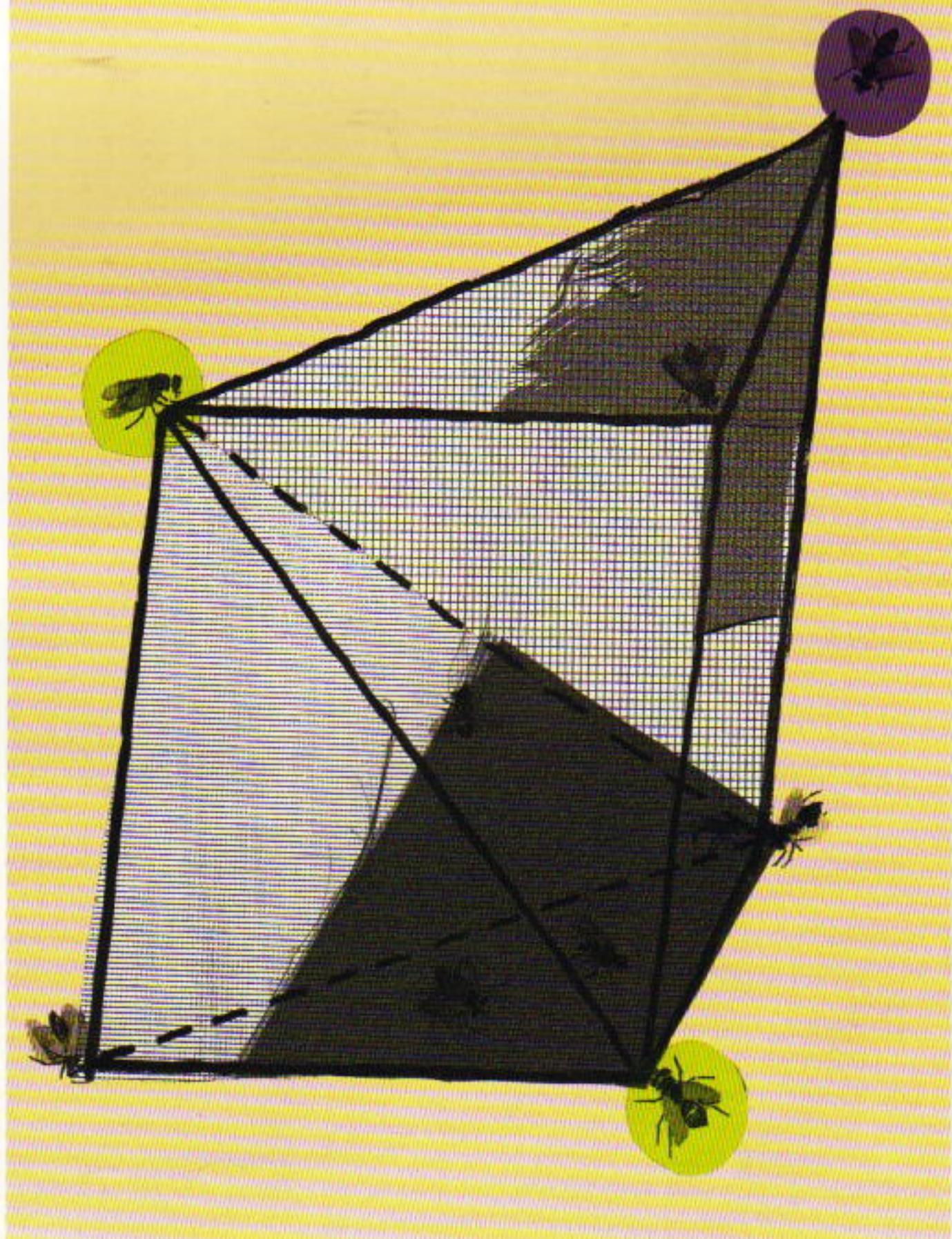


QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1999
ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 5
2.000 ΔΡΧ.

Τεχνάσματα στα τετράεδρα



- Κενό: ο πλούτος των τίποτα
- Κατασκευάζοντας μια νέα Γη
- Η απόσταση, και οι ιδέες του Hensel
- Γνωριμία με τα φορτία-είδωλα
- Λείτε τις ηλιακές κηλίδες με έναν σκοτεινό θάλαμο
- Μετακινήσεις ανάμεσα από αριθμητικά εμπόδια
- Εννοιολογικά προβλήματα της κβαντικής φυσικής
- Τα γοητευτικά κουάρκ
- Καρδιοειδής καμπύλη και σύλλογη μανιταριών
- Περί ορθοκέντρων



Λάδι σε καμβά, 100 × 130 εκ., Συλλογή Samuel H. Kress © 1999 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουδονίγκετον

To εσωτερικό του Πανθέου της Ρώμης (περίπου 1734), του Giovanni Paolo Pannini

ΤΗ ΣΤΙΓΜΗ ΠΟΥ Ο PANNINI ΑΠΟΤΥΠΩΣΕ ΜΕ ΤΟ ΧΡΩΣΤΗΡΑ του αυτή την εικόνα στο εσωτερικό του ναού όλων των θεών, ο γιγαντιαίος «οφθαλμός» (οπαίον), πλάτους 8 μέτρων, στο κέντρο του μεγαλοπρεπούς θόλου ατένιζε τον ουρανό ήδη επί 17 περίπου αιώνες. Ο θόλος, διαμέτρου 43 και ύψους 41 μέτρων, υπήρξε ο μεγαλύτερος που είχε κατασκευαστεί ώς τους νεότερους χρόνους.

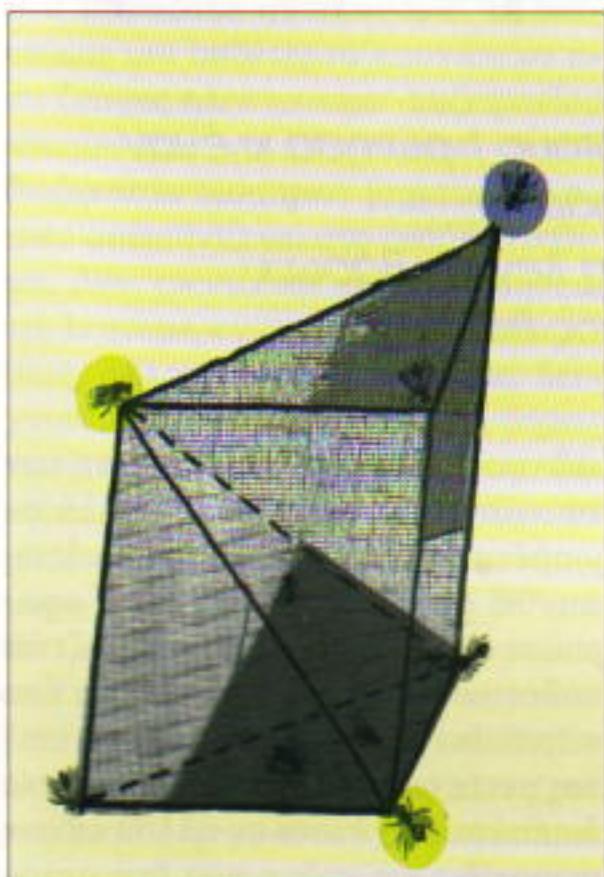
Με τον φωτεινό δίσκο να λάμπει πάνω στις διακοσμήσεις και τις επίχρυσες ορειχάλκινες επιστρώσεις του τοίχου, αυτό το εξαισιό αρχιτεκτονικό θαύμα μοιάζει με

τη διάταξη την οποία στη φυσική ονομάζουμε σκοτεινό θάλαμο. Ο σκοτεινός θάλαμος —όπως το Πάνθεον— υπάρχει εδώ και πολλούς αιώνες (μάλιστα, θεωρείται ότι τον χρησιμοποίησαν για πρώτη φορά οι αρχαίοι Έλληνες). Όπως θα γνωρίζετε πολλοί, μέσω αυτού μπορούμε να παρατηρήσουμε με ασφάλεια τις ηλιακές εκλειψεις· αλλά, όπως θα διαπιστώσετε διαβάζοντας το σχετικό άρθρο του παρόντος τεύχους, μπορούμε ακόμη να δούμε και τις ηλιακές κηλίδες. Δεν έχετε λοιπόν παρά να ανατρέξετε στη σελίδα 40.

QUANTUM

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1999

ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 5



Εικονογράφηση: Yuri Vaschenko

Αν αργείτε πολύ να λύσετε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, τόσο που να αρχίσει να «μυρίζει» και να μαζεύει πάνω του τις μύγες, μάλλον είναι ώρα να ζητήσετε βοήθεια· και η βοήθεια αυτή μπορεί να βρίσκεται κοντά σας, μερικές σελίδες παραπίσω.

Μια χρήσιμη μέθοδος για να αποφεύγετε τις «μύγες» είναι να προεκτείνετε κάποια στοιχεία του σχήματος, έτσι ώστε να δημιουργείται ένα νέο σχήμα. Για την πλήρη κατανόηση της μεθόδου (εφαρμοσμένη, μάλιστα, σε πολύεδρα), ανατρέξτε στο άρθρο «Συμπλήρωμα τετραέδρου», στη σελίδα 54.

ΑΡΘΡΑ

- 6 Σωστές κινήσεις
Αριθμητικά εμπόδια
N. Vaguten
- 16 Κενό
Ο πλούτος του τίποτα
A. Semenov
- 22 Περι αποστάσεων
2-αδικοί αριθμοί
B. Becker, S. Vostokov, Y. Ionin
- 28 Φυσική φαντασία
Η Νέα Γη
A. Stasenko

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 **Ο κόσμος των κβάντων**
Γνωρίζοντας το ον εκ του μη όντος
- 14 **Πώς λύνεται;**
- 15 **Στο εργαστήριο**
Συνθήκες έλλειψης βαρύτητας
- 21 **Σπαζοκεφαλίες**
- 33 **Στο μαυροπίνακα I**
Καρδιοειδείς για συλλέκτες μανιταριών
- 36 **Καθειδοσκόπιο**
Το ορθόκεντρο του τριγώνου
- 40 **Αναδρομές**
Φως στον σκοτεινό θάλαμο
- 46 **Με λίγη φαντασία**
Ιστορίες κβαντικής τρέλας — 3
- 54 **Στο μαυροπίνακα II**
Συμπλήρωμα τετραέδρου
- 58 **Στα πεδία της φυσικής**
Τι βλέπει ένα φορτίο στον καθρέφτη;
- 63 **Gradus ad Parnassum**
Τετράγωνο ή όχι;
- 66 **Απαντήσεις, Υποδείξεις και λύσεις**
- 71 **Ιππολογισμοί**
Ευτυχισμένες αγελάδες

Γνωρίζοντας το όντος μη όντος

«Ρώπησα φίλους και γνωστούς / χωροφυλάκους προεστούς / ρώπησα κι έναν ταγματάρχη / έπαρχος μου 'παν δεν υπάρχει...»

...Μήπως ναυάγησε στη Θάσο / ή μήπως δεν τη λέγαν Βάσω;»

—Νίκος Γκάτσος

ΟΤΑΝ Η ΑΛΙΚΗ ΔΙΑΜΑΡΤΥΡΗΘΕΝ ούτε «δεν μπορεί κανείς να πιστεύει αδύνατα πράγματα», η Λευκή Βασίλισσα προσπάθησε να τη βγάλει από την πλάνη της: «Τολμώ να πω πως δεν έχεις εξασκηθεί πολύ. Οταν ήμουν στην ηλικία σου, τό 'κανα καθημερινά για μισή ώρα. Και μερικές φορές είχα πιστέψει ακόμη και έξι αδύνατα πράγματα πριν πάρω το πρωινό μου». Το

Μολονότι η εποτήμη συνίσταται κατ' αρχήν στη μελέτη τού τι είναι δυνατό, η συμβουλή της Λευκής Βασίλισσας αποδεικνύεται εξαιρετικά εύστοχη. Ουδείς κατανοεί ακόμη τους νόμους της φύσης στο θεμελιωδέστερο επίπεδό τους, αλλά η αναζήτηση αυτών των νόμων υπήρξε γοητευτική και γόνιμη. Και η εικόνα της πραγματικότητας που αναδύεται από τη σύγχρονη φυσική μάς παραπέμπει στον Lewis Carroll. Μολονότι οι ιδέες της φυσικής φαίνονται λογικές και εξαιρετικά όμορφες στους ανθρώπους που τις μελετούν, παραμένουν εντελώς αντιθέτες με ό,τι οι περισσότεροι από εμάς θεωρούν «κοινό νου».

Από όλες τις «αδυνατότητες» που γνώρισε ποτέ η εποτήμη, η εντυπωσιακότερη ίσως είναι το σύνολο εκείνο των ιδεών το οποίο φέρει το όνομα κβαντική θεωρία. Πρόκειται για τη θεωρία που η ανάπτυξή της στις αρχές του 20ού αιώνα πρέπει να αποδοθεί σε έναν και μόνο λόγο: κανείς δεν μπορούσε να βρει κά-

ποιον εναλλακτικό τρόπο για να εξηγήσει τη συμπεριφορά των ατόμων και των μορίων. Στο βιβλίο του *Κβαντική ηλεκτροδυναμική*, ο Richard Feynman, ένας από τους σπουδαιότερους φυσικούς της εποχής μας, εκφράζει τα συναισθήματά του για την κβαντική θεωρία. «Το ζήτημα δεν έγκειται στο αν μια θεωρία είναι φιλοσοφικά ευχάριστη ή αν κατανοείται εύκολα ή αν κρίνεται απολύτως λογική από την άποψη του κοινού νου», γράφει. Η κβαντική θεωρία περιγράφει τη φύση «ως κάτι παράδοξο από την άποψη του κοινού νου. Και συμφωνεί απολύτως με το πείραμα. Έτσι, ελπίζω να αποδεχθείτε τη φύση όπως είναι: παράδοξη. Θα χαρώ να σας μιλήσω γι' αυτή την παραδοξότητα, διότι τη βρίσκω συναρπαστική».

Οι παράδειγμα της παραδοξότητας της κβαντικής θεωρίας αναλογιστείτε την ανακάλυψη που έκαναν το 1970 ο Sheldon Glashow, ο Γιάννης Ηλιόπουλος και ο Luciano Maiani. Έξι χρόνια νωρίτερα, ο George Zweig και ο Murray Gell-Mann είχαν διατυπώσει την υπόθεση ότι τα συστατικά του ατομικού πυρήνα, το πρωτόνιο και το νετρόνιο, αποτελούνται από θεμελιωδέστερα σωματίδια, τα οποία ο Gell-Mann ονόμασε κουάρκ. Το 1970, η θεωρία των κουάρκ είχε ήδη γίνει γνωστή, πλην όμως δεν είχε κατακτήσει τη γενική αποδοχή.

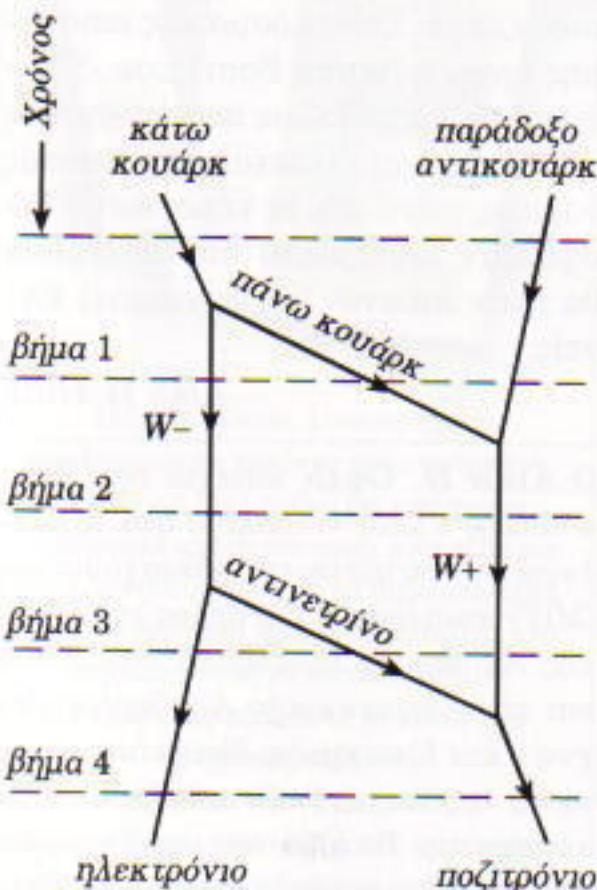
Η θεωρία των κουάρκ εξηγούσε

ικανοποιητικά πολλές ιδιότητες των υποατομικών σωματίδιων, αλλά ορισμένα μυστήρια δεν είχαν διαλευκανθεί ακόμη. Ένα από αυτά αφορούσε το σωματίδιο που ονομάζεται ουδέτερο καόνιο. Πρόκειται για ένα σωματίδιο που παράγεται στους επιταχυντές σωματίδιων, αλλά το οποίο διασπάται ταχύτατα σε άλλου είδους σωματίδια, σε χρόνο που δεν υπερβαίνει το εκατομμυριοστό του δευτερόλεπτου. Διαπιστώθηκε ότι το ουδέτερο καόνιο (K^0 , αλλιώς γνωστό και ως K -μεσόνιο) διασπάται σε πολλούς συνδυασμούς άλλων σωματίδιων· όλες δε οι παρατηρήσεις οδηγούσαν σε αποτελέσματα απολύτως εύλογα στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας. Εντούτοις, η έκπληξη πρόκειται από κάτι που δεν παρατηρούνταν. Ακριβέστερα, δεν παρατηρούνταν η διάσπαση του ουδέτερου καονίου σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. (Το ποζιτρόνιο είναι ένα σωματίδιο που έχει ίση μάζα με το ηλεκτρόνιο αλλά αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο· αναφέρεται συχνά και ως το «αντισωματίδιο» του ηλεκτρονίου.) Δεδομένου ότι επρόκειτο για μια διάσπαση που συγκαταλεγόταν στις προβλέψεις της θεωρίας των κουάρκ, η απουσία της μπορούσε να εκληφθεί ως ένδειξη ότι η θεωρία δεν «δουλεύει» σωστά.

Σύμφωνα με την εν λόγω θεωρία, υπάρχουν τρεις τύποι κουάρκ, που τους δόθηκαν τα εκκεντρικά ονόματα πάνω, κάτω και παράδοξο. (Ο ίδιος ο όρος κουάρκ είναι στενά συν-

δεδεμένος με τον αριθμό τρία· σύμφωνα με δική του δήλωση, ο Gell-Mann τον δανείστηκε από τη φράση «Τρία κουάρκ για τον Muster Mark», από το έργο *Finnegan's Wake* του James Joyce.) Για κάθε είδος κουάρκ υπάρχει ένα αντικουάρκ. Το ουδέτερο καόνιο αποτελείται, σύμφωνα με τη θεωρία, από ένα κάτω κουάρκ και ένα παράδοξο αντικουάρκ. Η διάσπαση του ουδέτερου καονίου σε ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου αναμενόταν να συντελεστεί σε μια διαδικασία τεσσάρων βημάτων, η οποία απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα. Δεν χρειάζεται να κατανοήσετε τις λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας, αλλά, χάριν πληρότητας, δείχνουμε τα τέσσερα ξεχωριστά βήματα. Στα ενδιάμεσα βήματα της διαδικασίας, εκτός από τα κουάρκ εμπλέκονται τα νετρίνα και τα ενδιάμεσα διανυσματικά μποζόνια W^+ και W^- . Ωστόσο, δεν απαιτείται η γνώση των ιδιοτήτων τους για να καταλάβετε όσα θα πω στη συνέχεια. Το διάγραμμα πρέπει να εννοηθεί ως μια ακολουθία γεγονότων που εκτυλίσσεται από πάνω προς τα κάτω, και η οποία αρχίζει από τα κουάρκ που σχηματίζουν το ουδέτερο καόνιο.

ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΚΑΟΝΙΟ



Στο πρώτο βήμα, το κάτω κουάρκ διασπάται, ή αποσυντίθεται, σε ένα σωματίδιο W^- κι ένα πάνω κουάρκ.

Στο δεύτερο βήμα, το πάνω κουάρκ συνδυάζεται με το παράδοξο αντικουάρκ από το ουδέτερο καόνιο, με αποτέλεσμα να σχηματιστεί ένα σωματίδιο W^+ . Στο τρίτο βήμα, το W^- διασπάται σε ένα αντινετρίνο και ένα ηλεκτρόνιο, και, τέλος, στο τέταρτο βήμα το αντινετρίνο συνδυάζεται με το W^+ , ώποτε και σχηματίζεται ένα ποζιτρόνιο.

Παρά την επισταμένη μελέτη του συγκεκριμένου διαγράμματος, οι επιστήμονες αδυνατούσαν να βρουν κάποιο λόγο που να απαγορεύει αυτή τη διαδικασία. Ποικίλες ιδιότητες του ουδέτερου καονίου δεν επέτρεπαν την παραμικρή αμφιβολία σχετικά με τη σύστασή του — πρέπει να αποτελείται από ένα κάτω κουάρκ και ένα παράδοξο αντικουάρκ. Επιπλέον, θεωρούνταν βέβαιο ότι και τα τέσσερα βήματα της διαδικασίας περιγράφουν πραγματικές αλληλεπιδράσεις, παρότι αυτές δεν είχαν παρατηρηθεί άμεσα. Πράγματι, τα ενδιάμεσα διανυσματικά μποζόνια W^+ και W^- δεν παρατηρήθηκαν παρά μόνον το 1983, οπότε ένα κολοσσιαίο πείραμα, για το οποίο συνεργάστηκαν εκατόν τριάντα πέντε φυσικοί, κατέληξε στην παρατήρηση ότι σωματίδιον W . Ωστόσο, αυτά τα τέσσερα βήματα παρουσιάζονται και σε διαφορετικές αντιδράσεις, οι οποίες είχε διαπιστωθεί ότι συμβαίνουν. Αν, λοιπόν, κάποιο από αυτά τα βήματα ήταν αδύνατο, τότε πώς θα μπορούσε να συντελούνται όλες εκείνες οι διαφορετικές αντιδράσεις; Αν, πάλι, όλα τα βήματα ήταν δυνατά, τι θα τα εμπόδιζε να συντελεστούν με τη σειρά που δείξαμε παραπάνω, προκαλώντας τη διάσπαση ενός ουδέτερου καονίου σε ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου;

Το 1970, οι Glashow, Ηλιόπουλος και Maiani πρότειναν μια λύση αυτού του γρίφου. Η λύση τους, παρότι αντιβαίνει στον κοινό νου, εμφανίζεται ως απολύτως λογική στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας και βασίζεται στον παράξενο τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται οι εναλλακτικές διαδικασίες στην κβαντική θεωρία.

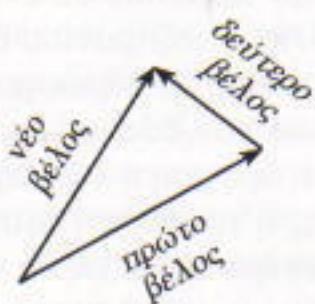
Οι προαναφερόμενοι φυσικοί υπέθεσαν ότι, πέραν των τριών τύπων

κουάρκ που ήδη περιελάμβανε η θεωρία, υπάρχει και ένας τέταρτος. Την ύπαρξη αυτού του τέταρτου κουάρκ την είχαν ήδη εισηγηθεί ο Glashow και ο James Bjorken, εκκινώντας από ορισμένες θεωρήσεις που αφορούσαν τις συμμετρίες του πίνακα των γνωστών σωματιδίων: το είχαν μάλιστα αποκαλέσει γοητευτικό, και το ίδιο όνομα επανεμφανίστηκε στην πολύ πιο συγκεκριμένη πρόταση των Glashow, Ηλιόπουλου και Maiani. Μετά την προσθήκη του γοητευτικού κουάρκ, το ουδέτερο καόνιο θα μπορούσε να διασπαστεί σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου μέσω δύο ξεχωριστών διαδικασιών. Ήδη παρουσιάσαμε την πρώτη: η δεύτερη θα ήταν μια εναλλακτική διαδικασία, επίσης τεσσάρων βημάτων, στην οπία το πάνω κουάρκ που παράγεται στο βήμα 1 και απορροφάται στο βήμα 2 της πρώτης διαδικασίας αντικαθίσταται από ένα γοητευτικό κουάρκ.

Ήρθε η ώρα, λοιπόν, να συμμορφωθούμε με τη συμβουλή της Λευκής Βασίλισσας και να αρχίσουμε να ποτεύουμε αδύνατα πράγματα. Η θεωρία που περιλαμβάνει το νέο κουάρκ επιτρέπει δύο ακολουθίες γεγονότων: και οι δύο ξεκινούν με ένα ουδέτερο καόνιο και καταλήγουν σε ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Στην πρώτη ακολουθία εμφανίζεται στα βήματα 1 και 2 ένα πάνω κουάρκ, που στη δεύτερη ακολουθία παραχωρεί τη θέση του σε ένα γοητευτικό κουάρκ. Σύμφωνα με τους κανόνες του κοινού νου, η ολική πιθανότητα της διάσπασης του ουδέτερου καονίου σε ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου θα έπρεπε να ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο ακολουθιών. Εάν διείπε τη φύση η λογική του κοινού νου, η προσθήκη του γοητευτικού κουάρκ ουδόλως θα συνέβαλε στην εξήγηση του λόγου για τον οποίο δεν παρατηρείται η διάσπαση. Ωστόσο, οι κανόνες της κβαντικής θεωρίας είναι πολύ διαφορετικοί από τους κανόνες του κοινού νου.

Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία, αν δύο διαφορετικές ακολουθίες γεγονότων έχουν την ίδια αρχή και κατάληξη, για κάθε ακολουθία υπολογίζουμε μια ποσότητα που ονομά-

ζεται πλάτος πιθανότητας. Αυτή η ποσότητα και η έννοια της πιθανότητας συνδέονται άμεσα, αλλά διαφέρουν ως προς τη μαθηματική μορφή. Η πιθανότητα είναι εξ οριού ένας αριθμός ανάμεσα στο μηδέν και το ένα. Το πλάτος πιθανότητας, από την άλλη, περιγράφεται από ένα βέλος που μπορεί να σχεδιαστεί σ' ένα φύλλο χαρτί. Ορίζουμε το βέλος δίνοντας το μήκος και την κατεύθυνσή του πάνω στο επίπεδο του χαρτιού. Το μήκος του πρέπει να είναι πάντοτε ένας αριθμός ανάμεσα στο μηδέν και το ένα. Αν μια συγκεκριμένη κατάληξη είναι δυνατόν να προκύψει από μία και μόνο ακολουθία, τότε η πιθανότητα ισούται με το τετράγωνο του μήκους του βέλους που περιγράφει το πλάτος πιθανότητας, ενώ η κατεύθυνση του βέλους μάς είναι παντελώς αδιάφορη. Προκειμένου, όμως, για τη διάσπαση του ουδέτερου καονίου σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, υπάρχουν δύο ακολουθίες που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα. Σ' αυτή την περίπτωση, οι κανόνες της κβαντικής θεωρίας ορίζουν ότι πρέπει να διευθετήσουμε τα δύο βέλη έτσι ώστε η «ουρά» του δεύτερου (δηλαδή η αρχή του) να συμπέσει με την «αιχμή» του πρώτου (δηλαδή το πέρας του), ενώ αμφότερα διατηρούν τις αρχικές κατευθύνσεις τους. Στη συνέχεια, χαράσσουμε ένα νέο βέλος, από την «ουρά» του πρώτου βέλους ώς την «αιχμή» του δεύτερου, όπως δείχνει το επόμενο σχήμα. Η ολική πιθανότητα του αποτελέσματος ισούται με



το τετράγωνο του μήκους του νέου βέλους. Μολονότι είναι αδύνατο να ανακαλυφθεί έστω και η ελάχιστη ομοιότητα ανάμεσα σε αυτό τον κανόνα και στον κοινό νου, υπάρχουν χιλιάδες πειράματα που έχουν δείξει ότι έτσι ακριβώς συμπεριφέρεται η φύση.

Ας επανέλθουμε, όμως, στη διάσπαση του ουδέτερου καονίου. Οι Glashow, Ηλιόπουλος και Maiani πρότειναν ένα συγκεκριμένο σύνολο κανόνων για τον υπολογισμό του πλάτους πιθανότητας που αντιστοιχεί στις αντιδράσεις του γοητευτικού κουάρκ με τα άλλα σωματίδια. Βάσει αυτών των κανόνων, το πλάτος πιθανότητας για τη δεύτερη ακολουθία έχει το ίδιο μήκος με το βέλος για την πρώτη, αλλά αντίθετη κατεύθυνση. Όταν, λοιπόν, τα δύο βέλη συνδυαστούν όπως ορίζουν οι κανόνες της κβαντικής θεωρίας, το νέο βέλος έχει μηδενικό μήκος, δηλαδή αντιστοιχεί σε μηδενική πιθανότητα. Έτσι, με την εισαγωγή ενός εναλλακτικού μηχανισμού μέσω του οποίου θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί η διάσπαση σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, επετεύχθη η εξήγηση του λόγου για τον οποίο η διάσπαση ουδόλως πραγματοποιείται!

Μολονότι αφ' εαυτής η εν λόγω εξήγηση πιθανόν να μην αρκούσε για να πειστεί η επιστημονική κοινότητα, η διάσπαση που εξετάσαμε εδώ αποτελούσε μία μόνο περίπτωση ανάμεσα σε έξι περίπου διαδικασίες οι οποίες αναμένονταν μεν, πλην όμως δεν παρατηρούνταν. Οι Glashow, Ηλιόπουλος και Maiani έδειξαν ότι η ύπαρξη του γοητευτικού κουάρκ μπορούσε να εξηγήσει το λόγο για τον οποίο δεν παρατηρούνταν η καθεμία από αυτές τις διαδικασίες. Η προτεινόμενη θεωρία αντιμετώπιζε μία μόνο δυσκολία: κανένα από τα μέχρι τότε γνωστά σωματίδια δεν φαινόταν να περιέχει γοητευτικά κουάρκ. Συνεπώς, έπρεπε κανείς να δεχτεί ότι το γοητευτικό κουάρκ είναι πολύ βαρύτερο από τα υπόλοιπα κουάρκ, οπότε κάθε σωματίδιο που περιέχει ένα γοητευτικό κουάρκ θα είχε τόσο μεγάλη μάζα ώστε να μην είναι δυνατή η παραγωγή του στα πειράματα τα οποία σίχαν διεξαχθεί ώστε τότε στους επιταχυντές σωματίδιων.

Το Νοέμβριο του 1974, ένα νέο σωματίδιο, με μάζα που υπερέβαινε κατά τρεις και πλέον φορές τη μάζα του πρωτονίου, ανακαλύφθηκε ταυτόχρονα στο Εθνικό Εργαστήριο του Μπρουκχέιβεν και στο Κέντρο Γραμ-

μικού Επιταχυντή του Στάνφορντ. Το νέο σωματίδιο ονομάστηκε J στην ανατολική ακτή και Ψ στη δυτική: το σημερινό του όνομα, J/Ψ , φέρει εμφανή τα σημεία του συμβιβασμού. Οι ιδιότητες του εν λόγω σωματίδιου, οι οποίες έχουν πλέον διαπιστωθεί πέραν πάσης αμφιβολίας, δείχνουν ότι αποτελείται από ένα γοητευτικό κουάρκ και ένα γοητευτικό αντικουάρκ. Οι ιδιότητες που επιδεικνύουν τα γοητευτικά κουάρκ στις αλληλεπιδράσεις τους συμπίπτουν μέχρι κεραίας με εκείνες που είχαν προβλεφθεί το 1970. Ο Glashow και οι επικεφαλής των δύο ομάδων που ανακάλυψαν το σωματίδιο J/Ψ τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ φυσικής για την επιστημονική προσφορά τους. (Σήμερα πιστεύουμε ότι υπάρχουν ακόμη δύο τύποι κουάρκ, η κορυφή και ο πυθμένας, μολονότι τα πειραματικά δεδομένα που υποστηρίζουν την ύπαρξη του πρώτου από αυτά δεν θεωρούνται αδιαμφισβήτητα.)

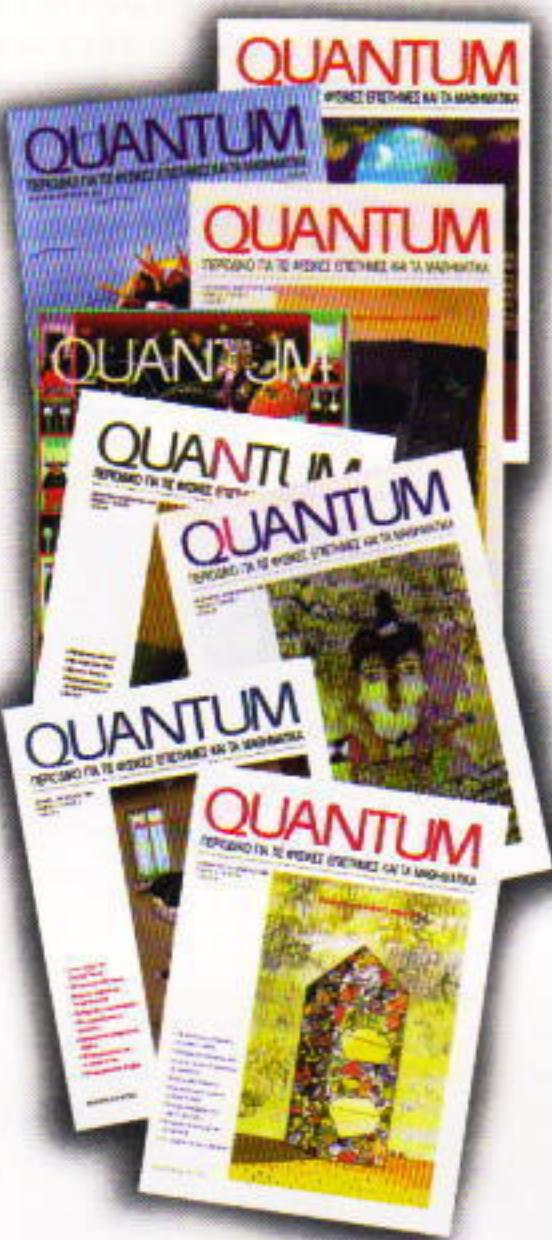
Η αλλόκοτη λογική της κβαντικής θεωρίας και η αντιδιαισθητική πρόβλεψη του γοητευτικού κουάρκ αποτελούν απλώς παραδείγματα των ιδεών που αναπτύσσουν οι επιστήμονες στην έμμονη προσπάθειά τους να κατανοήσουν τον κόσμο στον οποίο ζούμε. Στον κόσμο της επιστήμης άρχει η Λευκή Βασίλισσα. Σύμφωνα με τις ενδείξεις που έχουμε ώς τώρα, η φύση διέπεται από απλούς νόμους, μόνο που οι νόμοι αυτοί διαφέρουν πάρα πολύ από οιδήποτε θα ήταν πιθανόν να φανταστεί κανείς.

— Alan H. Guth

O Alan H. Guth κατέχει την Έδρα Φυσικής Victor Weisskopf στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης (MIT) εππλέον, είναι μέλος της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών των ΗΠΑ και της Αμερικανικής Ακαδημίας Τεχνών και Επιστημών. Θεωρείται ο πατέρας της θεωρίας του πληθωριστικού σύμπαντος. Το έργο του περιλαμβάνει εφαρμογές των ιδεών της σωματιδιακής φυσικής στη μελέτη του πρώιμου σύμπαντος.

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum διανύει τον έκτο χρόνο συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, επί έξι χρόνια προσφέρει μέσα από τις σελίδες του την τεκμηριωμένη γνώση αποκαλύπτοντας στο ελληνικό κοινό τη γοητεία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα, λοιπόν, έχουν κυκλοφορήσει τριάντα τρία τεύχη του. Αυτά, για δύο χρόνια θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου.

Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Για την αρχειοέτηση των τευχών, κυκλοφορούν και οι αντίστοιχες θήκες.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεποτέλλων έκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντες (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης
Mike Donaldson

Αντεποτέλλουσα αρχισυντάκτρια
Jennifer Wang

Υπεύθυνος εικονογράφησης
Sergey Ivanov

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του Quantum

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Irina Oleynik, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιφορη

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητρία Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητρία Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερτειλ, Λουζιάνα

Ted Vittitoe, Συνιδιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Εποπτημονική επμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Γιώργος Κατσιλιέρης -φυσικός,

Μιχάλης Λάρπρου -μαθηματικός, Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός,

Αθηνά Τσαγκογέωργα -φυσικός, Θεόδωρος Πιεράτηος -φυσικός

και Αλέκος Μάραλης -φυσικός

Ειδικός συνεργάτης
Γ. Ευαγγελόπουλος

Τυπογραφικές διορθώσεις
N. Μαρίνου

Τυποτεχνική επμέλεια
Θ. Νιούστης

Υπεύθυνη λογοτερίου
M. Μάραλη

Εποπτημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάρπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ιδρυμα Τεχνολογίας και Ερευνών
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοχειοθεσία, σελιδοποίηση
Α.Β. Μαχαιρίδης

Φίλμ, μοντάζ

Χρ. Μήτσης

Εκτύπωση

N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία

Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Α.Λ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό, ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Α.Λ. Μάραλης,
Διαφημιστές και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακίου (Πανεπιστημίου 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 10.500 δρχ. για ιδιώτες, 18.500 δρχ.
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.

Αριθμητικά εμπόδια

Μπορείτε να φτάσετε από εδώ, εκεί;

N. Vagutėn

TΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ σε συχνά σε πολλές μαθηματικές θεωρίες, σε προβλήματα εφαρμοσμένων μαθηματικών και σε γρίφους: Είναι δυνατόν να κινηθούμε από μια θέση σε κάποια άλλη, με τη βοήθεια συγκεκριμένων «αποδεκτών» πράξεων; Πώς μπορούμε να βρούμε την επθυμητή ακολουθία κινήσεων, αν υπάρχει, ή πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ζητούμενη μετάβαση είναι αδύνατη; Θα εξετάσουμε διάφορα προβλήματα αυτού του τύπου. Τα εν λόγω προβλήματα έχουν ένα ακόμη κοινό χαρακτηριστικό: αφορούν ακεραιούς, και τα εμπόδια που απαγορεύουν συγκεκριμένες μετακινήσεις είναι συνήθως αριθμητικής φύσης.

Η συζήτηση κάθε προβλήματος αρχίζει με παραδείγματα που μπορούν να κατανοήσουν εύκολα ακόμη και οι νεότεροι μαθητές. Οι ασκήσεις που είναι σημειωμένες με αστερίσκο και οι αποδείξεις των γενικών αποτελεσμάτων απαιτούν αρκετή σκέψη από τον αναγνώστη. Στο τέλος του άρθρου παρατίθενται ορισμένα δύσκολα προβλήματα «τύπου Ολυμπιάδων», και το τελευταίο πρόβλημα βρίσκεται πολύ κοντά στη θεωρία των αριθμητικών ομάδων, η οποία στις μέρες μας αναπτύσσεται ταχύτατα.

Το πρόβλημα του ίππου

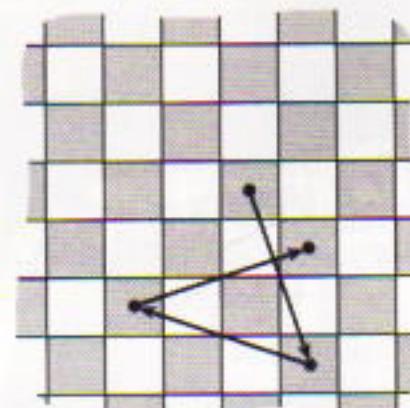
Πρόβλημα 1. Δίδονται οι φυσικοί αριθμοί m και n . Τοποθετούμε-

σε μια άπειρη σκακιέρα ένα πιόνι που μπορεί να κάνει κινήσεις μορφής L , οι οποίες αποτελούνται από m τετράγωνα προς τη μία κατεύθυνση και n τετράγωνα προς την κάθετη κατεύθυνση. Ονομάζουμε το πιόνι (m, n) -ίππο. Ποια τετράγωνα, λοιπόν, μπορεί να εποκεφθεί;

Ο συνήθης ίππος του σκακιού ((1, 2)-ίππος), ξεκινώντας από ένα τυχαίο τετράγωνο O , μπορεί να φτάσει οποιοδήποτε τετράγωνο. Πράγματι, μπορεί σε τρεις κινήσεις να φτάσει οποιοδήποτε από τα γειτονικά τετράγωνα του O και είναι προφανές ότι μπορεί να προσεγγίσει και κάθε άλλο τετράγωνο μέσω μιας ακολουθίας τέτοιων στοιχειωδών κινήσεων.

Ο (1, 3)-ίππος, όμως, οι κινήσεις του οποίου παρουσιάζονται στο Σχήμα 1, δεν μπορεί να φτάσει το τετράγωνο που βρίσκεται δίπλα (οριζοντίως ή καθέτως) στο αρχικό. Μπορούμε να εξηγήσουμε εύκολα αυτό το φαινόμενο: ο (1, 3)-ίππος παραμένει πάντα σε τετράγωνα ίδιου χρώματος με το αρχικό. Από την άλλη, εύκολα δείχνουμε ότι ο (1, 3)-ίππος μπορεί να φτάσει σε κάθε τετράγωνο ίδιου χρώματος με το αρχικό. Πράγματι, απαιτούνται τρεις κινήσεις για να φτάσει στο διπλανό (διαγωνίως) τετράγωνο (Σχήμα 1), και κάθε άλλο τετράγωνο ίδιου χρώματος προσεγγίζεται μέσω τέτοιων στοιχειωδών βημάτων.

Προσπαθήστε να λύσετε το Πρό-



Σχήμα 1

$O(1, 3)$ -ίππος μπορεί να φτάσει οποιοδήποτε διαγωνίως γειτονικό τετράγωνο: με αυτά τα στοιχειωδή βήματα μπορεί να εποκεφθεί οποιοδήποτε τετράγωνο του ίδιου χρώματος.

βλημα 1 για τις επόμενες τιμές των m και n : (α) (2, 5), (β) (3, 7), (γ) (10, 25), (δ) (19, 79).

Αποδεικνύεται ότι ο (m, n) -ίππος μπορεί να φτάσει σε οποιοδήποτε τετράγωνο αν και μόνο αν τα m και n έχουν αντίθετη ιστομία (δηλαδή το ένα είναι άρτιο και το άλλο περιττό) και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι το 1.

Η πλήρης απάντηση του Προβλήματος 1 παρουσιάζεται στο τέλος του τρίτου μέρους (Άσκηση 10). Θα εξετάσουμε τώρα κάτι απλούστερο το οποίο θα μας δώσει αποτέλεσμα χρήσιμο για το πρόβλημα του ίππου καθώς και για άλλα, σοβαρότερα μαθηματικά προβλήματα.

Εμφάνιση του μέγιστου κοινού διαιρέτη

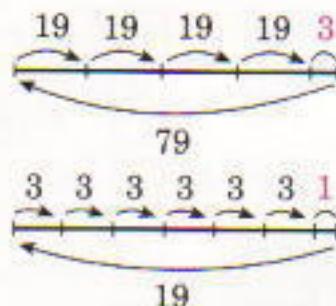
Εξετάζουμε ένα μονοδιάστατο α-

νάλογο του προβλήματός μας.

Πρόβλημα 2. Δίδονται οι φυσικοί αριθμοί a και b . Μια κίνηση συνιστάται στην πρόσθεση ή την αφαίρεση ενός από τους αριθμούς a ή b σε (ή από) έναν συγκεκριμένο ακέραιο. Δοθέντος ενός αριθμού c , είναι δυνατόν να προκύψει ο c από το 0 μέσω τέτοιων κινήσεων;

Σε αυτό το πρόβλημα, το \mathbf{Z} (το σύνολο των ακέραιων) είναι το σύνολο όλων των «θέσεων».

Ας εξετάσουμε πρώτα ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Υποθέστε ότι ένας πελάτης και ένας ταμίας διαθέτουν άπειρο πλήθος χαρτονομισμάτων των 10 και των 25 δολαρίων (τα πάντα είναι δυνατά στα μαθηματικά προβλήματα)! Είναι φανερό ότι ο πελάτης μπορεί να πληρώσει c δολάρια αν και μόνο αν το c είναι πολλαπλάσιο του 5.



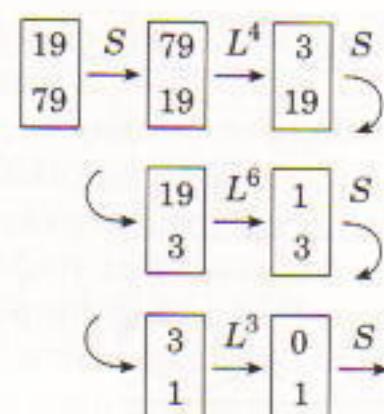
α

$$79 = 4 \cdot 19 + 3$$

$$19 = 6 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0$$

β



γ

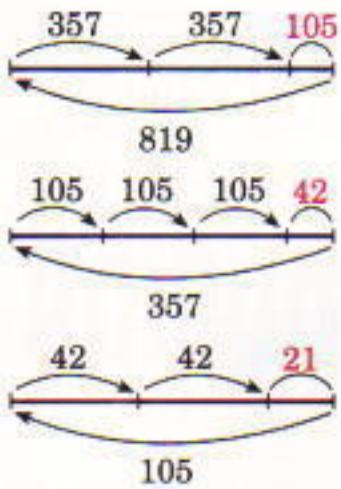
ξουμε τη θέση μας κατά 3 και μετά κατά 1 (Σχήμα 2α).

Ιδού ένα άλλο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι στο σύνολο \mathbf{Z} επιτρέπονται οι κινήσεις ± 19 και ± 79 . Με τη βοήθεια αυτών των κινήσεων μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε ακέραιο: συνδυασμοί αυτών των κινήσεων μας επιτρέπουν να αλλά-

ζούμε τη θέση μας κατά 3 και μετά κατά 1 (Σχήμα 2α).

Ιδού ένα ποι περίπλοκο παράδειγμα: $a = 819$ και $b = 367$. Σε αυτή την περίπτωση, η ίδια μέθοδος μας επιτρέπει να βρούμε τη συντομότερη μετατόπιση που προκύπτει έπει-





α

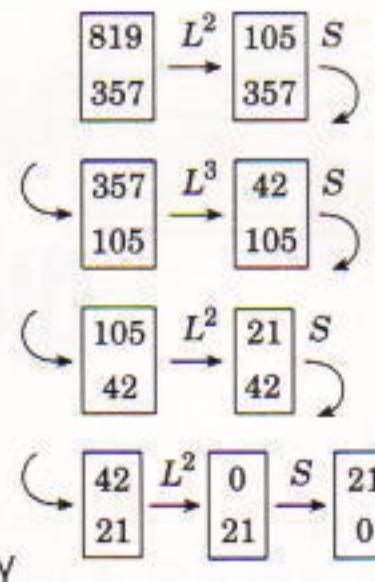
$$819 = 2 \cdot 357 + 105$$

$$357 = 3 \cdot 105 + 42$$

$$105 = 2 \cdot 42 + 21$$

$$42 = 2 \cdot 21 + 0$$

β



γ

Σχήμα 3

Για να βρεθεί ο ΜΚΔ(819, 357) = 21 με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, απαιτούνται τέσσερα βήματα.

τα από μια διαδοχή κινήσεων. Αυτή η ελάχιστη μετατόπιση ισούται με 21 (Σχήμα 3α). Επομένως, μπορούμε να επιτύχουμε οποιαδήποτε μετατόπιση είναι πολλαπλάσιο του 21. Από την άλλη, και ο a και ο b διαιρούνται με το 21, οπότε δεν υπάρχουν άλλες δυνατές μετακινήσεις.

Παρατηρούμε ότι το 21 είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 819 και 367.

Ασκηση 1. (α) Αποδείξτε ότι αν ο πελάτης και ο ταμίας διαθέτουν άπειρο πλήθος χαρτονομισμάτων των 3 και 5 δολαρίων ο καθένας, ο πελάτης μπορεί να πληρώσει οποιοδήποτε ποσό.

(β) Είναι δυνατή η μετακίνηση από το 0 στο 1000 αν $a = 123$ και $b = 456$, ή αν $a = 589$ και $b = 1984$;

(γ) Ποιες μετακινήσεις είναι δυνατές αν $a = 18$ και $b = 81$;

Διατυπώνουμε τώρα την απάντηση του Προβλήματος 2 για τη γενική περίπτωση. Έστω d ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) των a και b . Τότε, η μετακίνηση από το 0 στον αριθμό c είναι δυνατή αν και μόνο αν ο c διαιρείται διά του d . Προσπαθήστε να αποδείξετε αυτό το γεγονός.

Η πρόταση αυτή θα προκύψει με διαφορετική μορφή στο επόμενο μέρος του άρθρου.

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι η απάντηση στο Πρόβλημα 2 δεν αλλάζει αν επιτρέπεται μόνο πρόσθεση του a και αφαίρεση του b .

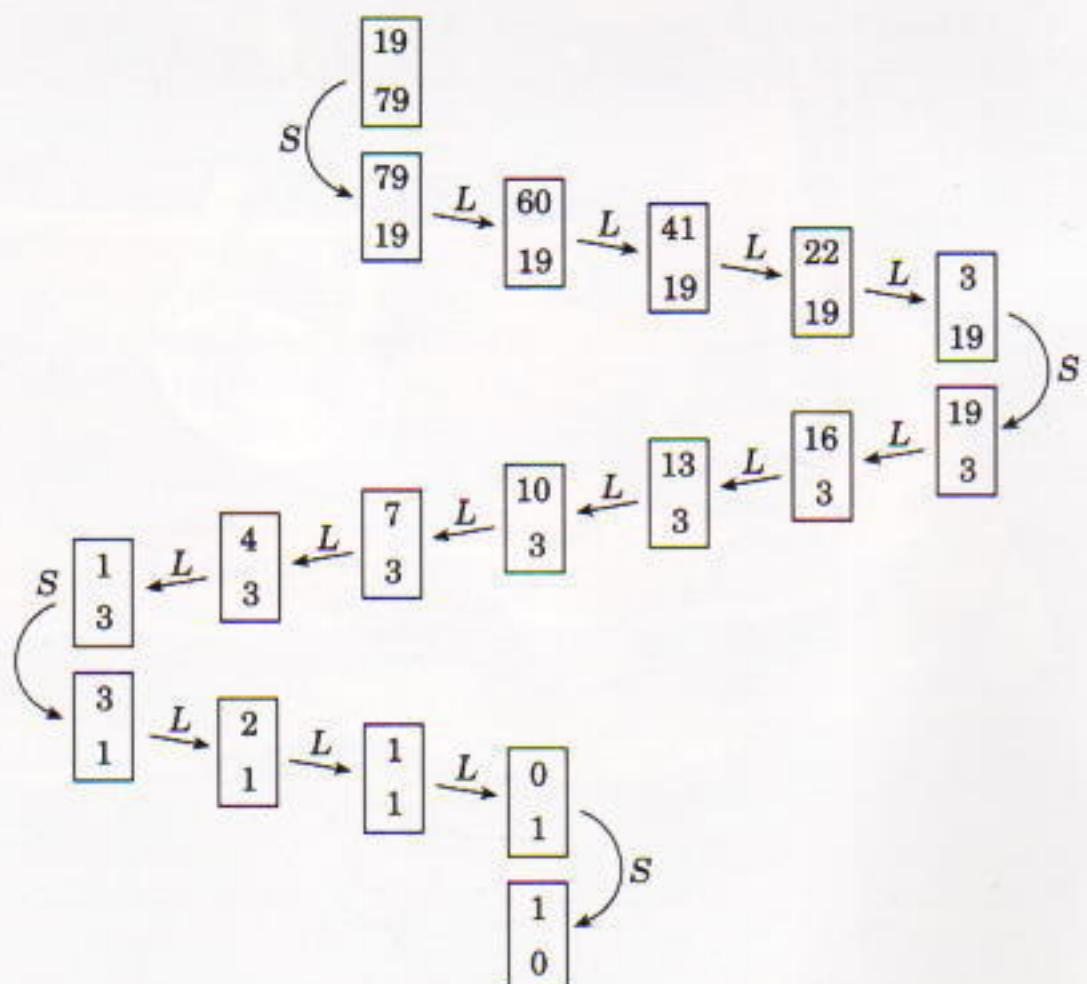
Ασκηση 3. Είναι δυνατόν να ζυ-

πρώτη μηχανή τυπώνει την κάρτα $(x - y, y)$, η δεύτερη την κάρτα $(x + y, y)$ και η τρίτη την κάρτα (y, x) . Έστω ότι η αρχική κάρτα είναι $(1, 2)$. Είναι δυνατόν να προκύψουν τα ζεύγη $(19, 79)$ και $(819, 357)$ αν χρησιμοποιήσουμε τις μηχανές με όποια σειρά επιθυμούμε; Ποιες κάρτες προκύπτουν αν η αρχική κάρτα είναι (a, b) ;

Συμβολίζουμε τις πράξεις των μηχανών ως L , R και S , αντίστοιχα. Και πάλι, αρχίζουμε με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα. Το ζεύγος $(19, 79)$ μπορεί να προκύψει από το ζεύγος $(1, 2)$. Για να βρούμε την επιθυμητή ακολουθία πράξεων των μηχανών είναι προτιμότερο να «κατέβουμε» από το $(19, 79)$ στο $(1, 2)$ παρά να ακολουθήσουμε την αντίθετη πορεία (Σχήμα 4).

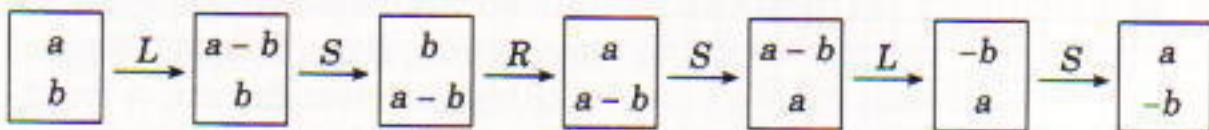
Αν το επιτύχουμε αυτό, γράφουμε την ακολουθία των πράξεων με αντίστροφη σειρά (ανταλλάσσοντας τα L και R), για να προκύψει η επιθυμητή άνοδος από το $(1, 2)$ στο $(19, 79)$.

Στο Σχήμα 4 η κάθοδος από το $(19, 79)$ στο $(1, 2)$ συνεχίζεται έως το ζεύγος $(1, 0)$. Ο συντομογραφικός



Σχήμα 4

Κάθε σειρά σκαλοπατιών έως ένα «κεφαλόσκαλο» αντιπροσωπεύει ένα βήμα του αλγορίθμου του Ευκλείδη.



Σχήμα 5

Οι πράξεις L , R και S μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αλλάξουμε το πρόσημο ενός από τους αριθμούς στις κάρτες.

συμβολισμός αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 2γ, όπου L^k σημαίνει ότι η πράξη L εκτελείται k φορές. Στην πραγματικότητα, η ίδια κάθοδος εκτελέστηκε στο παράδειγμα του Προβλήματος 2 (Σχήμα 2α).

Ένας συντομογραφικός συμβολισμός της καθόδου από το ζεύγος $(819, 357)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 3γ (καλούμε τους αναγνώστες να την περιγράψουν πλήρως). Σε αυτό το παράδειγμα, δεν είναι δυνατόν να προκύψει το ζεύγος $(1, 2)$ (ούτε και το $(1, 0)$). Το γεγονός αυτό εξηγείται εύκολα: υπάρχει ένα εμπόδιο που δεν μας επιτρέπει να φτάσουμε σε αυτό το ζεύγος —όλοι οι αριθμοί που προκύπτουν κατά τη διαδικασία διαιρούνται με το 21. Με όποια σειρά και αν εκτελέσουμε τις πράξεις L , R και S είναι αδύνατο να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο, διότι όλες οι χρησιμοποιούμενες πράξεις διατηρούν τον ΜΚΔ:

$$\begin{aligned}\text{ΜΚΔ}(x - y, x) &= \text{ΜΚΔ}(x + y, x) \\ &= \text{ΜΚΔ}(x, y).\end{aligned}$$

Συνεπώς, δεν μπορούμε να φτάσουμε το ζεύγος $(1, 2)$ όταν ξεκινούμε από το $(819, 357)$, και αντιστρόφως.

Ασκηση 4. Αν χρησιμοποιήσουμε τις πράξεις L , R και S , είναι δυνατόν να εκτελέσουμε τις επόμενες μετακινήσεις: (α) από το $(1, 10)$ στο $(5, 25)$, (β) από το $(18, 81)$ στο $(36, 63)$, (γ) από το $(589, 1984)$ στο $(31, 1953)$;

Μπορούμε τώρα να δώσουμε απάντηση στο γενικό ερώτημα του Προβλήματος 3: ένα ζεύγος (p, q) προκύπτει από το (a, b) αν και μόνο αν $\text{ΜΚΔ}(a, b) = \text{ΜΚΔ}(p, q)$. Η συνθήκη είναι αναγκαία, διότι οι χρησιμοποιούμενες πράξεις διατηρούν τον ΜΚΔ. Επίσης, είναι ικανή: αν $\text{ΜΚΔ}(a, b) = \text{ΜΚΔ}(p, q) = d$, τότε μέσω μιας ακολουθίας των πράξεων L ,

R και S μπορούμε να αναγάγουμε καθένα από τα δύο ζεύγη στο $(d, 0)$. Επομένως, αν κατέβουμε από το (a, b) στο $(d, 0)$ και μετά ανέβουμε από το $(d, 0)$ στο (p, q) , προκύπτει η επιθυμητή ακολουθία πράξεων.

Ας αποδείξουμε ότι κάθε ζεύγος (a, b) μετατρέπεται στο $(d, 0)$. Παρατηρούμε ότι, αν ένα από τα στοιχεία του ζεύγους είναι αρνητικό, μπορεί εύκολα να γίνει θετικό (Σχήμα 5). Τώρα, κάθε ζεύγος (a, b) φυσικών αριθμών a και b μπορεί να μετατραπεί στο $(d, 0)$ με τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα: σε κάθε βήμα (εκτός όταν χρησιμοποιούμε την πράξη S) το μεγαλύτερο στοιχείο του ζεύγους μειώνεται έως ότου φτάσουμε στο ζεύγος $(d, d) \rightarrow (0, d) \rightarrow (d, 0)$.

Κατά την επίλυση του Προβλήματος 3 βρήκαμε ήδη μια εύχρηστη μέθοδο κατασκευής του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών. Πρώτα, από το ζεύγος (a, b) , όπου $a > b > 0$, μετακινούμαστε στο ζεύγος (b, r) , όπου r είναι το υπόλοιπο της διαιρέσης του a διά του b . Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε την ίδια πράξη έως ότου καταλήξουμε σε ένα ζεύγος $(d, 0)$. Το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο d είναι ο ζητούμενος ΜΚΔ(a, b) (Σχήματα 2β και 3β). Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **αλγόριθμος του Ευκλείδη**.

Ασκήσεις

5. Αποδείξτε ότι είναι αδύνατο να προκύψει το ζεύγος $(1234, 5678)$ από το $(1357, 2468)$, και το $(7890, 1979)$ από το $(123, 457)$.

6. Βρείτε παραδείγματα που δείχνουν ότι οι L και S , καθώς και οι R και S , δεν αντιμετατίθενται: $LS \neq SL$ και $RS \neq SR$ (εν τούτοις, είναι προφανές ότι $LR = RL$).

7. Βρείτε με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη τους ΜΚΔ($589, 1984$) και $\text{ΜΚΔ}(123456789, 987654321)$.

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες ονομάζεται **ακέραιο πλέγμα**. Συμβολίζεται με \mathbb{Z}^2 .

Η επόμενη άσκηση και το Σχήμα παρουσιάζουν τη γεωμετρική σημασία του Προβλήματος 3.

8. Έστω ότι το τμήμα OA , όπου O είναι η αρχή των αξόνων και A ένα σημείο του ακέραιου πλέγματος \mathbb{Z}^2 , διαιρείται σε d τμήματα από άλλα σημεία του πλέγματος. Αποδείξτε ότι το σημείο A μπορεί να μετακινθεί μέσω των πράξεων L , R και S στα σημεία $(d, 0)$ και $(-d, 0)$, αλλά δεν είναι δυνατόν να μετακινθεί σε κανένα άλλο σημείο του άξονα Ox .

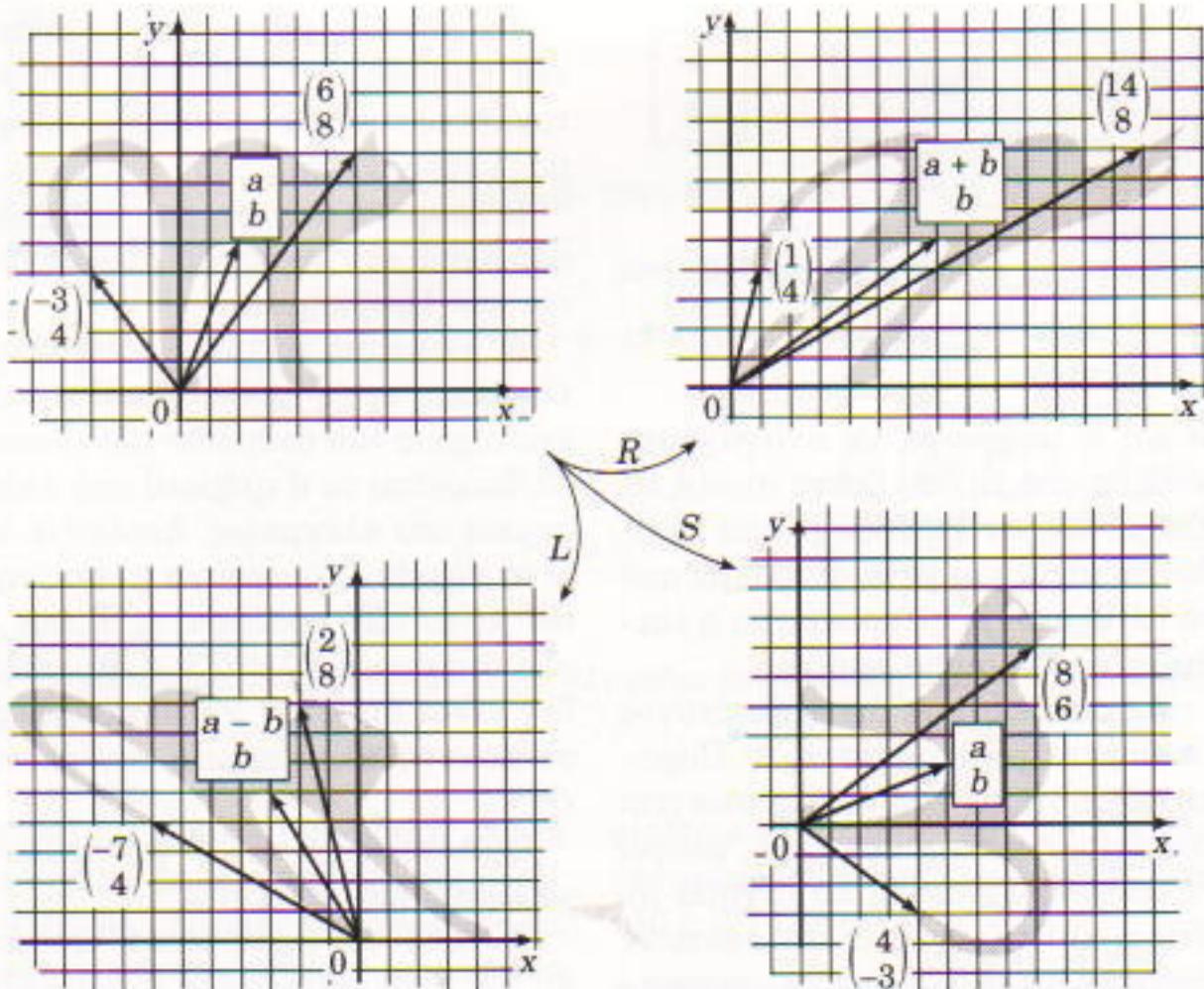
Οι Ασκήσεις 9 και 10 γενικεύουν τα Προβλήματα 1 και 2.

9*. Δίδονται οι n φυσικοί αριθμοί a_1, a_2, \dots, a_n . Αποδείξτε ότι ο ακέραιος c μπορεί να προκύψει από το 0 μέσω των κινήσεων $\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_n$ αν και μόνο αν ο c διαιρείται από τον $\text{ΜΚΔ}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

10*. (a) Δίδονται οι n επίπεδα διανύσματα με ακέραιες συντεταγμένες, v_1, v_2, \dots, v_n . Αποδείξτε ότι το σύνολο D όλων των σημείων του επιπέδου στα οποία μπορεί να μεταφερθεί το σημείο O μέσω των κινήσεων $\pm v_1, \pm v_2, \dots, \pm v_n$ είναι το σύνολο των κόμβων ενός πλάγιου πλέγματος (πλάγιο πλέγμα είναι το σύνολο των κορυφών των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από δύο οικογένειες ισαπεχουσών παράλληλων ευθειών).

(b) Υποθέτουμε ότι το σύνολο v_1, v_2, \dots, v_n , μαζί με κάθε διάνυσμα v_i περιέχει και το διάνυσμα v_j το οποίο είναι κάθετο στο v_i και έχει το ίδιο μήκος. Τότε, το σύνολο όλων των προσεγγίσιμων σημείων είναι το σύνολο των κόμβων ενός τετραγωνικού πλέγματος.

Τώρα πλέον είναι εύκολο να βρούμε την πλήρη απάντηση στο Πρόβλημα 1. Έστω $m = dm_1$ και $n = dn_1$, όπου $d = \text{ΜΚΔ}(m, n)$. Τότε, αν το $m_1 + n_1$ είναι περιττό, όλα τα σημεία (dx, dy) , όπου x, y τυχαίοι ακέραιοι, είναι προσεγγίσιμα (είναι το πλέγμα με βήμα d). Αν το $m_1 + n_1$ είναι άρτιο, όλα τα σημεία (dx, dy) , όπου $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ και $x + y$ άρτιο



Σχήμα 6

Η «αριστερή ασυμμετρία» $L(x, b) \rightarrow (x - b, b)$, η «δεξιά ασυμμετρία» $R(x, b) \rightarrow (x + b, b)$, και η «συμμετρία» $S(x, b) \rightarrow (b, x)$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί που εκτελούν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις του ακέραιου πλέγματος \mathbb{Z}^2 στον εαυτό του.

είναι προσεγγίσιμα (τα σημεία αυτά αποτελούν ένα πλέγμα με βήμα $d\sqrt{2}$ που έχει περιστραφεί κατά 45° ως προς το \mathbb{Z}^2).

Ανακεφαλαίωση

Στο τελευταίο μέρος του άρθρου θα παρουσιάσουμε δύο μάλλον δύσκολα προβλήματα. Πρώτα όμως θα επιστρέψουμε στις προηγούμενες παραγράφους και θα προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε γενικούς κανόνες που θα μας βοηθήσουν να αποφασίσουμε αν είναι δυνατή η μετακίνηση από τη μία θέση στην άλλη. Θα παρουσιάσουμε επίσης ορισμένους μαθηματικούς όρους για τις έννοιες που θα συναντήσουμε στα προβλήματα.

1. Για να αποδείξουμε ότι μια μετακίνηση είναι αδύνατη βρίσκουμε ένα συγκεκριμένο «εμπόδιο», δηλαδή, ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα της θέσης (το οποίο καλείται αναλοίωτη) που παραμένει ίδιο έπειτα από όλες τις επιτρεπτές κινήσεις και είναι διαφορετικό για την αρχική και την τελική θέση. Έτσι, η απόδειξη του αδυνάτου μιας μετακίνησης

ανάγεται στην ανακάλυψη της κατάλληλης αναλλοίωτης. Στο πρόβλημα του (1, 3)-ίππου χρησιμοποιήσαμε ως αναλλοίωτη το χρώμα του τετραγώνου. Στο Πρόβλημα 2 ήταν το υπόλοιπο της διαίρεσης του δεδομένου αριθμού διά του ΜΚΔ(a, b), και στο Πρόβλημα 3 ήταν ο ΜΚΔ του αρχικού ζεύγους αριθμών.

2. Για να ανακαλύψουμε την επιθυμητή ακολουθία κινήσεων στο πλέγμα, είναι συχνά χρήσιμο να βρούμε μια βασική κινηση (ή συνδυασμό κινήσεων) ή να αναγάγουμε το πρόβλημα σε μια απλούστερη βασική θέση και στη συνέχεια να διατυπώσουμε έναν γενικό αλγόριθμο για την εύρεση των απαραίτητων κινήσεων. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα του (1, 3)-ίππου ήταν αρκετό να ανακαλύψουμε πώς θα εκτελούμε διαγώνιες κινήσεις ενώ στο Πρόβλημα 2 ήταν αρκετό να κατασκευάσουμε την «κάθοδο» στη βασική θέση ($d, 0$).

3. Σε όλα τα προβλήματα που εξετάσαμε, οι μετακίνησεις ήταν αντιστρεπτές: αν μπορούσαμε να φτάσουμε από τη θέση A στη θέση B ,

τότε ήταν δυνατόν να φτάσουμε και από τη θέση B στη θέση A . Σε τέτοια προβλήματα είναι δυνατή η διαμεριση του συνόλου όλων των θέσεων σε κλάσεις ισοδυναμίας: κάθε θέση μιας κλάσης ισοδυναμίας προκύπτει από κάθε άλλη θέση της ίδιας κλάσης, αλλά οι μετακινήσεις μεταξύ θέσεων διαφορετικών κλάσεων είναι αδύνατες.

Θα εξετάσουμε τώρα ένα πρόβλημα που δεν διαθέτει την ιδιότητα της αντιστρεψιμότητας. Όμως, οι αρχές 1 και 2 θα κάνουν τη δουλειά θαυμάσια.

Η εξάπλειψη των 2

Πρόβλημα 4. Τρεις μηχανές τυπώνουν σε κάρτες ζεύγη φυσικών αριθμών με τον εξής τρόπο: η πρώτη μηχανή διαβάζει μια κάρτα (a, b) και τυπώνει την κάρτα $(a+1, b+1)$, η δεύτερη τυπώνει την κάρτα $(a/2, b/2)$ (αυτό γίνεται μόνο όταν a, b είναι άρτια), και η τρίτη μηχανή διαβάζει τις κάρτες (a, b) και (b, c) και τυπώνει την κάρτα (a, c) .

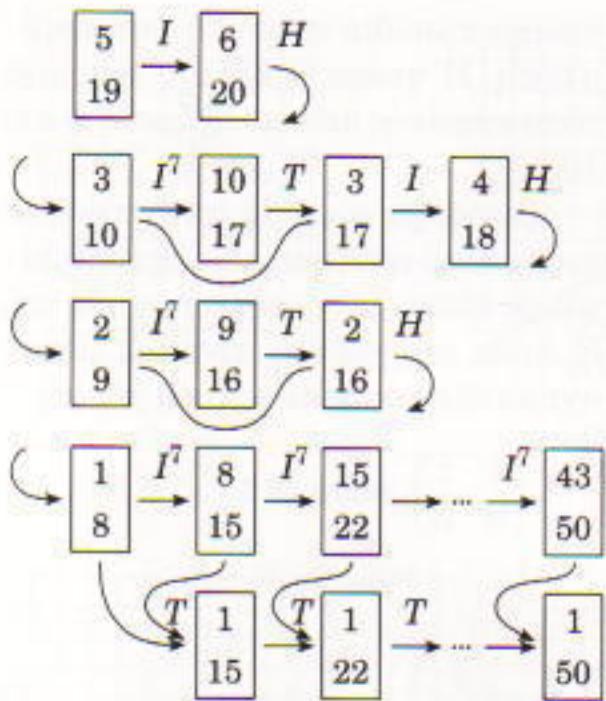
Υποθέτουμε ότι αρχίζουμε με την κάρτα $(5, 19)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τις μηχανές που περιγράφαμε με οποιαδήποτε σειρά επιθυμούμε, είναι δυνατόν να προκύψει η κάρτα

- (a) $(1, 50)$ ή
- (b) $(1, 100)$;

(γ) Υποθέτουμε ότι ξεκινάμε με την κάρτα (a, b) ($a < b$). Για ποια n μπορεί να προκύψει η κάρτα $(1, n)$;

Συμβολίζουμε τις πράξεις που εκτελούν οι μηχανές με I , H και T , αντίστοιχα. Στο Σχήμα 7 βλέπουμε πώς μπορεί να προκύψει η «απλούστατη» κάρτα $(1, 8)$ από την $(5, 19)$ και στη συνέχεια η ζητούμενη κάρτα $(1, 50)$ (όπως προηγουμένως, γράφουμε I^k όταν εκτελούμε την πράξη I επί k φορές). Επομένως, η απάντηση στο Πρόβλημα 4a είναι καταφατική.

Ωστόσο, η κάρτα $(1, 100)$ δεν είναι δυνατόν να προκύψει από την κάρτα $(5, 19)$. Αν εξετάσουμε το Σχήμα 7, βρίσκουμε ένα εμπόδιο: η διαφορά των αριθμών σε κάθε κάρτα, διαιρείται διά του 7. Ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία χρησιμοποιούμε τις μηχανές, η ιδιότητα αυτή παραμένει αληθής, διότι διατηρεί-



Σχήμα 7

Αν χρησιμοποιήσουμε τις πράξεις I^d (αύξηση κατά d), H (διαιρεση με το 2) και T (μεταβατικός μετασχηματισμός), μπορούμε να πάρουμε την κάρτα $(1, 50)$ από την $(5, 19)$.

ται από τις πράξεις I , H και T . (Αυτό είναι προφανές για την I . Για την H έχουμε ότι, αν τα a και b είναι άρτια και το $a - b$ διαιρείται διά του 7, τότε και το $a/2 - b/2$ διαιρείται διά του 7. Για την T έχουμε ότι, αν και οι δύο διαφορές, $b - a$ και $c - b$, διαιρούνται διά του 7, τότε το $c - a = (c - b) + (b - a)$ διαιρείται επίσης διά του 7.) Όμως, η διαφορά $100 - 1 = 99$ δεν διαιρείται διά του 7. Επομένως, η απάντηση στο Πρόβλημα 4β είναι αρνητική.

Άσκηση 11. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τις μηχανές I , H και T για να προκύψουν:

- (α) οι κάρτες $(5, 29)$, $(1, 101)$ και $(1, 1978)$ από την κάρτα $(3, 33)$;
- (β) οι κάρτες $(3, 33)$, $(1, 100)$ και $(1, 1979)$ από την κάρτα $(5, 29)$;

Και τώρα απαντούμε στο γενικό μέρος (γ) του Προβλήματος 4: έστω ότι η κάρτα (a, b) είναι τέτοια ώστε $b - a = 2^m d$, όπου ο d είναι περιττός και μεγαλύτερος του 0. Τότε, από την κάρτα (a, b) μπορούν να προκύψουν μόνο κάρτες (p, q) στις οποίες η διαφορά $p - q$ διαιρείται διά του d . Επομένως μπορούμε να εξαλείψουμε όλα τα 2 από την ανάλυση του $b - a$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, αλλά ένας περιττός διαιρέτης αποτελεί αξεπέραστο εμπόδιο.

Πράγματι, όπως ήδη αναφέραμε στην περίπτωση $d = 7$, αν η διαφορά των αριθμών της κάρτας διαιρείται με έναν περιττό αριθμό d , οι πράξεις I , H και T έχουν ως αποτέλεσμα κάρτες με την ίδια ιδιότητα. Από την άλλη, αν $b - a = 2^m d$, όπου d περιττός, μπορούμε να πάρουμε την κάρτα $(1, d + 1)$ από την κάρτα (a, b) . Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται ένα βήμα της ακολουθίας που απαιτείται γι' αυτή τη μετάβαση. Από τη στιγμή που έχουμε την κάρτα $(1, d + 1)$ μπορούμε εύκολα να βρούμε κάθε κάρτα της μορφής $(1, kd + 1)$ (όπως

στο Πρόβλημα 4α την κάρτα $(1, 8)$) και μετά κάθε κάρτα της μορφής $(1, kd + 1)$, με διαφορά που είναι πολλαπλάσιο του d .

Άσκηση 12. (α) Ας υποθέσουμε ότι έχει χαλάσει η μηχανή που εκτελεί την πράξη T . Ποιες κάρτες μπορεί να προκύψουν από τις $(5, 19)$ και $(5, 26)$;

(β) Ας υποθέσουμε ότι έχει χαλάσει η μηχανή που εκτελεί την πράξη H . Ποιες κάρτες μπορεί να προκύψουν από την κάρτα (a, b) ;

Άσκηση 13. Ποιες κάρτες μπορεί να προκύψουν μέσω των πράξεων I , H και T όταν δίδονται οι n κάρτες $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$;

Το Πρόβλημα 4 μοιάζει να είναι μάλλον τεχνητού χαρακτήρα. Έτοιμο, έχει ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι εμφανίζεται ως λήμμα σε ένα σοβαρό μαθηματικό έργο (Ulam, S., *Unsolved Mathematical Problems*).

Ζεύγη διανυσμάτων

Το επόμενο πρόβλημα είναι επέκταση του Προβλήματος 3. Χρησιμοποιούνται οι ίδιες πράξεις, L , R και S , αυτή τη φορά όχι σε ζεύγη ακεραίων αλλά σε ζεύγη διανυσμάτων (a, b) και (c, d) με ακέραιες συντεταγμένες. Τα ζεύγη αυτά θα είναι οι «θέσεις», και θα εφαρμόζουμε τις πράξεις και στα δύο διανύσματα ενός ζεύγους ταυτόχρονα. Θα μας διευκολύνει αν γράψουμε τις συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων σε στήλες:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Στα μαθηματικά, μια τέτοια διευθέτηση αριθμών ονομάζεται πίνακας.

Πρόβλημα 5. Με τον πίνακα $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ μπορούμε να εκτελέσουμε τις εξηγησιμές πράξεις:

$$L: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$R: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$S: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}.$$

Είναι δυνατόν να προκύψουν α-

	άρτιος	περιττός
άρτιος	$\begin{array}{c} a \\ b \end{array}$	$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \xrightarrow{I^d} \square \xrightarrow{H} \square \xrightarrow{T} \square$ $\begin{array}{c} (a+1)/2 \\ b-(a-1)/2 \end{array}$
περιττός	$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \xrightarrow{I^d} \square \xrightarrow{T} \square$ $\begin{array}{c} a/2 \\ b-a/2 \end{array}$	$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \xrightarrow{I^d} \square$ $\begin{array}{c} (a+1)/2 \\ (b+1)/2 \end{array}$

Σχήμα 8

Ο μεγαλύτερος αριθμός b της κάρτας (a, b) μπορεί να μειωθεί (εδώ $d = b - a$, $a > 1$ ή $a = 1$ και το b περιττό).

πό τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ οι επόμενοι πίνακες:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, (e) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

(β) Ποιοι πίνακες μπορεί να προκύψουν από τον πίνακα $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$;

Δύο πίνακες ονομάζονται *ισοδύναμοι* αν ο ένας μπορεί να μετασχηματιστεί στον άλλο μέσω των πράξεων L , R και S (οι πράξεις αυτές είναι αντιστρεπτές και, επομένως, το σύνολο όλων των πινάκων διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας).

Κατά τη λύση του Προβλήματος 5 συναντάμε διάφορες δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουμε μία μία.

(1) Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ δεν είναι ισοδύναμοι: το δεύτερο διάνυσμα $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ δεν μπορεί να μετασχηματιστεί στο $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, διότι $MKD(5, 7) \neq MKD(3, 9)$. Γενικώς, μια συνθήκη αναγκαία για την ισοδυναμία δύο πινάκων $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ έπειταίς αμεσα από τη λύση του Προβλήματος 3:

$$\begin{cases} MKD(a, b) = MKD(p, q) \\ MKD(c, d) = MKD(r, s). \end{cases} \quad (*)$$

Ωστόσο, όπως θα διαπιστώσουμε, η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή για την ισοδυναμία δύο πινάκων. Αν ισχύει η συνθήκη, μπορούμε να διαιρέσουμε κάθε στήλη του πίνακα με τον MKD και να θεωρήσουμε πλέον ανηγμένους πίνακες (θυμηθείτε ότι ο MKD κάθε στήλης διατηρείται από τις πράξεις μας).¹

(2) Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι ισοδύναμοι, διότι κάθε διαδοχή πράξεων (L , R και S) επί του

πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ έχει ως αποτέλεσμα έναν πίνακα με ίσες στήλες: $\begin{pmatrix} p & p \\ q & q \end{pmatrix}$.

(3) Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι, επίσης, ισοδύναμοι. Εδώ συναντάμε ένα άλλο εμπόδιο: η ποσότητα

$$\Delta = \Delta \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = |ad - bc|$$

διατηρείται κάτω από όλους τους μετασχηματισμούς L , R και S . Ας το επαληθεύσουμε για τον L :

$$|(a - b)d - b(c - d)| = |ad - bc|$$

(οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι το ίδιο ισχύει για τους R και S). Έχουμε ότι $\Delta \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 3$ και $\Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ και, επομένως, οι πίνακες δεν είναι ισοδύναμοι. Παρατηρούμε ότι

$$\Delta \begin{pmatrix} p & p \\ q & q \end{pmatrix} = 0.$$

Η ποσότητα $ad - bc$ (της οποίας πήραμε την απόλυτη τιμή) εμφανίζεται πολύ συχνά σε προβλήματα που αφορούν πίνακες και δεν είναι τίποτα άλλο από τη γνωστή μας *ορίζουσα* του πίνακα $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

(4) Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι ισοδύναμοι: η ακολουθία των μετασχηματισμών που ανάγουν το πρώτο διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ στην κανονική μορφή $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και ένα πλήθος τεχνασμάτων οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα (Σχήμα 9). Η αναλλοίωτη D είναι φανερή στο Σχήμα 9 — είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμου που κατασκευάζεται από τα διανύσματα $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Απομένει να βρούμε αν είναι ισοδύναμοι οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Αποδεικνύεται ότι δεν είναι, αν και δύσκολα βρίσκουμε το αντί-

στοιχο εμπόδιο σε αυτή την περιπτωση. Η γεωμετρική του σημασία είναι εμφανής από τα Σχήματα 9 και 10.

Μπορούμε τώρα να απαντήσουμε στο γενικό ερώτημα του Προβλήματος 5. Μέσω των πράξεων L , R και S , κάθε ανηγμένος πίνακας μετασχηματίζεται σε κανονική μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \text{ όπου } 0 \leq r < \Delta, \quad (1)$$

$$MKD(r, \Delta) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ αν } \Delta = 0. \quad (2)$$

Δύο πίνακες είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι συνθήκες (*) και οι αντίστοιχοι ανηγμένοι πίνακες έχουν ταυτόσημη κανονική μορφή. (Το κριτήριο ισοδυναμίας διατυπώνεται στην Άσκηση 20 σε ελαφρώς άλλη μορφή.)

Πράγματι, κάθε ανηγμένος πίνακας μπορεί να μετασχηματιστεί σε κανονική μορφή με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίσαμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (Σχήμα 9). Το γεγονός ότι το r είναι αναλλοίωτη έπειται από τις Άσκησεις 14 και 15.

Άσκησεις

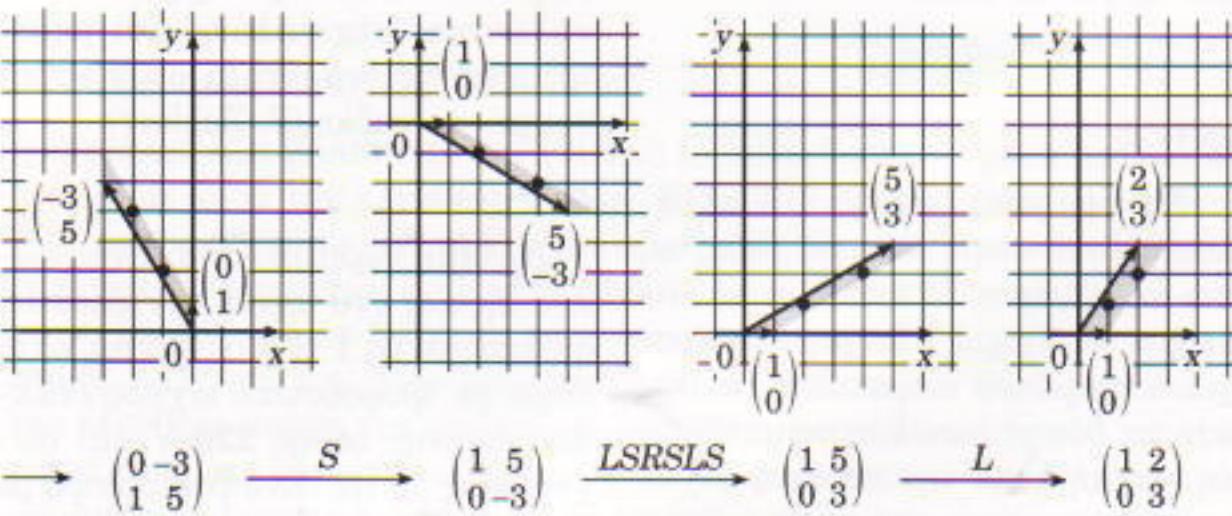
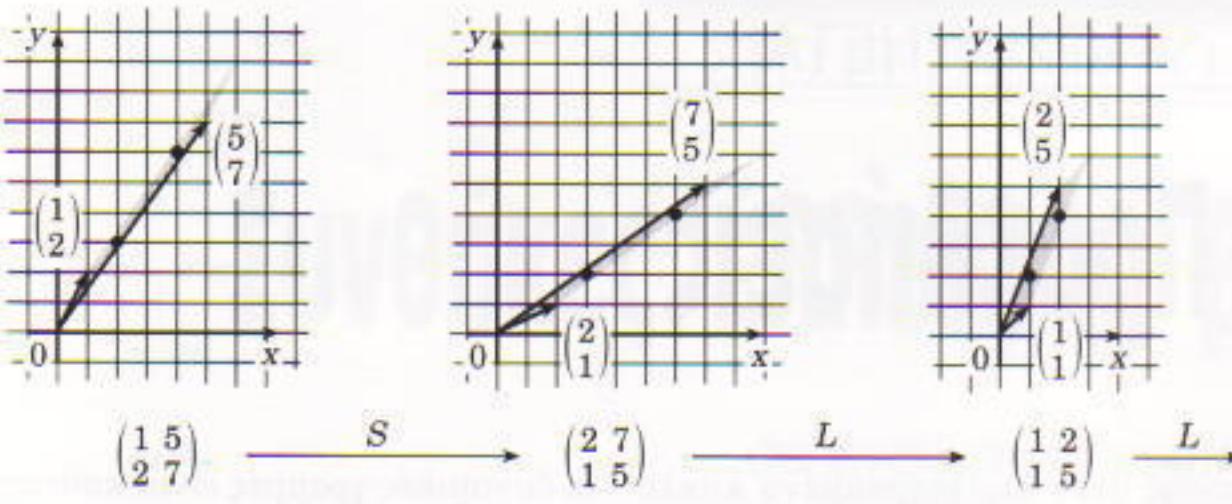
14*. Έστω ότι η κανονική μορφή του πίνακα $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ είναι η (1). Τότε, το παραλληλόγραμμο $OABC$ που κατασκευάζεται από τα διανύσματα $OA = (a, b)$ και $OC = (c, d)$ περιέχει $\Delta - 1$ σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. Όλα αυτά τα σημεία $M_1, M_2, \dots, M_{\Delta-1}$ προκύπτουν μέσω των επόμενων διανυσματικών ισοτήτων:

$$OM_j = \left\{ \frac{j}{\Delta} \right\} OC + \left\{ \frac{j(1-r)}{\Delta} \right\} OA,$$

όπου το $\{x\}$ δηλώνει το κλασματικό μέρος του x .

15. Έστω $MKD(a, b) = MKD(c, d) = 1$ και $\Delta = |ad - bc| \neq 0$. Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό r έτσι ώστε $0 \leq r < \Delta$, $MKD(r, \Delta) = 1$, οι δύο αριθμοί $ra - c$ και $rb - d$ διαιρούνται διά του Δ και ο αριθμός r διατηρείται κάτω από τους μετασχηματισμούς L , R και S του πίνακα $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

1. Ο όρος ανηγμένος εμφανίζεται τελείως φυσικά αν θεωρήσουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ως ένα ζεύγος κλασμάτων $(a/b, c/d)$.



Σχήμα 9.

Αναγωγή στη κανονική μορφή. Με τους μετασχηματισμούς L , R και S , το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και η θέση των κόμβων του ακέραιου πλέγματος μέσα στο παραλληλόγραμμο παραμένουν ίδια.

Το αποτέλεσμα αυτής της άσκησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του r όταν η Δ είναι σχετικώς μικρή.

16. Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι ισοδύναμοι:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 17 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 19 & 50 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 79 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39 & 60 \\ 50 & 77 \end{pmatrix};$$

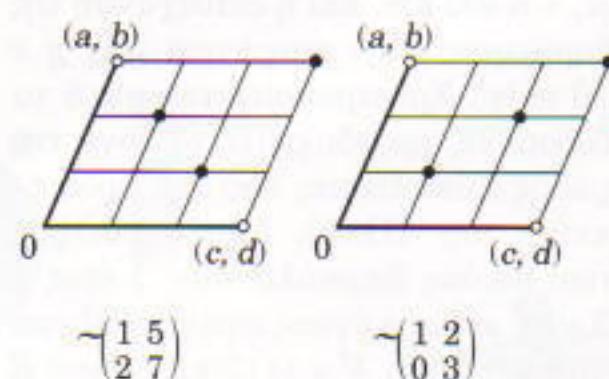
17. Δεν έχουμε εξετάσει πίνακες με μηδενική στήλη. Πότε είναι ισοδύναμοι αυτοί οι πίνακες;

18. Αποδείξτε ότι δύο πίνακες με $\Delta = 1$ είναι ισοδύναμοι.

19'. Πόσες κλάσεις μη ισοδύναμων πινάκων με $\Delta = 3$, $\Delta = 4$, $\Delta = 5$, $\Delta = 10$ και $\Delta = 12$ υπάρχουν; Πόσες κλάσεις ανηγμένων πινάκων υπάρχουν μεταξύ τους; Για κάθε κλάση δείξτε τη θέση των ακέραιων κόμβων στο αντίστοιχο παραλληλόγραμμο (όπως στο Σχήμα 10).

20. Αποδείξτε ότι για κάθε πίνακα υπάρχει ένας ισοδύναμος πίνακας της μορφής $\begin{pmatrix} k & \ell \\ 0 & m \end{pmatrix}$, όπου $k \leq 0$, $m \leq 0$, $\ell \leq 0$, $\ell < m$ και $m \neq 0$.

Μια άλλη δυνατή προσέγγιση για τα Προβλήματα 3 και 5 είναι να ανακαλύψουμε ποιοι μετασχηματισμοί του ακέραιου πλέγματος προκύπτουν από τη σύνθεση των πράξεων L , R και S (λύσαμε ένα παρό-

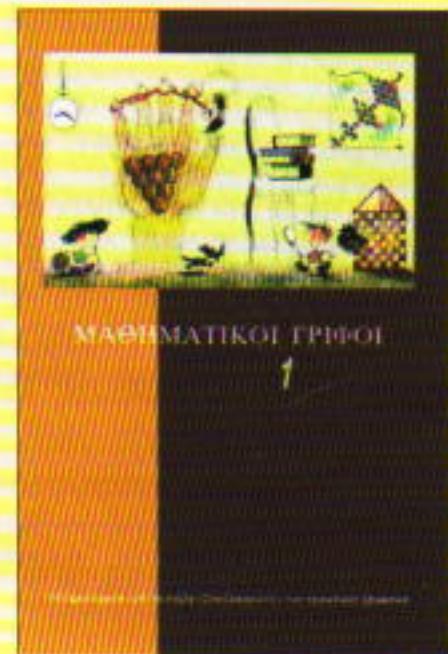


Σχήμα 10.

Η θέση των κόμβων του ακέραιου πλέγματος στο εσωτερικό των παραλληλογράμμων που αντιστοιχούν στους πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαφορετική.

μοιο πρόβλημα όταν βρήκαμε τους μετασχηματισμούς που προέκυπταν από τη σύνθεση των παράλληλων μετατοπίσεων $\pm a$ και $\pm b$ στο Πρόβλημα 2). Αποδεικνύεται ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί έχουν τη μορφή $(x, y) \rightarrow (ax + by, cx + dy)$, όπου a, b, c και d είναι ακέραιοι και $|ad - bc| = 1$. Όμως, αυτό το ζήτημα είναι θέμα ενός άλλου άρθρου αφιερωμένου στη γραμμική άλγεβρα. □

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Μαθηματικοί γρίφοι

—1

Το βιβλίο περιλαμβάνει τα πρώτα 150 προβλήματα που έχουν δημοσιευθεί στη στήλη «Σπαζοκεφαλίες» του Quantum, κατά την περίοδο 1994-99.

Στο δεύτερο μέρος παρατίθενται αναλυτικές λύσεις των προβλημάτων. Η πληθώρα του υλικού, η εξαιρετική ποιότητά του και η θαυμάσια εικονογράφησή του καθιστούν το βιβλίο θελκτικό και χρήσιμο για όλους όσοι αγαπούν τις πνευματικές προκλήσεις, ανεξαρτήτως ηλικίας.

150 σελ., Έγχρ., 16 x 25 εκ., Πανόδετο, 5.200 δρχ.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M161

Πύργος δυνάμεων. Λύστε την εξίσωση $x^5 = 2$. (M. Volchkevich)

M162

Τριγωνικός υπολογισμός. Σε ένα τρίγωνο ABC η γωνία BAC ισούται με 60° . Επλέγουμε ένα σημείο P στο εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε οι γωνίες APB , BPC και CPA να είναι 120° . Το τμήμα AP ισούται με a . Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BPC .

M163

Συστηματική εργασία. Λύστε το επόμενο σύστημα εξισώσεων (M. Volchkevich):

$$\begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{1-2y}{2-y}, \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{1-3x}{3-x}. \end{cases}$$

M164

Φυσικά, ακέραιοι. Αν x και y είναι φυσικοί αριθμοί και το άθροισμα

$$\frac{x^2 - 1}{y + 1} + \frac{y^2 - 1}{x + 1}$$

είναι ακέραιος, τότε αποδείξτε ότι και τα κλάσματα $(x^2 - 1)/(y + 1)$ και $(y^2 - 1)/(x + 1)$ είναι ακέραιοι.

M165

Γωνιώδη χαρακτηριστικά. Επλέγουμε στη διχοτόμο της γωνίας A ενός τριγώνου ABC τα σημεία D και F έτσι ώστε $\angle DBC = \angle FBA$. Αποδείξτε ότι (α) $\angle DCB = \angle FCA$, (β) ο κύκλος που διέρχεται από τα D , F και εφάπτεται στην BC εφάπτεται ε-

πίσης στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC .

Φυσική

Φ156

Το ταίρι μας τροχιάς. Δύο αλληλεπιδρώντα σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 συγκροτούν ένα κλειστό σύστημα. Το Σχήμα 1 δείχνει την τροχιά του πρώτου σωματιδίου, καθώς και τις θέσεις των δύο σωματιδίων τη στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα του πρώτου από αυτά ήταν u και του δεύτερου $-3u$. Σχεδιάστε την τροχιά του δεύτερου σωματιδίου για την περίπτωση όπου $m_1/m_2 = 3$.



Σχήμα 1

Φ157

Η πυκνότητα της Γης και του Ήλιου. Η γωνία a υπό την οποία φαίνεται ο Ήλιος από τη Γη (η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου) είναι περίπου 10^{-2} rad. Δίδεται η ακτίνα της Γης, $R_g = 6.400$ km, και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της, $g \approx 10$ m/s². Χρησιμοποιώντας αυτά τα δεδομένα, προσδιορίστε το λόγο της μέσης πυκνότητας της Γης προς εκείνη του Ήλιου. Δύο υποδείξεις που θα σας διευκολύνουν: 1 έτος $\equiv 3 \cdot 10^7$ s, και ο όγκος σφαίρας δίδεται από τον τύπο $V = (4/3)\pi R^3$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας.

Φ158

Θερμή πλάκα. Μια μεγάλη, λεπτή αγώγιμη πλάκα εμβαδού S και πάχους d τοποθετείται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E , του οποίου

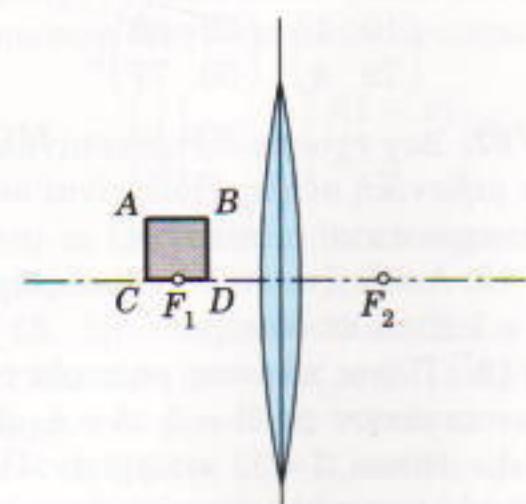
οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στην πλάκα. Πόση ενέργεια καταναλώνεται στην πλάκα και μετατρέπεται σε θερμότητα όταν «οβήνουμε» το πεδίο; (P. Zubkov)

Φ159

Κρίσμη χωρητικότητα. Ένας πυκνωτής και ένα πηνίο συντελεστού αυτεπαγωγής 1 H συνδέονται κατά σειρά με τροφοδοτικό ισχύος εναλλασσόμενης τάσης 220 V και συχνότητας 50 Hz. Ένα βολτόμετρο με πολύ μεγάλη εσωτερική αντίσταση συνδέεται παράλληλα με τον πυκνωτή. Για ποια τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή θα διαβάζουμε στο βολτόμετρο την ένδειξη 220 V; Ποια χωρητικότητα απαγορεύεται να χρησιμοποιηθεί σε ένα τέτοιο πείραμα; (A. Zilberman)

Φ160

Οπτική επίδειξη. Σχεδιάστε το ειδωλο ενός τετραγώνου το οποίο σχηματίζεται από έναν συγκλίνοντα φακό (Σχήμα 2). Το μέσο της πλευράς του τετραγώνου η οποία κείται επί του κύριου άξονα του φακού συμπίπτει με την εστία. (B. Bukhovtsev)



Σχήμα 2

Συνθήκες έλλειψης βαρύτητας

...σε ένα μαγικό κουτί

A. Dozorov

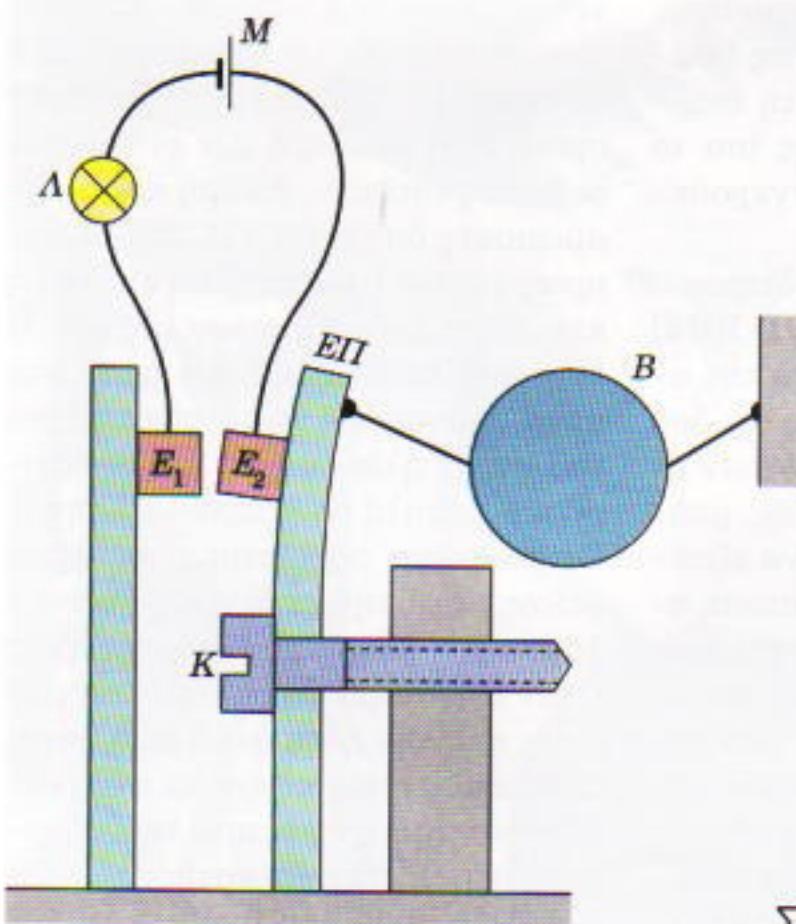
ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ κατά την ελεύθερη πτώση. Ένας δορυφόρος σε τροχιά γύρω από τη Γη, μια πέτρα που εκσφενδονίζεται πλάγια, ένας άνθρωπος που αναπηδά από το έδαφος —όλοι βιώνουν τη συγκεκριμένη κατάσταση. Άλλα και ένα σώμα προσδεδεμένο σε νήμα, κατά την ελεύθερη πτώση του γίνεται αβαρές, οπότε παύει να ασκεί τάση στο νήμα. Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια σχετική διάταξη για να επιδείξουμε το συγκεκριμένο φαινόμενο.

Η διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Στην «κανονική» κατάσταση, το βαρίδι (B), λόγω της τάσης που ασκεί στο νήμα, υποχρεώνει την ελαστική πλάκα (ΕΠ) να λυγίσει· έτσι διαχωρίζονται μεταξύ τους τα δύο ελάσματα E_1 και E_2 . Εν τοιαύτη περιπτώσει, ο λαμπτήρας (Λ) παραμένει σβηστός. Αν εκσφενδονίσουμε τη διάταξη προς τα πάνω, τότε το βαρίδι καθίσταται «αβαρές» και δεν ασκεί πλέον τάση στο νήμα. Κατά συνέπεια, η ελαστική πλάκα παίρνει κατακόρυφη θέση, τα δύο ελάσματα έρχονται σε επαφή (το κύκλωμα «κλείνει»), και ο λαμπτήρας φωτοβολεί. Ο λαμπτήρας, λοιπόν, ανάβει

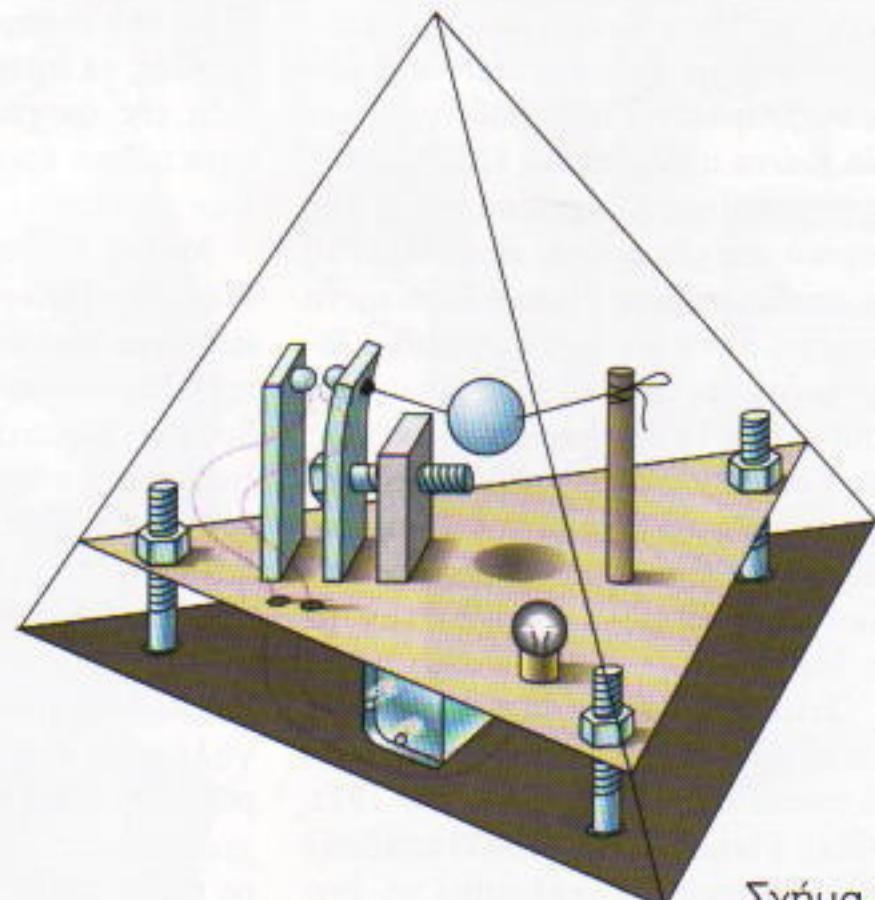
μόνο όταν η όλη διάταξη βρίσκεται σε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας. Η εν λόγω κατάσταση πραγματοποιείται μάλιστα είτε η συσκευή ανέρχεται είτε κατέρχεται.

Ο κοχλίας (Κ) ρυθμίζει τη θέση των δύο ελασμάτων, έτσι ώστε όταν η διάταξη είναι ακίνητη να απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους. Η όλη διάταξη μπορεί, και μάλλον πρέπει, να καλυφθεί με ένα διαφανές και ανθεκτικό υλικό (φύλλο πλεξιγκλάς).

Ορισμένες πρακτικές υποδείξεις: Η μπαταρία (Μ) μπορεί να έχει είτε μεγάλο είτε μικρό μέγεθος, είναι προτιμότερο όμως να κατασκευάσετε μεγάλη υποδοχή, για να μπορείτε να τοποθετήσετε οποιαδήποτε μπαταρία θελήσετε —είτε μικρή είτε μεγάλη. Η υποδοχή αυτή πρέπει να βρίσκεται έξω από το κάλυμμα και στο κάτω μέρος της διάταξης, επειδή κατά διαστήματα θα απαιτείται αντικατάσταση της μπαταρίας· πρέπει, λοιπόν, να ανοίξετε και δύο τρύπες για να περάσετε τα καλώδια σύνδεσης. Ως ελαστική πλάκα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε λεπτό μεταλλικό έλασμα, όπως, για παράδειγμα, μια ξυριστική λεπίδα κομμένη στα δύο. □



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ο πλούτος του τίποτα

«Όσο και αν μένουν ανεκτέλεστα τα έργα, όσο και αν είναι πλήρης η σιγή (η σφύζουσα εν τούτοις) και το μηδέν αν αναγράφεται στρογγύλον, ως άφωνον στόμα ανοικτόν, πάντα, μα πάντα, η σιγή και τα ανεκτέλεστα όλα, θα περιέχουν εν μέγα μυστήριον γιομάτο, ένα μυστήριον υπερπλήρες, χωρίς κενά και δίχως απουσίαν, εν μέγα μυστήριον (ως το μυστήριον της ζωής εν τάφω) —το φανερόν, το τηλαυγές, το πλήρες μυστήριον της υπάρξεως της ζωής, Άλφα-Ωμέγα.»

—Ανδρέας Εμπειρίκος

A. Semenov

BΡΙΣΚΕΤΑΙ ΠΑΝΤΟΥ, ΧΩΡΙΣ ΝΑ ΤΟ ΒΙΩΘΟΥΜΕ. Είναι αόρατο, ασύλληπτο και αφανές, παρότι μπορεί να παρέχει αρκετή ενέργεια ακόμη και για τη δημιουργία ενός νέου σύμπαντος. Είναι το τίποτα, από το οποίο μπορούν να γεννηθούν τα πάντα. Είναι το κενό.

Πολλοί σύγχρονοι φυσικοί θεωρούν ότι το κενό πρόκειται να αποτελέσει μείζον ζήτημα της εποικήμης του 21ου αιώνα. Εντούτοις, ώς τα τέλη του 19ου αιώνα, το κενό αποτελούσε θέμα φιλοσοφικών και μόνο συζητήσεων. Για παράδειγμα, τον 17ο αιώνα ο Καρτέσιος (1596-1650) χρησιμοποίησε μια μακρά σειρά από λογικά επιχειρήματα προκειμένου να αποδειξεί πως είναι αδύνατο να υπάρχει κενό: αν δύο σωματίδια διαχωρίζονται από το «τίποτα», τότε τίποτα δεν τα διαχωρίζει (συνεπώς, δεν μπορούν να θεωρηθούν ως ανεξάρτητα αντικείμενα). Στα πρώτα χρόνια της εποικήμης, συχνά τα λογικά επιχειρήματα συγχέονταν με τα λεκτικά.

Ωστόσο, το κενό όντως υπάρχει, και η κβαντική θεωρία το «γέμισε» με ουσία και περιεχόμενο. Το 1911, ο Max Planck (1858-1947) απέδειξε πως ένα σώμα εξακολουθεί να έχει

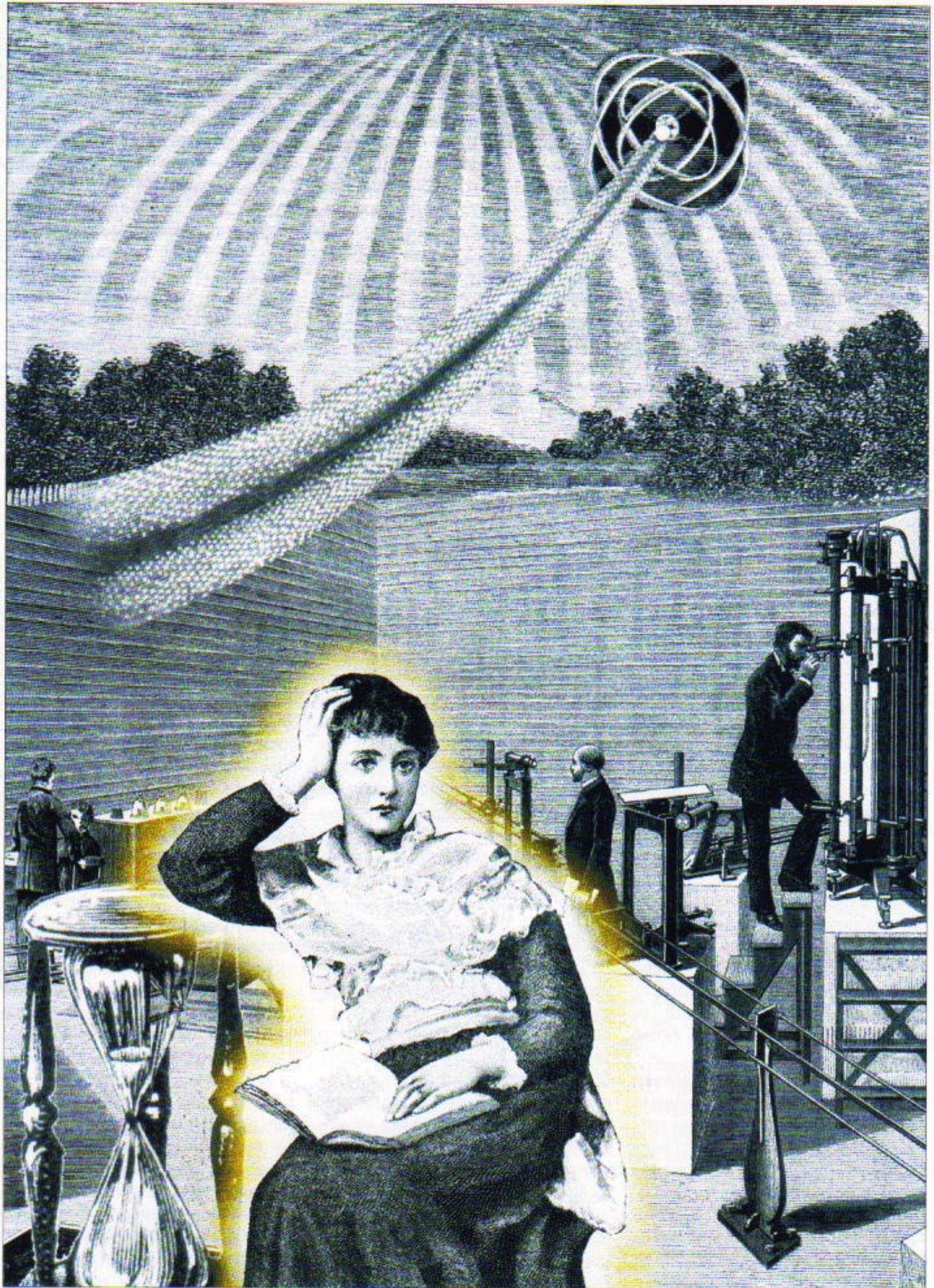
ενέργεια ακόμη και στο απόλυτο μηδέν. Από πού να προέρχεται, άραγε;

Οι φυσικοί άρχισαν να αναζητούν αυτή τη μυστηριώδη ενέργεια του κενού, και πράγματι, το 1925, ο Robert Millikan (1868-1953) ανίχνευσε για πρώτη φορά την ύπαρξή της, μελετώντας το φάσμα εκπομπής του μονοξειδίου του βορίου. Η συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπεμπόταν καθώς τα ηλεκτρόνια μεταπηδούσαν από τη μία τροχιά στην άλλη δεν συμφωνούσε με τις θεωρητικές εκτιμήσεις. Κατά τη διάρκεια της τροχιακής κίνησής του το ηλεκτρόνιο έμοιαζε να «συγκρούεται» με κάτι.

Μόλις δύο χρόνια αργότερα, ο Werner Heisenberg (1901-1976) πρότεινε την περίφημη αρχή της απροσδιοριστίας και απέδειξε ότι δύο δυνάμει σωματίδια, παρότι έχουν εξαιρετικά σύντομο χρόνο ζωής, μπορούν να εμφανιστούν και να εξαλλωθούν ακόμη και σε κατάσταση απόλυτου κενού. Οι ενέργειακές διακυμάνσεις παρουσιάζονται σε οποιοδήποτε σύστημα, αλλά όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργειακή παραβίαση τόσο συντομότερη είναι η χρονική της διάρκεια. Σε περισσότερο μαθηματική γλώσσα, το γινόμε-

νο της απροσδιοριστίας στην ενέργεια επί την απροσδιοριστία στη χρονική διάρκειά της (δηλαδή το γινόμενο του ενεργειακού «αναβρασμού» επί το χρόνο ζωής του) είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη σταθερά του Planck: $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$. Επομένως, η τροχιακή κίνηση των ηλεκτρονίων εμποδίζεται από τα ζεύγη των δυνάμει σωματιδίων.

Οι διακυμάνσεις κενού φανερώνουν την ύπαρξη τους και στον στοχαστικό θόρυβο των ηλεκτρονικών συσκευών. Επιβάλλουν περιορισμούς στην απολαβή των ενισχυτών ραδιοσυχνοτήτων. Ακόμη και οι διαμοριακές δυνάμεις van den Waals προέρχονται από τις διακυμάνσεις κενού της ενέργειας των μορίων. Η ενέργεια που «κρύβεται» μέσα στο κενό απαγορεύει την στερεοποίηση του υγρού ηλίου ακόμη και σε εξαιρετικά χαμηλή θερμοκρασία. Στην ίδια ενέργεια οφείλεται η εκπομπή φωτός κατά την εκκένωση σε έναν λαμπτήρα φθορισμού υδραργύρου: Όταν ένα άτομο υδραργύρου διεγείρεται από την ηλεκτρική εκκένωση, οι διακυμάνσεις κενού το αναγκάζουν να εποτρέψει από τη διεγέρμενη στη θεμελιώδη κατάσταση. Έτσι, κάθε φορά που ανάβετε το λα-



μπτήρα, θυμηθείτε ότι δίνετε το έναυσμα για να ξεκινήσει η ίδια διαδικασία από την οποία κάποτε δημιουργήθηκε το Σύμπαν!

Γέννηση από το τίποτα

Το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης αντιπροσωπεύει τη θριαμβεύτρια θεωρία της αστρονομίας των τελευταίων δεκαετιών. Σύμφωνα με αυτή, το Σύμπαν μας δημιουργήθηκε πριν από 20 δισεκατομμύρια χρόνια από την έκρηξη ενός υπέρπυκνου και υπέρθερμου σημείου. Ωστόσο, η λεπτομερής μελέτη των συμπερασμάτων και των προβλέψεων της εν λόγω θεωρίας αποκαλύπτει πλήθος προβλημάτων τα οποία η ίδια θεωρία αδυνατεί να τα εξηγήσει. Ο Allan Guth, του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Μασαχουσέτης, και ο Andrei Linde, τότε ερευνητής του Ινστιτούτου Lebedev της Μόσχας και νυν καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ, πρότειναν μια τροποποιημένη θεωρία —αυτή του πληθωριστικού Σύμπαντος.

Σύμφωνα με το νέο σενάριο, τις πρώτες στιγμές μετά τη γέννηση του Σύμπαντος το κενό ήταν ασταθές και είχε πολύ μεγάλη εσωτερική ενέργεια. Η κατάστασή του μπορεί να συγκριθεί με εκείνη μιας σφαίρας στην κορυφή μιας κυρτής επιφάνειας —και οι δύο καταστάσεις είναι εξαιρετικά ασταθείς. Έτσι, το κενό, σαν τη σφαίρα που κυλά από την κορυφή προκειμένου να βρεθεί στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας, κατέληξε να απελευθέρωσει τεράστιες ποσότητες ενέργειας. Σε εξαιρετικά μικρό χρονικό διάστημα, το Σύμπαν υπέστη τόσες φορές πληθωριστική διαστολή ώστε ο συγκεκριμένος αριθμός εκφράζεται από τη μονάδα ακολουθούμενη από εκατό μηδενικά!

Αυτή η πληθωριστική διαστολή είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός εξαιρετικά ομογενούς και επιπέδου Σύμπαντος. Έτσι, με τη βοήθεια του πληθωριστικού σεναρίου απαντήθηκαν πολλά από τα ερωτήματα της υπόθεσης της Μεγάλης Έκρηξης. Για παράδειγμα, οι επιστήμονες ουδέποτε κατόρθωσαν να ανιχνεύσουν μαγνητικά μονόπολα

—δηλαδή σωματίδια που διαθέτουν έναν μόνο μαγνητικό πόλο.¹ Αυτό είναι παράξενο, διότι η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης προβλέπει ότι θα έπρεπε να είχε δημιουργηθεί τεράστιο πλήθος από τέτοια. Τι απέγιναν, λοιπόν; Το πληθωριστικό μοντέλο δίνει την απάντηση: η διαστολή είχε ως αποτέλεσμα να διασκορπιστούν όλα τα μονόπολα σε απίστευτα μεγάλες αποστάσεις, έτσι ώστε ελάχιστα απέμειναν στο μικροσκοπικό τμήμα του Σύμπαντος το οποίο μπορούμε να παρατηρήσουμε. Τα πάντα λοιπόν —οι κβάζαρ, οι πάλσαρ, οι πλανήτες, ακόμη και ο άνθρωπος— γεννήθηκαν από αυτό το «τίποτα», λόγω της ισοδυναμίας μεταξύ μάζας και ενέργειας, την οποία ανακάλυψε ο Αϊνστάιν.

Ωστόσο, η πλειοψηφία των κοσμολόγων θα προτιμούσε το κενό να είχε μετριάσει τη δραστηριότητά του αμέσως μετά την ολοκλήρωση του σπουδαίου επιτεύγματός του να δημιουργήσει το Σύμπαν. Στη ζωή όμως δεν έρχονται όλα όπως τα θέλουμε· έτσι, το κενό δηλώνει ακόμη και σήμερα την ύπαρξή του προκαλώντας τα επιστημονικά πνεύματα. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι η τεράστια εσωτερική ενέργεια του κενού περιπλέκει τις εξισώσεις της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, προσθέτοντας σε αυτές ορισμένους νέους όρους. Βεβαίως, όλες αυτές οι νέες θεωρίες δεν μπορούν να θεωρούνται ολοκληρωμένες. Άλλωστε, ποιος γνωρίζει την πραγματική φύση των πραγμάτων;

ΤΟ ΚΕΝΟ ΕΙΝΑΙ ΓΕΜΑΤΟ ΠΙ άδειο;

Τις τελευταίες δεκαετίες ορισμένες νέες αναφορές των αστρονόμων αναστάτωσαν κατά καιρούς την κοινότητα των φυσικών. Σύμφωνα με αυτές, το Σύμπαν μας παρουσιάζεται νεότερο από τα ίδια του τα άστρα. Οι νέες εκτιμήσεις της ηλικίας του Σύμπαντος βασίστηκαν σε μετρήσεις της σταθεράς του Hubble. Οι εσφαλμένες αναφορές, σε συνδυασμό με την απροσδιοριστία που χα-

ρακτηρίζει τις σχετικές μετρήσεις, ώθησαν τους φυσικούς να αναθεωρήσουν τα μοντέλα τους σχετικά με την εξέλιξη του Σύμπαντος.

Μια πιθανή εξήγηση της εν λόγω αντίφασης είναι ότι το κενό δεν έχει δαπανήσει όλη του την ενέργεια· αντιθέτως, συνεχίζει την «υπόγεια» και ανατρεπτική δράση του εξακολουθώντας να διαστέλλει το Σύμπαν. Αυτή η διαδικασία συμβάλλει στην αύξηση της ταχύτητας απομάκρυνσης των γαλαξιών και παραπλανά τους αστρονόμους: όσο μεγαλύτερη είναι η εν λόγω ταχύτητα τόσο λιγότερο απέχουμε από τη στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης.

Ωστόσο, το κενό μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση και ορισμένων ακόμη ζητημάτων. Η σκοτεινή ύλη αποτελεί ένα ακόμη από τα προβλήματα που απασχολούν τη σύγχρονη κοσμολογία. Η πληθωριστική διαστολή οδηγεί σε μια συγκεκριμένη πρόβλεψη σχετικά με την πυκνότητα της ύλης του Σύμπαντος, η οποία όμως υπερβαίνει την τιμή που συνεπάγεται βάσει των παρατηρησιακών δεδομένων κατά 5-10 φορές. Έχουν διατυπωθεί διάφορες υποθέσεις σχετικά με το πού θα έπρεπε να αναζητηθεί η σκοτεινή ύλη, καμία όμως δεν στάθηκε ικανή να μας βοηθήσει στον εντοπισμό της.

Σύμφωνα με τον Γεώργιο Ευσταθίου, του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης, η σκοτεινή ύλη είναι κρυμμένη ως ενέργεια του κενού. Την ίδια άποψη ασπάζεται και ο Chris Coshareck, του Πανεπιστημίου του Καϊμπριτζ, ο οποίος θεωρεί ότι η υπαρξη θαρυτικών φακών συνηγορεί υπέρ αυτής της υπόθεσης.

Ο θαρυτικός φακός είναι ένας γαλαξίας πολύ μεγάλης μάζας γύρω από τον οποίο διέρχεται το φως μακρινών αστρών προτού φτάσει στους γήινους παρατηρητές. Εξαιτίας της καμπύλωσης των φωτεινών ακτίνων, βλέπουμε πολλαπλά είδωλα του ίδιου απομακρυσμένου αντικειμένου. Μέχρι σήμερα έχουμε εντοπίσει αρκετούς υποτιθέμενους θαρυτικούς φακούς. Ο Coshareck θεωρεί ότι το πλήθος τους μας παρέχει έναν τρόπο για να εκτιμήσουμε την ενέργεια που κρύβεται στο

1. Διαβάστε το άρθρο του John Wylie με τίτλο «Μαγνητικό μονοπόλιο» στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 1995.

κενό, η οποία ενδεχομένως να ευθύνεται ακόμη και για τη μισή σκοτεινή ύλη του Σύμπαντος.

Σε αυτό το σημείο χρειάζεται να επισημάνουμε πως η συζήτησή μας αφορά κυρίως υποθέσεις παρά εξακριβωμένα γεγονότα. Δεν παρουσιάσαμε παρά τα μοντέλα που εφαρμόζουν οι θεωρητικοί, τα οποία μας φανερώνουν με ποιον τρόπο εργάζονται οι σύγχρονοι μάγοι της επιστήμης προκειμένου να φέρουν στο φως τις σωστές απαντήσεις. Ωστόσο, το κενό δεν «συγκινεί» μόνο τους αστρονόμους, διότι αυτό συνδέεται και με καθαρά «γήινα» ζητήματα.

Αδράνεια

Η αδράνεια —η ιδιότητα της ύλης να διατηρεί την κινητική της κατάσταση— αποτελεί μια από τις πλέον μυστηριώδεις εκδηλώσεις των υποθετικών ιδιοτήτων του κενού. Πρόκειται για μια ιδιότητα με την οποία είμαστε όλοι εξοικειωμένοι: ανακάλεστε την εμπειρία σας από τη σύγκρουσή σας με έναν χιονοσωρό όταν δοκιμάζατε για πρώτη φορά τις ικανότητές σας στο σκι. Η φύση της αδράνειας υπήρξε αινιγματική ακόμη και για μεγαλειώδεις επιστημονικές μορφές όπως ο Άλμπερτ Αϊνστάιν ή ο Richard Feynman. Ο Αϊνστάιν θεωρούσε πως η επιτάχυνση ενός σώματος κάπως επηρεάζει έμμεσα τα υπόλοιπα σώματα. Ωστόσο, δεν μπορούσε να εξηγήσει με ποιον ακριβώς τρόπο.

Λίγα χρόνια πριν, ο Bernard He wish, του Πανεπιστημίου του Πάλο Άλτο, και ο Shel Pythov, του Πανεπιστημίου του Τέξας, επιχείρησαν να αναβιώσουν αυτή την ιδέα του Αϊνστάιν. Υπέθεσαν ότι η αδράνεια ενός σώματος οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις του με τις διακυμάνσεις κενού. Τροποποίησαν μάλιστα τον σχετικό νόμο του Νεύτωνα αντικαθιστώντας τη μάζα με μια παράμετρο που χαρακτηρίζει την αλληλεπίδραση ενός σώματος με το κενό.

Διατυπωμένη με απλούστερους όρους, η υπόθεσή τους συνίσταται στο ότι οι διακυμάνσεις κενού δημιουργούν ένα πεδίο παρόμοιο με το μαγνητικό. Όσο περισσότερα άτομα περιέχει το σώμα τόσο ισχυρότερα

αλληλεπιδρά με αυτό το πεδίο «κενού», και έτσι τόσο δυσκολότερα επιταχύνεται.

Πρόκειται, ωστόσο, για μια ιδέα που βρίσκεται ακόμη σε πολύ πρώιμο στάδιο και η οποία, προς το παρόν, δεν τεκμηριώνεται από ακριβείς υπολογισμούς. Όλες οι υπάρχουσες εκτιμήσεις διαφέρουν σημαντικά από τα πειραματικά δεδομένα: ο συντελεστής που περιγράφει αυτή τη διαφορά είναι της τάξεως της μονάδας ακολουθούμενης από πολλές εκατοντάδες μηδενικά. Ο Steven Weinberg, κάτοχος του βραβείου Νόμπελ φυσικής, ανέφερε χαριτολογώντας ότι ο συγκεκριμένος αριθμός αποτελεί την πλέον ανακριβή πρόβλεψη που έχει διατυπωθεί ποτέ στο χώρο της φυσικής.

Μολαταύτα, οι θεμελιωτές της εν λόγω υπόθεσης δεν αποθαρρύνθηκαν. Πρότειναν μάλιστα και τρόπους για να αποσπάσουμε ενέργεια από το κενό. Παρότι το όλο θέμα θυμίζει έργα επιστημονικής φαντασίας, ο Hewish μάς υπενθυμίζει πως μόλις πριν από εκατό χρόνια ουδείς φανταζόταν ότι θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε αεροπλάνα, συσκευές ραδιοφώνου και τηλεόρασης, πόσο δε μάλλον ατομικές βόμβες.

Μια λιμρική παρέκβαση

Το κενό είναι κάτι το εξαιρετικά αινιγματικό. Πολλά εξέχοντα πνεύματα έχουν διατυπώσει υποθέσεις για τη φύση του —από τον Αριστοτέλη έως τον Feynman. Η ρήση «η φύση αποστρέφεται το κενό» υποδεικνύει ότι το κενό είναι μια έννοια τόσο αφηρημένη και εξωπραγματική, ώστε να καθιστάται εκ των προτέρων βεβαία η αποτυχία κάθε επιστημονικής απόπειρας μελέτης της. Ωστόσο, οι σύγχρονοι θεωρητικοί φυσικοί δεν μπορούν να το παραβλέψουν. Έννοιες όπως «κατάσταση του κενού» και «ενέργεια του κενού» χρησιμοποιούνται σχεδόν σε κάθε φυσικό μοντέλο του μικροκόσμου. Φαίνεται πως μέχρι σήμερα οι επιστήμονες έχουν περιφρονήσει τον εξαιρετικά γενικευμένο χαρακτήρα του ζητήματος του κενού. Το να σπαταλά κανείς το χρόνο του ασχολούμενος με το κενό θεωρού-

νταν ως ένα είδος «επιστημονικής ιεροσυλίας».

Το ζήτημα του κενού το έχουν πραγματευθεί με κάθε λεπτομέρεια οι συγγραφείς μυθιστορημάτων επιστημονικής φαντασίας. Ακόμη και γι' αυτούς, όμως, η υπόθεση πως οι ήρωές τους θα μπορούσαν να αντλήσουν ενέργεια από το «τίποτα» παραήταν εξωπραγματική. Την ενέργεια την προσέφεραν άλλες απροσδόκητες πηγές: ο χρόνος, το μέλλον ή ο υπερχώρος. Τιως όμως τελικά αποδειχθεί ότι το κενό μπορεί πράγματι να αποτελέσει μια αναπάντεχη και ανεξάντλητη πηγή ενέργειας.

Θεωρήστε ένα κοινωνικό φαινόμενο το οποίο ελάχιστα σχετίζεται με την επιστήμη υπό την κλασική έννοια του όρου: η ολοένα αυξανόμενη δραστηριότητα των «ειδικών» επί της εξωαισθητήριας αντίληψης και άλλων αποκρυφιστικών φαινομένων όπως η διηπειρωτική μεταβίβαση πληροφοριών χωρίς τη βοήθεια ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, η άμεση μεταβίβαση σκέψης ή η διαγνωστική «αστρικών σωμάτων». Για να πούμε την αλήθεια, είναι απορίας άξιον το πώς άνθρωποι που υποτίθεται ότι διαθέτουν τέτοιες «υπερφυσικές» ικανότητες δεν χρησιμοποιούν τις ιδέες του κενού και των διακυμάνσεών του. Καμιά φορά χρειάζεται να λαμβάνουμε υπόψη μας ακόμη και τις ποιο «τρελές» υπόθεσεις. Θα μπορούσε, άραγε, να συνδέονται με το κενό όλα αυτά τα αστρικά πεδία και οι ροές ενέργειας; Ασφαλώς μια τέτοια μελέτη θα έπρεπε να έχει επιστημονικό χαρακτήρα και να είναι απαλλαγμένη από μυστικιστικές ασυναρτησίες. Ωστόσο, οι συγκεκριμένες ιδέες δεν πρέπει να παραμερίζονται χωρίς δεύτερη σκέψη.

Η διαδεδομένη αντίληψη για το κενό θα μπορούσε να περιγραφεί με τα λόγια του βασιλιά Ληρ: «Δεν θα βγει τίποτα από το τίποτα.» Άλλα η ερμηνεία του κενού ως «τίποτα» το μόνο που μπορεί να σημαίνει είναι ότι δεν γνωρίζουμε τίποτα γι' αυτό. Ας μην ξεχνάμε, όμως, ότι μέχρι πρόσφατα αγνοούσαμε τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία και τις ακτίνες X,

που αποτελούσαν έννοιες εξίσου αδιανόητες. Τα πάντα στον κόσμο μας προκύπτουν από την αλληλεπίδραση των σωματιδίων με τα πεδία. Κατά την κοινή αντίληψη, το κενό εκφράζει την απουσία ύπαρξης. Από την άλλη, όμως, δεν αποκλείεται και να πρόκειται για μια άλλη μορφή ύπαρξης.

Τι μπορούμε να «αποκομίσουμε» από το κενό;

Η ιδέα ότι το κενό μπορεί να έχει κάποια πρακτική χρησιμότητα δεν είναι και τόσο σύγχρονη. Το 1948, ο ολλανδός επιστήμονας Hendrik Casimir επέδειξε ένα πείραμα κατά το οποίο δύο μεταλλικές πλάκες ελάχιστα διαχωρισμένες έλκονται μεταξύ τους. Αυτή η έλξη οφείλεται στις διακυμάνσεις κενού, οι οποίες «σπρώχνουν» τις πλάκες τη μία κοντά στην άλλη. Πιο συγκεκριμένα, στο χώρο μεταξύ των πλακών υπάρχουν ελαφρώς λιγότερα δυνάμει σωματίδια, με αποτέλεσμα στην εσωτερική επιφάνειά τους να προσκρούουν λιγότερα σωματίδια απ' όσα στην εξωτερική. Ωστόσο, η προβλεπόμενη τιμή της πίεσης που αναπτύσσεται είναι εξαιρετικά μικρή: μόλις εκατό εκατομμυριοστά της ατμόσφαιρας όταν τις πλάκες τις χωρίζει απόσταση ενός εκατομμυριοστού του μέτρου (1 μm). Εν προκειμένω, βέβαια, το μείζον ζήτημα δεν είναι τόσο η τιμή όσο η θεμελιώδης αρχή που εξηγεί το φαινόμενο. Εάν πάρουμε δύο εξαιρετικά καλοστιλβωμένες μεταλλικές πλάκες εμβαδού 1 m², τις τοποθετήσουμε σε απόσταση 1 μm τη μία από την άλλη και τις αφήσουμε ελεύθερες, οι ελεκτικές δυνάμεις θα παραγάγουν ισχύ της τάξεως του ενός εκατομμυριοστού του Watt (1 μW). Ίσως αυτή η τιμή να μην μπορεί να χαρακτηριστεί σημαντική, ποιος μπορεί όμως να το πει με σιγουριά;

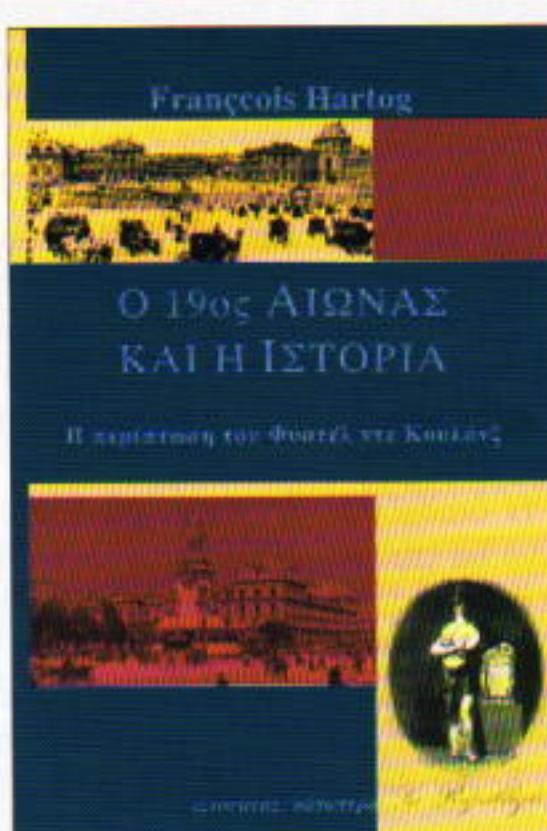
Η πείρα που έχω αποκτήσει λόγω της μακρόχρονης

ενασχόλησής μου με την επιστήμη, με κάνει να αντιμετωπίζω συνήθως τέτοια εξεζητημένα ερευνητικά προγράμματα με μια δόση σκεπτικισμού. Ωστόσο, η επιστημονική μου θητεία πλησιάζει στο τέλος της, και ο σκεπτικισμός μου πηγάζει από αντιλήψεις οι οποίες ανήκουν στον 20ό αιώνα. Ο επόμενος αιώνας, όμως, βρίσκεται προ των πυλών. Προκειμένου να αναζωογονηθεί το αίσθημα εμπιστοσύνης του κόσμου απέναντι στην επιστήμη και να υπάρξει επιστημονική άνθιση, χρειάζεται μια ανακάλυψη που να είναι αδύνατη για όσους σπεύδουν να εκφράσουν το σκεπτικισμό τους με χαμόγελα. Ας ελπίσουμε ότι όποιος θα πραγματοποιήσει πρώτος αυτό το βήμα δεν θα εμπλακεί σε ασυναρτησίες ψευδοεπιστημονικού χαρακτήρα, αλλά θα ανοίξει νέους δρόμους, αντλώντας ότι καλύτερο έχει να επιδειξει ο αιώνας που φεύγει.

Τα ζητήματα, λοιπόν, για τα οποία φαίνεται να διαγράφεται κάποια προοπτική αποφασιστικής προόδου μέσα από τη μελέτη του κενού είναι η δημιουργία του Σύμπαντος, η φύση της αδράνειας και οι ανεξάντλητες πηγές ενέργειας. Πολλά πράγματα μένουν να αποσαφηνιστούν ακόμη, ενώ οι εκτιμήσεις δεν έχουν υποκαταστήσει τις υποθέσεις. Ωστόσο, ένα είναι βέβαιο: δεν υπάρχει καιρός για χάσιμο. Ο αιώνας του κενού πλησιάζει!

Διαβάστε ακόμη...

- W. Hiscock, «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες», Μάιος / Ιούνιος 1995.
- G. Myakishev, «Το “πλέον αδρανειακό” σύστημα αναφοράς», Μάιος / Ιούνιος 1995.
- S. Silich, «Ένα άστρο γεννιέται», Ιανουάριος / Φεβρουάριος 1998.
- I. Novikov, «Το θερμοδυναμικό Σύμπαν», Μάιος / Ιούνιος 1998.



312 σελ., 25 x 17 εκ., 7.000 δρ.

François Hartog

Ο 19ΟΣ ΑΙΩΝΑΣ ΚΑΙ Η ΙΣΤΟΡΙΑ

Το βιβλίο του γάλλου πανεπιστημιακού François Hartog κρύβει απρόσμενες εκπλήξεις για τον έλληνα αναγνώστη (ιστορικό, διανοούμενο, πολιτικό, φιλαναγνώστη με ιστορικά ενδιαφέροντα).

Αρχικά αναλύει τη σκέψη του μεγάλου γάλλου ιστορικού Φυστέλ ντε Κουλάνς και δίνει σημαντικές και διαφωτιστικές πληροφορίες για το βιβλίο του Η αρχαία πόλις, βιβλίο-σταθμό για την εξέλιξη της πόλης ανά τους αιώνες. Για τους Έλληνες το έργο αυτό άσκησε ιδεολογικές και επιστημονικές επιδράσεις και συνδέεται με την αναγέννηση του Ελληνισμού και της ελληνικής ιστοριογραφίας κατά τον 19ο αιώνα, χάρη στη μετάφραση που του έγινε από τον Τιμολέοντα Φιλήμονα.

Ωστόσο, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι θέσεις του Κουλάνς για την επιστήμη της Ιστορίας, την ιστορική μέθοδο, την έννοια της εθνικής ιστορίας, αλλά και γενικότερα για την παρουσίαση των τάσεων και των ρευμάτων που επικράτησαν στη γαλλική ιστοριογραφία. Και τούτο διύτι δόλα αυτά επέδρασαν και σε μεγάλο βαθμό διαμόρφωσαν την ελληνική ιστορική σκέψη και επιστήμη στα τέλη του 19ου αιώνα και τις αρχές του 20ού.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Για να περνά η ώρα

Σ161

Πρωτάθλημα σκακιού. Η Τερέζα, ο Μάνθος και ο Αλέξης διεξήγαγαν ένα πρωτάθλημα σκακιού με τον εξής τρόπο: Δύο τους έπαιζαν μία παρτίδα, ο νικητής έπαιζε με τον τρίτο, και ούτω καθεξής. (Αν το παιχνίδι τελείωνε ισόπαλο, θεωρούσαν ηττημένο αυτόν που είχε τα λευκά κομμάτια.) Στο τέλος του πρωταθλήματος, η Τερέζα είχε πάξει σε 15 παρτίδες, ο Μάνθος σε 9 και ο Αλέξης σε 14. Ποιοι ήταν οι αντίπαλοι της δέκατης παρτίδας;



Σ162

Σ162

Ένθεση τριγώνων. Τα δύο σκέλη ενός ισοσκελούς τριγώνου ισούνται με τα δύο σκέλη ενός άλλου ισοσκελούς τριγώνου. Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε το ένα τρίγωνο εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του άλλου;



Σ163

Αγωνιστική μύγα. Δύο ποδηλάτες, η Καίτη και ο Κλεάνθης, αρχίζουν ταυτόχρονα να κατευθύνονται ο ένας προς τον άλλο, ξεκινώντας από δύο πόλεις που απέχουν 40 km. Ο Κλεάνθης ποδηλατεί σταθερά με 23 km/h και η Καίτη με 17 km/h. Πριν την εκκίνηση, μια μύγα στάθηκε στη μύτη του Κλεάνθη. Μόλις ξεκίνησε, άρχισε και αυτή να πετά προς την κατεύθυνση της Καίτης με σταθερή ταχύτητα 40 km/h. Μόλις έφτασε την Καίτη, ανέστρεψε ακαριαία τη φορά της κίνησής της και άρχισε να πετά προς τον Κλεάνθη με ταχύτητα 30 km/h (ο άνεμος φυσούσε προς την κατεύθυνση της Καίτης). Μόλις έφτασε τον Κλεάνθη, ανέστρεψε πάλι τη φορά κίνησής της, κ.ο.κ. Βρείτε τη συνολική απόσταση που διήνυσε η μύγα μέχρι τη στιγμή που οι δύο ποδηλάτες συναντήθηκαν.



Σ165

Ηλεκτρισμένη σφαίρα. Συνδέουμε αγώγιμα καλώδια σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία μιας ομογενούς μεταλλικής σφαίρας. Σε ποια εγκάρσια τομή της σφαίρας το ηλεκτρικό ρεύμα παράγει την περισσότερη θερμότητα;

Σ164

Άδυσώπητα γρανάζια. Πέντε γρανάζια διευθετημένα όπως στην εικόνα δεν μπορούν να περιστραφούν. Είναι δυνατόν να διευθετήσουμε εκατόν ένα γρανάζια έτσι ώστε καθένα από αυτά να συμπλέκεται με δύο γειτονικά του και όταν περιστρέφεται ένα να περιστρέφονται και τα υπόλοιπα εκατό; (Οι άξονες των διαδοχικών γραναζιών δεν είναι υποχρεωτικά παράλληλοι.)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

2-αδικοί αριθμοί

Γνωριμία με τις ιδέες του Hensel

B. Becker, S.Vostokov και Y. Ionin

AΝ ΣΑΣ ΖΗΤΗΘΕΙ ΝΑ ΟΡΙΣΕΤΕ ΤΗΝ «ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ δύο ρητών αριθμών», πιθανότατα θα απαντήσετε ότι είναι η απόλυτη τιμή τις διαφοράς τους. Αυτή η απάντηση είναι απόλυτα λογική: ικανοποιεί όλα τα αξιώματα της απόστασης. Όμως, αποδεικνύεται ότι είναι δυνατόν να οριστεί και άλλη απόσταση μεταξύ ρητών αριθμών, η οποία επίσης ικανοποιεί όλα τα αξιώματα της απόστασης. Αυτό πέτυχε ο γερμανός μαθηματικός Kurt Hensel (1861-1941), ο οποίος επινόησε μια ολόκληρη κλάση τέτοιων αποστάσεων. Σε αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε μία από αυτές.

Οι μελέτες του Hensel αποδείχθηκαν σημαντικές για την άλγεβρα και τα μαθηματικά γενικότερα. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόσταση του Hensel για να λύσουμε δύο προβλήματα που σε πρώτη ματιά δεν φαίνεται να σχετίζονται με αποστάσεις.

2-αδική απόσταση

Εστω a και b ρητοί αριθμοί. Αν $a \neq b$, παριστάνουμε τη διαφορά $a - b$ ως $a - b = 2^k(m/n)$, όπου οι m, n είναι περιττοί ακέραιοι και k ένας ακέραιος (θετικός, αρνητικός ή μηδέν). Η 2-αδική απόσταση μεταξύ των αριθμών a και b ($a \neq b$) ορίζεται ως ο αριθμός $\rho(a, b) = 1/2^k$. Αν $a = b$, θέτουμε $\rho(a, b) = 0$.

Ως συνάρτηση απόστασης, ή μετρική, ορίζεται συνήθως μια συνάρτηση που ικανοποιεί τα επόμενα αξιώματα:

A1. $\rho(a, b) > 0$, αν $a \neq b$, και $\rho(a, b) = 0$, αν $a = b$.

A2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$.

A3. $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

Είναι προφανές ότι οι ιδιότητες A1 και A2 αληθεύουν για τη 2-αδική απόσταση. Η ιδιότητα A3 είναι επίσης προφανής στην περίπτωση που $a = b$ ή $b = c$ ή $c = a$.

Ας αποδείξουμε την ιδιότητα A3 για την περίπτωση τριών διαφορετικών ρητών a, b και c . Εστω $a - b = 2^{k_1}(m_1/n_1)$, $b - c = 2^{k_2}(m_2/n_2)$ και $a - c = 2^{k_3}(m_3/n_3)$, όπου όλα τα m_i και n_i είναι περιττοί ακέραιοι. Αφού

$a - c = (a - b) + (b - c)$, το k_3 είναι τουλάχιστον ίσο με το μικρότερο των k_1 και k_2 . Επομένως, το $1/2^{k_3}$ δεν υπερβαίνει τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς $1/2^{k_1}$ και $1/2^{k_2}$, οπότε $1/2^{k_3} < 1/2^{k_1} + 1/2^{k_2}$.

Διαπιστώνουμε επομένως ότι όλα τα αξιώματα ισχύουν, και η ρ μπορεί να κληθεί απόσταση.

Ποια ποσότητα μετρά αυτή η απόσταση; Αποδεικνύεται ότι μετρά (σε γενικές γραμμές) το βαθμό διαιρετότητας ενός ρητού αριθμού διά του 2. Όσο «καλύτερα» διαιρεί το 2 έναν αριθμό (για παράδειγμα, όσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη του 2 που τον διαιρεί αν είναι ακέραιος) τόσο πλησιέστερα είναι στο μηδέν. Για παράδειγμα, το 8 είναι πλησιέστερα στο 0 απ' ό,τι το 1/2, το 16 είναι πλησιέστερα στο μηδέν απ' ό,τι το 8, το 480 είναι πλησιέστερα στο 0 απ' ό,τι το 16 και το 384 είναι πλησιέστερα στο μηδέν απ' ό,τι το 480.

Στην πραγματικότητα έχουμε αποδείξει ότι η 2-αδική απόσταση έχει την ιδιότητα A3', που είναι ισχυρότερη της A3:

A3'. Η απόσταση $\rho(a, c)$ είναι μικρότερη ή ίση από τη μεγαλύτερη από τις αποστάσεις $\rho(a, b)$ ή $\rho(b, c)$.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι αν $\rho(a, b) \neq \rho(b, c)$, τότε η $\rho(a, c)$ ισούται με τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς $\rho(a, b)$ και $\rho(b, c)$, και, αν $\rho(a, b) = \rho(b, c) \neq 0$, τότε $\rho(a, c) < \rho(a, b)$.

Η ιδιότητα A3' έχει ενδιαφέρουσες συνέπειες. Ονομάζουμε 2-αδικό κύκλο ακτίνας r και κέντρου a το σύνολο όλων των ρητών αριθμών x , τέτοιων ώστε $\rho(a, x) < r$ (όπου a είναι ρητός αριθμός και r θετικός πραγματικός αριθμός).

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι αν η τομή δύο 2-αδικών κύκλων δεν είναι κενή, τότε ο ένας από αυτούς περιέχει τον άλλο.

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι ο 2-αδικός κύκλος ακτίνας r περιέχει ένα άπειρο πλήθος 2-αδικών κύκλων ακτίνας r που ανά δύο δεν τέμνονται.

Κατ' αναλογία με τη συνήθη απόλυτη τιμή (που με-

ρικές φορές καλείται μέτρο), ορίζουμε ως 2-αδικό μέτρο $\|a\|$ ενός αριθμού a την 2-αδική απόσταση αυτού του αριθμού από το μηδέν: αν $a = 2^k(m/n)$, όπου τα m και n είναι περιττοί, τότε $\|a\| = \rho(0, a) = (1/2)^k$. Οι επόμενες ιδιότητες του 2-αδικού μέτρου αποδεικνύονται εύκολα:

M1. $\|a\| > 0$ αν $a \neq 0$, και $\|0\| = 0$.

M2. Αν $\|a\| > \|b\|$, τότε $\|a + b\| = \|a\|$. Αν $\|a\| = \|b\| \neq 0$, τότε $\|a + b\| < \|a\|$. (Επομένως, σε κάθε περίπτωση, $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.)

M3. $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$.

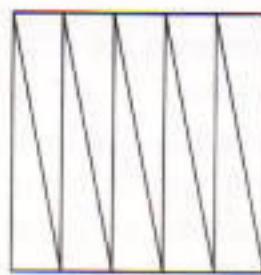
Άσκηση 4. Βάσει των ιδιοτήτων M1-M3 να συναγάγετε τις επόμενες ιδιότητες του 2-αδικού μέτρου:

(α) $\|-a\| = \|a\|$, (β) αν $\|a\| \neq \|b\|$, τότε $\|a - b\| = \|a + b\|$.

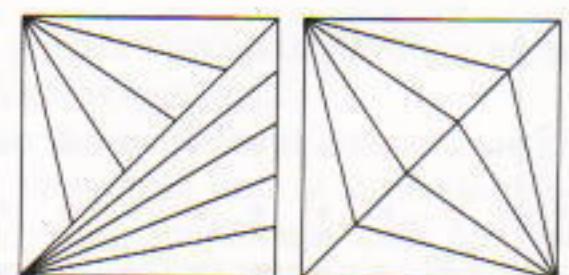
Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι αν $\|1 - x\| < 1$ και $\|1 - y\| < 1$, τότε $\|1 - xy\| < 1$.

Ανάπτυση ενός τετραγώνου

Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται ένα τετράγωνο που διαμερίζεται σε ίσα τρίγωνα. Τα τετράγωνα του Σχήματος 2 έχουν διαμερισθεί σε τρίγωνα ίσου εμβαδού. Σε κάθε



Σχήμα 1

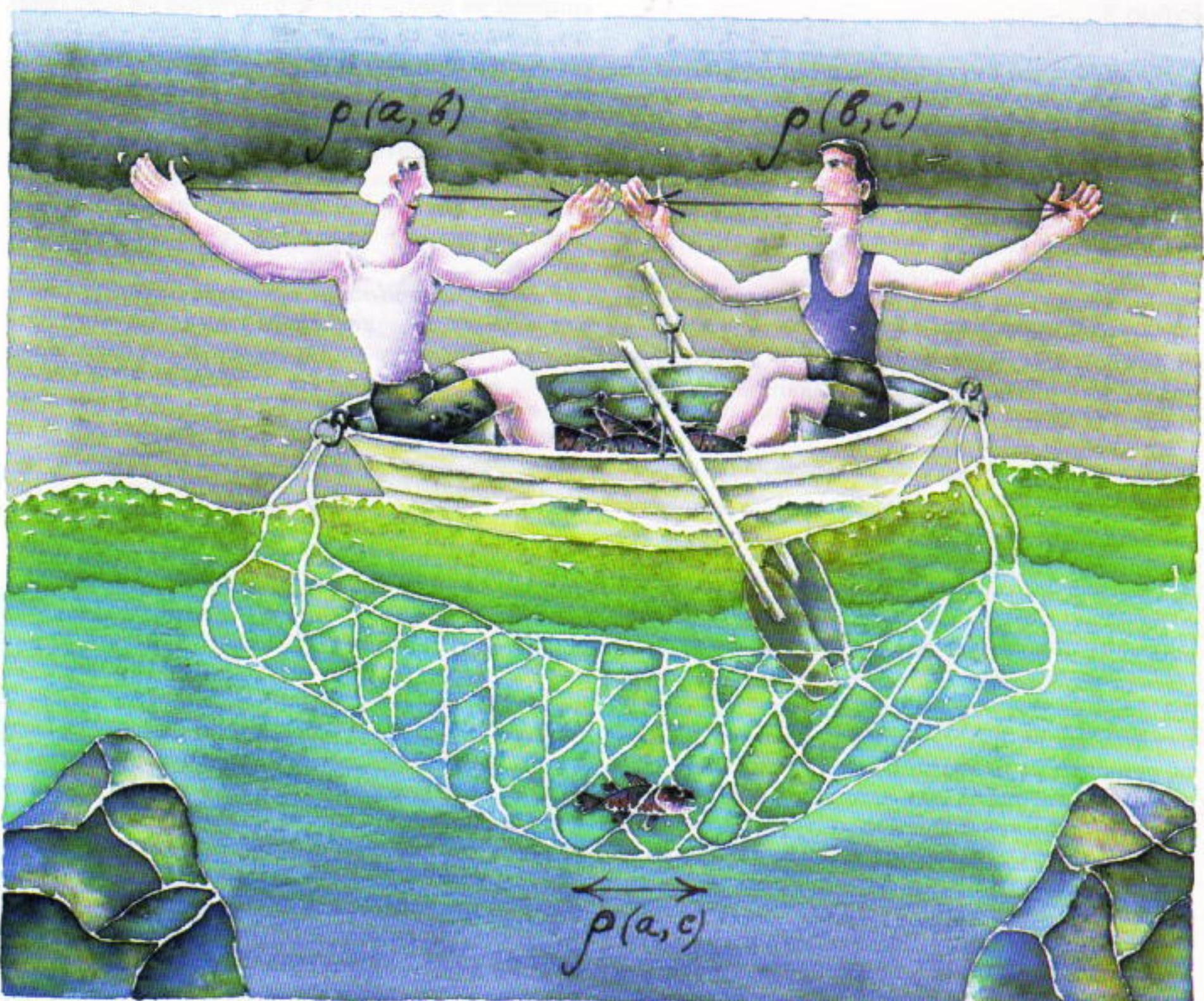


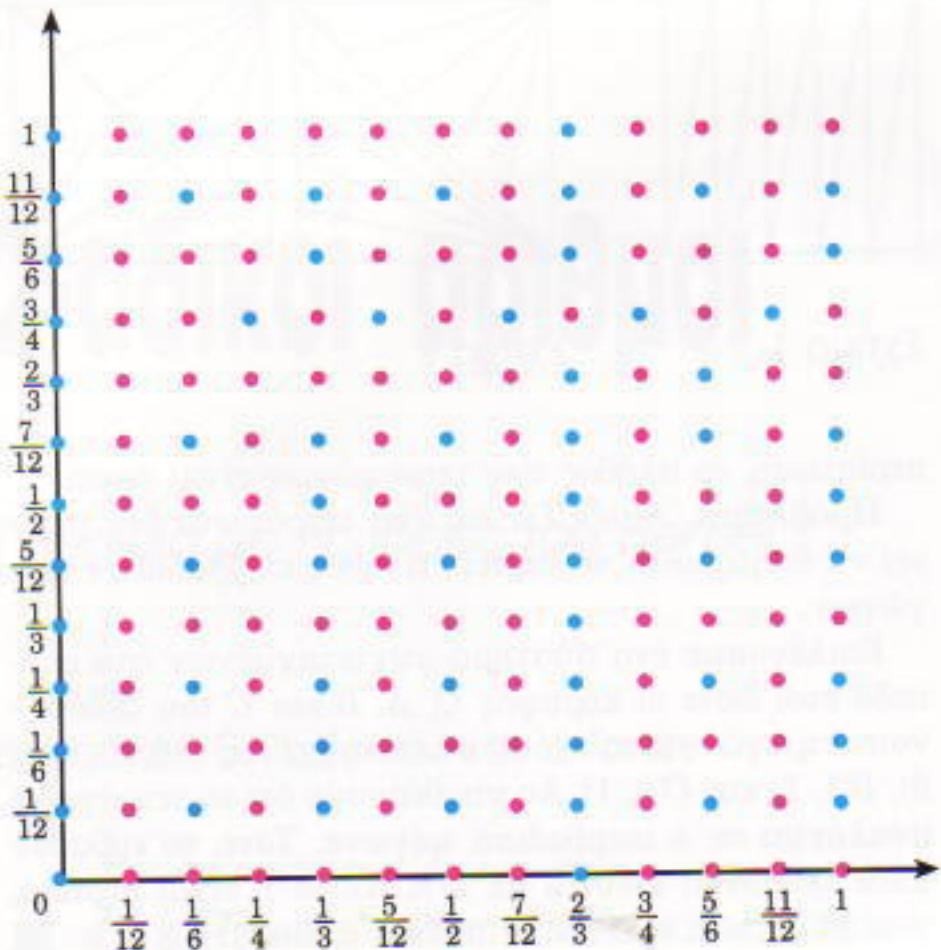
Σχήμα 2

περίπτωση, το πλήθος των τετραγώνων είναι άριτο.

Πρόβλημα. Αποδείξτε ότι ένα τετράγωνο δεν μπορεί να διαμερισθεί σε περιττό πλήθος ισεμβαδικών τριγώνων.

Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο έτσι ώστε οι κορυφές O , A , B και C του δεδομένου τετραγώνου να έχουν συντεταγμένες $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ και $C(0, 1)$. Ας υποθέσουμε ότι το τετράγωνο αναλύεται σε n ισεμβαδικά τρίγωνα. Τότε, το εμβαδόν κάθε τριγώνου ισούται με $1/n$. Αν το n είναι περιττό, τότε $1/n = 1$, ενώ αν το n είναι άριτο, $1/n \geq 2$.





Σχήμα 3

Εξετάζουμε μια συγκεκριμένη περίπτωση. Έστω ότι οι κορυφές όλων των τριγώνων της διαμέρισης είναι σημεία με ρητές συντεταγμένες. Τότε, μπορούμε να χρωματίσουμε κάθε κορυφή (x, y) πράσινη, κόκκινη ή μπλε, σύμφωνα με τον εξής κανόνα: αν $\|x\| < 1$ και $\|y\| < 1$, το σημείο είναι πράσινο. Αν $\|x\| > \|y\|$ και $\|x\| \geq 1$, το σημείο είναι κόκκινο, και αν $\|x\| < \|y\|$ και $\|y\| \geq 1$, το σημείο είναι μπλε (Σχήμα 3). Θα υποθέσουμε ότι έχουμε χρωματίσει όλα τα ρητά σημεία του επιπέδου και όχι μόνο τις κορυφές.

Άσκηση 6. (α) Αποδείξτε ότι αν το P είναι πράσινο σημείο, τότε μια παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα **PO** διατηρεί το χρώμα των σημείων.

(β) Αποδείξτε ότι καμία ευθεία δεν είναι δυνατόν να περιέχει σημεία και των τριών χρωμάτων.

Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές ενός από τα τρίγωνα της διαμέρισης έχουν τρία διαφορετικά χρώματα (θα αποδείξουμε στο Παράρτημα ότι υπάρχει τέτοιο τρίγωνο). Έστω K η πράσινη κορυφή του τριγώνου.

Βάσει της Άσκησης 6, από την παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα **KO** προκύπτει ένα άλλο τρίγωνο με κορυφές τριών διαφορετικών χρωμάτων. Συμβολίζουμε με $L_1(x_1, y_1)$ την κόκκινη κορυφή αυτού του τριγώνου και με $L_2(x_2, y_2)$ την μπλε (η πράσινη κορυφή συμπίπτει με το σημείο O). Το τρίγωνο OL_1L_2 προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση ενός τριγώνου της διαμέρισης και, επομένως, το εμβαδόν του είναι $1/n$. Από την άλλη πλευρά, το εμβαδόν του ισούται με $(1/2)|x_1y_2 - x_2y_1|$. (Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν την τελευταία ισότητα.)

Άρα καταλήγουμε στην ισότητα $1/n = |x_1y_2 - x_2y_1|/2$. Μπορούμε εύκολα πλέον να αποδείξουμε την ανισότητα $\|1/n\| \geq 2$. Πράγματι, αφού το L_1 είναι κόκκινο ση-

μείο και το L_2 είναι μπλε, έχουμε ότι $\|x_1\| \geq \|y_1\|$ και $\|x_2\| < \|y_2\|$. Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη αυτές τις δύο ανισότητες προκύπτει $\|x_1\|\|y_2\| > \|x_2\|\|y_1\|$ και, επομένως, από την ιδιότητα M3, $\|x_1y_2\| > \|x_2y_1\|$. Από την ιδιότητα M3 και την Άσκηση 4β, έχουμε $\|x_1y_2 - x_2y_1\| = \|x_1y_2\|$. Επιπλέον, $\|x_1\| \geq 1$ και $\|y_2\| \geq 1$, οπότε $\|1/n\| = 2\|x_1\|\|y_2\| \geq 2$. Άρα, το n είναι άρτιο.

Για να λύσουμε το πρόβλημα στη γενική περίπτωση, αρκεί να αποδείξουμε ότι το 2-αδικό μέτρο επεκτείνεται στο σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή ότι υπάρχει μια συνάρτηση $x \rightarrow \|x\|$ που ορίζεται στο σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, ικανοποιεί τις ιδιότητες M1-M3, και στο σύνολο των ρητών αριθμών συμπίπτει με το 2-αδικό μέτρο. Μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει, αλλά η απόδειξη αυτού του γεγονότος απαιτεί εργαλεία που βρίσκονται πέρα από το όρια αυτού του άρθρου.

2-αδικό ανάπτυγμα

Είναι γνωστό ότι κάθε φυσικός αριθμός παριστάνεται ως άθροισμα δυνάμεων του 2. Για παράδειγμα, $1000 = 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$. Η 2-αδική απόσταση μας επιτρέπει να βρούμε αυτό το ανάπτυγμα ως εξής. Πρώτον, βρίσκουμε τη δύναμη του 2 που έχει την ίδια 2-αδική απόσταση από το 0 με τον αριθμό 1000. Αφού βρούμε αυτό τον αριθμό (2^3), τον αφαιρούμε από τον δεδομένο αριθμό 1000, και βρίσκουμε για τον νέο αριθμό, τον 992, τη δύναμη του 2 που έχει την ίδια 2-αδική απόσταση από το 0 (είναι ο 2^5). Στη συνέχεια, βρίσκουμε τη δύναμη του 2 που έχει την ίδια 2-αδική απόσταση από το 0 όπως ο $960 = 992 - 2^5$, και ούτω καθεξής.

Εάν χρησιμοποιήσουμε αρνητικές δυνάμεις του 2, μπορούμε να κατασκευάσουμε παρόμοια αναπτύγματα για ρητούς αριθμούς της μορφής $m/2^k$, όπου m και k είναι φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα,

$$\frac{1477}{256} = \frac{1 + 2^2 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^{10}}{2^8} \\ = 2^{-8} + 2^{-6} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^2.$$

Υπάρχουν ρητοί αριθμοί που δεν μπορούν να παρασταθούν ως άθροισμα δυνάμεων του 2. Όμως, κάθε ρητός αριθμός προσεγγίζεται από ένα τέτοιο άθροισμα με όση ακρίβεια επιθυμούμε. Πράγματι, έστω a ένας ρητός αριθμός και έστω $\|a\| = 1/2^{k_1}$. Θέτουμε $a_1 = a - 2^{k_1}$. Τότε, το a_1 βρίσκεται πλησιέστερα στο 0 από ότι το a (Άσκηση 1). Επομένως, είτε $a_1 = 0$ είτε $\|a_1\| = 1/2^{k_2}$, όπου $k_2 > k_1$. Αν θέσουμε $a_2 = a_1 - 2^{k_2}$, παίρνουμε και πάλι ότι είτε $a_2 = 0$ είτε $\|a_2\| = 1/2^{k_3}$, όπου $k_3 > k_2$, και ούτω καθεξής. Επομένως, είτε ένα συγκεκριμένο a , ισούται με μηδέν και το a είναι ένα άθροισμα δυνάμεων του 2 (δηλαδή, $a = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$) είτε όλα τα a είναι διαφορετικά του μηδενός και τα αθροίσματα $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$ προσεγγίζουν το a με όση ακρίβεια επιθυμούμε. Σε αυτή την περίπτωση μας εξυπηρετεί να θεωρήσουμε το a ίσο με το άπειρο άθροισμα $a = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n} + \dots$

Ορισμός. Έστω x_1, x_2, \dots, x_n μια ακολουθία ρητών αριθμών. Θα λέμε ότι ο αριθμός a ισούται με το άπειρο άθροισμα $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$ αν η 2-αδική απόσταση μεταξύ του a και των αθροισμάτων $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ τείνει στο μηδέν όταν το n τείνει στο άπειρο. Δηλαδή, αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a, S_n) = 0.$$

Ασκηση 7. Αποδείξτε ότι αν $|q| < 1$, τότε υπάρχει το άπειρο άθροισμα $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ και ισούται με $a/(1 - q)$.

Έχουμε αποδείξει ότι κάθε ρητός αριθμός μπορεί να παρασταθεί είτε ως ένα πεπερασμένο άθροισμα $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$ (με $k_1 < k_2 < \dots < k_n$) είτε ως ένα άπειρο άθροισμα $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}, \dots$, όπου τα k_i είναι ακέραιοι και $k_1 < k_2 < \dots$. Και στις δύο περιπτώσεις αυτή η αναπάρασταση, που ονομάζεται **2-αδικό ανάπτυγμα** του αριθμού a , μπορεί να γραφεί ως

$$e_k 2^k + e_{k+1} 2^{k+1} + \dots + e_{k+n} 2^{k+n} + \dots,$$

όπου k είναι ακέραιος, καθένας από τους αριθμούς

$$e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{k+n}, \dots$$

ισούται με 0 ή 1, και $e_k = 1$. Οι αριθμοί e_k, e_{k+1}, \dots καλούνται **2-αδικά ψηφία** του αριθμού a . Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι κάθε ρητός αριθμός έχει μοναδικό 2-αδικό ανάπτυγμα.

Ασκηση 8. Αποδείξτε ότι

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$$

και

$$1/6 = 2^{-1} + 1 + 2 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n} + \dots.$$

Από την Ασκηση 8 έχουμε ότι τα 2-αδικά ψηφία του αριθμού -1 σχηματίζουν την ακολουθία $1, 1, 1, \dots$ και τα 2-αδικά ψηφία του αριθμού $1/6$ σχηματίζουν την ακολουθία $1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$. Και οι δύο ακολουθίες είναι περιοδικές. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία των 2-αδικών ψηφίων οποιουδήποτε ρητού αριθμού είναι περιοδική. (Με την ίδια έννοια που από ένα συγκεκριμένο ψηφίο και μετά είναι περιοδικός ο δεκαδικός αριθμός που αντιπροσωπεύει έναν ρητό αριθμό.)

Για να το αποδείξουμε αυτό, θεωρούμε έναν ρητό αριθμό p/q και την ακολουθία των ακεραίων $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{p}{q} - e_k 2^k = \frac{a_1}{q} 2^{k+1},$$

$$\frac{p}{q} - (e_k 2^k + e_{k+1} 2^{k+1}) = \frac{a_2}{q} 2^{k+2}, \dots,$$

$$\frac{p}{q} - (e_k 2^k + e_{k+1} 2^{k+1} + \dots + e_{k+n-1} 2^{k+n-1}) = \frac{a_n}{q} 2^{k+n},$$

όπου $e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+n-1}, \dots$ είναι τα 2-αδικά ψηφία του

p/q (οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι οι a_1, a_2, \dots πραγματικά είναι ακέραιοι).

Τώρα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το 2-αδικό ανάπτυγμα του p/q προκύπτει από το 2-αδικό ανάπτυγμα του a_n/q αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο του τελευταίου αναπτύγματος επί 2^{k+n} και προσθέσουμε στην αρχή του αθροίσματος που προκύπτει την επόμενη παράσταση:

$$e_k 2^k + e_{k+1} 2^{k+1} + \dots + e_{k+n-1} 2^{k+n-1}.$$

Επομένως, η περιοδικότητα της ακολουθίας θα αποδειχθεί αν δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο της ακολουθίας $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ που εμφανίζεται δύο φορές. Στην πραγματικότητα, η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη και, αφού τα μέλη της είναι ακέραιοι, θα υπάρχουν αναπόφευκτα αριθμοί ισοι μεταξύ τους. Το φραγμένο της ακολουθίας προκύπτει από τις επόμενες διαδοχικές ανισότητες:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{p}{2^{k+n}} - \left(\frac{e_k}{2^k} + \frac{e_{k+1}}{2^{k+1}} + \dots + \frac{e_{k+n-1}}{2^{k+n-1}} \right) q \right| \\ &\leq \left| \frac{p}{2^{k+n}} \right| + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+n-1}} \right) |q| \leq \frac{|p|}{2^k} + |q|. \end{aligned}$$

Ασκηση 9. Με τη βοήθεια του αποτελέσματος της Ασκησης 7, αποδείξτε ότι αν $e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+n}, \dots$ είναι περιοδική ακολουθία των ψηφίων 0 και 1, τότε το άπειρο άθροισμα $e_k 2^k + e_{k+1} 2^{k+1} + \dots + e_{k+n} 2^{k+n} + \dots$ είναι το 2-αδικό ανάπτυγμα κάποιου ρητού αριθμού.

2-αδικοί αριθμοί

Εκτός από τα περιοδικά αναπτύγματα που καθορίζουν ρητούς αριθμούς μπορούμε να θεωρήσουμε μη περιοδικά αναπτύγματα και να ισχυριστούμε ότι ορίζουν μια νέα κλάση αριθμών. Αυτοί οι νέοι αριθμοί μαζί με τους ρητούς ορίζουν ένα σύνολο Q_2 , τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται **2-αδικοί αριθμοί**.

Τα στοιχεία του Q_2 μπορούν να προστεθούν και πολλαπλασιαστούν. Αυτό γίνεται ως εξής: Έστω $a = e_k 2^k + e_{k+1} 2^{k+1} + \dots$. Γράφουμε το a ως άπειρο δεκαδικό: $a = e_k \dots e_0 e_1 e_2 \dots$. Το άθροισμα (ή το γινόμενο) δύο αριθμών που είναι γραμμένοι με αυτό τον τρόπο υπολογίζεται όπως το άθροισμα (ή το γινόμενο) δύο άπειρων δεκαδικών, με τη διαφορά ότι μεταφέρουμε το κρατούμενο από τα αριστερά προς τα δεξιά (δύο παραδείγματα δίδονται στο Σχήμα 4). Δεν μπορούμε να αναπτύξουμε

$$\begin{array}{r} + 1011,0101\dots \\ 101,1010\dots \\ \hline 1110,0000\dots \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 110,11001\dots \\ 0,01101\dots \\ \hline 1,10110\dots \\ 0,11011\dots \\ 0,00110\dots \\ \hline 1,001\dots \end{array}$$

εδώ το θέμα λεπτομερέστερα και καλούμε τους αναγνώτες να αποδείξουν ότι το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του Q_2 είναι επίσης στοιχείο του Q_2 , και ότι αυτές οι πράξεις υπακούουν στον αντιμεταθετικό, τον προσεταιριστικό και τον επιμεριστικό νόμο.

Το 2-αδικό μέτρο και η 2-αδική απόσταση επεκτείνονται με φυσικό τρόπο στο Q_2 . Αν $a \in Q_2$ και $a = e_k 2^k + e_{k+1} 2^{k+1} + \dots$ (όπου $e_k \neq 0$), τότε $\|a\| = 1/2^k$. Αν $a, b \in Q_2$, τότε $\rho(a, b) = \|a - b\|$.

Ασκηση 10. Αν δίδεται το ανάπτυγμα ενός αριθμού $a \in Q_2$, κατασκευάστε το ανάπτυγμα του $-a$.

Ασκηση 11. Αποδείξτε ότι το συνηθισμένο άθροισμα δύο ρητών αριθμών και το άθροισμά τους στο Q_2 αντιστοιχούν στον ίδιο αριθμό. Αποδείξτε το ίδιο για το γινόμενο.

Ασκηση 12. Διατυπώστε έναν αλγόριθμο για εκτέλεση διαίρεσης στο Q_2 .

Γνωρίζουμε ότι υπό συγκεκριμένες συνθήκες ορίζεται το άθροισμα μιας άπειρης ακολουθίας $\{x_n\}$. Μια αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη είναι να ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Η κατάσταση είναι απλούστερη στους 2-αδικούς αριθμούς. Η συνθήκη $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ είναι αναγκαία και ικανή: αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$, τότε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$$

υπάρχει.

Ασκηση 13. Αποδείξτε ότι είναι ικανή η συνθήκη $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$.

Ασκηση 14. Αποδείξτε ότι το άθροισμα $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$ υπάρχει, και βρείτε την τιμή του.

Ασκηση 15. Αποδείξτε ότι αν $x \in Q_2$ και $\|x\| \leq 1/2$, τότε υπάρχει το άθροισμα $x/1 + x^2/2 + \dots + x^n/n$.

2-αδικοί λογάριθμοι

Θα τελειώσουμε με εξής πρόβλημα: Ο αριθμός

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n}$$

αναπαριστάνεται ως ένα ανάγωγο κλάσμα p_n/q_n .

(i) Αποδείξτε ότι το p_n είναι άρτιο.

(ii) Αποδείξτε ότι αν $n > 3$, τότε το p_n διαιρείται διά του 8.

(iii) Αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό k , μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό n τέτοιον ώστε τα $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$, να διαιρούνται διά του 2^k .

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$L(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots,$$

η οποία ορίζεται στο σύνολο των 2-αδικών αριθμών x που έχουν μέτρο το πολύ $1/2$ (βλ. Ασκηση 15). Για να αποδείξουμε το μέρος (iii) του προβλήματος αρκεί να δείξουμε ότι $L(2) = 0$. Ορίζουμε άλλη μία συνάρτηση μέσω του τύπου $\log x = -L(1-x)$. Η ισότητα $L(2) = 0$ σημαίνει ότι $\log(-1) = 0$. Η συνάρτηση \log (που ονομά-

ζεται 2-αδικός λογάριθμος) διαθέτει τη βασική ιδιότητα της λογαριθμικής συνάρτησης: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. Από την ιδιότητα αυτή έπειται άμεσα ότι $\log(-1) = 0$. Πράγματι, $\log 1 = \log(1 \cdot 1) = \log 1 + \log 1 = 2\log 1$, από όπου συνεπάγεται ότι $\log 1 = 0$. Από την άλλη, $\log 1 = \log((-1) \cdot (-1)) = \log(-1) + \log(-1) = 2\log(-1)$. Επομένως, $\log(-1) = 0$. Στο σύνολο των 2-αδικών αριθμών, ο 2-αδικός λογάριθμος παίζει τον ίδιο ρόλο με αυτόν που παίζει ο συνήθης λογάριθμος στο σύνολο των πραγματικών. Ο 2-αδικός λογάριθμος ορίζεται για x με μέτρο 1: $\|x\| = 1$, αφού αυτή ακριβώς είναι η περίπτωση που $|1 - x| \leq 1/2$. Ιδιαίτερως, ορίζεται ο $\log(-1)$.

Εκτός των λογαρίθμων υπάρχουν και άλλες αξιοσημείωτες συναρτήσεις 2-αδικής μεταβλητής. Μία είναι η εκθετική συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Ασκηση 16. Αποδείξτε ότι η εκθετική συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο των 2-αδικών αριθμών που ικανοποιούν τη συνθήκη $\|x\| \leq 1/4$.

Οι βασικές ιδιότητες της 2-αδικής εκθετικής συνάρτησης είναι όμοιες με τις ιδιότητες της συνήθους εκθετικής: $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$, $\exp(\log x) = x$ και $\log(\exp x) = x$. Αυτές οι ταυτότητες ισχύουν για εκείνες τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι αντίστοιχες συναρτήσεις.

Όπως ακριβώς ορίστηκε η 2-αδική απόσταση μπορεί να οριστεί η p -αδική απόσταση για οποιοδήποτε πρώτο αριθμό p . Αποδεικνύεται ότι όλες οι αποστάσεις που ορίζονται για τους ρητούς αριθμούς είναι ισοδύναμες είτε με τη συνήθη απόσταση είτε με μία από τις p -αδικές αποστάσεις. Αυτό όμως είναι το θέμα ενός άλλου άρθρου.

Παράρτημα

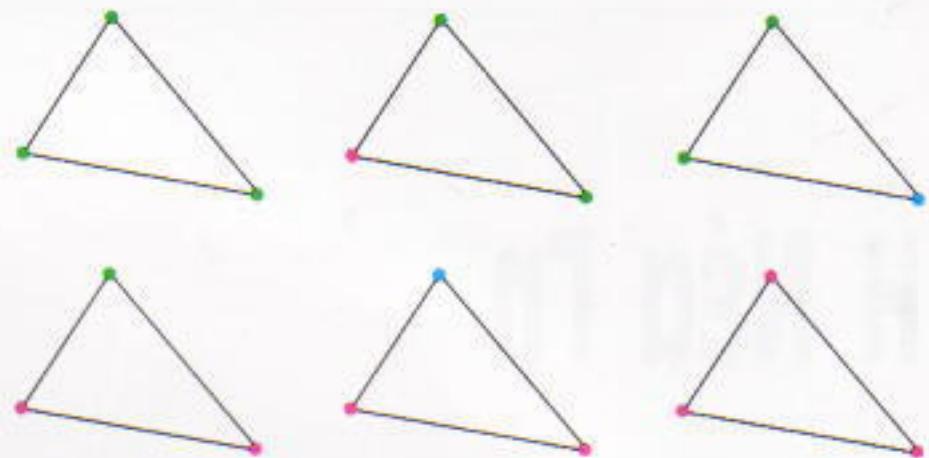
Απομένει να αποδείξουμε ότι πράγματα υπάρχει ένα τρίγωνο με κορυφές τριών διαφορετικών χρωμάτων. Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε μια γενικότερη πρόταση: Έστω ότι ένα τετράγωνο OABC διαμερίζεται σε τρίγωνα. Ας υποθέσουμε ότι κάθε κορυφή αυτών των τριγώνων χρωματίζεται πράσινη, κόκκινη και μπλε, έτσι ώστε καμία ευθεία να μην περιέχει σημεία και των τριών χρωμάτων. Έστω ότι το σημείο O είναι πράσινο, τα σημεία A και B κόκκινα και το σημείο C μπλε. Τότε μεταξύ των τριγώνων της διαμέρισης υπάρχει ένα με κορυφές τριών διαφορετικών χρωμάτων.

Απόδειξη. Θα μας διευκολύνει αν κάνουμε διάκριση μεταξύ των πλευρών των τριγώνων και των τριγώνων που αποτελούν τρίγμα των πλευρών των τριγώνων και ορίζονται από κορυφές άλλων τριγώνων οι οποίες ανήκουν σε αυτές. Αν μια πλευρά τριγώνου δεν περιέχει κορυφές άλλων τριγώνων, θεωρείται και αυτή τρίγμα.

Θα διακρίνουμε έξι τύπους τριγώνων και έξι τύπους πλευρών, ανάλογα με το χρώμα των άκρων τους: ΠΙΠ

(και τα δύο άκρα πράσινα), \overline{PK} (ένα άκρο πράσινο και το άλλο κόκκινο), και ούτω καθεξής (\overline{PM} , \overline{KK} , \overline{KM} και \overline{MM}). Θα αποδείξουμε ότι οι πλευρές ενός τριγώνου που έχει δύο κορυφές ίδιου χρώματος περιέχουν άρτιο πλήθος τμημάτων \overline{PK} . Πράγματι, αφού δεν υπάρχουν ευθείες που περιέχουν σημεία και των τριών χρωμάτων, ένα τμήμα \overline{PK} μπορεί να ανήκει μόνο σε πλευρές τύπου \overline{PP} , \overline{PK} και \overline{KK} . Οι πλευρές τύπου \overline{PP} και \overline{KK} περιέχουν άρτιο πλήθος τέτοιων τμημάτων και οι πλευρές τύπου \overline{PK} περιττό. Άρα, οι πλευρές όλων των τριγώνων που απεικονίζονται στο Σχήμα 5 περιέχουν άρτιο πλήθος τμημάτων \overline{PK} (τρίγωνα με δύο ή τρεις μπλε κορυφές δεν μπορεί να περιέχουν τέτοια τμήματα).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κανένα από τα τρίγωνα στα οποία διαμερίζεται το τετράγωνο δεν έχει κορυφές τριών διαφορετικών χρωμάτων —δηλαδή ότι κάθε τρίγωνο έχει δύο τουλάχιστον κορυφές ίδιου χρώματος. Κάθε τμήμα που ανήκει σε μία πλευρά του τετραγώνου $OABC$ ανήκει σε πλευρά ενός ακριβώς από τα τρίγωνα της διαμέρισης, και κάθε τμήμα στο εσωτερικό του τετραγώνου ανήκει σε πλευρές δύο τριγώνων. Αφού κα-



Σχήμα 5

θένα από τα τρίγωνα στα οποία διαμερίζεται το τετράγωνο έχει κορυφές δύο διαφορετικών χρωμάτων, οι πλευρές του τετραγώνου περιέχουν άρτιο πλήθος τμημάτων \overline{PK} . Από την άλλη, οι πλευρές OC και BC δεν περιέχουν τμήματα αυτού του τύπου, η πλευρά OA περιέχει περιττό πλήθος τέτοιων τμημάτων και η πλευρά AB άρτιο. Επομένως, παίρνουμε τελικά περιττό πλήθος τμημάτων, και έχουμε καταλήξει σε αντίφαση. ◻

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

ROGER PENROSE

ABNER SHIMONY NANCY CARTWRIGHT
STEPHEN HAWKING



ΤΟ ΜΕΓΑΛΟ, ΤΟ ΜΙΚΡΟ
ΚΑΙ Η ΑΝΘΡΩΠΙΝΗ ΝΟΗΣΗ

Επιμέλεια της Ελληνικής Μετάφρασης

246 σελ., 14 × 21 εκ., Εικ. Α/Μ,
Πανόδευτο, 6.400 δρχ.

Roger Penrose

Το μεγάλο, το μικρό και η ανθρώπινη νόηση

Με τη συμμετοχή των: Abner Shimony,
Nancy Cartwright και Stephen Hawking

- Το βιβλίο παρουσιάζει συνοπτικά και με υποδειγματική σαφήνεια τις πρωτότυπες και προκλητικές ιδέες του Roger Penrose —μεγάλου μαθηματικού του αιώνα μας— σχετικά με τη μεγάλης κλίμακας φυσική του σύμπαντος, το μικρόκοσμο της κβαντικής φυσικής και τη φυσική της νόησης —ιδέες που στις μέρες μας έχουν αποτελέσει αντικείμενο έντονων αντιπαραθέσεων και συζητήσεων.
- Στη συνέχεια, το βιβλίο περιλαμβάνει την κριτική που ασκούν σ' αυτές τις ιδέες τρεις διακεκριμένοι ειδικοί από διαφορετικούς χώρους —οι φιλόσοφοι της επιστήμης A. Shimony και N. Cartwright και ο θεωρητικός φυσικός και κοσμολόγος S. Hawking— καθώς και τις απαντήσεις του Penrose στις αντιρρήσεις που εκφράζουν.
- «Κάθε άνθρωπος που ενδιαφέρεται σοβαρά για τα μαθηματικά, τη φυσική και τη φιλοσοφία της νόησης θα βρει το βιβλίο αυτό εξαιρετικά ενδιαφέρον...»

—The Philosopher's Magazine

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Η Νέα Γη

Επιβάλλεται να προσεγγίζουμε τα σενάρια ανακατασκευής του πλανήτη με άκρα περισκεψή

Albert Stasenko

ΟΡΜΩΜΕΝΟΣ ΑΠΟ ΑΔΟΛΗ ΑΓΑΠΗ για την ανθρωπότητα, κάποιος πρότεινε να αυξήσουμε το εμβαδόν επιφανείας της Γης κατά παράγοντα 100, μετατρέποντάς την σε ένα τεράστιο κοίλο σώμα, έναν σφαιρικό φλοιό μικρού πάχους.

Και τι εξαίσιο εγχείρημα θα ήταν αυτό! Θα προσέφερε λύσεις σε όλες τις εδαφικές διαφορές που ταλανίζουν τη διεθνή ζωή στον πλανήτη, και θα παρείχε εκτάσεις για πολλά νέα εξοχικά και κήπους! Ένα συμπληρωματικό ωφέλημα θα ήταν ότι τα ταξίδια μέσα στον κενό φλοιό της Γης σχεδόν δεν θα απαιτούσαν δαπάνη ενέργειας, και οι άνθρωποι θα μπορούσαν να εκτελούν άλματα σε μεγάλα ύψη και μήκη λόγω της ελαττωμένης δύναμης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Νέας Γης!

Ωστόσο, κάθε νέο σχέδιο, και ιδιαίτερα ένα σχέδιο ριζικής ανακατασκευής του πλανήτη, απαιτεί ποσοτικές εκτιμήσεις τόσο των δαπανών όσο και των συνεπειών του. Ας στρωθούμε, λοιπόν, αμέσως στους υπολογισμούς.

Κατ' αρχάς, θα υπολογίσουμε το μέγεθος της Νέας Γης (με ακτίνα R και πάχος φλοιού ξ). Σύμφωνα με το σχέδιο, το εμβαδόν της επιφάνειάς της $S = 4\pi R^2$ θα υπερέβαινε κατά 100 φορές εκείνο της Παλαιάς Γης $S_0 = 4\pi R_0^2$, σχέση από την οποία λαμβάνουμε $R^2 = 100R_0^2$ και $R = 10R_0$. Αυτό σημαίνει ότι η εσωτερική ακτίνα της Νέας Γης θα ισούται με $R - \xi$.

Από την αρχή διατήρησης της μάζας παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R_0^3 &= \frac{4}{3}\pi [R^3 - (R - \xi)^3] \\ &= \frac{4}{3}\pi (R^3 - R^3 + 3R^2\xi - 3R\xi^2 + \xi^3) \\ &\equiv 4\pi R^2\xi. \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτοι όροι μέσα στην παρένθεση αλληλοαναρρούνται, ενώ αγνοούμε τους δύο τελευταίους επειδή περιέχουν αντίστοιχα το τετράγωνο και τον κύβο μιας πολύ μικρής ποσότητας —του πάχους του φλοιού. Υποθέτουμε ότι το πάχος αυτό είναι μικρό, πλην όμως δεν θα λησμονήσουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσής μας αργότερα. Υποθέσαμε ακόμη ότι η πυκνότητα της Γης είναι παντού σταθερή και ότι δεν μεταβάλλεται κατά την οικοδόμηση της Νέας Γης, πράγμα που μας επέτρεψε να τη διαγράψουμε και από τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης. Έτσι, λοιπόν, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\xi}{R} \equiv \frac{1}{3} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \frac{1}{3.000},$$

μια μάλλον μικρή τιμή. Σύμφωνα με το σχέδιό μας, ολόκληρη η μάζα της Γης πρέπει να χωρέσει μέσα σε έναν πολύ λεπτό φλοιό (με πάχος 20 km περίπου). Με άλλα λόγια, όλα τα στοιχεία αυτής της μάζας θα ισαπέ-

χουν ουσιαστικά από το κέντρο του φλοιού.

Ας αρχίσουμε με τον υπολογισμό του βαρυτικού έργου που απαιτείται για να μετακινηθεί η ύλη της Παλαιάς Γης σε απόσταση R . Εφόσον το πρόβλημα παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, ξεκινάμε τη διερεύνησή του με μια στοιχειώδη στιβάδα ακτίνας r και πάχους dr στο εσωτερικό της Παλαιάς Γης (Σχήμα 1a). Επειδή το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σ' αυτή τη στιβάδα, υποθέτουμε ότι οι εξωτερικές στιβάδες έχουν ήδη μετακινηθεί στην απαιτούμενη απόσταση. Όπως γνωρίζουμε, αυτές οι εξωτερικές στιβάδες δεν παράγουν βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό της (υπό κατασκευή) Νέας Γης (όσοι αναγνώστες δεν θεωρούν τους εαυτούς τους αρκετά εξοικειωμένους με τα πεδία και τα δυναμικά ίσως θα επιθυμούσαν να μελετήσουν τα άρθρα στα οποία παραπέμπουμε στο τέλος του παρόντος άρθρου).

Θα τεμαχίσουμε αυτή τη στιβάδα σε ακόμη στοιχειωδέστερους όγκους: σε (σχεδόν) ορθά πρίσματα ύψους dr και εμβαδού βάσης dS . Ο όγκος ενός τέτοιου πρίσματος ισούται με $\delta V = drdS$, ενώ η μάζα του με $\delta m(r) = \rho_0 \delta V = \rho_0 dr dS$. Η συγκεκριμένη μάζα, όταν τοποθετηθεί σε απόσταση r' από το κέντρο, θα έλκεται μόνον από την απομένουσα μάζα $m(r)$. Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, η δύνα-



μη που έλκει τη $\delta m(r)$ ισούται με

$$-G \frac{m(r)\delta m(r)}{r'^2}.$$

Για να μετακινήσουμε το στοιχειώδες πρίσμα κατά απειροστή απόσταση dr' , απαιτείται να παραγάγουμε το πρόσθετο έργο

$$-G \frac{m(r)\delta m(r)}{r'^2} dr'.$$

Το ολικό έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση του πρίσματος από μια θέση που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο σε μια άλλη που βρίσκεται σε απόσταση R δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_r^R Gm(r)\delta m(r) \frac{dr'}{r'^2} \\ &= Gm(r)\delta m(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).\end{aligned}$$

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε μια σημαντική ιδιότητα του βαρυτικού πεδίου. Το Σχήμα 1α δείχνει την τροχιά ενός στοιχειώδους πρίσματος ως καμπύλη που διαγράφεται όπως υποδεικνύουν τα βέλη. Είναι δυνατόν να τη σχεδιάσετε όσο καμπυλωμένη επιθυμείτε — το έργο που απαιτείται για να μεταφέρουμε ένα τέτοιο θράύσμα δεν θα μεταβληθεί, εφόσον βέβαια παραμείνουν ίδιες η αρχική και η τελική του απόσταση από το κέντρο βάρους (στην περιπτωσή μας από το κέντρο της απομένουσας μάζας $m(r)$). Για να πάρουμε το συνολικό έργο που πρέπει να παραγάγουμε για να μετακινήσουμε ολόκληρη τη στιβάδα σε απόσταση R , δεν μας μένει παρά να ολοκληρώσουμε πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας r (που αποτελεί το εσωτερικό σύνορο της στιβάδας):

$$\begin{aligned}dW &= \int_s \delta W = Gdr \rho_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) m(r) dS \\ &= Gm(r)dm(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \\ &= Gm(r)dm(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),\end{aligned}$$

όπου με $dm(r) = \rho_0 4\pi r^2 dr$ συμβολίζουμε τη μάζα της στοιχειώδους σφαιρικής στιβάδας.

Η συλλογιστική μας διατηρεί την εγκυρότητά της μόνο εφόσον περιορίζόμαστε σε μια στοιχειώδη (εστιγμένη γραμμή) στιβάδα. Για να προσδιορίσουμε το ολικό έργο που θα παραγάγουμε όταν απομακρύνουμε όλη τη μάζα, στιβάδα προς στιβάδα, ξεκινώντας από την αρχική κατανομή, πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς r την έκφραση που δίνει το dW από 0 έως R_0 :

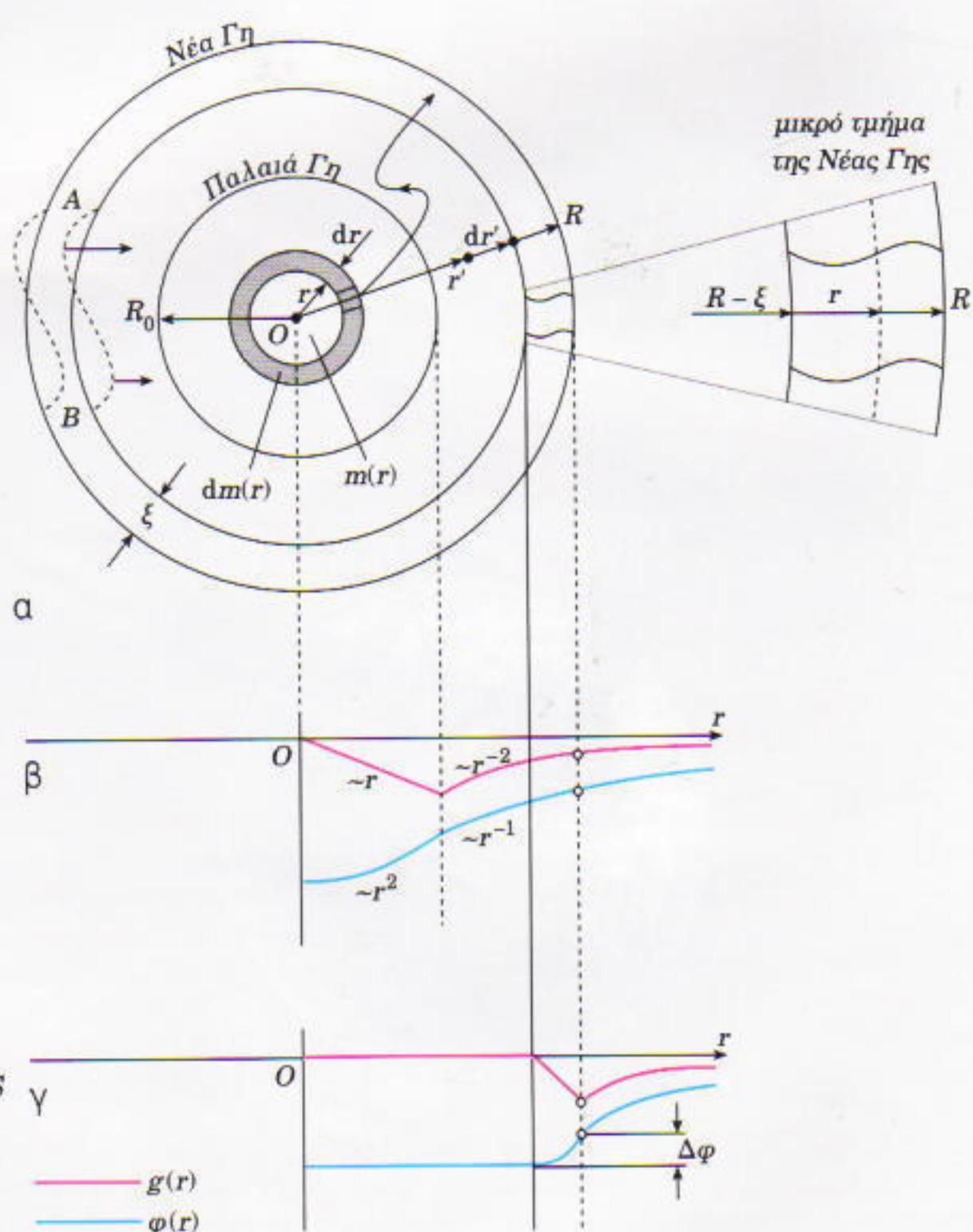
$$W = \int dW = G \int_0^{R_0} m(r) dm(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Υποθέτοντας ότι η Παλαιά Γη είναι μια ομογενής σφαίρα, και ότι η πυκνότητά της ρ_0 πρέπει να διατηρηθεί σταθερή κατά το μετασχηματισμό του πλανήτη (χρησιμοποιήσαμε ήδη αυτή την παραδοχή όταν υπολογίσαμε το πάχος του φλοιού), έχουμε

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r^3,$$

οπότε

$$\begin{aligned}W &= G \frac{4}{3} \pi \rho_0 \cdot 4\pi \rho_0 \int_0^R \left(r^4 - \frac{r^5}{R} \right) dr \\ &= \frac{GM^2}{R_0} \frac{3}{5} \left(1 - \frac{5}{6} \frac{R_0}{R} \right),\end{aligned}$$



Σχήμα 1

όπου η $M = (4/3)\pi R_0^3$ αντιπροσωπεύει την ολική μάζα της Γης.

Τώρα δεν μας μένουν παρά οι αριθμητικοί υπολογισμοί. Πρώτα απλουστεύουμε τον τύπο συνδυάζοντας τη μάζα και την ακτίνα της Γης σε μια έκφραση που ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας g_0 :

$$\frac{GM}{R_0^2} = g_0.$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$W = Mg_0 R_0 \cdot \frac{3}{5} \left(1 - \frac{5}{6} \frac{R_0}{R}\right).$$

Ενδέχεται, ωστόσο, να μη θυμάστε τη μάζα του πλανήτη μας, και ισως να μην έχετε πρόχειρο κάποιο βιβλίο αναφοράς. Κάτι τέτοιο δεν αποτελεί εμπόδιο —θα καταφέρουμε να βρούμε την απάντηση έστω και αν μας λείπει αυτό το στοιχείο. Οι περισσότεροι από εμάς θυμούνται ότι η g_0 ισούται με $9,8 \text{ m/s}^2$ και ότι η τιμή του R_0 είναι 6.400 km . εάν τύχει να θυμόμαστε επίσης ότι η G ισούται με $6,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \cdot \text{kg})$, τότε η μάζα της Γης προσδιορίζεται εύκολα από τον τύπο για τη g_0 : $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. (Κάποτε ο Henry Cavendish «ζύγισε» τη Γη με αυτήν ακριβώς τη μέθοδο —καθορίζοντας, δηλαδή, τη σταθερά G στο περίφημο πείραμά του με ένα ζυγό στρέψης.)

Τώρα έχουμε στη διάθεσή μας όλα όσα χρειάζονται για να εκτιμήσουμε το ελάχιστο απαιτούμενο έργο για τη δημιουργία της Νέας Γης:

$$W \equiv 2 \cdot 10^{32} \text{ J.}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι η σύγχρονη ανθρωπότητα καταναλώνει ενέργεια με ρυθμό 10^{20} J/έτος , μπορούμε εύκολα να εκτιμήσουμε πόσα έτη θα χρειαστούν για την πραγματοποίηση του ανθρωπωφελούς έργου μας.

Φανταστείτε ότι η Νέα Γη έχει ήδη δημιουργήθει. Πώς θα επηρεάσει τη ζωή σας η μεταμόρφωση αυτή; Πρώτα απ' όλα, η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Νέας Γης προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

(δηλαδή θα είναι 100 φορές μικρότερη από την παρούσα τιμή της).

Το βάρος των φυσικών αντικειμένων θα μειωθεί κατά τον ίδιο παράγοντα, ενώ μια πέτρα που βάλλεται με την ίδια αρχική ταχύτητα και με την ίδια γωνία βολής ως προς τον ορίζοντα θα διανύει απόσταση μεγαλύτερη κατά τον ίδιο παράγοντα. Τα εκκρεμή θα ταλαντώνονται δέκα φορές βραδύτερα ($\sqrt{g_0/g} = 10$), ενώ στο εσωτερικό της Νέας Γης δεν θα ταλαντώνονται καθόλου. Η ταχύτητα διαφυγής θα μεταβληθεί κατά παράγοντα

$$\frac{\sqrt{gR}}{\sqrt{g_0 R_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{R}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \equiv \frac{1}{3}.$$

Όπως αναφέραμε ήδη, θα έχουμε τη δυνατότητα να ταξιδεύουμε στο εσωτερικό της Νέας Γης χωρίς να δαπανάμε ενέργεια, επειδή εκεί δεν θα υφίσταται βαρύτητα ($g = 0$). Συνεπώς, εφόσον παραμένουμε στη συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, δεν θα χρειάζεται να παράγουμε έργο για να μετακινούμαστε από το ένα σημείο στο άλλο. Ή, όπως θα σας έλεγε ένας καθηγητής φυσικής, ο χώρος στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού αποτελεί ισοδυναμική περιοχή: $\varphi = \text{σταθ. εφόσον } r < R - \xi$. Δείτε προσεκτικά τα Σχήματα 1β και 1γ και συγκρίνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(r)$ και $\varphi(r)$, σχεδιασμένες αντίστοιχα για την Παλαιά και τη Νέα Γη.

Παρεμπιπόντως, πόσο έργο πρέπει να παραγάγουμε για να ταξιδέψουμε από το εσωτερικό της Νέας Γης στο εξωτερικό της; Θεωρήστε τη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r , η οποία βρίσκεται ανάμεσα στο εσωτερικό και το εξωτερικό σύνορο του φλοιού (βλ. Σχήμα 1α· στα δεξιά φαίνεται ένα τμήμα του φλοιού σε μεγέθυνση). Όπως γνωρίζουμε ήδη, η επιτάχυνση της βαρύτητας (ή, ορθότερα, το βαρυτικό πεδίο) πάνω σε αυτή την επιφάνεια παράγεται μόνο από το μέρος εκείνο της μάζας που βρίσκεται εντός της επιφάνειας. Η εν λόγω μάζα ισούται με

$$\frac{4}{3}\pi \left(r^3 - (R - \xi)^3\right) \rho_0,$$

οπότε

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G \frac{\left(r^3 - (R - \xi)^3\right) \rho_0}{r^2}.$$

Στο Σχήμα 1γ παρουσιάζεται η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης μεταξύ των σημείων $r = R - \xi$ και $r = R$.

Για να προσδιορίσουμε το έργο W_1 που απαιτείται για να βγάλουμε ένα σώμα μάζας 1 kg από την εσωτερική κοιλότητα, πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της $g(r)$ πάνω στο διάστημα με άκρα $R - \xi$ και R , κάτι που συνιστούμε στον αναγνώστη να το κάνει μόνος του. Εδώ θα εκτιμήσουμε το W_1 προσεγγίζοντας την $g(r)$ με μια γραμμική συνάρτηση που μεταβάλλεται από το 0 (στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού) έως την τιμή $g = g_0(R_0/R)^2$ (στην εξωτερική επιφάνεια):

$$W_1 = g_\mu \cdot \xi = \frac{g}{2} \xi \\ = \frac{g_0}{2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \cdot \xi \equiv 10^3 \text{ J/kg.}$$

Η τιμή του έργου ανά μονάδα μάζας την οποία υπολογίσαμε αναφέρεται και ως διαφορά δυναμικού μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής επιφάνειας. Στο Σχήμα 1γ τη συμβολίζουμε με $\Delta\varphi$.

Θα μπορούσαμε, άραγε, να αναπνέουμε στον νέο πλανήτη; Υποθέτουμε ότι η μάζα της ατμόσφαιρας στη Νέα Γη παραμένει η ίδια όπως και στην Παλαιά Γη. Εάν η θερμοκρασία δεν μεταβάλλεται με το υψόμετρο, πράγμα που σημαίνει ότι $T = \text{σταθερά}$, η πυκνότητα της ατμόσφαιρας εξαρτάται από το υψόμετρο σύμφωνα με τον τύπο

$$\rho = \rho(R_0) e^{-\frac{mg_0y}{kN_A T}},$$

όπου m είναι η μάζα ενός γραμμομορίου αέρα και kN_A το γινόμενο της σταθεράς του Boltzmann επί τον αριθμό του Avogadro (το οποίο ισουται με την παγκόσμια σταθερά R των ιδανικών αερίων). Σημειώστε ότι ο αριθμητικός του εκθέτη περιέχει τη διαφορά των δυναμικών σε υψό-

μετρο y και στην επιφάνεια της Γης (όπου $y = 0$).

Θέτοντας $mg_0 y / (kN_A T) = 1$ και λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς y , προσδιορίζουμε το χαρακτηριστικό υψόμετρο όπου η ατμοσφαιρική πυκνότητα μειώνεται στο $1/e$ της τιμής που έχει στην επιφάνεια, πράγμα που σημαίνει ότι περίπου υποτριπλασιάζεται. Το εν λόγω υψόμετρο είναι

$$y_* = \frac{kN_A T}{mg_0} \equiv 8 \text{ km.}$$

Μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη μάζα της ατμόσφαιρας

$$M_{\text{ατμ}} \equiv 4\pi R_0^2 y_* \rho(R_0) \equiv 5 \cdot 10^{18} \text{ kg.}$$

Στη Νέα Γη η ατμόσφαιρα θα απλωθεί ομοιογενώς στην εσωτερική σφαιρική κοιλότητα (επειδή η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο σημεία στην κοιλότητα ισούται με μηδέν), ενώ πάνω από την εξωτερική επιφάνεια η πυκνότητά της θα μειώνεται εκθετικά αυξανομένου του υψομέτρου κατά τον συνήθη τρόπο, αν και με νέο χαρακτηριστικό υψόμετρο, το οποίο είναι $g_0/g = 100$ φορές μεγαλύτερο από το παλιό. Συνεπώς, το χαρακτηριστικό υψόμετρο της νέας ατμόσφαιρας θα ανέρχεται σε 10^3 km , μια τιμή που παραμένει αμελητέα συγκρινόμενη με την ακτίνα της Νέας Γης $R = 10R_0 \equiv 6 \cdot 10^4 \text{ km}$.

Ο λόγος της ατμοσφαιρικής πυκνότητας μέσα στην κοιλότητα προς εκείνη της εξωτερικής επιφάνειας θα είναι

$$\frac{\rho^-}{\rho^+} = \frac{\rho(R - \xi)}{\rho(R)} = e^{\frac{W_1 m}{kN_A T}},$$

όπου με W_1 συμβολίζουμε το έργο που χρειάζεται για να μετακινήσουμε μια μάζα 1 kg από την εσωτερική κοιλότητα της Νέας Γης στην εξωτερική της επιφάνεια. Ας εκτιμήσουμε τη δύναμη στην οποία είναι υψωμένο το e :

$$\frac{W_1 m}{kN_A T} \equiv 1,2 \cdot 10^{-2}.$$

Όπως βλέπουμε, η τιμή αυτή απο-

δεικνύεται αμελητέα, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι πυκνότητες στην εσωτερική κοιλότητα της Νέας Γης και στο εξωτερικό της ουσιαστικά δεν διαφέρουν.

Ας διατυπώσουμε τώρα τις συνθήκες που απορρέουν από τη διατήρηση της μάζας της ατμόσφαιρας:

$$M_{\text{ατμ}} = \frac{4}{3}\pi\rho^-(R - \xi)^3 + 4\pi R^2 \rho^+ \cdot 100y_* \\ \cong \frac{4}{3}\pi\rho^- R^3 \left(1 + 3 \frac{100y_*}{R}\right) \cong \frac{4}{3}\pi\rho^- R^3.$$

(εφόσον ο δεύτερος προσθετέος εντός των παρενθέσεων είναι πολύ μικρότερος της μονάδας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι σχεδόν όλη η ατμόσφαιρα περιέχεται στην εσωτερική κοιλότητα), από όπου λαμβάνουμε

$$\rho^+ \cong \rho^- \cong \frac{M_{\text{ατμ}}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cong 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι φαίνεται μάλλον επικίνδυνο να αναπνέει κανείς σίτε στην εσωτερική κοιλότητα είτε στην εξωτερική επιφάνεια του καινούργιου πλανήτη.

Επιπλέον, ο σφαιρικός φλοιός της Νέας Γης θα παρουσιάζει αστάθεια. Κάθε διαταραχή AB (Σχήμα 1a, στο αριστερό μέρος) του σχήματός του θα γίνεται εντονότερη με την πάροδο του χρόνου, διότι δεν θα υπάρχει δύναμη αποκατάστασης. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να προσέχουμε πολύ για να διαφυλάξουμε την ακεραιότητα της Νέας Γης.

Αλλά η Νέα Γη μάς επιφυλάσσει πολλές ακόμη εκπλήξεις. Για παράδειγμα, με πόση γωνιακή ταχύτητα θα περιστρέφεται περί τον άξονά της; Στη μηχανική υπάρχει ο νόμος της διατήρησης της στροφορμής όμοιος στη διατύπωσή του με τη διατήρηση της γραμμικής ορμής $m_0 u_0 = mu$, μπορεί να γραφεί εύκολα εάν αντικαταστήσουμε τις γραμμικές ταχύτητες με γωνιακές. Θα πρέπει, όμως, να αντικαταστήσουμε ταυτόχρονα και τις μάζες με τις ροπές αδράνειας.

Ωστόσο, οι ροπές αδράνειας μιας ομογενούς σφαίρας και ενός σφαιρικού φλοιού μας είναι γνωστές:

$(2/5)MR_0^2$ και $(2/3)MR^2$, αντίστοιχα. Εφόσον ενδιαφερόμαστε μόνο για χονδρικές εκτιμήσεις, μπορούμε να παραλείψουμε τους αριθμητικούς συντελεστές σ' αυτούς τους τύπους. Διαγράφοντας τις μάζες, καταλήγουμε στην προσεγγιστική εσότητα

$$R_0^2 \omega_0 \equiv R^2 \omega,$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η ημέρα στον νέο πλανήτη θα διαρκεί

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \equiv \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = 100$$

φορές περισσότερο απ' όσο στον παλιό.

Έτσι, η εβδομάδα στη Νέα Γη θα διαρκεί περισσότερο από ένα έτος. Θα αργεί πολύ να φτάσει το σαββατοκύριακο! Δυστυχώς, καταλήξαμε σε τελείως απογοητευτικά αποτελέσματα. Και κατανοούμε γιατί πρέπει να προσεγγίζουμε το θέμα της ανακατασκευής του πλανήτη με άκρα περίσκεψη, αναλύοντας όλες τις δυνατές επιπτώσεις και χρησιμοποιώντας τες για μια ενδελεχή μελέτη των φυσικών νόμων. ◻

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- S. Krivoshlykov, «Με το κεφάλι κάτω», Ιούλιος/Αύγουστος 1995.
- A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Πρωτάθλημα μπόουλινγκ», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1995.
- A. Stasenko, «Από την άκρη του σύμπαντος στα Τάρταρα», Μάιος/Ιούνιος 1996.
- L. Borovinsky, «Γιατί ξαγρυπνά ο Άρης», Ιούλιος/Αύγουστος 1996.
- V. Surdin, «Το μυστήριο της Αφροδίτης», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1996.
- M. Emelyanov, A. Zharkov, V. Zagainov και V. Matochkin, «Στα βήματα του Foucault», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1997.
- A. Leonovich, «Δυναμικό», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1998
- L.D. Kirkpatrick και A. Eisenkraft, «Περί στροφικής κινήσεως», Μάιος/Ιούνιος 1998.
- A. Stasenko, «Ποτάμια, τυφώνες και μόρια», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1998.

Καρδιοειδείς για συλλέκτες μανιταριών

Μαθήματα προσανατολισμού

S. Bogdanov

ΕΝΑ ΟΜΟΡΦΟ ΠΡΩΪΝΟ ΤΟΥ ΣΕ-
πτεμβρίου ξεκίνησα με μερι-
κούς φίλους για να μαζέψου-
με μανιτάρια στο δάσος. Ακο-
λουθήσαμε όλοι μαζί το κύριο μονο-
πάτι ώς το σημείο που υπήρχε ένας
ευδιάκριτος στύλος, και μετά απο-
φασίσαμε να συνεχίσει ο καθένας
μόνος του προς τα δυτικά και να
συναντηθούμε έπειτα από 4 ώρες
στον στύλο. Δεν είχαμε πυξίδα, αλ-
λά υπήρχαν αξιόποστα ορόσημα: το
μονοπάτι ακολουθούσε ακριβώς τη
διεύθυνση βορρά-νότου, ο Ήλιος ή-
ταν στην ανατολή, και στις άκρες
του δάσους υπήρχαν δύο μεγάλες
λίμνες (Σχήμα 1).

Για να είμαι απερίσπαστος όσο
μάζεua μανιτάρια και να φτάσω έ-
γκαιρα στο σημείο συνάντησης, απο-
φάσισα να περπατήσω το μισό χρό-

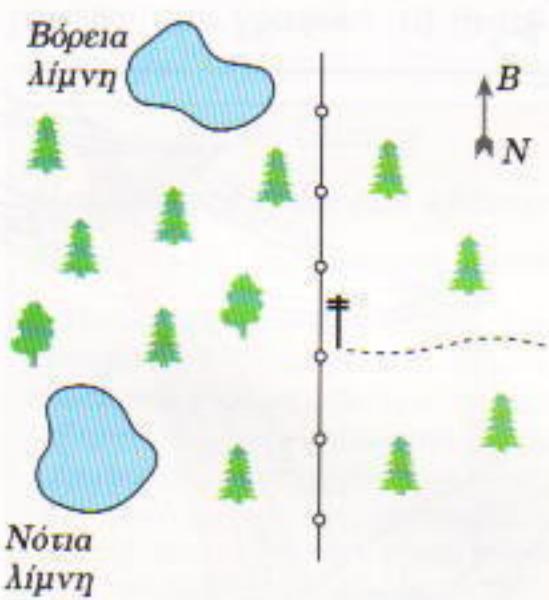
νο (2 ώρες) με τον Ήλιο στην πλά-
τη και μετά να επιστρέψω ακολου-
θώντας την αντίθετη κατεύθυνση.
Αφού μάζεψα ένα καλάθι μανιτά-
ρια, ανακάλυψα ότι έπρεπε να επι-
φέρω κάποιες διορθώσεις στην πο-
ρεία μου. Το αποτέλεσμα ήταν ότι
συνάντησα το μονοπάτι 1 km νοτιό-
τερα από το σημείο συνάντησης και
άργησα 15 ολόκληρα λεπτά.

Αποφάσισα, λοιπόν, να ερμηνεύ-
σω την πορεία μου και να βρω σε
ποιο σημείο θα κατέληγα αν είχα α-
κολουθήσει το αρχικό σχέδιο. Έπει-
τα από κάποιες εύλογες παραδοχές,
διατύπωσα το πρόβλημα ως εξής.

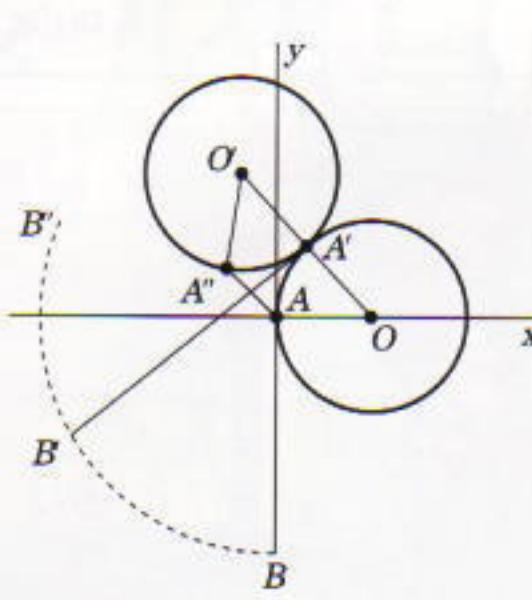
Ένα σημείο B (ο Ήλιος) κινείται
στο επίπεδο xy με σταθερή γωνιακή
ταχύτητα ω κατά μήκος ενός κύ-
κλου με κέντρο στην αρχή των αξό-
νων (Σχήμα 2). Το σημείο A (ένας

άνθρωπος) ξεκινά από την αρχή των
αξόνων και κινείται με σταθερή τα-
χύτητα v στην κατεύθυνση που «α-
πομακρύνεται από το σημείο B ». Με
άλλα λόγια, κάθε χρονική στιγμή η
διεύθυνση της ταχύτητάς του είναι
η ευθεία «Ηλιος-άνθρωπος». Μια
συγκεκριμένη χρονική στιγμή t η
διεύθυνση της ταχύτητας αντιστρέ-
φεται και το σημείο A αρχίζει να
κινείται «προς το σημείο B ». Ποιες
είναι οι συντεταγμένες του σημείου
 A τη χρονική στιγμή $2t$;

Η λύση αποδεικνύεται πολύ α-
πλή και κατανοητή, ειδικά για ό-
σους έχουν κάνει τουλάχιστον μία
φορά κύκλους σε δάση. Πράγματι,
το σημείο A κινείται με σταθερή τα-
χύτητα, αλλά το διάνυσμα της τα-
χύτητας αλλάζει έτσι ώστε να απο-
μακρύνεται πάντα από το σημείο B
— το οποίο διαγράφει έναν κύκλο.
Συνεπώς, και το σημείο A κινείται
επί ενός κύκλου με γωνιακή ταχύ-
τηταίδια με του σημείου B . Όταν το
σημείο B κινείται μέχρι να φτάσει
στη θέση B' , ο άνθρωπος κινείται επί
ενός κυκλικού τόξου AA' μέχρι τη
θέση A' . Είναι προφανές ότι η κίνη-
ση της επιστροφής από το σημείο
καμπής A' έως το τελικό σημείο A''
μπορεί να περιγραφεί με παρόμοιο
τρόπο. Το σημείο κινείται επί ενός
κυκλικού τόξου $A'A''$ με ίδια ακτί-
να και κέντρο το σημείο O' το οποίο
ανήκει στην ευθεία που είναι κάθε-
τη επί την $A'B'$ και διέρχεται από το



Σχήμα 1



Σχήμα 2



οημείο επαφής A' .

Αν χρησιμοποιήσουμε την πασιγνωστή σχέση μεταξύ γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας, προκύπτει ο επόμενος τύπος για την ακτίνα του κύκλου AA' : $R = v/\omega$. Εππλέον, από τις αρχικές συνθήκες έπειται ότι το κέντρο αυτού του κύκλου βρίσκεται στο σημείο με συντεταγμένες $(v/\omega, 0)$. Απλά γεωμετρικά επιχειρήματα (για παράδειγμα, από το τραπέζιο $AOO'A''$) μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τη θέση του σημείου A'' , το οποίο βρίσκεται σε απόσταση r από το αρχικό σημείο A και σχηματίζει τη γωνία $\theta = \angle A''AO$:

$$\theta = \pi - \omega t, r = AA'' = 2v \frac{1 + \sin \theta}{\omega}.$$

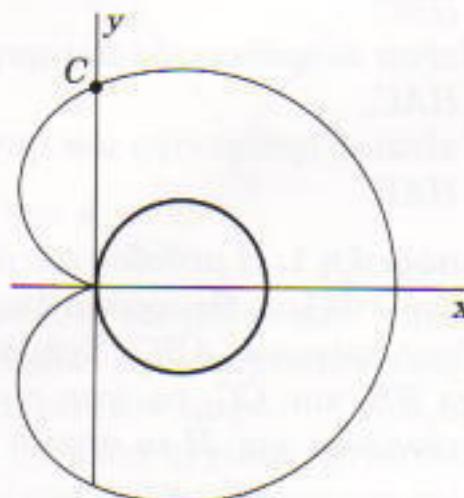
Οι ποσότητες r και θ ονομάζονται πολικές συντεταγμένες ενός σημείου. Ας αναλύσουμε το απότελεσμά μας για ένα χαρακτηριστικό διάστημα δυνατών τιμών του t : $0 \leq t \leq 6$. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\omega = 2\pi/24 \text{ h}^{-1}$. Για μικρό t , το θ είναι λίγο μικρότερο του π . Δηλαδή, υπάρχει μια αξιόλογη αζιμουθιακή απόκλιση από την αρχική διεύθυνση $\pi/2$, ενώ η απόσταση r είναι μάλλον μικρή. Αν το t είναι περίπου 6 ώρες, η αζιμουθιακή απόκλιση είναι πρακτικά μηδενική αλλά το r γίνεται αρκετά μεγάλο.

Ας κάνουμε, για παράδειγμα, μια αριθμητική προσέγγιση για $t = 2 \text{ h}$ και $v = 2 \text{ km/h}$. Σε αυτή την περίπτωση, $\theta = 5\pi/6$, ενώ η ακτίνα R και η απόσταση r είναι 8 km και 2.4 km , αντίστοιχα.

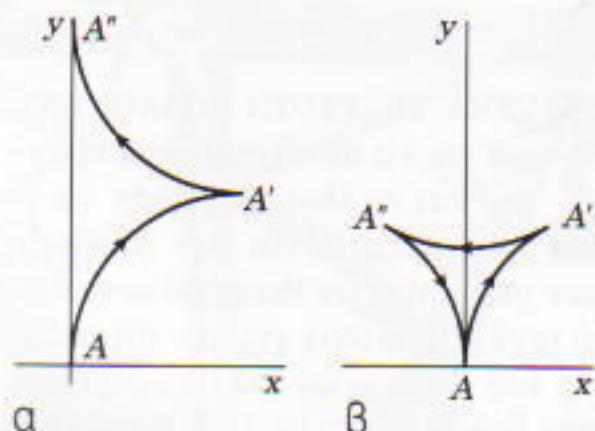
Το Σχήμα 2 μάς επιτρέπει να παραστήσουμε γραφικά τη θέση του

τελικού σημείου A'' . Ας υποθέσουμε ότι την αρχική στιγμή οι κύκλοι O και O' εφάπτονται στο σημείο A . Τότε, ο κύκλος O' αρχίζει να κυλά χωρίς ολίσθηση κατά μήκος του κύκλου O . Τη χρονική στιγμή t , όταν οι κύκλοι εφάπτονται στο σημείο καμπής A' , το αρχικό σημείο επαφής A βρίσκεται στη θέση A'' . Επομένως, το σύνολο όλων των δυνατών τελικών σημείων για διαδρομές σταθερής ταχύτητας v και διαφορετικής διάρκειας t συμπίπτει με την τροχιά ενός σημείου του κύκλου O' που κυλά επί του κύκλου O . Η αντίστοιχη καμπύλη ονομάζεται *καρδιοειδής* —το διάγραμμά της παρουσιάζεται στο Σχήμα 3 ενώ η εξίσωσή της περιγράφηκε προηγουμένως. Αυτή η καμπύλη μπορεί να κατασκευαστεί με αυτοσχέδια όργανα, και το αντίστοιχο διάγραμμα μπορεί να φανεί χρήσιμο στο δάσος όταν δεν υπάρχει χάρτης ή ως συμπλήρωμα του χάρτη.

Το σημείο C του Σχήματος 3 είναι το τελικό σημείο όταν $t = 6 \text{ h}$ και η αντίστοιχη τροχιά παρουσιάζεται στο Σχήμα 4a. Σε αυτή την πε-



Σχήμα 3



Σχήμα 4

ρίπτωση η αζιμουθιακή απόκλιση είναι μηδέν, αλλά για τις χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων $r \equiv 16 \text{ km}$. Επομένως, ένας ολοήμερος περίπατος ($2t = 12 \text{ h}$) με τη στρατηγική «από τον Ήλιο, προς τον Ήλιο» θα είναι προφανώς ατυχής ή ακόμη και επικίνδυνος. Όμως, για περίπατο αυτής της διάρκειας θα προτείναμε εναλλακτικά μια πορεία τριών τμημάτων (Σχήμα 4β). Αυτή η στρατηγική διατηρεί το κύριο πλεονέκτημα, δηλαδή τον προσανατολισμό βάσει μόνο του Ήλιου.

Ολοκληρώνοντας θα ήθελα να επισημάνω ότι η πιο σύνθετη περίπτωση όπου η αναχώρηση και η επιστροφή γίνονται με διαφορετική ταχύτητα μπορεί να αναλυθεί με παρόμοιο τρόπο. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι όλα τα τελικά σημεία θα ανήκουν στην ευθεία $A'A''$. Η μεγαλύτερη ταχύτητα επιστροφής αυξάνει μόνο την απόσταση από το αρχικό σημείο A .

Μπορούμε επομένως από την ανάλυσή μας να συμπεράνουμε ανεπιφύλακτα ότι, πηγαίνοντας στο δάσος, καλό είναι να έχουμε μαζί μας πυξίδα!

Robert Gilmore

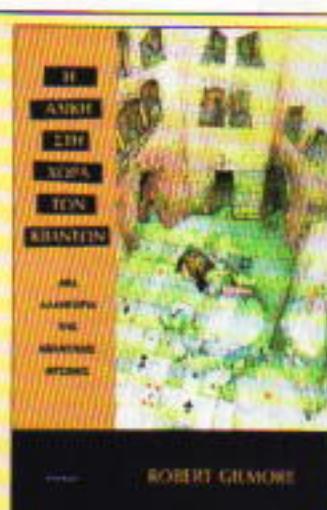
Η Αλίκη στη χώρα των κβάντων

Μια αλληγορία της κβαντικής φυσικής

«Πρόκειται για ένα πρωτότυπο και γοητευτικό ανάγνωσμα. Απευθύνεται πρωτίστως στον μη ειδικό, αλλά είναι βέβαιο ότι θα το απολαύσει και ο σπουδαστής της σύγχρονης φυσικής.

Δεν απαιτεί ιδιαίτερες μαθηματικές γνώσεις: μόνο υγιή περιέργεια για τον κόσμο που ενοικούμε...»

Πανόδετο, 246 σελ., 17 x 25 εκ., 6.200 δρχ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Serge Lang

Μαθηματικές συναντήσεις

με μαθητές γυμνασίου και λυκείου

Περιλαμβάνει τα μαθήματα που δίδαξε ο παγκοσμίου φήμης καθηγητής του Yale σε νεαρούς μαθητές, σε θέματα εκτός σχολικής ύλης. Απευθύνεται σε μαθητές και καθηγητές.

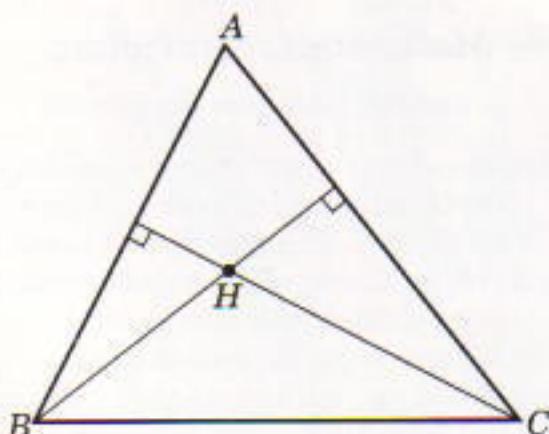
«Ξεψυλλίστε το, απολαύστε τη φρεσκάδα του, και εμπνευσθείτε από τη νέα διδακτική του προσέγγιση.»

227 σελ., 14 x 21 εκ., 5.500 δρχ.

Το ορθόκεντρο

ΣΥΧΝΑ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΠΟΛΛΟΙ ΤΡΟΠΟΙ για να πετύχουμε ένα πράγμα, και το ίδιο μπορούμε να ισχυριστούμε για την απόδειξη των γεωμετρικών θεωρημάτων. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για την περίπτωση του πασίγνωστου θεωρήματος που δηλώνει ότι τα τρία ύψη κάθε τριγώνου συντρέχουν —δηλαδή, διέρχονται όλα από το ίδιο σημείο που ονομάζεται ορθόκεντρο του τριγώνου. (Για να είμαστε ακριβείς, εννοούμε ότι οι ευθείες που περιέχουν τα ύψη του τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο.) Θα παρουσιάσουμε αρκετούς τρόπους απόδειξης αυτού του σημαντικού θεωρήματος.

Πρώτα όμως ορισμένα προκαταρκτικά. Επομένως ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για οξυγώνια τρίγωνα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το έχουμε πράξει, και ότι το HBC ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο με την αμβλεία γωνία στην κορυφή H . Από τα σημεία B και C φέρουμε τις κάθετες προς τις απέναντι πλευρές του τριγώνου, και ονομάζουμε A το σημείο τομής τους (Σχήμα 1). Το τρίγωνο ABC είναι οξυγώνιο, και επομένως, βάσει της υπόθεσής μας, τα ύψη του συντρέχουν στο ίδιο σημείο. Αν λοιπόν φέρουμε την κάθετη από το C στην AB και από το B στην AC , το σημείο τομής τους θα ανήκει στην κάθετη που φέρουμε από το A στην BC . Όμως, το σημείο τομής τους είναι το H ! Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα A και H είναι κάθετη στην BC και αποτελεί το τρίτο ύψος (και στο τρίγωνο ABC και στο τρίγωνο HBC). Επομένως, τα ύψη του HBC συντρέχουν στο σημείο A .



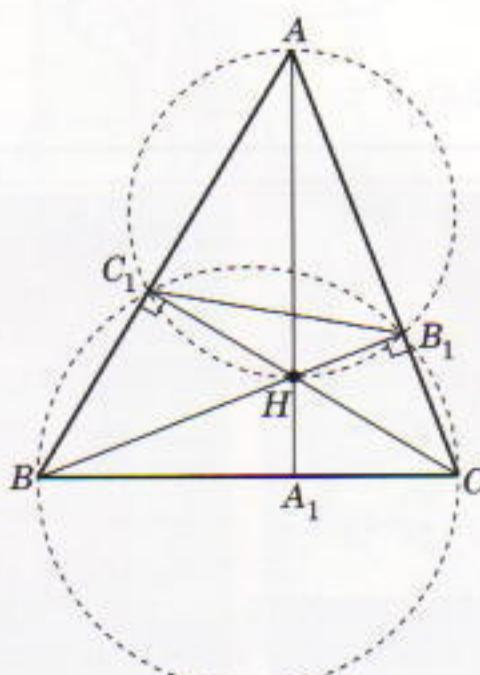
Σχήμα 1



Χωρίς σχεδόν να το καταλάβουμε αποδείξαμε ότι εξαιρετικά ενδιαφέρον θεώρημα: αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC , τότε:

- το A είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου HBC ,
- το B είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου HAC ,
- το C είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου HAB .

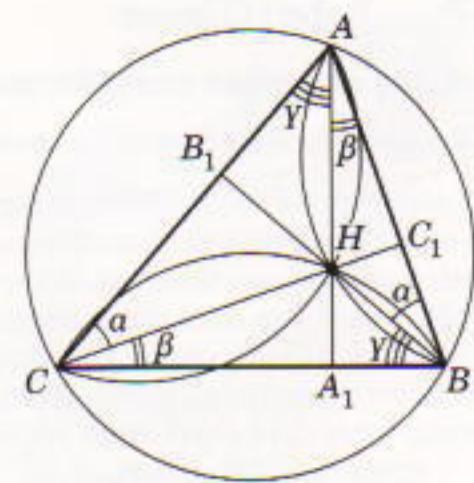
Απόδειξη 1. *Η μέθοδος του βοηθητικού κύκλου.* Θεωρούμε ότι ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC (Σχήμα 2). Εστω BB_1 και CC_1 τα ύψη αυτού του τριγώνου και H το σημείο το-



Σχήμα 2

μής τους. Φέρουμε την ευθεία AH , και έστω A_1 το σημείο τομής της με την BC . Παρατηρούμε ότι τα σημεία B , C , B_1 και C_1 ανήκουν στον ίδιο κύκλο (με διάμετρο BC). Επομένως, $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$ (οι γωνίες αυτές βαίνουν στο ίδιο τόξο του βοηθητικού κύκλου). Παρατηρούμε επίσης ότι τα σημεία A , B_1 , H και C_1 ανήκουν στον ίδιο κύκλο (με διάμετρο AH). Επομένως, $\angle B_1C_1C = \angle B_1CH = \angle B_1AH = \angle CAA_1$. Τα τρίγωνα CAA_1 και CBB_1 έχουν μία κοινή γωνία και ένα ζεύγος ίσων γωνιών. Επομένως, οι άλλες τους γωνίες είναι ίσες. Άρα, $\angle AA_1C = \angle BB_1C$, και το AA_1 είναι ύψος του τριγώνου ABC .

Απόδειξη 2. *Άλλοι βοηθητικοί κύκλοι.* Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του οξυγώνιου τριγώνου ABC . Το άθροισμα των τόξων του κύκλου που ορίζουν οι πλευρές του τριγώνου ισούται με 360° . Επομένως, τα συμμετρικά αυτών των τόξων ως προς τις πλευρές του τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο, έστω H (αφήνουμε για τους αναγνώστες την απόδειξη αυτού του ενδιαφέροντος γεγονότος). Διαπιστώνουμε ότι $\angle ABH = \angle ACH$, διότι αυτές οι γωνίες είναι οξείες και βαίνουν στην ίδια χορδή ίσων κύκλων.



Σχήμα 3

του τριγώνου

Εστω ότι αυτές οι δύο γωνίες ισούνται με α . Ομοίως έχουμε άλλα δύο ζεύγη ίσων γωνιών: $\angle BCH = \angle BAH = \beta$ και $\angle ACH = \angle ABH = \gamma$. Αφού τα δύο αντίγραφα της α , της β και της γ καλύπτουν ακριβώς τις τρεις γωνίες του τριγώνου ABC , έχουμε ότι $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Το τρίγωνο AA_1B λοιπόν είναι ορθογώνιο, με $\angle AA_1B = 90^\circ$, οπότε $AA_1 \perp BC$. Ομοίως, οι BB_1 και CC_1 είναι κάθετες στις αντίστοιχες πλευρές, οπότε είναι ύψη — και φυσικά το H ανήκει σε όλα.

Πριν συνεχίσουμε, ας εξετάσουμε το ευρύτερο πλαίσιο μέσα στο οποίο εργαζόμαστε. Η σύγκλιση των τριών υψών ενός τριγώνου είναι πιθανώς το δυσκολότερο από ένα πλήθος θεωρημάτων σύγκλισης της στοιχειώδους γεωμετρίας.

Ας ξαναδούμε τα συγκεκριμένα θεωρήματα.

Θεώρημα. Οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου συντρέχουν στο κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται εύκολα. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ABC και φέρουμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών AB και AC . Το σημείο τομής τους (αφού δεν μπορεί να είναι παράλληλες!) ισαπέχει από τα A και B καθώς και από τα A και C . Άρα, ισαπέχει από τα B και C , και επομένως ανήκει στη μεσοκάθετο της BC .

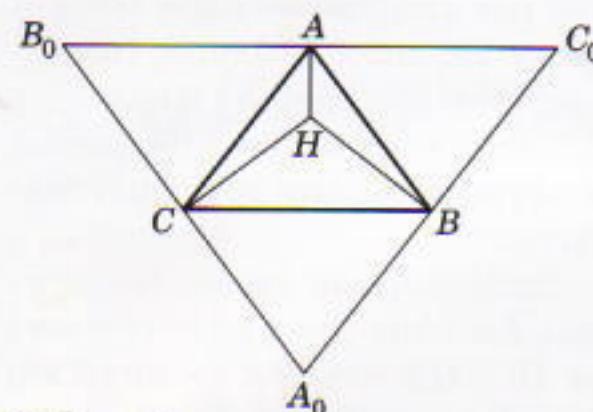
Θεώρημα. Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου συντρέχουν στο κέντρο ενός κύκλου που εφαπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Και αυτό το θεώρημα αποδεικνύεται εύκολα. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ABC και φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών A και B . Το σημείο το-

μής τους (αφού δεν μπορεί να είναι παράλληλες!) ισαπέχει από τις ευθείες AC και AB καθώς και από τις ευθείες AB και BC . Συνεπώς, ισαπέχει από τις ευθείες AC και BC , και επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας C .

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω θεωρήματα, για να αποδείξουμε τη σύγκλιση των τριών υψών.

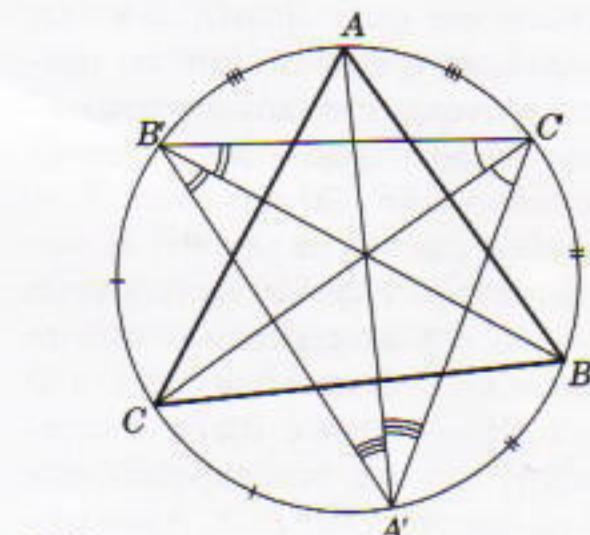
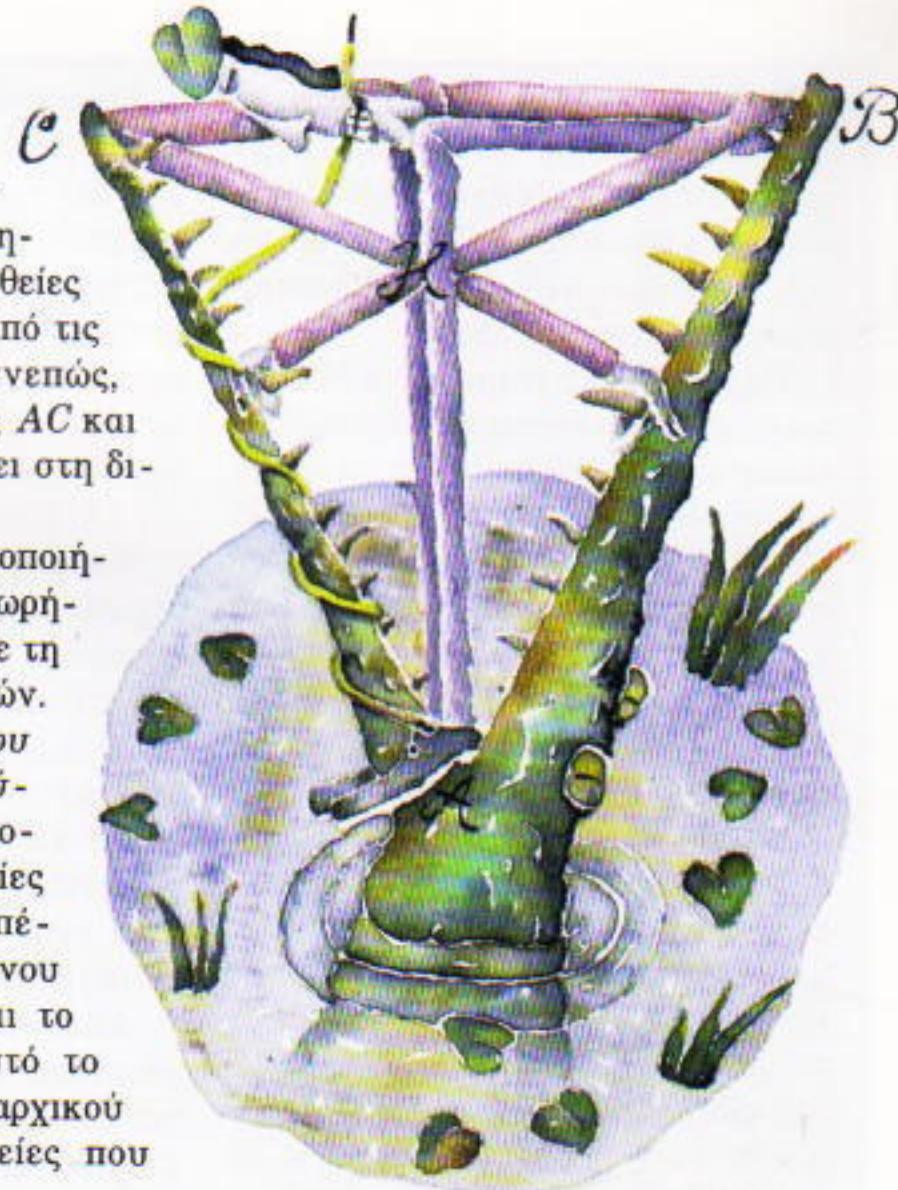
Απόδειξη 3. Χρήση του περιγεγραμμένου κύκλου. Φέρουμε από τις κορυφές του ABC ευθείες παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του τριγώνου (Σχήμα 4). σχηματίζεται το τρίγωνο $A_0B_0C_0$. Σε αυτό το τρίγωνο, οι πλευρές του αρχικού τριγώνου είναι οι ευθείες που



Σχήμα 4

ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών. Άρα, οι μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου $A_0B_0C_0$ είναι ύψη του αρχικού τριγώνου. Επομένως, τα ύψη τέμνονται στο ίδιο σημείο με τις μεσοκάθετες του τριγώνου $A_0B_0C_0$, το οποίο είναι κέντρο του περιγεγραμμένου στο $A_0B_0C_0$ κύκλου.

Απόδειξη 4. Χρήση του εγγεγραμμένου κύκλου. Έστω A' , B' και C' τα σημεία τομής των υψών του τριγώνου ABC και του περιγεγραμμένου του κύκλου (Σχήμα 5). Έχουμε ότι $\angle ABB' = \angle ACC'$ (είναι και οι δύο συμπληρωματικές της $\angle CAB$), και επομένως $AB' = AC'$. Άρα η AA' είναι διχοτόμος του τριγώνου $A'B'C'$ ομοίως και για τις BB' και CC' . Συνεπώς, τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύ-



Σχήμα 5

κλου του τριγώνου $A'B'C'$.

Ας επιστρέψουμε προς στιγμήν στις αποδείξεις της σύγκλισης των μεσοκαθέτων και των διχοτόμων. Τι έκανε τις αποδείξεις αυτές τόσο εύκολες; Είχαμε τη δυνατότητα να περιγράψουμε καθεμιά από τις ευθείες που εξετάζαμε ως έναν τόπο που 1-κανοποιούσε μια σχέση ισότητας και σχετίζόταν με δύο από τις κορυφές του τριγώνου. Τότε, η μεταβατική 1-διότητα της ισότητας (αν $x = y$ και $y = z$, τότε $x = z$) μας προσέφερε τη λύση στο πρόβλημα. Αν μπορέσουμε να περιγράψουμε τα ύψη του τριγώνου ως τόπους, θα πάρουμε μια απλή απόδειξη της σύγκλισής τους.

Ας εξασκηθούμε όμως πρώτα με τις διαμέσους του τριγώνου. Υπάρχουν πολλές αποδείξεις ότι συντρέχουν στο ίδιο σημείο (δείτε το άρθρο «Οι διάμεσοι» στο τεύχος Ιανουαρίου /Φεβρουαρίου 1995).

Θεώρημα. Η διάμεσος CM ενός τριγώνου ABC είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P για τα οποία τα εμβαδά των τριγώνων CPA και CPB είναι ίσα.

Απόδειξη. Για κάθε σημείο P που ανήκει στην CM , τα τρίγωνα APM και BPM έχουν ίσα εμβαδά, διότι έχουν το ίδιο ύψος από το σημείο P και ίσες βάσεις $AM = MB$. Το ίδιο ισχύει για τα τρίγωνα ACM και BCM . Επομένως, οι διαφορές μεταξύ αυτών των εμβαδών είναι ίσες: Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο της απόλυτης τιμής για τα εμβαδά, μπορούμε να γράψουμε $|ACM| - |APM| = |BCM| - |BPM|$, ή απλά $|CAP| = |CBP|$.

Αντιστρόφως, αν έχουμε ένα σημείο Q στο εσωτερικό του τριγώνου ABC τέτοιο ώστε $|CAQ| = |CBQ|$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι πρέπει να ανήκει στη διάμεσο που φέρουμε από το C στην AB . Ας προεκτείνουμε την CQ και έστω X το σημείο τομής της με την AB . Η ισότητα των δύο εμβαδών συνεπάγεται την ισότητα των καθέτων από τα σημεία A και B προς την ευθεία CQ , και αυτή με τη σειρά της συνεπάγεται την ισότητα των εμβαδών των τριγώνων ACX και BCX . Αφού αυτά τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο ύψος από το C στην AB , έπειτα ότι οι βάσεις τους είναι ίσες και, επομένως, το X είναι μέσον της AB .

Και τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε μια απλή απόδειξη της επόμενης πρότασης:

Θεώρημα. Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

Απόδειξη. Εστω ότι οι διάμεσοι AM και BN του τριγώνου ABC τέμνονται στο σημείο P . Τότε, βάσει του θεωρήματός μας για τον γεωμετρικό τόπο των σημείων της διάμεσου, $|CAP| = |BAP|$ και $|BAP| = |CBP|$. Επομένως, $|CAP| = |CBP|$, και το P ανήκει στη διάμεσο που φέρουμε από το C .

Επομένως έχουμε επίσης αποδείξει πως το $|CPB|$ ισούται με το $1/3$ του εμβαδού του $|ABC|$ και, επομένως, η κάθετη από το A στην BC έχει το τριπλάσιο μήκος της καθέτου από το P στην BC . Με τη βοήθεια ομοίων τριγώνων είναι απλό να αποδείξουμε (και το αφήνουμε για τους αναγνώστες) ότι $AP : PM = 2 : 1$. Επομένως, έχουμε:

Θεώρημα. Το κέντρο βάρους (το σημείο τομής των διαμέσων) ενός τριγώνου διαιρεί κάθε διάμεσο σε λόγο $2 : 1$.

Έτσι, η μέθοδος των τόπων αποδεικνύεται εξαιρετικά ισχυρή. Μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τη σύγκλιση των υψών ενός τριγώνου με δύο διαφορετικούς τρόπους.

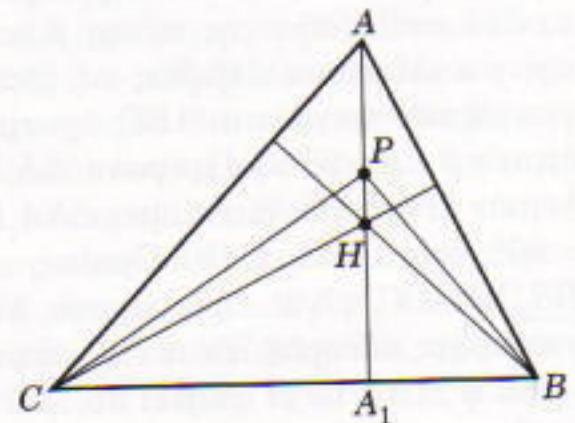
Απόδειξη 5. Μια μέθοδος γεωμετρικού τόπου. Έστω μία ημιευθεία που ξεκινά από την κορυφή μιας γωνίας. Παρατηρούμε ότι ο λόγος των αποστάσεων όλων των σημείων της από τις πλευρές της γωνίας είναι σταθερός. Αν η ημιευθεία βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας, ο λόγος αυτός την ορίζει μονοορθιά.

Επλέγουμε το σημείο H στο ύψος AA_1 . Από όμοια τρίγωνα έχουμε $HC_1/HA = A_1B/AB = \text{συν}B$ και $HB_1/HA = A_1C/AC = \text{συν}C$, και, επομένως, $HC_1/HB_1 = \text{συν}B/\text{συν}C$. Έπειτα ότι, για όλα τα σημεία του ύψους AA_1 , ο λόγος των αποστάσεων από τις πλευρές AB και AC ισούται με $\text{συν}B/\text{συν}C$ (Σχήμα 6). Ομοίως, για όλα τα σημεία του ύψους BB_1 , ο λόγος των αποστάσεων από τις πλευρές BA και BC ισούται με $\text{συν}A/\text{συν}C$. Έστω H το σημείο

τομής των AA_1 και BB_1 . Ο λόγος των αποστάσεων αυτού του σημείου από τις πλευρές AC και BC ισούται με $\text{συν}A/\text{συν}B$. Άρα, το σημείο H ανήκει στο ύψος επί την πλευρά AB .

Απόδειξη 6. Άλλη μια μέθοδος γεωμετρικού τόπου. Έστω P ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AA_1 (βλ. Σχήμα 7, όπου AA_1 είναι το ύψος του τριγώνου ABC). Τότε:

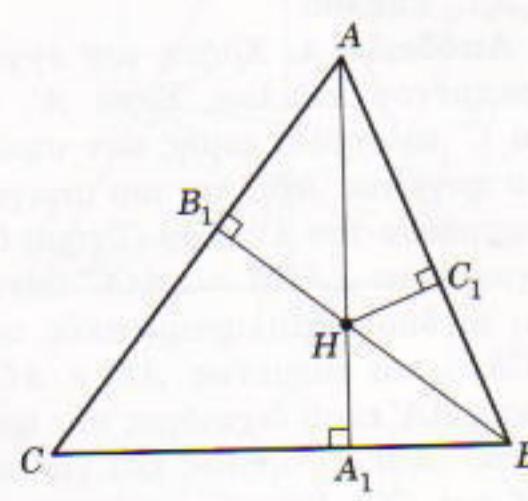
$$BP^2 - CP^2 = (BP^2 - PA_1^2) - (CP^2 - PA_1^2) = BA_1^2 - CA_1^2.$$



Σχήμα 7

Επομένως, το $BP^2 - CP^2$ είναι σταθερό για κάθε σημείο P αυτής της ευθείας. Επίσης μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι, αν $BP^2 - CP^2 = BA^2 - CA^2$, τότε το P ανήκει στο ύψος του τριγώνου. Έστω H το σημείο τομής των υψών που φέρουμε προς τις πλευρές BC και CA του τριγώνου. Έχουμε ότι $BH^2 - CH^2 = BA^2 - CA^2$ και $CH^2 - AH^2 = CB^2 - AB^2$. Αν προσθέσουμε κατά μέλη αυτές τις ισότητες, βρίσκουμε $BH^2 - AH^2 = CB^2 - CA^2$, πράγμα που σημαίνει ότι το H ανήκει στο ύψος επί την AB . ◻

—I.F. Sharygin



Σχήμα 6

κορφιάτης

Το φυσικομαθηματικό
βιβλιοπωλείο

ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6, Τ.Κ. 106 79 - ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 36 28 492

Φως στον σκοτεινό θάλαμο

Ηταν δυνατόν να έχουν ανακαλυφθεί οι ηλιακές κηλίδες από τότε που χτίστηκαν οι πυραμίδες της Αιγύπτου;

V. Surdin και M. Kartashev

ΣΤΑ ΛΑΤΙΝΙΚΑ, *CAMERA OBSCURA* σημαίνει «σκοτεινός θάλαμος». Το ακόλουθο τέχνασμα είναι γνωστό από αρχαιοτάτων χρόνων: μια λαμπρή ηλιόλουστη μέρα κλειστείτε σε ένα σκοτεινό δωμάτιο και ανοίξτε μια μικρή τρύπα στο παραθυρόφυλλο. Στον αντικρινό τοίχο θα δείτε το ανεστραμμένο είδωλο του δρόμου και των διαβατών.

Οι αρχαίοι Έλληνες πιθανόν να γνώριζαν τον σκοτεινό θάλαμο με στενωπή [που φέρει, δηλαδή, στενή τρύπα: στενός + οπή (από τη ρίζα οπτού παρακειμένου όπωπα του ρήματος οφώ, απ' όπου και τα «όμμα», «οφθαλμός»)]. Τον χρησιμοποίησαν επίσης άραβες επιστήμονες, και στα τέλη του 16ου αιώνα ο Leonardo da Vinci έδωσε την πρώτη λεπτομερή περιγραφή αυτής της υπέροχης οπτικής διάταξης. Ωστόσο, ο κλασικός σκοτεινός θάλαμος δεν γνώρισε ευρεία χρήση, επειδή, όταν η οπή ήταν αρκετά μεγάλη, το είδωλο εμφανίζόταν συγκεχυμένο, ενώ όταν ήταν πολύ στενή, σχηματίζόταν είδωλο ευκρινές μεν αλλά πολύ αμυδρό. Εππλέον, ο σκοτεινός θάλαμος λειτουργούσε μόνο στο απόλυτο σκοτάδι και απαιτούσε την προσαρμογή των ματιών του παρατηρητή.

Ωστόσο, στα μέσα του 16ου αιώνα ο σκοτεινός θάλαμος με στενωπή εξοπλίστηκε με ένα κάτοπτρο και έναν αντικειμενικό φακό. Ως απο-

τέλεσμα αυτών των βελτιώσεων, το είδωλο έγινε μεγάλο και φωτεινό, και ο σκοτεινός θάλαμος κατέστη εξαιρετικά δημοφιλής, ιδιαίτερα δε μεταξύ των ερασιτεχνών ζωγράφων, οι οποίοι τον χρησιμοποιούσαν για να σκιτσάρουν τοπία. Υπήρχαν μεγάλοι θάλαμοι, σε ανθρώπινο μέγεθος, αλλά και μικροί φορητοί. Στην εποχή μας, αυτή η απλή οπτική συσκευή θεωρείται ως το αρχέτυπο των σύγχρονων φωτογραφικών μηχανών.

Δυστυχώς, το όνομα της *camera obscura* δεν άλλαξε αφότου εφοδιάστηκε με αντικειμενικό σύστημα. Έτσι, μερικές ιστορικές μαρτυρίες εγγείρουν αμφισβήτησεις και διαφωνίες. Έχει γραφεί, λόγου χάριν, ότι οι θάλαμοι με στενωπή χρησιμοποιήθηκαν στα πρώτα πειράματα φωτογραφίας στις δεκαετίες του 1820 και του 1830. Στην προκειμένη περίπτωση, είναι προφανές ότι χρησιμοποιήθηκαν φακοί. Ωστόσο, δεν παρουσιάζεται η ίδια ομοφωνία ως προς την ερμηνεία άλλων μαρτυριών. Για παράδειγμα, το 1611, ανεξάρτητα από τον Γαλιλαίο, ο ολλανδός αστρονόμος Johannes Fabricius (1587-1615 περίπου) ανακάλυψε τις ηλιακές κηλίδες με τη βοήθεια ενός τηλεσκοπίου και ενός σκοτεινού θαλάμου. Δεν μας γεννά ερωτηματικά η χρήση τηλεσκοπίου σε μια τέτοια έρευνα, αλλά αποτε-

λει ανοικτό ζήτημα το πώς κατάφερε ο Fabricius να διακρίνει τις ηλιακές κηλίδες με μια στενωπή.

Ωστόσο, ήδη από το 1609, ο Johannes Kepler (1571-1630) είχε αναφέρει μια μικρή, σκοτεινή κηλίδα την οποία παρατήρησε στις 18 Μαΐου 1607 στο είδωλο του ηλιακού δίσκου που σχηματίστηκε σ' έναν σκοτεινό θάλαμο. Ο Kepler υπέθεσε εσφαλμένα ότι η κηλίδα που είδε ήταν ο Ερμής. Το σφάλμα του πρέπει να θεωρηθεί δικαιολογημένο: η διάμετρος του σκοτεινού μέρους μιας τυπικής ηλιακής κηλίδας ανέρχεται σε 15.000 km περίπου, δηλαδή είναι λίγο μεγαλύτερη από τη διάμετρο της Γης ή της Αφροδίτης. Ο Ερμής έχει περίπου το μισό μέγεθος της Γης, αλλά, όταν διέρχεται μεταξύ Γης και Ήλιου, βρίσκεται δύο φορές πλησιέστερα σ' εμάς απ' όσο η επιφάνεια του Ήλιου. Εκείνη τη στιγμή το γωνιακό μέγεθός του δεν διαφέρει αισθητά από εκείνο μιας ηλιακής κηλίδας (περίπου 0,3'). Είναι, άραγε, δυνατόν να διακρίνουμε ένα αντικείμενο τόσο μικρού γωνιακού μεγέθους χρησιμοποιώντας απλώς μια στενωπή;

Φυσικά, μπορούμε να χρησιμοποίησουμε έναν απλό σκοτεινό θάλαμο για να παρατηρήσουμε τις φάσεις μιας ηλιακής έκλειψης. Ένας από τους συγγραφείς του παρόντος άρθρου παρατήρησε κάποτε μιαν η-

Pinhole people walking



λιακή έκλειψη που έλαβε χώρα σε πρωινές ώρες χρησιμοποιώντας μια μικρή οπή ανοιγμένη με τη μύτη του μολυβιού στο κάλυμμα ενός τετραδίου. Η ποιότητα του ειδώλου ήταν εξαιρετική. Ωστόσο, μια ηλιακή κηλίδα καταλαμβάνει ένα μάλλον μικρό ποσοστό της ηλιακής επιφάνειας. Κατά πάσαν πθανότητα, ο Fabricius πρέπει να χρησιμοποίησε εκτός από τη στενωπή και κάποιο φακό αλλιώς, πώς μπορεί να εξηγηθεί το ότι οι ηλιακές κηλίδες δεν ανακαλύφθηκαν πολύ προτού κατασκευαστούν τα πρώτα τηλεσκόπα;

Ο σκοτεινός θάλαμος με φακό είναι σχεδόν ένα τηλεσκόπο —αποτελεί προϊόν της προηγμένης τεχνολογίας της Αναγέννησης. Διαφέρει πολύ από τον απλό κλασικό σκοτεινό θάλαμο, τον οποίο θα μπορούσε να κατασκευάσει ο καθένας σε οποιονδήποτε αιώνα. Ας δούμε, λοιπόν, τι μπορούμε να παρατηρήσουμε με έναν απλό σκοτεινό θάλαμο.

Πρακτική

Η κατασκευή ενός σκοτεινού θαλάμου δεν παρουσιάζει την παραμικρή δυσκολία. Πάρτε ένα κουτί μήκους 15-30 cm (για παράδειγμα, μια χάρτινη συσκευασία γάλακτος). Με μια καρφίτσα ανοίξτε μια μικρή οπή στον πυθμένα του κουτιού. Κλείστε το άνω άνοιγμα του κουτιού με λαδόχαρτο. Ένα κουτί από πατατάκια με λευκό ημιδιαφανές καπάκι είναι ιδανικό: δεν έχετε παρά να φάτε τα πατατάκια και να τρυπήσετε τον πυθμένα του πέζοντάς τον ελαφρά με μια καρφίτσα.

Σημειώστε ότι η παρατήρηση απαιτεί λαμπερό φως έξω από το κουτί και «σκοτάδι πίσσα» από τη μεριά της οθόνης. Είναι καλύτερο να διεξαγάγετε τα πειράματα σε ένα σκοτεινό θάλαμο με την οθόνη προσεκτικά απομονωμένη από το περιβάλλον φως μιας λαμπερής, ηλιόλουστης ημέρας. Για να επιτύχετε τέτοιες συνθήκες, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα σωλήνα μήκους 30-40 cm κατασκευασμένο από χοντρό χαρτί προσαρμόστε τον σταθερά στην οθόνη και πέστε το πρόσωπό σας στο αντίθετο άκρο του. Εάν το σχήμα του σκοτεινού σας θαλά-

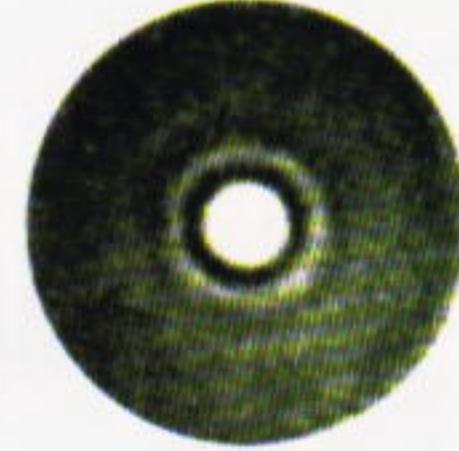
μου είναι κυλινδρικό, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα πανωφόρι: καλύψτε με αυτό το κεφάλι σας και περάστε το θάλαμό σας μέσα από το μανίκι. Για να συγκρίνετε διάφορα «αντικειμενικά συστήματα», ανοίξτε μερικές οπές διαφορετικών διαμέτρων και πειραματιστείτε κρατώντας μία οπή ανοιχτή κάθε φορά και σκεπάζοντας τις υπόλοιπες με μονωτική ταινία.

Έπειτα από αρκετές δοκιμές του σκοτεινού θαλάμου, κανείς διαπιστώνει ότι μια απλή οπή αποτελεί ένα χρήσιμο αντικειμενικό σύστημα. Όλα τα αντικείμενα παράγουν ομοίως ευκρινή ειδώλα, ανεξαρτήτως της απόστασής τους: όσο μειώνονται δε οι διαστάσεις της τρύπας, τόσο βελτιώνεται η ευκρίνεια του ειδώλου. Ωστόσο, όταν η τρύπα γίνει μικρή, τα ειδώλα δεν παρατηρούνται εύκολα, επειδή είναι πολύ αμυδρά. Μολαταύτα, είναι βέβαιο ότι τα σύγχρονα φωτογραφικά φίλμ, λόγω της εξαιρετικής ευαισθησίας τους, θα καταγράψουν το ειδώλο ακόμη και με τη μικρότερη τρύπα.

Γιατί, λοιπόν, δεν κατασκευάζονται φωτογραφικές μηχανές με μια μικροσκοπική οπή αντί του πανάκριβου αντικειμενικού συστήματος; Παρεμπιπτόντως, μερικές συσκευές λειτουργούν βάσει αυτής της αρχής. Για παράδειγμα, οι αστρονόμοι κατασκευάζουν τηλεσκόπα ακτίνων X με τη μορφή μολύβδινων σκοτεινών θαλάμων, διότι δεν υπάρχουν φακοί που να μπορούν να εστιάσουν τις σκληρές ακτίνες X. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι, σε ό,τι αφορά το φωτεινό φάσμα, οι δυνατότητες που μας παρέχει η στενωπή είναι πολύ περιορισμένες, όπως άλλωστε θα υπογραμμιστεί και στην ανάλυση που ακολουθεί.

Θεωρία

Κάθε φωτεινό σημείο ενός μακρινού αντικειμένου στέλνει στη στενωπή μια πρακτικά παράλληλη δέσμη φωτός. Αφού περάσει από την οπή διαμέτρου D , η δέσμη προβάλλει έναν κύκλο ίσης διαμέτρου πάνω στην οθόνη. Έστω F η απόσταση της οπής από την οθόνη. Εάν η γωνιακή απόσταση μεταξύ δύο γει-



Σχήμα 1

τονικών σημείων του αντικειμένου είναι μικρότερη από D/F (μετρημένη σε ακτίνια), οι αντίστοιχοι κύκλοι στην οθόνη επικαλύπτονται μερικώς.

Δεν αποτελεί διόλου απλό ζήτημα το να καθορίσουμε πόσο μεγάλη επικάλυψη μπορεί να έχουν τα ειδώλα δύο γειτονικών σημείων κάποιου αντικειμένου και, εντούτοις, τα σημεία αυτά να αναγνωρίζονται ως διακριτά. Το αποτέλεσμα εξαρτάται από την αντίθεση (κοντράστ) των λεπτομερειών στο ίδιο το αντικείμενο, από τη φωτεινότητα του ειδώλου του, κ.ο.κ. Καταφέρνουμε να διακρίνουμε τις λεπτομέρειες ενός ειδώλου με χαμηλή αντίθεση εάν αυτές δεν επικαλύπτονται καθόλου. Εφόσον οι ηλιακές κηλίδες παράγουν ειδώλα με υψηλή αντίθεση, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι διακρίνονται αρκεί τα κέντρα τους να τα χωρίζει απόσταση όχι μικρότερη από την ακτίνα των κύκλων. Μπορούμε πλέον εύκολα να προσδιορίσουμε το ελάχιστο γωνιακό μέγεθος των διακριτών λεπτομερειών του αντικειμένου, ή, όπως λένε οι οπικοί, το γωνιακό διακριτικό όριο που καθορίζεται από το συγκεκριμένο και πεπερασμένο μέγεθος της δέσμης:

$$a_1 = \frac{D}{2F}. \quad (1)$$

Μέχρι τούδε θεωρήσαμε το φως ως ακτίνες. Πρόκειται για μια προσέγγιση χαρακτηριστική της γεωμετρικής οπτικής. Ωστόσο, το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα, και ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα υφίσταται περίθλαση και συμβολή. Εάν ένα ε-

πίπεδο κύμα (μια δέσμη παράλληλων ακτίνων) προσπέσει στο άνοιγμα ενός οπτικού συστήματος, το μέτωπο κύματος θα καμπυλώθει ελαφρά, με αποτέλεσμα η δέσμη να αποκλίνει. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται «περίθλαση». Οι περιορισμοί που επιβάλλονται στην εφαρμογή των νόμων της γεωμετρικής οπτικής οφείλονται ακριβώς στην περίθλαση. Αφού διέλθουν διά της μικρής οπής του σκοτεινού θαλάμου, οι ακτίνες του φωτός αποκλίνουν, και η εικόνα που σχηματίζεται στην οθόνη χάνει την ευκρίνειά της. Για να καθορίσουμε το βαθμό της θολότητας, πρέπει να ανακαλέσουμε στη μνήμη μας τη χαρακτηριστική για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ιδιότητα της συμβολής με τον όρο συμβολή δεν εννοούμε τίποτε περισσότερο από την πρόσθεση όλων των κυμάτων που φτάνουν σε ένα σημείο της οθόνης προερχόμενα από διαφορετικές πηγές.

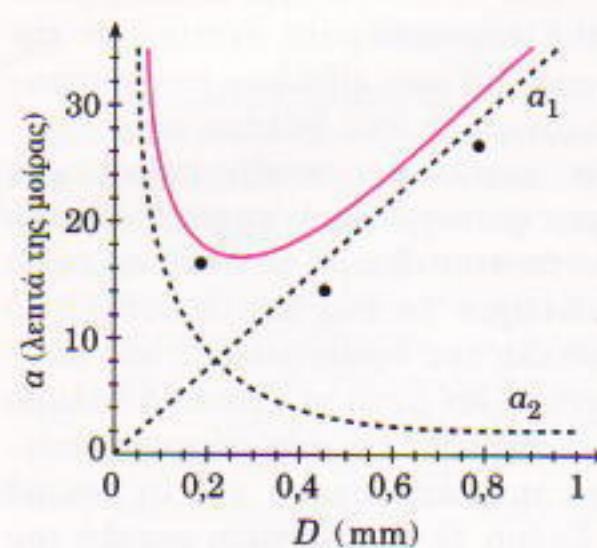
Στην περίπτωσή μας, το ρόλο των ανεξάρτητων πηγών φωτός των αναλαμβάνουν τα απειράριθμα φωτοβολούντα σημεία του ανοίγματος από το οποίο εισέρχεται το φως στο οπτικό σύστημα. Κάθε τέτοιο σημείο εκπέμπει φως προς όλες τις κατευθύνσεις λόγω της περίθλασης (ακριβώς σ' αυτό συνίσταται το περιεχόμενο της αρχής του Huygens). Τα προσπίπτοντα κύματα υπερτίθενται στην οθόνη ανάλογα με τις φάσεις τους. Σε μερικά σημεία της οθόνης συρβάλλουν ενισχυτικά, ενώ αλλού αλληλοαναιρούνται. Ως αποτέλεσμα, μια παράλληλη δέσμη ακτίνων, αφού διέλθει μέσα από την οπή, παράγει μια εικόνα στην οθόνη η οποία αποτελείται από μια λαμπρή κηλίδα κυκλωμένη από*εναλλάξ σκοτεινούς και φωτεινούς δακτυλίους μειούμενης φωτεινότητας (Σχήμα 1). Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι ο σκοτεινός θάλαμος μετασχηματίζει κάθε σημείο ενός φωτεινού αντικειμένου σε μια φωτεινή κηλίδα που την περιβάλλει ένα μόρφωμα δακτυλίων το οποίο θυμίζει ζέβρα.

Συνήθως γίνεται δεκτό ότι είναι δυνατόν να διακρίνουμε τα είδωλα δύο γειτονικών σημείων στην οθόνη εάν τα κέντρα των αντίστοιχων

φωτεινών κηλίδων τα χωρίζει απόσταση όχι μικρότερη από την ακτίνα του πρώτου σκοτεινού δακτυλίου (κριτήριο του Rayleigh). Το γωνιακό μέγεθος a_2 αυτής της ακτίνας, έτσι όπως φαίνεται από το άνοιγμα, μπορεί να υπολογιστεί. Πράγματι, γνωρίζουμε πως η διαφορά ανάμεσα στις αποστάσεις που διανύει το φως για να φτάσει έως οποιοδήποτε σημείο επί του σκοτεινού δακτυλίου από το εγγύτερο και από το απότερο σημείο του αντικειμενικού συστήματος είναι της τάξεως του μήκους κύματος λ . Έτσι, καταλήγουμε ότι $a_2 \equiv \lambda/D$. Ακριβείς υπολογισμοί δίνουν την εξής τιμή για το γωνιακό διακριτικό όριο λόγω περίθλασης:

$$a_2 = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (2)$$

Εφόσον και οι δύο παράγοντες (το γεωμετρικό μέγεθος της δέσμης και η περίθλασή της) δρουν ταυτόχρονα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γωνιακό διακριτικό όριο ενός σκοτεινού θαλάμου ισούται με $a = a_1 + a_2$. Το Σχήμα 2 δείχνει πώς μεταβάλλεται η γωνία αυτή συναρτήσει της διαμέτρου της οπής. Έτσι, η καλύτερη διακριτική ικανότητα για ένα θάλαμο δεδομένου μήκους F επιτυγχάνεται για κάποια βέλτιστη διάμετρο D_{bel} , η οποία αντιστοιχεί στο ελάχιστο γωνιακό διακριτικό όριο a . Η εύρεση της βέλτιστης διαμέτρου δεν παρουσιάζει δυσκολία. Όσοι γνωρίζουν στοιχειώδη λογισμό και παραγώγους θα σκεφτούν αμέσως ότι η a λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της για την τιμή της D ό-



Σχήμα 2

που $da/dD = 0$. Άλλα και από το Σχήμα 2 οι αναγνώστες μπορούν επίσης να διαπιστώσουν ότι το ελάχιστο παρουσιάζεται στο σημείο όπου $a_1 = a_2$. Και οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι. Οδηγούν αμφότεροι στο αποτέλεσμα

$$D_{\text{bel}} = \sqrt{2,4 \lambda F}$$

και

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{2,4 \lambda}{F}}. \quad (3)$$

Άλλα τι μπορούμε να κάνουμε με τον βέλτιστο κλασικό σκοτεινό θάλαμο; Υποθέστε ότι η οπτική παρατήρηση εκτελείται με φως μήκους κύματος $\lambda = 550$ nm. Οι εξισώσεις (3) είναι δυνατόν να γραφούν σε μορφή κατάλληλη για την άμεση εξαγωγή εκτιμήσεων:

$$D_{\text{bel}} = 1,2 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{F}{1 \text{ m}}}$$

και

$$a_{\min} = 4' \cdot \sqrt{\frac{1 \text{ m}}{F}},$$

όπου το F μετριέται σε μέτρα. Ένας θάλαμος με λογικό («ανθρώπινο») μέγεθος ($F = 2-5$ m) έχει γωνιακό διακριτικό όριο μεγαλύτερο (δηλαδή χειρότερο) από εκείνο του υγιούς ανθρώπινου οφθαλμού (περίου 1').

Το αποτέλεσμά μας σημαίνει ότι, χρησιμοποιώντας μια τέτοια συσκευή, δεν θα καταφέρουμε να διακρίνουμε τις ελάχιστες λεπτομέρειες που ξεχωρίζουμε διά γυμνού οφθαλμού (ο οποίος, φυσικά, προστατεύεται από έναν φαιό ηθμό μεγάλης οπτικής πυκνότητας). Το ρόλο ενός τέτοιου ηθμού μπορεί να τον παίξουν τα σύννεφα, ο καπνός μιας μεγάλης πυρκαγιάς ή το παχύ στρώμα αέρα που προστατεύει τα μάτια μας όταν κοιτάζουμε τον Ήλιο κατά την ανατολή ή τη δύση του.

Τα χρονικά μερικών λαών μνημονεύουν ηλιακές κηλίδες που παρατηρήθηκαν διαμέσου των νεφών και έμοιαζαν «ακριβώς σαν νύχια». Κατ' αρχήν, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποκλειστεί. Μολονότι μια μέση

ηλιακή κηλίδα έχει γωνιώδες μέγεθος περίπου $0,3'$, ενίστε εμφανίζονται στον Ήλιο πολύ μεγάλες κηλίδες ή και ομάδες κηλίδων. Για παράδειγμα, αναφέρουμε τη μεγέθους 200.000 km ομάδα ηλιακών κηλίδων η οποία παρατηρήθηκε τον Μάρτιο του 1947. Παρόμοιες ηλιακές κηλίδες εμφανίστηκαν το 1957 και το 1968. Λόγω του μεγάλου γωνιακού μεγέθους τους ($4'$), ήταν εύκολα ορατές για το μάτι, εφόσον προστευόταν βέβαια από φαιό ηθμό μεγάλης οπτικής πυκνότητας.

Προσοχή! Δεν ήταν από λάθος που επιστήσαμε και πάλι την προσοχή στην ανάγκη χρήσης φίλτρου. Ποτέ μην κοιτάζετε τον Ήλιο αν προηγουμένως δεν λάβετε τα αναγκαία προστατευτικά μέτρα για τα μάτια σας! Πρέπει να χρησιμοποιήσετε έναν πολύ σκοτεινό ηθμό· τα γυαλιά ηλίου δεν αρκούν. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε γυαλιά συγκολλητού ή και το επικαλυπτόμενο με λεπτότατο στρώμα αλουμινίου σελοφάν με το οποίο τυλίγονται οι ανθοδέσμες.

Παρότι ακόμη και οι αρχαίοι μπορούσαν να παρατηρούν τις ηλιακές κηλίδες διά γυμνού οφθαλμού, αυτές οι σποραδικές παρατηρήσεις παρέμειναν στη σφαίρα της ανεκδοτολογίας και δεν απέκτησαν επιστημονική βάση. Στους αρχαίους χρόνους δεν υπήρξαν αξιόπιστες και συστηματικές παρατηρήσεις του Ήλιου, ή ίσως τα γραπτά μνημεία περί αυτών να απωλέσθηκαν για πάντα. Το ερώτημα παρουσιάζει καίριο ενδιαφέρον: ήταν δυνατόν να παρατηρηθούν συστηματικά οι ηλιακές κηλίδες με τον κλασικό σκοτεινό θάλαμο από τους, φερ' ειπείν, αρχαίους Έλληνες αστρονόμους; Η εξίσωση ($4'$) μας πληροφορεί ότι, για να έχει κανείς στη διάθεσή του μια συσκευή ανώτερη από το ανθρώπινο μάτι, χρειάζεται ένα σκοτεινό θάλαμο μήκους $20\text{-}30$ m. Ένας σκοτεινός θάλαμος με στενωπή μήκους 100 m καθιστά δυνατή τη συστηματική παρατήρηση των ηλιακών κηλίδων. Να παρέβλεψαν, άραγε, αυτή τη δυνατότητα οι Έλληνες;

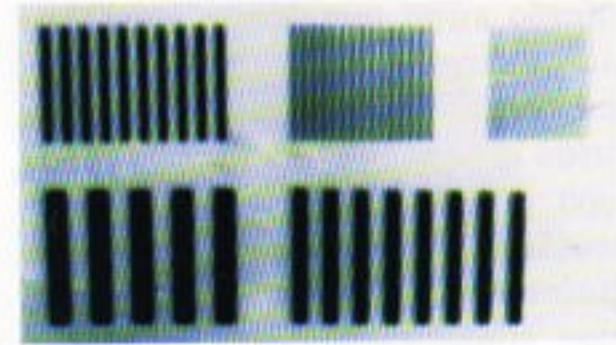
Θυμηθείτε ότι το μέγεθος του ειδώλου αυξάνεται με την απόσταση

από την οπή. Συνεπώς, η φωτεινότητά του θα έπρεπε να μειώνεται. Η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου ανέρχεται σε περίπου $0,5^\circ$ (για την ακρίβεια, ισούται με $32'$), οπότε η διάμετρος του ειδώλου του σε ένα θάλαμο με στενωπή θα ισούται με $F/107$. Έτοι, για ένα θάλαμο μήκους 100 m, το ειδώλο του Ήλιου θα έχει διάμετρο 1 m. Οι ηλιακές ακτίνες θα διέρχονται από μια οπή διαμέτρου $1,2$ cm, πράγμα που σημαίνει ότι ο φωτισμός θα εξασθενήσει κατά πάραγοντα σχεδόν 10.000 . Δεν θα ήταν εξαιρετικά αμυδρό;

Ο προερχόμενος από τον Ήλιο φωτισμός της επιφάνειας της Γης ανέρχεται σε 10^5 lux, οπότε ο φωτισμός του ειδώλου του Ήλιου σε έναν θάλαμο με στενωπή θα ήταν 10 lux. Αυτή η τιμή φαίνεται πολύ μικρή, ωστόσο υπερβαίνει το φωτισμό της γήινης επιφάνειας που προέρχεται από την πανσέληνο. Εφόσον κανείς μπορεί να διακρίνει τα γράμματα σε ένα βιβλίο φωτιζόμενο από την πανσέληνο, αντιλαμβανόμαστε ότι θα αποδεικνύοταν πολύ ευκολότερη η παρατήρηση των ηλιακών κηλίδων με τον σκοτεινό μας θάλαμο, αφού θα γίνονταν ορατές σαν κέρμα διαμέτρου 1 cm πάνω σε έναν ηλιακό δίσκο διαμέτρου 1 m. Τέτοιες λεπτομέρειες δεν παραβλέπονται εύκολα. Πρέπει λοιπόν να συμπεράνουμε ότι θα μπορούσαν, θεωρητικά, οι αρχαίοι Έλληνες να έχουν μελετήσει την επιφάνεια του Ήλιου χρησιμοποιώντας τον κλασικό σκοτεινό θάλαμο.

Πείραμα

Για να ελέγξουμε τα θεωρητικά μας συμπεράσματα σχετικά με την ποιότητα των ειδώλων που σχηματίζονται σε ένα θάλαμο με στενωπή, εκτελέσαμε το εξής πείραμα: σε μια φωτογραφική μηχανή «Zenit» αντικαταστήσαμε το αντικειμενικό σύστημα με ένα λεπτό μεταλλικό φύλλο που έφερε μια οπή από καρφίτσα. Με αυτό το σκοτεινό θάλαμο φωτογραφίσαμε ένα μόρφωμα ειδικά προετοιμασμένο για τη δοκιμή (**Σχήμα 3**). Η απόσταση μεταξύ του τραπεζιού και της οπής ήταν 30 cm, και εκείνη μεταξύ οπής και φίλμ $4,6$



Σχήμα 3

cm. Δοκιμάσαμε τρεις οπές με διαμέτρους 170 , 420 και 840 μm. Το μόρφωμα φωτιζόταν από ένα επιτραπέζιο φωτιστικό, η ευαισθησία του φίλμ ήταν 80 ASA, και ο χρόνος έκθεσης κυμαίνοταν από μερικά δευτερόλεπτα ως και μερικά λεπτά, ανάλογα με τη διάμετρο της οπής. Αφού εκτυπώσαμε τις φωτογραφίες από τα αρνητικά, προσδιορίσαμε το γωνιακό διακριτικό όριο βάσει της ορατότητας των γραμμών του μορφώματος που χρησιμοποιήσαμε στη δοκιμή. Η πειραματικά προσδιορισθείσα τιμή της γωνίας αυτής αποδείχθηκε ακόμη μικρότερη και από τη θεωρητική, γεγονός που ίσως πρέπει να αποδοθεί τόσο στην πολύ υψηλή αντίθεση της αρχικής εικόνας όσο και στη γραμμική της μορφή. Οι γραμμές γίνονται ευκολότερα αντιληπτές παρά τα σημεία σε ένα χτυπητό φόντο. Εν γένει, η απλή θεωρία μας βρίσκεται σε συμφωνία με το πείραμα.

Αφού λοιπόν ελέγξαμε τη θεωρία μας με ένα απλό δοκιμαστικό μόρφωμα, αποφασίσαμε να επιχειρήσουμε την ανίχνευση ηλιακών κηλίδων με ένα θάλαμο με στενωπή. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε στις 19 Μαΐου 1998 στο Αστρονομικό Ινστιτούτο P. και K. Sternberg (ένα κέντρο που υπάγεται στο Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας) με τη γενναιόδωρη βοήθεια του I.F. Nikulin, ερευνητή ανώτερης βαθμίδας του Τμήματος Ηλιακών Ερευνών. Ατυχώς, μας ήταν αδύνατο να κατασκευάσουμε ένα θάλαμο μήκους 100 ή έστω και 50 m. Έτοι, ως κιβώτιο για τον αυτοσχέδιο σκοτεινό μας θάλαμο χρησιμοποιήσαμε τον μήκους 17 m σωλήνα ενός κατακόρυφου ηλιακού τηλεσκοπίου. Το ανακλαστικό τύπου αντικειμενικό

του σύστημα ήταν τοποθετημένο στη βάση του, οπότε ο σωλήνας αποτελούσε απλώς έναν φωτοστεγή χώρο, χωρίς κανένα οπικό στοιχείο. Καλύψαμε το άνοιγμα του σωλήνα με ένα παχύ κάλυμμα, το οποίο έφερε μια μικρή στρογγυλή οπή διαμέτρου 5 mm. Σε ένα φύλλο λευκού χαρτιού τοποθετημένο στο χαμηλότερο άκρο του σωλήνα είδαμε ένα λαμπερό είδωλο του Ήλιου διαμέτρου 16 cm. Στο είδωλο υπήρχαν δύο ευκρινείς ομάδες ηλιακών κηλίδων! Θρίαμβος: το ηλιακό «σκοτεινό τηλεσκόπιο» λειτουργούσε!

Κοιτάζαμε την ηλιακή επιφάνεια και με σύγχρονες οπικές συσκευές, οι οποίες έδειξαν ότι όντως υπήρχαν ηλιακές κηλίδες στον Ήλιο εκείνη την ημέρα. Συγκροτούσαν δύο ομάδες με γωνιακά μεγέθη 15'' και 17'', που τα χώριζε απόσταση 1'. Επιπλέον, υπήρχαν και μερικές μικρές ηλιακές κηλίδες διαμέτρου 3-5''. Μετον σκοτεινό μας θάλαμο δεν καταφέραμε να παρατηρήσουμε τις μικρές ηλιακές κηλίδες, αν και δύο μεγάλες κηλίδες (εντελώς κανονικές για τον Ήλιο) παρατηρήθηκαν σαφώς διαχωρισμένες και με εξαιρετική ευκρίνεια. Συνεχίσαμε τις παρατηρήσεις μας επί μερικές ημέρες, παρακολουθώντας την περιστροφή του Ήλιου από την κίνηση των κηλίδων. Οι φωτογραφίες του Σχήμα-



α



β

Σχήμα 4

τος 4 δείχνουν την επιφάνεια του Ήλιου στις 2 Ιουνίου 1998. Η μεν (α) ελήφθη με ένα σύγχρονο ηλιακό τηλεσκόπιο, η δε (β) με το αυτοσχέδιο «σκοτεινό τηλεσκόπιο» μας.

Ο Γαλιλαίος και ο Fabricius ανακάλυψαν ηλιακές κηλίδες μόνο μετά την εφεύρεση του οπικού τηλεσκοπίου, μολονότι, όπως δείξαμε, η ανακάλυψη αυτή θα μπορούσε να είχε πραγματοποιηθεί ήδη από τότε που χτίστηκαν οι πυραμίδες της Αιγύπτου. Ισως αυτή η σκέψη να κεντρίσει τους αναγνώστες μας για να αναζητήσουν δυνατότητες που προσφέρει η εποχή μας και παραμένουν ανεκμετάλλευτες. Παρεμπιπόντως,

όταν ο Fabricius πραγματοποίησε την περίφημη ανακάλυψή του, ήταν μόλις μεγαλύτερος από 20 χρονών.

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- V. Surdin, «Οπική για ουρανοβάμοντες», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.
- M.L. Biermann, «Η τέχνη της φωτογραφίας», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1995.
- A. Leonovich, «Πόσο διαφωτισμένοι είστε;», Ιούλιος/Αύγουστος 1996.
- A. Dozorov, «Είδωλα υψηλής ευκρίνειας», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1998.



Πανόδετο, 284 σελ., 25x16 εκ., 6.400 δρχ.

Ο ΛΥΚΟΣ, Ο ΜΥΝΧΑΟΥΖΕΝ ΚΑΙ Ο NEYTON

40 αστραφτερά κείμενα του περιοδικού Quantum για θέματα Μηχανικής (και όχι μόνο)

Προλογίζει ο Ανδρέας Κασσέτας

«Τα προβλήματα φυσικής τα οποία παρουσιάζονται στα σαράντα κείμενα του βιβλίου είναι όλα πρωτότυπα και ενδεχομένως θα συμβάλουν στην ανανέωση μιας εγχώριας παράδοσης, σύμφωνα με την οποία από τα προβλήματα φυσικής είτε απουσιάζει είτε είναι ιδιαίτερα περιορισμένη η αίσθηση της δροσιάς. Είναι δημος και προβλήματα για την αντιμετώπιση των οποίων θα χρειαστεί μολύβι και χαρτί. Άλλα αυτό σημαίνει ότι η ενασχόληση μαζί τους θα δημιουργήσει στον ενασχολούμενο και μία ακόμη απόλαυση. Εκείνη που πηγάζει από τις δισκολίες τις οποίες αντιμετωπίζει η Σκέψη μας προκειμένου να ανακαλύψει τα κατόλληλα μονοπάτια και στη συνέχεια να αναρριχηθεί στα πιο απόκρημνα σημεία της "γέφυρας", ικανοποίηση ορειβάτη τη στιγμή που έχει φτάσει στην κορυφή.»

ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ιστορίες κβαντικής τρέλας — 3

Γνωριμία με τα εννοιολογικά προβλήματα της κβαντικής φυσικής — της επαναστατικής θεωρίας που ανδρώθηκε στον αιώνα που φεύγει

David Lindley

ΣΤΑ ΔΥΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΜΕΡΗ Ο αναγνώστης είχε την ευκαιρία να γνωρίσει πολλές από τις ιδιόμορφες και παράδοξες όψεις της κβαντικής μηχανικής. Ως αφετηρία για την περιήγησή μας σ' αυτό το παράξενο τοπίο, που δεν παύει να προβληματίζει ακόμη και τους μυημένους, επιλέξαμε το πείραμα EPR για δύο κυρίως λόγους: πρώτον, διότι λόγω μερικών πρόσφατων και επιτυχημένων πειραμάτων τηλεμεταφοράς φωτονίων, καθώς και της διαγραφόμενης προοπτικής για καινοφανείς τεχνολογικές εφαρμογές, το όλο θέμα έχει συγκεντρώσει πάνω του τα φώτα της επικαιρότητας και, δεύτερον και σπουδαιότερο, επειδή μας οδηγεί κατευθείαν στην καρδιά της ασυμφιλίωτης αντίθεσης μεταξύ κβαντικής και κλασικής φυσικής: την κβαντική μη τοπικότητα, η οποία συνδέεται άμεσα και άρρηκτα με τον πιθανοκρατικό χαρακτήρα των κβαντικών φαινομένων. Στη συνέχεια περάσαμε σε ένα φαινόμενο ίσως ακόμη πιο καταπληκτικό. Το πρόβλημα ανίχνευσης μιας υπερευαισθητής βόμβας που έθεσαν οι Elitzur και Vaisman δείχνει ότι η κβαντική φυσική μάς επιτρέπει να ανιχνεύσουμε ένα αντικείμενο ακόμη και χωρίς να αλληλεπιδράσουμε καθόλου μαζί του — τουλάχιστον όχι με τη συνήθη έννοια. Όπως είδαμε ακολούθως, πίσω από τα δύο

αυτά σχεδόν απίστευτα φαινόμενα κρύβεται η αρχή της απροσδιοριστίας, που πρώτος τη διατύπωσε ο W. Heisenberg, ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός και ο πιθανοκρατικός χαρακτήρας της κβαντικής φυσικής. Παρά τις προσπάθειες διατύπωσης εναλλακτικών ερμηνειών της κβαντικής φυσικής — θεωρίες κρυμμένων μεταβλητών, άποψη των πολλών κόσμων, κ.ά.—, η ερμηνεία της Κοπεγχάγης, της οποίας πρωτουργός στάθηκε ο Bohr, παραμένει κυρίαρχη. Ωστόσο, δεν της λείπουν οι λογικές δυσκολίες ή οι αντιφάσεις, οι οποίες αναδεικνύονται με μεγαλύτερη σαφήνεια όταν τίθεται το ζήτημα της μέτρησης. Το περίφημο παράδοξο της γάτας του Schrödinger καταδεικνύει πόσο αβέβαιο είναι το *status* της μετρητικής διαδικασίας στην κβαντική θεωρία. Ανακύπτουν αμέσως δύο κρίσιμα ερωτήματα. Πρώτον, είναι ουσιώδης η ανθρώπινη συνείδηση για την πραγματοποίηση μιας μέτρησης; Και δεύτερον, αν απαντηθεί αρνητικά το προηγούμενο ερώτημα — μόνο μία μικρή μειοψηφία στον κόσμο των φυσικών θα ήταν διατεθειμένη να απαντήσει καταφατικά — τι διακρίνει τη μέτρηση από τις υπόλοιπες κβαντικές διαδικασίες; Άμεσα συναρτημένο με αυτό είναι το ζήτημα της διάκρισης μακροσκοπικό/μικροσκοπικό, καθώς και εκείνο της κβαντικής συνε-

κτικότητας και της άρσης της, η οποία φαίνεται να συνδέεται με την πολυπλοκότητα των μακροσκοπικών συστημάτων. Λοιπόν, ας συνεχίσουμε...

Όλα στη φόρα

Η κβαντική θεωρία «κρύπτεσθαι φιλεί», όμως υπάρχουν τρόποι να φωτίσουμε τα πιο απόκρυφα μυστικά της

Εάν η κβαντική θεωρία όντως περιγράφει σωστά τον κόσμο, η γάτα του Schrödinger δεν μπορεί ποτέ να παρατηρηθεί στην αφύσικη μεικτή κατάσταση όπου είναι μισοζωντανή και μισονεκρή. Αυτό ηχεί ενθαρρυντικά, διότι γνωρίζουμε από την εμπειρία μας ότι οι γάτες δεν είναι απόκοσμα κβαντικά όντα. Τότε, όμως, τι να σημαίνει στην πραγματικότητα η απροσδιόριστη κατάσταση της γάτας του Schrödinger;

Ο Bohr αντιμετώπιζε την κβαντική θεωρία ακολουθώντας απαρεγκλίτως μια θεμελιώδη αρχή: οφείλουμε να συγκεντρώνουμε την προσοχή μας μόνο σε ότι μπορούμε να παρατηρήσουμε. Θεωρούσε μάταιες τις οξύτατες συζητήσεις σχετικά με τη φαινομενικά αδύνατη ή αντιφατική φύση των ενδιάμεσων καταστάσεων, οι οποίες είναι εξ ορισμού μη παρατηρήσιμες. Μια τέτοια προσέγγιση ακούγεται απολύτως λογική, αν εξαιρέσουμε το γεγονός

ότι είναι απολύτως αδύνατο να απαλλαγούμε από αυτές τις παράξενες ενδιάμεσες καταστάσεις. Μολονότι μη παρατηρήσιμες, πρέπει, με κάποια έννοια, να υπάρχουν.

Το 1996, μια ομάδα ερευνητών στο Εθνικό Ινστιτούτο Προτύπων και Τεχνολογίας, στο Μπόουλντερ του Κολοράντο, κατόρθωσαν να δημιουργήσουν ότι αποκάλεσαν ατομική κατάσταση τύπου «γάτας του Schrödinger» —ένα μοναδικό άτομο το οποίο βρισκόταν επί ορισμένο χρόνο σε δύο θέσεις συγχρόνως. Θα μπορούσατε κάλλιστα να πείτε ότι επρόκειτο για ένα άτομο το οποίο βρισκόταν «μισοεδώ και μισοεκεί». Αλλά, σύμφωνα με τους κανόνες, μια τέτοια κατάσταση δεν μπορεί να παρατηρηθεί. Πώς απέδειξαν, λοιπόν, οι ερευνητές ότι είχαν κατόρθωσει να τη δημιουργήσουν;

Ο Chris Monroe και οι συνεργάτες του πήραν ένα μεμονωμένο άτομο βηρυλλίου, απομάκρυναν ένα από τα ηλεκτρόνια του για να σχηματιστεί το αντίστοιχο ίόν, το οποίο και παγίδευσαν με ακτίνες λέιζερ. Κανονικά, το βηρύλλιο έχει τέσσερα ηλεκτρόνια, δύο από τα οποία «περιφέρονται» γύρω από τον πυρήνα στον εξώτατο «φλοιό». Εάν απομακρύνετε ένα από αυτά, τότε στον εξώτατο φλοιό θα απομείνει ένα μοναδικό ηλεκτρόνιο. Όπως ανακαλύφθηκε στη δεκαετία του 1920, τόσο τα ηλεκτρόνια όσο και ο ατομικός πυρήνας έχουν μια ιδιότητα που ονομάζεται σπιν (ή ιδιοστροφορμή). Η κατάσταση του ηλεκτρονίου καλείται «πάνω» ή «κάτω», ανάλογα με το κατά πόσον το σπιν του προσανατολίζεται ομόρροπα ή αντίρροπα προς το σπιν του πυρήνα. Επειδή αμφότερες οι καταστάσεις είναι ισοπίθανες, το εξωτερικό ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε μια κβαντική κατάσταση «μισοπάνω-μισοκάτω».

Οι δύο προαναφερθείσες καταστάσεις του ατόμου, ωστόσο, παρουσιάζουν μια ελαφρά ενεργειακή διαφορά. Χρησιμοποιώντας διαφορετικά λέιζερ, συντονισμένα ακριβώς σε αυτές τις ενέργειες, οι ερευνητές «σκούντησαν» τις δύο καταστάσεις σε αντίθετες κατεύθυνσεις. Η κατάσταση «πάνω» μετατοπίζεται προς τη

μια κατεύθυνση και η «κάτω» προς την άλλη. Έτσι, η ευφυέστατη αυτή διάταξη μετατρέπει την «μισοπάνω-μισοκάτω» κατάσταση του ατόμου σε μια κατάσταση «μισοεδώ-μισοεκεί», όπου τα δύο «μισά» της κβαντικής κατάστασης του ατόμου καθίστανται φυσικώς διαχωρισμένα, καταλήγοντας να απέχουν έως και 80 νανόμετρα το ένα από το άλλο. Δεν πρόκειται, βεβαίως, για τεράστια απόσταση. Πάντως, είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη διάμετρο του ίδιου του ατόμου.

Εφόσον ο Monroe και οι συνεργάτες του αποκλείεται να παρατηρησαν το άτομο και στις δύο θέσεις συγχρόνως, πώς διαπίστωσαν ότι πραγματοποίησαν όντως έναν τέτοιο άθλο; Ιδού η απάντηση. Σκουντώντας κατάλληλα τις δύο καταστάσεις, τις ανάγκασαν να απομακρυνθούν αρχικά η μία από την άλλη και εν συνεχείᾳ να επανέλθουν στην ίδια θέση. Η όλη διαδικασία μεθοδεύτηκε με τέτοιον τρόπο, ώστε στο τέλος της τα δύο «μισά» της κβαντικής κατάστασης του ατόμου να έχουν συνδυαστεί ελαφρώς διαφορετικά απ' ότι αν το άτομο είχε παραμείνει αδιατάρακτο. Αυτή τη μικροσκοπική διαφορά, η οποία συνιστά μέτρο των ξεχωριστών διαδρομών που διήνυσαν το «πάνω» και το «κάτω» μισό, κατόρθωσε να παρατηρήσει η ομάδα του Monroe.

Ωστόσο, αν θέλουμε να ακριβολογούμε, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ομάδα του Monroe ανήγνευσε πραγματικά την κατάσταση τύπου «γάτας του Schrödinger» του ατόμου του βηρυλλίου. Πρόκειται μάλλον για συναγωγή της παρουσίας της εν λόγω κατάστασης από παρατηρήσεις, οι οποίες, όπως αποδείχθηκε, συμφωνούν με τις προβλέψεις της κβαντικής θεωρίας. Πιθανόν να σκεφτείτε ότι εδώ υπάρχει κάποια δόση εξαπάτησης. Θυμηθείτε, όμως, ότι το συγκεκριμένο πείραμα επιχείρησε να καταδείξει την ύπαρξη ενός πράγματος το οποίο, εξ ορισμού, δεν μπορεί να παρατηρηθεί ποτέ —τουλάχιστον όχι με τη συνήθη έννοια της λέξης.

Οι πρόσφατες επιτεύξεις της τεχνολογίας —η ανάπτυξη της ικανό-

τητάς μας να χειριζόμαστε μεμονωμένα άτομα ή ομάδες ατόμων και να τα κρατάμε παγιδευμένα με λέιζερ ή μαγνήτες— κατέστησαν δυνατές και άλλες εντυπωσιακές επιδείξεις θεμελιώδών κβαντικών φαινομένων. Το 1995, μια άλλη ομάδα φυσικών δημιούργησε ότι είναι γνωστό ως συσσωμάτωμα Bose-Einstein. Έψυχαν μια ομάδα μερικών χιλιάδων ατόμων ρουβιδίου σχεδόν στη θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός —για την ακρίβεια, 200 δισεκατομμυριοστά του βαθμού πάνω από αυτήν—, οπότε όλα τα άτομα περιήλθαν σε μια κατάσταση συλλογικής βραδύτατης κίνησης, σαν συνοδεία βαρυποινιτών που σέρνουν τα βήματά τους υπό το βάρος της κοινής αλυσίδας στα πόδια τους —συγκρότησαν ένα ενιαίο σύστημα που περιγράφεται από μία μοναδική κβαντική κατάσταση.

Η ουσία αυτού του επιτεύγματος είναι απλή. Κανονικά, όταν τα άτομα κινούνται διαρκώς πέρα-δώθε, προσκρούοντας το ένα πάνω στο άλλο και ανταλλάσσοντας ενέργεια, καταλαμβάνουν διαφορετικές και διαρκώς μεταβαλλόμενες κβαντικές καταστάσεις. Ωστόσο, ανάμεσα σε όλες τις δυνατές κβαντικές καταστάσεις υπάρχει και μία που ξεχωρίζει, επειδή έχει την απολύτως ελάχιστη ενέργεια. Επομένως, αν κατορθώσουμε με κάποιον τρόπο να αφαιρέσουμε αρκετή ενέργεια από μία ομάδα ατόμων, θα πέσουν όλα σε αυτή τη «θεμελιώδη κατάσταση». Πρόκειται για μια δυνατότητα που την είχαν προβλέψει, ήδη από τη δεκαετία του 1920, ο Αϊνστάιν και ο ινδός φυσικός Bose.

Ωστόσο, πρέπει να προσθέσουμε μία ακόμη λεπτομέρεια: μόνο τα μποζόνια —δηλαδή τα σωματίδια που το σπιν τους λαμβάνει ακέραιες τιμές— μπορούν να υποστούν συμπύκνωση Bose-Einstein. Τα σωματίδια που έχουν ημιακέραιο σπιν ($1/2, 3/2, 5/2, \dots$), τα γνωστά ως φερμίονια, ικανοποιούν την απαγορευτική αρχή του Pauli, η οποία ορίζει ότι δύο ταυτόσημα φερμίονια δεν επιτρέπεται να καταλαμβάνουν ταυτόχρονα την ίδια κβαντική κατάσταση. Μία συλλογή φερμιονίων θα

πρέπει να συμπληρώνει διαφορετικές κβαντικές καταστάσεις, αρχιζόντας από εκείνες που έχουν τη χαμηλότερη τιμή της ενέργειας και προχωρώντας προς υψηλότερες.

Ας σημειώσουμε, παρεμπιπόντως, ότι σ' αυτό οφείλεται και η ύπαρξη των λευκών νάνων. Ένας λευκός νάνος είναι η ψυχόμενη στάχτη ενός άστρου όπως ο δικός μας Ήλιος, το οποίο έχει εξαντλήσει τα πυρηνικά του καύσιμα. Είναι μικροσκοπικός, όχι πολύ μεγαλύτερος από τη Γη, αλλά εξαιρετικά πυκνός, επειδή τα άτομά του —συμπεσμένα από τη βαρύτητα— πλησιάζουν τόσο πολύ αναμεταξύ τους, ώστε όλα τους τα ηλεκτρόνια κινούνται ελεύθερα σε ολόκληρο τον αστρικό πυρήνα. Επειδή τα ηλεκτρόνια ανήκουν στα φερμιόνια, η απαγορευτική αρχή του Pauli εμποδίζει τη βαρύτητα να συρρικνώσει περαιτέρω το άστρο. Ο λευκός νάνος συρρικνώνται μέχρι του σημείου όπου τα ηλεκτρόνια συμπληρώνουν τις διαθέσιμες κβαντικές καταστάσεις όσο το δυνατόν συμπαγέστερα. Η περαιτέρω συρρίκνωση καθίσταται δυνατή μόνο εάν το άστρο έχει τόσο μεγάλη μάζα και τόσο ισχυρή βαρύτητα ώστε τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια να ενώθούν σχηματίζοντας νετρόνια. Άλλα ακόμη και ένας αστέρας νετρονίων γνωρίζει όρια στη συρρίκνωσή του: τα νετρόνια είναι επίσης φερμιόνια, και το μέγεθος ενός αστέρα νετρονίων, όπως ακριβώς και ενός λευκού νάνου, καθορίζεται από τον ανταγωνισμό ανάμεσα στην κβαντική θεωρία και τη βαρύτητα.

Πάντως, τα άτομα του ρουβίδιου είναι μποζόνια, και το πείραμα του 1995 «έπεισε» μια ομάδα τέτοιων ατόμων να απαρνήθουν την ατομικότητά τους και να συμπεριφερθούν ως ενιαίο όλον. Όλα αυτά τα πείραμα —από το συσσωμάτωμα Bose-Einstein και την κατάσταση τύπου γάτας του Schrödinger των ιόντων βηρυλλίου έως τα διαπλεγμένα σωματίδια EPR και το πείραμα της διπλής σχισμής— καταδεικνύουν (με διαφορετικούς τρόπους) πώς μία κβαντική κατάσταση μπορεί να «επιβάλλει την κυριαρχία της» σε μιαν

εκτεταμένη περιοχή του χώρου. Αποτελούν απλώς παραδείγματα της μη τοπικότητας, του κατεξοχήν μη κλασικού χαρακτηριστικού της κβαντικής μηχανικής. Η μη τοπικότητα μπορεί να μην είναι ποτέ παρατηρήσιμη απευθείας, έτσι όπως θα την ήθελε ένας καθαρόαιμος κλασικός φυσικός. Εντούτοις, οι συνέπειές της δεν επιδέχονται αμφισβήτηση. Τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν τα τελευταία χρόνια απέδειξαν, πέραν πάσης αμφιβολίας, ότι η κβαντική μηχανική είναι πράγματι τόσο παράξενη όσο και διαφορετική από την κλασική φυσική.

Παράθηπη ισχύς

Χάρη στις πολλαπλές προσωπικότητές τους, οι κβαντικές καταστάσεις θα μπορούσαν να αποτελέσουν την καρδιά ενός παράλληλου υπεριπολογιστή

Τι θα πρόκειται αν διασταυρώνετε ένα συσσωμάτωμα Bose-Einstein με τη γάτα του Schrödinger; Μήπως μια μεγάλη κρουουλιάρα γάτα; Ή μια γενιά από ταυτόσημα αλλά απροσδιόριστα γατάκια; Ούτε το ένα ούτε το άλλο. Στην πραγματικότητα, θα πρόκειται ένας κβαντικός υπολογιστής. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή.

Ο συμβατικός υπολογιστής είναι μια αναμφισβήτητα κλασική μηχανή. Η λειτουργία του στηρίζεται στο ότι τα ηλεκτρικά ρεύματα δρουν ακριβώς όπως το 0 και το 1 του δυαδικού αριθμητικού συστήματος. Για να εκτελεστούν οι παντοειδείς περίπλοκοι υπολογισμοί και πράξεις, τα 0 και 1 πρέπει να αλληλεπιδράσουν με τρόπους απολύτως προβλέψιμους και αξιόποτους. Εάν μερικά από αυτά τα 0 και τα 1 άρχιζαν να συμπεριφέρονται με απροσδιόριστο, πιθανοκρατούμενο τρόπο, θα είχατε, στη γενική περίπτωση, έναν υπολογιστή που διαπράττει τυχαία σφάλματα.

Άλλα στην κβαντική θεωρία η τυχαιότητα δεν είναι απόλυτη. Ακολουθεί κανόνες. Για παράδειγμα, οι κβαντικές καταστάσεις αλληλεπιδρούν με απολύτως προβλέψιμο τρόπο. Η αδυναμία πρόβλεψης ανα-

κύπτει μόνο όταν πρόκειται για την έκβαση μιας μέτρησης. Φανταστείτε έναν κβαντικό υπολογιστή, όπου οι υπολογισμοί και οι εσωτερικές λειτουργίες πραγματοποιούνται μέσω μιας σειράς απολύτως προβλέψιμων αλληλεπιδράσεων μεταξύ κβαντικών καταστάσεων, αντί κλασικών. Εάν καμία μέτρηση δεν διαταράξει τη λειτουργία του συστήματος —και αυτό είναι ένα μεγάλο εάν, διότι η κάθε είδους τυχαία και ανεξέλεγκτη διαταραχή ισοδυναμεί με μέτρηση—, τόποτε το απρόβλεπτο δεν θα συμβεί. Ο κβαντικός υπολογιστής μπορεί να διεκπεραιώσει τον υπολογισμό με αξιοποστία, ακριβώς όπως και ένας κλασικός υπολογιστής.

Τα στοιχεία λογικής ενός κβαντικού υπολογιστή μπορούν να είναι, για παράδειγμα, η κατάσταση τύπου γάτας του Schrödinger «μισοπάνω-μισοκάτω», και όχι οι καθορισμένες καταστάσεις «πάνω» και «κάτω» που χρησιμοποιεί ο κλασικός υπολογιστής. Επίσης, ο υπολογιστής σας θα έμοιαζε και με συσσωμάτωμα Bose-Einstein, αφού, για να εκτελεστεί ο ποιοδήποτε είδος χρήσιμου ή ενδιαφέροντος υπολογισμού, θα χρειαζόσασταν απίστευτα μεγάλο πλήθος τέτοιων κβαντικών καταστάσεων που να συνεργάζονται συνεκτικά.

Ποίος ο λόγος, όμως, να εμπλακούμε σε τέτοιες περιπέτειες; Επειδή, όπως επισήμανε σαφέστατα ο David Deutsch, του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης, στα μέσα της δεκαετίας του 1980, η χρήση κβαντικών υπολογιστών επιτρέπει ένα είδος παραλληλισμού ανέφικτο και για τον πλέον εξελιγμένο κλασικό υπολογιστή. Στους συνήθεις υπολογιστές, κάθε τμήμα της εσωτερικής λογικής —ανεξαρτήτως αν πρόκειται για ένα απλό 0 ή 1 ή για ολόκληρη αλυσίδα τέτοιων ψηφίων— αναπαριστά μια συγκεκριμένη αριθμητική κατάσταση. Στους κβαντικούς υπολογιστές, όμως, το σπιν ενός ηλεκτρονίου ή η πόλωση ενός φωτονίου —ένα qubit (κβαντικό δυαδικό ψηφίο)— μπορεί να αναπαριστά συγχρόνως δύο καταστάσεις. Μια κατάσταση «μισοπάνω-μισοκάτω» είναι ταυτόχρονα και 0 και 1. Το σπουδαιότερο δε, όταν η εν λόγω

κατάσταση αλληλεπιδρά με άλλες καταστάσεις, στην αλληλεπίδραση συμμετέχουν και τα δύο μέρη της διχασμένης της ταυτότητας. Ο κβαντικός υπολογισμός επιτρέπει στο 0 και το 1 να συμμετάσχουν στο ίδιο βήμα, την ίδια χρονική στιγμή.

Με δύο «μισοπάνω-μισοκάτω» ηλεκτρονιακά σπιν, για παράδειγμα, έχετε στη διάθεσή σας τέσσερις διαφορετικές καταστάσεις —οι οποίες αναπαριστούν τα 00, 01, 10 και 11. Παρομοίως, με μια σειρά δέκα καταστάσεων μπορείτε να αναπαραστήσετε ταυτόχρονα όλους τους αριθμούς από το 0 έως το 1.023 ($2^{10} - 1$). Εκτός αυτού, δύο τέτοιες καταστάσεις είναι δυνατόν να αλληλεπιδράσουν με τέτοιο τρόπο ώστε να παραγάγουν μια ακόμη πιο περιπλοκή τελική κατάσταση, η οποία περιλαμβάνει —και πάλι ταυτόχρονα— τις αναπαραστάσεις όλων των στοιχείων του «πίνακα πολλαπλασιασμού» ο οποίος περιέχει όλα τα δυνατά γινόμενα που σχηματίζονται με τα 1.024 πρώτα στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Για να υπολογίσει τα αποτέλεσματα όλων αυτών των πολλαπλασιασμών, ένας συμβατικός υπολογιστής πρέπει να εκτελέσει περισσότερους από ένα εκατομμύριο ξεχωριστούς υπολογισμούς. Ο κβαντικός υπολογιστής, όμως, καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με ένα άμοχθο βήμα. Και τούτο επειδή εξετάζει ταυτόχρονα όλες τις δυνατότητες.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι κβαντικοί υπολογιστές μάς υπόσχονται τεράστια υπολογιστική ισχύ. Ωστόσο, η εκμετάλλευση της ικανότητάς τους να εκτελούν μαζικούς παράλληλους υπολογισμούς σκοντάφτει σε δύο δυσκολίες. Πρώτον, είναι δύσκολο να αποτρέψουμε την άρση της συνεκτικότητας. Απαιτείται τεράστια προσοχή και προσπάθεια για να δημιουργηθούν στο εργαστήριο συσσωματώματα Bose-Einstein και ατομικές καταστάσεις τύπου γάτας του Schrödinger. Και η ελάχιστη τυχαία διαταραχή ή αλληλεπίδραση θα καταστρέψει το ευαισθητό μείγμα των συνυπαρχουσών κβαντικών καταστάσεων, μετατρέποντάς το σε μια κλασική κατάστα-

ση. Επομένως, η διατήρηση της ακεραιότητας ενός κβαντικού υπολογιστή θα αποδεικνύοταν απίστευτα δύσκολη. Θα χρειαζόταν να δημιουργηθεί και να συντηρηθεί μια ολόκληρη διάταξη σύνθετων και, το σημαντικότερο, διαφορετικών καταστάσεων, στην οποία θα έπρεπε να επιβάλουμε να αλληλεπιδρά με προδιαγεγραμμένο τρόπο. (Αντίθετα, σε ένα συσσωμάτωμα Bose-Einstein όλες οι καταστάσεις είναι ταυτόσημες. Πρόκειται δηλαδή για κάτι ανάλογο με όνταν κβαντικό υπολογιστή του οποίου όλα τα *bit* έχουν τεθεί μονίμως στην κατάσταση μηδέν.)

Το δεύτερο πρόβλημα είναι πιο λεπτό. Με ποιον τρόπο θα πάρουμε το αποτέλεσμα οποιουδήποτε υπολογισμού από όνταν κβαντικό υπολογιστή; Σε όποια μέτρηση και αν υποβάλλετε την κβαντική κατάσταση που αναπαριστά —για παράδειγμα, τον «πίνακα πολλαπλασιασμού»—, ο υπολογιστής θα αποκριθεί με μια μόνο απάντηση από τις 1.024×1.024 δυνατές απαντήσεις που θα μπορούσε να εμφανιστούν. Όλες οι υπόλοιπες χάνονται. Φαίνεται, λοιπόν, ότι διαφεύδεται η προσδοκία που μας οδήγησε αρχικά στην προσπάθεια να πραγματοποιήσουμε τον ταυτόχρονο κβαντικό υπολογισμό.

Η βαθύτερη σημασία της διαπίστωσης αυτής έγκειται στο ότι οι κβαντικοί υπολογιστές ενδέχεται να αποδειχθούν αποτελεσματικότεροι σε ορισμένα είδη υπολογισμών παρά σε κάποια άλλα. Για παράδειγμα, το πρόβλημα της ανάλυσης ενός μεγάλου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει αποκτήσει ιδιαίτερη σημασία για όσους ασχολούνται με τη δημιουργία και την αποκρυπτογράφηση κωδίκων. Η ασφάλεια πολλών συστημάτων κρυπτογράφησης εξαρτάται αποκλειστικά από τη μεγάλη δυσκολία που παρουσιάζει η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων για έναν συμβατικό υπολογιστή, ο οποίος πρέπει να «κοπάσει» πολύ για να ελέγξει μία προς μία όλες τις δυνατότητες έως ότου επιτύχει τον σωστό συνδυασμό. Ωστόσο, ένας κβαντικός υπολογιστής μπορεί, κατ' αρχήν, να ελέγξει όλες τις δυνατότητες διαμιάς. Το σπου-

δαιότερο δε, στο πρόβλημα αυτό μας ενδιαφέρει αποκλειστικά να πάρουμε μία μόνο από όλες τις δυνατές (αλλά, εκτός από μία, λανθασμένες) απαντήσεις —πράγμα που θα μπορούσε να επιτευχθεί με μια κατάλληλα επιλεγμένη μέτρηση της κατάστασης.

Καθοδηγούμενος από παρόμοιες σκέψεις, ο Lov Grover, των Εργαστηρίων Bell ανέπτυξε πρόσφατα έναν αλγόριθμο ο οποίος, από έναν κατάλογο τυχαία διατεταγμένων καταχωρίσεων, θα μπορούσε να επλέξει την επιθυμητή σε χρόνο ανάλογο προς την τετραγωνική ρίζα του πλήθους των καταχωρίσεων. Οι συμβατικές τεχνικές αναζήτησης απαιτούν χρόνο ανάλογο του πλήθους αυτού.

Πώς θα μπορούσατε να κατασκευάσετε, στην πράξη, έναν κβαντικό υπολογιστή; Αρκετοί ερευνητές είχαν πρόσφατα την έμπνευση να αξιοποιήσουν τις χωριστές καταστάσεις του ατομικού σπιν μέσα στα μόρια. Τα μεμονωμένα πρωτόνια —δηλαδή οι πυρήνες των ατόμων υδρογόνου— έχουν σπιν που είναι δυνατόν να προσανατολίζεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω σε σχέση με το σπιν κάποιων άλλων πυρήνων ενός μορίου. Παλμοί ραδιοκυμάτων κατάλληλης συχνότητας μπορούν να προκαλέσουν την αναστροφή αυτών των σπιν —την μετάπτωση από την κατάσταση «πάνω» στην «κάτω» και αντίστροφα. Θα μπορούσαμε λοιπόν να εκμεταλλευθούμε τις καθ' όλα προβλέψιμες αλληλεπιδράσεις των διαφόρων πυρήνων μέσα στο ίδιο μόριο ως βάση ενός κβαντικού υπολογιστή: τα σπιν θα αποθήκευαν την πληροφορία, και τα ραδιοκύματα θα τα υποχρέωναν σε αναστροφές κατάλληλα σχεδιασμένες ώστε να εκτελεστούν οι υπολογισμοί σας.

Ήδη κατέχουμε μέρος της απαρίτητης τεχνολογίας. Η απεικόνιση μέσω πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού, η χρήση της οποίας είναι πλέον διαδεδομένη στην ιατρική, χαρτογραφεί τη θέση των ατόμων μετρώντας τα σπιν τους. Θα μπορούσαμε να φανταστούμε τον κεντρικό επεξεργαστή ενός κβαντι-

κού υπολογιστή —αντίστοιχος με το τοπ Pentium του προσωπικού σας υπολογιστή—, που δεν θα ήταν πάρα ένα δοχείο γεράτο με το κατάλληλο υγρό, του οποίου τα μόρια θα περιελάμβαναν μια ποικιλία καταστάσεων του ατομικού σπιν ειδικά επιλεγμένων ώστε να εκτελούν ένα καθορισμένο έργο. Μια άλλη δυνατότητα είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα τοπ πυριτίου εγχαραγμένο με κουκκίδες και με προσμίξεις ατόμων των οποίων τα σπιν θα αποτελούσαν τα *qubit* του υπολογιστή. Αυτό το τοπ δεν θα το διαρρέουν ηλεκτρικά ρεύματα· αντ' αυτού, τα σπιν θα σκουντούν το ένα το άλλο, από κουκκίδα σε κουκκίδα, διαβιβάζοντας το μήνυμά τους σύμφωνα με τις επιταγές της κβαντικής λογικής.

Χορδές και ανωμαλίες

Για να δείτε πώσω από τη θολερότητα της Μεγάλης Έκρηξης, θα πρέπει να παλέψετε με μερικές μανύσμενες απειρίες

Οι παραδοξότητες της κβαντικής θεωρίας έχουν, ως επί το πλείστον, μικρές πρακτικές συνέπειες στην κοσμολογία. Η βαρύτητα διέπει τη διαστολή του Σύμπαντος, το σχηματισμό των γαλαξιών και τον τρόπο με τον οποίο η ύλη συμπυκνώνεται σχηματίζοντας πλανήτες. Και η βαρύτητα, όπως περιγράφεται από τη γενική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, ανήκει κατεξοχήν στο χώρο της κλασικής φυσικής. Η σχετικότητα δέχεται ότι η μάζα και η ενέργεια είναι επ' άπειρον διαιρετές και ότι η γεωμετρία του χώρου και του χρόνου παραμένει λεια και συνεχής έως και τις πο μικρές κλίμακες. Υπάρχει, όμως, μία στιγμή της ιστορίας του Σύμπαντος όπου είναι αδύνατο να αγνοήσουμε την κβαντική θεωρία· πρόκειται για την απαρχή του Σύμπαντος, για αυτή καθαυτή τη Μεγάλη Έκρηξη.

Αυτό οφείλεται σε ένα πρόβλημα που αναφύεται στην κλασική ερμηνεία της Μεγάλης Έκρηξης. Συγκεκριμένα, εννοούμε το γεγονός ότι η γενική σχετικότητα μας επιβάλλει να θεωρούμε τη Μεγάλη Έκρηξη ως «ανωμαλία» —με άλλα λόγια, ως μία στιγμή απειροστής διάρκειας, η

οποία καταλαμβάνει έναν απείρως μικρό όγκο στο χώρο, αλλά που περιέχει άπειρη πυκνότητα ενέργειας.

Οι ανωμαλίες εμπνέουν πάντοτε ανησυχία. Και τούτο επειδή τείνουν να στερήσουν κάθε νόημα από τις μαθηματικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για να τις περιγράψουν. Τα ευχάριστα νέα είναι ότι η κβαντική θεωρία φαίνεται να μην επιτρέπει ανωμαλίες όπως εκείνη της Μεγάλης Έκρηξης. Άλλα υπάρχουν και τα δυσάρεστα: ουδείς γνωρίζει με τι θα τις αντικαταστήσει.

Οποτεδήποτε εμφανίζονται κλασικές ανωμαλίες, η κβαντική θεωρία τείνει να τις εξαλείφει. Για παράδειγμα, η κλασική θεωρία περιγράφει τα στοιχειώδη σωματίδια ως αντικείμενα που η μάζα και το φορτίο τους είναι συγκεντρωμένη σε ένα αδιάσταστο μαθηματικό σημείο. Η κβαντική θεωρία, ωστόσο, έρχεται να τους προσδώσει ορισμένο μέγεθος. Και τούτο επειδή τα κβαντικά σωματίδια μπορεί να ιδωθούν και ως κύματα, στα οποία αντιστοιχεί κάποιο μήκος κύματος.

Μια αξιοσημείωτη συνέπεια αυτού του γεγονότος υπήρξε η κεφαλαιώδης ανακάλυψη που πραγματοποίησε ο Stephen Hawking το 1974, όταν αντιλήφθηκε ότι οι μάυρες τρύπες «δεν είναι απολύτως μαύρες». Σύμφωνα με τη σχετικότητα, η μάυρη τρύπα είναι μια περιοχή του χώρου με τόσο ισχυρή βαρύτητα ώστε τίποτε, ούτε καν το φως, δεν μπορεί να διαφύγει. Ο Hawking, όμως, συνέλαβε την ιδέα ότι η αρχή της απροσδιοριστίας καθιστά δύσκολη τη διαπίστωση του κατά πόσον ένα κβαντικό σωματίδιο βρίσκεται εντός ή εκτός μιας μαύρης τρύπας. Έτοι, σε αδρές γραμμές, απέδειξε ότι μια μαύρη τρύπα μπορεί να «εκπέμπει» σωματίδια με κβαντικό μήκος κύματος, της τάξεως της ακτίνας της μαύρης τρύπας.

Από πρακτική άποψη, η ακτινοβολία Hawking δεν συνεπάγεται σημαντικές τροποποιήσεις στους υπολογισμούς των περισσότερων αστροφυσικών: μια μαύρη τρύπα ίσης μάζας με τον Ήλιο θα έχει ακτίνα της τάξεως του 1 χιλιομέτρου και θα εκπέμπει σωματίδια με θερμοκρασία

μικρότερη του εκατομμυριοστού του βαθμού Kelvin. Η μεγάλη αξία της ανακάλυψης του Hawking για τη φυσική έγκειται στο ότι μετέτρεψε το αδιαπέραστο φράγμα που είχε ορθώσει η σχετικότητα γύρω από τη μαύρη τρύπα σε ασαφές, πορώδες, κβαντικό φράγμα.

Με τον ίδιο τρόπο, η κβαντική θεωρία θα αντικαταστήσει τη σαφώς ορισμένη ανωμαλία της Μεγάλης Έκρηξης με μια ασαφή «κηλίδα». Αρκεί να βάλετε τα κοσμολογικά ρολόγια να τρέχουν προς τα πίσω, και θα έρθει κάποια στιγμή που η κλασική θεωρία απαιτεί τα σωματίδια να περιορίζονται σε χώρο μικρότερο από όσο επιτρέπει η αρχή της απροσδιοριστίας. Η κβαντική θεωρία εγείρει ένα παραβάν γύρω απ' ότι διαφορετικά θα ήταν μια γυμνή ανωμαλία, το οποίο την προστατεύει από τα αδιάκριτα βλέμματα. Για να δούμε πώσω από αυτό το παραβάν —άρα για να κατανοήσουμε πώς αναδύθηκε από αυτό το Σύμπαν—, χρειαζόμαστε μια θεωρία που να ενοποιεί τις κβαντικές αρχές με την κλασική γενική σχετικότητα. Έως σήμερα, όμως, κανένας δεν κατόρθωσε να ανακαλύψει πώς μπορεί να επιτευχθεί μια τέτοια ενοποίηση.

Το πρόβλημα έγκειται στους απειρισμούς. Στη δεκαετία του 1940, οι φυσικοί προσέκρουσαν σε ένα φαινομενικά αξεπέραστο εμπόδιο καθώς προσπαθούσαν να αναπτύξουν μια θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής —της κβαντικής εκδοχής της κλασικής θεωρίας του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό. Όσο παραμένουμε στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής, η δύναμη μεταξύ δύο φορτισμένων σωματίδιων υπολογίζεται ευκολότατα: παίρνουμε τις τιμές των δύο φορτίων και της απόστασης που τα χωρίζει, τις εισάγουμε σε έναν απλό τύπο και βρίσκουμε αμέσως την απάντηση. Όμως η κβαντική εκδοχή αυτού του υπολογισμού αποδείχθηκε επαχθής, διότι ο χώρος μεταξύ των δύο φορτίων δεν είναι πλέον τελείως άδειος. Απλούστατα, δεν μπορεί να υπάρχει αληθινό κενό επειδή η ασάφεια που εισάγει η αρχή της απροσδιοριστίας επιτρέπει την

ακατάπαυστη δημιουργία και καταστροφή ενέργειας και σωματίδιων.

Αυτή η «πολύβουη» δραστηριότητα έχει μερικές σημαντικές συνέπειες. Το ηλεκτρικό πεδίο κοντά σε ένα ηλεκτρόνιο, για παράδειγμα, επιδρά στα σωματίδια που αναδύονται από το κβαντικό κενό, έλκει τα θετικά και απωθεί τα αρνητικά. Κατά συνέπεια, το κενό «προασπίζει» το φορτίο του ηλεκτρονίου. Δυστυχώς, η προάσπιση αυτή φαίνεται να απαιτεί μια άπειρη διόρθωση στο φορτίο του ηλεκτρονίου. Τρεις φυσικοί —ο Julian Schwinger, ο Sinitiro Tomonaga και ο Richard Feynman— ανακάλυψαν, το 1948, έναν τρόπο για να ξεπεράσουν αυτό το πρόβλημα με μια μέθοδο η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί είτε ως μεγαλοφυής έμπνευση είτε ως δόλια υπεκφυγή. Ξεκινάμε, λοιπόν, με ένα άπειρο «γυμνό» φορτίο, κάνουμε μια άπειρη διόρθωση έτσι ώστε να καταλήξουμε σε ένα ηλεκτρικό φορτίο πεπερασμένης τιμής, και κατόπιν συνεχίζουμε σαν να μην τρέχει απολύτως τίποτε. Όπως απέδειξαν, μία μόνο άπειρη αφαίρεση αρκούσε για να λύσει το πρόβλημα, έτσι ώστε όλοι οι περαιτέρω υπολογισμοί να γίνονται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Η μέθοδος αυτή ονομάστηκε «επανακανονικοποίηση».

Δυστυχώς, όμως, η επανακανονικοποίηση αποτυγχάνει στη βαρύτητα. Μόλις προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας, από το κβαντικό κενό «ξεπετάγονται» απειρισμοί που αντιστέκονται σε κάθε προσπάθεια εξάλειψής τους. Λόγω της ισοδυναμίας ενέργειας και μάζας, η ενέργεια της ίδιας της βαρυτικής έλξης παράγει βαρύτητα. Έτσι, ανακύπτουν νέοι απειρισμοί σε κάθε στάδιο ενός κβαντικού βαρυτικού υπολογισμού, με αποτέλεσμα να καθίσταται αδύνατη η εξάλειψή τους. Μία μόνο αφαίρεση δεν αρκεί για να κάνει πεπερασμένα τα αποτελέσματα. Σε κάθε βήμα του υπολογισμού σας, πρέπει να απαλλάσσεστε από όλο και νέους απειρισμούς, και, στο τέλος, καταλήγετε σε μια απάντηση που αντίκειται στη λογική. Ουδείς γνωρίζει πώς θα ξεπεραστεί αυτή η δυ-

σαρμονία μεταξύ κβαντικής θεωρίας και βαρύτητας. Στις μέρες μας, μεγάλη δημοτικότητα έχει αποκτήσει η θεωρία των υπερχορδών, κατά την οποία δεν υφίστανται στην πραγματικότητα σωματίδια. Τη θέση τους παίρνουν μικροσκοπικοί παλλόμενοι βρόχοι ενέργειας, δηλαδή οντότητες που ισοδυναμούν με μαθηματικές γραμμές αντί με μαθηματικά σημεία. Τα σωματίδια που ανιχνεύουμε —κουάρκ, φωτόνια, ηλεκτρόνια και λοιπά— αναπαριστούν διαφορετικούς τρόπους ταλάντωσης των βρόχων των υπερχορδών.

Η αντικατάσταση των σωματίδιων από βρόχους μάς απαλλάσσει από τη ανάγκη της επανακανονικοποίησης. Αν η κβαντική ηλεκτροδυναμική παρουσιάζει τις δυσκολίες που περιγράψαμε, αυτό οφείλεται στη σημειακή φύση του ηλεκτρονίου. Αρκεί να αντικαταστήσουμε το σημείο με τις ταλαντώσεις μιας γραμμής, και οι απειρισμοί δεν εμφανίζονται εξαρχής. Επιπλέον, η θεωρία των υπερχορδών περιλαμβάνει έναν τρόπο ταλάντωσης των βρόχων ο οποίος μοιάζει με το «βαρυτόνιο», ένα υποθετικό κβαντικό σωματίδιο που βρίσκεται στην ίδια σχέση με το βαρυτικό πεδίο όπως το φωτόνιο με το ηλεκτρομαγνητικό.

Παρ' όλα αυτά, παραμένουν σημαντικές δυσκολίες. Κατ' αρχάς, ο κόσμος των υπερχορδών έχει δέκα διαστάσεις, και ο μόνος τρόπος με τον οποίο η θεωρία μπορεί να εξηγήσει τον τετραδιάστατο κόσμο στον οποίο ζούμε (τρεις χωρικές συν μία χρονική) είναι να «τυλίξει» τις έξι από τις δέκα διαστάσεις τόσο σφιχτά ώστε να μην τις βλέπουμε. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι οι διαστάσεις δεν τυλίγονται από μόνες τους. Χρειάζεται «να βάλει το χέρι του» και κάποιος θεωρητικός φυσικός.

Επιπλέον, αν και η θεωρία των υπερχορδών βασίζεται σε σωματίδια και αλληλεπιδράσεις, η γενική σχετικότητα συνιστά πρωτίστως μια γεωμετρική και τοπολογική θεωρία. Σε τελική ανάλυση, μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας οφείλει να παράσχει έναν τρόπο οριστικής υπέρβασης αυτής της δυσαρμονίας. Είναι, άραγε, ο χωρόχρονος κατακερματι-

σμένος σε μικρές κβαντικές μονάδες που συνδέονται σύμφωνα με τους δικούς τους νόμους, οι οποίες όμως παράγουν τις φαινομενικά συνεχείς διαστάσεις με τις οποίες μας έχει εξοικειώσει η εμπειρία μας; Πώς πρέπει να εννοήσουμε το χώρο και το χρόνο σε αυτό το θεμελιώδες, ασυνεχές επίπεδο; Και για να επανέλθουμε στο αρχικό μας ερώτημα, από πού προήλθε η Μεγάλη Έκρηξη; Στο φρενήρες κβαντικό κενό ίσως να περιλαμβάνεται και κάποια βαρυτική δραστηριότητα —ενδέχεται ο χώρος και ο χρόνος να σχηματίζονται και να επανασχηματίζονται όπως ο αφρός στην τρικυμισμένη θάλασσα, ή πθανόν να υφίσταται το κβαντικό αντίστοιχο των μαύρων τρυπών, το οποίο όμως δημιουργείται και καταστρέφεται τόσο γρήγορα ώστε να μη γίνεται αντιληπτό. Εν τοιαύτη περιπτώσει, μπορούμε άραγε να αποκλείσουμε ότι ολόκληρο το Σύμπαν είναι τελικά μια απολύτως συνηθισμένη μικρή κβαντική διακύμανση η οποία, από καθαρή τύχη, αναπτύχθηκε λίγο περισσότερο από τις υπόλοιπες και, όπως θα έλεγε κανείς, ξέφυγε από τον έλεγχο; Προς το παρόν, ουδείς γνωρίζει πώς να απαντήσει σε όλα αυτά τα ερωτήματα.

Τα υπόλοιπα αποτελούν Ιστορία

Πώς έγινε τόσο κλασικό το Σύμπαν που γεννήθηκε μέσα στην κβαντική απροσδιοριστία;

Το Σύμπαν φαίνεται ότι γεννήθηκε μέσα από ένα κβαντικό «σκίρτη». Πώς είναι δυνατόν, λοιπόν, να φαίνεται σήμερα τόσο στέρεο και τόσο λογικό; Σας υπενθυμίζουμε ότι ο κβαντικός υπολογιστής καταφέρνει να διατηρηθεί στην εσωτερική κβαντική του κατάσταση ενόσω εκτελεί κάποιον υπολογισμό, και ότι δίνει μια καθορισμένη απάντηση μόνο όταν αποκρίνεται σε μια σωστά σχεδιασμένη μέτρηση. Κάθε φυσική διαδικασία στον κόσμο γενικά πραγματοποιείται με τον ίδιο τρόπο: τα στοιχειώδη αντικείμενα αλληλεπιδρούν σύμφωνα με τους κανόνες της κβαντικής θεωρίας, και

καθίστανται αναγνωρίσιμα μόνο όταν εκτελούμε μια μέτρηση ή μια παρατήρηση. Κάθε κλασικό φαινόμενο στον κόσμο που μας περιβάλλει αποτελεί ουσιαστικά το αποτέλεσμα ενός κβαντικού υπολογισμού που απαντά στην ερώτηση: «Τι κλασικό αντικείμενο είμαι;»

Η ίδια αρχή εφαρμόζεται στις μπάλες του μπλιάρδου που συγκρούονται, στα ωκεάνια κύματα που σπάζουν στην ακτή, στις τεκτονικές πλάκες που κινούνται στην επιφάνεια της Γης, ακόμη και στο ηλιακό φως που προσπίπτει στον πλανήτη μας εδώ και τέσσερα δισεκατομμύρια χρόνια και στο οποίο οφείλεται η ίδια η εμφάνιση της ζωής. Σε κάποιο θεμελιώδες επίπεδο τα πάντα αποτελούνται από κβαντικά συστατικά στοιχεία, ενώ ταυτόχρονα, καθετί που η ύπαρξή του παρατίνεται αρκετά ώστε να το αντιληφθούμε είναι κλασικό. Αυτό ισχύει και για το Σύμπαν στο σύνολό του. Χωρίς μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας δεν γνωρίζουμε πώς ακριβώς προέκυψε από τη Μεγάλη Έκρηξη το Σύμπαν που βλέπουμε γύρω μας. Ωστόσο, το βέβαιο είναι ότι προέκυψε. Εποι, δικαιολογημένα τίθεται το ερώτημα: ποιος ή τι δημιούργησε από τις κβαντικές αρχές το κλασικό νόημα;

Παραδοσιακά και σε συμφωνία με τη γραμμή που χάραξε ο Niels Bohr, τα επιχειρήματα σχετικά με τη φύση της μέτρησης στην κβαντική θεωρία λαμβάνουν ως δεδομένη τη σαφή διάκριση μεταξύ του κβαντικού συστήματος που υποβάλλεται σε μέτρηση και του κλασικού συστήματος που ενεργεί τη μέτρηση. Έχει διατυπωθεί, μάλιστα, και η ακραία άποψη ότι οι μετρήσεις καθίστανται πραγματικές μόνο όταν παρευρίσκεται ένας συνειδητός άνθρωπος για να τις παρατηρήσει. Μια τέτοια άποψη θα σήμαινε ότι ένας ρομποτικός μηχανικός βραχίονας που θα άνοιγε το κιβώτιο όπου παραμένει έγκλειστη η «μισοζωντανή-μισονεκρή» γάτα του Schrödinger θα αδυνατούσε να λύσει το δίλημμα του άτυχου πλάσματος. Το ρομπότ θα έπρεπε να σύρει τη γάτα μπροστά σε έναν συνειδητό παρατη-

ρητή, σε έναν άνθρωπο μόνο τότε θα διευκρινιζόταν οριστικά η πραγματική κατάστασή της.

Μια τέτοια φιλοσοφία προκαλεί δυσκολίες όταν εφαρμόζεται στο Σύμπαν ως ενιαίο όλον. Τα άστρα, οι πλανήτες και οι γαλαξίες είναι κβαντικά συστήματα, όπως και καθετί άλλο. Είναι σωστό, όμως, να φανταζόμαστε ότι ολόκληρο το Σύμπαν παρέμενε σε κατάσταση κοσμικής κβαντικής απροσδιοριστίας μέχρις ότου αποκτήσουν συνείδηση τα ανθρώπινα όντα; Και σε ποιο ακριβώς στάδιο της γένεσης της ανθρώπινης συνείδησης υποχρεώθηκε το Σύμπαν να απεκδυθεί το μανδύα της κβαντικής απροσδιοριστίας και να αποκτήσει σταθερή μορφή; Όταν διατυπώσουμε έτοι το επιχειρήμα, φαίνεται παράλογο από την άλλη, όμως, εάν το Σύμπαν μετέπεσε στην κλασική σταθερότητα προτού εμφανιστούμε εμείς επί σκηνής, τότε τι είδους μετρήσεις ή παρατηρήσεις προκάλεσαν αυτή τη μεταμόρφωση;

Μήπως η απάντηση στο αίνιγμα αυτό θα μπορούσε να είναι η άρση της συνεκτικότητας; Εάν οι κλασικές ιδιότητες μπορεί να αναδυθούν από κβαντικά συστήματα απλώς επειδή οι τυχαίες και ανεξέλεγκτες αλληλεπιδράσεις υπονομεύουν τη συνεκτικότητα που είναι αναγκαία για να εμφανιστεί πραγματικά κβαντική συμπεριφορά, τότε ναι, η κλασική συμπεριφορά θα αναδυόταν αναπόφευκτα καθώς το Σύμπαν εξελίσσεται ως όλον. Πρόκειται για μια ιδέα που δεν μας ξενίζει. Αναλογιστείτε πόσο απίθανο θα ήταν να διατηρήσετε κάτι τόσο τεράστιο όσο το Σύμπαν σε μια αληθινή κβαντική κατάσταση για περισσότερο από ένα απειροελάχιστο κλάσμα του δευτερολέπτου. Πρέπει, λοιπόν, να εντοπίσουμε στην άρση της συνεκτικότητας, την αιτία που κάνει το Σύμπαν και καθετί μέσα σ' αυτό να μας φαίνεται σταθερό και καθορισμένο;

Τούτη η εικόνα ίσως να φαίνεται ελκυστική, όμως δεν μπορεί να θεωρείται ολοκληρωμένη. Όταν συγκρούονται δύο μπάλες μπλιάρδου, τα μαθηματικά που περιγράφουν την άρση της συνεκτικότητας μπο-

ρούν να εφαρμοστούν μόνο εφόσον κάθε μπάλα αποτελεί ένα χωριστό και ανεξάρτητο κβαντικό σύστημα. Εάν, αντίθετα, υφίσταται κάποια προϋπάρχουσα κβαντική σύνδεση μεταξύ τους —μια κβαντική «συνωμοσία», αν προτιμάτε—, τότε η άρση της συνεκτικότητας αποτυγχάνει.

Γεννημένο από ένα μοναδικό κβαντικό γεγονός, το Σύμπαν παρουσιάζεται σε κάποιο βασικό επίπεδο ως ένα μοναδικό διασυνδεδεμένο κβαντικό σύστημα. Δεν υπάρχουν αλληλέπιδράσεις ικανές να επιβάλουν την κλασική σταθερότητα στην κβαντική δίνη. Άπαξ και ένα σύστημα είναι κβαντικό, παρέμενε εσαεί κβαντικό.

Εάν η άρση της συνεκτικότητας δεν αρκεί για να εξηγηθεί η μορφή του Σύμπαντός μας, τι άλλο χρειάζεται; Υπάρχει μια υποψήφια λύση, αν και δεν μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρης. Πρόκειται για μια ιδέα έξοχης απλότητας που στηρίζεται στη διαπίστωση ότι από κάθε σύνθετο σύστημα τείνουν να αναδυθούν αβίαστα σταθερές συλλογικές ιδιότητες. Σκεφτείτε, για παράδειγμα, ένα ποτάμι που ρέει σε μια μαιανδρική κοίτη. Το νερό αποτελεί ουσιαστικά μια μεγάλη συλλογή μορίων, αλλά, αν προσπαθήσετε να αναλύσετε την κίνησή του στο μοριακό επίπεδο, θα περιέλθετε σε αδιέξοδο. Αντί μιας τέτοιας ανάλυσης, χρησιμοποιείτε έννοιες όπως πίεση και ταχύτητα της ροής, τύρβη και στροβιλισμοί. Μολονότι αυτές οι συλλογικές ιδιότητες ξεπηδούν από τη συμπεριφορά των μορίων και των ατόμων ενός ποταμού, είναι χρησιμότερο να τις αντιλαμβανόμαστε ως βασικά χαρακτηριστικά της ροής ρευστών.

Κατ' αναλογία, ίσως περιμένετε ότι από ένα σύνθετο κβαντικό σύστημα θα αναδυθούν αβίαστα ορισμένες συλλογικές ιδιότητες. Μήπως, λοιπόν, αυτό το γεγονός μπορεί να εξηγήσει την τάξη που διαπίστωνται στο Σύμπαν μας; Η κεντρική μας υπόθεση συνίσταται στο ότι είναι δυνατόν να αναδυθούν συλλογικά χαρακτηριστικά με αρκετή α-

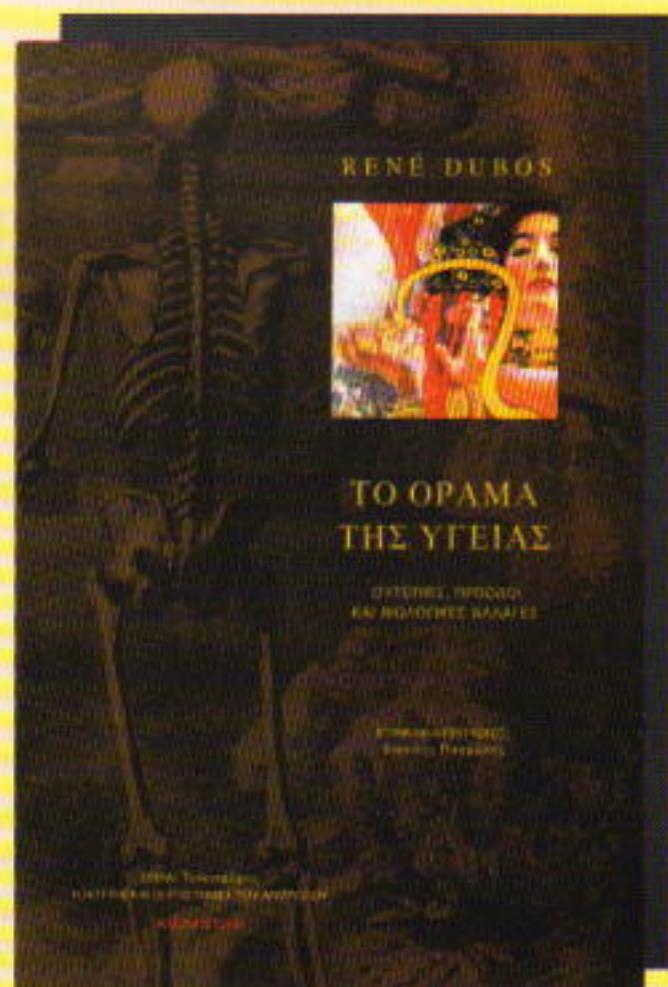
νεξαρτησία, έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστούν σ' αυτά τα επιχειρήματα περί άρσης της συνεκτικότητας. Εάν η υπόθεσή μας ευσταθεί, τότε δικαιολογείται το ότι αρχικά αντιμετωπίσαμε τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά ως ανεξάρτητα.

Υπό τις παρούσες συνθήκες, αυτός είναι ένας ελκυστικά κυκλικός ορισμός, ο οποίος επιτρέπει να αναδυθούν από ένα κβαντικό σύστημα σταθερές κλασικές ιδιότητες με έναν τρόπο που δεν απαιτεί την εισαγωγή νέων φυσικών αρχών. Μπορούμε εύκολα να αποφασίσουμε τι είδους συλλογικά χαρακτηριστικά πρέπει να επλέξουμε ως κλασικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, το νόημά τους θα έπρεπε να παραμένει σταθερό ακόμη και όταν το θεμελιώδες κβαντικό σύστημα βρίσκεται σε αδιάκοπη φρενίτιδα ανεπαισθητών μεταβολών. Θα πρέπει επίσης να ικανοποιούν τους κανόνες της συμβατικής λογικής, του κλασικού νόμου αιτίου και αποτελεσμάτος, τουλάχιστον σε τέτοιο βαθμό ώστε η απόκλιση από τους κανόνες αυτούς να καθίσταται εξαιρετικά απίθανη.

Μια επιτυχημένη περιγραφή της εξέλιξης του Σύμπαντος βάσει ενός συνόλου ιδιοτήτων που ορίζονται με αυτό τον τρόπο καθιερώθηκε να λέγεται «συνεπής ιστορία». Παρά τις εκλεπτυσμένες ιδέες και την πανίσχυρη μαθηματική ανάλυση που έχουν επενδυθεί, προσώρας ελάχιστα μπορεί να πει κανείς με βεβαιότητα πέραν της διαπίστωσης ότι, κατ' αρχήν, υπάρχουν συνεπείς ιστορίες. Αν μη τι άλλο, γνωρίζουμε ότι είναι δυνατόν να περιγράψουμε το κλασικό Σύμπαν χωρίς να ερχόμαστε σε σύγκρουση με την κβαντική θεωρία ή να χρειαζόμαστε κάποια νέα φυσική. Κάπι τέτοιο δεν συνιστά διόλου μικρό επίτευγμα· για να πειστείτε, αρκεί να αναλογιστείτε ότι η διαμάχη σχετικά με το αν μια γάτα είναι ζωντανή ή νεκρή διήρκεσε επί δεκαετίες.

Μολονότι οι ιδέες αυτές μπορεί να είναι ενθαρρυντικές, πόρρω απέχουν από το να εξηγούν συγκεκριμένα γιατί το Σύμπαν μας έχει ετούτη τη μορφή και όχι άλλη. Ωστόσο, πρόκειται για ένα πρόβλημα που δεν αφορά μόνο την κβαντική θεωρία. Ως εκεί όπου φτάνουν οι ατελείς θεωρίες, η ιδέα των αυτοσυνεπών ιστοριών περιστοιχίζεται από εκλεκτή συνοδεία. Ο Νεύτων αναγνώρισε ότι η ολοκαίνουργία του θεωρία της βαρύτητας μπορούσε να μας διαφωτίσει σχετικά με τη μορφή του Σύμπαντος, αντιλήφθηκε όμως επίσης ότι δεν περιείχε κάποια πληροφορία για το πώς ξεκίνησε η όλη διαδικασία. Ο Αϊνστάιν, από την άλλη, αναρωτιόταν εάν οι νόμοι της φυσικής άφησαν στο Θεό κάποια περιθώρια επιλογής στη δημιουργία του Σύμπαντος. Μέχρι στιγμής, η απάντηση φαίνεται να είναι ότι ο Θεός είχε μεγάλα περιθώρια. Η αρχή της απροσδιοριστίας, την οποία ο Αϊνστάιν ποτέ δεν ενστερνίστηκε, λέει ότι δεν μπορείς να έχεις πάντοτε ό,τι θέλεις. Και με την ευρύτερη δυνατή έννοια, ίσως το ίδιο να ισχύει για τα όρια της γνώσης μας σχετικά με το Σύμπαν εντός του οποίου ζούμε. Μπορούμε πάντοτε να θέτουμε ερωτήματα, ίσως όμως να μην μπορούμε πάντοτε να βρίσκουμε απαντήσεις.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



René Dubos

ΤΟ ΟΡΑΜΑ ΤΗΣ ΥΓΕΙΑΣ

Ουτοπίες, πρόδοι και βιολογικές αλλαγές

Στο διάσημο αυτό έργο του, ο διανοούμενος René Dubos, καθηγητής στην Ιατρική Σχολή του Χάρβαρντ, θεωρεί πως η αντίληψη του φυσικού κόσμου που υποστηρίζει την

παραδοσιακή εικόνα της υγείας αποτελεί τμήμα μιας σχεδόν θρησκευτικής ουτοπίας, ενός «μυθολογήματος αισιοδοξίας» το οποίο παραμένει στην ουσία του αφελές.

Κάθε θεωρία του χώρου αυτού κατ' αρχήν απαιτεί την κατανόηση της δαρβίνειας συνεισφοράς (η αρρώστια ήταν πάντα παρούσα στον φυσικό κόσμο ως τα «απαραίτητα λύτρα για την εξέλιξη» και δεν χρειάστηκε κανενός είδους Πτώση για να εισέλθει σ' αυτόν), διμως θα πρέπει συνάμα

να την υπερβεί: ο Dubos αρνείται τον περιορισμό της θεώρησης της αρρώστιας σε ένα φυσικαλιστικό πλαίσιο· επισημαίνει τη διαστολή των ορίων του «φυσικού» για την

περίπτωση του ανθρώπου και τη συνακόλουθη, την ιστορική, κοινωνική και πολιτισμική θεμελίωση της υγείας. Με τρόπο ιδιαίτερα γλαφυρό και παραπέμποντας σε μια

πληθώρα πηγών από ολόκληρο το φάσμα της βιολογίας, των επιστημών του ανθρώπου και της λογοτεχνίας, ο συγγραφέας σκιαγραφεί την υγεία ως έννοια που, αν και στερούμενη σταθερής επιστημονικής συγκρότησης, αποτελεί το είδωλο που σχεδόν αναπόφευκτα δημιουργούν οι κοινωνίες αποζητώντας τη σωματική αποτύπωση του οράματος μιας ειρηνευμένης ζωής.

228 σελ., 25 x 16 εκ., 6.300 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Συμπλήρωμα τετραέδρου

Το όλον είναι καλύτερο από το μέρος

I.F. Sharygin

ΕΝΑ ΚΟΜΨΟ ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΠΟΥ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μερικές φορές για να λύσουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα είναι η αλλαγή του δεδομένου σχήματος σε κάποιο άλλο που μας διευκολύνει περισσότερο.

Για παράδειγμα, αν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα που αφορά τη διάμεσο AM τριγώνου ABC , μπορεί να μας φανεί χρήσιμη η προέκταση της διαμέσου κατά ίσο μήκος έως ένα σημείο D . Τότε, το $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο,

και οι γνωστές προτάσεις γι' αυτό το σχήμα μπορεί να μας δώσουν τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για το αρχικό τρίγωνο.

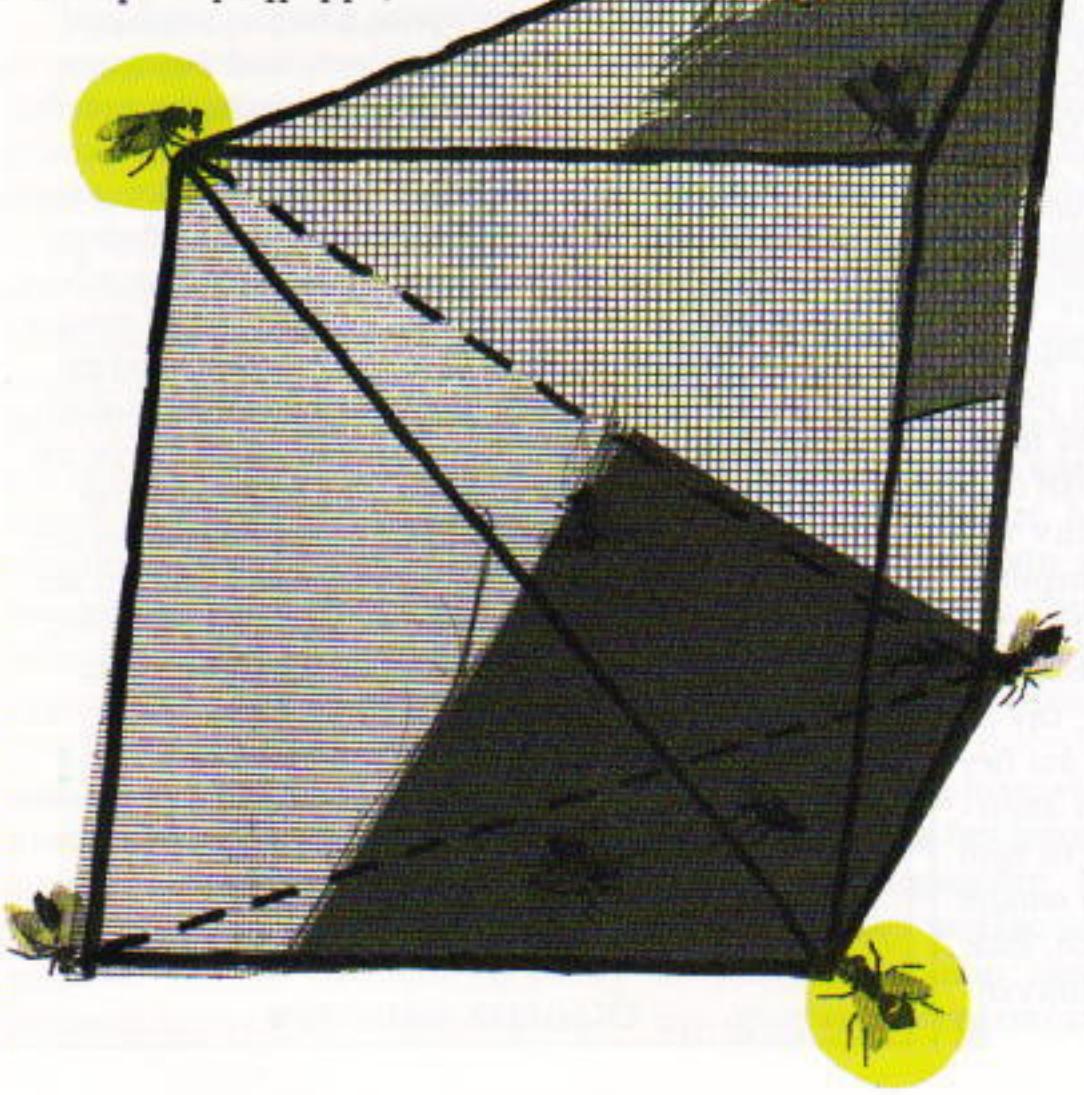
Σε αυτό το άρθρο θα συζητήσουμε για έναν ανάλογο τρόπο επίλυσης προβλημάτων που αφορούν το τετράεδρο (τρι-

γωνική πυραμίδα). Πολλά από αυτά μπορούν να λυθούν με τη «συμπλήρωση» του δεδομένου τετραέδρου από την οποία προκύπτει ένα άλλο πολύεδρο (συνήθως παραλληλεπίπεδο).

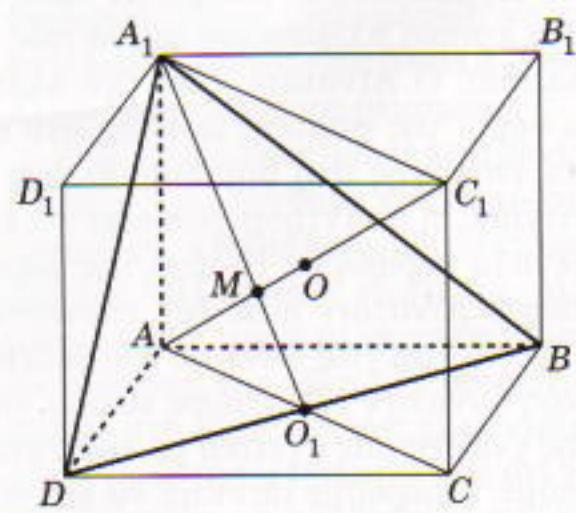
Η πρώτη μέθοδος που θα εξετάσουμε παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Επιλέγουμε τρεις κορυφές του τετραέδρου που ανήκουν στην ίδια έδρα, και φέρουμε από καθεμία ένα επίπεδο παράλληλο προς την απέναντι έδρα. Στο Σχήμα 1, AA_1BD είναι το δεδομένο τετράεδρο, A_1BD η επιλεγμένη έδρα και CDD_1C_1 , BCC_1B_1 και $A_1B_1C_1D_1$ τα παράλληλα επίπεδα που σχεδιάζουμε.

Πρόβλημα 1. Δίδεται η τριγωνική πυραμίδα AA_1BD στην οποία οι ακμές AA_1 , AB και AD είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν μήκη a , b , και c , αντίστοιχα.

(a) Αποδείξτε ότι η κορυφή A της



Εικονογράφηση: Yuri Vaschenko



Σχήμα 1

πυραμίδας, το σημείο τομής των διαμέσων της έδρας A_1BD και το κέντρο της περιγεγραμμένης στη δεδομένη πυραμίδα σφαίρας ανήκουν στην ίδια ευθεία.

(β) Βρείτε την ακτίνα της περιγεγραμμένης στη δεδομένη πυραμίδα σφαίρας.

Συμπληρώνουμε τη δεδομένη πυραμίδα και κατασκευάζουμε ένα (ορθογώνιο!) παραλληλεπίπεδο, όπως στο Σχήμα 1. Τότε η περιγεγραμμένη σφαίρα της δεδομένης πυραμίδας συμπίπτει με την περιγεγραμμένη σφαίρα του παραλληλεπιπέδου. Η ακτίνα της σφαίρας ισούται με το ήμισυ της διαγωνίου του παραλληλεπιπέδου:

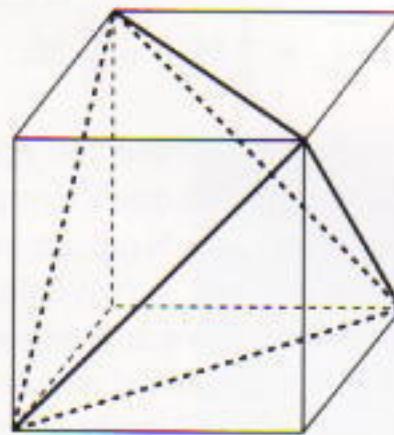
$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}.$$

Αυτή είναι και η απάντηση στο μέρος (β).

Για να αποδείξουμε την πρόταση του μέρους (α) θεωρούμε το ορθογώνιο AA_1C_1C (οι αναγνώστες μπορούν να φτιάξουν ένα ξεχωριστό σχέδιο γι' αυτό). Το κέντρο O της σφαίρας ανήκει στη διαγώνιο AC_1 , και η διάμεσος A_1O_1 του τριγώνου A_1BD τέμνει την AC_1 στο σημείο M . Αν αποδείξουμε ότι $|A_1M|/|MO_1| = 2$, τότε το M είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου A_1BD , από όπου προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Πράγματι, από την ομοιότητα των τριγώνων A_1C_1M και AO_1M έπειται ότι

$$\frac{|A_1M|}{|MO_1|} = \frac{|A_1C_1|}{|AO_1|} = 2.$$

Μια άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά για τη συμπλήρωση του τετραέδρου είναι η δημιουργία ενός παραλληλεπιπέδου ως εξής: Για κάθε ακμή του τετραέδρου κατασκευάζουμε το επίπεδο που την περιέχει και είναι παράλληλο προς την απέναντι ακμή. Αυτά τα επίπεδα σχηματίζουν ένα παραλληλεπίπεδο (Σχήμα 2), στο οποίο οι ακμές του αρχικού τετραέδρου είναι διαγώνιοι των εδρών. (Σε αυτές τις περιπτώσεις, η κατασκευή του σχεδίου είναι ευκολότερη αν ξεκινήσουμε από το



Σχήμα 2

παραλληλεπίπεδο και όχι από το τετράεδρο.)

Πρόβλημα 2. Βρείτε την ακτίνα της σφαίρας που εφάπτεται σε όλες τις ακμές ενός κανονικού τετραέδρου με μήκος ακμής a .

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το Σχήμα 2, το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με τον προηγούμενο τρόπο είναι κύβος με ακμή μήκους $a/\sqrt{2}$. Η εγγεγραμμένη σε αυτό τον κύβο σφαίρα είναι η ζητούμενη, και η ακτίνα της ισούται με $a/2\sqrt{2}$.

Η πρώτη από τις μεθόδους συμπλήρωσης του τετραέδρου είναι ποι εύχρηστη όταν δίδονται οι επίπεδες γωνίες σε μια κορυφή του τετραέδρου (ιδιαίτερα όταν είναι όλες ορθές). Η δεύτερη μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά όταν στο πρόβλημα εμφανίζονται ασύμβατες ακμές του τετραέδρου.

Πρόβλημα 3. Το μήκος δύο ασύμβατων ακμών του τετραέδρου είναι a , δύο άλλων είναι b και των δύο υπολοίπων ακμών c . Βρείτε την απόσταση μεταξύ του κέντρου της εγγεγραμμένης στο δεδομένο τετράεδρο σφαίρας και του κέντρου της σφαίρας που εφάπτεται σε μια έδρα του τετραέδρου και στις προεκτάσεις των υπολοίπων.

Στο Σχήμα 3, $ABCD$ είναι το δεδομένο τετράεδρο, και το αντίστοιχο παραλληλεπίπεδο σχηματίζεται από τα επίπεδα που διέρχονται από κάθε ακμή του τετραέδρου και είναι παράλληλα προς την απέναντι ακμή. Οι διαγώνιες κάθε έδρας του παραλληλεπιπέδου είναι ίσες με τις απέναντι ακμές του τετραέδρου, οι οποίες, από την υπόθεσή μας, είναι ίσες. Έπειται ότι όλες οι έδρες του

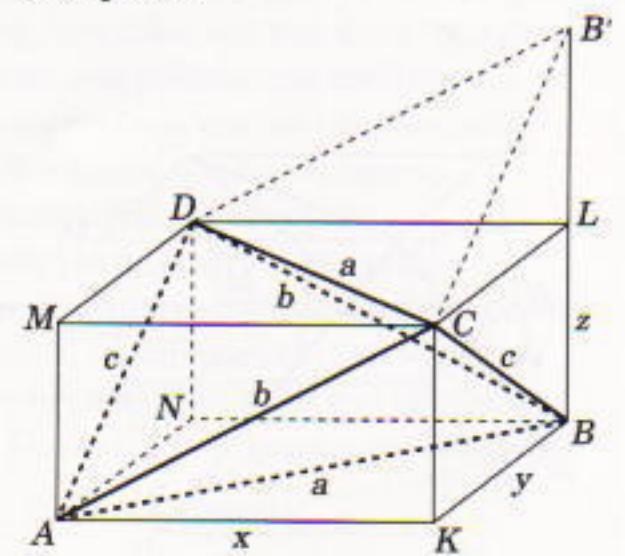
παραλληλεπέδου είναι ορθογώνια, όπως επίσης και το ίδιο το παραλληλεπίπεδο.

Το κέντρο της εγγεγραμμένης στο τετράεδρο $ABCD$ σφαίρας συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλεπέδου (οι αναγνώστες μπορούν να έχουν την ευχαρίστηση να αποδείξουν το γεγονός). Παρομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το κέντρο της σφαίρας που εφάπτεται στην έδρα DCB του τετραέδρου και στις προεκτάσεις των άλλων εδρών συμπίπτει με την κορυφή L του παραλληλεπιπέδου (το σημείο αυτό ισαπέχει από τις έδρες DCB και ACD). Ακολουθεί μια περιγραφή της απόδειξης. Θεωρούμε την πυραμίδα $B'L'LCD$, όπου $|B'L'| = |LB|$, η οποία είναι ίση με την πυραμίδα $BLCD$: τα σημεία A, D, B' και C ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Ομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το L ισαπέχει από τα επίπεδα DCB και ACB καθώς και τα επίπεδα DCB και ADB . Θα δούμε αργότερα ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την επλογή της έδρας DCB .

Επομένως, η ζητούμενη απόσταση ισούται με το ήμισυ της διαγωνίου του παραλληλεπιπέδου. Συμβολίζουμε με x, y, z τα μήκη των ακμών του παραλληλεπιπέδου (βλ. Σχήμα 3). Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = c^2. \end{cases}$$

Αν επλύσουμε το σύστημα, βρίσκουμε ότι



Σχήμα 3

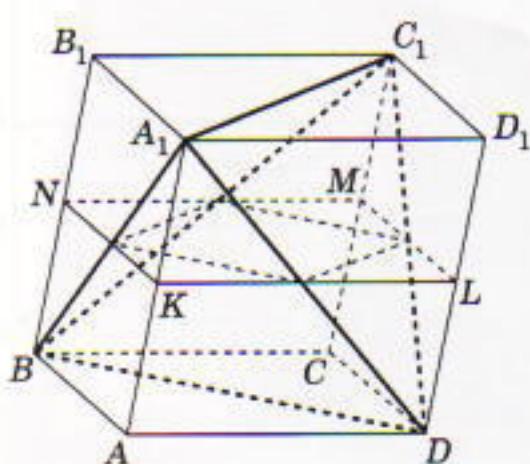
$$\frac{|AL|}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

Πρόβλημα 4. Το εμβαδόν της τομής ενός τετραέδρου από ένα επίπεδο που είναι παράλληλο και ισαπέχει από δύο ασύμβατες ακμές ισούται με S . Η απόσταση μεταξύ αυτών των ασύμβατων ακμών είναι h . Να βρείτε τον όγκο του τετραέδρου.

Έστω $ABCDA_1B_1C_1D_1$ το παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα επίπεδα που διέρχονται από κάθε ακμή του τετραέδρου και είναι παράλληλα προς τις απέναντι ακμές (Σχήμα 4). Τότε, ο όγκος του τετραέδρου A_1BC_1D ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου μείον τους όγκους τεσσάρων τριγωνικών πυραμίδων (η A_1ABD είναι μία από αυτές). Ο όγκος καθεμιάς από τις πυραμίδες ισούται με το $1/6$ του όγκου του παραλληλεπιπέδου (οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν το γεγονός). Επομένως, $V_{\text{τετ}} = V_{\text{παρ}}/3$.

Έστω ότι οι ασύμβατες ακμές που δίδονται στο πρόβλημα είναι οι A_1C_1 και BD και έστω $KLMN$ η τομή του παραλληλεπιπέδου και του επιπέδου που διέρχεται από τα μέσα των AA_1 , BB_1 , CC_1 και DD_1 . Τότε, τα μέσα των πλευρών του παραλληλγράμμου $KLMN$ είναι οι κορυφές της τομής που δίδεται στο πρόβλημα. Συνεπώς, το εμβαδόν του $KLMN$ είναι $2S$ και ισούται με το εμβαδόν της βάσης $ABCD$ του παραλληλεπιπέδου. Μπορούμε πλέον εύκολα να βρούμε τους όγκους του παραλληλεπιπέδου και του τετραέδρου:



Σχήμα 4

$$V_{\text{τετ}} = \frac{1}{3} V_{\text{παρ}} = \frac{2}{3} Sh.$$

Με τη βοήθεια αυτού του προβλήματος μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα τον τύπο του Simpson για τον όγκο μιας ειδικής κατηγορίας πολυέδρων: Έστω ένα πολύεδρο όλες οι κορυφές του οποίου ανήκουν σε δύο παράλληλα επίπεδα που απέχουν h μεταξύ τους. Έστω S_1 το εμβαδόν της έδρας που βρίσκεται στο πρώτο επίπεδο, S_2 το εμβαδόν της έδρας που βρίσκεται στο δεύτερο επίπεδο και S_m το εμβαδόν της τομής του πολυέδρου από ένα επίπεδο που είναι παράλληλο και ισαπέχει από τα δύο δεδομένα επίπεδα. Τότε, το εμβαδόν του δεδομένου πολυέδρου υπολογίζεται από τον τύπο

$$V = \frac{h}{6} (S_1 + S_2 + 4S_m)$$

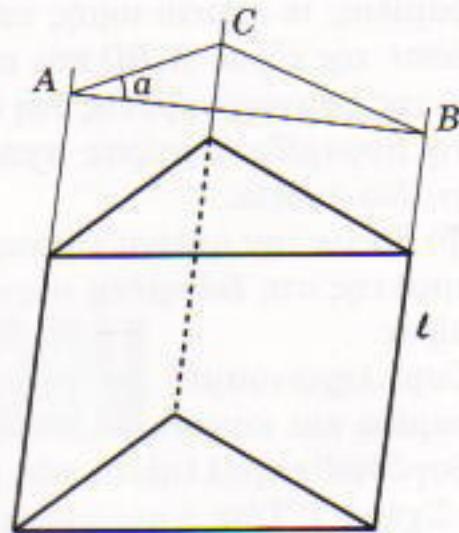
Για να το αποδείξουμε, επαληθεύουμε τον τύπο για το τετράεδρο. Στη συνέχεια, διαμερίζουμε το δεδομένο πολύεδρο σε τετράεδρα οι κορυφές των οποίων ανήκουν στα δεδομένα επίπεδα. Το άθροισμα των εμβαδών των εδρών αυτών των τετραέδρων που βρίσκονται στο πρώτο επίπεδο είναι S_1 , αυτών που βρίσκονται στο δεύτερο είναι S_2 και το άθροισμα των εμβαδών των ενδιάμεσων τομών των τετραέδρων είναι S_m .

Ολοκληρώνουμε με ένα πρόβλημα στο οποίο η συμπλήρωση του τετραέδρου αντί για παραλληλεπίπεδο δημιουργεί ένα τριγωνικό πρίσμα.

Πρόβλημα 5. Έστω ότι τα εμβάδα δύο εδρών του τετραέδρου είναι S_1 και S_2 , η μεταξύ τους δίεδρη γωνία ισούται με θ , τα εμβαδά των δύο άλλων εδρών είναι Q_1 και Q_2 και η μεταξύ τους δίεδρη γωνία ισούται με φ . Αποδείξτε ότι

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \sin \theta = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 \sin \varphi.$$

Πρώτα θα αποδείξουμε το επόμενο ανάλογο του νόμου των συνημιτόνων: Αν το εμβαδόν μιας παράπλευρης έδρας ενός πρίσματος είναι S , τα εμβαδά των δύο άλλων πλευ-



Σχήμα 5

ρών S_1 και S_2 , και η μεταξύ τους δίεδρη γωνία θ , τότε

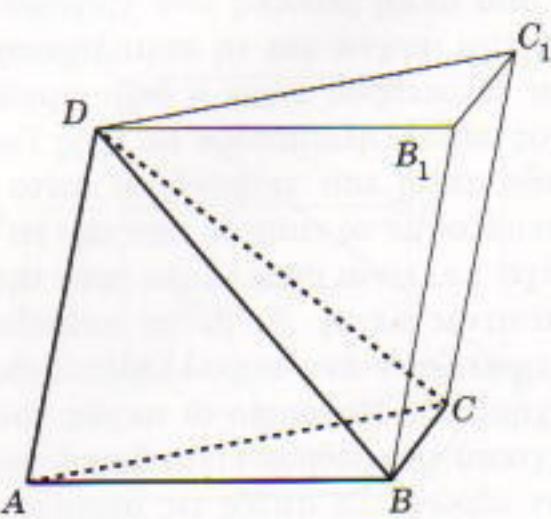
$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \sin \theta = S^2.$$

Πράγματι, έστω ότι το επίπεδο ABC (Σχήμα 5) είναι κάθετο στις παράπλευρες έδρες του πρίσματος και $\angle BAC = \theta$. Ο νόμος των συνημιτόνων για το τρίγωνο ABC δίνει:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \sin \theta.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε αυτή την εξίσωση επί l^2 , όπου l είναι το μήκος της παράπλευρης ακμής του πρίσματος, παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Επιστρέφουμε τώρα στο Πρόβλημα 5. Έστω $ABCD$ το δεδομένο τετράεδρο, $S_{ABD} = S_1$, $S_{ADC} = S_2$, $S_{ABC} = Q_1$, $S_{DBC} = Q_2$, η δίεδρη γωνία στην ακμή AD ισούται με θ και η δίεδρη στην ακμή BC ισούται με φ . Θεωρούμε το τριγωνικό πρίσμα με βάση ABC και παράπλευρη ακμή AD (Σχήμα 6). Συμβολίζουμε με S το



Σχήμα 6

εμβαδόν του παραλληλογράμμου BB_1C_1C . Τότε, βάσει του τύπου που αποδείξαμε προηγουμένως, έχουμε

$$4S_1^2 + 4S_2^2 - 8S_1S_2 \sin\theta = S^2.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το S συναρτήσει του μήκους των ακμών BC και AD και της μεταξύ τους γωνίας ω· ισχύει: $S = |AD| \cdot |BC| \sin\omega$.

Αν θεωρήσουμε ένα άλλο πρίσμα με βάση ACD και παράπλευρη ακμή BC , παίρνουμε

$$4Q_1^2 + 4Q_2^2 - 8Q_1Q_2 \sin\varphi = S^2.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των ακμών ενός τετραέδρου ισούται με το τετραπλάσιο του άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων μεταξύ των μέσων των ασύμβατων ακμών του.

2. Δίδεται το τετράεδρο $ABCD$. Αποδείξτε ότι οι ακμές AD και BC είναι κάθετες μεταξύ τους αν και μόνο αν ισχύει η επόμενη ισότητα:

$$|AB|^2 + |DC|^2 = |AC|^2 + |DB|^2.$$

3. Το μήκος δύο απέναντι ακμών ενός τετραέδρου είναι a , δύο άλλων απέναντι ακμών είναι b , και των δύο υπολοίπων c . Βρείτε

- (a) τον όγκο του τετραέδρου,
- (b) την ακτίνα της περιγεγραμμένης σε αυτό σφαίρας.

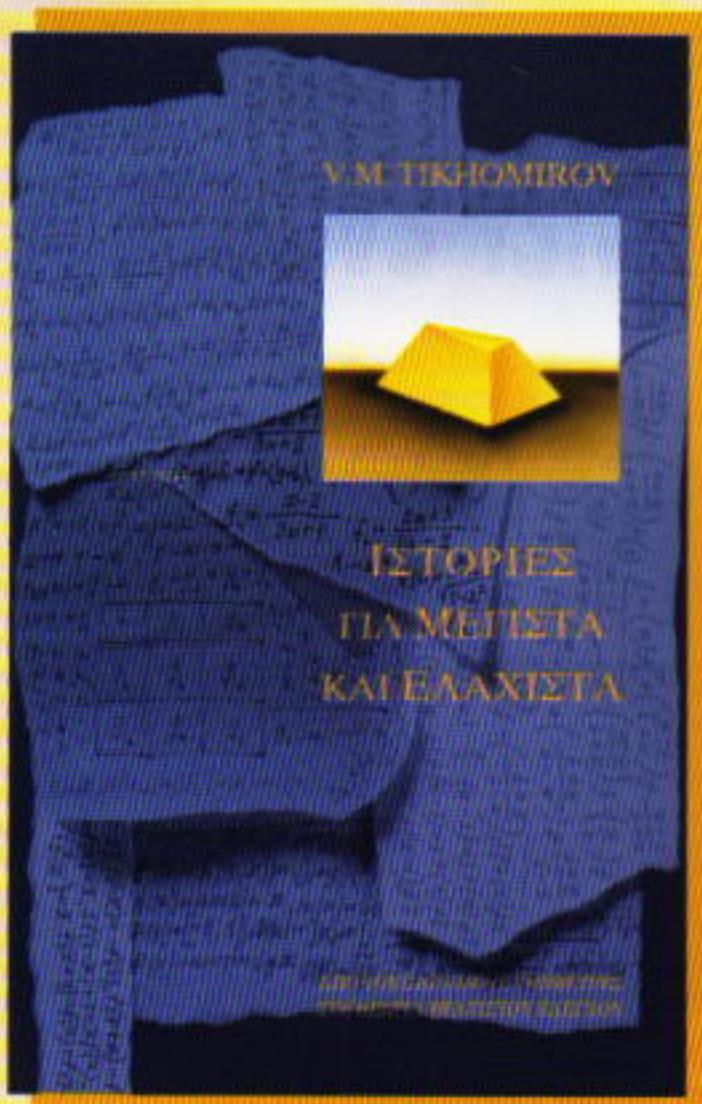
4. Τα μήκη δύο απέναντι ακμών ενός τετραέδρου είναι a και a_1 , και η μεταξύ τους γωνία θ . Τα μήκη δύο άλλων απέναντι ακμών και η μεταξύ τους γωνία είναι, αντίστοιχα, b , b_1 και φ , και τα μήκη των δύο υπόλοιπων ακμών και η μεταξύ τους γωνία είναι c , c_1 και ω (με $\theta, \varphi, \omega \leq \pi/2$).

(a) Αποδείξτε ότι ένας από τους τρεις αριθμούς $aa_1 \sin\theta$, $bb_1 \sin\varphi$ και $cc_1 \sin\omega$ ισούται με το άθροισμα των άλλων δύο.

(b) Υπολογίστε τις γωνίες θ , φ και ω , συναρτήσει των a , a_1 , b , b_1 , c , c_1 .

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66**

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



V.M. Tikhomirov

ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

Από τους αρχαίους γεωμέτρες στη θεωρία βέλτιστου ελέγχου

Οι Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα είναι ένα βιβλίο που θα ενθουσιάσει πάθε λάτρη των μαθηματικών. Γραμμένο πρωτίστως για τους μαθητές των τελευταίων τάξεων της μέσης εκπαίδευσης, αποτελεί μια θαυμάσια και εξαιρετικά βατή εισαγωγή στο πεδίο εκείνο των μαθηματικών που ασχολείται με τα προβλήματα ακροτάτων, και το οποίο είναι γνωστό ως θεωρία του βέλτιστου ελέγχου.

Τα προβλήματα ακροτάτων απασχόλησαν τους μαθηματικούς από αρχαιοτάτων χρόνων. Σύμφωνα με την παράδοση, ένα από τα πλέον περίφημα τέτοια προβλήματα, το λεγόμενο ισοπεριμετρικό, τέθηκε και λύθηκε από την ηρωΐδα της Αινειάδος του Βιργιλίου, τη Διδώ.

Το κείμενο των ιστοριών συνοδεύεται από πολυάριθμα προβλήματα τα οποία βοηθούν στην εμπέδωση των εννοιών και των μεθόδων και, σε συνδυασμό με το ιστορικό πανόραμα που προσφέρεται, κεντρίζουν τη σκέψη σε δημιουργικές αναζητήσεις.

Γραμμένες με σοφία, οι Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα ενσαρκώνουν, εκτός των άλλων, και τη άποψη του συγγραφέα αναφορικά με το ερώτημα πώς και γιατί διδάσκονται τα μαθηματικά, ενώ παρέχουν αφθονο υλικό για την τροφοδότηση του διαλόγου γύρω από το θέμα.

Ο V. Tikhomirov είναι καθηγητής στο Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας.

192 σελ., 17 × 25 εκ., Εικ. A/M, 6.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Τι βλέπει ένα φορτίο στον καθρέφτη;

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

OΛΟΙ ΜΑΣ ΕΙΜΑΣΤΕ ΕΞΟΙΚΕΙΩΜΕΝΟΙ με τα είδωλα που σχηματίζουν τα κάτοπτρα και οι φακοί. Συχνά, μάλιστα, δεν διστάζουμε να πληρώσουμε εισιτήριο για να δούμε είδωλα που παράγονται με ειδικούς τρόπους, όπως εκείνα που βλέπει κανείς στους Μαγικούς Καθρέφτες ή στον Στοιχειωμένο Πύργο της Ντίσνεϋλαντ.

Τι σημαίνει, όμως, «φορτίο-είδωλο»; Μήπως έχει κάποια σχέση με τα είδωλα που γνωρίζουμε από την οπτική; Ας διερευνήσουμε αυτό το ζήτημα θεωρώντας το ακόλουθο πρόβλημα.

Μας δίδεται μια αγώγιμη πλάκα η οποία είναι τόσο μεγάλη, ώστε να μπορούμε να φανταστούμε ότι εκτείνεται στο άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις στο επίπεδό της. Εναλλακτικά, μπορούμε να περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στην κατάσταση που διαμορφώνεται αρκετά κοντά στην πλάκα και αρκετά μακριά από τα άκρα της, έτσι ώστε να δικαιολογείται η παραδοχή ότι η πλάκα εκτείνεται στο άπειρο.

Ας τοποθετήσουμε τώρα ένα φορτίο q σε απόσταση d μπροστά από το κέντρο της πλάκας, την οποία υποθέτουμε γειωμένη. Τι λέτε λοιπόν; Έλλει ή απωθεί η πλάκα το φορτίο q ? Και ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί στο φορτίο;

Μπορεί να αποδειχθεί πειραματικά ότι ανάμεσα στο φορτίο και τη μεταλλική πλάκα δρα μια ελκτική

«Δεν σκεπτόμαστε παρά μόνο με οντότητες ανύπαρκτες, με γραμμές, επίπεδα, σώματα και άτομα, με τον διαιρετό χρόνο και τον διαιρετό χώρο —πώς θα μπορούσε καν να είναι δυνατή η εξήγηση όταν πρώτα μετατρέπουμε τα πάντα σε είδωλο, στο δικό μας είδωλο!»

—Φρειδερίκος Nitse

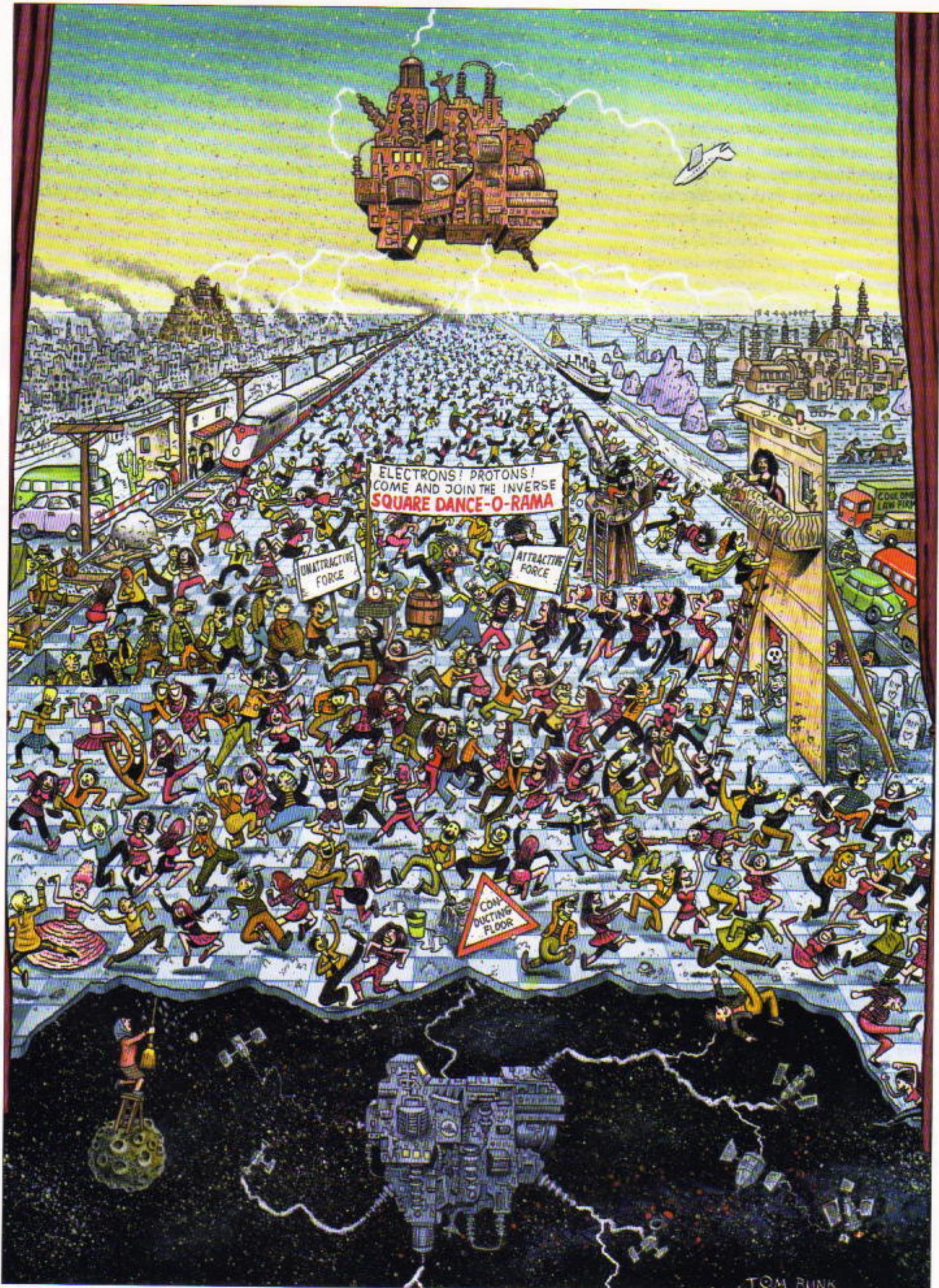
δύναμη. Πράγματι, δεν έχετε παρά να χτενίσετε τα μαλλιά σας και κατόπιν να χρησιμοποιήσετε τη χτένα για να σηκώσετε μικρά κομμάτια αλουμινόχαρτου.

Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί και η ποιοτική εξέταση του φαινομένου. Εάν πλησιάσουμε ένα θετικό φορτίο κοντά σε μια μεταλλική πλάκα, το θετικό φορτίο θα έλξει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της πλάκας, αναγκάζοντάς τα να συγκεντρωθούν στην περιοχή της που βρίσκεται πλησιέστερα στο φορτίο. Επειδή, λοιπόν, τα ηλεκτρόνια πλησιάζουν το φορτίο, η ελκτική τους δύναμη είναι ισχυρότερη από την απωστική δύναμη των θετικών ιόντων που έμειναν στη θέση τους.

Όσον αφορά την ποσοτική διερεύνηση, όμως, φαίνεται σαν να βρισκόμαστε προ ενός περίπλοκου προβλήματος: εντούτοις, μπορούμε

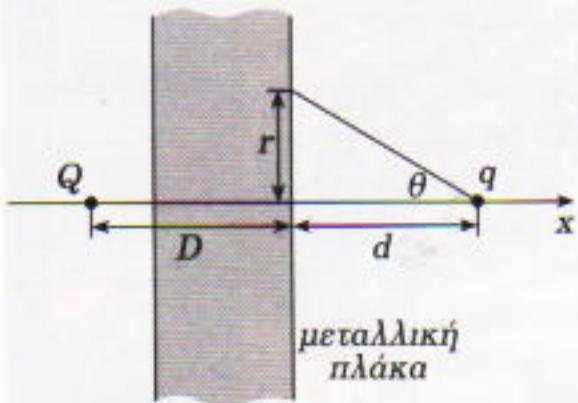
να το λύσουμε μάλλον εύκολα αν εκμεταλλευθούμε ένα από τα «μυστικά του επαγγέλματος». Η τεχνική για την οποία γίνεται λόγος στηρίζεται σε ένα θεώρημα μοναδικότητας για το ηλεκτροστατικό δυναμικό. Σας υπενθυμίζω ότι το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο του χώρου ορίζεται ως η ποσότητα του έργου που απαιτείται για να φέρουμε σ' αυτό ένα μοναδιαίο θετικό φορτίο από μια θέση όπου το δυναμικό ισούται με μηδέν. Υποθέστε ότι μας δίδεται η τιμή του ηλεκτροστατικού δυναμικού σε ολόκληρο το σύνορο (τη συνοριακή επφάνεια) που περικλείει μια περιοχή του χώρου. Αν, με οποιονδήποτε τρόπο, κατορθώσουμε να βρούμε μια έκφραση που να δίνει τις σωστές τιμές του δυναμικού σε όλα τα σημεία του συνόρου, τότε αυτή η έκφραση περιγράφει σωστά το ηλεκτροστατικό δυναμικό σε ολόκληρη την περιοχή του χώρου που μας ενδιαφέρει. Εππλέον δε, πρόκειται για μια έκφραση μοναδική. Οποιαδήποτε άλλη τεχνική και να χρησιμοποιήσουμε, θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Όπερ και σημαίνει ότι μπορούμε να αναζητήσουμε κάποιον απλό τρόπο που θα μας επιτρέψει να ικανοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες του ηλεκτροστατικού δυναμικού.

Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ειδώλων. Φανταζόμαστε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μεταλλική πλά-



TOM BUNK

κα με ένα φορτίο-είδωλο Q . Αυτό το φορτίο βρίσκεται πίσω από την αρχική μεταλλική επιφάνεια και κείται πάνω στην κάθετο προς την επιφάνεια που άγεται από το αρχικό φορτίο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. (Σας υπενθυμίζουμε ότι το είδωλο ενός αντικειμένου από επίπεδο κάτοπτρο κείται επί της αντίστοιχης ευθείας. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να μαντέψουμε εξ αναλογίας ότι το φορτίο-είδωλο βρίσκεται σε απόσταση d πίσω από την αρχική επιφάνεια.) Προς στιγμήν, όμως, ας θεωρήσουμε άγνωστη την απόσταση D του φορτίου-είδώλου από την πλάκα.



Σχήμα 1

Εάν επβάλλουμε τη συνθήκη το δυναμικό να μηδενίζεται στο άπειρο, τότε το δυναμικό σε απόσταση r από το σημειακό φορτίο q δίδεται από τον τύπο

$$V = \frac{kq}{r},$$

όπου με k συμβολίζουμε τη σταθερά αναλογίας του νόμου του Coulomb, η οποία ισούται με $1/(4\pi\epsilon_0)$. Ένας από τους λόγους που μας ώθησαν να εισαγάγουμε το δυναμικό έγκειται στο ότι είναι βαθμωτό μέγεθος. Το δυναμικό ενός συνόλου σημειακών φορτίων ισούται απλώς με το άθροισμα των δυναμικών κάθε ξεχωριστού φορτίου. Απεναντίας, για να βρούμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο, είμαστε υποχρεωμένοι να προσθέσουμε διανυσματικά τα ηλεκτρικά πεδία τα οποία παράγονται από τα ξεχωριστά φορτία.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημά μας, ας τοποθετήσουμε την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων μας στο σημείο όπου τέμνει την επ-

φάνεια η κάθετος προς αυτήν η οποία άγεται από το φορτίο. Σε κάθε σημείο της αρχικής επιφάνειας το δυναμικό που παράγουν από κοινού τα δύο φορτία περιγράφεται από την έκφραση

$$V = \frac{kq}{\sqrt{d^2 + r^2}} + \frac{kQ}{\sqrt{D^2 + r^2}},$$

όπου το r συμβολίζει την απόσταση ενός σημείου του επιπέδου από την κάθετο. Εφόσον το επίπεδο θεωρείται γειωμένο, έχουμε $V = 0$, οπότε ισχύει

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + r^2}} = \frac{-Q}{\sqrt{D^2 + r^2}}.$$

Πρέπει να προσδιορίσουμε τις τιμές των δύο μεταβλητών Q και D , αλλά δεν διαθέτουμε παρά μόνο μία εξίσωση. Ωστόσο, δεν πρέπει να παραβλέψουμε τη συνθήκη ότι η συγκεκριμένη εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται για κάθε τιμή του r . Στην προκειμένη περίπτωση, μπορούμε να μαντέψουμε τη λύση χωρίς την παραμικρή δυσκολία: $Q = -q$ και $d = D$. Εντούτοις, είναι διδακτικό να βρούμε τη λύση με έναν τρόπο περισσότερο μεθοδικό.

Ας τετραγωνίσουμε, λοιπόν, και τα δύο μέλη τις εξίσωσής μας και ας τα πολλαπλασιάσουμε με το γινόμενο των (τετραγωνισμένων) παρανομαστών. Ετσι, παίρνουμε τη νέα εξίσωση

$$(D^2 + r^2)q^2 = (d^2 + r^2)Q^2.$$

Συγκεντρώνουμε τώρα όλους τους όρους που περιέχουν το r^2 στο ένα μέλος και μεταφέρουμε όλους τους υπόλοιπους στο άλλο:

$$D^2q^2 - d^2Q^2 = r^2(Q^2 - q^2).$$

Για να ισχύει αυτή η εξίσωση για όλες τις τιμές της r , ο συντελεστής του r^2 πρέπει να μηδενίζεται. Συνεπώς, $Q = \pm q$. Επλέγουμε τη λύση με το αρνητικό πρόσημο, διότι μόνο έτσι είναι δυνατόν να μηδενίζεται το δυναμικό πάνω στην αγώγιμη επιφάνεια. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης πρέπει επίσης να ισούται με μηδέν, απ' όπου συνάγουμε ότι $d = D$.

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε μας λέει ότι μπορούμε να

φανταστούμε πως το φορτίο q επάγει ένα φορτίο $-q$ πίσω από τη μεταλλική πλάκα και σε απόσταση d από αυτήν. Σύμφωνα με το θεώρημα της μοναδικότητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το φορτίο-είδωλο για να υπολογίσουμε το δυναμικό σε όλα τα σημεία του χώρου μπροστά από την πλάκα.

Εξοπλισμένοι με το ανωτέρω αποτέλεσμα, μπορούμε πλέον να απαντήσουμε στα αρχικά ερωτήματά μας. Επειδή το q και το Q είναι ετερόνυμα, το φορτίο q έλκεται προς τη μεταλλική πλάκα. Το μέτρο αυτής της ελεκτικής δύναμης δίδεται από το νόμο του Coulomb:

$$F = k \frac{qQ}{(d + D)^2} = -k \frac{q^2}{4d^2},$$

όπου k η σταθερά αναλογίας του νόμου του Coulomb.

Για να λάβουμε την έκφραση που περιγράφει το ηλεκτροστατικό δυναμικό, δεν χρειάζεται παρά να εισαγάγουμε τις τιμές των D και Q στον σχετικό τύπο που γράψαμε παραπάνω:

$$V = kq \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + r^2}} \right]$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το φορτίο-είδωλο για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλα τα σημεία της περιοχής που μας ενδιαφέρει και πάνω στο σύνορό της. Μάλιστα, εφόσον περιοριστούμε σε σημεία της μεταλλικής επιφάνειας, ο υπολογισμός καθίσταται 1-διαίτερα εύκολος. Για λόγους συμμετρίας συμπεραίνουμε ότι

$$E_x(0, r) = 0.$$

Πρόκειται για κάτι ήδη γνωστό, διότι το ηλεκτροστατικό πεδίο οφείλει να είναι κάθετο σε όλες τις μεταλλικές επιφάνειες. Τα δύο φορτία συνεισφέρουν εξίσου στην κάθετη συνιστώσα:

$$E_x(0, r) = \frac{-2kq}{d^2 + r^2} \text{ συνθ.}$$

$$= \frac{-2kqd}{(d^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Ένας από τους λόγους που μας υπαγόρευσαν να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στην αγώγιμη επιφάνεια είναι ότι μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την πραγματική κατανομή φορτίου που επάγει σ' αυτήν το φορτίο q . Η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ισούται με

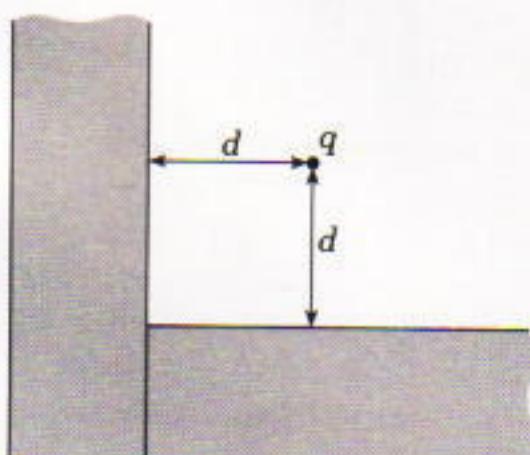
$$\sigma(r) = \epsilon_0 E_x(0, r) = \frac{-qd}{2\pi(d^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Παρουσιάζει ενδιαφέρον η παρατήρηση ότι αν ολοκληρώσουμε την πυκνότητα φορτίου πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια, θα διαπιστώσουμε ότι το ολικό φορτίο ισούται με $-q$, δηλαδή η τιμή του συμπίπτει με την τιμή του φορτίου-ειδώλου.

Έτσι, φτάσαμε και στα πρόβλημα που καλείται να αντιμετωπίσει ο αναγνώστης στο παρόν τεύχος:

A. Δύο μεγάλες μεταλλικές πλάκες οχηματίζουν ορθή διεδρη γωνία. Ένα φορτίο q τοποθετείται στο εσωτερικό της γωνίας, σε ίσες αποστάσεις από τις δύο πλάκες και μακριά από τα άκρα τους (βλ. Σχήμα 2). Ποια δύναμη ασκείται στο φορτίο;

B. Τούτο βασίζεται σε ένα πρόβλημα που τέθηκε στην ημιτελική εξέταση για την επιλογή των μελών της ομάδας φυσικής των ΗΠΑ που θα διαγωνιστεί στην Ιταλία εφέτος το καλοκαίρι. Ένα φορτίο q τοποθετείται σε απόσταση d από το κέντρο μιας γειωμένης μεταλλικής σφαίρας με ακτίνα $c < d$. Επιβάλλουμε τη συνθήκη ότι το ηλεκτροστατικό δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο. Ποια δύναμη ασκείται στο φορτίο q ;



Σχήμα 2

Αθλητική Ζωή

Στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1999 θέσαμε μια σειρά προβλημάτων των οποίων η λύση προϋπέθετε επαρκή κατανόηση των τροχιών που συναντάμε σε διάφορα αθλήματα.

Το πρώτο πρόβλημα ζητούσε να προσδιορισθούν οι θέσεις όπου είναι αδύνατο να προσγειωθεί μια μπάλα ποδοσφαίρου εάν στηθεί ένα τείχος αμυνομένων ύψους 1,8 m σε απόσταση 15 m από το σημείο εκτέλεσης του ελεύθερου κτυπήματος. Η στρατηγική που οδηγεί στη λύση είναι να βρούμε τις δύο γωνίες για τις οποίες ο «εκτελεστής» μπορεί να συντάρει την μπάλα με τη δεδομένη αρχική ταχύτητα και να τη στείλει στο σημείο (15 m, 1,8 m). Εφόσον υπολογίσουμε αυτές τις δύο γωνίες, μπορούμε να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές του x που φανερώνουν τη θέση όπου θα προσγειωθεί η μπάλα ($y = 0$). Γράφουμε, λοιπόν, την εξίσωση της τροχιάς:

$$y = \frac{-gx^2}{2u_0^2} \epsilon \varphi^2 \theta + x \epsilon \varphi \theta - \frac{gx^2}{2u_0^2}.$$

Εάν εισαγάγουμε τις τιμές των x και y (15 m και 1,8 m, αντίστοιχα) και θέσουμε τη u_0 ίση με 35 m/s, προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $\epsilon \varphi \theta$, την οποία μπορούμε να λύσουμε. Έτσι, καταλήγουμε ότι η θ λαμβάνει τις τιμές $86,5^\circ$ και $10,4^\circ$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του βεληνεκούς, βρίσκουμε τα σημεία όπου αυτές οι δύο τροχιές συναντούν το έδαφος:

$$x_{\max} = \frac{2u_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{u_0^2}{g} \eta \mu 2\theta.$$

Τα σημεία προσγείωσης της μπάλας απέχουν αντίστοιχα από το σημείο εκτέλεσης του ελεύθερου κτυπήματος 15,11 m και 44,04 m. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η περιοχή σκιάς αρχίζει ακριβώς πίσω από το τείχος και εκτείνεται μέχρις αποστάσεως 0,11 m από αυτό.

Το ερώτημα (β) μάς ρωτά πώς μεταβάλλεται η περιοχή σκιάς καθώς το τείχος μετακινείται σε σχέση με τον παίκτη που εκτελεί το ελεύθερο χτύπημα. Εάν υπολογίσουμε το

απότερο όριο της περιοχής σκιάς (η οποία αρχίζει πάντα ακριβώς πίσω από το τείχος) σε ένα λογιστικό φύλλο, διαπιστώνουμε ότι η περιοχή σκιάς μεγαλώνει καθώς αυξάνει η απόσταση του τείχους από τον παίκτη. Πρόκειται για αποτέλεσμα που φαίνεται εύλογο, επειδή η μεγιστηρια γωνία υπό την οποία μπορεί να βληθεί η μπάλα ώστε μόλις να περάσει το τείχος μειώνεται. Έτσι, η μπάλα δεν μπορεί να προσγειωθεί τόσο κοντά στο τείχος.

Στο Πρόβλημα 2 το ενδιαφέρον αφορά τις τροχιές στο μπάσκετ. Οι αναγνώστες έπρεπε να βρουν τη σχέση ανάμεσα στην αρχική ταχύτητα u_0 και τη γωνία βολής θ_0 για ένα σουτ που επιχειρείται σε ένα καλάθι του οποίου η στεφάνη βρίσκεται κατά h ψηλότερα από την μπάλα και απέχει από αυτήν απόσταση L στην οριζόντια διεύθυνση.

Ξεκινώντας από την εξίσωση της τροχιάς

$$y = \frac{-gx^2}{2u_0^2 \sin^2 \theta} + \frac{x \eta \mu \theta}{\sin \theta},$$

λύνουμε ως προς u_0 :

$$u_0^2 = \frac{gL}{2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\eta \mu \theta - \frac{h}{L}}.$$

Το ερώτημα (β) του προβλήματος ρωτούσε ποιους περιορισμούς πρέπει να ικανοποιεί η γωνία βολής προκειμένου η μπάλα να μπει στο καλάθι κατά την κάθοδό της. Η γωνία εισόδου μπορεί να οριστεί ως η γωνία που σχηματίζει η οριζόντια διεύθυνση με την εφαπτομένη της τροχιάς της μπάλας στο σημείο (L, h). Θα υποθέσουμε ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τις διαστάσεις της μπάλας —μια τολμηρή παραδοχή, είναι αλήθεια, αλλά απλουστεύει πολύ την ανάλυση.

Οι περιορισμοί στους οποίους υπόκειται η γωνία βολής δεν μπορεί να εξαρτώνται παρά μόνον από τα h και L , όπου

$$h = (u_0 \eta \mu \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2,$$

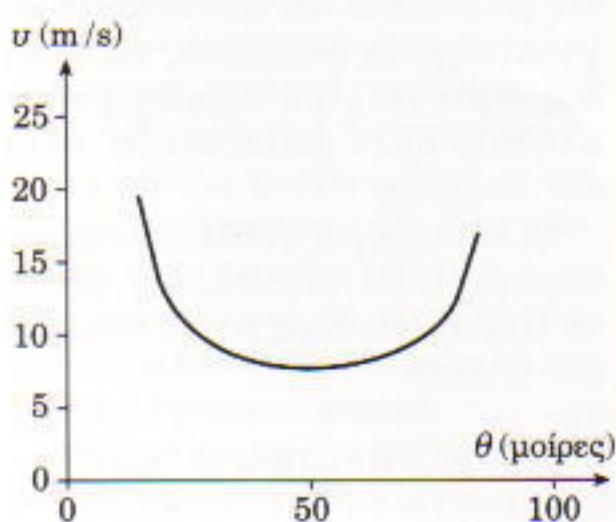
$$L = (u_0 \sin \theta_0) t,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\phi\theta &= \frac{u_y}{u_x} = \frac{u_0 \eta \mu \theta_0 - gt}{u_0 \sin \theta_0} \\ &= \frac{(u_0 \eta \mu \theta_0)t - gt^2}{(u_0 \sin \theta_0)t} \\ &= \frac{2(u_0 \eta \mu \theta_0)t - gt^2 - (u_0 \eta \mu \theta_0)t}{(u_0 \sin \theta_0)t} \\ &= \frac{2h}{L} - \varepsilon\phi\theta_0.\end{aligned}$$

Επειδή η μπάλα πρέπει να βρίσκεται στην κάθοδο για να σημειωθεί καλάθι, η γωνία εισόδου θ και η εφαπτόμενή της πρέπει να είναι αρνητικές. Επομένως, είναι επίσης αρνητικό και το δεξιό μέλος της εξίσωσης. Συνεπώς, η γωνία βολής πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό

$$\varepsilon\phi\theta_0 > 2h/L.$$

Το ερώτημα (γ) ζητούσε από τον αναγνώστη να προσδιορίσει τη γωνία βολής για την οποία μπορεί να σημειωθεί καλάθι με την ελάχιστη αρχική ταχύτητα. Για να απαντήσουμε, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα που απαιτείται για πολλές τιμές της γωνίας βολής χρησιμοποιώντας την εξίσωση του μέρους A και ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου, υποθέτοντας ότι $h = 1$ m και $L = 5$ m. Η γραφική παράσταση της v συναρτήσει της θ , η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 3, υποδεικνύει ότι η v εμφανίζει ελάχιστο στις 50° περίπου. Εναλλακτικά, μπορούμε να παραγωγίσουμε την εξίσωση του μέρους A που εκφράζει τη v_0 συναρτήσει της θ και να θέσουμε την παράγωγό της ίση με μηδέν. Έτσι, βρίσκουμε



Σχήμα 3

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2\sin^2 \theta} \frac{1}{\varepsilon\phi\theta - \frac{h}{L}}},$$

$$\frac{dv_0}{d\theta} = 0,$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{h}{L} \pm \sqrt{\frac{h^2}{L^2} + 1}.$$

Εάν εισαγάγουμε στον τελευταίο τύπο τις τιμές $h = 1$ m και $L = 5$ m, τις οποίες αναφέραμε προηγουμένως δίκην παραδείγματος, καταλήγουμε σε μια βέλτιστη γωνία βολής 50.7° .

Ο Peter Brancazio, επίτιμος καθηγητής φυσικής στο Κολέγιο του Μπρούκλιν τελειοποίησε αυτή την ανάλυση και κατόπιν συνέκρινε τις θεωρητικές προβλέψεις με την πρακτική στα γήπεδα του μπάσκετ. Συνιστούμε θερμά στον αναγνώστη να μελετήσει το άρθρο του Brancazio «Physics of basketball» (Η φυσική της καλαθοσφαίρισης) που δημοσιεύθηκε το 1981 στο *American Journal of Physics* (49), σ. 356-65. ◻

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ



ΚÁΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

Πανεπιστημίου & Πεσμαζόγλου 5,
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785
Web site: www.katoptro.gr
e-mail: katoptro@otenet.gr

Richard Feynman: ο μάγος
της θεωρητικής φυσικής

ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ

ΕΞΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ

Υλ.
Ενέργεια,
Βαρέτσα,
Σαραντίνα &
Εδραία

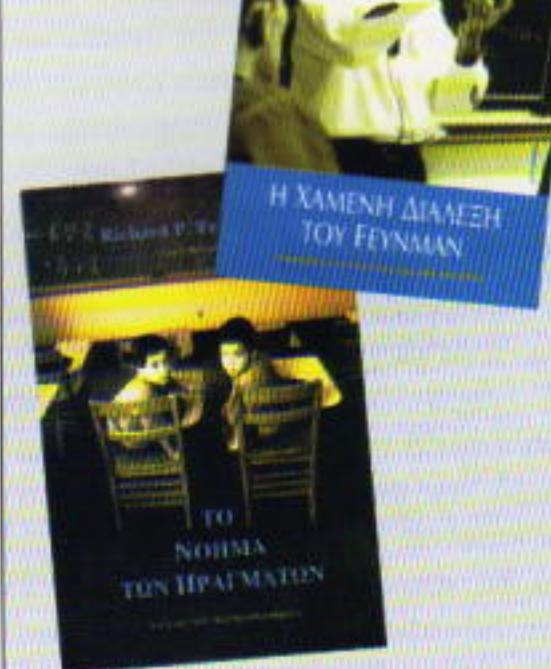
RICHARD
FEYNMAN

Προτίτλος: Paul Davies



DAVID & JUDITH
GOODSTEIN

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ



«Πιστεύω πως όταν θα γραφεί η ιστορία της επιστήμης του 20ού αιώνα, οι διδασκαλίες του θα θεωρηθούν η σημαντικότερη συνεισφορά του.

Κάθε φορά που έδινε διάλεξη σε μια ομάδα φοιτητών, αναδύόταν η βαθύτερη γνώση, η καινούργια προοπτική, η λαμπρή έμπνευση, και το ακροατήριο ένιωθε πάντοτε πιο κοντά στην αλήθεια.»

R. Muller, Καθηγητής φυσικής,
Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΥΝΤΟΜΑ

ΕΞΙ ΟΧΙ ΤΟΣΟ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ

Επιλογές
Στρατηγού
Αλεξανδρίας
Τάρκος

RICHARD P.
FEYNMAN

Προτίτλος: Βασίλης Ράφτης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚÁΤΟΠΤΡΟ

Τετράγωνο ή όχι;

Αναζητώντας τέλεια τετράγωνα

Mark Saul και Titu Andreescu

HΕΥΡΕΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ, ΕΙΔΙΚΑ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚών αριθμών, είναι μια συνήθης και χρήσιμη μαθηματική εργασία. Μερικές φορές, όμως, είναι επίσης σημαντικό να αναγνωρίζουμε ποιοι αριθμοί δεν είναι τέλεια τετράγωνα. Τα επόμενα προβλήματα είναι αυτής της μορφής.

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι ο αριθμός

$$N = 1234567891011121314151617181920212223$$

δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση: Το βασικό γεγονός που χρειαζόμαστε εδώ είναι ότι το τελευταίο ψηφίο ενός τέλειου τετραγώνου εξαρτάται μόνο από το τελευταίο ψηφίο της τετραγωνικής ρίζας του (και από κανένα άλλο). Επομένως, μπορούμε να προσπαθήσουμε να βρούμε ποιο μπορεί να είναι το τελευταίο ψηφίο της τετραγωνικής ρίζας του N . Δεν μπορεί να είναι το 0, διότι τότε θα έπρεπε και ο N να λήγει σε 0. Παρομοίως, το τελευταίο ψηφίο δεν μπορεί να είναι το 1. Στην πραγματικότητα, αν εξετάσουμε όλα τα ψηφία, βρίσκουμε ότι το τετράγωνό τους δεν μπορεί να λήγει σε 3:

- το 1^2 λήγει σε 1
- το 2^2 λήγει σε 4
- το 3^2 λήγει σε 9
- το 4^2 λήγει σε 6
- το 5^2 λήγει σε 5
- το 6^2 λήγει σε 6
- το 7^2 λήγει σε 9
- το 8^2 λήγει σε 4
- το 9^2 λήγει σε 1
- το 0^2 λήγει σε 0.

Επομένως, διαπιστώνουμε ότι ο

$$N = 1234567891011121314151617181920212223$$

δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Ουσιαστικά αποδείξαμε ότι ένα τέλειο τετράγωνο, γραμμένο στο δεκαδικό σύστημα, λήγει σε ένα από τα ψηφία 0, 1, 4, 5, 6 και 9.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι ο αριθμός

$$M = 1234567891011121314151171819202122$$

δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι ουδείς τετραψήφιος αριθμός αποτελούμενος από τα ψηφία 2, 3, 7, 8 μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. Αποδείξτε ότι ουδείς από τους αριθμούς $5n + 2$ και $5n + 3$ μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο, για κάθε φυσικό αριθμό n .

Λύση: Ο αριθμός $5n + 2$ λήγει σε 2 ή 7, και ο αριθμός $5n + 3$ σε 3 ή 8. Από τη λύση του Προβλήματος 1 συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να είναι τέλεια τετράγωνα.

Αυτή η λύση του προβλήματος στηρίζεται στην τεχνική που ήδη γνωρίζουμε και χρησιμοποιεί το τελευταίο ψηφίο στη δεκαδική αναπαράσταση του αριθμού. Ας εξετάσουμε το ζήτημα βαθύτερα. Τι ιδιαίτερο έχει το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης;

Κάθε αριθμός N , στο δεκαδικό σύστημα, μπορεί να γραφεί ως $N = 10A + b$, όπου A είναι κάποιος φυσικός αριθμός και b το τελευταίο ψηφίο του N . Τότε, $N^2 = (10A + b)^2 = 100A^2 + 20Ab + b^2$, και οι δύο πρώτοι όροι του αθροίσματος, αφού είναι πολλαπλάσια του 10, δεν επηρεάζουν το τελευταίο ψηφίο. Στην πραγματικότητα, πίσω από τον συνήθη αλγόριθμο πολλαπλασιασμού κρύβεται αυτό το ανάπτυγμα, και εξηγεί για ποιο λόγο το τελευταίο ψηφίο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του τετραγώνου του τελευταίου του ψηφίου.

Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τη λύση του Προβλήματος 4 γενικεύοντας αυτή την παρατήρηση. Αν ο αριθμός N αφήνει υπόλοιπο b όταν διαιρείται διά του 5, μπορεί να γραφεί στη μορφή $5A + b$, όπου A είναι ένας φυσικός αριθμός. Τότε, $N^2 = (5A + b)^2 = 25A^2 + 10Ab + b^2$, και οι δύο πρώτοι όροι, ως πολλαπλάσια του 5, δεν επηρέαζουν το υπόλοιπο της διαίρεσης του N^2 διά του 5. Έπειτα ότι τα υπόλοιπα της διαίρεσης του N^2 και του b^2 διά του 5 είναι ίδια.

Δηλαδή, αν θέλουμε να βρούμε το υπόλοιπο της διαιρεστής του N^2 διά του 5, μπορούμε να κάνουμε ένα από τα εξής: (α) Να υψώσουμε το N στο τετράγωνο, να διαιρέσουμε το N^2 διά του 5 και να πάρουμε το υπόλοιπο. (β) Να διαιρέσουμε το N διά του 5, να πάρουμε το υπόλοιπο και να το υψώσουμε στο τετράγωνο (αν το τετράγωνο αυτού του υπολοίπου είναι μεγαλύτερο του 5 θα χρειαστεί να διαιρέσουμε διά του 5 μία ακόμη φορά).

Στην πραγματικότητα, αυτή η παρατήρηση ισχύει και όταν διαιρούμε με κάθε άλλο αριθμό και όχι μόνο διά του 5. (Η πρόταση θα φανεί γνωστή στους αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της ισοτιμίας στη θεωρία αριθμών.) Στην προκειμένη περίπτωση, αν ο αριθμός $5n + 2$ είναι τέλειο τετράγωνο και έχει τετραγωνική ρίζα τον φυσικό αριθμό N , μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδικασία (β) και να θεωρήσουμε το υπόλοιπο της διαιρεστής του N διά του 5. Αυτό μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3 ή 4. Αν ελέγξουμε τα υπόλοιπα της διαιρεστής των τετραγώνων αυτών των αριθμών διά του 5, διαπιστώνουμε ότι κανένα τους δεν ισούται με 2. Όμως, το υπόλοιπο της διαιρεστής του $5n + 2$ διά του 5 είναι 2 και, επομένως, δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο ενός φυσικού N .

Αυτή η επιχειρηματολογία είναι τελείως γενική και μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές περιπτώσεις.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι ουδείς από τους αριθμούς $4n + 2$ και $4n + 3$ μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο, για κάθε φυσικό αριθμό n .

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $9n + 3$ και $9n + 6$ δεν μπορεί να είναι τέλεια τετράγωνα.

Πρόβλημα 7. Ο αριθμός N περιέχει χίλιες εννιακόσιες ενενήντα εννέα φορές το ψηφίο 1, μία φορά το ψηφίο 2 και κάμποσες φορές το ψηφίο 0. Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 8. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $9n + 2$, $9n + 5$ και $9n + 8$ δεν μπορεί να είναι τέλεια τετράγωνα.

Πρόβλημα 9. Αποδείξτε ότι ο αριθμός

δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι, για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n , ο αριθμός $n! + 2000$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 11. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n το $n(n + 1)$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$. Αυτό σημαίνει ότι το $n(n + 1)$ βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών τέλειων τετραγώνων και επομένως δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 12. Αποδείξτε ότι το $n(n + 2)$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο, για κάθε θετικό ακέραιο n .

Λύση: Υπάρχει μια λύση ανάλογη με αυτή του Προβλήματος 11, αλλά μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι $n(n + 2) = n^2 + 2n = (n + 1)^2 - 1$. Επομένως, ο αριθμός μας είναι κατά 1 μικρότερος από ένα τέλειο τετράγωνο και, επομένως, δεν μπορεί να είναι ο ίδιος τέλειο τετράγωνο (εκτός αν είναι το 0, οπότε το n δεν είναι θετικός ακέραιος).

Πρόβλημα 13. Αποδείξτε ότι ο αριθμός

$$2499 \cdot 2500 \cdot 2501$$

δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 14. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ο αριθμός $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 15. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $(m + n)^2 + 3m + n + 1$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο, για οποιονδήποτε ζεύγος διαφορετικών φυσικών m και n .

Πρόβλημα 16. Αποδείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n > 3$ ο αριθμός $N = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 17. Αποδείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n > 1$ ο $n!$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το «άιτημα του Bertrand» —στην πραγματικότητα, θεώρημα—, το οποίο δηλώνει ότι για κάθε $n > 1$ υπάρχει πάντα ένας πρώτος αριθμός μεταξύ του n και του $2n$.)

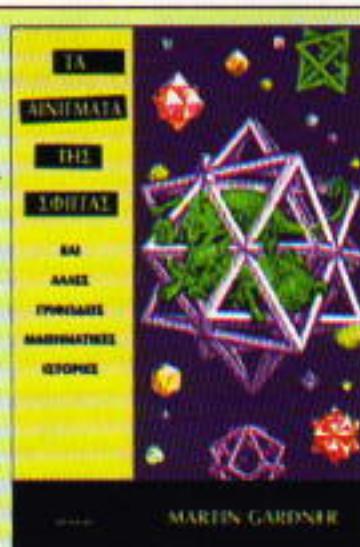
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

Martin Gardner

Τα αινίγματα της Σφίγγας
και άλλες γριφώδεις μαθηματικές ιστορίες

Πρόκειται για μια πρωτότυπη συλλογή γρίφων και σπαζοκεφαλιών από τον μετρ των ψυχαγωγικών μαθηματικών. Σε κάθε πρόβλημα προτείνεται μια λύση η οποία οδηγεί σε νέα προβλήματα, κ.ο.κ. «Κάθε αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τα μαθηματικά θα διασκεδάσει και θα ακονίσει δημιουργικά το μυαλό του.»

166 σελ., 17 × 25 εκ., 5.000 δρχ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

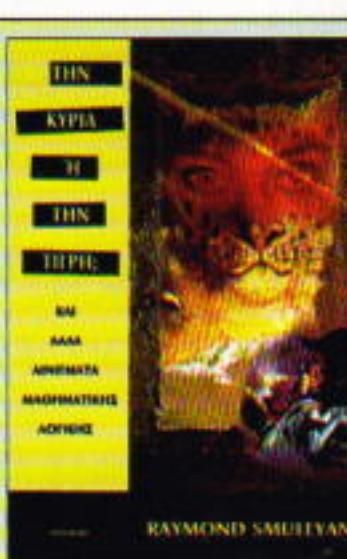
Raymond Smullyan

Την κυρία ή την τίγρη;
και άλλα αινίγματα μαθηματικής λογικής

«Εξυπνο, διδακτικό,
διασκεδαστικό... Το «Ποιος είναι ο
κατάσκοπος» αποτελεί τον πιο ευφυή
γρίφο λογικής που διατυπώθηκε
ποτέ...»

G. Boolos, Καθηγητής φιλοσοφίας, MIT
«Ο Smullyan είναι ο Lewis Carroll
της εποχής μας. Μαγευτικό βιβλίο.»
G. Denning, Καθηγητής πληροφορικής

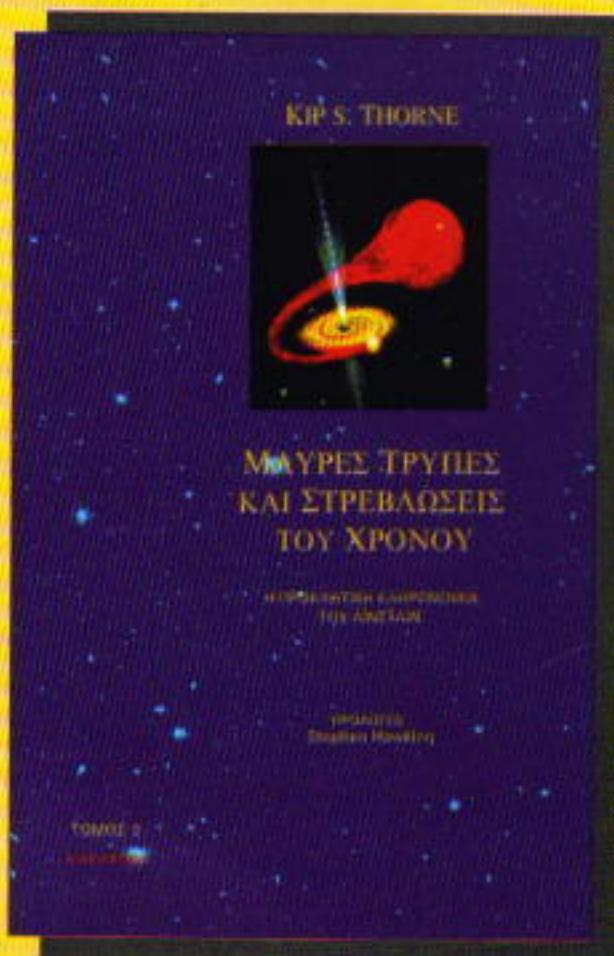
Πανόδετο, 262 σελ., 14 × 21 εκ., 6.800 δρχ.



Kip S. Thorne

ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΚΑΙ ΣΡΕΒΛΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Η προκλητική κληρονομά του Αϊνστάιν



ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ
ΚΑΙ ΣΤΡΕΒΛΩΣΕΙΣ
ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

ΑΙΓΑΙΟΝ ΛΙΜΑΝΙΑ
ΤΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

πρόλογος
Stephen Hawking

Πρόλογος: Stephen Hawking

Τόμοι Α' και Β'

Από την εμφάνιση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, το 1915, έως σήμερα, ορισμένοι από τους λαμπρότερους επιστήμονες του 20ού αιώνα έχουν καταβάλει προσπάθειες να αποκρυπτογραφήσουν τα μυστήρια που μας κληροδότησε η εν λόγω θεωρία. Η κληρονομά αυτή έχει τόσο απροσδόκητες συνέπειες, ώστε ακόμη και ο ίδιος ο Αϊνστάιν την αποποιήθηκε. Ποιο από τα παρακάτω αλλόκοτα αντικείμενα μπορεί πράγματι να υπάρχει στο σύμπαν μας:

- Οι μαύρες τρύπες, όπου μπορεί να εισέλθει οιδήποτε, αλλά από όπου δεν μπορεί να εξέλθει τίποτε.
- Οι κοsmικές σκουλήκτρυπες, που αποτελούν στρεβλώσεις του χώρου και συνδέουν δύο περιοχές του σύμπαντος.
- Οι χωροχρονικές ανωμαλίες, στις οποίες ο μεν χρόνος παίνει να υπάρχει ο δε χώρος αντικαθίσταται από ένα είδος χραντικού αφρού.
- Τα βαρυτικά κύματα, τα οποία μεταφέρουν περιγραφές συγκρούσεων μαύρων τρυπών πριν από δισεκατομμύρια χρόνια.
- Οι μηχανές του χρόνου, με τις οποίες μπορεί κανείς να ταξιδέψει τόσο στο παρελθόν όσο και στο μέλλον.

Ο Kip Thorne (Καθηγητής στο Caltech) έχει βρεθεί στην καρδιά της αναζήτησης ασφαλών αλανήσεων για τα παραπάνω ερωτήματα. Σε αυτό το αριστοτεχνικά γραμμένο και εξαιρετικά ενημερωμένο βιβλίο, οδηγεί τους αναγνώστες στο μεγάλο ερώτημα: Ποιες αρχές κυβερνούν το σύμπαν μας και γιατί είναι αυτό που είναι;

Κάθε τόμος: 312 σελ., 25 × 16 εκ., Πανόδετος, 7.000 δρχ.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

«Κανείς δεν έχει περιγράψει καλύτερα απ' ό,τι ο Κίρ στο παρόν βιβλίο – και, μάλιστα, με περισσότερη σαφήνεια, εγκυρότητα και απλότητα υφους – τις σημαντικότερες στιγμές στην προσπάθεια των επιστημόνων να αποκρυπτογραφήσουν την πνευματική κληρονομιά του Αϊνστάιν.»

—John Archibald Wheeler

«Μια παραστατική και κατανοητή περιγραφή της γενικής σχετικότητας και των επιδράσεων της στη σύγχρονη αστροφυσική και κοσμολογία, από έναν απ' τους κορυφαίους ειδικούς στο χώρο...»

—Roger Penrose

«Μοναδικό βιβλίο. Έτσι ακριβές θα έπρεπε να έχουν γραφτεί όλα τα βιβλία που σχετίζονται με το ίδιο αντικείμενο... Συνδυάζει στοιχεία από την ιστορία της επιστήμης με παραστατικές και επιμελημένες επιστημονικές περιγραφές και επεξηγηματικά σχόλια. Τα ανέκδοτα στοιχεία που παραθέτει, είδικότερα εκείνα που αφορούν τη σοβιετική επιστήμη, είναι εξαιρετικά διαφωτιστικά...»

—Carl Sagan

«Φωτίζει το επιστημονικό εγχείρημα όπως ελέγχυτα βιβλία του είδους του, απολνέοντας από τις σελίδες του τη χαρά της ανακάλυψης...»

—Alan Lightman

«Θαυμάσια και αναλυτική περιγραφή της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και των μαύρων τρυπών, για ευφυείς αναγνώστες...»

—The Times Educational Supplement

«Το βιβλίο του Kip Thorne, εκτός από πιγή επιστημονικών πληροφοριών, πιστεύουμε ότι στα χρόνια που έρχονται θα αποτελεσεί και πιγή έμπνευσης για πολλούς από τους αναγνώστες του.»

—Physics Today

«Το παρόν βιβλίο αποτελεί επικοπή ενός από τους πιο συναρπαστικούς κλάδους της φυσικής του 20ού αιώνα, γραμμένη αριστοτεχνικά, με τρόπο σαφή και κατανοητό, χωρίς περιττά και υπερβολικά στοιχεία...»

—Nature



Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε στο βιβλιοπωλείο των Εκδόσεων Κάτοπτρο, στη Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5, τηλ.: 3247785),

στο Internet

(www.katoptro.gr),

καθώς επίσης και σε όλα τα καλά βιβλιοπωλεία. Αν θέλετε μπορούμε να σας το ταχυδρομήσουμε τα έξοδα αποστολής θα επιβαρύνουν εμάς.

• Γράψτε μας ή τηλεφωνήστε μας:

Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα,

τηλ.: 3643272, 3645098

fax: 3641864,

e-mail: katoptro@otenet.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

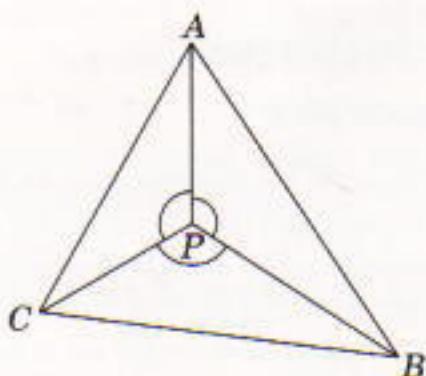
Μαθηματικά

M161

Έστω $x^8 = y$. Τότε, η εξίσωση γίνεται $y^{y/8} = 2$, ή $y^y = 2^8$. Παρατηρούμε ότι $y > 1$. Έστω $f(x) = y^x$. Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $y > 1$. Δηλαδή, αν $a > b > 1$, τότε $a^y > b^y$. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα: έχουμε $a^y > a^b > b^b$. Επομένως, η εξίσωση $y^y = 2^8$ έχει μία μόνο λύση, και μπορούμε εύκολα να μαντέψουμε ότι η μοναδική λύση είναι $y = 4$. Απάντηση: $x = 2^{1/4}$.

M162

Τα τρίγωνα APB και CPA (Σχήμα 1) είναι όμοια, διότι σχηματίζουν και τα δύο γωνία 120° στο P και $\angle ACP = 60^\circ - \angle BAP = \angle PAC$. Επομένως, $BP/AP = AP/CP$, απ' όπου



Σχήμα 1

έχουμε $BP \cdot CP = AP^2 = a^2$. Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου BPC είναι

$$\frac{1}{2} BP \cdot CP \text{ημ} 60^\circ = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Απάντηση: $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

M163

Εκτελούμε την επόμενη αλλαγή μεταβλητών:

$$x = \frac{u-1}{u+1}, \quad y = \frac{v-1}{v+1}.$$

Μετά από απλούς μετασχηματισμούς, παίρνουμε το εξής σύστημα εξισώσεων: $uv^2 = 3$, $u^2 = 2v$, απ' όπου $u = \sqrt[5]{12}$ και $v = \sqrt[5]{9/2}$.

Απάντηση:

$$x = \frac{\sqrt[5]{12} - 1}{\sqrt[5]{12} + 1}, \quad y = \frac{\sqrt[5]{\frac{9}{2}} - 1}{\sqrt[5]{\frac{9}{2}} + 1}.$$

M164

Έστω $u = (x^2 - 1)/(y + 1)$ και $v = (y^2 - 1)/(x + 1)$. Τα u και v είναι βεβαίως ρητοί αριθμοί. Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι $u + v$ είναι ακέραιος, και το ίδιο ισχύει για το γινόμενο uv (οι παρανομαστές απλοποιούνται). Επομένως, μπορούμε να σχηματίσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ακέραιους συντελεστές, ρίζες της οποίας είναι τα u και v . Ας υποθέσουμε ότι αυτή η εξίσωση είναι η $z^2 + mz + n = 0$ (και επομένως, $-m = u + v$ και $n = uv$). Ας εξετάσουμε τη διακρίνουσα $\Delta = m^2 - 4n$. Είναι σίγουρα ρητή και άρα τέλειο τετράγωνο. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το τέλειο τετράγωνο και άρα η βάση έχουν την ίδια ισοτιμία με το m . Πράγματι, το m^2 έχει την ίδια ισοτιμία με το m , και το $4n$ είναι άρτιο — και επομένως η πρόσθεσή του στο m^2 δεν αλλάζει την ισοτιμία της παράστασης. Τελικά ο $m \pm \sqrt{\Delta}$ είναι άρτιος, οπότε οι $u, v = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{\Delta})$ είναι ακέραιοι.

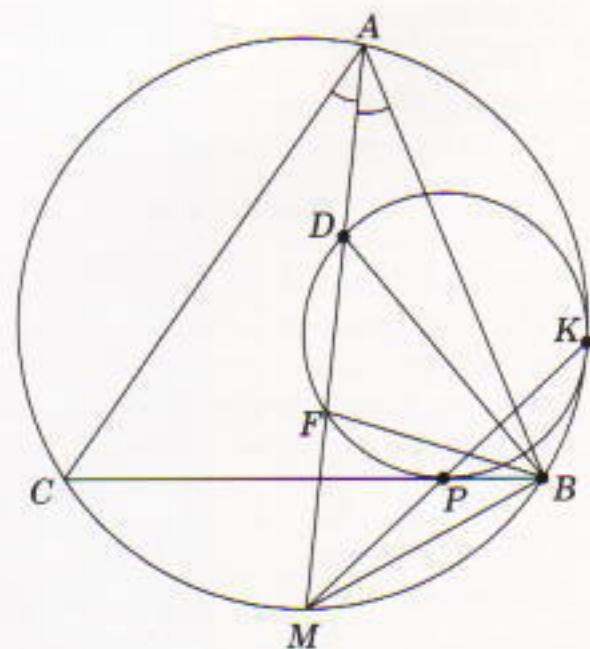
M165

Απόδειξη της πρότασης (α). Συμβολίζουμε τις αποστάσεις του σημείου D από τις AB , AC και BC ως x , x και y , αντίστοιχα, και τις αποστάσεις του σημείου F από τις ίδιες ευθείες ως m , m και n . Θα αποδείξουμε ότι η ισότητα των γωνιών που

δίδεται στις υποθέσεις του προβλήματος είναι ισοδύναμη με την εξισώση $x/y = p/m$, η οποία, με τη σειρά της, συνεπάγεται τη ζητούμενη ισότητα γωνιών.

Πράγματι, έστω X το ίχνος της καθέτου που φέρουμε από το D επί την AB , και έστω Y το ίχνος της καθέτου που φέρουμε από το F επί την BC . Η ισότητα των δεδομένων γωνιών συνεπάγεται ότι $\angle FBY = \angle DBX$. Συνεπώς, τα τρίγωνα FBY και DBX είναι όμοια, και $DX/FY = DB/FB$, ή $x/n = DB/FB$. Εάν φέρουμε τις κάθετες από το D επί την BC και από το F επί την AB , βρίσκουμε άλλα δύο όμοια τρίγωνα απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση $y/m = DB/FB$. Έπειτα ότι $x/y = n/m$. Οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν ότι από την τελευταία εξίσωση έπειται η ζητούμενη ισότητα γωνιών.

Απόδειξη της πρότασης (β). Θεωρούμε τον ένα από τους δύο κύκλους που διέρχονται από τα σημεία D και F και εφάπτονται στην πλευρά BC (Σχήμα 2). Ονομάζουμε το σημείο επαφής P . Έστω M το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας A και του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ABC κύκλου. Έστω K το δεύτερο



Σχήμα 2

τέρο σημείο τομής της ευθείας MP και του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία D και F . Θα αποδείξουμε ότι το σημείο K ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC . Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα DMB και FMB είναι όμοια, διότι έχουν κοινή τη γωνία M και

$$\begin{aligned}\angle BFM &= \angle FAB + \angle FBA \\ &= \angle MBC + \angle DBC = \angle DBM.\end{aligned}$$

Επομένως, $MF/MB = MB/MD$, οπότε $MB^2 = MF \cdot MD$. Γνωρίζουμε ότι αν φέρουμε δύο τέμνουσες σε έναν κύκλο από ένα εξωτερικό του σημείο, τότε το γινόμενο της τέμνουσας επί το εξωτερικό της τμήμα είναι σταθερό. Έχουμε συνεπώς $MF \cdot MD = MP \cdot MK$. Άρα, $MP \cdot MK = MB^2$, από όπου παίρνουμε $MP/MB = MB/MK$. Επομένως, τα τρίγωνα MPB και MKB είναι όμοια (έχουν κοινή τη γωνία M και τις προσκείμενες πλευρές ανάλογες). Άρα, $\angle MKB = \angle MBP$. Όμως, $\angle MBP = \angle MBC = \angle MCB$. Επομένως, $\angle MKB = \angle MCB$, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία B, C, M και K ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Αποδείξαμε επομένως ότι το σημείο K ανήκει και στους δύο κύκλους τους οποίους θέλουμε να αποδείξουμε ότι εφαπτονται. Η εφαπτόμενη του περιγεγραμμένου κύκλου στο σημείο M είναι παράλληλη της BC — δηλαδή, είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη του άλλου κύκλου (του διερχόμενου από τα σημεία D και F) που διέρχεται από το σημείο P .

Έστω KY η εφαπτόμενη του μεγάλου κύκλου (τα σημεία K και P βρίσκονται προς την ίδια μεριά του σημείου M , επί της ευθείας MK). Τότε, $\angle KMY = \angle KPY$, και επομένως το τόξο MK έχει ίδιο μέτρο με το τόξο PK . Επομένως, $\angle PKY = (1/2)(τόξο MK) = (1/2)(τόξο PK)$, οπότε η KY εφαπτεται και στον μικρό κύκλο. Άρα, οι δύο κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο K , και εφαπτονται μεταξύ τους στο K .

Φυσική

Φ156

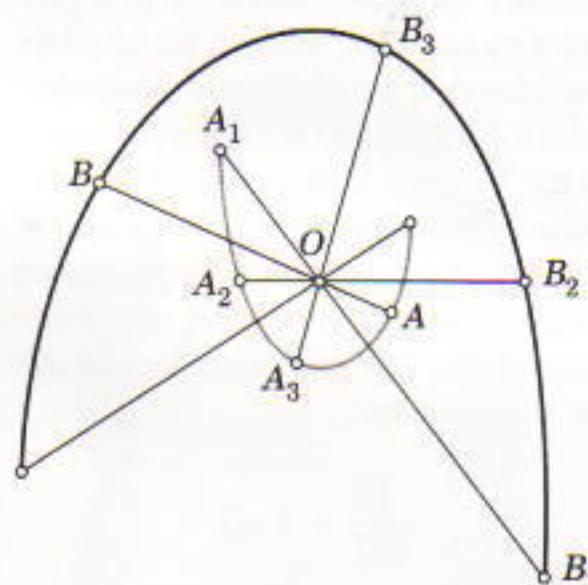
Με βάση τα δεδομένα, διαπιστώνουμε ότι η ολική ορμή του (κλει-

στού) συστήματος μηδενίζεται:

$$m_1\mathbf{u} + m_2(-3\mathbf{u}) = 0,$$

επειδή $m_1 = 3m_2$. Ο μηδενισμός της ολικής ορμής ενός κλειστού συστήματος σημαίνει ότι το κέντρο μάζας του ηρεμεί.

Στην περίπτωση των δύο σωματίδιων, το κέντρο μάζας κείται επί της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια. Εππλέον, διαιρεί τη ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σωματίδια σε μέρη με λόγο ίσο προς τον αντίστροφο του λόγου των μάζων. Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε την τροχιά του δεύτερου σωματιδίου· η προς τούτο ακολουθητέα μέθοδος φαίνεται στο Σχήμα 3. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB που συνδέει τα



Σχήμα 3

σωματίδια 1 και 2 τη χρονική στιγμή κατά την οποία $\mathbf{u}_{m_1} = -3\mathbf{u}_{m_2}$. Εν συνεχείᾳ, υποδιαιρούμε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα μέρη και σημειώνουμε το σημείο που απέχει από το σωματίδιο 1 απόσταση ίση με το $1/4$ του ολικού μήκους του τμήματος. Το συγκεκριμένο σημείο καθορίζει τη θέση του ακίνητου κέντρου μάζας. Κατόπιν συνδέουμε ένα αυθαίρετο σημείο της τροχιάς του σωματιδίου 1 (ας πούμε το σημείο A_1) με το κέντρο μάζας με ένα τμήμα A_1O , το οποίο και προεκτείνουμε έτσι ώστε $OB_1 = A_1O$. Το σημείο B_1 θα είναι το αντίστοιχο σημείο του A_1 πάνω στην τροχιά του δεύτερου σωματιδίου. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία για όλα τα σημεία της τροχιάς του πρώτου

σωματιδίου, παίρνουμε την τροχιά του δεύτερου.

Φ157

Η δύναμη της βαρυτικής έλξης του Ήλιου

$$F = G \frac{m_H m_R}{L^2}$$

προσδίδει στη Γη την κεντρομόλο επιτάχυνση

$$Y_R = \omega^2 L = \frac{4\pi^2}{T^2} L,$$

όπου με ω συμβολίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα της Γης κατά την περιφορά της γύρω από τον Ήλιο. $T = 1$ έτος είναι η περίοδος της ίδιας κίνησης· με m_H και m_R δηλώνουμε αντίστοιχα τη μάζα του Ήλιου και της Γης, και με L την ακτίνα της τροχιάς της Γης. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$G \frac{m_H m_R}{L^2} = m_R \frac{4\pi^2}{T^2} L.$$

Ωστόσο,

$$G m_R / R_R^2 = g,$$

οπότε

$$m_H g \frac{R_R^2}{L^2} = m_R \frac{4\pi^2}{T^2} L,$$

ή

$$\frac{m_R}{m_H} = \frac{g R_R^2 T^2}{4\pi^2 L^3}. \quad (1)$$

Επειδή

$$m_R = \frac{4}{3}\pi R_R^3 \rho_R$$

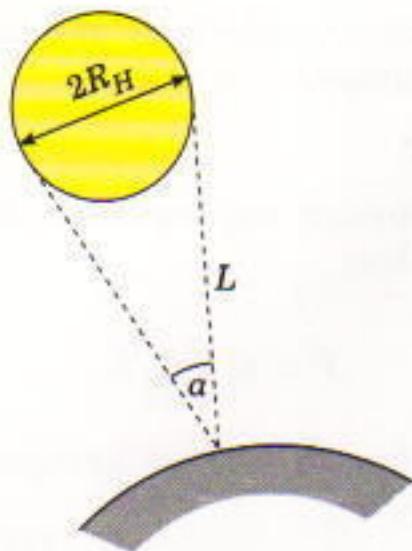
και

$$m_H = \frac{4}{3}\pi R_H^3 \rho_H,$$

η εξίσωση (1) δίνει

$$\frac{\rho_R}{\rho_H} = \frac{g R_H^3 T^2}{4\pi^2 L^3 R_R}.$$

Δεν μας μένει τώρα παρά να εκφράσουμε το R_H συναρτήσει της L και της γωνιακής διαμέτρου του Ήλιου a . Επειδή a είναι μικρή, από



Σχήμα 4

το Σχήμα 4 βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουμε $R_H = La/2$. Έτσι, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\frac{\rho_R}{\rho_H} = \frac{ga^3T^2}{32\pi^2R_H} \cong 4.4.$$

Φ158

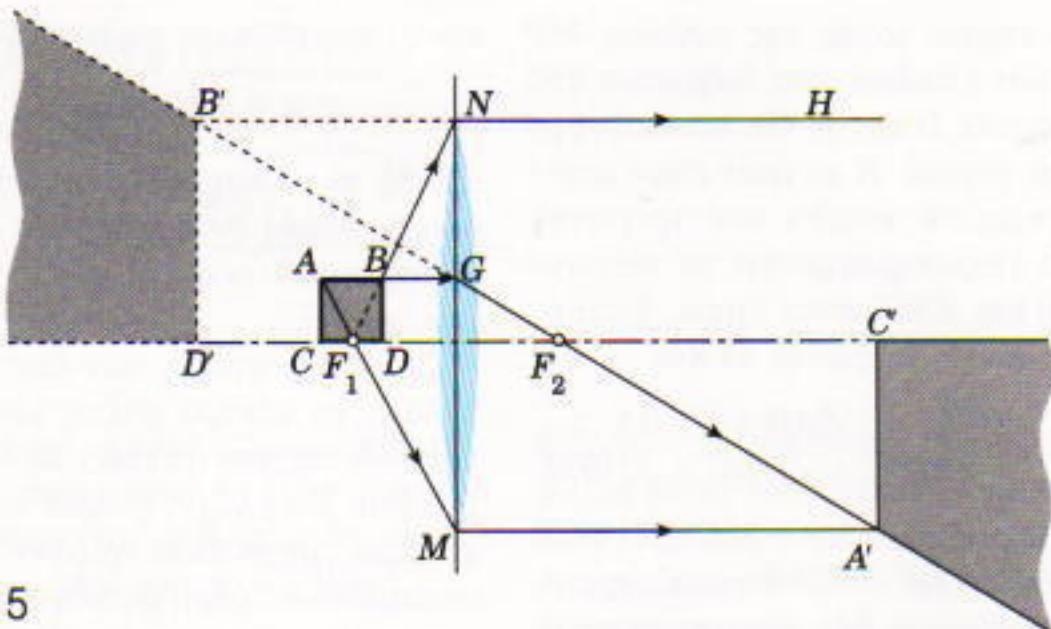
Όταν η αγώγιμη πλάκα τοποθετείται εντός του ηλεκτρικού πεδίου, τα ελεύθερα φορτία της αναδιατάσσονται. Ως εκ τούτου, στις αντίθετες όψεις της πλάκας συγκεντρώνονται επερώνυμα φορτία. Στο εσωτερικό της πλάκας το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι τα ελεύθερα φορτία που βρίσκονται στις δύο επιφάνειες της πλάκας παράγουν ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου η ένταση είναι **-E** στο εσωτερικό της πλάκας και μηδέν στο εξωτερικό της.

Αμέσως αφού μηδενιστεί το εξωτερικό πεδίο, στο εσωτερικό της πλάκας παραμένει μόνο το πεδίο που παράγουν τα επιφανειακά φορτία. Η ενέργεια αυτού του πεδίου ισούται με

$$U = \frac{E^2}{2} \epsilon_0 S d.$$

Τελικά, τα φορτία, κινούμενα υπό την επίδραση αυτού του πεδίου, κατανέμονται ομοιογενώς σε ολόκληρη την έκταση της πλάκας. Στη διάρκεια της διαδικασίας αυτής, η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο πεδίο καταναλώνεται υπό μορφή θερμότητας:

$$Q = \frac{E^2}{2} \epsilon_0 S d.$$



Σχήμα 5

Φ159

Εφόσον ο πυκνωτής και το πηνίο διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, οι τάσεις στα άκρα τους έχουν αντίθετες φάσεις. Συνεπώς, η διαφορά των πλατών τάσης σ' αυτά τα στοιχεία του κυκλώματος ισούται με το πλάτος τάσης στην έξοδο του τροφοδοτικού. Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν είτε αν $V_{C,0} = 0$ (απείρως μεγάλη χωρητικότητα) είτε αν $V_{C,0} = 440\sqrt{2}$ V. Στη δεύτερη περίπτωση, η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή είναι διπλάσια από την επαγωγική αντίσταση του πηνίου:

$$\frac{1}{\omega C} = 2\omega L,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$C = \frac{1}{2\omega^2 L} = \frac{1}{8\pi^2 v^2 L} \cong 5 \mu F.$$

Η επικίνδυνη τιμή της χωρητικότητας αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η χωρητική και η επαγωγική αντίσταση γίνονται ίσες, δηλαδή όταν η χωρητικότητα λαμβάνει την τιμή $C_{\text{αναγ}} \cong 10 \mu F$, επειδή για τη συγκεκριμένη τιμή επέρχεται συντονισμός. Στο συντονισμό, η αντίσταση του κυκλώματος RC τείνει στο μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα τείνει να απειριστεί.

Φ160

Ο ευκολότερος τρόπος για να εντοπίσουμε το είδωλο του τετραγώνου είναι να χρησιμοποιήσουμε τις ακτίνες που διέρχονται από την

εστία του φακού. Η ακτίνα $ABGF_2$ (Σχήμα 5) μας παρέχει τις περισσότερες πληροφορίες επειδή ένα μέρος της διαδρομής της συμπίπτει με την επάνω πλευρά του τετραγώνου, πράγμα που σημαίνει ότι τα είδωλα όλων των σημείων αυτής της πλευράς πρέπει να κείνται είτε πάνω στην ακτίνα GF_2 είτε πάνω στην προέκτασή της. Ας χαράξουμε την ακτίνα AM , η οποία διέρχεται από την αριστερή εστία F_1 του φακού, και την ακτίνα BF_1 η οποία φαίνεται αναδύεται από την ίδια εστία. Αφού διέλθουν από το φακό, αμφότερες οι ακτίνες προχωρούν παράλληλα προς τον κύριο οπτικό άξονα του φακού.

Το πραγματικό είδωλο A' του σημείου A σχηματίζεται στην τομή των ακτίνων GF_2 και MA' . Ομοίως, το φανταστικό είδωλο B' του σημείου B κείται στην τομή των προεκτάσεων των ακτίνων GF_2 και NH . Για να βρούμε τις θέσεις των ειδώλων C' και D' των κορυφών C και D , αρκεί να φέρουμε τις αντίστοιχες καθέτους προς τον κύριο άξονα. Τα είδωλα των πλευρών AC και BD , οι οποίες είναι κάθετες στον κύριο οπτικό άξονα του φακού, πρέπει να είναι επίσης κάθετα προς τον κύριο άξονα.

Για να σχεδιάσουμε τις ακτίνες AM και BN πρέπει να θεωρήσουμε ότι αντικαταστήσαμε το φακό μας με έναν άλλο, του οποίου ο αρχικός αποτελεί το κεντρικό τμήμα αλλά που εκτείνεται —όσο χρειάζεται— πέραν των άκρων του αρχικού και προς τις δύο πλευρές. Κάτι τέτοιο

επιτρέπεται, διότι κάθε μέρος του «μεγάλου» φακού παράγει το ίδιο είδωλο όπως και ολόκληρος ο φακός (τα δύο είδωλα διαφέρουν μόνον ως προς το φωτισμό).

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το είδωλο του τετραγώνου αποτελείται από δύο μέρη: ένα πραγματικό είδωλο (το μέρος της γωνίας $\angle A'F_2C'$ που κείται δεξιά του $A'C'$) και ένα φανταστικό είδωλο (το μέρος της γωνίας $\angle D'F_2B'$ που κείται αριστερά του $B'D'$). Το πραγματικό είδωλο παράγεται από το ήμισυ του τετραγώνου που κείται πέραν του εστιακού επιπέδου, ενώ το φανταστικό είδωλο αντιστοιχεί στο ήμισυ του τετραγώνου που κείται ανάμεσα στο εστιακό επίπεδο και το φακό.

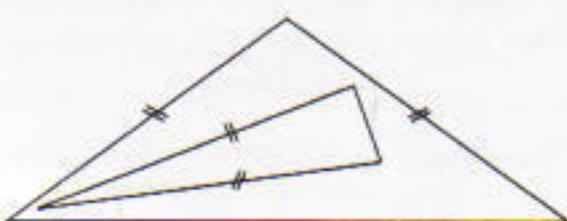
Σπαζοκεφαλιές

Σ161

Το συνολικό πλήθος των παρτίδων ήταν $(15 + 9 + 14)/2 = 19$. Κάθε παίκτης σε οποιεσδήποτε δύο διαδοχικές παρτίδες έμεινε εκτός πρωταθλήματος το πολύ για μία από αυτές. Ο Μάνθος έπαιξε σε 9 παρτίδες, επομένως έπαιξε σε παρτίδες με άρτια αριθμηση (διαφορετικά θα είχε παιξει συνολικά περισσότερες παρτίδες). Άρα, στη δέκατη τρίτη παρτίδα συμμετείχαν η Τερέζα και ο Αλέξης.

Σ162

Οντως, είναι δυνατόν (Σχήμα 6).



Σχήμα 6

Σ163

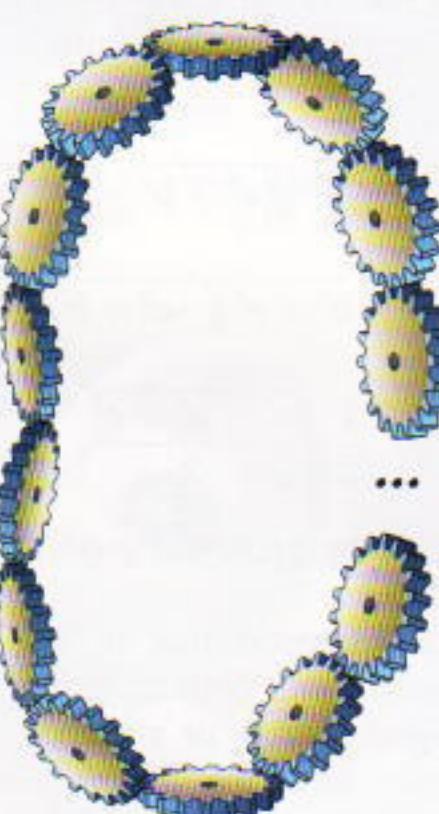
Η μύγα πετούσε επί 1 ώρα (ο χρόνος που πέρασε μέχρι να συναντηθούν οι ποδηλάτες). Η μύγα κινήθηκε στην ίδια κατεύθυνση με τον άνεμο κατά 23 km περισσότερο απ' ότι κινήθηκε αντίθετά του (αυτή είναι η απόσταση που διήνυσε ο Κλεάνθης). Αν ονομάσουμε t_1 και t_2 τα χρονικά διαστήματα που η μύγα

πέταξε στην ίδια κατεύθυνση με τον άνεμο και αντίθετα προς αυτόν, αντίστοιχα, έχουμε το εξής σύστημα εξισώσεων: $t_1 + t_2 = 1$, $40t_1 - 30t_2 = 23$. Λύνοντάς το βρίσκουμε ότι $t_1 = 53/70$ και $t_2 = 17/70$. Συνεπώς, η απόσταση που διήνυσε η μύγα θα είναι:

$$40 \cdot \frac{53}{70} + 30 \cdot \frac{17}{70} = 37 \frac{4}{7} \text{ km.}$$

Σ164

Ναι, είναι δυνατόν. Συμπλέκουμε διαδοχικά τα γρανάζια έτσι ώστε να σχηματίσουν μια ταινία του Möbius (βλ. Σχήμα 7 — τα επίπεδα οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών γρανάζιών σχηματίζουν μια μικρή γωνία, ενώ τα επίπεδα του πρώτου και του τελευταίου σχηματίζουν γωνία



Σχήμα 7

180°). Όταν τα γρανάζια είναι αρκετά (όπως τα εκατόν ένα στην περίπτωσή μας), έχουμε τη δυνατότητα να τα διευθετήσουμε με αυτό τον τρόπο. Και αν το πλήθος τους είναι περιττό, τότε θα μπορούν να περιστρέφονται — κάτι όμως αδύνατο αν το πλήθος τους είναι άρτιο.

Σ165

Διαιρούμε τη σφαίρα σε λεπτά στρώματα, κάθετα στη διάμετρο που συνδέει τα δύο καλώδια. Από κάθε

στρώμα διέρχεται το ίδιο ηλεκτρικό ρεύμα, ενώ η αντίσταση του στρώματος είναι αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού του· οπότε περισσότερη θερμότητα εκλύεται στα στρώματα με το μικρότερο εμβαδόν (τα πολικά στρώματα). Δηλαδή, η περισσότερη θερμότητα εκλύεται στα σημεία επαφής καλωδίων-σφαίρας.

Gradus

2. Ο αριθμός M λήγει στο ψηφίο 2. Βάσει του επιχειρήματος που χρησιμοποιήσαμε στο Πρόβλημα 1, δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

3. Κάθε τέτοιος αριθμός λήγει σε 2, 3, 7 ή 8. Όμως, κανένα τέλειο τετράγωνο δεν λήγει σε αυτά τα ψηφία. (Η λύση είναι σωστή είτε θεωρήσετε ότι κάθε ψηφίο εμφανίζεται μία μόνο φορά είτε επιτρέψετε να εμφανίζεται πολλές φορές.)

5. Θεωρούμε τα υπόλοιπα της διαιρεσης διά του 4. Μπορεί να είναι 0, 1, 2 ή 3, και τα τετράγωνά τους έχουν υπόλοιπο 0, 1 ή 4. Ένα τέλειο τετράγωνο, όταν διαιρείται διά του 4, δεν μπορεί να αφήνει υπόλοιπο 2 ή 3.

6. Ο αριθμός $9n + 3 = 3(3n + 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 3 αλλά όχι του 9. Ένας τέτοιος αριθμός δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο. Παρόμοιο επιχείρημα ισχύει και για τον $9n + 6 = 3(3n + 2)$. Θα βρείτε μια γενικότερη μέθοδο στη λύση του Προβλήματος 8.

7. Το άθροισμα των ψηφίων ενός τέτοιου αριθμού είναι 2001, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 αλλά όχι του 9. Επομένως, ο αριθμός δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο (διότι και αυτός είναι πολλαπλάσιο του 3 αλλά όχι του 9).

8. Αν υψώσουμε στο τετράγωνο όλα τα δυνατά υπόλοιπα της διαιρεσης διά του 9, παίρνουμε όλα τα δυνατά υπόλοιπα της διαιρεσης των τέλειων τετραγώνων διά του 9: 0, 1, 4, 7. Οι δεδομένοι αριθμοί έχουν υπόλοιπα 2, 5, και 8, αντίστοιχα, και επομένως δεν μπορεί να είναι τέλεια τετράγωνα.

9. Αν διαιρέσουμε διά του 3, ο δεδομένος αριθμός έχει το ίδιο υπόλοιπο όπως και ο $4 + 4 + \dots + 4 = 1001 \cdot 4$, που είναι το 2. Μπορούμε

όμως εύκολα να δούμε, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη μέθοδο, ότι ένα τέλειο τετράγωνο, όταν διαιρείται διά του 2, δεν μπορεί να έχει αυτό το υπόλοιπο.

10. Για $n = 1, 2, 3, 4, 5$, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το $n! + 2000$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Για $n \geq 6$, το $n!$ είναι πολλαπλάσιο του 9, και αφού το 2000, όταν διαιρείται διά του 9, αφήνει υπόλοιπο 2, το $n! + 2000$ θα αφήνει επίσης υπόλοιπο 2. Βάσει του Προβλήματος 7, δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

13. Γνωρίζουμε ότι το $2500 = 50 \cdot 50$ είναι τέλειο τετράγωνο. Αν το δεδομένο γινόμενο είναι τέλειο τετράγωνο, θα ισχύει το ίδιο για το $2499 \cdot 2501$. Αυτό όμως, βάσει του Προβλήματος 10, είναι αδύνατο.

14. Έχουμε

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) \\ &= [(n^2 + 3n) + 1]^2 - 1. \end{aligned}$$

Η τελευταία παράσταση είναι κατά 1 μικρότερη από ένα τέλειο τετράγωνο και, επομένως, δεν μπορεί να είναι η ίδια τέλειο τετράγωνο.

15. Η μορφή της δεδομένης παράστασης μας οδηγεί να εξετάσουμε το $(m+n+k)^2$ για μικρές ακέραιες τιμές του k . Πράγματι, βρίσκουμε ότι αν $m > n$, ο δεδομένος αριθμός βρίσκεται μεταξύ των $(m+n+1)^2$ και $(m+n+2)^2$. Αν $m < n$, ο αριθμός μας βρίσκεται μεταξύ των $(m+n)^2$ και $(m+n+1)^2$. Σε κάθε περίπτωση, δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

16. Αν $n = 4$, $N = 33$ και λήγει σε 3 (και, συνεπώς, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1 δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο). Αν $n \geq 5$, η κατάσταση δεν βελτιώνεται, διότι το $k!$ λήγει σε 0 για $k > 4$, και, επομένως, το N εξακολουθεί να λήγει σε 3 (οπότε δεν είναι τέλειο τετράγωνο).

17. Εστω p ο μεγαλύτερος πρώτος που διαιρεί το $n!$ Αν είναι ο $n!$ τέλειο τετράγωνο, πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα ακόμη πολλαπλάσιο του p , και συγκεκριμένα τον

$2p$. Σύμφωνα όμως με το αίτημα του Bertrand, μεταξύ του p και του $2p$ υπάρχει ένας ακόμη πρώτος. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ο p είναι ο μεγαλύτερος πρώτος που διαιρεί τον $n!$.

Τετράεδρο

1. Συμπληρώστε το δεδομένο τετράεδρο και δημιουργήστε ένα παραλληλεπίπεδο με τη βοήθεια της δεύτερης μεθόδου. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείστε τον τύπο που συνδέει το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ενός παραλληλογράμμου με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

2. Συμπληρώστε το δεδομένο τετράεδρο και δημιουργήστε ένα παραλληλεπίπεδο με τη βοήθεια της δεύτερης μεθόδου. Για να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του προβλήματος πρέπει και αρκεί η αντίστοιχη έδρα του παραλληλεπιπέδου να είναι ρόμβος.

$$\begin{aligned} 3. \text{ (a)} \quad &\frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)} \times \\ &\times \sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}. \\ \text{ (b)} \quad &\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Δείτε τα Προβλήματα 3 και 4.

4. Συμπληρώνουμε το δεδομένο τετράεδρο και δημιουργούμε ένα παραλληλεπίπεδο με τη βοήθεια της δεύτερης μεθόδου. Με τη βοήθεια του νόμου των συνημιτόνων εκφράζουμε το τετραπλάσιο του τετραγώνου του μήκους κάθε ακμής του παραλληλεπιπέδου συναρτήσει των μηκών των διαγωνίων της αντίστοιχης έδρας και της μεταξύ τους γωνίας (μία έδρα για κάθε ακμή). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το θεώρημα για το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου και το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του. Αν συνδυάσουμε αυτές τις εξισώσεις, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. □

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Russell Stannard

Ο Θείος Αλβέρτος σας απαντά

Russell Stannard

O Θείος Αλβέρτος σας απαντά

100^{1/2} επιστημονικές ερωτήσεις από παιδιά, με τις απαντήσεις τους

• «Απαντήσεις εξαιρετικά σαφείς και φιλικές προς τα παιδιά...»
The Times

• «Κι αυτό το βιβλίο του Stannard θα κάνει τους γονείς να κλάψουν από ευγνωμοσύνη...»
Guardian

• «Αξέι να διαβάσετε το βιβλίο ακόμη και για την τελευταία μισή ερώτηση...»
Sunday Telegraph

Ένα βιβλίο για τρυφερούς αναγνώστες

Σελ.: 202, Εικ.: A/M, 16 × 25 εκ.,
Πανόδιο, 5.500 δρ.

Tου Russell Stannard κυκλοφορούν:

- Ο χρόνος και ο χώρος του Θείου Αλβέρτου
- Οι μαύρες τρύπες και ο Θείος Αλβέρτος
- Ο Θείος Αλβέρτος και ο κόσμος των κιβάντων
- Χώλια και ένα μυστήριο του Σύμπαντος

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

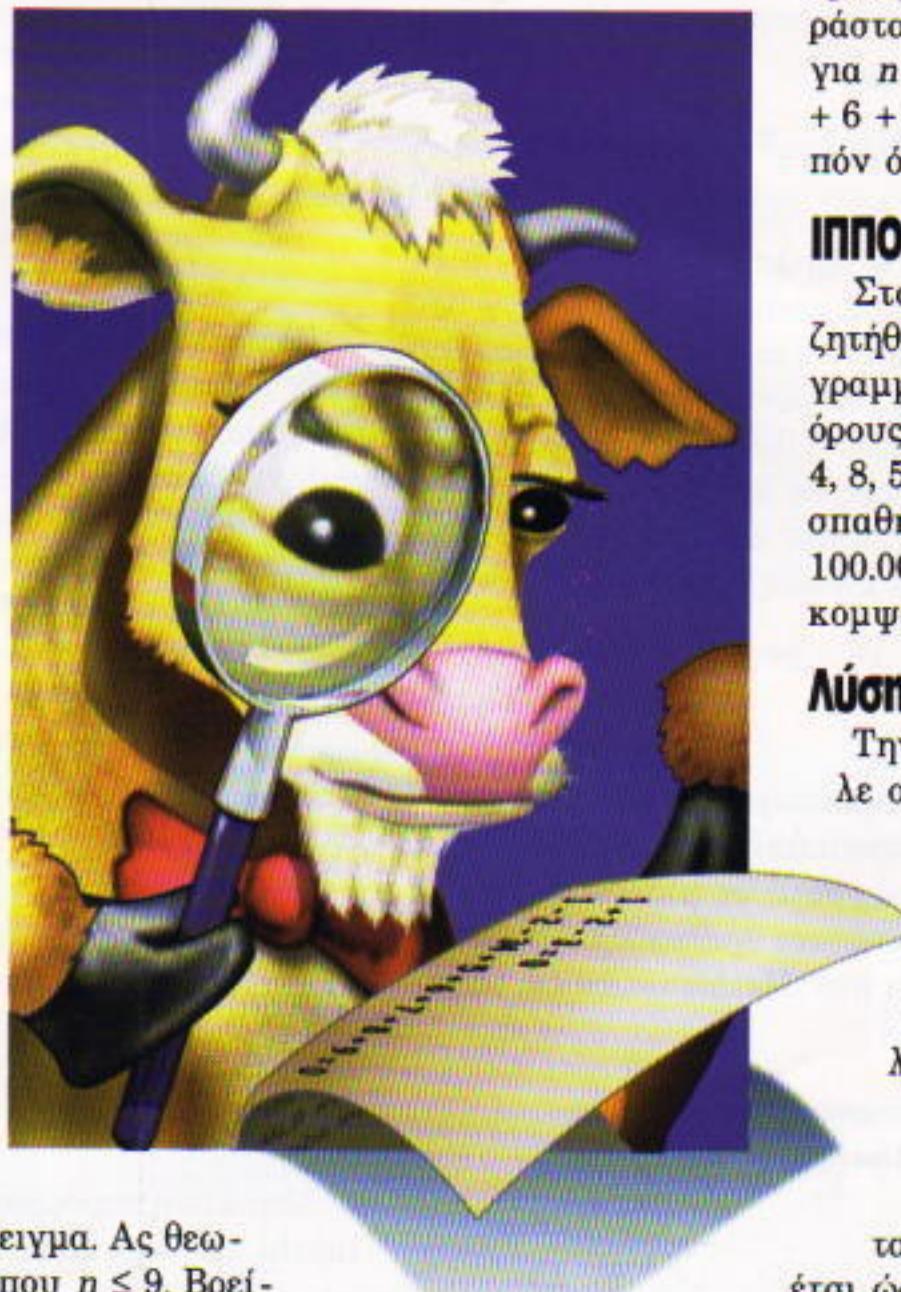
Ευτυχισμένες αγελάδες

...σε αναζήτηση μηδενικών αθροισμάτων

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, τη στήλη του *Quantum* που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά. Τι χρειάζεται για να παράγεις γάλα πρώτης ποιότητας; Σίγουρα υγιείς αγελάδες, υγιεινές ζωοτροφές, σταύλους καθαρούς και με καλό εξαερισμό, καθαριότητα των μαστών των αγελάδων, κατάλληλη θερμοκρασία, και προστασία από διοξίνες, σκόνη, μύγες και άλλες πηγές μολύνσεων. Με όλα αυτά θα πάρετε γάλα πολύ καλής ποιότητας. Για να έχετε όμως γάλα πραγματικά εξαιρετικό, χρειάζεται κάτι περισσότερο. Χρειάζεστε καλά τακτοποιημένες και κυρίως, ευτυχισμένες αγελάδες.

Μπορείτε να αγοράσετε ευτυχία μαζί με τη ζωοτροφή; Όχι βέβαια —αυτό κάνει απλώς τις αγελάδες παχύτερες. Αν ήταν τόσο εύκολο, όλοι θα μπορούσαν να παράγουν γάλα εξαιρετικής ποιότητας. Για να έχετε πραγματικά ευτυχισμένες αγελάδες, πρέπει να φροντίζετε να γυμνάζουν το μυαλό τους. Γι' αυτό το λόγο ο κύριος Πωλ μού ζητά να βρίσκω προβλήματα για τις φίλες μου —και δεν τον απογοητεύω ποτέ. Ιδού ένα τυπικό παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε τα ψηφία $1234567\dots n$, όπου $n \leq 9$. Βρείτε έναν τρόπο να εισαγάγετε τα σύμβολα συν και μείον μεταξύ των ψηφίων, έτσι ώστε το άθροισμα της παράστασης να ισούται με 0. Για παράδειγμα, αν $n = 9$, έχουμε $1 - 2 - 34 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 0$. Βρείτε όλες τις δυνατές λύσεις, που θα κάνουν το κοπάδι μας ευτυχισμένο. Ιδού, λοιπόν, η νέα μας πρόκληση.



ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 17

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα δέχεται ως είσοδο έναν ακέραιο $n \leq 9$ και θα βρίσκει όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να εισαγάγουμε τα σύμβολα συν και μείον μεταξύ των ψηφίων έτσι ώστε το άθροισμα της προκύπτουσας παράστασης να είναι 0. Μια λύση για $n = 9$ είναι $1 - 2 - 34 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 0$. Βρείτε λοιπόν όλες τις λύσεις.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 15

Στο Ιπποπρόβλημα 15 σάς ζητήθηκε να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα παραγάγει τους όρους της ακολουθίας $1, 2, 3, 6, 4, 8, 5, 10, 7, 14, 9, 18, \dots$. Προσπαθήστε το βρίσκοντας τον 100.000ό όρο. Η ταχύτητα και η κομψότητα μετράνε.

Λύση

Την κομψότερη λύση έστειλε ο Russ Cox, ο οποίος κέρδισε χρυσό μετάλλιο με την ομάδα των ΗΠΑ στη Διεθνή Ολυμπιάδα Πληροφορικής του 1995 (διεξήχθη στην Ολλανδία). Ο Russ γράφει: «Κατά βάση, η ακολουθία αποτελείται από ζεύγη αριθμών ($n, 2n$) ταξινομημένων ως προς n , έτσι ώστε κάθε αριθμός να εμφανίζεται στην ακολουθία (είτε ως n είτε ως $2n$) μία μόνο φορά. Θεωρούμε την ακολουθία ως δύο διαπλεκόμενες ακολουθίες: μία αύξουσα «πρωτεύουσα ακολουθία» (τα n) και μία αύξουσα «δευτερεύουσα ακολουθία» (τα $2n$). Για να γράψουμε την ακολουθία, αρκεί

απλώς να επινοήσουμε ένα κριτήριο για το ποιοι αριθμοί ανήκουν στην πρωτεύουσα ακολουθία και μετά να γράψουμε όλα τα ζεύγη (n , $2n$), όπου το n είναι πρωτεύων αριθμός.

Επισημαίνουμε πρώτα ότι αν ένας αριθμός δεν ανήκει στην δευτερεύουσα ακολουθία πρέπει να βρίσκεται στην πρωτεύουσα. Στην συνέχεια, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν περιττοί αριθμοί στην δευτερεύουσα ακολουθία και, επομένως, ανήκουν όλοι στην πρωτεύουσα. Αφού όλοι οι περιττοί αριθμοί ανήκουν στην πρωτεύουσα, τότε όλοι οι αριθμοί της μορφής $2^k \cdot$ περιττός, πρέπει να ανήκουν στη δευτερεύουσα. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι αριθμοί της μορφής $4^k \cdot$ περιττός βρίσκονται στην πρωτεύουσα ακολουθία. (Αν κάποιος αριθμός της μορφής $4^k \cdot$ περιττός ανήκε στη δευτερεύουσα ακολουθία, τότε ο αριθμός $4^k \cdot$ περιττός / 2 = $2^k \cdot$ περιττός θα ανήκε στην πρωτεύουσα, κάτι που δεν αληθεύει.) Συνεπώς, ο $8^k \cdot$ περιττός είναι δευτερεύων αριθμός. Έχουμε επομένως ότι οι αριθμοί της μορφής $2^n \cdot$ περιττός, όπου n άρτιο, είναι πρωτεύοντες αριθμοί, ενώ οι αριθμοί της μορφής $2^n \cdot$ περιττός, όπου n περιττό, είναι δευτερεύοντες.

Αυτό μας οδηγεί να γράψουμε με το *Mathematica* τον επόμενο πολύ όμορφο αναδρομικό ορισμό του πρωτεύοντος αριθμού.

```
primaryQ[n_] := If[OddQ[n], True, !
 primaryQ[n/2]]
```

Η συνάρτηση **primaryQ** δουλεύει ως εξής: Αν ο αριθμός n είναι περιττός, τότε είναι πρωτεύων. Αν δεν είναι περιττός, τότε τον διαιρεί διά του 2 και κάνει τον ανάλογο έλεγχο στο $n/2$. Επομένως, αν το n έχει ως παράγοντα το 2 μόνο μία φορά, δεν θα είναι πρωτεύων αριθμός. Αν το έχει δύο φορές, θα είναι πρωτεύων, κ.ο.κ. Για παράδειγμα, τα 4, 12, 16 και 20 είναι πρωτεύοντες αριθμοί, διότι έχουν άρτιο πλήθος παραγόντων του 2.

```
Map[primaryQ, {4, 12, 16, 20}]
```

```
{True, True, True, True}.
```

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την **primaryQ** για να επλέγουμε τους πρωτεύοντες αριθμούς από το 1 έως το n και να τους γράψουμε σε μια λίστα μαζί με τους αντίστοιχους δευτερεύοντες αριθμούς ($2^k \cdot$ πρωτεύων αριθμός). Αυτό γίνεται στο *Mathematica* ως εξής:

```
n = 100;
Flatten[Transpose[{primarySequence =
Select[Range[n], primaryQ], 2
primarySequence}]]
```

```
(1, 2, 3, 6, 4, 8, 5, 10, 7, 14, 9, 18,
11, 22, 12, 24, 13, 26, 15, 30, 16, 32,
17, 34, 19, 38, 20, 40, 21, 42, 23, 46,
25, 50, 27, 54, 28, 56, 29, 58, 31, 62,
33, 66, 35, 70, 36, 72, 37, 74, 39, 78,
41, 82, 43, 86, 44, 88, 45, 90, 47, 94,
48, 96, 49, 98, 51, 102, 52, 104, 53,
```

```
106, 55, 110, 57, 114, 59, 118, 60, 120,
61, 122, 63, 126, 64, 128, 65, 130, 67,
134, 68, 136, 69, 138, 71, 142, 73, 146,
75, 150, 76, 152, 77, 154, 79, 158, 80,
160, 81, 162, 83, 166, 84, 168, 85, 170,
87, 174, 89, 178, 91, 182, 92, 184, 93,
186, 95, 190, 97, 194, 99, 198, 100, 200}
```

Ο 100ός αριθμός αυτής της ειδικής ακολουθίας είναι ο 150.

```
[[100]]
```

```
150
```

Το μοναδικό πρόβλημα της ανωτέρω λύσης στο *Mathematica* είναι ότι δεν γνωρίζουμε πότε ακριβώς φτάνουμε στον 100.000ό όρο. Αυτό αντιμετωπίζεται με έναν απλό βρόχο **While**, ο οποίος απαριθμεί τους πρωτεύοντες αριθμούς που έχουν βρεθεί και σταματά στο 50.000. Επομένως, ο 100.000ός όρος της ειδικής μας ακολουθίας είναι το διπλάσιο αυτού του πρωτεύοντος αριθμού.

```
n = 50000;
primary = 1; count = 1;
While[count < n, primary++;
  If[primaryQ[primary], count++]
{primary, 2*primary}

{74999, 149998}
```

Ιδού άλλη μία λύση. Την έχω γράψει χρησιμοποιώντας διαδικασίες (procedures). Είναι κάπως δυσκολότερη από την προηγούμενη, αλλά προσπαθήστε να την ερμηνεύσετε.

```
n = 50000;
primary[1] = 1; secondary[1] = 2;
i = 1; number = 1; index = 1;
Do[number++, i++];
  If[number == secondary[index], number++;
    index++];
  primary[i] = number; secondary[i] = 2
number, {n}];
```

Ο 100.000ός όρος της ακολουθίας είναι ο 50.000ός δευτερεύων αριθμός.

```
secondary[n]
```

```
149998
```

Μια λύση παρόμοια με του Russ έστειλε ο Mario Velucchi από την Πίζα της Ιταλίας.

Και τέλος...

Στείλτε τις λύσεις σας στη γνωστή σας διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Οι λύσεις προηγούμενων προβλημάτων υπάρχουν στη διεύθυνση <http://usaco.uwp.edu/cowculations>, ή στα τεύχη του ελληνικού *Quantum* από τον Ιανουάριο του 1997. ☐