

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1999
ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 2
2.000 ΔΡΧ.

To παράδοξο του δορυφόρου

- *Η ανθρωπική αρχή*
- *Τοπολογία και η μορφολογία των εδάφων*
- *Το γονιδιακό αποτύπωμα: ένα καθοριστικό πειστήριο*
- *Περί πρώτων αριθμών*
- *Κρυφό με το δάιμονα του Maxwell*
- *Αναζητώντας πυθαγόρεις τριάδες*
- *Το κβαντικό όλμα του Bohr*
- *Το πρόβλημα των οκτώ σημείων*
- *Ψυχρός βρασμός*





Λάδι σε λινό, 108 × 148 εκ., Συλλογή Widener, © 1998 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον

Εργασία (1863), του Pierre Puvis de Chavannes

ΤΟ ΧΟΡΟΓΡΑΦΙΚΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΟ ΧΤΥΠΗΜΑ ΤΩΝ ΣΦΥΡΩΝ πάνω στο αμόνι, το στερεότυπο υπόκωφο βύθισμα των τσεκουριών μέσα στο ξύλο —αυτές οι δυνατές σκηνές απεικονίζουν γεγονότα τα οποία, όταν περιοριστούν στα θεμελιώδη τους στοιχεία, μπορούν να θεωρηθούν ως αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο σωμάτων. Στη φυσική, τέτοιου είδους αλληλεπιδράσεις είναι γνωστές ως κρούσεις —ζήτημα εξαιρετικής σημασίας στη φυσική.

Οι κλαγγές των σφυρών και οι κρότοι των τσεκουριών παρέχουν την ακουστική μαρτυρία πως ο χαρακτήρας των κρούσεων μπορεί να ποικίλλει σε μεγάλο βαθμό. Αυτές οι παραλλαγές παραπέμπουν, φυσικά, στη διάκριση ελαστικών και ανελαστικών κρούσεων.

Στο «Καλειδοσκόπιο» του παρόντος τεύχους εξετάζουμε τις δυνάμεις που διέπουν τις τυχαίες συναντήσεις των πάντων, από τα άτομα ώς τα ζέπελιν —εξαιτίας έλλειψης χώρου, όμως, είμαστε υποχρεωμένοι να παραβλέψουμε περιβόητες κρούσεις όπως του Τίτανικού με το παγόβουνο, του κομήτη Shoemaker-Levy 9 με τον Δία, και του Τρίο Στούτζες. Πάντως, η ιστορική μας επισκόπηση περιλαμβάνει τον αντίκτυπο των θεωριών του Γαλιλαίου για τα συστήματα ενός σώματος, καθώς επίσης και την εργασία του σερ James Chadwick για τις κρούσεις των σωματιδίων. Ανατρέξτε, λοιπόν, στη σελίδα 36· ευχή μας, η δική σας πρόσκρουση στο συμπαγές σώμα της γνώσης να αποδειχτεί πλαστική.

QUANTUM

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1999

ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Κρατήστε τα γκέμια γερά! Προτού κάνετε οποιαδήποτε υπόθεση για το εξώφυλλο του παρόντος τεύχους, πρέπει να ξέρετε ότι διαπραγματεύεται το αεροδυναμικό παράδοξο του δορυφόρου. Πώς είναι δυνατόν ένα σώμα να εισχωρεί στο αραιωμένο αέριο της ανώτερης ατμόσφαιράς μας και, αντί να επιβραδύνεται, ουσιαστικά να επιταχύνεται;

Ως αναγνώστης του *Quantum*, είμαστε σίγουροι πως θα απολαύσετε την πρόκληση αυτού του παραδόξου. Βάλτε, λοιπόν, χαλινό στις προκαταλήψεις σας και ανατρέξτε στη σελίδα 28 για μια προσεκτικότερη ματιά στην εν λόγω τροχιακή ανωμαλία.

ΑΡΘΡΑ

- 4 Η αναπόφευκτη εμφάνιση του ανθρώπου
Η ανθρωπική αρχή**
A. Kuzin
- 12 Πρωταρχική απειρία
Καιρός για πρώτους**
G.A. Galperin
- 20 Το γονιδιακό αποτύπωμα
Ένα καθοριστικό πειστήριο**
Richard Dawkins
- 28 Διαταραγμένες τροχιές
Το αεροδυναμικό παράδοξο του δορυφόρου**
A. Mitrofanov
- 41 Εύπλαστα μαθηματικά
Τοπολογία και η μορφολογία του εδάφους**
M. Shubin
- 54 Πυθαγόρειο πρόβλημα
Αναζήτηση πυθαγόρειων τριάδων**
S.M. Voronin και A.G. Kulagin

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Με το τελείωμα του αιώνα
- 11 Σπαζοκεφαλίες**
- 34 Πώς θύνεται;**
- 36 Καπειδοσκόπιο**
Συγκρουόμενα σώματα
- 38 Στο μαυροπίνακα I**
Το πρόβλημα των οκτώ σημείων
- 46 Ιππολογισμοί**
Χούλα χουπ
- 49 Στο εργαστήριο**
Ψυχρός βρασμός
- 50 Στα πεδία της φυσικής**
Αθλητική ζωή
- 59 Στο μαυροπίνακα II**
Κρυφτό με το δάιμονα του Maxwell
- 62 Αναδρομές**
Το κβαντικό áλμα του Bohr
- 67 Απαντήσεις, Υποδείξεις
και Λύσεις**

Με το τελείωμα του αιώνα

«Ας μην αφήνουμε το μέλλον ανυπεράσπιστο:
εκεί θ' αρχίσει των εργαλείων η ανάρρωση.»

—Νίκος Καρούζος

ΛΥΟ ΠΕΡΙΠΟΥ ΑΙΩΝΕΣ ΠΡΙΝ, Ο Michael Faraday λάμπρυνε με την παρουσία του τις αίθουσες του Βασιλικού Ιδρύματος της Μεγάλης Βρετανίας αλλά και τον κόσμο ολόκληρο. Ο τρόπος που προσέγγιζε τη φύση φανερώνει έναν απλό και φιλομαθή χαρακτήρα, με πάθος για τη γνώση. Ο Faraday πέτυχε τις επιστημονικές προόδους του (ανακάλυψε ορισμένους πολύ σημαντικούς νόμους, όπως αυτός της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής) χάρη στο οξύ και αναλυτικό πνεύμα του και την αξιοθαύμαστη ικανότητά του να επινοεί παραστατικά μοντέλα —είναι αλήθεια ότι ελάχιστα χρησιμοποίησε τα μαθηματικά.

Οι δημόσιες διαλέξεις του είχαν σχεδόν αποκλειστικά ποιοτικό χαρακτήρα. Και προκειμένου να βοηθήσει στην εξάπλωση της επιστημονικής γνώσης πέρα από την αίθουσα διαλέξεων, συχνά μοίραζε δείγματα από τα υλικά που χρησιμοποιούσε στις επιδείξεις του, ενθαρρύνοντας μάλιστα τους παρισταμένους να επιχειρήσουν μόνοι τους ορισμένα από τα πειράματα.

Οι δημοφιλείς διαλέξεις του Faraday απευθύνονταν κυρίως σε παιδιά αλλά και στο παιδί που «κρυβόταν» μέσα στους ενηλίκους του ακροατηρίου. Οι σειρές ενθουσιωδών ομιλιών του με τίτλους «Οι δυνάμεις της ύλης» και «Η χημική ιστορία ενός κεριού» αποτελούν πρότυπα επιστημονικής σαφήνειας. Εξηγούσε ότι η καύση απελευθερώνει νερό (διά-

της ενώσεως υδρογόνου από την παραφίνη του κεριού με οξυγόνο από τον αέρα), και αυτό το τεκμηρίωνε πειραματικά με τρόπο εντυπωσιακό: προκαλούσε έκρηξη σε μείγμα υδρογόνου και οξυγόνου ώστε να παραχθούν υδρατμοί. Τις πειραματικές επιδείξεις του τις παρουσιάζε όχι ως μια σειρά από ακατανόητα θαύματα, αλλά ως μια θεατρική παράσταση μέσω της οποίας οι καταληπτοί αιτιώδεις νόμοι έπαιρναν σάρκα και οστά για να προσφέρουν στα ανήσυχα πνεύματα την απόλαυση της κατανόησης.

Αν ακολουθήσουμε τα βήματα του Faraday, μπορούμε να υποβάλλουμε σε επιστημονική εξέταση ακόμη και τις απλούστερες εμπειρίες μας. Γιατί, για παράδειγμα, όταν σερβίρουμε νερό στο τραπέζι, κρατάμε την κανάτα πάνω από το ποτήρι; Παρόλο που τείνουμε να απαντήσουμε ότι κάτι τέτοιο προκύπτει από την «εμπειρία», αυτό δεν αποτελεί ικανοποιητική εξήγηση του φαινομένου. Για τον επιστήμονα δεν συνιστά εξήγηση ο ισχυρισμός ότι, επειδή κατά το παρελθόν το νερό έπεφτε μέσα στο ποτήρι, θα εξακολουθεί να πέφτει και στο μέλλον. Η αιτία που προκαλεί την πτώση του νερού είναι προφανώς η «βαρύτητα». Γιατί, όμως, ποστεύουμε στη βαρύτητα; Μήπως επειδή, κάθε φορά που βλέπουμε ένα αντικείμενο να πέφτει, το εντάσσουμε στην εμπειρία μας περί «βαρύτητας»; Σύμφωνα με τις επιστημονικές γνώσεις μας, όχι. Η πίστη μας οφεί-

λεται στο γεγονός ότι έχουμε συμπέρανε πως τα φυσικά φαινόμενα διέπονται από θεμελιώδεις αρχές —παράδειγμα, ο νόμος της βαρύτητας του Νεύτωνα ή ο δεύτερος νόμος του για την κίνηση. Και αυτοί ακριβώς οι νόμοι μάς επιτρέπουν να κατανοήσουμε το γιατί πέφτει το νερό αλλά και να προβλέψουμε πώς ακριβώς θα κινηθεί. Μπορούμε ακόμη να επεκτείνουμε την εφαρμογή των νόμων και στο Διάστημα, προκειμένου να κατανοήσουμε την κίνηση των τηλεπικοινωνιακών δορυφόρων, των πλανητών, των διπλών αστρων, του κομήτη του Halley (προβλέποντας ακριβώς πότε θα επιστρέψει στο ηλιακό μας σύστημα και σε ποιο σημείο του).

«Ποια είναι η αιτία του φαινομένου;» Το εν λόγω ερώτημα συνυφενται με την επιστημονική δραστηριότητα. Ακόμη και στις μέρες μας διαπιστώνουμε πώς μας οδήγησε να ποστεύουμε στην ύπαρξη των μορίων και των ατόμων —από την εξήγηση του Αϊνστάιν για την κίνηση Brown μέχρι την επαλήθευσή της από τον Perrin ή μέχρι την παρατήρηση των ατομικών εξαρθρωμάτων στους κρυστάλλους (μέσω του σαρωτικού μικροσκοπίου σήραγγας).

Ο Faraday μπορούσε να μεταδίδει στο ακροατήριό του τη χαρά που ένιωθε για την επιστήμη χάρη στην ενθουσιώδη περιέργειά του για τα πράγματα, στην έκδηλη αγάπη του για την επιστημονική έρευνα και στο ταλέντο του να εκφράζεται με παραστατικότητα. Και όλα τα παραπάνω

πήγαζαν από την ακλόνητη πεποίθησή του ότι ο κόσμος είναι καταληπτός. Γνώριζε ότι, σε μεγάλο βαθμό, ο δρόμος για την κατανόηση βρίσκεται στη χαρά της αναζήτησης. Οχι στην ανακάλυψη καθεαυτή, αλλά στην αναζήτηση. Οχι στον προορισμό του Οδυσσέα όσο στο ίδιο το ταξίδι προς την πατρίδα του.

Το εποιημονικό πνεύμα κατακτά τη φύση, όχι τον άνθρωπο. Και το πετυχαίνει μέσα από την κατανόηση, μέσα από τον έλεγχο των υποθέσεων —όσο ένθερμα κι αν διατυπώνεται—, και μέσα από τη διαύγεια της λογικής —όσο ψυχρά κι αν εφαρμόζεται. Μπορεί αυτή η άποψη για την εποιημή να μοιάζει κάπως ρομαντική· και είναι, πράγματι. Θεωρώ, όμως, ότι ταυτόχρονα είναι και ρεαλιστική. Η εποιημή χωρίς το πάθος αποδεικνύεται στείρα. Και το πάθος χωρίς τη λογική δεν αποτελεί εποιημή.

Διανύοντας το τελευταίο έτος του 20ού αιώνα, έχουμε γίνει μάρτυρες των καρπών της κληρονομιάς του Faraday. Ένας αιώνας εποιημονικών επιτευγμάτων, με πλήθος ανακαλύψεων χωρίς προηγούμενο, βασισμένων σε μεγάλο βαθμό στους στυλοβάτες της εποιημής αυτού του αιώνα —τις θεωρίες της σχετικότητας, την κβαντική φυσική και τη μοριακή βιολογία. Τα πειραματικά αποτελέσματα και οι τεχνολογικές εφαρμογές των εν λόγω θεωριών έχουν πλήρως επαληθευτεί —στις ανακαλύψεις μας για τη φύση της ύλης (π.χ. τη δομή του πρωτονίου από κουάρκ), για τα κβάζαρ (τα παράξενα αστρονομικά αντικείμενα στα όρια του παρατηρήσιμου σύμπαντος), για ορισμένα από τα σημαντικότερα μυστήρια της ίδιας της ζωής (μέσω της ανακάλυψης του DNA). Άλλα το ερώτημα παραμένει: Πώς εμείς θα μπορέσουμε να μεταβιβάσουμε στους μαθητές μας την κληρονομιά του Faraday;

Ο Laurence I. Gould είναι καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Χαρντιφορντ, στο Κονέκτικατ των ΗΠΑ· επανειλημμένως έχει διδάξει σε διεποιημονικά προγράμματα για πτυχιούχους μη θετικής κατεύθυνσης.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Εποιημάτων (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Εποιημάτων,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεπιτέλλων εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντες (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μονάσας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνμπιλ, Νέα Υόρκη
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης
Mike Donaldson

Αντεπιτέλλουσα αρχισυντάκτρια
Jennifer Wang

Υπεύθυνος εικονογράφησης
Sergey Ivanov

Σύμβουλοι σύνταξης

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Irina Oleynik, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιφορμή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT
John A. Thorpe, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Εποιημάτων, Λόκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λόκειο του Ρίβερτεντ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Εποιημάτων και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης / Διευθυντής
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Εποιημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Κώστας Σκανδάλης**-μαθηματικός,
Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, **Μιχάλης Λάμπρου**-μαθηματικός, **Δημήτρης Γιαννόπουλος**-ιατρός,
Γιώργος Κατσολιέρης-φυσικός, Αθηνά **Τσαγκογέωργα**-φυσικός και **Αλέκος Μάραλης**-φυσικός

Τυπογραφικές διαρθρώσεις
Μαρία Τσαούση

Τυποτεχνική επιμέλεια
Θανάσης Νιούσης

Υπεύθυνη λογιστήριου
Μαρία Μάραλη

Ειδικός συνεργάτης / συνεντεύξεις: **Γιώργος Ευαγγελόπουλος** (Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης)

Εποιημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός εποιημάτων Α' βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Ερευνών
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοχειοθεσία, σελιδοποίηση
Αβ. Μαχαιρίδης

Φίλμ, μοντάζ
Χρ. Μήτσης

Εκτύπωση
N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία
Θ. Αρχοντουλάκης

To Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Έκδοση Springer και στην Ελλάδα από τις Έκδοσηes Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης,
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Έκδοσεις Κάτοπτρο,
Ιοαννίνων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αροακείου (Πανεπιστημίου 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδροσίσειση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 10.500 δρχ. για μινώτες, 18.500 δρχ.
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.000 δρχ.

Η ανθρωπική αρχή

Ένα κλειδί για την αποκρυπτογράφηση του Σύμπαντος;

A. Kuzin

HΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΤΕΡΑΣΤΙΩΝ διαστάσεων του Σύμπαντος ευθύς εξαρχής θέτει ένα θεμελιώδες πρόβλημα: Σημαίνει άραγε κάτι το ανθρώπινο ον μέσα στο αχανές Σύμπαν; Ποιο *status* πρέπει να αποδώσουμε στο ανθρώπινο ον —αποτελεί το σκοπό της εξέλιξης του Σύμπαντος, την κορωνίδα της δημιουργίας ή, μήπως, είναι απλώς ένα ανάξιο ιδιαίτερης μνείας υποπρόϊόν της φύσης, το οποίο δεν διαφέρει και πολύ από τα υπόλοιπα πλάσματα και διαδικασίες του Σύμπαντος;

Εν τέλει, η εμφάνιση του ανθρώπινου πλάσματος σηματοδοτεί την τελείωση του μακρόκοσμου και του μικρόκοσμου ή αντιπροσωπεύει απλώς μια εκκεντρική τροπή στην εξέλιξη του Σύμπαντος; Προσαρμόστηκε το ίδιο το βιολογικό φαινόμενο της ζωής στις περιβαλλοντικές συνθήκες που δεν «ήξεραν» τίποτε γι' αυτήν ή, αντίθετα, «ρυθμίστηκαν» καταλλήλως οι εξωτερικές συνθήκες, προκειμένου να καταστήσουν δυνατή τη ζωή;

Επί μακρόν έλειπαν από την επιστήμη τα αναγκαία δεδομένα που θα της επέτρεπαν να εξετάσει ορθολογικά αυτό το πρόβλημα (καίτοι διατυπώθηκαν κατά καιρούς ουκ ολίγες ανορθολογικές και μιστικιστικές απαντήσεις). Η διαθέσιμη επιστημονική γνώση ήταν υπερβολικά αποσπασματική για να παράσχει μιαν ολοκληρωμένη εικόνα της εξέλιξης του Σύμπαντος. Παρά ταύτα, οι τέσσερις σχεδόν αιώνες συστημα-

τικών προσπαθειών της επιστήμης απέφεραν καρπούς. Διεύρυναν τους επιστημονικούς μας ορίζοντες σε τέτοιο βαθμό, που μας επιτρέπει πλέον να σχηματίσουμε μια ολοκληρωμένη άποψη του Σύμπαντος.

Αναμφίβολα, εξακολουθούμε να γνωρίζουμε πολύ λίγα. Κατά συνέπεια, οι σύγχρονες κοσμολογικές υποθέσεις δεν πρέπει να εκλαμβάνονται ως αμετάκλητη επιμηγορία, η οποία καταδικάζει τους ανθρώπους να είναι η κορωνίδα της δημιουργίας. Ο σκεπτικιστής μπορεί πάντοτε να δικαιολογήσει τη στάση του επικαλούμενος τον περιορισμένο χαρακτήρα της επιστημονικής γνώσης. Τα ζητήματα που θα μας απασχολήσουν στο παρόν άρθρο συγκαταλέγονται στα «αιώνια ερωτήματα», τα οποία ουδέποτε θα τύχουν οριστικής απάντησεως.

Διατυπώνοντας το πρόβλημα

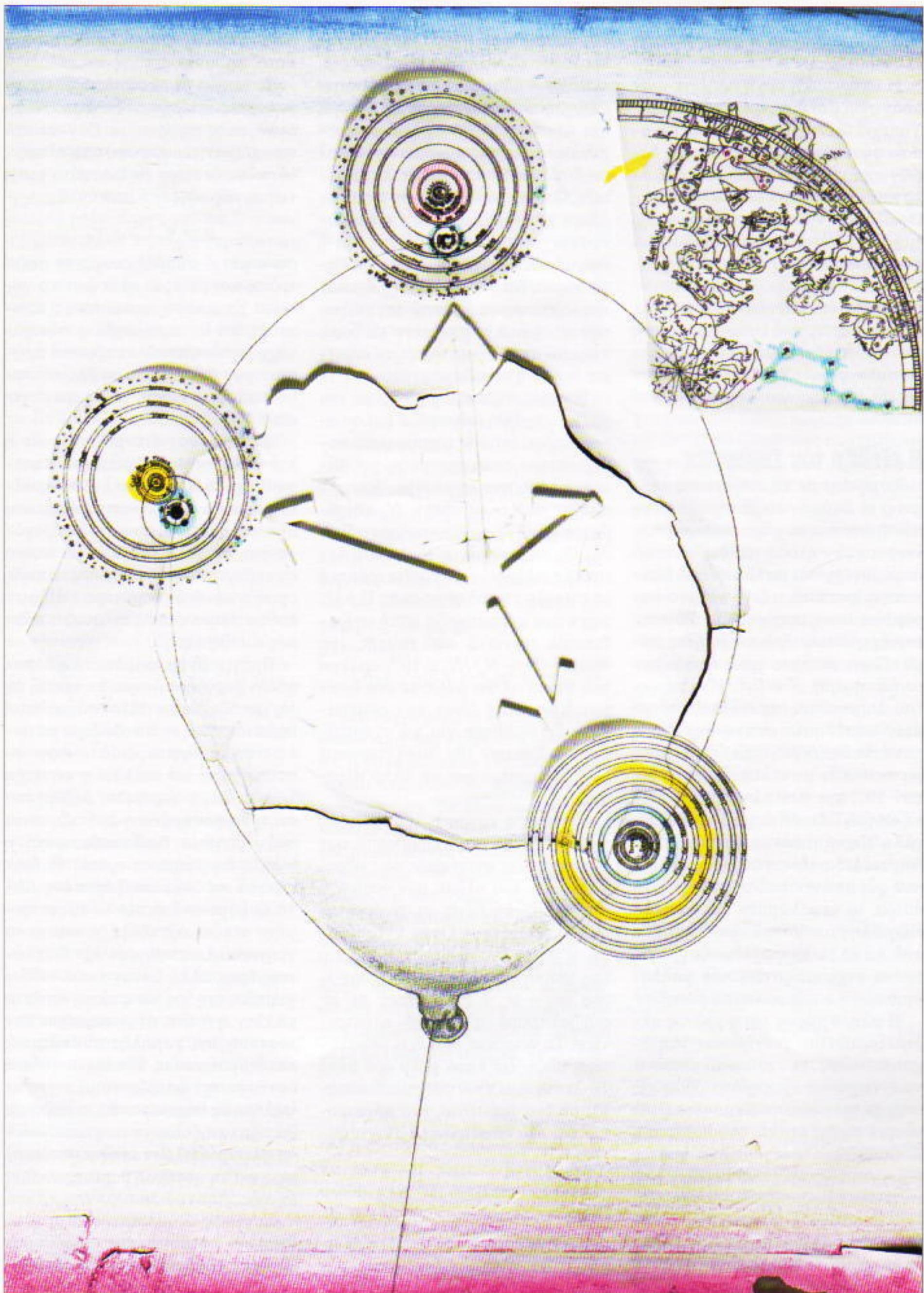
Η ανθρωπική αρχή είναι τέκνο ενός νοητικού πειράματος. Στο πλαίσιο του συγκεκριμένου πειράματος, υποθέτουμε ότι δρουν φυσικοί νόμοι διαφορετικοί από τους όντως ισχύοντες, και μελετάμε κατά πόσον θα ήταν δυνατή η ύπαρξη του ανθρώπου στον τροποποιημένο κόσμο ή όχι. Εξυπακούεται, βεβαίως, ότι αναφερόμαστε σ' αυτή καθεαυτή την ουσία του ανθρώπινου όντος. Και τούτο επειδή δεν πρέπει να αναμένεται πως ο άνθρωπος θα διατηρήσει ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά στο αλλαγμένο περιβάλλον. Εν τοι-

αύτη περιπτώσει, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα ανθρώπινα όντα έχουν εγγενώς δύο ειδοποιούς ιδιότητες — τη νοημοσύνη και την ελευθερία.

Η ελευθερία ορίζεται ως η ικανότητα να διατηρεί κανείς το εγώ του και να μην εξαρτάται καθ' ολοκληρίαν από τα όσα συμβαίνουν στον περιβάλλοντα κόσμο σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Με άλλα λόγια, πρόκειται για την ικανότητα να δρα κανείς καθοδηγούμενος από εσωτερικά κίνητρα.

Η νοημοσύνη συνιστά προαπαιτούμενη συνθήκη για την ελευθερία, επειδή η έλλειψη της πρώτης καθιστά αδύνατη την ενεργητική απόκριση στον εξωτερικό κόσμο (υπ' αυτή την έννοια, ακόμη και τα ζώα διαθέτουν νοημοσύνη). Επί του παρόντος, οι φυσιογνωσικές επιστήμες δεν έχουν κατακτήσει την ωριμότητα που θα τους επέτρεπε να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα της νοημοσύνης και της ελευθερίας στη γενική τους μορφή. Πρέπει να ανακαλύψουμε τον πρώτο αναβαθμό της κλίμακας για να πραγματοποιήσουμε τα πρώτα βήματα προς την επίλυση αυτών των προβλημάτων.

Μόνον ένα πολύπλοκο πλάσμα μπορεί να ανθίσταται επιτυχώς στο περιβάλλον του, κατανοώντας το και τροποποιώντας το σύμφωνα με τις ανάγκες της ίδιας του της ύπαρξης. Ο βαθμός της πολυπλοκότητας επιδέχεται ποιοτική περιγραφή — πρόκειται ακριβώς για το ζήτημα με το



οποίο καταγίνονται οι φυσιογνωσικές επιστήμες.

Η ανθρωπική αρχή παρέχει μιαν απάντηση στο εξής κρίσιμο ερώτημα: Υπάρχει διανοητή κοσμική τάξη η οποία συνεπάγεται την εμφάνιση δομών που να χαρακτηρίζονται από όλο και μεγαλύτερη πολυπλοκότητα; Οφείλουμε να επισημάνουμε ότι η εμφάνιση τέτοιων δομών αποτελεί αναγκαία μόνο συνθήκη για τη δημιουργία του ανθρώπινου όντος: όμως δεν είναι και ικανή. Εντούτοις, ακόμη και η ανάλυση αυτής της συνθήκης αποδεικνύεται εξαιρετικά τελεσφόρος. Έτσι, ας εξετάσουμε την εξέλιξη του Σύμπαντος υπ' αυτό το πρίσμα.

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ

Σύμφωνα με τις σύγχρονες απώψεις, το Σύμπαν είναι περιορισμένο στο χρόνο και το χώρο. Αυτό σημαίνει ότι η μεν ηλικία του δεν είναι άπειρη (ανέρχεται σε 15 περίπου δισκατομμύρια έτη), ο δε όγκος του παραμένει πεπερασμένος. Το Σύμπαν περιέχει όντως τεράστιο πλήθος σωματιδίων, το οποίο όμως έχει πεπερασμένη τιμή: $N \approx 10^{80}$. Η «έναρξη» του Σύμπαντος συνταυτίζεται με μιαν ασύλληπτα πυκνή και θερμή κατάσταση, περιορισμένη σε όγκο με ακτίνα καμπυλότητας της τάξης των 10^{-34} cm. Από εκείνη τη χρονική στιγμή (που είναι γνωστή ως Μεγάλη Έκρηξη) και μετά, το Σύμπαν διαστέλλεται συνεχώς σαν μπαλόνι που φουσκώνει, ενώ οι γαλαξίες, τα άστρα, τα νεφελώματα και τα άλλα είδη ύλης απομακρύνονται το ένα από το άλλο σαν σχέδια ζωγραφισμένα στην επιφάνεια του μπαλονιού.

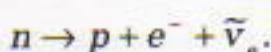
Η ύλη, ο χώρος και ο χρόνος αλληλεξαρτώνται γεννήθηκαν ταυτόχρονα — ως εκ τούτου, στερούνται νοήματος ερωτήματα όπως «Τι υπήρχε πριν από το Σύμπαν;» ή «Τι μπορεί να δει κανείς στο πέρας του Σύμπαντος;». Δεν υπήρχε χρόνος «πριν» από τη Μεγάλη Έκρηξη, ενώ είναι αδύνατο να βρεθούμε στα όρια του Σύμπαντος με τον ίδιο τρόπο που ζούμε στην επιφάνεια — δηλαδή το πέρας — του πλανήτη μας.

Στο πρώτο απειροελάχιστο χρονι-

κό διάστημα μετά την «αρχή», επικρατούσε τόσο υψηλή θερμοκρασία, ώστε ήταν αδύνατον να σχηματιστεί οποιαδήποτε σταθερή δομή. Ακόμη και τα στοιχειώδη σωματίδια παρέμεναν εμπλεγμένα σε μιαν ατέρμονη διαδικασία αμοιβαίων μετατροπών. Ωστόσο, στο βαθμό που διαστελλόταν η ύλη, έπεφτε και η θερμοκρασία έτσι, κάποτε επέστη και η στιγμή για να σχηματιστούν σταθερά σωματίδια — ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια. Εμφανίστηκαν λοιπόν τα πρώτα αντικείμενα με δομή, και εδώ αναφύεται το πρώτο αίνιγμα στη ζωή του Σύμπαντος.

Η αρχέγονη υπέρθερμη σούπα περιείχε ισάριθμα σωματίδια και αντισωματίδια, ωστόσο η συμμετρία παραβιάστηκε κατά την ψύξη, για κάποιον λόγο που αγνοούμε. Έτσι, το πλήθος των σωματιδίων N_e υπερέβη το πλήθος των αντισωματιδίων N_a . Ως εκ τούτου, η εξαύλωση δεν υπήρξε πλήρης — δεν μετατράπηκε το σύνολο της ύλης σε φως. Η κλίμακα που χαρακτηρίζει αυτή τη διαδικασία συνιστά αφ' εαυτής ένα θαύμα: $(N_e - N_a)/N_e \approx 10^{-9}$, πράγμα που σημαίνει ότι μόλις το ένα δισκατομμύριοστό όλων των σωματιδίων διατηρήθηκε για να σχηματιστεί το Σύμπαν (θα συναντήσουμε τον ίδιο αριθμό και σε άλλο πλαίσιο).

Τι συνέβη κατόπιν; Η περαιτέρω ψύξη οδήγησε στο σχηματισμό των απλούστερων στοιχείων, του υδρογόνου και του ηλίου, των οποίων η ύπαρξη προϋποθέτει τη σταθερότητα του πρωτονίου. Όπως γνωρίζουμε, οι μάζες του πρωτονίου, m_p , και του νετρονίου, m_n , είναι σχεδόν ίσες: $m_n - m_p \approx 2.5 m_e$, όπου με m_e συμβολίζουμε τη μάζα του ηλεκτρονίου. Το νετρόνιο, που έχει μεγαλύτερη μάζα, ζει κατά μέσο όρο μόνο 16 λεπτά και εν συνεχεία διασπάται σε ένα πρωτόνιο, ένα ηλεκτρόνιο και ένα ηλεκτρονικό αντινετρίνο:



Στο εσωτερικό των πυρήνων, όπου η πυκνότητα της πυρηνικής ύλης και οι κινητικές ενέργειες των σωματιδίων είναι υψηλές, η ανωτέ-

ρο αντίδραση πραγματοποιείται και κατά την αντίθετη φορά.

Συνεπώς, μέσα στους πυρήνες τα νετρόνια υπάρχουν σε κατάσταση δυναμικής ισορροπίας. Εάν το νετρόνιο ήταν ελαφρύτερο από το πρωτόνιο, το δεύτερο θα διασπάτο μέσω της αντίδρασης



όπου με e^+ συμβολίζουμε το ποζιτρόνιο και με ν_e το ηλεκτρονικό νετρίνο. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η πρωτούλη δεν θα περιελάμβανε υδρογόνο, το οποίο αποτελεί το βασικό καύσιμο των άστρων και το βασικό συστατικό του νερού, του ακρογωνιαίου λίθου της ζωής.

Ας δεχτούμε ότι, με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, η ύπαρξη των ατόμων έχει διασφαλιστεί. Διευκρίνιζουμε ότι αναφερόμαστε μόνον στα δύο απλούστερα άτομα, το υδρογόνο και το ήλιο. Τα εν λόγω άτομα συντέθηκαν σχεδόν αμέσως παντού, όμως η σύνθεση βαρύτερων ατόμων καθυστέρησε επειδή απαιτούσε ειδικές συνθήκες.

Πράγματι, προκειμένου να παραχθούν βαρύτερα άτομα, ως πρώτη ύλη χρειάζονται οι απλούστατοι σταθεροί πυρήνες σε συνδυασμό με πολύ υψηλή θερμοκρασία — στην οποία μπορεί να επέλθει η σύντηξη των εν λόγω πυρήνων. Δεδομένου ότι η θερμοπυρηνική σύντηξη είναι πολύ βραδεία διαδικασία, αυτή η υψηλή θερμοκρασία πρέπει να διατηρηθεί επί δισεκατομμύρια έτη. Άλλα το Σύμπαν διήνυσε το συγκεκριμένο στάδιο της εξέλιξης του πολύ γρήγορα: Απαιτήθηκαν όχι δισεκατομμύρια, αλλά μόνον εκατοντάδες χιλιάδες έτη για να φτάσει, κατά το μάλλον ή ήττον, στην παρούσα κατάσταση της χαμηλής πυκνότητας και θερμοκρασίας. Τέτοιες συνθήκες ευνοούν την ύπαρξη ατόμων (σε υψηλότερες θερμοκρασίες οι πυρήνες θα αδυνατούσαν να συγκρατήσουν τα ηλεκτρόνια), δεν προσφέρονται όμως για τη σύνθεση βαρύτερων πυρήνων.

Συνεπώς, οι συνθήκες για τη σύνθεση και τη σταθερότητα των πυρήνων δεν συμβιβάζονται. Ωστόσο, δεν πρόκειται για την τελευταία ασυ-

βατότητα που πρέπει να υπερκεράστεί. Για να πραγματοποιηθούν τα επόμενα βήματα στην πορεία προς ολοένα ανώτερα επίπεδα δομικής πολυπλοκότητας, το Σύμπαν απέβαλε την ιδιότητα της ομοιογένειας του χώρου. Πρόκειται για το στάδιο όπου η βαρύτητα ανέλαβε τον καθοριστικό ρόλο. Στο αεριώδες Σύμπαν σχηματίστηκαν περιοχές συμπύκνωσης —οι πρωτογαλαξίες—, οι οποίες, με τη σειρά τους, διαιρέθηκαν σε ακόμη μικρότερα μέρη —τους πρωτοαστέρες. Σημειώστε ότι έπρεπε να προοικονομηθεί το απαραίτητο χρονικό περιθώριο ώστε η βαρύτητα να φέρει εις πέρας το έργο της προτού το Σύμπαν διασταλεί υπερβολικά. Καθώς συμπυκνώνεται ένας πρωτοαστέρας, η θερμοκρασία του ανέρχεται ώσπου πυροδοτείται μια θερμοπυρηνική αντίδραση, η οποία παράγει τεράστιες ποσότητες κινητικής ενέργειας και αποτρέπει την περαιτέρω συστολή του άστρου.

Αξίζει να επισημάνουμε ότι τα πρώτα άστρα αποτελούνταν ως επί το πλείστον από υδρογόνο (ο λόγος του υδρογόνου προς το ήλιο στο νεαρό Σύμπαν ήταν περίπου 3:1). Αυτό κατέστη δυνατόν επειδή τα πρωτόνια είναι ελαφρύτερα και πολυπληθέστερα από τα νετρόνια, οπότε ο σχηματισμός ήλιου δεν μπορεί, κατ' ανάγκη, να απορροφήσει όλα τα πρωτόνια. Σε ένα εναλλακτικό σενάριο, τα άστρα αποτελούνται κυρίως από ήλιο. Ωστόσο, τέτοια άστρα από ήλιο θα ήταν πολύ θερμά και δεν θα ζούσαν αρκετά ώστε να δημιουργηθούν οι αναγκαίες προϋποθέσεις για τη βιολογική εξέλιξη στους πλανήτες.

Στο εσωτερικό των άστρων συντελούνται διαρκώς «αλχημικές» μεταστοιχειώσεις: Οι πυρήνες των ελαφρών στοιχείων συγκρούονται, συντήκονται και μετατρέπονται σε πυρήνες βαρύτερων στοιχείων. Τούτη η διαδικασία, που προάγει την πολυπλοκότητα σε ανώτερα επίπεδα, βασίζεται επίσης στη μάλλον «λεπτή ρύθμιση» της πυρηνικής και της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης. Αν έλειπε η συγκεκριμένη εναρμόνιση, η αλυσίδα των αντιδράσεων που, εκκινώντας από το ήλιο, οδηγεί μέσω του άνθρακα στο σίδηρο και τα βα-

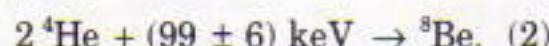
ρύτερα στοιχεία θα σταματούσε στα αρχικά της στάδια.

Ιδού ένα εντυπωσιακό παράδειγμα που θα αποσαφηνίσει τα λεγόμενά μας. Σε θερμοκρασίες T της τάξης των 10^8 K, που χαρακτηρίζουν το εσωτερικό των άστρων, το ήλιο μετατρέπεται σε άνθρακα:

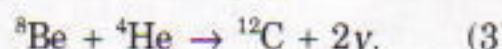


Το γράμμα γ συμβολίζει ένα φωτόνιο ακτίνων γ. Η πιθανότητα να συμβεί μια τριπλή σύγκρουση πυρήνων ^4He στο αραιό αστρικό πλάσμα είναι ελάχιστη (η αντίδραση συντελείται σε λιγότερο από 10^{-21} s). Επομένως, η αντίδραση (1) θα έπρεπε να προχωρεί πολύ αργά, δηλαδή με ταχύτητα εντελώς ανεπαρκή για την παραγωγή άνθρακα στην ποσότητα που απαιτεί η δημιουργία ενός πλανήτη όπως η Γη.

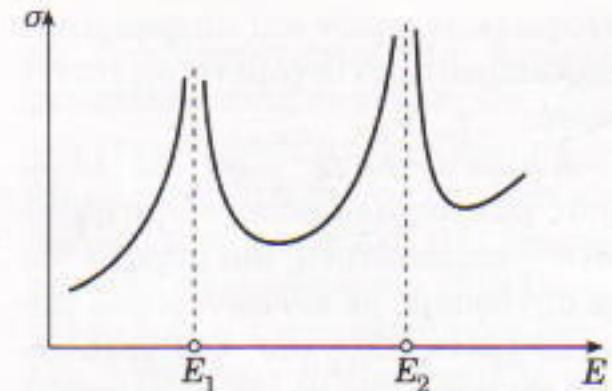
Ωστόσο, η αντίδραση (1) μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί ακολουθώντας διαφορετική πορεία! Γίνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο, δύο πυρήνες ^4He σχηματίζουν έναν πυρήνα ^8Be :



Η αναγραφόμενη εντός παρενθέσεων τιμή της ενέργειας¹ σημαίνει ότι η συγκεκριμένη αντίδραση χρειάζεται ενέργεια. Με άλλα λόγια, ο πυρήνας του ^8Be είναι ασταθής και «θέλει» να διασπαστεί. Εάν ο εν λόγω πυρήνας ήταν σταθερός, με την παρέλευση του χρόνου το δεύτερο στάδιο της αντίδρασης (1) (που δίνει ^{12}C) θα γινόταν όλο και λιγότερο πιθανό, επειδή όλο και περισσότερο ^4He καταναλώνεται στην παραγωγή ^8Be . Στην πραγματικότητα, ο ασταθής, αν και ολοκληρωμένος, πυρήνας ^8Be συλλαμβάνει έναν πυρήνα ^4He και μετατρέπεται σε πυρήνα άνθρακα:



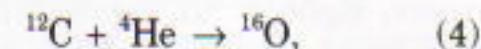
Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η αντίδραση παραγωγής άνθρακα μέσω του μηχανισμού των δύο σταδίων (2)-(3) υπερβαίνει κατά πολύ την πιθανότητα της τριπλής σύ-



Σχήμα 1

γκρουσης της αντίδρασης (1), επειδή το ασταθές ^8Be «ζει» 10.000 φορές περισσότερο από τους πυρήνες του ήλιου. Αυτός όμως είναι μόνον ο ένας λόγος. Εδώ συναντάμε και πάλι ένα εντυπωσιακό φαινόμενο. Οι ταχύτητες των πυρηνικών αντιδράσεων δεν είναι μονότονες συναρτήσεις της ενέργειας E των συγκρουόμενων σωματιδίων. Σε ορισμένες ενέργειες (E_1 και E_2 στο Σχήμα 1) η ταχύτητα της αντίδρασης παρουσιάζει δραστική αύξηση. Το εν λόγω φαινόμενο ονομάζεται συντονισμός: οι αντίστοιχες ενεργειακές τιμές είναι γνωστές ως «ενέργειες συντονισμού» και καθορίζονται εξ ολοκλήρου από τη δομή του πυρήνα που παράγεται κατά την αντίδραση. Η κρίσιμη αντίδραση (3) παρουσιάζει συντονισμό: Η ενέργεια συντονισμού του πυρήνα ^{12}C ($7,656 \pm 0,008$ MeV) 1-σούται σχεδόν (και υπερβαίνει κατά τι) το άθροισμα των ενέργειών των πυρήνων ^8Be και ^4He ($7,3667$ MeV). Την αναγκαία επιπλέον ενέργεια την προσφέρουν οι υψηλές θερμοκρασίες που επικρατούν στα βάθη των άστρων.

Ανακύπτει, ωστόσο, το ερώτημα μήπως και γίγεται ταχέως και ο άνθρακας. Πράγματι, υπάρχει μια αντίδραση καύσων του άνθρακα,



η οποία, όμως, δεν συντελείται ταχέως. Η αντίδραση (4) δεν είναι αντίδραση συντονισμού, οπότε προχωρεί πολύ αργά (η ενέργεια συντονισμού του πυρήνα ^{16}O ανέρχεται σε $7,1187$ MeV, η οποία υπολείπεται του άθροισματος των ενέργειών τηρείας των πυρήνων ^{12}C και ^4He : $7,1616$ MeV). Η υψηλή θερμοκρασία επαυξάνει αυτό το άθροισμα και, έτσι, επιδεινώνει την «ασυμφωνία» των ε-

1. Στην πυρηνική φυσική, η ενέργεια μετράται σε ηλεκτρονιούλο: $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

νεργειακών τιμών και απομακρύνει περαιτέρω το ενδεχόμενο συντονισμού.

Διαπιστώνουμε τώρα ότι λόγω μιας μακράς αλυσίδας «συμπτώσεων» —της αστάθειας του πυρήνα⁸— Βε σε συνδυασμό με τον συγκριτικά μεγάλο χρόνο ζωής του, του γεγονότος ότι η αντιδραση (3) παρουσιάζει συντονισμό εν αντιθέσει με την «αδελφή αντιδραση» (4)— η αλυσίδα των αντιδράσεων δεν διακόπτεται, με αποτέλεσμα να παράγονται μεγάλες ποσότητες άνθρακα, γεγονός που αποδεικνύεται ιδιαίτερως σημαντικό για τη ζωή στο Σύμπαν.

Όταν ο πυρήνας ενός άστρου εμπλουτιστεί σε επαρκή βαθμό με βαρέα στοιχεία, το άστρο εκρήγνυται με μια δραματική αύξηση της λαμπρότητάς του (γίνεται σουπερνόβα). Κατά την εν λόγω έκρηξη, το άστρο εκτοξεύει στο Διάστημα ένα μέρος της μάζας του. Από αυτά τα υπολείμματα σχηματίζονται νέα άστρα, τα οποία είναι ακόμη πο εμπλουτισμένα με βαρέα στοιχεία· και η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά.

Οι κοσμολόγοι διαπίστωσαν ότι ο Ήλιος συγκαταλέγεται στα άστρα τέταρτης γενεάς. Εφόσον η ηλικία του Σύμπαντος ανέρχεται σε 15 περίπου δισεκατομμύρια έτη, φαίνεται ότι ο μέσος χρόνος ζωής μιας αστρικής γενεάς ισούται με 3 περίπου δισεκατομμύρια έτη. Ωστόσο, μια τέτοια χρονική περίοδος πολύ απέχει από το να αρκεί για τη βιολογική εξέλιξη, δεδομένου ότι η ηλικία της Γης ανέρχεται σε 5 δισεκατομμύρια έτη. Από εδώ συμπεραίνουμε πως ο Ήλιος ανήκει σε έναν μάλλον σπάνιο τύπο συγκριτικά μακρόβιων άστρων. Εφόσον τα περισσότερα άστρα δεν ζουν τόσο πολύ (ο χρόνος ζωής ενός άστρου εξαρτάται από τη μάζα του), «το νόημα της ύπαρξης τους» έγκειται στο να προμηθεύουν βαρέα στοιχεία σε άστρα όπως ο Ήλιος μας.

Οι αρχαίοι πίστευαν στην αρμονία των ουράνιων σφαιρών· θεωρούσαν επίσης ότι οι κοσμολογικές διαδικασίες αλληλοσυνδέονται και είναι κατανοητές στον φιλοσοφικό νου, ο οποίος τις «ακούει» σαν ορ-

χήστρα. Η ζωή ενός άστρου μπορεί να παρομοιαστεί με κονσέρτο· την ορχήστρα που το εκτελεί τη συγκροτούν οι δυνάμεις της φύσης, καθημιά με το δικό της όργανο και μουσικό ρόλο. Το τσέλο (οι πυρηνικές δυνάμεις) και το βιολί (οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις) πρωταγωνιστούν σε ολόκληρη την παράσταση· ένα φλάουτο (η ισχυρή δύναμη) στριγκλίζει πού και πού, ενώ το κοντραμπάσο (η βαρύτητα) ακούγεται στο βάθος, κρατώντας το ρυθμό. Το κονσέρτο κλείνει με τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Παραμερίζοντας το φλάουτο, παίρνουν το γαλλικό κόρνο και παίζουν σόλο: Πρόκειται για την ορμητική ροή των νετρίνων από τον πυρήνα του σουπερνόβα, η οποία παρασύρει και απομακρύνει τα εξωτερικά του στρώματα.

Κατ' αυτό τον τρόπο, λοιπόν, «παράγεται» ο περιοδικός πίνακας του Mendeleev. Η πορεία προς ανώτερα επίπεδα πολυπλοκότητας συνεχίστηκε με το σχηματισμό μορίων, μιας διαδικασίας της οποίας ο άπειρος χαρακτήρας ερείπεται στην ύπαρξη ενός θαυμάσιου στοιχείου, του άνθρακα, που μπορεί να σχηματίσει μοριακές αλυσίδες τεράστιου μήκους, επειδή ανταποκρίνεται ιδιαίτερα στις απαιτήσεις ενός τέτοιου ρόλου.²

Ο άνθρακας σχηματίζει τέσσερις δεομούς σθένους (τροχιακά σθένους), με τις μεταξύ τους γωνίες περίπου ορθές. Συνδεόμενα το ένα με το άλλο, τα άτομα του άνθρακα σχηματίζουν κάτι που μοιάζει με γραμμή, ενώ σε κάθε άτομο απομένουν δύο ελεύθερα σθένη που το συνδέουν με άλλα άτομα και μόρια. Κατ' αυτό τον τρόπο προκύπτει ένα είδος επιγραφής. Προτού σχηματιστούν ανθρακικές αλυσίδες, ολόκληρη η κοσμολογική διαδικασία δεν παρήγαγε παρά γράμματα. Όταν σχηματίστηκαν οργανικά μόρια, τα γράμματα (τα άτομα) άρχισαν να ενώνονται για να συγκροτήσουν λέξεις (τα οργανικά μόρια). Οι αυθαίρετες λέ-

ξεις, όμως, δεν συναπαρτίζουν αυτομάτως αρθρωμένο κείμενο. Ανάμεσα σε ένα τυχαίο σύνολο λέξεων (μορίων) και σε ένα κείμενο με λογικό ειρμό —που αντιστοιχεί στο ζωντανό πλάσμα— χάινει μια άβυσσος. Προτού θίξουμε το πρόβλημα της ζωής, επιβάλλεται να αναφερθούμε σε ορισμένες πλευρές της ανόργανης εξέλιξης.

Οσο περισσότερο προχωρεί η διαδικασία αύξησης της δομικής πολυπλοκότητας, τόσο περιοριστικότερες γίνονται οι συνθήκες που επιβάλλονται στη διαδικασία αυτή. Διότι ναι μεν η σταθερότητα των πυρήνων δεν απειλείται ώσπου να εκτεθούν σε θερμοκρασίες της τάξης των δισεκατομμυρίων βαθμών, πλην όμως τα άτομα δεν αντέχουν ακόμη και σε μερικές χιλιάδες βαθμούς. Όσον δε αφορά τα μόρια, διασπώνται σε θερμοκρασίες πολύ χαμηλές, της τάξης των μερικών εκατοντάδων βαθμών. Η θερμοκρασία αποτελεί το μέτρο του χάους, και το χάος είναι ο ανταγωνιστής της δομής. Μολαταύτα, η διαδικασία της οργάνωσης δεν μπορεί να προχωρήσει χωρίς το χάος, επειδή η οργάνωση είναι μια διαδικασία σε διαρκές γίγνεσθαι, η οποία χρειάζεται την κίνηση. Και την αναγκαία κίνηση την παρέχει η θερμότητα.

Συνεπώς, η εξέλιξη στριμώχνεται μεταξύ των δύο άκρων: του θερμού και του ψυχρού. Υπερβολικά υψηλή θερμοκρασία σημαίνει καταστροφή· υπερβολικό ψύχος συνεπάγεται ακινησία και θάνατο. Όταν η εξέλιξη φτάνει στο στάδιο όπου καθίσταται δυνατή η ζωή, αυτή η θεμελιώδης αντίφαση προσλαμβάνει τέτοια οξύτητα, ώστε μόνο ένα εξαιρετικά στενό διάστημα θερμοκρασιών αφήνει περιθώρια για ζωή βασισμένη σε οργανικά μόρια.

Προς το παρόν αγνοούμε το ακριβές εύρος του εν λόγω διαστήματος —ενδέχεται να μην υπερβαίνει τους 10 ή 20 βαθμούς. Εάν συγκρίνουμε αυτή την τιμή με το τεράστιο εύρος θερμοκρασιών του Σύμπαντος, καθίσταται σαφές ότι δεν είναι διόλου αυτονόητη η ύπαρξη ενός τέτοιου θερμοκρασιακού διαστήματος: Προκύπτει ως αποτέλεσμα μιας εξαιρετικά «λεπτής ρύθμισης» των φυσι-

2. Σ' αυτό το σύντομο άρθρο δεν μπορεί να αναλύσουμε τα προβλήματα που συνδέονται με το ερώτημα γιατί άλλα τετρασθενή στοιχεία (για παράδειγμα, το πυρίτιο) δεν είναι απολύτως κατάλληλα για τον ίδιο ρόλο.

κών νόμων. Επιπλέον, απλώς η δυνατότητα ύπαρξης του αναγκαίου θερμοκρασιακού διαστήματος δεν αρκεί για να αναπτυχθεί ζωή — κάπου στο Σύμπαν πρέπει να υπάρχει ένας τόπος κατάλληλος για να πραγματωθεί η συγκεκριμένη δυνατότητα.

Το βασικό σημείο, εν προκειμένω, έγκειται στο ότι, σε έναν τέτοιο τόπο, η κατάλληλη θερμοκρασία για την ανάπτυξη ζωής ($20 \pm 15^{\circ}\text{C}$) πρέπει να διατηρείται επί διοεκατομμύρια έτη! Επιπροσθέτως, είναι αναγκαίο να υπάρχει ελεύθερο νερό, διότι κανένα άλλο υλικό δεν προσφέρεται για να μαγειρευτεί η οργανική σούπα. Το λίκνο της οργανικής ζωής πρέπει να προστατεύεται από τη δολοφονική υπεριώδη ακτινοβολία των αστρων, κ.ο.κ. Καταλήγουμε λοιπόν στο αναπόφευκτο συμπέρασμα ότι ο συγκεκριμένος χαρακτήρας των φυσικών νόμων πρέπει να συμπληρωθεί με την πραγματοποίηση ενός γεγονότος εξαιρετικά μικρής πιθανότητας: να συμπέσει στο χώρο και στο χρόνο η εμφάνιση όλων των αναγκαίων συνθηκών.

Οι φυσικές συνθήκες που επικρατούν στη Γη είναι ιδανικές για την ανάπτυξη ζωής. Ωστόσο, ακόμη και η ελάχιστη μετατόπιση της Γης σχετικά με τον Ήλιο θα αποδεικνυόταν καταστροφική για τη ζωή. Πράγματι, η μικρή αύξηση της απόστασης που χωρίζει τη Γη από τον Ήλιο θα επέφερε πτώση της θερμοκρασίας. Η επέκταση των πολικών «σκούφων» θα αύξανε την ανάκλαση του φωτός από την επιφάνεια της Γης, γεγονός που θα προκαλούσε περαιτέρω πτώση της θερμοκρασίας, κ.ο.κ. Σ' αυτό το σενάριο, ακόμη και το πλήρες πάγωμα του πλανήτη ουδόλως αποκλείεται. Αντιθέτως, η ελαφρά προσέγγιση προς τον Ήλιο και η συνακόλουθη μικρή αύξηση της θερμοκρασίας μπορεί κάλλιστα να δρομολογήσουν αλλεπάλληλες θερμοκρασιακές αυξήσεις, με αποτέλεσμα το κλίμα στη Γη να γίνει όμοιο με το κλίμα της Αφροδίτης. Η μοναδική θέση της Γης προδικάζει τη διάψευση κάθε ελπίδας να ανακαλύψουμε έναν όμοιο πλανήτη σε λογική απόσταση από τη Γη.

Δεν θα καταπιστώ με το ζήτημα της προέλευσης της ζωής και της εξέλιξής της, διότι αποτελούν εξαιρετικά δύσκολα και σκοτεινά προβλήματα, για τα οποία γνωρίζουμε ελάχιστα. Εντούτοις, πρέπει να επισημάνουμε το εξής. Επιχειρείται ενιοτε να εξηγηθεί η προέλευση της ζωής με την πιθανοκρατική υπόθεση ενός μηχανισμού τυχαίας ανάμειξης των μορίων, ο οποίος λειτουργεί με τη μέθοδο «δοκιμής και λάθους». Μια τέτοια άποψη, όμως, πρέπει να απορριφθεί για δύο λόγους. Εν πρώτοις, για να εξηγηθεί η αυτοαναραγωγή, είναι αναγκαία η ύπαρξη τεράστιας ποσότητας μορίων καθορισμένου είδους. Ωστόσο, ο αριθμός των παραλλαγών αποδεικνύεται ασύλληπτα μεγάλος (10^{120}). έτσι, ένα μικροσκοπικό ζωντανό κύτταρο δεν μπορεί να στηριχτεί στο παιχνίδι της τύχης για να κάνει τη μοναδική σωστή επιλογή. Δεύτερον, η ζωή εμφανίστηκε πολύ γρήγορα στη Γη, σχεδόν αμέσως μετά την ψύξη του πλανήτη. Παρεμπιπτόντως, αξιζει να σημειώσουμε πως ένας επιφανής κοσμολόγος, ο V.I. Vernadsky, εξέλαβε αυτό το γεγονός ως ένδειξη υπέρ του ότι η ζωή υπήρχε ανέκαθεν, μια άποψη που έρχεται σε αντίθεση με τη σύγχρονη θεωρία του θερμού Σύμπαντος.

Επομένως, η προέλευση της ζωής παραμένει μυστήριο, όμως κατανούμε, λιγότερο ή περισσότερο, τους νόμους της ανάπτυξης της. Το ίδιο μπορεί να λεχθεί και για την προέλευση της νοημοσύνης. Όπως η εμφάνιση της ζωής μέσα στην ανόργανη φύση, έτσι και η εμφάνιση της νοημοσύνης στο μη νοήμον Σύμπαν φαντάζει σαν θαύμα. Σ' αυτή τη διαδικασία, όπως και σε κάθε άλλη μετάβαση από ορισμένο επίπεδο οργάνωσης σε άλλο μεγαλύτερης πολυπλοκότητας, παρατηρούμε το ίδιο κύριο χαρακτηριστικό: Η πολυπλοκότερη δομή απαιτεί ειδικές συνθήκες στην αρχική φάση της ανάπτυξης της. Πρέπει να «γαλουχηθεί» και να τύχει της αναγκαίας «στοργής» και «φροντίδας» προτού εκδιπλώσει στο ακέραιο τις δυνατότητές της. Ένας ώριμος άνθρωπος είναι ευφυέστερος από ένα άλογο και καλύτε-

ρα προσαρμοσμένος στις διαρκώς μεταβαλλόμενες συνθήκες της ζωής, ένα βρέφος όμως αναμφίβολα υστερεί σε δύναμη από ένα πουλάρι στο λιβάδι. Οι «συμπτώσεις» που διαμορφώνουν τη σκηνή όπου εκτυλίσσεται το δράμα της πορείας προς διαρκώς ανώτερα επίπεδα δομικής πολυπλοκότητας επιδέχονται μαθηματική διατύπωση. Και αυτή η προσέγγιση στο πρόβλημά μας θα μας απασχολήσει στο τελευταίο μέρος του παρόντος άρθρου.

Η ανθρωπική αρχή ως σύστημα εξισώσεων

Σχεδόν ανεξαιρέτως, η μαθηματική διατύπωση ενός φυσικού νόμου περιλαμβάνει κάποια αριθμητική παράμετρο, η οποία αποτελεί δεδομένο που δεν επιδέχεται τροποποίηση. Ιδού το απλούστατο παράδειγμα: Κάθε ηλεκτρικό φορτίο περιγράφεται από τον τύπο $Q = Ne$, όπου N ακέραιος αριθμός. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η παράμετρος είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου. Νά κι άλλο παράδειγμα: η δύναμη της βαρυτικής έλξης δύο μαζών m_1 και m_2 περιγράφεται από το νόμο

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Εδώ υπεισέρχεται ως παράμετρος η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G . Άλλα και οι νόμοι της σύγχρονης φυσικής διατυπώνονται με παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα, η ενέργεια ενός φωτονίου είναι ανάλογη με την κυκλική συχνότητά του ω , οπότε γράφουμε $E = \hbar\omega$. Στον τύπο αυτό εμφανίζεται ως παράμετρος η (ανηγμένη) σταθερά του Planck \hbar .

Στη φυσική, ποσότητες όπως οι e , \hbar , G , c (η ταχύτητα του φωτός), κ.ο.κ., ονομάζονται παγκόσμιες σταθερές. Αυτές καθεαυτές δεν σημαίνουν τίποτε, δεδομένου ότι οι αριθμητικές τιμές τους εξαρτώνται από το εκάστοτε επλεγόμενο σύστημα μονάδων. Εντούτοις, οι αδιάστατοι συνδυασμοί τους έχουν παγκόσμια σημασία.

Για παράδειγμα, μόνον ένας αδιάστατος συνδυασμός μπορεί να παραχθεί από τις σταθερές e , \hbar και

$c: a = e^2/(\hbar c) \cong 1/137$. Αυτή η ποσότητα είναι γνωστή ως σταθερά της λεπτής υφής, και χαρακτηρίζει την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση. Η ενέργεια η οποία χαρακτηρίζει τις αλληλεπιδράσεις των ηλεκτρονίων —είτε είναι ελεύθερα είτε δέσμια στα άτομα— συνιστά μικρή μόνο διόρθωση συγκρινόμενη με την ενέργεια ηρεμίας τους $m_e c^2$ (ο λόγος τους ισούται κατά προσέγγιση με το a υψωμένο σε κάποια δύναμη). Για παράδειγμα, η ενέργεια που αποκτά ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο λόγω της αλληλεπίδρασής του με έναν πυρήνα ατομικού αριθμού Z δίνεται από τον τύπο:

$$E \cong m_e c^2 (Za)^2.$$

Λόγω της μικρής τιμής της a , η πιθανότητα να μετατραπούν τα ηλεκτρόνια σε άλλα σωματίδια είναι αμελητέα. Στη μικρή τιμή a πρέπει να εντοπιστεί ο βαθύτερος λόγος για τη σταθερότητα των δομών που συγκροτούνται από πρωτόνια και ηλεκτρόνια (δηλαδή των ατόμων και των στερεών σωμάτων). Αντιθέτως, βαρέα άτομα με $Z \geq a^{-1} \geq 137$ προυσιάζουν αστάθεια: Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια του πυρήνα καθιστάται τόσο ισχυρό, ώστε αρχίζει να παράγει ζεύγη ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, τα οποία θωρακίζουν το «πλεονάζον» πυρηνικό φορτίο, «μειώνοντας» την ενεργό τιμή του φορτίου ώστε να γίνει μικρότερη από ea^{-1} .

Αντίστοιχες αδιάστατες σταθερές μπορούν να κατασκευαστούν για καθεμιά από τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις —την ισχυρή (S), την ασθενή (W) και τη βαρυτική (G). Στην τελευταία περίπτωση, η αδιάστατη σταθερά έχει τη μορφή:

$$a_G = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \cong 10^{-39},$$

όπου με m_p δηλώνεται η μάζα του πρωτονίου. Γνωρίζουμε επίσης ότι $a_s \cong 15$ και $a_w \cong 10^{-5}$. Τόσο η ισχυρή όσο και η ασθενής αλληλεπίδραση γίνονται αισθητές σε αποστάσεις συγκρίσιμες με την ακτίνα του πυρήνα.

Συνεπώς, οι τέσσερις τύποι αλλη-

λεπίδρασης αντιστοιχούν σε τέσσερις αυθαίρετες (ελεύθερες) παραμέτρους a_k (a , a_G , a_s και a_w). Σ' αυτές πρέπει να προστεθούν η διάσταση του χώρου μας, $d = 3$, το πλήθος των σωματίδιων που περιέχει το Σύμπαν, $N \cong 10^{80}$, ο αριθμός των φωτονίων ανά σωματίδιο ύλης, $S \cong 10^9$, και ο λόγος των μαζών ηλεκτρονίου και πρωτονίου, $m_e/m_p \cong 1/1.830$. Θεωρητικά, η τελευταία τιμή πρέπει να εκφράζεται συναρτήσει των a , a_s , a_w προς το παρόν όμως η μορφή της συγκεκριμένης σχέσης μάς διαφεύγει. Γενικά, οι φυσικοί διατηρούν άσβεστη την ελπίδα ότι θα κατορθώσουν να υπολογίσουν τις τιμές όλων των θεμελιώδων παραμέτρων που προναφέραμε ως συναρτήσεις της τιμής μίας και μόνο ελεύθερης παραμέτρου. Ωστόσο, η υλοποίησή της εξακολουθεί να βρίσκεται στη σφαίρα του ονείρου.

Μεταξύ των ελεύθερων παραμέτρων πρέπει να υπάρχουν αρκετές σχέσεις. Για να αποσαφηνίσουμε αυτή την πτυχή, ας εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα.

Ο ευνοϊκότερος ρυθμός διαστολής για το Σύμπαν, ο οποίος εξασφαλίζει τα απαραίτητα χρονικά περιθώρια για τη γέννηση των άστρων, δίνεται από τη σχέση:

$$Na_G^2 \cong 1.$$

Η ύπαρξη άστρων του ίδιου τύπου με τον Ήλιο (ούτε πολύ θερμά ούτε πολύ ψυχρά) βασίζεται στη σχέση

$$a_G \cong a^{12} \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^4.$$

Για να παραχθεί μια νέα γενεά άστρων εμπλουτισμένων με βαρέα άτομα, η ροή των νετρίνων (των μόνων σωματίδιων που απέχουν από όλες τις αλληλεπιδράσεις πλην της ασθενούς) πρέπει να μπορεί να εκτινάξει στο Διάστημα τα εξωτερικά στρώματα ενός σουπερνόβα. Αυτό είναι δυνατόν μόνον αν ικανοποιείται η σχέση

$$a_w^4 \cong a_G \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^6.$$

Προκειμένου να εμφανιστούν άτομα στην πορεία της εξέλιξης της ύλης, πρέπει να σχηματιστούν προτού αναπτυχθεί η βαρυτική αστάθεια που καθιστά το Σύμπαν ετερογενές. Για να ικανοποιηθεί η εν λόγω απαίτηση, αποδεικνύονται αναγκαίες οι σχέσεις:

$$S \cong a^{-2} \left(\frac{m_p}{m_e} \right),$$

$$S \leq a^{10} \left(\frac{m_p}{m_e} \right) a_G^{-1}.$$

Με ανάλογο πνεύμα μπορούμε να εξετάσουμε τις πυρηνικές αντιδράσεις που συντελούνται στο εσωτερικό των άστρων. Εδώ διαπιστώνονται επίσης ορισμένες «συμπτώσεις», που επιτρέπουν τη διατύπωση αναγκαίων συνθηκών με τις οποίες πρέπει να συμμορφώνονται οι παγκόσμιες σταθερές.

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής βασικό συμπέρασμα: Το πλήθος των περιορισμών (εξισώσεων) που πρέπει να ικανοποιούν οι παγκόσμιες σταθερές υπερβαίνει κατά πολύ το πλήθος αυτών των ίδιων των παραμέτρων. Εντοπίζουμε εδώ ένα ιδιαίτερα οημαντικό χαρακτηριστικό του κόσμου όπου ζούμε. Και τούτο επειδή δεν επιδέχεται λύση κάθε σύστημα στο οποίο το πλήθος των εξισώσεων υπερβαίνει το πλήθος των αγνώστων. Για να διαθέτει λύση, οι πλεονάζουσες εξισώσεις πρέπει να μπορούν να εξαχθούν από τις υπόλοιπες.

Συνεπώς, αυτή καθεαυτή η δομή των φυσικών νόμων υποκρύπτει κάποια εξόχως σπουδαία αρχή. Επί του παρόντος αγνοούμε πώς να την περιγράψουμε μαθηματικά. Φαίνεται ότι πρόκειται για κάποιου είδους συμμετρία η οποία χαρακτηρίζει τις εξισώσεις που περιγράφουν τις βασικές παραμέτρους του κόσμου. Μια τέτοια συμμετρία θα φώτιζε την «ιδέα» που ενσαρκώνει η ύπαρξη του Σύμπαντος, τη βασική αρχή της ανάπτυξης του στο χώρο και το χρόνο, καθώς και το νόμο εξέλιξης των δομών που το συνιστούν. Όλα όσα

Η συνέχεια στη σελ. 61

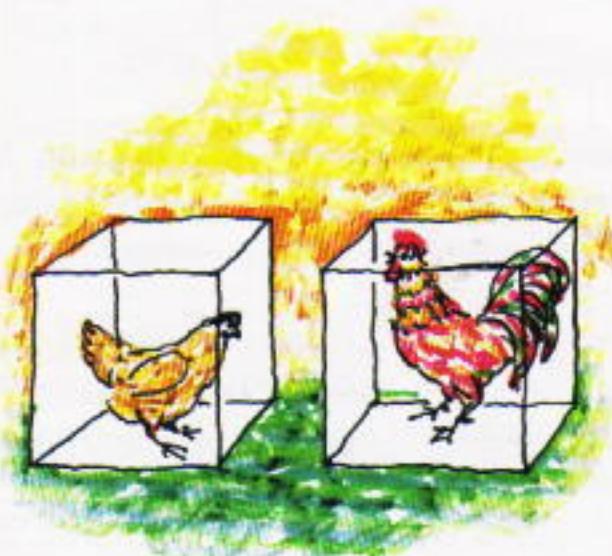
Για να περνά η ώρα

Σ146

Μυστηριώδης ακολουθία. Η ακολουθία a_n ορίζεται ως εξής:

$$a_1 = 1776, \quad a_2 = 1999, \quad \dots, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}.$$

Βρείτε το a_{2002} . (A.P. Savin)

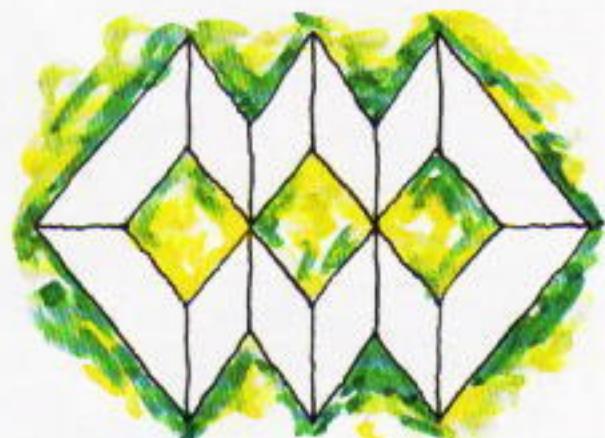


Σ147

Σύμπτωση κύβων. Σε κάθε έναν από δύο ίσους κύβους χρωματίζουμε μαύρες πέντε κορυφές ενώ χρωματίζουμε λευκές τις υπόλοιπες. Αποδείξτε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε τον ένα κύβο μέσα στον άλλο έτσι ώστε να συμπίπτουν τουλάχιστον τέσσερις μαύρες κορυφές. (S.G. Volchenkov)

Σ148

Ταξίδι με περιορισμούς. Είκοσι δύο πόλεις συνδέονται με τους δρόμους που βλέπετε στην εικόνα δεξιά (οι πόλεις βρίσκονται στις διασταυρώσεις των δρόμων). Είναι δυνατόν να περάσουμε από όλες τις πόλεις αλλά να τις επισκεφτούμε όλες από μία μόνο φορά; (S.G. Volchenkov)



Σ149

Μοιράστε τις κάρτες. Έχουμε n κάρτες αριθμημένες από το 1 έως το n και τις χωρίζουμε σε δύο στοίβες. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n , έτσι ώστε τουλάχιστον μια στοίβα να περιέχει ένα ζεύγος καρτών οι αριθμοί των οποίων αθροιζόμενοι να δίνουν τέλειο τετράγωνο;

Σ150

Νερό σε χαρτόκουτο. Ρίχνουμε νερό σε ένα χαρτόκουτο, το οποίο τοποθετούμε στη συνέχεια πάνω από τη φλόγα κεριού. Το νερό βράζει αλλά το χαρτί δεν καίγεται. Γιατί;



Καιρός για πρώτους

Αυτοί οι αριθμοί υποφέρουν από έλλειψη παραγόντων

G.A. Galperin

ΟΥΔΕΙΣ ΑΜΦΙΣΒΗΤΕΙ ΤΟ ΓΕΓΟΝΟΣ ΟΤΙ ΟΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ. ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ, $10 = 2 \cdot 5$, $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$, $111 = 3 \cdot 37$, $144 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, κ.ο.κ. Τέτοιοι αριθμοί ονομάζονται σύνθετοι.

Υπάρχουν όμως αριθμοί που είναι αδύνατον να αναλυθούν με αυτό τον τρόπο. Για παράδειγμα, ο 11 δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μικρότερων φυσικών αριθμών (που να είναι μεγαλύτεροι, και οι δύο, από το 1). Γι' αυτό το λόγο ο 11 ονομάζεται πρώτος αριθμός. Γενικώς, πρώτοι αριθμοί είναι αυτοί που δεν αναλύονται ως γινόμενο δύο παραγόντων μεγαλύτερων του 1 (ο αριθμός 1 δεν θεωρείται πρώτος). Ιδού η αρχή της ακολουθίας των πρώτων αριθμών: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, Υπάρχει ένας μόνο άρτιος μεταξύ τους —όλοι οι υπόλοιποι είναι περιττοί.

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλα τα ζεύγη πρώτων αριθμών που διαφέρουν: (α) κατά 1, (β) κατά 17.

Διαποστώνουμε αμέσως ότι η ακολουθία των πρώτων αριθμών είναι μάλλον ιδιαίτερη. Είναι αδύνατον να διακρίνουμε κάποιον απλό νόμο που διέπει τον τρόπο σχηματισμού της.

Είναι πεπερασμένη η ακολουθία των πρώτων; Το εν λόγω ερώτημα τίθεται στο ένατο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Στο ίδιο βιβλίο (Θεώρημα 20) δίνεται και η απάντηση: «Οι πρώτοι αριθμοί πλειούς εισί του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών» — για το οποίο ένας βυζαντινός σχολιαστής γράφει: «Ταυτόν δ' ἐστιν ειπείν, ότι οι πρώτοι αριθμοί ἀπειροί εισιν».

Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι εξαιρετικά ευφυής. Ιδού ο συλλογισμός του: Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία των πρώτων είναι πεπερασμένη και ότι ο p είναι ο μέγιστος όρος της. Τότε, ο αριθμός $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$ δεν είναι πρώτος, αφού είναι μεγαλύτερος του p . Συνεπώς, διαιρείται από έναν πρώτο αριθμό μεταξύ του 2 και του p (βάσει της υπόθεσής μας, δεν υπάρχουν άλλοι πρώτοι αριθμοί). Όμως, ουδείς από τους 2, 3, 5, ...,

p διαιρεί τον N , διότι το υπόλοιπο της διαιρεσης του N με οποιονδήποτε από αυτούς ισούται με 1. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

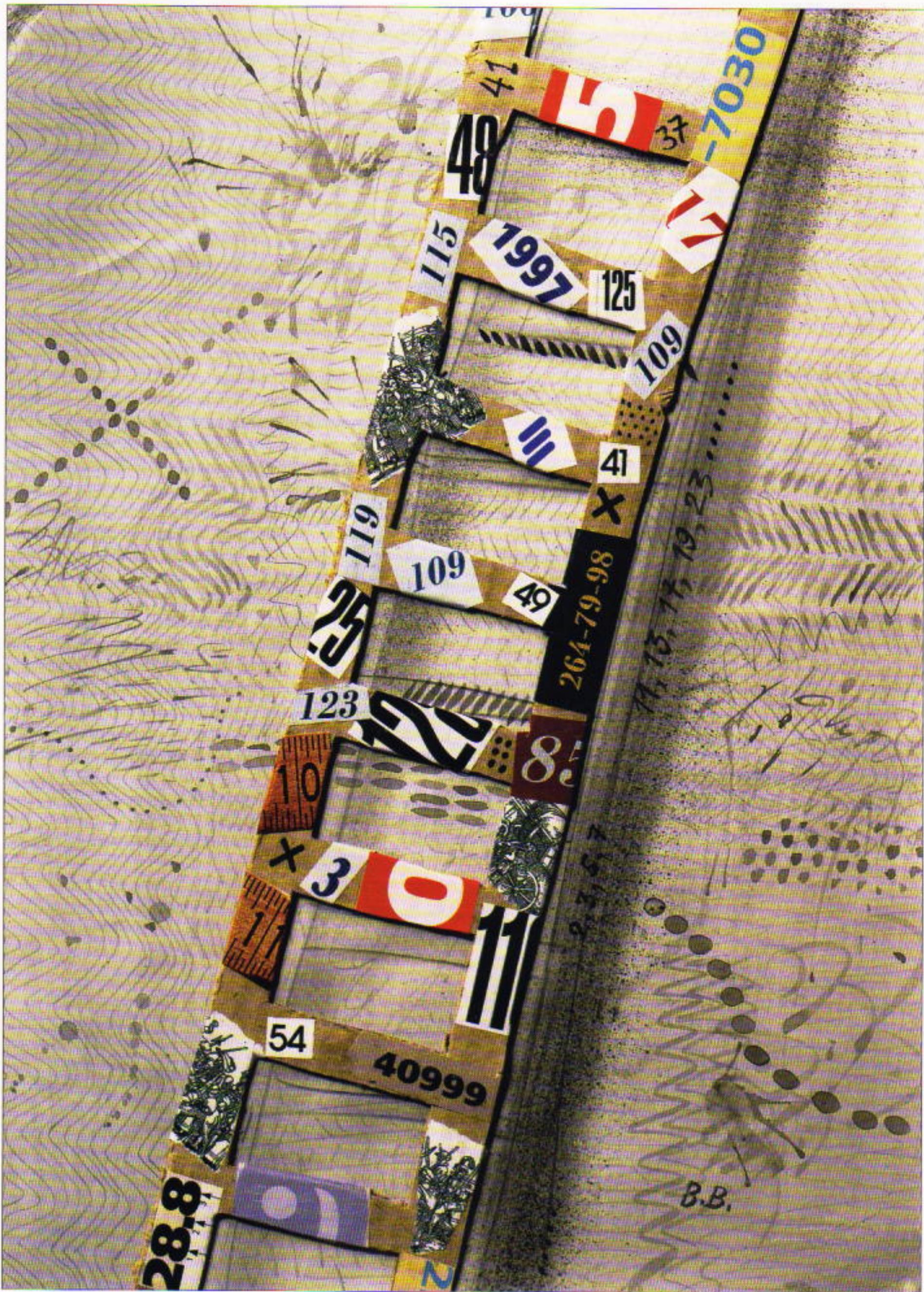
Το επιχείρημα του Ευκλείδη είναι έμμεσο και δεν μας δίνει μέθοδο κατασκευής πρώτων αριθμών μεγαλύτερων του p . Όμως, δεν είναι δύσκολο να βρούμε μια τέτοια μέθοδο: αρκεί να ελέγξουμε όλους τους αριθμούς μεταξύ του $p + 1$ και του N . Ανάμεσά τους πρέπει να υπάρχει οπωδήποτε ένας πρώτος αριθμός, διότι, εάν ο ίδιος ο N δεν είναι πρώτος, τότε διαιρείται από έναν πρώτο αριθμό μεγαλύτερο του p αλλά μικρότερο του N . Δηλαδή, αυτός ο αριθμός πρέπει να ανήκει στο διάστημα $[p + 1, N]$.

Διαστήματα που περιέχουν πρώτους αριθμούς

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος διαμέρισης της ευθείας των αριθμών σε διαστήματα που το καθένα περιέχει τουλάχιστον έναν πρώτο αριθμό. Ας αποδείξουμε πρώτα το εξής: Ο μικρότερος διαιρέτης του αριθμού $N = n! + 1$ (όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) είναι πρώτος αριθμός, μεγαλύτερος του n .

Ονομάζουμε αυτό τον ελάχιστο διαιρέτη p . Έχουμε ότι $p > n$, διότι κανείς από τους 2, 3, 4, ..., n δεν διαιρεί τον $n! + 1$. Από την άλλη πλευρά, αν υποθέσουμε ότι ο p είναι σύνθετος (δηλαδή, αν ο p διαιρείται από κάποιον αριθμό μικρότερο του p), τότε ο p δεν είναι ο ελάχιστος διαιρέτης του $n! + 1$, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας. Επομένως, ο p είναι πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του n .

Από αυτή την απόδειξη έπειται ότι κάθε διάστημα $[n, n! + 1]$ περιέχει έναν τουλάχιστον πρώτο αριθμό. Συνεπώς οι αριθμοί $2, 2! + 1, (2! + 1)! + 1, [2! + 1]! + 1, \dots$, κ.ο.κ., διαμερίζουν την ευθεία των αριθμών σε ένα άπειρο πλήθος διαστημάτων, το καθένα από τα οποία περιέχει έναν τουλάχιστον πρώτο αριθμό. Αποδειξαμε ακόμη μία φορά την απειρία των πρώτων αριθμών.



Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι, αν ο p διαιρεί τον $(p - 1)! + 1$, τότε ο p είναι πρώτος αριθμός. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης.) Η αντίστροφη πρόταση, γνωστή ως θεώρημα του Wilson, επίσης αληθεύει.

Υπάρχει και άλλη διαμέριση της ευθείας των αριθμών σε διαστήματα που το καθένα περιέχει τουλάχιστον έναν πρώτο αριθμό. Αποδεικνύεται ότι καθένα από τα διαστήματα $[2, 4], [4, 8], [8, 16], [16, 32], \dots$ περιέχει έναν τουλάχιστον πρώτο αριθμό. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι δύσκολη. Προκύπτει από ένα θεώρημα, γνωστό ως «αίτημα του Bertrand» (παρ' ότι αποδείχτηκε το 1852 από τον εξέχοντα ρώσο μαθηματικό Chebyshev).

Το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: Αν $n > 7$, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον πρώτος αριθμός μεταξύ του n και του $2n - 2$.

Πρόβλημα 3. Με τη βοήθεια του αιτήματος του Bertrand αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό n : (α) υπάρχει ένας τουλάχιστον n -ψήφιος πρώτος αριθμός, (β) υπάρχουν τουλάχιστον τρεις n -ψήφιοι πρώτοι αριθμοί. (Υπόδειξη: οι $10^{n-1}, 2 \cdot 10^{n-1}, 4 \cdot 10^{n-1}$ και $8 \cdot 10^{n-1}$ είναι n -ψήφιοι αριθμοί.)

Επισημαίνουμε ότι η απόδειξη του Ευκλείδη δεν μας δίνει τον αμέσως επόμενο πρώτο αριθμό που ακολουθεί τον p , αλλά κάποιον αριθμό που συνήθως είναι αρκετά μεγαλύτερος. Για παράδειγμα, αντί του 13, ως πρώτο αριθμό μεγαλύτερο του 11 μας δίνει το 2311 (διότι $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$, ο οποίος είναι πρώτος αριθμός). Στην περίπτωση του 13 δεν μας δίνει το 17 αλλά το 59, που είναι πρώτος διαιρέτης του 30031 (διότι $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$).

Διαστήματα που δεν περιέχουν πρώτους αριθμούς

Για να καταδείξουμε την πολυπλοκότητα της δομής

του συνόλου των πρώτων αριθμών, θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν διαστήματα οποιουδήποτε μήκους που δεν περιέχουν πρώτους αριθμούς. Για παράδειγμα, μπορούμε να βρούμε ένα εκατομμύριο διαδοχικούς αριθμούς ουδείς από τους οποίους είναι πρώτος. Πράγματι, έστω $N = 1000000$ και ας θεωρήσουμε τους επόμενους ένα εκατομμύριο διαδοχικούς αριθμούς:

$$(N + 1)! + 2, (N + 1)! + 3, \dots, (N + 1)! + (N + 1).$$

Ο πρώτος από αυτούς διαιρείται με το 2, ο δεύτερος με το 3, ο τρίτος με το 4, και, γενικά, ο $k - 1$ στη σειρά αριθμός, $(N + 1)! + k$, διαιρείται με το k , διότι και οι δύο όροι του αθροίσματος διαιρούνται με το k . Επομένως, όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι σύνθετοι. Με τη μέθοδο αυτή, μπορούμε να βρούμε χάσματα οποιουδήποτε μήκους στην ακολουθία των πρώτων αριθμών.

Είναι αρκετά ενδιαφέρον το γεγονός ότι το πρόβλημα των χασμάτων οποιουδήποτε μήκους στην ακολουθία των πρώτων αριθμών, το οποίο σχετίζεται πολύ στενά με το πρόβλημα της απειρίας του συνόλου των πρώτων αριθμών, και ως προς τη διατύπωση και ως προς τη λύση, δεν εμφανίζεται στα έργα των μαθηματικών της αρχαίας Ελλάδας. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε ένα ακόμη πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί της νεότερης εποχής.

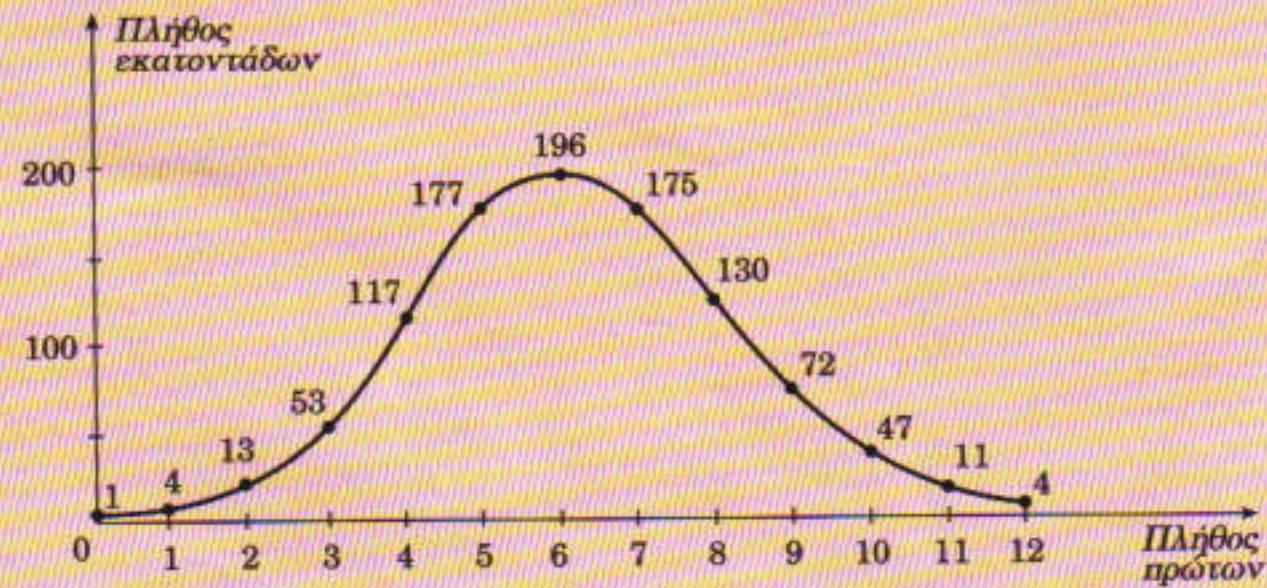
Αριθμητικές πρόσδοι και πρώτοι αριθμοί

Ας θεωρήσουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς που αφήνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3. Είναι οι $2, 5, 8, 11, 14, \dots$. Οι αριθμοί αυτοί είναι της μορφής $3n + 2$. Ας αποδείξουμε ότι μεταξύ τους υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών. Για να το επιτύχουμε, θα τροποποιήσουμε ελαφρώς την απόδειξη του Ευκλείδη. Αντί του αριθμού $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$, θα χρησιμοποιήσουμε τον $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p - 1$, που ανήκει στην ακολουθία

Πίνακας 1

Ένα τιμήμα από την κατανομή των πρώτων αριθμών. Ο πίνακας δείχνει τη διακύμανση του πλήθους των πρώτων αριθμών στο διάστημα μεταξύ του 8900000 και 9000000 το οποίο έχει διαμεριστεί σε 1000 εκατοντάδες. Η πρώτη γραμμή δείχνει το πλήθος των πρώτων αριθμών και η δεύτερη το πλήθος των εκατοντάδων που περιέχουν το αντίστοιχο πλήθος πρώτων αριθμών. Για παράδειγμα, μια εκατοντάδα δεν περιέχει πρώτους αριθμούς ενώ 117 εκατοντάδες περιέχουν από τέσσερις πρώτους και 130 περιέχουν από 8.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	13	53	117	177	196	175	130	72	47	11	4



Πίνακας 2

Η κατανομή των πρώτων αριθμών στο σύνολο των ακεραίων. Το A_n συμβολίζει το πλήθος των πρώτων αριθμών μεταξύ του 1 και του n . Όσο αυξάνεται το n , το κλάσμα A_n/n πλησιάζει το $1/\ln n$ (το $A_n/n : 1/\ln n$ είναι σχεδόν ίσο με 1 για $n = 10^6$).

n	A_n/n	$1/\ln n$	$A_n/n : 1/\ln n$
1000	0,168	0,145	1,159
1000000	0,078498	0,072382	1,084
1000000000	0,050847478	0,048254942	1,053

2, 5, 8, 11, 14, ..., $3n + 2$, ..., διότι το υπόλοιπο της διαιρεσής του διά 3 ισούται με 2.

Πρόβλημα 4. Δώστε πλήρη απόδειξη του γεγονότος ότι ο M είναι της μορφής $3n + 2$.

Όπως ακριβώς και με τον αριθμό N στην προηγούμενη απόδειξη, κανείς από τους αριθμούς 2, 3, 5, ..., p δεν διαιρεί τον αριθμό M . Ανεξάρτητα από το αν ο M είναι πρώτος ή εάν έχει μικρότερους πρώτους παράγοντες, οι παράγοντες του M είναι μεγαλύτεροι του p . Πρέπει να δείξουμε ότι μεταξύ τους υπάρχει κάποιος αριθμός της μορφής $3n + 2$ —δηλαδή, ότι ένας από αυτούς τους πρώτους παράγοντες ανήκει στην ακολουθία 2, 5, 8, 11, Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι πρώτοι παράγοντες του M έχουν τη μορφή $3k + 1$. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, και το γινόμενό τους είναι της μορφής $3k + 1$ (δείτε το Πρόβλημα 5a) και αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι ο M είναι της μορφής $3n + 2$. Συνεπώς, υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $3n + 2$.

Πρόβλημα 5. (α) Αποδείξτε ότι το γινόμενο αριθμών της μορφής $3k + 1$ είναι επίσης της μορφής $3k + 1$. (β) Αποδείξτε την ανάλογη πρόταση για τους αριθμούς της μορφής $4k + 1$. (γ) Αποδείξτε την ανάλογη πρόταση για τους αριθμούς της μορφής $6k + 1$.

Ο ίδιος συλλογισμός (με κάποιες τροποποιήσεις) μας παρέχει τη δυνατότητα να αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $4k + 3$ και $6k + 5$. Σας προτείνουμε όμως να εξετάσετε πρώτα το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι κάθε πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 3 είναι: (α) είτε της μορφής $4k + 1$ είτε της μορφής $4k + 3$. (β) είτε της μορφής $6k + 1$ είτε της μορφής $6k + 5$.

Σε αυτό το άρθρο, θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών της μορφής $6k + 5$ είναι άπειρο. Όπως και ο Ευκλείδης, θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπον απαγωγή. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών της μορφής $6k + 5$: p_1, p_2, \dots, p_n . Θεωρούμε τον αριθμό

$$K = 6p_1p_2 \dots p_n - 1 = 6(p_1p_2 \dots p_n - 1) + 5.$$

Ο αριθμός K είναι είτε πρώτος είτε έχει πρώτους πα-

ράγοντες διαφορετικούς από τους p_1, p_2, \dots, p_n (γιατί;). Αυτοί οι πρώτοι παράγοντες δεν έχουν όλοι μορφή $6k + 1$, διότι ούτε το K έχει αυτή τη μορφή (δείτε το Πρόβλημα 5β). Επομένως, τουλάχιστον ένας από τους πρώτους παράγοντες του K έχει τη μορφή $6k + 5$ και είναι διαφορετικός από τους p_1, p_2, \dots, p_n . Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας και αποδεικνύει ότι υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών της μορφής $6k + 5$.

Πρόβλημα 7. Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $6k + 5$ και να δώσετε μέθοδο κατασκευής τους.

Πρόβλημα 8. Αποδείξτε λεπτομερώς ότι υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών της μορφής $4k + 3$. (Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε το γινόμενο αριθμών αυτού του τύπου επί 4 και αφαιρέστε 1 από το γινόμενο.)

Πρόβλημα 9. Αποδείξτε ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών που το τελευταίο ψηφίο τους είναι διάφορο του 1 (δηλαδή, λήγουν σε 3, 7 ή 9) είναι άπειρο. (Υπόδειξη: Θεωρήστε όλους τους πρώτους της μορφής $10k + a$, όπου $a \neq 1$, και ακολουθήστε τον προηγούμενο συλλογισμό.)

Το επόμενο θεώρημα που διατυπώθηκε από τον γάλλο μαθηματικό Legendre το 1788 και αποδείχτηκε από τον γερμανό μαθηματικό Dirichlet το 1837 αποτελεί γενικευση των προτάσεων που εξετάσαμε.

Θεώρημα. Κάθε άπειρη αριθμητική πρόσοδος $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$, στην οποία ο πρώτος όρος (α) είναι σχετικά πρώτος με τη διαφορά (d), περιέχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $y = dx + a$ παιρνεί άπειρες στο πλήθος πρώτες τιμές όταν το x διατρέχει το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Η απόδειξη του Dirichlet δεν είναι στοιχειώδης, και επί πολλά χρόνια δεν είχε βρεθεί στοιχειώδης απόδειξη. Μια τέτοια απόδειξη βρέθηκε για πρώτη φορά το 1949 (εκατόν εξήντα ένα χρόνια μετά τη διατύπωση του θεώρηματος από τον Legendre) από τον δανό μαθηματικό A. Selberg, ο οποίος έδωσε στοιχειώδεις αποδείξεις πολλών δύσκολων θεωρημάτων της Θεωρίας Αριθμών.

Δίδυμοι

Ας θυμηθούμε το πρώτο πρόβλημα του άρθρου μας. Σίγουρα μαντέψατε ότι, αν δύο πρώτοι αριθμοί διαφέ-

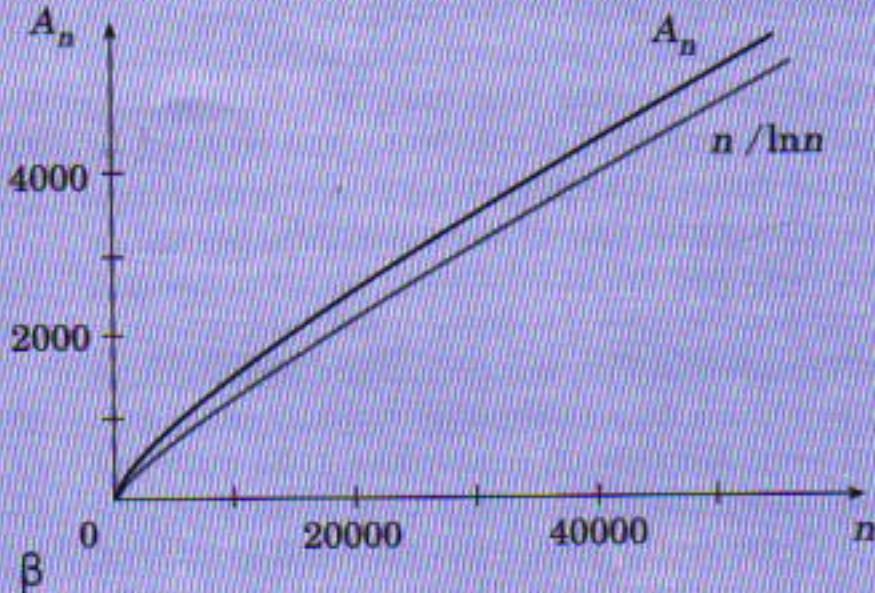
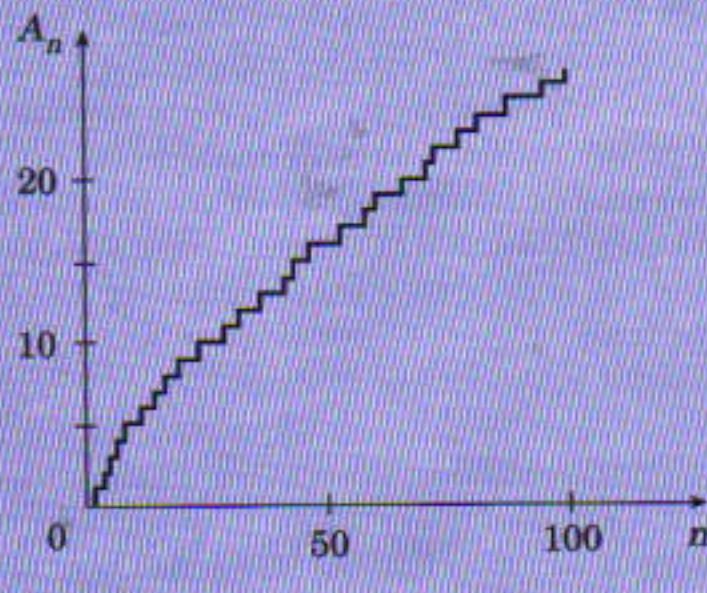
Πίνακας 3

Πρώτοι αριθμοί και δίδυμοι πρώτων σε οκτώ διασύγχρατα μήκους 150000.

Τα Σχήματα (a) και (b) παρουσιάζουν τις γραφικές παραστάσεις του πλήθους των πρώτων αριθμών, A_n , στο διάστημα [1, n]. Στο (a) βλέπουμε ότι το A_n αυξάνει μάλλον κανονικά, παρ' ότι υπάρχουν κάποιες τοπικές διακυρώσεις. Όμως, αν αυξήσουμε το n έως το 50000 (Σχήμα (b)), η κανονικότητα του διαγράμματος γίνεται τελείως ξεκάθαρη. Το λειτουργικό της καρπύλης είναι ένα από τα πλέον αξιοσημείωτα γεγονότα στα Μαθηματικά. Επισημαίνουμε ότι για πολύ μεγάλα n το A_n είναι σχεδόν ίσο με

$$\frac{n}{\ln n - 1.08366}.$$

Διάστημα	Πλήθος πρώτων	Πλήθος δίδυμων πρώτων
$10^8 + 10^8 + 150000$	8154	601
$10^9 + 10^9 + 150000$	7242	466
$10^{10} + 10^{10} + 150000$	6511	389
$10^{11} + 10^{11} + 150000$	5974	276
$10^{12} + 10^{12} + 150000$	5433	276
$10^{13} + 10^{13} + 150000$	5065	208
$10^{14} + 10^{14} + 150000$	4633	186
$10^{15} + 10^{15} + 150000$	4251	161



ρουν κατά έναν περιττό αριθμό p (κατά 1 ή 17 στην περίπτωση του Προβλήματος 1), ο ένας τους είναι άρτιος και επομένως ισούται με 2. Ο άλλος πρώτος αριθμός του ζεύγους, q , διαφέρει από τον p κατά 2. Αν ο p είναι επίσης πρώτος, όπως στην περίπτωση $p = 17$ του Προβλήματος 1, οι αριθμοί p και q ονομάζονται δίδυμοι. Στο Πρόβλημα 1, για παράδειγμα, τέτοιοι είναι οι αριθμοί 17 και 19.

Πρόβλημα 10. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Dirichlet αποδείξτε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών που δεν ανήκουν σε κανένα ζεύγος δίδυμων. (Υπόδειξη: Αυτοί οι πρώτοι αριθμοί μπορούν να ληφθούν από την αριθμητική πρόοδο $15k + 7$.)

Μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα: Πόσα ζεύγη δίδυμων υπάρχουν; Για παράδειγμα, υπάρχουν 1225 ζεύγη δίδυμων μεταξύ του 0 και του 100000 και μόνο 518 ζεύγη μεταξύ του 8000000 και του 8100000. Είναι άπειρο το πλήθος των ζευγών δίδυμων; Το ερώτημα αυτό δεν έχει απαντηθεί όπως και ένα γενικότερο που ετέθη από τον μεγάλο γερμανό μαθηματικό David Hilbert κατά το 2o Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών, το 1900, στο Παρίσι. Το πρόβλημα του Hilbert διατυπώνεται ως εξής: 'Έχει λύσεις στο σύνολο των πρώτων αριθμών η

γραμμική εξίσωση $ax + by = c$ με ακέραιους συντελεστές a, b, c , όπου τα a, b είναι πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί;

Το Θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής

Θεώρημα. Κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 έχει μια μοναδική ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η σειρά των παραγόντων).

Απόδειξη. Αν υπάρχει αριθμός που παραγοντοποιείται κατά δύο διαφορετικούς τρόπους, τότε θα υπάρχει ο ελάχιστος τέτοιος αριθμός, τον οποίο θα ονομάσουμε N .

Έστω ότι $N = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m$, όπου p_i, q_i , ($i = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, m$) είναι πρώτοι. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ και ότι $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$ (αν δεν συμβαίνει αυτό, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων). Παρατηρούμε ότι $p_1 \neq q_1$, διότι διαφορετικά ο αριθμός $N/p_1 = N/q_1$, που είναι μικρότερος του N , θα είχε δύο διαφορετικές παραγοντοποίσεις σε πρώτους παράγοντες. Αυτό θα ερχόταν σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι ο N είναι ο ελάχιστος τέτοιος αριθμός. Υποθέτουμε ότι $p_1 < q_1$ και θεωρούμε τον αριθμό $N' = N - p_1 q_2 \dots q_m$. Έχουμε

$N = p_1 p_2 \dots p_n - p_1 q_2 \dots q_m = p_1(p_2 p_3 \dots p_n - q_2 q_3 \dots q_m)$,
καθώς και

$$N = q_1 q_2 \dots q_m - p_1 q_2 \dots q_m = (q_1 - p_1) q_2 \dots q_m.$$

Ο αριθμός N είναι θετικός και μικρότερος του N . Συνεπώς, βάσει της υπόθεσής μας, η ανάλυση του N σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι μοναδική. Αφού ο πρώτος αριθμός p_1 είναι παράγοντας του N , είτε συμπίπτει με έναν από τους παράγοντες q_2, q_3, \dots, q_m είτε διαιρεί το $(q_1 - p_1)$. Από τις ανισότητες $p_1 < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$ συμπεραίνουμε ότι η πρώτη περίπτωση είναι αδύνατη. Επομένως, ο p_1 διαιρεί το $q_1 - p_1$. Τότε, όμως, ο p_1 διαιρεί τον q_1 , πράγμα αδύνατο, δεδομένου ότι ο q_1 είναι πρώτος. Άρα, η υπόθεσή μας είναι λανθασμένη, και το θεώρημα αποδείχτηκε.

Σημείωση. Η απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της αριθμητικής εξηγεί γιατί προτιμούμε να μην θεωρούμε τον αριθμό 1 ως πρώτο. Αν είχαμε περιλάβει το 1 στο σύνολο των πρώτων αριθμών, κάθε ακέραιος θα μπορούσε να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, διότι θα μπορούσαμε να εισαγάγουμε οποιοδήποτε πλήθος παραγόντων 1 σε κάθε ανάλυση.

Ιδού μια σημαντική συνέπεια του θεμελιώδους θεωρήματος της αριθμητικής: Αν ο πρώτος αριθμός p είναι παράγοντας του γινομένου ab , τότε είτε είναι παράγοντας του a είτε παράγοντας του b . Πράγματι, έστω ότι ο p δεν ήταν παράγοντας ούτε του a ούτε του b . Τότε, αν πολλαπλασιάζαμε τις παραγοντοποιήσεις του a και του b , θα προέκυπτε μια παραγοντοποίηση του ab που δεν θα περιείχε τον p . Από την άλλη πλευρά, $ab = pt$, όπου t ακέραιος. Αν πολλαπλασιάσουμε τον p και την παραγοντοποίηση του t , προκύπτει μια ακόμη ανάλυση του ab σε πρώτους παράγοντες, ένας εκ των οποίων είναι ο p . Θα είχαμε, επομένως, δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις του ab , κάτι που έρχεται σε αντίθεση με το θεμελιώδες θεώρημα.

Από το θεμελιώδες θεώρημα έπειται ότι κάθε αριθμός N μπορεί να γραφεί ως

$$N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s},$$

όπου k_1, k_2, \dots, k_s είναι οι εκθέτες των πρώτων παραγόντων p_1, p_2, \dots, p_s του N . Όλοι οι διαιρέτες του N είναι της μορφής $a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$, όπου $0 \leq r_1 \leq k_1, 0 \leq r_2 \leq k_2, \dots, 0 \leq r_s \leq k_s$.

Ακόμη μία απόδειξη ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο

Η μοναδικότητα της ανάλυσης ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μάς επιτρέπει να αποδείξουμε ακόμη μία φορά ότι υπάρχουν άπειροι σε πλήθος πρώτοι αριθμοί. Αυτή η απόδειξη ανήκει στον Leonhard Euler.

Ας υποθέσουμε ότι $2, 3, 5, \dots, p$ είναι ο κατάλογος όλων των πρώτων αριθμών. Ο τύπος για το άθροισμα

των όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο μικρότερο του 1 μας δίνει ότι για κάθε n

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}},$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{3}},$$

$$\vdots$$

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη όλες αυτές τις ανισότητες, παίρνουμε

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^n}\right) \\ < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

Ονομάζουμε A τον αριθμό στο δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας. Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο αριστερό μέλος, θα πάρουμε το άθροισμα S όλων των αριθμών που είναι αντίστροφοι των διαιρετών του $N = 2^n 3^n 5^n \dots p^n$ (σε αυτό το σημείο χρησιμοποιήσαμε το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής). Επομένως, το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι μεγαλύτερο του $A_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/2^n$ (το τελευταίο μάλιστα άθροισμα περιέχει ένα μέρος μόνο των όρων του S). Επομένως, για κάθε n , ισχύει $A_n < A$. Όμως,

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Έχουμε καταλήξει σε αντίφαση: $A > 1 + n/2$, για κάθε n . Επομένως, το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

Πότε είναι πρώτος ένας αριθμός;

Όταν παραγοντοποιούμε έναν αριθμό N ή προσπαθούμε να βρούμε αν είναι πρώτος, πρέπει να ελέγξουμε αν διαιρείται από τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς $2, 3, 5, 7, \dots$. Αρκεί να ελέγξουμε τους πρώτους διαιρέτες που είναι μικρότεροι του \sqrt{N} . Πράγματι, αν $N = ab$, τότε ο μικρότερος από τους a και b δεν υπερβαίνει το \sqrt{N} (αν ήταν και οι δύο μεγαλύτεροι του \sqrt{N} ,

$$\begin{aligned}
P = & (k+2) \left\{ 1 - [wz + h + j - q]^2 - [(gk + 2g + k + 1)(h + j) + h - z]^2 \right. \\
& - [2n + p + q + z - e^2] - [16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2 + 1 - f^2]^2 \\
& - [e^3(e+2)(a+1)^2 + 1 - o^2]^2 - [(a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2]^2 - [16r^2y^4(a^2 - 1) + 1 - u^2]^2 \\
& - \left[\left((a + u^2(u^2 - a^2))^2 - 1 \right) (n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2 \right]^2 - [n + \ell + v - y]^2 \\
& - [(a^2 - 1)\ell^2 + 1 - m^2]^2 - [ai + k + 1 - \ell - i]^2 \\
& - [p + \ell(a - n - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x]^2 \\
& \left. - [z + p\ell(a - p) + t(2a - p^2 - 1) - pm]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

το γινόμενό τους θα ήταν μεγαλύτερο του N). Η διαιρετότητα του N με το a συνεπάγεται τη διαιρετότητα του N με το N/a . Ο πρώτος που έκανε αυτή την παρατήρηση ήταν ο Fibonacci (ο Leonardo της Πίζας).

Παραδείγματα. (α) Αν $N = 91$, τότε $\sqrt{91} < 10$ και, ελέγχοντας τους πρώτους 2, 3, 5 και 7, διαπιστώνουμε ότι $91 = 7 \cdot 13$. (β) Αν $N = 1999$, τότε $\sqrt{1999} < 45$, και αφού κανείς από τους πρώτους μέχρι το 43 δεν διαιρεί το N , το 1999 είναι πρώτος αριθμός.

Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός N είναι πρώτος χωρίς να εκτελέσουμε τις διαιρέσεις. Η επόμενη απλή πρόταση διατυπώθηκε ήδη τον 18ο αιώνα από τον Euler και μας δίνει τη δυνατότητα να επαληθεύσουμε ότι ένας αριθμός είναι πρώτος με τελείως διαφορετικό τρόπο.

Πρώτο κριτήριο του Euler. Αν ένας περιττός αριθμός $N > 1$ μπορεί να παρασταθεί ως διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών με περισσότερους από έναν τρόπους, τότε ο N είναι σύνθετος. Αν η παράσταση αυτή είναι μοναδική, ο N είναι πρώτος.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο N δεν είναι τέλειο τετράγωνο, διότι ένα τέλειο τετράγωνο είναι σύνθετος αριθμός (παρόμοια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι περιττός). Έστω

$$N = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n).$$

Τότε, οι $m - n$ και $m + n$ είναι διαιρέτες του N . Εάν ο N είναι πρώτος, τότε $m - n = 1$ και $m + n = N$. Επομένως, οι $m = (N+1)/2$ και $n = (N-1)/2$ καθορίζονται μονοσήμαντα από το N . Άρα ο N δεν είναι δυνατόν να παρασταθεί ως διαφορά τετραγώνων με άλλο τρόπο.

Αν ο N είναι σύνθετος (δηλαδή, αν $N = ab$, όπου $a > b > 1$ και περιττοί), τότε οι αριθμοί $x = (a + b)/2$ και $y = (a - b)/2$ μας δίνουν άλλη μια παράσταση του N

ως διαφορά τετραγώνων: αφού $a = x + y$ και $b = x - y$, έχουμε ότι $N = ab = x^2 - y^2$.

Διαπιστώνουμε ότι, αν ο N παριστάνεται ως διαφορά τετραγώνων με περισσότερους από έναν τρόπους, δεν είναι πρώτος: οι πρώτοι αριθμοί έχουν μια μοναδική παράσταση αυτής της μορφής. Αντιστρόφως, αν παριστάνεται ως διαφορά τετραγώνων με έναν μοναδικό τρόπο, τότε δεν μπορεί να είναι σύνθετος (όπως αποδειξαμε), και επομένως είναι πρώτος.

Αυτό το κριτήριο μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τετραγώνων για να διαπιστώσουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος. Προσθέτουμε διαδοχικά τα τετράγωνα των αριθμών $n < (N-1)/2$ στο N και βλέπουμε αν το άθροισμα είναι τέλειο τετράγωνο.

Για παράδειγμα, ας παραγοντοποιήσουμε το 3551 με αυτή τη μέθοδο. Προσθέτουμε στο 3551 διαδοχικά τους $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ και ελέγχουμε κάθε φορά αν το άθροισμα είναι τέλειο τετράγωνο. Βρίσκουμε ότι $3551 = 60^2 - 7^2 = 53 \cdot 67$.

Πρόβλημα 11. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο που περιγράψαμε για να παραγοντοποιήσετε τους επόμενους αριθμούς: 6557, 19019 και 209209.

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε και το επόμενο κριτήριο.

Δεύτερο κριτήριο του Euler. Αν ο φυσικός αριθμός N μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων με περισσότερους από έναν τρόπους, τότε είναι σύνθετος (η αλλαγή της σειράς των προσθετέων δεν θεωρείται διαφορετική παράσταση).

Από το δεύτερο κριτήριο του Euler έπεται ότι, αν ένας πρώτος αριθμός μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων, η παράσταση αυτή είναι μοναδική. Έχει ενδιαφέρον να ανακαλύψουμε ποιοι πρώτοι αριθμοί παριστάνονται με αυτή τη μορφή.

Πρόβλημα 12. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί της μορφής $4k + 3$ δεν μπορούν να παρασταθούν ως άθροισμα δύο τετραγώνων. (Υπόδειξη: Το τετράγωνο ενός άριθμου διαιρείται με το 4, ενώ το τετράγωνο ενός περιπτού αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με το 4.)

Συνεπώς, μόνο οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $4k + 1$ είναι υποψήφιοι γι' αυτή τη μορφή παράστασης. Ο Fermat απέδειξε ότι όλοι αυτοί οι πρώτοι παριστάνονται ως άθροισμα τετραγώνων. Το εν λόγω αποτέλεσμα μας επιτρέπει να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως το ποιοι από τους αριθμούς 1973, 1987 και 1999 παριστάνονται ως άθροισμα δύο τετραγώνων.

Πρόβλημα 13. (a) Αποδείξτε ότι για κάθε $n > 1$, ο $N = n^4 + 4$ είναι σύνθετος (θεώρημα του Germain).

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων $(m, n) \neq (1, 1)$, ο $N = n^4 + 4m^4$ είναι σύνθετος.

(Υπόδειξη: $N = (n^2 - 2m^2)^2 + (2mn)^2$. Στη συνέχεια, εφαρμόστε το δεύτερο κριτήριο του Euler.)

Πολυώνυμα που παράγουν πρώτους αριθμούς

Δεν θα ήταν δύσκολο να αντιμετωπίσουμε τους πρώτους αριθμούς αν υπήρχε ένας απλός τύπος που θα μας επέτρεπε να τους βρίσκουμε. Οι προσπάθειες για την ανακάλυψη ενός τέτοιου τύπου είναι μακροχρόνιες. Για παράδειγμα, ο Euler ανακάλυψε το εξής αξιοσημείωτο τριώνυμο: $n^2 + n + 41$. Οι τιμές αυτού του πολυωνύμου είναι πρώτοι αριθμοί για $n = 0, 1, \dots, 39$. Όμως, για $n = 40$, η τιμή του είναι 41^2 —αριθμός που βέβαια δεν είναι πρώτος. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο μίας μεταβλητής που παίρνει μόνο πρώτες τιμές.

Πρόσφατα, ανακαλύφθηκε ένα πολυώνυμο οι θετικές τιμές του οποίου στα ακέραια σημεία συμπίπτουν με το σύνολο όλων των πρώτων αριθμών. Το πολυώνυμο περιέχει είκοσι πέντε μεταβλητές (βλ. το πλαίσιο της σελ. 18).

Το πολυώνυμο αυτό προέκυψε από τη μελέτη των διοφαντικών εξισώσεων. Συνδέεται με τη λύση του 10ου προβλήματος του Hilbert που ανακάλυψε ο ρώσος μαθηματικός Y.A. Matiyasevich.

Ολοκληρώνουμε, προτείνοντας μερικά ακόμη προβλήματα.

Προβλήματα

14. Βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι ταυτόχρονα άθροισμα και διαφορά δύο πρώτων αριθμών.

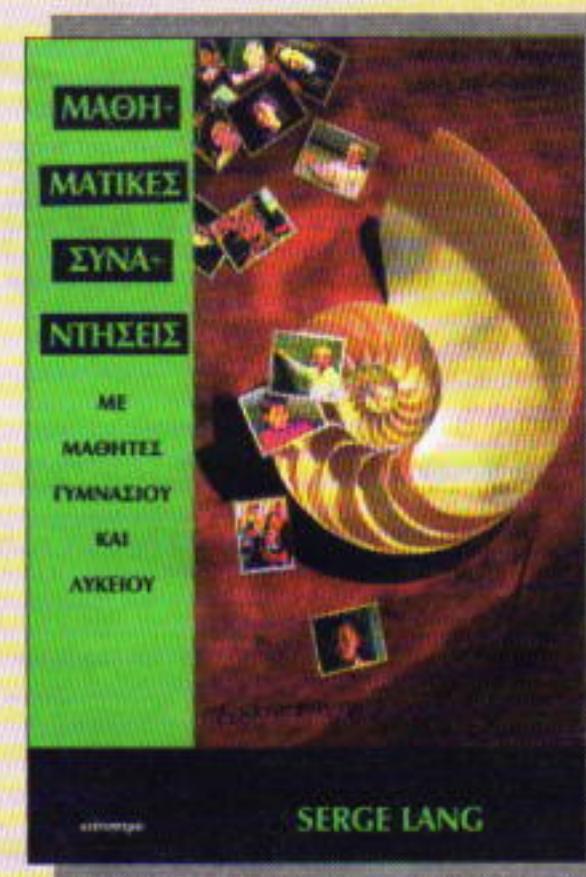
15. Αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαιρεσης του τετραγώνου ενός πρώτου αριθμού p μεγαλύτερου του 3 διά 12 ισούται με 1.

16. Αποδείξτε ότι, αν οι p και $p^2 + 2$ είναι πρώτοι αριθμοί, τότε και ο $p^3 + 2$ είναι επίσης πρώτος αριθμός.

17. Ποιοι πρώτοι αριθμοί μπορούν να παρασταθούν ως άθροισμα δύο τέλειων κύβων;

18. Ποιο είναι το n αν τα $n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 13$ και $n + 15$ είναι πρώτοι αριθμοί; ◻

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



Serge Lang

Μαθηματικές συναντήσεις με μαθητές γυμνασίου και λυκείου

- Το βιβλίο περιλαμβάνει τα μαθήματα που δίδαξε ο Serge Lang —παγκοσμίου φήμης καθηγητής μαθηματικών του Πανεπιστημίου Yale— σε μαθητές της μέσης εκπαίδευσης, σε σχολεία της Γαλλίας και του Καναδά.
- Στόχος του συγγραφέα ήταν να δειξει στους μαθητές (αλλά και στους δασκάλους τους) όμορφα μαθηματικά, στο επίπεδο της δικής τους τάξης, ιδωμένα διμως με τον τρόπο ενός έμπειρου μαθηματικού. Τα μαθήματα αφορούν γεωμετρικά και αλγεβρικά θέματα εκτός ύλης, τα οποία είναι κατανοητά στο επίπεδο της τρίτης γυμνασίου και της πρώτης λυκείου.
- Στο τέλος του βιβλίου παρατίθεται εκτενής αυζήτηση-κριτική για τα σχολικά βιβλία, τα νέα μαθηματικά και τον τρόπο που διδάσκονται στα σχολεία μας.
- Εφόσον οι μαθητές αυτών των τάξεων κατόρθωσαν να κατανοήσουν αλλά και να απολαύσουν όλα τούτα τα μαθηματικά, είναι βέβαιο ότι το ίδιο θα συμβεί και με καθέναν από εσάς (είτε είστε μαθητής είτε καθηγητής). Ξεφυλλίστε το βιβλίο, απολαύστε τη φρεσκάδα του, και εμπνευσθείτε από τη νέα διδακτική του προσέγγιση.

Σελ.: 228, 14 x 21 εκ., Α/Μ. 5.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5).

105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Web site: www.katoptro.gr

Ένα καθοριστικό πειστήριο

Οι δικηγόροι, οι δικαστές, οι πολιτικοί και οι πολίτες, όλοι μας, θα ήμασταν καλύτεροι αν διαθέταμε περισσότερες επιστημονικές γνώσεις

Richard Dawkins

MAΘΑΙΝΩ ΑΠΟ ΑΠΟΛΥΤΑ ΑΕΙ-όπιστες πηγές πως οι συνήγοροι υπεράσπιστης στις ΗΠΑ, αρκετές φορές, προβάλλουν ένσταση στην υποψηφιότητα ενόρκων, στηριζόμενοι στο γεγονός ότι οι τελευταίοι διαθέτουν καλή επιστημονική κατάρτιση ή έχουν γνώσεις γενετικής! Τι μπορεί να σημαίνει αυτό; Είναι, άραγε, οι γενετιστές γνωστοί για τις βαθιά ριζωμένες προκαταλήψεις τους ενάντια σε ορισμένες κοινωνικές ομάδες; Είναι μήπως οι μαθηματικοί ιδιαίτερα επρεπείς σε μια λογική του τύπου «μαστιγώστε τους» και «κρεμάστε τους»; Φυσικά, όχι. Οι ενστάσεις των δικηγόρων έχουν πιο ταπεινά ελατήρια.

Όπως γνωρίζουν όσοι παρακολούθησαν τη δίκη του Ο.Τζ. Σίμσον [του διάσημου αμερικανού ποδοσφαιριστή που κατηγορήθηκε πως σκότωσε την πρώην σύζυγό του και το φίλο της], η γενετική έρευνα κάνει την παρουσία της ολοένα και πιο αισθητή στα ποινικά δικαστήρια, και αποκτά εξαιρετικά μεγάλη δύναμη. (Και αυτή η απεχθής υπόθεση της Μόνικα Λεβίνσκι, στα χέρια του ακόμη αντιπαθέστερου Κέννεθ Σταρ, κατέστησε το DNA περισσότερο γνωστό στο ευρύ κοινό. Άλλα και λίγους μήνες πριν, το FBI ανακοίνωσε ότι συγκρότησε μια εθνική βάση δεδο-



Εικονογράφηση: Christopher French

μένων με δείγματα DNA από άτομα που έχουν καταδικαστεί για συγκεκριμένα σοβαρά γεγκλήματα). Αν ο κατηγορούμενος είναι αθώος, το γονιδιακό αποτύπωμα μπορεί να προσφέρει έναν συντριπτικό τρόπο απόδειξης της αθωότητάς του. Αν είναι ένοχος, το πειστήριο του DNA παρέχει την ευκαιρία για επιβεβαίωση της ενοχής του, σε περιπτώσεις που κανένα άλλο στοιχείο δεν μπορεί να την τεκμηριώσει.

Όπως έχουν τα πράγματα, το γονιδιακό αποτύπωμα είναι πολύ δύσκολο να εκτιμηθεί την κατάλληλη στιγμή —πόσο μάλλον υπό την πίεση της εκδίκασης μιας ποινικής υπόθεσης—, αλλά υπάρχουν και κάποιες αμφιλεγόμενες πλευρές του οι οποίες είναι ακόμη δυσκολότερο να σταθμιστούν. Θα πίστευε, λοιπόν, κανείς ότι οι έντιμοι δικηγόροι —οι οποίοι δεν επιθυμούν παρά την απόδοση της δικαιοσύνης— θα καλωσόριζαν τους ενόρκους που είναι ικανοί να παρακολουθήσουν την προβαλλόμενη επιχειρηματολογία. Άλλα καθώς οι δικηγόροι παραμένουν δικηγόροι —δηλαδή, προσηλωμένοι στο στόχο να κερδίζουν τις υποθέσεις τους με οποιοδήποτε τίμημα— συχνά πράττουν το αντίθετο. Θα πρέπει μάλλον να νιώθουν πως οι εξοικειωμένοι με τη γενετική ένορκοι θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα πειστήρια του DNA με τρόπο που να βλάπτει τους πελάτες τους.

Δεν θίγω όμως το θέμα αυτό με σκοπό να λιθοβολήσω τους δικηγόρους, αν και αποτελούν εξαιρετικούς στόχους, αλλά για να φωτίσω ένα πρόβλημα που είναι καινούργιο και ταυτόχρονα παμπάλαιο. Καθώς η επιστήμη αναπτύσσει τις τεχνικές της και εξειδικεύεται συνεχώς και περισσότερο, οι ένορκοι όλο και πιο συχνά βρίσκονται στην ανάγκη να κατανοήσουν στοιχεία που ίσως οι ίδιοι οι δικηγόροι να μην τα κατανοούν απόλυτα. Ταυτόχρονα, όλα τα φυσικά αποδεικτικά στοιχεία που παρουσιάζονται σε ένα δικαστήριο —είτε πρόκειται για αναγνώριση από μια σειρά υπόπτων είτε για μια δοκιμασία ανίχνευσης ψεύδους είτε για ένα δείγμα DNA— στηρίζονται στη θεωρία των πιθανοτήτων· και ακριβώς αυτή η αξιοσέβαστη θεωρία —όπως εξίσου και οι ιδιαιτερότητες του γονιδιακού αποτυπώματος— είναι που συνήθως κατανοείται ελάχιστα. Αυτό που αντιμετωπίζουν με δυσπιστία ή που προσπερνούν οι δικηγόροι δεν είναι απλώς και μόνο οι επιστήμονες, αλλά ο ίδιος ο επιστημονικός τρόπος σκέψης.

Ως εργαλείο για την ταυτοποίηση ανθρώπων, το DNA είναι απαράμιλλο. Ένα γονίδιο είναι το σωματικό αντίστοιχο του «ραβδωτού κώδικα» των εμπορευμάτων: το DNA σε καθένα από τα κύτταρά μου (με ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος —και εξαιρώντας τα ερυθροκύτταρα του αίματος, που έχουν χάσει όλο το DNA τους, ή τα αναπαραγωγικά κύτταρα, που με τυχαίο τρόπο φέρουν μόνο τα μισά γονίδιά μου) είναι πανομοιότυπο με το DNA σε όλα τα άλλα κύτταρά μου. Και αυτό διαφέρει από το DNA που βρίσκεται σε καθένα απ' όλα τα δικά σας κύτταρα —όχι με κάποιον αόριστο και ασαφή τρόπο, ούτε με τον τρόπο που διαφέρουν τα πρόσωπά μας ή οι υπογραφές μας. Διαφέρει κατά ακριβή αριθμό απολύτως εντοπισμένων θέσεων κατά μήκος των δισεκα-

τομμυρίων ζευγών βάσεων που διαθέτουμε όλοι μας.

Και λοιπόν, πώς εμφανίζεται το πρόβλημα; Πώς μπορούν οι δικηγόροι να παραπλανούν τους ενόρκους, κανοντάς τους να παρεμμηνεύουν ή να αγνοούν τόσο σημαντικά αποδεικτικά στοιχεία; Γιατί μερικά δικαστήρια έχουν οδηγηθεί σε τόσο απελπιστικά ακραίες λύσεις, ώστε να τα αποκλείουν ολωσδιόλου; Υπάρχουν τρεις κύριες τάξεις ενδεχόμενων προβλημάτων: μία απλών, μία περίπλοκων και μία ανόητων. Θα ασχοληθώ με τα ανόητα και τα περίπλοκα προβλήματα παρακάτω πριν απ' όλα, όμως, θα αναφερθώ στην απλή —και σημαντική— πιθανότητα του ανθρώπινου λάθους. Ή μάλλον, πιθανότητες λάθους, διότι υπάρχουν άφθονες ευκαιρίες για σφάλματα ή ακόμη και για δολιοφθορά. Είναι δυνατόν να τοποθετηθεί λάθος επικέτα σε ένα σωληνάριο με δείγμα αίματος —είτε τυχαία είτε από δόλο. Ένα δείγμα από τον τόπο του εγκλήματος μπορεί να επιμολυθεί με εναιώρημα κυττάρων δέρματος που υπάρχει στον ιδρώτα ενός τεχνικού του εργαστηρίου ή ενός αξιωματικού της αστυνομίας.

Ο κίνδυνος μόλυνσης είναι ιδιαίτερα μεγάλος στις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες χρησιμοποιείται μια πολύ ευφυής τεχνική, γνωστή με το όνομα PCR (αλυσιδωτή αντίδραση πολυμεράσης), για τη δημιουργία εκατομμυρίων αντιγράφων μιας δεδομένης αλληλουχίας του μορίου DNA. Το πλεονέκτημα αυτής της τεχνικής είναι προφανές: ένα επίχρισμα ιδρώτα στη λαβή του όπλου περιέχει ελάχιστο DNA προς ανάλυση, αλλά η PCR μπορεί να πολλαπλασιάσει αυτή την ελάχιστη ποσότητα DNA έτσι ώστε να προκύπτει ένα δείγμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί —δηλαδή να αναλυθεί. Δυστυχώς, μαζί με το αληθινό τεκμήριο η PCR πολλαπλασιάζει και όλα τα στοιχεία επιμόλυνσης. Τα παραπλανητικά τεμάχια του DNA από τον ιδρώτα ενός τεχνικού αντιγράφονται εξίσου αποτελεσματικά όσο και το δείγμα υλικού από τον τόπο του εγκλήματος, με προφανείς ενδεχόμενους κινδύνους για την έκδοση άδικης απόφασης.

Παρ' ότι η PCR χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη διαδικασία ανάλυσης γονιδιακού αποτυπώματος, ο κίνδυνος μόλυνσης του δείγματος είναι ελάχιστος όταν λαμβάνονται οι σωστές προφυλάξεις. Επιπλέον, όποτε γίνονται λάθη, αυτά λειτουργούν πάντοτε προς όφελος του εναγομένου, είτε συγχέοντας τα δεδομένα είτε ενοχοποιώντας άλλους, προφανώς αθώους, που παρευρέθηκαν στη σκηνή του εγκλήματος μόνο για λόγους καθήκοντος. Όπως και να 'ναι, το ανθρώπινο σφάλμα δεν αφορά αποκλειστικά και μόνο την περίπτωση των στοιχείων από το DNA. Όλα τα είδη αποδεικτικών στοιχείων μπορούν να αλλοιωθούν από αδέξιους χειρισμούς ή δολιοφθορά, και όλα θα πρέπει κανείς να τα μεταχειρίζεται με σχολαστική προσοχή. Τα δικαστήρια έχουν ήδη αποδεχθεί την ανάγκη λήψης μέτρων προφύλαξης, παρ' όλα αυτά εξακολουθούν να συμβαίνουν σφάλματα —και μερικές φορές, δυστυχώς, με τραγικά αποτελέσματα. Τα ευρήματα από την ανάλυση του DNA δεν παραμένουν απρόσβλητα από την ανθρώπινη αδεξιότητα, αλλά ούτε είναι και ιδιαιτέρως τρωτά. Αν όλα τα

αποδεικτικά στοιχεία από το DNA έπρεπε να απορριφθούν λόγω των τυχαίων λαθών, τότε θα έπρεπε επίσης να αποκλειστούν και τα περισσότερα από τα άλλα είδη αποδεικτικών στοιχείων.

ΟΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ ΠΕΡΙΠΛΟΚΕΣ δυσκολίες που συσκοτίζουν τα στοιχεία από τη γονιδιακή ανάλυση χρειάζονται ποι εκτενείς διευκρινίσεις. Κι εδώ, επίσης, υπάρχουν αντιστοιχίες με ποι συμβατικά είδη αποδεικτικών στοιχείων, αν και συχνά τα δικαστήρια δεν φαίνονται να κατανοούν αυτό το ζήτημα. Για κάθε είδος στοιχείου ταυτοποίησης, υπάρχουν δύο τύποι λάθους —που αντιστοιχούν στους δύο πιθανούς τύπους σφάλματος οποιασδήποτε στατιστικής ένδειξης: έναν ψευδώς θετικό και έναν ψευδώς αρνητικό. Ένας ύποπτος που είναι ένοχος ενδέχεται να μην αναγνωριστεί, και έτσι να διαφύγει: ψευδώς αρνητικό αποτέλεσμα. Η ένας ύποπτος που είναι αθώος μπορεί να καταδικαστεί επειδή συμβαίνει, από κακή τύχη, να μοιάζει με τον πραγματικό ένοχο: ψευδώς θετικό αποτέλεσμα. (Οι περισσότεροι θεωρούν αυτή την τελευταία περίπτωση ως το πιο επικίνδυνο σφάλμα.)

Στην περίπτωση αποδεικτικών στοιχείων βάσει του DNA, ο κίνδυνος μιας ψευδώς θετικής καταδικαστικής επιμηγορίας είναι θεωρητικά, όντως, πολύ χαμηλός. Η αστυνομία έχει δείγμα αίματος από κάποιον ύποπτο, καθώς και ένα δείγμα υλικού από τον τόπο του εγκλήματος. Αν καταγραφόταν αναλυτικά ολόκληρη η ομάδα γονιδίων από καθένα από τα δύο δείγματα, η πιθανότητα εσφαλμένης καταδικαστικής επιμηγορίας θα ήταν ένα προς πολλά δισεκατομμύρια. Βεβαίως, θεωρητικά είναι δυνατόν η αναπαραγωγική λοταρία να παρουσιάσει δύο φορές την ίδια γενετική αλληλουχία: θα μπορούσε αύριο να γεννηθεί ένας «πανομοιότυπος δίδυμος» του Ισαάκ Νεύτωνα. Άλλα το πλήθος των ανθρώπων που θα έπρεπε να γεννηθούν για να έχει το εν λόγω γεγονός κάποια πιθανότητα να συμβεί θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερο απ' ό,τι το πλήθος όλων των ατόμων του Σύμπαντος.

Διսτυχώς, δεν είναι καθόλου πρακτικό να αναλύουμε ολόκληρη τη γενετική αλληλουχία (γονιδιώμα) ενός ατόμου προκειμένου να βρούμε τη λύση σε ένα έγκλημα. Στην πράξη, οι ειδικοί ερευνητές της εγκληματολογικής υπηρεσίας συγκεντρώνουν τις προσπάθειές τους σε μικρά τμήματα του γονιδιώματος, αναζητώντας αλληλουχίες που είναι γνωστές ως «σειραϊκές επαναλήψεις» —οι οποίες εύκολα μετριούνται και είναι γνωστό ότι εμφανίζουν παραλλαγές στον γενικό πληθυσμό. Οι σειραϊκές επαναλήψεις κατατάσσονται μεταξύ των «άχρηστων» αλληλουχιών DNA που αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος του γονιδιώματος καθε οργανισμού. Μπορεί να είναι συνεχείς επαναλήψεις μίας και μόνο βάσης

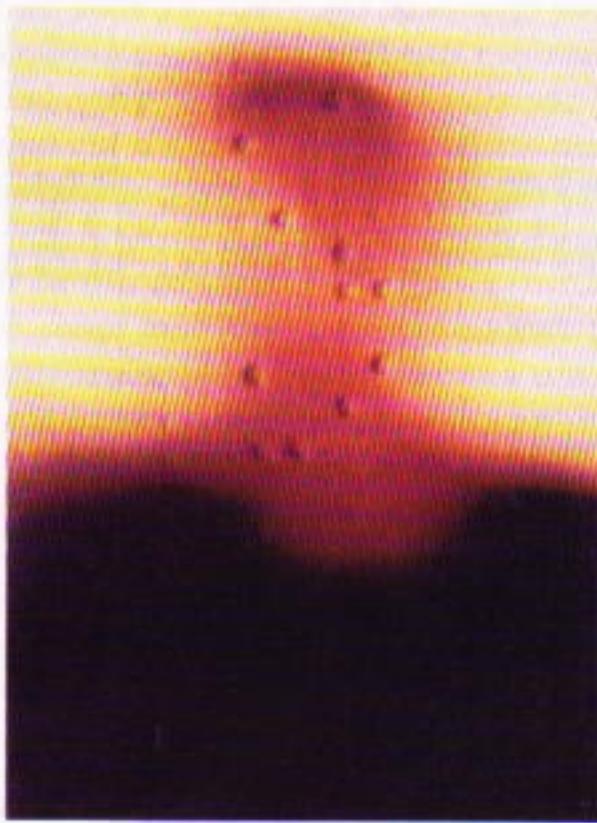
η εναλλαγές δύο και πάντοτε ίδιων επαναλαμβανόμενων βάσεων ή, τέλος, και συνεχείς επαναλήψεις ενός ποι περίπλοκου προτύπου.

Διαφορετικοί άνθρωποι έχουν διαφορετικούς αριθμούς σειραϊκών επαναλήψεων σε συγκεκριμένες θέσεις. Εποι, εγώ μπορεί να έχω 147 επαναλήψεις ενός ιδιαίτερου τμήματος «ανερμηνεύσιμου» DNA, ενώ εσείς να έχετε 84 επαναλήψεις του ίδιου κομματιού στις αντίστοιχες θέσεις του δικού σας γονιδιώματος. Σε μια άλλη περιοχή, εγώ θα μπορούσα να έχω 24 επαναλήψεις κι εσείς 38. Κάθε άτομο έχει ένα χαρακτηριστικό γονιδιακό αποτύπωμα που αποτελείται από μια ομάδα αριθμών: κάθε αριθμός υποδηλώνει πόσες φορές επαναλαμβάνεται ένα ιδιαίτερο κομμάτι ανερμηνεύσιμου DNA.

Η ομορφιά των αριθμών σειραϊκής επανάληψης έγκειται στο ότι η μέτρησή τους είναι εύκολη. Αρχίζετε να κόβετε ένα τμήμα του DNA σε τεμάχια, χρησιμοποιώντας περιοριστικά ένζυμα τα οποία εγκαθίστανται σε μια συγκεκριμένη αλληλουχία βάσεων και διασπούν τους μοριακούς δεσμούς της. Όλα τα τεμάχια δεν περιέχουν σειραϊκές επαναλήψεις —τις περιέχουν μερικά απ' αυτά—, και το μήκος κάθε τεμαχίου θα καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τον αριθμό των σειραϊκών επαναλήψεων που περιέχονται σ' αυτό. Δεν χρειάζεται να εμπλακείτε στην ανάλυση της αλληλουχίας των επιμέρους βάσεων: απλώς κόβετε και μετράτε.

ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ του γονιδιώματος που διερευνάται, το γονιδιακό αποτύπωμα μπορεί να είναι λιγότερο ή περισσότερο ακριβές. Ακόμη και σε μία μόνο περιοχή του γονιδιώματος, οι πιθανότητες να ταιριάζουν τα δείγματα από τύχη μπορεί να είναι αρκετά υψηλές: μεταξύ ένα προς εκατό και ένα προς χίλια, ή και περισσότερο. Ωστόσο, για να υπάρχει βεβαιότητα, οι ιατροδικαστικοί αναλυτές γονιδιακών αποτυπωμάτων ελέγχουν συνήθως πέντε-έξι διαφορετικές περιοχές του γονιδιώματος. Σ' αυτή την περίπτωση, οι πιθανότητες σφάλματος είναι πράγματι εξαιρετικά μικρές. Άλλα μας ενδιαφέρει πόσο μικρές: διότι το γονιδιακό αποτύπωμα μπορεί να παιξει μοιραίο ρόλο για τη ζωή ή την ελευθερία ενός ατόμου.

Ας επιστρέψουμε για λίγο στη διάκριση μεταξύ ψευδώς θετικού και ψευδώς αρνητικού αποτελέσματος. Το πειστήριο του DNA μπορεί να απαλλάξει έναν αθώο ύποπτο ή να επφέρει την καταδίκη ενός ενόχου. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι λαμβάνεται σπέρμα από τον κόλπο ενός θύματος βιασμού. Έμμεσες ενδείξεις οδηγούν την αστυνομία να συλλάβει τον ύποπτο Α. Ο ύποπτος Α δίνει δείγμα αίματος, και αυτό συγκρίνεται με το δείγμα του σπέρματος, μέσω εξέτασης του DNA, προκειμένου να



αναλυθεί μία περιοχή σειραικών επαναλήψεων. Αν τα δύο δείγματα διαφέρουν, ο ύποπτος Α απαλλάσσεται.

Αλλά τι θα συμβεί αν το αίμα του Α ταιριάζει με το δείγμα σπέρματος του βιαστή στη συγκεκριμένη περιοχή του γονιδιώματος; Ας υποθέσουμε ότι και οι δύο έχουν το ίδιο πρότυπο «ραβδωτού κώδικα» —ας το ονομάσουμε πρότυπο P. Αυτό το εύρημα είναι συμβιβαστό με την άποψη περί ενοχής του υπόπτου Α, αλλά δεν την αποδεικνύει. Ο Α θα μπορούσε απλώς να έχει συμπτωματικά ίδιο πρότυπο P με αυτό του πραγματικού βιαστή. Η αστυνομία λοιπόν θα πρέπει να διερευνήσει μερικές ακόμη περιοχές του DNA. Αν τα δείγματα εξακολουθούν να ταιριάζουν, τι πιθανότητες υπάρχουν αυτή η ομοιότητα να είναι απλώς συμπτωματική; Σ'αυτό ακριβώς το σημείο οι ερευνητές θα πρέπει να αρχίσουν να σκέφτονται στατιστικά.

Θεωρητικώς, όταν παίρνουν αίμα από ένα στατιστικό δείγμα ανδρών στο γενικό πληθυσμό, θα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα δύο οποιοιδήποτε άνδρες να έχουν πανομοιότυπες σειραικές επαναλήψεις σε κάθε σχετική περιοχή του γονιδιώματος. Αλλά από ποιο τμήμα του πληθυσμού επλέγουν το δείγμα τους;

Αν μια γυναίκα έλεγε στην αστυνομία ότι ο βιαστής είχε γενειάδα, και η αστυνομία συνελάμβανε έναν γενειοφόρο ύποπτο, θα ήταν άδικο εκ μέρους της αστυνομίας να τον βάλει να στέκεται σε μια σειρά αναγνώρισης μεταξύ άλλων δεκαεννιά καλοξυρισμένων ανδρών. Με την ίδια συλλογιστική, η σύγκριση δειγμάτων DNA μπορεί να κατευθύνεται με άδικο τρόπο ενάντια στον ύποπτο. Ας υποθέσουμε ότι στον παγκόσμιο πληθυσμό, γενικά, μόνο ένας άνδρας στο ένα εκατομμύριο άνδρες έχει το πρότυπο P. Μήπως αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πιθανότητα ένα προς ένα εκατομμύριο να καταδικαστεί άδικα ο ύποπτος Α; Καθόλου. Ο ύποπτος Α μπορεί να ανήκει σε μια μειονότητα που οι πρόγονοι της μετανάστευσαν από κάποια συγκεκριμένη περιοχή του πλανήτη. Οι τοπικοί πληθυσμοί εμφανίζουν συχνά κοινές γενετικές ιδιαιτερότητες, για τον απλό λόγο ότι κατάγονται από τους ίδιους προγόνους.

Κάπου δύο με πέντε εκατομμύρια Νοτιοαφρικανοί Ολλανδοί, ή Αφρικάνερς όπως λέγονται, κατάγονται από ένα «καράβι» μεταναστών που το 1652 έφτασε στη Νότιο Αφρική από τις Κάτω Χώρες. Από τους εν λόγω απογόνους, περίπου 8.000 (ή περίπου ένας στους 300) εμφανίζουν την αιματολογική νόσο πορφυρία τύπου variegata, που είναι πολύ ποσό σπάνια στον υπόλοιπο κόσμο. Προφανώς, παρουσιάζουν αυτή την κατάσταση επειδή κατάγονται από ένα και μοναδικό ζευγάρι πάνω στο πλοίο —τον Gerrit Jansz και την Ariaantje Jacobs. Και άλλοι πληθυσμοί εμφανίζουν συχνά σε τοπικό επίπεδο —για τον ίδιο λόγο— υψηλές συχνότητες κάποιων

ιδιαιτερών γονιδίων. Εάν, λοιπόν, για να επιστρέψουμε στην υποθετική δικαστική περίπτωσή μας, ο ύποπτος Α και ο πραγματικός δράστης του εγκλήματος ανήκουν και οι δύο στην ίδια μειονοτική ομάδα, τότε η πιθανότητα σφάλματος θα ήταν εντυπωσιακά μεγαλύτερη απ' όσο θα μπορούσατε να πιστέψετε αν στηρίζατε τις εκτιμήσεις σας στον γενικό πληθυσμό. Η συχνότητα του προτύπου P στον γενικό πληθυσμό παύει πλέον να μας ενδιαφέρει. Η αστυνομία χρειάζεται να γνωρίζει τη συχνότητα του προτύπου P στους κόλπους της ομάδας όπου ανήκει ο ύποπτος.

Η ανάγκη να λαμβάνουμε υπόψη τις ιδιαιτερες αντιστοιχες συχνότητες δεν είναι κάτι νέο, και βρίσκει εφαρμογή τόσο σε πράγματα όσο και σε ανθρώπους. Κάποτε υπηρέτηρα ως ένορκος στο Βασιλικό Δικαστήριο της Οξφόρδης, σε μια υπόθεση όπου ένας

άνθρωπος κατηγορείτο πως έκλεψε τρία νομίσματα από έναν ανταγωνιστή νομισματοσυλλέκτη. Ο κατηγορούμενος είχε συλληφθεί με τρία νομίσματα στην κατοχή του, που ήταν πανομοιότυπα με αυτά που είχαν χαθεί. Ο συνήγορος πολιτικής αγωγής ήταν εύγλωττος:

Κυρίες και κύριοι ένορκοι, περιμένουν πράγματι από εμάς να πιστέψουμε ότι τρία νομίσματα, ακριβώς του ίδιου τύπου όπως και τα τρία νομίσματα που λείπουν, θα μπορούσαν μόνο συμπτωματικά να βρίσκονται στη συλλογή ενός αντίτιτου συλλέκτη. Ε, λοιπόν, σας λέω ότι πάει πολύ να χωνέψουμε μια τέτοια σύμπτωση.

Στους ενόρκους δεν επιτρέπεται να κάνουν εξέταση κατ' αντιπαράσταση. Αυτό αποτελεί καθήκον του συνήγορου υπεράσπισης, κι αυτός, αν και αναμφίβολα διέθετε εξίσου μεγάλη νομική μόρφωση και ήταν εξίσου ευφραδής, δεν ήξερε τίποτε παραπάνω σχετικά με τη θεωρία των πιθανοτήτων απ' ότι ο συνήγορος πολιτικής αγωγής. Προσωπικά, θα ήθελα να απαντούσε κάπως έτοι:

Κύριε Δικαστά, δεν γνωρίζω αν όντως πάει πολύ να χωνέψουμε μια τέτοια σύμπτωση, δεδομένου ότι ο περισπούδαστος συνάδελφος δεν μας παρουσίασε απολύτως κανένα στοιχείο για το πόσο σπάνια ή συχνά είναι αυτά τα τρία νομίσματα στην πληθυσμιακή ομάδα των συλλεκτών νομισμάτων στην Αγγλία. Αν αυτά τα νομίσματα είναι τόσο σπάνια ώστε μόνο ένας στους εκατό συλλέκτες αυτής της χώρας μπορεί να διαθέτει κάποιο απ' αυτά, τότε η ενάγουσα αρχή έχει πολύ δίκιο, εφόσον ο κατηγορούμενος συνελήφθη με τρία απ' αυτά. Αν, όμως, από την άλλη, αυτά τα νομίσματα είναι κοινά και ευτελή, δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για να στηρίχτει μια καταδίκη. (Για να οδηγήσω την άποψή μου ώς τα άκρα: τρία νομίσματα που έχω στην τοέπη μου σήμερα, και που όλα ανήκουν στο τρέχον νόμιμο χρήμα, είναι πολύ πιθανό πως θα είναι ίδια με τρία νομίσματα στην τοέπη της Εξοχότητάς Σας.)



Η ίδια αντίρρηση μπορεί να λεχθεί —και πράγματι έχει διατυπωθεί— σχετικά με τα αποδεικτικά στοιχεία από το DNA. Ευτυχώς, στην περίπτωση που εξετάζονται αρκετές περιοχές του DNA, οι πιθανότητες εσφαλμένης αναγνώρισης της ταυτότητας, ακόμη και μεταξύ των μελών μειονοτικών ομάδων, ακόμη και μεταξύ μελών της ίδιας οικογένειας (εκτός από μονοωγενείς διδύμους), είναι κατά πολύ λιγότερες απ' ό,τι με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο αναγνώρισης, περιλαμβανομένων και των στοιχείων που προέρχονται από αυτόπτες μάρτυρες.

ΤΟ ΠΟΣΟ ΜΙΚΡΕΣ ΑΚΡΙΒΩΣ είναι οι υπολειπόμενες πιθανότητες σφάλματος παραμένει θέμα ανοιχτό προς σύζητηση. Και σ' αυτό ακριβώς το σημείο, φτάνω στην τρίτη κατηγορία αντιρήσεων στην εξέταση του DNA: δηλαδή, στην απλή ανοησία. Οι δικηγόροι έχουν τη συνήθεια να ενίστανται όταν εμπειρογνώμονες που καταθέτουν δείχνουν να διαφωνούν μεταξύ τους. Φανταστείτε ότι δύο γενετιστές καλούνται να καταθέσουν και τους ζητείται να εκτιμήσουν την πιθανότητα εσφαλμένης ταυτοποίησης μέσω γονιδιακού αποτυπώματος. Ο πρώτος εμπειρογνώμων λέει πώς είναι ένα προς ένα εκατομμύριο. Ο δεύτερος λέει ένα προς εκατό χιλιάδες.

Ένσταση. «Ααα, μάλιστα! Οι εμπειρογνώμονες διαφωνούν! Κυρίες και κύριοι ένορκοι, πώς μπορούμε να εμπιστευτούμε μια επιστημονική μέθοδο, όταν οι ίδιοι οι ειδικοί δεν μπορούν να παρουσιάσουν παρά εκτιμήσεις που απέχουν μεταξύ τους κατά δέκα φορές; Προφανώς, το μόνο που μας απομένει είναι να παραβλέψουμε όλα τα παρόμοια πειστήρια.»

Αλλά στις περιπτώσεις αυτές, παρ' ότι οι γενετιστές μπορεί να έχουν την τάση να δίνουν διαφορετική βαρύτητα σε αστάθμητους παράγοντες όπως η επίδραση της φυλετικής υποομάδας, οποιαδήποτε μεταξύ τους διαφωνία είναι σαν να αναρωτιόμαστε εάν η κλίμακα πιθανοτήτων ενάντια σε μια εσφαλμένη ταυτοποίηση είναι υπεραστρονομική ή απλώς αστρονομική. Και με τις ποσοντηρητικές εκτιμήσεις, οι πιθανότητες ενάντια σε μια εσφαλμένη ταυτοποίηση μέσω γονιδιακού αποτυπώματος είναι απείρως μεγαλύτερες απ' ό,τι σε μια συνηθισμένη διαδικασία αναγνώρισης υπόπτων. Φανταστείτε πώς θα αντιδρούσε ο δικαστής προς το συνήγορο υπεράσπισης που θα διαμαρτυρόταν λέγοντας: «Κύριε δικαστά, είναι άδικο των αδίκων να βάλουμε τον πελάτη μου σε σειρά αναγνώρισης με είκοσι μόνο άνδρες. Απαιτώ μια σειρά τουλάχιστον ενός εκατομμυρίου ανδρών!»

Λίγα χρόνια πριν, μετά τη γνωστοποίηση ότι το πειστήριο του DNA είχε απορριφθεί σε μια περίπτωση που εκδικάστηκε στο Κεντρικό Κακουργιοδικείο του Λονδίνου, το «Ολντ Μπέιλου», η εφημερίδα *The Independent*

προέβλεψε πλημμυρίδα εφέσεων και σε άλλες περιπτώσεις. Η κεντρική ιδέα ήταν ότι ο καθένας που έλιωνε στις φυλακές επειδή κρίθηκε ένοχος με βάση το πειστήριο από

την ανάλυση του DNA τώρα θα είχε τη δυνατότητα να εφεσιβάλει την απόφαση, επικαλούμενος το δεδικασμένο. Άλλα η πλημμυρίδα θα μπορούσε να είναι ακόμη μεγαλύτερη απ' ό,τι φανταζόταν η εφημερίδα. Αν ο αποκλεισμός του πειστηρίου του DNA αποτελούσε σοβαρό δεδικασμένο για κάθε σχετική περίπτωση, θα έριχνε αμφιβολίες και σε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες οι πιθανότητες τυχαίου σφάλματος είναι μεγαλύτερες από ένα στο ένα εκατομμύριο.

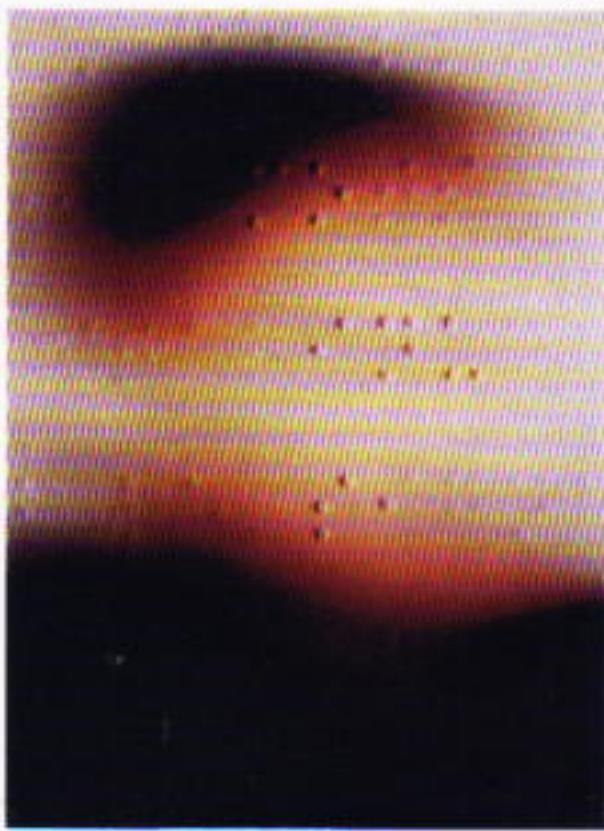
Εάν μια μάρτυς λέει πως «είδε» κάποιον τον οποίον κατόπιν αναγνώρισε σε μια σειρά υπόπτων, οι δικηγόροι και οι ένορκοι μένουν ικανοποιημένοι. Άλλα οι πιθανότητες εσφαλμένης αναγνώρισης ενός

ατόμου, όσες φορές παρεμβαίνουν τα μάτια, είναι πολύ μεγαλύτερες από τις πιθανότητες εσφαλμένης ταυτοποίησης μέσω γονιδιακού αποτυπώματος. Αν πάρουμε στα σοβαρά το παραπάνω δεδικασμένο, αυτό θα σημαίνει ότι κάθε καταδικασμένος εγκληματίας στη χώρα μας διαθέτει έναν εξαιρετικό λόγο έφεσης που στηρίζεται στην εσφαλμένη αναγνώρισή του. Ακόμη κι ένας ύποπτος, τον οποίον είδαν δεκάδες μάρτυρες να κρατά ένα όπλο που ακόμη κάπνιζε, θα μπορούσε δίκαια να προβάλλει το επιχείρημα ότι οι πιθανότητες αδικίας ήταν περισσότερες από μία στο εκατομμύριο.

Η ΙΣΧΥΣ, Η ΑΞΙΟΠΕΤΙΑ ΤΟΥ ΓΟΝΙΔΙΑΚΟΥ αποτυπώματος, αποτελεί μια όψη της γενικής ισχύος της επιστήμης, που σε κάποιους εμπνέει φόβο. Είναι σημαντικό να μην παροξύνουμε αυτόν το φόβο απαιτώντας πάρα πολλά ή προσπαθώντας να «βαδίσουμε» πολύ γρήγορα. Ωστόσο, το ζήτημα μιας εθνικής βάσης δεδομένων DNA αρχίζει να απασχολεί τα περισσότερα κράτη, με διάφορους τρόπους, όπως έγινε εντυπωσιακά σαφές από την πρόσφατη ανακοίνωση του FBI.

Θεωρητικά, θα μπορούσαμε να διατηρούμε μια εθνική βάση δεδομένων από τις αλληλουχίες DNA κάθε άνδρα, γυναίκας ή παιδιού στη χώρα μας. Εάν συνέβαινε αυτό, σε κάθε περίπτωση που θα βρισκόταν ένα δείγμα αίματος, σπέρματος, σιέλου, δέρματος ή τριχών στον τόπο του εγκλήματος, η αστυνομία θα μπορούσε απλά να αναζητεί τους υπόπτους προσφεύγοντας στην παραπάνω βάση δεδομένων.

Η εν λόγω πρόταση προκαλεί κραυγές διαμαρτυρίας: θα αποτελούσε καταπάτηση των ατομικών ελευθεριών. Είναι η αιχμή του δόρατος, το γιγάντειο βήμα προς ένα αστυνομικό κράτος. Πάντοτε με προβλημάτιζε το γιατί οι άνθρωποι αντιδρούν αυτοματικά με τόσο έντονο τρόπο σε τέτοιες προτάσεις. Αν εξετάσω αμερόληπτα το ζήτη-



μα, θα καταλήξω, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις πλευρές και παραμέτρους του, ότι και προσωπικά με βρίσκει αντίθετο. Άλλα δεν είναι κάτι που πρέπει να το καταδικάζουμε ασυζητητί.

Αν ήταν δυνατόν να υπάρξουν εγγυήσεις ότι μια βάση δεδομένων DNA θα εχρησιμοποιείτο μόνο για τη σύλληψη των εγκληματιών, δυσκολευόμαστε να διακρίνουμε το λόγο για τον οποίο κάποιος μη εγκληματίας θα είχε αντιρρήσεις. Πλήθος ακτιβιστών, βέβαια, που υπερασπίζονται τις ελευθερίες των πολιτών, θα είχαν αντιρρήσεις αρχής. Άλλα, ειλικρινά, δεν κατανοώ το λόγο —εκτός κι αν θέλουν να προστατέψουν το δικαίωμα των εγκληματιών να διαπράττουν εγκλήματα παραμένοντας ασύληπτοι. Επίσης δεν βλέπω κανένα ικανοποιητικό επιχείρημα ενάντια σε μια εθνική βάση δεδομένων με συμβατικά δακτυλικά αποτυπώματα μελάνης (εκτός από το πρακτικό επιχείρημα ότι, αντίθετα με ότι συμβαίνει για το DNA, είναι δύσκολο να κάνεις αυτόματη έρευνα μέσω υπολογιστή για τα συμβατικά δακτυλικά αποτυπώματα). Το εγκλήμα αποτελεί ένα σοβαρό πρόβλημα που μειώνει την ποιότητα ζωής για οποιονδήποτε άλλον εκτός από τους εγκληματίες (αλλά ίσως ακόμη και γι' αυτούς; Θεωρητικά δεν υπάρχει τίποτε που να αποκλείει τη διάρρηξη του σπιτιού ενός διαρρήκτη). Αν μια εθνική βάση δεδομένων DNA βοηθούσε σημαντικά την αστυνομία να συλλαμβάνει τους εγκληματίες, οι αντιρρήσεις θα έπρεπε να είναι αρκετά σοβαρές ώστε να βαρύνουν περισσότερο από τα οφέλη.

Στο σημείο αυτό, όμως, χρειάζεται μεγάλη προσοχή. Είναι άλλο πράγμα να χρησιμοποιείς το πειστήριο του DNA —ή οποιουδήποτε είδους μαζικό έλεγχο για την αναγνώριση ενόχων— και να επιβεβαιώνεις μια υπόνοια στην οποία οδηγήθηκε η αστυνομία από άλλους δρόμους· και είναι εντελώς διαφορετικό πράγμα να το χρησιμοποιείς για να συλλάβεις οποιοδήποτε άτομο σε ολόκληρη τη χώρα που εμφανίζει όμοιο δείγμα.

Αν κάποιο δείγμα από τον τόπο ενός εγκλήματος στο Εδιμβούργο συμβαίνει να ταιριάζει με το δικό μου DNA, είναι, μήπως, θεμιτό να επιτρέπεται στην αστυνομία να βροντά την πόρτα μου στην Οξφόρδη και να με συλλαμβάνει χωρίς άλλα στοιχεία; Πιστεύω πως όχι, ωστόσο αξίζει να σημειώσουμε ότι η αστυνομία ήδη κάνει κάτι ανάλογο με τα χαρακτηριστικά του προσώπου, όταν δημοσιοποιεί το σκίτσο ενός υπόπτου ή μια φωτογραφία που έδωσε κάποιος μάρτυρας σε εφημερίδες εθνικής εμβέλειας, και καλεί ανθρώπους από ολόκληρη τη χώρα να τηλεφωνήσουν αν «αναγνωρίζουν» τη φυσιογνωμία.

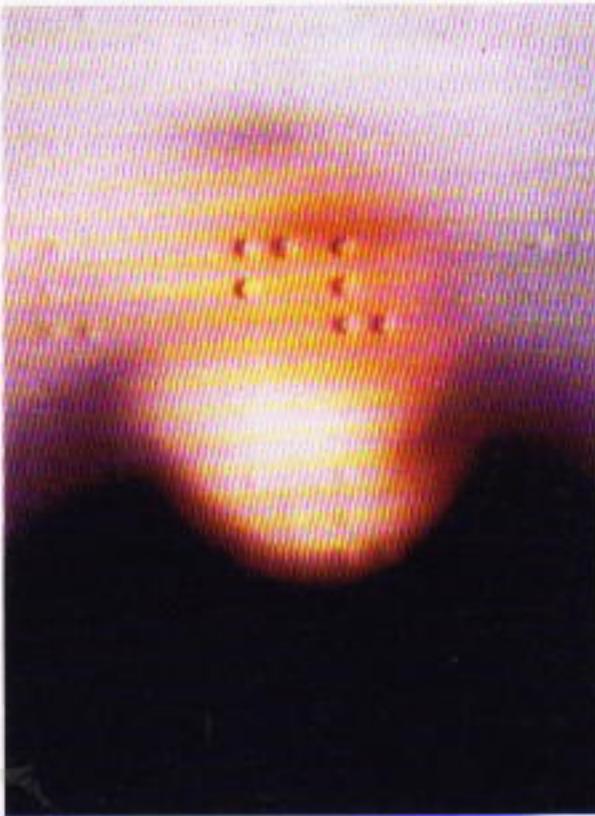
Αφήνοντας κατά μέρος τις περιπτώσεις εγκλήματος, υπάρχει πραγματικός κίνδυνος οι πληροφορίες της εθνικής βάσης δεδομένων να πέσουν σε λάθος χέρια. Για

παράδειγμα, σημαντικός αριθμός ανδρών πιστεύουν λαθασμένα ότι είναι οι βιολογικοί πατέρες των παιδιών τους. Ο καθένας που θα είχε πρόσβαση στην εθνική βάση δεδομένων DNA θα μπορούσε να ανακαλύψει την αλήθεια, πράγμα που θα ήταν δυνατόν να επιφέρει τεράστια συναισθηματική οδύνη, διάλυση γάμων, νευρική κατάρρευση, εκβιασμούς, ή και χειρότερα. Κάποιοι φρονούν πως η αλήθεια πρέπει πάντοτε να αποκαλύπτεται, οσοδήποτε επώδυνη κι αν είναι. Προσωπικά πιστεύω πως συνολικά η ανθρώπινη ευτυχία δεν θα μεγάλωνε από ένα αιφνίδιο ξέσπασμα αποκαλύψεων σχετικά με την αληθινή πατρότητα του καθενός μας.

Έπειτα, υπάρχουν τα θέματα του ιατρικού απορρήτου και της ασφάλισης. Ολόκληρη η επιχειρηματική δραστηριότητα των ασφαλειών ζωής εξαρτάται από την έλλειψη δυνατότητας πρόβλεψης σχετικά με την ακριβή ημερομηνία θανάτου μας. Όπως είπε ο αστρονόμος σερ Arthur Eddington: «Η ανθρώπινη ζωή παραμένει παροιμιαδώς αβέβαιη· λίγα πράγματα είναι περισσότερο βέβαια από την ανταποδοτικότητα μιας εταιρείας ασφαλειών ζωής.» Όλοι πληρώνουμε τα ασφάλιστρά μας. Όσοι από εμάς πεθαίνουν αργότερα απ' ότι αναμενόταν επιδοτούν τους κληρονομους αυτών που πεθαίνουν νωρίτερα από το αναμενόμενο.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες ήδη καταρτίζουν στατιστικές προβλέψεις που εν μέρει υπονομεύουν το εν λόγω σύστημα παρέχοντάς τους τη δυνατότητα να επιβαρύνουν με μεγαλύτερα ασφάλιστρα τους πελάτες υψηλού κινδύνου. Στέλνουν ένα γιατρό να ακούσει την καρδιά σας, να σας πάρει την πίεση αίματος και να ελέγξει τις συνήθειές σας σχετικά με το κάπνισμα και την κατανάλωση ποτών. Εάν οι ασφαλιστές γνώριζαν επακριβώς πότε θα πέθαινε ο καθένας, οι ασφαλίσεις ζωής θα ήταν αδύνατες! Εξ ορισμού, μια εθνική βάση δεδομένων DNA θα μπορούσε να οδηγήσει την κοινωνία πιο κοντά σ' αυτή την ατυχή κατάληξη, στην περίπτωση που οι ασφαλιστές θα αποκτούσαν πρόσβαση στην εν λόγω βάση δεδομένων. Στην πιο ακραία περίπτωση, η μόνη κατηγορία θανάτου που θα μπορούσε να ασφαλιστεί θα ήταν το καθαρό ατύχημα.

Παρόμοια, αυτοί που εξετάζουν υποψήφιους για θέσεις εργασίας ή και υποψήφιους σπουδαστές για μια σχολή θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τις πληροφορίες από το DNA με τρόπους που πολλοί θα θεωρούσαν ανεπιθύμητους. Μερικοί εργοδότες στηρίζονται ήδη σε μεθόδους όπως η γραφολογία για να αξιολογήσουν, υποτίθεται, το χαρακτήρα ή τις δεξιότητες των υποψηφίων. Και σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της γραφολογίας, οι πληροφορίες από το DNA θα μπορούσαν να φανούν πραγματικά χρήσιμες στην αποτίμηση ικανοτήτων. Εγώ



θα συγκατέλεγα τον εαυτό μου μεταξύ των πολλών που θα ενοχλούνταν αν οι επιτροπές επλογής χρησιμοποιούσαν τις πληροφορίες του DNA, ή και αν το έπρατταν αυτό κρυφά.

«ΚΑΙ ΤΙ ΘΑ ΣΥΝΕΒΑΙΝΕ ΑΝ ΜΙΑ ΤΕΤΟΙΑ βάση δεδομένων έπεφτε στα χέρια ενός Χίτλερ;» θα ρωτήσουν αναπόφευκτα οι επικριτές. Σε πρώτη ματιά, δεν είναι σαφές με ποιον τρόπο μια τυραννική κυβέρνηση θα μπορούσε να ωφεληθεί από μια βάση δεδομένων με αληθινές πληροφορίες για τους πολίτες. «Οι τυραννικές κυβερνήσεις», θα μπορούσε να πει κανείς, «είναι τόσο επιδέξιες στο να χρησιμοποιούν ψεύτικες πληροφορίες· γιατί να σκοτίσθουν να καταχραστούν αληθινά στοιχεία;» Ωστόσο, τα καθεστώτα που ρέπουν προς τη γενοκτονία, αποτελούν ειδικές περιπτώσεις. Παρ' ότι δεν αληθεύει πως μπορείτε να αναγνωρίσετε έναν Εβραίο από το DNA του, υπάρχουν ιδιαίτερα γονίδια που είναι χαρακτηριστικά για ανθρώπους των οποίων οι πρόγονοι προέρχονται από ορισμένες περιοχές, της Κεντρικής Ευρώπης ας πούμε, και υπάρχουν στατιστικές συσχετίσεις που συνδέουν την παρουσία ορισμένων γονιδίων με το να είσαι Εβραίος. Φαίνεται αναντίρρητο ότι, αν ο Χίτλερ διέθετε μια εθνική βάση δεδομένων DNA, θα είχε βρει τρομερούς τρόπους για κακή χρήση αυτών των δεδομένων.

Υπάρχουν, άραγε, τρόποι να διαφυλάξουμε την κοινωνία από αυτά τα ενδεχόμενα δεινά, δημιουργώντας ταυτόχρονα μια βάση δεδομένων DNA για τη σύλληψη των εγκληματιών; Δεν είμαι σίγουρος. Πιστεύω πως είναι δύσκολο. Θα ήταν δυνατόν να προστατευτούν οι έντιμοι πολίτες έναντι των ασφαλιστικών εταιρειών και των εργοδοτών εάν περιορίζαμε την εθνική βάση δεδομένων μόνο στις μη κωδικεύουσες περιοχές του γονιδιώματος. Να περιείχε η βάση δεδομένων στοιχεία μόνο για τις σειραικές επαναληπτικές περιοχές του γονιδιώματος, και όχι για τα γονίδια που στην πραγματικότητα είναι υπεύθυνα για τα πάντα. Αυτό θα εμπόδιζε τους ασφαλιστές να εξάγουν συμπεράσματα για το προσδόκιμο επιβίωσης του καθενός, και τους κυνηγούς ταλέντων να μαντεύουν έμμεσα τις ικανότητες. Άλλα δεν θα ωφελούσε καθόλου να προστατευτούν οι άνθρωποι από το να ανακαλύψουν (ή να ανακαλύψουν οι εκβιαστές) την αλήθεια σχετικά με την πατρότητα —κάτι που θα προτιμούσαν να μην γνωρίζουν. Όταν έγινε η εκταφή ενός σκελετού στη Νότιο Αμερική και αποδείχτηκε πως ανήκε στον Γιόζεφ Μένγκελε, τον ναζί εγκληματία πολέμου που ήταν γνωστός με το όνομα «ο άγγελος του θανάτου», η ταυτοποίηση στηρίχτηκε αποκλειστικά στις σειραικές επαναληπτικές αλληλουχίες του DNA από τα οστά του και το αίμα του γιου του, ο οποίος βρισκόταν ακόμη εν ζωή.

Δεν διαθέτω καμία εύκολη απάντηση σ' αυτή την αντίρρηση, εκτός από το να πω ότι, καθώς η εξέταση του DNA γίνεται συνεχώς και πο εύκολη, θα είναι όλο και πο πιθανό να αποκαλυφθεί η πατρότητα ούτως ή άλλως χωρίς προσφυγή σε μια εθνική βάση δεδομένων. Ένας άνδρας που υποψιάζεται ότι το παιδί δεν είναι δικό

του, μπορεί ήδη να πάρει δείγμα αίματος από το παιδί και να το δώσει για σύγκριση με το δικό του.

ΤΕΤΟΙΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ, στην ουσία, ηθικά, και για τούτο εμφανίζονται κατάφορτα με αμφιβολίες, συναισθηματική ένταση και ακανθώδεις αξιακές επλογές. Και προκειμένου να τα απαντήσουμε σωστά —για να εκφέρουμε μια πραγματικά δίκαιη κρίση—, θα πρέπει προηγουμένως να σταθμίσουμε αμερόληπτα τη στατιστική τους θεμελίωση και να ελέγξουμε τις προϋποθέσεις τους υπό το ψυχρό φως της λογικής. Δυστυχώς, οι κοινωνίες σπανίως το πράττουν αυτό.

Οι θετικοί επιστήμονες καλούνται συχνά, ως εμπειρογνώμονες, να καταθέσουν σχετικά με τα τεχνικά χαρακτηριστικά της κόπωσης των μετάλλων, τη λοιμογόνο μεταδοτικότητα της νόσου των τρελών αγελάδων, και με αναρίθμητα άλλα πρακτικά ζητήματα. Άλλα, μόλις εκθέσουν τη γνώμη τους ως ειδικοί, αποέμπονται, για να μπορέσουν αυτοί που είναι πραγματικά επιφορτισμένοι με τη σοβαρή υπόθεση της λήψης των αποφάσεων να συνεχίσουν το έργο τους. Συμπέρασμα: οι θετικοί επιστήμονες είναι καλοί για να αποκαλύπτουν τα επιμέρους γεγονότα, αλλά κάποιοι άλλοι —συνήθως οι δικηγόροι ή οι δικαστές— είναι καλύτερα καταρτισμένοι να τα συνθέσουν και να γνωμοδοτήσουν για το τι εν τέλει θα πρέπει να γίνει!

Πιστεύω, αντίθετα, ότι θα ήταν απολύτως σωστό να πούμε πως ο επιστημονικός τρόπος σκέψης είναι πολύτιμος, όχι μόνο για τη σύνθεση των επιμέρους γεγονότων αλλά και για την έκδοση της τελικής ετυμηγορίας. Όταν συντριβεί κάποιο αεροπλάνο, ας πούμε, ή ξεσπουν βίαιες ταραχές σε κάποια αθλητική συνάντηση, ένας θετικός επιστήμονας θα ήταν καλύτερα καταρτισμένος από ένα δικαστή για να προεδρεύσει στη διερεύνηση του ζητήματος· και τούτο όχι λόγω των γνώσεων που διαθέτει ο πρώτος, αλλά λόγω των μεθόδων που χρησιμοποιεί προκειμένου να φωτιστούν τα γεγονότα. Η περίπτωση του γονιδιακού αποτυπώματος δείχνει ότι οι δικηγόροι θα ήταν καλύτεροι δικηγόροι, οι δικαστές καλύτεροι δικαστές, οι πολιτικοί καλύτεροι πολιτικοί και οι πολίτες καλύτεροι πολίτες αν διέθεταν περισσότερες επιστημονικές γνώσεις και —κάτι παραπάνω— αν σκέφτονταν περισσότερο σαν θετικοί επιστήμονες. ◻

O Richard Dawkins είναι ζωολόγος, καθηγητής στην έδρα Charles Simonyi για την κατανόηση της επιστήμης από το ευρύ κοινό, στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Στα ελληνικά κυκλοφορούν τα βιβλία του Το εγωιστικό γονίδιο (Τροχαλία 1988), Ο τυφλός ωρολογοποιός (Κάτοπτρο 1994), και Ο ποταμός της ζωής (Κάτοπτρο 1995).

To παρόν άρθρο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *The Sciences*, στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1998 αποτελεί διασκευή από το συγγραφέα μέρους κεφαλαίου του βιβλίου του που φέρει τον τίτλο *Unweaving the Rainbow: Science, Delusion, and the Appetite for Wonder* (Έκδοσεις Houghton Mifflin), και το οποίο μόλις κυκλοφόρησε στις ΗΠΑ. Copyright © 1998 Richard Dawkins.

Το αεροδυναμικό παράδοξο του δορυφόρου

Ποιες δυνάμεις δρουν στα αντικείμενα που διαγράφουν τροχιές πλησίον της Γης;

A. Mitrofanov

MΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΥΞΗΘΕΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ενός σώματος ενόσω κινείται σε μέσο που του προβάλλει αντίσταση; Εκ πρώτης όψεως, ένα τέτοιο ενδεχόμενο δεν φαίνεται περισσότερο πθανό από την απίστευτη μέθοδο που θα συμβούλευε ο βαρόνος Μινχάουζεν σε όποιον επιθυμεί να ανυψωθεί στον αέρα: να τραβήξει τα μαλλιά του με τα ίδια του τα χέρια.

Τείνουμε να θεωρούμε δεδομένο ότι ένα σώμα δεν μπορεί παρά να επιβραδύνεται εφόσον κινείται μέσα σε ένα ιξώδες μέσο. Ωστόσο, μην προτρέξετε σε συμπεράσματα. Στην πραγματικότητα, ένα τέτοιο φαινόμενο είναι εντελώς δυνατό και παρατηρείται ανελλιπώς όποτε δορυφόροι ή μετέωρα κινούνται γύρω από τη Γη στα εξώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, τα οποία συνιστανται από αέριο πολύ χαμηλής πυκνότητας. Πρόκειται για το περίφημο αεροδυναμικό παράδοξο του δορυφόρου: Όταν το διαστημόπλοιο εισέλθει στην ανώτερη ατμόσφαιρα, υφίσταται την επιβραδυντική δράση του αραιού αερίου και, εντούτοις, με κάποιον τρόπο κατορθώνει να αυξάνει την ταχύτητά του.

Προτού επιχειρήσουμε να διάλευ-



κάνουμε αυτόν το δύσκολο τροχιακό γρίφο, ας μελετήσουμε ένα απλό παράδειγμα από την κλασική μηχανική. Ένα μικρό βαρίδι, δεμένο στο άκρο ελαστικού νήματος, διαγράφει ισοταχώς έναν κύκλο στο οριζόντιο επίπεδο. Το νήμα υπακούει στο νόμο του Hooke —δηλαδή, η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη με την επιμήκυνση ή την επιβράχυνσή του. Εάν το βαρίδι επιβραδυνθεί με κάποιον τρόπο, η κίνησή του θα τροποποιηθεί. Για παράδειγμα, αν το βαρίδι ακινητοποιηθεί ακαριαία και αμέσως αφεθεί ελεύθερο, το τεντωμένο νήμα θα προσδώσει στο βαρίδι κάποια ταχύτητα προς το κέντρο περιστροφής. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το βαρίδι εάν εφαρμόσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας στο σύστημα βαρίδι-νήμα. Εφόσον η επιμήκυνση του νήματος υπερβαίνει κατά πολύ το αρχικό του μήκος, η μέγιστη τελική ταχύτητα του βαριδιού θα ισούται σχεδόν με την αρχική του ταχύτητα περιστροφής.

Το παράδειγμά μας συνιστά μια εξαιρετικά απλουστευμένη αναλογία του τι συμβαίνει με τους δορυφόρους καθώς «φρενάρουν» στην ατμόσφαιρα. Το βαρίδι παίζει το ρόλο του δορυφόρου, ενώ το νήμα αντιστοιχεί στη βαρυτική έλξη της Γης. Φυσικά, αυτή η ανάλυση πόρρω απέχει από την πραγματικότητα, διότι ο νόμος του Hooke ελάχιστη ομοιότητα έχει με τις βαρυτικές δυνάμεις, οι οποίες, όπως και οι ηλεκτροστατικές, μεταβάλλονται ως το αντίστροφο τετράγωνο της απόστασης των αλληλεπιδρώντων σωμάτων (στην περίπτωσή μας, ως το αντίστροφο τετράγωνο της ακτίνας της τροχιάς του δορυφόρου). Η κίνηση του δορυφόρου στα εξώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας αποδεικνύεται πιο ενδιαφέρουσα και περιπλοκή από την κίνηση ενός βαριδιού στερεωμένου σε ελαστικό νήμα.

Για να μελετήσουμε την τροχιά ενός δορυφόρου που κινείται σε αέριο πολύ χαμηλής πυκνότητας, χρειαζόμαστε μερικούς τύπους. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα δορυφόρο μάζας m σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη —η οποία έχει μάζα M . Προ-

κειμένου για τροχιές σε μεγάλα ύψη, η βασική δύναμη που δρα στο δορυφόρο είναι η βαρυτική έλξη της Γης. Συνεπώς, η ταχύτητα του δορυφόρου καθορίζεται από την εξίσωση $v^2 = GM/R$ ή, ισοδύναμα,

$$v = v_0 \sqrt{\frac{R_0}{R}}, \quad (1)$$

όπου με G συμβολίζουμε τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης, με R_0 την ακτίνα της Γης —η οποία ισούται κατά προσέγγιση με 6.400 km — και με $v_0 = (g_0 R_0)^{1/2}$ την τροχιακή ταχύτητα μόλις πάνω από τη γήινη επιφάνεια. Εφόσον η επιτάχυνση της βαρύτητας πλησίον της γήινης επιφάνειας λαμβάνει την τιμή $g_0 = 9,8$ m/s², η τροχιακή ταχύτητα ισούται με 7,9 km/s.

Η δύναμη αντίστασης που δρα σε ένα δορυφόρο εξαιτίας του αραιού αερίου των εξώτερων ατμοσφαιρικών στρωμάτων δίνεται από τον τύπο

$$F_{\text{ant}} = C_x \frac{\rho v^2}{2} S_x. \quad (2)$$

Εδώ, ρ είναι η ατμοσφαιρική πυκνότητα στο ύψος της τροχιάς, από το οποίο και εξαρτάται έντονα με S_x συμβολίζουμε το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του δορυφόρου (ακριβέστερα, το εμβαδόν της μέγιστης διατομής του δορυφόρου κάθετα στο διάνυσμα u της ταχύτητάς του σε σχέση με το μέσο —η εν λόγω παράμετρος ονομάζεται μετωπική επιφάνεια). Τέλος, C_x είναι ο συντελεστής αντίστασης, ο οποίος, για να ακριβολογούμε, εξαρτάται επίσης από την ταχύτητα. Ωστόσο, προκειμένου για την πτήση ενός δορυφόρου σε μεγάλο ύψος, μπορεί να ληφθεί κατά προσέγγιση ίσος με 2.

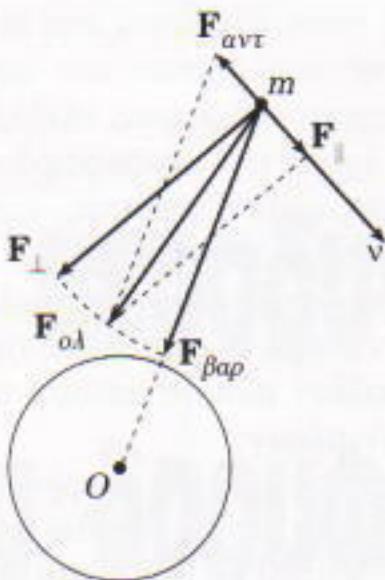
Η συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή αντίστασης σημαίνει ότι οι κρούσεις των μορίων του αερίου με το θερμικό θώρακα του δορυφόρου δεν είναι ελαστικές, με αποτέλεσμα να προσδίδεται στο δορυφόρο ορμή ρu^2 ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα της μετωπικής του επιφάνειας. Θυμηθείτε ότι η τροχιακή ταχύτητα ενός δορυφόρου υπερβαίνει κατά πο-

λύ τη μέση ταχύτητα της θερμικής κίνησης των μορίων και των ατόμων της ατμόσφαιρας. (Ειδάλλως, η Γη θα έχανε την ατμόσφαιρά της πολύ γρήγορα!) Επομένως, κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων «αεροπέδησης» στα επόμενα παραδείγματα, αγνοούμε τη θερμική κίνηση των σωματιδίων που συνιστούν το περιβάλλον μέσον.

Ποιες συνέπειες απορρέουν από την ύπαρξη αερίου —έστω και εξαιρετικά χαμηλής πυκνότητας— στο ύψος της τροχιάς του δορυφόρου; Προκειμένου για τροχιές σε μεγάλα ύψη, οι δυνάμεις αντίστασης ισοδυναμούν με μικρές διαταραχές, οι οποίες επιφέρουν ελαφρές μεταβολές των παραμέτρων της τροχιάς. Καθώς φρενάρει βαθμαία μέσα στο αραιό αέριο, ο δορυφόρος κατέρχεται σε χαμηλότερη τροχιά. Ωστόσο, ο τύπος (1) δείχνει ότι, όταν ελαττώνεται η τιμή της R , αυξάνεται η τροχιακή ταχύτητα. Συνεπώς, η αντίσταση που δρα σε κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας του δορυφόρου είναι δυνατόν να επιταχύνει το δορυφόρο στην κατεύθυνση της κίνησής του!

Εππλέον, όπως θα δούμε, η επιτρόχια επιτάχυνση —η συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά την εφαπτομένη της τροχιάς— ισούται κατ' απόλυτη τιμή ακριβώς με την αντίσταση διαιρεμένη με τη μάζα του δορυφόρου. Το εν λόγω ενδιαφέρον φαινόμενο ονομάζεται αεροδυναμικό παράδοξο του δορυφόρου, και θα καταπιστούμε αμέσως με τη λεπτομερή μελέτη του. Περιέργως, το πρόβλημά μας, παρ' ότι φαινομενικά δύσκολο, δεν απαιτεί για την αντιμετώπισή του παρά μόνο την εφαρμογή των νόμων διατήρησης και μερικούς στοιχειώδεις υπολογισμούς.

Η αύξηση της ταχύτητας του δορυφόρου κατά την αεροπέδηση στα εξώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας επιδέχεται απλούστατη εξήγηση. Σε αδρές γραμμές, μπορεί να συμπυκνωθεί στα εξής: Όταν ο δορυφόρος χάνει την αρχική του εφαπτομενική ταχύτητα, πέφτει στο βαρυτικό πεδίο της Γης, επειδή η δύναμη έληξης $F = GMm/R^2$ γίνεται μεγαλύ-



Σχήμα 1

τερη από την κεντρομόλο δύναμη mv^2/R που απαιτείται για να διατηρηθεί ο δορυφόρος στην αρχική του τροχιά. Ωστόσο, ο δορυφόρος δεν πέφτει κατακόρυφα (όπως το τούβλο, για παράδειγμα, που αφήνουμε από ένα ψηλό κτήριο), αλλά ακολουθώντας μια βαθμιαίως κατιούσα έλικα, η οποία με κάθε στροφή* της προσεγγίζει τη γήινη επιφάνεια. Κάθε τέτοια στροφή διαφέρει ελάχιστα από έναν τέλειο κύκλο.

Όπως γνωρίζουμε, όταν ένα σώμα πέφτει μέσα σε βαρυτικό πεδίο, η ταχύτητά του αυξάνεται. Στην περίπτωση ενός δορυφόρου που υφίσταται την επιβραδυντική δράση της ατμόσφαιρας, η μείωση της δυναμικής του ενέργειας όχι μόνο αντισταθμίζει το έργο των δυνάμεων τριβής στην τροχιά (της αντίστασης του μέσου), αλλά και αυξάνει την ταχύτητά του u —καθώς και την κινητική του ενέργεια $mv^2/2$. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι ένα διαστη-

μικό όχημα που πέφτει δεν επταχύνεται λόγω της τριβής του αέρα, αλλά λόγω της βαρυτικής έλξης του πλανήτη μας. Οι δυνάμεις αντίστασης συμβάλλουν μόνο στη μετάβαση του δορυφόρου από υψηλότερη τροχιά σε χαμηλότερη —ακριβώς όπως στο απλό μηχανικό ανάλογο με το βαρίδι που είναι στερεωμένο στο άκρο του ελαστικού νήματος.

Κοιτάξτε τώρα το Σχήμα 1, το οποίο απεικονίζει την καμπύλη που διαγράφει ένας τεχνητός δορυφόρος κινούμενος στην ανώτερη ατμόσφαιρα, καθώς και τις δυνάμεις που δρουν πάνω του. Η κίνηση του δορυφόρου εκτυλίσσεται στο ίδιο πάντα επίπεδο και χαρακτηρίζεται από τη βραδεία μείωση της τροχιακής ακτίνας. Με άλλα λόγια, διαγράφει μια έλικα που βαθμιαία πλησιάζει τη Γη. Η ελάττωση του ύψους για κάθε στροφή της έλικας παραμένει μικρή συγκρινόμενη με το ύψος του δορυφόρου $h = R - R_0$. Σ' αυτό το σχήμα, με $F_{\beta\alpha\rho}$ συμβολίζεται η δύναμη της βαρυτικής έλξης προς τη Γη, με $F_{\alpha\nu t}$ η δύναμη της αντίστασης του αέρα και με $F_{\alpha l}$ το διανυσματικό άθροισμα των $F_{\beta\alpha\rho}$ και $F_{\alpha\nu t}$. Εφόσον ο δορυφόρος διαγράφει μια έλικα, κάθε στροφή της οποίας διαφέρει (αν και ελάχιστα!) από έναν τέλειο κύκλο, η δύναμη $F_{\alpha l}$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες: F_{\perp} και F_{\parallel} —δηλαδή σε κάθετη και εφαπτομενική (ως προς τη διαδρομή του δορυφόρου). Η δύναμη F_{\parallel} , που δρα κατά μήκος της διαδρομής του δορυφόρου, αυξάνει την ταχύτητά του τόσο ώστε, σε οποιοδήποτε δεδομένο σημείο της διαδρομής, το μέτρο της στιγμαίας επιτάχυνσης στην κατεύθυνση του διανύσματος u να έχει μέτρο F_{\parallel}/m . Θα αποδείξουμε τώρα ότι $F_{\parallel} = F_{\alpha\nu t}$.

Έστω, λοιπόν, ότι η δύναμη της αντίστασης του αέρα $F_{\alpha\nu t}$, όπως καθορίζεται από την εξίσωση (2), δρα σε ένα δορυφόρο που περιφέρεται γύρω από τη Γη σε τροχιά ακτίνας R . Η ατμοσφαιρική πυκνότητα $\rho(R)$ υποτίθεται μικρή και σταθερή κατά μήκος μίας πλήρους στροφής της διαδρομής του δορυφόρου. Προτιθέμεθα να προσδιορίσουμε την αύξηση Δu της ταχύτητας του δορυφόρου

σε μία στροφή, καθώς και την αντίστοιχη ελάττωση της τροχιακής του ακτίνας ΔR . Θα το επιτύχουμε με τη βοήθεια του νόμου διατήρησης της ενέργειας, περιλαμβάνοντας όμως στους υπολογισμούς μας και το έργο που καταναλώνει η αντίσταση του αέρα. Θυμηθείτε ότι η δυναμική ενέργεια ενός δορυφόρου σε δεδομένη τροχιά ακτίνας R είναι

$$E_1 = -\frac{GMm}{R} = -mu^2,$$

ενώ η κινητική του ενέργεια ισούται με

$$E_2 = \frac{mu^2}{2} = -\frac{E_1}{2}.$$

Συνεπώς, η ολική ενέργεια του δορυφόρου ανέρχεται σε

$$E_1 + E_2 = -\frac{mu^2}{2}.$$

Το ισοζύγιο των ενεργειών του δορυφόρου στην αρχή και στο τέλος μιας στροφής της διαδρομής του γράφεται ως εξής:

$$\frac{mu^2}{2} - 2\pi RF_{\alpha\nu t} = -\frac{m(u + \Delta u)^2}{2}. \quad (3)$$

Δεδομένου ότι $\Delta u \ll u$, η ανωτέρω εξίσωση δίνει

$$\Delta u = \frac{2\pi F_{\alpha\nu t} R}{mu} = \frac{2\pi F_{\alpha\nu t} \sqrt{R}}{m\sqrt{g}},$$

ή

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{2\pi F_{\alpha\nu t}}{mg}. \quad (4)$$

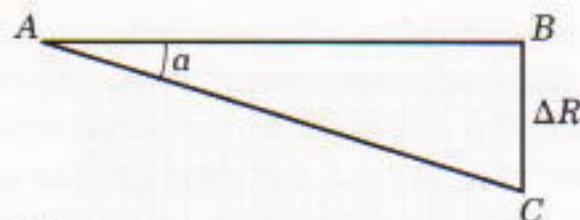
Η περίοδος του δορυφόρου ισούται με $\Delta t = 2\pi R/u$, οπότε η εφαπτομενική επιτάχυνσή του, καθώς κινείται στην ανώτερη ατμόσφαιρα, θα δίνεται από την εξίσωση

$$y_{\parallel} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{2\pi F_{\alpha\nu t} R}{mu} \frac{u}{2\pi R} = \frac{F_{\alpha\nu t}}{m}, \quad (5)$$

από την οποία παίρνουμε

$$F_{\parallel} = my_{\parallel} = mF_{\alpha\nu t}/m = F_{\alpha\nu t}$$

δηλαδή τη σχέση που προσπαθούσαμε να αποδείξουμε.



Σχήμα 2

Συνεπώς, όσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη της αντίστασης του αέρα τόσο μεγαλύτερη και η αύξηση της ταχύτητας του δορυφόρου. Μπορείτε να φανταστείτε ότι συμβαίνει κάτι τέτοιο καθώς κατεβαίνετε μια χιονισμένη πλαγιά ανεβασμένοι σε ένα τόμπογγαν; Βεβαίως όχι. Εδώ που τα λέμε, όμως, γιατί; Σε τελευταία ανάλυση, τόσο ο δορυφόρος όσο και το τόμπογγαν κινούνται στο ίδιο βαρυτικό πεδίο, έτσι δεν είναι;

Ας υπολογίσουμε τώρα τη μείωση της τροχιακής ακτίνας R σε μία στροφή. Η σχέση μεταξύ ΔR και Δu λαμβάνεται εύκολα από την εξίσωση (1):

$$\Delta u = -\frac{u \Delta R}{2R}.$$

τη Δu που εμφανίζεται στην ανωτέρω έκφραση την προσδιορίσαμε προηγουμένως. Συνεπώς,

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{4\pi F_{avt}}{mg}. \quad (6)$$

Προσέξτε ότι η σχετική ελάττωση του ύψους είναι ακριβώς διπλάσια από την αντίστοιχη σχετική αύξηση της ταχύτητας του δορυφόρου.

Κοιτάξτε την εξίσωση (6). Φανταστείτε ότι ξετυλίγετε τον κύκλο ακτίνας R και μία μόνο στροφή της τροχιάς του δορυφόρου, οπότε και παίρνετε αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AC (Σχήμα 2). Διευθετήστε τα κατά τέτοιον τρόπο ώστε το τμήμα BC να έχει μήκος

$$\Delta R = \frac{4\pi F_{avt} R}{mg}.$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε τώρα ότι η εφαπτομένη που άγεται από οποιοδήποτε σημείο της διαδρομής του δορυφόρου στην αραιή ατμόσφαιρα αποκλίνει από την τοπική οριζόντια κατά συγκεκριμένη μικρή γωνία:

$$a = \text{τοξεφ} \frac{4\pi F_{avt} R}{mg \cdot 2\pi R} \approx \frac{2F_{avt}}{mg}.$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M, \quad (7)$$

όπου η ροπή $M = -F_{avt} R$ οφείλεται στην εξωτερική δύναμη. Αυτή η ροπή μειώνει τη στροφορμή του δορυφόρου κατά την αεροπέδησή του και επιφέρει την κάθοδό του από υψηλότερη σε χαμηλότερη τροχιά. Εστω ΔL η μείωση της στροφορμής στη διάρκεια μίας στροφής της διαδρομής του δορυφόρου. Οπως και προηγουμένως, η πυκνότητα του αερίου στο ύψος της τροχιάς του δορυφόρου θεωρείται τόσο μικρή, ώστε η δύναμη F_{avt} προκαλεί μόνο μικρή διαταραχή της τροχιάς στη διάρκεια μίας περιφοράς του δορυφόρου. Συνεπώς, $\Delta L = mu\Delta R + mR\Delta u$. Έχουμε διαπιστώσει ήδη πως η μεταβολή της ταχύτητας δίνεται από τον τύπο

$$\Delta u = -\frac{u \Delta R}{2R}$$

ο οποίος ισχύει για κυκλικές τροχιές στο βαρυτικό πεδίο. Αυτή η έκφραση, σε συνδυασμό με την εξίσωση (7), οδηγεί σε αποτελέσματα για τα Δu , ΔR και g , που συμπίπτουν με εκείνα που βρήκαμε νωρίτερα.

Η εξίσωση (7) περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της στροφορμής και βοηθά να απλουστεύσουμε πολλά προβλήματα που αφορούν την κίνηση δορυφόρων μέσα σε βαρυτικά πεδία τα οποία επιδεικνύουν κεντρική συμμετρία. Και τούτο επειδή, σε αυτή τη μέθοδο, δεν χρειάζεται να λάβουμε υπόψη τη ροπή της βαρυτικής δύναμης: Ο φορέας της διέρχεται ακριβώς από τα κέντρα μάζας της Γης και του δορυφόρου, οπότε η ροπή της αυτομάτως μηδενίζεται.

Το αεροδυναμικό παράδοξο και τα συναφή προβλήματα έχουν σημαντικές εφαρμογές. Ιδού, λοιπόν, μερικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν «του λόγου το αληθές».

Παράδειγμα 1. Η πυκνότητα της ατμόσφαιρας σε μεγάλα ύψη.

Οι παρατηρήσεις της αεροπέδησης των δορυφόρων μάς επέτρεψαν να προσδιορίσουμε τις τιμές της ατμόσφαιρικής πυκνότητας σε μεγάλα υψόμετρα, όπου αδυνατούν να πετάξουν τόσο τα αεροπλάνα όσο και τα αερόστατα.

Εάν η μεταβολή της στροφορμής του δορυφόρου οφείλεται αποκλειστικά στη δύναμη της αντίστασης

$$F_{\text{ant}} = C_x \frac{\rho u^2}{2} S_x,$$

όπου $\rho = \rho(R)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση που περιγράφει την εξάρτηση της πυκνότητας από την τροχιακή ακτίνα R (ή από το ύψος της πτήσης $h = R - R_0$), τότε μερικοί απλοί υπολογισμοί όπου χρησιμοποιείται η εξίσωση της στροφορμής (δεν θα δισκολευτείτε να τους εκτελέσετε μόνοι σας) οδηγούν σε εξισώσεις που προσδιορίζουν τη συνάρτηση $\rho(R)$ βάσει των λαμβανομένων σε διάφορα ύψη δεδομένων για το ρυθμό ελάττωσης είτε της τροχιακής ακτίνας (dR/dt) είτε της περιόδου περιφοράς του δορυφόρου (dT/dt) :

$$\rho(R) = -\frac{1}{2CRu} \frac{dR}{dt}, \quad (8)$$

$$\rho(R) = -\frac{1}{6\pi CR} \frac{dT}{dt}. \quad (9)$$

Στους ανωτέρω τύπους, το $C = C_x S_x / (2m)$ είναι ένας σταθερός παράγοντας γνωστός ως βαλλιστικός συντελεστής του δορυφόρου (με μονάδες $m^2 \cdot kg^{-1}$). Οι εξισώσεις (8) και (9) ισχύουν για κυκλικές τροχιές σε μεγάλα ύψη, όπου οι συγκρούσεις του δορυφόρου με τα μόρια της αραιής ατμόσφαιρας επιφέρουν ήσοντες μεταβολές στην τροχιά του.

Σε παλαιότερες εποχές, όταν οι δορυφόροι «δεν έσερναν χορό ζώνων» τη Γη, τα δεδομένα για την ανώτερη ατμόσφαιρα προέρχονταν από τις αστρονομικές παρατηρήσεις και το ραδιοεντοπισμό της πτήσης μετεώρων και μετεωρολογικών πυραύλων. Οι συγχρονες συσκευές πλοήγησης, με τις οποίες είναι εξοπλισμένοι οι δορυφόροι, και οι ραδιοπομποί, που συνεργάζονται στενά με τους υπολογιστές στη Γη, καθιστούν δυνατή την παρακολούθηση της πορείας των δορυφόρων και τον εξαιρετικά ακριβή προσδιορισμό των τροχιακών παραμέτρων τους. Χάρη στις πολυάριθμες παρατηρήσεις πτήσεων δορυφόρων σε διάφορα ύψη, διαθέτουμε πλέον τεράστια

ποσότητα πληροφοριών για την πυκνότητα των αερίων στην ανώτερη ατμόσφαιρα, καθώς και για την εξάρτησή της από την εποχή, την ώρα της ημέρας, το γεωγραφικό πλάτος, την ηλιακή δραστηριότητα, κ.ο.κ.

Η διεξαγωγή πειραμάτων για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των αερίων στην ανώτερη ατμόσφαιρα διευκολύνεται με τη χρησιμοποίηση σφαιρικών δορυφόρων, για τους οποίους το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής S_x και, συνεπώς, ο βαλλιστικός συντελεστής C δεν εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του δορυφόρου. Οι αμερικανικοί δορυφόροι τύπου *Explorer* είχαν τέτοια σφαιρική μορφή. Επιπλέον, ήταν κοίλοι, χαρακτηριστικό που επέτεινε την ικανότητα αεροπέδησης καθώς ερευνούσαν τη γήινη ατμόσφαιρα σε μια ευρεία περιοχή υψομέτρων που εκτεινόταν ώς τα 1.000 km, όπου η ατμοσφαιρική πυκνότητα κυμαίνεται από 10^{-13} ώς $10^{-15} kg/m^3$.

Παράδειγμα 2. Τελευταία στροφή.

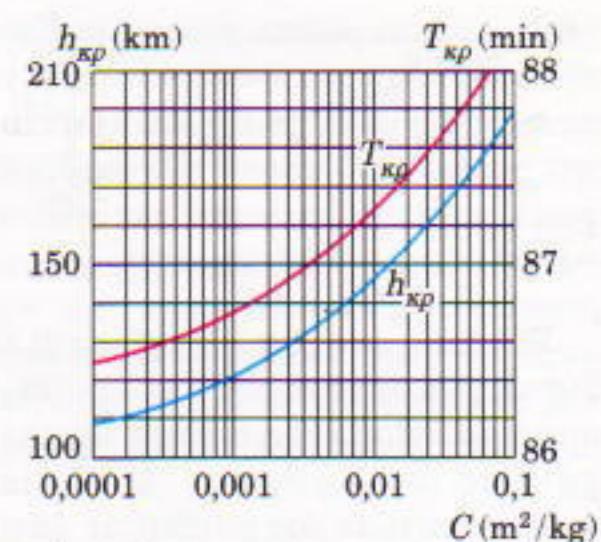
Ας υπολογίσουμε την ελάττωση του ύψους του δορυφόρου στη διάρκεια μίας στροφής του στην ανώτερη ατμόσφαιρα. Υποθέτουμε ότι η μάζα του δορυφόρου ισούται με $10^3 kg$ και η μετωπική του επιφάνεια έχει εμβαδόν $1 m^2$. Η μέση πυκνότητα του αέρα σε ύψος 200 km είναι $4 \cdot 10^{-10} kg/m^3$. Ο τύπος (6) δίνει

$$\Delta R = \frac{4\rho u^2 S_x R}{mg} \approx 2 km.$$

Εκ πρώτης όψεως, η τιμή τού ΔR φαίνεται μικρή: Σε κάθε σημείο της τροχιάς του δορυφόρου στο συγκεκριμένο ύψος, το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει με την τοπική οριζόντια μια αμελητέα γωνία

$$a \equiv \frac{2\rho u^2 S_x}{mg} \equiv 5 \cdot 10^{-6} \equiv 1''.$$

Ωστόσο, ο δορυφόρος εκτελεί δεκαέξι περιφορές ημερησίως: έτσι, λόγω της συνεχούς ελάττωσης του ύψους του, βυθίζεται στα στρώματα όπου η ατμοσφαιρική πυκνότητα αυξάνεται ραγδαία. Σε τέτοια ύψη, η κάθοδος του δορυφόρου στην ατμόσφαιρα γίνεται όλο και πιο απότο-



Σχήμα 3

μη. Σε υψόμετρο 150 km, όπου $\rho \approx 4 \cdot 10^{-9} kg/m^3$, ο ίδιος δορυφόρος χάνει 20 km ανά στροφή! Έπειτα από μία ή δύο ακόμη στροφές, συναντά τόσο πυκνό αέρα, ώστε δεν καταφέρνει καν να ολοκληρώσει μία ακόμη στροφή αντί να συνεχίσει την ελικοειδή του κίνηση, αρχίζει να πέφτει σχεδόν κατακόρυφα. Μια τέτοια πτώση χαρακτηρίζεται από υπέρογκα μηχανικά και θερμικά φορτία. Ήγγικεν το τέλος της τροχιακής πτήσης! Οι κοίλοι και ελαφροί δορυφόροι πέφτουν ταχύτερα, επειδή αναγκάζονται να τεθούν εκτός τροχιάς σε μεγαλύτερα ύψη, ενώ οι βαρύτεροι όμοιοι τους καταφέρνουν να περιφέρονται γύρω από τη Γη και σε χαμηλότερα ύψη.

Το Σχήμα 3 δείχνει πώς εξαρτώνται από τον βαλλιστικό συντελεστή το κρίσιμο ύψος και η αντίστοιχη κρίσιμη περίοδος περιφοράς ενός δορυφόρου γύρω από τη Γη. Για παράδειγμα, θεωρήστε ένα σφαιρικό δορυφόρο μάζας 2,4 τόνων και διαμέτρου 2,3 m: επομένως, ο βαλλιστικός του συντελεστής C ισούται με $1,7 \cdot 10^{-3} m^2 \cdot kg^{-1}$. Η γραφική παράσταση δείχνει ότι το κρίσιμο ύψος ανέρχεται σε $h_{kp} \approx 130 km$, ενώ η κρίσιμη περίοδος του είναι $T_{kp} \approx 86 min 54 s$. Ο δορυφόρος που εξετάζουμε ως παράδειγμα έχει προσεγγιστικά τον ίδιο λόγο S_x/m με το διαστημόπλοιο *Vostok* και παρόμοιες κρίσιμες τροχιακές παραμέτρους. Συγκεκριμένα, το κρίσιμο ύψος πτήσης του δορυφόρου ανέρχεται σε 125 km περίπου.

Σημειώστε ότι το κρίσιμο ύψος για μια σφαίρα από πάγο διαμέτρου 1 cm υπερβαίνει τα 200 km, ενώ η συ-

γκεκριμένη παράμετρος λαμβάνει ακόμη μεγαλύτερες τιμές για μικρότερα αντικείμενα! Συνεπώς, η Γη και η ατμόσφαιρά της λειτουργούν ως γιγαντιαία «ηλεκτρική σκούπα», η οποία εξαλείφει κάθε σκουπδάκι που εκτελεί τροχιά πλησίον της Γης.

Ένα ακόμη σημείο αξίζει να υπογραμμιστεί: Όταν ένας δορυφόρος προσεγγίζει κατερχόμενος το κρίσιμο ύψος, η δύναμη της αντίστασης εξακολουθεί να είναι μικρότερη από τη δύναμη της βαρύτητας. Σύμφωνα με την εξίσωση (6), ο λόγος των δύο δυνάμεων ισούται (κατά προσέγγιση) με το λόγο του ενεργού πάχους της ατμόσφαιρας προς την ακτίνα της Γης πολλαπλασιασμένη επί 4π. Συνεπώς, η δύναμη της αντίστασης στο κρίσιμο ύψος ανέρχεται μόλις στο ένα δεκάκις χιλιόστρο της δύναμης της βαρύτητας. Αναμφίβολα, μια τέτοια δύναμη είναι σχεδόν ανεπαίσθητη. Κι όμως, αρκεί για να προκαλέσει την καταστροφή του δορυφόρου στο άμεσο μέλλον.

Παράδειγμα 3. Η διάρκεια ζωής ενός δορυφόρου σε τροχιακή πτήση.

Η ανώτερη ατμόσφαιρα επιβραχύνει το χρόνο ζωής ενός δορυφόρου. Οι εξισώσεις που εξαγάγαμε στο παρόν άρθρο βοηθούν να υπολογίσουμε την εν λόγω επιβράχυνση, με την προϋπόθεση ότι δίνεται η εξάρτηση της ατμοσφαιρικής πυκνότητας από το ύψος, καθώς και το αρχικό υψόμετρο της τροχιακής πτήσης. Μόλονότι ο υπολογισμός του χρόνου ζωής αποτελεί επίπονο έργο, για να επιτύχουμε μια απλουστευμένη εκτίμηση, υποθέτουμε ότι ο δορυφόρος περνά το μέγιστο μέρος του χρόνου ζωής του σε εξαιρετικά μεγάλα ύψη, όπου η πυκνότητα της ατμόσφαιρας είναι ελάχιστη. Οι εκτιμήσεις εξαρτώνται από τον τύπο του δορυφόρου και, ειδικότερα, από τον βαλλιστικό του συντελεστή C . Δεν πρόκειται να συζητήσουμε τη λύση αυτού του προβλήματος, αλλά παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στον Πίνακα 1, ο οποίος παρέχει εκτιμήσεις του χρόνου ζωής για συμβατικούς επιστημονικούς δορυφόρους σε τροχιές με διάφορα αρχικά ύψη.

Πρωτίστως, ο συγκεκριμένος πίνακας δείχνει πόσο δραστικά μειώ-

Πίνακας 1

Υψος (km)	Χρόνος ζωής
150	1 ημέρα
190	2 ημέρες
210	1 εβδομάδα
230	1 μήνας
400	1 έτος
500	10 έτη
650	100 έτη
850	1.000 έτη
1.300	10.000 έτη
2.000	100.000 έτη

νεται η πυκνότητα του αέρα καθώς ανερχόμαστε σε μεγάλα ύψη. Φωτίζει επίσης τους λόγους που υπογορεύουν να τίθεται σε τροχιά με ύψος όχι μικρότερο από 500 km ένας επιστημονικός δορυφόρος, φορτωμένος με πανάκριβο εξοπλισμό που σχεδιάστηκε για να προσφέρει πολυετείς ερευνητικές υπηρεσίες.

Πρόβλημα 1. Οι πρώτες εκτείνευσεις δορυφόρων έδειξαν ότι ο δορυφόρος αποσπάτο από τον τελευταίο όροφο του πυραύλου-φορέα, ο πύραυλος προσπερνούσε το δορυφόρο και προπορευόταν, αν και οι κινητήρες του πυραύλου δεν λειτουργούσαν πλέον. Πού οφείλεται άραγε αυτό το παράξενο φαινόμενο; Υποθέστε ότι τη στιγμή της απόσπασης οι ταχύτητες του δορυφόρου και του πυραύλου-φορέα συμπίπτουν.

Πρόβλημα 2. Γιατί η αεροπέδηση του δορυφόρου στα εξώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας μετασχηματίζει την αρχική ελλειπτική τροχιά του σε κυκλική;

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι αν η πυκνότητα του αέρα ελαττώνεται με το ύψος ως $\rho \propto R^{-1/2}$, όπου με R συμβολίζουμε την απόσταση από το κέντρο του πλανήτη, ο ρυθμός μείωσης της τροχιακής ακτίνας ενός δορυφόρου διατηρείται σταθερός.

Πρόβλημα 4. Ένας δορυφόρος περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από πλανήτη με αραιή ατμόσφαιρα. Ας υποθέσουμε ότι η βαρυτική έλξη προς τον πλανήτη υπακούει το νόμο $F \propto R^{-n}$, όπου n αυθαίρετος θετικός αριθμός (η τιμή $n = 2$ αντιστοι-

χεί στη συνήθη βαρυτική δύναμη). Για ποια περιοχή τιμών του n είναι δυνατή η εμφάνιση του αεροδυναμικού παραδόξου;

Πρόβλημα 5. Εξαρτάται από τη θερμοκρασία του αέρα η πέδηση ενός δορυφόρου σε μεγάλα υψόμετρα;

Πρόβλημα 6. Υποθέστε ότι, λόγω ισχυρής θέρμανσης, εξαερώνεται όλο το νερό των οceans της Γης και σχηματίζεται μια πυκνή και θερμή ατμόσφαιρα υδρατμών. Πώς θα επηρέαζε μια τέτοια μεταμόρφωση την κίνηση της Σελήνης και των υπαρχόντων τεχνητών δορυφόρων; ■

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

• J. Raskin, «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.

• L. Leonovich, «Υγρά και αέρια σε κίνηση», Μάρτιος/Απρίλιος 1996.

• A. Stasenko, «Από την άκρη του Σύμπαντος στα Τάρταρα», Μάιος/Ιούνιος 1996.

• A. Mitrofanov, «Κόντρα στο ρεύμα», Ιούλιος/Αύγουστος 1996.

• Y. Pavlenko, «Το παράδοξο του δορυφόρου», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1996.

• A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Το σουφλέ της φυσικής», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997.

• L. Guryashkin και A. Stasenko, «Η ιστορία της πτώσης μιας σταγόνας», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1999.

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ



ΚΑΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

Πανεπιστημίου & Πεσμαζόγλου 5,
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785
Web site: www.katoptro.gr

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M146

Διαλέξτε δύο. Δίνονται έξι διαφορετικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι μπορούμε να διαλέξουμε δύο από αυτούς, ας πούμε x και y , έτσι ώστε να ιοχύουν οι επόμενες ανισότητες:

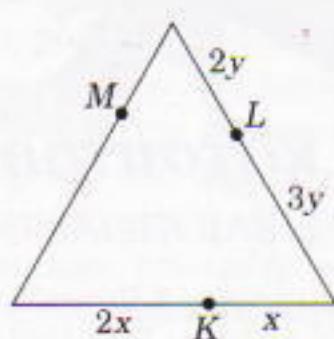
$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (\text{I.N. Sergeyev})$$

M147

Κατασκευή τριγώνου. Δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι με ακτίνες R και r εφάπτονται και στις δύο πλευρές μιας γωνίας. Κατασκευάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο έτσι ώστε η βάση του να βρίσκεται στη μία πλευρά της γωνίας, η κορυφή του στην άλλη και καθεμία από τις ίσες πλευρές του να εφάπτεται ενός από τους κύκλους. Εκφράστε το μήκος του ύψους που φέρουμε προς τη βάση αυτού του τριγώνου συναρτήσει των R και r .

M148

Ακινητοποιήστε το τρίγωνο. Σε ένα επίπεδο βρίσκεται ισόπλευρο τρίγωνο κατασκευασμένο από χαρτόνι. Καρφώνουμε τρία καρφιά δίπλα στα σημεία K , L και M των πλευρών του, έτσι ώστε το τρίγωνο να μην μπορεί να μετακινηθεί (Σχήμα 1). Δίνεται ότι τα σημεία K και L δι-



Σχήμα 1

αιρούν τις αντίστοιχες πλευρές σε αναλογία 2:1 και 3:2 (όπως στο Σχήμα 1). Σε ποια αναλογία χωρίζει το σημείο M τη δική του πλευρά; (A. Shen)

M149

Χωρίστε τον κύβο. Ένα επίπεδο τέμνει τον μοναδιαίο κύβο και τον διαιρεί σε δύο πολύεδρα. Είναι γνωστό ότι η απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους σημείων του ενός πολυέδρου δεν υπερβαίνει τα $\frac{3}{2}$. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το εμβαδόν της τομής; (N.P. Dolbilin)

M150

Συναδελφικές χειραψίες. Σε ένα διεθνές συνέδριο έχουν έρθει αντιπρόσωποι από εκατό χώρες. Κάθε αντιπροσωπεία αποτελείται από δύο μέλη — τον πρόεδρο και τον πρωθυπουργό. Πριν από την έναρξη του συνεδρίου, ορισμένοι από τους αντιπροσώπους αντάλλαξαν χειραψίες, αλλά κανείς πρόεδρος δεν αντάλλαξε χειραψία με τον πρωθυπουργό της χώρας του. Στο διάλειμμα των εργασιών του συνεδρίου, ο πρόεδρος της Ιλλυρίας ρώτησε όλους τους άλλους συνέδρους πόσες χειραψίες είχαν ανταλλάξει. Όλες οι απαντήσεις ήταν διαφορετικές. Με πόσους συνέδρους αντάλλαξε χειραψία ο πρωθυπουργός της Ιλλυρίας;

Φυσική

Φ146

Επίδοξος κλέφτης βαγονιών. Σε επίπεδο τμήμα οιδηροδρομικής γραμμής υπήρχε ένα φορτωμένο επίπεδο βαγόνι. Μια νύχτα, λοιπόν, το πλησίασε κρυφά ένας κλέφτης εξοπλισμένος με ελαφρό ελαστικό σκοινί. Έδεσε τη μια άκρη του σκοινιού στη ζώνη του και την άλλη στο βαγόνι.

Κατόπιν, ο κλέφτης βάλθηκε να τρέχει πάνω στις σιδηροδρομικές με σταθερή ταχύτητα 5 m/s . Τότε κάτι απρόοπτο συνέβη... Όταν συνήλθε, ο ληστής βρισκόταν ξαπλωμένος πάνω στο βαγόνι, το οποίο κινούνταν με ταχύτητα 9 m/s . Πόσο μεγαλύτερη ήταν η μάζα του βαγονιού από τη μάζα του ληστή; Τελικά, τι ακριβώς συνέβη; Υποθέστε ότι οι μπότες του κλέφτη δεν γλιστρούσαν — αγνοήστε επίσης την τριβή κύλισης. (A. Vargin)

Φ147

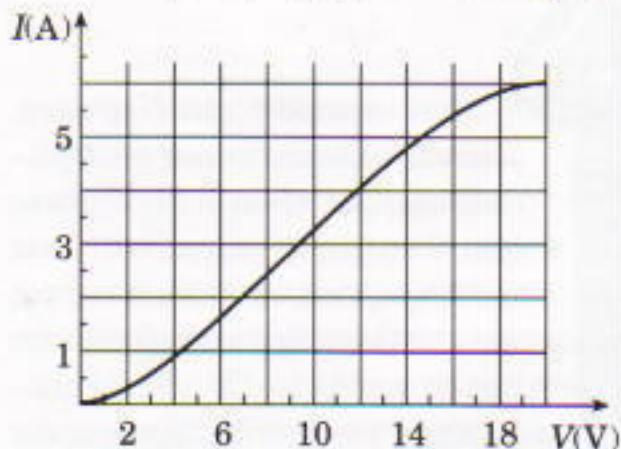
Τροχός σε κεκλιμένο επίπεδο. Ένας τροχός αποτελείται από λεπτή στεφάνη μάζας M , πολύ ελαφρές ακτίνες και άξονα μάζας m . Ο τροχός τοποθετείται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο δάπεδο, και κατόπιν αφήνεται ελεύθερος. Εάν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολιοθαίνει, πόση ταχύτητα θα έχει αποκτήσει όταν θα έχει διανύσει απόσταση L ; Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που επιτρέπεται να λάβει ο συντελεστής τριβής ώστε ο τροχός να κινείται χωρίς να ολισθαίνει; (A. Zilberman)

Φ148

Σταγόνες σε ομίχλη. Υπολογίστε το πλήθος των σταγόνων νερού τις οποίες περιέχει ένα κυβικό μέτρο ομίχλης, αν γνωρίζετε ότι η ορατότητα (ή, ακριβέστερα, η μέγιστη απόσταση οριζόντιας ορατότητας) είναι 10 m και ότι η ομίχλη χρειάζεται 2 ώρες για να κατακαθίσει. Το ύψος του στρώματος της ομίχλης ανέρχεται σε 200 m . Η ασκούμενη αντίσταση του αέρα σε μια σταγόνα νερού ακτίνας R (μετρημένη σε m) που πέφτει με ταχύτητα u ισούται αριθμητικά με $4,3Ru$ (σε N).

Φ149

Λαμπτήρας αγνώστων στοιχείων. Το Σχήμα 2 δείχνει πώς εξαρτάται το ρεύμα από την εφαρμοζόμενη τάση για ένα λαμπτήρα άγνωστης κατασκευής. Ο λαμπτήρας συνδέεται σε σειρά με αντίσταση 10Ω και το προκύπτον κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή μεταβλητής τάσης. Για ποια τάση της πηγής ο λαμπτήρας



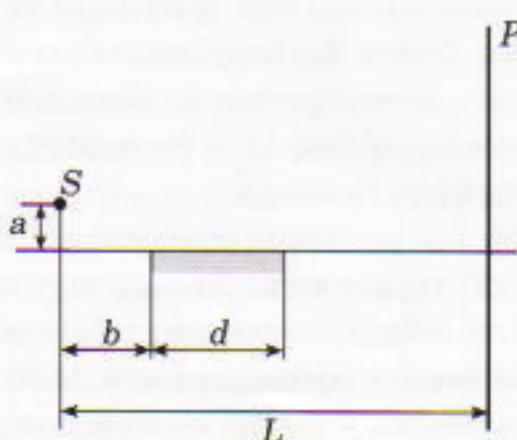
Σχήμα 2

καταναλώνει ισχύ ίση με το $1/4$ της ισχύος που παράγει η πηγή;

Φ150

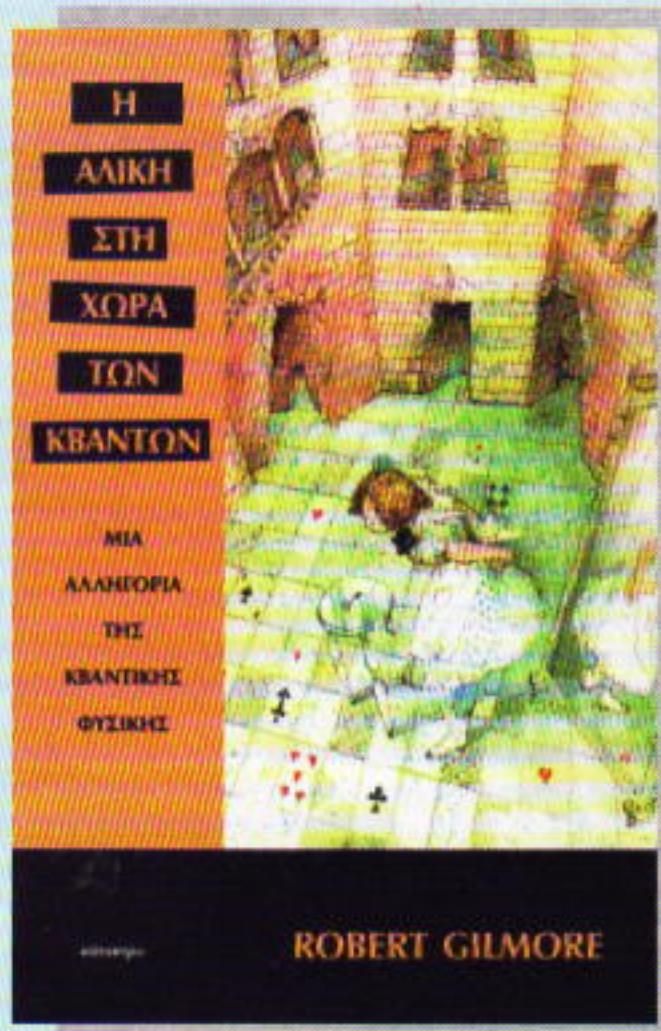
Συμβολή έπειτα από ανάκλαση. Σε ένα συμβολόμετρο διαιρέσεως μετώπου κύματος, γνωστό ως κάτοπτρο του Lloyd, μια σημειακή πηγή S είναι τοποθετημένη σε οριζόντια απόσταση $b = 20$ cm από ένα επίπεδο κάτοπτρο και σε ύψος $a = 10$ cm πάνω από το κάτοπτρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Το κάτοπτρο, έχει μήκος $d = 10$ cm. Μια οθόνη P τοποθετείται σε απόσταση $L = 1$ m από τη σημειακή πηγή. Προσδιορίστε το ύψος της εικόνας συμβολής που σχηματίζεται στην οθόνη.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 67



Σχήμα 3

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Robert Gilmore

Η Αλίκη στη χώρα των κβαντών

Μια αλληγορία της κβαντικής φυσικής

- Η Αλίκη, η παιδιγνωστή ηρωίδα που μας χάρισε ο Lewis Carroll, ως χαρακτήρας ενδιαρκώνει την αυθόρμητη και ανιδιοτελή τάση του ανθρώπου να «απορεί» μπροστά στο μυστήριο του κόσμου μας· αλλά και την τάση του να κλευάζει κάθε προσωρινή μας βεβαιότητα.
- Ε, λοιπόν, η Αλίκη ξεκινά για νέες περιπέτειες, και ο Gilmore —καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μπρίστολ— μας καλεί να την ακολουθήσουμε σε μια συναρπαστική περιήγηση στα μυστήρια του μικρόκοσμου, φιλοδοξώντας να μας βοηθήσει να αποσαφηνίσουμε τα ουσιώδη χαρακτηριστικά του.
- Το βιβλίο, σε αυτό το πλαίσιο, αποτελεί μια εκτενή εισαγωγή στις δύστροπες και ανοίκειες έννοιες της κβαντικής φυσικής: στην αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, τις κυματοσυναρτήσεις, την απαγορευτική αρχή του Pauli, και πολλές άλλες.
- Οι εκτενείς σημειώσεις που συνοδεύουν το καθαρά αφηγηματικό μέρος κάθε κεφαλαίου αποκρυπτογραφούν το βαθύτερο νόημα των περιπετειών της Αλίκης, και προσγειώνουν τη φαντασία μας.
- Αναμφίβολα, Η Αλίκη στη χώρα των κβαντών αποτελεί ένα πρωτότυπο και γοητευτικό ανάγνωσμα. Απευθύνεται πρωτίστως στον μη ειδικό, αλλά είναι βέβαιο ότι θα το απολαύσει και ο σπουδαστής της σύγχρονης φυσικής. Δεν απαιτεί ιδιαίτερες μαθηματικές γνώσεις· μόνο υγιή περιέργεια για τον κόσμο που ενοικούμε.

246 σελ., 16 x 25 εκ., Εικ. A/M, Πανόδετο, 6.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Συγκρουόμενα

A. Le

ΔΕΝ ΓΕΝΝΑ ΑΠΟΡΙΑ ΟΤΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΑΠΟΔΕΙΧΤΗΚΕ ΠΟΛΥ ΔΥΣΚΟΛΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΓΑΛΙΛΑΙΟ, Ο ΟΠΟΙΟΣ, ΣΕ ΤΕΛΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ, ΉΠΗΡΕ Ο ΙΔΡΥΤΗΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ. Αντίθετα, ο Christiaan Huygens, ο οποίος μετριοφρόνως δήλωσε ότι απλώς υποστήριξε και γενίκευσε τη θεωρία του Γαλιλαίου, πρήγαγε μεγάλως τη μηχανική, επειδή άρχισε να διατυπώνει τη δυναμική συστημάτων που αποτελούνταν από περισσότερα του ενός αλληλεπιδρώντα σώματα. Έχοντας διασαφήσει ένα τέτοιο σύνθετο φαινόμενο (γεγονός που, παρεμπιπτόντως, απέβη ολέθριο για την καρτεσιανή μηχανική), ο Huygens διατύπωσε ακριβέστερα το νόμο διατήρησης της ορμής και σχεδόν ανακάλυψε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Τα επιτεύγματά του άνοιξαν το δρόμο για την περαιτέρω μελέτη των κρούσεων, την οποία και διεξήγαγαν ουμαστοί φυσικοί όπως ο Edme Mariotte, ο Thomas Young, ο Heinrich Hertz και ο Siméon-Denis Poisson.

Όταν αρχίζει κανείς να μελετά τις κρούσεις, πρέπει να μάθει πώς να διακρίνει ανάμεσα σε ελαστικές και πλαστικές συγκρούσεις, να ανακαλύπτει τις συνδέσεις ανάμεσα στις έννοιες της παραμόρφωσης και της κυματικής διάδοσης και να διαισθάνεται τη διαφορά ανάμεσα στη μηχανική κρούση των μακροσκοπικών σωμάτων και την αλληλεπίδραση των ατόμων ή των στοιχειώδων σωματιδίων.

Όλα αυτά προϋποτίθενται αν θέλετε να κατανοήσετε πώς λακτίζεται μια μπάλα ή καταφέρεται ένα αριστερό ντιρέκτι χτύπημα, πώς μπήγεται ένας πάσσαλος στο έδαφος ή πώς σφυρηλατούνται τα σιδηρά ξίφη. Υπάρχουν επίσης φαινόμενα που μπορούν να χαρακτηριστούν «ανεστραμμένες» κρούσεις (κανονιοβολισμοί, εκρήξεις). Οι κρούσεις έχουν εξαιρετική σπουδαιότητα επειδή συνιστούν την ενιαία βάση τόσο της συμπεριφοράς των μορίων των αερίων όσο και της σκέδασης των ατόμων που διαπερνούν ένα λεπτό μεταλλικό φύλλο. Ο ιονισμός των ατόμων και η αλληλεπίδραση ενός κβάντου φωτός με ένα ηλεκτρόνιο αποτελούν επίσης παραδείγματα κρούσεων.

Ελπίζουμε ότι η «κρούση» σας με αυτό το ευρύ θέμα δεν θα αποδειχτεί τελείως ελαστική και πως την απόγνωση του Γαλιλαίου θα την αντικαταστήσει η ενόραση του Huygens.

Ερωτήσεις και προβλήματα

- Γιατί αναπηδά σε μεγαλύτερο ύψος μια χαλύβδινη σφαίρα όταν προσκρούει σε μια μαρμάρινη πλάκα παρά στην άσφαλτο;
- Γιατί σπάζει ένα εύθραυστο αντικείμενο όταν ρίχνεται σε σκληρό δάπεδο, ενώ προσγειώνεται σώο και αβλαβές όταν το δάπεδο καλύπτεται από μαλακό τάπητα;
- Μερικοί άνθρωποι καταφέρνουν να κινήσουν ένα σταματημένο λεωφορείο, αλλά το λεωφορείο παραμένει ακίνητο όταν το διατρυπά ένα αντιαρματικό βλήμα. Πώς είναι δυνατόν να συμβαίνει κάτι τέτοιο, δεδομένου ότι η δύναμη που δρᾷ στο λεωφορείο στη δεύτερη περίπτωση υπερβαίνει κατά πολύ τη δύναμη που ασκείται πάνω του;
- Σε μια παράσταση τοίκου, ένας αθλητής είναι ξαπλωμένος κάτω από ένα βαρύ αμόνι. Ένας συνεργάτης του χτυπά το αμόνι με μια βαριοπούλα. Ενέχει άραγε πραγματικό κίνδυνο για τον αθλητή αυτή η επίδειξη;
- Όταν ένα σφυρί χτυπά ένα τεμάχιο χάλυβα, υφίσταται ανάκρουση, όταν όμως χτυπά ένα τεμάχιο μολύβδου, η ανάκρουση είναι πολύ ασθενέστερη. Ποιο από τα δύο μεταλλικά σώματα προσλαμβάνει περισσότερη ενέργεια;
- Σε ποια περίπτωση θα φτάσει μακρύτερα μια σφαίρα που βάλλεται από ένα τουφέκι —αν το τουφέκι στερεώθει ακλόνητα σε μια μέγκενη ή αν έχει αναρτηθεί από σκοινιά;
- Γιατί δεν αισθάνεται την ανάκρουση ένας στρατιώτης που βάλλει με ένα μπαζούκα;
- Στο παιχνίδι των συγκρουόμε-



νων σφαιρών του Νεύτωνα, πέντε πανομοιότυπες χαλύβδινες σφαίρες είναι αναρτημένες από ισορημή νήματα έτσι ώστε τα κέντρα τους να κείνται επί της αυτής ευθείας και να εφάπτονται η μια με την άλλη. Πώς θα συμπεριφερθεί αυτό το σύνολο σφαιρών εάν η πρώτη εκ δεξιών σφαίρα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας της και αφεθεί ελεύθερη;

9. Μια μπάλα πέφτει κατακόρυφα πάνω σε λείο πρίσμα, που σχηματίζει γωνία 45° με το οριζόντιο δάπεδο. Περιγράψτε την τροχιά που θα διαγράψει η μπάλα έπειτα από την ελαστική κρούση της με το πρίσμα, το οποίο αρχικώς ηρεμεί.

10. Γιατί είναι δύσκολο να σουτάρετε σε μεγάλη απόσταση μια όχι καλά φουσκωμένη μπάλα ποδοσφαίρου;

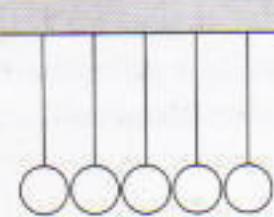
11. Όταν ένας πεπειραμένος μπασκετμπολίστας πάνει μια ταχέως κινούμενη μπάλα, χαλαρώνει τα χέρια του και οποσθοχεί ελαφρώς μαζί με την μπάλα. Γιατί;

12. Ποια είναι η βασική διαφορά ανάμεσα στη δύναμη ενός πυραύλου και σ' αυτή ενός συνήθους κινητήρα;

13. Μια οβίδα που βάλλεται υπό ορισμένη γωνία από κανόνι εκρήγνυται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς της και διασπάται σε δύο θραύσματα ίσης μάζας. Το ένα θραύσμα επιστρέφει στο κανόνι, διαγράφοντας ανάδρομα την τροχιά της οβίδας. Πού θα προσγειωθεί το άλλο θραύσμα;

14. Υπό κανονικές συνθήκες, τα μόρια των αερίων αναπτύσσουν ταχύτητες της τάξεως των εκατοντάδων μέτρων ανά δευτερόλεπτο. Γιατί, λοιπόν, η διάχυση των αερίων συντελείται με μάλλον βραδείς ρυθμούς;

15. Γιατί η ένταση της θερμικής κί-



Ενα σώματα

νησις (κίνηση Brown) αυξάνεται όσο μειώνεται το μέγεθος των αιωρούμενων σωματιδίων;

16. Γιατί οι ηλεκτρικές εκκενώσεις στον αραιό αέρα πραγματοποιούνται σε χαμηλότερες τάσεις;

17. Με ποιον τρόπο μπορεί να επιτευχθεί η διέγερση των ατόμων ενός αερίου;

18. Γιατί τα ταχέα νετρόνια διέρχονται εύκολα από ένα μολύβδινο εμπόδιο, ενώ επιβραδύνονται από ίσο όγκο παραφίνης, νερού ή άλλων ουσιών που περιέχουν άτομα υδρογόνου;

Μικροπειραματισμοί

Κρατήστε μια μικρή και μια μεγάλη μπάλα από καουτσούκ, ακουμπώντας τη μικρή μπάλα στην κορυφή της μεγάλης, και αφήστε τες να πέσουν μαζί. Πώς θα συμπεριφέρθουν μετά την πρόσκρουσή τους στο δάπεδο;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

στο Μεσαίωνα, οι επιθέσεις στα κάστρα επιχειρούνταν με τη βοήθεια ενός πολιορκητικού κριού, ο οποίος αποτελούνταν από έναν κορμό δέντρου μάζας μερικών εκατοντάδων χιλιογράμμων. Οι πολεμιστές εφορμούσαν στην πύλη του κάστρου κουβαλώντας τον κορμό στους ώμους τους. Όταν έφταναν στην πύλη, σταματούσαν απότομα και ἀφήναν ελεύθερο τον κορμό, ο οποίος συνέχιζε την κίνησή του ολισθαίνοντας πάνω στη δερμάτινη θωράκιση που κάλυπτε τους ώμους των πολεμιστών.

... ακόμη νωρίτερα από τον Huygens, ο τοέχος επιστήμονας Johannes Marci μελέτησε τις κρούσεις και ταξινόμησε τα σώματα σε μαλακά, εύθραυστα και σκληρά, ενώ ο Kartesius, ο οποίος διέκρινε τα σκληρά από τα μαλακά υλι-

κά, αδυνατούσε να αντιληφθεί τη διαφορά μεταξύ ελαστικών και μη ελαστικών σωμάτων.

... για το πολυσχιδές των ενδιαφέροντων του Huygens δεν μαρτυρούν μόνον οι τεχνικές του επτεύξεις:

εφηύρε το ρόλο με ρυθμιστή εκκρεμές και κατασκεύασε μόνος του ένα εξαιρετικό τηλεοκόπιο που τον βοήθησε να ανακαλύψει ένα δορυφόρο και ένα διακύβολο του Κρόνου. Ο Huygens κατόρθωσε επίσης να αποκτήσει διδακτορικό δίπλωμα στα νομικά. Λίγο πριν από το θάνατό του, συνέγραψε ένα από τα πρώτα εγχειρίδια αστρονομίας, που τιτλοφορούνταν *Κοσμοθεωρός*.

... ο σερ Isaac Newton διατύπωσε αρχικά τον τρίτο νόμο μόνον ως υπόθεση εργασίας, η οποία του ήταν απαραίτητη για να συγκροτήσει τη μηχανική. Τον υπέβαλε σε εξονυχιστικό έλεγχο πειραματιζόμενος με κρούσεις εκκρεμών.

... κατά τις κρούσεις αναπτύσσονται μεγάλες δυνάμεις, οι οποίες ενδέχεται να προκαλέσουν σοβαρές ζημιές ή τραυματισμούς. Έτσι, όταν κανείς πηδά σε σκληρό έδαφος με τα πόδια τεντωμένα, μπορεί να υποστεί τραυματισμό του νωτιαίου μυελού (ακόμη και αν το ύψος του άλματος είναι μόλις 1 m) επειδή τη στιγμή της πρόσκρουσης ασκείται υπερβολικό φορτίο στη σπονδυλική στήλη.

... υπό κανονικές συνθήκες, ένα μόριο οξυγόνου διανύει 1/20.000 mm στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεών του. Εντούτοις, αυτή η απόσταση είναι μάλλον μεγάλη σε σύγκριση με τις διαστάσεις του μορίου: Αν μεταφερθούν οι ίδιες αναλογίες στο μπλιάρδο, η μπίλια πρέπει να διανύει απόσταση 10 m ώσπου να χτυπήσει το στόχο της.

... για να αφαιρέσουν σφραγίσματα από δυσπρόσιτα μέρη των δοντιών, οι οδοντίατροι χρησιμοποιούσαν παλαιότερα ένα ευφυές τέχνασμα. Γάντζωνταν το πρόσ αφαιρεση σφράγισμα με μια ράβδο, η οποία ήταν εφοδιασμένη με ένα

ολισθαίνον βάρος. Σήκωναν το βάρος και κατόπιν το απελευθέρωνταν. Όταν το βάρος προσέκρουε στη βάση, προκαλούσε έναν ισχυρό κραδασμό, με αποτέλεσμα την εξαγωγή του σφραγίσματος.

... μολονότι τα σωματίδια άλφα που βομβαρδίζουν ακίνητους ατομικούς πυρήνες ουδέποτε έρχονται σε επαφή μαζί τους, το μοντέλο της τελείως ελαστικής κρούσης περιγράφει με ακρίβεια τη σκέδαση των εν λόγω σωματίδιων από τους πυρήνες.

... σε θερμοκρασία δωματίου, οι κρούσεις μεταξύ των ατόμων είναι ως επί το πλείστον ελαστικές. Διέγερση των ατόμων λόγω των κρούσεων αρχίζει να παρατηρείται σε θερμοκρασίες δεκάδων χιλιάδων βαθμών. Αντιθέτως, σχεδόν όλες οι αμοιβαίες κρούσεις των στοιχειωδών σωματιδίων είναι ελαστικές σε ολόκληρη τη γνωστή περιοχή θερμοκρασιών (ενεργειών). Γι' αυτό και θεωρούμε ότι τα στοιχειώδη σωματίδια στερούνται εισωτερικής δομής.

... όταν το 1932 ο σερ James Chadwick ερεύνησε τις ιδιότητες των αφόρτιστων σωματιδίων που εκπέμπονταν από ένα τεμάχιο βηρυλλίου, απέτυχε να τα ανιχνεύσει άμεσα. Ωστόσο, κατόρθωσε να προσδιορίσει όλες τις παραμέτρους των άγνωστων σωματιδίων μελετώντας τις κρούσεις τους με πυρήνες άλλων στοιχείων. Έτσι ανακάλυφθηκε το νετρόνιο.

... όταν διασπάται οποιοδήποτε κινούμενο αντικείμενο —ένα βλήμα, ένας πύραυλος ή ένας ατομικός πυρήνας—, το κέντρο μάζας των θραυσμάτων του ακολουθεί την ίδια τροχιά που θα διέγραφε το σώμα αν είχε παραμείνει ακέραιο. Νά γιατί οι πυρηνικοί φυσικοί προτυπών να μελετούν τις κρούσεις στο σύστημα αναφοράς που ακινητεί ως προς το κέντρο μάζας των συγκρουόμενων σωματιδίων.

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- R. Vinolcur, «Άλματα και καλαθίες», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1995.

- S.R. Filonovich, «Η δύναμη της ομοιότητας», Μάρτιος/Απρίλιος 1997.

- V. Surdin, «Πηδώντας από άστρο σε άστρο», Μάιος/Ιούνιος 1997.



Το πρόβλημα των οκτώ σημείων

Πόσα είδη ισότητας τριγώνων γνωρίζετε;

N.B. Vasiliev

MΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ, ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ με απλή διατύπωση έχει περίπλοκη λύση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η πρόκληση είναι συχνά το να βρούμε μια καλά οργανωμένη λύση που έχει κάτι να μας διδάξει. Τέτοιου τύπου είναι το επόμενο πρόβλημα, το οποίο κλήθηκεν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές που συμμετείχαν στην Πανσοβιετική Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1983 στο Ασχαμπάντ. Εδώ το παρουσιάζουμε με μερικές μικρές τροποποιήσεις.

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ABC και τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Έστω ένα τυχαίο σημείο P στο επίπεδο του τριγώνου (που δεν ανήκει στον κύκλο). Φέρουμε τις ευθείες AP , BP και CP , και θεωρούμε τα δεύτερα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι υπάρχουν το πολύ οκτώ σημεία P για τα οποία τα εν λόγω σημεία τομής δεν συμπίπτουν με καμιά από τις κορυφές του τριγώνου ABC και είναι κορυφές ενός τριγώνου ίσου με το αρχικό τρίγωνο ABC .

Το πρόβλημα αυτό αποδείχτηκε αρκετά δύσκολο. Μερικοί μαθητές το έλυσαν αναλύοντας διάφορες θέσεις του σημείου P ως προς τις ευθείες AB , BC , CA και τον κύκλο. Σε αυτό το άρθρο θα δώσουμε μια πολύ διδακτική λύση που στηρίζεται στην ιδέα της «κίνησης» των σχημάτων πάνω στο επίπεδο. Με άλλα λόγια, θα φα-

νταστούμε ότι διάφορα τμήματα της κατασκευής μας περιστρέφονται και, μόλις φτάσουν σε μια ιδιαίτερη θέση, εμφανίζεται το επιθυμητό σχήμα.

Πρώτα θα λύσουμε το ακόλουθο αντίστροφο πρόβλημα.

Περιστροφή και τομές των ευθειών

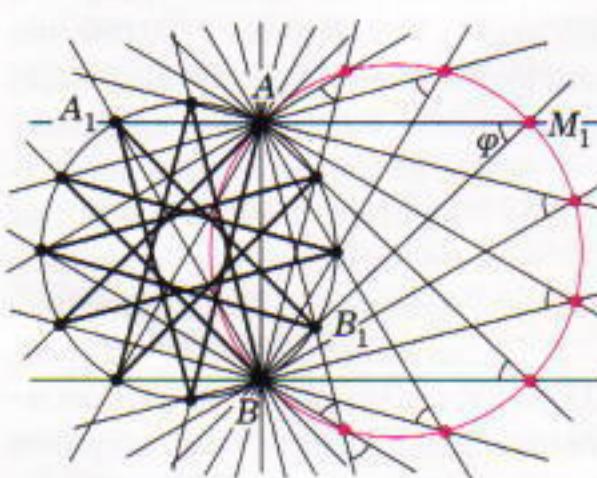
Πρόβλημα 2. Εγγράφουμε σε έναν κύκλο δύο (όχι απαραίτητα ίσα) τρίγωνα ABC και $A_1B_1C_1$. Το τρίγωνο ABC παραμένει σταθερό, ενώ το $A_1B_1C_1$ στρέφεται περί το κέντρο του κύκλου. Για ποιες θέσεις του $A_1B_1C_1$ οι ευθείες AA_1 , BB_1 και CC_1 συντρέχουν στο ίδιο σημείο P ; Πόσες τέτοιες θέσεις υπάρχουν;

Η απάντηση στην τελευταία ερώτηση είναι η εξής: Μια τέτοια θέση είναι μοναδική. Δηλαδή, αν το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ εκτελέσει μία πλήρη περιστροφή, οι ευθείες AA_1 , BB_1 και CC_1 συντρέχουν στο ίδιο σημείο μία μόνο φορά (και σε μία συγκεκριμένη εκφυλισμένη περίπτωση δεν υπάρχει τέτοια θέση).

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

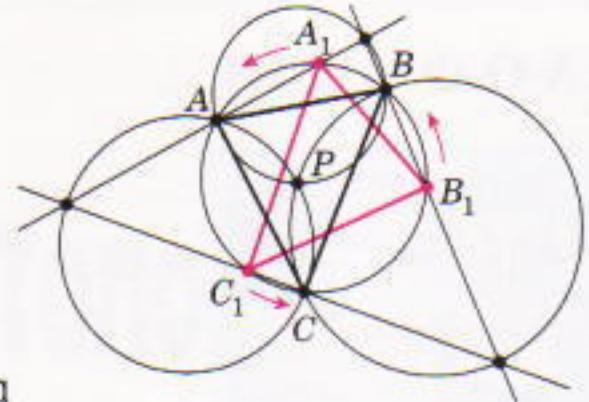
Λήμμα. Έστω μια σταθερή χορδή AB του κύκλου και έστω ότι τα άκρα μιας χορδής A_1B_1 κινούνται επί του κύκλου. Τότε, η γωνία φ μεταξύ των ευθειών AA_1 και BB_1 παραμένει σταθερή και το σημείο τομής τους M (αν $\varphi \neq 0$) γράφει έναν κύκλο που διέρχεται από τα σημεία A και B (Σχήμα 1).

Για να αποδείξουμε το λήμμα, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Υποθέτουμε ότι τα σημεία A_1 και B_1 κινούνται ομαλά με την ίδια ταχύτητα επί του κύκλου. Τότε οι ευθείες AA_1 και BB_1 περιστρέφονται ομαλά με την ίδια ταχύτητα γύρω από τα σημεία A και B , αντίστοιχα. Επομένως, η μεταξύ τους γωνία δεν μεταβάλλεται (στο Σχήμα 1, η γωνία AMB ισούται με φ , όταν το M βρίσκεται από τη μια πλευρά της AB , και με $\pi - \varphi$, όταν βρίσκεται από την άλλη). Έστω ότι την αρχική στιγμή οι ευθείες AA_1 και BB_1 τέμνονται στο σημείο M_1 . Τότε, η ζητούμενη τροχιά του σημείου M είναι ο περι-

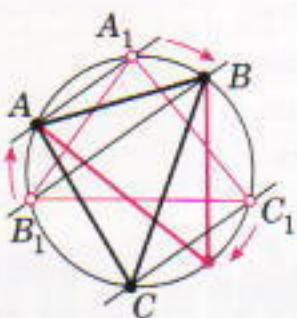


Σχήμα 1

Αν τα σημεία A και B είναι σταθερά και τα σημεία A_1 και B_1 κινούνται επί του κύκλου ομαλά με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , τότε οι ευθείες AA_1 και BB_1 περιστρέφονται ομαλά με γωνιακή ταχύτητα $\omega/2$ και το σημείο τομής τους M_1 κινείται επί του κόκκινου κύκλου (με γωνιακή ταχύτητα ω).



α



β

Σχήμα 2

Το σημείο P βρίσκεται στην τομή δύο γεωμετρικών τόπων: όταν η ευθεία φτάσει στη θέση BP , οι ευθείες AA_1 και CC_1 συμπίπτουν με τις AP και CP .

γεγραμμένος στο τρίγωνο ABM_1 κύκλος. Το σημείο M κινείται ομαλά πάνω σ' αυτό τον κύκλο (η γωνιακή ταχύτητα των ευθειών ισούται με τη ήμισυ της γωνιακής ταχύτητας των σημείων A_1 , B_1 και M στους αντίστοιχους κύκλους).

Για να αποδείξουμε και τυπικά το λήμμα, χρειάζεται να εφαρμόσουμε αρκετές φορές το θεώρημα περί της ισότητας εγγεγραμμένων γωνιών. Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να επνοήσουν μια απόδειξη.

Πρέπει να επισημάνουμε δύο ειδικές περιπτώσεις του λήμματος που θα μας φανούν χρήσιμες σε μερικά ζητήματα που θα εξετάσουμε αργότερα.

1. Η ειδική περίπτωση $\varphi = 0$ εμφανίζεται όταν οι χορδές AB και A_1B_1 είναι ίσες και σε μια συγκεκριμένη αρχική στιγμή το σημείο A_1 συμπίπτει με το B και το B_1 με το A . Σε αυτή την περίπτωση, οι ευθείες AA_1 και BB_1 αρχικά συμπίπτουν, και στη συνέχεια, καθώς μετακινείται η χορδή A_1B_1 , γίνονται παράλληλες.

2. Όταν το A_1 συμπίπτει με το A (ή το B_1 με το B), πρέπει να θεωρήσουμε ότι η ευθεία AA_1 (ή BB_1) εφαπτείται στον κύκλο (αν δεν κάνου-

Σχήμα 3

Η ειδική περίπτωση $\varphi = 0$: το σημείο P δεν υπάρχει (οι ευθείες AA_1 , BB_1 και CC_1 είναι παράλληλες).

με αυτή την υπόθεση, πρέπει να εξαιρέσουμε τα δύο αντίστοιχα σημεία από τον γεωμετρικό τόπο.

Ας επιστρέψουμε στο Πρόβλημα 2. Με τη βοήθεια του λήμματος μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο κύκλους που είναι οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων τομής της ευθείας AA_1 με την BB_1 και της ευθείας BB_1 με την CC_1 (Σχήμα 2). Ο πρώτος κύκλος διέρχεται από τα σημεία A και B και ο δεύτερος από τα σημεία B και C . Ένα μόνο σημείο είναι δυνατόν να παίξει το ρόλο του P — εκείνο το σημείο τομής αυτών των δύο κύκλων που είναι διαφορετικό του B . Δεν χρειάζεται να κατασκευάσουμε τον τρίτο κύκλο — δηλαδή, τον γεωμετρικό τόπο της τομής των ευθειών AA_1 και CC_1 . Ο κύκλος αυτός διέρχεται επίσης από το σημείο P (οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν αυτό το γεγονός).

Έτσι, υπάρχει γενικά μία μοναδική θέση του τριγώνου $A_1B_1C_1$ που ικανοποιεί τη ζητούμενη συνθήκη. Σε κάθε περίπτωση, και αν λάβουμε υπόψη τις εξειδικεύσεις που έχουμε κάνει, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει το πολύ ένα τέτοιο σημείο P (η ειδική περίπτωση παρουσιάζεται στο Σχήμα 3). Άρα, το Πρόβλημα 2 έχει λυθεί.

Επιστρέφουμε τώρα στο Πρόβλημα 1. Για κάθε σημείο P (που δεν ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο) συμβολίζουμε με A_1 , B_1 , C_1 τα δεύτερα σημεία τομής των ευθειών AP , BP και CP με τον κύκλο. Το πρόβλημά μας αφορά σημεία P , τέτοια ώστε το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ να είναι ίσο με το τρίγωνο ABC . Με πρώτη ματιά φαίνεται ότι, αν θεωρήσουμε ίσα τρίγωνα στο Πρόβλημα 2, μπορού-

με να βρούμε ένα μοναδικό τρίγωνο $A_1B_1C_1$ με τις επιθυμητές ιδιότητες, συμμετρικό του ABC ως προς το κέντρο του κύκλου. Υπάρχει όμως ένα λεπτό σημείο στο συλλογισμό, το οποίο είναι περισσότερο λογικού παρά γεωμετρικού χαρακτήρα. Θα το σχολιάσουμε αμέσως έπειτα από μια σύντομη παρέκβαση.

Μεταθέσεις των κορυφών και συμμετρίες

Τα ίσα τρίγωνα έχουν, εξ ορισμού, ίσες γωνίες και ίσες πλευρές, και μπορούμε να τα τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο. Συνηθίζεται να γράφουμε την ισότητα δύο τριγώνων με τέτοιον τρόπο, ώστε οι αντίστοιχες γωνίες να παρατίθενται με την ίδια σειρά. Για παράδειγμα, αν τρίγωνο ABC = τρίγωνο DEF , τότε $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AB = DE$, κ.ο.κ.

Αν ξαναδούμε την πρόταση του Προβλήματος 1, λαμβάνοντας υπόψη αυτή την παρατήρηση, βλέπουμε ότι το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ δεν είναι απαραίτητα ίσο με το τρίγωνο ABC . Αν συνυπολογίσουμε την αντίστοιχία των γωνιών, μπορεί να είναι ίσο με οποιοδήποτε από τα έξι τρίγωνα ABC , BCA , CAB , BAC , ACB και CBA . Και θα διαπιστώσουμε ότι, για καθαρά γεωμετρικούς λόγους, το πλήθος των παραλλαγών είναι διπλάσιο.

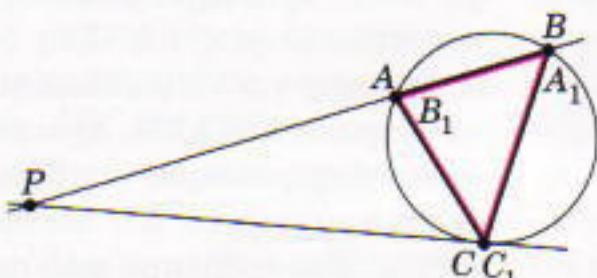
Το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ μπορεί να είναι ευθέως ίσο με το τρίγωνο ABC — και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να επιθέσουμε το ένα τρίγωνο στο άλλο μέσω μιας συνεχούς κίνησης στο επίπεδο, όπως η περιστροφή R στο πρόβλημά μας — ή να είναι αντιστρόφως ίσο. Στη δεύτερη περίπτωση, για να επιθέσουμε το ένα τρίγωνο στο άλλο, πρέπει να το «αναποδογυρίσουμε» (να θεωρήσουμε το συμμετρικό του ως προς μια ευθεία). Στο πρόβλημά μας, αρκεί να θεωρήσουμε το συμμετρικό ενός εκ των τριγώνων ως προς μια συγκεκριμένη ευθεία. Όλα τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ που είναι αντιστρόφως ίσα με το τρίγωνο ABC προκύπτουν το ένα από το άλλο μέσω περιστροφών. Για να διακρίνουμε αυτές τις περιπτώσεις, γράφουμε πάνω από το

σύμβολο της ισότητας ένα R ή ένα S , αντίστοιχα (από τα αρχικά των λέξεων reflection και symmetry). Αν χρησιμοποιήσουμε το Πρόβλημα 2, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα το πολύ σημείο P για καθεμία από τις $2 \cdot 6 = 12$ εναλλακτικές περιπτώσεις.

Η επιχειρηματολογία μας αυτή εξηγείται ως εξής: Παίρνουμε ένα τρίγωνο T κατασκευασμένο από χαρτόνι (με περιγεγραμμένο κύκλο ίσο με του τριγώνου ABC), τοποθετούμε κάποια πλευρά του στο επίπεδο, σημειώνουμε τις κορυφές A_1, B_1, C_1 (6 διαφορετικές δυνατότητες) και, περιστρέφοντας το τρίγωνο, βρίσκουμε το σημείο P για καθεμία από τις $2 \cdot 6$ διαφορετικές περιπτώσεις.

Για να ολοκληρώσουμε τη λύση του Προβλήματος 1, πρέπει να εξηγήσουμε για ποιο λόγο εξαιρούμε τέσσερις περιπτώσεις όταν $T =$ τρίγωνο ABC . Η μία απ' αυτές (τρίγωνο $ABC \cong$ τρίγωνο $A_1B_1C_1$) εξαιρείται αμέσως, διότι για καθεμία από τις πλευρές ισχύει η ειδική περίπτωση (1) του λήμματος (Σχήμα 3) —οι ευθείες AA_1, BB_1 και CC_1 δεν συντρέχουν ποτέ καθώς περιστρέφεται το τρίγωνο $A_1B_1C_1$. Επίσης, λόγω της συνθήκης να μη συμπίπτει κανένα απ' τα σημεία A_1, B_1, C_1 με τα αντίστοιχα A, B, C , εξαιρείται η περίπτωση τρίγωνο $BAC \cong$ τρίγωνο $A_1B_1C_1$ (Σχήμα 4) καθώς και δύο ανάλογες περιπτώσεις: τρίγωνο $ACB \cong$ τρίγωνο $A_1B_1C_1$, και τρίγωνο $CBA \cong$ τρίγωνο $A_1B_1C_1$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το σημείο P εμφανίζεται τη στιγμή που συμπίπτουν τα δύο τρίγωνα (τότε ισχύουν ταυτόχρονα οι ειδικές περιπτώσεις (1) και (2) του λήμματος (Σχήμα 4)). Το Πρόβλημα 1 λύθηκε.

Συμβουλεύουμε όσους ανυπομονούν να ολοκληρώσουν την ανάλυση, να σκεφτούν τα εξής ερωτήματα: (1) Είναι αληθές ότι στη γενική περίπτωση πραγματοποιούνται και οι δώδεκα (και όταν $T =$ τρίγωνο ABC , και οι οκτώ) καταστάσεις και μας δίνουν (κατά κανόνα) διαφορετικά P ; (Πειραματιστείτε με κανόνα και διαβήτη.) (2) Κατά πόσο μειώνεται ο αριθμός 12 (ή, στην ειδική περίπτωση, ο αριθμός 8) όταν το τρίγωνο T είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο; ◻

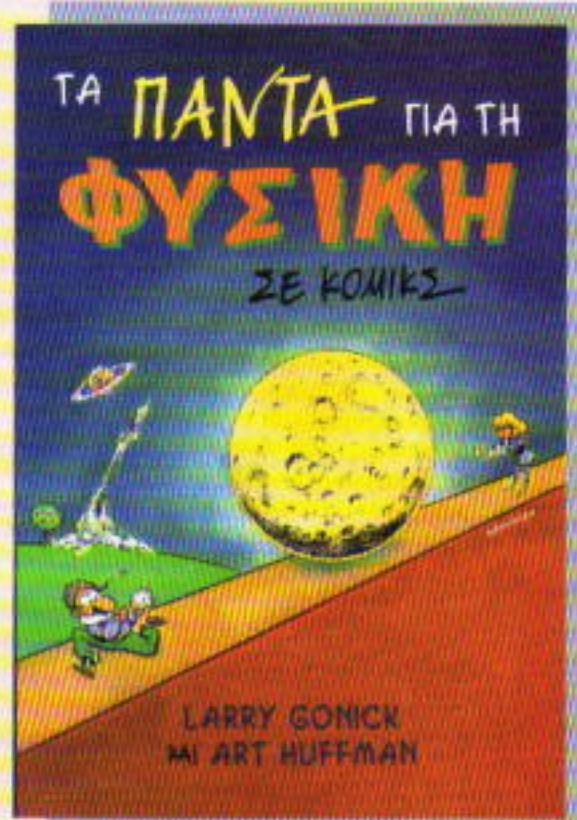


Σχήμα 4

Μια ειδική περίπτωση: το σημείο P εμφανίζεται όταν συμπίπτουν τα τρίγωνα.

Του N.B. Vasiliev κυκλοφορεί στα ελληνικά το βιβλίο *Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Σ.Δ. (1961-1991)* τόμ. Α και Β, Εκδόσεις Κάτοπτρο. (Σ.τ.μ.)

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Larry Gonick και Art Huffman

ΤΑ ΠΑΝΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΣΕ ΚΟΜΙΚΣ

Το βιβλίο περιλαμβάνει όλη τη λυκειακή ύλη (νόμους του Νεύτωνα, στατική, γραμμικές και κυκλικές κινήσεις, βολές και κρούσεις, νόμους διατήρησης, ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, κυκλώματα και φαινόμενα επαγωγής, εναλλασσόμενα ρεύματα κ.λπ.) αλλά και τις εξισώσεις του Μάξγουελ, το φως, στοιχεία της σχετικότητας και της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, —όλα παρουσιασμένα με τρόπο πνευματώδη και χιουμοριστικό.

Το καλύτερο δώρο για τον απουδαστή, για τον εκπαιδευτικό και όποιον ενδιαφέρεται για τη φυσική



Ο Art Huffman είναι υπεύθυνος του εργαστηριακού προγράμματος του μαθήματος φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας.

Ο Larry Gonick, διδάκτωρ μαθηματικών, είναι υπεύθυνος της στήλης «Κλασικά θέματα επιστήμης» του περιοδικού Discover.



Στα ελληνικά κυκλοφορούν ακόμη τα βιβλία του Larry Gonick:

- Τα πάντα για τη γενετική σε κόμικς
- Η ιστορία του Κόσμου σε κόμικς (τόμ.: 1 - 7)

Σελ.: 222, Εικ.: Α/Μ, 17 × 25 εκ., 4.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

Τοπολογία και η μορφολογία του εδάφους

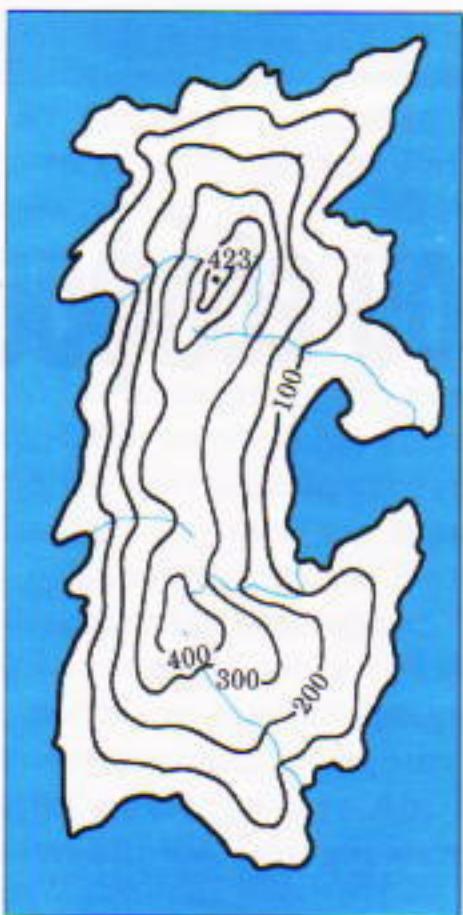
Ένας μαθηματικός στην επικράτεια των τοπογράφων

Mikhail Shubin

ΟΤΙΤΛΟΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΑΡΘΡΟΥ ΕΙ-ναι ώς ένα σημείο αμφιλεγόμενος: η τοπολογία (αντίθετα με την τοπογραφία) δεν έχει σχέση με τους χάρτες του ανάγλυφου της επιφάνειας της Γης. Δεν ασχολείται καθόλου με έδαφος. Είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με εκείνες τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων που συνήθως θεωρούνται οι πλέον θεμελιώδεις —ιδιότητες που διατηρούνται κάτω από μετασχηματισμούς εξαιρετικά γενικού τύπου. Αυτοί οι μετασχηματισμοί, οι οποίοι ονομάζονται τοπολογικοί μετασχηματισμοί, ή ομοιομορφισμοί, ορίζονται ως αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις που, αυτές και οι αντίστροφές τους, είναι συνεχείς.

Αντικείμενα τα οποία επφανειακά μοιάζουν τελείως διαφορετικά μπορούν να έχουν τις ίδιες τοπολογικές ιδιότητες, αν είναι δυνατόν να μετατρέψουμε το ένα στο άλλο μέσω μιας συνεχούς παραμόρφωσης. Ο Martin Gardner περιέγραψε κάποτε τους τοπολόγους ως μαθηματικούς που δεν μπορούν να ξεχωρίσουν ένα φλιτζάνι του καφέ από έναν λουκουμά. Μερικές φορές, τοπολογικές ιδιότητες και τιμές προκύπτουν ως συνδυασμός εξαιρετικά απλών γεωμετρικών ιδιοτήτων και τιμών. Αυτό ακριβώς συμβαίνει με το διάσημο θεώρημα του Euler για τα πολύεδρα (Θεώρημα 2, στη συνέχεια). Θα αρχίσουμε όμως με ένα άλλο παράδειγμα αυτού





Σχήμα 1

του είδους —ένα θεώρημα από τη «θεωρία του Morse»¹. Και εδώ μπαίνει στο παιχνίδι το έδαφος —και η μορφολογία του.

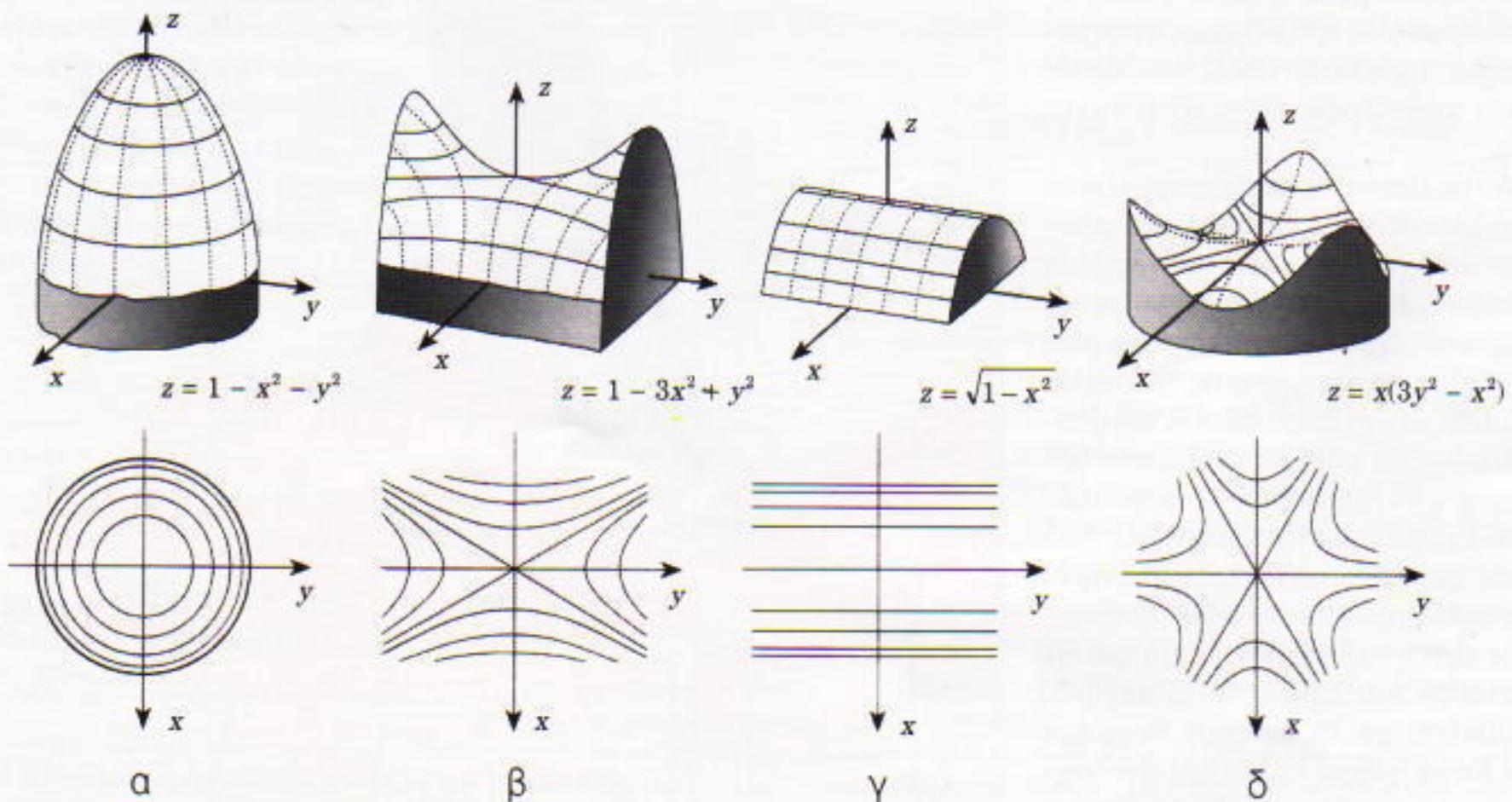
Στους γεωγραφικούς χάρτες το ανάγλυφο του τοπίου παρουσιάζεται

συνήθως μέσω των *ισούψών καμπυλών* —δηλαδή, καμπυλών που συνδέουν σημεία του χάρτη τα οποία αντιπροσωπεύουν σημεία της Γης σε ίδιο υψόμετρο (από την επιφάνεια της θάλασσας) (Σχήμα 1). Το μαθηματικό μοντέλο μιας φραγμένης περιοχής της γήινης επιφάνειας είναι η γεωμετρική επιφάνεια του χώρου που ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $z = f(x, y)$. Στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται παραδείγματα τέτοιων επιφανειών. Οι συνεχείς γραμμές σε αυτές τις επιφάνειες είναι σύνολα σημείων που βρίσκονται σε δεδομένο ύψος $z = \text{σταθερό}$. Οι ισούψεις είναι οι προβολές τους στο επίπεδο (x, y) . (Οι διακεκομένες γραμμές σ' αυτές τις επιφάνειες είναι οι γραμμές μεγιστηριακής καθόδου και είναι κάθετες στις ισούψεις.) Για να συνοψίσουμε: μια ισούψης είναι ένα σύνολο σημείων (x, y) που ικανοποιούν μια εξίσωση $f(x, y) = \text{σταθερά}$. Ουσιαστικά, οι σταθερές σε αυτές τις εξισώσεις «απαριθμούν» τις αντίστοιχες ισούψεις. Στο Σχήμα 2 οι οικογένειες των ισούψών έχουν τοποθετηθεί κάτω από τις αντίστοιχες επιφάνειες.

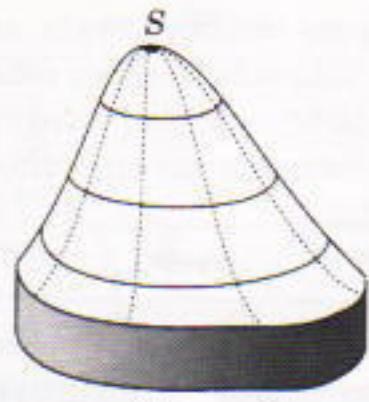
Για να διατυπώσουμε το πρώτο θεώρημά μας, πρέπει να εξοικειωθούμε με διαφορετικούς τύπους σημείων της επιφάνειας τα οποία διαφέρουν ως προς τις μεταβολές του ύψους που

παρουσιάζονται κοντά σε αυτά. Οι τρεις πρώτοι τύποι —κορυφές, λεκάνες και αυχένες (Σχήματα 3α έως 3γ) — είναι «κρίσιμα» σημεία (ή σημεία «ισορροπίας») του «τοπίου» μας. Αν τοποθετήσετε μια σφαίρα σε οποιοδήποτε από αυτά, θα παραμείνει εκεί για πάντα (παρ' ότι η ισορροπία είναι ευσταθής μόνο στις λεκάνες). Για κάθε τύπο σημείου θα παρουσιάσουμε τόσο μια γραφική απεικόνιση όσο και έναν αυστηρότερο ορισμό συναρτήσει των ισούψών.

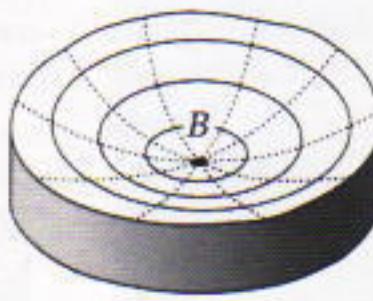
Στο Σχήμα 3α παρουσιάζεται μια κορυφή. Σε πρώτη ματιά φαίνεται ότι η κορυφή μπορεί να οριστεί απλώς ως το υψηλότερο σημείο μιας περιοχής. Όμως, η δομή μιας επιφάνειας γύρω από ένα τέτοιο σημείο μεγίστου μπορεί να είναι εξαιρετικά ποι περιπλοκή από αυτή του Σχήματος 3α. Για παράδειγμα, μπορούμε να φανταστούμε ένα σημείο μεγίστου που είναι το σημείο συσσώρευσης μιας ακολουθίας άλλων σημείων μεγίστου με αυξανόμενο ύψος (δηλαδή, μια οριακή περιπτωση του Σχήματος 4, με άπειρο πλήθος μικρότερων κορυφών): κάθε γειτονιά ενός τέτοιου σημείου περιέχει και άλλα σημεία μεγίστου. Για να εξαιρέσουμε τέτοιες περιπτώσεις, ορίζουμε την κορυφή ως ένα σημείο που είναι το υψηλότερο στην επικράτειά του και, επιπλέον,



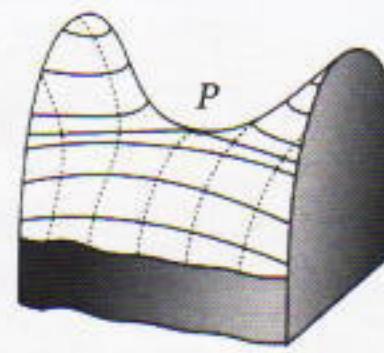
Σχήμα 2



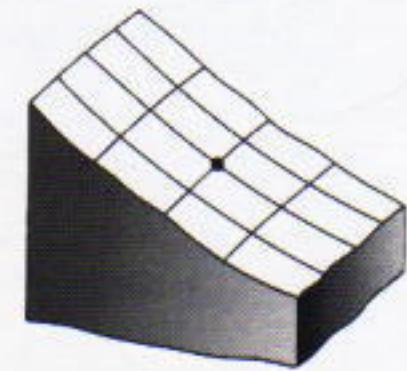
κορυφή (summit)



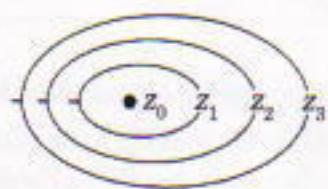
λεκάνη (basin)



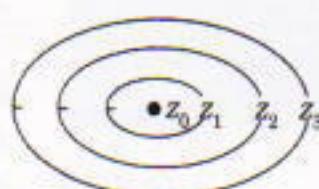
αυχένας (pass)



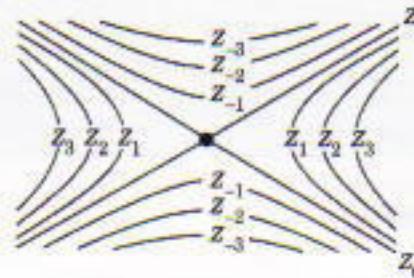
σημείο κλίσης (slope)



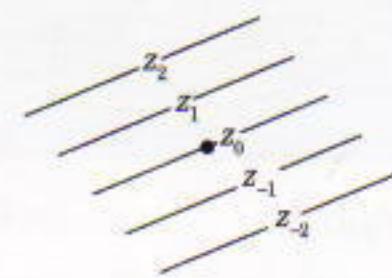
α



β



γ



δ

Σχήμα 3

οι ισούψεις γύρω από αυτό διευθετούνται όπως στο Σχήμα 3α —δηλαδή, είναι κλειστές καμπύλες που δεν αυτοτέμνονται, κιβωτίζονται γύρω από το σημείο και τα αντίστοιχα ύψη τους μειώνονται όσο απομακρύνομαστε από αυτό: $z_0 > z_1 > z_2 > \dots$.

Η λεκάνη (Σχήμα 3β) είναι μια αναποδογυρισμένη κορυφή —γίνεται κορυφή μόλις αλλάξει το πρόσημο της συνάρτησης $f(x, y)$. Επομένως, είναι ένα σημείο με γειτονικές ισούψεις όπως του Σχήματος 3β (που είναι ίδιες με του Σχήματος 3α), αλλά τα ύψη τους αυξάνονται καθώς απομακρύνονται από το σημείο: $z_0 < z_1 < z_2 < \dots$.

Ο αυχένας (Σχήμα 3γ) μπορεί να περιγραφεί ως ένα σημείο που περιβάλλεται από μια περιοχή που μοιάζει με σέλα.² Ενώ οι ισούψεις γύρω από μια κορυφή ή μια λεκάνη εκφυλίζονται σε ένα μοναδικό σημείο, οι ισούψεις που διέρχονται από έναν αυχένα P αποτελούνται από δύο τεμνόμενες γραμμές. Οι γραμμές αυτές (ή μάλλον, οι εφαπτόμενές τους στο σημείο P) χωρίζουν τη γειτονιά του σημείου σε δύο ζεύγη κατά κορυφήν γωνιών. Αν απομακρυνθούμε από το P κινούμενοι κατά διεύθυνση που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός από αυτά τα ζεύγη γωνιών, ανερχόμαστε. Αν απομακρυνθούμε κινούμενοι κατά διεύθυνσεις που α-

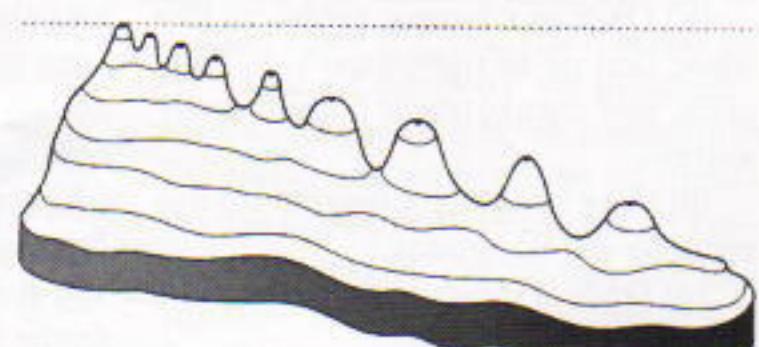
νήκουν στο άλλο ζεύγος, κατερχόμαστε: στο Σχήμα 3γ, ..., $z_{-2} < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \dots$.

Ο τέταρτος τύπος σημείου είναι ο πλέον συνήθης. Αντίθετα με ό,τι συμβαίνει στα κρίσιμα σημεία, μια σφαίρα που τοποθετείται σε τέτοιο σημείο θα κυλήσει προς τα κάτω, διότι η επιφάνεια σε αυτό έχει κλίση. Ένα τέτοιο σημείο ονομάζεται **σημείο κλίσης**. Η δομή των ισούψών πλησίον ενός σημείου κλίσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 3δ. Ειδικά, η ισούψης που διέρχεται από το σημείο κλίσης αποτελείται από ένα τμήμα και το ύψος των γειτονικών ισούψών μεταβάλλεται μονοτονικώς καθώς κινούμαστε σε μια διαδρομή που διέρχεται από το σημείο κλίσης: στο Σχήμα 3δ, ..., $z_{-2} < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \dots$ ³.

Κατά κανόνα, σχεδόν όλα τα σημεία ενός χάρτη είναι σημεία κλίσης. Για παράδειγμα, όλα τα σημεία κορυφής, λεκάνης και αυχένα είναι μεμονωμένα και περιβάλλονται από σημεία κλίσης.

Φυσικά, υπάρχουν και άλλοι τύποι σημείων εκτός των τεσσάρων που ορίσαμε προηγουμένως. Για παράδειγμα, μερικοί χάρτες έχουν οροπέδια (ολόκληρες περιοχές με σημεία ίδιου ύψους) ή κορυφογραμμές (όχι ένα σημείο αλλά μια ευθεία μέγιστου ύψους —δείτε το Σχήμα 2γ), ακόμη και πιο «περίεργα» σημεία, όπως ο τριπλός αυχένας του Σχήματος 2δ ή την ακολουθία φθινουσών κορυφών του Σχήματος 4. Όμως, όλα τα σημεία που δεν είναι σημεία κλίσης (εκτός των κορυφών, των λεκανών και των αυχένων) αιρούνται με μια ελάχιστη μεταβολή της επιφάνειας: τα «κακά» σημεία είτε εξαφανίζονται είτε μετατρέπονται σε κορυφές, λεκάνες και αυχένες.⁴ Επομένως, είναι

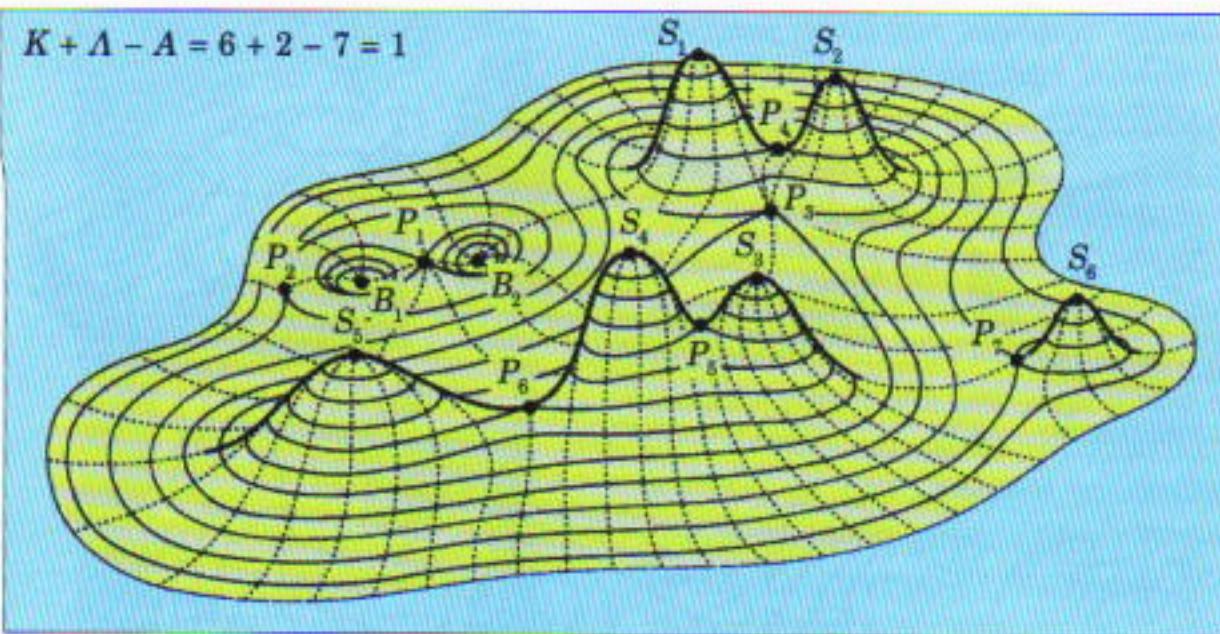
4. Το γεγονός αυτό διατυπώνεται και αποδεικνύεται με αυστηρότητα στη θεωρία του Morse, αλλά εμείς δεν θα χρειαστούμε αυτό το θεώρημα.



2. Οι τοπολόγοι το ονομάζουν μερικές φορές σαγματικό σημείο (από τη λέξη σάγμα, που σημαίνει σέλα).

3. Μπορούμε να δώσουμε μια περισσότερο τυπική περιγραφή συναρτήσεων τοπολογικών μετασχηματισμών: Η οικογένεια των ισούψών κοντά σε ένα σημείο κλίσης προκύπτει από μια οικογένεια παραλληλών ευθειών μέσω ενός τέτοιου μετασχηματισμού. Παρομοίως, οι ισούψεις κοντά σε μια κορυφή ή μια λεκάνη προκύπτουν από μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων και οι ισούψεις κοντά σε έναν αυχένα από μια οικογένεια υπερβολών με κονές ασύμπτωτες.

Σχήμα 4



Σχήμα 5

λογικό να περιοριστούμε σε αυτούς μόνο τους τρεις τύπους κρίσιμων σημείων πέρα των σημείων κλίσης.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το κύριο θεώρημα αυτού του άρθρου —ένα από τα απλούστερα θεωρήματα της θεωρίας Morse.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Το Σχήμα 5 απεικονίζει ένα νησί, κάθε σημείο του οποίου είναι σημείο κλίσης, κορυφή, λεκάνη ή αυχένας. Επιπλέον όλα τα σημεία της ακτογραμμής είναι σημεία κλίσης. Αν K , Λ και A είναι, αντίστοιχα, το πλήθος των κορυφών, λεκανών και αυχένων, τότε*

$$K + \Lambda - A = 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για να γίνει πο κατανοητή η απόδειξη, τη χωρίζουμε σε τρία βήματα:

1. *Ανακατασκευή της περιοχής.* Ας αλλάξουμε την περιοχή του νησιού χωρίς να μεταβάλλουμε τους αριθμούς K , Λ και A με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες:

(α) Όλες οι κορυφές έχουν το ίδιο ύψος (ίσο με το υψόμετρο του Έβερεστ, του υψηλότερου βουνού στον κόσμο).

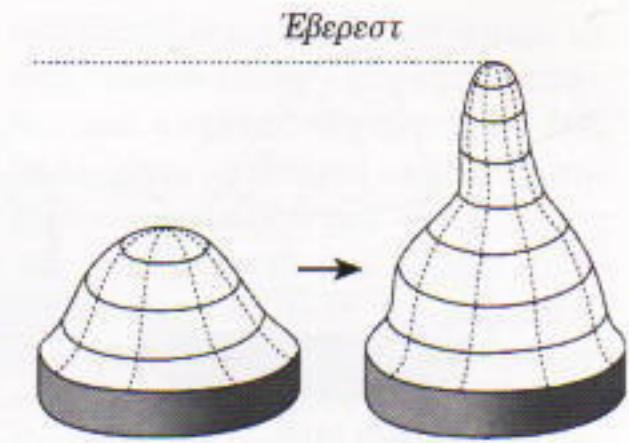
(β) Όλες οι λεκάνες βρίσκονται στο επίπεδο της θάλασσας.

(γ) Όλοι οι αυχένες βρίσκονται σε διαφορετικά υψόμετρα.

Ευκολότερα απ' όλες ικανοποιείται η συνθήκη (α): Προσθέτουμε απλώς χώμα στην κορυφή των λόφων και των βουνών μας έως ότου φτάσουμε στο απαραίτητο υψόμετρο (Σχήμα 6). Ταυτόχρονα, σκάβουμε στον

πυθμένα κάθε λεκάνης έως ότου φτάσουμε στο βάθος της βαθύτερης τάφρου της Γης (η τάφρος των νήσων Μαριάννες στον Ειρηνικό Ωκεανό, γνωστή ως Άβυσσος των Μαριανών). Αυτό είναι ένα ενδιάμεσο βήμα που χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε ότι θα ικανοποιείται η συνθήκη (β) —πράγμα που δεν είναι και τόσο εύκολο: αν προσπαθήσουμε απλώς να γεμίσουμε τις λεκάνες (για να ανυψώσουμε το επίπεδο τους στο επίπεδο της θάλασσας), μπορεί να σκοντάψουμε σε έναν αυχένα. Υπάρχει όμως μια απλή διέξοδος: να αποξηράνουμε τη θάλασσα γύρω από το νησί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το νησί έχει απότομους υποθαλάσσιους κρημνούς που φτάνουν έως το βάθος της τάφρου, δυτικά του αρχιπελάγους των Μαριανών. Αν λοιπόν αποξηράνουμε τη θάλασσα έως αυτό το βάθος, όλες οι λεκάνες θα βρίσκονται στο (νέο) επίπεδο της θάλασσας.

Για να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη (γ) πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να ανυψώσουμε ή να χαμηλώσουμε ελαφρά τη γειτονική περιοχή ενός αυχένα, αφήνοντας ανέπαφα τα άλλα κρίσιμα σημεία και χωρίς να δημιουργούμε νέες κορυφές, λεκάνες ή αυχένες. Προς τούτο, σχεδιάζουμε δύο κύκλους ακτίνας r και $2r$, με κέντρο τον αυχένα και r κατάλληλα μικρό. Αφήνουμε τα σημεία έξω από τον μεγαλύτερο κύκλο ανέπαφα. Ανυψώνουμε ή χαμηλώνουμε (αναλόγως με τι επιθυμούμε) το τμήμα της επιφάνειας στο εσωτερι-



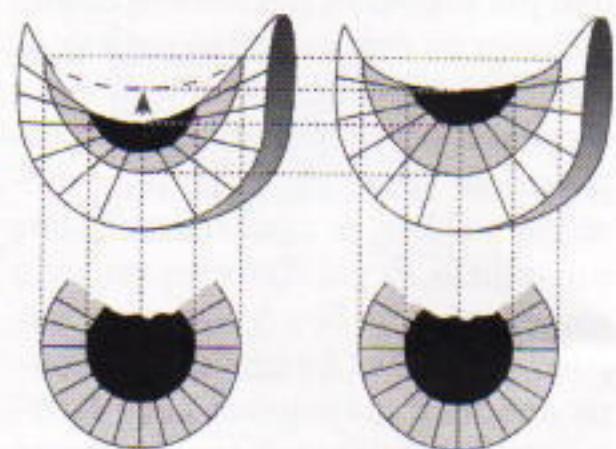
Σχήμα 6

κό του μικρότερου κύκλου. Ο διακύριος μεταξύ των κύκλων είναι ένα είδος συνδετικού ιστού (Σχήμα 7).

Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συνθήκες (α), (β) και (γ) είναι αληθείς.

2. *Ο κατακλυσμός.* Ας υποθέσουμε ότι βροχή πλημμυρίζει βαθμιαία το νησί και ότι το επίπεδο του νερού στις λεκάνες και τη θάλασσα ανυψώνεται ομοιόμορφα από το αρχικό «επίπεδο της θάλασσας» έως το ύψος του Έβερεστ. Το νερό που ανυψώνεται δημιουργεί λίμνες στις λεκάνες που βρίσκονται στο εσωτερικό του νησιού, ενώ το νησί χωρίζεται σε μικρότερα νησιά. Ας δούμε πώς μεταβάλλεται το πλήθος των νησιών και των λιμνών (προφανώς, δεν θα εκλάβουμε τη θάλασσα ως λίμνη).

Μόλις αρχίσει η πλημμύρα, σχηματίζεται μια λίμνη σε κάθε λεκάνη. Επομένως, το αρχικό πλήθος των λιμνών είναι Λ . Λίγο πριν τελειώσει, όλες οι λίμνες έχουν συνδεθεί με τη θάλασσα και μόνο οι κορυφές των



Σχήμα 7

Ανύψωση ενός αυχένα. Το μαύρο τμήμα της επιφάνειας ανυψώνεται ελαφρά (σαν ένα στέρεο, καμπύλο πάτο). Το γκρίζο τμήμα (μπορείτε να φανταστείτε ότι αποτελείται από ένα λεπτό ελαστικό φύλλο) τεντώνεται ελαφρά, ενώ το εξωτερικό σύνορο μένει σταθερό.

βουνών εξακολουθούν να προβάλλουν από το νερό (γι' αυτόν το λόγο τις ανυψώσαμε!) Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον επόμενο πίνακα.

	Λίμνες	Νησιά
Αρχή της πλημμύρας	Λ	1
Πριν από την πλήρη βύθιση	0	K

3. *Κατακλυσμός ενός αυχένα*. Πότε αλλάζει το πλήθος των λιμνών και των νησιών; Προφανώς, παραμένει σταθερό όσο πλημμυρίζουν μόνο σημεία κλίσης. Τι συμβαίνει όταν πλημμυρίζει ένας αυχένας (Σχήμα 8); Παρατηρούμε ότι κάθε φορά είναι δυνατόν να πλημμυρίσει ένας μόνο αυχένας, διότι όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό υψόμετρο. Επομένως, υπάρχουν δύο δυνατότητες:

(α) Το νερό μιας μοναδικής λίμνης ή της θάλασσας ρέει ταυτόχρονα στον αυχένα από δύο διευθύνσεις. Τότε το πλήθος των λιμνών παραμένει αμετάβλητο και εμφανίζεται ένα νέο νησί (Σχήμα 9α).

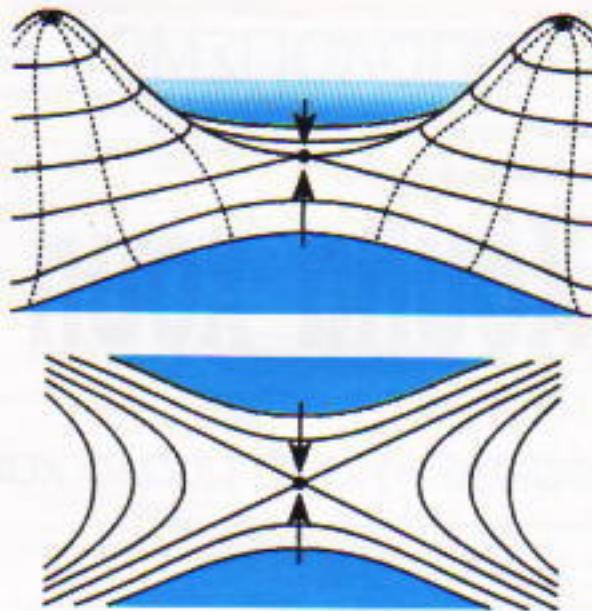
(β) Το νερό δύο διαφορετικών λιμνών ρέει ταυτόχρονα (Σχήμα 9β). Τότε, το πλήθος των λιμνών μειώνεται κατά ένα, ενώ το πλήθος των νησιών παραμένει αμετάβλητο.

Επομένως, όταν το νερό φτάνει σε έναν αυχένα, είτε μειώνεται το πλήθος των λιμνών κατά ένα είτε αυξάνεται το πλήθος των νησιών κατά ένα. Εφόσον η συνολική μεταβολή του πλήθους αυτών είναι, αντίστοιχα, Λ και $K - 1$, έχουμε $A = \Lambda + (K - 1)$, και επομένως $K + \Lambda - A = 1$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν κάθε σημείο της Γης είναι σημείο κλίσης, κορυφή, λεκάνη ή αυχένας, τότε

$$K + \Lambda - A = 2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αποξηραίνουμε τη θάλασσα και όλες τις λίμνες. Ρίχνουμε λίγο νερό στον πυθμένα της βαθύτερης λεκάνης και δημιουργούμε μια λίμνη. Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτή τη λίμνη ως τη θάλασσα και όλη τη στεριά ως ένα νησί. Τότε, όλη



Σχήμα 8

η Γη έχει τόσες κορυφές και τόσους αυχένες όσους το νησί, και μια λεκάνη επιπλέον. Χρησιμοποιούμε τώρα το Θεώρημα 1.

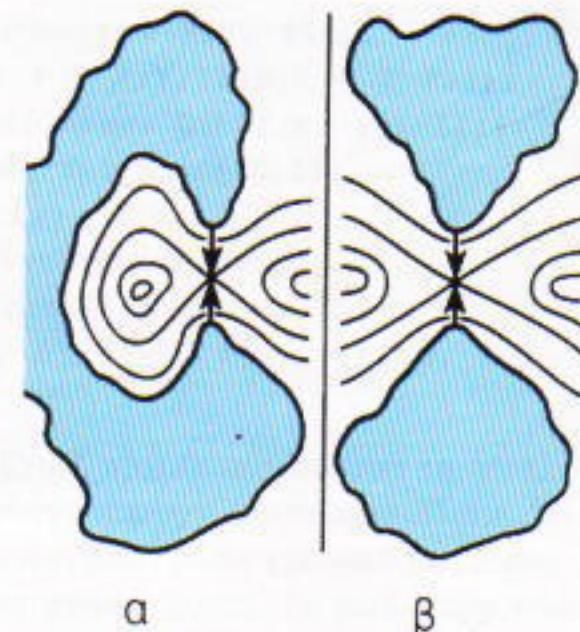
Ένα σημαντικό παράδειγμα περιοχής στην οποία μπορεί να εφαρμοστεί αυτό το πόρισμα είναι κάθε πολύεδρο που περιέχει ένα σημείο O , οι κάθετες προβολές του οποίου σε κάθε έδρα και ακμή (και όχι στις προεκτάσεις τους). Αν ορίσουμε ως υψόμετρο ενός σημείου του πολυέδρου την απόστασή του από το O , τότε οι κορυφές του πολυέδρου είναι οι κορυφές αυτές της περιοχής, οι προβολές τού O στις έδρες είναι οι λεκάνες της και οι προβολές τού O στις ακμές είναι οι αυχένες. (Επαληθεύστε το!) Από αυτή την παρατήρηση προκύπτει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. (Θεώρημα του Euler για τα πολύεδρα.) Έστω E , K και A το πλήθος των εδρών, κορυφών και ακμών ενός κυρτού πολυέδρου. Τότε

$$E + K - A = 2.$$

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει αυτό το θεώρημα μόνο για μία ειδική κατηγορία πολυέδρων που ικανοποιούν την προηγούμενη επιπρόσθετη συνθήκη. Η απόδειξη της γενικής περίπτωσης δίδεται στη συνέχεια. Συνάγεται εύκολα από το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. (Θεώρημα του Euler για τους χάρτες.) Έστω ο πολιτικός χάρτης (δηλαδή, χάρτης που παρουσιάζει τις χώρες με διαφορετικά χρώματα — σε αντίθεση με τον τοπογραφικό χάρτη) ενός νησιού που φράσ



Σχήμα 9

σεται από μια κλειστή καμπύλη και ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

(α) Το πλήθος των χωρών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2,

(β) Κάθε χώρα φράσσεται από μια κλειστή καμπύλη που δεν αυτοτέμνεται.

(γ) Καμία χώρα δεν βρίσκεται στο εσωτερικό μιας άλλης (όπως, το Βατικανό ή το Μονακό).

Αν X είναι το πλήθος των χωρών, K το πλήθος των κόμβων (σημεία συνάντησης τριών ή περισσότερων χωρών ή της θάλασσας) και Σ είναι το πλήθος των συνόρων (δηλαδή, των τμημάτων των συνόρων που βρίσκονται μεταξύ δύο κόμβων —των συνόρων με τη θάλασσα περιλαμβανομένων), τότε

$$X + K - \Sigma = 1.$$

Στο Σχήμα 10α βλέπουμε έναν τέτοιο χάρτη ($X = K = 2$, $\Sigma = 3$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 3. Ας κατασκευάσουμε ένα τοπίο στο χάρτη, έτσι ώστε κάθε χώρα να περιέχει ακριβώς μία λεκάνη, κάθε σύνορο ακριβώς έναν αυχένα (τα σύνορα με τη θάλασσα μπορούν να μετατοπιστούν ελαφρώς προς το εσωτερικό) και πάνω από κάθε κόμβο να υπάρχει μία κορυφή. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως εξής: Υψώνουμε μια κατασκευή παρόμοια με τον πύργο του Άιφελ πάνω από κάθε κόμβο. Κατασκευάζουμε αναχώματα κατά μήκος των συνόρων που χαμηλώνουν προς το μέσο του συνόρου και έχουν ομαλή κλίση και προς τις δύο πλευρές

Η συνέχεια στη σελ. 72 ↵

Χούλα χουπ

Μια καλή άσκηση για το μυαλό και το σώμα

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ ΣΤΗΛΗ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΦΙΕΡΩΜΕΝΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΛÚΝΟΝΤΑΙ ΚΑΤÁ ΤΟΝ ΚΑΛΎΤΕΡΟ ΤΡÓΠΟ ΑΛΟΓΟΡΙΘΜΙΚÁ. Ο χειμώνας συνεχίζεται για τα καλά στη φάρμα μας, και οι κρύες νύχτες προσφέρονται για ατέλειωτες συζητήσεις με τη φίλη μου την Μπέσυ.

Ένα από τα αγαπημένα μας θέματα είναι —τι άλλο;— τα ζεστά εξωτικά νησιά. Σε μια από αυτές τις κουβέντες μας, θυμήθηκα ένα ηλιόλουστο απόγευμα στην παραλία Ουάκι Κόουα, στη Χαβάη, όπου έμαθα να κουνώ τους γοφούς μου όπως ο Έλβις Πρισλεϋ. Ήταν καλοκαίρι του 1958 και η μανία του χούλα χουπ είχε κυριεύσει όλη τη χώρα, δημιουργώντας έτοι την πρώτη με-

γάλη αγορά για ένα προϊόν που μόλις είχε εφευρεθεί: το κρυσταλλικό πολυπροπυλένιο —περισσότερο γνωστό ως πλαστικό.

Το χούλα χουπ στις μέρες μας είναι ένας θαυμάσιος τρόπος να κρατήσεις τη φόρμα σου. Πιστέψτε με, αν ζήτατε μια αεροβική άσκηση που να προστατεύει τους αστραγάλους και τα γόνατά σας και να γυμνάζει λαγόνια, πλάγιους κοιλιακούς, γλουτούς, γάμπες και δελτοειδείς, το χούλα χουπ είναι ό,τι το καλύτερο.

Έπειτα από τη συζήτησή μας, η φίλη μου η Μπέσυ αποφάσισε πως πρέπει οπωσδήποτε να ασχοληθεί με το χούλα χουπ. Αναπόφευκτα, άρχισα να διαλογίζομαι για το κατάλληλο πρόγραμμα που θα τη βοηθούσε.

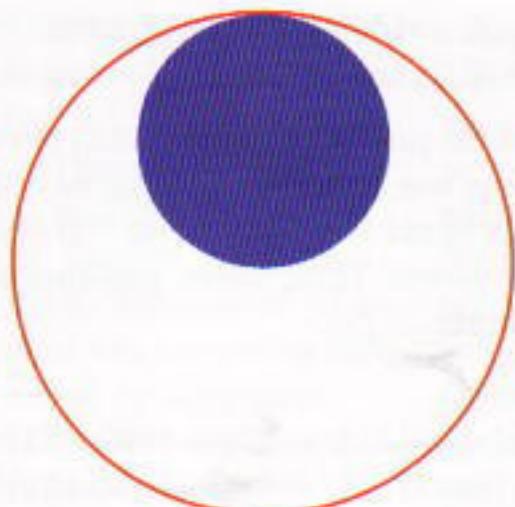


Εικονογράφηση: Mark Brenneman

Ένα μοντέλο στο Mathematica

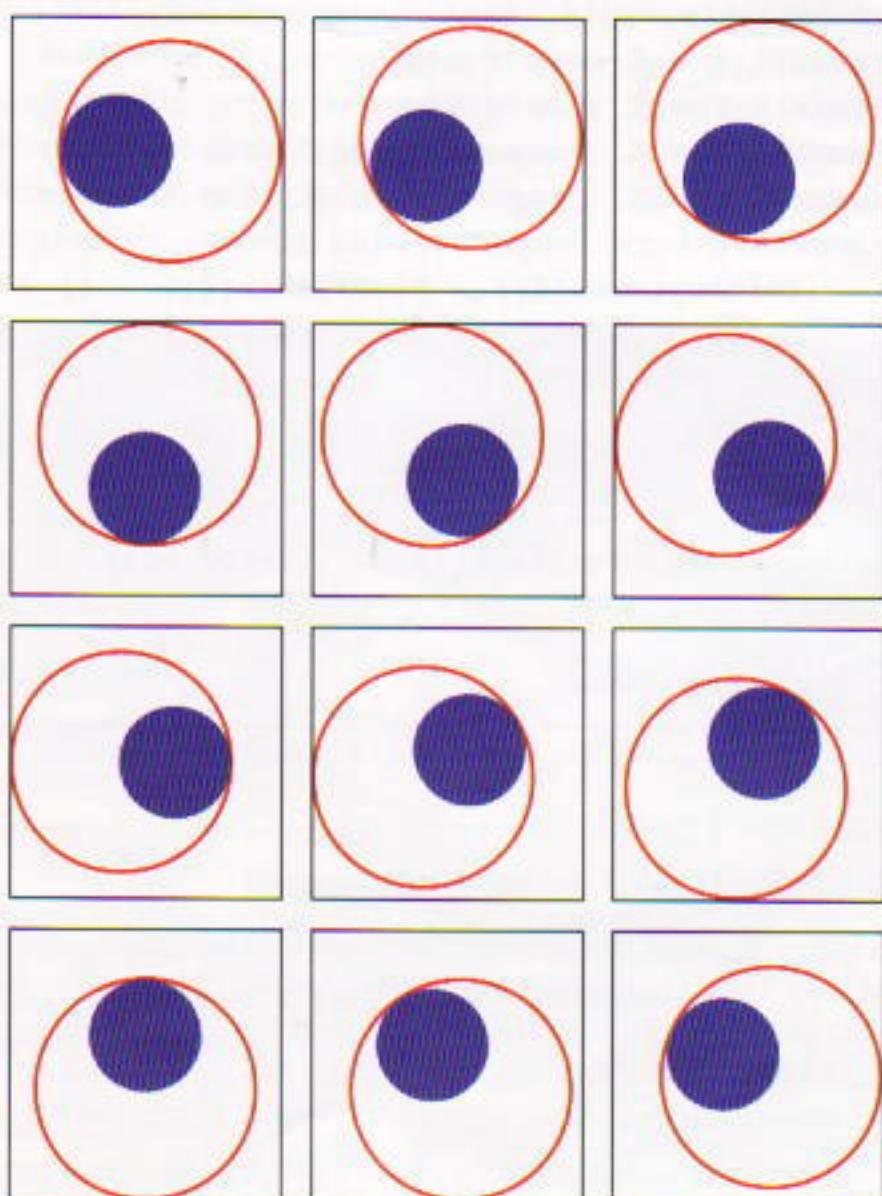
Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα απλό μοντέλο του χούλα χουπ αν σχεδιάσουμε έναν κόκκινο κύκλο που απλώς εφάπτεται σε έναν μπλε δίσκο (Σχήμα 1).

```
red = RGBColor[1, 0, 0];
blue = RGBColor[0, 0, 1];
Show[Graphics[{blue, Disk[{0, 0}, 1]}],
 Graphics[{red, Thickness[0.01],
 Circle[{0, (-1)}, 2]}],
 AspectRatio -> Automatic]
```



Σχήμα 1

Προσθέτουμε τώρα την κίνηση των γοφών στο δίσκο και —ω του θαύματος— έχουμε το χούλα χουπ!



Σχήμα 2

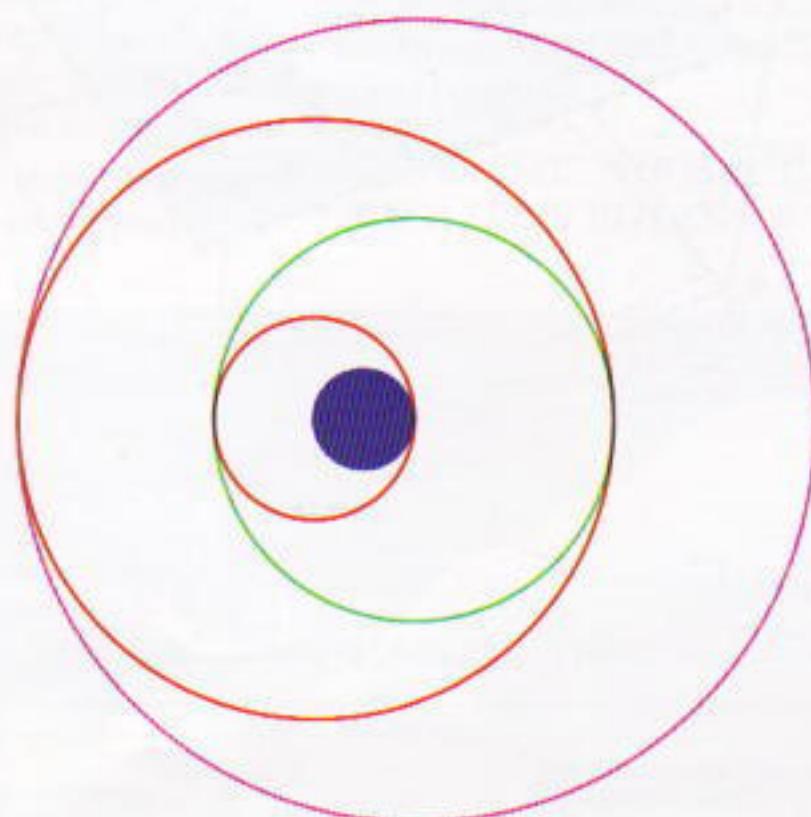
```
Animate[{x, y} = {Cos[t + Pi], Sin[t + Pi]};
 {u, v} = {Cos[t + 2 Pi], Sin[t + 2 Pi]};
 Show[Graphics[{blue, Disk[{x, y}, 2]}],
 Graphics[{red, Thickness[0.01],
 Circle[{u, v}, 4]}],
 AspectRatio -> Automatic, Frame ->
 True, FrameTicks -> None,
 PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}], {t, 0,
 2 Pi, Pi/6}]
```

Για να δούμε την κίνηση, χρησιμοποιούμε το *Mathematica* και πληκτρολογούμε ταν ανωτέρω κώδικα. Διπλοπατήστε με το ποντίκι στο πρώτο γραφικό και λικνίστείτε στο ρυθμό του χούλα χουπ. Το καλύτερο που μπορώ να κάνω στη στατική σελίδα του περιοδικού είναι να σας παρουσιάσω την έξοδο με έναν πίνακα γραφικών. Παρατηρήστε στο Σχήμα 2 ότι μαζί με τον κόκκινο κύκλο κινείται και ο μπλε δίσκος.

Τι θα συνέβαινε αν αυτός ο κύκλος μπορούσε να συγκρατήσει έναν μεγαλύτερο, αυτός με τη σειρά του έναν ακόμη, κ.ο.κ., και ταυτόχρονα η φίλη μας η Μπέου ήταν τόσο επιδέξια ώστε να τους κινεί όλους μαζί; Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα το οποίο, όπως μαντέψατε, αποτελεί την καινούργια μας πρόκληση.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 14

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο θα κινεί τέσσερα χούλα χουπ που εφάπτονται μεταξύ τους όπως στο παράκατω σχέδιο.



Σχήμα 3

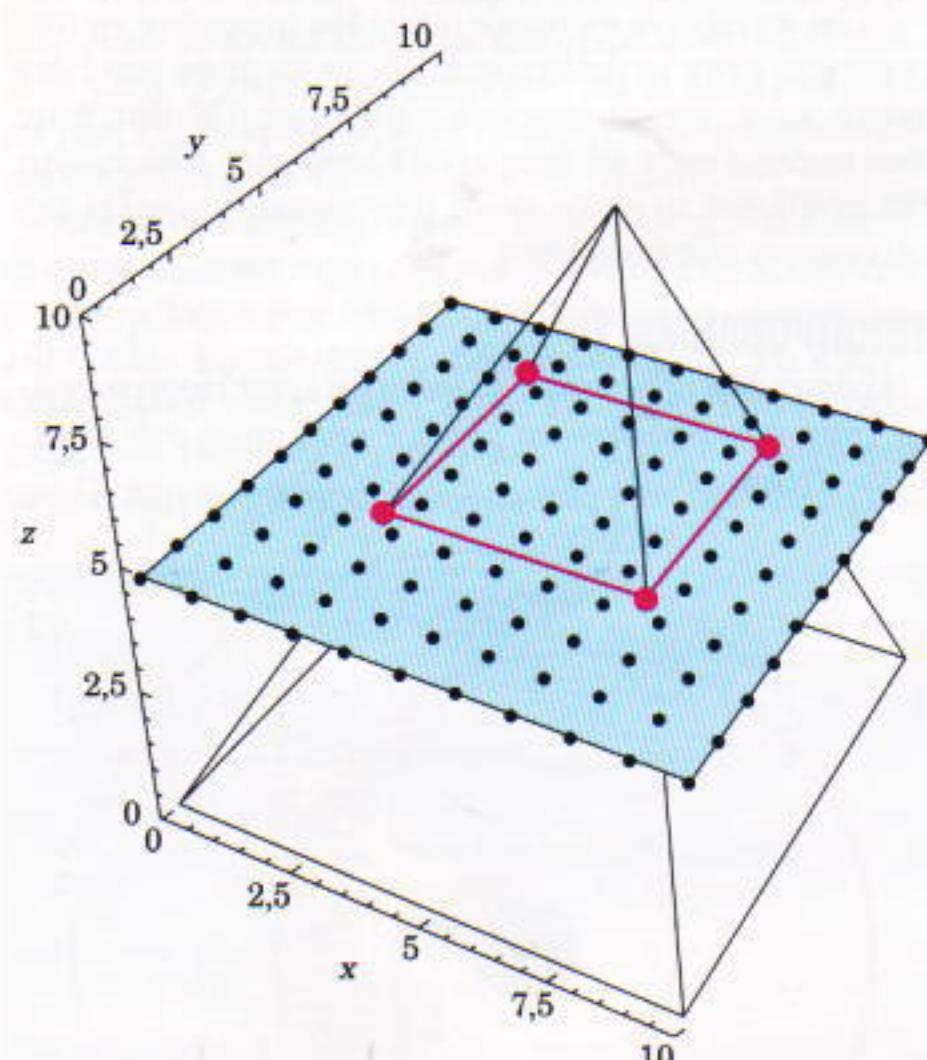
ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 12

Στο ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 12 σάς ζητήθηκε να γράψετε ένα πρόγραμμα, το οποίο θα δεχόταν οποιοδήποτε σημείο (x, y, z) με ακέραιες συντεταγμένες και οποιαδήποτε τετράγωνη βάση με ακέραιο μήκος πλευράς και θα υπολογίζε το πλήθος των σημείων με ακέραιες συντεταγμένες στο εσωτερικό του πολυέδρου που σχηματίζεται

από τη βάση και το σημείο απελευθέρωσης του φορτίου. Πόσες μύγες παγιδεύονται όταν ο εξολοθρευτής απελευθερώνει το φορτίο του στο σημείο (6000, 9000, 10000), αν υποθέσουμε ότι η βάση έχει πλευρά μήκους 12000;

Λύση

Η βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε τα επίπεδα $z = \zeta$, που είναι παράλληλα προς τη βάση του πολυέδρου. Ας υποθέσουμε ότι η βάση του πολυέδρου έχει απέναντι γωνίες με συντεταγμένες $(0, 0, 0)$ και $(base, base, 0)$, ενώ οι συντεταγμένες της κορυφής είναι $(x_{top}, y_{top}, z_{top})$. Για κάθε τιμή του ζ μεταξύ του 0 και του z_{top} , το επίπεδο $z = \zeta$ τέμνει τις ακμές του πολυέδρου σε τέσσερα σημεία, που σχηματίζουν τετράγωνο με συντεταγμένες απέναντι κορυφών $(x_{min}[\zeta], y_{min}[\zeta], \zeta)$ και $(x_{max}[\zeta], y_{max}[\zeta], \zeta)$ —θα ορίσουμε τα x_{min} , y_{min} , x_{max} , y_{max} στη συνέχεια.



Σχήμα 4

Η παραμετρική μορφή ενός σημείου της ευθείας που

ενώνει την αρχή με την κορυφή είναι $(x_{top}, y_{top}, z_{top})$. Επομένως, αν $z = \zeta$, έχουμε $t = \zeta/z_{top}$, και μπορούμε εύκολα να ιππολογίσουμε τις συντεταγμένες της τομής αυτής της ευθείας με το επίπεδο $z = \zeta$:

$$x_{min}[\zeta] = \zeta x_{top} / z_{top}; \\ y_{min}[\zeta] = \zeta y_{top} / z_{top};$$

Παρομοίως, η ευθεία που συνδέει το σημείο $(base, base, 0)$ με την κορυφή έχει την παραμετρική μορφή $((x_{top} - base)t + base, (y_{top} - base)t + base, z_{top}t)$. Για $z = \zeta$, έχουμε και πάλι $t = \zeta/z_{top}$ και μπορούμε να ορίσουμε τα x_{max} και y_{max} .

$$x_{max}[\zeta] = \zeta (x_{top} - base) / z_{top} + base; \\ y_{max}[\zeta] = \zeta (y_{top} - base) / z_{top} + base;$$

Εξοπλισμένοι με αυτές τις συντεταγμένες της τετραγωνικής τομής του επιπέδου $z = \zeta$ με το πολύεδρο, απαριθμούμε τα σημεία του πλέγματος στο εσωτερικό κάθε τέτοιου τετραγώνου. Προς τούτο, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση z_{count} :

$$z_{count}[\zeta] := \\ (\text{Ceiling}[x_{max}[\zeta]] - \text{Floor}[x_{min}[\zeta]] - 1) * \\ (\text{Ceiling}[y_{max}[\zeta]] - \text{Floor}[y_{min}[\zeta]] - 1)$$

Ολοκληρώνουμε τη διαδικασία αθροίζοντας για όλα τα z , με $0 < z < z_{top}$. Ιδού η πλήρης συνάρτηση:

$$\text{interiorLatticePoints3D}[base_, \{x_{top}_-, \\ y_{top}_-, z_{top}_\}] := \\ \text{Module}[\{x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max}, z_{count}\}, \\ x_{min}[\zeta] = \zeta x_{top} / z_{top}; \\ y_{min}[\zeta] = \zeta y_{top} / z_{top}; \\ x_{max}[\zeta] = \zeta (x_{top} - base) / z_{top} + base; \\ y_{max}[\zeta] = \zeta (y_{top} - base) / z_{top} + base; \\ z_{count}[\zeta] := \\ (\text{Ceiling}[x_{max}[\zeta]] - \text{Floor}[x_{min}[\zeta]] - 1) * \\ (\text{Ceiling}[y_{max}[\zeta]] - \text{Floor}[y_{min}[\zeta]] - 1) \\ \text{Sum}[z_{count}[\zeta], \{\zeta, 0+1, z_{top} - 1\}]]$$

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει σωστά το πλήθος των σημείων στη δεδομένη περίπτωση:

$$\text{interiorLatticePoints3D}[12000, \{6000, 9000, \\ 10000\}]$$

479910022999



Μαθηματικοί γρίφοι — 1

150 προβλήματα από τη στήλη «Σπαζοκεφαλιές» του περιοδικού *Quantum*

Το βιβλίο περιλαμβάνει τα πρώτα 150 προβλήματα που έχουν δημοσιευθεί στη στήλη «Σπαζοκεφαλιές» του *Quantum*, κατά την περίοδο Μαΐου 1994 - Μαρτίου 1999. Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου παρατίθενται αναλυτικές λύσεις των προβλημάτων.

Η πληθώρα του υλικού, η εξαιρετική ποιότητά του και η θαυμάσια εικονογράφησή του καθιστούν το βιβλίο θελκτικό και χρήσιμο για όλους όσοι αγαπούν τις πνευματικές προκλήσεις, ανεξαρτήτως ηλικίας.

150 σελ., Έγχρ., 16 × 25 εκ., Πανόδετο, 5.000 δρχ.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ψυχρός βρασμός

S. Krotov και A. Chernoutsan

ΟΙ ΠΑΝΤΕΣ ΓΝΩΡΙΖΟΥΝ ΟΤΙ ΓΙΑ να βράσει το νερό, πρέπει να θερμανθεί. Άλλα μήπως είναι δυνατόν να βράσουμε νερό ψύχοντάς το; Εκ πρώτης όψεως, φαντάζει αδύνατο. Ωστόσο, μη βιαστείτε να απαντήσετε. Εκτελέστε το ακόλουθο πείραμα και σκεφτείτε πώς θα μπορούσατε να το εξηγήσετε.

Θα χρειαστείτε έναν δοκιμαστικό σωλήνα 30-40 ml με εφαρμοστό πώμα, ένα λύχνο Bunsen (ή ένα καμινέτο) και μια λαβίδα για δοκιμαστικό σωλήνα. Προετοιμάστε μια φιάλη με νερό σε θερμοκρασία δωματίου και μια φιάλη με νερό σε θερμοκρασία 0°C (νερό με παγάκια).

Φορώντας γάντια και προστατευτικά γυαλιά, μεταγγίστε το νερό που βρίσκεται σε θερμοκρασία δωματίου στον δοκιμαστικό σωλήνα ώσπου να γεμίσει ώς τη μέση και λίγο περισ-

σότερο. Φέρτε τον δοκιμαστικό σωλήνα πάνω από το λύχνο Bunsen και αρχίστε να τον θερμαίνετε, προσέχοντας να τον κρατάτε κάπως κεκλιμένο (και έτοι ώστε να μη σημαδεύει άλλα τυχόν παρευρισκόμενα πρόσωπα) ώστε να θερμαίνετε το πάνω μέρος της υδάτινης στήλης. Αν θερμάνετε το νερό στον πυθμένα του σωλήνα, τότε ο διαστελλόμενος ατμός μπορεί να εκτινάξει το περιεχόμενο του σωλήνα στον αέρα.

Περιμένετε ώσπου το νερό να φτάσει σε κατάσταση σταθερού βρασμού, και τότε πωματίστε γρήγορα και στεγανά το σωλήνα, απομακρύνοντάς τον ταυτοχρόνως από τη φλόγα. Όπως είναι αναμενόμενο, ο βρασμός σταματά αμέσως. Αναποδογύριστε τώρα το σωλήνα και καταβρέξτε το πάνω (κενό) μέρος του με το νερό που βρίσκεται σε θερμοκρα-

σία δωματίου. Τι νομίζετε ότι θα συμβεί; Το νερό του σωλήνα αρχίζει να βράζει εκ νέου. Φυσικά, έπειτα από λίγο ο βρασμός σταματά, αλλά μπορούμε να τον κάνουμε να ξαναρχίσει ρίχνοντας πάλι νερό θερμοκρασίας δωματίου πάνω στο δοκιμαστικό σωλήνα. Όταν πλέον το κατάβρεγμα του δοκιμαστικού σωλήνα με νερό θερμοκρασίας δωματίου δεν προκαλεί επανέναρξη του βρασμού, καταβρέξτε το κενό μέρος του με το «παγωμένο» νερό. Το νερό μέσα στον κρύο σωλήνα θα αρχίζει να βράζει και πάλι!

Μπορείτε να δώσετε μια εύλογη εξήγηση αυτού του απροσδόκητου φαινομένου, που είναι γνωστό ως «ψυχρός βρασμός»;

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 67**



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Αθαντική ζωή

«Πολύ παιχνίδι στο πώς έχουν τα πράγματα.

Η ιστορία είναι φτιαγμένη από λάθη!

Κι όμως —επιφανειακά— ο κόσμος δείχνει εντάξει πολύ παιχνίδι.»

—Gary Snyder

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

OMICHAEL JORDAN KANEI ΤΑ ΠΑΝΤΑ να φαίνονται εύκολα. Τινάζει την μπάλα από ύψος h με αρχική ταχύτητα u που με την οριζόντια διεύθυνση σχηματίζει γωνία θ κι αυτή γλιστρά όλο χάρη στην τροχιά της και περνά σφυρίζοντας μέσα από το διχτάκι. Η εκτελεστική δεινότητα του Jordan αποτελεί καρπό πολύχρονης εξάσκησης ουδεμία σχέση έχει με τις ψυχρές εξισώσεις της φυσικής.

Οφείλουμε να αναγνωρίσουμε τα γεγονότα και να περιορίσουμε τις φιλοδοξίες μας. Είναι ποτέ δυνατόν η μαθηματική μέθοδος με την οποία προσεγγίζουμε τα φυσικά φαινόμενα να μας βοηθήσει να αντιγράψουμε τις δεξιότητες του Jordan; Ασφαλώς όχι. Άλλα η ανάλυσή μας μπορεί να μας βοηθήσει να εκτιμήσουμε την τέχνη κάποιου που είναι ικανός να ευστοχεί στα τζαμπ σουτ. Στην πραγματικότητα, η ανάλυσή μας μπορεί να χρησιμεύσει εκ των υστέρων για να κατανοήσουμε τις ενέργειες του άλτη μήκους, του ακοντιστή και του δισκοβόλου, του βολεϊμπολίστα που καρφώνει, του μέσου στο ποδόσφαιρο και του «ροπαλοφόρου» στο μπέιζμπολ.

Εφόσον απουσιάζει εντελώς η αντίσταση του αέρα, οι τροχιές τις οποίες διαγράφουν όσα αντικείμενα

κινούνται κοντά στην επιφάνεια της Γης περιγράφονται από τις απλές εξισώσεις που απορρέουν από την κινηματική της οριζόντιας ευθύγραμμης ομαλής κίνησης και της κατακόρυφης βολής προς τα πάνω:

$$x = u_0 t \sin \theta$$

$$y = -gt^2/2 + u_0 t \cos \theta.$$

Από τις ανωτέρω εξισώσεις μπορούμε να εξαγάγουμε μια έκφραση για το βεληνεκές βλήματος που βάλλεται από το έδαφος και επιστρέφει πάλι στο έδαφος. Τη χρονική στιγμή t , κατά την οποία το βλήμα προσκρύει στο έδαφος, η κατακόρυφη μετατόπιση y ισούται με μηδέν. Απαλείφοντας το χρόνο t , καταλήγουμε στον τύπο

$$x = \frac{2u_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{u_0^2}{g} \sin 2\theta.$$

Είναι φανερό ότι —δεδομένου του μέτρου της αρχικής ταχύτητας— το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται όταν η γωνία βολής ισούται με 45° (επειδή ο παράγοντας $\sin(2\theta)$ ισούται με 1 για τη συγκεκριμένη τιμή της γωνίας βολής).

Εάν δεν απαιτήσουμε να μηδενίζεται η κατακόρυφη μετατόπιση y τη χρονική στιγμή t , βρίσκουμε ότι

$$y = \frac{-gx^2}{2u_0^2 \sin^2 \theta} + \frac{x \tan \theta}{\sin \theta}.$$

Αυτός ο τύπος δείχνει πως, για οποιαδήποτε δεδομένη αρχική ταχύτητα και γωνία βολής, το βλήμα διαγράφει κατ' ανάγκη μια παραβολική τροχιά.

Εάν χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

και

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

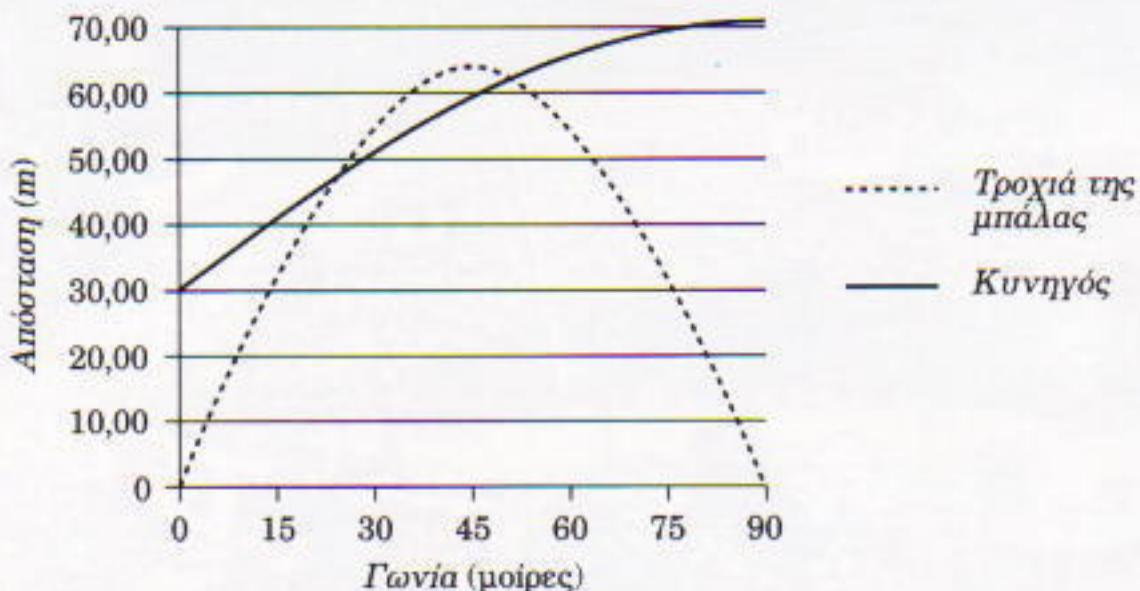
μπορούμε να εξαγάγουμε μια εξισώση που μας επιτρέπει να βρούμε με ποια γωνία βολής πρέπει να εκτοξευθεί μια μπάλα ώστε να φτάσει σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου:

$$y = \frac{-gx^2}{2u_0^2} \sin^2 \theta + x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u_0^2}.$$

Εφόσον η συγκεκριμένη εξισώση είναι δευτεροβάθμια (ως προς $\sin \theta$), συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές γωνίες βολής με τις οποίες μπορούμε να στείλουμε ένα αντικείμενο σε οποιαδήποτε θέση.

Οι εξισώσεις της τροχιάς μάς επ-





Σχήμα 1

τρέπουν να συλλάβουμε βαθύτερα καιρία σημεία της κινηματικής των βολών, πράγμα που διευκολύνει τη λήψη της ορθής απόφασης σε πολλά από τα διλήμματα που ανακύπτουν στα σπόρ. Ο μπασκετμπολίστας που επδιώκει να πετύχει τρίποντο μπορεί σίγουρα να στηριχτεί στις εξισώσεις για να προσδιορίσει την περιοχή τιμών της γωνίας βολής που θα χαρίσει τους πολύτιμους πόντους στην ομάδα του. Ένας ποδοσφαιριστής ενδέχεται να έχει διαφορετικές απαιτήσεις. Το ακόλουθο σενάριο είναι τυπικό: ο αμυντικός γίνεται κάτοχος της μπάλας έπειτα από μια μαζική επίθεση των αντιπάλων στην περιοχή του και διακρίνει έναν «έχασμένο» συμπαίκτη του κάτω από το κέντρο. Προσφέρεται λοιπόν μια χρυσή ευκαιρία για αντεπίθεση ενάντια στην αποφιλωμένη και αποδιοργανωμένη άμυνα του αντιπάλου, αρκεί ο αμυντικός μας να καταφέρει να τροφοδοτήσει το συμπαίκτη του στην κατάλληλη θέση. Επδιώκει να στείλει την μπάλα κατά το δυνατόν μακρύτερα. Άλλα αν τη στείλει τόσο μακριά ώστε να μην προλάβει να κατέβει ο συμπαίκτης του στο σημείο που θα προσγειωθεί η μπάλα, τότε πιθανώς κάποιος αντίπαλος παίκτης θα γίνει κάτοχός της ή θα την αποκρούσει. Επομένως, πρέπει να επιτύχει τον προσφορότερο συγκερασμό δύο αντιθετικών απαιτήσεων: αφενός, να μεγιστοποιήσει το βεληνεκές και, αφετέρου, να μεγιστοποιήσει το χρόνο παραμονής της μπάλας στον αέρα. Άλλα η μεν μεγιστοποίηση του βεληνεκούς προϋποθέτει γωνία βο-

λής 45° , η δε μεγιστοποίηση του χρόνου παραμονής της μπάλας στον αέρα απαιτεί κατακόρυφη βολή (χωρίς συνιστώσα ταχύτητας προς την αντίπαλη εστία). Πώς πρέπει λοιπόν να ενεργήσει ο παίκτης μας;

Τέτοιες αποφάσεις παρουσιάζουν οπωδήποτε μεγάλη δυσκολία, και ο μπακ θα πρέπει να βασιστεί στην πείρα του. Εντούτοις, η φυσική επιστήμη μπορεί να βοηθήσει κάπως. Αν γνωρίζουμε την ταχύτητα του κυνηγού που εφορμά προς την αντίπαλη εστία, καθώς και την αρχική ταχύτητα με την οποία φεύγει η μπάλα από τα πόδια του αμυντικού, είναι δυνατόν να προτείνουμε μια κατάλληλη τιμή της γωνίας βολής έτσι ώστε η μπάλα να προσκρούσει στο έδαφος ταυτόχρονα με την άφιξη του κυνηγού στο σημείο προσγείωσης της μπάλας. Θα αναλύσουμε αυτό το θέμα αγνοώντας την αντίσταση του αέρα.

Το βεληνεκές της βολής υπό γωνία θ και με αρχική ταχύτητα v_0 , καθώς και ο αντίστοιχος χρόνος πτήσεως, δίδονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \eta \mu (2\theta),$$

$$t = \frac{2v_0 \eta \mu \theta}{g}.$$

Εάν ο επιτιθέμενος κυνηγός κατεβαίνει προς την αντίπαλη περιοχή με ταχύτητα u , τότε σε χρόνο t προλαβαίνει να διανύσει απόσταση $x = u t$. Εστω ότι ο αμυντικός μας συντάρει την μπάλα από μια θέση που βρίσκεται 30 m πίσω από τον κυνη-

γό. Εάν ελαχιστοποιήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στο βεληνεκές της μπάλας R και την απόσταση που διανύει ο κυνηγός, συνυπολογίζοντας το προβάδισμα των 30 m που έχει, θα έχουμε προσδιορίσει τη βέλτιστη γωνία για τη βολή.

Ο ευκολότερος τρόπος για να επιλυθούν οι προκύπτουσες εξισώσεις είναι να καταφύγουμε σε μια ρουτίνα επίλυσης εξισώσεων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, σε ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου ή να παραστήσουμε γραφικά τις εξισώσεις για το R και την ποσότητα ($x + 30$ m). Στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται οι σχετικές γραφικές παραστάσεις. Χρησιμοποιήσαμε τις τυπικές τιμές των 25 m/s για την αρχική ταχύτητα της μπάλας και των 8 m/s για την ταχύτητα του κυνηγού. Οι κυνηγός θα φτάσει ταυτόχρονα με την μπάλα, εφόσον αυτή φύγει από τα πόδια του αμυντικού υπό γωνία βολής 51.6° . Στην προκειμένη περίπτωση, η μπάλα θα διανύσει απόσταση κατά τι μικρότερη από το μέγιστο βεληνεκές.

Υπάρχουν μερικά ενδιαφέροντα προβλήματα τροχιών όπου η φυσική μπορεί επίσης να δώσει χείρα βοηθείας. Τέτοια προβλήματα σας προτείνουμε στο παρόν τεύχος.

1. (a) Βρισκόμαστε στη διαδικασία εκτέλεσης ελεύθερου κτυπήματος (στο ποδόσφαιρο). Οι αμυνόμενοι σχηματίζουν τείχος με τα σώματά τους ανάμεσα στον «εκτελεστή» και την εστία. Η μπάλα πρέπει να περάσει πάνω από τους παίκτες. Οι αμυνόμενοι έχουν ύψος 1.8 m και σχηματίζουν το τείχος σε απόσταση 15 m από τον σουτέρ. Αυτός σουτάρει την μπάλα με ταχύτητα 35 m/s. Σε ποιες θέσεις είναι αδύνατον να προσγειωθεί η μπάλα;

(β) Πώς μεταβάλλεται αυτή η «περιοχή σκιάς» καθώς το τείχος μετακινείται σε σχέση με τον σουτέρ;

2. (a) Ένας καλαθοσφαιριστής εκτελεί τζαμπ σουτ με αρχική ταχύτητα u και γωνία βολής θ . Για δεδομένο καλάθι που βρίσκεται τοποθετημένο σε ύψος h πάνω από το σημείο εκτόξευσης της μπάλας και απέχει L m από τον καλαθοσφαιριστή στην οριζόντια διεύθυνση, καθορίστε τη σχέση που πρέπει να συν-

δέει τις v_0 και θ_0 προκειμένου να σημειωθεί καλάθι.

(β) Δεδομένου ότι η μπάλα πρέπει να μπει στο καλάθι κατά την κάθοδό της, περιγράψτε μαθηματικά τον περιορισμό τον οποίο πρέπει να ικανοποιεί η αρχική γωνία.

(γ) Για ποια γωνία βολής λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της η απαιτούμενη αρχική ταχύτητα ώστε να σημειωθεί το καλάθι;

Διακροτήματα και φανόμενο Doppler

Στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1998 θέσαμε ένα πρόβλημα που συνδύαζε τα διακροτήματα με τις μετατοπίσεις Doppler. Το πρόβλημα το κατέστρωσε ο Leaf Turner, ένας από τους προπονητές της ολυμπιακής ομάδας φυσικής των ΗΠΑ, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί στο διαγωνισμό για την επιλογή των μελών της ομάδας τού 1998.

Δύο σειρήνες είναι τοποθετημένες κατά μήκος του άξονα των x : έστω v_a η συχνότητα της αριστερής σειρήνας και v_δ της δεξιάς. Ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα v_0 κατά μήκος του άξονα των x ακούει συχνότητες 0,99 Hz, 0 Hz και 1,01 Hz όταν βρίσκεται, αντίστοιχα, αριστερά από τις σειρήνες, ανάμεσα στις σειρήνες και δεξιά από τις σειρήνες.

Α. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι, εφόσον ο παρατηρητής πλησιάζει και τις δύο πηγές ή απομακρύνεται και από τις δύο πηγές, η συχνότητα διακροτήματος συμπεριφέρεται ακριβώς σαν να ήταν η συχνότητα ενός απλού ήχου που εκπέμπεται από μία μοναδική πηγή. Σύμφωνα με τα δεδομένα, η εν λόγω συχνότητα υφίσταται μετατόπιση προς το ερυθρό όταν ο παρατηρητής βρίσκεται αριστερά των σειρήνων και προς το κυανό όταν βρίσκεται στα δεξιά τους. Αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής κινείται εκ δεξιών προς αριστερά.

Β. Στην αριστερή πλευρά, η παρατηρούμενη συχνότητα διακροτήματος $\Delta v'_a$ δίνεται από την έκφραση

$$\Delta v'_a = \Delta v \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) = 0,99 \text{ Hz},$$

όπου με c συμβολίζουμε την ταχύτητα του ήχου. Ομοίως, στη δεξιά πλευρά, η παρατηρούμενη συχνότητα διακροτήματος $\Delta v'_\delta$ δίνεται από την έκφραση

$$\Delta v'_\delta = \Delta v \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) = 1,01 \text{ Hz}.$$

Διαιρώντας αυτές τις δύο εξισώσεις παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{\Delta v'_\delta}{\Delta v'_a} = \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} = \frac{101}{99},$$

από την οποία καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $v_0 = 0,01c$.

Γ. Όταν ο παρατηρητής βρίσκεται ανάμεσα στις δύο πηγές, η συχνότητα διακροτήματος μηδενίζεται, οπότε ο παρατηρητής μετρά την ίδια συχνότητα και για τις δύο πηγές. Ωστόσο, η πηγή στα αριστερά υφίσταται μετατόπιση προς το κυανό, ενώ η πηγή στα δεξιά μετατόπιση προς το ερυθρό. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $v_\delta < v_a$.

Δ. Για να καταλήξουμε σε αριθμητικά αποτελέσματα, έχουμε

$$v'_a = v_a \left(1 + \frac{v_0}{c} \right)$$

και

$$v'_\delta = v_\delta \left(1 - \frac{v_0}{c} \right).$$

Εξισώνοντας τις δύο μετατοπισμένες συχνότητες, παίρνουμε

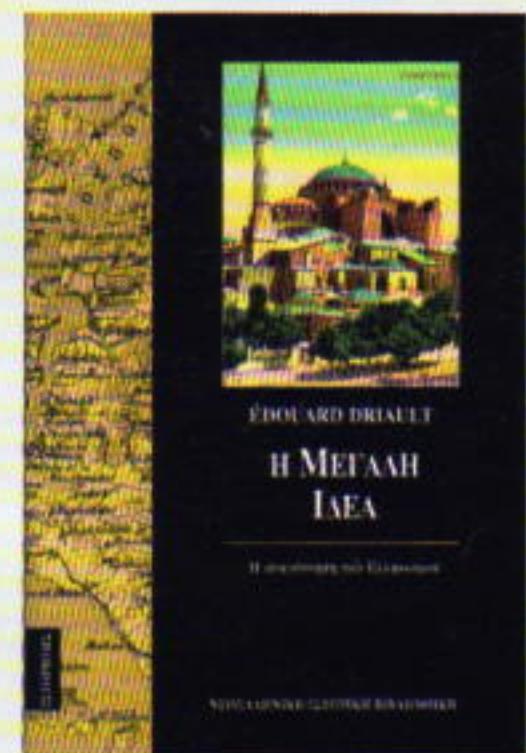
$$\frac{v_\delta}{v_a} = \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}} = \frac{101}{99}.$$

Χρησιμοποιώντας μια οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις του ερωτήματος Β, καθώς και το αποτέλεσμα $v_0 = 0,01c$, βρίσκουμε

$$v_\delta - v_a = 1 \text{ Hz}.$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις αποτελούν σύστημα· εάν το επιλύσουμε, καταλήγουμε στις τιμές $v_\delta = 50,5$ Hz και $v_a = 49,5$ Hz. □

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Édouard Driault

Η ΜΕΓΑΛΗ ΙΔΕΑ

Η αναγέννηση του Ελληνισμού

Ο Édouard Driault (1864-1947), καθηγητής της ιστορίας στη Σορβόνη, στο βιβλίο του *Η Μεγάλη Ιδέα* παρουσιάζει τη διαχρονική πορεία του ελληνισμού ως κυματοθραύστη των εκάστοτε βαρβαρικών επιδρομών και ως φύλακα αγγέλου του ευρωπαϊκού πνεύματος. Η παρουσίαση αυτή συνδυάζεται με τους παρεμφερούς σημασίας αγώνες του Γαλλικού λαού κατά του παγγερμανισμού. Κύριο μέλημα του συγγραφέα είναι η τόνωση των δεσμών φιλίας Γαλλίας και Ελλάδας σε μια κρίσιμη εποχή, που η πρώτη έχει αρχίσει να ερωτοτροπεί με την Τουρκία για να εξασφαλίσει τα οικονομικά συμφέροντά της στην Ανατολή μετά τον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο. Οι διαλέξεις του — που δόθηκαν σε συναισθηματικά φορτισμένο κοινό — διατυνέονται από τις αρχές της ρομαντικής ιστορικής σχολής: Παράλληλα με τις δυνάμεις τις βάρβαρες και τις σκοταδιστικές, υπάρχουν και άλλες δυνάμεις με ανθρωπιά και πολιτισμό, που πασχίζουν να νικήσουν τις πρώτες και να επιβάλουν στον κόσμο την ειρήνη και την ευτυχία.

Σελ.: 296, Εικ.: A/M, 14 × 21 εκ., 5.800 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

Αναζήτηση πυθαγόρειων τριάδων

Ένα θεώρημα που δεν χάνει ποτέ την αξία του

S.M. Voronin και A.G. Kulagin

ΠΩΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΘΕΤΙΚΕΣ ακέραιες λύσεις της επόμενης διάσημης εξίσωσης

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad (1)$$

Ειδικές λύσεις αυτής της εξίσωσης ήταν ήδη γνωστές στο μακρινό παρελθόν, πολύ πριν τα μαθηματικά γίνουν επιστήμη. Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τη λύση $(a, b, c) = (3, 4, 5)$. Γνώριζαν επίσης και αρκετές ακόμη λύσεις της εξίσωσης (1), ανάμεσά τους και ορισμένες που είναι δύσκολο να βρεθούν, όπως η $(105, 36, 111)$ και η $(12709, 13500, 18541)$.

Αν και υπάρχουν διάφορες απώψεις για τα προελληνικά μαθηματικά, είναι μάλλον απίθανο να χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι τις απαγωγικές μεθόδους των μαθηματικών. Τα μαθηματικά ως απαγωγική επιστήμη εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα τον 6ο π.Χ. αιώνα. Σύμφωνα με την παράδοση, ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που διατύπωσε μαθηματικά προβλή-

ματα. Οι μαθηματικοί της αρχαϊας Αιγύπτου και της Βαβυλώνας μπορούσαν να υπολογίσουν τον αριθμό $\sqrt{2}$ με μεγάλη ακρίβεια, αλλά η διατύπωση του προβλήματος ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος θα τους φαινόταν τελείως αλλόκοτη. Εξίσου αλλόκοτη θα τους φαινόταν η διατύπωση του προβλήματος της περιγραφής όλων των λύσεων της εξίσωσης (1). Το πρόβλημα αυτό τέθηκε και λύθηκε από την πυθαγόρεια σχολή.

Για αυτόν το λόγο, και επίσης λόγω της προφανούς σχέσης της με το πυθαγόρειο θεώρημα, η εξίσωση (1) ονομάζεται πυθαγόρειο πρόβλημα και οι τριάδες των φυσικών αριθμών που την ικανοποιούν πυθαγόρειες τριάδες. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έπειται ότι σε κάθε πυθαγόρεια τριάδα $0 < a < b < c$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές a και b και υποτείνουσα c . Αντιστρόφως, κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές ακέραιου μήκους μας δίνει μια λύση της εξίσωσης (1). Συνεπώς, το πυθαγόρειο πρόβλημα έχει μια προφανή γεωμετρική ερμηνεία (Σχήμα 1).

Αριθμητική μέθοδος

Αν η τριάδα των φυσικών αριθμών (a, b, c) είναι πυθαγόρεια, τότε η τριάδα (ka, kb, kc) είναι επίσης πυθαγόρεια, για κάθε θετικό ακέραιο k . Επομένως, για να λύσουμε το πυθαγόρειο πρόβλημα, αρκεί να βρούμε όλες τις πρωταρχικές τριά-

δες (a, b, c) — δηλαδή, όλες τις πυθαγόρειες τριάδες τα μέλη των οποίων δεν έχουν κοινό διαιρέτη.

Αποδεικνύεται ότι η περιγραφή όλων των πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων είναι μάλλον εύκολη. Οι πυθαγόρειοι γνώριζαν μια απλή μέθοδο που βασίζεται στην επόμενη πρόταση: Αν οι p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους, ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός και $p > q$, τότε η τριάδα των αριθμών

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq, \quad c = p^2 + q^2 \quad (*)$$

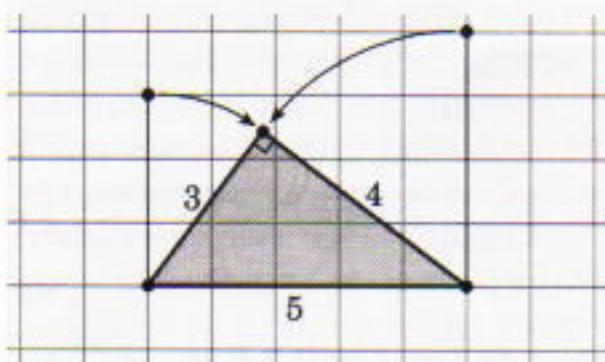
είναι πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα.

Για παράδειγμα, αν $q = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ και $p = 163$, βρίσκουμε την εξής πυθαγόρεια τριάδα: $(24805, 13692, 28333)$.

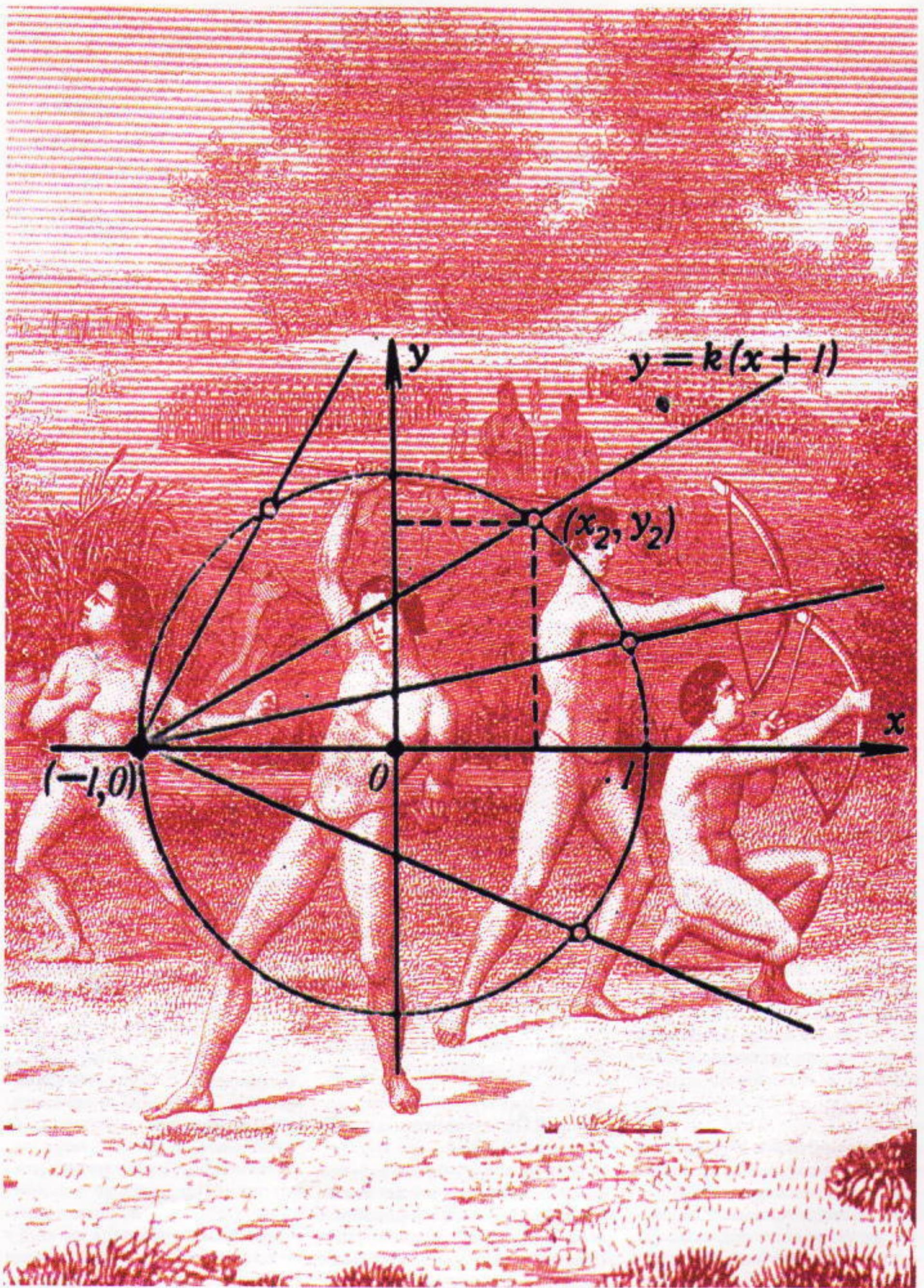
Η απόδειξη της πρότασης είναι προφανής. Πράγματι, λόγω των (*), έχουμε

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2 \\ &= (p^2 + q^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Άρα, η τριάδα (a, b, c) είναι πυθαγόρεια. Εππλέον, είναι πρωταρχική: Αν οι a, b, c είχαν έναν κοινό διαιρέτη k , αυτός θα ήταν κοινός διαιρέτης των αριθμών $c+a = 2p^2$ και $c-a = 2q^2$. Επειδή οι p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους, πρέπει να είναι $k = 2$. Όμως το k διαιρεί το $c = p^2 + q^2$, που είναι περιττός αριθμός. Συνεπώς $k \neq 2$, και καταλήγουμε σε αντίφαση.



Σχήμα 1



Έχουμε αποδείξει ότι η μέθοδος που περιγράφαμε παράγει μια πρωταρχική τριάδα. Αποδεικνύεται ότι όλες οι πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες προκύπτουν με την εφαρμογή της μεθόδου (*).

Στη συνέχεια, δίνουμε (εν συντομίᾳ) μια αριθμητική απόδειξη αυτού του αξιοσημείωτου γεγονότος. Η απόδειξη εξηγεί και το πώς θα μπορούσαμε να μαντέψουμε τους τύπους (*). (Οι αναγνώστες που δεν προτιμούν τους αριθμητικούς συλλογισμούς μπορούν να παραλείψουν την απόδειξη αυτή και να συνεχίσουν με την επόμενη ενότητα.)

Εστω μια πρωταρχική τριάδα (a, b, c) . Η συνθήκη ότι μια τριάδα είναι πρωταρχική μπορεί να γραφεί ως

$$\mu.\kappa.\delta.(a, b, c) = 1, \quad (2)$$

όπου $\mu.\kappa.\delta.$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών της παρένθεσης. Επομένως ότι πρέπει να εξετάσουμε κοινούς διαιρέτες και των τριών αριθμών a, b, c , και όχι κοινούς διαιρέτες δύο μόνο εξ αυτών. Η ισότητα (2) δεν συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \mu.\kappa.\delta.(a, b) &= \mu.\kappa.\delta.(b, c) \\ &= \mu.\kappa.\delta.(c, a) = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Όμως, για κάθε πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα, οι σχέσεις (3) ισχύουν. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\mu.\kappa.\delta.(a, b) = k > 1$. Τότε, βάσει της εξίσωσης (1), το c^2 διαιρείται με το k^2 και επομένως το c διαιρείται με το k , πράγμα αδύνατο λόγω της (2).

Σε κάθε πρωταρχική τριάδα (a, b, c) οι αριθμοί a και b έχουν διαφορετική ισοτιμία (δηλαδή δεν είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί). Πράγματι, από την εξίσωση (3) συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να είναι και οι δύο άρτιοι. Αν είναι και οι δύο περιττοί (ας πούμε, $a = 2k + 1$ και $b = 2l + 1$), τότε

$$a^2 + b^2 = 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2.$$

Επομένως, το $a^2 + b^2$ διαιρείται από το 2, αλλά όχι από το 4. Βάσει της εξίσωσης (1), το c έχει την ίδια ιδιότητα, δηλαδή είναι άρτιο. Επομένως, $c = 2s$, για κάποιον ακέραιο s . Συνεπώς, το $c^2 = 4s^2$ διαιρείται με το 4. Έτοιμοι, καταλήξαμε σε αντίφαση!

Αποδείξαμε ότι τα a και b είναι διαφορετικής ισοτιμίας. Ας υποθέσουμε ότι το a είναι περιττό, το b άρτιο και άρα το c περιττό.

Οι παραστάσεις $c + a$ και $c - a$ είναι και οι δύο άρτιες και επομένως μπορούμε να γράψουμε $c + a = 2m$, $c - a = 2n$ για κάποιους ακέραιους m και n . Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \\ &= (2m)(2n) = 4mn. \end{aligned} \quad (4)$$

Λήμμα. Οι αριθμοί m και n είναι τέλεια τετράγωνα,

$$m = p^2, \quad n = q^2,$$

δύο πρώτων μεταξύ τους αριθμών p και q , διαφορετικής ισοτιμίας.

Καλούμε τους αναγνώστες να αποδείξουν αυτό το λήμμα. (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους με τη βοήθεια της (3), αναλύστε τους σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και αντικαταστήστε στην (4).)

Από τις ισότητες $2m = c + a$ και $2n = c - a$, παίρνουμε

$$2p^2 = c + a, \quad 2q^2 = c - a,$$

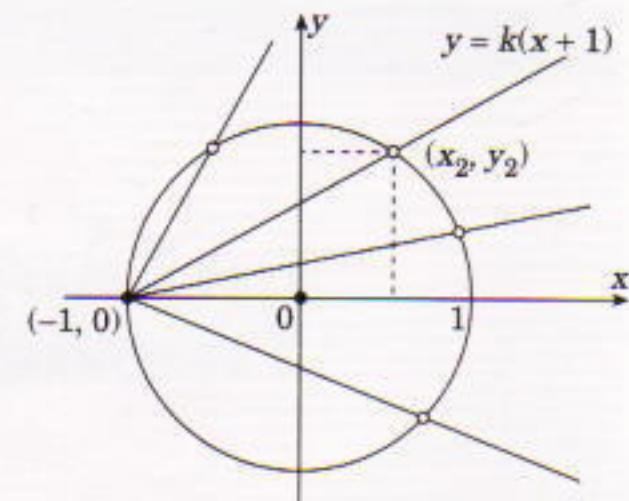
από όπου έχουμε $c = p^2 + q^2$ και $a = p^2 - q^2$. Από την (1) βρίσκουμε $b = 2pq$. Συνεπώς, αν τα a, b, c είναι πυθαγόρεια τριάδα, τότε προκύπτει από τους τύπους (*).

Γεωμετρική μέθοδος

Αν χρησιμοποιήσουμε συντεταγμένες, μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά την εξίσωση (1). Όλες οι λύσεις της (1) προέρχονται από τον πολλαπλασιασμό των πρωταρχικών λύσεων επί κάποιον φυσικό αριθμό k . Δηλαδή, οι λύσεις έχουν τη μορφή (ka, kb, kc) , όπου (a, b, c) είναι μια πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα. Από την (1) έπειται ότι

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \quad (5)$$

Αφού οι $a, b, c > 0$ είναι ακέραιοι, έπειται ότι οι αριθμοί a/c και b/c είναι ρητοί. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι η $x^2 + y^2 = 1$, συνεπώς υπάρχει ένα σημείο του μοναδιαίου κύκλου με ρητές συντεταγμένες που



Σχήμα 2

αντιστοιχεί σε κάθε πρωταρχική λύση (a, b, c) της εξίσωσης (1). Τα σημεία με ρητές συντεταγμένες ονομάζονται ρητά σημεία. Αντιστρόφως, αν έχουμε ένα ρητό σημείο (x, y) του μοναδιαίου κύκλου με συντεταγμένες $x = m_1/n_1$ και $y = m_2/n_2$, μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση (5) ανάγοντας τα κλάσματα m_1/n_1 και m_2/n_2 στον ελάχιστο κοινό παρονομαστή τους $c > 0$. Η εξίσωση αυτή μας δίνει μια πρωταρχική τριάδα. Επομένως, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ρητών σημείων ενός μοναδιαίου κύκλου και των πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων.

Έχουμε επιτύχει μια γεωμετρική διατύπωση του πυθαγόρειου προβλήματος: Βρείτε όλα τα ρητά σημεία του μοναδιαίου κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε όλα αυτά τα σημεία. Φέρουμε ευθείες από το σημείο $(x_1, y_1) = (-1, 0)$. Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(-1, 0)$ και δεν είναι εφαπτόμενη τέμνει τον κύκλο σε ένα ακόμη σημείο, για παράδειγμα το (x_2, y_2) (Σχήμα 2). Η εξίσωση μιας τέτοιας ευθείας είναι

$$y = k(x + 1),$$

όπου k είναι η κλίση της ευθείας. Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου (x_2, y_2) ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = k(x + 1). \end{cases}$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή y $= k(x + 1)$ στην πρώτη εξίσωση και λύσουμε ως προς x , θα πάρουμε

$$x^2 + k^2(x+1)^2 = 1$$

ή

$$(1+k^2)x^2 + 2k^2x + k^2 - 1 = 0.$$

Εάν το x ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, τότε είναι η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας $y = k(x+1)$ και του μοναδιαίου κύκλου. Με άλλα λόγια, είτε $x = x_1 = -1$ είτε $x = x_2$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό τύπο για το άθροισμα των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, έχουμε

$$x_1 + x_2 = -\frac{2k^2}{1+k^2},$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$x_2 = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Αφού το σημείο (x_2, y_2) ανήκει στην ευθεία $y = k(x+1)$, έχουμε

$$y_2 = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Οι δύο τελευταίοι τύποι σε κάθε αριθμό k αντιστοιχούν ένα σημείο

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}, \frac{2k}{1+k^2} \right) \quad (6)$$

του μοναδιαίου κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Αντιστρόφως, σε κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου $(x, y) \neq (-1, 0)$, αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή κλίσης k , και συγκεκριμένα η τιμή

$$k = \frac{y}{x+1}. \quad (7)$$

Επισημαίνουμε ότι, αν το k είναι ρητός, το σημείο (x_2, y_2) που ορίζεται από την (6) έχει ρητές συντεταγμένες και, αντιστρόφως, αν τα x_2 και y_2 είναι ρητοί, το k είναι, λόγω της (7), επίσης ρητός. Έχουμε, λοιπόν, την επόμενη πρόταση: Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων με ρητές συντεταγμένες του μοναδιαίου κύκλου (εκτός του σημείου $(-1, 0)$) και των ρητών αριθμών.

Αν το k διατρέξει όλες τις ρητές τιμές του διαστήματος $(-\infty, +\infty)$, θα απαριθμήσουμε όλα τα σημεία με α-

κέραιες συντεταγμένες του μοναδιαίου κύκλου (εκτός του σημείου $(-1, 0)$) και, συνεπώς, θα βρούμε όλες τις πρωταρχικές λύσεις του πυθαγόρειου προβλήματος.

Ας γράψουμε τους αντίστοιχους τύπους. Έστω $k = p/q$, με $q > 0$ και $\mu.k.\delta.(p, q) = 1$. Τότε, από τον (6) έπειται ότι

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \frac{2pq}{q^2 + p^2} \right). \quad (**)$$

Οι τύποι αυτοί είναι ουσιαστικά ισοδύναμοι με τον (*)! Για να πάρουμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, πρέπει να αναλύσουμε την ισοτιμία των p και q .

Αν τα p και q είναι διαφορετικής ισοτιμίας, ο τύπος (**) αντιστοιχεί στην πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα $(a, b, c) = (q^2 - p^2, 2pq, q^2 + p^2)$. Αν τα p και q είναι και τα δύο περιττά, τότε θεωρούμε τις δύο νέες μεταβλητές $q_1 = (q+p)/2$ και $p_1 = (q-p)/2$, με $\mu.k.\delta.(p_1, q_1) = 1$, και παίρνουμε

$$\begin{aligned} q^2 + p^2 &= 2(q_1^2 + p_1^2), \\ q^2 - p^2 &= 4p_1q_1, \\ 2pq &= (q_1^2 - p_1^2). \end{aligned}$$

Διαιρούμε αριθμητές και παρονομαστές των κλασμάτων στον (**) με το 2, και έχουμε

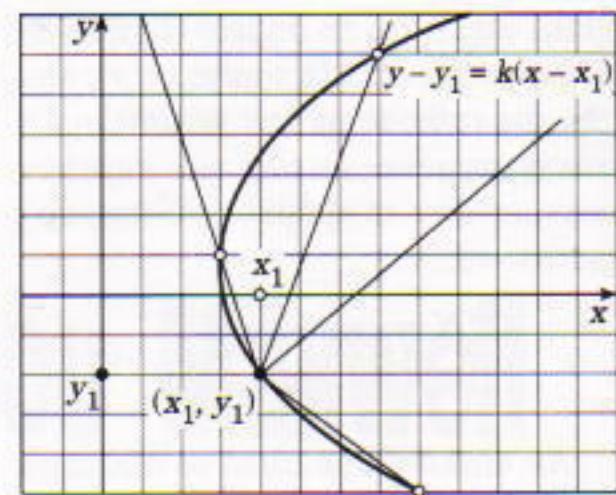
$$(x_2, y_2) = \left(\frac{2q_1p_1}{q_1^2 + p_1^2}, \frac{q_1^2 - p_1^2}{q_1^2 + p_1^2} \right). \quad (8)$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά μεταξύ του (**) και του (8) είναι ότι έχουν εναλλαγεί τα x_2 και y_2 . Αν τα p_1 και q_1 είναι και τα δύο περιττά, τότε συνεχίζουμε με τις μεταβλητές

$$\begin{aligned} q_2 &= (q_1 + p_1)/2, \\ p_2 &= (q_1 - p_1)/2, \end{aligned}$$

$$\text{με } \mu.k.\delta.(p_2, q_2) = 1,$$

και ούτω καθεξής. Τελικά, καταλήγουμε είτε σε έναν τύπο της μορφής (**) είτε της μορφής (8), όπου τα p_n και q_n είναι διαφορετικής ισοτιμίας και $\mu.k.\delta.(p_n, q_n) = 1$. Συνεπώς, η πρωταρχική λύση που αντιστοιχεί στο ρητό σημείο $(x_2, y_2) \neq (-1, 0)$ διδεται είτε από τον τύπο (**) είτε από τον τύπο (8), όπου τα p και q είναι



Σχήμα 3

αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους διαφορετικής ισοτιμίας. Εξαιτίας της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας μεταξύ των πρωταρχικών λύσεων της πυθαγόρειας εξίσωσης και των ρητών σημείων του μοναδιαίου κύκλου (εκτός του σημείου $(-1, 0)$), οι τύποι (**) και (8) συνεπάγονται τους τύπους (*).

Ρητή παραμετρικοποίηση των κωνικών

Έχουμε βρει τον τύπο (6) ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε όλα τα ρητά σημεία του μοναδιαίου κύκλου $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Αυτός ο τύπος ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της παραμέτρου k που λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές και των σημείων του κύκλου (εκτός του σημείου $(-1, 0)$). Οι συντεταγμένες των σημείων (x, y) του κύκλου είναι ρητές συναρτήσεις του k . Προκύπτει ένα εύλογο ερώτημα: Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για να παραγάγουμε σημεία που ανήκουν σε άλλες καμπύλες — για παράδειγμα, σε μια έλλειψη, μια παραβολή ή μια υπερβολή; (Οι ελλείψεις, οι παραβολές και οι υπερβολές ονομάζονται κωνικές τομές.)

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε μια καμπύλη του επιπέδου που δίδεται από την εξίσωση $K(x, y) = 0$, όπου $K(x, y)$ είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο των x και y . Οι ελλείψεις, οι παραβολές και οι υπερβολές ορίζονται από τέτοιες εξισώσεις. Έστω (x_1, y_1) ένα σταθερό σημείο μιας καμπύλης τέτοιου τύπου, με ρητές συντεταγμένες. Φέρουμε μια ευθεία κλίσης k που διέρ-

χεται από αυτό το σημείο (Σχήμα 3). Αναζητούμε σημεία τομής, (x, y) , αυτής της ευθείας με την καμπύλη. Οι συντεταγμένες αυτών των σημείων ικανοποιούν το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} K(x, y) = 0, \\ y - y_1 = k(x - x_1). \end{cases}$$

Αν επιλύσουμε αυτό το σύστημα ως προς (x, y) , όπως κάναμε για τον κύκλο, θα αναπαραστήσουμε τις συντεταγμένες (x_2, y_2) του δεύτερου σημείου τομής της ευθείας $y = y_1 + k(x - x_1)$ με την καμπύλη K συναρτήσει της παραμέτρου k . Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{A(k)}{C(k)}, \frac{B(k)}{C(k)} \right), \quad (***)$$

όπου $A(k)$, $B(k)$ και $C(k)$ είναι πολυώνυμα της παραμέτρου k , βαθμού το πολύ 2. Αυτός ο τύπος μάς δίνει μια ρητή παραμετρικοποίηση της καμπύλης K . Δηλαδή, δίνει τις συντεταγμένες όλων των σημείων της καμπύλης μέσω ρητών συναρτήσεων μιας παραμέτρου k .

Ο τύπος $(***)$ μάς δίνει τη δυνατότητα να βρούμε ακέραια σημεία τής K . Όμως, τώρα, θα στρέψουμε το ενδιαφέρον μας σε μια διαφορετική, τελείως απρόσμενη, εφαρμογή αυτού του τύπου.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Αποδεικνύεται ότι με τη βοήθεια της ρητής παραμετρικοποίησης μιας κατάλληλης καμπύλης μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που σε πρώτη ματιά φαίνεται αδύνατον να αντιμετωπίσουμε, όπως το

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καμπύλη

$$K(x, y) = y^2 - (x^2 + 3x - 4).$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(x_1, y_1) = (-4, 0)$ ανήκει στην καμπύλη

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}.$$

Θεωρούμε όλες τις ευθείες

$$y = k(x + 4)$$

για να επιτύχουμε την εξής παραμετρικοποίηση (κάντε μόνοι σας τις πράξεις):

$$(x, y) = \left(\frac{1 + 4k^2}{1 - k^2}, \frac{5k}{1 - k^2} \right).$$

Τότε,

$$\frac{dx}{dk} = \frac{10k}{(1 - k^2)^2},$$

και, επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \\ &= \int \frac{dx}{y(x)} = \int \frac{2dk}{1 - k^2}. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται οχετικά εύκολα:

$$\begin{aligned} \int \frac{2dk}{1 - k^2} &= \int \frac{dk}{1 - k} + \int \frac{dk}{1 + k} \\ &= \ln|1 + k| - \ln|1 - k| + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + k}{1 - k} \right| + C. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$k = \frac{y}{x + 4} = \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 4},$$

καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα (κάντε τις απαραίτητες πράξεις):

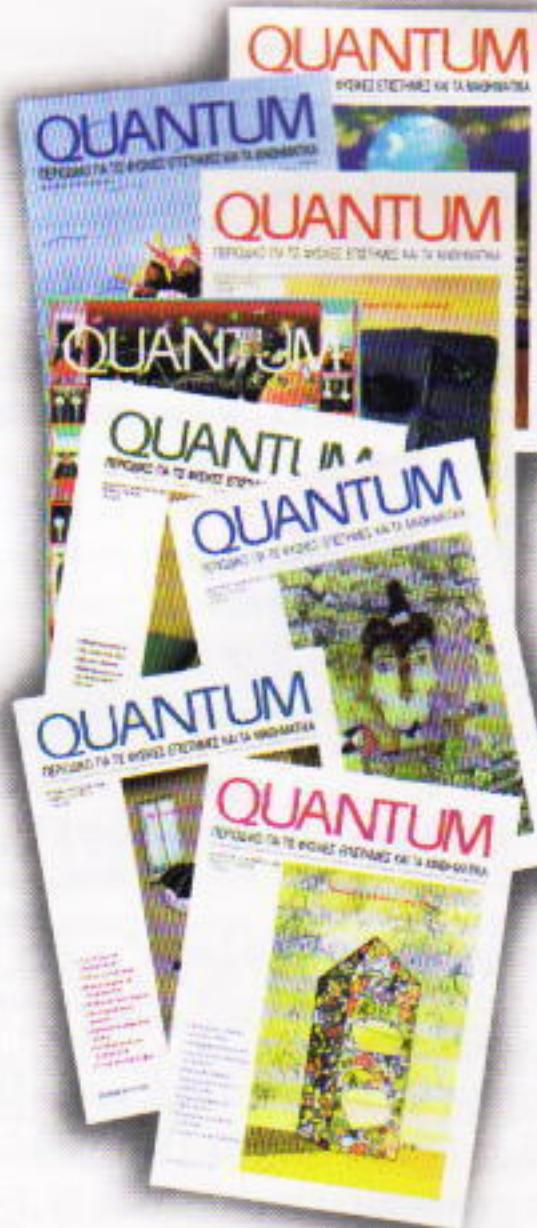
$$I = \ln \left| \frac{x + 4 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x + 4 - \sqrt{x^2 + 3x - 4}} \right| + C.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για τον υπολογισμό πολλών ολοκληρωμάτων. Οι αναγνώστες μπορούν να διερευνήσουν ποια ολοκληρώματα υπολογίζονται με αυτό τον τρόπο.

Σε αυτό το άρθρο χρησιμοποιήσαμε την ίδια μέθοδο για να λύσουμε διοφαντικές εξισώσεις και για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα —προβλήματα που ανήκουν σε διαφορετικά πεδία των μαθηματικών. Αποδεικνύεται έτσι η σύνδεση μεταξύ του πυθαγόρειου διακριτού και της αρχιμήδειας συνέχειας. □

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Με το παρόν τεύχος, το Quantum συμπληρώνει πέντε ημερολογιακά έτη συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, επί πέντε χρόνια προσφέρει μέσα από τις σελίδες του την τεκμηριωμένη γνώση αποκαλύπτοντας στο ελληνικό κοινό τη γοητεία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα, λοιπόν, έχουν κυκλοφορήσει τριάντα τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.

Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου. Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Ήδη κυκλοφορεί και η θήκη του έκτου τόμου, για την αρχειοέτηση των αντίστοιχων τευχών.

Κρυφτό με το δάίμονα του Maxwell

Άλλη μια ιδέα για το αεικίνητο;

A. Stasenko

ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΑΠΟΠΕΙΡΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ αεικινήτων καταγράφηκαν στη Γαλλία του 18ου αιώνα. Ωστόσο, αρχής γενομένης από το 1775, η Γαλλική Ακαδημία Εποπτημών αρνούνταν να εξετάσει οποιαδήποτε ερευνητική πρόταση σχετική με αεικίνητο.

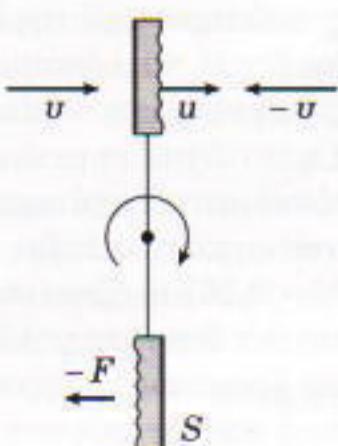
Πράγματι, οι προτάσεις για την ανάπτυξη αεικινήτων ρίχνονται συνήθως στον κάλαθο των αχρήστων για να αποφεύγονται μάταιες χρονοτριβές, διότι τέτοιες μηχανές παραβιάζουν τους νόμους της φύσης. Ωστόσο, αποδεικνύεται ενίστε διδακτικό να αναλογιστούμε κατά πόσον μια συγκεκριμένη μηχανή πρέπει να καταταχθεί στα αεικίνητα.

Μια πολυμήχανη σπουδάστρια άκουσε ότι τα μόρια είναι δυνατόν να απολέσουν μέρος της κινητικής τους ενέργειας όταν προσκρούουν σε τοίχωμα. Στις τελείως ελαστικές κρούσεις, τα μόρια ανακλώνται διατηρώντας το μέτρο της ταχύτητάς τους αμετάβλητο, όταν όμως οι κρούσεις είναι τελείως πλαστικές, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητάς τους μηδενίζεται και καταλήγουν να ολισθαίνουν πάνω στην επιφάνεια του τοίχου. Ιδού, λοιπόν, πώς συνέλαβε η σπουδάστρια την ιδέα για το δικό της αεικίνητο.

Αποφάσισε να σχεδιάσει μια πλάκα τέτοια, ώστε στη μεν μια πλευρά της να σημειώνονται μόνον τελείως ελαστικές μοριακές κρούσεις, στη δε άλλη πλευρά της μόνον τε-

λείως πλαστικές κρούσεις. Κατασκεύασε δύο τέτοιες πλάκες και τις στερέωσε σε μια αφαρή ράβδο, έτοι ώστε οι όμοιες πλευρές τους να είναι στραμμένες σε αντίθετες κατεύθυνσεις. Εν συνεχείᾳ, στερέωσε τη ράβδο σε έναν κατακόρυφο άξονα· η ράβδος μπορούσε να στρέφεται γύρω από τον άξονα χωρίς τριβές. Υπέρηφαν για το έργο της, σχεδίασε το σχετικό διάγραμμα. Στο Σχήμα 1 φαίνεται η κάτιοψή του: Το εμβαδόν κάθε δίσκου ισούται με S , η μέση θερμική ταχύτητα των μορίων του περιβάλλοντος αερίου συμβολίζεται με u , ενώ η ταχύτητα κάθε δίσκου με u . Το κυκλικό βέλος υποδεικνύει την προσδοκώμενη φορά περιστροφής της διάταξης. Η σπουδάστρια επέλεξε να συναρμολογήσει έτσι τη μηχανή της, ώστε η αριστερή επιφάνεια του πάνω δίσκου να ανακλά ελαστικά τα μόρια και η δεξιά να τα ανακλά πλαστικά.

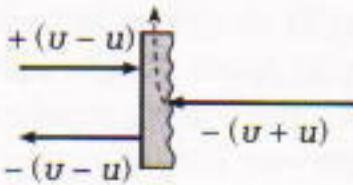
Η σπουδάστριά μας γνώριζε πως



Σχήμα 1

τα μόρια του αερίου κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις με ίση πθανότητα, αλλά σχεδίασε μόνο τα μόρια που κινούνταν στην ίδια διεύθυνση με τους δίσκους, είτε πλησιάζοντάς τους είτε απομακρυνόμενα από αυτούς. Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις που παρουσιάστηκαν στο μάθημα της φυσικής, υπάρχουν $n/6$ τέτοια μόρια ανά μονάδα όγκου (όπου n είναι η αριθμητική πυκνότητα των μορίων, ενώ ο αριθμός 6 αντιπροσωπεύει το πλήθος των εδρών ενός κύβου). Συνεπώς, η ροή των μορίων (δηλαδή ο αριθμός των μορίων που προσπίπτουν σε επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού ανά μονάδα χρόνου) στην αριστερή όψη του πάνω δίσκου ισούται με $(n/6)(u - u)$. Παρεμπιπτόντως, ενίστε αποδεικνύεται χρήσιμο να ελέγχουμε ακόμη και απλούστατους τύπους όπως ο προηγούμενος. Πράγματι, για $u = u$, τα μόρια δεν θα καταφέρουν ποτέ να προλάβουν το δίσκο ή να συγκρουστούν μαζί του, με αποτέλεσμα να μηδενιστεί η ροή των μορίων στην αριστερή όψη του πάνω δίσκου.

Κάθε μόριο προσκρούει στην αριστερή πλευρά του δίσκου με ταχύτητα $+(u - u)$ στο σύστημα αναφοράς όπου ηρεμεί ο δίσκος· δεδομένης της ελαστικής φύσεως της κρούσης, θα ανακλαστεί με ταχύτητα $-(u - u)$, ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης (Σχήμα 2). Επομένως, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, η ταχύτητα των μορίων μετά την



Σχήμα 2

κρούση ισούται με $-(u - u) + u = -u + 2u$, οπότε η αντίστοιχη μεταβολή της ορμής ενός μεμονωμένου μορίου ανέρχεται σε $m(-u + 2u) - mu$. Ο πάνω δίσκος θα αποκτήσει την ίδια ορμή (στην αντίθετη κατεύθυνση, φυσικά). Πολλαπλασιάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με την αντίστοιχη ροή των μορίων και το έμβαδόν του δίσκου, καταλήγουμε σε μια έκφραση για τη δύναμη που ασκείται στο δίσκο εξ αριστερών:

$$\frac{n}{6}(u - u)m(2u - 2u)S = \\ = \frac{mnS}{6}2(u - u)^2.$$

Και τώρα ας επιχειρήσουμε έναν παρόμοιο υπολογισμό για τη δεξιά πλευρά του πάνω δίσκου. Στο σύστημα αναφοράς όπου ηρεμεί ο δίσκος, η ταχύτητα των μορίων πριν από την πρόσκρουση ισούται με $-(u + u)$, ενώ μετά την κρούση μηδενίζεται. Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς, η ταχύτητα μετά την πρόσκρουση ισούται με u , οπότε η μεταβολή της ταχύτητας των μορίων είναι $u - (-u) = u + u$. Η ροή των μορίων στη δεξιά πλευρά του πάνω δίσκου ισούται με $(n/6)(u + u)$, οπότε η ολική δύναμη που ασκείται στο δίσκο από αυτή την πλευρά δίδεται από την έκφραση

$$-\frac{mnS}{6}(u - u)^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το γινόμενο mn συμπίπτει με την πυκνότητα του αερίου ρ , μπορούμε να γράψουμε την ολική δύναμη που δρά στον πάνω δίσκο με τη μορφή

$$F = \frac{\rho S}{6} \left(2(u - u)^2 - (u + u)^2 \right) \\ = \frac{\rho S}{6} (u^2 + u^2 - 6uu).$$

Μια ίση κατά μέτρο και αντίρρο-

πη δύναμη δρά στον κάτω δίσκο, οπότε το σύστημα θα περιστρέφεται με τη φορά που φαίνεται στο Σχήμα 1.

Προφανώς, η καθεμιά από τις ανωτέρω δυνάμεις μηδενίζεται (το σύστημα θα έχει μηδενική γωνιακή επιτάχυνση) όταν ικανοποιείται η εξίσωση

$$u^2 - 6uu + u^2 = 0.$$

Η νεαρή μας ερευνήτρια ήξερε πώς λύνεται μια δευτεροβάθμια εξίσωση, οπότε βρήκε την ταχύτητα στη μόνιμη κατάσταση:

$$u_m = 3u \pm \sqrt{9u^2 - u^2} = u(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

Δεδομένου ότι ο δίσκος είναι αδύνατον να αναπτύξει μεγαλύτερη ταχύτητα από τα μόρια που τον κινούν, συμπέρανε ότι φυσική σημασία μπορεί να αποδοθεί μόνο στη λύση με το μείον.

Επομένως, η ταχύτητα των δίσκων στη μόνιμη κατάσταση ισούται με

$$u_m = u(3 - 2\sqrt{2}) = 0,172u,$$

η οποία είναι σημαντικά μικρότερη από τη θερμική ταχύτητα των μορίων· έτσι, η ευφύής εφευρέτρια μας αντιλήφθηκε πως μπορούσε να αγνοήσει τον όρο που περιείχε το u^2 στην έκφραση που δίνει την F . Κατά συνέπεια, η εξίσωση (που αποτελεί διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για το δίσκο) μετατρέπεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{du}{dt} = \rho \frac{uS}{m} \left(u - \frac{u}{6} \right) = \frac{u - u/6}{t}.$$

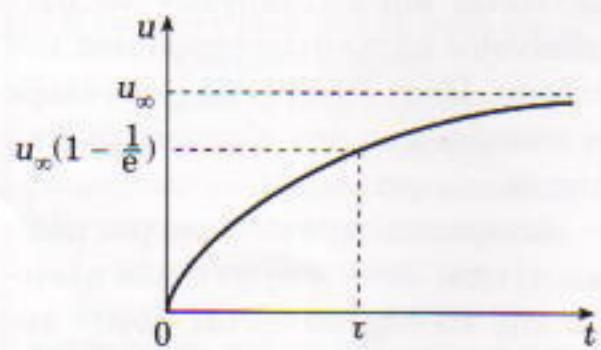
Μπορούμε να διακρίνουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της λύσης ακόμη και δίχως να λύσουμε τη συγκεκριμένη εξίσωση. Φαίνεται σαφώς ότι η επιτάχυνση μειώνεται καθώς αυξάνεται η ταχύτητα, για να μηδενιστεί όταν η u λάβει την τιμή $u_m = u/6 = 0,167u$. (Σημειώστε ότι η τιμή αυτή δεν διαφέρει πολύ από την τιμή που βρήκαμε προηγουμένως.) Η σταθερή παράμετρος $t = m/(\rho u S)$ στον παρονομαστή του δίσιού μέλους ονομάζεται χρόνος αποκατά-

στασης. Για παράδειγμα, αν θέσουμε $m = 1 \text{ g}$, $\rho = 10^{-5} \text{ kg/m}^3$, $u \equiv 300 \text{ m/s}$ και $S = 1 \text{ cm}^2$, βρίσκουμε $t \equiv 3 \cdot 10^3 \text{ s} \equiv 1 \text{ h}$. Τόσος χρόνος απαιτείται για να αποκτήσουν οι δίσκοι το 63% της οριακής τους ταχύτητας (Σχήμα 3).

Πρέπει να επισημανθεί εδώ ότι το μοντέλο μας στηρίζεται στην υπόθεση πως τα μόρια ρέουν ελεύθερα γύρω από τους δίσκους. Γι' αυτό το λόγο, η εφευρέτρια μας θεώρησε ότι η πυκνότητα του αερίου είναι κατά πέντε τάξεις μεγέθους μικρότερη από την πυκνότητα του αέρα υπό κανονικές συνθήκες. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η μέση ελεύθερη διαδρομή κάθε μορίου αυξάνεται κατά πέντε τάξεις μεγέθους, και αντί της τιμής των 10^{-7} m ισούται πλέον με 1 cm , τιμή η οποία είναι συγκρισιμή με τις υποτιθέμενες διαστάσεις του δίσκου.

Κατά συνέπεια, η συσκευή θα έπρεπε να περιστρέφεται εσαιί. Μάλιστα, είναι δυνατόν να την εφοδιάσουμε με ένα μηχανισμό ώστε να εκτελεί ωφέλιμο έργο. Ωστόσο, αυτή η συσκευή δεν έχει καμία σχέση με το είδος των αεικινήτων που απέρριπτε η Γαλλική Ακαδημία Εποπτημών. Η συσκευή μας δεν συνιστά προσπάθεια για παραγωγή ενέργειας «εκ του μηδενός». Οι δίσκοι προσλαμβάνουν ενέργεια από τα μόρια του αερίου, την οποία αυτά αναπληρώνουν μέσω κρούσεων με τα τοιχώματα ενός δοχείου που διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία. Επομένως, ο θερμικός μας κινητήρας δεν παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Η θερμική ενέργεια αφθονεί στον κόσμο μας, άρα, εκ πρώτης όψεως, ο «θερμικός κινητήρας» μας θα μπορούσε να αντλήσει ενέργεια, φερ' ειπείν, από τον οκεανό και να την αξιοποιήσει για την προώθηση των



Σχήμα 3

πλοίων. Λίγη υπομονή όμως —υπάρχουν μερικά ακόμη ζητήματα σχεδίασης που πρέπει να τα θίξουμε προτού φτάσουμε στο θέμα των πιθανών εφαρμογών. Πώς θα κατασκευάσουμε δίσκους που ανακλούν τα μόρια ελαστικά από τη μια πλευρά και πλαστικά από την άλλη; Ακριβώς εδώ η εφευρέτριά μας έπρεπε να επιδείξει ιδιαίτερη προσοχή. Εύκολα μπορεί κανείς να παρασυρθεί προσπαθώντας να κατασκευάσει μια αδύνατη συσκευή, ακριβώς όπως όσοι επιχείρησαν παλαιότερα να παραγάγουν ενέργεια εκ του μηδενός.

Ας εξετάσουμε λοιπόν τον «θερμικό κινητήρα» μας από τεχνική άποψη. Η ανακλαστικότητα της ελαστικής επιφάνειας, που θυμίζει κάτοπτρο, τη διατηρεί σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον αέριο, έτσι ώστε τα μόρια να ανακλώνται με ταχύτητες ίσου μέτρου με εκείνες που είχαν κατά την πρόσπτωσή τους στο δίσκο. Το πρόβλημα έγκειται στην άλλη πλευρά του δίσκου, η οποία πρέπει να ανακλά πλαστικά τα μόρια.

Πώς, λοιπόν, κάνουμε την επιφάνεια «πλαστική» για τα προσπίπτοντα μόρια του αερίου; Μπορούμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους. Σύμφωνα με τον πρώτο (μηχανικό), η επιφάνεια πρέπει να γίνει πορώδης: Τα μόρια που πλησιάζουν τους πόρους προσκρούουν στα τελείως ανακλαστικά τοιχώματά τους και εισδύουν βαθύτερα στους πόρους. Κάθε πόρος καμπυλώνεται βαθμιαία, ώσπου η τελική του διεύθυνση να γίνει ορθογώνια με την αρχική, και εκβάλλει τα μόρια από την παράπλευρη επιφάνεια του δίσκου (Σχήμα 2).

Ο εναλλακτικός τρόπος θα μπορούσε να ονομαστεί θερμικός. Ένα ορισμένο υγρό (υγρό άζωτο ή ήλιο, ας πούμε) διατηρεί την «πλαστική» επιφάνεια ψυχρή. Εφόσον η μέση ενέργεια των μορίων που ανακλώνται από μια επιφάνεια καθορίζεται από τη θερμοκρασία της, στην περίπτωσή μας η ενέργεια των μορίων που απομακρύνονται θα είναι πολύ μικρότερη από εκείνη των προσπίπτοντων μορίων.

Ποια μέθοδος ενδείκνυται ως η καλύτερη; Εκ πρώτης όψεως, η δεύτερη φαίνεται απλούστερη και οικονομικότερη. Η αναπλήρωση του ψυκτικού υγρού δεν θα παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα. Για να συντηρήσουμε την περιστροφή της συσκευής, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι η θερμοκρασία των τοιχωμάτων του δοχείου δεν θα πέσει πολύ χαμηλά (έτσι ώστε να διατηρείται η θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στη συσκευή και το περιβάλλον της).

Μόλις περιγράψαμε μια συσκευή που θα μπορούσε να προσφέρει στην ανθρωπότητα τεράστιες ποσότητες φθηνής ενέργειας. Πράγματι, θα ήταν δυνατόν να ποντίσουμε ένα δισεκατομμύριο τέτοιες μηχανές στον οκεανό και να αντλούμε ενέργεια από αυτόν. Οι ενεργειακές απώλειες των ωκεανών θα αναπληρώνονταν από την ηλιακή ακτινοβολία. Παραμένει ασαφές γιατί είναι αδύνατη η λειτουργία τέτοιων μηχανών (που ονομάζονται δαίμονες του Maxwell). Η εποπτημονική απάντηση σε παρεμφερή σχέδια είναι πάντοτε ένα κατηγορηματικό «όχι».

Προ πολλού, οι επιστήμονες κατανόησαν ότι τέτοιοι «θερμικοί κινητήρες», σχεδιασμένοι για να λειτουργούν με μία μόνο δεξαμενή θερμότητας, κατ' αρχήν δεν διαφέρουν από τα κλασικά αεικίνητα· μάλιστα, καθιερώθηκε γι' αυτά ο όρος αεικίνητα δεύτερου είδους. Οι προσπάθειες για την κατασκευή τέτοιων μηχανών ίσως δεν υστερούν αριθμητικά από όσες αποσκοπούσαν στην επινόηση αεικίνητων πρώτου είδους. Όλες, όμως, απέβησαν άκαρπες. Φυσικά, αυτή η αποτυχία δεν ήταν συμπτωματική: ο Δεύτερος Νόμος της θερμοδυναμικής όρθωνε ανυπέρβλητα εμπόδια στις προσπάθειες των επίδοξων εφευρετών. Ο νόμος αυτός, σε μια διατύπωσή του η οποία προτάθηκε από τους Kelvin και Planck, δηλώνει ότι: «Δεν είναι δυνατή κυκλική διεργασία συστήματος με μοναδικό αποτέλεσμα την αφαίρεση θερμότητας από μια δεξαμενή θερμότητας και τη μετατροπή της σε ισοδύναμη ποσότητα έργου.» Με άλλα λόγια, ουδεμία δυνατή κυκλική μηχανή μπορεί να λειτουργήσει χρη-

σιμοποιώντας ενέργεια από μία μοναδική δεξαμενή θερμότητας. Συνέπος, η μηχανική μέθοδος για την κατασκευή της «πλαστικής» επιφάνειας είναι εξαρχής καταδικασμένη σε αποτυχία. (Γιατί, αλήθεια;)

Αντιθέτως, η θερμική μέθοδος ουδόλως παραβιάζει τον Δεύτερο Νόμο της θερμοδυναμικής. Μια μηχανή σχεδιασμένη σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο περιέχει εκτός από τη θερμή δεξαμενή (τα τοιχώματα του δοχείου) και μια ψυχρή δεξαμενή (το υγρό άζωτο). Ωστόσο, κατά πάσα πιθανότητα ο συντελεστής απόδοσης μιας τέτοιας μηχανής δεν θα ήταν υψηλός. Αλιμονο, δεν υπάρχει αιώνια και ελεύθερη ενέργεια. ◻

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- A. Savin, «Μαθηματικά και αέναντι κίνηση», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1994.
- A. Buzdin, «Δύο καθημερινά φαινόμενα ζητούν ερμηνεία», Μάρτιος/Απρίλιος 1997.

Συνέχεια από τη σελ. 10 ⇨

γνωρίζουμε την παρούσα στιγμή αποτελούν απλώς συνέπειες τούτης της βασικής αρχής. Όλοι οι επιμέρους νόμοι και κανονικότητες της φύσης συνενώνονται σε έναν μοναδικό βασικό νόμο: Κάπου στο Σύμπαν πρέπει να εμφανιστεί το ανθρώπινο. ◻

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- G. Myakishev, «Το “πλέον αδρανειακό” σύστημα αναφοράς», Μάιος/Ιούνιος 1995.
- W. Hiscock, «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες!», Μάιος/Ιούνιος 1995.
- Paul Davies, «Τι συνέβη πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη;», Ιούλιος/Αύγουστος 1996.
- S. Silich, «Ένα άστρο γεννιέται», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1998.
- I.D. Novikov, «Το θερμοδυναμικό Σύμπαν», Μάιος/Ιούνιος 1998.

ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

Το φυσικομαθηματικό
βιβλιοπωλείο
Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,
τηλ.: 3628492

Το κβαντικό άλμα του Bohr

Από το μοντέλο του σταφιδόψωμου στη σύγχρονη κβαντική θεωρία

A. Korzhuyev

Ο 20ΟΣ ΑΙΩΝΑΣ ΠΛΗΣΙΑΖΕΙ ΣΤΟ Τέλος του. Πώς θα τον θυμούνται άραγε οι μεταγενέστεροι — ως την εποχή της ηλεκτρονικής, των διαστημικών πτήσεων ή των υπολογιστών; Αδυνατούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα την απάντηση: ουδείς αμφιβάλλει, ωστόσο, πώς, όταν οι φυσικοί του 21ου αιώνα θα αποτιμούν την κληρονομιά του παρελθόντος, θα εξαίρουν τα επιτεύγματα των προδρόμων τους στην κβαντική θεωρία, η οποία συγκροτήθηκε ως γνήσιο τέκνο των ανακαλύψεων που έριξαν φως τόσο στη δομή των ατόμων όσο και στις αρχές που διέπουν τη «ζωή» τους.

Εμβρυώδης ατομική θεωρία

Μολονότι οι αρχαίοι φιλόσοφοι μάντεψαν την ατομική σύσταση της ύλης, η χρονική απόσταση που μας χωρίζει από την αληθινή πειραματική θεμελίωση της συγκεκριμένης αντίληψης δεν είναι και τόσο μεγάλη. Ας αρχίσουμε λοιπόν την ιστορία μας από τη φασματοσκοπία. Το 1859 ο Gustav Kirchhoff και ο Robert Bunsen ανέπτυξαν τη μέθοδο της φασματοσκοπικής ανάλυσης και εξήγησαν, μεταξύ άλλων φαινομένων, την προέλευση των τεσσάρων σκοτεινών γραμμών απορρόφησης στο ηλιακό φάσμα. Αυτές τις γραμμές τις είχε ανακαλύψει ο Joseph von Fraunhofer ήδη από το 1814· τώρα, 45 χρόνια αργότερα, αποδεικνύόταν ότι συνέπιπταν, με αρκετά μεγάλη ακρίβεια, με τις λαμπρές φωτεινές

γραμμές που εξέπεμπαν υπό κανονικές εργαστηριακές συνθήκες οι ατμοί και τα θερμά αέρια διαφόρων ουσιών.

Το 1885 ο Johann Balmer δημοσίευσε μια εργασία όπου διαπιστώνταν ότι τα μήκη κύματος αυτών των γραμμών περιγράφονταν με ικανοποιητική ακρίβεια από τον τύπο

$$\lambda = k \frac{m^2}{m^2 - 2^2},$$

όπου $m = 3, 4, 5$ και 6 , ενώ το k παριστάνει κάποια σταθερά. Διαπιστώνταν επίσης ότι οι συγκεκριμένες γραμμές συνδέονταν με το υδρογόνο. Δεν άργησαν να ανακαλυφθούν άλλες πέντε γραμμές για το υδρογόνο, μόνο που αυτές ανήκαν στην υπεριάδη περιοχή του ηλιακού φάσματος απορρόφησης. Οι αρτιανακαλυφθείσες γραμμές αντιστοιχούσαν σε μήκη κύματος που επίσης περιγράφονταν με ικανοποιητική ακρίβεια από τον τύπο του Balmer.

Το 1890 ο Johannes Rydberg προτείνει μια τροποποιημένη γραφή του ίδιου τύπου:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Ο συντελεστής $4/k$, για τον οποίο καθιερώθηκε έκτοτε ο συμβολισμός R , ονομάστηκε σταθερά του Rydberg· σύμφωνα με τα σύγχρονα πειραματικά δεδομένα, η τιμή του είναι $R = 10.973.731,77 \text{ m}^{-1}$.

Εν συνεχείᾳ, ανακαλύφθηκαν ακόμη τρεις σειρές γραμμών, που ανήκαν στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος του υδρογόνου και οι οπίσης υπάκουαν στον ίδιο νόμο. Σύντομα κατέστη σαφές ότι και οι πέντε σειρές των φασματικών γραμμών μπορούσαν να περιγραφούν από έναν μοναδικό τύπο Balmer-Rydberg:

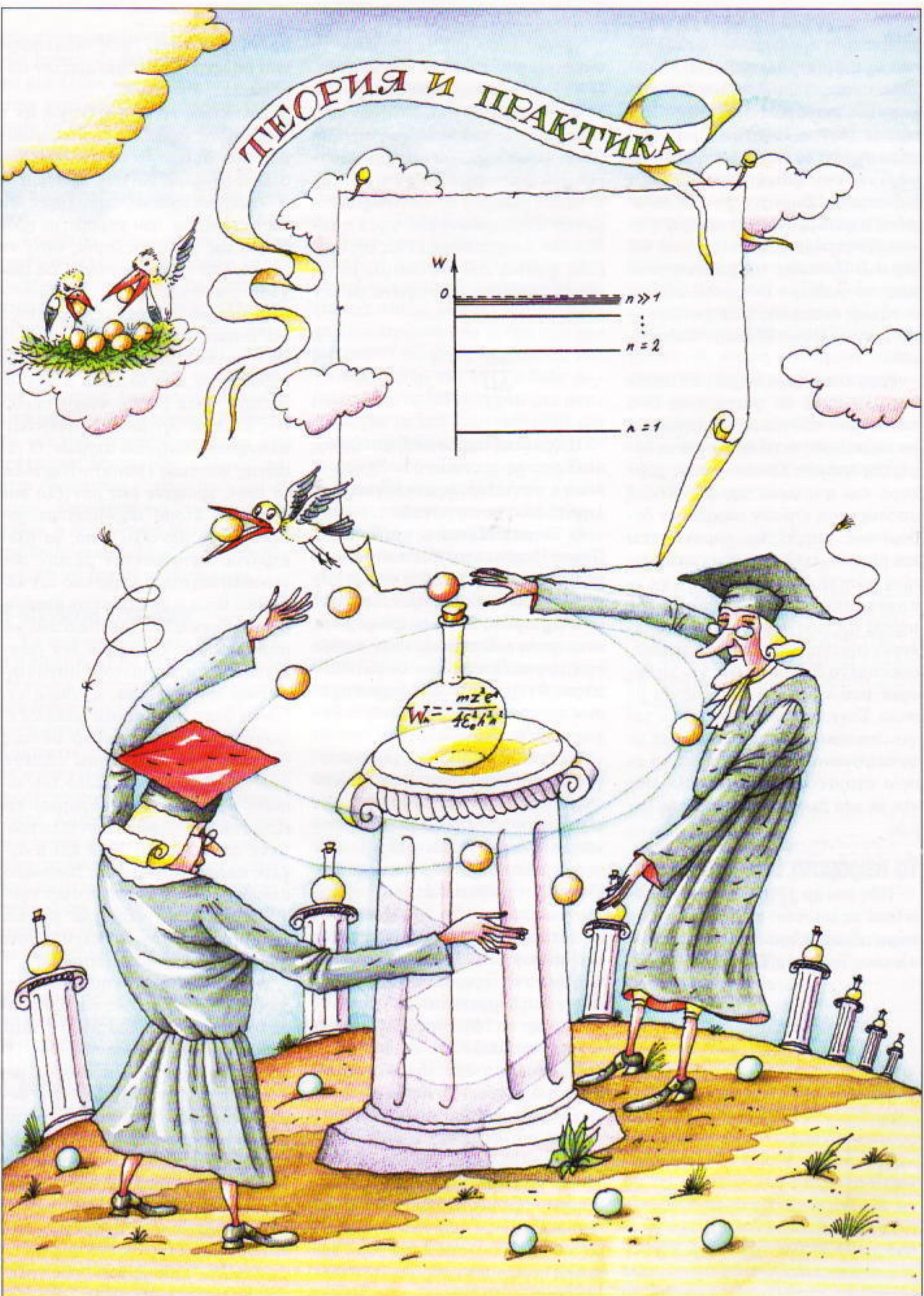
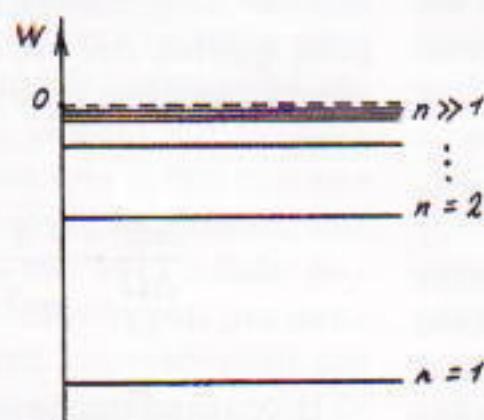
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

όπου ο ακέραιος $n = 1, 2, 3, 4$ και 5 χαρακτηρίζει μια συγκεκριμένη σειρά, ενώ σε κάθε σειρά ο ακέραιος m λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του n .

Παρά ταύτα, η θριαμβευτική επιτυχία της μαθηματικής περιγραφής ουδόλως συνεπαγόταν και τη σύσταση μιας θεμελιώδους φυσικής θεωρίας για τις φασματικές γραμμές. Ειδικότερα, το δεσπόζον ατομικό μνημένο του σερ J.J. Thomson, το οποίο περιέγραφε την ύλη ως θετικά φορτισμένο ρευστό εντός του οποίου κατανέμονταν τυχαία τα αρνητικά ηλεκτρόνια όπως «οι σταφίδες στο σταφιδόψωμο», δεν εξηγούσε αυτά τα αποτελέσματα.

Στις αρχές του 20ού αιώνα αναφάνηκαν πρόσθετες ενδείξεις που ενίσχυαν την εικασία ότι η ύλη έχει περίπλοκη δομή. Ο Max Planck, το 1900, εισηγήθηκε την ιδέα της κβαντικής (διακριτής) φύσης της εκπομπής και της διάδοσης του φωτός. Αυτή η καινοφανής έννοια του ήταν

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА



απαραίτητη προκειμένου να εξηγήσει τη θερμική ακτινοβολία. Παρεμπιπόντως, η υπόθεσή του δεν στερούνταν πειραματικής βάσης. Ήδη από το 1887, ο Heinrich Hertz είχε παρατηρήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, ένα φαινόμενο ουσιώδως «κβαντικό». Στα αινιγματικά δεδομένα περιλαμβάνονταν ακόμη η ανακάλυψη του ηλεκτρονίου από τον σερ J.J. Thomson, της ραδιενέργειας από τον Antoine Becquerel και της θερμικής εκπομπής ηλεκτρονίων από τον σερ Owen Willans Richardson.

Ποιο κοινό χαρακτηριστικό συνέδεε όλα αυτά τα φαινόμενα; Όλα τούτα ήταν αδύνατον να εξηγηθούν με τις παλαιές αντιλήψεις για τη δομή του ατόμου. Ωστόσο, όπως μαρτυρά και η ιστορία της φυσικής, η συσσώρευση τέτοιων παράδοξων δεδομένων μπορεί να παρατείνεται επί μακρόν, έως ότου πραγματοποιηθεί κάποιο ποιοτικό άλμα, ένα ιστορικό γεγονός που σημαδεύει την πορεία της επιστήμης εκδίδοντας τελεσίδικη επιμηγορία είτε για τα συσσωρευμένα δεδομένα είτε για τη θεωρία που εμφανώς αντιφέσκει με αυτά. Στην ατομική φυσική ένα τέτοιο ποιοτικό άλμα συντελέστηκε με τα πειράματα του Rutherford, τα οποία έθεσαν τον ακρογωνιαίο λίθο για τη νέα θεωρία της ατομικής δομής.

Τα πειράματα του Rutherford

Ήδη από το 1906 ο Ernest Rutherford μελετούσε τη διέλευση των σωματιδίων άλφα μέσω διαφόρων υλικών. Το Δεκέμβριο του 1910 εξή-

γαγε τον τύπο που περιέγραφε τη σκέδαση των εν λόγω σωματιδίων. Ο συγκεκριμένος τύπος έδειχνε ότι το πλήθος ΔN των σωματιδίων που εκπέμπονται από δεδομένη πηγή (η οποία χαρακτηρίζεται από την καθορισμένη πυκνότητα ροής της και την κινητική ενέργεια των ακτινοβολούμενων σωματιδίων) και, αφού σκεδαστούν ανιχνεύονται εντός της στερεάς γωνίας $\Delta\Omega$, συνδέεται με τη γωνία σκέδασης θ σύμφωνα με τον τύπο

$$\frac{\Delta N}{\Delta\Omega} \propto \frac{1}{\eta p^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 1, όπου ο συντελεστής αναλογίας έχει ληφθεί ίσος με τη μονάδα.

Ο Ernest Marsden και ο Hans Geiger, βοηθοί του Rutherford, πέρασαν πολλές εβδομάδες σε απόλυτο σκοτάδι καταγράφοντας τους σπινθηρισμούς πάνω σε φθορίζοντα πετάσματα που υπεδείκνυαν τις θέσεις των σκεδασθέντων σωματιδίων άλφα. Ανίχνευσαν και χαρακτηρίσαν περίπου δύο εκατομμύρια ξεχωριστές συγκρούσεις!

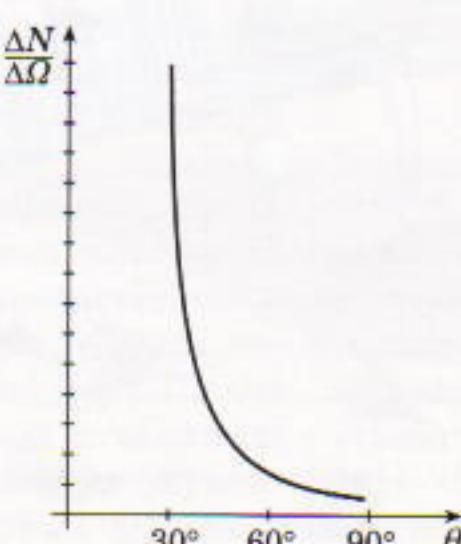
Τα αποτελέσματα υπήρξαν επαναστατικά. Αποδείχτηκε ότι μερικά σωματίδια (σχετικά ολιγάριθμα) εκτρέπονταν κατά πολύ μεγάλες γωνίες, οι οποίες ενίστε υπερέβαιναν ακόμη και τις 90° . Το μοντέλο του Thomson προέβλεπε ότι κάτι τέτοιο ήταν αδύνατον. Τα νέα δεδομένα κατέδειξαν πέραν πάσης αμφιβολίας πως το μοντέλο του σταφιδόψωμου έπρεπε να απορριφθεί. Ο Rutherford έδωσε στη δημοσιότητα τα αποτελέσματά του το Μάιο του 1911 σε μια εργασία με τίτλο «Η σκέδαση των ακτινών άλφα από την ύλη και η δομή του ατόμου», η οποία σηματοδοτεί τη γένεση του πυρηνικού μοντέλου του ατόμου και όπου αναλύθηκε ολόπλευρα η ριζική αντίθεσή του με το μοντέλο του Thomson. Σύμφωνα με τον Rutherford, το άτομο έμοιαζε με πλανητικό σύστημα απαρτιζόταν από έναν βαρύ και θετικά φορτισμένο πυρήνα (τον «Ηλίο» του) και από αρνητικά φορτι-

σμένα ηλεκτρόνια (τους «πλανήτες») που περιφέρονταν γύρω από τον πυρήνα.

Διδακτική είναι η ερώτηση αν ο Rutherford υπήρξε ο πρώτος φυσικός που απέρριψε το μοντέλο του σταφιδόψωμου. Κανείς, άραγε, δεν συνειδητοίστησε τις περιπλοκές και τις αντιφάσεις που έκρυψε το πρόβλημα της ατομικής δομής, ώστε να επιχειρήσει να τροποποιήσει τις τρέχουσες αντιλήψεις;

Η ιστορία της φυσικής μαρτυρά ότι τέτοιες προσπάθειες έγιναν όντως πολύ νωρίτερα από το 1911. Για παράδειγμα, ήδη το 1901, ο γάλλος φυσικός Jean Perrin έδωσε διαλέξεις με θέμα την πιθανή πυρηνική-πλανητική δομή των ατόμων. Ο ιαπωνας φυσικός Hantaro Nagaoka, το 1904, πρότεινε ένα μοντέλο που ήθελε το άτομο παρόμοιο με τον Κρόνο· στο μοντέλο αυτό, τα ηλεκτρόνια περιφέρονταν με την ίδια γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον κεντρικό θετικά φορτισμένο πυρήνα, σχηματίζοντας ένα δακτύλιο που τον περικύκλωνε. Η ιστορία δεν διευκρινίζει αν ο Rutherford συνάντησε ποτέ τον Nagaoka, ο οποίος ταξίδεψε στην Ευρώπη και μάλιστα επικέφτηκε το Μάντσεστερ· πάντως, το άρθρο του Rutherford περιέχει μιαν αναφορά στο μοντέλο του ιαπωνα φυσικού. Ένα παρόμοιο και εξαιρετικά ενδιαφέρον μοντέλο πρότεινε το 1911 ή το 1912 και ο άγγλος αστροφυσικός John Nicholson, ο οποίος το κατασκεύασε στην προσπάθειά του να εξηγήσει μερικές γραμμές άγνωστης προέλευσης στα φάσματα των νεφελωμάτων.

Αν και ο κατάλογος αυτός θα μπορούσε να συνεχιστεί, ας επιστρέψουμε στα πειράματα του Rutherford, καθώς και στη δημοσίευσή του. Όπως διαφαίνεται από μερικές διατύπωσεις σ' αυτήν, ο Rutherford δεν μπορούσε παρά να αντιλαμβάνεται πως το μοντέλο του ερχόταν σε σύγκρουση όχι μόνο με το μοντέλο του Thomson, αλλά και με την κλασική ηλεκτροδυναμική του Maxwell. Ο λόγος είναι μάλλον προφανής. Ένα συνεχώς επιταχυνόμενο φορτίο ακτινοβολεί, επίσης συνεχώς, ηλεκτρομαγνητική ενέργεια. Συνεπώς,



Σχήμα 1

στο πλανητικό μοντέλο, τα ηλεκτρόνια πρέπει να διαγράφουν ταχύτατα μια έλικα και να πέφτουν πάνω στον πυρήνα, ενώ ο «χρόνος ζωής» τους (η διάρκεια της πτώσης) είναι βραχύτατος, της τάξης των 10^{-8} s. Πώς θα μπορούσε λοιπόν να εξηγηθεί η σταθερότητα ενός τέτοιου ατόμου;

Επιπλέον, σύμφωνα με τις κλασικές αντιλήψεις, το φάσμα εκπομπής των ατόμων δεν θα έπρεπε να αποτελείται από γραμμές, αλλά από συνεχείς ταινίες συχνοτήτων, επειδή οι συχνότητες περιφοράς των ηλεκτρονίων δεν παραμένουν σταθερές. Συνεπώς, το πυρηνικό-πλανητικό μοντέλο υπογράμμιζε δραματικά τον ανταγωνισμό ανάμεσα στις τρέχουσες θεωρητικές απόψεις και στην ολοφάνερη σταθερότητα του ατόμου. Επρόκειτο για ένα γρίφο που ο ίδιος ο Rutherford αδυνατούσε να τον διαλευκάνει. Παρ' όλα αυτά, δεν άργησε να βρεθεί κάποια λύση.

Η υπόθεση του Bohr

Τα προμηνύματα που έδειχναν ότι ο Niels Bohr θα αναδεικνύοταν σε εξέχουσα επιστημονική φυσιογνωμία ήρθαν νωρίς. Το 1905, όντας ακόμη φοιτητής στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, μελέτησε την ταλάντωση υγρών πιδάκων με σκοπό να μετρήσει το συντελεστή επιφανειακής τάσης. Αυτή η εργασία του απέφερε ένα χρυσό μετάλλιο. Αφού ολοκλήρωσε τη διατριβή του για το δίπλωμα «μάστερ», η οποία είχε ως αντικείμενο την ηλεκτρονική θεωρία των μετάλλων (1909), ο Bohr έστρεψε τις προσπάθειές του στο διδακτορικό του δίπλωμα. Το 1911 απέδειξε ότι ήταν αδύνατον να οικοδομηθεί μια θεωρία για τις μαγνητικές ιδιότητες της ύλης αποκλειστικά στη βάση των κλασικών απόψεων.

Αφού υποστήριξε τη διδακτορική διατριβή του, μετέβη στο Καίμπριτζ για να εργαστεί επί ένα έτος στο εργαστήριο του Thomson. Εκεί, τον Οκτώβριο του 1911, είχε την ευκαιρία να συμμετάσχει στην παραδοσιακή συγκέντρωση του εργαστηρίου Cavendish μαζί με τον Rutherford, ο οποίος και τον προσκάλεσε να εργαστεί στο εργαστήριό του στο

Μάντσεστερ. Ήταν ακριβώς η περίοδος (από την άνοιξη ώς το φθινόπωρο του 1912) κατά την οποία ο Bohr κατέληξε στο συμπέρασμα πως μόνο η εξωτική κβαντική θεωρία του Max Planck θα προσέφερε το κλειδί για την άρση των αντιφάσεων ανάμεσα στο πυρηνικό-πλανητικό μοντέλο και την κλασική ηλεκτροδυναμική.

Η επιστροφή του Bohr στην Κοπεγχάγη σημάδεψε την αρχή μιας περιόδου εντατικής προσωπικής εργασίας, και το Μάρτιο του 1913 είχε ολοκληρώσει τρία άρθρα που περιέγραφαν τις αρχές της θεωρίας του. Το Σεπτέμβριο του 1913 ο Bohr παρουσίασε στο Μπίρμιγχαμ μια αναφορά για τα νέα αποτελέσματά του —στη συνεδρίαση της Βρετανικής Ένωσης για την Προαγωγή της Επιστήμης. Το ακροατήριο ήταν εγνωσμένου κύρους, αυστηρό και απαιτητικό. Στη σύνθεσή του περιλαμβάνονταν τα ιερά τέρατα της κλασικής φυσικής: o Rayleigh, o Jeans, o Lorentz και o Thomson. Οι πατριάρχες της επιστήμης αντέδρασαν μάλλον ψυχρά στην αναφορά του νεαρού Bohr. Ωστόσο, ο Rayleigh παρατήρησε πικρόχολα ότι δεν είχε νόημα να καλούνται εξηντάρηδες να κρίνουν τις μοντέρνες ιδέες. Η κατάσταση βελτιώθηκε μόνο αφού ο Bohr δημοσίευσε αρκετές εργασίες σε επιστημονικά περιοδικά. Ο σερ James Jeans ήταν ο πρώτος που υποστήριξε τις ιδέες του Bohr: «Ο δρ Bohr μάς έδωσε την ευφυέστερη, γονιμότερη και, υποθέτω, την πειστικότερη εξήγηση για τις σχέσεις που παρατηρούνται στις φασματικές γραμμές.»

Όπως επισημάναμε, η ιδέα του Planck σχετικά με τη διακριτή (κβαντική) φύση της ενέργειας των ατόμων έγινε αποδεκτή στα μέσα της δεκαετίας του 1920 μαζί με την αντίληψη του Αϊνστάιν για την κβαντική δομή των ατόμων. Ποια ήταν η συνεισφορά του Bohr; Πρώτα από όλα, προώθησε την ιδέα ότι πρέπει να απορριφθεί το κύριο συμπέρασμα της κλασικής ηλεκτροδυναμικής περί του συνεχούς χαρακτήρα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπουν τα ηλεκτρόνια καθώς περιφέρονται γύρω από τον ατομικό πυρήνα. Εις αντικατάστασιν αυτής

της παρωχημένης αντίληψης, ο Bohr πρότεινε την ύπαρξη στάσιμων καταστάσεων του ατόμου, στις οποίες δεν ακτινοβολεί ενέργεια. Επιπρόσθια, ο Bohr εισήγαγε το αξίωμα ότι είναι δυνατές οι μεταβάσεις μεταξύ στάσιμων καταστάσεων, οι οποίες συνοδεύονται από εκπομπή ή απορρόφηση ενέργειας. Αναμφίβολα, κανείς χρειάζεται μεγάλο επιστημονικό θάρρος για να αποτολμήσει τέτοια βήματα —και ο Niels Bohr ήταν αντάξιος του έργου που ανέλαβε.

Οι υποθέσεις του Bohr έλαβαν αργότερα τη μορφή των τριών πασίγνωστων αξιωμάτων που παρέχουν τους κανόνες για την κβάντωση των παραμέτρων του ηλεκτρονίου στα άτομα. Σύμφωνα με αυτά, η κβαντική φύση της στροφοφορμής περιγράφεται από τη σχέση

$$mr = \frac{h}{2\pi} n,$$

όπου h είναι η σταθερά του Planck. Αν συνδυάσουμε την ανωτέρω σχέση με τον τύπο για την ενέργεια ενός ηλεκτρονίου που εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από πυρήνα ατομικού αριθμού z

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

και με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

καταλήγουμε στον περίφημο τύπο του Bohr για την ενέργεια ενός ηλεκτρονίου σε ένα άτομο:

$$E_n = -\frac{mz^2e^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

Αυτή η ενέργεια είναι κβαντωμένη και λαμβάνει ένα σύνολο διακριτών τιμών που αντιστοιχούν στους ακεραίους $n = 1, 2, \dots$. Ο Bohr έγραψε ότι «οι διάφοροι αριθμοί n αντιστοιχούν σε σειρά τιμών E_n , οι οποίες σχετίζονται με τις διάφορες διατάξεις του συστήματος όπου δεν εκπέμπεται ακτινοβολία, οπότε και θα μείνουν αμετάβλητες ώσπου το

σύστημα να υποστεί κάποια εξωτερική διαταραχή».

Είναι ενδιαφέρον πως, το 1913, ο Bohr ακολούθησε τη συμβουλή ενός συναδέλφου και συνέκρινε τον τύπο του με την εξίσωση των Balmer και Rydberg (αγνοούσε αυτό το επίτευγμα της φυσικής των φασμάτων). Ο Bohr υπέθεσε πως οι φασματικοί όροι R/n^2 και R/m^2 ήταν ανάλογοι προς την ενέργεια του ηλεκτρονίου σε διάφορες φασματικές καταστάσεις. Το επόμενο βήμα συνίστατο στην υιοθέτηση της παραδοχής ότι η μετάβαση του ατόμου από τη μια κατάσταση στην άλλη συνοδευόταν από την εκπομπή ενός μοναδικού ενεργειακού κβάντου, από όπου και συνάγεται αμέσως ο περιφημός κανόνας για τις φασματικές συχνότητες (το τρίτο αξίωμα του Bohr):

$$hv_{n_1 \rightarrow n_2} = E_{n_1} - E_{n_2},$$

$$v_{n_1 \rightarrow n_2} = \frac{mz^2e^4}{4\epsilon_0^2h^3} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right).$$

Τούτη η σύμπτωση με τον τύπο Balmer-Rydberg ήταν ιδεώδης, διότι επιβεβαίωνε τη συμφωνία της θεωρίας του με τα πειραματικά δεδομένα. Σύμφωνα με τη μαρτυρία του George Hevesy, όταν ο Αϊνστάιν πληροφορήθηκε την εντυπωσιακή επιβεβαίωση της θεωρίας του Bohr, έμεινε κατάπληκτος από το γεγονός ότι η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν εξαρτιόταν από τη συχνότητα περιφοράς του ηλεκτρονίου στο άτομο: «Τα μεγάλα μάτια του Αϊνστάιν άνοιξαν ακόμη περισσότερο και είπε: «Εν τοιαύτῃ περιπτώσει, πρόκειται για μια από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις στην ιστορία!»»

Στην εισαγωγή του στην εργασία «Δέσμευση των ηλεκτρονίων από έναν θετικά φορτισμένο πυρήνα», ο Bohr έγραψε σχετικά με τον θεμελιώδη ρόλο που διαδραμάτιζε η σταθερά του Planck στη θεωρία του: «Μόνον η ύπαρξη του κβάντου της δράσης h εμποδίζει τη συγχώνευση των ηλεκτρονίων με τον πυρήνα και τη δημιουργία ενός ουδέτερου σωματιδίου ουσιαστικά απείρως μικρής μάζας ... Από μόνο του αυτό το γεγονός παρέχει μια εις βάθος εξήγη-

ση για τις αξιοσημείωτες σχέσεις ανάμεσα στις φυσικές και τις χημικές ιδιότητες των στοιχείων, οι οποίες εκδηλώνονται στον περιοδικό πίνακα του Mendeleev.»

Η αρχή της αντιστοιχίας

Παρ' ότι απέρριψε την κλασική ηλεκτροδυναμική, ο Bohr προσπάθησε πάντα να ανακαλύψει μια γέφυρα ανάμεσα στη νέα και την παλαιά θεωρία: έτσι, το 1912 διατύπωσε την περίφημη αρχή της αντιστοιχίας. Σύμφωνα με την εν λόγω αρχή, σε ορισμένες οριακές περιπτώσεις μια φυσική θεωρία που βασίζεται στη γενίκευση και την περαιτέρω ανάπτυξη κάποιας κλασικής θεωρίας έπρεπε να οδηγεί σε αποτελέσματα ταυτόσημα με εκείνα που παράγει η παλαιότερη θεωρία.

Προκειμένου για την ατομική θεωρία του Bohr, η αρχή της αντιστοιχίας έπρεπε να ερμηνευθεί με τον εξής τρόπο: Για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς n , τα αποτελέσματα της κβαντικής θεωρίας θα έπρεπε να συμπίπτουν ακριβώς με εκείνα που δίνει η κλασική προσέγγιση. Για παράδειγμα, για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς, οι «αποστάσεις» που χωρίζουν δύο διαδοχικά ενεργειακά επίπεδα στο άτομο του υδρογόνου είναι πολύ μικρές (Σχήμα 2), με αποτέλεσμα αυτά τα επίπεδα να γίνονται σχεδόν συνεχή. Καταλήγουμε έτσι σε ένα ενεργειακό φάσμα ουσιαστικά ίδιο με το συνεχές ενεργειακό φάσμα της κλασικής φυσικής. Στο άρθρο «Για το φάσμα του υδρογόνου», ο Bohr υπολόγισε τη σταθερά του Rydberg χρησιμοποιώντας την αρχή της αντιστοιχίας. Προ-

σπαθήστε να επαναλάβετε μόνοι σας την πορεία των σκέψεών του.

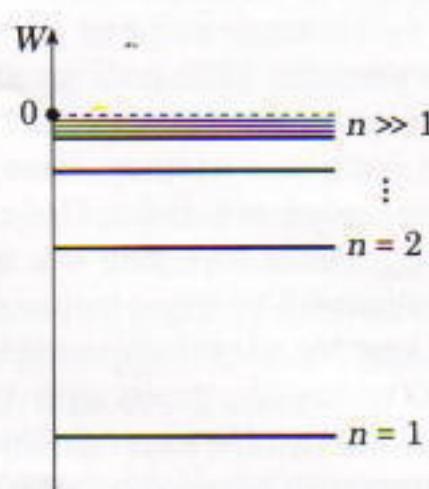
Θεωρία και πείραμα

Μπορούν άραγε κάποια πειραματικά δεδομένα να επρρώσουν ένα θεωρητικό συμπέρασμα; Την αντιτηση τη δίνει μια ρήση του Αϊνστάιν: «Ποτέ ένα πείραμα δεν θα πει «ναι» σε μια θεωρία. Στην καλύτερη περίπτωση λέει «ίσως», ως επί το πλείστον όμως ακούμε το κατηγορηματικό «όχι».» Συνεπώς, η συμφωνία ενός πειράματος με μια θεωρία δεν σημαίνει τίποτε περισσότερο από ένα «δεν αποκλείεται», αν και η διαφωνία συνιστά αρνητική επιμηγορία. Το να σκεφτόμαστε, λοιπόν, πόσα και τι είδους πειράματα πρέπει να εκτελεστούν για να ελεγχθεί μια θεωρία —όσο περισσότερα τα πειράματα τόσο μεγαλύτερη η εμπιστοσύνη μας στη θεωρία— συνιστά πρακτική όχι καθ' όλα ασφαλή. Ανά πάσα στιγμή μπορεί να ανακαλυφθεί ένα νέο φαινόμενο που αντιφέσκει προς την επικρατούσα θεωρία. Εάν το εν λόγω φαινόμενο δεν μπορεί να αποδοθεί σε κάποιο λάθος στο σχεδιασμό ή την εκτέλεση του πειράματος, τότε θα έπρεπε κανείς να διερωτηθεί σοβαρά μήπως η θεωρία δεν είναι πάντοτε ορθή ή ακόμη και μήπως είναι εντελώς εσφαλμένη.

Παρά τα πολυάριθμα πειράματα που συνηγόρησαν υπέρ της εγκυρότητάς της, η θεωρία του Bohr αποδείχτηκε ατελής. Τωόντι, η συγκριμένη θεωρία αδυνατούσε να εξηγήσει τις διαφορές έντασης που παρουσιάζαν οι φασματικές γραμμές, καθώς και μερικές παραμέτρους του ατόμου του ήλιου, το διπλασιασμό των φασματικών γραμμών και πολλά άλλα φαινόμενα. Γινόταν όλο και σαφέστερο ότι υπέβοσκε κάποια εγγενής αντίφαση στις προσπάθειες να συνδυαστούν δύο ασυμβίβαστα στοιχεία —η κλασική φυσική και τα κβαντικά αξιώματα— σε ολόκληρη την έκταση των φυσικών φαινομένων και όχι μόνο στις οριακές περιπτώσεις.

Τα έτη 1926 και 1927, οι Erwin

Η συνέχεια στη σελ. 72 ↵



Σχήμα 2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M146

Η μορφή της δεδομένης παράστασης μας θυμίζει τον τύπο για την εφαπτόμενη του αθροισμάτος δύο γωνιών. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι γωνίες a_1, a_2, \dots, a_6 οι εφαπτόμενες των οποίων είναι ίσες με τους δεδομένους αριθμούς. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $-\pi/2 < a_1 < a_2 < \dots < a_6 < \pi/2 < \pi + a_1$. Τα σημεία a_2, \dots, a_6 διαιρούν το τμήμα $[a_1, \pi + a_1]$ σε έξι τμήματα. Ένα τουλάχιστον από αυτά έχει μήκος το πολύ ίσο με $\pi/6$. Αν, για παράδειγμα, $a_2 - a_1 \leq \pi/6$, η επιθυμητή ανισότητα προκύπτει αν θέσουμε $x = \text{εφ}a_2$ και $y = \text{εφ}a_1$, διότι

$$\frac{x-y}{1+xy} = \text{εφ}(a_2 - a_1).$$

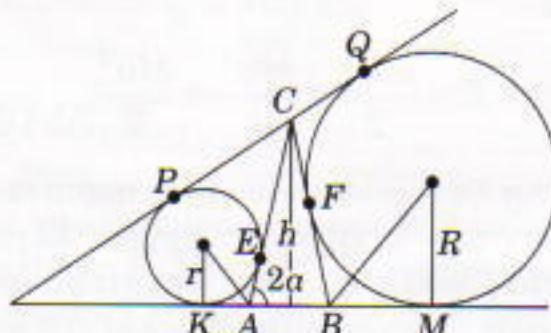
Αν το μοναδικό τμήμα που δεν υπερβαίνει το $\pi/6$ είναι το τελευταίο (το $[a_6, \pi + a_1]$), μπορούμε να θέσουμε $x = \text{εφ}a_1, y = \text{εφ}a_2$ και να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\text{εφ}a_1 = \text{εφ}(\pi + a_1)$.

M147

Ας υποθέσουμε ότι ABC είναι το ζητούμενο τρίγωνο, h το ύψος που φέρουμε στη βάση του και $2a$ το μέτρο μιας από τις παρά τη βάση γωνίες του. Τότε έχουμε (Σχήμα 1):

$$\begin{aligned} KM &= KA + AB + BM \\ &= \text{εφ}a + 2h\text{σφ}2a + R\text{εφ}a, \end{aligned}$$

$$PQ = PC + CQ = CE + CF$$



Σχήμα 1

(διότι οι εφαπτόμενες που φέρουμε προς έναν κύκλο από ένα εξωτερικό του σημείο είναι ίσες)

$$\begin{aligned} &= CA - AE + CB - BF \\ &= 2CA - AE - BF \\ &= \frac{2h}{\eta\mu2a} - \text{εφ}a - R\text{εφ}a. \end{aligned}$$

Αφού $KM = PQ$, έχουμε

$$\begin{aligned} &\text{εφ}a + 2h\text{σφ}2a + R\text{εφ}a \\ &= \frac{2h}{\eta\mu2a} - \text{εφ}a - R\text{εφ}a. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$h\left(\frac{1}{\eta\mu2a} - \text{σφ}2a\right) = (R + r)\text{εφ}a.$$

Τώρα, αφού

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta\mu2a} - \text{σφ}2a &= \frac{1 - \sigma\text{υν}2a}{\eta\mu2a} \\ &= \frac{2\eta\mu^2a}{2\eta\mu\text{ασυν}a} = \text{εφ}a, \end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι $h = R + r$.

M148

Θα αποδείξουμε ότι οι κάθετες που φέρουμε επί των πλευρών του τριγώνου στα σημεία K, L και M συντρέχουν στο ίδιο σημείο. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει (Σχήμα 2α). Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο P στο εσωτερικό του τριγώνου που έχει ως κορυφές τα σημεία τομής των καθέτων. Διαπιστώνουμε ότι το τρίγωνό μας μπορεί να κάνει μια μικρή περιστροφή περί το P .

Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC και τα σημεία K, L, M στις πλευρές του τέτοια ώστε να ισχύει $AK : KB = 2 : 1$ και $BL : LC = 3 : 2$. Πρέπει να βρούμε σε ποια αναλογία διαιρεί το σημείο M την πλευρά AC αν οι κάθετες που φέρουμε επί των πλευρών του τριγώνου στα σημεία

K, L και M συντρέχουν. Ας ονομάσουμε αυτό το σημείο O (Σχήμα 2β). Έστω ότι το μήκος κάθε πλευράς του τριγώνου ABC ισούται με $15a$. Τότε, $AK = 10a, KB = 5a, BL = 9a$ και $LC = 6a$. Θέτουμε $AM = z$, οπότε $CM = 15a - z$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$AO^2 - AK^2 = OK^2 = BO^2 - BK^2.$$

Συνεπώς,

$$AO^2 - BO^2 = AK^2 - BK^2 = 75a^2.$$

Παρομοίως,

$$BO^2 - CO^2 = BL^2 - CL^2 = 45a^2$$

και

$$CO^2 - AO^2 = CM^2 - AM^2$$

$$= 225a^2 - 30az.$$

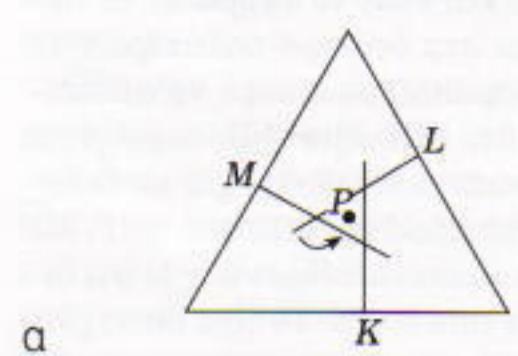
Αν προσθέσουμε αυτές τις ισότητες, παίρνουμε

$$75a^2 + 45a^2 + 225a^2 - 30az = 0,$$

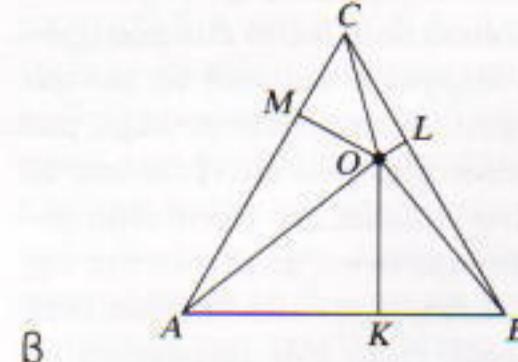
από όπου βρίσκουμε

$$z = 23a/2.$$

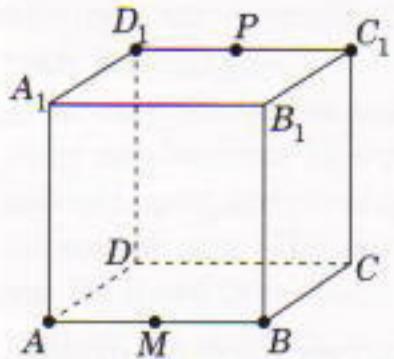
Διαπιστώνουμε ότι το σημείο M διαιρεί την πλευρά AC σε λόγο $23/7$.



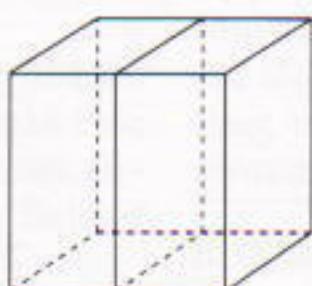
α



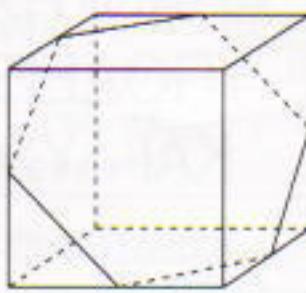
β



Σχήμα 3



Σχήμα 4
α



β

M149

Έστω ότι το δεδομένο επίπεδο τέμνει την ακμή AB του μοναδιαίου κύβου $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Σχήμα 3) και ότι το σημείο A ανήκει στο πρώτο πολύεδρο και το B στο δεύτερο. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το επίπεδο πρέπει να τέμνει κάποια ακμή του κύβου σε ένα σημείο διαφορετικό από τα άκρα της. Επίσης, το επίπεδο αυτό πρέπει να τέμνει και την απέναντι ακμή, C_1D_1 . Με άλλα λόγια, το σημείο D_1 ανήκει στο πρώτο πολύεδρο και το σημείο C_1 στο δεύτερο. Ας ονομάσουμε M και P τα μέσα των ακμών AB και D_1C_1 , αντίστοιχα. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} AP^2 &= BP^2 = BC_1^2 + C_1P^2 \\ &= BB_1^2 + B_1C_1^2 + C_1P^2 \\ &= 1 + 1 + 1/4 = 9/4, \end{aligned}$$

και επομένως $AP = BP = 3/2$. Διαπιστώνουμε, συνεπώς, ότι όλα τα σημεία του διαστήματος PC_1 , εκτός του P , απέχουν από το A περισσότερο από $3/2$ και έτσι το τμήμα αυτό περιέχεται στο δεύτερο πολύεδρο.

Παρομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το τμήμα PD_1 περιέχεται στο πρώτο πολύεδρο. Άρα το δεδομένο επίπεδο διέρχεται από το P . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι διέρχεται από το M . Το ίδιο θα ισχύει για κάθε ακμή του κύβου που τέμνει το επίπεδο. Άρα, το επίπεδο πρέπει να διέρχεται και από το κέντρο του κύβου. Ας θεωρήσουμε τώρα μια έδρα του κύβου που τέμνεται από το δεδομένο επίπεδο. Αν το επίπεδο τέμνει δύο απέναντι ακμές αυτής της έδρας, θα διέρχεται από τα μέσα τους και η τομή είναι ένα τετράγωνο όμοιο με την έδρα του κύβου (Σχήμα 4a). Αν το επίπεδο τέμνει δύο δια-

δοχικές ακμές, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ακμή είναι ένα κανονικό εξάγωνο (Σχήμα 4β) και ο ζητούμενος υπολογισμός του εμβαδού είναι πλέον απλός.

$$\text{Απάντηση: } 1 \text{ ή } 3 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

M150

Κανείς σύνεδρος δεν αντέλλαξε περισσότερες από 198 χειραψίες. Ο πρόεδρος της Ιλλυρίας δεν ρώτησε τον εαυτό του σχετικά με το πλήθος των χειραψιών και επομένως οι απαντήσεις που έλαβε ήταν οι αριθμοί $0, 1, 2, \dots, 197, 198$. Ο σύνεδρος που έκανε 198 χειραψίες —θα τον ονομάσουμε σύνεδρο 198 και μπορούμε να υποθέσουμε ότι ήταν πρόεδρος— αντέλλαξε χειραψίες με όλους τους συνέδρους εκτός του πρωθυπουργού της χώρας του. Επομένως, όλοι (εκτός από τον πρωθυπουργό του) αντέλλαξαν τουλάχιστον 1 χειραψία. Άρα ο σύνεδρος 0 πρέπει να είναι ο πρωθυπουργός της χώρας του συνέδρου 198.

Αν αφαιρέσουμε αυτή την αντιπροσωπεία και όλες τις χειραψίες που αντέλλαξε, αντιμετωπίζουμε την ίδια κατάσταση όπως στην αρχή του συλλογισμού μας, αλλά με 99 πλέον χώρες. Αν σκεφτούμε όπως και προηγουμένως, βλέπουμε ότι οι σύνεδροι που αντέλλαξαν 0 και 196 χειραψίες (ήταν οι σύνεδροι 1 και 197 της αρχικής κατάστασης) προέρχονται από την ίδια χώρα. Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι ο σύνεδρος 99 δεν έχει ταίρι. Αφού ο κατάλογος που εξετάζουμε περιέχει όλους τους συνέδρους εκτός του προέδρου της Ιλλυρίας, ο σύνεδρος 99 είναι ο πρωθυπουργός της Ιλλυρίας. Επομένως, ο

πρωθυπουργός της Ιλλυρίας αντέλλαξε 99 χειραψίες.

Φυσική

Φ146

Η επίλυση του προβλήματος διευκολύνεται αν χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $u_0 = 5 \text{ m/s}$, παρακολουθώντας «κατά πόδας» τον κλέφτη. Σ' αυτό το σύστημα αναφοράς, το βαγόνι φαίνεται να εκτελεί ταλάντωση ακριβώς όπως μια μάζα προσδεδεμένη στο ένα άκρο ελατηρίου που το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο στύλο (τον κλέφτη). Κάποια στιγμή, το μήκος του σκοινιού λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του και κατόπιν αρχίζει να ελαττώνεται, ώσπου να μηδενιστεί. Ακριβώς τότε, το βαγόνι χτυπά τον κλέφτη με ταχύτητα u_0 που έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά. Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς, η ταχύτητα του βαγονιού ισούται με $2u_0$. Γνωρίζουμε ότι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων συμπίπτουν μετά την κρούση, επειδή ο κλέφτης βρίσκεται ξαπλωμένος στο βαγόνι. Στη φυσική, τέτοιες κρούσεις τις ονομάζουμε τελείως πλαστικές. Ο νόμος διατήρησης της ορμής μάς δίνει αμέσως τον ζητούμενο λόγο των μαζών:

$$M \cdot 2u_0 + m \cdot u_0 = (M + m) \cdot 1,8u_0,$$

από όπου καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$M = 4m.$$

Φ147

Ο απλούστερος τρόπος για να λύσουμε το πρόβλημα βασίζεται στο νόμο διατήρησης της ενέργειας. Η κινητική ενέργεια ενός τροχού που κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) με ταχύτητα u δίνεται από την έκφραση

$$E = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Οι δύο τελευταίοι όροι παριστάνουν την κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης της στεφάνης —η οποία έχει μάζα M — και την ενέργεια της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της.

Όταν ο τροχός διανύει απόσταση L κατεβαίνοντας το κεκλιμένο επίπεδο, το κέντρο μάζας του κατέρχεται κατά $h = L \sin \alpha$. Η προκύπτουσα μείωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ισούται με την αύξηση της κινητικής ενέργειας:

$$(M+m)gL \sin \alpha = \frac{mu^2}{2} + Mu^2,$$

από την οποία βρίσκουμε

$$u = \sqrt{\frac{2(M+m)gL \sin \alpha}{2M+m}}.$$

Η ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του κέντρου μάζας του τροχού περιγράφεται από τους τύπους $u = gt$ και $L = gt^2/2$, οι οποίοι μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε την επιτάχυνση g του κέντρου μάζας

$$g = \frac{(M+m)gL \sin \alpha}{2M+m}.$$

Η εν λόγω επιτάχυνση καθορίζεται από τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον τροχό. Δύο δυνάμεις δρουν στον τροχό παραλλήλα προς το κεκλιμένο επίπεδο: η τριβή και η αντίστοιχη συνιστώσα του βάρους. Όταν ο συντελεστής τριβής λαμβάνει την ελάχιστη από τις τιμές για τις οποίες είναι δυνατή η κύλιση χωρίς ολίσθηση, η δύναμη της τριβής ισούται απλώς με το γνόμενο της κάθετης δύναμης επί το συντελεστή τριβής. Συνεπώς, ο νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας γράφεται με τη μορφή

$$(M+m)g \sin \alpha - \mu(M+m)g \cos \alpha = (M+m)g,$$

και τελικά

$$\mu = \frac{M \sin \alpha}{2M+m}.$$

Φ148

Θεωρήστε τις σταγόνες του νερού ως ταυτόσημες αδιαφανείς σφαίρες ακτίνας R . Μια τέτοια σφαίρα έχει μετωπική επιφάνεια (δηλαδή μέγιστο εμβαδόν διατομής) $s = \pi R^2$. Αυτό σημαίνει ότι n σταγόνες, κατανε-

μημένες ομοιογενώς σε ένα 1 m^3 αέρα, καλύπτουν (κατά προσέγγιση) επιφάνεια εμβαδού $S = \pi n R^2$. Στη συγκεκριμένη εκτίμηση δεν λαμβάνεται υπόψη πιθανή μερική επικάλυψη των σταγόνων αστόσο, η παράβλεψη αυτού του ενδεχομένου δεν αναμένεται να επηρεάσει ουσιωδώς το τελικό αποτέλεσμα, το οποίο, ούτως ή άλλως, έχει προσεγγιστικό χαρακτήρα.

Εφόσον η ορατότητα ανέρχεται σε 10 m, οι σταγόνες μέσα σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση εμβαδού 1 m^2 και μήκος 10 m πρέπει να καλύπτουν εμβαδόν 1 m^2 . Το συγκεκριμένο παραλληλεπίπεδο περιέχει $10n$ σταγόνες, οι οποίες καλύπτουν εμβαδόν ίσο με $10n\pi R^2$. Συνεπώς, ισχύει η εξίσωση

$$10n\pi R^2 = 1 \text{ m}^2,$$

η οποία μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την τιμή του n :

$$n = \frac{1}{4\pi R^2}. \quad (1)$$

Στον ανωτέρω τύπο υπεισέρχεται η άγνωστη τιμή R της ακτίνας μιας σταγόνας. Ας προσπαθήσουμε να την προσδιορίσουμε. Στη σταγόνα ασκούνται δύο δυνάμεις: η σταθερή δύναμη της βαρυτικής έλξης, προς τα κάτω, και η εξαρτώμενη από την ταχύτητα της σταγόνας δύναμη της αντίστασης του αέρα, προς τα πάνω. Κατά την πτώση της σταγόνας έρχεται κάποια στιγμή όπου οι δύο αυτές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται. Μετά τη συγκεκριμένη στιγμή, η ταχύτητα της σταγόνας παύει να αυξάνεται και η σταγόνα πέφτει με σταθερή ταχύτητα, την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε αν εξίσωσουμε τη δύναμη της βαρύτητας με την αντίσταση του αέρα:

$$mg = 4,3Ru.$$

Εάν λάβουμε υπόψη μας ότι η μάζα m μιας σταγόνας είναι ίση με $(4/3)\pi R^3 \rho$, όπου $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ η πυκνότητα του νερού, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται με τη μορφή

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = 4,3Ru.$$

Λύνοντας ως προς R^2 , βρίσκουμε

$$R^2 = \frac{3 \cdot 4,3u}{4 \pi \rho g} \equiv \frac{u}{\rho g} \text{ m}^2. \quad (2)$$

Δεδομένου ότι για να κατακαθίσει η ομίχλη απαιτούνται 2 ώρες και ότι το αρχικό της ύψος ανέρχεται σε 200 m, η ταχύτητα των σταγόνων ισούται κατά προσέγγιση με

$$u = \frac{h}{t} = \frac{200 \text{ m}}{2 \cdot 3,600 \text{ s}} \equiv 0,028 \text{ m/s.}$$

Εισάγοντας αυτό το αποτέλεσμα στον τύπο (2), βρίσκουμε αμέσως την ακτίνα των σταγόνων:

$$R = \sqrt{\frac{0,028}{10^4}} \equiv 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Τώρα, η εξίσωση (1) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το n :

$$n = \frac{1}{10 \cdot 3,14 \cdot 1,7^2 \cdot 10^{-6}} \equiv 1,1 \cdot 10^4.$$

Φ149

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η 1-σχύλη της πηγής είναι τετραπλάσια από την ισχύ του λαμπτήρα. Συνεπώς, η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης ισούται με τα $3/4$ της τάσης της πηγής, ενώ η πτώση τάσης στο λαμπτήρα είναι μόνο το $1/4$ της ίδιας τιμής. Συνεπώς, εφόσον λαμπτήρας και αντίσταση διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, η πτώση τάσης στον πρώτο ισούται με το $1/3$ της πτώσης τάσης κατά μήκος της δεύτερης.

Εάν στο Σχήμα 2 χαράξουμε τη γραφική παράσταση του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση συναρτήσει της πτώσης τάσης V στο λαμπτήρα (την $I = (3 V)/(10 \Omega)$), παίρνουμε μια ευθεία που τέμνει την αντίστοιχη καμπύλη για το λαμπτήρα στα 2,5 A και στα 6 A. Αυτές οι τιμές είναι προσεγγιστικές, και η ακρίβειά τους εξαρτάται από την κλίμακα του διαγράμματος. Δεν αποκλείεται εσείς να «διαβάσετε» ελαφρώς διαφορετικές τιμές. Τώρα είμαστε έτοιμοι να βρούμε τη λύση. Οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται είτε για ρεύμα 2,5 A, που αντιστοιχεί σε τάση πηγής

$$V_1 = (1 + 1/3) \cdot (2,5 \text{ A}) \cdot (10 \Omega) \\ \equiv 33,5 \text{ V},$$

είτε για ρεύμα 6 A, οπότε η τάση πηγής είναι

$$V_2 = (1 + 1/3) \cdot (6 \text{ A}) \cdot (10 \Omega) \\ \equiv 80 \text{ V}.$$

Φ150

Ας κατασκευάσουμε το είδωλο S_1 της σημειακής πηγής S στο επίπεδο κάτοπτρο (Σχήμα 5). Η πηγή S φωτίζει το μεγαλύτερο μέρος της επιφάνειας της οθόνης. Αντιθέτως, οι ακτίνες από το φανταστικό είδωλο S_1 (με άλλα λόγια, το φως που ανακλάται από το κάτοπτρο) τέμνουν τις ακτίνες της πηγής S μόνο στην περιοχή AB . Ας εισαγάγουμε τους συμβολισμούς $AB = h$ και $AC = z$. Από τα όμοια τρίγωνα παίρνουμε τις σχέσεις

$$\frac{b+d}{a} = \frac{L-b-d}{z-h}$$

και

$$\frac{b}{a} = \frac{L-b}{z},$$

από τις οποίες προκύπτει το αποτέλεσμα

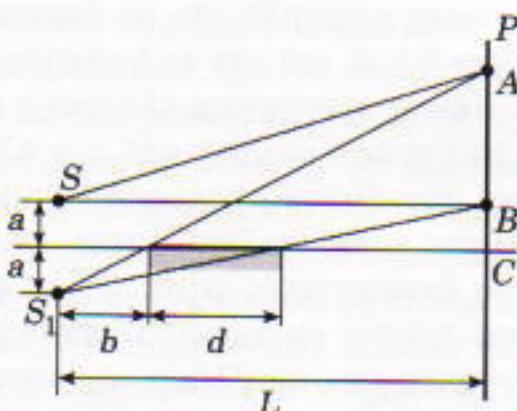
$$h = \frac{La}{1 + \frac{b}{d}} \approx 16,7 \text{ cm}.$$

Σπαζοκεφαλίες

Σ146

Έστω $a_1 = x$ και $a_2 = y$. Τότε,

$$a_3 = \frac{y+1}{x},$$



Σχήμα 5

$$a_4 = \frac{\frac{y+1}{x} + 1}{y} = \frac{y+x+1}{xy},$$

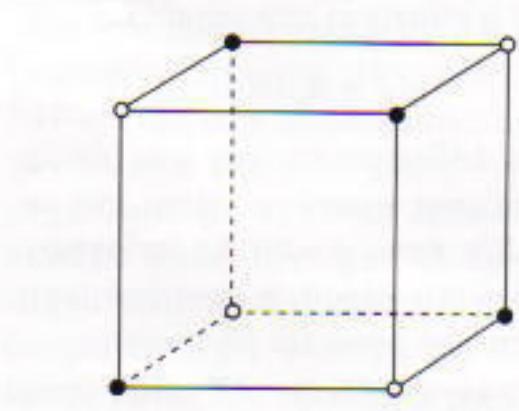
$$a_5 = \frac{\frac{y+x+1}{xy} + 1}{\frac{y+1}{x}} = \frac{y+x+1+xy}{(y+1)y}$$

$$= \frac{(y+1)(x+1)}{(y+1)y} = \frac{x+1}{y}.$$

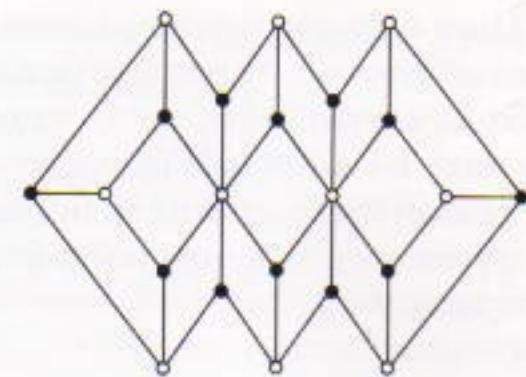
Επομένως, $a_6 = a_1$. Παρομοίως αποδεικνύουμε ότι $a_7 = a_2$, και γενικά η ακολουθία μας είναι περιοδική, με περίοδο 5. Συνεπώς, $a_{2002} = a_2 = 1999$.

Σ147

Αρκεί να αποδείξουμε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε τον έναν κύβο μέσα στον άλλο, έτσι ώστε να συμπίπτουν δύο λευκές κορυφές του πρώτου με δύο λευκές κορυφές του δεύτερου (ακόμη κι αν η τρίτη λευκή κορυφή του πρώτου συμπέσει με μαύρη του δεύτερου, οι υπόλοιπες τέσσερις μαύρες κορυφές του δεύτερου θα συμπέσουν με μαύρες κορυφές του πρώτου). Στο Σχήμα 6 βλέπουμε ότι μπορούμε να μοιράσουμε τις οκτώ κορυφές του κύβου σε δύο τετράδες, έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών που ανήκουν στην ίδια τετράδα να ισούται με τη διαγώνιο μιας έδρας του κύβου. Εάν λοιπόν χρωματίσουμε λευκές τρεις κορυφές του κύβου, τουλάχιστον δύο από αυτές θα ανήκουν στην ίδια τετράδα και άρα θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με τη διαγώνιο μιας έδρας. Επιθέτουμε τον έναν κύβο στον άλλο, έτσι ώστε να συμπέσουν αυτές οι λευκές κορυφές με τις αντίστοιχές



Σχήμα 6



Σχήμα 7

τους. Τότε, τέσσερα ζεύγη μαύρων κορυφών θα συμπέσουν.

Σ148

Το ζητούμενο είναι αδύνατο. Ας χρωματίσουμε τις πόλεις με δύο διαφορετικά χρώματα (λευκό και μαύρο), όπως στο Σχήμα 7. Έχουμε 12 μαύρες πόλεις και 10 λευκές και, καθώς ταξιδεύουμε στους δρόμους, τα χρώματα εναλλάσσονται. Επομένως, αν επισκεφτούμε και τις 12 μαύρες πόλεις, πρέπει υποχρεωτικά να περάσουμε από 11 τουλάχιστον λευκές. Αυτές όμως είναι μόνο 10.

Σ149

Η ελάχιστη τιμή του n είναι 15. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι με δεκαπέντε κάρτες μπορούμε να βρούμε το επιθυμητό ζεύγος. Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Τότε οι κάρτες με τους αριθμούς 1 και 15 πρέπει να ανήκουν σε διαφορετικές στοιβες και το ίδιο ισχύει για τις κάρτες 1 και 3. Επομένως, οι κάρτες 3 και 15 ανήκουν στην ίδια στοιβα. Συνεπώς, οι κάρτες 6 = 9 - 3 και 10 = 25 - 15 βρίσκονται στην άλλη στοιβα, και αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας — διότι $6 + 10 = 16$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι μπορούμε να μοιράσουμε δεκατέσσερις κάρτες σε δύο στοιβες, έτσι ώστε το άθροισμα ενός οποιουδήποτε ζεύγους καρτών από την ίδια στοιβα να μην είναι τέλειο τετράγωνο. Ιδού ένα παράδειγμα: 1, 2, 4, 6, 9, 11, 13 (η πρώτη στοιβα) και 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14 (η δεύτερη στοιβα). Αν το πλήθος των καρτών είναι μικρότερο του 14, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να τις μοιράσουμε σε δύο στοιβες.

Σ150

Το νερό αρχίζει να βράζει όταν η

θερμοκρασία του (καθώς και του χαρτιού) φτάσει στους 100°C . Στη συνέχεια, η ενέργεια από τη φλόγα του κεριού δαπανάται για την εξαέρωση του νερού. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει χώρα σε σταθερή θερμοκρασία 100°C , η οποία όμως είναι πολύ χαμηλή για να αναφλεγεί το χαρτί.

Καθειδοσκόπιο

1. Η κρούση μεταξύ χάλυβα και μαρμάρου είναι σχεδόν ελαστική, σε αντίθεση με την κρούση μεταξύ χάλυβα και ασφάλτου, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί σχεδόν τελείως πλαστική.

2. Στη δεύτερη περίπτωση, η ελάττωση της ορμής του εύθραυστου αντικειμένου συντελείται σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, πράγμα που σημαίνει ότι ασκείται μικρότερη δύναμη στο αντικείμενο.

3. Μολονότι η δύναμη που ασκεί ένα αντιαρματικό βλήμα είναι εξαιρετικά μεγάλη, δρα για ελάχιστο χρόνο. Ως εκ τούτου, η ώθηση στο λεωφορείο υπολείπεται κατά πολύ της ώθησης που παράγουν μερικοί άνθρωποι σπρώχνοντας για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

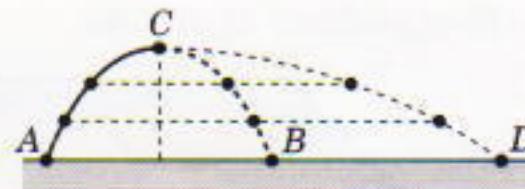
4. Όχι, δεν πρόκειται για επικίνδυνη επίδειξη. Η επιτάχυνση που αποκτά ένα βαρύ αμόνι κατά την ελαστική κρούση του με μια βαριόπούλα είναι ουσιαστικά μηδενική. Συνεπώς, στον αθλητή δεν ασκείται παρά ελάχιστη δύναμη.

5. Ο μόλυβδος.

6. Επειτα από μια βολή, το αναρτημένο τουφέκι έχει περισσότερη ενέργεια από το ακλόνητα στερεωμένο. Συνεπώς, η σφαίρα αποκτά μικρότερη κινητική ενέργεια στην πρώτη περίπτωση συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το βεληνεκές είναι μικρότερο για το αναρτημένο τουφέκι.

7. Όταν βάλλει το μπαζούκα, η ώθηση της ανάκρουσης δεν μεταφέρεται στο όπλο (και κατόπιν στο χειριστή), αλλά στα καυσαέρια που διαφεύγουν κινούμενα σε αντίθετη κατεύθυνση από το βλήμα.

8. Μετά την πρόσκρουση μίας μόνο σφαίρας στα δεξιά, η πρώτη εξ αριστερών σφαίρα θα εκτραπεί κατά



Σχήμα 8

γωνία ίση με την αρχική γωνία εκτροπής της δεξιάς σφαίρας. Στη δεύτερη περίπτωση, η πρόσκρουση των δύο σφαιρών στα δεξιά επιφέρει την ανάκρουση δύο σφαιρών στα αριστερά. Παρομοίως, η πρόσκρουση τριών σφαιρών στα δεξιά έχει ως αποτέλεσμα την ανάκρουση τριών σφαιρών στα αριστερά.

9. Η μάλα θα αναπηδήσει από το πρίσμα κατά την οριζόντια διεύθυνση και εν συνεχείᾳ θα διαγράψει παραβολική τροχιά.

10. Όσο περισσότερο φουσκώνουμε μια μπάλα τόσο ελαστικότερη γίνεται. Ένα λάκτισμα προσδίδει λιγότερη ορμή σε μια μη ελαστική κρούση παρά σε μια ελαστική. Συνεπώς, δεν μπορούμε να σουτάρουμε μια όχι καλά φουσκωμένη μπάλα πολύ μακριά.

11. Χαλαρώνοντας τα χέρια του και οπισθοχωρώντας ελαφρά, ο καλαθοσφαιριστής παρατείνει την επιβράδυνση της μπάλας, επιτυγχάνοντας με αυτό τον τρόπο την εσθίνηση των δυνάμεων.

12. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό έγκειται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει εξάρτηση της δύναμης από την ταχύτητα.

13. Το κέντρο μάζας της οβίδας κινείται με την ίδια ταχύτητα πριν από την έκρηξη και έπειτα από αυτήν (το σημείο *C* στο Σχήμα 10). Συνεπώς, θα ακολουθήσει την ίδια παραβολική τροχιά που θα διέγραφε η οβίδα εάν δεν είχε εκραγεί. Δεδομένου ότι τα δύο θραύσματα έχουν ίσες μάζες, θα κινηθούν συμμετρικά ως προς την παραβολική τροχιά του κέντρου μάζας. Συνεπώς, το δεύτερο θράυσμα θα πέσει στο σημείο *D*, όπου $BD = AB$.

14. Η κίνηση των μορίων παρεμποδίζεται από τις μεταξύ τους κρούσεις.

15. Όσο μικρότερη είναι η επιφάνεια ενός σωματιδίου τόσο λιγότερο εξισορροπημένη είναι η ώθηση

που του ασκούν τα μόρια τα οποία συγκρούονται μαζί του.

16. Για μικρότερες πυκνότητες των αερίων, αυξάνεται η μέση ελεύθερη διαδρομή των ηλεκτρονίων που ιονίζουν τα άτομα, οπότε τα ηλεκτρόνια μπορούν να αποκτήσουν περισσότερη κινητική ενέργεια σε μικρότερες τάσεις. Αυτή η ενέργεια καταναλώνεται στον ιονισμό των ατόμων στη διάρκεια των κρούσεων ανάμεσα σε κάποιο άτομο και ένα ηλεκτρόνιο που έχει επιταχυνθεί.

17. Τα άτομα είναι δυνατόν να διεγερθούν εάν αποκτήσουν πρόσθετη ενέργεια σε κρούσεις με σωματίδια που έχουν μεγάλες ταχύτητες.

18. Η μάζα του νετρονίου ισούται κατά προσέγγιση με τη μάζα του πρωτονίου. Επομένως, ένα νετρόνιο χάνει περισσότερη ενέργεια σε μια κρούση με ένα άτομο υδρογόνου παρά με ένα άτομο μολύβδου.

Μικροπειραματισμοί

Όταν η μεγάλη μπάλα ανακλάται από το δάπεδο, χτυπά τη μικρή μπάλα και της προσδίδει ένα μέρος της ορμής της και της κινητικής της ενέργειας. Ως εκ τούτου, η μικρότερη μπάλα θα αναπηδήσει σε ύψος μεγαλύτερο εκείνου από το οποίο ριχτήκε αρχικά.

Στο εργαστήριο

Το πείραμα επιδεικνύει σαφώς τη φυσική της διαδικασίας του βρασμού. Ο βρασμός αρχίζει όταν η τάση κορεσμένων ατμών που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του υγρού εξισώνεται με την πίεση που επικρατεί στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Όταν ικανοποιηθεί αυτή η συνθήκη, οι φυσαλίδες που εμφανίζονται στο υγρό δεν καταρρέουν. Αντιθέτως, μεγαλώνουν, ανέρχονται στην επιφάνεια και σκάζουν. Για να συντηρηθεί έντονος βρασμός, απαιτείται συνεχής παροχή ενέργειας, η οποία αναπληρώνει την ενέργεια που δαπανάται λόγω της εντατικής εξαέρωσης.

Πλησίον της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στο δοκιμαστικό σωλήνα, η διαδικασία του βρασμού αρχίζει στους 100°C περίπου, όταν η τάση των κορεσμένων υδρατμών ε-

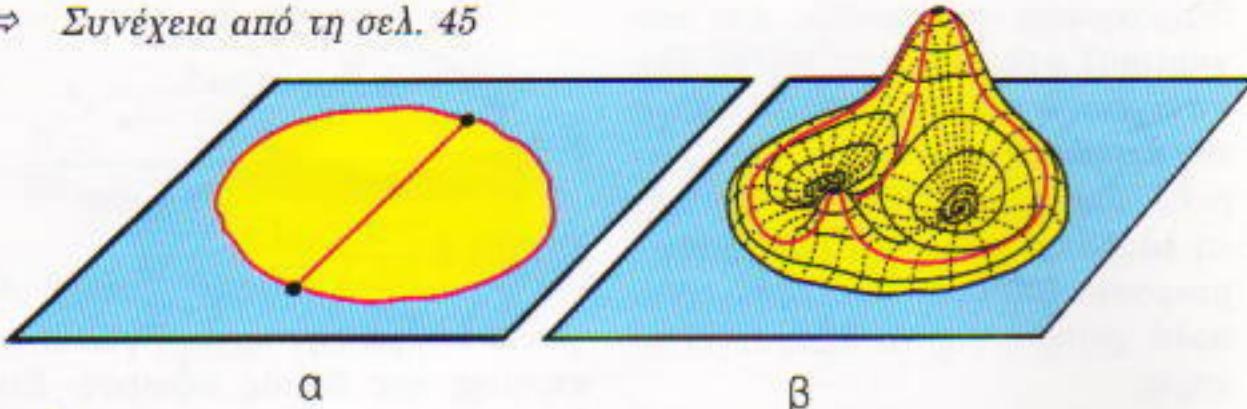
ξισώνεται με την πίεση του περιβάλλοντος αέρα (περίπου 10 N/cm^2). Ο ταχύς βρασμός απομακρύνει σχεδόν όλο τον αέρα από το σωλήνα, οπότε, μετά τον πωματισμό του, ο δοκιμαστικός σωλήνας δεν περιέχει σχεδόν τίποτε άλλο εκτός από το υπολειπόμενο νερό και τους κορεσμένους υδρατμούς πάνω από αυτό.

Όταν καταβρέχουμε με κρύο νερό το δοκιμαστικό σωλήνα, μειώνεται τόσο η θερμοκρασία όσο και η πίεση των υδρατμών. Επομένως, η πίεση στην επιφάνεια του νερού μειώνεται επίσης, ενώ η θερμοκρασία του δεν προλαβαίνει να μεταβληθεί αισθητά. Έτσι, η πίεση στην επιφάνεια του νερού γίνεται χαμηλότερη από την τάση των κορεσμένων ατμών που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του, με αποτέλεσμα να επαναληφθεί ο βρασμός. Η ενέργεια που δαπανάται στο βρασμό προέρχεται από την ψύξη του νερού. Έπειτα από λίγο, η θερμοκρασία του νερού πέφτει (η πίεση στο δοκιμαστικό σωλήνα αυξάνεται), οπότε παύει και ο βρασμός.

Καταβρέχοντας επανειλημμένα το σωλήνα, πρώτα με κρύο και έπειτα με παγωμένο νερό, επιτυγχάνουμε να μειώσουμε βαθμιαία τη θερμοκρασία του νερού και των κορεσμένων υδρατμών. Τελικά, η πίεση στο σωλήνα καθίσταται εξαιρετικά χαμηλή (στους 0°C η πίεση των κορεσμένων ατμών είναι σχεδόν 17 φορές μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση). Για να το αποδείξετε, αρκεί να αφαιρέσετε το πώμα του δοκιμαστικού σωλήνα —θα ακούσετε τον αέρα να εισορμά στο σωλήνα.

Υπάρχει ένας ακόμη πολύ ελκυστικός, τρόπος για να αποδείξετε ότι πάνω από το νερό έχει δημιουργηθεί σχεδόν «κενό». Κρατήστε το σωλήνα κατακόρυφα και ανακινήστε τον δυνατά πάνω-κάτω. Θα ακούσετε έναν ασυνήθιστο ήχο, σαν να υπήρχε κάποια στερεά ουσία στο σωλήνα αντί για το νερό. Αυτό οφείλεται στην απουσία αέρα πάνω από το νερό, ο οποίος θα επιβράδυνε την άλλως ελεύθερη κίνησή του.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 45



Σχήμα 10

τους. Τέλος, σκάβουμε μία λεκάνη στο εσωτερικό κάθε χώρας με πλαγιές που συγχωνεύονται ομαλά με τις πλαγιές των αναχωμάτων. (Ένα τέτοιο τοπίο για το χάρτη του Σχήματος 10α παρουσιάζεται στο Σχήμα 10β.) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν ένας πολιτικός χάρτης επί μιας σφαίρας έχει τουλάχιστον τρεις χώρες και ικανοποιεί τις συνθήκες (β) και (γ) του Θεωρήματος 3, τότε ισχύει ότι

$$X + K - \Sigma = 2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε τη μια από τις χώρες ως θάλασσα και την υπόλοιπη σφαίρα ως νησί. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3, από όπου έπειται αμέσως το ζητούμενο αποτέλεσμα.

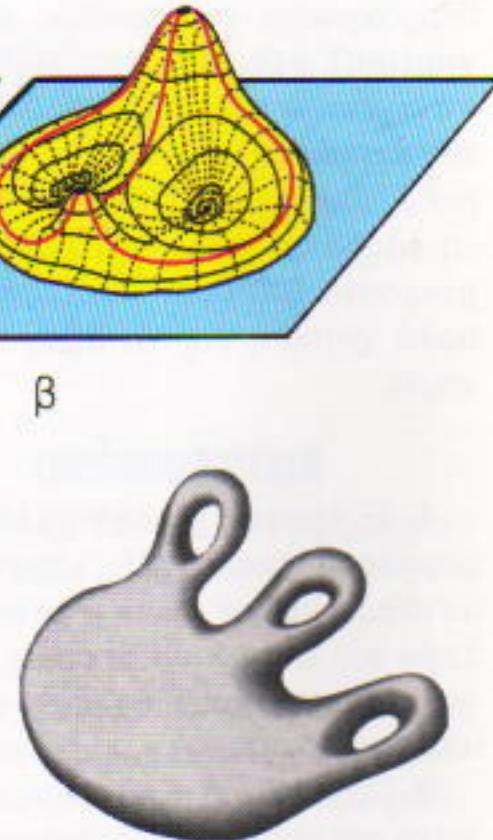
Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το προηγούμενο θεώρημα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2 (για ένα τυχαίο κυρτό πολύεδρο). Θεωρούμε ότι σημείο O στο εσωτερικό του δεδομένου πολυέδρου και μια μεγάλη σφαίρα με κέντρο το O . Προβάλλουμε το πολύεδρο στη σφαίρα (η προβολή ενός σημείου X ορίζεται ως το σημείο τομής της ημιευθείας OX με τη σφαίρα). Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ένας σφαιρικός πολιτικός χάρτης στον οποίο οι χώρες και τα σύνορά είναι οι προβολές των εδρών και των ακμών του πολυέδρου. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, εφαρμόζουμε το ανωτέρω πόρισμα σε αυτόν το χάρτη.

Προβλήματα

1. Διατυπώστε και αποδείξτε ισχυρισμούς ανάλογους με τα πορίσματα των Θεωρημάτων 1 και 3 στην περίπτωση της επιφάνειας μιας σπείρας (τόρου).

2. Κάντε το ίδιο για μια «σφαίρα



Σχήμα 11

με 3 λαβές» (στο Σχήμα 11 παρουσιάζεται μια σφαίρα με τρεις λαβές).

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 66

Schrödinger και Werner Heisenberg, στηριζόμενοι στη θεωρία του Bohr και σε πολυάριθμες πειραματικές και θεωρητικές προϋποθέσεις, έθεσαν τα θεμέλια μιας συνεπούς θεωρίας της ατομικής δομής —της κβαντικής μηχανικής. Ποια τύχη επιφυλασσόταν στη θεωρία του Bohr; Μερικές από τις συνέπειες της, όπως οι κανόνες κβάντωσης Bohr-Sommerfeld, μετατράπηκαν σε οριακές περιπτώσεις, όπου η σύγχρονη κβαντική μηχανική συναντούσε τη θεωρία του Bohr. Η ιδέα της διακριτότητας στο ατομικό επίπεδο αποτέλεσε την αφετηρία για περαιτέρω έρευνες πολλών επιστημόνων. Ιστορικό ενδιαφέρον, όμως, παρουσιάζουν και άλλες όψεις αυτής της θεωρίας. Σύμφωνα με τον Αϊνστάιν, η θεωρία του Bohr είναι «μουσική ύψιστης ποιότητας στον κόσμο του πνεύματος». Ο Rutherford έτρεφε επίσης υψηλή εκτίμηση για τις εργασίες του Niels Bohr: «Θεωρώ τις εργασίες του Bohr ως τον μεγαλύτερο θρίαμβο των προσπαθειών του ανθρώπου.»

Το 1922 ο Bohr τιμήθηκε με το βραβείο Νομπέλ για «τη συμβολή του στη μελέτη της ατομικής δομής της ύλης».