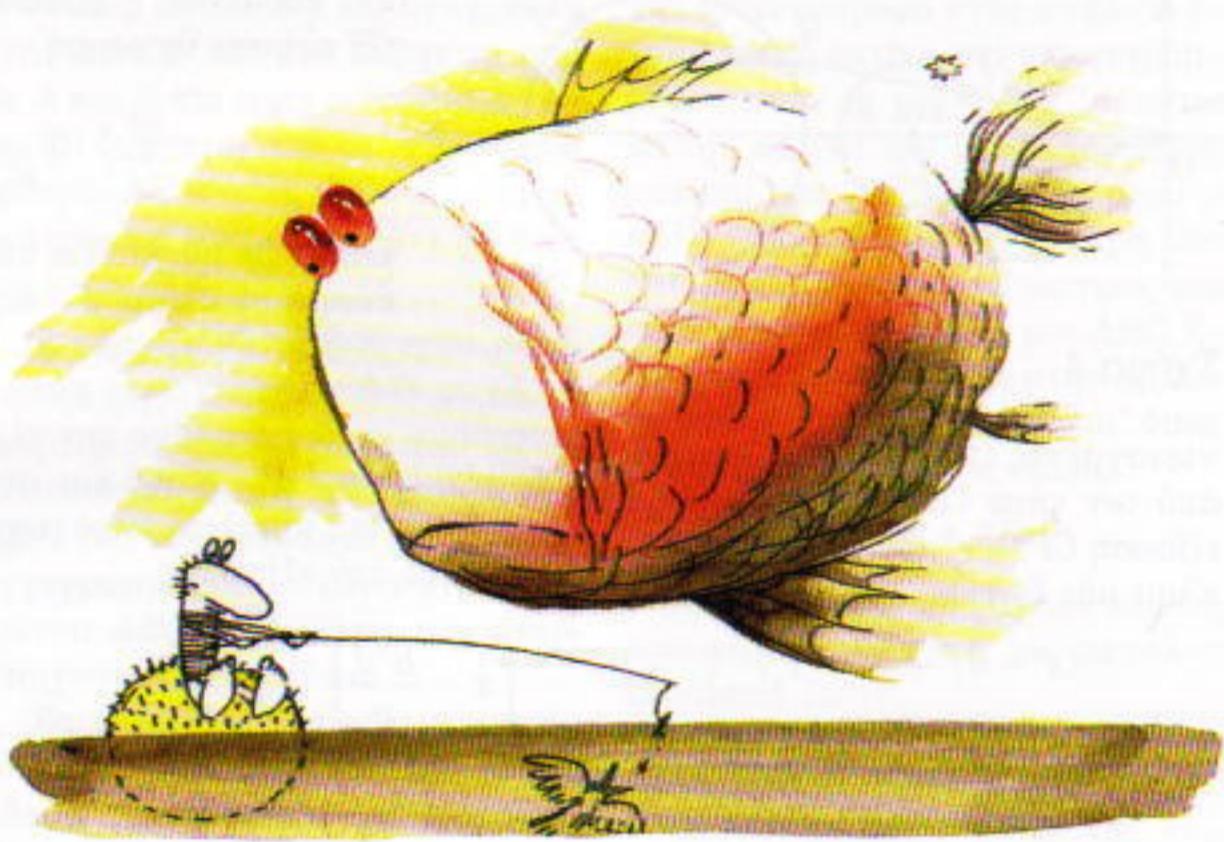
$$(x', y') = \left( \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right). \quad (1)$$

Πράγματι, τα σημεία  $(x, y)$  και  $(x', y')$  ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που φέρουμε από την αρχή, και οι συντεταγμένες  $(x', y')$  είναι ανάλογες με τις συντεταγμένες  $(x, y)$  και ο συντελεστής αναλογίας ισούται με τη (θετική) ποσότητα  $R^2/(x^2 + y^2)$ . Με λίγες πράξεις μπορούμε να αποδείξουμε ότι το γινόμενο των αποστάσεών τους από την αρχή,  $\sqrt{x'^2 + y'^2}$   $\times \sqrt{x^2 + y^2}$  ισούται με  $R^2$ . Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται η γεωμετρική



Σχήμα 2

κατασκευή του αντιστρόφου  $X'$  ενός σημείου  $X$  που βρίσκεται εκτός του κύκλου  $\omega$ : φέρουμε την εφαπτόμενη  $XA$  του κύκλου  $\omega$  και την κάθετη  $AX'$  από το  $A$  στην  $OX$ . Είναι εύκολο να αντιστρέψουμε αυτή την κατασκευή για να βρούμε το  $X$  όταν δίνεται το  $X'$  στο εσωτερικό του  $\omega$ . Μια άλλη κατασκευή, μόνο με διαβήτη, παρουσιάζεται στο Σχήμα 3: είναι ακόμη πιο απλή, αλλά εφαρμόζεται μόνο για σημεία  $X$  για τα



Σχήμα 3

Κατασκευή του αντιστρόφου  $X'$  του σημείου  $X$  ως προς τον κύκλο  $\omega$  μόνο με διαβήτη. Φέρουμε έναν κύκλο που διέρχεται από το  $O$  με κέντρο  $X$  και δύο ακόμα κύκλους που διέρχονται από το  $O$  με κέντρα τα σημεία  $A$  και  $B$  (τα σημεία τομής του πρώτου κύκλου με τον  $\omega$ ). Το  $X'$  είναι το δεύτερο σημείο τομής των δύο τελευταίων κύκλων.

οποία ο κύκλος με ακτίνα  $XO$  και κέντρο  $X$  τέμνει τον  $\omega$ .

#### Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι το σημείο  $X'$  είναι πράγματι το αντίστροφο του  $X$  ως προς τον  $\omega$  (α) στο Σχήμα 2 και (β) στο Σχήμα 3.
2. Αποδείξτε ότι δύο διαδοχικές αντιστροφές με το ίδιο κέντρο  $O$  και ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$  έχουν ως αποτέλεσμα μία ομοιοθεσία του επιπέδου με κέντρο  $O$  και λόγο  $(R_2/R_1)^2$ .

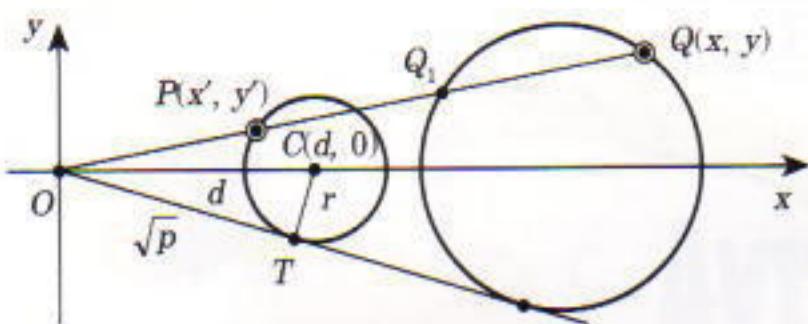
#### Αντιστροφή κύκλων

Μια από τις πιο αξιοσημείωτες και χρήσιμες ιδιότητες της αντιστροφής διατυπώνεται συνοπτικά ως

εξής: το αντίστροφο ενός κύκλου είναι κύκλος. Σε αυτή τη σύντομη διατύπωση θεωρούμε τον όρο «κύκλος» με την ευρεία έννοια ώστε να συμπεριλάβει και τις ευθείες —οι οποίες θεωρούνται «κύκλοι» που διέρχονται από το σημείο  $P_\infty$  και έχουν άπειρη ακτίνα. Αφού το  $P_\infty$  είναι το αντίστροφο του κέντρου αντιστροφής, μπορούμε να διατυπώσουμε την επόμενη πρόταση: το αντίστροφο μιας ευθείας ή ενός κύκλου που διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής είναι ευθεία, και το αντίστροφο κάθε άλλης ευθείας ή κύκλου είναι («πεπερασμένος») κύκλος.

Θα δώσω μια απόδειξη που χρησιμοποιεί συντεταγμένες και είναι απλή, πλήρης και αρκετά σύντομη, χωρίς να έχει όμως την ομορφιά της καθαρά γεωμετρικής προσέγγισης.

Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο  $C$  και ακτίνα  $r$ . Εστω ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο  $O$  της αντιστροφής και έστω ότι ο άξονας  $x$  διέρχεται από το  $C$  —που έχει, επομένως, συντεταγμένες  $(d, 0)$  (όπου  $d = OC$ , βλ. Σχήμα 4). Εστω ένα σημείο  $P$  που διαγράφει τον δεδομένο κύκλο. Για να γράψουμε μια εξίσωση για τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $Q(x, y)$  που είναι αντίστροφα του  $P$ , παρατηρούμε ότι το  $P$  είναι αντίστροφο του  $Q$  και, επομένως, οι συ-



Σχήμα 4

ντεταγμένες  $(x', y')$  του  $P$  δίνονται από τον τύπο (1). Από την άλλη η εξίσωση  $CP^2 = r^2$  του δεδομένου κύκλου μάς δίνει

$$(x' - d)^2 + y'^2 = r^2,$$

ή, αν αντικαταστήσουμε στον τύπο (1),

$$\left(\frac{R^2 x}{x^2 + y^2} - d\right)^2 + \left(\frac{R^2 y}{x^2 + y^2}\right)^2 = r^2.$$

Έπειτα από τις πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(d^2 - r^2)(x^2 + y^2) - 2R^2 x d + R^4 = 0. \quad (2)$$

Η τιμή  $p = d^2 - r^2 = OC^2 - r^2$  ονομάζεται δύναμη του σημείου  $O$  ως προς τον κύκλο (με κέντρο  $C$  και ακτίνα  $r$ ). Αν το  $O$  βρίσκεται εκτός του κύκλου, η δύναμη  $p$  ισούται με το τετράγωνο των μήκους της εφαπτομένης  $OT$  από το  $O$  προς τον κύκλο (θεωρήστε το ορθογώνιο τρίγωνο  $TOC$  στο Σχήμα 4). δείτε επίσης την Άσκηση 3.

Στην περίπτωση που ο κύκλος διέρχεται από το  $O$ , η δύναμη  $p$  (του  $O$  προς τον κύκλο) ισούται με 0,

και επομένως η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή

$$x = \frac{R^2}{2d},$$

και ορίζει μια ευθεία κάθετη στον άξονα  $x$  — δηλαδή, στην ευθεία  $OC$  (Σχήμα 5).

Αν το  $O$  δεν ανήκει στον κύκλο, μπορούμε να διαιρέσουμε την εξίσωση (2) διά  $p = d^2 - r^2 \neq 0$  και, συμπληρώνοντας το τέλειο τετράγωνο, παίρνουμε την εξίσωση

$$\left(x - \frac{R^2 d}{p}\right)^2 + y^2 = \frac{R^4 d^2}{p^2} - \frac{R^4}{p} = \frac{R^4 r^2}{p^2},$$

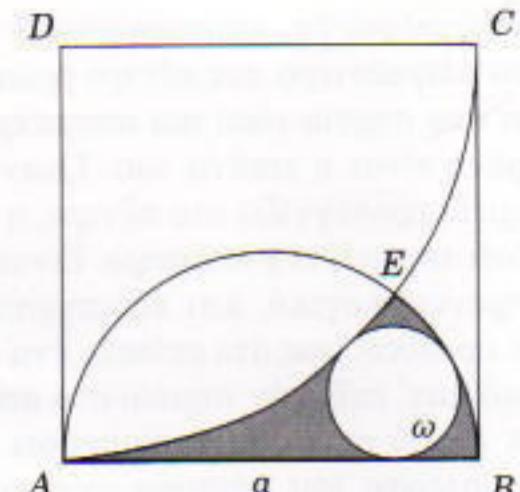
$$(x - kd)^2 + y^2 = (kr)^2, \text{ όπου } k = \frac{R^2}{p}.$$

Αυτή είναι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $(kd, 0)$  και ακτίνα  $|k|r$ . Επομένως, το αντίστροφο ενός κύκλου που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής  $O$  συμπίπτει με την εικόνα του ίδιου κύκλου μέσω μιας ομοιοθεσίας με λόγο  $k = R^2/p$  και κέντρο  $O$ . (Επισημαίνουμε όμως ότι η αντίστροφή απεικονίζει τα σημεία ενός κύκλου διαφορετικά από την αντίστοιχη ομοιοθεσία — για παράδειγμα, στο Σχήμα 4 το αντίστροφο του  $P$  είναι το  $Q$ , ενώ η ομοιοθεσία μεταφέρει το  $P$  στο  $Q_1$ . Επίσης, το αντίστροφο του κέντρου του κύκλου ουδέποτε συμπίπτει με το κέντρο του αντίστροφου κύκλου.)

Απομένει μόνο να παρατηρήσουμε ότι κάθε ευθεία που δεν διέρχεται από το  $O$  μπορεί να παρασταθεί ως  $x = R^2/d$  σε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και, επομένως, το αντίστροφό της είναι ένας κύκλος που διέρχεται από το  $O$ . Τέλος, κάθε ευθεία που διέρχεται από το  $O$  είναι προφανώς αντίστροφη του εαυτού της. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης που διατύπωσαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

### Άσκησεις

3. Μια τυχαία ευθεία που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο  $P$  τέμνει έναν δεδομένο κύκλο  $\omega$  στα

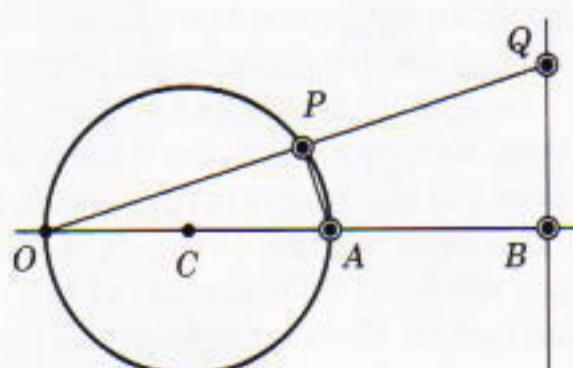


Σχήμα 6

σημεία  $A$  και  $B$ . Αποδείξτε ότι το γινό μένο  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  είναι ανεξάρτητο από την ευθεία και ισούται με τη δύναμη του  $P$  ως προς τον  $\omega$ , αν το  $P$  βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου, και με το αντίθετο της δύναμης, αν το  $P$  βρίσκεται στο εσωτερικό του. Με τη βοήθεια αυτής της πρότασης και της Άσκησης 2, δώστε μια άλλη απόδειξη ότι τα αντίστροφα των κύκλων είναι κύκλοι.

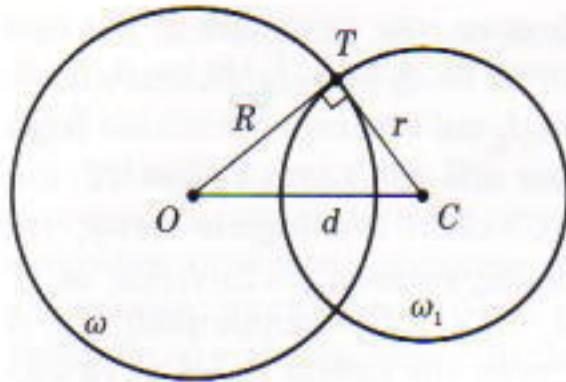
4. Βρείτε την ακτίνα του κύκλου  $\omega$  του Σχήματος 6, αν δίνεται το μήκος  $a$  της πλευράς του τετραγώνου  $ABCD$  (το  $AEB$  είναι ημικύκλιο, το τόξο  $AEC$  έχει κέντρο το  $D$ ). (Υπόδειξη: αντιστρέψτε το σχήμα ως προς έναν κύκλο κέντρου  $A$  και ακτίνας  $AB$ .)

Ας εξετάσουμε προσεκτικότερα τους κύκλους που έχουν αντίστροφο τον εαυτό τους. Προφανώς, ο κύκλος αντίστροφής  $\omega$  είναι αντίστροφος του εαυτού του — όλα τα σημεία του μένουν σταθερά. Αυτός είναι ο μοναδικός τέτοιος κύκλος με κέντρο  $O$ . Στη γενική περίπτωση, αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η αντίστροφή ενός κύκλου μπορεί να αντικατασταθεί από ομοιοθεσία με λόγο  $k = R^2/p$ , συμπεραίνουμε ότι ένας κύκλος  $\omega_1$  με κέντρο διαφορετικό του  $O$  είναι αντίστροφος του εαυτού του αν και μόνο αν ο αντίστοιχος λόγος  $k$  ισούται με 1, ή  $p = d^2 - r^2 = R^2$ . Γεωμετρικώς, αυτό σημαίνει ότι το σημείο  $O$  είναι εξωτερικό του κύκλου  $\omega_1$  ( $d > r$ ) και η εφαπτόμενη  $OT$  που φέρουμε από το  $O$  στον  $\omega_1$  είναι ακτίνα του  $\omega$  (διότι  $p = OT^2$  — βλ. Σχήμα 7). Οι εφαπτόμενες των κύκλων  $\omega$  και  $\omega_1$  στο σημείο τομής  $T$  ( $TC$  και  $TO$  στο Σχή-



Σχήμα 5

Ένας κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντίστροφής αντιστρέφεται σε ευθεία. Η άμεση γεωμετρική απόδειξη αυτού του γεγονότος έπειται από την ομοιότητα των ορθογώνιων τριγώνων  $OAP$  και  $OQB$ . (Συμπληρώστε μόνοι σας την απόδειξη.)



Σχήμα 7

μα 7) είναι κάθετες. Τέτοιοι κύκλοι ονομάζονται *ορθογώνιοι*. Συνεπώς, ένας κύκλος, διαφορετικός του  $\omega$ , είναι αντίστροφος του εαυτού του αν και μόνο αν είναι ορθογώνιος προς τον  $\omega$ . (Παρεμπιπτόντως, αυτό ισχύει και για τις ευθείες —τους «κύκλους άπειρης ακτίνας». Οι ευθείες που διέρχονται από το  $O$  είναι ορθογώνιες προς τον  $\omega$ .)

Μπορούμε πλέον να περιγράψουμε την αντίστροφή συναρτήσει των ορθογώνιων κύκλων: το σημείο  $Q$  είναι το αντίστροφο του  $P$  ως προς τον  $\omega$  αν κάθε κύκλος που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  είναι ορθογώνιος προς τον  $\omega$ . (Το αντίστροφο ενός τέτοιου κύκλου θα διέρχεται επίσης από τα  $P$  και  $Q$  και, επιπλέον, θα τέμνει τον  $\omega$  στα ίδια σημεία με τον αρχικό κύκλο, τα οποία παραμένουν σταθερά.) Επισημαίνουμε ότι το σημείο  $P$  μπορεί να είναι το σημείο στο άπειρο. Σε αυτή την περίπτωση, το  $Q$  είναι το κέντρο του  $\omega$  και οι κύκλοι που διέρχονται από τα  $P$  και  $Q$  είναι ευθείες (επεκταμένες διάμετροι του  $\omega$ , οι οποίες είναι, προφανώς, ορθογώνιες στον  $\omega$ ). Επομένως, η αντίστροφή ως προς κύκλο και η συμμετρία ως προς ευθεία έχουν μια κοινή ιδιότητα. Αν τα σημεία  $P$  και  $Q$  είναι το ένα εικόνα του άλλου (ως προς οποιοδήποτε από τα δύο είδη μετασχηματισμού), τότε κάθε κύκλος που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  είναι ορθογώνιος προς τον κύκλο αντίστροφής ή την ευθεία συμμετρίας. Γι' αυτό το λόγο, η αντίστροφή ονομάζεται μερικές φορές «*συμμετρία ως προς κύκλο*», και τα αντίστροφα σημεία ως προς έναν κύκλο ονομάζονται «*συμμετρικά ως προς τον κύκλο*».

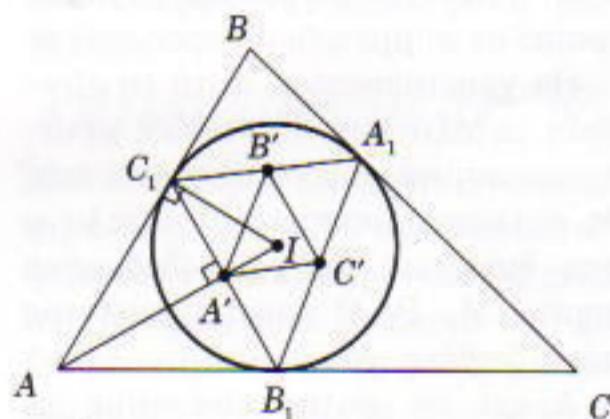
### Άσκηση

5. Δίνονται τα σημεία  $A$  και  $B$  και

οι κύκλοι  $\omega_1$  και  $\omega_2$ . Κατασκευάστε έναν κύκλο που (α) διέρχεται από τα  $A$  και  $B$  και είναι ορθογώνιος του  $\omega_1$ , (β) διέρχεται από το  $A$  και είναι ορθογώνιος των  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , (γ) είναι ορθογώνιος του  $\omega_1$  και αντιστρέφει το  $A$  στο  $B$ .

Ως παράδειγμα εφαρμογής της αντίστροφής στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων θα εκφράσουμε την απόσταση  $d$  μεταξύ των κέντρων  $O$  και  $I$  του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου  $ABC$  συναρτήσει των αντίστοιχων ακτίνων  $R$  και  $r$ .

Έστω  $A_1, B_1, C_1$  τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές του δεδομένου τριγώνου (Σχήμα 8). Αν συγκρίνουμε το τρίγωνο  $IC_1A$  με το τρίγωνο  $OAX$  στο Σχήμα 2, θα διαπιστώσουμε ότι το αντίστροφο της κορυφής  $A$  ως προς τον εγγεγραμμένο κύκλο είναι το μέσο  $A'$  του τρίματος  $B_1C_1$ . Ομοίως, τα αντίστροφα των κορυφών  $B$  και



Σχήμα 8

Сί είναι τα μέσα των  $C_1A_1$  και  $A_1B_1$ . Έπειτα ότι ο αντίστροφος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABC$  είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $A'B'C'$ . Το τρίγωνο  $A'B'C'$  είναι το ήμισυ του τριγώνου  $A_1B_1C_1$  (οι πλευρές του πρώτου είναι οι μεσοπαράλληλοι του δεύτερου), συνεπώς η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του  $A'B'C'$  ισούται με το ήμισυ της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του  $A_1B_1C_1$  — δηλαδή, με το ήμισυ της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου του  $ABC$ , ή  $r/2$ . Από την άλλη, βάσει των προηγούμενων τύπων

για το αντίστροφο ενός κύκλου, έχουμε ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του  $A'B'C'$  ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του  $ABC$  επί  $r^2/|p|$ , όπου  $p = d^2 - R^2 < 0$  είναι η δύναμη του κέντρου αντίστροφής  $I$  ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του  $ABC$ . Επομένως, καταλήγουμε στην εξίσωση  $r/2 = R \cdot r^2/(R^2 - d^2)$  απ' όπου προκύπτει ο επόμενος τύπος:

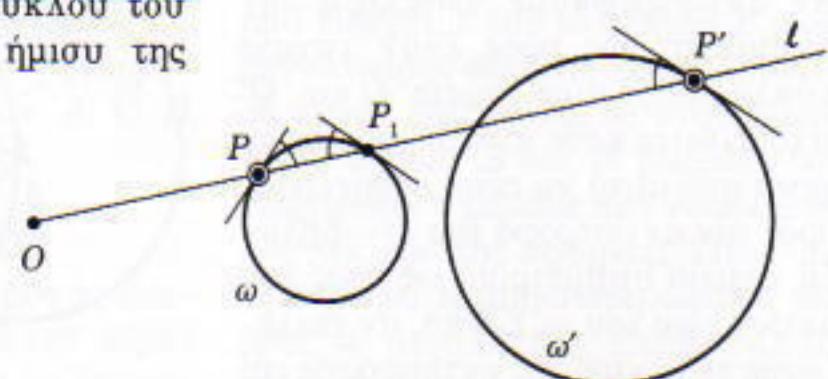
$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

ένας από τους αναρίθμητους τύπους που φέρουν το όνομα του μεγάλου Leonhard Euler.

### Αντίστροφή γωνιών

Θεωρούμε έναν κύκλο  $\omega$ , ένα σημείο του  $P$ , τα αντίστοιχα αντίστροφά τους  $\omega'$  και  $P'$ , και μια ευθεία  $\ell = OP$  που διέρχεται από το κέντρο της αντίστροφής  $O$  (Σχήμα 9). Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η γωνία μεταξύ του  $\omega$  και της  $\ell$  στο σημείο  $P$  (δηλαδή, η γωνία μεταξύ της εφαπτόμενης του  $\omega$  στο σημείο  $P$  και της  $\ell$ ) ισούται με τη γωνία μεταξύ του  $\omega'$  και της  $\ell$  στο  $P'$ . Πραγματικά μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα αυτή την ισότητα: και οι δύο γωνίες είναι ίσες με τη γωνία μεταξύ του  $\omega$  και της  $\ell$  στο δεύτερο σημείο τομής τους,  $Q$ . Αυτό συμβαίνει γιατί η γωνία που σχηματίζεται στο  $P$  είναι συμμετρική (ως προς τη διάμετρο του  $\omega$  που είναι κάθετη στην  $\ell$ ) με τη γωνία που σχηματίζεται στο  $Q$ , ενώ η γωνία που σχηματίζεται στο  $Q$  είναι εικόνα της γωνίας που σχηματίζεται στο  $P'$  μέσω της ομοιοθεσίας που έχει κέντρο  $O$  και μεταφέρει τον κύκλο  $\omega$  στον  $\omega'$  (η οποία υπάρχει πάντα).

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γωνία μεταξύ δύο τυχαίων κύκλων (δηλαδή, τη γωνία μεταξύ των εφαπτομέ-



Σχήμα 9

νων τους) σε ένα από τα σημεία τομής τους,  $P$ . Κάθε τέτοια γωνία μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα (ή διαφορά) των γωνιών μεταξύ της ευθείας  $\ell = OP$  και των κύκλων (Σχήμα 10). Οι γωνίες αυτές είναι ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες μετα-

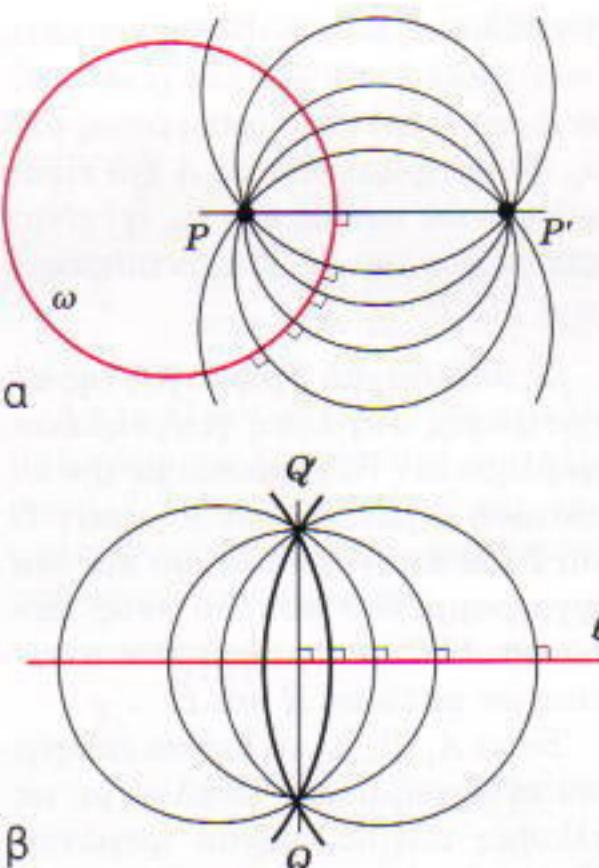


Σχήμα 10

ξύ της  $\ell$  και των αντίστροφων κύκλων, και συνεπώς η γωνία μεταξύ των κύκλων μας ισούται με τη γωνία μεταξύ των αντίστροφων τους. Με άλλα λόγια, η αντίστροφή διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των κύκλων.

Στην πραγματικότητα, το ίδιο ισχύει για τη γωνία μεταξύ ενός κύκλου και μιας ευθείας ή μεταξύ δύο ευθειών ή, γενικώς, μεταξύ δύο οποιωνδήποτε καμπυλών. (Μπορούμε να φέρουμε δύο κύκλους που εφάπτονται των καμπυλών στο σημείο τομής τους. Τότε, η γωνία μεταξύ των κύκλων θα ισούται με τη γωνία μεταξύ των καμπυλών και οι αντίστροφοι των κύκλων θα εφάπτονται με τις αντίστροφες των καμπυλών. Συνεπώς, η γωνία μεταξύ των αντίστροφων καμπυλών ισούται με τη γωνία μεταξύ των αντίστροφων κύκλων, και αφού διατηρείται η γωνία μεταξύ των κύκλων θα διατηρείται και η γωνία μεταξύ των καμπυλών.)

Από τη διατήρηση των γωνιών έπειτα η διατήρηση της ορθογωνιότητας. Υπενθυμίζουμε ότι αν δύο σημεία  $P$  και  $P'$  είναι συμμετρικά ως προς έναν κύκλο  $\omega$ , τότε κάθε κύκλος που διέρχεται από αυτά είναι ορθογώνιος προς τον  $\omega$  (Σχήμα 11α). Αν αντιστρέψουμε ολόκληρη την κατασκευή ως προς έναν τυχαίο κύκλο, παίρνουμε σημεία  $Q$  και  $Q'$  τέτοια, ώστε κάθε κύκλος που διέρχεται από αυτά να είναι ορθογώνιος προς τον αντίστροφο του  $\omega$  —δηλαδή, σημεία συμμετρικά ως προς τον αντίστροφο του  $\omega$ . Ειδικά, αν επλέξουμε το κέντρο της αντίστροφής επί του  $\omega$ , μετατρέπουμε τον κύκλο  $\omega$

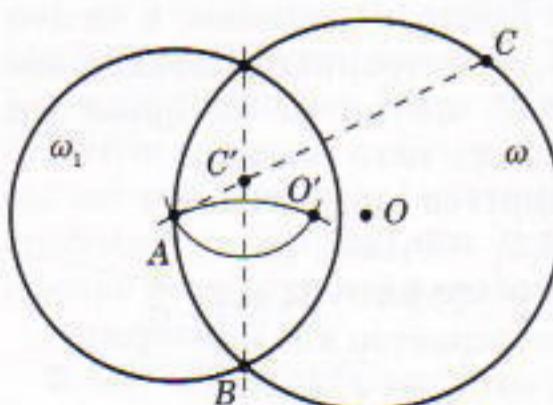


Σχήμα 11

σε ευθεία γραμμή και τα σημεία  $P$  και  $P'$  στα  $Q$  και  $Q'$ , τα οποία είναι συμμετρικά ως προς αυτή την ευθεία (Σχήμα 11β). Υπό αυτή την έννοια, η αντίστροφή μπορεί να μετατραπεί σε συμμετρία ως προς ευθεία.

Θα χρησιμοποιήσω αυτή τη σύνδεση μεταξύ των δύο ειδών μετασχηματισμού για να εξηγήσω πώς θα κατασκευάσουμε έναν κύκλο  $\omega$  που διέρχεται από τρία δεδομένα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $C$  χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη.

Αρκεί να κατασκευάσουμε το κέντρο  $O$  του ζητούμενου κύκλου  $\omega$  (Σχήμα 12). Παρατηρούμε ότι το αντίστροφο του  $O$  ως προς τον  $\omega$  είναι το σημείο στο άπειρο,  $P_\infty$ . Επομένως, τα αντίστροφα των  $O$  και  $P_\infty$  ως προς έναν τυχαίο κύκλο  $\omega_1$  είναι συμμετρικά ως προς τον αντίστροφο του  $\omega$  (όταν θεωρούμε κύκλο αντίστροφής τον  $\omega_1$ ). Άν ο  $\omega_1$



Σχήμα 12

διέρχεται από το σημείο  $B$  και έχει κέντρο το  $A$ , τότε  $I_{\omega_1}(P_\infty) = A$ ,  $I_{\omega_1}(B) = B$ ,  $I_{\omega_1}(\omega)$  είναι η ευθεία που διέρχεται από το  $B$  (στο Σχήμα 12) και  $I_{\omega_1}(C)$  είναι ένα σημείο αυτής της ευθείας, έστω το  $C'$ . Συνεπώς το  $O' = I_{\omega_1}(O)$  είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $BC'$ . Για να συνοψίσουμε, η σειρά της κατασκευής είναι η εξής: οχεδιάζουμε έναν κύκλο  $\omega_1$ , κατασκευάζουμε το σημείο  $C'$ , αντίστροφο του  $C$  ως προς τον  $\omega_1$  (με τη μέθοδο του Σχήματος 3), μετά το  $O'$ , συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $BC'$  (είναι το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων που διέρχονται από το  $A$  και έχουν κέντρα τα σημεία  $B$  και  $C'$ ) και, τέλος, το αντίστροφο του  $O'$  ως προς τον  $\omega_1$ , που είναι το ζητούμενο κέντρο  $O$ .

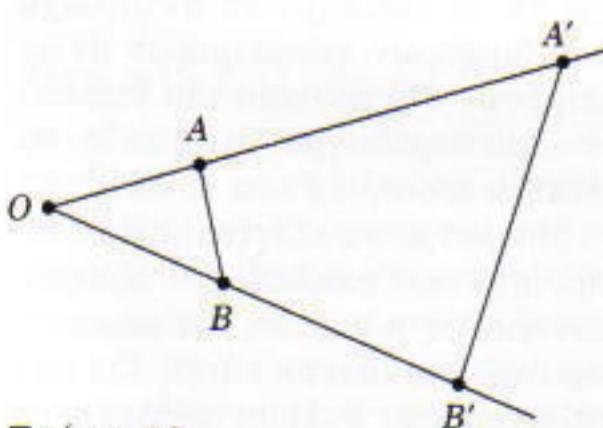
Αυτή η κατασκευή, μαζί με εκείνη του Σχήματος 3, μας επιτρέπει να μετατρέψουμε οποιαδήποτε κατασκευή με κανόνα και διαβήτη σε κατασκευή μόνο με διαβήτη, με μία μόνο σύμβαση: θα θεωρούμε ότι μια ευθεία «έχει κατασκευαστεί» αν έχουν κατασκευαστεί δύο σημεία της. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι πρέπει να βρούμε το σημείο τομής δύο ευθειών  $AB$  και  $CD$ , όταν δίνονται μόνο τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$ . Σχεδιάζουμε έναν τυχαίο κύκλο  $\omega$  με κέντρο κάποιο σημείο  $O$ , κατασκευάζουμε τα αντίστροφα  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  των δεδομένων σημείων ως προς αυτό τον κύκλο (με τη μέθοδο του Σχήματος 3), φέρουμε δύο κύκλους (από τα σημεία  $O$ ,  $A'$ ,  $B'$  και από τα σημεία  $O$ ,  $C'$ ,  $D'$ ) με τη μέθοδο που περιγράψαμε προηγουμένως, και τέλος θεωρούμε το αντίστροφο του δεύτερου σημείου τομής τους,  $P'$ , ως προς τον κύκλο  $\omega$ . Το αντίστροφό του σημείου  $P'$  είναι το ζητούμενο σημείο  $P$ , διότι ο  $\omega$  αντιστρέφει τις ευθείες  $AB$  και  $CD$  στους κύκλους  $OA'B'$  και  $OC'D'$  και, επομένως, το σημείο  $P$  στο σημείο  $P'$ . Ομοίως, μπορούμε να κατασκευάσουμε τα σημεία τομής ενός κύκλου και μιας ευθείας που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία. Επομένως, είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε τη χρήση του κανόνα σε κάθε δεδομένη ακολουθία κατασκευών με

κανόνα και διαβήτη με μια κατασκευή που θα γίνεται μόνο με διαβήτη και θα παράγει τα ίδια σημεία. Στο τέλος θα έχουμε την ίδια ακριβώς κατασκευή, όπως αυτή που θα παίρναμε αν είχαμε χρησιμοποιήσει και κανόνα, με τη διαφορά ότι οι ευθείες θα αντιπροσωπεύονται από ζεύγη σημείων τους (σύμφωνα με την παραδοχή μας).

## Αντιστροφή αποστάσεων

Προφανώς, οι αποστάσεις —αντίθετα με τις γωνίες— δεν διατηρούνται με την αντιστροφή. Εππλέον, η απόσταση μεταξύ των αντιστρόφων  $A'$  και  $B'$  των σημείων  $A$  και  $B$  δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί μόνο συναρτήσει της απόστασης μεταξύ των  $A$  και  $B$ . Εξαρτάται, εππλέον, από το πόσο απέχουν τα σημεία  $A$  και  $B$  από το κέντρο  $O$  της αντιστροφής. Είναι όμως εύκολο να συναγάγουμε έναν τύπο για την απόσταση  $A'B'$  από το Σχήμα 13. Τα τρίγωνα  $OAB$  και  $OA'B'$  σε αυτό το σχήμα είναι όμοια (έχουν μία κοινή γωνία, και  $OA/OB' = OB'/OA'$ , δεδομένου ότι  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ ). Συνεπώς,  $A'B'/AB = OB'/OA = R^2/(OB \cdot OA)$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα αντιστροφής. Τελικά,

$$A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} \cdot AB. \quad (3)$$



Σχήμα 13

### Άσκηση

6. Αποδείξτε ότι για κάθε τετράδα σημείων του επιπέδου  $A, B, C, D$ , ισχύει

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Η ανισότητα γίνεται ισότητα αν και μόνο αν το τετράπλευρο  $ABCD$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο (η τελευταία πρόταση είναι το θεώρημα του

Πτολεμαίου). Υπόδειξη: αντιστρέψτε ως προς έναν κύκλο κέντρου  $A$  και εφαρμόστε τον τύπο για την απόσταση μεταξύ των αντιστρόφων.

Θα χρησιμοποιήσω τον τύπο (3) για να αποδείξω ότι ένας συγκεκριμένος συνδυασμός των αποστάσεων μεταξύ τεσσάρων σημείων διατηρείται από την αντιστροφή. Αυτή η πρόταση, που σε πρώτη ματιά φαίνεται να είναι μάλλον τεχνητή, θα αποδειχθεί αργότερα ιδιαίτερα εξηπρετική.

Ας επλέξουμε τέσσερα σημεία  $A, B, C, D$ , και ας τα αντιστρέψουμε ως προς κάποιον κύκλο ω κέντρου  $O$ . Ονομάζουμε τα αντιστροφά τους  $A', B', C'$  και  $D'$ , αντίστοιχα. Από τον τύπο (3) έχουμε

$$A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} \cdot AB,$$

$$B'C' = \frac{R^2}{OB \cdot OC} \cdot BC.$$

Εάν διαιρέσουμε κατά μέλη, βρίσκουμε

$$A'B'/B'C' = (OC/OA) \cdot (AB/BC).$$

Με άλλα λόγια, κατά την αντιστροφή ο λόγος  $AB/BC$  πολλαπλασιάζεται επί έναν παράγοντα που είναι ανεξάρτητος του  $B$ . Επομένως, αν διαιρέσουμε αυτό το λόγο με τον παρόμοιο λόγο για τα σημεία  $A, C$  και  $D$  (αντί του  $B$ ), ο παράγων αυτός θα απλοποιηθεί και, επομένως, ο «λόγος των δύο λόγων»

$$\frac{AB}{BC} + \frac{AD}{DC}$$

παραμένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή (οι σκεπτικιστές αναγνώστες μπορούν να κάνουν τις σχετικές πράξεις που αποδεικνύουν την πρόταση). Αυτή η παράσταση, που θα την συμβολίζουμε ως  $\{AC, BD\}$ , ονομάζεται διπλός λόγος, ή αναρμονικός λόγος, των σημείων  $A, C, B, D$  (με αυτή τη σειρά).

## Αντιστροφή του χώρου

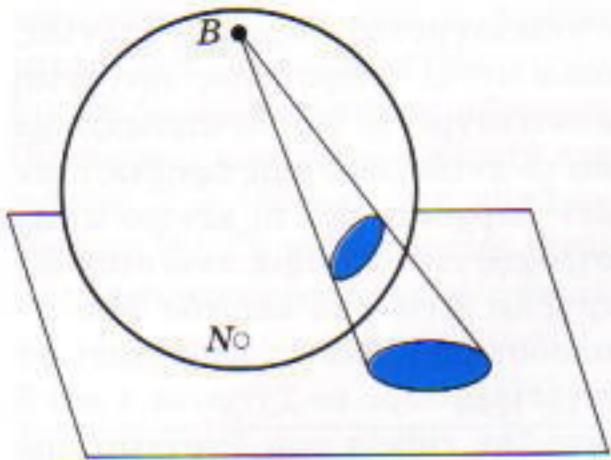
Ο ορισμός της αντιστροφής επεκτείνεται στο χώρο χωρίς την παραμικρή αλλαγή. Μπορούμε να επαναλάβουμε τους υπολογισμούς μας με

συντεταγμένες (περιλαμβάνοντας, όπου είναι απαραίτητο, την τρίτη συντεταγμένη) για να αποδείξουμε ότι το αντίστροφο μιας σφαίρας όταν δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής είναι σφαίρα, ενώ όταν διέρχεται είναι ένα επίπεδο. Μια απλούστερη απόδειξη προκύπτει αν περιστρέψουμε τα Σχήματα 4 και 5 περί την ευθεία που διέρχεται από τα  $O$  και  $C$  —δηλαδή, το κέντρο αντιστροφής και το κέντρο του κύκλου. Τότε, ο κύκλος περιγράφει μια σφαίρα, και το αντίστροφό του περιγράφει το αντίστροφο αυτής της σφαίρας, το οποίο είναι είτε σφαίρα είτε επίπεδο, ανάλογα με το αν η πρώτη σφαίρα διέρχεται από το  $O$ .

Σε ό,τι αφορά τους κύκλους και τις ευθείες, τα αντίστροφά τους ως προς μια σφαίρα ακολουθούν κυριολεκτικά τους ίδιους κανόνες όπως και στην περίπτωση του επιπέδου. Αυτό όμως πρέπει να αποδειχθεί χωριστά, διότι το κέντρο της αντιστροφής μπορεί να μην ανήκει στο επίπεδο του κύκλου που αντιστρέφεται. Η απόδειξη, πάντως, δεν παρουσιάζει προβλήματα. Ένας κύκλος (ή μία ευθεία) μπορεί να θεωρηθεί ως η τομή δύο σφαιρών (ή επιπέδων), και το αντίστροφό μιας τομής είναι η τομή των αντίστοιχων αντιστρόφων. Επομένως, το αντίστροφο ενός κύκλου ή μίας ευθείας είναι η τομή δύο σφαιρών ή μίας σφαίρας και ενός επιπέδου ή δύο επιπέδων (ανάλογα με τη σχετική θέση του κέντρου αντιστροφής) —δηλαδή, ένας κύκλος ή μία ευθεία.

Αφήνω τους αναγνώστες να αποδείξουν ότι η αντιστροφή στο χώρο διατηρεί τις γωνίες μεταξύ καμπυλών. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή της δισδιάστατης περίπτωσης.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια σφαίρα που διέρχεται από το κέντρο  $B$  μιας μεγαλύτερης σφαίρας και εφάπτεται σε αυτήν εσωτερικά, σε ένα σημείο  $N$  (τα σημεία  $B$  και  $N$  μπορούν να θεωρηθούν ο βόρειος και νότιος πόλος της πρώτης σφαίρας). Οταν αντιστραφεί η μικρότερη σφαίρα ως προς τη μεγαλύτερη, απεικονίζεται σε ένα επίπεδο που εφάπτεται και στις δύο σφαίρες στο σημείο  $N$  (βλ.



Σχήμα 14

Σχήμα 14, όπου η μεγαλύτερη σφαίρα —η σφαίρα αντιστροφής— δεν εμφανίζεται). Αποδεικνύεται ότι αυτή η απεικόνιση μπορεί να περιγραφεί χωρίς αναφορά σε αντιστροφή, απλώς ως κεντρική προβολή της μικρότερης σφαίρας από το σημείο  $B$  στο επίπεδο. Κάθε σημείο  $P$  της σφαίρας διαφορετικό του  $B$  απεικονίζεται στο σημείο  $Q$ , στο οποίο η ευθεία  $BP$  τέμνει το επίπεδο. Μια τέτοια προβολή της σφαίρας στο εφαπτόμενό της επίπεδο από το σημείο της σφαίρας που είναι διαμετρικά αντίθετο του σημείου επαφής ονομάζεται στερεογραφική προβολή.

Από τις ιδιότητες της αντιστροφής έπειται ότι η στερεογραφική προβολή απεικονίζει τους κύκλους της σφαίρας σε κύκλους ή ευθείες του επιπέδου, και ότι διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των καμπυλών. Αυτό καθιστά την στερεογραφική προβολή χρήσιμη και σε «καθαρά» γεωμετρικά προβλήματα και σε προβλήματα πιο πρακτικής φύσης —για παράδειγμα, στο σχεδιασμό γεωγραφικών χαρτών.

Δύο σημεία μιας σφαίρας ονομάζονται συμμετρικά ως προς έναν δεδομένο κύκλο ως της σφαίρας αν κάθε κύκλος που διέρχεται από αυτά είναι ορθογώνιος προς τον  $\omega$ . Λόγω της διατήρησης των γωνιών, οι στερεογραφικές προβολές τέτοιων σημείων είναι συμμετρικές ως προς την προβολή του  $\omega$  (στο επίπεδο). Επομένως, μια «αντιστροφή επί της σφαίρας» προβάλλεται σε μια αντιστροφή ή συμμετρία ως προς ευθεία στο επίπεδο, και αντιστρόφως. Για να είναι πλήρης αυτή η αντιστοιχία, πρέπει να υποθέσουμε ότι η στερεογραφική προβολή του πόλου  $B$

είναι το σημείο στο άπειρο, κάτι απόλυτα φυσικό. Επομένως, η σφαίρα αποτελεί στην πραγματικότητα πιο κατάλληλο «έδαφος» συγκριτικά με το επίπεδο για να θεωρήσουμε αντιστροφές, διότι στη σφαίρα η αντιστροφή είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση χωρίς επιπλέον κατ' εκδοχήν σημεία. Βλέπουμε επίσης, από την «αντιστροφή» άποψη, για ποιο λόγο το σημείο στο άπειρο είναι απόλυτα ισοδύναμο με οποιοδήποτε «πεπερασμένο» σημείο.

### Άσκηση

7. Εστω ω ο «ισημερινός» που αντιστοιχεί στους πόλους  $B$  και  $N$ , και  $\omega_1$  η στερεογραφική προβολή του από το  $B$ . Αποδείξτε ότι η προβολή αυτή μετασχηματίζει το συμμετρικό της σφαίρας ως προς το επίπεδο που διέρχεται από τον  $\omega$  στο αντίστροφο του επιπέδου ως προς τον  $\omega_1$ .

## Αντιστροφή του αξιώματος των παραλλήλων

Η ουσιώδης σχέση που υπάρχει μεταξύ της αντιστροφής και της συμμετρίας ως προς ευθεία εμφανίζεται κατά τον πιο εντυπωσιακό τρόπο στο μοντέλο της μη ευκλείδειας (υπερβολικής) γεωμετρίας, την οποία ανακάλυψε στις αρχές της δεκαετίας του 1880 ο περίφημος γάλλος μαθηματικός Henri Poincaré, οταν μελετούσε μια συγκεκριμένη κλάση μιγαδικών συναρτήσεων. Σε αυτό το μοντέλο, μια συγκεκριμένη οικογένεια αντιστροφών παίζει τον ίδιο ακριβώς ρόλο με αυτόν που παίζουν οι συμμετρίες ως προς ευθεία στην κανονική, ευκλείδεια γεωμετρία. Το μοντέλο του Poincaré προσφέρει ένα γεωμετρικό σύστημα με τις δικές του έννοιες για τις ευθείες, τις αποστάσεις και τις γωνίες. Είναι διαφορετικές από αυτές που έχουμε συνηθίσει, ικανοποιούν όμως όλα τα συνήθη αξιώματα της ευκλείδειας με μοναδική (αλλά κρίσιμη) εξαίρεση το αίτημα των παραλλήλων, το οποίο, τρόπος του λέγειν, «αντιστρέφεται». Αντί για τη μοναδικότητα της ευθείας που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο και είναι παράλληλη προς μια δεδομένη ευθεία έχουμε την υπόθεση ότι από

ένα σημείο που δεν ανήκει σε μια δεδομένη ευθεία  $\ell$  διέρχονται περισσότερες από μία παράλληλες προς την  $\ell$ . Έχοντας γνωρίσει την αντιστροφή, μπορούμε να περιγράψουμε με αρκετές λεπτομέρειες το μοντέλο του Poincaré.

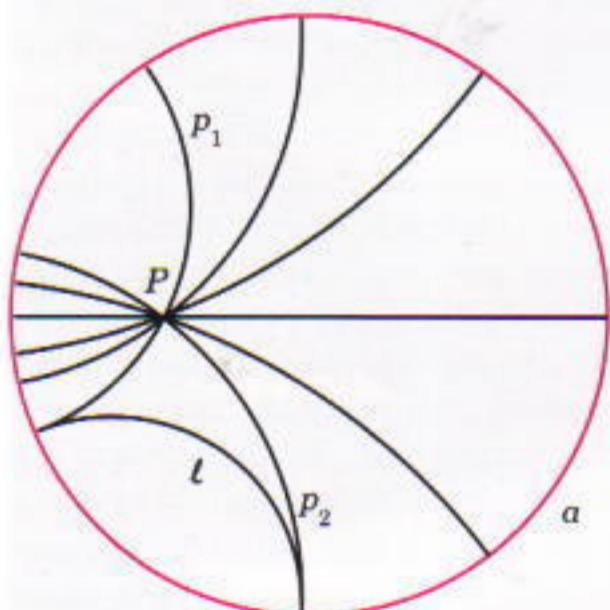
Θα μας βοηθήσει ιδιαίτερα αν φνταστούμε αυτό το μοντέλο ως μια «θεατρική παράσταση» ενός μάλλον αλλόκοτου «έργου» με τίτλο «Μη ευκλείδεια γεωμετρία». Επομένως, για να ξεκινήσουμε, θα πρέπει να διαλέξουμε τη σκηνή για το έργο μας —το αντίστοιχο του επιπέδου της ευκλείδειας γεωμετρίας. Για το εν λόγω μοντέλο, θα είναι το εσωτερικό ενός κύκλου  $a$ .

Ο ρόλος των συμμετριών ως προς ευθεία δίνεται σε αντιστροφές που απεικονίζουν τον  $a$  στον εαυτό του —δηλαδή, σε αντιστροφές ως προς κύκλους ορθογώνιους του  $a$  (που φυσικά περιλαμβάνουν τις συνήθεις συμμετρίες ως προς διαμέτρους του  $a$ ). Αυτή είναι η αποφασιστική επιλογή που καθορίζει και τη διανομή των υπόλοιπων ρόλων. Για παράδειγμα, έχει ως συνέπεια ότι ο ρόλος των ευθειών θα παιχθεί από κύκλους ορθογώνιους του  $a$  (ή μάλλον, από τα τόξα τους που ορίζονται από την τομή με τον  $a$ ). Θα τις ονομάζουμε  $p$ -ευθείες και, γενικότερα, θα χρησιμοποιούμε το πρόθεμα  $p$ -για να ονομάζουμε τα αντίστοιχα των διαφόρων γεωμετρικών αντικειμένων στο μοντέλο του Poincaré —για παράδειγμα, « $p$ -επίπεδο» θα είναι το εσωτερικό τού  $a$ , κ.ο.κ.

Μπορούμε να ελέγξουμε αμέσως την ισχύ των ευκλείδειων αξιωμάτων για τις  $p$ -ευθείες. Τα περισσότερα αποδεικνύονται αληθή. Για παράδειγμα, από τη λύση της Άσκησης 5 διέχουμε ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μοναδική  $p$ -ευθεία. Επίσης, κάθε σημείο μιας  $p$ -ευθείας τη διαιρεί προφανώς σε δύο τόξα ( $p$ -ημιευθείες), και μια  $p$ -ευθεία διαιρεί το επίπεδο σε δύο περιοχές ( $p$ -ημιεπίπεδα), έτσι ώστε δύο σημεία να ανήκουν στην ίδια περιοχή (στην ίδια πλευρά της  $p$ -ευθείας) αν και μόνο αν το  $p$ -τμήμα που τα συνδέει (ορίστε το μόνοι σας!) δεν τέμνει την  $p$ -ευθεία. Το μη ευκλείδειο εμφανίζε-

ται μόλις θίξουμε το ζήτημα της παραλληλίας. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 15, μπορούμε πάντοτε να φέρουμε δύο  $p$ -ευθείες από καθένα άκρο μιας  $p$ -ευθείας  $\ell$  και ένα σημείο  $P$  που δεν ανήκει σε αυτή. Στην πραγματικότητα, τα «άκρα» δεν ανήκουν στο  $p$ -επίπεδο και, επομένως, οι δύο  $p$ -ευθείες δεν τέμνουν ποτέ την  $\ell$ . Αυτές οι  $p$ -ευθείες (που στο Σχήμα 15 ονομάζονται  $p_1$  και  $p_2$ ) καλούνται παράλληλες της  $\ell$ , ενώ οι  $p$ -ευθείες που δεν έχουν κοινά σημεία με την  $\ell$ , ακόμη κι αν λάβουμε υπόψη την περίμετρο του  $a$ , καλούνται υπερπαράλληλες της  $\ell$ . Ούτως ή άλλως, διαπιστώνουμε ότι το αίτημα των παραλλήλων παραβιάζεται. Επομένως, η «οκηνοθεσία» μας μοιάζει σωστή.

Ερχόμαστε τώρα στις αποστάσεις, τις γωνίες και τις άλλες έννοιες που



Σχήμα 15

συνδέονται με τη μέτρηση. Οι ορισμοί των  $p$ -αποστάσεων και των  $p$ -γωνιών στηρίζονται στο γεγονός ότι η συμμετρία ως προς ευθεία διατηρεί τις ευκλείδειες αποστάσεις και γωνίες. Όσον αφορά την  $p$ -συμμετρία (δηλαδή, την αντιστροφή), έχουμε δει ότι, επίσης, διατηρεί το ευκλείδειο μέτρο των γωνιών μεταξύ καμπυλών. Επομένως, είναι λογικό (ακόμη και αναπόφευκτο) να θέσουμε το  $p$ -μέτρο μιας γωνίας μεταξύ τεμνόμενων  $p$ -ευθειών ίσο με το ευκλείδειο μέτρο της.

Ο ορισμός της  $p$ -απόστασης απαιτεί περισσότερη δεξιοτεχνία, διότι οι ευκλείδειες αποστάσεις μεταβάλλονται με την αντιστροφή. Χρειαζόμα-

στε μια συνάρτηση  $d(A, B)$  οριζόμενη για ζεύγη  $p$ -σημείων που θα ικανοποιεί τουλάχιστον τις επόμενες δύο απαιτήσεις:

(1) Πρέπει να μην μεταβάλλεται υπό τις  $p$ -συμμετρίες (αντιστροφές),

(2) Το  $d(A, C) + d(C, B)$  πρέπει να ισούται με  $d(A, B)$  όταν το  $C$  ανήκει στο  $p$ -τμήμα  $AB$ .

Ήρθε η στιγμή να χρησιμοποιήσουμε τον διπλό λόγο που είχαμε κρατήσει σε εφεδρεία. Εστω  $A_0$  και  $B_0$  τα «άκρα» μιας  $p$ -ευθείας  $AB$  και έστω ότι η απόσταση του  $A_0$  από το  $A$  είναι μεγαλύτερη από την απόστασή του από το  $B$  (Σχήμα 16). Τότε, ο διπλός λόγος των  $A, B, A_0, B_0$ ,

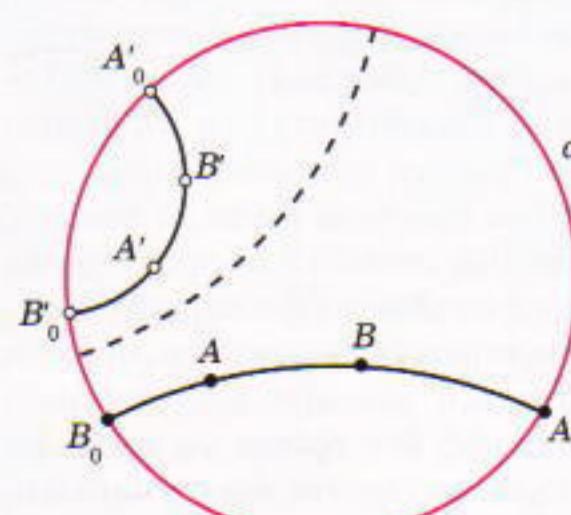
$$R(A, B) = \{AB, A_0B_0\} = \frac{AA_0}{A_0B} + \frac{AB_0}{B_0B}$$

εξαρτάται μόνο από τα  $A$  και  $B$  και ικανοποιεί τη συνθήκη (1), διότι, αν  $A'$  και  $B'$  είναι τα συμμετρικά των  $A$  και  $B$  ως προς κάποια  $p$ -ευθεία (Σχήμα 16), τότε τα «άκρα» της  $p$ -ευθείας που διέρχεται από αυτά θα είναι τα  $p$ -συμμετρικά των  $A_0$  και  $B_0$ , αντίστοιχα, ως προς την ίδια  $p$ -ευθεία (γιατί?). Εφόσον λοιπόν ο διπλός λόγος διατηρείται, έχουμε ότι  $R(A', B') = R(A, B)$ .

Όμως, ο  $R(A, B)$  δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (2): για να υπολογίσουμε τον  $R(A, B)$  όταν δίνονται οι  $R(A, C)$  και  $R(C, B)$ , για ένα  $C$  που ανήκει στο  $p$ -τμήμα  $AB$ , πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τις δεδομένες τιμές αντί να τις προσθέσουμε:

$$R(A, B) = R(A, C) \cdot R(C, B)$$

(τα «άκρα» είναι τα ίδια για τα ζεύγη  $AB, AC, CB$  και ο πολλαπλασια-



Σχήμα 16

σμός γίνεται μεταξύ «απλών λόγων»:  $AA_0/A_0B = (AA_0/A_0C) \cdot (CA_0/A_0B)$ . Ευτυχώς, ο Θεός μάς έχει χαρίσει μια καθιερωμένη μέθοδο μετατροπής του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση. Αν θεωρήσουμε το λογαρίθμο του  $R$ , καταλήγουμε στη συνάρτηση

$$d(A, B) = \log R(A, B)$$

που ικανοποιεί και τις δύο απαιτήσεις μας, διότι  $\log xy = \log x + \log y$  για  $x, y > 0$ . Η βάση του λογαρίθμου δεν έχει καμία σημασία —απλώς καθορίζει τη μονάδα του  $p$ -μήκους. Ο μοναδικός περιορισμός έγκειται ότι η βάση πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 1 για να εξασφαλίσουμε ότι οι αποστάσεις είναι θετικές, αφού από τον ορισμό του  $R$  έπειται ότι  $R(A, B) > 1$ , για  $A \neq B$ . Παρεμπιπόντως, από αυτό τον ορισμό της  $p$ -απόστασης έπειται ότι τα φραγμένα τόξα που αντιπροσωπεύουν τις ευθείες γραμμές στο μοντέλο του Poincaré έχουν άπειρο μήκος. Πράγματι, όταν το σημείο  $B$  του Σχήματος 16 απομακρύνεται από το  $A$  προς το  $A_0$ , ο  $R(A, B)$  μεταβάλλεται ευθέως ανάλογα με το  $B_0B/A_0B$  και, επομένως, αυξάνεται απεριόριστα —συνεπώς το ίδιο συμβαίνει και με το  $d(A, B)$ .

Σε αυτό το σημείο θα σταματήσω. Όλοι οι κύριοι ρόλοι της παράστασής μας έχουν μοιραστεί και ο δρόμος για δικές σας εξερευνήσεις είναι πλέον ανοικτός. Οι επόμενες ασκήσεις θα σας βοηθήσουν να ξεκινήσετε.

### Ασκήσεις

8. Αποδείξτε ότι  $d(A, B) = d(B, A)$  και ότι  $d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$  όταν το  $C$  δεν ανήκει στο  $p$ -τμήμα  $AB$ .

9. Αποδείξτε ότι οι γωνίες ενός  $p$ -τριγώνου έχουν πάντοτε άθροισμα μικρότερο των  $180^\circ$ .

10. Δύο σχήματα του  $p$ -επιπέδου είναι  $p$ -ίσα εάν το ένα από αυτά μπορεί να απεικονιστεί στο άλλο μέσω μιας διαδοχής συμμετριών. Αποδείξτε το κριτήριο των δύο πλευρών και της περιεχομένης γωνίας για την  $p$ -ισότητα των  $p$ -τριγώνων.

# Ελληνοτρωικές αναμετρήσεις

*Συστήματα πολλών σωμάτων: μια ανοιχτή πρόκληση*

I. Vorobyov

**E**ΙΝΑΙ ΑΡΑΓΕ ΔΥΝΑΤΟΝ ΝΑ ΠΕΡΙγράψουμε τις τροχιές σωμάτων που η αλληλεπίδρασή τους διέπεται από το νόμο της παγκόσμιας έλξης; Πώς κινούνται, επί παραδείγματι, οι πλανήτες; Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις ακριβείς θέσεις και τις ταχύτητες  $n$  πλανητών σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή. Επιπλέον, θεωρούμε ότι σε καθέναν τους δρουν μόνο οι δυνάμεις της βαρυτικής έλξης τις οποίες ασκούν οι υπόλοιποι ( $n - 1$ ) πλανήτες. Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε τις θέσεις στις οποίες θα βρεθούν οι πλανήτες σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές (με άλλα λόγια, τις τροχιές τους) βάσει των αρχικών συνθηκών.

Τους νόμους που περιγράφουν την κίνηση των πλανητών τούς γνωρίζουν οι πάντες: πρόκειται για τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Ουδείς πρόσθετος νόμος απαιτείται για να περιγράψουμε (και να προβλέψουμε) τις τροχιές που διαγράφουν κατά την κίνησή τους οι πλανήτες. Μήπως, λοιπόν, πρέπει να συμπεράνουμε ότι ευρισκόμεθα ενώπιον ενός εύκολου προβλήματος;

Για ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σώματα, το πρόβλημά μας το έλυσε πρώτος ο ίδιος ο Ισαάκ Νεύτων. Σ' αυτή την απλούστατη περίπτωση, η γνώση των αρχικών

συνθηκών, δηλαδή των θέσεων και των ταχυτήτων των πλανητών, μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την κατάσταση του συστήματος σε κάθε μελλοντική χρονική στιγμή και με όποιον βαθμό ακρίβειας επιθυμούμε.

Εντούτοις, όταν οι επιστήμονες έστρεψαν την προσοχή τους σε συστήματα που τα αποτελούσαν περισσότερα από δύο σώματα, αντιμετώπισαν τεράστιες μαθηματικές δυσκολίες. Ακόμη και στην περίπτωση των τριών σωμάτων ( $n = 3$ ), η γενική λύση ξεπερνά τις δυνατότητές μας. Παρά τις ακάματες προσπάθειες τις οποίες κατέβαλαν επί δυόμισι αιώνες οι απανταχού της υφηλίου μαθηματικοί, ακόμη και σήμερα δεν έχει κατορθωθεί να επλυθεί αυστηρά το περίφημο πρόβλημα των τριών σωμάτων με τις γνωστές μαθηματικές μεθόδους. Γι' αυτό το λόγο, άλλωστε, το πρόβλημα των  $n$  σωμάτων (όπως ονομάζουν στη γενική περίπτωση το εν λόγω πρόβλημα οι ειδικοί) συνεχίζει να ελκύει την προσοχή των μαθηματικών.

Ένα πρόσθετο ερέθισμα που μας ωθεί στη σπουδή του προβλήματος των  $n$  σωμάτων έγκειται στην τεράστια σημασία του για την ουράνια μηχανική και την αστροναυτική. Συνεπώς, δεν πρέπει να προκαλεί απορία το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός των εργασιών οι οποίες έχουν αφιερωθεί στο συγκεκριμένο

ζήτημα ανέρχεται στις δύο χιλιάδες, ενώ σ' αυτές έρχονται να προστεθούν ετησίως δεκαπέντε έως είκοσι νέες.

Επί του παρόντος διαθέτουμε αρκετές μεθόδους που μας παρέχουν προσεγγιστικές λύσεις του προβλήματος των  $n$  σωμάτων, οι οποίες, εφόσον έχουν καθοριστεί οι αρχικές συνθήκες, περιγράφουν ικανοποιητικά τη συμπεριφορά οποιουδήποτε συγκεκριμένου συστήματος στη διάρκεια ενός περιορισμένου χρονικού διαστήματος και μας επιτρέπουν να σχεδιάσουμε τις τροχιές με επαρκή ακρίβεια. Αυτές οι μέθοδοι έχουν αποδείξει την αποτελεσματικότητα και την αξιοποστία τους σε πάμπολλες περιπτώσεις: ως χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορούμε να επικαλεστούμε τους υπολογισμούς που αφορούν τις τροχιές των διαστημοπλοίων και των δορυφόρων. Εξάλλου, σε τέτοιες μεθόδους στριζόμενοι οι John Adams και Urbain Le Verrier κατόρθωσαν να ανακαλύψουν τον πλανήτη Ποσειδώνα: οι αναγκαίοι υπολογισμοί ήταν αρκετά απλοί ώστε να γίνουν με χαρτί και μολύβι.

Καλά όλα αυτά, πιθανόν να αναρωτηθεί ο αναγνώστης, αλλά ποια σχέση μπορεί να έχουν με τους Τρώες και τους Έλληνες, για τους οποίους κάνει λόγο ο τίτλος του παρόντος άρθρου; Ομολογουμένως,

πρόκειται για μια καθ' όλα εύλογη απορία, που η επίλυσή της καθίσταται δυνατή μόνο αν ληφθούν υπόψη δύο στοιχεία: πρώτον, ότι οι αστρονόμοι συγκαταλέγονται στους λάτρεις της μυθολογίας, και δεύτερον, ότι υπάρχουν δύο ομάδες αστεροειδών που φέρουν αυτά τα ονόματα και οι οποίες σχετίζονται άμεσα με το θέμα του άρθρου μας. Ωστόσο, θα αναβάλουμε για αργότερα τη συζήτηση περί Τρώων και Ελλήνων. Προς το παρόν, θα συνεχίσουμε την ιστορία του προβλήματος των  $n$  σωμάτων.

## Το πρόβλημα του Lagrange

Όπως επισημάναμε ήδη, δεν διαθέτουμε την ακριβή λύση του προβλήματος των  $n$  σωμάτων. Εντούτοις, πριν από δύο περίπου αιώνες, ο εξέχων γάλλος μαθηματικός J.L. Lagrange ανακάλυψε τις ακριβείς λύσεις για ένα σύστημα τριών σωμάτων που χαρακτηρίζεται από κάποιες «ειδικές» αρχικές συνθήκες. Οι λύσεις του (προς τιμήν του ονομάζονται λαγκρανζιανές) παραμένουν ακόμη και σήμερα οι μοναδικοί ακριβείς τύποι που γνωρίζουμε.

Ας θεωρήσουμε τρία σώματα, μη κείμενα επί της αυτής ευθείας, τα οποία περιστρέφονται με οριομένη γωνιακή ταχύτητα διαγράφοντας ομόκεντρους κύκλους που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Αυτά τα σώματα μπορούμε να τα χειριστούμε ως σημεία ενός νοητού στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από έναν ακλόνητο άξονα (ο οποίος διέρχεται από το κοινό κέντρο των ομόκεντρων κύκλων, των «τροχιών» των σωμάτων).

Πού πρέπει να βρίσκονται οι μάζες ώστε να καθίσταται δυνατή μια



τέτοια κίνηση; Και με ποια γωνιακή ταχύτητα πρέπει να περιστρέφεται το νοητό στερεό σώμα ώστε να διατηρείται ακέραιο και να μη «διαλυθεί εις τα εξ ων συνετέθη»; Ακριβώς με αυτή τη μορφή έθεσε το πρόβλημα και ο ίδιος ο Lagrange. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να το λύσουμε ακολουθώντας τα βήματα του μεγάλου μετρητήμης.

## ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΩΝ ΜΑΖΩΝ

Εστωσαν, λοιπόν, τρία σώματα με μάζες  $m_1$ ,  $m_2$  και  $m_3$  που περιστρέφονται διαγράφοντας ομόκεντρους κύκλους, των οποίων το κοινό κέντρο καλούμε  $O$ . Οι τυπικές γραμμικές διαστάσεις των σωμάτων υποτίθενται πολύ μικρότερες τόσο από τις μεταξύ τους αποστάσεις όσο και από τις ακτίνες των τροχιών τους  $r_1$ ,  $r_2$  και  $r_3$ . Η επιτάχυνση του κάθε σώματος οφείλεται στην έλξη που του ασκούν τα υπόλοιπα δύο σώματα και καθορίζεται από το διανυσματικό άθροισμα των αντίστοιχων βαρυτικών δυνάμεων. Οι εξισώσεις κίνησης των τριών σωμάτων είναι δυνατόν να γραφούν υπό διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} &= m_1 \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} &= m_2 \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} &= m_3 \mathbf{Y}_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Στις ανωτέρω εκφράσεις με  $\mathbf{F}_{ij}$  δηλώνουμε την έλξη, δηλαδή τη βαρυτική δύναμη, που ασκεί το σώμα  $m_i$  στο σώμα  $m_j$ . Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, το μέτρο της δίνεται από την έκφραση

$$|F_{ij}| = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}.$$

Εφόσον όλα τα σώματα περιφέρο-

νται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα (εκ της εκφωνήσεως του προβλήματος), ισχύουν οι ισότητες  $\mathbf{Y}_1 = -\omega^2 \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{Y}_2 = -\omega^2 \mathbf{r}_2$  και  $\mathbf{Y}_3 = -\omega^2 \mathbf{r}_3$ , όπου με  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου  $m_i$  από το κέντρο περιφοράς  $O$ . Αποκαλούμε τα σώματα «υλικά σημεία» επειδή, όπως τονίσαμε ήδη, οι μεταξύ τους αποστάσεις υπερβαίνουν κατά πολύ τις τυπικές γραμμικές τους διαστάσεις. Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε μια καθαρά «μαθηματική» συλλογιστική, η οποία εκ πρώτης όψεως ελάχιστη σχέση φαίνεται να έχει με το πρόβλημα που μας απασχολεί. Ωστόσο, αυτός είναι ο δρόμος που οδηγεί στη λύση του πρώτου μέρους του προβλήματος, αφού θα μας επιτρέψει να προσδιορίσουμε το σχηματισμό των σωμάτων.

Ας αθροίσουμε κατά μέλη όλες τις εξισώσεις του συστήματος (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} \\ = m_1 \mathbf{Y}_1 + m_2 \mathbf{Y}_2 + m_3 \mathbf{Y}_3 \\ = -\omega^2(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, το άθροισμα όλων των εσωτερικών δυνάμεων ενός κλειστού συστήματος ισούται με μηδέν. Πιο φορμαλιστικά, το άθροισμα της πρώτης γραμμής μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{i < j \leq 3} \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^3 \sum_{i < j \leq 3} \mathbf{F}_{ji} = 0,$$

επειδή  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Έτοιμος δεδομένου ότι  $\omega \neq 0$ , καταλήγουμε στην ισότητα

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0. \quad (2)$$

Η εξισώση (2) περιγράφει τη θέση του κέντρου περιφοράς: το κέντρο

περιφοράς βρίσκεται σε ένα σημείο  $O$  τέτοιο, ώστε τα διανύσματα θέσης των σωμάτων  $m_1$ ,  $m_2$  και  $m_3$  ως προς αυτό το σημείο να ικανοποιούν την εξισώση (2).

Ας εισαγάγουμε τώρα τα διανύσματα  $\mathbf{R}_2$  και  $\mathbf{R}_3$  όπως δείχνει το Σχήμα 3. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_3, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Το επόμενο βήμα συνιστάται στο να εκφράσουμε το  $\mathbf{r}_1$  συναρτήσει των  $\mathbf{R}_2$  και  $\mathbf{R}_3$ . Για να το επιτύχουμε, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη από τις εξισώσεις (3) επί  $m_2$ , τη δεύτερη επί  $m_3$ , και κατόπιν προσθέτουμε κατά μέλη τις προκύπτουσες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} m_2 \mathbf{r}_1 + m_3 \mathbf{r}_1 &= m_2 \mathbf{r}_2 + \\ m_2 \mathbf{R}_3 + m_3 \mathbf{r}_3 + m_2 \mathbf{R}_2 & \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = -m_1 \mathbf{r}_1$  (σχέση η οποία προκύπτει από την (2)), καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$(m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{r}_1 = m_2 \mathbf{R}_3 + m_2 \mathbf{R}_2,$$

απ' όπου και λαμβάνουμε την έκφραση

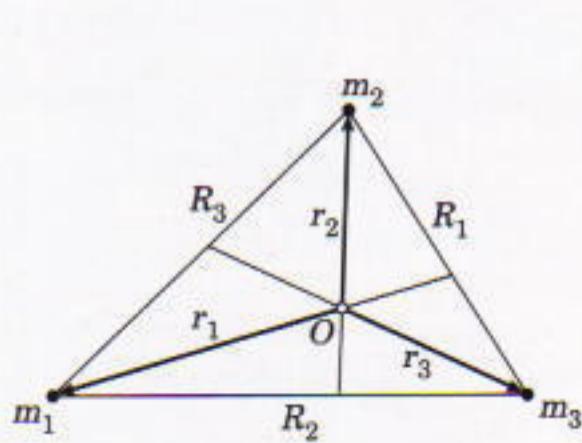
$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2 \mathbf{R}_3 + m_3 \mathbf{R}_2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Συνεπώς, το διάνυσμα  $\mathbf{r}_1$  ισούται με το άθροισμα των δύο διανυσμάτων

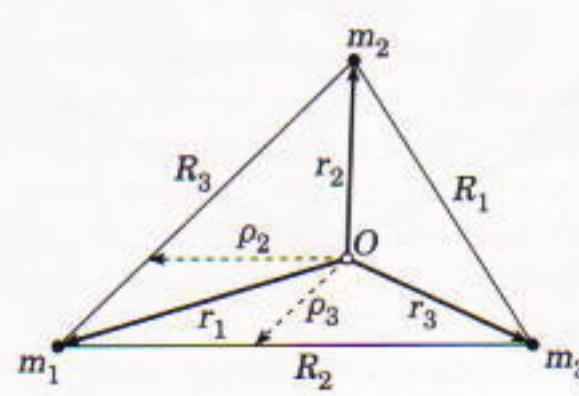
$$\mathbf{p}_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{R}_2$$

και

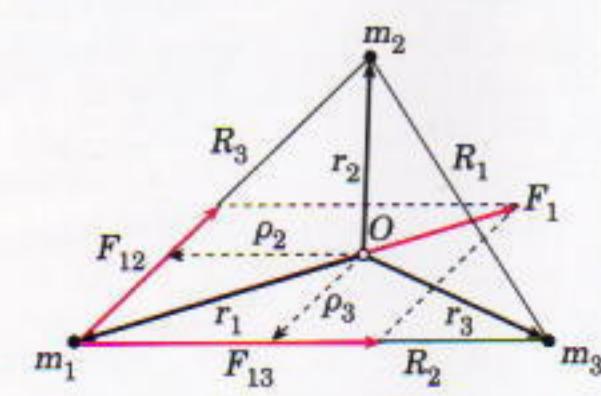
$$\mathbf{p}_3 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{R}_3,$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

τα οποία είναι παράλληλα προς τις πλευρές  $R_2$  και  $R_3$ , αντίστοιχα, του τριγώνου των μαζών.

Εν συνεχεία, πάνω στο τρίγωνο των μαζών (Σχήμα 3) σχεδιάζουμε και τα διανύσματα των δυνάμεων που δρουν στο σώμα  $m_1$ . Εδώ, το  $F_{12}$  παριστά τη δύναμη που ασκεί το σώμα  $m_2$  και το  $F_{13}$  τη δύναμη που ασκεί το  $m_3$ . Οι εν λόγω δυνάμεις είναι αντιπαράλληλες προς τις πλευρές  $R_2$  και  $R_3$  του τριγώνου των μαζών, και έχουν συνισταμένη αντιπαράλληλη προς το διάνυσμα  $r_1$  (το διάνυσμα της επιτάχυνσης, δηλαδή, κατευθύνεται προς το κέντρο περιφοράς  $O$ ). Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων και το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα  $\rho_1$  και  $\rho_2$  είναι όμοια! Συνεπώς,

$$|F_{12}| + |\rho_3| = |F_{13}| + |\rho_2|$$

και

$$\frac{Gm_1m_2}{R_3^2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} R_3 = \frac{Gm_1m_3}{R_2^2} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} R_2.$$

Εκτελώντας τις απλοποιήσεις και διαγράφοντας τους ίσους παράγοντες από τα δύο μέλη, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα  $R_2 = R_3$ .

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε τα  $r_2$  και  $r_3$  συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου των μαζών (προς τούτο, θα χρειαστεί να εισαγάγουμε, στη μεν πρώτη περίπτωση τα διανύσματα  $R_3$  και  $R_1$ , στη δε δεύτερη τα  $R_2$  και  $R_1$  με τις κατευθύνσεις τους κατάλληλα ορισμένες). Θεωρώντας τις δυνάμεις που δρουν στα σώματα  $m_2$  και  $m_3$  λαμβάνουμε αντίστοιχα τις ισότητες  $R_1 = R_3$  και  $R_1 = R_2$ .

Καταλήξαμε λοιπόν στο αξιοσημείωτο αποτέλεσμα  $R_1 = R_2 = R_3$ , από όπου συμπεραίνουμε ότι τα τρία σώματα διατάσσονται έτσι ώστε να καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου! Το πρώτο πρόβλημα έχει λυθεί, και προκαλούμε τον αναγνώστη να λύσει μόνος του το δεύτερο (βλ. Ασκηση 1).

Τώρα πλέον είμαστε έτοιμοι να επισκεφθούμε τους τρωικούς αστεροειδείς.

## Οι τρωικοί αστεροειδείς σε βαρυτική παγίδα

Στις 2 Φεβρουαρίου του 1906, ο γερμανός αστρονόμος Maximilian Wolf ανακάλυψε τον αστεροειδή Αχιλλέα. Σύμφωνα με τα προκαταρκτικά δεδομένα, ο Αχιλλέας κινούνταν με ταχύτητα 13 km/s σε μια σχεδόν κυκλική τροχιά. Άλλα μια παρόμοια, σχεδόν κυκλική, τροχιά έχει και ο Δίας, και μάλιστα την εκτελεί με την ίδια ακριβώς τροχιακή ταχύτητα! Συνεπώς, δύο ουράνια σώματα, ένα μεγάλο και ένα μικρό, διαγράφουν την ίδια τροχιά γύρω από τον Ήλιο.

Πράγματι, εάν ένας πλανήτης μάζας  $m$  κινείται γύρω από τον Ήλιο σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $r$ , τότε ο Ήλιος τον έλκει με δύναμη μέτρου

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

(με  $M$  συμβολίζουμε τη μάζα του Ήλιου), η οποία προσδίδει στον πλανήτη κεντρομόλο επιτάχυνση  $g = u^2/r$ , όπου  $u$  η γραμμική ταχύτητα του πλανήτη. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

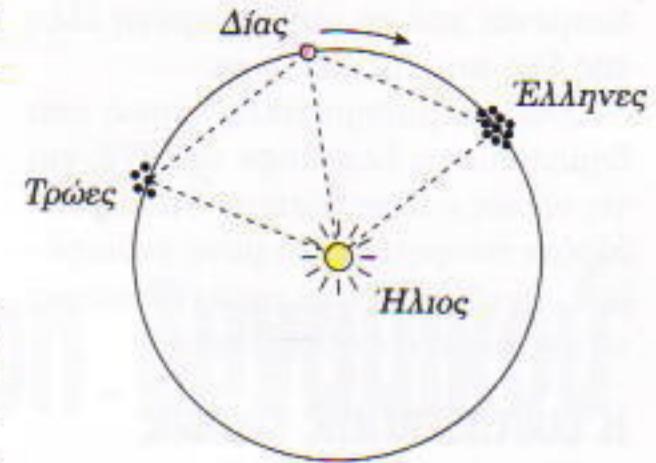
$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mu^2}{r}.$$

Ως εκ τούτου, η ακτίνα της τροχιάς

$$r = G \frac{M}{u^2}$$

δεν εξαρτάται από τη μάζα του πλανήτη· καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την ταχύτητά του.

Μήπως όμως τα επίπεδα των τροχιών του Δία και του Αχιλλέα παρουσιάζουν κάποια κλίση μεταξύ τους; Και όμως, όχι! Όπως σύντομα διαπίστωσαν οι ερευνητές, ο αστεροειδής ακολουθούσε όντως την τροχιά του Δία προπορευόμενος του γιγαντιαίου πλανήτη κατά 55,5°. Φυσικά, οι επιστήμονες θυμήθηκαν αμέσως την εργασία του Lagrange. Ο Ήλιος, ο Δίας και ο Αχιλλέας



Σχήμα 4

σχηματίζαν ένα σχεδόν ισόπλευρο τρίγωνο, το οποίο περιστρεφόταν γύρω από μία εκ των κορυφών του, τον Ήλιο.

Αργότερα ανακαλύφθηκαν και νέοι αστεροειδείς στις κορυφές των δύο ισόπλευρων τριγώνων τα οποία έχουν ως κοινή πλευρά τη γραμμή που συνδέει τον Ήλιο με το Δία. Οι αστρονόμοι τους έδωσαν ονόματα ήρωών του τρωικού πολέμου. Έτσι, καθιερώθηκε να λέγονται συλλήβδην τρωικοί αστεροειδείς. Πέντε από αυτούς (πρόκειται για την οικογένεια που επικράτησε να ονομάζονται Τρώες) αποτελούν την οπισθοφυλακή, η οποία έπειται του Δία, ενώ την προφυλακή την απαρτίζουν δέκα «πολεμιστές» (οι οποίοι ονομάστηκαν Έλληνες,\* Σχήμα 4). Πρόκειται για αστεροειδείς μάλλον μεγάλους· η διάμετρος του μεγαλύτερου όλων, του Πάτροκλου, ανέρχεται στα 216 km· ωστόσο, υπάρχουν οκτώ ακόμη με διάμετρο μικρότερη από 100 km.

To 1959 ο πολωνός αστρονόμος Pan Kordylevsky εντόπισε τεράστια νέφη μεσοπλανητικής σκόνης στις κορυφές των ισόπλευρων τριγώνων που σχηματίζονται με βάση τον άξονα Γης-Σελήνης. Το ρόλο των τρωικών αστεροειδών τον έπαιζαν τώρα αναρίθμητοι κόκκοι σκόνης παγι-

\* Σημειώνετον ότι και ο δύο ομάδες δεν είναι «εθνικά» αμηχανίες σε καθεμιά τους υπάρχει και ένας κατάσκοπος του εχθρού: στους μεν Τρώες περιλαμβάνεται ο Πάτροκλος, στους δε Έλληνες ο Έκτορας. Ας προθέσουμε επι τη ευκαιρία ότι, στην πραγματικότητα, ο συνολικός αριθμός των τρωικών αστεροειδών ανέρχεται σε εξήντα εννέα και δεν αποκλείεται να αυξηθεί περαιτέρω.

δευμένοι από τη συνδυασμένη έλξη της Γης και της Σελήνης.

Έτοι, οι μαθηματικές λύσεις που δημοσίευσε o Lagrange το 1772, για τις οποίες ο ίδιος πίστευε ότι παρουσιάζαν θεωρητικό και μόνο ενδιαφέρον, συνδέθηκαν με μεταγενέστερες αστρονομικές ανακαλύψεις.

## Η ευστάθεια της κίνησης

Εξαντλήσαμε άραγε όλες τις «στερεές διατάξεις» που αποτελούν δυνατές λύσεις του προβλήματος των τριών σωμάτων; Όχι, υπάρχει μια γραμμική διάταξη των τριών σωμάτων η οποία μπορεί να περιστρέφεται ως ένα σώμα. Ωστόσο, μια τέτοια διάταξη παρουσιάζει αστάθεια. Εάν κάποιο από τα σώματα μετατοπιστεί εκτός της ευθείας, η ισορροπία των δυνάμεων θα διαταραχθεί και η απόκλιση από τη γραμμική διάταξη θα τείνει να μεγαλώσει.

Αλλά, αφού θίξαμε το ζήτημα της ευστάθειας, θα πρέπει να αναρωτηθούμε κατά πόσον είναι ευσταθής ο τριγωνικός σχηματισμός των τριών σωμάτων. Πρόκειται για ένα ερώτημα που δεν επδέχεται μονοσήμαντη απάντηση. Ο Gachot, το 1843, υπήρξε ο πρώτος που διατύπωσε τις συνθήκες ευστάθειας για το λαγκρανζιανό τρίγωνο. Έδειξε ότι ο σχηματισμός θα παρουσιάζει ευστάθεια μόνο εφόσον τα δύο μεγάλα σώματα τα οποία αποτελούν τη βάση του τριγώνου έχουν μάζες τέτοιες, ώστε αφ' ενός ο λόγος  $m_1/m_2$  να λαμβάνει μιαν αρκούντως μικρή τιμή και αφ' ετέρου να ικανοποιείται η ανισότητα

$$\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} > 27.$$

Εάν ένα διαστημικό σωματίδιο μάζας πολύ μικρότερης από τις  $m_1$  και  $m_2$  εισέλθει με σχετικά μικρή ταχύτητα στην περιοχή της κορυφής κάποιου ισόπλευρου τριγώνου το οποίο κατασκευάζεται με βάση τη γραμμή που συνδέει τις  $m_1$  και  $m_2$ , το σωματίδιο αυτό θα «παγιδευτεί», παρότι ενδέχεται να διαγράφει μιαν εξαιρετικά περίπλοκη τροχιά γύρω από την κορυφή το λαγκρανζιανό τριγώνου, ο όλος σχηματισμός θα

περιστρέφεται ως ένα μοναδικό στερεό σώμα.

Ο Δίας έχει μάζα χιλιες φορές μικρότερη από τον Ήλιο. Δεδομένου ότι η ολική μάζα των τρωικών αστεροειδών μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα εν συγκρίσει προς τη μάζα του Ήλιου ή του Δία, οι συνθήκες ευστάθειας ικανοποιούνται, και μάλιστα με μεγάλο περιθώριο ευστάθειας. Η ανισότητα ισχύει επίσης και στο σύστημα Γης-Σελήνης: η τιμή του λόγου των δύο μαζών ισούται περίπου με 81.

Πώς θα μπορούσαμε να συναγάγουμε τις συνθήκες ευστάθειας; Στην περίπτωση που μας απασχόλησε δεν αποκλείεται και να υπάρχει κάποιος εύκολος τρόπος για να το επιτύχουμε· εν γένει, όμως, τα προβλήματα που αφορούν την ευστάθεια είναι μάλλον περίπλοκα, οπότε η εξέτασή τους θα έπρεπε να αποτελέσει θέμα ειδικού άρθρου.

### Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται ένα λαγκρανζιανό τρίγωνο δίνεται από τον τύπο

$$\omega^2 = G \frac{m_1 + m_2 + m_3}{R^3},$$

όπου με  $R$  συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ των σωμάτων.

2. Θεωρήσαμε το τρίγωνο των μαζών ως στερεό σώμα. Ωστόσο, εάν τα διανύσματα των ταχυτήτων έχουν μέτρα ανάλογα με τις αποστάσεις από το κέντρο της περιφοράς και σχηματίζουν ίσες γωνίες με τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σώματα με το κέντρο, τότε ο σχηματισμός θα παραμένει όμοιος με τον αρχικό κάθε χρονική στιγμή. Συνεπώς, καθώς θα περιστρέφεται, το ισόπλευρο τρίγωνο θα διαστέλλεται ή θα συστέλλεται. Προσπαθήστε να αποδείξετε μόνοι σας το αληθές αυτού του ισχυρισμού. ◻

### Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- A. Byalko, «Μια πτήση στον Ήλιο», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1997.
- V. Surdin, «Πηδώντας από άστρο σε άστρο», Μάιος/Ιούνιος 1997.
- V. Mozhaev, «Το πλανητικό δίχτυ», Μάρτιος/Απρίλιος 1998.

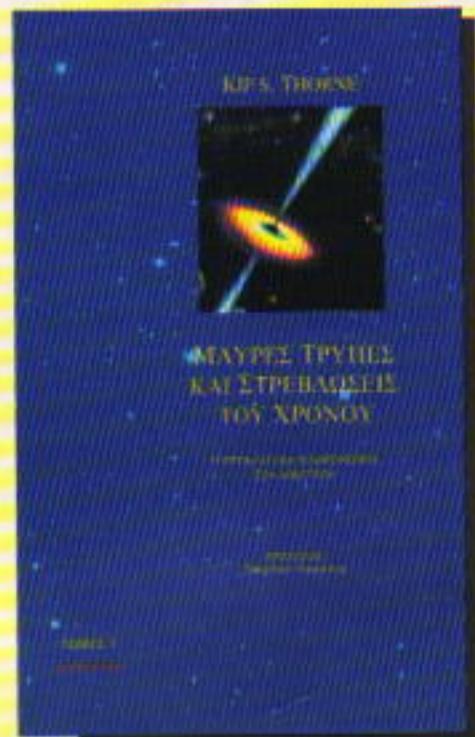
Kip S. Thorne

## ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΚΑΙ ΣΡΕΒΛΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Η προκλητική κληρονομιά του Αϊνστάιν

KIP S. THORNE

ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ  
ΚΑΙ ΣΡΕΒΛΩΣΕΙΣ  
ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



Πρόλογος: Stephen Hawking

Τόμοι A' και B'

«Μια παραστατική και κατανοητή περιγραφή της γενικής σχετικότητας και των επιδράσεών της στη σύγχρονη αστροφυσική και κοσμολογία, από έναν απ' τους κορυφαίους ειδικούς στο χώρο...»

—Roger Penrose

«Μοναδικό βιβλίο. Έτοιμο να έχουν γραφτεί όλα τα βιβλία που σχετίζονται με το ίδιο αντικείμενο.»

—Carl Sagan

«Το βιβλίο του Kip Thorne, εκτός από πηγή επιστημονικών πληροφοριών, πιστεύουμε ότι στα χρόνια που έρχονται θα αποτελέσει και πηγή έμπνευσης για πολλούς από τους αναγνώστες του.»

—Physics Today

«Το βιβλίο αποτελεί επισκόπηση ενός από τους πιο συναρπαστικούς κλάδους της φυσικής του 20ού αιώνα, γραμμένη αριστοτεχνικά, με τρόπο σαφή και κατανοητό, χωρίς περιττά και υπερβολικά στοιχεία...»

—Nature

Κάθε τόμος: 312 σελ., 25 × 16 εκ.,  
Πανόδητος, 7.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Ηλεκτρικά ρεύματα σε όρη δυναμικού

E. Romishevsky

**Σ**ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΑΡΘΡΟ ΘΑ ΜΕΛΕΤΗΣΟΥΜΕ ηλεκτρικά κυκλώματα συνεχούς ρεύματος. Κατ' αρχάς, όμως, θεωρούμε σκόπιμο να ανασκοπήσουμε μερικές βασικές γνώσεις αναφορικά με το πώς λειτουργούν οι πυκνωτές.

Όταν συνδέσουμε ένα βολτόμετρο με τους οπλισμούς φορτισμένου πυκνωτή προκύπτει ένα κλειστό κύκλωμα. Αυτό σημαίνει ότι όταν ένα φορτίο εκκινήσει από δεδομένο σημείο και, αφού διατρέξει ολόκληρο το κύκλωμα, επιστρέψει σ' αυτό, το ολικό έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με μηδέν. Το χρησιμοποιούμενο βολτόμετρο θα το θεωρήσουμε ιδανικό (π.χ. βολτόμετρο ηλεκτροστατικού τύπου) ως εκ τούτου, θα δεχθούμε ότι χαρακτηρίζεται από άπειρη εσωτερική αντίσταση και μηδενική χωρητικότητα.

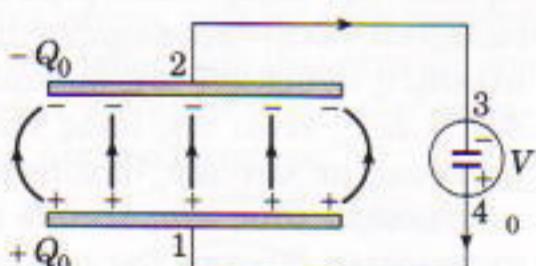
Εάν κινηθούμε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού από τον θετικά φορτισμένο οπλισμό 1 στον αρνητικά φορτισμένο οπλισμό 2 (Σχήμα 1), θα καταγράψουμε μείωση δυναμικού ίση με  $V_0 = Q_0/C$ , όπου  $Q_0$  το φορτίο του πυκνωτή και  $C$  η χωρητικότητά του. Το δυναμικό διατηρεί σταθερή την τιμή του κατά μήκος των συρμάτων που συνδέουν πυκνωτή και βολτόμετρο, αλλά, καθώς περνάμε από το φύλλο 3 στο φύλλο 4 του βολτομέτρου, θα καταγράψουμε αύξηση του δυναμικού κατά  $V_0$ . Η τιμή αυτή συμπίπτει με την ένδειξη ενός ιδανικού βολτομέτρου, το οποίο ουσιαστικά μετρά τις ηλεκτροστατικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των φύλλων 3 και 4.

Ας συνδέσουμε τους οπλισμούς 1 και 2 του αφόρτιστου πυκνωτή με

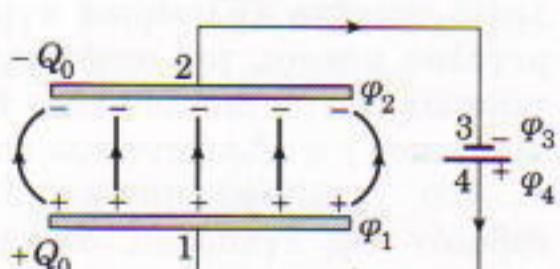
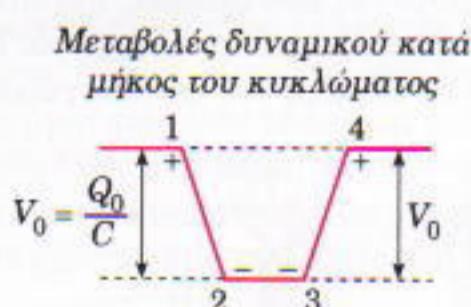
τους πόλους ενός στοιχείου ηλεκτρογερτικής δύναμης ( $\mathcal{E}_\sigma$ ). Ο πυκνωτής θα φορτιστεί μέχρι τάσης  $V_0 = \mathcal{E}_\sigma = Q_0/C$ . Ας θεωρήσουμε τώρα το κλειστό κύκλωμα 1-2-3-4-1. Το διατρέχουμε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 2). Όταν μεταβαίνουμε από τον θετικό οπλισμό 1 δυναμικού  $\varphi_1$  στον αρνητικό οπλισμό 2 δυναμικού  $\varphi_2$ , το δυναμικό ελαττώνεται. Συνεπώς, η διαφορά δυναμικού  $\varphi_2 - \varphi_1 = -V_0 = -Q_0/C$  είναι αρνητική. Κατά τη μετάβαση από τον αρνητικό πόλο (την κάθοδο) του ηλεκτρικού στοιχείου, ο οποίος βρίσκεται σε δυναμικό  $\varphi_3$ , στη θετική άνοδο δυναμικού  $\varphi_4$ , η διαφορά δυναμικού στο πεδίο του ηλεκτρικού στοιχείου έχει την ίδια απόλυτη τιμή αλλά θετικό πρόσημο:  $\varphi_4 - \varphi_3 = V_0$ . Έτοιμοι, φτάνουμε στον οπλισμό 1 με το ίδιο δυναμικό:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3 = -V_0 + V_0 = 0.$$

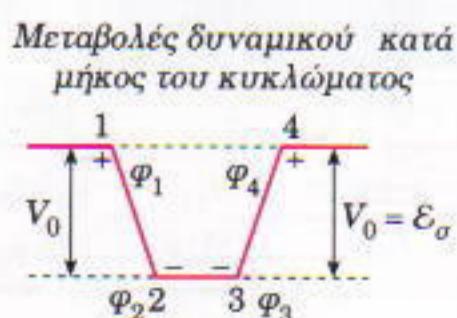
Ευλόγως ανακύπτει το ερώτημα: Τι είναι ηλεκτρικό στοιχείο και ποιο ρόλο διαδραματίζει στη φυσική; Όπως είπαμε ήδη, στο εσωτερικό του υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο παράγει (ή περιγράφεται από) μια διαφορά δυναμικού  $\mathcal{E}_\sigma = V_0$ . Τούτο σημαίνει ότι τα θετικά και τα αρνητικά φορτία εντός του ηλεκτρικού στοιχείου παραμένουν διαχωρισμένα. Όταν συνδέσουμε τους οπλισμούς ενός αφόρτιστου πυκνωτή με τους πόλους του ηλεκτρικού στοιχείου, τότε μέσω αυτού σημειώνεται διέλευση φορτίου  $Q_0$  με φορά αντίθετη από εκείνη του πεδίου. Κατά συνέπεια, η ενέργεια του εν λό-



Σχήμα 1



Σχήμα 2



γω φορτίου αυξάνεται (και, προφανώς, το ίδιο ισχύει για το δυναμικό του, το οποίο ισούται εξ ορισμού με τη δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου). Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το ηλεκτρικό στοιχείο αυξάνει τη δυναμική ενέργεια των φορτίων που κινούνται σε ένα κύκλωμα. Ωστόσο, αυτή η αύξηση επιτυγχάνεται μόνο εφόσον τα φορτία κινηθούν αντίθετα προς το πεδίο στο εσωτερικό του στοιχείου. Και τίθεται αμέσως το ερώτημα: Σε ποιες δυνάμεις πρέπει να αποδοθεί η πραγματοποίηση ενός τέτοιου άθλου;

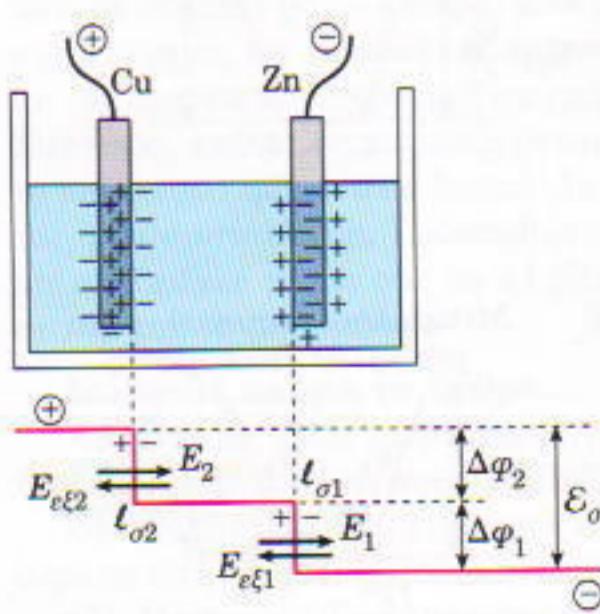
Εν προκειμένω, θα αποδειχθεί χρήσιμη η υπόμνηση των αξιοσημείωτων ομοιοτήτων που παρουσιάζουν το ηλεκτροστατικό και το βαρυτικό πεδίο. Ας υποθέσουμε ότι επιβιβαζόμαστε σε έναν ανελκυστήρα στο ισόγειο (χαμηλό δυναμικό) με σκοπό να ανεβούμε στον τρίτο όροφο (υψηλό δυναμικό). Ο ανελκυστήρας κινείται υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου, και, για να ανέρχεται ισοταχώς, πρέπει να ασκούνται πάνω του οι ελαστικές εφελκυστικές δυνάμεις των συρματόσκοινων, οι οποίες εξισορροπούν τη δύναμη της βαρύτητας. Η κατάσταση αυτή έχει το ακριβές της ανάλογο στη διέλευση των φορτίων μέσω του ηλεκτρικού στοιχείου. Πράγματι, τα φορτία εισέρχονται στο αρνητικό ηλεκτρόδιο του στοιχείου (χαμηλό δυναμικό) και κινούνται ισοταχώς (περιοριζόμαστε σε σταθερά ρεύματα) προς το θετικό ηλεκτρόδιο (υψηλό δυναμικό) με τη δύναμη Coulomb να ανθίσταται στην κίνησή τους. Για να συμπληρωθεί η εικόνα, αρκεί να εντοπίσουμε τις δυνάμεις εκείνες που αποτελούν το ανάλογο των ελαστικών τάσεων των συρματόσκοινων, οι οποίες παράγουν το έργο που καταναλώνει η ανθιστάμενη δύναμη της βαρύτητας. Στην προκειμένη περίπτωση, το ρόλο των κινητήρων δυνάμεων τον αναλαμβάνουν οι χημικής φύσεως δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μεταλλικών ηλεκτροδίων και του ηλεκτρολύτη στο εσωτερικό των ηλεκτρικών στοιχείων. Για να τονίζεται η μη ηλεκτροστατική τους φύση, οι εν λόγω δυνάμεις συχνά ονο-

μάζονται εξωγενείς. Θα τις περιγράψουμε εισάγοντας το πεδίο της εξωγενούς έντασης  $E_{e\xi}$ , η οποία ορίζεται ίση με τη δύναμη που ασκείται στο μοναδιαίο θετικό φορτίο. Κατά τη διέλευση των φορτίων από το ηλεκτρικό στοιχείο οι ασκούμενες εξωγενείς δυνάμεις είναι κατά μεν το μέτρο ίσες προς τις ηλεκτροστατικές, κατά δε την κατεύθυνση αντίθετες. Συνεπώς, ισχύει η ακόλουθη εξίσωση για τη διαφορά δυναμικού:

$$E\ell_o = V_o = -E_{e\xi}\ell_o = -\mathcal{E}_o,$$

όπου με  $\ell_o$  συμβολίζουμε το μήκος της διαδρομής των φορτίων στο οποίο εκτείνεται η δράση των δύο δυνάμεων στο εσωτερικό του βολταϊκού στοιχείου. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η  $\mathcal{E}_o$  είναι το έργο που παράγουν οι χημικές δυνάμεις στο εσωτερικό του ηλεκτρικού στοιχείου κατά τη μεταφορά μίας μονάδας θετικού φορτίου από την κάθοδο στην άνοδο, έργο το οποίο καταναλώνει η ανθιστάμενη δύναμη ενός ηλεκτρικού πεδίου με διαφορά δυναμικού ίση με την ΗΕΔ του ηλεκτρικού στοιχείου.

Ας εξετάσουμε τώρα τη μορφή των πεδίων και των δυναμικών μέσα σε μια συγκεκριμένη πηγή τάσης όπως, για παράδειγμα, ένα βολταϊκό στοιχείο (Σχήμα 3). Ένα δοχείο με μονωτικά τοιχώματα περιέχει υδατικό διάλυμα θεικού οξέος, που δρα ως ηλεκτρολύτης, όπου είναι εμβαπτισμένες δύο πλάκες, μία από χαλκό και μία από ψευδάργυρο. Η χημική αντίδραση του ψευδάργυρου



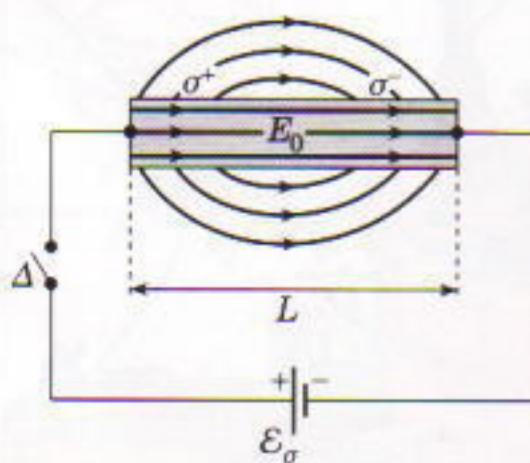
Σχήμα 3

με τον ηλεκτρολύτη παράγει θετικά ιόντα ψευδάργυρου, τα οποία διαχέονται στον ηλεκτρολύτη, με αποτέλεσμα το μεν επιφανειακό στρώμα του μεταλλικού ηλεκτροδίου να αποκτήσει αρνητικό φορτίο, το δε παρακείμενο στρώμα του ηλεκτρολύτη να φορτιστεί θετικά. Τα δύο στρώματα τα χωρίζει μια ελάχιστη απόσταση  $\ell_o$  (της τάξεως της ατομικής διαμέτρου), και η αντίστοιχη διαφορά δυναμικού  $\Delta\varphi$  ανέρχεται στο 1 V περίπου· επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή μεταξύ αυτών των στρωμάτων είναι συγκρισιμό ως προς την ένταση με το ηλεκτρικό πεδίο των ατόμων, ενώ πολύ υψηλές τιμές χαρακτηρίζουν και την επιφανειακή πυκνότητα των εν λόγω φορτίων. Εφόσον  $E = -E_{e\xi}$  οι ίδιες τιμές αναμένεται να χαρακτηρίζουν και την ένταση των εξωγενών δυνάμεων σε αυτά τα στρώματα. Συνεπώς, η μεταφορά μίας μονάδας θετικού φορτίου από την αρνητική πλάκα στον ηλεκτρολύτη επιφέρει αύξηση του δυναμικού κατά  $\Delta\varphi_1 = E_1 \ell_{o1}$ . Αν εξαρέσουμε τα στρώματα που γειτονεύουν άμεσα με τα ηλεκτρόδια, μέσα στο διάλυμα του ηλεκτρολύτη το δυναμικό παραμένει σταθερό (δεν υφίσταται προς το παρόν ροή ρεύματος). Η δεύτερη πλάκα (η άνοδος) αποτελείται από χαλκό, και η αλληλεπίδρασή της με τον ηλεκτρολύτη επιφέρει τη συσσώρευση θετικών φορτίων στην επιφάνειά της, ενώ παράλληλα το στρώμα του ηλεκτρολύτη που την περιβάλλει φορτίζεται αρνητικά. Στην προκειμένη περίπτωση, η ανύψωση του δυναμικού  $\Delta\varphi_2 = E_2 \ell_{o2}$  είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους με την  $\Delta\varphi_1$ , και ακριβώς το άθροισμά τους ονομάζουμε ηλεκτρογερτική δύναμη του στοιχείου:  $|\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2| = \mathcal{E}_o$ .

Ας συνδέσουμε τους ακροδέκτες του ηλεκτρικού στοιχείου με έναν λεπτό ομογενή κυλινδρικό αγωγό μεγάλου μήκους, του οποίου η αντίσταση δίνεται από τον τύπο  $R = \rho L/S$ , όπου  $\rho$  η ειδική αντίσταση του αγωγού,  $L$  το μήκος του και  $S$  το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του. Αν η εσωτερική αντίσταση του ηλεκτρικού στοιχείου θεωρηθεί μη-

δενική, ο αγωγός θα διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης  $I = \mathcal{E}_0 / R$ . Νέα ερωτήματα γεννώνται τώρα: Ποιο ρόλο επιτελεί το ηλεκτρικό πεδίο σ' αυτή τη διαδικασία, και ποιες τιμές λαμβάνει εντός και εκτός του αγωγού; Όταν κλείσουμε το διακόπτη  $\Delta$ , ένας ηλεκτρομαγνητικός παλμός διαδίδεται καθ' όλο το μήκος του κυκλώματος, προκαλώντας την ανακατανομή των φορτίων στην επιφάνεια του αγωγού. Η νέα επιφανειακή πυκνότητα φορτίου που προκύπτει λόγω αυτής της ανακατανομής έχει τέτοια μορφή ώστε να παράγει στο μεν εσωτερικό του αγωγού ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $E_0$ , στο δε εξωτερικό του ένα ανομοιογενές πεδίο, του οποίου οι δυναμικές γραμμές αναδύονται από την κυλινδρική επιφάνεια του αγωγού και επαναεισδύουν σε αυτήν σχηματίζοντας κάποια γωνία με την ακτινική διεύθυνση (Σχήμα 4). Όπως αποδεικνύεται, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ενός λεπτού ομογενούς κυλινδρικού αγωγού μεγάλου μήκους μεταβάλλεται γραμμικά καθώς κινούμαστε κατά μήκος του άξονά του παντού εκτός από τα άκρα του.

Σημειωτέον ότι όταν συνδέουμε την πηγή τάσης, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια αρχίζουν να κινούνται ουσιαστικά ταυτόχρονα σε όλα τα σημεία του αγωγού, ακριβώς όπως όλη η μάζα του νερού αρχίζει να ρέει ταυτόχρονα σε έναν σωλήνα μόλις ανοίξουμε τη στρόφιγγα. Όταν ένας αγωγός διαρρέεται από σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα, τότε σε κάθε περιοχή του το πλήθος τόσο των θετικών όσο και των αρνητικών φορτίων παραμένει αυστηρά σταθερό.



Σχήμα 4

Ως γνωστόν, η παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος σε έναν αγωγό συνοδεύεται απαραιτήτως από την παραγωγή θερμότητας, η οποία εκλύεται τελικώς στο περιβάλλον. Σε ποιο μηχανισμό, όμως, οφείλεται η μετατροπή της χημικής ενέργειας του ηλεκτρικού στοιχείου σε θερμική;

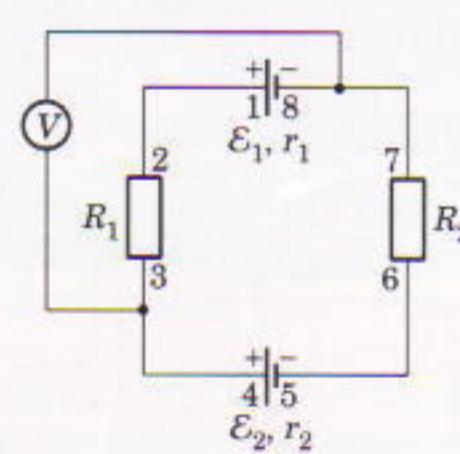
Εν αποσίᾳ ηλεκτρικού πεδίου, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται τυχαία μέσα στον αγωγό. Όταν όμως συνδέουμε την ηλεκτρική πηγή, υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου η κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα στον αγωγό μεταβάλλει το χαρακτήρα της και μετατρέπεται σε κατευθυντική και εύτακτη ροή. Ωστόσο, ταυτοχρόνως δρουν και δυνάμεις οι οποίες αντιτίθενται στην κίνηση των ηλεκτρονίων και τείνουν να τα επιβραδύνουν. Οι εν λόγω δυνάμεις, των οποίων η προέλευση συνδέεται με την ύπαρξη του κρυσταλλικού πλέγματος στον αγωγό, παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τις δυνάμεις τριβής που ασκούνται σε μια σφαίρα κατά την κίνησή της σε ιξώδες μέσο. Ο συνδυασμός όλων των δυνάμεων που αναφέραμε έχει ως αποτέλεσμα να εμφανιστεί μια μόνιμη και στρωτή ροή ελεύθερων ηλεκτρονίων παράλληλη προς τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου και με ταχύτητα πολύ μικρή συγκριτικά με τη μέση ταχύτητα που χαρακτηρίζει την τυχαία θερμική κίνηση.

Μπορούμε να πούμε πως η παραγωγή θερμότητας κατά την κίνηση των ηλεκτρονίων εντός του αγώγιμου μέσου είναι το ανάλογο της θερμότητας που εκλύεται λόγω τριβής όταν ένα σώμα ολισθαίνει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα υπό την επίδραση της βα-

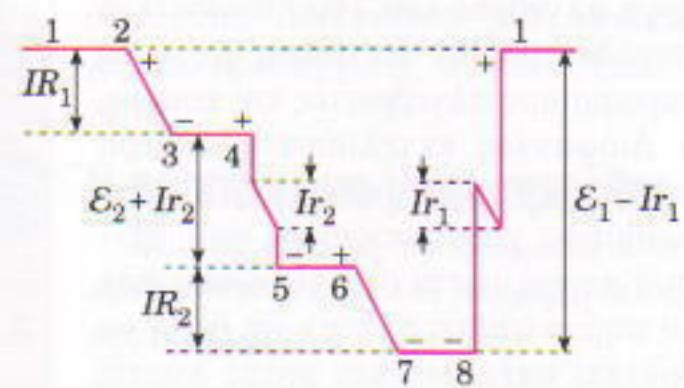
ρύτητας. Το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει στην κατεύθυνση κατά την οποία μειώνεται το ηλεκτρικό δυναμικό. Μπορεί να αποδειχθεί (παρότι αυτό υπερβαίνει τους ορίζοντες του άρθρου) ότι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα άκρα του αγωγού ισούται με το γινόμενο του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό επί την αντίστασή του:  $V = IR$ .

Ας θεωρήσουμε ένα κύκλωμα που αποτελείται από δύο ηλεκτρικά στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά, με ηλεκτρογερικές δυνάμεις και εσωτερικές αντίστασες  $\mathcal{E}_1$  και  $r_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  και  $r_2$ , αντίστοιχα. Κατόπιν, συνδέουμε τα ηλεκτρικά στοιχεία με δύο εξωτερικούς αντίστατες  $R_1$  και  $R_2$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Αν στο συγκεκριμένο κύκλωμα ισχύει η ανισότητα  $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ , τότε η φορά του ρεύματος θα είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Ας παραστήσουμε διαγραμματικά τις μεταβολές του ηλεκτρικού δυναμικού κατά μήκος του κυκλώματος.

Το σημείο 1 έχει το υψηλότερο δυναμικό, ενώ το σημείο 8 το χαμηλότερο. Ο αγωγός 1-2 δεν παρουσιάζει αντίσταση (στη μηχανική αναλογία, δεν υπάρχει τριβή) επομένως, κατά μήκος του το δυναμικό παραμένει αμετάβλητο. Ο αγωγός 2-3, αντίστασης  $R_2$ , είναι παρόμοιος με τον κυλινδρικό αγωγό που εξετάσαμε παραπάνω. Στο συγκεκριμένο τμήμα του κυκλώματος κατηφορίζουμε το λόφο δυναμικού με σταθερή ταχύτητα, οπότε μεταξύ των σημείων 2 και 3 το δυναμικό ελαττώνεται γραμμικά. Η «δύναμη της τριβής» αντισταθμίζεται από την «κινητήρια δύναμη» (τη δύναμη Coulomb) και, έτσι, η ένδειξη του βολτομέτρου ισούται με  $V_1 = IR_1$ . Με-



Σχήμα 5



Η συνέχεια στη σελ. 38

# Ο εξαιρετικά σύγχρονος Διόφαντος

Η αριθμητική των ελλειπτικών καμπυλών

Y. Solovyov

**Τ**Α ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ έχουν κληρονομήσει από την αρχαιότητα πλήθος σπουδαίων έργων. Ένα από αυτά είναι τα Αριθμητικά του Διόφαντου του Αλεξανδρέως. Το έργο, που γράφτηκε τον 3ο μ.Χ αιώνα, εθεωρείτο χαμένο αφού είχε εξαφανιστεί για περισσότερα από 1.000 χρόνια. Το 1464, ο γερμανός εποτήμονας Regiomontanus (1436-1476) ανακάλυψε 6 από τους 13 τόμους των Αριθμητικών. Η πρώτη λατινική μετάφραση του βιβλίου τυπώθηκε το 1575. Το 1621 δημοσιεύθηκε η έκδοση που επιμελήθηκε ο Claude-Gaspar Bachet de Miziriac, η οποία έγινε έργο αναφοράς για πολλούς μαθηματικούς όπως ο Pierre de Fermat (1601-1665) και ο René Descartes (Καρτέσιος, 1596-1650).

Το βιβλίο, παρά τα χίλια χρόνια λήθης, δεν έμοιαζε καθόλου παρωχημένο. Στην πραγματικότητα, ξεπερνούσε κατά πολύ τα καλύτερα έργα άλγεβρας του 16ου αιώνα. Για παράδειγμα, σε αντίθεση με τους ευρωπαίους αλγεβριστές της εποχής, ο Διόφαντος εκτελούσε ελεύθερα πράξεις με αρνητικούς και ρητούς αριθμούς, χρησιμοποιούσε συμβολισμό με γράμματα στις εξισώσεις και, το σημαντικότερο, ήταν σε θέση να βρίσκει ακέραιες και ρητές λύσεις γραμμικών, δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων και συστη-



Εικονογράφηση: V. Ivanyuk

μάτων εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Η λύση τέτοιων εξισώσεων (που σήμερα ονομάζονται διοφαντικές) παραμένει έκτοτε ένα σημαντικό θέμα των μαθηματικών ερευνών.

Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε τις λύσεις αρκετών διοφαντικών εξισώσεων (έχω προσπαθήσει να επιλέξω τις ωραιότερες από αυτές). Για να λύσει κάποιος αυτές τις εξισώσεις, δεν αρκεί μόνο να διαβάσει το σπουδαίο έργο του Διόφαντου, αλλά και να έρθει σε επαφή με τα πλέον πρόσφατα γεγονότα των σύγχρονων μαθηματικών.

## Η μέθοδος των τεμνουσών

Θα παρουσιάσουμε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιώντας μια ειδική περίπτωση ενός προβλήματος που έλυσε ο Διόφαντος στα Αριθμητικά. Θεωρούμε την επόμενη εξισώση:

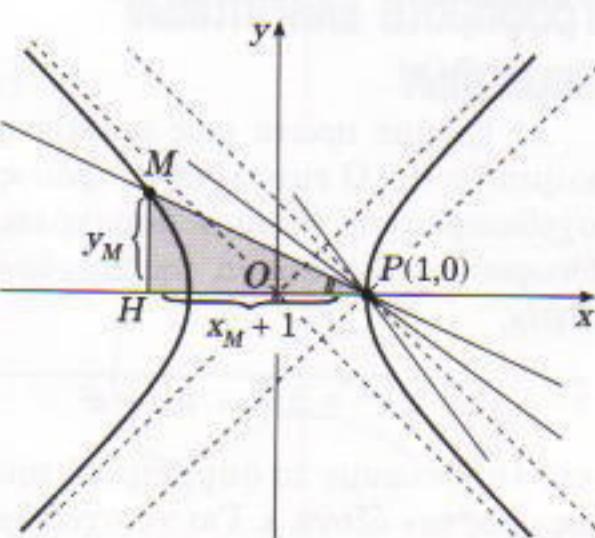
$$x^2 - y^2 = 1. \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να βρούμε όλες τις ρητές λύσεις της —δηλαδή, όλα τα διατεταγμένα ζεύγη

$$(x, y) = \left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

που ικανοποιούν την εξισώση (1).

Μπορούμε να θεωρήσουμε την εξισώση (1) (ή και οποιαδήποτε άλλη εξισώση των μεταβλητών  $x$  και  $y$ ) ως μια καμπύλη του επιπέδου. Στην παρούσα περίπτωση είναι μια υπερβολή (Σχήμα 1). Μπορούμε αμέσως να εντοπίσουμε τη λύση  $(1, 0)$ , η οποία αντιστοιχεί στο σημείο  $P(1, 0)$  όπου η υπερβολή τέμνει τον άξονα  $x$ . Ας



Σχήμα 1

φέρουμε μια τέμνουσα που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση  $k$ . Η εξισώση της είναι

$$y = k(x - 1). \quad (2)$$

Ας βρούμε τώρα το δεύτερο σημείο τομής αυτής της ευθείας με την καμπύλη που αντιστοιχεί στην εξισώση (1). Αντικαθιστούμε απλώς το  $y$  στην εξισώση (1) με την παράσταση στο δεξιό μέλος τής (2), και επλύουμε την προκύπτουσα δευτεροβάθμια εξισώση ως προς  $x$ . Βρίσκουμε ότι

$$x = \frac{-k^2 \pm 1}{1 - k^2}.$$

Γνωρίζουμε ήδη τη μία ρίζα (συγκεκριμένα την  $x_1 = 1$ , που αντιστοιχεί στο σημείο  $(1, 0)$ ) και η δεύτερη ρίζα

$$x_2 = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

μας δίνει το ζητούμενο δεύτερο σημείο τομής:

$$(x_2, y_2) = \left( \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}, \frac{2k}{k^2 - 1} \right). \quad (3)$$

Ο τύπος αυτός, για κάθε ρητό  $k$  ( $k \neq \pm 1$ ), καθορίζει ένα σημείο της καμπύλης και, επομένως, μια ρητή λύση της δεδομένης εξισώσης. (Όταν  $k = \pm 1$ , η τέμνουσα συναντά την υπερβολή μόνο στο σημείο  $P$  (Σχήμα 1).) Αντιστρόφως, για κάθε ακέραια λύση (για κάθε ακέραιο σημείο  $M$  της καμπύλης), η τέμνουσα  $PM$  καθορίζεται από την εξισώση (2) για ρητό  $k$  (διότι, σε αυτή την περίπτωση, οι κάθετες πλευρές του ορθογώνιου  $PMH$  είναι ρητές).

Επομένως, όταν το  $k$  λαμβάνει όλες τις δυνατές ακέραιες τιμές ( $k \neq \pm 1$ ), η εξισώση (3) δίνει όλες τις δυνατές ρητές λύσεις της εξισώσης (1).

Ο Διόφαντος δεν εισήγαγε σύστημα συντεταγμένων ούτε θεώρησε την καμπύλη που αντιστοιχεί στη δεδομένη εξισώση. Στην πραγματικότητα, η προσέγγιση της γεωμετρίας μέσω συντεταγμένων εμφανίζεται για πρώτη φορά το 17ο αιώνα στο έργο του Καρτέσιου. Ο Διόφαντος εισήγαγε την αντικατάσταση από την εξισώση (2) με καθαρά αλγεβρικό τρόπο, και μετά κατέληξε

στην εξισώση (3) (χρησιμοποιώντας φυσικά διαφορετικό συμβολισμό). Επιπλέον, συνειδητοποίησε ότι η μέθοδος, αν έχουμε βρει μία τουλάχιστον ρητή ρίζα της εξισώσης, εφαρμόζεται όχι μόνο στο πολυώνυμο  $x^2 - y^2 - 1$  αλλά και στο γενικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού δύο μεταβλητών

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

όπου τα  $a, b, \dots, f$  είναι ακέραιοι ή γενικότερα, ρητοί αριθμοί.

Μια καμπύλη που ορίζεται από εξισώση δευτέρου βαθμού δεν περιέχει πάντοτε ρητά σημεία. Για παράδειγμα, τέτοια σημεία δεν υπάρχουν στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 3$  ούτε στην έλλειψη  $x^2 + 82y^2 = 3$ . Πάντως, υπάρχουν ρητά σημεία  $(a/c, b/c)$  στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ . Η τριάδα των ακέραιων  $(a, b, c)$  που ορίζεται από ένα τέτοιο σημείο ονομάζεται πυθαγόρεια, διότι ικανοποιεί τη σχέση  $a^2 + b^2 = c^2$ , που εμφανίζεται στη διατύπωση του πυθαγορείου θεωρήματος. Είναι δυνατόν να βρούμε όλες τις πυθαγόρειες τριάδες με τη βοήθεια της μεθόδου των τεμνουσών (καθώς και με άλλους τρόπους).

Το πρόβλημα της ύπαρξης ρητού σημείου σε μια δευτεροβάθμια καμπύλη αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο. Τα πρώτα μη τετριμμένα βήματα επιτεύχθηκαν από τους ινδούς μαθηματικούς Brahmagupta (598-665) και Bhaskara II (1114-1185), ενώ η πλήρης απάντηση δόθηκε μόλις το 1768 από τον διάσημο γάλλο μαθηματικό Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Ο Διόφαντος δεν περιορίστηκε σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Ασχολήθηκε επιτυχώς με τις τριτοβάθμιες εξισώσεις και, όπως θα δούμε στη συνέχεια, διατύπωσε μια γενική μέθοδο προσέγγισης τέτοιων εξισώσεων.

## Η εφαπτόμενη μιας καμπύλης

Σε ένα από τα προβλήματα των Αριθμητικών ζητείται μια ρητή λύση της εξισώσης

$$y(6 - y) = x^3 - x. \quad (4)$$

Η λύση του Διόφαντου είναι σύντο-

μη και ευφυής. Ας δοκιμάσουμε, έγραψε, την αντικατάσταση  $x = 2y - 1$ . Προκύπτει

$$6y - 6y^2 = 8y^3 - 12y^2 + 4y.$$

Αν το 6 ήταν 4, οι πρωτοβάθμιοι όροι θα είχαν, πολύ βολικά, εξαλειφθεί! Ας αντικαταστήσουμε λοιπόν το 2 με το 3 —δηλαδή, ας θέσουμε  $x = 3y - 1$ . Τότε, οι γραμμικοί όροι εξαφανίζονται και έχουμε

$$y^2(9y - 7) = 0, \quad (5)$$

και επομένως  $y = 7/9$  και  $x = 16/9$ . Βρήκαμε τη ρητή λύση  $(16/9, 7/9)$  της τριτοβάθμιας εξίσωσης (4).

Σε πρώτη ματιά, η λύση αυτή δεν έχει τίποτα το ιδιαίτερο. Μαντέψαμε απλώς ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση  $x = 3y - 1$ , και αυτό μας βοήθησε να βρούμε την απάντηση. Ποια εντυπωσιακή ίδέα κρύβεται εδώ; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, ας επιστρέψουμε στο σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου για να σχεδιάσουμε το γράφημα της εξίσωσης (4) (βλ. Σχήμα 2). (Στη συνέχεια του άρθρου θα εξηγήσουμε τον τρόπο σχεδίασης τέτοιων γραφημάτων.) Η γκρι γραμμή του Σχήματος 2 είναι η ευθεία  $x - 3y + 1 = 0$ . Εφάπτεται της καμπύλης μας στο σημείο  $P(-1, 0)$  (στην πραγματικότητα, η εξίσωση (5), εκτός της ρίζας  $y = 7/9$ , έχει τις δύο «ίσες ρίζες»  $y^2 = 0$ ).

Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία σχεδιάζοντας την εφαπτόμενη της καμπύλης που διέρχεται από το ρητό σημείο  $(16/9, 7/9)$ . Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι αυτή η ευθεία τέμνει την καμπύλη σε ένα τρίτο ρητό σημείο, και ούτω καθεξής. Όμως, ο Διόφαντος δεν έκανε αυτό το βήμα, και χρειάστηκε να περάσουν 1.500

χρόνια για να χρησιμοποιήσουν οι μαθηματικοί τις ιδέες του Διόφαντου στην πλήρη γενικότητά τους.

## Καμπύλες τρίτου βαθμού

Σταματάμε να ασχολούμαστε με τη λύση των τριτοβάθμιων εξισώσεων και, εξακολουθώντας να χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική προσέγγιση που εφαρμόσαμε μέχρι στιγμής, επικεντρωνόμαστε στο επόμενο ισοδύναμο ερώτημα: Ποια ρητά σημεία υπάρχουν στην επίπεδη καμπύλη που ορίζεται από την τριτοβάθμια εξίσωση

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + \dots + hx + iy + j = 0,$$

με ακέραιους συντελεστές.

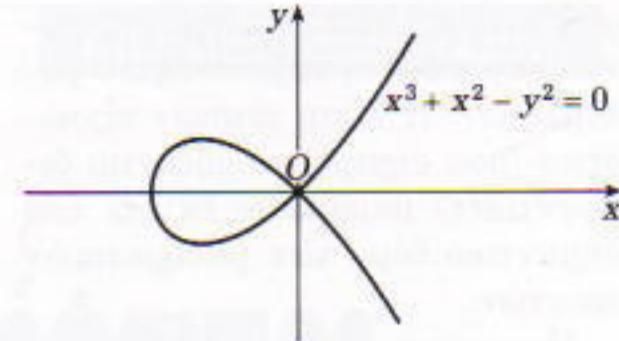
Μπορούμε να διαιρέσουμε όλες τις καμπύλες αυτού του είδους σε δύο τεράστιες κατηγορίες. Η πρώτη αποτελείται από όλες τις καμπύλες που έχουν κορυφές (οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι η αρχή των αξόνων είναι ένα τέτοιο σημείο της καμπύλης  $y^2 = x^3$ ), από τις καμπύλες που τέμνουν τον εαυτό τους (Σχήμα 3), και τέλος από όλες τις καμπύλες για τις οποίες υπάρχει μια παραγοντοποίηση της μορφής

$$f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y),$$

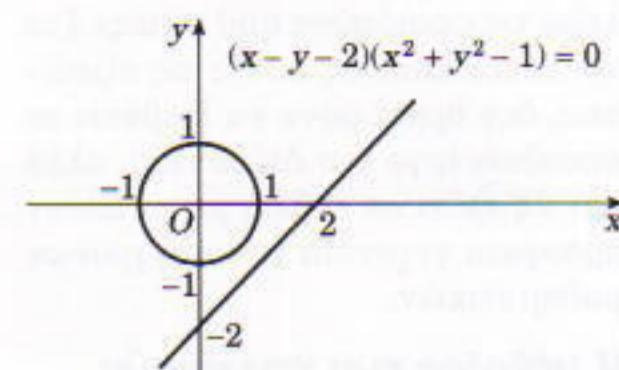
όπου τα  $f_1(x, y)$  και  $f_2(x, y)$  είναι πολυώνυμα μικρότερου βαθμού (Σχήμα 4). Τέτοιες καμπύλες ονομάζονται **εκφυλισμένες**. Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από όλες τις μη εκφυλισμένες καμπύλες που ορίζονται από τριτοβάθμια πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές. Τέτοιες καμπύλες ονομάζονται **ελλειπτικές**.<sup>1</sup> Αυτή είναι η πλέον γενική κατηγορία, και ελκύει το ενδιαφέρον μας. Όλες οι ελλειπτικές καμπύλες που θα εξετάσουμε θα δίνονται στην **κανονική μορφή**

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad (6)$$

όπου οι ακέραιοι συντελεστές  $a, b, c$ ,



Σχήμα 3



Σχήμα 4

και είναι τέτοιοι, ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

να μην έχει πολλαπλές ρίζες.

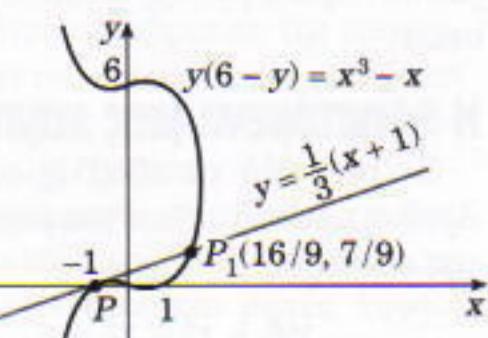
Η υπόθεση ότι οι εξισώσεις των καμπυλών μας μπορούν να γραφούν σε αυτή την κανονική μορφή δεν μειώνει τη γενικότητα των συλλογισμών μας: Κάθε μη εκφυλισμένη καμπύλη  $f(x, y) = 0$  μπορεί να γραφεί με τη μορφή της εξίσωσης (6) αν χρησιμοποιήσουμε μια κατάλληλη αντικατάσταση. Αν οι συντελεστές της  $f(x, y)$  είναι ακέραιοι, τότε το πρόβλημα του προσδιορισμού όλων των ρητών σημείων της καμπύλης  $f(x, y) = 0$  ανάγεται στο ανάλογο πρόβλημα για μια καμπύλη που έχει τη μορφή της εξίσωσης (6) με ακέραιους συντελεστές  $a, b, c$ .

## Γραφήματα ελλειπτικών καμπυλών

Ας βρούμε πρώτα πώς μοιάζει η καμπύλη (6). Ο ευκολότερος τρόπος σχεδιασμού της είναι ο παρακάτω. Θεωρούμε το γράφημα της συνάρτησης

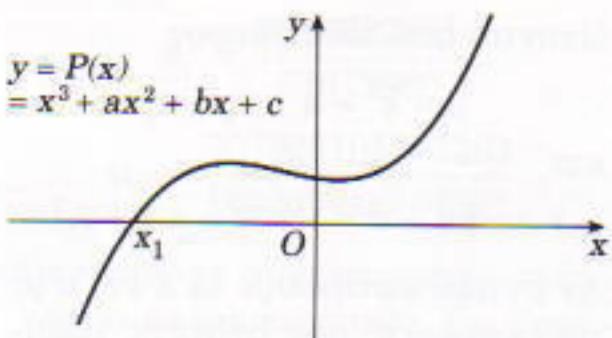
$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$$

και λαμβάνουμε το συμμετρικό του ως προς τον άξονα  $x$ . Για να σχεδιάσουμε το γράφημα αυτής της συνάρτησης, ξεκινάμε από το γράφη-



Σχήμα 2

1. Επομένων μας ότι αυτές οι καμπύλες δεν είναι ελλειψεις. Η σχέση μεταξύ ελλειψών και αυτών των καμπυλών, που φανερώνεται από τα ονόματά τους, μπορεί να αποτελέσει το θέμα ενός άλλου άρθρου.



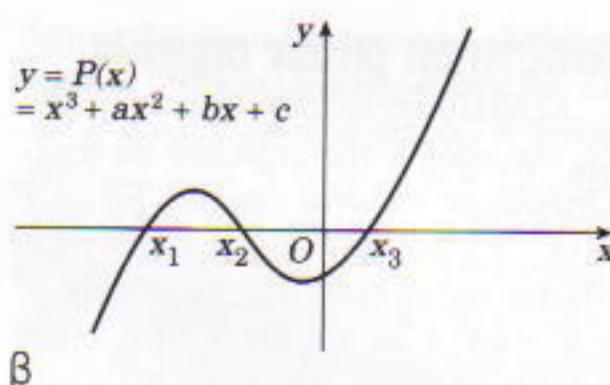
Σχήμα 5

μα της συνάρτησης  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Όπως είναι γνωστό, κάθε τριτοβάθμιο πολυώνυμο (χωρίς πολλαπλές ρίζες) έχει είτε μία είτε τρεις πραγματικές ρίζες. Επομένως, το γράφημα της  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  μοιάζει με τα γραφήματα των Σχημάτων 5α και 5β. Μπορούμε τώρα να βρούμε εύκολα το γράφημα της συνάρτησης

$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$$

(βλ. Σχήμα 6α), επομένως και τη μορφή της ελλειπτικής καμπύλης  $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$  (Σχήμα 6β). Το Σχήμα 6 παρουσιάζει την περίπτωση που αντιστοιχεί στο Σχήμα 5α. Προτείνουμε στους αναγνώστες να σχεδιάσουν την καμπύλη που αντιστοιχεί στο Σχήμα 5β. Θα αποτελείται από δύο τμήματα (βλ. Σχήμα 9).

Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων  $y = \sqrt{P(x)}$  και  $y = -\sqrt{P(x)}$  ενώνονται ομαλά, χω-



ρις να σχηματίζουν γωνίες, στα σημεία  $x_1$ ,  $x_2$  και  $x_3$ . Αυτό συμβαίνει επειδή η εφαπτόμενη του γραφήματος της  $y = \sqrt{P(x)}$  είναι κάθετη στα εν λόγω σημεία.

### Πρόσθεση των σημείων μιας ελλειπτικής καμπύλης

Όταν εφαρμοστεί η μέθοδος των τεμνουσών σε μια ελλειπτική καμπύλη  $C$  δίνει ένα απρόσμενο αποτέλεσμα. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να «προσθέσουμε» τα σημεία τής  $C$ . Δηλαδή, βάσει της γραφικής αναπαράστασης της καμπύλης (Σχήμα 7) μπορούμε να ορίσουμε επί των σημείων τής  $C$  μια πράξη που θα ονομάσουμε «πρόσθεση». Θεωρούμε δύο σημεία  $P$  και  $Q$  της  $C$  και φέρουμε την ευθεία που τα συνδέει. Η ευθεία αυτή τέμνει την  $C$  σε ένα τρίτο σημείο. Λαμβάνουμε το συμμετρικό αυτού του σημείου ως προς τον άξονα  $x$ . Καλούμε το αποτέλεσμα άθροισμα των  $P$  και  $Q$ . Στο Σχήμα 7 συμβολίζεται ως  $P + Q$ . (Πάντως, μια ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία τής  $C$  δεν την τέμνει πάντα και σε ένα τρίτο — για παράδειγμα, αυτό δεν συμβαίνει όταν η ευθεία είναι κάθετη.)

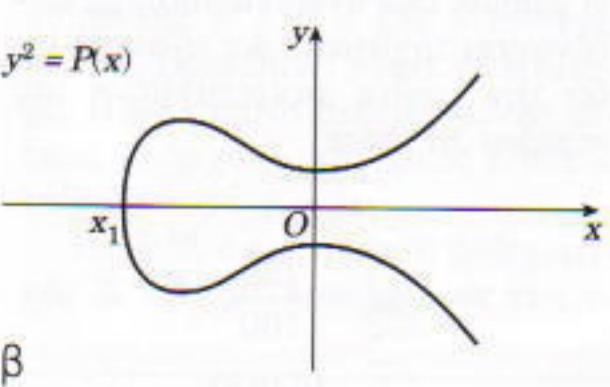
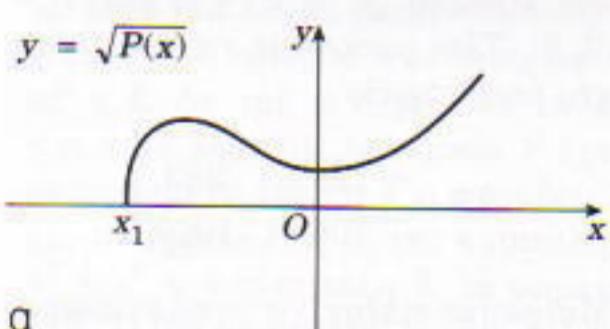
Ας μελετήσουμε τις ιδιότητες της νέας μας πράξης και ας τις συγκρίνουμε με τις ιδιότητες της πρόσθεσης αριθμών. Η τελευταία είναι α-

ντιμεταθετική — δηλαδή,  $a + b = b + a$  — και προσεταιριστική — δηλαδή,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . Επιπλέον, η πράξη αυτή έχει ένα ουδέτερο στοιχείο — έναν αριθμό  $O$  τέτοιον, ώστε  $a + O = a$  για κάθε  $a$ . Τέλος, για κάθε αριθμό  $a$  υπάρχει ο αντίστροφος αριθμός — δηλαδή, ο  $(-a)$  — τέτοιος, ώστε  $a + (-a) = O$ .

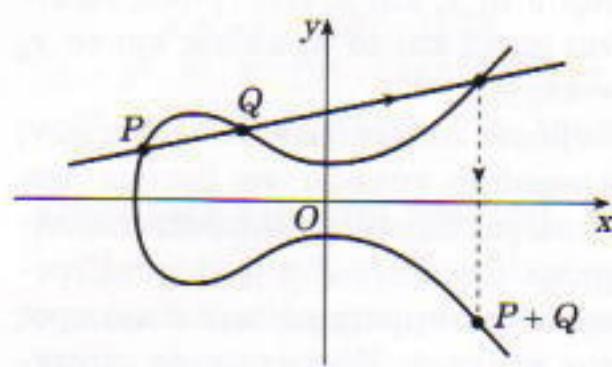
Τι συμβαίνει σε μια ελλειπτική καμπύλη; Πρώτα απ' όλα, η πρόσθεση σημείων είναι αντιμεταθετική. Πράγματι, για να βρούμε το  $Q + P$  ξεκινάμε από την ίδια ευθεία όπως και για το  $P + Q$ . Συνεπώς,  $Q + P = P + Q$ .

Η προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης σημείων μιας ελλειπτικής καμπύλης ισχύει επίσης, αλλά η απόδειξη δεν είναι εύκολη. Με τη βοήθεια ενός σχεδίου μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία αυτού του γεγονότος.

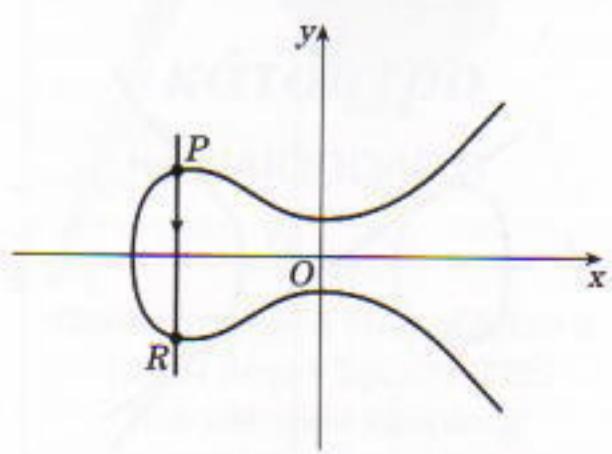
Ας στραφούμε τώρα στο γράφημα της ύπαρξης του ουδέτερου στοιχείου: ενός σημείου  $E$  της καμπύλης τέτοιου, ώστε  $P + E = P$  για κάθε άλλο σημείο  $P$  της καμπύλης. Πώς μπορούμε να βρούμε ένα τέτοιο σημείο; Ας παρατηρήσουμε το Σχήμα 8. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο  $P$  της καμπύλης. Θέλουμε να βρούμε κάποιο σημείο τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την ευθεία που ενώνει το  $P$  και αυτό το «κάποιο» σημείο, θεωρήσουμε την τομή της με την καμπύλη και πάρουμε το συμμετρικό της τομής ως προς τον άξονα  $x$ , να επιστρέψουμε στο σημείο  $P$ . Έστω  $R$  το συμμετρικό του σημείου  $P$  ως προς τον άξονα  $x$ . Έπειται ότι η ευθεία που διέρχεται από το  $P$  και το «κάποιο» σημείο πρέπει να διέρχεται από τα  $P$  και  $R$ , πράγμα που ισοδυναμεί με το ότι είναι κάθετη. Επο-



Σχήμα 6



Σχήμα 7



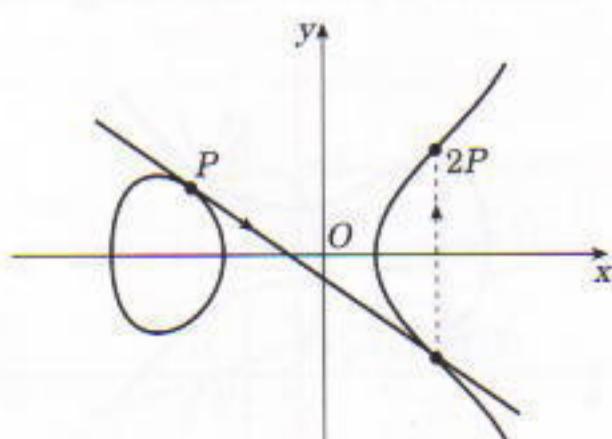
Σχήμα 8

μένως, αν υπάρχει ένα σημείο  $E$  τέτοιο που  $P + E = P$ , δεν μπορεί να ανήκει στο επίπεδο, διότι πρέπει να βρίσκεται ταυτόχρονα στην καμπύλη και στην κάθετη ευθεία.

Αφού δεν υπάρχει τέτοιο σημείο  $E$  (αλλά το χρειαζόμαστε απαραιτήτως), μπορούμε να το επισυνάψουμε απλώς στο επίπεδο και να το ονομάσουμε σημείο στο άπειρο. Ποιες ιδιότητες πρέπει να έχει; Κάθε κάθετη ευθεία τείνει στο άπειρο προς δύο κατευθύνσεις: προς τα πάνω και προς τα κάτω. Απαιτούμε όλα αυτά τα άπειρα σημεία να αντιστοιχούν στο ίδιο και μοναδικό σημείο  $E$ . Με άλλα λόγια, θα θεωρήσουμε ότι το  $E$  είναι το σημείο τομής όλων των κάθετων ευθειών. Αυτή η απαίτηση ορίζει ορθώς το σημείο  $E$ , το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης. Βάσει του ορισμού του  $E$ , μια κάθετη ευθεία που διέρχεται από το  $P$  διέρχεται και από το  $E$ . Επομένως, το  $R$ , το δεύτερο σημείο τομής της ελλειπτικής καμπύλης με αυτή την ευθεία, ικανοποιεί τη σχέση  $P + R = E$ , και συνεπώς είναι το αντίθετο του  $P$ . Από την άλλη πλευρά, το  $R$  είναι το συμμετρικό του  $P$  ως προς τον άξονα  $x$ . Επομένως, κάθε σημείο  $P$  της καμπύλης έχει ένα αντίθετο  $-P = R$ . Άρα, επαληθεύομε ότι η πρόσθεση των σημείων μιας ελλειπτικής καμπύλης ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της πρόσθεσης αριθμών.

Πώς θα υπολογίσουμε το  $P + P$ ? Οταν τα σημεία ήταν διαφορετικά, φέρναμε μια τέμνουσα. Τώρα που συμπίπτουν θα φέρουμε μια εφαπτόμενη (Σχήμα 9).

Τι ισχύει για το  $3P$ ? Είναι πολύ απλό: προσθέτουμε το  $2P$  και το  $P$ . Παρομοίως,  $4P = 3P + P$ ,  $5P = 4P + P$ , κ.ο.κ.



Σχήμα 9

### Αναζήτηση ρητών σημείων

Εξοπλισμένοι πλέον με την πράξη της πρόσθεσης σημείων θα αναζητήσουμε τα ρητά σημεία. Έστω  $P = (x_1, y_1)$  και  $Q = (x_2, y_2)$  δύο ρητά σημεία της ελλειπτικής καμπύλης  $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ , όπου τα  $a, b$  και  $c$  είναι ακέραιοι, και έστω ότι η ευθεία που διέρχεται από τα  $P$  και  $Q$  τέμνει την καμπύλη σε ένα τρίτο σημείο  $R = (x_3, y_3)$ . Τότε και το  $R$  είναι ρητό σημείο.

Η απόδειξη της πρότασης δεν είναι καθόλου δύσκολη. Πράγματι, αν η ευθεία ορίζεται από την εξίσωση

$$y = kx + d, \quad (7)$$

τότε τα  $k$  και  $d$  πρέπει να είναι ρητοί, διότι μπορούμε να τα εκφράσουμε συναρτήσει των συντεταγμένων  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$  των σημείων  $P$  και  $Q$  χρησιμοποιώντας τους τύπους

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$d = y_1 - kx_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την (7) για να αντικαταστήσουμε το  $y$  στην εξίσωση της ελλειπτικής καμπύλης, παίρνουμε την επόμενη τριτοβάθμια εξίσωση ως προς  $x$  με ρητούς συντελεστές:

$$(kx + d)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

η οποία μπορεί να γραφτεί ως

$$x^3 + (a - k^2)x^2 + (b - 2kd)x + c - d^2 = 0.$$

Από τη σχέση μεταξύ των ριζών και των συντελεστών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης έπεται ότι

$$x_1 + x_2 + x_3 = k^2 - a.$$

Αφού τα  $x_1$  και  $x_2$  είναι ρητοί, θα είναι ρητός και το  $x_3$  καθώς και το  $y_3 = kx_3 + d$ .

Βάσει αυτών των συλλογισμών, μπορούμε εύκολα να βρούμε τον τύπο για τις συντεταγμένες του σημείου  $P + Q$ . Το  $P + Q$  είναι εξ ορισμού το συμμετρικό του  $R$  ως προς τον άξονα  $x$ . Επομένως, οι συντεταγμένες ( $u, v$ ) του σημείου  $P + Q$

δίνονται από τους τύπους

$$u = k^2 - a - x_1 - x_2$$

και

$$v = -ku - d = -(k(u - x_1) + y_1).$$

Αν αντικαταστήσουμε τα  $k$  και  $d$  με τις εκφράσεις που βρήκαμε προηγουμένως, θα καταλήξουμε στις

$$u = \frac{(y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} - (a - x_1 - x_2), \quad (8)$$

$$v = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 - u) - y_1.$$

Προφανώς, όταν  $x_1 = x_2$ , αυτοί οι τύποι είναι άνευ νοήματος. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να αντικαταστήσουμε την εξίσωση (7) της τέμνουσας με την εξίσωση μιας εφαπτομένης και να επαναλάβουμε τους συλλογισμούς μας. Στο τέλος παίρνουμε

$$u = -2x_1 + a - \left( \frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1} \right), \quad (9)$$

$$v = y_1 + \frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1} (u - x_1)$$

Έτσι, αν γνωρίζουμε ένα τουλάχιστον ρητό σημείο  $P$  μιας ελλειπτικής καμπύλης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους ανωτέρω τύπους για να υπολογίσουμε τα  $2P$ ,  $3P$ , κ.ο.κ. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η καμπύλη δίνεται από την εξίσωση  $y^2 = x^3 - 2$  και  $P = (3, 5)$ . Τότε μπορούμε να βρούμε το νέο ρητό σημείο

$$2P = \left( \frac{129}{100}, -\frac{383}{1000} \right).$$

Μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τα  $3P$ ,  $4P$ , κ.ο.κ. Επισημαίνουμε ότι οι αριθμοί που αντιμετωπίζουμε αυξάνονται ταχύτατα. Αν  $u_n$  συμβολίζει την πρώτη συντεταγμένη του σημείου  $nP$ , τότε

$$u_1 = 3.$$

$$u_2 = \frac{129}{100},$$

$$u_3 = \frac{164323}{29241},$$

$$u_4 = \frac{2340922881}{58675600},$$

$$u_5 = \frac{307326105747363}{160280942564521}.$$

Οι επόμενες συντεταγμένες αυξάνονται ακόμα ταχύτερα. Για παράδειγμα, ο αριθμητής του  $u_{11}$  έχει 71 ψηφία.

Δεν είναι γνωστή μια γενική διαδικασία που θα μας επέτρεπε να βρούμε όλες τις ρητές λύσεις της εξίσωσης  $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Στο παράδειγμα που εξετάσαμε, απλώς μαντέψαμε την πρώτη λύση (3, 5) της εξίσωσης  $y^2 = x^3 - 2$ . Για τη γενική περίπτωση, δεν είναι γνωστή κάποια καθολική μέθοδος ανεύρεσης μιας πρώτης λύσης. Η ανακάλυψη κάποιας αποτελεσματικής διαδικασίας για τον εντοπισμό μίας αρχικής ρητής λύσης μιας ελλειπτικής εξίσωσης αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Όμως, αν γνωρίζουμε μία λύση, μπορούμε να βρούμε και άλλες μέσω των τύπων (8) και (9).

## Τάξη των σημείων μιας ελλειπτικής καμπύλης

Θεωρούμε την ακολουθία των σημείων  $nP$ , των «πολλαπλασίων» του σημείου  $P$ . Πρέπει να διακρίνουμε δύο ουσιωδώς διαφορετικές περιπτώσεις. Πρώτα απ' όλα, είναι πιθανό σε κάποιο πεπερασμένο στάδιο  $n$  να καταλήξουμε σε ταυτότητα. Με άλλα λόγια, μπορεί να υπάρχει κάποιος αριθμός  $n$  τέτοιος, ώστε  $nP = E$ . Αν  $mP \neq E$  για όλα τα  $m < n$ , τότε λέμε ότι το σημείο  $P$  έχει πεπερασμένη τάξη  $n$ . Για παράδειγμα, το σημείο  $P(0, 2)$  της καμπύλης  $y^2 = x^3 + 4$  έχει τάξη 3, το σημείο  $P(2, 3)$  της καμπύλης  $y^2 = x^3 + 1$  έχει τάξη 6, και το σημείο  $P(3, 8)$  της καμπύλης  $y^2 = x^3 - 43x + 166$  έχει τάξη 7. Προκύπτει τώρα το ερώτημα: Πόσα σημεία πεπερασμένης τάξεως υπάρχουν και ποιες είναι οι τάξεις τους;

Το 1976, ο αμερικανός μαθηματικός B. Mazur<sup>2</sup> κατέληξε σε ένα ε-

ξαιρετικό αποτέλεσμα στο εν λόγω πεδίο. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι  $an P$  είναι ένα ρητό σημείο  $n$ -οστής τάξεως, τότε  $n \leq 10$  ή  $n = 12$ . Από την άλλη πλευρά, σε μια ελλειπτική καμπύλη υπάρχουν 16 το πολύ ρητά σημεία πεπερασμένης τάξεως.

Η δεύτερη περίπτωση που πρέπει να εξετάσουμε είναι όταν τα σημεία  $P, 2P, 3P, 4P$  κ.ο.κ. είναι όλα διαφορετικά. Το 1901, ο διάσημος γάλλος μαθηματικός Henri Poincaré (1854-1912) διατύπωσε την υπόθεση ότι για κάθε ελλειπτική καμπύλη υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων  $P_1, \dots, P_r$  τέτοια, ώστε κάθε ρητό σημείο  $P$  της καμπύλης να εκφράζεται συναρτήσει αυτών —δηλαδή, μπορούμε να το παραστήσουμε με τη μορφή

$$P = n_1 P_1 + \dots + n_r P_r + Q,$$

όπου  $n_1, \dots, n_r$  είναι ακέραιοι που ορίζονται μονοσήμαντα από το  $P$ , και  $Q$  είναι ένα σημείο πεπερασμένης τάξεως. Επίσης, είναι αδύνατον να εκφράσουμε κάποιο από τα σημεία  $P_1, \dots, P_r$  ως συνδυασμό των υπολοίπων. Ο αριθμός  $r$  είναι γνωστός ως τάξη της καμπύλης.

Το 1922, ο νεαρός άγγλος μαθηματικός L. Mordell απέδειξε την εικασία του Poincaré, η επιχειρηματολογία του όμως δεν έδινε κάποια κατασκευαστική μέθοδο υπολογισμού της τάξεως. Ακόμη και σήμερα δεν είναι γνωστό αν υπάρχουν ελλειπτικές καμπύλες οσοδήποτε μεγάλης τάξεως. Πάντως, έχει αποδειχθεί ότι η τάξη μιας καμπύλης μπορεί να εκτιμηθεί από τους συντελεστές  $a, b$  και  $c$  της εξίσωσης  $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$  και, επομένως, μια καμπύλη μεγάλης τάξεως πρέπει να έχει μεγάλους συντελεστές. Για παράδειγμα, μια από τις καμπύλες τάξεως  $r \geq 8$  έχει

$$a = -3^2 \cdot 1487 \cdot 1873,$$

$$b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 151 \cdot 14551 \cdot 33353,$$

$$c = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 151^2 \cdot 193 \cdot 273 \cdot 156307.$$

## Καμπύλες τυχαίου βαθμού

Σε αυτό το άρθρο περιοριστήκαμε σε καμπύλες (και επομένως, διοφαντικές εξισώσεις) δευτέρου και τρίτου βαθμού. Τι συμβαίνει για βαθ-

μούς  $n \geq 4$ ? Σε αυτή την περίπτωση είναι φυσικό να ενδιαφερθούμε για τις μη εκφυλισμένες καμπύλες  $n$ -οστού βαθμού (ένας τυπικός εκπρόσωπος τέτοιων καμπυλών είναι η  $x^n + y^n = 1$ ). Όταν  $n > 3$ , η εικόνα αλλάζει δραματικά. Από το 1931 ήδη, ο Mordel διατύπωσε την εικασία ότι το πλήθος των ρητών σημείων σε τέτοιες καμπύλες είναι πάντοτε πεπερασμένο. Για διάστημα μεγαλύτερο του μισού αιώνα, η υπόθεση του Mordell παραμένει στο επίκεντρο των μαθηματικών μελετών σε ολόκληρο τον κόσμο. Οι ρώσοι μαθηματικοί I.R. Shafarevich, Y.I. Manin, S.Y. Arakelov, A.N. Parshin και Y.G. Zarhin συνέβαλαν στη λύση του προβλήματος. Την τελική όμως λύση ανακάλυψε, το 1983, ο νεαρός γερμανός μαθηματικός Gerd Faltings. Γι' αυτό το επίτευγμά του, το Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο, στο Μπέρκλεϋ της Καλιφόρνιας, τον ετίμησε το 1986 με το σπουδαιότερο μαθηματικό βραβείο, απονέμοντας του το μετάλλιο Fields.\*

\* Δείτε και το άρθρο «Το τελευταίο θεώρημα του Fermat» στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1997. (Σ.τ.μ.)



Πανεπιστημίου & Πεσμαζόγλου 5,  
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785  
Web site: www.katoptro.gr  
e-mail: katoptro@otenet.gr

2. Δείτε το άρθρο του «Γόνιμες απαντήσεις» στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1997.

# Γνωρίζετε πραγματικά την φύση του χρόνου;

**H**ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ φύσης του χρόνου απασχολεί την ανθρωπότητα χιλιάδες χρόνια. Ακόμη και στις μέρες μας διατυπώνεται πλήθος υποθέσεων γύρω από το ζήτημα. Ξεφυλλίζοντας τα βιβλία εκλαίκευσης της εποικίμης συναντάμε έννοιες όπως «τετραδιάστατος χωρόχρονος», «βέλος του χρόνου», «κύματα χρόνου», «μηχανές του χρόνου», «αναστρεψιμότητα του χρόνου», «καμπύλωση του χώρου και στρέβλωση του χρόνου», και πολλά άλλα παρόμοια.

Ομολογουμένως, προσέγγισα το θέμα με αρκετή ανησυχία και επιφύλαξη —τόσο πολύμορφο και απέραντο μου φαινόταν. Ωστόσο, ορισμένες υποδείξεις από εποικιμονικές αυθεντίες με ενθάρρυναν να συνεχίσω. Ο Νεύτων, για παράδειγμα, έκανε διάκριση ανάμεσα στον «θεοδώρητο» απόλυτο χρόνο και τον σχετικό χρόνο ο οποίος είναι «αυτοπόδεικτος» και «συνήθης» και μπορεί να μετρηθεί με ρολόγια. Ο Richard Feynman πρότεινε πως, αντί να σπάμε το κεφάλι μας αναζητώντας τον ορισμό του χρόνου, πρέπει απλώς να μάθουμε να τον μετράμε σωστά.

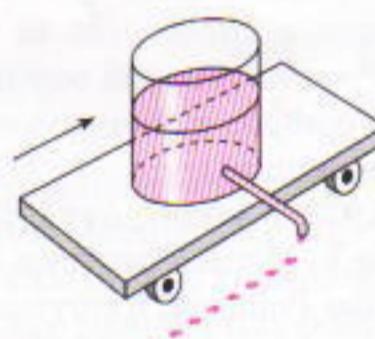
Για το σκοπό αυτό, οι άνθρωποι επινόησαν τα ρολόγια —αυτές τις εκπληκτικές συσκευές των πολλών και διαφορετικών τύπων! Ρολόγια νερού, ηλιακά, μηχανικά, με χαλαζία, ατομικά... Για την κατασκευή τους οι εποικίμονες εντόπισαν κατάλληλες περιοδικές διαδικασίες, επέλεξαν πρότυπα χρόνου και εξοικειώθηκαν με τις μετρήσεις εξαιρετικά μικρών χρονικών διαστημάτων. Είμαστε λοιπόν, εν τέλει, σε θέση να χειριστούμε το πρόβλημα του χρόνου;

Ας μην καταλήγουμε τόσο εύκολα σε συμπεράσματα: ο χρόνος εξακολουθεί να κρύβει πολλά μυστήρια που η λύση τους θα σηματοδοτούσε σημαντικές προόδους της εποικίμης. Προς το παρόν, στο πλαίσιο του «συνήθους» χρόνου, ας εξετάσουμε κατά πόσον αυτός αποτελεί «κοινό τόπο», ακόμη και στα σχολικά προβλήματα φυσικής.



## Ερωτήσεις και προβλήματα

- Πώς πρέπει να κατασκευαστεί ένα ηλιακό ρολόι ώστε να παρέχει σωστές ενδείξεις κάθε εποχή του χρόνου;
- Δοχείο προσαρμοσμένο πάνω σε καροτσάκι που κινείται με σταθερή ταχύτητα φέρει ακροφύσιο από το οποίο πέφτουν σταγόνες μελάνης (πρόκειται για ένα πασίγνωστο φυσικό πείραμα) (Σχήμα 1). Είναι πραγματικά ίσες οι αποστάσεις ανάμεσα στις σταγόνες που πέφτουν πάνω στο τραπέζι;

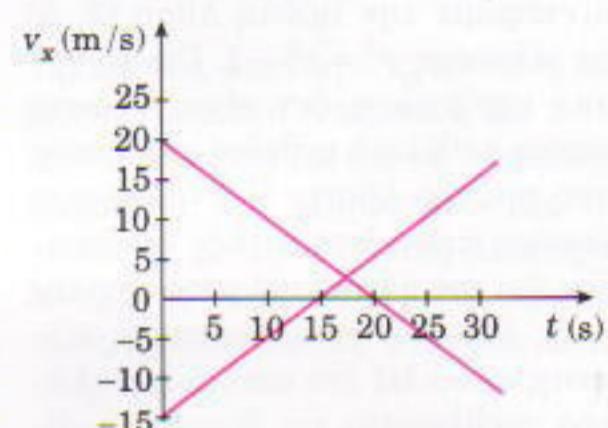


Σχήμα 1

- Δύο βάρκες ταξιδεύουν σε ένα ποτάμι προς την ίδια κατεύθυνση αλλά με διαφορετικές ταχύτητες. Κάποια στιγμή διασταυρώνονται με μία σχεδία που πλέει κατά τη φορά του ρεύματος. Έπειτα από μισή ώρα οι δύο βάρκες αντιστρέφουν τη φορά κίνησή τους και συνεχίζουν να ταξιδεύουν, καθεμιά με την προηγούμενη ταχύτητά της (ως προς το ποτάμι). Ποια βάρκα θα συναντήσει πρώτη τη σχεδία;

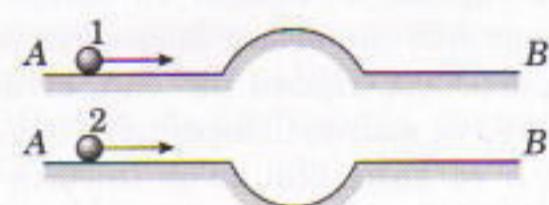
- Το Σχήμα 2 δείχνει την εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο για δύο σώματα που κινούνται στον άξονα x. Ποια είναι η φυσική σημασία της τομής των δύο ευθειών; Είναι δυνατόν με τη βοήθεια του σχήματος να καθορίσουμε πότε θα συναντηθούν τα δύο σώματα;

- Δύο σφαίρες που γλιστρούν



Σχήμα 2

πάνω στις επφάνεις οι οποίες εικονίζονται στο Σχήμα 3 περνούν ταυτόχρονα και με την ίδια ταχύτητα από τα σημεία A. Θα φτάσουν ταυτόχρονα στα σημεία B; Αγνοήστε την τριβή.



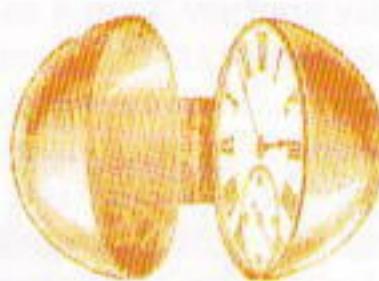
Σχήμα 3

- Σώμα πέφτει από το παράθυρο ενός τρένου. Είναι ή όχι ίδιος ο χρόνος που διαρκεί η ελεύθερη πτώση του σώματος από το ίδιο ύψος στις τρεις παρακάτω περιπτώσεις: το τρένο (α) βρίσκεται σε ηρεμία, (β) κινείται με σταθερή ταχύτητα και (γ) κινείται με σταθερή επιτάχυνση.

- Σώμα βάλλεται υπό γωνία. Η άνοδος ή η κάθοδός του διαρκεί περισσότερο χρόνο, δεδομένου ότι δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα;

- Μια μύγα ακουμπά στον πυθμένα ενός κλειστού σωλήνα. Ο σωλήνας πέφτει ελεύθερα, παραμένοντας διαρκώς σε κατακόρυφη θέση.

# ΑΤΙΚΑ ΤΟ ΧΡÓΝΟ;



ανείς δεν με ρωτά, γνωρίζω.  
ποιον που απορεί, δεν γνωρίζω.

—Ιερός Αυγουστίνος

Πώς θα μεταβληθεί ο χρόνος της πτώσης αν κατά τη διάρκειά της η μύγα πετάξει από τον πυθμένα προς την κορυφή του σωλήνα;

9. Ένα μακρύ σκοινί είναι περασμένο από μια ακίνητη τροχαλία. Δύο γυμναστές του ίδιου βάρους κρέμονται από τις δύο άκρες του σκοινιού και απέχουν εξίσου από το έδαφος. Ο πρώτος γυμναστής αρχίζει να σκαρφαλώνει με σταθερή ταχύτητα ως προς το σκοινί, ενώ ο δεύτερος αρχίζει να κατεβαίνει με το μισό της ταχύτητας του πρώτου. Ποιος θα φτάσει πρώτος στην κορυφή της τροχαλίας;

10. Επηρεάζεται το βάρος μιας κλεψύδρας από τη ροή της άμμου στο εσωτερικό της;

11. Η Μόλλυ και η Έιμη έκαναν πατινάζ σε ένα παγωμένο ποτάμι, γλιστρώντας από τη μία όχθη στην άλλη, αφού πρώτα είχαν αποκτήσει ορισμένη αρχική ταχύτητα. Κάποια στιγμή η Μόλλυ σταμάτησε και ο πάγος ράγισε κάτω από τα πόδια της. Γιατί; Υποθέστε ότι ο πάγος είχε παντού το ίδιο πάχος.

12. Βρείτε την περίοδο μαθηματικού εκκρεμούς μέσα σε διαστημόπλοιο του οποίου οι μηχανές έχουν σβήσει.

13. Ένα βαρίδι δεμένο σε κακόρυφο ελαστικό νήμα εκτελεί ταλάντωση. Πώς μεταβάλλεται η περίοδος ταλάντωσης αν αναρτήσουμε το βαρίδι από το ίδιο νήμα διπλωμένο στα δύο;

14. Γιατί τα ραντάρ δεν εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα συνεχόμενα αλλά εκπέμπουν παλμούς βραχύτατης διάρκειας;

15. Γιατί η λάμψη της αστραπής γίνεται ορατή για πολύ μικρό χρονικό διάστημα ενώ ο ήχος της βροντής διαρκεί πολύ περισσότερο;

## Μικροπειραματισμοί

Περάστε ένα σκοινί από ένα άγκιστρο στο ταβάνι, προσαρμόστε ένα βαρίδι στο ένα άκρο του και απομακρύνετε το από τη θέση ισορροπίας ώστε να αρχίσει να ταλαντώνεται με μικρό πλάτος. Στη συνέχεια, αρχίστε να τραβάτε σταδιακά το άλλο άκρο του σκοινιού ώστε σιγά σιγά το βαρίδι να αρχίσει να ανεβαίνει. Πώς θα μεταβληθεί η περίοδος ταλάντωσής του;

## Είναι ενδιαφέρον ότι...

...από τον 2ο αιώνα π.Χ. ήδη ο έλληνας αστρονόμος Ίππαρχος είχε κατορθώσει να υπολογίσει τη διάρκεια του γήινου έτους με εξαιρετική ακρίβεια: η εκτίμησή του υπερβαίνει τη σωστή κατά 6 μόνο λεπτά της ώρας.

...κατά τη διάρκεια της πρώτης χιλιετίας μ.Χ. οι Κινέζοι διόρθωσαν το ημερολόγιό τους εβδομήντα φορές ενώ τροποποίησαν δεκατρείς φορές το σύστημα χρονολόγησης που χρησιμοποιούσαν.

...κάποτε κατασκεύαστηκε ένα ηλιακό ρολόι που περιελάμβανε ένα τουφέκι και ένα φακό. Ο φακός εστίαζε τις ακτίνες του Ήλιου στο εμπύρευμα του όπλου προκαλώντας την εκπυρσοκρότησή του σε δεδομένη χρονική στιγμή. Με τον τρόπο αυτό, η ώρα γινόταν αυτομάτως γνωστή σε ολόκληρη τη γειτονική περιοχή.

...το ρολόι νερού που κατασκεύασαν οι αρχαίοι Έλληνες —η γνωστή κλεψύδρα— μετρούσε το χρόνο σύμφωνα με τη στάθμη του νερού σε ένα δοχείο που έφερε μικρή οπή

και από την οποία έσταζε το νερό. Για να επιτυγχάνεται σταθερή ροή νερού, το σχήμα του δοχείου πρέπει να ικανοποιεί μια εξίσωση τετάρτου βαθμού.

...στον τοίχο ενός ωρολογοποιείου κάπου στις Άλπεις υπήρχε η εξής επιγραφή: «Αυτό το ρολόι δείχνει τη σωστή ώρα». Ο ωρολογοποιός διόρθωνε καθημερινά το ρολόι σύμφωνα με τον κτύπο της καμπάνας του μοναστηριακού ουράνιου παρατηρητηρίου. Όπως αποδείχθηκε όμως, οι μοναχοί καθόριζαν την ώρα παρατηρώντας όχι τον ουρανό, αλλά το ρολόι του ωρολογοποιού.

...το 1232 ο αυτοκράτορας Φρειδερίκος ο Β' έλαβε ως δώρο από τον σουλτάνο Αλ-Καμίλ της Αιγύπτου ένα ρολόι με «ελατήρια και αντίβαρα». Εκτός από την ώρα έδειχνε και τις κινήσεις του Ήλιου, της Σελήνης, της Γης, των πλανητών και των αστρών.

...ο Christiaan Huygens έλυσε ένα σημαντικό πρόβλημα της ωρολογοποίας μόλις το 1659: Το κούρδισμα του ρολογιού μπορούσε να γίνει με ρύθμιση του μήκους ενός εκκρεμούς. Ωστόσο, πολλοί επιχειρήσαν να αμφισβήτησουν το προβάδισμα του Huygens, οι Ιταλοί μάλιστα επέμεναν ότι το ρολόι-εκκρεμές αποτελούσε εφεύρεση του ίδιου του Γαλιλαίου.

...το 1714 η κυβέρνηση της Αυτού Μεγαλειότητος της Μεγάλης Βρετανίας θέσπισε χρηματικό έπαθλο προκειμένου να κατασκευαστεί ένα ναυτικό χρονόμετρο για τον ακριβή προσδιορισμό του γεωγραφικού μήκους. Το ποσό του βραβείου θα καθορίζοταν από το βαθμό ακριβείας της συσκευής.

...τον 17ο αιώνα οι αρχές των μεταβολών έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της οπτικής και της μηχανικής. Οι γνωστότερες από αυτές είναι η αρχή του Pierre de Fermat, σύμφωνα με την οποία το φως ακολουθεί πάντοτε τη διαδρομή που αντιστοιχεί στον μικρότερο δυνατό χρόνο, και η λύση του Johann Bernoulli στο πρόβλημα της βραχυστόχρονης, της καμπύλης ταχύτερης καθόδου.

...ο διάσημος ρώσος αυτοδίδακτος εφευρέτης Ivan Kulibin αφιέρωσε δύο χρόνια προσπαθειών στην κατασκευή ενός μοναδικού ρολογιού σε σχήμα αυγού. Το ρολόι αποτελούνταν από 427 τμήματα, ορατά μόνο με τη βοήθεια μεγεθυντικού φακού, και χτυπούσε κάθε δεκαπέντε λεπτά, ενώ περιελάμβανε και μια ορχήστρα μινιατούρα που έπαιζε μουσική κάθε μία ώρα.

...οι θάλαμοι φυσαλλίδων, που χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση στοιχειωδών σωματιδίων, ήδη από τη δεκαετία του 1950 κατέστησαν δυνατόν τον καθορισμό του μέσου χρόνου ζωής ενός σωματιδίου με ακρίβεια περίπου  $10^{-11}$  s.

...μια από τις πιο θαυμαστές προβλέψεις της θεωρίας της σχετικότητας, η διαστολή του χρόνου εντός βαρυτικού πεδίου, αποδείχθηκε πειραματικά μόλις το 1960. Στη σχετική μέτρηση επιτεύχθηκε η απίστευτη ακρίβεια του  $3 \cdot 10^{-12}$  τοις εκατό, και το πείραμα πήρε τη θέση του στο βιβλίο των ρεκόρ της σύγχρονης φυσικής.

...το μικρότερο χρονικό διάστημα που εμφανίζεται σε πειράματα δεν υπερβαίνει τα  $3 \cdot 10^{-27}$  s. Τόσο χρόνο χρειάζεται το φως για να διανύσει τη διάμετρο του ηλεκτρονίου, απόσταση της τάξεως των  $10^{-18}$  m.

...μέχρι πρόσφατα, το ακριβέστερο ατομικό χρονόμετρο είχε κατασκευαστεί στις Ηνωμένες Πολιτείες: ήταν σε θέση να μετρήσει χρονικό διάστημα τριών εκατομμυρίων ετών με ακρίβεια 1 δευτερολέπτου. Ωστόσο, η Γερμανία ετοιμάζεται να καταρρίψει αυτό το ρεκόρ, έχοντας προαναγγείλει τη μέτρηση ενός δισεκατομμυρίου ετών με την ίδια ακρίβεια. □

—A. Leonovich

### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

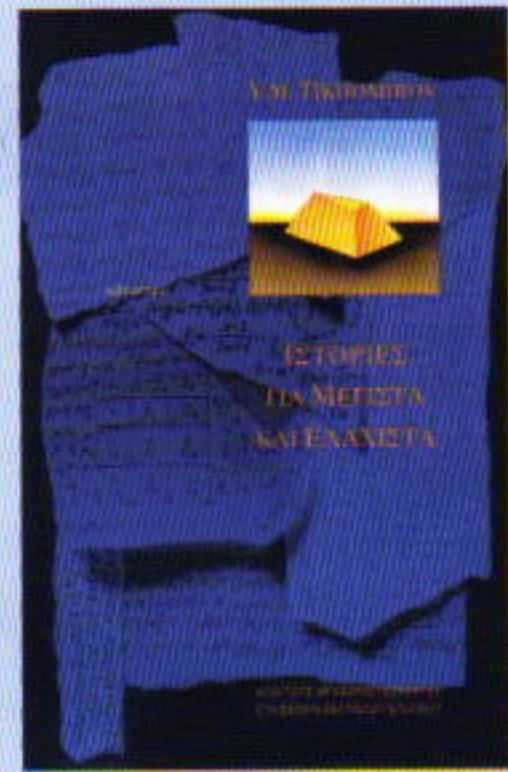
- V. Babovic, «Εξομολογήσεις ενός λάτρη των ρολογιών», Νοέμβριος / Δεκέμβριος 1996.
- A. Mikhailov, «Η μακρά πορεία προς το γεωγραφικό μήκος», Μάιος / Ιούνιος 1997.
- V. Kuznetsov, «Ένα ρολόι κουρδισμένο για πάντα», Ιούλιος / Αύγουστος 1997.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 29

ταξύ των σημείων 3 και 4 το δυναμικό δεν μεταβάλλεται. Το σημείο 4 αντιστοιχεί στο θετικό ηλεκτρόδιο του δεύτερου στοιχείου, που έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη  $\mathcal{E}_2$ . Όταν περνάμε από το θετικό ηλεκτρόδιο στον ηλεκτρολύτη, είναι ουσιαστικά σαν να κατεβαίνουμε με τον ανελκυστήρα, οπότε το δυναμικό ελαττώνεται και το ηλεκτρικό πεδίο παράγει έργο που το καταναλώνουν οι ανθιστάμενες εξωγενείς δυνάμεις στο ηλεκτρικό στοιχείο. Το ίδιο συμβαίνει και όταν μεταβαίνουμε από τον ηλεκτρολύτη στο αρνητικό ηλεκτρόδιο. Κατά τη διέλευσή τους μέσω του στοιχείου, τα φορτία πρέπει να ξεπεράσουν και το εμπόδιο της εσωτερικής αντίστασης  $r_2$ , όποτε έχουμε μια πρόσθετη πτώση του δυναμικού κατά  $Ir_2$ . Ένα βολτόμετρο συνδεδεμένο με τους ακροδέκτες αυτού του ηλεκτρικού στοιχείου θα αναγράφει τάση  $V_{45} = \mathcal{E}_2 + Ir_2$ . Μεταξύ των σημείων 5 και 6 το δυναμικό παραμένει αμετάβλητο, ενώ πέφτει κατά  $IR_2$  κατά μήκος του αντιστάτη  $R_2$ . Έτσι, φτάνουμε στο αρνητικό ηλεκτρόδιο (σημείο 8) του στοιχείου με τη μεγαλύτερη ηλεκτρεγερτική δύναμη  $\mathcal{E}_1$ . Εκεί σημειώνεται αρχικά μεγάλη άνοδος του δυναμικού, την οποία διαδέχεται μια πτώση κατά μήκος της εσωτερικής αντίστασης  $r_1$  και, τέλος, έχουμε νέα πολύ μεγάλη άνοδο καθώς μεταβαίνουμε από τον ηλεκτρολύτη στο θετικό ηλεκτρόδιο 1.

Αφού λοιπόν διατρέξαμε το κλειστό κύκλωμα, επιστρέψαμε στην αρχική τιμή του δυναμικού. Συνέπως, το άθροισμα των «ανυψώσεων» δυναμικού ισούται με το άθροισμα των «πτώσεων» δυναμικού. Έτσι, το έργο που παράγεται όταν φορτίο διατρέχει ένα κλειστό κύκλωμα και επιστρέφει στη αφετηρία του ισούται με μηδέν:  $-IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 - IR_2 - Ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0$ , ή  $I(R_1 + R_2 + r_1 + r_2) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ . Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως νόμος του Ohm για το κλειστό κύκλωμα, ή ως 2ος κανόνας του Kirchhoff. Όπως διαπιστώνουμε, αποτελεί άμεση απόρροια των ιδιοτήτων του ηλεκτρικού πεδίου. □

### ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



V.M. Tikhomirov

### ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

Από τους αρχαίους γεωμέτρες  
στη θεωρία βέλτιστου ελέγχου

Οι Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα είναι ένα βιβλίο που θα ενθουσιάσει κάθε λάτρη των μαθηματικών. Γραμμένο πρωτίστως για τους μαθητές των τελευταίων τάξεων της μέσης εκπαίδευσης, αποτελεί μια εξαιρετικά βατή εισαγωγή στο πεδίο εκείνο των μαθηματικών που ασχολείται με τα προβλήματα ακροτάτων.

Στο πρώτο μέρος, ο συγγραφέας επιλέγει μερικά από τα πλέον περίφημα προβλήματα ακροτάτων που ανέκυψαν στα μαθηματικά και τη φυσική και τα παρουσιάζει λεπτομερώς μαζί με τις λύσεις που έδωσαν κορυφαίες μορφές της ιστορίας των μαθηματικών όπως ο Ήρων, ο Αρχιμήδης, ο Fermat, ο Leibniz, ο Νεύτων...

Στο δεύτερο μέρος, αφού εισαχθούν τα απαραίτητα στοιχεία του απειροστικού λογισμού, ο συγγραφέας επιστρέφει σε όλα τα προηγουμένα προβλήματα, για να δεξει πώς τα νεοαποκτηθέντα μαθηματικά δύπλα επιτρέπουν μια συστηματική αντιμετώπιση απλουστεύοντας το έργο της επίλυσης.

Σελ.: 210, 17 x 25 εκ., 6.800 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΞΑΤΟΠΤΡΟ

# Ο μέγας νόμος

«...Θα πρέπει να σταθούμε για λίγο με δέος μπροστά στη Φύση —μια Φύση που υπακούει με τόση πληρότητα και καθολικότητα σε μια τόσο σαφή και απλή αρχή όπως ο νόμος της παγκόσμιας έλξης.»

—Richard Feynman

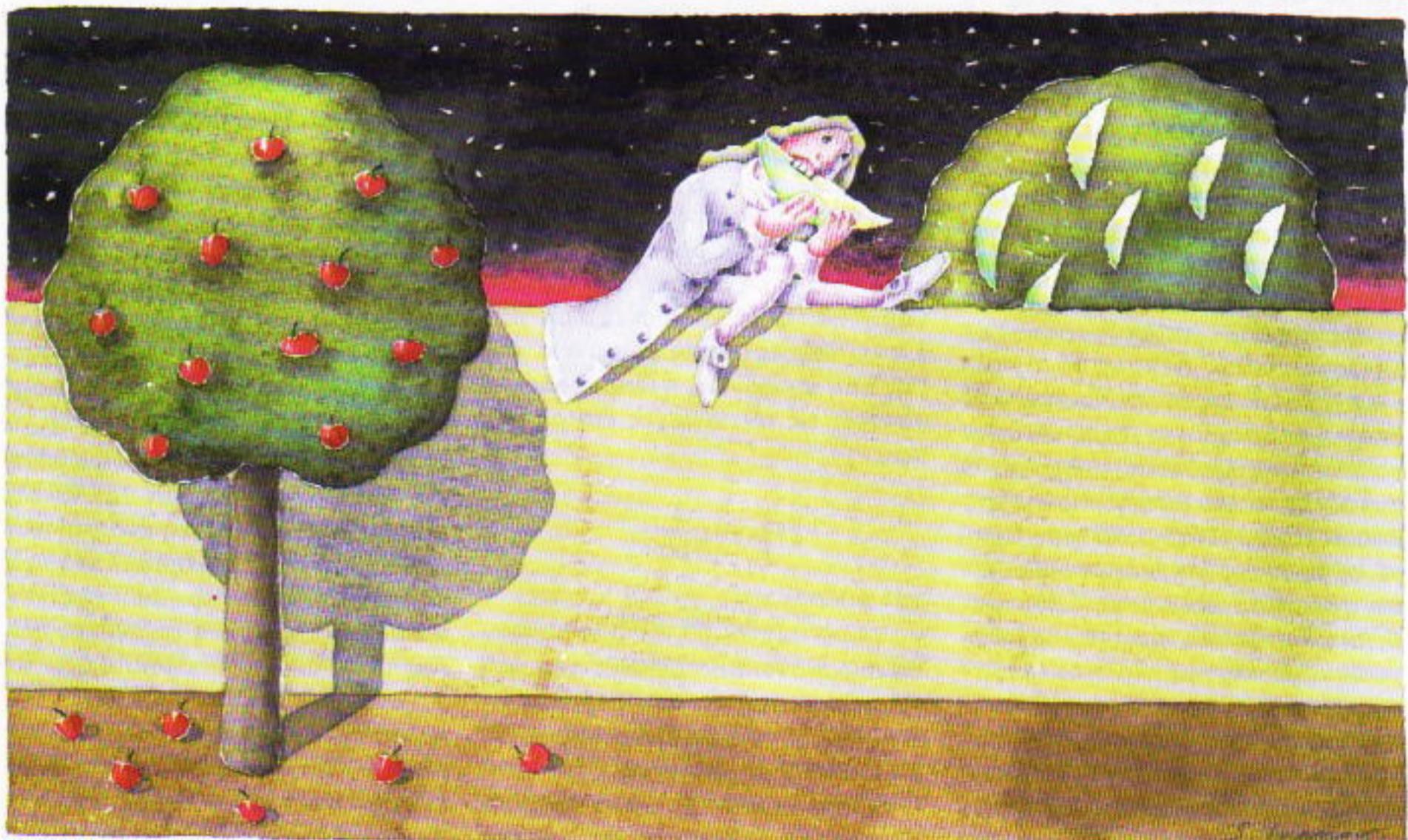
V. Kuznetsov

**T**Η ΔΙΕΤΓΙΑ 1665-66 ΜΕΓΑΛΗ ΣΥΜΦΟΡΑ έπληξε τη Μεγάλη Βρετανία: μια φονική επιδημία πανώλους έσπειρε το θάνατο στον πληθυσμό της χώρας. Οι κάτοικοι των μεγάλων πόλεων εγκατέλειπαν άρον άρον τα σπίτια τους αναζητώντας σωτηρία στα μικρά χωριά. Αυ-

τός υπήρξε και ο λόγος που ανάγκασε τον νεαρό τότε φιλόσοφο και μαθηματικό Ισαάκ Νεύτωνα να φύγει από το Λονδίνο και να επιστρέψει στο Γούλσθορπ, τη γενέθλια πόλη του. Εκείνη την περίοδο τον είχε απορροφήσει το πρόβλημα της περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη.

Ποια δύναμη την κρατούσε στην τροχιά της; Διότι, όπως έδειχναν οι συλλογισμοί του, αν δεν υπήρχε κάποια ελκτική δύναμη, η Σελήνη θα είχε εγκαταλείψει προ πολλού τη Γη.

Δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε ποια πορεία ακολούθησαν οι



συλλογισμοί του Νεύτωνα. Απλούστατα, θεώρησε ένα μήλο ως αστρονομικό σώμα. Το μήλο πέφτει πάντα προς τα κάτω. Γιατί; Φαίνεται πώς το έλκει η Γη. Άλλα η ελκτική δύναμη που ασκεί ένα σώμα *A* σε κάποιο άλλο *B* πρέπει να είναι ανάλογη της μάζας τού *B*. Εφόσον αληθεύει αυτή η πρόταση, η Γη πρέπει να ασκεί στη Σελήνη μια κολοσσιαία ελκτική δύναμη. Εν πάσῃ περιπτώσει, το αληθινά σπουδαίο συμπέρασμα του Νεύτωνα έγκειται στο ότι τόσο το μήλο όσο και η Σελήνη υπόκεινται στην ίδια ελκτική δύναμη που ασκεί η Γη. Έτσι, ίσως, συνέλαβε ο Νεύτων το νόμο της παγκόσμιας έλξης.

Ας επιχειρήσουμε έναν υπολογισμό ανάλογο με εκείνον του Νεύτωνα. Η Σελήνη κινείται γύρω από τη Γη διαγράφοντας σχεδόν κυκλική τροχιά και με περίοδο  $T_s$  ίση με 27,3 ημέρες. Η απόσταση μεταξύ Σελήνης και Γης είναι 60 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα  $R_g$  της Γης. Αν ένα αντικείμενο κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα  $v$ , έχει κεντρομόλο επιτάχυνση  $v^2/R$ . Η τροχιά της Σελήνης έχει ακτίνα  $R_s = 384.400$  km, ενώ η τροχιακή ταχύτητά της ισούται με  $v = 2\pi R_s/T_s = 3.680$  km/h, κατά συνέπεια, η κεντρομόλος επιτάχυνσή της είναι  $\gamma = v^2/R_s = 0,0027$  m/s<sup>2</sup>. Γνωρίζουμε όμως ακόμη μία τιμή της επιτάχυνσης που προσδίδει σε ένα σώμα η ελκτική δύναμη της Γης. Πρόκειται για την επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης κοντά στο έδαφος,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, τιμή σαφώς μεγαλύτερη από την κεντρομόλο επιτάχυνση της Σελήνης.

Ο Νεύτων δεν ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε ότι η Γη έχει την ιδιότητα να έλκει τα υπόλοιπα σώματα. Ο συνάδελφος και ανταγωνιστής του Robert Hooke (1635-1703) επιχειρήσε να προσδιορίσει πώς μεταβάλλεται η βαρυτική έλξη με το υψόμετρο. Γι' αυτό το σκοπό, χρησιμοποίησε ένα δυναμόμετρο με ελατήριο (μια από τις εφευρέσεις του), με το οποίο πραγματοποίησε μετρήσεις στην κορυφή ενός λόφου. Ωστόσο, η επιμήκυνση του ελατηρίου που διαπίστωνε εκεί όταν αναρτούσε κάποιο φο-

τίο από το δυναμόμετρο δεν διέφερε από την αντίστοιχη στο επίπεδο της θάλασσας. Παρά ταύτα, ο Νεύτων εξακολουθούσε να πιστεύει ότι η βαρυτική έλξη της Γης πρέπει να ελαττώνεται με την απόσταση από την επιφάνειά της.

Οι εμπειρικοί νόμοι της πλανητικής κίνησης που ανακάλυψε ο Johannes Kepler (1571-1630) βοήθησαν τον Νεύτωνα να συλλάβει τον γνωστό απλό νόμο ο οποίος περιγράφει πώς εξασθενεί η βαρυτική έλξη αυξανομένης της απόστασεως: αν τα κέντρα δύο σφαιρών με ομοιογενώς κατανεμημένες μάζες απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $r$ , τότε η ελκτική δύναμη μεταξύ των δύο σφαιρών ασκείται στην κατεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα κέντρα τους και το μέτρο της είναι ευθέως ανάλογο του γινομένου των μαζών τους  $m_1$  και  $m_2$  και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης  $r$ :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Σ' αυτό το νόμο εμφανίζεται και η σταθερά της παγκόσμιας έλξης  $G$ , η οποία πρέπει να καθοριστεί πειραματικά.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην ελκτική δύναμη που δρα στη Σελήνη. Η απόσταση Γης-Σελήνης είναι 60 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης. Επομένως, κάθε σώμα που τελει υπό την επίδραση της βαρύτητας του πλανήτης μας και απέχει από αυτόν όσο η Σελήνη δέχεται δύναμη 60<sup>2</sup> φορές ασθενέστερη από τι θα δεχόταν στην επιφάνεια της Γης και, προφανώς, η ίδια αναλογία συνδέει τις αντίστοιχες επιταχύνσεις:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{3.600},$$

$$\gamma = 0,0027 \text{ m/s}^2.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα συμφωνεί με την τιμή της κεντρομόλου επιτάχυνσης της Σελήνης που υπολογίσαμε προηγουμένως.

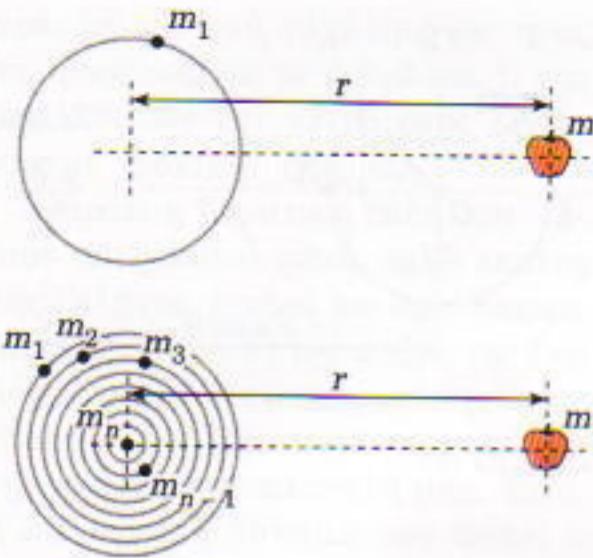
Είδαμε λοιπόν με ποιον τρόπο ο Νεύτων θα μπορούσε, κατ' αρχήν

τουλάχιστον, να ελέγξει την ορθότητα του νόμου της παγκόσμιας έλξης. Ωστόσο, η θεωρητική τιμή της κεντρομόλου επιτάχυνσης της Σελήνης που απέφεραν οι υπολογισμοί του δεν συμφωνούσε απολύτως με την τιμή που προέκυπτε από τα αστρονομικά δεδομένα: κατά την παραμονή του στο Γούλσθορπ, ο Νεύτων αγνοούσε την ακριβή τιμή της ακτίνας της Γης, η οποία, άλλωστε, δεν επρόκειτο να μετρηθεί με ικανοποιητική ακριβεία παρά μόνον έπειτα από αρκετά χρόνια.

Παρά τη χονδρική συμφωνία μεταξύ των δύο τιμών, ένα σημαντικό πρόβλημα βασάνιζε ακόμη τον Νεύτωνα. Του απέμενε να κατανοήσει πλήρως την έλξη του μήλου προς τη Γη. Επιτρέπεται, άραγε, να θεωρήσουμε ότι το μήλο έλκεται από τη Γη ωσάν να ήταν όλη η μάζα της συγκεντρωμένη στο κέντρο της; Πώς είναι δυνατόν κάτι τέτοιο όταν στην πραγματικότητα τα πλησιέστερα προς το μήλο τμήματα της Γης το έλκουν πολύ ισχυρότερα από τα πλέον απομακρυσμένα;

Το πρόβλημα έμοιαζε άλυτο. Επειδή το δημιουργικό πνεύμα του δεν μπορούσε να παραμείνει αδρανές, ο Νεύτων έστρεψε το ενδιαφέρον του στην οπτική. Μελέτησε τους φακούς, κατασκεύασε ένα εξαιρετικό τηλεοσκόπιο και αφοσιώθηκε στη μελέτη των οπτικών φασμάτων.

Τις σκέψεις του όμως εξακολούθουσε να τις «απασχολεί» το πρόβλημα του μήλου. Αφιέρωσε αρκετά χρόνια στην ανάπτυξη του ολοκληρωτικού λογισμού και με αυτό το πανίσχυρο εργαλείο απέδειξε ένα υπέροχο θεώρημα: ένα σφαιρικό κέλυφος με σταθερή πυκνότητα έλκει τα άλλα σώματα σαν να ήταν ολόκληρη η μάζα του συγκεντρωμένη στο κέντρο του (Σχήμα 1α). Η Γη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο από ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη (Σχήμα 1β). Η δύναμη που οφείλεται σε κάθε κέλυφος ζεχωριστά δεν εξαρτάται από τα υπόλοιπα, ενώ τα τυχόν παρεμβαλλόμενα κελύφη δεν προκαλούν εξασθένηση της βαρυτικής δύναμης (απουσιάζουν, όπως λέμε, τα φαινόμενα θωράκισης). Αν δεχθούμε αυτές τις δύο υποθέσεις (η



Σχήμα 1

δεύτερη μάλιστα περιγράφει το κατεξοχήν διακριτικό χαρακτηριστικό της βαρύτητας), γίνεται ολοφάνερο ότι η Γη έλκει το μήλο ακριβώς όπως είχε υποθέσει ο Νεύτων.

Έτσι, η πτώση του μήλου και η έλξη που ασκεί η Γη στη Σελήνη που περιφέρεται γύρω της έχουν κοινό αίτιο: τη βαρυτική δύναμη που παράγει ο πλανήτης μας. Εν τοιαύτη περιπτώσει, όμως, ποιες δυνάμεις πρέπει να καθορίζουν τις κινήσεις των πλανητών; Εφόσον περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο, η βαρυτική δύναμη που τους ασκείται πρέπει να προέρχεται από αυτόν. Μόνο ένα μικρό βήμα υπολείπεται ώς τη γενίκευση της παραπάνω πρότασης: δύο οποιαδήποτε σώματα έλκονται μεταξύ τους με τη δύναμη της βαρύτητας η οποία δίνεται από την εξισώση (1).

Ο Johannes Kepler ανακάλυψε τους νόμους της πλανητικής κίνησης στις αρχές του 17ου αιώνα. Ο πρώτος νόμος του Kepler ορίζει ότι οι πλανήτες κινούνται γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτικές τροχιές, τη μία εστία των οποίων καταλαμβάνει ο Ήλιος. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο, οι πλανήτες κινούνται ταχύτερα όταν βρίσκονται πλησιέστερα στον Ήλιο. Ο Kepler περιέγραψε αυτό το χαρακτηριστικό της πλανητικής κίνησης συμπυκνώνοντάς το στον εξής μαθηματικό νόμο: η επιβατική ακτίνα από τον Ήλιο προς τον πλανήτη σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσα χρονικά διαστήματα. Ο τρίτος νόμος του Kepler συγκρίνει τις τροχιές διαφορετικών πλανητών: τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς

των πλανητών είναι ανάλογα προς τους κύβους των μέσων αποστάσεών τους από τον Ήλιο.

Ο Kepler ανακάλυψε τους παραπάνω νόμους βασιζόμενος σε δεδομένα που υπήρξαν καρπός πολυετών αστρονομικών παρατηρήσεων. Ο Νεύτων, από την άλλη, απέδειξε πως οι νόμοι αυτοί απορρέουν από τους νόμους της κίνησης και της παγκόσμιας έλξης τους οποίους ανακάλυψε ο ίδιος.

Μια φορά κι έναν καιρό, λοιπόν, τρεις εξέχουσες μορφές της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου συναντήθηκαν σε μια λονδρέζικη ταβέρνα. Επρόκειτο για τον διάσημο αρχιτέκτονα σερ Christopher Wren (1632-1723) και τους φυσικούς φιλοσόφους Robert Hooke και Edmund Halley (1656-1742). Ο Halley ανακοίνωσε στην ομήγυρη πως είχε κατορθώσει να συναγάγει τον τρίτο νόμο του Kepler συνδυάζοντας το νόμο της παγκόσμιας έλξης με τους νευτώνειους νόμους της κίνησης —αλλά μόνο για την περίπτωση κυκλικών τροχιών. Πράγματι, η κυκλική κίνηση οφείλεται στην κεντρομόλο δύναμη  $Mu^2/R$  που ωθεί τον πλανήτη προς το κέντρο του κύκλου. Το ρόλο αυτής της δύναμης τον παίζει η βαρυτική έλξη του Ήλιου, οπότε

$$G \frac{M_H M}{R^2} = \frac{Mu^2}{R}.$$

Στην κυκλική κίνηση ισχύει η σχέση  $u = 2\pi R/T$ . Εισάγοντάς την στον παραπάνω τύπο, αυτομάτως προκύπτει ο τρίτος νόμος του Kepler:

$$G \frac{M_H}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2},$$

ή

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{σταθερά.}$$

Όταν ο Halley ολοκλήρωσε την παρουσίαση του επτεύγματός του, ο σερ Christopher ύψωσε το ποτήρι του και ανακοίνωσε πως θα βράβευε όποιον αποδείκνυε ότι ο νόμος της παγκόσμιας έλξης βρίσκεται σε συμφωνία και με τις ελλειπτικές τροχιές των πλανητών.

Υστερά από λίγον καιρό, ο Halley ζήτησε τη βοήθεια του Νεύτωνα σχετικά με αυτό το πρόβλημα. Τον Νοέμβριο του 1684, ο Halley έλαβε το χειρόγραφο του Νεύτωνα με τη λύση του προβλήματος. Έμελλε, ωστόσο, να περάσουν αρκετά χρόνια ώσπου να δημοσιευθεί το χειρόγραφο, το οποίο εν τω μεταξύ είχε υποστεί αλλεπάλληλες αναθεωρήσεις και πολλές προσθήκες από το συγγραφέα του. Εν τέλει, η πραγματεία του Νεύτωνα είδε το φως της δημοσιότητας τον Σεπτέμβριο του 1687. Επρόκειτο για το περίφημο *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Μαθηματικές αρχές της φυσικής φιλοσοφίας).

Η εφαρμογή των νόμων για την περίπτωση της πλανητικής κίνησης οδήγησαν σε ορισμένες σημαντικές προβλέψεις. Για παράδειγμα, ο σερ Ισαάκ Νεύτων κατόρθωσε να «ζυγίσει» τον Ήλιο εκφράζοντας τη μάζα του σε μονάδες γήινης μάζας. Όντως,

$$G \frac{M_H M_\Gamma}{R_\Gamma^2} = M_\Gamma \frac{u^2}{R_\Gamma^2} = M_\Gamma \frac{4\pi^2 R_\Gamma^2}{R_\Gamma T_\Gamma^2}$$

$$\Rightarrow M_H = \frac{4\pi^2 R_\Gamma^3}{GT_\Gamma^2},$$

$$G \frac{M_\Gamma M_\Sigma}{R_\Sigma^2} = M_\Sigma \frac{u^2}{R_\Sigma^2} = M_\Sigma \frac{4\pi^2 R_\Sigma^2}{R_\Sigma T_\Sigma^2}$$

$$\Rightarrow M_\Gamma = \frac{4\pi^2 R_\Sigma^3}{GT_\Sigma^2},$$

όπου  $R_\Gamma$  και  $R_\Sigma$  οι ακτίνες των τροχιών της Γης και της Σελήνης, αντίστοιχα. Προκύπτει λοιπόν ότι ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα. Η Σελήνη είναι δορυφόρος της Γης και η Γη δορυφόρος του Ήλιου. Σε καθεμία εξισώση οι μάζες των αντίστοιχων δορυφόρων απαλείφονται. Στην πρώτη εξισώση, όπου έχουμε εφαρμόσει το νόμο της παγκόσμιας έλξης για τον Ήλιο και τη Γη, απαλείφεται η μάζα της Γης, ενώ στη δεύτερη εξισώση απαλείφεται η μάζα της Σελήνης. Συνεπώς, οι μάζες της Γης και του Ήλιου εκφράζονται συναρτήσει μεγεθών των οποίων οι τιμές έχουν ήδη μετρηθεί από τους αστρονόμους:

τις ακτίνες των τροχιών και τις περιόδους περιφοράς. Μόνο μία τιμή παρέμενε άγνωστη —η βαρυτική σταθερά  $G$ . Αν όμως θεωρήσουμε το πηλικόν των εν λόγω μαζών, η σταθερά  $G$  μπορεί να απαλειφθεί και να προκύψει ο τύπος

$$\frac{M_H}{M_G} = \frac{R_\Gamma^3 T_\Sigma^2}{R_\Sigma^2 T_\Gamma^2} = \left( \frac{R_\Gamma}{R_\Sigma} \right)^3 \left( \frac{T_\Sigma}{T_\Gamma} \right)^2.$$

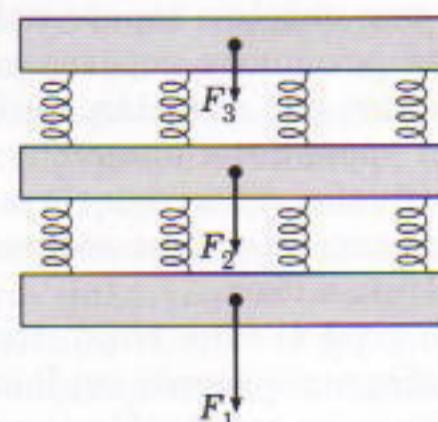
Για να υπολογίσουμε, λοιπόν, τη μάζα του Ήλιου σε γνωστές μονάδες, χρειάζεται να ξέρουμε τη μάζα της Γης. Εκείνη την εποχή ο Νεύτων γνώριζε μονάχα τον όγκο της, διότι η μέση πυκνότητά της παρέμενε ακόμη άγνωστη. Ένα μόνο στοιχείο είχε διαπιστωθεί πέραν πάσης αμφιβολίας: οι ήπειροι έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από τους ωκεανούς. Κατά ποιον παράγοντα όμως ήταν μεγαλύτερη η μέση πυκνότητα της Γης από εκείνη των ωκεανών; Ο Νεύτων κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η μέση πυκνότητα της Γης κυμαινόταν μεταξύ 5 και 6  $\text{g/cm}^3$ . Οκτώ χρόνια αργότερα, ο Henry Cavendish (1731-1810) κατόρθωσε να «ζυγίσει» τη Γη και να υπολογίσει τη σταθερά  $G$  χρησιμοποιώντας έναν ζυγό στρέψεως. Η πυκνότητα της Γης βρέθηκε ίση με 5,5  $\text{g/cm}^3$ .

Πώς μπορούμε τώρα να καθορίσουμε τη μάζα της Σελήνης; Δυστυχώς, απαλείφεται από όλες τις εξισώσεις. Και όμως ο Νεύτων ανακάλυψε τον τρόπο να υπολογίσει και αυτή την τιμή.

Εστρεψε την προσοχή του σε ένα φαινόμενο το οποίο είχε προβληματίσει την ανθρωπότητα επί αιώνες: την αιτία δημιουργίας των ωκεάνιων παλιρροιών. Οι Ρωμαίοι τις απέδιδαν στη θέση της Σελήνης στον ουρανό. «Είχε πανούληνο και μεγάλη παλιρροιά», γράφει χαρακτηριστικά ο Ιούλιος Καίσαρ. Παρ' όλα αυτά, ουδείς υπέθεσε πόσο στενά πράγματι συνδέεται η Σελήνη με τις παλιρροιες. Και ο Νεύτων υπήρξε ο πρώτος που βρήκε τη σωστή απάντηση.

Ας μελετήσουμε την κίνηση τριών πλακών ίδιας μάζας, που ακουμπούν η μία πάνω στην άλλη (Σχή-

1
2
3



Σχήμα 2

μα 2). Κάποια στιγμή ασκούνται τρεις δυνάμεις πάνω στις πλάκες:  $F_1 > F_2 > F_3$ . Όλες οι πλάκες τίθενται σε κίνηση. Ωστόσο, σε σχέση με τη μεσαία πλάκα 2, η πλάκα 3 καθυστερεί ενώ η πλάκα 1 προηγείται. Αν οι εξωτερικές πλάκες συνδέονται με την κεντρική μέσω ελατηρίων, τότε η επιμήκυνση των ελατηρίων θα αντισταθμίσει τις συνιστάμενες δυνάμεις  $F_1 - F_2$  και  $F_2 - F_3$ .

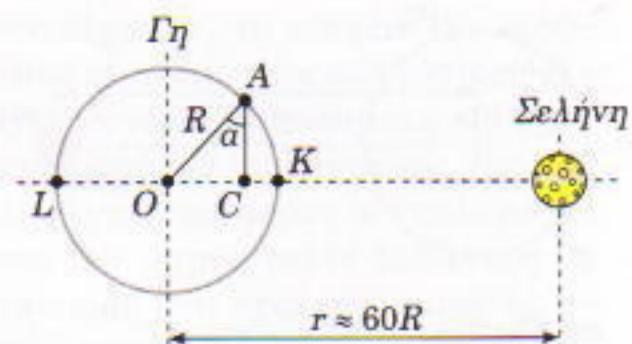
Μπορούμε να φανταστούμε τη Γη και την υδρόσφαιρά της ως τρία σώματα που πέφτουν προς τη Σελήνη: τον κεντρικό στερεό πυρήνα και τα δύο υδάτινα στρώματα —το ένα στην πλευρά της Γης που είναι στραμμένη προς τη Σελήνη και το άλλο στην αντίθετη πλευρά. Η Σελήνη έλκει αυτά τα φανταστικά «σώματα» σε διαφορετικό βαθμό. Ας υπολογίσουμε πρώτα την ελκτική δύναμη που ασκεί η Σελήνη σε μια μονάδα μάζας στη γήινη επιφάνεια (Σχήμα 3). Σε ένα τυχαίο σημείο της Α η εν λόγω δύναμη ισούται με

$$F_A = G \frac{M_\Sigma}{R^2 \sin^2 \alpha + (r - R_{\text{ημα}})^2} \\ \cong G \frac{M_\Sigma}{r^2} \left( 1 + 2 \frac{R}{r} \eta_{\text{μα}} \right).$$

Στο σημείο  $K$ ,  $\eta_{\text{μα}} = 1$ , οπότε η ελκτική δύναμη ισούται με

$$F_K = G \frac{M_\Sigma}{r^2} \left( 1 + 2 \frac{R}{r} \right).$$

Ομοίως, στο σημείο  $L$ ,  $\eta_{\text{μα}} = 1$ , οπότε



Σχήμα 3

$$F_L = G \frac{M_\Sigma}{r^2} \left( 1 - 2 \frac{R}{r} \right).$$

Προφανώς, λοιπόν, οι ελκτικές δυνάμεις που ασκεί η Σελήνη στα διάφορα τμήματα της γήινης επιφάνειας διαφέρουν.

Μπορούμε να φανταστούμε —βάσει του προηγούμενου μοντέλου— ότι η στερεά μάζα της Γης και το υδάτινο περίβλημά της συνδέονται μεταξύ τους με «ελατήρια». Στο κέντρο της Γης η βαρυτική δύναμη που ασκεί η Σελήνη ανά μονάδα μάζας ισούται με  $F_n = GM_\Sigma/r^2$ . Αυτή ακριβώς η δύναμη καθορίζει την κίνηση του πυρήνα της Γης. Στο σημείο  $L$  τα νερά των ωκεανών «καθυστερούν» κατά τη διαδικασία της «πτώσης» προς τη Σελήνη, διότι εκεί η δύναμη ανά μονάδα μάζας είναι μικρότερη από την  $F_n$ :  $F_L - F_n = -2GM_\Sigma R/r^3$ . Αντιθέτως, στο σημείο  $K$  η δύναμη είναι μεγαλύτερη από την  $F_n$ , επομένως στη γειτονιά αυτού του σημείου τα νερά των ωκεανών τείνουν να κινηθούν ταχύτερα απ' ότι το κέντρο της Γης. Δεν τους το επιτρέπουν όμως τα «ελατήρια» της γήινης βαρύτητας. Η βαρυτική έλξη της Σελήνης επιμηκύνει ελαφρώς αυτά τα ελατήρια ασκώντας μια παλιρροϊκή δύναμη ίση με  $2GM_\Sigma R/r^3$ . Έτσι, εμφανίζονται δύο παλιρροϊκά «εξογκώματα» στις δύο αντίθετες πλευρές της Γης, τα οποία έχουν την τάση να διατηρούν σταθερή θέση ως προς τη Σελήνη. Αν η Σελήνη παρέμενε ακίνητη ως προς τη Γη και η Γη δεν περιστρεφόταν γύρω από τον άξονά της, το υδάτινο κέλυφος θα παρέμενε επιμηκυμένο στη διεύθυνση της Σελήνης. Ωστόσο, λόγω της περιστροφής της Γης, τα παλιρροϊκά κύματα κινού-

νται με σχετική ταχύτητα ως προς τις ηπείρους ίση με 1.800 km/h και ακολουθούν την κίνηση της Σελήνης με χρονική υστέρηση.

Παρότι η βαρυτική έλξη του Ήλιου υπερβαίνει κατά πολύ εκείνη της Σελήνης, επιδρά πο ομοιόμορφα πάνω στο σύνολο της μάζας της Γης λόγω της εξαιρετικά μεγάλης απόστασης του Ήλιου συγκριτικά με την ακτίνα του πλανήτη μας. Έτσι, η παλιρροϊκή δύναμη που ασκεί ο Ήλιος  $F_H = 2GM_H R/r_{HG}^3$  υπολειπεται της αντίστοιχης σεληνιακής. Πράγματι, η μάζα του Ήλιου είναι 27 εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη από της Σελήνης, αλλά η απόσταση Ήλιου-Γης είναι 389 φορές μεγαλύτερη από την απόσταση Σελήνης-Γης. Επομένως,

$$F_H = 2G \frac{27 \cdot 10^6 M_\oplus}{(389r)^2} R \cong 0.45 F_\oplus.$$

Όπως προκύπτει από το αποτέλεσμά μας, η παλιρροϊκή δράση του Ήλιου είναι ασθενέστερη από εκείνη της Σελήνης. Δύο φορές κάθε μήνα ο Ήλιος, η Γη και η Σελήνη ευθυγραμμίζονται. Τότε, οι παλιρροϊκές δυνάμεις του Ήλιου και της Σελήνης συντίθενται προσθετικά προκαλώντας μεγάλες παλιρροιες. Όταν η ευθεία που συνδέει τη Γη με τον Ήλιο είναι κάθετη στη διεύθυνση Σελήνης-Γης, τότε οι σεληνιακές και ηλιακές παλιρροϊκές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται μερικώς, οπότε προκύπτουν μικρές παλιρροιες. Κοντά στα μικρά απομονωμένα νησιά των οκεανών όπου οι παλιρροιες δεν παραμορφώνονται λόγω της παρουσίας των ηπειρωτικών ακτών, η στάθμη των υδάτων ανυψώνεται στις μεγάλες παλιρροιες κατά 1,30 m, στις δε μικρές κατά 0,65 m. Αντίστοιχοι θεωρητικοί υπολογισμοί μάς επιτρέπουν να προσδιορίσουμε το πηλίκον των μαζών Ήλιου και Σελήνης βάσει των παραμέτρων των παλιρροιών.

Οι παλιρροιες, λοιπόν, βοήθησαν τον Νεύτωνα να υπολογίσει τη μάζα της Σελήνης. Οι υπολογισμοί του, ωστόσο, δεν υπήρξαν ιδιαίτερα ακριβείς. Το πρόβλημα περιπλέκεται λόγω της τριβής των πελώριων υδάτι-

νων μαζών με τον θαλάσσιο πυθμένα, καθώς και από άλλες διαδικασίες που η ανάλυσή τους αποδεικνύεται πολύ δύσκολη. Η ακριβής τιμή της μάζας της Σελήνης προσδιορίστηκε με τη βοήθεια τεχνητών σεληνιακών δορυφόρων. Οι τροχιές και οι περιόδοι περιφοράς αυτών των δορυφόρων προσέφεραν δεδομένα τα οποία οδήγησαν στον προσδιορισμό της σεληνιακής μάζας, την οποία μόνο χονδρικά είχε κατορθώσει να εκτιμήσει ο σερ Ισαάκ Νεύτων. Εππλέον, οι σεληνιακοί δορυφόροι έδειξαν ότι η μάζα της Σελήνης δεν κατανέμεται ομοιογενώς σε ολόκληρο τον όγκο της, πράγμα που σημαίνει ότι οι εν λόγω δορυφόροι δεν υπακούουν αυστηρά στους νόμους του Kepler.

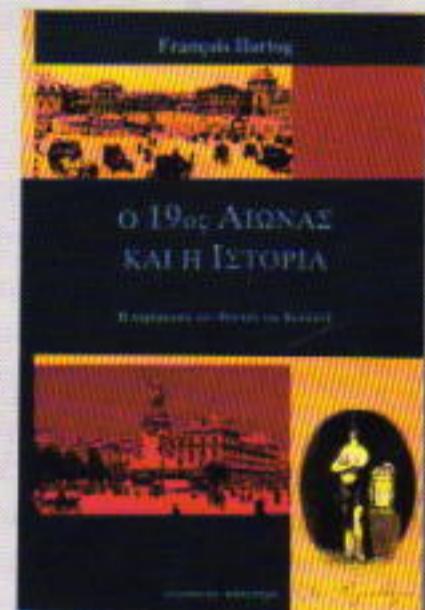
Πριν από την εποχή του Νεύτωνα, οι αστρονόμοι πίστευαν ότι οι κομήτες επισκέπτονται τη Γη μία φορά μόνο. Ωστόσο, ο Νεύτων απέδειξε ότι οι κομήτες διαγράφουν κλειστές ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο οι οποίες παρουσιάζουν το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι είναι πολύ επιμηκυσμένες. Γι' αυτό το λόγο οι κομήτες απομακρύνονται σε μεγάλες αποστάσεις από τον Ήλιο και εμφανίζουν μεγάλες περιόδους περιφοράς.

Ο Edmund Halley υπολόγισε τη χρονολογία επιτροφής ενός συγκεκριμένου ιστορικού κομήτη, οι παλαιότερες εμφανίσεις του οποίου εντοπίζονταν σε παλαιότερα χρονικά. Η πρόβλεψή του αποδείχθηκε εξαιρετικά επιτυχής: ο κομήτης επέστρεψε σε τακτές χρονικές περιόδους, οι οποίες συμφωνούσαν με τους υπολογισμούς: κάνει την εμφάνισή του κάθε 76 έτη. Μόνο ένας αστρονόμος, ο γερμανός Johann Gottfried Galle (1812-1910) —ο οποίος συμπλήρωσε σχεδόν έναν αιώνα ζωής—, κατόρθωσε να παρατηρήσει δύο φορές τον εν λόγω κομήτη. Έτσι η επανεμφάνιση των κομητών αποτελεί ισχυρότατο επιχείρημα υπέρ του νόμου της παγκόσμιας έλξης. ◻

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα:

- B. Belonuchkin, «Οι καρποί του αγώνα του Kepler», Μάρτιος/Απρίλιος 1998.
- W. Hiscock, «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες!», Μάιος/Ιούνιος 1995.
- A. Stasenko, «Από την άκρη του σύμπαντος στα Τάρταρα», Μάιος/Ιούνιος 1996.
- A. Byalko, «Μια πτήση στον Ήλιο», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1997.
- V. Surdin, «Πηδώντας από άστρο σε άστρο», Μάιος/Ιούνιος 1997.
- V. Mozhayev, «Το πλανητικό δίχτυ», Μάρτιος/Απρίλιος 1998.
- B. Belonuchkin, «Περί των παλιρροιών», Ιούλιος/Αύγουστος 1998.

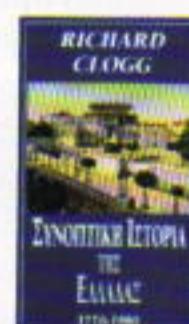
#### ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ



François Hartog

Ο 19ΟΣ ΑΙΩΝ ΚΑΙ Η ΙΣΤΟΡΙΑ

Σελ.: 314, 17 x 25 εκ., 7.000 δρχ.



Richard Clogg

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ  
ΤΗΣ ΕΛΛΑΣΑΣ

Σελ.: 280, 14 x 21 εκ., 5.200 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Παιχνίδια με τα πολυώνυμα Chebyshev

Αναδρομικές σχέσεις για ένα διάσημο σύνολο τύπων

N. Vasilyev και A. Zeliovinsky

**M**ΙΑ ΑΡΚΕΤΑ ΔΙΑΔΟΜΕΝΗ ΕΙΚΟΝΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ είναι αυτή ενός ανθρώπου που εκτελεί συνεχώς κουραστικούς υπολογισμούς, γράφοντας και μετασχηματίζοντας πολύπλοκους τύπους. Παρότι υπάρχουν μερικά κομψά και σημαντικά μαθηματικά πεδία που δεν χρησιμοποιούν τύπους, η άποψη αυτή έχει αρκετά ρεαλιστικά στοιχεία. Η ικανότητα να παρατηρείς τους τύπους με καθαρή ματιά, να τους μετασχηματίζεις, να ανακαλύπτεις καινούργιους και να βρίσκεις διάφορες σχέσεις μεταξύ τους παιζει σημαντικό ρόλο στην εργασία του μαθηματικού. Σ' αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε μια σειρά τύπων που συνδέονται με τα λεγόμενα πολυώνυμα Chebyshev και κάποιες σημαντικές μαθηματικές ιδέες που βρίσκονται πίσω απ' αυτούς.<sup>1</sup>

## Δύο αξιοσημείωτες ακολουθίες πολυωνύμων

Τα εν λόγω πολυώνυμα εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα της μαθηματικής ανάλυσης, των υπολογιστικών μαθηματικών και της άλγεβρας. Τα μελέτησε για πρώτη φορά το 1854 ο εξέχων ρώσος μαθηματικός Pafnutiy Chebyshev σε συνδυασμό με το εξής ερώτημα:

Θεωρούμε διάφορα πολυώνυμα βαθμού  $n$  με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1. Ποια από αυτά αποκλίνουν λιγότερο από το μηδέν στο διάστημα  $[-1, 1]$ ? Θα απαντήσουμε στο ερώτημα με δύο τρόπους, ανάλογα με την ερμηνεία που θα του δώσουμε.<sup>2</sup> Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο είναι το  $F_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η φράση «αποκλίνει λιγότερο από το μηδέν» σημαίνει ότι η ποοότητα

$$c_n = \max_{[-1, 1]} |F_n(x)|$$

είναι ελάχιστη.

Αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο με την ελάχιστη απόκλιση είναι το

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Δηλαδή, είναι το πολυώνυμο που εμφανίζεται στην αριστερή στήλη του Πίνακα 1, διαιρεμένο διά του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του. Για παράδειγμα, το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο με την ελάχιστη απόκλιση από το μηδέν είναι το  $x^2 - (1/2)$ , και η απόκλισή του  $c_2$  είναι  $1/2$ . Για κάθε άλλο τριτοβάθμιο πολυώνυμο,  $x^2$

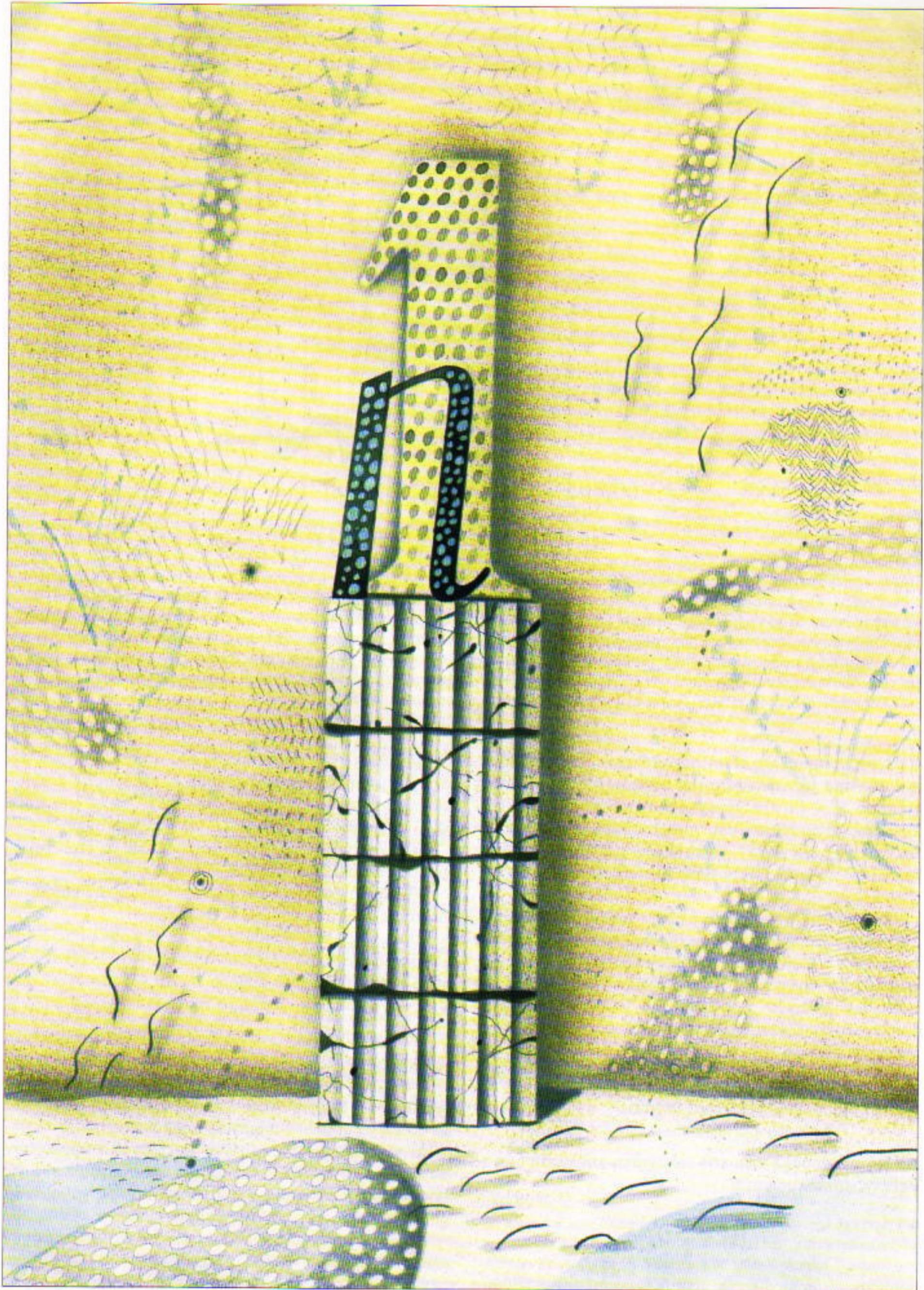
$n$	$T_n$	$U_n$
0	1	1
1	$x$	$2x$
2	$2x^2 - 1$	$4x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$	$8x^3 - 4x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$\vdots$

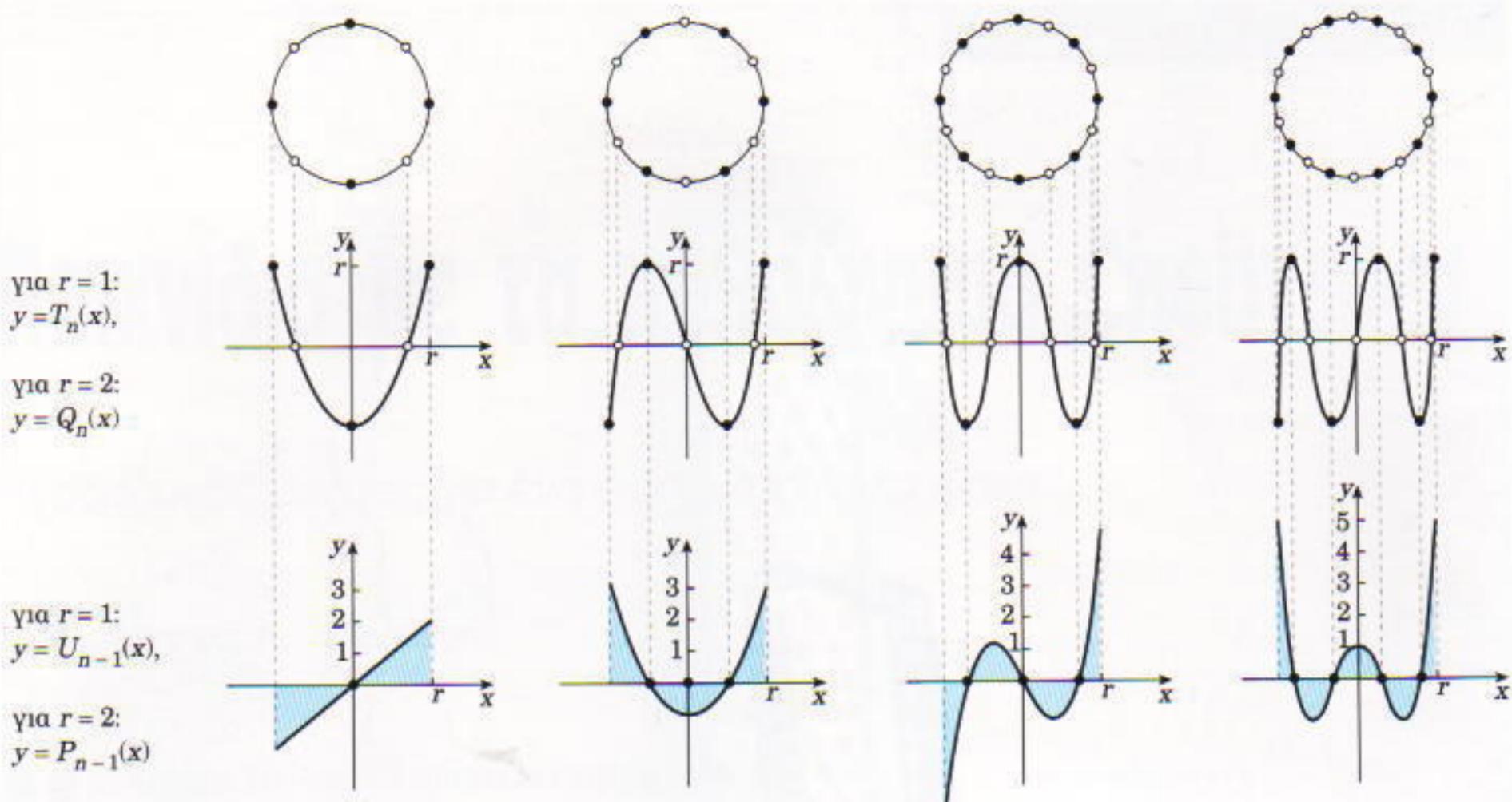
## Πίνακας 1

Πολυώνυμα Chebyshev πρώτου και δεύτερου είδους. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε πολυώνυμο επί  $2x$  και αφαιρέσουμε το προηγούμενό του, προκύπτει το επόμενο πολυώνυμο.

1. Δείτε και το άρθρο «Το πρόβλημα του Chebyshev» στο τεύχος Νοεμβρίου / Δεκεμβρίου 1994.

2. Χωρίς όμως να αποδείξουμε ότι αυτές οι απαντήσεις είναι ορθές.





## Σχήμα 1

Πάρτε ένα διαφανές φύλλο χαρτί πάνω στο οποίο έχει σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης  $y = \text{ρουνη}$  ( $0 \leq x \leq 2\pi r$ ,  $-r \leq y \leq r$ ). Τυλίξτε το χαρτί και σχηματίστε έναν κύλινδρο (με διάμετρο και ύψος  $2h$ ). Κοιτάξτε μετά το χαρτί από το πλάι έτσι ώστε να συμπίπτουν τα γραφήματα του εμπρός και του πίσω μέρους του κυλίνδρου —θα δείτε το γράφημα του  $n$ -οστού πολυωνύμου Chebyshev πρώτου είδους. Τα γραφήματα αυτά, για  $n = 2, 3, 4, 5$ , παρουσιάζονται στην πάνω σειρά του Σχήματος 1 (για  $r = 1$  έχουμε τα γραφήματα των  $y = T_n(x)$  και για  $r = 2$  τα γραφήματα των  $y = Q_n(x)$  —δείτε την Ασκηση 3). Κάτω από το γράφημα του  $n$ -οστού πολυωνύμου υπάρχει το γράφημα της παραγώγου του διαιρεμένη διά  $n$ . Αυτό είναι το  $(n-1)$ -οστο πολυωνύμο Chebyshev δεύτερου είδους —όλες οι γαλάζιες επιφάνειες έχουν ίσα εμβαδά.

+  $px + q$ , η απόκλιση είναι μεγαλύτερη. Το τριτοβάθμιο πολυωνύμο με την ελάχιστη απόκλιση από το μηδέν είναι το  $x^3 - (3/4)x$ . Η απόκλισή του είναι  $c_3 = 1/4$ . Γενικώς, η απόκλιση του πολυωνύμου  $\tilde{T}_n(x)$  από το μηδέν είναι  $c_n = 1/(2^{n-1})$ , και είναι μικρότερη από την απόκλιση κάθε άλλου  $n$ -βάθμιου πολυωνύμου  $F_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ .

Μπορούμε να μετρήσουμε την απόκλιση ενός πολυωνύμου από το μηδέν με διαφορετικό τρόπο και να ζητήσουμε να είναι ελάχιστο το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ του γραφήματος του πολυωνύμου, του άξονα  $x$  και των ευθειών  $x = 0$  και  $x = 1$ . Αν γνωρίζετε ολοκληρωτικό λογισμό, ξέρετε ότι αυτό το εμβαδόν είναι η ποσότητα

$$\ell_n = \int_{-1}^1 |F_n(x)| dx.$$

Αν ερμηνεύσουμε έτσι την «ελάχιστη απόκλιση από το μηδέν», το πολυωνύμο

$$\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x),$$

όπου τα  $U_n$  παρατίθενται στη δεξιά στήλη του Πίνακα

1, έχει την ελάχιστη απόκλιση. Για κάθε  $U_n$ , η ποσότητα  $\ell_n$  (η μπλε περιοχή στο Σχήμα 1) ισούται με 2. Επομένως, για κάθε  $\tilde{U}_n$  ισούται με  $1/2^{n-1}$ , ενώ για κάθε άλλο  $n$ -βάθμιο πολυωνύμο  $F_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  είναι μεγαλύτερη (αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος Korkin-Zolotarev).

Όλα αυτά τα γεγονότα συνδέονται με τις επόμενες ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev:

(1) Οι τιμές που λαμβάνει το  $T_n$  σε κάθε σημείο καμπής και στα άκρα του διαστήματος  $[-1, 1]$  είναι κατ' απόλυτη τιμή ίσες. Τα εμβαδά των  $n+1$  περιοχών που φράσσονται από το γράφημα του πολυωνύμου

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x),$$

του άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x = \pm 1$  είναι ίσα (βλ. Σχήμα 1). (Εδώ, το σημείο ' σημαίνει παράγωγος.)

Αποδεικνύεται ότι τα μόνα πολυωνύμα που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι αυτά που προκύπτουν από τις εξισώσεις  $y = U_n(x)$  και  $y = T_n(x)$  μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού των μεταβλητών  $x$  και  $y$ .

Η ιδιότητα (1) έπειτα από τις επόμενες βασικές σχέσεις:

$$(2) T_n(\text{συν}\varphi) = \text{συν}\varphi, \quad \eta\mu\varphi \cdot U_{n-1}(\text{συν}\varphi) = \eta\mu\varphi.$$

Εκτός από τις τριγωνωμετρικές σχέσεις (2), που ορίζουν τις τιμές των πολυωνύμων  $T_n$  και  $U_n$  για  $|x| \leq 1$ , υπάρχουν οι επόμενες, τελείως διαφορετικές ταυτότητες για  $|x| > 1$ :

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2},$$

$$U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$
(3)

Μπορούμε να βρούμε τις ρίζες των  $T_n$  και  $U_n$  από τις επόμενες ταυτότητες:

$$T_n(x) = 2^{n-1} \times$$

$$\left( x - \cos \frac{\pi}{2n} \right) \left( x - \cos \frac{3\pi}{2n} \right) \cdots \left( x - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right),$$

$$U_n(x) = 2^n \times$$

$$\left( x - \cos \frac{\pi}{2n+1} \right) \left( x - \cos \frac{2\pi}{2n+1} \right) \cdots \left( x - \cos \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$
(4)

Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα κανονικό  $4n$ -γώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο η διάμετρος του οποίου έχει άκρα τα σημεία  $(-1, 0)$  και  $(1, 0)$ , τότε οι ρίζες και τα σημεία καμπής του πολυωνύμου  $T_n$  είναι οι προβολές των κορυφών του  $4n$ -γώνου στη διάμετρο του κύκλου (βλ. Σχήμα 1).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε, μεταξύ άλλων σχέσεων, και τις ταυτότητες (2)-(4) και θα τις χρησιμοποιήσουμε για να παρουσιάσουμε ορισμένες σημαντικές μεθόδους αλγεβρικών μετασχηματισμών.

Για τον ορισμό των πολυωνύμων Chebyshev μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε από τους ανωτέρω τύπους. Σε αυτό το άρθρο θα χρησιμοποιήσουμε ως ορισμό την απλή αναδρομική σχέση που αναφέρεται στη λεζάντα του Πίνακα 1. Θα συναγάγουμε όλους τους άλλους τύπους από αυτή τη σχέση.

Θα μας εξηπηρετήσει αν χρησιμοποιήσουμε τα πολυώνυμα που προκύπτουν από τα  $T_n$  και  $U_n$  αλλάζοντας κλίμακα (βλ. Σχήμα 1):  $P_n(x) = U_n(x/2)$  και  $Q_n(x) = 2T_n(x/2)$ . Για αυτά τα πολυώνυμα, το διάστημα  $[-2, 2]$  παίζει τον ίδιο ρόλο με αυτόν που παίζει το διάστημα  $[-1, 1]$  για τα πολυώνυμα  $T_n$  και  $U_n$ . Τα νέα πολυώνυμα μας εξηπηρετούν, διότι οι συντελεστές τους είναι ακέραιοι και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου τους ισούται με 1. Φυσικά, με τη βοήθεια των αντίστροφων μετασχηματισμών  $P_n(2x) = U_n(x)$  και  $Q_n(2x) = 2T_n(x)$ , μπορούμε να επιστρέψουμε στα αρχικά πολυώνυμα  $T_n$  και  $U_n$ . Σε αυτό το άρθρο, κατά κανόνα, θα αποδείξουμε διάφορες προτάσεις για τα  $P_n$ . Οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν παρόμοιες προτάσεις για τα  $Q_n$ . Συνιστούμε να εκτελέσετε όλους τους υπολογισμούς με κάθε λεπτομέρεια, χρησιμοποιώντας στην

αρχή μικρές τιμές ( $n = 2, 3, 4$ ) έως ότου να γίνουν όλα ξεκάθαρα.

## Αναδρομικές σχέσεις και επαγωγή

Έστω  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  και

$$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x). \quad (1)$$

Γράφουμε τους πρώτους όρους αυτής της ακολουθίας:

$$P_2(x) = x^2 - 1,$$

$$P_3(x) = x(x^2 - 1) - x = x^3 - 2x,$$

$$P_4(x) = x(x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 1,$$

$$P_5(x) = x(x^4 - 3x^2 + 1) - (x^3 - 2x) = x^5 - 4x^3 + 3x,$$

και ούτω καθεξής (με τη βοήθεια του Πίνακα 2 μπορείτε να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας έως το  $P_{12}$ ).

Τα πολυώνυμα  $P_n(x)$  εμφανίζονται σε διάφορες καταστάσεις. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τα κλάσματα

$$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x - \frac{1}{x}, \quad R_3(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}},$$

$$R_4(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}},$$

$$R_5(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}}, \quad \dots$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	9	36	84	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924
...	...	...	...	...	...	...	...

Πίνακας 2

Το τρίγωνο του Pascal. Οι αριθμοί της  $n$ -οστής κόκκινης διαγωνίου με εναλλασσόμενα πρόσημα είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου  $P_n(x)$ . Οι Ασκήσεις 6α και 6β αφορούν αθροίσματα των διωνυμικών συντελεστών.



$- P_{n-2}(x)$ . Να συναγάγετε όλες τις ταυτότητες της Ασκησης (3) από αυτό τον τύπο.

## Ρίζες πολυωνύμων και γινόμενα

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε εύκολα ένα πλήθος από ενδιαφέροντες τύπους που αφορούν συμμετρικές παραστάσεις  $n$  αριθμών (ή μεταβλητών) αν θεωρήσουμε αυτούς τους αριθμούς ρίζες συγκεκριμένων  $n$ -βάθμιων πολυωνύμων.

Το πολυώνυμο  $P_n(x)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τέτοιο τρόπο για τους  $n$  αριθμούς

$$y_k = 2\sin \frac{k\pi}{n+1}$$

(όπου  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε στη (2) το  $\varphi$  με τα

$$\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \dots, \frac{n\pi}{n+1}$$

διαπιστώνουμε ότι τα

$$y_k = 2\sin \frac{k\pi}{n+1}$$

είναι ρίζες του  $P_n(x)$ . Ας θυμηθούμε το θεώρημα διαιρετότητας από τη στοιχειώδη άλγεβρα:<sup>3</sup> Αν το  $y$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ , τότε το  $P(x)$  διαιρείται διά του  $(x - y)$ . Επομένως, κάθε διώνυμο  $x - y_k$  διαιρεί το πολυώνυμο  $P_n(x)$ , και το ίδιο ισχύει για το γινόμενό τους. Το πολυώνυμό μας είναι  $n$ -οστού βαθμού και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του είναι 1, επομένως ισούται με το γινόμενο

$$\prod_{1 \leq k \leq n} (x - y_k)$$

Συνεπώς,

$$P_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \left( x - 2\sin \frac{k\pi}{n+1} \right). \quad (4)$$

**Ασκηση 5.** (a) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$Q_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \left( x - 2\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right). \quad (4')$$

(β) Επαληθεύστε τις ταυτότητες (4) και (4') για  $n = 2, 3, 4$  και  $5$ .

Θα εξετάσουμε μια ενδιαφέρουσα ταυτότητα που μπορεί να συναχθεί από τη σύγκριση των δύο τύπων (4) και (2).

Για  $m > 0$ , υπολογίζουμε το  $P_{2m}(0)$  με δύο διαφορετικούς τρόπους και εξισώνουμε τις παραστάσεις που προκύπτουν. Από τη μία πλευρά, βάσει του τύπου (2), έχουμε:

$$P_{2m}(0) = P_{2m} \left( 2\sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\eta \mu \frac{(2m+1)\pi}{2}}{\eta \mu \frac{\pi}{2}} = \eta \mu \left( \frac{\pi}{2} + m\pi \right) = (-1)^m.$$

Από την άλλη πλευρά, απ' τον τύπο (4) έχουμε

$$P_{2m}(0) = \prod_{1 \leq k \leq 2m} \left( -2\sin \frac{k\pi}{2m+1} \right).$$

Για  $(m+1) \leq k \leq 2m$  αντικαθιστούμε κάθε

$$\sin \frac{k\pi}{2m+1}$$

με το

$$\left( -\sin \left( \pi - \frac{k\pi}{2m+1} \right) \right)$$

και παίρνουμε

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \cdot \left[ 2^m \cdot \prod_{1 \leq k \leq m} \left( \sin \frac{k\pi}{2m+1} \right) \right]^2.$$

Η παράσταση μέσα στις αγκύλες είναι θετική, διότι περιέχει μόνο συνημιτόνα οξειών γωνιών και, επομένως, ισούται με 1. Έχουμε λοιπόν

$$\prod_{1 \leq k \leq m} \left( \sin \frac{k\pi}{2m+1} \right) = \frac{1}{2^m}. \quad (5)$$

Αυτή η σχέση έχει μια κομψή λεκτική διατύπωση: Για  $m > 0$ , ο γεωμετρικός μέσος των συνημιτόνων των οξειών γωνιών που είναι πολλαπλάσια του  $\pi/(2m+1)$  ισούται με  $1/2$ .

### Ασκήσεις

6. (a) Βρείτε τα  $P_n(1)$ ,  $P_n(-1)$ ,  $Q_n(1)$  και  $Q_n(-1)$ .

Αποδείξτε ότι οι επόμενες ταυτότητες είναι όμοιες με την (5):

$$(β) \prod_{1 \leq k \leq m} \eta \mu \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}} \quad (m \geq 1).$$

$$(γ) \prod_{1 \leq k \leq m} \varepsilon \varphi \frac{k\pi}{2m+1} = \sqrt{2m+1} \quad (m \geq 1).$$

$$(δ) \prod_{1 \leq k \leq m} \sigma \nu \frac{(2k-1)\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m} \quad (m \geq 1).$$

3. Πολλά προβλήματα που αφορούν το θεώρημα διαιρετότητας μπορείτε να βρείτε στη σήλη «Gradus ad Parnassum», στα τεύχη Μαΐου / Ιουνίου 1998, Ιουλίου / Αυγούστου 1998 και Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1998.

7. Βρείτε όλες τις τιμές των  $m$  και  $n$  για τις οποίες  
(a) το  $P_n$  διαιρείται διά του  $P_m$ , (β) το  $Q_n$  διαιρείται διά  
του  $Q_m$ .

## Γενετήριες συναρτήσεις, δυναμοσειρές και συντελεστές

Σε αυτό το μέρος του άρθρου θα εξετάσουμε μια εξαιρετικά γόνιμη μέθοδο που χρησιμοποιείται ευρύτατα στον απειροστικό λογισμό, τη συνδυαστική και τη θεωρία πιθανοτήτων: τη μέθοδο των γενετήριων συναρτήσεων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτή η μέθοδος μας επιτρέπει να βρούμε τα ξεχωριστά στοιχεία μιας ακολουθίας και να την κατασκευάσουμε από τα κομμάτια της, όπως ακριβώς κατασκευάζουμε ένα κτίριο από τα τουύβλα του.

Έστω μια ακολουθία  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Η επόμενη παράσταση καλείται γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Οι παραστάσεις αυτού τού τιού είδους ονομάζονται τυπικές δυναμοσειρές. Μπορούμε να προσθέτουμε, να αφαιρούμε και να πολλαπλασιάζουμε τέτοιες δυναμοσειρές όπως τα συνηθισμένα πολυώνυμα. Μπορούμε να διαιρέσουμε μια δυναμοσειρά με μια άλλη, αν ο σταθερός όρος του διαιρέτη είναι διάφορος του μηδενός. Είναι επίσης δυνατόν να τις παραγωγίσουμε ή να τις ολοκληρώσουμε.<sup>4</sup> Όλες αυτές οι πράξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παραγάγουμε νέες ακολουθίες από αυτές που έχουμε ήδη αναλύσει. Συχνά, βάσει της αναδρομικής σχέσης που ορίζει την ακολουθία, είναι δυνατόν να βρούμε μια απλή παράσταση της γενετήριας συνάρτησης. Αντιστρόφως, όταν δίνεται η γενετήρια συνάρτηση, μπορούμε μερικές φορές να βρούμε έναν γενικό τύπο για τα στοιχεία της ακολουθίας ή μια σχέση που συνδέει διάφορα στοιχεία της ακολουθίας.

Το πολυώνυμο  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γενετήρια συνάρτηση της πεπερασμένης ακολουθίας  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Για παράδειγμα, το πολυώνυμο  $f_n(z) = (1+z)^n$  είναι η γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας των διωνυμικών συντελεστών  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ , (οι συντελεστές αυτοί εμφανίζονται στην  $n$ -οστή γραμμή του τριγώνου του Pascal —δείτε τον Πίνακα 2):

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n. \quad (6)$$

Αν παραγωγίσουμε αυτή την ταυτότητα  $k$  φορές και θέσουμε  $z = 0$ , θα πάρουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

Θεωρούμε την ταυτότητα  $(1+z)(1+z)^n = (1+z)^{n+1}$  και την γράφουμε ως

$$(1+z) \left( \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} z^k \right) = \sum_{0 \leq k \leq n+1} \binom{n+1}{k} z^k.$$

Επειτα από τις πράξεις και την αναγωγή των όμοιων όρων  $z^m$ , καταλήγουμε στη σημαντική σχέση

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

Μεταξύ των άπειρων ακολουθιών, η γεωμετρική πρόδος  $b_0, b_1 = qb_{n-1}$  έχει μια εξαιρετικά απλή γενετήρια συνάρτηση. Θεωρούμε το άθροισμα

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = b_0 + \sum_{n \geq 1} b_n z^n$$

και αντικαθιστούμε κάθε  $b_n$  με το  $qb_{n-1}$ . Παίρνουμε τότε

$$f(z) = b_0 + qz \sum_{n \geq 1} b_{n-1} z^{n-1} = b_0 + qzf(z).$$

Έχουμε  $f(z)(1 - qz) = b_0$ , απ' όπου προκύπτει

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \frac{b_0}{1 - qz}. \quad (7)$$

Αυτός είναι ο πασίγνωστος τύπος για το άθροισμα της άπειρης γεωμετρικής πρόδοου (για  $|qz| < 1$ ). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο για να βρούμε τη γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας των πολυωνύμων  $P_n(x)$ .

Ορίζουμε

$$\Phi(z) = \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = 1 + xz + \sum_{n \geq 2} P_n(x) z^n.$$

(Εδώ το  $x$  παίζει το ρόλο παραμέτρου και, χάριν συντομίας, θα γράφουμε  $P_n, P_{n-1}, \dots$  αντί για  $P_n(x), P_{n-1}(x), \dots$ ) Βάσει της σχέσης (1), αντικαθιστούμε, για κάθε  $n \geq 2$ , το  $P_n$  με το  $xP_{n-1} - P_{n-2}$ . Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1 + xz + \sum_{n \geq 2} xP_{n-1} z^n - \sum_{n \geq 2} P_{n-2} z^n \\ &= 1 + xz + xz \cdot \sum_{n \geq 2} P_{n-1} z^{n-1} - z^2 \cdot \sum_{n \geq 2} P_{n-2} z^{n-2} \\ &= 1 + xz + xz(\Phi(z) - 1) - z^2 \Phi(z). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Phi(z) \cdot (z^2 - xz + 1) = 1$$

και

4. Δείτε το άρθρο «Γενετήριες συναρτήσεις» των S. Voronin και A. Kulagin στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 1999.

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2 - xz + 1}. \quad (8)$$

Τούος ο απλός τύπος κρύβει ολόκληρη την περίπλοκη ακολουθία των πολυωνύμων  $P_n$ . Μπορούμε από αυτόν να εξαγάγουμε τα μεμονωμένα πολυώνυμα  $P_n$  με δύο διαφορετικούς τρόπους.

(1) Για  $|x| > 2$ , η δευτεροβάθμια εξίσωση  $z^2 - xz + 1 = 0$  έχει δύο ρίζες:

$$u = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \quad v = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}. \quad (9)$$

Από την παραγοντοποίηση  $z^2 - xz + 1 = (z - u)(z - v)$  και, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $uv = 1$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{(u - z)(v - z)} = \left( \frac{1}{v - z} - \frac{1}{u - z} \right) \frac{1}{u - v} \\ &= \left( \frac{u}{1 - zu} - \frac{v}{1 - zv} \right) \frac{1}{u - v} = \sum_{n \geq 0} \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u - v} z^n. \end{aligned}$$

Δηλαδή,  $P_n(x) = (u^{n+1} - v^{n+1})/(u - v)$ . Αυτή είναι η σχέση (3).

(2) Μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές οποιουδήποτε από τα πολυώνυμα  $P_n(x)$  από τη σχέση (8) ως εξής:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{1 - (xz - z^2)} = \sum_{k \geq 0} (xz - z^2)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \binom{k}{j} x^{k-j} z^{k+j} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} z^n \left( \sum_i (-1)^i \binom{n-j}{j} x^{n-2j} \right) \end{aligned}$$

(εδώ χρησιμοποιήσαμε τους τύπους για το άθροισμα της άπειρης γεωμετρικής προόδου (7), για τους διωνυμικούς συντελεστές (6), και βρήκαμε το συντελεστή του  $z^n$ , που είναι το ζητούμενο  $P_n(x)$ ). Επομένως,

$$P_n(x) = \sum_j (-1)^j \binom{n-j}{j} x^{n-2j}. \quad (10)$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} P_6(x) &= \binom{6}{0} x^6 - \binom{5}{1} x^4 + \binom{4}{2} x^2 - \binom{3}{3} \\ &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1. \end{aligned}$$

Βεβαίως, οι τύποι (3) και (10) είναι δυνατόν να αποδειχθούν επαγγειακά, χωρίς γενετήριες συναρτήσεις. Όμως, ο τρόπος που —σχεδόν από μόνοι τους— προκύπτουν από τον σύντομο τύπο (8) είναι υπέροχος.

Χρειάζεται να εξασφαλίσουμε τη νομιμότητα όλων των πράξεων με άπειρες σειρές. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους. Πρώτον, παρατηρούμε ότι όλες οι

σειρές που θεωρήσαμε είναι συγκλίνουσες για μικρές απόλυτες τιμές του  $z$  (για παράδειγμα, η σειρά (7) συγκλίνει για  $|z| < 1/|\alpha|$ ). Επομένως, είναι όλες καλώς ορισμένες συναρτήσεις του  $z$ . Ο άλλος τρόπος είναι να επαληθεύσουμε ότι όλες οι τυπικές οριζόμενες πράξεις επί των άπειρων σειρών (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός και ούτω καθεξής) διαθέτουν όλες τις συνήθεις ιδιότητες (όταν εκτελούνται αυτές οι πράξεις, κάθε συντελεστής της προκύπτουσας σειράς εκφράζεται συναρτήσει ενός πεπερασμένου πλήθους συντελεστών των τελεστών, με το  $z$  να θεωρείται απλώς ένα σύμβολο).

### Άσκησης

8. Θεωρούμε την ακολουθία των αριθμών Fibonacci

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

(a) Αποδείξτε ότι η γενετήρια συνάρτηση αυτής της ακολουθίας είναι η

$$\frac{z}{1 - z - z^2}.$$

(β) Ο τύπος του Binet δίνει την τιμή του  $n$ -οστού αριθμού Fibonacci εκφρασμένου ρητά συναρτήσει του  $n$ :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Να συναγάγετε αυτό τον τύπο από τη γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας Fibonacci.

(γ) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$u_n = \sum_j \binom{n-j-1}{j}.$$

9. (a) Βρείτε τη γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας των πολυωνύμων  $Q_n(x)$  που ορίστηκαν στην Άσκηση 3 και αποδείξτε ότι, για  $|x| > 2$ ,

$$Q_n(x) = u^n + v^n,$$

όπου τα  $u$  και  $v$  ορίζονται από την (9) (αυτός ο τύπος αποδείχθηκε και στην Άσκηση 3γ).

(β) (για όσους είναι εξοικειωμένοι με τους μηγαδικούς αριθμούς) Επαληθεύστε ότι, για  $|x| < 2$ , οι τύποι (3) και (3') τρέπονται στους (2) και (2'), αντίστοιχα. (Υπόδειξη: αν  $x = 2\sin\varphi$ , τότε  $u = \sin\varphi + i\cos\varphi$  και  $v = \sin\varphi - i\cos\varphi$ ). ◻



# Η διάσπαση είναι δύσκολη υπόθεση

«Ω βάθος πλούτου και σοφίας και γνώσεως Θεού!  
Ως ανεξερεύνητα τα κρίματα αυτού και ανεξίχνιαστοι αι οδοί αυτού!»  
—Προς Ρωμαίους, Ια', 33

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

**Η**ΣΧΑΣΗ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΤΟΥ ΟΥρανίου μπορεί να θεωρηθεί μια πολύ ενδιαφέρουσα παράγραφος (αλλά μόνο μία παράγραφος) της ιστορίας της φυσικής. Αυτό δήλωσε το 1961 ο George Gamow, ένας διακεκριμένος φυσικός του αιώνα που φεύγει. Εν πάσῃ περιπτώσει, ουδείς δύναται να αμφισβητήσει την τεράστια σημασία που απέκτησαν για τον πολιτισμό μας τα τεχνολογικά παράγωγα που γέννησε η ανακάλυψη της σχάσης, προπάντων δε η ατομική βόμβα και η πυρηνική ενέργεια.

Για να κατανοήσουμε ολόπλευρα την πορεία ανάπτυξης της ατομικής βόμβας απαιτείται η σφαιρική γνώση των γεγονότων του Β' Παγκοσμίου πολέμου. Με την ιστορία της ανακάλυψης της σχάσης συνδέονται άρρηκτα πλευρές των πολιτικών εξελίξεων που προηγήθηκαν της κήρυξης του πολέμου. Συνιστούμε θερμά στους αναγνώστες να ανατρέξουν στο έξοχο βιβλίο του Richard Rhodes *The Making of the Atomic Bomb* (Η δημιουργία της ατομικής βόμβας), όπου θα βρουν μια συναρπαστική παρουσίαση της ιστορίας της ατομικής βόμβας. Τους προτείνουμε επίσης να αναζητήσουν το *Moments of Discovery: the Discovery of Fission* (Στιγμές ανακάλυ-

ψης: η ανακάλυψη της σχάσης). Πρόκειται για το, εξαντλημένο πλέον, ηχητικό ντοκουμέντο που εξέδωσε το 1984 το Αμερικανικό Ινστιτούτο Φυσικής (AIP), και το οποίο περιέχει ηχητικές καταγραφές πολλών από τους πρωταγωνιστές, συμπεριλαμβανομένων των Αϊνστάιν, J.J. Thomson, Rutherford, Hahn, Frisch, Compton, Szilard και Fermi. Δεν μπορεί να μην αισθανθεί έντονη συγκίνηση κανείς όταν ακούει τον ίδιο τον Rutherford να δηλώνει ότι «ο πυρήνας είναι κάτι πολύ μικρό».

Εμείς θα περιοριστούμε σε ένα έργο μάλλον ταπεινό σε σύγκριση με την ιστορία της επιστήμης ή την ιστορία των πολιτικών γεγονότων που συνδέθηκαν με την πυρηνική σχάση. Προτιθέμεθα απλώς να εξετάσουμε ορισμένες λεπτομέρειες της σχάσης από την άποψη της φυσικής: με άλλα λόγια, θα μας απασχολήσουν ζητήματα όπως, για παράδειγμα, το πότε συμβαίνει η σχάση και το πώς εξηγούνται οι υπέρογκες ποσότητες ενέργειες που απελευθερώνεται.

Θα ξεκινήσουμε με μια «συνταγή». Τα αναγκαία «υλικά» είναι 6 πρωτόνια, 6 νετρόνια και 6 ηλεκτρόνια: ως τελικό προϊόν θα πάρουμε ένα άτομο  $^{12}\text{C}$ :

6 πρωτόνια: 6(1,007276 amu) = 6,043656 amu

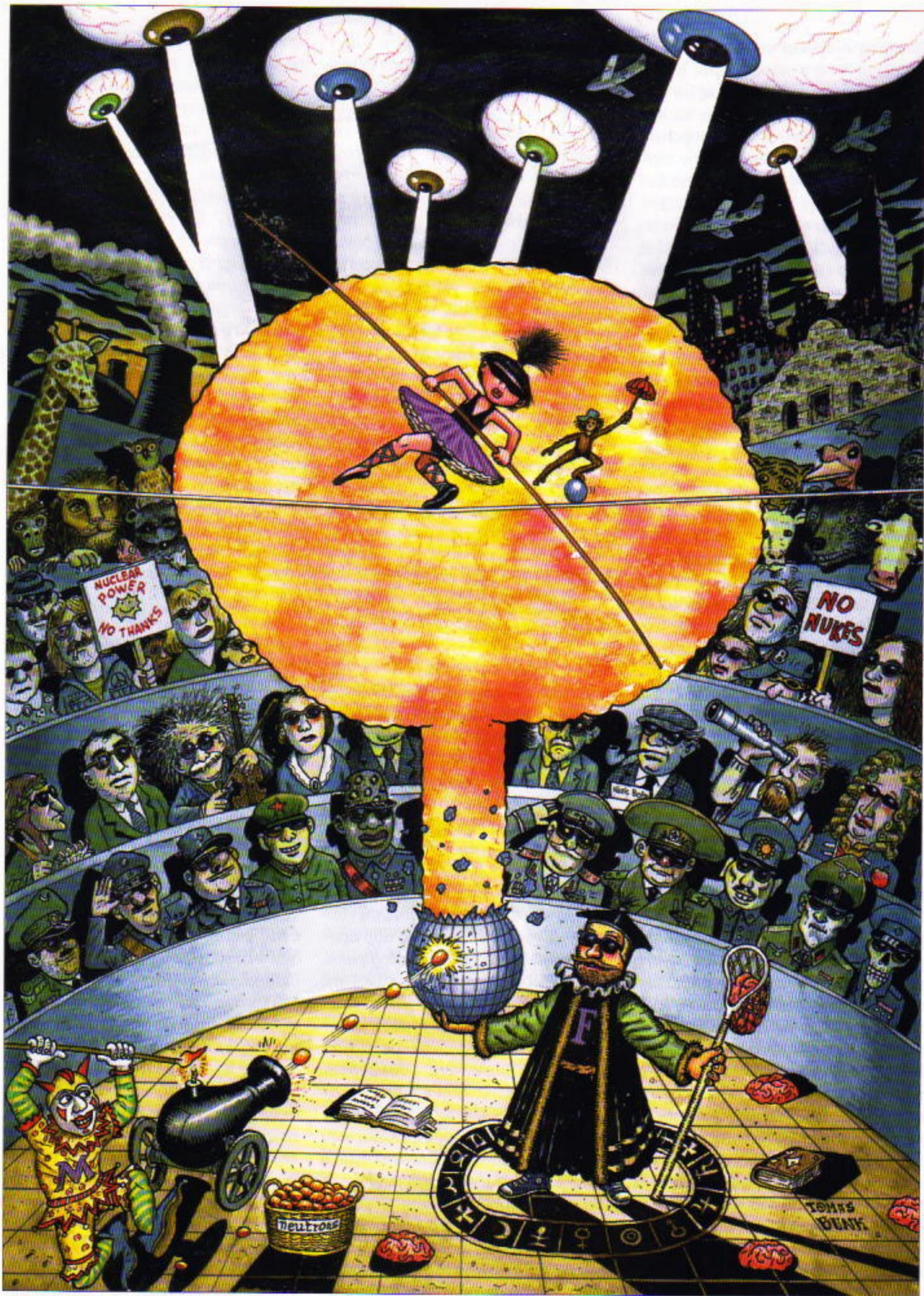
6 νετρόνια: 6(1,008665 amu) = 6,051990 amu

6 ηλεκτρόνια: 6(0,000549 amu) = 0,003294 amu

ολική μάζα: 12,098940 amu,

όπου amu =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  kg είναι η μονάδα ατομικής μάζας.

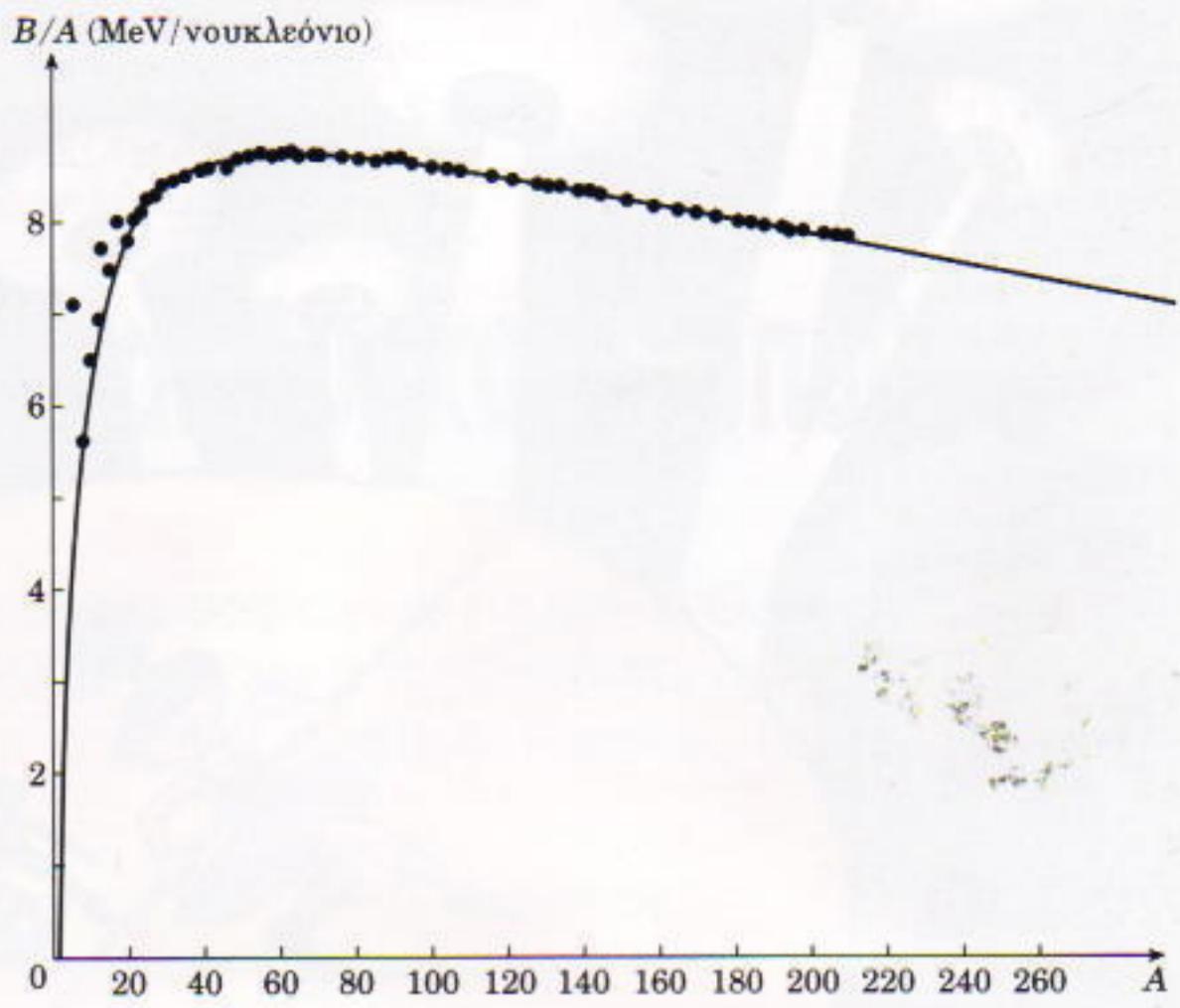
Ευρισκόμεθα λοιπόν προ εκπλήξεως! Η ολική μάζα του ατόμου του  $^{12}\text{C}$  ισούται ακριβώς με 12 amu (εξ ορισμού). Πού να πήγε, άραγε, η επιπλέον μάζα; Η μάζα που λείπει, το λεγόμενο έλλειμμα μάζας, στην πραγματικότητα μετατρέπεται σε ενέργεια η οποία απελευθερώνεται κατά το σχηματισμό του πυρήνα. Από μια εναλλακτική οπτική γωνία, μπορούμε να πούμε ότι στον πυρήνα του άνθρακα υπάρχει ενέργεια σύνδεσης η οποία συνέχει τον πυρήνα. Για να επιτύχουμε την αφίρεση ενός πρωτονίου ή νετρονίου από τον πυρήνα, ή και το διαχωρισμό όλων των πρωτονίων και νετρονίων που τον αποτελούν, απαιτείται να δαπανήσουμε ενέργεια. Πρόκειται για ένα φαινόμενο που μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε άμεσα την τεράστια σημασία της καταπληκτικής ανακάλυψης την οποία πραγματοποίησε ο Αϊνστάιν το 1905, ότι η μά-



ζα και η ενέργεια είναι ένα και το αυτό και πως ο παράγοντας μετατροπής των μονάδων μάζας σε μονάδες ενέργειας ισούται με το τετράγωνο της ταχύτητας του φωτός. Αναμφίβολα, σε ολόκληρη την εποτήμη δεν υπάρχει εξίσωση που ξακουστή από την  $E = mc^2$ .

Η εν λόγω εξίσωση μας αποκαλύπτει ότι μόλις  $1 \text{ g} (10^{-3} \text{ kg})$  μάζας ισοδυναμεί με  $9 \cdot 10^{13} \text{ J}$  ενέργειας. Πρόκειται για ένα γεγονός που τη σημασία του θα την τονίσει ακόμη περισσότερο μια εύγλωττη σύγκριση: εάν η προαναφερθείσα ποσότητα ενέργειας πουληθεί υπό μορφή ηλεκτρικού ρεύματος, η αξία της υπερβαίνει τα εξακόσια εκατομμύρια δραχμές. Εφαρμόζοντας και πάλι την εξίσωση του Αϊνστάιν, διαπιστώνουμε ότι  $1 \text{ amu}$  μάζας δίνει  $931,5 \text{ MeV}$  ενέργειας (το  $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ ).

Αλλά ας επιστρέψουμε στον πυρήνα του άνθρακα, ο οποίος, όπως είδαμε, παρουσιάζει έλλειμμα μάζας  $0,098940 \text{ amu}$ . Συνεπώς, η αντίστοιχη ενέργεια σύνδεσης ισούται με  $92 \text{ MeV}$ . Εάν επαναλάβουμε την ανάλυσή μας για τον πυρήνα του  $^{12}\text{C}$ , θα διαπιστώσουμε ότι η μεν μάζα του ατόμου ισούται με  $11,011433 \text{ amu}$ , η δε ολική μάζα των συστατικών του στοιχείων με  $11,090275 \text{ amu}$ . Το έλλειμμα μάζας του  $^{12}\text{C}$  ανέρχεται, επομένως, σε  $0,078842 \text{ amu}$ , ή  $73 \text{ MeV}$ . (Όπως προκύπτει και από τα αριθμητικά στοιχεία που παρουσιάσαμε προηγουμένως, η μάζα των ηλεκτρονίων μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα σε σύγκριση με τη μάζα του πυρήνα. Κατά συνέπεια, η μάζα του ατόμου και η μάζα του πυρήνα ουσιαστικά συμπίπτουν.) Η αφαίρεση του ενός νετρονίου πρέπει να απαίτησε δαπάνη ενέργειας  $19 \text{ MeV}$ . Στους αναγνώστες που οι γνώσεις τους βρίσκονται ακόμη στο επίπεδο της εισαγωγικής φυσικής θα είναι περισσότερο οικεία η έννοια της ενέργειας ιονισμού του υδρογόνου, δηλαδή η ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να ιονίσουμε ένα άτομο υδρογόνου· η τιμή της ισούται με  $13,6 \text{ eV}$ . Έτσι, για να απελευθερώσουμε ένα ηλεκτρόνιο, απαιτείται να του προσφέρουμε ενέρ-



Σχήμα 1

Η μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο συναρτήσει του μαζικού αριθμού για τα ισότοπα που απαντούν στη φύση. Οι κουκκίδες παριστούν τα δεδομένα από μετρήσεις των ενεργειών σύνδεσης, ενώ η λεία καμπύλη βασίζεται στο πυρηνικό πρότυπο της υγρής σταγόνας. Η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστο για  $A = 56$  ( $^{56}\text{Fe}$ ).

γεία  $13,6 \text{ eV}$ . Ως επί το πλείστον, η χημεία μελετά τις ανταλλαγές ηλεκτρονίων μεταξύ των ατόμων και, επομένως, ασχολείται με ενέργειες της τάξεως των μερικών  $\text{eV}$  ανά άτομο. Απεναντίας, στις μεταβολές της πυρηνικής δομής αντιστοιχούν ενέργειες της τάξεως των εκατομμυρίων  $\text{eV}$ .

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση της μέσης ενέργειας σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για τα δύο προαναφερθέντα ισότοπα του άνθρακα. Ο  $^{12}\text{C}$  έχει μέση ενέργεια σύνδεσης  $92/12 \text{ MeV}$ , ή  $7,7 \text{ MeV}$ , ανά νουκλεόνιο, ενώ στον  $^{11}\text{C}$  η μέση ενέργεια σύνδεσης ισούται με  $73/11 \text{ MeV}$ , ή  $6,6 \text{ MeV}$ , ανά νουκλεόνιο. Παρόμοιοι υπολογισμοί είναι δυνατόν να γίνουν για τα ισότοπα όλων των στοιχείων, και η καμπύλη που προκύπτει από τα αποτελέσματά τους παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Για την πλειονότητα των πυρήνων η μέση ενέργεια σύνδεσης ανέρχεται περίπου στα  $8 \text{ MeV}$  ανά νουκλεόνιο. Εξετάζοντας προσεκτικά την καμπύλη διαπιστώνουμε ένα α-

ξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της: παρουσιάζει μέγιστο για τον  $^{56}\text{Fe}$ . Τόσο οι ελαφρότεροι όσο και οι βαρύτεροι πυρήνες έχουν μικρότερη μέση ενέργεια σύνδεσης. Συνεπώς, κατά την ένωση των ελαφρών πυρήνων που οδηγεί στο σχηματισμό βαρύτερων πυρήνων —διαδικασία γνωστή ως σύντηξη— θα απελευθερώνεται ενέργεια. Ομοίως, ενέργεια θα απελευθερώνεται και όταν ένας βαρύς πυρήνας διασπάται σε δύο ελαφρότερους: η συγκεκριμένη διαδικασία ονομάζεται σχάση.

Η καμπύλη της μέσης ενέργειας σύνδεσης εμφανίστηκε στην εποτημονική σκηνή μετά την ανακάλυψη της σχάσης. Όταν οι Hahn και Strassman αναγνώρισαν πρώτοι τη σχάση του ουρανίου, έμειναν καταπληκτοί, όπως άλλωστε και ο υπόλοιπος εποτημονικός κόσμος. Η ανακάλυψη του νετρονίου από τον Chadwick, το 1932, είχε προσφέρει στην πυρηνική φυσική ένα νέο εργαλείο έρευνας. Το νετρόνιο μπορούσε να εισχωρήσει στον πυρήνα χωρίς να χρειάζεται να υπερνικήσει

την απωτική δύναμη Coulomb την οποία θα δοκίμαζε ένα πρωτόνιο. Λίγο μετά την ανακάλυψη των νετρονίων, ο Fermi άρχισε να τα χρησιμοποιεί ως βλήματα για να βομβαρδίζει πυρήνες διαφόρων στοιχείων και να παράγει νέα ισότοπα. Πολλά από τα ισότοπα που παρήγαγε εξέπεμπαν ακτίνες β. Το γεγονός αυτό τον παρέσυρε να ποτέψει ότι, όταν βομβάρδισε με νετρόνια και πυρήνες ουρανίου, είχε ανακαλύψει κάποιο υπερουράνιο στοιχείο.

Εν τω μεταξύ, ο Otto Hahn και οι συνεργάτες του Lise Meitner και Fritz Strassman καταγίνονταν από καιρό με τη χημική ανάλυση των ραδιενέργων στοιχείων. Δυστυχώς, οι διώξεις του ναζιστικού καθεστώτος κατά των Εβραίων εξανάγκασαν τη Meitner να εγκαταλείψει τη Γερμανία τον Ιούλιο του 1938. Ο Hahn και ο Strassman ανακάλυψαν ότι μεταξύ των προϊόντων που παράγονταν κατά το βομβαρδισμό του ουρανίου περιλαμβανόταν και το βάριο. Αρχικά υπέθεσαν ότι επρόκειτο για ράδιο, επειδή η παραγωγή ραδίου απαιτούσε την απόσπαση από τον πυρήνα δύο μόνο σωματιδίων α. Ακόμη και αυτό το ενδεχόμενο φαινόταν απίθανο —το να καταφέρει ένα νετρόνιο χαμηλής ενέργειας να αποσπάσει δύο σωματίδια α από τον πυρήνα ξεπερνούσε τις προσδοκίες των ερευνητών. Βάσει ενός τέτοιου σκεπτικού, η παρουσία βαρίου μεταξύ των προϊόντων έμοιαζε να αποκλείεται. Παρ' όλα αυτά, όμως, επρόκειτο όντως για βάριο. Η Meitner και ο ανιψιός της Otto Frisch δεν άργησαν να αποδείξουν ότι η προσθήκη του νετρονίου προκαλούσε αστάθεια στον πυρήνα του ουρανίου, ο οποίος διεσπάτο σε δύο μέρη. Εάν το βάριο ήταν το ένα μέρος, το άλλο θα έπρεπε να είναι το κρυπτό. Και πράγματι, το εν λόγω στοιχείο είχε επίσης ανιχνευθεί. Ο Frisch μίλησε για το ζήτημα της σχάσης στον Bohr, ο οποίος έφευγε για την Αμερική και καθ' οδόν, ο Bohr με έναν συνεργάτη του —τον Leon Rosenfeld— ανέπτυξαν το πυρηνικό πρότυπο της υγρής σταγόνας, το οποίο προέβλεπε όντως αυτή την καταπληκτική συμπεριφορά.

Το πυρηνικό πρότυπο της υγρής σταγόνας αντιμετωπίζει τον πυρήνα ως ένα σταγονίδιο πυρηνικής ύλης. Η επιφανειακή τάση συγκρατεί στη σταγόνα τα νουκλεόνια που βρίσκονται στην επιφάνειά της. Το μοντέλο είναι ποσοτικό και οδηγεί σε μιαν εξίσωση η οποία προβλέπει με ακρίβεια την καμπύλη της ενέργειας σύνδεσης. Η εξήγηση της συγκεκριμένης εξίσωσης την οποία θα παρουσιάσουμε εδώ ακολουθεί εκείνη του Ohanian στο βιβλίο του *Modern Physics* (Σύγχρονη φυσική).

Κατ' αρχάς, πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η ακτίνα του πυρήνα είναι ανάλογη του  $A^{1/3}$ , όπου  $A$  ο μαζικός αριθμός (ο οποίος κατά προσέγγιση ισούται με τη μάζα του πυρήνα μετρημένη σε amu). Πρόκειται για σχέση η οποία συμπυκνώνει τα αποτελέσματα πολυάριθμων πειραμάτων σκέδασης. Τούτου δοθέντος, ο όγκος του πυρήνα ( $4\pi R^3/3$ ) πρέπει να θεωρείται ανάλογος του  $A$ , οπότε συμπεραίνουμε ότι η πυκνότητα της πυρηνικής ύλης (ο λόγος της μάζας του πυρήνα προς τον όγκο του) παραμένει σταθερή για όλους τους πυρήνες.

Ο σημαντικότερος όρος στην εξίσωση της ενέργειας σύνδεσης περιγράφει την ενίστε λεγόμενη «ενέργεια όγκου». Γνωρίζουμε ότι η συνοχή του πυρήνα οφείλεται πρωτίστως στην έλξη που αναπτύσσεται μεταξύ των νουκλεονίων λόγω της ισχυρής πυρηνικής δύναμης. Πρόκειται για μια δύναμη μικρής εμβέλειας, η οποία εξασθενεί ταχύτατα αυξανομένης της απόστασης. Ως εκ τούτου, η αλληλεπίδραση περιορίζεται ουσιαστικά στα ζεύγη των άμεσα γειτονικών νουκλεονίων, με αποτέλεσμα μια χαρακτηριστική ιδιότητα της πυρηνικής ισχυρής δύναμης, τον λεγόμενο κορεσμό. Για να αντιληφθεί ο αναγνώστης τι σημαίνει κορεσμός, ας φανταστεί ότι στον περιορισμένο όγκο του πυρήνα συνωστίζονται  $A$  το πλήθος νουκλεόνια (ο  $A$  θεωρείται μεγάλος), που τα φανταζόμαστε σαν μικρές σφαίρες. Στη μεγάλη τους πλειονότητα, οι σφαίρες αυτές περιβάλλονται από το μέγιστο, και ίδιο για όλες, πλήθος άμεσων γειτόνων, που θα το συμ-

βολίζουμε με  $n$  ( $n \ll A$ ). Σημειωτέον ότι το  $n$  εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης αλλά όχι από το  $A$ . Εύκολα διαπιστώνουμε τότε ότι το πλήθος των διαφορετικών ζευγών άμεσων γειτόνων ανέρχεται κατά προσέγγιση σε  $nA/2$  (αγνοούμε προς το παρόν το γεγονός ότι ένα νουκλεόνιο στην επιφάνεια του πυρήνα δεν μπορεί να έχει τόσους άμεσους γείτονες όσους ένα στο εσωτερικό του πυρήνα). Εφόσον καθένα από αυτά τα ζεύγη συνεισφέρει εξίσου στην ενέργεια του συστήματος, η ολική ενέργεια του είναι ανάλογη του  $A$ . Ο κορεσμός, λοιπόν, των πυρηνικών δυνάμεων εξηγεί γιατί η ενέργεια σύνδεσης πρέπει να περιέχει έναν όρο ανάλογο του  $A$ , ο οποίος περιγράφει την ενέργεια όγκου. Εφόσον τα νουκλεόνια που βρίσκονται στο εσωτερικό του πυρήνα, ο δεύτερος όρος πρέπει να περιγράφει αυτή τη μείωση της ενέργειας του πυρήνα. Δεδομένου ότι το τετράγωνο της ακτίνας,  $R^2$ , είναι ανάλογο του  $A^{2/3}$ , για να αντισταθμίσουμε την υπερεκτίμηση της ενέργειας σύνδεσης λόγω του πρώτου όρου πρέπει να εισαγάγουμε έναν όρο αρνητικό και επίσης ανάλογο του  $A^{2/3}$ . Περαιτέρω, πρέπει να συνυπολογιστεί η άπωση Coulomb μεταξύ όλων των πρωτονίων, η οποία τείνει να κατακερματίσει τον πυρήνα. Την ενεργειακή συνεισφορά της την περιγράφει ένας όρος ανάλογος του  $Z^2/A^{1/3}$ , όπου με  $Z$  συμβολίζουμε τον ατομικό αριθμό, δηλαδή το πλήθος των πρωτονίων του πυρήνα (ή των ηλεκτρονίων του αντίστοιχου ουδέτερου ατόμου).

Τέλος, υπάρχει και μια κβαντομηχανική διόρθωση μέσω της οποίας συνυπολογίζονται οι συνέπειες της απαγορευτικής αρχής του Pauli. Ακριβώς όπως τα ηλεκτρόνια δεν επιτρέπεται να βρίσκονται όλα στην ίδια κβαντική κατάσταση αλλά συμπληρώνουν διαδοχικούς φλοιούς, έτσι και τα νουκλεόνια πρέπει να συμπληρώσουν αντίστοιχους φλοιούς. Αυτό έχει ως συνέπεια την εμφάνιση ενός όρου που εξαρτάται τόσο από το πλήθος των πρωτονίων

και των νετρονίων ξεχωριστά όσο και από τον ολικό αριθμό των νουκλεονίων του πυρήνα. Όλες οι σταθερές αναλογίας προσδιορίζονται με τη βοήθεια των δεδομένων που απέφεραν πολυάριθμα πειράματα. Αθροίζοντας όλους τους ανωτέρω όρους καταλήγουμε στον ημιεμπειρικό τύπο του Weizsäcker για την ενέργεια σύνδεσης, ο οποίος έχει τη μορφή

$$B = [15,753A - 17,804A^{2/3} - 0,7103 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 94,77 \frac{\left(\frac{1}{2}A - Z\right)^2}{A}] \text{ MeV.}$$

Η λεια καμπύλη του Σχήματος 1 βασίζεται στο πυρηνικό πρότυπο της υγρής σταγόνας και, όπως φαίνεται, προσαρμόζεται εξαιρετικά στα δεδομένα.

Εάν υποθέσουμε ότι ένας πυρήνας διασπάται σε δύο ίσα μέρη (αμφότερα τα προϊόντα της σχάσης έχουν μαζικό και ατομικό αριθμό  $A/2$  και  $Z/2$  αντίστοιχα), μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη διαφορά των ενεργειών σύνδεσης:

$$\begin{aligned} B_{A,Z} &= [15,753A - 17,804A^{2/3} - 0,7103 \frac{Z^2}{A^{1/3}}] \text{ MeV,} \\ B_{A/2,Z/2} &= \left[ 15,753 \frac{A}{2} - 17,804 \left( \frac{A}{2} \right)^{2/3} - 0,7103 \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} \right] \text{ MeV,} \\ 2B_{A/2,Z/2} - B_{A,Z} &= \left[ -4,6A^{2/3} + \frac{0,26Z^2}{A^{1/3}} \right] \text{ MeV.} \end{aligned}$$

Στη σύγκρισή μας αγνοήσαμε τον κβαντομηχανικό όρο, ο οποίος, ούτως ή άλλως, είναι αμελητέος εν συγκρίσει προς τους υπολοίπους. Προκειμένου να υποστεί σχάση ο πυρήνας, η ηλεκτροστατική άπωση πρέπει να υπερισχύει της επιφανειακής τάσης:

$$-4,6A^{2/3} + \frac{0,26Z^2}{A^{1/3}} > 0,$$

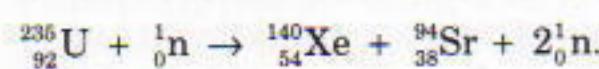
$$\frac{Z^2}{A} > 18.$$

Στην περίπτωση του  $^{238}\text{U}$  έχουμε  $Z = 92$  και  $A = 238$ , οπότε  $Z^2/A = (92)^2/238 = 35,6$ , τιμή η οποία σαφώς υπερβαίνει το 18. Εντούτοις, η σχάση δεν συντελείται αμέσως απατείται προηγουμένως η επιμήκυνση της πυρηνικής σταγόνας, μια διαδικασία η οποία διευκολύνεται με την προσθήκη ενός επιπλέον νετρονίου στον πυρήνα του ουρανίου.

Μολονότι διαδικασίες σχάσης έλαβαν χώρα στα πειράματα που πραγματοποίησαν το 1934, ο Enrico Fermi και ο Emilio Segrè απέτυχαν να ανακαλύψουν τη σχάση του ουρανίου. Στη μαγνητοτανία του AIP ο Segrè ακούγεται να ομολογεί ότι η αποτυχία αυτή παρέμεινε για τον ίδιο ένα ανεξιχνίαστο μυστήριο, και μάλιστα σε τέτοιο βαθμό, ώστε έφτασε μέχρι του σημείου να αναρωτιέται μήπως έπρεπε να αποδοθεί στην παρέμβαση της Θείας Πρόνοιας. Η ανακάλυψη της σχάσης το 1939 σηματοδότησε την άμεση έναρξη των προσπαθειών για την κατασκευή της ατομικής βόμβας, στις οποίες συμμετέσχε και ο Fermi, που τότε είχε ήδη εγκατασταθεί στις ΗΠΑ. Ποια πορεία θα είχε ακολουθήσει άραγε η ανθρώπινη ιστορία αν η σχάση είχε ανακαλυφθεί πριν από τη μαζική φυγή των γερμανών φυσικών στις Ηνωμένες Πολιτείες, αρκετά πριν από την έναρξη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου; Και τι συμπεράσματα πρέπει να εξαχθούν για το ρόλο που διαδραματίζει το τυχαίο στην ιστορία;

Στο παρόν τεύχος θέτουμε ένα πρόβλημα που αφορά την ανάλυση μερικών χαρακτηριστικών της σχάσης.

**A.** Δεν είναι δύσκολο να παρακολουθήσει κανείς τη συλλογιστική στην οποία στηρίχτηκαν ο Frisch και η Meitner για να υπολογίσουν την ενέργεια που απελευθερώνεται σε μια σχάση. Θεωρήστε την εξής τυπική αντίδραση σχάσης:



Το Xe διασπάται ταχέως προς  ${}^{140}_{58}\text{Ce}$

και το Sr προς  ${}^{94}_{40}\text{Zr}$  με παράλληλη εκπομπή ηλεκτρονίων αμελητέας μάζας. Έτοι, έχουμε τις εξής μάζες:

${}^{235}_{92}\text{U}$	235,004 amu
${}^1_0\text{n}$	1,009 amu
${}^{140}_{58}\text{Ce}$	139,905 amu
${}^{94}_{40}\text{Zr}$	93,906 amu.

Να υπολογιστεί η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την αντίδραση της σχάσης.

**B.** Η ανακάλυψη και η εκμετάλλευση της σχάσης δεν προϋπέθετε τη γνώση της σχέσης  $E = mc^2$ . Στην πραγματικότητα, μάλιστα, επειδή εκείνη την εποχή οι μάζες των ραδιενεργών θυγατρικών πυρήνων δεν είχαν ακόμη προσδιοριστεί με αρκούντως μεγάλη ακρίβεια, ζήτημα αξιόπιστων υπολογισμών τέτοιου είδους δεν ετίθετο. Οι Frisch και Meitner υπολόγισαν την απελευθερούμενη ενέργεια με μια δεύτερη μέθοδο (σημειωτέον ότι ένας άλλος μεγάλος φυσικός, ο Joliot, στηρίζοταν αποκλειστικά σ' αυτήν), η οποία και παρουσιάζεται σε αδρές γραμμές σε τούτο το μέρος του προβλήματος.

Κατ' αρχάς, υπολογίστε τις ακτίνες των πυρήνων Ce και Zr βάσει του προεγγιστικού τύπου  $R = KA^{1/3}$ , όπου  $K = 1,0 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Εν συνεχείᾳ, υποθέτοντας ότι κατά τη συγμή της σχάσης του πυρήνα του ουρανίου τα κέντρα των δύο θραυσμάτων απέχουν απόσταση ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, υπολογίστε την ηλεκτροστατική άπωση που αναπτύσσεται ανάμεσά τους. Με τη βοήθεια του ηλεκτροστατικού δυναμικού, υπολογίστε το έργο που παράγεται όταν χωρίζονται αυτά τα δύο προϊόντα της σχάσης. Τέλος δε, συγκρίνετε την ολική ενέργεια που υπολογίσατε με τη δεύτερη μέθοδο και το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξατε στο Μέρος A.

**G.** Όλως παραδόξως, το ουράνιο σπανίως σχάζεται σε δύο ίσα θραύσματα. Στηρίζομενοι στην παραπάνω ημιεμπειρική εξίσωση της ενέργειας σύνδεσης, αποδείξτε ότι στην περίπτωση της σπάνιας συμμετρικής σχάσης η απελευθερούμενη ενέργεια λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

## Φυσική στον ανελκυστήρα

Στο Μέρος Α του προβλήματος του τεύχους Μαρτίου/Απριλίου ζητούσαμε από τους αναγνώστες να αποδείξουν ότι μια σφαίρα η οποία αφήνεται να πέσει μέσα σε έναν ανελκυστήρα που επιταχύνεται προς τα πάνω θα επιστρέψει στο αρχικό της ύψος σε σχέση με το δάπεδο του ανελκυστήρα, εφόσον βέβαια η κρούση της με το δάπεδο θεωρηθεί τελείως ελαστική. Ας αρχίσουμε γράφοντας τις εξισώσεις για τις θέσεις της σφαίρας και του ανελκυστήρα μετά την πρόσκρουση. Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς που εισαγάγαμε στην παρουσίαση του προβλήματος:

$$y'_\sigma = y_h + (u_h + u_{\sigma_X})t - \frac{g't^2}{2},$$

$$y'_\sigma = y_h + u_h t + \frac{g't^2}{2},$$

όπου με  $y'_\sigma$  και  $y'_\sigma$  συμβολίζουμε αντίστοιχα τις θέσεις της σφαίρας και του δαπέδου τη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ  $y_h$ ,  $u_h$  και  $u_{\sigma_X}$  είναι αντίστοιχα η θέση του δαπέδου, η ταχύτητα του δαπέδου και η σχετική ταχύτητα σφαίρας και δαπέδου τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης  $t = 0$ . Τέλος, με  $g$  συμβολίζουμε την επιτάχυνση του ανελκυστήρα προς τα πάνω.

Το ύψος  $h'$  από το δάπεδο στο οποίο ανέχεται η σφαίρα τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη διαφορά των συντεταγμένων της σφαίρας και του δαπέδου

$$h' = y_\omega - y_{\omega_\delta} = u_{\sigma_X} t - \frac{g't^2}{2},$$

όπου  $g' = g + \gamma$  η ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας μέσα στον ανελκυστήρα. Έχουμε ήδη υπολογίσει τη  $u_{\sigma_X} = g't_\pi$ , όπου το  $t_\pi$  δηλώνει το χρόνο που χρειάστηκε για να πέσει η σφαίρα στο δάπεδο. Εισάγοντας αυτή την έκφραση στην τελευταία εξίσωση και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμά μας ότι ο χρόνος  $t_\pi$  που απαιτείται ώστε να φτάσει η σφαίρα στο ανώτερο σημείο της τροχιάς της ισούται με τον  $t_\pi$ , καταλήγουμε ότι

$$h' = \frac{g't_\pi^2}{2}.$$

Τέλος, δεν έχουμε παρά να επικαλεστούμε τον ήδη γνωστό τύπο

$$t_\pi = \sqrt{\frac{2h}{g'}}$$

για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του ότι  $h' = h$ . Ακόμη μία φορά, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα που θα είχαμε λάβει εάν τα πάντα είχαν συμβεί στο έδαφος: η σφαίρα επιστρέφει στο αρχικό της ύψος.

Στο Μέρος Β ρωτούσαμε τι θα συμβεί αν η σφαίρα αφεθεί να πέσει σε ένα τρένο που κινείται με σταθερή οριζόντια επιτάχυνση  $\gamma$ . Στην προκειμένη περίπτωση, η ενεργός επιτάχυνση  $g'$  δίνεται από τη διανυσματική διαφορά της  $g$  και της  $\gamma$ , ενώ η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η  $g'$  με την κατακόρυφο δίνεται από τη σχέση

$$\text{εφ}\theta = \frac{\gamma}{g}$$

Η σφαίρα που αφήνεται να πέσει στο επιτάχυνόμενο τρένο κινείται στην κατεύθυνση της  $g'$  ακριβώς όπως μια σφαίρα που την αφήνουμε να πέσει ενώ στεκόμαστε στο έδαφος κινείται στην κατεύθυνση της  $g$ .

Θα αξιοποιήσουμε τώρα την ιδέα της ενεργού βαρύτητας για να λύσουμε με πολύ απλό τρόπο ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον πρόβλημα. Η πόρτα ενός αυτοκινήτου είναι ελαφρώς ανοιχτή. Αν το αυτοκίνητο εκκινήσει από την ηρεμία επιτάχυνόμενο ομαλά, πόση απόσταση θα διανύσει έως ότου κλείσει η πόρτα; Θα φανταστούμε την πόρτα ως ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ομοιόμορφη κατανομή μάζας και μήκος  $L$ . Η βασική ιδέα που θα μας οδηγήσει κατευθείαν στη λύση έγκειται στο να πραγματευθούμε την κίνηση της πόρτας σαν να συνέβαινε υπό την επίδραση μίας και μόνης δύναμης, και συγκεκριμένα, μίας ενεργού βαρυτικής δύναμης προς τα πίσω. Η πραγματική βαρύτητα μπορεί να αγνοηθεί, επειδή οι στροφείς δεν επιτρέπουν την κίνηση στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Η ροπή που ασκείται στην πόρτα δίνεται από την έκφραση

$$M = \frac{1}{2} L m g \eta \mu \theta,$$

όπου  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η πόρτα με την πλευρική επιφάνεια του αυτοκινήτου. Εάν το πάχος της πόρτας υποτεθεί μικρό, μπορούμε να φανταστούμε ότι αυτή αποτελείται από μια κατακόρυφη στήλη παραλληλών και πολύ λεπτών ράβδων που εφάπτονται μεταξύ τους. Τούτη η ιδέα μάς επιτρέπει να αντιληφθούμε αμέσως ότι η ροπή αδράνειας της πόρτας γύρω από τους στροφείς δίνεται από τον τύπο

$$\Theta = \frac{mL^2}{3}.$$

Εν συνεχεία εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, οπότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ασκούμενη ροπή είναι αντίρροπη προς τη γωνιακή ταχύτητα της πόρτας, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$M = \Theta \omega' \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} L m g \eta \mu \theta = \frac{1}{3} m L^2 \omega',$$

και η οποία μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$\omega' + \frac{3\gamma}{2L} \eta \mu \theta = 0.$$

Εάν υιοθετήσουμε την προσέγγιση της μικρής γωνίας  $\eta \mu \theta \approx \theta$ , η ανωτέρω εξίσωση συμπίπτει με εκείνη του απλού αρμονικού ταλαντωτή και, επομένως, περιγράφει μια περιοδική κίνηση με περίοδο

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3\gamma}}.$$

Προφανώς, ο χρόνος  $t$  που θα παρέλθει ώσπου να κλείσει η πόρτα ισούται με το ένα τέταρτο αυτής της περιόδου.

Συνεπώς, η απόσταση που θα διανύσει το αυτοκίνητο στον ίδιο χρόνο  $t$  είναι

$$d = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{32} \gamma T^2 = \frac{1}{12} \pi^2 L. \quad \blacksquare$$

# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

M166

**Συστηματική εργασία.** Λύστε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9 \\ y + [z] + \{x\} = 3,5 \\ z + [x] + \{y\} = 2, \end{cases}$$

όπου με  $[x]$  συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του  $x$  (δηλαδή, τον μέγιστο ακέραιο που δεν υπερβαίνει το  $x$ ) και με  $\{x\} = x - [x]$  συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του  $x$ .

M167

**Η αναζήτηση του  $x$ .** Λύστε την εξισώση:

$$x + \sqrt{x^2 - 9} = \frac{2(x+3)}{(x-3)^2}.$$

M168

**Γεωμετρική αναζήτηση.** Δίνεται στο επίπεδο ένα ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία το  $ABCM$  είναι κυρτό τετράπλευρο και  $\angle MAC + \angle CMB = 90^\circ$ .

M169

**Ακμή κύβου.** Οι αποστάσεις όλων των κορυφών ενός κύβου και των κέντρων των εδρών του από ένα δεδομένο επίπεδο (δεκατέσσερις αποστάσεις, συνολικά) λαμβάνουν δύο διαφορετικές τιμές, η μικρότερη από τις οποίες ισούται με 1. Ποιο είναι το μήκος της ακμής του κύβου;

M170

**Ποια είναι η γωνία;** Σε τρίγωνο  $ABC$  η  $\angle B$  είναι αμβλεία, με μέτρο  $\theta$ . Οι διχοτόμοι των  $\angle A$  και  $\angle C$  τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα σημεία  $P$  και  $M$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία  $K$  και  $L$  στην πλευρά

$AC$  τέτοια, ώστε  $\angle ABK = \angle CBL = 2\theta - 180^\circ$ . Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $KP$  και  $LM$ .

## Φυσική

Φ166

**Το καπέλο του Πινόκιο.** Για χάρη του προσφιλούς του δημιουργήματος, ο γερο-Τζεπέτο έφτιαξε ένα καπέλο από πολύ λεπτό τσίγκο, το οποίο είχε σχήμα κώνου με ύψος  $H = 20$  cm και γωνία κορυφής  $\alpha = 60^\circ$ . Υποθέστε ότι το κεφάλι του Πινόκιο είναι μια σφαίρα διαμέτρου  $D = 15$  cm. Θα βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία το καπέλο όταν θα το φοράει στο κεφάλι του ο Πινόκιο ή όχι;

Φ167

**Η γέννηση ενός άστρου.** Σύμφωνα με μια κοσμολογική υπόθεση, τα άστρα σχηματίζονται από μεσοαστρικά νέφη αερίου και σκόνης λόγω της συμπίεσης που προκαλεί η ίδια τους η βαρύτητα. Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται προκειμένου να δημιουργηθεί ένα άστρο από ένα γιγαντιαίο σφαιρικό νέφος πυκνότητας  $\rho = 2 \cdot 10^{-20}$  g/cm<sup>3</sup>. (Υποθέτουμε ότι κατά τη διαδικασία της συμπίεσης του νέφους τα σωματίδια δεν προσπερνούν το ένα το άλλο. Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.)

Φ168

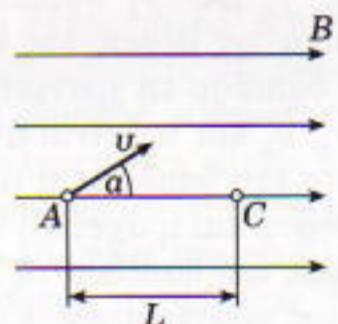
**Υμένιο σαπωνοδιαλύματος.** Ένας βρόχος από κλωστή κείται στην επιφάνεια ενός υμενίου από σαπωνοδιάλυμα (Σχήμα 1). Με μεγάλη προσοχή αποκόπτουμε το μέρος του υμενίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου. Ποια γεωμετρική μορφή θα προσλάβει τότε ο βρόχος; Όταν αποκατασταθεί η ισορροπία, ποια τάση θα παρουσιάζει η κλωστή; Δίνεται ο συντελεστής επιφανειακής τάσης  $a$  του σαπωνοδιαλύματος.



Σχήμα 1

Φ169

**Ηλεκτρόνιο σε μαγνητικό πεδίο.** Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Στο σημείο  $A$  έχει ταχύτητα  $u$ , η οποία σχηματίζει  $\angle a$  με την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Για ποιες τιμές του



Σχήμα 2

μαγνητικού πεδίου θα καταφέρει το ηλεκτρόνιο να φτάσει στο σημείο  $C$ ; Δίνονται το φορτίο του ηλεκτρονίου  $e$  και η μάζα του  $m$ , ενώ η απόσταση  $AC$  ισούται με  $L$ .

Φ170

**Λίμνη στην έρημο.** Μερικές φορές οι ταξιδιώτες που διασχίζουν την έρημο βλέπουν κάτι που μοιάζει με θάλασσα ή λίμνη. Σε πόση απόσταση από τον παρατηρητή εμφανίζονται αυτοί οι αντικατοπτρισμοί; Υποθέστε ότι ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται πλησίον της επιφάνειας του εδάφους η ταχύτητα του φωτός στην έρημο περιγράφεται από τον τύπο  $c(z) = c_0(1 - kz)$ , όπου με  $c_0$  συμβολίζουμε την ταχύτητα του φωτός στην επιφάνεια του εδάφους και με  $z$  το ύψος από το έδαφος.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

# Για να περνά η ώρα



**Σ166**

**Σ166**

Η ισοτητα των έξι. Υπάρχουν άραγε έξι διαφορετικοί θετικοί αριθμοί το άθροισμα των οποίων να ισούται με το γινόμενό τους;



**Σ167**

Τελική τριάδα. Βρείτε τα τελευταία τρία ψηφία του αθροίσματος

$$625^{19} + 376^{99}.$$



**Σ168**

**Σ168**

Αινιγματική ρίζα. Βρείτε την  $\sqrt{12345678987654321}$ .



**Σ169**

Οικονομία στο ψαλίδισμα. Σχεδιάστε σε χιλιοστομετρικό χαρτί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων  $7 \times 8$ . Χωρίστε το ορθογώνιο σε πολύγωνα που αποτελούνται από πέντε τετράγωνα το πολύ με τέτοιον τρόπο ώστε το συνολικό μήκος των τομών να είναι ελάχιστο (οι τομές πρέπει να ακολουθούν τις ευθείες του χαρτιού).



**Σ170**

Αγροτικές εργασίες. Για να στεγνώσει ο φρεσκοκομένος σανός πρέπει να τον ανακατεύσουμε και να τον αναποδογυρίζουμε συνεχώς. Γιατί;

# ΟΙ Δύο Καμήλες

Η μητέρα Φύση γνωρίζει άριστα τη θεωρία της συμβολής

Albert Stasenko

**Π**ΟΣΟ ΜΑΚΡΙΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΒΡΙΣΚΕΤΕ από μια καμήλα ώστε να μπορείτε να διακρίνετε με γυμνό οφθαλμό κατά πόσο το ζώο διαθέτει μία ή δύο καμπούρες; Τι δυσκολίες μπορεί να παρουσιάζει η απάντηση σε ένα τέτοιο ερώτημα μειζονος σημασίας στους πεπειραμένους πωλητές καμηλών; Και όμως, όπως αποδεικνύεται, οι νόμοι της οπτικής θέτουν έναν θεμελιώδη περιορισμό στην ίδια τη δυνατότητα πραγματοποίησης αυτού του εγχειρήματος.

Ας ξεκινήσουμε από τα βασικά. Μια ευρεία δέσμη φωτός έντασης  $I_0$  —πρόκειται για την ενέργεια η οποία ρέει ανά μονάδα επιφανείας και ανά μονάδα χρόνου, σε μονάδες  $J/(s \cdot m^2)$ — φωτίζει από αριστερά ένα αδιαφανές πέτασμα που φέρει σχισμή άπειρου μήκους και εύρους  $d$  (Σχήμα 1).

Η γεωμετρική οπτική προβλέπει ότι το φως πίσω από το πέτασμα θα έχει τη μορφή παράλληλης δέσμης εύρους  $d$ . Το εύρος αυτό δεν μεταβάλλεται με την απόσταση, οπότε, εάν τοποθετήσουμε μια λευκή οθόνη κάθετα στη δέσμη φωτός σε οποιαδήποτε απόσταση από τη σχισμή, θα δούμε μια φωτεινή ζώνη ίδιου εύρους  $d$  και φωτισμού  $I_0$  (δεξιό μέρος του Σχήματος 1).

Ωστόσο, το φως παρουσιάζει περιπλοκή χωρική συμπεριφορά, η οποία καθορίζεται εν πολλοίς από μια

χαρακτηριστική παράμετρο: το μήκος κύματος του  $\lambda$ . Σε αυτό το σημείο, ο έμπειρος αναγνώστης του *Quantum* ενδέχεται να συμπεράνει ότι, στην περίπτωση που εξετάζουμε, το αδιάστατο πηλίκο  $\lambda/d$  θα πρέπει να παίζει σημαντικό ρόλο. Και πράγματι, όπως θα αποδειχθεί, ο σοφός αναγνώστης έχει απόλυτο δίκιο.

Ας διαιρέσουμε τη σχισμή σε δύο φωτεινές ζώνες εύρους  $d/2$ . Στη συνέχεια, συγκεντρώνουμε την ενέργεια αυτών των ζωνών σε δύο φωτεινά «νήματα» άπειρου μήκους που τα χωρίζει απόσταση  $d/2$  (Σχήμα 2). Το πρόβλημά μας έχει αναχθεί πλέον στη συμβολή φωτός που προέρχεται από δύο σχισμές. Με άλλα λόγια, αντιμετωπίζουμε μια κατάσταση παρεμφερή με εκείνη που πρώτος μελέτησε στο περίφημο πείραμά του ο Thomas Young. Ας εξε-

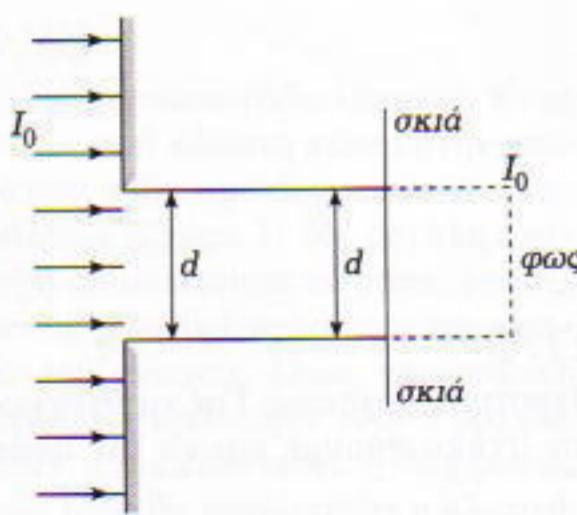
τάσουμε τώρα τι είδους εικόνες θα εμφανιστούν στην λευκή οθόνη που τοποθετούμε σε απόσταση  $x$  δεξιά της σχισμής.

Πρώτα απ' όλα, υπολογίζουμε τη διαφορά των δρόμων  $\Delta = r_2 - r_1$  από τα δύο φωτεινά νήματα ως κάποιο σημείο της οθόνης με συντεταγμένη  $y$ . Εφόσον η σχισμή έχει μικρό εύρος ( $AB \ll x$ ), τα δύο τρίγωνα στο Σχήμα 2 μας δίνουν

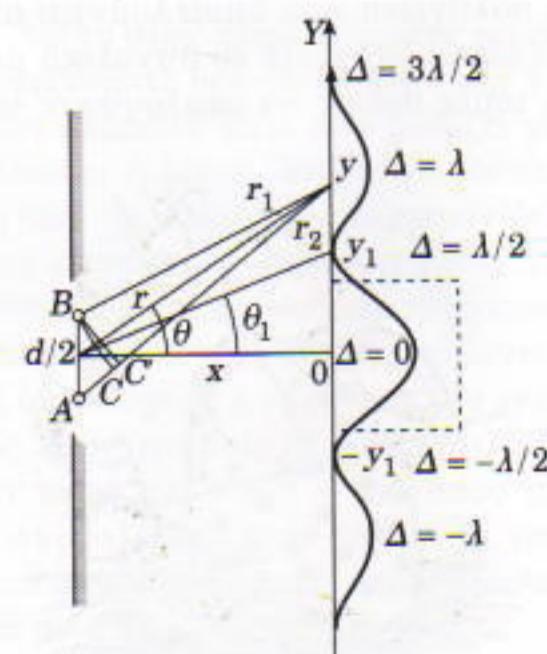
$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 - 2r \frac{d}{4} \eta \mu \theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 2r \frac{d}{4} \eta \mu \theta.$$

Αν αφαιρέσουμε την πρώτη εξισω-



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Τελείωση Σ.Σ

ση από τη δεύτερη, λαμβάνουμε την ισότητα

$$r_2^2 - r_1^2 = rd\eta\mu\theta.$$

Το αριστερό μέλος μπορεί να γραφεί με τη μορφή  $(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$ , όπου ο πρώτος όρος ισούται με τη διαφορά των δρόμων, ενώ ο δεύτερος κατά προσέγγιση με  $2r$ . Έχουμε λοιπόν

$$\Delta = (d/2)\eta\mu\theta.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει απευθείας αντικαθιστώντας το «ισοσκελές τρίγωνο»  $ABC$  από το ορθογώνιο τρίγωνο  $ABC'$ .

Παρότι ενδέχεται να περιττεύει, σας υπενθυμίζω τον βασικό κανόνα της συμβολής: αν η διαφορά των δρόμων ενός σημείου από δύο πηγές ισούται με ακέραιο αριθμό μηκών κύματος τότε τα κύματα ενισχύουν το ένα το άλλο (ενισχυτική συμβολή) αν η διαφορά των δρόμων ισούται με περιττό αριθμό ημικυμάτων, τότε τα κύματα αλληλοαναρρούνται (αποσβεστική συμβολή). Συνεπώς, οι λάτρεις της γεωμετρικής οπτικής θα δουν τις προσδοκίες τους να διαψεύδονται: δεν θα παρατηρηθεί η κατανομή της φωτεινής εντασσής που βλέπεται στο Σχήμα 1, και η οποία έχει τη μορφή συνάρτησης βήματος, αλλά μια σαφώς πολυπλοκότερη εικόνα συμβολής που αποτελείται από εναλλασσόμενες φωτεινές και σκοτεινές ζώνες (ή κροσσούς) (Σχήμα 2). Ο εντονότερος φωτισμός παρατηρείται στο κέντρο της οθόνης και πάνω στην ευθεία που κείται ακριβώς απέναντι από τη σχισμή.

Το πιο ενδιαφέρον σημείο του προβλήματος που μελετάμε σχετίζεται με τις θέσεις των δύο σκοτεινών κροσσών που πλαισιώνουν την κεντρική φωτεινή ζώνη. Όπως προκύπτει από την επιχειρηματολογία μας, σε αυτές τις θέσεις ισχύει

$$\frac{d}{2}\eta\mu\theta_1 = \pm \frac{\lambda}{2},$$

ή, ισοδύναμα,

$$\eta\mu\theta_1 = \frac{\pm y_1}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = \pm \frac{\lambda}{d}.$$

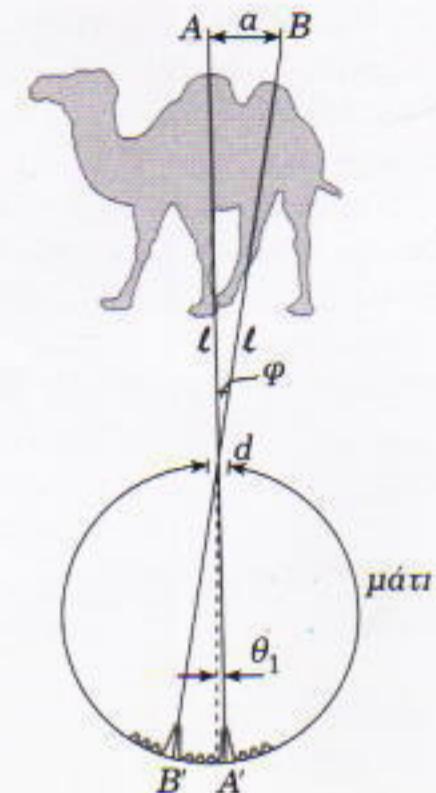
Η τελευταία εξίσωση αποτελεί θριαμβό για τον πεπειραμένο αναγνώστη: πράγματι, η εικόνα συμβολής που δημιουργείται από μία σχισμή εξαρτάται από αυτήν ακριβώς την πολύ σημαντική παράμετρο: το αδιάστατο πηλίκο του μήκους κύματος του φωτός προς το εύρος της σχισμής από την οποία διέρχεται το φως!

Ας επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημα με τις δύο καμήλες. Στην προκειμένη περίπτωση, η κόρη του ματιού μας παίζει το ρόλο της «σχισμής», έστω και αν στην πραγματικότητα πρόκειται για στρογγυλή οπή και όχι για σχισμή άπειρου μήκους. Όπως θα έχετε ήδη αντιληφθεί, ο αμφιβληστροειδής μας παίζει το ρόλο της οθόνης όπου παρατηρείται η εικόνα της συμβολής (Σχήμα 2). Παρά τις ουκ ολίγες διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στο ανθρώπινο μάτι και τη διάταξη που μόλις αναλύσαμε, στον αμφιβληστροειδή μας εμφανίζεται μια εικόνα συμβολής που παρουσιάζει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά! Φυσικά, σε αυτή την περίπτωση η εικόνα δεν συντίθεται από παράλληλους φωτεινούς και σκοτεινούς κροσσούς, αλλά από ομόκεντρους φωτεινούς και σκοτεινούς δακτυλίους που περιβάλλουν την κεντρική φωτεινή κηλίδα. Η ακτίνα του πρώτου σκοτεινού δακτυλίου αντιστοιχεί σε γωνία (κατά τι μεγαλύτερη απ' ό,τι στην προηγούμενη περίπτωση) που δίνεται από τη σχέση

$$\eta\mu\theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

όπου  $d$  η διάμετρος της κόρης του οφθαλμού.

Κάθε «σημείο» ενός απομακρυσμένου αντικειμένου (της καμήλας, για παράδειγμα) ανακλά το ηλιακό φως και στέλνει στο μάτι μας μια σχεδόν παράλληλη δέσμη φωτός. Σύμφωνα με τα πορίσματα της ανάλυσής μας, λοιπόν, ένα τέτοιο σημείο προβάλλεται πάνω στον αμφιβληστροειδή μας ως φωτεινή κηλίδα η οποία περιβάλλεται από ένα σύνολο δακτυλίων. (Δεν σας θυμίζει κάπως τα κύματα που σχηματίζονται όταν ρίχνουμε ένα βότσαλο



Σχήμα 3

στην επιφάνεια μιας λίμνης;) Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι ποιες προϋποθέσεις πρέπει να πληρούνται ώστε να μπορούμε να διακρίνουμε ως ξεχωριστά δύο συγκεκριμένα σημεία του αντικειμένου.

Η εικόνα συμβολής που παράγουν αυτά τα σημεία απεικονίζεται ποιοτικά στο Σχήμα 3. Με τη βοήθεια του γίνεται αμέσως αντιληπτή η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε να διακρίνονται δύο σημεία  $A$  και  $B$ : αν το κεντρικό μέγιστο του φωτισμού από το  $B$  συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο του φωτισμού από το  $A$  ή είναι ακόμη πολυακρυσταλλικό από το κύριο μέγιστο του φωτισμού από το  $A$ , τότε καθίσταται δυνατή η διάκριση των δύο σημείων. Διαφορετικά, συγχέονται και φαίνονται σαν μία κηλίδα.

Επισημαίνουμε ότι το ευκρινέστερο είδωλο στον αμφιβληστροειδή σχηματίζεται όταν η κόρη έχει διάμετρο  $d = 3$  mm. Γι' αυτή την τιμή της διαμέτρου, η γωνιακή διακριτική ικανότητα του ματιού, όπως καθορίζεται από τους νόμους της φυσικής οπτικής, είναι της τάξεως των

$$\varphi = \frac{1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \equiv 50''.$$

Για να καταλήξουμε στην εν λόγω εκτίμηση, χρησιμοποιήσαμε το χαρακτηριστικό μήκος κύματος  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  m = 500 nm. Όταν θέλουμε

να εξετάσουμε λεπτομερώς ένα αντικείμενο, στρέφουμε τα μάτια μας έτοι ώστε το είδωλο να σχηματίζεται πάνω στη λεγόμενη ωχρά κηλίδα του αμφιβληστροειδή, η οποία περιέχει περίπου 15.000 κωνία (φωτευαίσθητα κύτταρα) και τα οποία καταλαμβάνουν επφάνεια γωνιακού μεγέθους περίπου  $1,5^\circ$ . Πρόκειται για την περιοχή του ματιού όπου εμφανίζεται η μεγαλύτερη συγκέντρωση κωνίων. Στην ωχρά κηλίδα κάθε κωνίο φαίνεται από την κόρη υπό γωνία της τάξεως των

$$\varphi_1 = \frac{1,5^\circ \cdot 3.600''/\circ}{\sqrt{15.000}} = 50''.$$

Οπως φαίνεται, η μητέρα Φύση γνωρίζει άριστα τα περί συμβολής!

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να παραθέσουμε ένα μικρό απόσπασμα από τα *Taξίδια του Γκιούλιβερ* του Jonathan Swift:

*Η Φύση έχει προσαρμόσει τα μάτια των Λιλιπούτεων στα αντικείμενα που επβάλλεται να μπορούν να παρατηρούν: βλέπουν με εξαιρετική ακρίβεια, αλλά όχι σε μεγάλες αποστάσεις. Και για να αποδείξω πόσο μεγάλη ήταν η οπτική τους οξύτητα προκειμένου για κοντινά αντικείμενα, ας προσθέσω ότι είχα τη χαρά να παρατηρήσω έναν μάγειρα να ξεκοκαλίζει έναν κορυδαλλό όχι μεγαλύτερο από μια μύγα, καθώς και ένα κοριτσάκι να περνάει μια αόρατη μεταξωτή κλωστή μέσα από αόρατη βελόνα.*

Την ίδια στιγμή, όμως, ο Γκιούλιβερ διαπίστωνε ότι ήταν δωδεκαπλάσιος σε μέγεθος συγκριτικά με τους Λιλιπούτειους και ότι τα αντικείμενα στη Λιλιπούτη ήταν μικρότερα από τα δικά μας κατά τον ίδιο συντελεστή. Έτσι, οι κόρες των ματιών ενός Λιλιπούτειου είχαν διάμετρο ίση με το  $1/12$  της δικής μας. Συνεπώς, η γωνία εκτροπής για τους Λιλιπούτειους ήταν δωδεκαπλάσια από τη δική μας, γεγονός που σημαίνει ότι το είδωλο μιας ομηριακής φωτεινής πηγής στον αμφιβληστροειδή τους ήταν επίσης μεγαλύτερο από το δικό μας κατά τον ίδιο παράγοντα. Ποιος ο λόγος λοιπόν να δημιουργήσει η Φύση κωνία

μικρότερα από εκείνα του Γκιούλιβερ; Κάτι τέτοιο θα ισοδυναμούσε με σπατάλη κυττάρων! Έβλεπαν πράγματι καλύτερα από εμάς οι Λιλιπούτειοι, έστω και σε κοντινές αποστάσεις;

Προκειμένου λοιπόν να διακρίνονται δύο σημεία, ισχύει η (προσεγγιστική) συνθήκη

$$\varphi \geq \theta_1, \text{ ή } \frac{a}{t} \geq 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

από όπου προκύπτει

$$t \leq \frac{ad}{1,22\lambda}. \quad (*)$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι για να προχωρήσουμε σε αριθμητική εκτίμηση. Έστω, λοιπόν, ότι η απόσταση ανάμεσα στις δύο καμπούρες (ύβους λίπους) της καμήλας ισούται με  $a \approx 0,5$  m, η διάμετρος της κόρης με  $d \approx 1$  mm (μην ξεχνάτε ότι στην έρημο το φως είναι άπλετο!) και το μέσο μήκος κύματος του ήλιακου φωτός με  $\lambda \approx 0,5$  μm. Με τις προναφερθείσες τιμές καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$t \leq \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} \text{ m} \approx 800 \text{ m.}$$

Κατά πάσαν πθανότητα, βέβαια, οι καμπούρες της καμήλας δεν αποτελούν τα πιο ενδιαφέροντα αντικείμενα για παρατήρηση. Δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαίο όμως το γεγονός ότι οι κατασκευαστές τηλεσκοπίων προσπαθούν να κατασκευάζουν μεγάλες «κόρες» (αντικειμενικούς φακούς): πράγματι, η διάκριση δύο άστρων καθιστάται δυνατή μόνον εφόσον τα χωρίζει γωνιακή απόσταση όχι μικρότερη από  $\theta_1$ . Ούτε θα δυσκολευτούμε να κατανοήσουμε γιατί τα μάτια του αετού πρέπει να διαθέτουν μεγάλες κόρες, ώστε να μπορεί το ζώο να διακρίνει από ψηλά ένα ποντίκι που βρίσκεται στο έδαφος.

Τι θα συμβεί αν συνδυάσουμε ένα τηλεσκόπο και ένα μικροσκόπιο; Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι κάθε τμήμα του συστήματος θα μεγεθύνει το είδωλο κατά χίλιες φορές —οπότε θα περιμένει κανείς ότι με αυτό το «υπερτηλεσκόπιο» θα επι-

τυγχάναμε μεγέθυνση της τάξεως του ενός εκατομμυρίου! Μήπως, δηλαδή, θα μπορούσαμε να δούμε ακόμη και τα πετραδάκια στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη;

Δυστυχώς, η ευκρίνεια του ειδώλου καταστρέφεται ανεπανόρθωτα εξαιτίας των φαινομένων συμβολής ακόμη και στον αντικειμενικό φακό του τηλεσκοπίου, με αποτέλεσμα να χάνονται οι λεπτομέρειες αντικειμένων μεγέθους μικρότερου από εκείνο που καθορίζει το *κριτήριο του Rayleigh* (εξισώστη \*). Άλλα και στον αντικειμενικό φακό του μικροσκοπίου σημειώνονται φαινόμενα συμβολής, τα οποία καθιστούν δυνατή τη διάκριση δύο σημείων τα οποία βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από το μήκος κύματος του φωτός που χρησιμοποιείται για το φωτισμό ενός αντικειμένου (έτσι εξηγείται γιατί τα μικρόβια δεν μπορούν να παρατηρηθούν με οπτικά μικροσκόπια).

Τι αποκομίσαμε λοιπόν από αυτή τη μελέτη; Μήπως, τελικά, τα οπτικά όργανα κατασκευάστηκαν μόνο και μόνο για να παρατηρούμε τις εικόνες συμβολής στις «κόρες» τους; Ασφαλώς όχι. Αυτοί που επινόησαν τα πρώτα μικροσκόπια και τηλεσκόπια δεν είχαν την παραμικρή ιδέα περί συμβολής του φωτός, διότι η κυριακή θεωρία εμφανίστηκε πολύ αργότερα. Μέχρι τότε πίστευαν ότι αρκούσε να σχεδιάζουν τις διαδρομές των ακτίνων σύμφωνα με τους νόμους της γεωμετρικής οπτικής, να επιλέγουν σωστά τους αντικειμενικούς και προσοφθάλμιους φακούς και να ρυθμίζουν κατάλληλα τις μεταξύ τους αποστάσεις για να επιτύχουν ολοένα και μεγαλύτερες μεγεθύνσεις. Ωστόσο, όπως πολύ συχνά συμβαίνει στη φυσική, η νέα θεωρία έρχεται να αποκαλύψει τα όρια μιας παλαιότερης, απλουστικής θεωρίας. Οι καμήλες μάς βοήθησαν να θυμηθούμε αυτή την πανάρχαια αλήθεια.

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα:

Eisenkraft και Kirkpatrick, «Ανερχόμενοι αστέρες» (Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994), «Δημιουργία χρωμάτων» (Ιούλιος/Αύγουστος 1997).

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

## Μαθηματικά

### M166

Προσθέτουμε και τις τρεις εξισώσεις. Αφού  $[x] + \{x\} = x$ , κ.λπ., θα έχουμε

$$2(x + y + z) = 9,4$$

και, επομένως,  $x + y + z = 4,7$ . Αν προσθέσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις, βρίσκουμε  $x + y + z + [y] + \{x\} = 7,4$ . Συνεπώς  $[y] + \{x\} = 7,4 - 4,7 = 2,7$  και άρα  $[y] = 2$  και  $\{x\} = 0,7$ . Αν προσθέσουμε τώρα την πρώτη με την τρίτη εξισώση και τη δεύτερη με την τρίτη, βρίσκουμε ότι  $[x] = 1$ ,  $\{z\} = 0,2$ ,  $[z] = 0$  και  $\{y\} = 0,8$ . Απάντηση:  $x = 1,7$ ,  $y = 2,8$  και  $z = 0,2$ .

### M167

Συμβολίζουμε με  $y$  το αριστερό μέλος της δεδομένης εξισώσης. Τότε,  $y - x = \sqrt{x^2 - 9}$ . Επομένως,  $y - x \geq 0$ . Υψώνουμε στο τετράγωνο την τελευταία εξισώση και εκφράζουμε το  $x$  συναρτήσει του  $y$ :

$$x = \frac{y^2 + 9}{2y}$$

(μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι  $y \neq 0$ ). Από την ανισότητα  $y - x \geq 0$  συνεπάγεται ότι

$$y - \frac{y^2 + 9}{2y} = \frac{y^2 - 9}{2y} \geq 0 \quad (1)$$

(αποτέλεσμα που θα μας φανεί χρήσιμο στη συνέχεια). Βρίσκουμε ότι

$$x + 3 = \frac{(y + 3)^2}{2y}$$

και

$$x - 3 = \frac{(y - 3)^2}{2y}.$$

Εάν αντικαταστήσουμε αυτές τις

παραστάσεις στην αρχική εξισώση, παίρνουμε

$$y = \frac{4y(y + 3)^2}{(y - 3)^4}.$$

Μπορούμε τώρα να διασπάσουμε την εξισώση μας σε δύο εξισώσεις:  $(y - 3)^2 = 2(y + 3)$  και  $(y - 3)^2 = -2(y + 3)$ , ή  $y^2 - 8y + 3 = 0$  και  $y^2 - 4y + 15 = 0$ . Η δεύτερη εξισώση δεν έχει πραγματικές ρίζες, ενώ η πρώτη έχει δύο πραγματικές ρίζες:  $4 \pm \sqrt{13}$ . Μόνο η μεγαλύτερη από τις δύο αυτές ρίζες ικανοποιεί τη συνθήκη (1). Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στην αρχική μας εξισώση και να βρούμε ότι  $x = 8 - \sqrt{13}$ .

### M168

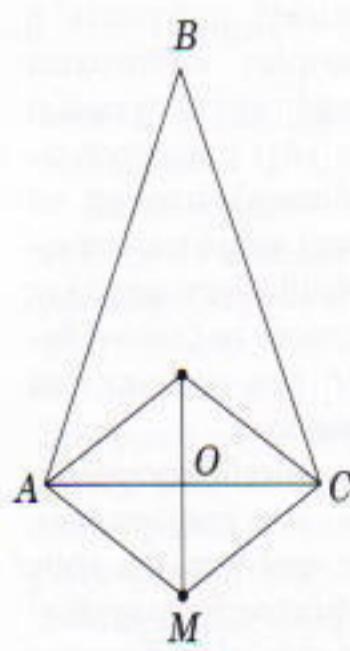
Έστω  $O$  το κέντρο του περιγεγραμένου κύκλου του τριγώνου  $AMC$  (Σχήμα 1). Από τις συνθήκες του προβλήματος συνεπάγεται ότι η  $\angle MAC$  είναι οξεία. Λόγω του τρόπου επλογής του σημείου  $O$  έχουμε  $\angle MOC = 2\angle MAC$  και το σημείο  $O$  ανήκει στην ίδια πλευρά της  $AM$  με τα σημεία  $B$  και  $C$ . Είναι προφα-

νές, από την ιούτητα  $MO = CO$ , ότι  $\angle OMC = 90^\circ - (1/2)\angle MOC = 90^\circ - \angle MAC = \angle BMC$ .

Επομένως, η ευθεία  $MB$  περιέχει το σημείο  $O$ . Αν το  $O$  δεν συμπίπτει με το  $B$ , τότε η  $BM$  είναι η μεσοκάθετος της  $AC$  (και το τμήμα  $BM$  πρέπει να τέμνει το τμήμα  $AC$ ). Αν το  $O$  συμπίπτει με το  $B$ , τότε το σημείο  $M$  ανήκει στο αντίστοιχο τόξο του κύκλου. Ο ζητούμενος τόπος παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.

### M169

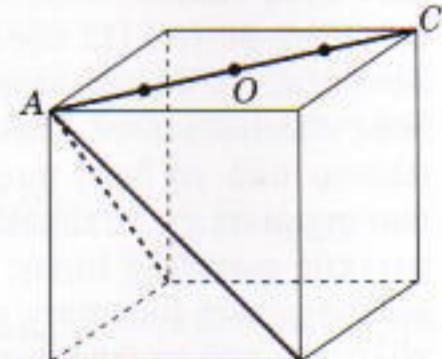
Θεωρούμε τρεις διαγωνίους των εδρών του κύβου που συντρέχουν στην ίδια κορυφή. Μία τους τουλάχιστον δεν είναι παράλληλη προς το δεδομένο επίπεδο. Έστω ότι είναι η διαγώνιος  $AC$ , και έστω  $O$  το μέσον της (Σχήμα 3). Τότε το δεδομένο επίπεδο πρέπει να τέμνει την  $AC$  στο μέσον ενός από τα τμήματα  $AO$  ή  $OC$ . Σε αντίθετη περίπτωση, οι αποστάσεις των  $A$ ,  $O$  και  $C$  από αυτό το επίπεδο θα ήταν διαφορετικές μεταξύ τους (το επίπεδο δεν μπορεί να περιέχει κάποιο από αυτά τα σημεία,



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

διότι η ελάχιστη από τις αποστάσεις τους ισούται με 1). Γενικώς, κάθε διαγώνιος οποιασδήποτε έδρας του κύβου θα τέμνει το δεδομένο επίπεδο με αυτό τον τρόπο ή θα είναι παράλληλη προς αυτό.

Μπορούμε εύκολα τώρα να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν δύο μόνο δυνατότητες: (1) το δεδομένο επίπεδο είναι παράλληλο προς δύο έδρες του κύβου και διαιρεί τις κάθετες προς αυτό έδρες σε αναλογία  $1 + 3$ , ή (2) η τομή του δεδομένου επιπέδου με τον κύβο είναι ένα κανονικό εξάγωνο, κορυφές του οποίου είναι τα μέσα συγκεκριμένων ακμών του κύβου. Στην πρώτη περίπτωση η ακμή του κύβου ισούται με 4, ενώ στη δεύτερη με  $2\sqrt{3}$ .

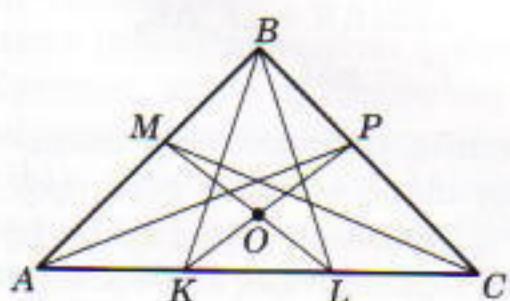
### M170

Παρατηρούμε ότι

$$\angle CBK = \theta - (2\theta - 180^\circ) = 180^\circ - \theta$$

— με άλλα λόγια, ισούται με την εξωτερική γωνία του τριγώνου  $ABC$  στην κορυφή  $B$ . Επομένως, η  $BC$  είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου  $ABK$  στην κορυφή  $B$ . Από υπόθεση, η  $AP$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BAK$ . Αρα, το σημείο  $P$  ισαπέχει από τις ευθείες  $AB$ ,  $BK$  και  $AC$ . Συνεπώς, η  $KP$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BKC$ . Ομοίως, η  $LM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BLA$ .

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του Σχήματος 4. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι  $\theta \geq 2(2\theta - 180^\circ)$  και, επομένως,  $\theta \leq 120^\circ$ . Συνεπώς,  $\angle KBL = 360^\circ - 3\theta$ . Ας υποθέσουμε ότι, για κάποιους αριθμούς  $\varphi$  και  $\omega$ , έχουμε  $\angle BKL = 2\omega$  και  $\angle BLK = 2\varphi$ . Τότε, από το τρίγωνο  $BKL$ , έχουμε  $2\varphi + 2\omega + (360^\circ - 3\theta) = 180^\circ$ . Αρα,  $\varphi + \omega = (3\theta/2) - 90^\circ$ . Από το τρίγωνο  $KOL$  βρίσκουμε ότι  $\angle KOL = 180^\circ$



Σχήμα 4

$-(\varphi + \omega) = 270^\circ - (3\theta/2)$ . Ως γωνία δύο ευθειών ορίζουμε τη μικρότερη από τις γωνίες που σχηματίζονται στην τομή τους. Επομένως, δεν μπορεί να είναι αμβλεία. Στην περίπτωσή μας, η  $\angle KOL$  δεν είναι οξεία. Άρα, αν  $\theta \leq 120^\circ$ , η γωνία μεταξύ των ευθειών  $KP$  και  $ML$  ισούται με  $(3\theta/2) - 90^\circ$ , ενώ, αν  $\theta > 120^\circ$ , η γωνία αυτή ισούται με  $270^\circ - (3\theta/2)$ .

### Φυσική

#### Φ166

Το πρώτο βήμα για τη λύση της άσκησης συνιστάται στο να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου βάρους του καπέλου. Προς τούτο, διαιρούμε τον κώνο σε ένα σύνολο λεπτών κόλουρων κώνων του ίδιου ύψους  $dH$  (Σχήμα 5). Παρατηρούμε ότι η μάζα των κόλουρων κώνων αυξάνει γραμμικά καθώς προχωρούμε από την κορυφή προς τη βάση του καπέλου. Επιπλέον δε, τα κέντρα βάρους όλων των κόλουρων κώνων κείνται επί του άξονα του κώνου.

Εφόσον μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε απλώς τη θέση του κέντρου βάρους του κώνου, εύκολα αποδεικνύεται ότι μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με ένα ισοσκελές τρίγωνο από το ίδιο υλικό, το οποίο έχει ίσο ύψος, ίσο εμβαδόν και, ως εκ τούτου, ίση μάζα προς τούτο, αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα τη γωνία του ισοσκελούς τριγώνου που κείται έναντι της βάσης. (Στην προκειμένη περίπτωση, η τιμή της εν λόγω γωνίας πρέπει να ισούται με  $129^\circ$  περίπου.) Εάν το τρίγωνο αυτό το τοποθετήσουμε έτσι ώστε το ύψος του από την κορυφή να συμπίπτει με το ύψος του κώνου, τα οριζόντια επίπεδα που ορίζουν τους μικρούς κόλουρους κώνους θα το χωρίζουν σε μικρά ισοσκελή τραπέζια ύψους

$dH$ . Μάλιστα, κάθε μικρό τραπέζιο θα έχει ίση μάζα με τον αντίστοιχο κόλουρο κώνου. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το σύστημα των κέντρων βάρους των τραπεζίων συμπίπτει με το αντίστοιχο σύστημα των κόλουρων κώνων, πράγμα που σημαίνει ότι τα κέντρα βάρους του κώνου και του ισοσκελούς τριγώνου ταυτίζονται. Γνωρίζουμε, ωστόσο, ότι το κέντρο βάρους μιας ομογενούς τριγωνικής πλάκας βρίσκεται στο σημείο όπου συντρέχουν οι διάμεσοι της. Συνεπώς, το κέντρο βάρους το καπέλου κείται επί του άξονα συμμετρίας του και σε απόσταση  $(2/3)H$  από την κορυφή του.

Το καπέλο θα βρίσκεται σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας αν οποιαδήποτε μικρή μετατόπιση του από τη θέση του επιφέρει ανύψωση του κέντρου βάρους του (και συνεπώς αύξηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος). Εν τοιαύτη περιπτώσει, κάθε σύστημα του οποίου η κίνηση δεν υπόκειται σε περιορισμούς (στην ορολογία της κλασικής μηχανικής θα το λέγαμε σύστημα χωρίς δεσμούς) θα επιστρέψει στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο που μόλις διατυπώσαμε, διαπιστώνουμε ότι η ισορροπία του καπέλου πάνω στο κεφάλι του Πινόκιο θα είναι ευσταθής μόνο εάν το κέντρο βάρους του καπέλου (το σημείο  $M$  στο Σχήμα 6) κείται χαμηλότερα από το κέντρο βάρους του κεφαλιού του Πινόκιο (σημείο  $O$ ). Ως εκ τούτου, θα πρέπει να ικανοποιείται η ανισότητα

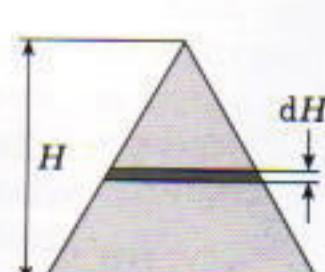
$$\frac{2}{3}H > \frac{R}{\frac{a}{2}},$$

ημ  $\frac{a}{2}$

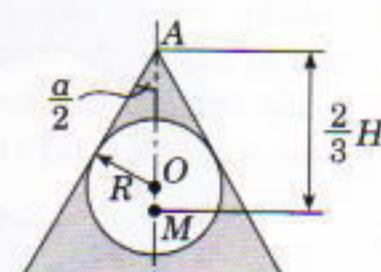
ή  $H > 3R = 22.5$  cm. Άλλα από την εκφώνηση του προβλήματος γνωρίζουμε ότι  $H = 20$  cm. Κατά συνέπεια, το καπέλο δεν θα βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία όταν θα το φοράει στο κεφάλι του ο Πινόκιο.

#### Φ167

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που βρίσκεται σε απόσταση  $R$  από το κέντρο του σφαιρικού νέφους. Γνωρίζουμε ότι για να προσδιορίσουμε



Σχήμα 5



Σχήμα 6

τη συνισταμένη δύναμη που δρά στο σωματίδιο αρκεί να λάβουμε υπόψη μόνο το μέρος εκείνο του σφαιρικού νέφους που περιέχεται σε μια σφαίρα ακτίνας  $R$  (βλ. το άρθρο του A. Stasenko «Η Νέα Γη» στο τεύχος Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1999).

Στην εκφώνηση του προβλήματος διατυπώνεται η υπόθεση ότι κατά τη συμπίεση του νέφους τα σωματίδια δεν προσπερνούν το ένα το άλλο. Συνεπώς, η ολική μάζα που έλκει το θεωρούμενο σωματίδιο παραμένει, ανά πάσαν στιγμή, σταθερή. Λόγω των ιδιαιτεροτήτων του βαρυτικού πεδίου, η κίνηση του σωματίδιου δεν θα διαφοροποιηθεί αν φανταστούμε τη μάζα αυτή συγκεντρωμένη στο κέντρο του νέφους. Επιτύχαμε έτσι να απλουστεύσουμε σημαντικά το πρόβλημά μας: αρκεί να υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται ώστε ένα σωματίδιο να πέσει σε μια μάζα (η οποία εξαρτάται από την αρχική θέση του σωματίδιου) στο κέντρο του σφαιρικού νέφους.

Θα θεωρήσουμε ότι η τροχιά που διαγράφει το σωματίδιό μας αποτελεί τμήμα μιας πολύ επιμήκους έλλειψης της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας ισούται με  $R/2$ . Ας συγκρινουμε, λοιπόν, την κίνηση πάνω σ' αυτή την τροχιά με την κίνηση γύρω από το κέντρο του νέφους σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $R$ . Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Kepler, ισχύει η ισότητα

$$\frac{T_{\kappa}^2}{T_e^2} = \frac{R^3}{\left(\frac{R}{2}\right)^3},$$

όπου με  $T_{\kappa}$  και  $T_e$  συμβολίζουμε αντίστοιχα τις περιόδους περιφοράς για την κυκλική και την ελλειπτική τροχιά. Η περίοδος  $T_{\kappa}$  μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και του νόμου της παγκόσμιας έλξης. Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{mu^2}{R} = F_g = G \frac{mM}{R^2} = G \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{R^2},$$

από όπου καταλήγουμε στο επιζη-

τούμενο αποτέλεσμα

$$T_{\kappa} = \frac{2\pi R}{v} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

και

$$T_e = \frac{T_{\kappa}}{2^{3/2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8G\rho}}.$$

Διαπιστώνουμε ότι η περίοδος  $T_e$  δεν εξαρτάται από την  $R$ . Συνεπώς, η διάρκεια της πτώσης ενός σωματίδιου προς το κέντρο του σφαιρικού νέφους (ο χρόνος σχηματισμού του άστρου), ο οποίος ισούται με το ήμισυ της περιόδου περιφοράς για την ελλειπτική τροχιά, δεν εξαρτάται από το μέγεθος του νέφους και δίνεται από τον τύπο

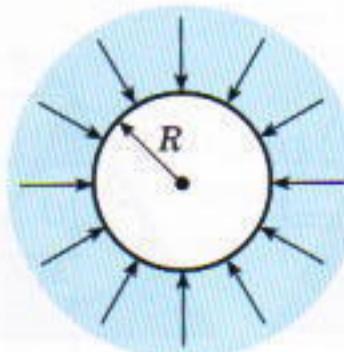
$$\tau = \frac{T_e}{2} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \equiv 1,5 \cdot 10^{13} \text{ s} \\ \equiv 10^6 \text{ έτη.}$$

### Φ168

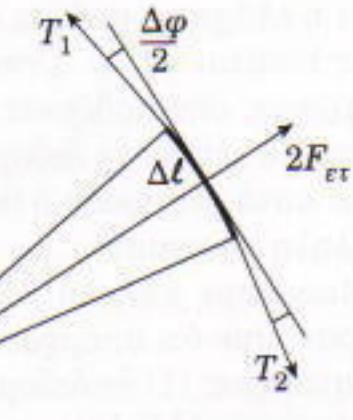
Μετά την αφαίρεση του εσωτερικού μέρους του, το υπόλοιπο υμένιο θα προσλάβει τέτοια μορφή ώστε να ελαχιστοποιηθεί η επφάνειά του. Επομένως, το σύνορο της οπής θα λάβει τη μορφή του σχήματος που περικλείει το μέγιστο δυνατόν εμβαδόν για δεδομένη και σταθερή περίμετρο  $\ell$ . Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε πως το σχήμα που ικανοποιεί αυτή την απαίτηση είναι ο κύκλος (Σχήμα 7). Στην προκειμένη περίπτωση, η ακτίνα του ισούται με

$$R = \frac{\ell}{2\pi}.$$

Για να προσδιορίσουμε την τάση της κλωστής, ας θεωρήσουμε ένα



Σχήμα 7



Σχήμα 8

στοιχειώδες τμήμα της με μήκος  $\Delta\ell = R\Delta\varphi$  (Σχήμα 8). Σ' αυτό δρουν δύο τάσεις  $T_1$  και  $T_2$  ( $T_1 = T_2 = T$ ), οι οποίες ασκούνται εφαπτομενικά από τα γειτονικά τμήματα της χορδής, και η δύναμη  $2F_{tt}$  λόγω της επιφανειακής τάσης του υμενίου. (Με  $F_{tt}$  δηλώνουμε τη δύναμη που θα ασκούνταν στο στοιχειώδες τμήμα της κλωστής αν το υμένιο είχε μία μόνον επιφάνεια.) Από τη συνθήκη ισορροπίας του στοιχειώδους τμήματος για την ακτινική διεύθυνση παίρνουμε

$$2T\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) - 2F_{tt} = 0.$$

Για να γράψουμε την ανωτέρω εξίσωση, λάβαμε υπόψη το μικρό μέγεθος του στοιχειώδους τμήματος και χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση της μικρής γωνίας ημ( $\Delta\varphi/2$ )  $\equiv \Delta\varphi/2$ . Για να προσδιορίσουμε τη δύναμη  $F_{tt}$  επιτρέπουμε στο υμένιο να εκτελέσει μια απειροστή (δυνάμει) συστολή, η οποία επφέρει μετατόπιση του στοιχείου  $\Delta\ell$  κατά  $\Delta R$ . Η ενέργεια του υμενίου θα ελαττωθεί κατά  $\Delta E = 2a\Delta\ell\Delta R$ , ποσότητα ακριβώς ίση με το έργο που παράγει η επιφανειακή τάση του υμενίου  $\Delta W = 2F_{tt}\Delta R$ . Έτσι, καταλήγουμε στην ισότητα

$$\Delta E = \Delta W, \\ 2a\Delta\ell\Delta R = 2F_{tt}\Delta R, \\ F_{tt} = a\Delta\ell.$$

Συνεπώς, ο συντελεστής επιφανειακής τάσης, ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση χαρακτηρίζει τη μία από τις επιφάνειες του υμενίου, μπορεί να θεωρηθεί ως η δύναμη που δρά ανά μονάδα μήκους στο

σύνορο του υμενίου και κάθετα προς αυτό:

$$a = \frac{F_{\text{ee}}}{\Delta t}.$$

Εφόσον  $T\Delta\varphi = 2F_{\text{ee}}$ , για την τάση της κλωστής έχουμε

$$T = 2 \frac{F_{\text{ee}}}{\Delta\varphi} = 2aR = a \frac{\ell}{\pi}.$$

Το παρόν πρόβλημα το εξετάσαμε με λεπτομέρεια, επειδή φωτίζει την πρόλευση της επιφανειακής τάσης. Στους υπολογισμούς συχνά αποδεικνύεται χρήσιμη η ιδέα ότι η επιφανειακή ενέργεια ισοδυναμεί με το τέντωμα της επιφάνειας του υγρού. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τείνουσες δυνάμεις ασκούνται στην καμπύλη που αποτελεί το σύνορο του υμενίου. Εάν διαιρέσουμε (νοητά) το υμένιο σε δύο μέρη, το ένα έλκει το άλλο με δυνάμεις κάθετες στο κοινό τους σύνορο. Εκ πρώτης όψεως, η όλη κατάσταση θυμίζει το τέντωμα μιας ελαστικής μεμβράνης. Ωστόσο, υπάρχει μια σημαντική διαφορά: όταν τείνεται το υγρό υμένιο, οι δυνάμεις της επιφανειακής τάσης παραμένουν σταθερές κατά το μέτρο, εν αντιθέσει προς τις αντίστοιχες δυνάμεις στην ελαστική μεμβράνη οι οποίες καθίστανται ισχυρότερες. Έτσι, διαπιστώνουμε όντως μιαν αναλογία μεταξύ του υγρού υμενίου και της ελαστικής μεμβράνης, η οποία όμως δεν είναι απολύτως ακριβής: πρέπει λοιπόν να επεικνύουμε προσοχή όποτε την επικαλούμαστε.

## Φ169

Σε κάθε ηλεκτρόνιο το οποίο κινείται εντός μαγνητικού πεδίου ασκείται δύναμη Lorentz. Εφόσον η εν λόγω δύναμη είναι πάντα κάθετη στο μαγνητικό πεδίο, η συνιστώσα της στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου παραμένει μηδενική. Συνεπώς, κατά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου το ηλεκτρόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα υσυνα. Εάν προβάλουμε την κίνηση του ηλεκτρονίου σε επίπεδο κάθετο προς το μαγνητικό πεδίο  $B$ , παίρνουμε μια ομαλή κυ-

κλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου υημα, η οποία περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{mu^2 \eta m^2 a}{R} = eB \eta m a.$$

Η εξίσωση αυτή μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ακτίνα  $R$  και την περίοδο της κυκλικής κίνησης  $T$ . Έτσι

$$R = \frac{mu \eta m a}{eB},$$

$$T = \frac{2\pi R}{u \eta m a} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Επομένως, το ηλεκτρόνιο διαγράφει μιαν έλικα: στη μεν διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, στο δε επίπεδο το κάθετο προς το μαγνητικό πεδίο η τροχιά του είναι κύκλος.

Ας υποθέσουμε ότι το ηλεκτρόνιο φτάνει στο σημείο  $C$  αφού πραγματοποιήσει  $n$  περιφορές. Αν συμβολίσουμε το μέτρο του αντίστοιχου μαγνητικού πεδίου με  $B_n$ , μπορούμε να γράψουμε την εξής έκφραση για το χρόνο που χρειάζεται το ηλεκτρόνιο προκειμένου να μεταβεί από το  $A$  στο  $C$ :

$$t = \frac{L}{u \eta m a}.$$

Από την άλλη, στον ίδιο χρόνο το ηλεκτρόνιο πρέπει να πραγματοποιήσει  $n$  περιφορές, γεγονός που οδηγεί στη σχέση

$$t = nT.$$

Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις για το χρόνο  $t$  παίρνουμε

$$\frac{L}{u \eta m a} = n \frac{2\pi m}{eB_n},$$

όπου το  $n$  λαμβάνει τις τιμές 1, 2, 3, ... . Έτσι, καταλήξαμε σε ένα σύνολο «κβαντισμένων» τιμών για το  $B_n$ , οι οποίες διασφαλίζουν ότι το ηλεκτρόνιο θα επιτύχει το στόχο του στο σημείο  $C$ .

## Φ170

Όταν η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το φως στον αέρα εξαρτά-

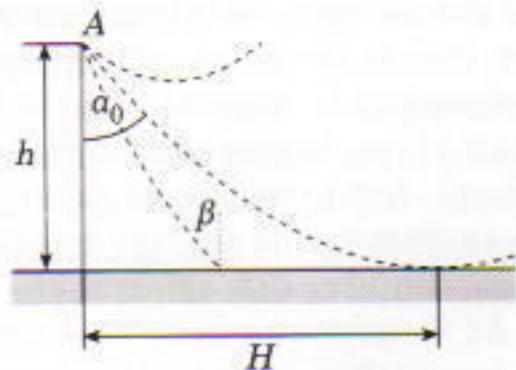
ται από το ύψος, οι ακτίνες του φωτός δεν ακολουθούν ευθύγραμμη διαδρομή αλλά καμπυλώνονται (με άλλα λόγια, το φως υφίσταται διάθλαση). Αυτό ακριβώς το φαινόμενο κρύβεται πίσω από την παρατήρηση «λιμνών» στις ερήμους.

Ας θεωρήσουμε έναν παρατηρητή ύψους  $h$  ο οποίος στέκεται στο έδαφος (Σχήμα 9). Ας προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την πορεία την οποία ακολουθούν οι ακτίνες που εκπέμπονται από το σημείο  $A$ . Η ακτίνα που σχηματίζει γωνία  $a_0$  με την κατακόρυφο καμπυλώνεται με τέτοιον τρόπο, ώστε η διαδρομή της εφάπτεται με το έδαφος για να κατευθυνθεί εν συνεχείᾳ προς τον ουρανό. Επίσης, προς τον ουρανό κατευθύνεται τελικά και κάθε ακτίνα η οποία εκπέμπεται υπό γωνία  $a$  μεγαλύτερη της  $a_0$ . Αντιθέτως, οι ακτίνες οι οποίες εκπέμπονται υπό γωνία  $a$  μικρότερη της  $a_0$  προσπίπτουν στο έδαφος. Εάν εφαρμόσουμε την αρχή του αντιστρεπτού της πορείας του φωτός, αντιλαμβανόμαστε αμέσως ότι ο παρατηρητής βλέπει άμμο έως μια γωνία  $a_0$ , αλλά σε μεγαλύτερες αποστάσεις (οι οποίες αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες γωνίες) βλέπει τον γαλάζιο ουρανό. Παραδόξως, όμως, οι «ουράνιες ακτίνες» καταφθάνουν στα μάτια του παρατηρητή από κάτω, με αποτέλεσμα να νοιμίζει ότι διακρίνει μια γαλάζια λίμνη που εκτείνεται σε κάποιαν απόσταση μακριά του (υποσυνείδητα, στον τρόπο με τον οποίο ο άνθρωπος μορφώνει αντίληψη για το περιβάλλον του λαμβάνεται υπόψη η ιδιότητα του φωτός να διαδίδεται ευθύγραμμα).

Ας έλθουμε τώρα στον υπολογισμό της απόστασης  $H$ . Σύμφωνα με τον γενικευμένο νόμο της διάθλασης για μέσα όπου το φως διαδίδεται με ταχύτητα  $\eta$  οποία εξαρτάται από το υψόμετρο, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\eta m a}{\eta m \beta} = \frac{c(h)}{c_0},$$

όπου με  $c(h)$  συμβολίζουμε την ταχύτητα του φωτός σε ύψος  $h$ , ενώ  $\beta$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα με την κατακόρυφο στο έδα-



Σχήμα 9

φος. Για την ακτίνα που μας ενδιαφέρει, η γωνία  $\beta$  ισούται με  $90^\circ$ , οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$\text{ημ} a_0 = \frac{c(h)}{c_0} = 1 - \mu h.$$

Εππλέον, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η ταχύτητα του φωτός μεταβάλλεται πολύ αργά με την αύξηση του ύψους, γεγονός που σημαίνει ότι η καμπυλότητα των ακτίνων είναι πολύ μικρή. Συνεπώς, η πορεία της ακτίνας από το σημείο  $H$  ως το μάτι του παρατηρητή μπορεί να υποτεθεί (σχεδόν) ευθύγραμμη. Εν τοιαύτη περιπτώσει, από το Σχήμα 9 βλέπουμε ότι  $H = h \text{ημ} a_0$ . Χρησιμοποιώντας την έκφραση για το ημ  $a_0$  που βρήκαμε προηγουμένως, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$H = \frac{h(1 - \mu h)}{\sqrt{\mu h(2 - \mu h)}}.$$

### Σπαζοκεφαλιές

#### Σ166

Υπάρχουν. Θεωρήστε, για παράδειγμα, τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και  $x$ . Το  $x$  μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x.$$

#### Σ167

Όταν το 625 υψωθεί σε οποιαδήποτε δύναμη, το αποτέλεσμα λήγει σε 625. Όταν το 376 υψωθεί σε οποιαδήποτε δύναμη, το αποτέλεσμα λήγει σε 376. Για να επαληθεύσουμε αυτές τις προτάσεις αρκεί να υψώσουμε καθέναν από αυτούς τους αριθμούς στο τετράγωνο. Επομένως, τα τρία τελευταία ψηφία του αθροίσματος είναι 001.

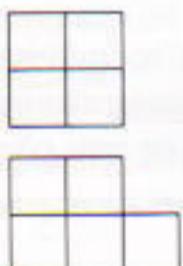
#### Σ168

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι

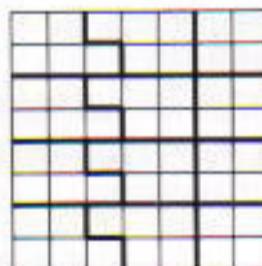
$$11111111^2 = 12345678987654321.$$

#### Σ169

Έστω ένα τετράγωνο του χιλιοστομετρικού χαρτιού που ανήκει στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Κάθε πλευρά του εν λόγω τετραγώνου είτε ανήκει σε μια τομή είτε όχι. Θέλουμε το συνολικό μήκος των πλευρών που δεν ανήκουν σε τομές να είναι μέγιστο. Θεωρούμε όλα τα δυνατά σχήματα που αποτελούνται από πέντε το πολύ τετράγωνα, και υπολογίζουμε για καθένα από αυτά το λόγο του πλήθους των πλευρών που ανήκουν στο εσωτερικό των σχημάτων διά του πλήθους των τετραγώνων που τα αποτελούν. Η μέγιστη τιμή αυτού του λόγου είναι 1, και προκύπτει για δύο σχήματα: ένα τετράγωνο διαστάσεων  $2 \times 2$ , και το ίδιο σχήμα με ένα επιπλέον τετράγωνο του χιλιοστομετρικού χαρτιού (βλ. Σχήμα 10). Αν επομένως κόψουμε το δεδομένο ορθογώνιο σε τέτοια σχήματα, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Μπορούμε να το πετύχουμε εύκολα αν κόψουμε το ορθογώνιο με τον τρόπο του Σχήματος 11.



Σχήμα 10



Σχήμα 11

#### Σ170

Το εμβαδόν της επιφάνειας του σανού από την οποία εξατμίζεται το νερό αυξάνει όταν τον ανακατώνουμε. Αυτός είναι ο λόγος που στεγνώνει ταχύτερα και ομοιόμορφα.

### ΣΚÓΠΕΛΟΙ

1. (α) Το ζητούμενο έπεται από την ομοιότητα των τριγώνων  $OAX$  και  $OAX'$ .

(β) Τα τρίγωνα  $XOA$  και  $AOX'$ , στο Σχήμα 3 του άρθρου, είναι ισο-

σκελή και έχουν μία κοινή γωνία στο  $O$ . Έπειται ότι είναι όμοια, και συνεπώς  $OX/OA = OA/OX'$ .

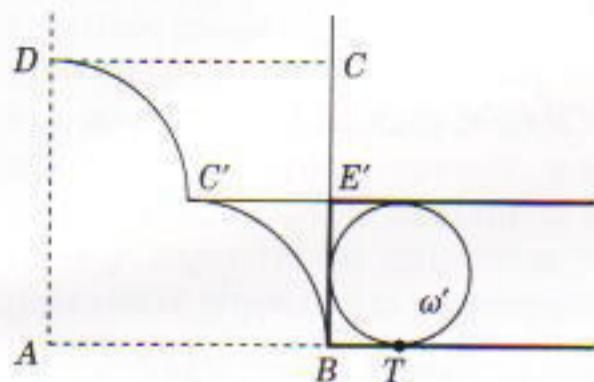
2. Αν οι δεδομένες αντιστροφές μεταφέρουν διαδοχικά το σημείο  $X$  στα  $X_1$  και  $X_2$ , τότε  $OX_2 = R_2^2/OX_1 = (R_2^2/R_1^2)OX$ .

3. Η πρώτη πρόταση συνδυάζει σε μία διατύπωση δύο γνωστά θεωρήματα: των τεμνόμενων χορδών, και των τεμνουσών ενός κύκλου. Μπορούμε να την αποδείξουμε βάσει της ομοιότητας των τριγώνων  $PAA'$  και  $PBB'$ , όπου τα  $A', B'$  είναι τα σημεία τομής του κύκλου  $\omega$  και μιας τυχαίας ευθείας που διέρχεται από το  $P$ . Αν η ευθεία  $PAB$  διέρχεται από το κέντρο  $O$  του κύκλου  $\omega$ , τότε  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  ισούται με  $(OP + r)(OP - r) = OP^2 - r^2$  όταν το  $P$  είναι εκτός του κύκλου, και με  $r^2 - OP^2$  όταν το  $P$  είναι στο εσωτερικό του κύκλου ( $r$  είναι η ακτίνα).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο  $P$  είναι το κέντρο μιας αντιστροφής  $I$ . Θεωρούμε μια άλλη αντιστροφή με το ίδιο κέντρο και ακτίνα  $R = \sqrt{PA \cdot PB} = \sqrt{OP^2 - r^2}$ . Τότε, αν το  $P$  βρίσκεται εκτός του  $\omega$ ,  $B = I_1(A)$  για κάθε ευθεία που διέρχεται από το  $P$ , διότι το  $B$  ανήκει στην ημιευθεία  $PA$  και  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = R^2$ . Επομένως, σε αυτή την περίπτωση,  $I_1(\omega) = \omega$ , και  $I(\omega) = I(I_1(\omega))$ . Ομως, από την Ασκηση 2 έχουμε ότι δύο διαδοχικές αντιστροφές ως προς το ίδιο κέντρο ισοδυναμούν με μία ομοιοθεσία και, επομένως, το αντίστροφο  $I(\omega)$  του  $\omega$  είναι ένας κύκλος που συμπίπτει με μία ομοιοθεσία του  $\omega$ . Αν το  $P$  βρίσκεται στο εσωτερικό του  $\omega$ , η επιχειρηματολογία είναι η ίδια, με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση  $I(\omega) = I(I_1(\omega'))$ , όπου  $\omega'$  είναι ένας κύκλος συμμετρικός του  $\omega$  ως προς το σημείο  $P$ : το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $P$  είναι το σημείο  $B'$ , ανήκει στην ημιευθεία  $\overline{PA}$  και ικανοποιεί τη σχέση  $\overline{PB}' \cdot \overline{PA} = \overline{PB} \cdot \overline{PA} = R^2$ . Άρα, είναι το αντίστροφο (ως προς την  $I_1$ ) του  $A$ . Επομένως, η  $I(\omega)$  είναι ομοιοθεσία του  $\omega'$  ως προς κέντρο  $P$  και, συνεπώς, ομοιοθεσία του  $\omega$  κατά κάποιον αρνητικό λόγο.

4. Μετά την υποδεικνυόμενη α-

ντιστροφή παίρνουμε το Σχήμα 12, στο οποίο η ακτίνα  $r'$  του  $\omega'$ , του αντιστρόφου του  $\omega$ , είναι ίση με  $BC/4 = a/4$ , και η δύναμη του  $A$  ως προς τον  $\omega'$  ισούται με  $AT^2 = (5a/4)^2 = (25/16)a^2$ . Αρα, η ακτίνα του  $\omega$  είναι  $r'(AB^2/AT^2) = (4/25)a$ .



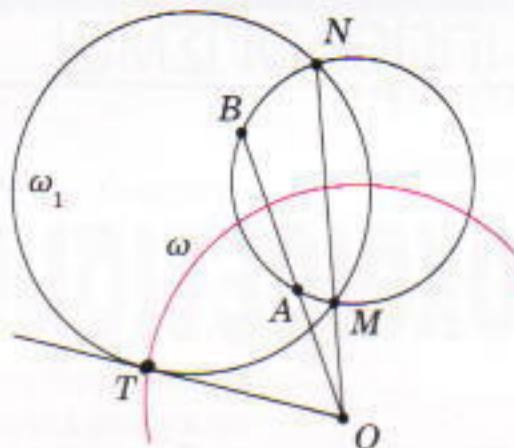
Σχήμα 12

5. (α) Ο κύκλος  $\omega$  που διέρχεται από το  $A$  είναι ορθογώνιος του  $\omega_1$ , αν και μόνο αν διέρχεται από το  $A'$ , το αντίστροφο του  $A$ . Επομένως, αν  $A' \neq A$  (αν το  $A$  δεν ανήκει στον  $\omega_1$ ), ο ζητούμενος κύκλος είναι αυτός που διέρχεται από τα  $A$ ,  $A'$  και  $B$ . Αν το  $A$  ανήκει στον  $\omega_1$  και το  $B$  δεν ανήκει, ο κύκλος  $\omega$  διέρχεται από τα  $A$ ,  $B$  και  $B'$  (το αντίστροφο του  $B$ ). Τέλος, αν και το  $A$  και το  $B$  ανήκουν στον  $\omega_1$ , κέντρο τού  $\omega$  είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων τού  $\omega_1$  στα σημεία  $A$  και  $B$ . Βλέπουμε ότι η λύση είναι πάντα μοναδική.

(β) Ο  $\omega$  πρέπει να διέρχεται από τα αντίστροφα του  $A$  ως προς τους  $\omega_1$  και  $\omega_2$ . Αφήνουμε στους αναγνώστες τις ειδικές περιπτώσεις.

(γ) Στο Σχήμα 13 φαίνεται η κατασκευή για τη γενική περίπτωση. Φέρουμε έναν τυχαίο κύκλο που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$  και τέμνει τον  $\omega_1$  στα  $M$  και  $N$ . Αν προεκτείνουμε τις  $AB$  και  $MN$ , τέμνονται στο  $O$ . Τότε, το  $O$  είναι κέντρο του ζητούμενου κύκλου  $\omega$ , και η  $OT$  —εφαπτόμενη του  $\omega_1$ — η ακτίνα του  $(\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OM} \cdot \overline{ON} = OT^2)$ .

6. Έστω  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  τα αντίστροφα των  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ως προς έναν κύκλο με κέντρο  $A$ . Τότε,  $B'D' \leq B'C' + C'D'$ , ενώ η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το  $C'$  ανήκει στο τμήμα  $B'D'$ . Απομένει να εκφράσουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $B'C'D'$  συναρτήσει των μήκών των πλευρών και των διαγωνίων του  $ABCD$ .



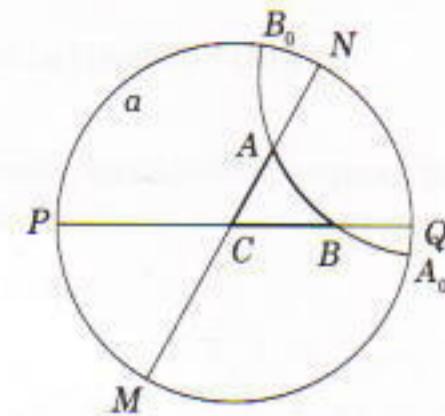
Σχήμα 13

7. Η συμμετρία ως προς τον ισημερινό είναι ειδική περίπτωση αντιστροφής επί της σφαίρας και, επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επιχειρηματολογία της παραγράφου που προηγείται της άσκησης. Οι αναγνώστες ας προσπαθήσουν για μια άμεση απόδειξη χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα και τα συναφή.

8. Η επαλήθευση της ισότητας  $d(A, B) = d(B, A)$  είναι απλή, δεδομένου ότι όταν εναλλάσσονται τα  $A$  και  $B$  συμβαίνει το ίδιο και με τα  $A_0$  και  $B_0$ . Από τον ορισμό της  $d(A, B)$  έπειται ότι η ανισότητά μας ανάγεται στην  $R(A, B) < R(A, C) \cdot R(C, B)$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε το  $C$  κέντρο ενός κύκλου  $a$  —από την Άσκηση 5γ έχουμε ότι υπάρχει πάντα μια  $p$ -ευθεία ως προς την οποία το  $C$  είναι συμμετρικό του εν λόγω κέντρου, και η  $p$ -συμμετρία διατηρεί τις  $p$ -αποστάσεις. Γι' αυτή την ιδιαίτερη κεντρική θέση τού  $C$  (βλ. το Σχήμα 14), ο  $R(A, C)$  ανάγεται στον απλό λόγο  $AM/AN$ , διότι  $CM = CN$ . Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι  $AM > AA_0$  και  $AN < AB_0$ . Από αυτές τις ανισότητες έπειται ότι  $R(A, C) > AA_0/AB_0$ . Ομοίως,  $R(CB) > BB_0/BA_0$ . Το γινόμενο των δεξιών μελών των δύο τελευταίων ανισοτήτων ισούται με  $R(A, B)$ .

9. Αρκεί να θεωρήσουμε ένα  $p$ -τρίγωνο  $ABC$  με τη μία του κορυφή στο κέντρο τού  $a$ . Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε (Σχήμα 14) ότι, σε αυτή την περίπτωση, το άθροισμα των γωνιών του  $p$ -τριγώνου  $ABC$  είναι μικρότερο από του συνηθισμένου τριγώνου  $ABC$ .

10. Έστω ότι τα  $p$ -τρίγωνα  $ABC$  και  $A_1B_1C_1$  έχουν ίσες τις γωνίες στις κορυφές  $A$  και  $A_1$ , και ίσες τις



Σχήμα 14

πλευρές που ξεκινούν από αυτές τις κορυφές ( $d(A, B) = d(A_1, B_1)$ ,  $d(A, C) = d(A_1, C_1)$ ). Πρέπει να βρούμε ένα συνδυασμό  $p$ -συμμετριών που απεικονίζουν το  $ABC$  στο  $A_1B_1C_1$ . Ας υποθέσουμε πρώτα ότι  $A = A_1 = O$ , όπου  $O$  είναι το κέντρο τού  $a$ . Τότε, οι πλευρές  $AB$  και  $A_1B_1$ , καθώς και οι  $AC$  και  $A_1C_1$ , είναι συνήθη ευθύγραμμα τμήματα ίσου (ευκλείδειου) μήκους, που ξεκινούν όλα από το  $O$ . Άρα, τα τρίγωνα  $ABC = OBC$  και  $A_1B_1C_1 = OB_1C_1$  είναι ίσα βάσει του ευκλείδειου κριτηρίου ισότητας (με δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες). Συνεπώς, μπορεί να συμπέσουν μέσω δύο το πολύ συμμετριών ως προς ευθείες που διέρχονται από το  $O$  (οι οποίες, σε αυτή την περίπτωση, είναι και  $p$ -συμμετρίες): τη συμμετρία ως προς τη διχοτόμη της γωνίας  $BOB_1$  και μετά, αν χρειαστεί, ως προς την ευθεία  $OB_1$ . Στη γενική περίπτωση, βάσει της Άσκησης 5γ, μπορούμε να βρούμε τις  $p$ -ευθείες  $l$  και  $l_1$  ως προς τις οποίες το  $O$  είναι  $p$ -συμμετρικό των σημείων  $A$  και  $A_1$  (και τα τρίγωνα  $OB'C'$  και  $OB''C''$   $p$ -συμμετρικά των  $ABC$  και  $A_1B_1C_1$ ). Παίρνουμε τώρα το  $p$ -συμμετρικό του  $ABC$  ως προς την  $l$  (το  $OB'C'$ ) και το απεικονίζουμε στο  $OB''C''$  μέσω μίας ή δύο  $p$ -συμμετριών (όπως και προηγουμένως). Τέλος, θεωρούμε το  $p$ -συμμετρικό του  $OB''C''$  ως προς την  $l_1$ . Προκύπτει το τρίγωνο  $A_1B_1C_1$ , έπειτα από τέσσερις ή λιγότερες  $p$ -συμμετρίες. Στην πραγματικότητα, τρεις  $p$ -συμμετρίες αρκούν πάντοτε: η συμμετρία των  $OB'C'$  και  $A_1B_1C_1$  μπορεί να προκύψει άμεσα (και όχι μέσω του  $OB''C''$ ).

Η συνέχεια στη σελ. 72

# Αποχαιρετισμός

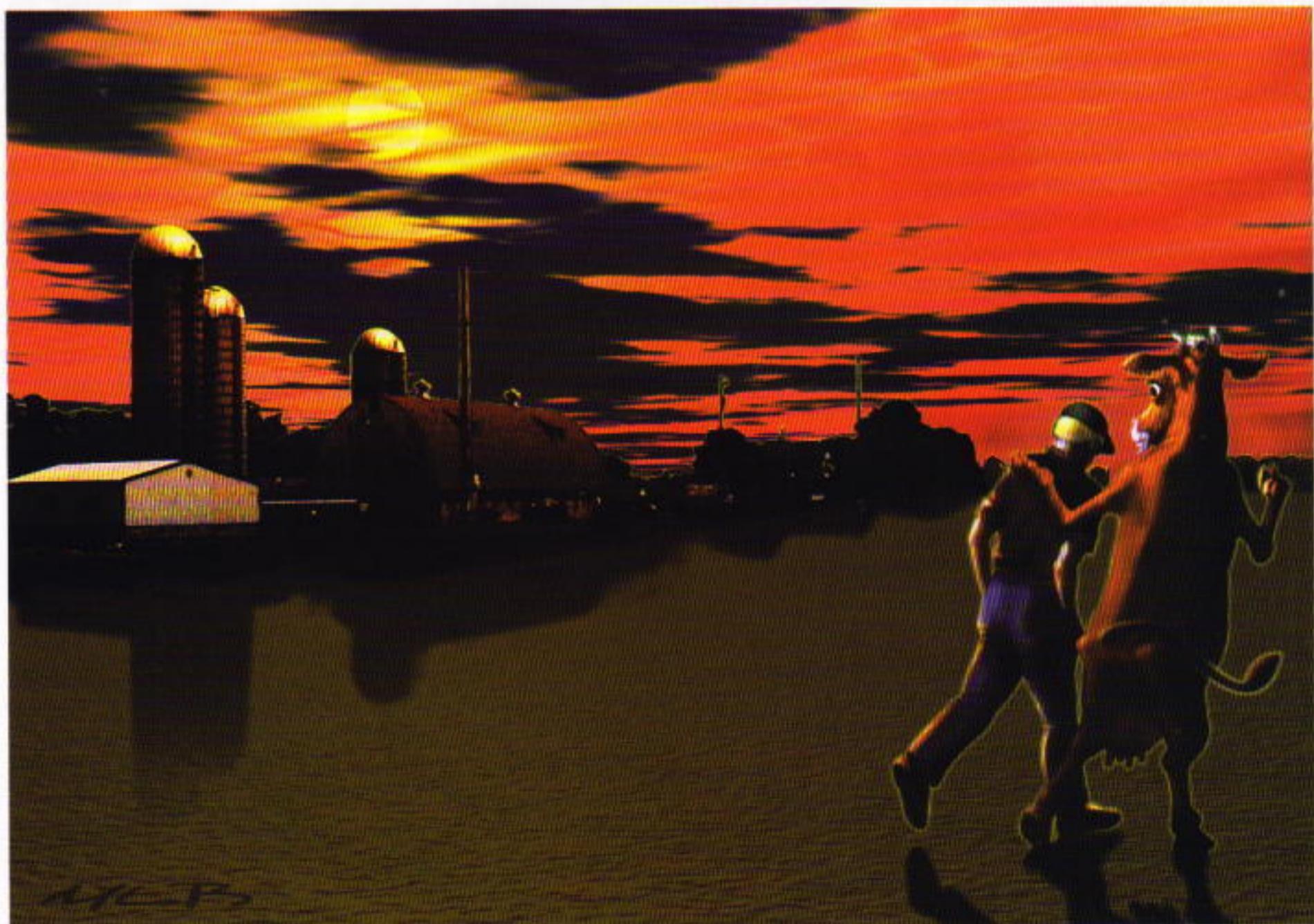
Όταν μερικά προβλήματα αποδεικνύονται αξεπέραστα

Δρ. Χμ

**ΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ, ΓΙΑ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΦΟΡΑ,** στους ιππολογισμούς, τη στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα που λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά. Γιατί τελευταία φορά; Δυστυχώς, τον περασμένο Οκτώβριο ένας ανεμοστρόβιλος σάρωσε το κτήμα, καταστρέφοντας το στάβλο για τα άρρωστα ζώα και ένα σιλό. Ο κύριος Πωλ εκτίμησε ότι το κόστος της αποκατάστασης θα ξεπερνούσε τα 30.000 δολάρια, και αυτό τον έκανε να πάρει την απόφαση να σταματήσει τη λειτουργία του αγροκτήματος.

Όπως του είχε πει ο πατέρας του όταν του κληροδότησε τη φάρμα, η δυσκολότερη απόφαση που θα έπρεπε να πάρει θα ήταν το πότε πρέπει να σταματήσει.

Το κτήμα ανήκε στην οικογένεια του κυρίου Πωλ επί τρεις γενιές, από το 1936. Τα τελευταία χρόνια όμως οι οικονομικές συνθήκες όλο και δυσκόλευαν, και έτσι ο κύριος Πωλ κατέληξε να πάρει τη δύσκολη απόφαση. Τα ζώα πουλήθηκαν σε διάφορες περιοχές· ο ίδιος έπιασε δουλειά ως υπάλληλος σε μια πολυεθνική εταιρεία στην πόλη. Αποχαιρετιστήκαμε σαν παλιοί φίλοι



και υποσχεθήκαμε να αλληλογραφούμε όσο το δυνατόν πιο συχνά.

## ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 18

Ιδού, λοιπόν, η τελευταία μας πρόκληση. Ορίζουμε ως ψηφιακό γινόμενο ενός θετικού ακέραιου  $N$  το γινόμενο των μη μηδενικών ψηφίων του. Η ψηφιακή πολλαπλασιαστική ρίζα ενός θετικού ακέραιου  $N$  είναι ο θετικός ακέραιος που προκύπτει αν πάρουμε διαδοχικά τα ψηφιακά γινόμενα έως ότου καταλήξουμε σε ένα μόνο ψηφίο. Για παράδειγμα, όπως προκύπτει από την επόμενη σειρά γινομένων, η ψηφιακή πολλαπλασιαστική ρίζα 123456789 είναι το 8:

( $x \rightarrow y$ , σημαίνει ότι παίρνουμε το γινόμενο των μη μηδενικών ψηφίων και δημιουργούμε το  $y$ )

$$123456789 \rightarrow 362880 \rightarrow 2304 \rightarrow 24 \rightarrow 8.$$

Βρείτε την ψηφιακή πολλαπλασιαστική ρίζα του  $12345^{6789}$ . Με το *Mathematica* μπορείτε να γράψετε ένα πρόγραμμα σε μία μόνο γραμμή που θα βρίσκει την απάντηση σε λιγότερο από ένα δευτερόλεπτο.

## ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 17

Στο Ιπποπρόβλημα 17 σάς ζητήθηκε να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα δέχεται ως είσοδο έναν ακέραιο  $n$ , όπου  $n \leq 9$ , και θα βρίσκει όλους τους τρόπους εισαγωγής των συμβόλων συν και πλην έτοι ώστε η προκύπτουσα παράσταση να ισούται με μηδέν. Η

$$1 - 2 - 34 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 0$$

αποτελεί μια λύση για  $n = 9$ . Βρείτε όλες τις λύσεις.

## Λύση

Η λύση που μας έστειλε ο Eric Rimbey αποτελεί κάλο παράδειγμα του πόσο ξεκάθαρη μπορεί να είναι μια λύση όταν κατασκευαστεί μέσω συναρτήσεων. Ας δούμε πώς δουλεύει. Πρώτον, παρατηρούμε ότι κάθε παράσταση που θα υπολογίσουμε πρέπει να έχει μεταξύ δύο διαδοχικών ψηφίων ένα  $+$ , ένα  $-$  ή το κενό. Επομένως, όταν  $n = 9$ , το μέγιστο πλήθος των παραστάσεων που πρέπει να εξετάσουμε είναι  $3^8$ , ή 6561. Επομένως, εύκολα θα δουλέψει μια προσέγγιση με πλήρη καταγραφή όλων των περιπτώσεων. Θα χρειαστεί απλώς να δημιουργήσουμε όλες τις παραστάσεις και να ελέγξουμε το άθροισμά τους.

Ξεκινάμε ορίζοντας τον κατάλογο των χαρακτήρων

```
chars = {"+", "-"}  
and the sequences of digits from 1 to 9
```

```
digitsequence = ToString /@ Range[9]  
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
```

Στη συνέχεια, παράγουμε όλες τις δυνατές ακολουθίες χαρακτήρων. Οι χαρακτήρες διαχωρίζονται από κόμματα και κάθε ακολουθία τελειώνει με κόμμα.

```
charsequences =  
Distribute[Join[Table[chars, {8}],  
{""}], List];
```

Υπάρχουν 6561 τέτοιες ακολουθίες χαρακτήρων. Ιδού μερικές από αυτές:

```
Short[charsequences, 6]
```

```
{ {+, +, +, +, +, +, +, +}, {+, +, +, +, +, +, +, -},  
{+, +, +, +, +, +, -, +}, {+, +, +, +, +, +, -, +, +},  
{+, +, +, +, +, -, -}, {+, +, +, +, +, +, -, -},  
<<6550>>, { , , , , , -, -}, { , , , , , -, -},  
, { , , , , , +, }, { , , , , , -, },  
, { , , , , , } }
```

Στη συνέχεια τοποθετούμε τους χαρακτήρες ανάμεσα στα ψηφία και σχηματίζουμε τις δυνατές παραστάσεις.

```
digitchar =  
Flatten[Transpose[{digitsequence,  
#} ]]& /@charsequences;
```

Ιδού μερικές από αυτές:

```
Short[digitchar, 6]
```

```
{ {1, +, 2, +, 3, +, 4, +, 5, +, 6, +, 7, +, 8, +, 9, }  
{1, +, 2, +, 3, +, 4, +, 5, +, 6, +, 7, + 8, -, 9, },  
{1, +, 2, +, 3, +, 4, +, 5, +, 6, +, 7, +, 8, , 9, },  
<<6556>>, {1, , 2, , 3, , 4, , 5, , 6, , 7, , 8, -, 9, },  
, {1, , 2, , 3, , 4, , 5, , 6, , 7, -, 8, -, 9, } }
```

Στη συνέχεια, ενώνουμε τα ψηφία και τους χαρακτήρες για να πάρουμε όλες τις δυνατές εκφράσεις:

```
possible = StringJoin /@ digitchar;
```

```
Short[possible, 4]
```

```
{1+2+3+4+5+6+7+8+9, 1+2+3+4+5+6+7+8-9,  
1+2+3+4+5+6+7+89, 1+2+3+4+5+6+7-8+9,  
1+2+3+4+5+6+7-8-9, 1+2+3+4+5+6+7-89,  
1+2+3+4+5+6+78+9, 1+2+3+4+5+6+78-9,  
1+2+3+4+5+6+789, <<6544>>, 1234567+8-9,  
1234567+89, 1234567-8+9, 1234567-8-9,  
1234567-89, 12345678+9, 12345678-9,  
123456789}
```

Τέλος, επιλέγουμε τις παραστάσεις που έχουν άθροισμα μηδέν.

```
solutions = Select[possible,  
ToExpression[#] == 0&]
```

```
{1+2-34-56+78+9, 1-2-34+5+6+7+8+9,  
1-23-4-56-7+89, 12+3+4-5-6-7+8-9,  
12+3-4+5-6+7-8-9, 12+3-45+6+7+8+9,  
12+34-56-7+8+9, 12-3+4+5+6-7-8-9,  
12-3+4+56-78+9, 12-3-4-5+6-7-8+9,  
12-3-4-5-6+7+8-9}
```

Μπορούμε να συγκεντρώσουμε όλα αυτά τα βήματα μαζί για να δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση, τη ZeroSum.

```
ZeroSum[k_Integer? (0 < # < 10^6)] :=  
Module[{chars = {"+", "-", "+"},  
digitsequence, charsequences},  
digitsequence = ToString@ Range[k];  
charsequences =  
Distribute[Join[Table[chars, {k - 1}],  
{""}], List];  
Select[StringJoin /@  
(Flatten[Transpose[digitsequence,  
#]] & /@ charsequences), ToExpression[#]  
== 0^6]]
```

Όλες οι λύσεις για  $n = 9$  εντοπίζονται σε ένα δευτερόλεπτο περίπου.

```
ZeroSum[9] // Timing
```

```
{1.15 Second, {1+2-34-56+78+9,  
1-2-34+5+6+7+8+9, 1-23-4-56-7+89,  
12+3+4-5-6-7+8-9, 12+3-4+5-6+7-8-9,  
12+3-45+6+7+8+9, 12+34-56-7+8+9,  
12-3+4+5+6-7-8-9, 12-3+4+56-78+9,  
12-3-4-5+6-7-8+9, 12-3-4-5-6+7+8-9}}
```

Το πρόβλημα έλυσε επίσης και ο Joseph Post.

## Λύση του Ιπποπροβλήματος 18

Η μιας γραμμής λύση του τελευταίου ιπποπροβλήματος είναι:

```
DigitalProductRoot[n_] :=  
FixedPoint[Apply[Times,  
Select[IntegerDigits[#, Positive]] &], n]
```

Η λύση δουλεύει ως εξής: Βρίσκει τα ακέραια ψηφία που είναι θετικά, τα πολλαπλασιάζει, και επαναλαμβάνει τη διαδικασία έως ότου η απάντηση παραμείνει σταθερή. Τι ποιο φυσικό! Για να βρει την απάντηση στο τελευταίο ιπποπρόβλημα, η εντολή DigitalProductRoot[12345<sup>6789</sup>] χρειάστηκε να τρέξει επί 0,77 δευτερόλεπτα (στο Mathematica 4.0). Το αποτέλεσμα ισούται με την κατάταξη του κυρίου Πωλ μεταξύ των κτηματιών του Ουισκόνσιν —είναι ο αριθμός 1.

Να είστε καλά. Ήταν θαυμάσια!

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 69

## Καθειδοσκόπιο

1. Η ράβδος που δημιουργεί τη σκιά πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τον Βόρειο Πόλο (στο βόρειο ημισφαίριο, φυσικά).

2. Όχι· τα χρονικά διαστήματα ανάμεσα στις σταγόνες θα αυξάνονται λόγω της ελάττωσης της στάθμης του υγρού μέσα στο δοχείο.

3. Και οι δύο βάρκες τη συναντούν ταυτόχρονα.

4. Το σημείο τομής φανερώνει τη χρονική στιγμή που εξισώνονται οι ταχύτητες των δύο σωμάτων. Από το συγκεκριμένο σχήμα όμως δεν μπορούμε να καθορίσουμε το πότε συναντιούνται.

5. Οι δύο σφαίρες όντως διανύουν ίσες αποστάσεις. Άλλα η δεύτερη σφαίρα έχει, κατά την κίνηση από το A στο B, μεγαλύτερη μέση ταχύτητα· άρα, θα φτάσει πρώτη στο σημείο B.

6. Η κίνηση του τρένου δεν επηρεάζει την κατακόρυφη κίνηση του σώματος. Συνεπώς, ο χρόνος είναι ίδιος και στις τρεις περιπτώσεις.

7. Εξαιτίας της αντίστασης του αέρα, η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του σώματος σε οποιοδήποτε ύψος θα είναι μεγαλύτερη κατά την άνοδο παρά κατά την κάθοδο. Έτσι, ο χρόνος ανόδου θα είναι μικρότερος από το χρόνο καθόδου.

8. Όταν η μύγα κινείται προς τα πάνω, ο πυθμένας του δοχείου κατεβαίνει πιο χαμηλά σε σχέση με το κέντρο μάζας του συστήματος. Επομένως, ο πυθμένας του δοχείου θα χτυπήσει στο έδαφος νωρίτερα απ' ότι όταν η μύγα είναι ακίνητη.

9. Η δύναμη της βαρύτητας και η τάση του σκοινιού είναι ίδιες και για τους δύο γυμναστές. Επομένως και οι δύο φτάνουν ταυτόχρονα στην τροχαλία.

10. Όχι, διότι η ελάττωση του βάρους της άμμου εξαιτίας του πίπτοντος τμήματός της αντισταθμίζεται από τη δύναμη που ασκεί αυτό κατά την πρόσκρουσή του στον πυθμένα της κλεψύδρας.

11. Όταν στεκόμαστε ακίνητοι πάνω στον πάγο τού ασκούμε δύναμη για περισσότερο χρόνο, προκαλώντας του έτσι μεγαλύτερη παραμόρφωση.

12. Η περίοδος της ταλάντωσης γίνεται απείρως μεγάλη. Με άλλα λόγια, στην κατάσταση έλλειψης βαρύτητας που επικρατεί στο διαστημόπλοιο το εκκρεμές δεν ταλαντώνεται καθόλου.

13. Η περίοδος ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται, διότι η ελαστική σταθερά του νήματος γίνεται 4 φορές μεγαλύτερη.

14. Προκειμένου να μπορεί να μετρηθεί το χρονικό διάστημα μεταξύ εκπομπής και λήψης κάθε παλμού.

15. Η αστραπή καλύπτει πολύ μεγάλη έκταση, κι έτσι ο ήχος που παράγεται από τα πιο απορακρυσμένα σημεία της καθυστερεί να φτάσει σε μας, με αποτέλεσμα η βροντή να επιμηκύνεται στο χρόνο. Απεναντίας, η ταχύτητα του φωτός είναι τόσο μεγάλη ώστε οι αντίστοιχες καθυστερήσεις καθίστανται αμελητέες, κι έτσι παρατηρούμε την αστραπή σαν μια σύντομη λάμψη.

Θα πρέπει να υπερμυίσουμε στους αναγνώστες ότι ο Δρ. Χρηματοδότης της επιστήμης των ιππολογιστών στο Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν (όπου και σπούδασε με ιπποτροφία στους στάβλους του). Η ηλεκτρονική διεύθυνση του είναι drmu@cs.uwp.edu.

Η στήλη «Ιππολογισμοί» άρχισε να δημοσιεύεται στο Quantum από τον Ιανουάριο του 1997.