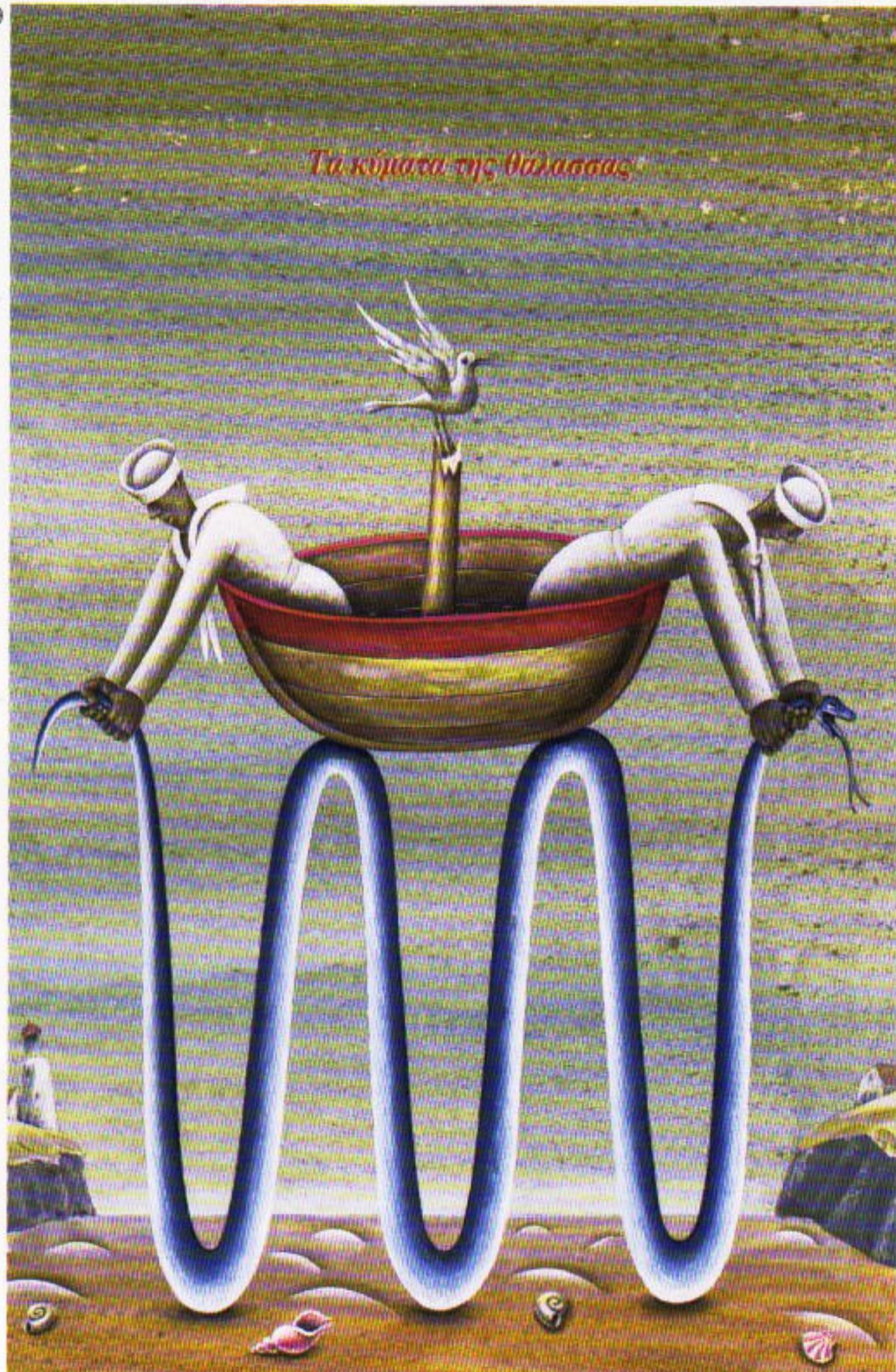


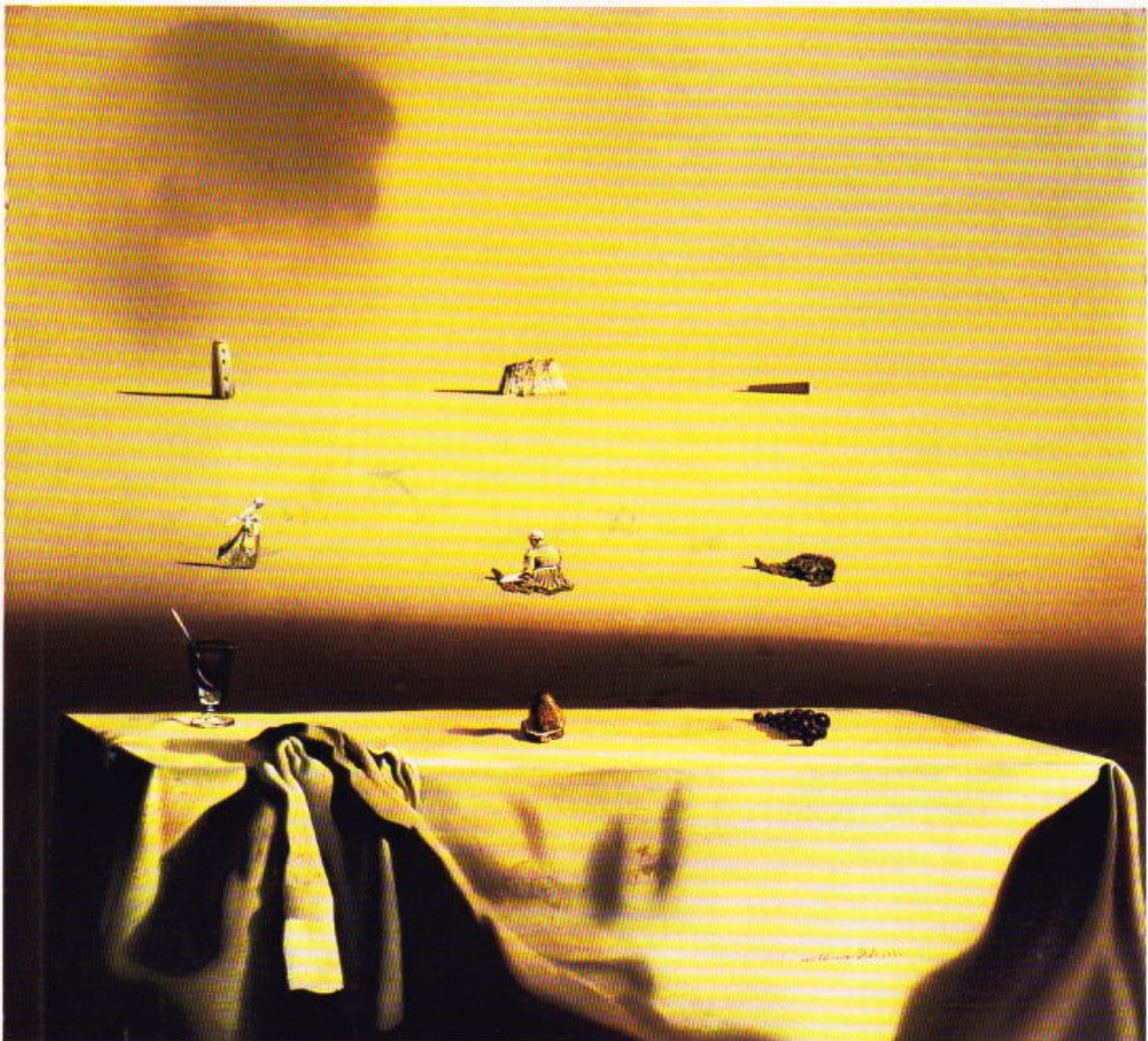
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1999
ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 1
1.700 ΔΡΧ.



- «Λαμπρά» λάθη σε γεωμετρικές αποδείξεις
- Η κβαντική φύση του φωτός
- Πόσα χρώματα χρειάζεστε για να χρωματίσετε έναν χάρτη;
- Η ιστορία της πτώσης μιας σταγόνας
- Κύματα στα ελαστικά των αυτοκινήτων
- Εισαγωγή στις συναρτησιακές εξισώσεις και ομάδες
- Γιατί κάμπτεται ένα καμένο σπίρτο;



Λάδι σε μουσαμά, 30×32 εκ., Συλλογή του Μουσείου Salvador Dalí, Σαιντ Πήτερσμπεργκ, Φλόριντα. © 1997 Museo Salvador Dalí

Μορφολογική ηχώ (1936), του Salvador Dalí

ΕΙΝΑΙ ΣΥΧΝΑ ΔΥΣΚΟΛΟ ΝΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΟΥΜΕ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ανάμεσα στα μέλη μιας ομάδας. Τα αντικείμενα στον πίνακα του Dalí έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά κατά την οριζόντια και κατακόρυφη διάταξή τους σε ομάδες. Ζώα, φυτά ή πράγματα· όρθια, καθισμένα ή πεσμένα — με πόσους ακόμη τρόπους μπορούμε να συνδέσουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ τους; Έχουν μήπως όλα κάποιο κοινό χαρακτηριστικό; Ίσως αυτό που τα συνδέει να είναι η χρωματική παλέτα του Dalí. Ή μπορεί ο συνδετι-

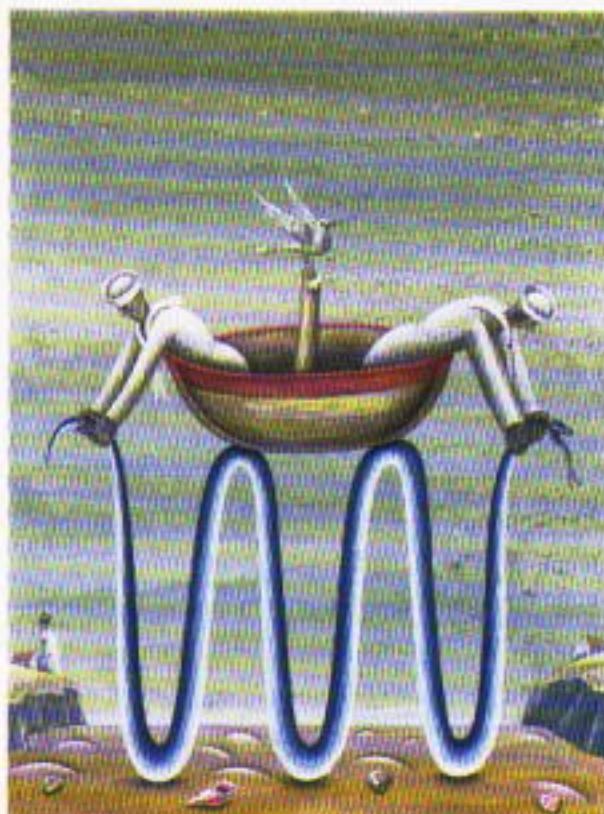
κός κρίκος να είναι η ίδια πηγή του φωτός. Η αναζήτηση σχέσεων ανάμεσα στα μέλη μιας ομάδας στοιχείων μπορεί να αποτελέσει συναρπαστική άσκηση. Και όταν πρόκειται για ομάδες συναρτήσεων, η συνθετική σκέψη μπορεί να αποδειχτεί πολύτιμη για μας.

Αν θέλετε να δείτε πώς αποκαλύπτεται η δυναμική των ομάδων όταν τοποθετούμε τις συναρτήσεις σε πίνακα, γυρίστε στο άρθρο «Συναρτησιακές εξισώσεις» της σελίδας 16.

QUANTUM

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1999

ΤΟΜΟΣ 6 / ΤΕΥΧΟΣ 1



Εικονογράφηση: Jose Garcia

Οι δύο ναύτες στο εξώφυλλο του παρόντος τεύχους, φανερά αγανακτισμένοι με τα ατίθασα κύματα που έγιναν αιτία να διαλυθεί το κατάρτι τους, αποφάσισαν να πάρουν την υπόθεση στα χέρια τους. Αν ποτέ έχετε και σεις βιώσει μιαν ανάλογη εμπειρία στην προσπάθειά σας να τα βγάλετε πέρα με τις κυματικές εξισώσεις, ανατρέξτε στο άρθρο «Θαλάσσια κύματα» της σελίδας 22. Ισως εκεί βρείτε την πολύτιμη πυξίδα για να μπορέσετε να διαπλεύσετε τον αγριεμένο ωκεανό της κυματικής φυσικής.

ΑΡΘΡΑ

- 5 Πολυγωνικά μορφώματα
Πλέγματα και ζώνες Brillouin**
A.B. Goncharov
- 10 Οδικό ταξίδι
Κύματα στα ελαστικά των αυτοκινήτων**
L. Grodko
- 16 Δυναμική των ομάδων
Συναρτησιακές εξισώσεις και ομάδες**
Y.S. Brodsky και A.K. Slipenko
- 22 Ανάμεσα σε όρη και κοιλάδες
Θαλάσσια κύματα**
L.A. Ostrovsky
- 62 Ο κόσμος μιας σταγόνας
Η ιστορία μιας πτώσης**
L. Guryashkin και A. Stasenko

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Αναζητώντας τη Βερενίκη
- 15 Σπαζοκεφαλιές**
- 28 Στο μαυροπίνακα I**
Το θεώρημα Steiner-Lehmus
- 31 Πώς λύνεται;**
- 32 Κβαντικά χαμόγελα**
Η ιστορία του χαρτογράφου
- 34 Αναδρομές**
Η κβαντική φύση του φωτός
- 38 Στα πεδία της φυσικής**
Ταχύτερα από το φως;
- 41 Gradus ad Parnassum**
Συμπληρώνοντας το τετράγωνο
- 44 Στο εργαστήριο**
Γιατί κάμπτεται ένα καμένο σπόρτο
- 47 Στο μαυροπίνακα II**
Λάθη σε γεωμετρικές αποδείξεις
- 50 Στο μαυροπίνακα III**
Πετροβολώντας την άβυσσο
- 55 Απαντήσεις, Υποδείξεις και λύσεις**
- 70 Ιππολογισμοί**
Επαφή

Αναζητώντας τη Βερενίκη

Το τηλεοπτικό θάλπος του φετινού χειμώνα

EΞΟΧΟΤΑΤΕ ΚΥΡΙΕ ΠΡΟΕΔΡΕ
Έγραφα στην *Κόμη της Βερενίκης* ότι “το βιβλίο — το κάθε βιβλίο — έχει την τύχη ενός μηνύματος που, καθώς λένε οι ναυτικές ιστορίες, ρίχνεται στη θάλασσα μέσα σ' ένα μπουκάλι... Δεν αρκεί η πρόθεση να ήταν αγαθή. Χρειάζεται τα ρεύματα της θάλασσας να έχουν τη σωστή κατεύθυνση, και οι άνθρωποι να περιδιαβάζουν τις παραλίες, για να φτάσει το μήνυμα σε έναν ή περισσότερους.”

Τώρα, δέκα χρόνια μετά, πρέπει να πω ότι η Βερενίκη στάθηκε ιδιαίτερα τυχερή: πράγμα ίσως σπάνιο για μια γυναίκα του πάθους και της μοίρας. Φαίνεται ότι τα ρεύματα της θάλασσας ήσαν αυτά που έπρεπε και οι άνεμοι ούριοι. Έτσι πολλοί άνθρωποι, νέοι αλλά και μεγαλύτεροι, σπουδαγμένοι ή απλώς με τη λαχτάρα της ψυχής, περιμέναν στις παραλίες να ακούσουν τα όσα η βασίλισσα και ο αστερισμός της είχαν να διηγηθούν: για τη γένεση του σύμπαντος και της ζωής, για τις εκρήξεις των άστρων και τη μοίρα του πλανήτη μας. Έγινε όμως ακόμη κάτι αναπάντεχο: Στις παραλίες περίμεναν μηχανές και άνθρωποι της τηλεοράσεως, ηχολήπτες και στούντιο έτοιμα για γυρίσματα. Είναι ευνόητο ότι η Βερενίκη ένιωσε ταραχή και δίλημμα μεγάλο. Έτσι, καθώς από τον αστερισμό της παρακολουθεί τα ανθρώπινα, ήξερε ότι οι τηλεοράσεις δεν συνηθίζουν να μιλούν για το καίριο ή να κατέχονται από τη γοητεία του πολιτισμού· συνήθως δίδουν έμφαση στα ταπεινά, αφέσκονται να διογκώνουν το ασήμαντο και ακολουθούν με ένα μικρόφω-

«Είναι αληθές ότι η πλήρης μοναξία είναι βαρεία και ότι η έρημος είναι αυχμηρά και ταλανζεί. Άλλα, αλλά, ου μην αλλά (όπως του Ισλάμ το Ιλ Άλλα, των χριστιανών το Εχει ο Θεός και των αθέων αι υψηλαί αι σκέψεις) κανεὶς ιδρώς, καμία δίψα, δεν εξαντλούν τον μυστικόν Ευφράτην, που και εν τη ερήμω ακόμη, και εντός και πέραν της σιγής, εντός και πέραν πάσης μοναξίας και πάσης μεμψιμοιρίας, ποτίζει τα πάντα, πάντοτε, χωρίς να φαίνεται η πηγή του, όπως το μέγα φως, το άκπιστον, φωτίζει τα πάντα εις τον αιώνα, χωρίς να φαίνεται η εστία, τα πάντα, τα πάντα, ακόμη και τα πιο μικρά, δύσον και το εκστατικόν, το ανέσπερον, το μέγα παφλάζον Σύμπαν.»

—Ανδρέας Εμπειρίκος

νο όσους υποφέρουν. Είχε ακούσει μάλιστα —αλλά δεν ήθελε να το πιστέψει— ότι αυτό που κάποτε ονομάζόταν αξίες είχε σήμερα αντικατασταθεί από περίεργες συσκευές, που μετρούσαν τη διαφευσμένη ζωή και τα αισθήματα των νοικοκυραίων.

Οι απορίες της Βερενίκης ήσαν και απορίες του συγγραφέα της. Δεν άργησε όμως να γίνει φανερή η αιτία που τη Βερενίκη περίμεναν μαζί με τους ευγενικούς αναγνώστες της και οι τηλεοπτικές μηχανές. Στην EPT είχε αρχίσει μια δύσκολη προσπάθεια, που ε-

ξέφραξε και τη σημερινή πολιτική ηγεσία του τόπου, να κερδίσθούν και πάλι οι αξίες, να αναδιοργανωθεί η ίδια, και όσο γίνεται να την αγαπήσει και πάλι το κοινό. Μέσα σε αυτό το κλίμα έγινε και η τρομερή αλλά επίμονη πρόταση του κ. Αλαβάνου [γενικού διευθυντή της EPT] να αρχίσει μια καινούργια περιπέτεια της Βερενίκης: όπου —αλίμονο!— αυτήν τη φορά ο συγγραφέας θα ζούσε ο ίδιος τις κακουχίες και τις χαρές της.

Τώρα, καθώς η περιπέτεια φτάνει στο τέλος της, απομένει σε σας να εκτιμήσετε αν και σε ποιο βαθμό πέτυχαν οι προθέσεις μας. Πρέπει ίσως να σημειωθεί ότι κατά τη δική μου ταπεινή αντίληψη —που θεωρώ μάλιστα αυτονόητη— μια τηλεοπτική σειρά απλώς έχει σαν βάση της ένα βιβλίο. Μήτε να το ακολουθεί κατά γράμμα έχει νόημα, μήτε να αναζητά τις προεκτάσεις του. Ένα βιβλίο στηρίζεται στο λόγο, η τηλεόραση χρησιμοποιεί κυρίως την εικόνα. Η σειρά λοιπόν “Αναζητώντας τη Βερενίκη” πρέπει να ιδωθεί ως μια αυθύπαρκτη με τους δικούς της κανόνες, αναπαράσταση του βιβλίου και όχι σαν απόδοσή του.

Τούτου δοθέντος, και αφού ο ίδιος έλαχε να συμμετέχω σε αυτή την αναπαράσταση —εκεί ίσως οφειλόταν το ανεξήγητο, σχεδόν εκδικητικό, χαμόγελο του κ. Αλαβάνου, όταν μου το πρότεινε—, δεν είναι πρέπον μήτε να τη σχολιάσω, μήτε να διεκδικήσω τον έπαινο ή την επιείκειά σας. Να πω μόνο ότι κεντρικός στόχος μας, και πρώτιστα βέβαια του Φώτου Λαμπρινού [σκηνοθέτη της σειράς], ήταν να αποφύγουμε το ύφος το διδακτικό ή

τις περιγραφές, που στην τηλεόραση προκαλούν πλήξη και απωθούν. Με αυτήν και μόνον την παρατήρηση θα μου επιτρέψετε να θίξω, με συντομία επικίνδυνη, μερικά θέματα γενικότερης σημασίας, που η σειρά αυτή και η πραγματοποίησή της θέτει. Το πρώτο είναι η ανάγκη να κινούμαστε συχνά, σαν παιδεία και σαν έκφραση του σημερινού πολιτισμού μας, και έξω από την καθημερινότητα· την πιεστική συνήθως καθημερινότητα, που έχει να κάνει με χρηματιστήρια, κοινωνικές ανασφάλειες και το εθνικό μας μέλλον. Εάν η κύρια επιδίωξη της χώρας είναι —και σωστά είναι— ο συντονισμός του βηματισμού της με την Ευρώπη, πρέπει να έχουμε πάντα κατά νουν ότι οι μεγάλες στιγμές της ευρωπαϊκής ηπείρου οφείλονται στην επιστήμη και την τέχνη, στους στοχαστές ή την τεχνολογία. Και ότι ίχνη των θεμελιώδων ερωτημάτων που οι δραστηριότητες αυτές προϋποθέτουν απαντώνται πρώτα στις ακτές της ελληνικής Ιωνίας, και βρίσκουν αργότερα την κορύφωσή τους στον κλασικό κόσμο. Από εκεί εξαπλώνονται και κυριαρχούν σε ό,τι σήμερα θεωρείται ευρωπαϊκός ιστός.

Είναι άλλωστε ανάγκη να συνειδητοποιηθεί —και αυτό αποτελεί τη δεύτερή μου παρατήρηση— ότι οι επιστήμες αποτελούν συνιστώσα, και μάλιστα βασική συνιστώσα του πολιτισμού μας. Όσο εξακολουθούμε να μιλούμε για πολιτισμό, υπονοώντας απλώς τη λογοτεχνία, τα έργα τέχνης ή τη μουσική, αφαιρούμε ένα μεγάλο μέρος από τη δυναμική του. Η θεωρία της σχετικοτητάς, για παράδειγμα, έχει μια σπάνια αισθητική· κι ενώ ανοίγει στον άνθρωπο διαστάσεις, ακριβώς όπως ένα έργο τέχνης, είναι επιπλέον σε θέση να εξηγήσει γιατί λάμπει ο Ήλιος. Για τον ίδιο λόγο, η ανακάλυψη της ελικοειδούς δομής του DNA, ή τα *Principia* του Νεύτωνα, είναι πολιτισμικά γεγονότα με τη σωστή —και όχι την εκφυλισμένη— έννοια του όρου. Η πολιτισμική αυτή διάσταση της επιστήμης υπήρξε κεντρικό μας μέλημα, που είθε να επιτεύχθηκε, στην τηλεοπτική αναζήτηση της Βερενίκης.

Το τρίτο —και τελευταίο— θέμα, που η σημερινή σας παρουσία με κινεί να θίξω, αναφέρεται σε ό,τι σε άλλες περιπτώσεις απεκάλεσα παράλλη-

λη Ελλάδα. Την παράλληλη Ελλάδα συνιστούν άνθρωποι με συνέπεια και ήθος, που αγνοώντας συχνά την περιρρέουσα ατμόσφαιρα, εξακολουθούν να πράττουν το ορθό ή το δύσκολο. Στα πανεπιστήμια, αλλά και σε μια δημόσια υπηρεσία, στην καθημερινή ζωή αλλά και σε ένα χώρο εκδοτικό ή της τέχνης, η παράλληλη Ελλάδα είναι συχνά παρούσα· κάποτε, μάλιστα, με τρόπο εκθαμβωτικό. Είναι συνήθως παρούσα μακράν της δημοσιότητας, παραπαίουσα αλλά πάντοτε όρθια, σιωπηλή και ωστόσο βέβαιη. Ένα από τα στίγματα αυτής της παράλληλης, σιωπηλής Ελλάδας είναι οι έλληνες επιστήμονες, που προχωρούν την ανθρωπινή γνώση εδώ στον τόπο τους ή έξω από τα σύνορά του. Στον διεθνή μάλιστα χώρο, οι επιστήμονες αυτοί, εάν κουβαλούν τις μνήμες και τις αγωνίες της Ελλάδας, είναι συχνά μικρές Ελλάδες· που όσο κι αν η πατρίδα μοιάζει να το αγγοεί, ξεχωρίζουν σε ένα περιβάλλον ιδιαίτερα ανταγωνιστικό. Ενδεικτικά, αλλά όχι τυχαία, μερικοί από αυτούς συμμετέχουν στην αναζήτηση της Βερενίκης. Εισι της υπογραμμίζεται αυτή η σημαντική, και θά λεγα συχνά πικρή, ελληνική παρουσία.

Εννοείται ότι ο δρόμος που ακολούθησε η «Αναζήτηση της Βερενίκης» δεν ήταν βέβαια χωρίς αγκάθια, ή χωρίς θάμνους. Για έναν άνθρωπο που, όπως ο οριλών, κινούνταν χρόνια σε πανεπιστημιακές αίθουσες, ή την ένταση μιας πρυτανείας, και έχει ασφαλώς τις δικές του αδυναμίες, ο κόσμος της τηλεόρασης —το ίδιο, φαντάζομαι, ισχύει και στον κινηματογράφο— αναδύθηκε σαν ένας κόσμος δημιουργίας και αντιφάσεων, εγωισμού αλλά και αρετών ψυχής. Ένας κόσμος που, ενώ οι φυσικοί νόμοι άλλα θα υπαγόρευαν, έχει εν τέλει μια βαθύτερη, περίπου αξεπέραστη μαγεία. Δεν θα αναστείλω άλλο την αδημονία, που ασφαλώς υπάρχει, να προβληθεί ένα δείγμα του μόχθου και της περιεργης αυτής μαγείας, που φαίνεται να συνοδεύει ακόμη και τις πιο ταπεινές δημιουργίες της έβδομης ή όγδοης τέχνης. Το Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών πρόσφερε άλλωστε σήμερα στη Βερενίκη, και το συγγραφέα της, μια μοναδική ατμόσφαιρα. Εξάλλου από τα χρόνια της Αγγλίας, τον Ίωνα Σιώτη [διευθυντή του Ε.Ι.Ε.] θυμούμαι ως

ικανότατο φυσικό, αλλά και άνθρωπο με εσωτερική εγρήγορση και πλούτο ιδεών. Έτσι, σήμερα, ανάμεσα σε ανθρώπους της πολιτικής ή της τέχνης —μέχρι πότε άραγε οι δρόμοι τους θα είναι αποκλίνοντες—, ανάμεσα σε ανθρώπους των μέσων ενημέρωσης ή της κριτικής, που είθε να είναι αυστηροί μαζί μας, κοντά σε πρόσωπα φιλικά ή εκπροσώπους της Πολιτείας, διακρινώ, και να μου συγχωρήσετε την αισιοδοξία, έναν κοινό άξονα. Είναι το ενδιαφέρον για μια προσπάθεια που στη σύλληψή της ξεφεύγει από τα ελληνικά, ισως και τα διεθνή μέτρα. Και που ανεξάρτητα από την επιτυχία της, φέρει μαζί της πολλούς συμβολισμούς· και κυρίως την ανάγκη της Ελλάδας και του κόσμου της να συνομιλήσει με το μέλλον που έρχεται σε άλλα επίπεδα.

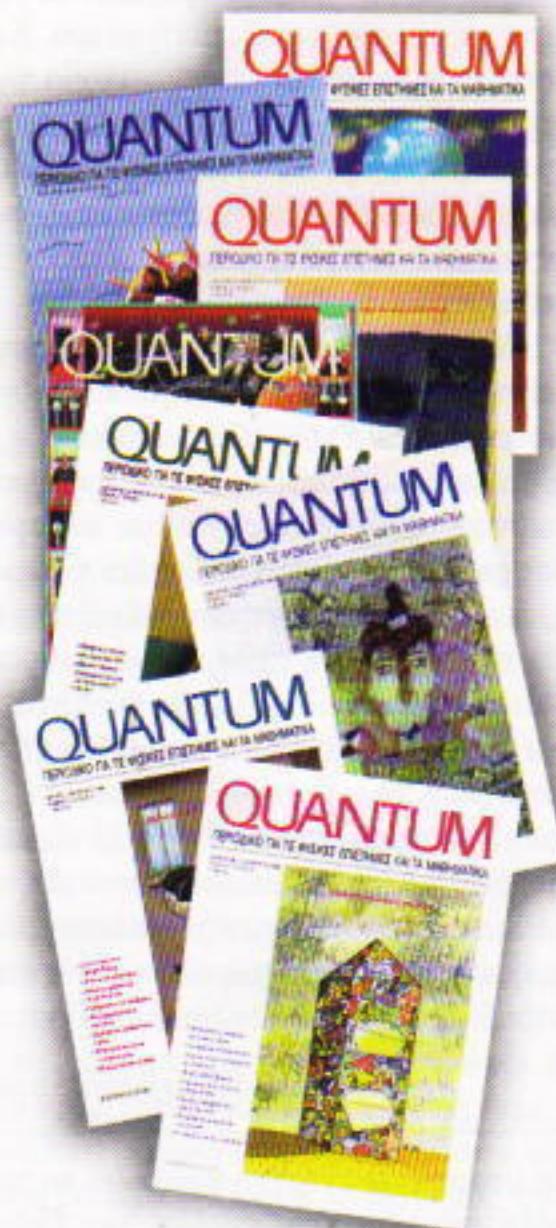
Τύχη αγαθή, που την ανάγκη αυτή δείχνει να συμμερίζεται με τη σημερινή παρουσία του, αλλά και τη μέχρι τώρα διαδρομή του, ο ανώτατος εκπρόσωπος της Πολιτείας. Καθώς από τον αστερισμό της παρακολουθεί τα ανθρώπινα, η Βερενίκη δεν παύει να ανησυχεί για την πορεία της ανθρωπότητας, για τους πολλούς κινδύνους και εντάσεις που την απειλούν. Και εύχεται η πατρίδα της, που εκείνη τη γνώρισε ως ελληνιστική Αλεξάνδρεια, να βρει το μήτο για επιτεύγματα μεγάλα· και την πολιτιστική ανάταση που μια σκληρή εποχή, παρόλο που δεν το παραδέχεται, έχει όσο ποτέ ανάγκη.

—Γιώργος Γραμματικάκης

Το παραπάνω κείμενο αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος της ομιλίας του Γιώργου Γραμματικάκη, καθηγητή φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Κρήτης, την οποία εκφώνησε στη λαμπρή τελετή παρουσίασης της τηλεοπτικής σειράς της ΕΤ1 «Αναζητώντας τη Βερενίκη». Η τελετή έλαβε χώρα στο κεντρικό αμφιθέατρο του Εθνικού Ιδρύματος Ερευνών, στις 21 Οκτωβρίου 1998, παρουσία του Πρέδρου της Δημοκρατίας και μεγάλου κοινού. Το ελληνικό *Quantum*, τιμώντας την πολύ αξιόλογη προσπάθεια και τους συντελεστές της, παραθέτει το εν λόγω κείμενο στις σελίδες του, ελπίζοντας ότι το πρωτότυπο εγχείρημα θα αποτελέσει φωτεινό παράδειγμα για τα τηλεοπτικά μας —και όχι μόνο— δρώμενα.

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Με το επόμενο τεύχος, το Quantum συμπληρώνει πέντε ημερολογιακά έτη συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, επί πέντε χρόνια προσφέρει μέσα από τις σελίδες του την τεκμηριωμένη γνώση αποκαλύπτοντας στο ελληνικό κοινό τη γοητεία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα, λοιπόν, έχουν κυκλοφορήσει είκοσι εννέα τεύχη του.

Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου.

Γι' αυτό φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του. Ήδη κυκλοφορεί και η θήκη του έκτου τόμου, για την αρχειοθέτηση των αντίστοιχων τευχών.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνεξιλ, Νέα Υόρκη
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης
Mike Donaldson

Αντεπιστέλλουσα αρχισυντάκτρια
Jennifer Wang

Υπεύθυνος εικονογράφησης
Sergey Ivanov

Σύμβουλοι σύνταξης

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Irina Oleynik, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβολευτική επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητία Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητής Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντελ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Στέλιος Ζαχαρίου**-μαθηματικός,

Κώστας Σκανδάλης-μαθηματικός, **Μιχάλης Λάμπρου**-μαθηματικός,

Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός και **Αλέκος Μάραλης**-φυσικός

Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης και Ειδικός συνεργάτης: **Γιώργος Ευαγγελόπουλος**

Τυπογραφικές διαρθρώσεις
Μαρία Τσαούση

Τυπωχηνική επιμέλεια
Θανάσης Ντούσης

Υπεύθυνη λογιστρίδη
Μαρία Μάραλη

Εποτημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ιδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση
Αβ. Μαχαριδής

Φίλμ, μοντάζ
Χρ. Μήτσης

Εκτύπωση
N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία
Θ. Αρχοντούλακης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση συμφωνά με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική έκδοση: Αλ. Μάραλης.
Διαφραγμοίσιες και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ιονίων 10 και Δαφνονήση, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπαλάτειο: Νέα στοά Αρούσειου (Πανεπιστημίου 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απογορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδή-
ποτε μέσον άλλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την
έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 9.000 δρχ. για ιδιώτες, 16.000 δρχ. για
βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή πολαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

Πλέγματα και ζώνες Brillouin

Γνωριμία με τα πολύχρωμα πεδία

A.B. Goncharov

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ (ή συνδέσμων) μερικές φορές είναι εξαιρετικά όμορφη. Πραγματικά, το απολαυστικότερο μέρος αυτού του άρθρου θα είναι τα σχήματά του. Αν τα καταλάβετε αρκετά καλά, τότε όλες οι βασικές ιδέες και κατασκευές θα σας φανούν τελείως ξεκάθαρες.

Πριν συνεχίσουμε θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τα προβλήματα που εξετάζουμε εδώ δεν είναι απλές αφαιρέσεις. Αντίθετα, προκύπτουν απευθείας από τη φυσική των κρυστάλλων. Στο τέλος του άρθρου θα αντιμετωπίσουμε πιο λεπτομερειακά τη φυσική άποψη του ζητήματος.

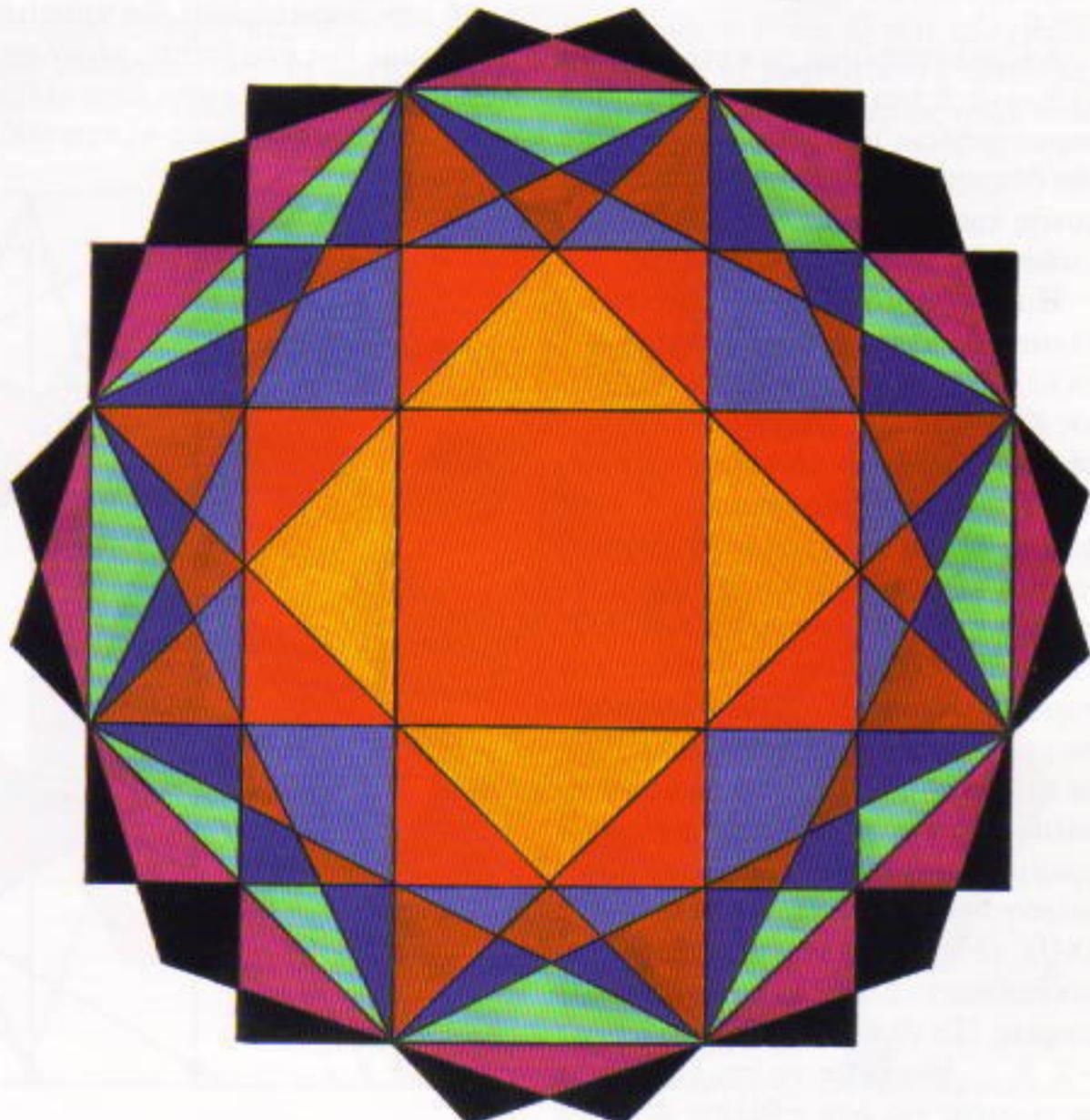
Ας ξεκινήσουμε σημειώνοντας τα σημεία του επιπέδου που έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Θα είναι οι κόμβοι ενός τετραγωνικού πλέγματος. Επλέγουμε ένα από αυτά, έστω το O , ως αρχή. Τώρα, για κάθε κόμβο P του πλέγματος, μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία l έτσι ώστε τα O και P να είναι συμμετρικά ως προς αυτή την ευθεία. Με άλλα λόγια, η ευθεία l θα είναι η μεσοκάθετος του τμήματος OP . Αυτές οι ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε ένα σύνολο μικρών κελιών (τρίγωνα και κυρτά πολύγωνα). Αντιστοιχούμε σε κάθε κελί έναν ακέραιο, που ονομάζουμε τάξη του κελιού, σύμφωνα με τον εξής κανόνα: Στο κελί που περιέχει το σημείο O (είναι τετράγωνο) εκχωρούμε την τάξη 1. Στα γειτονικά του κελιά, δηλαδή σε αυτά με τα οποία έχει μία πλευρά κοινή, την τάξη 2. Τα κελιά που είναι γειτονικά σε αυτά (και δεν έχουν ήδη

τάξη) παίρνουν την τάξη 3, και ούτω καθεξής.

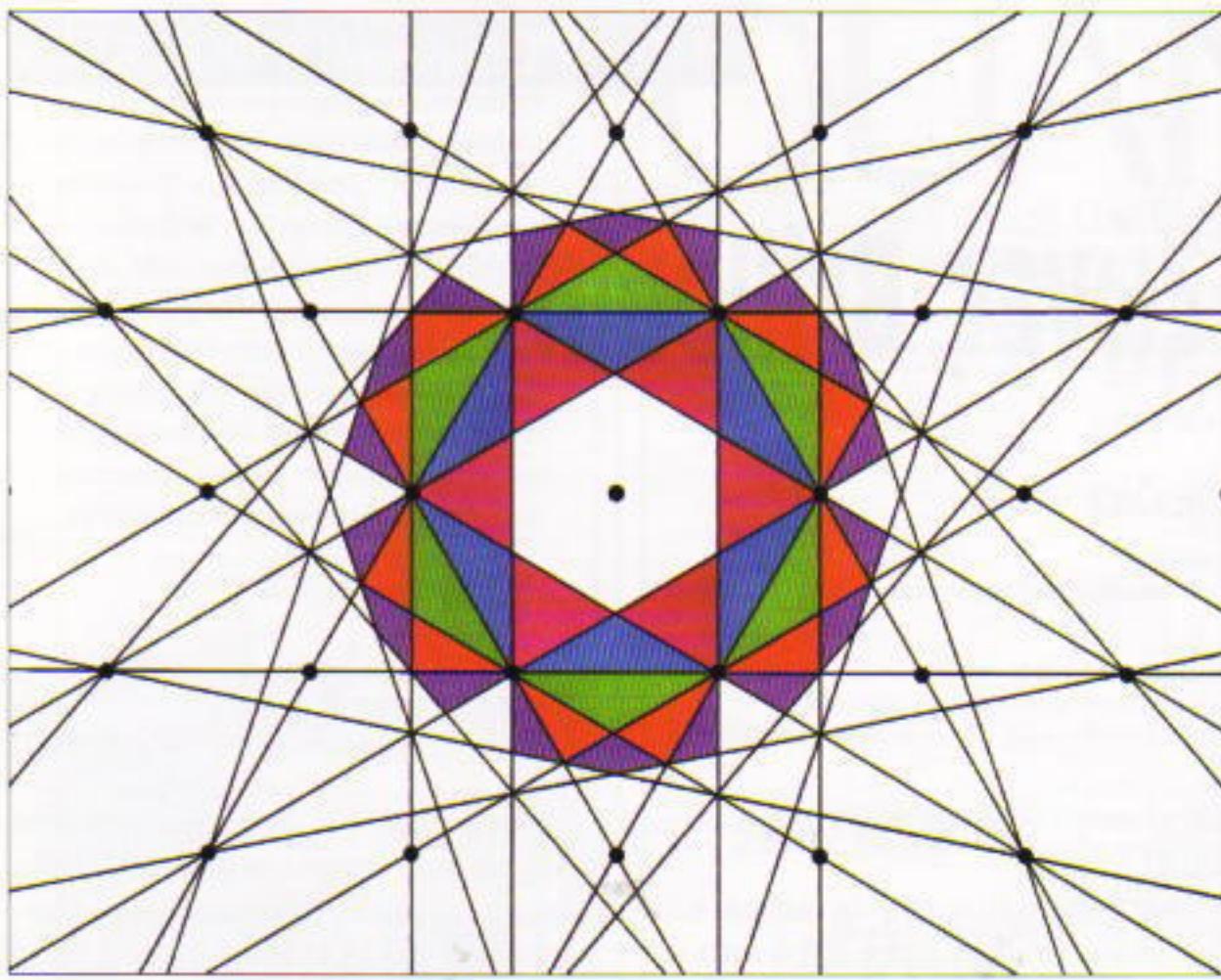
Ας χρωματίσουμε τα κελιά που βρίσκονται κοντά στην αρχή έτσι ώστε τα κελιά με ίδια τάξη να έχουν ίδιο χρώμα (Σχήμα 1). Αποδεικνύεται ότι το συνολικό εμβαδόν κάθε περιοχής ενός συγκεκριμένου χρώματος είναι ίσο με το αντίστοιχο άλλου χρώματος.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πλέγμα που αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα ή από κανονικά εξάγωνα και να εκτελέσουμε τις ίδιες πράξεις σε αυτά (Σχήματα 2 και 3). Θα ανακαλύψουμε ότι ισχύει η ίδια κανονικότητα: οι διαφορετικού χρώματος ζώνες έχουν ίσα εμβαδά.

Θα συμβολίζουμε την ένωση όλων των κελιών τάξης r ($r = 1, 2, \dots$) με



Σχήμα 1



Σχήμα 2

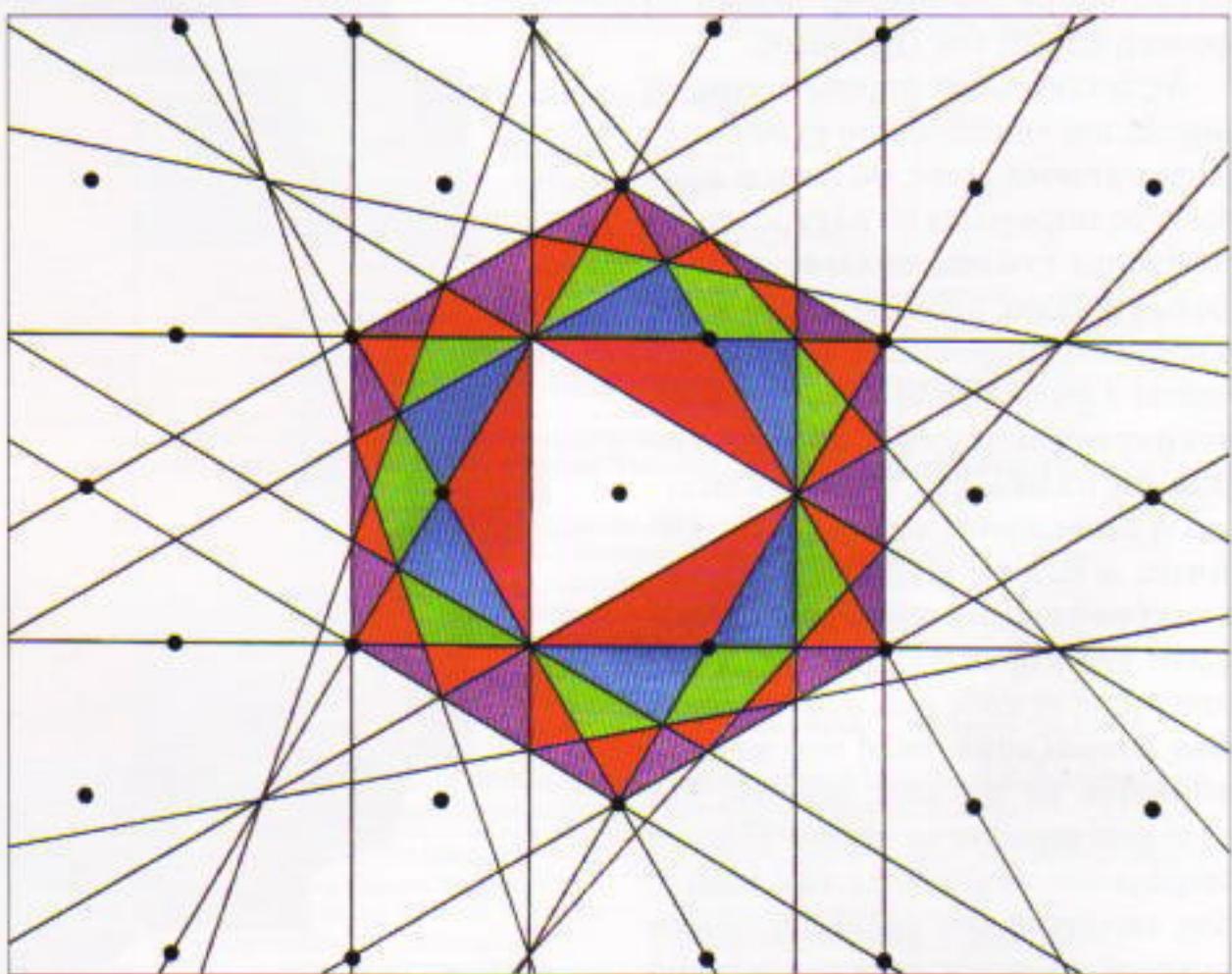
$D_r(O)$, όπου O είναι ο «κεντρικός» κόμβος του πλέγματος. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε δυνατό πλέγμα, το εμβαδόν του $D_r(O)$ είναι ανεξάρτητο του r .

Αν μελετήσουμε αρκετή ώρα τα Σχήματα 2 και 3, θα κάνουμε δύο παρατηρήσεις που μας οδηγούν σε δύο διαφορετικούς τρόπους απόδειξης αυτής της πρότασης. Ας αρχίσουμε, λοιπόν, με τις δύο παρατηρήσεις.

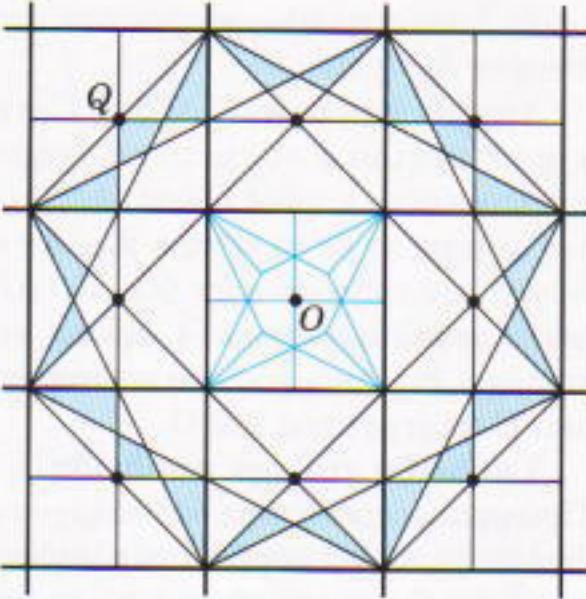
Παρατήρηση 1. Θεωρούμε το απλούστερο πλέγμα, αυτό με τετράγωνα κελιά. Η μπλε περιοχή του Σχήματος 4 είναι το $D_6(O)$. Οι έντονες γραμμές του χωρίζουν το επίπεδο σε ίσα τετράγωνα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κόμβος Q του πλέγματος να βρίσκεται στο κέντρο ενός τετραγώνου. Ονομάζουμε αυτό το τετράγωνο $D(Q)$. Τότε κάθε $D(Q)$ είναι εικόνα του κεντρικού τετραγώνου $D(O) = D_1(O)$ μέσω μιας παράλληλης μετατόπισης κατά το διάνυσμα OQ . Αν «κόψουμε» το επίπεδο κατά μήκος των έντονων γραμμών και μετακινήσουμε όλα τα τετράγωνα στο κεντρικό τετράγωνο $D(O)$, τότε τα μπλε τμήματα θα το «σκεπάσουν» ολόκληρο, χωρίς επικαλύψεις. (Το ίδιο θα συμβεί για κάθε $r = 2, 3, \dots$. Μπορείτε να επαληθεύσετε το γεγονός για όσα r θέλετε ώστε να πειστείτε ότι η πρόταση αληθεύει.)

πλακόστρωσης του επιπέδου. Το Σχήμα 2 παρουσιάζει τις περιοχές $D_r(O)$, για $r = 1, 2, \dots, 6$.

Η κατασκευή της Παρατήρησης 1 αρχίζει με την επλογή ως αρχής ενός σημείου του πλέγματος. Στην πραγματικότητα, όμως, μπορούμε να επλέξουμε ως αρχή οποιοδήποτε σημείο του πλέγματος και να εκτελέσουμε την ίδια κατασκευή. Έτσι, για παράδειγμα, αν επλέξουμε ένα τυχαίο σημείο Q του πλέγματος ως αρχή, μπορούμε να κατασκευάσουμε το $D_4(Q)$ —το οποίο είναι ένα σχήμα ίσο με τα έξι μπλε τετράγωνα του Σχήματος 2— αλλά με κέντρο το σημείο Q . Στο Σχήμα 5 βλέπουμε το αποτέλεσμα για διαφορετικές επλογές του Q . Κάθε Q έχει διαφορετικό χρώμα, ίδιο με το χρώμα του αντίστοιχου $D_4(Q)$. Βλέπουμε τώρα ότι το σύνολο των περιοχών $D_4(Q)$ για τα διάφορα Q καλύπτει, χωρίς επικαλύψεις, όλο το επίπεδο. (Στην πραγματικότητα, το ίδιο ισχύει για κάθε $D_r(Q)$, $r = 1, 2, \dots$). Συνεπώς, το εμβαδόν του $D_4(Q)$ (και, γενικότερα, του $D_r(Q)$, για κάθε r) ισούται με το «μέσο» εμβαδόν ανά κόμβο. (Τη σημασία της τελευταίας πρότασης θα εξηγήσουμε περισσότερο στη συνέχεια.) Τώρα θα διατυπώσουμε ένα λήμμα που ερμηνεύει και τις δύο παρατηρήσεις.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Το κύριο λήμμα. Η περιοχή $D_r(O)$ αποτελείται από όλα τα σημεία A του επιπέδου, η απόσταση των οποίων από τον κόμβο O βρίσκεται στην r -οστή θέση της ακολουθίας των αποστάσεων του A από τους κόμβους του πλέγματος.

Ας αρχίσουμε από την περίπτωση $r = 1$. Εστια P ένα σημείο του πλέγματος. Παρατηρούμε ότι η μεσοκάθετη του τρίγματος PO χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα και ότι όσα σημεία A ανήκουν στο ημιεπίπεδο που περιέχει το O βρίσκονται πλησιέστερα στο O απ' ό,τι στο P , και αντιστρόφως. Η περιοχή $D(O) = D_1(O)$ είναι η τομή όλων αυτών των ημιεπίπεδων για κάθε κόμβο P διαφορετικό τού O . Επομένως, η $D(O)$ αποτελείται από όλα τα σημεία A για τα οποία το O είναι ο πλησιέστερος κόμβος του πλέγματος. (Η $D(O)$ ονομάζεται περιοχή *Dirichlet* του κόμβου O .)

Εστια τώρα B ένα σημείο τάξης $r > 1$ (δηλαδή, έστια ότι ανήκει στο $D_r(O)$). Σύμφωνα με τον ορισμό της τάξης που δόθηκε προηγουμένως, πρέπει να υπάρχει μια διαδρομή από το B στο O η οποία τέμνει ακριβώς $r - 1$ μεσοκάθετους ενός συνόλου τμημάτων $OP_1, OP_2, \dots, OP_{r-1}$. Η διαδρομή αυτή κατασκευάζεται ως εξής: Πρώτα κινούμαστε κατά μήκος του τρίγματος μιας ευθείας που συνδέει το B με ένα τυχαίο σημείο του συνόρου των περιοχών $D_r(O)$ και $D_{r-1}(O)$. Στη συνέχεια, ακολουθώντας μια άλλη ευθεία, καταλήγουμε σε ένα σημείο του συνόρου των περιοχών $D_{r-1}(O)$ και $D_{r-2}(O)$, και ούτω καθεξής. Όταν φτάσουμε στην περιοχή $D_1(O) = D(O)$, προχωρούμε κατευθείαν στο σημείο O . Αυτό

σημαίνει ότι υπάρχουν $r - 1$ κόμβοι του πλέγματος, P_1, P_2, \dots, P_{r-1} , που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο B απ' ό,τι το O (διότι κατά τη μετακίνησή μας από το B στο O διασχίσαμε $r - 1$ μεσοκάθετους). Από την άλλη πλευρά, αν υπήρχαν περισσότεροι από $r - 1$ κόμβοι με αυτή την ιδιότητα, θα ήμασταν αναπόφευκτα υποχρεωμένοι να διασχίσουμε περισσότερες από $r - 1$ μεσοκάθετους. Το λήμμα συνεπώς αποδείχτηκε.

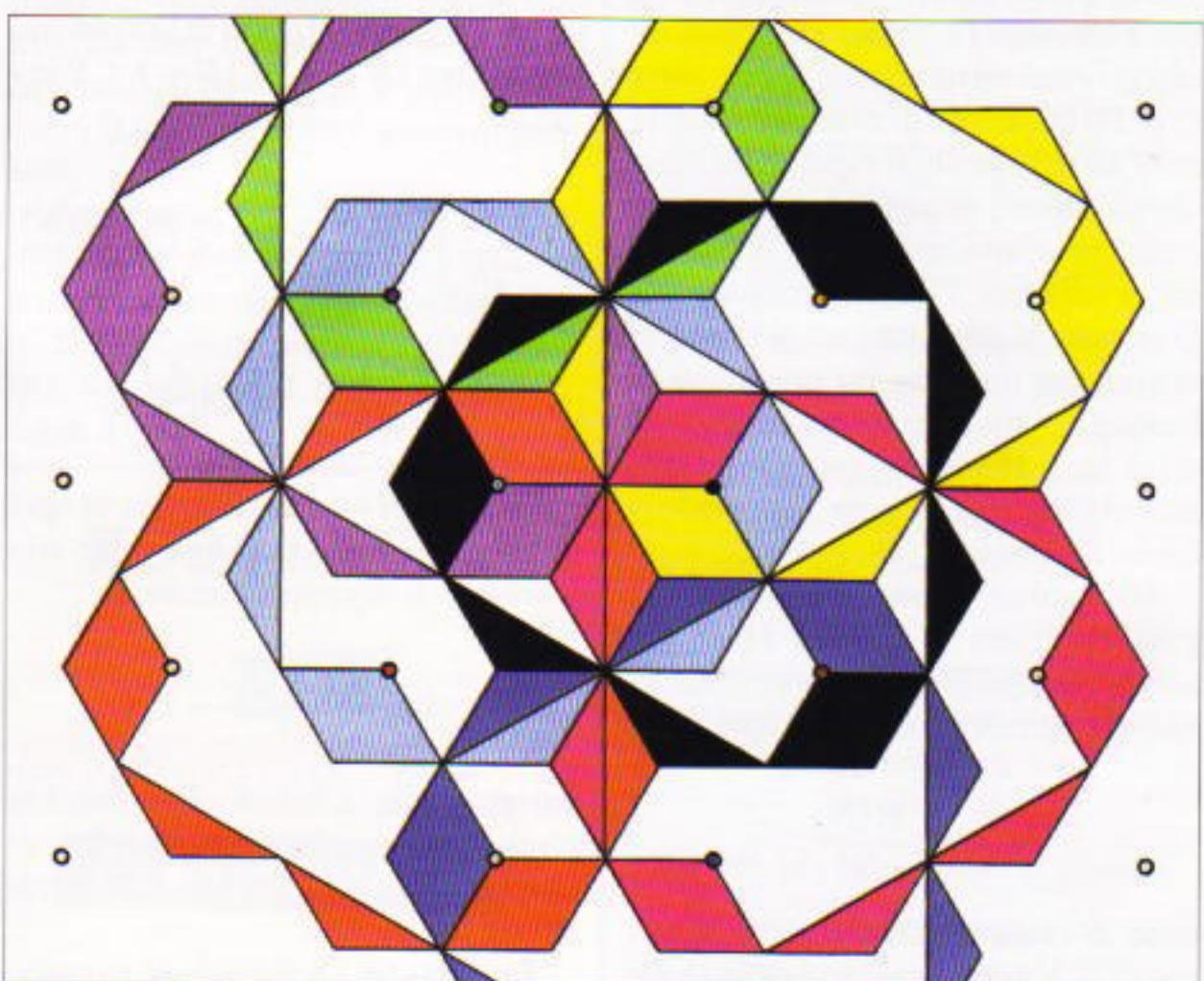
Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα για να αναλύσουμε τις παρατηρήσεις μας.

1. Ας υποθέσουμε ότι το πλέγμα απεικονίζεται στον εαυτό του όταν μετατοπίζεται παράλληλα κατά το διάνυσμα \mathbf{OQ} , όπου O και Q είναι δύο τυχαίοι κόμβοι. (Αυτή η συνθήκη ισχύει για το τετραγωνικό πλέγμα, το τριγωνικό πλέγμα του Σχήματος 1, και γενικότερα, για κάθε πλέγμα οι κόμβοι του οποίου είναι άκρα των διανυσμάτων $m \cdot \mathbf{OA} + n \cdot \mathbf{OB}$, όπου OAB είναι ένα σταθερό τρίγωνο και m, n τυχαίοι ακέραιοι.) Στη συνέχεια, θα ονομάζουμε «μετατοπίσεις» μόνο τις παράλληλες μετατοπίσεις κατά διάνυσμα \mathbf{OQ} . Ας αποδείξουμε ότι για κάθε εσωτερικό σημείο M της περιοχής *Dirichlet* $D(O)$, υπάρχει μια μετα-

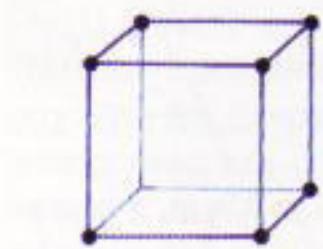
τόποι T τέτοια ώστε $T(M) \in D_r(O)$. Επιπλέον, θα δείξουμε ότι, αν το $T(M)$ βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής $D_r(O)$, τότε υπάρχει μια μόνο τέτοια μετατόπιση. Με άλλα λόγια, η περιοχή $D(O)$ διασπάται σε ένα σύνολο τμημάτων, τα οποία, όταν μετατοπιστούν, σχηματίζουν την περιοχή $D_r(O)$.

Έστω C ένα σημείο στο εσωτερικό της $D(O)$ τέτοιο ώστε το Q να είναι ο r -οστός κόμβος του πλέγματος όταν τους διατάξουμε κατά την απόστασή τους από το C . Σύμφωνα με το κύριο λήμμα μας, $C \in D(O) \cap D_r(Q)$, και συνεπώς αν το μετατοπίσουμε κατά το διάνυσμα \mathbf{OQ} , το $T(C) \in D_r(O)$. Η μετατόπιση T ορίζεται μονοσήμαντα εκτός αν υπάρχει ένας κόμβος X στο πλέγμα τέτοιος ώστε $|CQ| = |CX|$. Είναι επομένως προφανές ότι η μετατόπιση είναι μοναδική για όλα τα σημεία της $D(O)$ εκτός αυτών που βρίσκονται σε ένα πεπερασμένο σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων. Τα τμήματα αυτά δεν είναι παρά οι ευθείες κατά μήκος των οποίων θα χωρίσουμε την περιοχή $D(O)$ για να μεταφέρουμε τα κομμάτια της στην $D_r(O)$.

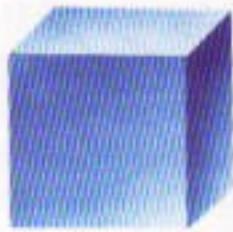
2. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε ζεύγος κόμβων P και Q του πλέγματος μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο μετακίνησης του πλέγματος στον εαυ-



Σχήμα 5



α

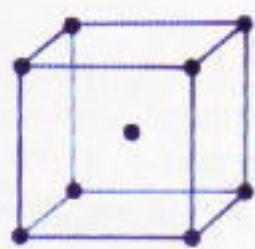


β



γ

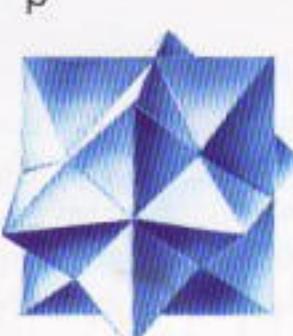
Σχήμα 6



α

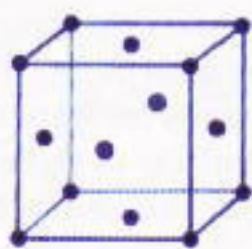


β



γ

Σχήμα 7



α



β



γ

Σχήμα 8

τό του έτσι ώστε ο κόμβος P να απεικονίζεται στον Q . Στην προηγούμενη περίπτωση μιλήσαμε για μετατοπίσεις που απεικονίζουν το πλέγμα στον εαυτό του. Εδώ θα επιτρέψουμε οποιοδήποτε είδος μετασχηματισμού.

Σύμφωνα με το κύριο λήμμα μας, για κάθε σημείο C του επιπέδου υπάρχει ένας μόνο κόμβος Q έτσι ώστε $C \in D_r(Q)$. Είναι ο r -οστός κόμβος στον κατάλογο όπου έχουμε διατάξει τους κόμβους σύμφωνα με την απόστασή τους από το C . Είναι προφανές ότι οι περιοχές $D_r(Q)$ με διαφορετικό Q τέμνονται μόνο στις ακμές τους. Η αρχική μας υπόθεση για το πλέγμα εξασφαλίζει ότι όλες οι περιοχές $D_r(Q)$ είναι ίσες: Η κίνηση του πλέγματος που στέλνει την Q στην O απεικονίζει το $D_r(Q)$ στο $D_r(O)$.

Μπορούμε τώρα να εξηγήσουμε γιατί είναι ίσα τα εμβαδά $D_r(O)$ για κάθε r . Ονομάζουμε «πυκνότητα» ενός πλέγματος το επόμενο όριο:

$$a = \lim \frac{K(N)}{N^2},$$

όπου N είναι το πλήθος των κόμβων στο $N \times N$ τετράγωνο κέντρου O . Θα αποδείξουμε ότι για κάθε r είναι $a = 1/S_r$ (εδώ S_r είναι το εμβαδόν της

$D_r(O)$). Έστω L_r η μέγιστη απόσταση από το σημείο O έως κάποιο σημείο της περιοχής $D_r(O)$, και έστω $N > L_r$. Τότε η ένωση όλων των περιοχών $D_r(Q)$ για όλους τους $K(N)$ κόμβους Q που ανήκουν στο εσωτερικό του $N \times N$ τετραγώνου καλύπτει το τετράγωνο $(N - L_r) \times (N - L_r)$ και τελειώνει στο τετράγωνο $(N + L_r) \times (N + L_r)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{L_r}{N}\right)^2 &= \frac{(N - L_r)^2}{N^2} \leq \frac{S_r \cdot K(N)}{N^2} \\ &\leq \frac{(N + L_r)^2}{N^2} = \left(1 + \frac{L_r}{N}\right)^2. \end{aligned}$$

Όταν το $N \rightarrow \infty$, το δεξί και το αριστερό μέλος αυτής της ανίσωσης τείνουν στο 1. Έχουμε, λοιπόν,

$$\lim \frac{S_r \cdot K(N)}{N^2} = 1,$$

και συνεπώς, $a = 1/S_r$. Έτσι, το $1/a$ είναι το «μέσο εμβαδόν ανά κόμβο», οπότε το S_r , το εμβαδόν της $D_r(O)$, είναι επίσης ίσο με $1/a$.

Σημείωση. Οι ίδιες ιδέες εμφανίζονται σε ένα διάσημο λήμμα του Minkowski για τα κυρτά σώματα, το

οποίο βρίσκεται πλήθος εφαρμογών στη Θεωρία Αριθμών.

Λήμμα Minkowski. Έστω C ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σχήμα και έστω ότι ο κόμβος O του πλέγματος συμπίπτει με το κέντρο του. Άν ο λόγος των εμβαδών των C και $D_1(O)$ είναι μεγαλύτερος του 4, πρέπει να υπάρχει ένας κόμβος στο εσωτερικό του C διαφορετικός του O .

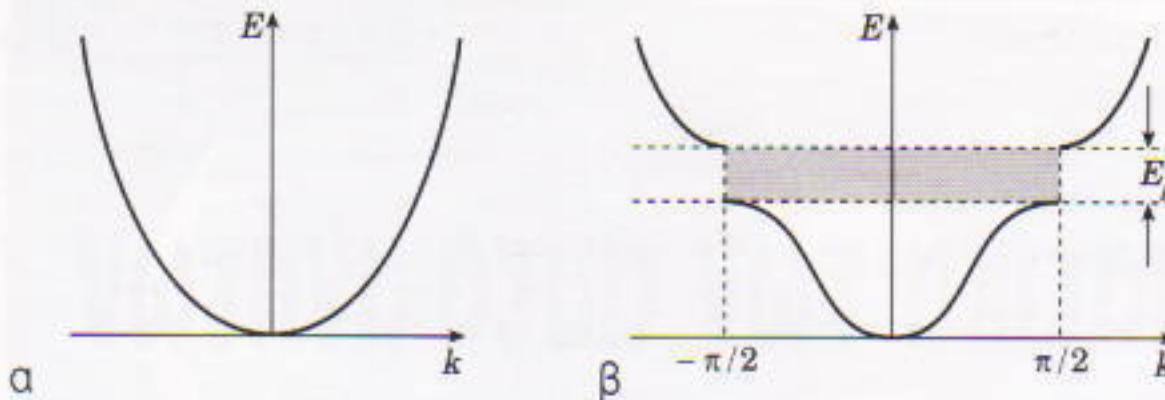
Υπόδειξη για την απόδειξη.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί κόμβοι του πλέγματος P και Q τέτοιοι ώστε οι εικόνες της περιοχής $\frac{1}{2}C$ έπειτα από μετατόπιση κατά τα διανύσματα OP και OQ να επικαλύπτονται. (Το $\frac{1}{2}C$ συμβολίζει το σχήμα που αποτελείται από τα άκρα των διανυσμάτων $\frac{1}{2}OM$, όπου $M \in C$.) Αυτό το τμήμα του συλλογισμού είναι όμοιο με αυτά που είπαμε προηγουμένως, και βασίζεται στο γεγονός ότι το εμβαδόν του $\frac{1}{2}C$ ισούται με $\frac{1}{4}S_C > S_{D_1(O)}$. Θεωρούμε ένα σημείο X στην προαναφερθείσα τομή. Έστω Y και Z οι εικόνες του X έπειτα από μετατόπιση κατά τα διανύσματα PO και QO , αντίστοιχα. Τα σημεία αυτά ανήκουν στην περιοχή $\frac{1}{2}C$. Επιπλέον, $YQ - OZ = OP - OQ$, και συνεπώς το σημείο A , το άκρο του διανύσματος $YQ - OZ$, είναι κόμβος του πλέγματος ($A \neq O$, αφού $P \neq Q$). Επομένως τώρα ότι το άκρο του διανύσματος

$$OY - OZ = \frac{1}{2}(OY + 2(-OZ))$$

ανήκει στο εσωτερικό του σχήματος C , αφού το σχήμα είναι κυρτό και το O είναι το κέντρο συμμετρίας του.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια επιχειρηματολογία όπως στις Παρατηρήσεις 1 και 2 και για πλέγματα σε χώρους τριών (ή περισσοτέρων) διαστάσεων. Σε αυτό το πλαίσιο πρέπει να αναφερθούμε σε «μεσαία (υπερ-) επίπεδα» ενός ζεύγους κόμβων (O, P) και τους όγκους των αντίστοιχων «κελιών» $D_1(O)$ και $D_1(P)$. Τα Σχήματα 6, 7 και 8 παρουσιάζουν τα τέσσερα συνηθέστερα παραδείγματα στερεών πλεγμάτων: ένα απλό κυβικό πλέγμα, ένα κυβικό πλέγμα με κέντρο όγκου και ένα κυβικό πλέγμα με κέντρα εδρών. Οι αντίστοιχες περιοχές $D_1(O)$ και $D_1(P)$ παρουσιάζονται στα Σχήματα 6β-8β και 6γ-8γ, αντίστοιχα. Τα πολύεδρα των Σχημά-



Σχήμα 9

των δι- και 7β ονομάζονται ρομβοδεκάεδρα, ενώ το πολύεδρο του Σχήματος 8β ονομάζεται κόλουρο οκτάεδρο.

Κρυστάλλινες κατασκευές

Οι γεωμετρικές κατασκευές που μελετήσαμε παίζουν σημαντικό ρόλο στη φυσική των στερεών. Οι περιοχές $D_r(O)$ εμφανίζονται στη μελέτη της κρυσταλλικής δομής. Φέρουν το όνομα ζώνες Brillouin, προς τιμήν του διάσημου γάλλου επιστήμονα Leon Brillouin, που μελέτησε επισταμένα κατά τις αρχές της δεκαετίας του 1930 τη ροή ηλεκτρονίων στους κρυστάλλους με βάση την κβαντική θεωρία.

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα ενός κρυστάλλου εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την ύπαρξη «ενεργειακών χασμάτων», τα οποία είναι διαστήματα στην κλίμακα ενεργειών με τιμές που δεν μπορεί να έχει το ηλεκτρόνιο. Το Σχήμα 9α παρουσιάζει πώς εξαρτάται η ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου (δηλαδή, ενός ηλεκτρονίου που δεν αλληλεπιδρά με το κρυσταλλικό πλέγμα) από την ορμή του. Η καμπύλη είναι μια παραβολή (η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας). Αν το ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά με τα ιόντα του κρυστάλλου, τότε, για κάποιες τιμές της ορμής, μπορεί στην καμπύλη να εμφανιστούν ασυνέχειες.

Η αντίστοιχη καμπύλη για έναν μονοδιάστατο κρύσταλλο παρουσιάζεται στο Σχήμα 9β. Στους δισδιάστατους και στους πραγματικούς (τρισδιάστατους) κρυστάλλους η ορμή \mathbf{p} είναι διάνυσμα. Αν συμφωνήσουμε να μετράμε όλα αυτά τα διανύσματα από το ίδιο σημείο O , προκύπτει ένας χώρος (δισδιάστατος και τρισδιάστατος, αντίστοιχα), τα σημεία του οποίου αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές τι-

μές της ορμής —ο λεγόμενος χώρος των ορμών. Για κάθε πλέγμα A που αποτελείται από άτομα του συνήθους χώρου, μπορούμε να βρούμε ένα αντίστοιχο «δυϊκό» πλέγμα P του χώρου των ορμών (οι φυσικοί το ονομάζουν συνήθως αντίστροφο πλέγμα). Αν επλέξουμε μια κατάλληλη κλίμακα στο χώρο των ορμών, το πλέγμα αυτό ορίζεται με τον εξής κανόνα: το διάνυσμα \mathbf{p} του χώρου των ορμών ανήκει στο P αν και μόνο αν το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}$ είναι ακέραιος για όλα τα διανύσματα \mathbf{p} που συνδέουν δύο κόμβους του πλέγματος A .

Αποδεικνύεται ότι τα κενά στην ενέργεια (που εδώ τη θεωρούμε ως συνάρτηση του χώρου των ορμών) εμφανίζονται στα επίπεδα που είναι κάθετα στο μέσο των τμημάτων OP , όπου P είναι κόμβος του δυϊκού πλέγματος. Η παράλληλη μετατόπιση των κελιών που σχηματίζουν τη ζώνη Brillouin $D_r(O)$, τάξης r , στην κύρια ζώνη $D_1(O)$, έχει επίσης φυσική ερμηνεία.

Ασκήσεις

- Γιατί σχηματίζουν πλέγμα τα άκρα των διανυσμάτων $\mathbf{p} = \mathbf{OP}$;
- Σχεδιάστε το δυϊκό πλέγμα P των πλεγμάτων A των Σχημάτων 1, 2 και 3.

ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

ΤΟ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,
τηλ.: 3628492

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΕ ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΗ



Alan Lightman

ΤΑ ΟΝΕΙΡΑ ΤΟΥ ΑΪΝΣΤΑΪΝ

Μια νουβέλα για τη φύση του χρόνου

«Ουδείς λογοτέχνης, φυσικός ή φύλασσοφος μας έχει προσφέρει ποτέ μια τόσο υπέροχη εικόνα για το τι είναι ή τι θα μπορούσε να είναι ο χρόνος...»

James Gleick, συγγραφέας του βιβλίου
Χάος — Μια νέα επιστήμη

«Είναι μια διανοητική πρόκληση. Ένα κείμενο συγκινητικό, ευχάριστο και γραμμένο με εξαιρετική δεξιοτεχνία...»

Salman Rushdie, συγγραφέας του βιβλίου Σατανικοί στίχοι

«Βαθυστόχαστο, παράξενο, χαριτωμένο, γοητευτικό... Έλκει τον αναγνώστη σαν ισχυρός μαγνήτης σ' έναν κόσμο ονειρικό...»

Machiko Kakutani,
στην The New York Times

«Ο Lightman έχει μια καταπληκτική έμπνευση για να εισαγάγει τον αναγνώστη στο αλλόκοτο βασίλειο της “σχετικότητας”...»

The Guardian

Σελ.: 159, 14 × 21 εκ., Πανόδετο, 4.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσματζόγλου 5), Αθήνα, τηλ.: 3247785

Internet: www.katoptro.gr

Κύματα στα ελαστικά των αυτοκινήτων

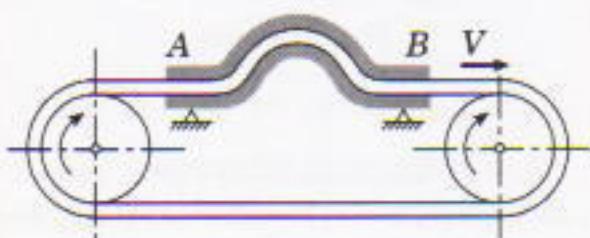
Θέτει ο κινητήρας όρια στη μέγιστη ταχύτητα του αυτοκινήτου;

L. Grodko

MΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΟΛΛΕΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΩΝ είναι το πρόβλημα της κρίσιμης ταχύτητας κύλισης ενός τροχού που φέρει ελαστικό. Τι σημαίνει κρίσιμη ταχύτητα; Από ποιους παράγοντες εξαρτάται; Και πώς μπορούμε να βελτιώσουμε αυτή τη σημαντική παράμετρο; Ας αρχίσουμε από ένα πρόβλημα το οποίο, εκ πρώτης όψεως, δεν σχετίζεται άμεσα με αυτά τα ερωτήματα.

Οδεύον κύμα σε ιμάντα

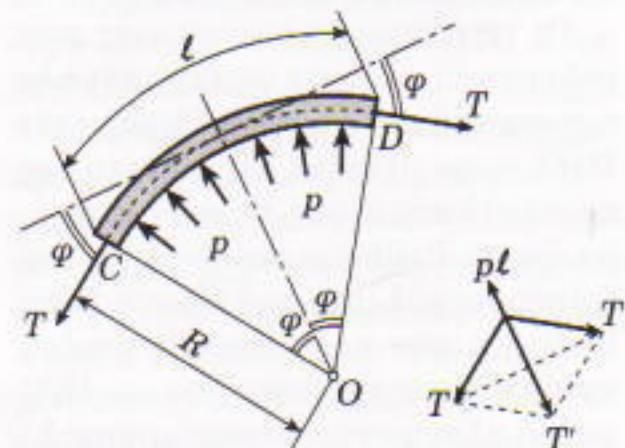
Θεωρήστε έναν ατέρμονα βαρύ ιμάντα ο οποίος κυλίεται πάνω σε δύο περιστρεφόμενα τύμπανα με ταχύτητα V . Το τμήμα AB αυτού του ιμάντα έχει περαστεί μέσα από έναν ακλόνητα στρεωμένο καμπυλωμένο σωλήνα (Σχήμα 1). Ο άξονας του συγκεκριμένου σωλήνα είναι μια ορισμένη καμπύλη που κείται στο επίπεδο της σελίδας. Προσδιορίστε τις δυνάμεις που ασκεί ο σωλήνας στον ιμάντα. Η βαρύτητα μπορεί να αμεληθεύει. Υποθέστε ότι δεν αναπτύσσεται τριβή ανάμεσα στο σωλήνα και τον ιμάντα. Η τάση κατά μήκος του ιμάντα είναι σταθερή και το μέτρο της ισούται με T . Δίδεται η μάζα του ιμάντα ανά μονάδα μήκους, ρ .



Σχήμα 1

Θεωρήστε ένα μικρό στοιχείο του ιμάντα CD μήκους ℓ , που τη δεδομένη στιγμή βρίσκεται μέσα στο σωλήνα. Το τμήμα του σωλήνα που περιέχει αυτό το μικρό στοιχείο μπορεί να προσεγγιστεί πολύ ικανοποιητικά με ένα κυκλικό τόξο ακτίνας R (Σχήμα 2). Το στοιχείο CD κινείται με σταθερή ταχύτητα V κατά μήκος του κύκλου ακτίνας R . Συνεπώς, η κεντρομόλος επιτάχυνσή του ισούται με V^2/R και έχει κατεύθυνση προς το σημείο O , το κέντρο καμπυλότητας του τόξου CD .¹

Ας δούμε λοιπόν ποιες δυνάμεις προσδίδουν τη συγκεκριμένη επιτάχυνση στο στοιχείο CD . Σ' αυτό δρα η τάση T λόγω των γειτονικών στοιχείων του ιμάντα, η οποία εφαρμόζεται στα σημεία C και D εφαπτομενικά προς το τόξο CD (Σχήμα 2). Εππλέον, σ' αυτό το τμήμα του ιμάντα ασκείται η «ορθή πίεση» (αρνητική τάση) λόγω των τοιχωμάτων του σωλήνα. Έστω p η ορθή πίεση ανά μονάδα μήκους του ιμάντα. Τότε η κάθετη δύναμη που ασκείται στο στοιχείο CD ισούται με $p\ell$. Εδώ λάβαμε υπόψη ότι $\ell \ll R$, ώστε να αντικαταστήσουμε το καμπύλο στοιχείο CD με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η συνισταμένη δύναμη F έχει κατεύθυνση προς το κέντρο καμπυλότητας O και



Σχήμα 2

προσδίδει στο στοιχείο CD κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$\rho\ell \frac{V^2}{R} = F, \quad (1)$$

όπου $\rho\ell$ είναι η μάζα του στοιχείου CD . Από το Σχήμα 2 φαίνεται ότι $F = T' - p\ell$, όπου T' είναι η συνισταμένη των δύο δυνάμεων τάσης που ασκούνται στο στοιχείο CD από τα γειτονικά στοιχεία του ιμάντα. Εφόσον η γωνία φ είναι μικρή, ημφ $\equiv \varphi$, $T' \equiv 2T\varphi$ και $\ell = 2R\varphi$. Έτοι,

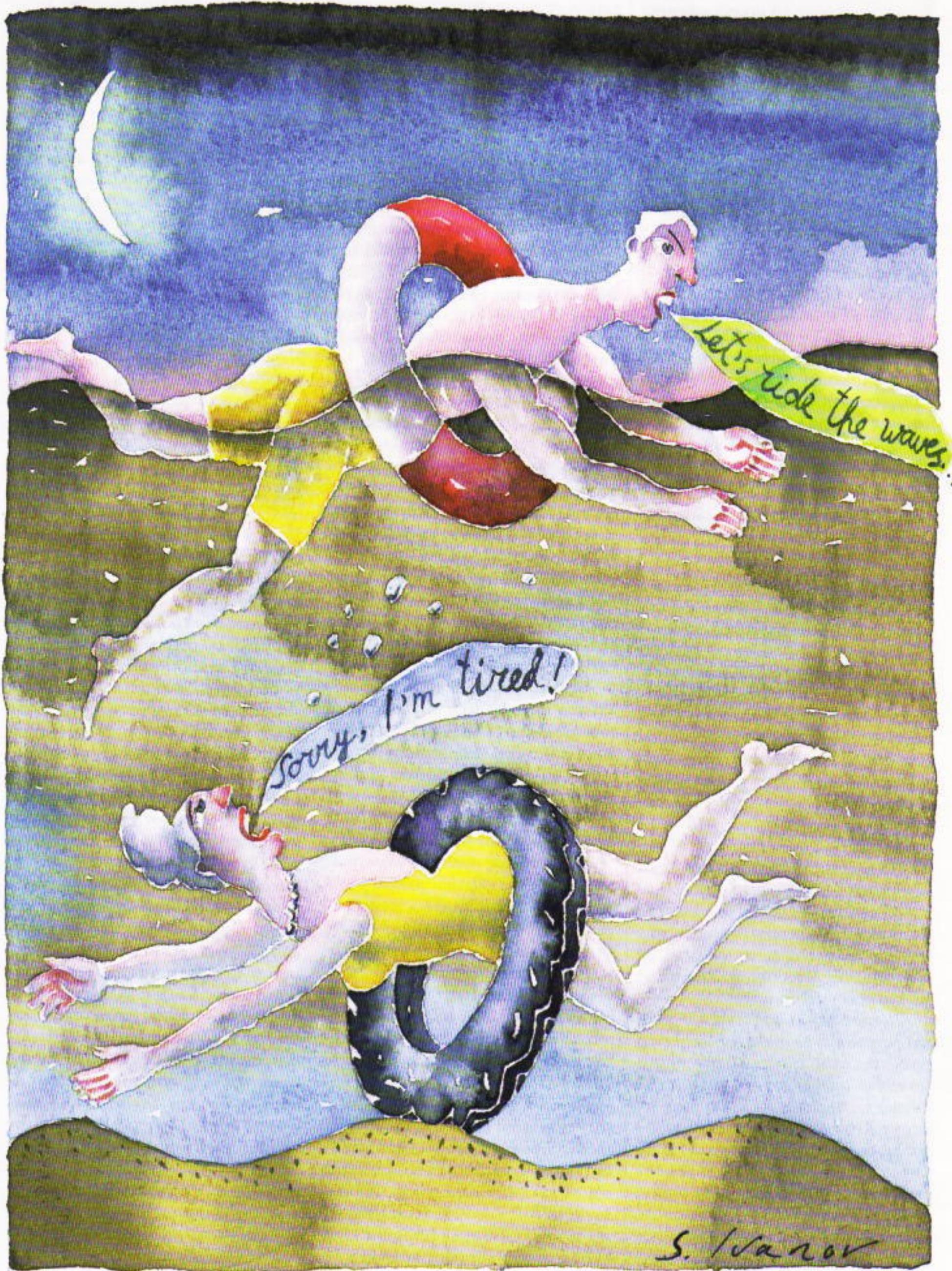
$$F = 2T\varphi - 2pR\varphi.$$

Εάν εισαγάγουμε τις εκφράσεις για την F και το ℓ στην εξίσωση (1), προκύπτει η σχέση

$$2\rho R\varphi \frac{V^2}{R} = 2T\varphi - 2pR\varphi,$$

η οποία δίνει

$$\rho = \frac{1}{R}(T - pV^2). \quad (2)$$



S. Manov

Έτσι καταφέραμε να προσδιορίσουμε την ορθή πίεση που δρά στον ιμάντα. Για την ακρίβεια, υπολογίσαμε μόνο τη δύναμη που ασκείται ανά μονάδα μήκους του ιμάντα στο τμήμα όπου η ακτίνα καμπυλότητας ισούται με R . Ωστόσο, αυτό το αποτέλεσμα αρκεί για να επιτύχουμε περαιτέρω πρόοδο στην επίλυση του προβλήματος.

Ας αναλύσουμε τον τύπο (2). Η εντός παρενθέσεων ποσότητα δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του σωλήνα, άρα για τις δεδομένες παραμέτρους T , ρ και V , η τιμή της καθορίζεται από το αντίστροφο της ακτίνας καμπυλότητας ($p \propto 1/R$). Όταν $V = 0$ (δηλαδή όταν ο ιμάντας δεν κινείται), $p = T/R$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η πίεση καθορίζεται από την τάση του ιμάντα και την καμπυλότητα του σωλήνα στο δεδομένο σημείο. Καθώς αυξάνεται η V , μειώνεται η p όταν η ταχύτητα λάβει την κρίσιμη τιμή

$$V = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (3)$$

η δύναμη μηδενίζεται καθ' όλο το μήκος του σωλήνα. Αυτή η τιμή της ταχύτητας λέγεται κρίσιμη ταχύτητα (V_{kp}).

Τι σημαίνει όμως η εξίσωση $p = 0$? Για $V = V_{kp}$ ο ιμάντας δεν αλληλεπδρά με το σωλήνα! Όταν η ταχύτητα λάβει αυτή την τιμή, μπορούμε να αφαιρέσουμε εντελώς το σωλήνα — οι ιμάντας δεν πρόκειται να «αισθανθεί» τη διαφορά και θα διατηρήσει την καμπυλότητά του στο τμήμα AB .

Σε σχέση με έναν παρατηρητή που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα V_{kp} (οπότε ο παρατηρητής ακινητεί σε σχέση με το πάνω τμήμα του ιμάντα), αυτό το κύρτωμα κινείται κατά μήκος του ιμάντα προς τα αριστερά με ταχύτητα V_{kp} . Ισοδυναμεί επομένως με ένα οδεύον κύμα.

Φανταστείτε τώρα ότι $V < V_{kp}$ και ότι αφαιρούμε το σωλήνα, ασκώντας όμως πίεση στο τμήμα AB του ιμάντα με τέτοιο τρόπο ώστε η πίεση να κατανέμεται ακριβώς όπως και όταν υπήρχε ο σωλήνας. Όπως αντιλαμβάνεστε, το κύρτωμα θα έχει ακριβώς την ίδια μορφή όπως αν δεν είχε απομακρυνθεί ο σωλήνας. Σε κάθε σημείο η καμπυλότητα θα σχετίζεται με τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις σύμφωνα με την εξίσωση (2). Εάν οι πίεσεις p

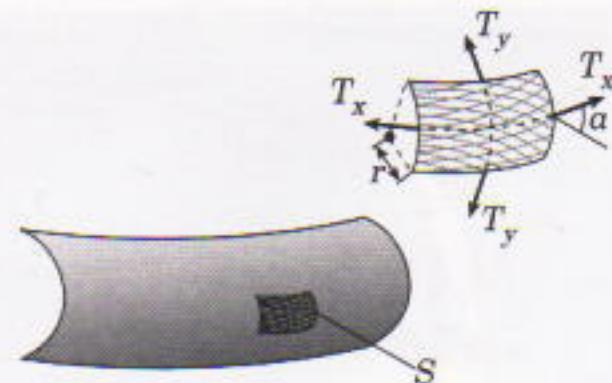
διατηρηθούν σταθερές καθώς αυξάνεται η ταχύτητα, η εξίσωση (2) προβλέπει ότι ο βαθμός καμπύλωσης του ιμάντα (ο οποίος χαρακτηρίζεται από την καμπυλότητά του $1/R$) θα αυξάνεται επίσης. Στη συγκεκριμένη διαδικασία η κατανομή του $1/R$ κατά μήκος του τμήματος AB καθορίζεται από την κατανομή της πίεσης κατά μήκος του ίδιου τμήματος.

Όταν η κατανομή της πίεσης στο τμήμα AB δεν μεταβάλλεται αλλά η ταχύτητα αυξάνεται ώς την κρίσιμη τιμή της, μπορεί να εμφανιστεί μεγάλη καμπύλωση (καμπυλότητα) στον ιμάντα. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να διατυπωθεί και αλλιώς. Εάν ένα σταθερό φορτίο (ήτοι πίεση κατανεμημένη με ορισμένο τρόπο κατά μήκος του τμήματος AB) «τρέχει» κατά μήκος του ιμάντα με αυξανόμενη ταχύτητα (ως προς τον ιμάντα), η καμπυλότητα του ιμάντα στο τμήμα AB αυξάνεται επίσης, ενώ αναλόγως αυξάνεται και η οφειλόμενη στο φορτίο παραμόρφωση του ιμάντα. Όταν η ταχύτητα τείνει στην τιμή V_{kp} , η καμπυλότητα του ιμάντα απειρίζεται. Συνεπώς, ο ιμάντας δεν αντέχει σε φορτίο εφόσον η ταχύτητά του προσεγγίζει την κρίσιμη τιμή της.

Αυτό το συμπέρασμα δεν εξαρτάται από το χαρακτήρα της κατανομής του φορτίου στο τμήμα AB , ακριβώς όπως και η έκφραση για την V_{kp} δεν εξαρτάται από το σχήμα του καμπύλου σωλήνα.

Παραμόρφωση στους δρόμους

Η έννοια της κρίσιμης ταχύτητας του οδεύοντος φορτίου μπορεί να επεκταθεί με κατάλληλες προσαρμογές ώστε να περιγράψει φαινόμενα όπως, ας πούμε, το φορτίο ενός βαγονιού που κινείται πάνω σε σιδηροτροχιές. Η σιδηροτροχιά επίσης καμπυλώνεται λόγω της ασκούμενης πίεσης, αλλά η θεώρηση του φαινομένου περιπλέκεται επειδή, αντίθετα από τον ιμάντα, η σιδηροτροχιά παρουσιάζει κάποιο βαθμό στερεότητας και, επιπλέον, είναι στερεωμένη σε ελαστική βάση (το έδαφος). Μολατάυτα, η κρίσιμη ταχύτητα υπάρχει όντως και σ' αυτή την περίπτωση. Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι η τιμή της είναι εξαιρετικά υψηλή (περίπου 1.000 km/h) κατά συνέπεια, θα έπρεπε να



Σχήμα 3

ληφθεί υπόψη μόνο στη σχεδίαση αμαξοστοιχιών ικανών να αναπτύξουν ταχύτητες που δεν προβλέπεται να καταστούν πραγματοποιήσιμες στο προσεχές μέλλον.

Ωστόσο, οι περιορισμοί που θέτει η ύπαρξη μιας κρίσιμης ταχύτητας έχουν μεγάλη πρακτική σημασία για τα σύγχρονα αυτοκίνητα. Η κρίσιμη ταχύτητα υπαγορεύει τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει ένα αυτοκίνητο. Όλως περιέργως, στην προκειμένη περίπτωση τον περιορισμό δεν τον θέτουν οι κινητήρες αλλά τα ελαστικά!

Το ελαστικό εφάπτεται στο δρόμο με τη λεγόμενη *επιφάνεια επαφής*. Οι δυνάμεις που δρουν στο ελαστικό εφαρμόζονται στην εν λόγω επιφάνεια επαφής και αποτελούν το φορτίο που το διατρέχει. Το ελαστικό αυτοκινήτου με αεροθάλαμο είναι ένα περιβλήμα φουσκωμένο και τεταμένο λόγω της πίεσης του περιεχόμενου αέρα. Όσον αφορά το γεωμετρικό του σχήμα, συμπίπτει σχεδόν με σπείρα. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα μικρό στοιχείο S του περιβλήματος του ελαστικού (Σχήμα 3). Τα γειτονικά στοιχεία ασκούν πάνω του μια τάση σε επιπτομενική διεύθυνση, κατά μήκος των μεσημβρινών και των παραλήλων. Έστω ότι οι τιμές των συγκεκριμένων δυνάμεων ανά μονάδα μήκους (κατά μήκος των παραλήλων) και ανά μονάδα πλάτους (κατά μήκος των μεσημβρινών) του στοιχείου S ισούνται αντιστοιχώς με T_x και T_y . Η ανάλυση της εξάρτησης αυτών των δυνάμεων από την ταχύτητα του ελαστικού μάς παρέχει τον τύπο για την κρίσιμη ταχύτητα του τροχού. Μοιάζει με τον τύπο (3) που εξαγάγαμε προηγουμένως για τον βαρύ ιμάντα:

$$V_{kp} = \sqrt{\frac{T_x}{\rho}}. \quad (4)$$

Ας σημειωθεί ότι εδώ το ρ' συμβολίζει τη μάζα ανά μονάδα εμβαδού του περιβλήματος. Η εξίσωση (4) δείχνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η κρίσιμη ταχύτητα, τόσο περισσότερο τεντώνεται το ελαστικό στη διεύθυνση των παραλλήλων.

Για να αυξήσουν την αντοχή των ελαστικών, οι κατασκευαστές τα ενισχύουν με ένα πολύ ισχυρό πλέγμα νημάτων. Μερικές φορές τα ελαστικά των μεγάλων φορτηγών παράγονται με ενίσχυση από χαλύβδινα σύρματα· τέτοια ελαστικά μπορούν να αντέξουν πολύ μεγάλη πίεση φορτίου. Εάν έλειπε το συρμάτινο πλέγμα, το ελαστικό θα έσκαζε σε μια πρόσθετη πίεση 20-30 φορές μικρότερη από εκείνη στην οποία οκάζουν τα σύγχρονα ενισχυμένα ελαστικά. Για τα επιβατικά αυτοκίνητα η εν λόγω πίεση ανέρχεται σε 1,5-2 atm, ενώ για τα φορτηγά σε 4-6 atm.

Η διεύθυνση των νημάτων χαρακτηρίζεται από τη γωνία a , η οποία επηρεάζει την τιμή της κρίσιμης ταχύτητας:

$$|V_{kp}| = K \cos a.$$

Εδώ το K είναι ένας συντελεστής που καθορίζεται από την πίεση του αέρα p μέσα σε ένα ελαστικό με ακτίνα εγκάρσιας διατομής r , καθώς και από τη μάζα του ανά μονάδα εμβαδού ρ' :

$$K = \sqrt{\frac{pr}{\rho'}}.$$

Συνεπώς,

$$V_{kp} = \sqrt{\frac{pr}{\rho'}} \cos a. \quad (5)$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως τύπος του Tarner. Μπορείτε να τον ξαγάγετε μόνοι σας, στηριζόμενοι στις γνώσεις φυσικής που αποκτήσατε στο λύκειο.²

Η τιμή της κρίσιμης ταχύτητας που υπολογίζεται βάσει της εξίσωσης (5)

2. Δεχτείτε ότι οι συνθήκες μορφοποίησης του στοιχείου S προϋποθέτουν μηδενική καμπυλότητα στη διεύθυνση των παραλλήλων: έτσι θα πάρετε τον τύπο $T_s = pr$. Η συνθήκη για να μη σημειωθεί σχετική κίνηση των συρμάτων (να παραμείνει αμετάβλητη η γωνία a) οδηγεί σε μια σχέση ανάμεσα συντομοτάτα T_s και T_p : $T_s = T_p \cos^2 a = pr \cos^2 a$.

προσεγγίζει ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα. Για ελαστικά επιβατικών αυτοκινήτων, η εν λόγω τιμή ανέρχεται σε $V_{kp} = 150-220 \text{ km/h}$, η οποία είναι πολύ μικρή εφόσον προκειται για αγωνιστικά αυτοκίνητα. Ο τύπος του Tarner μάς υποδεικνύει πώς να αυξήσουμε την κρίσιμη ταχύτητα του ελαστικού. Θα έπρεπε κανείς να κατασκευάσει τα κατά το δυνατόν ελαφρότερα ελαστικά (δηλαδή με την ελάχιστη ρ'), να τα κάνει παχύτερα (να αυξήσει την r), να αυξήσει την πίεση και να τα ενισχύσει με ίνες τοποθετημένες έτσι ώστε να σχηματίζουν την ελάχιστη δυνατή γωνία α μεταξύ τους.

Η κρίσιμη ταχύτητα ενός ελαστικού είναι μια ιδιαίτερα σημαντική παράμετρος. Ως εκ τούτου, όλα τα ελαστικά υποβάλλονται σε ειδικούς ελέγχους για τη μέτρησή της. Σε τέτοιους ελέγχους ο άξονας του τροχού παραμένει σταθερός, ενώ ο τροχός κυλίεται σε ένα περιστρεφόμενο τύμπανο. Στην περιοχή του ελαστικού που μόλις έπαψε να εφάπτεται με το τύμπανο και απομακρύνεται από αυτό διακρίνονται κύματα. Η παραμόρφωση του ελαστικού είναι πολύ μεγάλη σε τέτοιες περιοχές. Η περαιτέρω αύξηση της ταχύτητας επιδεινώνει την παραμόρφωση (το πλάτος των κυμάτων γίνεται μεγαλύτερο). Είναι αδύνατον να φτάσει η ταχύτητα την κρίσιμη τιμή της V_{kp} , διότι το ελαστικό οκάζει προτού επιτευχθεί η συγκεκριμένη τιμή.

Τα προβλήματα της κρίσιμης ταχύτητας κύλισης των ελαστικών αναδεικνύονται στη σημαντικότερη δυσκολία που αντιμετωπίζει η θεωρία και η πρακτική της σχεδίασης αυτοκινήτων. Επομένως, δεν πρέπει να προκαλεί απορία το γεγονός ότι προσέλκυουν την προσοχή πλήθους ερευνητών. Τα εν λόγω προβλήματα τα πραγματεύονται αρκετές εκατοντάδες πειραματικών και θεωρητικών άρθρων. Μολατάτα, πολύ απέχουν από το να θεωρούνται λυμένα, πράγμα που σημαίνει ότι θα εξακολουθήσουν και στο μέλλον να προσφέρουν ενδιαφέροντα θέματα για το Quantum.

Διαβάστε ακόμη το άρθρο...

«Περί παραμορφώσεων», Καλειδοσκόπιο, Νοέμβριος / Δεκέμβριος 1995.

Μια εισαγωγή στη θεωρία της φυσικής επιλογής του Καρόλου Δαρβίνου, για νεαρούς αναγνώστες



Peter Ward

Ταξιδεύοντας με τον κύριο Δαρβίνο

Με την άποψη του Μάρκου της φυσικής επιλογής του Καρόλου Δαρβίνου, για νεαρούς αναγνώστες

Peter Ward

ΤΑΞΙΔΕΥΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΟΝ ΚΥΡΙΟ ΔΑΡΒΙΝΟ

«Εμπνευσμένο, εξαίρετο βιβλίο... Πρέπει να το διαβάσουν τα παιδιά δύο του χόσμου...»

Nature

«Υπέροχη εισαγωγή για νεαρούς αναγνώστες...»

The Times Educational Supplement

«Αναρωτιέμαι αν το βιβλίο του Ward πρέπει πλέον να θεωρείται ένα μικρό κλασσικό έργο...»

The School Librarian

«Αν νομίζετε πως ο Δαρβίνος πέφτει λίγο βαρύς για τα παιδιά, ζανασκεφτείτε το...»

The Sun (Αυστραλίας)

Σελ.: 128, 17 x 25 εκ., Εγγρ. και Α/Μ, Πανόδητο, 4.500 δρχ.

ΚΥΚΛΑΦΟΡΕΙ
ΣΕ ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσματζόγλου 5), Αθήνα, τηλ.: 3247785

Internet: www.katoptro.gr

Για να περνά η ώρα



Σ141

Δώδεκα ημέρες ανάπαισης. Καθένας από τρεις διαδοχικούς μήνες έχει τέσσερις ακριβώς Κυριακές. Αποδείξτε ότι ένας από αυτούς τους μήνες είναι ο Φεβρουάριος.



Σ142

Συμβολική αναζήτηση. Εισαγάγετε μαθηματικά σύμβολα μεταξύ των τριών αριθμών 4 4 4 έτσι ώστε η προκύπτουσα παράσταση να ισούται με 16.



Σ143

Ελάχιστο πολύγωνο. Κατασκευάστε ένα πολύγωνο με το ελάχιστο δυνατό πλήθος πλευρών, οι πλευρές του οποίου τέμνουν τα 12 τμήματα της εικόνας.



Σ144

Γεωμετρική ανακατασκευή. Ένας μαθητής σχεδίασε στο μαυροπίνακα ένα παραλληλεπίπεδο $ABCDA_1B_1C_1D_1$ και ονόμασε P και Q τα κέντρα των εδρών $A_1B_1C_1D_1$ και CDD_1C_1 , αντίστοιχα. Επειτα έσβησε το σχέδιο, αφήνοντας μόνο τέσσερα σημεία: A , B , P και Q . Κατασκευάστε ξανά το παραλληλεπίπεδο αν γνωρίζετε ότι τα τμήματα AA_1 , BB_1 , CC_1 και DD_1 είναι ακμές.



Σ145

Κοίτα πριν πηδήξεις. Ο διάσημος βαρόνος Μυνχάουζεν διηγήθηκε κάποτε την εξής ιστορία: Άρχισε να τρέχει για να πηδήξει πάνω από έναν βάλτο. Είχε ξεκινήσει ήδη το άλμα του όταν συνειδητοποίησε ότι δεν μπορούσε να φτάσει στην απέναντι όχθη. Τότε, και ενώ βρισκόταν ακόμη στον αέρα, αποφάσισε να στρίψει και να γυρίσει με ασφάλεια στην όχθη απ' όπου είχε φύγει. Μπορεί να είναι αληθινή αυτή η ιστορία;

Συναρτησιακές εξισώσεις και ομάδες

Μια τυπική εισαγωγή

Y.S. Brodsky και A.K. Slipenko

ΠΙΘΑΝΟΤΑΤΑ ΕΙΣΑΣΤΕ ΕΞΟΙΚΕΙΩΜΕΝΟΙ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, παρ' ότι μπορεί να μην έχετε ξανακούσει αυτό τον όρο. Οι συναρτησιακές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε ιδιότητες όπως κατά πόσο μια συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ή περιοδική.

Γενικώς, η συναρτησιακή εξισωση είναι μια εξισωση που περιγράφει μια απροσδιόριστη συνάρτηση. Συχνά, είναι δυνατόν να «λυθεί» ως προς την άγνωστη συνάρτηση. Μερικά παράδειγματα τέτοιων εξισώσεων είναι

$$f(x+1) + f(x) = x,$$

$$2f(1-x) + 1 = xf(x),$$

$$xf(x) + f\left(\frac{4}{2-x}\right) = x.$$

Οι μαθηματικοί άρχισαν να μελετούν τις συναρτησιακές εξισώσεις εδώ και διακόσια χρόνια, όταν αυτές εμφανίστηκαν σε μερικά προβλήματα μηχανικής. Σημαντική στη μελέτη αυτών των εξισώσεων ήταν η συμβολή του Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Υπάρχει μάλιστα και μια εξισωση, η $f(x+y) = f(x) + f(y)$, που φέρει το όνομά του. Στο άρθρο αυτό θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε μια μέθοδο επίλυσης των συναρτησιακών εξισώσεων που χρησιμοποιεί μια από τις σημαντικότερες έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών —την έννοια της ομάδας.

Σύνθεση συναρτήσεων

Το πλήθος των βασικών συναρτήσεων που μελετάμε στο σχολείο είναι μάλλον μικρό. Ανάμεσά τους έχουμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, τις εκθετικές και τις τριγωνομετρικές. Από αυτές τις βασικές, προκύπτουν άλλες μέσω της σύνθεσης συναρτήσεων και μέσω αλγεβρικών πράξεων.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x+1)$ είναι

σύνθεση της γραμμικής συνάρτησης $g(x) = 2x+1$ και της τριγωνομετρικής συνάρτησης $h(x) = \eta\mu(x)$ —δηλαδή, $f(x) = (h \circ g)(x)$.

Η συνάρτηση $f(x) = \log_{10} \text{τοξημ}(x)$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = \text{τοξημ}(x)$ και $h(x) = \log_{10}(x)$. Επομένως θα ισχύει ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $h \circ g$ αποτελείται από όλα τα x του $D(g)$ για τα οποία το $g(x) \in D(h)$. Στο τελευταίο μας παράδειγμα, $D(g) = [-1, 1]$, $D(h) = (0, \infty)$. Αφού $\text{τοξημ}(x) > 0$ ακριβώς μόνο όταν $x \in (0, 1]$, έχουμε ότι $D(f) = (0, 1]$.

Η σύνθεση των ίδιων συναρτήσεων με αντίστροφη σειρά — $f(x) = \text{τοξημ}(\log_{10} x)$ — έχει διαφορετικό πεδίο ορισμού: $D(f) = [1/10, 10]$. Η σύνθεση των ρητών συναρτήσεων

$$g(x) = \frac{-2x+1}{3x+2}$$

και

$$h(x) = \frac{3x-2}{-x+4}$$

δίνει τη συνάρτηση

$$f(x) = h(g(x)) = \frac{\frac{3(-2x+1)}{3x+2} - 2}{\frac{-(2x+1)}{3x+2} + 4} = \frac{-12x-1}{14x+7}, \quad x \neq -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Εδώ, } D(f) = R \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \right\}.$$

Κατά κανόνα, $f \circ g \neq g \circ f$. Επίσης, από τον ορισμό της σύνθεσης των συναρτήσεων, προκύπτει άμεσα ότι

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Ασκήσεις

- Βρείτε τις συνθέσεις $f_1 \circ f_2$ και $f_2 \circ f_1$ των επόμενων συναρτήσεων:

$$a \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + b \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + b_1, \quad g_0 g_1 = g_1^2 - g_2^2, \\ + c \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \cdot f \left(\frac{x+1}{1-x} \right) + d \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + g_1^2, \quad g_2^2, g_1 = g_2^2, g_2 = g_2 \\ = h \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad f(x) = ax + b, \quad (a, b) \\ G = \left\{ x, \frac{1}{1+x^2}, \frac{x-1}{x} \right\} x(R) \{ 0, 1, \dots \} g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8 \\ f_1, f_2 = a(a_1 x + b_1) + b_1 = a_1 a_2 x + a_1, \quad G = \left\{ g_1, g_2, g_3, g_4 \right\}, \quad g_1(x) = x \\ f_3, f_4 = a_1 f(g_1) + a_2 f(g_2) + \dots + a_n f(g_n) \\ a_1 f(g_1) + a_2 f(g_2) + \dots + a_n f(g_n) = 2x \\ 2x f(x) + f \left(\frac{1}{1-x} \right) = 2x \\ 2x f(x) + f \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{2x+1}{3x+2} + q \\ q = x \\ (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \quad D(f) = R \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \right\} \\ f(x+1) + f(x) = x \quad f_1 = \frac{x-2}{3x+4}, \quad f_2 = \frac{2x+3}{5x-1} \\ 2 \rightarrow 1-x, \quad 1-x \rightarrow x \\ g_2(x) = 1-x, \quad g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 \\ g_1 = g_1, \quad g_2 = g_2 \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \\ f_1(x) = (1-x) f(1-x), \quad f_2(x) = (1-x) f_1(1-x) \\ f_1(x) f_2(x) = f_1(x) f(1-x) = f(x) f_2(x) \\ f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) \\ f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) \\ g(x) = \arcsin x, \quad h(x) = \sin x \\ D(g) = [-1, 1], \quad D(h) = [0, \infty] \\ f(x) = \arcsin(gx), \quad D(f) = \left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10} \right], \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h(x) = \sin x$$

a	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3

$$x \rightarrow 1-x, \quad 1-x \rightarrow x \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \\ 2f(x) + 2f \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1, \quad x+1 \\ 2f(x) + 1 = (1-x) f(1-x), \quad (2) \\ 2f(x) + 1 = (1-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (xf(-x)) \\ xf(x) + 2f \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1, \quad (3) \\ \frac{x-1}{x+1} f \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + 2f \left(-\frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{x} f \left(-\frac{1}{x} \right) + 2f \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ f \left(\frac{1}{x} \right) + f \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{x+1}{x-1} \cdot f \left(\frac{x+1}{1-x} \right), \quad x \rightarrow \frac{x+1}{1-x} \\ f \left(\frac{1}{x} \right) + 2f \left(\frac{x+1}{1-x} \right) = 1. \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin(gx), \quad D(f) = \left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10} \right], \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h(x) = \sin x$$

$$f_1 = \frac{x-2}{3x+4}, \quad f_2 = \frac{2x+3}{5x-1}.$$

$$x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}$$

2. Βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης των συναρτήσεων $1 - x^2$ και \sqrt{x} .

3. Έστω

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Βρείτε τη

$$\underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ times}}.$$

Συναρτησιακές εξισώσεις

Ας λύσουμε το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $y = f(x)$ για τις οποίες

$$2f(1-x) + 1 = xf(x). \quad (1)$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση που 1-κανοποιεί αυτή την εξισώση. Αν αντικαταστήσουμε το x με το $1-x$, προκύπτει

$$2f(x) + 1 = (1-x)f(1-x). \quad (2)$$

Από την εξισώση (1) παίρνουμε

$$f(1-x) = \frac{1}{2}(xf(x) - 1).$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή τού $f(1-x)$ στη (2), προκύπτει

$$2f(x) + 1 = (1-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (xf(x) - 1),$$

απ' όπου παίρνουμε

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-x+4}.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι η προκύπτουσα συνάρτηση επαληθεύει την εξισώση (1).

Σε αυτή την εξισώση οι συναρτήσεις $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = 1-x$ χρησιμοποιούνται ως ορίσματα της άγνωστης συνάρτησης. Η αντικατάσταση του x με το $1-x$ μετατρέπει τη μια στην άλλη και μας δίνει μια ακόμη εξισώση που περιέχει τα $f(x)$ και $f(1-x)$. Με αυτό τον τρόπο αναγάγαμε τη λύση της συναρτησιακής εξισώσης στη λύση ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ένα δυσκολότερο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2. Λύστε την επόμενη εξισώση:

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1. \quad (3)$$

Λύση. Ενεργούμε παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση. Αν κάνουμε την αντικατάσταση

παίρνουμε

$$\frac{x-1}{x+1} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1. \quad (4)$$

Τώρα, μαζί με τις $f(x)$ και

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right),$$

έχουμε και τον νέο «άγνωστο»

$$f\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Έτσι, εκτελούμε μια ακόμη αντικατάσταση στην εξισώση (3):

$$x \rightarrow -\frac{1}{x}.$$

Προκύπτει η

$$-\frac{1}{x} f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1. \quad (5)$$

Τώρα, εκτός της $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, έχουμε μια ακόμη ανεπιθύμητη παράσταση στην εξισώση μας, την

$$f\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

Δοκιμάζουμε μια ακόμη αντικατάσταση:

$$x \rightarrow \frac{x+1}{1-x}.$$

Τελικά, καταλήγουμε σε μια εξισώση χωρίς καινούργιο άγνωστο:

$$\frac{x+1}{1-x} f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1. \quad (6)$$

Έτσι, κατασκευάσαμε το σύστημα των τεσσάρων γραμμικών εξισώσεων (3)-(6) με τέσσερις αγνώστους, τους

$$f(x), \quad f\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad f\left(-\frac{1}{x}\right), \quad \text{και} \quad f\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

Αν απαλείψουμε διαδοχικά τους αγνώστους

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad f\left(-\frac{1}{x}\right), \quad \text{και} \quad f\left(\frac{x+1}{1-x}\right),$$

βρίσκουμε ότι

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}$$

(όπου $x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$). Υποθέσαμε, όπως και κατά τη λύση της εξίσωσης (1), ότι υπάρχει μια λύση της εξίσωσης (3). Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι η f πράγματι ικανοποιεί την εξίσωση (3).

Πώς προκύπτουν οι ομάδες;

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε με ποιο τρόπο κατορθώσαμε να λύσουμε τις προηγούμενες εξίσωσεις. Θεωρούμε μια ακόμη εξίσωση:

$$f(x+1) + f(x) = x.$$

Δεν μοιάζει δυσκολότερη από την εξίσωση (3). Όμως, όλες οι προσπάθειες επίλυσής της με την ίδια μέθοδο είναι μάταιες. Αν κάνουμε την αντικατάσταση $x \rightarrow x+1$, εμφανίζεται η νέα μεταβλητή $x+2$, και ούτω καθεξής. Η αλυσίδα δεν κλείνει και ουδέποτε καταλήγουμε σε γραμμικό σύστημα.

Θυμηθείτε ότι, όταν λύσαμε την πρώτη εξίσωση, κάναμε την αντικατάσταση $x \rightarrow 1-x$. Μέσω αυτής της αντικατάστασης, $1-x \rightarrow x$. Έτοι, για τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων $g_1(x) = x$ και $g_2(x) = 1-x$, έχουμε ότι ισχύει $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 = g_2$, $g_2 \circ g_2 = g_1$ και $g_1 \circ g_1 = g_1$.

Θεωρούμε τον πίνακα «πολλαπλασιασμού» που παρουσιάζεται στον Πίνακα 1 (όπου το $g_i \circ g_j$ βρίσκεται στη διαστάυρωση της γραμμής i και της στήλης j).

\circ	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1

Πίνακας 1

Σε κάθε γραμμή και στήλη αυτού του πίνακα εμφανίζονται και η g_1 και η g_2 .

Ας επλύσουμε την εξίσωση

$$a(x)f(x) + b(x)f(1-x) = c(x), \quad (*)$$

όπου a, b, c , είναι δεδομένες συναρτήσεις. Η αντικατάσταση $x \rightarrow 1-x$ μας οδηγεί στην

$$a(1-x)f(1-x) + b(1-x)f(x) = c(1-x), \quad (**)$$

η οποία, μαζί με την εξίσωση (*), δίνει ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τις $f(x)$ και $f(1-x)$. Μπορούμε, τώρα, να συνεχίσουμε τη λύση όπως κάναμε για την εξίσωση (1).

Στο Πρόβλημα 2, εκτελέσαμε τις επόμενες αντικαταστάσεις

$$x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}, \quad x \rightarrow -\frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \frac{x+1}{1-x},$$

δηλαδή, χρησιμοποιήσαμε τις συναρτήσεις

$$g_1(x) = x, \quad g_2(x) = \frac{x-1}{x+1},$$

$$g_3(x) = -\frac{1}{x}, \quad g_4(x) = \frac{x+1}{1-x}.$$

Ας δούμε πώς συμπεριφέρονται κατά τη σύνθεσή τους οι συναρτήσεις g_1, g_2, g_3 και g_4 . Σχηματίζουμε τον Πίνακα 2 ανάλογο με τον Πίνακα 1 (γράφουμε την $g_i \circ g_j$ στη διαστάυρωση της γραμμής i και της στήλης j).

\circ	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3

Πίνακας 2

Ο πίνακας αυτός είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο. Δηλαδή, $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ για κάθε i, j . Επιπλέον, όλες οι συναρτήσεις g_i εμφανίζονται ακριβώς μια φορά σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη. Τέλος, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $g_3 = g_2^2$, $g_4 = g_2^3$ και $g_1 = g_2^4$ (όπου

$$g_2^i = \underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \dots \circ g_2}_{i \text{ φορές}}.$$

Έτοι, το σύστημα των συναρτήσεων $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ έχει τις εξής ιδιότητες: (α) Είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση, (β) μεταξύ αυτών των συναρτήσεων υπάρχει η ταυτοτική απεικόνιση $g_1(x) = x$, (γ) για κάθε g_i υπάρχει η αντιστροφή της, g_i^{-1} , συγκεκριμένα: $g_1^{-1} = g_1$, $g_2^{-1} = g_4$, $g_3^{-1} = g_3$, και $g_4^{-1} = g_2$.

Οι ίδιες ιδιότητες χαρακτηρίζουν το σύστημα των συναρτήσεων $G = \{g_1, g_2\}$ του Προβλήματος 1.

Αν χρειαστεί να λύσουμε μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής

$$\begin{aligned} a(x)f(x) + b(x)f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ + c(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) + d(x)f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = h(x), \end{aligned} \quad (***)$$

θα μπορέσουμε να το επιτύχουμε κάνοντας τις αντικαταστάσεις $x \rightarrow g_2(x)$, $x \rightarrow g_3(x)$ και $x \rightarrow g_4(x)$, οι οποίες θα μας δώσουν ένα γραμμικό σύστημα εξίσωσεων. Γράφουμε, για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της αντικατάστασης $x \rightarrow g_2(x)$. Με αυτή την αντικατάσταση, $g_2(x) \rightarrow g_3(x)$, $g_3(x) \rightarrow g_4(x)$ και $g_4(x) \rightarrow g_1(x)$, οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$$a\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + b\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f\left(-\frac{1}{x}\right) +$$

$$+ c \left(\frac{x-1}{x+1} \right) f \left(\frac{x+1}{1-x} \right) + d \left(\frac{x-1}{x+1} \right) f(x) = h \left(\frac{x-1}{x+1} \right).$$

Διατυπώνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. Ένα τυχαίο σύνολο συναρτήσεων G ορισμένων επί ενός συνόλου M ονομάζεται ομάδα ως προς την πράξη \circ αν έχει τις ίδιες ιδιότητες με το σύστημα $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$:

1. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f \in G$ και $g \in G$, η σύνθεσή τους $f \circ g$ ανήκει επίσης στο G .

2. Η συνάρτηση $e(x) = x$ ανήκει στο G .

3. Για κάθε συνάρτηση $f \in G$, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , η οποία επίσης ανήκει στο G .

Αυτός ο ορισμός είναι μια ειδική περίπτωση του γενικού ορισμού της έννοιας μιας ομάδας, η οποία είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών.

Έχουμε ήδη εξετάσει δύο παραδείγματα ομάδων. Ας δούμε μερικά ακόμη.

(α) Το σύνολο G των γραμμικών συναρτήσεων $f(x) = ax + b$, όπου $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

$$(β) G = \left\{ x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x} \right\}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

(γ) Το σύνολο G των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = x + a$.

Για παράδειγμα, ας αποδείξουμε ότι το σύνολο των γραμμικών συναρτήσεων αποτελεί ομάδα. Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών. Έστω $f_1(x) = a_1x + b_1$ και $f_2(x) = a_2x + b_2$.

Τότε, η

$$(f_1 \circ f_2)(x) = a_1(a_2x + b_2) + b_1 = a_1a_2x + a_1b_2 + b_1$$

είναι γραμμική συνάρτηση. Η συνάρτηση $e(x) = x$ είναι επίσης γραμμική. Αν $f(x) = ax + b$, τότε η γραμμική συνάρτηση

$$f^{-1} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

είναι η αντίστροφη της f .

Ασκήσεις

4. Αποδείξτε ότι τα σύνολα των συναρτήσεων (β) και (γ) αποτελούν ομάδες.

5. Έστω το σύνολο των συναρτήσεων

$$G = \left\{ x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{x}{x-1} \right\},$$

όπου $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Αποτελεί το σύνολο αυτό ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης;

Ανακεφαλαίωση

Μπορούμε πλέον να παρουσιάσουμε μια γενική μέθοδο επίλυσης ουγκεκριμένων συναρτησιακών εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην έννοια της ομάδας συναρτήσεων.

Έστω η συναρτησιακή εξίσωση

$$a_1f(g_1) + a_2f(g_2) + \dots + a_nf(g_n) = b. \quad (7)$$

Έστω ότι τα ορίσματα της άγνωστης συνάρτησης $f(x)$ είναι στοιχεία μιας ομάδας G που αποτελείται από n συναρτήσεις $g_1(x) = x, g_2(x), \dots, g_n(x)$ και έστω ότι οι συντελεστές a_1, a_2, \dots, a_n και b είναι επίσης συναρτήσεις του x . Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (7) έχει λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $x \rightarrow g_2(x)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μετατραπεί η ακολουθία συναρτήσεων g_1, g_2, \dots, g_n στην $g_1 \circ g_2, g_2 \circ g_2, \dots, g_n \circ g_2$. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ακολουθία περιέχει ένα ακριβώς αντίγραφο κάθε στοιχείου της ομάδας. (Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό αλλά αποδεικνύεται εύκολα —αφήνουμε την απόδειξη ως ασκηση για τους αναγνώστες.) Επομένως, η νέα ακολουθία αποτελείται από όλα τα στοιχεία της ομάδας, σε διαφορετική όμως σειρά.

Επομένως, οι «άγνωστοι» $f(g_1), f(g_2), \dots, f(g_n)$ έχουν αναδιαταχθεί και καταλήγουμε σε μια νέα γραμμική εξίσωση, ίδιας μορφής με την (7). Έτσι, κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x \rightarrow g_3(x), x \rightarrow g_4(x), \dots, x \rightarrow g_n(x)$ στην (7) και παίρνουμε ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων. Σε περίπτωση που αυτό έχει λύση, ελέγχουμε αν ικανοποιεί την εξίσωση (7).

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την επόμενη εξίσωση:

$$2xf(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2x. \quad (8)$$

Το σύνολο των συναρτήσεων

$$g_1(x) = x,$$

$$g_2(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$g_3(x) = \frac{x-1}{x}$$

αποτελούν μια ομάδα που περιγράφεται από τον Πίνακα 3.

\circ	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	g_1
g_3	g_3	g_1	g_2

Πίνακας 3

Αν αντικαταστήσουμε στην (8) το x με τα

$$\frac{1}{1-x}$$

και

$$\frac{x-1}{x},$$

προκύπτει το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2xf_1(x) + f_2(x) = 2x, \\ \frac{2}{1-x}f_2(x) + f_3(x) = \frac{2}{x-1}, \\ \frac{2(x-1)}{x}f_3(x) + f_1(x) = \frac{2(x-1)}{x}, \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x), \\ f_2(x) &= f(g_2(x)) = f\left(\frac{1}{1-x}\right), \\ f_3(x) &= f(g_3(x)) = f\left(\frac{x-1}{x}\right). \end{aligned}$$

Αν λύσουμε αυτό το σύστημα, παίρνουμε

$$f_1(x) = f(x) = \frac{6x-2}{7x},$$

για $x \neq 0, x \neq -1$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί την (8).

Ολοκληρώνοντας, παραθέτουμε μερικά παραδείγματα ομάδων συναρτήσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων:

$$G_1 = \{x, a-x\},$$

$$G_2 = \{x, a/x\} \text{ (εδώ και στη συνέχεια, } a \neq 0\text{)},$$

$$G_3 = \left\{x, \frac{a}{x}, -x, -\frac{a}{x}\right\},$$

$$G_4 = \left\{x, \frac{1}{x}, -x, -\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{1-x}{x+1}, \frac{x+1}{x-1}, \frac{x+1}{1-x}\right\},$$

$$G_5 = \left\{x, \frac{a^2}{x}, a-x, \frac{ax}{x-a}, \frac{ax-a^2}{x}, \frac{a^2}{a-x}\right\},$$

$$G_6 = \left\{x, \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}, \frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}, -\frac{1}{x}, \frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}, \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}\right\}.$$

Ασκήσεις

6. Λύστε τις επόμενες συναρτησιακές εξισώσεις:

$$(a) xf(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3,$$

$$(b) f\left(\frac{x}{x-1}\right) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2,$$

$$(γ) f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - x.$$

7. Βρείτε την $f(x)$ αν

$$af(x^n) + f(-x^n) = bx,$$

όπου $a \neq 1$ και n περιττός.

8. Βρείτε μια συνάρτηση που ορίζεται για $x \neq 0$ και ικανοποιεί την εξισώση

$$(x-2)f(x) + f\left(-\frac{2}{x}\right) - xf(2) = 5.$$

9. Βρείτε τουλάχιστον μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξισώση $f(f(f(x))) = -1/x$, αλλά δεν ικανοποιεί την εξισώση $f(f(x)) = -x$.

10. Αποδείξτε ότι, αν η $G = \{g_1(x) = x, g_2, \dots, g_n\}$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα συναρτήσεων ως προς την πράξη της σύνθεσης και $\varphi = \varphi(x)$ είναι μια τυχαία αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε το σύνολο

$$G_\varphi = \{\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi, \varphi^{-1} \circ g_2 \circ \varphi, \dots, \varphi^{-1} \circ g_n \circ \varphi\}$$

είναι επίσης ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης (ισχύει η συνήθης παρατήρηση για το πεδίο ορισμού κάθε στοιχείου της ομάδας).

Στο άρθρο αυτό εξετάσαμε μία μόνο από τις πολλές μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων. Για πολλές από αυτές τις εξισώσεις η μέθοδος δεν εφαρμόζεται και είναι απαραίτητη η προσφυγή σε άλλες έννοιες, όπως το όριο και η συνέχεια. Όμως μας δείχνει πώς ένα απλό «τέχνασμα» γενικεύεται σε μια ισχυρή μέθοδο που εφαρμόζεται σε ορισμένες συναρτησιακές εξισώσεις.

Το
μοναδικό
περιοδικό

QUANTUM

Ένα πολύτιμο δώρο

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας... —σε όποιον αγαπά τα μαθηματικά και της φυσικές επιστήμες. Το Quantum δεν είναι δημοσιογραφικό περιοδικό: δεν μιλά για την επιστήμη: κάνει επιστήμη.

Αποφασίστε το τώρα.

κάτοπτρο

Θαλάσσια κύματα

«Συνεχώς η θάλασσα σπάζει και γδέρνει, κατεβάζει βουνά από τρομπέτες, πινάζει τα ταυρίσια γένια της.»

—Πάμπλο Νερούντα

L.A. Ostrovsky

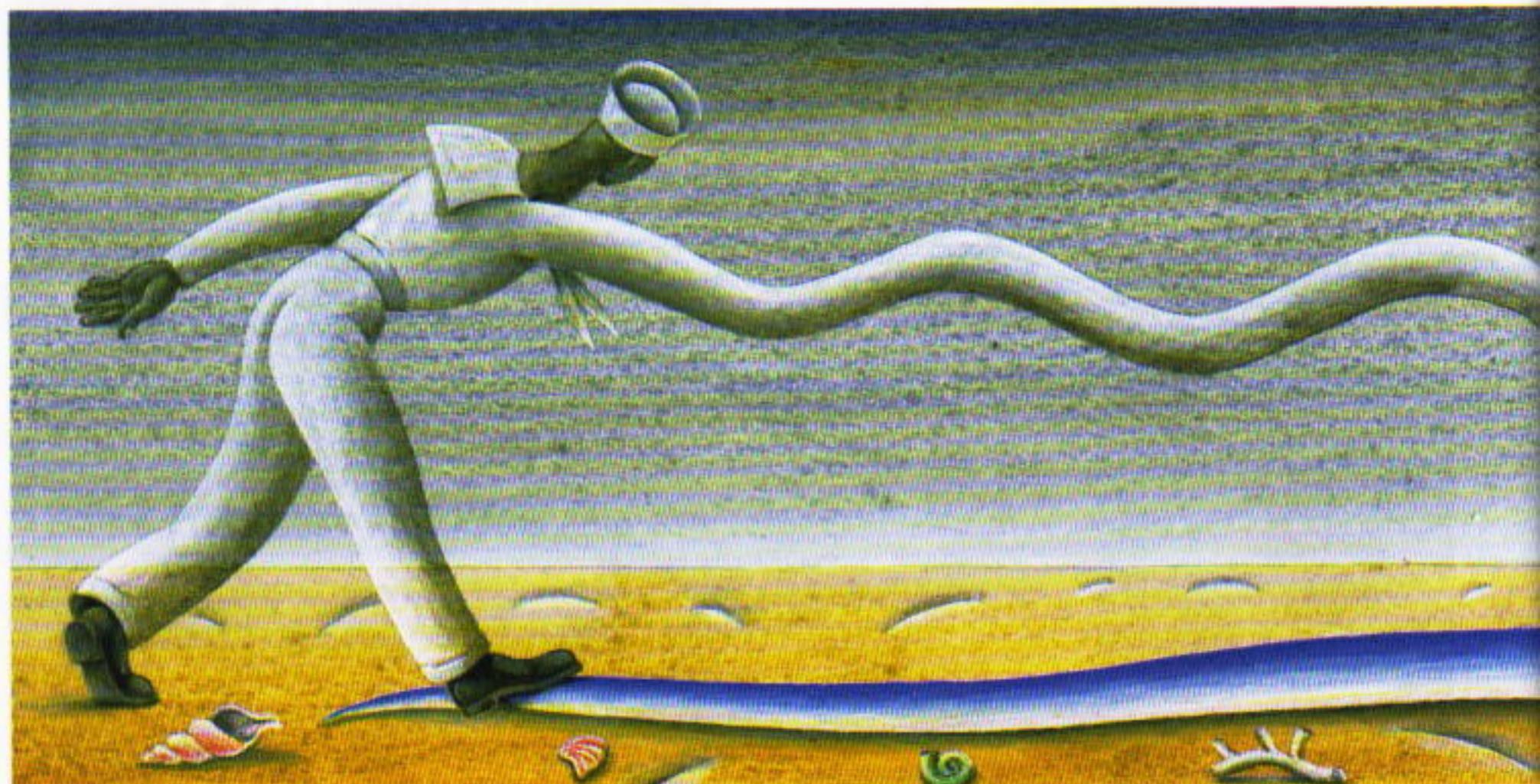
AΝΑΡΙΘΜΗΤΑ ΥΠΕΡΟΧΑ ΠΟΙΗΜΑΤΑ και τραγούδια έχουν αφιερωθεί στους ωκεανούς και στις αεικίνητες επιφάνειές τους. Η θάλασσα αποτελεί σύμβολο των ακαταμάχητων στοιχειακών δυνάμεων της φύσης, των αιφνίδιων μεταστροφών, του κινδύνου και της ασύλληπτης πολυμορφίας. Από αρχαιοτάτων χρόνων, τα ωκεάνια κύματα προσέφεραν στα ανθρώπινα όντα την αφορμή για να στοχάζονται και να επινοούν νέες επιστημονικές θεωρίες. Δεν θα υπερβάλλαμε ίσως αν λέγαμε ότι η ίδια η φυσική των κυμάτων γεν-

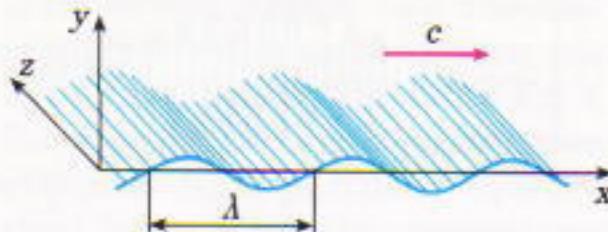
νήθηκε στον ωκεανό, αφού, όπως φαίνεται, η προέλευση του μεγαλύτερου μέρους των γνώσεών μας για τις ταλαντώσεις και τα παντοίων τύπων κύματα πρέπει να εντοπιστεί στις πρώτες προσπάθειες για να γίνει κατανοητή η φύση των ωκεάνιων κυμάτων.

Το οδεύον ημιτονοειδές κύμα

Πολλοί άνθρωποι δεν δυσκολεύονται καθόλου να εξηγήσουν την κίνηση των στερεών σωμάτων, η οποία αποτελεί αντικείμενο μελέτης στα μαθήματα στοιχειώδους φυσικής. Αντιθέτως, η

κατανόηση της κυματικής κίνησης αποδεικνύεται πολύ δυσκολότερη. Τα κύματα τα δημιουργεί κάποια διαταραχή όπως ένα διερχόμενο πλοίο, ένα βόταλο που ρίχνουμε στο νερό ή μια ριπή ανέμου. Η κίνηση των σωματιδίων του νερού που προκαλείται σε μια θέση μεταδίδεται στα παρακείμενα σωματίδια, και με την πάροδο του χρόνου η αρχική διαταραχή εξαπλώνεται σε μεγάλες αποστάσεις. Ενώ όμως ένα κύμα διανύει μεγάλες αποστάσεις, η μετατόπιση των σωματιδίων του νερού παραμένει πάντα σχετικά μικρή. Η ενέργεια





Σχήμα 1

Η ημιτονοειδής επφάνεια του νερού μοιάζει με κινούμενο κυματοειδές μεταλλικό φύλλο.

μεταφέρεται από σωματίδιο σε σωματίδιο, ακριβώς όπως η σκυτάλη στους αγώνες σκυταλοδρομίας.

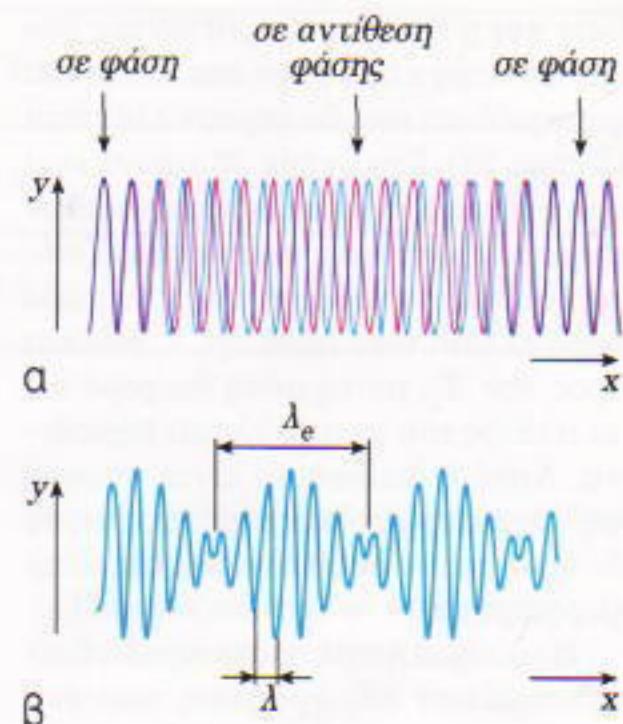
Η προσπάθειά μας να κατανοήσουμε τις ιδιότητες της κυματικής κίνησης θα διευκολυνθεί εάν προβούμε σε δραστικές απλουστεύσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις, πετυχαίνουμε αυτό το στόχο απεικονίζοντας την κίνηση ως ημιτονοειδή. Φανταστείτε, λοιπόν, ότι πάνω στην υδάτινη επφάνεια υπάρχει μια ημιτονοειδής κυμάτωση που κινείται κατά μήκος του άξονα των x με σταθερή ταχύτητα (Σχήμα 1). Εάν η εν λόγω κυμάτωση τμηθεί με ένα επίπεδο κατακόρυφο και παράλληλο προς τον άξονα των x , η προκύπτουσα τομή είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ορέων ή δύο διαδοχικών κοιλάδων (ή, γενικά, μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών σημείων που έχουν την ίδια φάση) είναι παντού σταθερή: ισούται εξ ορισμού με το μήκος κύματος λ . Κα-

θώς το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα των x , κάθε σημείο του μέσου επαναλαμβάνει τη μετατόπισή του έπειτα από ορισμένο χρόνο T , ο οποίος ονομάζεται περίοδος της ταλάντωσης. Στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα το κύμα διανύει την απόσταση λ κατά μήκος του άξονα των x . Η ταχύτητα $c = \lambda/T$ με την οποία συντελείται αυτή η διαδικασία ονομάζεται φασική ταχύτητα.

Βεβαίως, στη φύση δεν συναντάμε άπειρα ημιτονοειδή κύματα. Κάθε κυματική κίνηση δημιουργείται κάπου και οφήνει κάπου αλλού. Συχνά ένα κύμα παραμένει σχεδόν ημιτονοειδές επί μακρόν, όμως δεν επιτρέπεται να παραβλέψουμε την ουσία που κρύβεται πίσω από τη λέξη «σχεδόν».

Για να εμβαθύνουμε στο νόημα αυτής της επισήμανσης, ας θεωρήσουμε δύο ημιτονοειδή κύματα με διαφορετικές αλλά παραπλήσιες περιόδους T_1 και T_2 (άρα, και με σχεδόν ταυτόσημα μήκη κύματος λ_1 και λ_2). Όποτε τα όρη (και οι κοιλάδες) των εν λόγω κυμάτων φτάνουν συγχρόνως στο ίδιο σημείο, το ύψος των προκυπτουσών ταλαντώσεων, από το βαθύτερο σημείο της κοιλάδας ως την κορυφή του όρους (το οποίο ισούται με δύο φορές το πλάτος), αυξάνεται σημαντικά. Ωστόσο, καθώς τα κύματα απομακρύνονται από το δεδομένο σημείο, η διαφορά των μηκών



Σχήμα 2

Η υπέρθεοη δύο σχεδόν ταυτόσημων ημιτονοειδών κυμάτων έχει ως αποτέλεσμα ένα απροσδόκητα περίπλοκο φαινόμενο, τη δημιουργία διακροτημάτων.

κύματος έχει ως αποτέλεσμα τη σωρευτική αύξηση της διαφοράς φάσης, έτοι ώστε κάποια στιγμή η κορυφή του ενός κύματος θα συμπέσει με την κοιλάδα του άλλου. Σ' αυτή την περίπτωση τα δύο κύματα αλληλοαναρρόνται. Σε ακόμη μεγαλύτερες αποστάσεις, η αμοιβαία αναίρεση αντικαθίσταται από την εκ νέου αύξηση του πλάτους. Αυτές οι αυξομειώσεις του πλάτους επαναλαμβάνονται περιοδικά κατά μήκος του άξονα των x . Μπορείτε να το διαπιστώ-



σετε και μόνοι σας υπερθέτοντας δύο ημιτονοειδή κύματα με ίσα πλάτη και με περιόδους που διαφέρουν ελάχιστα (Σχήμα 2a). Στο Σχήμα 2β εικονίζεται η υπέρθεση δύο τέτοιων ημιτονοειδών κυμάτων, στην οποία αναγνωρίζουμε ένα ημιτονοειδές κύμα με περιόδο παραπλήσια τόσο προς την T_1 όσο και προς την T_2 , με τη μόνη διαφορά ότι το πλάτος του μεταβάλλεται περιοδικά. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως «δημιουργία διακροτημάτων», το δε προκύπτον κύμα ονομάζεται «διαμορφωμένο».

Η μεταβολή του πλάτους των διακροτημάτων περιγράφεται από ένα κύμα που «περιβάλλει» τα βασικά (ή φέροντα) κύματα. Μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε το μήκος κύματος λ_u του περιβάλλοντος κύματος, καθώς και την περίοδο του T_u . Το όρος του ενός κύματος συμπίπτει με την κοιλάδα του άλλου εφόσον οι αριθμοί των κύκλων των υπερτιθέμενων ημιτονοειδών κυμάτων ανάμεσα σε δύο διαδοχικά, ας πούμε, ελάχιστα της περιβάλλουσας διαφέρουν κατά 1. Για το πρώτο κύμα, ο αριθμός αυτών των κύκλων ισούται με λ_u/λ_1 , ενώ για το δεύτερο με λ_u/λ_2 . Συνεπώς, παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{\lambda_u}{\lambda_1} - \frac{\lambda_u}{\lambda_2} = 1,$$

από την οποία βρίσκουμε

$$\lambda_u = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \equiv \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}. \quad (1)$$

Εδώ με $\Delta \lambda$ συμβολίζουμε τη διαφορά $\lambda_2 - \lambda_1$. Αντικαταστήσαμε το γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2$ με το τετράγωνο του γεωμετρικού μέσου λ των λ_1 και λ_2 ,

$$\lambda^2 = (\sqrt{\lambda_1 \lambda_2})^2,$$

ο οποίος αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση τόσο για τα λ_1 και λ_2 όσο και για το μήκος του φέροντος κύματος. (Εάν υπολογίσουμε ακριβώς το μήκος του φέροντος κύματος, καταλήγουμε στον τύπο

$$\lambda_\varphi = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1}.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να

εξαγάγουμε και τον τύπο για την περίοδο των διακροτημάτων:

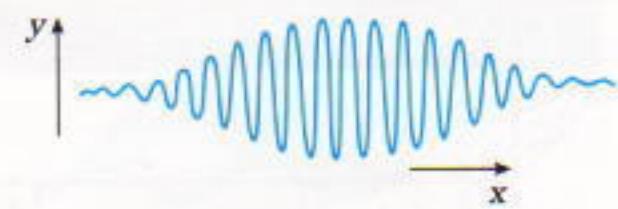
$$T_u \propto \frac{T^2}{\Delta T}.$$

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα του περιβάλλοντος κύματος, που μπορεί επίσης να θεωρείται ως η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το διακρότημα:

$$u = \frac{\lambda_u}{T_u} = \frac{\lambda^2}{T^2} \frac{\Delta T}{\Delta \lambda} = c^2 \frac{\Delta T}{\Delta \lambda}. \quad (2)$$

Εδώ το c συμβολίζει τη φασική ταχύτητα του φέροντος κύματος. Εάν οι ταχύτητες των δύο ημιτονοειδών κυμάτων που συνιστούν το φέρον κύμα συμπίπτουν επακριβώς ($\lambda_1 = cT_1$ και $\lambda_2 = cT_2$), τότε $\Delta \lambda / \Delta T = c$, οπότε $u = c$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, ολόκληρο το κύμα οδεύει με ταχύτητα c . Όταν όμως $c_1 \neq c_2$, η ταχύτητα u θα διαφέρει από τη c , πράγμα που σημαίνει ότι το φέρον κύμα διαδίδεται με την (φασική) ταχύτητα c , ενώ το περιβάλλον κύμα διαδίδεται με μια άλλη ταχύτητα u . Για τη δεύτερη ταχύτητα έχει καθιερωθεί και ειδικό όνομα: λέγεται ομαδική ταχύτητα. Η ενέργεια μεταφέρεται με την ομαδική ταχύτητα.

Όπως και τα ημιτονοειδή κύματα, το περιβάλλον κύμα είναι άπειρο τόσο στο χώρο όσο και στο χρόνο. Εντούτοις, αν πάρουμε όχι δύο, αλλά πολλά ημιτονοειδή κύματα (για να ακριβολογύμε, απείρως πολλά) με παρεμφερή μήκη κύματος και περιόδους, μπορούμε να κατασκευάσουμε το λεγόμενο «κυματοπακέτο», δηλαδή ταλαντώσεις που καταλαμβάνουν μόνον περιορισμένο χώρο (Σχήμα 3). Όπως και στην προηγούμενη περιπτωση, ένα τέτοιο κυματοπακέτο οδεύει με την ομαδική ταχύτητα, ενώ το φέρον κύμα διαδίδεται με τη φασική ταχύτητα. Ωστόσο, αυτή η κίνηση δεν μπορεί να παρατείνεται επ' απειρον. Εάν οι φασικές ταχύτητες των διαφόρων ημιτονοειδών κυμάτων διαφέρουν, τότε σύμφωνα με την εξισώση (2), οι ομαδικές ταχύτητες που αντιστοιχούν στα διάφορα ζεύγη ημιτονοειδών κυμάτων δεν είναι ίδιες. Γι' αυτό, σε μεγάλες αποστάσεις το κυματοπακέτο θα υποστεί μεταβολές του σχήματός του και τελικά θα πα-



Σχήμα 3

Το εικονιζόμενο κυματοπακέτο είναι περιορισμένο στο χώρο, αλλά προκύπτει ως υπέρθεση άπειρου πλήθους στοιχειωδών ημιτονοειδών κυμάτων, τα οποία εκτείνονται στο άπειρο.

ραμορφωθεί, το ύψος του θα μειωθεί και θα «απλωθεί» στο χώρο χάνοντας βαθμιαία τον εντοπισμό του. Πρόκειται για ένα φαινόμενο γνωστό ως διασπορά ή διασκεδασμός. Έτσι, για να περιγράψουμε τη διάδοση των κυμάτων σε ένα μέσο που παρουσιάζει διασπορά δεν μας αρκεί μία ταχύτητα χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο διαφορετικές ταχύτητες!

Κύματα επί των υδάτων

Ας επιστρέψουμε στα κύματα σε υδάτινες επιφάνειες. Για να τα περιγράψουμε με ακρίβεια χρειαζόμαστε τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων του νερού. Η επίλυση των συγκριμένων εξισώσεων αποτελεί ένα πρόσθετο, διαφορετικό πρόβλημα. Μολατάτα, πολλά χαρακτηριστικά των υδάτινων κυμάτων μπορούν να γίνουν κατανοητά χωρίς εξισώσεις, αρκεί να προσφύγουμε στη διαστατική ανάλυση.

Από ποια φυσικά μεγέθη μπορεί να εξαρτάται η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων επιφάνειας στο νερό; Εάν αγνοήσουμε τον άνεμο και θεωρήσουμε άπειρο το βάθος του νερού, μας μένουν μόνον η πυκνότητα του νερού ρ , η επιτάχυνση της βαρύτητας g και κάποια παράμετρος που χαρακτηρίζει το ίδιο το κύμα (το μήκος κύματος λ ή η περίοδος T).¹

Οι διαστάσεις των εν λόγω μεγεθών είναι

$$[\rho] = \text{kg/m}^3, [g] = \text{m/s}^2, [T] = \text{s}.$$

1. Υπάρχει ένας ακόμη παράγοντας από τον οποίο μπορεί να εξαρτάται η ταχύτητα του κύματος — ο συντελεστής επιφανειακής τάσης a . Ωστόσο, όπως δείχνουν και οι λεπτομερείς υπολογισμοί, η επιδρασή του είναι ουσιώδης μόνο για εξαιρετικά βραχέα κύματα (με μήκος κύματος της τάξεως του 1 cm), τα οποία υπερβαίνουν τον ορίζοντα του παρόντος άρθρου.

Ποιος συνδυασμός των ανωτέρω παραμέτρων έχει τις διαστάσεις της ταχύτητας; Εφόσον $[c] = \text{m/s}$ και η διάσταση της μάζας εμφανίζεται μόνο στην πυκνότητα $[\rho]$, η πυκνότητα δεν είναι δυνατόν να υπεισέρχεται στο συνδυασμό που μας ενδιαφέρει. Συνεπώς, έχουμε στη διάθεσή μας μόνον δύο μεγέθη, και υπάρχει ένας και μόνον ένας συνδυασμός τους με τις διαστάσεις της ταχύτητας: $[c] = [gT]$. Αυτός ο προσεγγιστικός τύπος περιγράφει τόσο τη φασική όσο και την ομαδική ταχύτητα.

Μπορούμε πλέον να αποφανθούμε ότι τόσο η c όσο και η u είναι ανάλογες με το γινόμενο gT . Τον ακριβή συντελεστή αναλογίας αδυνατούμε να τον προσδιορίσουμε με τη χρήση της διαστατικής ανάλυσης. Η λεπτομερής θεωρητική μελέτη δείχνει ότι για τη φασική ταχύτητα ο συγκεκριμένος συντελεστής ισούται με $(2\pi)^{-1}$:

$$c = \frac{gT}{2\pi}. \quad (3)$$

Εξ ορισμού, $c = \lambda/T$, οπότε η εξίσωση (3) μας δίνει τη σχέση που συνδέει το μήκος κύματος και την περίοδο:

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi}.$$

Αυτός ο τύπος είναι γνωστός ως σχέση διασποράς.

Ο τύπος για τη c μπορεί να γραφεί και με διαφορετική μορφή:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Και τι γίνεται με την ταχύτητα ομάδας; Σύμφωνα με την εξίσωση (2), χρειαζόμαστε το λόγο $\Delta T/\Delta\lambda$, που μπορούμε να τον υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση διασποράς

$$\Delta\lambda = \frac{g}{\pi} T \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta\lambda} = \frac{\pi}{gT}.$$

Εισάγοντας το ανωτέρω αποτέλεσμα στην εξίσωση (2) και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (3), καταλήγουμε στον τύπο

$$u = c^2 \frac{\Delta T}{\Delta\lambda} = \frac{gT}{4\pi} = \frac{1}{2}c. \quad (4)$$

$T(\text{s})$	0,5	1	5	10	20	50
$\lambda(\text{m})$	0,39	1,56	39	156	620	3900
$V(\text{m/s})$	0,39	0,78	3,9	7,8	15,1	39

Πίνακας 1

Συνεπώς, για κύματα σε νερά μεγάλου βάθους, η ομαδική ταχύτητα ισούται με το ήμισυ της φασικής ταχύτητας, και αμφότερες οι τιμές εξαρτώνται από την περίοδο του κύματος. Με άλλα λόγια, το κύμα χαρακτηρίζεται από διασπορά.

Ας εξετάσουμε τους τύπους που συνδέουν το μήκος κύματος ενός υδάτινου κύματος μεγάλου βάθους και την ομαδική ταχύτητά του με την περίοδο:

$$\lambda = 1,56T^2,$$

$$u = \frac{1}{2}c \approx 0,78T.$$

(Εδώ η T μετριέται σε δευτερόλεπτα, το λ σε μέτρα και οι ταχύτητες σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο.) Ο Πίνακας 1 δείχνει τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων των κυμάτων.

Είναι ενδιαφέρον ότι τα συγκριτικά βραχέα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα πεζούρου, ενώ τα μακρά κύματα μπορούν να ξεπεράσουν ακόμη και αυτοκίνητο. Εάν θεωρήσουμε μια μεγάλη περίοδο —ας πούμε $T \approx 1 \text{ h}$, η οποία αντιστοιχεί σε $\lambda \approx 20.000 \text{ km}$ — καταλήγουμε στη φανταστική ταχύτητα $u \approx 10.000 \text{ km/h}$. Ωστόσο, το βάθος των ωκεανών δεν αρκεί ώστε να επιτρέψει τη δημιουργία και διάδοση τέτοιων φοβερών κυμάτων —θα έφταναν τον πυθμένα του ωκεανού ακόμη και στα βαθύτερα σημεία του, οπότε οι τύποι που χρησιμοποιήσαμε θα έπαιναν να ισχύουν.

Οι συγκεκριμένοι τύποι δεν δύνανται να χρησιμοποιηθούν και για πολύ βραχέα κύματα, με μήκος κύματος μικρότερο από μερικά εκατοστόμετρα, επειδή στην περιοχή αυτή ο αποφασιστικός παράγοντας είναι η επιφανειακή τάση. Μολαταύτα, περιγράφουν σωστά τα κύματα σε μια ευρύτατη περιοχή μηκών κύματος —από μερικές δεκάδες εκατοστών ώς και

μερικές δεκάδες (αν όχι εκατοντάδες) χιλιομέτρων.

Παραδόξως, ενώ το κύμα σχηματίζεται λόγω της κίνησης των σωμάτων του νερού, τα ίδια τα σωματίδια του νερού ποτέ δεν παρασύρονται μακριά καθώς το κύμα διαδίδεται! Για να πειστείτε, κοιτάξτε μια σημαδούρα. Η δράση των κυμάτων δεν επιφέρει κάποια αισθητή οριζόντια μετατόπιση της σημαδούρας, η οποία κινείται πάνω κάτω, σε μια επιτόπια ταλάντωση μικρού πλάτους.

Για να δούμε πώς κινούνται τα σωματίδια του νερού κατά τη διάδοση του κύματος, θα διευκολυνθούμε εάν αντικαταστήσουμε το συνηθισμένο σύστημα αναφοράς με ένα άλλο, το οποίο κινείται με τη φασική ταχύτητα του κύματος. Στο εν λόγω σύστημα αναφοράς, η κυματοειδής υδάτινη επιφάνεια παραμένει ακίνητη, όμως ολόκληρη η μάζα του νερού ρέει στην αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα c . Τα σωματίδια του νερού γλιστρούν στην κυματοειδή επιφάνεια ακριβώς όπως κυλά οποιαδήποτε μπάλα σε μια στρεηή κυματοειδή επιφάνεια. Στις κορυφές της κυματοειδούς κατατομής, μια τέτοια μπάλα (ή ένα σωματίδιο νερού) κινείται με ταχύτητα κατά τι μικρότερη από τη μέση ταχύτητα c , αλλά, όταν κυλήσει στον πυθμένα μιας κοιλάδας, της δίνεται η ευκαιρία να καλύψει τις καθυστερήσεις.

Σ' αυτό το σύστημα αναφοράς, λοιπόν, δεν έχουμε μόνο την ομαλή κίνηση του νερού στο σύνολό του αλλά και την περιοδική κίνηση των σωματίδιων του νερού στην οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση. Συνεπώς, εάν επιστρέψουμε στο αρχικό μας «ακλόνητα στρεωμένο στη Γη» σύστημα αναφοράς, η ομαλή κίνηση της υδάτινης μάζας θα παύσει, όμως η οριζόντια και κατακόρυφη ταλά-



Σχήμα 4

ντωση θα συνεχιστεί—επειδή το επιταχυνόμενο (και επιβραδυνόμενο) μέρος της κίνησης παραμένει το ίδιο σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Η σύνθεση της οριζόντιας και της κατακόρυφης ταλάντωσης των σωματιδίων του νερού αντιπροσωπεύει μια κυκλική κίνηση με ακτίνα ίση με το πλάτος του κύματος (Σχήμα 4).

Τα σωματίδια που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια του νερού διαγράφουν επίσης κυκλικές τροχιές, με μικρότερες όμως ακτίνες.²

Το πλάτος αυτής της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά όσο αυξάνει το βάθος. Για την ακρίβεια, μεταβάλλεται ευθέως ανάλογα με το $e^{-2\pi x^3}$, όπου με z συμβολίζουμε το βάθος. Αυτό σημαίνει ότι, όταν το βάθος ισούται με το μήκος κύματος, το πλάτος του κύματος μειώνεται κατά $e^{2\pi} \approx 535$ φορές σε σύγκριση με την ταλάντωση στην επιφάνεια. Κατά συνέπεια, ακόμη και ισχυρές καταιγίδες ασκούν ουσιαστικά μηδενική επίδραση στους ωκεανούς σε βάθη που υπερβαίνουν τα 100 περίπου μέτρα. Ακόμη και σε μια λιμνούλα, όμως, μπορούμε να θεωρούμε το βάθος του νερού άπειρο εφόσον η τιμή του μήκους κύματος λ είναι μικρότερη από $2\pi d$ (όπου d είναι το βάθος της λιμνούλας): το κύμα δεν πρόκειται να γίνει αισθητό στον πυθμένα της.

Αναμφίβολα, στις πραγματικές συνθήκες του ωκεανού τα κύματα δεν είναι ημιτονοειδή: ακόμη και τότε, όμως, ισοδυναμούν με μια υπέρθεση πολλών διαφορετικών στοιχειωδών ημιτονοειδών κυμάτων. Έτσι, η κίνηση των σωματιδίων του νερού περιπλέκεται πολύ περισσότερο: είναι πλέ-

ον μια σύνθεση κυκλικών περιφορών με διάφορες ταχύτητες και ακτίνες. Εφόσον τα κύματα παραμένουν ασθενή, η κίνηση αυτής της μορφής είναι περιορισμένη και κατά προσέγγιση συμμετρική στην κατακόρυφη διεύθυνση. Εντούτοις, ένα ισχυρότερο κύμα, ακόμη και ένα αυστηρά περιοδικό κύμα, δεν θα έχει ημιτονοειδή μορφή: τα όρη του γίνονται οξύτερα από τις κοιλάδες του (Σχήμα 5). Με



Σχήμα 5

την περαιτέρω αύξηση του πλάτους του κύματος, μια απότομη κάμψη εμφανίζεται στο όρος του κύματος με γωνία περίπου 120° , και η εν λόγω κορυφή καταρρέει πέφτοντας. Έτσι σχηματίζονται τα «προβατάκια» στα όρη των κυμάτων. Όταν πνέει ισχυρός άνεμος, οι λίμνες, οι ποταμοί, οι θάλασσες και οι ωκεανοί όντως καλύπτονται από «προβατάκια».

Τα κύματα που σπάνει ο άνεμος

Στα τέλη του 19ου αιώνα ο διάσημος άγγλος φυσικός σερ John William Rayleigh παρατήρησε ότι «ο βασικός νόμος των θαλάσσιων κυμάτων συνιστάται στην απουσία οποιουδήποτε νόμου». Πολύς χρόνος παρήλθε από την εποχή του σερ John και σημειώθηκαν αρκετές εξελίξεις: υπάρχει πλέον μια ταξινόμηση των ανέμων και της θαλάσσιας επιφάνειας στη διάθεση των θαλασσοπόρων. Η ένταση του ανέμου χαρακτηρίζεται βάσει της δωδεκάβαθμης κλίμακας Beaufort, και το ύψος των κυμάτων με μία εννεάβαθμη κλίμακα διαταραχής της θαλάσσιας επιφάνειας.

Οι εν λόγω κλίμακες βασίζονται

κυρίως σε λεκτικές περιγραφές φαινομένων που συνδέονται με την ένταση του ανέμου: τυπικά παραδείγματα αποτελούν εκφράσεις όπως «η θάλασσα μοιάζει με γυαλί» ή «εμφανίζονται «προβατάκια» με αρκετά μεγάλη συχνότητα». Αυτή η ταξινόμηση μας θυμίζει το πασίγνωστο παραμύθι του Αλεξάντρ Πούσκιν *Ο ψαράς και το μικρό χρυσό ψάρι*. Στην αρχή, ο γεροψαράς είδε τη θάλασσα να είναι «μόλις ταραγμένη». Υστερά το πέλαγος σκοτείνιασε και μαύρισε. Και τελικά ξέσπασε μια «μαύρη καταιγίδα» —«το οργισμένο κύμα ορμούσε, μούγκριζε και θρηνολογούσε απαίσια». Φαίνεται ότι θα μπορούσαμε να συνδέσουμε τους βαθμούς του Beaufort με τη διαταραχή της θάλασσας με την οποία απαντούσε το χρυσό ψάρι σε καθεμιά από τις διαδοχικές παρακλήσεις του δύσμοιρου γέρου!

Εσχάτως, οι μέθοδοι μέτρησης των θαλάσσιων κυμάτων βελτιώθηκαν ριζικά. Εκτός από τους καταγραφείς κυμάτων που μετρούν την ταλάντωση της θαλάσσιας επιφάνειας κοντά στα πλοία, όλο και μεγαλύτερη σημασία αποκτούν συσκευές που καταγράφουν τα κύματα εξ αποστάσεως. Ακόμη και μια απλή φωτογραφία της θαλάσσιας επιφάνειας που λαμβάνεται από ένα πλοίο ή ένα αεροπλάνο προσφέρει μεγάλη ποσότητα δεδομένων. Ο θαλάσσιος ραδιοεντοπισμός αποδεικνύεται επίσης αποτελεσματικός. Και ως αποκορύφωμα αυτών των μεθόδων, η «διαστημική ωκεανογραφία» γνωρίζει ραγδαία ανάπτυξη, αντλώντας δεδομένα από τις μετρήσεις που πραγματοποιούν οι δορυφόροι.

Οι πολυετείς έρευνες συσσώρευσαν τεράστιες ποσότητες πληροφοριών για τα θαλάσσια κύματα. Μολατάτα, ακόμη και στην εποχή μας δυσκολευόμαστε να βρούμε απαντήσεις όσον αφορά το πώς ο άνεμος δημιουργεί τα κύματα στο νερό. Μολονότι οι βασικοί μηχανισμοί έχουν εξιχνιαστεί, πολλά σκοτεινά σημεία απομένουν να διευκρινιστούν.

Φανταστείτε μια λεια θαλάσσια επιφάνεια. Ο άνεμος αρχίζει να πνέει, και εμφανίζονται κύματα. Γιατί; Ο άνεμος δεν είναι μια κανονική ομοιόμορφη ροή αέριων μαζών παράλληλη προς την υδάτινη επιφάνεια. Συνο-

2. Η απόσβεση που υφίστανται τα κύματα καθώς αυξάνεται το βάθος θίγεται στο άρθρο του I. Vorobyov «Τρικυμισμένες θάλασσες» που δημοσιεύθηκε στο τεύχος Ιουλιού/Aυγούστου 1994 του ελληνικού *Quantum*.

δεύτερη πάντοτε από τυχαίες διακυμάνσεις της πίεσης, οι οποίες διαταράσσουν το νερό και κάνουν την επιφάνειά του να κυρτώνεται. Εφόσον αυτές οι διακυμάνσεις δρουν ασυντόνιστα, κατά πάσαν πιθανότητα δεν πρόκειται να διεγείρουν κύματα. Η κατάσταση όμως διαφοροποιείται ριζικά όταν η ταχύτητα του ανέμου γίνεται παραπλήσια με τη φασική ταχύτητα του κύματος που προκαλεί. Στην προκειμένη περίπτωση σημειώνεται συντονισμός. Η υδάτινη επιφάνεια αρχίζει να ταλαντώνεται σε συγχρονισμό με τον παλμό του αέρα, οπότε το κινούμενο κύμα ενισχύεται συνεχώς. Καθώς το πλάτος του κύματος αυξάνεται, το κύμα αρχίζει να επιδρά στις διακυμάνσεις της αέριας ροής ενισχύοντάς τες, οπότε και αυτές με τη σειρά τους ενισχύουν το κύμα. Η θετική ανάδραση επιταχύνεται όσο μεγεθύνεται το κύμα.

Μια τέτοια αύξηση του πλάτους μπορεί να συνεχιστεί επί μακρό χρόνο, μετά τον οποίο το κύμα ενδέχεται να έχει αποκτήσει αρκετά μεγάλο ύψος. Ωστόσο, κάποτε αυτή η διαδικασία θα τερματιστεί αναπόφευκτα, ακόμη και αν ο άνεμος συνεχίσει να πνέει. Πρώτον, τα όρη του κύματος θα οξυνθούν (όπως στο Σχήμα 5) και τελικά θα καταρρεύσουν σε «προβατάκια». Δεύτερον, τα κύματα δεν διάγουν βίο απομονωμένο. Αντιθέτως, αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο, με αμοιβαίες ενέργειακές μεταφορές. Ως εκ τούτου, η ενέργεια ανακατανέμεται μεταξύ των κυμάτων με εξαιρετικά περίπλοκο τρόπο.

Διαμορφώνεται λοιπόν μια ρεαλιστική και πολύ περίπλοκη φυσική εικόνα για τα κύματα που προκαλεί ο άνεμος, η οποία περιλαμβάνει κύματα με διαφορετικά πλάτη, μήκη κύματος, ακόμη και με διαφορετικές κατευθύνσεις διάδοσης. Μολαταύτα, υπάρχουν κύματα που δεσπόζουν στην εν λόγω εικόνα. Η φασική τους ταχύτητα προσεγγίζει την ταχύτητα του ανέμου u , οπότε το αντίστοιχο μήκος κύματος ισούται περίπου με $2\pi u^2/g$. Επομένως, δύο ισχυρότερος είναι ο άνεμος, τόσο μεγαλύτερο το μήκος κύματος —και το ύψος του κύματος. Εν γένει, το ύψος των ομαλών κυμάτων δεν υπερβαίνει το $1/7$ του μήκους κύματος των, δεδομένου

ότι τα ακόμη μεγαλύτερα όρη σπάζουν δημιουργώντας «προβατάκια». Ένας ασθενής άνεμος μπορεί να προκαλέσει μόνον ασθενή κύματα —αν και ένας πολύ ασθενής άνεμος δεν δημιουργεί καθόλου κύματα.

Οπως σημειώσαμε ήδη, εφόσον πρόκειται για βραχέα κύματα, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η επιφανειακή τάση. Η επίδρασή της αποτυπώνεται σε μια ιδιάζουσα εξάρτηση της φασικής ταχύτητας από το μήκος κύματος. Η εν λόγω ταχύτητα δεν τίνεται ποτέ στο μηδέν, αλλά παρουσιάζει κάποια ελάχιστη τιμή για μήκος κύματος 1,73 cm, για να αυξηθεί στη συνέχεια με την περαιτέρω μείωση του μήκους κύματος. Για καθαρό νερό, χωρίς υμένια στην επιφάνειά του, η ελάχιστη φασική ταχύτητα ανέρχεται σε 23 cm/s. Αυτή η τιμή αντιπροσωπεύει το κατώφλι της ταχύτητας που πρέπει να έχει ο αέρας προκειμένου να διεγείρει υδάτινα κύματα. Τα αντίστοιχα κύματα είναι μάλλον βραχέα, με μήκη κύματος που δεν υπερβαίνουν τα μερικά εκατοστόμετρα. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε τέτοια κύματα σε κάθε στέρνα με τη μορφή ρυτιδώσεων που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μιας σύντομης ριπής ανέμου.

Θα έπρεπε να σημειωθεί ότι ενίστε εμφανίζονται μάλλον μεγάλα ημιτονοειδή κύματα στην επιφάνεια της θάλασσας ακόμη και με ήπιο καιρό. Αυτές οι φουσκοθαλασσιές αποτελούνται από όχους μιας μακρινής καταιγίδας. Στο επίκεντρο της καταιγίδας υπάρχει ένα πολύ περίπλοκο κυματικό μόρφωμα, αλλά μόνον τα μακρά κύματα έχουν κάποια πιθανότητα να φτάσουν σε απόμακρες ακτές —επειδή έχουν τις μεγαλύτερες ομαδικές ταχύτητες και, το σημαντικότερο, επειδή φθίνουν πολύ βραδύτερα. Τέτοιες φουσκοθαλασσιές ταξιδεύουν συχνά χιλιάδες χιλιόμετρα, και προκαλούν δυσάρεστους κλυδωνισμούς στα πλοία.

Μια θάλασσα κυμάτων

Η φυσική των ωκεάνιων κυμάτων θέτει περισσότερα ερωτήματα απ' όσα απαντά. Στο παρόν άρθρο αποφύγαμε να καταδυθούμε στα βάθη του μηχανισμού των υδάτινων κυμάτων. «Κολυμπήσαμε» στην επιφάνεια, ε-

πειδή τα κύματα που προκαλούν οι άνεμοι διαταράσσουν μόνον ένα λεπτό ανώτερο στρώμα του ωκεανού, πάχους μερικών δεκάδων μέτρων. Πρόκειται για κύματα πολύ βραχέα σε σύγκριση με το βάθος του ωκεανού. Εντούτοις, υπάρχει ένας άλλος τύπος κύματος, τα τσουνάμι, των οποίων το μήκος υπερβαίνει κατά πολύ το βάθος των βαθύτερων σημείων των ωκεανών. Τα τσουνάμι γίνονται αισθητά σε όλο τον όγκο των ωκεάνιων υδάτων και διαδίδονται με τη μέγιστη ταχύτητα που αντιστοιχεί στο βάθος d του ωκεανού: $c = u = \sqrt{gd}$. Περιττεύει δε να πούμε ότι η ιστορία δεν τελειώνει εδώ. Στα ύδατα μεγάλου βάθους υπάρχουν και κύματα χαμηλής ταχύτητας, τα λεγόμενα «εσωτερικά κύματα», που η ταχύτητά τους δεν υπερβαίνει τα $1-2 \text{ m/s}$, τα οποία όμως έχουν τεράστια πλάτη που ανέρχονται σε δεκάδες και ενίστε εκατοντάδες μέτρων. Άλλα και η τιμή του ενός μέτρου ανά δευτερόλεπτο δεν μπορεί να είναι το κάτω φράγμα για την ταχύτητα των ωκεάνιων κυμάτων. Πράγματι, τα κύματα Rossby οδεύουν με ταχύτητα $1-2 \text{ cm/s}$ και οι περίοδοί τους ανέρχονται σε μερικούς μήνες! Αυτά τα κύματα συνδέονται με την περιστροφή της Γης, έχουν δε τεράστια σημασία για τους φυσικούς, τους ωκεανογράφους και τους μετεωρολόγους. Η διαπραγμάτευσή τους όμως θα πρέπει να αναβληθεί για κάποιο προσεχές άρθρο.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ

Ο Όμιλος για την προβολή των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών σάς γνωρίζει ότι κάθε Τετάρτη στις 8 το βράδυ από τον ραδιοφωνικό σταθμό «Ηρόδοτος» (107,4 FM) ο μαθηματικός-συγγραφέας Βαγγέλης Σπανδάγος παρουσιάζει την εκπομπή: «Όπερ έδει ποιείσαι» —μια γνωριμία με τους θετικούς επιστήμονες της Αρχαίας Ελλάδος.

Σε κάθε εκπομπή υπάρχει ένας ή περισσότεροι προσκεκλημένοι από τον φυσικομαθηματικό χώρο.

Η διεύθυνση του Ομίλου είναι:
Κωλέττη 9, Αθήνα, τηλ. 3301269

Το θεώρημα Steiner-Lehmus

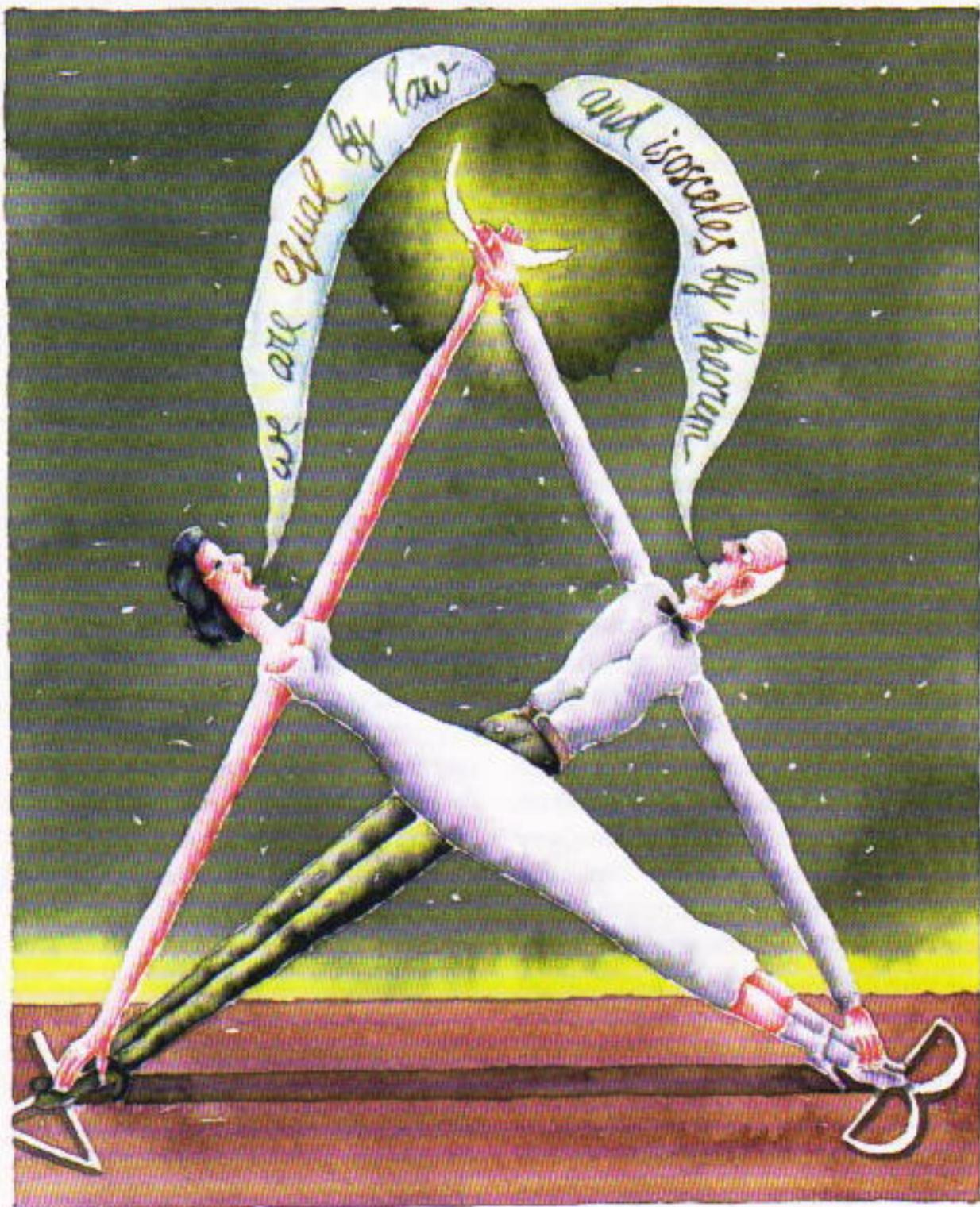
«Οιον αριθμητική και λογιστική και γεωμετρική... ων ἔναι σχεδόν τι ίσους τους λόγους έχουσι ταῖς πράξεσιν...»

—Πλάτωνος Γοργίας

I.F. Sharygin

ΟΤΑΝ ΜΕΛΕΤΑΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, μαθαίνουμε πολύ νωρίς για τρία σημαντικά ευθύγραμμα τμήματα που συναντάμε σε κάθε τρίγωνο: τη διάμεσο, το ύψος και τη διχοτόμο. Η διχοτόμος είναι η πλέον προβληματική από αυτά, και έτσι, σε αυτό το άρθρο, θα της αφιερώσουμε μια προσεκτικότερη ματιά. Ακόμη και η συναγωγή του τύπου που δίνει το μήκος της διχοτόμου είναι δύσκολη — πολύ δυσκολότερη από τη συναγωγή των αντίστοιχων τύπων για τη διάμεσο και το ύψος.

Η κατασκευή ενός τριγώνου από τις διαμέσους του δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα. Είναι απλώς λιγό δυσκολότερη της κατασκευής του από τα ύψη του. Όμως, αποδεικνύεται ότι είναι αδύνατον να κατασκευάσουμε (μόνο με κανόνα και διαβήτη) ένα τρίγωνο από τις τρεις διχοτόμους του — παρ' ότι το τρίγωνο καθορίζεται μονοσήμαντα από αυτές (η αποδειξη αυτού του γεγονότος χρησιμοποιεί βαθιές ιδιότητες των πολυωνυμικών συναρτήσεων). Πολλά γεγονότα, παρόμοια με αυτά που αποδεικνύονται εύκολα για τις διαμέσους και τα ύψη, είναι δύσκολο να αποδειχτούν ή δεν ισχύουν στην περίπτωση των διχοτόμων. Το θεώρημα Steiner-Lehmus είναι ένα εντυπωσιακό και γνωστό παράδειγμα. Αν και είναι



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

γνωστό εδώ και πολύ καιρό προσελκύει ακόμη την προσοχή.

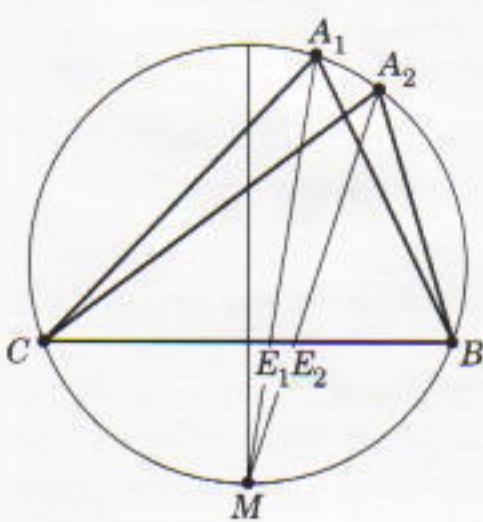
Θεώρημα Steiner-Lehmus: Αν δύο διχοτόμοι ενός τριγώνου είναι ίσες, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Είναι γνωστές πολλές αποδείξεις αυτού του θεωρήματος. Έχουν οργανωθεί μάλιστα και διαγωνισμοί μεταξύ φίλων της γεωμετρίας για την πιο ενδιαφέρουσα και πρωτότυπη απόδειξή του. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε εδώ δεν είναι ιδιαίτερα κομψή, αλλά αποκαλύπτει τη γεωμετρική ουσία του θεωρήματος και μας επιτρέπει να ανακαλύψουμε γενικότερα αποτελέσματα. Βασίζεται στο επόμενο κριτήριο ισότητας τριγώνων: Δύο τριγώνα είναι ίσα αν έχουν αντίστοιχα ίσα τα εξής στοιχεία: μια πλευρά, τη γωνία απέναντι από αυτή την πλευρά και τη διχοτόμο αυτής της γωνίας.

Ας αποδείξουμε το κριτήριο. Τοποθετούμε τα τριγώνα έτσι ώστε να συμπέσουν οι ίσες πλευρές τους (θα ονομάσουμε την κοινή πλευρά BC) και οι απέναντι κορυφές να βρίσκονται στην ίδια πλευρά τής BC και στην ίδια πλευρά της μεσοκαθέτου τής BC . Ας υποθέσουμε ότι αυτές οι κορυφές δεν συμπίπτουν και ας τις ονομάσουμε A_1 και A_2 (Σχήμα 1).

Σχεδιάζουμε στη συνέχεια τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου A_1BC . Αφού $\angle BA_1C = \angle BA_2C$, έπειται ότι το σημείο A_2 ανήκει επίσης στον περιγεγραμμένο κύκλο. (Στην πραγματικότητα, ισχύει γενικά ότι, αν δύο τριγώνα έχουν μια πλευρά, καθώς και την απέναντι σ' αυτήν γωνία, ίσες, τότε έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.)

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τις διχοτόμους A_1E_1 και A_2E_2 στα τρίγωνα A_1BC και A_2BC . Από υπόθεση, $A_1E_1 =$



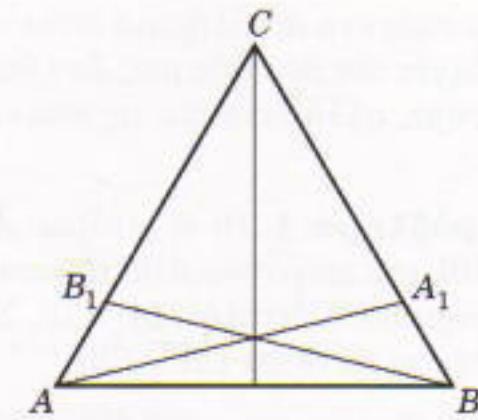
Σχήμα 1

A_2E_2 . Προεκτείνουμε τις διχοτόμους μέχρι το σημείο M στο οποίο τέμνουν τον κοινό περιγεγραμμένο κύκλο των τριγώνων (και οι δύο διχοτόμοι τέμνουν τον κύκλο στο ίδιο σημείο, το μέσο του τόξου BC). Φέρνουμε τη διάμετρο του κύκλου που διέρχεται από το σημείο M — είναι κάθετη στην BC . Στην περίπτωση του Σχήματος 1 έχουμε $MA_2 < MA_1$, διότι η MA_2 απέχει περισσότερο από το κέντρο του κύκλου απ' όσο η MA_1 . Ταυτόχρονα, $ME_2 > ME_1$, διότι η προβολή τού ME_2 στην BC είναι μεγαλύτερη από την προβολή του ME_1 . Αν αφαιρέσουμε τη δεύτερη ανισότητα από την πρώτη, βρίσκουμε ότι $A_2E_2 < A_1E_1$, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας. Συνεπώς, αποδείξαμε το κριτήριο ισότητας.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα Steiner-Lehmus. Εστω ότι οι διχοτόμοι AA_1 και BB_1 του τριγώνου ABC είναι ίσες (Σχήμα 2). Εστω I το σημείο τομής τους. Τα τρίγωνα ACA_1 και BCB_1 είναι ίσα βάσει του κριτηρίου που αποδείξαμε (έχουν κοινή τη διχοτόμο της γωνίας C). Επομένως, $AC = BC$. Το θεώρημα αποδειχτήκε.

Από το παραπάνω κριτήριο ισότητας συνεπάγεται μια γενικότερη πρόταση: Αν στο τρίγωνο ABC τα σημεία B_1 και A_1 ανήκουν, αντίστοιχα, στις πλευρές AC και BC , αν τα τμήματα AA_1 και BB_1 είναι ίσα και τέμνονται επί της διχοτόμου της γωνίας C , τότε $AC = BC$ (Σχήμα 3).

Όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν και οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών του τριγώνου. Αν το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές, μπορούμε να θεωρήσουμε τα τρία τμήματα που είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών του. (Η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας που βρίσκεται απέναντι από τη βάση

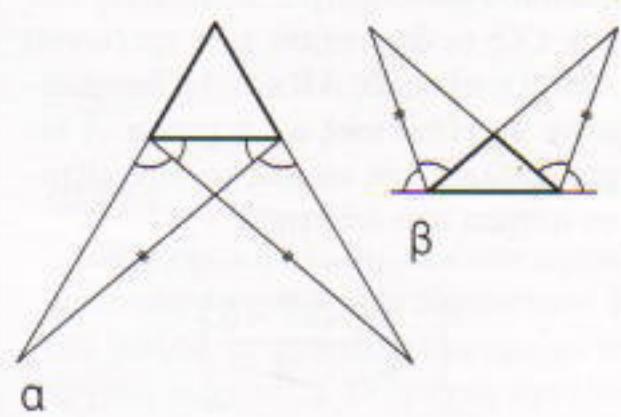


Σχήμα 3

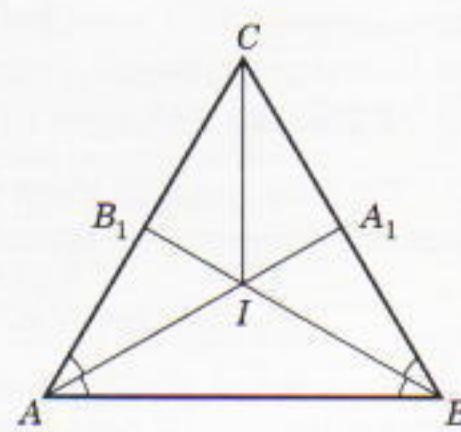
ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι παράλληλη προς τη βάση και δεν την τέμνει.)

Ας υποθέσουμε ότι δύο διχοτόμοι εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσες. Είναι το τρίγωνο ισοσκελές;

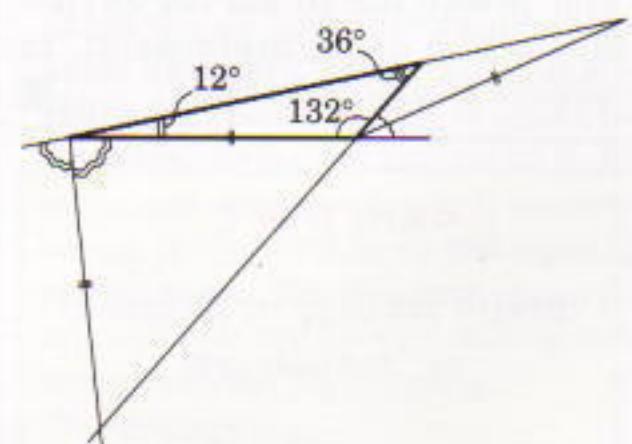
Αποδεικνύεται ότι, αν έχουμε φέρει τις εν λόγω διχοτόμους από τα άκρα της μεγαλύτερης ή της μικρότερης πλευράς του τριγώνου, η πρόταση είναι αληθής (Σχήματα 4α, β). Όμως, αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση. Ένα παράδειγμα είναι το γνωστό τρίγωνο του Bottema: Πρόκειται για το τρίγωνο με γωνίες 12° , 132° και 36° . Σε αυτό το τρίγωνο οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών στα άκρα της «μεσαίας» πλευράς είναι ίσες μεταξύ τους καθώς και με τη μεσαία πλευρά (Σχήμα 5).



Σχήμα 4



Σχήμα 2



Σχήμα 5

Τα επόμενα προβλήματα είναι παραλλαγές του θέματός μας. Δεν θα τα λύσουμε, αλλά δίνουμε τις απαντήσεις.

Πρόβλημα 1. Οι διχοτόμοι AA_1 και BB_1 του τριγώνου ABC τέμνονται στο σημείο I . Δίδεται ότι $IA_1 = IB_1$. Συνεπάγεται αυτό ότι $CA = CB$;

Οχι. Έπειτα όμως ότι $CA = CB$ ή ότι η γωνία C είναι 60° .

Πρόβλημα 2. Η κάθε διχοτόμος ενός τριγώνου τέμνει την απέναντι πλευρά σε σημείο που ισαπέχει από τα άλλα δύο αντίστοιχα σημεία. Συνεπάγεται ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο;

Αποδεικνύεται ότι εκτός των 100-πλεύρων τριγώνων, αυτή την ιδιότητα έχει και το τρίγωνο με πλευρές 1, 1 και $\sqrt{2} - 1$ (και όλα τα όμοια με αυτό τρίγωνα).

Η πλήρης απάντηση στην επόμενη ερώτηση είναι τελείως απρόσμενη.

Πρόβλημα 3. Εστω ότι το τρίγωνο με κορυφές τα ίχνη των διχοτόμων ενός τριγώνου είναι ισοσκελές. Είναι ισοσκελές και το μεγάλο τρίγωνο;

Στη γενική περίπτωση, η απάντηση είναι αρνητική. Έπειτα από προσεκτική ανάλυση καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα. Εστω AA_1, BB_1 και CC_1 οι διχοτόμοι του τριγώνου ABC . Οι πλευρές AB και AC δεν μπορούν να είναι ίσες αν η γωνία A είναι αριθμεία της οποίας το συνημίτονο ανήκει στο διάστημα

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{17}-5}{4} \right).$$

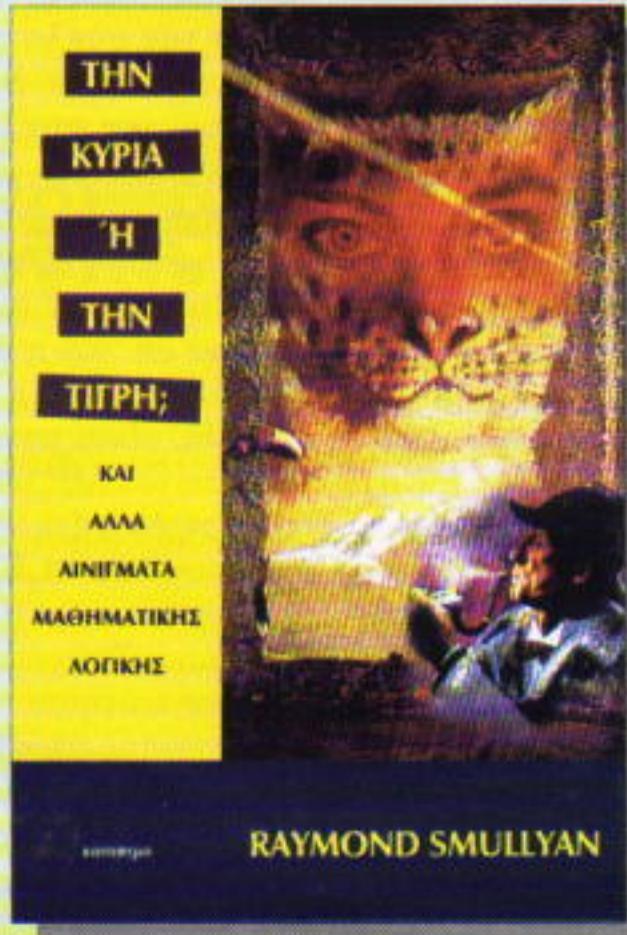
Οι τιμές αυτές του συνημίτονου αντιστοιχούν σε γωνίες που κυμαίνονται μεταξύ $102^\circ 40'$ και $104^\circ 28'$, περίπου. Στις άλλες περιπτώσεις, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. □

— Κ Ο ρ φ ί —

Βιβλία για όλες τις βαθμίδες
της εκπαίδευσης

Σόλωνος 103, Αθήνα,
τηλ.: 3800798

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Raymond Smullyan

Την κυρία ή την τίγρη; και άλλα αινίγματα μαθηματικής λογικής

Το βιβλίο, αποτελεί μια εξαιρετική συλλογή προβλημάτων —παραδόξων, μεταγρίφων, αινιγμάτων συνδυαστικής, κ.λπ.— της σύγχρονης μαθηματικής λογικής, και έχει ως κύριο σκοπό του να εξηγήσει, με τρόπο μοναδικό, το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel και το θεώρημα της τυπικής μη ορισμότητας της αλήθειας του Tarski.

- «Σπινθηροβόλα συλλογή προβλημάτων και παραδόξων της λογικής από τον πιο ψυχαγωγικό επαίοντα της μαθηματικής λογικής και της θεωρίας συνόλων που υπήρξε ποτέ...»

Martin Gardner

- «Έξυπνο, διδακτικό, διασκεδαστικό βιβλίο... Ο τελευταίος μεταγρίφος "Ποιος είναι ο κατάσκοπος;" αποτελεί τον πιο ευφυή γρίφο λογικής που διατυπώθηκε ποτέ...»

G. Boolos, Καθηγητής φιλοσοφίας στο MIT

- «Ο Ray Smullyan είναι ο Lewis Carroll της εποχής μας...»

P. Denning, Καθηγητής πληροφορικής στο Πανεπιστήμιο Pardue

Ένα βιβλίο για κάθε λάτρη του είδους: από μαθητές λυκείου μέχρι ωριμους μαθηματικούς, λογικολόγους και επιστήμονες των υπολογιστών.

Σελ.: 264, 14 x 21 εκ., Πανόδετο, 6.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Βιβλιοπαλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

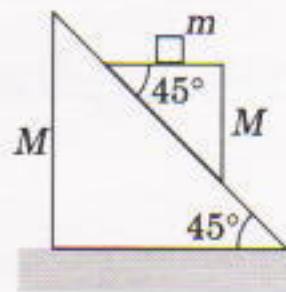
Web site: www.katoptro.gr

Προκλήσεις

Μαθηματικά

M141

Πρωταθλητής διαιρετών. Βρείτε τον τριψήφιο αριθμό με το μεγαλύτερο πλήθος διαφορετικών διαιρετών.



M142

Αρρητες τιμές. Υπάρχει μη γραμμική συνάρτηση ορισμένη και διαφορισμη για κάθε πραγματικό αριθμό που παίρνει ρητές τιμές στα ρητά σημεία και άρρητες στα άρρητα σημεία;

M143

Γωνίες πυραμίδων. Μια τριγωνική πυραμίδα $ABCD$ έχει βάση το ισόπλευρο τρίγωνο ABC και $AD = BC$. Αν οι τρεις επίπεδες γωνίες της κορυφής D είναι ίσες, ποιες τιμές μπορούν να πάρουν;

M144

Ολοκληρωτικός συλλογισμός. Υπολογίστε το

$$\int_0^2 \left(\sqrt{1+x^3} + \sqrt[3]{x^2+2x} \right) dx.$$

M145

Αναλογίες σε διάμετρο. Η περίμετρος του τριγώνου ABC είναι k φορές μεγαλύτερη από την πλευρά BC και $AB < AC$. Σχεδιάζουμε μια διάμετρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, κάθετη στην BC . Σε ποια αναλογία διαιρεί τη διάμετρο αυτή η διάμεσος επί την πλευρά BC ;

Φυσική

Φ141

Ολισθαίνοντα πρίσματα. Ένα πρίσμα μάζας M με γωνία βάσης 45° κείται σε λειο οριζόντιο τραπέζι. Ένα άλλο πρίσμα ίσης μάζας και γωνίας βάσης τοποθετείται πάνω στο πρώτο έτσι ώστε η πάνω όψη του να είναι οριζό-

Σχήμα 1

ντια (Σχήμα 1). Ένα παραλληλεπίπεδο μάζας m τοποθετείται πάνω στο δεύτερο πρίσμα, και το όλο σύστημα αφήνεται ελεύθερο. Εκείνη τη συγκρίτιμη όλα τα στοιχεία του είναι ακίνητα. Ποια ταχύτητα θα αποκτήσει το παραλληλεπίπεδο μετά την πάροδο χρόνου τη αφότου αφέθηκε ελεύθερο το σύστημα; Αγνοήστε την τριβή και θεωρήστε ότι ο χαρακτήρας της κίνησης δεν μεταβάλλεται.

(A. Zilberman)

Φ142

Διάδοση της θερμότητας σε δέντρο. Η θερμική αγωγιμότητα κατά μήκος των ινών ενός δέντρου είναι διπλάσια από τη θερμική αγωγιμότητα εγκάρσια προς αυτές. Από το ξύλο του συγκεκριμένου δέντρου κατασκευάζονται δύο επιμήκεις λεπτοί κύλινδροι, πανομοιότυποι ως προς τις διαστάσεις και τη μάζα. Ο άξονας του πρώτου είναι ακριβώς παράλληλος με τις ίνες, ενώ ο άξονας του δεύτερου σχηματίζει γωνία 30° με αυτές. Οι παράπλευρες επιφάνειες των δύο κύλινδρων μονώνονται θερμικά και στις βάσεις τους εφαρμόζονται ίσες θερμοκρασιακές διαφορές. Πόσο διαφέρουν οι ροές θερμικής ενέργειας στους δύο κύλινδρους;

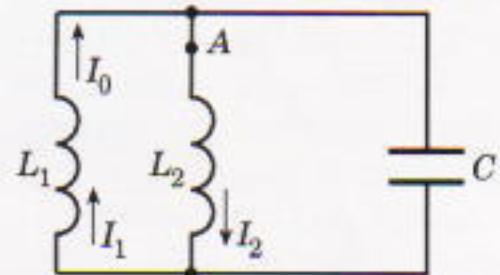
(S. Varlamov)

Φ143

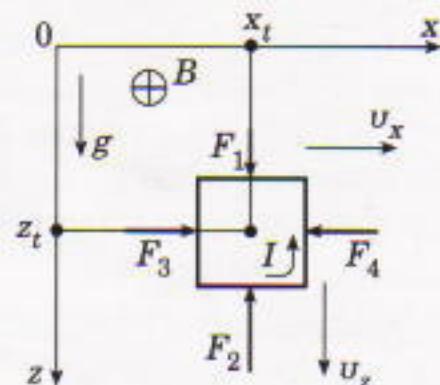
Διπλά πηνία. Ένας πυκνωτής C και δύο πηνία L_1 και L_2 συνδέονται παράλληλα (βλ. Σχήμα 2). Αρχικά, ο C είναι αφόρτιστος, ενώ το ρεύμα στο πηνίο L_2 ισούται με μηδέν, σε αντί-

θεση με το L_1 , που διαρρέεται από ρεύμα I_0 . Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή του φορτίου στον πυκνωτή, καθώς και τη μέγιστη τιμή του ρεύματος στο σημείο A .

(A. Zilberman)



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Φ144

Μαγνητική πτώση. Σε έναν τετράγωνο συρμάτινο βρόχο περιμέτρου $4a$ και μάζας m προσδίδεται οριζόντια αρχική ταχύτητα. Ο βρόχος κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο υπό την επιδραση μαγνητικού πεδίου κάθετου στο επίπεδο της κίνησης (Σχήμα 3). Το μέτρο του εν λόγω πεδίου μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο $B(z) = B(0) + kz$, όπου k = σταθ. Η ωμική αντίσταση του βρόχου ισούται με R . Επειτα από ορισμένο χρόνο η ταχύτητα του βρόχου λαμβάνει μια σταθερή οριακή τιμή v . Προσδιορίστε την αρχική ταχύτητα του βρόχου. Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g .

(V. Mozhayev)

Συνέχεια στη σελ. 61 ↘

Η ιστορία του

Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων μάς εξασφαλίζει ότι σε έναν κόσμο όπου δεν υπάρχει η αληθινή παραγωγή των τεσσάρων χρωμάτων, οι ζωγραφικές τεχνικές θα είναι αποτελεσματικές.

Λ ΦΤΕΡΩΤΑ ΠΛΑΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΑΚΡΙΝΟΥ πλανήτη Ζουμ κατοικούν στη μία και μοναδική ήπειρο του κόσμου τους. Πριν από πολλά χρόνια, οι Ζουμιανοί χωρίστηκαν ανάλογα με το χρώμα του φτερώματός τους, και ίδρυσαν τα τέσσερα αρχαία βασίλεια: το Τίρκουάζ, την Ωχρά, το Κιτρινοπράσινο και την Πορφυρή Ομοσπονδία. Κάθε όνομα αντιστοιχεί στο φτέρωμα του λαού τους και στο χρώμα με το οποίο έπρεπε να παρουσιάζονται τα βασίλεια στους χάρτες του Ζουμ. Χάριν ρεαλισμού, ο αχανής, θειούχος ωκεανός χρωματίζεται πάντοτε κίτρινος. Ο επόμενος χάρτης παρουσιάζει τα εδάφη του Ζουμ πριν από τις τραγικές Πορφυρές διασπάσεις:

Ο Ζουμιανός χαρτογράφος (που ήταν επίσης ο σημαντικότερος Πορφυρός μαθηματικός) γνώριζε ότι τέσσερα χρώματα αρκούν για να χρωματίσουμε οποιοδήποτε πλήθος περιοχών του επιπέδου έτοι ώστε οι περιοχές που συνορεύουν να μην έχουν ίδιο χρώμα. Όμως, σε έναν τέτοιο χάρτη του Ζουμ, η Πορφυρή Ομοσπονδία θα έπρεπε να χρωματίστει κίτρινη. Για να αποφευχθεί αυτό, όλοι οι χάρτες του Ζουμ (όπως και του δικού μας πλανήτη) είχαν πέντε χρώματα, από τα οποία το ένα ήταν για τον ωκεανό. Οι κάτοικοι των παράλιων βασιλείων του Τίρκουάζ, της

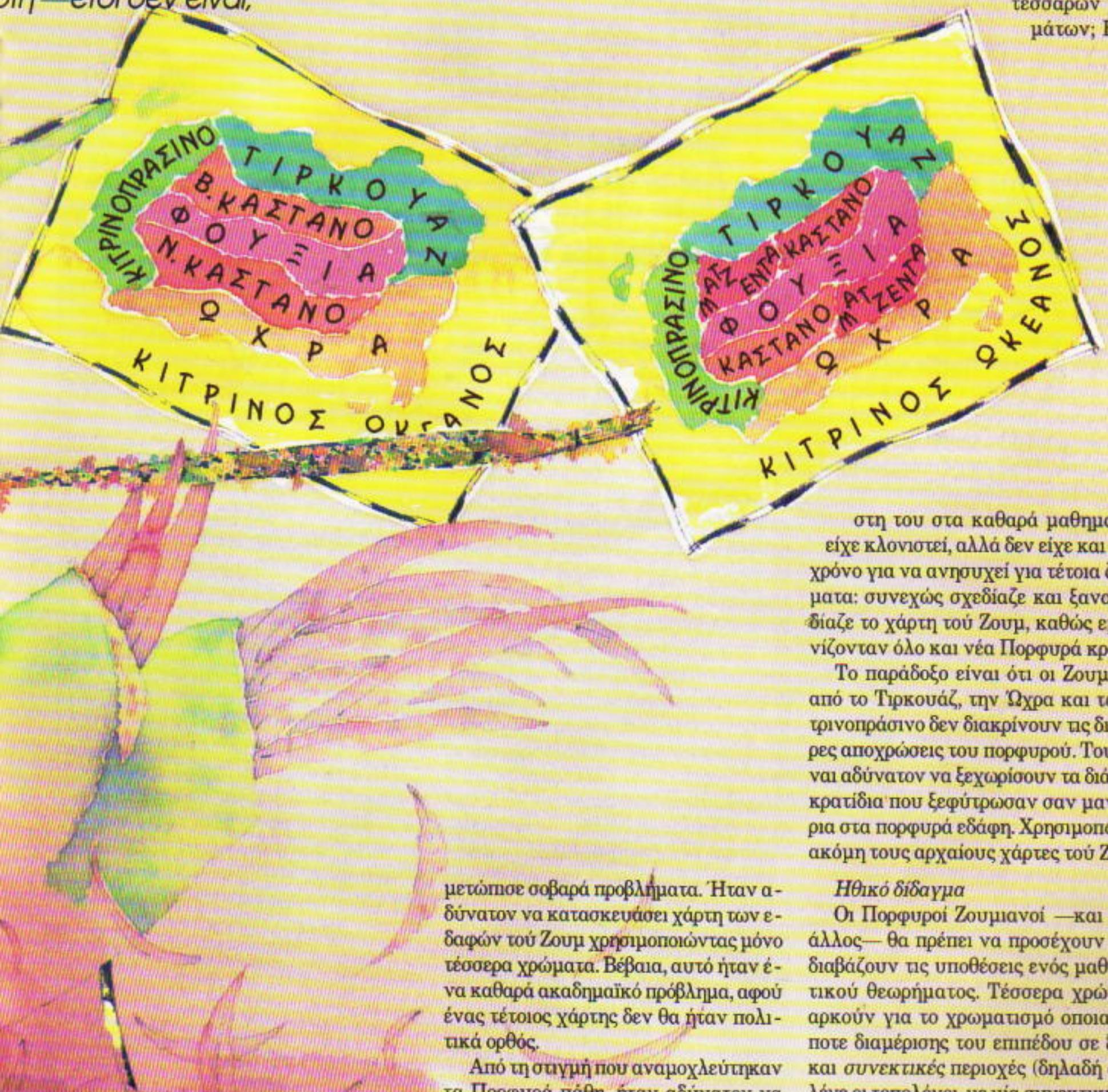


Ωχράς και του Κιτρινοπράσινου εμφάνιζαν ελάχιστες διαφορές στις αποχρώσεις του φτερώματός τους, αλλά και στο χαρακτήρα τους. Από την άλλη πλευρά, τα μέλη της Ομοσπονδίας —ένας φιλοπόλεμος λαός— ήταν υπερήφανα για την ποικιλία των φτερωμάτων τους. Τα προβλήματα άρχισαν όταν ο αγαπημένος τους Πορφυρός βασιλιάς αποκεφαλίστηκε κατά λάθος σε έναν αγώνα ραμφομαχίας. Ένα αυτονομιστικό κίνημα αποτελούμενο από Ζουμιανούς με πολύ έντονα χρώματα προχώρησε στην ίδρυση ενός νέου

κράτους, της Φούξια. Το υπόλοιπο της Πορφυρής Ομοσπονδίας ανακηρύχθηκε Δημοκρατία του Καστανού με έμβλημά της το «Η ισχύς εν τω χωρισμώ». Ο επόμενος χάρτης παρουσιάζει τα αποτελέσματα αυτής της πρώτης διάσπασης στο χάρτη του Ζουμ: Οι κάτοικοι του Καστανού επέμεναν ότι τα γεωγραφικώς χωρισμένα εδάφη τους έπρεπε να έχουν ίδιο χρώμα. Τυπώθηκαν νέοι χάρτες με το ουσιώδε χρώμα κάθε έθνους, αλλά αυτή τη φορά ο χαρτογράφος αντι-

χαρτογράφου

όπι τέσσερα χρώματα είναι αρκετά για να διακρίνουμε
τη — έτσι δεν είναι;



μετώπως σοβαρά προβλήματα. Ήταν αδύνατον να κατασκευάσει χάρτη των εδαφών του Ζουμ Χρησιμοποιώντας μόνο τέσσερα χρώματα. Βέβαια, αυτό ήταν ένα καθαρά ακαδημαϊκό πρόβλημα, αφού ένας τέτοιος χάρτης δεν θα ήταν πολιτικά ορθός.

Από τη στιγμή που αναμοχλεύτηκαν τα Πορφυρά πάθη, ήταν αδύνατον να καταλαγιάσουν. Το μεδάνι δεν είχε στεγνώσει ακόμη στους νέους χάρτες όταν Καστανοί μιας ορισμένης απόχρω-

σης απαίτησαν επίσης αυτονομία. Αυτοί ζούσαν στο βορειοδυτικό και στο νοτιοανατολικό άκρο της παλιάς Ομοσπονδίας. Όταν καταλάγιασε το φτεροκόπημα, το νέο έθνος της Ματζέντα είχε γεννηθεί. Το αποτέλεσμα φαίνεται στον επόμενο επτάχρωμο χάρτη:

Ο χαρτογράφος ήταν ανάστατος: δεν υπήρχε τρόπος να παρουσιαστούν οι έξι χώρες με λιγότερα από έξι χρώματα! Υπήρχε κάποιο σφάλμα στο θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων; Η πι-

στη του στα καθαρά μαθηματικά είχε κλονιστεί, αλλά δεν είχε και πολύ χρόνο για να αντρουχεί για τέτοια ζητήματα: συνεχώς σχεδίαζε και ξανασχεδίαζε το χάρτη του Ζουμ, καθώς εμφανίζονταν όλο και νέα Πορφυρά κράτη.

Το παράδοξο είναι ότι οι Ζουμιανοί από το Τίρκουάζ, την Ωχρά και το Κιτρινοπράσινο δεν διακρίνουν τις διάφορες αποχρώσεις του πορφυρού. Τους είναι αδύνατον να ξεχωρίσουν τα διάφορα κρατίδια που ξεφύτρωσαν σαν μανιταρία στα πορφυρά εδάφη. Χρησιμοποιούν ακόμη τους αρχαίους χάρτες του Ζουμ.

Ηθικό δίδαγμα

Οι Πορφυροί Ζουμιανοί —και κάθε άλλος— θα πρέπει να προσέχουν όταν διαβάζουν τις υποθέσεις ενός μαθηματικού θεωρήματος. Τέσσερα χρώματα αρκούν για το χρωματισμό οποιασδήποτε διαμέρισης του επιπέδου σε ξένες και συνεκτικές περιοχές (δηλαδή όπως λένε οι τοπολόγοι, με μία συνεκτική συνιστώσα).

—Sheldon Lee Glashow,
Νόμπελ φυσικής

Η κβαντική φύση του φωτός

Από τους κυνηγούς του κβάντου στο φαινόμενο της διπλής διάθλασης

D. Sviridov και R. Sviridova

ΣΤΗ ΔΕΚΑΕΤΙΑ ΤΟΥ 1920, ΚΑΘΩΣ η κβαντική θεωρία αναπτυσσόταν, ανέκυψε η ανάγκη πειραματικής επαλήθευσής της. Εάν το φως πράγματι ακτινοβολείται με τη μορφή κβάντων, τότε η προοπτική να γίνουν τα κβάντα ορατά δεν φαντάζει διόλου ανυπόστατη. Εκ πρώτης όψεως, αυτή η σκέψη είναι απλώς μια αβάσιμη φαντασιοκοπία. Ποιο πείραμα θα μπορούσε να αποδείξει την ορθότητα της ιδέας της διακριτότητας του φωτός ή, αντίθετα, να οδηγήσει στην αναίρεσή της εφόσον θα έπρεπε να στηρίζεται σε ένα τόσο ατελές όργανο όπως το ανθρώπινο μάτι; Το πρόβλημα φαίνεται ανεπίδεκτο λύσης. Για να πατέψει κανείς ότι το ανθρώπινο μάτι είναι ικανό να διακρίνει τα κβάντα θα έπρεπε να είναι αυθεντικό στην οπτική όσο και στη φυσιολογία της όρασης.

Το σπουδαιότερο βήμα προς τη διατύπωση νέων επιστημονικών προβλημάτων έγκειται στην υπέρβαση των ορίων που θέτουν οι κρατούσες απώψεις αναφορικά με ορισμένες σχέσεις στη φύση. Κάποτε ο Werner Heisenberg είπε: «Το ενδιαφέρον τού νατουραλιστή εστιάζεται πρωτίστως στη διατύπωση ερωτημάτων, και μόνο δευτερεύοντας στην απάντησή τους. Κατά την άποψή του, η διατύπωση ενός προβλήματος έχει πολύ μεγαλύτερη αξία, εφόσον προάγει την ανέλιξη του ανθρώπινου πνεύματος. Ως επί το πλείστον, οι απαντήσεις έχουν μόνον εφήμερη και παροδική αξία: προϊόντος του χρόνου, η αύξηση των φυ-

σικών γνώσεων ενδέχεται να τις αποστερήσει από κάθε αξία.»

Ο άνθρωπος που είδε τα κβάντα

Ένα τέτοιο μοναδικό πρόβλημα έθεσε ο πρόεδρος της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών Sergei Vavilov (1891-1951). Το 1920, όταν ο Vavilov διηγήθηκε το Τμήμα Οπτικής στο Ερευνητικό Ινστιτούτο Βιοφυσικής του Υπουργείου Υγείας, καταπάστηκε με τη μελέτη του προβλήματος της κβαντικής δομής του φωτός. Στη μονογραφία του *Η μικροσκοπική δομή του φωτός*, όπου γενικεύεται το σύνολο του έργου του πάνω στη φύση του φωτός, ο Vavilov έγραφε: «Οι ιδιότητες του φωτός αποκαλύπτονται με τον σαφέστερο τρόπο όταν οι συνθήκες γίνονται οριακές: όταν μελετώνται ασθενείς ροές φωτός που απαρτίζονται από μικρό αριθμό κβάντων, όταν διερευνώνται διαδικασίες που συντελούνται στη διάρκεια ενός δισεκατομμυριοστού του δευτερολέπτου και όταν υποβάλλεται σε ανάλυση η αλληλεπίδραση των μορίων σε εξαιρετικά μικρές αποστάσεις.» Πραγματοποίησε λοιπόν ένα πείραμα που ανταποκρινόταν σ' αυτές τις προδιαγραφές, ελπίζοντας να παρατηρήσει μεμονωμένα κβάντα φωτός.

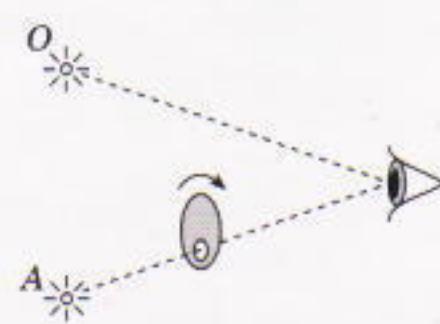
Το 1729 ο γάλλος επιστήμονας Pierre Bouguer (1698-1758) ανακάλυψε πειραματικά το νόμο της εξασθένησης του φωτός καθώς διαδίδεται σε ένα υλικό μέσο. Το φαινόμενο της εξασθένησης οφείλεται στο γεγο-

νός ότι όλες οι ουσίες έχουν την ιδιότητα να απορροφούν το φως κατά τη διέλευσή του μέσω αυτών. Έστω J_0 η ένταση του φωτός με μήκος κύματος λ που προσπίπτει σε στρώμα κάποιας ουσίας πάχους d , και J η ένταση του φωτός που εξέρχεται αφού διέλθει μέσα από το στρώμα. Με τους συγκεκριμένους συμβολισμούς, ο νόμος του Bouguer γράφεται με τη μορφή

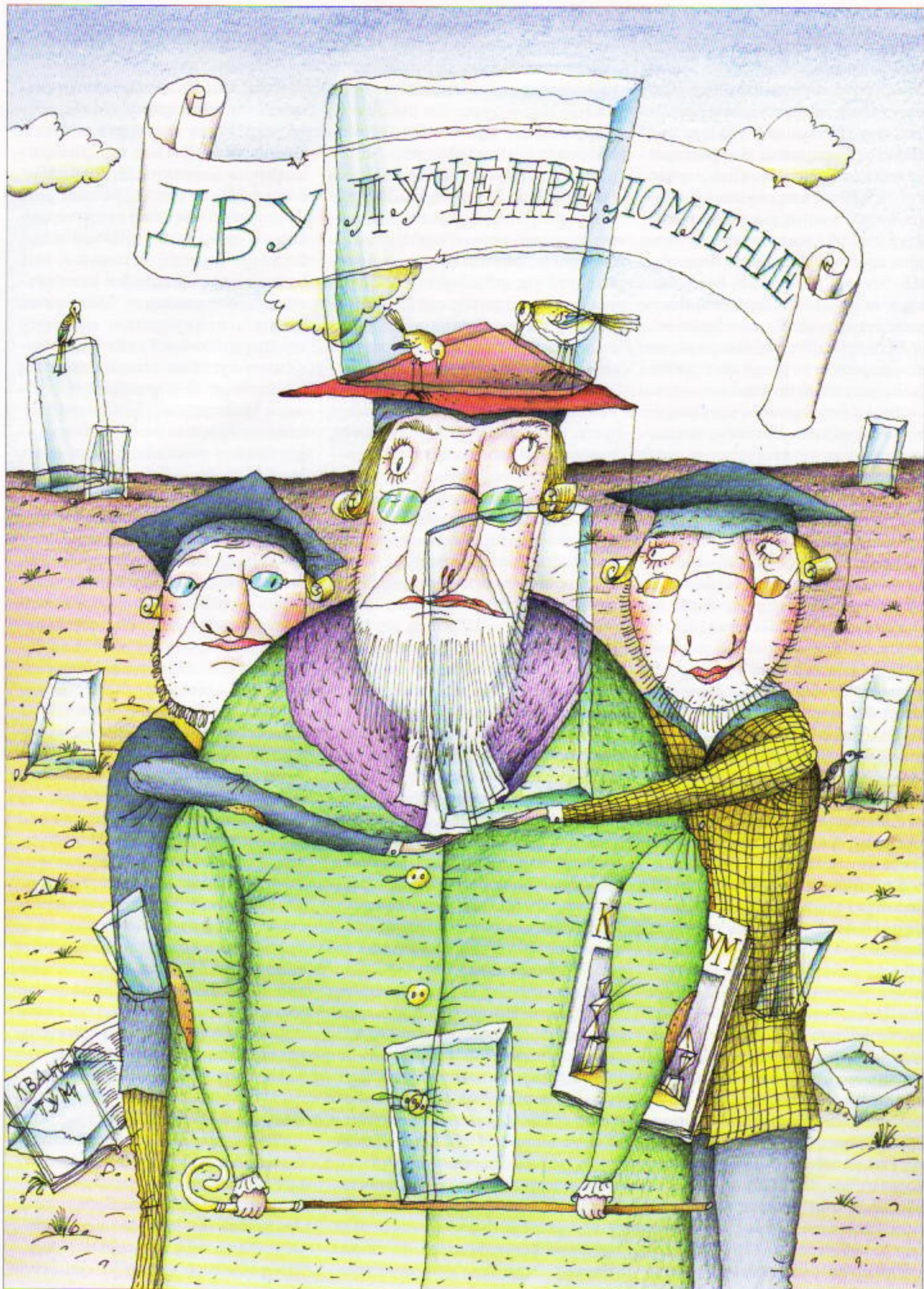
$$\ln \frac{J}{J_0} = -\mu d,$$

όπου μ είναι ο συντελεστής απορρόφησης. Αυτός ο νόμος αποτέλεσε το θεμέλιο για κάθε μεταγενέστερη μετρηση της απορρόφησης του φωτός σε ένα υλικό μέσο. «Στο δικό του ερευνητικό πεδίο, ο Pierre Bouguer υπήρξε ένας επιστήμονας εξίσου σημαντικός όσο ο Kepler και ο Νεύτων στη μηχανική», έγραφε ο Vavilov.

Πολυάριθμα πειράματα έδειχναν ότι ο συντελεστής απορρόφησης δεν εξαρτάται από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η κβαντική θεωρία όμως ενθάρρυνε τις προσάθειες να αναζητηθεί κάποια τέτοια ε-



Σχήμα 1



ξάρτηση. Διαπιστώθηκε ότι ο συντελεστής απορρόφησης παρέμενε σταθερός σε μια ευρύτατη περιοχή τιμών της έντασης του φωτός· πράγματι, το άνω όριο της περιοχής που είχε υποβληθεί σε πειραματικό έλεγχο υπερείχε του κάτω ορίου της κατά παράγοντα 10^{20} . Εντούτοις, εάν το φως υπάρχει όντως υπό τη μορφή διακριτών μονάδων, σκέφτονταν οι ερευνητές, τότε, εφόσον η εξερχόμενη δέσμη έχει εξασθενήσει πάρα πολύ, δεν μπορεί παρά να σημειώνονται διακυμάνσεις στην ένταση της. Το σπουδαιότερο, ο αριθμός των κβάντων του φωτός που απορροφώνται σε βραχύτατα χρονικά διαστήματα δεν θα έπρεπε να είναι σταθερός, οπότε ο νόμος του Bouguer θα παραβιαζόταν. Συνεπώς, οι ερευνητές έπρεπε να ανιχνεύσουν αυτές τις στοχαστικές κβαντικές διακυμάνσεις.

Επί πολλά χρόνια οι «κυνηγοί του κβάντου», όπως επονομάστηκαν οι συνεργάτες του Vavilov, προσπαθούσαν να εκτελέσουν ένα τέτοιο πείραμα. Οι προσπάθειές τους, όμως, δεν ευδόθηκαν παρά μόνον το 1941.

Μπορεί άραγε το ανθρώπινο μάτι να διακρίνει ένα τόσο μικροσκοπικό γεγονός; Έπειτα από πολύχρονη εργασία διαπιστώθηκε ότι το ανθρώπινο μάτι μπορεί να αντιληφθεί έναν μικρό αριθμό κβάντων φωτός τα οποία φτάνουν συγχρόνως (η τιμή κατωφλίου ανέρχεται σε οκτώ κβάντα ανά δευτερόλεπτο). Πώς, όμως, κατόρθωσε η ομάδα του Vavilov να αποδείξει κάτι τέτοιο;

Στο πείραμα του Vavilov, το μάτι παρατηρεί μια μικρή, σχεδόν σημειακή πηγή *A* που φωτιζόταν ασθενώς, η λαμπρότητα της οποίας μπορεί να μειωθεί με συνεχή τρόπο (Σχήμα 1). Όταν το φως καταστεί εξαιρετικά ασθενές, λίγα μόνον κβάντα ανά δευτερόλεπτο προσπίπτουν στο μάτι. Σ' αυτές τις συνθήκες αναμένεται να κάνει την εμφάνισή της κάποια διακύμανση στη λαμπρότητα της πηγής. Συνεπώς, ο παρατηρητής θα πρέπει να διαπιστώσει ότι μια πηγή που εκπέμπει φως σταθερής έντασης αρχίζει να τρεμολάμπει. Το πείραμα φαίνεται απλό, αλλά η διεξοδικότερη εξέταση αποκαλύπτει ορισμένους παράγοντες που το καθιστούν μάλλον δύσκολο.

Πρώτα απ' όλα, πρέπει να χρησιμο-

ποιηθεί πηγή πολύ χαμηλής έντασης, επειδή υπό κανονικές συνθήκες τα περισσότερα από τα σωματίδια της ακτινοβολίας συγκροτούν μια συνεχή ροή φωτός. Δεύτερον, υπάρχουν τόσο κβαντικές όσο και «κλασικές» διακυμάνσεις του φωτός. Οι «κλασικές» διακυμάνσεις, που τις προκαλεί η κίνηση και η αλληλεπίδραση των ατόμων και των μορίων, σχετίζονται με διαδικασίες που συντελούνται στο εσωτερικό της φωτεινής πηγής. Η κατασκευή μιας πηγής ουσιαστικά απαλλαγμένης από όλες αυτές τις κλασικές διακυμάνσεις είναι δυνατή. Για παράδειγμα, φθορίζοντα μόρια εν διαλύσει σε μια εξαιρετικά παχύρρευστη ουσία ακτινοβολούν φως με συνεχή τρόπο και σταθερή ένταση. Αντιθέτως, εφόσον το μέσο διάδοσης είναι αρκούντως αραιό, παρατηρούνται πάντα κβαντικές διακυμάνσεις. Τρίτον, το μάτι πρέπει να ανιχνεύσει στο σχεδιαζόμενο πείραμα τις διακυμάνσεις αυτές αξιόπιστα και ευκρινώς. Ωστόσο, κάποιες ιδιότητες του ματιού δεν επιτρέπουν την εκτέλεση του πειράματος σε τόσο απλή μορφή.

Το κρίσιμο σημείο έγκειται στο ότι το μάτι κινείται αδιάκοπα, οπότε είναι δυνατόν να παρατηρηθούν μεταβολές της λαμπρότητας όχι μόνον για μικρές εντάσεις του φωτός αλλά και για μεγάλες. Για να υπερνικηθεί τούτο το εμπόδιο, στο πείραμα ο παρατηρητής ατενίζει κάποιο λαμπρότερο σημείο *O* (συνήθως ερυθρού χρώματος) που βρίσκεται πλαγίως του σημείου *A*, το οποίο φωτιζόταν ασθενώς. Το είδωλο του σημείου *O* δημιουργείται στο κέντρο του αμφιβληστροειδούς, ενώ το είδωλο της πηγής στο *A* μετατοπισμένο από το κέντρο κατά σταθερή απόσταση.

Επιπροσθέτως, το μάτι έχει και την ιδιότητα να διατηρεί τις φωτεινές εντυπώσεις (θετικό μετείκασμα). Αυτό μπορεί να επιφέρει τη συγχώνευση των ταχύτατων ταλαντώσεων της έντασης, οι οποίες θα «χάνονται» στο μέσο όρο του φωτεινού υποβάθρου. Για να αποτραπεί τούτο το ανεπιύμητο φαινόμενο, τοποθετείται ένας δίσκος με μία οπή ανάμεσα στον παρατηρητή και την πηγή. Ο δίσκος περιστρέφεται με συχνότητα μίας στροφής ανά δευτερόλεπτο, και το μάτι παρατηρεί την πηγή μόνο μέσω της ο-

πής (για παράδειγμα επί 1/10 του δευτερολέπτου).

Αυτή η απλούστατη διάταξη επιτρέπει την παρατήρηση ενός εξαιρετικά περίπλοκου φαινομένου. Όταν ο αριθμός των κβάντων του φωτός υπερβεί μια ορισμένη τιμή κατωφλίου, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μιαν αναλαμπή φωτός όποτε ανοίγει η οπή. Όταν ο αριθμός των κβάντων μειώθει μέχρι την τιμή κατωφλίου, τότε κάθε άνοιγμα της οπής δεν συνοδεύεται με ορατή αναλαμπή. Μειώνοντας βαθμιαία τη λαμπρότητα της πηγής στο *A*, η ομάδα του Vavilov κατόρθωσε να ανιχνεύσει τέτοιες μεταβολές της έντασης. Όσο χαρηλότερη γινόταν η ένταση της πηγής τόσο αυξανόταν ο αριθμός των ανοιγμάτων της οπής που δεν συνοδεύονταν από ορατή αναλαμπή. Μετρώντας πόσα ανοιγμάτα της οπής συνοδεύονταν από αναλαμπή και πόσα όχι, οι ερευνητές της ομάδας του Vavilov καθόρισαν τον μέσο αριθμό των κβάντων σε κάθε αναλαμπή. Έτσι κατέστη δυνατόν για το ανθρώπινο μάτι να «διακρίνει» την κβαντική φύση του φωτός. Σήμερα, βέβαια, διαθέτουμε πολύ ευαίσθητα όργανα, όπως φωτοπολλαπλασιαστές και άλλους απαριθμητές ωστόσο, αυτό που για πρώτη φορά είδε το κβάντο του φωτός ήταν όντως το ανθρώπινο μάτι.

Σε συνεργασία με τον V. Levshin, ο Vavilov ανακάλυψε ότι ο νόμος του Bouguer παραβιαζόταν και σε πολύ μεγάλες εντάσεις φωτός. Παρατηρούσαν τη φωταύγεια κρυσταλλικών φωσφοριζόντων υλικών που διεγέρονταν από φως υψηλής έντασης. Ωστόσο, η εξήγηση αυτού του φαινομένου κατέστη δυνατή μόνο μετά την εμφάνιση νέων ισχυρών πηγών φωτός: των λέιζερ. Τα πειράματα του Vavilov έθεσαν τα θεμέλια ενός νέου κλάδου της φυσικής, της κβαντικής ηλεκτρονικής, η οποία μελετά την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη.

Φως σε κρυστάλλους

Υπέροχα, ακόμη και παράδοξα εκ πρώτης όψεως, φαινόμενα συνοδεύουν τη διάδοση του φωτός σε κρυστάλλους. Το 1669 μεταφέρθηκαν στη Δανία από την Ισλανδία μεγάλα τεμάχια διαφανών κρυστάλλων ασβεστίτη (CaCO_3), που αργότερα έγινε

γνωστός ως ισλανδικός κρύσταλλος. Μελετώντας τις οπτικές ιδιότητες των εν λόγω κρυστάλλων, ο Erasmus Bartholin, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης, έτυχε να προσέξει το υπέροχο φαινόμενο της διπλής διάθλασης.

Την ίδια χρονιά, το 1669, ο συμπatriώτης του Bartholin Nicolaus Steno (1638-1685) ανακάλυψε έναν από τους σημαντικότερους νόμους της κρυσταλλογραφίας, ο οποίος αποτελεί έκφανση της ύψιστης αρμονίας της φύσης —την αρχή της σταθερότητας των διεδρων γωνιών. Στην πραγματεία του *Περί στερεών εγκλεισμένων εντός στερεών λόγω διεργασιών της φύσης*, ο Steno έγραφε: «Στην έδρα ενός κρυστάλλου, το πλήθος των πλευρών και τα μήκη τους μπορεί να μεταβάλλονται χωρίς να αλλάζουν οι γωνίες της.»

Ο Bartholin υπέβαλε σε έλεγχο τον εν λόγω νόμο μελετώντας κρυστάλλους ασβεστίτη. Σκίτσαρε τις όψεις των κρυστάλλων και αντιπαρέβαλλε τα διάφορα σχέδια. Κάποτε έτυχε να ακουμπήσει έναν κρύσταλλο πάνω σε κάποιο από τα σχέδια και πρόσεξε ότι το σχέδιο φαινόταν διπλό. Όταν απομάκρυνε τον κρύσταλλο, υπήρχε ένα μόνο σχέδιο. Οι σημειώσεις του, καθώς και οι διάφορες αλλαγές μέσα από τον παράξενο κρύσταλλο, εμφανίστηκαν επίσης διπλά.

Εάν ένας κρύσταλλος ασβεστίτη τοποθετηθεί πάνω σε ένα κομμάτι χαρτού στο οποίο υπάρχει μια μικρή οπή που φωτίζεται από κάτω, ανακαλύπτουμε ότι η ακτίνα του φωτός που διέρχεται μέσα από την οπή διαχωρίζεται σε δύο ακτίνες. Η μια διαδίδεται κάθετα προς την επιφάνεια του κρυστάλλου, χωρίς να διαθλάται, και ονομάζεται *τακτική ακτίνα*. Η *έκτακτη ακτίνα* εκτρέπεται κατά τη διέλευσή της μέσω του κρυστάλλου, όταν όμως εξέλθει από αυτόν, ακολουθεί την ίδια κατεύθυνση όπως και η πρώτη. Οι ιδιότητες της *έκτακτης ακτίνας* εξαρτώνται από τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός μέσα στον κρύσταλλο. Στη φυσική, η εξάρτηση της συμπεριφοράς της ακτίνας από τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός ονομάζεται «*ανισοτροπία*». Η μελέτη με τη βοήθεια πολωτών των ακτίνων που διήλθαν μέσα από κρύσταλλο ασβε-

στίτη έδειξε ότι και οι δύο ακτίνες ήταν γραμμικά πολωμένες σε αμοιβαία κάθετα επίπεδα.

Ο Bartholin προσδιόρισε το δείκτη διάθλασης για την τακτική ακτίνα, αλλά δεν κατόρθωσε να ανακαλύψει τους νόμους που διέπουν τη συμπεριφορά της έκτακτης ακτίνας. Δημοσίευσε τα αποτελέσματα των μελετών του στη Λειψία, στην Κοπεγχάγη και το Λονδίνο. Μολαταύτα, η ανακάλυψη του Bartholin δεν συνάντησε την αποδοχή της επιστημονικής κοινότητας. Η Βασιλική Εταιρεία του Λονδίνου συνέστησε μιαν επιτροπή για να ελέγξει το έργο του Bartholin. Παρ' ότι η επιτροπή περιελάμβανε ως μέλη εξέχουσες μορφές, όπως ο Neύτων, ο Hooke και ο Boyle, έκρινε την ανακάλυψη παραπλανητική και τους αντίστοιχους νόμους εσφαλμένους.

Οι εργασίες του Bartholin περιέπεσαν σε λήθη, και μόνον είκοσι χρόνια αργότερα, ο διάσημος ολλανδός φυσικός Christiaan Huygens (1629-1695) επιβεβαίωσε την ορθότητα των ανακαλύψεων του Bartholin και παρατήρησε τη διπλή διάθλαση σε κρυστάλλους χαλαζία. Στην πραγματεία του *Περί φωτός*, εξήγησε το φαινόμενο της διπλής διάθλασης στους κρυστάλλους ασβεστίτη βάσει της κυματικής θεωρίας του για το φως.

Το 1801, ο γάλλος κρυσταλλογράφος και ορυκτολόγος René Just Hauey (1743-1822) περιέλαβε στο έργο του *Μαθήματα ορυκτολογίας* έναν καταλόγο διπλοθλαστικών κρυστάλλων. Καθόριζε κατά πόσον ένας κρύσταλλος πρέπει να θεωρείται διπλοθλαστικός κοιτώντας μια λεπτή βελόνα μέσα από τις έδρες του κρυστάλλου. Όταν η διπλή διάθλαση ήταν έντονη, η βελόνα φαινόταν διπλή. Πρώτος ο Hauey ταξινόμησε τους κρυστάλλους με κριτήριο τη διπλοθλαστικότητα. Τόνισε ότι οι μη διπλοθλαστικοί κρύσταλλοι είναι ουσίες των οποίων «τα μόρια χαρακτηρίζονται από υψηλό βαθμό συμμετρίας», πράγμα που σημαίνει κρυστάλλους με τη μορφή κύβου, οκταέδρου, κ.ο.κ.

Ο Neύτων προσπάθησε να εξηγήσει την υπέροχη ιδιότητα της διπλής διάθλασης που επεδείκνυε ο ισλανδικός κρύσταλλος αποδίδοντάς τη στην ιδιάζουσα διάταξη των σωματιδίων σ' αυτόν. Έγραφε: « Όλα τα σωματίδια

του ισλανδικού κρυστάλλου επιδρούν στις ακτίνες κατά την ίδια κατεύθυνση, προκαλώντας έτοι μια παράδοξη μορφή διάθλασης. Συνεπώς, δεν μπορεί άραγε να υποτεθεί ότι κατά το σχηματισμό αυτού του κρυστάλλου τα σωματίδια που τον απαρτίζουν όχι μόνο διατάχτηκαν σε γραμμές και στήλες αλλά και ότι έστρεψαν τις ταυτόσημες πλευρές τους στην ίδια κατεύθυνση λόγω κάποιας ικανότητας πόλωσης;»

Ο Huygens επίσης συνέδεσε το φαινόμενο της διπλής διάθλασης με την κανονική δομή των κρυστάλλων: «Φαίνεται ότι η κανονικότητα που παρουσιάζουν αυτά τα φυσικά αριστουργήματα, οι κρύσταλλοι, απορρέει από τη διάταξη των ελάχιστων, αόρατων και ταυτόσημων συστατικών τους σωματιδίων. Ο ισλανδικός κρύσταλλος αποτελείται από μικρά στρόγγυλα σωματίδια, τα οποία είναι σφαιροειδή: επειδή είναι κάπως πεπλατυμένα, διαφέρουν από τις τέλειες σφαίρες.»

Τη θεωρία της διάδοσης του φωτός στους κρυστάλλους την επεξεργάστηκε περαιτέρω ο γάλλος φυσικός Augustin-Jean Fresnel (1788-1827). Αυτός έδειξε ότι μέσα στους κρυστάλλους διαδίδονται εν γένει δύο κύματα, τα οποία είναι πολωμένα σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα. Πρότεινε μια ταξινόμηση των κρυστάλλων βασισμένη στον τύπο των οπτικών επιφανειών (επιφάνεια του κυματικού διανύσματος και επιφάνεια της ακτίνας) και εξέτασε τα προβλήματα της κυκλικής και ελλειπτικής πόλωσης, καθώς και της στροφής του επιπέδου πόλωσης. Επομήμανε επίσης τη δυνατότητα κωνικής διάθλασης και ανακάλυψε τους ποσοτικούς νόμους της διάθλασης και της ανάκλασης του φωτός, οι οποίοι επιτρέπουν τον καθορισμό της έντασης και της πόλωσης του φωτός μετά την ανάκλαση και τη διάθλαση.

Ποια είναι η σύγχρονη άποψη για τη φύση της διπλής διάθλασης; Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (δηλαδή το φως) επιφέρουν μετατόπιση των ηλεκτρονικών φλοιών σε σχέση με τους ατομικούς πυρήνες του κρυστάλλου. Εππλέον, τα ιόντα μετατοπίζονται το

Συνέχεια στη σελίδα 72 ⇨

Ταχύτερα από το φως;

Επειδή σκεπτόμαστε, νομίζουμε πως το σύμπαν φτιάχτηκε για μας.

Σκέπτεται όμως το σύμπαν; Κι αν ναι, τι; Εμάς;

—May Swanson

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

BΑΛΕ ΜΑΣ ΣΕ ΜΕΓΙΣΤΗ ΣΤΡΕΒΛΩΣΗ! διατάζει ο πλοίαρχος Jean-Luc Picard, και το αστρόπλοιο Enterprise αρχίζει Enterprise αρχίζει να ταξιδεύει ταχύτερα από το φως για να αποφύγει ανεπιθύμητες εμπλοκές. Στρέβλωση 9,6 αντιπροσωπεύει τη μέγιστη ασφαλή ταχύτητα για το Enterprise —ισοδυναμεί με ταχύτητα 1.909 φορές μεγαλύτερη από εκείνη του φωτός. Αφού πλέον βρεθεί εκτός κινδύνου, ο πλοίαρχος Picard χρησιμοποιεί ένα υποδιαστηματικό σήμα για να συμμετάσχει, μέσω βίντεο, σε μια σύσκεψη που διεξάγεται στη Γη, παρ' ότι το Enterprise απέχει χιλιάδες έτη φωτός από αυτή.

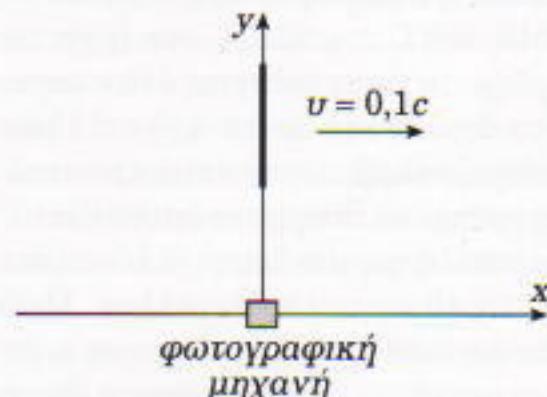
Αν και τέτοια ταξίδια με υπερφυτεινές ταχύτητες αποτελούν κοινοποιίες σε έργα επιστημονικής φαντασίας όπως το Star Trek, η συνηθισμένη ύλη στον συνηθισμένο κόσμο μας οφείλει να συμμορφώνεται με τους νόμους της φυσικής. Η ταχύτητα του φωτός αποτελεί το όριο των ταχυτήτων στο σύμπαν. Μόνο τα σωματίδια μηδενικής μάζας, όπως τα φωτόνια, μπορούν να ταξιδέψουν με την ταχύτητα του φωτός· τα σωματίδια που διαθέτουν μάζα —όπως εκείνα που απαρτίζουν το αστρόπλοιο Enterprise— οφείλουν να περιορίζονται σε χαμηλότερες ταχύτητες.

Γι' αυτό, λοιπόν, όποτε παρατηρήθει κάποιο αντικείμενο που φαίνεται να κινείται ταχύτερα από το φως, ο επιστημονικός κόσμος αντιμετωπίζει το γεγονός με έκπληξη. Τέτοιες παρατηρήσεις έχουν όντως γίνει στην αστρονομία, και σ' αυτές εστιάζεται το πρόβλημά μας στο παρόν τεύχος.

Πρώτα, όμως, θα πρέπει να κάνουμε μια παρέκβαση, για να μιλήσουμε

λεπτή ράβδο καθώς μας προσπερνά, κινούμενη με «σχετικιστική» ταχύτητα.

Ας θεωρήσουμε ότι η φωτογραφική μηχανή έχει τοποθετηθεί στην αρχή ενός δισορθογώνιου συστήματος αξόνων και σκοπεύει στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα των y . Η λεπτή ράβδος έχει μήκος 3 m και τα άκρα της κείνται αντίστοιχα στις ευθείες $y = 3$ m και $y = 6$ m, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1. Η ράβδος κινείται στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα των x με ταχύτητα $0,1c$. Ας θεωρήσουμε το φως που ανακλάται και από τα δύο άκρα της ράβδου ακριβώς όταν περνά τον άξονα των y . Έτσι, το φως που ανακλάται από το πλησιέστερο άκρο χρειάζεται 10 ns για να φτάσει στη μηχανή και να επιδράσει στο φίλμ. Άλλα το φως που ανακλάται από το απότερο άκρο χρειάζεται 20 ns για να φτάσει στη φωτογραφική μηχανή, οπότε προσπίπτει στον κλειστό πλέον φωτοφράκτη. Επομένως συμπεραίνουμε ότι το προερχόμενο από το απότερο άκρο φως που εισχωρεί στη φωτογραφική μηχανή πρέπει να έχει ανακλαστεί νωρίτερα, έτσι ώστε να προλαβαίνει να διανύει την επιπλέον απόσταση από τη φωτογραφική μηχανή. Με άλλα λόγια, το φως από το απότερο άκρο για να φτάσει στη μηχανή ταυτόχρο-



Σχήμα 1

για τη φωτογράφηση υψηλής ταχύτητας. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια φωτογραφική μηχανή με πολύ υψηλή ταχύτητα φωτοφράκτη —ας πούμε, ένα ελάχιστο κλάσμα του νανοδευτερολέπτου. (Τέτοιες φωτογραφικές μηχανές, μαζί με κάθε λογής αβαρείς τροχαλίες και απόλυτα λείες επιφάνειες, διατίθενται μόνο σε καταστήματα που εμπορεύονται όργανα φυσικής.) Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ότι θέλουμε να φωτογραφίσουμε μια



να με το φως που ανακλάται από το πλησιέστερο άκρο πρέπει να έχει εκπεμφθεί λίγο περισσότερο από 10 ns νωρίτερα.

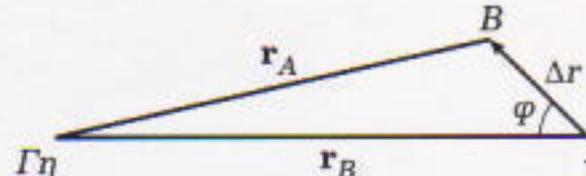
Αυτό σημαίνει ότι η φωτογραφική μηχανή καταγράφει το πλησιέστερο άκρο στη θέση $x = 0$ αλλά το απότερο άκρο στη θέση $x = -0,3$ m. Επομένως, η φωτογραφική μηχανή δεν «βλέπει» τη ράβδο να κείται κατά μήκος του άξονα y αλλά περιεστραμμένη κατά γωνία $5,7^\circ$. Ποιος λέει ότι οι φωτογραφικές μηχανές δεν ψεύδονται;

Το πρόβλημα του διαγωνισμού μας βασίζεται σε ένα από τα τρία θεωρητικά προβλήματα που ετέθησαν στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής που διεξήχθη στο Ρέυκιαφικ, την πρωτεύουσα της Ισλανδίας, από 2 έως 20 Ιουλίου 1998. Ένας από τους συγγραφείς του παρόντος άρθρου (ο LDK) ευτύχησε να συνεργαστεί με την ισλανδική εξεταστική επιτροπή και βρήκε τα προβλήματα πρωτότυπα και εξαιρετικά ενδιαφέροντα.

Α. Το 1994, παρατηρήθηκε εκπομπή αναβλημάτων σε αντίθετες κατευθύνσεις από το αστρικό αντικείμενο GRS1915+105. Όπως ανέφεραν οι I.F. Mirabel και L.F. Rodriguez στο περιοδικό *Nature* (τόμ. 371, σ. 46), τα αναβλήματα πιθανώς παρήχθησαν από αστέρα νετρονίων ή από μαύρη τρύπα, με μια διαδικασία ανάλογη εκείνων που σημειώνονται στους κβάζαρ, αλλά σε μικρότερη κλίμακα. Οι δύο επιστήμονες ονομάζουν το αντικείμενο αυτό μικροκβάζαρ.

Προσαρμογές δεδομένων από παρατηρήσεις που κάλυψαν περίοδο 34 ημερών έδειξαν ότι τα αναβλήματα εγκατέλειψαν τον μικροκβάζαρ με γωνιακές ταχύτητες $\omega_1 = 17,6$ χιλιοστά του δευτερολέπτου της μοίρας ανά ημέρα και $\omega_2 = 9,0$ χιλιοστά του δευτερολέπτου της μοίρας ανά ημέρα. Εάν ο μικροκβάζαρ βρίσκεται σε απόσταση $R = 3,86 \cdot 10^{20}$ m από τη Γη, ποιες είναι οι συνιστώσες των ταχυτήτων των δύο αναβλημάτων κάθετα στην ακτίνα όρασης (οι εγκάρσιες ταχύτητες);

Β. Πιθανώς θα εκπλαγείτε ανακαλύπτοντας ότι η συνιστώσα μιας από αυτές τις ταχύτητες υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός. Για να αντιληφθείτε πώς προκύπτει αυτό, κάντε τον ακόλουθο υπολογισμό. Υποθέστε



Σχήμα 2

ότι ένα αντικείμενο κινείται με ταχύτητα $u = \beta c$ σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\phi < 90^\circ$ με την ακτίνα όρασης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Συμβολίστε την αρχική του θέση με \mathbf{r}_A και την τελική με \mathbf{r}_B . Σε χρονικό διάστημα Δt το αντικείμενο διανύει απόσταση Δr . Ποιο είναι το χρονικό διάστημα Δt_0 που μεσολαβεί ανάμεσα στην άφιξη του σήματος από τη θέση A και την άφιξη του σήματος από τη θέση B όπως το καταγράφουν οι παρατηρητές στη Γη;

Γ. Ποια είναι η παρατηρούμενη εγκάρσια ταχύτητα αυτής της κίνησης συναρτήσει των β , R και ϕ .

Δ. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της β για την οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε εγκάρσια ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός για κάποια τιμή της γωνίας ϕ ; Ποια γωνία αντιστοιχεί σ' αυτή την ελάχιστη β ;

Ε. Σχεδιάστε το γράφημα της β συναρτήσει της ϕ επισημαίνοντας την περιοχή όπου μπορεί να παρατηρηθούν υπερφωτεινές φαινόμενες εγκάρσιες ταχύτητες.

Γνώση «ΕΙΣ ΒÁΘΟΣ»

Αν κρίνουμε από το πλήθος των απαντητικών επιστολών που λάβαμε, το πρόβλημα του τεύχους Ιουλίου / Αυγούστου 1998 με τον τίτλο «Γνώση «εις βάθος»» είχε εξαιρετική απήχηση.

Το πρώτο ερώτημα ζητούσε από τους αναγνώστες να υπολογίσουν το βάθος ενός πηγαδιού, δεδομένου ότι από τη στιγμή που ρίχνεται μια πέτρα σ' αυτό έως ότου ακουστεί η πρόσκρουσή της στον πυθμένα του παρέρχονται 3 s.

Ο ολικός χρόνος ώσπου να ακουστεί ο ίχος ισούται με το χρόνο που διήρκεσε η πτώση της πέτρας συν το χρόνο που απαιτήθηκε για να ανέβει ο ίχος ως τα αυτιά μας:

$$T = t_1 + t_2,$$

όπου

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

και

$$t_2 = \frac{h}{u}.$$

Δεδομένου ότι γνωρίζουμε τον ολικό χρόνο $T = 3$ s, την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9,8$ m/s² και την ταχύτητα του ήχου $u = 340$ m/s, μπορούμε να λύσουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς h . Το βάθος του πηγαδιού που ικανοποιεί τη συγκεκριμένη εξίσωση είναι 40,75 m.

Στο δεύτερο ερώτημα του προβλήματος λαμβάνεται υπόψη ότι στην πέτρα δρα και η αντίσταση του αέρα, η οποία θεωρείται ανάλογη με την ταχύτητά της:

$$mg - ku = m \frac{du}{dt},$$

$$\int \frac{dt}{m} = \int \frac{du}{mg - ku}.$$

Ας εισαγάγουμε τη μεταβλητή $u = mg - ku$. Τότε παίρνουμε

$$\int \frac{-k}{m} dt = \int \frac{du}{u},$$

$$\frac{-k}{m} t = \ln \frac{u}{u_0},$$

$$e^{\frac{-kt}{m}} = \frac{mg - ku}{mg},$$

$$u = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{\frac{-kt}{m}} \right).$$

Για να προσδιορίσουμε το βάθος του πηγαδιού, με την παρουσία της αντίστασης του αέρα, πρέπει να εξαγάγουμε έναν τύπο για την απόσταση την οποία διανύει η πέτρα:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{\frac{-kt}{m}} \right),$$

$$\int dx = \int \frac{mg}{k} \left(1 - e^{\frac{-kt}{m}} \right) dt,$$

$$x = \frac{mgt}{k} + \frac{m^2 g}{k^2} e^{\frac{-kt}{m}} - C.$$

Συνέχεια στη σελίδα 46 ⇨

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο

«Καταβεβλημένος από τα Φαινόμενα που προκαλούσα, άναψα το κερί μου, και έγραψα — για σχήματα, ακόμη και με ανοιχτά μάτια, για τετράγωνα — και για ποικίλα χρώματα και δεν ξέρω για τι άλλο.»

—S.T. Coleridge

Mark Saul και Titu Andreescu

AΣ ΣΥΖΗΤΗΣΟΥΜΕ ΠΡΩΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Εδώ κρύβεται μια παιδαγωγική παγίδα στην οποία πέφτουν συχνά οι πρωτόπειροι καθηγητές. Το λάθος αυτό μπορεί να μας διδάξει μερικά πράγματα.

Πρόβλημα: Βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 13 και γινόμενο 30. Γίνονται δεκτές μόνο αλγεβρικές λύσεις.

Πολλοί θα δουν αμέσως ότι η απάντηση είναι 10 και 3. Όμως, ο άτυχός μας αρχάριος θα επιμείνει στην αλγεβρική λύση και θα ξεκινήσει ως εξής: Έστω x και y οι δύο ζητούμενοι αριθμοί. Τότε, $x + y = 13$ και $xy = 30$. Από την πρώτη εξισώση βρίσκουμε $y = 13 - x$, και αν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή στη δεύτερη εξισώση, παίρνουμε $x(13 - x) = 30$, ή, μετά τις πράξεις, $x^2 - 13x + 30 = 0$. Πρέπει τώρα να λύσουμε αυτή τη δευτεροβάθμια εξισώση.

Διαλέγουμε (λέει ο δυστυχής πρωτάρης) την τεχνική της παραγοντοποίησης. Πώς παραγοντοποιούμε ένα τέτοιο τριώνυμο; Πρέπει να το εκφράσουμε στη μορφή $(x - a)(x - b)$ — δηλαδή, πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς a και b που έχουν άθροισμα 13 και γινόμενο 30. Επιστρέψαμε στο αρχικό μας πρόβλημα!

Στην αρχή μαθαίνουμε να λύνουμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις με παραγοντοποίηση και συχνά απολαμβάνουμε την επιδειξιότητά μας στην παραγοντοποίηση των τριώνυμων. Όμως, όταν παραγοντοποιούμε δεν κάνουμε τίποτε άλλο από το να μαντεύουμε, και αυτό δεν μπορεί να μας βοηθήσει αν οι ρίζες είναι άρρητοι, μιγαδικοί, ή ακόμη και πολύ μεγάλοι ακέραιοι. Αυτός είναι ο λόγος που αναπτύχθηκαν δύο περισσότερο τυποποιημένες τεχνικές επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων: η συμπλήρωση του τετραγώνου και η χρήση του τύπου του τριωνύμου.

Η συμπλήρωση του τετραγώνου είναι μια ισχυρή τε-

χνική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση οποιασδήποτε δευτεροβάθμιας εξισώσης με πραγματικούς συντελεστές. Είναι αλγορίθμική: γνωρίζουμε πάντα τι πρέπει να κάνουμε στη συνέχεια και η μέθοδος έπειτα από πεπερασμένο πλήθος βημάτων καταλήγει πάντοτε σε απότελεσμα. Πράγματι, μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή τύπου που κατανοεί ακόμη και ένας υπολογιστής.

Επίσης, ο αλγόριθμος αυτός γενικεύεται προς διάφορες κατευθύνσεις. Τα επόμενα προβλήματα είναι τυπικά.

Πρόβλημα 1. Αν x είναι πραγματικός αριθμός, βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του $x^2 - 8x + 21$.

Λύση. Ας αγνοήσουμε τον σταθερό όρο και ας συμπληρώσουμε το τετράγωνο. Πρέπει να προσθέσουμε το 16 στο $x^2 - 8x$. Έχουμε, λοιπόν,

$$x^2 - 8x + 21 = x^2 - 8x + 16 + 5 = (x - 4)^2 + 5.$$

Αφού το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός, η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι 5, και επιτυγχάνεται όταν $x = 4$.

Πρόβλημα 2. Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 17.$$

Σημειώνουμε ότι μία λύση στην οποία χρησιμοποιούμε απειροστικό λογισμό δεν μπορεί να γίνει από μαθητή δευτέρας τάξης λυκείου.

Πρόβλημα 3. Βρείτε το κέντρο της έλλειψης που έχει εξισωση

$$4x^2 + 6y^2 - 24x + 12y = 20.$$

Πρόβλημα 4. (Το πρόβλημα αυτό βρίσκεται λίγο πο

μπροστά από την εποχή του!) Βρείτε τον μικρότερο πραγματικό αριθμό r για τον οποίο

$$x^2 + y^2 + 19x + 99y + r \geq 0,$$

για κάθε πραγματικό x και y .

Πρόβλημα 5. Υπάρχουν «1-1» συναρτήσεις $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοιες ώστε $f(x^2) - f^2(x) \geq 1/4$, για κάθε (πραγματικό) x . (Εδώ συμβολίζουμε με $f^2(x)$ το $[f(x)]^2$.)

Πρόβλημα 6. Έστω a, b, c τρεις πραγματικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $a - b^2, b - c^2, c - a^2$ είναι μικρότερος ή ίσος του $1/4$.

Μερικές φορές ανακαλύπτουμε ότι τα τετράγωνα του προβλήματός μας είναι ήδη συμπληρωμένα και αρκεί απλώς να τα αναγνωρίσουμε.

Πρόβλημα 7. Βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών, για τις οποίες

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(y - 1) \\ y^2 &= 4(z - 1) \\ z^2 &= 4(x - 1). \end{aligned}$$

Λύση. Αν προσθέσουμε κατά μέλη, βρίσκουμε έπειτα από πράξεις ότι

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = 0.$$

Αν προσπαθήσουμε να συμπληρώσουμε τα τετράγωνα, ανακαλύπτουμε γρήγορα ότι είναι ήδη συμπληρωμένα(!), και έχουμε

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0.$$

Επομένως, η μοναδική δυνατή λύση είναι η $(2, 2, 2)$.

Μερικές φορές μπορούμε να «συμπληρώσουμε το τετράγωνο» αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε έναν μεσαίο και όχι σταθερό όρο στην παράσταση.

Πρόβλημα 8. Παραγοντοποιήστε το $x^4 + 4$ στο σύνολο των ακεραίων.

Λύση. Με πρώτη ματιά αυτό μοιάζει αδύνατο: Το δεδομένο πολυώνυμο είναι άθροισμα δύο τετραγώνων — παράσταση που συνήθως δεν παραγοντοποιείται. Όμως, η τέταρτη δύναμη του πρώτου όρου μάς επιτρέπει να «συμπληρώσουμε το τετράγωνο» ως εξής:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2.$$

Η παράσταση πλέον παραγοντοποιείται ως διαφορά τετραγώνων. Απάντηση:

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Πρόβλημα 9. Παραγοντοποιήστε το $4a^4 + b^4$ (στο σύνολο των ακεραίων).

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $4^n + n^4$ είναι σύνθετος για κάθε ακέραιο $n > 1$.

Πρόβλημα 11. Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς a, b , ισχύει

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2.$$

Πρόβλημα 12. Αποδείξτε ότι

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Λύση. Θα ήταν ωραία αν η ανισότητά μας περιείχε εκτός των $a^2 + b^2 + c^2$ και το $2ab + 2ac + 2bc$. Τότε θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε όπως στο Πρόβλημα 11. Ας δοκιμάσουμε, λοιπόν, να πολλαπλασιάσουμε την ανισότητα επί 2. Παίρνουμε

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0,$$

ή

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0,$$

που είναι, προφανώς, αληθές.

Πρόβλημα 13. Αποδείξτε ότι

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq \frac{3}{4}(a - b)^2.$$

Πρόβλημα 14. Αποδείξτε ότι

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2.$$

Πρόβλημα 15. Έστω n τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί a_1, a_2, \dots, a_n . Αποδείξτε ότι

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Πρόβλημα 16. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz,$$

όπου τα x, y, z είναι πραγματικοί αριθμοί. Πότε επιτυγχάνεται αυτό το ελάχιστο;

Λύση I. Η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου για τέσσερις μεταβλητές μας δίνει ότι

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}.$$

Αν θέσουμε $a = x^4, b = y^4, c = z^4, d = 1$, παίρνουμε

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 4xyz,$$

ή

$$x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz \geq -1,$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $x^4 = y^4 = z^4 = 1$ και $xyz \geq 0$, απ' όπου συνεπάγεται ότι $(x, y, z) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$, ή $(-1, -1, 1)$.

Λύση II. Μπορείτε να καταλήξετε στο ίδιο αποτέλεσμα συμπληρώνοντας το τετράγωνο;

Πρόβλημα 17. Έστω a_1, a_2, \dots, a_n πραγματικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \sqrt{a_1 - 1^2} + 2\sqrt{a_2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{a_n - n^2}$$

Παραγοντοποίηση

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο εναλλακτικές λύσεις για τα Προβλήματα 15 και 16 του άρθρου «Η συμμετρία στην άλγεβρα — μέρος τρίτο», που παρουσιάστηκε στο τεύχος Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1998 του *Quantum*. Τις οφειλουμε στον Richard Askey από το Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν.

Πρόβλημα 15. Έστω m και n δύο περιττοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\frac{1}{a^m + b^m + c^m} = \frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}$$

αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ισότητα αλλά με το να αντικαταστήσουμε το m με το n .

Απόδειξη. Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές, η δεδομένη σχέση γίνεται

$$c^{2m}(a^m + b^m) + c^m(a^m + b^m)^2 + a^m b^m(a^m + b^m) = 0,$$

ή

$$(c^m + a^m)(c^m + b^m)(a^m + b^m) = 0.$$

Η σχέση αυτή ισχύει αν και μόνο αν δύο από τους αριθμούς a , b , c είναι αντίθετοι μεταξύ τους.

Πρόβλημα 16. Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Αν $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, τότε $f(x, x, x) = 0$. Αυτό

μάς οδηγεί να «παρέλξουμε» την τιμή του x και να θεωρήσουμε το

$$\begin{aligned} f(x, x + r, x + s) &= x^3 + x^3 + 3x^2r + 3xr^2 + r^3 \\ &\quad + x^3 + 3x^2s + 3xs^2 + s^3 - 3x(x^2 + rx + sx + rs) \\ &= 3x(r^2 - rs + s^2) + r^3 + s^3 = (3x + r + s)(r^2 - rs + s^2) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

Η τελευταία παράσταση μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε πρωτοβάθμιους παράγοντες με τη βοήθεια του τύπου του τριωνύμου. Παίρνουμε τελικά

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z),$$

όπου $\omega^3 = 1$ και $\omega \neq 1$. Η γενική τριτοβάθμια εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$t^3 + 3bt^2 + ct + d = 0.$$

Αν $x = t + b$, τότε το x ικανοποιεί την

$$x^3 + px + q = 0$$

όπου p, q σταθερές. Αν

$$p = -3yz,$$

$$q = y^3 + z^3,$$

τότε το y μπορεί να βρεθεί λύνοντας μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς y^3 και έτσι η παραγοντοποίηση του $f(x, y, z)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων μάς δίνει τη λύση της γενικής τριτοβάθμιας εξίσωσης. \square



Η επόμενη κίνηση είναι δική σας

Γιατί κάμπτεται ένα καμένο σπίρτο;

Μορφές που αναδύονται μέσα από τις φλόγες

V. Mil'man

TΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΜΕ ΣΠΙΡΤΑ ΜΠΟΡΕΙ να αποδειχτούν επικίνδυνα. Ωστόσο, ας εκτελέσουμε μερικά απλά και διδακτικά πειράματα με σπίρτα που καίγονται, λαμβάνοντας βεβαίως όλα τα επιβαλλόμενα μέτρα ασφαλείας. Σκοπός μας είναι να παρατηρήσουμε πώς μεταβάλλεται το σχήμα των σπιρτόξυλων.

Πρώτα απ' όλα, για τα πειράματα του παρόντος άρθρου δεν αρκούν οι συνηθισμένες προφυλάξεις, όπως να μαζέψουμε και να δέσουμε πίσω τα μακριά μαλλιά μας ή να απομακρύνουμε το μπουκάλι με το οινόπνευμα, κ.ο.κ. Απαιτούνται πρόσθετα μέτρα: κρατάτε τα σπίρτα με τσιμπδάκι πάνω από μία λεκάνη με νερό, τοποθετημένη πάνω σε ένα μεγάλο φύλλο αλουμινίου. Αφότου ολοκληρώθουν όλες οι προπαρασκευές, είστε έτοιμοι για τα πειράματα.

Πείραμα 1. Κρατήστε οριζόντια ένα σπίρτο που καίγεται. Η φλόγα κινείται κατά μήκος του σπίρτου· ενόσω συμβαίνει αυτό, το απανθρακωμένο τμήμα του σπίρτου κάμπτεται προς τα πάνω. Διαφορετικά σπίρτα παρουσιάζουν διαφορετικούς βαθμούς κάμψης. Μερικά μάλιστα συστρέφονται αφού καούν. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάμπτεται το (απανθρακωμένο) τμήμα του σπίρτου που εν τω μεταξύ έχει ψυχθεί.

Πείραμα 2. Κρατήστε ένα σπίρτο που καίγεται στη φλόγα ενός κεριού ή καμινέτου γκαζιού. Το απανθρακωμένο τμήμα δεν κάμπτεται σχεδόν καθόλου.

Πείραμα 3. Ας παρατηρήσουμε την καύση σπίρτων διαφορετικού πάχους. Τα παχιά σπίρτα συστρέφονται περισσότερο από τα λεπτά, ενώ οι σχίζες ενός σπίρτου συστρέφονται ελάχιστα.

Κοιτάξτε προσεκτικά και πάλι ένα οριζόντιο σπίρτο που καίγεται. Η φλόγα κινείται αργά κατά μήκος του. Το ξύλο στην περιοχή όπου βρίσκεται η φλόγα δεν λυγίζει. Αυτό το μέρος του σπίρτου είναι μαύρο, πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορεί να έχει πολύ υψηλή θερμοκρασία —δεν υπερβαίνει τους 500-600°C. Αμέσως πίσω από τη φλεγόμενη περιοχή υπάρχει μια στενή (≈ 2 mm) κόκκινη ζώνη. Πρόκειται για τη ζώνη μέγιστης θερμοκρασίας ($\approx 700-750$ °C), όπου η καύση μόλις έχει παύσει. Εάν κοιτάξουμε αυτή την περιοχή από τα πλάγια, διαπιστώνουμε ότι το μεν πάνω μέρος της είναι ερυθροπυρωμένο, το δε κάτω μέρος της μαύρο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πάνω μέρος αρχίζει να ψύχεται από υψηλότερη θερμοκρασία, οπότε παραμένει κόκκινο για περισσότερο χρόνο. Η αιτία αυτής της ανομοιόμορφης καύσης είναι τα επαγόμενα ρεύματα μεταφοράς στον περιβάλλοντα αέρα.

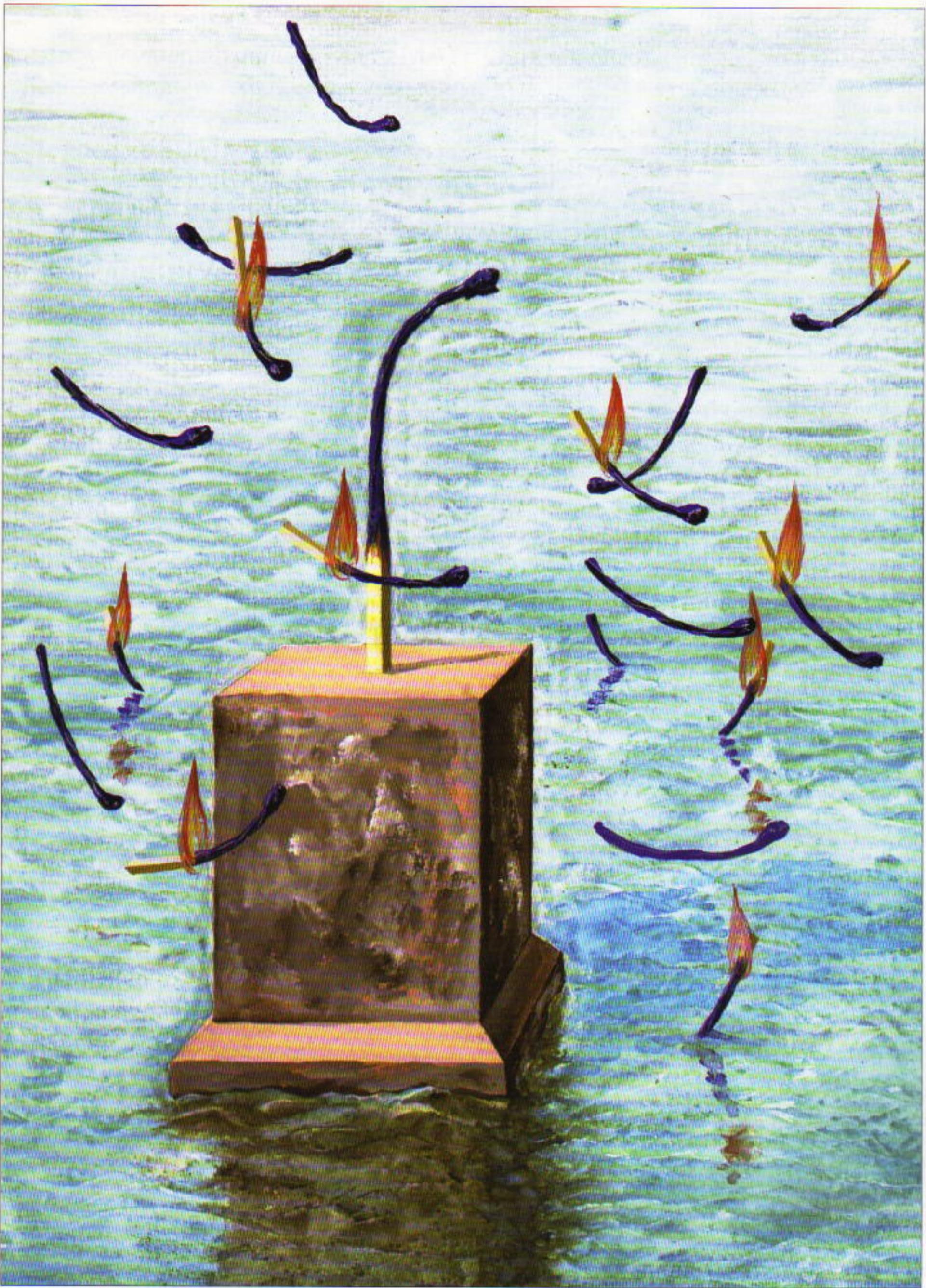
Αποκλείεται άραγε η κάμψη να οφείλεται στη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω μέρος του σπίρτου; Προσέξτε ότι ένα σπίρτο λυγίζει έτσι ώστε να έχει τα κοίλα στραμμένα πάντοτε προς την υψηλότερη θερμοκρασία κατά τη διάδικασία της καύσης. Αυτή η υπόθεση

υποστηρίζεται από τα ακόλουθα πειράματα.

Φυσήξτε προσεκτικά ένα καιγόμενο σπίρτο από πάνω αλλά χωρίς να σβήσετε τη φλόγα. Εξετάστε το απανθρακωμένο τμήμα —είναι σχεδόν ευθύγραμμο. Όταν φυσήξουμε τη φλόγα προς τα κάτω, οι θερμοκρασίες του πάνω και του κάτω μέρους του σπίρτου εξισώνονται, οπότε το σπίρτο δεν κάμπτεται. Αντιθέτως, όταν το καιγόμενο σπίρτο έρχεται σε επαφή από κάτω με κάποιο ψυχρό μεταλλικό αντικείμενο (ας πούμε, ένα καρφί) —μη σβήσετε τη φωτιά με αυτό!—, το σπίρτο κάμπτεται περισσότερο απ' ό,τι συνήθως.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα πειράματα φαίνεται να υποστηρίζουν ποιοτικά την υπόθεσή μας σχετικά με την αιτία της κάμψης του καιγόμενου σπίρτου. Ας προχωρήσουμε τώρα σε ποσοτικές εκτιμήσεις χρησιμοποιώντας το εξής μοντέλο.

Διαιρούμε θεωρητικά το σπίρτο σε δύο οριζόντια μέρη. Κατά την καύση, η θερμοκρασία του πάνω μέρους είναι υψηλότερη από την αντίστοιχη του κάτω μέρους, αλλά τα μήκη των δύο μερών παραμένουν ίσα. Καθώς ψύχεται το καμένο σπίρτο, το πάνω (και περισσότερο θερμό) μέρος του συστέλλεται περισσότερο από το κάτω, επειδή η θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στον αέρα και το πάνω μέρος είναι μεγαλύτερη. Έτσι, το μήκος του πάνω μέρους του ψυχόμενου σπίρτου θα υπολείπεται του μήκους του κάτω μέρους, οπότε το σπίρτο θα



καμπυλώθει έτσι ώστε τα κοίλα του να στρέφονται προς τα πάνω, ή προς την πλευρά όπου αναπτύσσεται κατά την καύση υψηλότερη θερμοκρασία.

Το εν λόγω μοντέλο παρουσιάζει ομοιότητες με το διμεταλλικό έλασμα, το οποίο αποτελείται από δύο μεταλλικά φύλλα με διαφορετικό συντελεστή θερμικής διαστολής. Στηριζόμενοι σ' αυτό το μοντέλο, ας επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στο πάνω και στο κάτω μέρος στην περιοχή της ερυθροπυρωμένης ζώνης.

Έστω ℓ_0 το μήκος του σπίρτου και d το πάχος του. Στους υπολογισμούς μας θα υιοθετήσουμε την προσέγγιση ότι τα συγκεκριμένα μεγέθη διατρούν κατά την καύση σχεδόν σταθερές τις τιμές τους. Ωστόσο, τα μήκη τού πάνω και του κάτω μέρους τού καμένου και λυγισμένου σπίρτου δεν είναι ίσα. Τα μήκη των δύο μερών διαφέρουν κατά

$$\ell_2 - \ell_1 = \ell_0 a \Delta T, \quad (1)$$

όπου με a συμβολίζουμε το συντελεστή γραμμικής διαστολής του ξύλου και με ΔT τη διαφορά των μέγιστων θερμοκρασιών τού πάνω και του κάτω μέρους του σπίρτου. Εφόσον

$$\ell_1 = \beta \left(R - \frac{d}{4} \right)$$

και

$$\ell_2 = \beta \left(R + \frac{d}{4} \right),$$

έχουμε (Σχήμα 1)

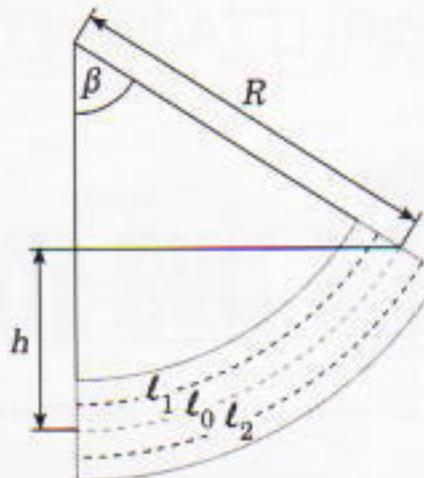
$$\ell_2 - \ell_1 = \frac{\beta d}{2} = \frac{\ell_0 d}{R} \frac{d}{2}. \quad (2)$$

Εάν συγκρίνουμε τις εξισώσεις (1) και (2), καταλήγουμε σε έναν τύπο για την ακτίνα καμπυλότητας R :

$$R = \frac{d}{2a\Delta T}. \quad (3)$$

Η μέτρηση της R παρουσιάζει δυσκολίες, αλλά μπορούμε να την εκφράσουμε συναρτήσει της παραμέτρου h (Σχήμα 1), η οποία εύκολα επιδέχεται μέτρηση:

$$h = R(1 - \sin \beta) = R \left(1 - \sin \frac{\ell_0}{R} \right).$$



Σχήμα 1

Επιτυγχάνουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του δεξιού μέλους της ανωτέρω σχέσης θεωρώντας ότι

$$1 - \sin \beta = \frac{\beta^2}{2}.$$

(Σημείωση: Το σχετικό σφάλμα της συγκεκριμένης προσέγγισης δεν υπερβαίνει το 1% για $\beta < 38^\circ$ και το 10% για $\beta < 60^\circ$.) Συνεπώς,

$$h = \frac{\ell_0^2}{2R}.$$

Εισάγοντας αυτές τις εκφράσεις στην εξίσωση (3), παίρνουμε

$$h = \frac{\ell_0^2 a \Delta T}{d}.$$

Εάν λύσουμε την τελευταία σχέση ως προς ΔT , καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\Delta T = \frac{h d}{\ell_0^2 a}. \quad (4)$$

Έτσι, για να εκτιμήσουμε την τιμή της θερμοκρασιακής διαφοράς ΔT , πρέπει να προσδιορίσουμε πειραματικά το λόγο h/ℓ_0^2 . Από τα αποτέλεσματα των μετρήσεων προκύπτει ότι, με ικανοποιητικό βαθμό ακριβείας, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

$$\frac{h}{\ell_0^2} = \text{σταθ.} \equiv 10^{-2} \text{ mm}^{-1}.$$

Χρησιμοποιώντας τις εύλογες τιμές $a = (5-10) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ και $d = 1 \text{ mm}$, βρίσκουμε, βάσει της εξίσωσης (4), ότι $\Delta T = (100-200)^\circ\text{C}$.

Οι μετρήσεις της ΔT που πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια θερμοζεύγους απέφεραν τα εξής δεδομένα:

$$T_{\text{πάνω}} = (730 \pm 10)^\circ\text{C}, \\ T_{\text{κάτω}} = (650 \pm 10)^\circ\text{C},$$

και

$$\Delta T = (80 \pm 20)^\circ\text{C}.$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η συμφωνία ανάμεσα στη θεωρητική μας εκτίμηση και τα πειραματικά δεδομένα είναι μάλλον ικανοποιητική. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε πως το μοντέλο μας, μολονότι δεν λαμβάνει υπόψη τη χημική φύση της διαδικασίας της καύσης, περιγράφει ορθά το φαινόμενο.

Υπάρχει μεγάλη πθανότητα η παρατήρηση ενός καιγόμενου σπίρτου να σας βοηθήσει να διατυπώσετε κάποια υπόθεση η οποία θα εξηγήσει γιατί το σπίρτο συστρέφεται. Εν τοιαύτη περιπτώσει, επιχειρήστε να ενισχύσετε την υπόθεσή σας με πειραματικά δεδομένα. Να θυμάστε όμως ότι, όταν εκτελείτε τα πειράματά σας, πρέπει να επιδεικνύετε τη δέουσα προσοχή και να λαμβάνετε τα επβαλλόμενα μέτρα ασφαλείας! ◻

⇒ Συνέχεια από σελίδα 40

Εφόσον $x = 0$ όταν $t = 0$, θα έχουμε

$$C = \frac{m^2 g}{k^2}$$

και

$$x(t) = \frac{mgt}{k} + \frac{m^2 g}{k^2} e^{\frac{-kt}{m}} - \frac{m^2 g}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που παρέχει η εκφώνηση, δηλαδή ότι $k = 0,01 \text{ kg/s}$, $m = 0,05 \text{ kg}$, και ότι ο ολικός χρόνος T ώσπου να ακουστεί η πρόσκρουση παραμένει 3 s , μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε το βάθος του πηγαδιού.

Ο ολικός χρόνος ισούται με το χρόνο της πτώσης της πέτρας t_f συν το χρόνο που απαιτήθηκε για την άνοδο του ήχου:

$$T = t_f + \frac{x(t_f)}{v}.$$

Οι αναγνώστες έλυσαν την εξίσωση αυτή γραμμικά, αριθμητικά, μέσω Mathematica, και με πρόγραμμα λογιστικού φύλλου. Στην προκειμένη περίπτωση, το βάθος είναι $34,23 \text{ m}$. ◻

Σφάλματα σε γεωμετρικές αποδείξεις

Μηδεὶς αγεωμέτρητος εἰσίτω: Η λυδία λίθος για τις «μεταμφιεσμένες» λύσεις

S.L. Tabachnikov

ΠΟΛΛΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΕΧΟΥΝ ΚΑΤΑΦέρει να «αποδείξουν» ότι $1 = -1$. Ιδού ένα παράδειγμα τέτοιας απόδειξης:

Έστω $a + b = c$ και $a = b = 1$. Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της ισότητας $a + b = c$ επί $a + b$, προκύπτει ότι $a^2 + 2ab + b^2 = c(a + b)$. Έπειτα από πράξεις η τελευταία ισότητα μας δίνει

$$a^2 + ab - ac = -ab - b^2 + bc,$$

ή

$$a(a + b - c) = -b(a + b - c).$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $a + b - c$, θα καταλήξουμε στην παράλογη ισότητα $a = -b$, ή $1 = -1$.

Έπειτα από λίγες στιγμές αμηχανίας, βλέπουμε αμέσως το σφάλμα αυτής της απόδειξης: Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε διά $a + b - c$, διότι αυτή η παράσταση ισούται με μηδέν. Πολλές παρόμοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν την ίδεα της διάίρεσης με ένα «μεταμφιεσμένο» μηδέν, και σε όλες είναι εύκολο να ανακαλύψουμε το σφάλμα.

Λιγότερο γνωστές είναι κάποιες εσφαλμένες αποδείξεις ψευδών γεωμετρικών προτάσεων. Η αναζήτηση σφαλμάτων σε γεωμετρικές αποδείξεις είναι μια προσπάθεια συχνά δύσκολη αλλά και διδακτική. Το έξοχο βιβλίο του Y.S. Dubnov¹ Λάθη σε γεω-

μετρικές αποδείξεις (Εκδόσεις Nauka, Μόσχα 1969) είναι αφιερωμένο σε τέτοια προβλήματα. Το βιβλίο αυτό, εξαντλημένο εδώ και πολλά χρόνια, περιέχει 15 γεωμετρικές «αποδείξεις» πλήρως αναλυμένες. Σε τούτο το άρθρο θα σχολιάσουμε μία από αυτές. Παρακολουθήστε προσεκτικά το συλλογισμό και προσπαθήστε να βρείτε το σφάλμα.

Θεώρημα. Όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα τρίγω-

νις NP και NQ κάθετες στις ευθείες AB και BC . Αφού το N ανήκει στη διχοτόμο, ισαπέχει από τις ευθείες AB και BC . Επομένως, $|PN| = |QN|$. Αφού το N ανήκει στη μεσοκάθετο, ισαπέχει από τα σημεία A και C . Συνεπώς, $|AN| = |CN|$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ANP και CNQ είναι ίσα διότι έχουν αντίστοιχα ίσες τις υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά. Άρα, $\angle NAP = \angle NCQ$. Επιπλέον, το τρίγωνο ANC είναι ισοσκελές. Άρα, $\angle NAM = \angle NCM$. Αν προσθέσουμε τις ίσες γωνίες, βρίσκουμε ότι $\angle PAM = \angle QCM$. Επομένως, $\angle BAM = \angle BCM$, και το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

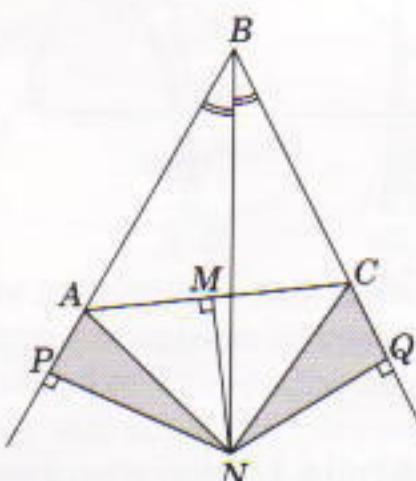
Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Ωστόσο, μπορεί να έχετε μερικές αντιρρήσεις. Ιδού μερικές πιθανές ενοτάσεις, και οι προσπάθειες να απαντήσουμε σε αυτές.

Ενσταση 1. Πώς μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι τέμνονται η διχοτόμος και η μεσοκάθετος; Θα μπορούσε να είναι παράλληλες.

Απάντηση. Αν η διχοτόμος είναι παράλληλη στη μεσοκάθετο, τότε πρέπει να είναι κάθετη στη βάση του τριγώνου. Επομένως, είναι και ύψος του τριγώνου ABC . Άρα, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Οπως βλέπετε, το συμπέρασμα ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές εξακολουθεί να ισχύει!

Ενσταση 2. Η διχοτόμος θα μπορούσε να συμπίπτει με τη μεσοκάθετο.

Απάντηση. Έχω δύο απαντήσεις



Σχήμα 1

νο ABC (Σχήμα 1). Σχεδιάζουμε τη διχοτόμο της γωνίας B και τη μεσοκάθετο της βάσης AC . Στη συνέχεια, θα καλούμε αυτά τα τμήματα απλώς διχοτόμο και μεσοκάθετο. Ονομάζουμε N το σημείο της τομής τους. Φέρουμε

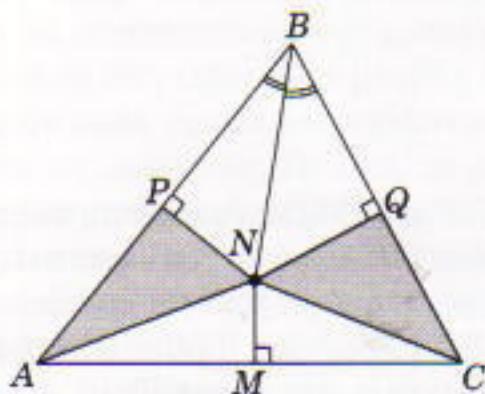
της που δίδαξε επί πολλά έτη στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας. Έδωσε επίσης διαλέξεις για μαθητές του λυκείου, οι οποίες αποτέλεσαν τη βάση για αυτό το βιβλίο.

1. Ο Yakov Semenovich Dubnov (1887-1957) ήταν διάσημος γεωμετρης και καθηγητής

σε αυτή την ένσταση. Πρώτον, αν σχύει, η διχοτόμος συμπίπτει και με το ύψος, και το τρίγωνο είναι, πάλι, ισοσκελές. Δεύτερον, αν η διχοτόμος συμπίπτει με τη μεσοκάθετο, μπορούμε να επιλέξουμε ως N οποιοδήποτε σημείο της διχοτόμου και να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο την απόδειξη.

Ένσταση 3. Και αν το σημείο τομής της διχοτόμου και της μεσοκάθετου ανήκει στη βάση AC —δηλαδή, αν $N = M$;

Απάντηση. Σε αυτή την περίπτωση, η διχοτόμος συμπίπτει με τη διά-



Σχήμα 2

μεσο BM . Αυτό, και πάλι, συνεπάγεται ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

Ένσταση 4. Δεν έχουμε εξετάσει την περίπτωση που η διχοτόμος τέμνει τη μεσοκάθετο στο εσωτερικό του τριγώνου ABC .

Απάντηση. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Σκεπτόμενοι όπως και στην κύρια απόδειξη (Σχήμα 1), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $|AN| = |NC|$ και $|NP| = |NQ|$. Συνεπώς, το τρίγωνο APN είναι ίσο με το τρίγωνο CQN . Άρα, $\angle NAP = \angle NQC$. Επιπλέον, το τρίγωνο ANC είναι ισοσκελές, και συνεπώς $\angle NAM = \angle NCM$. Αν προσθέσουμε τις ίσες γωνίες, βρίσκουμε ότι $\angle BAC = \angle BCA$. Επομένως, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

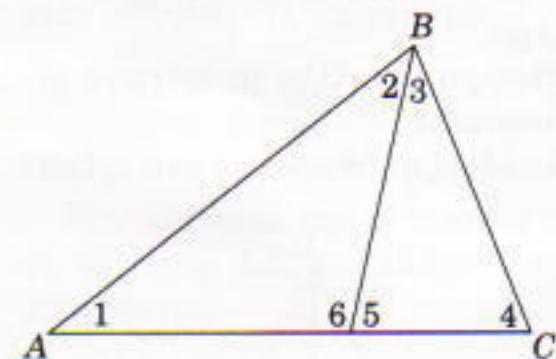
Επίσης, έχω ένα ακόμη αντεπιχείρημα: Η περίπτωση του Σχήματος 2 είναι αδύνατη διότι η διχοτόμος ενός τριγώνου βρίσκεται πάντοτε μεταξύ της ανίστοιχης διαμέσου και του ύψους.

Άρα, αυτές οι τέσσερις ένστασεις είναι άκυρες. Προτείνω στους αναγνώστες να σταματήσουν την ανάγνωση του άρθρου εδώ και να προ-

σπαθήσουν να ανακαλύψουν μια αποφασιστική ένσταση εναντίον της «απόδειξης» που παρουσιάσαμε. Αν χρειαστείτε βοήθεια, ανατρέξτε στις σελίδες των «Απαντήσεων».

Σχηματικές αποδείξεις

Τώρα πλέον θα αντιμετωπίζετε τα σχήματα με μεγαλύτερη καχυποφία. Κάποιοι αναγνώστες μπορεί να προχωρήσουν περισσότερο και να αναζητήσουν αυστηρές αποδείξεις που δεν χρησιμοποιούν σχήματα για να αποκλείσουν την πιθανότητα λάθους. Συνήθως, οι επαγγελματίες μαθηματικοί είναι συνήθως ικανοποιημένοι όταν γνωρίζουν ότι υπάρχει η δυνατότητα οι αποδείξεις τους να γίνουν τυπικές. Όμως, συχνά χρησιμοποιούν διάφορες γραφικές παραστάσεις. Αυτό εξηγείται, διότι οι τυπικές αποδείξεις είναι πολύ εκτενέστερες και δυσκολότερες στην επινόηση και κατανόησή τους.² Έτσι, δεν είναι λογικό να καταργήσουμε τα σχήματα κατά τη λύση των γεωμετρικών θεωρημάτων —πρέπει, όμως, να ξέρουμε πώς να τα χρησιμοποιούμε σωστά.



Σχήμα 3

Καλούμε τους αναγνώστες να ανακαλύψουν τα σφάλματα στις επομένες «αποδείξεις» από το βιβλίο του Dubnov.

Πρόβλημα 1. Όπως είναι γνωστό, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180° . Η απόδειξη αυτού του γεγονότος βασίζεται στο αξίωμα των παραλλήλων. Η επόμενη

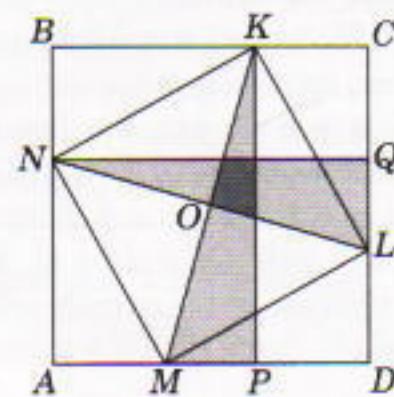
2. Για παράδειγμα, είναι αρκετά δύσκολο να γράψουμε τον αριθμό 1 σε μια από τις τυπικές γλώσσες —η γλώσσα της συνολοθεωρίας του N. Bourbaki. Όπως ανέφερε ο Y.I. Manin στο ραδιοφωνικό πρόγραμμα «Απόδειξη και αναπόδεικτα» το 1979, «Ο πλήρης συμβολισμός του θα περιείχε αρκετές δεκάδες χιλιάδες συμβόλων —ένα μάλλον υπερβολικό πλήθος για τον αριθμό 1».

απόδειξη δεν χρησιμοποιεί αυτό το αξίωμα.

Χωρίζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο σε δύο τρίγωνα (Σχήμα 3). Έστω x το άγνωστο μέχρι στιγμής άθροισμα των γωνιών του τριγώνου. Τότε, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$ και $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$. Από τις δύο αυτές εξισώσεις παίρνουμε $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$. Αφού $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$, και $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, δηλαδή, $x + 180^\circ = 2x$. Συνεπώς, $x = 180^\circ$.

Πρόβλημα 2. Ας αποδείξουμε το «θεώρημα» που διατείνεται ότι ένα ορθογώνιο εγγεγραμμένο σε τετράγωνο είναι επίσης τετράγωνο.

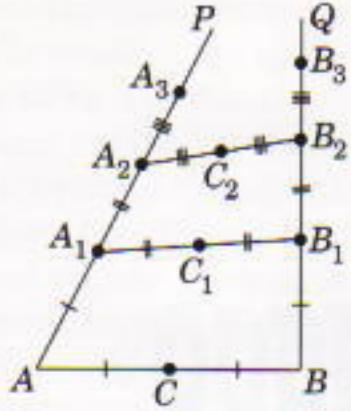
Έστω ένα τετράγωνο $ABCD$ και ένα ορθογώνιο $KLMN$ εγγεγραμμένο σε αυτό (Σχήμα 4). Φέρουμε τις κάθε-



Σχήμα 4

τες $KP \perp AD$ και $NQ \perp CD$. Αυτές είναι ίσες με τις πλευρές του τετραγώνου —επομένως και μεταξύ τους. Τα τμήματα KM και NL είναι επίσης ίσα, διότι αποτελούν διαγωνίους του ορθογώνιου $KLMN$. Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα KPM και NQL είναι ίσα, διότι έχουν αντίστοιχα ίσες υποτείνουσες και μια κάθετη. Άρα, $\angle KMP = \angle NLQ$. Θεωρούμε το τετράπλευρο $OLDM$. Αφού $\angle OMP = \angle OLQ$, το άθροισμα των γωνιών OLD και OMD ισούται με 180° . Επομένως το $OMDL$ είναι εγγράψιμο, άρα το άθροισμα του άλλου ζεύγους απέναντι γωνιών του τετραπλεύρου $OLDM$ είναι επίσης ίσο με 180° —δηλαδή, $\angle MOL + \angle MDL = 180^\circ$. Όμως, $\angle MDL = 90^\circ$, και επομένως η $\angle MOL$ είναι ορθή. Επειτα ότι το $KLMN$ είναι ορθογώνιο με κάθετες διαγωνίους, άρα πρέπει να είναι τετράγωνο.

Πρόβλημα 3. Ας αποδείξουμε το «θεώρημα» που μας λέει ότι δύο ευ-



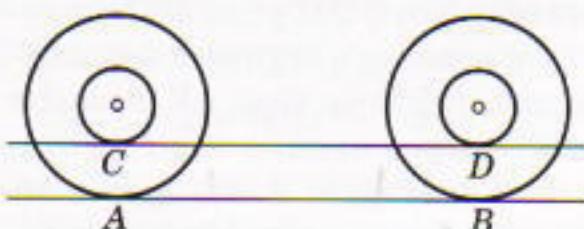
Σχήμα 5

θείες, η μία κάθετη και η άλλη πλάγια προς μια ευθεία, δεν τέμνονται.

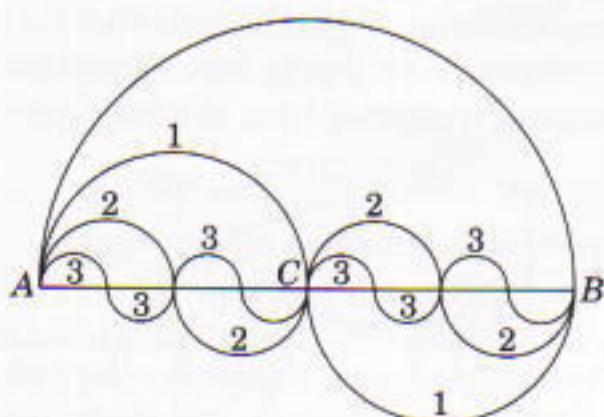
Θεωρούμε την ευθεία AP πλάγια προς το τμήμα AB , και την BQ κάθετη προς το AB (Σχήμα 5). Εστώ C το μέσον του AB . Θεωρούμε τα τμήματα AA_1 και BB_1 ίσα με $AC = BC$. Ισχυρίζόμαστε ότι οι ημιευθείες AP και BQ δεν τέμνονται σε σημείο του εσωτερικού των AA_1 και BB_1 . Πράγματι, αν υπήρχε ένα τέτοιο σημείο τομής, K , θα ισχυαν οι ανισότητες $|AK| \leq |AA_1|$ και $|BK| \leq |BB_1|$, από όπου συνεπάγεται $|AK| + |KB| \leq |AA_1| + |BB_1| = |AB|$.

Όμως, η τελευταία ανισότητα έρχεται σε αντίφαση με την τριγωνική ανισότητα.

Συνδέουμε τώρα τα σημεία A_1 και B_1 , και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη κατασκευή για να πάρουμε τα σημεία A_2 και B_2 . Εδώ έχουμε ότι $|A_1A_2| = |A_1C_1| = |C_1B_1| = |B_1B_2|$. Όπως και προηγουμένως, οι ημιευθείες AP και BQ δεν τέμνονται σε εσωτερικό



Σχήμα 6



Σχήμα 7

σημείο των τμημάτων A_1A_2 και B_1B_2 . Επιπλέον, τα σημεία A_2 και B_2 είναι διαφορετικά και μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία επ' άπειρον. Συνεπώς, οι ημιευθείες AP και BQ δεν τέμνονται.

Πρόβλημα 4. Ας αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι έχουν ίσες περιφέρειες. Ο μεγάλος κύκλος στο Σχήμα 6 κάνει μια πλήρη περιστροφή κινούμενος από το σημείο A στο σημείο B . Άρα, η απόσταση AB ισούται με την περιφέρεια του μεγάλου κύκλου. Ο μικρός κύκλος στο εσωτερικό του μεγάλου εκτελεί επίσης μια πλήρη περιστροφή κινούμενος από το σημείο C στο σημείο D , και επομένως το $|CD|$ ισούται με την περιφέρεια του μικρού κύκλου. Τα μήκη των τμημάτων AB και CD είναι προφανώς ίσα, και συνεπώς οι δύο κύκλοι έχουν ίσες περιφέρειες.

Πρόβλημα 5. Είναι πασίγνωστο ότι η περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας R έχει μήκος $2\pi R$. Εμείς θα «αποδείξουμε» ότι η περιφέρεια ενός κύκλου είναι διπλάσια από την ακτίνα του.

Σχεδιάζουμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου AB (Σχήμα 7). Διχοτομούμε με το σημείο C το τμήμα AB και κατασκευάζουμε ημικύκλια με διαμέτρους AC και CB σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας AB . Το καθένα από αυτά τα ημικύκλια έχει διάμετρο ίση με το ήμισυ της διαμέτρου του αρχικού ημικυκλίου, και επομένως η περιφέρειά τους ισούται με το ήμισυ της περιφέρειας του αρχικού ημικυκλίου. Επομένως, το μήκος της κυματοειδούς καμπύλης «1» του Σχήματος 7 είναι ίσο με το μήκος της περιφέρειας του αρχικού ημικυκλίου.

Διχοτομούμε τώρα τα τμήματα AC και CB και κατασκευάζουμε την κυματοειδή καμπύλη «2». Και αυτής το μήκος ισούται με το μήκος του αρχι-

κού ημικυκλίου. Αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία σε κάθε βήμα, προκύπτει μια κυματοειδής καμπύλη ίσου μήκους με τις προηγούμενες. Η απόσταση των σημείων αυτής της καμπύλης από την ευθεία AB δεν υπερβαίνει την ακτίνα των ημικυκλίων που αποτελούν την καμπύλη, και επομένως τείνει στο μηδέν. Άρα, η ακολουθία των κυματοειδών καμπύλων τείνει στο τμήμα AB . Αφού τα μήκη αυτών των καμπυλών ισούνται με το μήκος της περιφέρειας του αρχικού ημικυκλίου, πρέπει όλα να είναι ίσα με το μήκος του τμήματος AB . Συνεπώς, η περιφέρεια του κύκλου είναι διπλάσια της ακτίνας του.

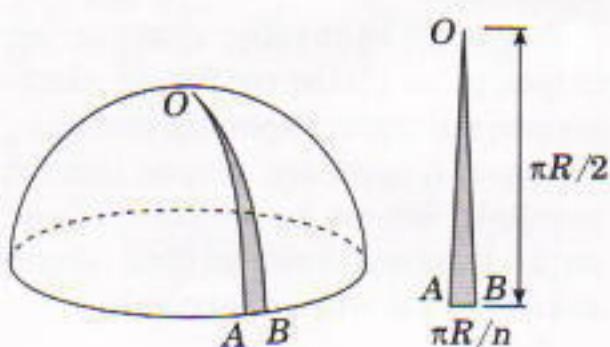
Πρόβλημα 6. Ας αποδείξουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαιρας ακτίνας R είναι $\pi^2 R^2$.

Θεωρούμε ένα ημισφαίριο με πόλο O και διαιρούμε τον ισημερινό του σε n ίσα τμήματα. Το εμβαδόν του ημισφαιρίου είναι n -πλάσιο του εμβαδού καθενός από τα μικρά σφαιρικά τρίγωνα του Σχήματος 8. Θεωρούμε ένα από αυτά τα τρίγωνα. Η βάση του ισούται με $2\pi R/n$ και το ύψος του τείνει στο $\pi R/2$ όταν το $n \rightarrow \infty$. Άρα, το εμβαδόν του τείνει στο $\pi^2 R^2 / 2n$. Επομένως το εμβαδόν του ημισφαιρίου είναι ίσο με

$$n \frac{\pi^2 R^2}{2n} = \frac{\pi^2 R^2}{2},$$

και το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαιρας ισούται με $\pi^2 R^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 55



Σχήμα 8

**ΣΤΟΑ
ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ**



Κάτοπτρο
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

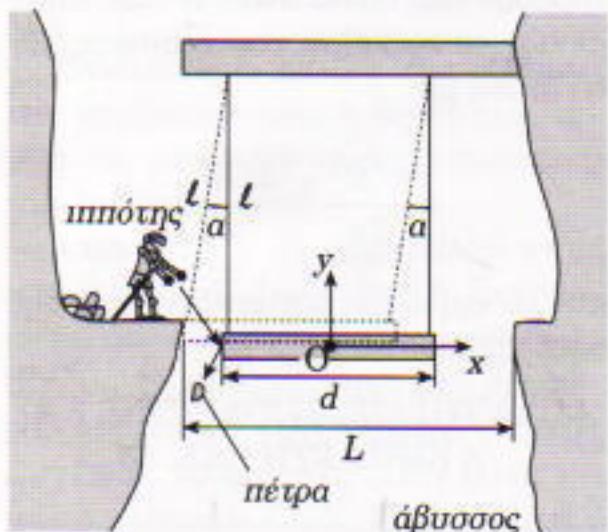
Πανεπιστημίου & Πεσμαζόγλου 5,
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785
Web site: www.katoptro.gr

Πετροβολώντας την άβυσσο

Το υπέροχο πρόβλημα ενός ατρόμητου ιππότη

A. Stasenko

MΙΑ ΦΟΡΑ ΚΙ ΕΝΑΝ ΚΑΙΡΟ, ΕΝΑΣ ιππότης φόρεσε τη βαριά πανοπλία του και ξεκίνησε για να εκπληρώσει το συνηθισμένο καθήκον του: να απελευθερώσει μια πριγκίπισσα που είχε απαχθεί. Εντελώς ξαφνικά, όμως, ένα στενό μονοπάτι τον έβγαλε στο χείλος μιας βαθιάς χαράδρας· από τη γέφυρα που την έζευε κάποτε δεν είχε απομείνει



Σχήμα 1

παρά μια πλατφόρμα που αιωρούνταν καταμεσής της αβύσσου αναρτημένη από μη εκτατά σκοινιά (Σχήμα 1). Η πλατφόρμα απείχε αρκετά από το χείλος της χαράδρας, και ο ήρωάς μας δεν μπορούσε ούτε να τη φτάσει ούτε και να πρήξει πάνω της. Εξάλλου, το εγχείρημα του άλματος περιέκλεισε σοβαρούς κινδύνους, επειδή την πλατφόρμα την κάλυπτε πάγος.

Κυριευμένος από απελποσία, ο ιππότης άδραξε μια πέτρα μάζας m και την εκσφενδόνισε κατευθείαν στο

πλάι της γέφυρας. Ο ήχος μιας απολύτως ελαστικής κρούσης αντιλάλησε πολλές φορές και η πέτρα χάθηκε στα βάθη της χαράδρας. Ο ιππότης κάρφωσε το βλέμμα του στη γέφυρα και τότε διαπίστωσε, γεμάτος καταπληξη, ότι η γέφυρα είχε αρχίσει να εκτελεί ταλαντώσεις. Ο πολεμιστής μας ανακάλεσε στη μνήμη του τις αρχές της εφαρμοσμένης μηχανικής που είχε διδαχτεί στην πολεμική ακαδημία, και δεν άργησε να μαντέψει τι είχε συμβεί.

Λόγω της ελαστικής κρούσης της πέτρας με το χείλος της βαριάς πλατφόρμας και της ανάκρουσης που ακολούθησε, η ορμή της πέτρας υπέστη μεταβολή ίση με $\Delta p = -2mu_x$ (Σχήμα 2). Συνεπώς, ίσου μέτρου ώθηση ασκήθηκε και στην πλατφόρμα:

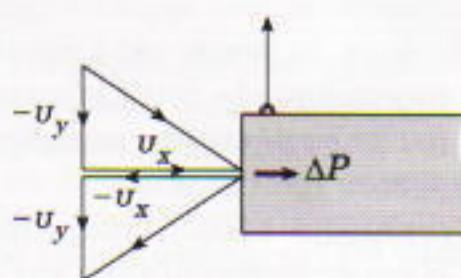
$$\Delta p = 2mu_x$$

Επειδή ο χρόνος πίεζε τον πολυμήχανο ιππότη μας (βλέπετε, η πριγκίπισσα περίμενε), προσπάθησε να απλουστεύσει το συλλογισμό του υπόθετοντας ότι η μάζα της πέτρας ήταν πολύ μικρότερη από τη μάζα της γέφυρας. (Οσοι από τους αναγνώστες μας δεν βιάζονται, μπορούν να επαληθεύσουν την αρχή της πλατφόρμας αυξήθηκε κατά ΔV (προσέξτε το βέλος προς τα πάνω που έχει σχεδιαστεί στο σημείο A , στο Σχήμα 3a).

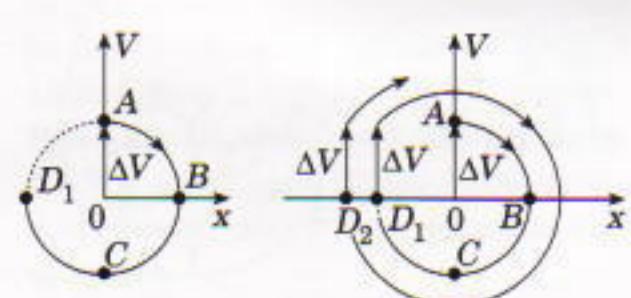
Με άλλα λόγια, συντελέστηκε μεταφορά κινητικής ενέργειας προς την πλατφόρμα, με αποτέλεσμα αυτή να αρχίσει να κινείται στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα των x .

Εφόσον το μήκος των σκοινιών παραμένει αμετάβλητο, το κέντρο μάζας της πλατφόρμας θα κινηθεί στην κατεύθυνση της πλατφόρμας αυξήθηκε κατά ΔV (προσέξτε το βέλος προς τα πάνω που έχει σχεδιαστεί στο σημείο A , στο Σχήμα 3a). Με άλλα λόγια, συντελέστηκε μεταφορά κινητικής ενέργειας προς την πλατφόρμα, με αποτέλεσμα αυτή να αρχίσει να κινείται στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα των x .

Εφόσον το μήκος των σκοινιών παραμένει αμετάβλητο, το κέντρο μάζας



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ζας της πλατφόρμας διαγράφει τόξο κύκλου. Συνεπώς, η πλατφόρμα ανυψώνεται μέσα στο βαρυτικό πεδίο. Στη διάρκεια τούτης της κίνησης η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε δυναμική έτσι, όταν η ταχύτητα μηδενίστει (στο σημείο B), η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. Αφού η πλατφόρμα φτάσει πλέον στο συγκεκριμένο σημείο, αντιστρέφει τη φορά της κίνησης της και πλησιάζει τον ιππότη — αποκτώντας τη μέγιστη ταχύτητά της στο σημείο C και ηρεμώντας στιγμαία στο σημείο D_1 . Εφόσον αποσιάζουν τα φαινόμενα απόσβεσης, η συγκεκριμένη διαδικασία επαναλαμβάνεται επ' απειρον.

Μελετώντας σχολαστικά το διάγραμμά του, ο ιππότης μας συνειδητοποίησε ότι άξιζε τον κόπο να ρίξει άλλη μία πέτρα προς την πλατφόρμα όταν θα βρίσκεται στο σημείο D_1 . Στο τέλος της επόμενης αιώρησης η πλατφόρμα θα έπρεπε να φτάσει στο σημείο D_2 (Σχήμα 3β), και ούτω καθεξής, ώσπου το σημείο D_N να συμπέσει με το $x = -(L - d)/2$.

Έτσι, αφήνοντας κατά μέρος τους δισταγμούς, ο γενναιός ιππότης αποφάσισε να εκτιμήσει πόσες πέτρες χρειαζόταν να ρίξει για να φέρει το άκρο της ολισθητής πλατφόρμας ίσα με το χείλος του γκρεμού, έτσι ώστε να καταφέρει να ανεβεί με ασφάλεια πάνω της.

Απόθεσε καταγής την ασπίδα του και έγραψε πάνω της το νόμο διατήρησης της ενέργειας:

$$MV_{\max}^2/2 = Mgl(1 - \sin a_{\max}),$$

όπου V_{\max} είναι η μέγιστη ταχύτητα της πλατφόρμας (διαπιστώνουμε εύκολα ότι πρόκειται για την ταχύτητα της πλατφόρμας στο κατώτατο σημείο της τροχιάς της) και a_{\max} η μέγιστη γωνία εκτροπής, η οποία υπολογίζεται αμέσως από το ορθογώνιο τρίγωνο (Σχήμα 1):

$$\eta \mu a_{\max} = (L - d)/2l.$$

Όταν η γωνία εκτροπής λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, η ταχύτητα της πλατφόρμας μηδενίζεται: όλη η κινητική της ενέργεια έχει μετατραπεί σε δυναμική. Εάν υποθέσουμε ότι η κάθε πέτρα χτυπά την πλατφόρμα όταν η απόσταση που τη χωρίζει από τον ιπ-

πότη γίνεται ελάχιστη, η ορμή της πλατφόρμας αυξάνεται κάθε φορά κατά την ίδια ποσότητα. Συνεπώς, μπορούμε να μάθουμε πόσες πέτρες N πρέπει να ρίξει ο ήρωας μας για να πραγματοποιήσει το σχέδιό του από τη σχέση

$$N \left(\frac{1}{2} M (\Delta V)^2 \right) = \frac{1}{2} M V_{\max}^2$$

— η οποία μας λέγει ότι η ολική (κινητική) ενέργεια της πλατφόρμας θα ισούται με N φορές το ενεργειακό κέρδος της από κάθε κρούση της με πέτρα (σχέση η οποία προκύπτει και από το Σχήμα 3). Δεδομένου ότι

$$(\Delta V)^2 = \left(\frac{\Delta p}{M} \right)^2 = \left(\frac{2m u_x}{M} \right)^2,$$

η προηγούμενη σχέση δίνει

$$V_{\max}^2 = N \frac{4m^2 u_x^2}{M^2}.$$

Εισάγοντας τούτη την έκφραση στον τύπο για τη διατήρηση της ενέργειας, ο ιππότης μας κατέληξε στην εξίσωση

$$\frac{1}{2} N \frac{4m^2 u_x^2}{M^2} = g l \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L-d}{2l} \right)^2} \right),$$

ή

$$N = \frac{g l M^2}{2m^2 u_x^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L-d}{2l} \right)^2} \right).$$

Τώρα πα, ο ευφυής και γενναιός ιππότης δεν απείχε παρά ένα μόλις βήμα από την αριθμητική εκτίμηση που επίδιωκε. Έπρεπε απλώς να δώσει ρεαλιστικές τιμές στα μεγέθη που εμφανίζονταν στο δεξιό μέλος του τύπου του. Επισκοπώντας ακόμη μία φορά ένα προς ένα τα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος, κατέληξε στις εξής χονδρικές τιμές: $M = 200$ kg για τη μάζα της πλατφόρμας, $m = 1$ kg για τη μάζα της πέτρας, $u_x = 10$ m/s για την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας της πέτρας τη στιγμή της κρούσης, $L = 40$ m για το πλάτος της χαράδρας, $d = 30$ m για το μήκος της πλατφόρμας και $l = 50$ m για το μήκος κάθε σκοινιού. Κάνοντας τους α-

ναγκαίους αριθμητικούς υπολογισμούς διαπίστωσε ότι έπρεπε να εκσφενδονίσει περίπου

$$N = 2.000 \text{ πέτρες.}$$

Πόση ώρα λοιπόν θα έπρεπε να πετροβολά την πλατφόρμα το καύχημα της ιπποσύνης; Γνωρίζουμε το πλήθος των αιωρήσεων, άρα μας λείπει μόνο ένα στοιχείο ακόμη — η περίοδος της ταλαντωσης. Φυσικά, εξαρτάται από το μήκος του εκκρεμούς l (m) και την επιτάχυνση της βαρύτητας g (m/s²). Για να κατασκευάσουμε από αυτά ένα μέγεθος με τις κατάλληλες διαστάσεις (s), μπορούμε να τα συνδυάσουμε μόνον με τον εξής τρόπο:

$$\sqrt{\frac{l \text{ (m)}}{g \text{ (m/s)}^2}} \cong T \text{ (s).}$$

Αυτή τη φευγαλέα στιγμή της αποκάλυψης, ο ιππότης θυμήθηκε τα σοφά λόγια που άκουγε από τον παπούλη του τον 15ο αιώνα: «Και μην ξεχνάς, εγγονέ! Όταν πρόκειται για ταλαντώσεις, ο παράγοντας 2π παρουσιάζεται πάντοτε στους τύπους ως εκ θαύματος.»

Επομένως, η περίοδος T της αιώρησης της πλατφόρμας θα είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{50 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = 14 \text{ s.}$$

Εφόσον η T ισούται περίπου με το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων, διαπιστώνουμε ότι ο ήρωας μας θα έπρεπε να πετροβολά την πλατφόρμα για όχι λιγότερο από

$$t = NT = 2.000 \cdot 14 \text{ s} \cong 28.000 \text{ s} \cong 7,8 \text{ h.}$$

(Ευτυχώς για τον ιππότη μας που η απόσβεση ήταν αμελητέα!)

Μολονότι οι δυσκολίες του εγχειρήματος ενέπνεαν δέος, η σκέψη ότι η πριγκίπισσα χρειαζόταν απεγνωσμένα τη βοήθειά του δεν άφηνε περιθώρια επλογής στον ήρωα μας. Έτσι, πιστός στο καθήκον, άρχισε αμέσως το επίπονο έργο του.

Διαβάστε ακόμη το άρθρο...

- A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, «Κινούμενη ύλη», Ιούλιος / Αύγουστος 1996.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M141

Αν ένας αριθμός έχει τη μορφή $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots \cdot p_k^{a_k}$, όπου p_1, p_2, \dots, p_k είναι πρώτοι ακέραιοι, το πλήθος των διαφορετικών διαιρετών του (του 1 και του ίδιου του αριθμού συμπεριλαμβανομένων) ισούται με $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$. Αυτός ο τύπος είναι πασίγνωστος και είναι εύκολο να αποδειχτεί. (Μπορείτε να βρείτε την απόδειξη σε οποιοδήποτε βιβλίο στοιχειώδους θεωρίας αριθμών.)

Διαπιστώνουμε ότι το πλήθος των διαφορετικών πρώτων που περιέχονται στην ανάλυση σε πρώτους παράγοντες του αριθμού μας δεν μπορεί να υπερβαίνει το τέσσερα, διότι $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 1000$. Θα αναζητήσουμε τον μικρότερο από τους επιθυμητούς αριθμούς (αν υπάρχουν περισσότεροι από ένας). Επομένως, κατά την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες του αριθμού μας μόνο οι αριθμοί 2, 3, 5 και 7 μπορούν να εμφανιστούν και μόνο υψωμένοι σε συγκεκριμένες δυνάμεις.

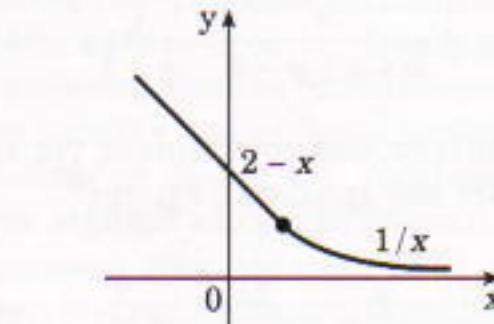
Αντιμετωπίζουμε πλέον ένα απλό πρόβλημα αναζήτησης: το 2^9 έχει 10 διαιρέτες, το $2^8 \cdot 3$ έχει 18, και ούτω καθεξής. Πρέπει επίσης να εξετάσουμε τους επόμενους αριθμούς: $2^7 \cdot 3, 2^6 \cdot 3^2, 2^6 \cdot 3 \cdot 5, 2^5 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^3 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ και $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι ο αριθμός $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ έχει το μεγαλύτερο πλήθος (32) διαιρετών. Δεν υπάρχει άλλος τριψήφιος αριθμός με το ίδιο πλήθος διαιρετών.

Απάντηση: 840

M142

Υπάρχει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ 2-x, & x \leq 1 \end{cases}$$

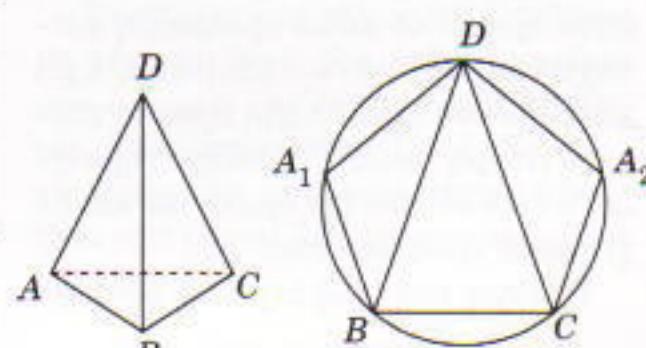


Σχήμα 1

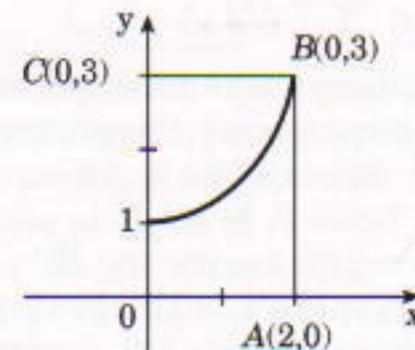
έχει τις ζητούμενες ιδιότητες (Σχήμα 1).

M143

Αν τα τρίγωνα ABD , BCD και CAD είναι ίσα, τότε είναι όλα ισόπλευρα και οι γωνίες στην κορυφή ισούνται με 60° . Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα τρίγωνα δεν είναι όλα ίσα. Από τη διατύπωση του προβλήματος έπειται ότι οι ακτίνες των περιγεγραμμένων στα τρία τρίγωνα κύκλων είναι ίσες, διότι τα τρίγωνα αυτά έχουν μια πλευρά και τις απέναντι γωνίες αντίστοιχα ίσες (τα στοιχεία αυτά καθορίζουν την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου). Έχουμε τώρα ότι τα τρίγωνα ABD και CAD είναι ισοσκελή (με βάσεις BD και CD , αντίστοιχα). Επομένως, οι πλευρές BD και CD του τριγώνου BCD είναι ίσες. Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο αυτού του τριγώνου. Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα A_1BD και CA_2D εγγεγραμμένα σε αυτόν τον κύκλο και ίσα με τα τρίγωνα ABD και CAD , αντίστοιχα (Σχήμα 2). Έπειται ότι το πεντάγωνο $DA_1B_1C_1A_2$ είναι κανονικό. Σε αυτή την περίπτωση, επομένως, η γωνία



Σχήμα 2



Σχήμα 3

που αναζητούμε ισούται με 36° .

Απάντηση: 60° ή 36° .

M144

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο στο επίπεδο των συντεταγμένων με κορυφές $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 3)$ και $C(0, 3)$. Το γράφημα της συνάρτησης $y = \sqrt[3]{1+x^3}$ διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$ και $(2, 3)$ και διαιρεί το ορθογώνιό μας σε δύο τμήματα (Σχήμα 3). Το εμβαδόν κάτω από το γράφημα ισούται με

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$$

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του τμήματος του ορθογωνίου που βρίσκεται πάνω από το γράφημα. Η συνάρτηση

$$y = \sqrt[3]{1+x^3}$$

είναι μονότονη στο διάστημα $[0, 2]$. Μπορούμε λοιπόν να εκφράσουμε το x συναρτήσει τού y :

$$x = \sqrt[3]{y^2 - 1}.$$

Συνεπώς, το εμβαδόν που αναζητούμε είναι το

$$\int_1^3 \sqrt[3]{y^2 - 1} dy.$$

Κάνουμε την επόμενη αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα: $y = t + 1$. Επομένως, προκύπτει η εξής παράσταση για το εμβαδόν:

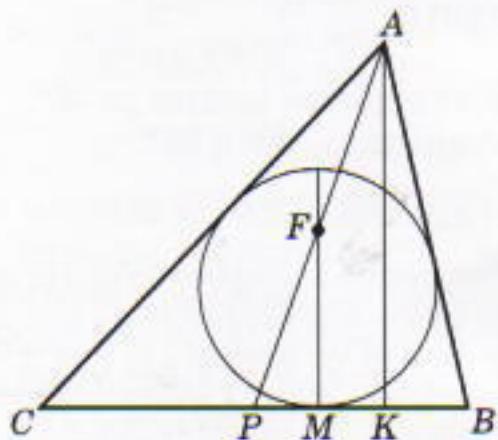
$$\int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{t^2 + 2} dt.$$

Διαπιστώνουμε πλέον ότι το δεδομένο ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν του ορθογώνιου $OABC$, δηλαδή 6.

Απάντηση: 6.

M145

Χρησιμοποιούμε τον παραδοσιακό συμβολισμό για τις πλευρές του τριγώνου: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (όπου $b > c$). Έστω P , M και K το μέσο τής BC , το σημείο επαφής τής BC με τον εγγεγραμμένο κύκλο και το ίχνος του ύψους επί την BC , αντίστοιχα



Σχήμα 4

(Σχήμα 4). Έστω F το σημείο τομής AP με τη διάμετρο του εγγεγραμμένου κύκλου που διέρχεται από το M . Έστω r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, και έστω $AK = h_s$. Έχουμε: $CP = a/2$, $CM = s - c$ (όπου s είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABC) και

$$CK = b \sin C = \frac{2ba \sin C}{2a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

(Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το νόμο των συνημπόνων.)

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει

$$PM = CM - CP = \frac{b - c}{2}$$

και

1. Ο τύπος αυτός προκύπτει ως εξής: Έστω N και L τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές AC και AB , αντίστοιχα, και $CM = CN = x$. Τότε, $AL = AN = b - x$, $BM = BL = c - (b - x) = c - b + x$. Από την εξισώση $CM + BM = BC$, ή $x + (c - b + x) = a$, προκύπτει ότι $x = (a + b - c)/2 = s - c$.

$$PK = CK - CP = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Από τα όμοια τρίγωνα PMF και PKA , βρίσκουμε

$$\frac{MF}{h_s} = \frac{PM}{PK} = \frac{a}{b+c}$$

$$= \frac{a}{b+c+a-a} = \frac{1}{k-1}. \quad (1)$$

Επιπλέον, από τους τύπους για το εμβαδόν του τριγώνου, έχουμε²

$$\frac{2r}{h_s} = \frac{a}{s} = \frac{2a}{a+b+c} = \frac{2}{k}. \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) παριστούμε

$$\frac{2r - MF}{MF} = \frac{2r}{MF} - 1 = \frac{2r}{h_s} \frac{h_s}{MF} - 1$$

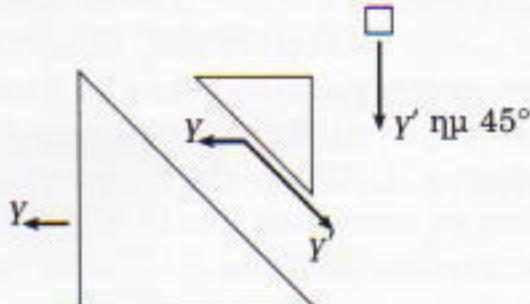
$$= \frac{2(k-1)}{k} - 1 = \frac{k-2}{k}.$$

Απάντηση: $\frac{k-2}{k}$.

Φυσική

Φ141

Ας συμβολίσουμε με y την επιτάχυνση του κάτω πρίσματος, σημειώνοντας συγχρόνως ότι έχει κατ' ανάγκην οριζόντια διεύθυνση (Σχήμα 5). Ως προς το κάτω πρίσμα (δηλαδή στο



Σχήμα 5

επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς όπου ηρεμεί το κάτω πρίσμα), η επιτάχυνση του πάνω πρίσματος έχει κατεύθυνση παράλληλη προς το επίπεδο επαφής τους — δηλαδή σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια και έχει φορά προς τα κάτω.

Η λύση του προβλήματος διευκο-

2. Αν E είναι το εμβαδόν, τότε έχουμε $E = \frac{1}{2}h_s a$ και $E = rs$.

λύνεται σημαντικά αν αναλύσουμε την ολική επιτάχυνση του πάνω πρίσματος σε άθροισμα δύο διανυσμάτων: ενός οριζόντιου και ίσου κατά το μέτρο με y , και ενός άλλου με μέτρο y' , το οποίο κατευθύνεται προς τα κάτω σχηματίζοντας γωνία 45° με την οριζόντια. Έτσι, η οριζόντια συνιστώσα της επιτάχυνσης του πάνω πρίσματος έχει αντίθετη φορά με την επιτάχυνση του κάτω πρίσματος, και το μέτρο της ισούται με $(y \sin 45^\circ - y)$, ενώ η κατακόρυφη επιτάχυνσή του ισούται με $y' \etaμ 45^\circ$. Δεδομένου ότι στο παραλληλεπίπεδο ουδεμία οριζόντια δύναμη ασκείται, η επιτάχυνσή του έχει κατακόρυφη διεύθυνση και ισούται κατ' απόλυτη τιμή με την κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του πάνω πρίσματος: $y' \etaμ 45^\circ$.

Ας προσδιορίσουμε τώρα τη σχέση που συνδέει τις y και y' . Θυμηθείτε ότι εφόσον απουσιάζουν παντελώς οι οριζόντιες εξωτερικές δυνάμεις, η οριζόντια επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος ισούται με μηδέν. Δεδομένου ότι το παραλληλεπίπεδο κινείται μόνον κατακόρυφα, ισχύει η εξίσωση

$$M(y \sin 45^\circ - a) = My,$$

$$y' = \frac{2y}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}y.$$

Συνεπώς, η οριζόντια συνιστώσα της ολικής επιτάχυνσης του πάνω πρίσματος σχετικά με το τραπέζι ισούται με y , ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα της ίδιας επιτάχυνσης (η οποία ισούται με την επιτάχυνση του παραλληλεπίπεδου) είναι $2y$. Το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης αυτού του πρίσματος είναι $\sqrt{5}y$.

Για να προσδιορίσουμε τη y και, συγχρόνως, τις επιταχύνσεις όλων των σωμάτων του συστήματος, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια που χάνει το σύστημα σε χρόνο t ισούται με την κινητική ενέργεια που κερδίζει στον ίδιο χρόνο. Επειδή όλες οι εμπλεκόμενες επιταχύνσεις είναι σταθερές, οι μεταβολές των ταχυτήτων και οι μετατοπίσεις των σωμάτων εντός χρόνου t υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια των τύπων της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Η μείωση της δυναμικής ε-

νέργειας οφείλεται στην κατακόρυφη μετατόπιση του πάνω πρίσματος και του παραλληλεπιπέδου:

$$\Delta U = (M+m)g \frac{2\gamma\tau^2}{2}.$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων τη χρονική στιγμή t είναι

$$K = \frac{M(\gamma\tau)^2}{2} + \frac{M(\sqrt{5}\gamma\tau)^2}{2} + \frac{m(2\gamma\tau)^2}{2}.$$

Εξισώνοντας τις ΔU και K , βρίσκουμε αμέσως την επιτάχυνση γ :

$$\gamma = g \frac{M+m}{3M+2m}.$$

Συνεπώς, μετά την πάροδο χρόνου t από την έναρξη της κίνησης, η ταχύτητα του παραλληλεπιπέδου θα έχει την τιμή

$$v = 2\gamma\tau = 2gt \frac{M+m}{3M+2m}.$$

Φ142

Η θερμική ροή Q είναι ανάλογη με τη θερμοκρασιακή διαφορά ανά μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση της θερμικής ροής $(T_2 - T_1)/L$ και με το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής S . Εάν συμβολίσουμε το συντελεστή αναλογίας με k (ο οποίος είναι γνωστός ως συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας), υπολογίζουμε αμέσως τη θερμική ροή για την πρώτη περίπτωση:

$$Q_1 = kS(T_2 - T_1)/L.$$

Η δεύτερη περίπτωση παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερη δυσκολία. Ας υποθέσουμε ότι η ολική θερμική ροή μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα συνιστωσών ροών που έχουν κατεύθυνση κατά μήκος των ινών και εγκάρσια προς αυτές. Φυσικά, θα μπορούσαμε να επλέξουμε άλλους άξονες για να αναλύσουμε τη θερμική ροή, αλλά οι συγκεκριμένοι είναι οι πλέον κατάλληλοι επειδή γνωρίζουμε τη συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας κατά μήκος τους. Στη «διαμήκη» κατεύθυνση (κατά μήκος των ινών) η πτώση θερμοκρασίας ανά μονάδα μήκους είναι

μικρότερη απ' ό,τι στην πρώτη περίπτωση. Ισούται με $[(T_2 - T_1)\text{συνα}]/L$. Για να υπολογίσουμε τη συνιστώσα ροή μέσα από την εγκάρσια διατομή του κυλίνδρου, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη θερμοκρασιακή διαφορά ανά μονάδα μήκους στη «διαμήκη» κατεύθυνση με το εμβαδόν της προβολής της εγκάρσιας διατομής σε επίπεδο κάθετο προς τη «διαμήκη» κατεύθυνση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το εμβαδόν της εν λόγω προβολής ισούται με $S_{\text{συνα}} < S$. Ανάλογοι τύποι ισχύουν και για τη θερμική ροή εγκάρσια προς τις ίνες, αλλά τότε η γωνία a πρέπει να αντικατασταθεί με τη γωνία $(90^\circ - a)$ και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας πρέπει να ελαττωθεί κατά το ήμισυ. Επομένως, στη δεύτερη περίπτωση η ολική θερμική ροή θα δίνεται από τον τύπο

$$Q_2 = KS_{\text{συν}}^2 a (T_2 - T_1)/L + 0,5KS_{\eta\mu}^2 a (T_2 - T_1)/L.$$

Ο ζητούμενος λόγος των θερμικών ροών είναι

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{0,75 + 0,5 \cdot 0,25} = \frac{8}{7} \cong 1,14.$$

Φ143

Εφόσον τα πηνιά έχουν συνδεθεί παράλληλα, οι επαγόμενες τάσεις στα άκρα τους θα είναι πάντοτε ίσες, όπως άλλωστε και οι μεταβολές της μαγνητικής ροής που τα διαπερνά. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν εξετάσουμε τον υπεραγώγιμο βρόχο που σχηματίζουν τα δύο πηνιά.

Εάν ονομάσουμε τα ρεύματα που διαρρέουν τα πηνιά I_1 και I_2 , αντίστοιχα, έχουμε (λαμβάνοντας υπόψη τα πρόσημα που απορρέουν από τον ορισμό των θετικών φορών των ρευμάτων):

$$I_1 I_0 = I_1 I_1 + I_2 I_2.$$

Το φορτίο του πυκνωτή λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του όταν το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή μηδενίζεται, ή καλύτερα όταν $I_1 = I_2$. Το φορτίο μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του νόμου διατήρησης της ενέργειας:

$$Q_{\max} = I_0 \sqrt{\frac{CL_1 L_2}{L_1 + L_2}}.$$

Το ρεύμα που διαρρέει το δεύτερο πηνίο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του όταν μηδενίζεται το φορτίο του πυκνωτή. Τη συγκεκριμένη στιγμή, ο νόμος διατήρησης της ενέργειας μπορεί να γραφεί χωρίς τον όρο που αντιστοιχεί στην ενέργεια η οποία είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή:

$$L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 = L_1 I_0^2.$$

Συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με τη σχέση για τις μαγνητικές ροές, καταλήγουμε σε μια νέα εξίσωση:

$$L_1 I_0^2 = L_1 \left(I_0 - \frac{L_2 I_2}{L_1} \right)^2 + L_2 I_2^2.$$

Αν λύσουμε τούτη την εξίσωση ως προς το I_2 , βρίσκουμε δύο ρίζες, από τις οποίες η μία ισούται με μηδέν και αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του εν λόγω ρεύματος. Παρατηρήστε ότι οι συνθήκες για την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα: και στις δύο περιπτώσεις η τάση λόγω αυτεπαγωγής μηδενίζεται. Η δεύτερη ρίζα αποτελεί και την απάντηση του προβλήματος:

$$I_2 = 2I_0 - \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Φ144

Εάν δεν υπήρχε μαγνητικό πεδίο, ο βρόχος θα κινούνταν υπό την επιδραση μόνο του βάρους του — με σταθερή ταχύτητα (v_0) στην οριζόντια διεύθυνση (άξονας των x) και με σταθερή επιτάχυνση g κατά μήκος του άξονα των z . Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο B δεν θα μπορούσε να επηρεάσει την κίνηση του βρόχου. Στο παρόν πρόβλημα, όμως, το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα των z : $B(z) = B_0 + kz$. Αυτό σημαίνει ότι το μαγνητικό πεδίο αυξάνει γραμμικά με το z , οπότε η μαγνητική ροή Φ που διαπερνά το βρόχο μεταβάλλεται κατά την πτώση του. Συνεπώς, θα παράγεται μια ΗΕΔ στο βρόχο, τον οποίο, ως εκ τούτου, διαρρέει ένα ρεύμα εξ επαγωγής. Το μαγνητικό πεδίο λοιπόν θα ασκήσει δύναμη στο βρόχο. Ας προσδιορίσουμε το μέτρο και την κατεύθυνση της εν λόγω δύναμης.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t το

κέντρο μάζας του βρόχου βρίσκεται στο σημείο (x_t, z_t) . Οι συνιστώσες της ταχύτητάς του στους άξονες των x και z είναι u_x και u_z . Τη συγκεκριμένη στιγμή η ροή που διαπερνά το βρόχο ισούται με

$$\Phi = \frac{\left[B_0 + k \left(z_t - \frac{a}{2} \right) \right]}{2} a^2 + \\ + \frac{\left[B_0 + k \left(z_t - \frac{a}{2} \right) \right]}{2} a^2 = \\ = (B_0 + kz_t) a^2.$$

Εδώ $B_0 + k(z_t - a/2)$ και $B_0 + k(z_t + a/2)$ είναι αντίστοιχα οι τιμές του μαγνητικού πεδίου στην πάνω και στην κάτω πλευρά του βρόχου. Εφόσον το $B(z)$ εξαρτάται γραμμικά από το z , χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή του B για να υπολογίσουμε τη μαγνητική ροή Φ .

Τη δεδομένη στιγμή, η ΗΕΔ στο βρόχο ισούται με

$$|E| = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = ka^2 \frac{|\Delta z|}{\Delta t} = ka^2 |u_z|,$$

ενώ το εξ επαγωγής ρεύμα με

$$I = \frac{|E|}{R} = \frac{ka^2}{R} |u_z|.$$

Σύμφωνα με το νόμο του Lentz, το εξ επαγωγής ρεύμα ρέει αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο νόμος του Ampere μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις δυνάμεις: στη μεν πάνω πλευρά του βρόχου ασκείται δύναμη

$$|\mathbf{F}_1| = \left[B_0 + k \left(z_t - \frac{a}{2} \right) \right] Ia \\ = \left[B_0 + k \left(z_t - \frac{a}{2} \right) \right] \frac{ka^3}{R} |u_z|,$$

στη δε κάτω

$$|\mathbf{F}_2| = \left[B_0 + k \left(z_t + \frac{a}{2} \right) \right] Ia \\ = \left[B_0 + k \left(z_t + \frac{a}{2} \right) \right] \frac{ka^3}{R} |u_z|.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι δυνάμεις \mathbf{F}_3 και \mathbf{F}_4 που ασκούνται στις κατακόρυφες πλευρές του βρόχου είναι ίσες κατά μέτρο και έχουν αντίθετες κατευθύνσεις:

$$|\mathbf{F}_3| = |\mathbf{F}_4| = \frac{\left[B_0 + k \left(z_t - \frac{a}{2} \right) \right]}{2} Ia + \\ + \frac{\left[B_0 + k \left(z_t + \frac{a}{2} \right) \right]}{2} Ia = \\ = (B_0 + kz_t) \frac{ka^3}{R} |u_z|,$$

οπότε

$$\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = 0.$$

Συνεπώς, $u_x = \text{σταθ.}$ άρα ο βρόχος κινείται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα με ταχύτητα σταθερή και ίση με την αρχική ταχύτητά του u_0 .

Ας εξετάσουμε τώρα την κατακόρυφη κίνηση του βρόχου, η οποία καθορίζεται από τις δυνάμεις \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 και από τη δύναμη της βαρύτητας mg . Εφόσον η ταχύτητα u του βρόχου παραμένει σταθερή, η συνιστώσα της κατά τον άξονα z είναι επίσης σταθερή, οπότε η κατακόρυφη επιτάχυνση \mathbf{g}_z ισούται με μηδέν:

$$m|\mathbf{g}_z| = m|\mathbf{g}| + |\mathbf{F}_1| - |\mathbf{F}_2| \\ = mg - k^2 a^4 |u_z| / R = 0.$$

Από τη σχέση αυτή προσδιορίζουμε τη συνιστώσα $u_{\sigma z}$ της οριακής ταχύτητας του βρόχου στον άξονα z :

$$u_{\sigma z} = \frac{mgR}{k^2 a^4}.$$

Έτσι, η οριακή ταχύτητα του βρόχου ισούται με $u = \sqrt{(u_0^2 + u_{\sigma z}^2)}$ όπου u_0 είναι η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας u , η οποία ισούται (όπως αποδείξαμε) με την ταχύτητα που προσδόθηκε αρχικά στο βρόχο. Συνεπώς

$$u_0 = \sqrt{u^2 - u_{\sigma z}^2} = \sqrt{u^2 \left(\frac{mgR}{k^2 a^4} \right)^2}.$$

Υπάρχει και άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε την $u_{\sigma z}$, ο οποίος στηρίζεται στη διατήρηση της ενέργειας.

Εφόσον ο βρόχος κινείται ομαλά με την οριακή ταχύτητά του υπό την επίδραση της γήινης βαρύτητας, η μεταβολή που υφίσταται η δυναμική ενέργειά του σε χρονικό διάστημα Δt ισούται με τη θερμότητα που εκλύει ο βρόχος στο ίδιο χρονικό διάστημα:

$$mg u_{\sigma z} \Delta t = I_{\sigma z}^2 R \Delta t = \\ = \left(\frac{ka^2}{R} \right)^2 u_{\sigma z}^2 R \Delta t.$$

Έτσι, καταλήγουμε και πάλι στο αποτέλεσμα

$$u_{\sigma z} = \frac{mgR}{k^2 a^4}.$$

Φ145

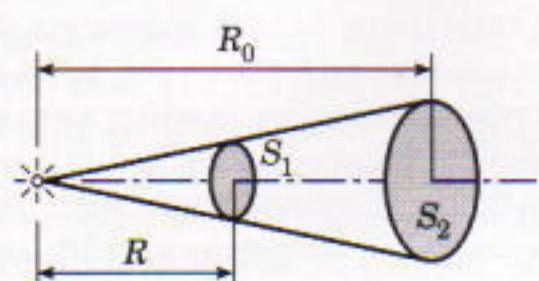
Η θερμοκρασία ενός ψήγματος σιδήρου αυξάνεται ώσπου να φτάσει την τιμή T , όπου η ακτινοβολούμενη από το ψήγμα ενέργεια εξισώνεται με την προσπίπτουσα ηλιακή ενέργεια. Η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογη με το εμβαδόν της επιφάνειας του ψήγματος. Για να εκτιμήσουμε το συγκεκριμένο εμβαδόν, υποθέτουμε ότι το ψήγμα είναι κατά προσέγγιση σφαιρικό και έχει μέση ακτίνα r . Η ισχύς (δηλαδή η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) την οποία ακτινοβολεί ένα τέτοιο ψήγμα σε θερμοκρασία T ισούται με

$$P_{\text{οκτ.}} = 4\pi r^2 A.$$

Η προσπίπτουσα ηλιακή ισχύς είναι ανάλογη με το εμβαδόν της μεγιστηριας εγκάρσιας διατομής του σωματίδιου (πr^2):

$$P_{\text{προσ.}} = \pi r^2 J.$$

Εδώ με J συμβολίζουμε την πυκνότητα ενέργειακής ροής της ηλιακής ακτινοβολίας σε απόσταση R από τον Ήλιο, όπου και βρίσκονται τα ψήγματα. Εφόσον η ακτινοβολούμενη ηλιακή ισχύς εντός μοναδιαίας



Σχήμα 6

στερεάς γωνίας είναι σταθερή (Σχήμα 6), ισχύει $JS_1 = J_0 S_2$, οπότε

$$J = J_0 \frac{S_2}{S_1} = J_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Επομένως,

$$P_{\text{προ}} = \pi r^2 J_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Εάν εξισώσουμε τις $P_{\text{πρ}}$ και $P_{\text{προ}}$, καταλήγουμε στη σχέση

$$4\pi r^2 A = \pi r^2 J_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Τελικά,

$$R = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{J_0}{A}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

Σημείωση: Ο Ερμής, ο εγγύτερος πλανήτης στον Ήλιο, απέχει από αυτόν $5 \cdot 10^6$ km. Γιατί λοιπόν δεν τήκεται;

Σπαζοκεφαλίες

Σ141

Αν κανείς από αυτούς τους μήνες δεν είναι ο Φεβρουάριος, τότε το συνολικό πλήθος των ημερών τους είναι τουλάχιστον $30 + 31 + 30 = 91 = 7 \cdot 13$. Επομένως, το συνολικό πλήθος των Κυριακών θα ήταν τουλάχιστον 13.

Σ142

Μια λύση είναι η

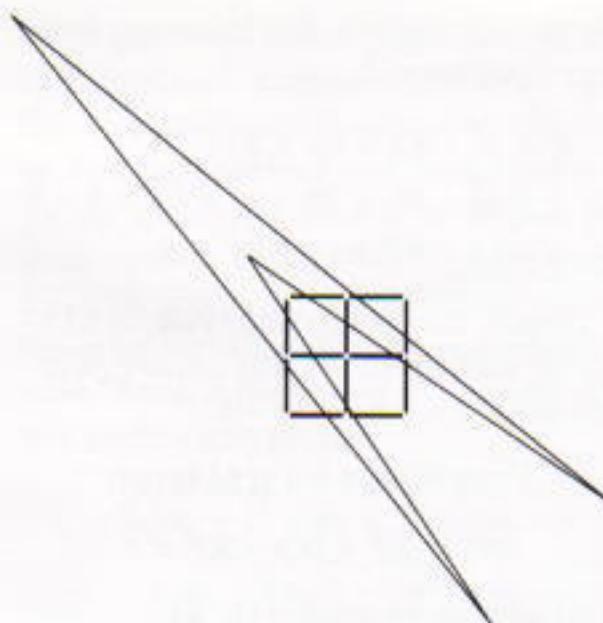
$$4 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 16.$$

Σ143

Δείτε το Σχήμα 7. Το ζητούμενο πολύγωνο δεν μπορεί να έχει λιγότερες από τέσσερις πλευρές, διότι κάθε πλευρά του τέμνει το πολύ δύο από τα οκτώ εξωτερικά τμήματα.

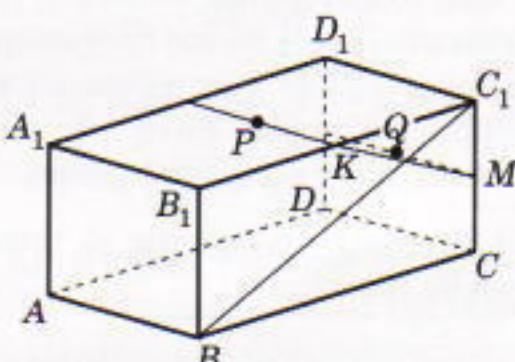
Σ144

Δείτε το Σχήμα 8. Από τα σημεία P και Q σχεδιάζουμε ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς το AB έτσι ώστε τα τμήματα, και προς τις δύο πλευρές των σημείων P και Q , να είναι ίσα με το μισό τού AB . Τα άκρα αυτών των τμημάτων είναι τα μέσα



Σχήμα 7

των ακμών $B_1 C_1$, $D_1 A_1$, CC_1 και DD_1 . Ονομάζουμε K το μέσο της $B_1 C_1$ και M το μέσο της CC_1 . Η διαγώνιος BC_1 του παραλληλογράμμου BCC_1B_1 διέρχεται από το μέσο του τμήματος KM και διαιρείται από το σημείο τομής σε λόγο $3 : 1$ (από την κορυφή B). Εύκολα τώρα κατασκευάζουμε το σημείο



Σχήμα 8

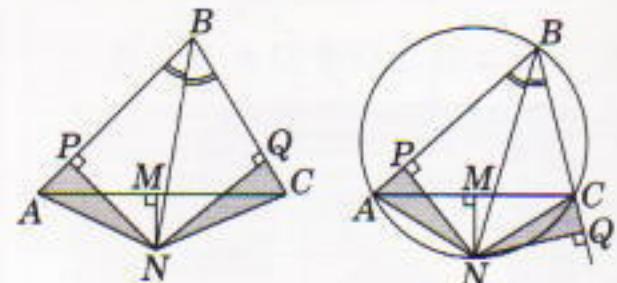
C_1 . Αρκεί να συνδέσουμε το B με το μέσο της KM και να προεκτείνουμε αυτό το τμήμα κατά το $1/3$ του μήκους του. Η ολοκλήρωση της κατασκευής είναι πλέον απλή.

Σ145

Ο βαρόνος ξέχασε μια λεπτομέρεια: είναι αδύνατον να αλλάξει η διεύθυνση κίνησης ενός σώματος χωρίς αυτό να δεχτεί τη δράση εξωτερικής δύναμης από κάποιο άλλο σώμα.

Στο μαυροπίνακα II

Αν η ένστασή σας είναι ότι η διχοτόμος και η μεσοκάθετη τέμνονται έξω από το τρίγωνο ABC ενώ τα σημεία P και Q ανήκουν στις πλευρές του (Σχήμα 9), έχετε άδικο. Όπως και προηγουμένως, $|AN| = |NC|$ και $|NP| = |NQ|$. Επομένως, τα τρίγωνα ANP και CNQ είναι ίσα και $\angle NAP = \angle NCQ$.



Σχήμα 9

Σχήμα 10

Εκτός αυτού, το τρίγωνο ANC είναι ισοσκελές, και συνεπώς $\angle NAM = \angle NCM$. Αν αφαιρέσουμε ίσες γωνίες από ίσες γωνίες, βρίσκουμε ότι $\angle BAC = \angle BCA$ —δηλαδή, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

Αυτό που συμβαίνει πραγματικά στη γενική περίπτωση είναι ότι η διχοτόμος και η μεσοκάθετη τέμνονται σε ένα σημείο N εξωτερικό του τριγώνου και ότι οι κάθετες από το N προς τις πλευρές BA και BC έχουν τέτοια θέση έτσι ώστε η μία να τέμνει την αντίστοιχη πλευρά στο εσωτερικό της και η άλλη στην προέκτασή της (Σχήμα 10). Σε αυτή την περίπτωση, τα τρίγωνα APN και CNQ είναι και πάλι ίσα, και $\angle NAP = \angle NCQ$. Επίσης, $\angle NAM = \angle NCM$. Όμως, $\angle BAC = \angle NAP - \angle NAM$ και $\angle BCA = 180^\circ - (\angle NCQ + \angle NCM)$. Από αυτή τη σχέση δεν συνεπάγεται ότι οι γωνίες BAC και BCA είναι ίσες.

Ωστόσο, δεν πρέπει να μείνετε ικανοποιημένοι με αυτή την εξήγηση. Πρέπει να αποδείξουμε ότι τα στοιχεία του τριγώνου έχουν πράγματι τη θέση που απεικονίζει το Σχήμα 10 (ή, αντίστροφα, ότι $Q \in [BC]$ και $P \in [AB]$).

Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC και υποθέτουμε ότι $|AB| > |BC|$. Βάσει μιας ιδιότητας των εγγεγραμμένων γωνιών, η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει το τόξο AC στο μέσον. Η μεσοκάθετη της πλευράς AC διέρχεται από το ίδιο σημείο. Άρα, το N είναι το μέσον του τόξου AC . Αφού $|AB| > |BC|$, το τόξο $AB >$ το τόξο BC . Αν προσθέσουμε τα ίσα τόξα AN και NC και στα δύο μέλη αυτής της ανισότητας, καταλήγουμε στην τόξο $BAN >$ τόξο BCN . Συνεπώς, το τόξο BAN είναι μεγαλύτερο από το ημικύκλιο και το τόξο BCN είναι μικρότερο. Έτσι, $\angle NCB$ είναι αμβλεία και $\angle NAB$ οξεία. Επομένως, το σημείο Q ανήκει στην προέκταση της πλευράς BC και το σημείο P στην



Σχήμα 11

πλευρά AB .

Πρόβλημα 1. Η υπόθεση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το τρίγωνο είναι αβάσιμη. Πράγματι, στη γεωμετρία του Lobachevsky, όπου το αξίωμα των παραλλήλων δεν ισχύει, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180° και η διαφορά μεταξύ των 180° και του άθροισματος των γωνιών του τριγώνου είναι ανάλογη με το εμβαδόν του. Συνεπώς, όσο περισσότερο το άθροισμα των γωνιών προσεγγίζει τις 180° , τόσο μικρότερο είναι το εμβαδόν του τριγώνου.

Πρόβλημα 2. Ελέγξτε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το διάγραμμα του Σχήματος 11.

Πρόβλημα 3. Αποδείξαμε, ορθότατα, ότι τα τμήματα $A_i A_{i+1}$ και $B_i B_{i+1}$ δεν τέμνονται. Όμως, αν $i \neq j$, τα $A_i A_{i+1}$ και $B_j B_{j+1}$ μπορεί να τέμνονται.

Πρόβλημα 4. Αν ο μεγάλος κύκλος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, ο μικρός αναπόφευκτα θα ολίσθησε. Επομένως, το τμήμα CD δεν είναι ίσο με την περιφέρεια του μικρού κύκλου.

Πρόβλημα 5. Η ακολουθία των κυματοειδών καμπυλών προσεγγίζει πράγματι το τμήμα AB . Όμως, αυτό το γεγονός δεν συνεπάγεται ότι η ακολουθία των μηκών τους τείνει στο μήκος του τμήματος AB .

Πρόβλημα 6. Υποθέσαμε σιωπηρά ότι είναι δυνατόν να αναπτύξουμε (ξετυλίξουμε) τα μικρά σφαιρικά τρίγωνα στο επίπεδο και χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του εμβαδού ενός επίπεδου τριγώνου. Στην πραγματικότητα, είναι αδύνατον να αναπτύξουμε στο επίπεδο ένα σφαιρικό τρίγωνο. Στην περίπτωσή μας, αυτό έπειται από το γεγονός ότι τα σφαιρικά μας τρίγωνα έχουν δύο ορθές γωνίες — κάτι αδύνατο για ένα επίπεδο τρίγωνο.

Gradus

2. Συμπληρώνουμε τα δύο τετρά-

γωνα ταυτόχρονα, δουλεύοντας όπως στο Πρόβλημα 1:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 6y + 17 \\ = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 8 \\ = (x - 4)^2 + (y + 3)^2 - 8. \end{aligned}$$

Όπως και προηγουμένως, η ελάχιστη τιμή είναι -8 και επιτυγχάνεται όταν $x = 4$ και $y = -3$.

3. Γνωρίζουμε ότι η έλλειψη

$$a(x - h)^2 + b(y - k)^2 = c$$

έχει κέντρο το σημείο (h, k) .

Μπορούμε να γράψουμε τη δεδομένη εξίσωση με αυτή τη μορφή συμπληρώνοντας τα τετράγωνα:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 6y^2 - 24x + 12y \\ = 4(x^2 - 6x) + 6(y^2 + 2y) = 20, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 6x + 9) + 6(y^2 + 2y + 1) \\ = 4(x - 3)^2 + 6(y + 1)^2 = 62. \end{aligned}$$

Αρα, το κέντρο της έλλειψης βρίσκεται στο $(3, -1)$. Σε ποι προχωρημένες εργασίες που χρησιμοποιούν και γραμμική άλγεβρα, αυτή η τεχνική γενικεύεται σε εξαιρετικό βαθμό.

4. Αν συμπληρώνουμε το τετράγωνο θα πάρουμε

$$\left(x + \frac{19}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{99}{2} \right)^2 + r - \frac{5081}{2} \geq 0.$$

Επομένως, το μικρότερο r με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι το $5081/2$.

5. Δεν υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις. Αφού στη συνάρτησή μας εμφανίζονται τετράγωνα πραγματικών αριθμών (άλλωστε όλα τα προβλήματα αυτής της στήλης αφορούν τετράγωνα πραγματικών αριθμών!), ας εξετάσουμε τους αριθμούς 0 και 1, οι οποίοι έχουν διαφορετική συμπεριφορά όταν υψώνονται στο τετράγωνο.

Αν υπήρχαν τέτοιες συναρτήσεις, θα είχαμε $f(0) - f^2(0) \geq 1/4$ και $f(1) - f^2(1) \geq 1/4$. Αν συμπληρώσουμε το τετράγωνο, βρίσκουμε ότι $(f(0) - 1/2)^2 \leq 0$ και $(f(1) - 1/2)^2 \leq 0$. Τότε, όμως, $f(0) = 1/2 = f(1)$, και επομένως η f δεν είναι 1-1.

6. Ας υποθέσουμε ότι τα $a - b^2$, $b - c^2$, $c - a^2$ είναι όλα μεγαλύτερα του $1/4$. Τότε

$$\begin{aligned} (a - b^2) + (b - c^2) + (c - a^2) > \\ > 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4, \end{aligned}$$

η

$$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c < -3/4.$$

Αν συμπληρώσουμε τα τετράγωνα βρίσκουμε ότι η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(a - 1/2)^2 + (b - 1/2)^2 + (c - 1/2)^2 < 0,$$

που προφανώς δεν ισχύει.

9. Οπως και στο Πρόβλημα 8, έχουμε

$$\begin{aligned} 4a^4 + b^4 \\ = 4a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 \\ = (2a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 \\ = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2). \end{aligned}$$

10. Οταν το n είναι άριτο, ο δεδομένος αριθμός είναι επίσης άριτος (και μεγαλύτερος του 2) και επομένως, σύνθετος. Αν το n είναι περιττό, μπορούμε να γράψουμε

$$4^n + n^4 = 4 \left(2^{\frac{n-1}{2}} \right)^4 + n^4.$$

Αν θέσουμε

$$a = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

και $b = n$, τότε βάσει του Προβλήματος 9 παίρνουμε την επιθυμητή παραγοντοποίηση. Πρέπει μόνο να ελέγξουμε αν ο μικρότερος από αυτούς τους δύο παράγοντες είναι διάφορος του 1. Πράγματι, ο παράγοντας αυτός είναι ο

$$\left(2^{\frac{n-1}{2}} - n \right)^2 + 2^{n-1},$$

και, για $n \geq 3$, είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερος του 1.

11. Έπειτα από πράξεις βρίσκουμε

$$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2,$$

απ' όπου έχουμε

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

η

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

που προφανώς αληθεύει. Όπως και στο Πρόβλημα 7, το τετράγωνο είναι ήδη συμπληρωμένο.

13. Η παράσταση είναι κάπως παράξενη. Το αριστερό μέλος εξαρτάται από το c ενώ το δεξί όχι. Ας αρχίσουμε από το αριστερό μέλος. Αν εργαστούμε όπως στο Πρόβλημα 12 έχουμε

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ = (1/2)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \end{aligned}$$

Πώς θα εξαλείψουμε τώρα το c από αυτή την παράσταση; Επισημαίνουμε ότι

$$(b-c) + (c-a) = (b-a),$$

και μπορούμε, επομένως, να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 11 για να διαπιστώσουμε ότι

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 \geq (1/2)(b-a)^2.$$

Έχουμε συνεπώς ότι

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ = (1/2)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ \geq (1/2)[(a-b)^2 + (1/2)(a-b)^2] \\ = (3/4)(a-b)^2. \end{aligned}$$

14. Αν κάνουμε τις πράξεις στο δεξί μέλος οδηγούμαστε στην πρόταση του Προβλήματος 12.

15. Οι αναγνώστες μπορεί να έχουν ήδη υποπτευθεί αυτό το γενικό αποτέλεσμα. Η απόδειξη μοιάζει με αυτή του Προβλήματος 10 και είναι απλή.

16. (Λύση ΙΙ) Έχουμε την παράσταση

$$S = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz.$$

Μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο από τους δύο πρώτους όρους αν αφαιρέσουμε το $2x^2y^2$ και άλλο ένα από το z^4 αν αφαιρέσουμε το $2z^2 - 1$:

$$\begin{aligned} S = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + z^4 - 2z^2 + 1 \\ - 4xyz + 2x^2y^2 + 2z^2 - 1. \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε όλα τα τετράγωνα που χρειαζόμαστε, αφού

$$S = (x^2 - y^2)^2 + (z^2 - 1)^2 + 2(xy - z)^2 - 1.$$

Βρίσκουμε, και πάλι, ότι η ελάχιστη τιμή είναι το -1 που επιτυγχάνεται για τις ίδιες τιμές των x, y, z , όπως προηγουμένως.

17. Η στρατηγική μας θα είναι ό-

μοια με αυτή του Προβλήματος 12 (και μερικών άλλων σε αυτό το άρθρο): μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σε ένα διαφορετικό στο οποίο ζητούμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα μιας ομάδας όρων είναι μη αρνητικό και στη συνέχεια εκφράζουμε το άθροισμα αυτό ως άθροισμα τετραγώνων. Έτσι, η δεδομένη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} a_1 - 2\sqrt{a_1 - 1^2} + a_2 - 2\cdot 2\sqrt{a_2 - 2^2} \\ + \dots + a_n - 2n\sqrt{a_n - n^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ένα τυπικό ζεύγος όρων του αριστερού μέλους είναι το

$$a_k - 2k\sqrt{a_k - k^2}.$$

Ας προσπαθήσουμε να το μετατρέψουμε σε τέλειο τετράγωνο. Αν το τετράγωνο αυτό είναι το $A^2 - 2AB + B^2$, η εξέταση του όρου με το ριζικό μάς οδηγεί να θέσουμε $A = \sqrt{a_k - k^2}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} a_k - 2k\sqrt{a_k - k^2} \\ = a_k - k^2 - 2k\sqrt{a_k - k^2} + k^2 \\ = (\sqrt{a_k - k^2} - k)^2. \end{aligned}$$

Αυτό ισχύει για κάθε k , και επομένως το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1) είναι ένα άθροισμα τετραγώνων οπότε δεν μπορεί να είναι αρνητικό. ◻

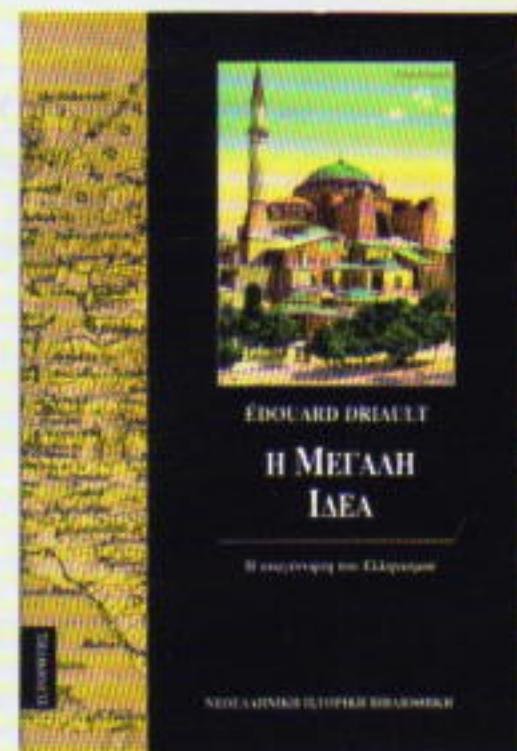
⇒ Συνέχεια από τη σελ. 31

Φ145

Ηλιόλουστα ψήγματα. Κάθε τετραγωνικό μέτρο της επιφάνειας ενός σώματος που έχει θερμανθεί μέχρι θερμοκρασίας T ακτινοβολεί ανά μονάδα χρόνου ισχύ $A = 5,67 \cdot 10^{-8} T^4 W$. Σε ποια απόσταση R από τον Ήλιο θα τακούν ψήγματα σιδήρου αν η πυκνότητα ενεργειακής ροής της ηλιακής ακτινοβολίας —η ανά μονάδα χρόνου προσπίπτουσα ενέργεια σε επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού— στην τροχιά της Γης ισούται με $J_0 = 1.400 W/m^2$. Το σημείο τήξεως του σιδήρου είναι $T_0 = 1.535 K$. δίνεται η απόσταση Γης-Ήλιου $R_0 = 1.5 \cdot 10^{11} m$. (A. Stasenko)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ
ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 55

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Édouard Driault

Η ΜΕΓΑΛΗ ΙΔΕΑ

Η αναγέννηση του Ελληνισμού

Ο Édouard Driault (1864-1947), καθηγητής της ιστορίας στη Σορβόνη, στο βιβλίο του *Η Μεγάλη Ιδέα* παρουσιάζει τη διαχρονική πορεία του ελληνισμού ως κυματοθραύστη των εκάστοτε βαρβαρικών επιδρομών και ως φύλακα αγγέλου του ευρωπαϊκού πνεύματος. Η παρουσιάση αυτή συνδυάζεται με τους παρεμφερούς σημασίας αγώνες του Γαλλικού λαού κατά του παγγερμανισμού. Κύριο μέλημα του συγγραφέα είναι η τόνωση των δεσμών φιλίας Γαλλίας και Ελλάδας σε μια κρίσιμη εποχή, που η πρώτη έχει αρχίσει να ερωτοτροπεί με την Τουρκία για να εξασφαλίσει τα οικονομικά συμφέροντά της στην Ανατολή μετά τον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο. Οι διαλέξεις του — που δόθηκαν σε συναισθηματικά φορτισμένο κοινό — διαπνέονται από τις αρχές της ρομαντικής ιστορικής σχολής: Παράλληλα με τις δυνάμεις τις βάρβαρες και τις σκοταδιστικές, υπάρχουν και άλλες δυνάμεις με ανθρωπιά και πολιτισμό, που πασχίζουν να νικήσουν τις πρώτες και να επιβάλουν στον κόσμο την ειρήνη και την ευτυχία.

Σελ.: 296, Εικ.: A/M, 14 x 21 εκ., 5.800 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Η ιστορία μιας πτώσης

«Θα κοιτάξετε βαθιά μέσα στις ψυχές μας, και στοιχηματίζω όπι θα θυμηθείτε πως κι εμείς είμαστε άνθρωποι, όπι αγαπάμε και υποφέρουμε όπως όλοι πάνω στη γη! Εγώ διατύπωσα την κύρια ιδέα του έργου. Αλλά εσείς θα κρίνετε πόσο καλά το παρουσιάζουμε. Μα, ας αρχίσουμε!»

—Πρόλογος από την όπερα Παλιάτσοι του Ρουτζέρο Λεονκαβάλλο

Leonid Guryashkin και Albert Stasenko

ΕΔΩ ΞΕΚΙΝΑ Η ΜΙΚΡΗ ΜΑΣ ΤΡΑΓΩδία, η οποία περιλαμβάνει έξι πράξεις κι έναν επίλογο.

Πράξη 1: Μια όχι εύκολη γέννα

Φαίνεται σαν να μην υπάρχει τίποτε πιο εύκολο στον κόσμο από το να σχηματίσουμε μερικές σταγόνες αζώτου. Απλώς θα ρίξουμε λίγο υγρό άζωτο σε ένα τενεκεδένιο δοχείο με μια μικρή τρύπα στον πάτο, και οι σταγόνες θα πέφτουν μία μία —σαν το νερό από το στόμιο της βρύσης που στάζει. Λοιπόν, το επιχειρήσαμε, αλλά φευ —το άζωτο γλιστρούσε σε λεπτό στρώμα κατά μήκος του στρώματος ατμών αζώτου που είχε σχηματιστεί στα τοιχώματα του τενεκεδένιου δοχείου και χανόταν. Βλέπετε, τα τοιχώματα αυτά, που βρίσκονταν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος ($T = 300 \text{ K}$), λειτούργησαν σαν πυρωμένος φούρνος συγκριτικά με το υγρό άζωτο ($T' = 77 \text{ K}$). Θα μπορούσαμε βέβαια να περιένουμε ώσπου να σχηματιστεί στο εξωτερικό του δοχείου ένα επιστρώμα από συμπυκνωμένους ατμούς νερού και διοξειδίου του άνθρακα —συστατικά του αέρα—, αλλά μέχρι τότε θα σπαταλούσαμε μεγάλη ποσότητα αζώτου. Για να αποφύγουμε κάτι τέτοιο, θα

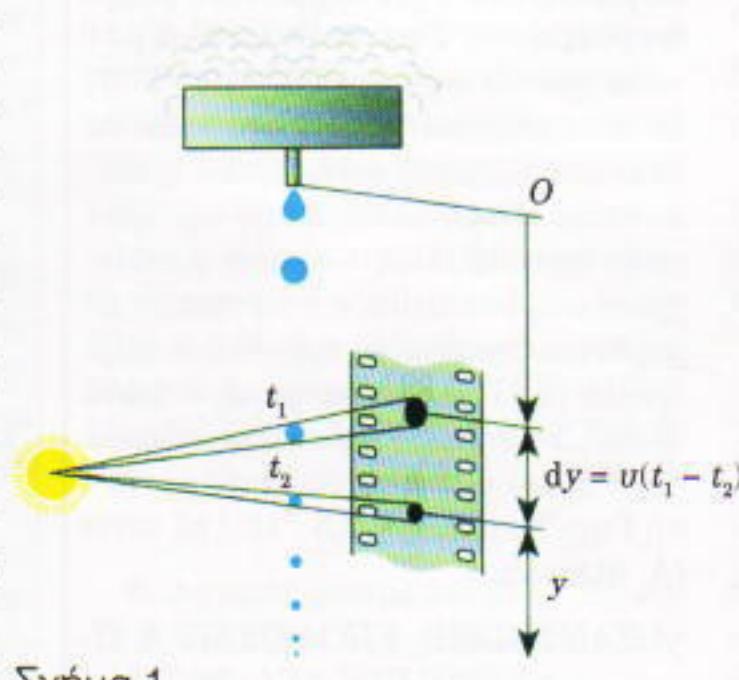
μπορούσαμε να επινοήσουμε ένα είδος βαλβίδας. Ή, πάλι, θα μπορούσαμε... Λοιπόν, νά τι κάναμε: προσαρμόσαμε στην τρύπα του δοχείου έναν κατακόρυφο σωλήνα μήκους 1 cm περίπου, τον γεμίσαμε με μια πορώδη ουσία που έφτανε γρήγορα στη θερμοκρασία του υγρού αζώτου, και αφήσαμε το υγρό άζωτο να στάζει από τα χείλη του σωλήνα με μέσο ρυθμό δύο σταγόνες ανά δευτερόλεπτο (Σχήμα 1).

Καθώς οι σταγόνες έπεφταν ελεύθερα στον αέρα, έχοντας αρχική διάμετρο 2 mm περίπου, φροντίσαμε να περνούν ανάμεσα από μια στροβοσκοπική πηγή φωτός και ένα φωτο-

γραφικό φίλμ, πάνω στο οποίο αποτυπωνόταν η οκιά τους. Η διάρκεια των φωτεινών αναλαμπών ήταν πολύ μικρή —μόνο ένα εκατομμυριοστό του δευτερολέπτου. Έτσι εξηγείται γιατί το περίγραμμα των αποτυπώμάτων ήταν εξαιρετικά σαφές —στη διάρκεια ενός τόσο σύντομου χρονικού διαστήματος τόσο οι σταγόνες όσο και η εικόνα της μόνιμης ροής τους δεν άλλαζαν σχεδόν καθόλου.

Στο Σχήμα 2 φαίνεται το αποτύπωμα πάνω στο φίλμ μιας εκ των πολλών σταγόνων αζώτου, και στο Σχήμα 3 μια «έγχρωμη» εκδοχή του. Μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε την «ουρά» της σταγόνας, που οφείλεται στη διαφορά πυκνότητας μεταξύ του περιβάλλοντος αέρα και της ψυχρής μάζας αζώτου που εξατμίζεται από την επιφάνεια της σταγόνας. (Με κατάλληλο φωτισμό μπορείτε να παρατηρήσετε μια παρόμοια ουρά αν διαλύσετε έναν κύβο ζάχαρης σε ένα ποτήρι με νερό.)

Εκτελέσαμε επίσης πειράματα με σταγόνες νερού ίδιου μεγέθους —οι σταγόνες δεν σχημάτιζαν καμιά απολύτως ουρά πάνω στο φίλμ. Ο λόγος είναι προφανής. Ο αέρας και το νερό είχαν θερμοκρασίες περίπου ίσες —και απήχαν πολύ από το σημείο βρασμού—, οπότε ο



Σχήμα 1

Act 1. Nitrogen
It seems to be nothing more simple than to make a nitrogen drop: just pour some liquid nitrogen into a tin with a small hole, and drops will fall one by one on water out of a holey tinware.

There was an attempt but... nothing of that kind, nitrogen poured out by a thin stream sliding along the tray of its own evaporation formed at the walls of the "no. You see these walls with almost room temperature ($T = 300K$) were "left" by nitrogen

77K at a white incandescence. We could see a fur-capped condensate above water, and liquid cold gas from which grow on the outer surface of a tin, but meanwhile too much nitrogen would pour out, for nitrogen does not pour out one could invent some kind of a valve, or one could. But we fixed the hole

up with a vertical tube, about 1 cm long (figure 1) and filled with some porous substance which ensured the temperature of liquid nitrogen and transmitted liquid nitrogen with the average speed of 2 drops per second.

Falling free in the air, these drops with initial diameter about 2 mm, flew past verti-



the picture looks quite clear — during such a small period of time the drop itself and the picture of no stream-line has hardly changed.

Figure 2 a shows one of many pictures of nitrogen drops, and figure 2 b — the result of its processing in the arbitrary colors by a computer, which can "paint" the image of a white photograph according to a pattern of a painter's palette. On these pictures showing one can clearly see the trace after a drop. It is necessary due to sharp decrease in density of liquid nitrogen, which evaporates from the surface of a drop (an analogous trace can be seen in the outgoing light beamed through a glass of water with a lump of dissolving sugar placed being sunk on an edge of a spoon).

There were experiments with trillions of water droplets of the same size — there were no traces left by them on the film. The reason is clear. The dimensions of air molecules are almost 10^{-10} meters and are far from the boiling point, so the velocity of evaporation of a drop of water at room temperature is very small. While in damp air the drops don't evaporate at all, and more of that, they may even grow due to condensation (remember how long the drops of dew or rain hang on the trees and grass, and a drop of water on a saucer can be easily observed). It should be noted that air is an alien "gas" for a drop of

water, unless it is a most a bosom-friend for a nitrogen drop (because nitrogen is one of the basic components of the air). So, what can we learn about the motion of a nitrogen drop? First, its "portrait" (figure 2 a) is able to show the case of a falling drop with a radius

($\rho_0 = 200 \text{ kg/m}^3$ is the density of liquid nitrogen) and the area of its surface $S = 4\pi r^2$. Second, as the period Δt between the flashes is known, we can easily find its velocity $v = \Delta y / \Delta t$ from the shift of successive pictures of the same drop. Then, changing the height of a drop, one can find experimentally the dependence of velocity on the function of time during the fall.

The results of the movement are shown on figure 3 by dots. One can see the scattering of experimental points, which result from the limited accuracy of measurements. In any experiment (the errors of velocity are shown as error bars). The velocity increases with time, but it increases more slowly, then it decreases after passing through a maximum point.

Now we want to explain theoretically the results obtained, which will enable us to describe the characteristic periods in the life of a falling drop.

It's clear that the force of air resistance acting

upon a moving body depends on its relative velocity. At least it is absent at zero velocity, and while the Newtonian drop still moves slowly, this force of air resistance can be neglected. Then its movement is influenced only by the force of gravity, so the drop will be uniformly accelerated, and every schoolchild is an expert in such a motion:

$$v^{(1)} = gt = \sqrt{2gy^{(1)}}.$$

$$y^{(1)} = \frac{gt^2}{2}$$

The upper zero here indicates that the estimate corresponds to zero force of resistance. In figure 2 this dependence of velocity from height is shown by dot-and-dash line. The dashed line is the curve of parabola $y = \frac{1}{2}gt^2$.

Act 2. Inevitable Breaking

As the drop accelerates, the air resistance becomes more and more appreciable. How this force can be estimated?

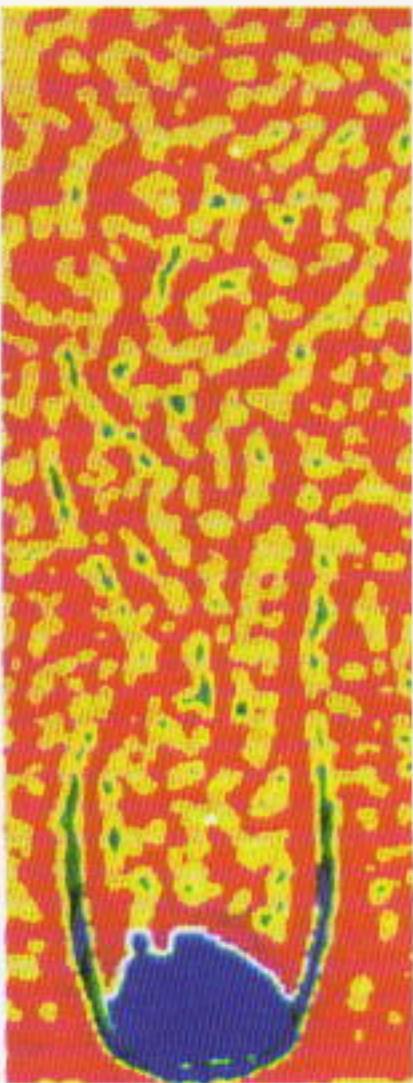
Many a time it was shown that the force of air resistance affecting the moving body (the aerodynamic force) is proportional to air density, to square of its size (or the area of its cross section) and to square of velocity.

$$F_a = -C_d \rho A v^2$$

This formula can be obtained from the dimensional analysis. The sign minus accounts for the force being directed opposite to velocity, whereas the dimensionless coefficient C_d , broadly speaking, depends on velocity, but this dependence is



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ρυθμός εξάτμισης των υδάτινων σταγόνων ήταν πολύ μικρός. Όταν μάλιστα ο καιρός είναι υγρός, οι σταγόνες νερού δεν εξατμίζονται καθόλου — αντίθετα, μπορούν να αυξηθούν σε μέγεθος εξαιτίας της συμπύκνωσης. (Θα έχετε πθανώς προσέξει πόσο μεγάλες είναι οι σταγόνες της δροσιάς ή της βροχής στα φύλλα των δέντρων ή στο

λαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών αναλαμπών φωτός, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ταχύτητά της $u = \Delta y / \Delta t$ (Δy είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών αποτυπωμάτων της ίδιας σταγόνας). Τέλος, τοποθετώντας το «σταγονόμετρό» σε συνεχώς διαφορετικά ύψη, μπορούμε να προσδιορίσουμε πειραματικά πώς μεταβάλλεται η ακτίνα και η ταχύτητα της σταγόνας κατά την πτώση της σε συνάρτηση με το y : $r(y)$ και $u(y)$.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων σημειώνονται ως μικροί κύκλοι στο Σχήμα 4. Παρατηρήστε ότι υπάρχει μια διάχυση των πειραματικών σημείων — γεγονός που οφείλεται στην περιορισμένη ακρίβεια των μετρήσεων σε οποιοδήποτε πείραμα (τα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα απεικονίζουν τα σφάλματα στη μέτρηση της ταχύτητας). Στο Σχήμα 4 φαίνεται ότι το μέγεθος κάθε σταγόνας αζώτου μειώνεται μονοτονικά, ενώ η ταχύτητά της αρχικά αυξάνεται και, αφού λάβει μια μέγιστη τιμή, στη συνέχεια ελαττώνεται.

Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε θεωρητικά τα παραπάνω πειραματικά αποτελέσματα. Και αυτό θα μας διευκολύνει να διακρίνουμε και να γνω-

γρασίδι.) Θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο αέρας αποτελεί ξένο «αέριο» για μια σταγόνα νερού, ενώ είναι «φίλος επιστήθιος» με τη σταγόνα αζώτου (επειδή το άζωτο αποτελεί βασικό συστατικό του αέρα).

Τι μπορούμε, λοιπόν, να μάθουμε για τη ζωή μιας σταγόνας αζώτου από το «πορτρέτο» της πάνω στο φίλμ; Πρώτον, μπορούμε να μετρήσουμε το μέγεθος της σταγόνας (τη μέση ακτίνα της r) —άρα να υπολογίσουμε τη μάζα της $m = (4/3)\pi r^3 \rho_0$ ($\rho_0 = 800 \text{ kg/m}^3$ είναι η πυκνότητα του υγρού αζώτου) και το εμβαδόν της επιφάνειάς της $S = 4\pi r^2$. Δεύτερον, αφού γνωρίζουμε το χρονικό διάστημα Δt που μεσο-

ρίσουμε τα χαρακτηριστικά στάδια στη ζωή μιας πίπτουσας σταγόνας υγρού αζώτου.

Πράξη 2: Συνεχής επιτάχυνση

Είναι προφανές ότι η αντίσταση που ασκεί ο αέρας σε ένα κινούμενο σώμα εξαρτάται από τη σχετική του ταχύτητα. Δεν υπάρχει όταν η ταχύτητα είναι μηδενική για όσο χρόνο δε η «νεότοκος» σταγόνα κινείται αργά, η αντίσταση του αέρα μπορεί να αγνοθεί. Έτσι, η κίνησή της επηρεάζεται μόνο από τη δύναμη της βαρύτητας, οπότε η σταγόνα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση — και γνωρίζετε τα πάντα γι' αυτό το είδος κίνησης (ελπίζουμε!):

$$u^{(0)} = gt = \sqrt{2gy^{(0)}}$$

$$y^{(0)} = \frac{gt^2}{2}.$$

Ο εκθέτης (0) δηλώνει ότι ο παραπάνω υπολογισμός ισχύει για την περίπτωση που η αντίσταση του αέρα είναι μηδενική. Αυτή η εξάρτηση της ταχύτητας από το ύψος απεικονίζεται στο Σχήμα 4 με την πράσινη γραμμή και εξηγεί την πειραματική καμπύλη μόνο για το αρχικό τμήμα OA .

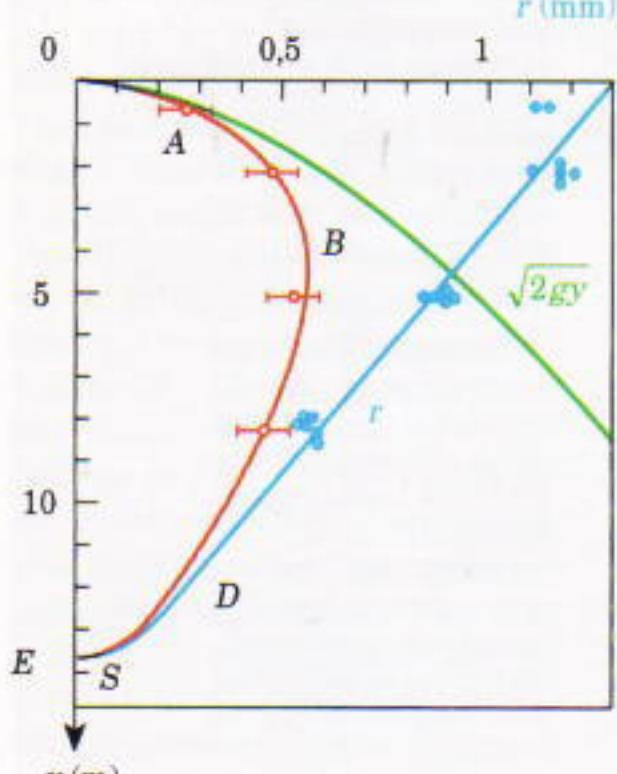
Πράξη 3: Αναπόφευκτο φρενάρισμα

Καθώς η σταγόνα επιταχύνεται, η αντίσταση του αέρα γίνεται όλο και πιο «αισθητή». Πώς όμως μπορεί να περιγραφεί η δύναμη αυτή;

Θα έχετε ακούσει ξανά και ξανά να λέγεται ότι η αντίσταση του αέρα που αναπτύσσεται σε ένα κινούμενο σώμα (δηλαδή, η αεροδυναμική αντίσταση) είναι ανάλογη της πυκνότητας του αέρα, του τετραγώνου του μεγέθους του σώματος (εννοούν, ακριβέστερα, του εμβαδού της μέγιστης διατομής του σώματος κάθετα προς το ρεύμα του αέρα) και, τέλος, του τετραγώνου της ταχύτητάς του:

$$F_a = -C_d \rho \pi r^2 u^2.$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να προκύψει με διαστατική ανάλυση. Το αρνητικό πρόσημο υπεισέρχεται επειδή η εν λόγω δύναμη έχει κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας: ο αδιάστατος συντελεστής C_d εξαρτάται, εν γένει,



Σχήμα 4

από την ταχύτητα, αλλά η εξάρτηση είναι ασθενής και μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά ή με πολύπλοκους θεωρητικούς υπολογισμούς.

Πλην των ανωτέρω θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και την ακόλουθη επιχειρηματολογία. Η ροή μάζας ($\Delta m / \Delta t$) αέρα που κινείται μέσα σε κύλινδρο του οποίου η διατομή ισούται με εκείνη της στρογγυλής σταγόνας (πr^2) είναι $\rho u \pi r^2$. Η μονάδα μάζας θα μεταφέρει ορμή $u \Delta m / \Delta t = u$ οπότε, η ολική ροή ορμής ($\Delta J / \Delta t$) στον κύλινδρο θα είναι $\rho u \pi r^2 u = \rho \pi r^2 u^2$. Βέβαια, οι ρευματικές γραμμές του αέρα καμπύλωνται λίγο καθώς ρέουν γύρω από τη σταγόνα —συνέπεια: στον τύπο εμφανίζεται ο συντελεστής C_a , ο οποίος περικλείει κάθε χαρακτηριστικό της ροής που δεν μπορούμε να εξετάσουμε εδώ.

Έτσι, λοιπόν, λαμβάνοντας υπόψη μας την αεροδυναμική αντίσταση, η εξίσωση για την κίνηση της σταγόνας (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) γράφεται ως εξής:

$$m \frac{du}{dt} = mg - C_a \rho \pi r^2 u^2. \quad (1)$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τη μάζα της σταγόνας $m = (4/3)\pi r^3 \rho_0$, παίρνουμε

$$\frac{du}{dt} = g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u^2}{r}, \quad (2)$$

που σημαίνει ότι η επιτάχυνση της σταγόνας αποτελείται από δύο μέρη: την επιτάχυνση g λόγω βαρύτητας και μια αρνητική επιτάχυνση (επιβράδυνση) που συνδέεται με την αεροδυναμική αντίσταση.

Η εξίσωση (2) μπορεί να γραφεί και με άλλο τρόπο. Το χρονικό διάστημα dt μπορούμε να το εμφανίσουμε ως πηλίκο του διαστήματος dy διά της ταχύτητας u με την οποία αυτό διανύθηκε: $dt = dy/u$. Επομένως,

$$\frac{du}{dt} = u \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{u^2}{2} \right).$$

Άλλα η σχέση αυτή εκφράζει τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας ως προς την απόσταση. Οπότε η εξίσωση (2) μπορεί να γραφεί

$$d \left(\frac{u^2}{2} \right) = \left(g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u^2}{r} \right) dy, \quad (3)$$

και η ολοκλήρωσή της ίσως σας φαίνεται παιχνιδάκι. Ωστόσο θα πρέπει τώρα να θυμηθούμε ότι το μέγεθος της σταγόνας μεταβάλλεται με την απόσταση γι' αυτό και γράψαμε $r(y)$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης. Η παραπάνω εξίσωση, λοιπόν, μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: η μεταβολή της ειδικής κινητικής ενέργειας της σταγόνας οφείλεται στο έργο που παράγουν τόσο η δύναμη της βαρύτητας όσο και η αεροδυναμική αντίσταση κατά μια στοιχειώδη μετατόπιση dy .

Πράξη 4: Συνεχής αυτοθυσία και ο κομιοφόνας της δόξας

Είναι προφανές ότι η ακτίνα της σταγόνας είναι μη αρνητική και ότι δεν αυξάνεται με το χρόνο. Τούτο σημαίνει ότι με την αύξηση της ταχύτητας και την ελάττωση του $r(y)$, ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (3) μπορεί να γίνει ίσος, κατ' απόλυτη τιμή, με τον πρώτο όρο σε αυτό ακριβώς το σημείο της τροχιάς η ταχύτητα της σταγόνας θα πάψει να μεταβάλλεται: $du/dy = 0$. Το συγκεκριμένο σημείο σημειώνεται στο Σχήμα 4 με το γράμμα B . Και τώρα πλέον μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του συντελεστή αεροδυναμικής αντίστασης C_a του αέρα, την οποία αγνοούσαμε στη διαδικασία της διαστικής ανάλυσης:

$$0 = g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u_B^2}{r_B},$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$C_a = \frac{4}{3} g \frac{\rho_0}{\rho} \frac{r_B}{u_B^2}.$$

Εισάγοντας τις τιμές $\rho_0 = 800 \text{ kg/m}^3$, $\rho \equiv 1 \text{ kg/m}^3$ και $g \equiv 10 \text{ m/sec}^2$ στον παραπάνω τύπο, και δεδομένου ότι οι τιμές για την ταχύτητα και την ακτίνα της σταγόνας προκύπτουν από τα Σχήματα 2 και 3 ($r_B \equiv 0,9 \text{ mm} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $u_B \equiv 5 \text{ m/s}$), λαμβάνουμε $C_a \equiv 0,4$.

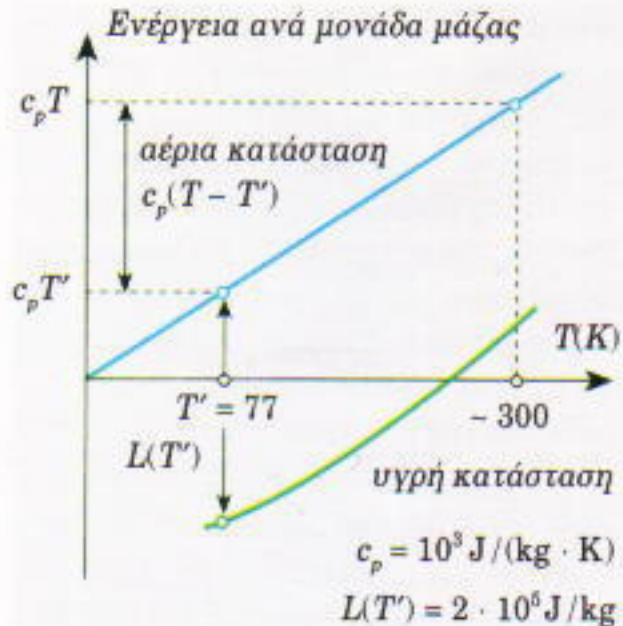
Τι συμβαίνει όμως μετά το σημείο B ? Η ταχύτητα της σταγόνας πρέπει να ελαττώνεται, και πιθανώς να έχετε

ήδη μαντέψει το γιατί. Το βάρος της σταγόνας είναι ανάλογο με τη μάζα της —δηλαδή με τον κύβο της ακτίνας της (r^3) — ενώ η αεροδυναμική αντίσταση είναι ανάλογη με το εμβαδόν της διατομής της —δηλαδή με το τετράγωνο της ακτίνας της (r^2) —, με αποτέλεσμα η δύναμη της βαρύτητας να ελαττώνεται ταχύτερα από την αεροδυναμική αντίσταση καθώς η ακτίνα μειώνεται. Συνεπώς μετά το σημείο B η σταγόνα αρχίζει να επιβραδύνεται.

Ας μείνουμε τώρα στο ζήτημα της μεταβολής της ακτίνας της σταγόνας. Ο λόγος για τον οποίο μειώνεται είναι απόλυτα σαφής: η θερμική ενέργεια του αέρα που την περιβάλλει εξαερώνει τα εξώτερα στρώματά της. Άλλα ας προσπαθήσουμε να τα πούμε αυτά και μαθηματικά!

Αρχικά θα προσδιορίσουμε τη θερμική ενέργεια που μεταφέρεται στη σταγόνα. Η αέρια μάζα που περιρρέει την κινούμενη σταγόνα είναι περίπου $\rho u \pi r^2$. Πρόκειται για τη μάζα του αέρα που προσδίδει συνεχώς θερμότητα στη σταγόνα. Η μονάδα μάζας οποιασδήποτε ουσίας περικλείει (εσωτερική) ενέργεια, που αποτελείται από την κινητική ενέργεια των μορίων λόγω της χαοτικής τους κίνησης και τη δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης τους. Αν υποθέσουμε ότι ο αέρας που περιβάλλει τη σταγόνα αποτελεί ιδανικό αέριο, μπορούμε να πούμε ότι η ενέργειά του ανά μονάδα μάζας θα ισούται με $c_p T$, όπου c_p η ειδική θερμότητα του αέρα υπό σταθερή πίεση (στο ιδανικό αέριο η ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης των μορίων του είναι μηδενική). Η μονάδα μάζας των ατμών που σχηματίζονται λόγω εξατμίσης της σταγόνας (η οποία βρίσκεται σε θερμοκρασία T'), θα περιέχει ενέργεια $c_p T'$, ενώ στη συμπυκνωμένη μορφή (δηλαδή, σε υγρή κατάσταση) η αντίστοιχη τιμή θα είναι $c_p T' - L(T')$, όπου $L(T')$ η ειδική (ή λανθάνουσα) θερμότητα εξαέρωσης του υγρού —η οποία περιλαμβάνει τη δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης των μορίων.

Στο Σχήμα 5 απεικονίζεται η εξάρτηση της ενέργειας ανά μονάδα μάζας από τη θερμοκρασία για το άζωτο, τόσο στην αέρια κατάστασή του (η ευθεία γραμμή) όσο και στην υγρή (η



Σχήμα 5

κάτω καμπύλη). Τις καμπύλες αυτές μπορούμε να σχεδιάσουμε βάσει πειραματικών δεδομένων. Στην παρούσα θεώρησή μας, όμως, αρκούν οι τιμές των c_p και L που σημειώνονται στο σχήμα, και οι οποίες θα φανούν χρήσιμες στους επόμενους υπολογισμούς μας.

Επομένως, σε χρονικό διάστημα dt η θερμική ενέργεια που μεταφέρεται στη σταγόνα αζώτου είναι $\rho u \pi r^2 c_p(T - T')$ περίπου, και καταναλώνεται για την εξαέρωση μάζας dm :

$$-Ldm = C_Q \rho u \pi r^2 c_p(T - T') dt. \quad (4)$$

Πρόκειται και πάλι για τον ίδιο χειρισμό με αυτόν στον υπολογισμό της ροής ορμής (για την αεροδυναμική αντίσταση): εισαγάγουμε έναν αδιάστατο συντελεστή C_Q την ακριβή τιμή του οποίου δεν γνωρίζουμε, και ο οποίος σίγουρα «αποκρύπτει» λεπτομέρειες που προς το παρόν δεν είναι σημαντικές για μας.

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις $dt = dy/u$ και $dm = 4\pi r^2 \rho_0 dr$ στην εξίσωση (4), και παίρνουμε

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{C_Q \rho}{4 \rho_0} \frac{c_p(T - T')}{L}. \quad (5)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας σε σχέση με την απόσταση είναι σταθερός, όπως επιβεβαιώνεται από την ευθεία γραμμή του Σχήματος 4. Από την κλίση της ευθείας μπορούμε να βρούμε τον αδιάστατο συντελεστή C_Q . Και ουσιαστικά, αυτός ακριβώς ήταν ο σκοπός του πειράματος: χρειαζόμασταν στήριξη για μεγαλύτερη ακριβεία στους θεωρητικούς υπολογισμούς μας —διαφορετικά, ας

μας έλειπε! Οι συνεχείς καμπύλες $r(y)$ και $u(y)$ του Σχήματος 4 σχεδιάστηκαν έτσι που να προσαρμόζονται με τον καλύτερο τρόπο στα πειραματικά μας δεδομένα.

Πράξη 5: Ζωή σερνάμενη

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν τη δυναμική ανταλλαγής θερμότητας και μάζας για μεγάλο μέρος της τροχιάς της σταγόνας, αλλά όχι για όλη. Από κάποιο σημείο (που συμβολίζεται με D στο Σχήμα 4) και μετά, οι νόμοι που καθορίζουν τη ζωή της σταγόνας αλλάζουν. Η συνέχεια της βιογραφίας της θα μπορούσε να γραφεί με περισσότερες λεπτομέρειες και με μεγαλύτερη ακρίβεια απ' ό,τι προηγουμένως, αλλά θα έπρεπε να εισαγάγουμε περιπλοκες έννοιες όπως οι συντελεστές ιξώδους (η) και θερμικής αγωγιμότητας (k). Θα μπορούσαμε επίσης να αποσιωπήσουμε αυτό το στάδιο της ζωής της σταγόνας, με το επιχείρημα ότι η ιστορία κάθε ήρωα πρέπει να έχει τις μυστηριώδεις περιόδους της. Εμείς θα συμβιβαστούμε ανάμεσα στις δύο δυνατότητες και θα περιοριστούμε σε μια αδρομερή περιγραφή των βασικών γεγονότων τούτης της περιόδου.

Το πο σημαντικό γεγονός είναι ότι μετά το σημείο D η σταγόνα γίνεται τόσο ελαφριά και μικρή που ο όρος $m(du/dt)$ στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (1) παύει να παίζει οποιοδήποτε σημαντικό ρόλο, και το βάρος mg της σταγόνας εξισορροπείται από την αντίσταση του αέρα. Άλλα και η τελευταία δύναμη αλλάζει, και μάλιστα τώρα εξαρτάται ευθέως ανάλογα από την ταχύτητα, την ακτίνα και ένα νέο μέγεθος —το συντελεστή ιξώδους. Πρόκειται για μια καινούργια δύναμη αντίστασης, με μέτρο που δίνεται από τον τύπο $F_\eta = 6\pi \eta r u$, γνωστή ως δύναμη του Stokes —στην εν λόγω περίπτωση η κίνηση αναφέρεται ως «έρπουσα», επειδή μοιάζει με την αργή καταβύθιση μιας μεταλικής σφαίρας σε μέλι.

Έτσι, μετά το σημείο D ισχύει

$$0 = -6\pi \eta r u + mg,$$

απ' όπου προκύπτει

$$u = \frac{2 \rho_0 g}{9 \eta} r^2. \quad (6)$$

Φτάσαμε σε ένα σημείο που χρειάζεται περισκεψη. Αν κρίνουμε από το Σχήμα 4, η ταχύτητα της σταγόνας εξακολουθεί να ελαττώνεται, οπότε $du/dy \neq 0$ και $du/dt = u(du/dy) \neq 0$, και επίσης η μάζα της m δεν έχει ακόμη μηδενίστει. Ωστόσο, μόλις παραπάνω θέσαμε το $m(du/dt)$ ίσο με 0. Τι ακριβώς συρβαίνει;

Ας θυμηθούμε ότι, αν θελήσουμε, μπορούμε να ρίξουμε μια πέτρα αρκετά μακριά· αδυνατούμε όμως να πράξουμε το ίδιο με μια μπάλα από χνούδι: δεν φτάνει μακριά όσο μεγάλη προσπάθεια κι αν καταβάλουμε και η ταχύτητά της μηδενίζεται σχεδόν αμέσως (με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι δεν φυσάει άνεμος). Οποισδήποτε φυσικός θα σας έλεγε ότι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εξισωθεί η ταχύτητα της χνούδινης μπάλας με την ταχύτητα του αέρα είναι πολύ μικρό λόγω της αμελητέας μάζας της (η οποία αποτελεί μέτρο της αδράνειάς της). Μια ριπή ανέμου θα παρέσυρε μακριά την μπάλα από χνούδι, ενώ ένα ιστιοφόρο για να αναπτύξει λίγη ταχύτητα χρειάζεται σημαντικό χρονικό διάστημα. Όταν, λοιπόν, η σταγόνα μας από άζωτο γίνεται αρκετά μικρή, «συνθίζει» πολύ γρήγορα στις μεταβαλόμενες συνθήκες της ροής και προσαρμόζεται σ' αυτές χωρίς καμιά χρονική υστέρηση. (Προσέξτε, οι συνθήκες αυτές αλλάζουν μόνο εξαιτίας της ελάττωσης της μάζας της σταγόνας —διαφορετικά η σταγόνα θα έπεφτε με σταθερή ταχύτητα.) Όλα αυτά ειπώθηκαν για να δείξουμε το λόγο που οι αδρανειακές ιδιότητες μιας σταγόνας γίνονται αμελητέες στο τέλος της τροχιάς της, γεγονός το οποίο μας επιτρέπει να παραλείψουμε τον όρο $m(du/dt)$ από την εξίσωση.

Μετά το σημείο D , ας υπολογίσουμε τη θερμότητα που προσλαμβάνει η σταγόνα μέσω του μηχανισμού της μεταφοράς. Η θερμότητα που μεταφέρεται στη σταγόνα σε χρόνο dt ισούται με $4\pi r^2 k[(T - T')/r] dt$ περίπου (k είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας): αυτή θα καταναλώθει για την εξαέρωση μάζας αζώτου dm . Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$-L \frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 k \frac{T - T'}{r},$$

από την οποία συναγάγουμε ότι

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) = -\frac{k(T - T')}{L\rho_0} = \text{σταθ.},$$

ή

$$r_D^2 - r^2 \sim t - t_D.$$

Το νόμο αυτό —ο οποίος μας λέει ότι το εμβαδόν της επιφάνειας της εξατμιζόμενης σταγόνας ελαττώνεται ανάλογα με το χρόνο— τον διατύπωσε το 1883 ο B.I. Sreznevsky βασιζόμενος στη διαστατική ανάλυση και σε πολλά πειράματα με σταγόνες από διαφορετικές ουσίες. Αν ουγκρίνουμε την τελευταία εξίσωση με την (6), διαποτώνουμε ότι και η ταχύτητα της σταγόνας ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο· οπότε και η μετατόπιση της σταγόνας (η συντεταγμένη της στον άξονα y) θα μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου (όπως στην περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης): $u \sim \sqrt{y_E - y}$, όπου y_E είναι η απόσταση στην οποία η σταγόνα θα έχει εξαερωθεί πλήρως. Τότε, $r \sim \sqrt[4]{y_E - y}$.

Πράξη 6: Το τελευταίο εκατομμυριοστό του δευτεροήμέρου

Και τώρα πλέον φτάνουμε στο κρισιμότερο σημείο της ζωής της σταγόνας, όπου το μέγεθός της γίνεται ίσο και στη συνέχεια μικρότερο από τη μέση ελεύθερη διαδρομή ℓ των μορίων του αέρα (δηλαδή τη μέση απόσταση μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων των μορίων)—η οποία ισούται κατά προσέγγιση με 10^{-7} m. Αυτό σημαίνει ότι η σταγόνα παύει πλέον να κινείται σε συνεχές μέσο, γεγονός που τροποποιεί τους κανόνες της ζωής της. Μα πόσος χρόνος πια της απομένει να ζήσει;

Σε τούτο το σημείο πρέπει να πούμε ότι περίπου $(1/6)n\langle u \rangle$ μόρια αέρα χτυπούν τη μονάδα επιφάνειας της σταγόνας ανά μονάδα χρόνου (όπου n είναι η πυκνότητα των μορίων του αέρα και $\langle u \rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$ η μέση ταχύτητά τους). Κάθε μόριο μεταφέρει ενέργεια της τάξης των $(3/2)kT$ [ουσιαστικά των $(5/2)kT$, αν θυμηθούμε ότι ο αέρας αποτελείται κυρίως από

διατομικά μόρια —η συγκεκριμένη διόρθωση όμως δεν είναι σημαντική για την τάξη μεγέθους των υπολογισμών μας]. Οπότε, ολόκληρη η σφαιρική επιφάνεια της σταγόνας προσλαμβάνει στη μονάδα του χρόνου ενέργεια

$$4\pi r^2 \frac{1}{6} \rho \langle u \rangle \frac{5RT}{2M},$$

όπου M η γραμμομοριακή μάζα του αέρα.

Αν εξισώσουμε (ως προς την τάξη μεγέθους, όπως θα έχετε αντιληφθεί) την παραπάνω ενέργεια με

$$-L \frac{dm}{dt} = -L4\pi r^2 \rho_0 \frac{dr}{dt},$$

καταλήγουμε στην προσέγγιση

$$\frac{dr}{dt} \equiv -\frac{5RT\rho \langle u \rangle}{12L\rho_0 M}.$$

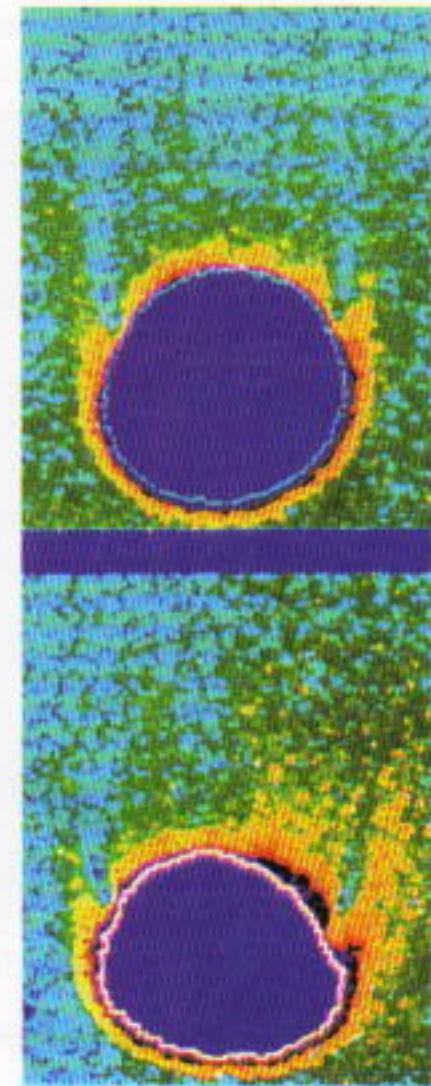
Βέβαια, ένα μέρος της παραπάνω ενέργειας παρασύρεται από τη μάζα των ατμών που σχηματίζονται εκείνη τη στιγμή· επιπλέον, η τιμή της ειδικής θερμότητας εξαέρωσης (που δινεται σε βιβλία αναφοράς) θα έπρεπε κανονικά να μειωθεί κατά την τιμή του έργου ανά μονάδα μάζας που παράγεται κατά της πίεσης που εξασκεί το συνεχές μέσο (το οποίο τώρα, όμως, απουσιάζει). Ωστόσο, οι δύο αυτές διορθώσεις δεν θα άλλαζαν την τάξη μεγέθους του χρόνου (τ_s) που αναζητάμε. Είναι σαφές ότι ο ρυθμός εξατμισης είναι σταθερός —οπότε το r ελαττώνεται ανάλογα με το χρόνο και

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r_s}{\tau_s} = -\frac{\ell}{\tau_s},$$

όπου r_s η αρχική ακτίνα της σταγόνας σε αυτό το στάδιο της ζωής της, μέσα στο ασυνεχές μέσο. Συνεπώς, ο χρόνος στον οποίο η σταγόνα εξαφανίζεται ($r \rightarrow 0$) είναι της τάξης του

$$\tau_s \sim \frac{r_s}{\frac{5}{12} \frac{RT}{LM} \frac{\rho}{\rho_0} \langle u \rangle}.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές $r_s = \ell \equiv 10^{-7}$ m, $T \equiv 300$ K, $M \equiv 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mole και $\langle u \rangle \equiv 500$ m/sec, βρίσκουμε $\tau_s < 10^{-6}$ sec, δηλαδή λι-



Σχήμα 6

γότερο από όντα εκατομμυριοστό του δευτερολέπτου. Αλίμονο, το τελευταίο στάδιο της ζωής της σταγόνας μας αποδεικνύεται πράγματι πολύ σύντομο. Κι όταν ο χρόνος αυτός κυλήσει, τίποτε δεν θα έχει απομείνει από τη σχεδόν ακίνητη σταγόνα παρά ένα μόριο —το τελευταίο· και ποιος μπορεί να πει πού ανήκει —στη σταγόνα ή στον αέρα; (Ίσως να μπορούσαμε να λύσουμε το μυστήριο αν εσωματώναμε στο μόριο ένα ραδιενέργο ισότοπο του ατόμου αζώτου.)

Έφτασε, λοιπόν, η ώρα να πέσει η αυλαία. Και ενώ το κοινό θα αποχωρεί, βαθιά επηρεασμένο από την τραγωδία, θα τού χουν μείνει πολλά για να συλλογιστεί. Ήταν η ιστόρηση ακριβής; Κι αν ναι, ποιος ο στόχος;

Επίλογος

Αναμφισβήτητα το έργο μας *Historia* μιας πτώσης δεν κάλυψε τα πάντα. Για παράδειγμα, όπως αναφέραμε και παραπάνω, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε διαδικασίες όπως οι μοριακές μεταφορές μάζας (διάχυση), ορμής (ιξώδες) και ενέργειας (μεταφορά θερμότητας), αλλά χρειαζόμαστε τους αντίστοιχους συντελεστές προκειμένου να περιγράψουμε το τμήμα

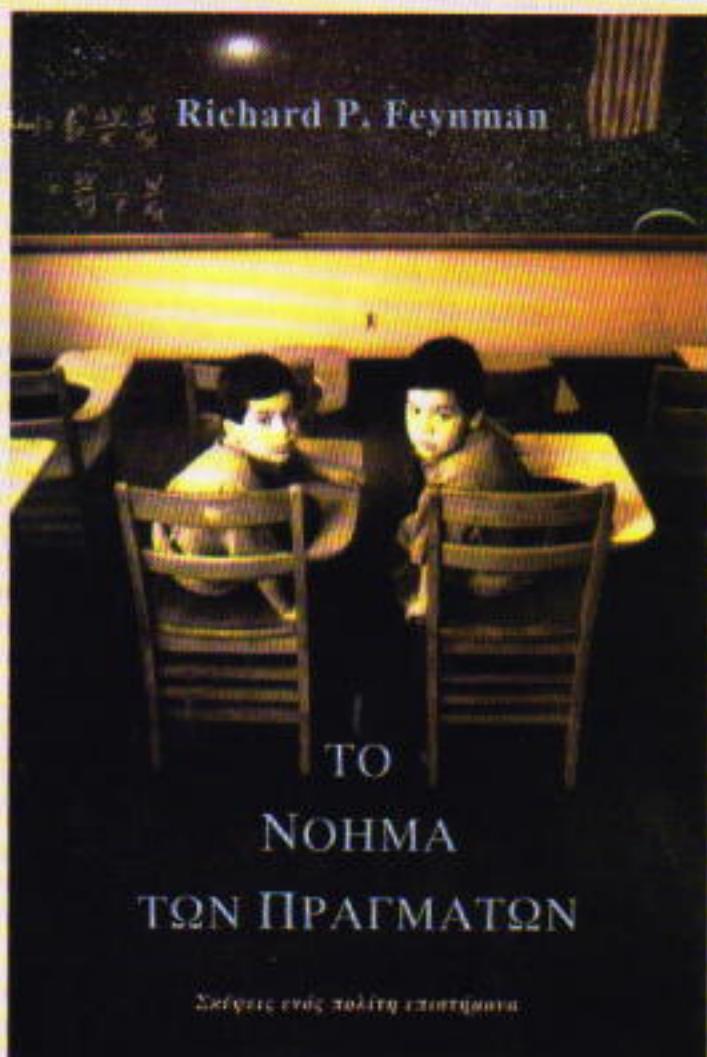
της τροχιάς της σταγόνας από το σημείο *D* ως το σημείο *S*, μετά από το οποίο άρχισε η ελεύθερη μοριακή ροή. Επιπλέον, δεν συζητήσαμε καθόλου την επίδραση του ατμοσφαιρικού οξυγόνου. Θα περιμέναμε ότι αυτό το «ξένο» αέριο (απ' την πλευρά του αζώτου), όπως και οποιαδήποτε άλλη ουσία, θα προσπαθούσε να διαχυθεί στο εσωτερικό της σταγόνας. Σε κάθε περίπτωση, αυτό εμπλέκεται με τη διαδικασία εξάτμισης του αζώτου. Κι ένα επίσης σημείο δεν λάβαμε υπόψη μας: η σταγόνα δεν είναι αναγκαστικά σφαιρική —κατά τη διάρκεια της πτώσης της ταλαντώνεται, όπως μπορείτε να δείτε κι από το Σχήμα 6. Θεωρήσαμε, επίσης, ότι η θερμοκρασία της σταγόνας σε κάθε φάση της ζωής της ισούνται με τη θερμοκρασία των κορεσμένων ατμών υπό ατμοσφαιρική πίεση πάνω από επίπεδη ε-

πιφάνεια υγρού αζώτου —κι αυτό ίσως είναι λανθασμένο.

Εν τέλει, ποιος στη γη ενδιαφέρεται για τη σταγόνα και την τραγική της ιστορία; Αλήθεια, μερικές φορές είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε τόσο τη συμπεριφορά μεμονωμένων σταγόνων όσο και συνόλων σταγόνων που σχηματίζουν ολόκληρα νέφη. Για παράδειγμα, αν θέλετε να οπικοποιήσετε τη ροή του αέρα γύρω από ένα μοντέλο αεροσκάφους, μπορείτε να εγχύσετε σταγόνες υγρού αζώτου στο ρεύμα αέρα και να κατευθύνετε μια δέσμη φωτός στην περιοχή που σας ενδιαφέρει —οι στρόβιλοι του αέρα γύρω από το μοντέλο γίνονται ορατοί λόγω της διάχυσης του φωτός απ' την «ομίχλη» που συνθέτουν οι σταγόνες του υγρού αζώτου και τα σωματίδια νερού και διοξειδίου του άνθρακα (τα οποία και συμπυκνώνο-

νται στις τροχιές των σταγόνων). Υγρό άζωτο εγχέεται σε κρυογονικά αεροδυναμικά τούνελ για να «ψύξει» τη ροή, και είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το ρυθμό εξάτμισης σταγόνων διαφορετικών μεγεθών. Σε πολλές χημικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία, όπως για παράδειγμα στην πλύση αερίων μέσω υγρών, αλλά και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, χρειάζεται να έχουμε κατανοήσει τη συμπεριφορά μιας μεμονωμένης σταγόνας (οποιαδήποτε ουσίας) της οποίας η μάζα μεταβάλλεται.

Αλλά και σε μας —το κοινό—, η μικρή αυτή τραγωδία της σταγόνας αζώτου μάς αποκάλυψε το μηχανισμό ορισμένων φυσικών διεργασιών και μας έδειξε πώς αλληλοσυμπληρώνονται η πειραματική και θεωρητική προσέγγιση των προβλημάτων. □



Σκέψεις ενός πολίτη επιστήμονα

Σελ.: 140, 14 x 21 εκ., Πανόδετο,
4.300 δρχ.

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ**

Richard Feynman

Νόμπελ Φυσικής

ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΩΝ

Σκέψεις ενός πολίτη-επιστήμονα

«Μια θαυμάσια συλλογή προσωπικών ιστοριών και στοχασμών για τη ζωή, στο αυθεντικό στυλ του Feynman. 'Ένα βιβλίο για τον πραγματικό άνθρωπο και τα προβλήματα του, όχι για φιλοσοφικές αφαιρέσεις...»

Freeman Dyson,
The New York Review of Books

«Άλλη μια φορά ένας αεικίνητος Feynman...»

Timothy Ferris,
The New York Times

«Διασκεδαστικό και προκλητικό βιβλίο... Ο Feynman έχει πολλά ακόμη να μας πει —ακόμη κι από εκεί που βρίσκεται.»

Marcus Chown,
The New Scientist

«Μια πνευματώδης σύνοψη της φιλοσοφίας του Feynman για την εποπτήμη, αλλά και μια εξαιρετική φιλοσοφία για τη ζωή.»

John Gribbin,
The Sunday Times του Λονδίνου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Επαφή

Για να λύσουμε τα επικοινωνιακά προβλήματα

Δρ. Χμ

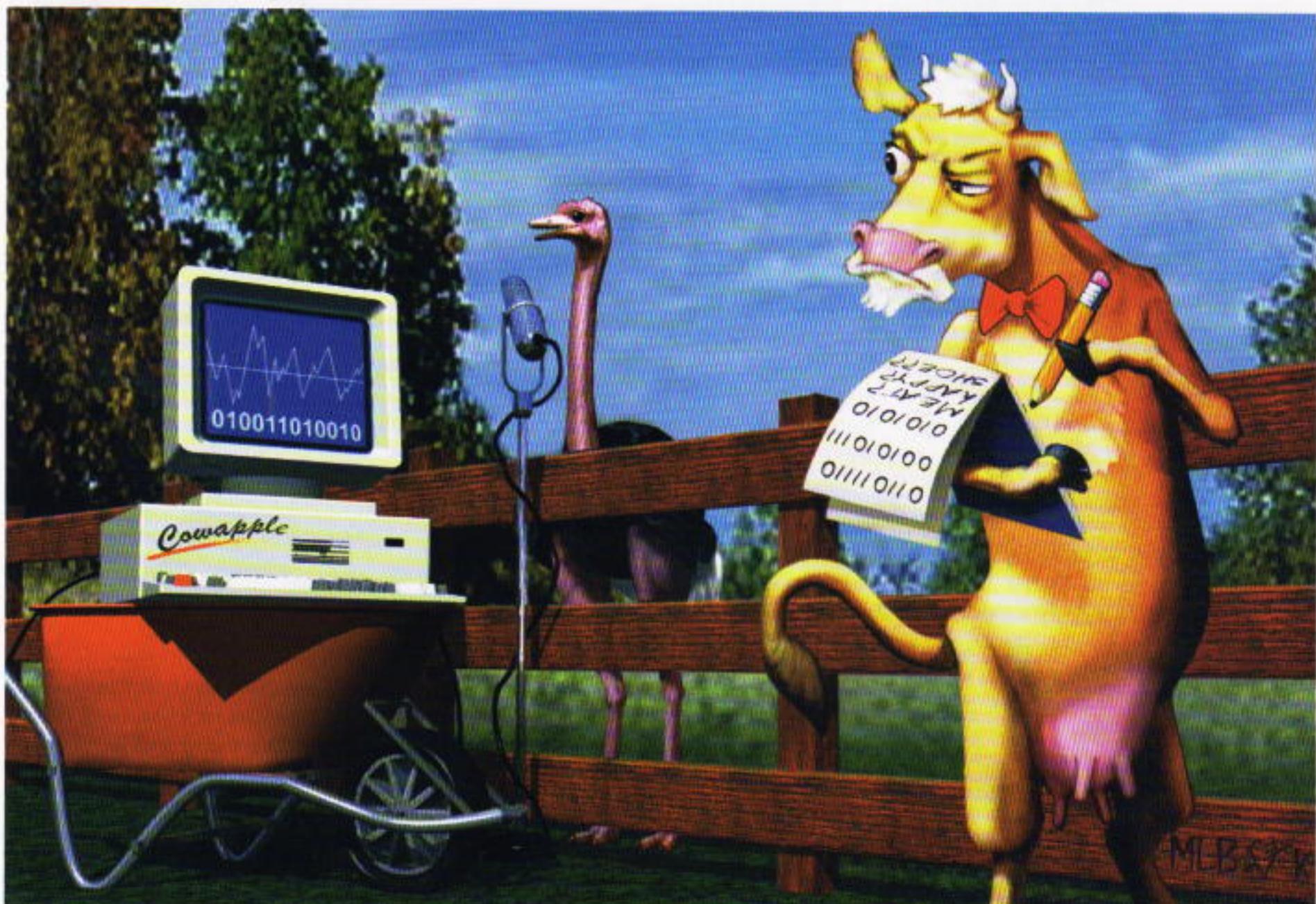
ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη του Quantum που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά. Τα ζώα στο κτήμα μας έχουν διάφορους τρόπους επικοινωνίας, που τους χρησιμοποιούν εδώ και αρκετό καιρό, με περισσότερη ή λιγότερη επιτυχία. Τελευταία όμως, ένα νέο πρόσωπο στο κτήμα μας δημιούργησε αρκετά επικοινωνιακά προβλήματα. Ο νέος εξωτικός μας σύντροφος, μια στρουθοκάμηλος, είναι αναμφίβολα φλύαρη, η ομιλία της όμως μας είναι τελείως ακατανότητη. Αποφάσισα έτσι να αναλάβω την πρόκληση και να την αποκρυπτογραφήσω.

Σκέφτηκα ότι θα έπρεπε να ερευνήσω τα σχήματα ψηφίων που εμφανίζονται στην ομιλία της και να καταγράψω τη συχνότητα με την οποία εμφανίζονται τα ποσονθισμένα από αυτά (σε αυτή τη δουλειά με βοήθησε πολύ η φίλη μου η Μπέσι). Αποφάσισα να ξεκινήσω τη μελέτη μου εξετάζοντας τα σχήματα ψηφίων σε μερικούς μεγάλους αριθμούς όπως τον εκατομμυριοστό πρώτο αριθμό υψωμένο στη δέκατη δύναμη:

$$x = \text{Prime}[10^6]^{10}$$

79314780093874526025649187683625333106460539996365938103436846733724849

Στη συνέχεια, μετασχημάτισα αυτό τον αριθμό στο δυ-



Εικονογράφηση: Mark Brennenan

αδικό του ανάπτυγμα. Ο αλγόριθμος μετατροπής αριθμών σε διαφορετική βάση είναι σύντομος, κομψός και γρήγορος.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκφράσουμε το x στη βάση b . Δηλαδή, $x = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_nb^n$. Για να βρούμε τους συντελεστές (το ανάπτυγμα του x ως προς τη βάση b), κάνουμε τα εξής:

$$a_0 = \text{Mod}[x, b]$$

$$x = \text{Floor}\left[\frac{x}{b}\right] = a_1 + a_2b^1 + \dots + a_nb^{n-1},$$

$$a_1 = \text{Mod}[x, b]$$

$$x = \text{Floor}\left[\frac{x}{b}\right] = a_2 + a_3b + \dots + a_nb^{n-2},$$

$$a_2 = \text{Mod}[x, b].$$

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία υπολογισμού τού $\text{Mod}[x, b]$ (= το υπόλοιπο της διαιρεσης του x διά b) και της αναγωγής του σε $\text{Floor}[x/b]$ (= το αποτέλεσμα της ακέραιης διαιρεσης του x διά b) έως ότου $x = 0$. Η αναπαράσταση του x ως προς βάση b , $x = \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$, είναι οι αριθμοί που παράγονται από τον αλγόριθμό μας, σε αντίστροφη σειρά. Ιδού ο απλός και γρήγορος αλγόριθμος μετατροπής τού x σε βάση b .

```
baseExpansion[x_, b_] := Module[{q = x,
  ans = {}},
 While[q != 0, AppendTo[ans,
  Mod[q, b]]; q = Floor[q/b]];
 Reverse[ans]]
```

Μπορούμε τώρα να βρούμε τη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού μας.

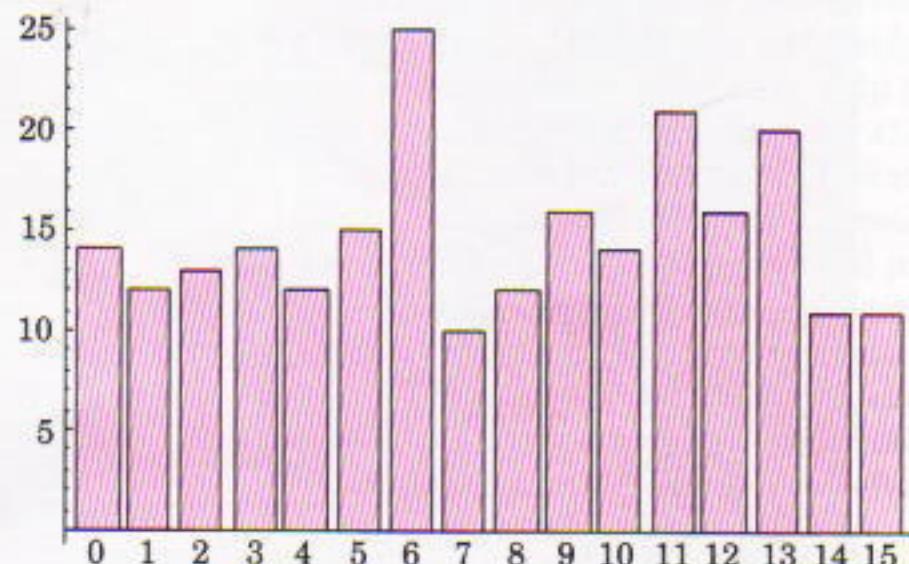
```
baseExpansion[x, 2]
```

```
(1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1,
1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1,
1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1,
0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1,
0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1,
0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,
1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1,
0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0,
1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1,
0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0,
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)
```

Στη συνέχεια εξέτασα όλες τις διαδοχικές τετράδες ψηφίων μήκους 4. Υπάρχουν 236 τέτοιες τετράδες στο προγούμενο αλφαριθμητικό. Η καθεμιά είναι όμοια με ένα από τα 16 δυνατά σχήματα ψηφίων $\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 1\}, \dots, \{1, 1, 1, 1\}$. Η κατανομή των συχνοτήτων των σχημάτων είναι η εξής:

14	$\{0, 0, 0, 0\}$
12	$\{0, 0, 0, 1\}$
13	$\{0, 0, 1, 0\}$
14	$\{0, 0, 1, 1\}$
12	$\{0, 1, 0, 0\}$
15	$\{0, 1, 0, 1\}$
25	$\{0, 1, 1, 0\}$
10	$\{0, 1, 1, 1\}$
12	$\{1, 0, 0, 0\}$
16	$\{1, 0, 0, 1\}$
14	$\{1, 0, 1, 0\}$
21	$\{1, 0, 1, 1\}$
16	$\{1, 1, 0, 0\}$
20	$\{1, 1, 0, 1\}$
11	$\{1, 1, 1, 0\}$
11	$\{1, 1, 1, 1\}$

Τέλος, αντιστοίχισα σε κάθε σχήμα ψηφίων έναν ακέραιο αριθμό —δηλαδή, $\{0, 0, 0, 0\} \rightarrow 0, \{0, 0, 0, 1\} \rightarrow 1, \{a, b, c, d\} \rightarrow a2^3 + b2^2 + c2^1 + d, \dots, \{1, 1, 1, 1\} \rightarrow 15$ — και κατασκεύασα το διάγραμμα των συχνοτήτων.



Το διάγραμμα αντιπροσωπεύει την κατανομή συχνοτήτων των σχημάτων ψηφίων $\{a, b, c, d\}$ που βρίσκουμε στη δυαδική αναπαράσταση του εκατομμυριοστού πρώτου αριθμού υψωμένου στη δέκατη δύναμη. Στο γράφημα, σε κάθε σχήμα ψηφίων έχουμε αντιστοιχίσει τον ακέραιο $a2^3 + b2^2 + c2^1 + d$. Ιδού λοιπόν η νέα μας πρόκληση.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 13

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα μετασχηματίζει κάθε αριθμό στην αντίστοιχη δυαδική αναπαράσταση και θα παράγει την κατανομή συχνοτήτων διαδοχικών σχημάτων ψηφίων, οποιουδήποτε μήκους, που εμφανίζονται στη δυαδική αναπαράσταση. Σε κάθε σχήμα ψηφίων, μήκους n , θα αντιστοιχεί έναν ακέραιο και θα κατασκευάζει το διάγραμμα της αντίστοιχης κατανομής των αριθμών $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Ελέγξτε το πρόγραμμά σας με τον αριθμό $x = \text{Prime}[10^6]^{100}$ εξετάζοντας σχήματα ψηφίων μήκους 4.

Η 10η Διεθνής Ολυμπιάδα Πληροφορικής

Τον προηγούμενο Σεπτέμβριο διεξήχθη στη Σετούμπαλ της Πορτογαλίας η 10η Διεθνής Ολυμπιάδα Πληροφορικής με τη συμμετοχή 248 διαγωνιζομένων από 65 χώρες.

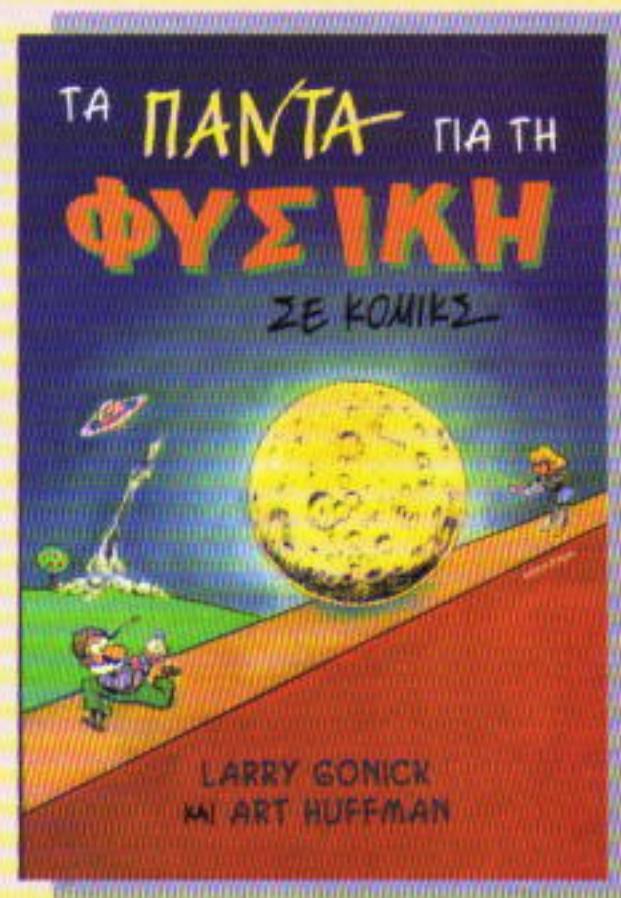
«Πρωταθλήτρια» χώρα της φετινής Ολυμπιάδας ήταν η Σλοβακία, που συγκέντρωσε τη μεγαλύτερη βαθμολογία και ήταν η μοναδική με τέσσερα χρυσά μετάλλια (δεν χρειάζεται να είσαι μεγάλη χώρα για να έχεις προγραμματιστές κορυφαίου επιπέδου). Τη σκυτάλη για τη διοργάνωση της 11ης Ολυμπιάδας, το 1999, πήρε η Αττάλεια της Τουρκίας.

⇒ Συνέχεια από τη σελίδα 37

ένα σε σχέση με το άλλο στα ιοντικά πλέγματα. Εντούτοις, αυτή η μετατόπιση λαμβάνει χώρα σε χαμηλές θερμοκρασίες (στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος), επειδή τα ιόντα έχουν μάλλον μεγάλη μάζα και αδυνατούν να παρακολουθήσουν τα πεδία υψηλής συχνότητας. Η συγκεκριμένη μετατόπιση των φορτισμένων σωματιδίων στους κρυστάλλους ονομάζεται ηλεκτρική πόλωση. Με τη σειρά της, η ηλεκτρική πόλωση παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο που συμβάλλει με το πεδίο του αρχικού κύματος. Αν η πόλωση ενός κρυστάλλου εξαρτάται από τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος, τούτο συνεπάγεται ανισοτροπία της διηλεκτρικής σταθεράς και του δείκτη διάθλασης. Η διπλή διάθλαση οφείλεται ακριβώς στην ανισοτροπία του δείκτη διάθλασης.

Ας εξετάσουμε τη διπλή διάθλαση σε κρυστάλλους που αποτελούνται από επιμηκυσμένα, μη σφαιρικά μόρια, που το μήκος τους υπερβαίνει το πλάτος τους. Ας υποθέσουμε ότι τα μόρια είναι διατεταγμένα έτσι ώστε να έχουν τους μεγάλους άξονές τους παράλληλους. Εάν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται μέσα σε έναν τέτοιο κρύσταλλο, η μοριακή του δομή ευνοεί την ταλάντωση των ηλεκτρονίων κατά μήκος του μοριακού άξονα και όχι στην εγκάρσια διεύθυνση. Είναι φυσικό, λοιπόν, να αναμένεται να διαφέρουν ριζικά τα φαινόμενα που προκαλούν ένα ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο προς τον μοριακό άξονα, αφενός, και ένα άλλο ηλεκτρικό πεδίο εγκάρσιο προς τον ίδιο άξονα, αφετέρου. Συνεπώς, αυτά τα δύο κύματα έχουν διαφορετικούς δείκτες διάθλασης και διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες. Ιδού πώς εξηγείται λοιπόν το φαινόμενο της διπλής διάθλασης.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Larry Gonick και Art Huffman

ΤΑ ΠΑΝΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΣΕ ΚΟΜΙΚΣ

Το βιβλίο περιλαμβάνει όλη τη λυκειακή ύλη (νόμους του Νεύτωνα, στατική, γραμμικές και κυκλικές κινήσεις, βολές και κρούσεις, νόμους διατήρησης, ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, κυκλώματα και φαινόμενα επαγγής, εναλλασσόμενα ρεύματα κ.λπ.) αλλά και τις εξισώσεις του Μάξγουελ, το φως, στοιχεία της σχετικότητας και της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, —όλα παρουσιασμένα με τρόπο πνευματώδη και χιουμοριστικό.

**Το καλύτερο δώρο για το μαθητή και τον φοιτητή
θετικής κατεύθυνσης**



Ο Art Huffman είναι υπεύθυνος του εργαστηριακού προγράμματος του μαθήματος φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας.

Ο Larry Gonick, διδάκτωρ μαθηματικών, είναι υπεύθυνος της στήλης «Κλασικά θέματα επιστήμης» του περιοδικού Discover.



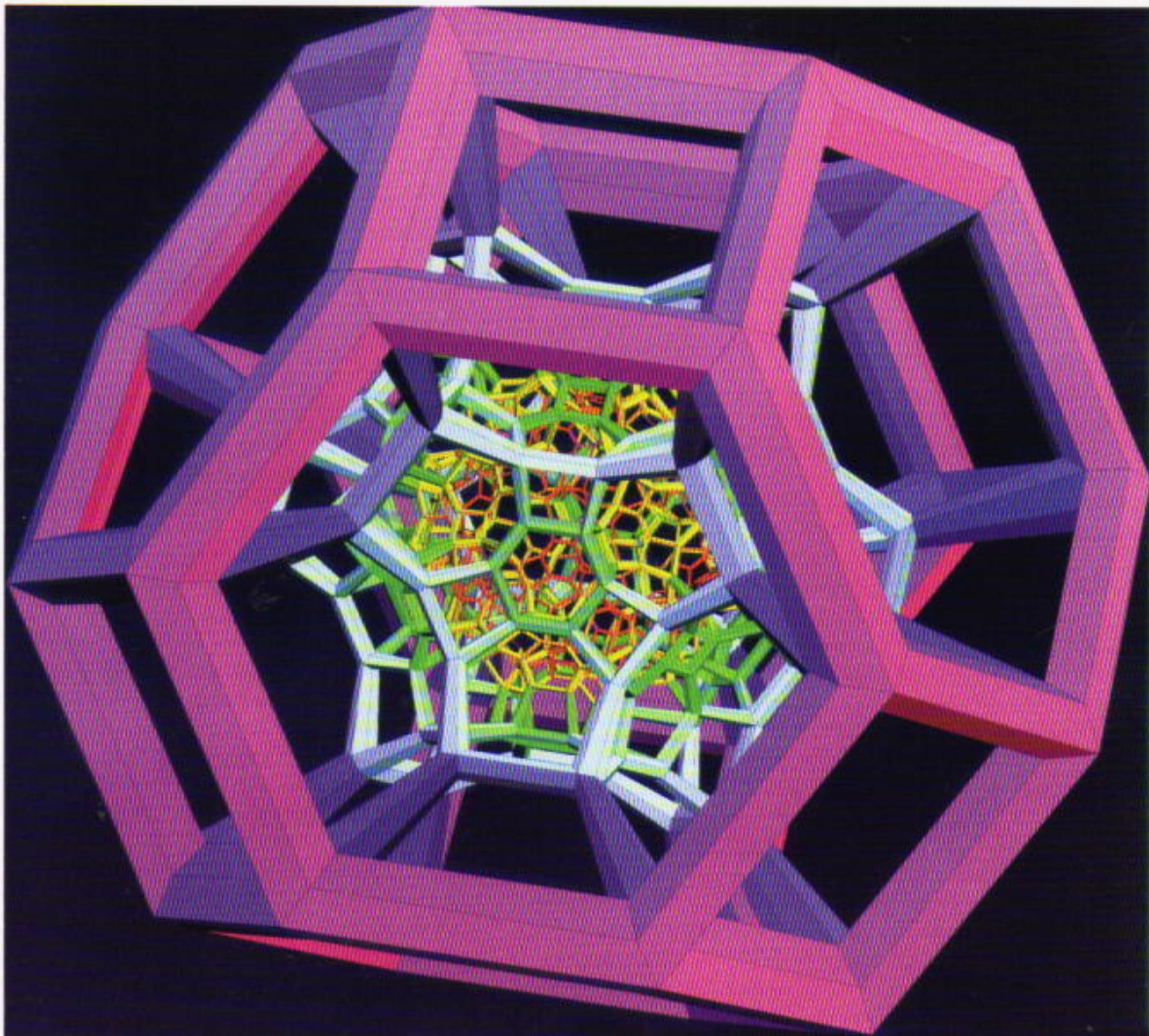
Στα ελληνικά κυκλοφορούν ακόμη τα βιβλία του Larry Gonick:

- Τα πάντα για τη γενετική σε κόμικς
- Η ιστορία του Κόσμου σε κόμικς (τόμ.: 1 - 7)

Σελ.: 222, Εικ.: Α/Μ, 17 × 25 εκ., 4.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΩΠΤΡΟ

ΠΙΝΑΚΟΘΗΚΗ Q //



© 1998 Michael Trott: από το βιβλίο *Graphica 1: The World of Mathematica Graphics* (www.graphica.com)

Αντεστραμμένο πλέγμα από ορθά δεκατετράεδρα (1998), του Michael Trott

Π ΑΡΑΘΕΤΟΝΤΑΣ ΕΞΑΙΡΕΤΑ ΕΡΓΑ ΤΕΧΝΗΣ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ δίπλα σε άρθρα για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, το *Quantum* ανέκαθεν κατέβαλλε προσπάθειες για να τονίσει τη σημασία της ύπαρξης διαφορετικών τρόπων σκέψης και να δημιουργήσει συσχετισμούς ανάμεσα στους φαινομενικά αταίριαστους κόσμους της τέχνης και της επιστήμης. Η παραπάνω εικόνα —δημιουργία του Michael Trott μέσω του προγράμματος *Mathematica*— προχωρά ένα βήμα πιο μπροστά, καταργώντας τα σύνορα ανάμεσα στους δύο αυτούς κόσμους.

Η βασική γεωμετρική μονάδα στη συγκεκριμένη εικόνα είναι το ορθό δεκατετράεδρο, ή κόλουρο οκτάεδρο, το οποίο έχει την αξιόλογη ιδιότητα να είναι «συμπαγώς συσκευάσιμο» —ένα στερεό το οποίο όταν τοποθετείται δι-

πλα σε άλλα όμοιά του καλύπτει πλήρως το χώρο δίχως να αφήνει ενδιάμεσα κενά. Ο Trott, για τη δημιουργία τέτοιου τύπου εικόνων, μας προτείνει μια συνταγή «δύο βημάτων»: «Πρώτα, κατασκευάζουμε ένα κανονικό πλέγμα, με την επανάληψη κάποιου συγκεκριμένου σχήματος: στη συνέχεια, γυρίζουμε το πλέγμα “το μέσα έξω”».

Τα πλέγματα έχουν μεγάλη σπουδαιότητα στην κρυσταλλογραφία, ζήτημα που διαπραγματεύμαστε στο άρθρο της σελίδας 5 του παρόντος τεύχους. Ρίξτε μια ακόμη ματιά στην παραπάνω εικόνα. Τι παγιδεύει το βλέμμα σας; Η φαντασία του καλλιτέχνη, η ομορφιά του μαθηματικού μορφώματος ή η εσωτερική δομή του κρυστάλλου; Πού βρίσκονται, λοιπόν, τα όρια ανάμεσα στην τέχνη και την επιστήμη;