

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

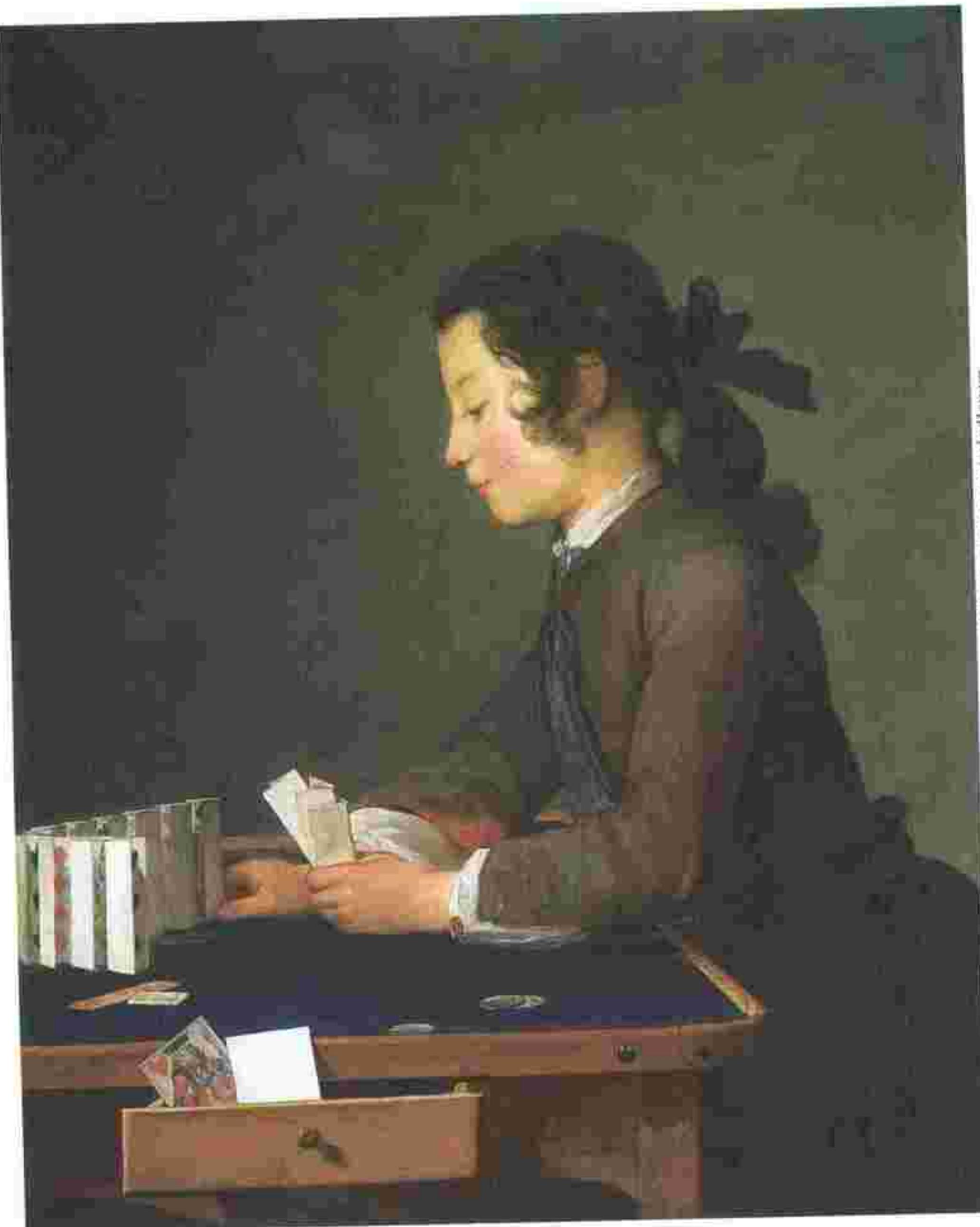
ΙΟΥΛΙΟΣ/ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1999
ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 4
2.000 ΔΡΧ.

- Η μη ευκλείδεια γεωμετρία
- Χτιζόματα καράτε και φυσική
- Καταστάσις ενσταθούς ισορροπίας
- Γενετήριες συναρτήσεις
- Αριθμητικά δεδομένα σε γεωμετρικά προβλήματα
- Oersted: μια μαγνητική προσωπικότητα
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί που δεν γνωρίζετε
- Εννιμολογικά προβλήματα της κβαντικής φοσφούζ
- Γιατί πρέπει να κάνουμε λάθη

Φακοί και οπτικά συστήματα



ΣΕΛ
ΣΕΛ



Ελαιογραφία, 65 × 82 εκ., Συλλογή Andrew W. Mellon © 1999 Διευθυντικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Οικόπενας

Ο χάρτινος πύργος (περίου 1735), του Jean-Siméon Chardin

ΥΓΡΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΟΣΜΙΚΗ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ, ο νεαρός υππρέτης βρίσκει την ευκαιρία να ελέγξει τις κινητικές δεξιότητες του στήνοντας έναν πύργο με τραπουλόχαρτα. Κατά τους τεχνοκριτικούς, «ο πίνακας εκφράζει τη ματαιότητα των εγκοσμίων». Και πράγματι, εμείς γνωρίζουμε από εμπειρία ότι, στο πέρασμα του χρό-

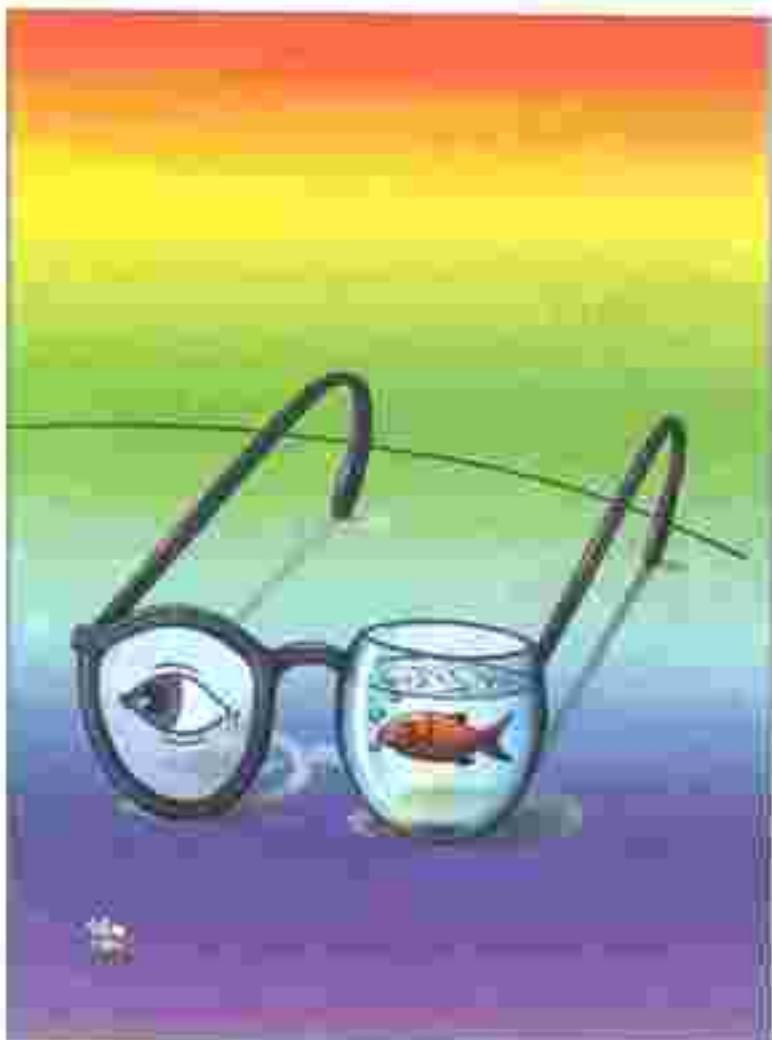
νου, τα πάντα καταρρέουν, το καθετί ταίνει να διαλύεται «εις τα εξ ων συντεθῆται».

Προκειμένου να γνωρίσετε ορισμένα φυσικά συστήματα στα οποία μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε την ευστάθεια της ισορροπίας τους, διαβάστε το άρθρο «Όταν οι ισορροπίες καταρρέουν», στη σελίδα 6.

QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1999

ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 4



Εικονογράφηση: Selçuk Demirel

Αν το ανθρώπινο μάτι λειτουργούσε όπως το μάτι των ψαριών, αν δηλαδή προκειμένου να σχηματιστεί ευκρινές ειδωλό, ο φακός έπρεπε να μετακινείται μπρος-πίσω, τότε πόσο γουρλομάτης και πρητοκοράγουλος θα μας φανόταν ο κόσμος γύρω μας! Στο παρόν τεύχος υπάρχουν πολλές προκλήσεις σχετικά με τη δράση των φακών και άλλων οπτικών συστημάτων, τον εντοπορικό σιδώλων μέσω σχεδιασμού της διαδρομής φωτεινών ακτίνων, και το σύστημα της δραστείας. Και για να τις γνωρίστε, πρέπει να «εστιάσετε» την προσοχή σας στα άρθρα των σελίδων 36 και 50.

ΑΡΘΡΑ

- 6 Χάρτινοι πύργοι
Όταν οι ισορροπίες καταρρέουν
Boris Korsunsky
- 10 Μαθηματική μαγεία;
Γενετήριες συναρτήσεις
S.M. Voronin και A.G. Kulagin
- 24 Ευθείες Lobachevsky
Η νεογέννητη μη συκλείδεια γεωμετρία
N.I. Lobachevsky
- 38 Επιστήμη και πολεμικές τέχνες
Χτυπήματα καράτε
A. Biryukov

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων
Πιατί πρέπει να κάνουμε λάθη
- 5 Σπαζοκεφαλιές
- 17 Με λίγη φαντασία
Ιστορίες κρανικής τρέλας — 2
- 33 Στο μαυροπίνακα I
Συνένωση σταγόνων
- 36 Καλειδοσκόπιο
Σχεδιάστε τις ακτίνες
- 43 Στο μαυροπίνακα II
Αριθμητικά δεδομένα σε γεωμετρικά προβλήματα
- 47 Σκόπελοι
Τα «ημ» και τα «συν» που δεν γνωρίζετε...
- 50 Στα πεδία της φυσικής
Τό χουν τα μάτια
- 54 Στο μαυροπίνακα III
Ένας περιστρεφόμενος πυκνωτής
- 57 Πώς λύνεται;
- 58 Αναδρομές
Oersted: μια μαγνητική προσωπικότητα
- 63 Απαντήσεις, Υποδείξεις
και Λύσεις
- 70 Ιπποδρογισμοί
Σκέψους δύο φορές, κωδικογράφηση μία

Γιατί πρέπει να κάνουμε λάθη

«Όλα ήταν λάθος, κι οι δρόμοι που πήραμε και τα λόγια που είπαμε και τα χέρια που κρατήσαμε...»

—Τάσος Λειβαδίτης

ΤΟ ΚΛΕΙΔΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΟΔΟ ΕΙΝΑΙ να κάνετε λάθη. Υπάρχουν ασφαλώς περιπτώσεις στις οποίες σίναι σημαντικό τα λάθη να αποφεύγονται —αναλογιστείτε, για παράδειγμα, τους χειρουργούς ή τους πλότους αεροπλάνων. Ωστόσο, η κοινή γνώμη δεν έχει εμπεδώσει εξίσου καλά ότι να κάνεις λάθη αποτελεί συχνά το μυστικό της επιτυχίας. Αυτό που συνοδεύει απλώς η τρέχουσα αντίληψη ότι «αν δεν ρισκάρεις, δεν κερδίζεις». Παρότι ο εν λόγω κανόνας ενθαρρύνει μια υγιή στάση έναντι της διακινδύνευσης, ωστόσο δεν τονίζει επαρκώς τα θετικά οφέλη που προκύπτουν όχι μόνο από το να διακινδύνευεις λάθη αλλά και από το να τα διαπράττεις πραγματικά. Φρονώ ότι, αντί να αποφεύγετε τα λάθη, θα πρέπει ακόμη και να καλλιεργήσετε το συνήθειο να τα κάνετε. Αντί να καταφεύγετε στην άρνηση όποτε τα διαπράττετε, θα πρέπει να καταλήξετε ειδήμων των λαθών σας να τα επεξεργάζεστε στο μυαλό σας σαν να ήταν έργα τέχνης! Και μην χάσετε καμιά ευκαιρία για μεγαλειώδες λάθος: έτσι, μόνο και μόνο για να μπορείτε να ανακάμπτετε από αυτό.

Μετά τη θεωρία, στην πράξη. Τα λάθη λοιπόν, δεν αποτελούν απλώς χρυσές ευκαιρίες για γνώση: είναι, κατά μία έννοια, μοναδικές ευκαιρίες να μάθετε κάτι εντελώς νέο. Για να υπάρξει δρως γνώση θα πρέπει να υπάρχουν και γνώστες. Και αυ-

τοι είτε θα έχουν εξελίχθει από μόνοι τους είτε θα έχουν σχεδιαστεί και κατασκευαστεί από γνώστες που ήδη εξελίχθηκαν. Η βιολογική εξέλιξη προχωρά μέσα από μια τεράστια, αδυσώπητη διεργασία δοκιμής και λάθους —έτσι κι αλλιώς, χωρίς τα λάθη οι δοκιμές δεν θα επιτελούσαν τίποτε. Άλλα αυτό αλληθεύει για κάθε διαδικασία σχεδιασμού, ανεξάρτητα του πόσο έξυπνος ή ανόητος είναι ο σχεδιαστής. Εποιητικότερο κι αν είναι η ερώτηση, εάν δεν γνωρίζετε την απάντηση, ο μόνος τρόπος να την ανακαλύψετε είναι να κάνετε ένα άφοβο άλμα στο κενό και να ενημερωθείτε από τα αποτελέσματα. Εσείς —εσείς που ξέρετε πολλά αλλά σας διαφεύγει τούτη η απάντηση— μπορείτε να επιχειρήσετε το άλμα καθοδηγούμενοι από όσα ήδη γνωρίζετε: να μη φάχνετε εντελώς στα τυφλά.

Όσον αφορά την εξέλιξη, όμως, η οποία δεν γνωρίζει τίποτε, τα άλματα προς το καινούργιο γίγονται στα τυφλά μέσω των μεταλλαγών, οι οποίες αντιγράφουν «λάθη» στο DNA. Σημη πραγματικότητα, τα περισσότερα από αυτά είναι λάθη μοιραία. Εφόσον λοιπόν οι μεταλλαγές στην πλειονότητά τους παράγονται επιβλαβή προϊόντα, η διαδικασία της φυσικής επιλογής λειτουργεί για να διατηρείται πολύ χαμηλός ο μεταλλακτικός ρυθμός. Ευτυχώς για μας, όμως, η διαδικασία δεν χαρακτηρίζεται από απόλυτη επιτυχία, διότι,

διαφορετικά, η εξέλιξη αναπόφευκτα θα σταματούσε, οι πηγές που αναβλύζουν καινοτομίες θα στέρευαν. Αυτή η μικρή ατέλεια στη διαδικασία είναι η πηγή του υπέροχου σχεδιασμού και της πολυπλοκότητας του έμβιου κύρους.

Η βασική αντίδραση σε κάθε λάθος οφείλει να είναι: «Καλά, δεν θα το ξανακάνω!» Η φυσική επιλογή αποδέχεται αυτή την αντίληψη και εξαλείφει τους χαζούς προτού καταφέρουν να αναπαραχθούν. Κάτι με παρόμοια επλεκτική δράση (οι μηχανισμοί το αποκαλούν «αρνητική ενίσχυση») πρέπει να λειτουργεί στον εγκέφαλο κάθε ζώου, και μπορεί να του μάθει να μην κάνει αυτό το θόριβο, να μην αγγίζει εκείνο το καλώδιο ή να μην προτιμάει τούτη την τροφή. Εμείς, τα ανθρώπινα όντα, λειτουργούμε ταχύτερα και αποτελεσματικότερα. Μπορούμε να οκεφτόμαστε τη σκέψη, συλλογιζόμενοι αυτό που έχουμε κάνει πριν λίγο. Και όταν συλλογιζόμαστε, αντιμετωπίζουμε άμεσα το πρόβλημα που πρέπει να λύσει καθένας που έχει διαπράξει λάθος: «Τι ήταν αυτό που έκανα και με έβαλε σ' αυτό το υπελά?» Το κόλπο είναι να επωφελείστε από τις ιδιαιτερες λεπτομέρειες της αναστάτωσης που προκαλέσατε, έτσι ώστε στην επόμενη προσπάθεια να τις έχετε κατά νου και για μην επιχειρείστε απλώς ένα ακόμη τυφλό άλμα στο κενό.

Σιγη απλούστερη εκδοχή της, αυ-

τη σίναι μια τεχνική που μάθαμε στο δημοτικό σχολείο. Θυμηθείτε πόσο παράξενη και απωθητική σας φάγηκε στην αρχή η διαιρεση; Βρισκόσασταν αντιμέτωποι με δύο αστάθμητα μεγάλα νούμερα και έπρεπε να βρείτε τον τρόπο για ξεκινήσετε. Ο διαιρέτης στο διαιρετέο χωράει έξι, επτά ή οκτώ φορές; Ποιος το γνωρίζει; Σου έμενε, λοιπόν, να δοκιμάσεις όποιον αριθμό προτιμάς και να ελέγξεις το αποτέλεσμα. Θυμάμαι ότι όταν μου ζήτησαν να ξεκινήσω «μαντεύοντας» κατατρόμαξα. «Μα δεν υιοτίθεται ότι αυτά σίναι μαθηματικά; Μπορούμε να παίζουμε το μαντείο των Δελφών με μια τόσο σφαρή υπόθεση!» Τελικά, όμως, κατέληξα να εκτιμήσω την αξία της μεθόδου. Αν ο επιλεγόμενος αριθμός αποδεικνύστων μικρός, τον μεγάλωνες και ξεκινούσες από την αρχή αν πάλι ήταν μεγάλος, τον μίκρωνες. Το καλό με τη διαιρεση ήταν ότι πάντοις λειτουργούσε, ακόμη και αν ήσουν τελείως ανίκανος να κάνεις την πρώτη σου επλογή — μόνο που σε αυτή την περίπτωση σου έπαιρνε λίγο παραπάνω χρόνο.

Η συγκεκριμένη τεχνική του να οδηγείστε σε μια κατ' εικασία εκτίμηση κατόπιν μικρής ή μεγάλης εκπαίδευσης, να επεξεργάζεστε τα συνακόλουθα και να χρησιμοποιείτε το αποτέλεσμα προκειμένου να επιφέρετε μια διόρθωση για το επόμενο στάδιο, έχει βρει πολλές εφαρμογές. Οι θαλασσοπόροι, για παράδειγμα, προσδιορίζουν τη θέση τους στον ουρανό εικάζοντας κατά πρώτον όσο το δυνατόν ακριβέστερα το γεωγραφικό πλάτος και μήκος τους. Στη συνέχεια υπολογίζουν πόσο ψηλά στον ουρανό θα βρισκόταν ο Ήλιος αγ (κατά διαβολική σύμπτωση) αυτή ήταν η πραγματική τους θέση. Μετά μετρούν το πραγματικό έξαρμα του Ήλιου και συγκρίνουν τις δύο τιμές. Τέλος, με έναν τετριμένο υπολογισμό ανακαλύπτουν την τιμή της διόρθωσης που θα πρέπει να επιφέρουν στην αρχική τους εκτίμηση (και προς ποια κατεύθυνση). Είναι χρήσιμο για διατυπώνετε μια καλή κατ' εικασία εκτίμηση από την πρώτη σπύρη, ώστοσο δεν πειράζει κι αν αυτή αποδειχθεί λανθασμένη:

σημασία έχει να κάνετε το λάθος, ώστε να μπορείτε να το διορθώσετε.

Φυσικά, όσο πο πολύπλοκο είναι το πρόβλημα τόσο δυσκολότερη καθιστάται η ανάλυσή του. Στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης τα παραπάνω είναι γνωστά ως πρόβλημα της «απόδοσης από ευθύνη» (ή και της «απόδοσης από υπατιότητα»). Πολλά προγράμματα τεχνητής νοημοσύνης είναι σχεδιασμένα να «μαθαίνουν», να αυτορρυθμίζονται όταν διαπιστώνουν ότι κάτι στη λειτουργία τους πηγαίνει στραβά. Ωστόσο, ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα στην τεχνητή νοημοσύνη αποτελεί ο εντοπισμός των στοιχείων του προγράμματος που ευθύνονται, ή θεωρούνται υπαίτια, για το λάθος. Τούτο αποτελεί επίσης μεγάλο πρόβλημα —ή τουλάχιστον αυτία αρφισβήτησης και σύγχυσης— στην εξελικτική θεωρία. Κάθε οργανισμός στη Γη πεθαίνει, αργά ή γρήγορα, από κάποια αιτία. Πώς αλιγθεία μπορεί η φυσική επιλογή να διακρίνει μέσα από αυτή την ομίχλη των λεπτομερειών το τεράστιο σύμπλεγμα των θετικών και αρνητικών παραγόντων και, στη συνέχεια, να «επιβραβεύσει» τους καλούς ή να «τιμωρήσει» τους κακούς; Όντως έχουν μερικοί αρφιθαλείς πρόγονοι μας πεθάνει άτεκνοι επειδή τα βλέφαρά τους είχαν λάθος σχήμα; Αν όχι, τότε πώς η διαδικασία της φυσικής επιλογής θα μπορούσε να εξηγήσει το λόγο που τα βλέφαρά μας τυχαίνει να έχουν αυτό το κομψό σχήμα;

Μια τεχνική για την απλοποίηση του προβλήματος «απόδοση από ευθύνη» έγκειται στο να δομήσουμε περιστάσεις λαθών σε «ιεραρχία» —μια πυραμιδική διάταξη επιπέδων, με ένα δίκτυο ασφαλείας σε κάθε βήμα. Σε γενικές γραμμές: οργανώστε το πρόγραμμά σας έτσι ώστε σε κάθε βήμα σας να μπορείτε να ελέγχετε για λάθη και να επανορθώνετε την πορεία σας. Τότε θα μπορείτε να προχωρήσετε άφοβα στην εκτέλεση. Θα είστε έτοιμοι να ωφεληθείτε από μια απίθανη επιτυχία ή να αντεπέξελθετε ευάρεστα σε μια πθανή αποτυχία. Αυτή την τεχνική ακολουθούν επί της οκτηνής και οι ταχυδακτυλουργοί, επιτυγχάνοντας εκ-

πληκτικά αποτελέσματα. (Δεν προτίθεμαι να προκαλέσω ταχυδακτυλουργούς και μάγους αποκαλύπτοντας το συγκεκριμένο κόλπο —δεν είναι τρικ αλλά μια θεμελιώδης αρχή.) Ένας καλός ταχυδακτυλουργός λοιπόν γνωρίζει δυο-τρία «κόλπα» με τραπουλόχαρτα τα οποία τις περισσότερες φορές αποτυγχάνουν —πετυχαίνουν, ας πούμε, μία φορά στις χίλιες. Παρακολουθήστε παράσταση: Ξεκινά αναγγέλλοντας ότι πρόκειται να κάνει κάτι μαγικό δεν εξηγεί στο κοινό ποιο ακριβώς είναι το κόλπο, το προσπαθεί δύος μήνες και «του βγει». Φυσικά, σχεδόν πάντα αποτυγχάνει· έτσι, προχωρά σιωπηρά στη δεύτερη προσπάθεια, για ένα κόλπο που ίως πετυχαίνει μία στις εκατό φορές. Όταν και αυτό δεν πάει καλά (όπως σχεδόν πάντοτε), προχωρά αθόρυβα στο κόλπο νούμερο τρία —που πετυχαίνει μόνο μία φορά στις δέκα— και βεβαίως είναι έτοιμος για το κόλπο νούμερο τέσσερα (με τις διπλάσιες, ας πούρε, πθανότητες), κ.ο.κ. Εάν όλα αποτύχουν, τότε υποχρεωτικά αγαπήρει ένα κόλπο εξασφαλισμένης επιτυχίας (σ' αυτή την έσχατη θέση του οδηγησαν τα προηγούμενα δίκτυα ασφαλείας). Τούτο το κόλπο δεν θα εντυπωσιάσει το πλήθος, αλλά τουλάχιστον είναι κάτι σίγουρο. Εντέλει, αν κατά τη διάρκεια ολόκληρης της παράστασης ο ταχυδακτυλουργός μας υποχρεώνεται, κάθε φορά, να αρπάζεται από τη σανίδα σωτηρίας του τελευταίου δίκτυου ασφαλείας, ε, τότε πραγματικά θα είναι πολύ άτυχος. Σκεφτείτε δύος πως, διαφορετικά, θα αφήσει άναυδο το κοινό πολλές φορές καθώς θα πετυχαίνει διάνα σε μερικά από τα κόλπα του: «Άδυνταν! Πώς είναι ποτέ δυνατόν να γνωρίζει ότι αυτό ήταν το χαρτί μου?» Χρ... Δεν γνωρίζει, αλλά δοκίμασε ρισκάροντας, και αυτό του έφερε επιτυχία. Αποκρύβοντας τα «λάθη» από το κοινό, δημούργησε τη «μαγεία».

Η εξέλιξη λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο: όλα τα σωπήλα λάθη τείνουν να μη φαίνονται, και έτσι το μόνο που βλέπουμε είναι μια ακολουθία θριάμβων. Για παράδειγμα, το 90% όλων των πλασμάτων που έζηραν

στον πλανήρη μας πέθαναν απόκενα, αλλά σε κανέναν από τους προγόνους μας δεν έλαχε τέτοια μοίρα!

Η μόνη διαφορά ανάμεσα στην εποιήμαται την ταχυδακτυλούργια είναι ότι στην πρώτη τα λάθη βρίσκονται σε κοινή θέση. Ο κάθε επιστήμονας τα επιδεικνύει, έτσι ώστε όλοι μας μπορούμε να διδασκόμαστε από αυτά. Με τον συγκεκριμένο τρόπο καταφέρνουμε να γνωρίζουμε την εμπειρία του καθενός, και όχι μόνο τη δική μας ιδιοσυγκραστική πορεία μέσα από το φάσμα των λαθών μας. Μία που το αναφέρουμε, αυτό ακριβώς είναι που μας καθιστά εξυπότερους από όλα τα άλλα είδη. Δεν πρόκειται τόσο για το μέγεθος και τη δύναμη των εγκεφάλων μας, αλλά για το ότι μοιραζόμαστε τα κέρδη που ο καθένας μας έχει αποκομίσει από τις δικές του ιστορίες δοκιμής και λάθους.

Το μυστικό είναι να γνωρίζουμε το χρόνο και τον τρόπο να διαπράττουμε τα λάθη, έτσι ώστε κανείς να μην πληγώνεται από αυτά και όλοι μας να αποκομίζουμε οφέλη από την εμπειρία. Εκπλήσσομαι με το πόσοι πραγματικά έξυπνοι άνθρωποι δεν κατανοούν όλα τούτα. Γνωρίζω διακεκριμένους ερευνητές που θα φερθούν ανόητα μόνο και μόνο για να αποφύγουν να παραδεχθούν ότι έσφαλαν σε κάπι, ακόμη και αν αυτό είναι εντελώς ασήμαντο. Προφανώς αγγούν ότι η Γη δεν πρόκειται να καταπει όλους δοοι παραδέχονται ότι «ναι... έκανα λάθος». Θα συναντήσετε ανθρώπους που τους αρέσει να τονίζουν τα λάθη σας. Και εάν μεν είναι πνευματικά γενναιόδωροι, θα σας εκτιμήσουν περισσότερο αφού τους προσφέρετε την ευκαιρία να σας βοηθήσουν· εάν όμως είναι μιζέροι, θα το ευχαριστήσουν κάνοντάς σας να γιραπείτε. Ωστόσο, είτε έτσι είτε αλλιώς, κερδίσμενοι θα βγούμε όλοι.

—Daniel C. Dennett

Ο Daniel C. Dennett είναι καθηγητής φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο Tufts της Μασαχουσέτης και διευθυντής του Κέντρου Γνωστικών Μελετών στο ίδιο πανεπιστήμιο. Στα ελληνικά κυκλοφορεί το βιβλίο του Το Εγώ της γένοσης.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Εποιημάτων (NSTA) των ΗΠΑ
και των Γραφείων Κτυπ. της Ρωσικής Ακαδημίας Εποιημάτων,
με τη συμπαρέδη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAFT)
και του Εθνικού Σύμβουλου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεποπλωτές εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κυριακή, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Προτεκτορίας σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κυριακή¹, Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο των Χόμπερντ William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντες (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μισράκτου

Διεισθυντές σύνταξης από Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διεισθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογισμού, Σχολή των Μπρόντερ, Νέα Υόρκη Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχικούτακτης
Mike Donaldson

Αντεποπλωτός αρχικούτακτης
Jennifer Wang

Υπεύθυνος εικονογράφησης
Sergey Ivanov

Σύρμουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τίτλος αρχικούτακτης του Quantum
Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kirchhoff
Irina Oleynik, Αρχικούτακτης, Γραφείο Κυριακή

Συρβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώταρος επικελεούτακτος υπάλληλος, AAFT

John A. Thorpe, Διεκδικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιέντε

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λόκιο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτικό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Καλύπτο της Βοστώνης, Μασαχουσέτης

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σαρίνγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητής Μαθηματικών, Λόκιο των Ρίβερτιν, Λονδίνο

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρης Φλόριντα

Peter Vanovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Στο όπιο το τεύχος συντρόπων οι κ.κ. Στέλιος Ζαχαρίου-μαθητριακός,
Μιχάλης Λάριπρος-μαθητριακός, Κώστης Σκανδάλης-μαθητριακός,
Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός, Θεόδωρος Πιεράττος-φυσικός,
Αθηνά Ταπεικόγεωργα-φυσικός και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

Επίκοος συντρόπης
Γ. Επαγγελματίας

Ταπεικόγεωργας διορθώσεις
N. Μαρίνου

Υπεύθυνη λόγιστρη
M. Μάραλη

Επιτημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάριπρος, Ανιπλάρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστης Σκανδάλης, Επίκοορος καθηγητής Μαθηματικών, Παντηποτήμιο Κρήτης
Επεφαντος Γραχανας, φυσικός, Ειδικός επωτήματος Α' βαθμίδας, Πύρινα Τεχνολογίες και Ερευνας
Θεόδωρος Χριστοδούλακης, Επίκοορος καθηγητής Φυσικής, Παντηποτήμιο Αθηνών

Επιτημονική σελίδωση
Αρ. Μαχαρίδης

Φίλη, μοντάζ
Χρ. Μάρτος

Εκτύπωση
N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσμή²
B. Αρχοντιούλακης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάνοναρ
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση εύθυνα με το νόμο Αλ. Μάραλης

Quantum, Ήπειρων 10, περιοδικό, ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσση Αλ. Μάραλης.
Διαφρύση, και κεντρική διάθεση έκδοσης Κάτιοπτρο.
Ιστόρια 10 και Διαφοριά 10, 114 71 Αθήνα,
τηλ. (01) 3641972, 3640798, fax: (01) 3641964.
Βιβλιοπωλείο: Νέα σταθ. Αρπακούν (Πανεπιστημίου 49),
106 74 Αθήνα, τηλ. (01) 3247785.

Απογραφείται η αναδημοσίευση ή μετάβοση με αντι-

δημοτικό μέσον ή μέρος του περιοδικού χωρίς

την εγγραφή σέβεται του εκδόσεων.

Τημ. κάθε τεύχους στην βιβλιοπωλεία: 2.000 δρ.

Ετηρία συνδρομής: 10.000 δρ., για μισότες 14.500 δρ.

για βιβλιοπωλεία, μέριμνα και οργάνωσης.

Τημ. παλαιότερων τευχών στην βιβλιοπωλεία: 3.000 δρ.

Για να περνά η ώρα

Σ156

Πολυγωνική αναζήτηση. Υπάρχει κάποιο κυρτό πολύγωνο χωρίς άξονα και κέντρο συμμετρίας που, όταν περιστραφεί κατά γωνία μικρότερη των 180° γύρω από ένα σημείο, επιστρέφει στην αρχική του θέση;



Σ157

Απονομή βραβείων. Σε μια μαθηματική Ολυμπιάδα, 100 μαθητές κλήθηκαν να λύσουν τέσσερα προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα απαντήθηκε από 90 ακριβώς μαθητές, το δεύτερο από 80, το τρίτο από 70 και το τέταρτο από 60. Ουδείς διαγωνιζόμενος απάντησε και στα τέσσερα προβλήματα. Οι μαθητές που έλυσαν το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα κέρδισαν ένα βραβείο. Πόσοι ήταν οι μαθητές που βραβεύθηκαν;



Σ158

Αποφύγετε τα τρίγωνα. Ποιο σίναι το μέγιστο πλήθος διαγωνίων που μπορούμε να φέρουμε σε ένα κυρτό επτάγωνο, ώστε να μην σχηματιστεί από τις διαγωνίους κανένα τρίγωνο με κορυφές που είναι και κορυφές του επταγώνου;



Σ159

Η σωστή επιλογή. Ο διαγωνιζόμενος σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι έχει να επιλέξει ανάμεσα σε τρία κουτιά, από τα οποία το ένα μόνο περιέχει κάποιο δώρο. Ο παικτης επιλέγει ένα κουτί, και στη συνέχεια ο παρουσιαστής (που γνωρίζει το περιεχόμενο των κουτιών) ανοίγει το ένα από τα άλλα δύο και αποκαλύπτει ότι είναι κενό. Μετά, ρωτά τον διαγωνιζόμενο: «Έπρεντε στην αρχική σας επιλογή ή προτιμάτε να διαλέξετε το άλλο κουτί;» Ο διαγωνιζόμενος θέλει φυσικά να εγιονοποιησει τις πθανότητες να κερδίσει το δώρο πρέπει λοιπόν να αλλάξει επιλογή. Εσείς τι θα κάνατε; Αποφασίστε και δικαιολογήστε την απάντησή σας!



Σ160

Φιάλη υπό πίεση. Μια ανοικτή φιάλη βρίσκεται βυθισμένη στον ωκεανό, σε βάθος πολλών χιλιομέτρων. Η χωρητικότητα της φιάλης θα αυξηθεί ή θα μειωθεί λόγω της τεράστιας υδροστατικής πίεσης που επικρατεί στον πυθμένα του ωκεανού;



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Εκδοτούργαρη: Pavel Cherniak

Όταν οι ισορροπίες καταρρέουν

«Αρχίσαν πάλι τ' αστεία οι παλιάτσοι κι ο σχοινοβάτης ιδρώνει στο σχοινί...»
—Διονύσης Σαββόπουλος

Boris Korsunsky

TI ΣΧΕΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΧΕΙ Η τράπουλα με τη φυσική Χμ..., τι θα λέγατε αν επιχειρούσαμε να χτίσουμε έναν πύργο από τραπουλόχαρτα —λόγου χάρη, τον ψηλότερο που έχει κατασκευαστεί ποτέ; Ο ανταγωνισμός δεν θα ήταν καθόλου εύκολος. Το 1995, λοιπόν, κατασκευάστηκε στη Βοστόνη ο φηλότερος χάρτινος πύργος στον κόσμο, με ογδόντα τρεις ορόφους και ύψος σχεδόν πέντε μέτρα!

Οι άνθρωποι ανέκαθεν γοητεύονταν από την τέχνη της λεπτής ισορρόπησης. Ο Bryan Berg, ο δημιουργός αυτής της χάρτινης κατασκευής, έγινε διάσημος. Το ίδιο συνέβη και με τον βρετανό John Evans, ο οποίος κατάφερε να ισορροπήσει εξήντα έξι τούβλα πάνω στο κεφάλι του· εξίσου ξακουστή κατέληξε και η αυστραλέζα Ashley Brophy, η οποία κατόρθωσε να διάνυσε δώδεκα ολόκληρα χιλιόμετρα σε τρεις μόλις ώρες —μην παραλείψω να σας πω ότι η Brophy περπατούσε πάνω σε ένα τεντωμένο σκοινί!¹

Τι κοινό έχουν τα παραπάνω κατορθώματα; Μεταξύ των άλλων, όλα σχετίζονται με την ευστάθεια της ισορροπίας. Ακριβώς αυτό πραγματεύεται και το παρόν άρθρο. Εισι, το κατά πόσον μια συγκεκριμένη κα-

τάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής παίζει καθοριστικό ρόλο στη ζωή μας: Ασφαλώς, δεν θα θέλατε να κατοικείτε σε ένα σπίτι όπως εκείνο που κατασκεύασε ο Bryan Berg, και σίγουρα θα διστάζατε να συνοδεύετε την Ashley Brophy στον πρωινό της περίπατο. Άλλωστε, όλοι γνωρίζουμε τι θα συμβεί αν ένα σύστημα που βρίσκεται σε ασταθή ισορροπία διαταραχθεί: Ακόμη κι αν επιστρατεύσουμε όλα τα δυνατά μέσα, ενδέχεται να μην καταφέρουμε να «ώσουμε» την κατάσταση...

Ωστόσο, στο ράθημα της φυσικής, στη μέση εκπαίδευση, η έννοια της ευστάθειας μόλις που θίγεται. Συνήθως οι μαθητές λύνουν μερικά προβλήματα που ασχολούνται μόνο με τις γενικές συνθήκες ισορροπίας, ενώ το ζήτημα της ευστάθειας εξαντλείται στην επίδειξη των γνωστών εικόνων με το σφαιρίδιο τοποθετημένο στην κορυφή μιας κυρτής επιφάνειας, και το ίδιο σφαιρίδιο μέσα σε ένα κοίλωμα. Τι κρίμα, όμως! Υπάρχουν τόσα ενδιαφέροντα προβλήματα που σχετίζονται με αυτή την έννοια, τα οποία μάλιστα δεν περιορίζονται στο χώρο της μηχανικής αλλά συνδέονται και με τον ηλεκτρισμό, την υδροστατική, τους νόμους των αερίων —γενικά, οπουδήποτε υπεισέρχονται δυνάρεις.

Στη συνέχεια θα σας παρουσιάσω ορισμένα προβλήματα, ελάχιστα γνωστά, τα οποία εστιάζουν στην

ευστάθεια της ισορροπίας διαφορετικών συστημάτων και όχι τόσο στην ίδια την ισορροπία τους.

Το κόπτο του ζογκλέρ

Ας υποθέσουμε πως θέλετε να ισορροπήσετε κατακόρυφα ένα μπαστούνι του μπεζίμπολ στην άκρη του δάχτυλου σας. Γιατί είναι ευκολότερο να τα καταφέρετε αν το χοντρό μέρος του ρόπαλου βρίσκεται προς τα πάνω;

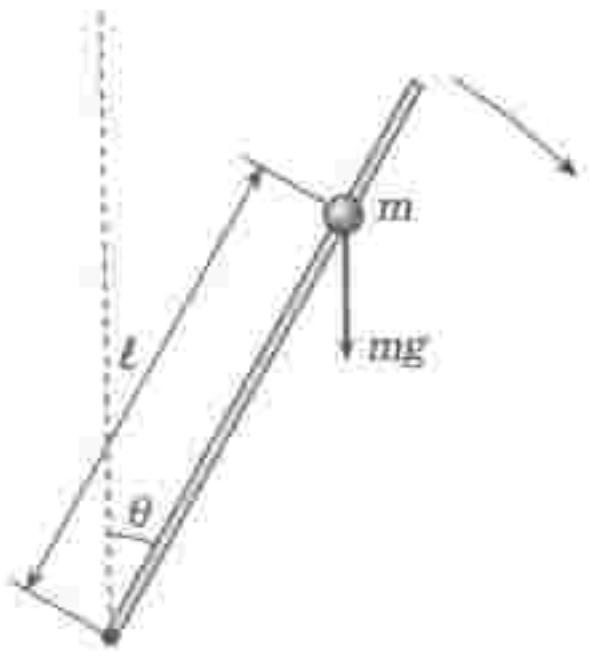
Για να απαντήσουμε στο συγκριμένο ερώτημα, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα στοιχεία που βοηθούν την ισορρόπηση. Φανταστείς πως το χέρι σας τρέμει ελαφρώς, οπότε το ρόπαλο αποκλίνει από την κατακόρυφη θέση. Ασφαλώς, χρειάζεται να κινήσετε κατάλληλα το δάχτυλό σας προκειμένου να επαναφέρετε το ρόπαλο στη θέση ισορροπίας. Γιατί, λοιπόν, βοηθάει να έχετε χοντρό μέρος του προς τα πάνω.

Ας θεωρήσουμε ένα μοντέλο αυτής της κατάστασης. Προσαρτάμε μια βαριά σφαίρα σε μια ελαφριά ράβδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, και αφήνουμε το σύστημα να στραφεί γύρω από την κάτω άκρη της ράβδου. Με τη βοήθεια της θεμελιώδους εξισωσης της στροφικής κίνησης (ανάλογη της εξισωσης του Νεύτωνα $F = m\alpha$), μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας για οποιαδήποτε χρονική στιγμή:

1. Τα στοιχεία αυτά προέρχονται από το Βιβλίο των ρεκόρ Guinness για το 1996.



S. Ivanov



Σχήμα 1

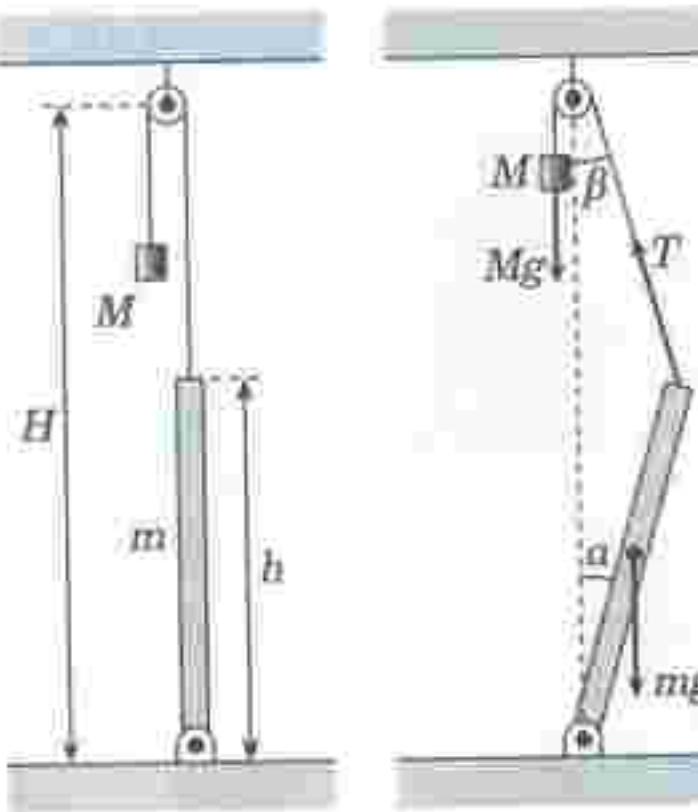
$$a = \frac{M}{\Theta} = \frac{mg t \eta \mu \theta}{ml^2} = \frac{g}{l} \eta \mu \theta.$$

Όπως διαπιστώνουμε, η τιμή της επιτάχυνσης είναι μικρότερη όσο η σφαίρα βρίσκεται πλησιέστερα στην κορυφή της ράβδου (με άλλα λόγια, όσο το κέντρο μάζας του συστήματος απέχει περισσότερο από τον άξονα περιστροφής). Εποι οξειγείται γιατί το ρόπαλο πέφτει πο αργά όταν το βαρύτερο μέρος του «κοιτάζει» προς τα πάνω· ως αποτέλεσμα, εσείς έχετε περισσότερο χρόνο στη διάθεσή σας για να ρυθμίσετε τη θέση του δάχτυλου σας που το σημπίζει. Το ρόπαλο γίνεται περισσότερο ευσταθές (ή, καλύτερα, λιγότερο ασταθές) σε αυτή τη θέση.

Ας ρίξουμε τώρα μια πο προσεκτική ματιά σε οριοπέντε «ευσταθή» συστήματα. Όπως γνωρίζουμε, η ισορροπία ενός σώματος χαρακτηρίζεται ευσταθής εάν μικρές μετακινήσεις του προκαλούν συνισταμένη δύναμη (ή ροπή) με φορά τέτοια που να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας. Τα ακόλουθα παραδείγματα είναι διαφωτιστικά.

Το Ξέφρενο σουίνυκ

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, μια ομογενής ράβδος μάζας m παραμένει κατακόρυφη με τη βοήθεια άγνωστης μάζας M που έχει προσδεθεί στην άκρη νήματος το οποίο μπορεί να κινείται (χωρίς ολίσθηση) πάνω σε σταθερά αναρτημένη φράχαλια. Θεωρώντας γνωστά τα ύψη h και H , υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της μάζας M ώστε η μασσοροπία να είναι ευσταθής.



Σχήμα 2

Σειρά 3

Για να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα, θα θεωρήσουμε τη συνισταμένη ροπή επί της ράβδου για μικρή απόκλιση από τη θέση ισορροπίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Η ράβδος θα επιστρέψει στην κατακόρυφη θέση εάν η ροπή της τάσης είναι μεγαλύτερη από τη ροπή του βάρους της. Στην «κρίσιμη» κατάσταση, οι εν λόγω ροπές πρέπει να έχουν ίσα μέτρα:

$$MgH\eta\mu\beta = mg\frac{h}{2}\eta\mu a,$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των πριτόνων παίρνουμε

$$\frac{\eta\mu\beta}{h} = \frac{\eta\mu(a + \beta)}{H},$$

ή, δεδομένου ότι τα α και β λαμβάνουν πολύ μικρές τιμές.

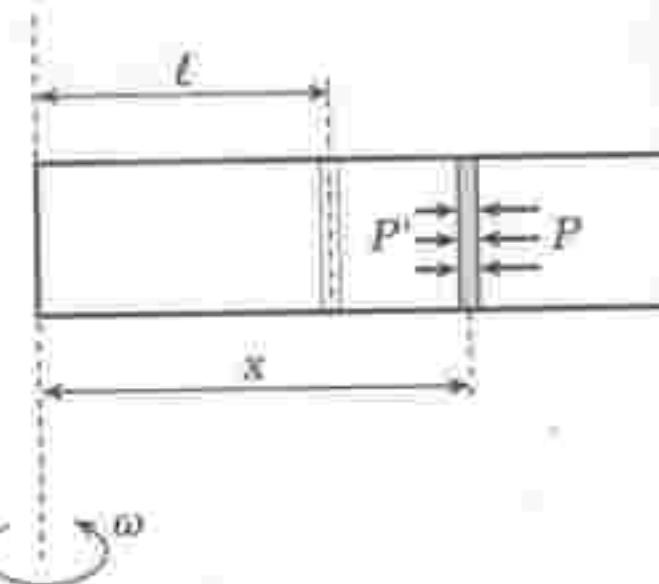
$$\beta = ah/(H - h).$$

Evol.

$$M = m \frac{H - h}{2H},$$

ଲିଙ୍ଗପର୍ଦେଶ ଟ୍ରୋଡିଇମା

Ο κύλινδρος με κινητό έμβολο που φαίνεται στο Σχήμα 4 περιέχει αέρα και παραμένει οριζόντιος. Το έμβολο, μάζας m και εμβαδού διατομής S , απορροπεί σε απόσταση l από τη βάση του κυλίνδρου, έτσι ώστε η πίεση εκατέρωθεν του εμβόλου να ισούται με P . Στη συνέχεια, αρχίζουμε να περιστρέψουμε τον κύλινδρο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο ά-



Σεξίμη 4

ξονα που διέρχεται από τη βάση του.
Βρείτε τη νέα θέση μαρρούδιας του
εμβόλου. Θεωρήστε ότι η θερμοκρα-
σία του αέρα παραμένει σταθερή και
ότι το έμβολο κινείται χωρίς τριβές.

Αν P' είναι η νέα πίσω του αέρα μέση στο δοχείο, τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το έμβολο μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$m\omega^2 x = (P - P')S$$

Επιπλέον, για τον αέρα μέσα στο δοχείο ισχύει ο νόμος Boyle-Mariotte $PV = \text{σταθ.}$, οπότε $P'x = Pl$. Έτοιμη προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$-\frac{m\omega^2}{PS}x^2 - x + L = 0,$$

με φίλες

$$x_{1,2} = \frac{PS}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2k\ell}{PS}} \right).$$

$$\text{ou } k = 2m\omega^2 = \sigma a\theta.$$

Η ανάλυση μας φανερώνει ότι, εφόσον υπάρχουν λύσεις, η θετική ρίζα θα αντιστοιχεί σε ασταθή τασσο-
ροπία ενώ η αρνητική σε ευσταθή.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε τα γραφήματα
των $y = x$ και $y = m\omega^2x^2/(PS) + b$
τα σημεία τομής τους αντιστοιχούν
στις ρίζες της εξίσωσης.) Με άλλο
λόγια, και οι δύο λύσεις είναι δε-
κτές, αλλά μονάχα η μικρότερη πα-
ρατηρείται στην πραγματικότητα.³

2. Δεπτομέρη μελέτη των δευτεροβάθμιων εξιώσεων που εμφανίζονται σε προβλήματα φυσικής μπορείτε να βρείτε στο άρθρο με «Βρείτε τη ρίζα του προβλήματος», στο τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1997 του ελληνικού Quantum. Το Πρόβλημα 5 του συγκεκορυνούντος άρθρου παρουσιάζει πολλές οροισμένη με το παρόν πρόβλημα.

Φορτισμένες ακροβασίες

Ένα μικρό σωματίδιο με φορτίο q και μάζα m τοποθετείται στην κορυφή της εσωτερικής επιφάνειας μιας λείας σφαίρας, διαρέισουν d . Ποια είναι η ελάχιστη πιμή φορτίου Q που πρέπει να τοποθετηθεί στη βάση της σφαίρας ώστε το φορτίο q να βρίσκεται (a) σε ισορροπία, (β) σε ευσταθή ισορροπία;

Το πρόβλημα αυτό επιδεικνύει με εξαιρετικό τρόπο τη διαφορά ανάμεσα στην ευσταθή και την ασταθή ισορροπία. Το πρώτο μέρος του προβλήματος δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία: Η ηλεκτροστατική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του βάρους του επομένως, η ελάχιστη πιμή για το φορτίο Q βρίσκεται μέσω της σχέσης:

$$\frac{kqQ}{d^2} = mg, \quad \text{ή} \quad Q = \frac{mgd^2}{kq},$$

όπου k είναι η σταθερά του νόμου του Coulomb.

Το δεύτερο μέρος του προβλήματος παρουσιάζει περισσότερο ενδιαφέρον. Χρειάζεται να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο φορτίο q όταν έχει αποκλίνει κατά λίγο από τη θέση ισορροπίας του. Αρκεί, λοιπόν, να αναφερθούμε στις συνιστώσες των δυνάμεων στη διεύθυνση της εφαπτομένης της σφαίρας (βλ. Σχήμα 5): η ελάχιστη πιμή για το φορτίο Q βρίσκεται, και πάλι, από τη συνθήκη οι συνιστώσες σ' αυτή τη διεύθυνση να έχουν ίσα μέτρα:

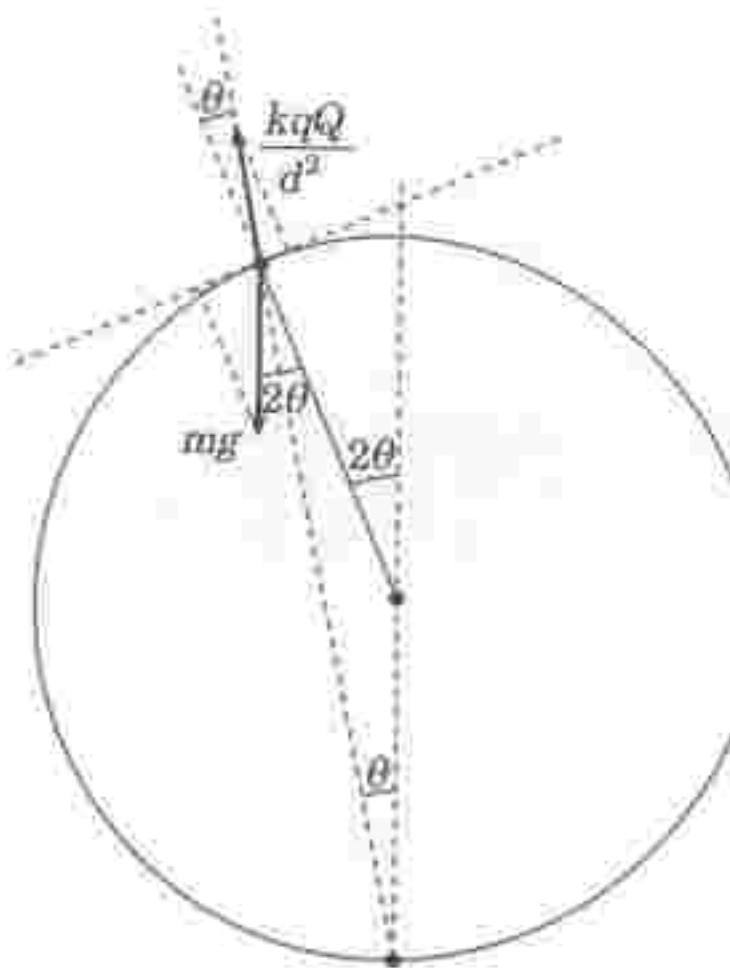
$$\frac{kqQ}{d^2} \cdot \eta\mu\theta = mg \cdot \eta\mu 2\theta.$$

Εφόσον το q είναι μικρό, μικρή θα είναι και η γωνία θ μπορούμε λοιπού να αντικαταστήσουμε το $\eta\mu\theta$ με θ και το συνθ με 1. Έτσι, η πιμή που προκύπτει για το Q είναι

$$Q = 2 \frac{mgd^2}{kq}$$

— διπλάσια, μάλιστα, εκείνης που βρήκαμε στο ερώτημα (α)!

Στα δύο πρώτα παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε ροπές, ενώ στα



Σχήμα 5

δύο επόμενα δυνάμεις. Ωστόσο, υπάρχει ακόμη ένας τρόπος για να καθορίσουμε κατά πόσον μια κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής μέσω των ενέργειών. Όλα τα φυσικά συστήματα στο σύμπαν «τείνουν» να ελαχιστοποιούν τη δυναμική τους ενέργεια. Αυτός ο πανταχού παρόν φυσικός νόμος συνεπάγεται, μεταξύ άλλων, ότι η ισορροπία ενός συστήματος θα είναι ευσταθής αν αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο της δυναμικής του ενέργειας. Το τελευταίο πρόβλημα επιδεικνύει αυτήν ακριβώς την ιδέα.

Μια «απλυστωτή» αντίδραση

Τα άκρα μιας εύκαμπτης αλυσίδας καρφώνονται σταθερά πάνω σε τοίχο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Εστω ότι κάπου κοντά στο μέσο της αλυσίδας ασκούμε δύναμη με φορά προς τα κάτω. Προς τα πού θα μετακινηθεί το κέντρο μάζας της αλυσίδας — προς τα πάνω ή προς τα κάτω; (Υπόδειξη: προσέξτε ότι χρησιμοποιήσαμε τη λέξη κάπου.)

Ασφαλώς, δεν θα ήταν φρόνιμο να επιχειρήσουμε να εντοπίσουμε αναλυτικά το κέντρο μάζας της αλυσίδας. Πράγματι, οι συνθήκες του προβλήματος είναι τόσο ασφείς ώστε καθιστούνται πρακτικά αδύνατο αυτό τον εντοπισμό. Θα εκπλαγείτε, λοιπόν, διαπιστώντας ότι μπορούμε να έχουμε μια σαφή απάντηση. Πιθανότατα, μάλιστα, να μην



Σχήμα 6

πρόκειται για την απάντηση που είχατε φανταστεί. Το κέντρο μάζας, λοιπόν, κινείται προς τα πάνω ακόμη και αν η δύναμη που ασκείται στην αλυσίδα έχει φορά προς τα κάτω. Ο λόγος είναι απλός: Προτού ασκηθεί η δύναμη, η αλυσίδα βρισκόταν σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας· άρα, προκειμένου η δύναμη ενέργεια της αλυσίδας να έχει ελάχιστη πιμή, το κέντρο μάζας της αλυσίδας πρέπει να βρισκόταν στην κατώτατη δυνατή θέση. Επομένως, το κέντρο μάζας της αλυσίδας δεν έχει άλλη επιλογή από το να μετακινηθεί προς τα πάνω! (Βεβαίως, ενδέχεται να μετατοπιστεί και προς τα πλάγια.)

Νομίζω ότι τα παραπάνω προβλήματα επιδεικνύουν τον πλούτο και την ομορφιά της έννοιας της ευσταθούς ισορροπίας. Αν όντως σας άρεσαν, ίσως θελήσετε να ασχοληθείτε και με τις παρακάτω «ποιοτικές» ασκήσεις:

Ασκηση 1. Τοποθετήστε ένα μπαλάκι του πινγκ-πονγκ μέσα σε καταφυγό ρεύμα αέρα (το οποίο εξέρχεται, ας πούμε, από το στόμιο του σωλήνα μιας ηλεκτρικής σκούπας). Θα παραμείνει το μπαλάκι εντός του ρεύματος;

Ασκηση 2. Ένα σύστημα ηλεκτρικών φορτίων βρίσκεται σε ισορροπία μέσα στο κενό. Είναι ευσταθής αυτή η ισορροπία;

Ασκηση 3. Ένα ελαστικό μπαλόνι γεμάτο αέρα βυθίζεται σε νερό, σε τέτοιο βάθος ώστε να ισορροπεί ακίνητο. Είναι αυτή η ισορροπία ευσταθής;

Ασκηση 4. Ένας ρευματοφόρος βρόχος τοποθετείται μέσα σε ορογένες μαγνητικό πεδίο. Πόσες είναι οι θέσεις ισορροπίας του βρόχου; Τι θα συμβεί αν η ισορροπία διαταραχθεί ελαφρώς;

Γενετήριες συναρτήσεις

Mia μέθοδος που θα εμπλουτίσει τη μαθηματική εργαλειοθήκη σας

S.M. Voronin και A.G. Kulagin

ΗΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΓΕΝΕΤΗΡΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΙ ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να λύσουμε διάφορα προβλήματα σε πεδία όπως η θεωρία αριθμών, η θεωρία πιθανοτήτων, η συνδυαστική και ο απειροστικός λογισμός. Συχνά αποδεικνύεται ότι η παναλυτική αναδιατύπωση του προβλήματος που επιτυγχάνεται με τη βοήθεια αυτής της μεθόδου μάς οδηγεί σύντομα στη λύση του, ενώ κάθε άλλη προσέγγιση οδηγεί σε αποτυχία. Θα πρέπει να επισημάνουμε πάντως ότι η μέθοδος των γενετήριων συναρτήσεων δεν είναι το μαγικό ραβδί που λύνει όλα τα προβλήματα (δείτε για παράδειγμα στη συνέχεια το πρόβλημα του Fermat, όπου αποδεικνύεται άχρηστη).

Στην αρχή θα παρουσιάσουμε, χωρίς πολλές θεωρητικές λεπτομέρειες, τέσσερα κλασικά παραδείγματα προβλημάτων με τα οποία θα δούμε τον τρόπο εφαρμογής της μεθόδου των γενετήριων συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια σύντομη ερμηνεία της μεθόδου, και θα ολοκληρώσουμε με μια ομάδα προβλημάτων που μπορούν να λύθουν με τη βοήθεια της. Μερικές λεπτομέρειες των λύσεων στηρίζονται σε τεχνικές του απειροστικού λογισμού. Πάντως, ο αναγνώστης μπορεί να παρακολουθήσει το μεγαλύτερο μέρος της παρουσίασης ακόμη και αν δεν κατανοήσει αυτά τα σημεία.

Το πρόβλημα της ζύγισης

Στα μέσα του 18ου αιώνα, ο Leonhard Euler (1701-1783) έλυσε το εξής πρόβλημα: Ποια βάρη μπορούμε να ζυγίσουμε αν χρησιμοποιήσουμε σταθμά των $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^m, \dots$ γραμμαρίων και με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να το πετύχουμε αυτό; Δεν γνωρίζουμε πώς ή πόσο γρήγορα βρήκε τη λύση ο Euler, αλλά ο τελικός του συλλογισμός είναι εξαιρετικά ασυνήθιστος. Κρίνετε και μόνοι σας.

Ο Euler θεώρησε το γινόμενο

$$a(z) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8)\dots \quad (1)$$

Επειτα από την εκτέλεση των πράξεων στο δεξιό μέλος και την αναγώγη των ομοιων όρων, κατέληξε σε ένα «άπειρο πολυώνυμο του z »:

$$a(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \dots \quad (2)$$

Ποιοι είναι οι αριθμοί A_k (για $k = 1, 2, \dots$)? Το κάθε A_k είναι συνιτελεστής του z^k , όπου z^k είναι γινόμενο κάποιον μονωνύμων z^{2^m} (κάθε όρος της (1) παρέχει ένα το πολύ από αυτά τα μονωνύμα). Επομένως, το A_k είναι το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό k ως άθροισμα διαφορετικών αριθμών που ανήκουν στο σύνολο $1, 2, 4, 8, \dots, 2^m, \dots$. Με άλλα λόγια, A_k είναι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να ζυγίσουμε ένα βάρος k γραμμαρίων αν χρησιμοποιήσουμε το δεδομένο σύνολο σταθμών!

Επομένως, το αρχικό πρόβλημα θα λυθεί αν υπολογίσουμε όλους τους αριθμούς A_k . Φυσικά, μπορούμε να υπολογίσουμε μερικούς από αυτούς άμεσα, ιδιαίτερα όταν το k είναι μικρό. Χωρίς αμφιβολία, μπορείτε να μαντέψετε τη σωστή απάντηση: όλοι οι αριθμοί A_k ισούνται με 1. Δεν είναι όμως εύκολο να αποδείξουμε αυτή την πρόταση για κάθε k με άμεσο υπολογισμό. Ο Euler βρήκε ένα άλλο τέχνασμα. Ξεκίνησε από τις επόμενες ταυτότητες:

$$(1 - z)(1 + z) = 1 - z^2,$$

$$(1 - z^2)(1 + z^2) = 1 - z^4,$$

$$(1 - z^4)(1 + z^4) = 1 - z^8, \dots$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάσετε κατά μέλη αυτές τις ταυτότητες, απάλειψε τους κοινούς όρους και κατάληξε στην

$$(1 - z)(1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8)\dots = 1,$$



η οποία μπορεί να γραφεί ως $(1 - z)a(z) = 1$. Καταλήγουμε τελικά στην

$$a(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots \quad (3)$$

(έχουμε χρησιμοποιήσει τον τύπο για το άθροισμα των δύο μιας γεωμετρικής πρόσδου¹). Αν συγκρίνουμε την εξίσωση (3) με την εξίσωση (2), συμπεραίνουμε ότι $A_k = 1$, για κάθε k . Με άλλα λόγια, είναι δυνατόν να ζυγίζουμε κάθε βάρος (ακέραιου πλήθους γραμμαρίων) χρησιμοποιώντας σταθμά των $1, 2, 4, \dots, 2^m, \dots$ γραμμαρίων, και μάλιστα κατά μοναδικό τρόπο.

Το πρόβλημα του πλήθους των αναλύσεων

Αυτός ήταν ο τίτλος που έδωσε ο Euler στο παρακάτω πρόβλημα: Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = k; \quad (4)$$

Εδώ τα k και m είναι σταθεροί φυσικοί αριθμοί. Σε αυτή την περίπτωση θα βρούμε τη λύση εξετάζοντας μια άλλη παράσταση:

$$\beta(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)^m. \quad (5)$$

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεξιό μέλος, θα πάρουμε

$$\beta(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4 + \dots \quad (6)$$

Τι μπορούμε να πούμε για τους αριθμούς B_k ? Κάθε B_k είναι ο συντελεστής του z^k . Παρατηρούμε ότι B_k είναι το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε ένα μονώνυμο από κάθε παράγοντα του δεξιού μέλους της (5), έτσι ώστε το άθροισμα των βαθμών τους να ισούται με k . Δηλαδή το B_k ισούται με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (4)! Το πρόβλημα του Euler ανάγεται, επομένως, στον υπολογισμό του B_k .

Ο υπολογισμός αυτός δεν είναι εύκολο να γίνει άμεσα. Αν δρώς θυμηθούμε τον τύπο για το άθροισμα μιας άπειρης γεωμετρικής πρόσδου, μπορούμε να γράψουμε

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}, \quad (7)$$

ή $\beta(z) = (1 - z)^{-m}$. Συνεπός,

$$(1 - z)^{-m} = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4 + \dots$$

Ας παραγωγίσουμε και τη δύο μέλη της ισότητας:

$$m(1 - z)^{-m-1} = B_1 + 2B_2 z + 3B_3 z^2 + 4B_4 z^3 + \dots$$

Αν θέσουμε $z = 0$, παίρνουμε $B_1 = m$. Αν θεωρήσουμε τώρα τη δεύτερη παράγωγο και θέσουμε πάλι $z = 0$, θα πάρουμε $B_2 = m(m+1)/2$. Ακολουθώντας τα βήματα

¹ Ο τύπος αυτός ισχύει όταν $|z| < 1$. Θα επωφεληθούμε αργότερα σε αυτό το ζήτημα.

του Euler, παίρνουμε την k -οστή παράγωγο της εξίσωσης (7) και θέτουμε $z = 0$. Βρίσκουμε ότι το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (4) είναι

$$B_k = \frac{m(m+1)\dots(m+k-1)}{k!}.$$

Το πρόβλημα του χαρτονομίσματος

Με πόσους τρόπους μπορούμε να αλλάξουμε ένα χαρτονόμισμα των εκατό δραχμών με κέρματα των 1, 5, 10 και 20 δραχμών; Αυτή η ερώτηση μπορεί να διατυπωθεί με έναν διαφορετικό τρόπο: Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση

$$x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 100;$$

Μια γενικότερη μορφή αυτού του προβλήματος είναι η εξής: Ποιο σίνατο το πλήθος των θετικών (ή μηδέν) ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = n, \quad (8)$$

όπου τα a_i , m και n είναι δεδομένοι γνήσιοι θετικοί ακέραιοι;

Θεωρούμε την παράσταση

$$\begin{aligned} y(z) &= (1 + z^{a_1} + z^{2a_1} + z^{3a_1} + \dots) \times \\ &\quad \times (1 + z^{a_2} + z^{2a_2} + z^{3a_2} + \dots) \times \dots \\ &\quad \times (1 + z^{a_m} + z^{2a_m} + z^{3a_m} + \dots) = \\ &= 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Σκεπτόμενοι όπως και προηγουμένως, παρατηρούμε ότι το C_n είναι το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (8). Πώς μπορούμε δρώς να υπολογίσουμε το C_n ? Χρησιμοποιούμε και πάλι τον τύπο του αθροισματος μιας άπειρης γεωμετρικής πρόσδου:

$$1 + z^{a_1} + z^{2a_1} + z^{3a_1} + \dots = \frac{1}{1 - z^{a_1}},$$

και γράφουμε το $y(z)$ με τη μορφή

$$y(z) = \frac{1}{(1 - z^{a_1})(1 - z^{a_2}) \dots (1 - z^{a_m})},$$

χωρίς όμως να είναι ακόμη εμφανής ο γενικός τύπος για τα C_n . Όμως, η εξίσωση (9) αρκεί για να βρούμε την απάντηση όταν το n είναι μικρό.

Το πρόβλημα των τεσσάρων τετραγώνων

Αληθεύει ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων τεσσάρων ακέραιων. Και αν ναι, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; Με άλλα λόγια, πόσες λύσεις έχει η εξίσωση

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = m, \quad (10)$$

όπου m δεδομένος φυσικός αριθμός;

Το πρόβλημα αυτό είναι δυσκολότερο από τα προηγούμενα, παρόλο που και αυτό ανάγεται στον υπολογισμό της εξίσωσης (9).

γιασμό των συντελεστών ενός «άπειρου πολυωνύμου». Σήμερη γράφουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}\delta(z) &= (1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \dots)^k \\ &= 1 + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 z^3 + D_4 z^4 + \dots .\end{aligned}\quad (11)$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (10) ισούται με D_m . Αν πάρουμε την m -οστή παράγωγο και θέσουμε $z = 0$, καταλήγουμε στον εξής τύπο για το D_m :

$$D_m = \frac{1}{m!} \delta^{(m)}(0).$$

Εδώ, το σύμβολο $\delta^{(m)}(0)$ σημαίνει ότι υπολογίζουμε τη m -οστή παράγωγο της $\delta(z)$ στο $z = 0$. Με τη βοήθεια αυτού του τύπου μπορούμε να υπολογίζουμε το D_m όταν το m είναι μικρό, αλλά δεν είναι εύκολο να τον χρησιμοποιήσουμε και στη γενική περίπτωση. Βλέπουμε λοιπόν ότι το αρχικό πρόβλημα θεωρίας αριθμών ανάχθηκε σε ένα πρόβλημα ανάλυσης, αλλά το τελευταίο δεν έχει ακόμη λυθεῖ!

Ο μεγάλος γερμανός μαθηματικός C.G. Jacobi (1804-1851) απέδειξε έναν υπέροχο τύπο για τη $\delta(z)$. Ο τύπος είναι ο εξής:

$$\delta(z) = 1 + 8 \sum_{m=4k} \frac{mz^m}{1 - z^m}.$$

Αργότερα, αυτός ο τύπος επανανακαλύφθηκε από τον διάσημο ινδό μαθηματικό Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Με τη βοήθεια του μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (10) έχει πάντοτε λύσεις, και ακόμη να βρούμε το πλήθος τους.

Εξηγήσεις

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε την κύρια ιδέα αυτής της μεθόδου που «δουλεύει» τόσο εντυπωσιακά σε διάφορα προβλήματα. Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιήσαμε μια «άπειρη παράσταση» του z (ένα «άπειρο γινόμενο διωνύμων στην (1), τις πεπερασμένες δυνάμεις ενός άπειρου αθροίσματος στις εξισώσεις (5) και (11), και το γινόμενο άπειρων αθροίσμάτων στην εξίσωση (9)). Το επόμενο βήμα ήταν να γράψουμε αυτή την παράσταση ως ένα «άπειρο πολυώνυμο του z »:

$$a(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \dots + A_n z^n + \dots,$$

και αποδείχθηκε ότι οι συντελεστές A_k μπορούσαν να μας δώσουν κάποια ένδειξη για τη λύση του προβλήματος. Σε μερικές περιπτώσεις καταφέραμε να υπολογίσουμε τους αριθμούς A_k χειριζόμενοι κατάλληλα τις άπειρες παραστάσεις. Εκτελέσαμε αριθμητικές πράξεις με αυτές, θεωρήσαμε τις παραγώγους τους, τις μετασχηματίσαμε με τη βοήθεια του τύπου της γεωμετρικής προσθου, κ.ο.κ.

Είναι φυσικό να ρωτήσουμε τι είναι αυτές οι άπειρες παραστάσεις που θεωρήσαμε και κατά πόσο νομίμοποιόμαστε να τις χειριζόμαστε κατ' αυτό τον τρόπο. Ο δημιουργός της μεθόδου, Leonhard Euler, δεν

απασχολήθηκε ιδιαίτερα με αυτά τα ερωτήματα. Επεξεργάστηκε τις άπειρες παραστάσεις ώστε να ήταν πεπερασμένες και ενδιαφέρθηκε μόνο για το αποτέλεσμα. Γνωρίζουμε ότι από τον απεριόσκεπτο χειρισμό του άπειρου μπορούν να εμφιλοχωρήσουν πολλά λάθη.

Ένα εξαιρετικά δυσάρεστο παράδειγμα

Θεωρούμε τα δύο «άπειρα πολυώνυμα»

$$a(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots,$$

$$\beta(z) = -1 + z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$$

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το άπειρο άθροισμα

$$S(z) = a(z) + \beta(z) + a(z) + \beta(z) + a(z) + \dots$$

Αν διευθετήσουμε τους όρους του $S(z)$ κατά ζεύγη, αρχίζοντας με το ζεύγος των πρώτων όρων, βρίσκουμε

$$S(z) = [a(z) + \beta(z)] + [a(z) + \beta(z)] + \dots = 0 + 0 + \dots = 0.$$

Αν διώρως διευθετήσουμε τους όρους λίγο διαφορετικά, παίρνουμε

$$\begin{aligned}S(z) &= a(z) + [\beta(z) + a(z)] + [\beta(z) + a(z)] + \dots \\ &= a(z) + 0 + 0 + \dots = a(z)\!\!\!\end{aligned}$$

Αν ράλιστα αλλάξουμε τη σειρά των όρων μέσα στα $a(z)$ και $\beta(z)$, καταλήγουμε σε ακόμη εντυπωσιακότερα αποτέλεσμα — για παράδειγμα, $S(z) = 17z^{17}$ (καλούμε τους αναγνώστες να προσπαθήσουν να βρουν πώς μπορούμε να το πετύχουμε).

Είναι πλέον απαραίτητο να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό των άπειρων παραστάσεων και να βρούμε ποιες πράξεις έχουμε δικαίωμα να εκτελέσουμε με αυτές.

Τυπικές δυναμοσειρές

Η τυπική δυναμοσειρά είναι μια παράσταση όπως η

$$a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (12)$$

όπου a είναι πραγματικοί αριθμοί (οι συντελεστές της σειράς (12)) και το z είναι απλώς ένα γράμμα (η τυπική μεταβλητή της σειράς). Οι μαθηματικοί λένε ότι η $a(z)$ είναι η γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας των συντελεστών $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Πάντως, στη γενική περίπτωση (που θα εξετάσουμε εδώ) δεν πρέπει να εκλαβουμε την $a(z)$ ως μια συνήθη συνάρτηση της μεταβλητής z . Οταν λέμε ότι η $a(z)$ είναι η γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, εννοούμε απλώς ότι η $a(z)$ είναι μια συντορογραφία της τυπικής παράστασης των δεξιού μέλους της (12).

Επισημαίνουμε ότους αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της συνήθους δυναμοσειράς ότι η τυπική δυναμοσειρά (12) μπορεί να αποκλίνει για ορισμένες τιμές του z , ή ακόμη και για όλες τις μη μηδενικές τιμές του z . Ακόμη και σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση (12) είναι ορθή, διότι η $a(z)$ δηλώνει την ίδια τη σειρά και όχι το αθροισμά της για κάποια δεδομένη τιμή του z .

Ο εξέχων γερμανός μαθηματικός C. Weierstrass (1815-1897), ο οποίος ανέπτυξε τη θεωρία των δυναμοσειρών και πρότεινε μια αυστηρά λογική θερετικότητα, θεωρήσε μόνο συγκλίνουσες δυναμοσειρές και άσκησε κριτική στον Euler για τα αμφιβόλα τεχνάσματά του με «άπειρα πολυώνυμα». Η σύγχρονη αλγεβρική θεωρία των τυπικών δυναμοσειρών, στοιχεία της οποίας εξετάζουμε εδώ, είναι απολύτως αυστηρή αλλά βρίσκεται κατ' ουσίαν πλησιέστερα στην «απλοϊκή» προέγγιση του Euler παρά στην αυστηρή αναλυτική θεωρία του Weierstrass.

Είναι δυνατόν να προσθέτουμε και να πολλαπλασιάζουμε τυπικές δυναμοσειρές. Ας υποθέσουμε ότι εκτός της σειράς $a(z)$ (δείτε την εξίσωση (12)) δίνεται και μία ακόμη τυπική δυναμοσειρά:

$$\beta(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots \quad (13)$$

Ορίζουμε τότε το άθροισμα και το γινόμενο των $a(z)$ και $\beta(z)$ με τους εξής φυσικούς τύπους:

$$a(z) + \beta(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \dots + (a_n + b_n)z^n + \dots \quad (14)$$

$$a(z) \cdot \beta(z) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots$$

(αυτές οι πράξεις είναι δύοις με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πεπερασμένων πολυωνύμων). Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των τυπικών δυναμοσειρών, ορισμένες κατ' αυτό τον τρόπο, διαθέτουν όλες τις καθιερωμένες ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμών ή πολυωνύμων: ισχύουν ο προστατικός, ο αντιμεταθετικός και ο εωμεριστικός νόμος. Παρεμπιπόντως, επισημαίνουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τα συνήθη πολυώνυμα ως ειδικές περιπτώσεις δυναμοσειράς — δηλαδή ως μια σειρά οι συντελεστές της οποίας, εκτός ορισμένων από τους πρώτους, μηδενίζονται. Σε αυτή την περίπτωση, το συνηθες άθροισμα και γινόμενο των πολυωνύμων αντιστοιχεί, όπως είναι φυσικό, στο άθροισμα και το γινόμενό τους ως δυναμοσειρές.

Μπορούμε επίσης να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε τυπικές δυναμοσειρές. Έχουμε, εξ ορισμού:

$$\frac{d}{dz} [a(z)] = [a(z)]' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + na_n z^{n-1} + \dots$$

$$\int a(z) dz = \int_0^z a(x) dx = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \dots$$

Όπως και στην περίπτωση των ακέραιων αριθμών, μπορούμε να αφαιρέσουμε μια τυπική δυναμοσειρά από μιαν άλλη, και το αποτέλεσμα θα είναι μια τυπική δυναμοσειρά. Δεν είγαι δύος πάντοτε δυνατή η διαίρεση δύο τυπικών δυναμοσειρών, όπως ακριβώς δεν είναι πάντοτε δυνατή η διαίρεση δύο ακέραιων. Για παρά-

δειγμα, απαγορεύεται η διαίρεση με το «μηδέν» — δηλαδή, η διαίρεση με την επόμενη τυπική δυναμοσειρά:

$$0 = 0 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

Απαγορεύεται επίσης η διαίρεση της «μοναδιαίας» σειράς

$$1 = 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

με τη σειρά

$$z = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια σειρά

$$a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

τέτοια ώστε $a(z) \cdot z = 1$ — δηλαδή,

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots) = 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots$$

Σύμφωνα με τον τύπο (14), αυτό σημαίνει ότι $a_0 \cdot 0 = 1$, που είναι φυσικά αδύνατο. Οροίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ διαιρείται με το z^n αν και μόνο αν $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι το 1 διαιρείται από την $a(z)$ αν και μόνο αν $a_0 \neq 0$, και ότι, σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές της προκύπτουσας σειράς ορίζονται μονοσήμαντα.

Για παράδειγμα, ας δούμε τι συμβαίνει όταν διαιρέσουμε τη μοναδιαία σειρά με τη σειρά $1 - z$. Έχουμε

$$(1 - z)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots$$

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις και εξισώσουμε τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του z , θα πάρουμε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$1 \cdot a_0 = 1, \quad a_1 - a_0 = 0, \quad a_2 - a_1 = 0, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = 0,$$

από όπου βρίσκουμε ότι

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 1,$$

και συνεπώς

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$$

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει αυτό τον τύπο (δείτε την εξίσωση (3) και την υποσημείωση 1), παρόλο που σε εκείνη την περίπτωση σήμαινε κάτι διαφορετικό από αυτό που σημαίνει τώρα. Εδώ η ορθότητα του προκύπτει από την ισότητα μεταξύ τυπικών δυναμοσειρών (και είναι τελείως ανεξάρτητη από τη συνθήκη $|z| < 1$).

Άπειρα άθροισματα και γινόμενα

Στην αρχή του άρθρου λύσαμε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας ένα άπειρο γινόμενο. Τα άπειρα άθροισμα είναι επίσης εξαιρετικά χρήσιμα (μπορούμε να θεωρήσουμε μια τυπική δυναμοσειρά ως άπειρο άθροισμα μονωνύμων). Για να αποφευχθούν πθανές παρανοήσεις, θα παρουσιάσουμε τους αντίστοιχους ορισμούς

Εστω $a_1(z), a_2(z), \dots, a_k(z), \dots$ μια ακολουθία τυπών δυναμοσειρών (ειδικά, πολυωνύμων). Επιθυμούμε να ορίσουμε το άπειρο άθροισμά τους και το άπειρο γινόμενό τους

$$a_1(z) + a_2(z) + \dots + a_k(z) + \dots \quad (15)$$

$$(a_1(z)) \cdot (a_2(z)) \cdot \dots \cdot (a_k(z)) \cdot \dots \quad (16)$$

με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως — δηλαδή εκτελώντας τις πράξεις και κάνοντας αναγωγή των ομοίων όρων. Όμως, ένας τέτοιος ορισμός δεν μπορεί να εφαρμοστεί γενικά. Πράγματι, ας ξεκινήσουμε να κάνουμε πράξεις και να ανάγουμε όμοιους όρους στο «άπειρο γινόμενο»

$$(1+z) \cdot (1+z) \cdot \dots \cdot (1+z) \cdot \dots$$

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, το συντελεστή τού z^2 . Διαπιστώνουμε αρέσως ότι, έπειτα από κάθε πολλαπλασιασμό με το μονώνυμο της επόμενης παρένθεσης, ο συντελεστής αυτός αυξάνεται απεριόριστα. Υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά μεταξύ αυτού του παραδείγματος και του γινομένου

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4) \cdot \dots \cdot (1+z^{2^m}) \cdot \dots,$$

που εξετάσαμε προηγουμένως, διότι εδώ οι συντελεστές σταδιακά σταθεροποιούνται αφού οι απομακρυσμένες παρενθέσεις δεν περιέχουν μονώνυμα με «μικρές» δυνάμεις της τυπικής μεταβλητής.

Ετοι, το άπειρο άθροισμα (15) και το άπειρο γινόμενο (16) ορίζονται μόνο αν σταθεροποιούνται οι συντελεστές σταν κάνουμε τις πράξεις και ανάγουμε τους ομοίως όρους. Αν συμβαίνει αυτό, ορίζουμε ότι είναι ίσα με τις τυπικές δυναμοσειρές οι οποίες έχουν συντελεστές τους αριθμούς που προκύπτουν κατ' αυτό τον τρόπο.

Αν προτιμάτε τους αυστηρούς ορισμούς, ιδού ο ακριβής ορισμός της «σταθεροποίησης»: Για κάθε φυσικό αριθμό d μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό N τέτοιον ώστε, για κάθε $n \geq N$, η σειρά $a_n(z)$ να μην περιέχει δυνάμεις του z μικρότερες του d .

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνουμε τη σύντομη περίγηση μας στη θεωρία των τυπικών δυναμοσειρών. Προτείνουμε στους αναγνώστες να επιστρέψουν στα αρχικά παραδείγματα του άρθρου και να επαληθεύσουν ότι δεν χρησιμοποιήσαμε κάποιο αμφίβολο «τέχνασμα», αλλά μόνο απόλυτα νόμιμες πράξεις με τυπικές δυναμοσειρές.

Γενετήριες συνάρτησεις

Ο προσεκτικός αναγνώστης που μελέτησε τα παραδείγματα στην αρχή του άρθρου παρατίθησε μεθανότατα ότι η επτυχία της μεθόδου μας στηρίχτηκε στη δυνατότητα να γράφουμε σε εύχρηστη μορφή τη γενετήρια συνάρτηση της δυναμοσειράς $a(z)$. Επί παραδείγματι, μπορούμε να γράφουμε τη γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας $1, 1, 1, \dots$ ως $1/(1-z)$, διότι

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots \quad (17)$$

Με τη βοήθεια αυτής της ταυτότητας μπορούμε να βρούμε πολλούς τύπους για άλλες γενετήριες συναρτήσεις. Για παράδειγμα, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (17) με z και παραγωγίσουμε, βρίσκουμε

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{1-z} \right) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + (n+1)z^n + \dots \quad (18)$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $(z/(1-z))'$ $= 1/(1-z)^2$ είναι η γενετήρια συνάρτηση της προόδου $1, 2, 3, 4, \dots$ Αν πολλαπλασιάσουμε και πάλι την εξίσωση αυτή με z και παραγωγίσουμε, βρίσκουμε

$$\frac{1+z}{(1-z)^3} = 1 + 2^2 z + 3^2 z^2 + \dots + (n+1)^2 z^n + \dots \quad (19)$$

Βρήκαμε τύπο σε κλειστή μορφή για τη γενετήρια συνάρτηση της ακολουθίας $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$

Οι αναγνώστες που γνωρίζουν διαιρεση πολυωνύμων μπορούν να προσπαθήσουν να συναγάγουν τον τύπο (19) με διαφορετικό τρόπο, και συγκεκριμένα, διαιρώντας το πολυώνυμο $1+z$ με το πολυώνυμο $(1-z)^3 = 1 - 3z + 3z^2 - z^3$.

Ας ξεκινήσουμε πάλι από τον τύπο (17), αλλά αυτή τη φορά θα τον ολοκληρώσουμε. Παίρνουμε

$$\int_0^z \frac{dx}{1-x} = \int_0^z 1 \cdot dx + \int_0^z x \cdot dx + \dots + \int_0^z x^n \cdot dx + \dots$$

και

$$-\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

Διαπιστώνουμε ότι η γενετήρια συνάρτηση της προόδου $1, 1/2, 1/3, \dots$ είναι $-\ln(1-z)$.

Προβλήματα

1. Αποδείξτε ότι κάθε θετικός ακέραιος έχει μία μοναδική δυαδική παράσταση.

Υπόδειξη: Συγκρίνετε αυτό το ερώτημα με το πρόβλημα της ζύγισης.

2. Αποδείξτε ότι κάθε θετικός ακέραιος έχει μία μοναδική δεκαδική παράσταση.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την επόμενη σχέση (αποδείξτε την)

$$(1+z+z^2+\dots+z^n) \cdot (1+z^{10}+z^{20}+\dots+z^{90}) \cdot \\ \times (1+z^{100}+z^{200}+\dots+z^{900}) \cdot \dots = \\ = 1+z+z^2+z^3+\dots=1/(1-z).$$

3. Αποδείξτε ότι το πλήθος των τρόπων αναπαράστασης ενός θετικού ακέραιου ως άθροισμα διαφορετικών θετικών ακέραιων ισούται με το πλήθος των τρόπων αναπαράστασής του ως άθροισμα (όχι υποχρεωτικά δια-

φορετικών) θετικών περιπτών αριθμών. (Για παράδειγμα, το 6 έχει τέσσερις αναπαραστάσεις της πρώτης μορφής:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 1 + 2 + 3,$$

και τέσσερις της δεύτερης:

$$1 + 5 = 3 + 3 = 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε τον τύπο

$$\begin{aligned} & (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \cdot (1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots) \times \\ & \quad \times (1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \dots) \cdots = \\ & \frac{1}{1 - z} \cdot \frac{1}{1 - z^3} \cdot \frac{1}{1 - z^5} \cdots = \\ & \frac{1}{1 - z} \cdot \frac{1 - z^2}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{1 - z^3} \cdot \frac{1 - z^4}{1 - z^4} \cdot \frac{1}{1 - z^5} \cdots = \\ & \frac{1 - z^2}{1 - z} \cdot \frac{1 - z^4}{1 - z^2} \cdot \frac{1 - z^6}{1 - z^3} \cdot \frac{1 - z^8}{1 - z^4} \cdots = \\ & (1 + z) \cdot (1 + z^2) \cdot (1 + z^3) \cdot (1 + z^4) \cdots, \end{aligned}$$

και χρησιμοποιήστε τον για να λύσετε το πρόβλημα.

4. Βρείτε τύπο σε κλειστή μορφή για τον γενικό όρο της ακολουθίας $(u_n) = (0, 1, 5, 19, 65, \dots)$, η οποία ορίζεται από τις αναδρόμικές σχέσεις $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5u_n + 6u_{n-1}$.

Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι μπορούμε να γράψουμε τη σειρά $S(z) = u_0 + u_1z + u_2z^2 + \dots$ με τη μορφή $S(z) = z + 5zS(z) + 6z^2S(z)$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{z}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{1}{1 - 3z} - \frac{1}{1 - 2z} = \\ & (1 + 3z + 3^2z^2 + 3^3z^3 + \dots) - (1 + 2z + 2^2z^2 + 2^3z^3 + \dots). \end{aligned}$$

5. Εστω $n > 2$ ένας σταθερός ακέριτος. Θεωρούμε τις σειρές

$$\begin{aligned} f(z) &= z + z^{v_1} + z^{v_2} + \dots, \\ [f(z)]^2 &= c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι το πλήθος των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης του Fermat $k_1^n + k_2^n = k_3^n$ ισούται με c_1 , όταν $m = k_3^n$.

Σημείωση: Διοτυχώς για την ιστορία των μαθηματικών, κανείς δεν έχει ανακαλύψει τρόπο υπολογισμού των c_m (παρότι τώρα, μετά την απόδειξη του θεωρήματος του Fermat, είμαστε βέβαιοι για τις τιμές τους).

6. Υπολογίστε το πλήθος v_n των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε σε τρίγωνα ένα κυρτό n -γωνο με διαγωνίους που δεν τέμνονται (για παράδειγμα, $v_5 = 5$, $v_6 = 9$).

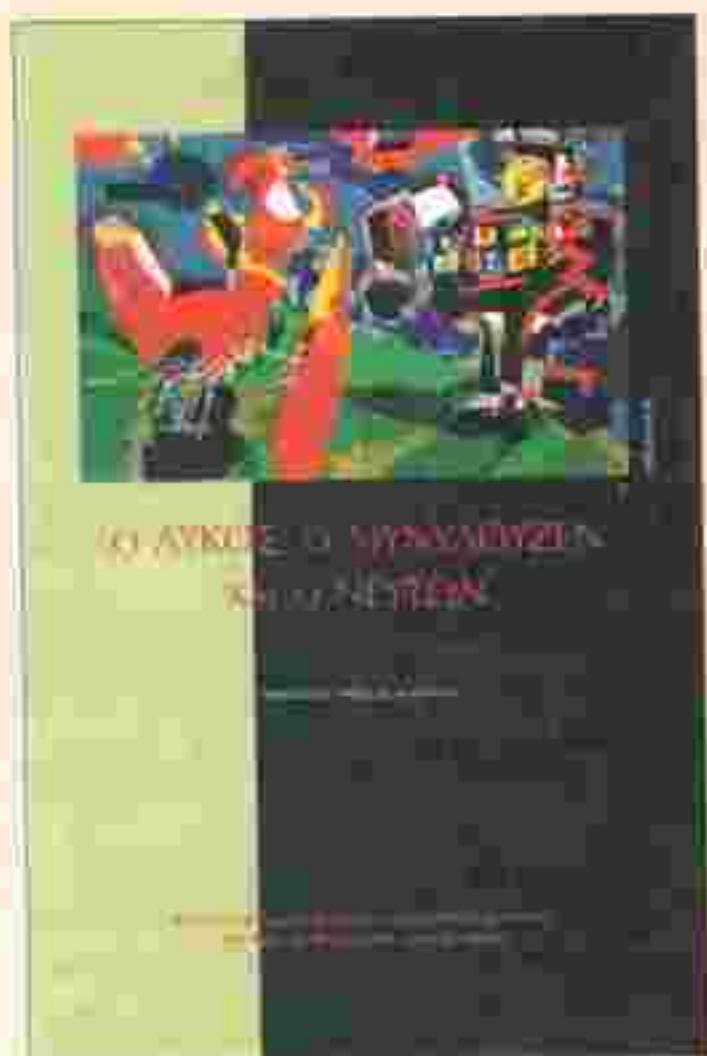
Υπόδειξη: Θέστε $v_2 = v_3 = 1$ και αποδείξτε τον αναδρομικό τύπο

$$v_n = v_2v_{n-1} + v_3v_{n-2} + \dots + v_{n-1}v_2,$$

όπου $n \geq 3$. Χρησιμοποιήστε αυτό τον τύπο για να αποδείξετε ότι $(a(z))^2 - a(z) = z$, όπου $a(z) = v_2z + v_3z^2 + v_4z^3 + \dots$. Βρείτε την $a(z)$ και παραγωγίστε την. Απάντηση:

$$v_n = \frac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-1)!}.$$

Οι όροι της ακολουθίας αυτής ονομάζονται αριθμοί Catalan.



Πανόδευτο, 284 σελ., 25x16 εκ., 6.400 δρχ.

Ο ΛΥΚΟΣ, Ο ΜΥΝΧΑΟΥΖΕΝ ΚΑΙ Ο ΝΕΥΤΩΝ

40 αστραφτερά κείμενα του περιοδικού *Quantum*
για θέματα Μηχανικής (και άλλο)

Πρόλογος: Ανδρέας Κασσέτας

«Τα προβλήματα φυσικής τα οποία παρουσιάζονται στα σαράντα κείμενα του βιβλίου είναι όλα πρωτότυπα και ενδεχομένως θα συμβάλουν στην ανανέωση μιας εγχώριας παράδοσης, σύμφωνα με την οποία από τα προβλήματα φυσικής είτε απουσιάζει είτε είναι ιδιαίτερα περιορισμένη η αισθηση της δροσιάς. Είναι όμως και προβλήματα για την αντιμετώπιση των οποίων θα χρειαστεί μολύβι και χαρτί. Άλλα αυτό σημαίνει ότι η ενασχόληση μαζί τους θα δημιουργήσει στον ενασχολουμένο και μία ακόμη απόλλαυση. Εκείνη που πηγάζει από τις δινακολίες τις οποίες αντιμετωπίζει η Σκέψη μας προκειμένου να ανακαλύψει τα κατάλληλα μονοπάτια και στη συνέχεια να αναρριχηθεί στα πιο απόκρημνα σημεία της "γέφυρας", ικανοποίηση ορειβάτη τη στιγμή που έχει φτάσει στην κορυφή.»

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ιστορίες κβαντικής τρέλας — 2

Γνωριμία με τα εννοιολογικά προβλήματα της κβαντικής φυσικής — της επαναστατικής θεωρίας που ανδρώθηκε στον αιώνα που φεύγει

David Lindley

ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ, αφού παρουσιάσαμε εν συντομίᾳ εκείνες τις ιδιαιτερότητες της κβαντικής θεωρίας που την κάνουν να διαφέρει από την οικεία ντε-τερμινιστική κλασική φυσική σε τέ-τοιο βαθμό ώστε να φαίνεται στον κοινό νου έως και παράλογη, εξηγή-σαμε σε αδρές γραμμές πώς μπορεί κανείς να εκμεταλλευθεί ζεύγη δια-πλεγμένων σωματιδίων για να τη-λεμεταφέρει κβαντικές καταστάσεις από τη μία άκρη του κόσμου στην άλλη, σημειώνοντας παράλληλα τις προς το παρόν αξεπέραστες δυσκο-λίες που ανακύπτουν όσον αφορά την τηλεμεταφορά μακροσκοπικών συστημάτων όπως οι άνθρωποι. Επί-σης, υπογραμμίσαμε ότι από την α-προσδιοριστία της κβαντικής θεωρίας πορρέει η ύπαρξη υπερφυσικών συνδέσεων μεταξύ κβαντικών σω-ματιδίων που τα χωρίζουν τεράστιες αποστάσεις, και οι οποίες επιτρέπουν μια μυστηριώδη ακαριαία επικοινω-νία μεταξύ τους. Όπως είδαμε, όρως, είναι αδύνατο να εκμεταλλευτούμε αυτή την ακαριαία επικοινωνία για να στείλουμε σήματα με ταχύτητα που ξεπερνά εκείνη του φωτός: ω-στόσο, μπορούμε να την εκμεταλ-λευτούμε για να εξασφαλίσουμε το απόρρητο των επικοινωνιών, ανα-πάντοσοντας κλειδιά κωδίκων που μαρτυρούν όποιον προσπαθεί να υ-ποκλέψει. Λοιπόν, ας συνεχίσουμε...

Χαρούμενοι πυροτεχνουργοί

Πώς μπορείτε να ανιχνεύσετε μια βόμβα τόσο ευαίσθητη που ακόμη και ένα μοναδικό φωτόνιο θα την πυροδοτούσε — χωρίς να αναπναχτείτε;

Όποις σημειώσει ο δόκτωρ Samuel Johnson, η προοπτική του απαγχονισμού βοηθά εξαιρετικά στη συ-γκέντρωση της σκέψης. Και θα έχε-τε ένα εξίσου ισχυρό κίνητρο για να κατανοήσετε σωστά την κβαντική θεωρία εάν γνωρίζετε ότι η παραμικρή ενδεχόμενη παρανόηση μπορεί να αποδειχθεί μοιραία. Ας συζητήσουμε, λοιπόν, για τον εντοπισμό βομβών. Υποθέστε ότι κάποιος σας ενημερώνει για το ενδεχόμενο να υπάρχει σε ένα συγκεκριμένο ση-μείο κοντά σας μια βόμβα εξοπλι-σμένη με έναν πυροκροτητή τόσο ευαίσθητο ώστε ακόμη και ένα μόνο φωτόνιο αρκεί για να την κάνει να εκραγεί. Αναμφίβολα, θα θορυβηθείτε και θα θελήσετε να διαπιστώσετε το ταχύτερο δυνατόν εάν μέσα στο σκοτάδι γύρω σας κρύβεται ό-ντως μια τέτοια επικίνδυνη βόμβα· ωστόσο, δεν τολμάτε και να φεύγετε το χώρο για να δείτε: εάν το κάνατε, θα ανακαλύπτετε ίως τη βόμβα, μόνο που κάτι τέτοιο θα συ-νέπητε με την έκρηξή της. Μιλώ-ντας κλασικά, αντιμετωπίζετε ένα τρομερό δίλημμα. Εντούτοις, ως από

μηχανής θεός, οι ιδιοτυπίες της κβα-ντικής θεωρίας έρχονται, και πάλι, να σας βγάλουν από το αδιέξοδο.

Το γρίφο που ρόλις παρουσιάσα-με τον πρότειναν το 1993 οι Avsha-λom Elitzur και Lev Vaidman του Πανεπιστημίου του Τελ-Αβίβ, στο Ισραήλ, οι οποίοι —όπως συμβαίνει συνήθως σε τέτοιες περιπτώσεις— παρουσιάσαν μια έξιπνη αλλά ατε-λή λύση. Το βασικό στοιχείο της ι-δέας τους ήταν μια διάταξη που ο-νοράζεται συμβολόμετρο, το οποίο, κατά κάποιον τρόπο, χωρίζει ένα φωτόνιο στα δύο και, στη συνέχεια, το επανασυνθέτει, αποκαθιστώντας το στην αρχική του κατάσταση.

Στην είσοδο του συμβολομέτρου υπάρχει ένα ημιεπαργυρωμένο κά-τοπτρο το οποίο, σύμφωνα με την κλασική περιγραφή, ανακλά το μερό από το προσωπίτον φως και επιτρέ-πει τη διέλευση στο υπόλοιπο μισό. Το ανακλώμενο φως και το διερχό-μενο φως οδεύουν ακολουθώντας διαφορετικές διαδρομές, καθοδηγού-μενα από συνήθη, τελείως ανακλα-στικά κάτοπτρα, και υποχρεώνται να επανενωθούν προς την έξοδο της διάταξης. Αν προσπαθήσετε να σκε-φτείτε τι συμβαίνει με όρους κβα-ντικής θεωρίας, ενδέχεται να νοήσετε ότι ένα μονήρες φωτόνιο που εισέρχεται στο συμβολόμετρο πρέπει να επλέξει τη μία ή την άλλη δια-δρομή· αυτό, όμως, αληθεύει μόνο

εάν έχετε τοποθετήσει ανιχνευτές κατά μήκος των διαδρομών για να καταγράψετε την πορεία του φωτονίου. Αν δεν υπάρχουν ανιχνευτές για να σας παράσχουν περισσότερες πληροφορίες, τότε οποιαδήποτε κβαντική περιγραφή της πορείας του φωτονίου πρέπει να περιέχει δύο όρους, οι οποίοι αντιστοιχούν στις δύο διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει.

Το συμβολόμετρο που χρησιμοποίησαν οι Elitzur και Vaidman* για τον φανταστικό τους ανιχνευτή βόμβων συνδυάζει τις υπερφυσικές πθανότητες με τέτοιον τρόπο ώστε το φωτόνιο, όταν πλέον ανακτήσει την ενδιάμεση του, να εξέρχεται σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Άλλη η διαδικασία αυτή παρουσιάζει εξαιρετική ευαισθησία. Εάν, για οποιονδήποτε λόγο, κάποιο από τα φωτόνια-φαντάσματα υποστεί έστω και την ελάχιστη διαταραχή καθ' οδόν, η πολύ ευαισθητή επανασύνθεση καταστρέφεται· τότε, το φωτόνιο μπορεί να εξέλθει σε καθεμία από τις δύο κατεύθυνσης με ίση πθανότητα. Φανταστείτε τώρα ότι μια υπερευαίσθητη βόμβα, που ένα μόνο φωτόνιο αρκεί για να την πυροδοτήσει, τοποθετείται σε μία από τις διαδρομές του συμβολομέτρου. Τι πρόκειται να συμβεί;

Πρώτα τα άσχημα νέα: υπάρχει 50% πθανότητα η βόμβα να εκραγεί. Και τούτο επαιδή η βόμβα είναι ένας—ορολογουμένως, αυσυνήθιστα εκλεπτυσμένος—ανιχνευτής φωτονίων, και όποιος ανιχνευτής τοποθετηθεί σε κάποια από τις διαδρομές του συμβολομέτρου έχει 50% πθανότητα να καταγράψει ένα φωτόνιο. Μπουρ!

Επόμενε, υπάρχει 25% πθανότητα το φωτόνιο να εξέλθει στην κανονική κατεύθυνση χωρίς να σας αποκαλύψει την παραμικρή πληροφορία για το αν υπάρχει βόμβα ή όχι. Η

πραγματικά ενδιαφέρουσα δυνατότητα είναι η τελευταία —το φωτόνιο έχει 25% πθανότητα να εξέλθει στην άλλη κατεύθυνση. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν η βόμβα βρίσκεται μέσα στο συμβολόμετρο. Συγχαρητήρια! Ανιχνεύσατε τη βόμβα, και, εφόσον το φωτόνιο εξήλθε ασύρματος, η βόμβα δεν μπορεί να ανατινάχθηκε.

Σε μια προσπάθεια να συνοψίσουμε την ουσία χωρίς μεγάλες απαιτήσεις ακριβολογίας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η παρουσία της βόμβας αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο το φωτόνιο εξερευνά ταυτόχρονα και τις δύο διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει για να διέλθει από το συμβολόμετρο. Το γεγονός αυτό επιτρέπει στη βόμβα να επηρεάσει τις (πθανότητες) πορείες του φωτονίου, χωρίς στην πραγματικότητα να αλληλεπιδράσει με κάπια που θα διανοούνταν κανείς να το αποκαλέσει πραγματικό φωτόνιο.

Αναμφισβήτητα, η μέθοδος αυτή έχει και τα μειονεκτήματά της. Υπάρχει μία πθανότητα στις δύο η βόμβα να εκραγεί, οπότε το παιχνίδι ελεγίσωνται. Και υπάρχει μία πιθανότητα στις τέσσερις το φωτόνιο να εξέλθει με τον κανονικό τρόπο, οπότε δεν θα μάθετε κατά πόσον υπάρχει ή όχι βόμβα. Πάντως, αν συμβεί κάπια τέτοιο, δεν έχετε παρά να στείλετε άλλο ένα φωτόνιο και, αν αποδειχθεί απαραίτητο, ακόμη ένα έπειτα απ' αυτό. Συνεχίζετε τις προσπάθειές σας ώσπου να ανιχνεύσετε τη βόμβα ή ώσπου να την ανατινάξετε, και η πθανότητα να την εντοπίσετε αυξάνεται σε 1 προς 3.

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου μπορεί να βελτιωθεί αν ρυθμίσετε κατάλληλα το πρώτο μερικά επαργυρωμένο κάτοπτρο, έτσι ώστε το φως να έχει εξωρετικά μικρή πιθανότητα να ακολουθήσει τη διαδρομή όπου ενδέχεται να βρίσκεται η βόμβα. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η πιθανότητα να ανιχνεύσετε ή να ανατινάξετε τη βόμβα με ένα μόνο φωτόνιο μειώνεται σημαντικά, και θα πρέπει να στείλετε πολυάριθμα φωτόνια για να έχετε αποτέλεσμα. Η πιθανότητα, όμως, να ανιχνεύσετε τελικά τη βόμβα αυξάνεται σε 1

προς 2. Από πρακτική αποψη, πάντως, πρέπει να παραδεχθούμε ότι ελάχιστους πυροτεχνούργους θα ικανοποιούσε ένα σύστημα που θα τους παρέιχε μόλις 50% πθανότητα να επιζήσουν.

Μόλις δύο χρόνια αργότερα, Anton Zeilinger και η ομάδα του στην Ίνστιτούτο της Αυστρίας —οι ίδιοι άνθρωποι που πραγματοποίησαν τον άθλο της κβαντικής τηλεμεταφοράς— παρουσίασαν μια σχεδόν αλάνθαστη εκδοχή του κβαντικού ανιχνευτή βόμβων. Αντί να στέλνουν νέα φωτονία, το ένα μετά το άλλο, έως ότου προκύψει κάποιο αποτέλεσμα, επινόησαν ένα σύστημα που «ανακυκλώνει» συνεχώς το ίδιο μοντέρνο φωτόνιο.

Φανταστείτε ένα θάλαμο του οποίου τα δύο απέναντι τοιχώματα είναι τελείως ανακλαστικά κάτω πάτρα, έτσι ώστε ένα φωτόνιο που μπορεί να πηγαίνει σεριερά για πάντα ανάμεσά τους, ανακλώμενο που στο ένα και πότε στο άλλο. Διαιρείτε τώρα το χώρο στα δύο με επικάτοπτρο που παρουσιάζει σχεδόν μηδενική διαπερατότητα, το οποίο πατασκευής ανακλά όλο σχεδόν τι φως που προσπίπτει πάνω του, αφού νοντας μόνο ένα ελάχιστο ποσοστό διέλθει —για παράδειγμα, τη φωτόνιο στο εκατομμύριο. Στη συνέχεια, στείλτε ένα μοναδικό φωτόνιο μέσα στο θάλαρο στην αριστερά πλευρά του κεντρικού κατόπτρου.

Όσο το φωτόνιο δεν ανιχνεύεται δεν μπορούμε να ξέρουμε κατά πούν ανακλάστηκε ή διήλθε. Σταδιού κά αναπτύσσει μια μυστηριώδη πλήρη υπόσταση και ρωτάζεται σε δύο τρόματα του θαλάμου. Αρχικούληρο το φωτόνιο βρίσκεται σε αριστερό τρίμα: ύστερα από τη πρώτη ανάκλαση, στο δεξιό τρίμα έχει παρεισδύσει μια μικρή πιθανότητα παρουσίας του φωτονίου. Κάθε πρόσθιτη ανάκλαση τα δύο «μέρη» του φωτονίου «διαιρούνται» εκ νέου, αλλά παράλληλα αλληλοπρόσων αναμεταξύ τους όποιες παντείνονται στο μεσαίο κάτοπτρο. Ήλο αυτό το «πηγανέλα» έχει την ξής απλή κατάληξη: ένα φωτόνιο που αρχικά βρισκόταν εξ ολοκλήρου στο αριστερό τρίμα του θαλάμου

* Για μια αναλυτικότερη παρουσίαση της λύσης των Elitzur και Vaidman, η οποία συνοδεύεται και από διαφωτιστικά σχήματα, ο αναγγέλτης μπροστίζει να ανατρέξει στο βιβλίο του Roger Penrose *To μεγάλο, το μικρό και η ανθρώπινη νότη* (Εκδόσεις Κάποιο), και συγκεκριμένα, στις σελίδες 97 έως 102.

«διαρρέει» βαθμιά προς το δεξιό, ώσπου, μετά την πάροδο ορισμένου χρόνου, να βρεθεί εξ ολοκλήρου σε αυτό. Και τότε, η ίδια διαδικασία θα επαναληφθεί κατά την αντίθετη φορά, φέρνοντας σταδιακά το φωτόνιο πίσω στο αριστερό τμήμα.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι κάποιος σας λέει πώς στο δεξιό τμήμα του θαλάμου ενδέχεται να υπάρχει μια υπερευαίσθητη βόμβα. Εισάγετε ένα φωτόνιο στο αριστερό τμήμα και το αφήνετε να ανακλάται μπρος-πίσω. Υστέρα από τον απαιτούμενο αριθμό ανακλάσεων, ελέγχετε το αριστερό τμήμα για να δείτε εάν το φωτόνιο έχει εξαφανιστεί από εκεί και έχει «διαρρεύσει» στα δεξιά. Αν έχουν όντως έτοι τα πράγματα, ξέρετε ότι δεν υπάρχει βόμβα. Αν, όμως, διαπιστώσετε ότι το φωτόνιο εξακολουθεί να βρίσκεται στα αριστερά —και εδώ εντοπίζεται το πραγματικά «πονηρό» σημείο—, ξέρετε ότι στα δεξιά υπάρχει πράγματα βόμβα. Προσοχή: ενώ περιμένετε για να ελέγξετε πού βρίσκεται το φωτόνιο, υπάρχει η πιθανότητα να εκραγεί η βόμβα. Εντούτοις, όσο αξανεται η ανακλαστικότητα του μεσαίου κατόπτρου, όσο μειώνεται η πιθανότητα μιας έκρηξης. Αν το μεσαίο κατόπτρο σίγουρα σχεδόν απολύτως ανακλαστικό —όχι όμως τελείως—, τότε το χρονικό διάστημα που θα πρέπει να περιμένετε προκειμένου να ολοκληρώσετε το πείραμά σας τείνει στο άπειρο, πλην όμως τη πιθανότητα να ανιχνευθεί η βόμβα σχεδόν εξισώνεται με τη μονάδα, ενώ η πιθανότητα να εκραγεί τείνει στο μηδέν.

Εκ πρώτης όψεως, δυσκολεύεται κανείς να κατανοήσει για ποιο λόγο αυτή η διάταξη θα δώσει διαφορετικό αποτέλεσμα από εκείνη που προτείνουν αρχικά οι Elitzur και Vaidman. Και στις δύο περιπτώσεις, κάθε διέλευση ενός φωτονίου δίνει μια μικρή πιθανότητα να ανιχνευθεί η βόμβα, και συνεχίζουμε να στέλνουμε φωτόνια ώσπου να προκύψει κάποιο αποτέλεσμα. Ωστόσο, υπάρχει μια κρίσιμη διαφορά, η οποία και πάλι οφείλεται σε μια ιδιοτροπία της κβαντικής θεωρίας. Στο σενάριο Elitzur-Vaidman, κάθε φωτόνιο συ-

νεισφέρει μια μικρή πιθανότητα να ανιχνευθεί η βόμβα και μια ίση πιθανότητα να εκραγεί. Κάθε πρόσθετο φωτόνιο που στέλνουμε ενισχύει αυτές τις πιθανότητες με ίσους ρυθμούς, και τελικά η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το καθένα από τα δύο ενδεχόμενα ανέρχεται σε 50%.

Στη διάταξη των αυστριακών, κάθε ανάκλαση του φωτονίου έχει, ομοίως, μια μικρή πιθανότητα να προκαλέσει την έκρηξη της βόμβας: όσο, όμως, δεν την προκαλεί, το φωτόνιο συνεχίζει να επιστρέφει στο τμήμα του θαλάμου όπου βρισκόταν αρχικά. Έτοι, κάθε φορά που το φωτόνιο προσπίπτει στο κεντρικό κάτοπτρο και αποτυγχάνει να ανατινάξει την βόμβα, η πιθανότητα να βρίσκεται στο αριστερό τμήμα του θαλάμου παραμένει ίση με τη μονάδα —σαν να μην είχε προσπέσει ποτέ πάνω στο κάτοπτρο. Όταν το φωτόνιο προσπίπτει και πάλι στο κεντρικό κάτοπτρο επιχειρώντας μια νέα προσπάθεια, είναι σαν να μην είχαν συμβεί ποτέ όλες οι προηγούμενες απόπειρες. Άρα, ανεξάρτητα από τον αριθμό των ανακλάσεων, το φωτόνιο παραμένει στο τμήμα όπου βρισκόταν αρχικά —αποδεικνύοντας ότι υπάρχει μια βόμβα στην άλλη περιά.

Η διάταξη που καθιστά δυνατή την ασφαλή ανίχνευση της βόμβας στηρίζεται απόλυτα στην ιδέα ότι ένα φωτόνιο που δεν έχει παρατηρηθεί μπορεί να «βρίσκεται» ταυτόχρονα και στις δύο πλευρές του μεσαίου κατόπτρου. Εφόσον η εν λόγω συμπεριφορά αποτελεί ίδιον της κβαντικής μηχανικής, καθιερώθηκε ένα όνομα γι' αυτήν. Ονομάζεται αρχή της απροσδιοριστίας.

Κατά βάθος, μαγική

Εάν έχετε την τάση να προσκολλάστε σε ό,τι φαίνεται ασφαλές και οικείο, η κβαντική θεωρία θα σας προκαλέσει σύγχυση. Οι συνήθεις κανόνες, απλούστατα, δεν ισχύουν

Η πρώτη διατύπωση της περιφήμης αρχής της απροσδιοριστίας έκανε την εμφάνισή της το 1927, τότε που ο γερμανός φυσικός Werner Heisenberg απέδειξε ότι μπορείτε να

μετρήσετε την ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου ή τη θέση του, όχι όμως και τις δύο ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα, ο Heisenberg απέδειξε ότι όσο καλύτερα μετράτε τη θέση ενός ηλεκτρονίου με τόσο μικρότερη ακρίβεια γνωρίζετε την ταχύτητά του, και αντιστρόφως. Η μέτρηση είναι ένας συμβιβασμός και εσείς, ο πειραματικός, πρέπει να επιλέξετε τι θα μετρήσετε και να αποδεχθείτε τις συνέπειες.

Όπως και τόσα άλλα πράγματα στην κβαντική θεωρία, η αρχή της απροσδιοριστίας απορρέει από τον πιθανοκρατικό της χαρακτήρα. Ο Heisenberg συνοχάστηκε πάνω σε μια διαδικασία όπου προσπαθούμε να μετρήσουμε τη θέση και την ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου χρησιμοποιώντας ένα φωτόνιο που υφίσταται ανάκρουση από αυτό. Όταν, όμως, ένα φωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο συγκρούονται, δεν υπάρχει ένα μοναδικό προβλέψιμο αποτέλεσμα αλλά, αντίθετα, ένα ολόκληρο φάσμα δυνατών αποτελεσμάτων. Η συναγωγή των ιδιοτήτων του ηλεκτρονίου από τη συμπεριφορά του ανακρούοντος φωτονίου δεν μπορεί παρά να μας οδηγήσει επίσης σε ένα φάσμα δυνατοτήτων, και όχι σε ένα μονοσήμαντο συμπέρασμα. Όθεν και η αρχή της απροσδιοριστίας.

Με ελαφρώς διαφορετική ρορφή, η αρχή αυτή έχει τις ρίζες της σε ένα παλιό πείραμα που πραγματοποίησε ο Thomas Young το 1801 για να αποδείξει ότι το φως είναι κύμα και όχι σωματίδιο. Ο Young άνοιξε δύο παράλληλες σχισμές, τη μία πλησίον της άλλης, σε ένα αδιαφανές πέτασμα, τις φώτισε, και στον τοίχο, πίσω από τις σχισμές, παρατήρησε φωτεινές και σκοτεινές τωνίες, ή κροσσούς —δηλαδή, μιαν εικόνα συμβολής. Ισχυρίστηκε, λοιπόν, πως αν το φως συνιστάται από σωματίδια που κινούνται ευθύγραμμα, αυτά θα έπρεπε να διέλθουν από τις σχισμές και να σχηματίσουν δύο φωτεινές κηλίδες. Επειδή όμως το φως είναι κύμα, τα όρη και οι κοιλάδες των δύο επιμέρους κυμάτων που εξέρχονται από τις σχισμές συμβάλλουν είτε ενισχυτικά είτε αποσβεστικά, δημιουργώντας αλλού

φωτεινούς και άλλου σκοτεινούς κροσσούς.

Ας περάσουμε τώρα στα φωτόνια. Εφόσον είναι σωματίδια, θα έπρεπε να σχηματίζουν δύο φωτεινές κηλίδες. Μόνο που, σε αντίθεση με τις κλασικές οφαίρες, τα φωτόνια αλληλεπιδρούν όπως τα κύματα. Πρόκειται, δηλαδή, για σωματίδια με κυματικές ιδιότητες. Ή, αν προτιμάτε, είναι κύματα που συμπεριφέρονται ως ρείμα σωματιδίων. Ακριβώς όπως ένα ημιεπαργυρωμένο κάτοπτρο σε ένα συμβολόμετρο «διαχωρίζει» τα φωτόνια, έτσι και η διάταξη των σχισμών του Young διαιρεί κάθε φωτόνιο σε δύο μέρη, τα οποία συμβάλλουν μεταξύ τους πίσω από το πέτασμα, δημιουργώντας την εικόνα συμβολής στον τοίχο. Αυτά τα «μέρη» των φωτονίων δεν είναι ανιχνεύσιμα: Εάν τοποθετήσετε ανιχνευτές ακριβώς πάνω στις σχισμές για να δείτε ποια πορεία ακολουθούν τα φωτόνια, θα καταστρέψετε την εικόνα συμβολής. Εάν αξιώσετε να δείτε τα φωτόνια να συμπεριφέρονται ως σωματίδια διερχόμενα από τη μία ή την άλλη σχισμή, καταστρέψετε την κυματική συμπεριφορά που δημιουργεί τους φωτεινούς και σκοτεινούς κροσσούς. Μπορείτε να παρατηρήσετε τα φωτόνια να συμπεριφέρονται ως σωματίδια, όχι όμοις και τα δύο ταυτόχρονα.

Αυτή η γενική ιδέα αποτελεί μία από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του κβαντικού κόσμου. Ανακαλέστε στη μνήμη σας το παράδοξο EPR και, ειδικότερα, το πώς ένα φωτόνιο επιδρά ακοριαία στον μακρινό του σύντροφο συνεπεία του πθανοκρατικού χαρακτήρα των κβαντικών φαινομένων. Τα δύο διαπλεγμένα φωτόνια αποτελούν από κοινού φορείς της δυνατότητας πολλών πιθανών αποτελεσμάτων. Όσον αφορά το ποιο ακριβώς αποτέλεσμα θα παρατηρήσετε, αυτό παραμένει απροσδιόριστο έως ότου τα φωτόνια υποβληθούν σε πραγματική μέτρηση. Και εφόσον επιλέξετε να μετρήσετε μία συγκεκριμένη ιδιότητα, πρέπει να παρατηρήσετε από τη γνώση κάποιας άλλης.

Είναι παγκοίνως γνωστό ότι ο

Αίνσταν αρνούνταν να αποδεχθεί την ιδέα ότι ο Θεός «παιζει ζάρια με το Σύμπαν...». Δεν τον ανησυχούσε απλώς ο πθανοκρατικός χαρακτήρας της θεωρίας τον θορυβούσαν κυρίως όλες οι ανατρεπτικές συνέπειες που απέρρεαν από αυτόν. Αρκετοί φυσικοί συμμεριστηκαν την πεποίθηση του Αίνσταν ότι η κβαντική θεωρία δεν μπορεί να είναι αποδύτως ορθή. Έτσι, στην περίοδο που ακολούθησε συνέλαβαν και προέβαλαν μερικές ευφυείς ιδέες προκειμένου να διορθωθούν τα κακώς κείμενα. Το 1952, ένας αμερικανός φυσικός που είχε συνεργάστε με τον Αίνσταν, ο David Bohm, πρότεινε μια εκδοχή της κβαντικής θεωρίας η οποία φαιγόταν να διαλύει τις ανησυχίες του Αίνσταν.

Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία του Bohm, τα κβαντικά σωματίδια διαθέτουν «κρυμμένες μεταβλητές» (γνωστές και ως λανθάνουσες παράμετροι), δηλαδή εσωτερικές ιδιότητες που είναι ιδιάζουσες και καθορισμένες για κάθε σωματίδιο. Όταν εκτελείται μια μέτρηση, οι κρυμμένες μεταβλητές αλληλεπιδρούν με τη μετρητική συσκευή έτσι ώστε να παραχθεί ένα αποτέλεσμα. Μια συλλογή κβαντικών σωματιδίων, φυσικούς και αυ προετοιμαστεί, χαρακτηρίζεται πάντοτε από ένα φάσμα τημών των κρυμμένων μεταβλητών, ακριβώς όπως σε ένα σύνηθες, κλασικό αέριο μερικά άτομα κινούνται με ταχύτητα μεγαλύτερη από τη μέση και κάποια άλλα με μικρότερη.

Σ' αυτή την εκδοχή της κβαντικής θεωρίας, οι μετρήσεις οδηγούν σε ένα φάσμα δυνατών αποτελεσμάτων, διότι οι εσωτερικές ιδιότητες των σωματιδίων που υποβάλλονται σε μέτρηση έχουν ένα φάσμα τημών. Έτσι, η αρχή της απροσδιοριστίας επιζει. Από πρακτική άποψη, η θεωρία του Bohm σίναι ακριβώς υιοδύναμη με τη συμβατική κβαντική θεωρία. Αποτελεί, ουσιαστικά, μια μαθηματική αναδιατύπωση και επανερμηνεία των καθηερωμένων εξισώσεων και, συνεπώς, οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα.

Υπάρχει όμως ένα αγκάθι: η κβαντική θεωρία έχει κάποια ιδιάζοντα

μη κλασικά χαρακτηριστικά, οπότε μολονότι ο Bohm προσπάθησε να αποκαταστήσει την κλασική προσδιοριστικότητα των κβαντικών σωματιδίων, η θεωρία του δεν μπορεί να είναι πραγματικά κλασική. Και δεν είναι.

Στο πείραμα των δύο σχισμών για παράδειγμα, η θεωρία του Bohm υποστηρίζει ότι ένα φωτόνιο διέρχεται οιωσιδήποτε ή από τη μία ή από την άλλη σχισμή. Άλλα τότε, πώς παράγεται η εικόνα συμβολής στον τοίχο; Η απάντηση κρύβεται σε μια οντότητα που ονομάζεται «κύμα-πλότος». Ο Bohm ισχυρίζεται ότι υπάρχουν ταυτοχρόνως και κύματα και σωματίδια, και μάλιστα, διανύει ευτελώς διακεκριμένα. Το κύμα-πλότος διέρχεται από τις δύο σχισμές ακριβώς όπως ένα κλασικό κύμα και δημιουργεί την εικόνα συμβολής. Το σωματίδιο ακολουθεί το κύμα-πλότο, γεγονός το οποίο δικαιολογεί άλλωστε και το όνομα του. Τα φωτόνια που διέρχονται με σα από τις σχισμές, με τη μορφή ενός ρεύματος, έχουν ελαφρώς διαφορετικές ενέργειες και κατευθύνσεις: έτσι, ακολουθούν το κύμα-πλότο ακριβώς όπως οι βόλοι κυλάνται σε ένα κομμάτι κυματοειδές χαρτονιά, διανύοντας διαφορετικές διαδρομές ανάλογα με τη γεωγραφική κατάσταση από την οποία εκκινούν. Τα φωτόνια φθάνουν στον τοίχο καθηγούμενα από το κύμα-πλότο και σχηματίζουν την αναμενόμενη εικόνα συμβολής.

Πρόκειται για ενδιαφέρουσα άποψη. Η μεγάλη δυσκολία, όμως, εγκείται στο να εξηγήσουμε τι ακριβώς είναι αυτό το κύμα και πώς καθοδηγεί τα φωτόνια. Πάντως, αποκλείεται να είναι ένα κλασικό κύμα που καθοδηγεί τα φωτόνια ασκεντάς τους κάποια δύναμη, διότι του οι ενέργειες των φωτονίων θα μεταβάλλονταν —πράγμα το οποίο δε συμβαίνει.

Η μυστηριώδης φύση του κύματος-πλότου εκδηλώνεται σαφέστερα σε ένα πείραμα EPR. Εδώ, το κύμα-πλότος μεταβιβάζει διαποτώμα να πληροφορία από το ένα διαπλεγμένο σωματίδιο στο άλλο, έτσι ώστε οι μετρήσεις που πραγματοποιού-

νιαί στο ζεύγος να δίνουν πάντοτε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Η εν λόγω μεταβίβαση, όμως, πρέπει να συντελείται ακαριαία. Φαίνεται, λοιπόν, ότι το κύμα-πλότος συνιστά τη φυσική ενοάρκωση της παλαιάς έννοιας της «δράσης εξ αποστάσεως». Πρόκειται, δηλαδή, για ότι ακριβώς πάσχιζε να αποφύγει πάση θυσία ο Αϊνστάιν.

Μια πενταετία αφότου ο Bohm διατύπωσε τη δική του εκδοχή της κβαντικής θεωρίας με κρυμμένες μεταβλητές, ο Hugh Everett, φυσικός του Πανεπιστημίου του Πρίνστον, είχε μια τελείως διαφορετική έμπνευση. Σε ένα πείραμα EPR, για παράδειγμα, μπορεί να γνωρίζουμε ότι το ένα φωτόνιο του ζεύγους είναι κατακόρυφα πολωμένο, οπότε το άλλο πρέπει να είναι οριζόντια πολωμένο. Εύκολα, όμως, θα μπορούσε να συμβαίνει και το αντίστροφο. Ανακύπτει, λοιπόν, το εύλογο ερώτημα γιατί πραγματοποιείται το ένα ενδεχόμενο ενώ το άλλο όχι.

Ο Everett ισχυρίστηκε ότι πραγματοποιούνται και τα δύο ευδεχόμενα —σε διαφορετικά, όμως, σύμπαντα. Υποστήριξε ότι, οποτεδήποτε εκτελείται μια κβαντική μέτρηση, συντελείται ένας «διαχωρισμός» σε διαφορετικά σύμπαντα —ένα για κάθε πθανό αποτέλεσμα. Εμείς παρατηρούμε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα επειδή βρισκόμαστε στο σύμπαν όπου πραγματώνεται αυτό και όχι κάποιο άλλο. Στα άλλα σύμπαντα, τα «αντίγραφά» μας γίνονται μάρτυρες κάποιου από τα υπόλοιπα δυνατά αποτελέσματα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται επ' απειρον, και η σειρά των αλλεπάλληλων «διαχωρισμών» σε παράλληλα σύμπαντα μακραίνει και πλουτίζεται με ολοένα και νέες «διακλιδώσεις».

Η θεωρία των πολλών κόσμων του Everett αφήνει την κβαντική θεωρία εντελώς άθικτη σε ότι αφορά το τεχνικό περιεχόμενό της. Πρόκειται, αν θέλετε, για μια μεταφυσική έρμηνεια της ίδιας παλιάς θεωρίας. Ακόμη και το ερώτημα αν αυτά τα άλλα σύμπαντα είναι πραγματικά παραμένει αδιευκρίνιστο. Το για φίξετε μια φευγαλέα ματιά σε ένα σύμπαν διαφορετικό από το δικό

σας ισοδυναμεί με παραβίαση της αρχής της απροοδιοριστίας. Θα σήμαινε, για παράδειγμα, ότι μπορείτε να μετρήσετε την ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου σε ένα σύμπαν, τη θέση του σε ένα άλλο, και έπειτα να συνδιάσετε τα αποτελέσματα και απ' τα δύο σύμπαντα για να κατανικήσετε τον περιορισμό που δρθείσε ο Heisenberg.

Συνεπώς, αφ' της στιγμής τα γέννηντα κάποια μέτρηση, αυτά τα διαχωρισμένα σύμπαντα οφείλουν να παραμείνουν αυστηρός και απολύτως διαχωρισμένα. Είναι, άραγε, πραγματικά όχι; Η απόφαση επαφίεται σ' εσάς. Οι διαμάχες που περιστρέφονται γύρω από τις «έρμηνειες» της κβαντικής θεωρίας έχουν ήδη διαρκέσει πάρα πολύ και σε τελική ανάλυση, κατά τη γνώμη ορισμένων, στερούνται νοήματος —δεδομένου ότι, λόγω των προϋποθέσεών τους και της λογικής που τις διέπει, οδηγούν κατ' ανάγκην στα ίδια πρακτικά αποτελέσματα. Στην πραγματικότητα, το όλο ζήτημα ανάγεται στο ποια νοητική εικόνα του κβαντικού κόσμου βρίσκετε ελκυστικότερη.

Κατέστη δυνατόν, ωστόσο, να αποδείξουμε ότι η κβαντική θεωρία διαφέρει θεμελιώδως από την κλασική φυσική. Το 1964 ο Bell διατύπωσε ένα απλό και κομψό θεώρημα, που φέρει πλέον το όνομά του. Αφορά ένα πείραμα EPR όπου δύο διαπλεγμένα σωματίδια εκτοξεύονται σε διαφορετικές διευθύνσεις, κατά τα συνήθη. Ο Bell μελέτησε τι θα συνέβαινε εάν δύο πειραματικοί δεν ήταν υποχρεωμένοι να μετρούν, για παράδειγμα, την πόλωση ενός φωτονίου σε μια προκαθορισμένη διεύθυνση, αλλά μπορούσαν να επλέξουν τυχαία ανάμεσα σε μετρήσεις της πόλωσης σε διαφορετικές γωνίες.

Από την άποψη της κλασικής φυσικής, αφ' της στιγμής δύο σωματίδια EPR απομακρυνθούν ακολούθως τα καθένα τη δική πορεία, αδυνατούν να επηρεάσουν το ένα το άλλο. Σύρφωνα με την κβαντική θεωρία, ωστόσο, η υπερφυσική σύνδεση διατηρείται —αν και δύσκολα μπορούμε να προοδιορίσουμε σε τι ακριβώς συνιστάται αυτή η σύνδε-

ση ή να βρούμε έναν τρόπο για να την ποσοτικοποιήσουμε. Ακριβώς αυτό επιτυγχάνει το θεώρημα του Bell: λέει ότι σε μια σειρά μετρήσεων διαδοχικών ζευγών σωματίδιων EPR αυγάκυπτουν στατιστικές διαφορές αύριεσσα στην κβαντική και την κλασική εικόνα. Τα κβαντικά σωματίδια παρουσιάζουν πολύ υψηλότερο βαθμό συοχέτωσης απ' ό,τι τα κλασικά, πράγμα το οποίο μπορούμε να αποδείξουμε υποβάλλοντας σε απλούς μαθηματικούς ελέγχους τα αποτελέσματα που προκύπτουν από μια σειρά μετρήσεων ζευγών EPR.

Ο Bell εισήγαγε μια μαθηματική ποσότητα για την οποία η κβαντική θεωρία προβλέπει πιές μεγαλύτερες από εκείνες που είναι δυνατόν να προκύψουν βάσει όποιαδήποτε κλασικής εικόνας. Χρειάστηκε να περάσει μια εικοσαετία ώσπου να ελεγχθεί επιτυχώς το θεώρημα του Bell. Και τούτο επειδή η πραγματοποίηση των αναγκαίων πειραμάτων με την απαιτούμενη αξιοποιία και ακριβεία παρουσίαζε σημαντικές δυσχέρειες. Το 1982, όμως, οι προσπάθειες του Alain Aspect και της ομάδας του στο Πανεπιστήμιο του Παρισιού στέφθηκαν επιτέλους με επιτυχία.

Τα πειραματικά αποτελέσματα δικαιώσαν την κβαντική θεωρία, γεγονός που, αν μη τι άλλο, έσβησε και την παραμικρή εναπομένουσα ελπίδα για μια μελλοντική παλινόρθωση της κλασικής φυσικής. Ακριβέστερα, ο έλεγχος του θεώρηματος του Bell από τον Aspect έδειξε ότι κάθε προσπάθεια αναδιατύπωσης της κβαντικής μηχανικής υπό τη μορφή μιας ψευδοκλασικής θεωρίας είναι καταβικασμένη σε αποτυχία. Η κβαντική θεωρία είναι και θα παραμείνει πάντα πραγματικά διαφορετική.

Η φύση της διαφοράς έγκειται, βασικά, σε μια έννοια που λέγεται «μη τοπικότητα». Η κλασική φυσική ενσωματώνει έναν αυστηρά τοπικό νόμο αιτίας-αποτελέσματος. Ό,τι συρβαίνει σε ένα σημείο A μπορεί να προκαλέσει αρέσκος κάποιο αποτέλεσμα μόνο στο σημείο A, ενώ, αν το αποτέλεσμα εκδηλώθει στο σημείο B, κάποια φυσική επί-

δραστή πρέπει να έχει διαδοθεί από το A στο B, γεγονός που απαιτεί χρόνο για να πραγματοποιηθεί.

Η κβαντική θεωρία είναι μη τοπική. Στα πειράματα EPR, μια μετρητή σε ένα σημείο A έχει μια ασύλληπτη, ακαριαία και —σύμφωνα με το θεώρημα του Bell— ποσοτικοποιητική επίδραση στο σημείο B. Αν και κατά πόδον ταξιδεύει κάτι το φυσικό από το A στο B, αυτό είναι αντιλεγόμενο. Στη θεωρία του Bohm, την ακαριαία επίδραση τη μεταφέρει το κύρα-πιλότος. Στο πλαίσιο της θεωρίας των πολλών κόσμων του Everett, η μη τοπικότητα διαχέεται σε καθένα από τα πολλά σύμπαντα. Πάντως, όπως και να το δείτε, η παρουσία της μη τοπικότητας στον κβαντικό κόσμο αποτελεί γεγονός. Δεν υπάρχει τρόπος να την αποφύγουμε.

Νεκρή ή ζωντανή

Στον πραγματικό κόσμο δεν συναντάμε γάτες που να είναι ταυτοχρόνως ζωντανές και νεκρές. Τι τις αναγκάζει, λοιπόν, να επλέξουν τη ζωή ή το θάνατο;

Στον κβαντικό κόσμο, οι μετρήσεις είναι εκείνες που «κάνουν τα πράγματα να συμβαίνουν». Όποτε πραγματοποιείται μια μέτρηση, μέσα από ένα πλήθος δυνατοτήτων αναδύεται μια καθορισμένη απάντηση. Χωρίς μετρήσεις, επομένως, ολόκληρο το Σύμπαν θα έλιωνε σε μια ομήλη απροσδιοριστίας χωρίς αρχή και τέλος. Άλλα τι είναι, τέλος πάντων, η μέτρηση; Προϋποθέτει, αραγε, την ανθρώπινη παρέμβαση ή παρατήρηση, ή μήπως οι μετρήσεις μπορεί να συντελούνται εν αγνοία των ανθρώπων (όπως όταν πέφτει ένα δέντρο μέσα στο δάσος χωρίς να το κοιτάζει κανείς); Και, παν υποθέσουμε ότι ξέρουμε τι εστί μέτρηση, πώς ακριβώς αγαγκάζει ένα κβαντικό σύστημα να επλέξει ανάμεσα στα διάφορα ενδεχόμενα και να αποφασίσει σε ποια συγκεκριμένη κατάσταση πρέπει να μεταβεί;

Όταν ο Niels Bohr συνέθετε την αντίληψη της κβαντικής θεωρίας που έγινε γνωστή ως ερμηνεία της Κοπεγχάγης, είχε βαθιά επίγνωση

της σημασίας των εν λόγω ερωτημάτων. Αδυνατούσε, όμως, να βρει ικανοποιητικές απαντήσεις, και την αδυναμία του αυτή δεν την έκριψε. Οι μετρήσεις είναι δυνατές, είπε: το ξέρουμε εκ πείρας. Σε τελική ανάλυση, οι ανιχνευτές φωτονίων καταγράφουν τα φωτόνια. Υιοθετώντας μια πραγματιστική στάση, ο Bohr υποστήριξε ότι η μέτρηση είναι η διαδικασία εκείνη που υποχρεώνει το κβαντικό σύστημα να βρεθεί σε μια καθορισμένη κατάσταση. Ο μολογουρένως, πρόκειται για έναν μάλλον κυκλικό ορισμό: αν όμως τον αποδεχθείτε, όλα τα υπόλοιπα έπονται. Η αρχή αυτή, το ουσιαστικό γόνημα της οποίας συμπυκνώνεται στο ότι μας αποτρέπει από περαιτέρω προβληματισμούς για το τι είναι μέτρηση, αποτελεί τον θεμέλιο λίθο της ερμηνείας της Κοπεγχάγης.

Ωστόσο, είναι ενοχλητικό να έχεις μια θεμελιώδη φυσική θεωρία η οποία, όσο και αν η αποτελεσματικότητά της δεν αρφισθείται, στηρίζεται σε μια αρχή που ουδείς διανοήθηκε ποτέ να ισχυριστεί ότι την κατανοεί. Ιδιαίτερα δυσαρεστημένη με αυτή την κατάσταση των πραγμάτων ήταν η γάτα του Erwin Schrödinger. Η δυστυχής γάτα βρίσκεται κλεισμένη σε ένα κιβώτιο, μόνη μαζί με έναν μηχανισμό ο οποίος εκπέμπει ένα φωτόνιο προς ένα φίλτρο και καταγράφει αν το φωτόνιο θα διέλθει μέσα από αυτό ή όχι. Εάν δεν διέλθει, δεν συμβαίνει απολύτως τίποτε. Εάν διέλθει, όμως, το φωτόνιο ενεργοποιεί μια διάταξη η οποία σημαίνει ότι η φιλιδιός με δηλητηριόδες αέριο, προκαλώντας έτσι το θάνατο της αποχής γάτας. Το πείραμα σχεδιάζεται ώστε η πιθανότητα να διέλθει το φωτόνιο από το φίλτρο είναι 50%. Συνεπώς, εάν ανοίξετε το κιβώτιο και κοιτάξετε μέσα, υπάρχει 50% πιθανότητα η γάτα να πηδήξει έξω ζωντανή.

Ως εδώ, όλα καλά. Η δυσκολία παρουσιάζεται, όπως έδειξε ο Schrödinger το 1935, όταν αρχίσουμε να αναρωτήσουμε τι συνέβη μέσα στο κιβώτιο μετά τη μέτρηση του φωτονίου αλλά προτού σηκώσει κανείς το σκέπασμα. Μια αρκετά απλή εικασία είναι να πούμε ότι ο μηχανι-

σμός εξέπειμψε το φωτόνιο, το φωτόνιο ή διηλθε μέσα από το φίλτρο ή όχι, το φιλιδιό με το δηλητήριο ή έσπασε ή παρέμεινε ανέπαφο, οποιτε και η γάτα ή πέθανε ή διατηρείται σε ζωή.

Αν έτσι έχουν τα πράγματα, όποια και το φωτόνιο προσέπεσε στο φίλτρο, πραγματοποιήθηκε μια κβαντική μέτρηση, και τα γεγονότα που ακολούθησαν εξασφάλισαν ότι από όποιη εκείνη και στο εξής το κουτί περιείχε ή μια ζωντανή ή μια νεκρή γάτα. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι θερούμε πως δεν χρειάζοταν τίποι περισσότερο από την πρόσπιτωση των φωτονίων στο φίλτρο για να έχουμε μια μέτρηση. Από την άλλη, όμως, τι θα λέγαμε αν απαρισύνουμε την ανθρώπινη παρατήρηση για τη δρομολογηθεί η μέτρηση; Στην προκειμένη περίπτωση, ώσπου να ανοίξει κάποιος το κιβώτιο και να κοιτάξει μέσα, η γάτα θα έπρεπε να βρίσκεται σε κάποια απροσδιόριστη κβαντική κατάσταση, όντας ουτιζωντανή ούτε νεκρή αλλά εν δυνάμει και τα δύο. Τι μπορεί όμως να σημαίνει —αν μπορεί να σημαίνει κάτι— το να λέμε ότι μια γάτα βρίσκεται σε μια απροσδιόριστη κατάσταση όπου είναι μισονεκρή και μισοζωντανή;

Ο Bohr απάντησε χωρίς περιστροφές: δεν έχει σημασία. Το μοναδικό πράγμα που μπορούμε να ελέγξουμε είναι ότι, όταν ανοιχτεί το κουτί, θα βρούμε την έγκλειστη γάτα ή νεκρή ή ζωντανή. Ουδείς λογος συντρέχει να ανησυχούμε για το τι μπορεί να σημαίνει μια μισονεκρή-μισοζωντανή γάτα. Και το περισσότερο, που θα δείτε θα είναι πάντα η νεκρή ή ζωντανή.

Ωστόσο, εδώ ανακύπτει ένα πραγματικό πρόβλημα φυσικής. Η θεωρία του Bohr συνεπάγεται ότι υπάρχουν κβαντικά αντικείμενα, όπως τα φωτόνια, που σίγουρα διαδικούνται σε απροσδιόριστες κβαντικές καταστάσεις και επίσης υπάρχουν κλασικά αντικείμενα, οι πώς οι γάτες, που μπορεί να βρίσκονται μόνο σε κλασικές καταστάσεις. Το πρόβλημα γίνεται αντιληπτό σε

μέσως μόλις σκεφτούμε ότι μια γάτα απαριζεται από κβαντικά συστατικά στοιχεία —πρωτόνια, νετρονία και ηλεκτρόνια. Εφόσον, λοιπόν, δεχόμαστε ότι η κβαντική θεωρία αποτελεί τη θεμελιώδη βάση όλης της φυσικής, τότε πώς είναι δυνατόν μια γάτα να εμφανίζεται ως κλασική, αναμφισβήτητα νεκρή ή ζωντανή γάτα, παρά ως κβαντική μισονεκρή-μισοζωντανή γάτα;

Ιδού, λοιπόν, ένας διαφορετικός τρόπος για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα της μέτρησης. Σε ποιο σημείο της αλυσίδας των συμβάντων, από το φωτόνιο που προσπίπτει στο φίλτρο και αντιχνεύεται έως το φιλτρίδιο με το δηλητήριο που σπάει και σκοτώνει ή όχι τη γάτα, γίνεται στην πραγματικότητα η μέτρηση; Που παραχωρεί τη θέση της η κβαντική απροσδιοριστία στην κλασική προσδιοριστικότητα, και με ποιον τρόπο;

Το βασικό ζήτημα περιστρέφεται γύρω από το τι σημαίνει να μιλάμε για μια κβαντική κατάσταση ενός σύνθετου αντικειμένου όπως η γάτα. Η ιδιότητα του ζωντανού ή νεκρού δεν αποτελεί εσωτερική ιδιότητα των στοιχειωδών κβαντικών συστατικών της γάτας αλλά μάλλον ουλλογική ιδιότητα του τρόπου με τον οποίο συναρθρώνονται όλα αυτά τα συστατικά. Μια κβαντική κατάσταση της γάτας, που περιγράφεται πλήρως, θα σήμαινε τον ακριβή και πλήρη καθορισμό της κβαντικής κατάστασης του καθενός από τα ξεχωριστά σωματίδια της γάτας. Και ένα μόνο ηλεκτρόνιο να μεταβεί σε διαφορετική κατάσταση, ολόκληρη η γάτα ουλλογικά μεταπίπτει σε διαφορετική ολική κβαντική κατάσταση.

Προφανώς, υπάρχουν αναρίθμητες (σχεδόν) κβαντικές καταστάσεις που αντιστοιχούν όλες στην ίδια γάτα. Ακόμη και διαν η γάτα φαίνεται να μην κάνει απολύτως τίποτε, όπως άλλωστε συνηθίζουν αυτά τα συμπαθή αιλουροειδή, η εσωτερική της κβαντική δομή βρίσκεται σε συνεχή αναταραχή, μεταβαίνοντας από τη μία κατάσταση στην άλλη. Πάντως, όλες οι κβαντικές καταστάσεις της γάτας πρέπει να αντί-

κουν σε μία απ' τις εξής δύο κατηγορίες: σε αυτές που αντιστοιχούν σε ζωντανές γάτες και σε εκείνες που παριστούν νεκρές γάτες.

Εν τοιαύτη περιπτώσει, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πραγματική κβαντική κατάσταση όπου η γάτα να είναι μισονεκρή-μισοζωντανή; Θεωρητικά, ναι. Άρκει να επιλέξουμε μία κατάσταση από το σύνολο των κβαντικών καταστάσεων που αντιστοιχούν στη ζωντανή γάτα και, με τη συνήθη διαδικασία, να τις συνδυάσουμε ραθηματικά σε μία μοναδική κατάσταση που μετέχει εξίσου των δύο δυνατοτήτων. Είναι το ίδιο πράγμα, αν και σε πολύ ρεγαλύτερη κλίμακα, σαν να συνδυάζαρε κβαντικές καταστάσεις φωτονίων με οριζόντια και κατακόρυφη πόλωση έτοι ώστε να προκύψει ένα φωτόνιο σε μια απροσδιόριστη κατάσταση, που η πόλωσή του μένει να μετρηθεί.

Μια «μισοοριζόντια και μισοκατακόρυφη» κατάσταση πόλωσης ενός φωτονίου θα παραμείνει ως έχει. Κατ' αρχήν, το ίδιο ισχύει και για μια «μισοζωντανή-μισονεκρή» κβαντική κατάσταση της γάτας. Εδώ, όμως, τα πράγματα περιπλέκονται. Και τούτο επειδή τόσο το ζωντανό μισό της γάτας όσο και το νεκρό είναι ελεύθερα να εξελιχθούν γρήγορα σε μια από τις μυριάδες άλλες καταστάσεις ζωής και θανάτου στις οποίες επιτρέπεται να μεταπέσουν. Το σπουδαιότερο δε, καθώς το νεκρό μέρος «σαρώνει» ταχύτατα όλες τις δυνατές καταστάσεις θανάτου και το ίδιο κάνει και το ζωντανό μισό, τα δύο μισά εξελίσσονται το ένα ανεξάρτητα από το άλλο.

Για να παρουσιάσουμε μια πραγματική «μισονεκρή-μισοζωντανή» κατάσταση, θα πρέπει να επιτευχθεί μια πολύ συγκεκριμένη συνεκτικότητα στον τρόπο με τον οποίο ο δύο συνιστώσες συνδυάζονται μεταξύ τους. Καθώς κάθε συνιστώσα εξελίσσεται, αυτή η συνεκτικότητα καταστρέφεται, οπότε στην πράξη η γάτα δεν συμπεριφέρεται σαν να είναι «μισοζωντανή-μισονεκρή» αλλά

σαν να είναι ή ζωντανή ή νεκρή, δηλαδή ακριβώς όπως περιμένουμε να συμπεριφέρεται μια γάτα. Για να ακριβολογούμε, δεν σημειώθηκε κάποια θεμελιώδης μεταβολή του συστήματος κατά το πέρασμα από την κατάσταση «ζωής και θανάτου» σε εκείνη της «ζωής ή θανάτου» απλώς, καθίσταται πρακτικά αδύνατη η πραγματοποίηση ενός πειράματος όπου θα παρατηρηθεί οπιδήποτε εκτός από μια γάτα που είναι ή νεκρή ή ζωντανή. Από πρακτική άποψη, λοιπόν, η γάτα είναι κλασική.

Η διαδικασία αυτή της «άρσης της συνεκτικότητας» μεταξύ των συνιστώσων μιας σύνθετης κβαντικής κατάστασης καταδεικνύει πόσο δύσκολο είναι να διατηρήσουμε σύνθετα αντικείμενα σε καθαρές κβαντικές καταστάσεις. Και τούτο επειδή αυτά τα αντικείμενα υπόκεινται σε αναρίθμητες τυχαίες αλληλεπιδράσεις και επιδράσεις, τόσο εσωτερικές όσο και εξωτερικές. Εν ολίγοις, δεν είναι αδύνατο να υπάρξει μια «μισονεκρή-μισοζωντανή» γάτα: είναι απλώς εξαιρετικά απίθανο —και σχεδόν αδύνατο να ανιχνευθεί. Υπάρχει και ένας εναλλακτικός τρόπος για να συλλάβουμε αυτή την κατάσταση μπορούμε να πούμε ότι η συνεχής αλληλεπιδραση των ατόμων και των ηλεκτρονίων της γάτας ισοδυναμεί με μια διαρκή «αυτομέτρηση» της κβαντικής κατάστασης. Δεν είναι η παρατήρηση η η ανίχνευση αλλά η ακατάπαυτη αλληλεπιδραση όλων των κβαντικών καταστάσεων σε μια γάτα που παρεμποδίζει κάθε ξεχωριστή κατάσταση να παραμείνει σταθερή. Έτσι, οι άνθρωποι ή οι γάτες θα βρεθούν αναπόφευκτα σε μια παρατηρήσιμη κλασική κατάσταση —έστω και αν η υποκείμενη κβαντική κατάσταση της γάτας μεταβάλλεται ακατάπαυτα και είναι ολωσιδόλου απρόβλεπτη. Με άλλα λόγια, μπορεί να θεωρείται βέβαιο ότι καθετί μεγάλο θα φαίνεται, σχεδόν πάντα, ως κλασικό και όχι ως κβαντικό αντικείμενο. Ακριβώς σύμφωνα με τους κανόνες που θέσαν οι δόκτορ Bohr!

**Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΤΕΛΟΣ
ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ**

Η νεογέννητη μη ευκλείδεια γεωμετρία

Από το βιβλίο Γεωμετρική έρευνα της θεωρίας των παραλλήλων

N.I. Lobachevsky

ΣΕ ΤΟΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΜΕ το πρώτο μέρος του διάσημου έργου του N.I. Lobachevsky, Geometric Research on the Theory of Parallels (Γεωμετρική έρευνα της θεωρίας των παραλλήλων), το οποίο περιλαμβάνει μια στοιχειώδη παρουσίαση των θεμελίων της μη ευκλείδειας γεωμετρίας. Το έργο εκδόθηκε το 1840 στο Βερολίνο με τη μορφή ενός μικρού βιβλίου. Από αυτό γνώρισαν τις ιδέες του Lobachevsky πολλοί ευρωπαίοι μαθηματικοί. Για παράδειγμα, ο εξέχων γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss (1777-1855) είχε δύο αντίγραφα του βιβλίου (το ένα από τα οποία του το είχε στείλει πιθανότατα ο ίδιος ο Lobachevsky). Αργότερα, εμφανίστηκαν γαλλικές και αγγλικές μεταφράσεις της γερμανικής έκδοσης.

Το βιβλίο μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη. Το πρώτο αρχίζει με ένα σύντομο κατάλογο προτάσεων που είναι ανεξάρτητες από το αίτημα των παραλλήλων. Ο κατάλογος δεν εξαντλεί όλες τις αχετικές προτάσεις, αλλά περιλαμβάνει μόνο αυτές που χρειάζονται στη συνέχεια.

Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται πέντε θεωρήματα που διαμορφώνουν τα θεμέλια της θεωρίας του Lobachevsky για τις παραλλήλους. Επίσης, διατυπώνονται δύο υποθέσεις: Η μία από αυτές οδηγεί στην ευκλείδεια γεωμετρία (τη συνήθη

γεωμετρία σύμφωνα με την ορολογία του Lobachevsky) και η άλλη σε μία νέα γεωμετρία, την οποία ο Lobachevsky ονομάζει φανταστική. Στο πρώτο μέρος εισάγεται η έννοια της γωνίας παραλληλίας και η αντιστοιχη συνάρτηση $\Pi(x)$, ενώ αναλύεται η εξάρτηση του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου από το αίτημα των παραλλήλων.

Στο δεύτερο μέρος εισάγονται οι έννοιες της συνοριακής ευθείας και συνοριακής επιφάνειας και αποδεικνύεται ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο η γεωμετρία της συνοριακής επιφάνειας συμπίπτει με την ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου.

Στο τρίτο μέρος εξετάζεται η μη ευκλείδεια τριγωνομετρία και αποδεικνύεται η βασική εξίσωση

$$\text{εφ } \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x/k}.$$

Κατά την παρουσίαση του πρώτου μέρους του Geometric research που ακολουθεί έχουμε χωρίσει, για ευκολία, το κείμενο σε κεφάλαια, ενώ από τις προαναφερθείσες εισαγωγικές προτάσεις παραλείψαμε όσες δεν χρησιμοποιούνται στο πρώτο μέρος. Επίσης, οι προτάσεις 16-25 έχουν μετονομαστεί σε θεωρήματα 1-10.

Εισαγωγή

Στη γεωμετρία έχω ανακαλύψει συγκεκριμένες ατέλειες οι οποίες,

πιστεύω, είναι η αιτία που αυτή επιστήμη, με εξαιρέση τη μετάβοση στη χρήση των αναλυτικών μεθόδων, δεν καταφέρει να προχωρήσει πέρα από την κατάσταση στην οποίας πήνε παρέδωσε ο Ευκλείδης.

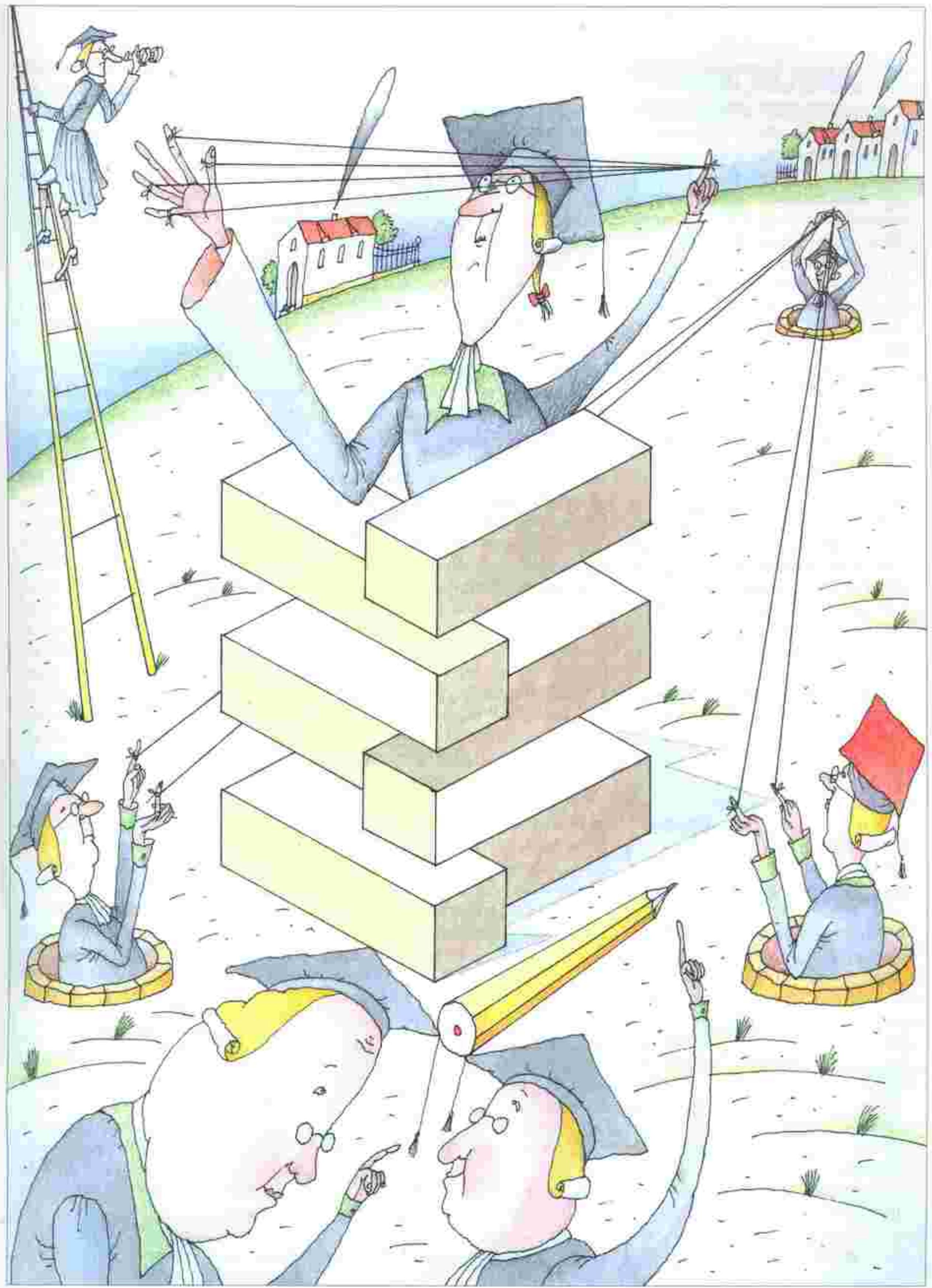
Για να εξετάσω μερικές από απότις τις ατέλειες, θα θεωρήσω πρώτα σαφειρές στις θεμελιώδεις έννοιες των γεωμετρικών μεγεθών, στο τρόπους και τις μεθόδους αναπροστασής της μέτρησης αυτών των μεγεθών και, τέλος, το τεράστιο χαρακτηριστικό που υπάρχει στη θεωρία των παραλλήλων, το οποίο παραμένει αγερωτό παρ' όλες τις προσπάθειες μαθηματικών.

Για να μην κουράσω τον αναγνώστη με πλήθος θεωρημάτων οι αποδεικνύονται εύκολα, προτάσω στη συνέχεια μόνο αυτά που είναι απαραίτητα για ότι ακολουθεί.

1. Μια ευθεία ταιριάζει με τον αυτό της σε κάθε θέση. Με αυτό νοώ ότι μια ευθεία γραμμή, και την περιστροφή της επιφάνειας στην περιέχει, δεν αλλάζει θέση: διέρχεται από δύο ακίνητα σημεία της επιφάνειας. Με άλλα λόγια, περιστρέψουμε την επιφάνεια στην περιέχει γύρω από δύο σημεία της ευθείας, η ευθεία δεν κινείται.

2. Δύο ευθείες δεν μπορούν τέρνονται σε δύο σημεία.

3. Μια ευθεία που επεκτείνεται παρκώς και προς τις δύο διευθύνσεις ξεπερνά κάθε φράγμα, και το



αυτό τον τρόπο διαιρεί ένα φραγμένο επίπεδο σε δύο τμήματα.

4. Δύο ευθείες κάθετες σε μία τρίτη δεν τέμνονται ποτέ, δοο και αν τις προσκτείνουμε.

5. Μια ευθεία τέμνει πάντοτε μιαν άλλη ευθεία αν μεταβαίνει από τη μία πλευρά της στην άλλη. Με άλλα λόγια, μια ευθεία πρέπει να τέμνει μιαν άλλη αν περιέχει σημεία που βρίσκονται στις δύο διαφορετικές πλευρές της άλλης ευθείας.

6. Οι κατά κορυφήν γωνίες, οι πλευρές των οποίων είναι προσκτάσεις των πλευρών της άλλης, είναι ίσες. Αυτό ισχύει για επίπεδες ευθύγραμμες γωνίες καθώς και για διεδρες γωνίες.

7. Δύο ευθείες δεν μπορεί να τέμνονται αν μία τρίτη τις τέμνει υπό την ίδια γωνία.

8. Σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο, ίσες πλευρές κείναι απέναντι ίσων γωνιών και ίσες γωνίες κείναι απέναντι ίσων πλευρών.

9. Σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά κείται απέναντι από μεγαλύτερη γωνία. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη και από τις δύο άλλες πλευρές, και οι δύο προσκείρενες σε αυτή γωνίες είναι οξείες.

10. Τα ευθύγραμμα τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες ή δύο πλευρές και την γωνία που κείται απέναντι της μεγαλύτερης πλευράς ίσες ή τρεις πλευρές ίσες.

11. Μια ευθεία που σχηματίζει ορθές γωνίες με δύο άλλες οι οποίες δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο με αυτήν είναι κάθετη προς όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο τομής των δύο άλλων ευθειών και ανήκουν στο επίπεδό τους.

Παράλληλες ευθείες

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα υπόλοιπα θεωρήματα με τις εξηγήσεις και τις αποδείξεις τους.

Θεώρημα 1. Όλες οι ευθείες ενός επιπέδου που διέρχονται από ένα σημείο μπορούν να καταταχθούν, σε σχέση με μια δεδομένη ευθεία του ίδιου επιπέδου, σε δύο κλάσεις: αυτές που τέμνουν και αυτές που

δεν την τέμνουν. Οι συνοριακές ευθείες μεταξύ αυτών των κλάσεων ονομάζονται παράλληλες προς τη δεδομένη ευθεία.

Από το σημείο A (Σχήμα 1) φέρουμε την AD , κάθετη στην ευθεία BC . Στη συνέχεια, φέρουμε την AE , κάθετη στην AD . Για τις ευθείες που διέρχονται από το A και βρίσκονται στο εσωτερικό της ορθής γωνίας EAD έχουμε ότι είτε όλες θα τέμνουν την DC , όπως για παράδειγμα η AF , είτε θα υπάρχουν μερικές, όπως η κάθετη AE , που δεν θα τέμνουν την DC . Αφού δεν σίραστε βέβαιοι αν η κάθετη AE είναι η μόνη ευθεία που δεν τέμνει την DC , θα υποθέσουμε ότι μπορεί να υπάρχει και άλλη, για παράδειγμα η AG , που ανεξάρτητα από το πόσο θα την προσκτείνουμε δεν τέμνει την DC . Όταν μεταβαίνουμε από τις τέμνουσες ευθείες, όπως η AF , στις μη τέμνουσες, όπως η AG , πρέπει να συναντήσουμε μια ευθεία AH παράλληλη προς την DC , μια συνοριακή ευθεία για την οποία ισχύει ότι όλες οι ευθείες AG που βρίσκονται στη μία πλευρά της δεν τέμνουν την DC και όλες τις ευθείες AF που βρίσκονται στην άλλη της πλευρά τέμνουν την DC .

Η γωνία HAD μεταξύ της παράλληλης HA και της κάθετης AD ονομάζεται γωνία παραλληλίας και θα τη συμβολίζουμε ως $\Pi(p)$ αν $AD = p$. Αν η $\Pi(p)$ είναι ορθή, η προέκταση AE' της κάθετης AE θα είναι παράλληλη προς την προέκταση DB της DC . Εππλέον, αναφορικά με τις τέσσερις ορθές γωνίες που σχηματί-

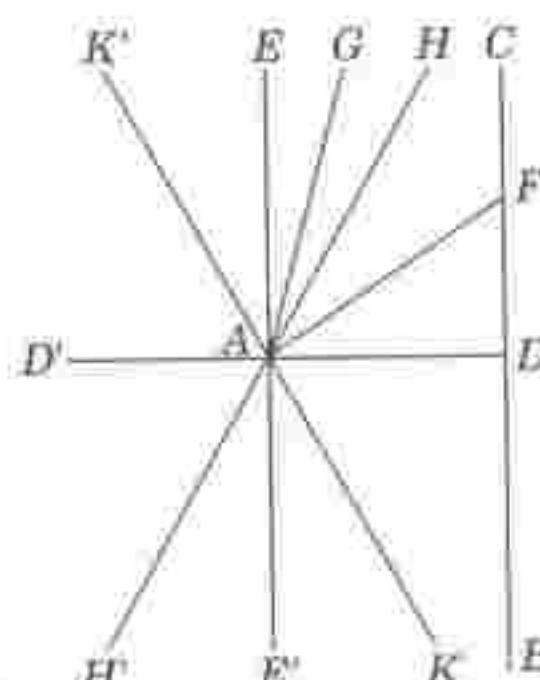
ζονται στο σημείο A από τις κάθετες AE και AD και τις προεκτάσεις τους AE' και AD' , επομένως ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο A , είτε η ίδια ή τουλάχιστον η προέκτασή της, ανήκει σε μία από τις δύο ορθές γωνίες που βρίσκονται εγγύτερα στην BC και επομένως, εκτός από την παράλληλη EE' , διλέγει οι άλλες ευθείες, προκειμένου να προέκτασθούν αρκετά, πρέπει να τέμνουν την ευθεία BC .

Αν $\Pi(p) < (1/2)\pi$, τότε από την άλλη πλευρά της AD θα υπάρχει μια ευθεία AK επίσης παράλληλη προς την προέκταση DB της ευθείας D που θα σχηματίζει την ίδια γωνία $DAK = \Pi(p)$ και, επομένως, αν ισχύει αυτή η υπόθεση, πρέπει να ξεχωρίσουμε δύο πλευρές παραλλαγίας.

Όλες οι άλλες ευθείες ή οι προεκτάσεις τους που βρίσκονται εντός των δύο εγγύτερων προς την BC θών γωνιών θα ανήκουν στο σύνολο των τέμνουσών ευθειών αν όποιον κοντά εντός της γωνίας $HAH' = 2\Pi(p)$ που σχηματίζουν οι παραλλαγίες. Αν πάλι βρίσκονται στην άλλη πλευρά των παράλληλων AH και AK , δηλαδή στο εσωτερικό των γωνιών $EAH = (1/2)\pi - \Pi(p)$ και $EAK = (1/2)\pi - \Pi(p)$ που σχηματίζουν παράλληλες και η EE' , η κάθετη στην AD , θα ανήκουν στο σύνολο μη τέμνουσών ευθειών. Από την άλλη πλευρά της κάθετης E οι προεκτάσεις AH' και AK' των παράλληλων AH και AK θα είναι επίσης παράλληλες προς την BC υπόλοιπες ευθείες, αν περιέχουν στη γωνία $K'AH'$, ανήκουν στις μη τέμνουσες, ενώ αν περιέχουν στη γωνία KAH' , ανήκουν στις μη τέμνουσες.

Σύμφωνα με αυτά, αν ισχύει υπόθεση $\Pi(p) = (1/2)\pi$, οι ευθείες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες, αλλά αν υποθέσουμε ότι $\Pi(p) < (1/2)\pi$, τότε υπάρχει δύο παράλληλες, μία σε κάθε πλευρά. Εππλέον, οι υπόλοιπες ευθείες χωρίζονται σε τέμνουσες και μη τέμνουσες.

Και για τις δύο υποθέσεις, χαρακτηριστικό της παραλληλίας είναι ότι η ευθεία γίνεται τέμνουσα από



Σχήμα 1

μη και με ελάχιστη απόκλιση προς την πλευρά που βρίσκεται η παράλληλη. Έτοι, αν η AH είναι παράλληλη προς την DC , κάθε ευθεία AF τέμνει την DC , όσο μικρή και αν είναι η γωνία HAF .

Θεώρημα 2. Μια ευθεία διαπρεπει το χαρακτηριστικό της παραλληλίας σε όλα τα σημεία της.

Δίνεται ότι η AB (Σχήμα 2) είναι παράλληλη προς τη CD και η AC κάθετη στη CD . Θα θεωρήσουμε δύο τυχαία σημεία, το ένα στην AB και το δεύτερο στην προέκτασή της πέρα από την κάθετη.

Εστω ότι το σημείο E βρίσκεται προς εκείνη την πλευρά της κάθετης στην οποία θεωρούμε ότι η AB είναι παράλληλη προς τη CD . Από το σημείο E φέρουμε την EK κάθετη επί την CD , και την EF η οποία περιέχεται στη γωνία BEC .

Συνδέουμε τα σημεία A και F με μια ευθεία γραμμή, η προέκταση της οποίας (λόγω του Θεώρηματος 1) πρέπει να τέμνει την CD σε κάποιο σημείο G . Σχηματίζεται επομένως ένα τρίγωνο ACG , στο οποίο εισέρχεται η ευθεία EF . Η EF , από την κατασκευή της, δεν μπορεί να τέμνει την AG ή την EK δεύτερη φορά (Πρόταση 2), επομένως πρέπει να τέμνει την CD σε κάποιο σημείο H (Πρόταση 3).

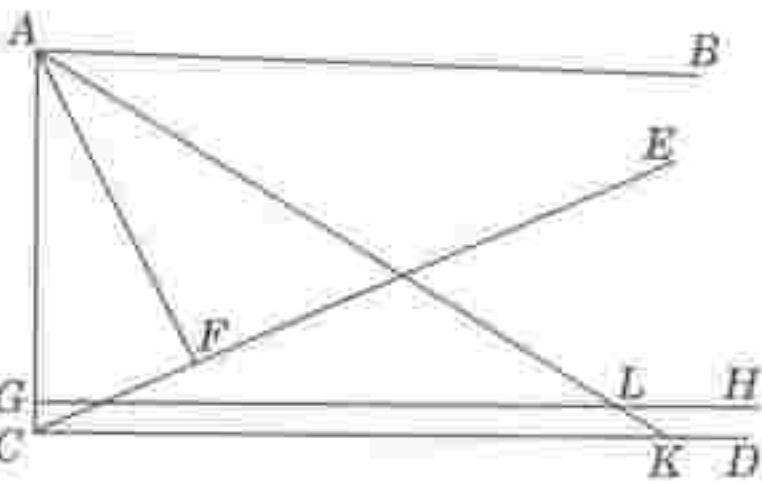
Εστω τώρα E' ένα σημείο στην προέκταση της CD . Φέρουμε την ευθεία $E'F'$, καθιστώντας τη γωνία $AE'F'$ όσο μικρή ώστε η $E'F'$ να τέμνει την AC στο σημείο F' . Στη συνέχεια, σχηματίζοντας την ίδια γωνία με την AB , φέρουμε την ευθεία AF' από το A , η προέκταση της οποίας τέμνει την CD στο G (Θεώρημα 1). Παίρνουμε, επομένως, το τρίγωνο AGC , στο οποίο εισέρχεται η

προέκταση της ευθείας EF' . Η ευθεία αυτή δεν μπορεί να τέμνει την AC δεύτερη φορά. Επίσης δεν μπορεί να τέμνει την AG , διότι η γωνία $BAG = BE'G'$ (Πρόταση 7) και, επομένως, πρέπει να τέμνει τη CD σε ένα σημείο G' .

Αρα, από οποιαδήποτε σημεία E και E' και αν ξεκινούν οι ευθείες EF και $E'F'$ και όσο ελάχιστα και αν αποκλίνουν από την ευθεία AB , θα τέμνουν πάντα την CD , προς την οποία η AB είναι παράλληλη.

Θεώρημα 3. Δύο ευθείες είναι πάντα αμοιβαία παράλληλες.

Εστω AC η κάθετη επί την CD , προς την οποία είναι παράλληλη η AB (Σχήμα 3). Αν φέρουμε από το C την ευθεία CE , σχηματίζοντας έτοι μια οξεία γωνία ECD με την CD , και αν φέρουμε την κάθετη AF από το A επί την CE , προκύπτει το ορθογώνιο τρίγωνο ACF , στο οποίο η AC , ως υποτείνουσα, είναι μεγαλύτερη από την πλευρά AF (Πρόταση 9).



Σχήμα 3

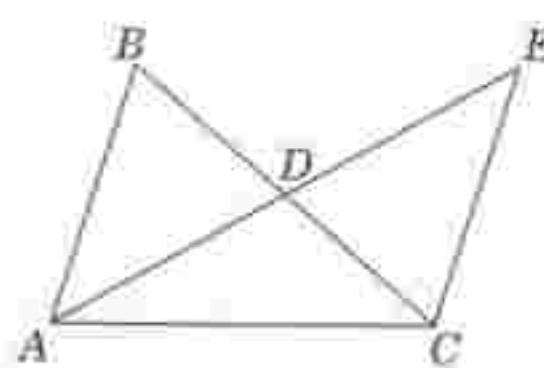
Στη συνέχεια λαμβάνουμε το τρίγωνο $AG = AF$ και ολισθαίνουμε το σχήμα $EFAAB$ έως ότου το AF συμπέσει με το AG , έτσι ώστε οι AB και FE να πάρουν τις θέσεις AK και GH και $\angle BAK = \angle FAC$. Άρα η AK πρέπει να τέμνει την ευθεία DC σε ένα σημείο K (Θεώρημα 1), και συνέπως σχηματίζεται ένα τρίγωνο AKC . Η κάθετη GH τέμνει την ευθεία AK σε ένα σημείο L (Πρόταση 3) και, επομένως, καθορίζει την απόσταση AL μεταξύ του σημείου τομής των ευθειών AB και CE από το σημείο A .

Επειτα ότι η CE θα τέμνει πάντα την AB όσο μικρή και αν είναι η γωνία ECD . Συνεπώς, η CD είναι παράλληλη προς την AB (Θεώρημα 1).

Το άθροισμα των γωνιών ευθύγραμμου τριγώνου

Θεώρημα 4. Το άθροισμα των τριών γωνιών ενός ευθύγραμμου τριγώνου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές γωνίες.

Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABC (Σχήμα 4) ισούτω με $\pi + a$. Αν οι πλευρές του τριγώνου δεν είναι ίσες, επλέγουμε τη μικρότερη πλευρά BC , θεωρούμε το μέσο της D , φέρουμε την ευθεία AD από το A έως το D , και την προεκτείνουμε κατά

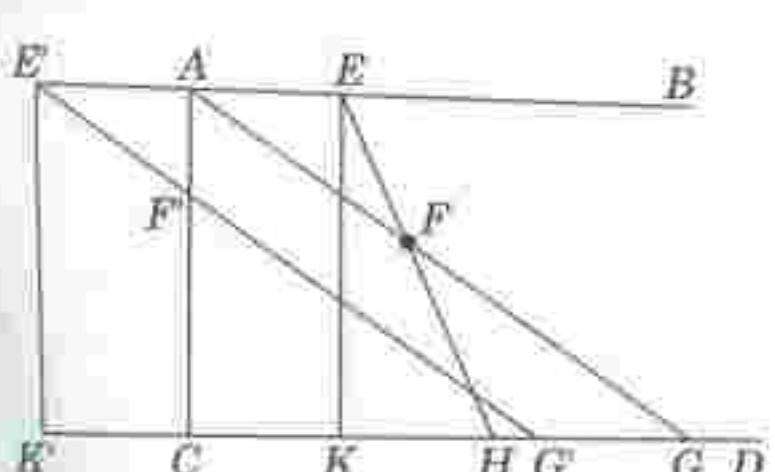


Σχήμα 4

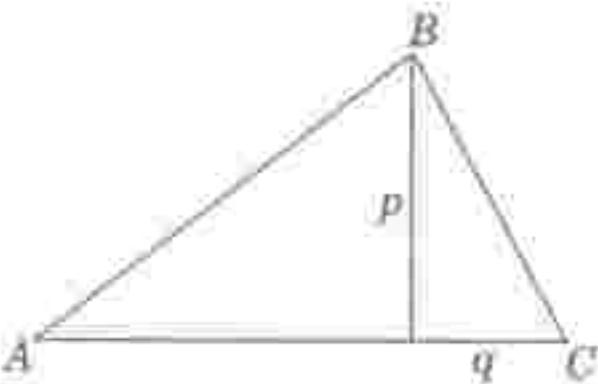
τρίμα DE ίσο με το AD . Στη συνέχεια ενώνουμε το σημείο E και το σημείο C με την ευθεία EC . Στα ίσα τρίγωνα ADB και CDE , έχουμε $\angle ABD = \angle DCE$ και $\angle BAD = \angle DEC$ (Πρότασεις 6 και 10). Επειτα ότι το άθροισμα των τριών γωνιών του τριγώνου ACE είναι ίσο με $\pi + a$. Επιπλέον, η μικρότερη γωνία BAC (Πρόταση 9) του τριγώνου ABC θα περνάρει στο νέο τρίγωνο ACE χωρίζεται στις $\angle EAC$ και $\angle AEC$. Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία της διαίρεσης στο μέσον της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από τη μικρότερη γωνία, θα καταλήξουμε τελικά σε ένα τρίγωνο με άθροισμα γωνιών $\pi + a$, το οποίο όμως θα έχει δύο γωνίες με απόλυτο μέγεθος μικρότερο του $(1/2)a$. Αφού όμως η τρίτη γωνία δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του π , το a είναι είτε μηδέν είτε αρνητικό.

Θεώρημα 5. Αν υπάρχει ένα ευθύγραμμο τρίγωνο με άθροισμα των τριών γωνιών του ίσο με δύο ορθές, τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο τρίγωνο.

Αν υπάρχει ένα ευθύγραμμο τρίγωνο ABC (Σχήμα 5) το άθροισμα των γωνιών του οποίου είναι π , τό-



Σχήμα 2

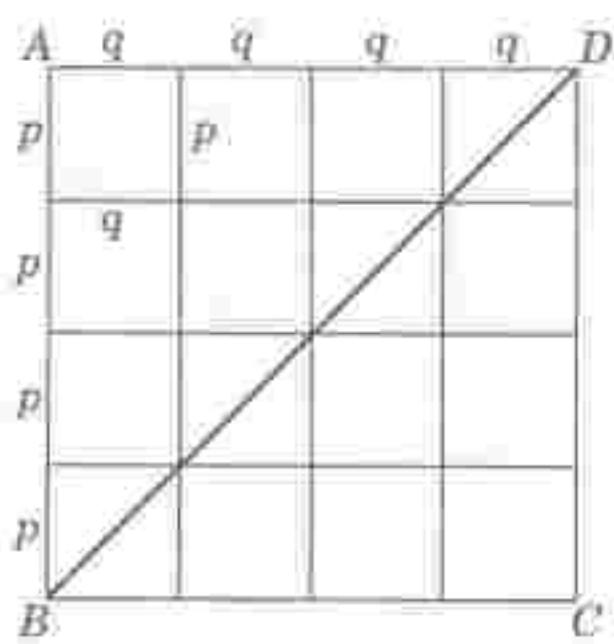


Σχήμα 5

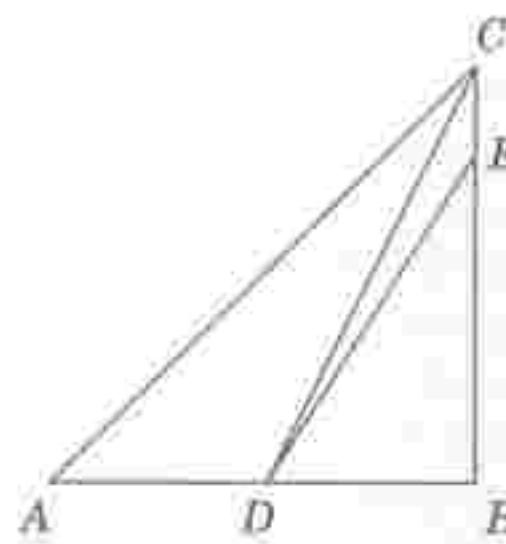
τε τουλάγιστον δύο από τις γωνίες του, A και C , είναι οξείες. Φέρουμε από την κορυφή της τρίτης γωνίας, B , την κάθετη p προς την απέναντι πλευρά AC . Τότε, το τρίγωνο διαιρείται σε δύο ορθογώνια τρίγωνα, σε καθένα από τα οποία το άθροισμα των τριών γωνιών είναι επίσης π , διότι σε κανένα από τα δύο δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του π , ενώ ο συνδυασμός τους δίνει τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του δεν είναι μικρότερο του π .

Επομένως, προκύπτει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές p και q , και από αυτό μπορούμε να πάρουμε ένα τετράπλευρο με ίσες απέναντι πλευρές και κάθετες μεταξύ τους τις παρακείμενες πλευρές p και q (Σχήμα 6).

Εάν επαναλάβουμε την κατασκευή αυτού του τετραπλεύρου, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα άλλο με πλευρές p και q , και τελικά ένα τετράπλευρο $ABCD$ οι πλευρές του οποίου σχηματίζουν μεταξύ τους ορθές γωνίες και είναι $AB = pr$, $AD = mq$, $DC = pr$ και $BC = mq$, όπου τα m και n μπορεί να είναι οποιοιδήποτε φυσικοί αριθμοί. Ένα τέτοιο τετράπλευρο διαιρείται από τη διαγώνιο DB στα ίσα ορθογώνια τρίγωνα BAD και BCD , σε καθένα από τα οποία το άθροισμα



Σχήμα 6



Σχήμα 7

των τριών γωνιών είναι π .

Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε αριθμούς m και n τόσο μεγάλους ώστε το ορθογώνιο τρίγωνο ABC (Σχήμα 7), με κάθετες πλευρές $AB = pr$ και $BC = mq$, να περιέχει ένα άλλο δεδομένο (ορθογώνιο) τρίγωνο BDE , με το οποίο έχει κοινή την ορθή γωνία. Αν φέρουμε την ευθεία DC σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα, από τα οποία κάθε δύο διαδοχικά έχουν μία κοινή πλευρά.

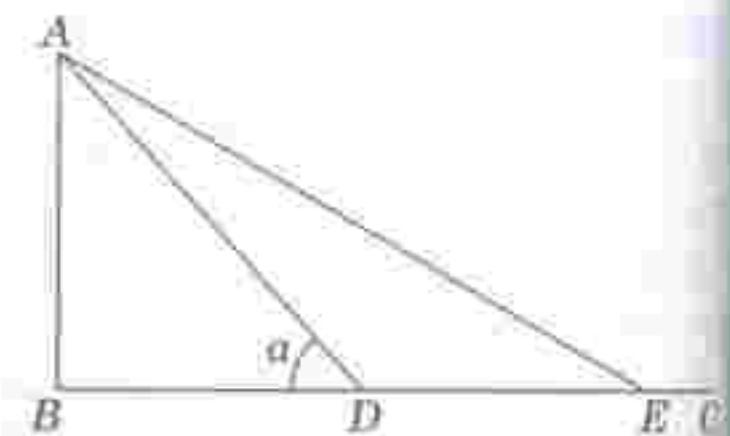
Το τρίγωνο ABC σχηματίζεται από την ένωση των δύο τριγώνων ACD και DCB , και σε κανένα από αυτά τα δύο τρίγωνα το άθροισμα των γωνιών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του π . Επομένως, το άθροισμα των γωνιών πρέπει να ισούται με π , για να μπορεί να ισούται με π το άθροισμα των γωνιών στο σύνθετο τρίγωνο.

Ομοίως, το τρίγωνο BDC αποτελείται από τα δύο τρίγωνα DEC και DBE . Επομένως, το άθροισμα των τριών γωνιών του DBE πρέπει να ισούται με π , και αυτό πρέπει να αληθεύει γενικότερα, αφού οποιοδήποτε τρίγωνο μπορεί να χωριστεί σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.

Επειών ότι μόνο δύο υποθέσεις είναι επιτρεπτές: Είτε το άθροισμα των τριών γωνιών σε κάθε τρίγωνο ισούται με π είτε είναι μικρότερο του π .

Θεώρημα 6. Από ένα δεδομένο σημείο μπορούμε πάντα να φέρουμε ευθεία που θα σχηματίζει γωνία οσοδήποτε μικρή επιθυμούρα με μια δεδομένη ευθεία.

Από το δεδομένο σημείο A (Σχήμα 8) φέρουμε την κάθετη AB στη δεδομένη ευθεία BC . Επιλέγουμε στη συνέχεια ένα τυχαίο σημείο D στην



Σχήμα 8

BC , φέρουμε την ευθεία AD , θέων με $DE = AD$ καὶ φέρουμε την AE .

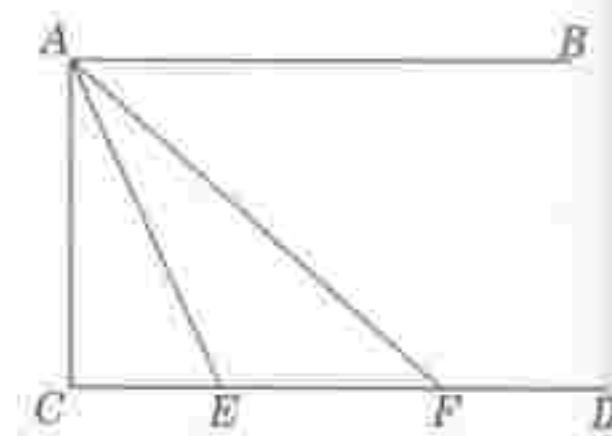
Εστιού ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD η γωνία $ADB = a$. Τότε στο ισοσκελές τρίγωνο ADE η γωνία AED πρέπει να είναι μικρότερη ίση του $(1/2)a$ (Πρόταση 8 και Θέμα 5). Αν συνεχίσουμε με τον διο τρόπο, θα βρούμε τελικά μια γωνία AEB μικρότερη από οποιαδήποτε δεδομένη γωνία.

Θεώρημα 7. Εάν δύο κάθετες στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες μεταξύ τους, τότε το άθροισμα των γωνιών ενδέ ευθύγραμμο τριγώνου ισούται με δύο ορθούς γωνίες.

Εστιού δύο ευθείες AB και CD (Σχήμα 9) παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες στην AC . Φέρουμε στο A τις ευθείες AE και AF προστιμεία E και F τα οποία θεωρούμε επί της ευθείας CD σε τυχαίες αστάσεις από το C , έτοι ώστε $FE \parallel EC$.

Ας υποθέσουμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ACE το άθροισμα των γωνιών ισούται με $\pi - a$ και στο ορθογώνιο AEF ισούται με $\pi - b$. Τότε άθροισμα των γωνιών στο τρίγωνο ACF πρέπει να ισούται με $\pi - a - b$, όπου τα a και b δεν μπορεί να είναι αργυρικά.

Εστιού τώρα ότι $\angle BAF = \theta$



Σχήμα 9

$\angle AFC = \phi$, οπότε $\alpha + \beta = \theta - \phi$. Αν αρχίσουμε να περιστρέψουμε την ευθεία AF απομακρύνοντάς την από την κάθετη AC , μπορούμε να κάνουμε τη γωνία θ μεταξύ της AF και της παράλληλης AB δύο μικρή θέλουμε, όπως επίσης μπορούμε να ελαττώσουμε δύο θέλουμε και τη γωνία ϕ . Επομένως, οι μοναδικές δυνατές τιμές για τις γωνίες α και β είναι $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Επειτα, επομένως, ότι είτε το άθροιστρα των τριών γωνιών κάθε ευθύγραμμου τριγώνου ισούται με π και η γωνία παραλληλίας $P(r)$ ισούται με $\pi/2$ για κάθε ευθεία r , είτε το άθροιστρα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο του π και $P(r) < \pi/2$.

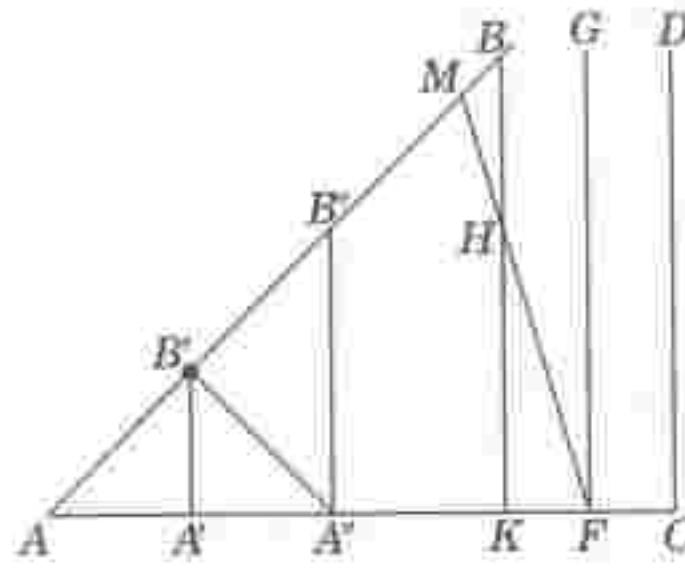
Η πρώτη υπόθεση αποτελεί το θεμέλιο της συνήθους γεωμετρίας και επιπλέον τριγωνομετρίας.

Η δεύτερη υπόθεση μπορεί να γίνει επίσης αποδεκτή, χωρίς να οδηγήσει σε αντιφάσεις στα αποτελέσματα, και θεμελιώνει μια νέα γεωμετρική επιστήμη, στην οποία έχω δώσει το όνομα φαντασική γεωμετρία και την οποία σκοπεύω να αναπτύξω εδώ μέχρι το σημείο της διατύπωσης της ισότητας μεταξύ των πλευρών και των γωνιών των ευθύγραμμων και σφαιρικών τριγώνων.

Ανάλυση της γωνίας παραλληλίας

Θεώρημα 8. Για κάθε δεδομένη γωνία α υπάρχει μια ευθεία r τέτοια ώστε $P(r) = \alpha$.

Έστω AB και AC (Σχήμα 10) δύο ευθείες που σχηματίζουν την οξεία γωνία α στο σημείο τομής των A . Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο B' επί της AB και από αυτό το σημείο φέρουμε την $B'A'$ κάθετη στην AC . Θεωρούμε το τμήμα $A'A'' = AA'$, και στη συνέχεια φέρουμε στο A'' την κάθετη $A''B''$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, έως ότου κατασκευάσουμε μια κάθετη CD που δεν θα τέμνει την AB . Αυτό πρέπει να συμβεί διότι, αν στο τρίγωνο $AA'B'$ το άθροιστρα των τριών γωνιών είναι $\pi - \beta$, τότε στο τρίγωνο $AB'A''$ ισούται με $\pi - 2\beta$, στο τρίγωνο $AA''B''$ είναι μι-



Σχήμα 10

κρότερο του $\pi - 2\beta$ (Θεώρημα 5), και ούτω καθεξής, οπότε τελικά γίνεται αρυθμικό και, επομένως, καθισταται φανερή η αδυναμία κατασκευής του τριγώνου.

Η κάθετη CD μπορεί να είναι αυτή για την οποία ισχύει ότι κάθε άλλη κάθετη προς την AC σε σημείο που βρίσκεται πλησιέστερα στο A τέμνει την AB . Όμως, ακόμα και αν η CD δεν είναι αυτή η κάθετη, θα βρούμε μια τέτοια καθώς περνάμε από αυτές που τέρνουν την AB σε αυτές που δεν τέρνουν.

Φέρουμε τώρα από το σημείο F μια ευθεία FH που σχηματίζει με την FG , προς την πλευρά που βρίσκεται το σημείο A , την οξεία γωνία HFG . Από ένα τυχαίο σημείο H της ευθείας FH φέρουμε στην AC την κάθετη HK , η προέκταση της οποίας πρέπει να τέμνει την AB σε ένα σημείο B και, επομένως, σχηματίζει ένα τρίγωνο AKB μέσα στο οποίο εισέρχεται η προέκταση της FH , και συνεπώς τέμνει την υποτείνουσα AB σε κάποιο σημείο M . Αφού η γωνία GFH είναι τυχαία, μπορούμε να τη θεωρήσουμε δύο μικρή επιθυμούμες και, επομένως, η FG είναι παράλληλη της AB και $AF = p$ (Θεώρημα 1 και 3).

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι όταν το p μειώνεται, η γωνία α αυξάνεται, και για $p = 0$ λαμβάνει την τιμή $\pi/2$. Οταν αυξάνεται το p , η γωνία α μειώνεται, και για $p = \infty$ προσεγγίζει το μηδέν.

Αφού έχουμε την ελευθερία να επιλέξουμε ποια γωνία θα εννοούμε με το σύμβολο $P(r)$ όταν η ευθεία r εκφράζεται με αρυθμικό αριθμό, θα υποθέσουμε ότι $P(r) + P(-r) = \pi$, εξίσωση που ισχύει για όλες τις

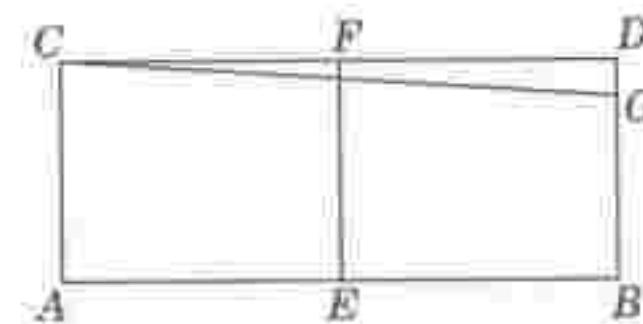
τιμές του p , θετικές και αρνητικές, καθώς και για $p = 0$.

Σχετική θέση παραλληλών ευθειών

Θεώρημα 9. Ωστε επεκτείνουμε τις παράλληλες ευθείες προς την πλευρά της παραλληλίας τους τόσο περισσότερο προσεγγίζουν η μία την άλλη.

Αν κατασκευάσουμε δύο κάθετες $AC = BD$ στην ευθεία AB (Σχήμα 11) και ενώσουμε τα άκρα τους με μια ευθεία, τότε το τετράπλευρο $CABD$ έχει δύο ορθές γωνίες στα A και B και δύο οξείες γωνίες στα C και D (Θεώρημα 7), οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους, όπως εύκολα διαπιστώνουμε αν φανταστούμε ότι τοποθετούμε το τετράπλευρο πάνω στον εαυτό του έτοις ώστε η BD να συμπέσει με την AC και η AC με την BD .

Στη συνέχεια χωρίζουμε στη μέση την AB και υψώνουμε στο μέσον E την ευθεία EF , κάθετη επί την AB . Αυτή η ευθεία πρέπει να είναι επίσης κάθετη στη CD , διότι αν τοποθετήσουμε τα τετράπλευρα $CAEF$



Σχήμα 11

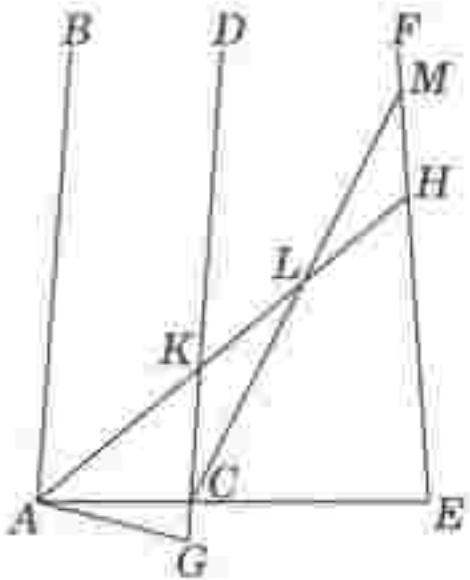
και $FDBE$ το ένα πάνω στο άλλο, έτοις ώστε η ευθεία EF να διατηρήσει τη θέση της, συμπίπτουν. Επομένως, η CD δεν μπορεί να είναι παράλληλη προς την AB , και η παράλληλη από το σημείο C προς την AB , η CG , πρέπει να κλίνει προς την AB (Θεώρημα 1) και η τομή της με την κάθετη BD να ορίζει ένα τμήμα $BG < CA$. Αφού το C είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας CG , έπειτα ότι η CG πλησιάζει την AB δύο περισσότερο την προέκτεινουμε.

Θεώρημα 10. Δύο ευθείες παράλληλες προς μια τρίτη είναι επίσης παράλληλες μεταξύ τους.

Θα θεωρήσουμε πρώτα ότι οι τρεις

ευθείες AB , CD και EF (Σχήμα 12) ανήκουν σε ένα επίπεδο. Αν δύο διαδοχικές από αυτές, οι AB και CD , είναι παράλληλες προς την εξωτερική EF , τότε οι AB και CD είναι παράλληλες μεταξύ τους. Για να το αποδείξουμε αυτό, φέρουμε από ένα σημείο A της μιας εξωτερικής ευθείας AB προς την άλλη εξωτερική ευθεία FE την κάθετη AE , η οποία τέμνει τη μεσαία ευθεία CD σε κάποιο σημείο C (Πρόταση 3) αχηματίζοντας μια γωνία $DCE < \pi/2$ προς την πλευρά της EF , της παράλληλης της CD (Θεώρημα 7). Αν φέρουμε από το ίδιο σημείο A μια κάθετη AG προς την CD , θα βρίσκεται στο εσωτερικό της οξείας γωνίας ACG (Πρόταση 9). Οποιαδήποτε άλλη ευθεία AH που φέρουμε από το A στο εσωτερικό της γωνίας BAC πρέπει να τέμνει την EF , την παράλληλη της AB , σε κάποιο σημείο H , όσο μικρή κι αν είναι η γωνία BAH . Συνεπώς, η ευθεία CD τέμνει στο τρίγωνο AEH την ευθεία AH σε κάποιο σημείο K , αφού είναι αδύνατο να τέμνει την EF . Αν η ευθεία AH που φέρουμε από το σημείο A περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας CAG , τότε πρέπει να τέμνει την προέκταση της CD μεταξύ των σημείων C και G του τριγώνου CAG . Επομένως, οι AB και CD είναι παράλληλες (Θεώρημα 1 και 3).

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο εξωτερικές ευθείες AB και EF είναι παράλληλες προς τη μεσαία ευθεία CD , τότε κάθε ευθεία AK που φέρουμε από το σημείο A στο εσωτερικό της γωνίας BAE θα τέμνει τη CD σε κάποιο σημείο K , όσο μικρή κι αν είναι η γωνία BAK . Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο L στην προέκταση της



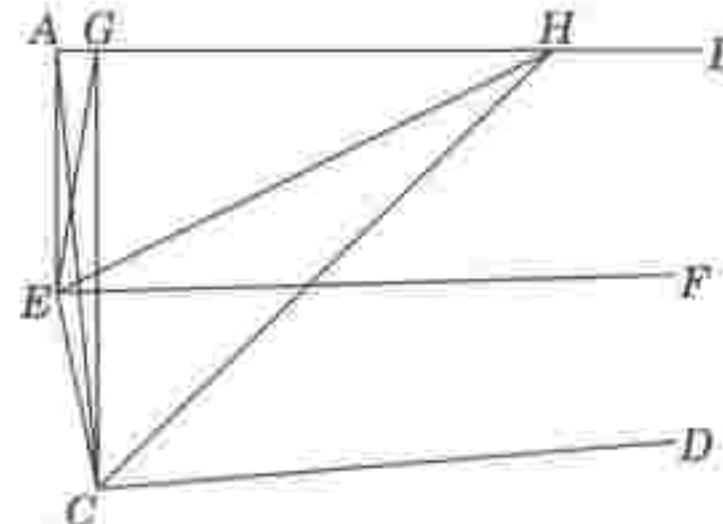
Σχήμα 12

AK και το ενώνουμε με το C μέσω της ευθείας CL , η οποία πρέπει να τέμνει την EF σε ένα σημείο M . Έτοιμη σχηματίζεται το τρίγωνο MCE . Η προέκταση της AL στο τρίγωνο MCE δεν μπορεί να τέμνει ούτε την AC ούτε τη CM για δεύτερη φορά. Επομένως, τέμνει την EF σε ένα σημείο H . Άρα, οι AB και EF είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Έστω τώρα ότι οι παράλληλες AB και CD (Σχήμα 13) ανήκουν σε δύο επίπεδα που τέμνονται κατά την ευθεία EF . Από ένα τυχαίο σημείο E της EF φέρουμε την κάθετη EA προς μία από τα δύο παραλλήλους (για παράδειγμα, προς την AB), και μετά από το A , το ίχνος της καθέτου EA , φέρουμε μια νέα κάθετη AC προς την άλλη παράλληλη CD . Στη συνέχεια, ενώνουμε τα άκρα E και C των δύο καθέτων με την ευθεία EC . Η γωνία BAC πρέπει να είναι οξεία (Θεώρημα 7). Συνεπώς, η κάθετη CG από το C προς την AB την τέμνει στο σημείο G , που βρίσκεται προς εκείνη την πλευρά της CA στην οποία θεωρούμε τις ευθείες AB και CD παράλληλες. Κάθε ευθεία EH (στο επίπεδο $FEAB$), όσο λίγο κι αν αποκλίνει από την EF , ανήκει, μαζί με την ευθεία EC , σε ένα επίπεδο που τέμνει το επίπεδο των δύο παραλλήλων AB και CD κατά μια ευθεία CH . Η τελευταία ευθεία τέμνει την AB στο ίδιο ακριβώς σημείο H που ανήκει και στα τρία επίπεδα από τα οποία διέρχεται η ευθεία EH . Επομένως, η EF είναι παράλληλη προς την AB .

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι οι EF και CD είναι παράλληλες.

Άρα, η υπόθεση ότι μια ευθεία EF



Σχήμα 13

είναι παράλληλη προς μία από δύο παραλλήλους, AB και CD , σοδιναμεί με το να θεωρήσουμε τη EF ως τοπή δύο επιπέδων που πρέχουν τις AB και CD . Συνεπώς δύο ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους αν είναι παράλληλες προπίτη, ακόμη και αν οι τρεις τοδεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

Το τελευταίο θεώρημα μπορούμε να διατυπωθεί ως εξής:

Τρία επίπεδα τέμνονται κατά συστήματα που είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους, με την προϋπόθεση ότι δύο από αυτές είναι παράλληλα

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ ΤΟ ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΘΕΙΟΥ ΛΑΒΕΡΤΟΥ



Russell Stannard
Ο Θείος Λάβερτος της ιστονού

Επιτραπέδωσε την παραπομπή της στην Ελλάδα

Russell Stannard

*Ο Θείος Λάβερτος
αάς απαντά*

100 1/2 επιστημονικές ερωτήσεις από παιδιά, με τις απαντήσεις των:

• «Απαντήστε εξαιρετικά σαφείς και φιλικές προς τα παιδιά...»
The Times

• «Αξέστε να διαβάσετε το βιβλίο παιδιά και για την τελευταία μισή ερώτηση...»
Sunday Telegraph

Ένα βιβλίο για τριψερούς αναγνώστες

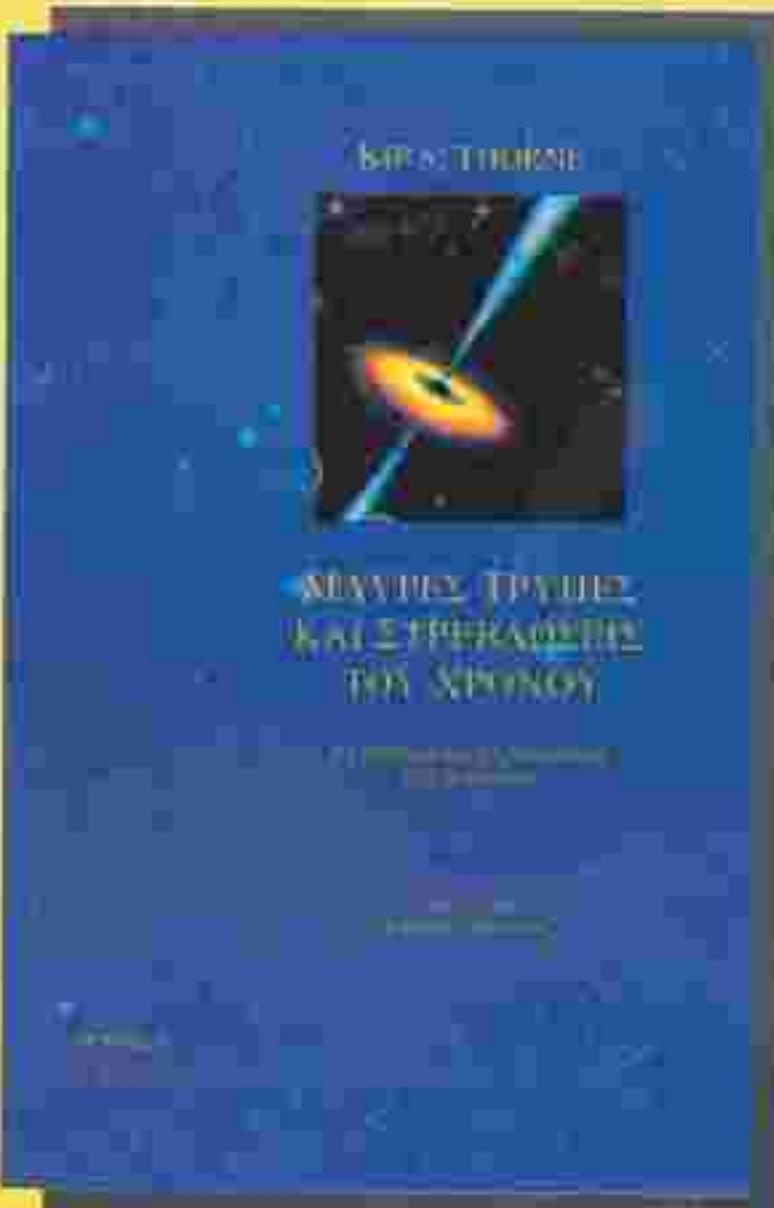
Σελ.: 202, Επι.: A/M, 16 × 25 εκ.
Πανόδια, 5.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Κάτοπτρο

Kip S. Thorne

ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΚΑΙ ΣΡΕΒΛΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Η προκλητική κληρονομιά του Αίνσταϊν



«Κανείς δεν έχει περιγράψει καλύτερα απ' ό,τι ο Κίρ στο βιβλίο – και, μάλιστα, με περισσότερη σαφήνεια, εγκυρότητα και απλότητα θέσεως – τις σημαντικότερες στοιχεία στην προσπάθεια των επιστημόνων να αποκρυπτογράφησουν την πνευματική κληρονομιά του Αίνσταϊν.»

—John Archibald Wheeler

«Μια παραστατική και κατανοητή περιγραφή της γενικής σχετικότητας και των επιδράσεων της στη μοναδική αστροφυσική και κοσμολογία, από έναν απ' τους κορυφαίους ειδικούς στο χώρο...»

—Roger Penrose

«Μοναδικό βιβλίο. Έτσι αριθμές θα έπρεπε να έδουν γραφτεί σάλια τα βιβλία που σχετίζονται με το ίδιο αντικείμενο... Συνδυάζει στοιχεία από την ιστορία της επιστήμης με παραστατικές και επιμελημένες επιστημονικές περιγραφές και επεξηγηματικά σχόλια. Τα ανέκδοτα στοιχεία που παραβέβαινε, ειδικότερα εκείνα που αφορούν τη σφραγική εποπτήμη, είναι εξαιρετικά διαφερούσια...»

—Carl Sagan

«Φωτίζει το επιστημονικό εγχείριμα όπως ελέγχυτα βιβλία του είδους του, ακολύνεντας από τις σελίδες του τη χώρα της ανακάλυψης...»

—Alan Lightman

«Θαυμάστα και αναλυτική περιγραφή της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και των μαύρων τρυπών, για ευφυείς αναγνώστες...»

—The Times Educational Supplement

«Το βιβλίο του Kip Thorne, εκτός από πλήρη επιστημονικών πληροφοριών, πιστεύουμε ότι στα γράμματα που έρχονται θα αποτελέσουν και πηγή έμπνευσης για πολλούς από τους αναγνώστες του.»

—Physics Today

«Το παρόν βιβλίο αποτελεί επικόπλιση ενός από τους πιο συναρπαστικούς κλάδους της φυσικής των 20ού αιώνα, γραμμένη αριστοτεχνικά, με τρόπο σαφή και κατανοητό, χωρίς περιττά και υπερβολικά στοιχεία...»

—Nature



Το βιβλίο από ότι το
δρείτε στο βιβλιοπωλείο
των Εκδόσεων Κάτοπτρο,
στη Στοά του βιβλίου
(Πανεπιστημίου και
Πειραιώς άγονο 5,
τηλ.: 3247785),

στο Internet
(www.katoptro.gr),
καθώς επίσης και σε δύο
τα καλά βιβλιοπωλεία.
Αν θέλετε μπορούμε να
σας το παριδρομήσουμε:
τα έσοδα αποστολής θα
επιβαρίσουν εμάς.

Γράψτε μαςή
τηλεφωνήστε μας
Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ιωάννην 10, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: 3643272, 3645008
fax: 3641864,
e-mail: katoptro@otenet.gr

Πρόλογος: Stephen Hawking

Τόμοι Α' και Β'

Από την εμφάνιση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, το 1915, έως σήμερα, οριούμενοι από τους λαμπρότερους επιστήμονες του 20ού αιώνα έχουν καταβάλει προσπάθειες να αποκρυπτογράφησουν τα μυστήρια που μας κληροδότησε η εν λόγω θεωρία. Η κληρονομιά αυτή έχει τόσο απρόσδοκης συνέπειες, ώστε ακόμη και ο ίδιος ο

Αίνσταϊν την αποκατήθηκε. Ποιο από τα παρακάτω αλλόκοτα αντικείμενα μπορεί πράγματι να υπάρχει στο σύμπαν μας;

• Οι μαύρες τρύπες, δύον μπορεί να εισέλθει στόχηστο, αλλα από δύον δεν μπορεί να εξέλθει τίποτε.

• Οι κοσμικές σκουληκότρυπες, που αποτελούν στρεβλώσεις του χώρου και συνδέουν δύο περιοχές του σύμπαντος.

• Οι ρωγμορονικές ανωμαλίες, στις οποίες ο μεν χρόνος παίνει να υπάρχει ο δε χώρος αντικαθίσταται από ένα είδος ιβρανικού αφρού.

• Τα βαρυτικά κύματα, τα οποία μεταφέρουν περιγραφές συγκριώσανταν μαύρων τρυπών πριν από διεκπεριμένα χρόνια.

• Οι μηχανές του χρόνου, με τις οποίες μπορεί κανείς να ταξιδέψει τόσο στο παρελθόν όσο και στο μέλλον.

Ο Kip Thorne (Καθηγητής στο Caltech) έχει βρεθεί στην καρδιά της αναζήτησης ασφαλών απαντήσεων για τα παραπάνω ερωτήματα. Σε αυτό το αριστοτερικά γραμμένο και εξαιρετικά ενημερωμένο βιβλίο, οδηγεί τους αναγνώστες στο μεγάλο ερώτημα: Ποιες αρχές κινούν τα σύμπαν μας και γιατί είναι αυτό που είναι;

Τόμος Α': 312 σελ., 25 x 16 εκ., Πανόδετες, 7.000 δρ.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Μόνο για συνδρομητές

Προνόμιο
έκπτωσης 30%

Μην αφήνετε κενά στη βιβλιοθήκη σας. Επιλέξτε τουλάχιστον δύο από τις διπλείς προσφορές και ταχυδρομήστε μας ή τηλεφωνήστε μας την παραγγελία σας. Θα παραδώσετε τα βιβλία ταχυδρομικά σε λιγότερο από 8 ημέρες. Τα έξοδα συσκευασίας και ταχυδρομικής αποστολής βαρύνουν τις εσός δώμας επιβαρύνουν τα έξοδα αντικαταβολής (περίπου 700 δρχ. ανά δέμα) και το ΦΠΑ (4% επί της προσφερόμενης τιμής).*

Η προσφορά δεν ισχύει:

- για δώρους δεν είναι συνδρομητές του Quapam (ακόμη κι αν είναι ανεγνώστες του)
- για ιδρύματα, οργανισμούς και βιβλιοθήκες (ακόμη κι αν είναι συνδρομητές)
- αν η παραγγελία σας γίνει μετά τις 31 Αυγούστου 1999.
- αν η συνδρομή σας έχει ήδη λήξει.

Οι παρακάτω τίτλοι θα ανανεώνονται σε κάθε τεύχος.

* Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνονται δικτές ποσιτικές κάρτες.



Francis Clegg
Μια εκπλακτική υπόθεση
Η επιστημονική αναζήτηση
της φωτός.
Σελ.: 441, 7.200 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 5.000 δρχ.



Georges & Connes
Μαθηματικά και εγκέφαλος
Δύο κορυφαίων επαστήμαντων συζητούν για τη νόση, τον εγκέφαλο, τα μαθηματικά και τη γραμματοκόπτρα.
Σελ.: 271, 5.700 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 4.000 δρχ.



Alan Lightman
Τα άντεμα του Αλματου
Πέρι της φύσης
του χρόνου
Σελ.: 158, 4.600 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 3.200 δρχ.



L. Gonick & M. Wheelis
Τα πάντα για τη γενετική
στη κόμικς
Σελ.: 256, 4.600 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 3.200 δρχ.



Paul Davies
Χέρος, ζρόνος, πράτητα
Έννοιες και μέθοδοι
της φύσης
Σελ.: 243, 5.700 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 4.000 δρχ.



Dimitris Kakkavopoulos
Η φρεσκανική πολιτική,
ο Μικρότον και
ο Έλληνος του '21
Σελ.: 251, 4.300 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 3.000 δρχ.



T. Hey & P. Walters
Το κλινικό πύργον
Σελ.: 255, 6.200 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 4.300 δρχ.



Steven Weinberg
Όντερα για μια
πλήκη θεωρία
Η αναζήτηση των
θεωρητικών νόμων
της φύσης.
Σελ.: 347, 6.700 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 4.700 δρχ.



Vassilios & Giorgos
Πανγυριστικές
Μαθηματικές
Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Σ.Α.
(Τόμ. 1 και 2)
Σεν. σελ.: 314, 9.000 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 6.300 δρχ.



Paul Davies
Τα τελεσταία τρία λεκτά
Μια εργατολογική μελέτη
των Σεμαντότερων
Σελ.: 203, 5.000 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 3.500 δρχ.



Jacques Hadamard
Η αρχαιολογία
της επικοντες
στα μαθηματικά
Σελ.: 170, 5.000 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 3.500 δρχ.



F.W. Sieber
Το ξιλοχόντα στη νέα
Κρήτη το 1817
Σελ.: 306, 5.200 δρχ.
Τιμή για τις συνδρομητές: 3.600 δρχ.

Συνένωση σταγόνων

Από τη μεταλλουργία κόνεων ώς την πυρηνική σύντηξη

A. Varlamov

ΣΑΣ ΕΤΥΧΕ ΠΟΤΕ, ΜΙΚΡΟΣ, ΝΑ ΞΕ-
χωστείτε πάνω από ένα πάτο
σούπα παρατηρώντας τις χρυσές
σταγόνες λαδιού στην επιφά-
νειά της; Αν μάλιστα δεν είχατε και
ορεζή, σίγουρα θα αρχίσατε το παι-
χνίδι μαζί τους, κοιτώντας τις να
ενώνονται αργά και να αποκτούν
κυκλικά σχήματα.

Παρόμοιες παρατηρήσεις θα μπο-
ρούσατε να κάνετε με σταγόνες υ-
δραργύρου από ένα σπασμένο
θερμόμετρο (καλύτερα βέ-
βαια να μην επ-
χειρίσετε το
πείραμα,
διότι ο υ-
δράργυ-
ρος είναι
εξαρτι-
κά τοξικός).
Πάντως, οι
παρατηρή-

σεις σας θα έχουν πολὺ μικρή διάρ-
κεια, επειδή δύο σταγόνες υδραργύ-
ρου ενώνονται σε μία ώσπου να
πείτε κύμνο.

Ποιοι παράγοντες καθορίζουν το
πόσο γρήγορα «συγχωνεύονται» οι
σταγόνες μεταξύ τους; Προτού επ-
χειρίσουμε να απαντήσουμε στο ε-

ρώτημα, θα αναφερθούμε στην αιτία
που προκαλεί τη συνένωση: την ε-
πιφανειακή τάση των υγρών. Θα θε-
ωρήσουμε δε το ζήτημα από συνερ-
γειακή οποιαδήποτε.

Τα μόρια που ανήκουν στη λεπτή
επιφανειακή στοιβάδι «ζουν» κάτω
από πολύ ειδικές συνθήκες. Η ιδιαι-
τερότητά τους έγκειται στο γεγονός
ότι γειτονεύουν με οροειδή μόρια
μόνο από τη μία πλευρά, σε αντίθε-
ση με τα μόρια στο εσωτερικό του
υγρού τα οποία περιβάλλονται από
παντού με ομοειδή μόρια. Σε α-
ποστάσεις όχι πολύ μικρές, η
αλληλεπίδραση μεταξύ των
μορίων εκδηλώνεται ως
έλξη. Αυτό σημαίνει ότι
αν η δυναμική ενέργεια
δύο μορίων τα οποία α-
πέχουν μεταξύ τους πο-
λύ μεγάλη (άπειρη) από-
σταση θεωρηθεί ίση με
μηδέν, τότε σε μικρότε-
ρες αποστάσεις θα
σίναι αρνη-



τική. Σε πρώτη προσέγγιση, η απόλυτη τιμή της δυναμικής ενέργειας ενός μορίου μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη προς το πλήθος των γειτονικών μορίων του.

Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι τα μόρια της ελεύθερης επιφάνειας θα έχουν μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια απ' ό,τι εκείνα που βρίσκονται στο εσωτερικό του υγρού, επειδή τα τελευταία περιβάλλονται από μεγαλύτερο πλήθος μορίων. Ένας ακόμη παράγοντας που συνηγορεί στη μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια των μορίων της ελεύθερης επιφάνειας είναι η ελάττωση της συγκεντρωσής τους πλησιέστερα προς την επιφάνεια.

Εννοείται, βεβαίως, ότι τα μόρια ενός υγρού δεν παραμένουν ακίνητα. Αντιθέτως, βρίσκονται σε διαρκή θερμική κίνηση. Κατά συνέπεια, οριομένα μόρια εγκαταλείπουν την επιφάνεια, ενώ άλλα επιστρέφουν σ' αυτήν. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι στην ελεύθερη επιφάνεια αντιστοιχεί οριομένη μέση δυναμική ενέργεια, τότε για τη μεταφορά ενός μορίου από το εσωτερικό του υγρού στην επιφάνεια πρέπει προφανώς να παραχθεί έργο. Το πλέονασμα δυναμικής ενέργειας των μορίων που ανήκουν σε τμήμα μοναδιαίου εμβαδού της ελεύθερης επιφάνειας συγκριτικά με την ενέργεια του ίδιου πλήθους μορίων στο εσωτερικό του υγρού ονομάζεται συντελεστής επιφανειακής τάσης σ . Ο εν λόγω συντελεστής εκφράζει το έργο που απαιτείται για την αύξηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού κατά μία μονάδα επιφανείας. Ασφαλώς ο συγκεκριμένος ορισμός για το σ είναι ισοδύναμος με τον περισσότερο γνωστό ορισμό ως η δύναμη που επενεργεί ανά μονάδα μήκους στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Όπως γνωρίζετε, ανάμεσα σε όλες τις δυνατές καταστάσεις ενός συστήματος, η πλέον ευσταθής είναι εκείνη που αντιστοιχεί σε ελάχιστη δυναμική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι η επιφάνεια ενός υγρού σε δεδομένες συνθήκες τείνει να αποκτήσει σχήμα το οποίο να ελαχιστοποιεί την επιφανειακή (δυναμική) ενέργεια. Συνεπώς, στην περίπτωση

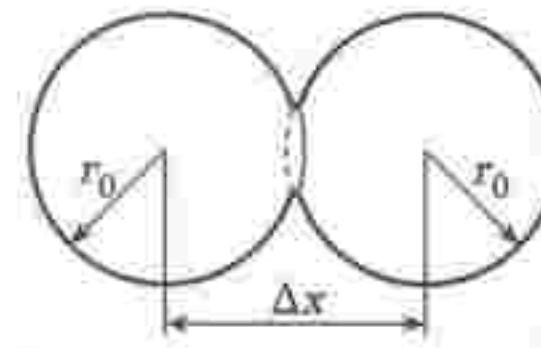
που η βαρύτητα θεωρείται αρεληπτέα —ας πούρε, μέσα σε ένα διαστημόπλοιο—, κάθε σταγόνα θα αποκτά σφαιρικό σχήμα: το συγκεκριμένο σχήμα ελαχιστοποιεί το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας και, κατά συνέπεια, είναι το πλέον οικονομικό από ενεργειακή άποψη. Ομοίως, είναι προσφορότερο ενεργειακά να συνενωθούν δύο ή περισσότερες σταγόνες μεταξύ τους και να σχηματίσουν μία, διότι έτοιμη επιφάνεια της νέας σταγόνας θα έχει μικρότερο εμβαδόν απ' ό,τι η συνολική επιφάνεια των αρχικών σταγόνων —κάτι που μπορείτε να αποδείξετε εύκολα μόνοι σας—, και η επιφανειακή ενέργεια θα είναι αντιστοιχώς μικρότερη.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο αρχικό μας ερώτημα: Ποιοι παράγοντες καθορίζουν πόσο γρήγορα ενώνονται μεταξύ τους δύο σταγόνες; Το πρόβλημα ανέκυψε εδώ και πολλά χρόνια. Και έχει μάλιστα ιδιαίτερη αξία, διότι η θεωρία για τη συνένωση των σταγόνων δεν γεννήθηκε από απλή περιέργεια. Αντιθέτως, έχει σημαντικές πρακτικές εφαρμογές, ειδικότερα στη μελέτη της τεχνολογίας της μεταλλουργίας κόνεων, όπου συμπερέμονται κόκκοι μετάλλου συγχωνεύονται θερμικά με ουσίες που έχουν χαρακτηριστικές ιδιότητες.

Το 1944, ο ρώσος φυσικός Y.I. Frenkel πρότεινε ένα πολύ απλό μοντέλο για τη συγχώνευση, το οποίο αποτέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο για τις αρχές της μεταλλουργίας κόνεων. Η βασική ιδέα της εργασίας του Frenkel θα μας χρησιμεύσει ως εργαλείο για να εκτιμήσουμε τον απαιτούμενο χρόνο για τη συνένωση δύο σταγόνων. Η απλούστερη προσέγγιση του προβλήματος είναι η ενεργειακή.

Ας θεωρήσουμε δύο ακριβώς ίδιες σταγόνες που κάποια στιγμή έρχονται σε επαφή. Στο σημείο επαφής δημιουργείται ένας στενός «λαιμός» (βλ. Σχήμα 1), του οποίου το μέγεθος αυξάνεται σταδιακά έως ότου ολοκληρωθεί η διαδικασία της συνένωσης. Τι συμβαίνει με την ενέργεια σε αυτή τη διαδικασία;

Το «ενεργειακό απόθεμα» του



Σχήμα 1

συστήματος των δύο σταγόνων συνίσταται στο πλέονασμα ενέργειας ΔΕ, δηλαδή στη διαφορά ανάμεσα στις επιφανειακές ενέργειες αρχικής και τελικής κατάστασης —με άλλη λόγια, στη διαφορά ενέργειας ανά μεσα στις δύο ξεχωριστές σταγόνες ακτίνας r που προέκυψε από τη συγχώνευση των δύο πρώτων:

$$\Delta E = 8\pi r_0^2 - 4\pi r^2.$$

Εφόσον ο συνολικός όγκος των σταγόνων δεν μεταβάλλεται κατά τη συγχώνευσή τους, ισχύει

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3,$$

απ' όπου προκύπτει

$$r = r_0 \sqrt[3]{2}.$$

Επομένως,

$$\Delta E = 4\pi(2 - 2^{2/3})r_0^2.$$

Σύμφωνα με τον Frenkel, αυτή η επιπλέον ενέργεια δαπανάται για την υπερνικηθούν οι δυνάμεις σωτερικής τριβής που αναπτύσσονται και τη διαδικασία της συνένωσης. Αυτού πολογίσουμε το έργο που κατανιλώνουν οι συγκεκριμένες δυνάμεις.

Για να εκφράσουμε την εσωτερική τριβή θα χρησιμοποιήσουμε το τύπο που ανακάλυψε ο άγγλος φυσικός και μαθηματικός σερ Georg Gabriel Stokes (1819-1903) για μια σφαίρα ακτίνας R η οποία κινείται με ταχύτητα u μέσα σε ρευστό:

$$F = 6\pi R u.$$

Ο αδιάστατος συντελεστής F στο παραπάνω τύπο ονομάζεται συντελεστής εσωτερικής τριβής, ή συντελεστής ιξώδους, ή, απλώς, ιξώδης και εκφράζει την ικανότητα ενός ρευστού να επιβραδύνει τη σχετική κίνηση των γειτονικών στρωμάτων.

του. Η εσωτερική τριβή που αναπτύσσεται κατά τη συνένωση του υγρών σταγόνων εξαρτάται τόσο από το ιξώδες του υγρού δυο και το μέγεθος των σταγόνων και την ταχύτητα με την οποία πραγματοποιείται η συνένωση. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το μέτρο της εν λόγῳ δύναμης μπορούμε κάλλιστα να χρησιμοποιήσουμε την εξισώση του Stokes, κάνοντας τις ακόλουθες αντικαταστάσεις: Αντικαθιστούμε το R με την ακίνα r_0 των σταγόνων, το u αντιπροσωπεύει την ταχύτητα με την οποία πραγματοποιείται η ένωση, και η είναι το ιξώδες του υγρού. Έτσι, προκύπτει για την εσωτερική τριβή ο παρακάτω τύπος:

$$F = 6\pi\eta r_0 u.$$

Παρατηρήστε ότι το υγρό στη διαδικασία της συνένωσης μετατοπίζεται κατά απόσταση ίση με την ακίνα κάθε σταγόνας: $\Delta x = r_0$. Άρα, το έργο που καταναλώνουν οι δυνάμεις εσωτερικής τριβής ισούται με:

$$W = F \Delta x = 6\pi\eta r_0^2 u.$$

Ο συγκεκριμένος τύπος φανερώνει ότι όσο ταχύτερα πραγματοποιείται η συνένωση των σταγόνων τόσο περισσότερη ενέργεια απαιτείται για την υπερνίκηση της εσωτερικής τριβής. Ωστόσο, αυτή η ενέργεια έχει ως όριο την τιμή ΔE , η οποία καθορίζει και το πόσο χρόνο η διαρκεί η διαδικασία της συνένωσης. Θεωρώντας $u = \frac{r_0}{\tau}$ και θέτοντας $W = \Delta E$, προκύπτει:

$$6\pi\eta r_0^2 \frac{r_0}{\tau} = 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2,$$

ή

$$\tau \equiv \frac{r_0 \eta}{\sigma}.$$

Με βάση τον τύπο μπορούμε να διατυπώσουμε τα εξής σχόλια: Σημερινή περίπτωση σταγόνων νερού με $r_0 \approx 1$ cm, $\sigma \approx 0,1$ N/m και $\eta \approx 10^{-3}$ kg/m · s, η διαδικασία της συνένω-

σης διαρκεί περίπου 10^{-4} s. Ωστόσο, για τη γλυκερίνη, η οποία παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερο ιξώδες ($\eta \approx 1$ kg / (m · s)), ο χρόνος αυτός είναι πολύ μεγαλύτερος. Επομένως, ο χρόνος που απαιτείται για τη διαδικασία της συνένωσης σταγόνων της ίδιας ακτίνας μπορεί να ποικίλλει σημαντικά, αφού εξαρτάται από το ιξώδες και την επιφανειακή τάση του υγρού. Επιπλέον, σε αντίθεση με την επιφανειακή τάση, το ιξώδες εξαρτάται σημαντικά από τη θερμοκρασία, οπότε ακόμη και για το ίδιο υγρό ο χρόνος συνένωσης μπορεί να ποικίλλει σημαντικά. ■

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

«Σταγόνες και ψιχάλες», Y. Bruk και Albert Stasenko, Μάιος/Ιούνιος 1994.

«Φυσαλίδες σε λακούβες», A. Mitrofanov, Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1995.

«Κόντρα στο ρεύμα», A. Mitrofanov, Ιούλιος/Αύγουστος 1996.

ΤΟΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

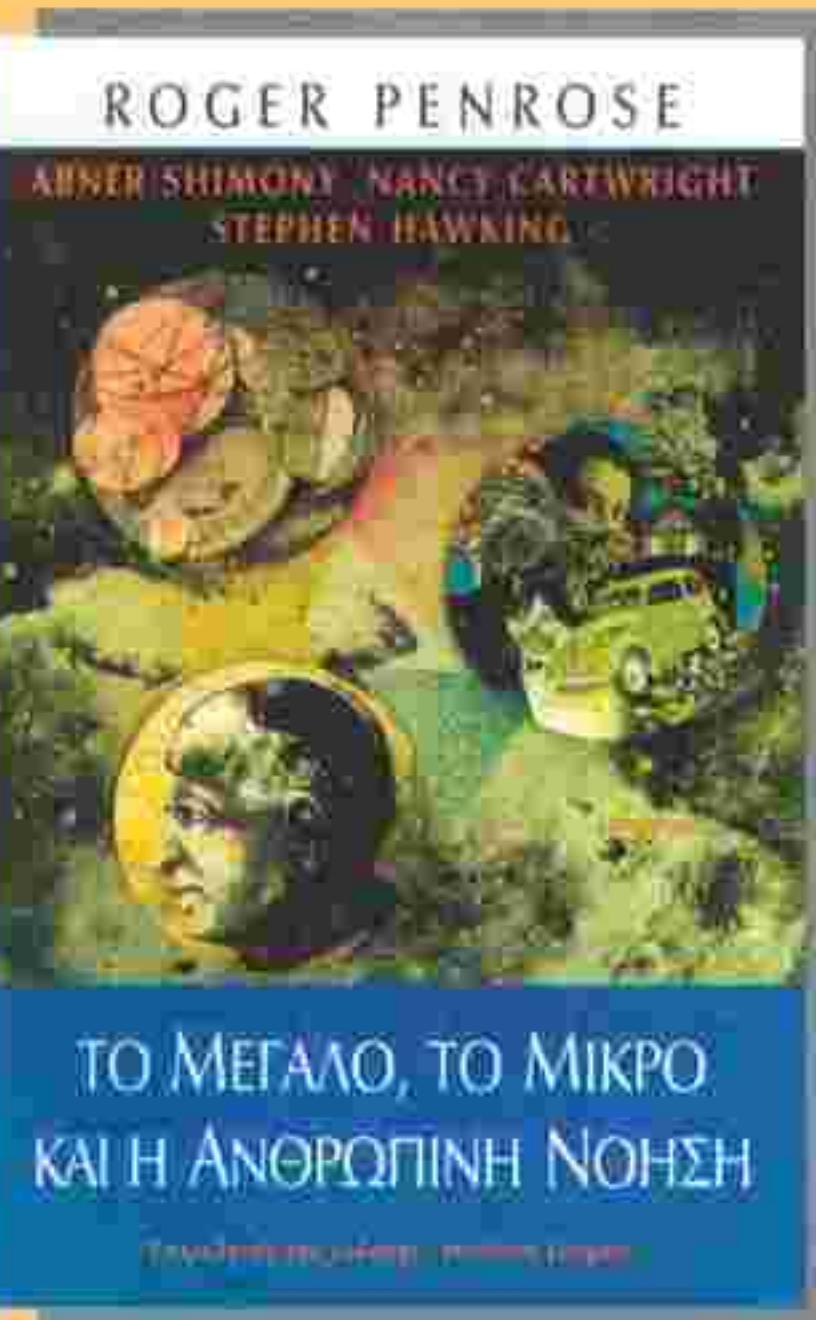
Roger Penrose

Το μεγάλο, το μικρό και η ανθρώπινη νόηση

Με τη συμμετοχή των: Abner Shimony, Nancy Cartwright και Stephen Hawking

- Το βιβλίο παρουσιάζει συνοπτικά και με υποδειγματική σαφήνεια τις πρωτότυπες και προκλητικές ιδέες του Roger Penrose — μεγάλου μαθηματικού του αιώνα μας — σχετικά με τη μεγαλης ιδιμακάς φυσική του σύμπαντος, το μικρόκοσμο της κβαντικής φυσικής και τη φυσική της νόησης — ιδέες που στις μέρες μας έχουν αποτελέσει αντικείμενο έντονων αντιπαραθέσεων και συζητήσεων.
- Στη συνέχεια, το βιβλίο περιλαμβάνει την κριτική που ασκούν σ' αυτές τις ιδέες τρεις διακεκριμένοι ειδικοί από διαφορετικούς χώρους — οι φιλόσοφοι της επιστήμης A. Shimony και N. Cartwright και ο θεωρητικός φυσικός και κοσμολόγος S. Hawking — καθώς και τις απαντήσεις του Penrose στις οντιρρήσεις που εκφράζουν.
- «Κάθε σύμφωνος που ενδιαφέρεται σοβαρά για τα μαθηματικά, τη φυσική και τη φιλοσοφία της νόησης θα βρει το βιβλίο αυτό, εξαιρετικά ενδιαφέρον...»

—The Philosopher's Magazine



246 σελ., 14x21 εκ. Εικ. Α/Μ,
Πανόδιο, 6.400 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΩΠΤΡΟ

Σχεδιάσ

TΟ ΘΕΜΑ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΚΑΛΕΙΔΟ-σκοπίου παραπέμπει ιστορικά σε μια πλειάδα επιστημόνων: στον αστρονόμο που πρώτος ανακάλυψε τους νόμους κίνησης των πλανητών, στον μαθηματικό που έγινε πασίγνωστος για τα περιφέρα θεωρήματά του, στον δημιουργό της κλασικής μηχανικής, στον ιδιοφυή πειραματιστή ο οποίος πραγματοποίησε εξαιρετικά δύσκολα πειράματα προκειμένου να προσδοτήσει την ταχύτητα του φωτός σε διάφορα οπτικά μέσα, καθώς και σε άλλες εξέχουσες φυσιογνωμίες της επιστήμης. Τα επιστημονικά τους ενδιαφέροντα διέφεραν πολύ, αλλά όλοι τους προσπάθησαν να απαντήσουν στο ερώτημα αν ήταν δυνατόν να προσδιοριστούν οι διαδρομές των φωτεινών ακτίνων, καθώς και ποια μέθοδος θα τους επέτρεπε να διεκπεραιώσουν σωστά αυτό το έργο.

Τη σημασία του προβλήματος την καθιστά πρόδηλη ακόμη και μια απλή απαρίθμηση των οπτικών οργάνων: ματογυάλια και μεγεθυντικοί φακοί, μικροσκόπια και τηλεοπτόνια, μηχανές προβολής και φωτογραφικές μηχανές, κιάλια και βιντεοκάμερες, κ.ο.κ. Κανένα τους δεν θα μπορούσε να σχεδιαστεί χωρίς εκτεταμένες γνώσεις για το πώς αλληλεπιδρά το φως με τους φακούς και τις ανακλαστικές επιφάνειες.

Ωστόσο, η σημασία του προσδιορισμού των διαδρομών των ακτίνων δεν περιορίζεται στην ανάπτυξη των οπτικών οργάνων. Τα μοντέλα και οι έννοιες που γεννήθηκαν στο πλαίσιο της οπτικής γνωριποίησαν και άλλα επιτημονικά πεδία, γεγονός που μαρτυρούν άλλωστε όροι όπως ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, κάτοπτρο νετρονίων και οπτικός υπολογιστής.

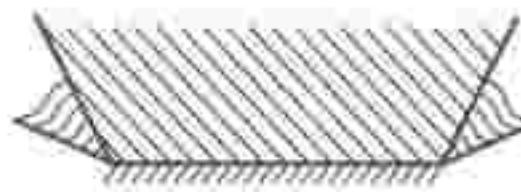
Η ακόλουθη σειρά ερωτήσεων καταδεικνύει την ομορφιά όχι μόνο των γραφικών μεθόδων οι οποίες μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τις διαδρομές που ακολουθούν οι φωτεινές ακτίνες αλλά και των νόμων της

οπτικής, οι οποίοι συνιστούν το θεωρητικό υπόβαθρο αυτών των γραφικών μεθόδων.

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Καθώς ο Ήλιος δύει, από ένα άνοιγμα που αφήνουν τα σύννεφα ανάμεσά τους φωτίζει έναν δικτυωτό φράχτη. Γιατί δεν διακρίνονται κατακόρυφοι πάσσαλοι στη σκιά που ρίχνει ο φράχτης σ' έναν παρακείμενο τοίχο, ενώ οι σκιές των οριζόντιων πασσάλων διακρίνονται ευκρινώς; Όλοι οι πάσσαλοι έχουν την ίδια διάμετρο.

2. Στο Σχήμα 1 φαίνεται η περιοχή από την οποία είναι πλήρως ορατό ένα γραμμικό αντικείμενο μέσα σε επίπεδο κάτοπτρο (ευθύγραμμη γραμμοσκίαση) καθώς και η περιοχή απ' όπου γίνεται εν μέρει μόνο ορατό (καρπούλογραμμη γραμμοσκίαση). Πού βρίσκεται το αντικείμενο;



Σχήμα 1

3. Ηλιακές ακτίνες προσπίπτουν σε κατακόρυφη οθόνη αφού ανακλαστούν από μεγάλο οριζόντιο κάτοπτρο. Ένα κομμάτι σκακιού, ας πούμε ο βασιλιάς, τοποθετείται πάνω στο κάτοπτρο. Τι μέγεθος έχει η σκιά που ρίχνει στην οθόνη;

4. Γιατί οι συλλέκτες φακοί φωτισμού των μικροσκοπίων σίναι συνήθως κοίλοι;

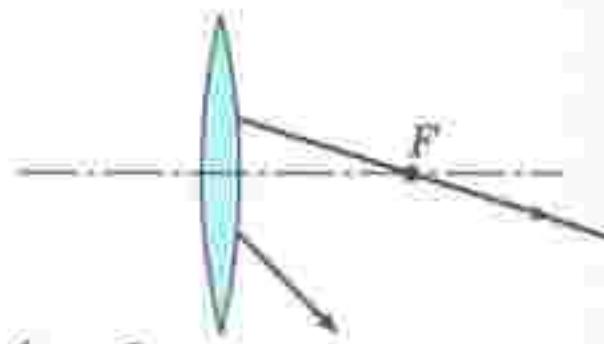
5. Ένα κομμάτι τζαμιού τοποθετείται ανάμεσα σε μια σημειακή φωτεινή πηγή και έναν παρατηρητή. Απεικονίστε γραφικά τις διαδρομές των ακτίνων που εισδύουν στο μέρος του παρατηρητή και βρείτε το είδωλο της πηγής.

6. Η απόσταση μεταξύ ενός αντικείμενου και του είδωλου του που σχηματίζεται από έναν λεπτό φακό ισούται με $0.5f$, όπου f η εστιακή απόσταση του φακού. Είναι φανταστικό ή πραγματικό το είδωλο;

7. Συγκλίνων φακός σχηματίζει το είδωλο σημειακής φωτεινής πηγής στο σημείο S' επί του κύριου οπτικού άξονά του. Θεωρήστε γνωστές τις θέσεις του οπτικού κέντρου

Ο και τιων εστιών του φακού. Χρησιμοποιώντας γραφικές μεθόδους προσδιορίστε τη θέση της πηγής λαμβάνοντας υπόψη ότι η εστια απόσταση είναι μικρότερη της OS .

8. Χρησιμοποιώντας πάλι γραφικές μεθόδους, προσδιορίστε τη θέση μιας σημειακής φωτεινής πηγής εγγνωρίζετε ότι δύο ακτίνες, αφού θα άθλαστούν στο φακό, ακολουθούν τις διαδρομές που φαίνονται στο Σχήμα 2.



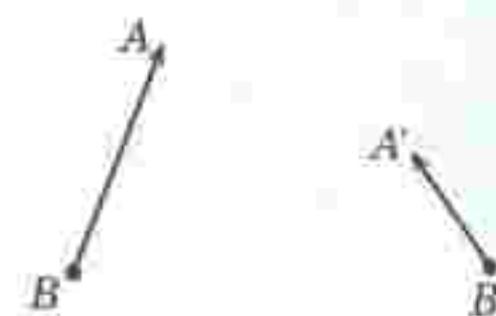
Σχήμα 2

9. Το Σχήμα 3 δείχνει το αντικείμενο AB και το είδωλό του $A'B'$ που σχηματίζεται από έναν λεπτό φακό. Εφαρμόστε την ίδια μέθοδο όπως και στις προηγούμενες ερωτήσεις για να εντοπίσετε το φακό και τις εστιές του.

10. Το είδωλο ενός ευθύγραμμου συνεχούς αντικείμενου AB αποδίδεται από δύο ημιευθίες, τη μια προγραμματική και την άλλη φανταστική. Μπορείτε να εντοπίσετε τη θέση του αντικείμενου με τη βοήθεια του Σχήματος 4;

11. Είναι δυνατόν να φωτογραφηθεί ένα είδωλο;

12. Σε ποια θέση επί του οπτικού άξονα ενός συγκλίνοντος φακού πρέπει να τοποθετηθεί μια σημε



Σχήμα 3

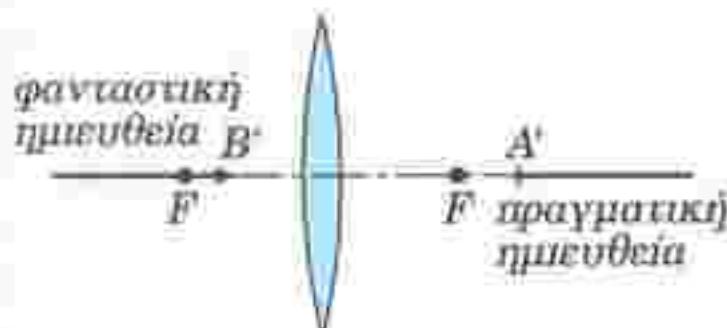


ΤΙΣ ΑΚΤΙΝΕΣ

κή φωτεινή πηγή έτσι ώστε να είναι αδύνατο, από οποιοδήποτε σημείο, να δούμε ταυτοχρόνως και την πηγή και το είδωλό της;

13. Πώς έχουν διαταχθεί δύο φακοί (ένας συγκλίνων και ένας αποκλίνων) αν μια δέσμη παράλληλων ακτίνων, αφού διέλθει μέσω αυτών, παραμένει παράλληλή;

14. Προσδιορίστε γραφικά το είδωλο αντικειμένου που σχηματίζει οπικό σύστημα αποτελούμενο από έναν συγκλίνοντα φακό και ένα επίπεδο κάτοπτρο τοποθετημένο στο εστακό επίπεδο του φακού. Το αντικείμενο τοποθετείται μπροστά από το φακό και σε απόσταση όχι μικρότερη από την εστιακή απόσταση αλλά ούτε και μεγαλύτερη από την ακτίνα καμπυλότητας.



Σχήμα 4

15. Γιατί ένα τηλεσκόπο που έχει εκτοξευθεί στο διάστημα μπορεί να ανιχνεύσει πολύ αμυδρότερα άστρα παρά ένα τηλεσκόπο της ίδιας διαμέτρου συγκατεστημένο στη Γη;

Μικροπειραματισμοί

Στη γωνία ενός δωματίου τοποθετήστε δύο καθρέφτες έτσι ώστε να σχηματίζουν ορθή διεδρη γωνία. Πώς θα ροιάζει το είδωλό σας σε ένα τέτοιο σύστημα; Προσπαθήστε να βρείτε μια θέση στο δωμάτιο απ' όπου θα είναι αδύνατο να δείτε το είδωλό σας.

Είναι ενδιαφέρον ότι...

„ακόμη και στην ύστερη Αναγέννηση, τα οπικά φαινόμενα και

η δραση αντιμετωπίζονταν ως θέματα μυστηριώδη και ύποπτα. Ισως έτσι να εξηγείται το ότι οκόμη και ένας εξέχον οπικός όπως ο Francisco Maurolico δεν τόλμησε να δημοσιεύσει το κύριο έργο του έως το 1575, τη χρονιά του θανάτου του.

...μόλις στις αρχές του 17ου αιώνα κατορθώθηκε για πρώτη φορά να προσδιοριστούν οι διαδρομές που ακολουθούν οι ακτίνες μέχρι το μάτι. Το επίτευγμα αυτό οφείλεται στον μεγάλο αστρονόμο Johannes Kepler, ο οποίος ανέπτυξε τη θεωρία της κατασκευής ειδώλων στα οπικά συστήματα και εισήγαγε τέτοιες θεμελιώδεις έννοιες όπως η «εστία» και ο «οπικός άξονας».

...το τηλεσκόπο που επινόησε ο Γαλιλαίος θεωρήθηκε πραγματικό θαύμα, και δεκάδες άνθρωποι προσέρχονταν για να κοιτάξουν μέσα από αυτό. Ο μιθός του Γαλιλαίου διπλασιάστηκε αφότου δώρισε ένα αντίγραφο του οργάνου του στην ενετική γερουσία.

...μια πρωτόγονη μορφή μικροσκοπίου, που αποτελούνταν από έναν μεγεθυντικό φακό στερεωμένο σε ένα στήριγμα, αντικαταστάθηκε τον 17ο αιώνα από ένα περίπλοκο δργανό που διέθετε σύστημα φακών. Η ανακάλυψη αυτή ήσας πρέπει να αποδοθεί στους Ολλανδούς. Εντούτοις, αυτού του είδους το μικροσκόπιο δεν μπορούσε να ανταγωνιστεί τον μεγεθυντικό φακό έως τον 19ο αιώνα, οπότε και επνοήθηκαν οι σύνθετοι αντικειμενικοί φακοί.

...στην προσπάθειά του να βελτιώσει το διοπτρικό τηλεσκόπιο, ο Isaac Newton επινόησε και κατασκεύασε ένα δργανό που «αντί για λίνου αντικειμενικού φακού χρησιμοποιούσε μια κοίλη μεταλλική επιφάνεια» —τουτέστιν, ένα κοίλο κάτοπτρο. Για την επινόηση του κατοπτρικού τηλεσκοπίου, ο Νέύτων αναγορεύθηκε μέλος της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου το 1672.

...όπως και πολλοί άλλοι εξέχοντες επιστήμονες, ο Jean Foucault επινόησε πρωτότυπα δργανά, συμπεριλαμβανομένων και αστρονο-

μικών οργάνων. Επί παραδείγματι, στην προσπάθειά του να κατασκευάσει βελτιωμένα κατοπτρικά τηλεσκόπα, ανέπτυξε μια ιδιαίτερος σημαντική μέθοδο για την επαργύρωση του γυαλιού.

...το ευκρινές είδωλο στο μάτι ενός ψαριού σχηματίζεται ακριβώς όπως επιτυγχάνεται εστίαση στις φωτογραφικές μηχανές.

Η προσαρμογή του ματιού του ψαριού δεν γίνεται με μεταβολή της καμπυλότητας του φακού, όπως συμβαίνει στους ανθρώπους, αλλά με τη μετατόπιση του φακού μπρος-πίσω με τη βοήθεια εξειδικευμένων μυών.

...για να βελτιωθεί η ποιότητα του ειδώλου, οι αντικειμενικοί φακοί στις σύγχρονες κάμερες απαρτίζονται από αρκετούς φακούς, κατασκευασμένους από ποικίλους τύπους γυαλιού. Η σχεδίασή τους είναι τόσο περίπλοκη, ώστε καθίσταται αναγκαία η χρησιμοποίηση ηλεκτρονικών υπολογιστών για την εκτέλεση των απαιτούμενων υπολογισμών. Το σύνολο των απολειών σε φωτεινή ροή κατά τις αναριθμητές ανακλάσεις του φακός στις επιφάνειες των φακών δεν μπορεί να εξηγηθεί από τον καθαρά γεωμετρικό προσδιορισμό των διαδρομών των ακτίνων.

...πρόσφατα, η ποσότητα των αστρονομικών δεδομένων γνώρισε τεράστια αύξηση, κυρίως χάρη στο τηλεσκόπιο πολλαπλών κατόπτρων Keck διαμέτρου 10 m στο Μάουνα Κέα της Χαβάης, το μεγαλύτερο επιγειο τηλεσκόπιο, αλλά και χάρη στο διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble, το οποίο είναι εξοπλισμένο με κάτοπτρο διαμέτρου 2,4 m.

—A. Leonovich

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

«Καθρέφτης γεμάτος γερά», A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1994.

«Κουβεντούλα για έναν μικρό φακό», A. Zilberman, Ιούλιος/Αύγουστος 1994.

«Σκοτεινοί υπολογισμοί», C. Bowers, Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1997.

Χτυπήματα καράτε

Η φυσική του ταμεσιούαρι

A. Biryukov

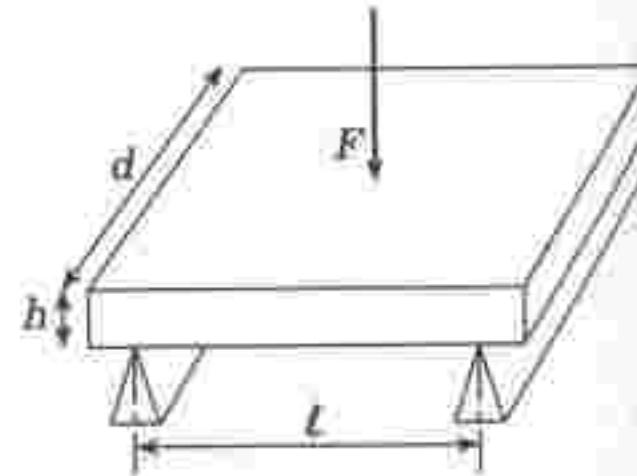
ΤΑΜΕΣΙΟΥΑΡΙ ΕΙΝΑΙ Ο ΟΡΟΣ ΤΟΥ καράτε που δηλώνει τη δοκίμασία με την οποία διαποτώνεται το επίπεδο τόσο της ψυχολογικής προπαρασκευής του αθλητή όσο και της ικανότητάς του για χτυπά και να σπάζει διάφορα αντικείμενα, συνήθως με το χέρι αλλά μερικές φορές και με το κεφάλι ή το πόδι. Στον δυτικό κόσμο το καράτε ήρθε από την Οκινάβα της Ιαπωνίας. Αναπτύχθηκε στη διάρκεια του 16ου και του 17ου αιώνα, όταν οι κυβερνητικές δυνάμεις, λόγω του φόβου για τις επαπειλούμενες εξεγέρσεις, κατάσχοσαν όλα τα όπλα που βρίσκονταν στη κατοχή των λαϊκών στρωμάτων, περιλαμβανομένων και των μαχαιριών που χρησιμοποιούνταν για τελετουργικούς και οικιακούς σκοπούς. Βεβαίως, το να πολεμήσουν τους πάνοπλους σαμουράι με γυμνά χέρια ήταν κάτι που ξεπερνούσε τις δυνάμεις των χωρικών ωστόσο, η χρήση του καράτε τους επέτρεψε να αμυνθούν ενάντια σε κάθε ληστρική συμμορία και να την απωθήσουν.

Η σύντομη ιστορική αναφορά μας ίσως να εξηγεί την προέλευση του ταμεσιούαρι, το οποίο ελκύει πάντοτε το ενδιαφέρον των θεατών και δημουργεί στον αμύγδιο την εντύπωση του υπερφυσικού. Σήμερα, η τέχνη του ταμεσιούαρι παρουσιάζεται ως επί το πλείστον σε επειδίξεις και διαγωνισμούς καράτε, όπου ως

στόχοι χρησιμοποιούνται ξύλινες δοκοί ποικίλων μεγεθών (συνήθως από μαλακό ξύλο κωνοφόρων), τούβλα, τσιρεντόλιθοι, κεραμίδια, παγοκολώνες και μπαστούνια του μπεζιμπολ.

Στο παρόν άρθρο θα μελετήσουμε ένα απλό φυσικό μοντέλο που περιγράφει τι συμβαίνει όταν χτυπάμε με το χέρι μια δοκό το μοντέλο αυτό θα φωτίσει αρκετά σκοτεινά σημεία, θα μας αποφέρει κάποιες ποσοτικές εκτιμήσεις και θα μας επιτρέψει να σχηματίσουμε μια ιδέα για τα δυνατά δρια των αθλητικών επιτευγμάτων στο ταμεσιούαρι. Για να προσδιορίσουμε ορισμένες παραμέτρους του εν λόγω μοντέλου, θα παραστεί η ανάγκη να λύσουμε μερικά προκαταρκτικά προβλήματα με αυτοτελές ενδιαφέρον. Ωστόσο, για να μη διασπάσουμε τον ειρηνό των σκέψεών μας με παρεκβάσεις από το κυρίως θέμα, αυτά τα προβλήματα θα τα αντιμετωπίσουμε σε παραρτήματα στο τέλος του άρθρου.

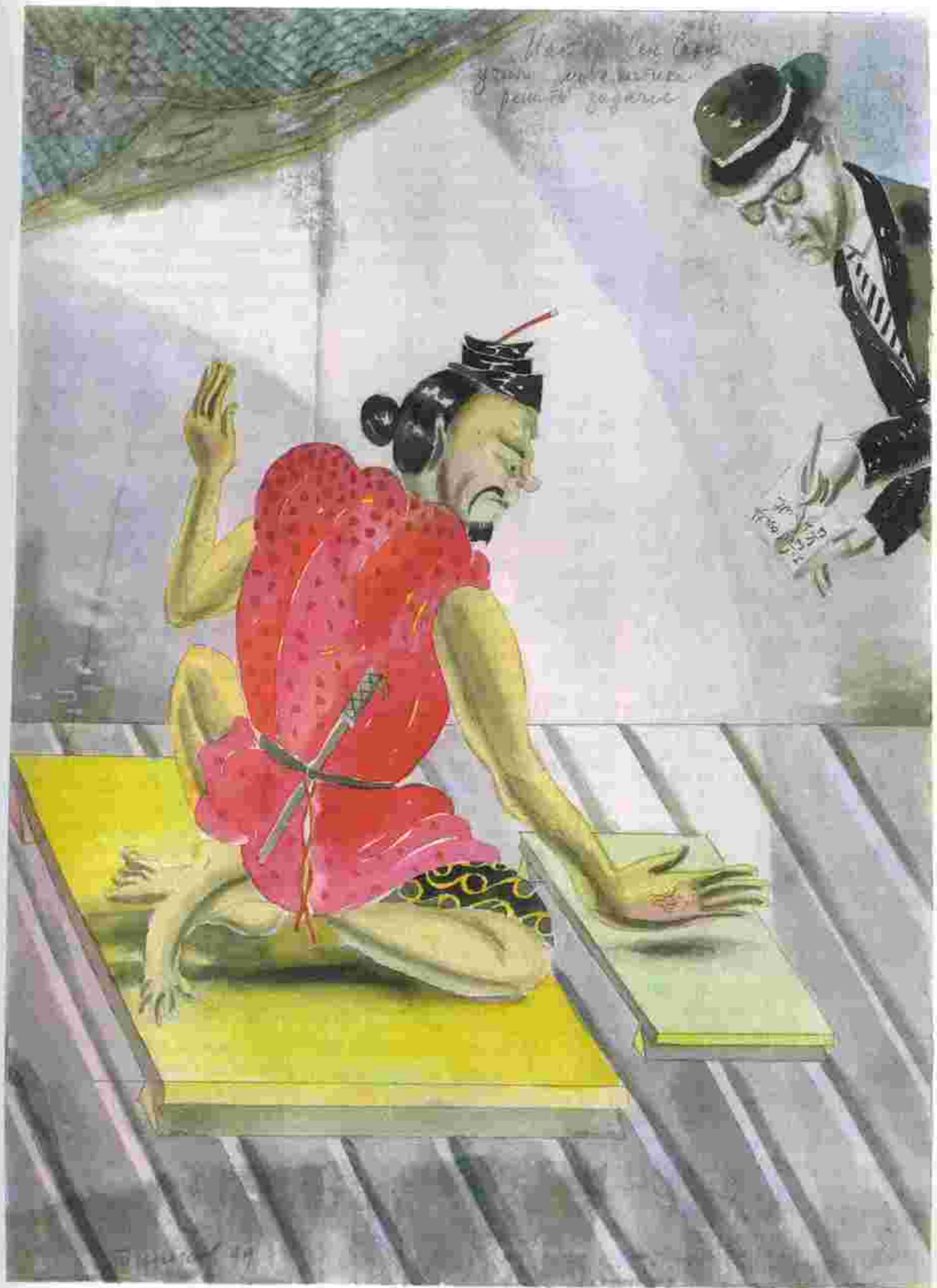
Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι καταφέρνετε ένα χτύπημα με την παλάμη σας μάζας m σε μια ξύλινη δοκό διαστάσεων d , l και h , η οποία ακουμπά σε δύο υποστηρίγματα (βλ. Σχήμα 1). Η παλάμη επιπίπτει στο κέντρο της δοκού με ταχύτητα v . Θα πρέπει να εξηγήσουμε ότι το χτύπημα γίνεται με δύο περιοχές της παλάμης: είτε με το πίσω μέρος του καρπού (την περιοχή των δύο σει-

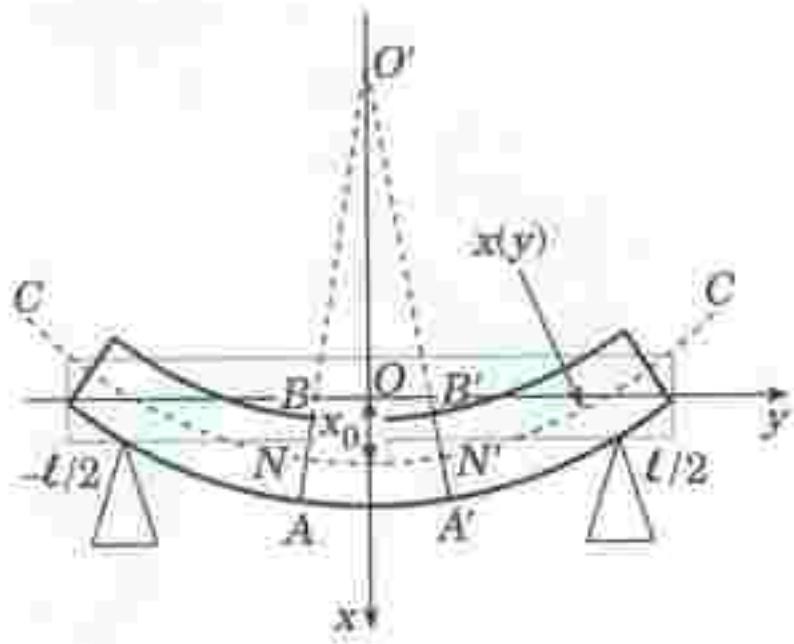


Σχήμα 1

ρών οστών που βρίσκονται στην προέκταση του αντίχειρα —σαν να λέμε, με τη «φτέρνα» της παλάμης είτε με την κάτω κόψη της παλάμης (το ωλένιο άκρο της). Ακόμη ότι οι ινές του ξύλου είναι παράλληλες προς τα υποστηρίγματα —τα οποία χωρίζει απόσταση ίση περίπου με τη μήκος l της δοκού. Ενα από τα «μυστικά» του καράτε είναι ότι, προκατέμενου να αυξήσουμε την αποτελεσματικότητα του χτυπήματος, πρέπει να εφαρμόσουμε τη δύναμη F στην επιταχυνόμενη παλάμη μόλις πριν την επαφή της με το αντικείμενο και να τη διατηρήσουμε καθόλη τη διάρκεια της κρούσης.

Θεωρούμε την παραμόρφωση της δοκού στο σύστημα αναφοράς που απεικονίζεται στο Σχήμα 2. Εστώ ότι η μετατόπιση του κέντρου μάζας της δοκού από τη θέση ισορροπίας του (Η εν λόγω μετατόπιση σίναι γνωστή και ως βέλος της κάμψης.) Υπόθετουμε ότι η θραύση της δοκού





Σχήμα 2

(που αρχίζει με την καταστροφή του ανώτερου και του κατώτερου επιφανειακού στρώματός της) επέρχεται όταν η x_0 λάβει κάποια κρίσιμη τιμή x_c , οπότε η τάση σ (η δύναμη που ασκείται σε μια μοναδιαία επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής της δοκού) στην επιφάνεια της δοκού φτάνει σε κάποια κρίσιμη τιμή σ_c , η οποία εξαρτάται από την αντοχή του υλικού.

Κατ' αρχάς θα βρούμε τη σχέση που συνδέει τη μεγέθη x , και σ , η οποία καθορίζεται από τις ελαστικές ιδιότητες και τη γεωμετρία της δοκού. Η μέγιστη κάμψη και η μέγιστη τάση στην επιφάνεια της δοκού θα παρουσιαστούν στο κέντρο της. Στο Παράρτημα 1 αποδεικνύουμε ότι η συγκεκριμένη τάση δίνεται από τον τύπο

$$\sigma = \frac{Eh}{2R},$$

όπου με R συμβολίζουμε την ακτίνα καρπούλοτητας του κεντρικού άξονα CC στο μέσον της δοκού (Σχήμα 2) και με E το μέτρο ελαστικότητας του Young για τον δεδομένο τύπο ξύλου.

Υποθέτουμε τώρα πως η παραμορφωμένη δοκός έχει ένα συγκεκριμένο σχήμα, τέτοιο ώστε να συμβιβάζεται με το γεγονός ότι τα άκρα της είναι στερεωμένα στα σημεία $y = \pm l/2$ και ότι η μέγιστη μετατόποση από τη θέση ισορροπίας παρατηρείται στο κέντρο της. Σημειώτεον ότι το ακριβές σχήμα της εξαρτάται από τις ειδικές (και καλώς κατανοούμενες) συνθήκες αλληλεπίδρασης ανάμεσα στην επιφάνεια επαφής της

παλάμης και της δοκού. Στους υπολογισμούς μας θα χρησιμοποιήσουμε έναν εμπειρικό τύπο που βασίζεται σε πειραματικά δεδομένα, ο οποίος θα μας επιτρέψει να καταλήξουμε σε απλές εκτιμήσεις.

Ας προσεγγίσουμε το σχήμα της κεκαμμένης δοκού με μια ημιτονοειδή καρπύλη μεταξύ των σημείων $y = \pm l/2$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η μετατόποση x για κάθε σημείο κατά μήκος του κεντρικού άξονα εξαρτάται από τη συντεταγμένη y ως

$$x(y) = x_0 \operatorname{συν} \frac{\pi y}{l}.$$

Στο Παράρτημα 2 αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη ακτίνα καρπούλοτητας στο κέντρο της δοκού θα ισούται με

$$R = \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

Εισάγοντας την έκφραση αυτή στον τύπο για τη σ , βρίσκουμε την τάση στο μέσο της επιφάνειας της δοκού και όταν το κέντρο μάζας της έχει μετατοποτεί κατά x_0 :

$$\sigma = \frac{x_0 Eh \pi^2}{2l^2}.$$

Ο ανωτέρω τύπος δείχνει ότι η θραύση ($\sigma = \sigma_c$) επέρχεται διαν το κέντρο της δοκού μετατοποτεί κατά

$$x_c = \frac{2\sigma_c l^2}{\pi^2 Eh}.$$

Στη συνέχεια, για να περιγράψουμε τις ελαστικές ιδιότητες της δοκού χρησιμοποιούμε ως μοντέλο ένα ελατήριο σταθεράς k , το οποίο τείνεται από εξωτερική δύναμη. Στο Παράρτημα 3 διαπιστώνουμε ότι η εν λόγω σταθερά πρέπει να έχει την τιμή

$$k = \frac{\pi^2 Eh^3 d}{3l^3}.$$

Αφού προσδιορίσαμε τις αναγκαίες παραμέτρους, επιστρέφουμε στο αρχικό μας πρόβλημα του χτυπήματος επί της δοκού. Η κίνηση της παλάμης περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$mx'' = -kx + F,$$

όπου το x θα συμβολίζει εφεξής τη μετατόποση της παλάμης από την αρχική θέση επαφής της με τη δοκού, ενώ οι τόνοι δηλώνουν παραγόγη ση ως προς το χρόνο.

Για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς, θεωρούμε σταθερή τη δύναμη F —την οποία εφαρμόζεται στην παλάμη ο βραχίονας. Μετά τη απατούμενες αντικαταστάσεις καταλήγουμε στην εξής λύση:

$$x = A \operatorname{συν} \omega t + B \operatorname{ημ} \omega t + \frac{F}{k},$$

η οποία περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές A και B . Για να τις προσδιορίσουμε, καθορίζουμε τις αρχικές συνθήκες: Για $t = 0$, $x = 0$ και $\dot{x} = u$. Έτσι, βρίσκουμε

$$x = \frac{f}{\omega^2} (1 - \operatorname{συν} \omega t) + \frac{u}{\omega} \operatorname{ημ} \omega t,$$

όπου η $f = F/m$ έχει διαστάσεις επιτάχυνσης, ενώ η $\omega = \sqrt{k/m}$ είναι ιδιοσυχνότητα με την οποία ταλαντώνεται η παλάμη υπό την επίδραση της ελαστικής δύναμης της δοκού.

Το επόμενο βήμα συνίσταται στο προσδιορισμό της μέγιστης μετατόποσης x_{\max} της παλάμης για δεδομένη δύναμη F και αρχική ταχύτητα u . Αν απαλείψουμε το t από τις εκφράσεις για το x και τη χρονική υπαράγωγο x' , και εν συνεχείᾳ θεσσουμε τη x' ίση με μηδέν, τότε βρίσκουμε

$$x_{\max} = \frac{f}{\omega^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{u\omega}{f} \right)^2} \right].$$

Για να προσδιορίσουμε τις συνθήκες θραύσης, πρέπει να εξισώσουμε αυτή τη μετατόποση με τη x_c , οπότε και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{2\sigma_c h^2 d}{3Fl} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2 Eh^3 u^2 md}{3F^2 l^3}},$$

η οποία συνδέει τις ιδιότητες του ξύλου και τη γεωμετρία της δοκού με τις παραμέτρους της κρούσης.

Επιλύουμε την ανωτέρω εξίσωση

ως προς F , χρησιμοποιώντας και πάλι τις παραμέτρους x , και k :

$$F = \frac{kx_r}{2} - \frac{mu^2}{2x_r}.$$

Για να σπάσει η δοκός, η δύναμη αυτή πρέπει να εφαρμοστεί τη σπιγμή που η παλάμη έρχεται σε επαφή μαζί της, κινούμενη με αρχική ταχύτητα u . Όπως βλέπουμε, εάν η ταχύτητα της παλάμης είναι αρκούντως μεγάλη, η τιμή της F γίνεται αρνητική. Συνεπώς, δεν χρειάζεται να καταβάλουμε δύναμη για να σπάσουμε τη δοκό εάν το χέρι μας πέσει με μεγάλη ταχύτητα (ομοίως, δεν χρειάζεται να ασκήσουμε δύναμη σε ένα σφυρί για να μπήξουμε ένα μικρό καρφί στο ξύλο). Στην προκειμένη περίπτωση, η αρχική ταχύτητα της γροθιάς πρέπει να υπερβαίνει την τιμή:

$$u = x_r \omega = \frac{2\sigma_r}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\frac{thd}{mE}},$$

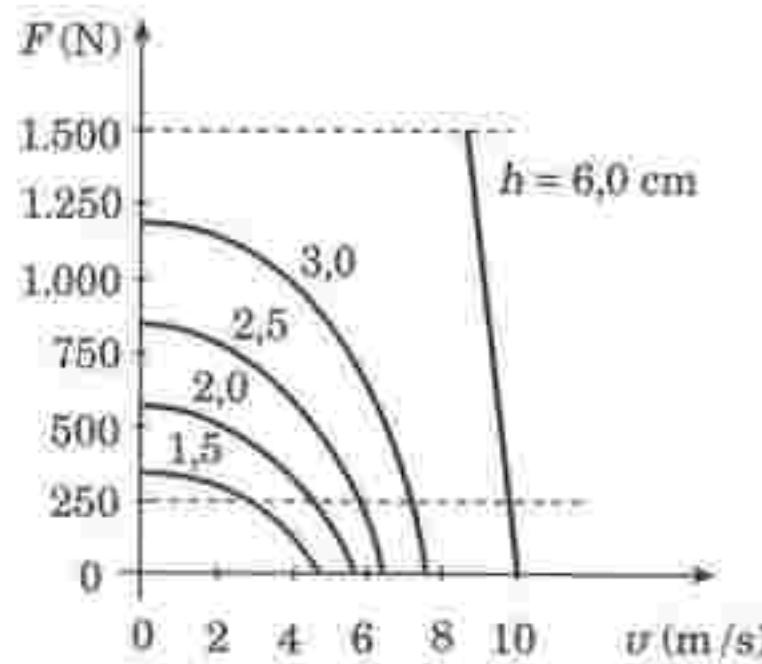
η οποία είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα του πάχους h της δοκού. Κατά συνέπεια, για να σπάσουμε μια παχύτερη δοκό, συμφέρει περισσότερο να αυξήσουμε την ταχύτητα του χτυπήματος παρά τη δύναμη του.

Ας λύσουμε τώρα την εξίσωση που καθορίζει τη συνθήκη θραύσεως της δοκού συναρτήσει του πάχους της h . Έτσι, θα προσδιορίσουμε το πάχος της δοκού που μπορεί να σπάσει με τις δεδομένες παραμέτρους του χτυπήματος:

$$h = \frac{3\pi^2 Eu^2 m}{8\sigma_r^2 ld} \times \left[1 + \sqrt{1 + \frac{64Fl^5 \sigma_r^3 d}{3\pi^4 E^2 u^4 m^2}} \right].$$

Ας κάνουμε, λοιπόν, κάποιες εκτιμήσεις με τις εξής πειραματικές παραμέτρους για το ξύλο: $E = 10^8$ N/m² και $\sigma_r = 5 \cdot 10^9$ N/m². Η συνηθισμένη δοκός στο ταμεσιούρι έχει πλάτος 20 cm και μήκος 30 cm. Θα υποθέσουμε ότι $l = 25$ cm, επειδή μπορούμε να αγνοήσουμε τα άκρα της που εξέχουν από τα υποστριγγάτα. Η μάζα της παλάμης

θεωρείται ίση με 1 kg, όπου έχει συνυπολογιστεί και το αντιβράχιο. Στο Σχήμα 3 φαίνεται η εξάρτηση της δύναμης F από την ταχύτητα u για διάφορες τιμές του πάχους h της δοκού. Εάν ο συνδυασμός των τιμών των F και u αντιστοιχεί σε σημείο που κείται πάνω από την καμπύλη για τη δεδομένη τιμή του h , η δοκός θα σπάσει.



Σχήμα 3

Τώρα σίμαστε σε θέση να κάνουμε μια εκτίμηση για το πάχος της δοκού το οποίο μπορεί να σπάσει ένας αθλητής του καράτε. Η δύναμη που αναπτύσσει το χέρι ενός τυπικού αθλητή ανέρχεται σε $F = 250$ N. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3, για $u = 0$ ένας τυπικός αθλητής δεν καταφέρνει να σπάσει ούτε μια λεπτή μάλλον σανίδα, με πάχος μόλις 1,5 cm. Για να επιτύχει κάτι τέτοιο, πρέπει να ασκήσει δύναμη περίπου 300 N.

Η πειραματική τιμή της μέγιστης ταχύτητας του χεριού είναι περίπου 10 m/s. Εισάγοντας τις τιμές $u = 10$ m/s και $F = 250$ N στον τύπο για το h , βρίσκουμε το αντίστοιχο πάχος της δοκού: $h = 6$ cm. Πρόκειται για ένα μάλλον μεγάλο αποτέλεσμα: ένα τέτοιο παχύ ξύλο θα καταφέρουν να το σπάσουν μόνον πεπιραμένοι καρατέκα, με εξαιρετική τεχνική χτυπήματος και άριστη ψυχολογική προπαρασκευή. Ωστόσο, δεσι αναγνώστες έχουν την περιέργεια, ας δοκιμάσουν να σπάσουν μια σανίδα πάχους 2 cm: οι απαιτούμενες τιμές της ταχύτητας και της δύναμης βρίσκονται εντός των δυνατότητων ενός μέσου ανθρώπου. Πά-

ντως, οφείλουμε να υπενθυμίσουμε σε όσους επιχειρήσουν το τόλμημα ότι είναι πολύ σημαντικό να ακολουθήσουν το βασικό ψυχολογικό «μυστικό» του καράτε: ποτέ μην αμφιβάλλετε για τον εαυτό σας.

Παράρτημα 1

Ας υπολογίσουμε την τάση στην επιφάνεια της δοκού. Θεωρούμε δύο συμμετρικές διατομές AB και $A'B'$ (Σχήμα 2), κάθετες στον άξονα CC και απέχουσες μικρή απόσταση l_0 κατά μήκος του εν λόγω άξονα. Ας εστιάσουμε την προσοχή μας στο στοιχείο $AA'B'B$. Λόγω του μικρού μεγέθους του, οι καμπύλες AA' , NN' και BB' είναι δυνατόν να προσεγγιστούν με τόξα κύκλων των οποίων το κέντρο κείται επί του λεγόμενου άξονα κάμψης O' , ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η εξωτερική επιφάνεια της δοκού ανάμεσα στα σημεία A και A' εκτείνεται, ενώ η εσωτερική του επιφάνεια ανάμεσα στα σημεία B και B' συμπέζεται. Όταν η δοκός παραμένει άκαμπτη, τα μήκη των καμπύλων AA' και BB' συμπίπτουν και ισούνται με l_0 (το μήκος της κεντρικής καμπύλης NN' , η οποία διατηρεί σταθερό το μήκος της κατά την κάμψη). Εστω R η ακτίνα καμπυλότητας της γραμμής NN' . Τότε ισχύει $l_0 = Ra$, όπου a η επίκεντρη γωνία η οποία βαίνει στο τόξο NN' . Εφόσον το πάχος της δοκού παραμένει μικρό —δηλαδή εφόσον $h \ll R$ —, το μήκος της καμπύλης AA' ισούται με $l_1 = (R + h/2)a$, και η μήκυνσή της λόγω της κάμψης είναι $\Delta l = l_1 - l_0 = ha/2$. Σύμφωνα με το νόρο του Hooke, η τάση στην εξωτερική επιφάνεια της δοκού δίνεται από τον τύπο

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{Eh}{2R}.$$

Παράρτημα 2

Ας προσδιορίσουμε την ακτίνα καμπυλότητας στο μέσο ($y = 0$) μιας κεκαμμένης δοκού. Υπενθυμίζουμε ότι, εάν R είναι η ακτίνα καμπυλότητας οποιασδήποτε καμπύλης σε ένα δεδομένο σημείο, τότε ο κύκλος ακτίνας R που διέρχεται από το συ-

γκεκριμένο σημείο και του οποίου το κέντρο κείται επί της καθέτου στην καμπύλη στο σημείο αυτό συμπίπτει (συνεπεία του ορισμού της ακτίνας καμπυλότητας) με την καμπύλη, εφόσον την εξετάζουμε αρκούντως εγγύς του σημείου. Όταν ισχύει η συνθήκη $|py/t| \ll 1$, η συνάρτηση $x(y)$ λαμβάνει την προσεγγιστική μορφή

$$x(y) = x_0 - \frac{x_0}{2} \left(\frac{\pi}{t} \right)^2 y^2.$$

Για να γράψουμε την ανωτέρω έκφραση χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή προσεγγιστική σχέση συν $y = 1 - \gamma^2/2$, για $|\gamma| \ll 1$.

Ο κύκλος ακτίνας R και κέντρου O' (Σχήμα 2), ο οποίος διέρχεται από το σημείο $(x_0, 0)$ και τον οποίο θεωρούσαμε στο Παράρτημα 1, περιγράφεται από την εξίσωση

$$y^2 + (x - x_0 + R)^2 = R^2,$$

την οποία μπορούμε εύκολα να λύσουμε, για να προσδιορίσουμε τη μετατόπιση $x(y)$:

$$x(y) = x_0 - R + R \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2}.$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε μιαν ακόμη προσεγγιστική έκφραση, την $\sqrt{1 - y} = 1 - y/2$, για $|y| \ll 1$, καταλήγουμε στον εξής τύπο, ο οποίος ισχύει για $|y/R| \ll 1$:

$$x(y) = x_0 - \frac{y^2}{2R}.$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις που δίνουν το $x(y)$, βρίσκουμε αμέσως την ακτίνα καμπυλότητας:

$$R = \left(\frac{t}{\pi} \right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

Παράρτημα 3

Ας προσδιορίσουμε τώρα την εξάρτηση της μετατόπισης x_0 του κέντρου μιας δοκού που ερείβεται σε δύο υποστηρίγματα από την εξωτερική δύναμη F , η οποία κατανέμεται κατά μήκος των κεντρικών ινών και έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Η μάζα της δοκού θα θεωρηθεί αρελλητέα.

Λόγω της συμμετρίας που υποθέσαμε, οι κάθετες δυνάμεις που ασκούν τα δύο υποστηρίγματα, και οι οποίες αθροιζόμενες αντισταθμίζουν την F , είναι ίσες. Κοιτάζουμε τη διατομή της δοκού διά του κέντρου του (Σχήμα 2), και θεωρούμε τη συνθήκη ισορροπίας για το αριστερό ήμισυ της δοκού. Εκ δεξιών του ασκείται η εξωτερική δύναμη $F/2$, η οποία εφαρμόζεται πλησίον του άκρου του και έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Η εν λόγω δύναμη αντισταθμίζεται από την κάθετη δύναμη του αριστερού υποστηρίγματος. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των ροπών ως προς το κέντρο της δοκού καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τη ροπή M λόγω της αντίστασης του αριστερού υποστηρίγματος:

$$M = \frac{Fl}{4}.$$

Από την άλλη, όμως, αυτή η ροπή αντισταθμίζεται από τον ελκυσμό και τη θλίψη λόγω των τάσεων που ασκεί το δεξιό ήμισυ της δοκού στο αριστερό ήμισυ στο επίπεδο της διατομής. Αυτή η ροπή μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο για τη σ , αρκεί να τον τροποποιήσουμε κατάλληλα, έτσι ώστε να δίνει την τάση στο εσωτερικό της δοκού στην κατεύθυνση του άξονα των y . Όπως προκύπτει από τη συλλογιστική που μας οδήγησε στην συναγωγή αυτού του τύπου (Παράρτημα 1), πρέπει να αντικαταστήσουμε τη μετατόπιση $h/2$ από τη γραμμή NN' , η οποία αντιστοιχεί στο σημείο της εξωτερικής επιφάνειας της δοκού, με την απόσταση δ από την ίδια γραμμή ($-h/2 < \delta < h/2$). Εν τοιαύτη περιπτώσει, η τάση στο εσωτερικό της δοκού θα ισούται με

$$\sigma = \frac{E\delta}{R}.$$

Έτσι, η ολική ροπή ως προς το κέντρο της δοκού που οφείλεται στις δυνάμεις ελαστικού ελκυσμού και θλίψης θα ισούται με

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} d\delta \sigma \cdot d\delta = \\ = \frac{E}{R} d \int_{-h/2}^{h/2} \delta^2 \cdot d\delta = \frac{Eh^3 d}{12R}.$$

Εισάγοντας σ' αυτή την έκφραση τον τύπο που δίνει την ακτίνα της μπολότητας και εξισώνοντας τα δύο μέλη των δύο τύπων για τη ροπή M , βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει τη δύναμη F και τη μετατόπιση x_0 :

$$x_0 = \frac{3Ft^3}{\pi^2 Eh^3 d}.$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γραφεί με τη μορφή $F = kx_0$, οπότε προκύπτει αμέσως η έκφραση για τη συθερά ελατηρίου k :

$$k = \frac{\pi^2 Eh^3 d}{3t^3}.$$

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- «Η μεγάλη βουτιά», Α. Δοζόρος, Ιούλιος/Αύγουστος 1995.
- «Περί παραμορφώσεων», Α. Λεονίδης, Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1995.
- «Κύματα στα ελαστικά των ατοκινήτων», Λ. Grodko, Ιανουάριος Φεβρουαρίου 1999.

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ



ΚΑΤΟΠΤΡΟ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

Πανεπιστημίου & Πεσμαζόγλου 5,
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785
Web site: www.katoptro.gr
e-mail: katoptro@otenet.gr

Αριθμητικά δεδομένα σε γεωμετρικά προβλήματα

Αυτές οι ειδικές περιπτώσεις έχουν γενικό ενδιαφέρον

S.V. Ovchinnikov και I.F. Sharygin

ΤΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ προβλήματα που συναντάμε στο σχολείο τα αριθμητικά δεδομένα δεν παιζουν κανένα ρόλο. Μπορούμε, κατά κανόνα, να λύσουμε τη γενική περίπτωση αυτών των προβλημάτων χρησιμοποιώντας αλγεβρικές πράξεις και μετά να αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές στους τύπους που προκύπτουν. Υπάρχουν, δημοσίευσης περιπτώσεις όπου η χρήση συγκεκριμένων αριθμητικών δεδομένων μάς επιτρέπει να καταλήξουμε σε απλούστερες λύσεις. Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα τα οποία επδεικνύουν πώς τα αριθμητικά δεδομένα μπορούν να επηρέασουν τη λύση ενός προβλήματος.

Πρόβλημα 1. Η χορδή AB ενός κύκλου φαίνεται υπό γωνία 120° . Το σημείο C ανήκει στο τόξο, το σημείο D ανήκει στη χορδή AB , $AD = 2$, $BD = 1$ και $DC = \sqrt{2}$. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABC .

Παρατηρούμε ότι $\angle ODC = 90^\circ$. Πράγματι, ας προσκτείνουμε το τμήμα CD όπου τμήσει τον δεδομένο κύκλο (Σχήμα 1). Αφού $AD \cdot BD = CD \cdot DE$, βρίσκουμε ότι $DE = CD$

$= \sqrt{2}$ και, επομένως, $OD \perp CE$. Από το τρίγωνο AOF μπορούμε να βρούμε την ακτίνα του κύκλου: ισούται με $\sqrt{3}$. Πράγματι, στο τρίγωνο AOF (που έχει γωνίες 30° , 60° και 90°) έχουμε ότι $AF = (1/2)AB = 3/2$, και συνεπώς $OF = \sqrt{3}/2$ και $AO = \sqrt{3}$. Επίσης, $DF = AD - AF = 1$, και συνεπώς οι γωνίες του τριγώνου ODF είναι επίσης 30° , 60° και 90° . Άρα, $\angle CDA = 30^\circ$ και $\angle CDB = 150^\circ$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τα εμβαδά των τριγώνων ADC και CDB από τις δύο πλευρές τους και τη μεταξύ τους γωνία:

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}(CD)(AD)\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$S_{CDB} = \frac{1}{2}(CD)(DB)\sin 150^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

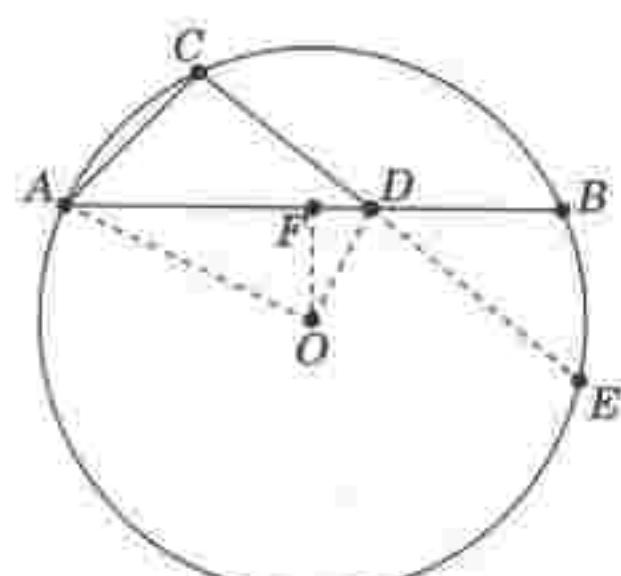
Επομένως,

$$S_{ABC} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Παρατηρούμε ότι τα αριθμητικά δεδομένα αυτού του προβλήματος έχουν επλεγεί πολύ προσεκτικά. Αν προσπαθήσουμε να επιλύσουμε τη γενική μορφή του προβλήματος —αν δηλαδή χρησιμοποιήσουμε τυχαίους αριθμούς στα αρχικά δεδομένα—, θα διαπιστώσουμε ότι η απόδειξη είναι εξαιρετικά επίπονη. Καλούμε, πάντως, τους αναγνώστες να προσπαθήσουν να λύσουν το πρόβλημα και στη γενική του μορφή.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα όπου οι αριθμητικές τιμές των αρχικών δεδομένων δεν έχουν καμία σημασία και χρησιμοποιούνται μόνο στο τελικό στάδιο της λύσης, κατά το οποίο τις αντικαθιστούμε στον γενικό τύπο που έχει προκύψει.

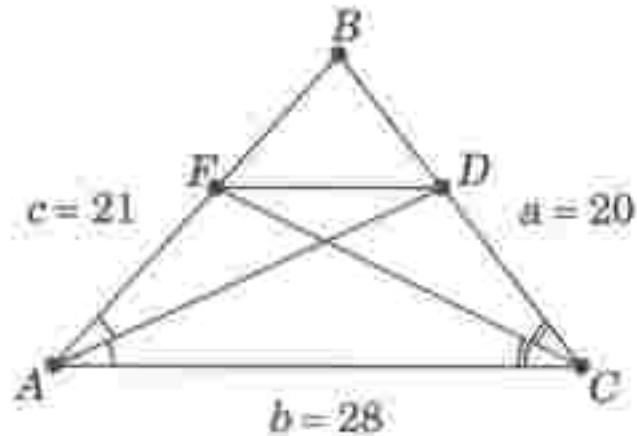
Πρόβλημα 2. Σε τρίγωνο ABC , η AD είναι διχοτόμος της γωνίας BAC και η CF διχοτόμος της γωνίας ACB



Σχήμα 1

(το σημείο D ανήκει στην πλευρά BC και το σημείο F στην πλευρά AB του τριγώνου). Βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ABC και AFD εάν $AB = 21$, $AC = 28$ και $CB = 20$.

Συμβολίζουμε τα μήκη των πλευρών AB , BC και CA με c , a και b , αντίστοιχα (Σχήμα 2). Θα χρησιμοποιήσουμε μια τεχνική που είναι χρήσιμη όταν δουλεύουμε με τις διχοτόμους ενδέιξεις των γωνιών. Αν $BD = n$ και $DC = m$, τότε γνωρίζουμε ότι $m/n = b/c$ (αυτό το πολύ γνωστό αποτέλεσμα καλείται θεώρημα των διχοτόμων των γωνιών). Επομένως,



Σχήμα 2

μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό k τέτοιον ώστε $m = bk$, $n = ck$. Τότε, $m + n = bk + ck = a$ και, επομένως, $k = a/(b + c)$. Έχουμε λοιπόν

$$BD = \frac{ab}{b+c}, \quad DC = \frac{ac}{b+c}.$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$AF = \frac{bc}{a+b}.$$

Τα τρίγωνα ABD και ABC έχουν κοινό το ύψος από την κορυφή A , και συνεπώς ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των βάσεων τους. Δηλαδή,

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c}.$$

Οροίως,

$$\frac{S_{AFD}}{S_{ABD}} = \frac{AF}{AB} = \frac{b}{a+b},$$

και άρα

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AFD}} = \frac{(a+b)(b+c)}{bc}.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις αριθμητι-

κές τιμές των a , b και c στον τελευταίο τύπο, προκύπτει

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AFD}} = 4.$$

Επομένως, ο ζητούμενος λόγος ισούται με 4.

Το επόμενο πρόβλημα μπορεί να λυθεί στη γενική του μορφή, αλλά η λύση του είναι πολύ απλούστερη αν αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές την κατάλληλη στιγμή.

Πρόβλημα 3. Σε τρίγωνο ABC , $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$ και BD είναι η διχοτόμος της γωνίας ABC . Εγγράφουμε κύκλους στα τρίγωνα ABD και BCD , οι οποίοι εφάπτονται της BD στα σημεία M και N , αντίστοιχα. Βρείτε το μήκος του τρίγραμματος MN .

Από τις τιμές που έχουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ABC συμπεραίνουμε ότι είναι ορθογώνιο. Αυτό μας οδηγεί στο να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις μετρικές ιδιότητες των ορθογώνιων τριγώνων.

Ωστόσο, υπάρχει μια απλή λύση του προβλήματος και για τυχαίο τρίγωνο ABC . Συμβολίζουμε την AB με c , την BC με a και την AC με b (Σχήμα 3). Όπως και στο Πρόβλημα 2, από το «θεώρημα των διχοτόμων των γωνιών» παίρνουμε

$$AD = \frac{bc}{a+c}, \quad CD = \frac{ab}{a+c}.$$

Εισάγουμε τους αγνώστους $x = BM$, $y = MN$ και $z = ND$. Οι εφαπτόμενες που φέρουμε από ένα σημείο σε κύκλο είναι ίσες, και, επομένως, έχουμε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x + y + \left(\frac{ab}{a+c} - z \right) = a, \\ x + \left(\frac{bc}{a+c} - z - y \right) = c. \end{cases}$$

Αν αφαιρέσουμε τη δεύτερη εξισώση από την πρώτη, παίρνουμε

$$2y + \frac{ab}{a+c} - \frac{bc}{a+c} = a - c,$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$y = \frac{1}{2} \frac{(a-c)(a+c-b)}{a+c}.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές των a , b , c , παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα: $MN = 1/7$.

Ας εξετάσουμε τώρα κάποια πρόβλημα, η λύση των οποίων γίνεται πολύ απλούστερη αν επλέξουμε ειδικές αριθμητικές τιμές.

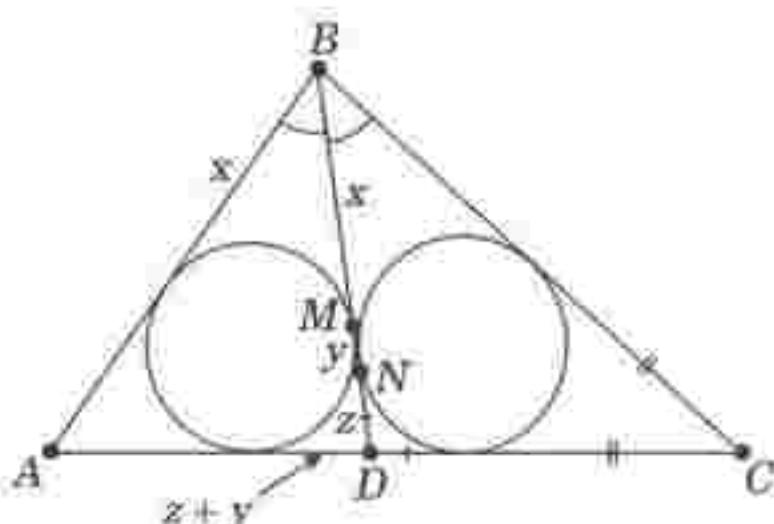
Πρόβλημα 4. Σε τρίγωνο ABC , $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$ και $BC = 5$. Θεωρούμε το σημείο D στην πλευρά AB τέτοιο ώστε $AD = 1$. Βρείτε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των κύκλων που είναι περιγεγραμμένοι στα τρίγωνα DBC και ADC .

Το πρόβλημα λύνεται εύκολα μαντέψουμε ότι το CD είναι ύψος του τριγώνου ABC . Σε αυτή τη περίπτωση, τα κέντρα των περιγραμμένων στα τρίγωνα DBC και ADC κύκλων είναι μέσα των πλευρών AC και BC . Επομένως, η ζητούμενη απόσταση ισούται με το μήκος της μεσοπαραλήλου προς την AB που είναι 2 (Σχήμα 4). Το γεγονός ότι το CD είναι ύψος προκύπτει από την εξισωση

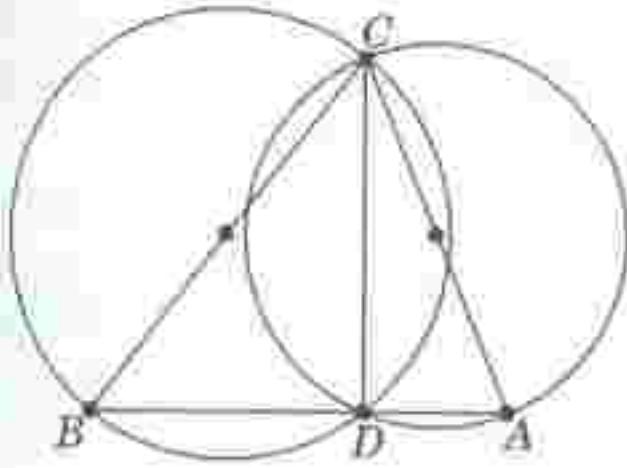
$$BC^2 - AC^2 = BD^2 - DA^2 = 8.$$

(Στην πραγματικότητα, υπάρχει ένα θεώρημα της γεωμετρίας, σύμφωνα με το οποίο το σημείο C ανήκει στην κάθετη που διέρχεται από το σημείο D μιας ευθείας AC , αν $BC^2 - AC^2 = BD^2 - AD^2$. Η απόδειξη του, που βασίζεται στο πυθαγόρειο θεώρημα, είναι απλή.)

Πώς όμως μπορούμε να μαντέψουμε ότι το CD είναι ύψος; Αυτή η παρατήρηση αποτελεί το βασικό σημείο της απόδειξής μας: ο υπόλοι-



Σχήμα 3



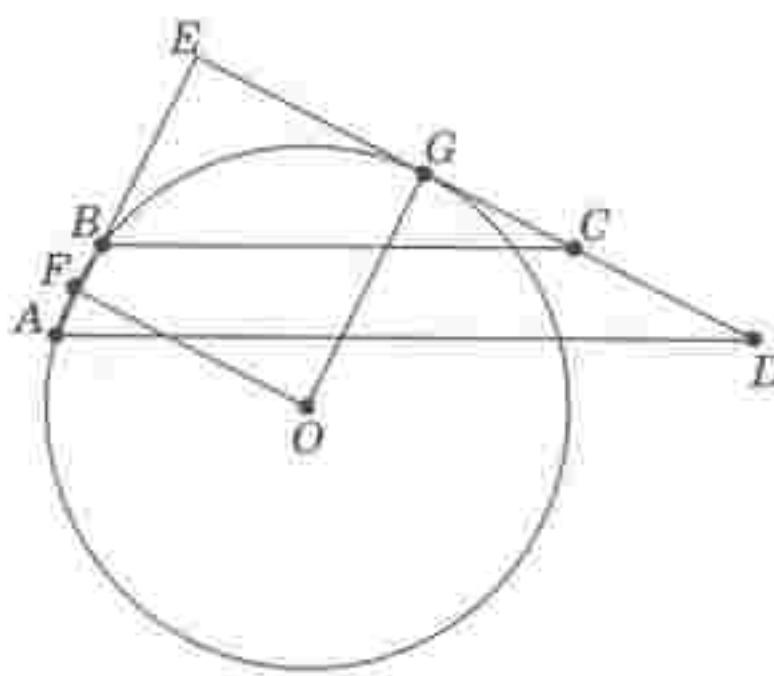
Σχήμα 4

πος συλλογισμός είναι απλός. Είναι αδύνατο να καθορίσουμε μια γενική μέθοδο που θα μας επιτρέψει να μαντεύουμε. Ωστόσο, ένα ακριβές σχήμα μπορεί να μας βοηθήσει να διατυπώσουμε μια εικασία σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, ανεξάρτητα από το αν τα δεδομένα μας έχουν αριθμητικές ή συμβολικές τιμές. Αν τα δεδομένα είναι αριθμητικά, το σχέδιο πρέπει να βασιστεί σε αυτά. Αν λοιπόν κατασκευάσουμε ένα ακριβές σχήμα για το προηγούμενο πρόβλημα, θα μπορέσουμε εύκολα να μαντέψουμε ότι το CD είναι ύψος.

Πρόβλημα 5. Σε τραπέζιο $ABCD$ δίνονται τα μήκη των βάσεων $AD = 39$ και $BC = 26$ και των πλάγιων πλευρών $AB = 5$ και $CD = 12$. Βρείτε την ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B και εφάπτεται στην πλευρά CD ή στην προέκτασή της.

Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και CD έως το σημείο τοπής τους και σχηματίζουμε το τρίγωνο AED (Σχήμα 5). Από τα διάστημα BEC και AED βρίσκουμε $BE = 10$ και $CE = 24$. Αν κατασκευάσουμε το σχήμα με αρκετή ακριβεία, θα διαπιστώσουμε με ευκολία ότι $\angle AED = 90^\circ$. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται εύκολα: $AE^2 + ED^2 = AD^2$. Εστω O το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B και εφάπτεται της ED στο σημείο G . Φέρουμε την OG κάθετη επί την AB . Τότε, το σημείο F είναι μέσον της χορδής AB . Προφανώς, $OG = EF = 12,5$. Επομένως, η ακτίνα του κύκλου ισούται με 12,5.

Στα επόμενα προβλήματα ο χαρακτήρας των αριθμητικών δεδομένων είναι ιδιόμορφος. Σε πρώτη ματιά δεν φαίνεται να επηρεάζουν τη λύ-



Σχήμα 5

ση. Όμως, κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος γίνεται φανερό ότι το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει μόνο γι' αυτές τις ιδιαίτερες τιμές. Σε προβλήματα τέτοιου είδους η πορεία που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι σχεδόν φανερή, παρότι δεν είναι αρέσως εμφανές αν οδηγεί σε αποτελέσματα.

Πρόβλημα 6. Ας θεωρήσουμε ένα κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ με μοναδιαίο εμβαδόν. Δίνονται τα σημεία K, L, M και N επί των πλευρών AB, BC, CD και DA , αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$$\frac{AK}{KB} = 2, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CM}{MD} = 1,$$

$$\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}.$$

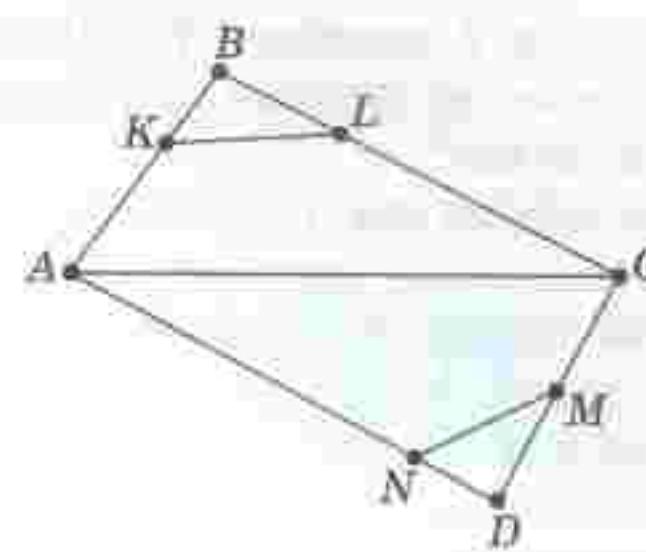
Βρείτε το εμβαδόν του εξαγώνου $AKLCMN$. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων KBL και ABC (Σχήμα 6) ισούται με¹

$$\frac{BK \cdot BL}{AB \cdot BC} = \frac{1}{12}.$$

Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων MND και ADC ισούται επίσημε με

$$\frac{DN \cdot DM}{AD \cdot CD} = \frac{1}{12}.$$

Επομένως, το άθροισμα των εμβα-



Σχήμα 6

δών των τριγώνων KBL και MND είναι $1/12$, και συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με $11/12$.

Η λύση στηρίχτηκε στην ισότητα των δύο υπολογιζόμενων λόγων εμβαδών. Το πρόβλημα είναι πολύ δυσκολότερο στη γενική περίπτωση.

Πρόβλημα 7. Τρεις πόλεις A, B και C συνδέονται μέσω ευθύγραμμων δρόμων. Ένα τετράγωνο χωράφι με πλευρά $(1/2)AB$ συνορεύει με ένα τμήμα του δρόμου AB . Ένα άλλο τετράγωνο χωράφι με πλευρά BC συνορεύει με το δρόμο BC , και ένα ορθογώνιο δάσος συνορεύει με το δρόμο CA . Το μήκος του δάσους είναι CA και το πλάτος του 4 km . Το εμβαδόν του δάσους είναι 20 km^2 μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των δύο χωραφιών. Βρείτε το εμβαδόν του δάσους.

Σε πρώτη ματιά τα δεδομένα δεν επαρκούν για τη λύση του προβλήματος. Ας κάνουμε, όμως, μερικούς υπολογισμούς. Συμβολίζουμε με c , a και b τις πλευρές AB, BC και CA του τριγώνου ABC . Τότε, $4b = 20 + c^2/4 + a^2$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $b \leq a + c$. Αν εκφράσουμε το b συναρτήσει των a και c και αντικαταστήσουμε στην τελευταία ανισότητα, θα πάρουμε

$$\frac{1}{4} \left(20 + \frac{c^2}{4} + a^2 \right) \leq a + c.$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$\left(\frac{c}{2} - 4 \right)^2 + (a - 2)^2 \leq 0.$$

Τα τετράγωνα δεν μπορεί να είναι αργητικά, και επομένως παίρνουμε $c = 8\text{ km}$, $a = 2\text{ km}$, και από τη σχέ-

1. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων που έχουν μία γωνία κοινή ισούται με το λόγο των γινομένων των δύο πλευρών που περιέχουν την κοινή γωνία.

ση για το b προκύπτει $b = 10$ km. Συνεπώς, το εμβαδόν του δάσους είναι 40 km^2 .

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι ίσως ο μοναδικός τρόπος για να λύθει αυτό το πρόβλημα. Η απάντηση που βρήκαμε είναι μοναδική, λόγω των ειδικά επιλεγμένων τιμών των αρχικών δεδομένων. Στην πραγματικότητα, οι τρεις πόλεις A , B , C βρίσκονται σε μία ευθεία, και αυτός είναι ο λόγος που τα δεδομένα μάς αρκούν για την επίλυση του προβλήματος.

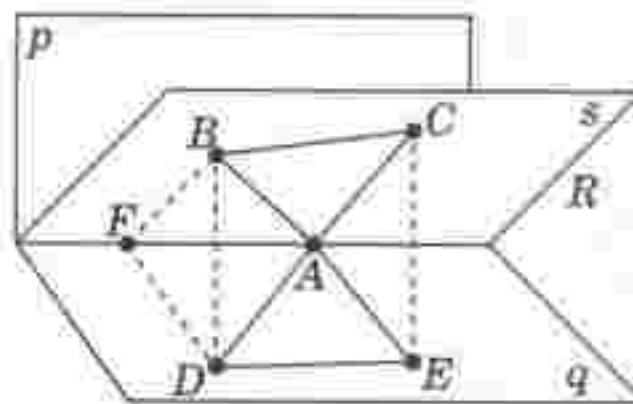
Πρόβλημα 8. Οι ορθές προβολές ενός τριγώνου ABC σε δύο κάθετα επίπεδα είναι ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές μοναδιαίου μήκους. Βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ABC αν δίνεται ότι $AB = \sqrt{5}/2$.

Συμβολίζουμε τα δεδομένα επίπεδα με p και q (Σχήμα 7). Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι μία από τις κορυφές του τριγώνου, ας πούμε η A , ανήκει στην τομή των επιπέδων p και q (η ευθεία R του Σχήματος 7). Αφού οι προβολές των πλευρών AB και AC στα επίπεδα p και q είναι ίσες, τα σημεία B και C ανήκουν στο επίπεδο που διχοτομεί τη διεδρη γωνία των επιπέδων p και q (είναι το επίπεδο s στο Σχήμα 7).² Εστω D και E οι προβολές των σημείων B και C στο επίπεδο q . Εστω BF η κάθετη από το σημείο B προς την ευθεία R . Παρατηρούμε ότι $\angle BFD = 45^\circ$.

Θα μπορούσαμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε μία τυχαία τιμή για το AB , έστω a , και να λύσουμε το πρόβλημα στη γενική του μορφή. Όμως, η χρήση της ιδιαίτερης αριθμητικής τιμής $AB = \sqrt{5}/2$ απλοποιεί τη λύση κατά πολύ.

Πράγματι, από το τρίγωνο ABD βρίσκουμε ότι $BD = 1/2$ (αφού $\angle ADB = 90^\circ$ και τα AB και AD είναι γνωστά). Αφού $\angle BFD = 45^\circ$, έχουμε ότι $FD = BD = 1/2$. Επίσης, $\angle AFD = 90^\circ$ και, επομένως, από το τρίγωνο AFD έχουμε $\angle FAD = 30^\circ$. Προκύπτουν τώρα οι εξής σχέσεις: $AE \perp AF$,

2. Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να αποδείξουν αυτό το αποτέλεσμα, δείχνοντας ότι το σημείο B ωφελείται από τα επίπεδα p και q .



Σχήμα 7

$\angle CAE = 45^\circ$, $\angle CEA = 90^\circ$ και $AC = \sqrt{5}$. Από το ορθογώνιο τραπέζιο $CBDE$ βρίσκουμε $(CE - BD)^2 + DE^2 = BC^2$. Επομένως, $BC = \sqrt{5}/2$ και η περίμετρος του τριγώνου ABC ισούται με $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Σε αυτό το πρόβλημα οι αριθμητικές τιμές των δεδομένων μας μειώσαν κατά πολύ τους απαιτούμενους υπολογισμούς. Σε άλλες περιπτώσεις, όμως, η χρήση των αριθμητικών δεδομένων καθιστά τους υπολογισμούς πολύ πλοκούς, και μερικές φορές μπορεί ακόμη και να αποκρύψουν μια απλή γεωμετρική σημασία του προβλήματος.

Ασκήσεις

1. Οι ορθές προβολές ενός επίπεδου τετραπλεύρου σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα είναι τετράγωνα με πλευρές μήκους 2. Μία από τις διαγωνίους του δεδομένου τετραπλεύρου έχει μήκος $\sqrt{14}$. Βρείτε το μήκος της άλλης διαγωνίου.

2. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ABC , $AB = 15$, $BC = 10$ και η γωνία BAC ισούται με τοξον (7/9). Φέρουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC , και μια χορδή BE η οποία διέρχεται από σημείο D της πλευράς AC τέτοιο ώστε $AD = 9$. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABC .

3. Δίνεται τρίγωνο ABC με πλευρές 5, 2, και $\sqrt{22}$. Επιλέγουμε ένα σημείο D στην πλευρά AC τέτοιο ώστε $BD = 3$. Βρείτε την απόσταση μεταξύ του D και του κέντρου του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ABC κύκλου.

4. Σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε ένα κανονικό τετράεδρο $SABC$ με ακρές μήκους a . Επιλέγουμε σημείο M στην ακρή SA τέτοιο ώστε $AM = MS$, και σημείο N στην ακρή BC τέτοιο ώστε $2CN = NB$. Η ευθεία MN

τέρνει τη δεδομένη σφαίρα στα σημεία P και Q . Βρείτε το μήκος του τρίγωνος PQ .

5. Σε τρίγωνο ABC με πλευρές $AB = \sqrt{3}$ cm, $BC = 4$ cm και $AC = \sqrt{7}$ cm, η BD είγει διάμεσος. Εγγράφουμε κύκλους στα τρίγωνα ABD και BDC οι οποίοι εφάπτονται της BD στα σημεία M και N . Βρείτε το μήκος του τρίγωνος MN .

6. Δύο κύκλοι ακτίνας r εφάπτονται μεταξύ τους. Επιπλέον, και οι δύο τους εφάπτονται εξωτερικά με έναν ιστό κύκλο ακτίνας R στα σημεία A και B , αντίστοιχα. Βρείτε το r , αν $AB = 12$ cm και $R = 8$ cm.

7. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC με πλευρά μήκους 3 είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Το σημείο D ανήκει στον κύκλο, και η χορδή AD έχει μήκος $\sqrt{3}$. Βρείτε το μήκος των χορδών BD και CD .

8. Δίνεται τρίγωνο ABC μοναδιαίου εμβαδού. Επιλέγουμε τα σημεία P , Q και R επί των διαμέσων AK , BL και CN , αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$$\frac{AP}{PK} = 1, \quad \frac{BQ}{QL} = \frac{1}{2}, \quad \frac{CR}{RN} = \frac{5}{4}$$

Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου PQR .

9. Ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπέδου είναι 150 cm^3 , το εμβαδόν της επιφάνειάς του 280 cm^2 και η περίμετρος της βάσης του 40 cm. Βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπέδου.

10. Σφαίρα ακτίνας R είναι εγγεγραμμένη σε διεδρη γωνία 60° . Βρείτε την ακτίνα μιας σφαίρας που είναι εγγεγραμμένη στην ίδια γωνία και εφάπτεται της πρώτης σφαίρας, αν είναι γνωστό ότι η ευθεία που συνδέει τα κέντρα των δύο σφαιρών σχηματίζει γωνία 45° με την ακρή της διεδρης γωνίας.

11. Δίνεται ένα τρίγωνο ABC με πλευρές $AB = 4$, $BC = 3$ και $AC = 5$. Επιλέγουμε ένα σημείο D επί της πλευράς AB τέτοιο ώστε $DB = 7/8$. Σχεδιάζουμε έναν κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα σημεία C , D και B , ο οποίος τέμνει την AC στο σημείο E . Βρείτε το μήκος του τρίγωνος BE .

Τα «ημ» και τα «συν» που γνωρίζετε...

...και μερικά που δεν γνωρίζετε

I.M. Yaglom

TΟ ΗΜΙΤΟΝΟ ΚΑΙ ΤΟ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ είναι τα βασικά στοιχεία της τριγωνομετρίας, της επιστήμης που μετρά τα μέρη των τριγώνων. Οι συναρτήσεις αυτές χρησιμοποιούνται από μηχανικούς κατασκευών, γεωδαιτες και άλλους.

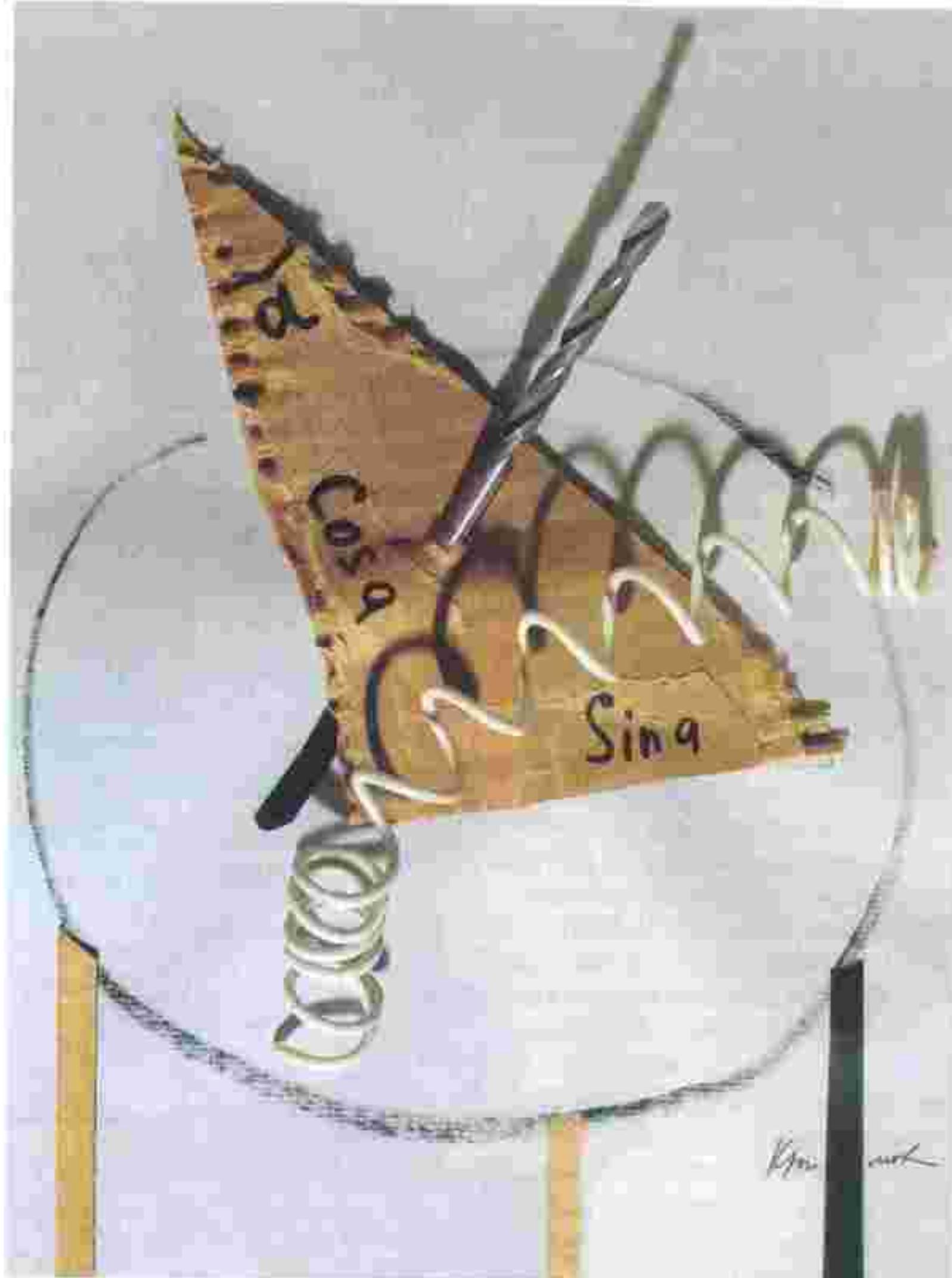
Το ημιτόνο μιας γωνίας θ ισούται, εξ ορισμού, με την τετραγένη γενάριο M επί του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, τέτοιο ώστε η ακτίνα OM να σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα x . Το συνημιτόνο της γωνίας θ είναι η τεταγμένη x αυτού του σημείου. Οι δύο συναρτήσεις συνδέονται με τις σχέσεις

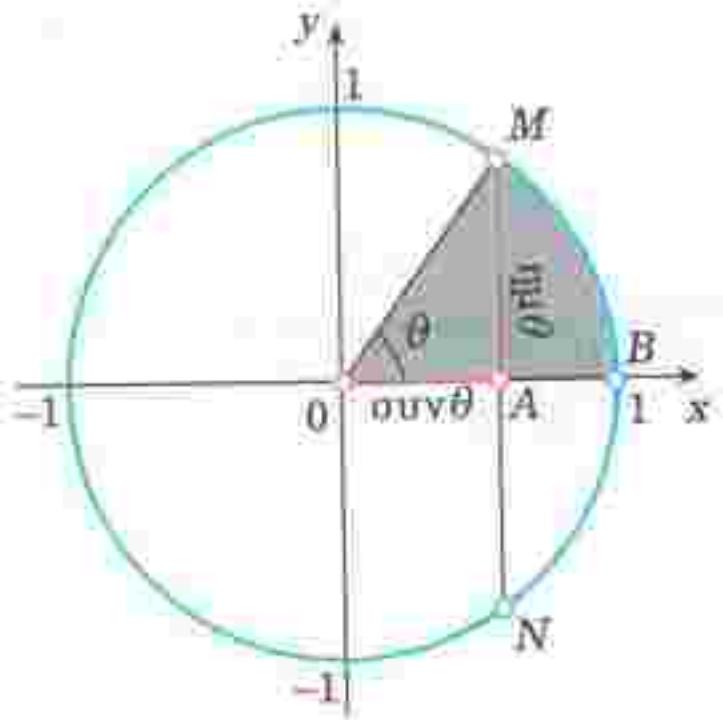
$$\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1$$

και

$$\sigma \nu \theta = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι το ημιτόνο αυτό καθαυτό δεν εισήχθη από τους αρχαίους Έλληνες, παρότι αυτοί συνέβαλαν κατά κύριο λόγο στη μελέτη της γεωμετρίας του τριγώνου. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τη χορδή ενός τόξου —όπος, για παράδειγμα, ο Πτολεμαίος στον περίφημο πίνακα χορδών στη *Μεγίστη μαθηματική σύνταξη* (Αλμαγέστη). Η χρήση του ημιτόνου προέρχεται από τους Ινδούς, τα μα-





Σχήμα 1

θηματικά ενδιαφέροντα των οποίων ήταν περισσότερο προσανατολισμένα στις πρακτικές εφαρμογές. Ο λατινικός όρος *sinus* για το ημίτονο έχει τη ρίζα του σε μια γραμματική παρανότητη. Οι Ινδοί, αντί ολόκληρης της χορδής που ορίζεται από ένα δεδομένο τόξο, χρησιμοποιούσαν ευρέως στους υπολογισμούς τους το μήκος της (στο Σχήμα 1, $MA = \text{ημ} \theta = \frac{1}{2} MN$). Το ονόμαζαν *ardhajīva* —«ήμισυ της χορδής του τόξου». Αργότερα αποκόπηκε η λέξη *ardha* («ήμισυ»), και το *jīva* κατέληξε να σημαίνει «ευθεία του ημιτόνου» (η MA στο Σχήμα 1). Οι Αραβες, μαζί με την ελληνική γνώση, μετέδωσαν επίσης στην Ευρώπη την επιστήμη και τον πολιτισμό των Ινδών. Για παράδειγμα, τα «αραβικά ψηφία» που χρησιμοποιούμε προέρχονται από τους Ινδούς. Και η έννοια του ημιτόνου έφτασε στην Ευρώπη μέσω των Αράβων. Οι Αραβες μετάφρασαν το *jīva* ως *jīb*, λέξη που στα αραβικά γράφεται με τον ίδιο τρόπο όπως το *jīb* (στην αραβική γραφή τα φωνήντα δηλώνονται με ειδικά σύμβολα πάνω ή κάτω από τη γραμμή του κειμένου και μερικές φορές απλώς παραλείπονται). Η λέξη *jīb* σημαίνει «κοιλότητα», και όταν μεταφράστηκαν στα λατινικά οι αραβικές πραγματείες του 12ου αιώνα, η λέξη αποδόθηκε ως *sinus*, που είναι η λατινική λέξη με την αντίστοιχη σημασία.

Οι Ινδοί χρησιμοποιούσαν και το συνημίτονο. Το ονόμαζαν *kotijīya* —το ημίτονο του συμπληρώματος (η διαφορά από τις 90°)— λέξη που

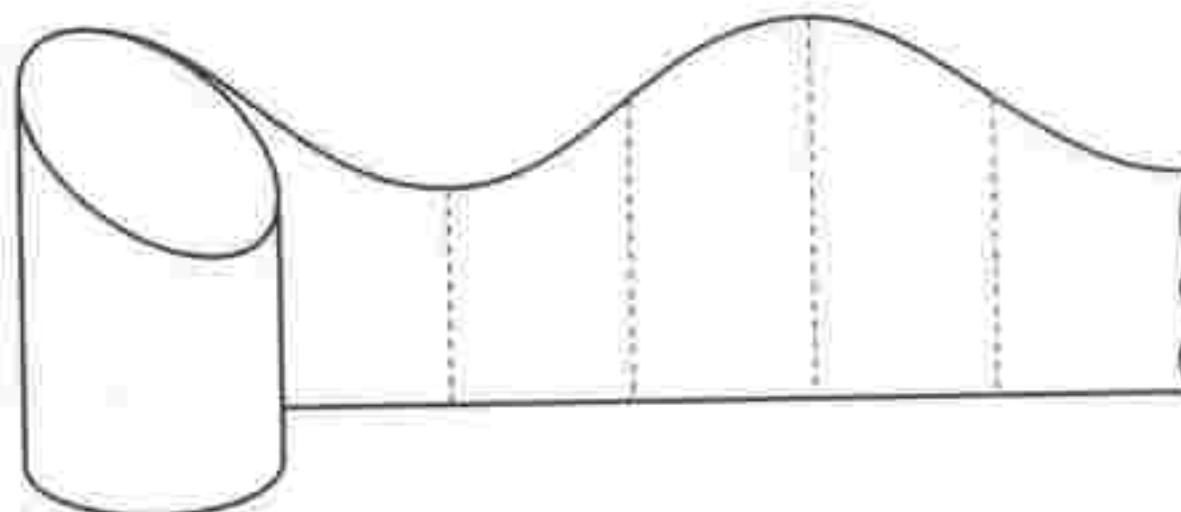
στα λατινικά αποδόθηκε ως *sinus complementi* —συμπλήρωμα του ημιτόνου— ή *cosine* για συντομία. Μία ακόμη τριγωνομετρική συνάρτηση που εισήγαγαν οι Ινδοί ήταν η *akramajīva*, η διαφορά μεταξύ της ακτίνας και της «ευθείας του συνημίτονου». Στην Ευρώπη ονομάστηκε *sinus versus* —αντίστροφο ημίτονο— και στα ελληνικά αποδόθηκε με τον ξεχασμένο σήμερα όρο *παρημίτονο*. Με σύγχρονο συμβολισμό, ορίζεται από τον τύπο $\text{παρημ} \theta = 1 - \text{συν} \theta$. Στο Σχήμα 1 το συνημίτονο της γωνίας θ ισούται με OA και το παρημή με AB , το ύψος του κυκλικού τρίγματος MBN . Είναι ενδιαφέρον ότι στη Ρωσία το ύψος αυτό ονομάζόταν «βέλος», λέξη που μας θυμίζει το ινδικό *jīva* (τόξο) και τη χορδή του MN .

Ας αποφύγουμε τους περιοστερούς από τους —πολλούς— τριγωνομετρικούς τύπους και ας στρέψουμε την προσοχή μας στο γράφημα της συνάρτησης $y = \text{ημ}x$. Ονομάζεται καρπύλη ημιτόνου, ή ημιτονοειδής, και φαίνεται ιδιαίτερα τεχνητή παρόλο που οι κυριατοριοί της μοιάζουν με αυτούς του νέρου. Και πράγματι, τα υδάτινα κύρατα, δύος και τα ραδιοκύρατα, τα κύρατα του φωτός και του ήχου, συνδέονται άμεσα με τη συνάρτηση του ημιτόνου. Για να κατασκευάσουμε ένα πρότυπο σχεδίασης της καρπύλης του ημιτόνου, τυλίγουμε ένα φύλλο χαρτί γύρω από ένα κερί και το κόβουμε κατά μήκος επιπέδου που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα του κεριού (το φιτίλι του). Όταν ξετυλίξετε το χαρτί (Σχήμα 2) θα έχετε δύο θαυμάσια πρότυπα μιας ημιτονοειδούς (η μονάδα μή-

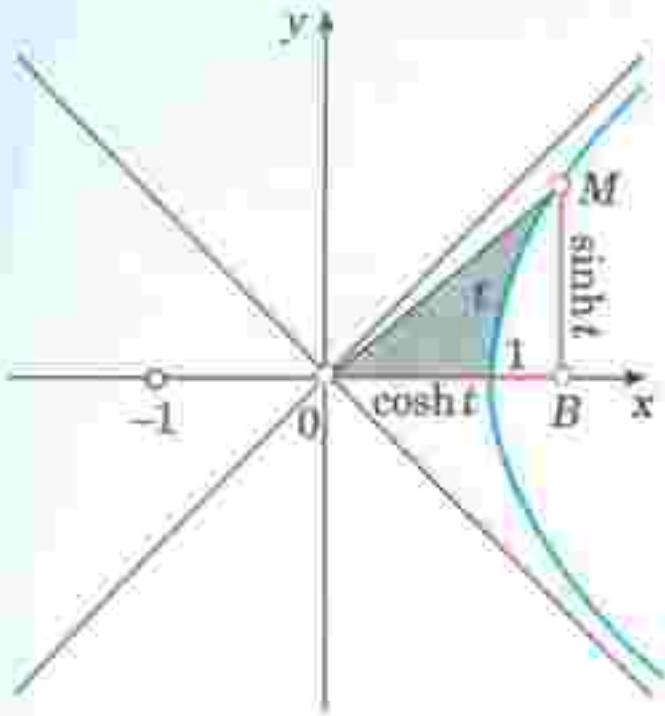
κους θα είναι ίση με την ακτίνα του κεριού). Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $y = \text{ημ}(\text{k}x + b) + c$ ονομάζονται επίσης ημιτονοειδείς. Τα γράφημα τους προκύπτουν από τη συνήθη ημιτονοειδή καρπύλη με επιμήκυνση ή βράχυνση κατά μήκος των αξόνων και με παράλληλη μετατόπιση. Άρα, το γράφημα της συνάρτησης $y = \text{συν}x = \text{ημ}(\frac{\pi}{2} - x)$ είναι επίσης ημιτονοειδής καρπύλη, όπως και το γράφημα της συνάρτησης $y = \text{ημ}^2x = \frac{1}{2}\text{ημ}(\frac{\pi}{2} - 2x)$. Ημιτονοειδής είναι και η καρπύλη που βλέπουμε όταν παρατηρούμε ένα ελατήριο ή ένα τρυπάνι από τα πλάγια.

Ας θεωρήσουμε τώρα την υπερβολή $y = \frac{1}{2x}$, και ας τη στρέψουμε περί την αρχή, αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, κατά 45° (Σχήμα 3). Η καρπύλη που προκύπτει έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ (γιατί;) και τέμνει τον άξονα x στα σημεία $B(1, 0)$ και $B'(-1, 0)$. Στο εξής θα θεωρούμε μόνο το δεξιό της τρίγμα. Ας επιστρέψουμε προς στιγμή στο Σχήμα 1 για να επισημάνουμε ότι η τιμή θ ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του κυκλικού τομέα OMB .

Θεωρούμε τώρα ένα σημείο M της (περιεστραμμένης) υπερβολής και ορίζουμε την παράμετρο t ως το διπλάσιο του εμβαδού του υπερβολικού τομέα OMB (με θετικό πρόσημο αν το M ανήκει στο πάνω ημιεπίπεδο και με αρνητικό αν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x). Τότε το t λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές μεταξύ του $-\infty$ και του ∞ , και κάθε



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ημή αντιστοιχεί σε μία μοναδική θέση του M επί της υπερβολής. Οι συντεταγμένες του σημείου M για κάθε t ονοράζονται υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο του t . Συμβολίζονται με $\cosh t$ και $\sinh t$, και έτσι, $M = (\cosh t, \sinh t)$.

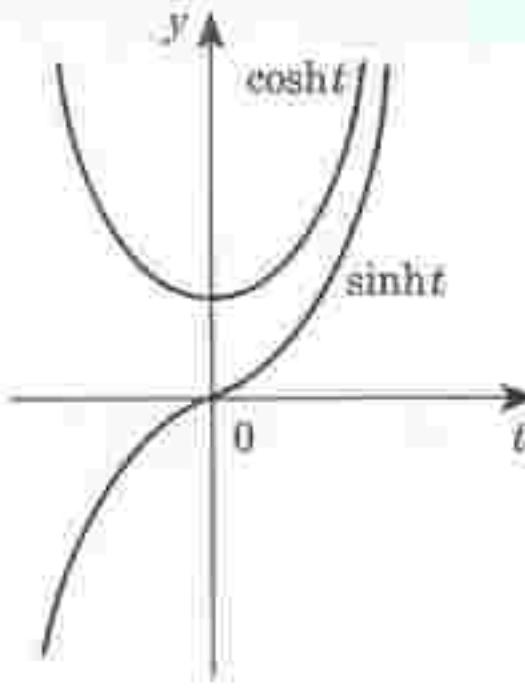
Προφανώς, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Το εμβαδόν του υπερβολικού τορέα μπορεί να υπολογιστεί με ολοκληρωση. Προκύπτουν έτσι οι επόμενες παραστάσεις που εκφράζουν τις υπερβολικές συναρτήσεις βάσει της εκθετικής συνάρτησης e^t :

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Από αυτές τις σχέσεις μπορείτε να συναγάγετε τους τύπους για τα $\cosh(t \pm s)$ και $\sinh(t \pm s)$. Θα διαπιστώστε ότι είναι σχεδόν οι ίδιοι με τους αντίστοιχους τύπους για το συνημίτονο και το ημίτονο. (Η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι ορισμένα πρόστιμα στους τριγωνομετρικούς και στους αντίστοιχους υπερβολικούς τύπους είναι αντίθετα.) Στην πραγματικότητα, υπάρχει πολύ στενή σχέση μεταξύ των τριγωνομετρικών και των υπερβολικών συναρτήσεων, η οποία γίνεται πιο φανερή αν μεταβούμε από τους πραγματικούς στους μηγαδικούς αριθμούς.

Στο Σχήμα 4 βλέπουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = \sinh t$ και $y = \cosh t$. Διαπιστώνουμε ότι η μία συνάρτηση είναι άρτια και η άλλη περιττή. Το γράφημα της $\cosh t$ ο-



Σχήμα 4

νομάζεται και αλισσοειδής καμπύλη, επειδή η μορφή του θυμίζει αλισίδα εξαρτημένη από τα δύο άκρα της.

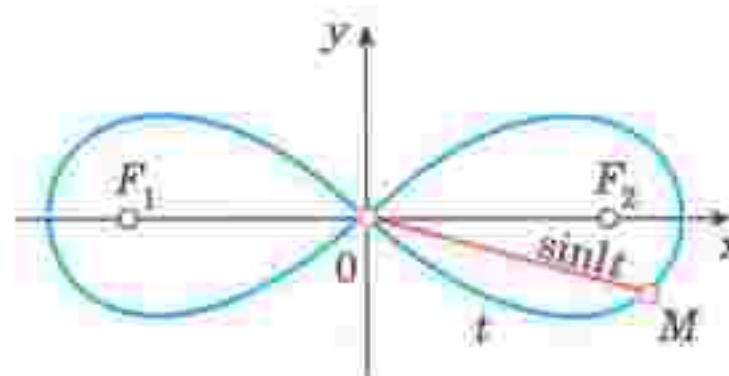
Έκτος των τριγωνομετρικών και υπερβολικών, υπάρχουν και άλλα είδη ημίτονων και συνημίτονων —για παράδειγμα τα λημνισκοειδή, τα οποία ορίζονται μέσω του λημνισκού του Bernoulli. Αυτή η καμπύλη (Σχήμα 5) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων το γινόμενο των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2 είναι σταθερό, και ισούται με το τέταρτο του τετραγώνου της απόστασης $F_1 F_2$. Ανακαλύφθηκε από τον Jakob Bernoulli πριν 400 περίπου χρόνια, το 1694. Την περιέγραψε ως καμπύλη «που έχει το σχήμα ενός 8, ή ενός κόμβου, ή ενός φιόγκου κορδέλας», και για να την ονοράσει χρησιμοποίησε τη λατινική λέξη *Lemniscus* (τανιά που έδεναν στο στεφάνι ενός νικητή).

Αν $F_1 F_2 = \sqrt{2}$, η εξίσωση του λημνισκού σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

Η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες (r, φ) είναι απλούστερη:

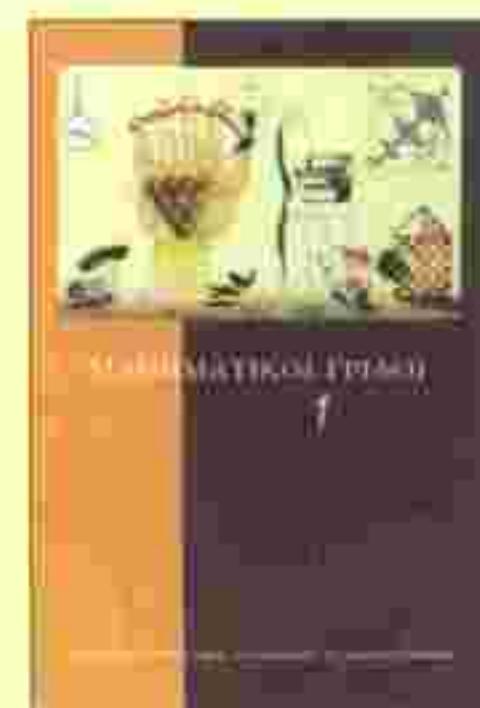
$$r^2 = 2\sin 2\varphi.$$



Σχήμα 5

Το όρισμα των λημνισκοειδών συναρτήσεων είναι, όπως και στο πρώτο ορισμό μας του ημίτονου και του συνημίτονου, το μήκος τόξου που στο δεξιό ήμισυ του λημνισκού μετριέται αριστερόστροφα από την αρχή O , ενώ στο αριστερό ήμισυ δεξιόστροφα. Το λημνισκοειδές ημίτονο, $\sinh t$, ορίζεται ως το μήκος OM , αν το M ανήκει στο δεξιό ήμισυ της καμπύλης, και $-OM$, αν το M ανήκει στο αριστερό της ήμισυ. Το λημνισκοειδές συνημίτονο ορίζεται από τον τύπο $\cosh t = \sinh(\omega - t)$, όπου ω είναι τόξο μήκους ίσου με το ήμισυ της καμπύλης.

Και αυτές οι συναρτήσεις έχουν πολλά κοινά με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Τα γραφήματά τους διαφέρουν ελάχιστα από την ημιτονοειδή καμπύλη, ενώ οι ίδιες οι συναρτήσεις έχουν αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμες στα σύγχρονα μαθηματικά.



Μαθηματικοί γρίφοι —1

Το βιβλίο περιλαμβάνει τα πρώτα 150 προβλήματα που έχουν δημοσιευθεί στη σημήλη «Σπαζοκεφαλίες» του *Quantum*, κατά την περίοδο 1994-99.

Στο δεύτερο μέρος παραπιθενται αναλυτικές λύσεις των προβλημάτων. Η πληθώρα του υλικού, η εξαιρετική ποιότητά του και η θαυμάσια εικονογράφησή του καθιστούν το βιβλίο θελετικό και χρήσιμο για όλους όσοι αγαπούν τις πνευματικές προκλήσεις, ανεξαρτήτως ηλικίας.

150 σελ., Έγχρ., 16 × 25 εκ.,
Πανόδιο, 5.200 δρχ.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΑΠΟ
ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Τό 'χουν τα μάτια

Η ιστορία του έμβιου κόσμου μπορεί να συνοψιστεί ως η διαδικασία διαμόρφωσης ολοένα και τελειότερων ματιών σε ένα σύμπαν όπου πάντοτε κάπι μένει ακόμη να ιδωθεί.

—Pierre Teilhard de Chardin (1881-1955)

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

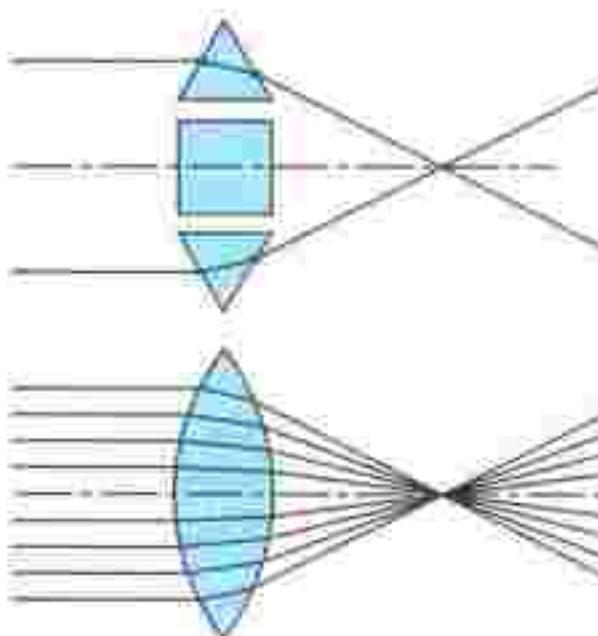
AΠΟ ΤΙΣ ΤΡΙΑΝΤΑ ΕΝ ΟΛΩ ΣΥΝΟΜΟΤΑΞΙΕΣ των ζώων, μόνο έξι διαθέτουν μάτια που μπορούν να παράγουν εικόνες. Και μόνο αυτές οι έξι συνομοταξίες κυριαρχούν στο ζωικό βασίλειο, συγκεντρώνοντας στις τάξεις τους το 95% του συνολικού ζωικού πληθυσμού της Γης. Δεν μας εκπλήσσει το γεγονός ότι τα μάτια προσφέρουν ένα τόσο σπουδαιό πλεονέκτημα στον αγώνα για την επιβίωση. Τα τυφλά είδη, για να αντιληφθούν την παρουσία ενός ξένου αντικειμένου, πρέπει να έρθουν σε επαφή μαζί του. Και τι να αντιπροσωπεύει, άραγε, αυτό το αντικείμενο; Ένα σρόδιο, πιθανή τροφή ή μήπως έναν θανάσιμο κίνδυνο; Τα ζώα που διαθέτουν μάτια είναι εξοπλισμένα με ένα μακράς εμβέλειας αισθητήριο μηχανισμό ο οποίος τους επιτρέπει να αποφέύγουν τα εμπόδια και τους εχθρούς τους και συνάμα να ερευνούν το περιβάλλον με σκοπό την ανεύρεση τροφής.

Η πολυπλοκότητα του ανθρώπινου ματιού ενέβαλε τον Δαρβίνο σε σύγχυση. Στο έργο του *H proslēstη των ειδών*, έγραφε: «Η υπόθεση πως το μάτι — με όλους τους απαραίλλους μηχανισμούς του για να

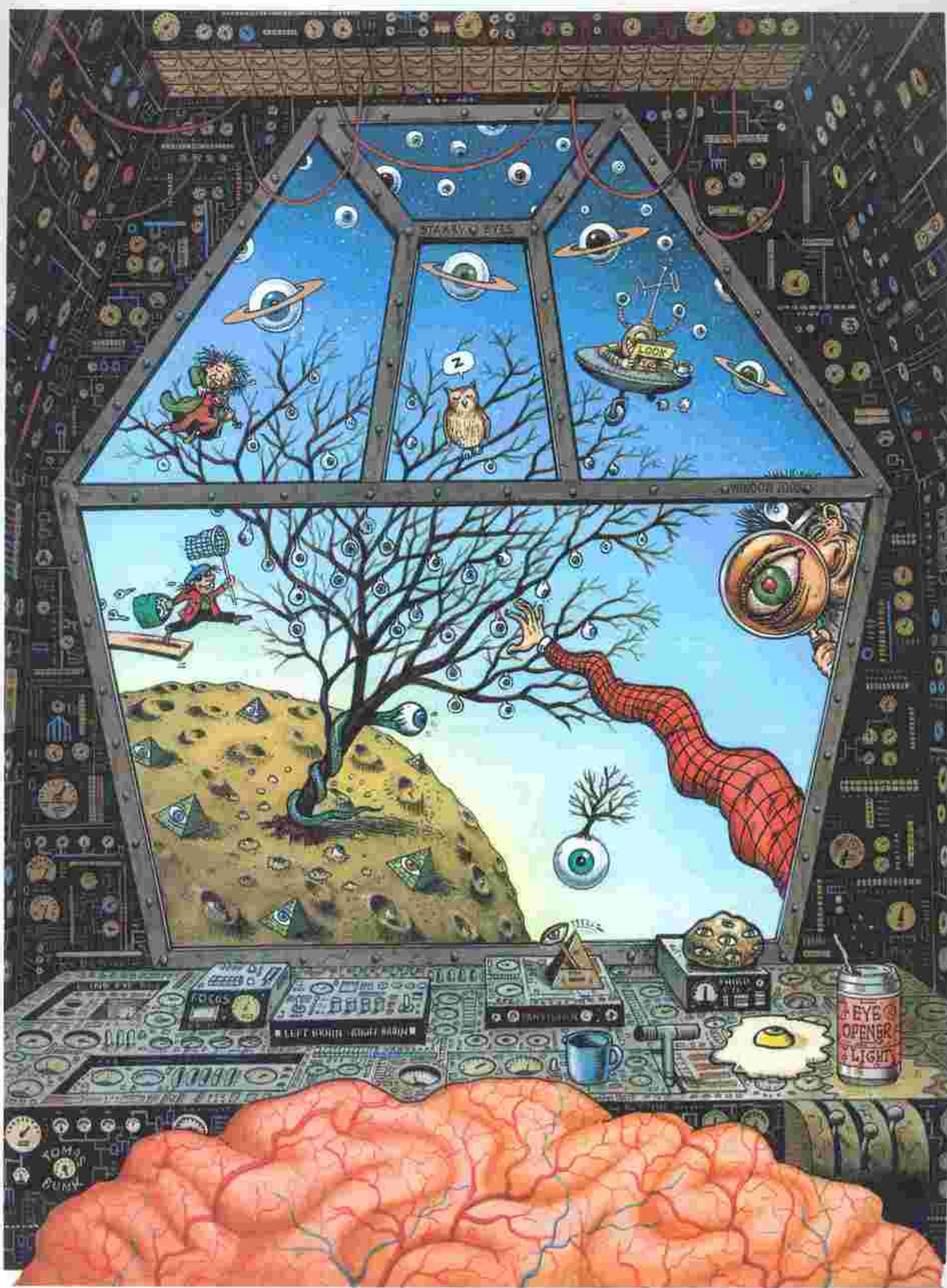
εσπιάζει σε διάφορες αποστάσεις, για να επιτρέπει την είσοδο σε διαφορετικές ποσότητες φωτός και για να διορθώνει τη σφαιρική και τη χρωματική εκτροπή — θα μπορούσε να αποτελεί αποτέλεσμα της φυσικής επιλογής, ε, αυτό φαίνεται, το ορολογίω αβίστα, παράλογο στον ύψιστο δυνατό βαθμό.» Μολαταύτα, η σύλληψη του Δαρβίνου περί προσαρμογής και φυσικής επιλογής καθοδήγησε ένα συνεχές ρεύμα βιολόγων να καταγράψουν συλλογικά μια σειρά ομάδων βημάτων, που το καθένα τους αντιπροσωπεύει ένα μικρό πλεονέκτημα συγκριτικά με το προηγούμενο, σειρά η οποία περιγράφει την εξελικτική πορεία του ματιού. Μπορείτε να μάθετε περισσότερα για το μάτι και το σύστημα της όρασης διαβάζοντας τα βιβλία *O ποταμός της ζωής* του Richard Dawkins (ιδιαίτερα το τρίτο κεφάλαιο) και *Mia εκπληκτική υπόθεση* του νομπελίστα Francis Crick (ιδιαίτερα το τρίτο, το τέταρτο και το πέμπτο κεφάλαιο).

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως χοντροκομμένο μοντέλο ενός φακού το εξής σύστημα γυάλινων πρισμάτων: ένα τριγωνικό πρισμα στην κορυφή ενός τετραγωνικού, το

οποίο στριζεται πάνω σε ένα δεύτερο αναποδογυρισμένο τριγωνικό πρίσμα. Αν επιλέξουμε προσεκτικά τα σημεία πρόσπιτωσης τριών παράλληλων ακτίνων φωτός στο «φακό» μας (βλ. Σχήμα 1), αυτές θα μπορούσαν να συγκλίνουν σε ένα μοναδικό σημείο. Ωστόσο, προκειμένου το μοντέλο μας να περιγράφει ικανοποιητικά έναν φακό, πρέπει να του «στρογγυλέψουμε» τις έδρες των πρισμάτων, έτοις ώστε όλες οι φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν στο φακό παράλληλα προς τον (κύριο) άξονά του, μετά τη διάθλασή τους να συγκλίνουν σε ένα μοναδικό σημείο —την (κύρια) εστία (βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1



Με τη βοήθεια συγκεκριμένων φωτεινών ακτίνων μπορούμε να κατασκευάσουμε διαγράμματα που μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε τη θέση και τον προσανατολισμό του ειδώλου ενός φωτιζόμενου αντικειμένου (βλ. το παρόν «Καλειδοσκόπο»). Εποικια φωτός που εκπέμπεται από την άκρη του αντικειμένου και ακολουθεί διαδρομή παράλληλη προς τον κύριο άξονα, αφού υποστεί διάθλαση από το φακό θα διέλθει από την κυρία εστία του. Μια δεύτερη ακτίνα από το αντικείμενο που διέρχεται από την εγγύτερη εστία, μετά τη διάθλαση της θα εξέλθει παράλληλη προς τον κύριο άξονα. Μια τρίτη ακτίνα που περνά από το (οπτικό) κέντρο του φακού, θα συνεχίσει την πορεία της χωρίς απόκλιση (ακριβέστερα, εφόσον ο φακός είναι λεπτός, θα υποστεί αμελητέα παράλληλη μετατόπιση (βλ. Σχήμα 2).

Με μια γρήγορη ματιά στα δύο τρίγωνα του Σχήματος 2, διαπιστώνουμε αμέσως ότι ισχύουν δύο εξισώσεις:

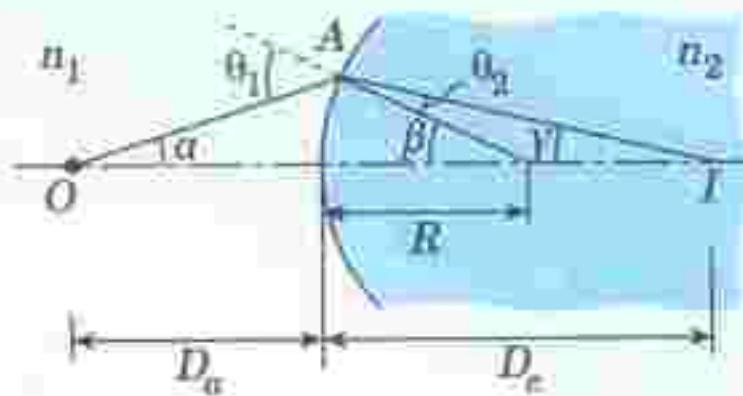
$$\frac{H_e}{H_a} = \frac{D_e}{D_a}, \quad \frac{H_e}{H_a} = \frac{D_e - f}{f}.$$

Συνδυάζοντάς τις, παίρνουμε αμέσως τον τύπο των (λεπτών) φακών,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D_a} + \frac{1}{D_e}.$$

Προκειμένου να δώσουμε μια αυστηρότερη απόδειξη, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Snell για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της γωνίας υπό την οποία σιερέρχεται το φως στο γυαλί και κατόπιν εξέρχεται από αυτό.

Εάν υποθέσουμε ότι το φως εκπέμπεται από το σημείο O και εστιά-



Σχήμα 3

ζεται στο σημείο I , στο εσωτερικό του γυαλιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία από το κέντρο καρπούλοτητας του φακού προς το σημείο A της διαχωριστικής επιφάνειας. Θεωρούμε ότι τα δύο οπτικά μέσα έχουν δεικτές διάθλασης n_1 και n_2 , αντίστοιχα. Έτσι, λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$n_1 \mu \theta_1 = n_2 \mu \theta_2, \\ \theta_1 = \alpha + \beta, \\ \beta = \theta_2 + \gamma.$$

Εφόσον η α είναι μικρή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για όλες τις υπόλοιπες γωνίες. Ούτως εχόντων των πραγμάτων, επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $\mu \theta \equiv \theta$ (όπου η θ μετριέται σε ακτίνια):

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2, \\ n_1(\alpha + \beta) \equiv n_2(\beta + \gamma), \\ \beta(n_2 - n_1) \equiv n_1 \alpha + n_2 \gamma.$$

Το μήκος του τόξου ισούται με την ακτίνα πολλαπλασιασμένη επί την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία (σε ακτίνια). Συνεπώς, για μικρές γωνίες έχουμε:

$$\alpha \equiv \frac{AB}{D_a}, \quad \beta \equiv \frac{AB}{R}, \quad \gamma \equiv \frac{AB}{D_e}$$

και

$$\frac{n_1}{D_a} + \frac{n_2}{D_e} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Εάν επιχειρήσουμε την αντίστοιχη ανάλυση για μια ακτίνα φωτός που εγκαταλείπει το μέσο δείκτη διάθλασης n_2 , διαθλάται σε μια κοίλη επιφάνεια (οπότε έχουμε έναν αμφίκυρτο φακό — κυρτό και από τις δύο πλευρές) και εισέρχεται στο μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 , καταλήγουμε στην εξισωση των κατασκευαστών φακών:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Στον τύπο αυτό, θέσαμε $n_1 = 1$ για το αέρα και $n_2 = n$ για το γυαλί. Στην περίπτωση του αμφίκυρτου φακού, η R_2 λαμβάνεται αρνητική γιατί πάντα πιο επίπονη και οδηγεί σε μια εξίσωση όπου εμφανίζεται και το πάχος d του φακού:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{n - 1}{n} \frac{d}{R_2} \right)$$

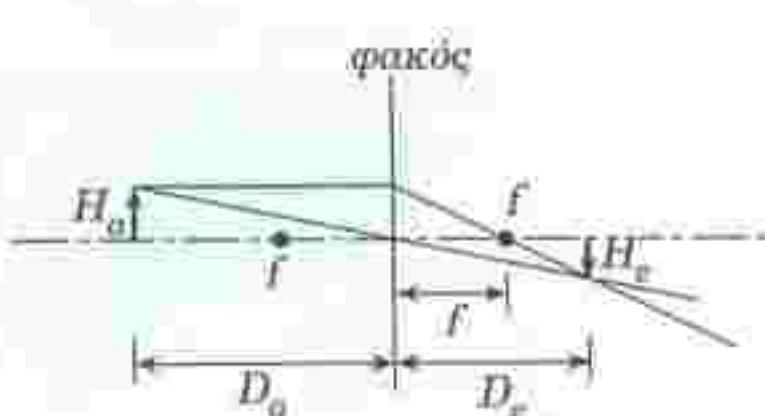
Σ' αυτό το τεύχος, τα προβλήματα που επλέξαμε εστιάζουν σε διαφορετικά στοιχεία της φυσικής παναλύσαμε.

A. Στο ανθρώπινο μάτι, μεγάλη συμβολή στο σχηματισμό ειδώλου έχει ο κερατοειδής χιτώνας, διότι η φως, προτού φθάσει στο φακό, πρέπει να εισέλθει από τον αέρα ($n = 1,000$) στον κερατοειδή ($n = 1,376$). Η κύρια λειτουργία που επιτελεί ο φακός έγκειται στο ότι επιτρέπει διαφορετικές της εστιακής απόστασης του, την προσαρμογή του ματιού. Υποθέτοντας ότι η σταθερή απόσταση του ειδώλου (από το φακό των αμφιβλητροειδή) ισούται με 2,50 cm, υπολογίστε την εστιακή απόσταση του συστήματος κερατοειδής/φακός όταν η απόσταση του αντικειμένου ανέρχεται (α) σε 20 cm και (β) σε 20 m.

B. Εάν το ανθρώπινο μάτι ήταν εξοπλισμένο με φακό σταθερής εστιακής απόστασης ο οποίος μπορεί να μετακινείται για να επτευχθεί η προσαρμογή του ματιού (όπως συβαίνει στα ψάρια), κατά πόση απόσταση θα έπρεπε για μετατόπιση ο φακός ώστε το μάτι να προσαρμοστεί σε αποστάσεις αντικειμένου 20 cm και 20 m; (Παρεμπιπόντως, ας σημειώσουμε ότι τα μαλάκια διστέλλουν ή συστέλλουν ολόκληρο το μάτι, ενώ στα αρπακτικά πτήνα η προσαρμογή επιτυγχάνεται μέσω της μεταβολής της καρπούλοτητας του κερατοειδούς.)

Γ. Περιγράψτε τις μεταβολές που θα υποστεί το ειδώλο ενός κεριού

(1) εάν καλυφθεί το άνω ήμισο του φακού,



Σχήμα 2

(2) εάν το κερί είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από τη διάμετρο του φακού.

Δ. Ένας σπουδαστής ολοκληρώνει μια εργαστηριακή ασκηση με ένα φακό και καταγράφει τα δεδομένα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 4. Υπολογίστε την εστιακή απόσταση σχεδιάστε τη γραφική παράσταση των δεδομένων με το D_s στον άξονα x και το D_e στον άξονα y , και εξαγάγετε τον τύπο των φακών από τη γραφική παράσταση.

Ε. Το πρώτα του χονδρειδούς «φακού» μας θα ανέλυε το φως στο γνωστό φάσμα. Ένας φακός που αλλοιώνει έτοι το φως λέμε ότι προκαλεί χρωματική εκτροπή. Στην VIII Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής (Γερμανική Λαϊκή Δημοκρατία, 1975) ζητήθηκε από τους διαγωνιζόμενους να προσδιορίσουν τις συνθήκες που έπρεπε να ικανοποιεί ένα παχύ φακός προκειμένου να έχει την ίδια εστιακή απόσταση για φως δύο διαφορετικών μηκών κύματος. Λύστε αυτό το πρόβλημα και σχολιάστε τους πρακτικούς περιορισμούς της λύσης σας για διάφορους τύπους φακών.

Ταχύτερα από το Φως:

Α. Τα πειραματικά δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από τις φωτογραφίες του μικροκβάζαρ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα αναβλήματα είχαν γωνιακές ταχύτητες 17,6 και 9,0 χιλιοστοδευτερόλεπτα τόξου (mas) ανά ημέρα. Ο υπολογισμός των εγκάρσιων ταχυτήτων είναι απλούστατος: αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $v = \omega r$ και να κάνουμε τις απαραίτητες μετατροπές μονάδων:

$$v = \omega r =$$

$$= \left(17,6 \frac{\text{mas}}{\text{day}} \right) \left(3,86 \cdot 10^{20} \text{ m} \right) \times \\ \times \left[\frac{1 \text{ as}}{10^3 \text{ mas}} \right] \left[\frac{1^\circ}{3,600 \text{ as}} \right] \times$$

Απόσταση αντικειμένου D_s (cm)	90	80	70	60	50	40	30	20	10
Απόσταση ειδώλου D_e (cm)	8,8	8,9	9,0	9,2	9,5	10	11	13	40

Σχήμα 4

$$\times \left[\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right] \left[\frac{1 \text{ day}}{24 \text{ h}} \right] \left[\frac{1 \text{ h}}{3,600 \text{ s}} \right] = \\ = 3,81 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Σημειώστε ότι αυτή η ταχύτητα υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός κατά 27%. Η αντίστοιχη ταχύτητα του δεύτερου αναβλήματος ισούται με $1,95 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, και είναι αρκετά μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Β. Το Σχήμα 5 δείχνει τη γεωμετρία της περίπτωσης όπου μπορεί να εμφανιστούν τέτοιες υπερφωτεινές ταχύτητες. (Στο σημείο αυτό επιβάλλεται να ζητήσουμε συγγνώμη από τον αναγνώστη επειδή, εκ παραδρομής, στο σχήμα που συνέδεε την εκφώνηση του προβλήματος τα σύμβολα r_A και r_B είχαν τοποθετηθεί ανάποδα.) Ένα αντικείμενο κινείται από το σημείο A στο σημείο B με ταχύτητα $v = \Delta r / \Delta t$. Το φως που εκπέμπεται από το αντικείμενο όταν βρίσκεται στο σημείο A φτάνει στη Γη έπειτα από χρόνο

$$t_A = r_A / c.$$

Το σήμα από το σημείο B εκπέμπεται με χρονική καθυστέρηση Δt και φτάνει στη Γη τη στιγμή

$$t_B = (r_B / c) + \Delta t.$$

Συνεπώς, τα δύο σήματα αφικνούνται στη Γη με χρονική διαφορά

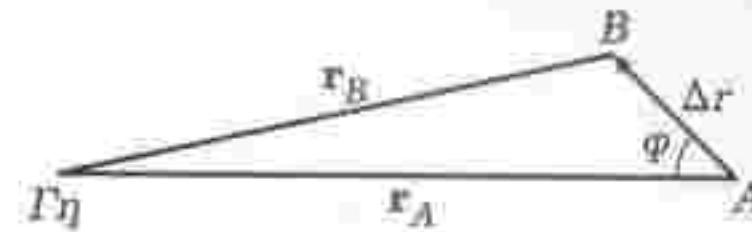
$$\Delta t_0 = t_B - t_A = \frac{r_B - r_A}{c} + \Delta t.$$

Επειδή το αντικείμενο βρίσκεται σε τεράστια απόσταση εν συγκρίσει με το Δr , οι διευθύνσεις προς τα σημεία A και B είναι σχεδόν παράλληλες, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$r_A - r_B \approx v \Delta t \sin \varphi.$$

Επομένως,

$$\Delta t_0 = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \sin \varphi \right)$$



Σχήμα 5

$$= \Delta t (1 - \beta \sin \varphi).$$

Γ. Η φαινόμενη εγκάρσια ταχύτητα της κίνησης του αναβλήματος δίνεται από τον τύπο

$$v_\perp = \frac{\Delta r \sin \varphi}{\Delta t_0} = \frac{\Delta r \sin \varphi}{\Delta t (1 - \beta \sin \varphi)} \\ = v \frac{\sin \varphi}{1 - \beta \sin \varphi}$$

ή, αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με την ταχύτητα c του φωτός,

$$\beta_\perp = \frac{\beta \sin \varphi}{1 - \beta \sin \varphi}.$$

Δ. Η ελάχιστη τιμή του β για την οποία το παρατηρούμενο β_\perp υπερβαίνει τη μονάδα μπορεί να προσδιοριστεί εάν προσέξουμε ότι η β_\perp είναι αύξουσα συνάρτηση του β για όλες τις τιμές της γωνίας φ : συνέπεις, για δεδομένη φ η ελάχιστη τιμή του β για την οποία $\beta_\perp \geq 1$, που θα τη συμβολίζουμε με $\beta_{\min, \varphi}$, ικανοποιεί τη σχέση

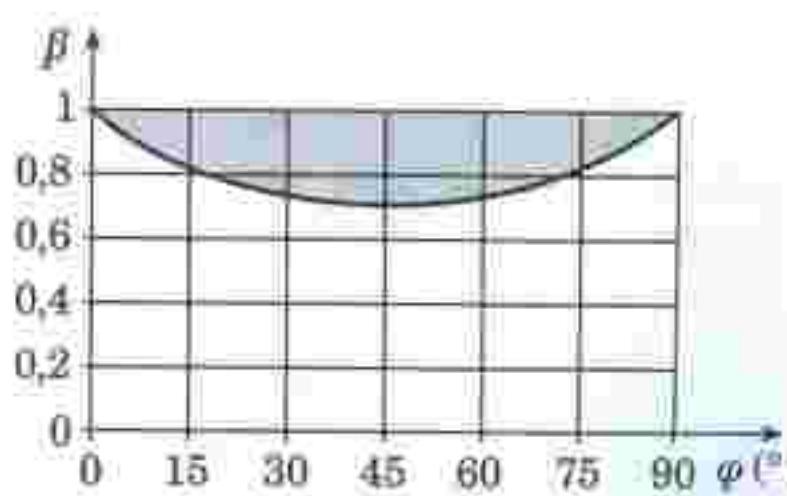
$$\beta_{\min, \varphi} \sin \varphi = 1 - \beta_{\min, \varphi} \cos \varphi,$$

η οποία μας λέει ότι

$$\beta_{\min, \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}.$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $\sin \varphi + \cos \varphi$ παρουσιάζει μέγιστο για $\varphi = \pi/4$, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $\beta_{\min} = 1/\sqrt{2}$ για τη γωνία $\varphi = 45^\circ$.

Ε. Βλ. τη γραμμοσκιασμένη περιοχή στο Σχήμα 6. ◻



Σχήμα 6

Ένας περιστρεφόμενος πυκνωτής

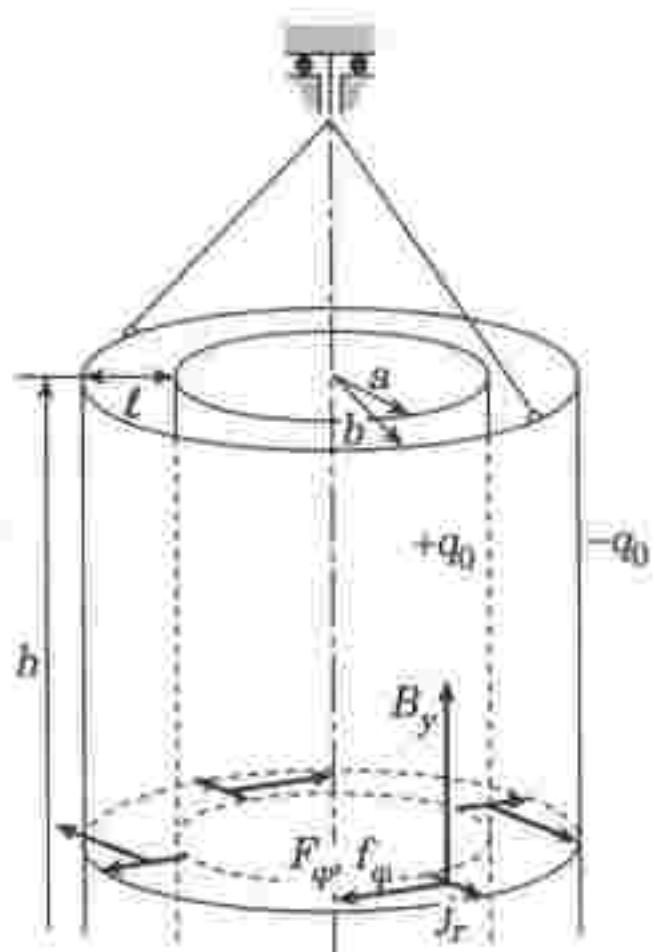
«Σε τι παράξενο κόσμο ζούμε, αλήθεια;»

Albert Stasenko

EΧΩΤΑΣ ΑΚΟΥΣΤΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑδομένη αντίληψη που έχει τις ρίζες της στις πρώτες μέρες του ηλεκτρισμού, δι πηλαδή τα ηλεκτρικά πεδία «αποθηκεύονται» σε πυκνωτές και τα μαγνητικά πεδία σε πηγία που διαρρέονται από ρεύμα, η Τρούντι, ένα κορίτσι με ανήσυχο πνεύμα, τοποθέτησε μια μέρα έναν πυκνωτή μέσα σε μαγνητικό πεδίο. «Πού ξέρεις, κάπι ενδιαφέρον μπορεί να συμβεί», σκέφτηκε, και η διαισθησή της δεν την απογοήτευσε.

Η Τρούντι κατασκεύασε έναν πυκνωτή χρησιμοποιώντας δύο επιμήκεις ομοαξονικούς κυλίνδρους με περίπου ίσες ακτίνες a και b , οπότε η διαφορά τους (το αξονικό διάκενο) $b - a = l$ ήταν πολύ μικρότερη από τις ακτίνες και των δύο κυλίνδρων (δηλαδή $l \ll a < b$). Στη συνέχεια, αντίτισε τον πυκνωτή μέσα σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο, έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς φρίβες γύρω από τον (επίσης κατακόρυφο) άξονά του (Σχήμα 1). Ο εσωτερικός κύλινδρος έφερε φορτίο $+q_0$ ενώ ο εξωτερικός $-q_0$. Έτσι, μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή δημιουργήθηκε ένα ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο E . Δυστυχώς, όμως, τίποτε το συνταρακτικό δεν παρατηρήθηκε α' αυτή τη διάταξη.

«Πώς να εμφυσήσω ζωή σε τούτο το νεκρό, άχρηστο πράγμα;» αναρωτήθηκε απογοητευμένη η Τρούντι.



Σχήμα 1

Ως συνήθως, της ήρθε μια ιδέα! Γέμισε, λοιπόν, το χώρο μεταξύ των οπλισμών με ένα αγώγιμο υλικό ως αποτέλεσμα, ο πυκνωτής παρουσιάστηκε διαρροή, καθώς ένα ακτινικό ρεύμα άρχισε να ρέει από τον εσωτερικό κύλινδρο προς τον εξωτερικό. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να υπενθυμίσουμε στον αναγνώστη ότι σε κάθε φορτίο q που κινείται κάθετα στις δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου ασκείται η δύναμη Lorentz, η οποία είναι κάθετη σε δύο διανύσματα: την ταχύτητα v του φορτίου και το μαγνητικό πεδίο B . Επομένως, η εν λόγω δύναμη

είναι εφαπτόμενη σε έναν κύκλο ο οποίος έχει το κέντρο του στον άξονα του πυκνωτή και κείται στο κάθετο προς αυτόν επίπεδο (βλ. Σχήμα 1), ενώ το μέτρο της δίνεται από την έκφραση

$$F_\varphi = qu_r B_y$$

Οι δείκτες που φέρουν τα μεγέθη F και B στην ανωτέρω εξίσωση υπογραμμίζουν το γεγονός ότι τα τρία διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Αν θεωρήσουμε τη συγκέντρωση των κινούμενων φορτίων ίση με πάτο τε σε κάθε κυβικό εκατοστό του αγώγιμου υλικού που περιέχεται μεταξύ των οπλισμών θα ασκείται δύναμη Lorentz, που μπορούμε να την ονομάσουμε πυκνότητα δύναμης (δηλαδή δύναμη ανά μονάδα υγκου), και η οποία ισούται με

$$f_\varphi = nF_\varphi = nqu_r B_y$$

Επειδή η διεύθυνση της εν λόγω δύναμης είναι εφαπτόμενη, ολόκληρος ο πυκνωτής θα περιστραφεί Μάλιστα, η περιστροφή του αγώγιμου υλικού και των οπλισμών του πυκνωτή θα επιταχύνεται λόγω της συνολικής δύναμης που ασκείται σε ολόκληρο τον όγκο του αγώγιμου υλικού, ο οποίος ισούται με $2\pi nlh$. Το μέτρο της δύναμης αυτής δίνεται από την έκφραση



$$\int_{\varphi} 2\pi a h = n q v_r B_y \cdot 2\pi a h.$$

Για να καταλήξει στον συγκεκριμένο τύπο, η Τρούντι έλαβε υπόψη της ότι το διάκενο ανάμεσα στους δύο κυλινδρικούς οπλισμούς ήταν πολύ μικρό. Αισθάνθηκε, μάλιστα, ιδιαίτερως ικανοποιημένη με τον εαυτό της για την προνοητικότητα που επέδειξε αφήνοντας ένα τόσο μικρό διάκενο. Διαφορετικά, θα υποχρεωνόταν να ολοκληρώσει την πυκνότητα δύναμης σε όλο τον δύκο του αγώγιμου οπλικού για να υπολογίσει τη συνολική δύναμη, και δεν ήθελε να καταφεύγει σε ένα τόσο ισχυρό εργαλείο για το παραμικρό.

Επομένως, η επτάχυνση του πυκνώτητα περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, ο οποίος στη συγκεκριμένη περίπτωση γράφεται ως εξής:

$$m \frac{du}{dt} = (n q v_r) (2\pi a h) \cdot t B_y.$$

Ο όρος στην πρώτη παρένθεση είναι η πυκνότητα ρεύματος $j_r = n q v_r$, ενώ η δεύτερη παρένθεση περιέχει το εμβαδόν του οπλισμού $S = 2\pi a h$ (είναι σχεδόν το ίδιο και για τους δύο οπλισμούς, διότι το διάκενο που τους χωρίζει θεωρείται πολύ μικρό). Πολλαπλασιάζοντας την πυκνότητα ρεύματος επί το εμβαδόν μιας κυλινδρικής επιφάνειας ομοαξονικής με τους οπλισμούς και η οποία βρίσκεται ανάμεσά τους (στην προσέγγιση στην οποία εργαζόμαστε, το εμβαδόν της μπορεί να ληφθεί ίσο με S), παίρνουμε το ολικό ρεύμα $I = j_r S$. Συνεπώς,

$$d(u_m) = t B_y (I dt).$$

Στην τελευταία εξίσωση, οι παρενθέσεις μάς βιοηθούν και πάλι να διακρίνουμε τη φυσική σημασία των διαφόρων παραγόντων. Στο δεξιό μέλος η παρένθεση περικλείει τη μεταβολή του θετικού φορτίου στον εσωτερικό οπλισμό:

$$dQ = -Idt,$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το θετικό φορτίο ελαττώνεται, δεδομένου ότι το ακτινικό ρεύμα απάγει διαρκώς ένα μέρος του προς

τον εξωτερικό οπλισμό. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η αύξηση $d(tu_m)$ της (γραμμικής) ορμής του πυκνωτή είναι ανάλογη της ελάττωσης του φορτίου του. Επομένως, όταν ο πυκνωτής χάσει όλο το φορτίο του, η (περιστροφική) ορμή του αποκτά τη μέγιστη τιμή της

$$tu_m = t B_y Q_0.$$

Εντούτοις, όταν οι φυσικοί μελετούν την περιστροφή ενός σώματος, δεν χρησιμοποιούν τους όρους ορμή και ώθηση, διότι το κέντρο μάζας του σώματος —τον πυκνωτή, στην περίπτωσή μας— παραμένει ακίνητο. Στη θέση τους χρησιμοποιούν τις έννοιες της ροπής (το γινόμενο της δύναμης επί το μοχλοβραχίονα α, δηλαδή την απόσταση του φορέα της από τον άξονα περιστροφής) και της στροφορμής (το γινόμενο της γραμμικής ορμής tu επί την ίδια απόσταση α). Εάν γράψουμε την εξίσωση που περιγράφει την περιστροφή του πυκνωτή χρησιμοποιώντας τις έννοιες της ροπής και της στροφορμής, τότε παίρνει την εξής μορφή:

$$tu_m = a t B_y Q_0.$$

Ωστόσο, η Τρούντι εστίασε την προσοχή της σε ένα άλλο σημείο: Πώς προέκυψε η ροπή και από πού προήλθε η στροφορμή; Αφού ο πυκνωτής δεν περιστρέφοταν αρχικά, ούτε στροφορμή είχε αλλά ούτε και του ασκούνταν κάποια ροπή. Σύρφωνα με τους θεμελιώδεις νόμους της φυσικής, όμως, είναι αδύνατο να εμφανιστεί στροφορμή εκ του μηδενός. Οδηγούμαστε αγαπόφευκτα, λοιπόν, στο εξής συμπέρασμα: το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (το οποίο περιγράφεται από τα πεδία E , και B_y) περιέκλειε τη στροφορμή σε λανθανουσα μορφή στην περιπλοκή δομή του, και η στροφορμή αυτή μεταφέρθηκε στον πυκνωτή! Κατά την εκφόρτιση του πυκνωτή, το ηλεκτρικό πεδίο εξασθενεί, και η στροφορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μεταφέρεται βαθμαία στον πυκνωτή, προκαλώντας αρχικά την περιστροφή του και επιταχύνοντάς τη στη συνέχεια. Τελικά, όταν το ηλεκτρικό πεδίο εξαφανίστηκε, το συνδυασμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έ-

παψε να υφίσταται (μολονότι η μαγνητική του συνιστώσα παρέρεινε αναλλοίωτη), και ο πυκνωτής απέκτησε τη μέγιστη γωνιακή του ταχύτητα.

«Σε τι παράξενο κόσμο ζούμε, σκέφτηκε η φέρελης φυσικός. «Φαίνεται ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει τις μηχανικές ιδιότητες της πυκνότητας ροπής και της πυκνότητας ορμής! Τι θα σκεφτόταν άραγε σερ James Maxwell;»

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum διανύει τον έκτο χρόνο συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994— και μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει τριάντα δύο τεύχη του.



Αυτά, για δυο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.
Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό των παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου. Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.
Κυκλοφορεί και η θήκη του έκτου τόμου, για την αρχειοθέτηση των αντίστοιχων τευχών.

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M156

Συναρτησιακή σχέση. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} - 1 + x\sqrt{2}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $f(f(x)) = 1 + 2x$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συναρτηση που ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς τέτοια ώστε να ισχύει $f(f(x)) = 1 - 2x$ για κάθε πραγματικό x .

M157

Επλογή υποσύνολου. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επλέξουμε ένα υποσύνολο του συνόλου $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ που να μην περιέχει τρεις διαδοχικούς αριθμούς;

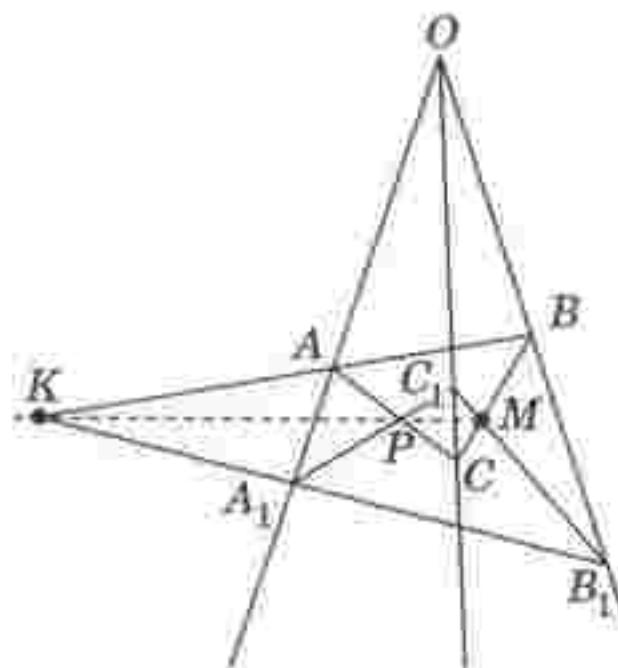
M158

Πρόβλημα περικύκλωσης. Χωρίστε με ευθεία τομή ένα ορθογώνιο διαστάσεων $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ σε δύο μέρη τα οποία να μπορούμε να τα τοποθετήσουμε μέσα σε έναν κύκλο διαμέτρου $19,5 \text{ cm}$ χωρίς να επκαλύπτονται.

M159

Σχεδιάστε την ευθεία. Δίδονται δύο σημεία στο επίπεδο και ένας κανόνας, το μήκος του οποίου είναι μικρότερο από την απόσταση μεταξύ των σημείων. Κατασκευάστε (χωρίς διαβήτη!) την ευθεία που διέρχεται από τα δύο σημεία.

Μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Desargues. Εστω ότι έχουμε δύο τρίγωνα ABC και $A_1B_1C_1$ τοποθετημένα έτσι ώστε οι ευθείες AA_1 , BB_1 και CC_1 να συντρέχουν στο ίδιο σημείο. Εστω ότι οι ευθείες AB και A_1B_1 τέμνονται στο σημείο K , οι BC και B_1C_1 τέμνονται στο M , και οι CA και C_1A_1 στο P . Τότε, τα σημεία K , P και M είναι συγγραμμικά (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

M160

Γωνιώδης αναζήτηση. Εστω AA_1 , BB_1 , και CC_1 οι διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ABC (όπου τα A , B , και C ανήκουν στις πλευρές του τριγώνου). Αν $\angle AA_1C = \angle AC_1B_1$, βρείτε τη $\angle BCA$.

Φυσική

Φ156

Κινούμενο πεζοδρόμιο. Για την κατασκευή ενός κινούμενου πεζοδρομίου προτάθηκε το εξής μοντέλο: Από το έδαφος ο διαβάτης ανεβαίνει στην πρώτη κινούμενη ταινία, κατόπιν περνά στη επόμενη ταινία, η οποία τρέχει γρηγορότερα, κ.ο.κ. Εστω λοιπόν ότι η πρώτη ταινία έχει σταθερή ταχύτητα $v_1 = 2 \text{ m/s}$. Ενας άνθρωπος ανεβαίνει πάνω της, κάθετα προς την κίνησή της. Αφού πάτησει στέρεα σ' αυτήν (δηλαδή χωρίς να γλιστρά), προχωράει στη δεύτερη ταινία, και πάλι κάθετα στην κίνησή της. Το μέγιστο προβλεπόμενο φορτίο για μια τέτοια κινούμενη ταινία (δηλαδή ο αριθμός των ανθρώπων που επιβιβάζονται σ' αυτήν ανά μονάδα χρόνου) ανέρχεται σε $N = 10$ άνθρωποι/ s , και η μάζα ενός μέρους ανθρώπου θεωρείται ίση με $M = 80 \text{ kg}$. Ποια είναι η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη προκειμένου

η ταινία να κινείται οριζόντια και με σταθερή ταχύτητα; Ποια δύναμη πρέπει να εφαρμοστεί στη δεύτερη ταινία ώστε να την κινεί με σταθερή ταχύτητα $v_2 = 3 \text{ m/s}$? Υποθέστε ότι ο μέσος αριθμός ανθρώπων σε κάθε ταινία είναι ο ίδιος. (A. Zilberman)

Φ157

Θερμοχωρητικότητα υπό τα ύδατα. Ένας σπουδαστής βύθισε έναν ηλεκτρικό θερμαντήρα σε δοχείο με νερό. Ανά 3 λεπτά ο σπουδαστής κατέγραψε τη θερμοκρασία σε ${}^{\circ}\text{C}$ (βλ. πίνακα, πρώτη γραμμή). Κατόπιν έψυξε το νερό, βύθισε ένα μικρό κομμάτι μέταλλο στο δοχείο και επανέλαβε τις μετρήσεις (βλ. πίνακα, δεύτερη γραμμή). Η τάση που εφαρμόζοταν στο θερμαντήρα ήταν 35 V ,

25,2	26,4	27,6	28,7	29,7
22,6	23,8	25,0	26,0	27,0

30,6	31,5	32,3	33,1
28,0	28,9	29,8	30,6

το ρεύμα που τον διέρρεε $I = 0,2 \text{ A}$, και στο δωμάτιο επικρατούσε θερμοκρασία $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$. Βρείτε τη θερμοχωρητικότητα του δείγματος. (L. Bakanina)

Φ158

Βολτόμετρο και ηλιακό κύτταρο. Ένα βολτόμετρο με πολλές περιοχές μέτρησης, το οποίο αποτελείται από ένα ευαισθητό μικροαμπερόμετρο που συνδέεται εν σειρά με την εκάστοτε κατάλληλη προστατευτική αντίσταση, χρησιμοποιείται για τη μελέτη ενός ηλιακού κύτταρου. Οταν συνδέεται με το κύτταρο και λειτουργεί στην κλίρακα του 1 V , δείχνει $V_1 = 0,7 \text{ V}$, ενώ όταν λειτουρ-

Η συνέχεια στη σελ. 69 ↪

Oersted: μια μαγνητική προσωπικότητα

«Κύριοι, ίδου η επανάσταση»

V. Kartsev

OTAN, ΤΟ 1820, Ο ΗΛΙΚΙΑΣ ΣΑΡΑΝΤΑ τριών ετών δανός καθηγητής Hans Christian Oersted απέστειλε για δημοσίευση μια τετρασέλιδη ανακοίνωση, οι επιστήμονες στη Γαλλία, την Ελβετία, την Αγγλία και τη Ρωσία αντιλήφθηκαν ότι το περιεχόμενό της έθιγε τόσο εποιημονικά όσο και πανανθρώπινα προβλήματα. Ποια στάση θέφειλαν να τηρήσουν απέναντι στο συντάκτη της ανακοίνωσης και πώς έπρεπε να αξιολογήσουν το πόνημά του; Ποιο ήταν αυτό το πρόσωπο —ένας ονειρόπόλος, ένας ρομαντικός ή απλώς ένας τυχερός άνθρωπος; Και ποιο το αντικείμενο που θεράπευε —η φυσική, η χημεία, η φαρμακολογία, η φιλοσοφία ή, μήπως, η ποίηση;

Δεν επρόκειτο για απλά γρατήρατα. Παραμένουν ανοιχτά ακόμη και σήμερα. Γι' αυτό, λοιπόν, ας επιχειρήσουμε ένα ταξίδι στο παρελθόν, σε μια εποχή που την χωρίζουν από τη δική μας δύο και πλέον αιώνες, για να έποκεφθούμε το Ρουδκέρμπενγκ, μια πόλη σε ένα μακρινό νησάκι της Δανίας, το Λάνγκελαν. Ο Hans Christian Oersted υπήρξε γιος ενός φτωχού φαρμακοποιού. Ο Hans και ο αδελφός του Anders έλαβαν τη βασική τους εκπαίδευση από διάφορες ιηγές: ένας κουρέας της πόλης τους δίδαξε γερμανικά, ενώ η γυναίκα του τους δίδαξε δανικά: ένας ιερέας τους εξήγησε τους κανόνες της γραμματικής

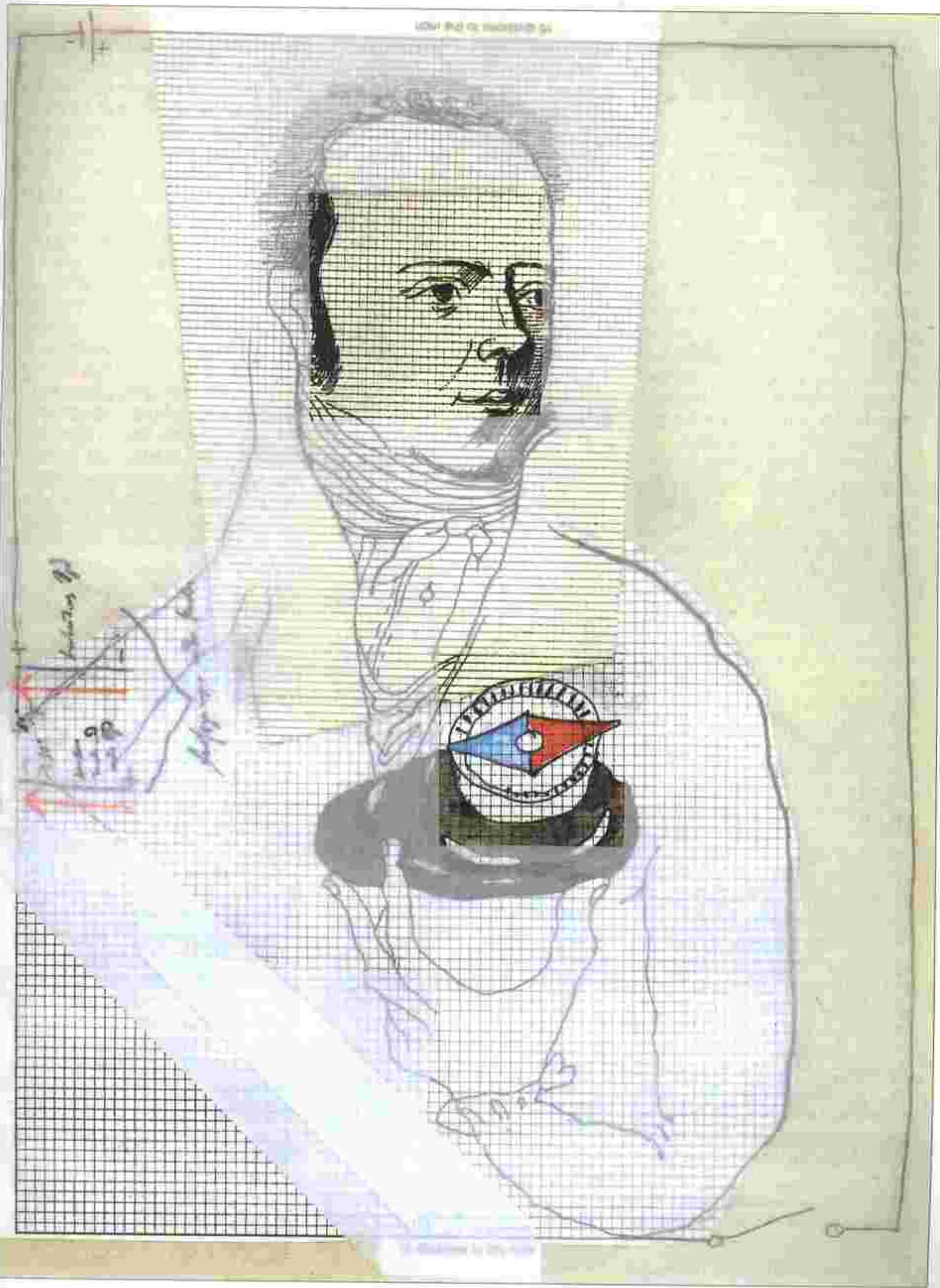
και εξοικείωσε τα δύο αδέλφια με την ιστορία και τη λογοτεχνία: ένας τοπογράφος τους έδειξε πώς να προσθέτουν αριθμούς· και, τέλος, ένας φοιτητής τους μάθησε στα μυστικά της ορυκτολογίας.

Σε ηλικία 12 ετών, τον Hans τον είχε ήδη γοητεύσει η εποιητήμη. Δυστυχώς, όμως, αντί να λάβει μια συστηματικότερη εκπαίδευση, αναγκάστηκε να εργαστεί στο πατρικό φαρμακείο. Εκεί το ενδιαφέρον του τράβηξε η ιατρική, η οποία έγινε παροδικά το αγαπημένο του αντικείμενο, επισκιάζοντας τη χημεία, την ιστορία και τις καλές τέχνες. Αποφάσισε να σπουδάσει στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης, αλλά τον βασάνιζε η αμφιβολία: Ποια εποιήμη έπρεπε να ακολουθήσει; Έτσι, άρχισε να μελετά τα πάντα: ιατρική, φυσική, αστρονομία, φιλοσοφία και ποίηση.

Ο Oersted πέρασε ευτυχισμένα φοιτητικά χρόνια. Όπως έγραψε αργότερα, για να αποκτήσουν οι νέοι την απόλυτη ελευθερία, πρέπει να απολαύσουν το βασίλειο του λόγου και της φαντασίας, εκεί όπου ο αγώνας πορεύεται μαζί με την ελευθερία της σκέψης και της έκφρασης, εκεί όπου στον ηττημένο δίνεται η ευκαιρία να οπωθεί και να συνέχισει να παλεύει. Έζησε σε έναν κόσμο όπου είχαν θέση οι σεμνές νίκες, η κατάκτηση της νέας γνώστης και η ευκαιρία να διορθώνει κα-

νείς τα λάθη του παρελθόντος. Το 1797 του απονεμήθηκε το χρυσό μετάλλιο του πανεπιστημίου για το δοκίμιό του «Τα σύνορα του πεζού λόγου και της ποίησης». Η επόμενη εργασία του, η οποία έτυχε ανάλογης διάκρισης, αφορούσε τις ιδιότητες των αλκαλίων, και η διδακτορική του διατριβή ήταν αφιερωμένη στην ιατρική. Παρότι τα επιτεύγματά του υπήρξαν εντυπωσιακά, διακινδύνευσε την εποιημονική του σταδιοδρομία καλλιεργώντας παράλληλα ποικίλα ενδιαφέροντα, γεγονός που συνέτεινε να περιοριστεί το βάθος της επαγγελματικής του ειδίκευσης.

Εν τω μεταξύ, μια νέα εποχή άνοιγε. Μέσα στη δίνη της γαλλικής και της αμερικανικής επανάστασης ανέτειλε μια νέα αντίληψη για τον κόσμο, και τα παλιά δόγματα εκπιστήκαν από τις νέες ηθικές αρχές και τη νέα λογική. Η βιομηχανική επανάσταση προκάλεσε έναν αστέρευτο πόταρό πρακτικών καινοτομιών. Ο 19ος αιώνας διακήρυξε νέους τρόπους σκέψης και ζωής μέσω των καινοφανών κοινωνικών και πολιτικών ιδεών, της σύγχρονης φιλοσοφίας, της τέχνης και της λογοτεχνίας. Αυτός ο νέος κόσμος γοήτευσε τον Hans, και αποφάσισε να βρεθεί εκεί όπου λύνονταν τα μεγάλα εποιημονικά και φιλοσοφικά προβλήματα. Η Δανία δεν ήταν παρόμια ευρωπαϊκή επαρχία, και ο Oer-



sted δεν ήθελε να περάσει εκεί την υπόλοιπη ζωή του. Ευτυχώς, το ταλέντο του, η εμπορνή του και η καλοτυχία του έσπιξαν με τον καλύτερο τρόπο: Ύστερα από την έξοχη υποστήριξη της διατριβής του, το πανεπιστήμιο τον έστειλε για περιστέρω σπουδές στη Γαλλία, τη Γερμανία και την Ολλανδία. Εκεί είχε την ευκαιρία να παρακολουθήσει διάφορες διαλέξεις σε θέματα όπως το πώς είναι δυνατόν να επιλυθούν τα προβλήματα της φυσικής με τη βοήθεια της ποίησης και της μυθολογίας. Παρότι απολάμβανε τις διαλέξεις των λαμπρών φιλοσόφων, ο Oersted ουδέποτε εγκατέλειψε την πειραματική προσέγγιση στη μελέτη των φυσικών φαινομένων.

Ο Oersted επηρεάστηκε βαθύτατα από τη φιλοσοφία του Georg Hegel (1770-1831) και του Friedrich Schelling (1775-1854), ιδιαίτερα δε από την ιδέα του Schelling περί της καθολικής σύνδεσης όλων των φαινομένων. Η ιδέα αυτή προσέδωσε κύρος στην ευρύτητα των επιστημονικών του ενδιαφερόντων αφού, σύμφωνα με τις κρατούσες φιλοσοφικές αντιλήψεις της εποχής, όλα τα επιστημονικά πεδία βρίσκονταν σε αλληλεξάρτηση. Η ιδέα των καθολικών συνδέσεων μεταξύ των φαινομένων κατακυρίευσε τον Oersted. Γρήγορα βρήκε μια αδελφή ψυχή για να μοιραστεί τις απόψεις του πρόκειται για τον γερμανό φυσικό Johann Ritter (1776-1810), ο οποίος ήταν εξίσου ρομαντικός και είχε ένα επίσης ευρύτατο πεδίο επιστημονικών ενδιαφερόντων. Εφευρέτης ενός τύπου ηλεκτρικού συσσωρευτή, ο Ritter υπήρξε ένας ονειροπόλος που διατύπωσε πολλές «ξωφρενικές» ιδέες. Για παράδειγμα, συμπέρανε από αστρολογικές μελέτες ότι το 1819 ή το 1820 θα ήταν η αφετηρία μιας εποχής νέων ανακαλύψεων στον ηλεκτρισμό. Και ως του θαύματος, ήτοι έγινε. Μάλιστα, την εναρκτήρια ώθηση την έδωσε ο Oersted, αλλά ο Ritter δεν έζησε για να τις δει.

Το 1813, ο Oersted δημοσίευσε την πραγματεία του *Μια μελέτη της ταυτότητας των χημικών και των ηλεκτρικών δυνάμεων*, όπου για

πρώτη φορά στην ιστορία διατυπώνεται ρητά η ιδέα ότι υπάρχει κάποια σύνδεση ανάμεσα στον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό. Ο Oersted γράφει ότι «θα πρέπει να ελεγχθεί κατά πόσον ο ηλεκτρισμός... δρα με κάποιον τρόπο σε έναν μαγνήτη». Η λογική του ήταν απλή: ο ηλεκτρισμός παράγει φως (έναν σπυνθήρα), ήχο (τον κρότο που συνοδεύει το σπυνθήρα) και θερμότητα (όταν διαρρέει έναν αγωγό). Μήπως δεν αποτελούσε αυτό παιστικό παράδειγμα καθολικής σύνδεσης μεταξύ των φυσικών φαινομένων; Γιατί, λοιπόν, να μην μπορεί ο ηλεκτρισμός να προκαλέσει επίσης και κάποια μαγνητικά φαινόμενα;

Η ιδέα ότι υφίσταται κάποια σύνδεση ανάμεσα στον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό, η οποία προήλθε από τις εμφανείς ομοιότητες που παρουσιάζαν η έλξη μικροσκοπικών αντικειμένων από το ηλεκτρό και ριντισμάτων σιδήρου από τους μαγνήτες, αποτελούσε αντικείμενο συζητήσεων από καιρό και είχε σαγηνέψει πολλούς λαμπρούς ευρωπαίους ερευνητές. Ήδη το 1747, την εικασία αυτή τη συζητούσε ο ακαδημαϊκός Franz Aepinus (1724-1802) στην Αγία Πετρούπολη. Ο γάλλος François Arago (1786-1853) αφιέρωσε πολυετείς προσπάθειες στην καταγραφή παράξενων φαινομένων που αφορούσαν πλοιά, θησαυρούς και άλλα μυστηριώδη γεγονότα, προσπαθώντας να ελέγξει κατά πόσο ήταν δυνατόν να συσχετισθούν με την υποθετική αυτή σύνδεση.

Μια μέρα, λοιπόν, το γαλλικό πολεμικό πλοίο *La Raleigh* εμφανίστηκε στην Πάλμα, το μεγαλύτερο λιμάνι της Μαγιόρκας, στην Ισπανία. Βρισκόταν σε τόσο άθλια κατάσταση ώστε μετά βίας έφτασε στο αγκυροβόλιο. Όταν αποβιβάστηκε το πλήρωμά του, ανέβηκε στο πλοίο μια ομάδα διάσημων γάλλων επιστημόνων (στην οποία συμμετείχε και ο Arago). Όλα έδειχναν ότι το πλοίο είχε πληγεί από κεραυνό. Ενώ τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής περιφέρονταν περίλυπα ανάμεσα στα αστραποκαμένα κατάρτια, ο Arago άρμησε προς τις πυξίδες και είδε αυτό που περίμενε: η πολικότητα με-

ρικών μαγνητικών βελονών σίχε αναστραφεί: ο προσανατολισμός τους ήταν αντίθετος από τον κανονικό.

Ενα χρόνο αργότερα, ο Arago εξετασε τα συντρίμμια ενός γενοβέζικου πλοίου που είχε καταστραφεί στους βράχους των ακτών της Αλγερίας. Ανακάλυψε, και πάλι, ότι είχε αναστραφεί η πολικότητα των μαγνητικών βελονών στις πυξίδες. Μέσα στο πυκνό σκοτάδι της νύχτας, ο καπετάνιος κατηύθυνε το πλοίο προς βορρά για να αποφύγει τον κίνδυνο, ή τουλάχιστον έτοι νόμιζε. Στην πραγματικότητα, το πλοίο έπλεσε στην αντίθετη κατεύθυνση, καταπάνω στους βράχους.

Επιτέλους, ο Arago είχε ανακάλυψε το θηραύρο που αναζητούσε! Κρυβόταν στο αμπάρι του εμπορικού πλοίου: ένα σερβίτοιο φαγητού που είχε ταξιδέψει στη Βόρειο Αμερική. Ένας κεραυνός είχε λιώσει τα σκεύη, και κάποια από αυτά είχαν μετατραπεί σε πολύ ισχυρούς μαγνήτες —ένδειξη κάποιας σύνδεσης ανάμεσα στον κεραυνό και το μαγνητισμό.

Το πο γνωστό και τολμηρό πείραμα με κεραυνούς το πραγματοποίησαν ο Βενιαμίν Φραγκλίνος στην Αμερική και ο Michael Lomonosov και Georg Richmann στη Ρωσία, οι οποίοι ανακάλυψαν ότι ο κεραυνός σίναι απλώς ένας γιγαντιαίος ηλεκτρικός σπυνθήρας. Στην εποχή μας, κάτι τέτοιο ηχεί τετριμμένο, όμως ο Richmann θυσίασε τη ζωή του για να αποκτηθεί αυτή η γνώση. Ο Arago συνέλεξε πληθώρα δεδομένων που καταδείκυναν τη σύνδεση μεταξύ κεραυνών και μαγνητισμού και ένιωθε πως βρισκόταν κοντά σε μια εξαιρετικά σημαντική ανακάλυψη. Έτοι, θα πρέπει τον κατέκλυσαν ανάμικτα αισθήματα χαράς και απογοήτευσης όταν έμαθε ότι το πρόβλημα που τον αποχώλιούσε τόσο καιρό είχε λυθεί. Την απάντηση την είχε βρει ο Oersted.

Κατά πάθος εξεπίποδες:

Στις 15 Φεβρουαρίου 1820 ο Oersted, καθηγητής πλέον στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης, έδωσε μια διάλεξη στους φοιτητές του. Ως συνήθως, η διάλεξη ήταν πλούσια σε

πειραματικές επιδείξεις. Εκτός από τον καθιερωμένο χημικό εξοπλισμό, πάνω στην εργαστηριακή τράπεζα υπήρχαν κι άλλες συσκευές: μια ηλεκτρική πηγή, με σύρματα συνδεδεμένα στους πόλους της, και μια πυξίδα. Όταν ο Oersted έκλεισε το κύκλωμα, η βελόνα της πυξίδας πνάχτηκε ελαφρά αλλάζοντας προσανατολισμό. Όταν άνοιξε το κύκλωμα, η βελόνα επέστρεψε στην αρχική της θέση. Εμπόκευτο για την πρώτη πειραματική απόδειξη της σύνδεσης μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων, την οποία επί πολλά χρόνια είχαν παραβλέψει ιδοοι και τόσοι εποικιμονες.

Εκ πρώτης όψεως, η ανακάλυψη αυτή φαίνεται να μην παρουσιάζει κανένα σκοτεινό σημείο. Ο Oersted απλώς επέδειξε στους φοιτητές του ότι ένα ακόμη τεκμήριο υπέρ της καθολικής σύνδεσης μεταξύ των φυσικών φαινομένων. Γιατί, λοιπόν, αυτή η εκδοχή των γεγονότων αντιμετωπίζεται με σκεπτικισμό; Γιατί έγιναν τόσο πολλές συζητήσεις σχετικά με τις συνθήκες της ανακάλυψης; Μα, διότι οι φοιτητές που παρακολούθησαν την περίφημη διάλεξη αφηγήθηκαν διαφορετικά τα διαδραματισθέντα. Σύμφωνα με τη μαρτυρία τους, ο Oersted σκόπευε να επιδείξει τα θερμικά αποτελέσματα του ηλεκτρικού ρεύματος. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποίησε ένα σύρμα και μια ηλεκτρική πηγή, και ήταν καθαρή σύμπτωση ότι κοντά τους βρέθηκε μια πυξίδα. Και το σπουδαιότερο, το ελαφρό τίγαγμα και την περιστροφή της βελόνας την παρατήρησε ένας φοιτητής, και όχι ο αξιοσέβαστος καθηγητής. Οι φοιτητές προσέθεσαν ότι ο Oersted έφεινε πραγματικά κατάπληκτος και κατενθουσιασμένος. Ωστόσο, σε μεταγενέστερες εργασίες του έγραφε: «Οποιοσδήποτε παρακολούθησε τη διάλεξη μου υπήρξε μάρτυρας του γεγονότος ότι προανήγγειλα το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος. Άρα, η ανακάλυψη δεν πραγματοποιήθηκε τυχαία, όπως θα ήθελε να συμπεράνε ο καθηγητής Hilbert στηρίζομενος στις εκφράσεις τις οποίες χρησιμοποίησα στην πρώτη περιγραφή αυτής της ανακάλυψης.»

Έχει άραγε καρία σημασία το σύρωμα εάν η ανακάλυψη του Oersted υπήρξε τυχαία ή εκούσια; Και τι θεωρείται «τυχαία» ανακάλυψη; Εν πάσῃ περιπτώσει, όσο τυχαία και αν φάνηκε, διάφορα γεγονότα είχαν προετοιμάσει το έδαφος. Ήταν τυχαίο το ότι ένας χημικός, ο Oersted, έδωσε διάλεξη με θέμα τον ηλεκτρισμό; Προφανώς όχι. Την εποχή του Oersted ο ηλεκτρισμός αποτελούσε σχετικά νέο ερευνητικό πεδίο.¹

Λίγα πράγματα ήταν γνωστά για τη φύση του ηλεκτρισμού, και δεν απαιτούνταν ειδική εκπαίδευση για τη μελέτη τους. Εποιητικά, δινόταν η ευκαιρία να συμμετάσχουν στην πειραματική μελέτη του ηλεκτρισμού πολλοί εποικιμονες και μηχανικοί οι οποίοι δραστηριοποιούνταν επαγγελματικά σε πολύ διαφορετικά πεδία: φυσικοί, χημικοί, ειδικοί στη μηχανική κ.ά. Στα πειράματα χρησιμοποιούνταν διατάξεις εξαρετικά απλές, που ήταν δυνατόν να κατασκευαστούν σε οποιοδήποτε εργαστήριο. Επομένως, πάνω στην τράπεζα του Oersted δεν υπήρχαν «τυχαίες» διατάξεις, ούτε η διάλεξη του περιελάμβανε θέρατα που θα καλύπτονταν «εκ του προχείρου». Τα μέσα που χρησιμοποιούνταν στα πειράματα ηλεκτρισμού εκείνη την εποχή ήταν ελάχιστα: βολταϊκές στήλες, σύρματα, βατραχοπόδαρα, μαγνήτες και πυξίδες.

Ο αγγλος φυσικός σερ William Bragg (1890-1971), ο οποίος επνόησε την ανάλυση της δομής των κρυστάλλων μέσω της περίθλασης ακτίνων X, παρατήρησε πως δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι ο Oersted έφτασε στην ανακάλυψη του τυχαία. Το πραγματικά απίστευτο είναι ότι χρειάστηκε να παρέλθει μία εικοσαετία από την εφεύρεση της βολταϊκής στήλης ώσπου να πραγματοποιηθεί η ανακάλυψη αυτή. Δεκάδες εργαστήρια διέθεταν όλο τον αναράπτρο εξοπλισμό για να

επισημάνουν τη σύνδεση μεταξύ του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού: βολταϊκές στήλες, σύρματα και πυξίδες. Τα αντικείμενα αυτά τοποθετούνταν το ένα κοντά στο άλλο σε χιλιάδες περιπτώσεις. Ήταν αναπόφευκτο να τοποθετηθεί μια μαγνητική βελόνα κοντά σε ένα σύρμα το οποίο συνέδεε τους πόλους μιας βολταϊκής στήλης. Κάποιος θα έπρεπε να έχει προσέξει το ελαφρό τίγαγμα της βελόνας!

Και όμως, πέρασαν περισσότερα από 20 χρόνια ώσπου να συμβεί πραγματικά αυτή η αλληλουχία γεγονότων. Ένας άγνωστος φοιτητής που παρακολουθούσε τη διάλεξη του Oersted έπαιξε ιστορικό ρόλο, αποκλειστικά και μόνο επειδή είχε το βλέμμα στραμμένο προς την πυξίδα την κατάλληλη στιγμή. Ο ρόλος του μπορεί να συγκριθεί με εκείνον του ναύτη που φώναξε στον Κόλαρο ότι αντικρίζε τον Νέο Κόσμο.

Αλλά μήπως μπορεί να θεωρηθεί τόσο τυχαία η ανάμειξη του Oersted σε αυτή την εντυπωσιακή ανακάλυψη; Θα ήταν αδύνατο, άραγε, παρόμοια όργανα να διαταχθούν και να συντονιστούν με τόσο ευτυχή τρόπο σε κάποιο άλλο εργαστήριο; Βεβαίως όχι. Στην προκειμένη περίπτωση, όμως, οι πθανόντητες ευνοούσαν τον Oersted, επειδή ανήκε σε μικρή ομάδα ερευνητών που αναζητούσαν συνδέσεις μεταξύ των φυσικών φαινομένων.

Ας επανέλθουμε, ωστόσο, στην ουσία της ανακάλυψης του Oersted. Η απόκλιση της μαγνητικής βελόνας στην εντυπωσιακή επίδειξη του ήταν στην πραγματικότητα μάλλον μικρή. Τον Ιούλιο του 1820 ο Oersted επανέλαβε το πειράμα χρησιμοποιώντας ισχυρότερες ηλεκτρικές πηγές, με αποτέλεσμα το φαινόμενο να παρουσιάστει πολύ εντονότερο. Ανακάλυψε ότι όσο πολύ χοντρό σύρμα χρησιμοποιούνταν, τόσο περισσότερο απέκλινε η βελόνα.²

Επιπλέον, ο Oersted παρατήρησε

1. Το 1800 ο ιταλός φυσικός Alessandro Volta (1745-1827) εφηύρε την πρώτη αξιόπιστη και συνεχή πηγή ηλεκτρικού ρεύματος, τη βολταϊκή στήλη. Η εφεύρεση αυτή διευκόλυνε κατά πολὺ την πειραματική έρευνα των ηλεκτρικών φαινομένων.

2. Δεν αποτελεί αυτό το αρχέτυπο ενός αμπερομέτρου; Σήμερα είναι σαφές ότι το χοντρότερο σύρμα στο πειράμα του Oersted είχε μικρότερη ηλεκτρική αντίσταση, οπότε διηρρέων από ρεύμα μεγαλύτερης έντασης.

ένα παράξενο φαινόμενο που ερχόταν σε σύγκρουση με τις κλασικές νευτώνεις έννοιες της δράσης και της αντίδρασης. Η δύναμη που ενεργούσε στη βελόνα δεν είχε τη διεύθυνση του σύρματος, αλλά δρούσε σε ένα επίπεδο κάθετο στο σύρμα! Για να μιλήσουμε με τα λόγια του ίδιου του Oersted, η μαγνητική επίδραση του ηλεκτρικού ρεύματος έμοιαζε με κυκλική ροή γύρω από το σύρμα. Η βελόνα δεν έδειχνε ποτέ προς το σύρμα αντίθετα, η διεύθυνσή της ήταν εφαπτόμενη σε φαντασικούς κύκλους γύρω από αυτό. Φαίνοταν σαν να επιδρούσαν γύρω από τον ρευματοφόρο αγωγό αόρατες μαγνητικές δυνάμεις. Τούτο το γεγονός εξηγεί τόσο την κατάπληξη του Oersted όσο και τις καχύποπτες και ενιοτε ειρωνικές αντίδρασεις άλλων ερευνητών. Για να καλύψει τα νώτα του, στην τετρασέλιδη ανακοίνωσή του ο Oersted κατέγραψε προσεκτικά τους μάρτυρές του, χωρίς να παραλείψει καμία λεπτομέρεια που θα πιστοποιούσε την επιστημονική τους αξία.

Για να είραστε ακριβοδίκαιοι, ο Oersted δεν κατόρθωσε να δώσει σωστή θεωρητική ερμηνεία στο πειραμάτος του. Ωστόσο, διατύπωσε μια κρίσιμη ιδέα σχετικά με τη στροβιλόδη φύση των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Επί μακρόν, η έννοια της ηλεκτρομαγνητικής στροβιλότητας δεν έγινε αποδεκτή από τους περισσότερους επιστήμονες, οι οποίοι πίστευαν ότι οι δυνάμεις που δρούσαν ανάμεσα σε ένα ρευματοφόρο αγωγό και μια μαγνητική βελόνα ήταν συμβατικές ελκυτικές και αποστικές δυνάμεις, παρόμοιες με τις νευτώνεις δυνάμεις της παγκόσμιας έλξης και τις δυνάμεις Coulomb μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων. Συνεπώς, ο Oersted δεν απέδειξε μόνο τη σύνδεση μεταξύ του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, αλλά έφερε στο φως ένα νέο μυστήριο, το οποίο δεν μπορούσε να εξηγηθεί βάσει των γνωστών φυσικών αρχών και νόμων.

Τι νέα διαδίδονται

Η τετρασέλιδη ανακοίνωση του Oersted δημοσιεύθηκε στις 21 Ιου-

λίου 1820. Από αυτή την ημερομηνία και έπειτα, τα νέα διαδόθηκαν με ασυνήθιστη ταχύτητα για τα δεδομένα της εποικήμης του 19ου αιώνα. Υστερά από μερικές μόνο ημέρες η ανακοίνωση έφτασε στη Γενεύη, όπου βρισκόταν ο Arago. Μια ματιά στο κείμενο του άρκεσε για να καταλάβει ότι ο Oersted είχε λύσει το πρόβλημα που τυράννερ πολύ καπρό τόσο τον ίδιο όσο και άλλους επιστήμονες. Η αντίδραση στο πειραμάτος Oersted υπήρξε τόσο έντονη ώστε ένας από τους θεατές της επίδειξης σηκώθηκε όρθιος και αναφώνησε τη φράση που έγινε διάσημη: «Κύριοι, ίδού η επανάσταση!» Ο Arago επέστρεψε στο Παρίσι κατάπληκτος. Στην πρώτη κιόλας συνεδρίαση της Γαλλικής Ακαδημίας Εποικημάτων μετά την επάνοδό του, στις 4 Σεπτεμβρίου 1820, έσπευσε να δώσει μια προφορική αναφορά για το πειραμάτο του Oersted. Οι ακαδημαϊκοί επέμειναν σε ολοκληρωμένη επίδειξη του πειράματος, και αυτή πραγματοποιήθηκε στην επόμενη συνεδρίαση, στις 22 Σεπτεμβρίου του ίδιου έτους.

Ο André-Marie Ampère (1775-1836) παρακολούθησε με ιδιαίτερο ενδιαφέρον την αναφορά του Arago. Ίσως να διαισθάνθηκε ότι ήρθε πλέον η σειρά του να πάρει τη σκυτάλη από τον Oersted. Όπως ο Arago και ο Oersted, έτοι και εκείνος περίμενε αυτή την αποφασιστική στιγμή επί είκοσι συναπτά έτη. Και τώρα, στις 4 Σεπτεμβρίου 1820, το πλήρωμα του χρόνου είχε φτάσει. Ο Ampère συνειδητοίστησε ότι έπρεπε να δράσει. Δεν χρειάστηκε παρά μόνο δύο εβδομάδες για να παρουσιάσει τη μελέτη του, στην οποία ανέπτυσσε την ιδέα του και παρέθετε τα πειραματικά δεδομένα που συντηρούσαν υπέρ αυτής: όλα τα μαγνητικά φαινόμενα είναι δυνατόν να εξηγηθούν βάσει των ηλεκτρικών. Έτοι, γεννήθηκε μια νέα εποικήμη, η ηλεκτροδυναμική, η οποία συνέδεσε θεωρητικά τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά φαινόμενα. Σαράντα χρόνια αργότερα, η ηλεκτροδυναμική απετέλεσε οργανικό μέρος της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας πεδίου του Maxwell, η οποία παραμένει α-

κόμη και σήμερα η αξιόπιστη «πυξίδα» μας σε έναν πραγματικό «οκεανό ηλεκτρικών φαινομένων».

Μετά την περίφημη ανακάλυψη που πραγματοποίησε, ο Oersted δεχθήκε πλήθος τιμητικών διακρίσεων. Ήγινε μέλος πολλών κορυφαίων επιστημονικών ενώσεων, μεταξύ των οποίων της Βασιλικής Επιφείας του Λονδίνου και της Γαλλικής Ακαδημίας Εποικημάτων. Στη Μεγάλη Βρετανία ημίθηκε με το μετάλλιο Cupley, ενώ στη Γαλλία τού απονεμήθηκε το βραβείο των 3.000 χρυσών φράγκων, το οποίο είχε καθιερώσει ο Ναπολέων για τις μεγάλες ανακαλύψεις στον ηλεκτρισμό.

Ο Oersted αποδέχθηκε όλες αυτές τις τιμητικές διακρίσεις, όμως δεν λιγότερο ποτέ ότι η νέα εποχή απαιτούσε καινοτόμες προσγεγγίσεις στη διδασκαλία της εποικήμης. Ήρισε μια εταιρεία και κυκλοφόρησε ένα λογοτεχνικό περιοδικό στη Δανία, με σκοπό να προωθήσει τόσο την εποικήμη όσο και τις τέχνες. Ήδωσε διαλέξεις ειδικά για γυναίκες και υποστήριξε τον συνονόματό του Hans Christian Andersen, τον μετέπειτα διάσημο συγγραφέα παραμυθιών. Εν ολίγοις, ο Oersted έγινε εθνικός ήρωας.

Δυστυχώς, δεν χάρηκε τον θριαμβό του για πολύ· πέθανε στις 9 Μαρτίου 1851. Τάφηκε υύχτα, και την τελετή της κηδείας του παρακολούθησαν 200.000 άνθρωποι. Επιστήμονες, εκπρόσωποι της πολιτείας, μέλη της βασιλικής οικογένειας, διπλωμάτες, φοιτητές και απλός κόσμος, όλοι θεώρησαν το θάνατό του ως προσωπική απώλεια.

Δείτε ακόμη τα άρθρα ...

- «Το φλογιστό και το μαγνητικό πεδίο», S. Eatman, F. Muir, H. Hickman, Μάιος/Ιούνιος 1994.
- «Μαγνητικό πονοπόλιο», John Wylie, Ιούλιος/Αύγουστος 1995.
- «Μαγνητικές φορτία και πλανήτες», Albert Stasenko, Ιούλιος/Αύγουστος 1997.
- «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;», A. Mitrofanov, Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997.
- «Το μαγνητικό πεδίο», D. Tseylkh, Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1998.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M156

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(f(x)) = 1 - 2x$ είναι αμφιμονοσήμαντη —δηλαδή, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(f(x_1)) \neq f(f(x_2))$. Αν υπάρχει μια συνάρτηση $f(x)$ όπως αυτή που περιγράφεται στο πρόβλημα, τότε πρέπει να έχει την ίδια ιδιότητα. Πράγματι, αν $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ — και αυτό δεν είναι αληθές. Επομένως, η $f(x)$ είναι αμφιμονοσήμαντη, και μια τέτοια συνάρτηση, ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, πρέπει να είναι γνησίως μονότονη: δηλαδή, είτε για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x_1, x_2 , έχουμε ότι, αν $x_1 > x_2$, τότε $f(x_1) > f(x_2)$ (δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα) είτε για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x_1, x_2 , έχουμε ότι, αν $x_1 > x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$ (δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα).

Θα αποδείξουμε ότι αν η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η $f(f(x))$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση —κάτι που δεν ισχύει για τη συνάρτηση που δίνεται στο πρόβλημα. Πράγματι, ας θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Εστω ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε, αν $x_1 < x_2$, έπειτα ότι $f(x_1) > f(x_2)$ και $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$.

(2) Εστω ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, αν $x_1 < x_2$, έπειτα ότι $f(x_1) < f(x_2)$ και $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$.

M157

Θα λύσουμε ένα γενικότερο πρόβλημα. Συμβολίζουμε με x_n το πλήθος των δύνατών τρόπων επλογής ενός υποσύνολου των πρώτων n φυσικών αριθμών που δεν περιέχει τρεις διαδοχικούς ακεραίους. Ποιο

είναι το x_n ? Μπορούμε να επιλέξουμε είτε το κενό σύνολο είτε το σύνολο {1}: κανένα από τα δύο αυτά σύνολα δεν περιέχει τρεις διαδοχικούς ακεραίους. Επομένως, $x_1 = 2$. Οροίως, με άμεση απαρίθμηση, βρίσκουμε ότι $x_2 = 4$ και $x_3 = 7$.

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_{n-1} (για $n > 3$). Ας δούμε πώς από αυτές μπορεί να προκύψει η τιμή του x_n . Τα υποσύνολα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος είτε περιέχουν το n είτε όχι. Αυτά που δεν περιέχουν το n είναι υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, και τα έχουμε απαριθμήσει με το x_{n-1} .

Πρέπει, επομένως, σε αυτό το πλήθος υποσύνολων να προσθέσουμε τα υποσύνολα που περιέχουν το n . Αυτά χωρίζονται και πάλι σε δύο κατηγορίες: εκείνα που περιέχουν το $n-1$ και εκείνα που δεν το περιέχουν. Τα υποσύνολα που περιέχουν το n και το $n-1$ δεν μπορεί να περιέχουν το $n-2$ και, επομένως, απαριθμούνται από το x_{n-2} . Απομένει να απαριθμήσουμε τα υποσύνολα που περιέχουν το n αλλά όχι το $n-1$ (και ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος). Κάθε τέτοιο υποσύνολο σχηματίζεται αγενέτη μπλέξουμε ένα υποσύνολο του $\{1, 2, 3, \dots, n-2\}$ και συμπεριλάβουμε σε αυτό και τον αριθμό n . Τα σύνολα αυτά απαριθμούνται από το x_{n-2} και, επομένως, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα την ακολουθία των τιμών x_n . Οι πρώτοι δέκα όροι της είναι 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, από όπου $x_{11} = 927$.

M158

Θεωρούμε το ορθογώνιο $ABCD$ Σχήμα 1

στο οποίο $AB = 10$ και $AD = 20$. Μπορούμε να προσπαθήσουμε να «στριμώξουμε» το ορθογώνιο μέσα στον κύκλο αποκόβοντας ένα ορθογώνιο τρίγμα του, $AKMB$, και τοποθετώντας το πάνω στο υπόλοιπο τρίγμα του $KMCD$, με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 1. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι όμως το τρίγμα που θα αποκόψουμε —δηλαδή, ποιο είναι το μήκος του AK ;

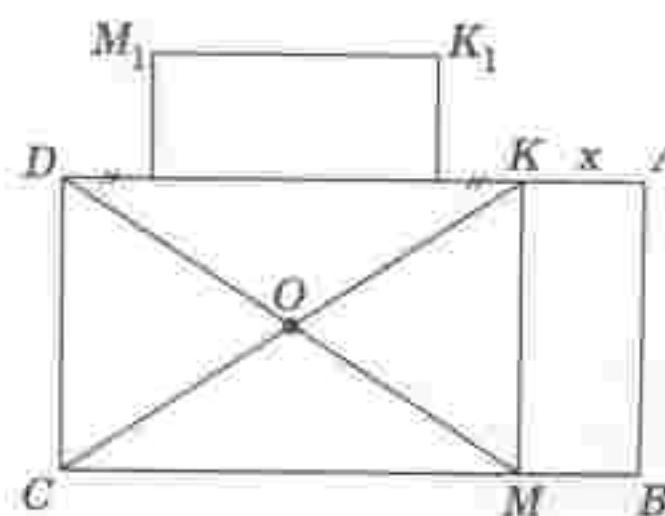
Εστω ότι $AK = x$, και ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το x έτσι ώστε τα σημεία M και K , να ανήκουν στον περιγεγραμμένο κύκλο του ορθογώνιου $KMCD$ (στο Σχήμα 1, κέντρο αυτού του κύκλου είναι το σημείο O). Αφού οι ίσες χορδές ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου, οι αποστάσεις του O από την KM και την K_1M_1 είναι ίσες. Αυτή η συνθήκη οδηγεί στην εξίσωση

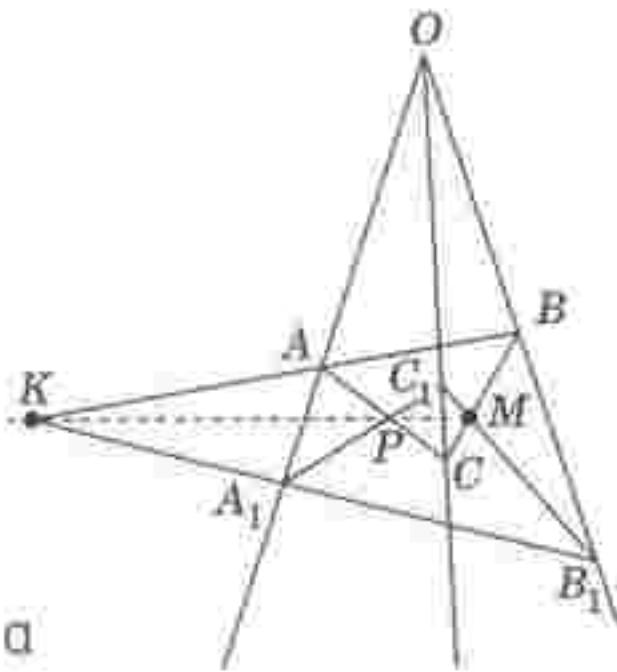
$$\frac{20-x}{2} = 5+x,$$

λύση της οποίας είναι $x = 10/3$.

Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι το νέο σχήμα που κατασκευάζουμε κατ' αυτό τον τρόπο χωρά σε έναν κύκλο διαμέτρου 19,5. Με άλλα λόγια, πρέπει να επαληθεύσουμε την αγιούτητα

$$10^2 + (20-x)^2 < (19,5)^2.$$





Σχήμα 2

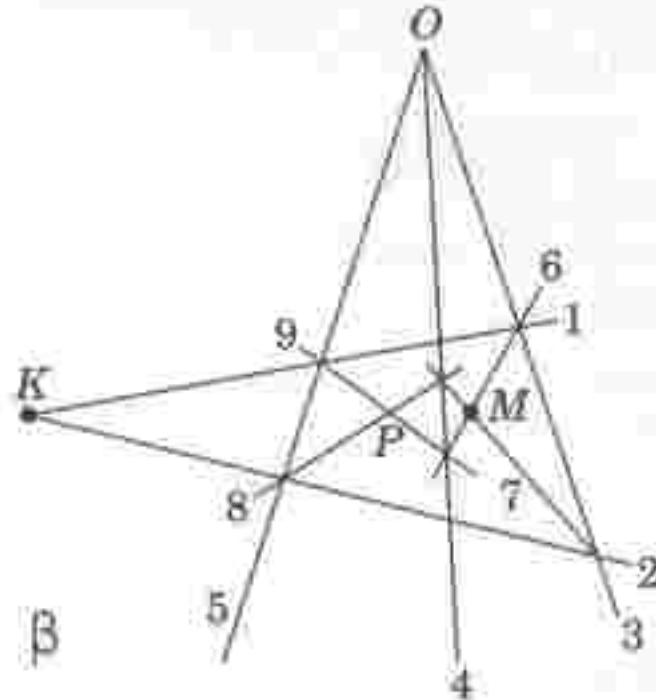
Αν αντικαταστήσουμε το x με το $10/3$, πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με το 9 και τα διαιρέσουμε με το 25 , προκύπτει η ανισότητα

$$36 + 100 < 9 \cdot 3,9^2, \text{ ή } 136 < 138,89.$$

Σημείωση: Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να βελτιωθεί. Μπορούμε να χωρίσουμε το δεδομένο ορθογώνιο σε δύο μέρη, έτσι ώστε να χωρέσει σε έναν μικρότερο κύκλο — για παράδειγμα, έναν κύκλο ακτίνας $19,4$. Όμως, ακόμη και αυτή η μικρή βελτίωση είναι δύσκολη. Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να την πετύχουν.

M159

Μπορούμε να επιτύχουμε την κατασκευή αν βρούμε στο τρίγωνο KM ένα σημείο P με απόσταση από το M μικρότερη από το μήκος του κανόνα μας. Αντό θα το πετύχουμε κατασκευάζοντας ξανά το Σχήμα 2α με το οποίο παρουσιάσαμε το θεώρημα του Desargues. Στο Σχήμα 2β φαίνεται η κατασκευή. Οι αριθμοί δείχνουν τη σειρά με την οποία σχεδιάζονται τα ευθύγραμμα τρίγματα. Για παράδειγμα, για να φέρουμε την ευθεία 1, χρησιμοποιούμε τον μικρό κανόνα μας και σχεδιάζουμε ένα μικρό τρίγωνο προς οποιαδήποτε διεύθυνση: στη συνέχεια ολισθαίνουμε τον κανόνα κατά μήκος του μικρού τρίγματος. Με την τεχνική αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε στη δεδομένη διεύθυνση μια ευθεία οποιουδήποτε μήκους. Επομένως ότι πρέπει να σχεδιάσουμε τις ευθείες 1 και 2 αρκετά «κοντά» και



M160

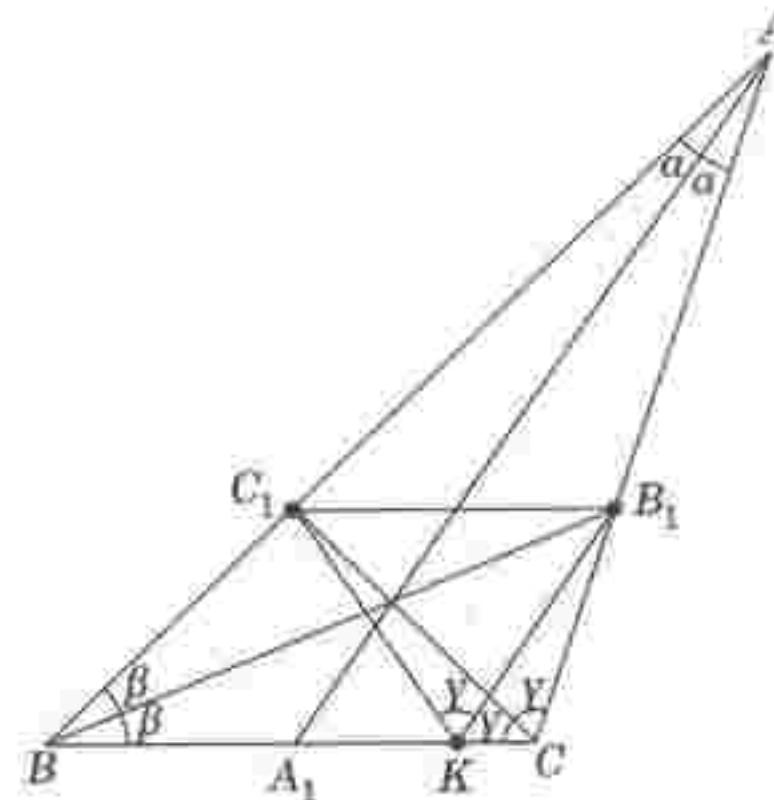
Συμβολίζουμε τις γωνίες του δεδομένου τριγώνου ABC (Σχήμα 3) με $2a$, 2β , και 2γ . Από το σημείο B_1 φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AA_1 , και έστω K το σημείο τομής της με την BC . Έχουμε ότι η γωνία $AA_1C = a + 2\beta$ (είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου BAA_1). Δινεται ότι $\angle AA_1C = \angle AC_1B_1$. Άλλα η $\angle AC_1B_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου BC_1B_1 . Άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} \angle BB_1C_1 &= \angle AC_1B_1 - \beta \\ &= a + 2\beta - \beta = a + \beta, \end{aligned}$$

και

$$\angle KB_1C = \angle A_1AC = a,$$

Βρίσκουμε τώρα ότι



Σχήμα 3

$$\begin{aligned} \angle BB_1K &= \angle BB_1C - \angle KB_1C \\ &= (2a + \beta) - a = a + \beta = \angle BB_1C_1. \end{aligned}$$

Επομένως, τα τρίγωνα BB_1C_1 και BKB_1 είναι ίσα (έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες ίσες). Άρα, το τρίγωνο C_1B_1K είναι ισοσκελές, και

$$\begin{aligned} \angle C_1KB_1 &= (1/2)(180^\circ - \angle C_1B_1K) \\ &= (1/2)[180^\circ - (2a - 2\beta)] \\ &= 90^\circ - (a - \beta) = \gamma = \angle C_1CB_1. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση έπειται ότι τα σημεία C_1 , B_1 , C και K είναι ομοκυκλικά. Σε αυτό τον κύκλο, οι εγγεγραμμένες γωνίες C_1B_1K και C_1KB_1 βαίνουν σε ίσες χορδές. Επομένως, οι δύο γωνίες είναι ίσες, και το τρίγωνο C_1B_1K είναι ισοσκελές. Άρα $\gamma = 60^\circ$ και $\angle BCA = 120^\circ$.

Φυσική

Φ156

Η επιτάχυνση ενός ανθρώπου που ανέβηκε στην πρώτη τανία έχει ως συνέπεια να αυξηθεί η ορμή του από 0 σε Mv_1 . Σημειωτέον ότι ένας επιβάτης που μετακινείται στη δεύτερη τανία δεν αφαιρεί ορμή από την πρώτη τανία, διότι την εγκαταλείπει κινούμενος κάθετα προς την ταχύτητά της. Συνεπώς, η ζητούμενη δύναμη μπορεί να εκφραστεί μέσω της αύξησης της ορμής του συστήματος ανά μονάδα χρόνου:

$$F_1 = NMv_1 = 1.600 \text{ N.}$$

Στην περίπτωση της δεύτερης τανίας, πρέπει ομοίως να γνωρίζουμε την αύξηση της ταχύτητας του επιβάτη αφού μετεπιβιβαστεί σ' αυτήν από την πρώτη τανία: η τιμή της ισούται με το ήμισυ της προηγουμένης. Συνεπώς,

$$F_2 = NM(v_2 - v_1) = 800 \text{ N.}$$

Φ157

Τα δεδομένα του πίνακα μαρτυρούν ότι η θερμοκρασία δεν εξαρτάται γραμμικά από το χρόνο. Συνεπώς, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι απώλειες θερμότητας προς τον περιβάλλοντα αέρα, οι οποίες είναι ανάλογες με τη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στο δοχείο και την α-

τρόσφαιρα. Η διατήρηση της θερμικής ενέργειας μας δίνει τη σχέση

$$C\Delta T = W\Delta t - a(T - T_0)\Delta t,$$

όπου με C συμβολίζουμε τη θερμοχωρητικότητα του δοχείου με όλο το περιεχόμενό του και με T τη θερμοκρασία του, ενώ $W = IV$ είναι η ισχύς που καταναλίσκεται στο θερμαντήρα και a ένας σταθερός συνιελεστής αναλογίας.

Επειδή στην εξίσωσή μας εμφανίζονται δύο άγνωστοι, η C και η a , θεωρούμε δύο διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 και T_2 και υπολογίζουμε τους ρυθμούς μεταβολής της T

$$k_1 = \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right)_1$$

και

$$k_2 = \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right)_2$$

στη γενονιά των θερμοκρασιών αυτών. Επομένως, παίρνουμε δύο εξισώσεις

$$Ck_1 = W - a(T_1 - T_0)$$

και

$$Ck_2 = W - a(T_2 - T_0),$$

από τις οποίες καταλήγουμε στη σχέση

$$C = W \frac{(T_2 - T_0) - (T_1 - T_0)}{k_1(T_2 - T_0) - k_2(T_1 - T_0)}.$$

Εισάγοντας στην ανωτέρω εξίσωση τα δεδομένα από την πρώτη γραμμή του πίνακα, βρίσκουμε τη θερμοχωρητικότητα του δοχείου όταν περιέχει μόνο νερό:

$$C_1 \approx 770 \text{ J/K}.$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της δεύτερης γραμμής του πίνακα, προσδιορίζουμε τη θερμοχωρητικότητα του δοχείου όταν περιέχει και το μεταλλικό δείγμα:

$$C_2 \approx 890 \text{ J/K}.$$

Κατά συνέπεια, η θερμοχωρητικότητα του δείγματος ισούται με

$$C = C_2 - C_1 \approx 120 \text{ J/K}.$$

Σημειώνετε ότι η μικρή τιμή που βρή-

καρε προκύπτει ως διαφορά δύο μάλλον μεγάλων τιμών. Ως εκ τούτου, ενδέχεται να έχει παρεισφρήσει μεγάλο σφάλμα στο αποτέλεσμά μας (από 100 έως 130 J/K).

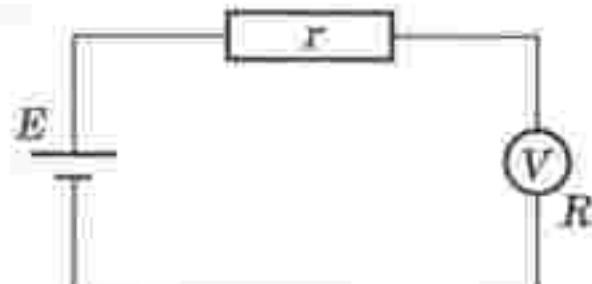
Φ158

Συμβολίζουμε την προστατευτική αντίσταση για τις κλίμακες των 10 V και 100 V με $R_2 = 10R_1$, και $R_3 = 100R_1$, αντίστοιχα, όπου R_1 είναι η προστατευτική αντίσταση για την κλίμακα του 1 V. Εάν η ΗΕΔ του ηλιακού κιττάρου ισούται με E και η εσωτερική του αντίσταση με r (Σχήμα 4), παίρνουμε τις εξισώσεις

$$V_1 = \frac{E}{r + R_1} R_1 = \frac{E}{1 + \frac{r}{R_1}},$$

$$V_2 = \frac{E}{1 + \frac{r}{10R_1}},$$

$$V_3 = \frac{E}{1 + \frac{r}{100R_1}}.$$



Σχήμα 4

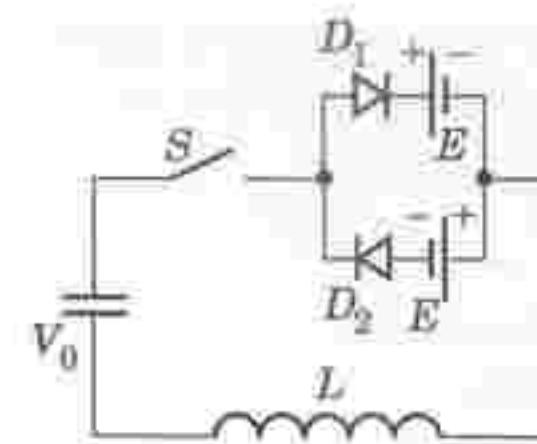
Επιλύοντας αυτό το σύστημα εξισώσεων, καταλήγουμε στην απάντηση

$$V_3 \equiv 3,6 \text{ V}.$$

Φ159

Οπως δείχνει το Σχήμα 5, στη διόδο D_1 το ηλεκτρικό ρεύμα ρέει μόνο εξ αριστερών προς τα δεξιά (ακολουθώντας το βέλος της σχηματικής παράστασης της διόδου), ενώ στη διόδο D_2 ρέει μόνον προς τα αριστερά. Συνεπώς, έχουμε ένα κύκλωμα που παράγει ταλαντώσεις με σταθερή πηγή τάσης η οποία αντιτίθεται πάντα στο ρεύμα.

Ας αρχίσουμε την ανάλυση μας για το κλειστό κύκλωμα από τη σταγμή κατά την οποία το ηλεκτρι-



Σχήμα 5

κό ρεύμα μηδενίζεται, η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή έχει λάβει μια μεγιστηριανή τιμή V_n και το αντίστοιχο φορτίο ισούται με $q_n = CV_n$ (ο πάνω οπλισμός είναι θετικά φορτισμένος). Στη διάρκεια της επόμενης ημιπεριόδου ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί τελείως, και κατόπιν θα φορτιστεί εκ νέου, αλλά με αντίθετη πολικότητα. Το ρεύμα που διαρρέει τη διόδο D_1 παράγει έργο καθώς διέρχεται από την πηγή. Όταν ολοκληρωθεί ο μισός κύκλου, ο πυκνωτής θα έχει φορτιστεί εκ νέου αποκτώντας φορτίο q_{n+1} , ενώ από την πηγή θα έχει διέλθει φορτίο $q_n + q_{n+1}$ (υπενθυμίζουμε ότι στην πρεία αυτής της διαδικασίας η πολικότητα του πυκνωτή αντιστρέφεται).

Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή μειώνεται κατά ποσόν ίσο με το παραχθέν έργο:

$$\frac{q_n^2}{2C} - \frac{q_{n+1}^2}{2C} = (q_n + q_{n+1})E,$$

από την οποία παίρνουμε την εξισώση

$$\frac{q_n}{2C} - \frac{q_{n+1}}{2C} = E,$$

ή

$$V_n - V_{n+1} = 2E.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι στη διάρκεια μιας ημιπεριόδου η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή μειώνεται —κατ' απόλυτη τιμή— κατά $2E = 3 \text{ V}$. Αυτή η διαδικασία θα συνεχιστεί ώσπου η τάση να καταστεί μικρότερη από $E = 1,5 \text{ V}$ όταν το ρεύμα μηδενίζεται. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, η τελική τάση ισούται με 1 V (αντίθετης

πολικότητας), οπότε η αρχική τάση στον πυκνωτή μπορεί να λάβει τις εξής τιμές (σε V):

$$V_0 = 4 + 6n,$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$

Ωστόσο, δεν έχουμε εξαντλήσει όλες τις δυνατότητες. Για να εξαγάγουμε αυτή τη σειρά των λύσεων, στηριχτήκαμε στην παραδοχή ότι η πολικότητα του πυκνωτή αλλάζει επειτα από κάθε ημιπερίοδο. Υπάρχει, όμως, ακόμη μια δυνατή περίπτωση: στη διάρκεια της τελευταίας ημιπερίοδου το φορτίο μπορεί να πέσει από την τιμή q_{N-1} στην τιμή q_N χωρίς να αλλάξει η πολικότητα. Εν τοιαύτῃ περιπτώσει, από την πηγή διέρχεται φορτίο $q_{N-1} - q_N$ οπότε ο νόμος διατήρησης της ενέργειας γράφεται με τη μορφή

$$\frac{q_{N-1}^2}{2C} - \frac{q_N^2}{2C} = (q_{N-1} - q_N)E,$$

από την οποία παίρνουμε τη σχέση

$$V_{N-1} + V_N = 2E.$$

Συνεπώς, $V_{N-1} = 2E - V_N = 2$ V (ο πάνω οπλισμός είναι αρνητικά φορτισμένος), $V_{N-2} = V_{N-1} + 2E = 5$ V (ο πάνω οπλισμός είναι θετικά φορτισμένος), κ.ο.κ. Στην προκειμένη περίπτωση, η αρχική τάση πρέπει να ισούται με

$$V_0 = 5 + 6n,$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$

Επομένως, το πρόβλημά μας έχει δύο σειρές λύσεων:

$$V_0 = \begin{cases} 4 + 6n \\ 5 + 6n, \end{cases}$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$

Φ160

Ο δείκτης διάθλασης είναι δυνατόν να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της εξίσωσης των κατασκευαστών φακών:

$$P = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

αρκεί να γνωρίζουμε την οπτική ισχύ $P = 1/f$ του φακού και τις ακτί-

νες R_1 και R_2 των σφαιρικών επιφανειών.

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, πώς σχηματίζονται τα είδωλα του μαθητή όταν ο καθηγητής είναι στην πίνακα. Το ένα είδωλο το οχηματίζουν οι ακτίνες που ανακλώνται στην εγγύτερη (στην πλησιότερη στο μάτι) επιφάνεια του φακού. Ακόμη ένα είδωλο δημιουργείται από τις ακτίνες που διατρέχουν μπροσ-πίσω το φακό ανακλώμενες στην απότερη σφαιρική επιφάνεια.

Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, η απόσταση ώς το ένα από τα είδωλα ισούται με την απόσταση ώς το αντικείμενο (το μαθητή): $f_1 = d = 5$ m. Αυτό συνιστά χαρακτηριστική ιδιότητα του επίπεδου κατόπτρου (Σχήμα 6). Συνεπώς, ως πρώτο βήμα φαίνεται φυσικό να αναζητήσουμε μια λύση με ένα φακό που έχει επίπεδη την εγγύτερη επιφάνειά του, οπότε θέτουμε την καμπυλότητά της ίση με μηδέν:

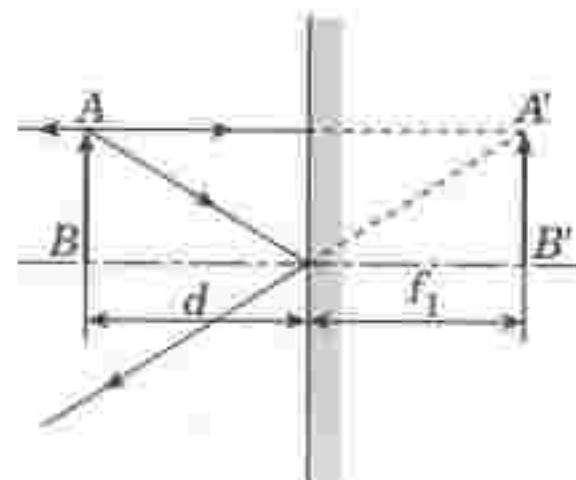
$$1/R_1 = 0.$$

Το είδωλο που βρίσκεται σε απόσταση $f_2 = 5/7$ m το σχηματίζει το σύστημα φακός-κάτοπτρο-φακός. Το εν λόγω σύστημα μπορεί να αντικατασταθεί με έναν και μόνο ισοδύναμο φακό, του οποίου η οπτική ισχύς πρέπει να ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των οπτικών ισχύων όλων των στοιχείων που συγκροτούν το οπτικό μας σύστημα:

$$P + (2/R_2) + P = 2P + (2/R_2).$$

Τότε, σύμφωνα με τον τύπο των φακών,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = 2P + \frac{2}{R_2}, \quad (2)$$



Σχήμα 6

Σημειωτέον ότι εισαγάγαμε ένα αρνητικό πρόσημο στον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους επειδή το είδωλο είναι φανταστικό.

Όταν ο καθηγητής κοιτάζει απευθείας το μαθητή μέσα από τα γυαλιά του, βλέπει το φαγιαστικό είδωλο του μαθητή σε απόσταση $f_3 = 2,5$ m (Σχήμα 7). Στην προκειμένη περίπτωση, ο τύπος των φακών γράφεται με τη μορφή

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_3} = P, \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (2) και (3) δίνουν το αποτέλεσμα

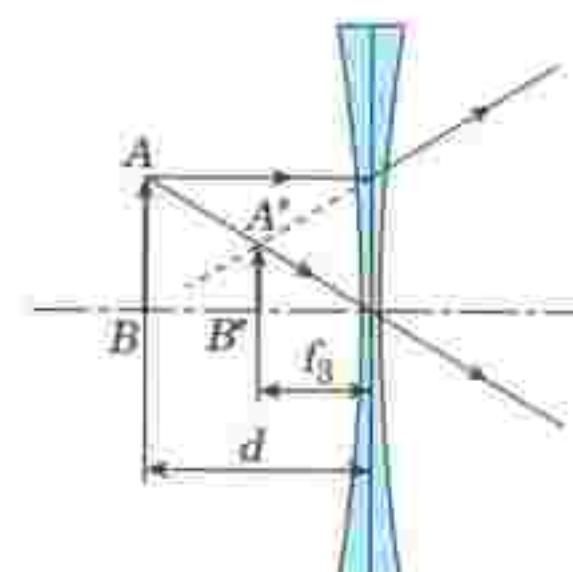
$$P = -1/5 \text{ διοπτρίες}$$

και

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{2}{5} \text{ m}^{-1}.$$

Ως ανεμένετο, καταλήξαμε σε ένα κυρτό κάτοπτρο, γεγονός που συνέπαγεται ότι ο πραγματικός φακός είναι επιπεδόκοιλος. Εισάγοντας τις τιμές των P , $1/R_1$ και $1/R_2$ στην εξίσωση (1), βρίσκουμε $n = 1,5$.

Εάν υποθέσουμε ότι μετά την ανάκλαση από την εγγύτερη επιφάνεια του φακού το είδωλο σχηματίζεται σε απόσταση $5/7$ m, και κάνουμε τους αντιστοιχους υπολογισμούς, προκύπτει ένα παράδοξο αποτέλεσμα: $n = 0,75$. Αποδειξτε το μόνοι σας. Φυσικά, ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι μεγαλύτερος από 1, οπότε η εν λόγω αντικατασταθεί πρέπει να θεωρηθεί εσφαλμένη. Παρά ταύτα, μήπως μπορείτε να φανταστείτε κάποια κατάσταση που η δεύτερη λύση θα την περιέγραψε σωστά;

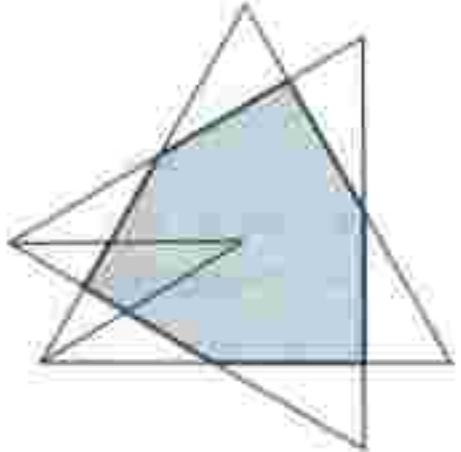


Σχήμα 7

Σπαζοκεφαλιές

Σ156

Υπάρχει τέτοιο πολύγωνο, Για παράδειγμα, περιστρέφουμε ένα τεσσάριγυρο τρίγωνο γύρω από το κέντρο του κατά γωνία μικρότερη των 60° και θεωρούμε την τομή του αρχικού τριγώνου και της εικόνας του (Σχήμα 8). Αν την περιστρέψουμε κατά 120° γύρω από το κέντρο του αρχικού τριγώνου, η τομή επιστρέφει στην αρχική της θέση, παρότι δεν έχει ούτε άξονα ούτε κέντρο συμμετρίας.



Σχήμα 8

Σ157

10 μαθητές δεν κατάφεραν να λύσουν το πρώτο πρόβλημα, 20 απέτυχαν στο δεύτερο, 30 στο τρίτο και 40 στο τέταρτο. Το άθροισμα αυτών των τεσσάρων αριθμών είναι $10 + 20 + 30 + 40$. Τόσο είναι το πολύ και το πλήθος των μαθητών που περιέχει η ένωση των τεσσάρων αυτών συνόλων. Αφού ουδείς μαθητής έλυσε και τα τέσσερα προβλήματα, τα τέσσερα σύνολα «καλύπτουν» και τους 100 διαγωνιζόμενους, συνεπώς κανένα από αυτά δεν επικαλύπτεται με κάποιο από τα υπόλοιπα. Άρα, ο κάθε μαθητής δεν έλυσε ένα ακριβώς πρόβλημα. Ας θεωρήσουμε τους 70 μαθητές που έλυσαν το τρίτο πρόβλημα: 10 από αυτούς δεν έλυσαν το πρώτο, 20 δεν έλυσαν το δεύτερο και 40 δεν έλυσαν το τέταρτο. Επομένως, $70 - 40 = 30$ μαθητές πήραν βραβείο.

Σ158

Κάθε κυρτό επτάγωνο έχει διαγωνίους δύο ειδών: μικρές και μεγάλες. Μια μικρή διαγώνιος συνδέει κορυφές μεταξύ των οποίων μεσο-

λαβεί μία κορυφή (μια τέτοια διαγώνιος έχει μία κορυφή προς τη μια πλευρά της και τέσσερις προς την άλλη). Η μεγάλη διαγώνιος συνδέει κορυφές μεταξύ των οποίων μεσολαβούν δύο κορυφές (μια τέτοια διαγώνιος έχει δύο κορυφές προς τη μια πλευρά της και τρεις προς την άλλη). Το συνολικό πλήθος των διαγώνιων είναι 14. Αν τις σχεδιάσουμε όλες, προκύπτουν επτά τρίγωνα, καθένα από τα οποία έχει ως πλευρές δύο μικρές και μία μεγάλη διαγώνιο. Αν αφαιρέσουμε μία μικρή διαγώνιο, εξαφανίζονται δύο τρίγωνα. Για να απαλείψουμε και τα επτά, πρέπει να αφαιρέσουμε τουλάχιστον τέσσερις διαγωνίους, και επομένως το ζητούμενο μέγιστο πλήθος διαγώνιων είναι 10.

Σ159

Αν ο διαγωνιζόμενος επιμείνει στην αρχική του επλογή, κερδίζει μόνο εφόσον αυτή είναι η σωστή. Όμως, αν διαλέξει το άλλο κουτί, κερδίζει εφόσον η αρχική του επλογή ήταν λανθασμένη. Ουσιαστικά στην μια περιπτώση διαλέγει ένα κουτί και στη άλλη δύο. Επομένως, είναι προτιμότερο να αλλάξει κουτί, διότι έτσι διπλασιάζονται οι πιθανότητες νίκης.

Σ160

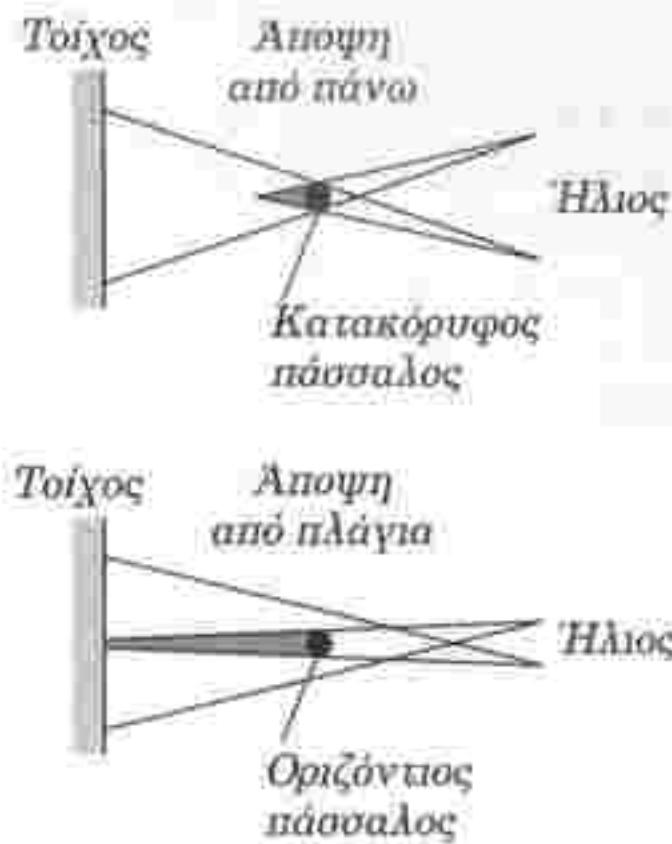
Υπόδειξη: Τι θα συνέβαινε αν η φιάλη ήταν γεμάτη με γυαλί; Λύστε αυτή τη σπαζοκεφαλιά και μετά «αφαιρέστε» το γυαλί από τη φιάλη.

Καθειδοσκόπιο

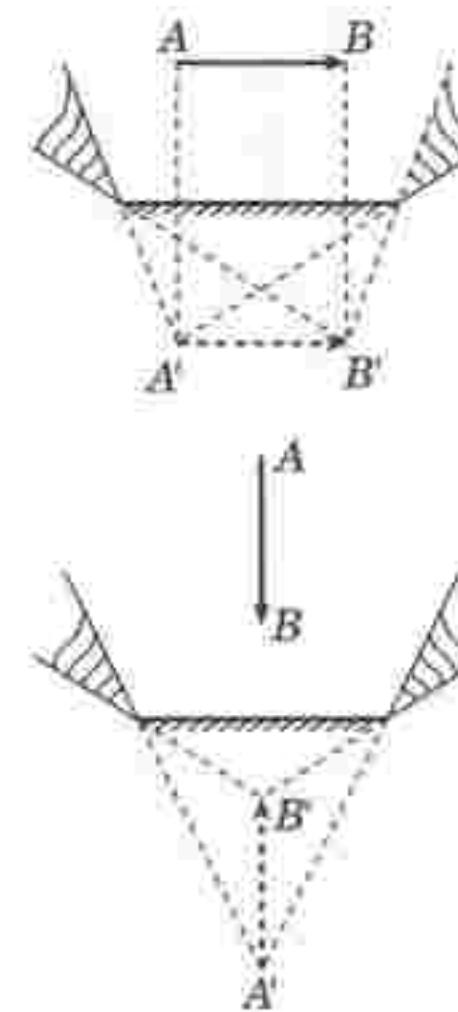
1. Βλ. Σχήμα 9.
2. Βλ. Σχήμα 10.
3. Εάν η οθόνη απέχει από το βασιλιά περισσότερο από h εφα (με a συμβολίζουμε τη γωνία προσπιλωσης των ηλιακών ακτίνων), τότε το μήκος της σκιάς θα ισούται με $2h$ (βλ. Σχήμα 11). Εάν η οθόνη βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση, τότε η σκιά θα έχει μικρότερο ύψος.

4. Για να κατευθύνουμε περισσότερο φως προς το αντικείμενο.

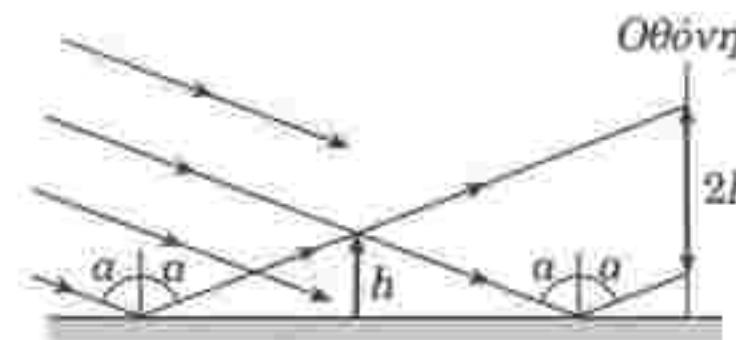
5. Βλ. Σχήμα 12.
6. Το είδωλο είναι φανταστικό.
7. Βλ. Σχήμα 13. Εάν το είδωλο είναι πραγματικό, η πηγή βρίσκεται



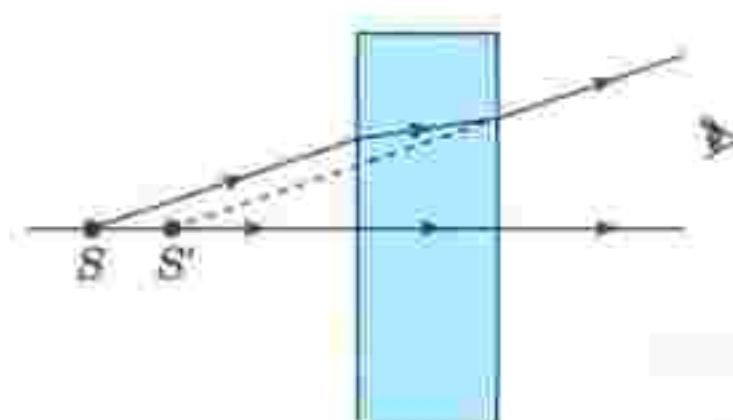
Σχήμα 9



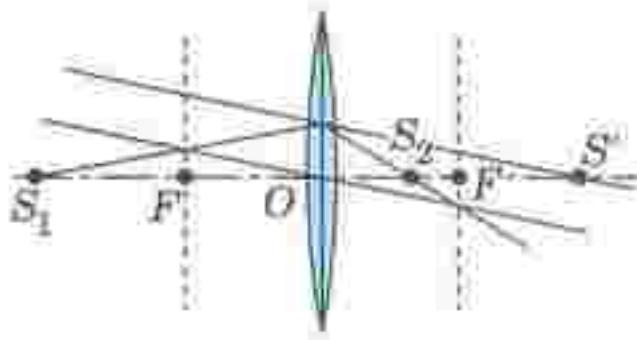
Σχήμα 10



Σχήμα 11



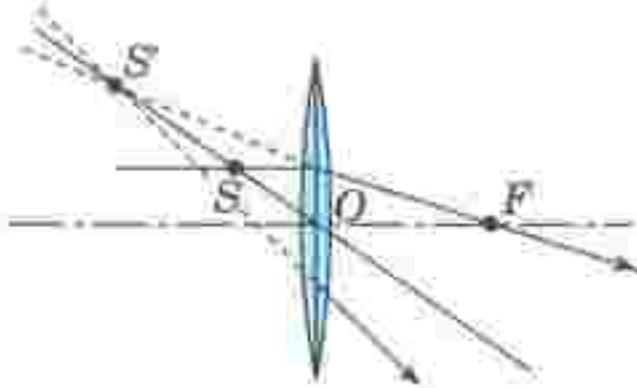
Σχήμα 12



Σχήμα 13

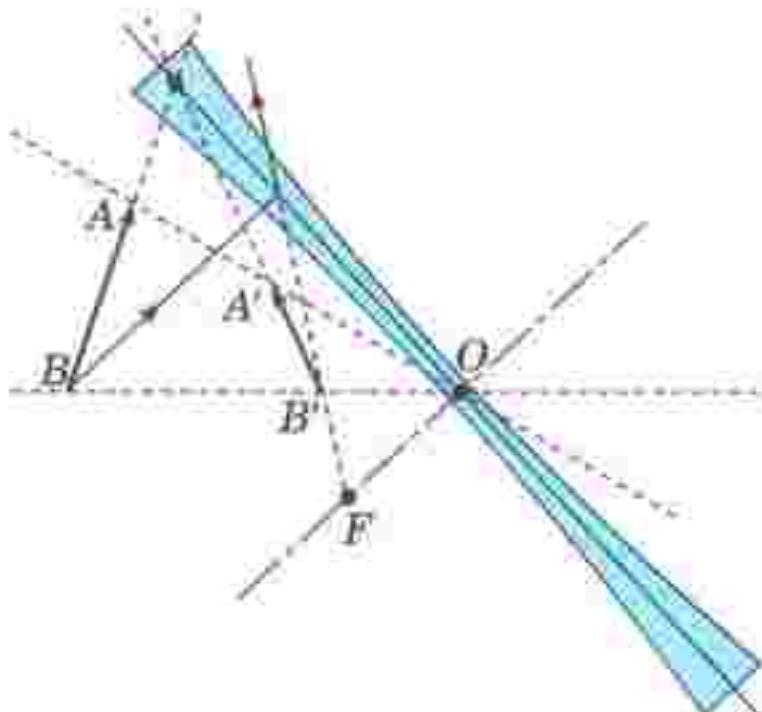
στο σημείο S_1 σε αντίθετη περίπτωση (είδωλο φανταστικό), η πηγή είναι τοποθετημένη στο S_2 .

8. Βλ. Σχήμα 14.



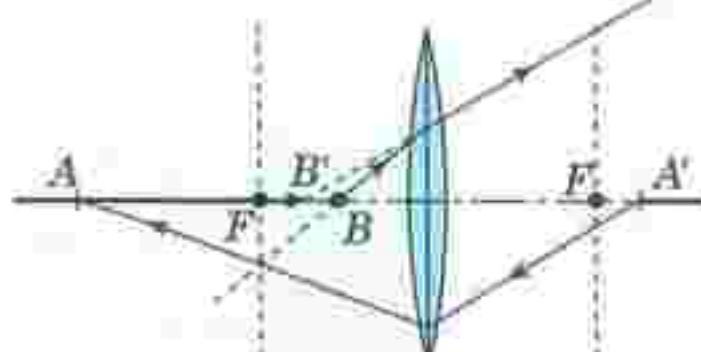
Σχήμα 14

9. Βλ. Σχήμα 15.



Σχήμα 15

10. Μια εκδοχή της γραφικής λύσης του προβλήματος δίνεται στο Σχήμα 16.

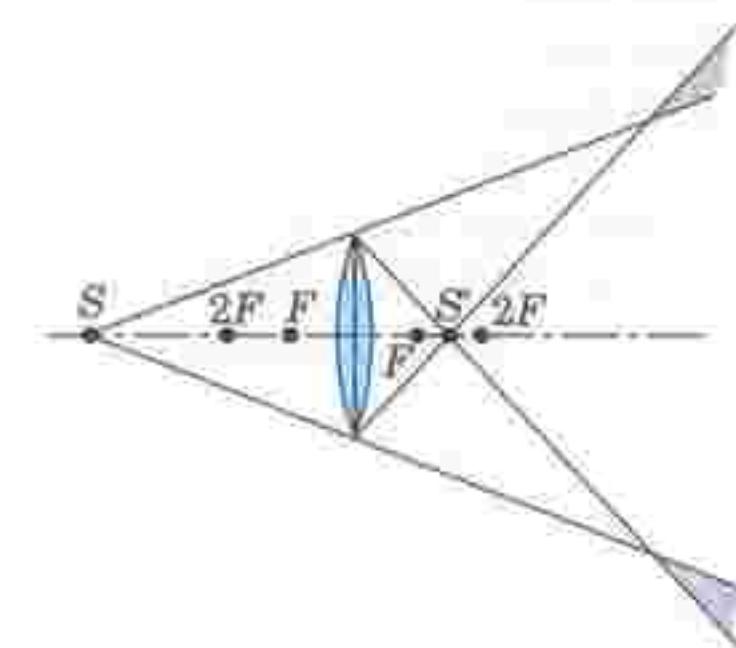


Σχήμα 16

11. Ναι. Στην προκειμένη περίπτωση ο φακός της φωτογραφικής

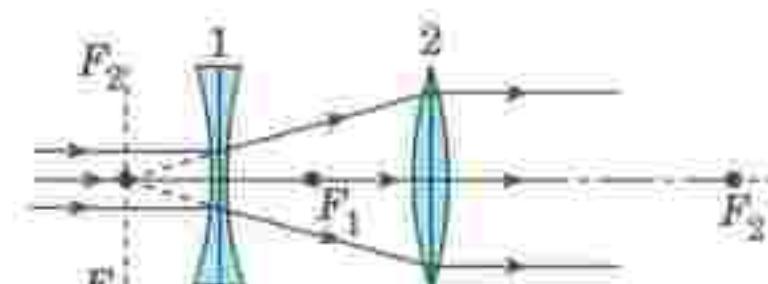
μηχανής λειτουργεί όπως ο φακός του ματιού.

12. Η απόσταση της φωτεινής πηγής από το φακό πρέπει να είναι ριζικότερη από το διπλάσιο της εστιακής απόστασης· αλλιώς, θα υπάρχουν περιοχές από όπου θα είναι δυνατόν να παρατηρηθούν ταυτόχρονα τόσο η πηγή όσο και το είδωλο της (Σχήμα 17).



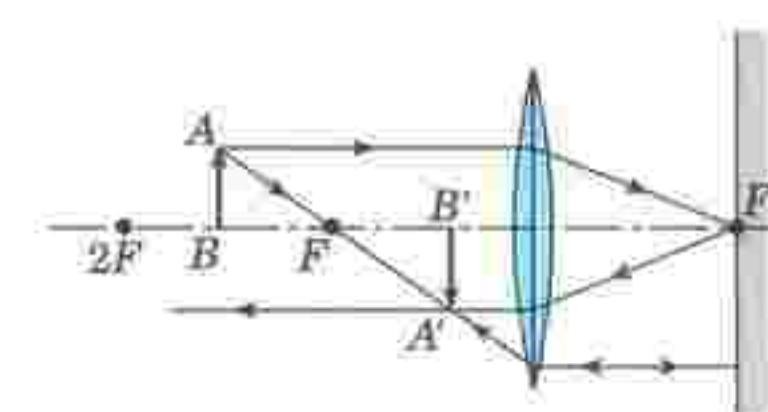
Σχήμα 17

13. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 18.



Σχήμα 18

14. Βλ. Σχήμα 19.



Σχήμα 19

15. Εν πρώτοις, στο Διάστημα αποφέυγεται η απορρόφηση του φωτός από την ατμόσφαιρα. Επιπλέον, το υπόβαθρο είναι πολύ ασθενέστερο, ενώ απουσιάζει το ατμοσφαιρικό «τρέμουλο». Συν τοις άλλοις, ο χρόνος έκθεσης δεν περιορίζεται μόνο στις νυκτερινές ώρες. Συνεπώς, οι παράγοντες που παρεμποδίζουν την ανιχνευση των αμυδρών α-

στρων από τη Γη εξαλείφονται ή περιορίζονται δραστικά εφόσον το τηλεσκόπιο βρίσκεται στο Διάστημα.

Μικροπειραματισμοί

Λόγω της διπλής ανάκλασης, το είδωλο σας δεν θα «αντιστρέψει» το αριστερό σε δεξιό και αντιθέτως. Εάν εκτελέσετε το πέραμα σε ορθογώνιο δωμάτιο, θα βλέπετε το είδωλο σας στον καθρέφτη από παντού.

Χάρτινοι πύργοι

1. Ναι! Σύμφωνα με την εξίσωση Bernoulli, η πίεση μέσα στο ρεύμα αέρα είναι χαμηλότερη από την ατμοσφαιρική συνεπώς, ο εξωτερικός αέρας αναγκάζει το μπαλάκι να παραμένει εντός του ρεύματος. Ακόμη κι αν φυσήξετε (ελαφρά) το μπαλάκι από τα πλάγια, αυτό θα παραμείνει εντός του ρεύματος —μια όμορφη πειραρατική επίδειξη!

2. Οχι. Ένα σύστημα φορτίων που αλληλεπιδρούν μονάχα με ηλεκτροστατικές δυνάμεις δεν μπορεί ποτέ να βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία. Για την απόδειξη, ας θεωρήσουμε ένα θετικό φορτίο. Αυτό, για να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, πρέπει, όταν το μετακινούμε ελαφρά, η συνισταρένη δύναμη που ασκείται πάνω του να κατευθύνεται προς την αρχική θέση ισορροπίας του. Τούτο σημαίνει ότι οι δυνατικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή του θετικού φορτίου πρέπει να κατευθύνονται προς αυτό —πράγμα αδύνατο, σύμφωνα με το νόμο του Gauss. Παρομοίως, για ένα αρνητικό φορτίο.

3. Οχι, η συγκεκριμένη ισορροπία είναι ασταθής. Φανταστείτε ότι μετατοπίζουμε το μπαλόνι ελαφρά προς τα κάτω. Η πίεση του νερού αυξάνεται, οπότε ο δύκος του μπαλονιού και, κατά συνέπεια, η άνωση ελαττώνονται, με αποτέλεσμα το μπαλόνι να βιθίζεται ακόμη περισσότερο. Από την άλλη, αν το μπαλόνι μετατοπιστεί ελαφρά προς τα πάνω, θα καταλήξει στην επιφάνεια του νερού.

4. Ο βρόχος παρουσιάζει δύο θεσεις ισορροπίας: μια ευσταθή και μια ασταθή. Προσπαθήστε να τις εντοπίσετε.

Ανάρρεση

Διαιρώντας με τον αριθμό 7

Στο άρθρο «Διαιρεί και βασίλευε», που δημοσιεύτηκε στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1999, αναφέρεται ότι «Ο αριθμός 7 είναι διάσημος για την απουσία ενός επαρκούς κριτήριου διαιρετότητας». Ναι, αλλά υπάρχει ένα (απλό) κριτήριο ηλικίας 1.500-2.000 ετών τουλάχιστον, και το οποίο θα ενδιαφέρει τους αναγγωτές σας.

Στην Παλαιά Διαθήκη παρατίθεται ρητή εντολή του Κυρίου προς τον Μωυσή ότι κάθε 7ο έτος (το επονομάζομενο «σαββατικό») απαγορεύονται μα σειρά ενεργειών: «τῷ δέ ἐτε τῷ ἑδόμῳ σάββατο, ἀνάπτυσις ἔσται τῇ γῇ, σάββατο τῷ Κυρίῳ τὸν ἄγρον σου οὐ σπειρεῖς καὶ τὴν ἀμπελὸν σου οὐ τεμεῖς, καὶ τὰ αὐτόματα ἀναβαίνοντα τοῦ ἄγρου σου οὐκ ἐκθερίσεις καὶ τὴν σταφύλην τοῦ ἀγιάσματος σου οὐκ ἐκτρυγήσεις ἐνιαυτός ἀναπλαύσεως ἔσται τῇ γῇ» (Λευτικόν, κε', 4-5). Η παραβίαση της εντολής τιμωρούνταν αυστηρά: «καὶ φυλάξεις τὰ σάββατα, ὅτι ἄγιον τοῦτο ἔστι Κυρίῳ ἡμῖν ὁ δεσμὸς αὐτὸς θανάτῳ θανατωθήσεται» (Έξοδος, λα', 14-15).

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι για τους αρχαίους Εβραίους ήταν επιτακτική ανάγκη να βρεθεί πρακτικός κανόνας για να διαιποτώνται αν ένα έτος ήταν σαββατικό (πολλαπλό του 7). (Εννοείται ότι η αριθμητή είναι σύμφωνα με το εβραϊκό ημερολόγιο.) Πράγματι, στο βαβυλωνιακό Ταλμούδ (Aboda Zarah: 9b), γραμμένο περίπου το 500 μ.Χ., βρίσκουμε να αναφέρονται, χωρίς απόδειξη, τα εξής (το απόσπασμα προέρχεται από το W.M. Feldman, *Rabbinical Mathematics and Astronomy*, Hermon Press, N. Υόρκη, 1965):

«Πολλαπλασιάστε τις εκατοντάδες του δεδομένου αριθμού με το 2 και προσθέστε στο γινόμενο τις δεκάδες και τις μονάδες αυτού του αριθμού. Αν αυτό το άθροισμα διαιρείται με το 7, ολόκληρος ο αριθμός διαιρείται με το 7.»

Έτοι, π.χ., το 5759, που είναι το τρέχον έτος σύμφωνα με το εβραϊκό ημερολόγιο, δεν είναι σαββατικό, διότι $(52 \cdot 2) + 59 = 173$, αριθμός που δεν διαιρείται ακριβώς με το 7. Από

την άλλη, το μεθεπόμενο έτος, 5761, είναι σαββατικό, διότι $(52 \cdot 2) + 61 = 175$, αριθμός που διαιρείται με το 7.

Η λεκτική «απόδειξη» του αλγορίθμου που δίνει ο Feldman δεν είναι ικανοποιητική. Εύκολα μπορούμε να βρούμε μια απόδειξη χρησιμοποιώντας το σύγχρονο συμβολισμό της αριθμητικής των ιστοπιών.

Harvey J. Hindin, Νέα Υόρκη

Έξι ή επτά αριθμοί;

Επειδή υπήρξαν τηλεφωνικές επικοινωνίες δύο αναγνωστών με τη διεύθυνση του ελληνικού Quantum δύον αφορά την Άσκηση M146 του τεύχους Μαρτίου/Απριλίου 1999, κατά τις οποίες διατυπώθηκε η απόψη ότι οι αριθμοί που πρέπει να δινούνται είναι επτά και όχι έξι, θα ήθελα να διευκρινίσω τα εξής:

Η προτεινόμενη άσκηση M146 αποτελεί σημαντική βελτίωση της παλιάς και δημοφιλούς σε μαθηματικές Ολυμπιάδες άσκησης: «Δίνονται οι διαφορετικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο από αυτούς, έστω x και y , τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \varepsilon \varphi \frac{\pi}{n - 1}.$$

Η απόδειξη που παραθέτουν δύσα βιβλία περιλαμβάνουν την άσκηση θεωρεί, χωρίς βλάβη, ότι $x_i = \varepsilon \varphi \theta_i$ ($1 \leq i \leq n$), όπου $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$. χωρίζει το $(-\pi/2, \pi/2)$ σε $n - 1$ ίσα τμήματα, μήκους $\pi/(n - 1)$, οπότε, από την αρχή του περιστερώνα, κάποιο απ' αυτά περιέχει τουλάχιστον δύο από τα θ_i , έστω τα θ_p, θ_q . Άλλα τότε

$$\frac{\varepsilon \varphi \theta_p - \varepsilon \varphi \theta_q}{1 + \varepsilon \varphi \theta_p \varepsilon \varphi \theta_q} = \varepsilon \varphi (\theta_p - \theta_q) \leq \varepsilon \varphi \frac{\pi}{n - 1}, \text{ κ.λπ.}$$

Ωστόσο, ο I. Sergeyev είχε την απλή αλλά ιδιοφυή ιδέα, αντί να χωρίσει το $(-\pi/2, \pi/2)$, να εξετάσει το $(\theta_1, \pi + \theta_1)$, όπου θ_1 το πικρότερο από τα θ_i . Έτσι, χρειάζονται μόνο έξι σημεία για το φράγμα $\varepsilon \varphi(\pi/6)$. Η λύση του Quantum στη σελίδα 67 περιλαμβάνει τη συνέχεια.

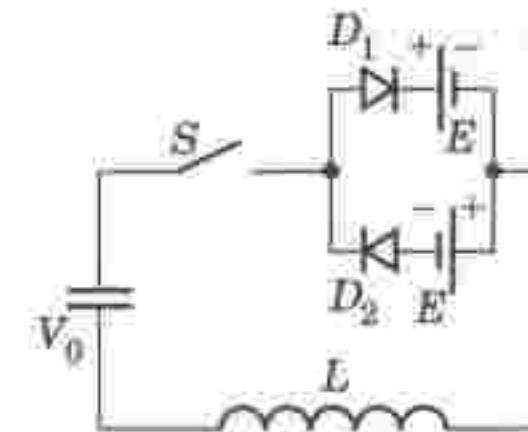
*Μιχάλης Λάμπρου,
Πανεπιστήμιο Κρήτης*

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 57

γεί στην κλίμακα των 10 V, δείχνει $V_2 = 2.6$ V. Ποια θα ήταν η ένδειξη του αν λειτουργούσε στην κλίμακα των 100 V; Θεωρήστε γνωστό ότι το ηλιακό κύτταρο, εφόσον φωτίζεται σταθερά, ισοδυναμεί με πηγή ΗΕΔ συνδεδεμένη εν σειρά με μεγάλη αντίσταση. (A. Zilberman)

Φ159

Ηλεκτρική ταλάντωση. Πυκνωτής σε κύκλωμα με ανοικτό διακόπτη S (Σχήμα 2) φορτίζεται σε τάση V_0 . Εν συνεχείᾳ ο διακόπτης κλείνεται, και μετά την παρέλευση ορισμένου χρόνου το ρεύμα πάνε να διαρρέει το κύκλωμα. Ποια θα έπρεπε να είναι η τάση V_0 ώστε ο πυκνωτής να φορτιστεί στην τάση της μόνιμης κατάστασης $V_{mu} = 1$ V και με την πολικότητά του αντίθετη από την αρχική; Θεωρήστε ότι η ΗΕΔ κάθε συσσωρευτή ανέρχεται σε $E = 1.5$ V και ότι οι διοδοί είναι ιδανικές. (A. Kirkinsky)



Σχήμα 2

Φ160

Ματογυάλια για... την πλάτη. Ενας καθηγητής στράφηκε προς το μαυροπίνακα και παρακολουθούσε τους μαθητές του που κατοικούσαν στα ματογυάλια του (τα οποία φορούσε). Είδε δύο είδωλα του ίδιου μαθητή, ο οποίος καθόταν σε απόσταση 5 m απ' αυτόν: το ένα είδωλο σχηματιζόταν σε απόσταση 5 m και το άλλο σε απόσταση 5/7 m. Οταν ο καθηγητής γύρισε προς τους μαθητές του, είδε το είδωλο του ίδιου μαθητή σε απόσταση 2.5 m. Προσδιορίστε το δείκτη διάθλασης των γυαλιών του καθηγητή. (V. Belonuchkin)

Σκέψου δύο φορές, κωδικογράφησε μία

Ένας αλγόριθμος πριονίσματος

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, τη στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά. Το προηγούμενο φθινόπωρο, μια άγρια θύελλα ξερίζωσε ένα ζευγάρι διορφων βελανιδιών που υψώνονταν στο αγρόκτημά μας. Και τα δύο δέντρα ήταν στην ακμή τους και έμοιαζε κρίμα να τα κόψουμε για καυσόξυλα. Όταν έπεσε το πρώτο, κατέστρεψε το στέγαστρο για τα άρρωστα μοσχάρια (μαζί με δύο απ' αυτά)· έτσι, τούτη την άνοιξη αποφασίσαμε να ξανακτί-

σουμε το στέγαστρο. Χρειαζόμαστε λοιπόν άφθονες δοκούς για στήριξη, και έτσι τα δέντρα θα κληθούν πάλι στην υπηρεσία —αφού πρώτα τα κόψουμε με τον κατάλληλο τρόπο.

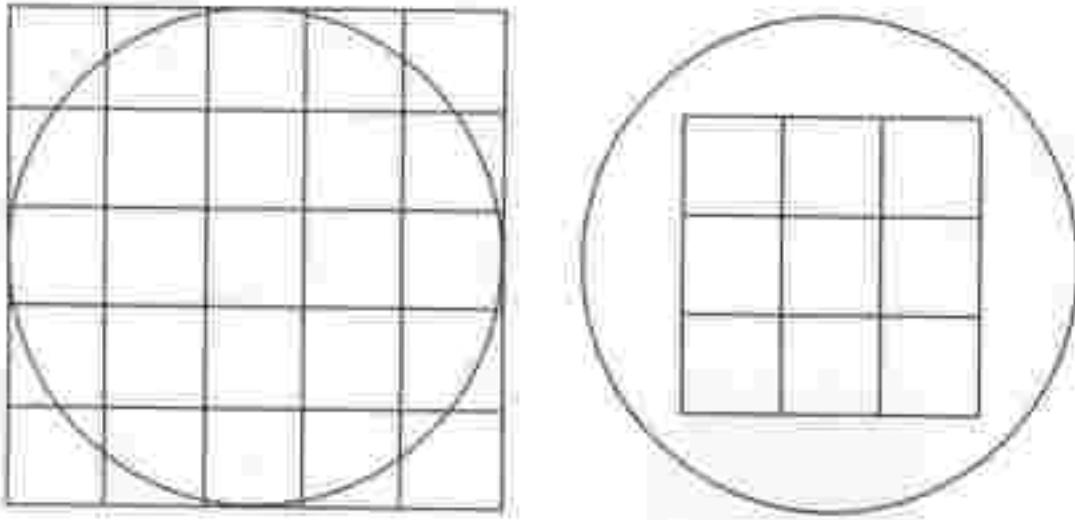
Πριν πάρουμε το πρώτον ας εξετάσουμε ποιες είναι οι δυνατές επλογές μας. Οι παλιότεροι συνιθίζαν να λένε «Μέτρα δύο φορές, κόψε μία». Στον προγραμματισμό των υπολογιστών αυτό σημαίνει: Προτού πάρεις φόρα κι αρχίσεις να γράφεις έναν κώδικα που εξαντλεί όλες τις περιπτώσεις, αφιέρωσε λίγη σκέψη και σχεδίασε τον



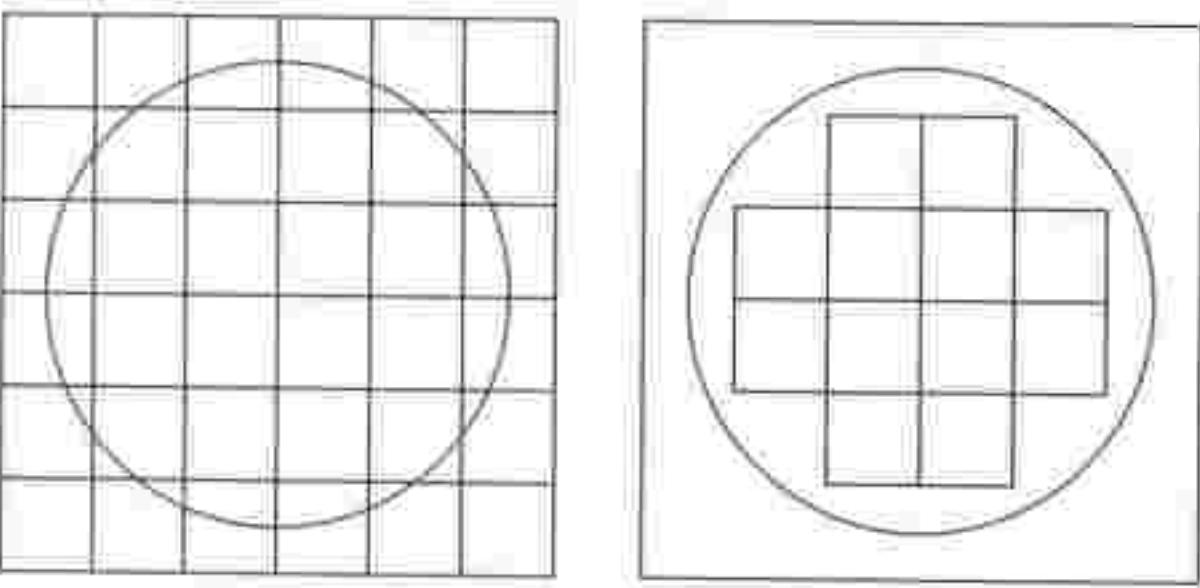
ΕΙΚΟΝΑ ΕΦΕΤΟΥ ΒΕΛΑΝΙΔΙΩΝ ΛΑΣΙΘΙΟΥ

καλύτερο τρόπο επίλυσης του προβλήματος. Το σύνθημα του προγραμματιστή θα έπρεπε να είναι: «Σκέψου δύο φορές, κωδικογράφησε μία».

Μία ιδέα θα ήταν να σχεδιάσουμε ένα ορθογώνιο πλέγμα με οριζόντιες και κάθετες γραμμές που απέχουν μεταξύ τους 4 εκατοστά και ορίζουν ένα τετράγωνο διαστάσεων 20×20 (υποθέτωντας ότι η βάση του δέντρου έχει διάμετρο 20 εκατοστών). Με αυτό τον τρόπο θα μπορούσαμε να κόψουμε 9 τέλειες δοκούς διαστάσεων 4×4 , όπως φαίνεται στο σχήμα κάτω δεξιά:



Μία άλλη δυνατότητα είναι να αυξήσουμε κατά 4 εκατοστά το αρχικό τετράγωνο, οριζόντια και κάθετα. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε δύο σειρές των τεσσάρων δοκών στο κέντρο, και δύο επιπλέον σειρές με δύο δοκούς η καθεμία. Έχουμε τελικά 12 δοκούς, μια βελτίωση 33% σε σχέση με το πρώτο μας σχέδιο:



Περιμένετε όμως! Συγκρατήστε το πρώτο μας! Ίσως υπάρχει κάποιος ακόμη καλύτερος τρόπος να κόψουμε τις δοκούς. Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα το οποίο, όπως μαντέψατε, είναι η καινούργια μας πρόκληση.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 16

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα βρίσκει το μεγαλύτερο πλήθος δοκών διαστάσεων $n \times n$ που μπορούμε να κόψουμε από ένα δέντρο διαμέτρου 20, με οριζόντιες και κάθετες μόνο τομές. Δεν είναι απαραίτητο να κρατάτε δύλες τις δοκούς μαζί (όπως κάνουμε συνήθως όταν κόβουμε ένα κρεμμύδι). Για παράδειγμα, μπορείτε να κόψετε πρώτα μεγάλα δοκάρια και στη συνέχεια να κόψετε το καθένα από αυτά σε μικρότερα διαστάσεων $n \times n$. Όλες οι τομές πρέπει να μπορούν να γίνουν με ένα πρώτο —απαγορεύονται, φυσικά, οι στροφές 90° . Να

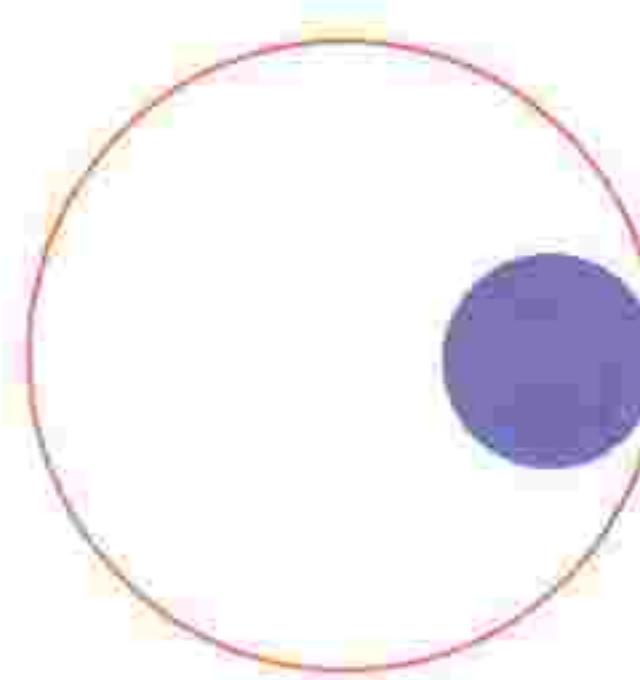
αναφέρετε το μέγιστο πλήθος για δοκούς διαστάσεων 4×4 και 2×2 . Αν μπορέσετε να παραστήσετε γραφικά τις τομές, είσαστε πραγματικά άφογοι.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 14

Στο ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 14 σας ζητήθηκε να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα κινεί τέσσερα χούλα χουπ που εφάπιονται μεταξύ τους. Σκοπός του προβλήματος ήταν να δείξει πόσο εύκολη είναι η μετακίνηση σύνθετων αντικειμένων γραφικών με το *Mathematica*. Επιθυμούσα να είναι ένα περισσότερο διασκεδαστικό παρά δύσκολο προγραμματιστικό πρόβλημα. Φυσικά, χωρίς ένα εργαλείο όπως το *Mathematica* θα ήταν αδύνατο να εξετάσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα στις σελίδες αυτού του περιοδικού.

Θα ξεκινήσουμε σχεδιάζοντας έναν μπλε δίσκο με κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα 1, (`Disk[(1, 0), 1]`), και στη συνέχεια θα τον περιβάλλουμε με έναν κόκκινο κύκλο κέντρου $(-1, 0)$ και ακτίνας 3 (`Circle[(-1, 0), 3]`). Αυτό το επιτυγχάνουμε μέσω των εντολών `Graphics` και `Show`.

```
red = RGBColor[1, 0, 0];
blue = RGBColor[0, 0, 1];
Show[Graphics[{blue, Disk[(1, 0), 1]}],
 Graphics[{red, Thickness[0.01],
 Circle[(-1, 0), 3]}],
 AspectRatio -> Automatic]
```

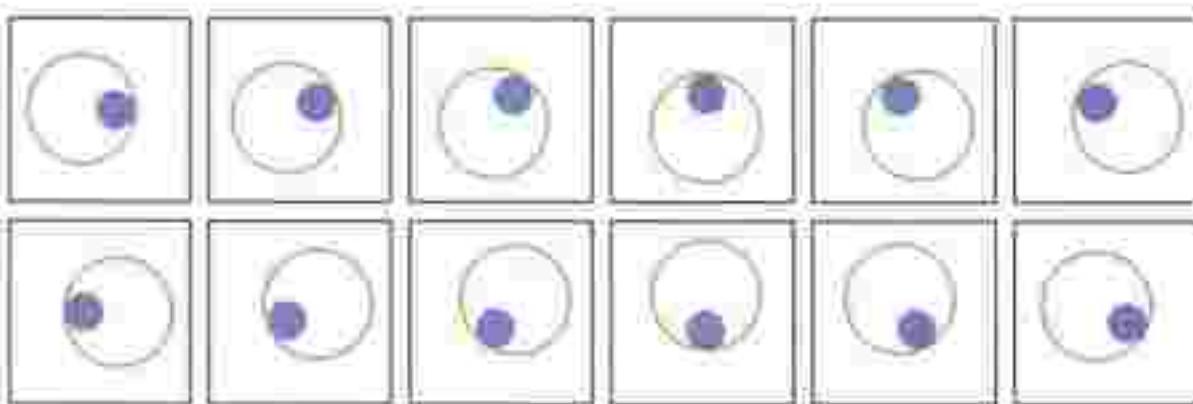


Στη συνέχεια, μετακινούμε το κέντρο του μπλε δίσκου κατά μήκος της κυκλικής διαδρομής $(x, y) = (\sin t, \eta t)$, με το t να παίρνει τιμές από το 0 έως το 2π με βήματα ίσα με $\pi/6$. Την ίδια στιγμή, κινούμε το κέντρο του κόκκινου κύκλου κατά μήκος της κυκλικής διαδρομής $(u, v) = (\sin(t + \pi), \eta(t + \pi))$. Παρατηρήστε ότι κάθε στιγμή το κέντρο του κύκλου προηγείται κατά 180° από το κέντρο του δίσκου. Η κίνηση υλοποιείται στο *Mathematica* ως εξής:

```
Animate[{x, y} = {Cos[t], Sin[t]};
 {u, v} = {Cos[t + Pi], Sin[t + Pi]};
 Show[Graphics[{blue, Disk[{x, y}, 1]}],
 Graphics[{red, Thickness[0.01],
 Circle[{u, v}, 3]}],
 AspectRatio -> Automatic, Frame -> True,
```

```

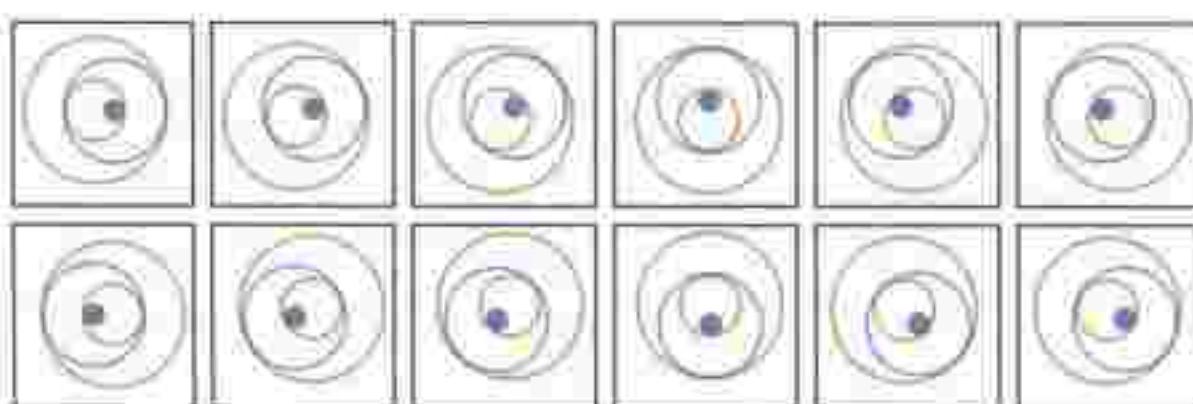
FrameTicks -> None,
PlotRange -> [(-5, 5), (-5, 5)], {t,
0, 2 Pi, Pi/6}].
```



Από τη στιγμή που καταλάβετε αυτή την αρχή μπορείτε να προσθέσετε με πολύ απλό τρόπο ένα ακόμη χούλια χουπ που θα προηγείται 180° από το τελευταίο. Θα χρησιμοποιήσετε την ίδια διαδρομή όπως και για τον μπλε δίσκο, αλλά αυτή τη φορά θα σχεδιάσετε έναν κύκλο με ακτίνα 5, δηλαδή τον $\text{Circle}[(x, y), 5]$. Το επόμενο χούλια χουπ προηγείται και πάλι 180° και, επομένως, το κέντρο του κινείται στη διαδρομή (u, v) με ακτίνα 7, δηλαδή είναι ο $\text{Circle}[(u, v), 7]$. Βάλτε όλους τους κύκλους σε κίνηση με το *Mathematica*, και θαυμάστε τη χορευτική σας ικανότητα.

```

Animate[{x, y} = {Cos[t], Sin[t]};
{u, v} = {Cos[t + Pi], Sin[t + Pi]};
Show[Graphics[{blue, Disk[{x, y}, 1]}],
Graphics[{red, Thickness[0.01],
Circle[{u, v}, 3]}],
Graphics[{blue, Thickness[0.01],
Circle[{x, y}, 5]}],
Graphics[{red, Thickness[0.01],
Circle[{u, v}, 7]}]],
AspectRatio -> Automatic, Frame -> True,
FrameTicks -> None,
PlotRange -> [(-8, 8), (-8, 8)], {t,
0, 2 Pi, Pi/6}].
```

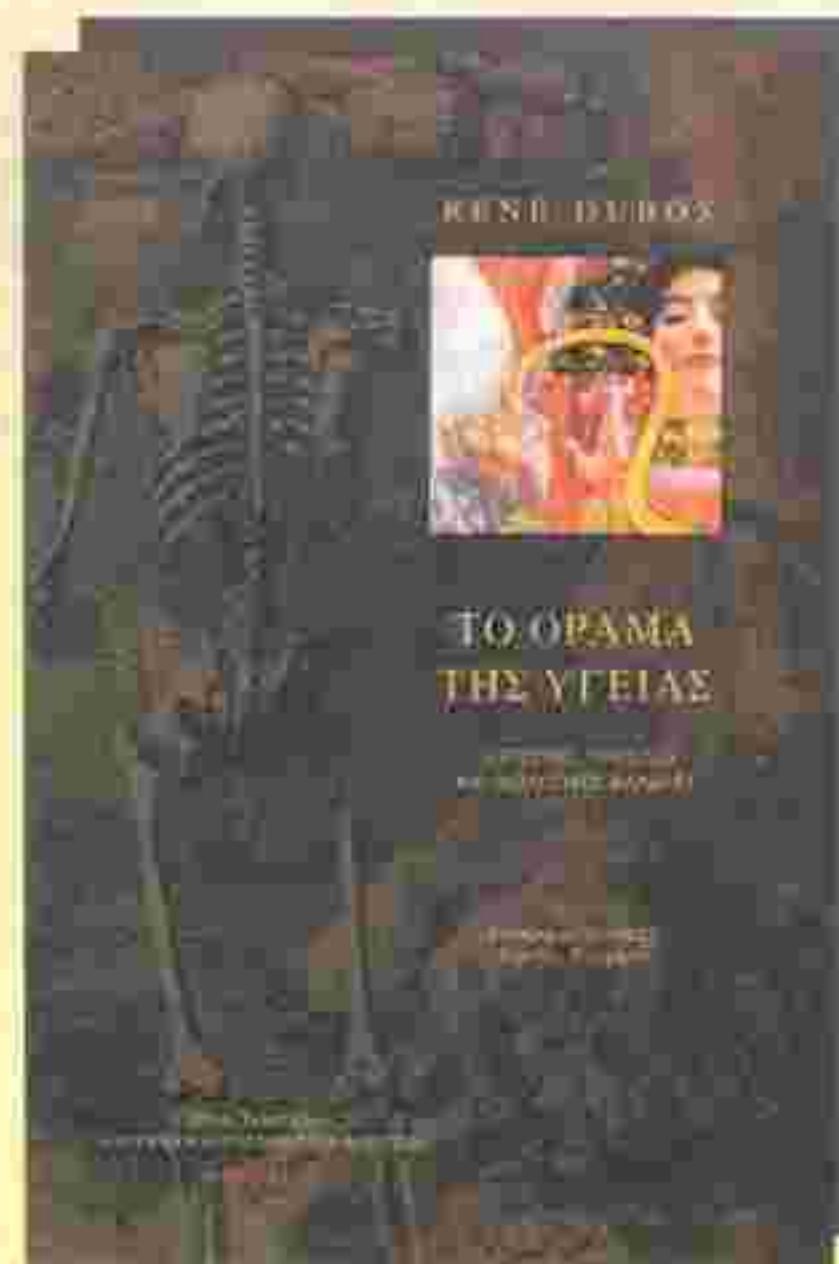


Ελπίζω ότι διασκεδάσατε με την άσκηση.

Και τέλος...

Στείλτε τις λύσεις σας για το ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 16 στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Για να δείτε όλα τα προηγούμενα θέματά μας ανατρέξτε στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://www.usaco.uwp.edu/cowculations>, ή στα τεύχη του ελληνικού *Quantum* από τον Ιανουάριο του 1997.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



René Dubos

ΤΟ ΟΡΑΜΑ ΤΗΣ ΥΓΕΙΑΣ

Ουτοπίες, πρόδοση και βιολογικές αλλαγές

Στο διάστημα αυτό έργο του, ο διαγνούμενος René Dubos, καθηγητής στην Ιατρική Σχολή του Χάρβαρντ, θεωρεί πως η αντιληφτή του φυσικού κόσμου που υποστηρίζει την παραδοσιακή εικόνα της υγείας αποτελεί τμήμα μιας σχεδόν θρησκευτικής ουτοπίας, ενδέ «ιαθολογήματος αισιοδοξίας» το οποίο παραμένει στην ουσία του αφελές.

Κάθε θεωρία του χώρου αυτού κατ' αρχήν απαιτεί την κατανόηση της δαρβίνειας συνεισφοράς (η αρρώστια ήταν πάντα παρούσα στον φυσικό κόσμο ώς τα «αυταραίτητα λύτρα για την εξέλιξη» και δεν χρειάστηκε κανενανδεύ έιδους Πτώση για να εισέλθει σ' αυτόν), δημος θα πρέπει συνάμα να την υπερβεί: ο Dubos αργείται τον περιορισμό της θεώρησης της αρρώστιας σε ένα φυσικαλιστικό πλαίσιο: επιστηματίες τη διαπολή των ορίων του «φυσικού» για την περύτωση του ανθρώπου και τη συνακόλουθη, την ιστορική, κοινωνική και πολιτισμική θεμελίωση της υγείας. Με τρόπο ιδιαίτερα γλαυφύρο και παραπέμποντας σε μια πληθώρα πηγών από ολόκληρο το φάσμα της βιολογίας, των επιστημών του ανθρώπου και της λογοτεχνίας, ο συγγραφέας σκιαγραφεί την υγεία ως έννοια που, αν και στερούμενη σταθερής επιστημονικής συγκρότησης, αποτελεί το είδωλο που σχεδόν αναπόφευκτα δημιουργούν οι κοινωνίες αποξηρώντας τη σωματική αποτίωση του οράματος μιας ειρηνευμένης ζωής.

228 σελ., 25 x 16 εκ., 6.300 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Stephen Hawking

Το χρονικό του Χρόνου — εικονογραφημένο ...



«Διαβάστε το και γαρίστε το στους φίλους σας που δεν γνωρίζουν τι ακριβώς γίνεται.

η σημαντική εποχήμη.»
John Gribbin, The New Scientist

«Η γραφή καθιστά σχεδόν προσιτά τα απρόσιτα καταρρέωματα της φυσικής εποχήμης και συγχρόνως δείχνει την αφέλειά μας, διανοιώντας περιοριστικά το χώρο της λογοτεχνίας γιατί εδώ το χρονικό της σήμαντος δίνεται με τον οίστρο ενδιαφέροντος που ημείς.

A. Μαρανίτης, Το Βήμα

... τώρα, και πάλι στα βιβλιοπωλεία.



256 σελ., Έγχρωμο,
Πανοδετό, 19 × 25 εκ.,
11.500 δρχ.

ΚΥΚΛΩΦΟΡΕΙ

Ευάγγελος Καφετζόπουλος

Ο σεξουαλικός πίθηκος

Πώς το σεξουαλικό ένοτικτο διαμόρφωσε την ανθρώπινη φύση και τον πολιτισμό

- «Τα δεδομένα και οι ερμηνείες παραπίθενται με πληρότητα και ενάργεια... Το βίβλιο θα πρέπει να προβληματίσει κάθε καλής πίστης αναγνώστη.»
—Κώστας Κριμπάς, Καθηγητής γενετικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών
- «Ο συγγραφέας, με συναρπαστικό τρόπο και αποκαλυπτική σαφήνεια, οδηγεί τους αναγνώστες σε συμπεράσματα τόσο απλά και προφανή, ώστε συχνά να αναρωτούνται μήπως όλες οι μεγάλες αλήθειεις κρύβονται επιμελώς πίσω από παραπλανητικά πολύπλοκες ερμηνείες.»
—Τάκης Μίχας, "Ελευθεροτυπία"

350 σελ., 14×21 εκ., Εικ. A/M και Έγχρ., 6.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΩΠΤΡΟ



Ο ΣΕΞΟΥΑΛΙΚΟΣ ΠΙΘΗΚΟΣ

Εικονογραφημένο χρονικό του Χρόνου — εικονογραφημένο ...

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΚΑΦΕΤΖΟΠΟΥΛΟΣ



www.katoptro.gr



Εάν τους αναγνωρίζετε...

Dennery Sneddon **Parisi** Devaney **Pauli Pathria Planck**
Descartes **VanNess** Stewart **Laplace** Spivak **Aleksandrov**
Bohr Born Kepler **Ryder** Romanujen Thomé **Bourbaki** **Heisenbe**
Fermi Fermat **Weyl** De Gennes **Zin-Justini** Mandelbrot
Abramowitz **Sierpinski** Hoyle **Apostol** Isham **Merzbacher** Conway **Banach**
Shafarevich **Misner** **Oppenheim** Euclid **Altin** Lebesgue **Pontryagin**
Arnold **Makusevich** Copernicus **Lang** Feynman **Cohn**
Caratheodory **Kadanoff** Babbage Boole Linde Lie Galois Maxwell
Gasiorowicz Novikov Lang Feynman Barrow Nagy
Lakatos Archimedes Einstein Iel'Dorich Salam Shilov Stru
Tolman Protter Ore Yosida Berberian Rudarlikar
Chandrasekhar Khinchin Lang Feynman Niven Zippin Tarski
Turing Lefschetz Maclane Kurosh Kolmogorov
Dunford Kreyszig Pauling Baym Galileo Corubedion Haken Davenpo
Mach Polya Picard Cpuran Omnes Hawking Drasin Poincare
Prigogine Petrovskii Gantrmacher Kaplansky Dugunji
Ynglim Bohr Coxeter Russell Zlman Cantor Dirac Penrose
Casti Cajorciakind Eshbach Stephanu Cartan Gardner
Rindler Schrodinge Cohen-Tannoudji Huang Fomin
Greitzer Eukahara Alonso Smullyan Gödel
Eddington Schiff Sakurai Ulam Peebles Herzberg Mors
Landau Klamkin Aristarchus Newton Birkhoff Munkres Marsden
Titchmarsh Bollobas Von Neuman Helmholtz Knobell Klein

www.leaderbooks.gr

www.leaderbooks.com

**... θα τους συναντήσετε
στα βιβλιοπωλεία που ξεχωρίζουν.**



Leader Books A.E.

Κατάστημα Α': Πλαναγή Κυριακού 17, Αμπελόκηποι Τηλ: 64.66.118
 Κατάστημα Β': Σόλωνος & Εμ. Μπενάκη 45, Τηλ: 38.11.937
 Κατάστημα Γ': Αγ. Ιωάννου 75, Αγία Παρασκευή, Τηλ: 60.15.435
 Κατάστημα Δ': Παν/πολη Ζωγράφου, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τηλ: 72.57.485
 Κατάστημα Ε': Παν/πολη Ζωγράφου, Φιλοσοφική Σχολή, Τηλ: 72.77.024-5
 Γραφεία: Κόνιαρη 62, Αμπελόκηποι, Τηλ: 64.52.825 - 64.50.048, Fax: 64.49.924
 e-mail: info@leaderbooks.com

BIBLIA - CD - ROM - ΕΙΔΗ ΓΡΑΦΕΙΟΥ