

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 6

1.700 ΔΡΧ.

Εύκαιπτες πολυεδρικές επιφάνειες



E.B. 99

- Μη ενκλείδειες γεωμετρίες και φυσικός κόσμος
- Επιστήμη και διανοητικό στυλ.
- Γιατί δεν πετούν τα αεροπλάνα με νεροποντή;
- Η ακολουθία Fibonacci
- Περί ακουστικών κυμάτων μεγάλης έντασης
- Οι νόμοι διατήρησης στις υψηλές ταχύτητες
- Η εικασία του φυσερού και τα πολύτοπα
- Τι γνωρίζετε για τους ιδρατμούς;



Συλλογή Chester Dale, © 1998 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον

*Η αγία Λουκία* (περίπου 1625-1630), του Francisco de Zurbaran

**Η ΑΓΙΑ ΛΟΥΚΙΑ, ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΣΥΝΑΞΑΡΙ ΤΗΣ, ΞΕΡΙΖΩΣΕ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΤΗΣ και τα προσέφερε στον ρωμαίο ειδωλολάτρη μνηστήρα της επειδή, όπως εκείνος διατείνοταν, η ωραιότητά της δεν τον άφηνε να ειρηνεύσει. Αυτή η πράξη ευσέβειας συγκλόνισε τόσο πολύ τον ρωμαίο εθνικό ώστε στάθηκε η αιτία της μεταστροφής του στο χριστιανισμό.**

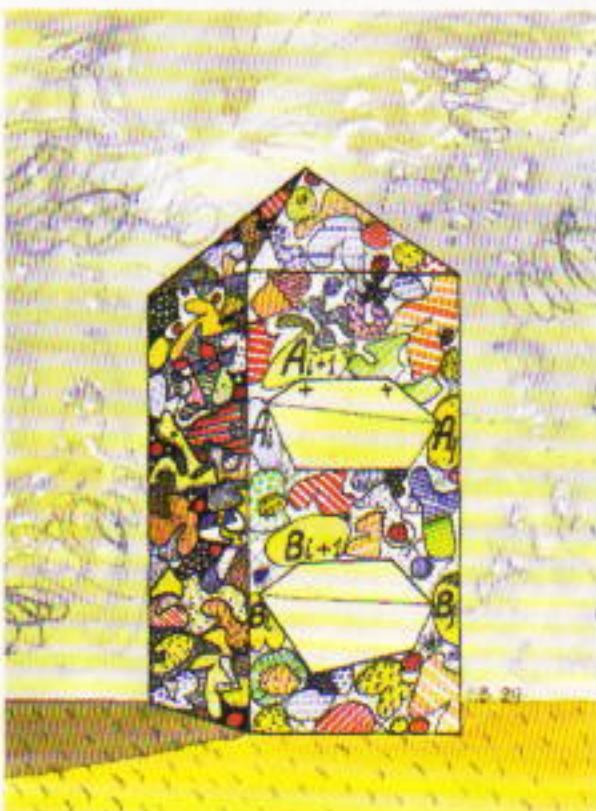
Αργότερα, κάποια ημέρα κατά τη διάρκεια της προσευχής της, η αγία Λουκία επανέκτησε θαυματουργικά την

Η σχέση της νεαρής αγίας με τα μάτια είναι πιθανόν να προέρχεται από τη λατινική ρίζα του ονόματός της, *Lux* (αγγλικά: light, ελληνικά: φως) — και το φως συνδέεται άρρηκτα με την όραση. Ωστόσο, αν εσείς διαπιστώσετε οποιοδήποτε πρόβλημα με την όρασή σας, πρέπει αναμφίβολα να επισκεφτείτε έναν οφθαλμίατρο. Άλλα καλού-κακού κρατήστε στη μνήμη σας και την ημέρα που εορτάζει η αγία Λουκία: 13η Δεκεμβρίου. Αν τώρα επιθυμείτε να διαβάσετε ένα άρθρο που διαπραγματεύεται το φως και την όραση, ανατρέξτε στη σελίδα 52.

# QUANTUM

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 6



Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

Εδώ στην Ουάσινγκτον, την έδρα του *Quantum*, έχουμε την ευκαιρία να απενίζουμε ένα από τα διασημότερα άκαμπτα πολύεδρα όλων των εποχών —το μνημείο του George Washington, του πρώτου προέδρου της χώρας μας.

Δυστυχώς, πολλά μέλη του Κονγκρέσου —του νομοθετικού οργάνου που περιλαμβάνει τη Βουλή και τη Γερουσία— φαίνεται να εμπνέονται από την έλλειψη ευκαμψίας του μνημείου· ιδιαίτερα, μάλιστα, όταν πλησιάζει ο καιρός για ισοστάθμιση του προϋπολογισμού. Στο παρελθόν, μάλιστα, η στενή προσκόλλησή τους σε κομματικές γραμμές έβλαψε τη λειτουργία του κράτους. Άλλα ας μην επεκταθούμε σε τοπικά μας προβλήματα. Οι κανόνες που διέπουν την ευκαμψία και την ακαμψία των πολυέδρων έχουν παγκόσμιο χαρακτήρα· και για να τους γνωρίσετε, πρέπει να ανατρέξετε στο άρθρο της σελίδας 5.

## ΑΡΘΡΑ

- 5 Μία μαθηματική ματιά στο μέλλον  
**Εύκαμπτες πολυεδρικές επιφάνειες**  
V.A. Alexandrov
- 10 Δυναμική των πτήσεων  
**Γιατί αεροπλάνα παντός καιρού;**  
S.K. Beletyaev
- 16 Στέρεες λύσεις  
**Η ακαμψία των κυρτών πολυέδρων**  
N.P. Dolbilin
- 27 Εναλλακτικές γεωμετρίες  
**Ευκλείδειες περιπλοκές**  
I. Sabitov
- 38 Μη γραμμική φυσική  
**Η ισχύς του ήχου**  
O.V. Rudenko και V.O. Cherkezyan

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 **Ο κόσμος των κβάντων**  
*Ceteris paribus*
- 9 **Σπαζοκεφαλίες**
- 23 **Πώς λύνεται;**
- 24 **Στα πεδία της φυσικής**  
Ψηλά, ψηλά και μακριά
- 34 **Στο εργαστήριο**  
*Το μαγνητικό πεδίο*
- 36 **Καλειδοσκόπιο**  
Πόσα γνωρίζετε στ' αλήθεια για τους υδρατμούς;
- 45 **Στο μαυροπίνακα I**  
Νόμοι διατήρησης και υψηλές ταχύτητες
- 48 **Στο μαυροπίνακα II**  
*Βοηθητικά πολυώνυμα*
- 52 **Στο μαυροπίνακα III**  
*Ειδωλα υψηλής ευκρίνειας*
- 57 **Μαθηματικά απρόοπτα**  
*O Fibonacci είναι και πάλι εδώ!*
- 62 **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 69 **Ιππολογισμοί**  
*Εξολοθρευτής μυγών*

# Ceteris paribus

«Το σύμπαν ολόκληρο είναι ένα όστρακο  
που εκκολάφηκε μέσα του τ' ακριβό μαργαριτάρι ο άνθρωπος.»  
—Νικηφόρος Βρεττάκος

## ΓΑΠΗΤΕ ΜΟΥ ΚΥΡΙΕ

**A**Η καλή σκέψη απαιτεί διανοητικό στυλ. Το στυλ συνισταται κυρίως στην αποφυγή κάποιων σημαντικών λαθών, τα οποία δυστυχώς είναι τόσο διαδεδομένα όσο και καταστροφικά. Η σκέψη απαιτεί τα κατάλληλα εργαλεία -βοηθήματα· και το εργαλείο για το οποίο θέλω να μιλήσω ίσως είναι το πιο ταπεινό όλων —τόσο δυσδιάκριτο μέσα στις θεωρίες και τα επιχειρήματα που πολλοί άνθρωποι δεν αντιλαμβάνονται καν την παρουσία του. Άλλα το εργαλείο αυτό χρησιμοποιείται. Κι όχι μόνο χρησιμοποιείται, αλλά δίχως αυτό αδυνατούμε να κάνουμε επιστήμη. Κατά τη γνώμη μου, δεν μπορούμε να σκεφτούμε οποιοδήποτε πρόβλημα —κι όχι μόνο επιστημονικό— με τρόπο που να έχει νόημα. Επιτρέψτε μου να επιμείνω. Υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε αυτούς που χρησιμοποιούν το εν λόγω εργαλείο και σε εκείνους που δεν το χρησιμοποιούν· αυτά τα δύο διαφορετικά είδη ανθρώπων επικοινωνούν δύσκολα μεταξύ τους. Το εργαλείο έχει ένα λατινικό όνομα, που το κάνει σεβαστό και μυστηριώδες: *ceteris paribus* —και σε μετάφραση, *τα έτερα ίσα*. Αν αφερώσετε λίγο χρόνο να στοχαστείτε τι πραγματικά σημαίνει τούτη η φράση και πώς μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε, τότε θα αναγνωρίσετε μια από τις σημαντικότερες πλευρές του διανοητικού στυλ.

Για να μπορέσω να δείξω τη σημασία αυτού του εργαλείου, θα παραθέσω ένα παράδειγμα —κατά ένα μέρος

του φανταστικό. Ας υποθέσουμε ότι αναζητούσατε τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι παίρνουν τις αποφάσεις τους υπό συνθήκες που αποκλείουν την πρόσβαση σε όλες τις σχετικές πληροφορίες. Ο κόσμος αγοράζει λαχεία χωρίς να ξέρει ποιος αριθμός θα κληρωθεί· υποβάλλει αιτήσεις πρόσληψης σε εργασίες χωρίς να γνωρίζει εάν είναι ο καλύτερος υποψήφιος· συμπεριφέρεται φιλικά σε ανθρώπους που θα ήταν προτιμότερο να τους αποφύγει. Σε τέτοιες συνθήκες, τώρα το γνωρίζετε καλά, οι άνθρωποι λαμβάνουν την απόφαση είτε εάν αντιληφθούν ότι έχουν την ικανότητα να φτάσουν στο επιδιωκόμενο αποτέλεσμα είτε αν το προσδοκόμενο αποτέλεσμα το επιθυμούν σφοδρά. Έχετε διατυπώσει την πρόταση, και τούτο αποτελεί τη σημαντική ανακάλυψή σας, ότι η πθανότητα να πάρει κάποιος μιαν απόφαση προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό αυτών των δύο παραγόντων —πράγμα που σημαίνει ότι, αν μετρήσεις την πθανότητα της επιτυχίας και την επιθυμητότητα του αποτελέσματος, τότε το γινόμενο των δύο μετρήσεων δίνει την πθανότητα να οδηγηθεί κάποιος στη συγκεκριμένη απόφαση. (Αφήνω κατά μέρος τα σχετικά τεχνικά προβλήματα που αναφύονται, τα οποία εσείς, ένα γερό μαθηματικό κεφάλι, έχετε επλύσει.) Η εν λόγω αρχή έχει ενδιαφέρουσες συνέπειες. Για παράδειγμα, φαίνεται να προβλέπει πως οι άνθρωποι έχουν την ίδια πθανότητα να πάρουν μια συγκεκριμένη απόφαση υπό δύο εντε-

λώς διαφορετικές συνθήκες: (α) όταν το αποτέλεσμα είναι ιδιαιτέρως επιθυμητό, αν και με μικρές πθανότητες να συμβεί, και (β) όταν το αποτέλεσμα δεν είναι αρκετά επιθυμητό αλλά οι πθανότητες να επιτευχθεί είναι μεγάλες. Τούτο αποτελεί προφανή συνέπεια της παραπάνω ιδέας σας: ο ένας παράγοντας αυξάνεται κι ο άλλος μειώνεται, αλλά το γινόμενό τους παραμένει σταθερό. Υποθέτω ότι αισθάνεστε ιδιαιτέρως ικανοποιημένος με την ανακάλυψή σας, μια και φαίνεται να έχει εφαρμογή σε πολλές περιστάσεις. Μπορεί να εξηγήσει, επί παραδείγματι, γιατί η προσέλευση για εγγραφή σε ορισμένες δύσκολες πανεπιστημιακές σχολές είναι μεγάλη ή γιατί κάποια λαχειοφόρα παιχνίδια αποδεικνύονται πιο δημοφιλή από άλλα.

Ας υποθέσουμε, όμως, για τη συνέχεια, ότι παρουσιάζετε την ανακάλυψή σας σε διάφορα ακροατήρια. Σε αυτή τη φανταστική περίπτωση, ουδείς έχει σκεφτεί τη λήψη αποφάσεων και την αβεβαιότητά της με τον παραπάνω μαθηματικό τρόπο —η «αρχή» σας είναι κάτι το εντελώς καινούργιο. Προβλέπω ότι θα αντιμετωπίζατε δύο ειδών αντιδράσεις —αφήνοντας έξω όσους δεν θα καταλάβαιναν για ποιο πράγμα μιλάτε. Καταρχάς, κάποιοι θα προέβαλαν αντιρρήσεις για διάφορες πλευρές της θεωρίας σας. Για παράδειγμα, θα έλεγαν ότι δεν θα έπρεπε να μιλάτε για την πθανότητα της επιτυχίας ή την επιθυμητότητα του αποτελέσματος, αλλά γι' αυτά που ο κόσμος αντιλαμβάνεται ως τέτοια —οι άνθρω-

ποι δεν δρουν ανάλογα με το πώς είναι στην πραγματικότητα τα πράγματα, αλλά ανάλογα με το πώς νομίζουν ότι είναι. Θα σας έλεγαν ότι η αρχή σας θα ήταν περισσότερο ρεαλιστική αν στην εξίσωσή σας προσθέτατε κι έναν τρίτο παράγοντα: το κόστος της λήψης μιας απόφασης —έχοντας ίσες πιθανότητες να κερδίσουν το ίδιο ποσό, οι άνθρωποι θα αγόραζαν μάλλον το φθηνότερο λαχείο. Θα ακούγονταν κι άλλες παρόμοιες αντιρρήσεις —δυσάρεστες μάλλον, μια και θα έδειχναν ότι η θεωρία σας απέχει πολύ από το να είναι τέλεια. Ωστόσο εσείς είστε ένας πραγματικός επιστήμων· η αναζήτηση της αλήθειας δεν σχετίζεται με την οίηση και τη ματαιοδοξία. Ας κοιτάμε μόνο μπροστά, λοιπόν.

Δυστυχώς όμως, μια άλλου είδους κριτική φαίνεται να είναι ουσιαστικότερη. Κάποιοι θα προέβαλαν αντιρρήσεις όχι για το πώς συνθέσατε τη θεωρία σας, αλλά για την ίδια την ιδέα μιας τέτοιας θεωρίας. Θα σας έλεγαν: «Δεν έχει νόημα να μιλάμε για ανθρώπους που παίρνουν αποφάσεις στο κενό, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη το γενικότερο πλαίσιο. Πρώτον, οι αποφάσεις λαμβάνονται υπό διάφορες συνθήκες. Το να αγοράζεις λαχεία δεν είναι ίδιο με το να αναζητάς δουλειά· οπότε, γιατί να υπάρχει μια κοινή “λογική” σ’ αυτές τις διαφορετικές περιπτώσεις; Το τι κάνουν οι άνθρωποι με τα λαχεία εξαρτάται από τις απόψεις τους γι’ αυτά, ενώ το τι κάνουν όταν ζητούν εργασία εξαρτάται από τις φιλοδοξίες τους —άρα πρέπει να μελετήθουν με λεπτομέρεια αυτές οι ειδικές συνθήκες. Δεύτερον, όλοι μας γνωρίζουμε ανθρώπους που δρουν ανορθολογικά. Μπορεί όταν αγοράζουν λαχεία να είναι μεθυσμένοι· μπορεί να έχουν μεγάλη ιδέα για τις ικανότητές τους· μπορεί να υποκινούνται από παράλογες επιθυμίες και πάθη. Άρα η αρχή σας είναι άνευ νοήματος.»

Και πάλι θα δυσαρεστήθετε, διότι δεν καταφέρατε να πείσετε τους πάντες για τη θεωρία σας. Άλλα σε αυτή τη φανταστική συζήτηση δίκιο έχετε εσείς· και νομίζω ότι είναι σημαντικό να κατανοήσουμε το λόγο. Υποθέτω, λοιπόν, ότι μόλις περάσει η αρχική δυσαρέσκειά σας, θα σκεφτείτε ότι μάλλον παρανόησαν. Και η απάντησή σας δεν μπορεί παρά να είναι κάπως έτσι:

«Πρώτα απ’ όλα, δεν υπήρξε φιλοδοξία μου να περιγράψω τον τζόγο ή τις προσπάθειες για επαγγελματικό προσανατολισμό ή και αποκατάσταση, αλλά τα κοινά τους χαρακτηριστικά. Αν περιγράφω ότι είναι κοινό σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν είναι επειδή τις θεωρώ ταυτόσημες, αλλά επειδή πιστεύω ότι μπορεί να έχουν κάποια σημαντικά κοινά στοιχεία. Δεύτερον, θέλησα να περιγράψω τι κάνει κάποιος όταν προσπαθεί να επιτύχει τα επιθυμητά αποτελέσματα και να αφύγει τα ανεπιθύμητα. Και αγνόησα τις εξαιρέσεις, όταν οι άνθρωποι από ιδιοτροπία προσπαθούν να αποτύχουν ή όταν είναι διανοητικά διαταραγμένοι. Πώς μπορείτε, λοιπόν, να προβάλετε τόσες άστοχες αντιρρήσεις;»

Το έπραξαν, διότι δεν αντιλήφθηκαν ότι η αρχή σας, όταν τη διατυπώνατε, είχε την πρωμετωπίδα τα έτερα ίσα. Ισως δεν το καταλάβατε κι εσείς. Έκαναν άστοχες παρατηρήσεις, επειδή αγνοούν το νόημα αυτής της φράσης ή επειδή δεν τους αρέσει το διανοητικό στυλ που αντιπροσωπεύει. Για πολλούς ανθρώπους, το να ασχολείσαι με την επιστήμη σημαίνει να ανακαλύπτεις «αυτό που πραγματικά συμβαίνει», πέρα από προκαταλήψεις και αποκαλύψεις. Οι επιστήμονες θεωρούνται άνθρωποι που περιγράφουν τα πράγματα όπως πράγματι είναι. Ως εκ τούτου, οι θεωρίες τους πρέπει να ανταποκρίνονται στην αλήθεια. Αυτό βέβαια είναι πολύ κολακευτικό για τους επιστήμονες, αλλά απολύτως ανόητο. Οι επιστημονικές θεωρίες ανταποκρίνονται στην αλήθεια μόνο υπό την έννοια ότι οι ενδείξεις αποτελούν το μοναδικό κριτήριο που αξιολογεί το σωστό και το λανθασμένο στην επιστήμη. Ένα περιπλεγμένο και ακατανόητο γεγονός έχει το ίδιο βάρος με μια ικανοποιητική και κομψή θεωρία —κι αυτό μερικές φορές κάνει την επιστημονική διαδικασία απογοητευτική. Από μια άλλη άποψη, οι επιστημονικές ιδέες δεν είναι, δεν μπορούν να είναι, και δεν πρέπει να είναι η ίδια η αλήθεια. Κι αυτό ακριβώς εκφράζει πραγματικά η φράση τα έτερα ίσα. Δεν υπάρχει τίποτε το εξαιρετικά περιπλοκό σ’ αυτήν. Το εξηγήσατε μόλις πριν, απαντώντας στις ανόητες αντιρρήσεις. Και για να το θέσουμε με κάπως πιο αφηρημένους όρους, όταν κατασκευά-

ζεις μια θεωρία δεν σημαίνει ότι λαμβάνεις υπόψη σου όλες τις δυνατές όψεις των φαινομένων που περιγράφεις. Αντίθετα, σημαίνει ότι εστιάζεις τις προσπάθειες σε κάποιες όψεις που μπορούν να περιγραφούν με όρους αφηρημένων γενικεύσεων, υποθέτοντας, χάριν απλότητας, ότι οι υπόλοιπες είναι «ουδέτερες» —δηλαδή «ίσες». Αυτό ακριβώς εκνευρίζει κάποιους που ισχυρίζονται ότι τα άλλα δεν είναι ίσα, ότι μεταβάλλονται από τη μια περίπτωση στην άλλη —πώς μπορείς να αποφασίζεις έτσι για τι συμβαίνει, μέσα στην ποικιλία και την πολυπλοκότητα των φαινομένων;

Όποια κι αν είναι τα φαινόμενα που θέλουμε να ερμηνεύσουμε, πρέπει να θυμόμαστε ότι όλες οι έγκυρες θεωρίες βασίζονται στην απόφαση να θεωρούν όλα τα άλλα ίσα. Χωρίς αυτήν δεν μπορούμε να περιγράψουμε ακόμη και το πιο απλό φαινόμενο. Και έχουμε πολλά παραδείγματα τέτοιων αποφάσεων από την καθημερινή μας ζωή. Θα αναφέρω ένα απλό παράδειγμα, που δεν χρησιμοποιεί προχωρημένη επιστήμη. Όταν εξετάζεις την όρασή σου, η οπτική σου οξύτητα μετριέται χονδρικά μέσω της ανάγνωσης κάποιων γραμμάτων σε έναν πίνακα, περίπου τρία μέτρα μακριά σου. Πρόκειται για κεφαλαία γράμματα, που προβάλλονται σε μια φωτεινή οθόνη. Το υπόλοιπο του δωματίου βρίσκεται στο μισοσκόταδο προκειμένου να φωτίζεται η οθόνη. Οι γιατροί, λοιπόν, αρκούνται να μετρήσουν την οπτική σου οξύτητα και να σου συστήσουν γυαλιά ανάλογα με την απόδοσή σου σ’ αυτό το τεστ. Αν δεν γνωρίζεις ή αν δεν καταλαβαίνεις την αρχή τα έτερα ίσα, μπορείς να προβάλλεις διάφορες αντιρρήσεις για την εν λόγω βεβαιότητα: ότι αυτό το τεστ δεν λαμβάνει υπόψη του το φυσικό γενικό πλαίσιο της κανονικής όρασης· αυτό που διαβάζουμε συνήθως είναι λέξεις και προτάσεις με σημασία κι όχι μεμονωμένα κεφαλαία γράμματα· σπάνια διαβάζουμε σε μια φωτεινή οθόνη σ’ ένα σκοτεινό δωμάτιο· και τις περισσότερες φορές τα αντικείμενα έχουν χρώμα και υφή, καθώς και σαφείς σχέσεις με άλλα αντικείμενα —άρα αυτό που μετρούν οι γιατροί δεν έχει σχέση με την «πραγματική» οπτική οξύτητα.

Ας επανέλθουμε στην επιστημονι-



# Εύκαμπτες πολυεδρικές επιφάνειες

Αναζητώντας τους κανόνες μαζί με τους Euler, Cauchy και Bricard

V.A. Alexandrov

**T**Ο ΖΗΤΗΜΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΙΚΩΝ επιφανειών έπαιζε ανέκαθεν κεντρικό ρόλο στη στερεομετρία. Επιπλέον, οποιοσδήποτε προσπάθησε να αποκτήσει βαθύτερη γνώση της στερεομετρίας ανακαλύπτει ότι το ζήτημα αυτό συνδέεται με πολλά ερωτήματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να ξεκινήσουμε με τον επόμενο κατάλογο προβλημάτων:

(1) Βρείτε το μήκος της ακμής των κανονικών πολυέδρων (τετραέδρου, κύβου, οκταέδρου, εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου) που είναι περιγεγραμμένα (ή εγγεγραμμένα) σε κύκλο δεδομένης διαμέτρου.

(2) Αποδείξτε το θεώρημα του Euler – δηλαδή ότι σε κάθε κυρτό πολύεδρο ισχύει η ισότητα

$$K - A + E = 2,$$

όπου  $K$ ,  $A$  και  $E$  είναι το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των εδρών του πολυέδρου, αντίστοιχα.

(3) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Euler για να αποδείξετε ότι ο κατάλογος κανονικών πολυέδρων που παρατίθεται στο Πρόβλημα (1) είναι πλήρης.

(4) Αποδείξτε το θεώρημα του Cauchy, σύμφωνα με το οποίο δύο κυρτές και κλειστές πολυεδρικές επιφάνειες με ίσες τις αντίστοιχες έδρες, και των οποίων οι έδρες συνδέονται με τον ίδιο τρόπο, είναι ίσες.

Το Πρόβλημα (1) δεν ξεφεύγει από τα όρια της συνηθισμένης ύλης των σχολικών μαθηματικών. Τα Προβλήματα (2) και (3) δεν περιλαμβάνονται συνήθως στο σχολικό πρόγραμμα, αλ-

λά οποιοσδήποτε θελήσει να ασχοληθεί με τη στερομετρία μπορεί εύκολα να τα αντιμετωπίσει. Το δυσκολότερο πρόβλημα του καταλόγου είναι το (4). Αν ανυπομονείτε να μάθετε πώς αποδεικνύεται το θεώρημα του Cauchy, μπορείτε να ανατρέξετε στο άρθρο της σελίδας 16.

Εδώ θα εξετάσουμε μερικά ερωτήματα που συνδέονται με το θεώρημα του Cauchy. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε μέσω ενός αντιπαραδείγματος ότι το θεώρημα δεν επεκτείνεται σε μη κυρτά πολύεδρα (ένα εντυπωσιακό γεγονός που από την απόδειξη του θεωρήματος του Cauchy, το 1813, παρέμεινε επί 150 χρόνια αδιευκρίνιστο). Πριν προχωρήσουμε, όμως, ας δώσουμε μερικούς ορισμούς.

Πολυεδρική επιφάνεια είναι μια οποιαδήποτε επιφάνεια του τριοδιάστατου χώρου που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγώνων.

Ονομάζουμε έδρες της επιφάνειας αυτά τα πολύγωνα και ακμές τις πλευρές τους. Υποθέτουμε ότι κάθε ακμή ανήκει σε δύο το πολύ διαφορετικές έδρες της επιφάνειας. Αν όλες οι ακμές ανήκουν σε δύο έδρες, τότε λέμε την επιφάνεια κλειστή. Ένα καλό παράδειγμα κλειστής πολυεδρικής επιφάνειας είναι η επιφάνεια του κύβου (αν αφαιρέσουμε μια έδρα από αυτή, το μέρος που απομένει δεν είναι κλειστή πολυεδρική επιφάνεια). Τονιζούμε ότι είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε και αυτοτεμνόμενες επιφάνειες, οι έδρες των οποίων έχουν και άλλα κοινά σημεία εκτός των κορυφών και των σημείων

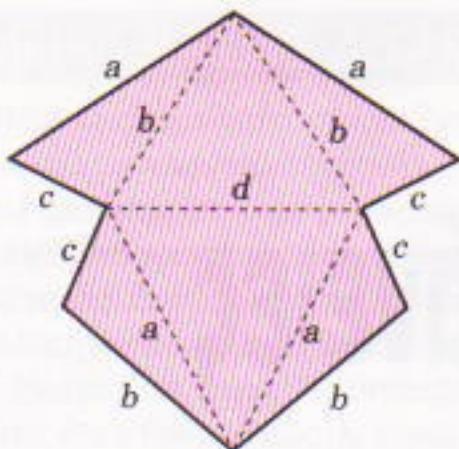
που ανήκουν στις ακμές.

Υποθέτουμε ότι απαγορεύεται να αλλάξουμε τη μορφή και το μέγεθος οποιασδήποτε έδρας (δηλαδή φανταζόμαστε ότι οι έδρες αποτελούνται από στερεά ύλη). Όμως, δεχόμαστε ότι επιτρέπεται να αλλάξουμε τις διεδρες γωνίες (σαν οι έδρες να ήταν συνδεδεμένες με αρμούς). Θα ονομάζουμε μια πολυεδρική επιφάνεια εύκαμπτη όταν είναι δυνατή η αλλαγή της μορφής της μέσω συνεχών μετασχηματισμών των διεδρών γωνιών της. Προφανώς, η (μη κλειστή) πολυεδρική επιφάνεια που αποτελείται από δύο τρίγωνα συνδεόμενα κατά μήκος μίας πλευράς τους είναι εύκαμπτη.

Στο υπόλοιπο άρθρο θα εξετάσουμε το ερώτημα της ύπαρξης κλειστών, εύκαμπτων πολυεδρικών επιφανειών που δεν τέμνουν τον εαυτό τους.

Θα λέμε ότι μια πολυεδρική επιφάνεια είναι κυρτή αν είναι το σύνορο ενός κυρτού συνόλου σημείων. (Ένα σύνολο σημείων είναι κυρτό αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του περιέχεται στο σύνολο.) Από το θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται ότι καμία κλειστή, κυρτή πολυγωνική επιφάνεια δεν είναι εύκαμπτη.

Το 1897 ο γάλλος μαθηματικός R. Bricard περιέγραψε όλα τα δυνατά εύκαμπτα οκτάεδρα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy, κανένα από αυτά δεν μπορεί να είναι κυρτό. Συνηθίζεται να χωρίζουμε τα εύκαμπτα οκτάεδρα, γνωστά επίσης και ως οκτάεδρα Bricard, σε τρεις τύπους. Σε αυτό το άρθρο θα θεωρήσουμε έναν μόνο τύπο.



Σχήμα 1

Πρώτα θα εξηγήσουμε τον τρόπο κατασκευής ενός χάρτινου μοντέλου αυτού του οκταέδρου. Αντιγράφουμε το αποτελούμενο από έξι τρίγωνα πολύγωνο του Σχήματος 1 σε ένα χαρτόνι. Τα γράμματα  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$  συμβολίζουν τα μήκη των αντίστοιχων ακμών. Για παράδειγμα, μας διευκολύνει να πάρουμε  $a = 12$ ,  $b = 10$ ,  $c = 5$  και  $d = 11$ . (Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι όντως οι ακμές ενός πολυέδρου μπορεί να έχουν αυτά τα μήκη.) Κόβουμε κατά μήκος των συνεχών γραμμών και στη συνέχεια διπλώνουμε κατά μήκος των διακεκομένων ως εξής: Διπλώνουμε προς το μέρος μας τα δύο τριγωνικά πτερύγια (η μία πλευρά των οποίων ισούται με  $c$ ) που βρίσκονται αριστερά του σχήματος και ενώνουμε τις πλευρές μήκους  $c$ . Διπλώνουμε τα δύο όμοια πτερύγια στο δεξί μέρος του σχήματος προς την αντίθετη κατεύθυνση και ενώνουμε τις πλευρές μήκους  $c$ . Προκύπτει η μη κυρτή, μη κλειστή πολυεδρική επιφάνεια  $P$  του Σχήματος 2. Οι συνεχείς γραμμές σε αυτό το σχήμα αντιπροσωπεύουν τις ορατές ακμές της επιφάνειας ενώ οι διακεκομένες τις ακμές που καλύπτονται από τις έδρες. Οι ακμές  $AE$ ,  $ED$ ,  $DF$  και  $FA$  αποτελούν το σύνορο αυτής της επιφάνειας και καθεμιά τους συνδέεται με μία μόνο έδρα της επιφάνειας  $P$ .

Προφανώς, η πολυεδρική επιφάνεια  $P$  είναι εύκαμπτη: Αν θεωρήσουμε σταθερή τη θέση του τριγώνου  $BCE$  στο χώρο, μπορούμε να μετακινήσουμε το σημείο  $F$  προς τις κατευθύνσεις που δείχνουν τα βέλη στο Σχήμα 2. Οι θέσεις των σημείων  $A$  και  $D$  μπορούν επίσης να αλλάξουν αλλά — και αυτό είναι το πο σημαντικό — η μεταξύ τους απόσταση παραμένει σταθερή.

Για να βεβαιωθούμε ότι τα πράγμα-

τα έχουν έτοι, ας θεωρήσουμε τη διεδρή γωνία  $S$  με ακμή  $EF$ , έδρες της οποίας είναι το ημιεπίπεδο  $s_1$  που διέρχεται από το  $B$  και το ημιεπίπεδο  $s_2$  που διέρχεται από το  $C$ . Ας στρέψουμε το ημιεπίπεδο  $s_1$  περί την  $EF$  έτοι ώστε το νέο ημιεπίπεδο  $t_1$  να περιέχει το σημείο  $A$ . Δηλαδή, το στρέψουμε προς τη μεριά του παρατηρητή κατά γωνία ίση με τη διεδρή γωνία στην ακμή  $EF$  του τετραέδρου  $BAEF$ . Παρόμοια, στρέψουμε το ημιεπίπεδο  $s_2$  περί την ευθεία  $EF$  έτοι ώστε το νέο ημιεπίπεδο  $t_2$  να περιέχει το σημείο  $D$ . Δηλαδή, το στρέψουμε αντίθετα προς τον παρατηρητή κατά γωνία ίση με τη διεδρή γωνία στην ακμή  $EF$  του τετραέδρου  $CDEF$ . Όμως, ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου  $F$ , οι αντίστοιχες ακμές αυτών των τετραέδρων είναι ίσες (δείτε το Σχήμα 2), και επομένως αυτά είναι ίσα. Άρα η διεδρή γωνία  $T$  που σχηματίζουν τα ημιεπίπεδα  $t_1$  και  $t_2$  είναι ίση με τη διεδρή γωνία  $S$ .

Συνεπώς, στα τετράεδρα  $BCEF$  και  $ADEF$  μπορούμε να εντοπίσουμε πέντε ζεύγη ίσων αντίστοιχα ακμών ( $BE = AF$ ,  $BF = AE$ ,  $CF = DE$ ,  $CE = DF$  ενώ  $EF$  είναι η κοινή τους ακμή) και ένα ζεύγος ίσων διεδρών γωνιών,  $S$  και  $T$ , που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες ακμές τους ( $BC$  και  $AD$ , αντίστοιχα). Συνεπώς, τα τετράεδρα  $BCEF$  και  $ADEF$  είναι ίσα και, επομένως,  $AD = BC = d$  για όλες τις δυνατές θέσεις της κορυφής  $F$ .

Αφού το μήκος της  $AD$  είναι σταθερό και ανεξάρτητο από τη θέση του  $F$ , συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να επισυνάψουμε δύο φανταστικά χάρτινα τρίγωνα  $ADE$  και  $ADF$  στην επιφάνεια  $P$  έτοι ώστε η προκύπτουσα κλειστή πολυεδρική επιφάνεια  $Q$  να παραμένει εύκαμπτη. Φυσικά, αυτό

μπορούμε να το κάνουμε μόνο με τη φαντασία μας, διότι η εν λόγω διαδικασία δημιουργεί τομές της επιφάνειας με τον εαυτό της. Για παράδειγμα, οι έδρες  $ADE$  και  $BCE$  θα τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας που δεν είναι ακμή της επιφάνειας  $Q$ . Όταν αρχίζουμε να μετακινούμε την κορυφή  $F$ , η ευθεία αυτή αλλάζει θέση πάνω στις έδρες  $ADE$  και  $BCE$ , και είναι αδύνατον να μιμηθούμε τη συγκεκριμένη διαδικασία σε ένα χάρτινο μοντέλο.

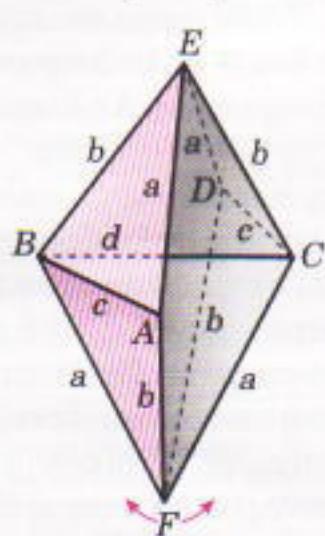
Επομένως, η επιφάνεια  $Q$  είναι ένα από τα οκτάεδρα Bricard. Οπως και τα συνηθισμένα οκτάεδρα έχει 6 κορυφές ( $A, B, C, D, E$  και  $F$ ), 12 ακμές ( $AB, AD, AE, AF, BC, BE, BF, CD, CE, CF, DE$  και  $DF$ ) και 8 έδρες ( $ABE, ABF, BCE, BCF, CDE, CDF, ADE$  και  $ADF$ ). Όμως, αντίθετα με τα συνηθισμένα, το οκτάεδρο του Bricard είναι εύκαμπτο, μη κυρτό, και τέμνεται με τον εαυτό του. Θα τροποποιήσουμε τώρα αυτή την κατασκευή έτοι ώστε να εξαφανιστούν οι τομές της επιφάνειας με τον εαυτό της.

## Η επιφάνεια του Steffen

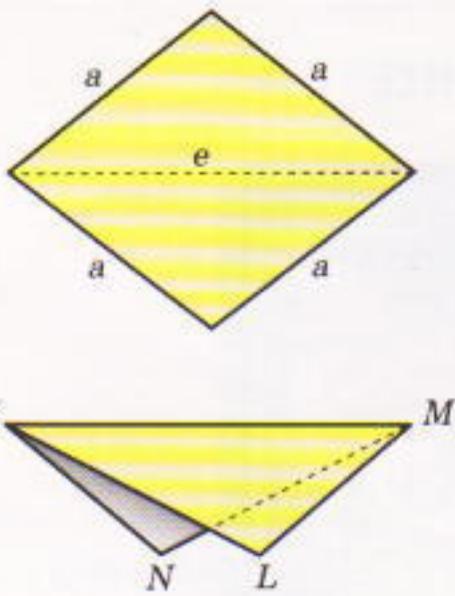
Θα αρχίσουμε ενώνοντας με ένα συγκεκριμένο τρόπο δύο όμοια αντίγραφα  $P_1$  και  $P_2$  της πολυεδρικής επιφάνειας  $P$ . Θα συμβολίσουμε τις κορυφές της επιφάνειας  $P_1$  με τα ίδια γράμματα που χρησιμοποιήσαμε για τις αντίστοιχες κορυφές της επιφάνειας  $P$  χρησιμοποιώντας επιπλέον και το δείκτη 1. Παρόμοιο συμβολισμό θα χρησιμοποιήσουμε για την επιφάνεια  $P_2$ .

Σχεδιάζουμε τώρα στο χαρτόνι το τετράπλευρο που αποτελείται από τα δύο ίσα τρίγωνα του Σχήματος 3. Τα γράμματα  $a$  και  $e$  δηλώνουν, όπως και προηγουμένως, τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών. Αν προηγουμένως διαλέξατε  $a = 12$ , θα σας διευκολύνει να θέσετε  $e = 17$ . Κόψτε το σχήμα κατά μήκος των συνεχών γραμμών και διπλώστε το κατά μήκος της διακεκομένης γραμμής. Θα προκύψει η μη κλειστή πολυεδρική επιφάνεια του Σχήματος 3, την οποία ονομάζουμε  $R$ .

Σταθεροποιούμε τη θέση της επιφάνειας  $R$  στο χώρο έτοι ώστε η απόσταση μεταξύ των  $L$  και  $N$  να γίνει  $d$ . Με άλλα λόγια, στη συνέχεια δεν θα αλλάξουμε την τιμή της διεδρής γωνίας με ακμή  $KM$  της επιφάνειας  $R$ .

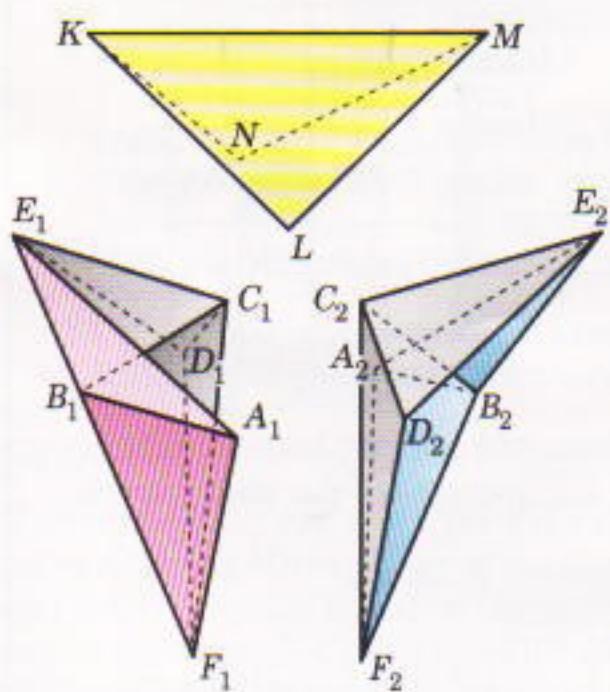


Σχήμα 2



Σχήμα 3

Τοποθετούμε το σημείο  $K$  πάνω στο  $E_1$ , το  $A_1$  στο  $L$  και το  $D_1$  στο  $N$ . Στη συνέχεια ενώνουμε τις επιφάνειες  $P_1$  και  $R$  κατά μήκος των ακμών  $A_1E_1$  και  $KL$  και κατά μήκος των ακμών  $E_1D_1$  και  $KN$  (Σχήμα 4). Είναι φανερό ότι, όπως και προηγουμένως, μπορούμε να μετακινήσουμε την κορυφή  $F_1$  παρόλο που η θέση της επιφάνειας  $R$  είναι σταθερή (διότι η σταθερή απόσταση μεταξύ των σημείων  $A$  και  $D$  δεν αφαιρεί από το οκτάεδρο Bricard την ικανότητα συστροφής και η  $P_1$  είναι απλώς ένα τμήμα αυτού του οκταέδρου). Επιπλέον, το σημείο  $F_1$  μπορεί να κινηθεί ελεύθερα κατά μήκος του κύκλου που ανήκει σε ένα επίπεδο κάθετο στο τμήμα  $A_1D_1$  και έχει κέντρο το μέσο αυτού του τμήματος. Η μορφή των εδρών των επιφανειών  $R$  και  $P_1$  δεν θα αλλάξει —θα μεταβληθούν μόνο μερικές συγκεκριμένες διέδρες γωνίες.



Σχήμα 4

Παρομοίως, τοποθετούμε το σημείο  $E_2$  πάνω στο  $M$ , το  $D_2$  στο  $L$  και το  $A_2$  στο  $N$ . Στη συνέχεια ενώνουμε τις επιφάνειες  $P_2$  και  $R$  κατά μήκος των ακμών  $A_2E_2$  και  $MN$  και κατά μήκος των ακμών  $D_2E_2$  και  $LM$  (Σχήμα 4). Διαποτώνουμε ότι το σημείο  $F_2$  μπορεί να κινηθεί κατά μήκος του ίδιου κύκλου στον οποίο κινείται το  $F_1$ . Επομένως, αν δώσουμε μια τυχαία μορφή στην επιφάνεια  $P_1$  (δηλαδή αν σταθεροποιήσουμε τη θέση της κορυφής  $F_1$  στον προαναφερθέντα κύκλο) μπορούμε να συστρέψουμε την επιφάνεια  $P_2$  (διατηρώντας σταθερές τις έδρες της φυσικά) έτσι ώστε να συμπέσουν οι κορυφές  $F_2$  και  $F_1$ . Τότε όμως θα ταυτιστούν οι ακμές  $A_1F_1$  και  $D_2F_2$ , όπως και οι ακμές  $D_1F_1$  και  $A_2F_2$ , και θα προκύψει μια κλειστή πολυεδρική επιφάνεια, που είναι εύκαμπτη, διότι έχουμε ελευθερία επιλογής στη θέση του σημείου  $F_1$  (ή, ισοδύναμα, του  $F_2$ ). Η ε-

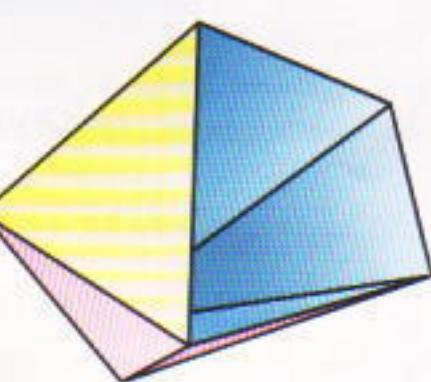
στών, εύκαμπτων πολυεδρικών επιφανειών που επινόρει ο R. Connelly. Το 1995 ο ρώσος μαθηματικός I.H. Sabitov απέδειξε την εικασία. Σκεφτείτε το: η επιφάνεια του Steffen θα παρέμενε εύκαμπτη ακόμη και αν τη σφραγίζαμε ερμητικά και τη γεμίζαμε με ένα ασυμπίεστο υγρό!

Προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα: Υπάρχουν άλλα μεγέθη που χαρακτηρίζουν μια πολυεδρική επιφάνεια και παραμένουν σταθερά όταν τη συστρέφουμε; Ένα τετριμένο παράδειγμα τέτοιου μεγέθους είναι το εμβαδόν της επιφάνειας. Ένα ακόμη σημαντικότερο παράδειγμα προκύπτει από την επόμενη κατασκευή.

Ορίζουμε την εσωτερική διεδρη γωνία στην ακμή μιας κλειστής πολυεδρικής επιφάνειας ως το μέτρο της διεδρης γωνίας (σε αυτή την ακμή) που προκύπτει αν μετρήσουμε από την πλευρά της πολυεδρικής επιφάνειας στην οποία πρόσκειται το πεπερασμένου όγκου σώμα που φράσσεται από την επιφάνεια (μπορεί να είναι μεγαλύτερο από  $180^\circ$ ). Πολλαπλασιάζουμε το μήκος της ακμής μιας πολυεδρικής επιφάνειας επί την τιμή της εσωτερικής διεδρης γωνίας σε αυτή την ακμή και προσθέτουμε τα γινόμενα για όλες τις έδρες. Ο αριθμός που προκύπτει ονομάζεται μέση καρπούλοτη της πολυεδρικής επιφάνειας. Το 1985, ο αμερικανός μαθηματικός R. Alexander απέδειξε ότι, όταν συστρέφεται μια κλειστή, εύκαμπτη πολυεδρική επιφάνεια, η μέση καρπούλοτη της δεν μεταβάλλεται.

## Υπάρχουν εφαρμογές στον φυσικό κόσμο;

Θα πρέπει να ομολογήσουμε ότι στα είκοσι χρόνια που ακολούθησαν την αναβίωση του ενδιαφέροντος για τις κλειστές, εύκαμπτες επιφάνειες δεν έχουν ανακαλυφθεί πρακτικές εφαρμογές. Δεν πρέπει όμως να απελπίζομαστε, διότι πολύ συχνά στην ιστορία της εποπτήμης οι πρακτικές εφαρμογές ενός φαινομένου που έχει αποδειχτεί θεωρητικά εμφανίζονται μόνο έπειτα από την πάροδο πολλών ετών. Για παράδειγμα, περισσότερα από πενήντα χρόνια μεσολάβησαν μεταξύ της θεωρητικής ανακάλυψης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και της πρώτης ραδιοφωνικής εκπομπής.



Σχήμα 5

πιφάνεια αυτή ονομάζεται πολυεδρική επιφάνεια του Steffen. Έχει εννέα μόνο κορυφές, δηλαδή μία μόνο κορυφή παραπάνω από τον κύβο. (Θα σας βοηθήσει αν κατασκεύαστε το τρίγωνο  $KLM$  από διάφανο υλικό: θα μπορέσετε να δείτε τι συμβαίνει στο εσωτερικό της επιφάνειας Steffen όταν τη συστρέψετε.)

Ας σχολιάσουμε τώρα ορισμένες ιδιότητες των εύκαμπτων πολυεδρικών επιφανειών. Κάθε κλειστή πολυεδρική επιφάνεια που δεν τέμνεται με τον εαυτό της αποτελεί το σύνορο ενός σώματος στον τριοδιάστατο χώρο. Το σώμα αυτό έχει πεπερασμένο όγκο. Σύμφωνα με τη λεγόμενη εικασία του φυσητήρα, αν η επιφάνεια είναι εύκαμπτη όταν τη συστρέψουμε, ο όγκος αυτού του σώματος παραμένει σταθερός. Η εν λόγω εικασία εμφανίστηκε το 1978 ως αποτέλεσμα της μελέτης των πρώτων παραδειγμάτων κλει-

Και παρόλο που δεν γνωρίζουμε ακόμη κάποια μη τετριμένη εφαρμογή αυτής της θεωρίας, μπορούμε να υποδείξουμε μια πολλά υποσχόμενη γραμμή έρευνας. Η σύγχρονη χημεία εξηγεί πολλές ιδιότητες διαφόρων ουσιών βάσει της γεωμετρικής δομής των μορίων τους. Είναι δυνατόν να θεωρήσουμε ένα μόριο ως πολύεδρο, με τα άτομα να αντιστοιχούν στις κορυφές του και τις συνδέσεις μεταξύ των ατόμων να αντιστοιχούν στις ακμές του. Και παρ' ότι οι αποστάσεις μεταξύ των ατόμων δεν μπορούν να μεταβάλλονται, τίποτε δεν εμποδίζει την αλλαγή των δίεδρων γωνιών μεταξύ των εδρών αυτού του πολυέδρου.

Έτσι, μπορούμε να φανταστούμε κάποια ουσία τα μόρια της οποίας έχουν τη μορφή εύκαμπτης επιφάνειας. Οι χημικές και φυσικές ιδιότητες αυτής της ουσίας θα αλλάζουν καθώς θα μεταβάλλεται η μορφή των μορίων της! Ακόμη, βέβαια, δεν έχει ανακαλυφθεί μια τέτοια ουσία. Ποιος όμως μπορεί να ξέρει τι θα συμβεί στο μέλλον; ◻

## ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

### QUANTUM



Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει είκοσι οκτώ τεύχη του. Αυτά,

για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα

προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.

Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

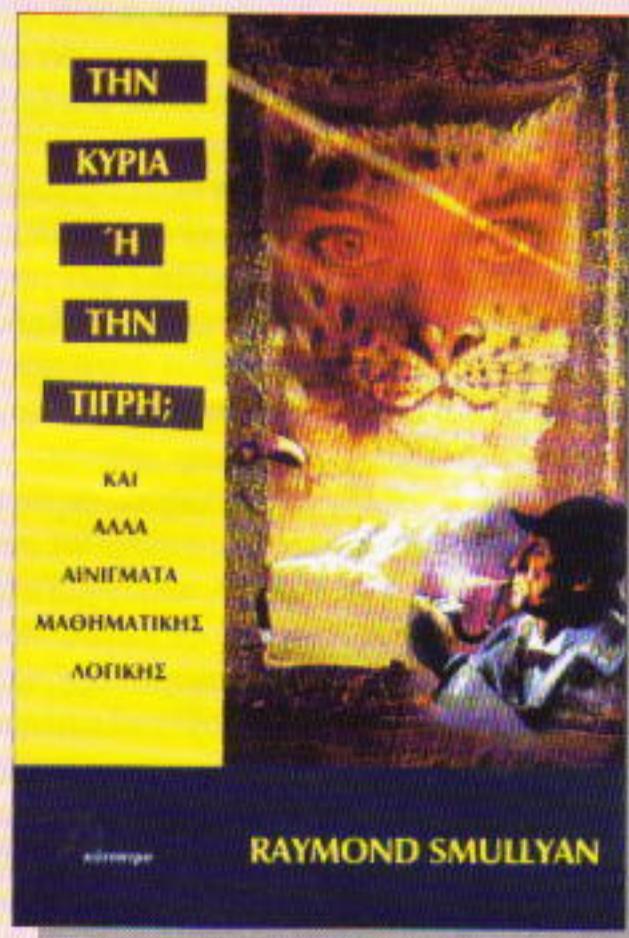
Μπορείτε ακόμη να προμηθευτείτε και τις καλαίσθητες θήκες του, με αντικαταβολή ή από το βιβλιοπωλείο μας, για την αρχειοθέτηση των τευχών σας.



### QUANTUM



## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣ



**Raymond Smullyan**

## Την κυρία ή την τίγρη; και άλλα αινίγματα μαθηματικής λογικής

Το βιβλίο, αποτελεί μια εξαιρετική συλλογή προβλημάτων —παραδόξων, μεταγρίφων, αινιγμάτων συνδυαστικής, κ.λπ.— της σύγχρονης μαθηματικής λογικής, και έχει ως κύριο σκοπό του να εξηγήσει, με τρόπο μοναδικό, το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel και το θεώρημα της τυπικής μη ορισμότητας της αλήθειας του Tarski.

- «Σπινθηροβόλα συλλογή προβλημάτων και παραδόξων της λογικής από τον πιο ψυχαγωγικό επαίοντα της μαθηματικής λογικής και της θεωρίας συνόλων που υπήρξε ποτέ...»

*Martin Gardner*

- «Έξυπνο, διδακτικό, διασκεδαστικό βιβλίο... Ο τελευταίος μεταγρίφος "Ποιος είναι ο κατάσκοπος;" αποτελεί τον πιο ευφυή γρίφο λογικής που διατυπώθηκε ποτέ...»

*G. Boolos*, Καθηγητής φιλοσοφίας στο MIT

- «Ο Ray Smullyan είναι ο Lewis Carroll της εποχής μας...»

*R. Denning*, Καθηγητής πληροφορικής στο Πανεπιστήμιο Pardue

Ένα βιβλίο για κάθε λάτρη του είδους: από μαθητές λυκείου μέχρι ώριμους μαθηματικούς, λογικολόγους και επιστήμονες των υπολογιστών.

Σελ.: 264, 14 x 21 εκ., Πανόδετο, δ. 500 δρχ.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ**

Βιβλιοπωλεία: Στοά του βιβλίου (Πειραιάς ζόγλου 5), 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Web site: [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr)

# Για να περνά η ώρα

**Σ136**

**Φυσική τριάδα.** Κάποιος υποστηρίζει ότι γνωρίζει τρεις φυσικούς αριθμούς  $x$ ,  $y$  και  $z$ , που ικανοποιούν την εξίσωση  $28x + 30y + 31z = 365$ . Έχει δίκιο;



**Σ137**

**Εύφλεκτα χρονόμετρα.** Έχετε δύο κομμάτια φιτιλιού, καθένα από τα οποία καιγεται μέσα σε 1 λεπτό. Μετρήστε με τη βοήθειά τους 45 δευτερόλεπτα. Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε ψαλίδι και ο ρυθμός καύσης μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος κάθε φιτιλιού.



**Σ138**

**Η εξαφάνιση των κομμάτων.** Ένας μαθητής έγραψε στον πίνακα τρεις φυσικούς αριθμούς που είναι διαδοχικά στοιχεία μιας αριθμητικής προόδου. Στη συνέχεια, έσβησε τα κόμματα που χώριζαν τους αριθμούς και δημιούργησε έναν επταψήφιο αριθμό. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή αυτού του αριθμού;



**Σ139**

**Κατασκευή κύβου.** Αφαιρούμε το κεντρικό τετράγωνο από ένα πλέγμα διαστάσεων  $5 \times 5$ . Κόψτε το σχήμα που προκύπτει σε δύο τμήματα τα οποία μπορούν να διπλωθούν έτσι ώστε να σχηματιστεί ένας κύβος με ακμή μήκους 2 τετραγώνων.



**Σ140**

**Η αντανάκλαση που ξεφεύγει.** Είχα πάει κάποτε με το γιο μου βαρκάδα στη λίμνη και θαυμάζαμε την αντανάκλαση του δάσους πάνω στην ήρεμη επιφάνειά της. Ο γιός μου, πρότεινε: «Ας πάμε μέχρι εκεί. Θέλω να δω τα δέντρα κάτω από τα πόδια μου!» Προσπαθήσαμε να το καταφέρουμε, αλλά αποτύχαμε: το είδωλο του δάσους μας «ξέφευγε» συνεχώς. Γιατί;

# Γιατί αεροπλάνα παντός καιρού;

Πώς μια νεροποντή μπορεί να βοηθήσει κάποιον να αυξήσει τις γνώσεις του

S.K. Betyaev

**Μ**ΙΑ ΒΡΟΧΕΡΗ ΦΘΙΝΟΠΩΡΙΝΗ νύχτα, καθώς ο φίλος μου κι εγώ περιμέναμε στο αεροδρόμιο για την πτήση μας, μπορέσαμε και ανακαλύψαμε γιατί τα αεροπλάνα αδυνατούν να πετάξουν όταν επικρατεί κακοκαιρία. Χρειαστήκαμε βέβαια περισσότερο από μισή ημέρα, αλλά τα καταφέραμε. Εγώ, μάλιστα, έφτασα στο σημείο να καταγράψω την περιπέτειά μας προς χάρη των επερχόμενων γενεών.

«Η πτήση 429 έχει καθυστέρηση λόγω των καιρικών συνθηκών», ανακοίνωσε η φωνή στο μεγάφωνο. Είχαν ανοίξει οι καταρράκτες του ουρανού και τα φώτα των δρόμων μόλις που διακρίνονταν μέσα στη θύελλα.

«Γιατί άραγε να καθυστερούν οι πτήσεις όταν είναι τέτοιος ο καιρός;» σκέφτηκα μεγαλόφωνα. «Οι κεραυνοί και οι αστραπές σταμάτησαν για τα καλά, ζήτημα να σχηματιστεί πάγος στην πτέρυγα δεν γεννάται με τη ζεστή που κάνει, και οι μοντέρνες συσκευές πλοϊγησης επιτρέπουν τον έλεγχο των πτήσεων ακόμη και με μηδενική ορατότητα.»

«Αχά! Ξέρω γιατί», είπα έπειτα από παρατεταμένη σιωπή. «Οι έλικες των αεροπλάνων δεν είναι σχεδιασμένες για να δουλεύουν με τόσο υψηλή υγρασία.»

«Δεν αποκλείεται να είσαι ειδικός στους έλικες» απάντησε ο φίλος μου «αλλά, ξέρεις, το αεροπλάνο μας είναι αεριωθούμενο. Λίγο νερό στην τουρμπίνα δεν πρόκειται να το επηρεάσει και πολύ». «Τότε που βρίσκεται το πρόβλημα;

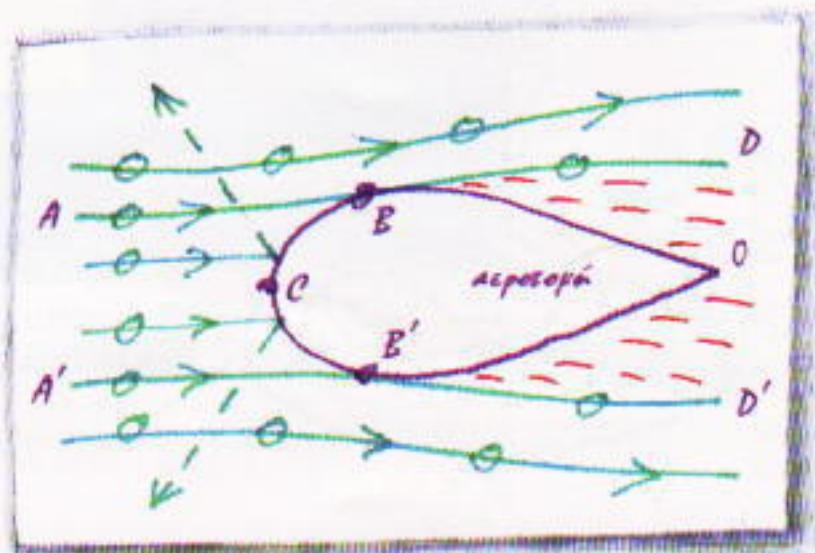
Μήπως ο βροχέρος καιρός αποτελεί πρόσχημα για να συγκαλυφθούν άλλοι λόγοι;»

«Μη βιάζεσαι να καταλήξεις σε συμπεράσματα. Ας σχεδιάσουμε τη μορφή της ροής γύρω από μια αεροτομή ενός αέριου ρεύματος που περιέχει σταγονίδια νερού.»

Αφού έβαλε στην άκρη το φλιτζάνι του με τον καφέ, ο φίλος μου πήρε ένα φύλλο χαρτί και μερικά χρωματιστά στυλό και έφτιαξε στα γρήγορα ένα σκαρίφημα (Σχήμα 1). Τότε είπε: «Ας εξετάσουμε την πτήση στο σύστημα αναφοράς του αεροπλάνου. Ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς βλέπει το ρεύμα του αέρα με τα σταγονίδια του νερού να προσπίπτει στην πτέρυγα, η οποία ηρεμεί. Σε μεγάλες αποστάσεις από την πτέρυγα, η ταχύτητα της ροής του αέρα ισούται κατά μέτρο με την ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς ένα σύστημα αναφοράς στερεωμένο στο έδαφος.»

«Και με τη δύναμη της βαρύτητας τι γίνεται;» ρώτησα κοιτάζοντας το σκαρίφημα.

«Δεν χρειάζεται να μας απασχολήσει εδώ. Από τη στιγμή που εγκαταλείπει το διάδρομο απογείωσης και ώσπου να βρεθεί πάνω από τα σύννεφα της βροχής, ένα σύγχρονο επιβατικό αεροπλάνο αναπτύσσει μέση ταχύτητα περίπου 70 m/s. Από την

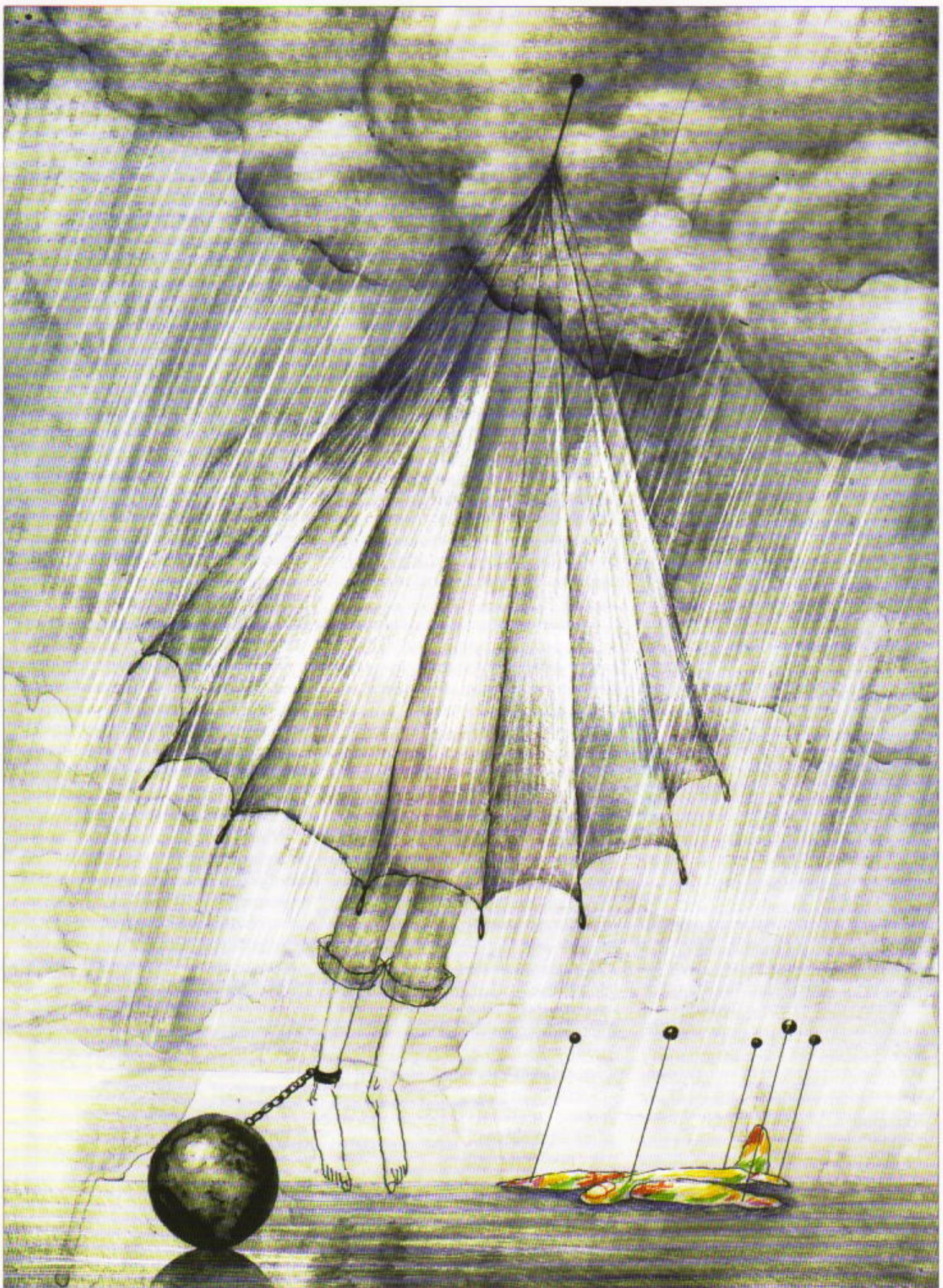


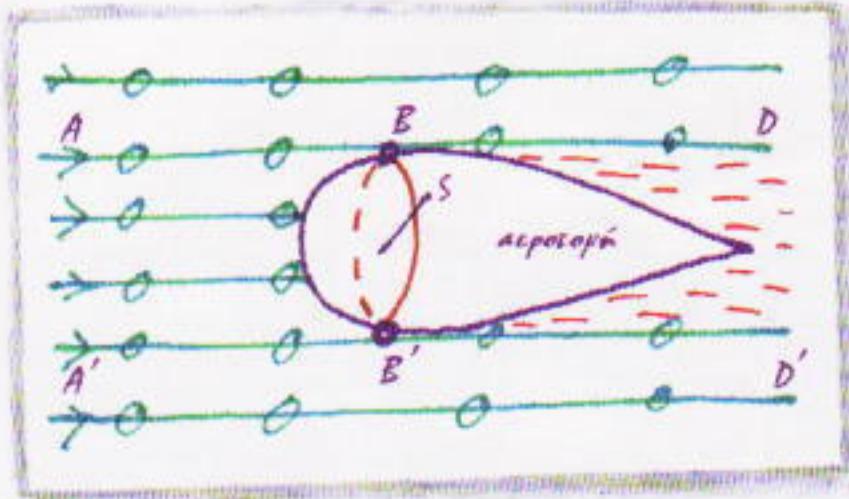
Σχήμα 1

άλλη, οι σταγόνες της βροχής πέφτουν με σταθερή ταχύτητα 10 m/s. Επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε τη βαρύτητα.»

«Και τότε πώς τα σταγονίδια χτυπούν την πτέρυγα;»

«Καλά, λοιπόν, ας εξετάσουμε αυτή τη διαδικασία. Ανάμεσα στις τροχιές των κινούμενων σωματιδίων του νερού υπάρχουν δύο που εφάπτονται στο δριο της αεροτομής του σκαρίφημάτος μας (Σχήμα 1): η ABD και η A'B'D'. Οι τροχιές που βρίσκονται πάνω από την ABD και κάτω από την A'B'D' δεν συναντούν την πτέρυγα. Η περιοχή που είναι χρωματισμένη κόκκινη παραμένει “στεγνή” επειδή οι σταγόνες του νερού είναι αδύνατον να φτάσουν εκεί. Αντιθέτως, ο τομέας BCB' βομβαρδίζεται συνεχώς από σταγόνες. Όποτε κάποια σταγόνα προσκρούει στην πτέρυγα, η ορμή της σταγόνας μεταβάλλεται, πράγμα που σημαίνει ότι επενεργεί πάνω της





Σχήμα 2

μια δύναμη λόγω της πτέρυγας. Συνεπώς, και η σταγόνα ασκεί μια δύναμη ίσου μέτρου στην πτέρυγα. Όπως μπορείς να δεις, αυτή η δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα του αεροπλάνου. Ιδού, λοιπόν, ο μηχανισμός που παράγει την επιρρόσθετη αντίσταση.

«Ωστε αυτός είναι ο λόγος που οδηγεί στη ματαιώση των πτήσεων όταν βρέχει ραγδαία;»

«Προτρέχεις και πάλι», με μάλωσε ο φίλος μου. «Ας εκτιμήσουμε το μέτρο αυτής της δύναμης. Οι μετεωρολόγοι γνωρίζουν πως οι ισχυρότερες βροχές χαρακτηρίζονται από σταγονίδια διαμέτρου  $d \approx 2 \text{ mm}$  και μέσης πυκνότητας  $\rho_s \approx 2 \text{ g/m}^3$ . Σε πρώτη προσέγγιση, ας δεχτούμε πως τα σταγονίδια δεν εκτρέπονται από τις αρχικές τροχιές τους, οπότε οι γραμμές  $ABD$  και  $A'B'D'$  παραμένουν ευθείες.» (Ο φίλος μου σχεδίασε το σκαρίφημα του Σχήματος 2.)

«Το πλήθος των σταγονίδιων που προσπίπτουν στην πτέρυγα ανά μονάδα χρόνου είναι  $uSp$ . Εδώ το  $S$  συμβολίζει το εμβαδόν της μέγιστης διατομής της πτέρυγας που είναι κάθετη προς την ταχύτητα (δηλαδή συμβολίζει το εμβαδόν της διατομής  $BB'$ ) και  $p = \rho_s / m$  είναι ο αριθμός των σταγονίδιων ανά μονάδα όγκου. Δεδομένου ότι κάθε σταγονίδιο μάζας  $m$  χάνει όλη την ταχύτητα καθώς συγκρύεται ανελαστικά με την πτέρυγα, συντελείται μεταφορά ορμής που προς την πτέρυγα. Έτσι, στο σύνολό τους οι προσπίπτουσες σταγόνες τής προσδίδουν, κατά προσέγγιση, ορμή  $u S_{per}$  που ανά μονάδα χρόνου. Εξ ορισμού, η συγκεκριμένη ποσότητα 1-

σούται με τη δύναμη που ασκείται στην πτέρυγα. Δρα αντίθετα με την κατεύθυνση της πτήσης. Επομένως, η αντίσταση του αέρα ενισχύεται από μια δύναμη εκ πιέσεως  $F$  που οφείλεται στις προσπίπτουσες σταγόνες και η οποία 1-σούται κατά προσέγγιση με  $\rho_s S_{per} u^2$ .

«Ο ίδιος τύπος περιγράφει και τη δύναμη εκ πέσεως του αέρα εν απουσίᾳ σταγονίδιων, με τη διαφορά ότι, στην περίπτωση αυτή, τη θέση της  $\rho_s$  πρέπει να την καταλάβει η πυκνότητα του αέρα  $\rho_1$ :  $F_1 \equiv \rho_1 S_{per} u^2$ . Σε κανονικές συνθήκες,  $\rho_1 \equiv 1.300 \text{ g/m}^3$ . Άρα, ο λόγος των δυνάμεων εκ πέσεως που οφείλονται αντίστοιχα στα σταγονίδια του νερού και στα μόρια του αέρα θα 1-σούται κατά προσέγγιση με  $F/F_1 \equiv \rho_s / \rho_1 \equiv 10^{-3}$ .

«Από αυτή την εκτίμηση διαπιστώνουμε εύκολα πως η συμβολή των σταγονίδιων του νερού στην ολική δύναμη εκ πέσεως είναι εξαιρετικά μικρή. Στην πραγματικότητα, μάλιστα, έχουμε υπερεκτιμήσει τη συμβολή αυτή, επειδή κοντά στην πτέρυγα οι τροχιές των σταγονίδιων αποκλίνουν από τις ευθείες γραμμές που σχεδιασα. Έτσι, αρκετά από τα σωματίδια που η ταχύτητά τους στο "άπειρο" δείχνει ότι θα συγκρουστούν με την πτέρυγα, μιας και "σημαδεύουν" την εγκάρσια διατομή  $S_{per}$  (όπως έχει σχεδιαστεί στο σκαρίφημά μας [Σχήμα 1]), τελικά θα αστοχήσουν.»

«Άρα η βροχή δεν μπορεί να παρακώλυσε την πτήση. Τότε, όμως, τι φταίει;» είπα προσπάθωντας να επαναφέρω τη συζήτηση στην προβληματική μας πτήση.

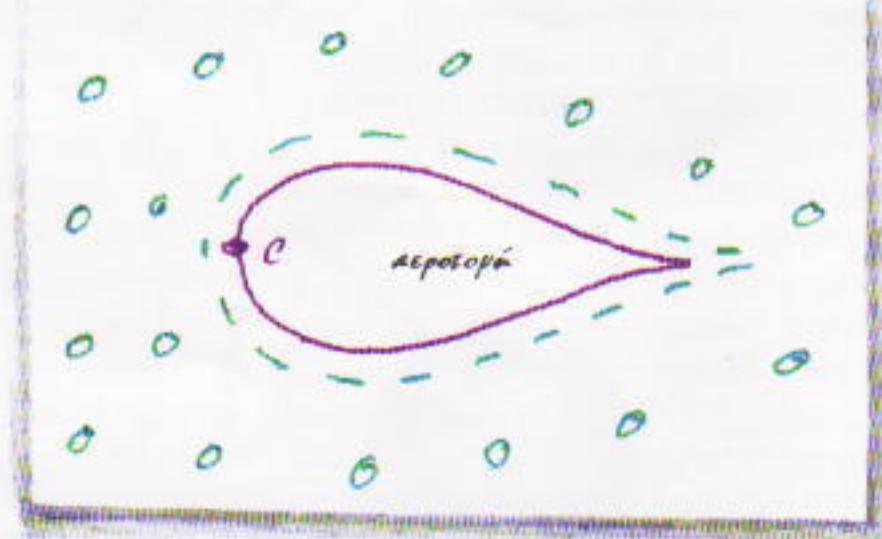
«Υπομονή, φίλε μου! Έχεις δίκιο. Οι κρούσεις με τα σταγονίδια του νερού

πράγματι δεν μπορούν να παρεμποδίσουν μια πτήση. Ωστόσο, υπάρχει ακόμη μια δύναμη που παίζει σημαντικό ρόλο —η δύναμη αντίστασης (οπισθέλκουσα τριβής) που ασκείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της πτέρυγας. Ας εξετάσουμε λεπτομερώς τη συγκεκριμένη δύναμη. Προφανώς, όταν βρέχει, και μάλιστα δυνατά, η πτέρυγα θα είναι υγρή —θα περιβάλλεται από νερό και όχι από αέρα. Έτσι, μπορούμε να αναμένουμε μια σημαντική αύξηση της δύναμης αντίστασης (της οπισθέλκουσας).» Ο φίλος μου σχεδίασε μια πτέρυγα που την κάλυπτε ένα λεπτό υδάτινο στρώμα (Σχήμα 3).

«Όμως» αντέτεινα «τα αεροπλάνα δεν διαθέτουν, όπως και όλα τα μηχανήματα, πρόσθετη ισχύ προκειμένου να αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα;»

«Έχεις δίκιο και πάλι. Άλλα πόση ισχύς απαιτείται ώστε να υπερνικηθεί αυτή η πρόσθετη αντίσταση; Προτείνω να επιχειρήσουμε ορισμένες ακόμη εκτιμήσεις, γεγονός που επιβάλλει να υιοθετήσουμε μερικές καινούργιες παραδοχές. Είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι, μέσα στο λεπτό υδάτινο στρώμα, όλα τα σωματίδια του νερού δεν κινούνται με την ίδια ταχύτητα: παραμένουν ακίνητα στην επιφάνεια της πτέρυγας (εδώ το νερό "κολλάει" στην πτέρυγα), και η ταχύτητά τους αυξάνει καθώς μεγαλώνει η απόστασή τους από την πτέρυγα.

«Το ότι η ταχύτητα επιδεικνύει τέτοια συμπεριφορά εξηγείται από τις δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω εσωτερικής τριβής σε ένα υγρό το ο-



Σχήμα 3

ποίο βρίσκεται σε κίνηση: Κάθε λεπτό στρώμα ενός κινούμενου υγρού δέχεται την επίδραση τόσο του υποκείμενου όμορου στρώματος (το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στην πτέρυγα), όπου η δύναμη τριβής έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη ροή, όσο και από το υπερκείμενο όμορο στρώμα, όπου η δύναμη της τριβής κατευθύνεται παράλληλα προς τη ροή. Όταν ο συντελεστής εσωτερικής τριβής (το ιξώδες) του ρευστού είναι μικρός, η ταχύτητα θα λάβει την ασυμπτωτική τιμή της (την τιμή που έχει στο άπειρο)  $u_0$  σε πολύ μικρή απόσταση από την πτέρυγα. Με άλλα λόγια, οι δυνάμεις εκ τριβής είναι σημαντικές μόνο στο λεπτό οριακό στρώμα που γεννιάζει με την πτέρυγα. Ας δεχτούμε ότι αυτές ακριβώς οι συνθήκες ισχύουν και στην περίπτωσή μας.» Λέγοντας αυτά, ο φίλος μου σχεδίασε το σκαρίφημα που φαίνεται στο Σχήμα 4.

Αυτή την κρίσιμη στιγμή άκουσα μια ανακοίνωση που αφορούσε την πτήση μας. Είχαμε παρασυρθεί τόσο από τη συζήτηση ώστε δεν προσέξαμε πως η βροχή είχε σχεδόν σταματήσει. Οι πάντες γύρω μας είχαν κινητοποιηθεί· η ώρα δεν προσφερόταν για επιστημονικές αναλύσεις. Όταν πια είχαμε βολευτεί άνετα στις θέσεις μας μέσα στο αεροπλάνο, έδωσα συνέχεια στη συζήτηση.

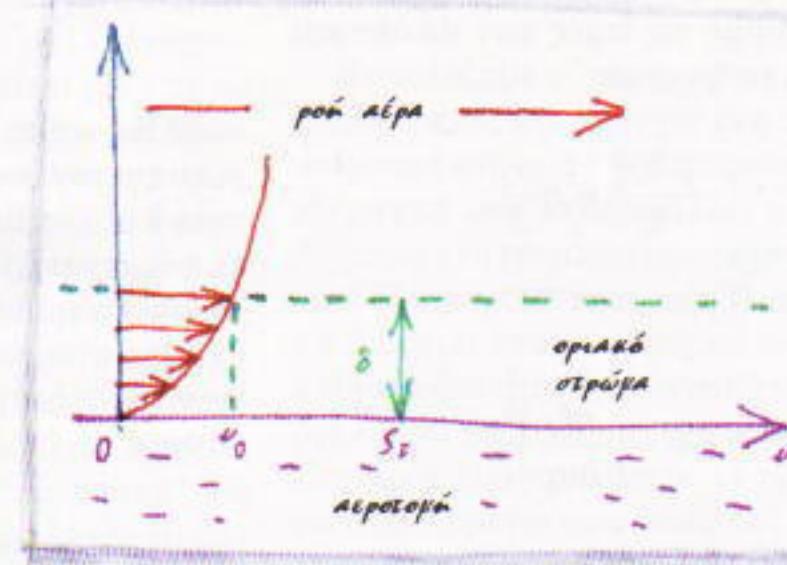
«Θα ήθελα να ξεκαθαρίσουμε το πρόβλημα της υγρής πτέρυγας. Είχες σταματήσει στο οριακό στρώμα.»

«Α, ναι. Ας υποθέσουμε πως αυτό το οριακό στρώμα "μεταβιβάζει" τη δύναμη της προσώπου σας ροής στην πτέρυγα, παράγοντας έτσι την πρόσθετη αντίσταση. Τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της συγκεκριμένης αντίστασης. Μας ενδιαφέρει η δύναμη που ασκείται εφαπτομενικά προς την επιφάνεια της πτέρυγας. Όταν η δύναμη αυτή ασκείται σε επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού αναφέρεται ως ειδική οπισθέλκουσα (στη μηχανική των ρευστών είναι γνωστή ως διατμητική τάση).»

«Θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα» μάντεψα «επειδή από τη συνθήκη της πρόσφυσης (ή μη ολίσθησης) η ταχύτητα μηδενίζεται όταν  $y = 0$ . Άλλα, τότε, από τι εξαρτάται η ειδική οπισθέλκουσα;»

«Η απάντηση στο ερώτημά σου δό-

θηκε από τον Ισαάκ Νεύτωνα στο περιώνυμο έργο του *Principia Mathematica*: Η ειδική οπισθέλκουσα της καθορίζεται από την πρώτη παράγωγο της ταχύτητας  $u(y)$  κατά την κάθετο στην επιφάνεια —δηλαδή από την  $du/dy$ . Η τριβή ανά μονάδα επιφανείας είναι ευθέως ανάλογη με τη συγκεκριμένη παράγω-



Σχήμα 4

$$\tau = \eta \frac{du}{dy},$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας  $\eta$  είναι γνωστός ως δυναμικός συντελεστής εσωτερικής τριβής. Ο συγκεκριμένος τύπος αποδείχτηκε σωστός σε μια ευρύτατη περιοχή τιμών. Όσα μέσα υπακούουν σ' αυτή την εξίσωση ονομάζονται νευτώνεια. Και το σπουδαιότερο, τα μέσα που μας ενδιαφέρουν (ο αέρας και το νερό) συγκαταλέγονται πράγματα στα νευτώνεια.»

«Ας δεχτούμε ότι αυτή η συλλογιστική είναι ορθή. Και πάλι, όμως, δεν κερδίσαμε πολλά πράγματα. Απλώς αντικαταστήσαμε τη μια άγνωστη τιμή, την  $\tau$ , με μια άλλη, την  $(du/dy)$ .»

«Δεν έχεις άδικο. Ωστόσο, ο τύπος του Νεύτωνα απλώς παρέχει μια φυσική εξήγηση για την οπισθέλκουσα. Το επόμενο βήμα για τον προσδιορισμό των δυνάμεων που ασκούνται στην πτέρυγα το πραγματοποίησε ο θεμελιωτής της θεωρίας του οριακού στρώματος, ο γερμανός καθηγητής της μηχανικής των ρευστών Ludwig Prandtl. Στο οριακό στρώμα η δράση των δυνάμεων εκ τριβής είναι ουσιώδης, οπότε φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε πως αυτές οι δυνάμεις τείνουν να επιβραδύνουν το υγρό. Για το στοιχείο όγκου που απεικονίζεται στο Σχήμα 4, μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή

$$m \frac{du}{dt} \propto \tau S,$$

ή

$$\rho \delta S \frac{du}{dt} \propto \eta \frac{du}{dy} S, \quad (1)$$

όπου το  $\delta$  συμβολίζει το χαρακτηριστικό πάχος του οριακού στρώματος, το  $S$  το εμβαδόν της βάσης του στοιχείου και το  $du/dt$  το μέτρο της επιτάχυνσης.»

«Όμως, έτσι, μόλις προσθέσαμε στις άγνωστες ποσότητες και μια καινούργια, την  $du/dt$  ...»

«Για την ακριβεία, δεν πρόκειται για τη μοναδική καινούργια ποσότητα. Ούτε και το πάχος του οριακού στρώματος είναι μια δεδομένη παραμέτρος. Εντούτοις, ο Prandtl κατάφερε να εκτιμήσει την τιμή της. Ας παρακολουθήσουμε το συλλογισμό του. Εφόσον η εξίσωση (1) αποτελεί μια προσέγγιση, πράγμα που σημαίνει ισότητα μόνο ως την τάξη μεγέθους της μονάδας, η πρώτη παράγωγος μπορεί να αντικατασταθεί με τον αντίστοιχο (πεπερασμένο) λόγο. Έτσι, αντί της  $du/dy$  μπορούμε να γράψουμε  $u_0/\delta$ . Η ισότητα  $du/dy = u_0/\delta$  είναι ακριβής μόνον όταν η ταχύτητα εντός του οριακού στρώματος είναι γραμμική συνάρτηση του  $y$ :  $u = u_0 y / \delta$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση, αυτός ο τύπος αντιπροσωπεύει μόνο μια προσέγγιση, όπως και η αρχική εξίσωση (1). Τώρα ας εκτιμήσουμε την  $du/dt$ . Το μήκος που χαρακτηρίζει τη γραμμική διάσταση του οριακού στρώματος παράλληλα προς την επιφάνεια της πτέρυγας ισούται με το μήκος χορδής της αεροτομής  $\ell_0$  (το τμήμα  $CO$  στο Σχήμα 1). Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε πως ισχύει η σχέση

$$\frac{du}{dt} \propto \frac{u^2}{\ell_0}.$$

»Αν απλοποιήσουμε το  $S$  και από

τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) και εισαγάγουμε τις τιμές των  $du/dy$  και  $du/dt$ , παίρνουμε

$$\frac{\rho \delta u_0^2}{\ell_0} \propto \eta \frac{u_0}{\delta},$$

από όπου βρίσκουμε

$$\delta \propto \left( \frac{\eta \ell_0}{\rho u_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ή

$$\delta \propto \ell_0 \text{Re}^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

όπου ο αδιάστατος συντελεστής  $\text{Re} = \rho u_0 \ell_0 / \eta$  λέγεται αριθμός Reynolds. Το όνομά της το οφείλει στον άγγλο υδροδυναμικό Osborne Reynolds, ο οποίος υπήρξε ο πρώτος που ανακάλυψε το ρόλο αυτού του αδιάστατου συντελεστή στον καθορισμό του τύπου της ροής. Ένα υγρό θεωρείται πως έχει χαμηλό συντελεστή εσωτερικής τριβής όταν ο Re του είναι μεγάλος. Αντίθετα, θεωρείται πως έχει υψηλό συντελεστή εσωτερικής τριβής όταν ο Re του είναι μικρός. Οπως είπαμε προηγουμένως, οριακό στρώμα σχηματίζεται μόνο σε υγρά με χαμηλό συντελεστή εσωτερικής τριβής. Στην αεροπορία, η περιοχή των αριθμών Reynolds εκτείνεται από  $10^6$  ως  $10^8$ .

«Ε, λοιπόν, το ζήτημα του  $\delta$  ξεκαθαριστήκε» είπα έπειτα από μια παύση «αλλά αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το  $t$ , που θα μας αποκαλύψει κατά πόσον ο κινητήρας μπορεί να αναπτύξει την αναγκαία προωστική ισχύ σε καιρό βροχής ή όχι.»

«Μπορούμε εύκολα να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα με τη βοήθεια της εξίσωσης (2) και υπολογίζοντας την ειδική οπισθέλκουσα. Στον πυθμένα του οριακού στρώματος έχουμε

$$t \propto \frac{\eta u_0}{\delta} \propto \frac{\eta u_0}{\ell_0} \text{Re}^{\frac{1}{2}}.$$

«Μια παρόμοια σχέση ισχύει και για τη ροή ξηρού αέρα. Τις ποσότητες που αναφέρονται στον “αέρα” θα τις συμβολίζουμε θέτοντας έναν κάτω δείκτη 1:

$$\tau_1 \propto \frac{\eta_1 u_{01}}{\ell_0} \text{Re}_1^{\frac{1}{2}},$$

όπου  $\text{Re}_1 = \rho_1 u_{01} \ell_0 / \eta_1$ . Για να προσδιορίσουμε τον παράγοντα κατά τον οποίο αυξάνεται η αντίσταση όταν ο καιρός είναι βροχερός, ας εξετάσουμε το λόγο  $\tau/\tau_1$ . Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες από τις οποίες εξαρτώνται τα  $\tau$  και  $\tau_1$ , βρίσκουμε

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\eta}{\eta_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{u_0}{u_{01}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

«Τις τιμές των  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\eta$  και  $\eta_1$  μπορούμε να τις βρούμε σε κάποιο εγχειρίδιο. Άλλα πώς θα καταφέρουμε να προσδιορίσουμε την τιμή του  $u_0/u_{01}$ ;

«Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε με τη βοήθεια της εξίσωσης του Bernoulli, η οποία μας παρέχει τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού και την πίεση. Στην περίπτωσή μας, ο αέρας που ρέει γύρω από την πτέρυγα κινείται ουσιαστικά σε ένα οριζόντιο επίπεδο, οπότε η εξίσωση του Bernoulli έχει την εξής μορφή:

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = \text{σταθ.}$$

«Η εξαγωγή αυτής της εξίσωσης δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Ας δεχτούμε ότι η πίεση μεταβάλλεται στην κατεύθυνση της ροής ως  $p(x) = kx + \text{σταθ.}$ » (Ο φίλος μου σχεδίασε τη γραφική παράσταση που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.) «Έξω από το οριακό στρώμα της ροής ενός ρευστού θεωρούμε ένα μικρό παραλληλόπεδο μήκους  $\Delta x$  και παράπλευρης επιφάνειας  $\Delta S$ . Στην αριστερή έδρα του παραλληλόπεδου ασκείται η δύναμη  $P_1 \Delta S$ , ενώ στη δεξιά η δύναμη  $P_2 \Delta S$ . Η ολική δύναμη που δρά στο γραμμοσκιασμένο παραλληλόπεδο είναι

$$F = P_1 \Delta S - P_2 \Delta S = (P_1 - P_2) \Delta S.$$

Εφόσον

$$P_2 = P_1 + \frac{dP}{dx} \Delta x,$$

τότε

$$F = -\frac{dP}{dx} \Delta x \Delta S = -\frac{dP}{dx} \Delta V,$$

όπου  $\Delta V = \Delta x \Delta S$  είναι ο όγκος του παραλληλοπέδου. Το έργο που πάργεται κατά τη μετατόπιση του παραλληλοπέδου στην κατεύθυνση του άξονα  $x$  καθορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\int F dx.$$

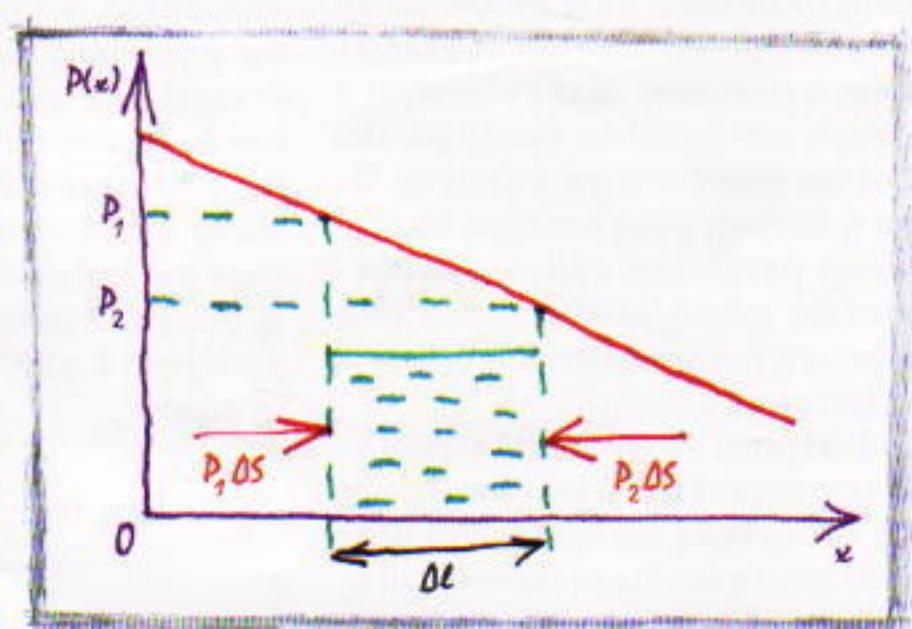
Έτσι, όταν το παραλληλοπέδο μετατοπίζεται από το σημείο  $x = a$  στο σημείο  $x = b$ , έχουμε

$$W = \int_a^b F dx = -\Delta V \int_a^b \frac{dP}{dx} dx = \Delta V (P_a - P_b)$$

«Από την άλλη, το συγκεκριμένο έργο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του παραλληλοπέδου  $W = (K_b - K_a)$  (εδώ θεωρούμε αμελητέο το έργο των δυνάμεων τριβής):

$$\Delta V (P_a - P_b) = \Delta V \rho \left( \frac{u_b^2}{2} - \frac{u_a^2}{2} \right),$$

από την οποία οδηγούμαστε στην εξισώση



Σχήμα 5

$$P_s + \rho \frac{u^2}{2} = P_b + \rho \frac{u_b^2}{2},$$

ή

$$P + \rho \frac{u^2}{2} = \text{σταθ.}$$

«Λοιπόν, αυτό τακτοποιήθηκε», είπα. «Ο τρόπος με τον οποίο εξάγεται η εξίσωση του Bernoulli αποσαφηνίστηκε. Άλλα πώς θα προσδιορίσουμε το  $u_0/u_{01}$ ;

«Με την ίδια εξίσωση. Ισχύει τόσο για τη ροή των αερίων όσο και των υγρών. Όπως κάναμε και προηγουμένως, θα συμβολίζουμε τις ποσότητες που αναφέρονται στον αέρα χρησιμοποιώντας το δείκτη 1. Έτσι, για το υγρό στρώμα που σχηματίζεται γύρω από την επιφάνεια της πτέρυγας έχουμε

$$P + \rho \frac{u^2}{2} = \text{σταθ.},$$

ενώ για τη ροή του αέρα ισχύει

$$P_1 + \rho_1 \frac{u_1^2}{2} = \text{σταθ}_1.$$

«Για να συγκρίνουμε τις  $u$  και  $u_1$  χρειαζόμαστε μια σχέση που να συνδέει τις σταθ<sub>1</sub>,  $P$  και  $P_1$ .

Θυμήσου πως, όταν συγκρίναμε τις δυνάμεις εκ πέσεως για τις πτήσεις σε υγρό και ξηρό καιρό, διαπιστώσαμε ότι είναι ουσιαστικά ίσες. Αυτό σημαίνει ότι η πίεση στο σημείο  $C$  (στο Σχήμα 1) μπορεί να θεωρηθεί ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Οι ταχύτητες του υγρού και των σωματιδίων του αέρα σ' αυτό το σημείο είναι μηδέν. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη σχέση για το υγρό που ρέει γύρω από πτέρυγα:

$$P + \rho \frac{u^2}{2} = P_C.$$

Και για τη ροή του αέρα, έχουμε

$$P_1 + \rho_1 \frac{u_1^2}{2} = P_C.$$

Συνεπώς,

$$P + \rho \frac{u^2}{2} = P_1 + \rho_1 \frac{u_1^2}.$$

Τώρα, ας διευθετήσουμε το ζήτημα των  $P$  και  $P_1$ . Το παραλληλεπίπεδο που επιλέξαμε κινείται μαζί με τη ροή ουσιαστικά στην οριζόντια διεύθυνση. Δηλαδή η κατακόρυφη ταχύτητά του είναι μηδέν. Έτσι, οι δυνάμεις που δρουν πάνω του εκ των άνω και εκ των κάτω είναι ίσες. Ωστόσο, και στις δύο περιπτώσεις (και με το υγρό στρώμα και χωρίς αυτό) η δύναμη που δρα από πάνω είναι η πίεση που ασκείται από την "εξωτερική" ροή του αέρα. Έτσι, τα παραλληλεπίπεδα τόσο του "αέρα" όσο και του "υγρού" δέχονται από πάνω τις ίδιες δυνάμεις. Επομένως, η ύπαρξη ενός λεπτού υδάτινου στρώματος δεν επηρεάζει την κατακόρυφη κατανομή της πίεσης, οπότε οι τιμές της πίεσης είναι ίσες στην ίδια διατομή της ροής του αέρα και του υγρού:  $P = P_1$ .

«Τώρα καταλαβαίνω», διέκοψα το φίλο μου. «Από τη συνθήκη  $P = P_1$  προκύπτει ότι

$$\rho \frac{u^2}{2} = \rho_1 \frac{u_1^2}{2}.$$

Συνεπώς

$$\frac{u}{u_1} = \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Τελικά, συμπεράναμε πως, όταν βρέχει δυνατά, η αντίσταση που δρα στην πτέρυγα αυξάνεται κατά τον παράγοντα

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\eta}{\eta_1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

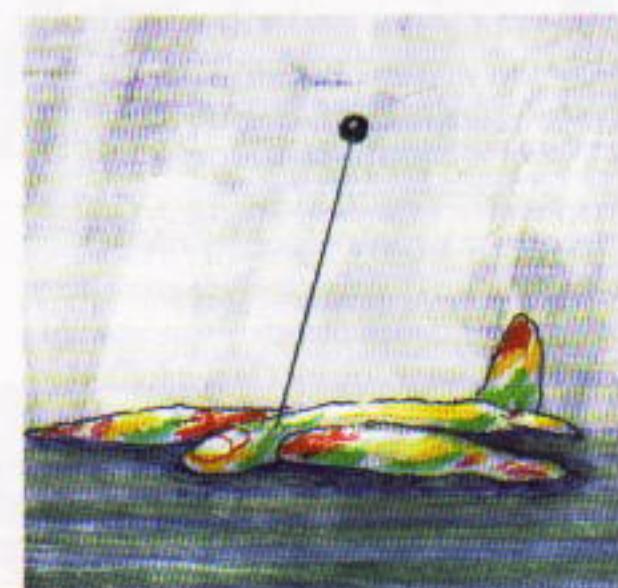
Η φωνή στο μεγάφωνο μας πληροφόρησε πως το αεροπλάνο μας είχε προσγειωθεί. Τις σημειώσεις που μου έδωσε ο φίλος μου τις φύλαξα στην τσάντα μου.

Στο σπίτι συμβουλεύτηκα μερικά βιβλία αναφοράς και βρήκα όλες τις αναγκαίες τιμές της πυκνότητας και του δυναμικού συντελεστή εσωτερικής τριβής. Εισάγοντάς τες στον τελευταίο τύπο, κατέληξα στο αποτέλεσμα  $\tau/\tau_1 \approx 1.5$ . Συνεπώς, ένα αεροπλάνο «παντός καιρού» πρέπει να διαθέτει ισχύ κατά 50% μεγαλύτερη από ένα συμβατικό αεροπλάνο. Ιδού, λοιπόν, ο λόγος που δεν πετούν τα αερο-

πλάνα όταν ανοίγουν οι κρουνοί του ουρανού.

Καταλήξαμε σ' αυτή την εκτίμηση υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα υδάτινο οριακό στρώμα στην επιφάνεια της πτέρυγας, που το περιβάλλει ο αέρας. Αμέσως, ένα ερώτημα μας έρχεται στο νου: Ποια πρωτοτική ισχύ θα έπρεπε να διαθέτει ένας κινητήρας ώστε να καθιστά δυνατή την κίνηση ενός αεροπλάνου μέσα σε συνεχή ροή νερού; Σας προκαλώ να λύσετε το πρόβλημα στηριζόμενο στις δικές σας δυνάμεις. Ιδού η απάντηση: Για να μετατρέψετε ένα αεροπλάνο σε υποβρύχιο, η ισχύς του κινητήρα θα έπρεπε να αυξηθεί κατά τον παράγοντα

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\eta}{\eta_1} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 230. \quad \square$$



#### Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- S. Betyaev, «Υδροπαράδοξα», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1998.
- S. Kuzmin, «Περιστροφή μέσα σε ρεύμα αέρα», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.
- L. Leonovich, «Υγρά και αέρια σε κίνηση», Μάρτιος/Απρίλιος 1996.
- A. Mitrofanov, «Κόντρα στο ρεύμα», Ιούλιος/Αύγουστος 1996.
- J. Raskin, «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.
- H. Schreiber, «Περί ιξώδους», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1996.
- A. Stasenko, «Στρόβιλοι πάνω στο διάδρομο απογείωσης», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997.
- I. Vorobyov, «Θόλοι και υπόγεια ρεύματα», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1995.

# Η ακαμψία των κυρτών πολυέδρων

Οι ευέλικτες ανακαλύψεις των Cauchy και Euler

N.P. Dolbilin

**Σ**ΤΟ ΑΡΘΡΟ «ΕΥΚΑΜΠΤΕΣ ΠΟΛΥΕΔΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ» (σελ. 5) μάθαμε τον τρόπο κατασκευής ενός εύκαμπτου πολυέδρου. Εδώ θα εξετάσουμε γιατί τα εύκαμπτα πολύέδρα δεν πρέπει να είναι κυρτά.

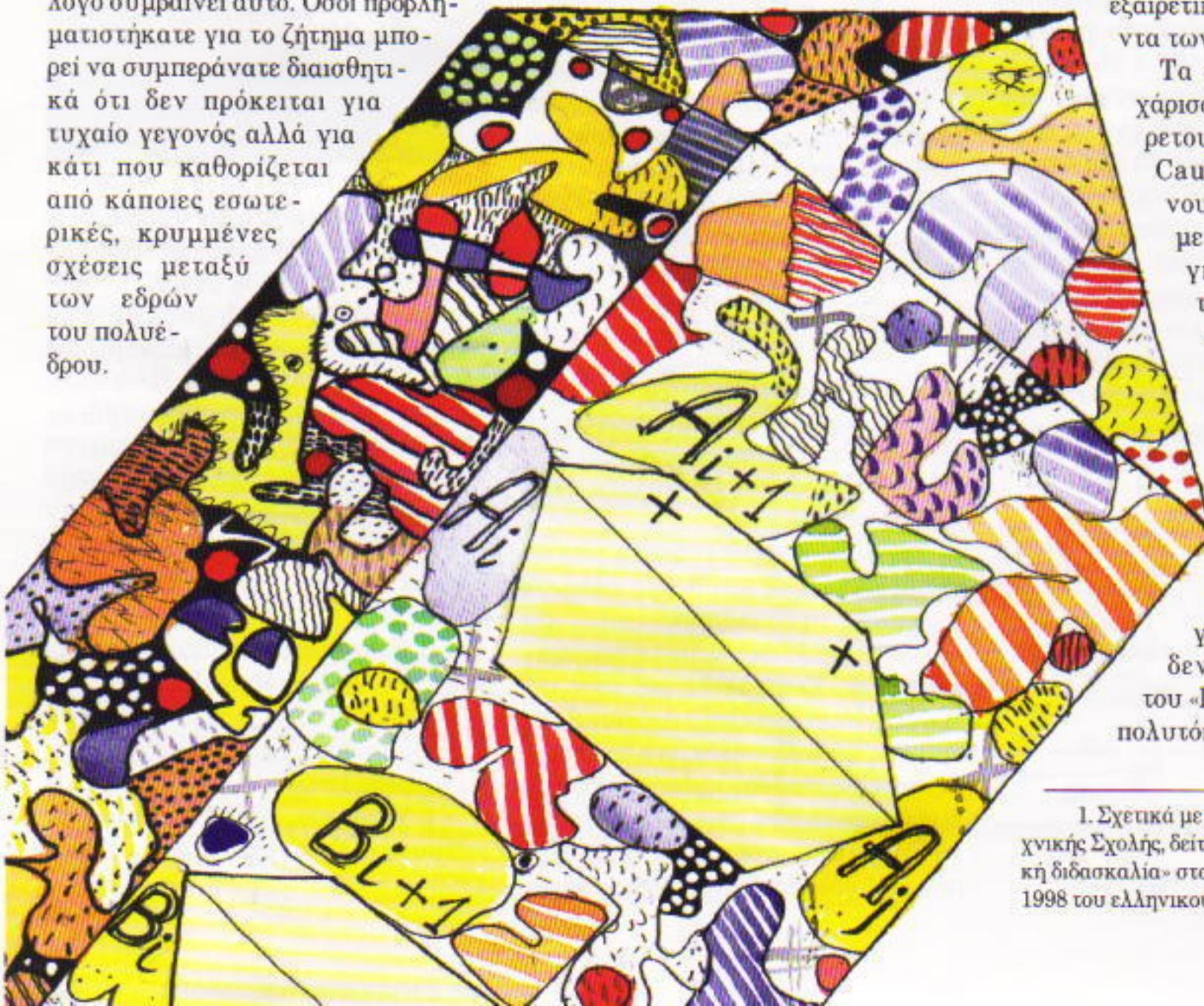
Οποιοσδήποτε κατασκεύασε ή απλώς κράτησε στα χέρια του ένα χάρτινο μοντέλο πολυέδρου θα παρατηρήσε πιθανότατα ότι δεν είναι εύκαμπτο και ίσως μάλιστα διερωτήθηκε για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό. Όσοι προβληματιστήκατε για το ζήτημα μπορεί να συμπεράνατε διαισθητικά ότι δεν πρόκειται για τυχαίο γεγονός αλλά για κάτι που καθορίζεται από κάποιες εσωτερικές, κρυμμένες σχέσεις μεταξύ των εδρών του πολυέδρου.

Το ερώτημα σχετικά με την ακαμψία ενός πολυέδρου είναι παλιό και, όπως αποδειχτήκε, ιδιαίτερα δύσκολο γεωμετρικό πρόβλημα. Τελικά λύθηκε μόλις πριν 20 χρόνια· το πρώτο βήμα το έκανε το 1813, σε ηλικία μόλις 23 ετών, ο εξαιρετος γάλλος μαθηματικός Augustin-Louis Cauchy, απόφοιτος της διάσημης Πολυτεχνικής Σχολής.<sup>1</sup>

Ο Cauchy τελείωσε την Πολυτεχνική Σχολή το 1807 και, σύμφωνα με

τον διάσημο γερμανό μαθηματικό Felix Klein, «λόγω των θαυμαστών επιτευγμάτων του σε ποικίλους κλάδους των μαθηματικών μπορούμε να τον τοποθετήσουμε στο ίδιο σχεδόν επίπεδο με τον Gauss». Αυτή η έκφραση υψηλής εκτίμησης για το έργο του Cauchy έχει ιδιαίτερη σημασία, διότι λόγω του οξύτατου ανταγωνισμού μεταξύ των γάλλων και γερμανών μαθηματικών η κάθε πλευρά αναγνώριζε εξαιρετικά σπάνια τα προσόντα των αντιπάλων της.

Τα αποτελέσματα που χάρισαν τη φήμη του εξαιρετού μαθηματικού στον Cauchy είχαν να κάνουν κατά κύριο λόγο με τον απειροστικό λογισμό, την άλγεβρα, τη μαθηματική φυσική και τη μηχανική. Η εργασία του στη γεωμετρία θα είχε πιθανόν περάσει απαραήρη μέσα στον τεράστιο όγκο του επιστημονικού του έργου — 25 ογκώδεις τόμοι — αν δεν υπήρχε το άρθρο του «Περί πολυγώνων και πολυτόπων» που δημοσιεύ-



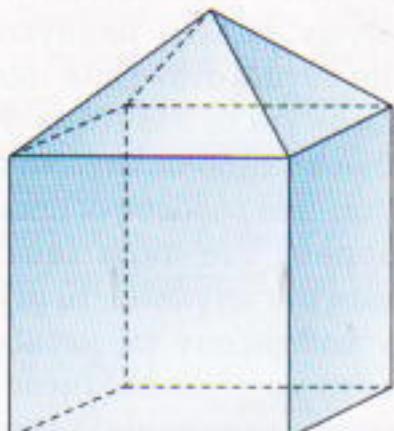
1. Σχετικά με την ιστορία της Πολυτεχνικής Σχολής, δείτε το άρθρο «Επαναστατική διδασκαλία» στο τεύχος Μαΐου /Ιουνίου 1998 του ελληνικού *Quantum*.

τηκε στο *Journal de l' Ecole Polytechnique* το 1813.

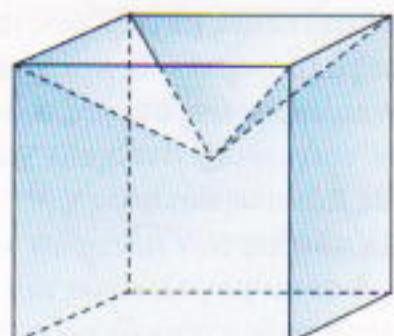
## Το θεώρημα μοναδικότητας του Cauchy

Το άρθρο του Cauchy για τα πολύγωνα ερευνά το εξής φυσικό ερώτημα: Σε ποιο βαθμό καθορίζουν τη μορφή ενός πολυέδρου οι έδρες του και η σειρά με την οποία συνδέονται μεταξύ τους; Ας διαλευκάνουμε το σκοπό αυτού του ερωτήματος μέσω ενός παραδείγματος. Θεωρούμε δύο πολύεδρα: έναν πύργο με στέγη που αποτελείται από τέσσερα κεκλιμένα τρίγματα στηριγμένα σε μια κυβική βάση και έναν άλλο πύργο που αποτελείται από τις ίδιες έδρες με τη διαφορά ότι η «στέγη» είναι τραβηγμένη προς τα μέσα (Σχήματα 1 και 2).

Είναι φανερό ότι αυτά τα δύο πολύεδρα παρ' ότι αποτελούνται από ίσες, αντίστοιχα, πολυγωνικές έδρες που εφάπτονται μεταξύ τους με τον ίδιο τρόπο, δεν είναι ίσα. Ο Cauchy απέδειξε ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατον να συμβεί όταν και τα δύο πολύεδρα είναι κυρτά.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

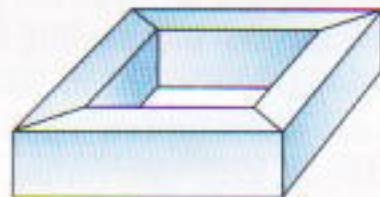


Το 1766 ο Euler διατύπωσε την εξής εικασία: «Ενα κλειστό χωρικό σχήμα δεν δέχεται μεταβολή παρά μόνο αν κοπεί». Το «κλειστό χωρικό σχήμα» του Euler στις μέρες μας ονομάζεται κλειστή επιφάνεια. Η εικασία του Euler επομένως δεν αφορούσε μόνο τις πολυεδρικές επιφάνειες. Στην περίπτωση πάντως των πολυέδρων έμοιαζε απόλυτα ορθή.

## Απλά πολύτοπα

Πριν συνεχίσουμε, ας ξεκαθαρίσουμε μερικές έννοιες. Ορίζουμε ως πολύτοπο (ή πολύέδρο) την επιφάνεια που ορίζεται από πολύγωνα και όχι το σώμα που περιβάλλεται από αυτά. Θα υποθέσουμε επίσης ότι το πολύτοπό μας αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών εδρών και ότι κάθε ακμή έδρας συνδέεται με ακριβώς μία άλλη έδρα. (Είναι δύσκολο να δώσουμε έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό του πολυτόπου ο οποίος θα περιλαμβάνει και τα κυρτά και τα μη κυρτά πολύγωνα, και έτοι δεν θα το προσπαθήσουμε.) Τα πολύτοπα που ικανοποιούν την τελευταία συνθήκη ονομάζονται κλειστά. Αυτός ο ορισμός είναι φυσικός. Όλα τα πολύτοπα που συναντάμε στο σχολείο (πρίσματα, πυραμίδες, κανονικά πολύέδρα) είναι κλειστά. Ένα ξεσκέπαστο χάρτινο κουτί δεν είναι κλειστό, ενώ ένα σκεπασμένο είναι.

Θα υποθέσουμε επίσης ότι τα πολύτοπά μας είναι τοπολογικές σφαίρες. Τοπολογική σφαίρα είναι οποιαδήπο-



Σχήμα 3

τε επιφάνεια που μπορεί να συγκρίθει με μια ξεφούσκωτη μπάλα ποδοσφαιρου. Με άλλα λόγια, αν το πολύτοπο μας ήταν κατασκευασμένο από ελαστικό υλικό θα ήταν δυνατόν να το μετασχηματίσουμε σε σφαιρα χωρίς να χρειαστεί να το κόψουμε και να το ξανακολλήσουμε. Συμφωνούμε να ονομάζουμε αυτά τα πολύτοπα *απλά*. Όλα τα κυρτά πολύτοπα είναι απλά, καθώς και τα δύο πολύτοπα των Σχημάτων 1 και 2. Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα σπειροειδούς πολυτόπου, το οποίο δεν είναι απλό.

Μερικές φορές ένα πολύτοπο είναι τόσο «περιπλεγμένο» ώστε δυσκολεύομαστε να καταλάβουμε αν είναι ή όχι απλό. Επομένως, το γεγονός ότι μπορούμε να αποφασίσουμε αν ένα πολύτοπο είναι απλό ή όχι ακόμη και στις περιπτώσεις που η εικόνα του μας δημιουργεί σύγχυση είναι αξιοσημείωτο. Ας υποθέσουμε ότι κάποιος μας λέει ότι το πλήθος των κορυφών του είναι *K*, των ακμών του *A* και των εδρών του *E*. Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα  $\varphi(X)$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\varphi(X) = K - A + E.$$

Ο αριθμός  $\varphi(X)$  ονομάζεται χαρακτηριστική Euler του πολυτόπου *X*. Αυτός ο αριθμός δηλώνει αν το πολύτοπο είναι απλό ή όχι: Το πολύτοπο *X* είναι απλό αν και μόνο αν έχει χαρακτηριστική Euler ίση με 2. Οι χαρακτηριστικές Euler των μη απλών πολυτόπων δεν υπερβαίνουν το 0. Η χαρακτηριστική των σπειροειδών πολυτόπων συγκεκριμένα (Σχήμα 3) ισούται με 0 (ο αναγνώστης μπορεί να προσπαθήσει να το επαληθεύσει).

## Εύκαμπτα πολύτοπα

Φανταστείτε ένα πολύτοπο το οποίο αποτελείται από αρκετά χάρτινα πολύγωνα που ενώνονται μεταξύ τους με μονωτική ταινία (αυτό, φυσικά, θα είναι πεπερασμένο, κλειστό και απλό). Όλες οι συνδέσεις είναι εύκαμπτες και, επομένως, θα μπορούσαμε να περιστρέψουμε οποιοδήποτε ζεύγος εδρών γύρω από την κοινή τους ακμή —αλλάζοντας με αυτό τον τρόπο τη μεταξύ τους δίεδρη γωνία—... αν δεν υπήρχαν άλλες έδρες.

Όταν λοιπόν συνδέονται όλες οι έδρες για να σχηματίσουν ένα πολύτο-

πο, μπορούμε να ρωτήσουμε αν είναι δυνατόν να μεταβάλλουμε συνεχώς τη μορφή του πολυτόπου έτσι ώστε να παραμείνουν σταθερές όλες οι έδρες του ενώ θα αλλάζουν οι μεταξύ τους δίεδρες γωνίες. Αν αυτό μπορεί να συμβεί, ονομάζουμε το πολύτοπο εύκαμπτο διαφορετικά το ονομάζουμε άκαμπτο.

Επομένως, κάθε μετασχηματισμός του πολυτόπου, αν υπάρχει, συνδέεται με το εύκαμπτο των δίεδρων γωνιών του. Επιπλέον, αν και κάθε ζεύγος γειτονικών εδρών μπορεί, όταν είναι μόνο του, «να διαλέξει» ελεύθερα την τιμή της δίεδρης γωνίας που σχηματίζει, όταν υπάρχουν και άλλες έδρες χάνει κατά πάσα πιθανότητα αυτή την ελευθερία. Ο Euler πρέπει μάλλον να βάσισε την εικασία του για την ακαμψία των κλειστών πολυτόπων σε «εύλογα επιχειρήματα» αυτού του τύπου.

Το άρθρο στη σελίδα 5 μας δείχνει ότι ο Euler είχε άδικο. Διότι, παρ' ότι το 1975 αποδείχτηκε ότι «σχεδόν όλα» τα πολύεδρα είναι άκαμπτα, το σχεδόν όλα δεν σημαίνει όλα και το προηγουμένο άρθρο μας έδωσε ένα παράδειγμα ενός εύκαμπτου πολυτόπου. Το πρώτο παράδειγμα εύκαμπτου πολυέδρου προτάθηκε μόλις το 1978 από τον αμερικανό μαθηματικό R. Connelly.

Επί τη ευκαιρία, είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί ένα τέτοιο πολύτοπο. Για παράδειγμα, ο φυσητήρας (φυσερό) δεν αποτελεί το ζητούμενο παράδειγμα διότι η ικανότητά του να αλλάζει μορφή δεν οφείλεται στη γεωμετρική του δομή αλλά στην ελαστικότητα του υλικού του. Στην πραγματικότητα, ένας φυσητήρας φτιαγμένος όπως ένα εύκαμπτο πολύτοπο θα ήταν άχρηστος, διότι ένα τέτοιο πολύτοπο διατηρεί σταθερό τον όγκο του κατά το μετασχηματισμό του. (Αυτή η πρόταση είναι η εικασία του φυσητήρα που απέδειξε το 1995 ο ρώσος μαθηματικός I. Sabitov. Στην πραγματικότητα, ο Sabitov βρήκε για τα πολύτοπα έναν τύπο, ανάλογο με τον τύπο του Ήρωνα, που εκφράζει τον όγκο του πολυτόπου συναρτήσει του μήκους των ακμών του και του εμβαδού των εδρών του. Αυτό αποτελεί ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα. Επισημαίνουμε, για παράδειγμα, ότι δεν υπάρχει κάποιο ανάλογο του τύπου του Ήρωνα για τα δισ-

διάστατα πολύγωνα με περισσότερες από τρεις πλευρές: Τα εμβαδά τους δεν καθορίζονται μόνο από τα μήκη των πλευρών τους.)

Επισημαίνουμε ότι από το θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται ότι τα εύκαμπτα πολύτοπα δεν είναι κυρτά. Προφανώς, όταν ένα πολύτοπο είναι εύκαμπτο, τότε υπάρχουν άλλα πολύτοπα αποτελούμενα από τις ίδιες έδρες συνδεδεμένες με την ίδια σειρά, τα οποία διαφέρουν από το αρχικό διότι οι δίεδρες γωνίες τους είναι ελαφρώς διαφορετικές. Ταυτοχρόνως, αν το αρχικό πολύτοπο είναι κυρτό, τότε και αυτό με τις ελαφρώς διαφορετικές δίεδρες γωνίες είναι επίσης κυρτό. Αν όμως το αρχικό μας εύκαμπτο πολύεδρο ήταν κυρτό, τότε θα μπορούσαμε να μεταβάλλουμε τις δίεδρες γωνίες του κατά μια κατάλληλα μικρή ποσότητα ώστε να σχηματίστει ένα νέο κυρτό πολύεδρο· αυτό βρίσκεται σε αντίφαση με το θεώρημα του Cauchy, σύμφωνα με το οποίο τέτοια πολύτοπα είναι ίσα.

Προχωρούμε τώρα στις κύριες ιδέες της απόδειξης του θεωρήματος του Cauchy.

## Το λήμμα του Cauchy για τα κυρτά πολύγωνα

Για να αποδείξουμε το θεώρημα του Cauchy πρέπει πρώτα να εξετάσουμε ποι προσεκτικά μερικές ιδιότητες των πολυγώνων. Η λέξη πολύγωνο δεν βρίσκεται τυχαία στον τίτλο του έργου του Cauchy για τα πολύεδρα. Φανταστείτε ένα επίπεδο πολύγωνο που αποτελείται από ράβδους οι οποίες φέρουν αρμούς στα άκρα τους. Στην περίπτωση του τριγώνου, τα μήκη των ράβδων καθορίζουν τις μεταξύ τους γωνίες (το κριτήριο ισότητας τριών πλευρών για τα τρίγωνα) και η κατασκευή είναι άκαμπτη. Αυτό το γνωστό γεωμετρικό γεγονός βρίσκεται πλήθος εφαρμογών στην καθημερινή ζωή: Όλες οι κατασκευές με ράβδους που φέρουν μεγάλο φορτίο (δοκοί γεφυρών, βραχίονες γερανών, στέγες, κ.λπ.) περιέχουν τριγωνικά στοιχεία χάριν ακαμψίας και στερεότητας.

Αν το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι μεγαλύτερο του 3, τότε οι γωνίες του δεν προσδιορίζονται από τα μήκη των πλευρών του, και επομένως ούτε και το πολύγωνο. Όμως, ο

Cauchy επισήμανε ένα γεγονός γι' αυτά τα πολύγωνα που τον βοήθησε στην απόδειξη του θεωρήματός του.

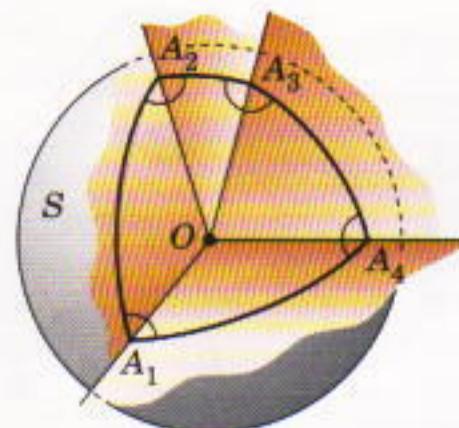
Έστω  $A = A_1 A_2 \dots A_n$  και  $B = B_1 B_2 \dots B_n$  κυρτά  $n$ -γωνα τέτοια ώστε  $A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1}, \dots, A_{n-1} A_n = B_{n-1} B_n, A_n A_1 = B_n B_1$ . Αντιστοιχούμε τα πρόσημα «+» ή «-» σε κάθε κορυφή  $A_i$  του πρώτου πολυγώνου ανάλογα με το αν  $\angle A_i > \angle B_i$  ή  $\angle A_i < \angle B_i$ . Αν  $\angle A_i = \angle B_i$ , δεν αντιστοιχούμε πρόσημο στην κορυφή  $A_i$  (θα καλούμε αυτές τις κορυφές «αχαρακτήριστες»). Πριν διατυπώσουμε το λήμμα του Cauchy, θα αποδείξουμε την εξής πρόταση:

**Λήμμα 1.** Θεωρούμε δύο κυρτά πολύγωνα με ίσες τις αντίστοιχες πλευρές, στα οποία μερικές από τις αντίστοιχες γωνίες τους δεν είναι ίσες. Τότε, η διαφορά των αντίστοιχων γωνιών πρέπει να αλλάζει πρόσημο τουλάχιστον τέσσερις φορές, καθώς διατρέχουμε τις περιμέτρους των δύο πολυγώνων.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το πλήθος των εναλλαγών πρέπει να είναι άρπιο και μη μηδενικό. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν ισούται με 2 — αυτή είναι η βασική ιδέα της απόδειξης.

Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των εναλλαγών ισούται με 2. Τότε, το πολύγωνο  $A$  χωρίζεται σε δύο τεθλασμένες γραμμές: Μερικές από τις κορυφές της πρώτης τεθλασμένης,  $A_i A_{i+1} \dots A_j$ , έχουν πρόσημο «+» ενώ καμία τους δεν έχει πρόσημο «-». Η δεύτερη τεθλασμένη,  $A_j A_{j+1} \dots A_i$ , περιέχει μερικές κορυφές με πρόσημο «-» και καμία με πρόσημο «+» (Σχήμα 4).

Επομένως, η τεθλασμένη  $A_i A_{i+1} \dots A_j$  μπορεί να προκύψει από την αντί-



Σχήμα 5

στοιχη τεθλασμένη  $B_i B_{i+1} \dots B_j$  του πολυγώνου  $B$ , αν αυξήσουμε μερικές από τις γωνίες της τελευταίας. Είναι προφανές ότι με αυτή τη διαδικασία το μήκος του τμήματος που συνδέει την αρχή και το τέλος της τεθλασμένης γραμμής θα αυξηθεί —δηλαδή  $A_i A_j > B_i B_j$ . (Η αυτηρή απόδειξη αυτού του γεγονότος είναι αρκετά κουραστική και θα την παραλείψουμε.)

Από την άλλη πλευρά, η δεύτερη τεθλασμένη γραμμή  $A_j A_{j+1} \dots A_i$  του πολυγώνου  $A$  προκύπτει από την αντίστοιχη τεθλασμένη  $B_j B_{j+1} \dots B_i$  του πολυγώνου  $B$  αν μειώσουμε μερικές από τις γωνίες της τελευταίας. Το τμήμα που συνδέει τα άκρα της τεθλασμένης ευθείας θα μικρύνει. Συμπεραίνουμε επομένως ότι  $A_i A_j < B_i B_j$ . Αυτές οι δύο ανισότητες αντιφάσκουν, και επομένως η αρχική υπόθεση ότι υπάρχουν δύο ακριβώς εναλλαγές προσήμου είναι λανθασμένη. Άρα το πλήθος των εναλλαγών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του τέσσερα.

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1 για να αποδείξουμε το θεώρημα του Cauchy — πρέπει όμως να το τροποποιήσουμε ελαφρά ώστε να αναφέρεται σε κυρτά πολύγωνα μιας σφαίρας. Η διατύπωση και η απόδειξη αυτής της παραλλαγής του Λήμματος 1 παραμένει ίδια αλλά πρέπει να εξηγήσουμε τους αντίστοιχους ορισμούς.

Ο ορισμός του σφαιρικού πολυγώνου είναι απολύτως όμοιος με τον ορισμό του επίπεδου πολυγώνου. Πρέπει απλώς να έχουμε αρκετά πράγματα κατά νου. Πρώτον, η πλευρά ενός σφαιρικού πολυγώνου είναι τόξο μέγιστου κύκλου, και μήκος της πλευράς είναι το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Δεύτερον, γωνία του σφαιρικού πολυγώνου είναι η γωνία μεταξύ των

εφαπτομένων που άγονται στο σημείο τομής των πλευρών (τόξων) του πολυγώνου (δηλαδή στην κορυφή του). Η γωνία αυτή ισούται με το γραμμικό μέτρο της διεδρικής γωνίας που σχηματίζουν τα επίπεδα των αντίστοιχων κύκλων (Σχήμα 5). Τρίτο, θα καλούμε κυρτό ένα σφαιρικό πολύγωνο αν περιέχεται εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο ημισφαίρια στα οποία χωρίζεται η σφαίρα από τον μέγιστο κύκλο που περιέχει μία από τις πλευρές του.

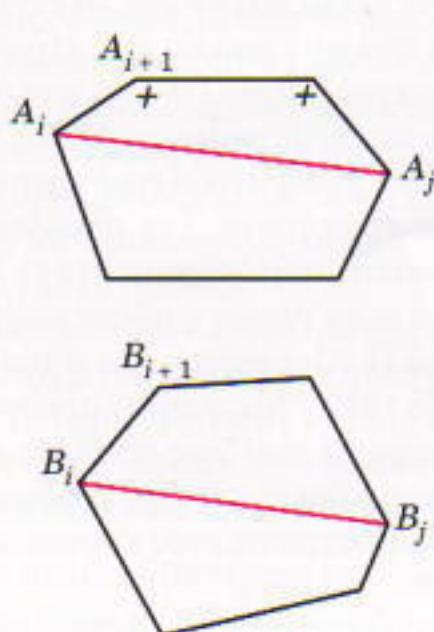
## Το κύριο θέμα του Cauchy

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο μη ίσα πολύεδρα που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος Cauchy. Θα μπορούσαμε τότε να εντοπίσουμε σε αυτά ζεύγη αντίστοιχων άνισων διεδρών γωνιών. Θα σημειώνουμε το πρόσημο «+» σε κάθε ακμή αυτών των πολυέδρων αν η διεδρη γωνία σε αυτή την ακμή είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διεδρη του άλλου πολυέδρου· αν είναι μικρότερη, θα σημειώνουμε το «-». Βεβαίως, μερικές ακμές μπορεί να μην έχουν πρόσημο, διότι οι αντίστοιχες διεδρες γωνίες είναι ίσες.

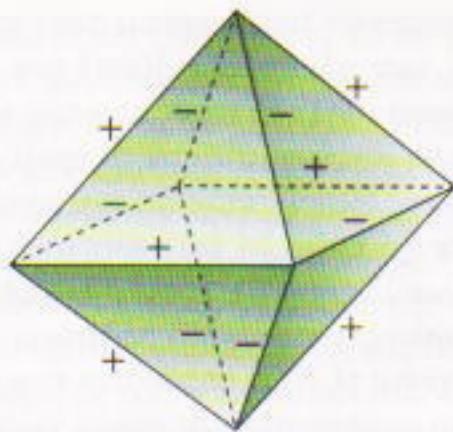
Έστω  $O$  μια κορυφή του πολυέδρου, η οποία είναι άκρο μιας προσημένης ακμής. Σχεδιάζουμε μια σφαίρα  $S$ , μικρής ακτίνας, με κέντρο το  $O$ . Με το «μικρή ακτίνα» εννοούμε ότι είναι τόσο μικρή ώστε η σφαίρα  $S$  να μην τέμνει άλλες ακμές του πολυέδρου εκτός αυτών που έχουν άκρο το  $O$ . Τέτοιες ακμές τέμνουν τη σφαίρα μία φορά ακριβώς, και αυτές οι τομές ορίζουν ένα κυρτό σφαιρικό πολύγωνο  $M$  οι γωνίες του οποίου ισούνται με τις αντίστοιχες διεδρες γωνίες του πολυέδρου.

Αν τώρα σχεδιάσουμε μια άλλη σφαίρα  $S'$  με ίδια ακτίνα και κέντρο την αντίστοιχη κορυφή  $O'$  του άλλου πολυέδρου, θα προκύψει ένα άλλο πολύγωνο  $M'$ . Οι πλευρές του πολυγώνου  $M'$  ισούνται με τις αντίστοιχες πλευρές του πολυγώνου  $M$ . Η ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα από τις συνθήκες του θεωρήματος: Στις αντίστοιχες κορυφές των πολυγώνων πρόσκεινται αντίστοιχα ίσες έδρες.

Έφτασε τώρα η στιγμή να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα μοναδικότητας του Cauchy δεν ισχύει. Επομένως, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή με



Σχήμα 4



Σχήμα 6

πρόσημο «+» ή «-». Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 1 στα πολύγωνα  $M$  και  $M'$ , διαπιστώνουμε ότι, αν υπάρχει μια προσημασμένη ακμή σε μια κορυφή, τότε πρέπει να έχουμε τουλάχιστον τέσσερις εναλλαγές στα πρόσημα των ακμών που βρίσκονται γύρω από την κορυφή.

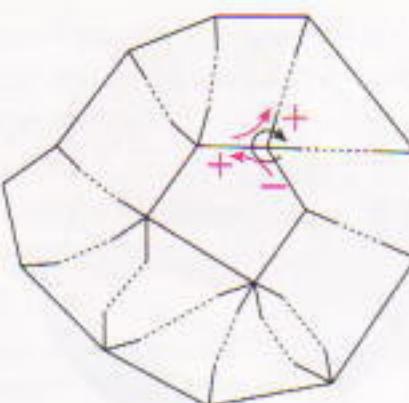
Μπορεί να φαίνεται ότι υπάρχει μεγάλη απόσταση μεταξύ αυτής της απλής παρατήρησης και της πλήρους απόδειξης του θεώρηματος Cauchy. Σε τούτο το σημείο όμως ο Cauchy είχε μια πρωτότυπη ιδέα με την οποία η υπόλοιπη απόδειξη έγινε απλό θέμα τεχνικής. Αποδεικνύεται ότι ισχύει η επόμενη πρόταση.

**Λήμμα 2.** Εστω ότι έχουμε χαρακτηρίσει μερικές από τις ακμές ενός κλειστού, κυρτού πολυτόπου με «+» ή «-». Θεωρούμε όλες τις κορυφές του πολυτόπου που είναι άκρα μίας τουλάχιστον προσημασμένης ακμής. Τότε πρέπει να υπάρχει μεταξύ τους μια κορυφή που συνδέεται με ακμές στις οποίες εμφανίζονται λιγότερες από τέσσερις εναλλαγές προσημών.

Για παράδειγμα, στο οκτάεδρο του Σχήματος 6 έχουμε δύο κορυφές στις οποίες το πλήθος των εναλλαγών των προσημών ισούται με 2.

Η βασική ιδέα στην απόδειξη του κυρίου λήμματος γίνεται πιο ξεκάθαρη στην ειδική περίπτωση που όλες οι ακμές είναι προσημασμένες. Ας υποθέσουμε ότι αυτό αληθεύει. Όπως και προηγουμένως, έστω  $K$  το πλήθος των κορυφών του πολυτόπου,  $A$  το πλήθος των ακμών του,  $E$  το πλήθος των εδρών του και  $N$  το συνολικό πλήθος των εναλλαγών στα πρόσημα γύρω από όλες τις κορυφές. Για να αποδειχθεί το Λήμμα 2, αρκεί να δείξουμε ότι  $N < 4K$ .

Θα ακολουθήσουμε την επιχειρηματολογία του Cauchy και θα αποδει-



Σχήμα 7

ξουμε μια ισχυρότερη ανισότητα:  $N \leq 4K - 8$ .

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το συνολικό πλήθος των εναλλαγών προσήμου γύρω από όλες τις κορυφές ισούται με το πλήθος των εναλλαγών προσήμου που απαριθμούμε όταν διατρέχουμε τις ακμές όλων των εδρών. Πράγματι, κάθε ζεύγος διαδοχικών ακμών με άκρα σε μια κορυφή είναι επισης και ζεύγος διαδοχικών ακμών στην περίμετρο της αντίστοιχης έδρας (Σχήμα 7).

Έστω  $E_n$  το πλήθος των  $n$ -γωνικών εδρών του πολυτόπου ( $n \geq 3$ ).

Τότε

$$E = E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + \dots \quad (1)$$

Το πλήθος των εναλλαγών προσήμου κατά μήκος της περιμέτρου ενός  $n$ -γώνου είναι μικρότερο ή ίσο του  $n$ , ενώ, όταν το  $n$  είναι περιττό, ισούται το πολύ με  $n - 1$ .

Συνεπώς

$$N \leq 2E_3 + 4E_4 + 4E_5 + 6E_6 + 6E_7 + \dots \quad (2)$$

Επειδή κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες, έχουμε

$$2A = 3E_3 + 4E_4 + 5E_5 + 6E_6 + \dots \quad (3)$$

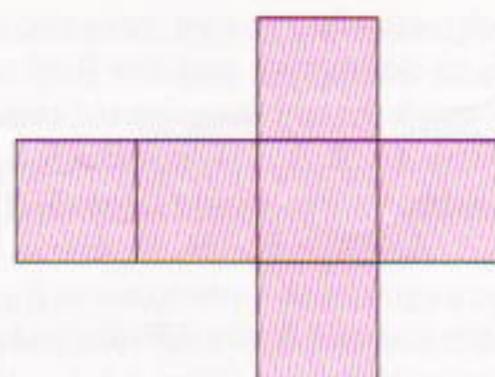
Ας ξαναγράψουμε τον τύπο του Euler με την εξής μορφή:

$$4K - 8 = 4A - 4E, \quad (4)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (4) τα  $E$  και  $A$  βάσει των εξισώσεων (1) και (3), παίρνουμε

$$\begin{aligned} 4K - 8 &= 2(3E_3 + 4E_4 + 5E_5 + \dots) \\ &\quad - 2(2E_3 + 2E_4 + 2E_5 + \dots) \\ &= 2E_3 + 4E_4 + 6E_5 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Ο συντελεστής του  $E_n$  στην εξισώση (5) ισούται με  $2(n - 2)$ . Άρα, αν  $n \geq 3$ , είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αντίστοι-



Σχήμα 8

χου συντελεστή στην (2), που δεν υπερβαίνει το  $n$ . Συνεπώς, από τις εξισώσεις (2) και (5) συνεπάγεται η ζητούμενη ανισότητα:  $N \leq 4K - 8$ .

(Στη γενική περίπτωση, όταν υπάρχουν μερικές ακμές χωρίς πρόσημο, η απόδειξη περιπλέκεται από ασήμαντες τεχνικές λεπτομέρειες τις οποίες παραλείπουμε.)

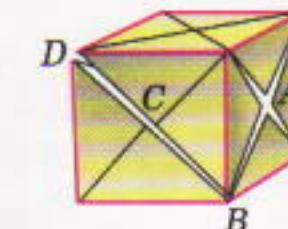
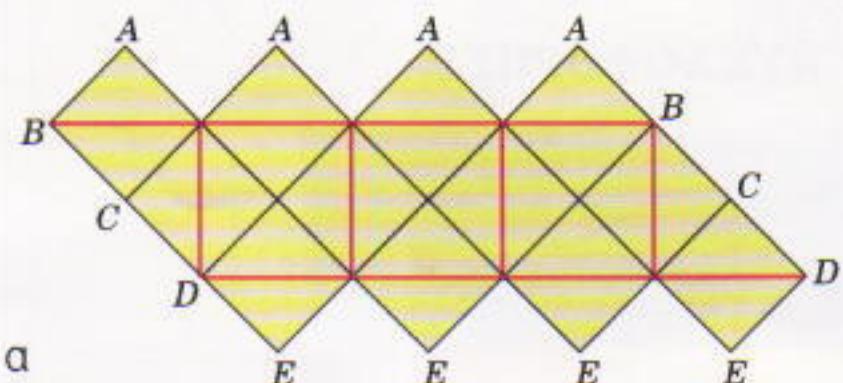
Επομένως ουμε ότι στην απόδειξη του Λήμματος 2 δεν χρησιμοποιήθηκε την κυρτότητα των κλειστών πολυτόπων: το λήμμα αυτό ισχύει για ένα τυχαίο κλειστό πολύεδρο. Η υπόθεση της κυρτότητας χρησιμοποιήθηκε μόνο για να ικανοποιηθούν οι συνθήκες του Λήμματος 1.

Ας αναδιατυπώσουμε το τελικό μας συμπέρασμα. Αν δεν ισχυει το θεώρημα Cauchy τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 1, θα πρέπει ένα σύνολο προσήμων που θα αντιστοιχούσαν σε κάθε ακμή, και αυτό θα ήταν, σύμφωνα με το Λήμμα 2, αδύνατο. Τούτη είναι η βασική ιδέα στην απόδειξη του θεώρηματος Cauchy.

## Το θεώρημα επάρκειας του Alexandrov

Όταν δημοσιεύτηκε το άρθρο του Cauchy για τα πολύγωνα, τα ενδιαφέροντα του συγγραφέα του είχαν ήδη απομακρυνθεί πολύ από αυτό τον κλάδο των μαθηματικών. Ομως, πολλοί άλλοι μαθηματικοί ερεύνησαν παρόμοια ερωτήματα. Για παράδειγμα, σημαντικά αποτελέσματα στο εν λόγω πεδίο ανακάλυψαν ο ρώσος μαθηματικός A.D. Alexandrov και οι μαθητές του. Το 1939 ο Alexandrov απέδειξε ένα θεώρημα που μας δίνει τις αναγκαίες συνθήκες για τον προσδιορισμό του αναπτύγματος ενός κυρτού πολυεδρου.

Σε γενικές γραμμές, το ανάπτυγμα ενός πολυέδρου είναι το πολύγωνο



Σχήμα 9

που προκύπτει αν κόψουμε την επιφάνεια του πολυέδρου έτσι ώστε να μπορούμε να «απλώσουμε» τις έδρες του σε ένα επίπεδο. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται το τυπικό ανάπτυγμα ενός κύβου. Είναι πολύ δυσκολότερο να αντιληφθούμε ότι και το πολύγωνο του Σχήματος 9α είναι επίσης ανάπτυγμα ενός κύβου. Τα γράμματα που αντιστοιχούν στις κορυφές του Σχήματος 9α καθορίζουν τις πλευρές που πρέπει να ενωθούν για να σχηματιστεί ο κύβος (Σχήμα 9β). Πρέπει να επισημάνουμε ότι τα πολύγωνα του αναπτύγματος δεν συμπίπτουν υποχρεωτικά με τις έδρες του αντίστοιχου πολυτόπου. Μια έδρα μπορεί να αποτελείται από ένα ή περισσότερα τμήματα διαφορετικών πολυγώνων του αναπτύγματος. Επίσης, δεν είναι υποχρεωτικό να συμπίπτουν όλες οι κορυφές του αναπτύγματος με τις κορυφές του πολυτόπου: μερικές μπορεί να «κρύβονται» στο εσωτερικό μιας ακμής ή μιας έδρας του πολυτόπου.

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο ανάπτυγμα: Παίρνουμε διάφορα χάρτινα κυρτά πολύγωνα και σημειώνουμε τις πλευρές που πρέπει να ενωθούν μεταξύ τους. Φυσικά, πρέπει να προσέξουμε να είναι ίσα τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών. Στη συνέχεια ενώνουμε τα πολύγωνα για να σχηματιστεί το πολύτοπο (επισημαίνουμε ότι επιτρέπεται να διπλώσουμε τα πολύγωνα του αναπτύγματος).

Προκύπτει το εύλογο ερώτημα: Ποια αναπτύγματα μπορούν με αυτή τη μέθοδο να δημιουργήσουν ένα κυρτό πολύεδρο; Οι παρακάτω δύο συνθήκες είναι αναγκαίες:

(I) Το ανάπτυγμα πρέπει να συμφωνεί με τον τύπο του Euler ( $K - A + E = 2$ ).

(II) Το άθροισμα των επίπεδων γωνιών

γύρω από κάθε κορυφή κατά τη διαδικασία της ένωσης (συγκόλλησης) των εδρών δεν πρέπει να υπερβαίνει τις  $360^\circ$ .

Η ιδέα του θεωρήματος του Alexandrov είναι εντυπωσιακά απλή: Οι συνθήκες (I) και (II) δεν είναι απλώς αναγκαίες αλλά και ικανές για να μπορέσουμε να καθορίσουμε ότι το ανάπτυγμα είναι ενός κυρτού πολυγώνου (αν και μπορεί να χρειαστεί να διπλώσουμε το εσωτερικό κάποιων πολυγώνων του αναπτύγματος).

Αργότερα, ο Alexandrov ανέπτυξε τις ιδέες του θεωρήματος του σε μια ολόκληρη νέα θεωρία: την εσωτερική γεωμετρία των κυρτών επιφανειών —έναν από τους πλέον σημαντικούς κλάδους της σύγχρονης γεωμετρίας.

Ας ξαναδούμε το Σχήμα 9α. Ακόμη και αν δεν βλέπαμε το Σχήμα 9β, θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι μπορεί να σχηματισεί ένα κυρτό πολύτοπο, ελέγχοντας απλώς τις συνθήκες του θεωρήματος Alexandrov. Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών κυρτών πολυτόπων που προκύπτουν από ένα ανάπτυγμα; Οι έδρες αυτών των πολυτόπων δεν ορίζονται κατά μοναδικό τρόπο και επομένως το θεώρημα Cauchy δεν μπορεί να μας βοηθήσει στη συγκεκριμένη περίπτωση. Έτσι, ο Alexandrov απόδειξε ένα άλλο θεώρημα που από τη μια πλευρά ισχυροποίησε το θεώρημα Cauchy και από την άλλη συμπλήρωσε το δικό του θεώρημα: Αν είναι δυνατόν να σχηματίσουμε ένα κυρτό πολύτοπο από ένα ανάπτυγμα, τότε το πολύτοπο καθορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Επιπλέον, είναι αδύνατον να σχηματίσουμε από αυτό το ανάπτυγμα οποιαδήποτε άλλη κυρτή επιφάνεια —όχι μόνο πολυεδρική, αλλά και καμπυλόγραμμη. Το συμπλήρωμα αυτό του θεωρήματος Alexandrov αποδεί-

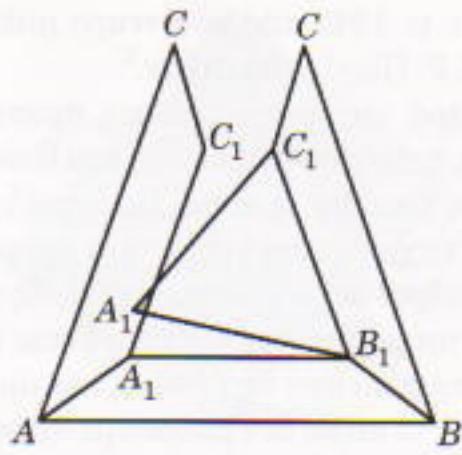
χτηκε το 1942 από τον νεαρό μαθητή του S.P. Olovianishnikov.<sup>2</sup>

Παρά τις μακροχρόνιες προσπάθειες, η πλήρης γενίκευση του θεωρήματος Cauchy, η οποία θα περιελάμβανε τυχαίες επιφάνειες (και όχι μόνο πολύεδρα) δεν είχε επιτευχθεί. Ας φανταστούμε μια τυχαία επιφάνεια που αποτελείται από ένα λεπτό, εύκαμπτο υλικό (το οποίο δεν μπορούμε όμως να τεντώσουμε). Είναι δυνατόν να τη μετασχηματίσουμε σε μια διαφορετική επιφάνεια διατηρώντας την κυρτότητά της; Αν η αρχική επιφάνεια είναι κυρτό πολύτοπο, δεν μπορούμε. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος μοναδικότητας των Cauchy-Alexandrov-Olovianishnikov.

Η τελική γενίκευση του θεωρήματος Cauchy, που περιέλαβε την περίπτωση των τυχαίων επιφανειών, δόθηκε το 1949 από τον γεωμέτρη A.V. Pogorelov, έναν άλλο μαθητή του Alexandrov. Ο Pogorelov απέδειξε ότι είναι αδύνατος ο μετασχηματισμός μιας κλειστής, κυρτής επιφάνειας, όταν πρέπει να είναι κυρτές όλες οι επιφάνειες που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία του μετασχηματισμού. Το θέωρημα μοναδικότητας του Pogorelov καθώς και το θέωρημα επάρκειας του Alexandrov αποτελούν σπουδαία επιτεύγματα για τη γεωμετρία.

Πολλά είναι τα συνδεόμενα ενδιαφέροντα προβλήματα που περιμένουν τον ερευνητή. Μερικά έχουν εξαιρετικά απλή διατύπωση. Για παράδειγμα, το πρόβλημα του κανονικού αναπτύγματος: Αληθεύει ότι μπορούμε πάντα να κόψουμε ένα κυρτό πολύτοπο κατά μήκος των ακμών του (αφήνοντας άθικτες τις έδρες του) έτσι ώστε η προ-

2. Ο Olovianishnikov ήταν νικητής της πρώτης Σοβιετικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (1934). Τα γεγονότα της επόμενης δεκαετίας άφησαν βαθιά σημάδια στη δύσκολη ζωή των ταλαντούχων νέων της εποχής. Το 1941 ο Olovianishnikov αποφοίτησε από το Πανεπιστήμιο του Λένινγκραντ και συνέχισε ως μεταπτυχιακός φοιτητής. Επιστημονικός του σύμβουλος ήταν ο A.D. Alexandrov. Σύντομα άρχισε ο B' Παγκόσμιος πόλεμος, πήγε εθελοντής στο μέτωπο και τραυματίστηκε το φθινόπωρο του 1941. Στο νοσοκομείο έγραψε την εργασία που γενίκευε το θεώρημα του Cauchy. Επέστρεψε στο μέτωπο και πέθανε το Δεκέμβριο του 1941 σε μια άγρια μάχη στα πρόστια του Λένινγκραντ.



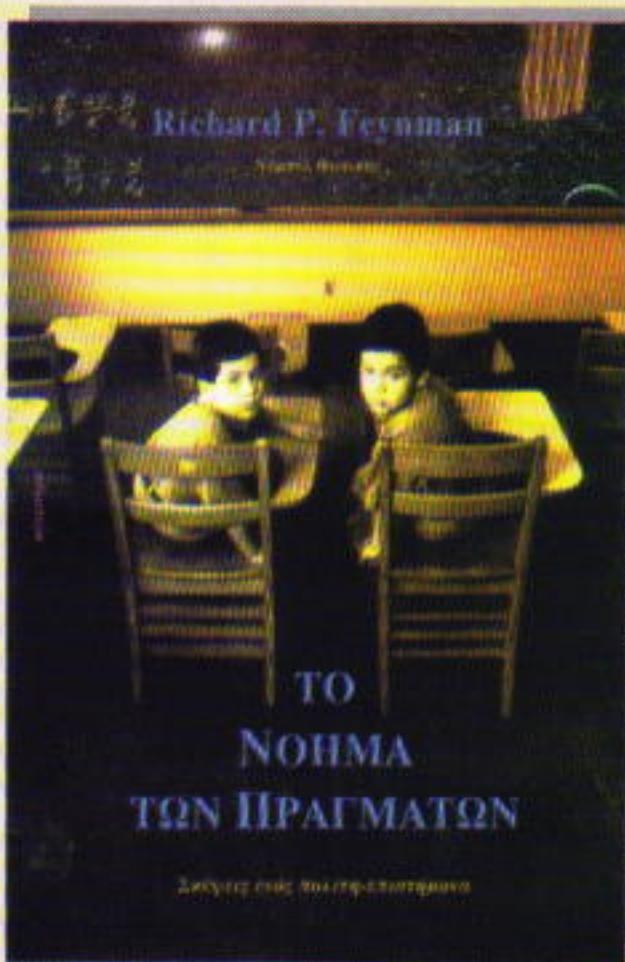
Σχήμα 10

κύπτουσα επιφάνεια να μπορεί να αναπτυχθεί, χωρίς τομές με τον εαυτό της, σε μια επίπεδη περιοχή;

Το πρόβλημα είναι ότι κάθε πολύεδρο έχει πολλά επίπεδα αναπτύγματα. Μερικά από αυτά προκύπτουν όταν κόβουμε το πολύτοπο κατά μήκος των ακμών του χωρίς να αγγίξουμε τις έδρες του. Παράδειγμα τέτοιου αναπτύγματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 8 (τέτοια αναπτύγματα ονομάζονται κατά ακμή αναπτύγματα). Θα ονομάζουμε ένα κατά ακμή ανάπτυγμα ενός πολυτόπου κανονικό αν αποτελείται από μια μοναδική περιοχή (έτσι ώστε να μην επικαλύπτονται οι έδρες του). Έτσι, για παράδειγμα, όλα τα κατά ακμή αναπτύγματα ενός τετραέδρου είναι κανονικά. Όμως, υπάρχουν πολύτοπα, με πέντε μόλις έδρες, τα οποία έχουν μερικά κατά ακμή αναπτύγματα που δεν είναι κανονικά. Θεωρήστε για παράδειγμα μια κόλουρη κανονική πυραμίδα με μία από τις επίπεδες γωνίες των παράπλευρων εδρών της μεγαλύτερη των  $100^\circ$  (δείτε το Πρόβλημα M114 στο τεύχος Ιανουαρίου / Φεβρουαρίου 1998 του ελληνικού *Quantum*). Το πολύεδρο αυτό έχει και κανονικά και μη κανονικά κατά ακμή αναπτύγματα (Σχήμα 10). Επομένως, το πρόβλημα είναι το εξής: Έχουν όλα τα κυρτά πολύεδρα κανονικό (κατά ακμή) ανάπτυγμα;

Τελειώνουμε με την παρατήρηση ότι όλα τα θεωρήματα που αναφέραμε στο άρθρο μας αποδείχτηκαν από μαθηματικούς σε ηλικία μικρότερη των 30 ετών. Τα μαθηματικά προοδεύουν με τις προσπάθειες των νέων. Όπως είπε ένας διάσημος μαθηματικός, οι νέες ιδέες «γεννιώνται» στα κεφάλια νέων μαθηματικών, αλλά οι παλιοί εξακολουθούν να είναι χρήσιμοι ως «μαίες». □

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



**Richard Feynman**

Νόμπελ Φυσικής

### ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΩΝ

Σκέψεις ενός πολίτη-επιστήμονα

«Μια θαυμάσια συλλογή προσωπικών ιστοριών και στοχασμών για τη ζωή, στο αυθεντικό στυλ του Feynman. Ένα βιβλίο για τον πραγματικό άνθρωπο και τα προβλήματά του, όχι για φιλοσοφικές αφαιρέσεις...»

Freeman Dyson, *The New York Review of Books*

«Άλλη μια φορά ένας αεικίνητος Feynman...»

Timothy Ferris, *The New York Times*

«Διασκεδαστικό και προκλητικό βιβλίο... Ο Feynman έχει πολλά ακόμη να μας πει —ακόμη κι από εκεί που βρίσκεται...»

Marcus Chown, *The New Scientist*

«Μια πνευματώδης σύνοψη της φιλοσοφίας του Feynman για την επιστήμη, αλλά και μια εξαιρετική φιλοσοφία για τη ζωή...»

John Gribbin, *The Sunday Times* του Λονδίνου

«Θαυμάσιο βιβλίο... Ο κόσμος έχει πολλά να κερδίσει από τη διεισδυτική ματιά και την οξεία αντίληψη του Feynman...»

Paul Davies, καθηγητής φιλοσοφίας των φυσικών επιστημών,  
Πανεπιστήμιο της Αδελαΐδας

«Το παρόν βιβλίο θα αποτελέσει αναμφισβήτητα μέρος του θεμελιώδους έργου του...»

Tony Hey, καθηγητής ηλεκτρονικής, Πανεπιστήμιο του Σαουθάμπτον

Σελ.: 144, 14 x 21 εκ., Πανόδετο, 4.300 δρχ.

### ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσματόργου 5), 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Web site: [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr)

# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

### M136

**Τετράγωνα και κύβοι.** Βρείτε όλες τις πραγματικές λύσεις της εξίσωσης  $(x^2 + 100)^2 = (x^3 - 100)^3$ .

### M137

**Κάθετη απόδειξη.** Έστω  $M$  το σημείο τομής των διαγωνίων του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου  $ABCD$ , όπου η  $\angle AMB$  είναι οξεία. Κατασκευάζουμε στη βάση  $BC$  το ισοσκελές τρίγωνο  $BCK$  έτσι ώστε  $\angle KBC + \angle AMB = 90^\circ$ . Αποδείξτε ότι η  $KM$  είναι κάθετη στην  $AD$ .

### M138

**Ασκήσεις πυρόσβεσης.** Μια φωτιά στη Φλόριντα εξαπλώνεται με ταχύτητα  $1 \text{ km/h}$  προς όλες τις κατευθύνσεις. Μια μπουλντόζα φτάνει στο μέτωπο της φωτιάς τη στιγμή που έχει κάψει κύκλο ακτίνας  $1 \text{ km}$ . Η μπουλντόζα κινείται με ταχύτητα  $14 \text{ km/h}$  κατασκευάζοντας μια αντιπυρική ζώνη. Ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει, ώστε η φωτιά να κάψει το πολύ περιοχή εμβαδού (α)  $4\pi \text{ km}^2$ , (β)  $3\pi \text{ km}^2$ . (Μπορείτε να υποθέσετε ότι η διαδρομή της αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα και τόξα κύκλου.)

### M139

**Ορθογώνιος κόσμος.** Ο πλανήτης Τούβλο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές  $1, 2$  και  $4 \text{ km}$ . Ο πρίγκιπας του Τούβλου έκτισε το παλάτι του στο κέντρο μιας από τις μεγαλύτερες έδρες. Ποια είναι η απόσταση του παλατιού από το πλέον απομακρυσμένο σημείο του πλανήτη; (Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων ορίζεται ως το μήκος της συντομότερης διαδρομής που συνδέει τα σημεία πάνω στην επιφάνεια του πλανήτη.)

### M140

**Προσδιορισμός πεδίου τιμών.** Οι πραγματικοί αριθμοί  $a, b, c$  ικανοποιούν τις συνθήκες

$$0 < a \leq b \leq c,$$

$$a + b + c = 7,$$

$$abc = 9.$$

Βρείτε το πεδίο των δυνατών τιμών για καθεμιά από τις μεταβλητές  $a, b, c$ .

## Φυσική

### Φ136

**Η ορατότητα της σκιέρ.** Μια σκιέρ διασχίζει την κορυφογραμμή ενός βουνού γλιστρώντας με τα πέδιλά της και ενώ επικρατεί χιονοθύελλα. Κινούμενη με ταχύτητα  $v = 20 \text{ km/h}$ , διαπιστώνει πώς στην περιοχή του στόματός της — το μόνο τμήμα του σώματός της που είναι εκτεθειμένο — προσπίπτουν  $N_1 = 50$  νιφάδες ανά λεπτό. Αποφασίζει λοιπόν, καλού-κακού, να γυρίσει πίσω. Κατά την επιστροφή, κινούμενη με την ίδια ταχύτητα, διαπιστώνει ότι στην περιοχή του στόματός της προσπίπτουν μόνο  $N_2 = 30$  νιφάδες ανά λεπτό. Εκτιμήστε την ορατότητα της σκιέρ κατά τη διάρκεια της χιονοθύελλας. Θεωρήστε ότι το ερβαδόν της εκτεθειμένης περιοχής του στόματός της (στη διεύθυνση της κίνησης) είναι  $S = 24 \text{ cm}^2$ , και ότι η μέση διάμετρος των νιφάδων είναι  $d = 1 \text{ cm}$ .

### Φ137

**Ηλιο υπό πίεση.** Στην κυκλική διεργασία που εξετάζουμε, η ανηγμένη θερμοκρασία  $\tau = T/T_0$  του ήλιου εξαρτάται κατά τέτοιον τρόπο από την ανηγμένη πίεσή του  $\delta = P/P_0$ , ώστε να παριστάνεται σε διάγραμμα  $\delta$ -τως κύκλος με το κέντρο του στο σημείο  $(1, 1)$ . Η ελάχιστη ανηγμένη θερμοκρασία του ήλιου στην εν λόγω διεργασία ισούται με  $\tau_{\min}$ . Προσδιορίστε το λόγο της μέγιστης προς την ελάχιστη τιμή της ατομικής συγκέντρωσης του ήλιου σ' αυτή τη διεργασία. (V. Pogozhev)

### Φ138

**Σύνθετη τηκτή ασφάλεια.** Ένα μολύβδινο σύρμα διαμέτρου  $d_1 = 0,3 \text{ mm}$  τήκεται όταν το διαρρέει ρεύμα  $I_1 = 1,8$

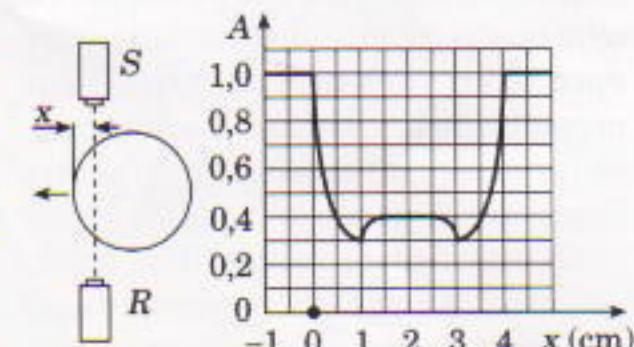
$A$ , ενώ ένα άλλο, επίσης μολύβδινο σύρμα ( $d_2 = 0,6 \text{ mm}$ ), τήκεται όταν το διαρρέει ρεύμα  $I_2 = 5 \text{ A}$ . Για ποια τιμή του ρεύματος θα «καεί» μια ασφάλεια εάν αποτελείται από δύο τέτοια ισομήκη σύρματα σε παράλληλη σύνδεση; Για ποια τιμή του ρεύματος θα «καεί» η ασφάλεια αν, εκτός από το χοντρό σύρμα, περιλαμβάνει και είκοσι ακόμη λεπτά σύρματα τα οποία έχουν το ίδιο μήκος και είναι συνδεδεμένα παράλληλα; (A. Khodulev)

### Φ139

**Μαγνητικό ανασήκωμα.** Ένας άκαμπτος λεπτός αγώγιμος δακτύλιος κείται σε μη αγώγιμη οριζόντια επφάνεια και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου  $B$ , του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι οριζόντιες. Ο δακτύλιος έχει μάζα  $m$  και ακτίνα  $R$ . Ποιο ρεύμα πρέπει να διαρρέει το δακτύλιο ώστε να τον κάνει να ανασηκωθεί από την επφάνεια; (S. Krotov)

### Φ140

**Ακτινογραφία.** Μια συσκευή ακτίνων  $X$  αποτελείται από σημειακή πηγή  $S$  και δέκτη  $R$  στερεωμένο σ' ένα πλαίσιο. Ένα κυλινδρικό δοχείο με παχιά τοιχώματα τοποθετείται ανάμεσα στα  $S$  και  $R$  (Σχήμα 1). Το διάγραμμα δεί-



Σχήμα 1

χνει πώς μεταβάλλεται η ένταση των ακτίνων  $X$  συναρτήσει της συντεταγμένης  $x$ . Υπάρχει μέσα στον κύλινδρο κάποια ουσία που απορροφά την ακτινοβολία; (A. Andrianov)

# Ψηλά, ψηλά και μακριά

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

**Π**ΗΡΑΝ ΤΑ ΜΥΑΛΑ ΤΟΥ αέρα». Έκφραση καθημερινή, που σημαίνει ότι ο άνθρωπος παύει να έχει ακριβή συναίσθηση των δυνατοτήτων του, ότι υπερεκτιμά τις ικανότητές του και φαντάζεται πως μπορεί να καταφέρνει πράγματα ακατόρθωτα, ότι αποθραυνεται και ίσως παραφέρεται. Άλλα δεν είναι και η μόνη έκφραση που έχει «εγκλωβίσει» αέρα: «αέρας κοπανιστός» —λόγια κενά περιεχομένου, ανόητα—, «κουβέντες του αέρα» —λόγια χωρίς αξία και ουσιαστικό αντίκρισμα—, «σου δίνω αέρα» —αφήνω περιθώρια υπεβολικής οικειότητας, φέρομαι πολύ ελαστικά. Ποιο είναι άραγε εκείνο το χαρακτηριστικό του αέρα που σηματοδοτεί την υπέρβαση των επιτρεπτών ορίων, που γεννά την ειρωνεία στις παραπάνω εκφράσεις; Ενδεχομένως να πρέπει να αναζητηθεί στο ότι ο περισσότερος κόσμος τείνει να θεωρεί τον αέρα —και περισσότερο τον θερμό— ως κάτι στρούμενο βάρους, το οποίο χάνεται στις άκρες του ουρανού.

Ως σπουδαστές της φυσικής, όμως, τον αέρα τον έχουμε σε μεγαλύτερη εκτίμηση. Συχνά φουσκώνουμε μπαλόνια, και μέσα από αυτά μελετούμε πολλούς νόμους της φύσης. Γνωρίζουμε ότι ο θερμός αέρας τείνει να ανυψώνεται —και η σκέψη μας μπορεί μαζί του να πετά σε μεγάλα επιστημονικά ύψη. Άλλα ας μείνουμε σε αυτό το φαινόμενο. Ένα μπαλόνι φουσκωμένο με θερμό αέρα αρχίζει να υψώνεται επειδή το βάρος του είναι

Χέρια, κάντε ό,τι σας προστάζω:  
φέρτε το μπαλόνι του νου,  
που φουσκώνει και παραδέρνει  
απ' το φύσημα του ανέμου,  
πίσω στη στενή καλύβα του.

—William Butler Yeats

μικρότερο από την άνωση που δέχεται μέσα στον ψυχρότερο περιβάλλοντα αέρα. Ανεβαίνει έως ότου η άνωση εξισωθεί με το βάρος του μπαλονιού και του αέρα που περιέχει. Ετοι, για να κατανοήσουμε την ανύψωση και την αιώρηση του μπαλονιού, θα πρέπει να ανασκοπήσουμε τον θεμελιώδη νόμο της άνωσης, την αρχή του Αρχιμήδη, καθώς και το πώς καθορίζεται η πυκνότητα του ψυχρότερου αέρα σε διάφορα υψόμετρα.

Ο Αρχιμήδης, προτού αρχίσει να περιέρχεται δρομαίος τις οδούς αναφωνώντας «Εύρηκα!», αντιλήφθηκε πως κάθε αντικείμενο δέχεται μια ανωστική δύναμη ίση με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζει. Για να δώσουμε μια κομψή απόδειξη της εν λόγω αρχής, αρκεί να θεωρήσουμε ότι ένας όγκος νερού, σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίδου, πλέοι μέσα στο υπόλοιπο νερό. Η στατική ισορροπία που παρατηρούμε δεν μπορεί να εξηγηθεί παρεκτός αν η άνωση, η οποία οφείλεται στη διαφορά ανάμεσα τις πίεσεις που ασκούνται στην πάνω και την κάτω επιφάνεια του υδάτινου όγκου, ισούται με το βάρος του νερού. Η διαφορά πίεσης θα πα-

ραμείνει ακριβώς ίδια εάν κάποιο άλλο αντικείμενο αντικαταστήσει τον θεωρούμενο υδάτινο όγκο. Εάν, όμως, το εν λόγω αντικείμενο είναι βαρύτερο από το νερό που εκτοπίζει, τότε θα βυθιστεί. Αντιθέτως, αν είναι ελαφρύτερο από το νερό που εκτοπίζει, τότε θα αναδυθεί.

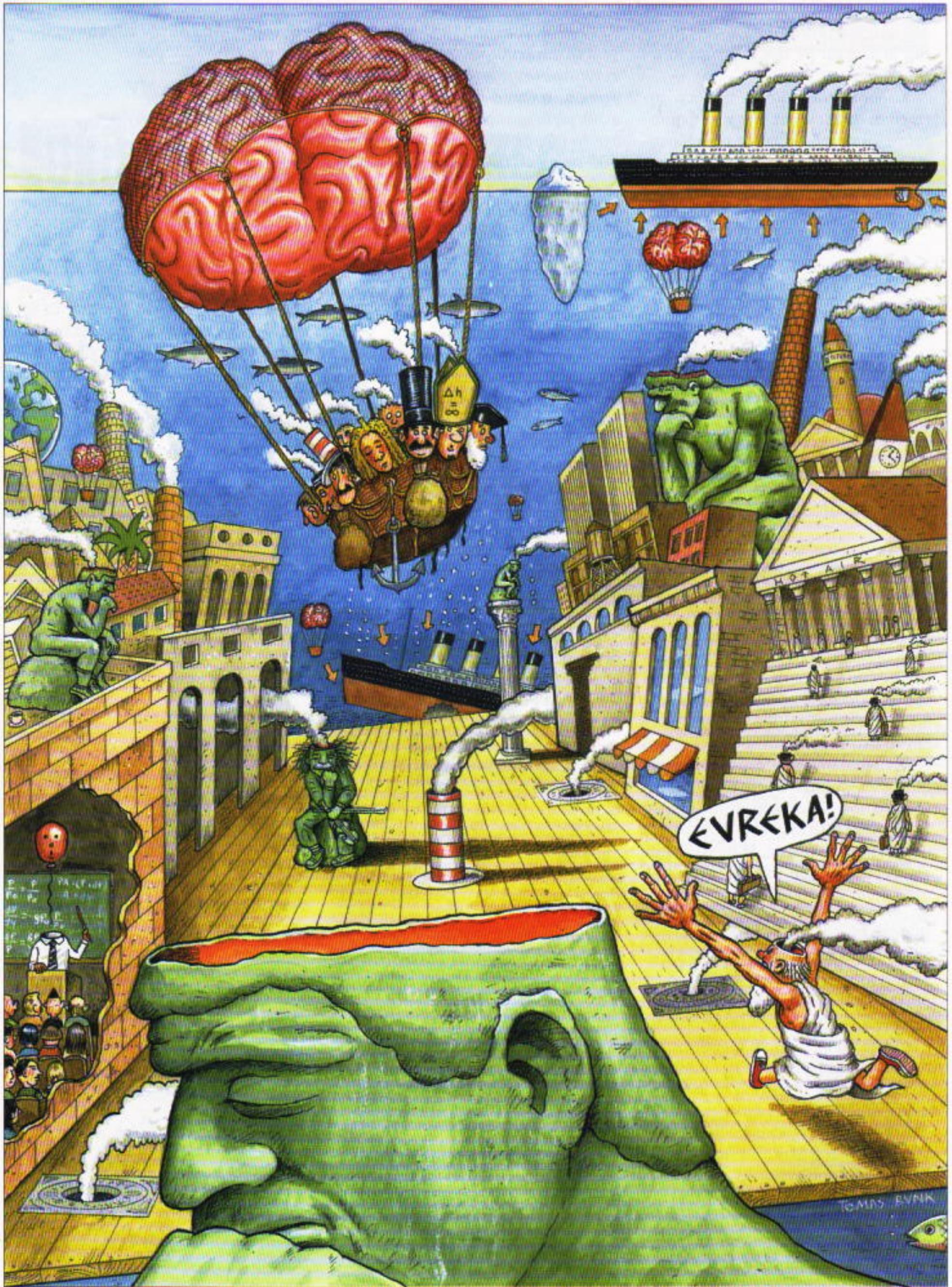
Το νερό παρουσιάζει μηδαμινή συμπειστότητα, οπότε οι διαφορές πίεσης θα παραμείνουν σταθερές ανεξαρτήτως της θέσης την οποία καταλαμβάνει ο υδάτινος όγκος μέσα στο υγρό. Η ατμόσφαιρα, όμως, είναι συμπειστή, με αποτέλεσμα η πίεση και η πυκνότητα του αέρα να μεταβάλλεται με το υψόμετρο. Εάν δεχτούμε ότι η πίεση είναι ανάλογη της πυκνότητας (όπως αν η θερμοκρασία του αέρα ήταν παντού σταθερή), μπορούμε να συναγάγουμε την εξίσωση που συσχετίζει την πίεση με το υψόμετρο.

Θεωρούμε πως ένα στοιχείο του ρευστού ισορροπεί εντός μεγαλύτερου όγκου του ρευστού. Για να πληρούται η συνθήκη ισορροπίας του συγκεκριμένου στοιχείου, η δύναμη που το ωθεί προς τα πάνω λόγω της πίεσης στην κάτω επιφάνειά του θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα του βάρους του και της δύναμης που το ωθεί προς τα κάτω λόγω της πίεσης στην πάνω επιφάνειά του.

$$PS = (P + dP)S + dB$$

$$PS = (P + dP)S + \rho g S dy$$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g.$$



Όπως διαπιστώνουμε λοιπόν, η πίεση μειώνεται με την αύξηση του υψομέτρου.

Εφόσον θεωρούμε ότι η πυκνότητα είναι ανάλογη με την πίεση, μπορούμε να προσδιορίσουμε την εξάρτηση της πίεσης από το υψόμετρο ως εξής:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0}$$

$$\frac{dP}{dy} = -gp_0 \frac{P}{P_0}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{gp_0}{P_0} dy$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{gp_0}{P_0} y$$

$$P = P_0 e^{-\frac{gp_0}{P_0} y}$$

Έχοντας στη διάθεσή μας την αρχή του Αρχιμήδη και την εξάρτηση της πίεσης από το υψόμετρο που μόλις εξαγάγαμε, είμαστε πλέον έτοιμοι να επιχειρήσουμε την περιήγησή μας στο πρόβλημα του παρόντος τεύχους. Πρόκειται για διασκευή ενός προβλήματος που τέθηκε στη Διεθνή Ολυμπάδα Φυσικής του 1982, η οποία διεξήχθη στη Γερμανία.

Ένα μπαλόνι έχει, όταν είναι φουσκωμένο, σταθερό όγκο  $V_1 = 1,10 \text{ m}^3$ . Η μάζα του ελαστικού περιβλήματος είναι  $m_{\text{μπ}} = 0,187 \text{ kg}$ , ενώ ο όγκος του θεωρείται αμελητέος. Η αρχική τιμή της θερμοκρασίας του περιεχόμενου αέρα είναι  $\theta_1 = 20,0^\circ\text{C}$ , ενώ στο εξωτερικό του μπαλονιού επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Υπ' αυτές τις συνθήκες, η πυκνότητα του αέρα είναι  $\rho_1 = 1,20 \text{ kg/m}^3$ .

Α. Ως ποια θερμοκρασία πρέπει να θερμανθεί ο αέρας του μπαλονιού ώστε αυτό να αρχίσει να αιωρείται;

Β. Το μπαλόνι δένεται με σκοινί στο έδαφος και, εν συνεχείᾳ, ο περιεχόμενος αέρας θερμαίνεται ώσπου να αποκτήσει σταθερή θερμοκρασία  $110^\circ\text{C}$ . Ποια θα είναι η ολική δύναμη που ασκείται στο μπαλόνι όταν το απελευθερώνουμε;

Γ. Το μπαλόνι δένεται με σκοινί στο έδαφος, και ο αέρας που περιέχει θερμαίνεται ώσπου να αποκτήσει στα-

θερή θερμοκρασία  $110^\circ\text{C}$  στη συνέχεια το απελευθερώνουμε. Το μπαλόνι ανυψώνεται ισόθερμα στην ατμόσφαιρα, η οποία θεωρείται πως έχει σταθερή θερμοκρασία  $20^\circ\text{C}$ . Καθορίστε το ύψος που κερδίζει το μπαλόνι υπό τις ανωτέρω συνθήκες.

Δ. Το μπαλόνι αιωρείται στο ύψος που υπολογίστηκε στο ερώτημα Γ. Μαζεύουμε το σκοινί ώστε να το απομακρύνουμε από τη θέση ισορροπίας του κατά  $\Delta h = 10 \text{ m}$  και το αφήνουμε ελεύθερο. Περιγράψτε την κίνηση που θα εκτελέσει το μπαλόνι αφότου απελευθερωθεί και μετά.

Θα περιμένουμε, με χαρά όπως πάντα, τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum*.

## Περί στροφικής κινήσεως

Τρεις αναγνώστες μάς απέστειλαν λύσεις για το πρώτο από τα προβλήματα που θέσαμε στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου του *Quantum*, καθεμία από τις οποίες στηρίζεται και σε διαφορετική μέθοδο. Ο πρώτος, καθηγητής στη μέση εκπαίδευση, υποστήριξε πως όταν το θραύσμα αποχωρίζεται από το χείλος του περιστρεφόμενου δίσκου, δεν ασκεί ώθηση στο δίσκο, οπότε η στροφορμή του (και, συνακολούθως, η γωνιακή του ταχύτητα) δεν μεταβάλλεται. Ο δεύτερος, μαθητής του προηγουμένου, παρατήρησε ότι η αρχική στροφορμή του σωματίδιου είναι  $mR^2\omega_0$  ενώ η τελική  $muR$ . Άλλα  $u = \omega_0 R$ , οπότε η στροφορμή του σωματίδιου δεν μεταβάλλεται. Λόγω της διατήρησης της στροφορμής του συστήματος, συμπεραίνουμε ότι και η στροφορμή του δίσκου παραμένει αμετάβλητη. Ο τρίτος αναγνώστης προσέγγισε το πρόβλημα με περισσότερο μαθηματικό πνεύμα. Η διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται τη σχέση

$$\Theta_0\omega_0 = (\Theta_0 - mR^2)\omega_t + mR^2\omega_0$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\Theta_0 - mR^2)\omega_0 = (\Theta_0 - mR^2)\omega_t$$

Συνεπώς,  $\omega_t = \omega_0$ .

Το πρόβλημα όπου μια μπάλα μάζας  $m$  και ταχύτητας  $u$  χτυπάει ράβδο μάζας  $M$  και μήκους  $a$  αποδείχθηκε κάπως δυσκολότερο. Όπως και σέ όλα τα προβλήματα κρούσεων, πρέπει να στηριχτούμε στην αρχή διατήρησης

της ορμής. Από αυτήν προκύπτει η εξίσωση

$$mu = MV,$$

όπου με  $V$  συμβολίζουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου, ενώ η τελική ταχύτητα της μπάλας ισούται με μηδέν. Συνεπώς,

$$V = \frac{m}{M} u.$$

Εφόσον η μπάλα χτυπά τη ράβδο κάθετα και κοντά στο ένα από τα άκρα της, η στροφορμή της μπάλας ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου είναι

$$G_a = mu \frac{a}{2}.$$

Η στροφορμή της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της είναι

$$G_t = \Theta\omega = \frac{1}{12} Ma^2\omega,$$

όπου με  $\omega$  συμβολίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της.

Η διατήρηση της στροφορμής μάς επιτρέπει να υπολογίσουμε την  $\omega$ :

$$\omega = \frac{6mu}{Ma}.$$

Ο πρώτος αναγνώστης κατόρθωσε να προσδιορίσει τη συνθήκη που οφείλουν να ικανοποιούν οι μάζες προκειμένου να καταστεί δυνατή μια τέτοια κρούση. Γνωρίζουμε ότι η κινητική ενέργεια μετά την κρούση δεν μπορεί να υπερβαίνει τη διαθέσιμη κινητική ενέργεια προ της κρούσεως. Συνεπώς,

$$\frac{1}{2} mu^2 \geq \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \Theta\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} M \left( \frac{m}{M} u \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} Ma^2 \right) \left( \frac{6mu}{Ma} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} mu^2 \left( \frac{4m}{M} \right),$$

οπότε καταλήγουμε στη συνθήκη

$$M \geq 4m.$$



# Ευκλείδειες περιπλοκές

Οπι αληθεύει τοπικά σύμφωνα με τον Ευκλείδη μπορεί να μην ισχύει όταν ταξιδεύουμε όλο και πιο μακριά

I. Sabitov

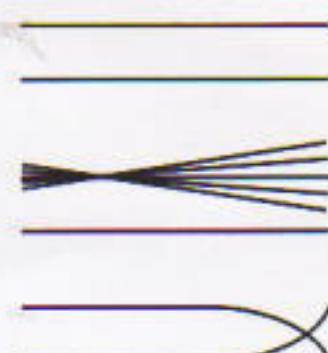
**H**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΠΟΥ ΔΙΔΑΣΚΟΜΑΣΤΕ στο σχολείο ονομάζεται ευκλείδεια προς τιμήν του αρχαίου έλληνα μαθηματικού που χρησιμοποίησε την αξιωματική μέθοδο για να συστηματοποιήσει αυτή την επιστήμη. Από τα αξιώματα που διατύπωσε ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* του, διασημότερο είναι το πέμπτο αίτημα —το αίτημα των παραλλήλων. Σύμφωνα με το αξίωμα αυτό, για κάθε σημείο εκτός μιας δεδομένης ευθείας υπάρχει μία μοναδική ευθεία που διέρχεται από το δεδομένο σημείο και είναι παράλληλη στη δεδομένη ευθεία. Στα *Στοιχεία*, το αξίωμα αυτό διατυπώνεται με διαφορετικό αν και ισοδύναμο τρόπο: *αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και από τη μια πλευρά της σχηματίζονται εσωτερικές γωνίες με άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες τέμνονται προς την πλευρά που βρίσκονται οι δύο γωνίες.*

Ωστόσο, η ευκλείδεια γεωμετρία



Σχήμα 1

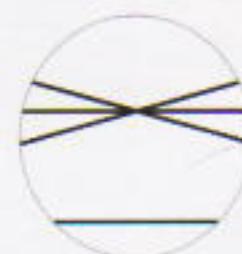
Αν  $\angle\alpha + \angle\beta < 180^\circ$ , τότε το σημείο τομής των ευθειών  $m$  και  $n$  βρίσκεται στα δεξιά της ευθείας  $l$ .



μία παράλληλος

πολλές παράλληλοι

καρία παράλληλος



Πόσες παράλληλες υπάρχουν;

Σχήμα 2

Στη γεωμετρία του Ευκλείδη, στη γεωμετρία του Lobachevsky και στη γεωμετρία του Riemann χρησιμοποιούνται διαφορετικά αξιώματα παραλλήλων.

δεν είναι η μοναδική λογικά δυνατή: υπάρχουν μη ευκλείδειες γεωμετρίες στις οποίες το αξίωμα των παραλλήλων είναι τελείως διαφορετικό. Αν ξεκινήσουμε με μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, μπορούμε να κάνουμε διαφορετικές υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ευθειών που διέρχονται από το δεδομένο σημείο και είναι παράλληλες προς τη δεδομένη ευθεία. Η υπόθεση ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον τέτοιες ευθείες μάς οδηγεί στη γεωμετρία που έχει πάρει το όνομα του μεγάλου ρώσου μαθηματικού N.I. Lobachevsky. Εππλέον, ένα διαφορετικό αξίωμα —ότι δεν υπάρχουν ευθείες που διέρχονται από το δεδομένο σημείο εκτός της ευθείας που να μην τέμνουν τη δεδομένη ευθεία— μάς οδηγεί στη γεωμετρία του Riemann (ή ελλειπτική γεωμετρία) (βλ. Σχήμα 2).

Ποια από αυτές τις τρεις, λογικά

Σχήμα 3

Σε ένα περιορισμένο τμήμα του χώρου δεν μπορούμε να διαπιστώσουμε άμεσα ποιο αξίωμα παραλλήλων ισχύει.

δυνατές, γεωμετρίες —του Ευκλείδη, του Lobachevsky ή του Riemann— είναι αληθής στον πραγματικό, φυσικό μας κόσμο;

Δεν είναι εύκολο να δώσουμε γρήγορη απάντηση στο ερώτημα. Δεν είναι προφανές το πώς θα μπορούσε να επαληθευτεί πειραματικά το αξίωμα των παραλλήλων. Αποτελεί γεγονός ότι μόνο θεωρητικά μπορούμε να επεκτείνουμε μια ευθεία στο άπειρο. Στην πραγματικότητα, ακόμη και τα καλύτερα τηλεσκόπα μπορούν να προσεγγίσουν μόνο ένα πεπερασμένο τμήμα του σύμπαντος. Εππλέον, όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 3, υπάρχουν πολλές ευθείες του δεδομένου επιπέδου που διέρχονται από το δεδομένο σημείο και δεν τέμνουν τη δεδομένη ευθεία μέσα στο διαθέσιμο προς παρατήρηση πεδίο (ακόμη και αν ισχύει το πέμπτο αξίωμα).

Οπότε, πώς θα μπορέσουμε να ε-



παλιθεύουμε το αξίωμα των παραλήλων;

## Το θεμέλιο της γεωμετρίας:

Αποδεικνύεται ότι, κατ' αρχήν, είναι δυνατόν να επαληθεύουμε το αξίωμα των παραλήλων. Το αξίωμα αυτό είναι ισοδύναμο με την πρόταση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με  $180^\circ$ .<sup>1</sup> Στη γεωμετρία του Lobachevsky το άθροισμα αυτό είναι μικρότερο των  $180^\circ$ . Ο Gauss προσπάθησε με γεωδαιτικές μετρήσεις να υπολογίσει το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου που σχηματίζανε τρεις κορυφές των ορέων Χαρτς (οι Μπρόκεν, Χοχενχάγκεν και Ίνσελμπεργκ), οι οποίες απέχουν μεταξύ τους 100 περίπου χιλιόμετρα. Από την άλλη μεριά, ο Lobachevsky διάλεξε για τους υπολογισμούς του κοσμικές αποστάσεις: μέτρησε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου που σχηματίζουν η Γη, ο Ήλιος και ο Σείριος, ο φωτεινότερος απλανής του ουρανού. Όμως, και στα δύο πειράματα, οι αποκλίσεις από τις  $180^\circ$  αποδείχτηκαν μικρότερες από το πιθανό σφάλμα των μετρήσεων, και έτσι δεν κατέστη δυνατόν να εξαχθούν οριστικά συμπεράσματα για τη γεωμετρία του πραγματικού κόσμου.

Ας υποθέσουμε, όμως, ότι κάποιος παρατηρητής καταφέρνει να αποδείξει με αλάνθαστη ακρίβεια ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$ . Θα σημαίνει αυτό ότι η γεωμετρία του χώρου μας είναι ευκλείδεια;

Η απάντηση είναι καταφατική αν συμφωνήσουμε ότι το θεώρημα του Legendre είναι σωστό. Όμως, το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται βάσει άλλων ευκλείδειων αξιωμάτων. Το ερώτημα έγκειται στο κατά πόσον τα αξιώματα αυτά ισχύουν στον πραγματικό κόσμο. Για παράδειγμα, πώς μπορούμε να ξέρουμε ότι δύο ευθείες που τέμνονται σε ένα φύλλο χαρτί δεν πρόκειται να ξανασυναντήθουν αν τις προεκτείνουμε επ' άπειρον; Πρέπει να είμαστε εξίσου αυστηροί με όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη — δεν πρέπει

να δεχτούμε προκαταβολικά ότι ένα αξίωμα ισχύει σε ολόκληρο το χώρο αν ισχύει σε μια περιορισμένη περιοχή του.

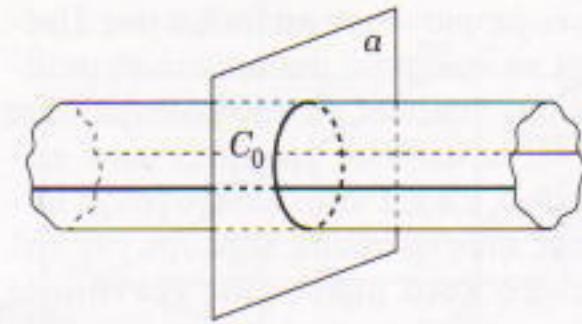
Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ερώτημα: αν υποθέσουμε ότι τα ευκλείδεια αξιώματα αληθεύουν «τοπικά» — δηλαδή, μέσα στην εμβέλεια των οργάνων μας — σε κάθε σημείο του «πραγματικού χώρου» (οπουδήποτε βρίσκεται ο παρατηρητής), αληθεύει ότι ο πραγματικός χώρος είναι και συνολικά ευκλείδειος; Με άλλα λόγια, είναι ο ευκλείδειος τρισδιάστατος χώρος κατάλληλο μοντέλο ολόκληρου του φυσικού χώρου; Αυτό το σημαντικό (στην ουσία, κοσμολογικό) ερώτημα είναι δυνατόν να διατυπωθεί με καθαρά μαθηματικούς όρους, πράγμα που θα αποτελέσει το στόχο του παρόντος άρθρου.

## Διατύπωση του προβλήματος

Έστω ότι για κάθε σημείο του χώρου υπάρχει μια περιοχή — μια γειτονιά — (ας πούμε, μια σφαίρα με κέντρο αυτό το σημείο) μέσα στην οποία αληθεύουν οι προτάσεις της ευκλείδειας γεωμετρίας. Είναι φυσικό να διατυπώσουμε με τέτοιο τρόπο αυτές τις προτάσεις ώστε να έχουν νόημα μέσα στη σφαίρα — για παράδειγμα, το αξίωμα των παραλήλων πρέπει να αντικατασταθεί με την πρόταση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με  $180^\circ$ , κ.ο.κ. Τι μπορούμε να πούμε για τη γεωμετρία του χώρου συνολικά;

Ένας χώρος που είναι ευκλείδειος στην περιοχή κάθε σημείου του ονομάζεται τοπικά ευκλείδειος.

Ιδού ένας μαθηματικώς ορθότερος ορισμός του τοπικά ευκλείδειου χώρου. Δύο σύνολα  $A$  και  $A'$ , στο καθένα από τα οποία ορίζεται η απόσταση μεταξύ κάθε ζεύγους σημείων τους, ονομάζονται ισομετρικά αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων τους που διατηρεί την απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι αν  $a, b \in A$  και  $a', b' \in A'$  είναι τα αντίστοιχα σημεία του  $A'$ , τότε η απόσταση  $|ab|$  ισούται με την απόσταση  $|a'b'|$ . Ένας χώρος ονομάζεται τοπικά ευκλείδειος αν έχει οριστεί μια απόσταση για κάθε ζεύγος σημείων του και αν για κάθε σημείο υπάρχει μια περιοχή που είναι ισομετρική με μια σφαί-



Σχήμα 4

Απειρος κύλινδρος.

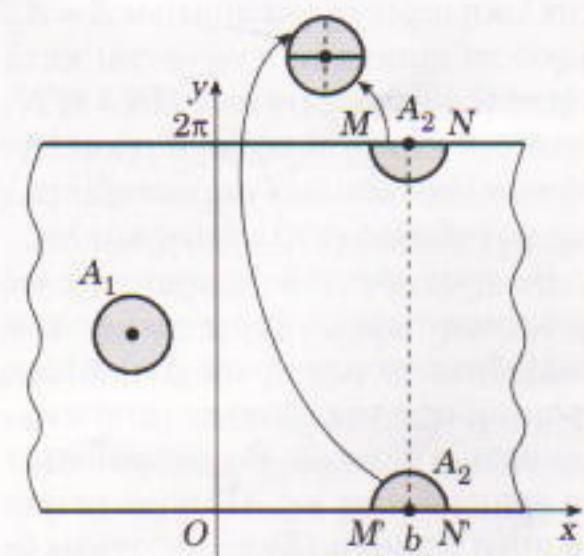
ρα του συνήθους ευκλείδειου χώρου.

Σε αυτό το άρθρο δεν θα μπορέσουμε να εξετάσουμε τοπικά ευκλείδειους τρισδιάστατους χώρους. Θα περιοριστούμε σε τοπικά ευκλείδειους διοδιάστατους χώρους. Τέτοιοι χώροι ονομάζονται τοπικά ευκλείδεια επίπεδα. Το πρόβλημά μας, λοιπόν, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Ποια είναι η εικόνα των τοπικά ευκλείδειων επιπέδων στο συνολικό χώρο;

## Ο κύλινδρος και το ανάπτυγμά του

Το ίδιο το ευκλείδειο επίπεδο είναι φυσικά το απλούστερο παράδειγμα ενός τοπικά ευκλείδειου επιπέδου. Δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την περιπτωση αλλά με ένα άλλο, αρκετά απλό παράδειγμα — την άπειρη κύλινδρικη επιφάνεια, ή απλώς τον κύλινδρο. Το Σχήμα 4 παρουσιάζει αυτή την επιφάνεια ως το σύνολο των σημείων των οριζόντιων ευθειών (γεννητριών) οι οποίες διέρχονται από όλα τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου  $C_0$  (διευθέτουσα) που ανήκει στο κατακόρυφο επίπεδο  $a$ .

Αλλά, δεν έχουμε ακόμη κάποια



Σχήμα 5

Ο κύλινδρος (μια λωρίδα με ταυτισμένες τις δύο πλευρές της) είναι τοπικά ευκλείδειος.

1. Επιπλέον, ο γάλλος μαθηματικός A. Legendre απέδειξε ότι το αξίωμα των παραλήλων αληθεύει αν υπάρχει τουλάχιστον ένα τριγώνο με άθροισμα γωνιών ίσο με  $180^\circ$ .

«γεωμετρία» στον κύλινδρό μας. Πρέπει να ορίσουμε μια απόσταση μεταξύ των σημείων, να καθορίσουμε ποιες είναι οι «ευθείες γραμμές» στον κύλινδρο, κ.ο.κ. Για να εισαγάγουμε αυτούς τους ορισμούς, κόβουμε τον κύλινδρο κατά μήκος μιας γεννήτριάς του και τον αναπτύσσουμε στο επίπεδο των συντεταγμένων ως μια άπειρη λωρίδα  $P$ , τα σημεία της οποίας ικανοποιούν την ανισότητα  $0 \leq y \leq 2\pi$  (βλ. Σχήμα 5). Θα θεωρήσουμε ότι η επίπεδη λωρίδα  $P$  με τις άκρες της «κολλημένες» (αν δηλαδή θεωρήσουμε ότι ταυτίζονται όλα τα σημεία της μορφής  $(b, 0)$  και  $(b, 2\pi)$ ) ορίζει τη γεωμετρία του κυλίνδρου. Οι μαθηματικοί λένε ότι ταυτίζουμε τα ζεύγη των σημείων της μορφής  $(b, 0)$  και  $(b, 2\pi)$ , για κάθε  $b$ , και μελετάμε τη γεωμετρία της λωρίδας  $P$  χρησιμοποιώντας αυτή την ταύτιση.

Ας επαληθεύσουμε ότι η γεωμετρία του κυλίνδρου είναι τοπικά ευκλείδεια. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο  $A(x, y) \in P$ . Αν το σημείο  $A = A_1$ , δεν βρίσκεται στην άκρη της λωρίδας (Σχήμα 5), όλα είναι ξεκάθαρα. Θεωρούμε έναν κύκλο ακτίνας  $r$ , όπου το  $r$  είναι μικρότερο από την απόσταση του σημείου  $A$  από την πλησιέστερη άκρη της λωρίδας. Ο κύκλος περιέχεται εξ ολοκλήρου στη λωρίδα  $P$  και, φυσικά, είναι ένας συνηθισμένος ευκλείδειος κύκλος. Αν το σημείο  $A = A_2$  βρίσκεται στην άκρη της λωρίδας (Σχήμα 5), τότε οι συντεταγμένες του είναι της μορφής  $(b, 0)$   $\equiv (b, 2\pi)$ . Στην περίπτωση αυτή, η ένωση των δύο ημικυκλίων με κέντρα τα σημεία  $(b, 0)$  και  $(b, 2\pi)$  μπορεί να θεωρηθεί μια κυκλική περιοχή του σημείου  $A = A_2$ . Αφού τα ημικύκλια ενώνονται κατά μήκος των διαμέτρων τους  $MN \equiv M'N'$ , μετά την ένωσή τους (τη συγκόλλησή τους) προκύπτει ένας συνηθισμένος μοναδιαίος ευκλείδειος κύκλος.

Θα ήταν φυσικό να ορίσουμε ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων του κυλίνδρου το μήκος της μικρότερης γραμμής που τα ενώνει και που ανήκει στον κύλινδρο. Θα μπορούσαμε να αναπτύξουμε μια άλλη γεωμετρία σε αυτή τη βάση. Ένας προσεκτικός αναγνώστης θα μπορούσε να ρωτήσει αν η εν λόγω γεωμετρία συμπίπτει με τη γεωμετρία της λωρίδας  $P$  με ταυτισμένες άκρες. Αποδεικνύεται ότι

όντως συμπίπτει. Η απόδειξη, όμως, τούτου, που συνδέεται με την ονομαζόμενη διαφορική γεωμετρία, βρίσκεται έξω από τα όρια του παρόντος άρθρου.

## Γεωμετρία στον κύλινδρο

Αποδείξαμε ότι η γεωμετρία του κυλίνδρου είναι τοπικά ευκλείδεια. Ποια είναι η εικόνα της γεωμετρίας του κυλίνδρου (δηλαδή της λωρίδας  $P$  με ταυτισμένες άκρες) μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο; Πώς μετριέται η «απόσταση» στον κύλινδρο; Ποιες είναι οι «ευθείες γραμμές» του; Ποια αξιώματα ισχύουν;

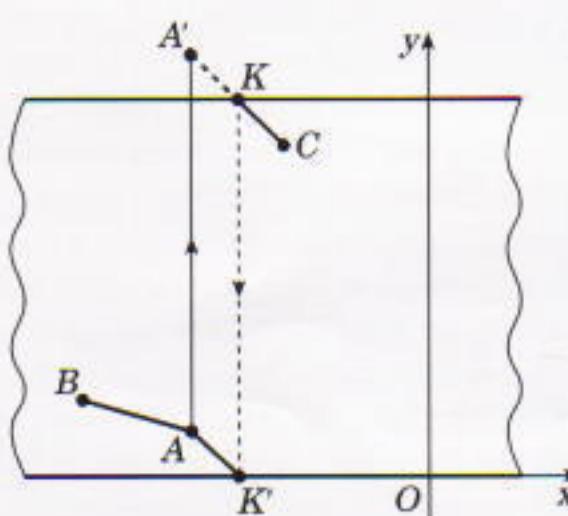
Πριν απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα, ας εξετάσουμε ένα μάλλον ασυνήθιστο παράδειγμα. Ας φανταστούμε ένα βασίλειο στο οποίο υπάρχουν δύο παράλληλοι δρόμοι κατά μήκος των οποίων βρίσκονται, σε μικρή απόσταση ο ένας από τον άλλο, χώροι στάθμευσης (στο βασίλειο μπορεί, επίσης, να υπάρχουν και άλλοι δρόμοι). Οι χώροι στάθμευσης που βρίσκονται απέναντι ο ένας από τον άλλο, σε διαφορετικούς δρόμους, συνδέονται με τηλεφωνική γραμμή, ενώ δεν υπάρχει τηλεφωνική σύνδεση μεταξύ των γειτονικών χώρων στάθμευσης του ίδιου δρόμου. Ορίζουμε ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να μεταδοθεί κάποιο μήνυμα από το ένα στο άλλο. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να στείλουμε ένα μήνυμα από το σημείο  $A$  του βασίλειου στο σημείο  $B$ . Παρόλο που τα  $A$  και  $B$  μπορεί να συνδέονται με έναν δρόμο, ο αγγελιαφόρος είναι πιθανόν να προτιμήσει να

κατευθυνθεί προς την πλησιέστερη τηλεφωνική συσκευή (ακόμη και αν βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση).

Η ίδια ασυνήθιστη απόσταση υπάρχει στη λωρίδα μας με τις ταυτισμένες άκρες. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$  της λωρίδας  $P$  (βλ. Σχήμα 6). Αν η διαφορά μεταξύ των συντεταγμένων για των σημείων  $A$  και  $B$ ,  $y_A$  και  $y_B$  είναι μικρότερη από το ήμισυ του πλάτους της λωρίδας  $P$ , η απόσταση είναι η συνήθης —δηλαδή είναι το μήκος του διαστήματος  $AB$ . Όμως, για τα σημεία  $A$  και  $C$ , για τα οποία έχουμε  $|y_A - y_C| > \pi$ , η απόσταση ισούται με  $|AK'| + |KC| = |A'C|$ , όπου το  $A'$  προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του  $A$  προς τα πάνω κατά το διάνυσμα  $\overrightarrow{AA'}$ , μήκους  $2\pi$ ,  $K$  είναι το σημείο τομής του τμήματος  $CA'$  με την άκρη της λωρίδας και  $\overrightarrow{KK'} = -\overrightarrow{AA'}$  (Σχήμα 6). Για να επιστρέψουμε στο παράδειγμα μας με τις τηλεφωνικές γραμμές, είναι προτιμότερο να στείλουμε έναν αγγελιαφόρο από το  $C$  στο  $K$ , να μεταδώσουμε στιγμαία μέσω τηλεφώνου το μήνυμα από το  $K$  στο  $K'$ , και στη συνέχεια να το στείλουμε με άλλον αγγελιαφόρο από το  $K'$  στο  $A$ .

**Πρόβλημα 1.** Αποδείξτε ότι σε μια λωρίδα με ταυτισμένες άκρες η απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $A(x_A, y_A)$  και  $B(x_B, y_B)$  δίνεται από τον τύπο

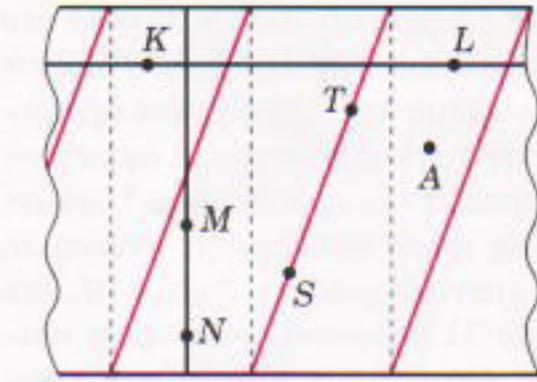
$$|AB| = \begin{cases} \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} & \text{av } |y_A - y_B| \leq \pi, \\ \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (2\pi - |y_A - y_B|)^2} & \text{av } |y_A - y_B| > \pi. \end{cases}$$



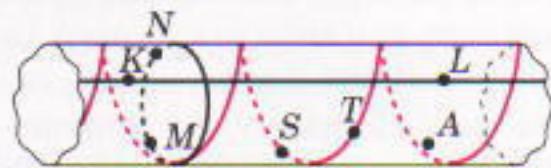
Σχήμα 6

Η συντομότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $A$  και  $C$  είναι  $|AK'| + |KC|$ .

Οι «ευθείες γραμμές», όπως και οι αποστάσεις, είναι ιδιαίτερες στη γεωμετρία μας. Μπορεί να είναι τρίων ειδών (βλ. Σχήμα 7a). Πρώτον, κάθε συνήθης ευθεία παράλληλη προς τις άκρες της λωρίδας είναι ευθεία γραμμή. Δεύτερον, κάθε τμήμα που συνδέει ταυτισμένα σημεία, κάθετο στις άκρες της λωρίδας, είναι «ευθεία γραμμή». Τρίτον, το σύνολο των πλάγιων παράλληλων τμημάτων, όπως αυτά του Σχήματος 7a, είναι «ευθεία γραμμή». Στον κύλινδρο, αυτά τα τρία είδη



α



β

### Σχήμα 7

Τρεις τύποι «ευθείας γραμμής» σε έναν κύλινδρο: η ελικοειδής ευθεία  $ST$ , η ευθεία γραμμή  $KL$  και ο κύκλος  $MN$ .

ευθειών είναι, αντίστοιχα, γεννήτριες του κυλίνδρου, κύκλοι παράλληλοι προς τη διευθετούσα και ελικοειδείς γραμμές (βλ. Σχήμα 7β).

Οσον αφορά τα αξιώματα, παρατηρήστε ότι το αξίωμα των παραλλήλων ισχύει στο ευρύτερο πλαίσιο (δηλαδή σε ολόκληρη την επιφάνεια)!

**Πρόβλημα 2.** Βρείτε τις μοναδικές «ευθείες γραμμές» που είναι παράλληλες προς τις «ευθείες γραμμές»  $KL$ ,  $MN$  και  $ST$  και διέρχονται από το σημείο  $A$  των Σχημάτων 7α και 7β.

Τώρα όμως παραβιάζονται άλλα ευκλείδεια αξιώματα —ακόμη και το αξίωμα που μας λέει ότι υπάρχει μία μοναδική ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία. Για παράδειγμα, το πλήθος των σημείων τομής της κόκκινης (ελικοειδούς) «ευθείας γραμμής» και της μαύρης (γεννήτριας) είναι άπειρο (Σχήμα 7)!.

**Πρόβλημα 3.** Περιγράψτε όλα τα ζεύγη σημείων του κυλίνδρου από τα οποία διέρχεται μία μόνο ευθεία γραμμή.

Τα παραδείγματα αυτά, όμως, δεν εξαντλούν τις περίεργες ιδιότητες της κυλινδρικής γεωμετρίας. Ισως παρατηρήσατε ήδη ότι οι «ευθείες γραμμές» του κυλίνδρου που είναι παράλληλες προς τη διευθετούσα είναι φραγμένες: η μέγιστη απόσταση μεταξύ σημείων μιας τέτοιας ευθείας ισούται με  $\pi$ .

**Πρόβλημα 4.** Δώστε παραδείγματα που δείχνουν ότι ένα ευθύγραμ-

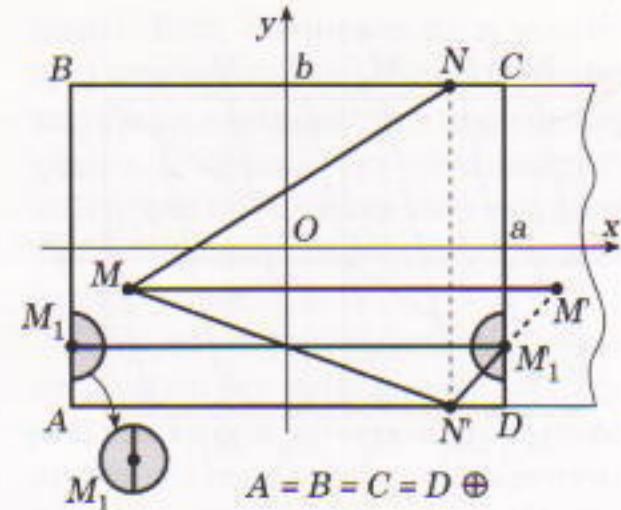
μο τμήμα δεν είναι πάντοτε η συντομότερη διαδρομή μεταξύ των άκρων του, ότι μια κεκλιμένη ευθεία μπορεί να είναι μικρότερη από την κάθετη και ότι το πυθαγόρειο θεώρημα δεν ισχύει πάντοτε. Καθορίστε ποια μορφή παίρνει ένας κύκλος —ένα συνόλο σημείων που ισαπέχουν από ένα δεδομένο σημείο— καθώς αυξάνει η ακτίνα του.

Διαπιστώνουμε ότι δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως ένας κόσμος είναι ένα άπειρο επίπεδο όταν αποδείξουμε την τοπική ισχύ όλων των αξιωμάτων της ευκλείδειας γεωμετρίας και ακόμη και τη γενική ισχύ του αξιώματος των παραλλήλων. Ένας τέτοιος κόσμος μπορεί να έχει τη δομή ενός άπειρου κυλίνδρου ή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, και άλλες γεωμετρικές δομές.

### Η επίπεδη σπείρα

Έστω ένα ορθογώνιο  $T$  με κορυφές  $A, B, C, D$  στο επίπεδο  $Oxy$  (Σχήμα 8). Έστω ότι  $2b$  είναι το μήκος του  $AB$  και  $2a$  το μήκος του  $CD$ . Ταυτίζουμε την πλευρά  $AB$  με την πλευρά  $CD$  έτσι ώστε το σημείο  $A$  να ταυτιστεί με το  $D$  και το  $B$  με το  $C$ . Στη συνέχεια ταυτίζουμε την πλευρά  $BC$  με την πλευρά  $AD$  έτσι ώστε το σημείο  $B$  να ταυτιστεί με το  $A$  και το  $C$  με το  $D$ . (Με αυτή τη διαδικασία, όλες οι κορυφές του  $T$  συγχωνεύονται σε ένα σημείο.) Ορίζουμε ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων του ορθογώνιου το μήκος της μικρότερης διαδρομής που τα συνδέει, λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις ταυτίσεις.

Εισάγουμε το σύστημα συντεταγμένων του Σχήματος 9, η αρχή του οποίου βρίσκεται στο κέντρο του ορθογώνιου. Ας υπολογίσουμε, για παράδειγμα, την «απόσταση» μεταξύ των σημείων  $M(-3/4a, 1/4b)$  και  $N(3/4a, b)$  (Σχήμα 8). Πρώτον, παρατηρούμε ότι το τμήμα  $MN'$ , όπου  $N'(3/4a, -b)$ , είναι μικρότερο του  $MN$ . Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε τη μικρότερη διαδρομή από το  $M$  έως το  $N$  μεταξύ των διαδρομών που συνδέουν το  $M$  με το  $N'$  (διότι εκλαμβάνουμε τα  $N'$  και  $N$  ως το ίδιο σημείο). Σύμφωνα με την κατασκευή μας, η περιοχή δεξιά του τμήματος  $AB$  είναι ταυτόσημη με την περιοχή δεξιά του τμήματος  $DC$ . Αν τοποθετήσουμε τη λωρίδα  $a \leq x <$



$$A = B = C = D \oplus$$

### Σχήμα 8

Η επίπεδη σπείρα είναι ένα «συγκολλημένο» ορθογώνιο. Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ των σημείων  $M$  και  $N$  είναι  $|MM_1| + |M'_1N|$ .

$2a, -b \leq y < 2b$  δίπλα στην πλευρά  $DC$  (Σχήμα 8), μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι κάθε άλλη διαδρομή από το  $M$  στο  $N'$  που περιλαμβάνει το τμήμα  $MN'$  είναι μεγαλύτερη του τμήματος  $M'N'$ . Επομένως, η συντομότερη διαδρομή από το  $M$  στο  $N$  είναι η ένωση των τμημάτων  $MM_1$  και  $M'_1N'$  και η «απόσταση» μεταξύ των  $M$  και  $N$  ισούται με

$$\sqrt{(a/2)^2 + (3b/4)^2}.$$

### Πρόβλημα 5.

(α) Δώστε παραδείγματα ζευγών σημείων που απέχουν μεταξύ τους

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

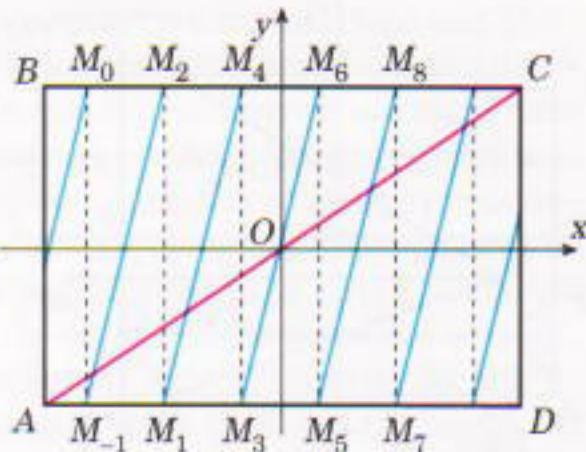
(β) Αποδείξτε ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε δεδομένο σημείο υπάρχει ένα μοναδικό σημείο που απέχει  $\sqrt{a^2 + b^2}$  από αυτό.

Το ορθογώνιο  $T$  στο οποίο έχουμε ταυτίσει τις απέναντι έδρες, με αποτέλεσμα να ισχύει ο προηγούμενος κανόνας υπολογισμού αποστάσεων, ονομάζεται επίπεδη σπείρα.

Οι «ευθείες γραμμές» ορίζονται στην επίπεδη σπείρα με τον ίδιο τρόπο που ορίζονται στη λωρίδα  $P$  —το μοντέλο του κυλίνδρου. Στο Σχήμα 9 βλέπετε δύο «ευθείες γραμμές»: η κόκκινη κλειστή «ευθεία γραμμή»  $AC$  αποτελείται από ένα ευκλείδειο ευ-



Σχήμα 9

Δύο «ευθείες γραμμές» (κόκκινη και μπλε) στη σπείρα.

Θύγραμμο τμήμα, ενώ η μπλε «ευθεία γραμμή» αποτελείται από πολλά τμήματα —... $M_{-1}$ (= $M_0$ ) $M_1$ (= $M_2$ ) $M_3$ (= $M_4$ )... Η ευθεία αυτή, αν προεκταθεί, μπορεί να καταλήξει κλειστή.

**Πρόβλημα 6.** Αποδείξτε ότι μια «ευθεία γραμμή» της επίπεδης σπείρας είναι κλειστή αν και μόνο αν είναι ρητός ο αριθμός  $(\text{αεφα})/b$ , όπου εφα είναι η κλίση (ως προς τον άξονα  $Ox$ ) των τμημάτων του  $T$  που αποτελούν αυτή την ευθεία.

Η γεωμετρία της επίπεδης σπείρας είναι τοπικά ευκλείδεια. Πράγματι, για κάθε εσωτερικό σημείο του ορθογώνιου  $T$  υπάρχει μια μικρή περιοχή στην οποία όλα τα αντικείμενα και οι κανόνες μέτρησης που εισαγάγαμε στην επίπεδη σπείρα είναι όμοιοι με αυτά της ευκλείδειας γεωμετρίας. Στην περίπτωση ενός σημείου  $M_1$  στο σύνορο της σπείρας, η απόδειξη βρίσκεται με τη βοήθεια του Σχήματος 8. Από αυτό το σχήμα πάλι καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα και για τις κορυφές: όλες οι ταυτισμένες κορυφές έχουν μεταφερθεί στο ίδιο σημείο,

και η γεωμετρία γύρω από αυτό αποδεικνύεται ότι είναι γεωμετρία του ευκλείδειου κύκλου.

Έτσι, η επίπεδη σπείρα μάς προσφέρει ένα ακόμη παράδειγμα τοπικά ευκλείδειου κόσμου. Εδώ, όπως και στον κύλινδρο, το πέμπτο αξίωμα ισχύει στο ευρύτερο πλαίσιο, αλλά η δομή της σπείρας σε αυτό το ευρύτερο πλαίσιο διαφέρει από του συνηθισμένου επιπέδου και από του κυλίνδρου.

**Πρόβλημα 7.** Αποδείξτε ότι στην επίπεδη σπείρα δεν υπάρχουν αποστάσεις οσοδήποτε μεγάλου μήκους παρ' ότι υπάρχουν οσοδήποτε μακριές ευθείες γραμμές. Αναλύστε τη μορφή που παίρνει ένας «κύκλος» στην επίπεδη σπείρα καθώς αυξάνει η ακτίνα του.

Υπάρχει άλλη μια σημαντική διαφορά μεταξύ της επίπεδης σπείρας και του κυλίνδρου. Όταν ενώνουμε τα άκρα της λωρίδας  $P$  για να δημιουργήσουμε τον κύλινδρο, τα μήκη κάθε καμπύλης της  $P$  διατηρούνται. Δεν είναι, όμως, δυνατόν να παραστήσουμε την επίπεδη σπείρα ως επιφάνεια του τρισδιάστατου χώρου και να διατηρήσουμε ταυτόχρονα τα μήκη όλων των καμπύλων της. Πάντως, αυτή είναι μια εξωτερική διαφορά, διότι γίνεται φανερή μόνο όταν προσπαθούμε να συνδέσουμε τη γεωμετρία της λωρίδας  $P$  ή του ορθογώνιου  $T$  με τη γεωμετρία μιας επιφάνειας του χώρου που είναι εξωτερικός ως προς αυτές. Αν υποθέσουμε ότι το ορθογώνιο  $T$  αποτελείται από ελαστικό υλικό το οποίο μπορούμε να «τεντώσουμε», τότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε από αυτό μια σπείρα.

### Η άπειρη λωρίδα του Möbius

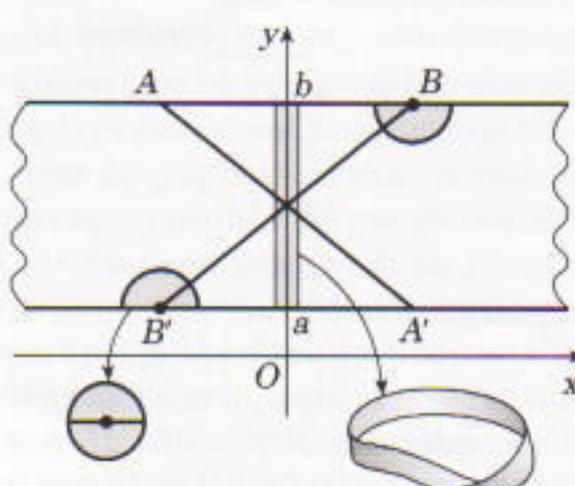
Θεωρούμε και πάλι την άπειρη λωρίδα  $P$ ,  $a \leq y \leq b$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , αλλά αυτή τη φορά ταυτίζουμε τις άκρες της  $P$  σύμφωνα με τον εξής κανόνα: το σημείο  $(x, a)$  ταυτίζεται με το σημείο  $(-x, b)$  (δηλαδή στρέφουμε συμμετρικά την ευθεία  $y = b$  γύρω από τον άξονα  $Oy$  και στη συνέχεια την ταυτίζουμε με την ευθεία  $y = a$ ). Οι ορισμοί της «απόστασης» και της «ευθείας γραμμής» είναι όμοιοι με αυτούς στον κύλινδρο και την επίπεδη σπείρα. Το τοπικά ευκλείδειο επίπεδο που κατασκευάζεται με αυτόν τον

τρόπο ονομάζεται *άπειρη λωρίδα του Möbius* (η συνήθης λωρίδα του Möbius είναι τμήμα της άπειρης και προκύπτει αν συγκολλήσουμε τα άκρα μιας πεπερασμένης ορθογώνιας λωρίδας με τον τρόπο που έχουμε ενώσει τη σκιασμένη λωρίδα στο Σχήμα 10). Στο Σχήμα 11 παρουσιάζονται τρεις «ευθείες γραμμές»: η μαύρη, που είναι κλειστή, η μπλε, που είναι παράλληλη προς τις άκρες της λωρίδας  $P$ , και η κόκκινη, που είναι κεκλιμένη και αποτελείται από άπειρο πλήθος ευκλείδειων τμημάτων. Αν χρησιμοποιήσουμε το σημείο  $B$  (Σχήμα 10), μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτός ο κανόνας ταύτισης δημιουργεί μια ευκλείδεια γεωμετρία στην περιοχή ενός ακραίου σημείου της  $P$ .

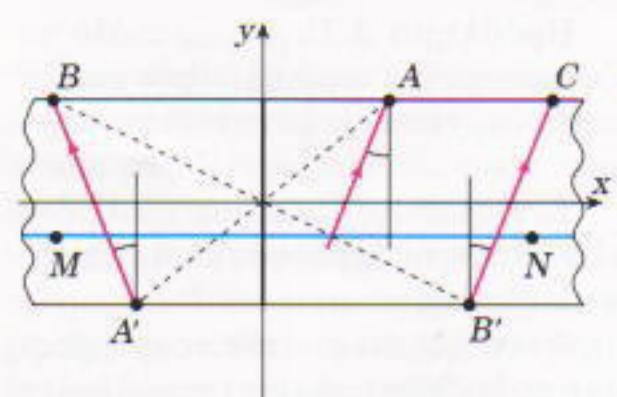
**Πρόβλημα 8.** Αναλύστε τη γεωμετρία μιας άπειρης λωρίδας του Möbius. Αποδείξτε ότι κάθε κεκλιμένη ευθεία τέμνεται με τον εαυτό της άπειρης φορές. Ισχύει το πέμπτο αξίωμα στο ευρύτερο πλαίσιο; Ποια μορφή έχουν οι κύκλοι;

### Η επίπεδη φιάλη του Klein

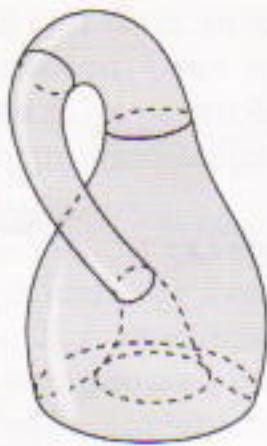
Ας επιστρέψουμε στο ορθογώνιο του Σχήματος 8. Θα εισαγάγουμε τον εξής κανόνα ταύτισης: ταυτίζουμε την πλευρά  $AD$  με την  $BC$  διατηρώντας τη διάταξη των σημείων —δηλαδή ταυτίζουμε το σημείο  $(-a, y) \in AD$  με το σημείο  $(a, y) \in BC$ . Η πλευρά  $AB$  ταυτίζεται με την  $CD$  αντιστρέφοντας τη διάταξη των σημείων —δηλαδή ταυτίζουμε το σημείο  $(x, -b) \in AB$  με το σημείο  $(-x, b) \in CD$ . Ειδικά οι κορυφές θεωρούνται όλες ως ένα σημείο. Οι «ευθείες γραμμές» και οι κανόνες μέτρησης των «αποστάσεων» είναι οι ίδιοι όπως και προηγουμένως.



Σχήμα 10  
Άπειρη λωρίδα Möbius.



Σχήμα 11  
Ευθείες γραμμές στην άπειρη λωρίδα Möbius: μαύρη (κατακόρυφη), μπλε ( $MN$ ) και κόκκινη ( $A'B'$ ).



**Σχήμα 12**

Ένα μοντέλο της φιάλης του Klein (που τέμνεται με τον εαυτό της).

Και πάλι, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι στην περιοχή κάθε σημείου προκύπτει μια ευκλείδεια γεωμετρία (αποδειξτε ότι ισχύει αυτό στην περιοχή των κορυφών του ορθογωνίου). Αυτό το μοντέλο τοπικά ευκλείδειας γεωμετρίας ονομάζεται *επίπεδη μονόπλευρη σπείρα* ή *επίπεδη φιάλη του Klein*.

**Πρόβλημα 9.** Αναλύστε τη γεωμετρία της επίπεδης φιάλης του Klein.

Οπως και στην περίπτωση της επίπεδης σπείρας, δεν είναι δυνατόν να

τοποθετήσουμε τη φιάλη του Klein στον τρισδιάστατο χώρο χωρίς να παραμορφώσουμε τις αποστάσεις. Επιπλέον, αν τοποθετήσουμε τη φιάλη του Klein στο χώρο, θα τέμνεται υποχρεωτικά με τον εαυτό της ακόμη και αν επιτρέψουμε τέντωμα ή συμπίεση (χωρίς κοψίματα). Στο Σχήμα 12 βλέπετε ένα μοντέλο αυτοτεμνόμενης φιάλης του Klein.

### ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΚΟΣΜΟΙ

Η αρχή των «ίσων απαιτήσεων» από όλα τα αξιώματα έχει οπωσδήποτε δικαιωθεί. Ανακαλύψαμε ότι η ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου δεν βασίζεται αποκλειστικά στο αξίωμα των παραλλήλων, διότι και τα υπόλοιπα αξιώματα βοηθούν στον καθορισμό των ιδιοτήτων της. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ακόμη κι αν υπάρχει μια ευκλείδεια περιοχή κάθε σημείου και ισχύει το πέμπτο αξίωμα στο ευρύτερο πλαίσιο, ο χώρος δεν είναι υποχρεωτικά ευκλείδειος στο σύνολό του (ο κύλινδρος και η επίπεδη σπείρα είναι δύο σχετικά παραδείγ-

ματα). Έτσι, ακόμη και αν η γεωμετρία αποδειχτεί ευκλείδεια σε όλα τα επιμέρους εξεταζόμενα τμήματα του χώρου, το σύμπαν δεν είναι υποχρεωτικά στο σύνολό του τόσο απλό όσο το διοδιάστατο επίπεδο ή ο τρισδιάστατος χώρος.

Στην ανώτερη γεωμετρία αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν άλλοι πλήρεις τοπικά ευκλείδειοι «κόσμοι» πέρα από τα πέντε παραδείγματα που αναφέραμε —το επίπεδο, ο κύλινδρος, η επίπεδη σπείρα, η άπειρη λωρίδα του Möbius και η επίπεδη φιάλη του Klein. (Χονδρικά, η «πληρότητα» σημαίνει ότι κάθε «ευθεία γραμμή» μπορεί να προεκταθεί επ' άπειρον, έστω και κατά μήκος του εαυτού της.)

Όσον αφορά τους τρισδιάστατους τοπικά ευκλείδειους χώρους, υπάρχουν δεκαοκτώ τύποι. Θα αναφέρουμε ένα μόνο παράδειγμα: η στιβάδα του χώρου μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων τα οποία ταυτίζουμε στα σημεία που είναι συμμετρικά ως προς το ενδιάμεσο επίπεδο της στιβάδας. □

The advertisement features a central globe with a network of white lines. Superimposed on the globe are several portrait photographs of historical figures, including a man in a suit and a woman, which appear to be floating or integrated into the globe's surface. In the upper right corner, there is a small inset image showing a stack of colorful booklets or brochures with the word 'QUANTUM' and a logo. The overall theme is a blend of science and history.

**www.katoptri.gr**

Η επόμενη κίνηση είναι δική σας

# Το μαγνητικό πεδίο

Πώς μετράμε την ενέργεια που αποθηκεύεται σ' αυτό;

D. Tselykh

**ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΙ μαθητές έχουν την ευκαιρία να γνωρίσουν τις μεθόδους που μας επιτρέπουν να μετρήσουμε την ενέργεια  $W_{\text{el}}$  του ηλεκτρικού πεδίου. Για παράδειγμα, μπορούμε να εκφράσουμε έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ , ο οποίος φορτίστηκε αρχικά υπό διαφορά δυναμικού  $V$ , μέσω μιας αντίστασης  $R$  και ενός μικροαμπερόμετρου. Εάν σχεδιάσουμε το γράφημα της ηλεκτρικής ισχύος  $P$  συναρτήσει του χρόνου, μπορούμε να καθορίσουμε την ποσότητα της θερμότητας  $Q$  που εκλύθηκε από την αντίσταση  $R$  στη διάρκεια της εκφόρτισης του πυκνωτή, η οποία ισούται με το εμβαδόν του χωρίου κάτω από τη σχετική καμπύλη. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η εν λόγω ποσότητα θερμότητας καθορίζεται από την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή**

$$W_{\text{el}} = \frac{CV^2}{2}.$$

Εντούτοις, σπανίως παρουσιάζονται στους μαθητές μέθοδοι μέτρησης της ενέργειας που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο. Θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε αυτό το κενό. Είναι γνωστό πως ένα ρευματόφορο σύρμα παράγει γύρω του μαγνητικό πεδίο, του οποίου η ενέργεια καθορίζεται από την ένταση του ρεύματος  $I$  και το συντελεστή αυτεπαγωγής του σύρματος  $L$

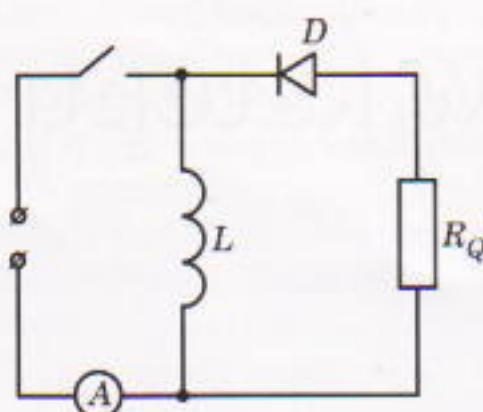
$$W_{\mu} = \frac{LI^2}{2}.$$

Ο απλούστερος τρόπος για να εξαχθεί αυτός ο τύπος συνίσταται στο να εκμεταλλευτούμε την αναλογία ανάμεσα στα φαινόμενα της αδράνειας και της αυτεπαγωγής. Η αδράνεια υπαγορεύει ότι ένα σώμα δεν μπορεί να αποκτήσει ακαριαία ορισμένη τιμή ταχύτητας εφόσον ασκείται πάνω του κάποια πεπερασμένη δύναμη· η ταχύτητά του αυξάνει βαθμιαία. Κατά τον ίδιο τρόπο, το κλείσιμο ενός κυκλώματος δεν μπορεί να οδηγήσει σε ακαριαία αύξηση της έντασης του ρεύματος· η αυτεπαγωγή επιβάλλει

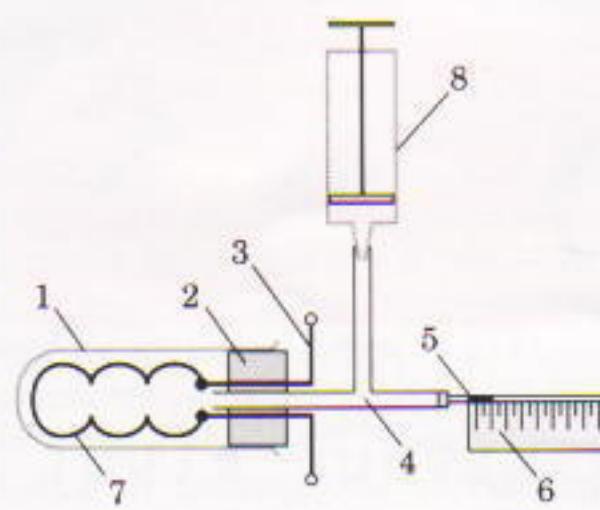
και πάλι τη βαθμιαία αύξηση της έντασης.

Στην ηλεκτροδυναμική, το μέγεθος που αναλογεί στην ταχύτητα  $u$  της μηχανικής είναι η ένταση του ρεύματος  $I$ , η οποία περιγράφει την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων. Το ανάλογο της μάζας  $m$  είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής  $L$ , αφού το  $L$  είναι το μέγεθος που καθορίζει το ρυθμό της μεταβολής του ηλεκτρικού ρεύματος. Συνεπώς, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου θα έπρεπε να είναι ανάλογη με τη μεταφορική κινητική ενέργεια ενός κινούμενου σώματος  $mu^2/2$ —δηλαδή ισούται με  $LI^2/2$ . Μια αυστηρότερη εξαγωγή του ίδιου τύπου στηρίζεται στον υπολογισμό του έργου που παράγει η ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής στη διάρκεια της μεταβολής του ηλεκτρικού ρεύματος το οποίο διαρρέει το κύκλωμα. Δοκιμάστε να εξαγάγετε μόνοι σας τον τύπο χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο.

Το συγκεκριμένο θεωρητικό αποτέλεσμα μπορεί να υποβληθεί σε πειραματικό έλεγχο. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου μπορεί να προσδιοριστεί από την ποσότητα της εκλυόμενης θερμότητας. Η πειραματική διάταξη έχει ως εξής: το ρεύμα εξ αυτεπαγωγής που διαρρέει το ηλεκτρικό κύκλωμα (Σχήμα 1) προκαλεί έκλυση θερμότητας στην αντίσταση  $R_Q$  και η ποσότητα της καταναλισκόμενης ενέργειας ισούται με την απώλεια ενέργειας του μαγνητικού πεδίου. Όταν το κύκλωμα είναι κλειστό, το ρεύμα διαρρέει μόνο το πηνίο, συντελεστού αυτεπαγωγής  $L$ , επειδή η διόδος  $D$  συνδέεται με τους πόλους της



Σχήμα 1



Σχήμα 2

μπαταρίας έτσι ώστε να είναι πολωμένη ανάστροφα. Όταν το κύκλωμα μένει ανοικτό, το ρεύμα διαρρέει την αντίσταση, με αποτέλεσμα να εκλύεται θερμότητα.

Η ποσότητα της εκλυόμενης θερμότητας μετριέται με ένα θερμοσκόπο (Σχήμα 2), το οποίο αποτελείται από έναν δοκιμαστικό σωλήνα που περιέχει ένα θερμαντικό πηνίο (την αντίστασή μας  $R_Q$ ) και έναν τριχοειδή σωλήνα με μια στήλη υγρού. Όταν το ρεύμα διαρρέει το θερμαντικό πηνίο, θερμαίνει τον αέρα στον δοκιμαστικό σωλήνα και, επομένως, προκαλεί μετατόπιση της υγρής στήλης κατά ορισμένη απόσταση  $\Delta x$ . Η ποσότητα της θερμότητας που απορροφά ο αέρας στον δοκιμαστικό σωλήνα προσδιορίζεται με τη βοήθεια του τύπου

$$Q = cm\Delta T,$$

όπου με  $m$  συμβολίζουμε τη μάζα του αέρα στον δοκιμαστικό σωλήνα, με  $c$  την ειδική θερμότητα του αέρα και με  $\Delta T$  τη μεταβολή της θερμοκρασίας, η οποία μπορεί να υπολογιστεί βάσει

της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων. Καθώς η θέρμανση συντελείται υπό σταθερή πίεση  $P$ , η θερμοκρασιακή μεταβολή συνδέεται με τη μεταβολή του όγκου  $\Delta V$  μέσω του τύπου

$$P\Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T,$$

όπου  $M$  είναι η γραμμομοριακή μάζα του αέρα και  $R$  η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων. Ισχύει επίσης η σχέση

$$\Delta V = S\Delta x = \pi d^2 \Delta x / 4,$$

όπου με  $d$  συμβολίζουμε τη διάμετρο του τριχοειδούς σωλήνα. Εάν εισαγάγουμε την αύξηση της θερμοκρασίας που προκύπτει από αυτό τον τύπο στην εξίσωση για την  $Q$ , καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$Q = \frac{P\pi d^2 c M \Delta x}{4R}.$$

Συνεπώς, η ποσότητα της θερμότητας που εκλύεται στο θερμοσκόπο είναι ευθέως ανάλογη με τη μετατό-

ποη  $\Delta x$  της υγρής στήλης.

Θα πρέπει να θυμηθούμε τώρα πως το επαγγελματικό πηνίο αποτελείται επίσης από σύρμα και, επομένως, έχει και αυτό μια αντίσταση  $R_s$ . Συνεπώς, η ποσότητα της θερμότητας που απορροφά ο αέρας του δοκιμαστικού σωλήνα προσδιορίζεται ορθότερα βάσει του τύπου

$$Q = \frac{W_\mu R_Q}{R_Q + R_s},$$

ο οποίος δείχνει ότι η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου  $W_\mu$  είναι επίσης ευθέως ανάλογη με τη μετατόπιση  $\Delta x$  της υγρής στήλης στον τριχοειδή σωλήνα του θερμοσκοπίου.

Στα πειράματά μας χρησιμοποιήσαμε τη δίοδο D226B, ένα απονικτικό πηνίο με 3.600 σπείρες και έναν πυρήνα (που μπορεί να βρεθεί στο σχολικό εργαστήριο). Το θερμαντικό πηνίο  $R_Q$  ήταν κατασκευασμένο από σύρμα κοσταντάνης, διαμέτρου 0,05 mm και μήκους 35-40 cm. Το θερμοσκόπο (Σχήμα 2), το οποίο μετρά τη θερμική ενέργεια, αποτελείται από έναν δοκιμαστικό σωλήνα (1), πώμα από ελαστικό (2), χάλκινα σύρματα (3), σωλήνα σχήματος  $T$  (4), τον τριχοειδή σωλήνα (ο οποίος προέρχεται από θερμόμετρο αιθυλικής αλκοόλης) με υγρή στήλη (5), μια κλίμακα (6), το πηνίο από κονσταντάνη (7) και σύριγγα (8) (η σύριγγα μας επιτρέπει να ρυθμίζουμε τη θέση της υγρής στήλης στον τριχοειδή σωλήνα).

Το πείραμα πρέπει να επαναληφτεί αρκετές φορές με διαφορετικές τιμές της έντασης του ρεύματος  $I$  στο πηνίο (πράγμα που ισοδυναμεί με διαφορετικές τιμές της αρχικά αποθηκευμένης μαγνητικής ενέργειας). Τα αποτελέσματα του πειράματος παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.

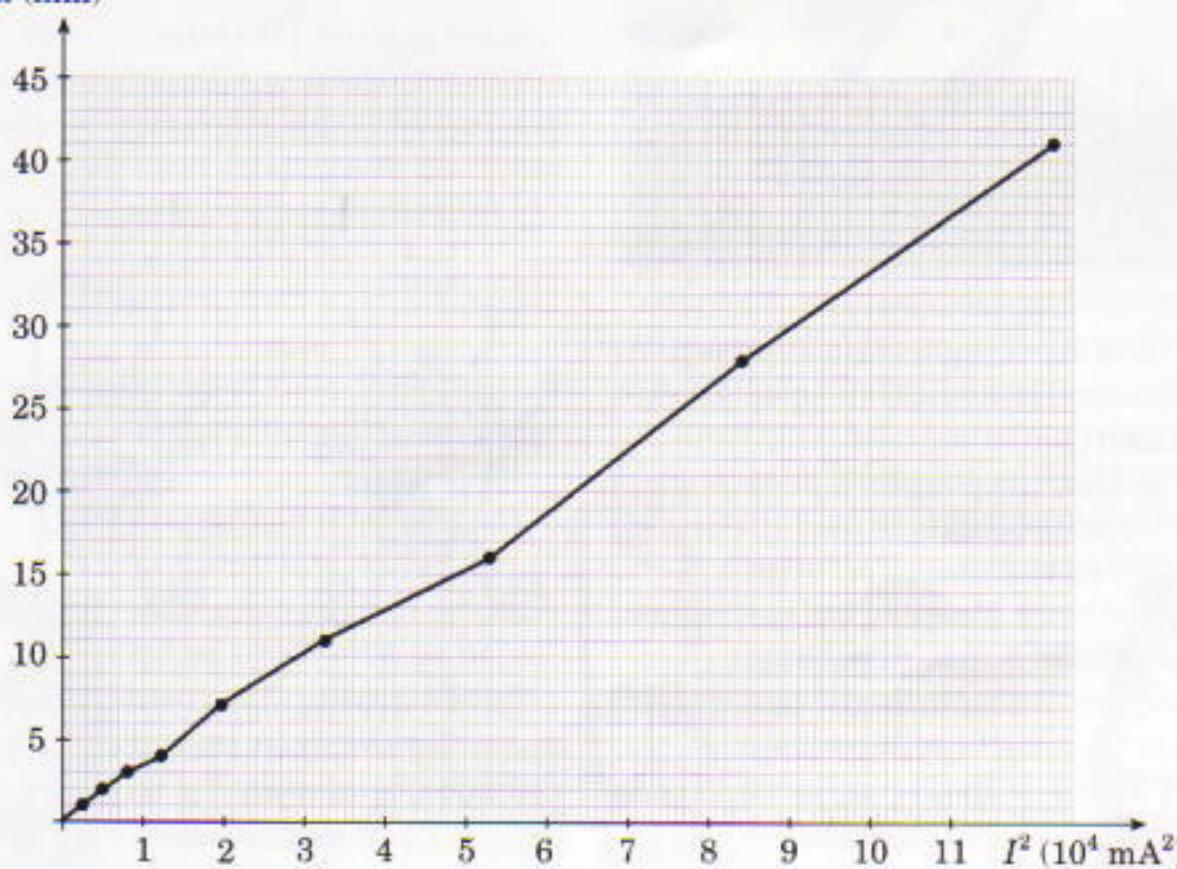
Η γραφική παράσταση της μετατόπισης  $\Delta x$  συναρτήσει του τετραγώνου της έντασης του ρεύματος  $I^2$  (Σχήμα 4), το οποίο καθορίζει την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου, δείχνει ότι η μετατόπιση είναι σχεδόν ευθέως ανάλογη με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τη θεωρητική συλλογιστική που παρουσιάσαμε προηγουμένως.

*Η συνέχεια στη σελ. 60 ⇨*

I (mA)	50	70	90	110	140	180	230	290	350
$\Delta x$ (mm)	1	2	3	4	7	11	16	28	41

Σχήμα 3

$\Delta x$  (mm)



Σχήμα 4

# Πόσα γνωρίζετε στ' αλήθευτη

**Η**ΒΡΟΧΗ, ΤΑ ΣΥΝΝΕΦΑ, Η ΟΜΙ-  
χλη, οι κρύσταλλοι του χιο-  
νιού, όλα δημιουργούνται  
από τους υδρατμούς. Οι  
υδρατμοί που περιέχονται στον  
αέρα παιζουν βασικό ρόλο στον  
καθορισμό του καιρού. Και οι  
υδρατμοί απασχολούν πολλές  
κατηγορίες ανθρώπων: αθλη-  
τές και παγετωνολόγους, σχε-  
διαστές ατμολεβήτων και ατμο-  
μηχανών, πιλότους και ναυτι-  
κούς, αλλά και τις νοικοκυρές που  
απλώνουν τα ρούχα τους για να στε-  
γνώσουν. Όλοι χρειάζεται να γνωρί-  
ζουν τις ιδιότητες και τη συμπεριφο-  
ρά των υδρατμών. Εσείς, λοιπόν, πό-  
σα γνωρίζετε γι' αυτούς:

## Ερωτήσεις και προβλήματα

- 

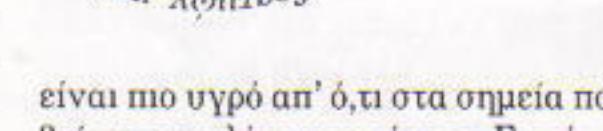
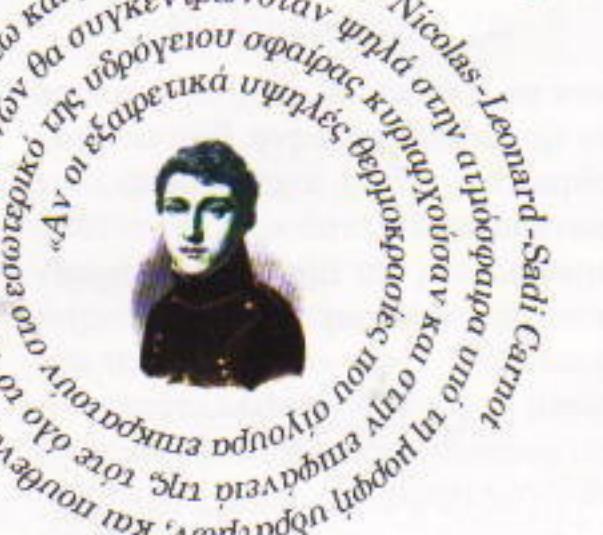
1. Γιατί «αναπηδά» μια σταγόνα νερού μόλις πέφτει πάνω στο ερυθροπυρωμένο μάτι της κουζίνας;

2. Υπό ποιες συνθήκες είναι δυνατόν η αύξηση της απόλυτης υγρασίας του αέρα να συνοδεύεται από μείωση της σχετικής του υγρασίας;

3. Ποια ώρα της ημέρας κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού η σχετική υγρασία είναι υψηλότερη ενώ η απόλυτη υγρασία παραμένει σταθερή;

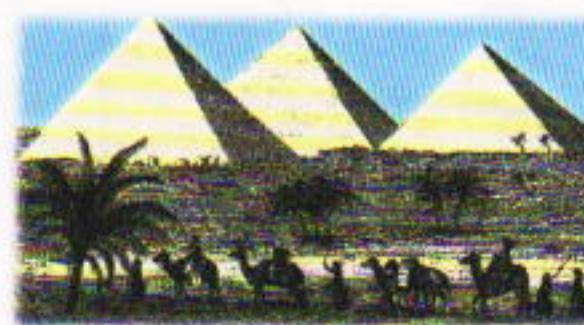
4. Οι υψηλές θερμοκρασίες του αέρα είναι εύκολα ανεκτές στην έρημο εξαιτίας της χαμηλής υγρασίας. Για ποιο λόγο οι υψηλές θερμοκρασίες γίνονται αφόρητες όταν επικρατεί μεγάλη υγρασία;

5. Την άνοιξη, το εδάφος γύρω από στοιβαγμένο χιόνι που δεν έχει λιώσει



είναι πιο υγρό απ' ό,τι στα σημεία που βοσκούνται λιγό μακρύτερα. Γιατί:

6. Μια κρύα φθινοπωρινή μέρα που  
έξω ψιλοβρέχει έχουμε απλώσει τα  
ρούχα κοντά σ'ένα ανοιχτό παράθυ-  
ρο για να στεγνώσουν. Τι λέτε, θα τα  
καταφέρουμε;



7. Μπορεί μια αντλία εισπνοής (αναρροφητική αντλία) να «τραβήξει» ρό που βράζει;

8. Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε τους ακόρεστους υδρατμούς σε κορεσμένους;

9. Μπορεί η αύξηση της πυκνότητας μιας ουσίας να συνοδεύεται και από αύξηση της θερμοκρασίας;

10. Ρίχνουμε υγρό μέσα σε δύο συγκοινωνούντα δοχεία διαφορετικής διαμέτρου. Αν φράξουμε το στό-



14. Τα ατμοσφαιρικά κατακρημνίσματα δημιουργούνται καθώς τα μικρότερα υδροσταγονίδια αρχίζουν να σχηματίζουν μεγαλύτερες σταγόνες. Μπορείτε να εξηγήσετε το συγκεκριμένο φαινόμενο;

# Λα για τους υδρατμούς:



## Μικροπειραματισμοί

Βράζουμε νερό μέσα σε δύο πανομοιότυπες τσαγιέρες που έχουμε τοποθετήσει πάνω σε δύο επίσης πανομοιότυπους βραστήρες. Το κάπaki της μιας τσαγιέρας αναστκώνεται διαρκώς προς τα πάνω ενώ της άλλης παραμένει ακίνητο. Γιατί;

## Είναι ενδιαφέρον ότι ...

... αν διεκόπετο ο υδρολογικός κύκλος της Γης, τότε μέσα σ' ένα χρόνο



στρώμα νερού πάχους 1,1 μέτρων θα εξατμιζόταν από την επιφάνεια των οκεανών.

... αν έχουμε ατμό τελείως απαλλαγμένο από σκόνη και ο οποίος δεν έρχεται σε επαφή με υγρό, τότε, με ελάττωση της θερμοκρασίας μπορεί να γίνει υπέρκορος. Τέτοιος ατμός χρησιμοποιείται στο θάλαμο νεφώσεως Wilson, με στόχο την ανιχνευση φορτισμένων στοι-

## χειωδών σωματίδιων.

... το πρώτο υγρόμετρο με χρήση ανθρώπινης τρίχας κατασκευάστηκε το 1783 από τον ελβετό γεωλόγο και φυσιογνώστη Horace Bénédict de Saussure. Την ίδια χρονιά, ο ίδιος δημοσίευσε μια μελέτη στην οποία απεδείκνυε ότι ο υγρός αέρας είναι λιγότερο πυκνός απ' ό,τι ο ξηρός ιδιαίς θερμοκρασίας και πίεσης.

... το 1880, ο σκωτέζος μηχανικός του ναυτικού John Aptken ανακάλυψε ότι κατά το σχηματισμό της ομίχλης, των νεφών και της βροχής, οι υδρατμοί συμπυκνώνονται γύρω από μικροσκοπικά σωματίδια όπως οι κόκκοι αλατιού, τα μόρια σκόνης, κ.λπ. Ορισμένες σύγχρονες μέθοδοι για τη δημιουργία τεχνητής βροχής έχουν βασιστεί στη συγκεκριμένη ανακάλυψη.

... η σύγχρονη συσκευή για τη μέτρηση των υδρατμών, το υπέρυθρο υγρόμετρο, μπορεί να λειτουργήσει ακόμη και σε συνθήκες όπου οι άλλες συσκευές είναι ουσιαστικά άχρηστες. Το συγκεκριμένο υγρόμετρο συγκρίνει δύο διαφορετικά μήκη

κύματος υπέρυθρης ακτινοβολίας τα οποία διέρχονται μέσα από ένα στρώμα αέρα. Το ένα μήκος κύματος απορροφάται από τους υδρατμούς, ενώ το άλλο διέρχεται μέσα από αυτούς χωρίς να παθαίνει το παραμικρό.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ  
ΣΤΗ ΣΕΛ. 62**

## Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- A. Stasenko, «Αγάπη και μίσος στο μοριακό κόσμο», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1995.
- M. Anfimov και A. Chernoutsan, «Καθώς το νερό εξατμίζεται...», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1996.
- I. Vorobyov, «Το βουνό που καπνίζει», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1996.
- I. Mazin, «Πρόσκληση για σάουνα», Ιούλιος/Αύγουστος 1996.
- Y. Bruk και A. Stasenko, «Σταγόνες και ψιχάλες», Μάιος/Ιούνιος 1994.



# Η ισχύς του ήχου

Η φύση και οι εφαρμογές των ακουστικών κυμάτων μεγάλης έντασης

O.V. Rudenko και V.O. Cherkezyan

**«Κ**PATEI OI MHXANEΣ!», ΔΙΕΤΑ-  
ξε ο πλοιάρχος, και το υποβρύ-  
χιο ακινητοποιήθηκε αυτο-  
στιγμεί. «Σκόπευση!.. Ήχος!»

Το πρώτο λεπτό τίποτε δεν έδειχνε να αλλάζει στο περίγραμμα του καταδρομικού. Το υπερηχητικό τηλεβόλο λειτουργούσε στην ένδειξη πέντε της ιαχύος του. Τότε ξαφνικά... τα ύφαλα στο μέσο του καταδρομικού άρχισαν να τεντώνονται εγκάρσια και να διαλύονται σαν τον πηλό. Ένα μόλις λεπτό μετά την έναρξη της υπερηχητικής επίθεσης, η πλευρά του πλοίου που αντίκριζε το υποβρύχιο συμπιέστηκε έξαφνα στο μέσο της και, λίγα δευτερόλεπτα αργότερα, διερράγη σαν μια γιγαντιαία φυσαλίδα· ένα ασυγκράτητο ρεύμα νερού εισόρμησε στο κύτος του σκάφους, στο μηχανοστάσιο και τις αποθήκες πυρομαχικών.»

Πρόκειται για ένα παράθεμα από το άλλοτε δημοφιλές μυθιστόρημα επιστημονικής φαντασίας του G. Adamov *Το μυστήριο των δύο ωκεανών*. Οι ήρωες αυτού του μυθιστορήματος κάνουν το γύρο της υφηλίου επιβαίνοντας στο πειραματικό υποβρύχιο *Πρωτοπόρος* —ένα πραγματικό θαύμα της στρατιωτικής τεχνολογίας. Τόσο το υποβρύχιο όσο και οι βατραχάνθρωποι ήταν εξοπλισμένοι με υπερηχητικά όπλα, τα οποία τους βοήθησαν σε ουκ ολίγες κρίσιμες στιγμές. Με τη βοήθεια των ισχυρών υπερηχητικών κυμάτων οι αυτοδύτες προσπάθησαν να καταστρέψουν το βράχο που έφραζε την έξοδο ενός υποθαλάσσιου

σπηλαίου· σκότωσαν έναν τεράστιο φυσητήρα, ο οποίος παρ' ολίγον να βυθίσει το φαλαινοθηρικό που τον κατέδιωκε· το σπουδαιότερο, κατέστρεψαν ένα εχθρικό καταδρομικό, καθώς και τα φανταστικά θαλάσσια τέρατα που άρπαξαν έναν από τους ναύτες.

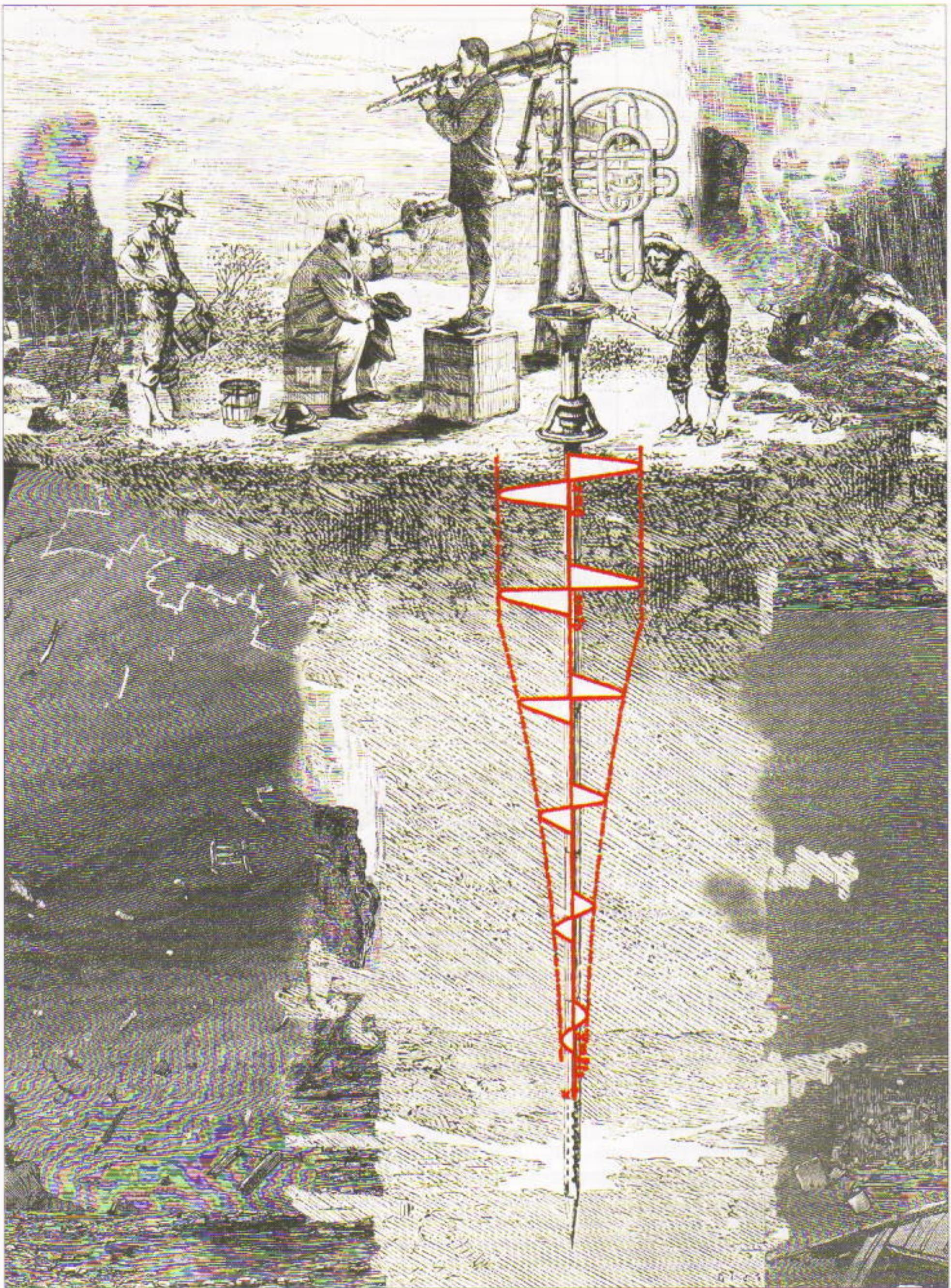
Δεν αποκλείεται να θεωρείτε ότι όλες αυτές οι λεπτομέρειες κινούνται στη σφαίρα της υπερβολής· θυμηθείτε, όμως, πως η εν λόγω νουβέλα δημοσιεύτηκε ακριβώς στις παραμονές του Β' Παγκοσμίου πολέμου. Εκείνη την εποχή θα μπορούσε κανείς να πιστέψει ότι τα υπερηχητικά όπλα ανήκαν στη σφαίρα του δυνατού και ότι η κατασκευή τους επέκειτο, αφού, βέβαια, επλύονταν προηγουμένως κάποια υπαρκτά τεχνικά προβλήματα. Ωστόσο...

Στο παρόν άρθρο εξετάζουμε ορισμένα προβλήματα της φυσικής των υπερήχων και, συγκεκριμένα, σκοπεύουμε να δείξουμε για ποιο λόγο είναι αδύνατον τα ηχητικά κύματα να χρησιμοποιηθούν ως στρατιωτικό όπλο. Κατά συνέπεια, το μυθιστόρημα του Adamov κινείται στο χώρο της καθαρής φαντασίας, τουλάχιστον όσον αφορά το συγκεκριμένο ζήτημα. Αντιθέτως, ο κατάλογος των «ειρηνικών» εφαρμογών των υπερηχητικών κυμάτων παρουσιάζεται ολότελα εντυπωσιακός: υπερηχογραφήματα, παραμετρικές κεραίες και ακτινοβολητές, καθαρισμός επιφανειών, διάνοιξη οπών και θεραπεία της νεφρολιθίασης, για να αναφέρουμε μερικές μόνον από αυτές.

Τις τελευταίες δεκαετίες επετεύχθη μεγάλη πρόοδος στην κατανόησή μας για τα κύματα μεγάλου πλάτους γενικά, και για τα υπερηχητικά κύματα ιδιαίτερα. Τι γνωρίζουμε γι' αυτά τα κύματα σήμερα;

Σε προηγούμενο τεύχος του *Quantum* περιγράφτηκαν ορισμένα ενδιαφέροντα φαινόμενα που συνδέονται με τα μεγάλα κύματα επιφανείας στους ωκεανούς.<sup>1</sup> Ας υπενθυμίσουμε όσα λέγονταν εκεί: Όσα φαινόμενα συνοδεύουν αποκλειστικά τα κύματα που έχουν αρκούντως μεγάλη ένταση, και παράλληλα εξαρτώνται από το πλάτος τους λέγονται μη γραμμικά. Υπάρχει ένα επιστημονικό πεδίο, η μη γραμμική κυματική φυσική που μελετά τα εν λόγω φαινόμενα. Ο ειδικός κλάδος που μελετά τα ακουστικά κύματα μεγάλης έντασης ονομάζεται «μη γραμμική ακουστική». Αυτός ο επιστημονικός κλάδος διαδραματίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στη φυσική λόγω της εξαιρετικής ποικιλομορφίας των φαινομένων με τα οποία καταπάνεται. Τα μη γραμμικά κύματα παράγονται μέσα στα ρευστά, στα στερεά σώματα και στο πλάσμα. Είναι πανταχού παρόντα στη φύση· μεφανίζονται στην ατμόσφαιρα, στους ωκεανούς, στο έδαφος, ακόμη και στα ουράνια αντικείμενα. Ως παραδείγματα, μπορούμε να αναφέρουμε τους κεραυνούς, τα σεισμικά κύματα και πολλά άλλα φαινόμενα.

1. Ivan Vorobyov, «Τρικυμισμένες θάλασσες», Ιούλιος/Αύγουστος 1994.



Σ' αυτό το σημείο, πιθανόν να γεννηθούν μερικά ερωτήματα στους αναγνώστες:

- Τι είναι ισχυρός ήχος και τι ασθενής; Πού πρέπει να σύρουμε την οριακή γραμμή ανάμεσά τους;

- Τι είναι τα μη γραμμικά φαινόμενα, ποια απροσδόκητα και ιδιάζοντα χαρακτηριστικά παρουσιάζουν και ποιες είναι οι εφαρμογές τους;

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα, εξετάζοντάς τα διαδοχικά, ένα προς ένα. Εν πρώτοις, πρέπει να επαναφέρουμε στη μνήμη μας το τι ακριβώς είναι ηχητικό κύμα. Ένα ηχητικό κύμα συνίσταται από δονήσεις που διαδίδονται σε ορισμένο μέσο, οι οποίες είναι αλληλοδιάδοχες περιοχές υψηλής (ζώνες πύκνωσης) και χαμηλής (ζώνες αραιώσης) πίεσης. Σε κάθε σημείο του μέσου παρατηρούνται συντηρούμενες ταλαντώσεις της πίεσης που οφείλονται σε μεταβολές της συμπίεσης. Οι μεταβολές της πίεσης υπερτίθενται στη μέση πίεση (που υφίσταται στο υλικό μέσο εν απουσίᾳ των ηχητικών κυμάτων) ώστε να προκύψει η ολική πίεση.

Ένα ηχητικό κύμα μεταφέρει ενέργεια —τη δυναμική ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης (η οποία, όταν ο ήχος διαδίδεται στην ατμόσφαιρα, ταυτίζεται με την ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης του αέρα) και την κινητική ενέργεια των σωματιδίων. Η κατεύθυνση μεταφοράς της ενέργειας συμπίπτει με εκείνη κατά την οποία διαδίδεται το κύμα. Η ροή της ενέργειας —η ποσότητα της ενέργειας που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου από μια επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος— αποτελεί το μέτρο της έντασης του ηχητικού κύματος.

Προφανώς, τόσο η ένταση  $I$  όσο και η ακουστική πίεση\*  $P$  εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του μέσου εντός του οποίου διαδίδεται το κύμα. Δεν πρόκειται να εξαγάγουμε τους σχετικούς τύπους: θα αρκεστούμε να δώσουμε τον τύπο που εκφράζει την ένταση  $I$  συναρτήσει της πυκνότητας

Βαθμός έντασης (dB)	Ενταση του ήχου (W/m <sup>2</sup> )	Ακουστική πίεση (Pa)	Αντίληψη και ακουστική πηγή
0	$10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-5}$	κατώφλι ακουστότητας
10	$10^{-11}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	θρόισμα των φύλλων σε δάσος ασθενής ψίθυρος σε απόσταση 1 m
20	$10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-4}$	το πικ τακ ρολογιού τσέπης ψίθυρος
30	$10^{-9}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	το αναγνωστήριο βιβλιοθήκης
40	$10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-3}$	χαμηλόφωνη συζήτηση: χαμηλή μουσική
50	$10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	ασθενής ήχος μεγαφόνου
60	$10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-2}$	μεγαλόφωνη συζήτηση: οδός με μέτρια κίνηση
70	$10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$	ένα φορτηγό· ο θόρυβος μέσα στο τραμ πάνω σε απόσταση 10 m
80	$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-1}$	μηχάνημα κοπής μετάλλου· μεγάφωνο στη μέγιστη ένταση: οδός με έντονη κίνηση
90	$10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	παλαιό βαγόνι του υπόγειου σιδηροδρόμου· σειρήνα ασθενοφόρου
100	$10^{-2}$	2	διαμέρισμα πτήσης επιβατικού αεροπλάνου
110	$10^{-1}$	6,3	σειρήνα πυροσβεστικού· ταχεία· κομπρεσέρ
120	1	20	εμβολοφόρος κινητήρας αεροπλάνου· δυνατή βροντή
130	10	63	πυραυλοκινητήρας· όριο πόνου

Πίνακας 1

ρ και της ταχύτητας  $c$  του ήχου (στο συγκεκριμένο μέσο):

$$I = \frac{P_0^2}{2\rho c},$$

όπου με  $P_0$  συμβολίζουμε το πλάτος της ακουστικής πίεσης.

Ας εξετάσουμε τώρα τι είναι «ισχυρός» και τι «ασθενής» ήχος. Η ένταση του ήχου μετριέται σε ντεσιμπέλ (dB), τα οποία συνδέονται με το πλάτος της ακουστικής πίεσης:

$$\beta = 20 \log(P_0/P_{0,\text{κατ}}) \text{ dB.}$$

Εδώ  $P_0$  είναι το πλάτος της πίεσης που μας ενδιαφέρει και  $P_{0,\text{κατ}}$  το πλάτος του κατώφλιου της ακουστικής πίεσης, το οποίο κατά σύμβαση λαμβάνεται ίσο με  $2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.}$ \* Το πλάτος πίεσης  $P_{0,\text{κατ}}$  αντιστοιχεί κατά προσέγγιση στην ένταση  $I_{\text{κατ}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  ενός ασθενέστατου ήχου, ο οποίος γί-

νεται αντιληπτός από το ανθρώπινο αυτί σε συχνότητα 1.000 Hz.

Όσο μεγαλύτερη είναι η ακουστική πίεση, τόσο ισχυρότερος είναι ο ήχος. Η υποκειμενική μας αντίληψη για την ένταση του ήχου σχετίζεται με την έννοια της «ακουστότητας», οπότε συνδέεται με μια ορισμένη περιοχή συχνοτήτων, χαρακτηριστική για το ανθρώπινο αυτί (βλ. τον Πίνακα 1). Τι θα έπρεπε να κάνουμε στην περίπτωση όπου η συχνότητα του ήχου κείται εκτός της συγκεκριμένης περιοχής και αντιστοιχεί σε υπέρηχο; Σ' αυτές τις συχνότητες, περί το 1 MHz, η απλούστερη λύση συνίσταται στην παρατήρηση των μη γραμμικών ηχητικών φαινομένων σε συνθήκες εργαστηρίου. Έτσι, ένα κύμα μεγάλης έντασης είναι ένα κύμα όπου τα μη γραμμικά φαινόμενα καθίστανται ευδιάκριτα.

Ας περάσουμε τώρα στην εξέταση αυτών των μη γραμμικών φαινομένων. Όπως γνωρίζουμε, το σύνηθες (γραμμικό) ηχητικό κύμα οδεύει σε έ-

\* Για το ίδιο μέγεθος (acoustic pressure) στην ελληνική βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται και άλλοι όροι: μεταβολή της πίεσης, επιπλέον πίεση, υπερπίεση. (Σ.τ.μ.)

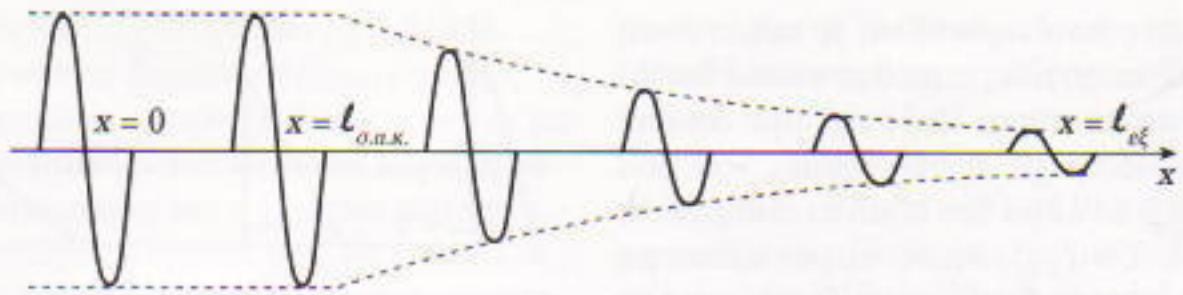
\* To 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup>. (Σ.τ.μ.)

να μέσο χωρίς να μεταβάλλει τη μορφή του. Οι ζώνες της πύκνωσης και της αραίωσης κινούνται με την ίδια ταχύτητα, η οποία συμπίπτει με την ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Εάν η ηχητική πηγή παράγει, ας πούμε, ένα ημιτονοειδές κύμα, η κατατομή του θα παραμείνει ημιτονοειδής σε οποιαδήποτε απόσταση από την πηγή.

Αντιθέτως, στην περίπτωση του ηχητικού κύματος μεγάλης έντασης, οι ζώνες πύκνωσης (θετική ακουστική πίεση) διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα απ' ό,τι ο ήχος, ενώ, αντιθέτως, οι ζώνες αραίωσης διαδίδονται με ταχύτητα μικρότερη από εκείνη του ήχου (στο δεδομένο μέσο). Ως φυσικό επακόλουθο, η κατατομή του κύματος παραμορφώνεται: το μέτωπο του κύματος γίνεται πιο απότομο, ενώ η ουρά του τείνει να γίνει επίπεδη.

Παρόμοια φαινόμενα παρατηρούνται στα ωκεάνια κύματα. Στα αβαθή, τα ομαλά κύματα οξύνουν απότομα το μέτωπο τους προτού σκάσουν στην κυματωγή. Ο σχηματισμός ενός απότομου μετώπου κύματος ή ενός μεγάλου κύματος που σπάει στην ακτή αποτελεί μη γραμμικό φαινόμενο. Η απόσταση  $\ell_{\text{o.a.k.}}$  την οποία πρέπει να διανύσει ένα κύμα ώστε να παραμορφωθεί επαρκώς το σχήμα του ονομάζεται μήκος σχηματισμού αναρργυνυόμενου κύματος. Όπως και κάθε μη γραμμικό φαινόμενο, η παραμορφωση της κατατομής του κύματος εξαρτάται από το πλάτος του κύματος  $P_0$ . Το μήκος σχηματισμού αναρργυνυόμενου κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο του πλάτους — δηλαδή  $\ell_{\text{o.a.k.}} \sim 1/P_0$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η ένταση του κύματος τόσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος του και τόσο μικρότερη η απόσταση που απαιτείται για να παραμορφωθεί και να σπάσει η κατατομή του.

Εντούτοις, υπάρχει μια ανταγωνιστική διαδικασία — η απόσβεση την οποία υφίσταται το κύμα διαδιδόμενο σε μέσο που εμφανίζει εσωτερική τριβή. Λόγω αυτής της απόσβεσης, το πλάτος του κύματος μειώνεται, γεγονός το οποίο αντιτίθεται στην παραμορφωση της κατατομής του κύματος. Εφόσον η απόσβεση είναι αρκετά ισχυρή και συντελείται σε μια απόσταση  $\ell_{\text{ap}}$  η οποία είναι μικρότερη από την  $\ell_{\text{o.a.k.}}$ , η μη γραμμικότητα μπορεί



Σχήμα 1

να περισταλεί και ενδέχεται να μην εκδηλωθεί διόλου. Φυσικά, η παράμετρος  $\ell_{\text{ap}}$ , όπως και η  $\ell_{\text{o.a.k.}}$ , εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του μέσου στο οποίο διαδίδεται ο ήχος.

Βρισκόμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε έναν ακριβέστερο ορισμό για το ακουστικό κύμα μεγάλης έντασης: Είναι ένα κύμα για το οποίο  $\ell_{\text{o.a.k.}} < \ell_{\text{ap}}$ . Ο λόγος  $\ell_{\text{ap}}/\ell_{\text{o.a.k.}}$  ονομάζεται ακουστικός αριθμός Reynolds (Re). Εάν  $Re > 10$ , το κύμα θεωρείται μεγάλης έντασης, ενώ, αν  $Re \ll 1$ , είναι ασθενές. Ο αριθμός Reynolds δίνεται από τον τύπο  $Re = aP_0/v$ , όπου  $v$  είναι η συχνότητα του ήχου, και  $a$  μια ορισμένη σταθερά που χαρακτηρίζει τις μη γραμμικές ιδιότητες και το ιεώδες του μέσου (την «απόκριση» του μέσου σε έναν ισχυρό παλμό και το βαθμό της παραμόρφωσης την οποία υφίσταται ο παλμός κατά τη διάδοσή του στο μέσο). Οι τιμές τού εν λόγω συντελεστή ποικίλλουν αναλόγως του μέσου: επί παραδείγματι, για το νερό  $a \sim 300 \text{ (Pa} \cdot \text{s})^{-1}$ . Όταν διαδίδεται ήχος συχνότητας  $v = 1 \text{ MHz}$  στο νερό, ο αριθμός Reynolds υπερβαίνει το 10 για κύματα με πλάτος ακουστικής πίεσης  $P_0 > 3 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ . Συνεπώς, ένα κύμα μεγάλης έντασης στο νερό πρέπει να έχει ένταση

$$I = \frac{P_0^2}{2pc} > \frac{(3 \cdot 10^4)^2}{(2 \cdot 10^3)(1.5 \cdot 10^3)} \text{ W/m}^2 \\ = 300 \text{ W/m}^2,$$

η οποία αντιστοιχεί σε πλάτος ακουστικής πίεσης  $\beta > 180 \text{ dB}$ .

Ας επιστρέψουμε στην πολύ δελεαστική ιδέα να μεταβιβάσουμε ενέργεια υψηλής πυκνότητας σε μεγάλες αποστάσεις με τη βοήθεια μιας ακουστικής δέσμης. Στο παρελθόν, οι ειδικοί εκτιμούσαν επί μακρόν πως τούτη η ιδέα δεν θα βράδυνε να εισέλθει το στάδιο της πρακτικής εφαρμογής. Τα τελευταία χρόνια πηγή έ-

μπνευσης στάθηκε η ακτινοβολία λέιζερ. Οι αναγνώστες πιθανώς να γνωρίζουν ότι οι ισχυροί παλμοί λέιζερ μπορούν να καταστρέψουν δομές και να ανοίξουν τρύπες σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή τους. Εκ πρώτης όψεως φαίνεται πως, κατ' αρχήν, ο ήχος είναι δυνατόν να αντικαταστήσει το φως σ' αυτές τις λειτουργίες μένει απλώς να υπερνικηθούν ορισμένα τεχνικά εμπόδια. Εντούτοις, υπάρχουν ουσιώδεις δυσκολίες που καθιστούν ανέφικτη την κατασκευή ενός υπερηχητικού όπλου.

Το βασικό είναι πως για κάθε δεδομένη απόσταση υπάρχει μια μέγιστη τιμή της έντασης του ηχητικού κύματος που μπορεί να φτάσει το στόχο. Και μάλιστα, όσο μεγαλύτερη γίνεται η απόσταση του στόχου, τόσο μειώνεται η συγκεκριμένη μέγιστη τιμή.

Στην προκειμένη περίπτωση το πρόβλημα δεν έγκειται στη συνήθη εξασθένηση των κυμάτων κατά τη διάδοσή τους σε ένα απορροφητικό μέσο, η οποία περιγράφεται από τον τύπο  $P_0(x) = P_0(0) \exp(-x/\ell_{\text{el}})$ . Συνήθως το μήκος εξασθένησης  $\ell_{\text{el}}$  των ακουστικών κυμάτων μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας ως  $\ell_{\text{el}} \sim v^{-2}$ . Με άλλα λόγια, η εξασθένηση γίνεται δραστικά εντονότερη με την αύξηση της συχνότητας. Ωστόσο, μπορούμε να επιλέξουμε τη συχνότητα έτσι ώστε η συνήθης (γραμμική) εξασθένηση στις αποστάσεις που μας ενδιαφέρουν να καθίσταται αμελητέα.<sup>2</sup>

Φανταστείτε τώρα πως σε κάποιο σημείο ( $x = 0$ ) παράγουμε ένα κύμα που χαρακτηρίζεται από πλάτος και συχνότητα τέτοια ώστε τα μη γραμμικά φαινόμενα να εκδηλώνονται σαφώς. Το Σχήμα 1 δείχνει τις μετα-

2. Για ένα υπερηχητικό κύμα συχνότητας 1 MHz που διαδίδεται στο νερό,  $\ell_{\text{el}} = 50 \text{ m}$ , ενώ το  $\ell_{\text{o.a.k.}}$  για ένα υπερηχητικό κύμα υψηλής συχνότητας μπορεί να μην υπερβαίνει τα 10 cm.

βολές που υφίσταται η ταλάντωση διάρκειας μίας περιόδου καθώς διαδίδεται το κύμα. Παρατηρούμε ότι στο πρώτο τμήμα της διαδρομής του ( $x \leq \ell_{\text{σ.α.κ.}}$ ) το κύμα δεν εξασθενεί καθόλου. Για  $x > \ell_{\text{σ.α.κ.}}$ , όμως, εμφανίζεται μη γραμμική εξασθένηση. Το πλάτος του κύματος μειώνεται καθώς αυξάνει η απόσταση από την πηγή ακολουθώντας το νόμο

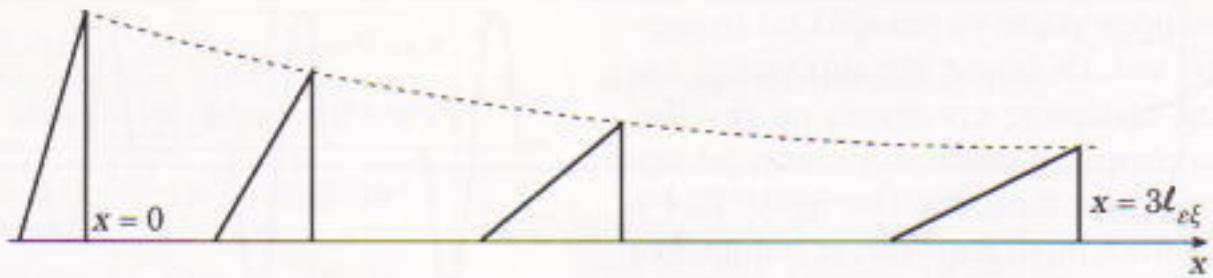
$$P_0(x > \ell_{\text{σ.α.κ.}}) = \frac{P_0(0)}{1 + \frac{x}{\ell_{\text{σ.α.κ.}}}}.$$

Συνεπώς, όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό πλάτος  $P_0(0)$ , τόσο ταχύτερα φθίνει. Για πολύ μεγάλα αρχικά πλάτη, η μονάδα στον παρονομαστή μπορεί να παραλειφτεί, οπότε το πλάτος μειώνεται ως  $1/x$ , ενώ ο ρυθμός εξασθένησης δεν εξαρτάται από το αρχικό πλάτος ακουστικής πίεσης  $P_0(0)$ , διότι  $\ell_{\text{σ.α.κ.}} = 1/P_0(0)$ . Αυτή η εξασθένηση επιμένει έως τις αποστάσεις όπου τα μη γραμμικά φαινόμενα εξαφανίζονται από εκεί και πέρα το κύμα διαδίδεται γραμμικά. Η γραμμική εξασθένηση υπολείπεται κατά πολύ της μη γραμμικής ως προς την ένταση και, επιπλέον, δεν εξαρτάται από το αρχικό σήμα.

Μπορούμε να εξαγάγουμε έναν τύπο για το μέγιστο πλάτος του ημιτονοειδούς κύματος κατά την είσοδό του σε κάποιο μέσο, λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη μη γραμμική (την οφειλόμενη στο σχηματισμό του απότομου μετώπου κύματος) όσο και τη γραμμική εξασθένηση (η οποία περιγράφεται από το συντελεστή εξασθένησης πλάτους  $1/\ell_{\text{εξ.}}$ ):

$$\lim_{P_0(0) \rightarrow \infty} P_0(x > \ell_{\text{σ.α.κ.}}) = P_{\max}(x) = \frac{4v}{a} e^{-x/\ell_{\text{εξ.}}}.$$

Σημειώστε, και πάλι, πως το πλάτος του σήματος  $P_0(x)$  στο τέρμα (σε απόσταση  $x \gg \ell_{\text{σ.α.κ.}}$ ) δεν εξαρτάται από το αρχικό πλάτος του κύματος. Είναι αδύνατον να μεταβιβάσουμε πίεση μεγαλύτερη από  $P_{\max}(x)$  για οποιαδήποτε δεδομένη απόσταση, ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη είναι η ισχύς της ηχητικής πηγής ή η ένταση του εκπεμπόμενου σήματος!



Σχήμα 2

Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τη μέγιστη ένταση που είναι δυνατόν να μεταβιβάσουμε σε απόσταση 100 m μέσα σε νερό χρησιμοποιώντας υπερηχητικό κύμα συχνότητας 1 MHz:

$$I_{\max} = \frac{P_{\max}^2(x=100 \text{ m})}{2cp} = \frac{8v^2}{cpa^2} e^{-2x/\ell_{\text{εξ.}}}.$$

Εισάγοντας τις τιμές  $c \equiv 1,5 \cdot 10^3$  m/s,  $\rho \equiv 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $a \equiv 300 (\text{Pa} \cdot \text{s})^{-1}$  και  $\ell_{\text{εξ.}} \equiv 50 \text{ m}$ , βρίσκουμε  $I_{\max} \equiv 1 \text{ W/m}^2$ . Συνεπώς, στις βέλτιστες συνθήκες για τη διάδοση υπερηχητικών κυμάτων μεγάλης έντασης στο νερό μπορούμε να μεταβιβάσουμε σε απόσταση 100 m μόνο μια μικρή ποσότητα ενέργειας, κατά προσέγγιση ίση με 1 J ανά τετραγωνικό μέτρο της λαμβάνουσας κεραίας. Η ενέργεια αυτή επαρκεί για έναν ηλεκτρικό φανό, αλλά πολύ απέχει από την ισχύ που απαιτείται για να πληγεί καίρια ένα πλοίο ή για να τρωθεί μια φάλαινα-φυσητήρας.

Τι απογοητευτικό αποτέλεσμα! Τότε, όμως, πώς είναι δυνατές οι διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές των υπερήχων; Η απάντηση έγκειται στο ότι αυτές οι δραστηριότητες εκτελούνται σε σχετικά μικρές αποστάσεις από την ακουστική γεννήτρια, όπου η μη γραμμική εξασθένηση δεν προλαβίνει να προκαλέσει αισθητή απόσβεση ενός κύματος μεγάλης έντασης και, παράλληλα, το φαινόμενο του κορεσμού απουσιάζει.

Ο αναγνώστης ενδέχεται να αναρωτηθεί πώς εξηγούνται, εν τοιαύτη περιπτώσει, τα σφοδρότατα αποτελέσματα των κρουστικών κυμάτων. Γνωρίζουμε ότι τα κρουστικά κύματα που προκαλούνται από εκρήξεις μπορούν να καταστρέψουν κτίρια σε μεγάλες αποστάσεις από το σημείο της έκρηξης. Τα κρουστικά κύματα αποτελούν ένα εξαιρετικά μη γραμμικό φαινόμενο, οπότε η μη γραμμική εξα-

σθένηση θα έπρεπε να προχωρήσει με ταχύτερους ρυθμούς σε αυτά απ' ότι στα μάλλον μέτριας έντασης κύματα που εξετάζει συνήθως η μη γραμμική ακουστική.

Το πρόβλημα είναι ότι ένας μονήρης παλμός (Σχήμα 2) συμπεριφέρεται εντελώς διαφορετικά από ένα περιοδικό κύμα (Σχήμα 1). Η μέγιστη τιμή του ελαττώνεται με την απόσταση σύμφωνα με την έκφραση

$$P_0(x) = \frac{P_0(0)}{\sqrt{1 + x/\ell_{\text{σ.α.κ.}}}}.$$

Και πάλι, για μεγάλα αρχικά πλάτη  $P_0(0)$ , μπορούμε να αγνοήσουμε τη μονάδα στο υπόρριζο του παρονομαστή. Στην προκειμένη περίπτωση, το πλάτος ενός μονήρους παλμού στο σημείο παρατήρησης (ας πούμε σε ένα εμπόδιο) εξαρτάται όντως από το πλάτος στο σημείο της έκρηξης και περιγράφεται από τον τύπο

$$P_0(x) = P(0) \sqrt{\frac{\ell_{\text{σ.α.κ.}}}{x}} \sim \sqrt{\frac{P_0(0)}{x}}.$$

Η εξάρτηση από το αρχικό πλάτος  $P_0$  είναι ιδιαίτερα σημαντική εδώ. Διαπιστώνουμε ότι σε μια περίπτωση όπου τα μη γραμμικά φαινόμενα εκδηλώνονται με ιδιαίτερη ένταση (δηλαδή στην περίπτωση του κρουστικού κύματος), η μέγιστη τιμή του  $P_0(x)$  δεν περιορίζεται από κάποιο άνω φράγμα, αν και αυξάνεται βραδύτερα σε σύγκριση με το πλάτος πίεσης της γεννήτριας ήχου (είναι ανάλογη με την  $\sqrt{P_0}$  και όχι με την  $P_0(0)$  όπως συμβαίνει στη γραμμική περίπτωση). Επομένως, εάν αυξήσουμε αρκετά την ισχύ μιας έκρηξης και το αρχικό πλάτος του ηχητικού κύματος, μπορούμε να παραγάγουμε οσοδήποτε μεγάλη πίεση σε οποιαδήποτε δεδομένη απόσταση, και να καταστρέψουμε έναν στόχο.

Ως τώρα εξετάσαμε την παραμόρ-

φωση ενός ακουστικού κύματος μεγάλης έντασης και τη μείωση του πλάτους του κατά τη διάδοσή του σε κάποιο μέσο. Ωστόσο, δεν έχουμε μιλήσει καθόλου για το σπουδαιότερο —την αλλαγή που υφίσταται το φάσμα του. Το εν λόγω φαινόμενο αποδεικνύεται ιδιαίτερα σημαντικό στην εφαρμοσμένη ακουστική.

Ας επιχειρήσουμε μια σύντομη επανάληψη μερικών βασικών γνώσεων για την έννοια του φάσματος ενός σήματος. Συνήθως η λέξη φάσμα συνδέεται συνειρημικά με τις υπέροχες φωτογραφίες των ορατών φασμάτων εκπομπής των ατόμων, τα οποία αποτελούνται από ταινίες διαφορετικών χρωμάτων. Κάθε άτομο χαρακτηρίζεται από το ευδιάκριτο «φασματικό αποτύπωμά» του. Για παράδειγμα, το φάσμα του νατρίου έχει μια λαμπρή κίτρινη γραμμή σε μήκος κύματος 0,59 μμ. Όσο επίμονα και εάν προσπαθήσουμε να τροποποιήσουμε ένα φωτεινό κύμα με δεδομένο φάσμα σε ένα γραμμικό μέσο —διαβιβάζοντάς το μέσα από κάθε είδους οπτικά φίλτρα, διασκορπιστικά μέσα, ενισχυτές, κ.ο.κ.— αποκλείεται να δημιουργήσουμε νέες συχνότητες (δηλαδή νέες φασματικές γραμμές). Ωστόσο, οι μη γραμμικοί μετασχηματισμοί που στηρίζονται στις μεθόδους της μη γραμμικής οπτικής αποτελούν ολότελα διαφορετικό κεφάλαιο. Γνωρίζουμε ότι η υπέρυθρη δέσμη ενός λέιζερ μεγάλης ισχύος μπορεί να μετατραπεί σε ερυθρή αφού διέλθει από έναν ειδικά επιλεγμένο κρύσταλλο. Κατά τη διαδικασία αυτή, η συχνότητά της διπλασιάζεται.

Ένα παρόμοιο φαινόμενο εμφανίσης ακεραίων πολλαπλασίων της αρχικής συχνότητας —με άλλα λόγια, παραγγής ανώτερων αρμονικών— είναι σημαντικό για τη φυσική των ακουστικών κυμάτων υψηλής ισχύος. Όταν συζητούσαμε την παραμόρφωση ενός αρμονικού σήματος (Σχήμα 1), στην πραγματικότητα θίξαμε ακριβώς αυτό το φαινόμενο. Πράγματι, το φάσμα του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 1 αποτελείται από ένα σύνολο ισαπεχουσών συχνοτήτων: τη θεμελιώδη συχνότητα του παραγόμενου σήματος  $n$  (που αντιστοιχεί στο αρχικό, μη παραμορφωμένο ημιτονοειδές σήμα) και ανώτερες αρμονι-

κές με συχνότητες  $kn$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ), οι οποίες δημιουργήθηκαν καθώς το ακουστικό κύμα διαδιδόταν σε ένα μη γραμμικό μέσο. Με άλλα λόγια, η παραμόρφωση του σχήματος του ημιτονοειδούς κύματος έχει ως επακόλουθο την εμφάνιση ανώτερων αρμονικών στο φάσμα. Το πλάτος της δεύτερης αρμονικής ( $k = 2$ ) αυξάνεται ανάλογα με την απόσταση που διανύει το κύμα. Μπορεί να γίνει σχετικά μεγάλο, οπότε είναι δυνατόν να μετρηθεί με αρκετή ακριβεία. Εξάλλου, όταν η απόσταση ανάμεσα στον πομπό του ήχου και το δέκτη παραμένει σταθερή, το πλάτος της δεύτερης αρμονικής εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου, ή όπως λέγουν οι φυσικοί και οι ειδικοί της επιστήμης των υλικών, από τα μη γραμμικά μέτρα του μέσου. Εάν συγκαταλέγεστε στους αφοσιωμένους αναγνώστες του *Quantum*, θα έχετε συναντήσει το μέτρο ελαστικότητας του Young πάμπολλες φορές. Η εν λόγω παράμετρος περιγράφει την ελαστική παραμόρφωση ενός στερεού σώματος στο οποίο ασκείται μηχανική τάση (θυμηθείτε το νόμο του Hooke).

Το μέτρο ελαστικότητας του Young είναι μια γραμμική παράμετρος, διότι, σύμφωνα με το νόμο του Hooke, η παραμόρφωση ενός σώματος είναι ευθέως ανάλογη της τάσης (δηλαδή εξαρτάται γραμμικά από την τάση). Στην περίπτωση των μεγάλων τάσεων, οπότε η παραμόρφωση δεν μπορεί να θεωρηθεί γραμμική (το υλικό γίνεται «πλαστικό» —παραμορφώνεται μόνιμα ή και θραύεται ακόμη), η εξάρτηση της παραμόρφωσης από την τάση χαρακτηρίζεται όχι μόνο από τα γραμμικά αλλά και από τα μη γραμμικά μέτρα του μέσου.

Κατά συνέπεια, όταν μετράμε το πλάτος της δεύτερης αρμονικής που έχει περάσει από ένα μη γραμμικό μέσο, προσδιορίζουμε τα μη γραμμικά μέτρα του συγκεκριμένου μέσου και, επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε την πλαστικότητά του, την αντοχή του και άλλα σημαντικά χαρακτηριστικά του.

Κατανοούμε πλέον μια από τις σπουδαιότερες έννοιες της μη γραμμικής ακουστικής. Όταν μελετάμε τις παραμέτρους των στερεών σωμάτων, τα υποβάλλουμε συνήθως σε μεγάλες

τάσεις. Με τη βοήθεια ειδικών συσκευών ασκούμε σε αυτά φορτία δεκάδων και χιλιάδων ατμοσφαιρών. Συχνά, αντί να επιστρατεύσουμε ογκώδη και πολυδάπανο εξοπλισμό, μπορούμε να αξιοποιήσουμε μια πολύ απλούστερη μέθοδο. Ένας ακτινοβολητής ήχου προσαρμόζεται στην επιφάνεια της βάσης μιας ράβδου και παράγει κύμα μεγάλης έντασης μέσα στο δείγμα. Στην άλλη βάση της ράβδου καταγράφεται (για παράδειγμα, με τη μέτρηση του πλάτους της δεύτερης αρμονικής) το μη γραμμικό σήμα, το οποίο περιέχει την πληροφορία σχετικά με τα χαρακτηριστικά του υλικού που μας ενδιαφέρει.

Σε αντιδιαστολή με τα γραμμικά κύματα, το κύμα μεγάλης έντασης «θυμάται» τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδεται. Αυτό εξηγεί γιατί τα μη γραμμικά σήματα χρησιμοποιούνται για την ανάλυση του εδάφους και του νερού, τα οποία, παρ' ότι μπορεί να αποδειχτούν αδιαπέραστα σε άλλους τύπους ακτινοβολιών, είναι «διαφανή» στον ήχο.

Εάν ένα ηχητικό κύμα μεγάλης έντασης συναντήσει ένα άλλο κύμα (σήμα), «θυμάται» τη συνάντηση και τα χαρακτηριστικά του τροποποιούνται. Με άλλα λόγια, μια δέσμη μεγάλης έντασης παίζει το ρόλο ενός «օργάνου συλλογής πληροφοριών» (ή κεραίας). Απλώς φανταστείτε: αρκεί να αυξήσουμε την ισχύ του ήχου που ακτινοβολείται μέσα, ας πούμε, στο νερό, για να αποκτήσουμε μια υδροακουστική κεραία που εκτείνεται σε δεκάδες ή εκατοντάδες μέτρα. Το ρόλο της κεραίας σε μια τέτοια διάταξη τον παίζει η υδάτινη στήλη που περιέχει την ακουστική δέσμη —δηλαδή ο χώρος ανάμεσα στη γεννήτρια του ήχου και το δέκτη.

Όπως έχετε ήδη αντιληφθεί, τίποτε ανάλογο δεν είναι εφικτό με ασθενή κύματα. Γνωρίζουμε ότι δύο γραμμικά κύματα διέρχονται ελεύθερα το ένα διαμέσου του άλλου, σχηματίζοντας μια εικόνα συμβολής στην περιοχή όπου διασταυρώνονται. Όταν εγκαταλείπουν την περιοχή αυτή, το κάθε κύμα συνεχίζει να διαδίδεται σαν να μην είχε συναντήσει ποτέ το άλλο.

Μια δέσμη μεγάλης έντασης μπορεί, εκτός από το ρόλο της κεραίας λή-

ψης, να παιξει και το ρόλο της κεραίας εκπομπής. Συσκευές που εκπέμπουν ηχητική ακτινοβολία μέσω τέτοιων κεραιών καλούνται παραμετρικοί ακτινοβολητές. Σε τι μπορούν να χρησιμεύσουν παρόμοιες συσκευές;

Γνωρίζουμε ότι το μοναδικό είδος ακτινοβολίας που μπορεί να διαδοθεί υποβρυχίως σε μεγάλες αποστάσεις είναι ο ήχος. Αν έλειπαν οι ακουστικές επικοινωνίες, δεν θα κατορθώναμε να δαμάσουμε τους ωκεανούς ούτε να εκμεταλλευτούμε τις πλουτοπαραγωγικές πηγές τους. Ωστόσο, για να αποκτήσουμε μια στενή δέσμη κατευθυντικής υπερηχητικής ακτινοβολίας, απαιτούνται τεράστιες κεραίες των οποίων οι ανακλαστικές επιφάνειες πρέπει να έχουν διάμετρο δεκάδων μέτρων. Το πρόβλημα της κατασκευής τεράστιων κεραιών εκπομπής μπορεί να παρακαμφθεί εάν εκμεταλλευτούμε τη μη γραμμική αλληλεπίδραση των ηχητικών κυμάτων. Προς τούτο χρησιμοποιούνται δύο κεραίες συμβατικού μεγέθους, οι οποίες εκπέμπουν ηχητικά κύματα μεγάλης έντασης με συχνότητες  $v_1$  και  $v_2$ . Τα εν λόγω κύματα αλληλεπιδρούν προτού εξασθενήσουν, σε μια απόσταση, ας πούμε, 1 km από τις κεραίες. Αυτή η αλληλεπίδραση έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός νέου κύματος, το οποίο έχει χαμηλή (διαφορική) συχνότητα  $v_1 - v_2$  και υφίσταται πολύ μικρότερη εξασθένηση από τα κύματα των πηγών, οπότε μπορεί να μεταδοθεί σε μεγαλύτερη απόσταση. Ακόμη σημαντικότερο αποδεικνύεται το γεγονός ότι αυτό το κύμα παράγεται όχι στην επιφάνεια της κεραίας (μόνο υπερηχητικά κύματα με συχνότητες  $v_1$  και  $v_2$  παράγονται εκεί) αλλά βαθιά στο νερό. Έτσι, η υδάτινη στήλη που έχει μήκος ενός χιλιομέτρου —η περιοχή όπου αλληλεπιδρούν τα κύματα— λειτουργεί ως γιγαντιαία κεραία εκπομπής. Δεν χρειάζεται να την κατασκευάσουμε εμείς —υπάρχει εκεί από μόνη της.

Οι παραμετρικοί πομποί χρησιμοποιούνται επί του παρόντος στη γεωφυσική, στην ιατρική και στην έρευνα της ατμόσφαιρας. Ωστόσο, η χρήση αυτών των κεραιών είναι περισσότερο διαδεδομένη στη θαλάσσια έρευνα. Επιτρέπουν να μελετηθεί το ανάγλυφο του βυθού των ωκεανών καθώς

και τα εδαφολογικά χαρακτηριστικά του. Η παραμετρική ακουστική εφαρμόστηκε επίσης στην αρχαιολογία: οι επιστήμονες στηρίχτηκαν στην επικουρία της για να αναζητήσουν τα πολύτιμα αντικείμενα που άρπαξε ο Ναπολέων από το Κρεμλίνο και τα οποία εγκαταλείφτηκαν κατά την υποχώρηση του γαλλικού στρατού κάπου στις ελώδεις λίμνες πλησίον του Σμολένσκ σε μια άλλη περίπτωση οδήγησε στην ανακάλυψη αντικειμένων από τις πρώτες πολικές εξερευνητικές αποστολές.

Μια ακόμη εφαρμογή αποτελεί η χρήση συσκευών ηχοεντοπισμού για να βρεθούν κοπάδια ψαριών στην επιφάνεια ή κοντά στο βυθό των ωκεανών, στις εκβολές των ποταμών ή σε υφάλους —με άλλα λόγια, εκεί όπου οι συνήθεις ακουστικές συσκευές αποδεικνύονται αναποτελεσματικές.

Σε αυτό το άρθρο προσπαθήσαμε να περιγράψουμε μερικά μόνο από τα πολλά ενδιαφέροντα φαινόμενα που αναφύονται στα ακουστικά πεδία μεγάλης έντασης. Η μη γραμμική ακουστική αποτελεί μια σχετικά νεαρή επιστήμη —μετρά μόλις σαράντα έτη ζωής— και βρίθει από προβλήματα τα οποία οφείλει να μελετήσει η νεότερη γενεά των ερευνητών που ενδιαφέρονται γι' αυτήν και τις εφαρμογές της. □

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- Roman Vinokur, «Η φυσική της ηχομόνωσης», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1996.
- Ivan Vorobyov, «Τρικυμισμένες θάλασσες», Ιούλιος/Αύγουστος 1994.
- L. Brekhovskikh και V. Kurterov, «Κύματα υπό τα κύματα», Μάρτιος/Απρίλιος 1998.
- A. Varlamov και A. Malyarovskiy, «Ωκεάνια τηλέφωνα», Μάρτιος/Απρίλιος 1998.

## ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

το φυσικομαθηματικό  
βιβλιοπωλείο

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,  
τηλ.: 3628492

## ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

### ΚÁΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ



Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, υπάρχει ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον, όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους. Εκεί, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο —μαζί με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης— διατηρούν το δικό τους βιβλιοπωλείο / εκθετήριο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παραγωγής. Περιμένουμε το αναγνωστικό κοινό να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

Νέα στοά Αρσακείου  
(Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου  
5), 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785

# Νόμοι διατήρησης και υψηλές ταχύτητες

Η θεωρία της σχετικότητας δεν είναι σε τελική ανάλυση και τόσο τρομακτική

A. Korzhuyev

**Γ**ΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ στα οποία τα σώματα κινούνται με ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός, είναι απαραίτητοι οι γνωστοί από την κλασική μηχανική νόμοι διατήρησης της ορμής και της ενέργειας, γραμμένοι, όμως, σε μια ειδική μορφή.

Έτσι, η σχετικιστική ορμή και η ολική ενέργεια ενός σώματος με μάζα ηρεμίας  $m_0$  που κινείται με ταχύτητα  $u$  δίνονται από τους τύπους:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

και

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

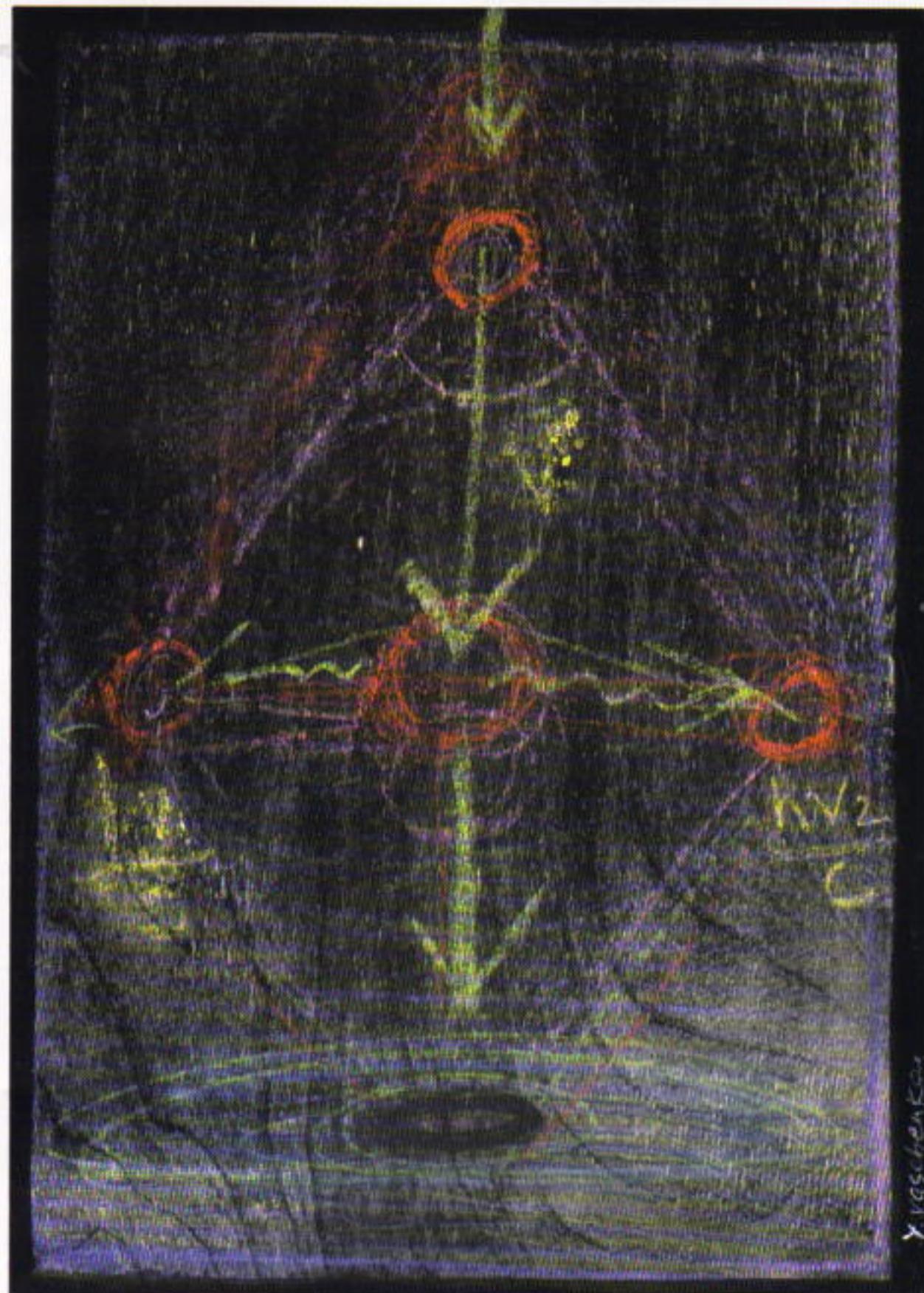
αντίστοιχα, όπου  $c$  είναι η ταχύτητα του φωτός. Οι παραπάνω τύποι ιοχύουν μονάχα για σωματίδια των οποίων η μάζα ηρεμίας είναι διάφορη του μηδενός. Το φωτόνιο —το οποίο κινείται με την ταχύτητα του φωτός και έχει μηδενική μάζα ηρεμίας— έχει ενέργεια

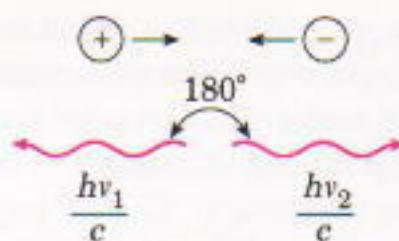
$$E = \hbar v$$

και

$$p = \hbar v/c,$$

όπου  $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J · s είναι η σταθερά του Planck και  $v$  η συχνότητα του φωτονίου. Ας προσπαθήσουμε τώρα να θέσουμε τις παραπάνω γνώσεις σε εφαρμογή.

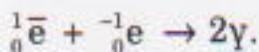




Σχήμα 1

**Πρόβλημα 1.** Κατά την εξαύλωση ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου, που κινούνται και τα δύο με μικρές ταχύτητες, παράγονται δύο ακτίνες γάμμα. Πόση είναι η γωνία που σχηματίζουν καθώς απομακρύνονται μεταξύ τους; Πόση είναι η συχνότητά τους;

**Λύση.** Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα με τη βοήθεια των νόμων διατήρησης της ενέργειας και της ορμής:



Εφόσον οι αρχικές ταχύτητες των σωματιδίων είναι μικρές, ο νόμος διατήρησης της ορμής μάς δίνει

$$0 = \frac{hv_1}{c} - \frac{hv_2}{c},$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$v_1 = v_2.$$

Τα φωτόνια πρέπει να απομακρύνονται το ένα από το άλλο σε αντίθετες κατευθύνσεις (βλ. Σχήμα 1), διότι μόνο έτσι η ολική ορμή των σωματιδίων, μετά την αλληλεπίδρασή τους, μπορεί να είναι μηδέν.

Από το νόμο διατήρησης της ενέργειας προκύπτει

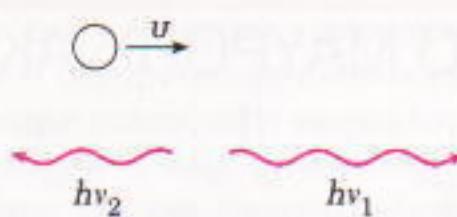
$$2m_0c^2 = hv_1 + hv_2,$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $v_1 = v_2 = v$ , παίρνουμε ότι

$$v = m_0c^2/h.$$

**Πρόβλημα 2.** Ένα ουδέτερο σωματίδιο που ταξιδεύει με ταχύτητα  $u = 0,8c$  διασπάται σε δύο φωτόνια τα οποία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις (βλ. Σχήμα 2). Ποιος είναι ο λόγος των συχνοτήτων τους;

**Λύση.** Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της ορμής και της ενέργειας. Η αρχική ορμή του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα των προβολών των ορμών των δύο φωτονίων στην αρχική διεύθυν-



Σχήμα 2

ση κίνησης του σωματιδίου.

$$\frac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{hv_1}{c} - \frac{hv_2}{c}.$$

Η ολική ενέργεια των σωματιδίων ισούται με την ολική ενέργεια των κβάντων:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = hv_1 + hv_2.$$

Εισάγοντας την τιμή της ταχύτητας  $u = 0,8c$  στους δύο παραπάνω τύπους και πολλαπλασιάζοντας το αριστερό και το δεξιό μέλος του πρώτου τύπου επί  $c$ , παίρνουμε

$$\frac{4}{3}m_0c^2 = hv_1 - hv_2,$$

$$\frac{5}{3}m_0c^2 = hv_1 + hv_2.$$

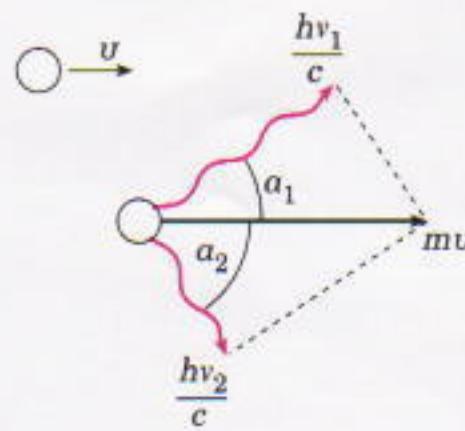
Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτουν οι συχνότητες της ακτινοβολίας:

$$v_1 = \frac{3m_0c^2}{2h},$$

$$v_2 = \frac{m_0c^2}{6h}.$$

Άρα ο ζητούμενος λόγος ισούται με

$$v_1/v_2 = 9.$$



Σχήμα 3

**Πρόβλημα 3.** Κατά τη διάσπαση ενός κινούμενου ουδέτερου σωματίδιου παράγονται δύο φωτόνια, τα οποία κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνίες  $a_1 = 30^\circ$  και  $a_2 = 60^\circ$  με τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας του σωματιδίου. Πόση ήταν η ταχύτητα του σωματιδίου;

**Λύση.** Στη συγκεκριμένη περίπτωση, πρέπει να εφαρμόσουμε το νόμο διατήρησης της ορμής στον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα (βλ. Σχήμα 3):

$$\frac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{hv_1}{c} \text{ συνα}_1 + \frac{hv_2}{c} \text{ συνα}_2, \quad (1)$$

$$0 = \frac{hv_1}{c} \eta\mu a_1 - \frac{hv_2}{c} \eta\mu a_2. \quad (2)$$

Από το νόμο διατήρησης της ενέργειας προκύπτει ότι

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = hv_1 - hv_2. \quad (3)$$

Εισάγοντας στον τύπο (2) τις σχέσεις  $\eta\mu a_1 = 1/2$  και  $\eta\mu a_2 = \sqrt{3}/2$  παίρνουμε

$$v_1 = v_2 \sqrt{3}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή στις εξισώσεις (1) και (3) καταλήγουμε

$$\frac{m_0uc}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 2hv_2,$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = hv_2(\sqrt{3}+1).$$

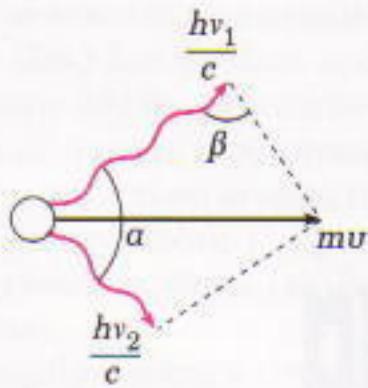
Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{c}{u} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

απ' όπου τελικά προκύπτει:

$$u = \frac{2c}{\sqrt{3}+1} \equiv 0,73c.$$

**Πρόβλημα 4.** Κατά τη διάσπαση ενός σωματιδίου που κινείται με τα-



Σχήμα 4

χύτητα  $u = 0,8c$  παράγονται δύο φωτόνια. Βρείτε την ελάχιστη γωνία κατά την οποία εκτρέπονται.

**Λύση.** Οι νόμοι διατήρησης της ενέργειας και της ορμής μάς δίνουν αντίστοιχα

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2,$$

$$\left( \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right)^2 = \left( \frac{h\nu_1}{c} \right)^2 - \left( \frac{h\nu_2}{c} \right)^2 - \frac{2h^2 v_1 v_2 \sin \beta}{c^2},$$

όπου  $\beta = 180^\circ - \alpha$  (βλ. Σχήμα 4).

Εισάγοντας τη σχέση  $u = 0,8c$  και πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης επί  $c$ , παίρνουμε

$$\frac{5}{3} m_0 c^2 = h\nu_1 + h\nu_2$$

$$\frac{16}{9} m_0^2 c^4 = (h\nu_1)^2 + (h\nu_2)^2 + 2h^2 v_1 v_2 \sin \alpha.$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας από την τελευταία εξίσωση τον όρο  $2h^2 v_1 v_2 - 2$ , παίρνουμε

$$\frac{16}{9} m_0^2 c^4 = (h\nu_1 + h\nu_2)^2 - 2h^2 v_1 v_2 (1 - \sin \alpha).$$

Εφόσον η ολική ενέργεια των δύο φωτονίων είναι σταθερή και ισούται με  $(5/3)m_0 c^2$ , έχουμε

$$2h^2 v_1 v_2 (1 - \sin \alpha) = m_0^2 c^4,$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως

$$1 - \sin \alpha = \frac{m_0^2 c^4}{2h^2 v_1 v_2}.$$

Για να είναι η γωνία  $\alpha$  (ή, ισοδύναμα, η διαφορά 1 - συνα) όσο το δυνατόν μικρότερη, θα πρέπει το γινόμενο  $v_1 v_2$  να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Είναι γνωστό από τα μαθηματικά ότι το γινόμενο δύο αριθμών, που έχουν σταθερό άθροισμα, είναι μέγιστο όταν οι δύο αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους. Ακριβώς το ίδιο, όμως, συμβαίνει και στην περίπτωσή μας, διότι  $h\nu_1 + h\nu_2 = \frac{5}{3} m_0 c^2 =$  σταθ. Συνεπώς,  $v_1 = v_2$ .

Ας το αποδείξουμε αυτό αυστηρότερα. Ας γράψουμε το γινόμενο  $v_1 v_2$  (προσφορότερο να χρησιμοποιήσουμε τον όρο  $h\nu_1 h\nu_2$ ) ως  $\left[ \frac{5}{3} m_0 c^2 - h\nu_2 \right] \cdot h\nu_2$ , και ας βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(v_2) = \left[ \frac{5}{3} m_0 c^2 - h\nu_2 \right] h\nu_2 \\ = \frac{5}{3} m_0 c^2 h\nu_2 - h^2 v_2^2.$$

Η γραφική παράσταση της συγκεκριμένης συνάρτησης είναι παραβολή (βλ. Σχήμα 5), η οποία παρουσιάζει μέγιστο για

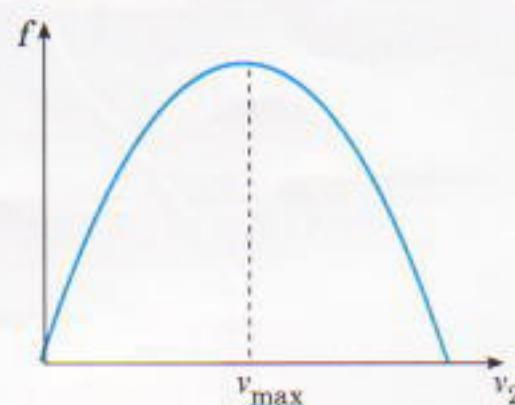
$$v_2 = \frac{5}{6} \frac{m_0 c^2}{h}.$$

Επομένως,

$$h\nu_1 = \frac{5}{3} m_0 c^2 - \frac{5}{6} m_0 c^2 \\ = \frac{5}{6} m_0 c^2,$$

και το ζητούμενο γινόμενο ισούται με

$$v_1 v_2 = \frac{25}{36} \frac{m_0^2 c^4}{h^2}.$$



Σχήμα 5

Εισάγοντας την παραπάνω τιμή στην έκφραση (1 - συνα), παίρνουμε

$$1 - \sin \alpha_{\min} = 18/25 = 0,72,$$

απ' όπου προκύπτει

$$\alpha_{\min} = \text{τοξσυν} 0,28 \cong 47^\circ.$$

**Πρόβλημα 5.** Είναι δυνατόν ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο να απορροφήσει ένα φωτόνιο;

**Λύση.** Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας και της ορμής. Έστω ότι, πριν από την απορρόφηση του φωτονίου, το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε ηρεμία και πως στη συνέχεια αποκτά ταχύτητα  $u$ . Από το νόμο διατήρησης της ενέργειας προκύπτει ότι

$$m_0 c^2 + h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

ενώ η διατήρηση της ορμής καταλήγει στον τύπο

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Εισάγοντας στον πρώτο τύπο την έκφραση για το γινόμενο  $h\nu$  που προκύπτει από τον δεύτερο τύπο παίρνουμε

$$m_0 c^2 + \frac{m_0 u c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει

$$(c - u)^2 = c^2 - u^2.$$

Οι ρίζες της συγκεκριμένης εξίσωσης είναι  $u = c$  και  $u = 0$ . Με άλλα λόγια, η ταχύτητα του ηλεκτρονίου θα πρέπει να ισούται είτε με  $c$ , πράγμα αδύνατον, είτε με το μηδέν, που επίσης δεν είναι δυνατόν να ισχύει, διότι τότε η συχνότητα του φωτονίου θα έπρεπε να ήταν ίση με μηδέν.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η θεωρία της σχετικότητας δεν είναι σε τελική ανάλυση και τόσο τρομακτική! ◻

### —κ ο ρ φ η—

Bιβλία για όλες τις βαθύτερες της εκπαίδευσης

Σόλωνος 103, Αθήνα, τηλ.: 3800798

# Bonθητικά πολυώνυμα

Παρεπόμενα της στήλης *Gradus ad Parnassum*

L.D. Kurlyandchik και S.V Fomin

**ΛΗΘΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ** Αναγονται στον υπολογισμό των ρίζων μιας αλγεβρικής εξίσωσης. Μερικές φορές, όμως, για να λύσουμε ένα πρόβλημα, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο που έχει ρίζες τους αριθμούς που μας έχουν δοθεί. Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούν να μας βοηθήσουν τέτοια βοηθητικά πολυώνυμα να λύσουμε διάφορα δύσκολα προβλήματα. Πολλές από αυτές τις καταστάσεις συνδέο-

νται με εκείνες που ερευνήθηκαν στη στήλη *Gradus ad Parnassum* του τεύχους Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1998. Στη συνέχεια θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει σοβαρότατος λόγος γι' αυτή τη σύνδεση.

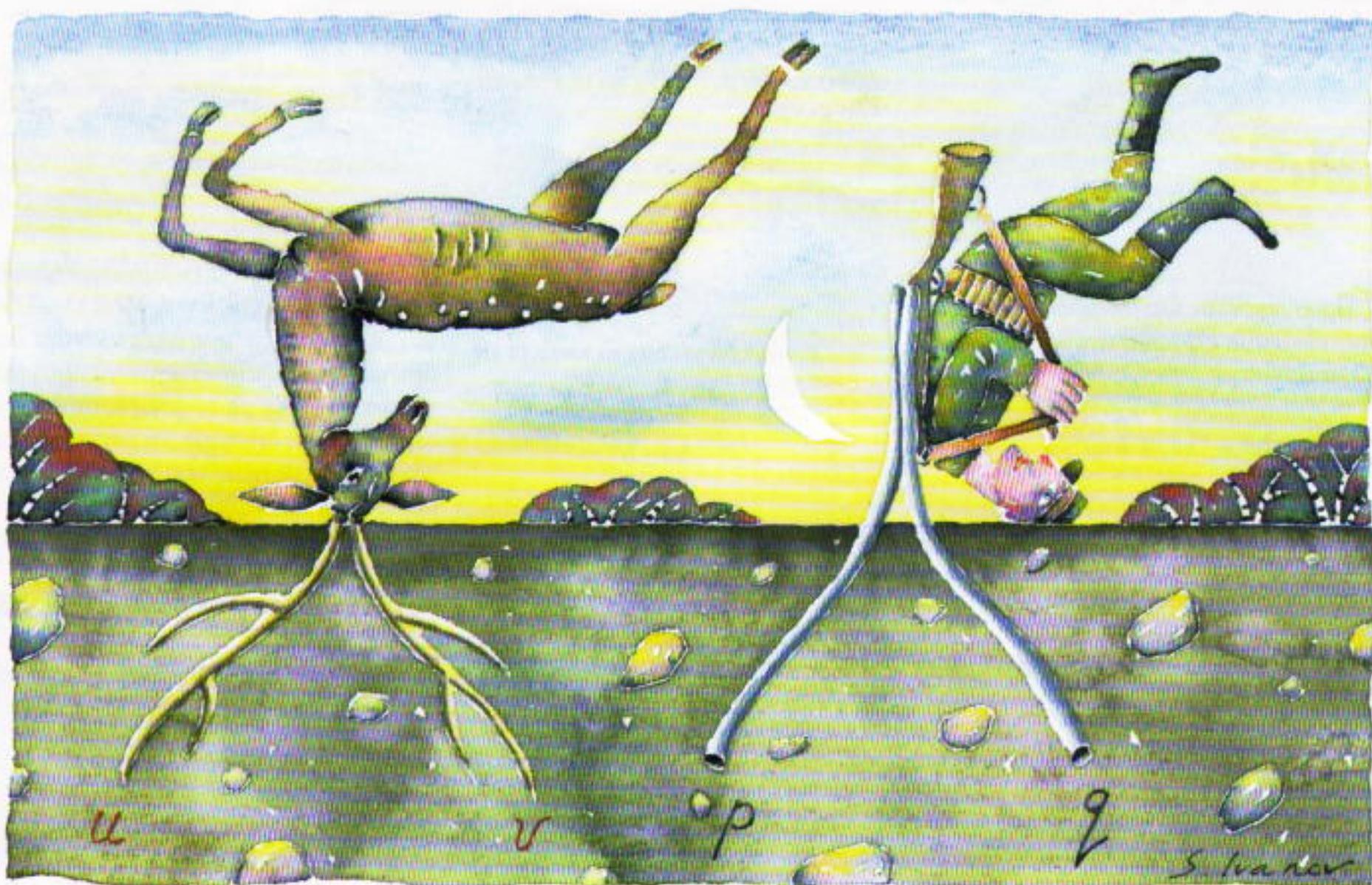
Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί  $u$  και  $v$ . Ποιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι ρίζες; Η απλούστερη μέθοδος να απαντήσουμε σε τούτο το ερώτημα είναι να θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$P(t) = (t - u)(t - v) = t^2 + pt + q.$$

Οι συντελεστές του δίδονται από τους επόμενους τύπους:

$$\begin{aligned} p &= -(u + v) \\ q &= uv. \end{aligned} \quad (1)$$

Επομένως, οι δύο συντελεστές είναι, αντίστοιχα, ίσοι με το αντίθετο του αθροίσματος των  $u$  και  $v$  με το γινόμενό τους. (Σε ορισμένες χώρες, οι τύποι (1) ονομάζονται τύποι του Viète προς τιμήν του γάλλου μαθηματικού του 16ου αιώνα François



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Viète. Για ευκολία, θα κάνουμε και εμέρις το ίδιο.) Στο σχολείο πρέπει να μελετήσατε δύο θεωρήματα που συνδέονται με αυτούς τους τύπους:

• Αν  $u$  και  $v$  είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $t^2 + pt + q = 0$ , τότε ισχύουν οι τύποι (1) (θεώρημα του Viète).

• Οι αριθμοί  $u$  και  $v$  είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $t^2 - (u+v)t + uv = 0$  (αντίστροφο του θεώρηματος του Viète).

Τώρα θα παραθέσουμε μερικά παραδείγματα όπου το αντίστροφο θεώρημα αποδεικνύεται εξυπηρετικό. Ας αρχίσουμε με ένα απλό πρόβλημα.

**Πρόβλημα 1.** Γράψτε μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ακέραιους συντελεστές, μία από τις ρίζες της οποίας είναι το  $2 + \sqrt{3}$ .

**Λύση.** Η λύση αυτού του προβλήματος, καθώς και πολλών άλλων, βασίζεται στην παρατήρηση πως μια εξίσωση με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και ρίζες «συζυγείς» αριθμούς της μορφής  $a + b\sqrt{d}$  και  $a - b\sqrt{d}$ , όπου  $a$  και  $b$  ακέραιοι, έχει ακέραιους συντελεστές. (Περισσότερα στοιχεία για τους συζυγείς μπορείτε να βρείτε στο άρθρο «Ανόμοιοι δίδυμοι» του V.N. Vaguten στο τεύχος Ιανουαρίου /Φεβρουαρίου 1998 του ελληνικού Quantum.) Το γεγονός αυτό αποτελεί, φυσικά, άμεση συνέπεια των τύπων (1).

Έτσι, οι ρίζες της εξίσωσης που αναζητούμε είναι  $t_1 = 2 + \sqrt{3}$  και  $t_2 = 2 - \sqrt{3}$ , και επομένως οι συντελεστές της ισούνται με

$$p = -(t_1 + t_2) = -4$$

και

$$q = t_1 t_2 = 1.$$

**Απάντηση.**  $t^2 - 4t + 1 = 0$ .

**Πρόβλημα 2.** Ο αριθμός  $t_1 = \sqrt{37} - \sqrt{20}$  ικανοποιεί την ανισότητα  $t^2 + 9t - 17 > 0$ ;

**Λύση.** Θεωρούμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες  $t_1$  και  $t_2 = -\sqrt{37} - \sqrt{20}$ :

$$t^2 + 2\sqrt{20}t - 17 = 0.$$

Αφού  $2\sqrt{20} = \sqrt{80} < 9$ , συμπεραίνουμε ότι

$$t_1^2 + 9t_1 - 17 > t_1^2 + 2\sqrt{20}t_1 - 17 = 0$$

(προφανώς,  $t_1 > 0$ ).

**Απάντηση.** Ο αριθμός  $t_1$  ικανοποιεί την ανισότητα.

Ο υπολογισμός της τιμής μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο είναι συχνά πολύ ευκολότερος αν ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας ένα πολυώνυμο που μηδενίζεται σε αυτό το σημείο. Ιδιού ένα παράδειγμα.

**Πρόβλημα 3.** Υπολογίστε το  $u^4 - 5u^3 + 6u^2 - 5u$ , όταν  $u = 2 + \sqrt{3}$ .

**Λύση.** Θυμηθείτε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1:  $u^2 - 4u + 1 = 0$ , ή  $u^2 = 4u - 1$ . Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης μπορούμε να εκφράσουμε τα  $u^3$  και  $u^4$  ως γραμμικές συναρτήσεις του  $u$ :

$$\begin{aligned} u^3 &= u^2 u = (4u - 1)u = 4u^2 - u \\ &= 4(4u - 1) - u = 15u - 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^4 &= u^3 u = (15u - 4)u = 15u^2 - 4u \\ &= 15(4u - 1) - 4u = 56u - 15. \end{aligned}$$

Και επομένως,  $u^4 - 5u^3 + 6u^2 - 5u = 56u - 15 - 5(15u - 4) + 6(4u - 1) - 5u = -1$ .

**Απάντηση.**  $-1$ .

Αν πάρουμε ως μοντέλο αυτό το παράδειγμα, μπορούμε να παραστήσουμε την τιμή κάθε πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές στο σημείο  $u = a + b\sqrt{d}$  με τη μορφή  $ku + l$  (όπου  $a, b, d, k, l$  ακέραιοι).

**Πρόβλημα 4.** Αποδείξτε ότι ο αριθμός  $(7 + \sqrt{48})^{13} + (7 - \sqrt{48})^{13}$  είναι ακέραιος και διαιρείται με το 14.

**Λύση.** Οι αριθμοί  $u = 7 + \sqrt{48}$  και  $v = 7 - \sqrt{48}$  είναι ρίζες του δευτεροβάθμου τριωνύμου  $t^2 - 14t + 1$ . Με τη βοήθεια των τύπων  $u^2 = 14u - 1$  και  $v^2 = 14v - 1$  βρίσκουμε τις επόμενες αναδρομικές σχέσεις για τις τιμές των  $a_n = u^n + v^n$ :

$$a_0 = 2,$$

$$a_1 = u + v = 14,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= u^2 + v^2 = (14u - 1) + (14v - 1) \\ &= 14a_1 - a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= u^3 + v^3 = u(14u - 1) \\ &+ v(14v - 1) = 14a_2 - a_1, \end{aligned}$$

⋮

$$a_n = u^n + v^n$$

$$= u^{n-2}(14u - 1)$$

$$+ v^{n-2}(14v - 1) = 14a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Από τους τύπους αυτούς έπειται άμεσα ότι οι αριθμοί  $a_n$  είναι ακέραιοι.

Επιπλέον, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, όταν το  $n$  είναι περιπτώτο, το  $a_n$  διαιρείται με το 14. Αποδεικνύουμε την τελευταία πρόταση μέσω επαγωγής: αν το  $a_{n-2}$  διαιρείται με το 14, τότε από τον τελευταίο τύπο έπειται ότι και το  $a_n$  διαιρείται με το 14.

**Πρόβλημα 5.** Υπολογίστε την τιμή της  $u^8 + 1/u^8$ , αν  $u = \sqrt{2} + 1$ .

Οι τύποι του Viète για ένα πολυώνυμο τυχαίου βαθμού προκύπτουν όπως ακριβώς και για τα δευτεροβάθμια πολυώνυμα. Γράφουμε

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n) \\ &= t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_n, \end{aligned}$$

όπου  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι οι ρίζες του. Απαλείφουμε τις παρενθέσεις, κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και εξισώνουμε τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του  $t$  στα δύο μέλη της εξίσωσης.

Γράφουμε τους τύπους αυτούς για ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο με ρίζες  $x, y$  και  $z$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x)(t - y)(t - z) \\ &= t^3 + pt^2 + qt + r, \\ p &= -x - y - z, \\ q &= xy + yz + zx, \\ r &= -xyz. \end{aligned} \quad (2)$$

Συνεχίζουμε τώρα με πιο ενδιαφέροντα προβλήματα που δείχνουν τα πλεονεκτήματα της χρήσης βοηθητικών πολυωνύμων. Σε όλα τα παραδείγματα θα θεωρήσουμε πολυώνυμα που κατασκευάζονται για ένα σύνολο τριών ή περισσοτέρων ρίζων.

**Πρόβλημα 6.** Οι αριθμοί  $x, y, z$  ικανοποιούν τη σχέση

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ 1/x + 1/y + 1/z &= 1/a. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένας από αυτούς τους αριθμούς ισούται με  $a$ .

**Λύση.** Ας χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (2).

Παίρνουμε

$$\begin{aligned} p &= -(x + y + z) = -a, \\ q &= xyz(1/x + 1/y + 1/z) \\ &= xyz/a = -r/a, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} P(t) &= t^3 - at^2 - (r/a)t + r \\ &= (t - a)(t^2 - r/a). \end{aligned}$$

Έτσι, μία από τις ρίζες του πολυωνύμου  $P(t)$  ισούται με  $a$ . Συνεπώς, ένας από τους αριθμούς  $x, y, z$  πρέπει να είναι ίσος με  $a$ .

**Πρόβλημα 7.** Το άθροισμα τριών ακεραίων  $u, v$  και  $w$  είναι μηδέν. Αποδείξτε ότι ο αριθμός  $2u^4 + 2v^4 + 2w^4$  είναι το τετράγωνο ενός ακεραίου.

**Λύση.** Έστω  $P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$  ένα πολυώνυμο με ρίζες  $u, v$  και  $w$ . Σύμφωνα με το θεώρημα του Viète,

$$p = -(u + v + w) = 0.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} u^3 + qu + r &= 0, \\ v^3 + qv + r &= 0, \\ w^3 + qw + r &= 0. \end{aligned}$$

Θέλουμε να δημιουργήσουμε την παράσταση που δίνεται στο πρόβλημα, και έτσι πολλαπλασιάζουμε αυτούς τους τύπους επί  $2u, 2v$  και  $2w$ , αντίστοιχα, και τους προσθέτουμε. Παίρνουμε

$$2u^4 + 2v^4 + 2w^4 + 2q(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

(χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη  $u + v + w = 0$ ). Όμως,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= (u + v + w)^2 \\ &- 2(xy + yz + zx) = -2q. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$2u^4 + 2v^4 + 2w^4 = (2q)^2.$$

Μια παρόμοια τεχνική μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο πρόβλημα το οποίο εμφανίζεται συχνά σε μαθηματικές Ολυμπιάδες.

**Πρόβλημα 8.** Γράψτε το επόμενο πολυώνυμο των  $x, y, z$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ως γινόμενο δύο άλλων πολυωνύμων.

**Λύση.** Θεωρούμε το πολυώνυμο  $P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$  με ρίζες τα  $x, y, z$  (δηλαδή,  $P(x) = 0, P(y) = 0, P(z) = 0$ ). Ας προσθέσουμε τις αντίστοιχες ισότητες:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + r &= 0, \\ y^3 + py^2 + qy + r &= 0, \\ z^3 + pz^2 + qz + r &= 0. \end{aligned}$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τους τύπους του Viète (2) και την ταυτότητα

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 \\ &- 2(xy + yz + zx) = p^2 - 2q, \end{aligned}$$

που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο πρόβλημα, παίρνουμε

$$x^3 + y^3 + z^3 + p(p^2 - 2q) - pq + 3r = 0,$$

και επομένως

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= x^3 + y^3 + z^3 + 3r = \\ &- p(p^2 - 3q) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \end{aligned}$$

**Παρατήρηση.** Η ποσότητα

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

είναι μη αρνητική (αφού

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0.$$

Επομένως από την ταυτότητα που αποδείξαμε έπειτα η ανισότητα

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad (3)$$

που συνδέει τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο τριών μη αρνητικών αριθμών. Αρκεί να θέσουμε στην ανισότητα (3)  $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}$  και  $z = \sqrt[3]{c}$ .

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα βοηθητικά πολυώνυμα για να λύσουμε συστήματα εξισώσεων.

**Πρόβλημα 9.** Λύστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$$

**Λύση.** Συνεχίζουμε να εφαρμόζουμε τις μεθόδους που έχουμε αναπτύξει και αρχίζουμε θεωρώντας το πολυώνυμο:

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x)(t - y)(t - z) \\ &= t^3 + pt^2 + qt + r, \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Viète,

$$p = -(x + y + z) = -2,$$

$$q = xy + yz + zx$$

$$r = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = -5.$$

Για να υπολογίσουμε το συντελεστή  $r$ , πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις του συστήματος με  $p, q$  και  $1$ , αντίστοιχα, και τις προσθέτουμε. Αφού

$P(x) = P(y) = P(z) = 0$ , παίρνουμε

$$-3r = 2q + 14p + 20$$

$$= -10 - 28 + 20 = -18.$$

Συνεπώς,  $r = 6$  και

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6.$$

Διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός  $1$  είναι ρίζα αυτού του πολυωνύμου (οι αναγνώστες μπορούν να το επαληθεύσουν). Παραγοντοποιούμε τώρα το  $P(t)$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= (t^3 - t^2) - (t^2 - t) - (6t - 6) \\ &= (t - 1)(t^2 - t - 6). \end{aligned}$$

Συνεπώς οι ρίζες του είναι  $1, -2$ , και  $3$ .

**Απάντηση.**  $(1, -2, 3), (1, 3, -2), (-2, 1, 3), (-2, 3, 1), (3, 1, -2), (3, -2, 1)$ .

**Πρόβλημα 10.** Λύστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = xy + yz + zx \\ x^3 + y^3 + z^3 = 73/8. \end{cases}$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε αποδεικνύεται κατάλληλη σε πολλά προβλήματα ανισώσεων. Ιδού μερικά παραδείγματα.

**Πρόβλημα 11.** Οι αριθμοί  $u, v, w, x, y$  και  $z$  ικανοποιούν τις επόμενες σχέσεις:

$$x + y + z = u + v + w,$$

$$xyz = uvw,$$

$$0 < u \leq x \leq y \leq z \leq w, u \leq v \leq w.$$

Αποδείξτε ότι  $u = x, v = y, w = z$ .

**Λύση.** Θεωρούμε τα δύο πολυώνυμα

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x)(t - y)(t - z) \\ &= t^3 + pt^2 + qt + r, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} Q(t) &= (t - u)(t - v)(t - w) \\ &= t^3 + pt^2 + kt + r \end{aligned}$$

(σύμφωνα με το θεώρημα του Viète, οι σταθεροί όροι και οι συντελεστές τού  $t^2$  σε αυτά τα δύο πολυώνυμα πρέπει να είναι ίσοι).

Θέτουμε  $R(u) = P(t) - Q(t) = (q - k)t$ .

Τότε,

$$R(u) = P(u) = (u - x)(u - y)(u - z) \leq 0.$$

Από την άλλη πλευρά,  $R(u) = (q -$

$k)t$  και επομένως  $q - k \leq 0$ . Παρόμοια,  $R(w) = P(w) = (w - x)(w - y)(w - z) \geq 0$ ,

και συνεπώς  $q - k \geq 0$ . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι  $q = k$ , και έτσι τα πολυώνυμα  $P(t)$  και  $Q(t)$  είναι ίσα. Άρα, το σύνολο των ριζών τους συμπίπτει. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες που δίδονται στην εκφώνηση του προβλήματος.

**Πρόβλημα 12.** (Το πρόβλημα αυτό δόθηκε στην 25η Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών της Πράγας (1984).) Αποδείξτε ότι για κάθε τριάδα μη αρνητικών αριθμών  $x, y, z$ , για τους οποίους έχουμε  $x + y + z = 1$ , ισχύουν οι εξής ανισότητες:

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq 7/27.$$

**Λύση.** Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε την πρώτη (αριστερή) ανισότητα:

$$\begin{aligned} xy + yz + zx - 2xyz \\ = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geq 0. \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη ανισότητα θεωρούμε το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x)(t - y)(t - z) \\ &= t^3 - t^2 + qt + r, \end{aligned}$$

όπου  $q = xy + yz + zx$ ,  $r = -xyz$ . Ας ξαναγράψουμε την ανισότητα ως εξής:

$$q + 2r \leq 7/27.$$

Έχουμε ότι

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}q + r = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(q + 2r),$$

και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι  $P(1/2) \leq 1/216$ . Αν κανείς από τους αριθμούς  $x, y, z$  δεν υπερβαίνει το  $1/2$ , τότε, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου (3), παρουσιούμε

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \\ &\leq \left(\frac{\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} - z}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}. \end{aligned}$$

Αν τώρα ένας από αυτούς τους αριθμούς είναι μεγαλύτερος του  $1/2$  (φυσικά, μπορεί να υπάρχει μόνο ένας τέτοιος αριθμός), τότε

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leq 0.$$

Τελειώνοντας, παραθέτουμε μερικά προβλήματα που αφορούν πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου από τρία.

**Πρόβλημα 13.** Λύστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = p \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = p \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = p \\ \vdots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = p \end{cases}$$

(εδώ, τα  $x_1, x_2, \dots, x_n$  θεωρούνται μιγαδικοί αριθμοί).

Ένας παρατηρητικός αναγνώστης θα πρόσεξε ότι όλα τα προβλήματα με τα οποία ασχοληθήκαμε αφορούσαν «συμμετρικά πολυώνυμα» —το ίδιο είδος πολυωνύμων που συζητήθηκαν στη στήλη *Gradus ad Parnassum* στα τρία προηγούμενα τεύχη του *Quantum*.

#### Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι αν  $\varphi = (1/2)(1 - \sqrt{5})$ , τότε  $\varphi^8 = 13 - 21\varphi$ .

2. Το άθροισμα του μήκους των ακμών ενός ορθογώνιου παραλληλόπεδου είναι 96 cm, το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι 286 cm<sup>2</sup> και ο όγκος του 120 cm<sup>3</sup>. Υπολογίστε τα μήκη των ακμών του.

3. Λύστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 1. \end{cases}$$

4. Παραγοντοποιήστε το πολυώνυμο

$$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5.$$

5. Οι θετικοί αριθμοί  $x, y, z$ , ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\begin{aligned} xyz &> 1, \\ x + y + z &< 1/x + 1/y + 1/z. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι ένας και μόνον ένας από αυτούς τους αριθμούς είναι μικρότερος του 1. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Επίκαιος θεματικός

ΔΙΕΘΝΕΣ  
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ  
ΦΥΣΙΚΗΣ  
1967-1997

Επίκαιος

Παύλος Ιωάννου

ΔΙΕΘΝΕΙΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ  
ΦΥΣΙΚΗΣ (1967-1997)

Το παρόν σύγγραμμα είναι η πρώτη παγκοσμίως προσπάθεια για συνολική παρουσίαση των θεμάτων όλων των Διεθνών Ολυμπιάδων Φυσικής που διοργανώθηκαν μέχρι σήμερα. Τα ζητήματα των 28 συνολικά διαγωνισμών παρουσιάζονται αναλυτικά και συνοδεύονται από τις λύσεις τους με προτάσεις και υποδείξεις.

Το βιβλίο απευθύνεται αφ' ενός στους μαθητές των τελευταίων τάξεων του λυκείου με ενδιαφέρον για τις θετικές επιστήμες και στους φοιτητές των θετικών επιστημών και των πολυτεχνικών σχολών αφ' ετέρου στους καθηγητές τους, οι οποίοι θα μπορέσουν να αντλήσουν πολλές ιδέες και να αξιοποιήσουν προτάσεις από τα θέματα που περιλαμβάνει.

#### Στη σειρά «Ολυμπιάδες»

#### κυκλοφορούν ήδη τα βιβλία:

- Βασιλεφ-Γεγκόροφ, *Πανεννωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Σ.Δ. (1961-1991)*, τόμ. 1 και 2
- Μ. Κλάρκιν, *Μαθηματικές Ολυμπιάδες των Η.Π.Α. (1972-1986)*

#### Εκδόσεις Κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου  
Πεσμαζόγλου 5, Αθήνα, τηλ.: 3247785  
Web site: [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr)

# Είδωλα υψηλής ευκρίνειας

Ας εξαλειψουμε μερικούς «κύκλους σύγχυσης» απ' το μυαλό μας

A. Dozorov

**Ο**ΤΑΝ ΣΚΟΠΕΥΟΥΜΕ ΜΕ ΜΙΑ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΚΗ μηχανή και εστιάζουμε με ακρίβεια την εικόνα, κατ' ουσίαν φέρνουμε το οπτικό είδωλο που παράγει ο φακός ακριβώς πάνω στο στρώμα του γαλακτώματος του φίλμ. Για να εστιάσει την κινηματογραφική ταινία στην οθόνη, ο μηχανικός προβολής πρέπει να καταφέρει το είδωλο να συμπέσει με το επίπεδο της οθόνης. Εντούτοις, η έννοια της ευκρίνειας καθίσταται κάπως ασαφής όταν δεν απαιτείται οθόνη για την παρατήρηση (επί παραδείγματι, όταν το αντικείμενο παρατηρείται διά γυμνού οφθαλμού).

Ας επιχειρήσουμε ένα απλό πειράμα. Κοιτάξτε έξω από το παράθυρο. Τα απόμακρα αντικείμενα παρουσιάζονται ευκρινή. Τώρα κοιτάξτε τα αντικείμενα που απέχουν από εσάς μόλις μερικά μέτρα. Η ευκρίνεια είναι και πάλι υψηλή. Επιπλέον, όταν διαβάζε-

τε αυτήν εδώ τη σελίδα, έχετε επίσης μιαν ευκρινή εικόνα του κειμένου! Αυτό γίνεται δυνατό επειδή τα μάτια σας προσαρμόζονται αυτομάτως έτσι ώστε να βλέπετε ευκρινώς το εκάστοτε αντικείμενο. Η ρύθμιση εκτελείται από τον εγκέφαλό σας με τη βοήθεια των ακτινωτών μυών που παραμορφώνουν τους ευλύγιστους κρυσταλλοειδείς φακούς των ματιών σας, μια διαδικασία η οποία είναι γνωστή ως προσαρμογή. Ως αποτέλεσμα, το οπτικό είδωλο σχηματίζεται πάνω στον αμφιβληστροειδή σας χιτώνα (τη βιολογική «οθόνη»), οπότε η όρασή σας είναι ευκρινής (Σχήμα 1).

Με άλλα λόγια, αν και η απόσταση  $d$  του αντικειμένου μεταβάλλεται, η απόσταση  $d'$  ανάμεσα στο φακό και το είδωλο (τον αμφιβληστροειδή) παραμένει σταθερή. Τούτο καθίσταται δυνατό μόνον όταν η εστιακή απόσταση  $f$  του κρυσταλλοειδούς φακού μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο των φακών:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f},$$

ή

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = P,$$

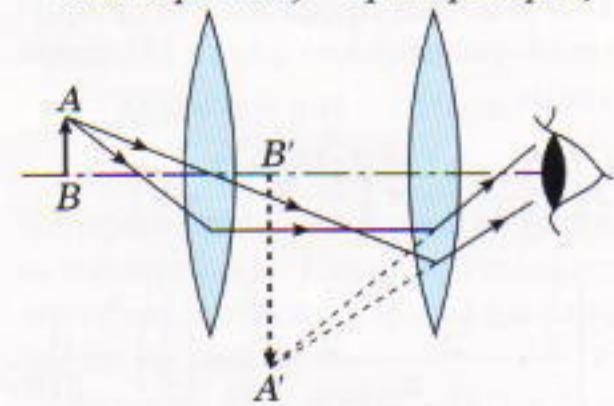
όπου  $P = 1/f$  είναι η οπτική ισχύς του φακού. Όταν η εστιακή απόσταση δίνεται σε μέτρα, η οπτική ισχύς εκφράζεται σε διοπτρίες.

Όταν το μάτι βλέπει ένα απόμακρο αντικείμενο ( $1/d \rightarrow 0$ ), οι μύες προσαρμογής ουσιαστικά παραμένουν

χαλαροί. Σ' αυτή την περίπτωση,  $f = d'$  και  $P = 1/d'$ . Συνήθως, η απόσταση  $d'$  ανάμεσα στον κρυσταλλοειδή φακό και τον αμφιβληστροειδή χιτώνα είναι περίπου 3 cm, οπότε  $f = 3$  cm και  $P = 33$  διοπτρίες. Όταν ένα αντικείμενο πλησιάζει το μάτι, οι μύες προσαρμογής τίθενται σε λειτουργία: Μείωνουν την εστιακή απόσταση του φακού, σύμφωνα με τον τύπο των φακών: ο φακός γίνεται κυρτότερος. Όταν ένα αντικείμενο τοποθετείται στην ελάχιστη απόσταση άνετης όρασης (στα 25 cm περίπου), η οπτική ισχύς του φακού ανέρχεται σε 37 διοπτρίες.

Μια περαιτέρω μείωση της απόστασης ανάμεσα στο αντικείμενο και στα μάτια αναγκάζει τους μύες προσαρμογής να τεντώνονται υπερβολικά. Υπ' αυτές τις συνθήκες, αδυνατούν να λειτουργήσουν αποτελεσματικά, οπότε το είδωλο δεν εστιάζεται πλέον στον αμφιβληστροειδή και καθίσταται

αντικειμενικός προσοφθάλμιος



Σχήμα 2

Το οπτικό σύστημα ενός μικροσκοπίου. Το μάτι του παρατηρητή βλέπει το μεγεθυνμένο και ανεστραμμένο φανταστικό είδωλο A'B' του αντικειμένου AB.

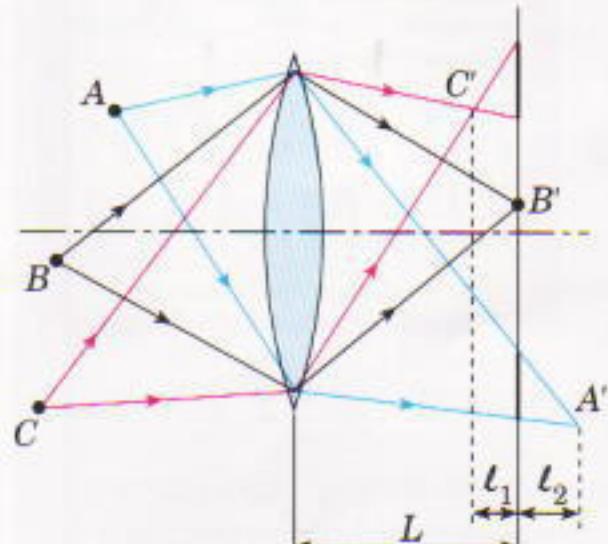
Σχήμα 1

Ο σχηματισμός του είδώλου στον αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού. Φαίνονται το αντικείμενο O, ο κρυσταλλοειδής φακός και ο αμφιβληστροειδής χιτώνας R.

ασαφές. Εφόσον οι μύες προσαρμογής είναι αρκετά ισχυροί, η οπτική ισχύς μπορεί να αυξηθεί ώς τις 43 διοπτρίες, έτσι ώστε το μάτι να μπορέσει να δει ένα αντικείμενο σε απόσταση μόνο 10 cm. Σ' αυτή την περίπτωση, οι πολύ μικρές λεπτομέρειες μπορούν να διακριθούν σαφέστερα, αλλά πολύ γρήγορα επέρχεται κόπωση των ματιών. Έτσι, η απόσταση άνετης όρασης αντιστοιχεί στον βέλτιστο συνδυασμό, δηλαδή όταν οι μικρές λεπτομέρειες του αντικειμένου διακρίνονται σαφώς χωρίς αυτό να συνεπιφέρει υπερβολικό τέντωμα των μυών προσαρμογής.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου το μάτι επιβοηθείται από ένα σύστημα φακών — από ένα μικροσκόπιο, ας πούμε. Το οπτικό σύστημα ενός μικροσκοπίου σχηματίζει το μεγεθυσμένο φανταστικό είδωλο  $A'B'$  ενός αντικειμένου  $AB$  (Σχήμα 2). Οταν κοιτάζουμε ένα αντικείμενο μέσα από το μικροσκόπιο, τυχαίνει ενίοτε να μην το βλέπουμε καθαρά (η ευκρίνεια της εικόνας είναι χαμηλή). Για ποιο λόγο άραγε το μάτι αδυνατεί να σχηματίσει σαφές είδωλο σε τέτοιες περιπτώσεις; Και τι συμβαίνει όταν ρυθμίζουμε το μικροσκόπιο ώστε να αυξήσουμε την ευκρίνεια; Τι ακριβώς επιτυγχάνουμε μετατοπίζοντας τον προσοφθάλμιο φακό του μικροσκοπίου;

Ο λόγος έγκειται στο ότι το σύστημα των φακών σχηματίζει το φανταστικό είδωλο πολύ κοντά στο μάτι· συνεπώς, είτε το μάτι είτε το είδωλο



Σχήμα 3

Πώς το άνοιγμα της δέσμης επηρεάζει το βάθος εστίασης. Οι στενότερες δέσμες προσφέρουν είδωλα υψηλότερης ευκρίνειας στα σημεία  $A$  και  $C$ .

πρέπει να αλλάξει θέση έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις των μυών προσαρμογής. Οι συνθήκες αυτές είναι γνωστές — το είδωλο πρέπει να τοποθετηθεί στην ελάχιστη απόσταση άνετης όρασης. Εάν απομακρύνουμε απλώς το μάτι μας από τον προσοφθάλμιο φακό, οι περισσότερες φωτεινές ακτίνες από το είδωλο δεν θα προσπέσουν στο μάτι, με αποτέλεσμα η προβολή στον αμφιβληστροειδή να υποβαθμιστεί τόσο από άπουψη πεδίου όσο και από άπουψη λαμπρότητας. Συνεπώς, είναι πολύ προτιμότερο να μετατοπίσουμε το είδωλο αντί του ματιού. Τούτο μπορούμε να το επιτύχουμε εύκολα μεταβάλλοντας την απόσταση ανάμεσα στον αντικειμενικό και τον προσοφθάλμιο φακό. Αυτό ακριβώς κάνουμε όταν ρυθμίζουμε το σύστημα των φακών για να αυξήσουμε την ευκρίνεια.

Ως τώρα έχουμε υποθέσει σιωπηρά πως το αντικείμενο είναι επίπεδο. Στην πραγματικότητα, όμως, τα περισσότερα αντικείμενα είναι τρισδιάστατα, αν και τα είδωλά τους σε οποιοδήποτε οπτικό σύστημα είναι επίπεδα.

Ας σχεδιάσουμε τα είδωλα των σημείων  $A$ ,  $B$  και  $C$  του ίδιου αντικειμένου, τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από το φακό (Σχήμα 3). Τα παράλληλα προς το φακό επίπεδα στα οποία κείνται τα τρία είδωλα δεν συμπίπτουν. Εάν η οθόνη τοποθετηθεί έτσι ώστε το είδωλο του σημείου  $B$  να είναι σαφές, τα είδωλα των σημείων  $A$  και  $C$  δεν θα εμφανίζονται ως σημεία αλλά ως δίσκοι — γνωστοί ως «κύκλοι σύγχυσης». Το μέγεθος του κύκλου σύγχυσης συνδέεται με το μέγεθος του φακού: όσο μικρότερη είναι η διάμετρος του φακού, τόσο σαφέστερα παρουσιάζονται τα είδωλα  $A'$  και  $C'$ . Συνεπώς, οι στενές φωτεινές δέσμες αποτελούν τα καλύτερα «εργαλεία» για να εστίσουμε τα είδωλα σημείων που βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από το φακό. Με άλλα λόγια, μειώνοντας τη διάμετρο της φωτεινής δέσμης (το άνοιγμα) επιτυγχάνουμε βελτίωση του βάθους εστίασης. Τι σημαίνει όμως αυτό;

Όταν κανείς βλέπει ένα δίσκο διάγυμνού οφθαλμού, ο δίσκος γίνεται αντιληπτός ως ένα σημείο (το είδωλό

του είναι σαφές) εφόσον το γωνιακό του μέγεθος είναι περίπου  $1' \equiv 3 \cdot 10^{-4}$  rad. Συνήθως παρατηρούμε ένα αντικείμενο από την ελάχιστη απόσταση άνετης όρασης  $l_0 = 25$  cm. Σ' αυτή την περίπτωση, η μέγιστη διάμετρος του δίσκου είναι

$$2r = l_0 \text{ εφα} \equiv l_0 a \equiv 75 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \\ = 0,075 \text{ mm.}$$

Εστω ότι τα σημεία  $A$  και  $C$  (Σχήμα 3) προβάλλονται στην οθόνη ως κύκλοι σύγχυσης με την ίδια ακτίνα  $r$ . Σε αυτή την περίπτωση, το πλάτος της περιοχής όπου σχηματίζονται ευκρινή είδωλα (η απόσταση μεταξύ των ακραίων επιπέδων επί των οποίων τα σημεία  $A$  και  $C$  είναι δυνατόν να προβληθούν ως σημεία αντί ως κύκλοι σύγχυσης) ισούται με

$$\ell_1 + \ell_2 \equiv \frac{2rl}{D_1} \equiv \frac{Ll_0a}{D_1},$$

όπου με  $L$  συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ του φακού και του αντικειμένου και με  $D_1$  τη διάμετρο του φακού. Αυτή η τιμή αναφέρεται ως το βάθος εστίασης (ή βάθος ευκρινούς απεικονίσεως) — και δεν πρέπει να συγχέεται με το βάθος πεδίου. Ο τύπος δείχνει ότι το βάθος εστίασης είναι αντιστρόφως ανάλογο με το εύρος της δέσμης.

Εφόσον το κάθε σημείο του αντικειμένου αντιστοιχεί σε ξεχωριστό κύκλο σύγχυσης στο είδωλο, είναι σημαντικό αυτοί οι κύκλοι να μην επικαλύπτονται. Εάν οι γειτονικοί κύκλοι δεν επικαλύπτονται, γίνονται αντιληπτοί ως διαφορετικές οντότητες. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι το οπτικό σύστημα διακρίνει αυτά τα δύο σημεία. Αντιθέτως, όταν οι κύκλοι υπερτίθενται, το είδωλο που προκύπτει αποτελείται από μία ενιαία κηλίδα, ή, με άλλα λόγια, το σύστημα δεν διακρίνει τα σημεία. Η μείωση της διαμέτρου του φακού οδηγεί σε μικρούς κύκλους σύγχυσης και, επομένως, σε αύξηση της διακριτικής ικανότητας. Εάν η διάμετρος του φακού είναι μεγάλη, η διακριτική ικανότητα γίνεται χαμηλή, και αντί ενός ευκρινούς ειδώλου παίρνουμε μία ασαφή κηλίδα. Συνεπώς, η ελαχιστοποίηση του ανοίγματος αποδεικνύε-

ται πολύ σημαντική προκειμένου να επιτύχουμε ένα ευκρινές είδωλο του αντικειμένου.

Σε κάθε οπτικό σύστημα, η διάμετρος της φωτεινής δέσμης περιορίζεται είτε από τα πλαίσια στήριξης των φακών ή από ειδικά διαφράγματα μεταβλητής διαμέτρου. Στο μάτι, το ρόλο αυτών των διαφραγμάτων τον παίζει η ίριδα, η οποία διαθέτει ένα άνοιγμα μεταβλητής διαμέτρου, την κόρη.

Εντούτοις, υπάρχει και η άλλη όψη του νομίσματος: Η ελαχιστοποίηση του ανοίγματος επιφέρει τη μείωση της φωτεινής ροής που εισχωρεί στο οπτικό σύστημα. Συνεπώς, το είδωλο καθίσταται αμυδρότερο. Πάρτε για παράδειγμα μια συνηθισμένη φωτογραφική κάμερα. Σε πολλές περιπτώσεις οι άνθρωποι φωτογραφίζουν μακρινά αντικείμενα, οπότε τα προκύπτοντα είδωλα κείνται ακριβώς στο εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού. Σε αυτή την περίπτωση, ο φωτισμός του ειδώλου —ο λόγος της φωτεινής ροής προς το εμβαδόν του ειδώλου— γίνεται ανάλογος προς το τετράγωνο του λόγου της διαμέτρου του αντικειμενικού φακού προς την εστιακή του απόσταση (ο αναγνώστης μπορεί, αν θέλει, να το ελέγξει μόνος του). Ο λόγος της διαμέτρου του αντικειμενικού φακού προς την εστιακή του απόσταση είναι γνωστός ως αριθμός *f*.

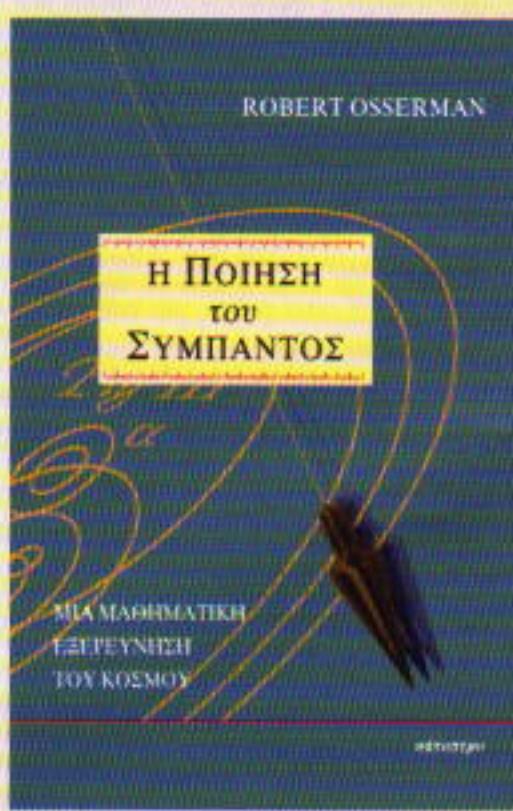
Συνεπώς, η αύξηση του βάθους εστίασης οδηγεί σε μείωση της λαμπρότητας του ειδώλου. Οι αντικειμενικοί φακοί υψηλών προδιαγραφών προσφέρουν λαμπρά είδωλα υψηλής ευκρίνειας.

Εν κατακλείδι, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι πραγματευθήκαμε το πρόβλημα του βάθους εστίασης και της διακριτικής ικανότητας περιορίζομενο στο πλαίσιο της γεωμετρικής οπτικής. Στην πραγματικότητα, σημαντικό επίσης ρόλο διαδραματίζουν παράγοντες όπως η περίθλαση του φωτός, τα σφάλματα των οπτικών συστημάτων και οι χημικές ιδιότητες του φωτευαίσθητου στρώματος. ◻

### Διαβάστε επίσης...

- M.L. Biermann, «Η τέχνη της φωτογραφίας», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1995, σ. 28-34.

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ



ROBERT OSSERMAN

Η ΠΟΙΗΣΗ  
του  
ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ

ΜΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ  
ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ  
ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ

Εκδόσεις ΚΑΤΩΠΤΡΟ

Πανόδετο, 5.500 δρχ.

Richard Feynman  
Νόμπελ Φυσικής

**ΕΞΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ**

Ανθολόγηση από τις Διαλέξεις Φυσικής

«Αν μπορούσε κάποιο βιβλίο να περιλάβει ότι αξίζει να μεταγγίσουμε στη νεότερη γενιά των επιστημόνων, αυτό θα ήταν αναμφίβολα τα "Κομμάτια" από τις "Διαλέξεις" του Feynman.»

John Gribbin, *The New Scientist*

«Πρόκειται για σοφά επιλεγμένα κείμενα από τη σειρά των "Διαλέξεών" του τα οποία αποτελούν συναρπαστικό ανάγνωσμα για κάθε άνθρωπο με ανησυχίες, ανεξάρτητα από το επίπεδο της επιστημονικής του κατάρτισης.»

Gordon Kane, Καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μίτσιγκαν

«Η ανάγνωση του βιβλίου ισοδυναμεί με ένα αδιάκριτο κοίταγμα πάνω από τους ώμους του Νεύτωνα και του Αϊνστάιν· ο Feynman στις καλύτερες στιγμές του.»

Michio Kaku

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΩΠΤΡΟ**

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785  
Web site: [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr)

# Ο Fibonacci είναι και πάθι εδώ!

Τι κοινό έχουν ο Παρθενώνας και μια μαργαρίτα;

Elliott Ostler και Neal Grandgenett

**Ο**Ι ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ προσφέρουν από παλιά στους μαθηματικούς προβλήματα που συναρπάζουν τη σκέψη και βρίσκουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο. Μια ιδιαίτερη ακολουθία, η ακολουθία Fibonacci, έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον και είναι ένα ιοχυρό μαθηματικό εργαλείο. Αποφασίσαμε λοιπόν να καταγράψουμε λίγες μόνο από τις αγαπημένες μας εφαρμογές αυτής της θαυμαστής ακολουθίας.

Μπορούμε να παραγάγουμε εύκολα την ακολουθία Fibonacci αν θέσουμε τους δύο πρώτους όρους της ίσους με 1 και συνεχίσουμε προσθέτοντας τους δύο τελευταίους αριθμούς της για να πάρουμε τον επόμενο: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... . Η ακολουθία ανακαλύφθηκε από τον Leonardo της Πίζα (γνωστότερο ως Fibonacci) στις αρχές του 13ου αιώνα. Ήταν η απάντηση σε ένα διάσημο πλέον πρόβλημα που είχε θέσει ο ίδιος ο Fibonacci, το γνωστό ως «πρόβλημα των κουνελιών». Είναι το εξής:

Πόσα ζευγάρια κουνελιών θα έ-

χουμε στο τέλος του χρόνου, αν ξεκινήσουμε από ένα ζευγάρι και αν όλα τα ζευγάρια γεννούν κάθε μήνα ένα καινούργιο το οποίο φτάνει σε ηλικία αναπαραγωγής μέσα σε δύο μήνες;

Οι πρώτοι μήνες της λύσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 1. Παρατηρήστε ότι το πλήθος των ζευγαριών κάθε μήνα αντιστοιχεί στους όρους της ακολουθίας Fibonacci.

Έτσι έχουμε τα εξής πλήθη ζευγα-

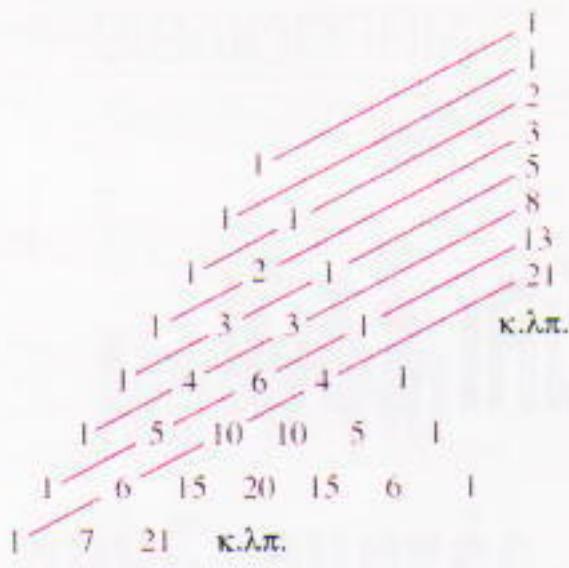
ριών κουνελιών στο τέλος κάθε μήνα του έτους: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. Επομένως, η απάντηση στο πρόβλημα μας είναι ότι έπειτα από τους δώδεκα μήνες θα έχουμε συνολικά 233 ζευγάρια κουνελιών. Αφού η ακολουθία Fibonacci είναι άπειρη, μπορούμε εύκολα να βρούμε το πλήθος των ζευγαριών έπειτα από οποιοδήποτε χρονικό διάστημα.

Ο συναρτησιακός συμβολισμός για την ακολουθία δόθηκε για πρώτη φορά από τον Kepler το 1611. Την περιέγραψε



## Σχήμα 1

Πολλαπλασιασμός κουνελιών κατά Fibonacci. Ξεκινούμε στην αρχή του 1ου μήνα με ένα ζευγάρι κουνελιών. Στο τέλος του μήνα έχουμε ακόμη μόνο ένα ζευγάρι, διότι τα κουνέλια μπορούν να αναπαραχθούν μετά τον δεύτερο μήνα. Μετά το τέλος του 2ου μήνα έχουμε πλέον δύο ζευγάρια, διότι το πρώτο έχει φτάσει σε ηλικία αναπαραγωγής (ενώ το δεύτερο, όχι). Το Σχήμα θα μπορούσε να εξακολουθήσει επ' απειρον.



**Σχήμα 2**

Οι διαγώνιοι του τριγώνου Pascal σχηματίζουν την ακολουθία Fibonacci.

ως  $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ , όπου  $f_n$  είναι ο ποστός όρος της ακολουθίας Fibonacci,  $f_0 = 0$  και  $f_1 = 1$ . Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται σε πλήθος μαθηματικών κλάδων και συνδέεται με μια μεγάλη ποικιλία εφαρμογών. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικά παραδείγματα αριθμών Fibonacci στις πιθανότητες, τη γεωμετρία, τις μετρήσεις, την άλγεβρα πινάκων, την αρχιτεκτονική και τα φυσικά αντικείμενα.

### Πιθανότητες

Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται σε ποικιλία προβλημάτων πιθανοτήτων και συνδυαστικής. Πολλά κλασικά προβλήματα αυτών των πεδίων έχουν διωνυμική φύση —όπως, για παράδειγμα, τα προβλήματα ρίψης νομισμάτων. Οι κατανομές των λύσεων αυτών των προβλημάτων συν-

δέονται συνήθως με το διωνυμικό θεώρημα και μπορούν να προκύψουν από τους συντελεστές στο ανάπτυγμα του τριγώνου του Pascal. Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά αυτό το τρίγωνο, διαπιστώνουμε ότι η πρόσθεση των στοιχείων των διαγώνιων του παράγει την ακολουθία Fibonacci (βλ. Σχήμα 2).

Το γεγονός ότι η ακολουθία αυτή παράγεται από τις διαγώνιους του τριγώνου του Pascal υποδηλώνει ότι είναι πιθανόν να βρεθεί και στις λύσεις των προβλημάτων που συνδέονται με τη διωνυμική κατανομή. Ιδού ένα τέτοιο πρόβλημα:

Ρίχνουμε ένα νόμισμα  $N$  φορές και καταγράφουμε στη σειρά τα αποτελέσματα. Πόσες διαφορετικές ακολουθίες κεφαλών και γραμμάτων μπορούν να εμφανιστούν αν δεν μπορεί να έχουμε δύο ή περισσότερες κεφαλές στη σειρά;

Στον Πίνακα 1 περιλαμβάνονται όλες οι δυνατές ακολουθίες για κάθε συγκεκριμένο πλήθος ρίψεων. Όπως βλέπουμε, η ακολουθία Fibonacci δίνει το πλήθος των ζητούμενων ακολουθιών. Μπορούμε έτσι να καθορίσουμε το πλήθος των ακολουθιών για οποιοδήποτε πλήθος ρίψεων του νομίσματος.

### Γεωμετρία

Μια άλλη περιοχή στην οποία εμφανίζεται συχνά η ακολουθία Fibonac-

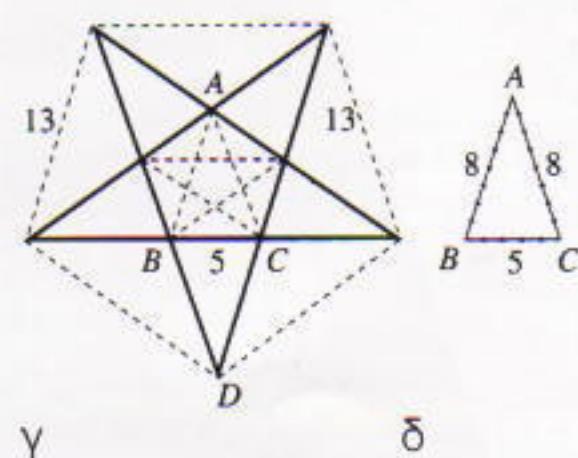
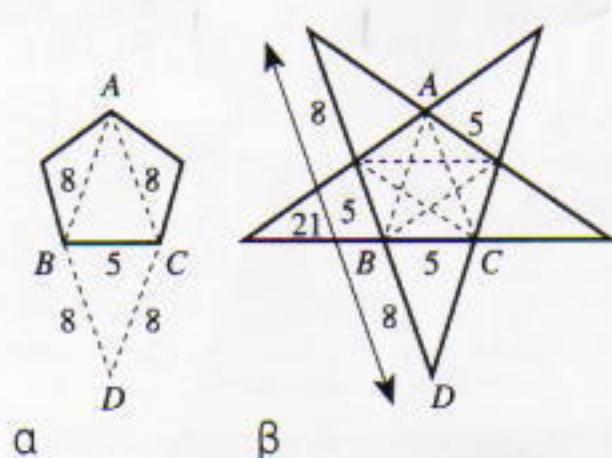
**Πίνακας 1**

Αριθμός ρίψεων	Ακολουθίες χωρίς διαδοχικές κεφαλές	Συνολικό πλήθος
1	(Κ), (Γ)	2
2	(ΚΓ), (ΓΚ), (ΚΚ)	3
3	(ΚΓΤ), (ΓΚΓ), (ΓΤΚ), (ΚΓΚ), (ΓΤΤ)	5
4	(ΚΓΤΓ), (ΓΚΓΓ), (ΓΤΚΓ), (ΓΤΤΚ), (ΚΓΓΚ), (ΚΓΓΚ), (ΓΚΓΚ), (ΓΤΤΓ)	8
5	(ΚΓΓΓΓ), (ΓΚΓΓΓ), (ΓΤΚΓΓ), (ΓΤΤΓΓ), (ΚΓΓΓΚ), (ΚΓΓΓΚ), (ΓΚΓΚΓ), (ΓΚΓΓΚ), (ΓΤΓΚΓ), (ΚΓΓΚΓ), (ΓΤΤΓΓ)	13

accī είναι η γεωμετρία. Στο επόμενο παράδειγμα έχουμε τέσσερα διαγράμματα που παρουσιάζουν τους αριθμούς Fibonacci να εμφανίζονται σε συνεχώς μεγεθυνόμενα άστρα πέντε κορυφών, τα οποία κατασκευάζονται από κανονικά πεντάγωνα. Όταν το μήκος της πλευράς του αρχικού πενταγώνου είναι ένας αριθμός Fibonacci μεγαλύτερος ή ίσος του 5, τότε κατά την κατασκευή των άστρων παράγονται προσεγγίσεις των αριθμών Fibonacci. Το Σχήμα 3 απεικονίζει την όλη διαδικασία.

Στο Σχήμα 3α σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο μεταξύ των σημείων  $A$ ,  $B$  και  $C$ . Αποδεικνύεται ότι το μήκος των τμημάτων  $AC$  και  $AB$  είναι περίπου 8. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα ίδιο τρίγωνο μεταξύ των σημείων  $B$ ,  $C$  και  $D$ . Προκύπτει έτσι η πρώτη κορυφή του άστρου. Τα τρίγωνα  $ABC$  και  $BCD$  είναι ίσα και συμμετρικά ως προς το τμήμα  $BC$ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τις υπόλοιπες πλευρές του αρχικού πενταγώνου και δημιουργούμε το Σχήμα 3β.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα μήκη των πλευρών που προκύπτουν προσεγγίζουν τους αριθμούς Fibonacci. Στο Σχήμα 3γ παρουσιάζεται το νέο πεντάγωνο που δημιουργείται αν ενώσουμε τις κορυφές του άστρου. Τα μέτρα των



**Σχήμα 3**

Η ακολουθία Fibonacci στα αποτελέσματα της μέτρησης διαδοχικών πενταγώνων και άστρων. Επισημαίνουμε ότι η σχέση είναι προσεγγιστική. Αφού η γωνία  $ABC$  ισούται με  $72^\circ$  και  $AB = 8$ , τότε θα έπρεπε το συν  $72^\circ$  να ισούται με το λόγο  $2,5:8$  ( $0,3125$ ). Στην πραγματικότητα, το συνημίτονο των  $72^\circ$  ισούται με  $0,309017$ . Αν χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερους αριθμούς Fibonacci, όπως τον 89 και τον 144, ο λόγος που προκύπτει ( $0,309028$ ) προσεγγίζει καλύτερα το συν  $72^\circ$ .

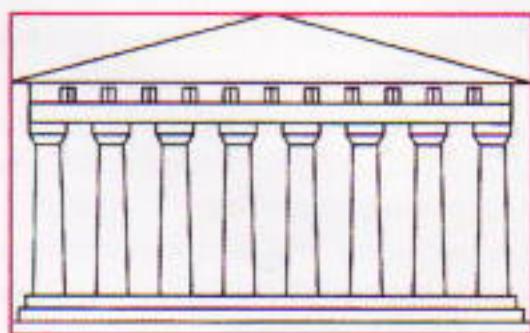
## Πίνακας 2

Χιλιόμετρα	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...	
Μίλια		1	1	2	3	5	8	13	21	34	...	
Λόγος		1	2	1,5	1,66	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	...	1,618

πλευρών του προσεγγίζουν επίσης αριθμούς Fibonacci, όχι όμως με απόλυτη ακρίβεια. Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία που εφαρμόσαμε στο Σχήμα 3α, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο άστρο από το πεντάγωνο του Σχήματος 3γ. Δημιουργούμε έτσι άπειρα άστρα και πεντάγωνα με μήκη πλευρών που προσεγγίζουν με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια αριθμούς Fibonacci — με την προϋπόθεση ότι το μήκος πλευράς του αρχικού πεντάγωνου είναι ένας αριθμός Fibonacci μεγαλύτερος ή ίσος του 5.

## Μετρήσεις

Στο πεδίο των μετρήσεων η ακολουθία Fibonacci μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας απλός πίνακας μετατροπής μιλίων σε χιλιόμετρα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο διαδοχικούς όρους της ακολουθίας για να μετατρέψουμε ένα πλήθος μιλίων σε χιλιόμετρα. Για παράδειγμα, 3 μίλια είναι περίπου 5 χιλιόμετρα, 5 μίλια είναι περίπου 8 χιλιόμετρα, 8 μίλια είναι περίπου 13 χιλιόμετρα, κ.ο.κ. Αυτή η μέθοδος μετατροπής είναι δυνατή διότι ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών Fibonacci (1,618 καθώς αυξάνουν οι αριθμοί) και ο συντελεστής μετατροπής μεταξύ μιλίων και χιλιομέτρων (1,609) είναι σχεδόν ίσοι. Η διαφορά τους είναι ίση μόλις με 0,009 και έτσι η ακολουθία Fibonacci μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας α-



Σχήμα 4

Ο Παρθενώνας μέσα σε ένα ορθογώνιο οι διαστάσεις του οποίου σχηματίζουν τον χρυσό λόγο.

πλός και αρκετά ακριβής πίνακας μετατροπής μιλίων σε χιλιόμετρα (Πίνακας 2).

## Αρχιτεκτονική

Ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci δεν είναι χρήσιμος μόνον ως συντελεστής μετατροπής. Ο λόγος αυτός είναι ένας διάσημος αριθμός που συνήθως αναφέρεται ως «χρυσός λόγος», ή «χρυσή τομή», και έχει επηρεάσει σημαντικά την αρχιτεκτονική και την τέχνη. Ο λόγος αυτός, που συχνά συνδέεται με το καλούμενο «χρυσό ορθογώνιο», έχει συναρπάσει τους λόγιους όλων των εποχών. Ο Παρθενώνας ταιριάζει μέσα σε ένα χρυσό ορθογώνιο — οι διαστάσεις του συνδέονται με τον χρυσό λόγο (Σχήμα 4). Το λόγο αυτό βρίσκουμε και σε πολλά άλλα αρχαία και σύγχρονα κτίρια.

## Άλγεβρα πινάκων

Σε ένα περισσότερο θεωρητικό επίπεδο, ανακαλύπτουμε την ακολουθία Fibonacci σε συγκεκριμένα προβλήματα γραμμικής άλγεβρας. Για παράδειγμα, η ακολουθία αυτή παράγεται όταν υψώνουμε στη  $n$ -οστή δύναμη έναν συγκεκριμένο  $2 \times 2$  πίνακα. Αυτός ο πίνακας έχει τρία όμοια μη μηδενικά στοιχεία στις τρεις πρώτες θέσεις και μηδέν στην τελευταία:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Όλοι οι παραγόμενοι πίνακες περιέχουν αριθμούς Fibonacci. Ιδού οι παραγόμενοι πίνακες όταν υψώνουμε τον αρχικό πίνακα στην πέμπτη δύναμη:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+1) & (1+0) \\ (1+0) & (1+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+1) & (2+0) \\ (1+1) & (1+0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+2) & (3+0) \\ (2+1) & (2+0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5+3) & (5+0) \\ (3+2) & (3+0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

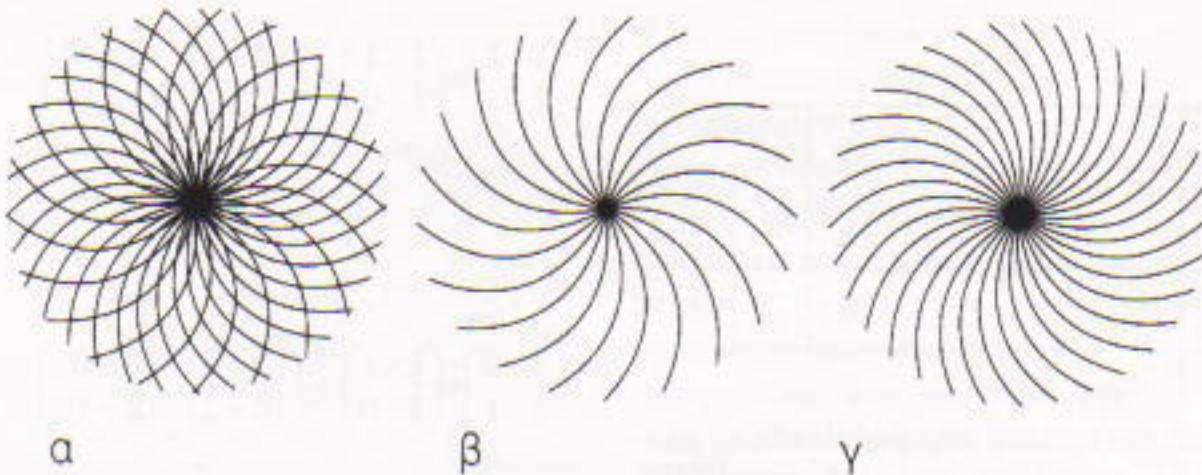
Παρατηρούμε ότι όλοι οι αριθμοί που περιέχονται στους παραγόμενους πίνακες είναι αριθμοί Fibonacci, αλλά ιδιαίτερα το πάνω αριστερό στοιχείο κάθε πίνακα (τυπωμένο έντονα) μας δίνει τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας.

## Φύση

Έχει παρατηρηθεί ότι οι αριθμοί Fibonacci συνδέονται άμεσα με τις έλικες που εμφανίζονται σε φυσικά αντικείμενα όπως τα κουκουνάρια, οι ανανάδες και τα άνθη της μαργαρίτας. Το Σχήμα 5 παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται αυτοί οι αριθμοί στα περισσότερα άνθη μαργαρίτας. Τα μεμονωμένα ανθύλλια δημιουργούν δύο είδη ελίκων —ένα σύνολο δεξιόστροφων και ένα σύνολο αριστερόστροφων. Το δεξιόστροφο περιέχει 21 έλικες —αριθμός Fibonacci. Το αριστερόστροφο περιέχει 34 έλικες —ο επόμενος αριθμός Fibonacci.

Αυτό το διπλό ελικοειδές μόρφωμα στο οποίο εμφανίζεται ο λόγος 21:34 (δηλαδή ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών Fibonacci), υπάρχει και στα κουκουνάρια των πεύκων (όπου ο αντίστοιχος λόγος είναι 5:8) και στους ανανάδες (όπου ο λόγος είναι 8:13). Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται και σε πολλά άλλα μορφώματα φυτών, όπως στα φύλλα της κερασιάς, στα πέταλα της τουλίπας και στα μεγάλα κλαριά της ιτιάς.

Στο άρθρο αυτό εξερευνήσαμε λίγες μόνο από τις εφαρμογές της α-



**Σχήμα 5**

Οι αριθμοί Fibonacci 21 και 34 εμφανίζονται στο διπλό ελικοειδές μόρφωμα ενός άνθους μαργαρίτας: αυτό (α) αποτελείται συνήθως από 21 δεξιόστροφες έλικες (β) και από 34 αριστρόστροφες (γ).

κολουθίας Fibonacci στα μαθηματικά. Η εμφάνισή της στον κόσμο της τέχνης είναι εξίσου εντυπωσιακή. Αυτή η ακολουθία, και ο συνδεόμενος μαζί της χρυσός λόγος, βρίσκεται σε ένα πλήθος κλασικών έργων — για παράδειγμα στους πίνακες του Λεονάρντο ντα Βίντσι. Το πλήθος των περιοχών στις οποίες εμφανίζεται δεν μπορεί παρά να συναρπάσει οποιονδήποτε ερευνήσει έστω και λίγο το ζήτημα. Οι μαθηματικές της εφαρμογές και μόνο είναι τόσο πολλές ώστε ένα ολόκληρο περιοδικό, το *Fibonacci Quarterly*, είναι αφιερωμένο αποκλειστικά σε αυτές.

Γιατί εμφανίζεται τόσο συχνά στον κόσμο μας η ακολουθία Fibonacci; Οι μαθηματικοί δεν έχουν ξεδιαλύνει ακόμη το μυστήριο<sup>1</sup>. Ισως δεν κατανόσουμε ποτέ πλήρως γιατί είναι τόσο διαδεδομένη αυτή η ακολουθία ή ο χρυσός λόγος, αλλά σίγουρα η ακολουθία Fibonacci είναι ένα μαθηματικό φαινόμενο που αξίζει συνεχή μελέτη και ιδιαίτερη εκτίμηση.

Γνωρίζουμε λίγους μόνο καθηγητές που έχουν δώσει την πρέπουσα βαρύτητα στη διαδασκαλία της ακολουθίας Fibonacci. Ένας από αυτούς, καθιέρωσε μια «ημέρα Fibonacci», δινοντας στους φοιτητές του την ευ-

καιρία να ερευνήσουν και να παρουσιάσουν πληροφορίες για διάφορες εφαρμογές της ακολουθίας Fibonacci. Παρ' ότι μερικοί σκεπτικιστές μαθηματικοί μπορεί να πιστεύουν ότι τα προβλήματα αριθμητικών σειρών δεν συνδέονται ιδιαίτερα με την πραγματική ζωή, η ακολουθία Fibonacci αποδεικνύει ξανά και ξανά ότι τα πράγματα είναι διαφορετικά! ◉

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 35

Η επανάληψη του πειράματος με διαφορετικά πηνία δείχνει πως, με την προϋπόθεση ότι η ένταση του ρεύματος παραμένει σταθερή σε όλες τις δοκιμές, η μετατόπιση Δχ της υγρής στήλης είναι ευθέως ανάλογη με το συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$ . Τώρα, δεν απομένει παρά να βαθμονομήσουμε τη συσκευή μας χρησιμοποιώντας ένα πηνίο γνωστού συντελεστή αυτεπαγωγής για να ολοκληρώσουμε το αυτοσχέδιο μαγνητόμετρό μας. ◉

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- A. Mitrofanov, «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;», Σεπτέμβριος / Οκτώβριος 1997.
- A. Stasenko, «Μαγνήτες, φορτία και πλανήτες», Ιούλιος / Αύγουστος 1997.
- J. Wylie, «Μαγνητικό μονοπόλιο», Ιούλιος / Αύγουστος 1995.

1. Οι Douady και Couder υποστηρίζουν την ιδέα ότι, όταν κατά την ανάπτυξη του φυτού οι ίστοι του τοποθετούνται σε διαστήματα «χρυσών γωνιών», επιτυγχάνεται η αποδικότερη «συσκευασία» τους. Για περισσότερα δείτε το βιβλίο *Οι αριθμοί της Φύσης* του Ian Stewart (Εκδόσεις Κάτοπτρο), και ειδικά το κεφάλαιο «Σταγόνες, δυναμική και μαργαρίτες».

**Η γενική θεωρία της Σχετικότητας, για τρυφερούς αναγνώστες**



Russel Stannard  
Οι μαύρες τρύπες και ο Θείος Αλβέρτος

Παρατάσσεται στην Εργασία της μεταφράστριας

**Russel Stannard**

## Οι μαύρες τρύπες και ο Θείος Αλβέρτος

Το διασπελόμενο Σύμπαν, ο καμπυλωμένος χώρος, οι μαύρες τρύπες που καταβροχθίζουν τα πάντα, η επιτάχυνση της ροής του χρόνου, το κύτρινο φως που είναι μπλε και κόκκινο, η ευθύγραμμη διαδρομή που επιστρέφει στην αρχή της, η συρρέκνωση της μετροτανίας δύο πιο κοντά στο έδαφος βρίσκεται και το πώς όλοι μας αποτελούμαστε από αστρική ύλη είναι μερικά από τα θέματα με τα οποία καταπιάνεται το βιβλίο.

Ελάτε κι εσείς στον μυστηριώδη κόσμο των φυσαλίδων σκέψης. Εξερευνήστε μαζί με την Αλίκη Νοητού τη χώρα των μικροσκοπικών σκαθαριών και τον αντιπαθή καθηγητή τους. Γνωρίστε τον καλομύλητο ηλεκτρονικό υπολογιστή, τον Κόμπι, και ταξιδέψτε με το πανίσχυρο διαστημόπλοιό του στα βάθη του Σύμπαντος. Επισκεφθείτε τη Σελήνη, περπατήστε στο Διάστημα, θαυμάστε τα αστέρια... Προσέξτε όμως: πρέπει να ακούσετε τη συμβουλή του Θείου Αλβέρτου, του διάσημου επιστήμονα, και να μείνετε μακριά από τις μαύρες τρύπες!

Η ιστορία μας είναι γεμάτη δράση. Διασκεδάζει τους αναγνώστες — παιδιά και ενήλικους — και συνάμα τους εισάγει στα θαύματα της γενικής θεωρίας της Σχετικότητας του Αϊνστάιν.

#### ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΕ ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΗ

Σελ.: 147, 17 × 25 εκ., Πανόδετο, 4.000 δρχ.

Εκδόσεις Κάτοπτρο

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

## Μαθηματικά

### M136

Αν το  $x$  είναι πραγματικό, πρέπει να είναι μη αρνητικό. Στην πραγματικότητα, αφού το αριστερό μέλος της δεδομένης εξίσωσης είναι θετικό,  $x^3 > 100$ . Επομένως, η εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$x = \sqrt{\sqrt{(x^3 - 100)^3} - 100}.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή  $x = f(f(x))$ , όπου  $f(x) = \sqrt{x^3 - 100}$ , και είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για τέτοιες συναρτήσεις οι εξισώσεις  $x = f(f(x))$  και  $x = f(x)$  είναι ισοδύναμες (θα αποδείξουμε αργότερα αυτή την πρόταση). Καταλήγουμε, επομένως, στην εξίσωση  $x = \sqrt{x^3 - 100}$ , ή  $x^3 - x^2 - 100 = 0$ . Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης· τη γράφουμε ως

$$(x^3 - 125) - (x^2 - 25) = 0,$$

και, επομένως,

$$(x - 5)(x^2 + 4x + 20) = 0$$

(παραγοντοποιήσαμε τη διαφορά των κύβων και τη διαφορά των τετραγώνων). Έτοι, και αυτή η εξίσωση και η αρχική έχουν τη μοναδική πραγματική ρίζα  $x = 5$ .

Ας αποδείξουμε τώρα τη βοηθητική πρόταση. Θεωρούμε τις δύο εξισώσεις

$$x = f(f(x)) \quad (1)$$

και

$$x = f(x), \quad (2)$$

όπου η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Βλέπουμε ότι κάθε ρίζα της δεύτερης εξίσωσης είναι και ρίζα της πρώτης (για να ισχύει αυτό δεν είναι απαραίτητη η μονοτονία). Θα αποδείξουμε τώρα ότι κάθε ρίζα της πρώτης εξίσωσης είναι και ρίζα της

δεύτερης. Εστω  $x_0$  μια ρίζα της εξίσωσης (1). Ας υποθέσουμε ότι το  $x_0$  δεν ικανοποιεί την εξίσωση (2). Τότε, ή  $x_0 > f(x_0)$  ή  $x_0 < f(x_0)$ . Εστω  $x_0 > f(x_0)$ . Αφού η  $f(x)$  είναι μονότονη, τότε

$$x_0 > f(x_0) > f(f(x_0)),$$

πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το  $x_0$  είναι ρίζα της εξίσωσης (1). Παρόμοια αντιμετωπίζουμε την περίπτωση  $x_0 < f(x_0)$ .

### M137

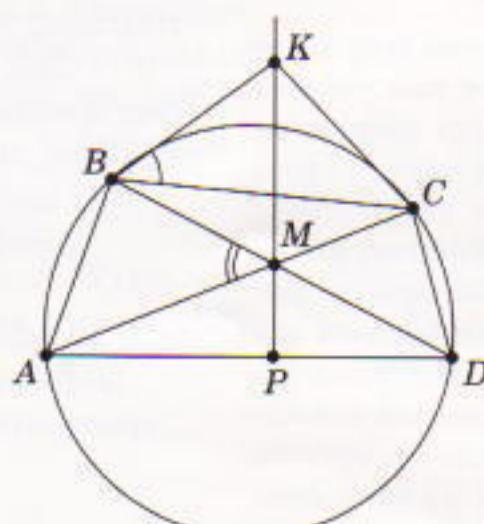
Ας αποδείξουμε ότι το  $K$  είναι κέντρο του περιγεγραμμένου στο τριγώνο  $BMC$  κύκλου. Πράγματι

$$\begin{aligned} \angle BKC &= 180^\circ - 2\angle KBC \\ &= 180^\circ - 2(90^\circ - \angle BMA) \\ &= 2\angle BMA = 360^\circ - 2\angle BMC. \end{aligned}$$

Αφού η  $\angle BMC$  είναι αμβλεία, αυτό σημαίνει ότι το  $K$  είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $BMC$ . Εστω  $P$  το σημείο τομής των  $KM$  και  $AD$  (βλ. Σχήμα 1). Αφού το σημείο  $K$  είναι κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα  $B$ ,  $M$  και  $C$ , έχουμε  $\angle MBC = \frac{1}{2}\angle MKC$ . Επίσης,

$$\begin{aligned} \angle AMP &= \angle KMC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MKC \\ &= 90^\circ - \angle MBC = 90^\circ - \angle MAP \end{aligned}$$

(η τελευταία ισότητα ισχύει διότι οι  $\angle MBC$  και  $\angle MAP$  βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου  $ABCD$ . Από το τριγώνο  $AMP$  βρίσκουμε ότι  $\angle APM = 90^\circ$ ).

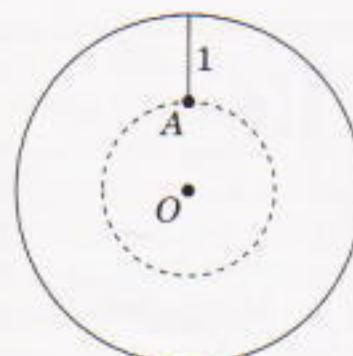


Σχήμα 1

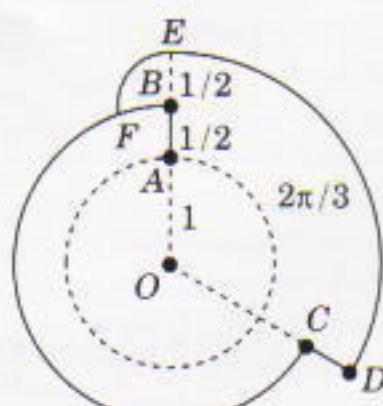
### M138

Μέρος (α): Δείτε το Σχήμα 2. Η μπουλντόζα, ξεκινώντας από το σημείο  $A$ , το οποίο απέχει 1 km από το κέντρο της φωτιάς, μπορεί να κινηθεί 1 km κατά μήκος μιας ακτίνας του κύκλου, και μετά να κινηθεί κατά μήκος της περιμέτρου του κύκλου με ακτίνα 2 km και κέντρο στο  $O$ . Το μήκος της συνολικής διαδρομής είναι  $1 + 4\pi < 14$  km. Αυτό σημαίνει ότι η φωτιά δεν θα μπορέσει να προχωρήσει 1 km μέσα σε αυτό το διάστημα και επομένως θα και είναι κύκλος εμβαδού  $4\pi$  km<sup>2</sup>.

Μέρος (β): Δείτε το Σχήμα 3. Η μπουλντόζα, ξεκινώντας από το σημείο  $A$ , μπορεί να κινηθεί 0,5 km κατά μήκος μιας ακτίνας του κύκλου της φωτιάς έως το σημείο  $B$  και μετά να ακολουθήσει το τόξο  $BC$  γωνίας  $4\pi/3$  (του κύκλου με ακτίνα 1,5 km και κέντρο το  $O$ ). Στη συνέχεια, μπορεί να ακολουθήσει την ακτίνα  $CD$  (του κύκλου με ακτίνα 2 km και κέντρο το  $O$ ) επί 0,5 km και μετά να κινηθεί πάνω στο τόξο  $DE$  (του ίδιου κύκλου) ακτί-



Σχήμα 2



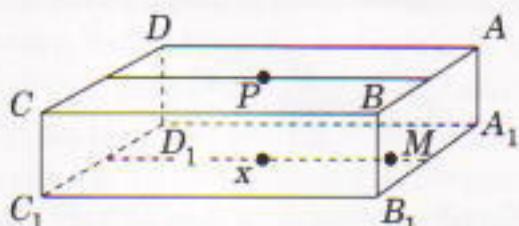
Σχήμα 3

νας  $2\pi/3$ . Ολοκληρώνει τη διαδρομή της κινούμενη επί του τόξου  $EF$  του κύκλου που έχει ακτίνα 0,5 km και κέντρο το  $B$  (το  $F$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο το  $O$  και ακτίνα 1,5 km).

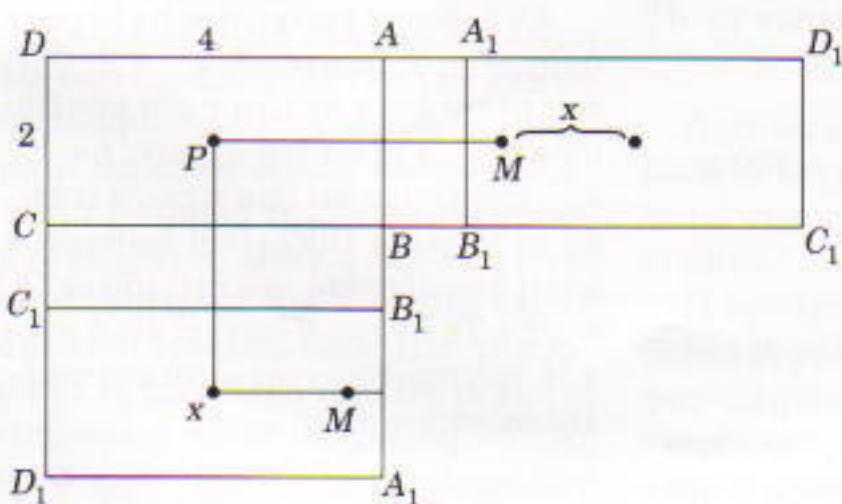
Για να αποδείξουμε ότι αυτή η διαδρομή αποκόβει τη φωτιά, αρκεί να αποδείξουμε ότι κατά τη διάρκεια της μετακίνησης της μπουλντόζας από το  $A$  στο  $C$  η φωτιά δεν μπορεί να διασχίσει περισσότερο από 0,5 km, και ότι δεν μπορεί να διασχίσει περισσότερο από 1 km μέχρι η μπουλντόζα να συμπληρώσει τη διαδρομή της. Αυτό ισοδυναμεί με το να αποδείξουμε ότι το μήκος της διαδρομής από το  $A$  στο  $C$  είναι το πολύ 7 και ότι το μήκος της διαδρομής από το  $A$  στο  $F$  είναι το πολύ 14. Το μήκος της διαδρομής από το  $A$  στο  $C$  είναι

$$0,5 + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} < 7.$$

Για να υπολογίσουμε το μήκος της διαδρομής από το  $A$  στο  $F$ , πρέπει να δείξουμε ότι  $\angle EBF < 2\pi/3$ . Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο  $OFB$  είναι ισοσκελές. Αν η  $BF$  ήταν ίση με 1, το τρίγωνο  $OFB$  θα ήταν ισόπλευρο και η  $\angle EBF$  ίση με  $2\pi/3$ . Αφού  $BF = 0,5 < 1$ , διαπιστώνουμε ότι  $\angle FBO > \pi/3$ , οπότε  $\angle EBF < 2\pi/3$ .



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Επομένως, το μήκος της διαδρομής από το  $A$  στο  $F$  είναι

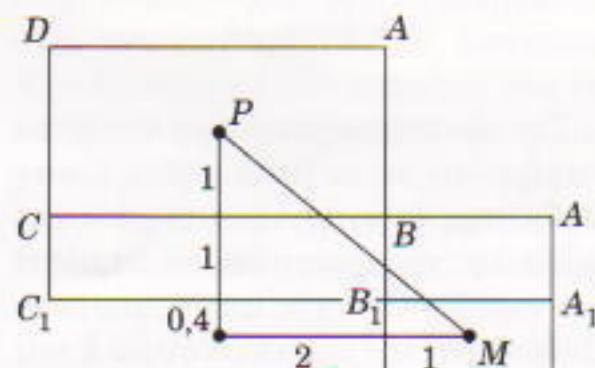
$$0,5 + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} + 0,5 + \frac{2\pi}{3} \cdot 2 + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} < 14.$$

Ας εκτιμήσουμε το εμβαδόν  $S$  της περιοχής που περικλείει η διαδρομή της μπουλντόζας:

$$S < \frac{2}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi 2^2 + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \frac{18+16+1}{12} < 3\pi.$$

M139

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , στο οποίο  $AB = 2$ ,  $BC = 4$ , και  $AA_1 = 1$ . Έστω  $P$  το κέντρο της έδρας  $ABCD$  (Σχήμα 4) όπου βρίσκεται το παλάτι του πρίγκιπα. Ας βρούμε ένα σημείο στο τμήμα που συνδέει τα μέσα των μικρών πλευρών της απέναντι έδρας τέτοιο ώστε η συντομότερη



Σχήμα 6

διαδρομή από το  $P$  ώς αυτό το σημείο, που διέρχεται από τις ακμές  $BC$  και  $B_1C_1$ , να ισούται με τη συντομότερη διαδρομή που διέρχεται από τις ακμές  $AB$  και  $A_1B_1$ . Έστω ότι αυτό το σημείο,  $M$ , βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από το κέντρο της έδρας  $A_1B_1C_1D_1$ . Ισχυρίζόμαστε ότι το  $M$  είναι το σημείο του πλανήτη Τούβλο που απέχει περισσότερο από το  $P$ .

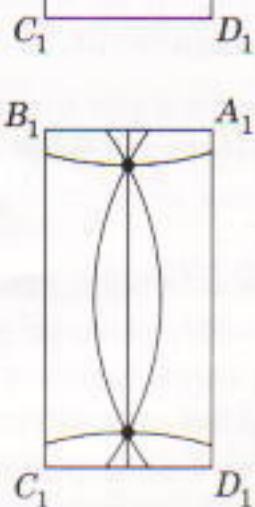
Ας βρούμε πρώτα τη συντομότερη διαδρομή από το  $P$  στο  $M$ . Στο Σχήμα 5 παρουσιάζονται δύο αναπτύγματα του παραλληλεπιπέδου. Από αυτά προκύπτει η εξίσωση

$$5 - x = \sqrt{9 + x^2},$$

από την οποία λαμβάνουμε  $x = 1,6$ . Γι' αυτό το  $x$ , το μήκος των διαδρομών που εξετάζουμε (από  $P$  στο  $M$ ) ισούται με 3,4.

Πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι κάθε διαδρομή από το  $P$  στο  $M$  είναι μεγαλύτερη ή ίση του 3,4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε διαδρομή από το  $P$  στο  $M$  που διασχίζει την  $BB_1$  (ή την  $AA_1$ ) είναι μεγαλύτερη του 3,4. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε διαδρομή που διασχίζει την ακμή  $AB$  δεν μπορεί να είναι μικρότερη του 3,4. Επίσης, κάθε διαδρομή που διέρχεται από τις  $BC$  και  $BB_1$  έχει μήκος  $\sqrt{3^2 + 2,4^2} > 3,4$  (Σχήμα 6). Συνεπώς δεν υπάρχει διαδρομή από το  $P$  στο  $M$  μικρότερη του 3,4.

Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι σε αυτή την έδρα δεν υπάρχει άλλο σημείο πιο απομακρυσμένο από το  $P$ . Αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις διαδρομές που διασχίζουν τις ακμές  $BC$  και  $B_1C_1$ , τις διαδρομές που διασχίζουν τις ακμές  $AB$  και  $A_1B_1$ , καθώς και τις διαδρομές που διασχίζουν ζεύγη αντίθετων ακμών. Οι τέσσερις αντίστοιχοι κύκλοι ακτίνας 3,4 καλύπτουν ολόκληρη την έδρα  $A_1B_1C_1D_1$  (Σχήμα 7). Το ότι η απόσταση από το  $P$  μέχρι οποιοδήποτε σημείο των άλλων τεσσάρων εδρών είναι μικρότερη του 3,4 είναι σχεδόν προφανές. Πράγματι, οι κορυφές αυτών των εδρών είναι επίσης κορυφές της έδρας  $A_1B_1C_1D_1$ , και επομένως έχουν τη μεγιστηριανή απόσταση από το  $P$ . Άρα, η απόσταση από το παλάτι του πρίγκιπα έως το πλέον απομακρυσμένο σημείο του πλανήτη είναι 3,4.



Σχήμα 7

## M140

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - 7x^2 + px - 9,$$

όπου  $q = ab + bc + ca$ . Οι ρίζες αυτού του πολυώνυμου είναι  $a, b$  και  $c$ . Από την εξίσωση  $P(x) = 0$  προκύπτει

$$q = -x^2 + 7x + 9/x.$$

Σχεδιάζουμε το γράφημα αυτής της συνάρτησης για  $x > 0$  (Σχήμα 8). Η μεταβλητή  $q$  μπορεί να πάρει τιμές μόνο τέτοιες ώστε οι ευθείες  $y = q$  να τέμνουν την καμπύλη σε τρία σημεία με τετρημένες  $a, b$  και  $c$  (δύο από αυτά μπορεί να συμπίπτουν, όταν η αντίστοιχη ευθεία είναι εφαπτόμενη της καμπύλης). Αν παραγωγίσουμε, παίρνουμε

$$q' = -2x + 7 - 9/x^2.$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου. Έχουμε την εξίσωση

$$2x^3 - 7x^2 + 9 = 0,$$

ή

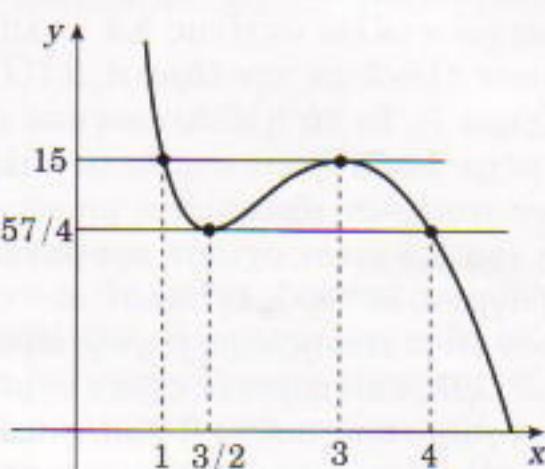
$$(x+1)(2x^2 - 9x + 9) = 0,$$

Αφού μας ενδιαφέρουν μόνο οι θετικές τιμές του  $x$ , παίρνουμε  $x_1 = 3/2$  και  $x_2 = 3$ . Η αρχική συνάρτηση  $q(x)$  έχει ελάχιστο στο σημείο  $x_1 = 3/2$  (που ισούται με  $57/4$ ) και μέγιστο στο σημείο  $x_2 = 3$  (που ισούται με 15). Η ευθεία  $q = 57/4$  εφάπτεται στην καμπύλη μας στο σημείο  $(3/2, 57/4)$  και την τέμνει στο σημείο  $(4, 57/4)$ . Αυτό το σημείο τομής μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$-x^2 + 7x + 9/x = 57/4,$$

η οποία μετασχηματίζεται στην

$$(2x - 3)^2(x - 4) = 0.$$



Σχήμα 8

Η ευθεία  $q = 15$  εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο  $(3, 15)$  και την τέμνει στο σημείο  $(1, 15)$ . Αυτό το σημείο τομής μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$-x^2 + 7x + 9/x = 15,$$

η οποία μετασχηματίζεται στην

$$(x - 3)^2(x - 1) = 0.$$

Έτσι προκύπτουν οι εξής περιορισμοί για τα  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned} 1 &\leq a \leq 3/2, \\ 3/2 &\leq b \leq 3, \\ 3 &\leq c \leq 4. \end{aligned}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι αυτές οι τιμές είναι πράγματι δυνατές.

## Φυσική

### Φ136

Έστω ότι ο μοναδιαίος όγκος αέρα περιέχει  $k$  νιφάδες. Τότε θα ισχύει:

$$N_1 = kS(u + u_x) \text{ και } N_2 = kS(u - u_x),$$

όπου  $u_x$  είναι η ταχύτητα του ανέμου στη διεύθυνση κίνησης της σκιέρ. Από αυτές προκύπτει ότι

$$k = \frac{N_1 + N_2}{2uS}.$$

Την ορατότητα μπορούμε να την εκτιμήσουμε ως το μέσο μήκος  $L$  κυλίνδρου με διατομή  $A$  όση το μέσο εμβαδόν της νιφάδας, ο οποίος περιέχει μία νιφάδα. Ο όγκος αυτού του κυλίνδρου επί την περιεκτικότητα  $k$  του αέρα σε νιφάδες θα πρέπει να ισούται με 1:

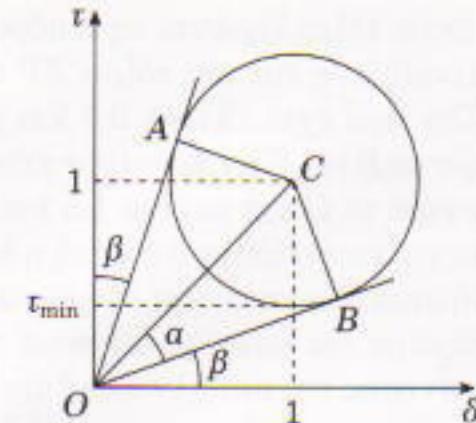
$$LAk = 1.$$

Λύνοντας ως προς  $L$ , και θεωρώντας ότι το  $A$  ισούται περίπου με  $d^2$ , λαμβάνουμε:

$$L = \frac{1}{kd^2} = \frac{2uS}{(N_1 + N_2)d^2} \approx 200 \text{ m.}$$

### Φ137

Σύμφωνα με την εξίσωση  $P = nkT$ , η συγκέντρωση  $n$  των ατόμων του ήλιου καθορίζεται από τη θερμοκρασία  $T$  και την πίεση  $P$  ( $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann). Κατά συνέπεια, μία ευθεία που διέρχεται από την



## Σχήμα 9

αρχή των αξόνων σε ένα σύστημα συντεταγμένων θερμοκρασίας-πίεσης αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη συγκέντρωση των ατόμων εφόσον σχηματίζει μικρότερη γωνία κλίσης με τον άξονα των  $P$ . Επομένως, στη διαδικασία που παριστάνεται το Σχήμα 9, η μέγιστη συγκέντρωση εμφανίζεται στο σημείο  $B$  και η ελάχιστη στο σημείο  $A$  (οι άξονες των διαγράμματος παριστάνουν τις ανηγμένες συντεταγμένες  $\tau = T/T_0$  και  $\delta = P/P_0$ ). Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$n_{\max} = \frac{P_B}{kT_B} = \frac{P_0 \sigma \phi \beta}{kT_0},$$

όπου  $\beta$  είναι η γωνία κλίσης τής  $BO$  ως προς τον άξονα των  $\delta$  στο «ανηγμένο διάγραμμα». Εφόσον τα τρίγωνα  $ACO$  και  $BCO$  είναι ίσα, η γωνία που σχηματίζουν η  $AO$  και ο άξονας των  $\tau$  ισούται επίσης με  $\beta$ , οπότε

$$n_{\min} = \frac{P_A}{kT_A} = \frac{P_0 \epsilon \phi \beta}{kT_0}.$$

Κατά συνέπεια, ο λόγος των συγκέντρωσεων ισούται με

$$\frac{n_{\min}}{n_{\max}} = \epsilon \phi^2 \beta.$$

Αν λάβουμε υπόψη πως η ελάχιστη ανηγμένη θερμοκρασία  $\tau_{\min} = T_{\min}/T_0$  του ήλιου και η ακτίνα  $r$  του κύκλου συνδέονται μέσω της σχέσης  $r = 1 - \tau_{\min}$ , βρίσκουμε ότι  $\eta \rho = r/\sqrt{2}$  (επειδή το τρίγωνο  $CBO$  είναι ορθογώνιο και η υποτείνουσά του έχει μήκος  $OC = \sqrt{2}$ ). Το Σχήμα 9 δείχνει ότι  $\alpha + \beta = \pi/4$ . χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, παίρνουμε

$$\frac{n_{\min}}{n_{\max}} = \epsilon \phi^2 \beta = \epsilon \phi^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$= \left( \frac{1 - \epsilon \varphi 2a}{1 + \epsilon \varphi 2a} \right)^2 = \frac{1 - \eta \mu 2a}{1 + \eta \mu 2a}$$

$$= \frac{1 - r\sqrt{2 - r^2}}{1 + r\sqrt{2 - r^2}}$$

$$= \frac{1 - (1 - \tau_{\min})\sqrt{2 - (1 - \tau_{\min})^2}}{1 + (1 - \tau_{\min})\sqrt{2 - (1 - \tau_{\min})^2}}$$

$$= \frac{1 - (1 - \tau_{\min})\sqrt{1 + 2\tau_{\min} - \tau_{\min}^2}}{1 + (1 - \tau_{\min})\sqrt{1 + 2\tau_{\min} - \tau_{\min}^2}}.$$

### Φ138

Εκ πρώτης όψεως, το πρόβλημα φαίνεται τετριμένο. Το λεπτό σύρμα μπορεί να αντέξει ρεύμα που η έντασή του δεν υπερβαίνει την τιμή  $I_1 = 1,8$  A, ενώ το μέγιστο ρεύμα στο χοντρό σύρμα είναι  $I_2 = 5$  A. Εφόσον τα ρεύματα αθροίζονται όταν τα σύρματα συνδέονται παράλληλα, το μέγιστο ρεύμα για τη σύνθετη ασφάλεια θα έπρεπε να είναι  $I_1 + I_2 = 6,8$  A. Ωστόσο, αυτός ο συλλογισμός βασίζεται στην ψευδή προκειμένη πώς κατά την κατανομή του ολικού ρεύματος των 6,8 A στα δύο σύρματα, στο μεν λεπτό σύρμα θα αντιστοιχεί ρεύμα 1,8 A, στο δε χοντρό 5 A. Στην πραγματικότητα, η κατανομή θα είναι εντελώς διαφορετική, δεδομένου ότι καθορίζεται από τις αντιστάσεις των συρμάτων και όχι από τα μέγιστα ρεύματα που επιτρέπεται να τα διαρρέουσον. Συνεπώς, όταν το ένα από τα σύρματα διαρρέεται από το μέγιστο ρεύμα, το ρεύμα στο άλλο σύρμα πρέπει να λαμβάνει, εν γένει, τιμή μικρότερη από τη μέγιστη. Άρα, το ολικό ρεύμα θα είναι μικρότερο από 6,8 A.

Το πρώτο βήμα στην κατεύθυνση της σωστής λύσης συνιστάται στο να προσδιορίσουμε ποιο από τα δύο σύρματα θα τακεί πρώτο καθώς αυξάνουμε βαθμιαία την ένταση του ολικού ρεύματος. Όταν η σύνδεση είναι παράλληλη, τα δύο σύρματα έχουν στα άκρα τους ίδια τάση. Έτσι το σύρμα με τη μικρότερη τιμή της μέγιστης επιτρεπτής τάσης θα καεί πρώτο. Ας προσδιορίσουμε το λόγο αυτών των μέγιστων επιτρεπτών τάσεων. Συμβολίζουμε με  $\ell$  το κοινό μήκος των

δύο συρμάτων και με  $\rho_0$  την ειδική αντίσταση του μολύβδου. Η αντίσταση του πρώτου σύρματος και η μέγιστη τάση του, αντιστοιχα, είναι

$$R_1 = \frac{\rho \ell}{\pi d_1^2}$$

και

$$V_1 = R_1 I_1 = \frac{\rho \ell I_1}{\pi d_1^2}.$$

Ομοίως για το δεύτερο σύρμα:

$$R_2 = \frac{\rho \ell}{\pi d_2^2}$$

και

$$V_2 = R_2 I_2 = \frac{\rho \ell I_2}{\pi d_2^2}.$$

Έτσι, ο ζητούμενος λόγος των τάσεων προκύπτει ίσος με

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_1 d_2^2}{I_2 d_1^2}.$$

Εισάγοντας τις αριθμητικές τιμές στην ανωτέρω εξίσωση καταλήγουμε στην ανισότητα  $V_1/V_2 > 1$ . Συνεπώς,  $V_2 < V_1$ , πράγμα που σημαίνει πώς θα καεί πρώτο το δεύτερο (δηλαδή το πιο χοντρό!) σύρμα. Εκείνη τη στιγμή διαρρέεται από το μέγιστο ρεύμα  $I_2 = 5$  A, ενώ το ρεύμα στο πρώτο σύρμα είναι μόλις

$$I'_1 = \frac{I_2 R_2}{R_1} = \frac{I_2 d_1^2}{d_2^2} = 1,25 \text{ A.}$$

Συνεπώς, το ολικό μέγιστο ρεύμα στη σύνθετη «ασφάλεια» θα ισούται με

$$I'_1 + I_2 = 6,25 \text{ A.}$$

Αμέσως μόλις καεί το παχύ σύρμα, όλο το ρεύμα θα διοχετεύτει στο λεπτό σύρμα, με αποτέλεσμα να καεί κι αυτό.

Η δεύτερη περίπτωση παρουσιάζει ακόμη μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Όταν το παχύ σύρμα φτάνει στο όριο της αντοχής του, το καθένα από τα λεπτά σύρματα διαρρέεται από το ρεύμα  $I'_1$ , οπότε το ολικό ρεύμα στην αντίσταση θα είναι

$$I'_{\text{ol}} = 20 I'_1 + I_2 = 30 \text{ A.}$$

Μολατάύτα, με το αποτέλεσμα αυτό δεν έχουμε λύσει το πρόβλημά μας: η ασφάλεια θα συνεχίσει να άγει ρεύμα ακόμη και όταν έχουν μείνει ανέπαφα μόνο τα λεπτά σύρματα! Σε αντίθεση με την πρώτη περίπτωση, το ρεύμα  $I'_{\text{ol}}$  θα κατανεμηθεί εξίσου στα 20 λεπτά σύρματα, και το καθένα από αυτά θα διαρρέεται από ρεύμα μικρότερο από το μέγιστο. Συνεπώς, η ασφάλεια θα συνεχίσει να άγει το ρεύμα ώσπου αυτό να φτάσει την τιμή

$$I'_{\text{ol}} = 20 I_1 = 36 \text{ A.}$$

### Φ139

Ας θεωρήσουμε το δακτύλιο όπως είναι τοποθετημένος οριζόντια (το Σχήμα 10 δίνει την κάτωφη του δακτυλίου). Επιλέγουμε δύο στοιχειώδη τμήματά του μήκους  $\Delta \ell$  που βρίσκονται σε σημεία  $C$  και  $D$  συμμετρικά ως προς τη διάμετρο  $AB$  του δακτυλίου. Στο πρώτο στοιχειώδες τμήμα ασκείται μια κατακόρυφη δύναμη με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο

$$\Delta F_1 = B I \Delta \ell \text{ ήμα} = B I \Delta x,$$

όπου  $\Delta x$  είναι η προβολή του  $\Delta \ell$  στη διάμετρο  $AB$ . Στο δεύτερο τμήμα ασκείται μια κατακόρυφη δύναμη με κατεύθυνση προς τα πάνω και μέτρο

$$\Delta F_2 = B I \Delta \ell \text{ ήμα} = B I \Delta x.$$

Αυτές οι δυνάμεις σχηματίζουν ένα ζεύγος δυνάμεων που παράγει μια στοιχειώδη ροπή ως προς τον άξονα  $AB$ :

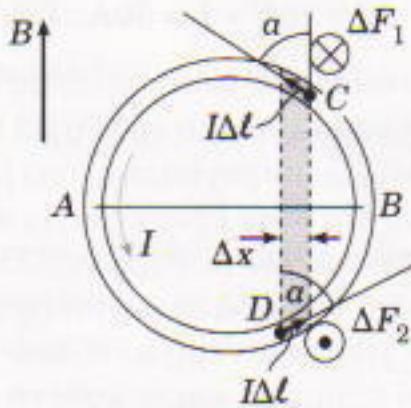
$$\Delta \tau = \Delta F_1 \ell_{CD} = B I \Delta x \ell_{CD} = B I \Delta S,$$

όπου με  $\Delta S$  συμβολίζουμε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής.

Στη συνέχεια, διαιρούμε το δακτύλιο σε παρόμοια ζεύγη μικρών τμημάτων συμμετρικών ως προς τον άξονα  $AB$ . Διαπιστώνουμε πως σε έναν λεπτό αγώγιμο δακτύλιο ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα  $I$  και είναι τοποθετημένος σε οριζόντιο μαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται ροπή

$$M_{\text{pay}} = B I S = B I \pi R^2$$

λόγω των μαγνητικών δυνάμεων. Η εν λόγω ροπή τείνει να περιστρέψει το δακτύλιο γύρω από τον οριζόντιο άξονα  $AB$ .



Σχήμα 10

Όταν ο δακτύλιος αρχίσει μόλις να σηκώνεται, δύο δυνάμεις θα αντιταχτούν στην περιστροφή του: η κατακόρυφη δύναμη της βαρύτητας  $mg$ , η οποία εφαρμόζεται στο κέντρο του δίσκου και έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, και η κάθετη δύναμη  $N$  με κατεύθυνση προς τα πάνω, που εφαρμόζεται στο σημείο στήριξης του δακτύλου. Καθώς ο δακτύλιος εξακολουθεί να ισορροπεί, θα πρέπει να ισχύει

$$mg - N = 0, \text{ ή } mg = N,$$

οπότε οι μηχανικές δυνάμεις σχηματίζουν ένα άλλο ζεύγος, που παράγει ροπή

$$M_{\mu_{\text{ρω}}} = mgR.$$

Στην ισορροπία, η συνολική ροπή των ασκούμενων δυνάμεων θα πρέπει να ισούται με μηδέν:

$$M_{\mu_{\text{ρω}}} - M_{\mu_{\text{ρχ}}} = 0,$$

ή

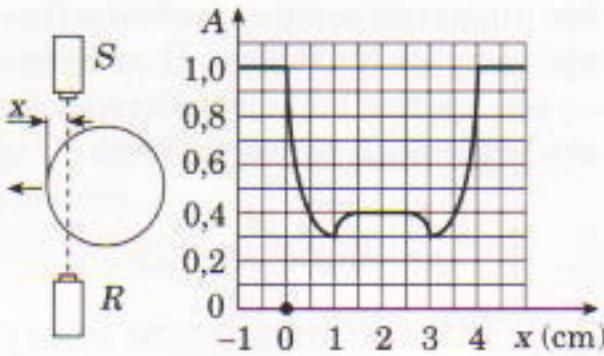
$$BI\pi R^2 - mgR = 0.$$

Η εξίσωση αυτή μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη ζητούμενη τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος:

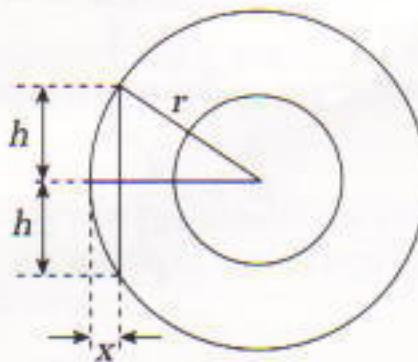
$$I = \frac{mg}{\pi BR}.$$

#### Φ140

Το διάγραμμα του Σχήματος 11 δείχνει πως τα τοιχώματα του κυλίνδρου έχουν πάχος 1 cm και εξωτερική διάμετρο  $d = 4$  cm. Για να λύσουμε το πρόβλημα, μπορούμε απλώς να συγκρίνουμε την ένταση της ακτινοβολίας στο μέσον του κυλίνδρου, στο  $x = 2$  cm (στο σημείο αυτό η ακτινοβολία διέρχεται από το περιεχόμενο του κυλίνδρου και από τα δύο αντικριστά μέρη του τοιχώματος συνολικού πάχους 2 cm), με την ένταση της



Σχήμα 11



Σχήμα 12

ακτινοβολίας εκεί όπου το ολικό πάχος του μετάλλου που διαπερνά η ακτινοβολία είναι επίσης 2 cm. Εάν αυτές οι δύο τιμές συμπίπτουν απολύτως, τότε ο κύλινδρος είναι κενός.

Από τη γεωμετρία της διάταξης (Σχήμα 12) συμπεραίνουμε ότι ισχύει η σχέση

$$r^2 = h^2 + (r - x)^2,$$

όπου  $r = d/2 = 2$  cm και  $h = 1$  cm.

Επομένως,

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,28 \text{ cm},$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,72 \text{ cm}.$$

Το διάγραμμα δείχνει πως στο  $x = 2$  cm η ένταση είναι 0,4 μονάδες, ενώ στα  $x = x_1$  και  $x = x_2$  ισούται περίπου με 0,5 μονάδες —τιμή κατά τι μεγαλύτερη. Συμπεραίνουμε, επομένως, πως ο κύλινδρος δεν είναι κενός.

#### Σπαζοκεφαλιές

#### Σ136

Οντως έχει δίκιο. Θα βρούμε εύκολα αριθμούς που ικανοποιούν την εξίσωση αν παρατηρήσουμε ότι 365 είναι το πλήθος των ημερών ενός (όχι δισεκτου) έτους, ενώ 28, 30 και 31 είναι το δυνατό πλήθος ημερών ενός μήνα. Επομένως, μια λύση είναι  $x = 1$ ,  $y = 4$ ,  $z = 7$ .

#### Σ137

Πρώτα, ανάβουμε ταυτόχρονα και τις δύο άκρες του ενός φιτιλιού και τη μία άκρη του δεύτερου. Το πρώτο φιτίλι θα καεί σε 30 s. Μόλις καεί ολόκληρο, ανάβουμε και την άλλη άκρη του δεύτερου. Το δεύτερο φιτίλι θα εξακολουθήσει να καίγεται επί 15 s και θα έχουμε έτοι μετρήσει συνολικά 45 s. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι ο μεταβλητός ρυθμός καύσης των δύο φιτιλιών δεν έχει σημασία.

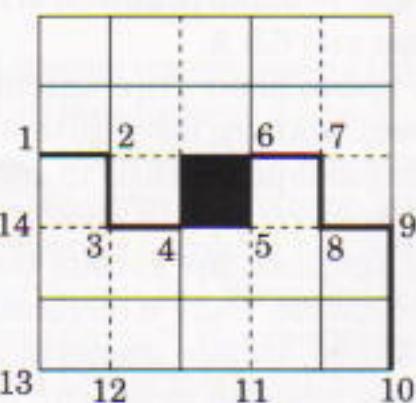
#### Σ138

Ο επταψήφιος αριθμός που σχηματίζεται με την αφαίρεση των κομμάτων μεγιστοποιείται όταν υπάρχουν όσο το δυνατόν περισσότερα 9 στις θέσεις των αριστερών του ψηφίων. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε τέσσερα 9: όπως και να κατανείμουμε τα υπόλοιπα τρία ψηφία ώστε να σχηματιστούν δύο (θετικοί) ακέραιοι, οι διαφορές μεταξύ τους θα είναι τόσο μικρές ώστε δεν θα έχουμε αριθμητική πρόσοδο.

Πρέπει λοιπόν να δοκιμάσουμε με τρία ψηφία 9. Έστω ότι ο επταψήφιος αριθμός είναι ο 999ABCD. Με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως μπορούμε να δείξουμε ότι ο τρίτος αριθμός πρέπει να είναι μονοψήφιος: επομένως η αριθμητική πρόσοδος θα είναι 999, ABC, D. Έπειτα ότι  $D = 2(ABC) - 999$ , και ζητάμε να μεγιστοποιήσουμε το ABC. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το μέγιστο ABC προκύπτει για μέγιστο D, και έτοιμη θέτουμε  $D = 9$ . Άρα, η ζητούμενη ακολουθία είναι: 999, 504, 9.

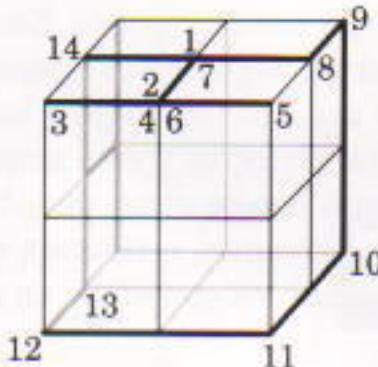
#### Σ139

Μια λύση απεικονίζεται στα Σχήματα 13 και 14.



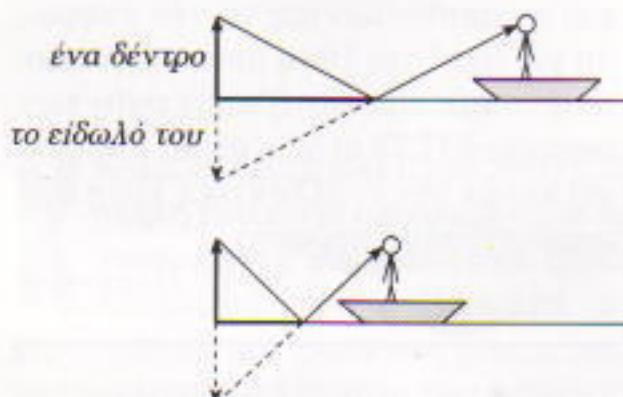
Σχήμα 13

Οι συνεχείς γραμμές δείχνουν τις πλευρές κατά μήκος των οποίων πρέπει να κόψουμε οι διακεκομμένες, αυτές κατά μήκος των οποίων διπλώνουμε.



### Σχήμα 14

Η έντονη γραμμή δείχνει το σύνορο ενός τμήματος.



### Σχήμα 15

### Σ140

Η απάντηση απεικονίζεται στο Σχήμα 15.

## Στο μαυροπίνακα II

### Προβλήματα

$$5. \text{ Απάντηση: } u^8 + 1/u^8 = 1154.$$

Υπόδειξη: Ο αριθμός  $u = 1 + \sqrt{2}$  είναι ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $t^2 - 2t - 1$ , την άλλη ρίζα της οποίας μπορούμε να γράψουμε ως  $-1/u$ . Βρίσκουμε έτσι ότι

$$\begin{aligned} u - 1/u &= 2, \\ u^2 + 1/u^2 &= 6, \\ u^4 + 1/u^4 &= 34, \\ u^8 + 1/u^8 &= 1154. \end{aligned}$$

$$10. \text{ Απάντηση: } (1, 2, 1/2), (1, 1/2, 2), (1/2, 1, 2), (1/2, 2, 1), (2, 1, 1/2), (2, 1/2, 1).$$

Υπόδειξη: Αν θέσουμε

$$x + y + z = a,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x)(t - y)(t - z) \\ &= t^3 - at^2 + at - 1 \\ &= (t - 1)(t^2 + t + 1 - at). \end{aligned}$$

Επομένως, μία από τις μεταβλητές ισούται με 1. Μπορούμε τώρα να λύσουμε το σύστημα με άμεσο υπόλογισμό.

13. Απάντηση:  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ . Υπόδειξη: Θέτουμε

$$\begin{aligned} P(t) &= t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n \\ &= (t - x_1)(t - x_2) \cdot \dots \cdot (t - x_n). \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} 0 &= P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) \\ &= n + na_1 + \dots + na_{n-1} + na_n = nP(1), \end{aligned}$$

και επομένως, ένας από τους αριθμούς (για παράδειγμα, το  $x_1$ ) ισούται με 1. Μπορούμε τώρα να βρούμε παρόμοια συστήματα για τα  $x_2, \dots, x_n$ , και ούτω καθεξής.

### Ασκήσεις

1. Υπόδειξη:

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \varphi - 1 &= 0, \\ \varphi^4 &= (1 - \varphi)^2 = 1 - 2\varphi + (1 - \varphi) = 2 - 3\varphi, \\ \varphi^8 &= 4 - 12\varphi + 9\varphi^2 = 13 - 21\varphi. \end{aligned}$$

2. Απάντηση: 1 cm, 8 cm, 15 cm.

Υπόδειξη: Αν  $x, y, z$  είναι τα τρία διαφορετικά μήκη των ακμών του παραλληλεπέδου, τότε

$$\begin{aligned} 4(x + y + z) &= 96, \\ 2(xy + yz + zx) &= 286, \\ xyz &= 120. \end{aligned}$$

Επομένως, είναι ρίζες της εξίσωσης

$$t^3 - 24t^2 + 143t - 120 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα αυτής της εξίσωσης. Οι υπόλοιπες ρίζες μπορούν τώρα να βρεθούν εύκολα.

3. Απάντηση:  $(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)$ .

Υπόδειξη: Η πρώτη και η δεύτερη εξίσωση, σε συνδυασμό με τους τύπους του Viète, συνεπάγονται ότι τα  $x, y, z$  είναι ρίζες της εξίσωσης

$$t^3 - t^2 - t + r = 0$$

(αφού

$$xy + yz + zx =$$

$$\frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = -1.$$

Επομένως, όπως και στα Προβλήματα 3 και 4, έχουμε

$$t^5 = (3 - r)t^2 - (2 - r)t - 2r,$$

για  $t = x, y, z$ . Αν προσθέσουμε αυτές τις σχέσεις και χρησιμοποιήσουμε την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήμα-

τος, βρίσκουμε ότι  $r = 1$ . Δηλαδή, τα  $x, y, z$  είναι ρίζες του πολυωνύμου

$$t^3 - t^2 - t + 1 = (t - 1)^2(t + 1).$$

4. Απάντηση:

$$\begin{aligned} 5(x - y)(y - z)(z - x) &\times \\ &\times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ρίζες τα

$$\begin{aligned} u &= x - y, \\ v &= y - z, \\ w &= z - x, \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε όπως στο Πρόβλημα 8, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $u + v + w = 0$ .

5. Υπόδειξη: Αν

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - x)(t - y)(t - z) \\ &= t^3 + pt^2 + qt + r, \end{aligned}$$

τότε

$$-r > 1, \quad -p < q/(-r).$$

Αν θέσουμε  $t = 1$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 + p + q + r > 1 + p + pr + r \\ &= (1 + p)(1 + r) > 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή,  $(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 0$ .

## Καθειδοσκόπιο

1. Γύρω από το τμήμα της σταγόνας που βρίσκεται σε επαφή με την ερυθροπυρωμένη εστία σχηματίζεται ένα στρώμα υδρατμού, το οποίο αναγκάζει τη σταγόνα να τιναχτεί προς τα πάνω.

2. Όταν έχουμε αύξηση της θερμοκρασίας.

3. Όταν η θερμοκρασία του αέρα παίρνει τη χαμηλότερη τιμή της (συνήθως γύρω στις 5 π.μ.).

4. Η εξάτμιση του ιδρώτα ελαττώνει δραστικά τη θερμοκρασία του σώματος στην έρημο, ο υγρός αέρας, όμως, εμποδίζει την εξάτμιση. Έτσι, το σώμα μπορεί να υπερθερμανθεί πολύ εύκολα.

5. Στο χώρο γύρω από το στοιβαγμένο χιόνι η θερμοκρασία είναι χαμηλότερη, με αποτέλεσμα σ' εκείνη την περιοχή η σχετική υγρασία του αέρα να είναι υψηλότερη. Κατά συνέπεια, η εξάτμιση των υδρατμών γίνεται με αργό ρυθμό, και έτσι είναι πιθανόν να πραγματοποιηθεί ακόμη και συμπύκνωσή του.

6. Η τάση κορεομένων υδρατμών έξω από το δωμάτιο είναι υψηλότερη. Όταν λοιπόν το παράθυρο είναι ανοιχτό, οι υδρατμοί φεύγουν με ταχύ ρυθμό προς τα έξω, με αποτέλεσμα τα ρούχα να στεγνώνουν γρηγορότερα.

7. Οχι, διότι αντί για αραιωμένο αέρα και υποπίεση, θα υπάρχουν υδρατμοί σε πίεση ίση με την ατμοσφαιρική.

8. Με συμπίεση, ψύξη ή και τα δύο.

9. Ναι, όταν έχουμε κορεσμένους υδρατμούς πάνω από ένα υγρό.

10. Η στάθμη του υγρού θα ανέλθει στο στενότερο δοχείο. Η διαφυγή των υδρατμών από το φαρδύτερο δοχείο παύει, με αποτέλεσμα οι υδρατμοί που περιέχει να καθίστανται κορεσμένοι, κι έτσι η τάση τους ξεπερνά την πίεση στο στενότερο δοχείο.

11. Οχι. Κατά τη συμπίεση οι υδρατμοί συμπυκνώνονται και η τάση τους παραμένει αμετάβλητη.

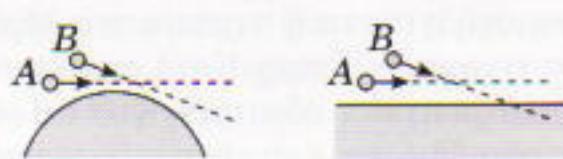
12. Με την ανακίνηση αυξάνεται η επιφάνεια εξάτμισης, κι αυτό συνέπαγεται υψηλότερη πίεση των υδρατμών.

13. Η απόλυτη υγρασία είναι υψηλότερη πάνω από το ποτάμι απ' ό,τι πάνω από την επιφάνεια του εδάφους.

14. Οι υδρατμοί, οι οποίοι γύρω από τις μικρότερες σταγόνες δεν είναι κορεσμένοι, γίνονται υπέρκοροι γύρω από τις μεγαλύτερες σταγόνες. Το μόριο *B* (Σχήμα 16), το οποίο εισέρχεται στο υγρό όταν η επιφάνεια του είναι επίπεδη, εξακολουθεί να παραμένει γύρω από το υγρό όταν η επιφάνεια είναι καμπυλωμένη.

### Μικροπειραματισμοί

Το καπάκι της μιας τσαγιέρας δεν ανασηκώνεται, γιατί εκείνη περιέχει λιγότερο νερό κι έτσι οι υδρατμοί απομακρύνονται μέσω του στομίου της. Η άλλη τσαγιέρα περιέχει μεγαλύτερη ποσότητα νερού, οπότε οι υδρατμοί συγκεντρώνονται ακριβώς κάτω από το καπάκι, με αποτέλεσμα κατά διαστήματα να το ανασηκώνουν προκειμένου να διαφύγουν.



Σχήμα 16

### Ανάδραση

Το πρόβλημα του αγώνα δρόμου μεταξύ των οβίδων (Φ127, τεύχος Ι-ουλίου / Αυγούστου 1998) έλεγε: Μια οβίδα βάλλεται οριζόντια από την κορυφή βουνού, σε υψόμετρο  $h = 1$  km, με ταχύτητα  $v = 500$  m/s. Επειτα από χρόνο  $t_0 = 1$  s βάλλεται δεύτερη οβίδα, η οποία «κυνηγά» την πρώτη. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα της δεύτερης οβίδας και υπό ποια γωνία πρέπει να βληθεί ώστε να χτυπήσει την πρώτη;

Με την παραδοχή ότι ο συγγραφέας εννοούσε πως η σύγκρουση των δύο βλήματων πρέπει να συμβεί ενόσω βρίσκονται στον αέρα, η απάντηση που δίνεται είναι εσφαλμένη. Όπως ορθά επισημαίνει ο συγγραφέας στην ανάλυσή του, η ταχύτητα λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της ακριβώς προτού τα δύο βλήματα χτυπήσουν στο έδαφος. Για να συγκρουστούν νωρίτερα τα δύο βλήματα απαιτείται μεγαλύτερη ταχύτητα.

Η πρώτη οβίδα θα προσκρούσει στο έδαφος τη χρονική στιγμή  $T = \sqrt{2h/g} = 100/7$  s σε οριζόντια απόσταση  $x = (500 \text{ m/s})T = 50.000/7$  m από την αφετηρία της. Η δεύτερη οβίδα πρέπει να φτάσει στο ίδιο σημείο σε χρόνο  $t = (T - 1 \text{ s}) = 93/7$  s. Συνεπώς, μετά την πάροδο χρόνου  $t$ , η οριζόντια απόσταση της δεύτερης οβίδας από την αφετηρία της πρέπει να ισούται με  $v_0 \sin a_0 t = 50.000/7$  m.

Ομοίως, μετά την πάροδο χρόνου  $t$ , η κατακόρυφη απόσταση του δεύτερου βλήματος από την αφετηρία του πρέπει να δίνεται από την  $-1.000 \text{ m} = -gt^2/2 + v_0 \eta \mu a_0 t$ . Η εξίσωση της οριζόντιας μετατόπισης οδηγεί στη σχέση  $v_0 \eta \mu a_0 = 50.000/93$  m/s. Η εξίσωση της κατακόρυφης μετατόπισης δίνει  $v_0 \eta \mu a_0 = -945,7/93$  m/s. Διατίρωντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις λαμβάνουμε  $\epsilon \varphi a_0 = -945,7/50.000$ , ή  $a_0 = \text{τοξεφ}(-0,018914)$ . Έτσι, η ελάχιστη ταχύτητα θα ισούται με

$$\frac{50.000}{93 \sin a_0} \text{ m/s} \equiv 537,73 \text{ m/s.}$$

Άρα, η απάντηση του συγγραφέα, σύμφωνα με την οποία η ελάχιστη ταχύτητα ισούται με 535,1 m/s, δεν είναι ορθή.

Δεν είναι δύσκολο να εντοπίσουμε

το σφάλμα του συγγραφέα. Στον υπολογισμό της ταχύτητας ν' χρησιμοποιεί αντί του χρόνου πτήσης του δεύτερου βλήματος το χρόνο πτήσης του πρώτου, ο οποίος είναι μεγαλύτερος κατά  $t_0$ . Συνεπώς, η εξίσωση για την ν' θα έπρεπε να γραφεί με τη μορφή

$$v' = \frac{s_0}{\sqrt{\frac{2h}{g} - t_0}}.$$

Χρησιμοποιώντας την τιμή  $t_0 = 1$  s και αντικαθιστώντας τη νέα έκφραση για τη ν' στη λύση του συγγραφέα, παίρνουμε τη σωστή απάντηση των περίου 537,73 m/s, η οποία συμφωνεί και με την εναλλακτική λύση που παρουσιάσαμε παραπάνω.

—John W. Hanneken

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 72

### Το κτήμα του Dougan

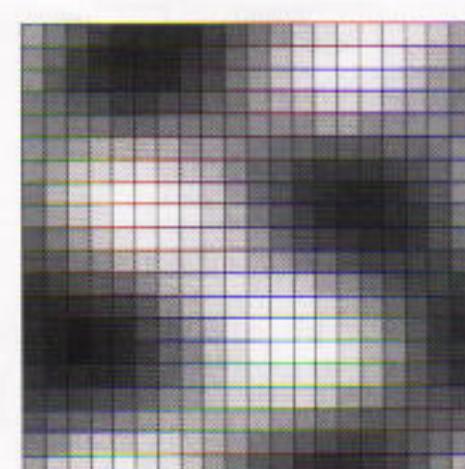
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο τοπολογικό χάρτη του κτήματος του Dougan.

```
f[x_, y_] := 7. Sin[x/3.] Cos[y/2.] - 5. Cos[x/3.] Sin[y/5.]
DF = Transpose[Table[Floor[f[x, y]], {x, 1, 20}, {y, 1, 20}]];
Plot3D[f[x, y], {x, 1, 20}, {y, 1, 20}, PlotRange -> All,
PlotPoints -> 30].
```

### Διάγραμμα πυκνότητας

Στο επόμενο διάγραμμα πυκνότητας, τα ανοικτόχρωμα τετράγωνα αντιπροσωπεύουν τα μεγαλύτερα υψόμετρα ενώ τα σκοτεινά αντιπροσωπεύουν τα μικρότερα.

```
elevations = ListDensityPlot[DF, Frame -> False].
```



# Εξολοθρευτής μυγών

*Ένα επαναστατικό μηχάνημα στον αγώνα ενάντια στις αλογόμυγες*

Δρ. Χμ

**Κ**ΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη που σίναι αφιερωμένη σε προβλήματα που λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά. Οι αλογόμυγες είναι ένας από τους χειρότερους εχθρούς όλων των ζώων στη φάρμα του κυρίου Πωλ. Αυτά τα ενοχλητικά πλάσματα μας επιτίθενται ανελέητα μπαίνοντας κυριολεκτικά κάτω από το πετσί μας. Οι πρόγονοί μας, που πρέπει επίσης να υπέφεραν εξαιτίας του ίδιου προβλήματος, ανέπτυξαν ένα ευέλικτο αμυντικό όπλο που τοποθέτησαν, για να μην υπάρχει κίνδυνος να το χάσουμε, στα οπίσθιά μας.

Ο κύριος Πωλ έχει καταφέρει να αντιμετωπίσει το πρό-

βλημα των μυγών μέσα στο στάβλο εκμεταλλευόμενος την ανοησία τους. Έχει κατασκευάσει έναν αμυδρά φωτισμένο στενό προθάλαμο, μέσα από τον οποίο μπαίνουμε στο στάβλο. Στη μέση περίπου του προθαλάμου έχει τοποθετήσει, αρκετά χαμηλά ώστε να πρέπει να σκύβουμε το κεφάλι μας όταν περνάμε, μια κουβέρτα που «σκουπίζει» τις μύγες από το κεφάλι, το σβέρκο και την πλάτη μας. Ετοι, οι μύγες απομένουν μέσα στο μισοσκόταδο μέχρι να εντοπίσουν μια φωτεινή σχισμή στην οροφή. Πετάνε τότε εκεί και βρίσκονται σε ένα μεγάλο κλειστό δωμάτιο γεράτο με παράθυρα. Δεν έχουν το θάρρος να επιστρέψουν στον σκοτεινό προθάλαμο και έτσι παραμένουν εκεί και



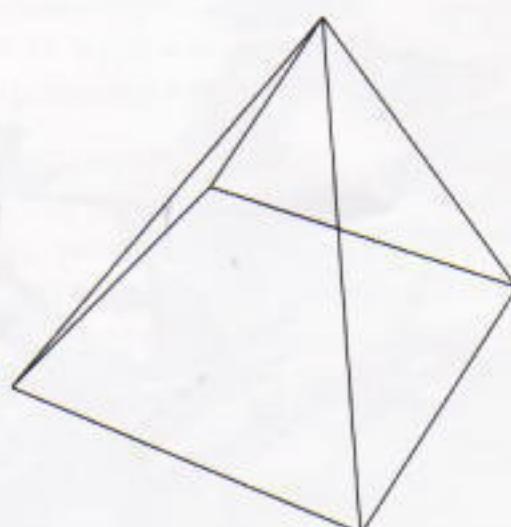
Εικονογράφος: Mark Brenneman

πεθαίνουν χτυπώντας με τις ώρες πάνω στα παράθυρα στην προσπάθεια να βρουν έναν τρόπο διαφυγής.

Στο λιβάδι, όμως, που τόσο μας αρέσει να καθόμαστε τις καλοκαιρινές μέρες, τα πράγματα είναι εκτός ελέγχου. Θέλοντας να απαλλάξει την περιοχή από τις αλογόμυγες για τα καλά, ο κύριος Πωλ κατασκεύασε έναν πρωτότυπο εξολοθρευτή μυγών. Πρόκειται για μια γεννήτρια ηλεκτρικών εκκενώσεων την οποία τοποθέτησε σε ένα μικρό αεροπλάνο που πετάει πάνω από τα λιβάδια (πλότος είναι η φίλη μου η Μπέσυ). Με το πάτημα ενός κουμπού, ένα φορτίο θανάτου, πολυεδρικού σχήματος, πέφτει πάνω στη γη. Κάθε μύγα που βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυέδρου, κοντά σε σημείο με ακέραιες συντεταγμένες, κυριολεκτικά ψήνεται.

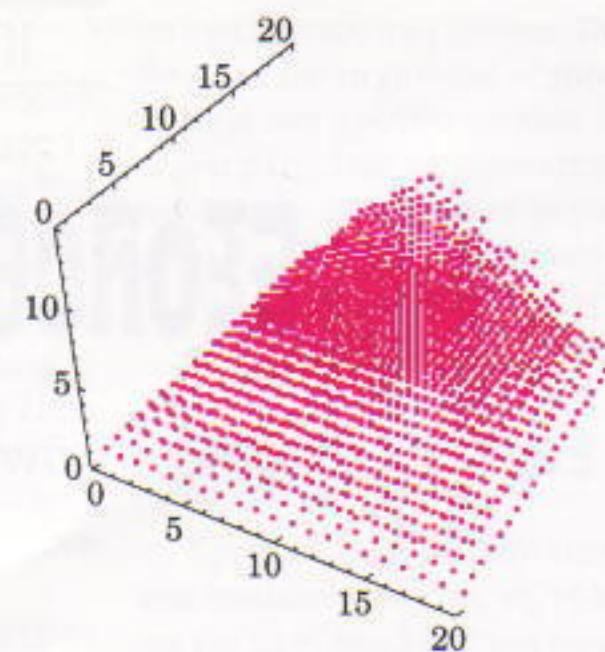
Ας δούμε τη μαθηματική πλευρά του ζητήματος. Το κτήμα του κυρίου Πωλ έχει σχήμα τετραγώνου, πλευράς 12.000 μέτρων. Στις τέσσερις γωνίες του τετραγώνου ο κύριος Πωλ έχει τοποθετήσει τέσσερις συσκευές που προσέλκυουν το φορτίο. Ο εξολοθρευτής απελευθερώνει το φορτίο του στη θέση  $(z, a, p)$  (τα  $z, a, p$  είναι ακέραιοι). Εποιητικά, μεταξύ αυτού του σημείου και των τεσσάρων γωνιών του κτήματος σχηματίζεται ένα πολύεδρο. Αυτό παρουσιάζεται στο *Mathematica* ως εξής: Τοποθετούμε τη μία από τις κορυφές του τετράγωνου κτήματος στο  $(0, 0, 0)$  και τις υπόλοιπες στα σημεία  $(0, 12000, 0)$ ,  $(12000, 12000, 0)$  και  $(12000, 0, 0)$ .

```
side = 12000; (*Μήκος της μιας πλευράς του
κτήματος σε μέτρα*)
zap = {6000, 9000, 10000}; (*Σημείο
απελευθέρωσης του φορτίου πάνω από το κτήμα*)
polyedron = Line[{{0, 0, 0}, {0, side, 0},
{side, side, 0}, {side, 0, 0}, {0, 0, 0},
zap, {0, side, 0}, {side, side, 0}, zap,
{side, 0, 0}}];
Show[Graphics3D[polyedron], Boxed -> False]
```



Στην εικόνα της επόμενης στήλης βλέπουμε το σύνολο των 1665 μυγών που παγιδεύονται μέσα σε ένα πολύεδρο με ακμή βάσης 20, όταν το σημείο απελευθέρωσης του φορτίου είναι το  $\{12, 12, 14\}$ .

Όλα αυτά μας οδηγούν σε ένα πρόβλημα το οποίο, όπως μαντέψατε, είναι η επόμενή μας πρόκληση.



## ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 12

Πόσες μύγες παγιδεύονται πάνω από το κτήμα του κυρίου Πωλ όταν ο εξολοθρευτής απελευθερώνει το φορτίο του στο σημείο  $\{6000, 9000, 10000\}$ , αν υποθέσουμε ότι το κτήμα έχει μήκος πλευράς 12000; Γράψτε ένα πρόγραμμα που δέχεται οποιοδήποτε σημείο απελευθέρωσης με ακέραιες συντεταγμένες και οποιοδήποτε ακέραιο μήκος πλευράς. Το πρόγραμμα να υπολογίζει το πλήθος των σημείων τα οποία έχουν ακέραιες συντεταγμένες και βρίσκονται στο εσωτερικό του πολυέδρου που σχηματίζουν το τετράγωνο της βάσης και το σημείο απελευθέρωσης του φορτίου. Μην περιλάβετε τις μύγες στην επιφάνεια του πολυέδρου.

## Λύση του ΙΠΠΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 10

Στο ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 10 σας ζητήθηκε να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα βρίσκει τη συντομότερη διαδρομή γύρω από ένα τυχαίο κοπάδι και θα υπολογίζει το μήκος της. Ας θυμηθούμε τον τρόπο κατασκευής ενός τυχαίου κοπαδιού:

```
cows := {Random[], Random[]}
cows := Table[cow, {40}];
herd = {PointSize[.02], Point/@ cows};
Show[Graphics[herd]];
```



Επίσης, δώσαμε μια συνάρτηση που μετρά το μήκος της διαδρομής.

```
pathlength[path_] := (Apply[Plus,
Map[Sqrt[#.#] &, path - RotateRight[path]])
```

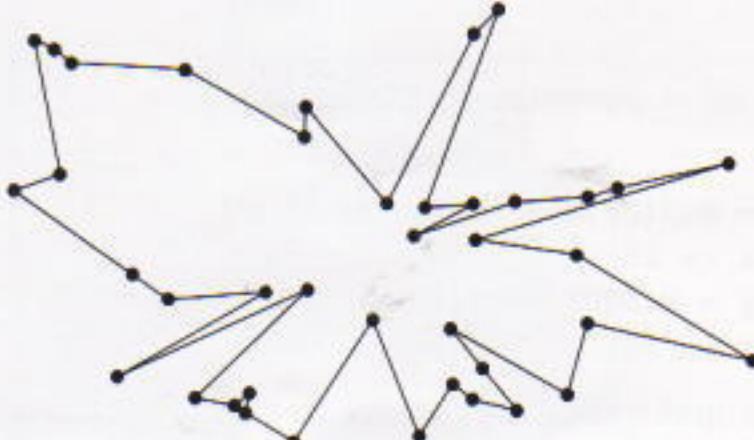
Κατασκευάσαμε επίσης και μια απλή κλειστή διαδρομή γύρω από το κοπάδι με βάση το κέντρο βάρους του κοπαδιού. Η σειρά με την οποία περνάμε από τις αγελάδες καθορίζεται από τη γωνία που σχηματίζει η θέση της αγελάδας με το κέντρο βάρους του κοπαδιού.

```

angle[a_, b_] := Apply[ArcTan, (b - a)]
centroid = Apply[Plus, cows] /Length[cows]
cows = Sort[cows, (angle[centroid, #1]
    <= angle[centroid, #2])&];
route = Line[Join[cows, {First[cows]}]];
Print["Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = ", pathlength[cows]]
p1 = Show[Graphics[{route, herd}]]
```

Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = 6.28958

Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = 6.28958



Η βασική ιδέα για να βρούμε τη συντομότερη διαδρομή γύρω από το κοπάδι είναι να αποφύγουμε όλες τις αγελάδες που συναντάμε έπειτα από δεξιά στροφή όταν διατρέχουμε αριστερόστροφα την απλή κλειστή διαδρομή. Ας υποθέσουμε ότι κατά τη διαδρομή μας συναντάμε τρεις διαδοχικές αγελάδες: u, v και w. Αποδεικνύεται ότι συναντάμε την αγελάδα v έπειτα από δεξιά στροφή αν η ορίζουσα

$$\begin{pmatrix} v-u \\ w-v \end{pmatrix}$$

είναι αρνητική και έπειτα από αριστερή στροφή αν είναι θετική. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός και να ορίσουμε έναν έλεγχο για το αν μια στροφή είναι αριστερή.

```
Leftturn[{u_, v_, w_}] := Det[{v - u,
w - v}] >= 0
```

Η λύση μας στο *Mathematica* έγκειται στο να θεωρήσουμε όλες τις τριάδες διαδοχικών αγελάδων, να διαγράψουμε αυτές που συναντάμε έπειτα από δεξιές στροφές και να επαναλάβουμε τη διαδικασία έως ότου δεν θα έχουμε αλλαγή στο πλήθος των αγελάδων. Ξεκινάμε με μια συνάρτηση που διαγράφει τις αγελάδες τις οποίες συναντάμε έπειτα από δεξιά στροφή.

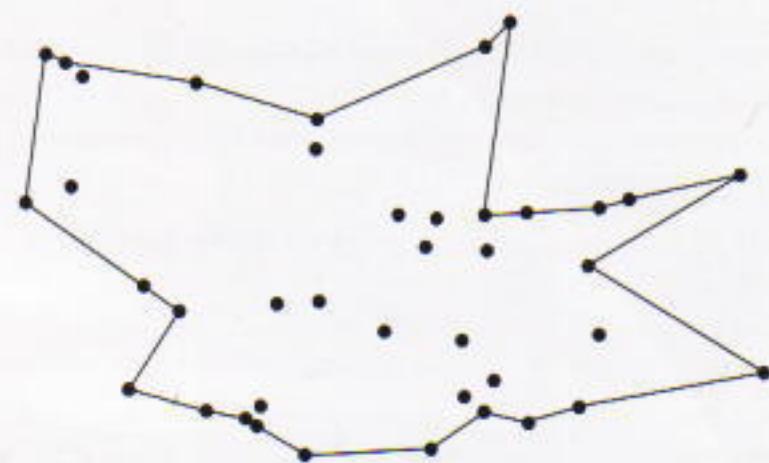
```
takeOutRightTurns[cows_] := Select[Partition[Join[cows, Take[cows, 2]]], 3, 1],  
leftturn[#:5] /., {x_, y_, z_} :> y
```

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν εφαρμόσουμε αυτή τη συνάρτηση στις αγελάδες της αρχικής απλής κλειστής διαδρομής.

```

cows = takeOutRightTurns[cows];
route = Line[Join[cows, {First[cows]}]];
Print["Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = ", pathlength[cows]];
p2 = Show[Graphics[{route, herd}]]
```

Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = 3.73923

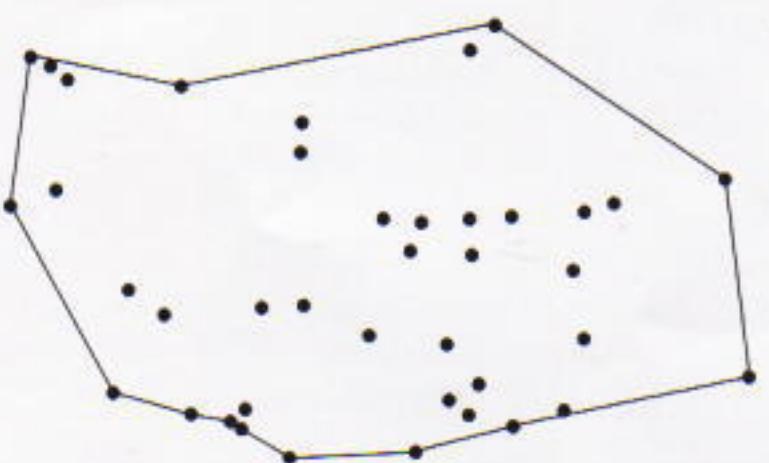


Βλέπουμε ότι η πρώτη εφαρμογή της συνάρτησής μας διέγραψε πολλές δεξιές στροφές αλλά δημιούργησε μερικές καινούργιες. Επομένως, την επαναλαμβάνουμε ακόμη μια φορά:

```

cows = takeOutRightTurns[cows];
route = Line[Join[cows, {First[cows]}]];
Print["Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = ",
      pathlength[cows]]
p3 = Show[Graphics[{route, herd}]]
```

Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = 3.07379



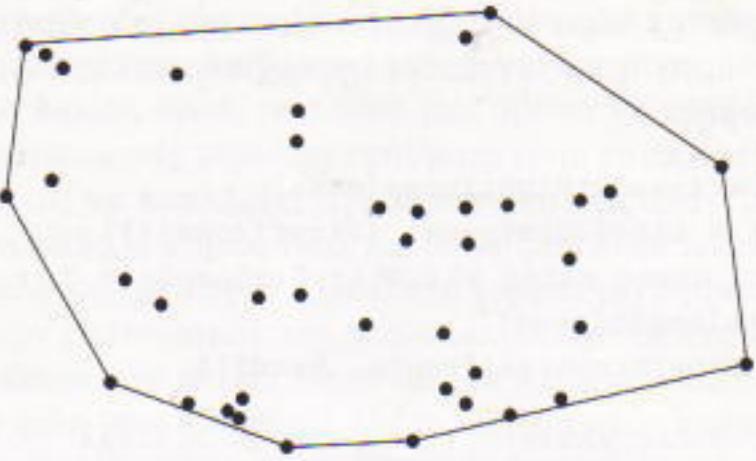
Δεν έχουμε ακόμη απαλλαγεί από όλες τις δεξιές στροφές, και έτσι συνεχίζουμε:

```

cows = takeOutRightTurns[cows];
route = Line[Join[cows, {First[cows]}]];
Print["Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = ",
  pathlength[cows]],

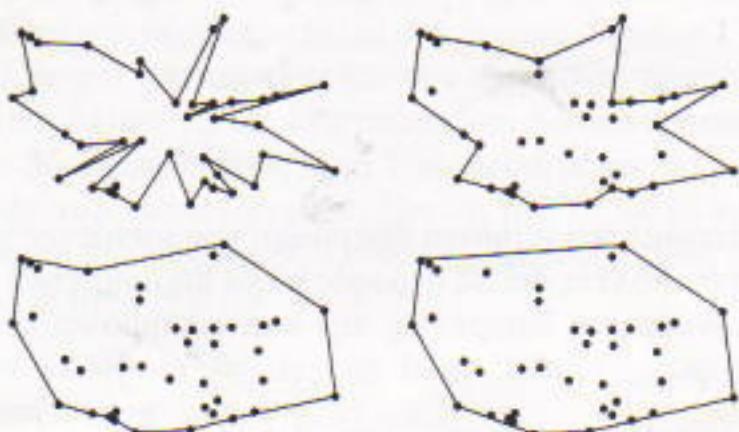
```

Journal of Health Politics, Policy and Law, Vol. 30, No. 3, June 2005  
 Copyright © by The University of Chicago, 2005 0361-6878/05/3003-0897\$10.00



Έπειτα από τρεις επαναλήψεις, έχουμε μια διαδρομή με αριστερές μόνο στροφές η οποία είναι και η συντομότερη γύρω από το κοπάδι. Αν βάλουμε όλα τα στάδια μαζί, μπορούμε να δούμε την εξέλιξη της λύσης.

```
Show[GraphicsArray[{{p1, p2}, {p3, p4}}]];
```



Το *Mathematica* μάς προσφέρει έναν απλό τρόπο υπολογισμού της μικρότερης διαδρομής επαναλαμβάνοντας την **takeOutRightTurns**, μέσω της συνάρτησης **Fixed Point**. Η συνάρτηση αυτή εφαρμόζει τη συνάρτηση **takeOutRightTurns** στις αγελάδες έως ότου σταματήσει να αλλάζει το μήκος της διαδρομής.

```
shortestPath =
FixedPoint[takeOutRightTurns, cows,
SameTest -> (Length[#1] == Length [#2])];
```

## Τέλος...

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση [drmu@cs.uwp.edu](mailto:drmu@cs.uwp.edu). Για να δείτε όλα τα προηγούμενα θέματα μας ανατρέξτε στη διεύθυνση <http://usaco.uwp.edu/cowculations>, ή στα τεύχη του *Quantum* από τον Ιανουάριο του 1997.

## Και μια παράλειψη

Στο προηγούμενο τεύχος, στο άρθρο «Η παλιά σιταποθήκη», και ακριβώς πριν την ενότητα «Περί κίνησης», εκ παραδρομής παραλήφθηκε το παρακάτω εκτενές κείμενο:

Η μετακίνηση μιας ολόκληρης σιταποθήκης δεν είναι απλή δουλειά. Το πρακτικό μέρος θα αναλάβει η εταιρεία μεταφορών του Μπομπ —από εσάς ζητώ να υππολογίσετε την ομαλότερη κίνηση. Μια ομαλή κίνηση από το κτήμα του Dougan έως το Πολιτειακό Κέντρο Πληροφόρησης έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Αποφεύγει όσο είναι δυνατόν λόφους και κοιλάδες.

- (2) Αποφεύγει τις απότομες αλλαγές στο υψόμετρο.
- (3) Έχει το μικρότερο μήκος.

Η σειρά που παραθέτουμε αυτές τις ιδιότητες έχει σημασία. Εποι, αν υπάρχουν περισσότερες από μία κινήσεις που ικανοποιούν την (1), χρησιμοποιούμε ως κριτήριο την (2). Αν υπάρχουν αρκετές που ικανοποιούν τις (1) και (2), χρησιμοποιούμε την (3).

Το κτήμα του Dougan (DF) είναι ένας  $20 \times 20$  τετραγωνικός πίνακας (κάθε στοιχείο του οποίου αντιστοιχεί σε διαφορετικό υψόμετρο). Η σιταποθήκη βρίσκεται στο  $\{1, 1\}$  και το Κέντρο Πληροφόρησης στο  $\{20, 20\}$ . Μια κίνηση προς το Κέντρο Πληροφόρησης είναι ένας κατάλογος από συντεταγμένες  $\{i, j\}$  που ξεκινά από το  $\{1, 1\}$  και καταλήγει στο  $\{i, j\}$ . Οι συντεταγμένες αυτές συνδέονται με κινήσεις από ανατολικά προς δυτικά ή από βορρά προς νότο. Ιδού ο τυπικός ορισμός των ιδιοτήτων μιας κίνησης σύμφωνα με την προηγούμενη περιγραφή.

(1) Λόφος είναι το υψηλότερο σημείο της κίνησης (σε σχέση με το υψόμετρο  $\{1, 1\}$ ). Κοιλάδα είναι το χαμηλότερο.

```
hill = Max[DF[Move[i]] - DF[Move[1]],
2 <= i <= 20]
valley = Min[DF[Move[i]] - DF[Move[1]],
2 <= i <= 20]
```

Μια ομαλή κίνηση θα πρέπει να έχει το μικρότερο δυνατό (**Max[hill, Abs[valley]]**).

(2) Αν δύο ή περισσότερες κινήσεις έχουν την ίδια τιμή στο (1), τότε ελέγχουμε την κλίση.

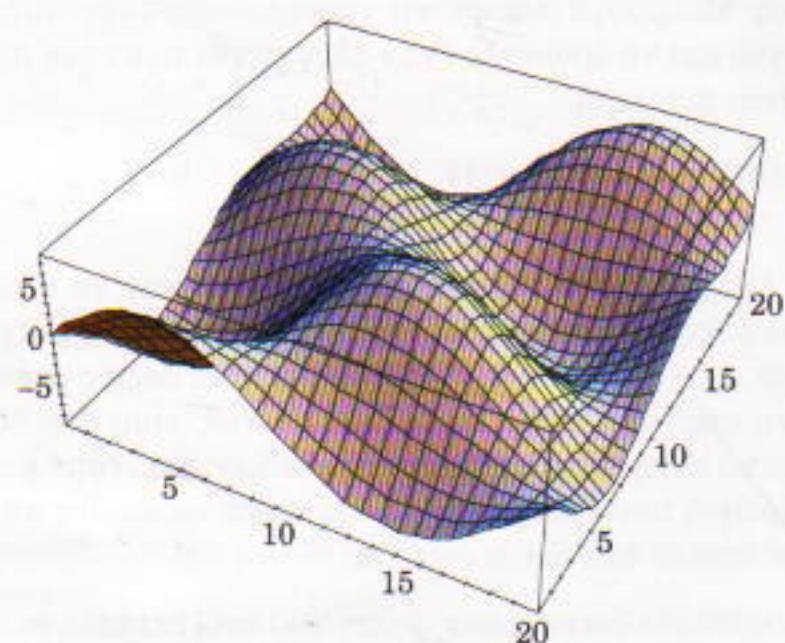
```
slope = Max[Abs[DF[Move[i]] - DF[Move[i+1]]],
1 <= i <= 19]
```

Μια ομαλή κίνηση έχει τη μικρότερη δυνατή κλίση.

(3) Αν δύο ή περισσότερες κινήσεις έχουν την ίδια τιμή στα (1) και (2), τότε ελέγχουμε το μήκος της κίνησης. Η **Length**(Move) πρέπει να έχει τη μικρότερη δυνατή τιμή.

Αν δύο ή περισσότερες κινήσεις έχουν την ίδια τιμή στα (1), (2) και (3), τότε επιλέγουμε μια στην τύχη. Δείχνουμε την ομαλή κίνηση και την ομαλότητά της.

```
{hill, valley, slope, length}
```



Η συνέχεια στη σελ. 68 ⇔