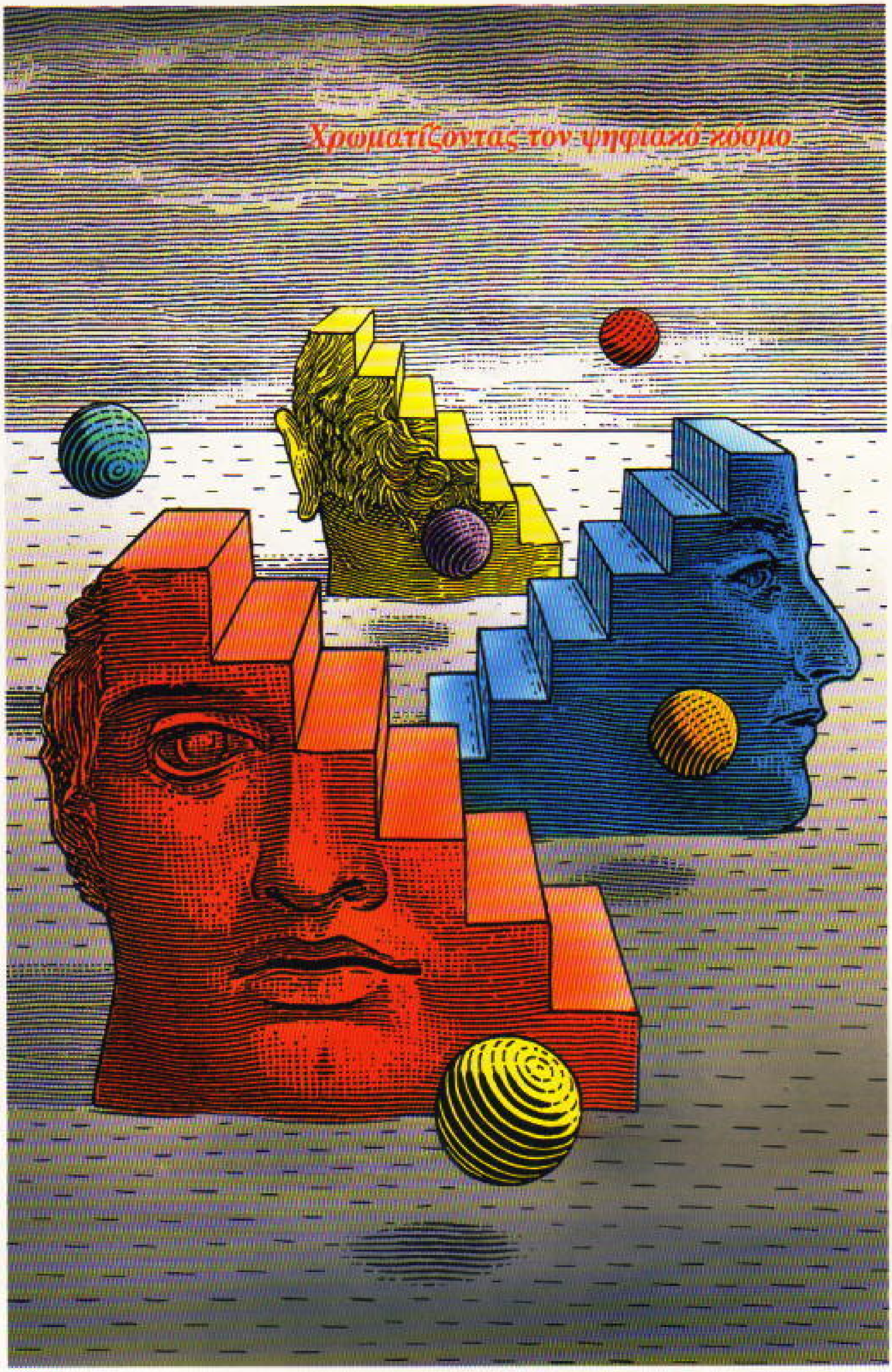
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1999
ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 3
2.000 ΔΡΧ.



- *Απλά μαθήματα διαιρετότητας*
- *Εξερευνώντας τη φύση του ηλεκτρισμού*
- *Το χρονικό της κυκλοειδούς καμπύλης*
- *Σπουδαίοι γεωμετρικοί τύποι*
- *Γιατί ένας μετασχηματιστής χρειάζεται πυρήνα;*
- *Μια ακολουθία με απρόσμενες ιδιότητες*
- *Κινούμενα συστήματα αναφοράς*
- *Εννοιολογικά προβλήματα της κβαντικής φυσικής*
- *Χημεία —μύθος και πραγματικότητα*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

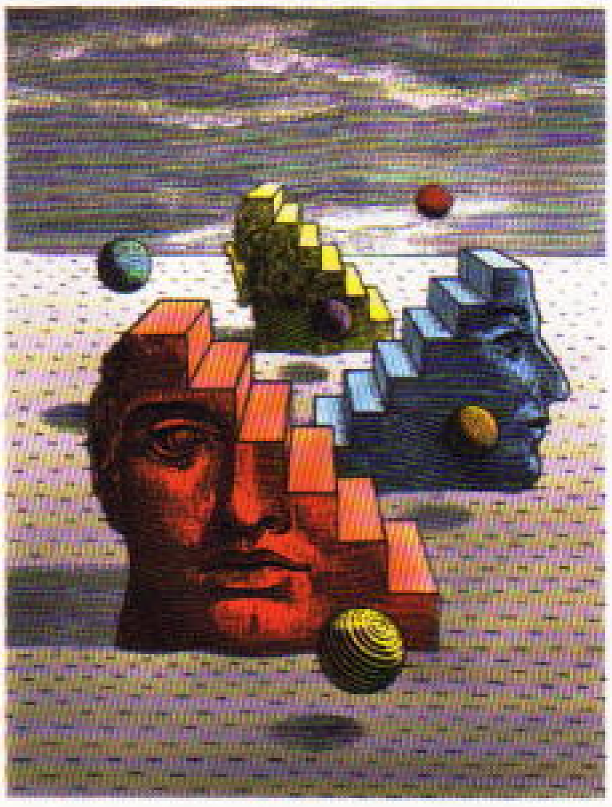
Ο Βελάσκεθ ζωγραφίζοντας την ινφάντα Μαργαρίτα με το φως και τις σκιές της δικής του λαμπρότητας (1958), του Salvador Dali

ΑΝΑΡΩΤΗΘΗΚΑΤΕ ΠΟΤΕ ΠΩΣ ΘΑ ΕΜΟΙΑΖΕ Ο ΚΟΣΜΟΣ εάν τον κοιτάζατε με τα μάτια ενός καλλιτέχνη; Αν κρίνουμε από τον παραπάνω πίνακα, φαίνεται πως ο Dali έβλεπε τον κόσμο μέσα από πρίσματα και λεπτές σχισμές. Όπως γνωρίζετε, οι εικόνες που δημιουργούνται από την αλληλεπίδραση του φωτός με τα αντικείμενα, οι οπτικοί σχηματισμοί, ποικίλλουν· από τα φανταχτερά ουράνια τόξα μέχρι τα πλέον αμυδρά ασπρόμαυρα σχέδια. Ο Dali, ωστόσο, δεν φαίνεται να διστάζει να συνδυάσει όλα αυτά στον πίνακα όπου ο Βελάσκεθ ζωγραφίζει την ινφάντα Μαργαρίτα. Και ενώ η Μαργαρίτα έχει διασπαστεί στα χρωματικά της συστατικά, ο Βελάσκεθ απομένει κάτω από ένα εναλλασσόμενο επίστρωμα φωτός και σκιάς. Το έμπειρο βλέμμα αναγνωρίζει πως οι εν λόγω εικόνες αποκαλύπτουν στοιχεία για την πραγματική φύση των χαρακτήρων που παριστάνονται —ίσως, μάλιστα, αυτή να ήταν και η πρόθεση του Dali. Πιθανόν, πάλι, να υπερβάλλουμε στην ερμηνεία μας. Ωστόσο, για να αντιληφθείτε πόσα μπορείτε να ανακαλύψετε κοιτάζοντας παρόμοιους σχηματισμούς φωτός και σκιάς, ανατρέξτε στο άρθρο «Περίθλαση με φως λέιζερ», στη σελίδα 33.

QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1999

ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση: István Orosz

Μπορούμε να προσεγγίσουμε λείες καμπύλες βήμα προς βήμα, τοποθετώντας δίπλα τους μικρά τετράγωνα. Τέτοιες προσεγγίσεις υλοποιούνται σε ψηφιακούς κόσμους δύο και τριών διαστάσεων, και μας οδηγούν σε ενδιαφέρουσες μαθηματικές προκλήσεις.

Προετοιμάστε τη μαθηματική παλέτα σας και ανατρέξτε στη σελίδα 12, στο άρθρο «Χρωματίζοντας τον ψηφιακό κόσμο».

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Χημεία —μύθος και πραγματικότητα

Σκέψεις και σχόλια περί της διδακτικής της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Αλέξανδρος Σταυρόπουλος

Ο ΑΜΥΗΤΟΣ, ΟΤΑΝ ΜΙΛΑ ΓΙΑ ΧΗμεία, συνήθως φαντάζεται περίεργες γυάλινες συσκευές, ατμούς, πολύχρωμα υγρά, αναθυμιάσεις, δυσοσμίες, πολεμικά αέρια. Στο μνημονικό του βρίσκονται απεχθείς χημικοί τύποι, που ίσως κάποτε τον βασάνισαν για να τους αποστηθίσει. Αρκεί να αναφερθεί ότι τα τάδε προϊόντα είναι «χημικά», για να δημιουργηθεί ένα αίσθημα φοβίας και καχυποψίας στη χρήση τους. Οι πιο πολλοί άνθρωποι, αν δεν αισθάνονται απέχθεια, τουλάχιστον δεν τρέφουν συμπάθεια για τη χημεία. Για τούτο ίσως να ευθύνεται και το εκπαιδευτικό σύστημα, που από τις βάσεις του διαχωρίζει τη χημεία από την καθημερινή ζωή, από τον ίδιο τον εαυτό μας και το περιβάλλον μας, που ευνοεί τη στυγνή απομνημόνευση των νόμων και των τύπων της.

Χρειάστηκαν πολλά χρόνια για να συνειδητοποιήσω αυτό που τα στεγνά διδακτικά εγχειρίδια ποτέ δεν μας αφηγήθηκαν απλά, δηλαδή ότι η χημεία είναι ό,τι αντικρίζουμε μέσα και γύρω μας, στον ουρανό, στη γη, στη θάλασσα. Είναι η επιστήμη που μελετάει την ύλη και τη μεταμορφώνει, αγγίζοντας έτσι τη ζωή μας κάθε δευτερόλεπτο. Είναι *η ίδια η ζωή μας*. Είναι η πλέον διεθνής γλώσσα, κατανοητή στα μήκη και τα πλάτη του πλανήτη αλλά και του σύμπαντος. Τα ίδια περίπου εκατό στοιχεία δομούν τη γη, το φεγγάρι, το αχανές σύμπαν. Η χημεία δεν είναι δημιούργημα του ανθρώπου. Είναι απλώς μία από τις θεμελιώδεις κατευθύνσεις για την ανάπτυξη του σύμπαντος· είναι η ομορφιά και η αντικειμενική πραγματικότητα· είναι ένα θεμελιώδες φαινόμενο της εξέλιξης.

Η χημεία που ανέπτυξε ο άνθρωπος —και που μόλις τώρα προχωρεί στην εφηβεία της— αποτελεί έναν γοητευτικό κόσμο, μια διασκεδαστική ενασχόληση, που γιγαντώθηκε τα τελευταία εκατό χρόνια. Πρόκειται για μια σειρά πνευματικά επιτεύγματα, τα οποία ο άνθρωπος οφείλει να απολαμβάνει. Είναι ένας χημικός κόσμος που επηρεάζει καθημερινά όλο και περισσότερο τη ζωή μας. Ένας κόσμος από πυρηνικά απόβλητα, κοιτάσματα πετρελαίου, φάρμακα, αναισθητικά, βιταμίνες, ορμόνες, χοληστερίνη, τριγλυκερίδια, αντισυλληπτικά, φυτοφάρμακα, εντομοκτόνα, πρόσθετα τροφίμων, λιπάσματα, απορρυπαντικά, πλαστικά, ελαστικά, βερνίκια, εκρηκτικά, χρώματα, αρώματα, καλλυντικά, κράματα μετάλλων, ρυπαντές.

Καθετί που τρώμε, πίνουμε, αναπνέουμε, μυρίζουμε, αγγίζουμε, αλλά και αυτό το ίδιο το σώμα μας, είναι μόρια «χημικά». Όλοι συνηθίσαμε να βλέπουμε τον εαυτό μας σαν το απλό είδωλο που εμφανίζεται στον καθρέφτη, και τίποτε πέραν τούτου. Πόσο αληθινό, πόσο αντικειμενικό είναι αυτό; Αν τα ίδια πράγματα τα παρατηρήσετε κάτω από το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, η εικόνα γίνεται τελείως διαφορετική. Εκεί τα προσεγγίζουμε και τα αντικρίζουμε σε επίπεδο μορίων και ατόμων. Έτσι, «μικροσκοπικοί», δεν είμαστε παρά μυριάδες πρωτεϊνικές δομές παραφουσκωμένες με νερό.

Αλλά και η διάθεσή μας κάθε στιγμή μεταφράζεται στις ουσίες που εκκρίνονται από τα κύτταρά μας και τα σωματικά υγρά που τις μεταφέρουν. Η ακριβής σύστασή τους μας καθιστά βίαιους ή πράους, αισιόδοξους ή απαισιόδοξους, χαρούμενους ή θλιμμένους. Το ανθρώπινο σώμα είναι ένα ολοκλήρωμα υγρών μέσα στο οποίο κυκλοφορούν οι ορμόνες και οι νευροδιαβιβαστές *—τα μόρια των εκάστοτε διαθέσεών μας*. Αντί να λέμε, για παράδειγμα, «σε λατρεύω» ή «σε ποθώ», δεν θα ήταν άστοχο να λέγαμε «η γοναδορελίνη μου έχει φτάσει στο μέγιστο»· ή, αντί του «δεν πεινάω» ή «χόρτασα», «το πεπτικό μου κορέστηκε με χολοκυστοκινίνη».

Χρειάστηκε να περάσουν πολλά χρόνια εμπειρίας για να αντιληφθώ την τελειότητα του χημικού εργαστηρίου που κρύβεται μέσα στο ίδιο το κορμί μας: τις μυριάδες χημικές αντιδράσεις που πραγματοποιούνται συνεχώς μέρα και νύχτα, άλλες συνειδητά, άλλες ασυνείδητα, και επιτρέπουν την ομαλή εκδήλωση της ζωής. Η ομοιοστασία μας, η σταθερή θερμοκρασία του σώματός μας (γιά δοκιμάστε να διατηρήσετε ένα ποτήρι νερό σταθερά στους 50 ± 0,1°C!), η ανάσα μας, οι παλμοί της καρδιάς μας, η πάχυνση ή το αδυνάτισμα, η σκέψη, η μάθηση, η δραστηριότητα ή η αδράνεια, η χαρά και η λύπη, η αισιοδοξία και η απαισιοδοξία, οι έρωτές μας, οφείλονται σ' αυτές τις αντιδράσεις. Από τις αισθήσεις μας, η όσφρηση και η γεύση ορθώς ορίζονται ως «χημικές αισθήσεις», αφού εδώ οι αντιδράσεις σε επίπεδο μορίων είναι άμεσα εμφανείς. Όταν μυρίζουμε ένα λουλούδι —ένα γιασεμί, μια γαρδένια—, εκατοντάδες πολύπλοκες οργανικές ουσίες προσαρμόζονται στους χιλιάδες οσφρητικούς υποδοχείς της μύτης μας. Περισσότερο από δύο χιλιάδες οργανικές ουσίες πολιορκούν τους ίδιους υποδοχείς όταν απολαμβάνουμε τον καφέ μας, τον ερατεινό, ενώ χιλιάδες οργανικές ενώσεις του τύπου *Amadori-Maillard* που παράγονται κατά το μαγείρεμα συνθέτουν αυτό που λέμε νοστιμιά του τάδε ή του δείνα φαγητού.

Η χημεία όμως ασχολείται επίσης με τη μελέτη των απειροελάχιστων συστατικών της ύλης, όπως τα άτομα και τα ηλεκτρόνια, των οποίων οι εφαρμογές —είτε ως πυρηνική ενέργεια, είτε ως ηλεκτρονικός υπολογιστής, είτε ως βίντεο και τηλεόραση, είτε ως ρομπότ— άλλαξαν δραματικά τη μοίρα του ανθρώπινου γένους. Η ουσία της ίδιας της ζωής φαίνεται να μην είναι άλλο παρά η εκδήλωση ασθενών ηλεκτρικών ρευμάτων, ροής ηλεκτρονίων ανάμεσα στα άτομα που απαρτίζουν το καθετί στη Γη και το σύμπαν. Αλλά η επίδραση της χημείας αφορά όχι μόνο το άτομο αλλά και την κοινωνία στο σύνολό της, συμβάλλοντας στην ανάπτυξη του πολιτισμού και την άνθηση της οικονομίας. Τα μεγάλα άλματα κατά τον 20ό αιώνα οφείλονται στην ανάπτυξη των «μεγατεχνολογιών», όπως ο ηλεκτρισμός, η ηλεκτρονική, η πετροχημεία, η βιοτεχνολογία. Στις αρχές του 20ού αιώνα, η πρόοδος της μεταλλουργίας και των κραμάτων έδωσε νέα υλικά και απεριόριστες δυνατότητες στην τεχνολογία. Η ανάπτυξη της αυτοκινητοβιομηχανίας, των αεροπλάνων, των ηλεκτρικών συσκευών, των δορυφόρων και των τηλεπικοινωνιών, της οικοδομικής, αποτελούν μερικά παραδείγματα. Από την άλλη μεριά, η μετατροπή του άνθρακα και του πετρελαίου σε «χημικά» προϊόντα —τα πετροχημικά, όπως συνηθίζεται να τα αποκαλούμε— μεταμόρφωσε ραγδαία, μέσα σε μια γενιά, τον τρόπο ζωής του 20ού αιώνα. Ποτέ δεν τονίστηκε ότι, εάν σήμερα ζούμε εντελώς διαφορετικά και καλύτερα, χωρίς τη φτώχεια και τη μιζέρια της δικής μας της νιότης, αυτό το οφείλουμε στη χημεία και την τεχνολογία.

Λέγεται ότι η ιστορία επαναλαμβάνεται· η αλήθεια σήμερα είναι διαφορετική, διότι οι θετικές επιστήμες και η τεχνολογία έχουν τέτοια ανάπτυξη ώστε μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι αποτελούν τη δύναμη που συγκρατεί την ιστορία από την αυτοεπανάληψή της. Ο αντίκτυπός τους έχει μετατρέψει τον ιστορικό κύκλο σε εφαλτήριο που ωθεί την ανθρωπότητα προς τα πάνω. Ένα είναι βέβαιο: ότι ο κόσμος αύριο δεν θα είναι ξανά ο ίδιος.

Μέσα σ' αυτή την κοσμογονία, η πολιτεία δεν δείχνει να έχει αντιληφθεί και πολλά για τις επελθούσες και τις επερχόμενες μεταβολές. Κι ενώ η χημεία και το τέκνο της, η μοριακή βιολογία, γίνονται πρωτεύοντα μαθήματα —πλέον όχι μόνο για τους χημικούς, αλλά και για τους γιατρούς και τους γεωπόνους—, οι ώρες διδασκαλίας στα λύκεια μειώνονται και τα αναλυτικά προγράμματα παραμένουν καθηλωμένα σε γνώσεις εν πολλοίς άχρηστες για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (λες και δεν υπάρχει χρόνος, για όσους θα προχωρήσουν στον πανεπιστημιακό κύκλο σπουδών, να εμβαθύνουν στις λεπτομέρειες αργότερα). Έτσι, αντί να κινήσουμε το ζωηρό ενδιαφέρον τους δείχνοντάς τους το θαυμαστό τοπίο, εμείς τους δείχνουμε μόνο τα στενά σοκάκια.

Δυστυχώς, δεν διδάσκουμε τα παιδιά μας να παρατηρούν και να στοχάζονται όλα τα θαυμαστά που υπάρχουν και συμβαίνουν γύρω μας και που η καθημερινότητα τα έχει μετατρέψει σε «αυτονόητα». Πόσοι από εμάς προβληματίζονται σχετικά με το πώς δημιουργείται ένα λουλούδι, μια πεταλούδα, ένα παιδί, αλλά και άλλα, πολύ απλούστερα. Πόσες φυσικοχημικές δράσεις απαιτούνται για να λυγίσουμε ένα δάχτυλό μας, ή πώς ανεβαίνει το νερό σε μια σεγκόβια εκατό μέτρων, όπου η απαιτούμενη πίεση είναι περίπου 10 ατμόσφαιρες!

Ας προσπαθήσουμε να διεγείρουμε την περιέργεια των παιδιών, την πιο χαρακτηριστική ιδιότητα που —προνομιακά— μόνο το ανθρώπινο γένος διαθέτει, και χάρη στην οποία δημιούργησε τις επιστήμες και τις τέχνες. Το ανθρώπινο γένος το οδήγησε από την αθλιότητα στο σημείο που βρίσκεται σήμερα η ακατασίγαστη περιέργεια προικισμένων ανθρώπων. Η προσπάθεια να τονώσουμε το ενδιαφέρον των παιδιών για ό,τι υπέροχο συμβαίνει μέσα τους και γύρω τους είναι σήμερα περισσότερο απαραίτητη, μια που «τα παιδία» δεν «παίζει», αλλά «βλέπει», καθώς από το πρωί ώς το βράδυ βομβαρδίζονται με αρρωστημένα «σήριαλ». Βοηθήστε τα να αναπτύξουν την κρίση τους, τη φαντασία τους, αυτή τη θαυμαστή λειτουργία για την οποία ο Αϊνστάιν έλεγε ότι είναι πιο σημαντική από τη γνώση. Παρακινήστε τα να ρωτούν «γιατί» και δείξτε τους πόσο λίγα γνωρίζουμε και πόσο πρέπει να εργαστούμε για να δώσουμε απαντήσεις σε απλά εκ πρώτης όψεως ερωτήματα, και σε πολλά που τα θεωρούμε «αυτονόητα».

Δώστε τους, με βάση παραδείγματα από την καθημερινή τους ζωή, να συνειδητοποιήσουν ορισμένα μεγέθη, όπως π.χ., ότι ένα γραμμάριο είναι η μάζα ενός φιστικιού, ένα μιλιγκράμ είναι η μάζα ενός κόκκου άμμου και ένα χιλιοστό του μέτρου το πάχος ενός λεπτού σπιρτόξυλου. Αν θέλετε να κατανοήσουν έναν από τους πιο στοιχειώδεις νόμους της φυσικής και της χημείας, την κλασική εξίσωση του Αϊνστάιν $E = mc^2$, που σημάδεψε τον 20ό αιώνα, θα πρέπει να τα βοηθήσετε να φανταστούν πόσο μεγάλος αριθμός είναι το τετράγωνο της ταχύτητας του φωτός, για να συνειδητοποιήσουν έτσι τις τεράστιες ποσότητες ενέργειας που απελευθερώνονται κατά τη μετατροπή της μάζας σε ενέργεια. Εάν τους πείτε όλο κι όλο ότι η ταχύτητα του φωτός είναι 300.000 χιλιόμετρα ανά δευτερόλεπτο, το ακούν μεν αλλά δεν το αισθάνονται· αν όμως τους εξηγήσετε ότι το φως σε ένα δευτερόλεπτο κάνει 7,5 φορές το γύρο του ισημερινού, είναι βέβαιο ότι θα έχουν καλύτερη εκτίμηση. Έτσι γίνονται αντιληπτές και οι τιτανικές δυνάμεις που απελευθερώνονται στη σύντηξη ή τη σχάση πυρήνων, σε ειρηνικές ή πολεμικές εφαρμογές.

Ας προσπαθήσουμε να απομακρύνουμε τα παιδιά από την απομνημόνευση και την αποστήθιση. Χαρίστε τους ένα καλοτυπωμένο περιοδικό σύστημα για να το έχουν πάντα μαζί τους και μάθετέ τα να το χρησιμοποιούν και να σχηματίζουν με τη βοήθειά του τους χημικούς τύπους αντί να τους απομνημονεύουν. Δείξτε τους όλη την απλότητα της οργανικής ονοματολογίας με τα τέσσερα σύμβολα (μεθ-, αιθ-, προπ-, βουτ-), τα ελάχιστα προθήματα (-αν-, -εν-, -ιν-) και τις πέντε-δέκα βασικές απολήξεις (-ολ-, -αλ-, -ον-, κ.λπ.) οι οποίες χαρακτηρίζουν μυριάδες οργανικές ενώσεις. Είναι προτιμότερο να τους εξηγήσετε τη σημασία του σιδήρου, του ψευδαργύρου, του σεληνίου ή του χρωμίου για την καθημερινή ζωή και την υγεία τους ως στρατηγικών κέντρων σε ενζυματικά συστήματα, παρά να τα υποχρεώσετε να αποστηθίσουν τα ανιαρά ονόματα των ορυκτών τους ή των παρασκευών τους, που σε μερικές ώρες θα τα ξεχάσουν. Αλλά αν πρέπει να πάτε και σε πιο βαθιά νερά, είναι προτιμότερο να τους πείτε π.χ. για το νατραζίδιο, πως έχει σώσει χιλιάδες ζωές —ως περιεχόμενο των αερόσακων— κατά τις συγκρούσεις των αυτοκινήτων, διασπώμενο κατά την κρούση σε αέριο άζωτο, παρά να τους διδάξετε τη χημεία του.

Ας μην ξεχνάμε ακόμη ότι το κέντρο του σύμπαντος για κάθε πλάσμα σ' αυτό τον κόσμο είναι ο «εαυτός του». Όπως, εξελικτικά, αναπτύχθηκε η ζωή, δεν μπορούσε παρά να είναι έτσι. Το κύτταρο —δομικός λίθος της ζωής— είναι εγωιστικό. Όπως λέει και ο Francois Jacob: «Τα γονίδια, τα μόρια του DNA, βασικό συστατικό των κυττάρων, υπάρχουν μόνο για να επιβιώνουν και να αναπαράγονται. Ένα είναι το όνειρο κάθε κυττάρου: πώς θα γίνει δύο κύτταρα.» Τι να περιμένουμε λοιπόν να προκύψει από τη σύναξη τόσων δισεκατομμυρίων εγωισμών; Ο παρασιτισμός και η αρχή της «ήσσονος προσπάθειας» (ποιος δεν προτιμά τον κατήφορο από τον ανήφορο) είναι γραμμένα στα γονίδια κάθε όντος. Αν όμως επιλέγουμε την κοινωνική ζωή, θα πρέπει να πληρώσουμε το τίμημα, να αποφασίσουμε να υποστούμε θυσίες εις βάρος των ορμεμφύτων μας. Κι αυτός πιστεύω ότι είναι ένας από τους σημαντικούς ρόλους του σχολείου. Χρειάζεται προσπάθεια για να γίνουν αυτά συνείδηση. Και η διεπιστημονική γνώση φυσικής-χημείας-βιολογίας βοηθάει αποτελεσματικά προς αυτή την κατεύθυνση.

Διδάξτε τα παιδιά ότι είμαστε «αυτό που τρώμε»· κι αν «αυτό» θέλουμε να το διατηρήσουμε έτσι όπως μας το χάρισε η φύση, θα πρέπει να γνωρίζουμε μερικούς χρυσούς κανόνες διατροφής, άθλησης και αποφυγής των πιο ύπουλων εχθρών μας —που ξεκινούν από τους σχετικά αθώους, όπως είναι η καφεΐνη, και φτάνουν στους πλέον μοιραίους, όπως η νικοτίνη, η κοκαΐνη, η ηρωίνη. Θα πρέπει να τους μάθουμε τη χημεία του εθισμού, των πρωτεϊνικών υποδοχέων, τη δράση της ντοπαμίνης, της σεροτονίνης και της κορτιζόλης, και θα πρέπει να συνειδητοποιήσουν την κατάληξή τους στην υποτέλεια, τον εξευτελισμό, και τελικά το θάνατο.

Θα πρέπει επίσης να γνωρίζουν ότι ζούμε σ' ένα περιβάλλον εχθρικό. Το οξυγόνο, αυτός ο ενεργειακός ευεργέτης μας που συντηρεί ζεστό το κορμί μας και δημιουργεί την ανάσα μας, είναι ο τελικός αποδέκτης των ηλεκτρονίων, με τη βοήθεια του παγκόσμιου ενεργειακού νομίσματος (του μορίου του αδενοσινοτριφωσφορικού οξέος —ATP). Δηλαδή, με τη βοήθεια του οξυγόνου καίμε την ενέργεια που ο ζωοδότης Ήλιος συσσωρεύει άμεσα ή έμμεσα στα τρόφιμα. Αλλά το οξυγόνο, εκτός από ευεργέτης, είναι και κακοποιός: με κάθε ανάσα μας βοηθάμε να αναπτυχθούν οι ελεύθερες ρίζες που καταστρέφουν τα κύτταρά μας, οπότε οδηγούμαστε αδυσώπητα, με την οξείδωση των λιπιδίων στις μεμβράνες των κυττάρων μας, στη γήρανση και την απόπτωση.

Τα παιδιά θα πρέπει να μάθουν εξ απαλών ονύχων την αξία των καροτινίων, των φυσικών βιταμινών, των ιχνοστοιχείων της θάλασσας, των λαχανικών, των φρούτων, των διαλυτών ινών, για να αποφύγουν αργότερα την εξαιρετικά κακή διατροφή όπου ο μιμητισμός και οι παρορμήσεις τους τείνουν να τα εθίσουν. Καλό είναι να συνειδητοποιήσουν το «παν μέτρον άριστον» για τις ποικίλες λιχουδιές που η διαφήμιση τα προκαλεί να υπερκαταναλώνουν, με τίμημα την παχυσαρκία, τη χοληστερίνη και όλα τα επακόλουθα. Είναι τραγικό, παιδιά στην εφηβεία και τα πρώτα νιάτα να έχουν τέτοια προβλήματα, τα οποία θα πληρώσουν αργότερα ακριβά.

Ακόμη πιο ζωηρό είναι το ενδιαφέρον των νέων για το ζήτημα του σεξ, που τόσο υποκριτικά το αγνοούμε. Έχει αποδειχτεί, παραδείγματος χάρη, ότι ένας έφηβος ασχολείται με το σεξ, συνειδητά ή ασυνείδητα, τουλάχιστον τέσσερις φορές την ώρα. Αν λοιπόν πρόκειται να του μιλήσουμε για το άζωτο και τις ενώσεις του, αυτό θα του εντυπωθεί πολύ περισσότερο αν του πούμε ότι το οξείδιο του αζώτου (NO) είναι μια περίεργη, κάπως σταθερή ελεύθερη ρίζα, η οποία, αν ενωθεί με περισσότερο οξυγόνο, σχηματίζει τα καφετιά σύννεφα του διοξειδίου του αζώτου που ρυπαίνουν την ατμόσφαιρα· το απλό αυτό μόριο όμως του εξασφαλίζει συγχρόνως και την ερωτική του ευωχία, αφού πυροδοτεί τη στύση. Οι ερωτικές σκέψεις και ο ερεθισμός στέλνουν μήνυμα στους σπογγώδεις μυς του γεννητικού οργάνου, που με τη σειρά τους παράγουν οξείδιο του αζώτου, οι μύες χαλαρώνουν, οπότε το αίμα ορμά και η υπεραιμία δημιουργεί τη διόγκωση (αναλόγως δρα και στην κλειτορίδα). (Το Viagra φαίνεται να συντελεί στην παραγωγή αυτού του περίεργου μορίου.) Χωρίς το NO, τίποτε δεν θα μπορούσε να βοηθήσει τον ερωτιδέα να πραγματοποιήσει τους πόθους και τα όνειρά του (NO love, NO hope). Αυτό το τόσο απλό μόριο, που έχει και δράση νευροδιαβιβαστή, πέρα από τη μυϊκή χαλάρωση προκαλεί και τη χαλάρωση των αιμοφόρων αγγείων απομακρύνοντας τους κινδύνους εμφράγματος, αυξάνει την προστασία έναντι των εισβολέων και ενδυναμώνει τη μνήμη (η τρινιτρογλυκερίνη —φάρμακο των καρδιοπαθών— βοηθάει στην παραγωγή του).

Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε χίλια ανάλογα παραδείγματα. Αλλά είμαι βέβαιος ότι όσοι από εσάς θελήσουν να ασχοληθούν θα ανακαλύψουν μόνοι τους, για όλες τις περιπτώσεις, χρήσιμα και ενδιαφέροντα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή, απαλλάσσοντας έτσι τα παιδιά από την αποστήθιση τύπων και ονομάτων —που εκτός από αποστροφή, τίποτε άλλο δεν προσφέρουν, μιας και ξεχνιούνται την επομένη των εξετάσεων.

Ο **Αλέξανδρος Σταυρόπουλος** *σπούδασε χημεία (αλλά έλαβε διδακτορικό δίπλωμα και στη φιλοσοφία) και διετέλεσε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς (σήμερα ομότιμος). Είναι ιδρυτής και πρόεδρος του ερευνητικού κέντρου Βιορύλ και πρόεδρος της επιτροπής ειδικών εκδόσεων του Ιδρύματος Ευγενίδη. Σήμερα, σε ηλικία 74 χρόνων, συνεχίζει να ασχολείται με εφαρμοσμένη έρευνα στη βιοτεχνολογία και τη βιοχημεία φυσικών προϊόντων.*

Το παρόν άρθρο αποτελεί κατά ένα μέρος του διασκευή από το συγγραφέα αποσπασμάτων του βιβλίου του Η ζωή σ' επίπεδο μορίων. *Το βιβλίο έχει βραβευτεί από την Ακαδημία Αθηνών, το δε σύνολο των εισπράξεων από την πώλησή του διατίθεται από το συγγραφέα υπέρ του αγώνα κατά των ναρκωτικών του Τμήματος αλκοολικών-τοξικομανών του Ψυχιατρικού Νοσοκομείου Αττικής (αρ. λογ.: 26060 - Τράπεζα Ελλάδος).*

Το ελληνικό Quantum *ευχαριστεί τον καθηγητή Αλέξανδρο Σταυρόπουλο για την ευγενική παραχώρηση του παρόντος κειμένου.*

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 10.500 δρχ. για ιδιώτες, 18.500 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.

Ρεύματα μεταφοράς και μετατόπισης

Εξερευνώντας τη φύση του ηλεκτρισμού

V. Dukov

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ; Ιδού η συνήθης απάντηση: η προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων σ' έναν αγωγό. Ωστόσο, αυτό αληθεύει μόνο εν μέρει. Για να δώσουμε μια ολοκληρωμένη απάντηση, ας θυμηθούμε πώς εμφανίστηκε στην επιστήμη η έννοια του ηλεκτρικού ρεύματος.

Το 1800 ο ιταλός φυσικός Alessandro Volta (1745-1827) ανακάλυψε μια μέθοδο παραγωγής συνεχούς ρεύματος μέσω πηγής ηλεκτρεγερτικής δύναμης (ΗΕΔ), η οποία αναφέρεται συχνά ως γαλβανικό (ή ηλεκτροχημικό) στοιχείο. Αυτή την εποχή, ο ηλεκτρισμός θεωρούνταν ένα αβαρές ρευστό που είχε τη δυνατότητα να διεισδύει μέσα στα σώματα, ακόμη και από τους πιο μικροσκοπικούς πόρους τους. Συνεπώς, ηλεκτρικό ρεύμα σε ένα κύκλωμα θεωρούνταν η ροή του εν λόγω ρευστού. Πέρασε πολύς καιρός μέχρι να ανακαλυφθεί ότι, στην πραγματικότητα, μέσα στους αγωγούς κινούνται φορτισμένα σωματίδια.

Ο Michael Faraday (1791-1867) πραγματοποίησε το πρώτο βήμα σε αυτή την κατεύθυνση. Έδειξε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα στους ηλεκτρολύτες οφείλεται στην κίνηση ιόντων. Το ιόν είναι άτομο που εμφανίζει είτε πλεόνασμα είτε έλλειμμα ηλεκτρικού φορτίου. Επομένως, κάθε ιόν χαρακτηρίζεται από τις τιμές δύο μεγεθών: της μάζας του και του ηλεκτρικού φορτίου του. Κατά την ηλεκτρόλυση, ιόντα αποθέτουν το φορτίο τους στο ένα ηλεκτρόδιο και προσκολλώνται σε αυτό —διεργασία γνωστή ως επιμετάλλωση. Ο Faraday έδειξε μέσα από πολλά πειράματα ότι ιόντα που έχουν το ίδιο σθένος φέρουν την ίδια ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου. Πολλά χρόνια αργότερα, το συγκεκριμένο γεγονός οδήγησε τον Hermann von Helmholtz (1821-1894) στο συμπέρασμα ότι πρέπει να υπάρχει ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Το γεγονός ότι αυτό το στοιχειώδες φορτίο φέρεται από το ηλεκτρόνιο ανακαλύφθηκε μόλις στο τέλος του 19ου αιώνα.

Σημειώστε ότι αν ο Faraday είχε δεχθεί αξιωματικά την ύπαρξη του στοιχειώδους φορτίου (του ηλεκτρονίου) και την ισχύ δύο νόμων διατήρησης (της ενέργειας και της μάζας), τότε θα μπορούσε να συναγάγει θεωρητικά τους δύο βασικούς νόμους του για την ηλεκτρόλυση. Στην πραγματικότητα, τους ανακάλυψε ύστερα από πολλά χρόνια σκληρή δουλειά.[1]

Θεωρήστε N ιόντα που κινούνται σε έναν ηλεκτρολύτη. Καθένα από αυτά φέρει φορτίο Ze_0, όπου Z είναι το σθένος του και e_0 το στοιχειώδες φορτίο. Τότε η μάζα των ιόντων που αποτίθεται στο ηλεκτρόδιο ισούται με

$$M = Nm_0, \tag{1}$$

όπου m_0 είναι η μάζα του ιόντος. Αντιστοίχως, το ηλεκτρικό φορτίο που μεταφέρεται στο ηλεκτρόδιο από τα ίδια ιόντα ισούται με

$$q = NZe_0. \tag{2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$M = \frac{m_0}{Ze_0} q. \tag{3}$$

Συμβολίζοντας το πηλίκο m_0/Ze_0 με k, οδηγούμαστε στον πρώτο νόμο του Faraday:

$$M = kq.$$

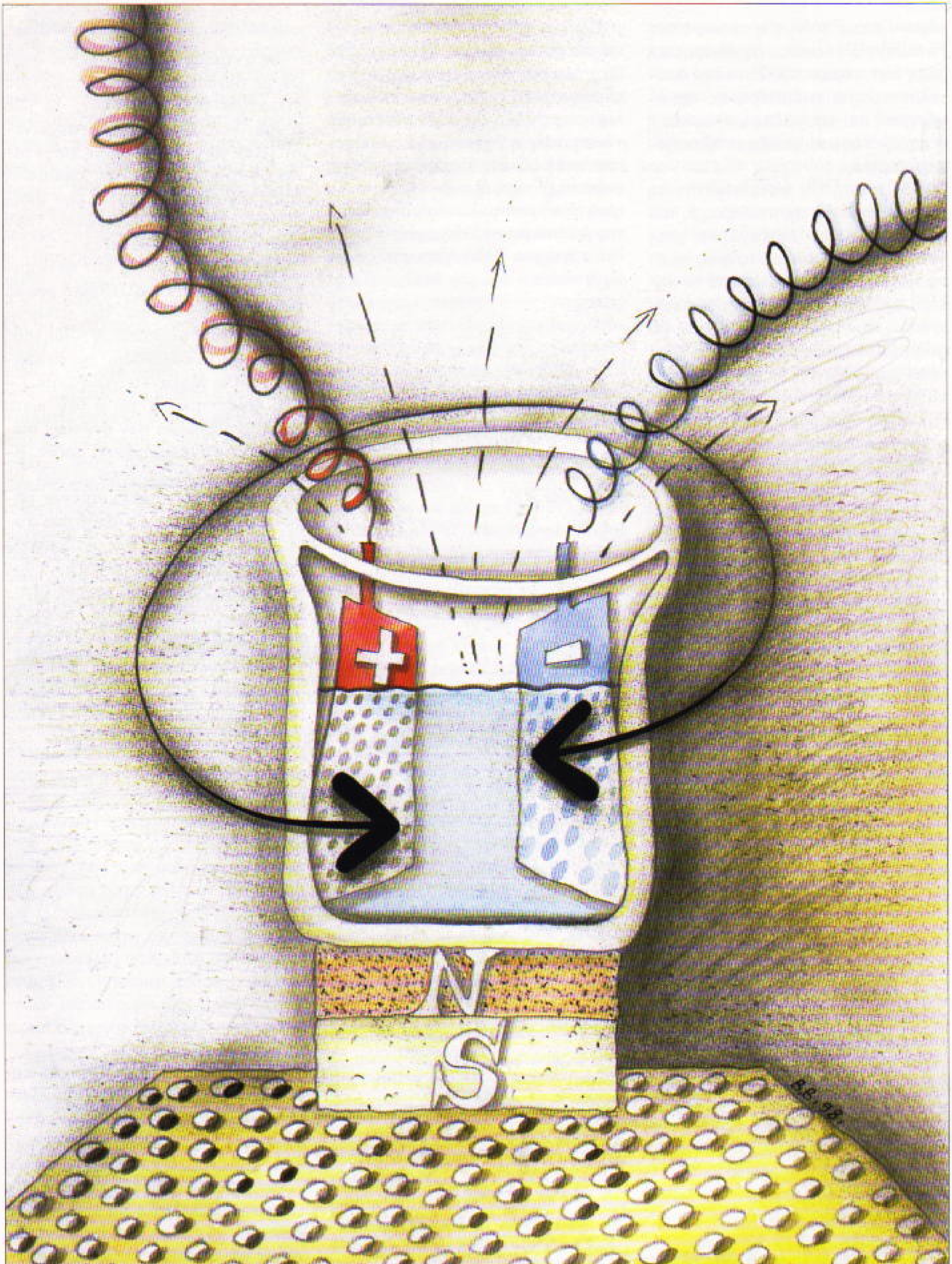
Εάν στη συνέχεια λύσουμε την τελευταία εξίσωση ως προς k και πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της προκύπτουσας σχέσης με τον αριθμό Avogandro, N_A, θα λάβουμε:

$$k = \frac{N_A \cdot m_0}{Ze_0 N_A} = \frac{\mu}{Ze_0 N_A} = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z}. \tag{4}$$

Στη σχέση αυτή —που αποτελεί τον δεύτερο νόμο του Faraday— μ είναι η γραμμομοριακή μάζα του

1. Το αξίωμα αποτελεί πολύ χρήσιμο εργαλείο για να γνωρίσεις ένα αντικείμενο (όπως η γεωμετρία), γίνεται όμως επικίνδυνο όργανο όταν το χρησιμοποιείς για να ανακαλύψεις τους νόμους της φύσης. Ιδού τι έγραψε ο Bertrand Russel (1872-1970): «Η αξιωματική μέθοδος έχει πολλά πλεονεκτήματα. Ίδια με τα πλεονεκτήματα που έχει ο σφετερισμός του τίμιου μόχθου.»

Εικονογράφηση: Vasily Vlasov


+
-
N
S

υλικού και $F = N_A e_0$ η σταθερά του Faraday. Συνεπώς, τη θεωρητική βάση των νόμων του Faraday αποτελούν οι νόμοι διατήρησης της ενέργειας και της μάζας καθώς και η ύπαρξη ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου.

Η εξίσωση (3) καταδεικνύει τη φυσική σημασία της σταθεράς k, του ηλεκτροχημικού ισοδυνάμου μιας ουσίας: Η μάζα που αποτίθεται σε ένα ηλεκτρόδιο εξαρτάται από το πηλίκο του φορτίου προς τη μάζα των ιόντων. Από τις εξισώσεις (3) και (4) φαίνεται ότι, προκειμένου να αποτεθεί περισσότερη μάζα, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ουσία με μεγαλύτερη γραμμομοριακή μάζα και μικρότερο σθένος.

Το πηλίκο του φορτίου ενός σώματος προς τη μάζα του ονομάζεται ειδικό φορτίο, και αποτελεί σημαντικό φυσικό μέγεθος. Ας διαπιστώσουμε την τεράστια διαφορά μεταξύ του ειδικού φορτίου των στοιχειωδών σωματιδίων και του ειδικού φορτίου των μακροσκοπικών σωμάτων. Για ένα «ελαφρύ» σωματίδιο όπως το ηλεκτρόνιο το ειδικό φορτίο του είναι

$$\frac{e_0}{m_e} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} \cong 2 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C/kg},$$

ενώ για ένα «βαρύ» πρωτόνιο το ειδικό φορτίο του είναι

$$\frac{e_0}{m_p} \cong 10^8\ \mathrm{C/kg}.$$

Για να αντιληφθούμε την τεράστια διαφορά μεταξύ αυτών των τιμών και του ειδικού φορτίου μακροσκοπικών σωμάτων, ας υπολογίσουμε το ειδικό φορτίο μιας μικρής σφαίρας από κράμα αργιλίου ακτίνας $r = 1$ cm και πυκνότητας $\rho = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$. Η μάζα της σφαίρας θα ισούται με

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$$

$$\cong \frac{4 \cdot 3{,}14}{3} \cdot \left(10^{-2}\right)^3 \cdot 2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}$$

$$\cong 8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}.$$

Πόσο φορτίο μπορεί να συγκρατεί μια τέτοια σφαίρα; Είναι γνωστό ότι η διαρροή ηλεκτρικού φορτίου από την επιφάνεια ενός σώματος στον περιβάλλοντα αέρα γίνεται έντονη όταν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια φτάσει την τιμή $E_0 \cong 3 \cdot 10^6$ V/m. Το ηλεκτρικό πεδίο, λοιπόν, που δημιουργεί μια μεταλλική σφαίρα ακτίνας r η οποία φέρει ηλεκτρικό φορτίο q είναι:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Η μέγιστη τιμή του φορτίου που μπορεί να παραμείνει πάνω σε αυτή τη σφαίρα προσδιορίζεται από τη συνθήκη $E = E_0$. Επομένως,

$$q_{\max} = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E_0$$

$$\cong 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}(10^{-2})^2 \cdot 3 \cdot 10^6\ \mathrm{C}$$

$$\cong 3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}.$$

Συνεπώς, το μέγιστο ειδικό φορτίο της σφαίρας αργιλίου ισούται με

$$\frac{q_{\max}}{m} = \frac{3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}}{8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} \cong 4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C/kg}.$$

Παρατηρούμε ότι το ειδικό φορτίο του πρωτονίου είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της σφαίρας αργιλίου κατά παράγοντα 10^{13}!

Φανταστείτε, λοιπόν, ότι προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ηλεκτρικό ρεύμα 1 A χρησιμοποιώντας τις φορτισμένες σφαίρες αργιλίου. Εξ ορισμού, $I = q/t$. Το φορτίο μίας μοναδικής σφαίρας θα είναι q_1, οπότε $q = Nq_1$, όπου N ο απαιτούμενος αριθμός σφαιρών. Άρα, το ηλεκτρικό ρεύμα θα ισούται με $I = Nq_1/t$, και επομένως

$$N = \frac{It}{q_1} \cong \frac{(1\ \mathrm{A}) \cdot (1\ \mathrm{s})}{3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}} \cong 30 \cdot 10^6.$$

Η ροή των σφαιρών πρέπει να είναι τόσο πυκνή ώστε κάθε δευτερόλεπτο να διέρχονται από μια συγκεκριμένη διατομή 30 δισεκατομμύρια από αυτές! Εάν οι σφαίρες «ρέουν» μέσα σε έναν σωλήνα, το εμβαδόν της διατομής του θα πρέπει να είναι

$$S = N\pi r^2 =$$

$$= 3{,}14 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot (10^{-2})^2\ \mathrm{m^2} \cong 10^4\ \mathrm{m^2}.$$

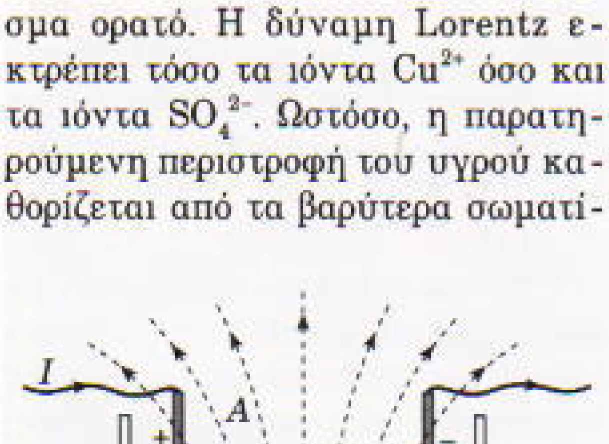
Σε αντιδιαστολή, ένα λεπτό σύρμα με διάμετρο μόλις κλάσμα του χιλιοστού μπορεί να άγει το ίδιο ρεύμα —αν και θα ερυθροπυρώνεται. Και το γεγονός αυτό καθίσταται δυνατό εξαιτίας της τεράστιας τιμής του ειδικού φορτίου των στοιχειωδών σωματιδίων-φορέων (των ηλεκτρονίων, φέρ' ειπείν).

Ποια είναι η φύση του ηλεκτρικού ρεύματος; Το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργείται λόγω της κίνησης φορτισμένων σωματιδίων —δηλαδή κινούνται τα σωματίδια, όχι το αβαρές φορτίο. Μολονότι γράφουμε $I = q/t$, θεωρούμε ότι το q δεν είναι παρά το άθροισμα των φορτίων σωματιδίων συγκεκριμένης μάζας. Επομένως, το ηλεκτρικό ρεύμα θα πρέπει να έχει συγκεκριμένες μηχανικές ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά από τους Tolman και Stuart. Οι δύο ερευνητές έθεσαν σε ταχεία περιστροφή ένα σωληνοειδές, το οποίο παρέμενε συνδεδεμένο με ένα γαλβανόμετρο, και κάποια στιγμή διέκοψαν απότομα την κίνησή του. Ο δείκτης του γαλβανόμετρου υπέδειξε την ύπαρξη ρεύματος, το οποίο αντιστοιχούσε στην κίνηση αρνητικά φορτισμένων σωματιδίων με φορά αυτή της περιστροφής. Με τέτοιου είδους πειράματα κατέστη δυνατό να μετρηθεί το ειδικό φορτίο των σωματιδίων, η αδράνεια των οποίων παρήγαγε το ηλεκτρικό ρεύμα στο επιβραδυνόμενο σωληνοειδές. Η τιμή αυτή συμπίπτει με την τιμή του ειδικού φορτίου του ηλεκτρονίου —τιμή η οποία υπολογίστηκε από την εκτροπή που υφίστανται τα ηλεκτρόνια μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο.

Τα πειράματα των Tolman και Stuart ήταν τα πρώτα που κατέδειξαν την ύπαρξη ελεύθερων ηλεκτρονίων στα μέταλλα. Τα ηλεκτρόνια, χαλαρά συνδεδεμένα με το κρυσταλλικό πλέγμα, συνεχίζουν να κινούνται, λόγω αδράνειας, και μετά την απότομη διακοπή της κίνησης του σωληνοειδούς, με αποτέλεσμα να παράγεται ένα μικρής διάρκειας ηλεκτρικό ρεύμα.

Στους ηλεκτρολύτες, το ηλεκτρικό ρεύμα οφείλεται στην ταυτόχρονη ροή ιόντων προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις. Τα ιόντα έχουν ίσα κατ' απόλυτη τιμή φορτία, οι μάζες τους όμως διαφέρουν. Για παράδειγμα, σε διάλυμα θειικού χαλκού οι φορείς του ρεύματος είναι ιόντα Cu^{2+} και SO_4^{2-}. Η ατομική μάζα του ιόντος χαλκού είναι μόλις 63,5, ενώ η ατομική μάζα των θειικών ιόντων είναι συγκριτικά μεγαλύτερη: $32{,}1 + 4 \times 16 = 96{,}1$. Η διαφορά αυτή μπορεί να παρατηρηθεί σε ένα απλό πείραμα που πραγματοποιείται εύκολα ακόμη και στο σπίτι.

Γεμίζουμε ένα γυάλινο δοχείο με διάλυμα θειικού ΙΙ χαλκού (γνωστό και με τα ονόματα χαλκανθίτης ή γαλαζόπετρα ή κυανό βιτριόλι)· σ' αυτό βυθίζουμε δύο ηλεκτρόδια και στην επιφάνειά του σκορπίζουμε μικρά κομμάτια χαρτί. Στη συνέχεια τοποθετούμε κάτω από το δοχείο έναν μόνιμο μαγνήτη και συνδέουμε τα ηλεκτρόδια με πηγή συνεχούς ρεύματος (Σχήμα 1). Παραδόξως, τα κομματάκια χαρτί αρχίζουν να περιστρέφονται! Το φαινόμενο εξηγείται μέσω της δύναμης Lorentz που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στα ιόντα και τα εκτρέπει. Αυτά, εκτρεπόμενα, σπρώχνουν τα μόρια του νερού, οπότε όλη η μάζα του διαλύματος αρχίζει να περιστρέφεται. Τα κομμάτια χαρτί στην επιφάνεια του διαλύματος απλώς καθιστούν το αποτέλεσμα ορατό. Η δύναμη Lorentz εκτρέπει τόσο τα ιόντα Cu^{2+} όσο και τα ιόντα SO_4^{2-}. Ωστόσο, η παρατηρούμενη περιστροφή του υγρού καθορίζεται από τα βαρύτερα σωματίδια —στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα ιόντα SO_4^{2-} εξουδετερώνουν την αντίστοιχη περιστροφή των ελαφρύτερων ιόντων Cu^{2+}. Αλλάζοντας τη φορά του ρεύματος ή τον προσανατολισμό του μαγνήτη, αλλάζει και η φορά περιστροφής του διαλύματος.



Σχήμα 1

Παρόμοιο αποτέλεσμα προκύπτει και στην περίπτωση διαρροής στον αέρα ηλεκτρικών φορτίων από μια ακίδα. Είναι γνωστό ότι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου αυξάνει δραστικά στην περιοχή ενός αιχμηρού άκρου, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο στον περιβάλλοντα χώρο. Το πεδίο αυτό προκαλεί τον ιονισμό των ουδέτερων μορίων του αέρα. Εάν το αιχμηρό άκρο είναι θετικά φορτισμένο, τότε τα ηλεκτρόνια του αέρα ρέουν προς την ακίδα και τα θετικά φορτισμένα ιόντα απομακρύνονται από αυτήν. Η ροή των θετικά φορτισμένων ιόντων παρασύρει μαζί της και τα ουδέτερα μόρια του αέρα —όπως το ρεύμα των ιόντων στον ηλεκτρολύτη μετακινεί τα μόρια του νερού. Το φαινόμενο είναι γνωστό ως «ηλεκτρικός άνεμος» και επιδείχθηκε στα μέσα του 19ου αιώνα από τον Βενιαμίν Φραγκλίνο, με το σβήσιμο ενός κεριού χάρη σε έναν τέτοιο άνεμο.

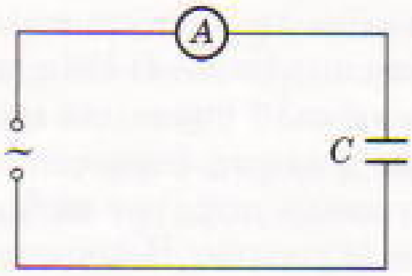
Ιστορικά, το πείραμα του Φραγκλίνου (το σβήσιμο του κεριού) οδήγησε στην έννοια των ρευμάτων μεταφοράς. Θεωρήθηκε ότι παράλληλα με τη συνήθη μεταφορά (δηλαδή τη ροή ουδέτερων σωματιδίων) πραγματοποιείται και ηλεκτρική μεταφορά, δηλαδή σχηματίζεται ένα ρεύμα φορτισμένων σωματιδίων. Πράγματι, εκτενέστερες μελέτες έδειξαν ότι τα ηλεκτρικά ρεύματα στα μέταλλα, τους ηλεκτρολύτες και τα αέρια δεν είναι παρά ροές φορτισμένων σωματιδίων. Αφού αυτά τα σωματίδια έχουν μάζα, δεν υπάρχει κατ' αρχήν διαφορά μεταξύ της κοινής μεταφοράς και της ηλεκτρικής μεταφοράς.

Το 1875 ο Hermann von Helmholtz έγραψε: «Χρησιμοποιώ αυτή τη λέξη [*μεταφορά*] με την ίδια έννοια που έχει στη θερμοδυναμική, με σκοπό να δώσω έμφαση στο γεγονός ότι η διάδοση του ηλεκτρισμού γίνεται μέσω των κινήσεων ηλεκτρισμένων σωμάτων». Ο Helmholtz έθεσε ένα πολύ σημαντικό ερώτημα: Μπορεί η κίνηση φορτισμένων μακροσκοπικών σωμάτων να θεωρηθεί ρεύμα μεταφοράς; Η απάντηση στο ερώτημα θα μπορούσε να προκύψει από ένα πείραμα ανάλογο με αυτό που πραγματοποίησε ο δανός φυσικός Hans Christian Oersted, ο οποίος, το 1820, ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει έναν αγωγό εκτρέπει μια μαγνητική βελόνα που βρίσκεται κοντά του. Η βελόνα δέχτηκε την επίδραση δύναμης ανάλογης του ηλεκτρικού ρεύματος. Και η κατεύθυνση αυτής της δύναμης εξαρτάται από την κατεύθυνση του ρεύματος.

Ο Helmholtz πρότεινε στο μαθητή του Henry Roulend να πραγματοποιήσει το ακόλουθο πείραμα: να φορτίσει ηλεκτρικά έναν δίσκο, να τοποθετήσει μια μαγνητική βελόνα κοντά σε αυτόν και μετά να τον περιστρέψει. Εάν η περιστροφή του ηλεκτρικά φορτισμένου δίσκου όντως ισοδυναμεί με ηλεκτρικό ρεύμα (σε ένα κλειστό κύκλωμα), τότε θα πρέπει να δημιουργείται παρόμοιο μαγνητικό πεδίο.

Πράγματι, ο Roulend παρατήρησε την εκτροπή της μαγνητικής βελόνας, όμως το πείραμα δεν ήταν εύκολο. Όπως είπαμε, τα μακροσκοπικά σώματα δεν μπορούν να «μεταφέρουν» μεγάλα φορτία. Έτσι ο Roulend έπρεπε να καταγράψει τη μαγνητική δράση ενός πολύ ασθενούς ρεύματος.

Επομένως, τα ρεύματα μέσα σε οποιοδήποτε μέσο, υγρό ή στερεό, συνδέονται με φαινόμενα μεταφοράς. Μπορεί όμως να «ρέει» ηλεκτρικό ρεύμα στο κενό, όπου δεν υπάρχουν διαθέσιμα κανενός είδους σωματίδια; Θεωρήστε έναν πυκνωτή ο οποίος τροφοδοτείται με εναλλασσόμενο ρεύμα (Σχήμα 2). Όταν το κύκλωμα είναι κλειστό, το αμπερόμετρο διαρρέεται από ρεύμα. Αν πειραματιστούμε με πυκνωτές διαφόρων χωρητικοτήτων και εναλλασσόμενα ρεύματα διαφορετικών συχνοτήτων, θα παρατηρήσουμε ότι η ένταση του ρεύματος στο εν λόγω κύκλωμα είναι ανάλογη τόσο της



Σχήμα 2

συχνότητας ταλάντωσης που επιβάλλει η πηγή ΗΕΔ όσο και της χωρητικότητας του πυκνωτή. Το συγκεκριμένο πείραμα ήταν ήδη γνωστό από τον 19ο αιώνα και εξηγήθηκε ως εξής: Η πηγή ΗΕΔ (η γεννήτρια) εξαναγκάζει τα φορτισμένα σωματίδια να ταλαντώνονται μέσα στα αγώγιμα σύρματα, με αποτέλεσμα να «τρέχουν» από τον έναν οπλισμό προς τον άλλο, ενώ τίποτε δεν συμβαίνει μεταξύ των οπλισμών (στο κενό). Η εξήγηση αυτή θεωρούσε το ρεύμα ως τη μηχανική κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων.

Ο μεγάλος άγγλος φυσικός Clerk Maxwell (1831-1879) εισήγαγε μια νέα έννοια. Τα κινούμενα φορτισμένα σωματίδια είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένα με ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Μεταβολές του ηλεκτρικού ρεύματος προκαλούν μεταβολές των πεδίων. Σύμφωνα με τον Maxwell, στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, το οποίο ανακάλυψε ο Faraday, το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο. Όντας πεπεισμένος για την ύπαρξη συμμετρίας στα ηλεκτρικά φαινόμενα, ο Maxwell υπέθεσε ότι και το εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο.

Στο κύκλωμα του Σχήματος 2, λοιπόν, το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή μεταβάλλεται. Σύμφωνα με τον Maxwell, η διεργασία αυτή δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο. Καθώς όμως μαγνητικό πεδίο μπορεί επίσης να παραχθεί από ένα ηλεκτρικό ρεύμα, η διεργασία που πραγματοποιείται μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή μπορεί να ερμηνευθεί ως ροή ενός ασυνήθιστου ηλεκτρικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό δεν ξεκινά από κάποιο σημείο στο κύκλωμα και καταλήγει κάπου αλλού. Ακόμη κι αν το κύκλωμα είναι ανοιχτό, και μεταξύ των οπλισμών του υπάρχει διηλεκτρικό ή απλώς κενό, το ρεύμα θα συνεχίσει να διαρρέει το κύκλωμα· η φύση του όμως θα είναι διαφορετική.

Ο Maxwell ονόμασε αυτό τον τύπο ηλεκτρικής κίνησης «ρεύμα μετατόπισης». Υπέθεσε ότι ο χώρος, τον οποίο θεωρούμε «άδειο», στην πραγματικότητα είναι γεμάτος με ένα ασυνήθιστο υλικό μέσο —τον αιθέρα. Ο αιθέρας θεωρήθηκε πως έχει κυψελοειδή δομή (παρόμοια με αυτή ενός κρυσταλλικού πλέγματος). Και οι κυψελίδες του θα μπορούσαν να παραμορφωθούν υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου —δηλαδή θα μπορούσαν να μετατοπιστούν, όπως ακριβώς τα φορτισμένα σωματίδια σε ένα διηλεκτρικό υλικό.

Σύμφωνα λοιπόν με τον Maxwell, ηλεκτρικό ρεύμα μπορεί να σχηματιστεί λόγω μεταφοράς αλλά και λόγω μετατόπισης. Η τιμή του ρεύματος μεταφοράς είναι ανάλογη της ταχύτητας των φορτισμένων σωματιδίων. Η τιμή του ρεύματος μετατόπισης καθορίζεται από την ταχύτητα της μετατόπισης, η οποία είναι ανάλογη της συχνότητας ταλάντωσης. Επιπλέον, όσο μεγαλύτερη είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή τόσο μεγαλύτερος είναι ο όγκος του αιθέρα (για σταθερή τιμή της απόστασης μεταξύ των οπλισμών), περιέχει, επομένως, περισσότερες κυψελίδες και η μετατόπιση είναι εντονότερη. Και αυτό ήταν το φυσικό μοντέλο που είχε αναπτυχθεί.

Ο Maxwell διατύπωσε μαθηματικά την ιδέα του με τη σχέση

$$i_{\mu\varepsilon\tau} = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt}.$$

Σύμφωνα με αυτή, το ρεύμα μετατόπισης είναι ανάλογο του εμβαδού S των ανοιχτών άκρων του κυκλώματος (δηλαδή του εμβαδού των οπλισμών του πυκνωτή) και του ρυθμού μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου. Η σταθερά $\varepsilon_0 = 8{,}8 \cdot 10^{-12}$ $C^2/N \cdot m$ είναι η γνωστή διηλεκτρική σταθερά του κενού.

Θεωρήστε ότι η πηγή ΗΕΔ είναι μια γεννήτρια που παράγει ηλεκτρικό ρεύμα συχνότητας 50 Hz. Επομένως, η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή μεταβάλλεται ως $v = V_0 \eta\mu \omega t$, όπου $V_0 = 310$ V. Πόσο θα έπρεπε να είναι το εμβαδόν των οπλισμών του πυκνωτή ώστε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα να είναι 1 A, εάν η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του είναι $\ell = 1$ m;

Όπως γνωρίζουμε, ισχύει $E = V/\ell$. Επομένως,

$$i_{\mu\varepsilon\tau} = \varepsilon_0 S \frac{1}{\ell}\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell}\omega V_0 \sigma\upsilon\nu\omega t.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 S \omega V_0}{\ell},$$

και

$$S = \frac{I_0 \ell}{\varepsilon_0 \omega V_0} \cong 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 1{,}2 \cdot 10^{12} \text{ mm}^2.$$

Εάν απομακρύνουμε τον πυκνωτή, το ρεύμα μεταξύ των άκρων των συρμάτων (τα οποία έχουν εμβαδόν διατομής, ας πούμε, 1 mm^2) θα είναι μόλις $8 \cdot 10^{-13}$ A. Αν η απόσταση μεταξύ των άκρων των συρμάτων μειωθεί στο 1 mm, το ρεύμα θα αυξηθεί 10^3 φορές, φτάνοντας στην τιμή των $8 \cdot 10^{-10}$ A —πρακτικά ίσο με μηδέν. Μπορούμε, ωστόσο, να πάρουμε ρεύμα έντασης 1 A κάτω από τις ίδιες συνθήκες, αν αυξήσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης σε 10^{11} Hz, τιμή που αντιστοιχεί στις ραδιοσυχνότητες.

Οι υπολογισμοί αυτοί δείχνουν ότι το ρεύμα μετατόπισης γίνεται σημαντικό μόνο σε πολύ υψηλές συχνότητες ταλάντωσης. Επομένως, αυτά τα ρεύματα δεν λαμβάνονται καθόλου υπόψη στην ηλεκτρολογία. Στη ραδιοηλεκτρολογία, αντίθετα, η κατάσταση είναι διαφορετική, καθώς το ρεύμα μετατόπισης παίζει τον κύριο ρόλο.

Πάντοτε προσπαθούμε να σχηματίσουμε ξεκάθαρη εικόνα για κάθε φυσική διεργασία. Τι είναι, τέλος πάντων, το ηλεκτρικό ρεύμα; Η πρώτη αντιμετώπιση, ότι το ρεύμα είναι η προσανατολισμένη κίνηση φορτισμένων σωματιδίων σε έναν αγωγό, αποτελεί μόνο μια πρώτη προσέγγιση της πραγματικότητας. Θα πρέπει όλοι να είμαστε προσεκτικοί όταν χρησιμοποιούμε αυτό το μηχανικό μοντέλο.

Ας σκύψουμε περισσότερο στην έννοια του ηλεκτρικού ρεύματος. Το σημαντικό στοιχείο είναι ότι τα κινούμενα σωματίδια φέρουν ηλεκτρικό φορτίο, οπότε περιβάλλονται από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το πεδίο αυτό περιγράφεται από δύο συνιστώσες, τα διανύσματα **E** και **B**. Στην περίπτωση συνεχούς ρεύματος, η ηλεκτρική συνιστώσα **E** δεν ανιχνεύεται μέσω οργάνων. Πράγματι, σε κάθε τμήμα ενός σύρματος που διαρρέεται από ρεύμα υπάρχει ίσος αριθμός θετικά και αρνητικά φορτία και το ολικό ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργούν είναι ίσο με μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, μόνο η **B**, η μαγνητική συνιστώσα, μπορεί να ανιχνευθεί μέσω οργάνων (ο Hans Christian Oersted ήταν ο πρώτος που το έδειξε).

Αντίθετα, στην περίπτωση του εναλλασσόμενου ρεύματος εκδηλώνονται και οι δύο συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, και η ηλεκτρομαγνητική επαγωγή παίζει κυρίαρχο ρόλο: Μεταβολή της ηλεκτρικής συνιστώσας δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, και το αντίστροφο. Άρα τα δύο πεδία δημιουργούν το ένα το άλλο και αυτή η αμοιβαία αλληλοδημιουργία επιτρέπει στο διττό πεδίο να «ζει» ανεξάρτητα από το μητρικό ηλεκτρικό ρεύμα στον αγωγό. Πράγματι, το εναλλασσόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο απομακρύνεται από το ρευματοφόρο σύρμα (που ονομάζεται κεραία εκπομπής) και ταξιδεύει στο χώρο με την ταχύτητα του φωτός. Κατά τη διαδικασία αυτή λέμε ότι εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Ας γράψουμε ξανά τη σχέση του Maxwell, χωρίς όμως να συμπεριλάβουμε το συντελεστή αναλογίας $\varepsilon_0 S$:

$$i_{\mu\varepsilon\tau} \propto \frac{dE}{dt}.$$

Η παράγωγος dE/dt αναπαριστά το ρυθμό μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου. Όσο ταχύτερα μεταβάλλεται το **E** τόσο μεγαλύτερο είναι το ρεύμα μετατόπισης. Ωστόσο, μεταβολές του **E** δημιουργούν μαγνητικό πεδίο **B**. Άρα, όσο μεγαλύτερο είναι το ρεύμα μετατόπισης, τόσο ισχυρότερο είναι το μαγνητικό πεδίο.

Τι συμβαίνει, αντίστοιχα, με το συνηθισμένο ρεύμα μεταφοράς; Όσο μεγαλύτερη είναι η ένταση του ρεύματος τόσο ισχυρότερο είναι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι και εδώ ισχύει η ίδια σχέση αναλογίας μεταξύ του ηλεκτρικού ρεύματος και του μαγνητικού πεδίου.

Συμπερασματικά, όταν αναφερόμαστε σε ηλεκτρικό ρεύμα οποιουδήποτε τύπου, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργεί. Θα πρέπει ακόμη να γνωρίζουμε το είδος του ρεύματος σε κάθε περίπτωση. Αν το ρεύμα είναι σταθερό, η προσοχή πρέπει να δίνεται στη μηχανική κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων μέσα στον αγωγό —δηλαδή στη διαδικασία της μεταφοράς. Όταν το ρεύμα είναι εναλλασσόμενο, ο μεγάλος πρωταγωνιστής είναι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, και ο ρόλος του ενισχύεται με την αύξηση της συχνότητας της ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης.

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

• S. Eatman, H. Hickman, «Το φλογιστό και το μαγνητικό πεδίο», Μάιος/Ιούνιος 1994.

• J. Wylie, «Μαγνητικό μονοπώλιο», Ιούλιος/Αύγουστος 1995.

• I. Vorobyov, «Ο άνεμος στον υδράργυρο», Μάρτιος/Απρίλιος 1996.

• A. Stasenko, «Μαγνήτες, φορτία και πλανήτες», Ιούλιος/Αύγουστος 1997.

• A. Mitrofanov, «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997

Χρωματίζοντας τον ψηφιακό κόσμο

Προσεγγίσεις στις δύο και στις τρεις διαστάσεις

Michael H. Brill

Μ ΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΑΝΑΚΑΛΥΨΟΥΜΕ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ εντυπωσιακές σχέσεις που συνδέουν τα εμβαδά με τις περιμέτρους επίπεδων σχημάτων ή τους όγκους με τις επιφάνειες στερεών αντικειμένων. Σχέσεις που δεν είναι πάντα διαισθητικά προφανείς, είναι όμως κομψές και απλές. Μπορούμε να τις αντιληφθούμε ευκολότερα αν συγκρίνουμε την ποσότητα του χρώματος που απαιτείται για να καλύψουμε δύο επιφάνειες που μοιάζουν πολύ μεταξύ τους.

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε τέτοιες σχέσεις με το να εξετάσουμε λεία αντικείμενα και τις προσεγγίσεις τους από πλέγματα τα οποία συντίθενται από μικρούς όμοιους κύβους (οι οξυδερκείς αναγνώστες είναι πιθανό να σκεφτούν και κάποιες άλλες προσεγγίσεις τέτοιας μορφής). Το αντικείμενο του άρθρου μας μπορεί να μην είναι τόσο συναρπαστικό όσο τα φράκταλ[1] αλλά, παρότι χαμηλών τόνων, παραμένει ενδιαφέρον, όπως ακριβώς παραμένει ενδιαφέρον το παιχνίδι της ντάμας, παρόλο που δεν είναι τόσο περίπλοκο όσο το σκάκι.

Χρωματίζοντας κύκλους και σφαίρες

Ας αρχίσουμε με τις δύο διαστάσεις σχεδιάζοντας έναν κύκλο σε ένα φύλλο χιλιοστομετρικό χαρτί. Μπορούμε να φανταστούμε το χιλιοστομετρικό χαρτί σαν μια περιοχή εικονοστοιχείων (pixel) μιας οθόνης υπολογιστή και, επομένως, σαν ένα είδος «ψηφιακού κόσμου». Ο κύκλος του Σχήματος 1 έχει ακτίνα μήκους πέντε τετραγώνων ($r = 5$). Τα τετράγωνα στο χιλιοστομετρικό χαρτί που ανήκουν εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του κύκλου είναι γραμμοσκιασμένα.

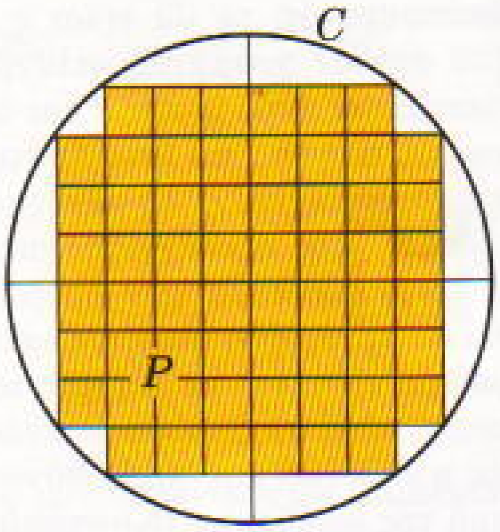
Διαπιστώνουμε ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi r^2 = 25\pi$, ενώ το εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων τετραγώνων είναι 60. Το γεγονός ότι το εμβαδόν των τετραγώνων είναι μικρότερο από το εμβαδόν του κύκλου δεν μας εκπλήσσει. Η σύγκριση των περιμέτρων είναι λίγο πιο περίπλοκη. Η περίμετρος της γραμμοσκιασμένης περιοχής ισούται με 32 και είναι μεγαλύτερη από την περίμετρο του κύκλου ($2\pi r = 10\pi$). Παρεμπιπτόντως, επισημαίνουμε ότι είναι δυνατόν να θεωρήσουμε έναν ειδικό χρωματισμό για τις περιμέτρους στις δύο διαστάσεις, ανάλογο με το χρωματισμό των επιφανειών στις τρεις διαστάσεις.

Τι συμβαίνει με τα εμβαδά και τις περιμέτρους, όταν τα τετράγωνα στο χιλιοστομετρικό χαρτί γίνονται όλο και μικρότερα; Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής γίνεται όλο και μεγαλύτερο σε σύγκριση με το εμβαδόν του κύκλου και τελικά το προσεγγίζει (μια συμπεριφορά γνωστή από τον απειροστικό λογισμό). Τι συμβαίνει όμως με την περίμετρο; Ποια είναι η οριακή της τιμή; Το επόμενο θεώρημα θα μας βοηθήσει να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα.

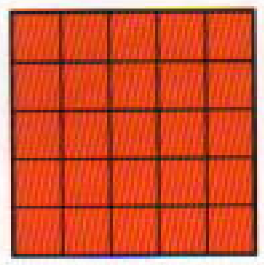
Θεώρημα: Δίνεται μια τυχαία περιοχή στο χιλιοστομετρικό χαρτί, φραγμένη από μια λεία κυρτή καμπύλη. Ανεξάρτητα από το πόσο ακανόνιστη είναι η αντίστοιχη γραμμοσκιασμένη περιοχή, η περίμετρός της ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος του (μέγιστου) μήκους της και του (μέγιστου) πλάτους της. Στην περίπτωση της προσέγγισης ενός κύκλου με τετράγωνα, η περίμετρος της γραμμοσκιασμένης περιοχής είναι ίση με το τετραπλάσιο του πλάτους της.

Ερώτημα 1. Αποδείξτε αυτό το θεώρημα. (Η απόδειξη

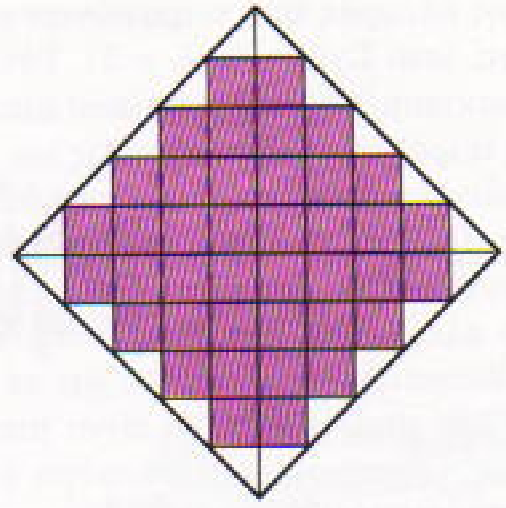
1. Διαβάστε το βιβλίο *Χάος —Μια νέα επιστήμη* του *James Gleick*.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

βρίσκεται στον τομέα των απαντήσεων —σελ. 62.)

Αυτή η αξιοσημείωτη σχέση δεν μεταβάλλεται στην οριακή περίπτωση που τα τετράγωνα είναι πολύ μικρά και το πλάτος της γραμμοσκιασμένης περιοχής καταλήγει ίσο με τη διάμετρο του κύκλου, δηλαδή $2r$ (μετρούμενο σε μονάδες ίσες με το μήκος της πλευράς των τετραγώνων). Επομένως, η περίμετρος της γραμμοσκιασμένης περιοχής θα ισούται με $8r$. Από την άλλη πλευρά, η περίμετρος του κύκλου (μετρούμενη στις ίδιες μονάδες) είναι $2\pi r$. Ο λόγος αυτών των δύο ποσοτήτων (περίμετρος γραμμοσκιασμένης περιοχής προς περίμετρο κύκλου) είναι $8r/2\pi r = 4/\pi$. Ο συγκεκριμένος λόγος, που είναι μεγαλύτερος της μονάδας, ονομάζεται *πλεόνασμα περιμέτρου*. Όσο τα τετράγωνα γίνονται μικρότερα, ο λόγος των περιμέτρων, που στην αρχική μας εκτίμηση ήταν $32/10\pi$ τείνει προς αυτή την (μεγαλύτερη) οριακή τιμή. Είναι προφανές ότι ενώ η μη γραμμοσκιασμένη περιοχή του κύκλου γίνεται λιγότερο σημαντική όσο μικραίνουν τα τετράγωνα, το μήκος της τεθλασμένης περιμέτρου αυξάνει την αξία του.

Τώρα που εξοικειωθήκαμε με τις περιμέτρους στις δύο διαστάσεις μπορούμε να μεταφέρουμε τη συζήτησή μας στις τρεις διαστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση τον «πραγματικό κόσμο» αποτελεί ένα σύνολο αντικειμένων οι επιφάνειες των οποίων είναι, σε μια κατάλληλη μικρή κλίμακα, λείες. Τον «ψηφιακό κόσμο» αποτελεί ένα τρισδιάστατο μωσαϊκό από μικρούς όμοιους κύβους, που θα ονομάζουμε στοιχειώδεις κύβους (voxel), ανάλογους με τα τετράγωνα εικονοστοιχεία που συναντήσαμε στις δύο διαστάσεις. Οι στοιχειώδεις κύβοι είναι μικροί, οποιαδήποτε κλίμακα και αν επιλέξουμε. Ένα αντικείμενο X' του «ψηφιακού κόσμου» είναι το μέγιστο σύνολο τέτοιων στοιχειωδών κύβων που περιέχεται στο εσωτερικό ενός αντικειμένου X του «πραγματικού κόσμου».

Εικονογράφηση: István Orosz

Θέλουμε να συγκρίνουμε τα εμβαδά των επιφανειών του X' και του X. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε το λόγο τους, τον οποίο θα ονομάσουμε *πλεόνασμα επιφανείας*. (Είναι προφανές ότι το πλεόνασμα επιφανείας εξαρτάται από τη μορφή του X και τον προσανατολισμό του σε σχέση με τις ακμές των στοιχειωδών κύβων, αλλά όχι από το μέγεθός του.) Για να το εκφράσουμε παραστατικότερα: πόσο είναι το επιπλέον χρώμα που χρειαζόμαστε για να καλύψουμε το X' (σε σύγκριση με αυτό που χρειαζόμαστε για το X);

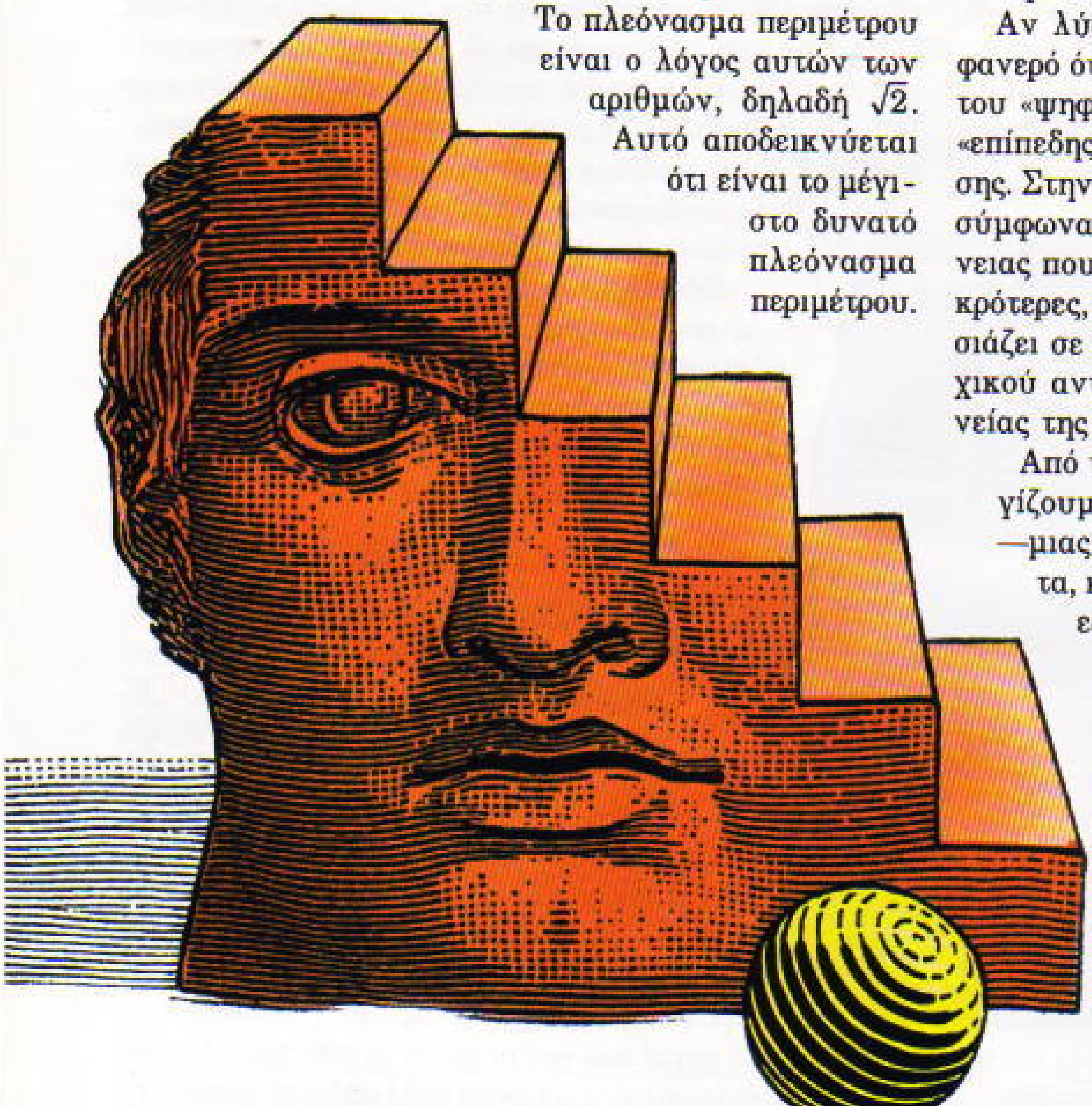
Ερώτημα 2. Ποιο είναι το πλεόνασμα επιφανείας μιας σφαίρας; Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το παράδειγμα του κύκλου στις δύο διαστάσεις και το γεγονός ότι το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι $4\pi r^2$.

Μέγιστα και ελάχιστα στον ψηφιακό κόσμο

Πώς μπορούμε να βρούμε τα τρισδιάστατα σχήματα που έχουν το μεγαλύτερο και το μικρότερο πλεόνασμα επιφανείας; Η απάντηση είναι μάλλον εύκολη.

Ας επιστρέψουμε προς στιγμήν στις δύο διαστάσεις και ας σχεδιάσουμε ένα άλλο σχήμα στο χιλιοστομετρικό χαρτί —αυτή τη φορά ένα τετράγωνο. Στοιχίζουμε το τετράγωνο με τις ευθείες στο χιλιοστομετρικό χαρτί και ορίζουμε το μήκος της πλευράς του ίσο με ένα ακέραιο πολλαπλάσιο L του μήκους της πλευράς των τετραγώνων στο χιλιοστομετρικό χαρτί (στο Σχήμα 2, $L = 5$). Τότε, το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής (που αποτελείται από στοιχειώδη τετράγωνα) είναι ακριβώς ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου, και οι περίμετροι των δύο σχημάτων ισούνται με $4L = 20$. Ο λόγος των περιμέτρων είναι 1, και παραμένει ο ίδιος όσο και αν μεγαλώσει το L. Επομένως, το πλεόνασμα περιμέτρου ισούται με 1. Μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι το πλεόνασμα περιμέτρου δεν μπορεί ποτέ να είναι μικρότερο του 1 και, συνεπώς, το μικρότερο πλεόνασμα επιφανείας το έχει ένα τετράγωνο ευθυγραμμισμένο με το χιλιοστομετρικό χαρτί.

Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο περιστραμμένο κατά 45°, όπως στο Σχήμα 3. Σε αυτή την περίπτωση οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι ευθυγραμμισμένες με το χιλιοστομετρικό χαρτί και έχουν μήκος $L' = 10$ εικονοστοιχεία. Η περίμετρος της γραμμοσκιασμένης περιοχής είναι 32 και (όπως επισημάναμε προηγουμένως) τετραπλάσια του πλάτους του σχήματος ($4L$, όπου $L = 8$). Όμως, η περίμετρος του μεγάλου τετραγώνου είναι $4L'/\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$. Ο λόγος των δύο περιμέτρων ισούται με $4\sqrt{2}/5$. Αν το μέγεθος του μεγάλου τετραγώνου αυξηθεί απεριόριστα (το L γίνει πολύ μεγάλο), τότε το πλάτος της γραμμοσκιασμένης περιοχής τείνει στη διαγώνιο L' του μεγάλου τετραγώνου. Οριακά, η περίμετρος της γραμμοσκιασμένης περιοχής (το πλάτος της επί 4) γίνεται $4L'$, ενώ η περίμετρος του μεγάλου τετραγώνου $4L'/\sqrt{2}$. Το πλεόνασμα περιμέτρου είναι ο λόγος αυτών των αριθμών, δηλαδή $\sqrt{2}$. Αυτό αποδεικνύεται ότι είναι το μέγιστο δυνατό πλεόνασμα περιμέτρου.



Για να επαληθεύσουμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι η μέγιστη τιμή, θεωρούμε μια σχεδόν γραμμική «πλευρά» ενός δισδιάστατου αντικειμένου X με μήκος s και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ (στο σύστημα συντεταγμένων των εικονοστοιχείων). Το μήκος της αντίστοιχης πλευράς του X' (της προσέγγισης με εικονοστοιχεία) ισούται με το άθροισμα των προβολών της πλευράς τού X' πάνω στους δύο άξονες συντεταγμένων. Αυτό το άθροισμα είναι ίσο με s φορές το άθροισμα των συνιστωσών n_i. Η συνιστώσα n_i ενός μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$ καλείται και «κατευθύνον συνημίτονο», διότι η τιμή της ισούται με το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν η i-οστή συνιστώσα του μοναδιαίου διανύσματος και το διάνυσμα $\mathbf{n}$. Το άθροισμα των κατευθυνόντων συνημιτόνων γίνεται μέγιστο όταν τα συνημίτονα είναι ίσα μεταξύ τους (και επομένως ίσα με $1/\sqrt{2}$). Επομένως, το μέγιστο πλεόνασμα περιμέτρου ισούται με $2/\sqrt{2}$, ή $\sqrt{2}$. Επισημαίνουμε ότι η απόδειξη αυτή είναι ανεξάρτητη από την κυρτότητα του αντικειμένου που προσεγγίζουμε μέσω του τετραγώνου, διότι τα επιχειρήματά μας εφαρμόζονται σε κάθε τοπικό τμήμα του συνόρου του αντικειμένου.

Ας περάσουμε τώρα σε ασκήσεις σχετικές με τις τρεις διαστάσεις.

Ερώτημα 3. Ποιο είναι το ελάχιστο και το μέγιστο πλεόνασμα επιφανείας; Δώστε παραδείγματα αντικειμένων που παράγουν αυτές τις ακραίες τιμές.

Ερώτημα 4. Γενικεύστε για τα $N - 1$ διαστάσεων σύνορα N-διάστατων αντικειμένων.

Αν λύσετε αυτές τις ασκήσεις, θα καταστεί πλέον φανερό ότι η προσέγγιση ενός λείου αντικειμένου μέσω του «ψηφιακού κόσμου» βρίσκεται στο ενδιάμεσο μιας «επίπεδης» προσέγγισης και μιας «φράκταλ» προσέγγισης. Στην «επίπεδη» προσέγγιση οι έδρες οργανώνονται σύμφωνα με τη μέση κλίση του τμήματος της επιφάνειας που προσεγγίζουμε. Καθώς οι έδρες γίνονται μικρότερες, το εμβαδόν της «επίπεδης» προσέγγισης πλησιάζει σε όποιο βαθμό επιθυμούμε το εμβαδόν του αρχικού αντικειμένου. Επομένως, το πλεόνασμα επιφανείας της «επίπεδης» προσέγγισης ισούται με 1.

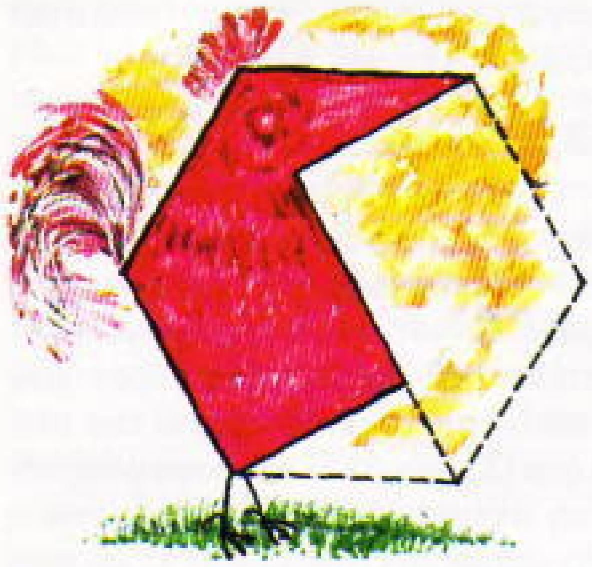
Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι προσεγγίζουμε την αρχική επιφάνεια μέσω ενός φράκταλ —μιας επιφάνειας που αποτελείται από εξογκώματα, καθένα από τα οποία φέρει στην επιφάνειά του εξογκώματα όμοιας μορφής. Σε αυτή την περίπτωση, το εμβαδόν είναι άπειρο, και συνεπώς άπειρο είναι και το πλεόνασμα επιφανείας. Ο ψηφιακός κόσμος, αν και περίπλοκος, δεν είναι τόσο αλλόκοτος όσο ο κόσμος των φράκταλ, ο οποίος αποτέλεσε ένα συναρπαστικό αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς της προηγούμενης γενιάς. ◼

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Για να περνά η ώρα

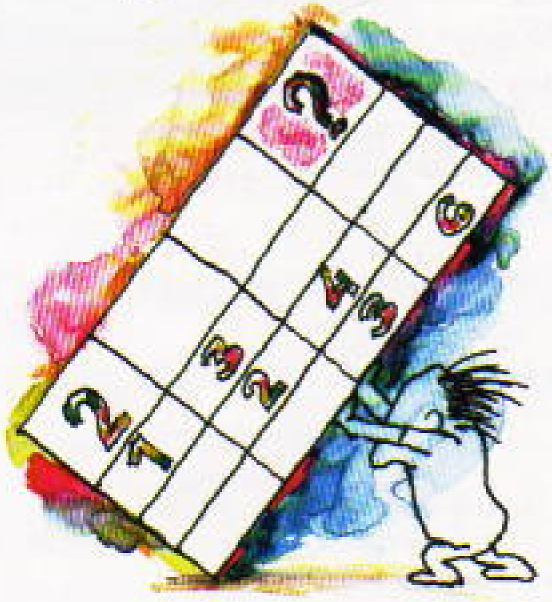
Σ151

Ο γρίφος των παρενθέσεων. Τοποθετήστε παρενθέσεις στην παράσταση $2 + 2 - 3 + 3 - 4 + 4 - 5 + 5$ έτσι ώστε να προκύψει ένας αριθμός μεγαλύτερος του 39.



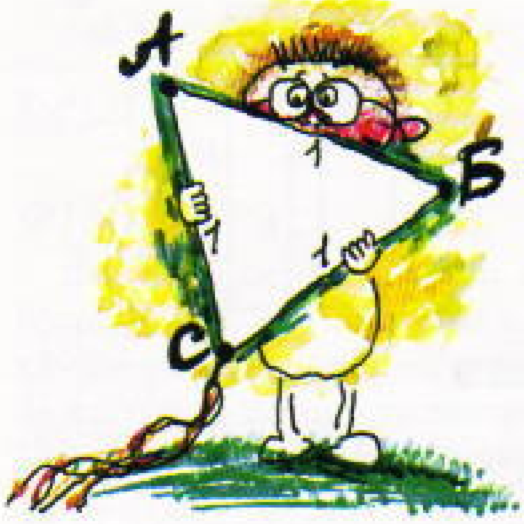
Σ152

Τριμερής ισότητα. Το σκιασμένο σχήμα της εικόνας είναι το ήμισυ ενός κανονικού εξαγώνου. Χωρίστε το σε τρία ίσα τμήματα.



Σ153

Ορθογώνιοι υπολογισμοί. Ένα μεγάλο ορθογώνιο έχει χωριστεί σε διάφορα μικρότερα ορθογώνια. Στην εικόνα βλέπετε τα εμβαδά ορισμένων από αυτά. Βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου με το ερωτηματικό.



Σ154

Τριγωνικοί υπολογισμοί. Όλες οι πλευρές του τριγώνου *ABC* έχουν μήκος 1 cm. Το σημείο *D* απέχει 7 cm από το σημείο *A*. Βρείτε τις αποστάσεις του σημείου *D* από τα σημεία *B* και *C* αν είναι γνωστό ότι αυτές, εκφραζόμενες σε εκατοστά, είναι ακέραιοι αριθμοί.

Σ155

Υπόγειες μετρήσεις. Φανταστείτε ότι κατέρχεστε μαζί με κάποιο φίλο σας σε ένα εξαιρετικά βαθύ ορυχείο. Εσείς κρατάτε έναν ζυγό επί του οποίου ισορροπεί μάζα 1 kg. Ο φίλος σας κρατά ένα δυναμόμετρο στο οποίο έχει αναρτηθεί μάζα 1 kg. Θα διαφέρουν οι ενδείξεις των δύο οργάνων κοντά στον πυθμένα του ορυχείου;

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M151

Φυσικές δυνάμεις. Βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό x μεγαλύτερο από 1 τέτοιον ώστε το $2x$ να είναι τέλειο τετράγωνο, το $3x$ τέλειος κύβος και το $5x$ τέλεια πέμπτη δύναμη.

M152

Ριζικά προβλήματα. Βρείτε το άθροισμα όλων των πραγματικών ριζών των δύο επόμενων εξισώσεων:

$$x^3 + 6x^2 + 10x - 15 = 0$$

και

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 23 = 0.$$

M153

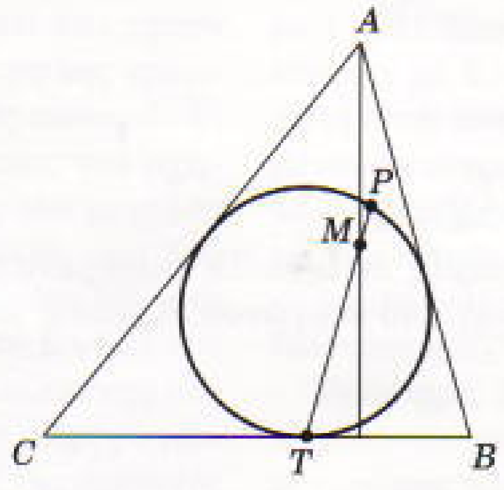
Ρίζες μέσα σε ρίζες. Λύστε την εξίσωση $\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} = x$.

M154

Πυραμίδες μέσα σε σφαίρα. Δίνεται μια τριγωνική πυραμίδα τέτοια ώστε όλες οι επίπεδες γωνίες σε μία κορυφή της να είναι ορθές. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα σημείο η απόσταση του οποίου από τη δεδομένη κορυφή είναι 3 και οι αποστάσεις του από τις υπόλοιπες κορυφές είναι $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ και $\sqrt{7}$, αντίστοιχα. Βρείτε την ακτίνα της περιγεγραμμένης στην πυραμίδα σφαίρας.

M155

Κυκλικές επαφές. Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ABC εφάπτεται της πλευράς BC στο σημείο T. Έστω M το μέσον του ύψους επί την πλευρά BC. Έστω P το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας TM με τον εγγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία B, C και P εφάπτεται του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο ABC κύκλου (Σχήμα 1).

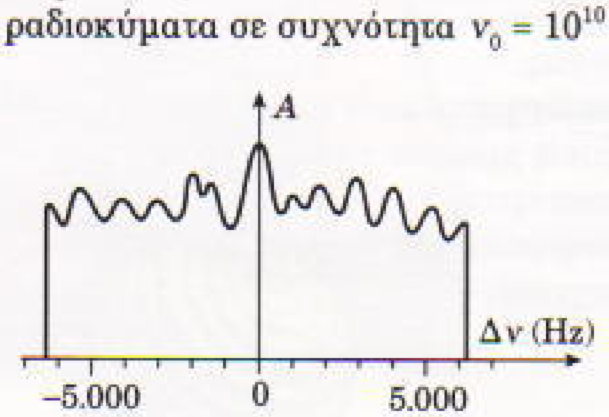


Σχήμα 1

Φυσική

Φ151

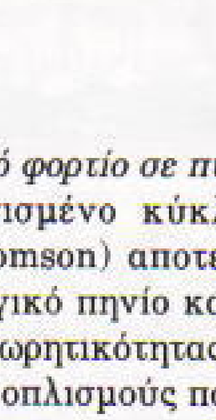
Όσα παίρνει ο άνεμος. Στη διάρκεια μιας αμμοθύελλας, η μέτρηση της ταχύτητας του ανέμου με τις συμβατικές συσκευές καθίσταται δύσκολη (και επικίνδυνη), επειδή οι θύελλες αυτού του είδους εκδηλώνονται σε μικρές περιοχές και μετακινούνται συνεχώς. Έτσι, ένας επινοητικός σπουδαστής πρότεινε να μετριέται η ταχύτητα του ανέμου με ένα φορητό ραντάρ, κάτι που είναι δυνατόν να γίνει επειδή η αμμοθύελλα συμπαρασύρει πολλά μικρά σωματίδια, τα οποία ανακλούν τα ραδιοκύματα σε συχνότητα $v_0 = 10^{10}$ Hz. Το φάσμα του σήματος μετά την ανάκλαση φαίνεται στο Σχήμα 2, όπου $\Delta v = v - v_0$. Προσδιορίστε τη μέγιστη ταχύτητα του ανέμου στην αμμοθύελλα. (D. Kuptsov)



Σχήμα 2

Φ152

Πώμα από υδράργυρο. Κατακόρυφος δοκιμαστικός σωλήνας ύψους $H = 152$ cm περιέχει στήλη αέρα ύψους $h = 76$ cm η οποία επικαλύπτεται από στήλη υδραργύρου που εκτείνεται μέχρι το στόμιο του σωλήνα (Σχήμα 3). Η ατμοσφαιρική πίεση ανέρχεται σε 10^5 N/m^2, ενώ η θερμοκρασία είναι $T_0 = 17$°C. Σε ποια θερμοκρασία πρέπει να θερμάνουμε τον αέρα του σωλήνα ώστε να εκτοπιστεί από αυτόν όλος ο υδράργυρος; (E. Butikov, A. Bykov και A. Kondratiev)



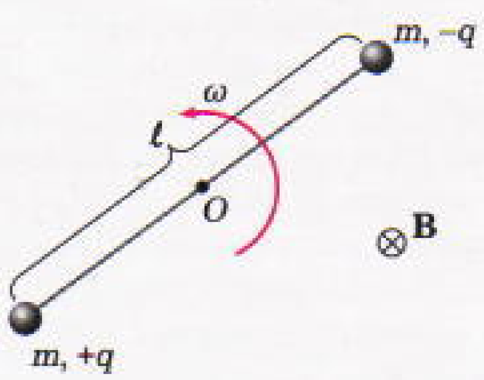
Σχήμα 3

Φ153

Σημειακό φορτίο σε πυκνωτή. Ένα συντονισμένο κύκλωμα (κύκλωμα Thomson) αποτελείται από ένα επαγωγικό πηνίο και από έναν πυκνωτή χωρητικότητας C με παράλληλους οπλισμούς που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d. Η φυσική συχνότητα ταλάντωσης (ιδιοσυχνότητα) του κυκλώματος ισούται με ω_0. Ποια θα ήταν η τιμή της φυσικής συχνότητας αν ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή τοποθετούνταν ένα σημειακό φορτίο q μάζας *m*; Αγνοήστε τη βαρύτητα, την περίπλοκη μορφή του πεδίου κοντά στα άκρα των οπλισμών του πυκνωτή, καθώς και τις ηλεκτροστατικές δυνάμεις λόγω των επαγόμενων φορτίων. (A. Andrianov και D. Kuptsov)

Φ154

Περιστρεφόμενο δίπολο. Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο σωματίδια ίσων μαζών m και φορτίων $+q$ και $-q$, αντίστοιχα, που βρίσκονται προσαρμοσμένα στα άκρα μιας στερεάς και αβαρούς ράβδου μήκους ℓ. Το δίπολο περιστρέφεται με ορισμένη γωνιακή ταχύτητα στο οριζόντιο επίπεδο, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (Σχήμα 3). Κάποια στιγμή, ενεργοποιείται ένα κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο B. Περιγράψτε την κίνηση του διπόλου στη μόνιμη κατάσταση. (S. Zdravkovich)



Σχήμα 4

Φ155

Διάθλαση σε σφαίρα. Μια στενή δέσμη φωτός που διέρχεται από το κέντρο γυάλινης σφαίρας εστιάζεται σε απόσταση $2R$ από το κέντρο της. Προσδιορίστε το δείκτη διάθλασης του γυαλιού. (S. Gordyunin και P. Gorkov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Δυναμική των σιδηροπυρήνων

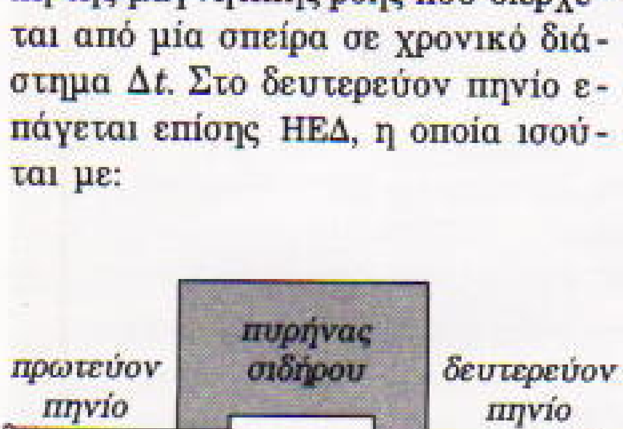
Γιατί ένας μετασχηματιστής χρειάζεται πυρήνα;

A. Dozorov

Ο ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙστής (Σχήμα 1) αποτελείται από δύο πηνία τυλιγμένα γύρω από έναν κοινό πυρήνα μαλακού σιδήρου. Το πρωτεύον πηνίο συνδέεται με μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Ένας αντιστάτης (ένα φορτίο) συνδέεται στο δευτερεύον πηνίο. Η ίδια εναλλασσόμενη μαγνητική ροή, η οποία δημιουργείται από το εναλλασσόμενο ρεύμα της πηγής, διαπερνά και τα δύο πηνία. Έτσι, στο πρωτεύον πηνίο, που αποτελείται από n_1 σπείρες, επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ):

$$e_1 = -n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Με $\Delta\Phi$ συμβολίζουμε τη μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από μία σπείρα σε χρονικό διάστημα Δt. Στο δευτερεύον πηνίο επάγεται επίσης ΗΕΔ, η οποία ισούται με:



Σχήμα 1

$$e_2 = -n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Ας υποθέσουμε ότι το δευτερεύον πηνίο δεν συνδέεται με φορτίο. Με άλλα λόγια, μελετούμε τη λειτουργία του μετασχηματιστή «εν κενώ». Θεωρούμε επίσης ότι η ωμική αντίσταση του πρωτεύοντος είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την επαγωγική του αντίσταση. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ΗΕΔ σε ένα κλειστό κύκλωμα είναι ίσο με το άθροισμα των πτώσεων τάσης στα διάφορα τμήματα αυτού του κυκλώματος· οπότε για το κύκλωμα του πρωτεύοντος θα ισχύει:

$$v_1 + e_1 = i_1 R_1.$$

Στη σχέση αυτή v_1 είναι η ΗΕΔ της πηγής τάσης, i_1 το ρεύμα που διαρρέει το πρωτεύον και R_1 η ωμική αντίσταση του πρωτεύοντος. Επειδή η R_1 είναι πολύ μικρή ($R_1 \to 0$), θα ισχύει $v_1 + e_1 = 0$, ή $v_1 = -e_1$. Εφόσον το δευτερεύον πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα ($i_2 = 0$), η πτώση τάσης v_2 στα άκρα του θα είναι $v_2 = -e_2$.

Επομένως, ο λόγος των τάσεων στα δύο πηνία θα ισούται με $v_2/v_1 = e_2/e_1$ και, συναρτήσει των ενεργών τιμών (δηλαδή της τετραγωνικής ρίζας της μέσης τιμής του τετραγώνου της τάσης, της τιμής *rms*), γίνεται

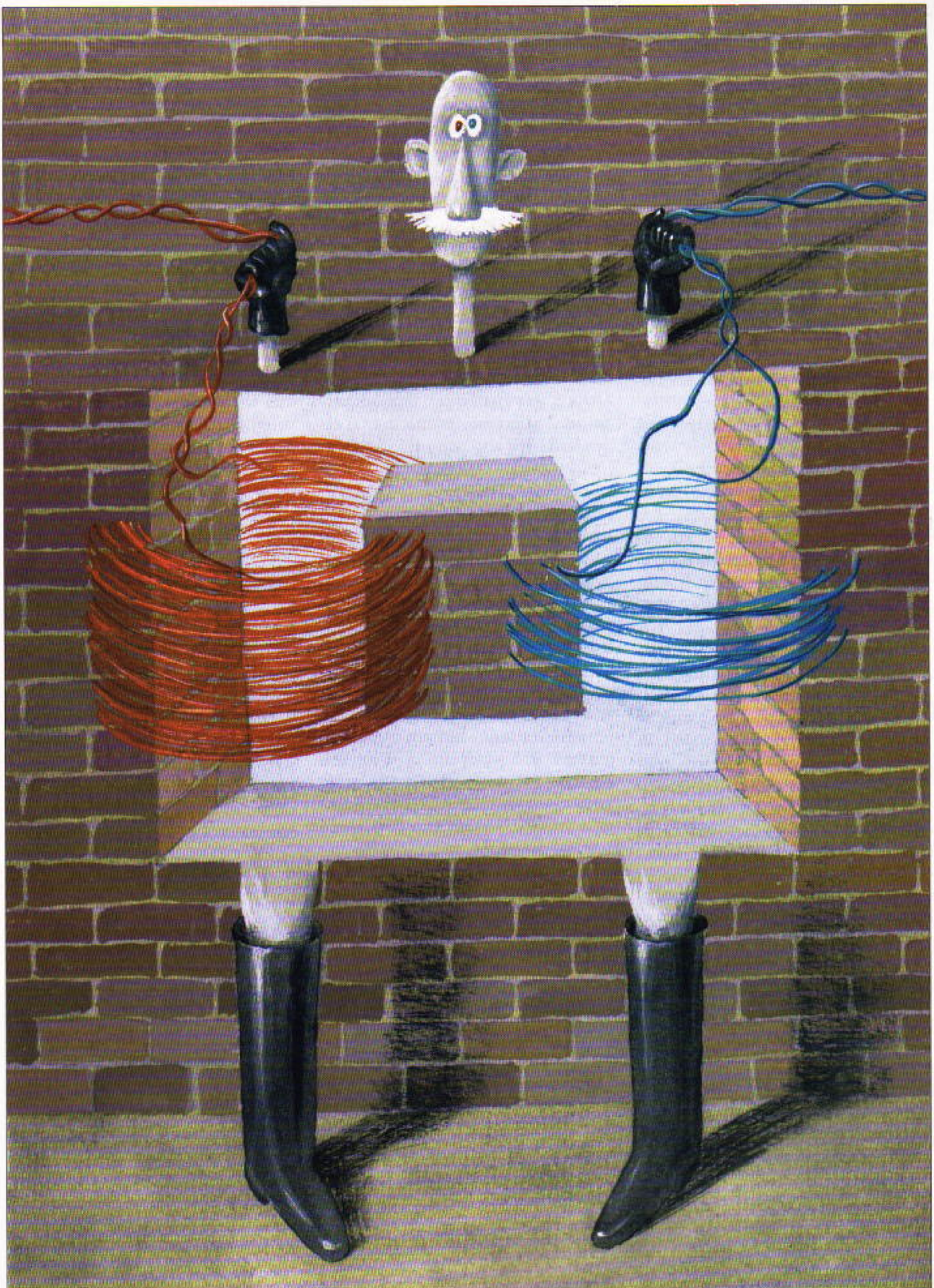
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

Από την τελευταία εξίσωση εγείρεται το ερώτημα γιατί ένας μετασχηματιστής να χρειάζεται πυρήνα σιδήρου. Πράγματι, ο λόγος των τάσεων εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των σπειρών κάθε πηνίου. Παραδόξως, οι παράμετροι που σχετίζονται με έναν πυρήνα απουσιάζουν από την εξίσωση (1). Μπορούν αυτές οι παράμετροι να επιλεγούν αυθαίρετα; Μήπως ο πυρήνας δεν είναι απαραίτητος σε έναν μετασχηματιστή; Υπό ποιες συνθήκες μπορεί να ισχύει κάτι τέτοιο;

Για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα θα πρέπει να ελέγξουμε με περισσότερη προσοχή τα μαθηματικά βήματα που εκτελέσαμε κατά την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης. Για την εξαγωγή της εξίσωσης (1) δεχτήκαμε σιωπηρά ότι οι μαγνητικές ροές που διαπερνούν το πρωτεύον και το δευτερεύον πηνίο είναι ίσες. Ωστόσο, η παραδοχή αυτή μπορεί να μην ισχύει: μέρος της μαγνητικής ροής του πρωτεύοντος μπορεί να μη διέρχεται από το δευτερεύον πηνίο, με αποτέλεσμα η απόδοση και η ποιότητα του μετασχηματιστή να φθίνουν.

Μήπως ο λόγος ύπαρξης του πυρήνα είναι να μειώνει τη σκέδαση του μαγνητικού πεδίου; Υπάρχουν πάντως πολλοί άλλοι (και ευκολότεροι) τρόποι να διατηρήσουμε το

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky



μαγνητικό πεδίο μέσα στο μετασχηματιστή. Για παράδειγμα, μπορούμε να τυλίξουμε το δευτερεύον ακριβώς πάνω από το πρωτεύον, ή και τα δύο να αποτελούν τμήματα ενός δακτυλιοειδούς (σε σχήμα λουκουμά) πηνίου. Ωστόσο το ερώτημα παραμένει: Γιατί κάθε μετασχηματιστής χρειάζεται αναμφίβολα έναν βαρύ πυρήνα σιδήρου —στον οποίο, μάλιστα, *υπάρχουν, αναπόφευκτα, ενεργειακές απώλειες*, εξαιτίας των δινορευμάτων (ρευμάτων Foucault) και των κύκλων μαγνητικής υστέρησης; Εν ολίγοις, ένας πυρήνας εμφανίζει πολλά μειονεκτήματα. Επομένως, τι τον χρειαζόμαστε;

Κατά κανόνα, τα χαρακτηριστικά των πραγματικών συσκευών υπολείπονται αυτών των ιδανικών συσκευών (οι οποίες περιγράφονται από μαθηματικά μοντέλα), ιδιαίτερα όταν συμπεριλαμβάνουμε και απλουστεύσεις. Η ίδια κατάσταση ισχύει και για τους μετασχηματιστές. Σε ποιες περιπτώσεις μπορεί ένας μετασχηματιστής να θεωρηθεί, εύλογα, ιδανικός; Καταρχάς ας απαντήσουμε στο ερώτημα ποιοτικά. Στο μετασχηματιστή, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια μεταβιβάζεται από το πρωτεύον στο δευτερεύον πηνίο. Σε έναν ιδανικό μετασχηματιστή, η ενέργεια που αποδίδεται στο φορτίο (το οποίο είναι συνδεδεμένο στα άκρα του δευτερεύοντος) ισούται με την ενέργεια που παρέχει στο πρωτεύον η πηγή. Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για την ισχύ. Η ισχύς μάλιστα που αποδίδεται στο φορτίο γίνεται μέγιστη όταν και ο συντελεστής ισχύος γίνει μέγιστος, δηλαδή όταν συν$\varphi \cong 1$. Καταλήγουμε, επομένως, στη σχέση

$$V_{0_1} I_{0_1} = V_{0_2} I_{0_2},$$

όπου ο δείκτης 0 σημαίνει ότι αναφερόμαστε στα πλάτη του ρεύματος και της τάσης. Η συνθήκη αυτή μετατρέπει την εξίσωση (1) στην ακόλουθη:

$$\frac{V_{0_2}}{V_{0_1}} = \frac{I_{0_1}}{I_{0_2}} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (2)$$

Σημειώστε ότι, αντίθετα με την εξίσωση (1), η εξίσωση (2) αφορά τα ρεύματα που διαρρέουν τα πηνία του μετασχηματιστή. Ας υπολογίσουμε λοιπόν τα I_{01} και I_{02} —στην περίπτωση βεβαίως που ο μετασχηματιστής μας λειτουργεί «υπό φορτίο». Για τούτο θα χρειαστούμε τις έννοιες της επαγωγής και της αμοιβαίας επαγωγής.

Η μαγνητική ροή Φ που διαπερ*νά ένα κύκλωμα εμβαδού S, και εί*ναι κάθετη στο επίπεδο του κυκλώματος, ισούται με

$$\Phi = BS, \qquad (3)$$

όπου B είναι το μαγνητικό πεδίο. Όταν η μαγνητική ροή δημιουργείται από ηλεκτρικό ρεύμα I, η B είναι ανάλογη του ρεύματος:

$$\Phi \propto B \propto I, \text{ ή } \Phi = LI. \qquad (4)$$

Ο συντελεστής αναλογίας L ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής του κυκλώματος. Από τι εξαρτάται η εν λόγω παράμετρος;

Θεωρήστε ένα επίμηκες πηνίο με μεγάλο αριθμό σπειρών (ας πούμε, ένα σωληνοειδές). Το μαγνητικό πεδίο, λοιπόν, που δημιουργεί ένας ρευματοφόρος αγωγός είναι πάντοτε ανάλογο του ρεύματος, εξαρτάται όμως επίσης από ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του αγωγού, τη θέση του σημείου στο οποίο μετράμε το πεδίο και τις μαγνητικές ιδιότητες του περιβάλλοντος μέσου. Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, ειδικότερα, το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές. Μπορούμε να δείξουμε ότι $B = \mu In/\ell$, όπου μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, n είναι ο αριθμός των σπειρών του σωληνοειδούς και ℓ το μήκος του. Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση (3) προκύπτει ότι

$$\Phi = BSn = \frac{\mu I n^2 S}{\ell}.$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με την (4), καταλήγουμε στον τύπο του συντελεστή αυτεπαγωγής του σωληνοειδούς:

$$L = \frac{\mu n^2 S}{\ell}. \qquad (5)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αναφερθούμε στην αμοιβαία επαγωγή που αναπτύσσεται σε δύο κυκλώματα καθώς και στο συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής, M. Στην περίπτωση που μελετούμε, μάλιστα, η αμοιβαία επαγωγή ανάμεσα στο πρωτεύον και το δευτερεύον πηνίο του μετασχηματιστή αποτελεί το βασικό φαινόμενο. Όταν ο μετασχηματιστής, *λοιπόν, λειτουργεί «υπό φορτίο», το* δευτερεύον κύκλωμα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Ας συμβολίζουμε την ενεργό τιμή του με I_2. Η ενεργός τιμή του ρεύματος στο πρωτεύον θα είναι I_1 —και θα διαφέρει από την αντίστοιχη τιμή όταν ο μετασχηματιστής λειτουργεί «εν κενώ». Η μαγνητική ροή Φ_2 που διαπερνά το δευτερεύον πηνίο είναι ανάλογη του ρεύματος I_1 που διαρρέει το πρωτεύον:

$$\Phi_2 \propto I_1, \text{ ή } \Phi_2 = MI_1.$$

Ομοίως, η μαγνητική ροή Φ_1 που διαπερνά το πρωτεύον πηνίο είναι ανάλογη του ρεύματος I_2 που διαρρέει το δευτερεύον:

$$\Phi_1 \propto I_2, \text{ ή } \Phi_1 = MI_2.$$

Ο συντελεστής αναλογίας M (ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής) είναι ο ίδιος και στις δύο εξισώσεις, και μπορούμε να εξαγάγουμε τον τύπο του όπως στην περίπτωση του συντελεστή αυτεπαγωγής:

$$M = \frac{\mu n_1 n_2 S}{\ell}. \qquad (6)$$

Οι εκφράσεις (5) και (6) μας οδηγούν αμέσως στις σχέσεις

$$M = \frac{n_2}{n_1} L_1 = \frac{n_1}{n_2} L_2. \qquad (7)$$

Σημειώστε ότι υπάρχει ένα όλο κι όλο μαγνητικό πεδίο στον πυρήνα του μετασχηματιστή, μπορούμε όμως μαθηματικά να το υποδιαιρέσουμε σε δύο συνιστώσες. Το ολικό μαγνητικό πεδίο καθορίζεται σχεδόν εξ ολοκλήρου από το πρωτεύον πηνίο και την τάση της πηγής με την οποία συνδέεται. Ωστόσο είναι χρήσιμο να μελετούμε τις ξεχωριστές συνιστώσες του που δημιουργούνται από τα ρεύματα I_1 και I_2.

Ας συνεχίσουμε, λοιπόν, τη μελέτη μας για το μετασχηματιστή που λειτουργεί «υπό φορτίο». Καταρχάς γράφουμε τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff για το πρωτεύον κύκλωμα, και στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο και για το δευτερεύον. Στο πρωτεύον κύκλωμα (Σχήμα 1) η ωμική αντίσταση είναι εξαιρετικά μικρή ($R_1 \to 0$), οπότε το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ΗΕΔ αυτού του κυκλώματος θα ισούται με μηδέν. Η μία ΗΕΔ σε αυτό το κύκλωμα είναι η εφαρμοζόμενη τάση $v_1 = V_0 ημωt$, και οι άλλες δύο ΗΕΔ οφείλονται στα φαινόμενα επαγωγής: η μία, ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής (e_1'), επάγεται από το εναλλασσόμενο ρεύμα i_1, και η άλλη, ΗΕΔ λόγω αμοιβαίας επαγωγής (e_1''), επάγεται από το ρεύμα i_2, το οποίο προκαλεί την εμφάνιση εναλλασσόμενης μαγνητικής ροής στο πρωτεύον πηνίο. Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (7), έχουμε ότι

$$e_1' = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = -pM \frac{\Delta i_1}{\Delta t},$$

όπου

$$p = \frac{n_1}{n_2}$$

και

$$e_1'' = -M \frac{\Delta i_2}{\Delta t}.$$

Επομένως, στο πρωτεύον κύκλωμα έχουμε:

$$V_0 ημωt - pM \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0. \quad (8)$$

Στο δευτερεύον πηνίο αναπτύσσονται δύο ΗΕΔ: η ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής

$$e_2' = -L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = -\frac{1}{p} M \frac{\Delta i_2}{\Delta t},$$

και η ΗΕΔ λόγω αμοιβαίας επαγωγής

$$e_2'' = -M \frac{\Delta i_1}{\Delta t}.$$

Χάρη απλότητας, η μόνη ωμική αντίσταση στο δευτερεύον πηνίο είναι το φορτίο R στα άκρα του. Επομένως,

$$-\frac{1}{p} M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = Ri_2. \quad (9)$$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (8) και (9) προκύπτει η τελική απάντηση στο ερώτημα πώς λειτουργεί ένας μετασχηματιστής. Ωστόσο, οι εξισώσεις αυτές δεν είναι τόσο απλές (ονομάζονται «διαφορικές»), δεδομένου ότι περιλαμβάνουν τους ρυθμούς μεταβολής των αγνώστων ($\Delta i_1/\Delta t$ και $\Delta i_2/\Delta t$). Ας προσπαθήσουμε, ωστόσο, να λύσουμε αυτό το σύστημα.

Επειδή η τάση που εφαρμόζεται στο πρωτεύον πηνίο είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ρεύματα που διαρρέουν το μετασχηματιστή θα έχουν την ίδια ημιτονοειδή εξάρτηση από το χρόνο, μολονότι οι φάσεις και τα πλάτη τους θα διαφέρουν. Επομένως, αναζητούμε ρεύματα της μορφής $i_1 = Aημ(ωt - α)$ και $i_2 = Bημ(ωt - β)$, όπου A, B, $α$ και $β$ είναι σταθερές. Ο ρυθμός μεταβολής του πρώτου ρεύματος δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\Delta i_1}{\Delta t} = \frac{i_1(t + \Delta t) - i_1(t)}{\Delta t}$$

$$= A \frac{ημ[ω(t + \Delta t) - α] - ημ(ωt - α)}{\Delta t}$$

$$= 2\frac{A}{\Delta t} ημ \frac{ω\Delta t}{2} συν\left(ωt - α + \frac{\Delta t}{2}\right).$$

Θεωρώντας το Δt απειροστά μικρό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγιστικές σχέσεις

$$ημ \frac{ω\Delta t}{2} \equiv \frac{ω\Delta t}{2}$$

και

$$συν\left(ωt - α + \frac{\Delta t}{2}\right) \equiv συν(ωt - α).$$

Επομένως,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = Aωσυν(ωt - α).$$

Παρομοίως,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = Bωσυν(ωt - β).$$

Έτσι οι εξισώσεις (8) και (9) μετατρέπονται στις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$$V_0 ημωt - pMAωσυν(ωt - α) - MBωσυν(ωt - β) = 0, \quad (8α)$$

$$-\frac{1}{p} MBωσυν(ωt - β) - MAωσυν(ωt - α) = RBημ(ωt - β). \quad (9α)$$

Και οι δύο παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$Yημωt + Zσυνωt = 0, \quad (10)$$

όπου οι συντελεστές Y και Z είναι ανεξάρτητοι του χρόνου. Η εξίσωση (10) ισχύει οποιαδήποτε χρονική στιγμή μόνο αν ταυτόχρονα $Y = 0$ και $Z = 0$. Άρα, από τις δύο εξισώσεις μας προκύπτουν οι εξής τέσσερις:

$$\begin{cases} V_0 - pMAωημα - MBωημβ = 0, \\ pAσυνα + Bσυνβ = 0, \\ -\frac{1}{p} MBωημβ - MAωημα = RBσυνβ, \\ \frac{1}{p} MBωσυνβ + MAωσυνα = RBημβ. \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό, υπολογίζουμε τα πλάτη των ρευμάτων στο πρωτεύον και το δευτερεύον κύκλωμα, όπως επίσης και τις διαφορές φάσης των ρευμάτων σε σχέση με την ημιτονοειδή τάση που εφαρμόζεται.

$$I_{0_1} = A \frac{V_0}{p^2 R} \sqrt{1 + \left(\frac{pR}{Mω}\right)^2},$$

$$I_{0_2} = B \frac{V_0}{pR},$$

$$α = τοξεφ \frac{pR}{Mω},$$

$$β = π.$$

Ικανοποιεί η λύση αυτή τις συνθήκες που απαιτούνται ώστε ο μετασχηματιστής να μπορεί να θεωρηθεί ιδανικός (εξίσωση(2)); Ας το ελέγξουμε. Ο λόγος των πλατών των ρευμάτων είναι

$$\frac{I_{0_1}}{I_{0_2}} = \frac{A}{B} = \frac{1}{p}\sqrt{1 + \left(\frac{pR}{M\omega}\right)^2}.$$

Η τελευταία σχέση θα συμπίπτει με την εξίσωση (2) μόνο αν ο δεύτερος όρος μέσα στη ρίζα τείνει στο μηδέν:

$$\frac{R}{M\omega} = \frac{RI}{\mu S n_1 n_2 \omega} \to 0.$$

Συνεπώς, ένας μετασχηματιστής μπορεί να θεωρηθεί ιδανικός εάν:

1. Η μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα είναι μεγάλη.

2. Η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι όσο γίνεται μεγάλη.

3. Ο αριθμός των σπειρών και των δύο πηνίων είναι μεγάλος.

4. Η αντίσταση στο δευτερεύον πηνίο είναι μικρή.

5. Το μήκος κάθε πηνίου είναι μικρό, δηλαδή τα δύο πηνία είναι πυκνά τυλιγμένα.

Καθεμία από τις παραπάνω συνθήκες θα πρέπει να διαβαστεί ως «κατάλληλα μεγάλη» (ή «μικρή», κατά περίπτωση). Για να κατασκευάσουμε έναν μετασχηματιστή που να μπορεί να θεωρηθεί ιδανικός, θα πρέπει να ικανοποιήσουμε όσες από τις παραπάνω συνθήκες είναι καταρχάς εφικτές. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε το υλικό του πυρήνα, έτσι ώστε να έχει υψηλή μαγνητική διαπερατότητα. Για το κενό, $\mu = \mu_0$ $(= 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A \cdot m})$, ενώ για τα σιδηρομαγνητικά υλικά, $\mu \cong 10.000\mu_0$. Επίσης, θα μπορούσαμε να αυξήσουμε τον αριθμό των σπειρών, ωστόσο αυτό δεν είναι πρακτικό, επειδή οδηγεί σε δραστική αύξηση του μεγέθους και του κόστους του μετασχηματιστή. Μια άλλη λύση θα ήταν η αύξηση της συχνότητας του εναλλασσόμενου ρεύματος, αύξηση όμως πολύ μεγάλη σε σχέση με τη βιομηχανική συχνότητα των 50 Hz (για να είναι αποδοτική η λειτουργία του μετασχηματιστή χωρίς πυρήνα, η συχνότητα θα πρέπει να αυξηθεί αρκετές χιλιάδες φορές). Μια τέτοια αύξηση δημιουργεί πολλά και τεράστια τεχνικά προβλήματα. Παρ' όλα αυτά, στις ηλεκτρονικές συσκευές οι υψηλές συχνότητες χρησιμοποιούνται ευρέως. Όπως, λοιπόν, ίσως μαντεύετε, σ' αυτές υπάρχουν άφθονοι μετασχηματιστές χωρίς πυρήνα, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν, με μεγάλη ακρίβεια, ιδανικοί μετασχηματιστές.

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

• J. Wylie, «Μαγνητικό μονοπώλιο», Ιούλιος/Αύγουστος 1995.

• A. Stasenko, «Μαγνήτες, φορτία και πλανήτες», Ιούλιος/Αύγουστος 1997.

• A. Mitrofanov, «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997.

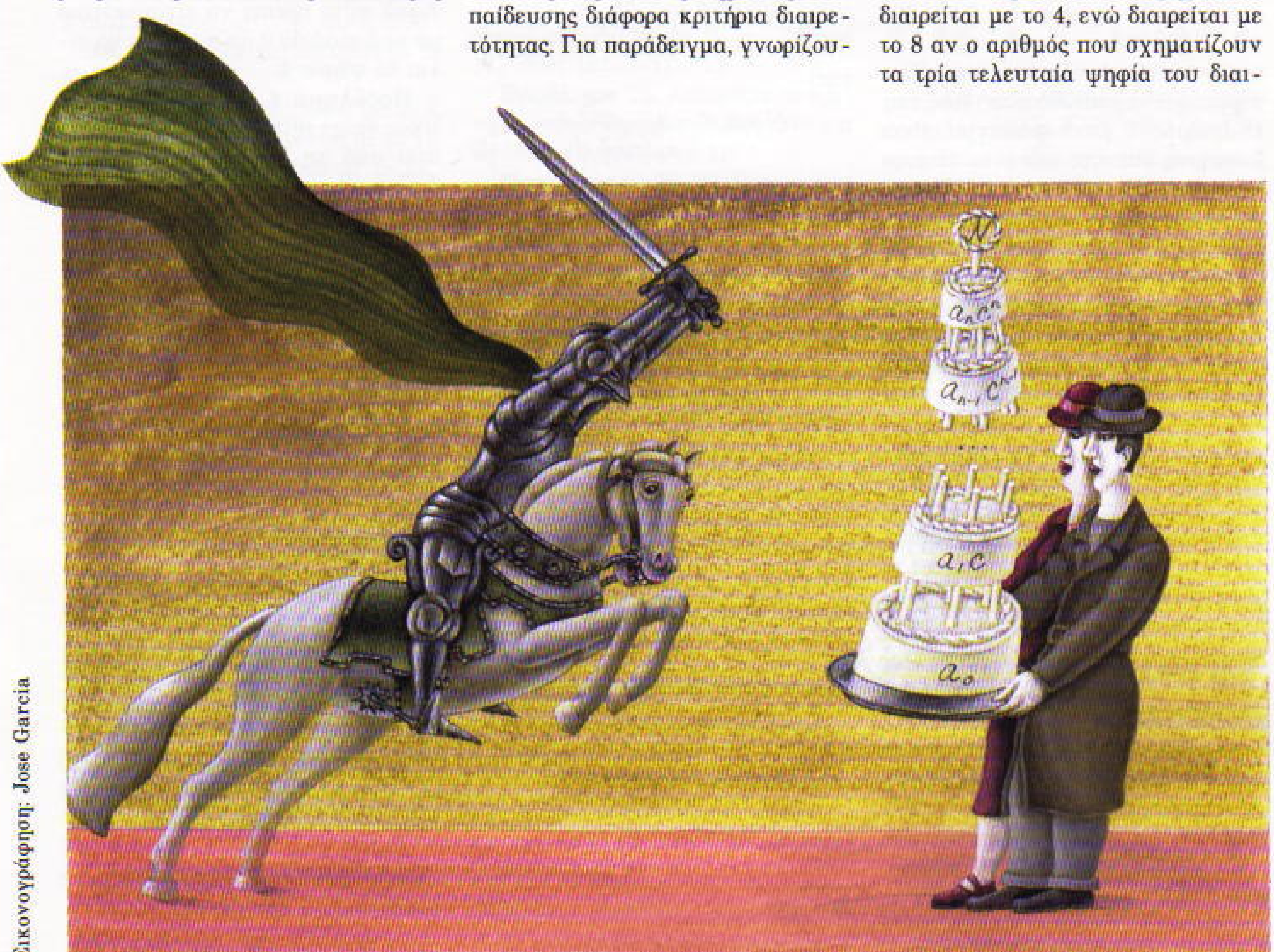
Διαίρει και βασίλευε!

Απλά μαθήματα διαιρετότητας

Ruma Falk και Eyal Oshry

ΠΩΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΑΝ ένας αριθμός διαιρείται, ας πούμε, με το 9 (δηλαδή, αν η διαίρεσή του διά 9 δεν αφήνει υπόλοιπο); Παρότι μια αριθμομηχανή μπορεί να μας δώσει την απάντηση στη στιγμή, εξακολουθεί να αποτελεί διανοητική πρόκληση το να μπορέσουμε να προβλέψουμε την απάντηση που θα δώσει η μηχανή.

Οι περισσότεροι έχουμε γνωρίσει κατά τη διάρκεια της σχολικής εκπαίδευσης διάφορα κριτήρια διαιρετότητας. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν λήγει σε 0 ή 5, και με το 2 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι άρτιο. Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 αν ο αριθμός που σχηματίζουν τα δύο τελευταία (προς τα δεξιά) ψηφία του διαιρείται με το 4, ενώ διαιρείται με το 8 αν ο αριθμός που σχηματίζουν τα τρία τελευταία ψηφία του διαι-



Εικονογράφηση: Jose Garcia

ρείται με το 8. Το κριτήριο διαιρετότητας με το 3 ή το 9 είναι επίσης πολύ γνωστό: ένας αριθμός διαιρείται με το 3 (αντίστοιχα με το 9) αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 (αντίστοιχα με το 9).

Η πρόβλεψη για το αν ένας αριθμός διαιρείται με το 11 μοιάζει λίγο περισσότερο με γρίφο. Η απάντηση είναι διασκεδαστική: πρέπει να υπολογίσουμε μια προσθαφαίρεση ψηφίων, προσθέτοντας και αφαιρώντας εναλλάξ διαδοχικά ψηφία του αριθμού. Ο αριθμός διαιρείται με το 11 αν η προσθαφαίρεση αυτή (ανεξάρτητα εάν είναι θετική, μηδέν ή αρνητική) διαιρείται με το 11. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον αριθμό 7.031.673. Η εναλλάξ προσθαφαίρεση δίνει

$$7 - 0 + 3 - 1 + 6 - 7 + 3 = 11.$$

Και πράγματι, όπως θα επαληθεύσει και η αριθμομηχανή σας, $7.031.673 = 11 \cdot 639.243$.

Ωστόσο, δεν υπάρχουν απλά κριτήρια για οποιονδήποτε διαιρέτη. Ο αριθμός 7, για παράδειγμα, είναι διάσημος για την απουσία τέτοιου κριτηρίου. Η φαινομενική έλλειψη σύνδεσης μεταξύ των διαφόρων κριτηρίων είναι εντυπωσιακή, και εύλογα αγανακτούμε με την υποχρέωση απομνημόνευσης πληθώρας από σκόρπιους κανόνες. Μια γενική αρχή που θα έκρινε τη διαιρετότητα για οποιονδήποτε διαιρέτη θα ήταν αναμφισβήτητα προτιμότερη.

Στη συνέχεια, λοιπόν, θα παρουσιάσουμε ένα θεμελιώδες και γενικό κριτήριο διαιρετότητας ενός φυσικού αριθμού N με οποιονδήποτε διαιρέτη d και θα αποδείξουμε ότι τα γνωστά κριτήρια αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του.

Ένα γενικό κριτήριο διαιρετότητας

Αν N είναι ένας θετικός ακέραιος που στη δεκαδική του αναπαράσταση γράφεται ως ακολουθία $n + 1$ ψηφίων, $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, ($a_n \neq 0$), τότε

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0. \quad (1)$$

Θέλουμε να γνωρίζουμε αν το N διαιρείται από έναν δεδομένο (φυσικό) αριθμό d. Προφανώς, αν $d > N/2$, τότε δεν διαιρεί το N —είναι πολύ μεγάλος.

Έστω ένας αριθμός c ο οποίος διαιρούμενος διά d αφήνει το ίδιο υπόλοιπο που αφήνει το 10 όταν διαιρείται με το d. Τότε λέμε ότι το c και το 10 είναι ισότιμα modulo d, και γράφουμε $10 \equiv c \pmod d$. Προφανώς, αν $d \leq 10$, τότε το $c = 10 - d$ είναι ισότιμο με το 10 modulo d. Η μεγάλη ανακάλυψη του Carl Friedrich Gauss, του «Πρίγκιπα των Μαθηματικών», ήταν ότι αυτές οι ισότητες ακολουθούν ως επί το πλείστον τους κανόνες της συνήθους αριθμητικής. Ειδικότερα, αν αντικαταστήσουμε το 10 με το c σε οποιαδήποτε πολυωνυμική παράσταση, τότε η νέα τιμή της παράστασης θα είναι ισότιμη με την προηγούμενη modulo d (δεν θα αλλάξει το υπόλοιπο της διαίρεσης με το d).

Ας κάνουμε αυτή την αντικατάσταση στην παράσταση (1). Προκύπτει

$$N \equiv a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 \pmod d. \quad (2)$$

Η πρόταση ότι το N είναι διαιρετό διά d σημαίνει απλώς ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του N με το d είναι 0· επομένως, καταλήγουμε στο γενικό μας κριτήριο:

Το N διαιρείται με το d αν και μόνο αν το $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$ διαιρείται με το d (όπου $10 \equiv c \pmod d$).

(Στην πραγματικότητα, η σχέση (2) μας λέει κάτι περισσότερο. Μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του N με το d χωρίς να εκτελέσουμε τη διαίρεση. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία αργότερα.)

Παραδείγματα και ασκήσεις

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι το κριτήριο της διαιρετότητας με το 9 προκύπτει από τη σχέση (2).

Λύση. Παρατηρούμε ότι $10 \equiv 1 \pmod 9$. Άρα, στη (2) μπορούμε να θέσουμε $c = 1$ και να βρούμε ότι

$$N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod 9.$$

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι ο αριθμός 8.333.557.778.844.466.686 διαιρείται με το 9.

Λύση. Βρίσκουμε ότι το άθροισμα των ψηφίων αυτού του τεράστιου αριθμού είναι 108. Έχουμε τη δυνατότητα να επαληθεύσουμε άμεσα ότι το 108 διαιρείται με το 9, αλλά θα μπορούσαμε επίσης να εφαρμόσουμε το τέχνασμά μας για μία ακόμη φορά. Δηλαδή, το 108 διαιρείται με το 9 αν και μόνο αν το $1 + 0 + 8$ διαιρείται με το 9, και αυτό προφανώς αληθεύει.

Η τεχνική της επαναλαμβανόμενης εφαρμογής ενός κριτηρίου διαιρετότητας είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Πρόβλημα 3. Βρείτε το ψηφίο x αν ο αριθμός $1473x94$ διαιρούμενος με το 9 αφήνει υπόλοιπο 5.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} 1473x94 &\equiv 1+4+7+3+x+9+4 \pmod 9 \\ &\equiv 28 + x \pmod 9 \\ &\equiv 1 + x \pmod 9. \end{aligned}$$

Αφού αυτό πρέπει να είναι ισότιμο με το 5 modulo 9, το x πρέπει να είναι το ψηφίο 4.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι το κριτήριο διαιρετότητας με το 3 προκύπτει από τη σχέση (2). Υπόδειξη: Δείξτε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε το c ίσο με 1.

Προβλήματα 5-8. (Σε μερικά από τα ερωτήματα μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία απαντήσεις. Εν τοιαύτη περιπτώσει, βρείτε όλες τις δυνατές απαντήσεις.) Ποιο είναι το άγνωστο ψηφίο x αν

5. Ο $12345x9$ διαιρείται με το 9.

6. Ο $12345x9$ διαιρείται με το 3.

7. Ο $12345x9$ είναι ισότιμος με το 4 mod 9.

8. Ο $12345x9$ είναι ισότιμος με το 2 mod 3.

Πρόβλημα 9. Γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός είναι άρτιος (διαιρείται με το 2) αν και μόνο αν το δεξιότερο ψηφίο του είναι άρτιο. Πώς προκύπτει αυτό το (πολύ απλό) κριτήριο διαιρετότητας από τη σχέση (2);

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι το κριτήριο για τη διαιρετότητα με το 4 προκύπτει από τη σχέση (2).

Λύση. Παρατηρούμε ότι $10 \equiv 2 \pmod 4$. Θέτουμε $c = 2$ σε όλους τους όρους της (2) πλην ενός:

$$N \equiv a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \dots$$

$+ a_1 10 + a_0 \pmod 4$.

(Ποιος όρος αντιμετωπίζεται διαφορετικά; Μπορείτε να δικαιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;) Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $2^n \equiv 0 \pmod 4$ για $n > 1$. Άρα, $N \equiv a_1 10 + a_0 \pmod 4$, που είναι ακριβώς το κριτήριό μας για τη διαιρετότητα με το 4.

Πρόβλημα 11. Αποδείξτε ότι το κριτήριο για τη διαιρετότητα με το 8 προκύπτει από τη σχέση (2).

Πρόβλημα 12. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα κριτήριο διαιρετότητας με το 16.

Λύση. Ένας αριθμός διαιρείται με το 16 αν και μόνο αν ο αριθμός που σχηματίζουν τα *τέσσερα* τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 16.

Προβλήματα 13-24. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των άγνωστων ψηφίων x και y αν

13. Ο $3578x8$ διαιρείται με το 4.

14. Ο $3578x8$ διαιρείται με το 8.

15. Ο $945x34$ είναι ισότιμος με το 2 mod 8.

16. Ο $1435x9$ είναι ισότιμος με το 5 mod 16.

17. Ο $23y579x$ διαιρείται με το 6.

18. Ο $x003561$ διαιρείται με το 18.

19. Ο $345xy$ διαιρείται με το 24.

20. Ο $456x7y2$ διαιρείται με το 12.

21. Ο $45x83y$ διαιρείται με το 15.

22. Ο $3014x5y$ διαιρείται με το 12.

23. Ο $9x2x1$ αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθεί με το 12.

24. Ο $42673xy$ διαιρείται με το 60.

Για να εξετάσουμε τη διαιρετότητα με το 11 θα πρέπει να αναφερθούμε στα υπόλοιπα διαιρέσεων με αρνητικούς διαιρετέους. Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα τη διαίρεση με το 11, αλλά οι παρατηρήσεις μας θα είναι εντελώς γενικές.

Γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 47 με το 11 είναι 3 —δηλαδή, $47 \equiv 3 \pmod{11}$. Αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο του 11 στο 47, το αποτέλεσμα, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, εξακολουθεί να είναι ισότιμο με το 3 modulo 11 (αποδείξτε το). Μπορούμε όμως και να αφαιρούμε πολλαπλάσια του 11 από το 47 χωρίς να μεταβάλλουμε αυτό το υπόλοιπο. Πράγματι, οι αριθμοί

$$47 - 11 = 36,\ 47 - 22 = 25,$$
$$47 - 33 = 14 \text{ και } 47 - 44 = 3$$

είναι όλοι ισότιμοι με 3 modulo 11. Ας συνεχίσουμε τις αφαιρέσεις μας:

$$47 - 55 = -8,\ 47 - 66 = -19,$$
$$47 - 77 = -30.$$

Θα συμφωνήσουμε να λέμε ότι οι αριθμοί -8, -19 και -30 είναι επίσης ισότιμοι με το 3 modulo 11. Αποδεικνύεται ότι αυτός είναι ένας εξαιρετικά εξυπηρετικός τρόπος για να αναφερόμαστε στα υπόλοιπα αρνητικών αριθμών. Πράγματι, σε προχωρημένες εργασίες *ορίζουμε* ότι η πρόταση $a \equiv b \pmod{11}$ σημαίνει ότι το $a - b$ διαιρείται με το 11.

Και τώρα, όπως κάνουν συχνά οι μαθηματικοί, γενικεύουμε την έννοια της ισοτιμίας και στους αρνητικούς αριθμούς, μετατρέποντας την προηγούμενη παρατήρηση σε ορισμό. Δηλαδή, θα λέμε για δύο αριθμούς a και b ότι $a \equiv b \pmod d$ αν και μόνο αν το $a - b$ είναι πολλαπλάσιο του d.

Βάσει αυτού του ορισμού, μπορούμε να πούμε ότι $10 \equiv -1 \pmod{11}$, διότι $10 - (-1) = 11$.

Πρόβλημα 25. Αποδείξτε το κριτήριο «προσθαφαίρεσης ψηφίων» για τη διαιρετότητα με το 11.

Προβλήματα 26-28. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των άγνωστων ψηφίων x και y αν:

26. Ο $143x59$ διαιρείται με το 11.

27. Ο $143x59$ είναι ισότιμος με το 5 mod 11.

28. Ο $3074x8y$ διαιρείται με το 33.

Πρόβλημα 29. Έστω τρία τυχαία ψηφία A, B, C. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $ABCABC$ διαιρείται με το 7.

Λύση. Έχουμε

$$ABCABC = 10^5A + 10^4B + 10^3C + 10^2A + 10B + C.$$

Αν στη σχέση (2) θέσουμε $d = 7$ και $c = 3$ (αφού $10 \equiv 3 \pmod 7$), βρίσκουμε

$$ABCABC \equiv 3^5A + 3^4B + 3^3C + 3^2A + 3B + C \pmod 7.$$

Συνεπώς,

$$ABCABC \equiv (3^3 + 1)(3^2A + 3B + C) \pmod 7.$$

Όμως, το $3^3 + 1 = 28$ είναι πολλαπλάσιο του 7 και, επομένως, το $ABCABC$ διαιρείται με το 7. Ένας διαφορετικός τρόπος απόδειξης βασίζεται στην παρατήρηση ότι το $ABCABC = ABC(1001)$ και το $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Επομένως, ο αριθμός $ABCABC$ διαιρείται επίσης με το 11 (όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το κριτήριο προσθαφαίρεσης ψηφίων) και το 13 (δοκιμάστε να εφαρμόσετε το γενικό μας κριτήριο θέτοντας $c = -3$).

Γενίκευση του κριτηρίου διαιρετότητας

Το προηγούμενο κριτήριο διαιρετότητας εξαρτάται από το δεκαδικό σύστημα: Ο αριθμός c πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $10 \equiv c \pmod d$. Μπορούμε όμως να επεκτείνουμε εύκολα το κριτήριο σε οποιαδήποτε βάση.

Έστω b η βάση ενός συστήματος αρίθμησης. Αν το N παριστάνεται σε αυτό το σύστημα από την ακολουθία ψηφίων $a_na_{n-1}...a_1a_0$, έχουμε ότι

$$N = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1b + a_0.$$

Προφανώς, αν d είναι ο διαιρέτης μας ($d \le N/2$) και θεωρήσουμε έναν αριθμό c τέτοιον ώστε $b \equiv c \pmod d$, προκύπτει η ίδια ισοτιμία όπως στη σχέση (2). Το γενικό κριτήριο είναι συνεπώς το εξής:

Το N διαιρείται διά d αν και μόνο αν το $a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_1c + a_0$ διαιρείται με το d, όπου $a_na_{n-1}...a_1a_0$ είναι η αναπαράσταση του αριθμού N στο αριθμητικό σύστημα με βάση b και $b \equiv c \pmod d$.

Ειδικότερα, όταν $d = b - 1$, παίρνουμε $b \equiv 1 \pmod d$. Αυτό σημαίνει ότι ένας αριθμός διαιρείται με το $b - 1$ αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το $b - 1$. Επιπλέον, αυτό το κριτήριο εφαρμόζεται σε κάθε διαιρέτη τού $b - 1$, όπως συμβαίνει με την περίπτωση του αριθμού 3 στο δεκαδικό σύστημα.

Η δυσκολία να εξακριβώσουμε τη διαιρετότητα με το 7 έχει πλέον εξαφανιστεί. Όπως συμβουλεύει ο R.P. Boas στο άρθρο «The Lighter Side» στο *Two-Year College Mathematics Journal* (1979, τόμος 10, σελ. 28): «Εκφράζετε απλώς τον αριθμό στη

Η συνέχεια στη σελ. 33 ⇨

GRADUS AD PARNASSUM

Κανόνες διαιρετότητας

Αυτές τις διαιρέσεις θα τις κάνετε χωρίς αριθμομηχανές

Mark Saul και Titu Andreescu

Η ΣΤΗΛΗ ΜΑΣ ΘΑ ΣΥΝΕΧΙΣΕΙ ΤΗ συζήτηση για τα κριτήρια διαιρετότητας που άρχισε στο άρθρο «Διαίρει και βασίλευε!» του παρόντος τεύχους. Θα ξεκινήσουμε γενικεύοντας τα κριτήρια διαιρετότητας για το 9 και το 11 που δόθηκαν στο άρθρο, και θα συνεχίσουμε καταλήγοντας σε δυσκολότερα αποτελέσματα.

Πρόβλημα 1. Αν S είναι το άθροισμα των (δεκαδικών) ψηφίων του ακεραίου N, τότε $N \equiv S \pmod 9$.

Λύση. Μπορούμε να γράψουμε

$$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Έχουμε ότι $10 \equiv 1 \pmod 9$ και επομένως $10^n \equiv 1 \pmod 9$, για κάθε θετικό ακέραιο n. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 9,$$

οπότε η πρόταση αποδείχτηκε.

Πρόβλημα 2. Αν το S' προκύπτει από εναλλάξ προσθαφαίρεση των ψηφίων του N, τότε $N \equiv S' \pmod{11}$.

Λύση. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Προβλήματος 1. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Το αποτέλεσμα για το S' προκύπτει από το ότι $10^n \equiv 1 \pmod{11}$ αν το n είναι άρτιο και $10^n \equiv -1 \pmod{11}$ αν το n είναι περιττό.

Πρόβλημα 3. (α) Δείξτε ότι ένας αριθμός που αποτελείται από άρτιο πλήθος όμοιων ψηφίων είναι πολλαπλάσιο του 11. (β) Ο αριθμός N αποτελείται από περιττό πλήθος όμοιων ψηφίων. Αποδείξτε ότι το $N - 10$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 11.

Πρόβλημα 4. Επιλέγουμε έναν τριψήφιο αριθμό και σχηματίζουμε έναν νέο αντιστρέφοντας τη σειρά των ψηφίων του πρώτου. Αποδείξτε ότι η (θετική) διαφορά αυτών των δύο αριθμών διαιρείται διά του 11.

Πρόβλημα 5. (α) Βρείτε τον μέγιστο πρώτο αριθμό που διαιρεί όλους τους ακεραίους της μορφής *AAA*. (β) Ομοίως, όλους τους ακεραίους της μορφής *BBBB*. (γ) Ο μέγιστος πρώτος αριθμός που διαιρεί όλους τους ακεραίους της μορφής *CCCCCC* είναι μικρότερος του 100. Βρείτε τον αριθμό.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι, αν ένας τριψήφιος αριθμός διαιρείται με το 37, τότε υπάρχει ένας άλλος τριψήφιος αριθμός, αποτελούμενος από τα ίδια ψηφία σε διαφορετική σειρά, ο οποίος διαιρείται επίσης με το 37.

Πρόβλημα 7. Ο Μάριος πιστεύει ότι έχει βρει ένα καλό κριτήριο για τη διαιρετότητα τριψήφιων αριθμών με το 7. Ισχυρίζεται ότι: «Αν το άθροισμα των τριών ψηφίων είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο ίδιος ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 7.»

«Αυτό δεν είναι σωστό», παρατήρησε κάποτε ο Δημήτρης. «Το 914 δεν είναι πολλαπλάσιο του 7, αλλά το 9 + 1 + 4 είναι. Το κριτήριό σου ισχύει μόνο όταν τα ψηφία των δεκάδων και των μονάδων είναι όμοια.»

Δείξτε ότι ο Δημήτρης έχει δίκιο.

Πρόβλημα 8. «Ιδού πώς μπορώ να ελέγξω τη διαιρετότητα με το 13», είπε η Ντόρα στην Αναστασία. «Παίρνω το ψηφίο των μονάδων του αριθμού και το διαγράφω. Στη συνέχεια, στον αριθμό που προκύπτει προσθέτω το τετραπλάσιο του ψηφίου που διέγραψα. Ο αρχικός αριθμός διαιρείται με το 13 αν και μόνο αν διαιρείται ο καινούργιος. Για παράδειγμα, αν θέλω να ελέγξω το 1937, σχηματίζω τον αριθμό 193 και προσθέτω το $4 \cdot 7 = 28$. Παίρνω επομένως το 221, και τώρα πρέπει να ελέγξω αυτό τον αριθμό».

«Καθόλου άσχημο», απάντησε η Αναστασία. «Τώρα μπορείς απλώς να επαναλάβεις το ίδιο. Προκύπτει 22 + 4 = 26, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 13. Ο καινούργιος αριθμός θα είναι πάντα μικρότερος του αρχικού και, επομένως, τελικά θα καταλήγουμε σε έναν διψήφιο αριθμό.»

Δείξτε ότι και η Ντόρα και η Αναστασία έχουν δίκιο.

Πρόβλημα 9. Έστω

$$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

ένας ακέραιος, όπου n περιττός. Το N είναι πολλαπλάσιο του 99 αν και μόνο αν ο αριθμός

$$\overline{a_n a_{n-1}} + \overline{a_{n-2} a_{n-3}} + \dots + \overline{a_1 a_0}$$

είναι πολλαπλάσιο του 99. (Ο συμβολισμός $\overline{ab}$ σημαίνει τον διψήφιο αριθμό με ψηφίο δεκάδων a και ψηφίο μονάδων b.)

Η συνέχεια στη σελ. 72 ⇨

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ I

Πετώντας προς το σπίτι

Αυτές τις σκέψεις δεν μας τις υποβάλλουν μόνο οι κακές αεροπορικές εταιρείες

Albert Stasenko

ΕΝΑΣ ΕΥΦΥΗΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ, ΜΕ γνώσεις αεροδυναμικής, έκανε όνειρα για τις διακοπές του χειμερινού εξαμήνου, που πλησίαζαν. Ήθελε, με κάθε τρόπο, να περάσει εκείνες τις μέρες μαζί με τους δικούς του. Αλλά τα αεροπορικά εισιτήρια κοστίζουν ακριβά, και ο νεαρός δεν είχε καμία πρόθεση να εργαστεί ως διανομέας ή νυχτοφύλακας για να εξοικονομήσει τα απαραίτητα χρήματα.

Η γνώση, όμως, γεννά τη δύναμη. Ξαφνικά, λοιπόν, μια ιδέα πέρασε από το νου του. Γιατί να μην κατασκευάσει ένα ανεμόπτερο και να το επιταχύνει πάνω στην οριζόντια στέγη της φοιτητικής εστίας που είναι, βδομάδες τώρα, καλυμμένη με πάγο; Την απαραίτητη επιτάχυνση θα μπορούσαν να την προσδώσουν οι συμφοιτητές του, με τη βοήθεια ενός αβαρούς μη εκτατού σκοινιού περασμένου σε μια ακλόνητη τροχαλία που περιστρέφεται χωρίς τριβές (βλ. το Σχήμα 1)! Αναρωτιόταν, μάλιστα, και κατά πόσον θα μπορούσε να αγνοήσει την τριβή με την επιφάνεια της στέγης καθώς και την αντίσταση του αέρα...

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το ανεμόπτερο έχει μάζα M, ενώ ο φοιτητής και κάθε φίλος του μάζα m· έστω, επίσης, ότι η δύναμη που ασκείται από το σκοινί στο ανεμόπτερο είναι F. Μπορούμε να γράψουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το ανεμόπτερο και τον πιλότο (συνολικής μάζας $M + m$) που κινούνται στην οριζόντια διεύθυνση, καθώς και για την πλατφόρμα στην οποία στέκονται N άτομα (συνολικής μάζας mN, δεδομένου ότι η πλατφόρμα θεωρείται αβαρής), που κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση.

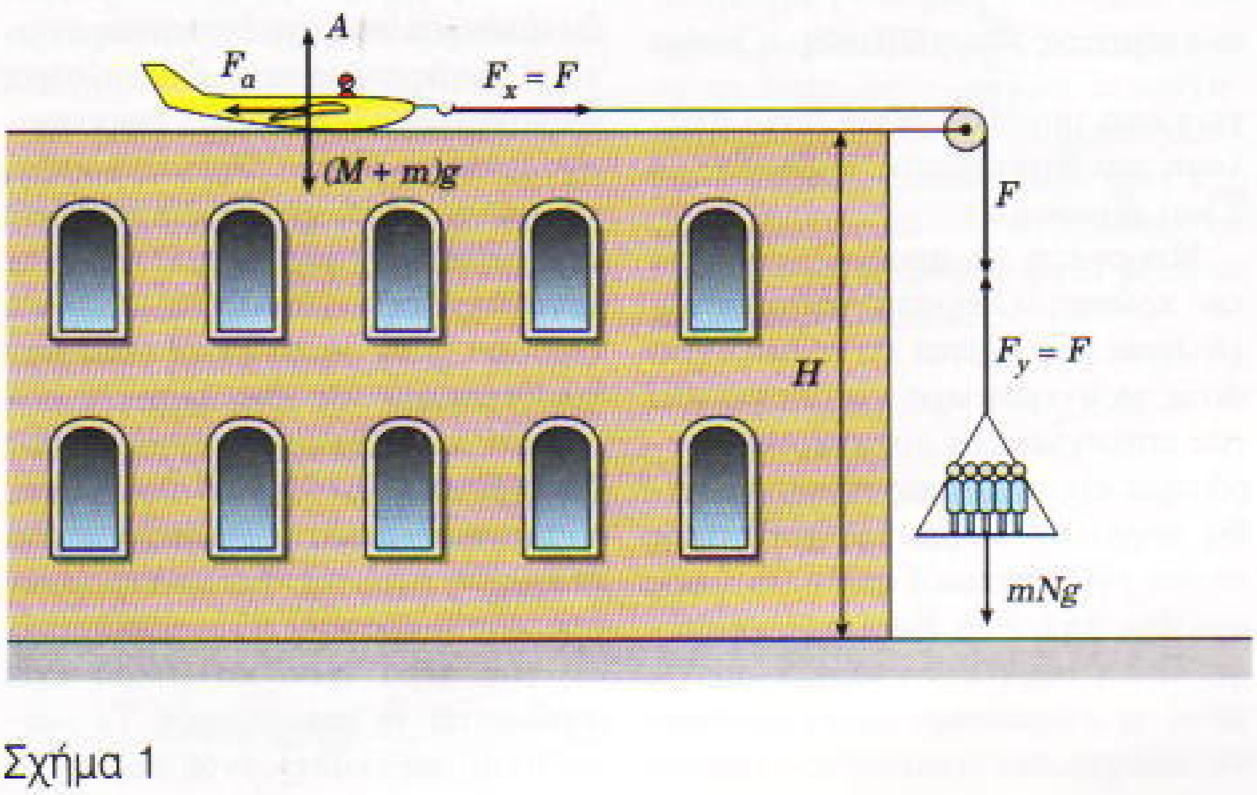
$$(M + m)\gamma_x = F_x,$$
$$mN\gamma_y = mNg - F_y.$$

Εφόσον το σκοινί είναι μη εκτατό, οι επιταχύνσεις και οι τάσεις στα άκρα του θα είναι ίσες. Δηλαδή, $\gamma_x = \gamma_y = \gamma$ και $F_x = F_y = F$. Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη μπορούμε να οδηγηθούμε στην εξίσωση:

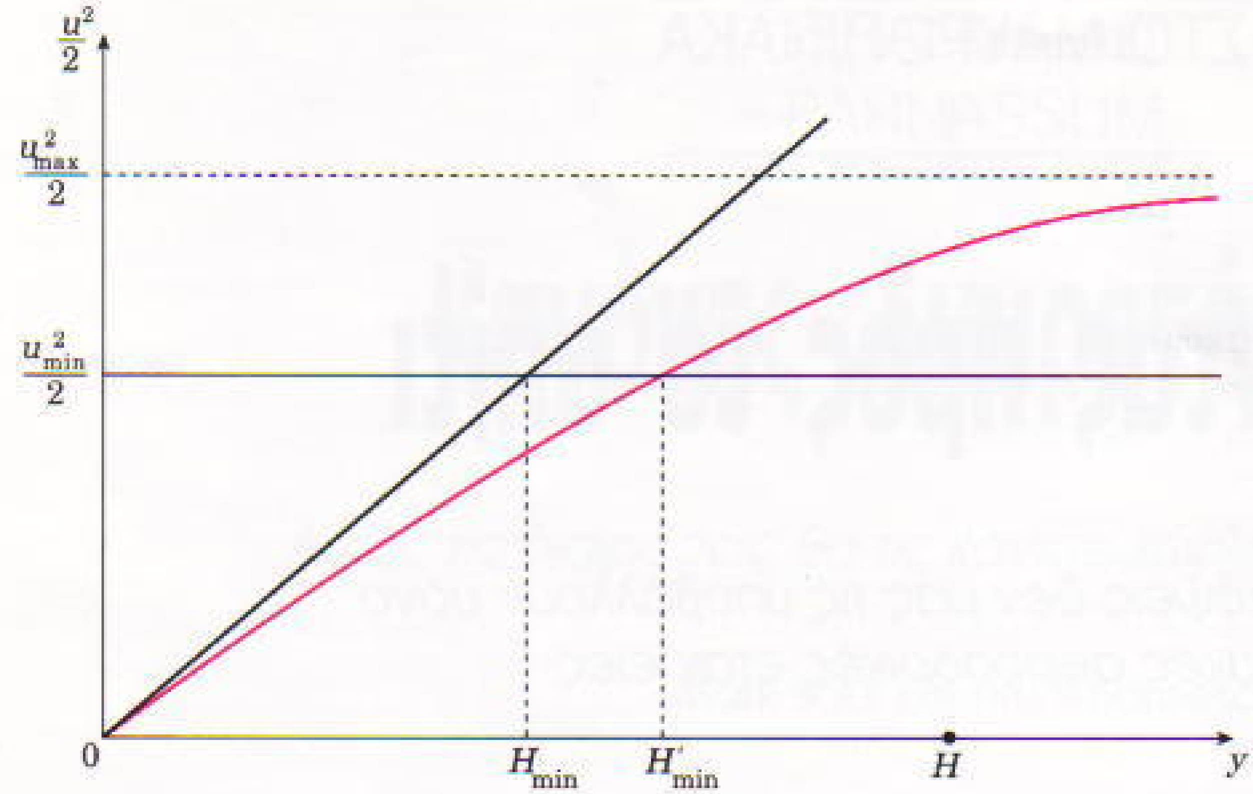
$$[M + m(N + 1)]\gamma = mNg. \quad (1)$$

Η σημασία της παραπάνω εξίσωσης είναι προφανής: το δεξιό μέλος αντιπροσωπεύει το συνολικό βάρος των φίλων του φοιτητή, ενώ το αριστερό περιλαμβάνει τη μάζα M_0 ολόκληρου του συστήματος, η οποία επιταχύνεται μέσω της συγκεκριμένης δύναμης.

Σύμφωνα με την εξίσωση (1), η επιτάχυνση είναι σταθερή· επομένως, το ανεμόπτερο θα αυξάνει την ταχύτητά του γραμμικά με το χρόνο, και το διάστημα που θα διανύει



Σχήμα 1



Σχήμα 2

θα είναι ανάλογο προς το τετράγωνο του χρόνου:

$$u = \gamma t,$$

$$s = y = \gamma \frac{t^2}{2},$$

όπου

$$\gamma = \frac{mN}{M_0} g.$$

Ωστόσο, η μεταβλητή t δεν μας απασχολεί ιδιαίτερα στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Καθοριστικό στοιχείο είναι αν το ύψος της εστίας H καθώς και το πλήθος N των συμφοιτητών αρκούν για να προσδώσουν στο ανεμόπτερο ελάχιστη αρχική ταχύτητα u_{min}, επαρκή για μια «επιτυχή» απογείωση. Συνεπώς, είναι προτιμότερο να εκφράσουμε την ταχύτητα ως συνάρτηση του διαστήματος που διανύεται, απαλείφοντας το χρόνο t από τις παραπάνω εξισώσεις:

$$u = \sqrt{2\gamma y}, \text{ ή } \frac{u^2}{2} = \gamma y. \qquad (2)$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση μας είναι ιδιαίτερα οικεία. Εισάγοντάς της, μάλιστα, την προηγούμενη έκφραση της γ, παίρνουμε:

$$M_0 \frac{u^2}{2} = (mNg)y. \qquad (3)$$

Πρόκειται για τον προσφιλή σε όλους μας νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, κατά τον οποίο η κινητική ενέργεια του συστήματος αναπτύσσεται εις βάρος της δυναμικής ενέργειας των φίλων του φοιτητή, λόγω της πτώσης τους από ύψος 0 σε ύψος $-y$ ή, ισοδύναμα, λόγω του έργου που παράγει η σταθερή δύναμη της βαρύτητας Nmg κατά μήκος της διαδρομής $s = y$. Είναι φανερό ότι, εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας (η τριβή θεωρείται αμελητέα), η «ενεργειακή» εξίσωση (3) είναι ισοδύναμη με τη «δυναμική» εξίσωση (1).

Έτσι, μέσα στο πλαίσιο των απλουστεύσεων που έχουμε θεωρήσει, η ειδική κινητική ενέργεια του συστήματος, $\frac{u^2}{2}$, (δηλαδή, η ενέργεια ανά μονάδα μάζας) είναι ανάλογη του διαστήματος y (βλ. Σχήμα 2 και εξίσωση 2).

Μπορούμε να αποφανθούμε για την κρίσιμη (ελάχιστη) τιμή της ταχύτητας που πρέπει να αναπτυχθεί ώστε το ανεμόπτερο να απογειωθεί «με επιτυχία»; Το συγκεκριμένο ερώτημα έχει ιδιαίτερη σημασία επειδή, παρότι το κτίριο της φοιτητικής εστίας είναι σχετικά ψηλό, το ύψος του δεν παύει να είναι περιορισμένο. Πόση ταχύτητα επαρκεί, άραγε, ώστε το ανεμόπτερο να κατορθώσει να απογειωθεί «επιτυχώς»; Πρέπει να δεχτούμε ότι, γι' αυτή την ελάχιστη ταχύτητα, η δυναμική άνωση του ανεμόπτερου μόλις που θα αντισταθμίζει το βάρος σκάφους-αναβάτη —και το οποίο ισούται με $(M + m)g$. Μέσω διαστατικής ανάλυσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι η δυναμική άνωση είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας u, του εμβαδού S των πτερύγων, καθώς και της πυκνότητας ρ του αέρα:

$$A \propto \frac{u^2}{2} S\rho. \qquad (4)$$

Αυτή η εκτίμηση διαφέρει από τον ακριβή τύπο μόνο κατά έναν αδιάστατο παράγοντα C, ο οποίος εξαρτάται από το σχήμα του σκάφους και των πτερύγων και δεν είναι δυνατόν να συναχθεί με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης. Προκειμένου να υπολογίσουμε τον συγκεκριμένο παράγοντα, ο οποίος ονομάζεται *συντελεστής ανώσεως*, απαιτείται διαφορετική μέθοδος ή πρόσθετα πειραματικά δεδομένα. Εν πάση περιπτώσει, για την «επιτυχή» απογείωση του ανεμόπτερου, πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$C \frac{u^2_{min}}{2} S\rho = (M + m)g. \qquad (5)$$

Η οριζόντια γραμμή του Σχήματος 2 αντιστοιχεί σε αυτή την ελάχιστη ταχύτητα u_{min}.

Στο σημείο αυτό, ο φοιτητής είχε μία ακόμη φαεινή ιδέα. Πώς ήταν δυνατόν να υπάρχει δυναμική άνωση A χωρίς αντίσταση F_a του αέρα; Κάποιο λάθος θα υπάρχει στην προηγούμενη ανάλυση. Πρέπει, λοιπόν, να εισαγάγουμε είτε την αντίσταση του αέρα στην εξίσωση (1) είτε το έργο της στην εξίσωση (3). Απ' όσο ξέρουμε, η αντίσταση του αέρα καθορίζεται από τις ίδιες φυσικές ποσότητες, αλλά εκφράζεται μέσω μιας διαφορετικής σταθεράς αναλογίας, του *συντελεστή αντιστάσεως* C_x. Για δεδομένη τιμή της δυναμικής άνωσης, όσο μικρότερη είναι η αντίσταση του αέρα τόσο καλύτερα έχει σχεδιαστεί το αεροσκάφος. Το «αεροδυναμικό ποιόν» ενός αεροσκάφους χαρακτηρίζεται από το συντελεστή $K = C/C_x$ —ο οποίος μας παρέχει και τη δυνατότητα να εκφράσουμε την αντίσταση του αέρα ως:

$$F_a = -\frac{A}{K} = -\frac{C}{K}\frac{u^2}{2}S\rho.$$

Ας εισαγάγουμε τώρα στην εξίσωση (3) το έργο που παράγει η εν λόγω δύναμη. Εφόσον κατά τη διαδικασία της επιτάχυνσης του ανεμόπτερου η τιμή του έργου μεταβάλλεται, η συγκεκριμένη εξίσωση θα πρέπει να εφαρμοστεί όχι για όλο το μήκος της διαδρομής y, αλλά για μικρά διαστήματα Δy της τροχιάς, όπου η μεταβλητή δύναμη μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν σταθερή. Έτσι:

$$\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) = mNg\Delta y - \frac{C}{K}S\rho\left(\frac{u^2}{2}\right)\Delta y. (6)$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, σε μια διαφορική εξίσωση για το $u^2/2$ ως συνάρτηση του y. Οι παράξενες αυτές λέξεις δεν προκάλεσαν σύγχυση στο φοιτητή. Η παραπάνω εξίσωση δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη και, ασφαλώς, ο ίδιος γνώριζε πώς να τη λύσει. Μπορούμε, ωστόσο, να οδηγηθούμε σε αρκετά συμπεράσματα χωρίς καν να χρειαστεί να λύσουμε τη συγκεκριμένη εξίσωση.

Για παράδειγμα, διαπιστώνουμε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή (ή, ισοδύναμα, για οποιαδήποτε συντεταγμένη y) η ταχύτητα του ανεμόπτερου, όταν υπάρχει η αντίσταση του αέρα, θα είναι μικρότερη από εκείνη που αντιστοιχεί στην ιδανική περίπτωση όπου δεν εμφανίζεται καθόλου αντίσταση. Επομένως, η αντίστοιχη καμπύλη στο Σχήμα 2 θα βρίσκεται κάτω από την ευθεία $\gamma\gamma$. Όταν το μέτρο της αντίστασης του αέρα (το οποίο διαρκώς αυξάνεται καθώς το ανεμόπτερο επιταχύνεται) γίνει ίσο με το μέτρο mNg του βάρους, η ταχύτητα του ανεμόπτερου θα πάψει να αυξάνεται, οπότε το ανεμόπτερο θα έχει αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα u_{max}. Θέτοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης (6) μηδέν, προκύπτει:

$$\frac{u_{max}^2}{2} = mNg\frac{K}{CS\rho}. \qquad (7)$$

Η διακεκομμένη γραμμή του Σχήματος 2 αντιστοιχεί σε αυτήν ακριβώς τη μέγιστη ταχύτητα. Ωστόσο, η καμπύλη που περιγράφει την εξάρτηση της ειδικής κινητικής ενέργειας από το διάστημα y θα τείνει ασυμπτωτικά προς αυτή τη διακεκομμένη γραμμή, και ουδέποτε θα την τμήσει. Στο Σχήμα 2 πάλι φαίνεται ότι, εάν λάβουμε υπόψη μας την αντίσταση του αέρα, η εν λόγω καμπύλη τέμνει την ευθεία $u^2_{min}/2$ = σταθ. (η οποία αντιστοιχεί στην ελάχιστη ταχύτητα u_{min}) στο σημείο $H'_{min} > H_{min}$. Για να συμβαίνει όμως αυτό, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $u^2_{max} > u^2_{min}$. Αν διαιρέσουμε κατά μέλη την εξίσωση (7) με την (5), μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω συνθήκη σε διαφορετική μορφή:

$$\frac{mNK}{M+m} > 1.$$

Ο φίλος μας γνωρίζει πλέον τι ακριβώς πρέπει να κάνει ώστε να κατορθώσει την «επιτυχή» απογείωση: πρέπει να προσκαλέσει περισσότερους συμφοιτητές του (δηλαδή να αυξήσει το N), να σχεδιάσει ένα όσο γίνεται πιο ελαφρύ ανεμόπτερο (να ελαττώσει το M) και, μάλιστα, με την καλύτερη δυνατή αεροδυναμική (να αυξήσει το K). Από την αρχή είκαζε τις συγκεκριμένες απαιτήσεις, τώρα όμως γνωρίζει με βεβαιότητα τις ακριβείς απαντήσεις.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα ακόμη ενδιαφέρον στοιχείο από την εξίσωση (6), χωρίς να χρειαστεί να τη λύσουμε —απλώς μετασχηματίζοντάς τη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη χαρακτηριστική ταχύτητα u_{max} ως παράγοντα ανακλιμάκωσης. Προς τούτο, διαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (6) και (7):

$$\Delta\left(\frac{u}{u_{max}}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{u}{u_{max}}\right)^2\right)\left(\frac{CS\rho}{KM_0}\right)\Delta y. \ (8)$$

Είναι αυτονόητη η «απαίτηση» σύγκρισης του διαστήματος Δy με μια χαρακτηριστική ποσότητα η οποία πρέπει επίσης να έχει διαστάσεις μήκους. Αυτή η ποσότητα περικλείεται στις τελευταίες παρενθέσεις του δεξιού μέλους της εξίσωσης (8)· θα τη συμβολίσουμε με h:

$$h = \frac{KM_0}{CS\rho}.$$

Ας θεωρήσουμε για το συντελεστή αεροδυναμικής ποιότητας του ανεμόπτερου $K \cong 10$, για το εμβαδόν των πτερύγων του $S \cong 10$ m^2, για την πυκνότητα του παγερού αέρα $\rho \cong 1$ kg/m^3 και για το συντελεστή ανώσεως $C \cong 1$. Τότε, $h \cong 10$ m.

Η παράμετρος h δεν είναι απλώς ένας τυχαίος συνδυασμός φυσικών ποσοτήτων. Απεναντίας, εκφράζει το διάστημα στο οποίο η ταχύτητα του ανεμόπτερου «σχεδόν» φτάνει τη μέγιστη τιμή της, ή, όπως λένε οι φυσικοί, φτάνει στην τιμή μόνιμης κατάστασης. Επομένως, μπορούμε και να το ονομάσουμε *μήκος αποκατάστασης*.

Φαίνεται πως το πρόβλημα έχει καλυφθεί από όλες τις απόψεις. Ωστόσο, ένας ερευνητικός αναγνώστης ίσως επιθυμεί να μάθει την ακριβή εξάρτηση της ταχύτητας του ανεμόπτερου από το διάστημα. Γιατί όχι; Αρκεί απλώς να λύσουμε την εξίσωση (8), χρησιμοποιώντας την παρακάτω αρχική συνθήκη: Στη θέση $y = 0$, η ταχύτητα του ανεμόπτερου είναι μηδέν.

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta\left(\frac{u}{u_{max}}\right)^2 = -\Delta\left[1 - \left(\frac{u}{u_{max}}\right)^2\right],$$

επειδή το σύμβολο Δ «εξαφανίζει» οποιαδήποτε σταθερά (άρα και τη μονάδα στη συγκεκριμένη εξίσωση). Εισάγοντας μια νέα μεταβλητή

$$\beta = 1 - \left(\frac{u}{u_{max}}\right)^2,$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (8) στην εξής μορφή:

Η συνέχεια στη σελ. 53 ⇨

Η καλύτερη προσέγγιση

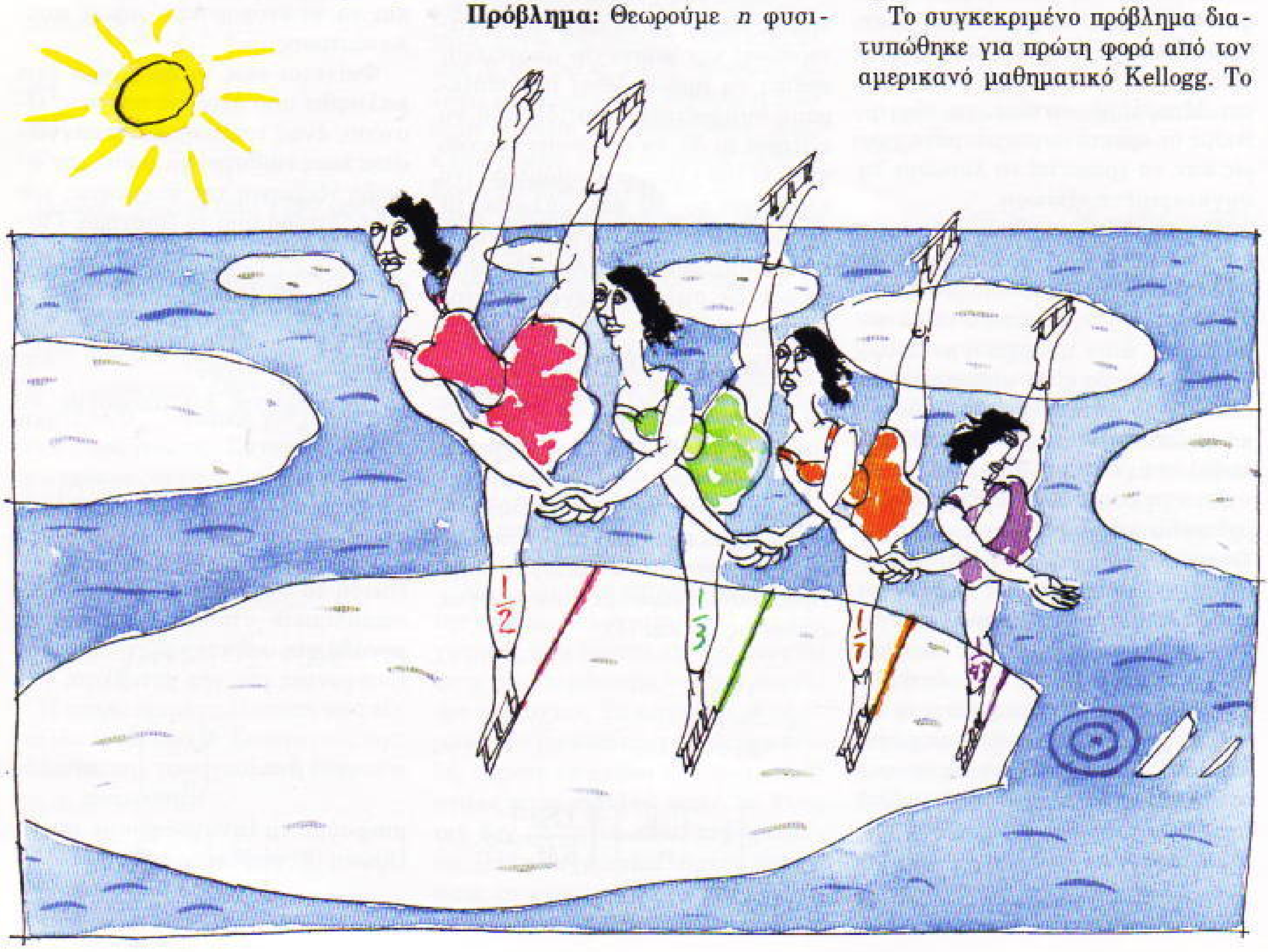
Μια ακολουθία με απρόσμενες ιδιότητες

O.T. Izhboldin και L.D. Kurlyandchik

ΚΑΤΙ ΠΟΥ ΜΑΘΑΙΝΕΙ ΚΑΝΕΙΣ ΓΡΗγορα είναι ότι απλές μαθηματικές ερωτήσεις έχουν συχνά περίπλοκες απαντήσεις με σημαντικές συνέπειες. Αρκετές ερωτήσεις τέτοιου είδους αφορούν την αναπαράσταση ή την προσέγγιση ακέραιων αριθμών από αθροίσματα αντίστροφων φυσικών αριθμών. Ιδού μία από αυτές.

Πρόβλημα: Θεωρούμε n φυσικούς αριθμούς τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους να είναι μικρότερο του 1. Πόσο μεγάλο μπορεί να είναι αυτό το άθροισμα;

Το συγκεκριμένο πρόβλημα διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον αμερικανό μαθηματικό Kellogg. Το



Εικονογράφηση: Michael Jones

1915 ο Carmichael το παρουσίασε στο βιβλίο του *Διοφαντική ανάλυση*. Το 1922, ο αμερικανός μαθηματικός Kersetz έδωσε μία λύση του. Στο παρόν άρθρο θα παρουσιάσουμε μία άλλη, πολύ συντομότερη, απόδειξη.

Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα σε μερικά βήματα. Στο πρώτο από αυτά θα εισαγάγουμε μια ακολουθία που αποδεικνύεται η ηρωίδα της ιστορίας μας.

Βήμα 1: Η ακολουθία $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ορίζεται από τις συνθήκες:

$$r_1 = 2, \quad r_{n+1} = r_1 r_2 \ldots r_n + 1.$$

Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι οι 2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, ...

Αποδείξτε ότι, για κάθε n, ισχύει:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} < 1.$$

Λύση: Η εξίσωση που ορίζει τον όρο r_{n+1} μπορεί να γραφεί ως

$$r_{n+1} = (r_n - 1)r_n + 1,$$

ή

$$\frac{1}{r_{n+1} - 1} = \frac{1}{(r_n - 1)r_n} =$$

$$\frac{1}{r_n - 1} - \frac{1}{r_n}.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} =$$

$$= \left(\frac{1}{r_1 - 1} - \frac{1}{r_2 - 1}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{r_2 - 1} - \frac{1}{r_3 - 1}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{r_n - 1} - \frac{1}{r_{n+1} - 1}\right) =$$

$$1 - \frac{1}{r_{n+1} - 1} < 1,$$

διότι $r_1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Και αυτό ήταν που θέλαμε να αποδείξουμε.

Η πρόταση που αποδείξαμε στο βήμα 1 μας δείχνει ότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας $1/r_n$ «έρπει» προς τον αριθμό 1 και επομένως είναι υποψήφιος για την προσέγγισή του —αυτό δηλαδή που ζητάμε στο πρόβλημά μας. Είναι όμως ο καλύτερος υποψήφιος;

Βήμα 2: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το άθροισμα των n αριθμών

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_n}.$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι αυτό το άθροισμα είναι μικρότερο του 1. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός a που μπορούμε να επιλέξουμε έτσι ώστε το άθροισμα

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{a}$$

να παραμείνει μικρότερο του 1;

Λύση: Πρέπει να διαλέξουμε $a = r_{n+1}$. Μάλιστα, αυτό το έχουμε ήδη αποδείξει. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι προσπαθούμε να κάνουμε το a λίγο μικρότερο επιλέγοντας $a = r_{n+1} - 1$. Τότε, από τον προηγούμενο υπολογισμό έχουμε ότι το άθροισμά μας

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n+1} - 1}$$

είναι ίσο με 1.

Επομένως, αν έχουμε ήδη διαλέξει το άθροισμα

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_n}$$

για να προσεγγίσουμε το 1 και θέλουμε να προσθέσουμε έναν ακόμη όρο, το μεγαλύτερο βήμα που μπορούμε να κάνουμε (χωρίς να φτάσουμε στο 1) είναι $1/r_{n+1}$. Όμως, δεν έχουμε ακόμη αποδείξει ότι η ακολουθία $\{r_i\}$ είναι η λύση στο Πρόβλημα 1. Πράγματι, αν είχαμε διαλέξει n διαφορετικούς αριθμούς, θα μπορούσαμε ίσως να πλησιάσουμε πιο κοντά με ένα ακόμη βήμα.

Ποια είναι λοιπόν η μυστηριώδης ακολουθία που δίνει τη λύση στο πρόβλημά μας; Θα δώσουμε τώρα τρία κριτήρια τα οποία πρέπει να ικανοποιεί αυτή η ακολουθία. Αργότερα, θα διαπιστώσουμε ότι η ακολουθία $\{r_i\}$, (α) ικανοποιεί τα κριτήρια αυτά και (β) λύνει το πρόβλημά μας.

Βήμα 3: Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{a_i\}$ δίνει την απάντηση στο Πρόβλημα 1. Δηλαδή, έστω ότι $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n$ είναι n φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 1$$

και ταυτόχρονα αυτό το άθροισμα να είναι η εγγύτερη προσέγγιση του 1 με αντιστρόφους φυσικών αριθμών. Έστω $b_k = 1/a_k$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και $c = 1 - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1})$. Επομένως, c είναι το σφάλμα κατά την προσέγγιση του 1 με το άθροισμα

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Τότε, το σύνολο $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, c\}$ ικανοποιεί τις τρεις επόμενες συνθήκες:

(i) $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + c = 1$,

(ii) $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_{n-1} \ge c \ge 0$,

(iii) $b_1 b_2 \ldots b_k \le b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_{n-1} + c$, για $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Όταν ολοκληρώσουμε το βήμα 3, η στρατηγική μας θα είναι να αποδείξουμε ότι το c, το σφάλμα της προσέγγισης, δεν μπορεί να είναι μικρότερο του $1/(r_n - 1)$ και ότι, αν $c = 1/(r_n - 1)$, τότε επίσης $a_k = r_k$ για κάθε $k < n$. Έτσι, θα έχουμε λύσει το πρόβλημά μας —ή σχεδόν.

Ας επιστρέψουμε όμως στη λύση του βήματος 3. Η συνθήκη (i) είναι απλώς επαναδιατύπωση του ορισμού τού c (θα δούμε αργότερα για ποιο λόγο την περιλάβαμε εδώ).

Το μεγαλύτερο μέρος της συνθήκης (ii) είναι εξίσου απλό. Γνωρίζουμε από τον ορισμό της ακολουθίας $\{a_i\}$ ότι

$$b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_{n-1} \ge 0$$

και $c > 0$. Το μόνο που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι $b_{n-1} \ge c$. Αφού η $\{a_i\}$ είναι η καλύτερη προσέγγιση του 1, αν αυξήσουμε τον τελευταίο όρο της, θα έχουμε

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-2}}+$$

$$+\frac{1}{a_{n-1}-1}\geq 1,$$

ή

$$1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}-\ldots-\frac{1}{a_{n-2}}$$

$$\leq\frac{1}{a_{n-1}-1}.$$

Επομένως,

$$c=1-\frac{1}{a_1}-\ldots-\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{1}{a_{n-1}}$$

$$\leq\frac{1}{a_{n-1}-1}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}(a_{n-1}-1)}$$

$$\leq\frac{1}{a_{n-1}}=a_{n-1.}$$

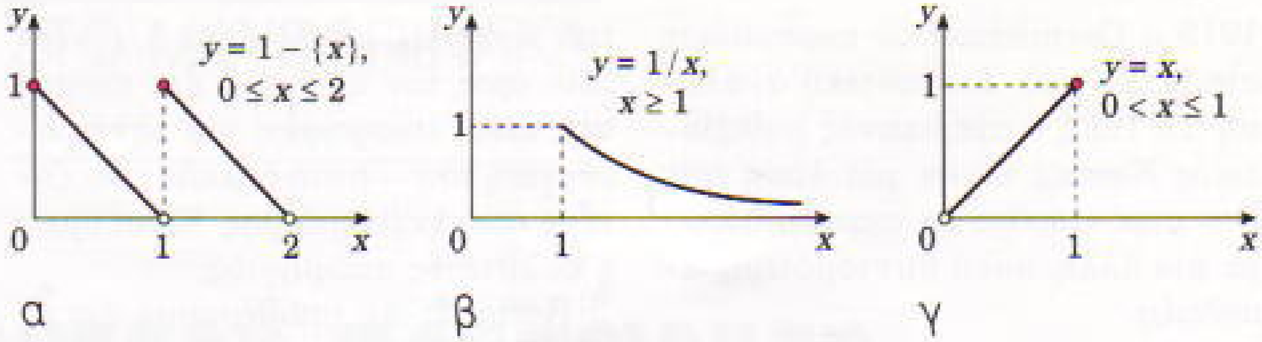
Αποδείξαμε λοιπόν ότι η συνθήκη (ii) ισχύει. Απομένει να αποδείξουμε τις ανισότητες της συνθήκης (iii). Αυτές προκύπτουν από τις εξισώσεις

$$b_{k+1}+b_{k+2}+\ldots+c=$$
$$1-b_1-b_2-\ldots-b_k=$$
$$1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\ldots-\frac{1}{a_k}=$$
$$\frac{N}{a_1a_2\ldots a_k}=Nb_1b_2\ldots b_k,$$

όπου N είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Επομένως, η τελευταία παράσταση σ' αυτή την εξίσωση είναι τουλάχιστον $b_1b_2\ldots b_k$. Συνεπώς, ολοκληρώσαμε το βήμα 3.

Βήμα 4: Αν το σύνολο $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, c\}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii), (iii) και το c είναι ελάχιστο, τότε συμπίπτει με το σύνολο $\{1/r_1, 1/r_2, \ldots, 1/r_{n-1}, 1/(r_n-1)\}$.

Θα αποδείξουμε την πρόταση ξεκινώντας με το σύνολο $B=\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, c\}$, για το οποίο το γινόμενο $\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}c$ είναι ελάχιστο. Θα αποδείξουμε ότι σε αυτή την περίπτωση και το c παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή. Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $\beta_i=1/r_i$.



Σχήμα 1

Ιδού μερικά παραδείγματα συναρτήσεων που δεν λαμβάνουν ελάχιστη τιμή σε ένα δεδομένο διάστημα: (α) $y = 1 - \{x\}$ (το $\{x\}$ συμβολίζει το κλασματικό μέρος του x). Η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής στο διάστημα $0 \leq x \leq 2$. (β) $y = 1/x$ για $x \geq 1$ (το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης δεν είναι φραγμένο). (γ) $y = x$ για $0 < x \leq 1$ (το πεδίο ορισμού δεν είναι κλειστό).

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι, για κάθε σύνολο B, όλες οι ανισότητες (iii) γίνονται ισότητες.

Αν $n = 2$, από τις σχέσεις (i)-(iii) συνεπάγεται άμεσα ότι $\beta_1 \geq \beta_2 \geq 0$, $\beta_1+\beta_2=1$ και $\beta_1\leq\beta_2$. Επομένως, $\beta_1=\beta_2=1/2$. Έστω $n>2$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία γνήσια ανισότητα στις σχέσεις (iii). Τότε, μπορούμε να βρούμε i και j τέτοια ώστε $1\leq i<j\leq n$, οι ανισότητες (iii) να είναι γνήσιες για $i\leq k<j$, και οι ανισότητες (iii) να ανάγονται σε ισότητες για $k=i-1$ και $k=j$ (προφανώς, μπορούμε να θεωρήσουμε τις περιπτώσεις $k=i-1$ και $k=j$ μόνο αν $i>1$ και $j<n$, αντίστοιχα). Ας αποδείξουμε ότι μπορούμε να «παραλλάξουμε» τους αριθμούς β_i και β_j έτσι ώστε οι συνθήκες (i)-(iii) να παραμείνουν αληθείς και το γινόμενο $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ να μειωθεί. Αφού αυτό το γεγονός έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή του B ως συνόλου με το ελάχιστο γινόμενο στοιχείων, η υπόθεση ότι υπάρχει γνήσια ανισότητα μεταξύ των (iii) θα απορριφθεί.

Ας αντικαταστήσουμε το β_i με το $\beta_i'+\varepsilon$ και το β_j με το $\beta_j'-\varepsilon$, όπου $\varepsilon>0$. Το γινόμενο των στοιχείων του νέου συνόλου B' είναι μικρότερο από το αντίστοιχο του συνόλου B, διότι

$$\beta_i'\beta_j'=\beta_i\beta_j-\varepsilon(\beta_i-\beta_j)-\varepsilon^2<\beta_i\beta_j.$$

Το σύνολο B' ικανοποιεί τη συνθήκη (i). Επίσης, οι ανισότητες (iii) ισχύουν για $k<i$ και $k\geq j$ για κάθε $\varepsilon>0$. Αν $i\leq k<j$, το αριστερό μέλος καθεμιάς από αυτές τις ανισότητες αυξάνεται κατά έναν παράγοντα ίσο με $(\beta_i+\varepsilon)/\beta_i$, και το δεξιό μέλος μειώνεται κατά ε. Επομένως, αφού οι ανισότητες αυτές ήταν γνήσιες για το σύνολο B, εξακολουθούν να ισχύουν αν το ε είναι καταλλήλως μικρό.

Αν εξετάσουμε τις ανισότητες (ii), βλέπουμε ότι μόνο οι $\beta_{i-1}\geq\beta_i$ και $\beta_j\geq\beta_{j+1}$ μπορούν να επηρεαστούν από την αλλαγή του συνόλου β (καθώς και η ανισότητα $\beta_n\geq 0$ για $j=n$). Όμως, για αρκετά μικρό ε δεν μεταβάλλονται, επειδή οι εν λόγω ανισότητες είναι γνήσιες. Για παράδειγμα,

$$\beta_{i-1}\geq\beta_1\cdot\ldots\cdot\beta_{i-1}=\beta_i+\ldots+\beta_n\geq\beta_i,$$

και για $n>2$, τουλάχιστον μία από αυτές τις ανισότητες είναι γνήσια, διότι $\beta_1<1$ και $\beta_n>0$. Παρομοίως, $\beta_j>\beta_{j+1}$ για $j<n$.

Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας. Γνωρίζουμε πλέον ότι η ακολουθία $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases}1=\beta_1+\ldots+\beta_n,\\ \beta_1=\beta_2+\ldots+\beta_n,\\ \beta_1\beta_2=\beta_3+\ldots+\beta_n,\\ \ldots\\ \beta_1\ldots\beta_{n-1}=\beta_n.\end{cases}$$

Αφαιρούμε τη δεύτερη εξίσωση από την πρώτη, την τρίτη από τη δεύτερη και ούτω καθεξής, για να προκύψει το επόμενο σύστημα $n-1$ εξισώσεων:

$$\begin{cases}1-\beta_1=\beta_1,\\ \beta_1(1-\beta_2)=\beta_2,\\ \beta_1\beta_2(1-\beta_3)=\beta_3,\\ \ldots\\ \beta_1\ldots\beta_{n-2}(1-\beta_{n-1})=\beta_{n-1}.\end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση μας δίνει $\beta_1 = 1/2$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε την k-οστή εξίσωση $(2 \le k \le n-1)$ ως

$$\frac{1}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k-1}} = \frac{1-\beta_k}{\beta_k}$$

ή

$$\frac{1}{\beta_k} = \frac{1}{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\beta_{k-1}} + 1.$$

Άρα, $1/\beta_1 = 2 = r_1$. Έπεται λοιπόν ότι $1/\beta_k = r_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$, και

$$\frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\beta_{n-1}} + 1.$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι, για κάθε σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, διαφορετικό του B, που ικανοποιεί τις συνθήκες (i)-(iii), έχουμε $a_n > \beta_n$. Πράγματι, ισχύει ότι

$$a_n^2 \ge a_1 \ldots a_{n-1}a_n \ge \beta_1 \ldots \beta_{n-1} = \beta_n^2$$

(η πρώτη ανισότητα έπεται από τη συνθήκη (iii) για το σύνολο A για $k = n-1$, και η δεύτερη ανισότητα έπεται από την επιλογή τού B). Συνεπώς, $a_n \ge \beta_n$. Αν $a_n = \beta_n$, τότε $a_1 \ldots a_n = \beta_1 \ldots \beta_n$. Όμως, σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο A ικανοποιεί τις συνθήκες (i)-(iii) και το γινόμενο των στοιχείων του είναι ελάχιστο —συνεπώς, ταυτίζεται με το B.

Ωστόσο, δεν έχουμε πραγματικά τελειώσει. Μέχρι στιγμής έχουμε υποθέσει, τελείως αθώα, ότι υπάρχει ένα σύνολο, το γινόμενο των στοιχείων του οποίου είναι ελάχιστο. Πρέπει επομένως να αποδείξουμε το εξής:

Βήμα 5: Η συνάρτηση $f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ λαμβάνει μια ελάχιστη τιμή επί του συνόλου όλων των n-άδων $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (i)-(iii) (θα ονομάσουμε αυτό το σύνολο C).

Αν δεν σας είναι ξεκάθαρο γιατί πρέπει να αποδείξουμε αυτή την πρόταση, δείτε το Σχήμα 1. Μια συνάρτηση ορισμένη επί ενός συνόλου δεν λαμβάνει πάντα ελάχιστη τιμή επί αυτού του συνόλου. Στο Σχήμα 1 βλέπετε διάφορα παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων σε κάποια διαστήματα. Οι συναρτήσεις αυτές δεν έχουν ελάχιστη τιμή στα διαστήματα που έχουμε επιλέξει ως πεδία ορισμού τους. Η συνάρτηση του βήματος 5 είναι κάπως πιο περίπλοκη. Είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών και το πεδίο ορισμού της δεν είναι ένα απλό διάστημα. Η πρόταση του βήματος 5 μας βεβαιώνει ότι, στο πεδίο ορισμού της, δεν συμπεριφέρεται όπως οι συναρτήσεις του Σχήματος 1: το βήμα 5 μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση λαμβάνει μια ελάχιστη τιμή.

Η απόδειξη του βήματος 5 στηρίζεται σε ορισμένα αποτελέσματα του απειροστικού λογισμού, και θα δώσουμε απλώς μια περιγραφή της. Συγκεκριμένα, στον απειροστικό λογισμό αποδεικνύεται το εξής θεώρημα: *Κάθε συνεχής συνάρτηση (μίας ή περισσότερων μεταβλητών) ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο λαμβάνει ελάχιστη τιμή επί αυτού του συνόλου.*

Θα εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα στη συνάρτηση του βήματος 5.

Υποστηρίζουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι για δύο ακολουθίες από το πεδίο ορισμού τής f, τα αντίστοιχα στοιχεία των οποίων βρίσκονται καταλλήλως κοντά, οι τιμές τής f γι' αυτές τις ακολουθίες είναι όσο κοντά επιθυμούμε. Δεύτερον, το σύνολο C είναι φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιος αριθμός N τέτοιος ώστε τα στοιχεία a_i κάθε ακολουθίας που ανήκει στο C να μην υπερβαίνουν το N (κατ' απόλυτη τιμή). Στην περίπτωσή μας, μπορούμε να πάρουμε $N = 1$.

Τέλος, το C είναι κλειστό. Η περιγραφή αυτής της συνθήκης είναι λίγο πιο περίπλοκη, μπορούμε όμως να την καταλάβουμε αρκετά εύκολα. Ένα σύνολο C είναι κλειστό όταν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του συγκλίνει σε ένα στοιχείο του. Εδώ έχουμε μια πρόταση που αναφέρεται σε ακολουθίες ακολουθιών. Ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε μια πρώτη ακολουθία $\{a_i\}$, στη συνέχεια μια δεύτερη $\{\beta_i\}$, μια τρίτη $\{\gamma_i\}$, και ούτω καθεξής. Κατόπιν σχηματίζουμε την ακολουθία των πρώτων στοιχείων $a_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots,$ και υποθέτουμε ότι αυτή συγκλίνει στον αριθμό p_1. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και παίρνουμε την ακολουθία (p_i). Η πρόταση ότι το σύνολο C είναι κλειστό σημαίνει ότι η ακολουθία (p_i) είναι στοιχείο τού C, και αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι καμία από τις ανισότητες των συνθηκών (i)-(iii) δεν είναι γνήσια.

Αφού η συνάρτηση f του βήματος 5 ικανοποιεί τις συνθήκες του προαναφερθέντος θεωρήματος, συμπεραίνουμε ότι η πρόταση του βήματος 5 είναι σωστή και, συνεπώς, ορθώς υποθέσαμε ότι υπάρχει ένα σύνολο B με ελάχιστο γινόμενο.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η αρχική μας ερώτηση, που διατυπώθηκε ως ένα καθαρά αριθμητικό πρόβλημα, απαίτησε τη χρήση ενός βαθέος θεωρήματος του απειροστικού λογισμού. Από την άλλη είναι σύνηθες στα μαθηματικά οι ρίζες της λύσης προβλημάτων με απλή διατύπωση να φτάνουν σε μεγάλο βάθος. ◙

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 26*

βάση 8 και βλέπετε αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 7.»

Πρόβλημα 30. Για ποια (ή ποιες) βάσεις αληθεύει ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 2 αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι άρτιο;

Λύση. Αυτό ισχύει μόνο για κάθε περιττή βάση b μεγαλύτερη ή ίση του 3. Και τούτο διότι $b \equiv 1 \pmod 2$, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $c = 1$.

Πρόβλημα 31. Είναι ο αριθμός 100111 του δυαδικού συστήματος διαιρετός με το 3;

Λύση. Για $b = 2$ και $d = 3$ μπορούμε να θέσουμε $c = -1$, διότι $2 \equiv -1 \pmod 3$. Επομένως, πρέπει να ελέγξουμε την παράσταση $1 - 0 + 0 - 1 + 1 - 1$. Αυτή είναι ίση με μηδέν και, επομένως, ο αριθμός διαιρείται με το 3 (δεν είναι άλλος παρά ο αριθμός 39 του δεκαδικού συστήματος). ◙

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ

III

Η σχετικότητα της κίνησης

«Άξαφνα περπατούσα και δεν περπατούσα
κοίταζα τα πετούμενα πουλιά κι ήταν μαρμαρωμένα... χορός ακίνητος.»

—Γιώργος Σεφέρης

A.I. Chernoutsan

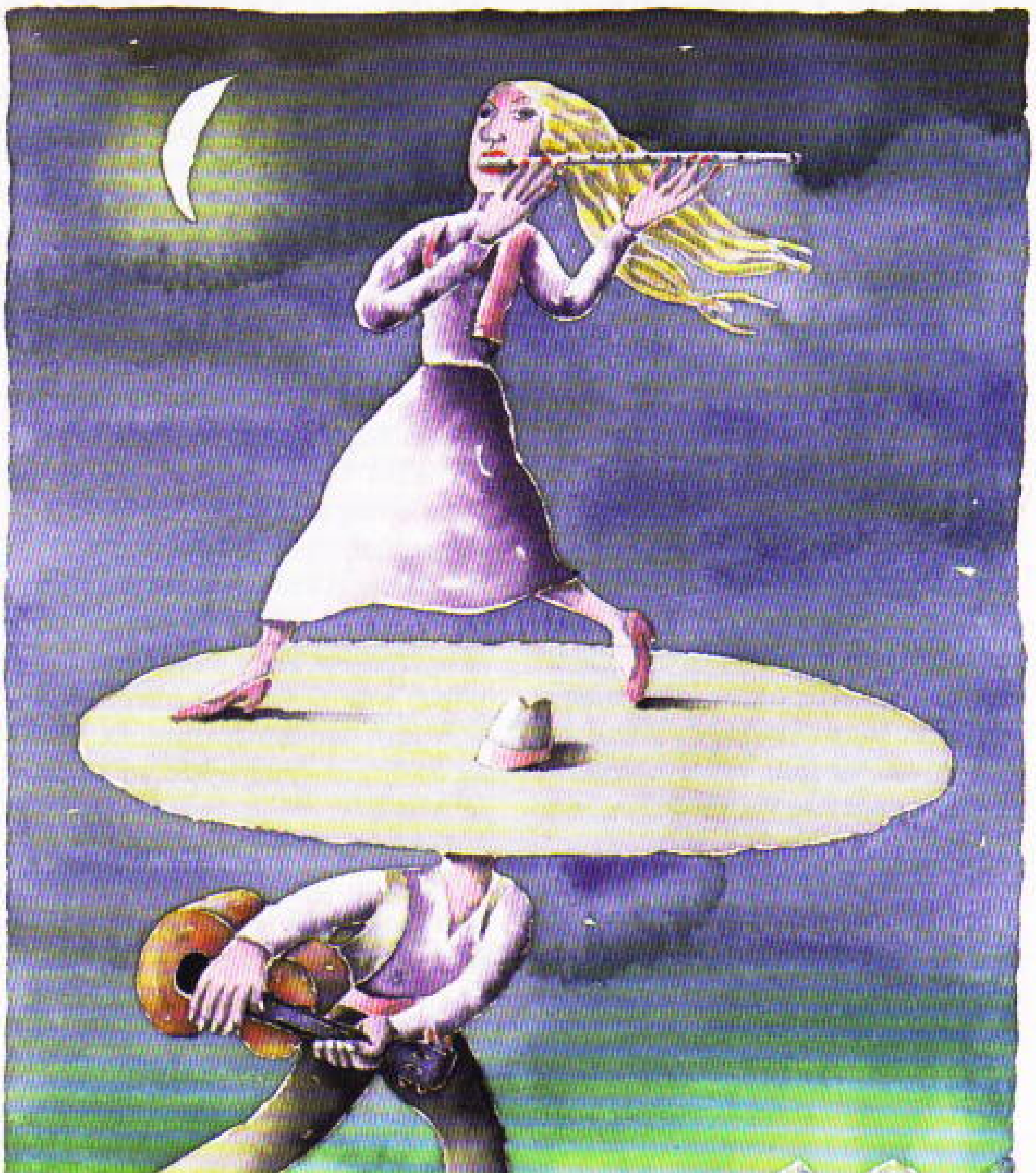
Η ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΘΕ ΣΩΜΑΤΟΣ ΘΕΩρείται σχετική, επειδή η μετατόπιση, η ταχύτητα και η τροχιά του εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιεί ο παρατηρητής για να την περιγράψει. Για να περιγράψουμε μια συγκεκριμένη κίνηση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα συστήματα αναφοράς —τόσο στάσιμα (χρονικά αμετάβλητα) όσο και κινούμενα.

Σε αρκετές περιπτώσεις, για τη μετάβαση από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο, χρειάζεται απλώς να εφαρμόσουμε τους κανόνες μετασχηματισμού για τις μετατοπίσεις, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις. Για τις μετατοπίσεις ισχύει:

$$\mathbf{s}_{\Sigma1} = \mathbf{s}_{\Sigma2} + \mathbf{s}_{21},$$

όπου $\mathbf{s}_{\Sigma1}$ είναι η μετατόπιση ενός σώματος ως προς το πρώτο σύστημα αναφοράς (το στάσιμο, για παράδειγμα), $\mathbf{s}_{\Sigma2}$ είναι η μετατόπιση του σώματος ως προς το δεύτερο σύστημα αναφοράς (λόγου χάρη, το κινούμενο), και $\mathbf{s}_{21}$ η μετατόπιση του δεύτερου συστήματος αναφοράς ως προς το πρώτο. Παρατηρήστε ότι ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στο σώμα (ή το σύστημα) για το οποίο γίνεται η μέτρηση, ενώ ο δεύτερος δείκτης αναφέρεται στο σύστημα αναφοράς στο οποίο πραγματοποιείται η μέτρηση.

Οι ανάλογοι μετασχηματισμοί για την ταχύτητα και την επιτάχυνση είναι οι εξής:



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\Sigma 1} = \boldsymbol{\upsilon}_{\Sigma 2} + \boldsymbol{\upsilon}_{21}$$

και

$$\boldsymbol{\gamma}_{\Sigma 1} = \boldsymbol{\gamma}_{\Sigma 2} + \boldsymbol{\gamma}_{21}.$$

Για να θυμάστε ευκολότερα τη σειρά των δεικτών, παρατηρήστε ότι οι δύο εσωτερικοί δείκτες στο δεξιό μέλος των μετασχηματισμών ταυτίζονται, ενώ οι δύο εξωτερικοί δείκτες μαζί μάς δίνουν εκείνον του αριστερού μέλους.

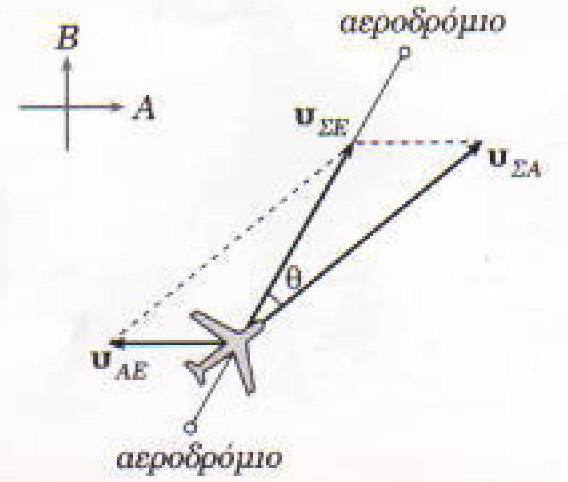
Ας δώσουμε ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής τέτοιων μετασχηματισμών: Η ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται μια βάρκα από την όχθη ενός ποταμού ισούται με την ταχύτητά της ως προς το ρεύμα του νερού συν την ταχύτητα του ρεύματος ως προς την όχθη —σχέση που μπορούμε να τη συμβολίσουμε ως εξής:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{BO} = \boldsymbol{\upsilon}_{BP} + \boldsymbol{\upsilon}_{PO}.$$

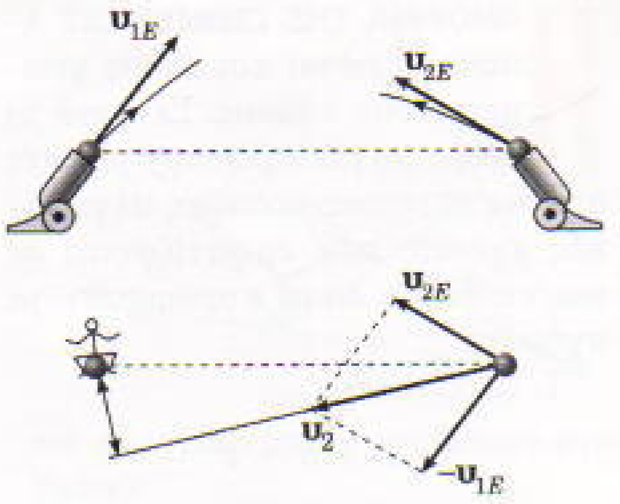
Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι παραπάνω τύποι ισχύουν όταν το ένα σύστημα αναφοράς εκτελεί μεταφορική κίνηση ως προς το άλλο (δηλαδή, οι άξονες συντεταγμένων του κινούμενου συστήματος παραμένουν παράλληλοι προς εκείνους του στάσιμου). Επιπλέον, οι ταχύτητες των κινούμενων σωμάτων και συστημάτων πρέπει να είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός (c = 300.000 km/s), αλλιώς χρειάζεται να εισαγάγουμε εντελώς διαφορετικούς μετασχηματισμούς ταχύτητας —και οι οποίοι περιγράφονται στη θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν.

Ας δούμε τώρα για ποιο λόγο χρειάζεται να αλλάζουμε σύστημα αναφοράς. Δεν θα ήταν ευκολότερο σε κάθε περίπτωση να χρησιμοποιούμε το ίδιο σύστημα; Όπως θα διαπιστώσουμε, υπάρχουν πολλοί λόγοι που συνηγορούν υπέρ του αντιθέτου.

Κατά πρώτον, χρειαζόμαστε σε πολλές περιπτώσεις κάποιο εναλλακτικό σύστημα αναφοράς, επειδή διαφορετικά μας είναι αδύνατον να λύσουμε το πρόβλημα. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την πτήση ενός αεροπλάνου με ισχυρό άνεμο. Ο προσανατολισμός του άξονα του σκάφους κατά την πορεία του επιλέγεται σε



Σχήμα 1



Σχήμα 2

σχέση με τη διεύθυνση της μαγνητικής βελόνας, αλλά η ταχύτητα του σκάφους μετριέται ως προς τον άνεμο. Η σημασία αυτών των μετρήσεων ταχύτητας, βεβαίως, είναι σαφής για το σύστημα αναφοράς που συνδέεται με τον άνεμο —οι προκύπτουσες πληροφορίες καθορίζουν το μέτρο και τη διεύθυνση της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς το συγκεκριμένο σύστημα. Ωστόσο, δεν αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μόνο το σύστημα αναφοράς του ανέμου, διότι χρειάζεται να γνωρίζουμε και τη θέση του αεροπλάνου σε σχέση με τα σημεία του εδάφους προκειμένου το σκάφος να προσγειωθεί με ασφάλεια στο αεροδρόμιο του προορισμού του. Ας γράψουμε λοιπόν το νόμο πρόσθεσης των ταχυτήτων:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\Sigma E} = \boldsymbol{\upsilon}_{\Sigma A} + \boldsymbol{\upsilon}_{AE},$$

όπου οι δείκτες Σ, E και A αναφέρονται στο σκάφος, το έδαφος και τον άνεμο, αντίστοιχα. Μπορούμε να σχεδιάσουμε τις αντίστοιχες ταχύτητες όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Συνήθως, το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας του ανέμου είναι στοιχεία που παρέχονται από τους μετεωρολογικούς σταθμούς· αλλά και άλλα στοιχεία είναι εκ των προτέρων γνωστά —όπως η διεύθυνση από το αεροδρόμιο αναχώρησης προς το αεροδρόμιο προορισμού (αντιστοιχεί στη διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\upsilon}_{\Sigma E}$), και η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς το έδαφος (οι ρυθμιστές της εναέριας κυκλοφορίας απαιτούν την έγκαιρη προσγείωση των αεροσκαφών!). Τα δεδομένα αυτά υπεραρκούν για να υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία του τριγώνου των διανυσμάτων ταχύτητας (λόγου χάρη, για να υπολογίσουμε τη γωνία θ —το συντελεστή διόρθωσης στη διεύθυνση του άξονα του σκάφους στην περίπτωση των ισχυρών ανέμων).

Κατά δεύτερον, παρότι σε αρκετές περιπτώσεις η χρήση ενός διαφορετικού συστήματος αναφοράς δεν είναι απαραίτητη, μπορεί να απλουστεύσει σημαντικά το πρόβλημα καθιστώντας τη λύση του περισσότερο εμφανή. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την κίνηση δύο βλημάτων που εκτοξεύονται ταυτόχρονα από δύο κανόνια (Σχήμα 2). Πώς μπορούμε να γνωρίζουμε την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν μεταξύ τους τα δύο βλήματα; Ο απλούστερος τρόπος είναι να υιοθετήσουμε τη θεωρητική προσέγγιση του βαρόνου Μυγχάουζεν, ο οποίος συνήθιζε να ταξιδεύει «ιππεύοντας» πάνω σ' ένα ιπτάμενο βλήμα. Η σχετική επιτάχυνση των δύο βλημάτων είναι μηδέν, επειδή και τα δύο κινούνται μόνο υπό την επίδραση της επιτάχυνσης της βαρύτητας (η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα). Επομένως, από τη σκοπιά του βαρόνου (ο οποίος μπορούμε να υποθέσουμε πως κάθεται πάνω στην μπάλα 1), η δεύτερη μπάλα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{21} = \boldsymbol{\upsilon}_{2E} + \boldsymbol{\upsilon}_{E1} = \boldsymbol{\upsilon}_{2E} - \boldsymbol{\upsilon}_{1E}.$$

Προσδιορίζοντας τη διεύθυνση αυτής της ταχύτητας από το διανυσματικό διάγραμμα του Σχήματος 2, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση που θα χωρίζει τα βλήματα (χρειάζεται απλώς

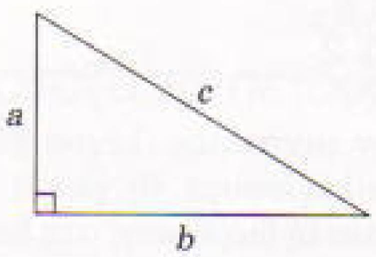
Η συνέχεια στη σελ. 69 ⇨

Αξιοσημείωτοι γ

Η ΟΜΟΡΦΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ αποκαλύπτεται και στους γεωμετρικούς τύπους. Σε αυτό το άρθρο συγκεντρώσαμε μερικές από τις εντυπωσιακότερες αλγεβρικές σχέσεις που εμφανίζονται σε μια επιστήμη όπου κυριαρχούν τα σχήματα.

1. Η εξίσωση

$$a^2 + b^2 = c^2$$

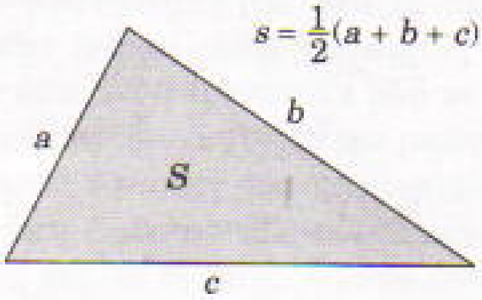


εκφράζει το πυθαγόρειο θεώρημα: Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του. Το πυθαγόρειο είναι ένα από τα παλαιότερα θεωρήματα της γεωμετρίας. Η αλγεβρική εξίσωση που το εκφράζει παρέχει τη βάση της μετρικής θεωρίας της ευκλείδειας γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας.

Ένας από τους παλαιότερους και κομψότερους τύπους της γεωμετρίας είναι ο τύπος του Ήρωνα, ο οποίος εκφράζει το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του:

$$E = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

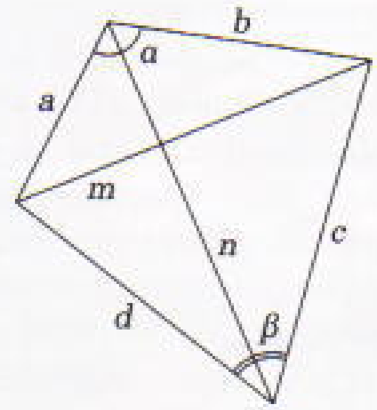


Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε, χωρίς φυσικά να εξαντλήσουμε το θέμα, μερικούς ακόμη γνωστούς τύπους της στοιχειώδους γεωμετρίας (δείτε το πλαίσιο). Ορισμένοι περιλαμβάνονται στην ύλη του λυκείου.

Ο πρώτος από αυτούς τους τύπους είναι ο νόμος των ημιτόνων. Η δεύτερη σχέση είναι ο νόμος των συνημιτόνων, που αποτελεί γενίκευση του πυθαγόρειου θεωρήματος.

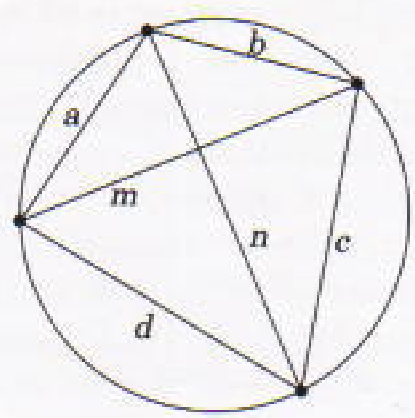
2. Ο νόμος των συνημιτόνων είναι ο πρώτος εκπρόσωπος μιας ευρείας κλάσης νόμων συνημιτόνων. Παρόμοιες σχέσεις προκύπτουν για τα τρίγωνα στη σφαιρική και στη μη ευκλείδεια γεωμετρία, καθώς και για πολύγωνα, τετράεδρα και άλλα γεωμετρικά σχήματα. Αρκετά συχνά, υπάρχουν διάφορες σχέσεις στο ίδιο γεωμετρικό σχήμα —για παράδειγμα, σε ένα τετράπλευρο— που όλες τους μπορεί να ονομαστούν νόμοι συνημιτόνων. Το θεώρημα του Bretschneider περιλαμβάνει ένα τέτοιο σύνολο σχέσεων:

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta).$$



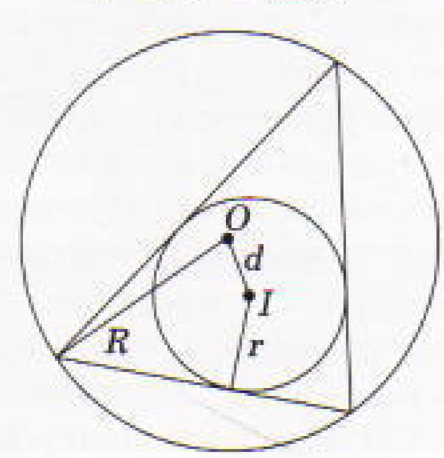
Το θεώρημα του Bretschneider έχει πολλές συνέπειες. Για παράδειγμα, από αυτό προκύπτει το θεώρημα του Πτολεμαίου για τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα:

$$mn = ac + bd.$$



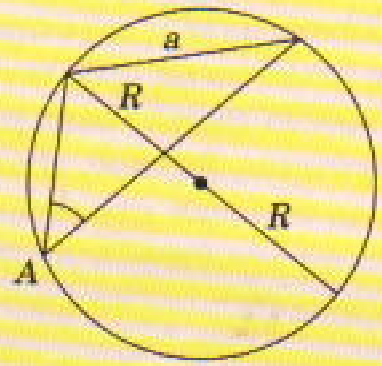
3. Ένα τρίγωνο προσδιορίζεται συνήθως από τρία στοιχεία του. Γι' αυτό το λόγο οι εξισώσεις που συσχετίζουν τρία στοιχεία ενός τριγώνου έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στο ανωτέρω πλαίσιο παραθέτουμε αρκετές τέτοιες σχέσεις. Η επόμενη είναι μία ακόμη αξιοσημείωτη σχέση, που ονομάζεται τύπος του Euler:

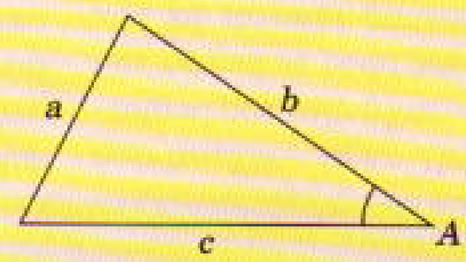
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

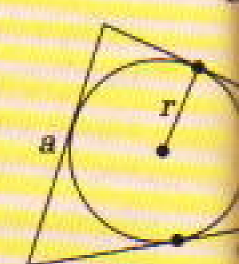


$$\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{b}{\eta\mu B} = \frac{c}{\eta\mu C} = 2R \qquad a^2 = b^2 + c^2 + b\sigma\upsilon\nu A^2$$

$x = s - a,$
$E = rs$



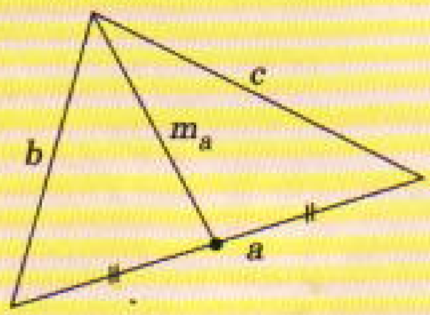


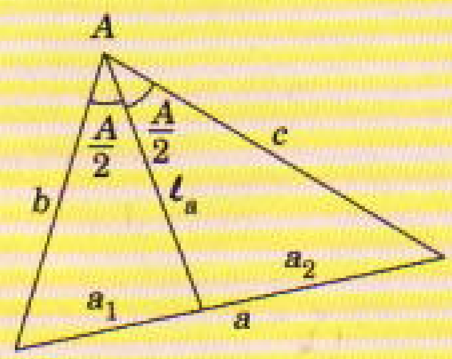


εωμετρικοί τύποι

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) \qquad \ell_a^2 = bc - a_1a_2,\ \ \ell_a = \frac{2bc\,\text{συν}\,\dfrac{A}{2}}{b+c},$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)$$



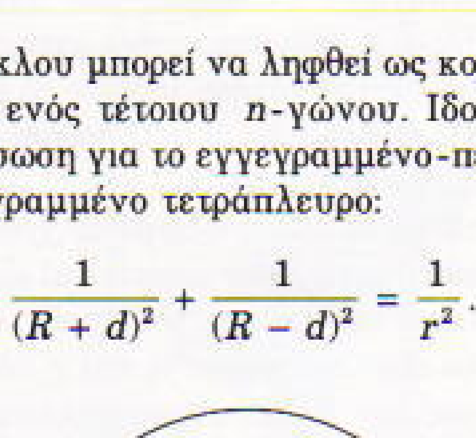


Αυτός ο τύπος εκφράζει την απόσταση ανάμεσα στα κέντρα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου συναρτήσει των ακτίνων τους. Εάν γνωρίζουμε αυτές τις ακτίνες, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των αντίστοιχων κύκλων. Υπάρχουν άπειρα τρίγωνα με εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο αυτούς τους δύο. Οποιοδήποτε σημείο του μεγαλύτερου κύκλου μπορεί να ληφθεί ως κορυφή ενός τέτοιου τριγώνου.

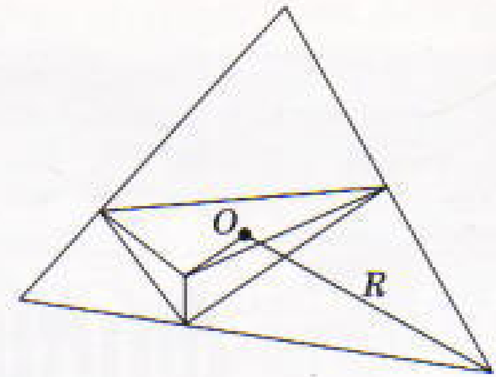
Δεν υπάρχει ανάλογος τύπος για τα τετράεδρα, υπάρχει όμως μια αντίστοιχη ανισότητα. Αλλά μπορούμε να βρούμε μια αντίστοιχη εξίσωση για κάθε πολύγωνο περιγεγραμμένο σε έναν κύκλο και εγγεγραμμένο σε έναν άλλο, η οποία εξαρτάται από το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Από ένα όμορφο θεώρημα του Poncelet (στην προβολική γεωμετρία) συνεπάγεται ότι αν υπάρχει n-γωνο περιγεγραμμένο σε έναν κύκλο και εγγεγραμμένο σε έναν άλλο κύκλο, τότε υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων πολυγώνων και κάθε σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου μπορεί να ληφθεί ως κορυφή ενός τέτοιου n-γώνου. Ιδού η εξίσωση για το εγγεγραμμένο-περιγεγραμμένο τετράπλευρο:

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$



4. Πολλά ενδιαφέροντα γεωμετρικά σχήματα συνδέονται με το καλούμενο ποδικό τρίγωνο. Για κάθε σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου, το ποδικό τρίγωνο αυτού του σημείου είναι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τους πόδες των καθέτων που φέρουμε από το σημείο προς τις πλευρές του δεδομένου τριγώνου (δείτε το επόμενο σχήμα). Ιδού ένας αξιοσημείωτος τύπος για το ποδικό τρίγωνο (μερικοί συγγραφείς τον αποδίδουν στον Euler):



$$Q = \frac{E}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|.$$

Εδώ, Q, E, R και d είναι, αντίστοιχα, το εμβαδόν του ποδικού τριγώνου, το εμβαδόν του δεδομένου τριγώνου, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του δεδομένου τριγώνου και η απόσταση ανάμεσα στο δεδομένο σημείο και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου. Αυτός ο τύπος έχει πολλές ενδιαφέρουσες συνέπειες. Συγκεκριμένα, αν το δεδομένο σημείο ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, τότε το εμβαδόν του ποδικού τριγώνου ισούται με μηδέν και, επομένως, τα αντίστοιχα σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία (την ευθεία Simson). Αν σ' αυτή την εξίσωση αντικαταστήσουμε το d^2 βάσει του τύπου του Euler, παίρνουμε έναν τύπο για το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με το δεδομένο τρίγωνο: $Er/2R$.

5. Για μερικούς τύπους της επίπεδης γεωμετρίας υπάρχουν οι ανάλογοι στο χώρο, ενώ για άλλους όχι. Αντιστρόφως, υπάρχουν ορισμένες αξιοσημείωτες σχέσεις τρισδιάστατων σχημάτων ανάλογες των οποίων δεν μπορούμε να βρούμε στο επίπεδο. Ιδού μια τέτοια σχέση, πράγματι εντυπωσιακή. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τετράεδρο. Έστω V ο όγκος του και R η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας. Αν πολλαπλασιάσουμε ανά δύο τις απέναντι ακμές του τετραέδρου, προκύπτουν τρεις αριθμοί. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει τρίγωνο με πλευρές ίσες με τους αριθμούς αυτούς, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$E = 6VR.$$

—*I.F. Sharygin*

Φυσική στον ανελκυστήρα

«Η οροφή του ενός είναι το δάπεδο του άλλου.»
—Paul Simon

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

ΜΗΠΩΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΤΗΚΑΤΕ ΜΕ ζυγαριές μπάνιου σε επιταχυνόμενους (ή επιβραδυνόμενους) ανελκυστήρες, όπως σας είχαμε προτείνει στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1998 του *Quantum*; Εάν ναι, τότε οι παρατηρήσεις σας θα πρέπει να σας γέννησαν πλήθος απορίες, υποθέσεις και ιδέες, οι οποίες θα δώσουν τροφή σε μιαν αναμφίβολα ενδιαφέρουσα συζήτηση. Ταυτοχρόνως, μάλιστα, θα εισαχθείτε σε μια θεματική η οποία σχετίζεται άμεσα με ορισμένα πεδία μετωπικής φυσικής έρευνας.

Ας συνεχίσουμε, λοιπόν, να διερευνούμε τη φυσική σε ομαλώς επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς. Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε μια σφαίρα μάζας m η οποία πέφτει από ύψος h καθώς ο ανελκυστήρας κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση γ. Ας επιλέξουμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω, ας θέσουμε σε λειτουργία το χρονόμετρό μας τη στιγμή που αφήνουμε τη σφαίρα να πέσει και ας υποθέσουμε ότι τη δεδομένη στιγμή ο ανελκυστήρας κινείται με ταχύτητα υ_0. Εάν συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε τους δείκτες «σ» και «δ» για να δηλώνουμε αντίστοιχα τη σφαίρα και το δάπεδο, οι θέσεις τους στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$y_\sigma = h + \upsilon_0 t - gt^2/2,$$

$$y_\delta = 0 + \upsilon_0 t + \gamma t^2/2.$$

Παρατηρήστε πως, μολονότι απλώς αφήσαμε τη σφαίρα να πέσει στο σύστημα αναφοράς του ανελκυστήρα, τη συγκεκριμένη στιγμή η σφαίρα έχει ταχύτητα υ_0 προς τα πάνω. Προς στιγμήν, η σφαίρα ακινητεί ως προς το δάπεδο.

Για να προσδιορίσουμε το χρονικό διάστημα t_π που απαιτείται ώστε η σφαίρα να φτάσει στο δάπεδο, αρκεί να εξισώσουμε τα y_δ και y_σ. Λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$t_\pi = \sqrt{\frac{2h}{g+\gamma}} \equiv \sqrt{\frac{2h}{g'}},$$

όπου ορίσαμε την $g' \equiv g + \gamma$. Σημειώστε ότι στον ίδιο τύπο καταλήγουμε και στην περίπτωση όπου αφήνουμε τη σφαίρα να πέσει ενώ πατάμε στο «στέρεο» έδαφος, με τη μόνη διαφορά ότι η κατακόρυφη επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας έχει αντικατασταθεί τώρα από μιαν «ενεργό» επιτάχυνση βαρύτητας g'.

Ας υπολογίσουμε τώρα την ταχύτητα με την οποία κινείται η σφαίρα ως προς το δάπεδο μόλις πριν από την πρόσκρουσή της σ' αυτό. Για τις ταχύτητες ισχύουν οι εξής εξισώσεις:

$$\upsilon_\sigma = \upsilon_0 - gt,$$
$$\upsilon_\delta = \upsilon_0 + \gamma t.$$

Η ταχύτητα της σφαίρας σε σχέση με το δάπεδο ισούται με τη (διανυσματική) διαφορά της ταχύτητας της σφαίρας και της ταχύτητας του δαπέδου. Τη στιγμή της πρόσκρουσης της σφαίρας στο δάπεδο, η σχετική τους ταχύτητα $\upsilon_{\sigma\chi}$ είναι

$$\upsilon_{\sigma\chi} = \upsilon_\sigma - \upsilon_\delta = (g + \gamma)t_\pi = g't_\pi.$$

Πρόκειται και πάλι για το ίδιο αποτέλεσμα το οποίο θα λαμβάναμε και στην περίπτωση που θα εκτελούσαμε το πείραμά μας ενώ στεκόμασταν στο έδαφος και χρησιμοποιούσαμε την ενεργό επιτάχυνση βαρύτητας αντί της «πραγματικής».

Εάν υποθέσουμε ότι στεκόμαστε στο έδαφος και αφήνουμε να πέσει ελεύθερα μια ιδανικά ελαστική σφαίρα για να προσπέσει σε ένα ιδανικά ελαστικό δάπεδο, τότε η σφαίρα θα υποστεί τελείως ελαστική κρούση και θα επιστρέψει στο ύψος από το οποίο ξεκίνησε. Ο νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μας λέει ότι κατά την ανάκρουση της σφαίρας στο δάπεδο η ταχύτητά της απλώς αντιστρέφει τη φορά της. Στη γενικότερη περίπτωση ελαστικής κρούσης δύο σωμάτων, αυτή που αντιστρέφει τη φορά της είναι η σχετική τους ταχύτητα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι επιστρέφουμε στον ανελκυστήρα και εξετάζουμε την ελαστική κρούση με το δάπεδο. Υποθέτουμε ότι μηδενίζου-

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


...One Man's Ceiling Is Another Man's Floor
One Man's Floor Is Another Man's Ceiling
DOWN
UP

με το χρονόμετρό μας και το θέτουμε σε λειτουργία εκ νέου, και πως λαμβάνουμε, κατά σύμβαση, το ύψος του δαπέδου ίσο με μηδέν. Οι ταχύτητες της σφαίρας και του δαπέδου (στο σύστημα αναφοράς του εδάφους) δίνονται από τους τύπους

$$\upsilon_\sigma = \upsilon_h + \upsilon_{\sigma\chi} - gt = \upsilon_h + g't_\pi - gt,$$
$$\upsilon_\delta = \upsilon_h + \gamma t,$$

όπου με υ_h συμβολίζουμε την ταχύτητα του δαπέδου τη στιγμή της κρούσης. Για να προσδιορίσουμε τη χρονική στιγμή t_ψ κατά την οποία η σφαίρα φτάνει στο μέγιστο ύψος της πάνω από το δάπεδο του ανελκυστήρα, αρκεί να εξισώσουμε τις δύο ταχύτητες. (Έπειτα από αυτή τη χρονική στιγμή, το δάπεδο κινείται ταχύτερα από τη σφαίρα, οπότε η σφαίρα το προσεγγίζει και πάλι. Πέφτει.) Συνεπώς,

$$g't_\pi - gt_\psi = \gamma t_\psi,$$

ή

$$g't_\pi = (g + \gamma)t_\psi = g't_\psi.$$

Για μία ακόμη φορά καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που θα λαμβάναμε στο έδαφος —ο χρόνος καθόδου ισούται με το χρόνο ανόδου.

Η προηγηθείσα ανάλυση της ελεύθερης πτώσης της σφαίρας δείχνει ότι οι υπολογισμοί μπορεί να απλουστευθούν εάν υποθέσουμε ότι στεκόμαστε στο έδαφος, με την προϋπόθεση, βεβαίως, ότι θα αντικαταστήσουμε την κατακόρυφη επιτάχυνση λόγω βαρύτητας με την ενεργό επιτάχυνση. Μολονότι αποδείξαμε ότι αυτό είναι δυνατόν σε ένα μόνον πρόβλημα, πρόκειται για θεώρημα γενικής ισχύος. Στην πραγματικότητα, ένα από τα αξιώματα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι και η αρχή της ισοδυναμίας: *Μια σταθερή επιτάχυνση ισοδυναμεί με ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο.* Στη γενική περίπτωση, βρίσκουμε την ενεργό επιτάχυνση παίρνοντας τη διανυσματική διαφορά της επιτάχυνσης της βαρύτητας και της επιτάχυνσης του συστήματος αναφοράς.

Η ανάλυση της μηχανικής στα επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς αποτελεί τη θεωρητική βάση των προβλημάτων του διαγωνισμού μας:

Α. Αποδείξτε ότι η σφαίρα ανέρχεται στο ύψος από το οποίο ξεκίνησε την πτώση της (σε σχέση με το δάπεδο του ανελκυστήρα).

Β. Υποστηρίξτε με επιχειρήματα τη θέση ότι μια σφαίρα που αφήνεται να πέσει σε τρένο που κινείται με σταθερή οριζόντια επιτάχυνση γ θα διαγράψει μια ευθύγραμμη τροχιά η οποία σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ, η οποία δίνεται από τον τύπο $\varepsilon\varphi\theta = \gamma/g$.

Το τελευταίο πρόβλημα τέθηκε στην πρώτη φάση των εξετάσεων που πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο της διαδικασίας μέσω της οποία επελέγησαν τα μέλη της φετινής Ομάδας Φυσικής των ΗΠΑ. Η ομάδα αυτή θα διαγωνιστεί το καλοκαίρι στην Ιταλία.

Γ. Ένα αυτοκίνητο που αρχικώς ηρεμεί επιταχύνεται ομαλά. Κατά την εκκίνηση, η πόρτα του είναι ελαφρώς ανοιχτή. Υπολογίστε πόση απόσταση θα διανύσει το αυτοκίνητο ώσπου η πόρτα του να κλείσει. Η πόρτα, η οποία έχει ομοιόμορφη κατανομή μάζας και μήκος L, στηρίζεται σε έναν στροφέα (μεντεσέ) χωρίς τριβές. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Εάν δεν έχετε πειστεί ότι ο ευκολότερος τρόπος επίλυσης του παρόντος προβλήματος προκύπτει μέσω μιας ισοδύναμης επιτάχυνσης βαρύτητας, προσπαθήστε να το λύσετε στο αδρανειακό σύστημα που είναι προσαρμοσμένο στο έδαφος.

Ψηλά, ψηλά και μακριά

Η αρχή του Αρχιμήδη μάς πληροφορεί ότι, για να αιωρείται το μπαλόνι, το βάρος του πρέπει να ισούται με το βάρος του αέρα που εκτοπίζει:

$$m_1 g = m_a g + m_{\mu\pi} g,$$

όπου m_1 είναι η μάζα του εκτοπιζόμενου αέρα, m_a η μάζα του αέρα που περιέχεται στο μπαλόνι και $m_{\mu\pi}$ η μάζα του ελαστικού περιβλήματος. Εάν περάσουμε από τις μάζες στις πυκνότητες, βρίσκουμε

$$m_1 = \rho_1 V_1$$

$$m_a = \rho_a V_1$$

$$\rho_1 V_1 g = \rho_a V_1 g + m_{\mu\pi} g$$

$$\rho_a = \rho_1 - \frac{m_{\mu\pi}}{V_1}$$

$$\rho_a = 1{,}20 \text{ kg/m}^3 - \frac{0{,}187 \text{ kg}}{1{,}10 \text{ m}^3}$$
$$= 1{,}03 \text{ kg/m}^3.$$

Έτσι, προσδιορίσαμε τη ρ_a, δηλαδή την τιμή την οποία πρέπει να λάβει η πυκνότητα του αέρα που περιέχεται στο μπαλόνι, ώστε αυτό να αιωρείται. Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων μπορούμε να υπολογίσουμε και την αντίστοιχη θερμοκρασία.

$$\rho_a T_a = \rho_1 T_1$$

$$T_a = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_a} = \frac{(1{,}20 \text{ kg/m}^3)(293 \text{ K})}{1{,}03 \text{ kg / m}^3}$$
$$= 341 \text{ K}.$$

Στο μέρος Β, ο αέρας θερμαίνεται ώς τους 110°C (383 K), και το μπαλόνι ανυψώνεται ισόθερμα στην ατμόσφαιρα, η οποία έχει σταθερή θερμοκρασία 20°C (293 K). Η ολική δύναμη F που ασκείται στο μπαλόνι ισούται με τη διαφορά της άνωσης F_A και του βάρους του μπαλονιού F_B:

$$F = F_A - F_B$$

$$F_A = \rho_1 V_1 g$$

$$F_B = m_3 g + m_{\mu\pi} g = \rho_3 V_1 g + m_{\mu\pi} g$$

$$F = [(\rho_1 - \rho_3)V_1 - m_{\mu\pi}]g,$$

όπου με m_3 και ρ_3 συμβολίζουμε αντίστοιχα τη νέα μάζα και τη νέα πυκνότητα στη συγκεκριμένη θερμοκρασία.

Η πυκνότητα του θερμού αέρα που περιέχεται στο μπαλόνι μπορεί να προσδιοριστεί, και πάλι, με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων:

$$\rho_3 T_3 = \rho_1 T_1$$

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 T_1}{T_3} = \frac{(1{,}20 \text{ kg/m}^3)(293 \text{ K})}{383 \text{ K}}$$
$$= 0{,}918 \text{ kg/m}^3$$

$$F = [(1{,}20 \text{ kg/m}^3 - 0{,}918 \text{ kg/m}^3) \times$$
$$\times (1{,}10 \text{ m}^3) - 0{,}187 \text{ kg}]9{,}80 \text{ m/s}^2$$

$$F = 1{,}21 \text{ N}.$$

Στο μέρος Γ μας ζητείται να βρούμε το ύψος στο οποίο θα ανέλθει το μπαλόνι. Το μπαλόνι συνεχίζει να ανέρχεται ώσπου η άνωσή του να εξισωθεί με το βάρος του:

$$F_A = \rho_y V_y g,$$

όπου με ρ_y συμβολίζουμε την πυκνότητα του εκτοπιζόμενου αέρα στο ύψος y του μπαλονιού. Έχουμε

$$\rho_y V_y g = \rho_3 V_3 g + m_{\mu\pi} g$$

$$\rho_y = \rho_3 + \frac{m_{\mu\pi}}{V_y}$$

$$\rho_y = 0{,}918 \text{ kg/m}^3 + \frac{0{,}187 \text{ kg}}{1{,}10 \text{ m}^3}$$

$$= 1{,}088 \text{ kg/m}^3.$$

Εφόσον δίνεται η εξάρτηση της πυκνότητας του αέρα από το ύψος, μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε το ύψος στο οποίο θα ανέλθει το μπαλόνι:

$$\rho_y = \rho_1 e^{-\frac{g\rho_1}{P_0} y}$$

$$y = -\frac{P_0}{\rho_1 g} \ln \frac{\rho_y}{\rho_1}$$

$$y = \frac{-1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{\left(1{,}20 \text{ kg/m}^3\right)\left(9{,}80 \text{ m/s}^2\right)} \times$$

$$\times \ln \frac{1{,}088 \text{ kg/m}^3}{1{,}20 \text{ kg/m}^3} = 844 \text{ m}.$$

Στο μέρος Δ μας ζητείται να περιγράψουμε την κίνηση που θα εκτελέσει το μπαλόνι εάν το κατεβάσουμε κατά 10 m από τη θέση ισορροπίας του και, εν συνεχεία, το αφήσουμε ελεύθερο. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι, εφόσον το μπαλόνι βρίσκεται κάτω από το ύψος που προσδιορίσαμε στο μέρος Γ, θα ανυψωθεί. Εάν, ανεβαίνοντας, ξεπεράσει αυτό το ύψος, τότε θα κατέλθει. Συνεπώς, το μπαλόνι θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση. Εάν συνυπολογιστεί και η αντίσταση του αέρα, η κίνηση θα είναι αποσβεννύμενη (φθίνουσα) αρμονική ταλάντωση. ◙

Πειράματα περίθλασης με φως λέιζερ

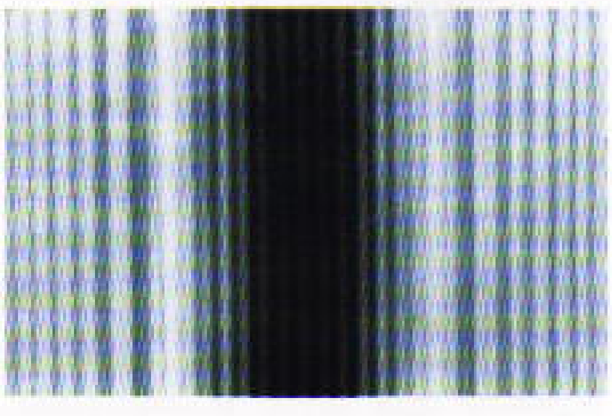
Και απόδειξη της κυματικής φύσης του φωτός

D. Panenko

ΤΑ ΛΕΙΖΕΡ ΕΙΝΑΙ ΠΗΓΕΣ ΦΩΤΟΣ ΜΕ εξαιρετικά υψηλή συμφωνία φάσης. Αυτός είναι ο λόγος που τα χρησιμοποιούμε για να επιτύχουμε σταθερές εικόνες συμβολής και για να παρατηρήσουμε λεπτά φαινόμενα περίθλασης, τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν από άλλες πηγές φωτός πλην των λέιζερ. Στη συνέχεια του άρθρου, λοιπόν, εξηγείται πώς πραγματοποιούνται πειράματα περίθλασης με κυλίνδρους, σφαίρες, ή και άλλα σώματα, αλλά χρησιμοποιώντας πάντοτε φως λέιζερ.

Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται η πειραματική διάταξη για την προβολή μεγεθυσμένων εικόνων περίθλασης Fresnel που προκαλούνται από αδιαφανή εμπόδια διαφόρων σχημάτων. Αποτελείται από ένα λέιζερ, τον αντικειμενικό φακό M ενός μικροσκοπίου, ένα διάφραγμα που φέρει λεπτή σχισμή S, και ένα αντικείμενο O που παράγει την εικόνα περίθλασης, την οποία παρατηρούμε στο επίπεδο P_0P. Τη θέση του επιπέδου μπορούν να καταλαμβάνουν μια λευκή οθόνη (για να παρατηρήσουμε με γυμνό οφθαλμό την εικόνα μεγεθυσμένη), μια φωτογραφική μηχανή χωρίς αντικειμενικό φακό (για να αποτυπώσουμε την εικόνα σε φιλμ) ή ένας φωτοανιχνευτής (για να μπορέσουμε να καταγράψουμε τις ζώνες συμβολής).

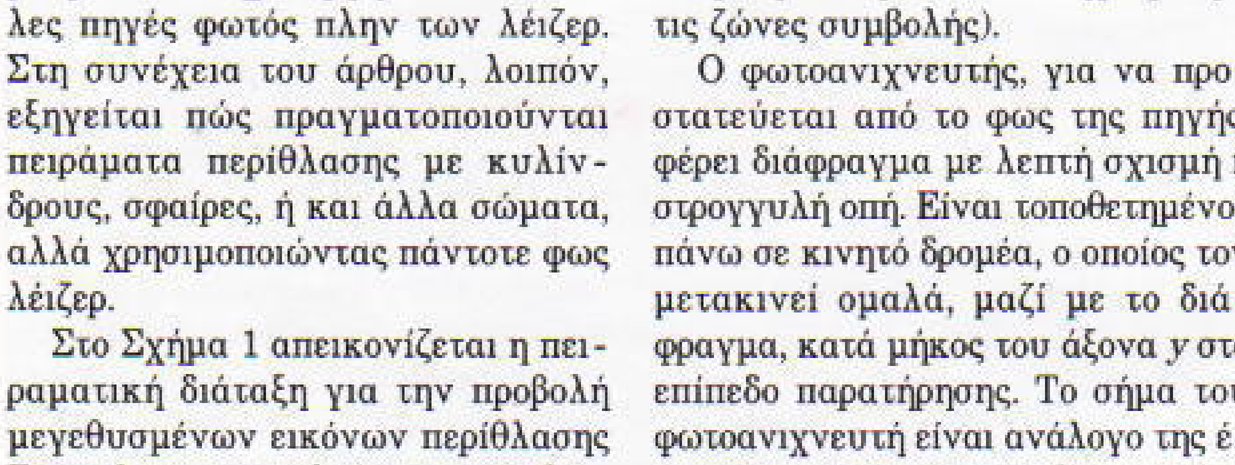
Ο φωτοανιχνευτής, για να προστατεύεται από το φως της πηγής, φέρει διάφραγμα με λεπτή σχισμή ή στρογγυλή οπή. Είναι τοποθετημένος πάνω σε κινητό δρομέα, ο οποίος τον μετακινεί ομαλά, μαζί με το διάφραγμα, κατά μήκος του άξονα y στο επίπεδο παρατήρησης. Το σήμα του φωτοανιχνευτή είναι ανάλογο της έντασης του φωτός που διαπερνά το διάφραγμα, και καταγράφεται από ένα πλότερ (σχεδιογράφο). Το πλότερ περιλαμβάνει έναν δρομέα που κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα x και εκτρέπεται κατά μήκος του άξονα y ανάλογα με το σήμα του φωτοανιχνευτή. Με αυτό τον τρόπο, η συγκεκριμένη συσκευή καταγράφει (στην κλίμακα που επιλέγουμε) την κατανομή του φωτισμού στην εικόνα περίθλασης ως συνάρτηση της απόστασης P_0P. Το μήκος της καταγραφόμενης εικόνας είναι 35 mm.



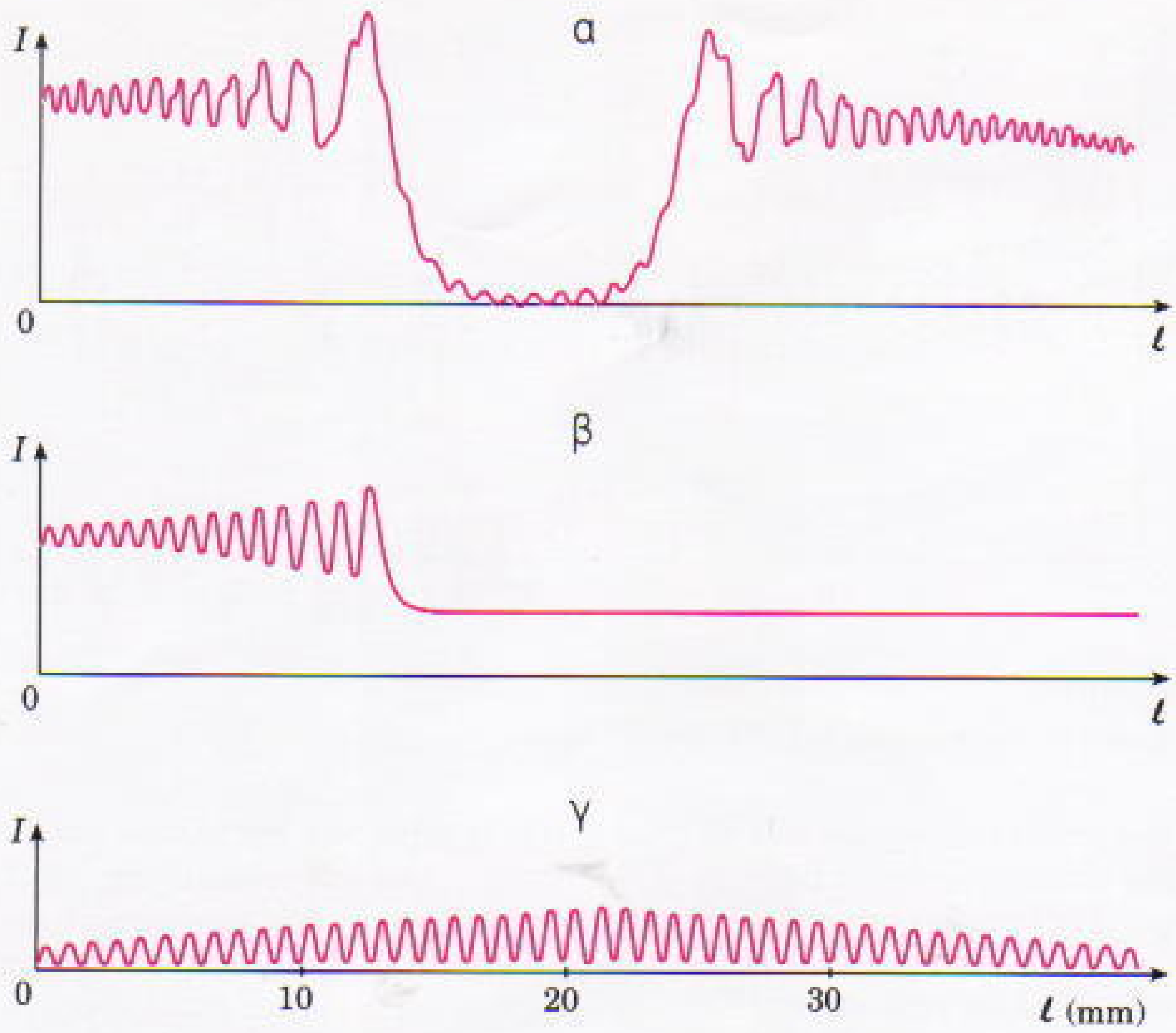
Σχήμα 2
Περίθλαση από κύλινδρο.

Στο πρώτο μας πείραμα πήραμε μια εικόνα περίθλασης από λείο μεταλλικό κύλινδρο διαμέτρου 2 mm. Ο άξονας του κυλίνδρου ήταν κάθετος στο επίπεδο xy, και οι χαρακτηριστικές αποστάσεις ήταν $SO = 1$ mm, $OP_0 = 2{,}5$ mm και $P_0P = 35$ mm (Σχήμα 1). Μπροστά από το φωτοανιχνευτή υπήρχε σχισμή εύρους 0,05 mm, τοποθετημένη παράλληλα προς τον άξονα του κυλίνδρου.

Τα αποτελέσματα του πειράματος φαίνονται στο Σχήμα 2 και στο Σχήμα 3α. Η συμμετρική εικόνα περίθλασης δεν είναι ομοιόμορφη, και μπορούμε να διακρίνουμε δύο ειδών ζώνες συμβολής διαφορετικής προέλευσης. Στην παρυφή της γεωμετρικής σκιάς και καθώς απομακρυνό-



Σχήμα 1



Σχήμα 3
Κατανομή του φωτισμού σε περίθλαση από κύλινδρο (α), από τη μία πλευρά κυλίνδρου (β), από τις δύο «σχισμές» στις πλευρές κυλίνδρου (γ).

μαστε από αυτή, υπάρχει μια ευδιάκριτη τυπική εικόνα περίθλασης χείλους —δηλαδή, οι εναλλασσόμενες σκοτεινές και φωτεινές ζώνες. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτής της εικόνας είναι ότι το διάστημα ανάμεσα στις ζώνες ελαττώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από τον άξονα συμμετρίας. Εκτός από αυτή την εικόνα, υπάρχουν ισαπέχουσες ζώνες (επίσης παράλληλες προς τον άξονα του κυλίνδρου) που εντοπίζονται στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς και ακριβώς έξω από αυτήν. Και τα δύο είδη περίθλασης μπορούν να παρατηρηθούν ξεχωριστά και να αναλυθούν ανεξάρτητα.

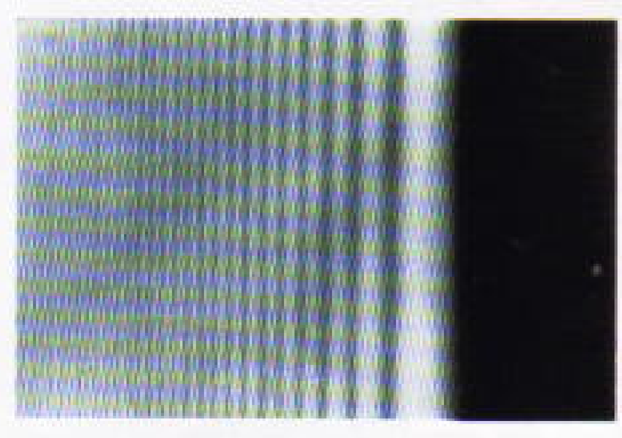
Αν καλύψουμε τη μία πλευρά του κυλίνδρου με ένα αδιαφανές πέτασμα, προκύπτει φαινόμενο περίθλασης μόνο από την ακάλυπτη πλευρά του κυλίνδρου (Σχήμα 4). Η προκύπτουσα κατανομή του φωτισμού φαίνεται στο Σχήμα 3β. Πρόκειται για μια τυπική εικόνα περίθλασης χείλους, αποτελούμενη από ένα σύνολο ζωνών των οποίων το πλάτος και το κοντράστ (φωτοαντίθεση) μειώνονται με την απόσταση από τη γεωμετρική σκιά του χείλους.

Ας έλθουμε τώρα στη δεύτερη εικόνα περίθλασης, η οποία συνίσταται από ισαπέχουσες ζώνες παράλληλες στον άξονα του κυλίνδρου και εντοπίζονται στην περιοχή της γεωμετρικής σκιάς. Η φύση των ζωνών αυτών μπορεί να εξηγηθεί από το πείραμα του Thomas Young (1773-1829) —τη συμβολή φωτεινών κυμάτων που προέρχονται από δύο λεπτές σχισμές. Οι περιοχές του μετώπου κύματος πολύ κοντά στην επιφάνεια του κυλίνδρου αποτελούν τις πηγές των δευτερογενών κυμάτων. Και η εικόνα περίθλασης στην περιοχή της γεωμετρικής σκιάς πίσω από τον κύλινδρο προκύπτει από τη συμβολή αυτών ακριβώς των κυμάτων.

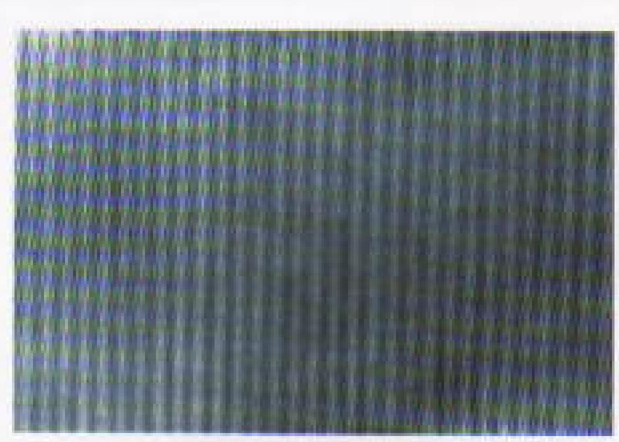
Για να εκτελέσουμε το σχετικό πείραμα (παρόμοιο με το πείραμα του Young), τοποθετήσαμε τον κύλινδρο μεταξύ των δύο φύλλων που σχηματίζουν τη σχισμή *S*. Το πλάτος της σχισμής επελέγη τέτοιο ώστε να δημιουργούνται δύο ανοίγματα —μεταξύ της επιφάνειας του κυλίνδρου και των φύλλων της σχισμής— πλάτους 0,1 mm το καθένα. Όταν η συγκεκριμένη διάταξη φωτίστηκε με φως λέιζερ, εμφανίστηκαν δύο φωτεινές γραμμές στις πλευρές του κυλίνδρου, οι οποίες παρήγαγαν την εικόνα περίθλασης αλά Young. Το ότι αυτή η εικόνα περίθλασης αποτελείται από ισαπέχουσες ζώνες φαίνεται στο Σχήμα 5· η κατανομή δε του φωτισμού φαίνεται στο Σχήμα 3γ.

Επομένως, η συνολική εικόνα περίθλασης από έναν κύλινδρο μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση δύο στοιχειωδών εικόνων: αυτής που δημιουργεί η περίθλαση χείλους στις δύο ακάλυπτες πλευρές του κυλίνδρου, και αυτής που δημιουργεί η περίθλαση σε διπλή σχισμή αλά Young. (Κατά τη σύγκριση των διαγραμμάτων στο Σχήμα 3, πρέπει να έχουμε υπόψη ότι οι καμπύλες (α) και (β) καταγράφηκαν με την ίδια ευαισθησία, ενώ η καμπύλη (γ) με υψηλότερη.)

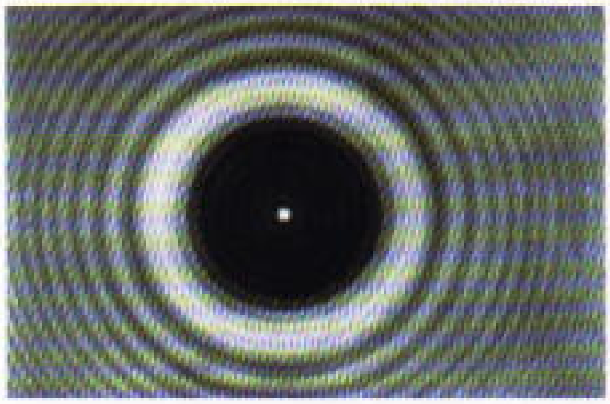
Στο δεύτερο πείραμά μας χρησιμοποιήσαμε μια σφαίρα διαμέτρου 2,4 mm. Η σφαίρα στερεώθηκε προ-



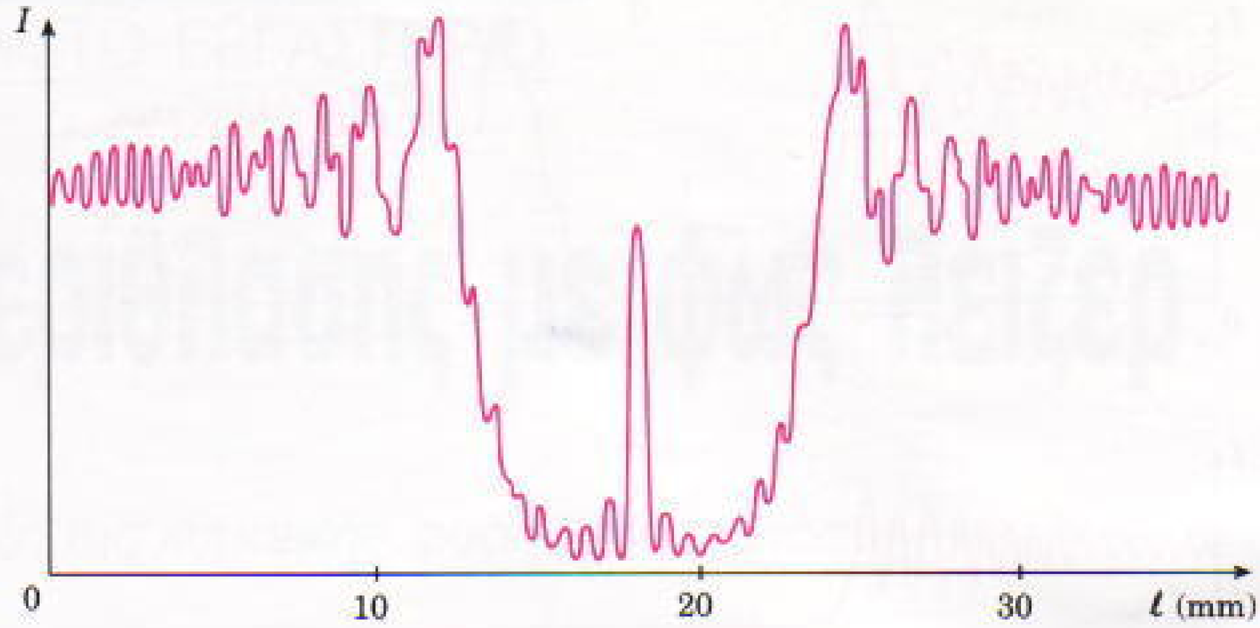
Σχήμα 4
Περίθλαση από τη μία (ακάλυπτη) πλευρά κυλίνδρου.



Σχήμα 5
Ζώνες συμβολής από δύο λεπτές σχισμές (πείραμα του Young).



Σχήμα 6
Περίθλαση από σφαίρα.



Σχήμα 7
Κατανομή του φωτισμού σε περίθλαση από σφαίρα.

σεκτικά με πλαστελίνη πάνω σε επίπεδη γυάλινη πλάκα και τοποθετήθηκε στη διαδρομή της αποκλίνουσας φωτεινής δέσμης (Σχήμα 1). Μπροστά από το φωτοανιχνευτή τοποθετήθηκε διάφραγμα με οπή διαμέτρου 0,1 mm.

Τα αποτελέσματα του πειράματος απεικονίζονται στα Σχήματα 6 και 7· είναι σαφώς εμφανή δύο ειδών εικόνες περίθλασης —όπως και στο πείραμα με τον κύλινδρο. Ωστόσο, στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς μπορούμε να διακρίνουμε ένα έντονα φωτεινό σημείο, γνωστό ως κηλίδα Arago-Poisson. Η ιστορία αυτής της κηλίδας είναι διδακτική και ενδιαφέρουσα.

Το 1818 ορίστηκε από τη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών το πρόβλημα της περίθλασης του φωτός ως θέμα ενός διαγωνισμού. Οι περισσότεροι από τους οργανωτές αυτού του διαγωνισμού ήταν οπαδοί της σωματιδιακής θεωρίας του φωτός και περίμεναν πως οι καινούργιες εργασίες που θα υποβάλλονταν στο διαγωνισμό θα σηματοδοτούσαν τον τελικό θρίαμβο της ευνοούμενής τους θεωρίας. Εντούτοις, ο Augustin-Jean Fresnel (1788-1827), στην εργασία που υπέβαλε εξηγούσε όλα τα γνωστά οπτικά φαινόμενα βάσει της κυματικής θεωρίας του φωτός. Διαβάζοντας την πραγματεία του, ο διάσημος γάλλος επιστήμονας Siméon-Denis Poisson (1781-1840) διαπίστωσε πως η θεωρία του Fresnel οδηγεί σε ένα «παράλογο» συμπέρασμα: θα έπρεπε να υπάρχει μια φωτεινή κηλίδα στο κέντρο της σκιάς που ρίχνει πίσω του ένας μικρός, στρογγυλός, αδιαφανής δίσκος. Αυτή η θεωρητική πρόβλεψη ώθησε τον Francois Arago (1786-1853) να πραγματοποιήσει το σχετικό πείραμα, στο οποίο όντως παρατήρησε τη φωτεινή κηλίδα ακριβώς στο κέντρο της στρογγυλής σκιάς. Το εν λόγω πείραμα υπήρξε αποφασιστικής σημασίας για την αποδοχή της κυματικής θεωρίας.

Με τη βοήθεια του ισχυρού και σύμφωνου φωτός λέιζερ, κατέστη δυνατό να παρατηρήσουμε φωτεινούς δακτυλίους τόσο μέσα στη γεωμετρική σκιά όσο και έξω από αυτήν. Η φύση των δακτυλίων μπορεί να εξηγηθεί στο πλαίσιο της ίδιας συλλογιστικής που χρησιμοποιήσαμε για τον κύλινδρο. Να τονίσουμε ωστόσο ότι η εικόνα στο εσωτερικό της γεωμετρικής σκιάς οφείλεται στην περίθλαση από άπειρο πλήθος αντιδιαμετρικές πηγές φωτός, τις οποίες δημιουργεί το μέτωπο κύματος που αλληλεπιδρά με την επιφάνεια της σφαίρας.

Συμπερασματικά, ο πειραματισμός με ισχυρό και σύμφωνο φως λέιζερ προσφέρει ουσιαστικές γνώσεις για το φαινόμενο της περίθλασης Fresnel από σώματα διαφόρων σχημάτων.

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Ανερχόμενοι αστέρες», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.
- A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Δημιουργία χρωμάτων», Ιούλιος/Αύγουστος 1997.

Ο αιώνας της κυκλοειδούς

Το χρονικό μιας έρευνας που ξεκινά με τον Γαλιλαίο και καταλήγει στον Νεύτωνα

S.G. Gindikin

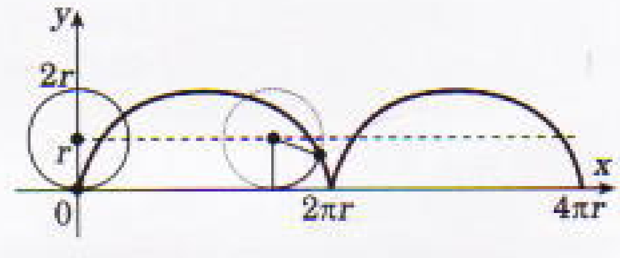
Ο 17ΟΣ ΑΙΩΝΑΣ ΗΤΑΝ Η ΧΡΥΣΗ εποχή του απειροστικού λογισμού και κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου η καμπύλη που ονομάζεται κυκλοειδής έπαιξε έναν μοναδικό ρόλο. Παραδόξως, αναφορές στην κυκλοειδή συναντούμε ακόμη και στη λογοτεχνία.

Στο τρίτο μέρος των *Ταξιδιών του Γκιούλιβερ*, ο Τζόναθαν Σουίφτ περιγράφει την επίσκεψη του Γκιούλιβερ στο ιπτάμενο νησί Λαπούτα. Ο βασιλιάς τής Λαπούτα, προστάτης των επιστημών, του προσφέρει ένα εξαιρετικό δείπνο στο οποίο σερβίρεται μια αρνίσια μπριζόλα σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου. Αυτό το γεωμετρικό κυρίως πιάτο το ακολούθησε μια πουτίγκα κυκλοειδούς σχήματος. Πιθανότατα, στις αρχές του 17ου αιώνα, ήταν δύσκολο να φανταστεί κανείς ένα σχήμα περισσότερο μυστηριώδες από την κυκλοειδή.

Τριάντα χρόνια περίπου μετά την έκδοση του βιβλίου τα *Ταξίδια του Γκιούλιβερ*, η κυκλοειδής εμφανίζεται στο διήγημα *Τρίστραμ Σάντυ* του Laurence Sterne. Σε αυτό, ο Toby Shandy, ένας εκκεντρικός, καλοκάγαθος άνθρωπος, θέλει να δημιουργήσει ένα θαύμα της μηχανικής. Αποφασίζει να κατασκευάσει μια γέφυρα σε σχήμα κυκλοειδούς, όπως αυτή περιγράφεται στο περιοδικό *Acta Eruditorum* το 1695: «...ένα μολύβδινο βάρος κρατά αιώνια ισορροπία, και επιστατεί εφάμιλλα ζεύγους πυλώνων, εφόσον έχει κατασκευαστεί σαν μια καμπύλη που προσεγγίζει την κυκλοειδή —αν όχι ακριβώς σαν την ίδια την κυκλοειδή». Ας δούμε τι γνώριζαν οι σύγχρονοι του Shandy, στα μέσα του 17ου αιώνα, για την κυκλοειδή.

Μια καλή πηγή πληροφοριών είναι ένα έργο του Amos Dettonville, το *Histoire de la Roulette, Appellée Autrement Trochoide ou Cycloide* (Η ιστορία της ρουλέτας, που ονομάζεται και τροχοειδής ή κυκλοειδής) (1658). Στην πραγματικότητα, Amos Dettonville ήταν ένα ψευδώνυμο που χρησιμοποιούσε ο Blaise Pascal (1623-1662), ο γάλλος μαθηματικός, φυσικός και φιλόσοφος. Ο Pascal έγραψε ότι η κυκλοειδής είναι μια τόσο κοινή καμπύλη ώστε κανένα άλλο σχήμα, εκτός από την ευθεία και τον κύκλο, δεν παρατηρείται τόσο συχνά. Υποστηρίζει ότι εμφανίζεται τόσο πολλές φορές ενώπιόν μας ώστε είναι παράδοξο το γεγονός ότι οι αρχαίοι δεν την παρατήρησαν.

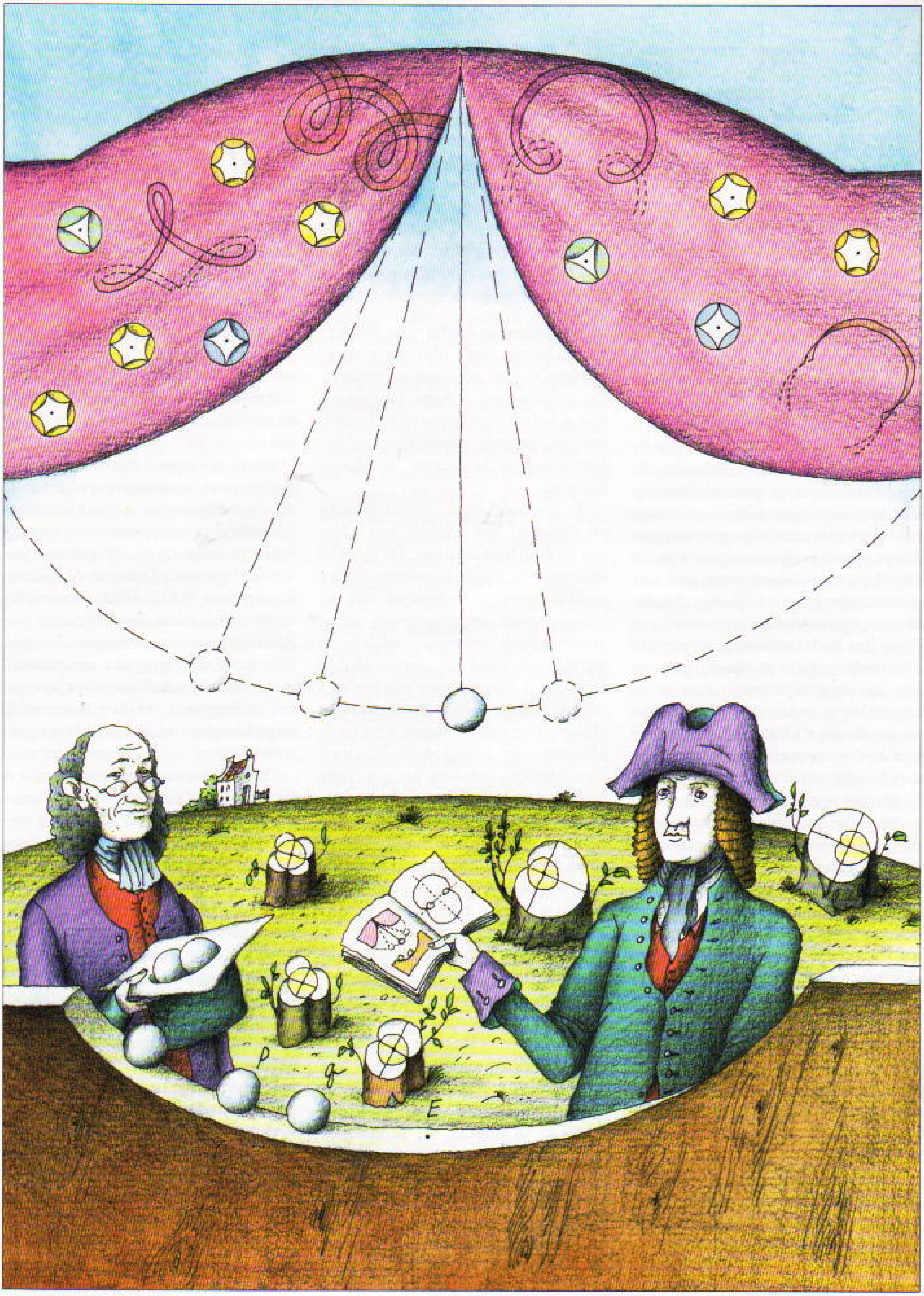
Η κυκλοειδής είναι απλώς η διαδρομή που ακολουθεί ένα καρφί το οποίο έχει σφηνωθεί στο πέλμα ενός τροχού, από τη στιγμή που το καρφί αφήνει το έδαφος μέχρι τη στιγμή που το συναντά ξανά. Υποτίθεται ότι ο τροχός είναι ιδανικός κύκλος και το έδαφος ιδανικό επίπεδο. Αυτός είναι επίσης και ο ορισμός της κυκλοειδούς: η τροχιά ενός σημείου της περιφέρειας ενός κύκλου που κυλίεται επί μίας ευθείας, χωρίς ολίσθηση. Κατά την άνοδό του από την κατώτερη θέση, το σημείο διαγράφει ένα συμμετρικό κυρτό τόξο. Κάθε περιστροφή του κύκλου παράγει ένα νέο τόξο, και υπάρχει μια ακίδα (η θέση στην οποία το σημείο αλλάζει κατεύθυνση κίνησης) όπου τα τόξα εφάπτονται μεταξύ τους (Σχήμα 1).

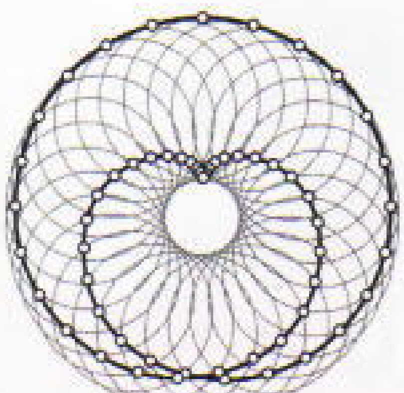


Σχήμα 1

Ο όρος *κυκλοειδής* εισήχθη από τον Γαλιλαίο (1564-1624), ο οποίος ήταν πιθανότατα ο πρώτος που παρατήρησε αυτή την καμπύλη. Ο όρος *ρουλέτα* είναι γαλλικός (από το ρήμα rouler που σημαίνει «κυλώ») ενώ στα ελληνικά έχει αποδοθεί ως *τροχοειδής* ή, συνηθέστερα, ως *κυκλοειδής*. Η διαφορά στην ορολογία οφείλεται στη διαφωνία Γάλλων και Ιταλών σχετικά με το ποιος ανακάλυψε την καμπύλη. Ο Pascal υποστήριξε ότι την καμπύλη ανακάλυψε ο πατήρ Marin Mersenne (1588-

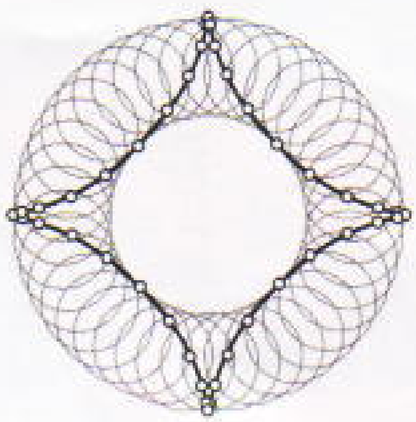
Εικονογράφηση: V. Ivanuyk


E



Σχήμα 2

Σχήμα 3



Σχήμα 4

Σχήμα 5

1648) το 1615, πριν από τον Γαλιλαίο.

Οι επικυκλοειδείς στο σύστημα του Πτολεμαίου

Γιατί λοιπόν δεν παρατήρησαν ποτέ οι «αρχαίοι» την κυκλοειδή; Τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων ήταν η μόνη πηγή νέων καμπυλών που διέθεταν, και οι τροχιές καμπυλόγραμμων κινήσεων ήταν αρκετά έξω από τα ενδιαφέροντα των περισσότερων αρχαίων μαθηματικών. Η νέα μηχανική, που ξεκίνησε με το έργο του Γαλιλαίου στις αρχές του 17ου αιώνα, ήταν αυτή που έστρεψε την προσοχή των μαθηματικών σε καμπύλες οι οποίες προέρχονται από τη μηχανική. Ο Γαλιλαίος εισήγαγε την πρώτη τέτοια καμπύλη —την κυκλοειδή.

Παρότι οι αρχαίοι αγνοούσαν την κυκλοειδή, γνώριζαν και χρησιμοποίησαν με επιτυχία μία στενή συγγενή της, την επικυκλοειδή. Η επικυκλοειδής (Σχήματα 2 και 3) προκύπτει ως η τροχιά ενός σημείου που ανήκει σε έναν κύκλο ο οποίος κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο εξωτερικό ενός δεύτερου σταθερού κύκλου (αν ο κύκλος κυλίεται στο εσωτερικό του δεύτερου κύκλου, προκύπτει μια *υποκυκλοειδής* —βλ. Σχήμα 4). Συναντούμε τις επικυκλοειδείς στο γεωκεντρικό μοντέλο του ηλιακού συστήματος που ανέπτυξε ο Πτολεμαίος (περ. 85 μ.Χ.- περ. 165 μ.Χ.).

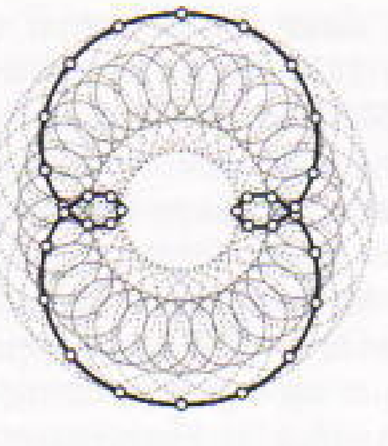
Ο Πλάτων (427-347 π.Χ) και ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ) πίστευαν ότι όλοι οι πλανήτες, καθώς και ο Ήλιος και η Σελήνη, κινούνται κυκλικά γύρω από τη Γη. Η θεωρία αυτή όχι μόνο ερχόταν σε αντίθεση με τα διαθέσιμα αριθμητικά δεδομένα, αλλά και ήταν αδύνατον να εξηγήσει πολλά ποιοτικά φαινόμενα. Για παράδειγμα, ο Άρης, που συνήθως κινείται στον ουρανό αριστερόστροφα, μερικές φορές κινείται δεξιόστροφα (η λεγόμενη *ανάδρομη κίνηση*).

Το γεγονός αυτό μπορεί εύκολα να εξηγηθεί στα πλαίσια του ηλιοκεντρικού συστήματος. Οι αρχαίοι επιστήμονες, όμως, προσπάθησαν να συμβιβάσουν τα δεδομένα των αστρονομικών παρατηρήσεων με το γεωκεντρικό σύστημα («σώζειν τα φαινόμενα» κατά τον αρχαίο όρο). Ο Εύδοξος, ο Απολλώνιος και στη συνέχεια ο Πτολεμαίος διατήρησαν το αξίωμα της ομοιόμορφης κυκλικής κίνησης που κυβερνά το Σύμπαν. Υποστήριξαν, ωστόσο, ότι η κίνηση των πλανητών ήταν περίπλοκη: Κάθε πλανήτης κινείται επί ενός κύκλου το κέντρο του οποίου, με τη σειρά του, κινείται επί ενός μεγάλου κύκλου, στο κέντρο του οποίου βρίσκεται η Γη. Αν επιλέξουμε κατάλληλα τις ταχύτητες αυτών των περιστροφών, οι τροχιές των πλανητών θα περιέχουν βρόχους που επιτρέπουν την εμφάνιση ανάδρομης κίνησης. Οι τροχιές αυτές δεν είναι ακριβείς επικυκλοειδείς, αλλά τις πλησιάζουν σε μεγάλο βαθμό.

Όταν ένας κύκλος κυλίεται στο εξωτερικό ενός άλλου, σταθερού κύκλου, τα σημεία της περιμέτρου του διαγράφουν μια επικυκλοειδή ενώ τα σημεία του εσωτερικού του διαγράφουν μια άλλη καμπύλη, την καλούμενη *βεβραχυμένη κυκλοειδή*, οι κορυφές της οποίας είναι ομαλές (Σχήμα 5). Αν προσαρτήσουμε μια ράβδο στον κυλιόμενο κύκλο, τα άκρα της θα περιγράψουν μια *επιμήκη κυκλοειδή*, οι κορυφές της οποίας έχουν γίνει βρόχοι. Τα άκρα της ράβδου κινούνται ανάδρομα κατά μήκος αυτών των βρόχων (Σχήμα 6).

Αυτή η ευφυής θεωρία δεν εξηγούσε μόνο ποιοτικά φαινόμενα όπως η ανάδρομη κίνηση, αλλά πέτυχε επίσης να ερμηνεύσει τις αστρονομικές παρατηρήσεις για εκατοντάδες χρόνια. Όταν ο Νικόλαος Κοπέρνικος (1473-1543) επαναπρότεινε το ηλιοκεντρικό σύστημα του Αριστάρχου, αντιμετώπισε δυσκολίες στην εξήγηση των αστρονομικών παρατηρήσεων σε σύγκριση με τις υπάρχουσες, εκείνη την εποχή, παραλλαγές του πτολεμαϊκού συστήματος.

Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι ο Κοπέρνικος (και αργότερα ο Γαλιλαίος) δεν απέρριψε την αρχή της ομαλής κυκλικής κίνησης και διατήρησε τις κυκλικές τροχιές (τις οποίες αργότερα αντικατέστησε με ελλειπτικές ο Kepler (1571-1630)). Επεδίωκε να συνθέσει μια ευθύγραμμη κίνηση με βάση κυκλικές κινήσεις (επικρατούσε η άποψη ότι οι κομήτες κινούνται σε ευθείες τροχιές), και πράγματι κατάφερε να βρει μια μέθοδο: Έστω ότι μια περιφέρεια ακτίνας 1/2 κυλίεται στο εσωτερικό μιας περιφέρειας ακτίνας 1. Τότε τα σημεία της περιγράφουν κάποιες συγκεκριμένες εκφυλισμένες υποκυκλοειδείς που ταυτίζονται με τις διαμέτρους του σταθερού κύκλου —κάθε σημείο κινείται μπρος-πίσω πάνω στη διάμετρό του. Αξίζει να προσπαθήσετε να κατασκευάσετε αυτή την όμορφη, συναρπαστική εικόνα.



Σχήμα 6

Η αναγνώριση της κυκλοειδούς

Δεν γνωρίζουμε πότε ακριβώς άρχισε να ενδιαφέρεται ο Γαλιλαίος για την κυκλοειδή. Στις αρχές του αιώνα, όταν ήταν νέος και ανακάλυψε τους νόμους τις κίνησης, ή τριάντα χρόνια αργότερα, όταν έγραφε τους *Διαλόγους περί δύο νέων επιστημών*, παλεύοντας πλέον με την προϊούσα τύφλωση; Με το βιβλίο αυτό σκόπευε να καταγράψει τις αξιοσημείωτες αλλά αδημοσίευτες ανακαλύψεις του στη μηχανική. Εκείνη την εποχή ο Γαλιλαίος εξέτιε την ποινή της Ιεράς Εξέτασης στη βίλα του κοντά στη Φλωρεντία. Στη διάρκεια αυτών των τελευταίων ετών της ζωής του, είχε τη συμπαράσταση δύο μαθητών του, του Vincenzo Viviani (1622-1647) και του πιο πεπειραμένου Evangelista Torricelli (1608-1647). Τον βοήθησαν να ολοκληρώσει τα σχέδιά του και να αναπτύξει τις ιδέες του, καθώς ο Γαλιλαίος δεν είχε πλέον τη δύναμη να τα επιτύχει όλα μόνος του.

Ο Γαλιλαίος γνώριζε πολύ καλά ποια από τα προβλήματα που αφορούσαν την κυκλοειδή έπρεπε να λυθούν πρώτα. Ήταν τα προβλήματα της κατασκευής της εφαπτομένης και του υπολογισμού του εμβαδού κάτω από το τόξο της κυκλοειδούς και των σχετικών καμπυλόγραμμων σχημάτων. Με τη σύγχρονη ορολογία, το πρώτο πρόβλημα αναφέρεται στον διαφορικό και το δεύτερο στον ολοκληρωτικό λογισμό.

Η εφαπτομένη της κυκλοειδούς

Στην Ιταλία, ο πρώτος που κατασκεύασε την εφαπτομένη της κυκλοειδούς ήταν ο Viviani. Αργότερα, ο Torricelli επινόησε μια κομψή μέθοδο κατασκευής της, που βασίστηκε σε συνδυασμό κινήσεων. Θεώρησε πρώτα την παραβολή που διαγράφει ένα σώμα το οποίο βάλλεται οριζόντια (ή υπό γωνία με την οριζόντια). Η εν λόγω κίνηση είναι ο συνδυασμός ευθύγραμμης ομαλής κίνησης και ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης (ελεύθερης πτώσης). Κάθε στιγμή, οι ταχύτητες στις επιμέρους κινήσεις είναι γνωστές, και αν τις προσθέσουμε σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, θα προκύψει η συνισταμένη ταχύτητα, η οποία έχει διεύθυνση εφαπτόμενη στην παραβολή. Θα είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικό αν επαναλάβουμε αυτόν τον υπολογισμό αρχίζοντας από το γεγονός ότι η εφαπτομένη της παραβολής $y = x^2$ στο σημείο (x, x^2) διέρχεται από το σημείο $(x/2, 0)$. Είναι εντυπωσιακό ότι ο Γαλιλαίος δεν ανακάλυψε αυτή την κατασκευή (ή μήπως απλώς δεν τη δημοσίευσε;).

Η κίνηση επί της κυκλοειδούς είναι συνδυασμός μιας ομαλής ευθύγραμμης οριζόντιας κίνησης και μιας ομαλής περιστροφής. Οι ταχύτητες των δύο επιμέρους κινήσεων είναι ίσες (διότι ο κύκλος κυλά χωρίς ολίσθηση). Αν θεωρήσουμε τη συνισταμένη των ταχυτήτων της οριζόντιας και της περιστροφικής κίνησης (η οποία έχει ίσο μέτρο με την οριζόντια και εφάπτεται στον γενετήριο κύκλο), βλέπουμε ότι η εφαπτομένη της κυκλοειδούς διέρχεται από το ανώτερο σημείο του γενετήριου κύκλου στην αντίστοιχη θέση (προσπαθήστε να αναπαραγάγετε αυτή την κατασκευή στο Σχήμα 1).

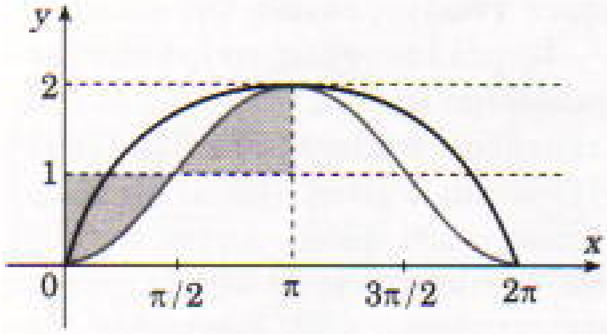
Μια παρόμοια κατασκευή ανακαλύφθηκε (ίσως λίγο νωρίτερα) από έναν Γάλλο, τον Gilles Personne de Roberval (1602-1675). Ο Roberval κατόρθωσε να αναπτύξει μια γενική τεχνική σχεδιασμού εφαπτομένων αντιμετωπίζοντας τις καμπύλες ως τροχιές μιας συνισταμένης κίνησης. Η μέθοδός του μπορούσε να εφαρμοστεί στην κυκλοειδή και σε άλλα σχήματα και συναγωνιζόταν με επιτυχία τις άλλες μεθόδους που ήταν γνωστές εκείνη την εποχή.

Το μέλλον, όμως, ανήκε στις περισσότερο άμεσες μεθόδους που ανέπτυξαν ο Pierre Fermat (1601-1665) και ο Rene Descartes (Καρτέσιος, 1596-1650). Αυτές οι μέθοδοι δεν απαιτούσαν την ξεχωριστή αντιμετώπιση κάθε καμπύλης (δηλαδή, δεν ήταν αναγκαίο να ρυθμίζονται οι συνιστώσες κινήσεις). Αυτό που είχε ενδιαφέρον ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσον αυτές οι μέθοδοι μπορούσαν να εφαρμοστούν στην κατασκευή εφαπτόμενων καμπυλών μηχανικής προελεύσεως —για παράδειγμα, της κυκλοειδούς.

Αποδείχτηκε ότι η εφαπτομένη της κυκλοειδούς μπορούσε να κατασκευαστεί εύκολα με τη μέθοδο του Fermat, ενώ η μέθοδος του Descartes, που έδινε καλά αποτελέσματα με τις πολυωνυμικές καμπύλες, απέτυχε. Ο Descartes όμως δεν ήταν άνθρωπος που παραιτούνταν εύκολα. Επινόησε μια κομψή μηχανική θεωρία. Αντί να χρησιμοποιήσει έναν κύκλο που κυλά σε μια ευθεία, θεώρησε έναν δίσκο. Σ' αυτή την περίπτωση, η κίνηση προσεγγίζεται κάθε χρονική στιγμή από μια περιστροφή γύρω από ένα (στιγμιαίο) κέντρο περιστροφής. Η ταχύτητα κάθε σημείου είναι κάθετη στην ακτίνα που φέρουμε από το κέντρο περιστροφής προς το σημείο αυτό. Στην περίπτωσή μας, το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής είναι το κατώτερο σημείο του κυλιόμενου δίσκου το οποίο εφάπτεται στην ευθεία κίνησης του δίσκου. Αυτός ο τρόπος σκέψης οδηγεί σε έναν κανόνα για το σχεδιασμό της εφαπτομένης της κυκλοειδούς.

Το εμβαδόν και ο σύντροφος της κυκλοειδούς

Ας στρέψουμε την προσοχή μας στα εμβαδά. Οι γάλλοι μαθηματικοί, όταν μελέτησαν τα κυκλοειδή, θεώρησαν πρώτα τα προβλήματα που έχουν σχέση με εμβαδά, πριν εξετάσουν όσα σχετίζονται με εφαπτόμενες (πιθανόν διότι ένιωθαν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση με τα εμβαδά). Το πρώτο πρόβλημα ήταν ο υπολογισμός του εμβαδού κάτω από το τόξο της κυκλοειδούς. Ο Viviani και



Σχήμα 7

ο Torricelli υποστήριξαν ότι ο Γαλιλαίος γνώριζε πως το εμβαδόν είναι τριπλάσιο του εμβαδού του γενετήριου κύκλου, και ο Roberval απέδειξε το θεώρημα αυτό το 1634. Θα αναπτύξουμε εν συντομία τον κομψό συλλογισμό του.

Ο Roberval προβάλλει κάθε χρονική στιγμή το παρατηρούμενο σημείο της κυκλοειδούς στην κατακόρυφη διάμετρο του κυλιόμενου κύκλου και παρατηρεί τη μεταβολή αυτής της προβολής. Η καμπύλη που διαγράφεται από την προβολή ονομάστηκε σύντροφος της κυκλοειδούς (Σχήμα 7). Αργότερα αποδείχτηκε ότι αυτή η συμμετρική καμπύλη δεν ήταν τίποτε άλλο παρά μια μετατοπισμένη καμπύλη ημιτόνου! Μ' αυτό τον τρόπο, και όχι ως γράφημα της συνάρτησης του ημιτόνου, εμφανίστηκε για πρώτη φορά στα μαθηματικά η καμπύλη του ημιτόνου. Το εμβαδόν κάτω από τη συγκεκριμένη καμπύλη υπολογίζεται εύκολα. Αν χωρίσουμε την περιοχή κατά μήκος της οριζόντιας και της κατακόρυφης μεσοπαράλληλης, προκύπτουν τέσσερα τμήματα που σχηματίζουν ορθογώνιο με πλευρές $2\pi r$ και r (δείτε το Σχήμα 7, όπου $r = 1$). Επομένως, το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη του ημιτόνου είναι $2\pi r^2$.

Τι μπορούμε να πούμε για τους τομείς μεταξύ της κυκλοειδούς και του «συντρόφου» της; Τα τμήματα αυτά ονομάστηκαν *πέταλα του Roberval* και μας δίνουν την ευκαιρία να γνωρίσουμε μια μέθοδο υπολογισμού εμβαδών ιδιαίτερα δημοφιλή εκείνη την εποχή: την αρχή του Cavalieri. Η αρχή αυτή δηλώνει ότι, αν οι τομές δύο σχημάτων από μία τυχαία οριζόντια γραμμή είναι ίσες, τότε τα δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά. Ο Cavalieri θεωρούσε ότι τα σχήματα συντίθενται από τα «αδιαίρετα» —παράλληλα στρώματα μηδενικού πάχους—, και υποστήριξε ότι το εμβαδόν δεν μεταβάλλεται όταν αυτά τα αδιαίρετα μετατοπίζονται. Η τομή του πετάλου του Roberval από μια οριζόντια ευθεία είναι ίση με το τμήμα της χορδής μεταξύ του αντίστοιχου ημικυκλίου και της κατακόρυφης διαμέτρου του. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri, το συνολικό εμβαδόν τους ισούται με το εμβαδόν του κύκλου —δηλαδή, πr^2. Άρα, το συνολικό εμβαδόν κάτω από το τόξο της κυκλοειδούς ισούται με $3\pi r^2$. Αναμφίβολα, μια ευφυέστατη λύση.

Τα προβλήματα του Mersenne και ο διαγωνισμός του Pascal

Φτάσαμε έτσι στο τέλος του πρώτου σταδίου της «ζωής» της κυκλοειδούς. Τα πρώτα προβλήματα που αφορούσαν την καμπύλη είχαν λυθεί με κομψό τρόπο, και η κυκλοειδής καθιερώθηκε στα μαθηματικά. Όμως, πολλά προβλήματα που ανέκυπταν φυσιολογικά στο πλαίσιο της ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού παρέμεναν άλυτα. Ο φραγκισκανός μοναχός πατήρ Marin Mersenne (τον οποίο αναφέραμε και νωρίτερα) έπαιξε έναν σημαντικό ρόλο στη συζήτηση των νέων προβλημάτων. Παρόλο που τα επιτεύγματα του Mersenne στα μαθηματικά και τη φυσική δεν είναι αμελητέα (για παράδειγμα, μέτρησε με αρκετή ακρίβεια την ταχύτητα του ήχου), η συνεισφορά του στην οργάνωση της επιστήμης ήταν πολύ πιο σημαντική.

Εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν επιστημονικά περιοδικά και ο Mersenne αποτελούσε τον συνδετικό κρίκο μεταξύ των επιστημόνων σε ολόκληρη την Ευρώπη. Επιστήμονες από διάφορες χώρες ανακοίνωναν τα αποτελέσματά τους στον Mersenne και αυτός τα μετέφερε σε άλλους ενδιαφερομένους (το κύρος του εξασφάλιζε την απαιτούμενη προσοχή από μέρους τους). Ο Mersenne παρακολουθούσε τα επιστημονικά προβλήματα και ενημέρωνε για αυτά εκείνους τους επιστήμονες που θα μπορούσαν να τα αντιμετωπίσουν κατά τον καλύτερο τρόπο. Από το 1639 άρχισε να οργανώνει κάθε εβδομάδα τις συναντήσεις της Πέμπτης, στις οποίες συμμετείχαν οι Etienne και Blaise Pascal (πατέρας και γιος), Girard Desargues, Claude Mydorge, Roberval, και άλλοι. Αυτές οι «Πέμπτες» ήταν οι πρόδρομοι της δημιουργίας της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών.

Η σχέση του με τον Christiaan Huygens (1629-1695) είναι χαρακτηριστική του τρόπου με τον οποίο ο Mersenne βοηθούσε την εξέλιξη των νέων ταλέντων. Η αλληλογραφία τους άρχισε το 1646. Στην αρχή τού έθεσε προβλήματα για εξάσκηση, στη συνέχεια άλυτα προβλήματα και τέλος του παρουσίασε το πρόβλημα του ανηγμένου μήκους ενός φυσικού εκκρεμούς. Ο Huygens χρειάστηκε αρκετές δεκαετίες για να λύσει αυτό το πρόβλημα.

Όπως με την κυκλοειδή, ο Mersenne υποστήριζε ότι η μελέτη της δεν έπρεπε να περιοριστεί στον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από ολόκληρο το τόξο, αλλά να περιλάβει και τα τμήματα που ορίζονται μέσω τομών από διάφορες οριζόντιες ευθείες. Θα έπρεπε να βρεθεί το κέντρο βάρους και ο όγκος των σωμάτων που παράγονται από την περιστροφή αυτών των τμημάτων, και ούτω καθεξής. Είναι πιθανόν ότι ο Mersenne διαισθανόταν πως οι στοιχειώδεις υπολογισμοί με τα αδιαίρετα του Cavalieri δεν μπορούσαν να δώσουν απαντήσεις σε αυτά τα προβλήματα: έπρεπε να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα του ημιτόνου στη γενική του μορφή. Γι' αυτό το λόγο, ο Mersenne ήθελε να δουλέψει με τα εν λόγω προβλήματα ο Pascal, ο ευφυέστερος από όλους τους συναδέλφους του.

Ωστόσο, ο Pascal στράφηκε σ' αυτά τα προβλήματα μόνο την άνοιξη του 1658, όταν ζούσε σε ένα μοναστήρι στο Πορτ-Ρουαγιάλ και φαινόταν ότι δεν θα ασχολούνταν ξανά με τα μαθηματικά. Σύμφωνα με την αδελφή τού Pascal, την Gilberte Perier, και την ανιψιά του Marguerite, στράφηκε και πάλι στα μαθηματικά εξαιτίας της αϋπνίας που του προκαλούσε ένας φριχτός πονόδοντος. Η μελέτη της κυκλοειδούς τον βοήθησε να ξεχάσει τον πόνο και σύντομα τον απορρόφησε ολοκληρωτικά. Όταν έφτασε το πρωί, ήξερε τη λύση του προβλήματος και ο πονόδοντος είχε εξαφανιστεί. Ο Pascal δεν ήθελε να καταγράψει το αποτέλεσμά του, αλλά ο φίλος του δούκας της Ροάν τον έπεισε για το αντίθετο ισχυριζόμενος ότι η επιστροφή του στα μαθηματικά ήταν αποτέλεσμα θείας έμπνευσης. Ο δούκας, με τη σειρά του, είχε την ιδέα να οργανώσει έναν διαγωνισμό για την επίλυση των προβλημάτων του Mersenne και να προσφέρει στο νικητή σημαντικό χρηματικό ποσό.

Τον Ιούνιο του 1658 στάλθηκε στους σημαντικότερους ευρωπαίους μαθηματικούς μια επιστολή που περιείχε έξι προβλήματα σχετικά με την κυκλοειδή. Το χρονικό περιθώριο για τις απαντήσεις ήταν ιδιαίτερα στενό —η 1η Οκτωβρίου. Η επιστολή έφερε την υπογραφή Amos Dettonville, ένας αναγραμματισμός του Louis de Montalte, του ψευδώνυμου που είχε χρησιμοποιήσει ο Pascal στο βιβλίο του *Lettres a un Provincial*. Τα αποτελέσματα ανακοινώθηκαν στις 24 Οκτωβρίου. Ο Mersenne πέθανε πριν λυθούν τα προβλήματά του και τη θέση του ως προέδρου της επιτροπής κατέλαβε ο Pierre Carcavi (1603-1684). Ο John Wallis (1616-1703) έλυσε όλα τα προβλήματα, υπήρχαν όμως ενστάσεις για τις λύσεις του. Ο Huygens έλυσε τέσσερα προβλήματα και το βραβείο δόθηκε στον Dettonville, ο οποίος χρησιμοποίησε τα χρήματα για να εκδώσει τα αποτελέσματα.

Ο διαγωνισμός έπαιξε σημαντικό ρόλο στην επιστημονική ζωή. Η μετάβαση από τη θεώρηση συγκεκριμένων περιπτώσεων σε γενικά προβλήματα είχε καθοριστική σημασία για το μέλλον του απειροστικού λογισμού. Η μέθοδος που πρότεινε ο Pascal δεν χρησιμοποιούσε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της κυκλοειδούς και μπορούσε να επεκταθεί σε γενικότερες περιπτώσεις. Τούτο όμως ήταν κάτι που δεν το έκανε ο ίδιος ο Pascal, και μόνο ο Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) εκτίμησε αυτή την πλευρά της μεθόδου.

Ο Leibniz, που μαζί με τον Νεύτωνα (1643-1727) ανέπτυξε τις γενικές μεθόδους του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, είχε εκπλαγεί από το γεγονός ότι ο Pascal δεν επέκτεινε τη μέθοδο ανάλυσης της κυκλοειδούς σε γενικότερες περιπτώσεις. Είναι δύσκολο να μαντέψουμε την αιτία. Συχνά οι επιστήμονες δεν βλέπουν αμέσως κάποιες λύσεις που στη συνέχεια φαίνονται απολύτως φυσικές. Από την άλλη πλευρά, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι δεν ενδιαφερόταν πλέον για τα μαθηματικά. Τα τελευταία χρόνια της ζωής του τον απασχολούσε έντονα το ζήτημα του σκοπού της ζωής και της θέσης του ανθρώπου στη Γη.

Ο διαγωνισμός του Pascal εγκαινίασε ένα νέο στάδιο στη μελέτη της κυκλοειδούς. Οι διαγωνιζόμενοι δεν περιορίστηκαν στα προβλήματα που έθεσε ο Pascal. Για παράδειγμα, ο Christopher Wren (1632-1723), ένας ταλαντούχος άγγλος μαθηματικός και διάσημος αρχιτέκτονας (ήταν ο σχεδιαστής του καθεδρικού ναού του Αγίου Παύλου στο Λονδίνο), δεν τα κατάφερε πολύ καλά σε όλα τα προβλήματα του διαγωνισμού, υπολόγισε όμως το μήκος του τόξου της κυκλοειδούς. Απέδειξε ότι αυτό ισούται με $8r$ και το αποτέλεσμα αυτό εντυπωσίασε εξαιρετικά τους μαθηματικούς.

Το ρολόι με το κυκλοειδές εκκρεμές

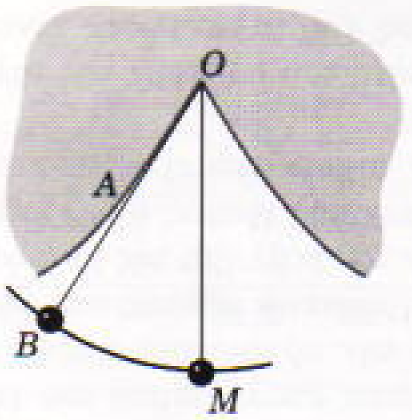
Ένας άλλος διαγωνιζόμενος ήταν ο εικοσιοκτάχρονος Huygens, ο οποίος, για να λύσει τα προβλήματα της κυκλοειδούς, διέκοψε το κύριο έργο του —την κατασκευή ενός ρολογιού με εκκρεμές. Το πρώτο μοντέλο του ρολογιού του εμφανίστηκε το 1658, και από τότε ο Huygens αφοσιώθηκε στη βελτίωσή του.

Η ιδέα στην οποία βασίζεται η κατασκευή του ρολογιού με εκκρεμές είναι ότι η περίοδος των ταλαντώσεων συνιστά μια αναπαράξιμη μονάδα χρόνου, η οποία παραμένει αμετάβλητη καθώς η ταλάντωση αποσβέννυται. Αυτή είναι η ιδιότητα ισοχρονισμού του εκκρεμούς, την οποία ανακάλυψε ο Γαλιλαίος (η περίοδος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη του πλάτους της ταλάντωσης).

Ο σημαντικότερος άλυτος επιστημονικός γρίφος του 17ου αιώνα ήταν το πρόβλημα της μέτρησης του γεωγραφικού μήκους στη θάλασσα. Από την αρχαιότητα ήταν γνωστός ο τρόπος υπολογισμού του γεωγραφικού πλάτους βάσει της θέσης των άστρων. Όμως, τα άστρα περιφέρονται από την ανατολή στη δύση και έτσι δεν είναι δυνατόν να προσφέρουν ένδειξη για γεωγραφικό μήκος ενός πλοίου στη θάλασσα. Οι ηγέτιδες ναυτικές δυνάμεις της εποχής προσέφεραν τεράστια χρηματικά ποσά σε όποιον θα παρείχε μια αξιόπιστη μέθοδο υπολογισμού του γεωγραφικού μήκους στη θάλασσα. Αν, για παράδειγμα, κατασκευαζόταν ένα αξιόπιστο χρονόμετρο που να λειτουργεί καλά σε ένα πλοίο εν κινήσει, τότε αυτό το ρολόι θα μπορούσε να δίνει την ώρα του λιμανιού από το οποίο απέπλευσε το πλοίο. Ο τοπικός χρόνος θα προσδιοριζόταν από την παρατήρηση του Ήλιου ή των άστρων, και η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο χρόνων θα έδινε το γεωγραφικό μήκος του πλοίου. (Σήμερα θα λέγαμε ότι προσδιορίζουμε τη χρονική άτρακτο στην οποία βρίσκεται το πλοίο, τον 17ο αιώνα όμως δεν υπήρχε κάποιο παρόμοιο παγκόσμιο σύστημα.) Ο Huygens σκόπευε να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις του για την κυκλοειδή στην κατασκευή ενός τέτοιου χρονόμετρου.

Με την εμφάνιση της εφεύρεσης του Huygens έγινε γνωστό ότι και ο Γαλιλαίος είχε συλλάβει την ιδέα ενός ρολογιού με εκκρεμές έναν μόλις χρόνο πριν από το θάνατό του, όταν δεν είχε πια τη δύναμη να υλοποιήσει την ιδέα του. Ούτε ο γιος του Vincenzo, που επρόκειτο να ολοκληρώσει το σχέδιο μετά το θάνατο του πατέρα του, επίσης κατάφερε να λύσει το πρόβλημα.

Δημιουργώντας το πρώτο ρολόι με εκκρεμές ο Huygens ανακάλυψε ότι ο ισχυρισμός του Γαλιλαίου πως οι ταλαντώσεις του εκκρεμούς είναι ισόχρονες δεν ευσταθεί απολύτως. Ισχύει μόνο για μικρές ταλαντώσεις.



Σχήμα 8

Πώς θα μπορούσε λοιπόν να εγγυηθεί για το ισόχρονο των ταλαντώσεων; Ο Huygens γνώριζε ότι το μήκος του εκκρεμούς πρέπει να μειώνεται όσο αυτό απομακρύνεται από την κατακόρυφο. Ποια ήταν όμως η ακριβής σχέση μεταξύ της θέσης του εκκρεμούς και του ποσού κατά το οποίο έπρεπε να μειώνεται το μήκος του; Στο πρώτο του ρολόι ο Huygens χρησιμοποίησε ελάσματα που περιόριζαν το μήκος του εκκρεμούς καθώς αυτό ταλαντωνόταν (Σχήμα 8). Έπειτα από δοκιμές και διορθώσεις, βρήκε ένα σχήμα που έδινε ικανοποιητικό αποτέλεσμα, δεν γνώριζε ωστόσο ποια επακριβώς ήταν η μορφή των ελασμάτων. Απελπισμένος, αφαίρεσε τα ελάσματα από το μοντέλο του 1658 και τα αντικατέστησε με ένα σύστημα περιορισμού του πλάτους. Όμως, έπειτα από έναν χρόνο επανέφερε τα ελάσματα. Γνώριζε πλέον ποιο ακριβώς έπρεπε να είναι το σχήμα τους ώστε να εξασφαλίζεται το ισόχρονο των ταλαντώσεων. (Θυμηθείτε ότι στο διάστημα που μεσολάβησε πήρε μέρος στο διαγωνισμό του Pascal.)

Ο Γαλιλαίος γνώριζε πολύ καλά ότι το πρόβλημα της απλής ταλάντωσης μπορούσε να αναχθεί σε ένα άλλο πρόβλημα. Φανταστείτε μια σημειακή μάζα —ας πούμε κάτι σαν έναν βαρύ βόλο— που κυλά σε μια κοίλη επιφάνεια, το σχήμα της οποίας συμπίπτει με την τροχιά του εκκρεμούς. Τότε, οι φυσικοί περιορισμοί που τίθενται στη μάζα η οποία κινείται πάνω στην επιφάνεια είναι όμοιοι με αυτούς που τίθενται στο εκκρεμές. Η συνθήκη του ισοχρονισμού είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ότι το σωματίδιο φτάνει στο κατώτερο σημείο της επιφάνειας στο ίδιο χρονικό διάστημα, ανεξάρτητα από το σημείο εκκίνησής του. Ένα τέτοιο φαινόμενο δεν προξενεί έκπληξη: Αν το σωματίδιο ξεκινήσει από υψηλότερο σημείο, τότε διασχίζει μεγαλύτερη απόσταση έχοντας όμως αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα. Αλλά ο Huygens ανακάλυψε πως, αντίθετα με ό,τι πίστευε ο Γαλιλαίος, η κυκλική επιφάνεια δεν οδηγεί στον ισοχρονισμό. Ο Huygens ανακάλυψε ποια μορφή έπρεπε να έχει η επιφάνεια ώστε ο χρόνος καθόδου να παραμένει ανεξάρτητος από το σημείο εκκίνησης, και ονόμασε την επιφάνεια *ταυτοχρόνου* (ονομάζεται επίσης *ισοχρόνου*). Αποδεικνύεται ότι η καμπύλη ταυτοχρόνου είναι απλώς μια ανεστραμμένη κυκλοειδής.

Παρά ταύτα, το πρόβλημα ισοχρονισμού του εκκρεμούς δεν είχε ακόμη λυθεί. Ήταν απαραίτητο να βρεθεί η μορφή των ελασμάτων που εξασφαλίζει ότι η μάζα του εκκρεμούς κινείται κατά μήκος μιας κυκλοειδούς. Νωρίτερα, ο Huygens είχε μελετήσει τα *αναπτύγματα* διαφόρων καμπύλων. Ας υποθέσουμε ότι τυλίγουμε σφιχτά μια κλωστή κατά μήκος μιας καμπύλης και ότι τραβούμε το ένα άκρο της από την καμπύλη έτσι ώστε αυτή να «ξετυλιχτεί». Η διαδρομή που διαγράφει το άκρο της κλωστής ονομάζεται *ενελιγμένη* της καμπύλης. Ο Huygens, μελετώντας τις ενελιγμένες διαφόρων καμπυλών, κατάλαβε ότι για να κινηθεί το βαρίδι του εκκρεμούς κατά μήκος μιας κυκλοειδούς, θα έπρεπε και τα ελάσματα να έχουν σχήμα κυκλοειδές. Επίσης θα πρέπει, όταν ολόκληρο το νήμα (από την κορυφή ώς το βαρίδι) προσκολληθεί στο έλασμα, το βαρίδι να βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο (το τοπικό ελάχιστο) του κυκλοειδούς ελάσματος. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως θεώρημα του Wren, και συνήθως διατυπώνεται ως εξής: η εσωτερική περίμετρος του ελάσματος είναι διπλάσια του μήκους του εκκρεμούς.

Ο Huygens ήταν βέβαιος ότι οι ιδιότητες της κυκλοειδούς που είχε ανακαλύψει ήταν θεμελιώδους σημασίας. Έγραψε ότι είχε εδραιώσει και ενισχύσει τις μελέτες του Γαλιλαίου για την πτώση των σωμάτων και ότι αισθανόταν πως η ανακάλυψη των ιδιοτήτων της κυκλοειδούς ήταν το μεγαλύτερο επίτευγμα σε αυτό το πεδίο μελετών.

Το 1661 άρχισε η δοκιμή της ναυτικής παραλλαγής του ρολογιού με εκκρεμές, δεν οδήγησε όμως στην κατασκευή ενός αξιόπιστου χρονόμετρου θαλάσσης. Παρ' όλα αυτά, οι μελέτες πάνω στα μαθηματικά και τη μηχανική που διεξήγαγε ο Huygens με αφορμή το ρολόι εκκρεμούς ήταν τόσο σημαντικές ώστε το βιβλίο του *Horologium Oscillatorium* (1673) να θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα έργα στην κλασική μηχανική, μαζί με τα βιβλία του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα. Στο *Horologium Oscillatorium* ο Huygens υποστηρίζει ότι οι ιδιότητες της κυκλοειδούς έχουν μελετηθεί καλύτερα από αυτές οποιασδήποτε άλλης καμπύλης.

Το τελευταίο μυστήριο της κυκλοειδούς

Η κυκλοειδής εξέπληξε τους μαθηματικούς για μία ακόμη φορά κατά το τέλος του αιώνα του απειροστικού λογισμού. Ο Νεύτων ήταν ο πρώτος που κατανόησε την ανάγκη μετάβασης από μεμονωμένα προβλήματα στην κατασκευή μιας γενικής μεθόδου. Την περίοδο των ετών της πανώλης, στο Λίνκολνσάιρ, ουσιαστικά ανακάλυψε τον απειροστικό λογισμό (τη «μέθοδο των ροών»). Ωστόσο δεν δημοσίευσε αμέσως τη μέθοδό του, αλλά τη χρησιμοποίησε για να επιτύχει ποικίλα αποτελέσματα. Πολλά από αυτά εμφανίζονται στις σελίδες του έργου του *Μαθηματικές αρχές της φυσικής φιλοσοφίας* (1687), η ίδια όμως η μέθοδος δεν παρουσιάζεται διεξοδικά.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1670, ο Leibniz, προσπαθώντας να ξεφύγει λίγο από τις αναρίθμητες διοικητικές και επιστημονικές ασχολίες του, άρχισε να αναπτύσσει το φορμαλισμό του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού (κάτω από την ισχυρή επιρροή του Pascal). Έμαθε για το έργο του Νεύτωνα και το 1676 άρχισε να αλληλογραφεί μαζί του. Σε αντίθεση με τον Νεύτωνα, ο Leibniz προσπάθησε να στρέψει την προσοχή προς τη μέθοδό του χρησιμοποιώντας και τις προσωπικές επαφές του και το περιοδικό *Acta Eruditorum* (όπως θα θυμάστε, αυτό ήταν το περιοδικό που διάβασε ο Toby Shandy), και το οποίο είχε αρχίσει να εκδίδεται από το 1682.

Το 1696 εμφανίστηκε στο *Acta Eruditorum* μια ανακοίνωση με τίτλο «Ένα νέο πρόβλημα το οποίο όλοι οι μαθηματικοί καλούνται να λύσουν». Το πρόβλημα ήταν το εξής: «Δίδονται δύο σημεία *A* και *B* σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Βρείτε τροχιά *AMB* τέτοια ώστε το σώμα *M*, κινούμενο υπό την επίδραση της βαρύτητας και ακολουθώντας αυτή την τροχιά, να κατέρχεται από το *A* στο *B* στον συντομότερο δυνατό χρόνο». Το πρόβλημα έγινε δημοφιλές. Ο Leibniz έγραψε ότι ήταν πολύ κομψό και τελείως πρωτότυπο. Όμως στους *Διαλόγους περί δύο νέων επιστημών* ο Γαλιλαίος σχολιάζει το γεγονός ότι ένα βαρύ σωματίδιο κατέρχεται πιο αργά κατά μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος παρά αν ακολουθήσει μια τεθλασμένη γραμμή με τα ίδια άκρα. Ήταν βέβαιος ότι η καμπύλη της ταχύτερης καθόδου είναι το τεταρτοκύκλιο. Η καμπύλη ταχύτερης καθόδου είχε ονομαστεί *βραχυστόχρονη*. Αποτελούσε όμως πράγματι τμήμα κύκλου;

Η στιγμή που εμφανίστηκε το πρόβλημα της ταχύτερης καθόδου ήταν καίρια· απόδειξη, το γεγονός ότι λύθηκε σύντομα από αρκετούς μαθηματικούς: από δύο από τους αδελφούς Bernoulli —τον Jacob (1654-1705) και τον Johann (1667-1748)—, τον Leibniz, τον Guillaume de l'Hôpital (1661-1704) και τον Νεύτωνα (η λύση που παρουσίασε ήταν ανώνυμη, τον προδίδει όμως η έκδηλη στην απόδειξη ευφυΐα του). Η λύση του Johann Bernoulli αποδείχτηκε η πλέον ενδιαφέρουσα. Η ιδέα του ήταν τελείως απρόσμενη. Πρότεινε την αντικατάσταση αυτού του προβλήματος μηχανικής με ένα πρόβλημα οπτικής!

Αποδεικνύεται ότι, αν υποθέσουμε πως η ταχύτητα του φωτός σε σημείο *M* ισούται με $\sqrt{2gy}$, όπου *y* είναι η υψομετρική διαφορά μεταξύ των σημείων *A* και *M* (και *g* είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας), τότε η τροχιά μιας ακτίνας φωτός που διαδίδεται από το *A* προς το *B* ακολουθεί τη βραχυστόχρονη καμπύλη. (Ο Fermat είχε ήδη διατυπώσει την αρχή ότι το φως, όταν κινείται μεταξύ δύο σημείων, αναζητεί τη διαδρομή που απαιτεί το ελάχιστο χρονικό διάστημα για να τη διασχίσει.) Με τη βοήθεια των νόμων της ανάκλασης και των ιδιοτήτων της εφαπτομένης της κυκλοειδούς (που τη γνώριζαν πλέον πολύ καλά), είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η βραχυστόχρονη είναι απλώς μια ανεστραμμένη κυκλοειδής με κορυφή στο σημείο A!

Ένας ιστορικός της μηχανικής έγραψε ότι ο Johann Bernoulli δεν χρησιμοποίησε κάποια γενική μέθοδο για να βρει την κομψή του απόδειξη, αλλά μόνο τη γεωμετρική του διαίσθηση και όσα στοιχεία οπτικής ήταν γνωστά στην εποχή του. Έτσι εκδηλωνόταν η καλλιτεχνική του φύση μέσα στην επιστήμη. Ο αδελφός του Jacob ήταν τελείως διαφορετικού είδους επιστήμονας. Διέθετε πολύ μικρότερη δημιουργική φαντασία αλλά είχε ισχυρή κριτική ικανότητα. Μπορεί η λύση του να ήταν λιγότερο ενδιαφέρουσα, ο ίδιος όμως δεν έχασε την ευκαιρία να αναπτύξει ουσιαστικά μια γενική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων τέτοιου είδους. Έτσι, βλέπουμε τα δύο αδέλφια να είναι προικισμένα με διαφορετικές πλευρές του επιστημονικού ταλέντου, οι οποίες συνυπάρχουν σε μεγάλους επιστήμονες, όπως ο Νεύτων.

Η εποποιία της κυκλοειδούς φτάνει στο τέλος της μαζί με το τέλος του 17ου αιώνα. Η κυκλοειδής εμφανιζόταν μυστηριωδώς σε διάφορα προβλήματα και κανένας δεν αμφέβαλλε ότι παίζει σημαντικό ρόλο στη φύση. Λίγο αργότερα, όμως, έγινε φανερό ότι η κυκλοειδής δεν συνδέεται με τους θεμελιώδεις νόμους της φύσης όπως, για παράδειγμα, οι κωνικές τομές. Τα προβλήματα από τα οποία ανέκυψε η κυκλοειδής έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της μηχανικής και του απειροστικού λογισμού, με την πρόοδο όμως αυτών των επιστημών αποδείχθηκε ότι τα εν λόγω προβλήματα δεν είχαν εξαιρετική σημασία. Υπήρξε επομένως μια διδακτική ιστορική αυταπάτη. Ωστόσο, μαθαίνοντας την ιστορία της κυκλοειδούς, διδαχτήκαμε πολλά για την ιστορία της επιστήμης. ◼

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 29*

$$d\beta = -\beta\frac{dy}{h}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι θεμελιώδης στις φυσικές επιστήμες, και με αυτή τη μορφή εμφανίζεται ευρύτατα. Περιγράφει, για παράδειγμα, τη διάσπαση των ραδιενεργών πυρήνων (όπου το *y* εκφράζει το χρόνο και το *h* τον μέσο χρόνο ζωής). Επίσης, περιγράφει την ανάπτυξη των μικροβίων στα δισκία Petri (στη συγκεκριμένη περίπτωση το *h* είναι αρνητικό). Για το πρόβλημα που εξετάζουμε, η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

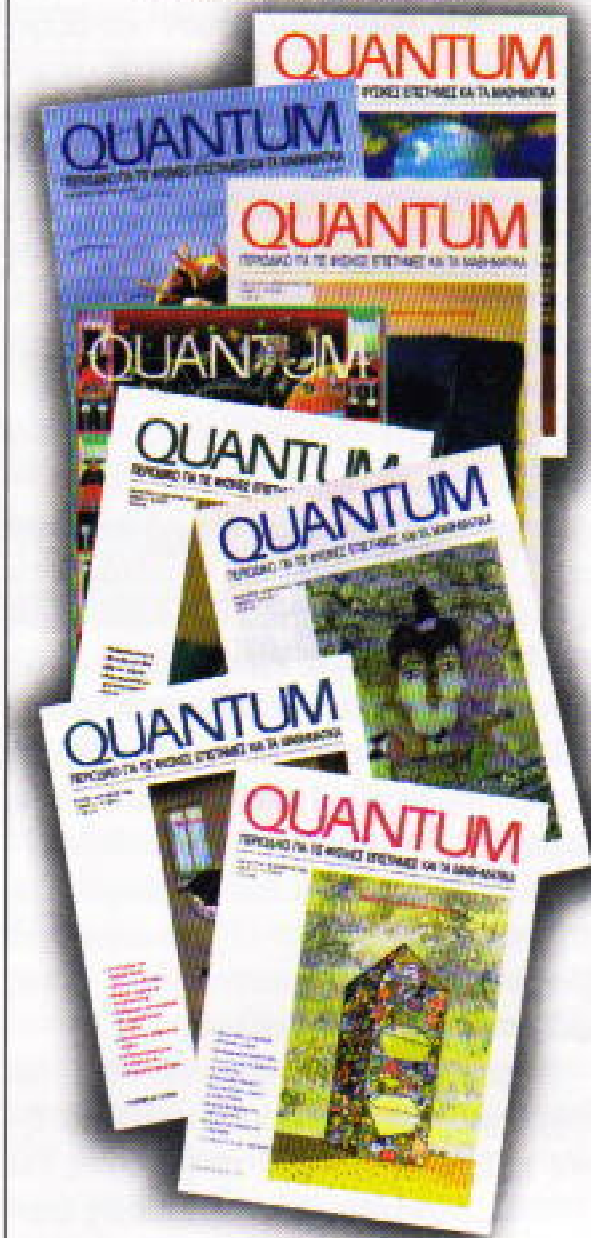
$$\left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^2 = 1 - e^{-y/h}$$

(αν έχετε αμφιβολίες, ρωτήστε τον πρώτο τυχόντα που θα συναντήσετε έξω από τη φοιτητική εστία).

Θα αναρωτιέστε για το τέλος της ιστορίας. Ο φιλόδοξος φίλος μας, λοιπόν, υπολογίζοντας τα έξοδα της κατασκευής —μέσα σ' αυτά και το κέρασμα των συμφοιτητών του—, θεωρώντας εκ των προτέρων βέβαιες τις αντιρρήσεις του επιστάτη της εστίας, αλλά και της αστυνομίας, λαμβάνοντας υπόψη του τη μεγάλη πιθανότητα να λιώσουν οι πάγοι (οπότε η τριβή με την επιφάνεια της στέγης θα έπρεπε να συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς του), συνεκτιμώντας και το προσωπικό του όφελος από την πιθανή εμφάνιση των δημοσιογραφικών φακών, αποφάσισε, φευ, πως είναι ευκολότερο και πολύ οικονομικότερο να αγοράσει ένα αεροπορικό εισιτήριο. Το πολύ πολύ, αν ήταν άτυχος, να καθυστερούσε λίγο η πτήση του. Καλό σου ταξίδι, φτωχέ μας νεαρέ... ◼

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum διανύει τον έκτο χρόνο συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά-επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, επί έξι χρόνια προσφέρει μέσα από τις σελίδες του την τεκμηριωμένη γνώση αποκαλύπτοντας στο ελληνικό κοινό τη γοητεία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα, λοιπόν, έχουν κυκλοφορήσει τριάντα ένα τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.
Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.
Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου. Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.
Κυκλοφορεί και η θήκη του έκτου τόμου, για την αρχειοθέτηση των αντίστοιχων τευχών.

Ιστορίες κβαντικής τρέλας —1

Γνωριμία με τα εννοιολογικά προβλήματα της κβαντικής φυσικής —της επαναστατικής θεωρίας που ανδρώθηκε στον αιώνα που φεύγει

David Lindley

«ΜΗΝ ΠΑΙΡΝΕΤΕ ΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ αυτή και τόσο στα σοβαρά· απλώς χαλαρώστε και απολαύστε την... Πρόκειται να σας μιλήσω για το πώς συμπεριφέρεται η φύση. Κι αν αποδεχτείτε πως μπορεί και να συμπεριφέρεται με αυτό τον τρόπο, θα ανακαλύψετε ότι είναι υπέροχη, ότι είναι συναρπαστική. Αποφεύγετε να αναρωτιέστε συνεχώς "Μα πώς γίνεται να συμπεριφέρεται έτσι", επειδή θα οδηγηθείτε σε ένα σκοτεινό αδιέξοδο από το οποίο κανείς δεν έχει ακόμη επιστρέψει. Σας βεβαιώνω, ουδείς γνωρίζει το λόγο που συμπεριφέρεται με τον τρόπο αυτό.»

Αυτά είχε πει ο νομπελίστας φυσικός Richard Feynman μιλώντας για την κβαντική θεωρία. Πρέπει, λοιπόν, να λάβουμε σοβαρά υπόψη μας την προειδοποίησή του. Όταν θα τελειώνετε αυτό το άρθρο —πρόκειται να δημοσιευτεί σε τρεις συνέχειες—, θα έχετε γνωρίσει τις πιο ακραίες συνέπειες μιας πραγματικά ξεχωριστής θεωρίας. Ωστόσο, αν προσπαθήσετε να την περιγράψετε με οικείους όρους —σύμφωνα με αυτό που λέμε κοινή λογική—, θα απογοητευθείτε. Ο κβαντικός κόσμος όντως είναι διαφορετικός, κι αν επιθυμείτε να συμφιλιωθείτε μαζί του, πρέπει να αποβάλετε κάθε ίχνος δυσπιστίας. Λοιπόν, δεν μένει παρά να ξεκινήσουμε.

Εν αρχή...

Γιατί οι φυσικοί της παλιάς σχολής θεωρούσαν την κβαντική θεωρία συγκεχυμένη, ανησυχητική και επικίνδυνη;

Κάποτε, σ' αυτό τον πλανήτη κυριαρχούσε το πνεύμα του Νεύτωνα· και τότε ο κόσμος ήταν ένα ασφαλές μέρος για όλους μας. Όταν χτυπούσες μια συνηθισμένη, «κλασική» μπάλα του μπιλιάρδου, μπορούσες να προβλέψεις πόσο γρήγορα θα κινούνταν και προς ποια κατεύθυνση. Κι όταν θα ακινητοποιούνταν, γνώριζες από πριν πού ακριβώς θα βρισκόταν. Αυτές οι απλές αντιλήψεις φαίνονταν προφανείς, ακόμη και αναγκαίες. Οι περισσότεροι πίστευαν ότι η φυσική, προκειμένου να οδηγήσει στην κατανόηση των φαινομένων, έπρεπε να στηρίζεται σε τέτοια στέρεα και αδιάσειστα θεμέλια.

Ώσπου, στις 19 Οκτωβρίου του 1900, ο φυσικός Max Planck παρουσίασε στη Γερμανική Εταιρεία Φυσικών μια εργασία που κλόνιζε τα θεμέλια της φυσικής. Ο Planck, ένας σοβαρός άνθρωπος σαράντα δύο ετών, ήταν μάλλον μεγάλος για να ξεκινήσει μια επανάσταση. Εντούτοις, η ανακάλυψή του έμελλε να αλλάξει εκ βάθρων την κλασική φυσική της μπάλας του μπιλιάρδου. Η εργασία του απαντούσε σε ένα χρόνιο ερώτημα: Γιατί το χρώμα της ακτινοβολίας ενός πυρακτωμένου σώματος μεταβάλλεται από κόκκινο σε πορτοκαλί και τελικά σε γαλάζιο καθώς η θερμοκρασία του αυξάνεται; Ο Planck ανακάλυψε ότι η σωστή απάντηση προκύπτει αν θεωρήσουμε πως η ακτινοβολία —όπως και η ύλη— συνίσταται από μικρά διακριτά ποσά. Ονόμασε αυτά τα στοιχειώδη πακέτα ενέργειας *κβάντα* (λατινική λέξη που δηλώνει μια πεπερασμένη και καθορισμένη ποσότητα). Προς στιγμήν ο Planck φαντάστηκε πως θα μπορούσε να προκύψει μια βαθύτερη εξήγηση των κβάντων.

Γρήγορα όμως έγινε φανερό ότι η «κβάντωση» της ενέργειας —ο κατακερματισμός της σε αδιαίρετα μέρη— αποτελούσε στην πραγματικότητα έναν νέο θεμελιώδη κανόνα της φύσης. Στον Planck, που είχε διδαχθεί και βιώσει την κλασική φυσική, δεν άρεσε αυτό το συμπέρασμα. Και εναντιώθηκε μέχρι το τέλος της ζωής του, διατυμπανίζοντας ότι οι νέες επιστημονικές θεωρίες υποσκελίζουν τις παλαιότερες όχι επειδή οι άνθρωποι αλλάζουν τρόπο σκέψης, αλλά απλώς επειδή οι γεροντότεροι πεθαίνουν.

Δεν μας προκαλεί έκπληξη ότι ο Planck θορυβήθηκε από τις συνέπειες της κβαντικής θεωρίας. Αν αποδεχτούμε τα συμπεράσματά της, τίποτε δεν είναι όπως φαίνεται —ή όπως υπαγορεύει η κοινή λογική και η νευτώνεια φυσική. Τα πράγματα αλλάζουν όταν τα κοιτάζετε. Τα πάντα συμπεριφέρονται με τρόπους απρόβλεπτους.

Θεωρήστε, για παράδειγμα, την αρχή της απροσδιοριστίας, η οποία απορρέει αναπόφευκτα από την κβαντική θεωρία. Σύμφωνα με αυτή, δεν μπορείτε ποτέ να μετρήσετε όλες τις ιδιότητες ενός συστήματος ή σωματιδίου με όση ακρίβεια επιθυμείτε. Ή, για να το θέσουμε διαφορετικά, οι μετρήσεις επηρεάζουν το αντικείμενο το οποίο προσπαθείτε να μετρήσετε! Επίσης, υπάρχει η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού, σύμφωνα με την οποία ένα ηλεκτρόνιο, για παράδειγμα, μπορεί άλλες φορές να συμπεριφέρεται ως κύμα και άλλες ως σωματίδιο! Όλες αυτές οι ιδέες υποδεικνύουν τούτο: ότι τα φυσικά αντικείμενα —ακόμη και η ίδια η πραγματικότητα— δεν μοιάζουν καθόλου με ό,τι καθένας μας υπέθετε μέχρι τώρα.

Αλλά πώς από την φαινομενικά αβλαβή θεώρηση ότι η ενέργεια συνίσταται από κβάντα προκύπτουν τέτοια τρομακτικά συμπεράσματα; Ο μεγάλος Feynman συνήθιζε να χρησιμοποιεί ένα απλό και παραστατικό παράδειγμα: Θεωρήστε μια δέσμη φωτός η οποία προσκρούει σε ένα κάτοπτρο. Κανένα κάτοπτρο δεν είναι τέλειο, οπότε έστω ότι το 95% του φωτός ανακλάται στην επιφάνειά του, ενώ το υπόλοιπο 5% το διαπερνά ή απορροφάται ή χάνεται με κάποιον άλλο τρόπο.

Την προ-κβαντική εποχή δεν υπήρχε πρόβλημα. Το φως που προσπίπτει στο κάτοπτρο θεωρούνταν συνεχής ροή ενέργειας: το περισσότερο από το φως ανακλάται στην επιφάνεια του κατόπτρου, ενώ ένα κλάσμα του το διαπερνά. Ο Planck όμως ανέπλασε το φως σε έναν χείμαρρο κβάντων —τα γνωστά μας φωτόνια. Επειδή κάθε φωτόνιο είναι αδιαίρετο, θα πρέπει είτε να ανακλάται είτε να απορροφάται εξ ολοκλήρου. Δεν είναι δυνατόν το 95% ενός φωτονίου να πηγαίνει προς μια κατεύθυνση και το υπόλοιπο 5% να κατευθύνεται κάπου αλλού! Οπότε, προκειμένου να κατανοήσουμε τη δράση του κατόπτρου στη διάδοση του φωτός, θα πρέπει να συμπεράνουμε ότι τα 19 από κάθε 20 φωτόνια αναπηδούν στην επιφάνεια του, ενώ 1 —το πιο «κατεργάρικο»— ακολουθεί τον δικό του δρόμο. Αλλά ποιος αποφασίζει ποιο από τα αδιαίρετα φωτόνια θα συμπεριφερθεί κατ' αυτό τον τρόπο;

Ιδού η επανάσταση. Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία, ό,τι συμβαίνει σε κάθε φωτόνιο είναι πραγματικά και αναπόφευκτα απρόβλεπτο. Κάθε φωτόνιο έχει πιθανότητα 95% να ανακλαστεί και 5% να διέλθει ή να απορροφηθεί —και τίποτε πέραν αυτού. Κανένα φωτόνιο δεν διαθέτει κάποια κρυφή ιδιότητα ή κάποιο μυστικό που αν τα γνωρίζαμε θα ξέραμε με περισσότερη ακρίβεια τι θα κάνει. Η αδυναμία πρόβλεψης είναι εγγενής.

Ένα ακόμη παράδειγμα. Αν έχετε γυαλιά ηλίου Πολαρόιντ και τα περιστρέψετε αργά μπροστά στα μάτια σας, θα αντιληφθείτε μεταβολές της ποσότητας του φωτός που διέρχεται μέσα από αυτά. Το φως (όπως έδειξε ο Clerk Maxwell, το 1864) είναι ένας τύπος ηλεκτρομαγνητικού κύματος, και τα εν λόγω κύματα μπορεί να είναι πολωμένα (όπως και το σκοινί που, ενώ έχουμε τη δυνατότητα να το κινούμε πάνω-κάτω ή αριστερά-δεξιά ή σε οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση μεταξύ τους, εντέλει ταλαντώνεται σε ένα ορισμένο επίπεδο). Τα συγκεκριμένα γυαλιά ηλίου επιτρέπουν να διέλθει από μέσα τους το κατακόρυφα πολωμένο φως, παρεμποδίζουν όμως το οριζόντια πολωμένο —που είναι και το πιο εκτυφλωτικό.

Ωστόσο, ένα φωτόνιο που προσπίπτει στα γυαλιά σας έχει μόνο δύο επιλογές: ή να διέλθει ή όχι. Τι θα κάνει; Και πάλι, το καλύτερο που μπορείτε να επιτύχετε είναι να γνωρίσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες. Αλλά ποτέ δεν μπορείτε να προβλέψετε με βεβαιότητα τι ακριβώς θα κάνει.

Τον παλιό καιρό της κλασικής φυσικής μπορούσατε, αν θέλατε, να προβλέψετε επακριβώς την εξέλιξη της κίνησης μιας μπάλας μπιλιάρδου που κατευθύνεται προς μια άλλη μπάλα ή προς την πλευρά του τραπεζιού. Θα έπρεπε να γνωρίζετε τη μάζα της, την ταχύτητά της και, πιθανώς, τη στροφορμή της, το συντελεστή κρούσης και ίσως κάποιες ακόμη ιδιότητές της. Θα μπορούσατε να ονομάσετε αυτό τον κατάλογο ιδιοτήτων «κλασική κατάσταση» της μπάλας· και όσο καλύτερα γνωρίζατε την κατάστασή της τόσο ασφαλέστερα θα προβλέπατε τη συμπεριφορά της. Όλα τούτα, όμως, η κβαντική θεωρία τα εκπαραθυρώνει. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να περιγράψουμε την «κβαντική κατάσταση» ενός φωτονίου με όρους πιθανοτήτων. Και μάλιστα, οι πιθανότητες αλλάζουν ανάλογα με το τι ακριβώς πρόκειται να συμβεί στο φωτόνιο. Αν το φωτόνιο κατευθύνεται προς έναν καθρέφτη, όταν πέσει επάνω του είτε θα ανακλαστεί είτε θα διέλθει μέσα απ' αυτόν. Αν όμως το ίδιο φωτόνιο κατευθύνεται προς έναν «ανιχνευτή πόλωσης», τότε θα πρέπει να το περιγράψουμε με διαφορετικό τρόπο. Όσον αφορά την κλασική μπάλα του μπιλιάρδου, ένα σύνολο ιδιοτήτων —η μάζα, η ταχύτητα και τα λοιπά— αρκούν για να προβλέψετε οτιδήποτε χρειάζεται να ξέρετε σχετικά με αυτήν, υπό οποιεσδήποτε συνθήκες. Η κβαντική κατάσταση του φωτονίου, όμως, είναι κάτι εντελώς διαφορετικό.

Μπορείτε λοιπόν να αντιληφθείτε γιατί οι φυσικοί της παλιάς σχολής θεωρούσαν την κβαντική θεωρία συγκεχυμένη, απίστευτη και πιθανότατα επικίνδυνη. Το φωτόνιο έμοιαζε σαν να μην έχει σταθερές ιδιότητες αφ' εαυτού και να τις αποκτά συνωμοτώντας με τη μετρητική συσκευή!

Από εδώ, εκεί

Θα αποκτήσουμε ποτέ τη δυνατότητα να τηλεμεταφέρουμε ανθρώπους σε μακρινές αποστάσεις; Όλα εξαρτώνται από τις παράξενες αβεβαιότητες του κβαντικού κόσμου.

Για έναν κλασικό φυσικό, η πιο ενοχλητική ίσως όψη του κβαντικού κόσμου είναι ότι τίποτε δεν μοιάζει πραγματικό έως ότου μετρηθεί. Υποθέστε ότι θέλετε να μάθετε κάτι σχετικά με ένα κβαντικό σωματίδιο —την κατάσταση πόλωσης ενός φωτονίου, ας πούμε. Προτού πραγματοποιήσετε τη μέτρηση, το φωτόνιο δεν είναι πραγματικά πολωμένο σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση. Σαν φάντασμα, τριγυρνά ανάμεσα σε πολλά επίπεδα πόλωσης. Βρίσκεται σε μια δυνητική κατάσταση ενδεχόμενων πολώσεων, καθεμιά από τις οποίες έχει ορισμένη πιθανότητα να εμφανιστεί κατά τη μέτρηση. Όταν, λοιπόν, μετρήσετε την πόλωση του φωτονίου, θα λάβετε μια σαφή απάντηση. Παραδόξως, όμως, κατά τη μέτρηση όλες οι υπόλοιπες ενδεχόμενες πολώσεις μηδενίζονται —και η αρχική ασαφής κατάσταση εξαφανίζεται!

Επομένως, η πράξη της μέτρησης ενός σωματιδίου ουσιαστικά καταστρέφει κάποιες πληροφορίες σχετικά με την πρότερη κατάστασή του. Και αυτό φαίνεται να καθιστά πρακτικά αδύνατη την αντιγραφή τέτοιων σωματιδίων και την αναπαραγωγή τους κάπου αλλού. Κατά ειρωνικό τρόπο όμως, τα παράξενα τερτίπια του κβαντικού κόσμου ανατρέπουν ετούτη την αντίληψη. Αποδεικνύεται ότι μπορείτε να επαναδημιουργήσετε μια κβαντική κατάσταση που δεν την έχετε μετρήσει —εφόσον, βέβαια, είστε αποφασισμένος να θυσιάσετε την πρωτότυπη. Ο μηχανισμός εκμεταλλεύεται την ίδια την αβεβαιότητα που καθιστά τόσο αινιγματική την κβαντική μέτρηση στην αρχική θέση.

Ο Charles Bennett, φυσικός των εργαστηρίων της IBM στο Γιόρκταουν Χάιτς της Νέας Υόρκης, εισήγαγε πρώτος το 1993 την ιδέα της κβαντικής «τηλεμεταφοράς» —θεωρητικά, φυσικά! Ο Bennett και οι συνεργάτες του[1] βρήκαν τον τρόπο ώστε ένα υποθετικό πρόσωπο, η Αλίκη (αποστολέας), να τηλεμεταφέρει ένα σωματίδιο στο φίλο της Μπομπ (παραλήπτης), που βρίσκεται σε κάποια απόσταση. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι ο Μπομπ δημιουργεί ένα σωματίδιο στην ίδια ακριβώς κατάσταση με το πρωτότυπο σωματίδιο της Αλίκης, παρότι η Αλίκη ουδέποτε έμαθε την εν λόγω κατάσταση.

Υποθέστε ότι ο Μπομπ και η Αλίκη ήθελαν να αντιγράψουν ένα φωτόνιο. Η Αλίκη δεν μπορεί να «μετρήσει» το φωτόνιό της και να στείλει τα αποτελέσματα στον Μπομπ, επειδή η μέτρηση θα κατέστρεφε κάποιες από τις πληροφορίες που χρειάζεται ο τελευταίος. Η κβαντική θεωρία, ευτυχώς, διαθέτει πιο εκλεπτυσμένα μέσα επικοινωνίας. Ένα επιπλέον ζεύγος «διαπλεγμένων» φωτονίων ανοίγει το κανάλι τηλεμεταφοράς ανάμεσα στην Αλίκη και τον Μπομπ.

Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία, μπορείτε να διαπλέξετε ένα ζεύγος φωτονίων με τέτοιον τρόπο ώστε οι ιδιότητές τους να συνδέονται αδιάρρηκτα. Αυτό ισχύει ακόμη κι αν τα στείλετε προς τα δύο αντίθετα άκρα της Γης: μετρήστε το ένα φωτόνιο στον Βόρειο Πόλο, και αμέσως θα γνωρίζετε την κατάσταση του άλλου στον Νότιο.

Μπλεχτήκατε; Δεν είστε οι μόνοι! Στην πραγματικότητα, το εν λόγω σενάριο το επινόησαν ο Άλμπερτ Αϊνστάιν και οι νεαρότεροι συνεργάτες του Boris Podolsky και Nathan Rosen, για να δείξουν πόσο παράλογη και απαράδεκτη ήταν η κβαντική μηχανική —φαίνεται να αξιώνει το αδύνατο: μετρήσεις σε κάποιον τόπο παράγουν ακαριαία ένα αποτέλεσμα κάπου αλλού. Κατά ειρωνικό τρόπο, τα πειράματα έχουν δείξει ότι τα παραπάνω ζεύγη σωματιδίων (τα ονομάζουμε και σωματίδια EPR —από τα αρχικά των ονομάτων των τριών επιστημόνων) πράγματι επικοινωνούν με αυτό τον μυστηριώδη, «υπερφυσικό» τρόπο (σύμφωνα με τα λόγια του Αϊνστάιν). Αλλά, περισσότερα επ' αυτού, λίγο αργότερα. Για την ώρα έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα της Αλίκης και του Μπομπ.

Η Αλίκη διαθέτει ένα πρωταρχικό φωτόνιο που δεν το έχει μετρήσει, και το οποίο θέλει να τηλεμεταφέρει στον Μπομπ. Αρχικά δημιουργεί ένα ζεύγος συνδεόμενων φωτονίων EPR (διαπλεγμένα φωτόνια), κρατάει το ένα και στέλνει το άλλο στον Μπομπ. Στη συνέχεια μεριμνά ώστε το φωτόνιο που δεν έχει μετρήσει να αλληλεπιδράσει με το φωτόνιο EPR που έχει κρατήσει, μετρά το αποτέλεσμα αυτής της αλληλεπίδρασης και στέλνει την απάντηση στον Μπομπ με τρόπο συμβατικό —με τηλέφωνο, με φαξ, με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο, με ταχυδρομικό περιστέρι ή με ό,τι άλλο θέλετε.

Και τώρα το μυστηριώδες μέρος. Ο Μπομπ λαμβάνει το μήνυμα της Αλίκης και, ανάλογα με το τι λέει, επενεργεί με έναν προκαθορισμένο τρόπο στο δικό του φωτόνιο EPR —το δεύτερο μέλος του διαπλεγμένου ζεύγους. Για παράδειγμα, μπορεί να μεταβάλει την πόλωση του φωτονίου του κατά ποσό εξαρτώμενο από την πληροφορία που του απέστειλε η Αλίκη. Στο τέλος της διεργασίας το φωτόνιο του Μπομπ θα έχει καταστεί πανομοιότυπο του πρωτότυπου φωτονίου της Αλίκης. Έτσι, η κβαντική κατάσταση του εν λόγω φωτονίου —μολονότι όχι το ίδιο το φωτόνιο— έχει τηλεμεταφερθεί από την Αλίκη στον Μπομπ.

Καταλάβατε τι συνέβη; Λοιπόν, ξανά· για να αναδημιουργήσετε το φωτόνιο —για να το τηλεμεταφέρετε— πρέπει να διαβιβάσετε δύο ειδών πληροφορίες σχετικά με την κατάστασή του. Το ένα είναι το συνηθισμένο, καθημερινό είδος πληροφορίας. (Και αποτελεί το εύκολο μέρος: μετράτε και στέλνετε τις λεπτομέρειες με κάποιο συνηθισμένο τρόπο.) Τι γίνεται, όμως, με την κβαντική πληροφορία —εκείνη που καταστρέφεται όταν πραγματοποιείτε τη μέτρησή σας στο πρωτότυπο άγνωστο φωτόνιο; Το τέχνασμα για τη μεταβίβασή της βρίσκεται στην απόρρητη, μυστηριώδη σύνδεση μεταξύ των φωτονίων EPR της Αλίκης και του Μπομπ. Υποχρεώνοντας το δικό της άγνωστο φωτόνιο να αλληλεπιδράσει με το φωτόνιο EPR, η Αλίκη εξαναγκάζει και το άλλο μέλος του διαπλεγμένου ζεύγους να αλληλεπιδράσει με το άγνωστο φωτόνιό της.

Επομένως, διαμέσου του μυστηριώδους καναλιού EPR, ο Μπομπ λαμβάνει κάποια παράξενη, κβαντική πληροφορία σχετικά με την κατάσταση του πρωταρχικού φωτονίου που η Αλίκη θέλει να τηλεμεταφέ-

1. C. Bennett, et al, «Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and EPR Channels», *Phys. Rev. Lett.* **70**, 29 Μαρτ. 1993. (Σ.τ.μ.)

ρει. Αλλά η ιστορία δεν τελειώνει εδώ, επειδή, όπως είπαμε, η Αλίκη πρέπει να μετρήσει και το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των «δικών της» δύο φωτονίων και να στείλει το αποτέλεσμα στον Μπομπ. Αν λοιπόν όλα γίνουν σωστά, ο Μπομπ θα λάβει έναν συνδυασμό υπερφυσικής κβαντικής πληροφορίας και συνηθισμένης κλασικής πληροφορίας, γεγονός που του επιτρέπει να αναπαραγάγει το πρωτότυπο άγνωστο φωτόνιο της Αλίκης.

Δεν πρέπει να εκπλαγείτε αν κάτι στην παραπάνω διαδικασία πάει στραβά, μια και πρόκειται για εξαιρετικά λεπτό πείραμα. Η ενιαία μέτρηση που πραγματοποιεί η Αλίκη στο άγνωστο φωτόνιο και στο δικό της φωτόνιο EPR πρέπει να σχεδιαστεί και να εκτελεστεί προσεκτικά. Η Αλίκη και ο Μπομπ πρέπει να είναι βέβαιοι ότι τα φωτόνια EPR δεν υπόκεινται σε καμία απολύτως ανεπιθύμητη εξωτερική αλληλεπίδραση. Εάν κάποιο από τα διαπλεγμένα φωτόνια κατά τη διάδοσή του συγκρουόταν, για παράδειγμα, με ένα πλανόδιο άτομο, η υπερφυσική σύνδεσή τους θα καταστρεφόταν. Ωστόσο, το 1997, δύο επιστημονικές ομάδες —η μία του Πανεπιστημίου της Ρώμης και η άλλη του Πανεπιστημίου του Ίνσμπρουκ— κατάφεραν να τηλεμεταφέρουν φωτόνια, από τη μία άκρη του εργαστηρίου τους στην άλλη!

Υπάρχουν αρκετές ενδιαφέρουσες προϋποθέσεις σχετικά με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω. Καταρχάς, η Αλίκη πρέπει να στείλει στον Μπομπ με συμβατικό μέσο τα αποτελέσματα των μετρήσεών της —δηλαδή με ταχύτητα μικρότερη του φωτός· οπότε, αν και το μυστηριώδες τμήμα (κβαντική πληροφορία) της τηλεμεταφοράς διαβιβάζεται ακαριαία, για το ίσης σημασίας καταληπτό τμήμα (κλασική πληροφορία) δεν ισχύει το ίδιο. Η κβαντική τηλεμεταφορά δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη απ' αυτή του φωτός —γεγονός βέβαια που θα ικανοποιούσε και τον Αϊνστάιν. Δεύτερον, η μέτρηση της Αλίκης καταστρέφει την κβαντική κατάσταση του πρωτότυπου φωτονίου της. Τρίτον, ούτε η Αλίκη ούτε και ο Μπομπ θα μάθουν ποτέ ποια πραγματικά ήταν αυτή η «πρωτότυπη» κβαντική κατάσταση —η απευθείας μέτρηση μιας κβαντικής κατάστασης, είπαμε, καταστρέφει πάντα και με απρόβλεπτο τρόπο όλες τις σχετικές πληροφορίες. Η Αλίκη μπορεί βεβαίως να τηλεμεταφέρει μια κβαντική κατάσταση στον Μπομπ, ωστόσο κανένας από τους δύο δεν μπορεί ποτέ να γνωρίζει ακριβώς ποια κατάσταση τηλεμεταφέρθηκε.

Τι σημαίνουν όλα τούτα για το είδος της τηλεμεταφοράς που πραγματοποιείται στο *Star Trek*, όπου ένας ολόκληρος άνθρωπος μεταφέρεται από τόπο σε τόπο; Οι δυσκολίες είναι αξεπέραστες. Για να τηλεμεταφερθεί μια ομάδα ατόμων, αντί ενός και μόνο φωτονίου, το κανάλι επικοινωνίας EPR πρέπει να μεταφέρει όχι μόνο μία υπερφυσική κβαντική πληροφορία, αλλά ένα ολόκληρο σύνολο τέτοιες. Αυτό προϋποθέτει όχι απλώς μεγάλο πλήθος ανεξάρτητα ζεύγη EPR —γεγονός που έτσι κι αλλιώς είναι δύσκολο—, αλλά ένα μοναδικό σύμπλεγμα EPR που θα περικλείει τεράστιο πλήθος ζεύγη. Θα ήταν σχεδόν αδύνατον να κατασκευάσουμε μια τέτοια κατάσταση χωρίς, στο ταξίδι της ανά τους αιθέρες, να καταστραφεί η ακεραιότητά της.

Και δεν είναι μόνο αυτό. Για την τηλεμεταφορά του Jean-Luc Picard, θα πρέπει να σταλεί ακαριαία μια πλήρης περιγραφή της συλλογικής κβαντικής κατάστασης στην οποία βρίσκεται κάθε ηλεκτρόνιο και άτομο του σώματός του. Και αυτό αποτελεί δύσκολο εγχείρημα! Η Αλίκη πρέπει να επινοήσει μία και μόνο ακαριαία μέτρηση που θα «παγιδεύσει» όλες αυτές τις πληροφορίες μονομιάς, και ο Μπομπ, στην άλλη μεριά, πρέπει να πραγματοποιήσει έναν παρόμοιας πολυπλοκότητας επανασχηματισμό. Και υποθέστε ότι καταστρέφετε την κβαντική αναπαράσταση του Jean-Luc Picard στο ένα μέρος και την αναδημιουργείτε στο άλλο. Αυτή η ανακατασκευή θα είναι ο ίδιος άνθρωπος, από κάθε άποψη; Θα συμπεριφέρεται όπως ο πρωτότυπος; Αυτό όμως αφήνουμε να το ξεδιαλύνετε εσείς...

Υπερφυσικές συνδέσεις

Μπορούν πράγματι τα κβαντικά σωματίδια να επικοινωνούν ακαριαία διαμέσου τεράστιων αποστάσεων ή μήπως μας διαφεύγει κάτι;

Ούτε ο Max Planck ούτε ο Άλμπερτ Αϊνστάιν, που, μεταξύ άλλων, εισήγαγαν την έννοια των φωτονίων, αισθάνθηκαν ποτέ ευτυχείς για ό,τι είχαν διαπράξει. Ο Planck συμβιβάστηκε με την ιδέα μικρών πακέτων φωτός, εμφανίστηκε όμως απρόθυμος να πιστέψει ότι αυτά ήταν πραγματικά αντικείμενα και όχι απλώς μαθηματικές επινοήσεις που έκαναν ευκολότερη τη ζωή των φυσικών.

Ο Αϊνστάιν αντιμετώπιζε ένα διαφορετικό πρόβλημα. Δεν του ήταν δύσκολο να φανταστεί το φως ως μια βροχή μικροσκοπικών σφαιρών που μπορούν κυριολεκτικά να κλοτσούν ηλεκτρόνια έξω από τα άτομά τους. Αυτή την ιδέα τη χρησιμοποίησε μάλιστα ως αφετηρία για να εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο —όπου το φως που φωτίζει συγκεκριμένα μέταλλα προκαλεί την εμφάνιση ηλεκτρικού ρεύματος. Αργότερα, μάλιστα, κατέληξε πως είναι πολύ χρήσιμο να σκεφτόμαστε το φως ως «αέριο» φωτονίων, παρόμοιο με τα συνηθισμένα αέρια των φυσικών ατόμων.

Στην πραγματικότητα, αυτό που ενοχλούσε τον Αϊνστάιν ήταν το γεγονός ότι —εφόσον τα φωτόνια ήταν πραγματικά αντικείμενα— ένα ανεπιθύμητο στοιχείο τυχαιότητας εισέβαλλε στη φυσική. Και ο Αϊνστάιν, όσο επαναστάτης κι αν υπήρξε, παρέμενε αυστηρός κλασικιστής σε ένα θέμα: πίστευε απαρέγκλιτα στη σχέση αιτίας-αποτελέσματος. Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε όλες τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου, πρέπει να μπορούμε να προβλέψουμε επακριβώς τη συμπεριφορά του υπό οποιεσδήποτε συνθήκες.

Η κβαντική θεωρία, αντίθετα, το μόνο που μπορεί να παράσχει είναι η πιθανότητα του να συμβεί κάτι. Όταν ένας χείμαρρος φωτονίων προσπίπτει στα γυαλιά ηλίου Πολαρόιντ, ένα μέρος του θα τα διαπεράσει, ένα άλλο όχι. Με κανένα τρόπο όμως δεν μπορούμε να προβλέψουμε τι θα πράξει καθένα φωτόνιο ξεχωριστά. Μπορούμε απλώς να γνωρίζουμε τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε κάθε ενδεχόμενο.

Ο Αϊνστάιν δυσαρεστήθηκε με την κβαντική θεωρία επειδή δεν του παρείχε τίποτε περισσότερο από ανώφελες πιθανότητες. Το 1936, λοιπόν, διατύπωσε, από κοινού με τους Boris Podolsky και Nathan Rosen, το «παράδοξο EPR». Αποτελεί ειρωνεία της τύχης το γεγονός ότι η υπερφυσική σύνδεση EPR έχει πλέον χρησιμοποιηθεί εργαστηριακά για να τηλεμεταφερθούν φωτόνια, ενώ ο κύριος λόγος επινόησης του παραδόξου EPR ήταν να καταδείξει ότι μία από τις συνέπειες της κβαντικής θεωρίας ήταν τόσο αβάσιμη ώστε η θεωρία θα έπρεπε είτε να είναι λανθασμένη είτε να είναι, κατά μία έννοια, μη πλήρης. Η τριανδρία EPR δεν αποδεχόταν την ιδέα πως η μέτρηση ενός φωτονίου σε κάποιον τόπο μπορούσε να προκαλέσει ακαριαία μια φυσική επίπτωση κάπου αλλού —μόνο και μόνο επειδή οι κβαντικές μετρήσεις αφορούν πιθανότητες.

Το αρχικό επιχείρημα των Αϊνστάιν, Podolsky και Rosen έχει αναπλαστεί σε πολλές διαφορετικές μορφές, αλλά για την ώρα ας παραμείνουμε στα φωτόνια. Υποθέστε ότι δημιουργείτε ένα ζεύγος διαπλεγμένων φωτονίων οι διευθύνσεις πόλωσης των οποίων σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90°. Δεν μπορείτε να γνωρίζετε ποιες ακριβώς είναι οι διευθύνσεις πόλωσής τους, μέχρι να τις μετρήσετε· μπορεί η μία να είναι κατακόρυφη και η άλλη οριζόντια ή να έχουν οποιονδήποτε άλλο προσανατολισμό —σίγουρα όμως ξέρετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους. Βάλατε τα φωτόνια προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Καθώς αυτά απομακρύνονται, σε κάποιο σημείο της τροχιάς τους διέρχονται μέσα από πολωτικά φίλτρα που —επί τούτου— έχετε τοποθετήσει στο δρόμο τους.

Υποθέστε ότι το ένα φωτόνιο περνά απρόσκοπτα μέσα από φίλτρο, η χαρακτηριστική διεύθυνση του οποίου είναι κατακόρυφη. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι κατακόρυφα πολωμένο —οπότε ο σύντροφός του θα πρέπει να είναι πολωμένος οριζόντια. Δηλαδή το δεύτερο φωτόνιο μπορεί να διέλθει από φίλτρο, η χαρακτηριστική διεύθυνση του οποίου είναι οριζόντια, όχι όμως και από φίλτρο με χαρακτηριστική διεύθυνση κατακόρυφη. Ως εδώ καλά. Το ένα φωτόνιο είναι πολωμένο κατακόρυφα, το άλλο οριζόντια —οπότε μεταξύ τους σχηματίζουν ορθή γωνία—, και όλα στον κόσμο πρέπει να βαίνουν καλώς.

Όχι ακριβώς. Έως ότου το πρώτο φωτόνιο εξέλθει από το φίλτρο, δεν έχετε ιδέα αν θα το διαπεράσει ή όχι. Και επιπλέον, το φωτόνιο δεν ξέρει σε τι είδους φίλτρο πρόκειται να εισέλθει. Δεν γνωρίζετε τίποτε σχετικά με τη διεύθυνση πόλωσης καθενός φωτονίου μέχρις ότου τη μετρήσετε —ξέρετε μόνο ότι οι πιθανότητές του να διέλθει είναι 50%, ανεξάρτητα από τη χαρακτηριστική διεύθυνση του φίλτρου. Συνεπώς, το δεύτερο φωτόνιο δεν μπορεί να γνωρίζει τι θα κάνει το πρώτο, μέχρις ότου όντως το κάνει. Επιπλέον, οι ενέργειες του πρώτου φωτονίου προσδιορίζουν τις ενέργειες του δεύτερου. Επομένως, το δεύτερο φωτόνιο πρέπει να λαμβάνει κάποιου τύπου ειδοποίηση από το πρώτο, έστω και αν αυτά βρίσκονται μακριά το ένα από το άλλο.

Μάλιστα, αυτή η ειδοποίηση πρέπει να είναι ακαριαία, επειδή οφείλει να διαβιβάζεται ακόμη κι όταν τα φωτόνια εισέρχονται στα φίλτρα την ίδια ακριβώς στιγμή! Είναι αδύνατον να προβλέψουμε τι θα κάνει κάθε φωτόνιο, εντούτοις και τα δύο θα πρέπει να δρουν εναρμονισμένα ώστε οι πολώσεις τους να έχουν τη σωστή μεταξύ τους σχέση. Η σφοδρή αντίδραση των Αϊνστάιν, Podolsky και Rosen οφείλεται σε τούτη ακριβώς την αινιγματική συμπεριφορά. Συμπεριφορά που εγείρεται επειδή τα αποτελέσματα των κβαντικών μετρήσεων είναι αβέβαια ή απροσδιόριστα έως ότου εμφανιστούν.

Η ιστορία θα διέφερε εάν οι πολώσεις των δύο φωτονίων ήταν με κάποιον τρόπο καθορισμένες από την αρχή, έστω και αν δεν τις γνωρίζατε. Τα αποτελέσματα οποιασδήποτε μέτρησης της διεύθυνσης πόλωσης θα είχαν και πάλι την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, επειδή δεν διαθέτετε καμία προγενέστερη γνώση για το τι πρόκειται να πράξουν τα φωτόνια όταν θα φθάσουν στα φίλτρα. Από τη σκοπιά των φωτονίων, όμως, όλα είναι προκαθορισμένα: κάθε φωτόνιο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, οπότε το γεγονός ότι οι δύο μετρήσεις δίνουν τα αποτελέσματα που δίνουν οφείλεται στον προκαθορισμό και όχι σε μια υπερφυσική επικοινωνία.

Αυτό συνέλαβε ο κλασικά σκεπτόμενος Αϊνστάιν. Είναι σαν να λέμε ότι μια μπάλα του μπιλιάρδου που κατευθύνεται προς εσάς είναι είτε κόκκινη είτε γαλάζια, αλλά δεν ξέρετε το χρώμα της μέχρι να τη δείτε. Αυτό είναι εντελώς διαφορετικό από το ότι η μπάλα του μπιλιάρδου δεν είναι ούτε κόκκινη ούτε γαλάζια μέχρι να την κοιτάξουμε, οπότε λαμβάνει το ένα ή το άλλο χρώμα τη στιγμή ακριβώς που τη βλέπουμε.

Το επιχείρημα, με άλλα λόγια, ήταν ότι, αν όντως οι πολώσεις των φωτονίων παραμένουν απροσδιόριστες μέχρι να μετρηθούν, τότε τα συσχετισμένα φωτόνια EPR πρέπει να συνωμοτούν μεταξύ τους ακαριαία, ώστε να διασφαλίζεται ότι οι ταυτόχρονες μετρήσεις τους δίνουν συνεπή αποτελέσματα. Αυτό φαίνεται παράλογο! Ο Αϊνστάιν και οι συνεργάτες του πίστευαν ότι είναι λογικότερο να θεωρήσουμε την κβαντική θεωρία μη πλήρη· ότι είναι λογικότερο να θεωρήσουμε πως κάθε φωτόνιο διαθέτει κάποια μυστική ιδιότητα, κρύβει μια μεταβλητή που, αν τη γνωρίζαμε, θα ήμασταν σε θέση να προβλέψουμε ποιο θα ήταν το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Όλα καλά, αλλά... πώς αλλιώς μπορούμε να ανακαλύψουμε τη μυστική ιδιότητα των φωτονίων παρά πραγματοποιώντας την ακριβή μέτρηση, το αποτέλεσμα της οποίας υποτίθεται ότι θα μας βοηθήσει να την προβλέψουμε; Αυτό ακυρώνει όλη την παραπάνω επιχειρηματολογία. Οι περισσότεροι φυσικοί συμφωνούν ότι το παράδοξο EPR αποτελεί πράγματι μέρος ενός αινίγματος. Σημαίνει όμως αυτό ότι η κβαντική θεωρία είναι λανθασμένη ή απλώς ότι είναι δύσκολο να την κατανοήσουμε; Ποιο θα ήταν το όφελος να αποδώσουμε στα φωτόνια επιπλέον ιδιότητες αν δεν υπάρχει αδιαμφισβήτητος τρόπος να ανακαλύψουμε ποιες είναι αυτές, ιδιαίτερα, μάλιστα, εφόσον δεν φαίνεται να προκαλούν την παραμικρή διαφοροποίηση στα αποτελέσματα των πειραμάτων;

Σύμφωνα με τα λόγια του φυσικού John Bell —ο οποίος γενικά κατανοούσε τις ανησυχίες του Αϊνστάιν σχετικά με την κβαντική θεωρία—, το παράδοξο EPR είναι ένα από αυτά τα ζητήματα που οι περισσότεροι φυσικοί αισθάνονται ότι θα κατανοούσαν πλήρως αν μπορούσαν ποτέ να διαθέσουν είκοσι λεπτά απ' τη ζωή τους για να το σκεφτούν. Εν τω μεταξύ, γιατί να ανησυχούν;

Για τα μάτια σου μόνο

Οι αλλόκοσμες κβαντικές συνδέσεις δεν θα σας επιτρέψουν να ξεπεράσετε το ανώτατο όριο ταχύτητας. Θα σας βοηθήσουν όμως να κρατήσετε ένα μυστικό.

Το παράδοξο EPR θα ήταν πράγματι ανησυχητικό —και όχι απλώς αινιγματικό— εάν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η υπερφυσική επικοινωνία μεταξύ των δύο σωματιδίων για να μεταδοθεί ακαριαία ένα μήνυμα. Εάν μπορούσατε με κάποιον τρόπο να επιλέξετε το αποτέλεσμα μιας μέτρησης στη δική σας πλευρά, θα μπορούσατε ταυτόχρονα να συνθέσετε το αποτέλεσμα στην άλλη πλευρά —λόγω του τρόπου με τον οποίο διαπλέκονται τα δύο σωματίδια. Δηλαδή, η μυστηριώδης σύνδεση θα σας επέτρεπε να στείλετε ακαριαία ένα μήνυμα σε κάποιον που βρίσκεται έτη φωτός μακριά! Αυτό θα γεννούσε μεγάλα προβλήματα στη θεωρία της σχετικότητας, σύμφωνα με την οποία είναι αδύνατη η μετάδοση σημάτων με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή του φωτός.

Ο Αϊνστάιν όμως μπορεί να αναπαύεται ήσυχος. Αυτό το στρατήγημα θα αποτύγχανε, επειδή το αποτέλεσμα της μέτρησής σας έχει μοιρασμένες πιθανότητες. Δεν μπορείτε να ελέγξετε το αποτέλεσμα της μέτρησης στη δική σας πλευρά· πόσο μάλλον το αποτέλεσμα στην άλλη πλευρά.

Ωστόσο, τούτο δεν σημαίνει ότι εξαντλείται το ενδιαφέρον μας για τον εν λόγω μηχανισμό· είναι αλήθεια ότι δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την υπερφυσική σύνδεση για να ξεπεράσετε την ταχύτητα του φωτός, μπορείτε όμως να τη χρησιμοποιήσετε για να στείλετε κωδικοποιημένα μηνύματα υψίστης ασφαλείας. Και όχι μόνο αυτό· ουσιαστικά η κβαντική θεωρία σάς επιτρέπει να γνωρίζετε εάν κάποιος κατάσκοπος προσπάθησε να υποκλέψει το μήνυμά σας.

Οι μαθηματικοί έχουν αναπτύξει μια ποικιλία κωδίκων που εξαρτώνται από τη χρήση ενός «κλειδιού» —ενός αριθμού γνωστού μόνο σε αυτόν που στέλνει το μήνυμα και στον παραλήπτη του. Η διαδικασία είναι η εξής: Ο αποστολέας μετατρέπει το γραπτό μήνυμα σε ένα σύνολο δυαδικών ψηφίων· μετά ανακατεύει τα ψηφία εφαρμόζοντας έναν μαθηματικό μετασχηματισμό μέσω του κλειδιού. Ο παραλήπτης λαμβάνει το αναγραμματισμένο σήμα και, εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό —μέσω του ίδιου κλειδιού—, ανασυνθέτει το πρωτότυπο μήνυμα.

Υπάρχει όμως ένα αδύνατο σημείο στο σύστημα. Τα δύο μέρη πρέπει να συναποφασίσουν το κλειδί, και στη συνέχεια να το κρατήσουν απόρρητο. Το κλειδί μπορεί να είναι οποιαδήποτε τυχαία ακολουθία αριθμών, και εδώ ακριβώς μπορεί να βοηθήσει η κβαντική θεωρία. Για να ανταλλάξουν απόρρητα μηνύματα ο Μπομπ και η Αλίκη, θα πρέπει να εγκαταστήσουν μια συσκευή που δημιουργεί διαπλεγμένα ζεύγη φωτονίων με την ίδια διεύθυνση πόλωσης —είτε οριζόντια είτε κατακόρυφη. Το ένα φωτόνιο κάθε ζεύγους κατευθύνεται στην Αλίκη και το άλλο στον Μπομπ. Για να ανιχνεύσουν τα φωτόνια, η Αλίκη και ο Μπομπ πρέπει να διαθέτουν από ένα πολωτικό φίλτρο, οι χαρακτηριστικές διευθύνσεις των οποίων να είναι κατακόρυφες. Αν η Αλίκη βλέπει ένα φωτόνιο να διέρχεται από το δικό της φίλτρο, γνωρίζει ότι και ο Μπομπ επίσης έχει δει ένα· αν δεν βλέπει κανένα, ούτε και ο Μπομπ βλέπει. Καταγράφοντας κάθε επιτυχία διέλευσης ως «1» και κάθε αποτυχία διέλευσης ως «0», τόσο η Αλίκη όσο και ο Μπομπ σχηματίζουν την ίδια τυχαία αλυσίδα δυαδικών ψηφίων, η οποία γίνεται και το κλειδί τους για να κωδικοποιούν μηνύματα.

Υποθέστε τώρα ότι ένας μυστικός πράκτωρ αντιλαμβάνεται «το παιχνίδι» Αλίκης-Μπομπ, οπότε τοποθετεί το δικό του πολωτικό φίλτρο, με κατακόρυφη χαρακτηριστική διεύθυνση, στην ίδια ευθεία με τον ανιχνευτή της Αλίκης. Ο κατάσκοπος υποκλέπτει την πληροφορία που οδεύει προς την Αλίκη, και αποκαλύπτει το κλειδί. Για να καλύψει τα ίχνη του, κάθε φορά που ένα φωτόνιο διέρχεται από το φίλτρο του στέλνει στην Αλίκη ένα ταυτόσημο, κατακόρυφα πολωμένο φωτόνιο, το οποίο αυτή εκλαμβάνει ως φυσιολογικό και το καταγράφει. Αν κανένα φωτόνιο δεν διέρχεται από το φίλτρο του κατασκόπου, τότε και αυτός δεν στέλνει κανένα φωτόνιο στην Αλίκη, οπότε και η Αλίκη δεν ανιχνεύει τίποτε. Με τη συγκεκριμένη υποκλοπή ο κατάσκοπος μπορεί να αποκαλύψει το κλειδί χωρίς ούτε η Αλίκη ούτε ο Μπομπ να γνωρίζουν ότι έχει παραβιαστεί το απόρρητό τους.

Ωστόσο, με ένα λίγο πιο περίπλοκο σύστημα, η Αλίκη και ο Μπομπ μπορούν να κατασκευάσουν κλειδί το οποίο, πέρα από τυχαίο, δεν θα υπόκειται και σε υποκλοπές. Όποιος «κλέψει» φωτόνιά τους, ανεξάρτητα από το πόσο προσεκτικά θα το πράξει, θα αποκαλυφθεί. Έτσι, αυτή τη φορά οι δυο πρωταγωνιστές μας επιλέγουν πολωτικά φίλτρα τα οποία μπορούν να τοποθετούν με τρόπο τέτοιο ώστε η χαρακτηριστική διεύθυνση καθενός να είναι είτε κατακόρυφη είτε να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 45°. Κάθε φορά, λοιπόν, που πλησιάζει ένα φωτόνιο, η Αλίκη και ο Μπομπ τοποθετούν τυχαία τα φίλτρα τους σύμφωνα με τον ένα από τους δύο προσανατολισμούς. Αν, όπως θα συμβεί τυχαία τις μισές φορές, οι χαρακτηριστικές διευθύνσεις των φίλτρων τους είναι ίδιες, η κατάσταση θα έχει όπως προηγουμένως: όταν ο ένας τους βλέπει φωτόνιο, θα βλέπει και ο άλλος.

Τι γίνεται όμως όταν οι χαρακτηριστικές διευθύνσεις των δύο φίλτρων σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 45°; Ας υποθέσουμε ότι η Αλίκη τοποθετεί το φίλτρο της με τη χαρακτηριστική του διεύθυνση κατακόρυφη, και ότι όντως βλέπει ένα φωτόνιο. Τότε και ο διαπλεγμένος σύντροφός του θα είναι επίσης κατακόρυφα πολωμένος. Τι θα συμβεί όμως όταν αυτό το φωτόνιο συναντήσει το φίλτρο του Μπομπ, η χαρακτηριστική διεύθυνση του οποίου σχηματίζει γωνία 45° με την κατακόρυφο; Κλασικά, σε μια τέτοια περίπτωση η ένταση μιας ακτίνας κατακόρυφα πολωμένου φωτός μειώνεται στο μισό. Αυτό σύμφωνα με την κβαντική ορολογία σημαίνει ότι κάθε φωτόνιο της δέσμης έχει πιθανότητα να διέλθει 50%. Άρα ο Μπομπ μπορεί να ανιχνεύσει το κατακόρυφα πολωμένο φωτόνιο, μπορεί όμως και όχι —οι πιθανότητες είναι μοιρασμένες. Συνεπώς, τοποθετώντας τυχαία κάθε φορά τα φίλτρα τους, η Αλίκη και ο Μπομπ μετρούν μια σειρά ζεύγη φωτονίων EPR. Κατόπιν, λένε ο ένας στον άλλο πώς ήταν τοποθετημένα τα φίλτρα τους κάθε φορά —φωνάζοντας ακόμη και πάνω από τις στέγες των σπιτιών, αν χρειαστεί. Όποτε και οι δύο έχουν επιλέξει τον ίδιο προσανατολισμό των φίλτρων, γνωρίζουν ότι πρέπει να έχουν κοινά αποτελέσματα, και μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις πληροφορίες στη σύνθεση του απόρρητου κλειδιού. Όποτε όμως έχουν επιλέξει διαφορετικό προσανατολισμό για τα φίλτρα τους, ο ένας δεν μπορεί να γνωρίζει τι είδε ο άλλος, οπότε και αγνοούν αυτά τα αποτελέσματα.

Αυτό ακούγεται μάλλον σαν οπισθοδρόμηση. Για να δημιουργηθεί ένα κλειδί, απαιτείται διπλάσιος αριθμός μετρήσεων —αφού οι μισές δεν λαμβάνονται υπόψη. Ωστόσο, υπάρχει ένα πλεονέκτημα: ο κατάσκοπος δεν έχει πεδίο δράσης. Διότι, τοποθετώντας τον δικό του ανιχνευτή για να υποκλέψει τα φωτόνια της Αλίκης, υποχρεώνεται κάθε φορά να μαντεύει εάν πρέπει να προσανατολίσει το φίλτρο του κατακόρυφα ή υπό γωνία 45°. Και αν μεν μαντέψει σωστά, τότε μπορεί όντως να διοχετεύσει ένα κίβδηλο φωτόνιο στην Αλίκη χωρίς να το αντιληφθεί κανείς. Αν όμως μαντέψει λάθος, θα στείλει στην Αλίκη λανθασμένου τύπου φωτόνιο. Η Αλίκη βεβαίως εξακολουθεί να ανιχνεύει φωτόνια και να καταγράφει αποτελέσματα, ωστόσο σε συνεργασία με τον Μπομπ μπορούν να ενεργήσουν στατιστικούς ελέγχους των μετρήσεών τους που θα τους αποκαλύψουν την παρουσία του κατασκόπου. Και τούτο επειδή τα φωτόνια της Αλίκης και του Μπομπ συνδέονται μέσω της μυστηριώδους συσχέτισης EPR —και ο υποκλοπέας καταστρέφει αυτή τη σύνδεση. Οι στατιστικοί έλεγχοι θα πληροφορούν την Αλίκη και τον Μπομπ εάν η κάθε σύνδεσή τους EPR παραμένει αδιάβλητη, επομένως και εάν το κλειδί τους διατηρείται απόρρητο.

Όλα αυτά σημαίνουν ότι η Αλίκη και ο Μπομπ μπορούν να κοινοποιούν οτιδήποτε κάνουν, εκτός από τα δικά τους μεμονωμένα αποτελέσματα για κάθε μέτρηση. Μπορούν να δημιουργούν κλειδιά κρυπτογράφησης ανταλλάσσοντας ασήμαντες πληροφορίες, και να αντιλαμβάνονται αμέσως κάθε λαθροχειρία που αφορά τον κώδικά τους.

Πριν από λίγα χρόνια, ο Richard Hughes και οι συνεργάτες του στο Εθνικό Εργαστήριο του Λος Άλαμος, στο Νιου Μέξικο, εγκατέστησαν ένα σύστημα στο 14 χιλιομέτρων μήκους δίκτυο οπτικών ινών, το οποίο ουσιαστικά δημιουργεί ένα απόρρητο κλειδί κρυπτογράφησης. Αλλά δυστυχώς, δεν κατάφεραν να αποκομίσουν οικονομικά οφέλη από το επίτευγμά τους μέσω μυστικών επιχειρήσεων. Όσο τουλάχιστον μπορεί να γνωρίζει κανείς...

Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ
ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ

Ο **David Lindley** *εργάστηκε για πολλά χρόνια ερευνητικά στον τομέα της κοσμολογίας και της σωματιδιακής φυσικής, τόσο στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ όσο και στο Fermilab (κοντά στο Σικάγο). Για πολλά χρόνια υπήρξε βασικός συντάκτης των περιοδικών* Science *και* Nature. *Έχει εκδώσει τα βιβλία* The End of Physics *και* Where does the Weirdness Go?

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M151

Ο ζητούμενος αριθμός είναι της μορφής $x = 2^a 3^b 5^c$. Επομένως, έχουμε ότι $2x = 2^{a+1}3^b5^c = p^2$ και, επομένως, ο a είναι περιττός αριθμός και οι b, c άρτιοι. Παρομοίως, ο a διαιρείται με το 3 και το 5, ο $b + 1$ με το 3, ο b με το 5, ο c με το 3 και ο $c + 1$ με το 5. Αν κάνουμε λίγες δοκιμές θα βρούμε ότι οι μικρότεροι a, b, c που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες είναι: $a = 15$, $b = 20$ και $c = 24$.

M152

Εκτελούμε την αντικατάσταση $y = x + 2$. Οι εξισώσεις θα πάρουν τη μορφή

$$y^3 - 2y - 19 = 0$$

και

$$y^3 - 2y + 19 = 0.$$

Αν y_0 είναι ρίζα της πρώτης εξίσωσης, τότε $-y_0$ είναι ρίζα της δεύτερης. Από το γράφημα αυτών των εξισώσεων μπορούμε να δούμε ότι και οι δύο έχουν από μία μοναδική πραγματική ρίζα, το άθροισμα των οποίων ισούται με μηδέν. Επομένως, το άθροισμα των ριζών των αρχικών εξισώσεων είναι

$$(y_0 - 2) + (-y_0 - 2) = -4.$$

M153

Το ριζικό δεν μπορεί να είναι αρνητικό· επομένως $x \geq 0$. Από το ριζικό του δεύτερου επιπέδου βλέπουμε ότι $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$, οπότε $x \leq 2$. Συνεπώς, $0 \leq x \leq 2$, και μπορούμε να εκτελέσουμε την αντικατάσταση $x = 2\text{συν}\varphi$, με $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Επομένως, έχουμε

$$2 + x = 2(1 + \text{συν}\varphi) = 2\text{συν}^2\frac{\varphi}{2}$$

και

$$\sqrt{4\text{συν}^2\frac{\varphi}{2}} = 2\text{συν}\frac{\varphi}{2}.$$

Έπειτα από πράξεις έχουμε

$$2 - 2\text{συν}\frac{\varphi}{2} = 2\left(1 - \text{συν}\frac{\varphi}{2}\right) = 4\text{ημ}^2\frac{\varphi}{4}.$$

Επομένως, η εξίσωσή μας παίρνει τη μορφή

$$\sqrt{2 + 2\text{ημ}\frac{\varphi}{4}} = 2\text{συν}\varphi$$

(όλες οι ρίζες είναι θετικές, διότι $0 \leq \varphi \leq \pi/2$). Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$\sqrt{2 + 2\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4}\right)} = 2\text{συν}\varphi.$$

Τελικά, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\text{συν}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{8}\right) = \text{συν}\varphi.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{8} = \pm\varphi + 2\pi k.$$

Αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς επί του φ, βρίσκουμε ότι $\varphi = 2\pi/9$.
Απάντηση: $x = \text{συν}(2\pi/9)$.

M154

Ας αποδείξουμε μια βοηθητική πρόταση: Αν $ABCD$ είναι ένα ορθογώνιο και M ένα τυχαίο σημείο στο χώρο, τότε

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2. \quad (1)$$

Στο Σχήμα 1 βλέπετε την ειδική περίπτωση όπου το M ανήκει στο επίπεδο του ορθογωνίου $ABCD$, και μάλιστα βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Φέρουμε την $MP \perp AD$ και την $MQ \perp BC$. Παρατηρούμε ότι $AP = BQ$ και $PD = QC$. Αν εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα, βρίσκουμε

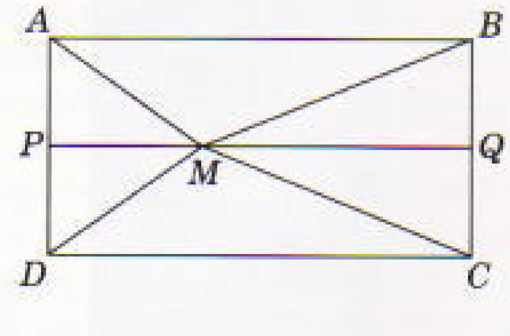
$$MA^2 + MC^2 = AP^2 + PM^2 + MQ^2 + QC^2 = AP^2 + PD^2 + PM^2 + MQ^2$$

$$MB^2 + MD^2 = BQ^2 + MQ^2 + MP^2 + PD^2 = AP^2 + PD^2 + PM^2 + MQ^2,$$

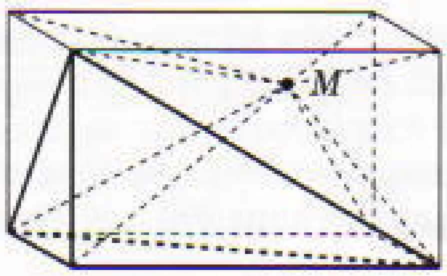
και επομένως, σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση (1) ισχύει. Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι το ίδιο ισχύει όταν το M βρίσκεται εκτός του ορθογωνίου (αλλά στο επίπεδο $ABCD$). Αν το M δεν ανήκει σε αυτό το επίπεδο, μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση με τον ίδιο τρόπο θεωρώντας την προβολή M' του M επί του επιπέδου $ABCD$. Βρίσκουμε τα σημεία P και Q φέροντας τις καθέτους $M'P$ και $M'Q$ όπως και προηγουμένως, και με παρόμοια επιχειρηματολογία οδηγούμαστε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ας εξετάσουμε τώρα το αρχικό πρόβλημα. Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο από το δεδομένο τετράεδρο (οι κάθετες μεταξύ τους ακμές που ξεκινούν από την ίδια κορυφή του τετραέδρου είναι ακμές και του παραλληλεπιπέδου· δείτε το Σχήμα 2).

Θεωρούμε τις τρεις έδρες του παραλληλεπιπέδου που περιέχουν τις τρεις έδρες του τετραέδρου (Σχήμα 2). Γνωρίζουμε τις αποστάσεις του σημείου M (που δίνεται στο πρόβλη-



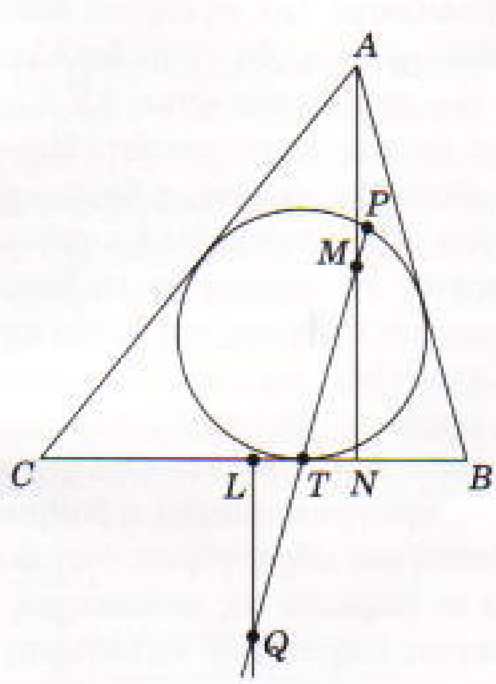
Σχήμα 1



Σχήμα 2

μα) από τρεις κορυφές κάθε έδρας. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση του M από την τέταρτη κορυφή καθεμιάς από αυτές τις έδρες. Τα τετράγωνα αυτών των αποστάσεων είναι τα εξής: $5 + 6 - 9 = 2$, $6 + 7 - 9 = 4$ και $7 + 5 - 9 = 3$.

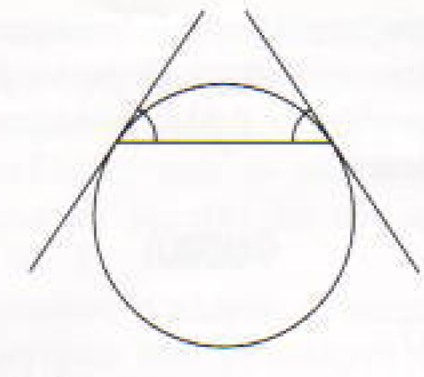
Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου M από την τελευταία κορυφή του παραλληλεπιπέδου (αυτή που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή του τετραέδρου στην οποία σχηματίζονται οι ορθές επίπεδες γωνίες). Αποδεικνύεται ότι η απόσταση αυτή είναι μηδενική: $2 + 3 - 5 = 0$ ή $3 + 4 - 7 = 0$ ή $2 + 4 - 6 = 0$. Τούτο σημαίνει ότι το M συμπίπτει με αυτή την κορυφή του παραλληλεπιπέδου. Άρα η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου ισούται με 3, και η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του παραλληλεπιπέδου, επομένως και του τετραέδρου, είναι 1,5.



Σχήμα 3

M155

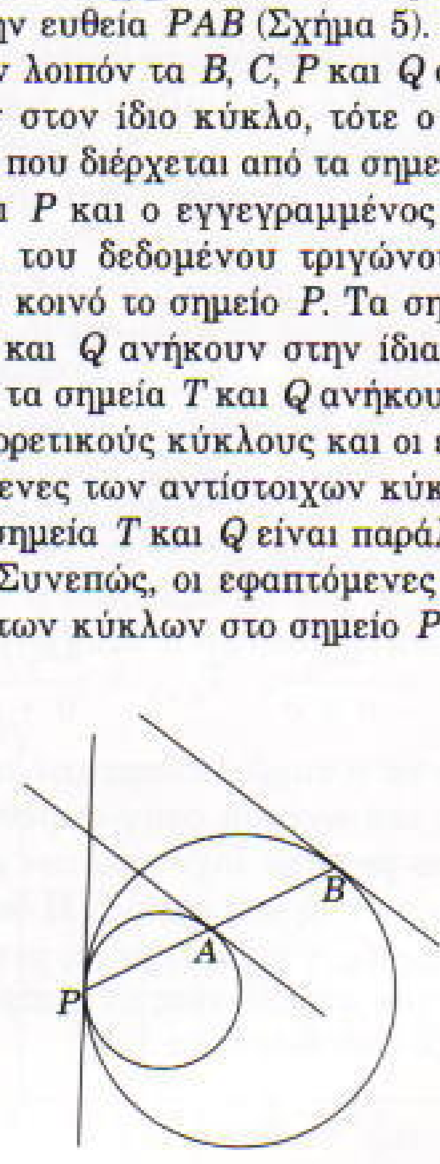
Έστω L το μέσον της BC. Ονομάζουμε Q το σημείο τομής της ευθείας PT με τη μεσοκάθετο της BC (βλ. Σχήμα 3). Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία B, C, P και Q ανήκουν στον



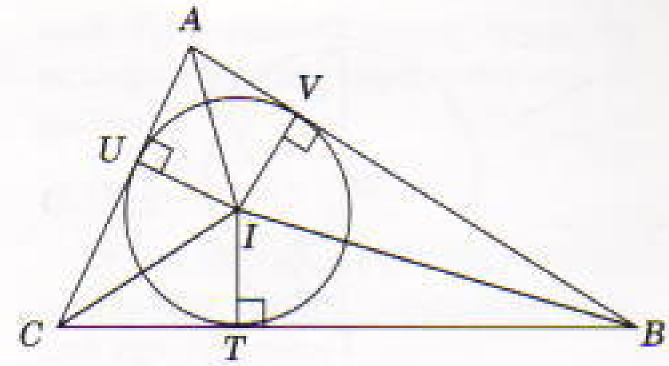
Σχήμα 4

ίδιο κύκλο. Ας δείξουμε πρώτα ότι αυτό το γεγονός αποδεικνύει τον ισχυρισμό του προβλήματός μας. Επισημαίνουμε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα μιας χορδής ενός κύκλου σχηματίζουν ίσες γωνίες με τη χορδή (Σχήμα 4). Ας υποθέσουμε τώρα ότι δύο κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο P και ας φέρουμε επικαλυπτόμενες χορδές των δύο κύκλων που διέρχονται από το σημείο P. Αν οι εφαπτόμενες που διέρχονται από τα άλλα άκρα των χορδών είναι παράλληλες, τότε οι κύκλοι εφάπτονται στο κοινό άκρο των χορδών. Πράγματι, αν οι δύο κύκλοι είχαν διαφορετικές εφαπτόμενες στο σημείο P, τότε αυτές οι ευθείες θα έπρεπε να σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ευθεία PAB (Σχήμα 5).

Αν λοιπόν τα B, C, P και Q ανήκουν στον ίδιο κύκλο, τότε ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία B, C και P και ο εγγεγραμμένος κύκλος του δεδομένου τριγώνου έχουν κοινό το σημείο P. Τα σημεία P, T και Q ανήκουν στην ίδια ευθεία, τα σημεία T και Q ανήκουν σε διαφορετικούς κύκλους και οι εφαπτόμενες των αντίστοιχων κύκλων στα σημεία T και Q είναι παράλληλες. Συνεπώς, οι εφαπτόμενες αυτών των κύκλων στο σημείο P συ-



Σχήμα 5



Σχήμα 6

μπίπτουν —δηλαδή, οι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι τα σημεία B, C, P και Q ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Προς τούτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει η επόμενη σχέση:

$$CT \cdot TB = QT \cdot TP. \qquad (1)$$

Θέτουμε $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ και έστω $2s$ η περίμετρος του τριγώνου ABC, E το εμβαδόν του, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, $AN = h$ το ύψος επί την πλευρά BC, και φ η γωνία MTN. Υποθέτουμε ότι η γωνία B του δεδομένου τριγώνου είναι οξεία και $b > c$ (στις άλλες περιπτώσεις, η επιχειρηματολογία και οι υπολογισμοί είναι πρακτικά ίδιοι). Ας θυμηθούμε πρώτα δύο γεγονότα που αφορούν τον εγγεγραμμένο κύκλο ενός τριγώνου (Σχήμα 6).

(*i*) $rs = E$. Αυτός ο πασίγνωστος τύπος προκύπτει αν υπολογίσουμε το E ως άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ABI, BCI, CIA.

(*ii*) Αν $s = (1/2)(a + b + c)$, τότε

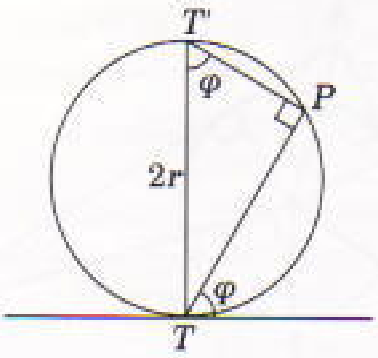
$$CT = CU = s - c,$$
$$AU = AV = s - a,$$
$$BV = BT = s - b.$$

Μπορούμε να αποδείξουμε αυτούς τους τύπους αν θέσουμε $CT = CU = x$, $AU = AV = y$, $BV = BT = z$. Τότε έχουμε:

$$x + y = a, \quad y + z = b, \quad z + x = c.$$

Εκφράζοντας τα x, y, z συναρτήσει των a, b, c, έχουμε

$$CT = s - c = \frac{a + b - c}{2},$$
$$TB = s - b = \frac{a + c - b}{2}. \qquad (2)$$



Σχήμα 7

Βρίσκουμε τώρα ότι

$$LT = LB - TB = \frac{b - c}{2} \qquad (3)$$

και

$$NB = c\,\text{συν}B = \frac{2ac\,\text{συν}B}{2a}$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2a}.$$

Η τελευταία σχέση, μαζί με την (2), συνεπάγεται

$$TN = TB - NB = \frac{(b - c)(s - a)}{a}.$$

Επομένως,

$$\text{εφ}\varphi = \frac{MN}{TN} = \frac{ha}{2(b - c)(s - a)}. \qquad (4)$$

Έχουμε τώρα: $TP = 2r\,\text{ημ}\varphi$ και $TQ = LT/\text{συν}\varphi$. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν άμεσα από το Σχήμα 7, όπου T' είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του T στον εγγεγραμμένο κύκλο. Αν τις συνδυάσουμε με την (4), αυτές οι σχέσεις συνεπάγονται ότι

$$TP \cdot QT = r(b - c)\,\text{εφ}\varphi$$

$$= \frac{rha}{2(s - a)} = \frac{rE}{s - a}.$$

Η σχέση (1), σε συνδυασμό με την (2), παίρνει πλέον τη μορφή

$$\frac{rE}{s - a} = (s - c)(s - b).$$

Αυτή η σχέση προκύπτει από δύο τύπους για το εμβαδόν ενός τριγώνου: $E = rs$ (η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου επί την ημιπεριφέρεια) και

$$E = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

(ο τύπος του Ήρωνα). Ανάλυση αυτών των τύπων μπορείτε να βρείτε σε οποιοδήποτε βιβλίο ανώτερης γεωμετρίας.

ΦΥΣΙΚΗ

Φ151

Η συχνότητα του ανακλώμενου σήματος δεν συμπίπτει με τη συχνότητα της δέσμης που εκπέμπει το ραντάρ λόγω του φαινομένου Doppler. Η μέγιστη μετατόπιση συχνότητας παρατηρείται όταν η ταχύτητα του ανακλώμενου ραδιοκύματος έχει κατεύθυνση προς το ραντάρ (ή την αντίθετη).

Ας υποθέσουμε ότι το ραντάρ εκπέμπει βραχείς ραδιοπαλμούς με συχνότητα επανάληψης v_0, ενώ η συχνότητα των λαμβανομένων παλμών είναι v_1. Ανάμεσα στις αφίξεις του n-οστού και του $(n + 1)$-οστού παλμού στην κεραία μεσολαβεί χρονικό διάστημα ίσο με

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_0} + T_{n+1} - T_n,$$

όπου με T_n συμβολίζουμε το χρόνο που απαιτείται ώστε ο n-οστός παλμός να διαδοθεί από το ραντάρ ώς το ανακλών αντικείμενο και να επιστρέψει, ενώ με T_{n+1} δηλώνεται το αντίστοιχο χρονικό διάστημα για τον $(n + 1)$-οστό παλμό.

Όταν εκπέμπεται ο n-οστός παλμός, η απόσταση ανάμεσα στο ραντάρ και το ανακλών αντικείμενο ισούται με L_n, ενώ όταν εκπέμπεται ο $(n + 1)$-οστός παλμός, αυτή η απόσταση γίνεται L_{n+1}. Προφανώς, ισχύουν οι σχέσεις

$$T_n = \frac{2L_n}{\upsilon + c}, \quad T_{n+1} = \frac{2L_{n+1}}{\upsilon + c},$$

όπου με υ συμβολίζουμε την ταχύτητα του ανέμου στην αμμοθύελλα και με c την ταχύτητα των ραδιοκυμάτων (ή του φωτός). Η διαφορά $L_n - L_{n+1}$ ισούται με τη μετατόπιση του ανακλώντος αντικειμένου σε χρονικό διάστημα $1/v_0$:

$$L_n - L_{n+1} = \upsilon / v_0.$$

Αυτή η εξίσωση γράφεται και με τη μορφή

$$v_1 = v_0\,\frac{(c + \upsilon)}{(c - \upsilon)} \cong v_0\left(1 + \frac{2\upsilon}{c}\right),$$

και μπορεί να λυθεί ως προς υ. Έτσι, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\upsilon \cong \frac{c}{2}\,\frac{\Delta v}{v_0} \cong 100 \text{ m/s}.$$

Φ152

Η αρχική πίεση του αέρα στο σωλήνα εξισορροπεί την υδροστατική πίεση της υδραργυρικής στήλης, η οποία έχει ύψος $(H - h) = 76$ cm, και την ατμοσφαιρική πίεση. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, η ατμοσφαιρική πίεση ανέρχεται σε $10^5\ \text{N/m}^2 \cong 76$ cmHg. Συνεπώς, στην αρχή η πίεση του αέρα στο σωλήνα είναι περίπου διπλάσια από την ατμοσφαιρική.

Υποθέτουμε ότι η μετατόπιση του υδραργύρου συντελείται βραδέως, οπότε το σύστημα παραμένει πάντοτε σε κατάσταση ισορροπίας. Κοντά στην τελική κατάσταση, όταν σχεδόν όλος ο υδράργυρος έχει εκβληθεί από το σωλήνα, η πίεση του αέρα στο σωλήνα θα ισούται με την ατμοσφαιρική πίεση, δηλαδή η τιμή της θα έχει πέσει στο ήμισυ της αρχικής. Ο όγκος HS αυτού του αέρα (με S συμβολίζουμε την εγκάρσια διατομή του σωλήνα) θα είναι διπλάσιος από τον αρχικό του όγκο hS. Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων, η θερμοκρασία του αέρα στην τελική κατάσταση πρέπει να ισούται με τη θερμοκρασία του στην αρχική κατάσταση!

Καταρχάς, ας προσδιορίσουμε πώς πρέπει να μεταβάλλεται η θερμοκρασία του αέρα στο σωλήνα ώστε να πραγματοποιηθεί η βαθμιαία εκτόπιση του υδραργύρου, έτσι ώστε κατά τη διάρκειά της το σύστημα να βρίσκεται διαρκώς σε κατάσταση ισορροπίας.

Εάν σε κάποια χρονική στιγμή το ύψος της στήλης του αέρα ισούται με z, τότε η πίεση $P(z)$ του αέρα στο σωλήνα θα δίνεται από τον τύπο

$$P(z) = P_0 + \rho g(H - z), \qquad (1)$$

όπου με ρ συμβολίζουμε την πυκνότητα του υδραργύρου, ενώ P_0 είναι η ατμοσφαιρική πίεση, η οποία, σύμφωνα με την εκφώνηση, ισούται περίπου με την υδροστατική πίεση που ασκεί υδραργυρική στήλη ύψους $H/2$:

$$P_0 = \rho g H/2. \qquad (2)$$

Εισάγοντας στην (1) την (2), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$P(z) = \rho g[(3H/2) - z]. \qquad (3)$$

Εφόσον υποθέσαμε ότι ο αέρας μέσα στο σωλήνα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία για κάθε z, η πίεση του αέρα $P(z)$, ο όγκος του Sz και η θερμοκρασία του $T(z)$ θα ικανοποιούν την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$\frac{P(z)Sz}{T(z)} = \frac{\dfrac{2P_0 SH}{2}}{T_0}, \qquad (4)$$

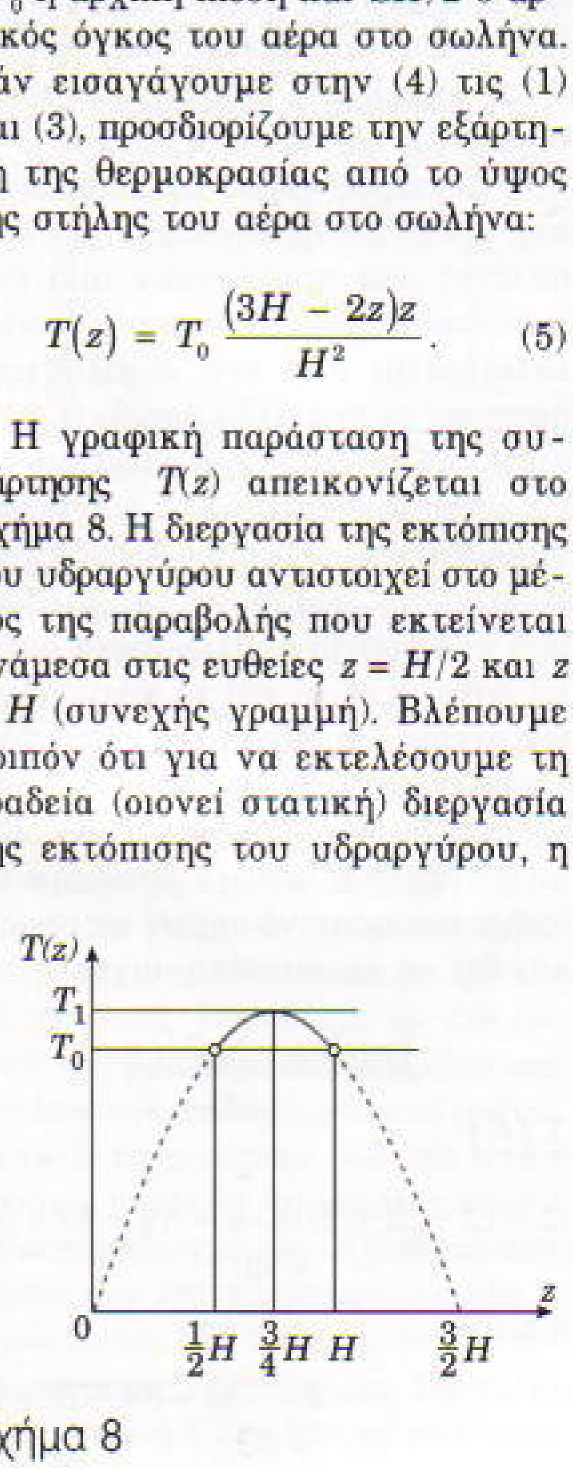
όπου T_0 είναι η αρχική θερμοκρασία, $2P_0$ η αρχική πίεση και $SH/2$ ο αρχικός όγκος του αέρα στο σωλήνα. Εάν εισαγάγουμε στην (4) τις (1) και (3), προσδιορίζουμε την εξάρτηση της θερμοκρασίας από το ύψος της στήλης του αέρα στο σωλήνα:

$$T(z) = T_0 \frac{(3H - 2z)z}{H^2}. \qquad (5)$$

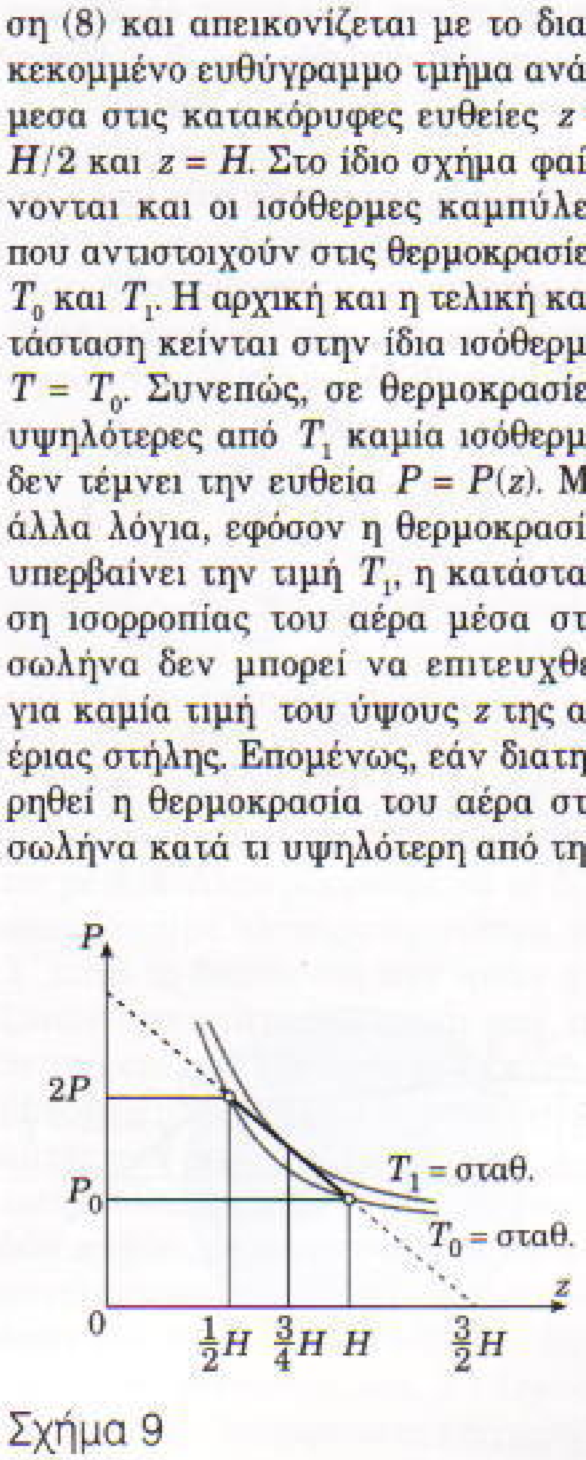
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(z)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 8. Η διεργασία της εκτόπισης του υδραργύρου αντιστοιχεί στο μέρος της παραβολής που εκτείνεται ανάμεσα στις ευθείες $z = H/2$ και $z = H$ (συνεχής γραμμή). Βλέπουμε λοιπόν ότι για να εκτελέσουμε τη βραδεία (οιονεί στατική) διεργασία της εκτόπισης του υδραργύρου, η θερμοκρασία πρέπει να αυξηθεί μέχρι την τιμή $T_1 = 9T_0/8$ (σε αυτή τη θερμοκρασία ο μισός υδράργυρος έχει εκβληθεί από το σωλήνα) και κατόπιν να μειωθεί ώς την αρχική τιμή της T_0.

Συνεπώς, η πλήρης εκτόπιση του υδραργύρου από το σωλήνα πραγματοποιείται με τη θέρμανση του αέρα ώς τους $T_1 \cong 326$ K. Εν συνεχεία, η εν λόγω θερμοκρασία πρέπει να διατηρηθεί (μέσω θερμικής επαφής με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T_1). Στη διεργασία που θα ακολουθήσει, ο υδράργυρος θα μετατοπιστεί λόγω της εκτόνωσης του αέρα, αλλά σ' αυτό το στάδιο η διεργασία δεν έχει οιονεί στατικό χαρακτήρα.

Τα διαγράμματα P-V θα βοηθήσουν να αποσαφηνιστεί η συλλογιστική μας (Σχήμα 9). Την οιονεί στατική μετατόπιση την περιγράφει η γραμμική εξάρτηση της πίεσης από το z, η οποία δίνεται από την εξίσωση (8) και απεικονίζεται με το διακεκομμένο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στις κατακόρυφες ευθείες $z = H/2$ και $z = H$. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται και οι ισόθερμες καμπύλες που αντιστοιχούν στις θερμοκρασίες T_0 και T_1. Η αρχική και η τελική κατάσταση κείνται στην ίδια ισόθερμη $T = T_0$. Συνεπώς, σε θερμοκρασίες υψηλότερες από T_1 καμία ισόθερμη δεν τέμνει την ευθεία $P = P(z)$. Με άλλα λόγια, εφόσον η θερμοκρασία υπερβαίνει την τιμή T_1, η κατάσταση ισορροπίας του αέρα μέσα στο σωλήνα δεν μπορεί να επιτευχθεί για καμία τιμή του ύψους z της αέριας στήλης. Επομένως, εάν διατηρηθεί η θερμοκρασία του αέρα στο σωλήνα κατά τι υψηλότερη από την τιμή T_1, ο εκτονούμενος αέρας θα εκτοπίσει όλο τον υδράργυρο από το σωλήνα.



Σχήμα 8



Σχήμα 9

Φ153

Σε μια αυθαίρετη χρονική στιγμή, η ενέργεια του συστήματος δίνεται από την έκφραση

$$E = \frac{LI^2}{2} + \frac{CV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - \frac{qVx}{d},$$

όπου με L συμβολίζουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου, με I το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα, με V την πτώση τάσης στον πυκνωτή, με v την ταχύτητα του σωματιδίου και με x τη θέση του. Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σημειακού φορτίου είναι

$$m\gamma = qV/d.$$

Εάν το V μεταβάλλεται αρμονικά ως $V = V_0$ συνωt, τότε

$$v = \frac{qV_0}{md\omega}\,\text{ημ}\,\omega t,$$

$$x = -\frac{qV_0}{md\omega^2}\,\text{συν}\,\omega t,$$

$$I = -CV_0\omega\,\text{ημ}\,\omega t.$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο διατήρησης της ενέργειας καταλήγουμε στη σχέση

$$V_0^2\left[\frac{L}{2}(C\omega)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{q}{m\omega d}\right)^2\right]\text{ημ}^2\omega t + V_0^2\left[\frac{C}{2} + \frac{q^2}{m(\omega d)^2}\right]\text{συν}^2\omega t = E = \text{σταθ.}$$

Η εν λόγω εξίσωση είναι δυνατόν να ικανοποιείται για κάθε χρονική στιγμή t μόνον εάν συμπίπτουν οι συντελεστές των ημ$^2\omega t$ και συν$^2\omega t$:

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2} + \left[\left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 + \frac{\left(\dfrac{q\omega_0}{d}\right)^2}{mC}\right]^{1/2}, \quad (1)$$

όπου $\omega_0^2 = 1/LC$.

Ας προβούμε σε μερικούς χονδρικούς υπολογισμούς που θα μας επιτρέψουν να διακρίνουμε σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε πράγματι να αγνοήσουμε τις δυνάμεις λόγω των επαγόμενων φορτίων, όπως άλλωστε υποδεικνύει και η εκφώνηση. Η εν λόγω δύναμη έχει τάξη μεγέθους $q^2x/(\varepsilon_0 d^3)$, και πρέπει να παραμένει κατά πολύ μικρότερη από τη συνήθη ηλεκτροστατική δύναμη qV/d, απαίτηση η οποία μας οδηγεί στη συνθήκη

$$\frac{q^2}{\varepsilon_0 d^3 m\omega^2} \ll 1.$$

Εφόσον $S \gg d^2$ και $C = \varepsilon_0 S/d$ (όπου S είναι το εμβαδόν κάθε οπλισμού), η εξίσωση (1) ισχύει όταν το σημειακό φορτίο δεν προκαλεί πολύ μεγάλη μεταβολή της φυσικής συχνότητας του συντονισμένου κυκλώματος.

Φ154

Όταν ενεργοποιείται το μαγνητικό πεδίο, σε κάθε σωματίδιο θα ασκηθεί δύναμη Lorentz (Σχήμα 10), η οποία έχει διεύθυνση κατά μήκος της ράβδου και μέτρο ίσο με

$$F_L = qvB = q\omega\ell B/2.$$

Επομένως, στο δίπολο ασκείται συνισταμένη δύναμη, της οποίας το μέτρο ισούται με

$$F = 2F_L = q\omega\ell B.$$

Το μέτρο αυτής της δύναμης παραμένει σταθερό, αλλά η κατεύθυνσή της μεταβάλλεται συνεχώς: Το διάνυσμα $\mathbf{F}$ περιστρέφεται μαζί με τη ράβδο, με γωνιακή ταχύτητα ω. Κατά συνέπεια, το κέντρο του διπόλου (σημείο O) θα περιφέρεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω διαγράφοντας κύκλο ακτίνας r, την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:

$$F = 2m\omega^2 r,$$

$$r = \frac{F}{2m\omega^2} = \frac{q\ell B}{2m\omega}.$$

Φ155

Το πρόβλημα λύνεται με τους νόμους της λεγόμενης «παραξονικής οπτικής», δηλαδή της γεωμετρικής οπτικής για μικρές γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης. Για τέτοιες γωνίες, ισχύουν, σε ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας, οι προσεγγίσεις ημ$a \cong$ εφ$a \cong a$, οπότε ο νόμος του Snell γράφεται με την εξής προσεγγιστική μορφή: $n_1 a_1 = n_2 a_2$.

Ας θεωρήσουμε μιαν αυθαίρετη ακτίνα που προσπίπτει στη σφαίρα σε απόσταση h από τον άξονά της (Σχήμα 11). Επειδή $h \ll R$ (η δέσμη είναι στενή), η γωνία πρόσπτωσης της εν λόγω ακτίνας είναι $a \cong h/R \ll 1$. Εάν σχεδιάσουμε τη διαδρομή που εν συνεχεία ακολουθεί η ακτίνα, μπορούμε να προσδιορίσουμε όλες τις γωνίες των τριγώνων AOB, OBD και BDC:

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{a}{n},$$

$$\angle BOD = \frac{2a}{n} - a,$$

$$\angle BCD = a - \left(\frac{2a}{n} - a\right) = 2a\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Τότε,

$$BD = R\left(\frac{2a}{n} - a\right),$$

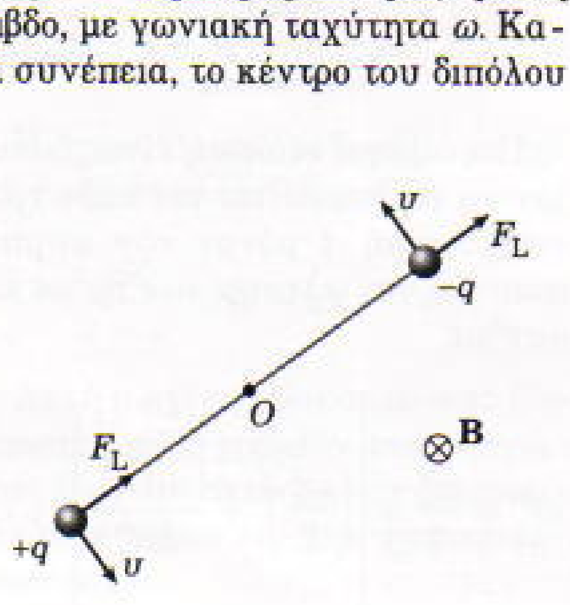
$$DC = \frac{BD}{2a(1 - 1/n)}$$

$$= \frac{Ra(2/n - 1)}{2a(1 - 1/n)} = R\,\frac{2 - n}{2(n - 1)}.$$

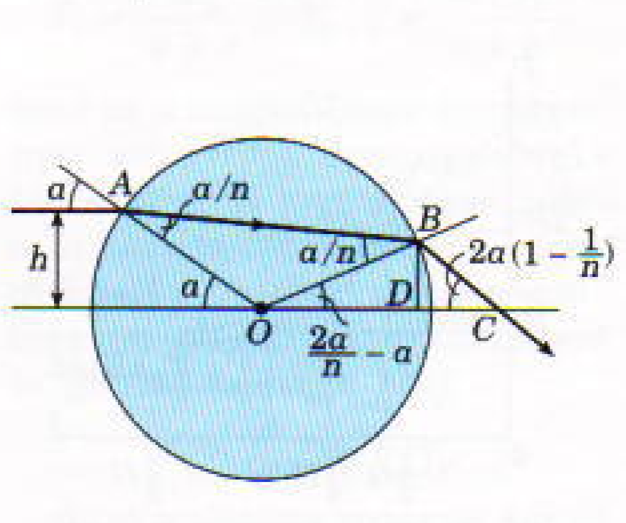
Από την εκφώνηση του προβλήματος, όμως, γνωρίζουμε ότι $DC = R$. Λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς n, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $n = 4/3$.

Οφείλουμε να επιστήσουμε την προσοχή στο γεγονός ότι στον τελικό τύπο δεν υπεισέρχεται η γωνία πρόσπτωσης a, πράγμα που σημαίνει ότι όλες οι ακτίνες της δέσμης θα εστιαστούν σε ένα μοναδικό σημείο. Πρόκειται για έναν από τους νόμους της παραξονικής οπτικής: Σε ένα διαθλαστικό σύστημα, οι στενές δέσμες παράλληλων ακτίνων είτε συγκλίνουν σε ένα μοναδικό σημείο (την εστία) είτε αποκλίνουν σαν να είχαν εκπεμφθεί από ένα μοναδικό σημείο (τη φανταστική εστία).

Ο δεύτερος νόμος της παραξονικής γεωμετρικής οπτικής λέει ότι οι ακτίνες που αποκλίνουν από ένα μοναδικό σημείο υπό μικρές γωνίες εστιάζονται από ένα διαθλαστικό σύστημα σε ένα άλλο σημείο (και σε αυτή την περίπτωση η εστία μπορεί να είναι φανταστική). Οι δύο προαναφερόμενοι νόμοι μάς βοηθούν να επιλύσουμε πολλά προβλήματα όπου ένα από τα εμπλεκόμενα οπτικά όργανα είναι και το μάτι: Λόγω της μικρής διαμέτρου της κόρης του, το μάτι εστιάζει τις ακτίνες που προσπίπτουν υπό μικρές γωνίες. Για αυτόν ακριβώς το λόγο μπορούμε να δούμε ένα φωτεινό σημείο ως σημείο και όχι ως εκτεταμένη πηγή.



Σχήμα 10



Σχήμα 11

Σπαζοκεφαλιές

Σ151

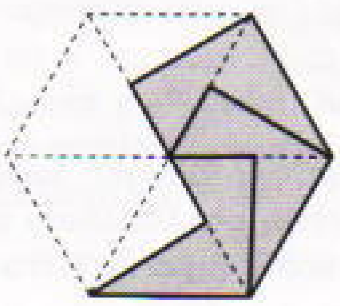
$$(2 + (2 - (3 + 3)))(-4 + ((4 - 5) + 5)) = 40$$

ή και

$$((2 + ((2 - 3) + 3)) - 4) + ((4 - 5) + 5) = 50.$$

Σ152

Δείτε το Σχήμα 12.



Σχήμα 12

Σ153

Ας θεωρήσουμε τα τέσσερα ορθογώνια στην πάνω αριστερή γωνία (Σχήμα 13). Το εμβαδόν του ενός από αυτά είναι άγνωστο. Ας το βρούμε. Ο λόγος των εμβαδών των ορθογωνίων 1 και 2 είναι ίσος με το λόγο των εμβαδών των ορθογωνίων 3 και 4. Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου 3 ισούται με 6. Σκεπτόμενοι με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε διαδοχικά τα εμβαδά των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω

1 2	3 ? = 6
2 1	4 3

Σχήμα 13

από τη διαγώνιο η οποία ενώνει την αριστερή γωνία με την πάνω κάτω δεξιά του μεγάλου ορθογωνίου. Τελικά, βρίσκουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με 24.

Σ154

Είναι 7 cm, διότι το μόνο σημείο D που ικανοποιεί τις συνθήκες είναι η κορυφή της κανονικής πυραμίδας, με βάση το τρίγωνο ABC. Πράγματι, $6 \leq DB \leq 8$ και το DB είναι ακέραιος. Επομένως, το DB είναι 6 cm, 7 cm ή 8 cm. Η πρώτη και η τελευταία εκδοχή συνεπάγονται ότι το D ανήκει στην AB. (Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν —για παράδειγμα, με τη βοήθεια του νόμου των συνημιτόνων— αλλά ο νόμος αυτός δεν δίνει ότι το DC είναι ακέραιος.) Ομοίως, το DC είναι 6 cm, 7 cm ή 8 cm. Και σε αυτή την περίπτωση, η πρώτη και η τελευταία εκδοχή συνεπάγονται ότι το D ανήκει στην AC. Επομένως, το μόνο που μπορεί να ισχύει είναι $AD = BD = CD = 7$ cm.

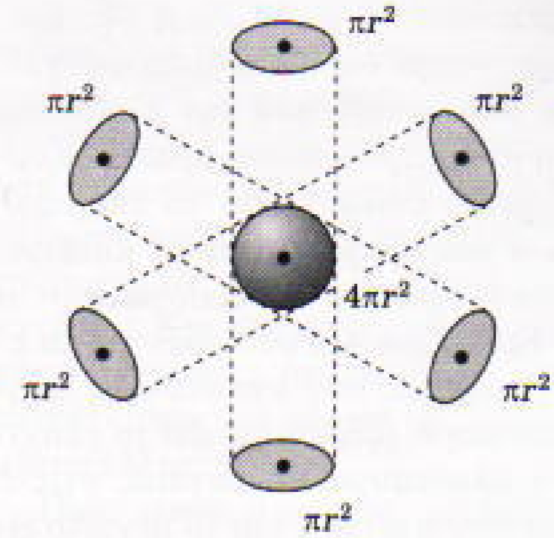
Σ155

Η ισορροπία του ζυγού δεν θα επηρεαστεί· η ένδειξη του δυναμόμετρου όμως θα αλλάξει. Αλήθεια, θα μειωθεί ή θα αυξηθεί; (Θα μειωθεί, διότι η δύναμη της βαρύτητας τείνει στο μηδέν καθώς πλησιάζουμε το κέντρο της Γης. Μπορείτε να το αποδείξετε;)

Ψηφιακός κόσμος

Ερώτημα 1. Για να υπολογίσετε την περίμετρο αρκεί να απαριθμήσετε και να προσθέσετε τα πλήθη των εξωτερικών τετραγώνων που είναι προσανατολισμένα προς το βορρά, το νότο, την ανατολή και τη δύση. Όμως, το πλήθος των προσανατολισμένων προς το βορρά τετραγώνων ισούται με το πλάτος της γραμμοσκιασμένης περιοχής· το ίδιο ισχύει για το πλήθος των προσανατολισμένων προς το νότο τετραγώνων. Παρομοίως, το πλήθος των προσανατολισμένων προς την ανατολή τετραγώνων, όπως και των προσανατολισμένων προς τη δύση, ισούται με το ύψος της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Συνεπώς, η συνολική περίμετρος είναι διπλάσια του αθροίσματος του ύψους και του πλάτους της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Στην περίπτωση του κύκλου, λόγω συμμετρίας, είναι ίση με το τετραπλάσιο του πλάτους της γραμμοσκιασμένης περιοχής.

Ερώτημα 2. Αν το X είναι σφαίρα, το πλεόνασμα επιφανείας ισούται με $3/2$. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν παρατηρήσουμε το X' κατά τη διεύθυνση των τριών αξόνων συντεταγμένων (και από τη θετική και από την αρνητική κατεύθυνση) (Σχήμα 14). Οι παρατηρήσεις αυτές μας αποκαλύπτουν διαφορετικά σύνολα εδρών των στοιχειωδών κύβων, τα οποία από κοινού αποτελούν το σύνολο των ορατών εδρών των στοιχειωδών κύβων —δηλαδή, την επιφάνεια του X'. Όμως, αυτές οι έξι διαφορετικές όψεις είναι κύκλοι, με εμβαδόν πr^2 (όπου r είναι η ακτίνα της σφαίρας). Ο λόγος του αθροίσματος αυτών των εμβαδών ($6\pi r^2$) προς το εμβαδόν της σφαίρας ($4\pi r^2$) ισούται με $3/2$. Μπορείτε να εφαρμόσετε το τέχνασμα των «έξι παρατηρήσεων» για να υπολογίσετε το πλεόνασμα επιφανείας κάθε κυρτού αντικειμένου βάσει των τριών προβολών του (παρατηρώντας καθεμία προβολή από δύο διευθύνσεις).



Σχήμα 14

Ερώτημα 3. Το ελάχιστο πλεόνασμα επιφανείας είναι 1, και το επιτυγχάνουμε με έναν κύβο ευθυγραμμισμένο με τους άξονες συντεταγμένων. Το μέγιστο πλεόνασμα επιφανείας είναι $\sqrt{3}$, και προκύπτει είτε με έναν κύβο οι διαγώνιοι του οποίου είναι ευθυγραμμισμένες με τους άξονες συντεταγμένων είτε με ένα οκτάεδρο οι απέναντι κορυφές του οποίου είναι ευθυγραμμισμένες με τους άξονες συντεταγμένων.

Για να επαληθεύσουμε ότι το $\sqrt{3}$ είναι η μέγιστη τιμή, ας θεωρήσουμε μια σχεδόν γραμμική «έδρα» τού X με εμβαδόν A και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ (στο σύστημα συντεταγμένων των στοιχειωδών κύβων). Το εμβαδόν της αντίστοιχης έδρας του X' ισούται με το άθροισμα των προβολών επί των διευθύνσεων των τριών αξόνων συντεταγμένων. Αυτό το άθροισμα είναι ίσο με A φορές το άθροισμα των κατευθυνόντων συνημιτόνων n_i. Το άθροισμα των κατευθυνόντων συνημιτόνων γίνεται μέγιστο όταν τα συνημίτονα είναι ίσα μεταξύ τους (άρα ίσα με $1/\sqrt{3}$). Επομένως, το μέγιστο πλεόνασμα επιφανείας της έδρας ισούται με $3/\sqrt{3}$, ή $\sqrt{3}$. Επισημαίνουμε ότι η απόδειξη αυτή είναι ανεξάρτητη από την κυρτότητα του αντικειμένου που προσεγγίζουμε μέσω κύβων, διότι τα επιχειρήματά μας εφαρμόζονται σε κάθε τοπικό τμήμα του συνόρου του.

Ερώτημα 4. Γενικεύοντας τα επιχειρήματα που αναπτύξαμε στην ερώτηση 3, βρίσκουμε ότι το ελάχιστο πλεόνασμα επιφανείας στις N διαστάσεις είναι 1 και το μέγιστο είναι $\sqrt{N}$.

Gradus

Πρόβλημα 3. (α) Αν ένας αριθμός N έχει άρτιο πλήθος όμοιων ψηφίων, τότε η εναλλάξ προσθαφαίρεση των ψηφίων του ισούται με 0 και, επομένως, ο N είναι πολλαπλάσιος του 11. (β) Έστω ότι το N έχει περιττό πλήθος ψηφίων, το καθένα ίσο με d. Τότε, το υπόλοιπο της διαίρεσης του N με το 11 είναι d. Επομένως, κανένας τέτοιος αριθμός N δεν μπορεί να αφήσει υπόλοιπο 10 όταν διαιρεθεί με το 11, διότι $d < 10$.

Πρόβλημα 4. Αν ο αρχικός αριθμός είναι ο $100a + 10b + c$, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a \geq c$. Πρέπει λοιπόν να εξετάσουμε τη διαφορά $100(a - c) + (c - a) = 99(a - c)$, η οποία είναι προφανώς πολλαπλάσιο του 11 (καθώς και του 9).

Πρόβλημα 5. (α) $AAA = 100A + 10A + A = 111A = 3 \cdot 37A$ και, επομένως, ο μεγαλύτερος πρώτος με αυτή την ιδιότητα είναι το 37. (β) Όπως και προηγουμένως, $BBBB = 1111B = 11 \cdot 101B$ και, επομένως, ο μεγαλύτερος πρώτος είναι το 101. (γ) Ομοίως $CCCCCC = 111111C = 111 \cdot 1001C = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13C$, οπότε η απάντηση είναι 37.

Πρόβλημα 6. Αν ABC είναι ο δεδομένος αριθμός, τότε υπάρχουν έξι υποψήφιοι, και από αυτούς ο BCA διαιρείται επίσης με το 37. Πράγματι, έχουμε ότι $100A + 10B + C = 37k$, για κάποιον ακέραιο k. Οπότε, $100B = 370k - 1000A - 10C$ και

$$BCA = 370k - 1000A - 10C + 10C + A = 370k - 999A.$$

Αφού $999 = 9 \cdot 111 = 27 \cdot 37$, ο αριθμός BCA είναι πολλαπλάσιο του 37.

Πρόβλημα 7. Οι αριθμοί του Μάριου είναι της μορφής

$$100a + 10b + b = 100a + 11b \equiv 2a + 4b \pmod 7.$$

Το άθροισμα των ψηφίων είναι $a + 2b$. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι «$a + 2b \equiv 0 \pmod 7$ αν και μόνο αν $2a + 4b \equiv 0 \pmod 7$», κι έτσι να δείξετε ότι η πρόταση του Δημήτρη είναι αληθής. Επισημαίνουμε ότι η πρόταση που είναι γραμμένη εντός των εισαγωγικών αληθεύει, διότι το 7 είναι πρώτος. Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να μην ισχύει.

Πρόβλημα 8. Θεωρούμε τον αριθμό $N = 10a + b$, όπου b είναι το ψηφίο των μονάδων του (αλλά το a δεν είναι κατ' ανάγκη το ψηφίο των δεκάδων του). Σχηματίζουμε τώρα τον αριθμό $N' = a + 4b$. Έχουμε ότι $10N' = 10a + 40b$, και $10N' - N = 39b$ —που είναι πολλαπλάσιο του 13. Επομένως, $N \equiv 10N' \pmod{13}$, οπότε $N \equiv 0 \pmod{13}$ αν και μόνο αν $N' \equiv 0 \pmod{13}$, διότι ο 13 είναι πρώτος. Παρατηρούμε ότι τα N και N' μπορεί να μην είναι ίσα modulo 13.

Για να επαληθεύσουμε ότι τελικά παίρνουμε έναν διψήφιο αριθμό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $N - N' = 9a - 3b$, και, αν $a > 9$ (δηλαδή, αν ο αρχικός αριθμός έχει περισσότερα από δύο ψηφία), τότε το $N - N'$ είναι θετικό και, επομένως, $N' < N$.

Πρόβλημα 9. Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς των δύο πρώτων προβλημάτων, όπου S δηλώνει το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού N, και S' ο αριθμός που προκύπτει από την ενναλλάξ προσθαφαίρεση.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το N είναι πολλαπλάσιο του 99. Τότε το N είναι πολλαπλάσιο του 9 και, επομένως, το S είναι επίσης πολλαπλάσιο του 9. Άρα το $11S$ είναι πολλαπλάσιο του 99. Ομοίως, το S' είναι πολλαπλάσιο του 11 και, επομένως, το $9S'$ είναι πολλαπλάσιο του 99. Άρα το $11S - 9S'$ είναι πολλαπλάσιο του 99. Όμως, η τελευταία διαφορά ισούται με

$$2(10a_n + a_{n-1} + 10a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + 10a_1 + a_0),$$

δηλαδή,

$$2(\overline{a_na_{n-1}} + \overline{a_{n-2}a_{n-3}} + \dots + \overline{a_1a_0}).$$

Το δεδομένο άθροισμα, λοιπόν, πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 99.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το

$$\overline{a_na_{n-1}} + \overline{a_{n-2}a_{n-3}} + \dots + \overline{a_1a_0}$$

είναι πολλαπλάσιο του 99. Τότε, το διπλάσιο αυτού του αριθμού, δηλαδή το

$$2(10a_n + a_{n-1} + 10a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + 10a_1 + a_0) = 11S - 9S'$$

είναι επίσης πολλαπλάσιο του 99. Μπορούμε επομένως να θέσουμε $11S - 9S' = 99K$, για κάποιον ακέραιο K, και συνεπώς το $11S = 99K + 9S'$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Έπεται ότι και το S είναι πολλαπλάσιο του 9 και, επομένως, και το N. Ομοίως, από τη σχέση $9S' = 11S - 99K$ βρίσκουμε ότι το S' είναι πολλαπλάσιο του 11, οπότε το ίδιο ισχύει για το N. Άρα, το N είναι πολλαπλάσιο του 99.

Πρόβλημα 10. Ο μικρότερος αριθμός με 2000 ψηφία είναι ο

$$N = \underbrace{1000\dots000}_{1999 \text{ μηδενικά}}.$$

Υπάρχει οπωσδήποτε ένα πολλαπλάσιο του 99 μεταξύ των επόμενων 100 ακεραίων, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αριθμός που αναζητούμε είναι της μορφής

$$N = \underbrace{1000\dots0ab}_{1997 \text{ μηδενικά}}.$$

Από το κριτήριο του Προβλήματος 9 βρίσκουμε ότι το άθροισμα $10 + 00 + \dots + ab$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 99 έπεται ότι οι ελάχιστες δυνατές τιμές των a και b είναι 8 και 9. Απάντηση:

$$N = \underbrace{1000\dots089}_{1997 \text{ μηδενικά}}.$$

Πρόβλημα 11. Έχουμε

$$\binom{99}{19} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 81}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Αν μετρήσουμε τους πρώτους παράγοντες των όρων του αριθμητή και του παρονομαστή, θα βρούμε ότι αυτός ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2, του 3^3 και του 11, αλλά όχι του 5. Άρα το z είναι ένα μη μηδενικό άρτιο ψηφίο. Επομένως για αυτό τον ακέραιο το

$$S = 1 + 0 + 7 + 1 + 9 + 6 + 6 + 7 + 4 + 0 + 8 + 0 + 7 + 6 + 1 + 9 + 3 + 6 + x + y + z$$

είναι πολλαπλάσιο του 9, και το

$$S' = 1 - 0 + 7 - 1 + 9 - 6 + 6 - 7 + 4 - 0 + 8 - 0 + 7 - 6 + 1 - 9 + 3 - 6 + x - y + z$$

είναι πολλαπλάσιο του 11. Έπεται ότι το $x + y + z$ είναι πολλαπλάσιο του 9 και το $x - y + z$ είναι πολλαπλάσιο του 11, και ότι τα δύο αυτά αθροίσματα πρέπει να έχουν την ίδια ισοτιμία. (Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε, για παράδειγμα, αν παρατηρήσουμε ότι το άθροισμά τους είναι $2x + 2z$, το οποίο είναι άρτιο.) Το $x + y + z$ δεν μπορεί να είναι 0, διότι το z δεν είναι μηδέν. Αν $x + y + z = 9$, τότε $x - y + z = 11$ (πρέπει να έχουν την ίδια ισοτιμία), αλλά ο δεύτερος αριθμός δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο. Επίσης, το $x + y + z$ δεν μπορεί να είναι 27, διότι τα x, y, z είναι το πολύ 9, και το z είναι άρτιο. Επομένως, $x + y + z = 18$ και $x - y + z = 0$.

Έπεται ότι $y = 9$ και $x + z = 9$, και οι μόνοι υποψήφιοι για το $\overline{xyz}$ είναι οι 792, 594, 396 και 198. Τέλος, παρατηρούμε ότι το

$$\binom{99}{19}$$

διαιρείται με το 27, όπως και ο αριθμός 107196674080761936 (μπορούμε να το επαληθεύσουμε εύκολα διαιρώντας με το 9, και μετά με το 3). Επομένως η διαφορά τους, που είναι $\overline{xyz}$, διαιρείται επίσης με το 27. Ο μοναδικός υποψήφιος που ικανοποιεί αυτό το κριτήριο είναι το 594.

Πρόβλημα 12. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και οι 99 ακέραιοι είναι θετικοί και να τους γράψουμε ως $k + 1, k + 2, \ldots, k + 99$, όπου k κάποιος μη αρνητικός ακέραιος.

Αν θεωρήσουμε τώρα το κλάσμα

$$\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+99)}{99!} = \binom{k+99}{99},$$

και θυμηθούμε ότι κάθε διωνυμικός συντελεστής είναι ακέραιος, προκύπτει το επιθυμητό συμπέρασμα. ◙

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 35*

να επιβεβαιώσουμε ότι κανένα βλήμα δεν προσκρούει στο έδαφος προτού πραγματοποιηθεί το παραπάνω γεγονός).

Θα μπορούσαμε, βεβαίως, να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς μας, χωρίς τη χρήση του συστήματος αναφοράς του βαρόνου, κάτι τέτοιο όμως θα ήταν εξαιρετικά περίπλοκο. Η «αρχή του βαρόνου Μυγχάουζεν», σύμφωνα με την οποία η σχετική κίνηση δύο βλημάτων είναι ομαλή (αγνοώντας φυσικά τη δράση του αέρα), μας βοηθάει στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Προσπαθήστε, για παράδειγμα, να εξηγήσετε γιατί τα φωτεινά θραύσματα των πυροτεχνημάτων αυξάνουν σε μέγεθος κατά την πτώση τους.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να θυμηθούμε ότι ένα από τα δραματικά επεισόδια στην ιστορία της επιστήμης σχετίζεται με την επιλογή του «ορθού» συστήματος αναφοράς. Η εκτέλεση του Giordano Bruno (1548-1600) και η αποκήρυξη του Γαλιλαίου φανερώνουν τον δύσκολο δρόμο προς την κατάκτηση της επιστημονικής γνώσης. Η ανθρωπότητα δίσταζε να αποδεχθεί ότι η Γη δεν αποτελεί το κέντρο του Κόσμου, αλλά είναι απλώς ένας από τους πλανήτες που περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο.

Ποιο ήταν το όφελος για την ανθρωπότητα από την αντικατάσταση του γεωκεντρικού συστήματος αναφοράς (το συνδεδεμένο με τη Γη) από το ηλιοκεντρικό (το συνδεδεμένο με τον Ήλιο); Όπως αντιλαμβανόμαστε σήμερα, ένα από τα πλεονεκτήματα αυτής της αλλαγής ήταν η δραστική απλούστευση της περιγραφής των πλανητικών κινήσεων. Το στοιχείο αυτό βοήθησε αργότερα τον Johannes Kepler (1571-1630) στην ανακάλυψη των τριών ξακουστών νόμων του για τις πλανητικές κινήσεις. Και στη συνέχεια, αυτοί οι νόμοι οδήγησαν τον Νεύτωνα στην ανακάλυψη του νόμου της παγκόσμιας έλξης.

Ποιο είναι, συνεπώς, το βασικό πλεονέκτημα του ηλιοκεντρικού συστήματος έναντι του γεωκεντρικού; Στη φυσική, από τη σκοπιά της δυναμικής, όλα τα συστήματα αναφοράς δεν είναι ισοδύναμα. Υπάρχουν τα λεγόμενα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, όπου οι νόμοι της μηχανικής λαμβάνουν την απλούστερη και συχνά αυτονόητη μορφή τους. Και το ηλιοκεντρικό σύστημα, σε αντίθεση με το γεωκεντρικό, μπορεί να θεωρηθεί αδρανειακό. ◙

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

• G. Myakishev, «Το "πλέον αδρανειακό" σύστημα αναφοράς», Μάιος/Ιούνιος 1995.

• A. Leonovich, «Η σχετικότητα γύρω μας», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1996.

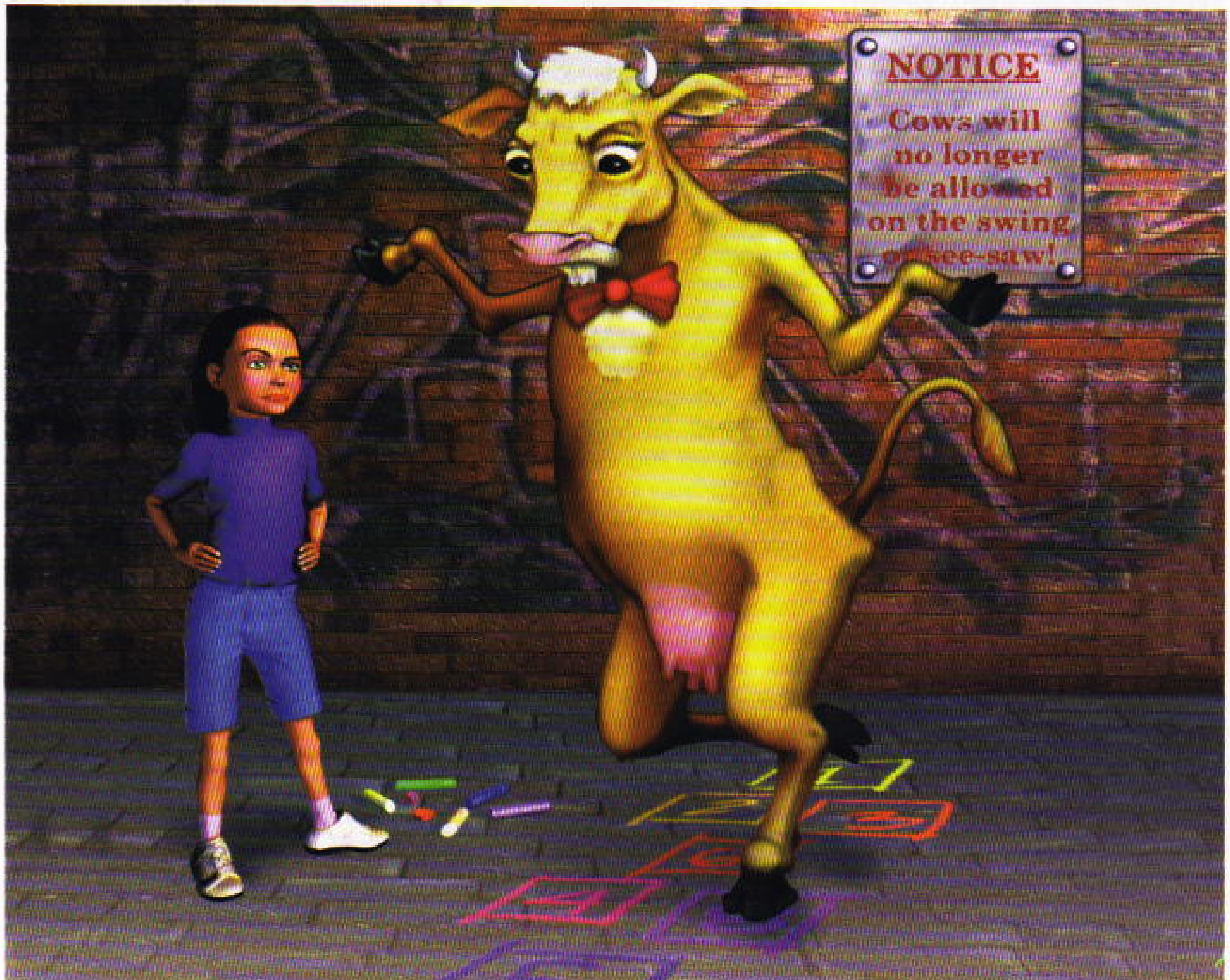
• B. Belonuchkin, «Οι καρποί του αγώνα του Kepler», Μάρτιος/Απρίλιος 1998.

Ολλανδική λιχουδιά

Σε αναζήτηση ενός κομψού αλγορίθμου

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη του *Quantum* που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογοριθμικά. Το κοπάδι κατάφερε να γλιτώσει από τη θεομηνία του φετινού χειμώνα. Όλη αυτή την περίοδο, με το χιόνι έξω από το σταύλο να φτάνει ακόμη και στα τρία μέτρα και τους δρόμους που οδηγούν στο αγρόκτημα τις περισσότερες ώρες κλειστούς, είχα



Εικονογράφηση: Mark Brenneman

άφθονο χρόνο για συζητήσεις με τη φίλη μου Μπέσυ και για σερφάρισμα στο Ίντερνετ.

Ένα απόγευμα πρόσεξα στα εισερχόμενα του ηλεκτρονικού μου ταχυδρομείου ένα καινούργιο μήνυμα με αποστολέα τον δρ. Τομ, έναν φίλο από την Ολλανδία. «Κουράγιο δρ. Χμ», μου έγραφε, «η άνοιξη δεν είναι μακριά. Και ενώ περιμένεις να ξαναπρασινίσουν τα λιβάδια, έχω να σου προτείνω ένα προγραμματιστικό πρόβλημα, καθόλου παράλογο».

Ο δρ. Τομ είναι καθηγητής μαθηματικών και της επιστήμης των υπολογιστών στο Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο του Αϊντχόβεν, στην Ολλανδία. Επιμελείται μια ιστοσελίδα για τις Διεθνείς Ολυμπιάδες Επιστημών, στην οποία μπορείτε να βρείτε συνδέσμους για όλες τις σελίδες Ολυμπιάδων Επιστημών: Μαθηματικών, Φυσικής, Χημείας, Πληροφορικής, Βιολογίας και Αστρονομίας. Είναι το πρώτο μέρος που πρέπει να επισκεφθείτε για να βρείτε όλους τους συνδέσμους με διεθνείς και εθνικές ολυμπιάδες. Γνώρισα τον δρ. Τομ στη Διεθνή Ολυμπιάδα Πληροφορικής του 1995, η οποία είχε διεξαχθεί στο Αϊντχόβεν.

«Θεώρησε την ακολουθία 1, 2, 3, 6, 4, 8, 5, 10, 7, 14, 9, 18, ...» συνέχιζε το μήνυμα, «και γράψε ένα *όμορφο*, *αποδοτικό* και *τεκμηριωμένο* πρόγραμμα που θα την παράγει. Σου στέλνω αυτό το πρόβλημα σαν μια *ολλανδική λιχουδιά*, αντί για χριστουγεννιάτικη κάρτα. Ευτυχισμένος ο νέος χρόνος. Δρ. Τομ».

Στο αγρόκτημα επικράτησε ενθουσιασμός! Τα χλιμιντρίσματα έδιναν και έπαιρναν. Για μια τέτοια απλή και νόστιμη λιχουδιά δεν θα υπήρχαν και απαιτήσεις μεγάλης χωρητικότητας. Έπειτα από μία περίπου ώρα συγκρίναμε τα προγράμματά μας. Μερικά ήταν απλά, άλλα όχι· μερικά ήταν γρήγορα, άλλα όχι. Μια λύση, όμως, διέθετε τα πάντα. Ήταν απλή, γρήγορη και ευφυής. Αναρωτήθηκα: οι αναγνώστες της στήλης θα μπορέσουν να βρουν μια παρόμοια κομψή λύση; Αυτό μας οδηγεί στο επόμενο πρόβλημα, το οποίο, όπως μαντέψατε, αποτελεί και την καινούργια μας πρόκληση.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 15

Γράψτε ένα πρόγραμμα που παράγει τους όρους της ακολουθίας 1, 2, 3, 6, 4, 8, 5, 10, 7, 14, 9, 18, ... Δοκιμάστε το, βρίσκοντας τον 100.000-οστό όρο. Η ταχύτητα και η κομψότητα μετράνε.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 13

Στο Ιπποπρόβλημα 13 σας ζητήθηκε να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα μετασχηματίζει κάθε αριθμό στην αντίστοιχη δυαδική αναπαράσταση και θα παράγει την κατανομή συχνοτήτων διαδοχικών σχημάτων ψηφίων, οποιουδήποτε μήκους, που εμφανίζονται στη δυαδική αναπαράσταση. Θα έπρεπε να δοκιμάσετε το πρόγραμμά σας στον εκατομμυριοστό πρώτο αριθμό υψωμένο στην 100ή δύναμη, εξετάζοντας σχήματα ψηφίων μήκους 4. Σας είχε δοθεί ο εκατομμυριοστός πρώτος υψωμένος στη 10η δύναμη και επομένως η εύρεση του ζητούμενου αριθμού είναι εύκολη —απλώς υψώνετε τον δεδομένο αριθμό στη 10η δύναμη.

Λύση

Αν διαθέτετε το *Mathematica*, μπορείτε να υπολογίσετε άμεσα την 100ή δύναμη του εκατομμυριοστού πρώτου αριθμού.

```
n = Prime[10^6]^100;
```

Ο αριθμός αυτός έχει περισσότερα από 700 ψηφία. Για να εξοικονομήσουμε χώρο, θα συντομεύσουμε την έξοδο παρουσιάζοντας μόνο τα πρώτα και τα τελευταία ψηφία του εν λόγω αριθμού, κρύβοντας τα ενδιάμεσα 664 ψηφία του. Αυτό γίνεται στο *Mathematica* ως εξής:

```
n // Short

98523829444335632304l458107 <<664>>
  765401675758180369471876400l
```

Ένας γρήγορος αλγόριθμος για την εύρεση του αναπτύγματος ενός ακεραίου ως προς τη βάση *b* δόθηκε στο πρόβλημα του τεύχους Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου του 1999. Ο αντίστοιχος κώδικας στο *Mathematica* είναι ο εξής:

```
baseExpansion[x_, b_] := Module[{q = x,
    ans = {}},
  While[q ≠ 0, AppendTo[ans, Mod[q, b]];
    q = Floor[q/b]];
Reverse[ans]]
```

Μπορούμε τώρα να βρούμε τη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού μας.

```
n2 = baseExpansion[n, 2];
```

Το ανάπτυγμα ως προς βάση 2 έχει 2300 ψηφία και, επομένως, χρησιμοποιούμε πάλι μια συντομευμένη μορφή του αριθμού.

```
FromDigits[n2] // Short
10101110001110101011111001O <<2335>>
  0110110110011000011111000O1
```

Για να εξετάσουμε όλα τα σχήματα ψηφίων μήκους 4, χρειαζόμαστε μια διαμέριση του n_2 σε τετράδες που διαφέρουν κατά ένα ψηφίο.

```
bitStrings = Partition[n2, 4, 1];
bitStrings // Short

{{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1}, <<2382>>,
  {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **Union** για να βρούμε τα σχήματα ψηφίων που περιέχονται στο ανάπτυγμα του αριθμού μας. Δεν μας εκπλήσσει ιδιαίτερα το γεγονός ότι υπάρχουν 16 τέτοια σχήματα μέσα στο n_2.

```
uniqueBitStrings = Union[bitStrings]

{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0},
 {0, 0, 1, 1}, {0, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 1},
 {0, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 1}, {1, 0, 0, 0},
 {1, 0, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}, {1, 0, 1, 1},
```

```
{1, 1, 0, 0}, {1, 1, 0, 1}, {1, 1, 1, 0},
{1, 1, 1, 1}}
```

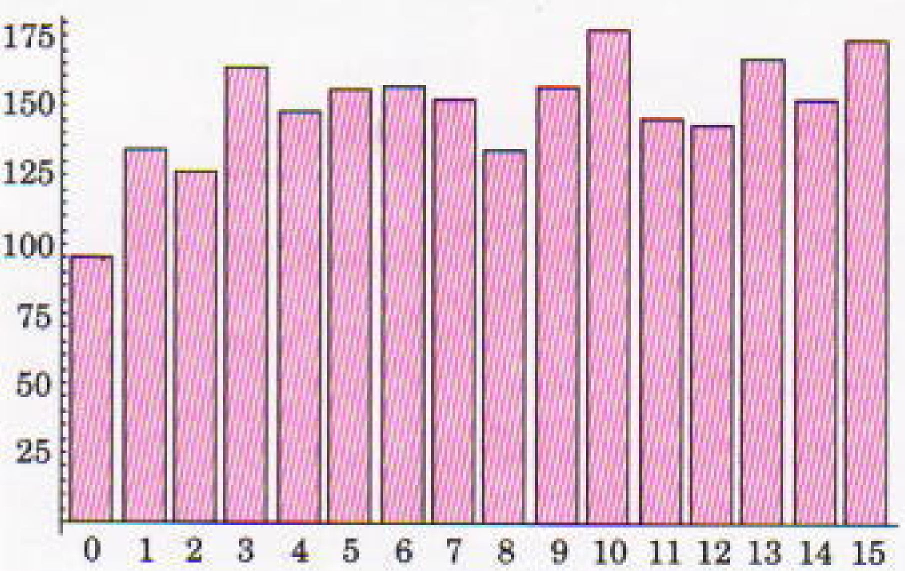
Μπορούμε τώρα να απαριθμήσουμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε τετράδας ψηφίων και να κατασκευάσουμε έναν πίνακα με τα αποτελέσματα.

```
Table[{uniqueBitStrings[[i]], Count[bitStrings,
  uniqueBitStrings[[i]]]}, {i, 1, 16}] //
MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \{0, 0, 0, 0\} & 96 \\ \{0, 0, 0, 1\} & 134 \\ \{0, 0, 1, 0\} & 126 \\ \{0, 0, 1, 1\} & 164 \\ \{0, 1, 0, 0\} & 148 \\ \{0, 1, 0, 1\} & 156 \\ \{0, 1, 1, 0\} & 157 \\ \{0, 1, 1, 1\} & 153 \\ \{1, 0, 0, 0\} & 134 \\ \{1, 0, 0, 1\} & 157 \\ \{1, 0, 1, 0\} & 178 \\ \{1, 0, 1, 1\} & 146 \\ \{1, 1, 0, 0\} & 143 \\ \{1, 1, 0, 1\} & 167 \\ \{1, 1, 1, 0\} & 153 \\ \{1, 1, 1, 1\} & 174 \end{pmatrix}$$

Αποδίδουμε σε κάθε σχήμα ψηφίων τον αντίστοιχο ακέραιο αριθμό —δηλαδή, $\{0, 0, 0, 0\} \to 0$, $\{0, 0, 0, 1\} \to 1$, $\{a, b, c, d\} \to a2^3 + b2^2 + c2^1 + d, \ldots, \{1, 1, 1, 1\} \to 15$— και κατασκευάζουμε το διάγραμμα των αποτελεσμάτων.

```
Needs["Graphics'Graphics'"]
BarChart[Table[{Count[bitStrings,
  uniqueBitStrings[[i]]], i - 1}, {i, 1, 16}]]
```



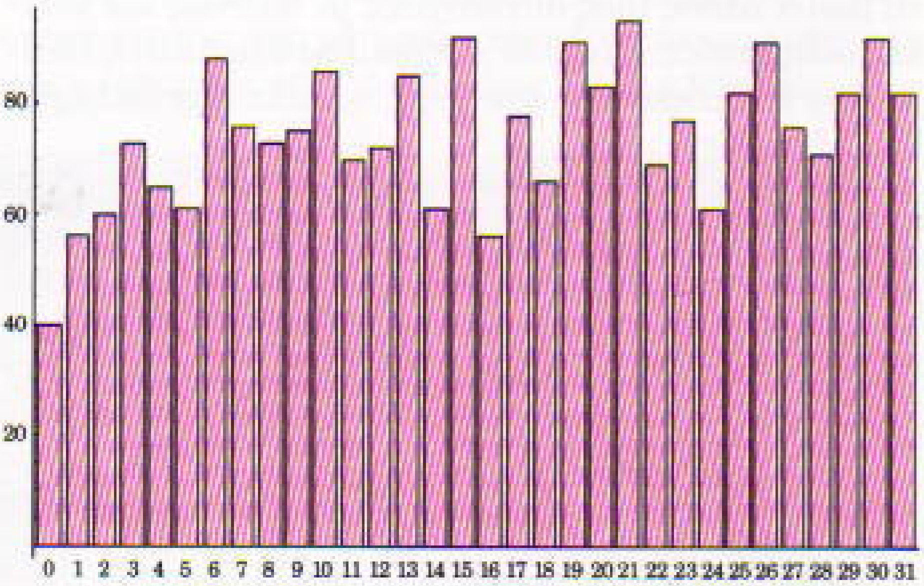
Μπορούμε να κατασκευάσουμε στο *Mathematica* μια καινούργια συνάρτηση, την bitStringDistribution, η οποία θα εκτελεί τα βήματα που μόλις περιγράψαμε.

```
bitStringDistribution[number_,
  bitStringLength_] := Module[{bitStrings,
  uniqueBitStrings},
bitStrings = partition[baseExpansion[
    number, 2], bitStringLength, 1];
  uniqueBitStrings = Union[bitStrings];
BarChart[Table[{Count[bitStrings,
  uniqueBitStrings[[i]]], i - 1},
  {i, 1, 2^bitStringLength}]]]
```

Ας δοκιμάσουμε τη συνάρτηση εξετάζοντας τα σχήματα ψηφίων μήκους 5 στο δυαδικό ανάπτυγμα του $\text{Prime}[10^6]^{100}$.

```
bitStringDistribution[Prime[10^6]^100, 5]
```

Με εξέπληξε το γεγονός ότι η κατανομή δεν είναι ιδιαίτερα ομοιόμορφη. Για ποιο λόγο το 11111 εμφανίζεται με διπλάσια συχνότητα από το 00000 στο δυαδικό ανάπτυγμα του $\text{Prime}[10^6]^{100}$;



Και τέλος...

Στείλτε τις λύσεις σας στην ηλεκτρονική διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Για να δείτε όλα τα προηγούμενα θέματά μας ανατρέξτε στη γνωστή διεύθυνση http://usaco.uwp.edu/cowculations, ή στα τεύχη του *Quantum* από τον Ιανουάριο του 1997.

Αν ενδιαφέρεστε να μάθετε περισσότερα πράγματα για οποιαδήποτε διεθνή ολυμπιάδα, ανατρέξτε στη διεύθυνση του δρ. Tom, http://olympiads.win.tue.nl.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 26*

Πρόβλημα 10. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός με 2000 ψηφία που είναι πολλαπλάσιο του 99;

Πρόβλημα 11. Ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{99}{19}$ είναι ένας αριθμός με 21 ψηφία, ο

$$107196674080761936xyz.$$

Ποιος είναι ο τριψήφιος αριθμός xyz;

Πρόβλημα 12. Αποδείξτε ότι ο 99 διαιρεί οποιοδήποτε γινόμενο ενενήντα εννέα διαδοχικών ακεραίων.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62