

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

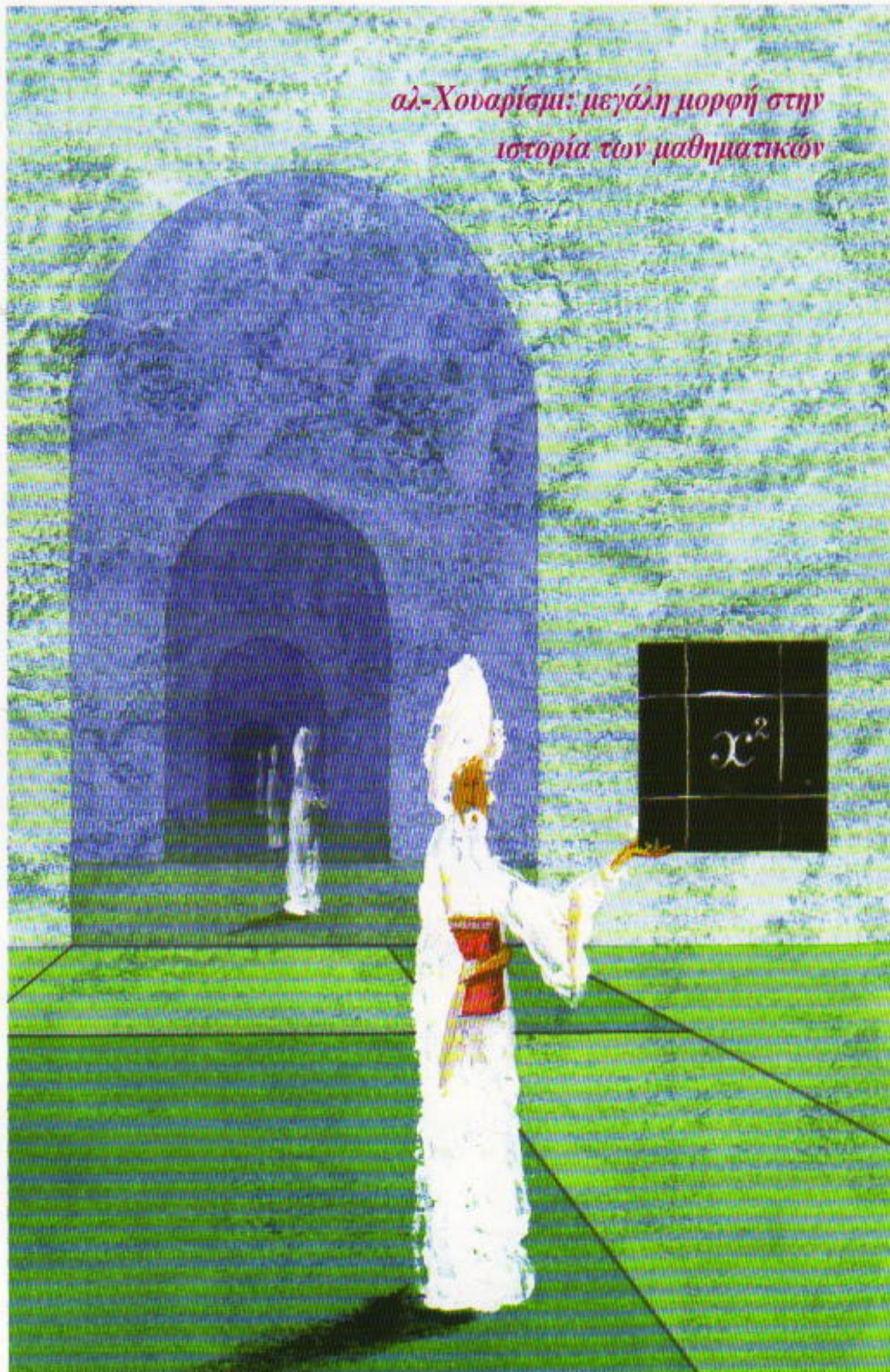
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1998

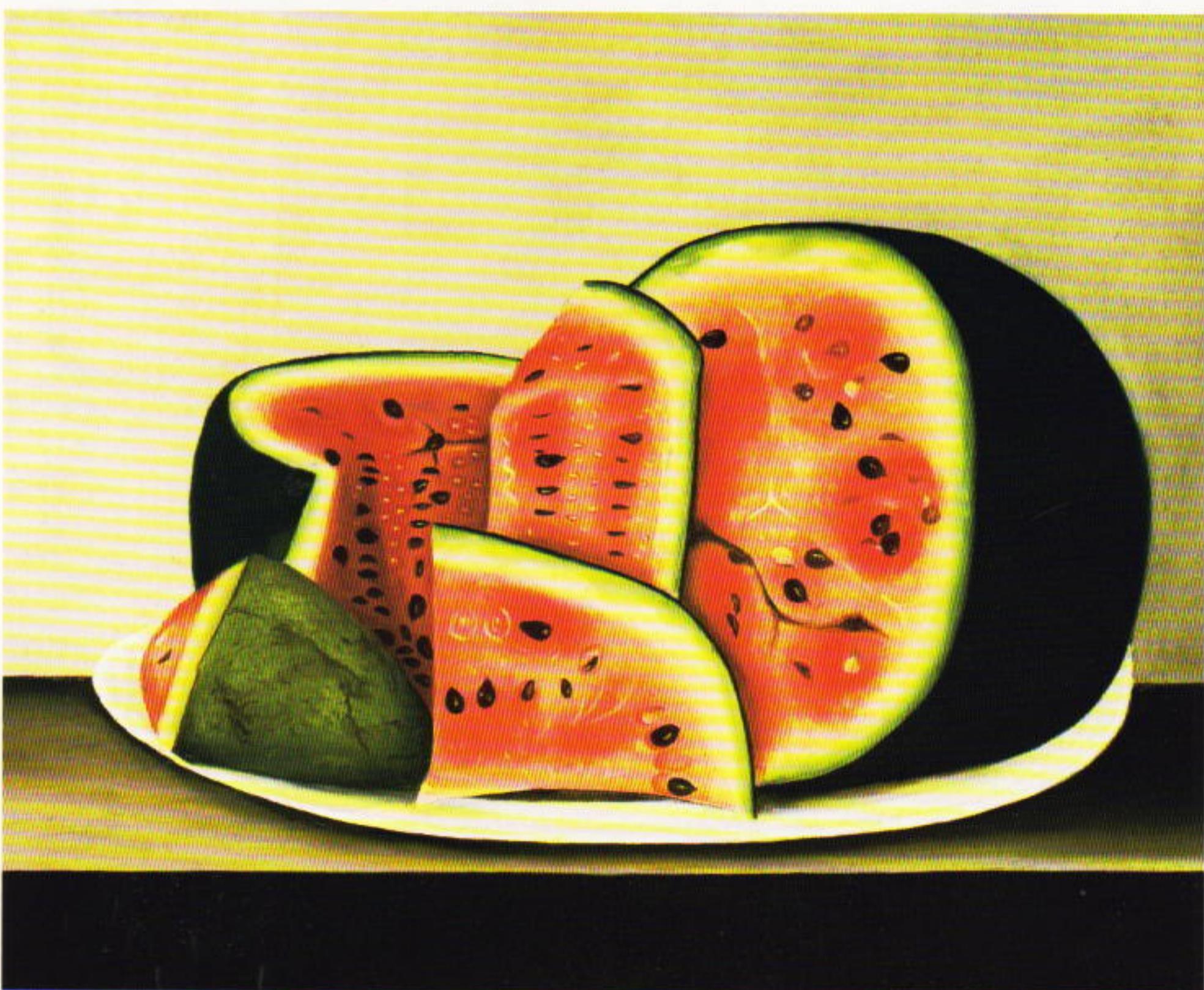
ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 5

1.700 ΔΡΧ.

αλ-Χοναρίσμι: μεγάλη μορφή στην  
ιστορία των μαθηματικών

- Λομικά επίπεδα στη Γη:  
εξιχνιάζοντας τη Θεία Πρόνοια
- Τι είναι συνάρτηση;
- Λανθασμένοι συλλογισμοί σε  
μαθηματικές αποδείξεις
- Ρευστομηχανικά παράδοξα
- Συνθήκη έλλειψης βαρύτητας  
στο αυτοκίνητό σας
- Συνάρτηση Van der Waerden:  
φρικτή πληγή στα μαθηματικά
- Διακροτήματα και  
φαινόμενο Doppler
- Πειράματα με σαπουνόφουσκες





Δωρεά του Edgar William και της Bernice Chrysler Garbisch, © 1998 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον

### Καρπούζι σε πιατέλα (19ος αιών), ανωνύμου

**Κ**ΑΡΠΟΥΖΙ — ΔΡΟΣΙΣΤΙΚΟ ΦΡΟΥΤΟ ΤΟΥ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΟΥ. ΕΥ-  
γευστό και εύκολο για τους πολλούς, αλλά και απαι-  
τητικό για όσους το σκαλίζουν «σε βάθος».

Το να διαλέξεις ένα γινομένο καρπούζι αποτελεί επ-  
στήμη. Πολλοί αφουγκράζονται τον κρότο από το χτύπη-  
μα· άλλοι οσμίζονται το άρωμά του. Όλοι, όμως, προτιμούν  
τη «δοκιμή με το μαχαίρι». Η πρόκληση δεν σταματά εδώ.  
Υποθέστε πως όλοι στην παρέα κρατάτε με τα δυο σας χέ-  
ρια από ένα μισοφέγγαρο του σαρκώδους κόκκινου εσω-

τερικού. Θέλετε να το καταβροχθίσετε αλλά και να στάξε-  
τε το λιγότερο δυνατό χυμό στο πουκάμισό σας. Τι κάνετε  
με τους σπόρους — τους φτύνετε ή όχι; Ιδού το ερώτημα.

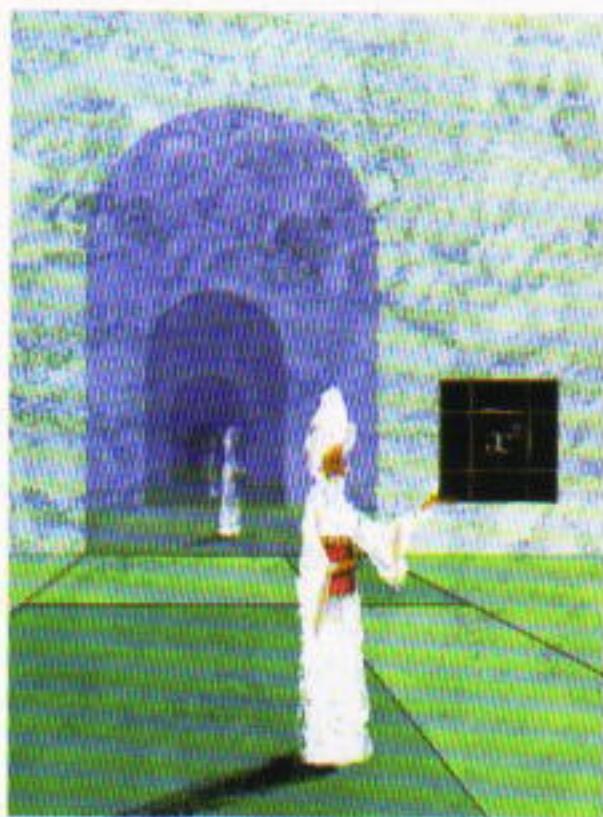
Και τώρα που σας άνοιξε η όρεξη, γυρίστε στη σελίδα 54  
και ετοιμαστείτε να βυθίσετε τα δόντια σας σ' έναν ακόμη  
πιο μπερδεμένο γευστικό γρίφο. Μ' αυτόν αρχίζει το άρ-  
θρο «Ποιο είναι το λάθος;», που περιλαμβάνει πλήθος από  
προβλήματα με τα οποία διερευνούμε πώς τα φαινόμενα  
μπορούν να εξαπατούν.

# QUANTUM

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 5

## ΑΡΘΡΑ



Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Η φασματική μορφή του εξωφύλλου μας μπορεί να ανήκει σ' έναν αρχαίο σοφό που ξεπροβάλλει από τις πύλες του χρόνου προκειμένου να μοιραστεί μαζί μας τη γνώση του για τις καταβολές της άλγεβρας.

Ανατρέξτε στη σελ. 42 για να γνωρίσετε τη μαθηματική συνεισφορά τού μοναδικού Μωχάμετ ιμπν Μουσά αλ-Χουαρίσμι.

- 5 Εποικοδομητική σκέψη  
Οι δομικοί λίθοι των πλανητών**  
*V. Mescheryakov*
- 14 Μαθηματική παιδεία  
Η συνάρτηση του Van der Waerden**  
*B. Martynov*
- 22 Ρευστοδυναμική  
Υδροπαράδοξα**  
*S. Betyaev*
- 28 Εισαγωγή στις συναρτήσεις  
Περί πεδίου τιμών...**  
*Andrey. N. Kolmogorov*
- 54 Αμφισβητήσιμες απαντήσεις  
Ποιο είναι το λάθος;**  
*I.F. Sharygin*

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**  
*Μπορεί η εποικίμη να απαντά στο καθετή;*
- 13 Σπαζοκεφαλιές**
- 36 Καλειδοσκόπιο**  
*Ορθογώνια τρίγωνα*
- 38 Στα πεδία της φυσικής**  
*Διακροτήματα και φαινόμενο Doppler*
- 42 Αναδρομές**  
*Η κληρονομά του αλ-Χουαρίσμι*
- 45 Στο μαυροπίνακα I**  
*Συνθήκη έλλειψης βαρύτητας*
- 47 Gradus ad Parnassum**  
*Η συμμετρία στην άλγεβρα*
- 49 Στο μαυροπίνακα II**  
*Διατεταγμένα σύνολα*
- 52 Στο εργαστήριο**  
*Πειράματα με σαπουνόφουσκες*
- 58 Στο μαυροπίνακα III**  
*Ποτάμια, τυφώνες και μόρια*
- 63 Πώς λύνεται;**
- 64 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 70 Ιππολογισμοί**  
*Η παλιά σιταποθήκη*

# Μπορεί η επιστήμη να απαντά στο καθετί;

«Αν είναι δυνατό ποτέ — και δη γεωμετρικά — κανείς να υπολογίσει το πότε ανθίζουμε... Υπολογίζονται άραγε η Αρχή κι η Σήψη;»

—Σταύρος Βαβούρης

**M**ΠΟΡΕΙ Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ, ΤΕΛΙΚΑ, να απαντά κάθε ερώτημα; Μεταξύ εκείνων που δεν το πίστευαν ήταν ο γάλλος φιλόσοφος Auguste Comte. Περισσότερα από εκατό χρόνια πριν, έδωσε ένα παράδειγμα αναπάντητου ερωτήματος: «Από τι αποτελούνται τα άστρα;» Και σύντομα απεδείχθη ότι ο Comte έσφαλλε... Πριν από το τέλος κιόλας του 19ου αιώνα, οι αστρονόμοι είχαν αντιληφθεί τον τρόπο που θα τους οδηγούσε στην απάντηση. Όταν το αστρικό φως, λοιπόν, περνά μέσα από ένα πρίσμα κι απλώνει μπροστά μας το φάσμα του, εμείς μπορούμε σ' αυτό να διακρίνουμε τα αποκαλυπτικά χρώματα διαφόρων ουσιών — του οξυγόνου, του νατρίου, του άνθρακα, και των υπολοίπων. Τα άστρα αποτελούνται από τα ίδια είδη ατόμων που βρίσκουμε στη Γη. Ο Arthur Clarke είπε κάποτε: «Εάν ένας ηλικιωμένος επιστήμονας ισχυρίζεται πως κάτι είναι αδύνατο, είναι σχεδόν βέβαιο ότι κάνει λάθος.» Ο Comte ανήκε ακριβώς σε αυτή την κατηγορία.

Στη Γη εμφανίζονται ενενήντα δύο διαφορετικά είδη ατόμων, αλλά ορισμένα είναι ασυγκρίτως πολλοί κοινά από τα άλλα. Για κάθε δέκα άτομα άνθρακα υπάρχουν, κατά μέσον όρο, είκοσι άτομα οξυγόνου, και περίπου από πέντε αζώτου και σιδήρου. Άλλα ο χρυσός είναι κατά ένα εκατομμύριο φορές σπανιότερος από το οξυγόνο, ενώ άλλα στοιχεία — για παράδειγμα, η πλατίνα και ο υδράργυρος — σπανίζουν ακόμη περισσότερο. Είναι αξιοπρόσεκτο ότι αυτές οι αναλογίες χονδρικά απο-

δεικνύονται οι ίδιες και στα άστρα.

Από πού, όμως, προέρχονται τα διαφορετικά είδη ατόμων; Υπάρχει κάποιος λόγος που ορισμένα είναι περισσότερο κοινά από άλλα; Η απάντηση κρύβεται μέσα στ' αυτέρια· οι πυρήνες τους είναι εξαιρετικά θερμοί και μπορούν να εκπληρώνουν το όνειρο των αλχημιστών — να μεταστοιχειώνουν τα βασικά μέταλλα σε χρυσό.

Οτιδήποτε έχει ποτέ γραφεί στη γλώσσα μας αποτελείται από στοιχεία ενός αλφαριθμητού είκοσι έξι μόνο γραμμάτων. Όμοια και τα άτομα, μπορούν να συνδυαστούν και να σχηματίσουν μόρια κατά τεράστιο πλήθος διαφορετικών τρόπων· κάποια είναι απλά όσο του νερού ή του διοξειδίου του άνθρακα, άλλα περιέχουν χιλιάδες άτομα. Ο επιστημονικός κλάδος που μελετά τον τρόπο που υλοποιούνται όλα τούτα είναι η χημεία.

Τα πιο σημαντικά συστατικά των εμβίων όντων (ημών συμπεριλαμβανομένων) είναι τα στοιχεία άνθρακας και οξυγόνο· τα άτομά τους (συνδεδεμένα μαζί και με άλλα) σχηματίζουν μακρά, αλυσοειδή μόρια τεράστιας πολυπλοκότητας. Αν όλα αυτά τα ιδιαίτερα άτομα δεν ήταν κοινά στον πλανήτη, εμείς δεν θα μπορούσαμε να υπάρχουμε.

Τα ίδια τα άτομα αποτελούνται από απλούστερα σωματίδια. Κάθε είδος διαθέτει στον πυρήνα του συγκεκριμένο πλήθος πρωτονίων (θετικού ηλεκτρικού φορτίου) και γύρω του ίσο αριθμό ηλεκτρονίων (αρνητικού ηλεκτρικού φορτίου)· ο αριθμός αυτός ονομά-

ζεται ατομικός αριθμός. Το υδρογόνο έχει ατομικό αριθμό 1, το ουράνιο 92.

Εφόσον όλα τα άτομα συντίθενται από τα ίδια στοιχειώδη σωματίδια, δεν μας καταπλήσσει το γεγονός ότι μπορούν να μετατρέπονται το ένα στο άλλο. Κάτι τέτοιο συμβαίνει, για παράδειγμα, σε μια πυρηνική έκρηξη· ωστόσο, τα άτομα είναι αρκετά «εύρωστα» και δεν καταστρέφονται κατά τις χημικές μεταβολές στους έμβιους οργανισμούς ή στα ερευνητικά εργαστήρια.

Στη Γη δεν υπάρχει φυσική (natural) διεργασία που να δημιουργεί ή να καταστρέφει άτομα. Οι βασικοί δομικοί λίθοι, τα χημικά στοιχεία, διατηρούνται στις ίδιες αναλογίες όπως τότε που σχηματίστηκε το ηλιακό σύστημα, πριν από περίπου τεσσεράμισι δισεκατομμύρια χρόνια. Θα θέλαμε να κατανοήσουμε το λόγο που «αποφασίστηκε» τα άτομα να εμφανίζονται σ' αυτές τις συγκεκριμένες αναλογίες. Θα μπορούσαμε και να μη «σκαλίζουμε» τα πράγματα — ίσως ο Δημιουργός να πάτησε ενενήντα δύο διαφορετικά κουμπά. Ωστόσο, οι επιστήμονες πάντοτε αναζητούν απλές εξηγήσεις και προσπαθούν συνεχώς να αναγάγουν περιπλοκές δομές σε απλές απαρχές. Σε τούτο, οι αστρονόμοι έχουν παίξει βασικό ρόλο. Φαίνεται ότι το σύμπαν όντως ξεκίνησε με απλά άτομα, τα οποία στο εσωτερικό των άστρων συνετάκησαν και μεταστοιχειώθηκαν σε βαρύτερα άτομα.

Ο Ήλιος και τ' άλλα άστρα είναι γιγάντειες αεριώδεις σφαίρες. Στο εσωτερικό τους, δύο δυνάμεις ανταγωνί-

ζονται η μια την άλλη: η βαρύτητα και η πίεση. Η βαρύτητα προσπαθεί να φέρει τα πάντα προς το κέντρο του άστρου· αλλά όταν ένα αέριο συμπέζεται, θερμαίνεται, και η πίεσή του αυξάνει τόσο ώστε μπορεί να εξισορροπήσει τη βαρύτητα. Για να αναπτυχθεί επαρκής πίεση, η κεντρική περιοχή του Ήλιου πρέπει να είναι κατά πολύ θερμότερη της επιφάνειάς του την οποία παρατηρούμε — στην πραγματικότητα, να βρίσκεται σε θερμοκρασία δεκαπέντε περίπου εκατομμυρίων βαθμών. Η θερμότητα που εκρέει τότε από το θερμό κέντρο συντηρεί τη λάμψη του Ήλιου· το «καύσιμο» ακολουθεί τη διαδικασία που κάνει τις βόμβες υδρογόνου να εκρήγνυνται. Το υδρογόνο, το πιο απλό άτομο, διαθέτει πυρήνα ενός μόνο πρωτονίου. Σε αέριο τόσο θερμό όσο ο πυρήνας του Ήλιου, τα μεμονωμένα πρωτόνια συγκρούονται μεταξύ τους τόσο ισχυρά που συντήκονται. Αυτή η διεργασία μετατρέπει το υδρογόνο σε ήλιο (ατομικού αριθμού 2). Άλλα η ενέργεια που εκλύεται σ' ένα άστρο είναι σταθερή και «ελεγχόμενη», όχι «εκρηκτική» όπως στη θερμοπυρηνική βόμβα. Αυτό οφείλεται στο ότι η βαρύτητα έλκει αρκετά σταθερά προς τα κάτω τα υπερκείμενα στρώματα, ώστε ουσιαστικά, παρά την τεράστια πίεση, «να κρατά κλειστό το καπάκι» του αστρικού πυρήνα.

Η σύντηξη του υδρογόνου σε ήλιο απελευθερώνει τόσο μεγάλη ποσότητα θερμότητας ώστε, παρ' ότι ο Ήλιος λάμπει επί τεσσεράμισι δισεκατομμύρια χρόνια, έχει καταναλώσει λιγότερο από το ήμισυ του υδρογόνου στο κέντρο του. Τα άστρα με μεγαλύτερες του Ήλιου μάζες λάμπουν πολύ πιό έντονα. Το υδρογόνο της κεντρικής περιοχής τους καταναλώνεται (και μετατρέπεται σε ήλιο) πολύ πιο γρήγορα: σε λιγότερο από εκατό εκατομμύρια χρόνια. Και τότε η βαρύτητα τα συρρικνώνει, με συνέπεια η κεντρική θερμοκρασία τους να αυξάνεται ακόμη περισσότερο· τα άτομα του ήλιου μπορούν πλέον να συντήκονται μεταξύ τους και να δημιουργούν πυρήνες βαρύτερων ατόμων — άνθρακα (έξι πρωτόνια), οξυγόνου (οκτώ πρωτόνια) και σιδήρου (είκοσι έξι πρωτόνια). Ένα γηραιό άστρο αναπτύσσει ένα γίδος κρομμυοειδούς δομής, όπου οι εσωτερικοί θερμότεροι φλοιοί έχουν μετα-

στοιχειώθει στους βαρύτερους πυρήνες.

Εν πάσῃ περιπτώσει, όλα τούτα εκφράζουν τις εκτιμήσεις των αστρονόμων για το τι μπορεί να συμβεί σ' ένα άστρο. Με ποιον τρόπο, όμως — θα αναρωτιέστε —, μπορούν να ελεγχθούν οι θεωρίες τους; Τα άστρα, συγκρινόμενα με τους αστρονόμους, ζουν ασυγκρίτως περισσότερο· αυτό που εμείς καταφέρνουμε όλο κι όλο είναι να βλέπουμε ένα μεμονωμένο «στιγμιότυπο» καθενός τους. Ωστόσο, μπορούμε να ελέγχουμε τις θεωρίες μας παρατηρώντας το συνολικό πληθυσμό των άστρων. Τα δέντρα μπορούν να ζήσουν επί εκατοντάδες έτη. Όμως, αν δεν είχατε αντικρίσει ποτέ ώς τώρα δέντρο, δεν θα χρειαζόσασταν περισσότερο από έναν απογευματινό περίπατο στο δάσος για να συναγάγετε τον κύκλο της ζωής τους. Θα βλέπατε δενδρύλια, ώριμα δείγματα και δέντρα γερασμένα. Ακριβώς αυτό το είδος συλλογιστικής μετέρχονται οι αστρονόμοι για να ελέγξουν τις ιδέες τους για τον τρόπο εξέλιξης των άστρων. Μπορούμε να παρατηρήσουμε σμήνη άστρων που όλα σχηματίστηκαν την ίδια εποχή αλλά έχουν διαφορετικό μέγεθος. Μπορούμε ακόμη να παρατηρήσουμε νέφη αερίων όπου ακόμη και σήμερα σχηματίζονται νέα άστρα, ίσως μαζί με νέα ηλιακά συστήματα.

Άλλα όλα τα πράγματα στο σύμπαν δεν συμβαίνουν με αργούς ρυθμούς. Όταν ένα μεγάλο αστέρι καταναλώσει τα καύσιμά του, αντιμετωπίζει κρίση — η κεντρική περιοχή του καταρρέει, προκαλώντας μια κολοσσιαία έκρηξη που εκτινάσσει τους εξωτερικούς φλοιούς του με ταχύτητες δεκάδων χιλιάδων χιλιομέτρων το δευτερόλεπτο — μια έκρηξη σουπερνόβα.

Όταν γίνεται μια έκρηξη σουπερνόβα, βλέπουμε για λίγες εβδομάδες το άστρο τόσο λαμπρό όσο τίποτε άλλο στο νυχτερινό ουρανό. Το πλέον διασημό γεγονός αυτού του είδους παρατηρήθηκε το 1054 μ.Χ. Τον Ιούλιο του έτους αυτού, ο κινέζος αρχιαστρονόμος Yang Wei-Te απευθύνθηκε προς τον αυτοκράτορά του με τα εξής λόγια: «Υποκλινόμενος προ της Υμετέρας Μεγαλειότητος, πρέπει να σας αναφέρω ότι παρατήρησα την εμφάνιση ενός άστρου-επισκέπτη. Πάνω στο άστρο φαινόταν ένα ελαφρώς ιριδίζον κίτρινο χρώμα.» Μέσα σ' ένα μήνα, το «ά-

στρο-επισκέπτης» άρχισε να οβήνει. Σε εκείνη την περιοχή του ουρανού, σήμερα βρίσκεται το νεφέλωμα του Καρκίνου — τα εξαπλούμενα υπολείμματα εκείνης της έκρηξης. Το συγκεκριμένο νεφέλωμα θα παραμείνει ορατό για λίγες χιλιάδες χρόνια· έκτοτε, ξειτίας της μεγάλης διάχυσής του, θα καταστεί αόρατο και θα συγχωνευτεί με το πολύ αραιό αέριο και τη σκόνη που διαποτίζουν το μεσοαστρικό χώρο.

Τα γεγονότα αυτά συναρπάζουν τους αστρονόμους. Εμείς, όμως, γιατί θα πρέπει να νοιαζόμαστε για εκρήξεις χιλιάδες έτη φωτός μακριά; Αποδεικνύεται ότι χωρίς τις εκρήξεις σουπερνόβα, οι πολυπλοκότητες της ζωής στον πλανήτη μας θα ήταν ανύπαρκτες — και ασφαλώς εμείς δεν θα βρίσκομασταν εδώ.

Τα εξωτερικά στρώματα ενός άστρου, καθώς εκτινάσσονται από την έκρηξη σουπερνόβα, περιέχουν όλα τα άτομα που είναι απαραίτητα για τη ζωή (ξεκίνησαν από το υδρογόνο και σχηματίστηκαν μέσω της διεργασίας που συντήρησε τη λάμψη του άστρου καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του). Το ευχάριστο είναι ότι, σύμφωνα με τους υπολογισμούς, το μείγμα αυτό θα επρεπε να περιέχει πολύ οξυγόνο και άνθρακα, συν ίχνη από πολλά άλλα στοιχεία. Και το προβλεπόμενο «κοκτέιλ» όντως βρίσκεται οημαντικά κοντά στις αναλογίες που παρατηρούνται σήμερα στο ηλιακό μας σύστημα.

Ο Γαλαξίας μας είναι ένας τεράστιος δίσκος με διάμετρο εκατό χιλιάδες έτη φωτός και περιέχει εκατό δισεκατομμύρια αστέρια. Τα γηραιότερα από αυτά σχηματίστηκαν πριν από δέκα περίπου δισεκατομμύρια χρόνια, απ' τα απλά άτομα που αναδύθηκαν από τη Μεγάλη Έκρηξη — όχι από άτομα άνθρακα, ούτε οξυγόνου. Τότε η χημεία αποτελούσε πολύ πληκτικό αντικείμενο. Ο Ήλιος μας είναι άστρο μέσης ηλικίας. Προτού ακόμη σχηματίστει, πριν από τεσσεράμισι δισεκατομμύρια χρόνια, αρκετές γενιές βαρέων άστρων μπορούσαν να έχουν τερματίσει τον κύκλο της ζωής τους. Τα χημικώς ενδιαφέροντα άτομα — τα ουσιώδη για την πολυπλοκότητα και τη ζωή — σφυρηλατήθηκαν στο εσωτερικό αυτών ακριβώς των άστρων. Από τις ωδίνες του θανάτου τους, τις εκρήξεις σουπερνόβα, τα εν λόγω άτομα εκ-

σφενδονίστηκαν πίσω στο μεσοαστρικό χώρο.

Αφού περιπλανήθηκαν εκατοντάδες εκατομμύρια χρόνια, τούτα τα άτομα — «υπολείμματα» των πρώιμων σουπερνόβα — ίσως απετέλεσαν μέρος ενός πυκνού μεσοαστρικού νέφους που κατέρρευσε υπό την ίδια του τη βαρύτητα ώστε να σχηματίσει νέα άστρα, ορισμένα από τα οποία είναι περικυκλωμένα από ακολουθίες πλανητών. Ένα τέτοιο άστρο υπήρξε και ο Ήλιος μας. Ορισμένα άτομα ίσως βρέθηκαν στη νεότευκτη Γη και ανακυκλώθηκαν μέσα από πολλές μορφές ζωής. Κάποια ίσως βρίσκονται σήμερα μέσα σε ανθρώπινα κύτταρα — συμπεριλαμβανομένων των δικών σας. Κάθε άτομο άνθρακα — όσα βρίσκονται σε κάθε κύτταρο του αίματός σας ή μέσα στη μελάνη αυτής της σελίδας — έχει μια καταγωγή τόσο παλιά όσο ο Γαλαξίας.

Ένας γαλαξίας μοιάζει με αχανές οικολογικό σύστημα. Το αρχέγονο υδρογόνο μεταστοιχειώνεται στο εσωτερικό των άστρων στους βασικούς δομικούς λίθους της ζωής —άνθρακα, οξυγόνο, σίδηρο, και τα υπόλοιπα στοιχεία. Ορισμένο από αυτό το υλικό επιστρέφει στο μεσοαστρικό χώρο, ώστε αργότερα να ανακυκλωθεί σε νέες γενιές άστρων.

Γιατί τα άτομα του άνθρακα και του οξυγόνου είναι τόσο κοινά εδώ στη Γη, ενώ εκείνα του χρυσού και του ουρανίου τόσο σπάνια; Αυτό το καθημερινό ερώτημα δεν είναι αναπάντητο· η απάντησή του όμως σχετίζεται με τα πανάρχαια άστρα που εξερράγησαν στο Γαλαξία μας περιοστέρο από πέντε δισεκατομμύρια έτη πριν, προτού καν σχηματιστεί το ηλιακό μας σύστημα. Το σύμπαν αποτελεί μια ενότητα. Για να κατανοήσουμε τους εαυτούς μας, πρέπει να κατανοήσουμε τα άστρα. Αποτελούμαστε από αστρική σκόνη· από τις στάχτες παρπάλαιων αστρικών πτωμάτων.

— Martin Rees

**O Martin Rees είναι αστροφυσικός και κοσμολόγος, καθηγητής έρευνας στη Βασιλική Εταιρεία της Μεγάλης Βρετανίας. Διετέλεσε καθηγητής επί δεκαεννέα χρόνια στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ και επί δέκα χρόνια διευθυντής του Ινστιτού του Αστρονομίας στο ίδιο πανεπιστήμιο.**

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εκδόση της Ενωσης Καθηγητών Θετικών Εποπτηριών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Εποπτηριών,  
με τη σύμφραξη της Αμερικανικής Ενωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης  
**Gerald F. Wheeler**, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

**Yuri Ossipyan**, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

**Sheldon Lee Glashow**, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

**William P. Thurston**, Μετάλλιο Φίλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μιέρκλεϊ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

**Larry D. Kirkpatrick**, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

**Albert L. Stasenko**, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

**Mark E. Saul**, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνχιλ, Νέα Υόρκη

**Igor F. Sharygin**, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντόκτης  
**Mike Donaldson**

Αντιποτέλλουσα αρχισυντάκτια  
**Jennifer Wang**

Υπεύθυνος εικονογράφησης  
**Sergey Ivanov**

Σύμβουλοι σύνταξης

**Yuli Danilov**, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

**Irina Oleynik**, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβούλευτική επιφροπή

**Bernard V. Khoury**, Ανώτερος εκπλεοτικός υπάλληλος, AAPT

**John A. Thorpe**, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

**George Berzsenyi**, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

**Arthur Eisenkraft**, Τμήμα Θετικών Εποπτηριών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

**Karen Johnston**, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

**Margaret J. Kenney**, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη

**Alexander Soifer**, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

**Barbara I. Stott**, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντελ, Λουιζιάνα

**Ted Vittitoe**, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάροια, Φλόριντα

**Peter Vunovich**, Κέντρο Θετικών Εποπτηριών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής  
**Αλέκος Μάραλης**

Μετάφραση και Εποπτηρική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Στέλιος Ζαχαρίου** - μαθηματικός, **Φάνης Γραμμένος** - φυσικός, **Μιχάλης Λάρπρου** - μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης** - μαθηματικός, **Γιώργος Κατσιλέρης** - φυσικός,

**Αθηνά Τσαγκογέωργα** - φυσικός και **Αλέκος Μάραλης** - φυσικός

Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης και Ειδικός συνεργάτης: **Γιώργος Ευαγγελόπουλος**

Τυπογραφικές διαφθώσεις  
**Μαρία Τσαούση**

Τυποτεχνική επιμέλεια  
**Θανάσης Ντούσης**

Υπεύθυνη λογοτερία  
**Μαρία Μάραλη**

Εποπτηρικοί σύμβουλοι

**Μιχάλης Λάρπρου**, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

**Κώστας Σκανδάλης**, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

**Στέφανος Τραχανάς**, φυσικός, Ειδικός εποπτήρων Α' βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

**Θεοδόσης Χριστοδουλάκης**, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σελιδοποίηση  
**Αβ. Μαχαιρίδης**

Φωτικό, μοντάζ  
**Χρ. Μήτσης**

Εκτύπωση  
**N. Πουλόπουλος**

Βιβλιοδεσία  
**Θ. Αρχοντουλάκης**

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Α.λ. Μάραλης

Quantum, διαφημιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Α.λ. Μάραλης,  
Διαφημιστές και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Ιονίων 10 και Δαφνονήση, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αροακείου (Πανεπιστηματικό 49),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απογορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ήλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.  
Εισιτούσια συνδρομή: 9.000 δρχ. για ιδιώτες, 16.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

# Οι δομικοί λίθοι των πλανητών

*Προσπαθώντας να εξιχνιάσουμε τη Θεία Πρόνοια*

V. Mescheryakov

**Σ**ΥΝΕΒΗ ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΠΟΛΛΟΥΣ, ΠΑΡΑ πολλούς αιώνες. Κρίνοντας από το γεγονός ότι η ανθρωπότητα δεν θυμάται το πρόσωπο του Δημιουργού, ο οποίος έπλασε τον Κόσμο, μπορούμε εύλογα να εικάσουμε πως οι άνθρωποι ουδεμία συμμετοχή είχαν σ' αυτό το, κυριολεκτικά, κοομοϊστορικό γεγονός. Κατά πόσον, λοιπόν, μπορούμε να αποκτήσουμε κάποια γνώση γι' αυτό; Όλες μας οι ελπίδες εναποτίθενται στη φυσική, η οποία μας βοηθά να δούμε βαθιά στο παρελθόν, να γνωρίσουμε τους νόμους του Σύμπαντος και να συνειδητοποιήσουμε τι μας επφυλάσσει το μέλλον.

Πιστεύεται ότι το Σύμπαν συνίσταται από άτομα, τα οποία, με τη σειρά τους, συγκροτούνται από ηλεκτρόνια και πυρήνες. Ειδικά το τελευταίο αποκτά ιδιαίτερη ευλογοφάνεια εφόσον μας περιβάλλουν αναριθμητες ηλεκτρονικές συσκευές· και αν πάρουμε τις λέξεις τοις μετρητοίς, στις εν λόγω συσκευές, είτε στη δομή τους είτε στη λειτουργία τους είτε και στα δύο, θα πρέπει κάπως να υπεισέρχονται και τα ηλεκτρόνια. Εντούτοις, εξίσου εύλογη εμφανίζεται και η θέση πως το Σύμπαν αποτελείται από άστρα και πλανήτες. Θυμηθείτε άλλωστε πως κι εμείς οι ίδιοι ζούμε πάνω σ' ένα πλανήτη. Φαίνεται ότι η ύπαρξη των πλανητών και των ηλεκτρονιών θα έπρεπε με κάποιον τρόπο να συνδεθούν μεταξύ τους. Πώς, όμως;

Τέτοια ερωτήματα δεν επιδέχονται

απλή, σύντομη και εξαντλητική απάντηση. Επομένως, αν επιθυμείτε να αποκτήσετε μια ολική εποπτεία του Σύμπαντος, ας στρωθούμε στη δουλειά· και είθε η μορφή του Δημιουργού μας «κατ' αρχάς εξίσου απροσδιόριστη όσο και η ίδια η Φύση» να μας συνοδεύει.

Ο Δημιουργός κάθισε λοιπόν στον πάγκο Του και πέρασε τα δάκτυλά Του πάνω από τα άτομα ψαύοντάς τα. Αποτελούνταν από θετικά φορτιομένους πυρήνες οι οποίοι περιβάλλονταν από πυκνά νέφη αρνητικά φορτιομένων ηλεκτρονίων. Πλησίασε δύο άτομα μεταξύ τους και διέκρινε τις παραμορφώσεις των ηλεκτρονικών νεφών, οι οποίες οφείλονταν σ' έναν περίπλοκο συνδυασμό ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων.

Σε μικρές αποστάσεις, κυρίαρχο αναδεικνύόταν το φαινόμενο της έλξης των ηλεκτρονίων του ενός άτομου από τον πυρήνα του άλλου. Ως εκ τούτου, ορισμένα ηλεκτρόνια (τα λεγόμενα συλλογικά ηλεκτρόνια) τα μοιράζονταν από κοινού οι δύο πυρήνες, και η ολική ενέργεια του συστήματος, που απαρτιζόταν από δύο άτομα με τα ηλεκτρονικά τους νέφη να αλληλεπικαλύπτονται και να συνενώνονται, αποδεικνύόταν μικρότερη από το άθροισμα των ενεργειών των ίδιων άτομων όταν τα χώριζε μεγάλη απόσταση. Ωστόσο, αν προσπαθήσουμε να αναγκάσουμε τα άτομα να πλησιάσουν ακόμη περισσότερο, εμφανίζονται απωστικές δυνάμεις, οι οποίες

οφείλονται κυρίως στις αλληλεπιδράσεις των εσωτερικών φλοιών των ηλεκτρονικών νεφών.

Είναι εύκολο να φανταστούμε ότι η παράξενη κατασκευή που απαρτίζεται από κάμποσες δεκάδες ατόμων (ονομάζεται συγκρότημα ατόμων) παρουσιάζει «κυτταρική δομή», με την έννοια ότι αποτελείται από σχετικά αυτοτελείς στοιχειώδεις δομικές μονάδες, και ομοιάζει από πολλές απόψεις με ένα μεμονωμένο άτομο. Η ενέργεια μιας στοιχειώδους δομικής μονάδας του εν λόγω συγκροτήματος μπορεί να υπολογιστεί με τον τρόπο που θα παρουσιάσουμε αμέσως.

Ας θεωρήσουμε ότι μια στοιχειώδης δομική μονάδα, δηλαδή ένα άτομο, ακτίνας  $R$  αποτελείται από έναν σημειακό πυρήνα συν τους εσωτερικούς ηλεκτρονικούς φλοιούς (μια δομή που είναι γνωστή ως «ιοντική καρδιά», και καταλαμβάνει όγκο ακτίνας  $R_k$ ) και από τα εξωτερικά ηλεκτρόνια, τα οποία πληρούν το μεγαλύτερο μέρος του όγκου της στοιχειώδους δομικής μονάδας. Ας προσδιορίσουμε λοιπόν την εξάρτηση της ενέργειας της στοιχειώδους δομικής μονάδας από την  $R$  για ένα, ας πούμε, μονοσθενές άτομο με πυρηνικό φορτίο  $Ze$  —όπου με  $Z$  συμβολίζουμε τον ατομικό αριθμό (ο οποίος ισούται με το πλήθος των ηλεκτρονίων στο ουδέτερο άτομο) και με  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ . Σ το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Αυτή η ενέργεια ισούται κατά προσέγγιση με το άθροισμα της δυναμι-

κής ενέργειας της έλξης Coulomb μεταξύ του εξωτερικού ηλεκτρονίου και του πυρήνα

$$E_1 = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

(εδώ  $\epsilon_0$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού), της δυναμικής ενέργειας λόγω της άπωσης Coulomb

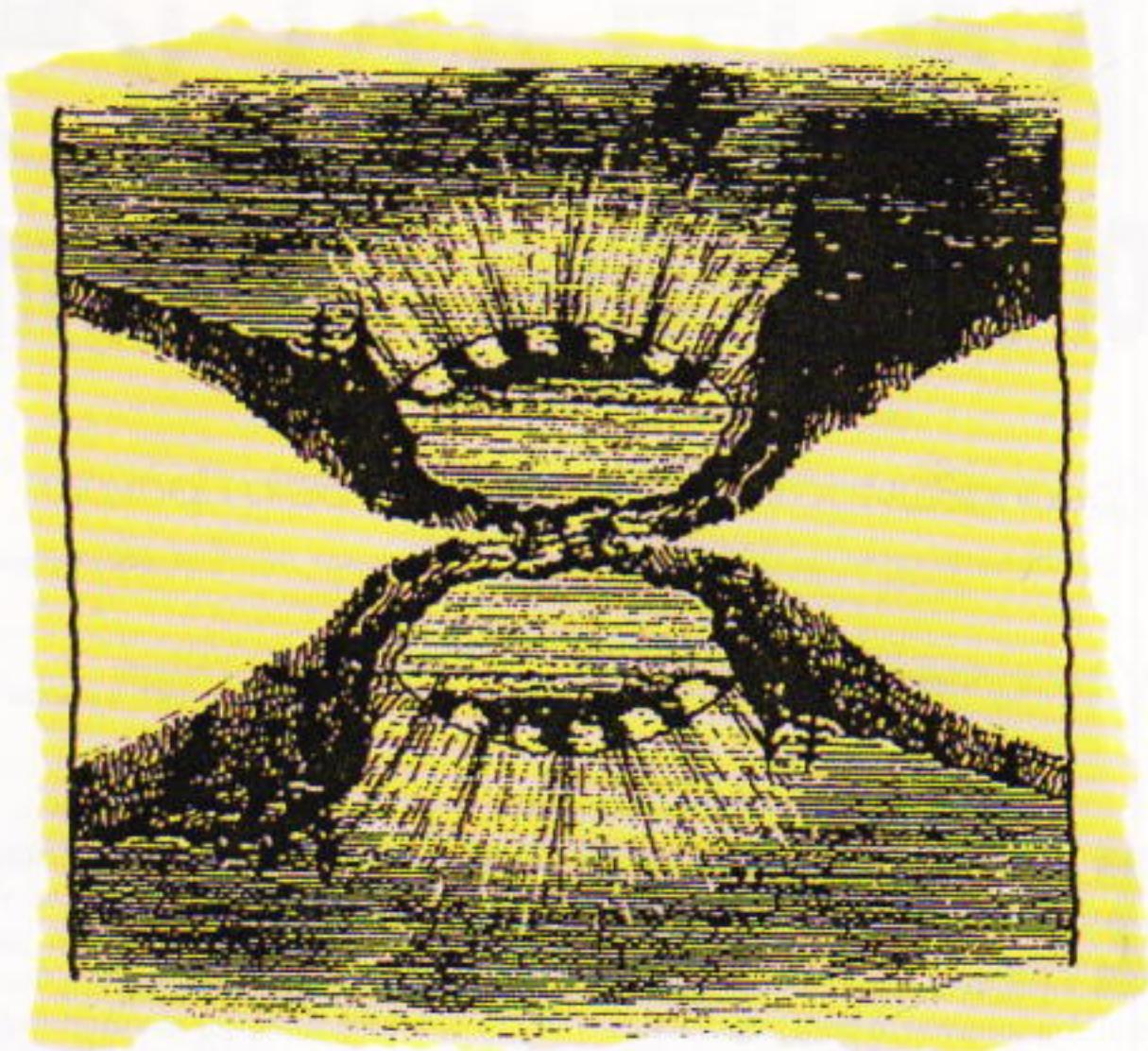
$$E_2 = \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

και της δυναμικής ενέργειας  $E_3$  λόγω της άπωσης του εξωτερικού ηλεκτρονίου και της ιοντικής καρδιάς (η οποία δεν μπορεί να εκφραστεί ως η ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο σημειακών φορτίων), καθώς και της κινητικής ενέργειας  $E_4$  του εξωτερικού ηλεκτρονίου.

Η ενέργεια  $E_3$  συνδέεται με τη μη σημειακή φύση της ιοντικής καρδιάς. Εάν υποθέσουμε ότι τα ηλεκτρόνια της ιοντικής καρδιάς και το εξωτερικό ηλεκτρόνιο κατανέμονται ομογενώς στους αντίστοιχους όγκους  $V_1 = 4\pi R_\kappa^3/3$  και  $\Omega = 4\pi R_\kappa^3/3$ , τότε η  $E_3$  θα είναι ευθέως ανάλογη με το εμβαδόν επιφάνειας της καρδιάς  $4\pi R_\kappa^2$  και αντιστρόφως ανάλογη με τον όγκο της στοιχειώδους δομικής μονάδας  $\Omega$ . Συνεπώς,

$$E_3 = \frac{3e^2 R_\kappa^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Η ενέργεια  $E_4$  μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά εάν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του de Broglie για την ορμή του ηλεκτρονίου:  $p = 2\pi\hbar/\lambda$ , όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου και  $\hbar = 1,0 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  η σταθερά του Planck. Αυτός ο τύπος στηρίζεται στο θεμελιώδες πειραματικό δεδομένο πως, από πολλές απόψεις, το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται ως κύμα. Ως εκ τούτου, ακόμη και ένα μονήρες ελεύθερο ηλεκτρόνιο πρέπει να θεωρείται ως νέφος παρόμοιο με τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται περιορισμένα στη στοιχειώδη δομική μονάδα του συγκροτήματος. Εάν δεχτούμε πως το  $\lambda$  ισούται με το μήκος  $2\pi R$  της εξώτατης τροχιάς και γράψουμε την έκφραση  $m_e v^2/2$  για την κινητική ενέργεια του εξωτερικού ηλεκτρο-



vίου, όπου  $v = p/m_e$  είναι η ταχύτητά του και  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  η μάζα του, παίρνουμε

$$E_4 = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}.$$

Επομένως, η ολική ενέργεια δίνεται από την έκφραση

$$E(R) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{3R_\kappa^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}. \quad (1)$$

Σημειώστε ότι η παράμετρος  $Z$  δεν εμφανίζεται στην παραπάνω έκφραση, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε την εκτίμησή μας σε άτομα με αυθαίρετο πλήθος ηλεκτρονίων.

Τα διαφορετικά πρόσημα στον τύπο (1) σημαίνουν ότι η ενέργεια Coulomb τείνει να συμπέσει τη στοιχειώδη δομική μονάδα (και ολόκληρο το συγκρότημα), αλλά η κατάρρευση αποτρέπεται από την ενέργεια λόγω της άπωσης των εσωτερικών φλοιών και την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων του εξωτερικού φλοιού. Έ-

τοι, η συνάρτηση  $E(R)$  παρουσιάζει ένα ελάχιστο για  $R = R_0$ , όπως προκύπτει άλλωστε αν πάρουμε την παράγωγο  $dE(R)/dR$  και τη θέσουμε ίση με μηδέν. Η προκύπτουσα τιμή  $R_0 \sim 3,5 R_\kappa$  αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της ενέργειας  $E_0$ .

Στη συμπυκνωμένη ύλη, τα μεγέθη των φλοιών των εσωτερικών ηλεκτρονίων για τα περισσότερα στοιχεία δεν διαφέρουν αισθητά μεταξύ τους και, κατά μέσο όρο, χαρακτηρίζονται προσεγγιστικά από την ακτίνα Bohr

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι ιοντικές καρδιές που έχουν ακτίνα  $R_\kappa = a_0$  καταλαμβάνουν πολύ μικρό ποσοστό του όγκου του κυττάρου

$$\frac{R_\kappa^3}{R_0^3} \cdot 100\% \approx 10\%,$$

και, επομένως, δεν εμποδίζουν το εξωτερικό νέφος να συνδέσει τα άτομα σε ένα συνεκτικό και ελαστικό συγκρότημα, οι ιδιότητες του οποίου εξαρτώνται από το λόγο  $R_\kappa/R_0$ . Ο όγκος μιας στοιχειώδους δομικής μονάδας σε ένα τέτοιο συγκρότημα εί-

ναι της τάξεως του

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \equiv 10^2 a_0^3$$
$$\equiv 10^2 \left( \frac{4\pi e_0 \hbar^2}{m_e e^2} \right)^3 \equiv 10^{-29} \text{ m}^3. \quad (2)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως οι περισσότερες ουσίες του Σύμπαντος αποτελούνται από συγκροτήματα με ατομικούς όγκους που διαφέρουν από τη (2) όχι περισσότερο από μία τάξη μεγέθους. Αυτό το γεγονός καθιστά δυνατή, σε χονδρική προσέγγιση, την υποδιαίρεση του Σύμπαντος σε δύο σύμπαντα: (1) στο μικροσκοπικό σύμπαν με τα ηλεκτρόνια και τους πυρήνες, που θέτει την τιμή του  $\Omega$ , και (2) το μακροσκοπικό σύμπαν με τους πλανήτες, τα όρη και τις πέτρες, το μέγεθος του οποίου καθορίζεται από τη συγκεκριμένη τιμή του  $\Omega$ .

Παρατηρήστε πόσο ποιητικά ηχούν οι λέξεις «ηλεκτρόνιο» και «πλανήτης» σε αντιδιαστολή με τις κοινές, πεζές λέξεις όπως «πέτρα». Τούτο οφείλεται στο ότι οι πέτρες συγκαταλέγονται στα προσιτά και οικεία σ' εμάς αντικείμενα. Αντίθετα, τα απόμακρα και άγνωστα μας φαίνονται πιο ελκυστικά. Άλλα είστε απολύτως βέβαιοι πως γνωρίζετε την Πέτρα; Φαίνεται ότι ο συγκεκριμένος όρος εμφανίζεται πρώτη φορά στις ευγενείς σελίδες του αξιοσέβαστου περιοδικού μας. Στη συνέχεια του παρόντος άρθρου, λοιπόν, θα συζητήσουμε το φανόμενο της Πέτρας και τα αδερφάκια του.

Η ενέργεια  $E_0$  μπορεί να θεωρηθεί και ως το έργο  $W$  που θα παρήγαγε η εξωτερική δύναμη  $f$  η οποία θα έπρεπε να ασκηθεί σε κάποιο άτομο για να το απομακρύνει από ένα συγκρότημα σε απόσταση μεγαλύτερη από την ακτίνα της στοιχειώδους δομικής μονάδας. Με άλλα λόγια, αυτή η απόσταση θα έπρεπε να αντιστοιχεί στη διάρρηξη των δεσμών μεταξύ των ατόμων. Στην προκειμένη περίπτωση,  $E_0 = W = fR - f\Omega^{1/3}$ .

Για να χαρακτηρίσουμε τη στερεότητα του δεσμού μεταξύ ατόμων, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε το μέγεθος  $B = E_0/\Omega$ , το οποίο είναι γνωστό και ως μέτρο ελαστικότητας όγκου. Η εν λόγω σταθερά χαρακτηρίζει την

πυκνότητα ενέργειας σε ένα φλοιό και μπορεί να υπολογιστεί από τους τύπους (1) και (2):

$$B \equiv 10^{-2} \frac{e^2}{4\pi e_0 a_0^4}$$
$$= \frac{10^{-2} m_e^4 e^{10}}{(4\pi e_0)^5 \hbar^8} \equiv 10^{11} \text{ N/m}^2. \quad (3)$$

Αυτή η τιμή είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους με την πειραματική τιμή του μέτρου ελαστικότητας όγκου για τα στερεά σώματα.

Έτσι, σε πρώτη προσέγγιση, η πολύπλοκη εικόνα της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης στο εσωτερικό της ατομικής δομικής μονάδας μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια δύο παραμέτρων, του  $B$  και του  $\Omega$ , οι οποίες μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε τα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά του συγκροτήματος.

Βήμα το βήμα, ο Δημιουργός προχώρησε στην κατασκευή του συγκροτήματος, συνδέοντας πρώτα εκατοντάδες άτομα σ' αυτό, και στη συνέχεια χιλιάδες. Αναρωτιόταν πότε θα άρχιζαν να γίνονται αισθητά τα βαρυτικά φαινόμενα. Φυσικά, γνώριζε πως, ήδη τον 3ο π.Χ. αιώνα, ο μέγας Αριστοτέλης θα άρχιζε να αναπτύσσει την έννοια της σφαιρικά συμμετρικής βαρύτητας.

... Σχῆμα δ' ἔχειν σφαιροειδὲς ἀναγκαῖον αὐτὴν ἔκαστον γάρ τῶν μορίων βάρος ἔχει μέχρι πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ ἐλαττὸν ὑπὸ τοῦ μείζονος ὡθούμενον οὐχ οἶον τε κυμαίνειν, ἀλλὰ συμπλέζεσθαι μᾶλλον καὶ συγχωρεῖν ἔτερον ἔτερῳ, ἕως ἂν ἐλθῇ ἐπὶ τὸ μέσον.

[Σχῆμα δε κατ' ανάγκην ἔχει η γη σφαιρικό. Γιατί, κάθε μόριό της ἔχει βάρος μέχρις ότου φτάσει στο κέντρο, και το μικρότερο ωθούμενο από το μεγαλύτερο, δεν αναδύεται πρὸς τα πάνω, αλλά συμπλέζεται και προχωρεῖ πίσω από ένα άλλο, εωσότου φτάσει στο κέντρο. (Αριστοτέλης, Περὶ Οὐρανοῦ, Β:XIV, μτφρ. Π.Π. Παναγιώτου)]

Δεν μπορεί παρά να κινήσει το θαυμασμό το γεγονός ότι αγνοούνται με τέτοιο τρόπο οι ανωμαλίες της γήινης επιφάνειας, όπως τα όρη, οι οποίες υπερβαίνουν κατά τρεις ή τέσσερις τάξεις μεγέθους το μέσον ανθρώπινο ανάστημα. Στη μακρά πορεία προς την

κατανόηση της βαρύτητας, αυτό δεν ήταν τετριμμένο βήμα. Εντούτοις, μόλονότι ο Αριστοτέλης ήταν όχι μόνον πρώτης τάξεως μαθηματικός αλλά και εξέχων φυσικός, δεν ολοκλήρωσε τη σπουδή της βαρύτητας χρειάστηκε να παρέλθουν άλλες δύο χιλιετίες έως ότου ανακαλυφθεί η μαθηματική περιγραφή αυτής της φυσικής ιδέας. Ακόμη αργότερα, δε, λύθηκε ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα —η περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων στα διάφορα υλικά μέσα. Μάλιστα, μεγάλη έκπληξη προκάλεσε η ανακάλυψη πως οι βαρυτικές δυνάμεις είναι κατά πολύ ασθενέστερες από τις ηλεκτρομαγνητικές. Οι υπολογισμοί που παρουσιάστηκαν προηγουμένως επιτρέπουν να διαυγαστεί το συγκριμένο ζήτημα.

Το μέτρο ελαστικότητας  $B$  μπορεί να προσδιοριστεί και αλλιώς, μέσω της πίεσης της κρίσιμης δύναμης  $f \equiv B\Omega^{2/3}$  που ασκείται στην επιφάνεια της στοιχειώδους δομικής μονάδας. Ας συγκρίνουμε λοιπόν την κρίσιμη δύναμη  $f$  με τη βαρυτική δύναμη  $f_g$  που ασκεί το ένα άτομο στο άλλο. Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα,  $f_g = Gm^2/(2R_0)^2$ , όπου  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Υποθέτοντας ότι η τυπική πυκνότητα των στερεών σωμάτων ανέρχεται σε  $\rho \equiv 5.000 \text{ kg/m}^3$ , βρίσκουμε

$$\frac{f_g}{f} \equiv \frac{Gm^2}{B\Omega^{4/3}} \equiv 10^{-35}.$$

Αυτές οι εκτιμήσεις έπεισαν το Δημιουργό ότι ένα συγκρότημα θα μπορούσε να αποτελείται από τεράστιο πλήθος ατόμων. Εντούτοις, ανησυχούσε για τη στιγμή κατά την οποία η βαρυτική δύναμη  $F$  που συμπέζει μια από τις δομικές μονάδες του μακροσκοπικού σύμπαντος θα υπερβαίνει τη δύναμη ελαστικότητας που καθορίζει την πίεση στη στοιχειώδη δομική μονάδα του μικροσκοπικού σύμπαντος, γεγονός που θα σήμαινε την κατάρρευση ολόκληρης της κατασκευής. Τι θα επακολουθούσε; Μία πυρηνική καταστροφή; Ατόφια την ευθύνη την έφερε ο Δημιουργός και, έτσι, προχώρησε περαιτέρω τις αριθμητικές εκτιμήσεις του.

Ας εκφράσουμε τη δύναμη  $F$  συ-

ναρτήσει του αριθμού των ατόμων  $N$  που περιέχονται εντός σφαιρικού όγκου  $V = N\Omega$ , μάζας  $M = \rho V$  και ακτίνας

$$R = \left( \frac{3N\Omega}{4\pi} \right)^{1/3}.$$

Το βάρος ενός ατόμου στην επιφάνεια ενός τέτοιου συγκροτήματος ισούται με  $mg$ , όπου με  $g$  συμβολίζουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας,  $g(R) = GM/R^2$ . Θεωρώντας πως η πυκνότητα του συγκροτήματος ισούται με μια σταθερά,  $\rho = M/V$ , καταλήγουμε στην έκφραση

$$g(R) = \frac{4\pi}{3} G\rho R. \quad (4)$$

Αυτή η σχέση λέει πως η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια ενός σφαιρικού συγκροτήματος αυξάνεται αναλόγως προς την ακτίνα του. Κατά συνέπεια, όσο ποιηματικούς είναι τα άτομα από το κέντρο τόσο μεγαλύτερα τα βάρη τους. Στο συλλογισμό αυτό, η επιφάνεια του συγκροτήματος απλώς σημειώνει την απόσταση από το «δοκιμαστικό» άτομο. Ωστόσο, εάν στρέψουμε την προσοχή μας σ' ένα άτομο που βρίσκεται σε απόσταση  $r$  από το κέντρο, θα διαπιστώσουμε ότι το βάρος του δεν επηρεάζεται από την οποιαδήποτε μεταβολή της ακτίνας του συγκροτήματος  $R \geq r$ . Φυσικά, οι συνθήκες που επικρατούν γύρω από το άτομο πρέπει να τροποποιούνται. Ας δούμε τώρα με ποιον τρόπο.

Αρχίζουμε λοιπόν να οκάβουμε στο συγκρότημα ένα πηγάδι, στην ακτινική διεύθυνση. Η εγκάρσια διατομή του πηγαδιού θα ισούται με ένα άτομο. Καθώς θα προχωρούμε, θα ζυγίζουμε κάθε άτομο που συναντάμε. Προφανώς, το αποτέλεσμα της κάθε μέτρησης θα δίνεται από τη συνάρτηση  $F_k = m g(r_k)$ , όπου με  $r_k$  συμβολίζουμε την απόσταση από το κέντρο ως το  $k$ -οστό άτομο. Για παράδειγμα, η συγκεκριμένη συνάρτηση θα δώσει την τιμή 0 για το βάρος του κεντρικού ατόμου, επειδή  $g(r_0) = 0$ . Το εν λόγω αποτέλεσμα βρίσκεται σε συμφωνία με την υπόθεση του Αριστοτέλη πως η βαρύτητα εξαφανίζεται στο κέντρο μιας σφαίρας.

Φτάνοντας στο κέντρο έχουμε πλέ-

ον ολοκληρώσει το σκάψιμο του πηγαδιού, οπότε αρχίζουμε να το γεμίζουμε με άτομα. Αφότου το πρώτο άτομο φτάσει στον πυθμένα του πηγαδιού, το κεντρικό άτομο επηρεάζεται από το βάρος αυτού του ατόμου. Το επόμενο άτομο αυξάνει τη δύναμη κατά το δικό του βάρος, το οποίο όμως διαφέρει από το βάρος του πρώτου ατόμου, επειδή απέχει περισσότερο από το κέντρο. Εν συνεχείᾳ, το τρίτο άτομο έρχεται να προσθέσει το βάρος του στο άθροισμα, κ.ο.κ.

Έτσι, για να προσδιορίσουμε τη δύναμη που δρα σε μια από τις κεντρικές στοιχειώδεις δομικές μονάδες του συγκροτήματος, χρειάζεται να αθροίσουμε όλες τις δυνάμεις  $F_k$  που ασκούνται καθ' όλο το μήκος του πηγαδιού:

$$F = \sum_{k=1}^n F_k = \frac{4\pi}{3} G\rho m (r_1 + r_2 + \dots + r_n).$$

Εφόσον δύο άτομα που γειτνιάζουν άμεσα χωρίζονται από απόσταση ίση με  $2R_0$ , θα έχουμε  $r_1 = 2R_0$ ,  $r_2 = 4R_0$ ,  $\dots$ ,  $r_k = 2kR_0$ . Ο τελευταίος όρος του αθροίσματος πρέπει να ισούται με τη δύναμη που δρα στο άτομο που βρίσκεται στην επιφάνεια του συγκροτήματος, το οποίο έχει ακτίνα  $R$ . Συνεπός,  $r_n = R = N^{1/3}R_0$ . Εκφράζοντας την  $F$  συναρτήσει της  $R_0$  βρίσκουμε

$$F = \frac{4\pi}{3} G\rho m \times 2R_0 \left( 1 + 2 + \dots + k + \dots + \frac{N^{1/3}}{2} \right). \quad (5)$$

Όταν ο τελευταίος όρος τού εντός παρενθέσεων αριθμητικού αθροίσματος  $n = N^{1/3}/2$  είναι μεγάλος, το άθροισμα ισούται κατά προσέγγιση με

$$\frac{n^2}{2} = \frac{N^{2/3}}{8}.$$

Εισάγοντας αυτή την τιμή και χρησιμοποιώντας τους τύπους

$$R_0 = (3\Omega/4\pi)^{1/3} \text{ και } \rho = m/\Omega,$$

καταλήγουμε στην έκφραση

$$F \equiv G\rho^2 \Omega^{4/3} N^{2/3}. \quad (6)$$

Συγκρίνοντας την  $F$  με την  $f = B\Omega^{2/3}$ , προσδιορίζουμε τον αριθμό των ατόμων σ' ένα συγκρότημα:

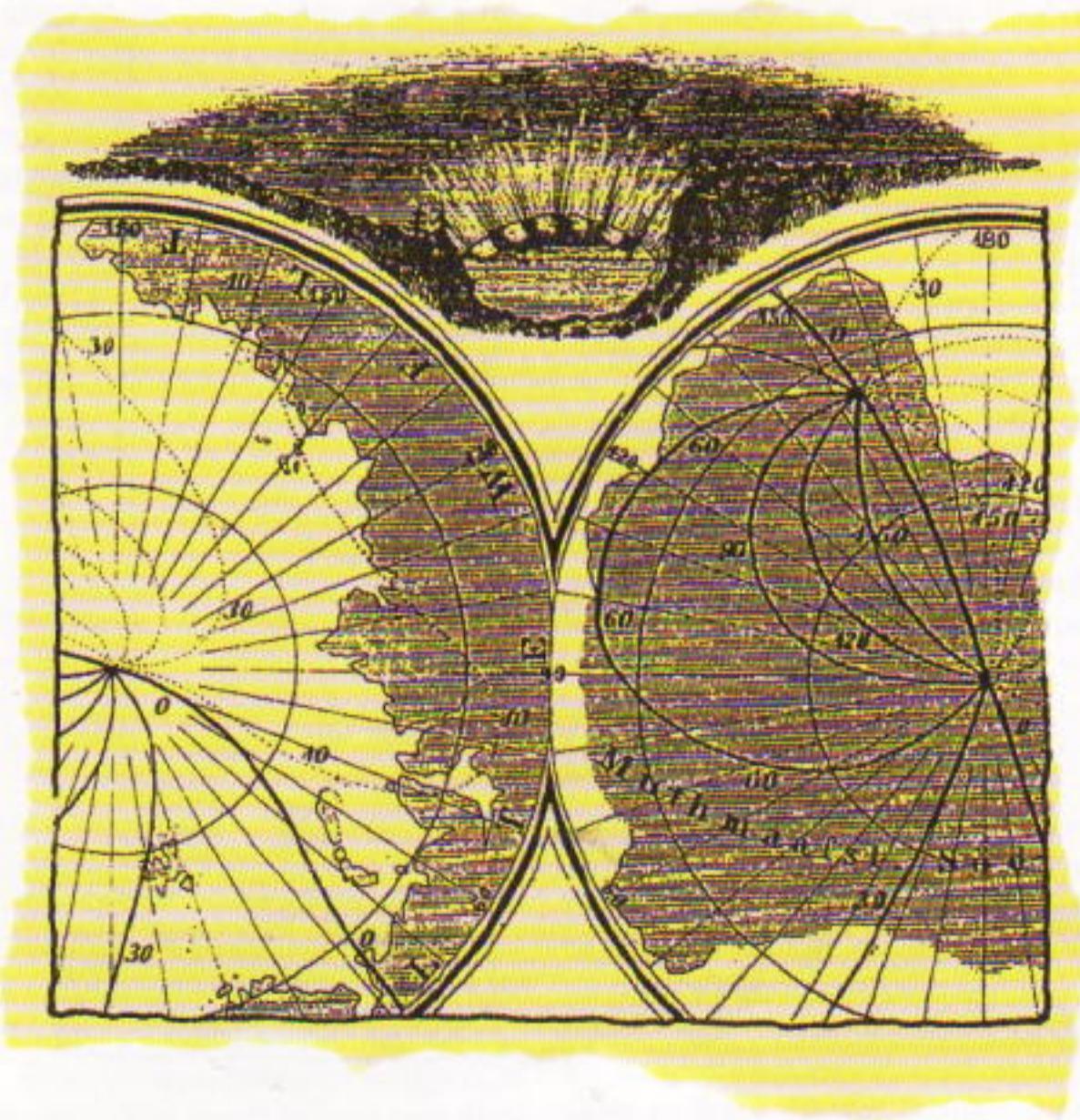
$$N \equiv \frac{1}{m\rho^2} \left( \frac{B}{G} \right)^{3/2}, \quad (7)$$

ο οποίος αντιστοιχεί στην «ελαστική-βαρυτική σταθερότητά του». Τα εισαγωγικά τονίζουν το γεγονός πως, εκτός από τη δεδομένη ατομική μάζα, και οι παράμετροι  $B$  και  $\rho = m/\Omega$  αυτό τον τύπο ορίζονται από τους μικροσκοπικούς μηχανισμούς της αλληλεπίδρασης στη στοιχειώδη δομική μονάδα, το άτομο.

Ας κάνουμε μια στάση και ας επενδεξετάσουμε την πορεία της ανάλυσής μας. Γιατί άραγε η δύναμη  $F$  να προσδιορίζεται από την πίεση μίας μόνον στήλης ατόμων; Γιατί να ζυγίζουμε τα άτομα σ' ένα τόσο στενό πηγάδι; Δεν είναι ηλιού φαεινότερον ότι η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση ενός ατόμου με τα τοιχώματα του πηγαδιού μας θα ματαιώσει την πραγματοποίηση ενός παρόμοιου πειράματος; Γιατί δεν θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε ένα πλατύτερο πηγάδι, και γιατί δεν λάβαμε υπόψη μας τις σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων  $f_g$  και  $F_k$ ; Θα επιθυμούσατε να πάρετε τη θέση του Δημιουργού, για μία στιγμή μόνο, και να απαντούσατε στις ίδιες σας τις ερωτήσεις; Και να θέτατε κάμποσες ακόμη; Την εξίσωση (7) την εξήγαγε το 1905 ο άγγλος φυσικός σερ James Jeans. Ο εν λόγω τύπος εντάσσεται σε μια σειρά σχέσεων που καθορίζουν τη βαρυτική σταθερότητα διαφόρων συστημάτων, οι οποίες ανακαλύφθηκαν συν τω χρόνω.

Ας προσδιορίσουμε τώρα την τάξη μεγέθους του  $N$  χρησιμοποιώντας τον ατομικό όγκο (2), το μέτρο ελαστικότητας όγκου (3) και την τιμή της χαρακτηριστικής πυκνότητας για τη στερεά ύλη που δώσαμε προηγουμένως. Σύμφωνα με την εξίσωση (7), έχουμε  $N \approx 10^{49}$ . «Θεέ μου!» ανέκραξε ο Δημιουργός. «Τι τιμές θα μπορούσαν να έχουν οι υπόλοιπες παράμετροι του συγκροτήματος;» Εύκολα ελέγχει κανείς ότι οι λεγόμενες μάζα Jeans και ακτίνα Jeans είναι, αντίστοιχα,  $M \approx 10^{24} \text{ kg}$  και  $R \approx 10^7 \text{ m}$ .

Έτσι, λοιπόν, δημιουργήθηκε η Γη. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3), (4) και (5), η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης δεν σχετίζεται ούτε με το μέγεθος του πλανήτη ούτε με την ολική μάζα των ατόμων του· κα-



θοριζόταν εξ ολοκλήρου από το σύνολο των θεμελιώδων φυσικών σταθερών:

$$g \equiv (BG)^{1/2} \equiv \frac{10^{-1} G^{1/2} m_e^2 e^5}{(4\pi\epsilon_0)^{5/2} \hbar^4},$$

με αποτέλεσμα μια τιμή περίπου  $10 \text{ m/s}^2$ . Ο πλανήτης τον οποίο κατασκεύασε ο Δημιουργός ικανοποιούσε τις απαιτήσεις της «ελαστικής»-βαρυτικής σταθερότητας και εφόσον

... είτε όλη ποθὲν ἐφέρετο είτε κατά μέρος, ἀναγκαῖον μέχρι τούτου φέρεσθαι ἔως ἣν πανταχόθεν ὁμοίως λάβῃ τὸ μέσον, ἀνισαζομένων τῶν ἐλαττόνων ὑπὸ τῶν μειζόνων τῇ προώσει τῆς φόρῆς.

... τοῦτον ἀναγκαῖον γενέσθαι τὸν τρόπον, ὥστε φανερὸν ὅτι αφαιροειδῆς ἡ γένεσις αὐτῆς...

... είτε ολόκληρη ἡ γη ερχόταν από κάπου, είτε κομματιαστή, κατ' ανάγκην ἡ μετακίνησή της θα συνεχίζοταν μέχρις ότου όλα τα τμήματά της (ἡ ολόκληρη) κατελάμβαναν το κέντρο ομοιοτρόπως, και τα μικρότερα μέρη της θα ισορροπούσαν προς τα μεγαλύτερα χάρη

στην προώθηση της φορής των.

... κατ' αυτόν τον τρόπο αναγκαστικά συγκροτήθηκε, που καταδεικνύει τη σφαιρική διαμόρφωσή της... (Αριστοτέλης, *Περὶ Οὐρανοῦ*, B:XIV, μτφρ. Π.Π. Παναγιώτου)]

Αλίμονο, όμως, ο νεογέννητος πλανήτης ήταν γυμνός. «Τι έχω να κάνω ακόμη;» συλλογίστηκε ο Δημιουργός. «Αν εγκαταστήσω ανθρώπινα όντα σε έναν τέτοιο πλανήτη, θα χρειαστούν δομικά υλικά!» Συνέχισε λοιπόν το έργο Του. Ανακάλεσε στη μνήμη Του τους παράξενους ατομικούς σχηματισμούς, τα συγκροτήματα, με τους οποίους είχε καταπαστεί ευθύς εξαρχής. Ωστόσο, έπρεπε να ανακαλύψει πρώτα έναν φυσικό μηχανισμό ο οποίος θα καθόριζε το σταθερό σχηματισμό των μικρού μεγέθους σωμάτων στην επιφάνεια του πλανήτη. Είχε το αισθημα ότι ένας τέτοιος μηχανισμός υπήρχε, επειδή ο πλανήτης που είχε δημιουργήσει ικανοποιούσε τις απαιτήσεις της σταθερότητας, δεδομένου ότι το βαρυτικό του πεδίο καθοριζόταν αποκλειστικά από θεμελιώδεις σταθερές. Η διαίσθησή του του έλεγε πως ο συγκεκριμένος μηχανισμός έ-

πρέπει να υπάρχει στο βαρυτικό πεδίο ενός σταθερού πλανήτη και όχι ενός κατασκευασμένου αυθαιρέτα. Η ίδεα ήρθε απροσδόκητα και συνίστατο σε ένα βαρυτικά σταθερό συγκρότημα (ιδιότητα που θα αποτρέψει τη διάρρηξη των δεσμών μεταξύ των ατόμων), το οποίο κείται στην επιφάνεια ενός, ομοίως, βαρυτικά σταθερού πλανήτη και τελεί υπό την επίδραση του ίδιου του βάρους του.

Έδωσε σάρκα και οστά στην ίδεα του με τον τρόπο που θα παρουσιάσουμε αμέσως. Εάν ένας πλανήτης μάζας  $M$  τεθεί σε φυσική επαφή με ένα συγκρότημα ατόμων μάζας  $M_0 \ll M$ , η στατική τους ισορροπία (η οποία καθορίζεται από την ελκτική δύναμη  $F_0 = GMM_0/R^2$  της βαρύτητας του πλανήτη και από τη δύναμη υποστήριξης που ασκείται στην αντίθετη κατεύθυνση) θα επιτευχθεί με τη διάρρηξη των δεσμών μεταξύ των ατόμων στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων, την οποία θα ακολουθήσει μια ανακατανομή των ατόμων με αποτέλεσμα την εμφάνιση  $n$  ατόμων υποστήριξης:

$$n = F_0/f \quad (8)$$

(όπου, υπενθυμίζουμε, με  $f$  συμβολίζουμε τη δύναμη που απαιτείται προκειμένου να αποσπάσουμε ένα άτομο από το συγκρότημα).

Ως θεμελιώδης δομικός λίθος χρησιμοποιήθηκε το συγκρότημα που περιείχε τον μέγιστο αριθμό συστατικών ατόμων και τον ελάχιστο αριθμό ατόμων υποστήριξης. Προφανώς, ένα συγκρότημα μεγαλύτερης μάζας θα προστάτευε αποτελεσματικότερα τη διαχωριστική επιφάνεια από ένα φορτίο που θα ασκούνταν επί βραχύ χρόνο. Ακριβώς η ίδια κατάσταση παρουσιάζεται και σ' εκείνη την επίδειξη που συνηθίζεται στο τοίρκο, όπου μια βαριά σφύρα χτυπάει ένα βαρύ αμόνι που στηρίζεται σ' έναν άνθρωπο. Η διατήρηση της ορμής στο σύστημα σφύρας-αμονιού κάνει το αμόνι να παραμένει σχεδόν ακίνητο. Προκαλούμε τον αναγνώστη να αποδείξει την αλήθεια του εν λόγω ισχυρισμού (χωρίς, φυσικά, να καταφύγει στη χρήση σφύρας).

Η συνθήκη του ελάχιστου αριθμού ατόμων υποστήριξης  $n = 3$  είναι αναγκαία επειδή η επιστράτευση ενός τέ-

ταρτου ατόμου σ' αυτό το ρόλο θα καθιστατο δυνατή μόνο με τη διάρρηξη δεσμών μεταξύ των ατόμων, η οποία θα επέφερε την κατάρρευση ολόκληρου του συγκροτήματος. Η περίπτωση  $p < 3$  αποκλείεται επειδή δεν διασφαλίζει την ευσταθή ισορροπία του συγκροτήματος πάνω σε επίπεδη επιφάνεια.

Το συγκρότημα με τα τρία άτομα υποστήριξης ονομάστηκε Κόκκος. Με τη βοήθεια του τύπου του Jeans για τον ολικό αριθμό ατόμων σ' έναν πλανήτη, της εξίσωσης (7), και εισάγοντας τις  $f = B\Omega^{2/3}$  και  $p = 3$  στην εξίσωση (8), μπορούμε να εκτιμήσουμε μια τόσο σπουδαία παράμετρο του Κόκκου όπως η μάζα του:

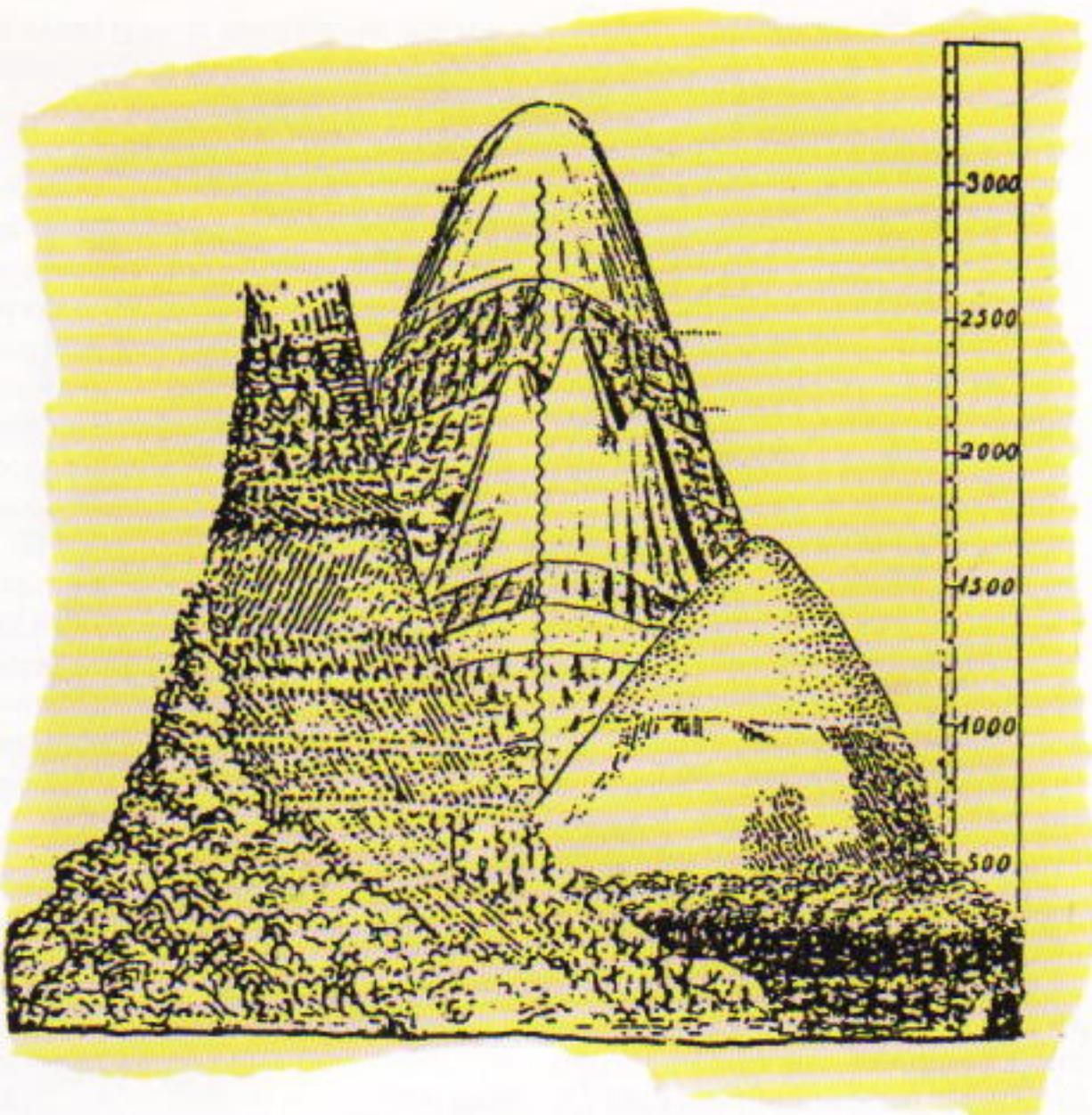
$$M_0 \equiv \Omega^{2/3} \left( \frac{B}{G} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Αυτός ο τύπος δείχνει ότι η μάζα ενός βαρυτικά σταθερού συγκροτήματος που κείται στην επιφάνεια του πλανήτη δεν εξαρτάται από την ατομική μάζα, οπότε πρέπει να καθορίζεται αποκλειστικά από το χαρακτήρα των δεσμών που συνέχουν τα άτομα. Ωστόσο, σ' αυτή την περίπτωση, η ποικιλία των μορφών και οι αριθμητικές παράμετροι των φυσικών δεσμών μεταξύ των ατόμων θα είχαν ως αποτέλεσμα το σχηματισμό συγκροτημάτων πολύ διαφορετικών όσον αφορά τον όγκο ανά άτομο, τον αριθμό των ατόμων ανά συγκρότημα και τη μάζα. Παρατηρείται όμως κάτι τέτοιο στη φύση; Επί του παρόντος γνωρίζουμε ένα αδιαμφισβήτητο δεδομένο: Οι ατομικοί όγκοι στη συμπυκνωμένη ύλη διαφέρουν όχι περισσότερο από μία τάξη μεγέθους. Πράγματι, εάν εκφράσουμε τα  $\Omega$  και  $B$  με τη βοήθεια της ακτίνας Bohr, διαπιστώνουμε ότι τα πειραματικά δεδομένα που λαμβάνονται από τον περιοδικό πίνακα των στοιχείων εμπίπτουν στην ακόλουθη περιοχή τιμών:

$$\Omega \equiv (10 - 10^2) a_0^3,$$

$$B \equiv \frac{(10^{-5} - 10^{-3}) e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^4}, \quad (10)$$

η οποία είναι εξαιρετικά στενή.  
Προδήλωσ, η οιονεί σταθερή φύση



των  $\Omega$  και  $B$  βρίσκεται σε εμφανή δυσαρμονία με την τεράστια ποικιλία των δεσμών μεταξύ των ατόμων. Ωστόσο, εάν εισαγάγουμε τη (10) στην (9) παίρνουμε

$$M_0 = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 G^{1/2}}, \quad (11)$$

όπου  $z$  είναι ένας σταθερός συντελεστής που η τιμή του κυμαίνεται περί τη μονάδα. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δεν μπορεί παρά να προκαλεί έκπληξη: Η μάζα του κρίσιμου συγκροτήματος όχι μόνο δεν εξαρτάται από τη μάζα των συστατικών ατόμων, αλλά δεν εξαρτάται και από την ακτίνα του Bohr. Πρόκειται για μια εντελώς θεμελιώδη διαπίστωση! Ισως αυτό ήταν το σημείο όπου ο Δημιουργός άνοιξε τη στενωπό που συνδέει το μικροσκοπικό σύμπαν με το μακροσκοπικό! Πράγματι, η απουσία της ακτίνας Bohr από τον τύπο για την  $M_0$  οδηγεί στο συμπέρασμα πως η μάζα του Κόκκου δεν εξαρτάται από τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ατόμων

και πως ενδέχεται να καθορίζεται από κάποιου είδους μέσες τιμές ιδιοτήτων, οι οποίες ενσωματώνονται στο συντελεστή  $z$ . Η εξίσωση (11) μπορεί να μας βοηθήσει να αποσαφηνίσουμε τη φύση τής εν λόγω παραμέτρου: όταν την πολλαπλασιάζουμε με το θεμελιώδες φορτίο δίνει το γινόμενο  $ze$ , που είναι δυνατόν να το ερμηνεύσουμε ως το φορτίο επί του οποίου ερείπεται ο σχηματισμός του δεσμού που συνέχει τα άτομα. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η παράμετρος  $z$  ισούται ακριβώς με τον αριθμό των ηλεκτρονίων που συμμετέχουν στο σχηματισμό του δεσμού.

Ας προχωρήσουμε σε μερικές αριθμητικές εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, για το λίθιο,  $\Omega = 2,1 \cdot 10^{-17} \text{ m}^3$  και  $B(78 \text{ K}) = 0,11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ , οπότε  $M_0 \equiv 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$  και  $z \equiv 0,53$ . Για το βηρύλλιο,  $\Omega = 0,81 \cdot 10^{-17} \text{ m}^3$  και  $B(0 \text{ K}) = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  και, έτσι,  $M_0 \equiv 2,0 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$  και  $z \equiv 1,1$ . Παρεμπιπόντως, μπορεί πραγματικά ο αριθμός των ηλεκτρονίων που συμμετέχουν στο δεσμό να λαμβάνει μη ακέραιες τιμές; Η απάντηση είναι καταφατική. Θυμηθείτε πως στην αρχή του άρθρου

κάναμε λόγο για τα ηλεκτρονικά νέφη, τα οποία καταλαμβάνουν ορισμένο χώρο και, κατ' αυτό τον τρόπο, μπορούν να συμμετέχουν στους δεσμούς όχι ως ακέραιες ολόττητες αλλά με μέρος μόνον του ηλεκτρονικού νέφους.

Ας δεχτούμε ότι σε τάξη μεγέθους  $M_0 \approx 10^{-9}$  kg. Τότε, για μια τυπική πυκνότητα της στερεάς ύλης  $\rho \approx 5.000$  kg/m<sup>3</sup>, βρίσκουμε τον ολικό αριθμό ατόμων στον Κόκκο,

$$N_0 = \frac{M_0}{m} = \frac{M_0}{\rho \Omega} \approx 10^{16},$$

καθώς και τη χαρακτηριστική του ακτίνα,

$$R_0 = (N_0 \Omega)^{1/3} \approx 10^{-4} \text{ m}.$$

Ο τύπος του Jeans για το πλήθος των ατόμων σ' έναν πλανήτη και η σχέση (9) οδηγούν σ' έναν τύπο που συνδέει τη μάζα Jeans με εκείνη του βαρυτικά σταθερού συγκροτήματος:

$$M_0 \equiv (Mm)^{1/3}. \quad (12)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις  $M_0 = N_0 m$  και  $M = Nm$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$N_0 \equiv N^{1/3}. \quad (13)$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει πως, με περιθώριο σφάλματος που δεν ξεπερνά τη μία τάξη μεγέθους, το πλήθος των ατόμων ενός Κόκκου ισούται με το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται τοποθετημένα κατά μήκος της ακτίνας του πλανήτη. Φυσικά, πρόκειται για μια έκφραση του γεγονότος ότι τόσο η ακτινική στήλη των ατόμων όσο και ο Κόκκος (ο οποίος είναι απλώς μια στήλη ατόμων που έχει καταρρεύσει) παράγουν με τα βάρη τους το μέγιστο φορτίο που αντιστοιχεί στη διάρρηξη των μεμονωμένων δεσμών μεταξύ ατόμων.

Ο Δημιουργός κατασκεύασε τον Κόκκο πολύ γρήγορα, και το αποτέλεσμα αποδείχτηκε εξαιρετικό. Η κατασκευή των  $10^{16}$  ατόμων στεκόταν σταθερά στα τρία υποστηρίγματα, όπου κι αν τοποθετούνταν στην επιφάνεια του πλανήτη.

«Αναρωτιέμαι» σκέφτηκε «αν οι άνθρωποι θα μαντέψουν ποτέ ότι ο Κόσμος Μου στηρίζεται σε τρία υποστηρίγματα ή αν θα συνεχίσουν να φαντάζονται εσσεί κάτι πρωτόγονο ο-

πως σφαιρικές δομές χωρίς υποστηρίγματα.» Μια σκιά ανησυχίας πέρασε από το πρόσωπό Του.

Τα υπολείμματα από την κατασκευή των Κόκκων υπάρχουν ακόμη στο Διάστημα ως σωματίδια της αστρικής οικόνης. Ωστόσο, η ποσότητά τους δεν είναι και ιδιαίτερα μεγάλη, πράγμα που μαρτυρά την υψηλή αποτελεσματικότητα και την οικολογική πρόνοια που διέκρινε το έργο του Δημιουργού.

Σύμφωνα με το σχέδιο του Δημιουργού, αυτοί οι Κόκκοι προορίζονται να συγκροτήσουν την κοκκώδη δομή πολύ μεγαλύτερων σωμάτων. Έτσι, καταπάστηκε με μια νέα κατασκευή.

Ένα συγκρότημα μάζας  $m_1$  του επόμενου δομικού επιπέδου πρέπει να απαρτίζεται από συγκροτήματα κρισιμής μάζας  $M_0$ . Τότε, ανάμεσα στις μάζες  $m_1$  είναι δυνατόν να βρεθεί μια  $M_1$  τέτοια, ώστε ο αριθμός των συγκροτημάτων υποστηρίξης  $M_0$  να ισούται με 3:  $m_1(n_1 = 3) = M_1$ . Τα συγκροτήματα μάζας  $m_1 < M_1$  εμποδίζουν τη διάρρηξη των δεσμών μεταξύ των ατόμων ενός ζεύγους συγκροτημάτων με κρίσιμες μάζες  $M_0$ , και υπό αυτή την έννοια επδεικνύουν επίσης βαρυτική σταθερότητα στο βαρυτικό πεδίο της μάζας Jeans.

Ο αριθμός των ατόμων υποστηρίξης  $n_0$  του συγκροτήματος  $M_1$  δεν μπορεί να υπερβαίνει τον προσεγγιστικό αριθμό των επιφανειακών ατόμων του συγκροτήματος  $M_0$ , οπότε  $n_0 < N_0^{2/3}$ . Συνεπώς, η δύναμη της βαρυτικής έλξης του συγκροτήματος  $M_1$  δεν θα έπρεπε να υπερβαίνει την  $F_1 = N_0^{2/3} f$ . Καθώς το πεδίο στην επιφάνεια της μάζας Jeans είναι  $g = GM/R^2$ , και εφόσον η βαρυτική δύναμη που δρά στο συγκρότημα  $M_1$  είναι  $F_1 = M_1 g$ , συμπεραίνουμε ότι ισχύει η σχέση  $M_1 g = N_0^{2/3} f$ . Καθώς ο αριθμός των ατόμων του νέου συγκροτήματος είναι  $N_1 = M_1/m$ , βρίσκουμε

$$N_1 = N_0^{2/3} \frac{f}{mg} = N_0^{5/3} = N^{5/9}, \quad (14)$$

όπου  $f/mg = N_0$ . Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, προσδιορίζουμε τις παραμέτρους του πρώτου δομικού επιπέδου:

$$N_1 \equiv 10^{27},$$

$$M_1 \equiv 50 \text{ kg},$$

$$R_1 \equiv 0.3 \text{ m}.$$

Με αυτό τον τρόπο, λοιπόν, από τους Κόκκους αναδύθηκαν οι Πέτρες και οι Λίθοι. Κοιτάξτε τα — είναι τόσο όμορφα! Η κοκκώδης δομή τους γίνεται αντιληπτή ακόμη και διά γυμνού οφθαλμού.

«Ασφαλώς» σκέφτηκε ο Δημιουργός «σε έναν Λίθο (ή σε μια Πέτρα) που κείται στην επιφάνεια του πλανήτη επί χιλιετίες, οι Κόκκοι στην ανώτερη επιφάνειά του θα έχουν λιγότερα υποστηρίγματα, και, επομένως, λιγότερους δεσμούς, απ' ό,τι οι Κόκκοι στο βάθος. Έτσι, εν καιρώ, οι Λίθοι και οι Πέτρες θα αποσαθρώθουν και θα μετατραπούν σε Άμρο. Άλλα, πρώτον, οι άνθρωποι θα χρειαστούν Άμρο και, δεύτερον, το επόμενο δομικό επίπεδο θα κατασκευαστεί από Πέτρες και Λίθους.»

Με όμοιο τρόπο μπορεί να κατασκευαστεί και το συγκρότημα  $M_2$ , αρκεί να ρυθμίσουμε δεόντως την ισορροπία ανάμεσα στο βάρος  $F_2 = M_2 g$  και τη δύναμη υποστηρίξης που ασκείται από τη μάζα Jeans, με την προϋπόθεση ότι στηρίζεται σε τρία συγκροτήματα του τύπου  $M_1$ . Καταλήγουμε, λοιπόν, στο αποτέλεσμα

$$N_2 = N_1^{2/3} \frac{f}{mg} = N_0^{19/9} = N^{19/27}. \quad (15)$$

Αυτός ο τύπος οδηγεί στην ακόλουθη εκτίμηση για τις παραμέτρους του συγκροτήματος στο δεύτερο δομικό επίπεδο:

$$N_2 \equiv 10^{34},$$

$$M_2 \equiv 5 \cdot 10^8 \text{ kg},$$

$$R_2 \equiv 100 \text{ m}.$$

Πρόκειται για ικανοποιητικά αποτέλεσματα. Αυτό το δομικό υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή Βράχων, και η αποσάθρωσή τους θα δημιουργήσει Πέτρες και Λίθους.

Αντλώντας έμπνευση από τη διαδοχή που ανακάλυψε, ο Δημιουργός αποφάσισε να γενικεύσει τους τύπους (14) και (15). Διαπίστωσε ότι ο αριθμός των ατόμων στο  $n$ -οστό δομικό επίπεδο ήταν

$$N_n = N_0^{\sum_{k=1}^n k} = N^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Αριθμός επιπέδου	Όνομα επιπέδου	Αριθμός ατόμων	μάζα (g)	Χαρακτηριστικό μέγεθος (cm)
0	Κόκκοι	$10^{16}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$
1	Λίθοι και πέτρες	$10^{27}$	$10^4$	$10^1$
2	Βράχοι	$10^{34}$	$10^{11}$	$10^4$
3	Λόφοι	$10^{39}$	$10^{16}$	$10^5$
4	Ορη	$10^{42}$	$10^{19}$	$10^6$
$\infty$	Γη	$10^{49}$	$10^{27}$	$10^9$

Πίνακας 1

Τα δομικά επίπεδα της στερεάς ύλης.

όπου  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Η συγκλίνουσα γεωμετρική πρόοδος

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

έχει το  $n$ -οστό μερικό άθροισμα

$$S_n = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^n},$$

οπότε

$$N_n = N_0^{3 - 3(2/3)^{n+1}} = N_0^{1 - (2/3)^{n+1}}. \quad (16)$$

Έλεγξε τον τύπο και διαπίστωσε πως αναγόταν στην εξίσωση (13) για  $n = 0$ . Εν συνεχείᾳ καταπάστηκε εκ νέου με τις αριθμητικές εκτιμήσεις και κατάρτισε έναν πίνακα με τα δομικά επίπεδα της στερεάς ύλης. Για  $n = 3$  βρήκε  $N_3 = N^{65/81}$ . Οι Λόφοι που αντιστοιχούσαν σ' αυτό τον αριθμό, με ύψος 1 km περίπου, ήταν σταθεροί, μεγάλοι και όμορφοι. Εντούτοις, ο Δημιουργός επιθυμούσε να θέσει ως κορωνίδα στο έργο του κάτι αληθινά θαυμάτια. Έτοι, έκανε το επόμενο βήμα και δημιούργησε το τέταρτο επίπεδο. Τα αποτελέσματα που βασίζονται στη σχέση  $N_4 = N^{211/243}$  παρατίθενται στον Πίνακα 1.

Με αυτό τον τρόπο κατασκευάστηκαν τα Όρη, των οποίων τα ύψη έφταναν ώς και τα 10 km. Φυσικά, με την παρέλευση του χρόνου και τού-

τα αποδομούνται, επειδή οι ανώτερες πλάκες είχαν λιγότερους δεσμούς απ' ότι οι κατώτερες, οι οποίες πιέζονταν από ένα βαρύτατο φορτίο. Ποιος θα μπορούσε όμως να επινοήσει μια καλύτερη κατασκευή; Και αξίζει να το επιχειρήσει κανείς; Πώς θα μπορούσαν να επιβιώσουν οι άνθρωποι χωρίς τα όρη, που τους προσφέρουν πολύτιμα χρήσιμα ορυκτά;

Τα άτομα παρήγαγαν Κόκκους, από τους οποίους κατασκεύαστηκαν οι Πέτρες και οι Λίθοι, που απετέλεσαν, με τη σειρά τους, τα αυστατικά των Βράχων, και τελικά εμφανίστηκαν οι Λόφοι και τα Όρη. Φτάσαμε άραγε στο Τέλος; Επ' ουδενί! Τώρα έφτασε η ώρα για τις Πλάκες, οι οποίες θα αποτελούν το υπόβαθρο των Ήπειρων. Οι Ήπειροι απαιτούν, πρώτα, το Φλοιό και, εν συνεχείᾳ, το Μανδύα. Συνεχίζεται άραγε αυτή η διαδικασία επ' άπειρον;

Σ' αυτό το σημείο καμπής, ο Δημιουργός διαπίστωσε πως, όταν το  $n$  τείνει στο άπειρο, ο τύπος (16) δίνει  $N_\infty = N$ . Δηλαδή, τον αριθμό των ατόμων που αντιστοιχούν στη μάζα Jeans. Αυτό σημαίνει πως η κατανομή της μάζας της στερεάς ύλης που οργανώνεται από ένα ιεραρχικό μηχανισμό τριών υποστηριγμάτων ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις της ελαστικής-βαρυτικής σταθερότητας του οριακού σώματος. Με άλλα λόγια, η επόμενη κατασκευή που αποτελείται από Αρμό, Λίθους, Βράχους, Λόφους, Όρη

και Ήπειρους πρέπει να έχει μάζα της ίδιας τάξης μεγέθους με την αρχική μάζα Jeans που παράγει το πεδίο βαρύτητας. Και, πράγματι, έτοι είναι! Οι πειραματικές ενδείξεις κατατείνουν στο ότι η Γη συνιστάται από δύο μέρη: τον πυρήνα, με μάζα περίπου  $2 \cdot 10^{24}$  kg, και το μανδύα, με μάζα κατά προσέγγιση ίση με  $4 \cdot 10^{24}$  kg.

«Μου αρέσει το έργο Μου», σκέφτηκε ο Δημιουργός. «Πρώτον, οι άνθρωποι θα κατανοήσουν εύκολα αυτό το μηχανισμό για το οχηματισμό των μακροσκοπικών δομικών επιπέδων της στερεάς ύλης. Ας γνωρίζουν πόσο απλός και ευχάριστος είναι ο Κόσμος των οποίων ενοικούν. Και δεύτερον, γνωρίζω πλέον την απάντηση του γρίφου που Με ταλάνισε: Σε ποιο δομικό επίπεδο θα ζήσουν οι άνθρωποι; Φυσικά στο πλανητικό επίπεδο, επειδή ο πλανήτης μπορεί να αυτοαναδημιουργείται.»

«Πραγματικά, Μου αρέσει το έργο Μου», επανέλαβε ο Δημιουργός. «Σε έναν τέτοιο πλανήτη οι άνθρωποι θα μπορούσαν να ζήσουν και να αναπαραχθούν. Ας δώσουν ένα όνομα σ' αυτό τον πλανήτη, κάθε λαός στη μητρική του γλώσσα. Και ας έχει χίλια ονόματα, που όλα τους θα είναι σωστά!»

aiδρα

## ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΕΚΔΟΣΕΙΣ

- Όλα τα σύγχρονα βιβλία Μαθηματικών, Φυσικής, Χημείας, Αστρονομίας, Μετεωρολογίας, Γεωλογίας, Πληροφορικής
- Βιβλία Διδακτικής, Φιλοσοφίας, Ιστορίας και Επιστημολογίας των Θετικών Επιστημών
- Άπαντα Αρχαίων Ελλήνων Θετικών Επιστημών
- Παλιά και σπάνια φυσικομαθηματικά βιβλία

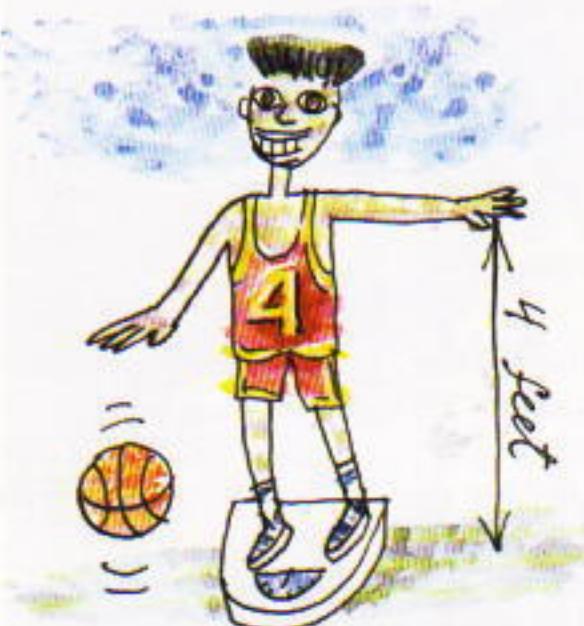
Διαθέτουμε περίπου 30.000 τίτλους βιβλίων από το 1532 έως σήμερα

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ 1 (από Σάλονος 116)  
106 81 Αθήνα, τηλ.: 3301 269, 3302 622

# Για να περνά η ώρα

Σ131

Κυκλικός συλλογισμός. Χωρίστε τον κύκλο του σχήματος σε δύο μέρη έτσι ώστε να είναι δυνατόν, αν τα ενώσουμε, να σχηματίσουμε έναν ίσο κύκλο αλλά με την τρύπα στο κέντρο.



Σ132

Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Από τα 20 παιδιά μιας τάξης τα 14 έχουν καστανά μάτια, τα 15 έχουν μαύρα μαλλιά, τα 17 ζυγίζουν περισσότερο από πενήντα κιλά και τα 18 έχουν ύψος που ξεπερνά το ενάμισι μέτρο. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον 4 από τα παιδιά διαθέτουν και τα τέσσερα χαρακτηριστικά.



Σ133

Έγια μόλα! Μια σχεδία και μια βενζινάκατος φεύγουν ταυτόχρονα από την πόλη Α και, ακολουθώντας το ρεύμα του ποταμού, κατευθύνονται στην πόλη Β. (Η σχεδία κινείται πάντοτε με την ταχύτητα του ρεύματος, η οποία είναι σταθερή.) Η βενζινάκατος φτάνει στην πόλη Β, κάνει αμέσως στροφή επιτόπου, και καταλήγει να συναντήσει τη σχεδία δύο ώρες μετά τη στιγμή της αναχώρησής τους από την πόλη Α. Πόση ώρα χρειάστηκε η βενζινάκατος για να πάει από την Α στην Β; (Υποθέτουμε ότι η βενζινάκατος ταξιδεύει συνεχώς με σταθερή ταχύτητα.)



Σ134

Χρυσό ανακάτωμα. Έχουμε τρεις ράβδους από κράμα χρυσού διαφορετικής περιεκτικότητας οι οποίες έχουν βάρη 1, 2 και 3kg, αντίστοιχα. Μπορείτε να χωρίσετε σε κομμάτια αυτές τις ράβδους έτσι ώστε να σχηματίσουμε τρεις καινούργιες με βάρη, πάλι, 1, 2 και 3kg αλλά τούτη τη φορά με ίση περιεκτικότητα σε χρυσό; (Η μέθοδος πρέπει να ισχύει ανεξάρτητα από την αρχική περιεκτικότητα σε χρυσό.)



Σ135

Αστραφτερό χιόνι. Γιατί λέμε μερικές φορές ότι το χιόνι «σπινθηροβολεί»; (A. Panov)

# Η συνάρτηση του Van der Waerden

Εξέταση μιας «φρικτής πληγής» των μαθηματικών

B. Martynov

**Ο**ΣΟΙ ΕΧΟΥΝ ΔΙΔΑΧΤΕΙ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΓΝΩΡΙΖΟΥΝ ότι, αν μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ένα δεδομένο σημείο, τότε εκεί είναι και συνεχής. Γνωρίζουν, επίσης, ότι το αντίστροφό δεν αληθεύει.

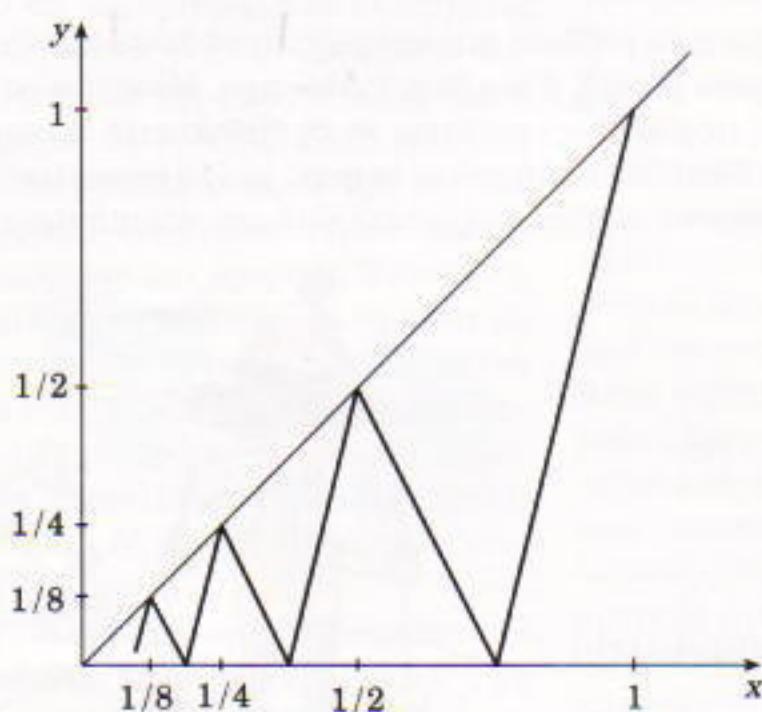
Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $y = |x|$  είναι συνεχής στο  $x = 0$  (και σε κάθε άλλο σημείο) αλλά δεν έχει παράγωγο στο  $x = 0$ . Γενικώς, αν σε κάποιο σημείο το γράφημα μιας συνάρτησης εμφανίζει «γωνία», τότε στο σημείο αυτό η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο. Είναι φανερό ότι μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση με άπειρο πλήθος «γωνιών» σε ένα διάστημα. (Το Σχήμα 1 παρουσιάζει ένα τμήμα του γραφήματος μιας τέτοιας συνάρτησης.) Όλες, όμως, οι συναρτήσεις αυτού του τύπου, καθώς και όλες οι άλλες συνεχείς συναρτήσεις που πιθανόν γνωρίζετε, είναι διαφορίσιμες στην πλειονότητα των σημείων τους.

Για μεγάλο διάστημα μετά την ανακάλυψη του διαφορικού λογισμού οι μαθηματικοί πίστευαν ότι οι συνεχείς συναρτήσεις ήταν «συνήθως» διαφορίσιμες. Έτσι, επικρά-

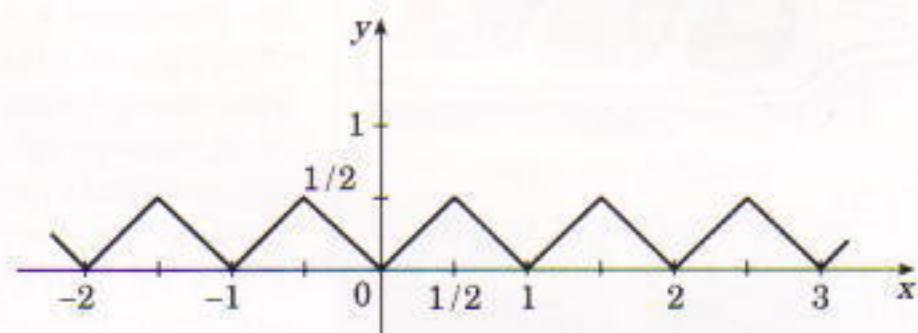
τησε μεγάλη αναστάτωση στον κόσμο των μαθηματικών όταν, κατά τη δεκαετία του 1880, ο γερμανός μαθηματικός Karl Weierstrass δημοσίευσε το παράδειγμα μιας συνεχούς συνάρτησης που δεν ήταν διαφορίσιμη σε κανένα σημείο. (Τέτοιο τύπο συνάρτησης είχε προτείνει 40 χρόνια νωρίτερα ο τοέχος μαθηματικός Bernhard Bolzano, αλλά η εργασία του δεν είχε γίνει ευρέως γνωστή.)

«Πώς είναι δυνατόν να μας ξεγελάσει τόσο πολύ η διοισθησή μας;» αναρρωτήθηκε ο γάλλος μαθηματικός Henri Poincaré ενώ ο συμπατριώτης του Charles Hermite δήλωσε πως «αντικρίζω με τρόμο και αηδία αυτή τη φρικτή πληγή —μια συνεχή συνάρτηση χωρίς παράγωγο σε κανένα σημείο».

Η κατασκευή του Weierstrass ήταν εξαιρετικά δύσκολη, αλλά τον 20ό αιώνα ο ολλανδός μαθηματικός B.L van der Waerden πρότεινε ένα πολύ απλούστερο παράδειγμα. Ξεκινά με τη συνάρτηση  $\varphi_0$ , το γράφημα της οποίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Η συνάρτηση  $\varphi_0$  δεν έχει παράγωγο σε κανένα από τα σημεία  $x = k/2$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Η συνάρτηση  $\varphi_0$  δεν έχει παράγωγο σε κανένα από τα σημεία  $x = k/4$ , το γράφημα της οποίας είναι η μπλε γραμμή του Σχήματος 3, δεν έχει παράγωγο στα σημεία  $x = k/8$ , και η συνάρτηση  $\varphi_2(x) = (1/2^2)\varphi_0(2^2x)$ , το γράφημα της ο-

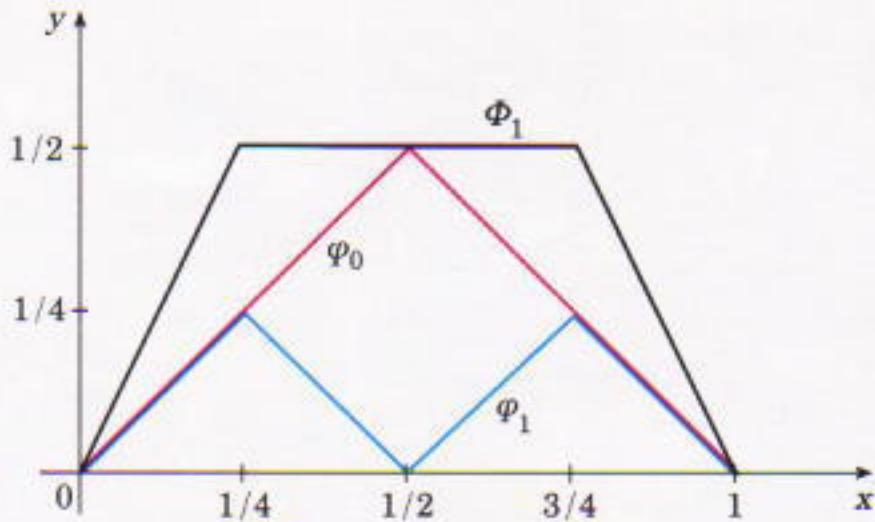


Σχήμα 1

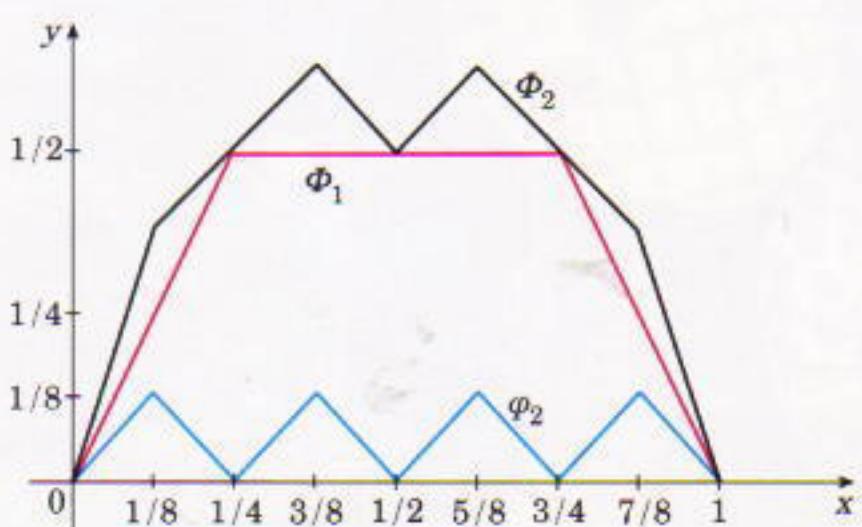


Σχήμα 2

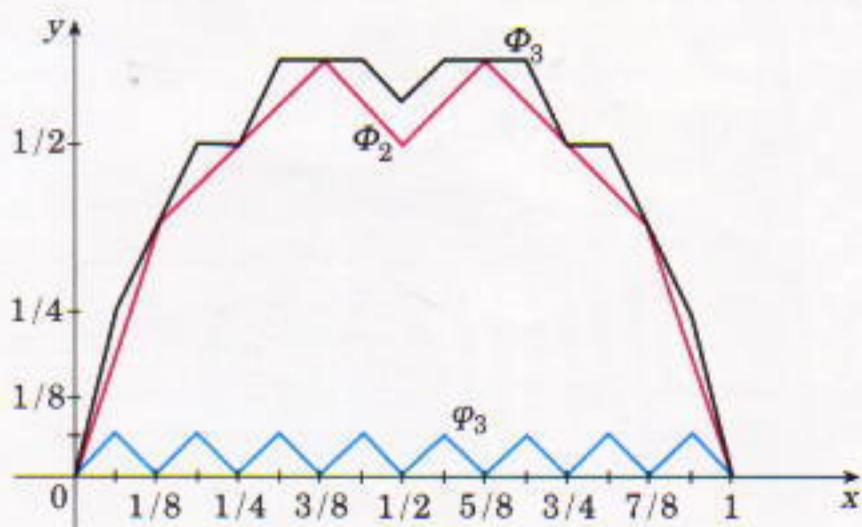




Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5

ποιας είναι η μπλε γραμμή του Σχήματος 4, δεν έχει παράγωγο στα σημεία  $x = k/8$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

Για κάθε  $n \in \mathbf{N}$ , έστω  $\varphi_n(x) = (1/2^n)\varphi_0(2^n x)$ . (Το γράφημα της συνάρτησης  $\varphi_3$  είναι η μπλε γραμμή του Σχήματος 5.) Η συνάρτηση  $\varphi_n$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών και δεν έχει παράγωγο όταν  $x = k/2^n$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ). Επίσης,  $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1/2^{n+1}$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .

Διαπιστώνουμε ότι το πλήθος των σημείων στα οποία η συνάρτηση  $\varphi_n(x)$  δεν έχει παράγωγο αυξάνει όσο μεγαλώνει το  $n$ .

Τι θα συμβεί αν προσθέσουμε όλες τις συναρτήσεις  $\varphi_n$ ? Έχουμε κάθε λόγο να ελπίζουμε ότι το άθροισμα θα είναι συνεχές σε όλα τα σημεία και δεν θα έχει παράγωγο σε κάθε σημείο της μορφής  $k/2^n$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ). Δυστυ-

χώς, δεν είναι η κατάλληλη συγμή να διαλευκάνουμε το νόημα ενός αθροίσματος με άπειρους όρους. Μπορούμε, όμως, να θεωρήσουμε την ακολουθία των συναρτήσεων

$$\Phi_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x)$$

(επομένως,  $\Phi_{n+1}(x) = \Phi_n(x) + \varphi_{n+1}(x)$  — δείτε τα Σχήματα 3-5) και να αποδείξουμε ότι για κάθε  $x$  υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x).$$

Για να το πετύχουμε αυτό, θα χρειαστούμε το θεώρημα του Weierstrass το οποίο μας λέει ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία αριθμών έχει όριο.

Λόγω της ανισότητας  $\varphi_{n+1}(x) \geq 0$  έχουμε ότι  $\Phi_{n+1}(x) \geq \Phi_n(x)$ . Επομένως, η ακολουθία  $(\Phi_n(x))$  είναι μονότονη. Αφού

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) \\ &\leq 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^{n+1} = 1 - 1/2^{n+1} < 1, \end{aligned}$$

ουμπεραίνουμε ότι η ακολουθία  $(\Phi_n(x))$  είναι φραγμένη για κάθε  $x$ . Επομένως το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x)$$

υπάρχει.

Ας το συμβολίσουμε με  $\Phi(x)$ . Έχουμε, λοιπόν, ορίσει μια συνάρτηση  $\Phi(x)$  για κάθε πραγματικό  $x$ . Η συνάρτηση αυτή είναι φανερά περιοδική (με περίοδο 1) και  $0 \leq \Phi(x) \leq 1$ , για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , ενώ το γράφημα της συνάρτησης  $\Phi(x)$  είναι συμμετρικό ως προς κάθε ευθεία  $x = k/2$  (όπου  $k \in \mathbf{Z}$ ). Μπορούμε εύκολα να συναγάγουμε αυτές τις προτάσεις από τις ιδιότητες της  $\varphi_0$  και τις ιδιότητες του οριου ακολουθιών. Η σχεδίαση του γραφήματος της  $\Phi(x)$  είναι αδύνατη. Από τα Σχήματα 3-5 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα σημεία που έχουν «γωνίες», οι συναρτήσεις  $\Phi_n(x)$ , και δεν υπάρχουν παράγωγοι, αυξάνουν όσο μεγαλώνει το  $n$ .

### Η συνάρτηση μας είναι συνεχής

Η συνάρτηση  $\Phi(x)$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Διαισθητικά, αυτό είναι αρκετά φανερό: αν η συνάρτηση  $\Phi(x)$  παρουσιάζει «χάσμα» σε κάποιο σημείο  $x_0$ , τότε, για κάποιο αρκετά μεγάλο  $n \in \mathbf{N}$ , η συνάρτηση  $\Phi_n(x)$  θα εμφανίζει παρόμοιο χάσμα στο ίδιο σημείο  $x_0$ , και από την άλλη πλευρά θα ήταν συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία της ευθείας των πραγματικών. Η επόμενη απόδειξη ξεκαθαρίζει αυτούς τους συλλογισμούς.

Ας ξεκινήσουμε με μια σύντομη μελέτη της επίδρασης της διαφοράς  $r_n(x) = \Phi(x) - \Phi_n(x)$ , όπου θεωρούμε το  $x$  ως σταθερά και το  $n$  μεταβλητή:

$$\Phi_{n+m}(x) - \Phi_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \dots + \varphi_{n+m}(x).$$

Προφανώς, ισχύει

$$0 \leq \Phi_{n+m}(x) - \Phi_n(x) \leq \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο για το άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου.)

Αφού

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_{n+m}(x) = \Phi(x)$$

(αυτός δεν είναι παρά ένας ιδιαίτερος τρόπος γραφής του ορισμού της  $\Phi(x)$ ) και

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Phi_n(x),$$

(η ακολουθία  $\Phi_n(x)$  είναι σταθερή ως προς  $m$ ), έχουμε

$$0 \leq r_n(x) \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Μπορούμε πλέον να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $\Phi$  είναι συνεχής σε ένα τυχαίο  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Ας θεωρήσουμε ένα  $\varepsilon > 0$  και ας εξετάσουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς

$$\begin{aligned} |\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)| \\ = |\Phi_n(x_0 + h) + r_n(x_0 + h) - \Phi_n(x_0) - r_n(x_0)| \\ \leq |\Phi_n(x_0 + h) - \Phi_n(x_0)| + |r_n(x_0 + h)| + |r_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Ομως,

$$|r_n(x_0)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

και

$$|r_n(x_0 + h)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

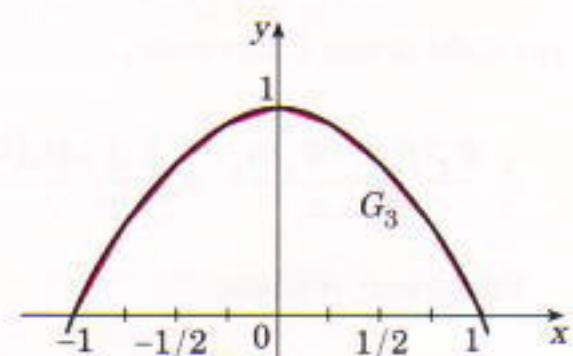
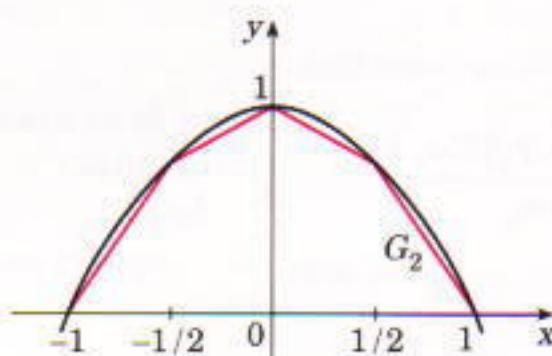
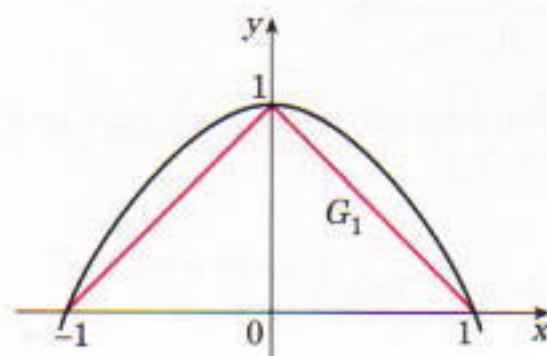
Επομένως,

$$|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)| \leq |\Phi_n(x_0 + h) - \Phi_n(x_0)| + \frac{1}{2^n}.$$

Αν το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο, ισχύει

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Η συνάρτηση  $\Phi_n$  είναι συνεχής στο  $x_0$  ως άθροισμα πε-



Σχήμα 6

περασμένου πλήθους συνεχών συναρτήσεων. Ετοι, αν πάρουμε ένα αρκετά μικρό  $\delta > 0$ , μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι, όταν  $|h| < \delta$ , ισχύει

$$|\Phi_n(x_0 + h) - \Phi_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτοι, αν διαλέξουμε ένα τέτοιο  $\delta$ , διαποτώνουμε ότι αν  $|h| < \delta$ ,

$$|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)| < \varepsilon.$$

Άρα η συνάρτηση  $\Phi$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0$ .

## Η συνάρτηση που κατασκευάσαμε δεν είναι διαφορίσιμη

Η συνάρτηση  $\Phi$  δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Η πρόταση αυτή κατ' αρχάς φαίνεται προφανής: το πλήθος των σημείων στα οποία δεν έχει παράγωγο η  $\Phi_n$  αυξάνει όσο μεγαλώνει ο δείκτης  $n$ , οπότε είναι φυσικό να αναμένουμε ότι οριακά (δηλαδή, η συνάρτηση  $\Phi$ ) θα «γεμίσει» ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών από σημεία στα οποία δεν υπάρχει παράγωγος. Όμως, ο συλλογισμός αυτός είναι απλοϊκός όπως μπορούμε να δούμε από το παράδειγμα των συναρτήσεων  $G_n$  (οι  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  παρουσιάζονται στο Σχήμα 6) για τις οποίες έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = G(x) = 1 - x^2.$$

Το πλήθος των σημείων στα οποία δεν έχει παράγωγο η  $G_n$  αυξάνει όσο μεγαλώνει ο δείκτης  $n$ , αλλά η συνάρτηση  $G$  έχει παντού παράγωγο.

Θα αποδείξουμε ότι η  $\Phi$  δεν έχει πουθενά παράγωγο με εις άτοπο απαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα  $x_0 \in \mathbf{R}$ , τέτοιο ώστε να υπάρχει η  $\Phi'(x_0)$ .

«Στριμώχνουμε» το  $x_0$  μεταξύ δύο ακολουθιών δυαδικών προσεγγίσεων, μια κατ' έλλειψη και μια καθ' υπέρβαση:

$$\frac{s_k}{2^{k+1}} < x_0 < \frac{(s_k + 1)}{2^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots \text{ και } s_k \in \mathbf{Z}).$$

Θέτουμε

$$\alpha_k = \frac{s_k}{2^{k+1}}, \quad \beta_k = \frac{s_k + 1}{2^{k+1}}.$$

Τότε

$$a_k \leq x_0 < \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

και

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = x_0. \quad (2)$$

Από την (1) έπειτα ότι

$$0 < \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - a_k} \leq 1, \quad 0 < \frac{x_0 - a_k}{\beta_k - a_k} \leq 1$$

Από αυτές τις ανισότητες, από την ισότητα (2) και από την εύκολα επαληθευόμενη ταυτότητα

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(a_k)}{\beta_k - a_k} - \Phi'(x_0) \\ &= \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - a_k} \left[ \frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(x_0)}{\beta_k - x_0} - \Phi'(x_0) \right] \\ &+ \frac{x_0 - a_k}{\beta_k - a_k} \left[ \frac{\Phi(x_0) - \Phi(a_k)}{x_0 - a_k} - \Phi'(x_0) \right], \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(a_k)}{\beta_k - a_k} = \Phi'(x_0).$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι στην πραγματικότητα το

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(a_k)}{\beta_k - a_k}$$

δεν υπάρχει, και θα καταλήξουμε έτσι στη ζητούμενη αντίφαση.

Με βάση τον ορισμό της συνάρτησης  $\Phi_n$ , έχουμε

$$\frac{\Phi_n(\beta_k) - \Phi_n(a_k)}{\beta_k - a_k} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varphi_0(2^i \beta_k) - \varphi_0(2^i a_k)}{\beta_k - a_k},$$

Όταν  $i > k$ , τότε  $2^{i-k-1}, s_k \in \mathbf{Z}$ , και επομένως

$$\varphi_0(2^i a_k) = \varphi_0(2^{i-k-1} s_k) = 0,$$

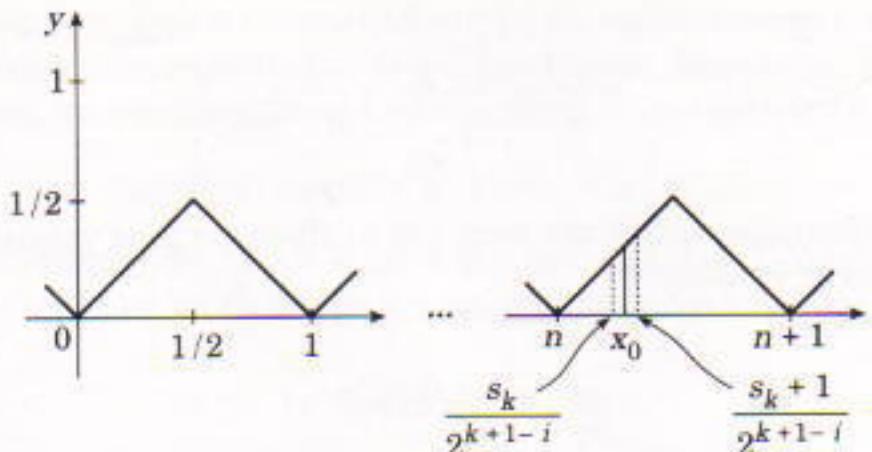
$$\varphi_0(2^i \beta_k) = \varphi_0[2^{i-k-1}(s_k + 1)] = 0.$$

για κάθε τέτοιο  $i$ . Συνεπώς,

$$\frac{\Phi_n(\beta_k) - \Phi_n(a_k)}{\beta_k - a_k} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varphi_0(2^i \beta_k) - \varphi_0(2^i a_k)}{\beta_k - a_k}.$$

Επομένως, ο λόγος

$$\frac{\Phi_n(\beta_k) - \Phi_n(a_k)}{\beta_k - a_k}$$



### Σχήμα 7

είναι ανεξάρτητος του  $n$ . Αν θεωρήσουμε το όριο όταν το  $n$  τείνει στο άπειρο, παίρνουμε

$$\frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(a_k)}{\beta_k - a_k} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varphi_0(2^i \beta_k) - \varphi_0(2^i a_k)}{\beta_k - a_k}.$$

Όταν  $i < k$ ,

$$\frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varphi_0(2^i \beta_k) - \varphi_0(2^i a_k)}{\beta_k - a_k} = \frac{\varphi_0\left(\frac{s_k+1}{2^{k+1-i}}\right) - \varphi_0\left(\frac{s_k}{2^{k+1-i}}\right)}{2^{\frac{1}{k+1-i}}}.$$

Όμως, η συνάρτηση  $\varphi_0$  είναι γραμμική στο διάστημα

$$\left[ \frac{s_k}{2^{k+1-i}}, \frac{s_k+1}{2^{k+1-i}} \right]$$

(δείτε το Σχήμα 7). Συνεπώς το κλάσμα δεξιά είναι απλώς η κλίση της αντίστοιχης ευθείας. Δηλαδή, είναι ίση είτε με  $+1$  είτε με  $-1$ . Άρα

$$\frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(a_k)}{\beta_k - a_k} = p \cdot 1 + q \cdot (-1),$$

όπου  $p + q = k + 1$ .

Η ισοτιμία του αριθμού  $p \cdot 1 + q \cdot (-1)$  συμπίπτει με την ισοτιμία του αριθμού

$$\begin{aligned} p \cdot 1 + q \cdot (-1 + 2) &= p \cdot 1 + q \cdot 1 \\ &= (p + q) \cdot 1 = (k + 1) \cdot 1 = k + 1. \end{aligned}$$

Επομένως το κλάσμα

$$\frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(a_k)}{\beta_k - a_k}$$

είναι άρτιο όταν το  $k$  είναι περιττό και περιττό όταν το  $k$  είναι άρτιο.

Άρα το

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(a_k)}{\beta_k - a_k}$$

δεν υπάρχει.

## Αναζήτηση των μεγίστων

Ας αποδείξουμε ότι η μέγιστη τιμή

$$M = \max_{\mathbb{R}} \Phi(x) = \max_{[0, 1]} \Phi(x)$$

ισούται με  $2/3$  και ας προσδιορίσουμε το σύνολο των σημείων στα οποία η  $\Phi$  παίρνει αυτή την τιμή. Προσοχή, εδώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνήθεις μεθόδους. Δεν μπορούμε να αναζητήσουμε τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος, αφού η συνάρτηση αυτή δεν είναι διαφορίσιμη. Μπορούμε όμως να γράψουμε

$$\Phi_n(2x) = \varphi_0(2x) + \varphi_1(2x) + \dots + \varphi_n(2x)$$

$$= \varphi_0(2x) + \frac{1}{2} \varphi_0(2^2 x) + \dots + \frac{1}{2^n} \varphi_0(2^{n+1} x)$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{2} \varphi_0(2x) + \frac{1}{2^2} \varphi_0(2^2 x) + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \varphi_0(2^{n+1} x) \right]$$

$$= 2 \left[ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_{n+1}(x) \right] = 2 \left[ \Phi_{n+1}(x) - \varphi_0(x) \right]$$

$$= 2\Phi_{n+1}(x) - 2\varphi_0(x).$$

Αν πάρουμε το όριο όταν το  $n \rightarrow \infty$ , βρίσκουμε

$$\Phi(2x) = 2\Phi(x) - 2\varphi_0(x). \quad (3)$$

Αξίζει να επισημάνουμε ότι υπάρχει μια μόνο συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές που ικανοποιεί την εξίσωση (3). Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να αποδείξουν αυτό το γεγονός.

Αφού το  $1$  είναι περίοδος της συνάρτησης  $\Phi$ , διαπιστώνουμε ότι το  $\tilde{x}$  είναι σημείο μεγίστου για τη  $\Phi$  αν και μόνο αν το κλασματικό του μέρος  $\{\tilde{x}\} \in [0, 1]$  είναι επίσης σημείο μεγίστου.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο  $E$  που αποτελείται από όλα τα σημεία μεγίστου που ανήκουν στο τμήμα  $[0, 1]$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία του γραφήματος της συνάρτησης  $\Phi$  ως προς την ευθεία  $x = 1/2$  και την εξίσωση (3), βρίσκουμε το  $\Phi(1/3)$

$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 2\varphi_0\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 2\varphi_0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Ας αποδείξουμε ότι  $E \subseteq \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ .

Πράγματι έστω  $\tilde{x} \in E$  και  $\tilde{x} \leq 1/2$ . Τότε έχουμε:

$$\Phi(\tilde{x}) = M$$

$$\Phi(2\tilde{x}) \leq M$$

$$\frac{2}{3} = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \leq M,$$

και από την εξίσωση (3) προκύπτει

$$\begin{aligned} \Phi(2\tilde{x}) &= 2\Phi(\tilde{x}) - 2\varphi_0(\tilde{x}) \\ &= 2\Phi(\tilde{x}) - 2\tilde{x} = 2M - 2\tilde{x} \leq M. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\tilde{x} \geq M/2 \geq 1/3.$$

Αφού το γράφημα της  $\Phi$  είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία  $x = 1/2$ , συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν σημεία μεγίστου ούτε στο διάστημα  $[2/3, 1]$ .

Ας αποδείξουμε τώρα ότι  $M = 2/3$ . Χρησιμοποιούμε και πάλι την εξίσωση (3):

$$\begin{aligned} \Phi(4x) &= 2\Phi(2x) - 2\varphi_0(2x) = 2[2\Phi(x) - 2\varphi_0(x)] - 2\varphi_0(2x) \\ &= 4\Phi(x) - 4\varphi_0(x) - 2\varphi_0(2x), \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{2}\varphi_0(2x) + \frac{1}{4}\Phi(4x) = \Phi_1(x) + \frac{1}{4}\Phi(4x).$$

Οπως βλέπουμε από το Σχήμα 3, στο διάστημα  $[1/4, 3/4]$  η συνάρτηση  $\Phi_1$  είναι σταθερή και ίση με  $1/2$ . Επομένως, για όλα τα  $x$  σε αυτό το διάστημα έχουμε

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Phi(4x). \quad (4)$$

Αφού

$$\tilde{x} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $x$  με το  $\tilde{x}$  στην εξίσωση (4):

$$M = \Phi(\tilde{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Phi(4\tilde{x}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}M.$$

$$M \leq \frac{2}{3}.$$

Αν θυμηθούμε ότι

$$M \geq \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$M = \frac{2}{3}$$

και ότι

$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Για να συνεχίσουμε θα χρειαστούμε την εξής πρόταση: Αν  $\tilde{x}$  είναι ένα σημείο μεγίστου, τότε το  $4\tilde{x}$  είναι επίσης σημείο μεγίστου, και αν το  $4\tilde{x}$  είναι σημείο μεγίστου και

$$\{\tilde{x}\} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

τότε το  $x$  είναι επίσης σημείο μεγίστου. Για να αποδείξουμε την πρόταση επισημαίνουμε πρώτα ότι η εξίσωση (4) είναι αληθής για όλα τα  $x$  τέτοια ώστε

$$\{x\} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

(οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι αυτό σχύει πράγματι). Έστω  $\tilde{x}$  ένα σημείο μεγίστου. Τότε

$$\{\tilde{x}\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

Επομένως,

$$\frac{2}{3} = M = \Phi(\tilde{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Phi(4\tilde{x}),$$

$$\Phi(4\tilde{x}) = \frac{2}{3} = M.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το  $4\tilde{x}$  είναι σημείο μεγίστου και

$$\{\tilde{x}\} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

Τότε

$$\Phi(4\tilde{x}) = M = \frac{2}{3},$$

$$\Phi(\tilde{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Phi(4\tilde{x}) = \frac{2}{3} = M.$$

## Το σύνολο των σημείων μεγίστου

Ας μελετήσουμε τώρα τη δομή του συνόλου  $E$ .

Αν ο Hermite είχε καταλάβει πόσο εξαιρετικά πολύπλοκη είναι η συνάρτηση του van der Waerden, είναι πολύ πιθανό ότι θα είχε αισθανθεί ακόμη μεγαλύτερη αποστροφή. Από την άλλη πλευρά, μπορεί η πολύπλοκη και όμορφη δομή αυτού του συνόλου να τον είχε οδηγήσει στη μελέτη των μη διαφορίσιμων συναρτήσεων. Ποιος να ξέρει;

Γνωρίζουμε ήδη δύο σημεία του συνόλου  $E$ : τα  $1/3$  και  $2/3$ . Επίσης, αποδείξαμε ότι  $E \subseteq [1/3, 2/3]$ . Μπορούμε επιπλέον να αποδείξουμε ότι το σύνολο  $E$  είναι κλειστό. Αυτό σημαίνει ότι, αν μια ακολουθία σημείων του  $E$  συ-

γκλίνει, τότε το όριό της ανήκει επίσης στο  $E$ . Για να το αποδείξουμε ας υποθέσουμε ότι  $x_n \in E$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Αυτό σημαίνει ότι  $\Phi(x_n) = M$ . Έστω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

Τότε, αφού η  $\Phi$  είναι συνεχής στο  $\bar{x}$ , έπειτα ότι

$$\Phi(\bar{x}) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = M.$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $\bar{x} \in E$ , επομένως το  $E$  είναι κλειστό.

Από τις προτάσεις που αποδείξαμε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου και από το γεγονός ότι το  $1$  είναι περίοδος της συνάρτησης  $\Phi$ , έπειτα ότι, αν το  $x$  είναι σημείο του  $E$ , τότε το σημείο

$$1/4 + x/4 = (1+x)/4$$

όπως και το

$$2/4 + x/4 = (2+x)/4$$

ανήκουν στο  $E$ . Επομένως, αν ξεκινήσουμε από τα σημεία  $1/3$  και  $2/3$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά ακόμη σημεία του συνόλου  $E$ :

$$E: \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}, \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3},$$

και ούτω καθεξής.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλοι οι αριθμοί της μορφής

$$x = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \dots + \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a_{n+1}}{3},$$

όπου τα  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  είναι ίσα με  $1$  ή  $2$ , είναι στοιχεία του συνόλου  $E$ . Αφού

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \dots,$$

μπορούμε να αναπαραστήσουμε έναν τέτοιο αριθμό  $x$  ως

$$x = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \dots + \frac{a_n}{4^n} + \frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{4^{n+2}} + \dots,$$

ή, για να χρησιμοποιήσουμε την αναλογία με τα συνηθισμένα δεκαδικά αναπτύγματα, ως ένα άπειρο περιοδικό «τετραδικό» κλάσμα με περίοδο ενός ψηφίου:

$$x = 0.a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+1} \dots = 0.a_1 a_2 \dots a_n (a_{n+1}).$$

Αφού το  $E$  είναι κλειστό, κάθε αριθμός της μορφής

$$x = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \dots + \frac{a_n}{4^n} + \frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{4^{n+2}} + \dots,$$

όπου  $a_i$  είναι ίσο με  $1$  ή  $2$ , ανήκει στο  $E$ . Πράγματι, για κάθε  $x$  αυτής της μορφής, μπορούμε να βρούμε μια ακο-

λουθία ( $x_n$ ) σημείων του  $E$  που συγκλίνουν στο  $x$ . Συγκεκριμένα, αν

$$x_n = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \dots + \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{3},$$

τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (\text{διότι } 0 \leq x - x_n \leq \frac{1}{4^{n+1}}).$$

Συνεπώς, το σύνολο  $E$  αποτελείται από όλους τους α-

	$\frac{1}{12} = 0,011111\dots$
✓	$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = 0,022222\dots$
	$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = 0,100000\dots$
✓	$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = 0,111111\dots$
✓	$\frac{5}{12} = 0,122222\dots$
	$\frac{1}{2} = \frac{6}{12} = 0,200000\dots$
✓	$\frac{7}{12} = 0,211111\dots$
✓	$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = 0,222222\dots$
	$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = 0,300000\dots$
	$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = 0,311111\dots$
	$\frac{11}{12} = 0,322222\dots$

### Σχήμα 8

ριθμούς που μπορούν να αναπαρασταθούν ως άπειρο τετραδικό κλάσμα της μορφής  $0.a_1a_2\dots a_n\dots$ , όπου κάθε  $a_i$  είναι ίσο με 1 ή 2 (στο Σχήμα 8 βλέπετε την τετραδική ανάπτυξη των αριθμών  $1/12, 2/12, \dots, 11/12$ ).

Ας αποδείξουμε τώρα ότι το  $E$  δεν περιέχει άλλους αριθμούς. Ας υποθέσουμε ότι το τετραδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού  $x \in E$  έχει το 0 σε κάποια θέση μετά την υποδιαστολή —δηλαδή,  $x = 0.a_1a_2\dots a_n0a_{n+2}\dots$ . Τότε

$$\{4^n x\} = 0,0a_{n+2}\dots \in E.$$

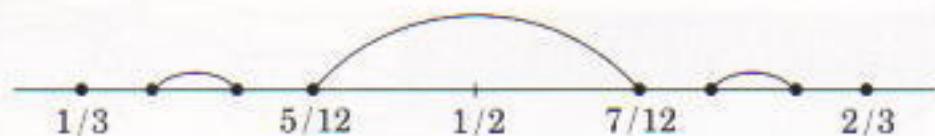
$$\text{Όμως } 0,0a_{n+2}a_{n+3}\dots < 0,033 = 3\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right) = \frac{1}{4},$$

και επομένως το  $\{4^n x\}$  βρίσκεται έξω από το τμήμα  $[1/3, 2/3]$  που περιέχει το  $E$ .

Από την άλλη πλευρά, αν υποθέσουμε ότι το τετραδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού  $x \in E$  έχει το 3 σε κάποια θέση μετά την υποδιαστολή —δηλαδή,  $x = 0.a_1a_2\dots a_n3a_{n+2}\dots$ . Τότε,

$$\{4^n x\} = 0,3a_{n+2}\dots \in E,$$

πράγμα που είναι αδύνατον, διότι  $0,3a_{n+2}\dots > 0,3 = 3/4$ . Μπορούμε να κατασκευάσουμε γεωμετρικά το σύνο-



### Σχήμα 9

λο  $E$  ως εξής: Διαιρούμε το τμήμα  $[1/3, 2/3]$  σε τέσσερα ίσα μέρη και διαγράφουμε τα εσωτερικά σημεία των δύο μεσαίων μερών και το μέσο του τμήματος (Σχήμα 9). Στη συνέχεια, διαιρούμε και πάλι τα υπόλοιπα τμήματα σε τέσσερα ίσα μέρη, διαγράφουμε τα εσωτερικά σημεία των δύο μεσαίων μερών και τα μέσα των τμημάτων, κ.ο.κ. Μπορείτε να προσπαθήσετε να αποδείξετε ότι το σύνολο που απομένει έπειτα από όλες αυτές τις διαγραφές αποτελείται ακριβώς από όλα εκείνα τα σημεία στην τετραδική αναπαράσταση των οποίων βρίσκουμε μόνο τα ψηφία 1 και 2, δηλαδή το σύνολο  $E$ . ◻

### ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ



Το *Quantum* εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει είκοσι επτά τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα

προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.



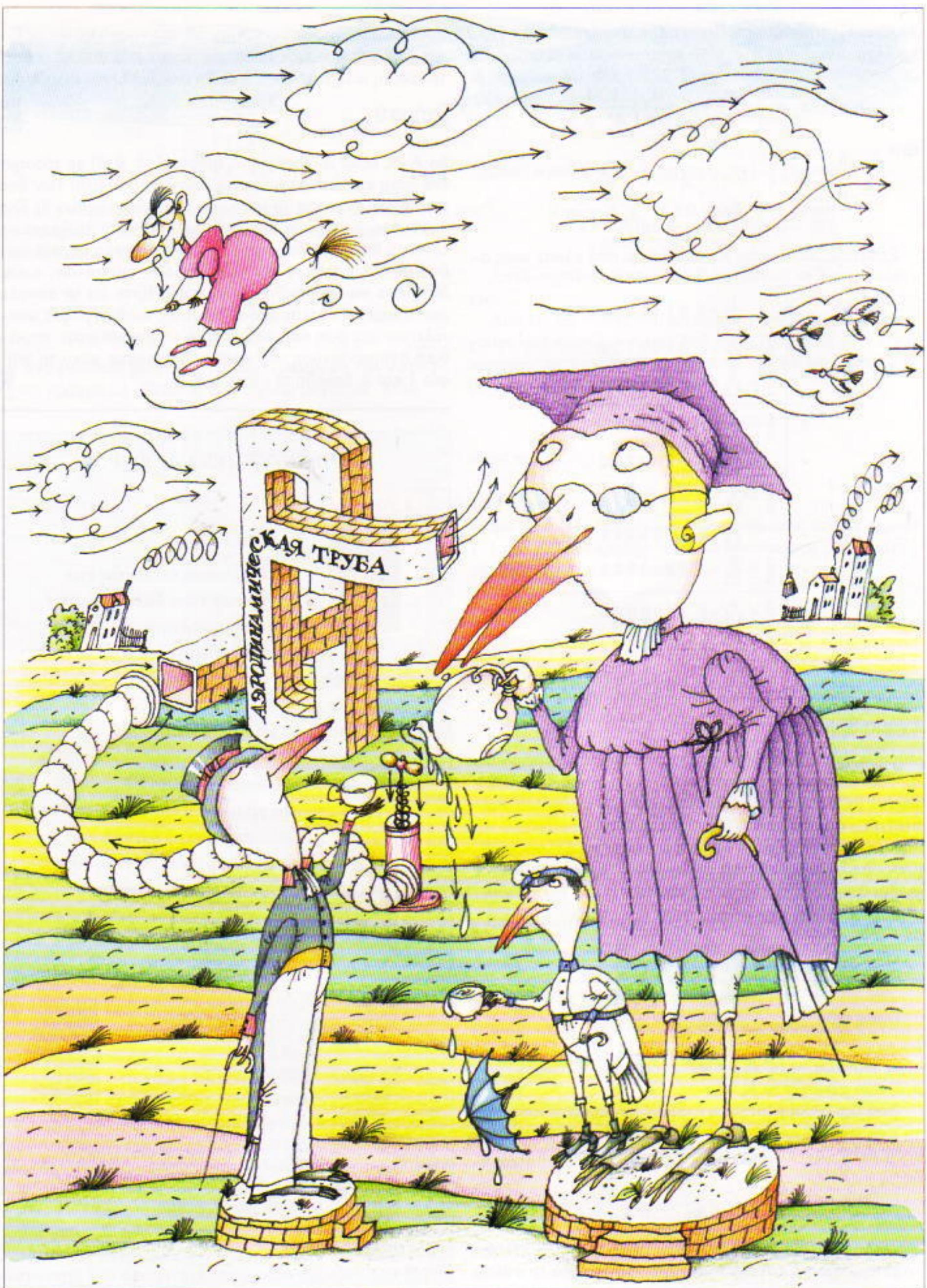
Το *Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Μπορείτε ακόμη να προμηθευτείτε και τις καλαίσθητες θήκες



του, από το βιβλιοπωλείο μας ή με αντικαταβολή, για την αρχειοθέτηση των τευχών σας.





# Υδροπαράδοξα

Όταν τα ρευστά απαρνούνται τη συμπεριφορά των μοντέλων

S. Betyaev

**Τ**Α ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΕΙΝΑΙ ΑΠΡΟΒΛΕΠΤΕΣ ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ που έρχονται σε ριζική αντίθεση με την κοινή λογική. Η πρακτική σημασία των παραδόξων —των «μηχανών της προόδου»— έγκειται στο ότι προσφέρουν νέες προοπτικές σε παλαιότερες θεωρίες ή χαράσσουν το δρόμο για την περαιτέρω τελειοποίηση κάποιας θεωρίας (ορισμένες φορές μάλιστα οδηγούν ακόμη και στη δημιουργία ενός νέου επιστημονικού κλάδου).

Η θεωρία της σχετικότητας ενσωμάτωσε στη σύγχρονη εποιήμη το παράδοξο του ορίου στην ταχύτητα μετάδοσης μιας πληροφορίας, ενώ η κβαντική μηχανική έκανε ακριβώς το ίδιο με το παράδοξο της ασυνεχούς εκπομπής στον μικρόκοσμο. Τα παράδοξα οδήγησαν στη δημιουργία των πεδίων της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων και της κοσμολογίας, και παρακίνησαν στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών. Τα πλέον θεμελιώδη παράδοξα, οι ακρογωνιαίοι λίθοι της εποιήμης, διατυπώθηκαν και ερμηνεύτηκαν από ιδιοφυίες, γεγονός που αναγνωρίζει σε ένα του ποίημα και ο μεγάλος ρώσος ποιητής Αλεξάντρ Πούσκιν:

Ω, οι εκπληκτικές ανακαλύψεις  
Που πηγάζουν από το πνεύμα της μάθησης  
Και την εμπειρία, τέκνο των σφαλμάτων,  
Την ευφυΐα, φίλη των παραδόξων,  
Και την τύχη, τον από μηχανής θεό.

Στην εποιήμη γίνεται σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα και τις θεωρητικές γενικεύσεις οι οποίες βασίζονται σε μαθηματικές προσομοιώσεις. Τα επιστημονικά παράδοξα μπορούν να υποδιαιρεθούν σε τρεις κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία υπάγονται οι περιπτώσεις όπου παρουσιάζεται ανακολουθία ανάμεσα σε μια γενικώς παραδεκτή θεωρητική έννοια και ένα νέο θεωρητικό συμπέρασμα. Αυτή είναι η απλούστερη κατηγορία παραδόξων (παράδοξα «θεωρίας έναντι θεωρίας»), η οποία προκύπτει από βελτιώσεις σε μαθηματικά μοντέλα ή μεθόδους υπολογισμού.

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι περιπτώσεις όπου

παρουσιάζεται ανακολουθία ανάμεσα στη γενική εμπειρία και σε μια νέα ιδέα που έχει πειραματική βάση (παράδοξα «πειράματος έναντι πειράματος»). Αυτά αξίζουν λεπτομερέστερη εξέταση, την οποία και θα παραθέσουμε ευθύς αμέσως, αφήνοντας για λίγο κατά μέρος τον ορισμό και την ανάλυση της τρίτης κατηγορίας παραδόξων.

## Τα παράδοξα συμμετρίας

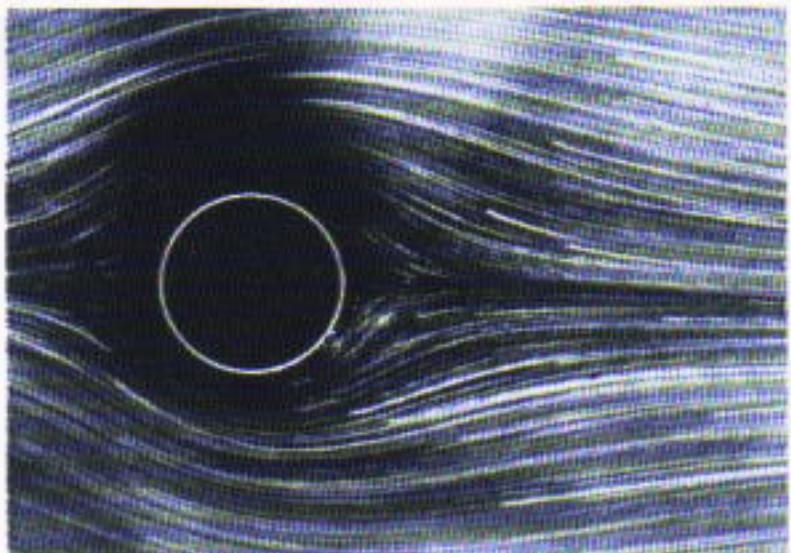
Οι περιπτώσεις που παρουσιάζουν συμμετρία οδηγούν πάντοτε σε συμμετρικά αποτελέσματα; Το παραπάνω δεν ισχύει σε μικροσκοπική κλίμακα (δείτε για παράδειγμα το βιβλίο του Richard Feynman: *Theory of Fundamental Processes*). Ωστόσο, ούτε και σε μακροσκοπική κλίμακα είναι κάτι που ισχύει πάντοτε. Παραδείγματος χάρη, η στρωτή ροή υγρού γύρω από ένα συμμετρικό σώμα είναι συχνά μη συμμετρική. Αυτό είναι το υδροδυναμικό παράδοξο συμμετρίας.

Στο Σχήμα 1 βλέπουμε τη συμμετρική ροή νερού γύρω από έναν σφαιρικό κύλινδρο. Οι τροχιές των σωματιδίων του υγρού γίνονται ορατές με τη βοήθεια σκόνης αργιλίου. Στο συγκεκριμένο σχήμα, το νερό ρέει από τα αριστερά προς τα δεξιά. Το πάνω και το κάτω μισό της εικόνας είναι συμμετρικά: το ένα είναι το κατοπτρικό ειδωλο του άλλου. Εππλέον, η ροή στο μπροστινό και το πίσω μέρος του κυλίνδρου (το αριστερό και το δεξιό μισό της εικόνας) είναι επίσης σχεδόν συμμετρική.

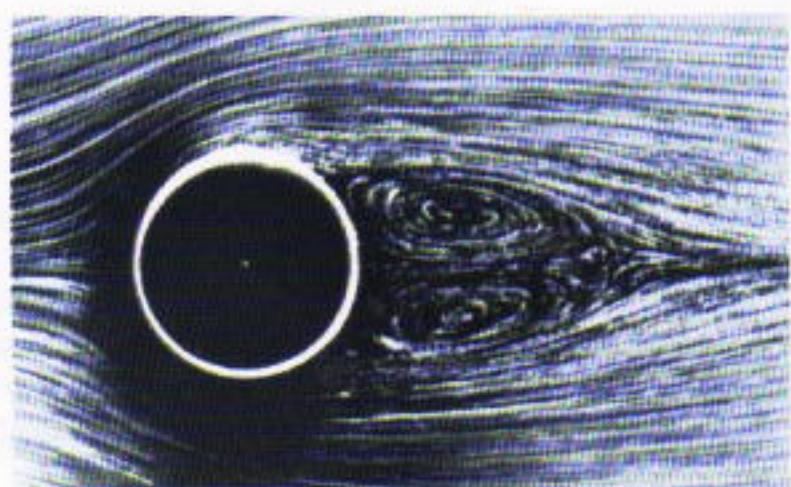
Στο Σχήμα 2 βλέπουμε τη ροή γύρω από τον ίδιο κύλινδρο αλλά υπό διαφορετικές συνθήκες. Εξακολουθεί να υπάρχει η συμμετρία «πάνω-κάτω», έχει καταστραφεί όμως η συμμετρία «αριστερά-δεξιά». Στο πίσω μέρος του κυλίνδρου υπάρχουν δύο κλειστές ζώνες όπου τα σωματίδια του υγρού στρέφονται με αντίθετες φορές.

Τέλος, στο Σχήμα 3 βλέπουμε τη ροή γύρω από τον κύλινδρο στην περίπτωση όπου έχουν διαταραχθεί και οι δύο συμμετρίες. Στην εικόνα αυτή, η οπτικοποίηση της ροής επιτυγχάνεται με τη βοήθεια φυσαλλίδων αέρα διασκοπισμένων μέσα στο νερό.

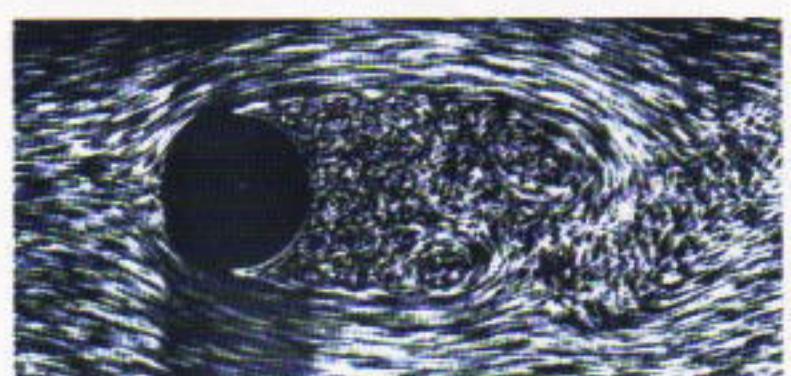
Για ποιο λόγο καταστρέφεται η συμμετρία της ροής; Επί του παρόντος αδυνατούμε να δώσουμε πλήρη απάντηση



Σχήμα 1



Σχήμα 2



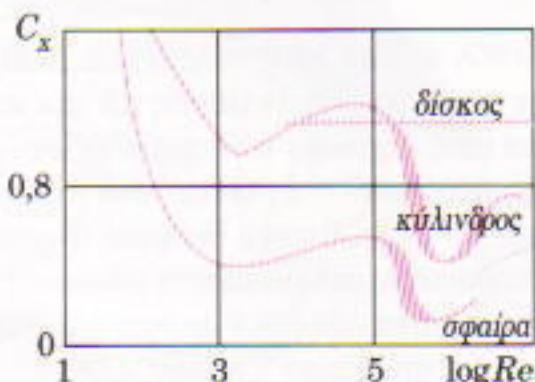
Σχήμα 3

στο ερώτημα. Ωστόσο, ας προσπαθήσουμε κατ' αρχάς να αντιμετωπίσουμε ορισμένα απλούστερα ερωτήματα. Για παράδειγμα, ποιες είναι οι διαφορές στη ροή γύρω από τον κύλινδρο στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις; Σε καθεμιά, ο λόγος των δυνάμεων που επηρεάζουν την κίνηση των σωματιδίων του υγρού —η αντίσταση εκ της πέσεως προς την αντίσταση εκ της (εσωτερικής) τριβής— έχει διαφορετική τιμή. Ο λόγος αυτός καθορίζεται από μια αδιάστατη παράμετρο, τον αριθμό *Reynolds* (*Re*). Για μικρές τιμές του αριθμού *Re* η αντίσταση εκ της τριβής είναι μεγάλη, και η κίνηση του σώματος μέσα στο υγρό μοιάζει με την κίνηση ενός σφαιριδίου μέσα σε μέλι (οι τιμές του αριθμού *Re* για τις περιπτώσεις που απεικονίζονται στα Σχήματα 1 και 2 είναι 1,5 και 26, αντίστοιχα). Για μεγάλες τιμές του αριθμού *Re* η αντίσταση εκ της τριβής είναι μικρή ενώ αυξάνει ραγδαία η αντίσταση εκ της πέσεως, οπότε και η ροή μεταπίπτει σε ασταθή ή ακόμη και τυρπώδη (στο Σχήμα 3 αντιστοιχεί τιμή *Re* = 2.000).

Η αλλαγή στο είδος της συμμετρίας και η απότομη καταστροφή της αποτελούν βασικά χαρακτηριστικά της σύγχρονης υδροδυναμικής. Σε πραγματικές συνθήκες η απόλυτη συμμετρία είναι ανέφικτη στη ροή πάντοτε παρουσιάζεται κάποια ασυμμετρία. Επομένως, ακόμη και αν οι συμμετρικές καταστάσεις οδηγούν σε συμμετρικά αποτελέσματα, οι σχεδόν συμμετρικές καταστάσεις καταλήγουν σε οαφώς μη συμμετρικά αποτελέσματα. Αυτό αποτελεί μια πρώτη εξήγηση των παραδόξων συμμετρίας στην υδροδυναμική.

### Το παράδοξο Eiffel

Ένα άλλο παράδοξο, το οποίο έχει στενή φυσική σχέση με τα παράδοξα συμμετρίας, ανακαλύφθηκε το 1912 από τον γάλλο μηχανικό Alexandre Gustave Eiffel (1832-1923). Στα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Eiffel ασχολήθηκε με την υδροδυναμική και ειδικότερα με την επίδραση των ανέμων στις αρχιτεκτονικές κατασκευές.



Σχήμα 4

Εκτελώντας πειράματα με σφαίρες μέσα σε αεροσήραγγες δικής του κατασκευής ανακάλυψε το εξής παράδοξο, το οποίο αργότερα πήρε το όνομά του. Όταν η κατάσταση ροής γύρω από μια σφαίρα είναι τέτοια που ο αριθμός *Re* αποκτά μια «κρίσιμη» τιμή, περίπου 150.000, τότε, σε περαιτέρω αύξηση της ταχύτητας η αντίσταση του αέρα μειώνεται δραστικά (κατά 4 με 5 φορές). Η παρατήρηση έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τη φυσική εμπειρία και τη διαίσθηση.

Ας γράψουμε τον τύπο της αεροδυναμικής αντίστασης:

$$F = C_d(Re) \frac{\rho u^2}{2} \frac{\pi \ell^2}{4},$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του αέρα,  $u$  η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος, που δεν διαταράσσεται εκ της παρουσίας του σώματος, και  $\ell$  το χαρακτηριστικό μέγεθος της μετωπικής επιφάνειας του σώματος. Η αναλογία  $F \propto \rho u^2 \ell^2$  προκύπτει εύκολα μέσω διαστατικής ανάλυσης. Οι αριθμητικοί συντελεστές  $1/2$ ,  $\pi/4$  και  $C_d$  έχουν γραφεί για λόγους ακρίβειας. Ο αδιάστατος συντελεστής αντίστασης  $C_d$  μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά συνήθως ελαττώνται όσο ο αριθμός *Re* αυξάνει —δηλαδή, όσο ελαττώνται οι δυνάμεις εσωτερικής τριβής.

Το παράδοξο Eiffel δεν εμφανίζεται μονάχα στην περιπτώση ροής γύρω από σφαιρικά σώματα. Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται το γράφημα που περιγράφει την εξάρτηση του  $C_d$  από τον αριθμό *Re* όπως προέκυψε πειραματικά για μια σφαίρα, έναν κύλινδρο και ένα δίσκο, της ίδιας διαμέτρου

τ. Στην περίπτωση της σφαίρας και του κυλίνδρου, τα πειραματικά σημεία εμφανίζουν μεγάλη διασπορά στην περιοχή δραστικής μεταβολής του  $C_d$ , που φαίνεται από τα πλατιά τμήματα των καμπυλών. Από την άλλη, ο συντελεστής αντίστασης για το δίσκο είναι σχεδόν σταθερός! Μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω συμπέρασμα: Το παράδοξο Eiffel δεν ισχύει για σώματα με οξείες ακμές.

Το παράδοξο Eiffel πλησίον της κρίσιμης τιμής του αριθμού  $Re$  εξηγείται από το γεγονός ότι η ομαλή (στρωματική) ροή μπροστά από το σώμα μεταπίπτει σε τυρβώδη (τυχαία) ροή. Συνεπώς, μικρή μεταβολή του αριθμού  $Re$  καταλήγει σε δραστική αναδιάταξη της ροής.

Οι δραστικές αλλαγές στη ροή εξαιτίας μικρών αποκλίσεων σε διάφορες παραμέτρους είναι συνηθισμένο φαινόμενο στην υδροδυναμική. Το εν λόγω φαινόμενο ευθύνεται για πλήθος περιπτώσεων όπου τα πειραματικά δεδομένα από φαινομενικά πανομοιότυπες συνθήκες παρουσιάζουν εκπληκτικά μεγάλη διασπορά. Επομένως, κατά τις προσομοιώσεις της ροής γύρω από σώματα, μέσα σε αεροδυναμικές σήραγγες, χρειάζεται να λαμβάνουμε υπόψη μας την επίδραση των τοιχωμάτων της σήραγγας, των στηριγμάτων του σώματος, της ετερογένειας του ελεύθερου ρεύματος, καθώς επίσης τις φυσικές και χημικές ιδιότητες της επιφάνειας του σώματος (όπως η τραχύτητα, η διαβρεξιμότητα και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας). Στην πράξη είναι πολύ δύσκολο (αν όχι αδύνατο) να γίνουν όλα τα παραπάνω.

## Το παράδοξο Dubois

Ένας από τους ιδρυτές της πειραματικής υδροδυναμικής ήταν ο μηχανικός του γαλλικού στρατού P. Dubois (1734-1809). Ο Dubois έδειξε πως, για ορισμένη περιοχή τιμών του αριθμού  $Re$ , η αντίσταση που αναπτύσσεται σε ένα σώμα το οποίο μένει ακίνητο μέσα σε σήραγγα όπου ρέει νερό με ορισμένη ταχύτητα είναι μικρότερη από την αντίσταση που αναπτύσσεται αν το σώμα κινείται με ίση ταχύτητα μέσα στο νερό της σήραγγας που παραμένει ακίνητο. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας του Galilaiou, το αποτέλεσμα του εν λόγω πειράματος δεν θα έπρεπε να εξαρτάται από το κατά πόσον το σώμα κινείται μέσα στο ακίνητο υγρό ή το υγρό κινείται γύρω από το ακίνητο σώμα.

Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε το παράδοξο Dubois; Φυσικά, κάνοντας χρήση των παραγόντων που μόλις συζητήσαμε. Η ροή μέσα σε μια πειραματική δεξαμενή ή μια αεροδυναμική σήραγγα παρουσιάζει λιγότερη ομοιομορφία σε σχέση με τη ροή στην ήφεμη ανοιχτή θάλασσα ή στην ατμόσφαιρα· έτσι η μετάβαση στην τυρβώδη ροή πραγματοποιείται για μικρότερες τιμές του αριθμού  $Re$ . Αυτή η μετάβαση εκδηλώνεται με στένωση στην «ουρά» της ροής καθώς και με ελάττωση της αντίστασης.

Το παράδοξο Dubois δεν έχει ακόμη επιλυθεί. Η διαφορά ανάμεσα στα δεδομένα που προκύπτουν από πειράματα σε σήραγγες και σε εκείνα κατά τις πραγματικές πτήσεις αποτελεί το βασικότερο πρόβλημα στην υδροδυναμική και την αεροδυναμική.

Αν ρίξετε μια ματιά σε ένα ελικόπτερο που ηρεμεί στο έδαφος θα παρατηρήσετε πως οι έλικες του καμπυλώνουν

προς τα κάτω περίπου κατά 1 μέτρο. Ωστόσο, κατά τη διάρκεια της πτήσης είναι σχεδόν ευθείες. Κατά παρόμοιο τρόπο, τα φτερά ενός αεροπλάνου αλλάζουν σχήμα, εξαιτίας των αεροδυναμικών που εμφανίζονται κατά τις πραγματικές πτήσεις. Η συγκεκριμένη αλλαγή του σχήματος δεν είναι μεγάλη, είναι αρκετή όμως για να καταστήσει άχρηστα τα αποτελέσματα ιδιαίτερα επιμελημένων (και δαπανηρών!) πειραμάτων. Συνεπώς, προκειμένου να εξηγηθούν οι ασυμφωνίες ανάμεσα στα πειράματα που εκτελούνται σε αεροδυναμικές σήραγγες και στα πειράματα στον ελεύθερο χώρο χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών υπό την επίδραση των σχετικών δυνάμεων.

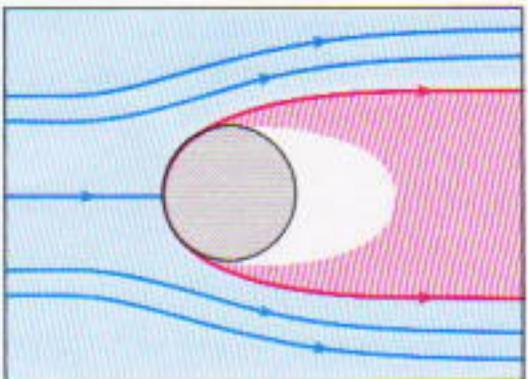
## Το παράδοξο Euler-d' Alembert

Τώρα είμαστε έτοιμοι να μάθουμε για την τρίτη κατηγορία παραδόξων. Εκτός, λοιπόν, από τα παράδοξα «θεωρίας» και «πειράματος έναντι πειράματος» υπάρχουν και τα παράδοξα «πειράματος έναντι θεωρίας». Τα τελευταία χαρακτηρίζονται από δραστική αναντιστοιχία ανάμεσα στα θεωρητικά αποτελέσματα και την ανθρώπινη εμπειρία, τη διαίσθηση και την κοινή λογική.

Το διασημότερο υδροδυναμικό παράδοξο αυτού του τύπου είναι το παράδοξο Euler-d' Alembert. Το 1742 ο Euler υπολόγισε την αντίσταση που αναπτύσσεται σε κύλινδρο ο οποίος κινείται μέσα σε υγρό μηδενικού ιξώδους, καταλήγοντας σε ένα παράδοξο αποτέλεσμα: Δεν υπάρχει καθόλου αντίσταση! Επτά χρόνια αργότερα, ο μεγάλος γάλλος μηχανικός Jean d' Alembert υπολόγισε τη ροή γύρω από ένα τυχαίο σώμα πεπερασμένου όγκου και κατέληξε στο ίδιο εκπληκτικό συμπέρασμα της μηδενικής αντίστασης.

Ο συγκεκριμένος υπολογισμός έρχεται σε άμεση αντίθεση με την κοινή λογική. Όπως όλοι γνωρίζουμε εμπειρικά, είναι απαραίτητο να ασκηθεί δύναμη προκειμένου η κίνηση κάποιου σώματος μέσα σε υγρό να διατηρηθεί. Αυτός είναι μάλιστα και ο λόγος που τα αεροοκάφη, τα πλοία και τα υποβρύχια χρειάζεται να έχουν μηχανές και ιστία. Ο d' Alembert δεν κατάφερε να εξηγήσει το παράδοξο και υποχρεώθηκε στο πικρό σχόλιο πως το παράδοξο της μηδενικής αντίστασης είναι το μόνο που απομένει να λύσουν οι γεωμέτρες του μέλλοντος.

Οι γεωμέτρες του μέλλοντος (οι περί την υδροδυναμική και τα μαθηματικά), λοιπόν, κληρονόμησαν ένα δυοπλίτο πρόβλημα. Προτού επιχειρήσουμε να το λύσουμε, ας εξηγήσουμε το γεωμετρικό χαρακτήρα του συγκεκριμένου παραδόξου. Η ροή που μελέτησαν οι Euler και d' Alembert είναι συμμετρική — δηλαδή, το δεξιό τμήμα της είναι κατοπτρικό είδωλο του αριστερού (κάτι παρόμοιο με το Σχήμα 1). Επομένως, η προβολή της ορμής του πειρέρεοντος το σώμα υγρού στην κατεύθυνση του ελεύθερου ρεύματος παραμένει σταθερή, και ίδια σε οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή στα δεξιά ή τα αριστερά του σώματος. Σε συμφωνία με το νόμο διατήρησης της ορμής, δεν θα υπάρχει δύναμη αντίστασης που να ασκείται τόσο στο εν λόγω υγρό όσο και στο κινούμενο σώμα. Το ζήτημα είναι ότι το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποίησαν οι Euler και d' Alembert είναι υπεραπλουστευμένο. Η πραγματική ροή



Σχήμα 5

δεν είναι συμμετρική αλλά μοιάζει περισσότερο με το ειδος της ροής που απεικονίζεται στα Σχήματα 2 και 3.

Όπως ίσως θα εικάζετε, τη συμμετρία της ροής τη διαταράσσει η εσωτερική τριβή. Αυτή ευθύνεται για το σχηματισμό της «ουράς» πίσω από το κινούμενο σώμα. Κατανοείτε, λοιπόν, τώρα το αίνιγμα Euler-d' Alembert; Οχι πλήρως. Μια ολοκληρωμένη ερμηνεία είναι αρκετά πιο περίπλοκη. Παρατηρήστε πάλι το Σχήμα 4. Ακόμη και για τις υψηλότερες τιμές που μπορεί να λάβει ο αριθμός  $Re$ , όταν δηλαδή οι δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες, ο συντελεστής αντίστασης είναι μη μηδενικός. Επομένως, η ασυμμετρία και η υδροδυναμική αντίσταση μπορούν να παρουσιαστούν ακόμη και σε υγρά μηδενικού ιξώδους.

Ένα τέτοιο υγρό «κατασκεύασε» ο γερμανός φυσικός Hermann Helmholtz (1821-1894), θέτοντας έτσι τέλος στο παράδοξο Euler-d' Alembert. Η ροή γύρω από έναν κύλινδρο σύμφωνα, λοιπόν, με το μοντέλο του Helmholtz απεικονίζεται στο Σχήμα 5. Εδώ βλέπουμε πίσω από τον κύλινδρο μια περιοχή ακίνητου υγρού. Συνεπώς, το σωστό μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη του τόσο την τριβή όσο και το διαχωρισμό της ροής εξαιτίας της παρουσίας του σώματος.

Πέρα από το παράδοξο Euler-d' Alembert, πολλά ακόμη παράδοξα έχουν πρόλθει από υπεραπλουστευμένα μαθηματικά μοντέλα. Για παράδειγμα, η συνεχής ροή γύρω από την αιχμηρή άκρη μιας πλάκας (Σχήμα 6α) καταλήγει στο «παράδοξο της άπειρης ταχύτητας». Η ταχύτητα της ροής μπροστά στην αιχμηρή άκρη τείνει στο άπειρο. Επιπλέον, εκεί η ροή πρέπει να υφίσταται τη δράση κάποιας κεντρομόλου δύναμης προκειμένου να μπορεί να στρέφεται κατά 180°. Σύμφωνα με το νόμο «δράστης-αντίδρασης» του Νεύτωνα, στην πλάκα θα πρέπει να ασκείται μια ίση και αντίθετη δύναμη (η δύναμη του «πρωραίου άκρου»). Σε ποιο ακριβώς σημείο της πλάκας θα ασκείται η εν λόγω δύναμη; Κυριολεκτικά στην άκρη της —ένα υλικό σημείο χωρίς διαστάσεις! Στην πραγματικότητα, η ροή γύρω από την αιχμηρή άκρη διαχωρίζεται χαρακτηριζεται από τη γραμμή διαχωρισμού της εφαπτομενικής ταχύτητας (που σημειώνεται με κόκκινο χρώμα στο Σχήμα 6β). Επομένως, η ταχύτητα στην αιχμηρή άκρη της πλάκας είναι ουσιαστικά πεπερασμένη.

## Ορθότητα των μαθηματικών μοντέλων

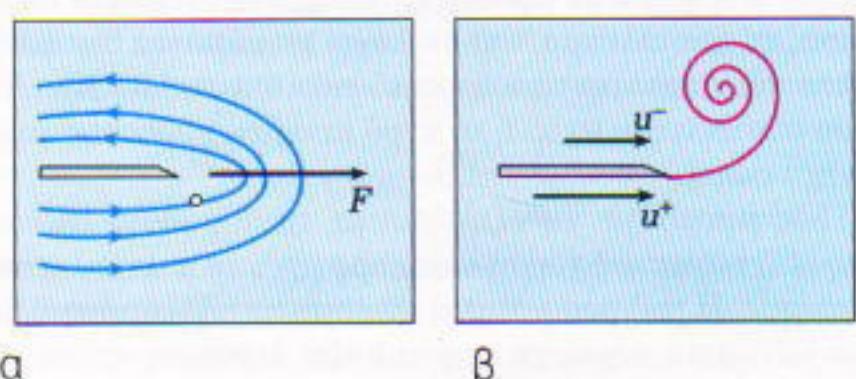
Η ανάπτυξη ενός συνεπούς μαθηματικού μοντέλου που να περιγράφει ικανοποιητικά μια φυσική διαδικασία είναι ένα εξαιρετικά περίπλοκο ζήτημα. Στις περισσότερες εφαρμογές ένα τέτοιο μοντέλο αποτελεί απλώς όνει-

ρο. Ο μαθηματικός D. Birkhoff πρότεινε, αστειευόμενος, πως όσοι ασχολούνται με την υδροδυναμική θα πρέπει να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: στους πειραματιστές, οι οποίοι παρατηρούν φαινόμενα που είναι αδύνατον να περιγραφούν, και στους θεωρητικούς, οι οποίοι περιγράφουν γεγονότα που είναι αδύνατον να παρατηρηθούν.

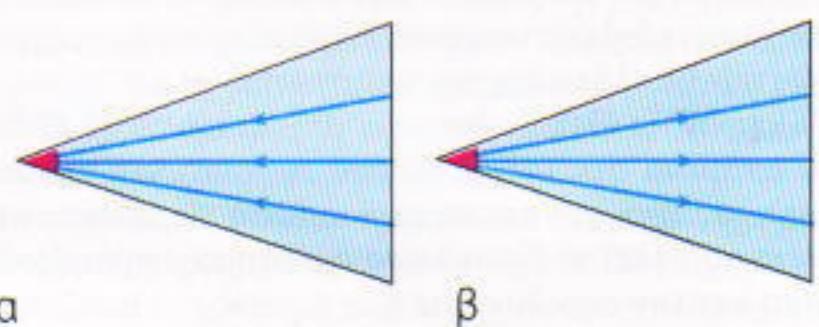
Ένα μαθηματικό μοντέλο, για να μην εγκλωβίζεται σε παράδοξα, θα πρέπει να μην είναι υπεραπλουστευμένο· να λαμβάνει υπόψη του όλους εκείνους τους παράγοντες των οποίων η παράλειψη μπορεί να οδηγήσει σε παράδοξο. Ωστόσο, οι μαθηματικοί εξετάζουν τα προβλήματα σε πολύ αυστηρότερη βάση —ένα πρόβλημα θα πρέπει επίσης να διατυπώνεται ορθά. Η ορθότητα ενός μαθηματικού μοντέλου υπακούει σε τρεις βασικές προϋποθέσεις: την ύπαρξη λύσης, τη μοναδικότητα, την ευστάθεια.

Προφανώς, η έλλειψη λύσης αποτελεί συνέπεια υπεραπλουστευμένου μοντέλου. Για παράδειγμα, η λύση που περιγράφει την ακτινική ροή προς την κορυφή μιας γωνίας (Σχήμα 7α) υπάρχει για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού  $Re$ . Από την άλλη, όμως, μια παραπλήσια λύση για ακτινική ροή που αποκλίνει από την κορυφή μιας γωνίας (Σχήμα 7β) υπάρχει μονάχα για μικρές τιμές του αριθμού  $Re$ , μικρότερες από μια κρίσιμη τιμή  $Re^*$ . Όταν  $Re > Re^*$ , θεωρητικά δεν υπάρχει λύση. Πειραματικά, ωστόσο, μπορούμε να παρατηρήσουμε μια χρονικά μεταβαλλόμενη διαχωριζόμενη ροή για αρκετά μεγάλες τιμές του αριθμού  $Re$ . Επομένως, στην περίπτωση της ροής που αποκλίνει ακτινικά από την κορυφή μιας γωνίας οδηγούμαστε στο παράδοξο της μη ύπαρξης λύσης!

Άλλο πρόβλημα είναι αυτό που εμφανίζεται όταν υπάρχουν περισσότερες λύσεις. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο λύσεις. Ποια από τις δύο όμως είναι αποδεκτή; Ας θεωρήσουμε τις πιθανές εκδοχές από πειραματική σκοπιά. Αν σε ένα πείραμα δεν επαληθεύεται καμία από τις πιθανές λύσεις, τούτο σημαίνει απλώς ότι το μαθηματικό μοντέλο που επιλέχτηκε κα-



Σχήμα 6



Σχήμα 7

θώς και η αντίστοιχη δευτεροβάθμια εξίσωση δεν είναι ορθά. Στην περίπτωση που το πειραματικό γεγονός περιγράφεται μονάχα από μία λύση, συνήθως σημαίνει ότι αυτή η ρίζα είναι ευσταθής, ενώ η άλλη όχι. Τέλος, υπάρχει περίπτωση να επαληθεύονται και οι δύο λύσεις.

Όταν για ορισμένη τιμή μιας παραμέτρου ( $x = x_0$ ) αντί της μίας λύσης ( $y = y_1$ ) εμφανίζεται και άλλη ( $y = y_2$ ), τότε συμβαίνει διακλάδωση της λύσης (βλ. Σχήμα 8α). Όταν για ορισμένη περιοχή τιμών της παραμέτρου ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ) υπάρχουν και οι δύο λύσεις, τότε μιλάμε για υστέρηση. Η μία λύση ( $y = y_1$ ) επαληθεύεται όταν η τιμή της παραμέτρου  $x$  αυξάνεται προς την  $x_1$  (το ευθύ πέρασμα), ενώ η άλλη λύση επαληθεύεται όταν η τιμή της παραμέτρου  $x$  ελαττώνεται από την  $x_2$  (το αντίστροφο πέρασμα). Επομένως, η επιλογή του κλάδου στο βρόχο υστέρησης εξαρτάται από το ιστορικό της διαδικασίας. Στην αεροδυναμική παρατηρούνται τρόποι ροής που σχετίζονται με υστέρηση, για παράδειγμα, πλησίον της τιμής της γωνίας προσβολής που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της δυναμικής άνωσης.

Το παράδοξο των πολλαπλών λύσεων επιλύθηκε από τους επιστήμονες στην αυγή της αεροπλοΐας. Το 1910, κατά τη διάρκεια μιας αεροναυτικής επίδειξης κοντά στο Παρίσι, ένας νεαρός ρουμάνος μηχανικός, ο Henri-Marie Coanda, προσγείωσε ένα αεροπλάνο που ήταν το πρότυπο των σύγχρονων αεριωθουμένων. Πίδακες φωτιάς έβγαιναν από τα πλευρικά προωθητικά ακροστόμια. Έπειτα από την επιτυχημένη πτήση, φτάνοντας στη γη μόνο με μικρές μελανιές, ο νεαρός πιλότος και σχεδιαστής αεροσκαφών δέχτηκε ενθουσιώδη συγχαρητήρια. «Αγαπητέ μου, βρίσκεστε όχι 30, αλλά 50 χρόνια μπροστά από την εποχή σας» του φώναξε κατάπληκτος ο Eiffel. Την προσοχή όμως του πιλότου είχε αποσπάσει κάτι άλλο. Κατά τη διάρκεια της απογείωσης, είχε παρατηρήσει την παράξενη συμπεριφορά της φλέβας καπνού του σκάφους. Αντί να ανακλάται στις ειδικές μεταλλικές πλάκες, που προ-

στάτευαν την άτρακτο, η οποία ήταν κατασκευασμένη από κοντραπλακέ, η φλέβα ακολουθούσε κολλητά τις συγκεκριμένες επιφάνειες μέχρι που έστρεφε και ανάποδα.

Παρ' όλα αυτά, την εποχή εκείνη το συγκεκριμένο φαινόμενο, που έγινε γνωστό ως φαινόμενο Coanda, δεν τράβηξε την προσοχή των επιστημόνων. Τα επόμενα 25 χρόνια, ο Coanda, διάσημος πλέον σχεδιαστής αεροσκαφών, εκτέλεσε πειράματα, αναζητώντας πθανές πρακτικές εφαρμογές του εν λόγω φαινομένου. Σήμερα, το φαινόμενο Coanda χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό των χόφερκραφτ και των ολισθητήρων των υδροπλάνων, στην αύξηση της πρωτικής δύναμης των ακροστομίων στα αεριωθούμενα, στην πέδηση των αεροσκαφών κατά την προσγείωση, καθώς και στον περιορισμό του θορύβου των αεριοπροωθητικών μηχανών.

Το φαινόμενο Coanda μπορούμε να το παρατηρήσουμε ακόμη και στην καθημερινή μας ζωή —για παράδειγμα, στη ροή του νερού που «κολλάει» πάνω στην επιφάνεια του στόμιου της τσαγιέρας και καταλήγει να χύνεται έξω από το φλιτζάνι (γι' αυτό χαριέντως λέγεται και «φαινόμενο της τσαγιέρας»). Στο Σχήμα 9α φαίνεται ένα ρεύμα εκροής χωρίς αναστροφή, ενώ στο Σχήμα 9β με αναστροφή. Και τα δύο αποτελούν μαθηματικές λύσεις. Έχουμε, δηλαδή, λύσει το αίνιγμα Coanda; Δυστυχώς, όχι. Δεν γνωρίζουμε τις συνθήκες για κανέναν απ' τους δύο τρόπους ροής.

Προηγουμένως, αναφέραμε ένα ακόμη κριτήριο για την ορθότητα των μαθηματικών μοντέλων —την ευστάθεια των λύσεων τους. Τυχαίες, ασταθείς και σχετικά μικρές διακυμάνσεις δεν μπορούν να αναλυθούν με χρήση των κλασικών μαθηματικών εργαλείων. Δεν μπορούμε να ορίσουμε μια μεμονωμένη στοχαστική τροχιά, όπως ακριβώς δεν μπορούμε να προβλέψουμε εάν πρόκειται να βρέξει σε ένα μήνα από σήμερα. Στην καλύτερη περίπτωση, μπορούμε να ελπίζουμε σε μια γενική περιγραφή.

Το παράδοξο της έλλειψης ευστάθειας εγείρεται όταν η ροή γύρω από ένα σώμα, μολονότι πραγματοποιείται υπό σταθερές εξωτερικές συνθήκες, μεταβάλλεται με το χρόνο. Το Σχήμα 3 απεικονίζει ένα παράδειγμα μεταβάλλομενης με το χρόνο ροής. Μια ροή καθίσταται χρονικά μεταβάλλομενη όταν ο αριθμός  $Re$  ξεπερνά μια ορισμένη τιμή. Παρόλο που γνωρίζουμε με βεβαιότητα πως η έλλειψη ευστάθειας των λύσεων οφείλεται στον χρονικά μεταβάλλομενο χαρακτήρα του διαχωρισμού της ροής εξαιτίας της παρουσίας ενός σώματος, έχουμε ακόμη πολύ δρόμο μπροστά μας προτού βρούμε την τελική απάντηση στο εν λόγω παράδοξο.

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

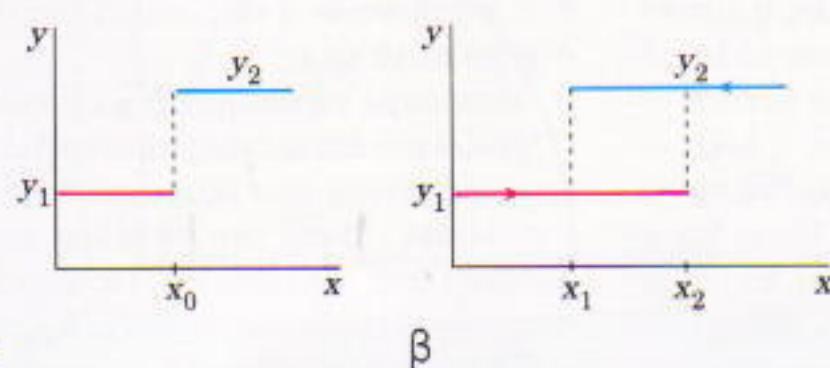
J. Raskin, «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda», Νοέμ./Δεκ. 1994.

I. Vorobyof, «Θόλοι και υπόγεια ρεύματα», Σεπτ./Οκτ. 1995.

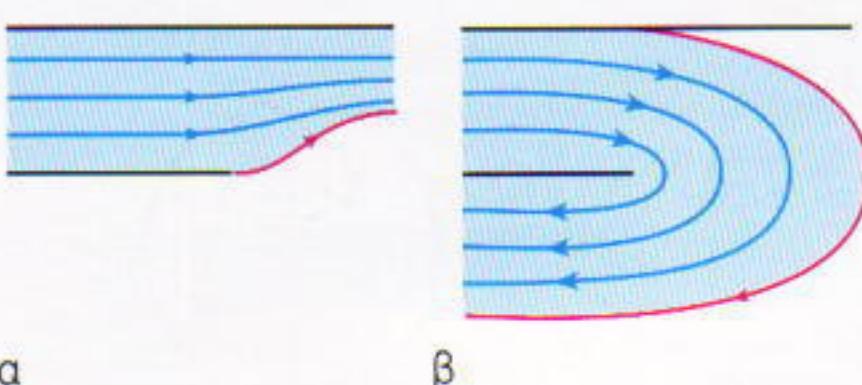
H. Schreiber, «Περί ιξώδους», Ιαν./Φεβρ. 1996.

A. Mitrofanov, «Κόντρα στο ρεύμα», Ιούλ./Αυγ. 1996.

A. Stasenko, «Στρόβιλοι στο διάδρομο απογείωσης», Σεπτ./Οκτ. 1997. ◻



Σχήμα 8



Σχήμα 9

# Περί πεδίου τιμών...

... και ορισμού

Andrey N. Kolmogorov

**Ο ΑΡΘΡΟ ΑΥΤΟ ΕΞΗΓΕΙ ΤΙ ΕΝΝΟΟΥΝ σήμερα οι μαθηματικοί όταν χρησιμοποιούν τη λέξη «συνάρτηση». Παρόλο που δεν απαιτεί εξειδικευμένες γνώσεις έξω από τα όρια της ύλης του λυκείου, θα πρέπει να προσέξετε την κάθε λέξη του. Επίσης, υποθέτει ότι κατανοείτε τις λέξεις «σύνολο» και «στοιχείο ενός συνόλου» και γνωρίζετε πώς να τις χειριστείτε.**

## Εισαγωγή

Όταν ερωτηθεί ένας μαθητής τι είναι συνάρτηση συχνά θα απαντήσει ότι «μια συνάρτηση μπορεί να δοθεί από έναν πίνακα, ένα γράφημα ή έναν τύπο». Αυτό, φυσικά, δεν είναι ορισμός. Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές που αποφεύγουν έναν σαφή γενικό ορισμό και προσπαθούν να περιγράψουν άμεσα τους τρόπους προσδιορισμού μιας συνάρτησης δεν έχουν απόλυτα άδικο. Τα μαθηματικά δεν μπορούν να ξεκινήσουν με ορισμούς. Όταν διατυπώνουμε τον ορισμό μιας έννοιας, είναι αναπόφευκτο να χρησιμοποιήσουμε άλλες έννοιες. Στην πραγματικότητα, μέχρι να κατανοήσουμε τη σημασία κάποιων έννοιών δεν μπορούμε να ξεκινήσουμε ούτε να διατυπώσουμε κανένα ορισμό. Έτσι η έκθεση οποιασδήποτε μαθηματικής θεωρίας αρχίζει με την αποδοχή ορισμένων βασικών έννοιών που δεν ορίζονται. Αυτές στη συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διατύπωση των ορισμών επόμενων παραγόμενων έννοιών.

Πώς μπορούμε, λοιπόν, να εξηγή-

σουμε σε κάποιον άλλο τη σημασία των βασικών έννοιών; Δεν υπάρχει άλλος τρόπος παρά η παρουσίαση των πραγμάτων που πρέπει να οριστούν μέσω παραδειγμάτων και η εξαντλητική περιγραφή των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων τους. Οι περιγραφές αυτές ίσως είναι λίγο ασαφείς σε μερικές λεπτομέρειες, ενώ στην αρχή μπορεί να μην είναι πλήρεις. Βαθμαία όμως αποτυπώνουν με ικανοποιητική καθαρότητα τη σημασία της έννοιας. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο θα προσεγγίσουμε την έννοια της συνάρτησης, θεωρώντας τη ως μια από τις βασικές μαθηματικές έννοιες που δεν ορίζονται τυπικά.

[Αργότερα, βέβαια, θα υποστηρίξω ότι συνάρτηση είναι απλώς η απεικόνιση ενός συνόλου σε ένα άλλο σύνολο (του πεδίου ορισμού της στο πεδίο τιμών της). Εδώ όμως η λέξη «απεικόνιση» δεν είναι παρά ένα συνώνυμο της «συνάρτησης». Είναι δύο ονόματα για την ίδια έννοια. Και ο ορισμός της έννοιας που εκφράζει μια λέξη δεν μπορεί να αντικατασταθεί από την ερμηνεία της λέξης μέσω μιας άλλης.]

**Παράδειγμα 1.** Εστω ότι τα γράμματα  $x$  και  $y$  δηλώνουν πραγματικούς αριθμούς και ότι το σύμβολο του ριζικού « $\sqrt{\cdot}$ » δηλώνει την εξαγωγή της (θετικής) τετραγωνικής ρίζας. Τότε η ισότητα

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (1)$$

σημαίνει ότι ισχύουν οι συνθήκες

$$x^2 \leq 1, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (2)$$

Τα σημεία με συντεταγμένες που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες αποτελούν το ημικύλιο του Σχήματος 1.

Το Σχήμα 1 παρουσιάζει διαγραμματικά τα επόμενα γεγονότα που μπορείτε να αποδείξετε με καθαρά αλγεβρικό τρόπο.

1. Η εξίσωση (1), για κάθε  $x$  που ικανοποιεί την

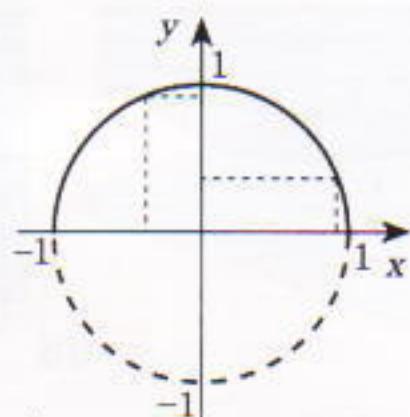
$$-1 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το αντίστοιχο  $y$ , το οποίο ικανοποιεί τις ανισότητες

$$0 \leq y \leq 1. \quad (4)$$

2. Για κάθε  $y$  που ικανοποιεί τις ανισότητες (4), υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x$  στο οποίο η εξίσωση (1) αντιστοιχεί αυτό το  $y$ .

Μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση (1) ορίζει μια απεικόνιση του συνόλου των αριθμών  $x$  που ικανοποιούν τις ανισότητες (3) επί του συνόλου των αριθμών που ικανοποιούν τις ανισότητες (4). Οι μαθηματικοί συχνά χρησιμοποιούν ένα βέλος για να συμβολίσουν μια απεικόνιση. Έτσι, η εν λόγω απεικόνιση μπορεί να γραφεί ως



Σχήμα 1

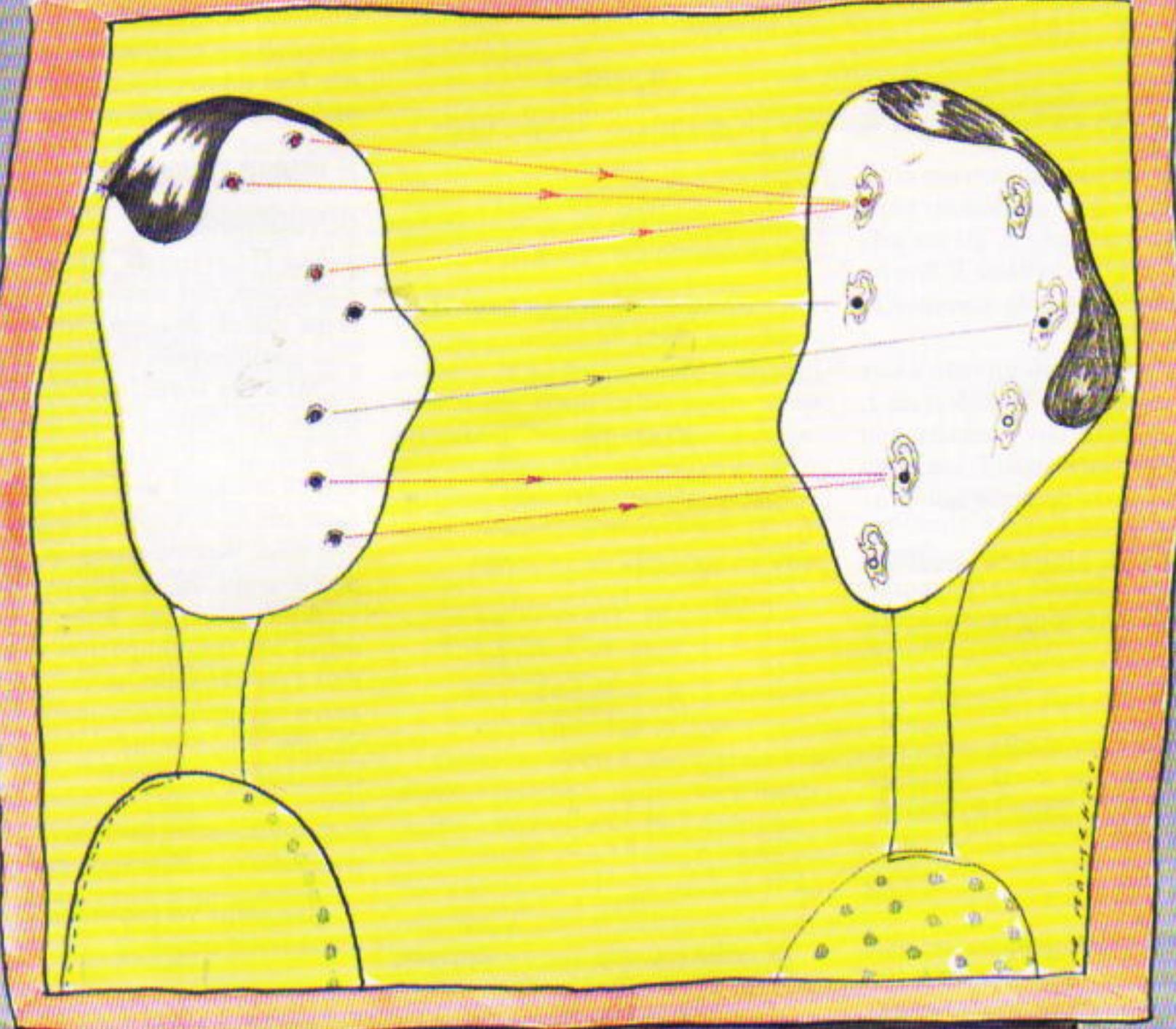
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x^2 \leq 1 \quad y > 0 \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$-1 \rightarrow \sqrt{1 - (-1)^2} = 0; \quad 0 \rightarrow \sqrt{1 - 0^2} = 1$$



$$y = f(x)$$

$$f(-1) = 0; \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}; \quad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}; \quad f(0) = 1$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}. \quad (5)$$

Για παράδειγμα,

$$-1 \mapsto \sqrt{1 - (-1)^2} = 0,$$

$$-\frac{4}{5} \mapsto \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{3}{5} \mapsto \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$0 \mapsto \sqrt{1 - 0^2} = 1. \quad (6)$$

Προσέξτε ότι μια απεικόνιση είναι πλήρως ορισμένη αν (α) δίνεται το απεικονιζόμενο σύνολο  $E$ , (β) για κάθε στοιχείο  $x$  του συνόλου  $E$  δίνεται ένα στοιχείο  $y$  στο οποίο απεικονίζεται το  $x$ .

Συμβολίζουμε  $M$  το σύνολο όλων των τιμών του  $y$ . Στο Παράδειγμα 1,  $E$  είναι το σύνολο των αριθμών που ικανοποιούν τη συνθήκη (3) και  $M$  είναι το σύνολο των αριθμών που ικανοποιούν τη συνθήκη (4).<sup>1</sup>

**Παράδειγμα 2.** Οι δύο κανόνες

$$1. \quad x \mapsto \sqrt{x^2}$$

και

$$2. \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

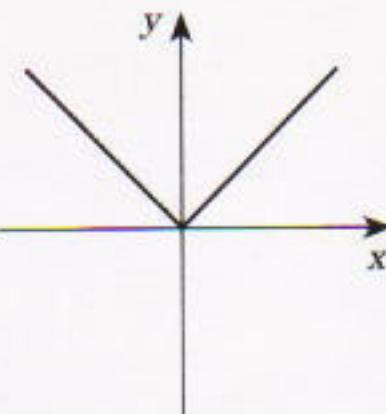
ορίζουν την ίδια απεικόνιση

$$x \mapsto |x| \quad (7)$$

των πραγματικών αριθμών επί των απόλυτων τιμών τους (Σχήμα 2).

Η απεικόνιση (7) «στέλνει» το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών

$$R = (-\infty, \infty)$$



Σχήμα 2

στο σύνολο

$$R_+ = [0, \infty)$$

των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

Αντί απεικόνιση μπορούμε να λέμε συνάρτηση και να γράφουμε την απεικόνιση (5) ως

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (8)$$

και την απεικόνιση (7) ως

$$f(x) = |x|. \quad (9)$$

Τότε οι ειδικές τιμές της συνάρτησης (8) που δίνουν οι τύποι (6) μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$f(-1) = 0,$$

$$f\left(-\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right),$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5},$$

$$f(0) = 1.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (9) είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών  $R$ . Το πεδίο τιμών της είναι το  $R_+$  των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

**Παράδειγμα 3.** Ο Πέτρος, ο Κώστας, ο Σάκης και ο Βασίλης μένουν

στο ίδιο δωμάτιο της φοιτητικής εστίας και αναλαμβάνουν το νοικοκυρίο εκ περιτροπής. Έχουν κατασκευάσει ένα «ημερολόγιο πρόγραμμα καθηκόντων» για το μήνα Φεβρουάριο (Σχήμα 3). Η ομοιότητα αυτού του πίνακα με τα συνηθισμένα γραφήματα συναρτήσων που γνωρίζουμε από την άλγεβρα του λυκείου είναι εμφανής. Έχει ακριβές λογικό νόημα αυτή η αναλογία; Οι φοιτητές έχουν ορίσει σε αυτή την περίπτωση μια απεικόνιση ενός συνόλου σε ένα άλλο —έχουν δηλαδή ορίσει μια συγκεκριμένη συνάρτηση; Και μήπως έχουν σχεδιάσει το γράφημα αυτής της συνάρτησης;

## Η γενική έννοια της συνάρτησης

Στο Παράδειγμα 3 είδαμε ότι τα καθήκοντα του νοικοκυρίου για καθεμία από τις 28 ημέρες του Φεβρουαρίου αντιστοιχούν σε κάποιον φοιτητή. Με άλλα λόγια, το σύνολο των ημερών του Φεβρουαρίου απεικονίζεται επί του συνόλου των φοιτητών που κατανέμουν μεταξύ τους τις δουλειές του νοικοκυρίου. Εφαρμόζοντας ένα είδος συντομογραφίας, μπορούμε να πούμε ότι το γράμμα  $x$  συμβολίζει μια ημέρα του Φεβρουαρίου και ότι το  $y = f(x)$  συμβολίζει το φοιτητή που έχει αναλάβει το νοικοκυρίο εκείνη την ημέρα. Δεν υπάρχει λόγος να μην ονομάσουμε συνάρτηση την απεικόνιση

ημέρα  $x \mapsto y = \text{φοιτητής που έχει αναλάβει το νοικοκυρίο την ημέρα } x$ .

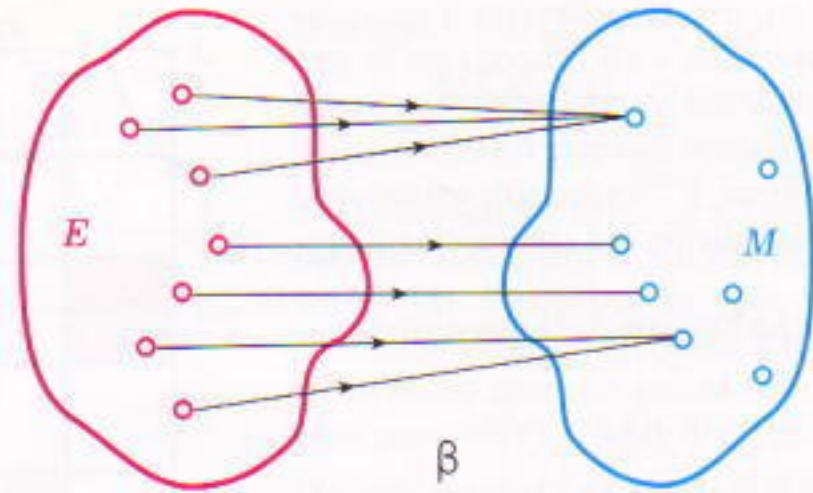
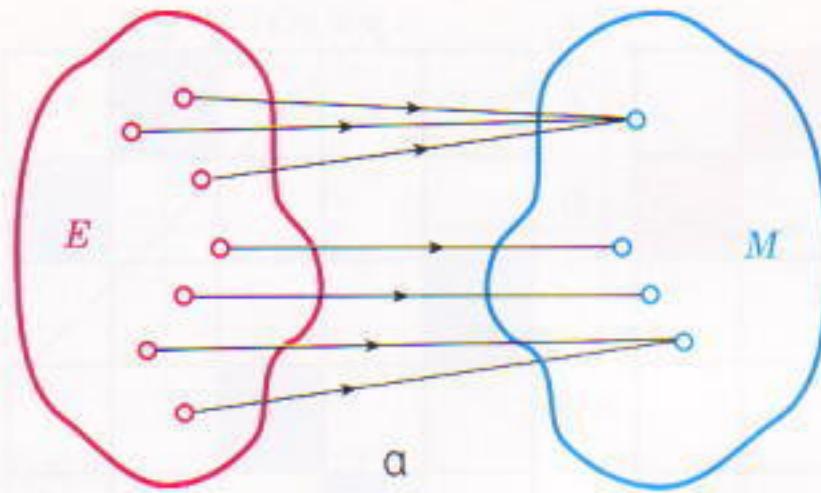
Μπορούμε να γράψουμε αυτή την απεικόνιση ως

$$y = f(x).$$

Κάθε απεικόνιση  $f$  ενός συνόλου  $E$  σε ένα σύνολο  $M$  θα ονομάζεται συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $E$  και πεδίο τιμών  $M$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	28
Πέτρος	✓				✓				✓				✓	...	
Κώστας		✓				✓				✓				...	
Σάκης			✓				✓				✓			...	
Βασίλης				✓				✓				✓		...	✓

Σχήμα 3



**Σχήμα 4**

Απεικονίσεις (a) του συνόλου  $E$  επί του  $M$ , (β) του  $E$  εντός του  $M$ .

Μην ξεχνάτε ότι, όταν μιλάμε για μια απεικόνιση  $f$  ενός συνόλου  $E$  επί του συνόλου  $M$ , τότε το  $y = f(x)$  ορίζεται για κάθε  $x$  που ανήκει στο  $E$  και μόνο για τα  $x$  που ανήκουν σε αυτό, ενώ οι τιμές για της συνάρτησης  $f$  ανήκουν υποχρεωτικά στο  $M$  και κάθε  $y$  που ανήκει στο  $M$  είναι τιμή της  $f$  για μια τουλάχιστον τιμή του ορίσματος  $x$ .

Αν το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι οι τιμές της συνάρτησης  $f$  ανήκουν υποχρεωτικά στο σύνολο  $M$  αλλά δεν δηλώνεται ρητά ότι κάθε στοιχείο αυτού του συνόλου είναι τιμή της συνάρτησης  $f$ , τότε λέμε ότι η συνάρτηση απεικονίζει το πεδίο ορισμού της  $E$  εντός του συνόλου  $M$  ή ότι η απεικόνιση  $f$  είναι μια απεικόνιση του  $E$  εντός του  $M$ .

Επομένως πρέπει να κάνουμε αυστηρή διάκριση μεταξύ των δύο εκφράσεων: «απεικόνιση επί του συνόλου  $M$  (Σχήμα 4a)» και «απεικόνιση εντός του συνόλου  $M$  (Σχήμα 4b).<sup>2</sup>

Για παράδειγμα, η απεικόνιση

$$x \mapsto |x|$$

μπορεί να περιγραφεί ως απεικόνιση του  $\mathbf{R}$  εντός του  $\mathbf{R}$ , αλλά όχι του  $\mathbf{R}$  επί του  $\mathbf{R}$ .

Από καθαρά λογική άποψη, η περίπτωση του πεπερασμένου πεδίου ορισμού είναι η απλούστερη. Προφανώς, συναρτήσεις με πεδίο ορισμού που αποτελείται από  $n$  στοιχεία δεν μπορεί να πάρουν περισσότερες από  $n$  διαφορετικές τιμές. Συνεπώς, συναρτήσεις με πεπερασμένο πεδίο ορισμού απει-

κονίζουν πεπερασμένα σύνολα επί πεπερασμένων συνόλων. Τέτοιες συναρτήσεις μελετώνται σε έναν σημαντικό κλάδο των μαθηματικών — τη συνδυαστική (δείτε τα Προβλήματα 8, 11, 18, 19).

**Παράδειγμα 4.** Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο  $M = \{A, B\}$  των δύο γραμμάτων  $A$  και  $B$  και πεδίο τιμών το ίδιο σύνολο — δηλαδή, τις απεικονίσεις του συνόλου  $M$  εντός του εαυτού του.

Υπάρχουν τέσσερις ακριβώς τέτοιες συναρτήσεις:

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$A$	$A$	$B$	$A$	$B$
$B$	$A$	$B$	$B$	$A$

Οι συναρτήσεις  $f_1$  και  $f_2$  είναι σταθερές — το πεδίο τιμών τους αποτελείται από ένα μοναδικό στοιχείο.

Οι συναρτήσεις  $f_3$  και  $f_4$  απεικονίζουν το  $M$  επί του εαυτού του. Η συνάρτηση  $f_3$  μπορεί να περιγραφεί από τον τύπο

$$f_3(x) = x.$$

Αυτή είναι η ταυτοτική απεικόνιση: κάθε στοιχείο του  $E (= M)$  απεικονίζεται στον εαυτό του.

Για να συμπληρώσουμε την εξέταση της γενικής έννοιας της «συνάρτησης» θα χρειαστεί απλώς να επισημάνουμε το γεγονός ότι δεν έχουν καμία απολύτως σημασία τα γράμματα που διαλέγουμε για να συμβολίσουν την «ανεξάρτητη μεταβλητή» — δηλαδή, το τυχαίο στοιχείο του πεδίου ορισμού — και την «εξαρτημένη μεταβλητή» — δηλαδή, το τυχαίο στοιχείο του πεδίου τιμών. Οταν γράφουμε

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x},$$

$$\xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi},$$

$$y \xrightarrow{f} \sqrt{y},$$

$$f(x) = y = \sqrt{x},$$

$$f(\xi) = \eta = \sqrt{\xi},$$

$$f(y) = x = \sqrt{y},$$

ορίζουμε μια συνάρτηση  $f$  που απεικονίζει έναν μη αρνητικό αριθμό στην τετραγωνική του ρίζα. Όποιο συμβολισμό και αν χρησιμοποιήσουμε παίρνουμε

$$f(1) = 1, \quad f(4) = 2, \quad f(9) = 3,$$

και ούτω καθεξής.

## Αντιστρέψιμες συναρτήσεις

Η συνάρτηση

$$y = f(x)$$

ονομάζεται αντιστρέψιμη<sup>3</sup> αν λαμβάνει όλες τις τιμές της μία και μόνο φορά. Οι συναρτήσεις  $f_3(x)$  και  $f_4(x)$  του Παραδείγματος 4 είναι αντιστρέψιμες. Οι συναρτήσεις  $f_1(x)$  και  $f_2(x)$ , καθώς και αυτές των Παραδειγμάτων 1, 2 και 3, δεν είναι αντιστρέψιμες.

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι αντιστρέψιμη αρκεί να βρούμε δύο τιμές του ορίσματος  $x_1 \neq x_2$  τέτοιες ώστε

$$f(x_1) = f(x_2).$$

3. Η προέλευση αυτής της ονομασίας γίνεται φανερή στη συνέχεια: μια συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη αν έχει αντίστροφη.

2. Παρατηρήστε ότι κάθε «απεικόνιση επί» μπορούμε να την ονομάζουμε «απεικόνιση εντός», αλλά όχι το αντίστροφο.

Έτσι, στο Παράδειγμα 3 παρατηρούμε απλώς ότι ο Πέτρος έχει τα καθήκοντα του νοικοκυριού και στις 1 Φεβρουαρίου και στις 5 Φεβρουαρίου. Επομένως η συνάρτηση αυτού του παραδείγματος δεν είναι αντιστρέψιμη.

### Παράδειγμα 5. Η συνάρτηση

$$x \xrightarrow{f} y = -\sqrt{x}$$

είναι αντιστρέψιμη. Ορίζεται στο σύνολο  $\mathbf{R}_+$ , των μη αρνητικών αριθμών. Πεδίο τιμών της είναι το σύνολο

$$\mathbf{R}_- = (-\infty, 0]$$

όλων των μη θετικών αριθμών. Όταν μας δίδεται ένα  $y$  που ανήκει στο σύνολο  $\mathbf{R}_-$ , μπορούμε να βρούμε το αντίστοιχο  $x$  μέσω του τύπου

$$x = y^2.$$

Η συνάρτηση  $g$ ,

$$y \xrightarrow{g} x = y^2, \text{ για } y \leq 0,$$

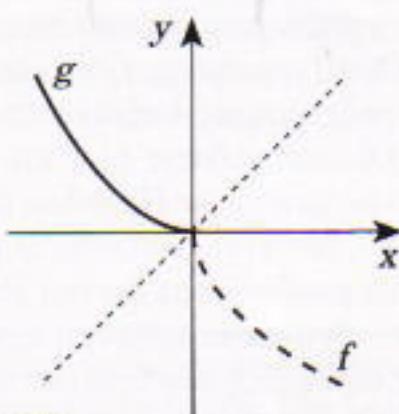
είναι η αντίστροφη συνάρτηση (ή απλώς η αντίστροφη) της  $f$ . Απεικονίζει το  $\mathbf{R}_-$  στο  $\mathbf{R}_+$ . Όπως ήδη επισημάναμε, η επλογή των συμβόλων για τις εξαρτημένες και τις ανεξάρτητες μεταβλητές δεν έχει καμία σημασία.

Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  μπορούν να γραφούν ως

$$f(x) = -\sqrt{x}, \text{ για } x \geq 0,$$

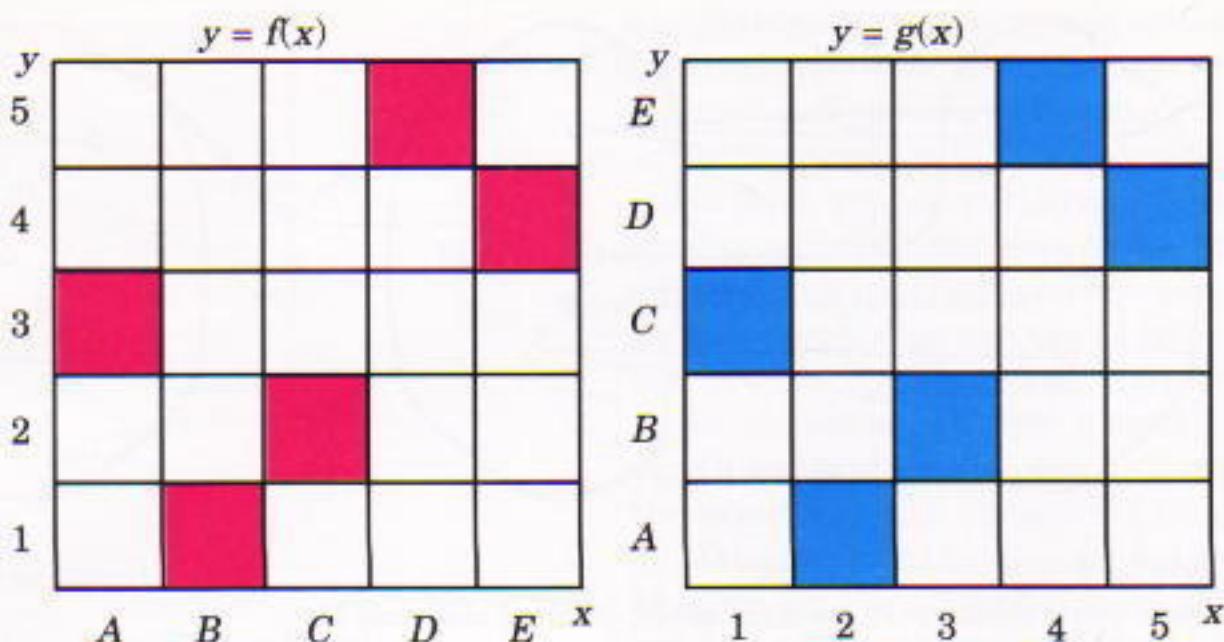
$$g(x) = x^2, \text{ για } x < 0.$$

Στο Σχήμα 5 βλέπετε το γράφημα της συνάρτησης  $f$ , καθώς και της αντίστροφής της  $g$ .



Σχήμα 5

**Παράδειγμα 6.** Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται επί του συνόλου των πρώτων πέντε γραμμάτων του λατινικού αλφαριθμητού και πεδίο τιμών της είναι το σύνολο των πρώτων πέντε φυσικών



Σχήμα 6

αριθμών (θετικών ακεραίων):

$x$	A	B	C	D	E
$y = f(x)$	3	1	2	5	4

Η αντίστροφη συνάρτηση  $g$  προσδιορίζεται από τον επόμενο πίνακα:

$x$	1	2	3	4	5
$y = g(x)$	B	C	A	E	D

Τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων δίδονται στο Σχήμα 6.

Ας δώσουμε ακριβείς ορισμούς.

Έστω  $f$  μια απεικόνιση ενός συνόλου  $E$  επί του συνόλου  $M$ . Αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου  $M$  υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο

$$x = g(y)$$

του συνόλου  $E$  τέτοιο ώστε

$$f(x) = y$$

(Σχήμα 7), τότε η απεικόνιση  $f$  είναι αντιστρέψιμη<sup>4</sup> και η

$$y \xrightarrow{g} x$$

ονομάζεται αντίστροφη απεικόνιση της  $f$ .

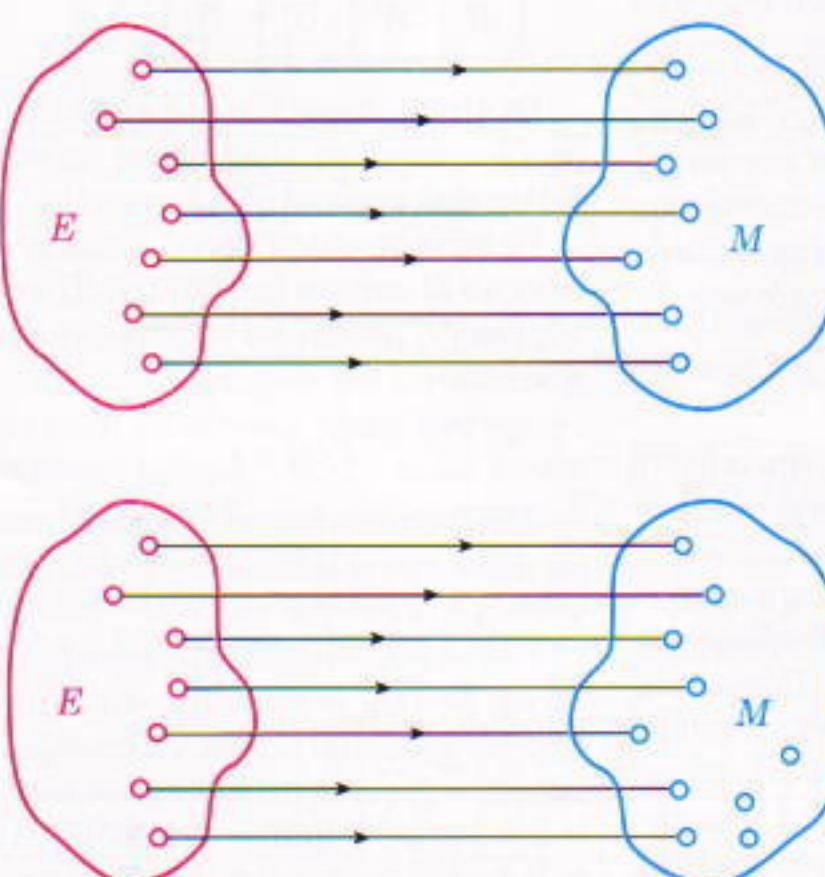
Επομένως, το να είναι αντιστρέψιμη η απεικόνιση  $f$  σημαίνει ότι έχει μια αντίστροφη  $g$ . Η αντίστροφη απεικόνιση της  $f$  συμβολίζεται συνήθως με  $f^{-1}$ . Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = x^3,$$

τότε

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

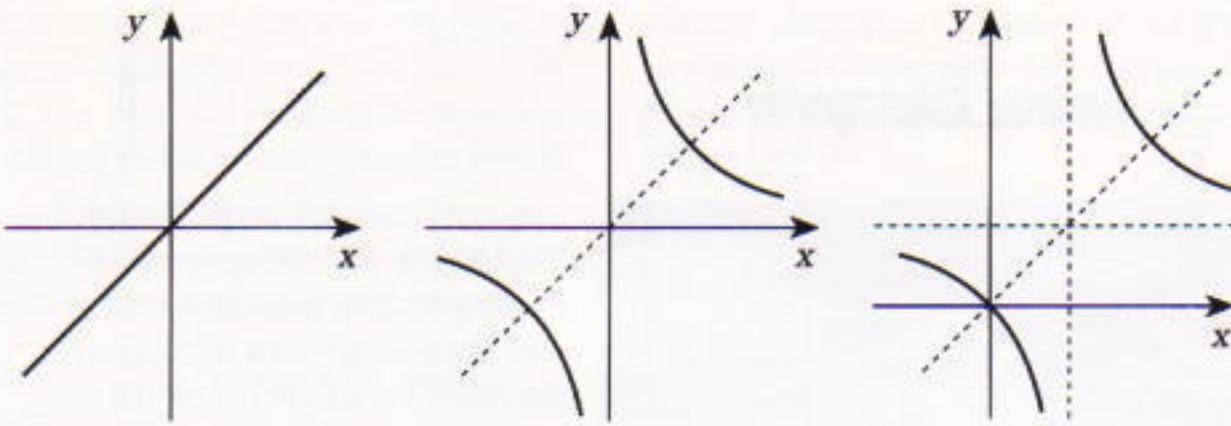
Αφού η «συνάρτηση» είναι συνώνυμο της «απεικόνισης», έχουμε ορίσει και τον όρο «αντίστροφη συνάρτηση». Αρκεί να



Σχήμα 7

Αντιστρέψιμες απεικονίσεις (α) του συνόλου  $E$  επί του  $M$ , (β) του  $E$  εντός του  $M$ .

4. Μια άλλη ονομασία μιας τέτοιας συναρτήσεως είναι ένα προς ένα απεικόνιση του  $E$  επί του  $M$ .



Σχήμα 8

επαναλάβουμε ότι είπαμε προηγουμένως αντικαθιστώντας τη λέξη «απεικόνιση» με τη λέξη «συνάρτηση».

Είναι προφανές ότι πεδίο ορισμού της αντιστροφής συνάρτησης  $f^{-1}$  είναι το πεδίο τιμών της  $f$ , ενώ πεδίο τιμών της  $f^{-1}$  είναι το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Η αντιστροφή της αντιστροφής  $f^{-1}$  είναι η αρχική συνάρτηση  $f$ :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Επομένως, οι συναρτήσεις  $f$  και  $f^{-1}$  είναι πάντα αμοιβαία αντιστροφες.

**Παράδειγμα 7.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι αντιστροφες του εαυτού τους. Είναι οι συναρτήσεις

$$(a) f(x) = x,$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x},$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Επαληθεύστε το! Τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων παρουσιάζονται στο Σχήμα 8. Παρατηρήστε ότι όλα είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του πρώτου και του τρίτου τεταρτημόριου —δηλαδή, την ευθεία  $y = x$ .

Στο Σχήμα 9 παρουσιάζονται οι σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών τρόπων απεικόνισης ενός συνόλου  $A$  στο σύνολο  $B$ , της απεικόνισης του  $A$  επί του  $B$  και της απεικόνισης του  $A$  εντός του  $B$ .

Επιτρέψτε μου να σας υπενθυμίσω ακόμη μια φορά ότι η έννοια της απεικόνισης του  $A$  εντός του  $B$  είναι γενικότερη. Αν η εικόνα του  $A$  μέσω μιας τέτοιας απεικόνισης συμπίπτει με το  $B$ , λέμε ότι είναι μια απεικόνιση του  $A$  επί του  $B$ .

Οι αντιστροφες συναρτήσεις ονομάζονται και ένα προς ένα απεικονί-

σεις ή αμφιμονοσήμαντες. Θα συναντήσετε συχνά αυτούς τους όρους σε μαθηματικά βιβλία. Όμως, δεν συνηθίζεται να μιλάμε για «ένα προς ένα συναρτήσεις». Αφού «συνάρτηση» και «απεικόνιση» είναι συνώνυμα, προτιμούμε να χρησιμοποιούμε τον όρο «αντιστρέψιμη συνάρτηση» ή, πράγμα που είναι το ίδιο, «αντιστρέψιμη απεικόνιση».

## Προβλήματα

Σε ότι ακολουθεί, το σύμβολο της μοίρας υποδηλώνει πολύ εύκολες ερωτήσεις που έχουν στόχο να σας βοηθήσουν να επαληθεύσετε ότι καταλάβατε το άρθρο. Τα δυσκολότερα προβλήματα σημειώνονται με αστερίσκο. Δεν είναι απαραίτητο να τα λύσετε όλα.

### Εισαγωγή

1°. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών των συναρτήσεων: (a)  $y = f(x) = 1/x^2$ , (b)  $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

2. Το ακέραιο μέρος ενός αριθμού  $x$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το  $x$ . Το ακέραιο μέρος του  $x$  συμβολίζεται με  $[x]$ . Για πα-

ράδειγμα,

$$[0] = 0, [7,5] = [7] = 7, \\ [-0,3] = -1, [-\pi] = -4.$$

Η διαφορά  $x - [x]$  ονομάζεται κλασματικό μέρος του  $x$  και συμβολίζεται με  $\{x\}$ . Σχεδιάστε τα γραφήματα των επόμενων συναρτήσεων και βρείτε τα πεδία ορισμού και τα πεδία τιμών τους: (a)  $f_1(x) = [x]$ , (b)  $f_2(x) = \{x\}$ , (c)  $f_3(x) = \{x\} - 1/2$ , (d)  $f_4(x) = |\{x\} - 1/2|$ , (e)  $f_5(x) = [1/x]$ , (στ)  $f_6(x) = 1/[x]$ , (ζ)  $f_7(x) = \{1/x\}$ , (η)  $f_8(x) = 1/\{x\}$ .

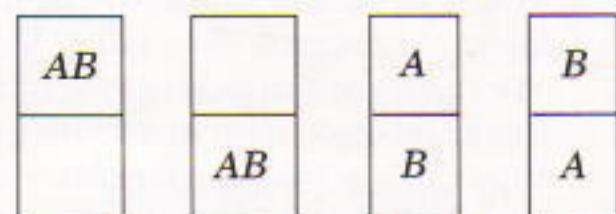
3\*. Για κάθε φυσικό  $n$  ορίζουμε το  $s(n)$  ως το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του  $n$  (δηλαδή, εξαιρούμενου του ίδιου του  $n$ ). Για παράδειγμα,

$$s(1) = 0, s(2) = 1, s(6) = 6, \\ s(12) = 16, s(28) = 28.$$

Αποδείξτε ότι το  $s(n)$  δεν παίρνει τις τιμές 2 και 5.

### Η γενική έννοια της συνάρτησης

4°. Δύο άνθρωποι  $A$  και  $B$  μπορούν να μείνουν σε δύο δωμάτια με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους:



Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε (a) δύο ανθρώπους σε τρία δωμάτια, (b) τρεις ανθρώπους σε δύο δωμάτια, (c) τρεις ανθρώπους σε δύο δωμάτια, έτσι ώστε να μην υπάρχει κενό δωμάτιο;

### Απεικονίσεις του $A$ εντός του $B$

### Απεικονίσεις του $A$ επί του $B$

### Αντιστρέψιμες απεικονίσεις του $A$ επί του $B$

### Αντιστρέψιμες απεικονίσεις του $A$ εντός του $B$

Σχήμα 8

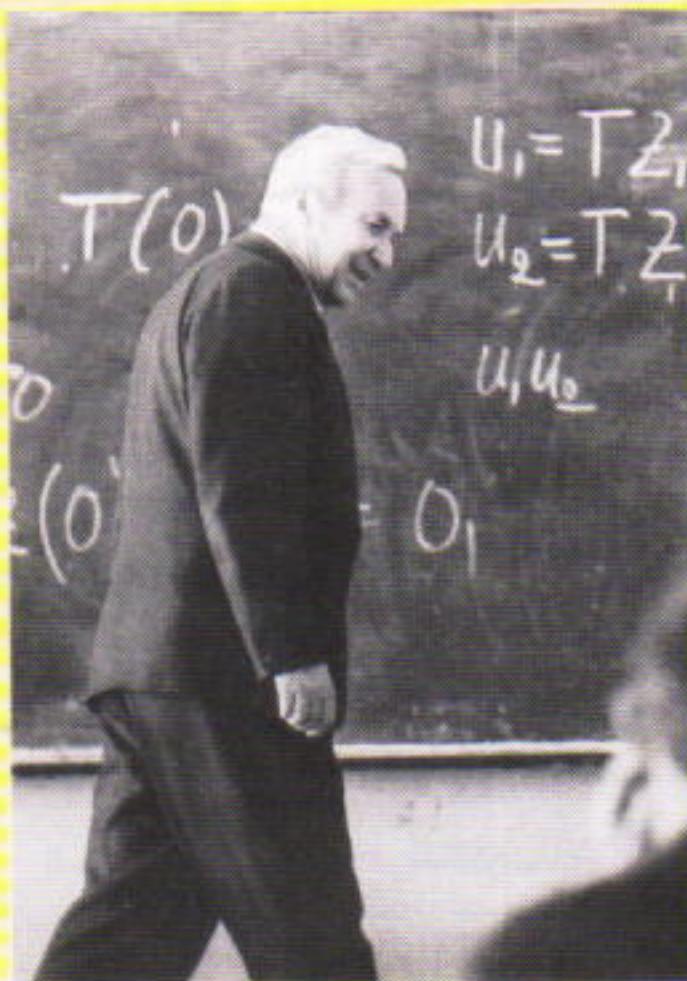
## Andrey Kolmogorov

Ο Andrey Nikolaevitch Kolmogorov (1903-1987) ήταν ο πρίγκιπας των Μαθηματικών της εποχής του. Η αξιά του αναγνωρίσθηκε από νωρίς, αφού η πατρίδα του, η πρώην ΕΣΣΔ, τον εξέλεξε ακαδημαϊκό μόλις 36 ετών.

Σπούδασε στη Μόσχα και στο Παρίσιο επέστρεψε στη Μόσχα το 1931 όπου έμεινε όλη του τη ζωή. Ασχολήθηκε με τη συναρτησιακή ανάλυση, την πραγματική ανάλυση, την τοπολογία, τη μαθηματική λογική, τη θεωρία πιθανοτήτων και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά (ιδίως με τη θεωρία διαταραχών, την κυβερνητική και τη θεωρία πληροφοριών).

Το 1933 δημοσίευσε, στα γερμανικά, το *Βάσεις της Θεωρίας Πιθανοτήτων*. Με το έργο αυτό έγινε πατέρας της σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων, την οποία θεμελίωσε με αυστηρό αξιωματικό τρόπο. Αργότερα ο ίδιος και οι μαθητές του εφάρμοσαν τη θεωρία στη μελέτη ενός πλήθους τυχαιών διδικασιών, όπως είναι οι αλυσίδες Markov. Ήταν επέλυσαν ένα φάσμα προβλημάτων στις διαταραχές της δυναμικής ροής, όπου εμφανίζονται φαινόμενα τυχαιότητας (π.χ. στο ράμφος ενός τζετ), και άλλου.

Ιδιαίτερη ήταν η συμβολή του Kolmogorov στην κλασική ανάλυση, και ιδίως στις σειρές Fourier. Στη θεωρία των σειρών Fourier οι περιοδικές συναρτήσεις αναπτύσσονται ως σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων. Παρέμενε όμως ανοικτό το πρόβλημα αν οι σειρές αυ-



τές κατ' ανάγκη συγκλίνουν. Το 1926, ο Kolmogorov έδωσε ένα απρόσμενο παράδειγμα σειράς Fourier η οποία αποκλίνει παντού! Το αποτέλεσμα αυτό απέκτησε ακόμη μεγαλύτερο μυστήριο όταν σαράντα χρόνια αργότερα ο Carleson έδειξε ότι, αντιθέτως, οι σειρές Fourier φραγμένων περιοδικών συναρτήσεων συγκλίνουν σχεδόν παντού.

Το 1954, σε μία ομιλία με την οποία έκλεινε το Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο, στο Αμερικανικό, έθεσε τις βάσεις της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων. Η θεωρία αυτή αναπτύχθηκε περισσότερο από το μαθητή του, τον V.I. Arnold, καθώς και τον J. Moser. Τα πορίσματά τους έδωσαν πολύ καλύτερη κατανόηση στην κίνη-

ση των πλανητών: από την εποχή των Αΐνσταίν και Planck η αυστηρή αιτιοκρατική θεώρηση ως βάση των φυσικών νόμων είχε αμφισβητηθεί. Το κενό κάλυψε η θεωρία πιθανοτήτων η οποία εισήλθε στη βάση μεγάλου τμήματος της σύγχρονης φυσικής.

Ο Kolmogorov δεν αφιέρωσε το χρόνο του μόνο στην έρευνα. Η συμβολή του στη μαθηματική εκπαίδευση υπήρξε επίσης σημαντική. Ασχολήθηκε κυρίως με τους ταλαντούχους μαθητές και με τις Ολυμπιάδες Μαθηματικών. Δίδασκε, άλλωστε, και στο Μαθηματικό Σχολείο της Μόσχας, όπου φοιτούν μαθητές με αυξημένες ικανότητες.

—M. Λάμπρου

5°. Ένα σύνολο  $M$  περιέχει τρία στοιχεία και ένα σύνολο  $N$  περιέχει δύο στοιχεία. Βρείτε το πλήθος των απεικονίσεων (a) του  $M$  εντός του  $N$ , (β) του  $M$  επί του  $N$ , (γ) του  $N$  εντός του  $M$ , (δ) του  $N$  επί του  $M$ .

6. Πόσοι επταψήφιοι τηλεφωνικοί αριθμοί υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς αποτελούνται μόνο από τα ψηφία 0, 1, 2 και 3;

7. Αποδείξτε ότι υπάρχουν περισσότερες από ένα εκατομμύριο συναρτήσεις που λαμβάνουν μόνο τις δύο τιμές 0 και 1 και ορίζονται στο σύνο-

λο των είκοσι πρώτων φυσικών αριθμών.

8. Το σύνολο  $M$  αποτελείται από τη στοιχεία και το σύνολο  $N$  από  $n$  στοιχεία. Ποιο είναι το πλήθος των συναρτήσεων που ορίζονται στο  $M$  και παίρνουν τιμές στο  $N$ ;

ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Τα Προβλήματα 8, 11, 18 και 19 είναι βασικά προβλήματα της συνδυαστικής. Τα παραθέτουμε εδώ για να δείξουμε ότι η συνδυαστική είναι κατά μεγάλο μέρος ζήτημα απαριθμησης του πλήθους των απεικονίσεων διαφόρων ειδών πεπερα-

σμένων συνόλων σε πεπερασμένα σύνολα.

9. Με πόσους τρόπους μπορούν παλεοσμένοι να κάτσουν σε η καρέκλες όταν (a)  $n = 2$ , (β)  $n = 3$ , (γ)  $n = 6$ ;

10. Ένα σύνολο  $E$  αποτελείται από έξι στοιχεία. Αποδείξτε ότι υπάρχουν 720 ακριβώς συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το  $E$ .

11. Μια απεικόνιση ενός πεπερασμένου συνόλου επί του εαυτού του ονομάζεται μετάθεση. Το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων ενός συνόλου εξαρτάται μόνο από το πλήθος

των στοιχείων του και συμβολίζεται με  $n!$  Αποδείξτε ότι  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$ ,  $6! = 720$ . Βρείτε μια γενική μέθοδο υπολογισμού του  $n!$ .

#### Αντίστροφες συναρτήσεις

12\*. Βρείτε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι αντίστρεψιμες:

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x^4,$$

$$f_3(x) = x^{17}, \quad f_4(x) = x^{18}.$$

13. Σε κάθε θρανίο μιας τάξης μπορούν να κάτσουν δύο το πολύ μαθητές. Σε κάθε μαθητή αντιστοιχούμε αυτόν που κάθεται στο ίδιο θρανίο (σε αυτούς που κάθονται μόνοι, αντιστοιχούμε τον εαυτό τους). Ποια είναι η αντίστροφη απεικόνιση;

14. Αντιστοιχούμε σε κάθε λέξη της ελληνικής γλώσσας τη λέξη που αποτελείται από τα ίδια γράμματα, γραμμένα με αντίστροφη σειρά (ως λέξη εδώ εννοούμε κάθε τυχαία ακολουθία γραμμάτων). Είναι αντίστρεψιμη αυτή η συνάρτηση; Αν ναι, ποια είναι η αντίστροφή της;

15. Η απεικόνιση ενός πεπερασμένου συνόλου επί του εαυτού του είναι πάντα αντίστρεψιμη. Δώστε ένα παράδειγμα μη αντίστρεψιμης απεικόνισης του συνόλου των φυσικών αριθμών επί του εαυτού του.

16. Εννέα ταξιδιώτες πρέπει να μπουν σε τρεις βάρκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν (α) πρέπει να υπάρχουν τρεις σε κάθε βάρκα, (β) πρέπει να υπάρχουν το πολύ τέσσερις και τουλάχιστον δύο σε κάθε βάρκα, (γ) πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο σε κάθε βάρκα; (Αριθμούμε τις βάρκες από το 1 έως το 3.)

17\*. Όταν οι καρέκλες είναι αρκετές, συνηθίζεται να μην κάθονται περισσότεροι από ένας καλεσμένοι στην ίδια καρέκλα: το σύνολο των καλεσμένων απεικονίζεται αντίστρεψιμα στο σύνολο των καρεκλών. Αν έχουμε έξι καρέκλες στο δωμάτιο, με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν (α) ένας, (β) δύο, (γ) τρεις, (δ) τέσσερις, (ε) πέντε, (στ) έξι καλεσμένοι;

18\*. Στη συνδυαστική οι αντίστρεψιμες απεικονίσεις ενός πεπερασμένου συνόλου  $M$  εντός ενός πεπερασμένου σύνολου  $N$  ονομάζονται διατάξεις. Το πλήθος αυτών των απεικο-

νίσεων εξαρτάται μόνο από τα πλήθη  $m$  και  $n$  των στοιχείων των συνόλων  $M$  και  $N$ , αντίστοιχα, και συμβολίζεται με  $A_n^m$ .<sup>5</sup>

Αποδείξτε ότι

$$A_1^1 = 1,$$

$$A_2^1 = A_2^2 = 2,$$

$$A_3^1 = 3,$$

$$A_3^2 = A_3^3 = 6,$$

$$A_{10}^2 = 90,$$

και βρείτε έναν γενικό κανόνα υπολογισμού του  $A_n^m$ . Αποδείξτε ότι  $A_n^{n-1} = A_n^n$  για κάθε  $n$ .

19\*. Το Πρόβλημα 16γ μπορεί να τεθεί γενικότερα: Ποιο είναι το πλήθος των απεικονίσεων ενός συνόλου  $n$  στοιχείων επί ενός συνόλου  $3$  στοιχείων; Συμβολίζουμε με  $D_n^3$  το πλήθος των απεικονίσεων ενός συνόλου  $n$  στοιχείων επί ενός συνόλου  $m$  στοιχείων. Δείξτε ότι

$$D_3^2 = 6,$$

$$D_4^2 = 12,$$

$$D_4^3 = 36,$$

$$D_n^3 = n!$$

και προσπαθήστε να βρείτε το γενικό κανόνα υπολογισμού του  $D_n^m$  (αυτό το πρόβλημα είναι πιο δύσκολο από τα Προβλήματα 8, 11 και 18).

20\*. Βρείτε το πλήθος των συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα σύνολο 28 στοιχείων και παίρνουν τις τέσσερις τιμές  $P$ ,  $K$ ,  $S$  και  $B$  επτά φορές η καθεμιά. (Αυτό το πρόβλημα αναφέρεται στο πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να κατανείμουμε τα καθήκοντα του νοικοκυριού ανάμεσα στους Πέτρο, Κώστα, Σάκη και Βασίλη — δείτε το Παράδειγμα 3.) ◻

5. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως στοιχεία του συνόλου  $M$  τους αριθμούς  $1, 2, \dots, m$ . Τότε καθεμία από τις εν λόγω απεικονίσεις αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη σειρά στο σύνολο  $N$  των  $m$  εικόνων αυτών των αριθμών: η εικόνα του 1 μπορεί να θεωρηθεί η πρώτη από αυτές τις  $m$  εικόνες, η εικόνα του 2 η δεύτερη, κ.ο.κ. Έτοιμοι είναι μια διάταξη  $m$  στοιχείων που επλέγονται από  $n$  στοιχεία.

## ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

### ΚÁΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

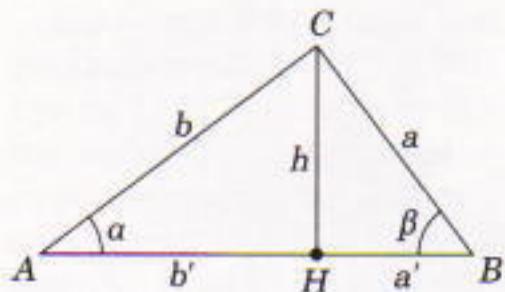


Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, υπάρχει ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον, όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους. Εκεί, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο — μαζί με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης — διατηρούν το δικό τους βιβλιοπωλείο / εκθετήριο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παραγωγής. Περιμένουμε το αναγνωστικό κοινό να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

**Νέα στοά Αρσακείου**  
(Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785

# Ορθογώνια

**Υ**ΠΑΡΧΟΥΝ ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΈΝΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ έΧΟΥΜΕ ΦΕΡΕΙ ΤΟ ΉΨΟΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ. ΑΥΤΗ Η ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΑ ΤΕΛΕΙΩΣ ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΑΣ ΠΡΟΣΦΕΡΕΙ ΠΟΛΛΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑ ΚΑΙ ΜΗ ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ. ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ ΝΑ ΚΑΤΑΛΗΞΟΥΜΕ ΣΕ ΑΥΤΑ ΞΕΚΙΝΩΝΤΑΣ ΑΠΟ ΑΠΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.



Σχήμα 1

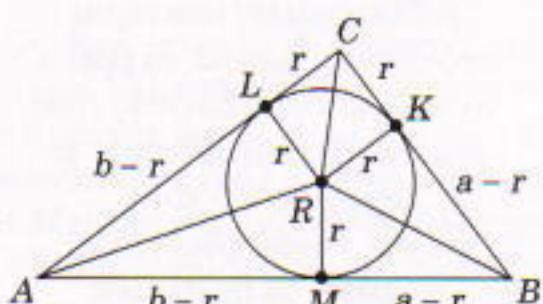
Εστω  $ABC$  ένα ορθογώνιο τρίγωνο και έστω  $H$  το ίχνος του ύψους που άγουμε στην υποτείνουσα  $AB$  (Σχήμα 1). Όπως συνήθως, θέτουμε  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AH = b'$ ,  $BH = a'$ , και  $CH = h$ . Είναι εύκολο να αποδειξουμε τις επόμενες προτάσεις και ιδιότητες.

1. Τα τρίγωνα  $BCH$ ,  $ACH$  και  $ABC$  είναι όμοια μεταξύ τους.

2.  $a^2 = a'c$ ,  $b^2 = b'c$ . (Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει το πυθαγόρειο θεώρημα:  $a^2 + b^2 = a'c + b'c = c(a' + b') = c^2$ .)

3.  $h^2 = a'b'$ ,  $h = ab/c$ .

4. Εστω  $R$  το κέντρο του εγγραμμένου στο  $ABC$  κύκλου και έστω  $r$  η ακτίνα του (Σχήμα 2). Τότε  $r = (a + b - c)/2$ .



Σχήμα 2

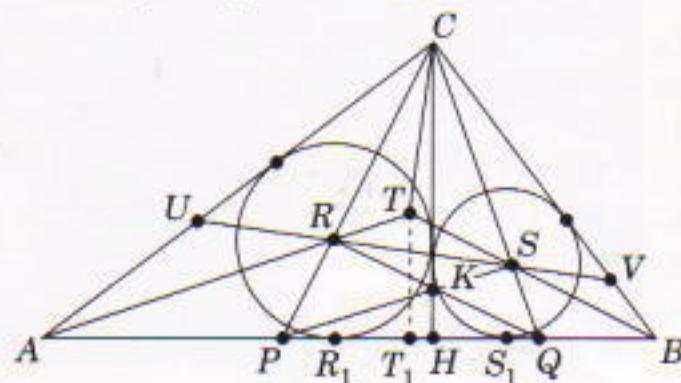
Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο  $RKCL$  είναι τετράγωνο και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι εφαπτόμενες που φέρουμε από ένα σημείο προς έναν κύκλο είναι ίσες. Ε-



πομένως έχουμε  $c = (a - r) + (b - r)$ , οπότε  $r = (1/2)(a + b - c)$ .

$$5. \angle ARB = 180^\circ - (1/2)\angle A - (1/2)\angle B = 135^\circ.$$

Τα πράγματα αποκτούν περισσότερο ενδιαφέρον αν εγγράψουμε κύκλους στα τρίγωνα  $ACH$  και  $BCH$  (Σχήμα 3). Εστω ότι οι ακτίνες τους είναι  $r_1$  και  $r_2$ , αντίστοιχα, και έστω



Σχήμα 3

$R$  και  $S$  τα κέντρα τους. Τότε:

$$6. r + r_1 + r_2 = h.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

$$r_1 = \frac{h + b' - b}{2},$$

και

$$r_2 = \frac{h + a' - a}{2}.$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη αυτούς τους τύπους προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

$$7. r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Απόδειξη. Αφού τα τρίγωνα  $ACH$  και  $ABC$  είναι όμοια, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{r_1}{r} = \frac{b}{c} = \sigma u v A.$$

Παρομοίως

$$\frac{r_2}{r} = \frac{a}{c} = \sigma u v B.$$



Επομένως,

$$r_1 = r \sigma u v A, \quad r_2 = r \eta \mu A,$$

και τελικά

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

8. Αν η ευθεία  $CR$  τέμνει την  $AB$  στο  $P$  και αν η ευθεία  $CS$  τέμνει την  $AB$  στο  $Q$  (Σχήμα 3), τότε  $AC = AQ$  και  $BC = BP$ .

Απόδειξη. Η πρώτη ισότητα προκύπτει από την επόμενη σειρά ισοτήτων:

$$\angle CQA = \angle BCQ + \angle B = \angle HCQ +$$

# τρίγωνα



$$+ \angle ACH = \angle ACQ.$$

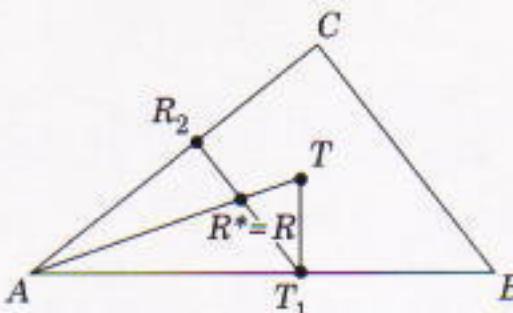
Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται παρόμοια.

9. Ας υποθέσουμε ότι  $T$  είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο  $ABC$  κύκλου (δείτε το Σχήμα 3). Τότε το  $T$  είναι επίσης ορθόκεντρο του τριγώνου  $CRS$  (το σημείο τομής των υψών του) και κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο  $CPQ$  κύκλου.

Απόδειξη. Οι ευθείες  $BS$  και  $AR$  είναι διχοτόμοι των  $\angle B$  και  $\angle A$ , αντίστοιχα, και τέμνονται στο  $T$ . Αφού τα τρίγωνα  $ACQ$  και  $BCP$  είναι ισοσκελή, αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες  $BS$  και  $AR$  είναι κάθετες στα τμήματα  $CP$  και  $CQ$  και διέρχονται από τα μέσα τους.

10. Εστω  $T_1$  το ίχνος της καθέτου που φέρουμε από το  $T$  στην  $AB$ . Οι ευθείες  $T_1R$  και  $T_1S$  είναι παράλληλες προς τις  $BC$  και  $AC$ , αντίστοιχα.

Απόδειξη. Φέρουμε την  $T_1R_2$ , κάθετη από το  $T_1$  στην  $AC$  (δείτε το Σχήμα 4). Εστω  $R^*$  το σημείο τομής των



Σχήμα 4

$T_1R_2$  και  $AT$ . Θα αποδείξουμε ότι  $R^* = R$ .

Τα τρίγωνα  $ATT_1$  και  $AR^*R_2$  είναι όμοια. Επομένως,

$$\frac{R^*R_2}{TT_1} = \frac{AR_2}{AT_1}.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AR_2T_1$  βρίσκουμε ότι  $AR_2/AT_1 = \text{συν} A$ . Συνεπώς

$$R^*R_2 = TT_1 \text{συν} A = r \text{συν} A.$$

Τα τρίγωνα  $ABC$  και  $ACH$ , όμως, είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας  $AC/AB = \text{συν} A$ . Άρα,  $r_1/r = \text{συν} A$  και  $RR_2/r = \text{συν} A$ , δηλαδή  $RR_2 = r \text{συν} A$ .

**Ασκήσεις.** Αποδείξτε τις επόμενες προτάσεις. (Δίνονται ορισμένες αποδείξεις.)

11. Η ευθεία  $PS$  είναι παράλληλη προς την  $AT$  και η ευθεία  $RQ$  είναι παράλληλη προς την  $BT$ .

12. Τα τρίγωνα  $ATB$ ,  $BSC$  και  $ARC$  είναι όμοια.

13. Τα σημεία  $H$  και  $T_1$  ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο  $RS$ .

$$14. ST_1 = RT_1.$$

Απόδειξη. Αφού το τρίγωνο  $T_1RR_1$  είναι ορθογώνιο και αφού  $\angle RT_1R_1 = B$ , συμπεραίνουμε ότι  $T_1R \text{ημ} B = r_1 = r \text{ημ} B$  και επομένως  $T_1R = r$ . Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι  $T_1S = r$ .

$$15. CU = CV.$$

Απόδειξη. Το τρίγωνο  $ST_1R$  είναι ισοσκελές (δείτε την Πρόταση 14) και ορθογώνιο (δείτε την Πρόταση 10). Επομένως,  $\angle RST_1 = 45^\circ$ . Όμως,  $T_1S \parallel AC$ . Άρα  $\angle VUC = \angle RST_1 = 45^\circ$ , και έτοι το τρίγωνο  $CUV$  είναι ισοσκελές.

16. Τα σημεία  $Q$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $R$  και  $P$  ανήκουν σε έναν κύκλο με κέντρο  $T_1$  και ακτίνα  $r$ .

**Απόδειξη.** Τα σημεία  $S$  και  $R$  ανήκουν σε αυτό τον κύκλο (δείτε την Πρόταση 14). Ας αποδείξουμε, για παράδειγμα, ότι και το σημείο  $Q$  ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Τα τρίγωνα  $T_1SQ$  και  $CQA$  είναι όμοια ( $T_1S \parallel AC$ ) συνεπώς

$$\frac{ST_1}{AC} = \frac{T_1Q}{QA}.$$

Όμως,  $AC = QA$  (δείτε την Πρόταση 8). Επομένως,  $ST_1 = T_1Q = r$ .

17. Το σημείο  $K$  είναι ορθόκεντρο του τριγώνου  $CPQ$ .

18. Οι ευθείες  $PS$ ,  $RQ$  και  $CH$  συντρέχουν στο  $K$ .

19.  $RT = KS = SQ$  και  $RP = RK = TS$ .

20.  $RS = CT$ .

21. Τα σημεία  $A$ ,  $R$ ,  $S$  και  $B$  ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Τα σημεία  $A$ ,  $P$ ,  $T$  και  $C$  ανήκουν σε έναν άλλο κύκλο και τα σημεία  $B$ ,  $Q$ ,  $T$  και  $C$  σε έναν τρίτο.

22.  $AT_1 \cdot BT_1 = S_{ABC}$  ( $S_{ABC}$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$ ).

Απόδειξη. Εστω  $AT_1 = u$  και  $BT_1 = v$ . Αφού  $S_{ABC} = rs$  ( $s$  είναι η ημιπερίμετρος του  $ABC$ ) έχουμε

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} r(a + b + c) = r(r + u + v).$$

Όμως,  $(u + r)^2 + (v + r)^2 = c^2 = (u + v)^2$  και επομένως  $r^2 + r(u + v) = uv$ . Το αριστερό μέλος αυτής της ταυτότητας είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$ .

23.  $S_{CPQ} = (abr)/c$ . Υπόδειξη: Το ύψος από την κορυφή  $C$  του τριγώνου  $CPQ$  είναι  $h = ab/c$  και το μήκος του  $PQ$  ισούται με  $2r$ .

24. Τα τρίγωνα  $HSR$  και  $ABC$  είναι όμοια.

25. Τα τρίγωνα  $RR_1T_1$  και  $SS_1T_1$  είναι ίσα μεταξύ τους και όμοια προς το τρίγωνο  $ABC$ .

26. Τα τρίγωνα  $AQR$  και  $ARC$  είναι ίσα.

27. Οι περιγεγραμμένοι στα τρίγωνα  $ARC$  και  $CSB$  κύκλοι εφάπτονται στο  $C$  και η  $CT$  είναι η κοινή τους εφαπτομένη. □

—L.D. Kurlyandchik

# Διακροτήματα και φαινόμενο Doppler

«Ο πιο επίμονος ήχος που αντηχεί σε όλη την ιστορία του ανθρώπου είναι οι τυμπανοκρουσίες του πολέμου.»

—Arthur Koestler

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisencraft

**K**ΑΘΩΣ ΕΝΑ ΠΕΡΙΠΟΛΙΚΟ ΤΗΣ Α- μέσου δράσεως διέρχεται με τη σειρήνα του σε λειτουργία, πα- ρατηρείτε ότι το ύψος του ήχου μειώνεται. Το ίδιο πράγμα συμβαίνει στο «Ινδιανάπολις 500» όταν σας προ- σπερνά ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο. Ενόω το αυτοκίνητο σας πλησιάζει, το ύψος του ήχου της μηχανής του παραμένει σταθερό, μειώνεται όταν περνά από μπροστά σας, και διατηρείται πάλι σταθερό (αλλά χαμηλότερο) καθώς το αυτοκίνητο απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

Εδώ έχουμε δύο παραδείγματα της μετατόπισης Doppler. Η κίνηση της πηγής προκαλεί μια μεταβολή της συ- χνότητας του ήχου που ακούτε. Εάν στέκεστε ακίνητοι σε σχέση με τον αέρα, η συχνότητα ν του ήχου που α- κούτε δίνεται από την έκφραση

$$v = v_0 \left( \frac{c}{c \mp u_{\text{πηγή}}} \right),$$

όπου  $v_0$  είναι η συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής όταν η πηγή ηρεμεί,  $u_{\text{πηγή}}$  η ταχύτητα της πηγής και  $c$  η τα- χύτητα του ήχου. Το αρνητικό πρόση- μο χρησιμοποιείται όταν η πηγή πλη- σιάζει τον παρατηρητή, ενώ το θετικό πρόσημο όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

Τη μαθηματική αυτή σχέση τη δια- τύπωσε ο Doppler το 1842. Επομέ- νε πως η κίνηση της πηγής προς τον

παρατηρητή έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται ο χρόνος που απαιτείται ώ- στε τα ηχητικά κύματα να φτάνουν στα αυτιά του —εξ ου και η υψηλό- τερη συχνότητα. Ακριβώς το αντίθε- το ισχύει όταν η πηγή απομακρύνε- ται από τον παρατηρητή.

Ο τύπος του Doppler υποβλήθηκε σε πειραματικό έλεγχο μερικά χρόνια αργότερα. Επί δύο ημέρες τρομπεί- στες μετακινούνταν με ένα ανοιχτό βαγόνι το οποίο ήταν προσαρτημένο σε τρένο που ανέπτυσσε διάφορες τα- χύτητες. Μουσικοί, που διέθεταν ά- φωγη αντίληψη του ύψους του ή- χου, παρέμεναν ακίνητοι στο έδαφος και κατέγραφαν τις νότες που άκου- γαν καθώς το τρένο πλησιάζει και α- πομακρύνόταν. Οι παρατηρήσεις τους βρέθηκαν σε συμφωνία με τον τύπο του Doppler.

Η κίνηση του παρατηρητή προκα- λεί επίσης μεταβολές της συχνότητας. Όταν ταξιδεύετε με ένα τρένο, ο ήχος από το καμπανάκι στη διασταύρωση έχει μεγαλύτερο (αλλά σταθερό) ύψος καθώς πλησιάζετε τη διασταύρωση και χαμηλότερο ύψος καθώς αφήνετε τη διασταύρωση πίσω σας. Το συ- γκεκριμένο φαινόμενο περιγράφεται από τη σχέση

$$v = v_0 \left( \frac{c \pm u_{\text{πηγή}}}{c} \right),$$

όπου  $u_{\text{πηγή}}$  είναι η ταχύτητα του πα- τηρητή. Το θετικό πρόσημο χρησιμο- ποιείται όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή, και το αρνητικό όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από αυτήν.

Τα δύο φαινόμενα μπορούν να συνδυαστούν σε μία και μόνη έκφρα- ση

$$v = v_0 \left( \frac{c \pm u_{\text{πηγή}}}{c \mp u_{\text{πηγή}}} \right),$$

όπου τα πάνω πρόσημα αναφέρονται στην αμοιβαία προσέγγιση πηγής και παρατηρητή, ενώ τα κάτω στην αμοι- βαία απομάκρυνσή τους.

Ένα άλλο ενδιαφέρον ηχητικό φαι- νόμενο εκδηλώνεται όταν δύο σειρή- νες παράγουν ηχητικά κύματα με την ίδια ακουστότητα και παραπλήσια συχνότητα. Τα δύο ηχητικά κύματα παράγουν έναν ήχο του οποίου η συ- χνότητα ισούται με τον μέσο όρο των συχνοτήτων που εκπέμπουν οι πη- γές, αλλά με ένταση που μεταβάλλε- ται περιοδικά από την απόλυτη σιγή ως έναν ήχο με ένταση τετραπλάσια από εκείνη της κάθε ξεχωριστής πη- γής. Η συχνότητα αυτού του διακρο- τήματος ισούται ακριβώς με την από- λυτη τιμή της διαφοράς των δύο συ- χνοτήτων.

Όσοι κουρδίζουν πάνα χρησιμο- ποιούν τα διακροτήματα για να συ-



ντονίσουν τις χορδές του πάνου που αντιστοιχούν στην ίδια νότα. Αφού κουρδιστεί η μια χορδή στη σωστή συχνότητα, κρούεται ταυτόχρονα με μια άλλη. Αν και οι δύο έχουν την ίδια συχνότητα, τότε δεν παρατηρείται μεταβολή της έντασης του ήχου, δηλαδή η συχνότητα του διακροτήματος μηδενίζεται. Ωστόσο, αν η δεύτερη χορδή έχει υψηλότερη ή χαμηλότερη συχνότητα, η ένταση του ήχου θα μεταβάλλεται με συχνότητα ίση με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των συχνοτήτων που παράγουν οι χορδές. Ο κουρδιστής του πάνου ρυθμίζει την τάση στο δεύτερο σύρμα ώσπου να εξαφανιστεί το διακρότημα.

Αυτά τα δύο ηχητικά φαινόμενα συνδυάστηκαν με ενδιαφέροντα τρόπο στη δεύτερη εξέταση για την επιλογή των μελών της Ομάδας Φυσικής των ΗΠΑ που θα συμμετάσχει στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής τον ερχόμενο Ιούλιο στο Ρέυκιαφίκ της Ισλανδίας.

Δύο σειρήνες τοποθετημένες στον άξονα των  $x$  χωρίζονται από απόσταση  $D$ . Όπως τις ακούει ένας παρατηρητής που ηρεμεί ως προς αυτές, η αριστερή σειρήνα έχει συχνότητα  $v_a$  και η δεξιά συχνότητα  $v_s$ . Υποθέστε πως ένας δρομέας κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_0$  κατά μήκος του άξονα των  $x$  και καταγράφει τις εξής παρατηρήσεις:

1. Όταν βρίσκεται δεξιά και από τις δύο σειρήνες, ακούει συχνότητα διακροτήματος  $1,01 \text{ Hz}$ .

2. Όταν βρίσκεται αριστερά και από τις δύο σειρήνες, ακούει συχνότητα διακροτήματος  $0,99 \text{ Hz}$ .

3. Όταν βρίσκεται ανάμεσα στις δύο σειρήνες, η συχνότητα διακροτήματος μηδενίζεται.

A. Ο δρομέας κινείται στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα των  $x$  ή στην αντίθετη;

B. Ποια είναι η ταχύτητά του ως κλάσμα της ταχύτητας του ήχου;

C. Ποια συχνότητα είναι η μεγαλύτερη;

D. Ποιες είναι οι αριθμητικές τιμές των δύο συχνοτήτων;

## Τοπικά πεδία

Στο τεύχος Μαρτίου / Απριλίου του *Quantum* ζητήσαμε από τους αναγνώστες μας να υπολογίσουν τα τοπικά πεδία σε μια εξιδανικευμένη σφαιρική Γη.

1. Στο Βόρειο Πόλο, το τοπικό πεδίο οφείλεται αποκλειστικά στη βαρυτική δύναμη, εφόσον η γωνιακή ταχύτητα εκεί είναι μηδέν.

$$\sum F = \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^2} = mg_B,$$

$$g_B = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} = 9,804 \text{ m/s}^2,$$

όπου

$$G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^2/\text{m}^2,$$

$$M_\Gamma = 5,997 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

$$R_\Gamma = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Στον Ισημερινό, μέρος της βαρυτικής δύναμης παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης στην περιστρεφόμενη Γη. Το τοπικό πεδίο μειώνεται κατά το μέρος αυτό.

$$\sum F = \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^2} - m\omega^2 R_\Gamma = mg_I,$$

$$g_I = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} - \omega^2 R_\Gamma$$

$$= (9,804 - 0,034) \text{ m/s}^2 = 9,770 \text{ m/s}^2.$$

Σε γεωγραφικό πλάτος  $40^\circ$ , μια συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης απαιτείται για να παράσχει την κεντρομόλου δύναμη για τη μάζα  $m$  που περιστρέφεται μαζί με τη Γη. Και πάλι το τοπικό πεδίο μειώνεται κατά την εν λόγω συνιστώσα. Σ' αυτή την περιπτώση, αναλύουμε τη βαρυτική δύναμη σε δύο συνιστώσες, τη μια παράλληλη και την άλλη κάθετη προς τον άξονα περιστροφής της Γης και αφαιρούμε από την κάθετη συνιστώσα την κεντρομόλου δύναμη.

Στην κάθετη διεύθυνση:

$$\sum F_\perp = \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^2} \sin\theta - m\omega^2 R_\Gamma \sin\theta \\ = mg_\perp,$$

όπου  $R_\Gamma \sin\theta$  είναι η ακτίνα του κύκλου που διαγράφει ένα αντικείμενο σε γεωγραφικό πλάτος  $40^\circ$  λόγω της περιστροφής της Γης. Συνεπώς

$$g_\perp = \left( \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} - \omega^2 R_\Gamma \right) \sin\theta \\ = 7,484 \text{ m/s}^2.$$

Στην παράλληλη διεύθυνση:

$$\sum F_\parallel = mg_\parallel,$$

$$g_\parallel = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} \cos\theta = 6,302 \text{ m/s}^2.$$

Επομένως, το μέτρο του διανυσματικού αθροίσματος των δύο συνιστώσων ισούται με

$$g_{40} = \sqrt{7,484^2 + 6,302^2} \text{ m/s}^2 \\ = 9,784 \text{ m/s}^2,$$

$$\theta = \text{τοξεφ} \frac{6,302}{7,484} = 40,10^\circ.$$

2. Η γωνιακή απόκλιση ανάμεσα στο τοπικό πεδίο σε γεωγραφικό πλάτος  $40^\circ$  και στην ακτινική διεύθυνση προς το κέντρο της Γης ανέρχεται σε  $0,10^\circ$ .

3. Στον Ισημερινό το ακτινικό πεδίο είναι παράλληλο προς την ακτινική διεύθυνση (η βαρυτική δύναμη και η κεντρομόλος δύναμη είναι συγγραμμικές), όπως και στο Βόρειο Πόλο (όπου η κεντρομόλος δύναμη μηδενίζεται). Πρέπει λοιπόν να υπάρχει ένα γεωγραφικό πλάτος για το οποίο η απόκλιση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. Για να βρούμε το εν λόγω πλάτος και τη συγκεκριμένη απόκλιση απαιτείται να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που εξήχθησαν στο πρώτο μέρος:

$$g_\perp = \left( \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} - \omega^2 R_\Gamma \right) \sin\theta,$$

$$g_\parallel = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} \cos\theta,$$

$$\theta' = \text{τοξεφ} \frac{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} \cos\theta}{\left( \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} - \omega^2 R_\Gamma \right) \sin\theta}.$$

Για να βρούμε πού γίνεται μέγιστη η απόκλιση της  $\theta'$  από τη  $\theta$ , μπορού-

με να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της  $(\theta' - \theta)$  συναρτήσει της  $\theta$  και να προσδιορίσουμε το μέγιστο. Εναλλακτικά, είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε το μέγιστο χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου ή και να πάρουμε την παράγωγο της συγκεκριμένης συνάρτησης ως προς  $\theta$  και να την εξισώσουμε με μηδέν:

$$\theta' - \theta = \text{τοξεφ} \frac{\frac{GM_r}{R_r^2} \eta \mu \theta}{\left( \frac{GM_r}{R_r^2} - \omega^2 R_r \right) \sin \theta} - \theta,$$

$$= \text{τοξεφ}(K \varepsilon \varphi \theta) - \theta,$$

όπου

$$K = \frac{\frac{GM_r}{R_r^2}}{\left( \frac{GM_r}{R_r^2} - \omega^2 R_r \right)}.$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{d(\theta' - \theta)}{d\theta} = \frac{K \varepsilon \mu^2 \theta}{1 + K^2 \varepsilon \varphi^2 \theta} - 1 = 0,$$

$$\eta \mu \theta = \sqrt{\frac{1}{K+1}}.$$

Στην περιστρεφόμενη Γη, το  $K$  ελάχιστα διαφέρει από το 1 (για την ακρίβεια, ισούται με  $9,804/9,770 = 1,0035$ ), και η μέγιστη απόκλιση παρουσιάζεται για μια γωνία ελαφρώς μικρότερη από  $45^\circ$ . Σε αντικείμενα που περιστρέφονται με πολύ μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα, βρίσκουμε ότι η μέγιστη γωνιακή απόκλιση παρατηρείται σε πολύ μικρότερα γεωγραφικά πλάτη. ◻

## ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

Το φυσικομαθηματικό  
βιβλιοπωλείο

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,  
τηλ.: 3628492

## ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

# ΕΞΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ

Η απομειού δομή  
της ολης

Η διατήρηση  
της ενέργειας

Η σχέση της φυσικής  
με τις διάλεις επιστήμες

Περί βαρύτητας

Η κβαντική συμπεριφορά



# RICHARD P. FEYNMAN

Πρόλογος: Paul Davies

Richard Feynman

Νόμπελ Φυσικής

## ΕΞΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ

Ανθολόγηση από τις Διαλέξεις Φυσικής

«Αν μπορούσε κάποιο βιβλίο να περιλάβει ό,τι αξίζει να μεταγγίσουμε στη νεότερη γενιά των επιστημόνων, αυτό θα ήταν αναμφίβολα τα "Κομμάτια" από τις "Διαλέξεις" του Feynman.»

John Gribbin,  
στο περιοδικό The New Scientist

«Ο Feynman κατέληξε ένας θρύλος, πρωτίστως χάρη στο μεγάλο ταλέντο του να εξηγεί τα θέματα της επιστήμης... Πρόκειται για σοφά επιλεγμένα κείμενα από τη σειρά των "Διαλέξεών" του τα οποία αποτελούν συναρπαστικό ανάγνωσμα για κάθε άνθρωπο με ανησυχίες, ανεξάρτητα από το επίπεδο της επιστημονικής του κατάρτισης.»

Gordon Kane,  
Καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μίτσιγκαν

«Η ανάγνωση του βιβλίου ισοδυναμεί με ένα αδιάκριτο κοίταγμα πάνω από τους ώμους του Νεύτωνα και του Αϊνστάιν: ο Feynman στις καλύτερες στιγμές του.»

Michio Kaku

Σελ.: 200, 14 × 21, Πανόδετο, Α/Μ, 6.000 δρχ.

## ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά των βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Η καηρονομιά του αλ-Χουαρίσμη

«Ἐνα τετράγωνο και δέκα από τις ρίζες του  
ισούνται με τριάντα εννέα ντίρχαμ...»

Z.D. Usmanov και I.Hodjiev

**Ο**Ι ΛΕΞΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΛΓΟ-  
ρίθμος σάς είναι σίγουρα γνω-  
στές. Έχετε όμως υπόψη σας  
ποια είναι η προέλευσή τους;  
Στην πραγματικότητα, και οι δύο αυ-  
τές λέξεις συνδέονται με τον ίδιο επ-  
στήμα: τον Μωχάμετ ιμπν Μουσά  
αλ-Χουαρίσμη, τον διακεκριμένο ά-  
ραβα μαθηματικό και αστρονόμο που  
γεννήθηκε περίπου το 780 μ.Χ στη  
Χίβα (στο σημερινό Ουζμπεκιστάν).

Η παραγωγικότερη περίοδος του  
αλ-Χουαρίσμη ήταν η εποχή που ερ-  
γάστηκε στη Βαγδάτη, περίπου το 825.  
Ο χαλίφης αλ-Μαμούν ήταν προστά-  
της της αστρονομίας και των μαθημα-  
τικών. Ιδρυσε τον «Οίκο της Σοφίας»  
στη Βαγδάτη, που είχε τη δική του βι-  
βλιοθήκη καθώς και αστρονομικό πα-  
ρατηρητήριο. Αυτή η ακαδημία επι-  
στημών συγκέντρωσε όλους σχεδόν  
τους λαμπρότερους άραβες επιστήμο-  
νες της εποχής.

Ο Μωχάμετ ιμπν Μουσά αλ-Χου-  
αρίσμη ήταν ένας από τους επιστήμο-  
νες στους οποίους ο χαλίφης, μεταξύ  
άλλων ερευνών, ανέθεσε να μετα-  
φράσουν τις πραγματείες των ελλή-  
νων μαθηματικών και να υπολογί-  
σουν το μήκος ενός μεσημβρινού. Ο  
αλ-Χουαρίσμη έγραψε πολλά βιβλία  
για τα μαθηματικά και την αστρονο-  
μία.

Στις εργασίες του για την αριθμη-  
τική, εξηγεί το ινδικό σύστημα ανα-  
παράστασης των αριθμών και περι-  
γράφει λεπτομερειακά τους κανόνες

των γραπτών υπολογισμών με το  
ψηφιακό σύστημα αριθμησης. Το αρ-  
χικό αραβικό κείμενο έχει χαθεί αλλά  
διασώθηκε μια λατινική μετάφραση  
του 12ου αιώνα. Το βιβλίο αυτό ήταν  
μια από τις κύριες πηγές μέσω των ο-  
ποίων έγινε γνωστό στη δυτική Ευ-  
ρώπη το ψηφιακό σύστημα αριθμη-  
σης. Ο τίτλος της μετάφρασης ήταν  
*Algoritmi de numero Indorum* (Ο αλ-  
Χουαρίσμη περί της ινδικής τέχνης του  
υπολογισμού). Με αυτό τον τρόπο ει-  
σήλθε ο αλγόριθμος, η εκλατινισμένη  
μορφή του ονόματος του αλ-Χουαρί-  
σμή, στο μαθηματικό λεξιλόγιο.

Αρχικά, αλγόριθμος σήμαινε α-  
πλώς το δεκαδικό θεσιακό σύστημα  
αριθμησης. Αργότερα, το ίδιο όνομα  
δόθηκε σε όλα τα έργα που διέδοσαν  
στην Ευρώπη το ινδικό αριθμητικό  
σύστημα και, τελικά, κατέληξε να  
σημαίνει το ίδιο το σύστημα. Σήμερα,  
η λέξη αλγόριθμος δηλώνει ένα πεπε-  
ρασμένο σύνολο κανόνων που επι-  
τρέπει την επίλυση ενός προβλήματος  
με καθαρά μηχανικό τρόπο, όπως σε  
ένα πρόγραμμα υπολογιστή.

Στο *Algoritmi de numero Indorum*,  
ο αλ-Χουαρίσμη εξηγεί τον τρόπο  
γραφής των αριθμών και την εκτέλε-  
ση των τεσσάρων βασικών αριθμητι-  
κών πράξεων με ακέραιους και απλά  
κλάσματα. Θεωρεί, πάντως, το διπλα-  
σιασμό ενός αριθμού και τη διαίρεσή  
του διά 2 ως ξεχωριστές πράξεις. Στο  
βιβλίο δεν περιέχεται ούτε ένας τύπος:  
όλοι οι συλλογισμοί διατυπώνονται

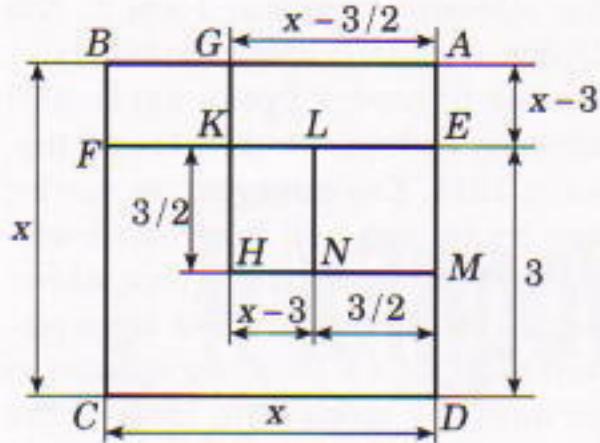
λεκτικά ενώ τα παραδείγματα επεξη-  
γούνται με αριθμούς που δεν γράφο-  
νται με δεκαδικά ψηφία αλλά με λέ-  
ξεις ή ρωμαϊκούς αριθμούς. Ο αλ-Χου-  
αρίσμη δεν εξηγεί πώς θα εκτελέσου-  
με την αφαίρεση όταν ένα ψηφίο του  
αφαιρετέου είναι μεγαλύτερο από το  
αντίστοιχο ψηφίο του μειωτέου.

Ένα άλλο διάσημο έργο του αλ-  
Χουαρίσμη είναι το *Kitab al-Jabr wa  
al-muqabalah* (Το βιβλίο της εποτή-  
μης της αναγωγής και της διαγραφής). Η λατινική μετάφραση αυτού του έρ-  
γου έγινε εξαιρετικά δημοφιλής στη  
δυτική Ευρώπη και έτσι η λέξη άλγε-  
βρα (από το *al-Jabr* του τίτλου) χρη-  
σιμοποιήθηκε για την ονομασία ενός  
ολόκληρου κλάδου των μαθηματικών  
—του κλάδου που έως τα μέσα του  
18ου αιώνα ασχολείτο σχεδόν απο-  
κλειστικά με εξισώσεις.

Σύμφωνα με τον αλ-Χουαρίσμη, η  
λέξη *al-Jabr* σημαίνει την πράξη που  
μας επιτρέπει να μετακινήσουμε ό-  
ρους από το ένα μέλος μιας εξισώσης  
στο άλλο έτσι ώστε να καταλήξουμε  
με θετικούς μόνο όρους και στα δύο  
μέλη. Η λέξη *al-muqabalah* σημαίνει  
την πράξη της αναγωγής των όμοιων  
όρων έτσι ώστε σε κάθε μέλος της εξι-  
σώσης να παραμείνει ένας μόνο θετι-  
κός όρος με κάθε δύναμη του αγνώ-  
στου. Για παράδειγμα, αν χρησιμο-  
ποιήσουμε την πρώτη πράξη, μετα-  
τρέπουμε την εξισώση

$$3x^2 - 5x + 6 = x^2 + 7x + 2$$





Σχήμα 4

και  $3x$ , αντίστοιχα. Επιπλέον σχεδιάζουμε το τετράγωνο  $AGHM$  με πλευρά  $x - 3/2$ . Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το εμβαδόν του: Είναι  $25/4$ , διότι  $S_{ELNM} = 9/4$  και  $S_{AGHNE} = S_{ABFE} = 4$ . Τότε όμως έχουμε  $(x - 3/2)^2 = 25/4$ , άρα  $x = 4$ .

Ο αλ.-Χουαρίσμι συμπληρώνει την πραγματεία του με το «Βιβλίο περί κληροδοτημάτων», στο οποίο βρίσκουμε πλήθος εφαρμογών των εξισώσεων σε προβλήματα της καθημερινής ζωής — για παράδειγμα, στο κληρονομικό δίκαιο που εφαρμοζόταν εκείνη την εποχή στον αραβικό κόσμο.

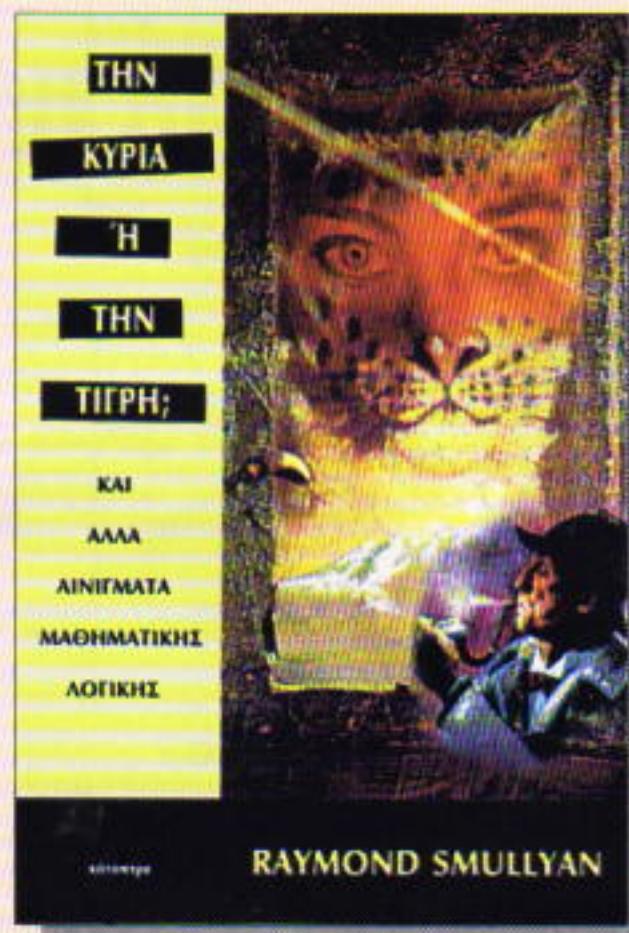
Τα έργα του αλ.-Χουαρίσμι έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών. Υπήρξαν η κύρια πηγή από την οποία η δυτική Ευρώπη έμαθε τους ινδικούς αριθμούς και την άλγεβρα των Αράβων. Όμως, η δραστηριότητα του αλ.-Χουαρίσμι δεν περιορίστηκε μόνο στα μαθηματικά. Έγραψε μια πραγματεία για τη γεωγραφία η οποία αποτέλεσε το έναυσμα για την ανάπτυξη των γεωγραφικών μελετών στη μεσαιωνική ανατολή. Οργάνωσε επιστημονικές εξερευνήσεις στο Βυζάντιο, τη Χαζαρία (την περιοχή γύρω από τον κάτω ρου του ποταμού Βόλγα) και το Αφγανιστάν. Επίσης, διεύθυνε το έργο που επέτρεψε να υπολογιστεί με ικανοποιητική ακρίβεια το μήκος τόξου μίας μοίρας κατά μήκος του μεσημβρινού. ◻

### — κορφή —

**Βιβλία για όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης**

Κεντρική πώληση: Βιβλιοπωλείο Gutenberg, Σόλωνος 103, 106 78 Αθήνα,  
τηλ: 3800127, fax: 3800798

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΤΑ ΤΕΛΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ



**Raymond Smullyan**

### Την κυρία ή την τίγρη; και άλλα αινίγματα μαθηματικής λογικής

Το βιβλίο, μια εξαιρετική συλλογή προβλημάτων —παραδόξων, μεταγρίφων, αινιγμάτων συνδυαστικής, κ.λπ.— της σύγχρονης μαθηματικής λογικής, έχει ως κύριο σκοπό του να εξηγήσει, με τρόπο μοναδικό, το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel και το θεώρημα της τυπικής μη ορισμότητας της αλήθειας του Tarski.

- «Σπινθηροβόλα συλλογή προβλημάτων και παραδόξων της λογικής από τον πιο φυχαγωγικό επαίοντα της μαθηματικής λογικής και της θεωρίας συνόλων που υπήρξε ποτέ...»

*Martin Gardner*

- «Έξυπνο, διδακτικό, διασκεδαστικό βιβλίο... Ο τελευταίος μεταγρίφος "Ποιος είναι ο κατάσκοπος;" αποτελεί τον πιο ευφυή γρίφο λογικής που διατυπώθηκε ποτέ...»

*G. Boolos*, Καθηγητής φιλοσοφίας στο MIT

- «Ο Ray Smullyan είναι ο Lewis Carroll της εποχής μας...»

*P. Denning*, Καθηγητής πληροφορικής στο Πανεπιστήμιο Pardue

Ένα βιβλίο για κάθε λάτρη του είδους: από μαθητές λυκείου μέχρι ωριμους μαθηματικούς, λογικολόγους και επιστήμονες των υπολογιστών.

**Εκδόσεις Κάτοπτρο**

# Συνθήκη έλλειψης βαρύτητας

*Μπορεί να συμβεί μέσα στο αυτοκίνητό σας;*

Sergei Pikan

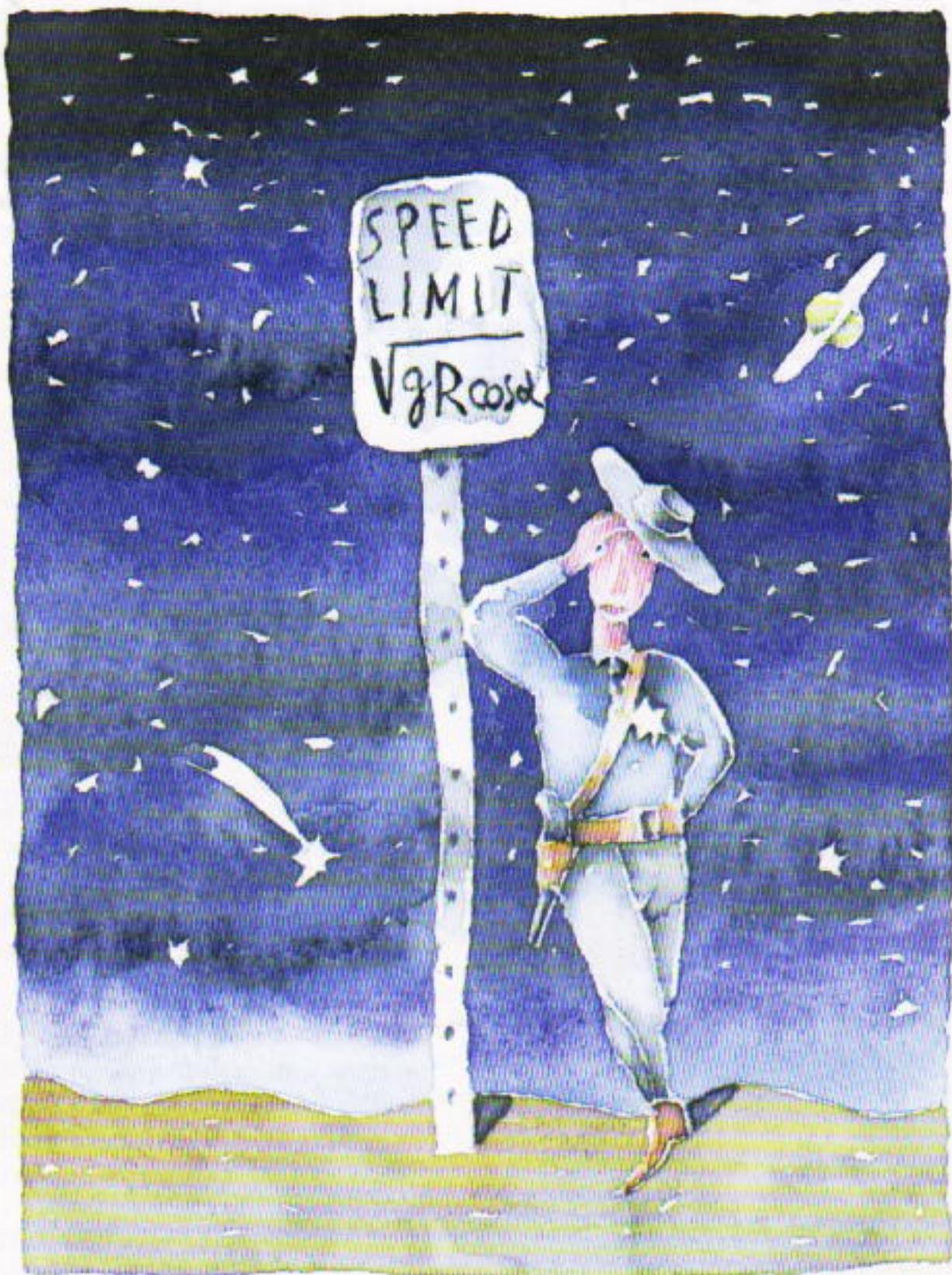
**Γ**ΙΑ ΝΑ ΟΔΗΓΗΣΕΤΕ ΕΝΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ χωρίς να σας συμβεί κάποιο ατύχημα, δεν χρειάζεται να γνωρίζετε απλώς τους κανόνες κυκλοφορίας, αλλά και τους νόμους της μηχανικής. Μπορούμε να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, εξετάζοντας το ακόλουθο πρόβλημα: Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται ένα αυτοκίνητο στην κορυφή μιας κυρτής γέφυρας ακτίνας  $40$  μέτρων, ώστε ο οδηγός του να βρεθεί στιγμιαία σε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας;

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αναφοράς προσαρμοσμένο στο έδαφος. Στον οδηγό του ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος του  $mg$  και η δύναμη στήριξης  $N$ . Εφόσον στην κορυφή της γέφυρας ο οδηγός δεν αισθάνεται το βάρος του, προφανώς θα ισχύει  $N = 0$ . Για τις προβολές των δυνάμεων πάνω στον άξονα  $y$ , ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:  $mg = m\gamma$ , όπου  $\gamma = v^2/R$  (Σχήμα 1).

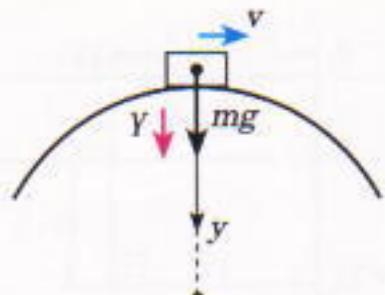
Έτσι, προκύπτει ότι:

$$v = \sqrt{gR} = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h.}$$

Σε πρώτη ματιά, όλα δείχνουν μια χαρά. Η συγκεκριμένη τιμή ταχύτητας δεν υπερβαίνει τα συνήθη όρια ταχύτητας. Ας σκεφτούμε όμως λίγο περισσότερο και ας αναρωτηθούμε τι θα συμβεί στο αυτοκίνητο (και στον οδηγό) μόλις περάσει την κορυφή της γέφυρας, καθώς επίσης και τι συνέβη προτού βρεθούν στην κορυφή. Από τους υπολογισμούς που ακολουθούν



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 1

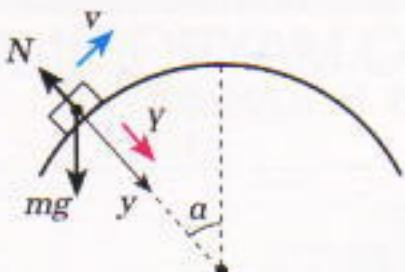
θα διαπιστώσετε πως η κατάσταση που ήδη περιγράψαμε είναι στην πραγματικότητα αδύνατη! Υπολογίστε, για παράδειγμα, την τιμή της κάθετης δύναμης  $N$  προτού το αυτοκίνητο φτάσει στην κορυφή, δεδομένου πως η ταχύτητά του είναι σταθερή και ίση με  $v = \sqrt{gR}$  (Σχήμα 2). Θεωρώντας τις προβολές των δυνάμεων στον άξονα  $y$ , η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$mg\sin\alpha - N = m\gamma,$$

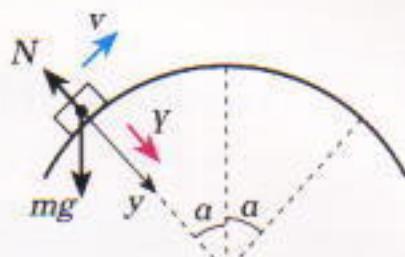
όπου  $\gamma = v^2/R$  και  $v = \sqrt{gR}$ , από την οποία και προκύπτει ότι

$$N = mg(\text{συν}\alpha - 1).$$

Επομένως, αν στην κορυφή της γέφυρας είναι  $N = 0$ , τότε οπουδήποτε αλλού (δεδομένου ότι  $\text{συν}\alpha \leq 1$ ) το  $N$  θα είναι αρνητικό ( $N < 0$ )! Οι επιβάτες θα πρέπει να φορούν τις ζώνες



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ασφαλείας προκειμένου να μη χτυπήσουν πάνω στην οροφή! Δεν υπάρχει όμως ζώνη ασφαλείας που να «δένει» το αυτοκίνητο με το δρόμο: το αυτοκίνητο θα απογειωθεί από τη γέφυρα και, έπειτα από μια θεαματική πτήση, θα καταλήξει πίσω σ' αυτήν. Το πιθανότερο αποτέλεσμα μιας τέτοιας κατάστασης έλλειψης βαρύτητας θα είναι ένα κατεστραμμένο αράξι. Με άλλα λόγια, όταν προσπαθείτε να διασχίσετε με το αυτοκίνητό σας μια κυρτή γέφυρα, κινούμενοι με ταχύτητα  $v = \sqrt{gR}$ , μπορείτε όχι μόνο να νιώσετε αφαρείς, αλλά και να τραυματιστείτε!

Υπάρχει, λοιπόν, κάποια τιμή σταθερής ταχύτητας με την οποία μπορεί να κινείται κανείς σε μια κυρτή γέφυρα ώστε να νιώσει στιγμιαία πως «ίππαται». Ας υποθέσουμε ότι η γέφυρα έχει ακτίνα  $R$  και πως καλύπτει

τόξο γωνίας  $2\alpha$  (Σχήμα 3).

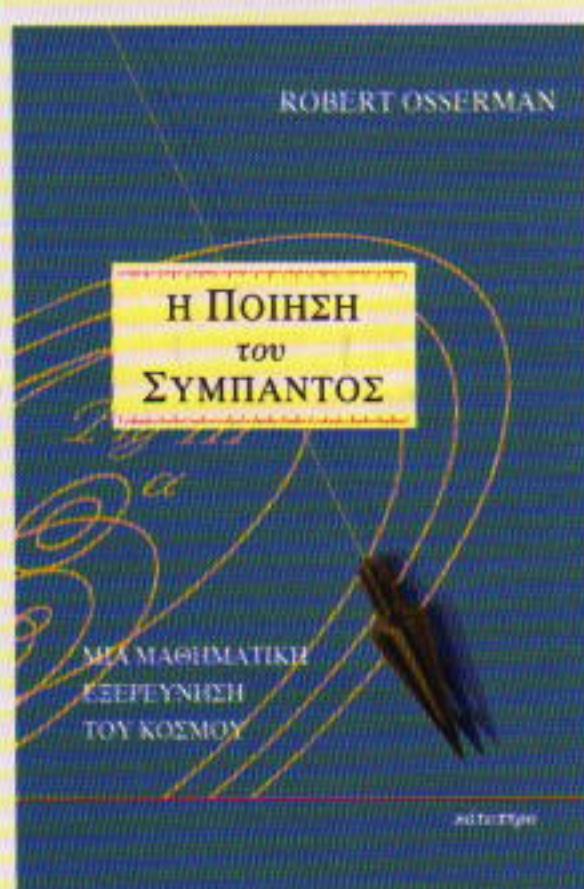
Ο τύπος για το  $N$  δείχνει πως η κάθετη δύναμη γίνεται ελάχιστη κατά την είσοδο στη γέφυρα. Ετσι, αν το αυτοκίνητο δεν «απογειωθεί» μόλις αρχίσει να ανεβαίνει τη γέφυρα, τότε δεν πρόκειται να πάθει το ίδιο ούτε στη συνέχεια. Συνεπώς,

$$mg\sin\alpha - N = m\gamma,$$

όπου  $N \geq 0$  και  $\gamma = v^2/R$ , απ' όπου και προκύπτει

$$v \leq \sqrt{gR\sin\alpha}.$$

Αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα οδήγησης ενός αυτοκινήτου πάνω σε μια κυρτή γέφυρα. Η κατάσταση έλλειψης βαρύτητας πραγματοποιείται δύο φορές: μία κατά την είσοδο και μία κατά την έξοδο από τη γέφυρα. ■



Σελ.: 224, 14 x 21 εκ., Πανόδετο, 5.500 δρχ.

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ**

Robert Osserman

Πανεπιστήμιο του Στάνφορτ

## Η ΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ

Μια μαθηματική έξερεύνηση του Κόσμου

«Το βιβλίο αποτελεί μια εξαιρετική εισαγωγή στην ομορφιά των μαθηματικών και στη σχέση τους με τον φυσικό κόσμο.»

Roger Penrose,

Καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

«Οι σαφέστατες εξηγήσεις και το πάθος του Osserman καθιστούν το βιβλίο τολμηρό ως προς τις προθέσεις και, συγχρόνως, απολύτως προσωπικό. Το συνιστώ θερμά.»

George Smoot,

Καθηγητής αστροφυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μπέρκλεϋ

«Μολονότι το φως της επιστήμης και το φως της τέχνης είναι αδιαχώριστα και ίδια, οι φορείς τους μιλούν διαφορετικές γλώσσες και μόνον οι άριστοι ανάμεσά τους κατανοούν ότι υπηρετούν την ίδια υπόθεση. Το βιβλίο του Osserman πλουτίζει την παράδοση της ενοποίησης των δύο κλάδων μιλώντας τη δική του γλώσσα με εξαιρετή σαφήνεια και προσιτότητα, και διώχνει μακριά τα «σύννεφα».»

Mark Helprin

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

# Η συμμετρία στην άλγεβρα — μέρος τρίτο

Ας κάνουμε και μερικές παραγοντοποιήσεις

Mark Saul και Titu Andreescu

**A**Σ ΕΠΙΣΤΡΕΨΟΥΜΕ ΣΤΑ ΒΑΣΙΚΑ. Έστω ότι θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το  $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ . Μπορούμε να επισημάνουμε ότι αν  $x = 1$ , η τιμή του δεδομένου πολυωνύμου είναι 0. Από το θεώρημα της διαιρετότητας έπειτα ότι το  $(x - 1)$  είναι παράγοντας του πολυωνύμου και, αν διαιρέσουμε, προκύπτει ο άλλος παράγοντάς του. Πράγματι,

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x + 1).$$

Θυμάστε το θεώρημα της διαιρετότητας;

**Θεώρημα διαιρετότητας.** Για κάθε αριθμό  $a$ , το  $(x - a)$  διαιρεί το  $P(x)$  αν και μόνο αν  $P(a) = 0$ .

**Πρόβλημα 1.** Παραγοντοποιήστε το

$$150x^2 - 77x - 73.$$

**Πρόβλημα 2.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 + 15x^2 + 15x + 1.$$

Αν η τιμή του πολυωνύμου είναι 0 όταν  $x = k$ , λέμε ότι το πολυώνυμο μηδενίζεται για  $x = k$ .

**Πρόβλημα 3.** Παραγοντοποιήστε το  $x^3 - 1$ .

**Λύση:** Το δεδομένο πολυώνυμο μηδενίζεται για  $x = 1$ . Οδηγούμαστε επομένως στην παραγοντοποίηση

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Οι αναγνώστες μπορεί ήδη να γνω-

ρίζουν αυτή την παραγοντοποίηση. Και το  $x^3 - 1$  και το  $x^3 + 1$  μπορούν να παραγοντοποιηθούν. Δεν είναι δύσκολο να θυμόραστε τη μορφή των παραγόντων αν φέρνουμε στο μιαλό μας το θεώρημα της διαιρετότητας: μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το  $x - 1$  είναι παράγοντας του  $x^3 - 1$ , και το  $x + 1$  παράγοντας του  $x^3 + 1$ .

**Πρόβλημα 4.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 - 7x^2 + 7x - 1.$$

Απάντηση:  $(x - 1)(x^2 - 6x + 1)$ .

**Πρόβλημα 5.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 - 137x^2 + 137x - 1.$$

Απάντηση:  $(x - 1)(x^2 - 136x + 1)$ .

Πρέπει να ομολογήσουμε ότι τα Προβλήματα 4 και 5 δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι το σχήμα που υποδηλώνουν.

**Πρόβλημα 6.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 - ax^2 + ax - 1.$$

**Λύση:** Για μια ακόμη φορά είναι προφανές ότι ο ένας παράγοντας του πολυωνύμου είναι ο  $x - 1$ . Ο άλλος παράγοντας προκύπτει εύκολα — για παράδειγμα, αν διαιρέσουμε. Είναι ο  $x^2 + (1 - a)x + 1$ . Καταλήγουμε επομένως στη φαινομενικά περίπλοκη, αλλά στην πραγματικότητα μάλλον εύκολη, ταυτότητα

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + ax - 1 \\ = (x - 1)(x^2 + x - ax + 1), \end{aligned}$$

την οποία μπορούμε να επαληθεύσουμε αν πολλαπλασιάσουμε. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι οι απαντήσεις στα Προβλήματα 4 και 5 έχουν πράγματι αυτή τη μορφή.

**Πρόβλημα 7.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 + ax^2 + ax + 1.$$

**Πρόβλημα 8.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 - ax^2 + 2ax - 2a^2.$$

Υπόδειξη: Τι συμβαίνει αν  $x = a$ ;

**Πρόβλημα 9.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^4 - 6x^3y + 4xy^3 + y^4.$$

**Πρόβλημα 10.** Παραγοντοποιήστε το

$$ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a).$$

**Λύση:** Ας θεωρήσουμε αρχικά την παράσταση αυτή ως πολυώνυμο του  $a$ , και τα  $b, c$  ως «σταθερές». Το πολυώνυμο μηδενίζεται όταν  $a = b$  και όταν  $a = c$ , οπότε περιέχει τους παράγοντες  $(a - b)$  και  $(a - c)$ . Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε την παράσταση ως πολυώνυμο του  $b$ . Γνωρίζουμε ήδη ότι μηδενίζεται όταν  $b = a$ , αλλά μηδενίζεται επίσης όταν  $b = c$ . Επομένως, περιέχει και τον παράγοντα  $(b - c)$ .

Συνεπώς, έχουμε την παραγοντοποιηση

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = (a-b)(a-c)(b-c)M,$$

όπου  $M$  είναι κάποιο πολυώνυμο των  $a, b, c$ . Ας φανταστούμε και πάλι αυτές τις δύο παραστάσεις (η ισότητα των οποίων έχει εξασφαλιστεί) ως πολυώνυμα του  $a$ . Το πολυώνυμο του αριστερού μέλους είναι δευτεροβάθμιο ως προς  $a$  και, συνεπώς, πρέπει το ίδιο να ισχύει για το πολυώνυμο στο δεξί μέλος. Άρα, το  $M$  δεν περιέχει θετικές δυνάμεις του  $a$ . Το ίδιο όμως ισχύει για τα  $b$  και  $c$  και, έτσι, το  $M$  είναι μια σταθερά. Μπορούμε να βρούμε την τιμή αυτής της σταθεράς — για παράδειγμα, αντικαθιστώντας τα  $a, b, c$  με συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Θα βρούμε γρήγορα ότι  $M = 1$ .

**Πρόβλημα 11.** Παραγοντοποιήστε το

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3.$$

**Πρόβλημα 12.** Παραγοντοποιήστε το

$$(a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Υπόδειξη: Τι ουμβαίνει αν  $a = -b$ ;

**Πρόβλημα 13.** Αποδείξτε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b, c, x$  ισχύει

$$a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$+ c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε το πρόβλημα ως εξίσωση του  $x$ . Ποιος είναι ο βαθμός της; Πόσες ρίζες της εξίσωσης μπορείτε να βρείτε χωρίς να κάνετε ιδιαίτερες πράξεις; Ποιο είδος εξίσωσης έχει πλήθος ρίζών μεγαλύτερο από το βαθμό της;

**Πρόβλημα 14.** Αποδείξτε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b, c, x$  ισχύει

$$\begin{aligned} & \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \\ & + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 15.** Εστω  $m$  και  $n$  δύο περιττοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{a^m + b^m + c^m} = \frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}$$

αν και μόνο αν

$$\frac{1}{a^n + b^n + c^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}.$$

Υπόδειξη: Μια δυνατή προσέγγιση είναι να κατασκευάσουμε τριτοβάθμια εξίσωση με ρίζες τα  $a^m, b^m, c^m$  και να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε μία από αυτές.

**Πρόβλημα 16.** Παραγοντοποιήστε το

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Υπόδειξη 1: Δοκιμάστε την αντικατάσταση  $y + z = -x$ .

Υπόδειξη 2: Εναλλακτικά, αν γνωρίζετε περι οριζουσών, μπορείτε να επισημάνετε ότι το δεδομένο πολυώνυμο ισούται με την οριζουσα

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

**Πρόβλημα 17.** Εστω ότι με το σύμβολο  $\overline{abc}$  συμβολίζουμε την αναπαράσταση ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα (δηλαδή είναι ο αριθμός με α στη θέση των εκατοντάδων,  $b$  στη θέση των δεκάδων και  $c$  στη θέση των μονάδων). Αποδείξτε ότι, αν οι αριθμοί  $\overline{abc}, \overline{bca}$  και  $\overline{cab}$  διαιρούνται όλοι με κάποιον ακέραιο  $n$ , τότε και ο  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  διαιρείται με τον  $n$ . (Σημείωση: η λύση που δίνουμε στηρίζεται στις οριζουσες και σχετίζεται με τη δεύτερη λύση του Προβλήματος 16.)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64



# QUANTUM

## Ένα πολύτιμο δώρο

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας... — σε όποιον αγαπά τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες.

To Quantum δεν είναι δημοσιογραφικό περιοδικό: δεν μιλά για την επιστήμη· κάνει επιστήμη.

**Αποφασίστε το τώρα.**

Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa). Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

**κάτοπτρο**

Εκδόσεις: Ιοανέων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: 3643272, fax: 3641864  
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Διατεταγμένα σύνολα

Και μερικές αξιοσημείωτες ανισότητες

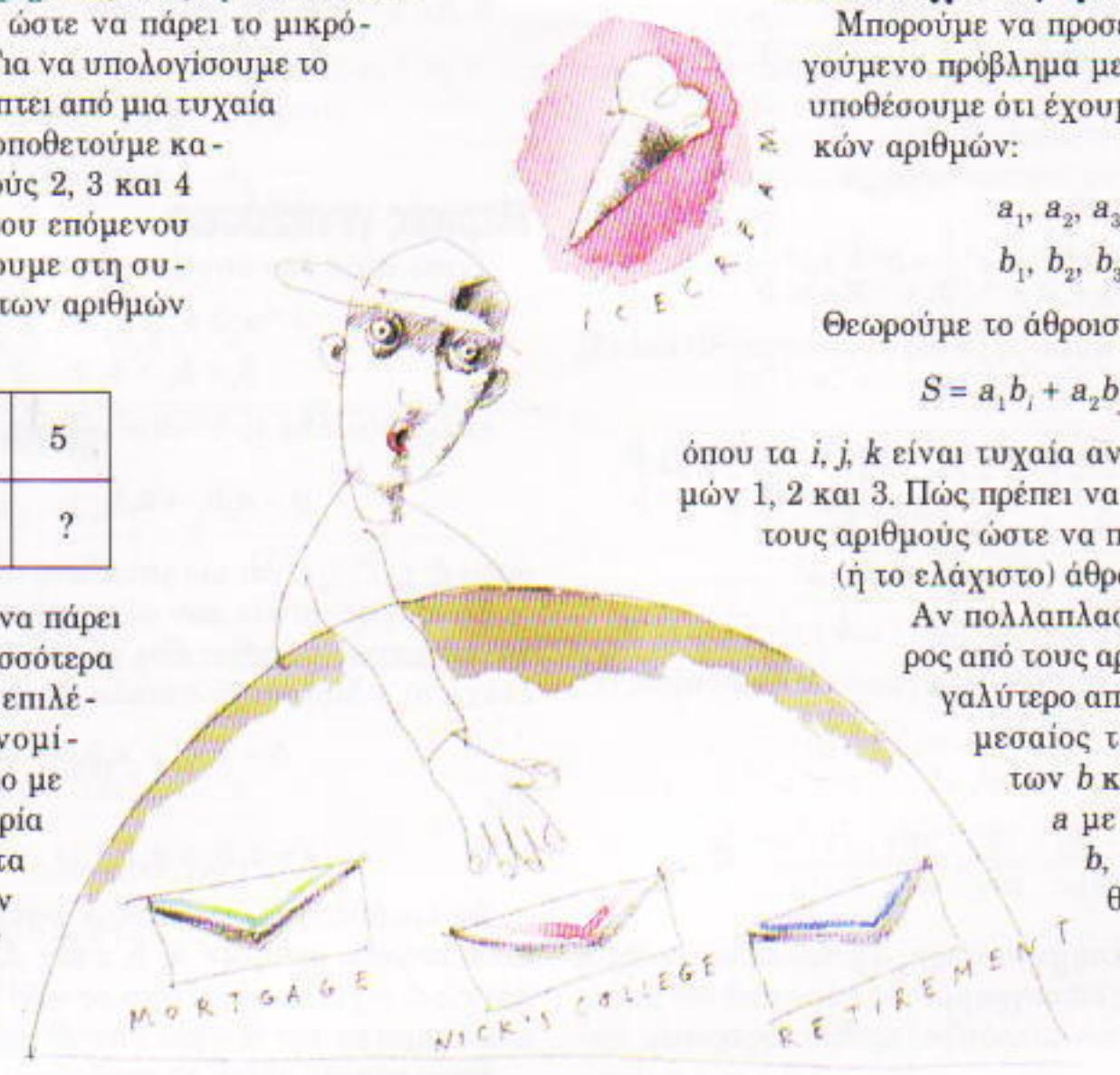
L. Pinter και I. Khegedysh

**Ο**Ι ΓΟΝΕΙΣ ΤΟΥ ΝΙΚΟΥ ΣΥΝΗΘΙΖΟΥΝ ΝΑ ΚΡΑΤΟΥΝ ΤΑ χαρτονομίσματα σε φακέλους. Μια μέρα παρουσιάσαν στον Νίκο τρεις φακέλους, ο ένας από τους οποίους περιέχει κατοστάρικα, ο δεύτερος χαρτονομίσματα των διακοσίων δραχμών και ο τρίτος πεντακοσάρικα. Ζήτησαν από τον Νίκο να πάρει δύο χαρτονομίσματα από έναν φάκελο, τρία από τον άλλο και τέσσερα από τον τελευταίο.

Πώς πρέπει να κάνει την επλογή του ο Νίκος ώστε να πάρει περισσότερα χρήματα; Πώς πρέπει να κάνει την επλογή του ώστε να πάρει το μικρότερο δυνατόν ποσό; Για να υπολογίσουμε το άθροισμα που προκύπτει από μια τυχαία επλογή φακέλων, τοποθετούμε κατά τύχη τους αριθμούς 2, 3 και 4 στην κάτω γραμμή του επόμενου πίνακα και προσθέτουμε στη συνέχεια τα γινόμενα των αριθμών στις στήλες.

1	2	5
?	?	?

Αν ο Νίκος θέλει να πάρει όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα, πρέπει να επιλέξει τέσσερα χαρτονομίσματα από το φάκελο με τα πεντακοσάρικα, τρία από το φάκελο με τα χαρτονομίσματα των διακοσίων δραχμών και δύο από το φάκελο με τα κατοστάρικα:



$$5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 28.$$

Αν θέλει να συγκεντρώσει το μικρότερο δυνατό ποσό, πρέπει να πάρει το ελάχιστο πλήθος χαρτονομισμάτων (δύο) από το φάκελο με τα πεντακοσάρικα, τρία από το φάκελο με τα χαρτονομίσματα των διακοσίων και τέσσερα από το φάκελο με τα κατοστάρικα:

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 20.$$

## Διατεταγμένες τριάδες

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το προγούμενο πρόβλημα με τον εξής τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τριάδες θετικών αριθμών:

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, a_3, \\ &b_1, b_2, b_3. \end{aligned}$$

Θεωρούμε το άθροισμα

$$S = a_1 b_i + a_2 b_j + a_3 b_k,$$

όπου τα  $i, j, k$  είναι τυχαία αναδιάταξη των αριθμών 1, 2 και 3. Πώς πρέπει να διατάξουμε αυτούς τους αριθμούς ώστε να προκύψει το μέγιστο (ή το ελάχιστο) άθροισμα  $S$ ;

Αν πολλαπλασιαστεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς  $a$  με τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς  $b$ , ο μεσαίος των  $a$  με το μεσαίο των  $b$  και ο μικρότερος των  $a$  με τον μικρότερο των  $b$ , τότε το άθροισμα  $S$  θα έχει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή (αν υπάρχουν ισοι αριθμοί μεταξύ των  $a$  ή των  $b$ , η μέγι-

στη τιμή του  $S$  θα μπορεί να προκύψει με διαφορετικούς τρόπους). Από την άλλη πλευρά, αν πολλαπλασιαστεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς  $a$  με τον μικρότερο από τους αριθμούς  $b$ , ο μεσαίος των  $a$  με τον μεσαίο των  $b$  κ.ο.κ., θα βρούμε την ελάχιστη δυνατή τιμή του  $S$ . Αυτή η μέθοδος μας επιτρέπει να λύσουμε το επόμενο πρόβλημα.

### Πρόβλημα 1.

Αποδείξτε ότι για κάθε τριάδα θετικών αριθμών  $a, b, c$  ισχύει η εξής ανισότητα:

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}. \quad (1)$$

Ας ξεκινήσουμε με την απόδειξη της πρώτης ανισότητας. Γράφουμε τις δύο τριάδες αριθμών

$$\begin{aligned} & a^2, b^2, c^2, \\ & \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Αφού οι αριθμοί  $a, b, c$  είναι θετικοί, ο μεγαλύτερος αριθμός της πρώτης τριάδας είναι γραμμένος πάνω από τον μικρότερο αριθμό της δεύτερης και ο μικρότερος της πρώτης είναι γραμμένος πάνω από τον μεγαλύτερο της δεύτερης.

Συνεπώς, το άθροισμα

$$a^2 \frac{1}{a} + b^2 \frac{1}{b} + c^2 \frac{1}{c}$$

είναι το ελάχιστο για τις δεδομένες τριάδες και, επομένως,

$$a^2 \frac{1}{a} + b^2 \frac{1}{b} + c^2 \frac{1}{c} \leq a^2 \frac{1}{b} + b^2 \frac{1}{c} + c^2 \frac{1}{a}, \quad (2)$$

και όμοια

$$a^2 \frac{1}{a} + b^2 \frac{1}{b} + c^2 \frac{1}{c} \leq a^2 \frac{1}{c} + b^2 \frac{1}{a} + c^2 \frac{1}{b}. \quad (3)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες (2) και (3), προκύπτει

$$\begin{aligned} 2(a+b+c) &\leq a^2 \frac{1}{b} + b^2 \frac{1}{c} + c^2 \frac{1}{a} + a^2 \frac{1}{c} + b^2 \frac{1}{a} + c^2 \frac{1}{b} \\ &= \frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b}. \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη από τις ανισότητες (1), θεωρούμε τις εξής τριάδες:

$$\begin{aligned} & a^3, b^3, c^3, \\ & \frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}. \end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος (και αντίστοιχα, ο μικρότερος) αριθμός της δεύτερης τριάδας είναι γραμμένος κάτω από τον μεγαλύτερο (αντίστοιχα, τον μικρότερο) αριθμό της πρώτης τριάδας. Επομένως,

$$a^3 \frac{a}{abc} + b^3 \frac{b}{abc} + c^3 \frac{c}{abc} \geq$$

$$a^3 \frac{b}{abc} + b^3 \frac{c}{abc} + c^3 \frac{a}{abc} = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}, \quad (4)$$

$$a^3 \frac{a}{abc} + b^3 \frac{b}{abc} + c^3 \frac{c}{abc} \geq$$

$$a^3 \frac{c}{abc} + b^3 \frac{a}{abc} + c^3 \frac{b}{abc} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}. \quad (5)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες (4) και (5), προκύπτει

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \right) &\geq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \\ &= \frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b}. \end{aligned}$$

### Ασκήσεις.

Αποδείξτε τις επόμενες ανισότητες:

1.  $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ .
2.  $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$ .

$$3. \frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geq 6abc$$

(όπου  $a > 0, b > 0, c > 0$ ).

4. Αν  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$  και  $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ , τότε  $3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$ .
5. Αν  $a > 0, b > 0, c > 0$ , τότε

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

### Μερικές γενικεύσεις

Έστω τώρα δύο σύνολα  $n$  αριθμών:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n,$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n. \quad (A)$$

Θεωρούμε όλα τα δυνατά άθροισμα της μορφής

$$\sigma = a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n},$$

όπου  $i_1, i_2, \dots, i_n$  είναι μια μετάθεση των αριθμών  $1, 2, \dots, n$ .

Το πλήθος αυτών των άθροισμάτων είναι πεπερασμένο, επομένως υπάρχει ένα μέγιστο άθροισμα  $S$  και ένα ελάχιστο  $s$ . Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

και

$$s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$

Ας αποδείξουμε ότι αυτός ο ισχυρισμός αληθεύει. Για κάθε τετράδα αριθμών  $a, b, c$  και  $d$ , τέτοιων ώστε  $a \geq b$  και  $c \geq d$ , ισχύει η ανισότητα  $ac + bd \geq ad + bc$  (αφού είναι ισοδύναμη με την προφανή ανισότητα  $(a-b)(c-d) \geq 0$ ).

Είναι εύκολο πλέον να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας.

Πράγματι, αν κάποιο άθροισμα  $\sigma$  περιέχει τους όρους  $a_i b_q$  και  $a_k b_p$  για τους οποίους  $e < k$  και  $q > p$  (δηλαδή,  $b_p \geq b_q$ ), τότε, αν εναλλάξουμε τους αριθμούς  $b_p$  και  $b_q$ , δημιουργούμε ένα άθροισμα  $\sigma'$  που περιέχει τους όρους  $a_i b_p$  και  $a_k b_q$  και είναι μεγαλύτερο ή ίσο του  $\sigma$ .

Αν εκτελέσουμε μια ακολουθία τέτοιων μεταθέσεων προκύπτει το άθροισμα  $S$ , τέτοιο ώστε  $S \geq \sigma$ . Παρόμοια, αν  $b_q \geq b_p$  εναλλάσσοντας αυτούς τους αριθμούς, δημιουργούμε ένα άθροισμα μικρότερο ή ίσο του  $\sigma$ . Το άθροισμα  $s$  προκύπτει ως αποτέλεσμα μιας ακολουθίας τέτοιων μεταθέσεων και επομένως  $s \leq \sigma$ .

Άρα, για κάθε άθροισμα  $\sigma$ , έχουμε

$$s \leq \sigma \leq S, \quad (\text{B})$$

με την ισότητα στη (B) να ισχύει μόνο αν ένα από τα σύνολα  $a_1, \dots, a_n$  ή  $b_1, \dots, b_n$  αποτελείται από ίσους μεταξύ τους αριθμούς.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να διατυπώσουμε μια γενική μέθοδο απόδειξης ανισοτήτων: Αν τα σύνολα των αριθμών  $a_1, \dots, a_n$  και  $b_1, \dots, b_n$  είναι διατεταγμένα με τον ίδιο τρόπο — δηλαδή, αν η ανισότητα  $a_k \geq a_j$  συνεπάγεται την  $b_k \geq b_j$ , τότε

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_{i_1} b_{i_1} + a_{i_2} b_{i_2} + \dots + a_{i_n} b_{i_n},$$

όπου  $i_1, i_2, \dots, i_n$  είναι μια τυχαία μετάθεση των αριθμών  $1, 2, \dots, n$ .

## Μερικές αξιοσημείωτες ανισότητες

1. Ανισότητα του Cauchy.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = G.$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ . Θεωρούμε τα επόμενα σύνολα αριθμών:

$$\frac{a_1}{G}, \frac{a_1 a_2}{G^2}, \dots, \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{G^n} = 1,$$

$$\frac{G}{a_1}, \frac{G^2}{a_1 a_2}, \dots, \frac{G^n}{a_1 a_2 \dots a_n} = 1.$$

Τα δύο αυτά σύνολα είναι γραμμένα με αντίθετη διάταξη μεγέθους. Επομένως,

$$\begin{aligned} n &= \frac{a_1}{G} \cdot \frac{G}{a_1} + \frac{a_1 a_2}{G^2} \cdot \frac{G^2}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_1 \dots a_n}{G^n} \cdot \frac{G^n}{a_1 \dots a_n} \\ &\leq \frac{a_1}{G} \cdot 1 + \frac{a_1 a_2}{G^2} \cdot \frac{G}{a_1} + \dots + \frac{a_1 \dots a_n}{G^n} \cdot \frac{G^{n-1}}{a_1 \dots a_{n-1}} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{G}. \end{aligned}$$

2. Ανισότητα του Chebyshev. Αν

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$$

και

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0,$$

τότε

$$\begin{aligned} n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) &\geq \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n). \end{aligned}$$

Απόδειξη: Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις  $n$  ανισότητες

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1, \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1}, \end{aligned}$$

προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Παρατήρηση: Παρόμοια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  και  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , τότε

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

3. Ανισότητα του μέσου-τετραγώνου:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ . Αν χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Chebyshev στην ειδική περίπτωση που  $a_i = b_p$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ , προκύπτει

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2,$$

απ' όπου μπορούμε εύκολα να συναγάγουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

Ασκήσεις.

6. Αν  $a_1, a_2, \dots, a_n$  είναι τα μήκη των πλευρών ενός κυρτού πολυγώνου (όπου  $n$  είναι το πλήθος των πλευρών του και  $n \geq 3$ ), τότε

$$\frac{a_1}{p-2a_1} + \frac{a_2}{p-2a_2} + \dots + \frac{a_n}{p-2a_n} \geq \frac{n}{n-2},$$

όπου  $p = a_1 + \dots + a_n$  είναι η περίμετρος του πολυγώνου.

7. Αν  $a_1, a_2, \dots, a_n$  είναι αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός, τότε

$$\begin{aligned} n(a_1^{k+m} + a_2^{k+m} + \dots + a_n^{k+m}) &\geq \\ (a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k)(a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m). \end{aligned}$$

8. Αν τα  $a, b, c$  είναι θετικά, τότε

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

9. (Γενίκευση του Προβλήματος 1.) Αν  $a_1, a_2, \dots, a_n$  είναι θετικοί, τότε

$$\begin{aligned} (n-1)(a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m) &\leq \\ \frac{a_2^k + a_3^k + \dots + a_n^k}{a_1^{k-m}} + \frac{a_1^k + a_3^k + \dots + a_n^k}{a_2^{k-m}} + \dots \\ + \frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k}{a_n^{k-m}}, \end{aligned}$$

όπου  $k > m > 0$ .

# Πειράματα με σαπουνόφουσκες

*Kai γυαλιά ηλίου από υμένια σαπουνοδιαλύματος*

P. Kanaev

**M**ΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΕΚΤΕΛΕΣΕΤΕ ΑΡΧΕΤΑ πειράματα με λεπτά υμένια και φυσαλίδες από σαπουνάδα στο σπίτι, χωρίς να απαιτείται ιδιαίτερα πολύπλοκος εξοπλισμός. Ωστόσο, θα χρειαστεί να πλύνετε με προσοχή τα γυάλινα σκεύη που θα χρησιμοποιήσετε και να προετοιμάστε με δεξιοτεχνία ένα κατάλληλο σαπουνοδιάλυμα. Το καλύτερο διάλυμα φτιάχνεται από κοινό σαμπουάν διαλυμένο σε νερό, στο οποίο έχουμε προσθέσει μικρές ποσότητες καθαρής γλυκερίνης και πυκνού διαλύματος υδροξειδίου του αμμωνίου.

Το άδειο πλαστικό περίβλημα ενός στυλού διαρκείας (από το οποίο έχουμε αφαιρέσει τη «μύτη») μπορεί κάλλιστα να παίξει το ρόλο του λεπτού σωλήνα με τον οποίο θα «φυσάμε» τις σαπουνόφουσκες. Είναι καλύτερα να σχηματίζουμε μικρές σαπουνόφουσκες. Προσπαθήστε να μην αφήνετε σταγόνες διαλύματος στη βάση της σαπουνόφουσκας. Μπορείτε να τις ελευθερώσετε με ευκολία από το σωλήνα με μια γρήγορη κίνηση του χεριού προς τα πάνω.

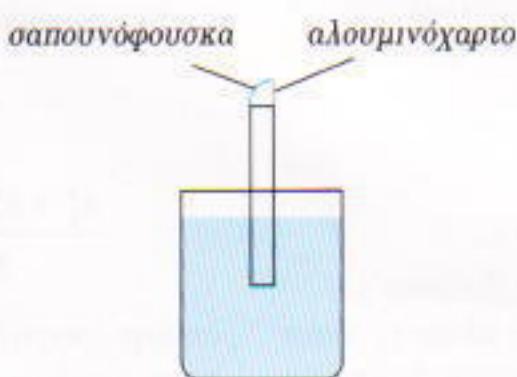
Μόλις ετοιμάσετε όλα τα απαραίτητα, και αφού εξασκηθείτε στο να φτιάχνετε σαπουνόφουσκες, ξεκινήστε την εκτέλεση των πειραμάτων που περιγράφονται παρακάτω:

1. Φυσήξτε μια σαπουνόφουσκα, ελευθερώστε την από το άκρο του πλαστικού σωλήνα και αμέσως κινηθείτε γρήγορα —μπρος-πίσω στην αρχή και αριστερά-δεξιά στη συνέχεια. Η σα-

πουνόφουσκα θα σας ακολουθεί!

Η συμπεριφορά της φυσαλίδας μπορεί να ερμηνευθεί μέσω της δημιουργίας ζωνών χαμηλής πίεσης κατά τη γρήγορη κίνησή σας —αυτές είναι οι περιοχές προς τις οποίες κατευθύνεται η σαπουνόφουσκα.

2. Χρησιμοποιήστε έναν φαρδύ γυάλινο σωλήνα με διάμετρο τουλάχιστον 2 εκατοστών. Πάρτε ένα κομμάτι αλουμινόχαρτο και κόψτε το σε κύκλο διαμέτρου λίγο μεγαλύτερης από τη διάμετρο του γυάλινου σωλήνα. Βρέξτε το αλουμινόχαρτο με το σαπουνοδιάλυμα και πέστε το πάνω στην κορυφή του σωλήνα (σαν σκέπασμα). Βυθίστε την άλλη άκρη του σωλήνα σε ένα δοχείο που έχετε γεμίσει με νερό. Πολύ σύντομα θα δείτε το σκέπασμα του αλουμινόχαρτου να ανασηκώνεται ελαφρά —τούτο οφείλεται στη σαπουνόφουσκα που δημιούργησε κάτω από το σκέπασμα ο συμπεσμένος αέρα που είχε εγκλωβιστεί μέσα στο σωλήνα. Όσο πο βαθιά βυθίσετε το σωλήνα μέσα στο νερό, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η γωνία κλίσης που θα πάρει



Σχήμα 1

το αλουμινόχαρτο. Για ορισμένο βάθος μέσα στο νερό, η εν λόγω γωνία μπορεί να γίνει ακόμη και  $90^\circ$  (Σχήμα 1).

3. Τοποθετήστε μια σαπουνόφουσκα με προσοχή πάνω σε μια επίπεδη, υγρή επιφάνεια, όπως π.χ. νερού, χαρτιού ή γυαλιού. Επειδή η επιφάνεια είναι υγρή, το κάτω μέρος της φυσαλίδας θα απλωθεί πάνω στην επιφάνεια και έτσι το σχήμα της θα καταλήξει ημισφαιρικό.

Τώρα, φτιάξτε ένα λεπτό υμένιο σαπουνοδιαλύματος σε ένα συρμάτινο δακτύλιο. Φτιάξτε επίσης μια σαπουνόφουσκα της ίδιας περίπου διαμέτρου με το δακτύλιο και τοποθετήστε τη με προσοχή πάνω στο υμένιο. Τόσο το υμένιο όσο και η σαπουνόφουσκα θα αλλάξουν σχήμα, δημιουργώντας τελικά έναν αμφίκυρτο φακό συμμετρικό ως προς το επίπεδο του συρμάτινου δακτυλίου.

4. Βυθίστε το σκελετό ενός ζευγαριού γυαλιών (από τα οποία έχετε αφαιρέσει τα κρύσταλλα) μέσα στο σαπουνοδιάλυμα —ο σκελετός θα καλυφθεί από δύο επίπεδα υμένια. Αν κοιτάξετε μέσα από αυτά τα «σαπουνόγυαλα» θα δείτε τα αντικείμενα όπως είναι στην πραγματικότητα —ούτε μεγεθυμένα, ούτε αμβλυμένα. Η ορατότητα είναι επίσης φυσιολογική.

Τροποποιήστε τώρα το πείραμα. Κρατώντας αυτή τη φορά τα γυαλιά οριζόντια, βυθίστε τα στο σαπουνοδιάλυμα —θα αποκτήσετε ένα ζευγάρι γυαλιά με αμφίκυρτους φακούς. Θα διαπιστώσετε, προς έκπληξή σας, ότι κοι-

τώντας τα αντικείμενα μέσα από τα «σαπουνόγυαλά» σας τα αντικείμενα δεν παρουσιάζουν και πάλι καμία παραμόρφωση. Γιατί;

Ανάμεσα στα λεπτά καμπύλα υμένια, όπως και σε αυτούς τους αμφίκυρτους φακούς, υπάρχει αέρας. Οι ακτίνες φωτός που περνούν μέσα από τέτοιους φακούς υφίστανται πολύ μικρή διάθλαση.

5. Μπορείτε να σχηματίσετε ένα λεπτό υμένιο σαπουνοδιαλύματος στο εσωτερικό δοκιμαστικού σωλήνα; Και μάλιστα όχι στην κορυφή, αλλά βαθιά στο εσωτερικό του; Ιδού δύο τρόποι.

(α) Γεμίστε μέρος του δοκιμαστικού σωλήνα με νερό. Πάρτε μια λωρίδα χαρτί, βρέξτε τη στο σαπουνοδιάλυμα, και στη συνέχεια σύρτε την πάνω από το χείλος του σωλήνα —το άνοιγμα θα καλυφθεί από ένα λεπτό υμένιο. Για να το βυθίσετε στο εσωτερικό του δοκιμαστικού σωλήνα, γύρετε προσεκτικά το σωλήνα και αδειάστε ορισμένη ποσότητα νερού. Το βάθος στο οποίο θα φτάσει το υμένιο εξαρτάται από την ποσότητα του νερού που θα αποφασίσετε να αδειάσετε.

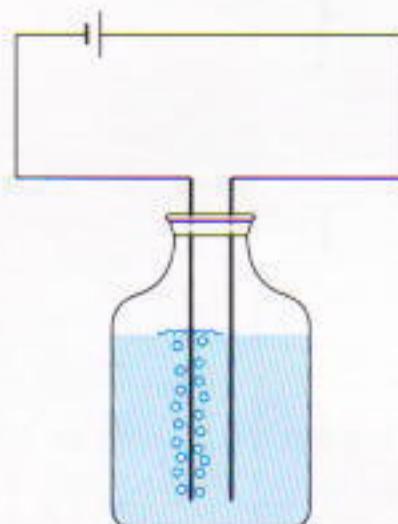
(β) Ρίξτε μικρή ποσότητα νερού μέσα στο δοκιμαστικό σωλήνα και, χρησιμοποιώντας ένα αναμμένο κερί, θερμάνετε τον μέχρι το νερό να αρχίσει να βράζει. Απομακρύνετε το δοκιμαστικό σωλήνα από τη φλόγα και καλύψτε το άνοιγμά του με ένα υμένιο σαπουνιού. Μετά από λίγο, θα πατήσετε πως το υμένιο κατεβαίνει σταδιακά προς το εσωτερικό του σωλήνα.

Καθώς ο σωλήνας αρχίζει να κρύωνει, οι υδρατμοί κάτω από το υμένιο συμπυκνώνονται, προκαλώντας χαμηλή πίεση στο εσωτερικό του σωλήνα, με αποτέλεσμα το υμένιο να αρχίσει να κινείται. Προκειμένου να επιταχύνετε τη συγκεκριμένη διαδικασία, μπορείτε να ψύξετε γρηγορότερα το σωλήνα, χρησιμοποιώντας τρεχούμενο νερό.

6. Σχηματίστε μια σαπουνόφουσκα στο άκρο ενός λεπτού σωλήνα. Χρησιμοποιώντας πλαστελίνη προσαρτήστε το ελεύθερο άκρο του σωλήνα σε ένα οριζόντιο υποστήριγμα, στερεωμένο σε απόσταση περίπου 20 εκατοστών πάνω από το τραπέζι. Χρησιμοποιώντας μια σύριγγα (ή έναν άλλο λεπτό σωλήνα) μπορείτε να εισαγάγετε ή να α-

ντλήσετε αέρα από τη φυσαλίδα. Θα παραμορφωθεί το σχήμα της; Ασφαλώς όχι. Αυτό προκύπτει άμεσα από το νόμο του Pascal.

7. Βρείτε ένα γυάλινο δοχείο ύψους περίπου 6 εκατοστών και γεμίστε το κατά τα δύο τρίτα με το σαπουνοδιάλυμα. Κατασκευάστε δύο ηλεκτρόδια μήκους περίπου 8 εκατοστών, χρησι-

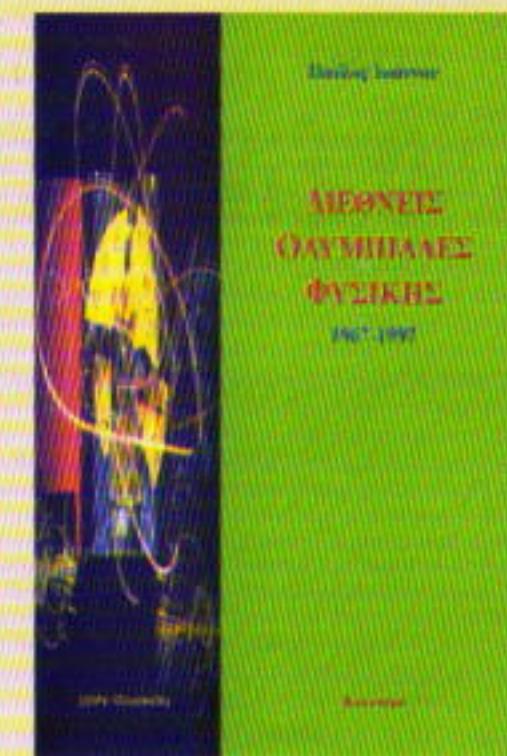


Σχήμα 2

μοποιώντας χάλκινο σύρμα και περάστε τα μέσα από ένα ελαστικό πώμα ή φελλό. Στηρίξτε το πώμα στα χείλη του δοχείου (Σχήμα 2). Οι κάτω άκρες των δύο ηλεκτρόδιων πρέπει να βρίσκονται κοντά στον πυθμένα του δοχείου, αλλά να μην έρχονται σε επαφή μαζί του. Όταν συνδέσουμε τα ηλεκτρόδια με μια κοινή μπαταρία ηλεκτρικού φακού, μέσα στο διάλυμα, στην κάθοδο (το αρνητικό ηλεκτρόδιο), αρχίζουν να εμφανίζονται μικρές φυσαλίδες αερίου. Οι φυσαλίδες ανέρχονται και σχηματίζουν ένα σίδος αφρού στην επιφάνεια του διαλύματος. Για ποιο αέριο πρόκειται; Αν αντί για το σαπουνοδιάλυμα ρίξουμε στο δοχείο οινόπνευμα, γλυκερίνη ή φωτιστικό πετρέλαιο, θα δημιουργηθούν φυσαλίδες;

Προκειμένου να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα, χρειάζεται απλώς να θυμηθούμε το φαινόμενο της ηλεκτρόλυσης του νερού. Το αέριο που απελευθερώνεται στην κάθοδο είναι το υδρογόνο. Αν χρησιμοποιήσουμε οινόπνευμα, γλυκερίνη ή φωτιστικό πετρέλαιο δεν θα εμφανιστούν φυσαλίδες γιατί τα προϊόντα της ηλεκτρόλυσης αυτών των ουσιών είναι τελείως διαφορετικά.

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Παύλος Ιωάννου

### ΔΙΕΘΝΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΦΥΣΙΚΗΣ (1967-1997)

Το παρόν σύγγραμμα είναι η πρώτη παγκοσμίως προσπάθεια για συνολική παρουσίαση των θεμάτων όλων των Διεθνών Ολυμπιάδων Φυσικής που διοργανώθηκαν μέχρι σήμερα. Τα ζητήματα των 28 συνολικά διαγωνισμών παρουσιάζονται αναλυτικά και συνοδεύονται από τις λύσεις τους με προτάσεις και υποδείξεις.

Το βιβλίο απευθύνεται αφ' ενός στους μαθητές των τελευταίων τάξεων του λυκείου με ενδιαφέρον για τις θετικές επιστήμες και στους φοιτητές των θετικών επιστημών και των πολυτεχνικών σχολών αφ' ετέρου στους καθηγητές τους, οι οποίοι θα μπορέσουν να αντλήσουν πολλές ιδέες και να αξιοποιήσουν προτάσεις από τα θέματα που περιλαμβάνει.

**Στη σειρά «Ολυμπιάδες» κυκλοφορούν ήδη τα βιβλία:**

- Βασίλειφ-Γεγκόροφ. *Πανενωστικές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Σ.Δ. (1961-1991)*, τόμ. 1 και 2
- Μ. Κλάρκιν. *Μαθηματικές Ολυμπιάδες των Η.Π.Α. (1972-1986)*

**Εκδόσεις Κάτοπτρο**  
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου  
Πειραιάς Ζάγκου 5, Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Ποιο είναι το λάθος;

Ανακαλύπτοντας την αλήθεια

I.F. Sharygin

**Π**ΟΛΟΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ, ΑΚΟΜΗ ΚΑΙ κάποιοι που θεωρούν τους εαυτούς τους διανοούμενους, έχουν μια συγκεχυμένη γνώση των μαθηματικών και αισθάνονται αμήχανα μπροστά και στις απλούστερες μαθηματικές προτάσεις. Για παράδειγμα, ιδού ένα πρόβλημα που αφορά ένα θέμα που όλοι έχουν διδαχτεί στο σχολείο: τα ποσοστά.

**Πρόβλημα 1.** Ένας καλλιεργητής συγκέντρωσε 10 τόνους καρπούζια, τα φόρτωσε σ' ένα πλοίο και τα έστειλε στην πλησιέστερη πόλη. Όπως είναι γνωστό, ένα καρπούζι αποτελείται σχεδόν αποκλειστικά από νερό. Όταν έφυγε το φορτίο, το περιεχόμενο των καρπουζιών αποτελείτο 99% κατά βάρος από νερό. Στη διάρκεια της διαδρομής τα καρπούζια έχασαν, λόγω εξάτμισης, λίγο από το περιεχόμενό τους· έτοι αυτό μειώθηκε κατά 1% (έπεισε στο 98%). Πόσο ζύγιζαν τα καρπούζια όταν έφτασαν στην πόλη;

Πολλοί δεν πιστεύουν την απάντηση, ακόμη και αν την ανακαλύψουν οι ίδιοι. Προτείνουμε στους αναγνώστες να λύσουν το πρόβλημα μόνοι τους (και αν δεν το καταφέρουν, τότε να ανατρέξουν στις δικές μας λύσεις).

Οι άνθρωποι είναι συχνά πρόθυμοι να αποδεχτούν και τον πλέον ανόητο συλλογισμό, ειδικά όταν παρουσιάστε με πειστικό τρόπο. Ας δούμε, για παράδειγμα, το εξής παλιό πρόβλημα.

**Πρόβλημα 2.** Ένας συνταξιούχος στρατηγός αποφάσισε να πουλήσει τις

παλιές του μπότες. Έστειλε λοιπόν τον υπηρέτη του στην αγορά, λέγοντάς του να τις πουλήσει 15 δολάρια. Ο υπηρέτης συνάντησε στην αγορά δύο κουτσούς βετεράνους στρατιώτες και τους πούλησε από μία μπότα, εισπράττοντας 7,5 δολάρια από τον καθένα. Όταν έμαθε ο στρατηγός την ιστορία, είπε στον υπηρέτη του ότι οι βετεράνοι έπρεπε να πληρώσουν λιγότερα χρήματα. Του έδωσε λοιπόν 5 δολάρια με την εντολή να τα επιστρέψει στους αγοραστές. Ο υπηρέτης πηγαίνοντας στην αγορά σταμάτησε για ένα ποτό και ξόδεψε τα 3 δολάρια. Εποιητικά, επέστρεψε τελικά σε κάθε βετεράνο από 1 δολάριο. Ας μετρήσουμε τώρα τα χρήματα: κάθε βετεράνος πλήρωσε 6,5 δολάρια. Αν πολλαπλασιάσουμε τα 6,5 δολάρια επί 2 βρίσκουμε 13 δολάρια. Προσθέτουμε και τα 3 δολάρια που ξόδεψε ο υπηρέτης στην αγορά:  $13 + 3 = 16$  δολάρια. Που βρέθηκε, λοιπόν, το επιπλέον δολάριο;

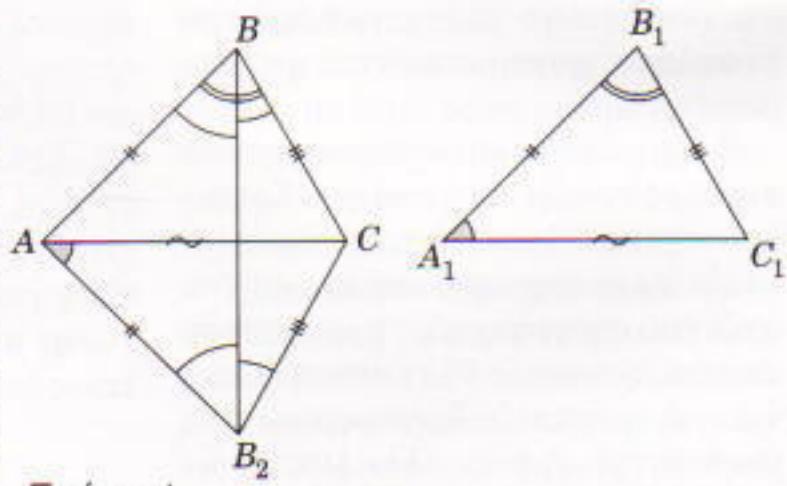
(Αυτό το είδος συλλογισμού συναντάμε συχνά, για παράδειγμα, στις υποσχέσεις πολλών πολιτικών.)

Το παραπάνω παράδειγμα είναι μάλλον απλό, ωστόσο επδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν πολλά μαθηματικά παράδοξα. Ο αναγνώστης καθοδηγείται να πιστέψει κάποιον εύλογο αλλά λανθασμένο συλλογισμό, ο οποίος καταλήγει σε μια πρόταση που αντιφέσκει με κάποια προφανή ή πασίγνωστη μαθη-

ματική αλήθεια. (Μερικές φορές, το λάθος είναι πολύ μικρό και δύσκολο στον εντοπισμό του.) Τέτοια είναι η περίπτωση του επόμενου γεωμετρικού «θεωρήματος».

**Πρόβλημα 3.** Το παρακάτω «θεωρήμα» μας δίνει ένα πρόσθετο κριτήριο ισότητας τριγώνων. Έστω τα τρίγωνα  $ABC$  και  $A_1B_1C_1$ . Αν ισχύουν οι ισότητες  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  και  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ , τότε τα τρίγωνα  $ABC$  και  $A_1B_1C_1$  είναι ίσα.

«Απόδειξη». Κατασκευάζουμε το τρίγωνο  $AB_2C$  όπως στο Σχήμα 1. Σε αυτό το τρίγωνο,  $\angle CAB_2 = \angle C_1A_1B_1$  και  $AB_2 = A_1B_1$ . Τα τρίγωνα  $A_1B_1C_1$  και  $AB_2C$  είναι ίσα διότι έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες (αφού μας δίδεται ότι  $AC = A_1C_1$ ). Συνεπώς,  $\angle ABC = \angle AB_2C$  και  $AB = AB_2$ . Φέρουμε τώρα το τμήμα  $BB_2$ . Το τρίγωνο  $BAB_2$  είναι ισοσκελές. Επομένως,  $\angle BAB_2 = \angle AB_2B$ . Παρατηρούμε επίσης ότι  $\angle CBB_2 = \angle CB_2B$ . Επομένως, το τρίγωνο  $CBB_2$  είναι επίσης ισοσκελές, και  $CB = CB_2$ . Τέλος συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο  $ACB_2$  εί-



Σχήμα 1



ναι ίσο με το τρίγωνο  $ABC$  διότι έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες: επομένως, τα τρίγωνα  $ABC$  και  $A_1B_1C_1$  είναι επίσης ίσα.

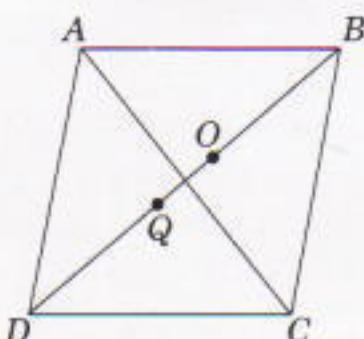
Αποδείχτηκε το «θεώρημα»;

Δεν σας ζητάμε να απορρίψετε το συμπέρασμα του «θεωρήματος» —εύκολα διαπιστώνουμε ότι δεν είναι σωστό. Πού όμως βρίσκεται το σφάλμα;

Δεν είναι πάντοτε εύκολο να καταλάβουμε αν είναι σωστή ή όχι μια μαθηματική πρόταση. Η ικανότητα εντοπισμού ενός σφάλματος σε έναν συλλογισμό αποτελεί μια από τις σημαντικότερες ικανότητες ενός επαγγελματία μαθηματικού. Η ιστορία των μαθηματικών είναι γεμάτη με παραδείγματα ανακάλυψης σφαλμάτων σε αποδείξεις που εθεωρούντο σωστές επί δεκαετίες.

Θα εξετάσουμε μερικά συνθετότερα παραδείγματα. Καθένα από τα επόμενα προβλήματα συνοδεύεται από μια «λύση». Σας ζητάμε να βρείτε το σφάλμα που περιέχουν.

**Πρόβλημα 4.** Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο  $ABCD$  στο οποίο  $\angle ABD = 40^\circ$ . Τα κέντρα των περιγεγραμμένων στα τρίγωνα  $ABC$  και  $CAD$  κύκλων ανήκουν στην  $BD$ . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το  $ABCD$ ;



Σχήμα 2

«Λύση». Έστω  $O$  και  $Q$  τα κέντρα των περιγεγραμμένων στα τρίγωνα  $ABC$  και  $CAD$  κύκλων (Σχήμα 2). Οι κάθετες που φέρουμε από τα κέντρα αυτά επί την  $AC$  τη διχοτομούν και, επομένως, η ευθεία  $OQ$  είναι κάθετη στη διαγώνιο  $AC$ . Επειτα ότι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι κάθετες μεταξύ τους. Άρα είναι ρόμβος.

Σας άρεσε η λύση;

Μερικές φορές το τέχνασμα βρίσκεται στη διατύπωση και όχι στη λύση του προβλήματος.

**Πρόβλημα 5.** Οι αριθμοί  $p$  και  $q$  -

κανοποιούν την εξίσωση  $x^2 + px + q = 0$ . Βρείτε τα  $p$  και  $q$ .

«Λύση». Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, καταλήγουμε στο επόμενο σύστημα:

$$\begin{cases} p+q=-p \\ pq=q \end{cases}$$

Αν λύσουμε το σύστημα, καταλήγουμε σε δύο ζεύγη:

$$p=q=0,$$

και

$$p=1, q=-2.$$

Έχετε καρία αμφιβολία για τη λύση μας;

**Πρόβλημα 6.** Λύστε την εξίσωση

$$\epsilon\phi(x+\pi/4)=3\sigma\phi x-1.$$

«Λύση». Μετασχηματίζουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης χρησιμοποιώντας τον τύπο για την εφαπτόμενη του αθροισματος και εισάγουμε μια νέα μεταβλητή  $y$ , ιση με  $\epsilon\phi x$ . Βρίσκουμε

$$\frac{y+1}{1-y} = \frac{3}{y} - 1.$$

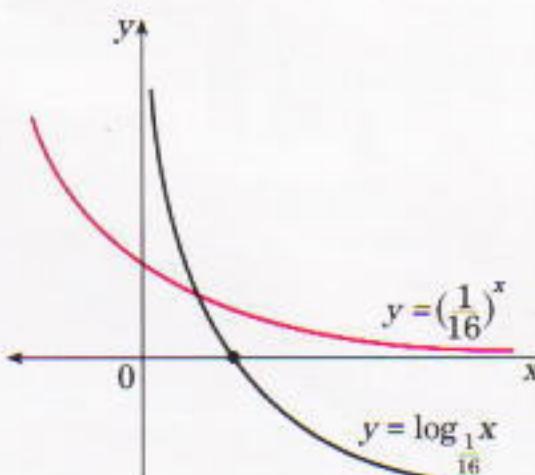
Καταλήγουμε στην  $y = 3/5$  και, επομένως,

$$x = \text{τοξ}\epsilon\phi(3/5) + \pi k.$$

Αυτό ήταν όλο;

**Πρόβλημα 7.** Ποιο είναι το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $\log_{1/16} x = (1/16)^x$ ;

«Λύση». Οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στο αριστερό και το δεξί μέ-



Σχήμα 3

λος της εξίσωσης είναι αντίστροφες

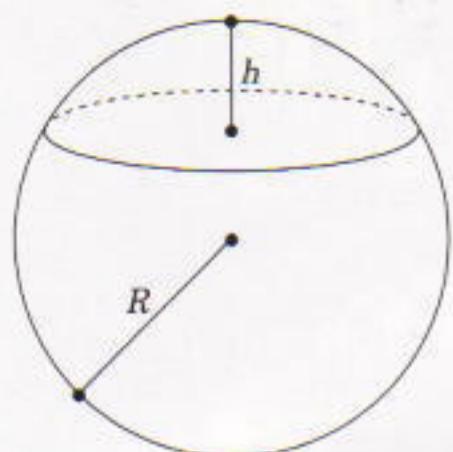
Αν σχεδιάσουμε τα γραφήματά τους, «βλέπουμε» ότι τέμνονται σε ένα μόνο σημείο το οποίο ανήκει στη διχοτόμη του πρώτου τεταρτημορίου. Επομένως, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση. Καμιά αντίρρηση;

Τα δύο επόμενα προβλήματα βρίσκονται κάπως έξω από το αντικείμενο του άρθρου μας. Η κατάσταση που περιγράφουν μοιάζει αδύνατη, και αυτό είναι που ελκύει την προσοχή μας.

**Πρόβλημα 8.** Σχεδιάζουμε την τομή ενός ορθού κυκλικού κώνου με μέγιστο δυνατό εμβαδόν η οποία διέρχεται από την κορυφή του κώνου. Αν υποθέσουμε ότι το εμβαδόν της είναι διπλάσιο από το εμβαδόν της αξονικής τομής, να βρεθεί η γωνία της αξονικής τομής.

Οι συνθήκες του προβλήματος μοιάζουν αδύνατες, αφού η αξονική τομή του κώνου έχει το μέγιστο εμβαδόν.

**Πρόβλημα 9.** Το κέντρο μιας σφαίρας ανήκει σε μιαν άλλη σφαίρα. Γνωρίζουμε ότι το τμήμα της δεύτερης σφαίρας —αυτής που περιέχεται στην πρώτη— έχει εμβαδόν πέντε φορές μικρότερο από το εμβαδόν της επιφά-

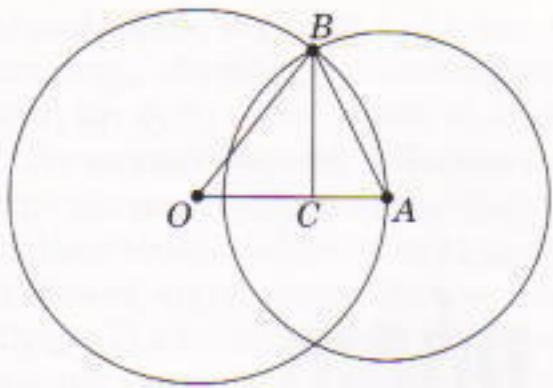


Σχήμα 4

νειας της πρώτης σφαίρας. Βρείτε το λόγο των ακτίνων τους.

Στη λύση του προβλήματος θα χρειαστούμε τον τύπο του εμβαδού ενός σφαιρικού τμήματος:  $S = 2\pi hR$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα της σφαίρας και  $h$  το ύψος του τμήματος.

«Λύση». Έστω  $r$  και  $R$  οι ακτίνες της πρώτης και της δεύτερης σφαίρας, αντίστοιχα. Σχεδιάζουμε μια επίπεδη τομή που διέρχεται από τα κέντρα των δύο σφαιρών (Σχήμα 5). Έχουμε  $OA = OB = R$  και  $AB = r$ . Φέρουμε την κάθετη  $BC$  από το  $B$  στην  $OA$ . Η  $AC$  αποτελεί ύψος του σφαιρικού τμήματος το οποίο είναι το μέρος της δεύ-



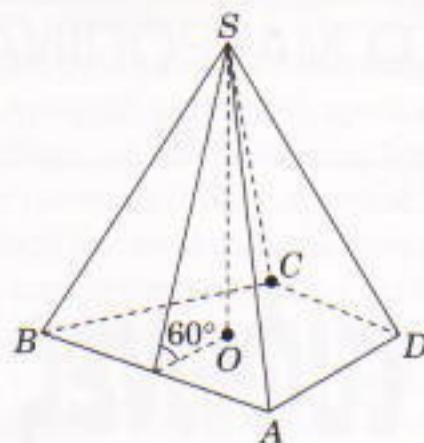
Σχήμα 5

τερης σφαίρας που βρίσκεται μέσα στην πρώτη. Αν θέσουμε  $AC = h$  και χρησιμοποιήσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα  $ABC$  και  $OBC$ , καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση

$$r^2 - h^2 = R^2 - (R - h)^2,$$

από όπου βρίσκουμε  $h = r^2 / 2R$ .

Ο τύπος για το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος μας δίνει  $S = \pi r^2$ . Όμως, το συνολικό εμβαδόν της πρώτης σφαίρας είναι  $4\pi r^2$ . Συνεπώς, το εμβαδόν του τμήματος της δεύτερης σφαίρας που περιέχεται στην πρώτη είναι πάντα 4 φορές μικρότερο από το



Σχήμα 6

εμβαδόν της πρώτης σφαίρας. Στη διάτυπωση εντούτοις του προβλήματος αναφέρεται ότι είναι 5 φορές μικρότερο, και επομένως καταλήγουμε σε αντίφαση. Δεν έχει, λοιπόν, το πρόβλημα λύση;

**Πρόβλημα 10.** Ένα κυρτό τετράπλευρο με δύο πλευρές μήκους 10 και δύο πλευρές μήκους 6 αποτελεί τη βάση μιας τετράπλευρης πυραμίδας. Το ύψος της πυραμίδας ισούται με 7. Όλες οι γωνίες μεταξύ των παραπλευρών εδρών της και της βάσης της ισούνται με  $60^\circ$ . Βρείτε τον όγκο της

πυραμίδας.

«Λύση». Αφού όλες οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν ίσες γωνίες με τη βάση, συμπεραίνουμε ότι η προβολή της κορυφής  $S$  της πυραμίδας  $SABCD$  συμπίπτει με το  $O$  — το κέντρο του εγγεγραμμένου στο  $ABCD$  κύκλου (Σχήμα 6). Η ακτίνα του κύκλου είναι

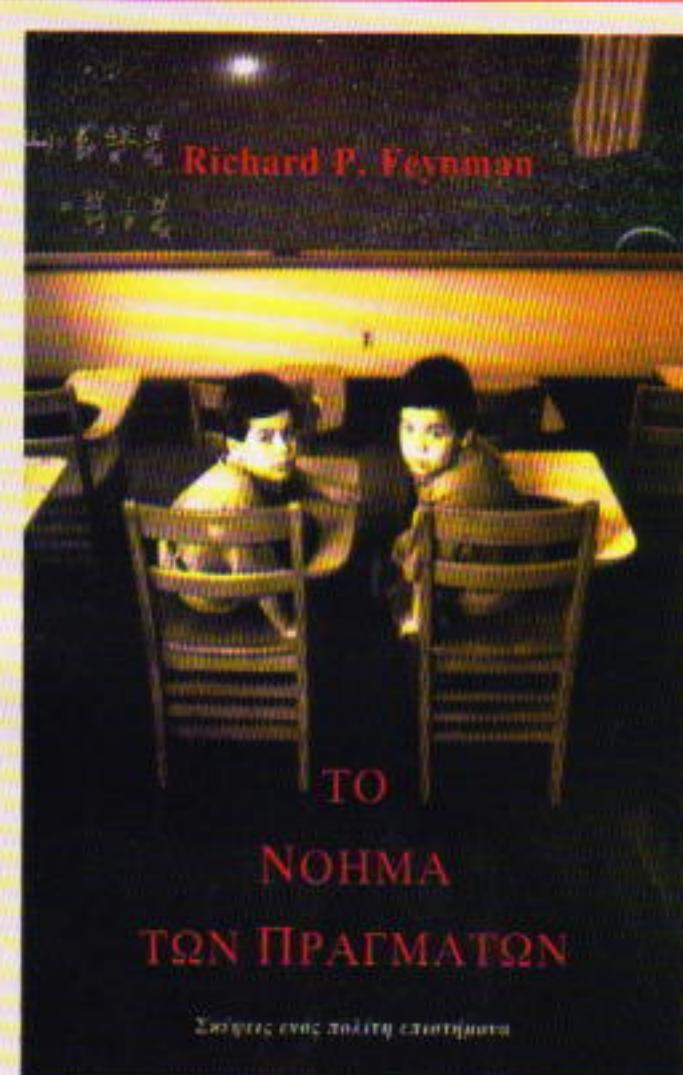
$$7\sigma \phi 60^\circ = 7 / \sqrt{3}.$$

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ABCD$  ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$  και  $DAO$ . Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε αυτά τα εμβαδά. Τελικά, βρίσκουμε ότι το εμβαδόν της βάσης είναι

$$(10 + 6) \cdot 7 / \sqrt{3} = 112 / \sqrt{3}.$$

Άρα, ο όγκος της πυραμίδας ισούται με  $784 / 3 \sqrt{3}$ . Συμφωνείτε με αυτή την απάντηση? ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64



Σελ.: 130, 14 x 21 εκ., Πανόδετο

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ  
ΣΤΑ ΤΕΛΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ

**Richard Feynman**

Νόμπελ Φυσικής

## ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΩΝ

Σκέψεις ενός πολύτη-επιστήμονα

«Μια θαυμάσια συλλογή προσωπικών ιστοριών και σποχασμάν για τη ζωή, στο αυθεντικό στυλ του Feynman. Ένα βιβλίο για τον πραγματικό άνθρωπο και τα προβλήματα του, όχι για φιλοσοφικές αφαιρέσεις...»

Freeman Dyson,

The New York Review of Books

«Άλλη μια φορά ένας αεικίνητος Feynman...»

Timothy Ferris,

The New York Times

«Διασκεδαστικό και προκλητικό βιβλίο... Ο Feynman έχει πολλά ακόμη να μας πει —ακόμη κι από εκεί που βρίσκεται.»

Marcus Chown,

The New Scientist

«Μια πνευματώδης σύνοψη της φιλοσοφίας του Feynman για την επιστήμη, αλλά και μια εξαιρετική φιλοσοφία για τη ζωή.»

John Gribbin,

The Sunday Times του Λονδίνου

## ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Ποτάμια, τυφώνες και μόρια

Περὶ τῆς δύναμης Coriolis

Albert Stasenko

**T**I KOIΝΟ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ποτάμια, τους τυφώνες και τα μόρια; Μήπως απλώς ότι αποτελούνται από άτομα; Όχι μόνο. Όλα επηρεάζονται από ένα φαινόμενο, γνωστό ως δύναμη Coriolis, το οποίο οφείλεται στη σχετική κίνηση ως προς ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

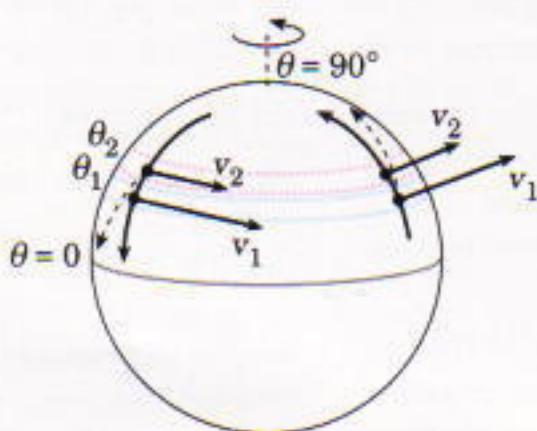
Μπορούμε μήπως να αισθανθούμε την εν λόγω δύναμη όταν τρέχουμε πάνω στην επιφάνεια της Γης; Όχι. Μολατάντα, η δύναμη Coriolis είναι αυτή που κάνει τη μια όχθη των ποταμών κρημνώδη ενώ την άλλη ομαλή, που περιστρέφει τεράστιες αέριες μάζες σχηματίζοντας τυφώνες και που παρεμβαίνει ακόμη και στην «ιδιωτική ζωή» των μορίων. Τι λέτε, λοιπόν, μπορούμε ή όχι να την παραβλέψουμε;

Ας θεωρήσουμε πάνω στην επιφάνεια της Γης δύο κυκλικές ζώνες που εφαπτονται μεταξύ τους, σε γεωγραφικά πλάτη  $\theta_1$  και  $\theta_2$ . Στο Σχήμα 1 οι συγκεκριμένες ζώνες σημειώνονται με διαφορετικά χρώματα. Προφανώς, σε όσο

μεγαλύτερο γεωγραφικό πλάτος θ βρίσκονται τόσο μικρότερη θα είναι η γραμμική (τροχιακή) ταχύτητα που αντιστοιχεί σ' αυτές δηλαδή,  $v_2 < v_1$ . Για παράδειγμα, στο Βόρειο Πόλο (όπου  $\theta = 90^\circ$ ), η γραμμική ταχύτητα είναι μηδέν.

Φανταστείτε έναν ποταμό στο βόρειο ημισφαίριο που ρέει από το νότο προς το βορρά κατά μήκος ενός μεσημβρινού (δηλαδή κάθετα στους γεωγραφικούς παραλλήλους —βλ. Σχήμα 1). Καθώς ρέει, από το γεωγραφικό πλάτος  $\theta_1$  στο  $\theta_2$ , τα σωματίδια του νερού «προσπαθούν» να διατηρήσουν την ταχύτητά τους  $v_1$  (που κατευθύνεται προς τα ανατολικά) και, αν η επιφάνεια της Γης ήταν λεία και ολισθητή, τα εν λόγω σωματίδια, φτάνοντας στο γεωγραφικό πλάτος  $\theta_2$ , θα είχαν αποκλίνει προς τα δεξιά —δηλαδή προς τα ανατολικά. (Η συγκεκριμένη διαδρομή στο Σχήμα 1 σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή.) Ένας παρατηρητής πάνω στην επιφάνεια της Γης, βέβαια, θα έλεγε πως τα σωματίδια του νερού δέχονται μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα ροής τους. Αυτή δεν είναι άλλη από τη δύναμη Coriolis, η οποία ανακαλύφθηκε το 1835 από τον γάλλο επιστήμονα Gustave-Gaspard Coriolis.

Επομένως, η δύναμη Coriolis έχει την τάση να οθεί πλευρικά το νερό που ρέει. Εξ αυτού, και δεδομένου ότι κάθε ποταμός περιορίζεται από την κοίτη του, τα σωματίδια του νερού χτυπούν τη δεξιά όχθη (αφού μετακινούνται προς τα



Σχήμα 1



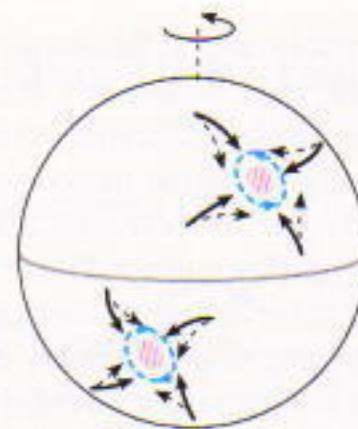
ανατολικά) με ταχύτητα  $v_2 < v_1$  και, επομένως, «κατατρώγουν» σταδιακά αυτή την όχθη του ποταμού, τη δεξιά.

Αν φανταστούμε και πάλι έναν ποταμό που ρέει στο βόρειο ημισφαίριο κατά μήκος ενός μεσημβρινού αλλά με κατεύθυνση από το βορρά προς το νότο (Σχήμα 1), καταλαβαίνουμε πως τώρα ο ποταμός έχει την τάση να στραφεί προς τα δυτικά, πάλι όμως προς τα δεξιά της κατεύθυνσης ροής του. Καθίσταται λοιπόν σαφές γιατί σε όλους τους ποταμούς του βορείου ημισφαίριου που βρίσκονται πάνω στους μεσημβρινούς οι δεξιές όχθες είναι πιο απόκρημνες από τις αριστερές. Εππλέον, η στάθμη του νερού στη δεξιά όχθη είναι πάντοτε υψηλότερη απ' ό,τι στην αριστερή.

Είναι προφανές ότι στο νότιο ημισφαίριο οι ποταμοί που ρέουν κατά μή-

κος των μεσημβρινών διαβρώνουν τις αριστερές όχθες τους. Το συγκεκριμένο γεωγραφικό φαινόμενο πρωτοανακαλύφθηκε το 1857 από τον λαμπρό φυσιογνώστη Carl Barr, ο οποίος ανέλυσε δικές του παρατηρήσεις καθώς και παλαιότερες αναφορές ρώσων περιηγητών (ξεκινώντας από το 1826). Εππλέον, ο Barr έδωσε και τη σωστή εξήγηση για το εν λόγω φαινόμενο —αποτέλεσμα της περιστροφής της Γης.

Οι επιδράσεις της δύναμης Coriolis εκδηλώνονται με πολύ θεαματικό τρόπο στις κινήσεις θαλάσσιων και αέριων μαζών. Είναι γνωστό σε όλους ότι το πλέον διάσημο ωκεάνιο ρεύμα, το Ρεύμα του Κόλπου (που στο βόρειο ημισφαίριο κατευθύνεται προς το βορρά), αποκλίνει προς τα δεξιά, στερώντας τη ζέστη από τον Καναδά για να τη δώσει



Σχήμα 2

στην Ευρώπη! Πρόκειται για ένα είδος ποταμού που δεν έχει όχθες!

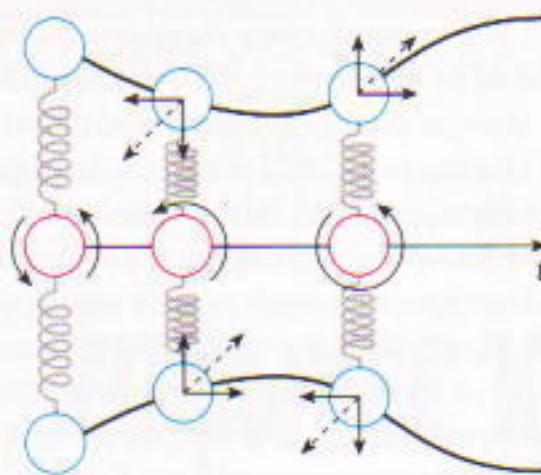
Και τώρα, πώς δημιουργούνται οι τυφώνες —αυτά τα τρομακτικά ατμοσφαιρικά φαινόμενα, με διαμέτρους της τάξης των χιλιάδων χιλιομέτρων, τα οποία συνήθως επιφέρουν καταστροφές; Αρχικά, δημιουργείται μια περιοχή χαμηλής ατμοσφαιρικής πίεσης εξαιτίας



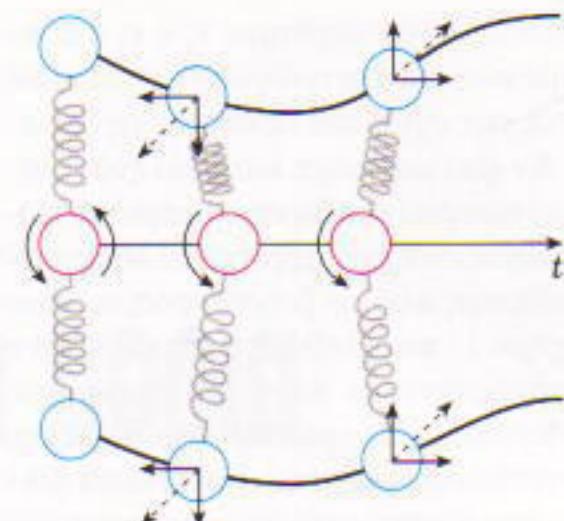
της ανομοιόμορφης θέρμανσης της επιφάνειας της Γης από τον Ήλιο. Στη συνέχεια, αέριες μάζες από γειτονικές περιοχές υψηλότερης ατμοσφαιρικής πίεσης κινούνται ακτινικά προς την περιοχή χαμηλής πίεσης. Όπως ήδη αναφέραμε, όλες οι κινούμενες μάζες έχουν την τάση να αποκλίνουν στο μεν βόρειο ημισφαίριο προς τα δεξιά στο δε νότιο προς τα αριστερά. Επομένως, δημιουργείται ένας τεράστιος στρόβιλος, ο οποίος στο βόρειο ημισφαίριο περιστρέφεται αντίθετα στη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ενώ στο νότιο κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 2).

Ας ασχοληθούμε τώρα με τα μόρια των αερίων. Γνωρίζουμε ότι τα συγκεκριμένα μόρια δεν κινούνται απλώς τυχαία προς όλες τις κατευθύνσεις, αλλά επίσης περιστρέφονται πολύ γρήγορα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε η ενέργεια της περιστροφικής τους κίνησης να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ενέργεια της μεταφορικής τους κίνησης. Επιπλέον, υπό ορισμένες συνθήκες κάποια τμήματα των μορίων (μεμονωμένα άτομα ή ομάδες ατόμων ή ακόμη και ρίζες αρκετά περίπλοκων μορίων) μπορούν να ταλαντώνονται ως προς το κέντρο μάζας του μορίου. Και σ' αυτή την περίπτωση, η ενέργεια της ταλάντωσης μπορεί να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ενέργεια είτε της μεταφορικής είτε της περιστροφικής κίνησης. Παρεμπιπτόντως, αυτό το γεγονός είναι γνωστό στη φυσική ως αρχή ισοκατανομής της ενέργειας ανά βαθμό ελευθερίας.

Θεωρήστε τώρα το απλοποιημένο μοντέλο ενός τριατομικού μορίου με δύο πανομοιότυπα άτομα, τα οποία συνδέονται ελαστικά (μέσω αβαρών ελατηρίων) με το κεντρικό άτομο (Σχήματα 3 και 4). Το συγκεκριμένο μοντέλο προσομοιώνει, λόγου χάρη, το μόριο του διοξειδίου του άνθρακα ( $\text{CO}_2$ ), το οποίο αποτελεί εξαιρετικά σημαντικό ενεργό υλικό στα ισχυρά λέιζερ υπερύθρου. Όταν τίποτα δεν διαταράσσει το εν λόγω μόριο, το κέντρο μάζας του κινείται σε ευθεία γραμμή. Θεωρώντας τον άξονα των χρόνων με κατεύθυνση ως συνήθως προς τα δεξιά, θα εξετάσουμε την κίνηση των ατόμων του μορίου στο σύστημα αναφοράς που κινείται γύρω από το κέντρο μάζας με την ίδια γωνιακή ταχύτητα που περι-



Σχήμα 3



Σχήμα 4

περιστρέφεται και το μόριο. Τέτοιο σύστημα αναφοράς χρησιμοποιήσαμε ήδη στις κινήσεις των ποταμών και των οικεάνιων και ατμοσφαιρικών ρευμάτων στην περιστρεφόμενη Γη.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος: (1) τα περιφερειακά άτομα κινούνται ταυτόχρονα είτε από, είτε προς το κέντρο μάζας (και τα δύο ελατήρια συσπειρώνονται ή επιμηκύνονται ταυτόχρονα) και (2) τα περιφερειακά άτομα κινούνται ταυτόχρονα προς την ίδια κατεύθυνση (όταν το ένα ελατήριο συσπειρώνεται, το άλλο επιμηκύνεται.)

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι στην πρώτη περίπτωση (βλ. Σχήμα 3), η περιστροφή του μορίου είτε επιταχύνεται είτε επιβραδύνεται. Για παράδειγμα, καθώς και τα δύο άτομα κατευθύνονται προς το κέντρο υφίστανται τη δύναμη Coriolis, με αποτέλεσμα να αποκλίνουν προς τα δεξιά ως προς την ακτινική κίνησή τους. Συνεπώς, η περιστροφή του μορίου στη συγκεκριμένη περίπτωση επιταχύνεται. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν τα περιφερειακά άτομα απομακρύνονται από το κέντρο, η δύναμη Coriolis προκαλεί ξανά την απόκλισή τους προς τα δεξιά, οπότε η περιστροφή του μορίου επιβραδύνεται. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται στην περιστροφική κίνηση ενός παγοδρόμου, ο οποίος, φέρνοντας τα χέρια πλησιέστερα στο σώμα του, καταφέρνει να περιστρέφεται γρηγορότερα. Το συγκεκριμένο φαινόμενο μπορούμε να το εξηγήσουμε και σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς μέσω του νόμου διατήρησης της στροφορμής.

Ένα καινούργιο και πολύ πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο εμφανίζεται όταν τα μόρια ακολουθούν τον δεύτερο τρόπο ταλάντωσης. Πράγματι, καθώς τα

περιφερειακά άτομα κινούνται στην ίδια κατεύθυνση, η δύναμη Coriolis τα μετατοπίζει και πάλι προς τα δεξιά. Ωστόσο, ενώ η περιστροφή του ενός ατόμου επιταχύνεται, η περιστροφή του άλλου επιβραδύνεται: το αποτέλεσμα είναι το μόριο να κάμπτεται. Μετά από 1/4 της περιόδου το μόριο κάμπτεται και πάλι, αυτή τη φορά όμως αντίθετα από πριν. Συνεπώς, η ταλάντωση των ατόμων σε ένα περιστρεφόμενο μόριο οδηγεί σε ένα πρόσθετο είδος ταλάντωσης, την καμπτική ταλάντωση.

Ωστόσο, από τη στιγμή που οι ενέργειες και οι ταχύτητες ταλάντωσης και περιστροφής σε ένα αέριο είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, οι συχνότητες τους μπορεί να αποκτήσουν παραπλήσιες τιμές, με αποτέλεσμα να εμφανίστει το φαινόμενο του συντονισμού. Εφόσον τα μόρια συνήθως εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ο συντονισμός μπορεί να παρατηρηθεί στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος του διοξειδίου του άνθρακα. Πράγματι, το εν λόγω φαινόμενο έχει επιβεβαιωθεί από τους φασματοσκόπους. Ας επισημάνουμε ότι, στη δεύτερη περίπτωση, η ταλάντωση των περιφερειακών ατόμων και η κάμψη των ελατηρίων μετατοπίζει περιοδικά το κεντρικό άτομο από τη θέση του κέντρου μάζας —αλλά τούτο δεν επηρεάζει τα ποιοτικά συμπεράσματά μας.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, πως αντικείμενα που μπορεί να μας φαίνονται εντελώς διαφορετικά —ποταμοί, τυφώνες, μόρια— έχουν στην πραγματικότητα κάτι κοινό.

**Δείτε ακόμη τα άρθρα...**

V. Surdin, «Το μυστήριο της Αφροδίτης», Σεπτ./Οκτ. 1996.

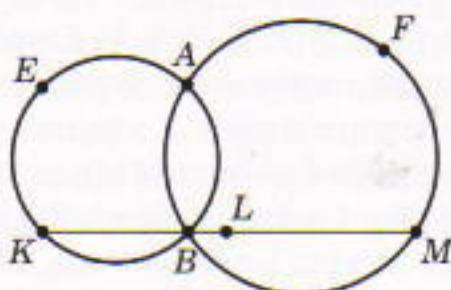
M. Emelyanov, κ.ά., «Στα βήματα του Foucault», Ιαν./Φεβρ. 1997.

# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

### M131

Ορθή ή όχι; Θεωρήστε δύο κύκλους που τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $B$ . Έστω ότι η ευθεία που διέρχεται από το  $B$  τέμνει τους κύκλους στα σημεία  $K$  και  $M$ . Εστω  $E$  και  $F$  τα μέσα των τόξων  $AK$  και  $AM$ , αντίστοιχα (των



Σχήμα 1

τόξων που δεν περιέχουν το  $B$ ) και έστω  $L$  το μέσο του τρήματος  $KM$ . Αποδείξτε ότι η  $\angle ELF$  είναι ορθή.

### M132

Συμπληρωματικές γωνίες ρόμβου. Έστω ο ρόμβος  $ABCD$ . Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει  $\angle AMB + \angle CMD = 180^\circ$ .

### M133

Φυσική λύση. Για ποιον φυσικό αριθμό  $n$  είναι ρητή η παράσταση  $\log_{2n-1}(n^2 + 2)$ ;

### M134

Καμπύλη συστήματος. Έστω οι αριθμοί  $a$  και  $b$  τέτοιοι ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + b \end{cases}$$

να έχει μια μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$ . Σχεδιάστε την καμπύλη που αποτελείται από όλες τις δυνατές θέσεις του σημείου  $(x_0, y_0)$ .

### M135

Ξεπεράστε το σύνορο. Μια φοιτήτρια της φιλοσοφικής έχει χαθεί σε ένα αχανές δάσος, το σύνορο του οποίου

ου είναι μια ευθεία. (Φανταστείτε ότι το δάσος καλύπτει ένα ημιεπίπεδο.) Η φοιτήτρια γνωρίζει ότι η απόστασή της από το σύνορο είναι το πολύ 2 χιλιόμετρα. Προτείνετε μια διαδρομή για να βγει από το δάσος χωρίς να χρειαστεί να περπατήσει περισσότερο από 13 χιλιόμετρα. (Η φοιτήτρια δεν γνωρίζει, φυσικά, πώς βρίσκεται το σύνορο και, ανεξάρτητα από το πόσο κοντά του είναι, δεν μπορεί να το διακρίνει. Θα θεωρήσουμε ότι βγαίνει από το δάσος μόλις φτάσει στο σύνορο.)

## Φυσική

### Φ131

Ταχύτητα εξερευνητικού σεληνιακού οχήματος. Ένα αυτοπροωθούμενό όχημα, το οποίο είναι εφοδιασμένο με κάμερα λήψης, κινείται στην επιφάνεια της Σελήνης και ελέγχεται από τη Γη. Εκτιμήστε τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει.

### Φ132

Η μάζα του Γαλαξία. Βάσει οπτικών παρατηρήσεων, οι επιστήμονες καταλήγουν στην εκτίμηση πως εντός αποστάσεως  $R = 3 \cdot 10^9 R_0$  από το κέντρο του Γαλαξία είναι συγκεντρωμένη μάζα  $M_1 = 1,5 \cdot 10^{11} M_0$ , όπου με  $M_0$  και  $R_0$  συμβολίζουμε τη μάζα του Ήλιου και την ακτίνα της γήινης τροχιάς, αντίστοιχα. Ωστόσο, η περίοδος περιφοράς των άστρων στη συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο του Γαλαξία ανέρχεται σε  $3,75 \cdot 10^8$  έτη, η οποία αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη μάζα.

Υπολογίστε την «κρυμμένη μάζα» του Γαλαξία — δηλαδή τη μάζα των αόρατων αντικειμένων μέσα στη σφαίρα ακτίνας  $R$ . Θεωρήστε ότι η μάζα  $M_1$  βρίσκεται συγκεντρωμένη στο κέντρο του Γαλαξία.

### Φ133

Ψυγείο σε δωμάτιο. Ένα ψυγείο διατηρεί στο εσωτερικό του θερμοκρα-

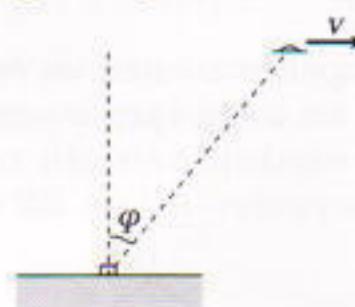
σία  $-12^\circ\text{C}$ . Εάν η θερμοκρασία του δωματίου ανέρχεται σε  $25^\circ\text{C}$ , ο κινητήρας του ψυγείου τίθεται σε λειτουργία κάθε 8 min. Μετά από  $t_1 = 5$  min, ο κινητήρας παύει να λειτουργεί. Θεωρώντας το ψυγείο ως ιδανική ψυκτική μηχανή, προσδιορίστε πόσο συχνά και επί πόσο χρόνο θα έπρεπε να λειτουργεί ο κινητήρας του εάν η θερμοκρασία του δωματίου μειωνόταν σε  $15^\circ\text{C}$ . Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία για την οποία το ψυγείο θα μπορούσε να διατηρήσει τη δεδομένη θερμοκρασία στο εσωτερικό του;

### Φ134

Αντίσταση σιδηρογραμμής. Μακριές, γυμνές αγώγιμες ράβδοι κατασκευασμένες από χαλκό έχουν στρωθεί τυχαία στις γραμμές ενός παιδικού σιδηροδρόμου. Βρείτε την αντίσταση που προκύπτει ανάμεσα στις γραμμές. Δίνεται ότι το πλάτος των ράβδων  $d = 0,2 \text{ mm}$ , το μήκος κάθε ράβδου  $h = 30 \text{ cm}$ , το πλήθος των ράβδων  $N = 100$  και η ειδική αντίσταση του χαλκού  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ .

### Φ135

Περί UFO. Ένα UFO ακολουθεί οριζόντια πορεία υπεράνω της Γης με μεγάλη ταχύτητα  $v$ . Ποια ταχύτητα θα μετρήσει ένας παρατηρητής στο έδαφος αν η οπτική ακτίνα που συνδέ-



Σχήμα 2

ει το UFO με τον παρατηρητή σχηματίζει γωνία  $\phi$  με την κατακόρυφη;

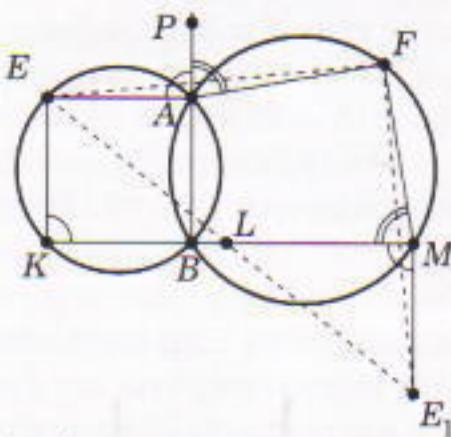
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

## Μαθηματικά

**M131**

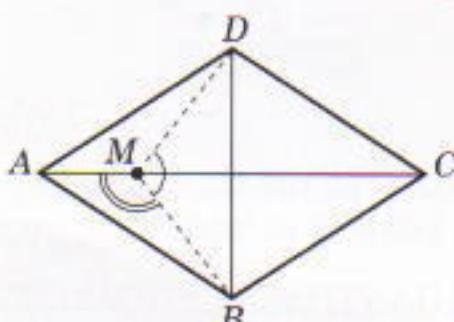
Έστω  $E_1$  το συμμετρικό του  $E$  ως προς το  $L$  (Σχήμα 1). Τότε  $KE = ME_1$ . Επίσης, το τμήμα  $AF = FM$  και το τμήμα  $AE = KE$  (αφού τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα). Προεκτείνουμε την  $AB$  προς την πλευρά του  $A$  και θεωρούμε ένα σημείο  $P$  στην προέκταση. Τότε ισχύει  $\angle E_1ML = \angle EKL = \angle EAP$  (η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις ιδιότητες των γωνιών εγγεγραμμένου τετραπλεύρου). Παρομοίως,  $\angle PAF = \angle LMF$ . Συνεπώς,  $\angle FME_1 = \angle FAE$ , τα τρίγωνα  $FME_1$  και  $FAE$  είναι ίσα, οπότε  $EF = FE_1$ . Άρα, η  $FL$ , ως διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου  $EFE_1$ , είναι κάθετη στην  $EE_1$ . (Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη θα πρέπει να εξετάσουμε και περιπτώσεις διαφορετικές από αυτή του Σχήματος 1.)



Σχήμα 1

**M132**

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος περιλαμβάνει όλα τα σημεία των διαγωνίων  $AC$  και  $BD$  του ρόμπου.



Σχήμα 2

βου. Πράγματι, αν  $M$  είναι ένα σημείο της  $AC$  (Σχήμα 2), τότε, λόγω της συμμετρίας του ρόμπου ως προς την  $AC$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \angle AMB + \angle CMD &= \angle AMD + \angle CMD = 180^\circ. \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος δεν περιέχει άλλα σημεία. Ας υποθέσουμε ότι ένα σημείο  $M$  εκτός των διαγωνίων  $AC$  και  $BD$  ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Ας σχεδιάσουμε τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία  $A, B$  και  $M$ . Συμβολίζουμε με  $M_1, M_2$  τα σημεία τομής αυτού του κύκλου με τις διαγώνιες  $AC$  και  $BD$ , αντίστοιχα (Σχήμα 3). Τότε, τα σημεία  $M_1, M_2$  και  $M$  ανήκουν στον ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Όμως,  $\angle AMB$

δεν είναι ανάγωγο.

Άρα, δεν είναι ανάγωγο και το κλάσμα

$$\frac{4n^2 + 8}{2n - 1} = \frac{4n^2 - 1 + 9}{2n - 1} \\ = 2n + 1 + \frac{9}{2n - 1}.$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι ανάγωγο το κλάσμα  $9/(2n - 1)$ . Εππλέον, οι πρώτοι παράγοντες του 9 και του  $2n - 1$  συμπίπτουν. Υπάρχουν επομένως μόνο δύο δυνατότητες:  $2n - 1 = 3$  ή  $2n - 1 = 9$ , δηλαδή  $n = 2$  ή  $n = 5$ . Αν  $n = 2$ , τότε  $\log_3 6 = 1 + \log_3 2$ . Ο αριθμός αυτός είναι προφανώς άρρητος. Αν  $n = 5$ , παίρνουμε  $\log_9 27 = 3/2$ .

**M134**

Έστω  $(x_0, y_0)$  η λύση του συστήματος. Από τις συνθήκες του προβλήματος έπειται ότι οι παραβολές  $y = x^2 + a$  και  $x = y^2 + b$  εφάπτονται —δηλαδή έχουν κοινή εφαπτόμενη— στο σημείο  $(x_0, y_0)$ . Ας υπολογίσουμε την κλίση αυτής της εφαπτομένης βρίσκοντας την παράγωγο και των δύο συναρτήσεων σε αυτό το σημείο. Για την πρώτη έχουμε

$$y'_{x=x_0} = 2x_0,$$

ενώ για τη δεύτερη

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{x'_{y=y_0}} = \frac{1}{2y_0}$$

(όπου το  $y'_x$  συρβολίζει την παράγωγο του  $y$  θεωρούμενου ως συνάρτηση του  $x$  και το  $y'_y$  συρβολίζει την παράγωγο του  $x$  θεωρούμενου ως συνάρτηση του  $y$ ). Επομένως,  $2x_0 = 1/(2y_0)$  και, συνεπώς,  $4x_0y_0 = 1$ . Άρα το σημείο  $(x_0, y_0)$  ανήκει στην υπερβολή που ορίζεται από την εξίσωση  $4x_0y_0 = 1$ . Είναι προφανές ότι πρέπει να θεωρήσουμε μόνο τα σημεία εκείνα της

$= \angle AM_1B = \angle AM_2B$  (διότι είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο) και, επομένως, συμπεραίνουμε ότι  $\angle CMD = \angle CM_1D = \angle CM_2D$ . Άρα, τα σημεία  $C, D, M, M_1$  και  $M_2$  είναι επίσης ομοκυκλικά. Δηλαδή, βρήκαμε δύο διαφορετικούς κύκλους με τρία κοινά σημεία —πράγμα αδύνατον.

**M133**

Αν  $\log_{2n-1}(n^2 + 2) = p/q$ , τότε  $(n^2 + 2)^q = (2n - 1)^p$  και, επομένως, όλοι οι πρώτοι παράγοντες των αριθμών  $n^2 + 2$  και  $2n - 1$  συμπίπτουν. Συνεπώς, το κλάσμα

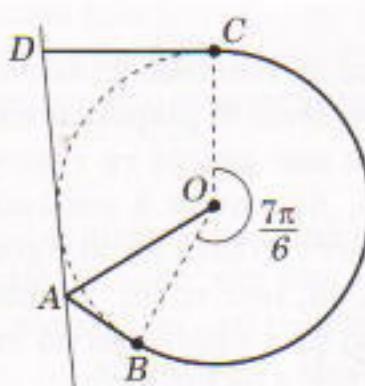
$$\frac{n^2 + 2}{2n - 1}$$

υπερβολής που ανήκουν στο πρώτο τετραρτημόριο. (Για να πειστείτε ότι έτοι έχουν τα πράγματα, σχεδιάστε μερικά παραδείγματα παραβολών που ικανοποιούν τις δεδομένες εξισώσεις.)

### M135

Ας υποθέσουμε ότι η φοιτήτρια βρίσκεται στο σημείο  $O$  και ας σχεδιάσουμε ένα κύκλο με ακτίνα 2 km και κέντρο το  $O$ . Είναι δεδομένο ότι αυτός ο κύκλος είτε τέμνει το σύνορο του δάσους είτε εφαπτεται σε αυτό και, επομένως, αν περπατήσουμε μέχρι την περίμετρο του κύκλου και στη συνέχεια κινηθούμε πάνω σ' αυτή, θα συναντήσουμε την άκρη του δάσους. Αυτή όμως η διαδρομή είναι μεγάλη.

Μπορούμε να τα καταφέρουμε καλύτερα αν επισημάνουμε ότι η διαδρομή μας πρέπει να τέμνει κάθε εφαπτόμενη του κύκλου (όχι όμως αναγκαστικά στο σημείο επαφής). Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε μια τέτοια διαδρομή, με μήκος μικρότερο του 13, ως εξής: θεωρούμε ένα σημείο  $A$  σε απόσταση  $4/\sqrt{3}$  km από το  $O$



Σχήμα 4

και φέρουμε από αυτό τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (βλ. Σχήμα 4). Έστω  $B$  το σημείο επαφής της μιας από αυτές. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η  $\angle OAB$  έχει μέτρο  $\pi/6$ . Προχωρούμε από το  $O$  στο  $A$  και μετά στο  $B$  κατά μήκος των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων, και μετά ακολουθούμε τον κύκλο μέχρι ένα σημείο  $C$  —τέτοιο ώστε το τόξο  $BC$  να έχει μέτρο  $7\pi/6$  (και μήκος  $7\pi/3$  km). Στη συνέχεια, φέρουμε την κάθετο από το  $C$  προς την άλλη εφαπτόμενη που διέρχεται από το  $A$ , και έστω  $D$  το σημείο τομής τους. Ολοκληρώνουμε τη διαδρομή μας κινούμενοι από το  $C$  στο  $D$ . Η διαδρομή αυτή τέμνει κάθε εφαπτόμενη του κύκλου και έχει μήκος

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{7\pi}{6} + 2 \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{7\pi}{3} + 2 < 2 \cdot 1,75 + \frac{7}{3} \cdot 3,15 + 2 \\ &= 12,8543 < 13 \text{ km}. \end{aligned}$$

Οπότε, αφού αυτή η διαδρομή τέμνει όλες τις ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα 2 km, θα οδηγήσει αναπόφευκτα τη φοιτήτρια έξω από το δάσος.

### Φυσική

#### Φ131

Φανταστείτε ότι η κάμερα του οχήματος «εντόπος» έναν κρατήρα στην επιφάνεια της Σελήνης και απέστειλε σήμα στη Γη «αναφέροντας» τη συγκεκριμένη παρατήρηση. Προφανώς, θα παρέλθει κάποιος χρόνος  $t$  ώσπου το όχημα να λάβει την κατάλληλη εντολή:

$$\begin{aligned} t &= 2 \frac{l}{c} + \tau \\ &= 2 \frac{380 \cdot 10^3 \text{ km}}{300 \cdot 10^3 \text{ km/s}} + 0,1 \text{ s} = 2,6 \text{ s}. \end{aligned}$$

Εδώ με  $l$  συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ Γης και Σελήνης, με  $c$  την ταχύτητα του ραδιοσήματος και με  $\tau$  το χρόνο που απαιτείται για να αποφασίσουν οι μηχανικοί σχετικά με την εντολή.

Για να εκτιμήσουμε την ταχύτητα του οχήματος, υποθέτουμε ότι είναι μικρότερη από την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου σε αγροτικό δρόμο (περίπου 20 km/h) κατά παράγοντα ίσο με το λόγο του χρόνου που απαιτείται για τη μετάδοση μιας εντολής στο σεληνιακό όχημα προς το χρόνο αντίδρασης ενός οδηγού στη Γη, τον οποίο θεωρούμε ίσο με  $\tau$ . Αυτό εξασφαλίζει ότι τα δύο οχήματα θα καλύψουν ίσες αποστάσεις, στη Γη και τη Σελήνη, ώστου σημειώθει αντίδραση. Συνεπώς, η μέγιστη ταχύτητα ενός τέτοιου σεληνιακού οχήματος είναι

$$v_s = v \frac{\tau}{t} = 1 \text{ km/h.}$$

#### Φ132

Όταν ένα σώμα διαγράφει κυκλι-

κή τροχιά ακτίνας  $r$  με ταχύτητα  $u$  υπό την επίδραση της ελεκτικής δύναμης που του ασκεί ένα κεντρικό σώμα μάζας  $m$ , η κεντρομόλος επιτάχυνση  $u^2/r$  ισούται με την επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας  $Gm/r^2$  ( $G$  είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης):

$$\frac{u^2}{r} = \frac{Gm}{r^2}.$$

Εφόσον η περίοδος περιφοράς ισούται με  $t = 2\pi r/u$ , καταλήγουμε στον εξής τύπο για τη μάζα του κεντρικού σώματος:

$$m = \frac{4\pi^2 r^3}{Gt^2}.$$

Συγκρίνοντας την περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο (με περίοδο  $T_0 = 1$  έτος) με την κίνηση των άστρων γύρω από το κέντρο του Γαλαξία βρίσκουμε τη μάζα του Γαλαξία που περιέχεται μέσα στη οφαίρα ακτίνας  $R$ :

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{4\pi^2 R_0^3}{GT_0^2}, \quad M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}, \\ M &= M_0 \frac{R^3 T_0^2}{R_0^3 T^2} = 1,9 \cdot 10^{11} M_0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η αόρατη μάζα του Γαλαξία είναι

$$\Delta M = M - M_1 = 4 \cdot 10^{10} M_0.$$

#### Φ133

Η διαφορά θερμοκρασίας  $\Delta T$  ανάμεσα στο εσωτερικό του ψυγείου και στον περιβάλλοντα αέρα και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο κινητήρας παραμένει εκτός λειτουργίας σχετίζονται ως εξής:

$$\tau_2 \Delta T = \text{σταθερά}. \quad (1)$$

Για μια ιδανική ψυκτική μηχανή ισχύει μια ακόμη εξίσωση:

$$\frac{W}{Q} = \frac{\Delta T}{T},$$

όπου  $W$  είναι το έργο που παράγει ο κινητήρας και  $Q$  η ποσότητα της θερμότητας που αφαιρείται από το εσωτερικό του ψυκτικού θαλάμου. Το έργο που παράγεται από τον κινητήρα είναι ανάλογο με το χρόνο λειτουργίας του  $\tau_1$ .

$W \sim \tau_1$ ,  
και η ποσότητα της αφαιρούμενης θερμότητας είναι ανάλογη με ολόκληρη την περίοδο  $(\tau_2 + \tau_1)$  του κύκλου του ψυγείου και με τη διαφορά θερμοκρασίας  $\Delta T$ :

$$Q = (\tau_1 + \tau_2) \Delta T.$$

Επομένως,

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} (\Delta T)^2 = \text{σταθερά}. \quad (2)$$

Εισάγοντας τις τιμές των  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  και  $\Delta T$  που αντιστοιχούν στην πρώτη περίπτωση, καθώς και τη  $\Delta T'$  που αντιστοιχεί στη δεύτερη περίπτωση στις εξισώσεις (1) και (2), βρίσκουμε

$$\tau'_1 = 2 \text{ min}, \tau'_2 = 4,1 \text{ min}.$$

Η μέγιστη θερμοκρασία στο δωμάτιο αντιστοιχεί στη συνθήκη  $\tau''_2 = 0$ :

$$\Delta T_{\max} = \Delta T \sqrt{\frac{8}{5}} = 46,8 \text{ K}.$$

Συνεπώς,

$$\theta_{\max} = 34,8^\circ\text{C}.$$

### Φ134

Υποθέτουμε ότι όλες οι ράβδοι έχουν ηλεκτρική επαφή και με τις δύο σιδηροτροχιές. Ενδεχόμενες επαφές των ράβδων μεταξύ τους δεν επηρεάζουν την απάντηση του προβλήματος (όπως μπορείτε να δείξετε εύκολα), επειδή τα σημεία επαφής με καθεμία από τις σιδηροτροχιές έχουν το ίδιο δυναμικό.

Η αντίσταση μίας μόνης ράβδου που σχηματίζει γωνία  $a$  με τις γραμμές ( $0 < a < \pi$ ) δίνεται από την έκφραση

$$r_i = \rho \frac{\ell_i}{S} = \rho \frac{\eta \mu a_i}{\pi d^2} \cdot \frac{1}{4}$$

Η συνολική αντίσταση ανάμεσα στις γραμμές ισούται με

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{r_i} = \sum \frac{\pi d^2 \eta \mu a_i}{4 \rho \ell} \\ = \frac{\pi d^2}{4 \rho \ell} N(\eta \mu a_i).$$

Επειδή τα χάλκινα σύρματα είναι μακριά συγκρινόμενα με την απόσταση μεταξύ των γραμμών, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή του ημα<sub>i</sub> με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\overline{(\eta \mu a_i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \eta \mu a da = \frac{2}{\pi}.$$

Έτσι,

$$\frac{1}{R} = \frac{\pi d^2}{4 \rho \ell} N \frac{2}{\pi} = \frac{d^2 N}{2 \rho \ell},$$

και τελικά,

$$R = \frac{2 \rho \ell}{d^2 N} = 4 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

**Σημείωση:** Υπολογίσαμε τη μέση τιμή της ολικής αντίστασης. Ωστόσο, μια συγκεκριμένη τιμή της αντίστασης εξαρτάται από το πώς ακριβώς θα πέσουν οι ράβδοι στις γραμμές. Συνέπως, θα διαφέρει από τη μέση τιμή. Πόσο θα διαφέρει όμως; Προσπαθήστε να εκτιμήσετε τη διασπορά των τιμών της αντίστασης χρησιμοποιώντας γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

### Φ135

Έστω  $t$  ο χρόνος που παρήλθε καθώς το UFO μετακινήθηκε από το σημείο  $A$  (το πλησιέστερο προς τον παρατηρητή) ως το σημείο  $B$ , όπου η ευθεία που το συνδέει με τον παρατηρητή σχηματίζει γωνία  $\phi$  με την κατακόρυφο. Υποθέτουμε πως το χρόνο τον μετρά ρολόι τοποθετημένο στο σημείο  $B$ . Εάν συμβολίσουμε με  $\ell$  το (σταθερό) ύψος του UFO πάνω από τη Γη, βρίσκουμε αμέσως την απόσταση που κάλυψε το UFO κινούμενο από το  $A$  ως το  $B$ :

$$ut = \ell \epsilon \varphi \phi. \quad (1)$$

Ο παρατηρητής θα διακρίνει τη λάμψη του αντικειμένου στα σημεία  $A$  και  $B$  με κάποια καθυστέρηση, επειδή η ταχύτητα του φωτός έχει την πεπερασμένη τιμή  $c$ . Έτσι το ρολόι του θα δείξει χρόνο

$$t_1 = t + \frac{\ell}{c \sin \phi} - \frac{t}{c}. \quad (2)$$

Κατά συνέπεια, η ταχύτητα του UFO όπως τη μετράει ο παρατηρητής δίνεται από τον τύπο

$$u_1 = \frac{dx}{dt_1} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{v}{\frac{dt}{dt}}.$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε τις εκφράσεις

$$\frac{dt_1}{dt} = 1 + \frac{\ell \eta \mu \varphi}{c \sin^2 \phi} \frac{d\phi}{dt},$$

και

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{u \sin^2 \phi}{\ell}.$$

Επομένως, η ταχύτητα που αναζητούμε είναι

$$u_1 = \frac{u}{1 + \frac{u}{c} \eta \mu \varphi}.$$

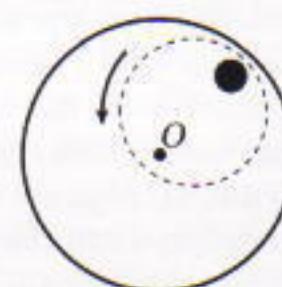
### Σπαζοκεφαλιές

#### Σ131

Δείτε το Σχήμα 5.

#### Σ132

Έστω τα 14 παιδιά με καστανά μάτια. Ποιο είναι το μικρότερο πλήθος από αυτά που μπορεί να έχουν μαύρα μαλλιά; Αν και τα 6 υπόλοιπα (που δεν έχουν καστανά μάτια) έχουν μαύρα μαλλιά, τότε πρέπει να υπάρχουν 9 παιδιά με καστανά μάτια και μαύρα μαλλιά. Από αυτά (τα 9), πόσα ζυγίζουν περισσότερο από πενήντα κιλά; Έχουμε πάλι ότι υπάρχουν 3 μαθητές που δεν ζυγίζουν περισσότερο από πενήντα κιλά και, αν ακόμη και οι 3 αυτοί βρίσκονται μεταξύ των 9, θα έχουμε 6 μαθητές με τρία από τα τέσσερα χαρακτηριστικά. Τέλος, υπάρχουν 2 μόνο παιδιά με ύψος μικρότερο από ενάμισι μέτρο και, επομένως, έχουμε τουλάχιστον 4 (από τα 6) που έχουν και τα τέσσερα χαρακτηριστικά.



Σχήμα 5

### Σ133

Έστω  $V$  το μέτρο της ταχύτητας της βενζινακάτου και  $v$  το μέτρο της ταχύτητας του ρεύματος. Τότε, όσο χρόνο η βενζινάκατος κατευθύνεται προς την πόλη  $B$ , η απόστασή της από τη σχεδία αυξάνει με ταχύτητα μέτρου  $(V+v) - v = V$  (το μέτρο της ταχύτητας της βενζινακάτου είναι  $V+v$ , λαμβάνοντας υπόψη και την ταχύτητα του ρεύματος). Όσο χρόνο η βενζινάκατος κατευθύνεται από την πόλη  $B$  στην  $A$ , η απόστασή της από τη σχεδία μειώνεται με την ίδια ταχύτητα:  $(V-v) + v = V$ . Επομένως, το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η απόστασή τους μειωνόταν είναι ίσο με αυτό στη διάρκεια του οποίου η απόστασή τους μεγάλωνε: 1 ώρα.

### Σ134

Μπορούμε να χωρίσουμε κάθε ράβδο, ανεξάρτητα από την περιεκτικότητά της σε χρυσό, σε τρία μέρη με αναλογία  $1 : 2 : 3$ . Τα τρία μικρά κομμάτια θα αποτελέσουν τη νέα ράβδο του  $1 \text{ kg}$ , τα τρία μεσαία τη ράβδο των  $2 \text{ kg}$  και τα τρία μεγάλα την τρίτη. Οι νέες ράβδοι θα έχουν την ίδια κατά βάρος περιεκτικότητα σε χρυσό.

### Σ135

Το χιόνι αποτελείται από πολλούς παγοκρυστάλλους, και έτσι το ηλιακό φως ανακλάται από τεράστιο πλήθος μικρών κατόπτρων. Μερικά από αυτά στέλνουν το ηλιακό φως κατευθείαν στα μάτια μας και, καθώς μετακινούμαστε, ένα σύνολο από κάτοπτρα αντικαθίσταται από κάποιο άλλο. Το εν λόγω φαινόμενο το αντιλαμβανόμαστε ως σπινθηροβόλημα.

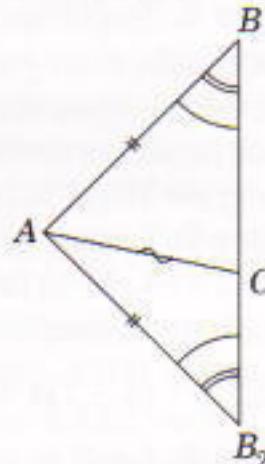
#### Ποιο είναι το λάθος;

1. Το βάρος των καρπουζιών θα υποδιπλασιαστεί, φτάνοντας στους  $5$  τόνους. Πολλοί πιστεύουν ότι πρόκειται για θαύμα.

2. Δεν είναι σωστό να προσθέσουμε τα  $3$  δολάρια στα  $13$ , διότι έτσι μετράμε δύο φορές τα  $3$  δολάρια που ξόδεψε ο υπηρέτης. Στην πραγματικότητα,  $13 = 10 + 3$ , όπου τα  $10$  δολάρια είναι το ποσό που εισέπραξε ο στρατηγός και  $3$  είναι τα δολάρια που σπατάλησε ο υπηρέτης.

3. Αν η ευθεία  $BB_2$  διέρχεται από το σημείο  $C$ , τότε ο συλλογισμός μας είναι

ναι λανθασμένος (Σχήμα 6). Οι γωνίες  $CBB_2$  και  $CB_2B$  είναι ίσες, αλλά ισούνται με  $0$ . Οι αναγνώστες μπορούν να εξετάσουν αυτές τις περιπτώσεις όπου δύο άνισα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μία γωνία (όχι την περιεχόμενή τους) ίσες. Θα διαπιστώσουν ότι σε αυτές ακριβώς τις περιπτώσεις η ευθεία  $BB_2$  διέρχεται από το σημείο  $C$ . Επομένως, δεν μπο-



Σχήμα 6

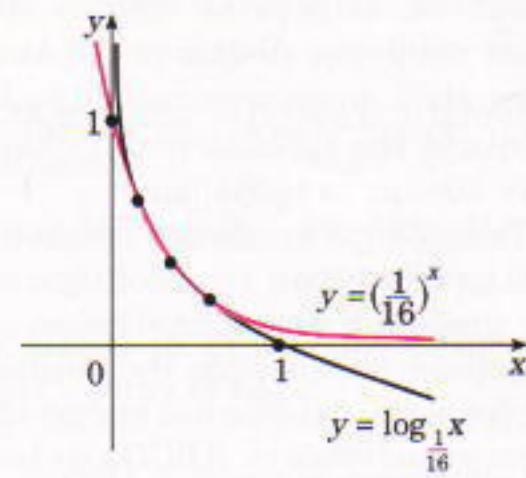
ρούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

4. Υπάρχει μία περίπτωση κατά την οποία τα κέντρα και των δύο κύκλων συμπίπτουν με το κέντρο του παραλληλογράμμου. Τότε, το παραλληλόγραμμο γίνεται ορθογώνιο. Επομένως, το πρόβλημα έχει και δεύτερη απάντηση: Οι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι  $90^\circ$ .

5. Το πρόβλημα δεν μας λέει ότι η εξίσωση έχει ρίζες μόνο τις  $p$  και  $q$ . Υπάρχει ακόμη μια απάντηση:  $p = q = -1/2$ .

6. Όταν μετασχηματίζουμε κατ' αυτό τον τρόπο την εξίσωση, περιορίζουμε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που εμφανίζονται σε αυτή και χάνουμε την εξής ακολουθία λύσεων:  $x = \pi/2 + pn$ .

7. Εύκολα επαληθεύουμε ότι οι αριθμοί  $1/2$  και  $1/4$  ικανοποιούν την εξίσωση. Αυτές οι δύο λύσεις αντιστοιχούν στα σημεία  $(1/2, 1/4)$  και  $(1/4, 1/2)$  των γραφημάτων των συναρτήσεων  $y = \log_{1/16}x$  και  $y = (1/16)^x$ , τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του πρώτου τεταρτημορίου. Επιπλέον, τα γραφήματα τέμνονται σε αυτή τη διχοτόμο. Άρα, η εξίσωση έχει τρεις τουλάχιστον λύσεις. Στην πραγματικότητα, και τα δύο γραφήματα πλησιάζουν πολύ μεταξύ τους (δείτε το Σχήμα 7) και, επομένως, είναι εξαιρετικά πιθανό να τέμνονται



Σχήμα 7

περισσότερες από μία φορές.

Με τη βοήθεια του διαφορικού λογισμού μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει τρεις ακριβώς λύσεις. Γενικά, η εξίσωση  $\log_a x = a^x$  έχει το πολύ τρεις λύσεις. (Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα του Rolle που μας λέει ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μηδενίζεται τουλάχιστον μία φορά στο διάστημα μεταξύ δύο μηδενικών τιμών της συνάρτησης.)

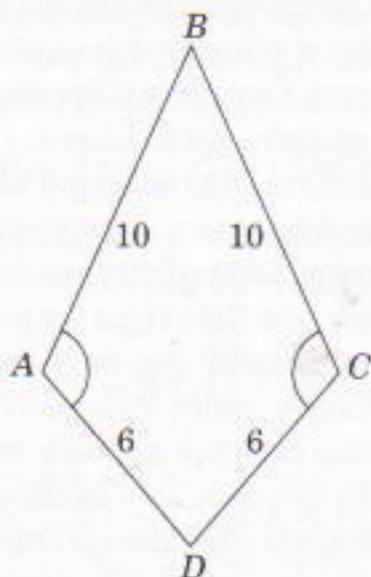
8. Όλες οι τομές ενός κώνου που διέρχονται από την κορυφή του είναι ισοσκελή τρίγωνα, των οποίων οι ίσες πλευρές είναι όλες ίδιες (είναι όλες ίσες με το απόστημα του κώνου). Αν  $a$  είναι η γωνία στην κορυφή μιας αξονικής τομής και  $\varphi$  η γωνία μεταξύ των πλευρών μιας τυχαίας τομής, τότε  $0 < \varphi \leq a$ . Όμως, το εμβαδόν μιας τέτοιας τομής είναι ανάλογο του ημφ. Επομένως, αν  $a \leq 90^\circ$ , τότε η αξονική τομή έχει το μέγιστο εμβαδόν. Αν, όμως,  $a > 90^\circ$ , τότε η τομή με το μέγιστο εμβαδόν είναι αυτή για την οποία  $\varphi = 90^\circ$ . Από τις συνθήκες του προβλήματος έπειτα ότι  $a > 90^\circ$  και  $\eta\mu\alpha = 1/2$ , οπότε συμπεραίνουμε ότι  $a = 150^\circ$ .

9. Το σωστό συμπέρασμα είναι ότι η δεύτερη σφαίρα βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό της πρώτης και έτσι το 5 είναι απλώς ο λόγος της επιφάνειας της πρώτης σφαίρας προς την επιφάνεια της δεύτερης. Άρα ο λόγος των ακτίνων τους ισούται με  $\sqrt{5}$ . Από την άλλη πλευρά, αν ο λόγος που δίνουν οι συνθήκες του προβλήματος είναι μικρότερος του 4 (για παράδειγμα, 3), τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

10. Ας θεωρήσουμε ένα τετράπλευρο  $ABCD$  στο οποίο  $AB = BC = 10$  και  $AD = DC = 6$  (Σχήμα 8). Οι γωνίες στις κορυφές  $A$  και  $C$  είναι ίσες. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι μέγιστο όταν οι γωνίες αυτές είναι ορθές.

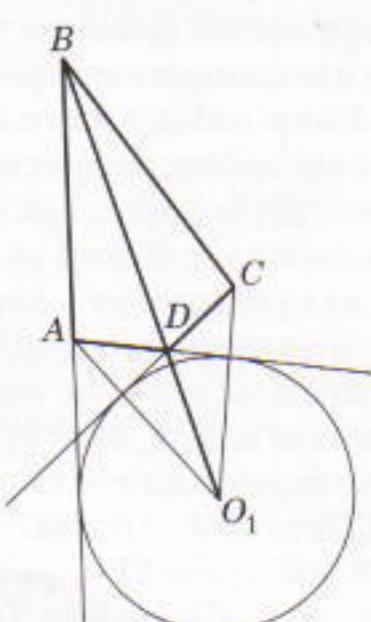
Επομένως, το μέγιστο δυνατόν εμβαδόν της βάσης ισούται με 60. Αυτό όμως είναι μικρότερο του  $112/\sqrt{3}$  — δηλαδή του εμβαδού που βρήκαμε όταν λύσαμε το πρόβλημα.

Το πρόβλημα λοιπόν δεν έχει λύση; Από τη διατύπωση του προβλήματος δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η προβολή της κορυφής της πυραμίδας βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο του εγγεγραμμένου στο  $ABCD$  κύκλου. Μπορούμε να συμπεράνουμε μόνο ότι βρίσκεται σε ένα σημείο που ισαπέχει από τις ευθείες  $AB, BC, CD, DA$ , και ότι η απόσταση αυτή ισούται με



Σχήμα 8

$7/\sqrt{3}$ . Το σημείο αυτό είναι δυνατόν να βρίσκεται έξω από το  $ABCD$ . Ας το συμβολίσουμε με  $O_1$  (Σχήμα 9). Τότε, μπορούμε να εκφράσουμε το εμβαδόν του  $ABCD$  ως άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων  $ABO_1$  και  $BCO_1$  (τα οποία είναι ίσα) μείον το εμβαδόν των τριγώνων  $CDO_1$  και  $ADO_1$  (που είναι επίσης ίσα). Δηλαδή, ισούται με  $(10 - 6) \cdot 7\sqrt{3} = 28/\sqrt{3}$ . Επομένως, ο όγκος



Σχήμα 9

της πυραμίδας είναι  $196/\sqrt{3}$ .

### Gradus

**Πρόβλημα 1.** Αν θέσουμε  $x = 1$ , η τιμή του  $150x^2 - 77x - 73$  γίνεται 0. Επομένως το  $x - 1$  είναι παράγοντας του. Αν χρησιμοποιήσουμε διαιρεση πολυωνύμων, βρίσκουμε εύκολα ότι ο άλλος παράγοντας είναι το  $150x + 73$ .

**Πρόβλημα 2.** Το δεδομένο πολυώνυμο μηδενίζεται για  $x = -1$ . Συνεπώς, ο ένας παράγοντας είναι το  $x + 1$  και ο άλλος βγαίνει να είναι το  $x^2 + 14x + 1$ .

**Πρόβλημα 7.** Το πολυώνυμο μηδενίζεται για  $x = -1$ . Αυτό μας επιτρέπει να βρούμε την παραγοντοποίηση

$$(x + 1)(x^2 + (a - 1)x + 1).$$

**Πρόβλημα 8.** Αφού το πολυώνυμο μηδενίζεται για  $x = a$ , ο ένας παράγοντας είναι το  $x - a$ . Έτσι έχουμε την παραγοντοποίηση

$$(x - a)(x^2 + 2a).$$

**Πρόβλημα 9.** Το πολυώνυμο μηδενίζεται όταν  $x = y$  και, επομένως, έχουμε την παραγοντοποίηση

$$(x - y)(x^3 - 5x^2y - 5xy^2 - y^3).$$

**Πρόβλημα 11.** Αφού  $(a - b)^3 = -(b - a)^3$ , η παράσταση μηδενίζεται όταν  $a = b$  καθώς επίσης και όταν  $a = c$  και  $b = c$ . Επομένως, μπορούμε άλλη μια φορά να γράψουμε

$$\begin{aligned} & (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 \\ & = (a - b)(a - c)(b - c)M, \end{aligned}$$

όπου  $M$  πολυώνυμο των  $a, b, c$ . Αν και δεν φαίνεται με την πρώτη ματιά, η αρχική παράσταση είναι δευτεροβάθμια (και όχι τριτοβάθμια) ως προς  $a$  και το ίδιο ισχύει για την παράσταση

$$(a - b)(a - c)(b - c).$$

Φυσικά, το ίδιο ισχύει (λόγω συμμετρίας) ως προς τα  $b$  και  $c$ . Επειτα λοιπόν ότι το  $M$  είναι μια σταθερά, και με κατάλληλες αριθμητικές αντικαταστάσεις (δοκιμάστε  $a = 3, b = 2, c = 1$ ) βρίσκουμε ότι  $M = -3$ .

**Πρόβλημα 12.** Η παράσταση μηδενίζεται αν  $a = -b$ , αν  $a = -c$  και αν  $b = -c$ . Επομένως έχει τους παράγοντες  $(a + b)(b + c)(a + c)$ . Με την ίδια επιχειρηματολογία που χρησιμοποιή-

σαμε στα προηγούμενα προβλήματα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} & (a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) \\ & = 3(a + b)(a + c)(b + c). \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 13.** Αν χρησιμοποιήσουμε την υπόδειξη, βρίσκουμε ότι η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς  $x$ . Επιπλέον, αληθεύει για  $x = a, x = b, x = c$ . Αν δύο από αυτές τις τιμές είναι ίσες, τότε το αριστερό μέλος της εξίσωσης δεν έχει νόημα, οπότε θεωρούμε ότι είναι διαφορετικές ανά δύο. Επομένως, αναζητούμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση που ικανοποιείται από τις διαφορετικούς αριθμούς και, άρα, είναι ταυτότητα.

**Πρόβλημα 14.** Οπως και στο Πρόβλημα 13, θεωρούμε τη δεδομένη παράσταση ως εξίσωση του  $x$ . Αυτή είναι και πάλι δευτεροβάθμια. Η εξίσωση επαληθεύεται όταν  $x = a, b$  ή  $c$ , και το ίδιο ακριβώς επιχειρήμα όπως στο Πρόβλημα 13 μάς οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

**Πρόβλημα 15.** Θα αποδείξουμε ότι και οι δύο προτάσεις του προβλήματος (για τον εκθέτη  $m$  και τον εκθέτη  $n$ ) ισοδυναμούν με την πρόταση ότι υπάρχουν δύο «αντίθετοι» αριθμοί μεταξύ των  $a, b, c$  (δηλαδή  $a = -b$  ή  $b = -c$  ή  $c = -a$ ). Είναι προφανές ότι, αν το σύνολο  $\{a, b, c\}$  περιέχει δύο αντίθετους αριθμούς, τότε για κάθε περιττό εκθέτη  $k$  ισχύει

$$\frac{1}{a^k + b^k + c^k} = \frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k}.$$

Ας αποδείξουμε το αντίστροφο.

Χρησιμοποιούμε την υπόδειξη και υποθέτουμε ότι η τριτοβάθμια εξίσωση

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

έχει ρίζες τις  $a^k, b^k$  και  $c^k$ . Τότε, αφού

$$\frac{1}{a^k + b^k + c^k} = \frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k},$$

προκύπτει ότι  $r = pq$  (διότι  $p = a^k + b^k + c^k, q = a^kb^k + b^kc^k + c^ka^k, r = a^kb^kc^k$ ) και, ουνεπώς, η εξίσωση έχει τη μορφή

$$x^3 - px^2 + qx - pq = 0.$$

Το αριστερό μέλος μηδενίζεται όταν  $x = p$  και, επομένως, ισούται με

$(x-p)(x^2-q)$ . Άρα, μία από τις ρίζες της εξισώσης είναι η  $x=p$ . Αυτό σημαίνει ότι η παράσταση  $a^k+b^k+c^k$  παίρνει μία από τις τιμές  $a^k$ ,  $b^k$  ή  $c^k$ . Αν  $a^k+b^k+c^k=a^k$ , τότε  $b^k+c^k=0$  και, επομένως,  $b^k=-c^k$  και (αφού το  $k$  είναι περιττό)  $b=-c$ . Σε παρόμοιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν  $a^k+b^k+c^k=b^k$  ή  $c^k$ .

Αν δυσκολεύεστε να παρακολουθήσετε αυτή τη λύση, δοκιμάστε πρώτα να διατυπώσετε το πρόβλημα για την περίπτωση που  $m=1$  και αντιμετωπίστε μετά τη γενική περίπτωση.

**Πρόβλημα 16.** Μέθοδος I, με χρήση της Υπόδειξης 1. Όταν  $x=-(y+z)$  βρίσκουμε, έπειτα από απλές πράξεις, ότι το πολυώνυμο μηδενίζεται. Επομένως, το  $(x+y+z)$  είναι ένας παράγοντάς του, ενώ τον άλλο μπορούμε να τον βρούμε αν εκτελέσουμε διαίρεση των πολυωνύμων.

Μέθοδος II, με χρήση της Υπόδειξης 2. Αν εκτελέσουμε τις πράξεις βρίσκουμε ότι πράγματι το

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ισούται με την

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

Αν τώρα κάνουμε πράξεις με τις ορίζουσες, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x+y+z & y & z \\ x+y+z & x & y \\ x+y+z & z & x \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & x \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz). \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 17.** Όπως και στο Πρόβλημα 16 γράφουμε

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη στήλη με 100, τη δεύτερη με 10 και προσθέσουμε τα αποτελέσματα στην τρίτη στήλη, θα βρούμε

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100a + 10b + c & b & c \\ 100c + 10a + b & a & b \\ 100b + 10c + a & c & a \end{vmatrix}$$

και, επομένως,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \begin{vmatrix} abc & b & c \\ cab & a & b \\ bca & c & a \end{vmatrix}$$

Εφόσον όλοι οι αριθμοί  $\overline{abc}$ ,  $\overline{bca}$  και  $\overline{cab}$  διαιρούνται με τον  $n$ , το ίδιο σχέζει για το  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ .

## Αληθογραφία

Αξιότιμοι κύριοι

Στο τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1998 απολαύσαμε και θαυμάσαμε μια θεαματική και εντυπωσιακή λύση του προβλήματος M127. Θα ήθελα να προτείνω ακόμη μία λύση, περισσότερο «ταπεινή»:

Το  $ABCD$  είναι παραλληλόγραμμο. Το τρίγωνο  $ADM$  είναι ισοσκελές, διότι και η  $\angle AMD = 70^\circ$ . Άρα,  $AD = AM = BC = d$ . Στο τρίγωνο  $BCM$  είναι  $\angle BMC = 110^\circ$  (Σχήμα 10).

Η  $MH$  είναι πρόεκταση της  $AM$ . Άρα  $\angle CHM = \angle DAM = 40^\circ$ . Η  $\angle BCM = 50^\circ$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $CMH$ . Άρα,  $\angle CMH = 10^\circ$ . Η  $MF$  είναι πρόεκταση της  $BM$ . Η  $\angle CMF$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $BCM$ . Άρα,  $\angle CMF = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$ . Τότε  $\angle EMF = \angle CMF - \angle CME$ . Έτσι  $\angle EMF = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ = \angle AMB$  (ως κατά κορυφήν). Άρα  $\angle CMD = 360^\circ - 70^\circ - 110^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , οπότε στο τρίγωνο  $CDM$ :

$$\angle C_1 + \angle D_1 = 60^\circ. \quad (1)$$

Το θεώρημα του ημιτόνου δίνει:  
Στο τρίγωνο  $ADM$ :

$$\begin{aligned} a/\eta\mu 40^\circ &= d/\eta\mu 70^\circ \Rightarrow \\ a &= d\eta\mu 40^\circ / \eta\mu 70^\circ. \end{aligned} \quad (2)$$

Στο τρίγωνο  $BCM$ :

$$\begin{aligned} \beta/\eta\mu 20^\circ &= d/\eta\mu 110^\circ \Rightarrow \\ \beta &= d\eta\mu 20^\circ / \eta\mu 110^\circ. \end{aligned} \quad (3)$$

Διαιρώ τη (2) με την (3), και έχω:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\beta} &= \frac{d\eta\mu 40^\circ / \eta\mu 110^\circ}{d\eta\mu 20^\circ / \eta\mu 70^\circ} = \frac{\eta\mu 40^\circ}{\eta\mu 20^\circ} \\ &= \frac{2\eta\mu 20^\circ \sin 20^\circ}{\eta\mu 20^\circ}. \end{aligned}$$

Άρα,  $a/\beta = 2\sin 20^\circ$ , (4)  
διότι  $\eta\mu 110^\circ = \eta\mu 70^\circ$ . Το θεώρημα του ημιτόνου στο τρίγωνο  $CDM$  δίνει:  $a/\eta\mu C_1 = \beta/\eta\mu D_1$ , και λόγω της (4) είναι  $\eta\mu C_1/\eta\mu D_1 = a/\beta = 2\sin 20^\circ$ .  
Αλλά λόγω της (1) είναι:

$$\begin{aligned} \angle C_1 + \angle D_1 &= 60^\circ \Rightarrow \angle C_1 = 60^\circ - \angle D_1 \\ &\Rightarrow \eta\mu C_1 = \eta\mu(60^\circ - \angle D_1). \end{aligned}$$

Άρα  $\eta\mu(60^\circ - \angle D_1)/\eta\mu D_1 = 2\sin 20^\circ$ , απ' όπου

$$\begin{aligned} \eta\mu 60^\circ \sin D_1 - \sin 60^\circ \eta\mu D_1 \\ = 2\sin 20^\circ \eta\mu D_1. \end{aligned}$$

Διαιρώ με  $\sin D_1 \eta\mu 60^\circ - \sin 60^\circ$   
 $\epsilon\phi D_1 = 2\sin 20^\circ \epsilon\phi D_1$ :

$$\epsilon\phi D_1 = \frac{\eta\mu 60^\circ}{2\sin 20^\circ + \sin 60^\circ}$$

$$= \frac{\eta\mu 3(20^\circ)}{2\sin 20^\circ + \sin 3(20^\circ)},$$

$$\begin{aligned} \epsilon\phi D_1 &= \frac{3\eta\mu 20^\circ - 4\eta\mu^3 20^\circ}{2\sin 20^\circ + 4\sin^3 20^\circ - 3\sin 20^\circ} \\ &= \frac{3\eta\mu 20^\circ - 4\eta\mu^2 20^\circ}{\sin 20^\circ 4\sin^2 20^\circ - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Αλλά } 3 - 4\eta\mu^2 20^\circ = 3 - 4(1 - \sin^2 20^\circ) = 4\sin^2 20^\circ - 1.$$

Άρα  $\epsilon\phi D_1 = \eta\mu 20^\circ / \sin 20^\circ = \epsilon\phi 20^\circ$ , οπότε  $\angle D_1 = 20^\circ$  και  $\angle ADC = 90^\circ$ .

Επομένως, το  $ABCD$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Θέτω  $AB = CD = t$ . Στο τρίγωνο  $BCM$  είναι:  $d/\eta\mu 110^\circ = \beta/\eta\mu 20^\circ$ . Στο τρίγωνο  $CDM$  είναι  $t/\eta\mu 120^\circ = \beta/\eta\mu D_1 = \beta/\eta\mu 20^\circ$ .

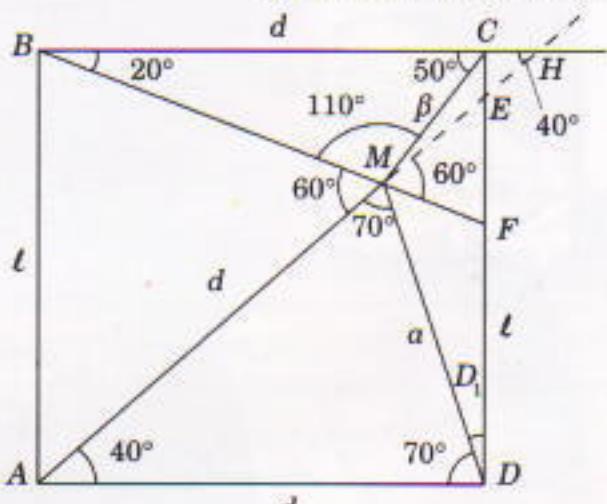
$$\text{Άρα } \frac{d}{t} = \frac{\eta\mu 110^\circ}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{\eta\mu(90^\circ + 20^\circ)}{\eta\mu(90^\circ + 30^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ} > 1 (= 1.085).$$

Αυτή είναι η σχέση μεταξύ των πλευρών  $d$  και  $t$  για να υπάρχει μέσα στο  $ABCD$  σημείο όπως το  $M$ . (Υπάρχουν δύο τέτοια σημεία.)

Σας ευχαριστώ

Μιχαήλ Γ. Μούκας, φυσικός,  
καθηγητής ΤΕΙ Θεσσαλονίκης,  
Τμήμα Ηλεκτρονικής.



Σχήμα 10

# Η παλιά σιταποθήκη

Το αναγεννημένο τέχνημα της βιομηχανίας ζάχαρης

Δρ. Χμ

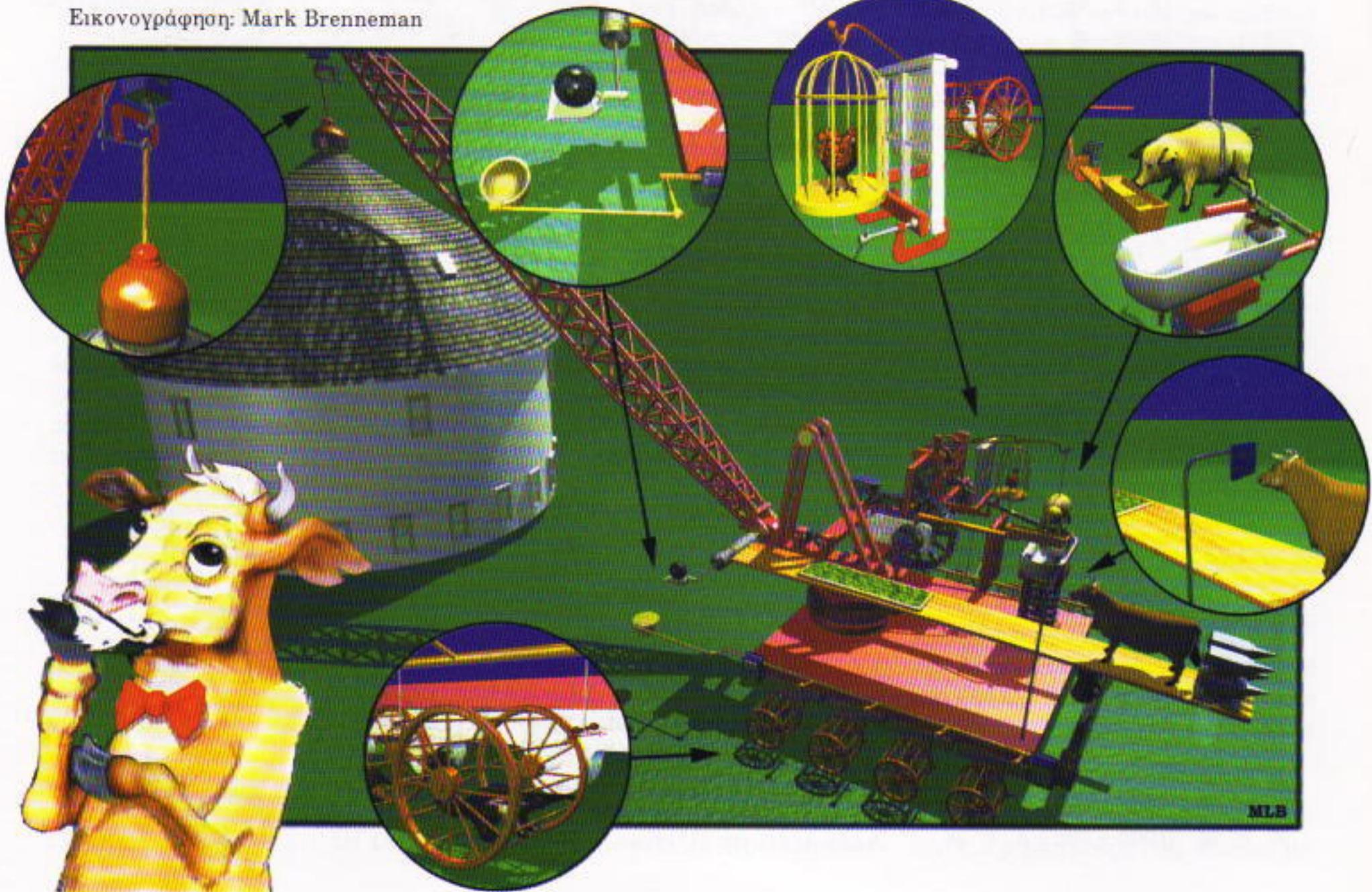
**Κ**ΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη του *Quantum* που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά.

Αυτή τη χρονιά συμπληρώνονται εκατόν πενήντα χρόνια από την ίδρυση της Πολιτείας του Ουισκόνσιν και, όπως λέει και ο κύριος Πωλ, αυτή η επέτειος μας δίνει την ευκαιρία να θυμηθούμε το παρελθόν μας και όλους αυτούς που μετανάστευσαν πρώτοι σε τούτη τη γόνιμη γη για να κερδίσουν τα προς το ζειν. Οι στόχοι τους ήταν μετριοπαθείς:

1. Καλές σοδειές,
2. Σωστή αποθήκευση,
3. Επικερδές ζωικό κεφάλαιο,
4. Μια σταθερή αγορά και
5. Μια όσο το δυνατόν καλύτερη ζωή.

Αυτοί ήταν τουλάχιστον οι στόχοι του Wesson Joseph Dougan, όπως τους έγραψε πάνω στο σιλό του το καλοκαίρι του 1911, όταν ολοκλήρωσε την κατασκευή μιας υπέροχης σιταποθήκης στο γαλακτοκομείο του στο Μπέλοϊτ. Δύο γενιές Dougan έζησαν μια καλή ζωή παραδίδοντας το γάλα τους στα μωρά του Μπέλοϊτ.

Εικονογράφηση: Mark Brenneman



Σήμερα, η σιταποθήκη του Dougan, όπως και τόσες άλλες στην περιοχή του Ουισκόνσιν, είναι φθαρμένη, χτυπημένη από τον καιρό, και αδρανής. Έχει χάσει το χρώμα της, αλλά όχι τη γοητεία της ή τους υποστηριχτές της. Μάλιστα, οι «Φίλοι της σιταποθήκης» σχεδιάζουν να τη διασώσουν και να την αποκαταστήσουν στην αρχική της μορφή. Θα πρέπει να τη μετακινήσουν από το σημείο που βρίσκεται σήμερα σε έναν χώρο δίπλα στο Πολιτειακό Κέντρο Πληροφόρησης του Ουισκόνσιν. Εκεί, οι επισκέπτες της πολιτείας θα μπορούν να σταματήσουν και να θαυμάσουν αναγεννημένο ένα όμορφο τέχνημα της βιομηχανίας γάλακτος.

## Περί κίνησης

Ας εξετάσουμε μια τυπική κίνηση Move της σιταποθήκης

```
Move = {{1, 1}, {2, 1}, {3, 1}, {3, 2},
{4, 2}, {5, 2}, {6, 2}, {7, 2}, {7, 3},
{7, 4}, {7, 5}, {7, 6}, {8, 6}, {8, 7},
{8, 8}, {8, 9}, {9, 9}, {10, 9}, {10, 10},
{10, 11}, {10, 12}, {10, 13}, {10, 14},
{10, 15}, {10, 16}, {11, 16}, {12, 16},
{13, 16}, {14, 16}, {15, 16}, {16, 16},
{17, 16}, {18, 16}, {19, 16}, {19, 17},
{19, 18}, {20, 18}, {20, 19}, {20, 20}};
```

Για κάθε κίνηση στο Mathematica ορίζουμε τις **hill**, **valley**, **jump** και **length**. Η τιμή της **hill** είναι η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ του «υψόμετρου» κάθε θέσης που εμφανίζεται στην κίνηση και του αρχικού «υψόμετρου». Η **valley** μετρά, ως αρνητικό αριθμό, τη μεγαλύτερη πτώση στο υψόμετρο. Δηλαδή, έχουμε

```
hill = Max[DF[[#[[1]], #[[2]]]] - DF[[1, 1]]
&/@ Move]
```

6

και

```
valley = Min[DF[[#[[1]], #[[2]]]] -
DF[[1, 1]] &/@ Move]
```

-10

Η **jump** μετρά τη μεγαλύτερη αύξηση ή μείωση μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων της Move.

```
jump = Max[Abs[#[[1]] - #[[2]]]&@
Partition[DF[[#[[1]], #[[2]]]]&/@ Move, {2}, {1}]]
```

4

Τέλος, η **Length** μετρά το συνολικό πλήθος των βημάτων της Move.

```
Length[Move]]
```

39

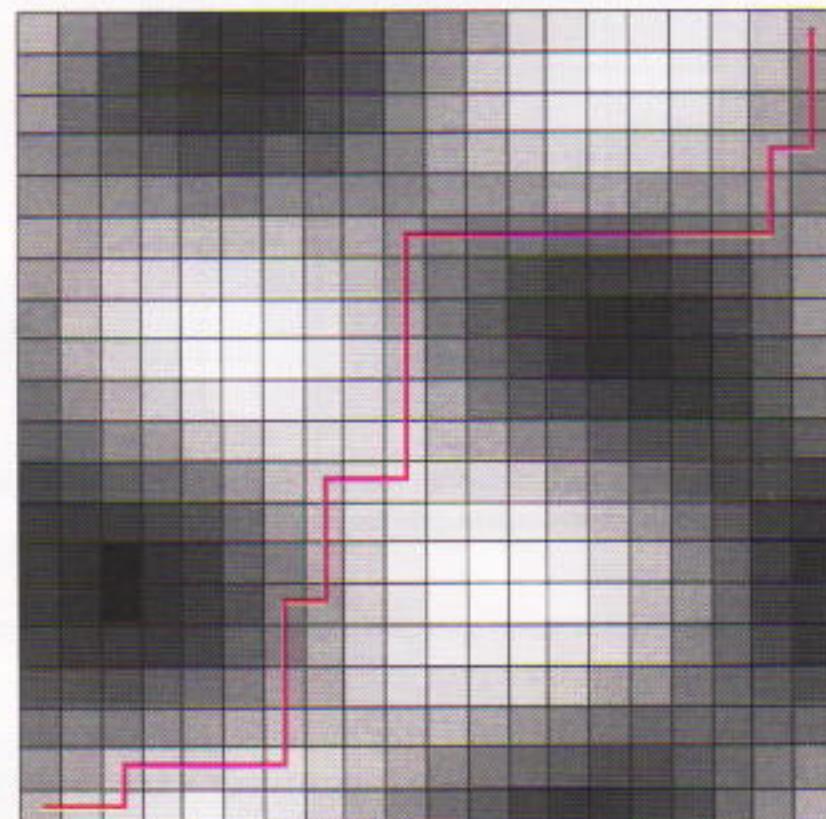
Τα συνδυάζουμε όλα αυτά ορίζοντας μια ομαλή συνάρτηση για κάθε κίνηση:

```
smooth[Move_] := Module[{hill, valley, slope},
```

```
hill = Max[DF[[#[[1]], #[[2]]]] -
DF[[1, 1]] &/@Move];
valley = Min[DF[[#[[1]], #[[2]]]] -
DF[[1, 1]] &/@Move];
jump = Max[Abs[#[[1]] - #[[2]]]&@
Partition[DF[[#[[1]], #[[2]]]]&/@ Move, {2}, {1}]];
Print["{hill, valley, jump, length} = ",
{hill, valley, jump, Length[Move]}]]
```

Εμφανίζουμε την κίνηση μέσω της **Show**:

```
Show[elevations, Graphics[{Thickness[.01],
RGBColor[1, 0, 0], Line[Move -.5]}]],
smooth[Move]]
```



Για την περίπτωση που σκεφτήκατε ότι είναι εύκολο να εξετάσετε όλες τις δυνατές κίνησεις, σας πληροφορούμε ότι υπάρχουν περισσότερες από τριάντα πέντε δισεκατομμύρια κίνησεις με το ελάχιστο δυνατό μήκος. Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το πλήθος με τη συνάρτηση **Binomial** του Mathematica.

```
Binomial[38, 19]
```

35345263800

## ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 11

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει την ομάδο τερηρίτηρη κίνηση για τη σιταποθήκη του Dougan.

## Λύση του Ιπποπροβλήματος 9

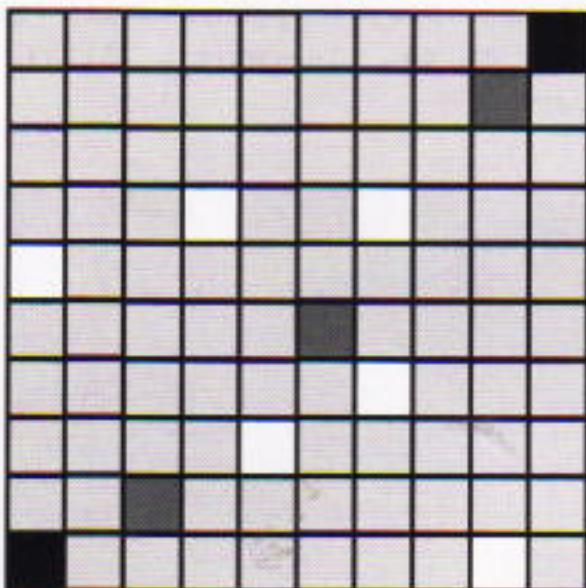
Στο Ιπποπρόβλημα 9 σάς ζητήθηκε να υπολογίσετε το πλήθος εκείνων των διαδρομών από το αγρόκτημα έως την κωμόπολη που περνάνε από όλους τους πελάτες και αφεύγουν όλες τις χιονοστιβάδες, ενώ πλησιάζουν πάντα προς την κωμόπολη. Το αγρόκτημα έχει τοποθετηθεί στο {1, 1} και η πόλη στο {10, 10}.

```
Customers = {{2, 3}, {5, 6}, {9, 9}};
```

```

snowdrifts = {{3, 5}, {4, 7}, {1, 9}, {7, 4},
{7, 7}, {6, 1}};
n = 10;
road[1, 1] = 0;
road[n, n] = 0;
road[x_, y_] := 1 /; MemberQ[customers, {x, y}]
road[x_, y_] := 3 /; MemberQ[snowdrifts, {x, y}]
road[x_, y_] = 2
CreamCounty = Array[road, {n, n}];
ListDensityPlot[CreamCounty, Frame -> False]

```



Υπόμνημα δρόμων: μαύρο = αγρόκτημα και κωμόπολη, άσπρο = χιονοστιβάδα, σκούρο γκρι = πελάτες, ανοικτό γκρι = όλοι οι άλλοι.

Τα βασικά σημεία που πρέπει να παρατηρήσουμε για τη λύση είναι τα εξής:

- (1) Αν ένας πελάτης βρίσκεται στο  $(i, j)$ , τότε δεν υπάρχουν διαδρομές που να περνάνε από αυτόν και από τα  $\{x, y\}$  για τα οποία  $(x < i \text{ και } y > j)$  ή  $(x > i \text{ και } y < j)$ . Σχεδιάστε αυτές τις περιοχές στο χαρτί για να πειστείτε ότι έτσι έχει η κατάσταση.
- (2) Δεν υπάρχουν διαδρομές που διέρχονται από τις χιονοστιβάδες.

(3) Υπάρχει μία διαδρομή από το  $(1, 1)$  (το αγρόκτημα) προς τις θέσεις που βρίσκονται κατευθείαν προς ανατολάς και προς τα βόρεια του.

(4) Αν  $\text{routes}[x, y] = 0$  πλήθος των διαδρομών που διέρχονται από το  $\{x, y\}$ , τότε  $\text{routes}[x, y] = \text{routes}[x - 1, y] + \text{routes}[x, y - 1]$ , διότι ο μοναδικός τρόπος να περάσουμε από το  $\{x, y\}$  είναι να προερχόμαστε από το  $\{x - 1, y\}$  ή το  $\{x, y - 1\}$ .

Βάσει αυτών των παρατηρήσεων, η λύση κατασκευάζεται στο Mathematica ως εξής:

(a) Ορίζουμε το κατηγόριμα `noRoutesQ` που ελέγχει κατά πόσο ισχύει ή όχι στο σημείο  $\{x, y\}$  η (1). (Το  $\wedge$  συμβολίζει το ΚΑΙ, το  $\vee$  συμβολίζει το Ή.)

```

noRoutesQ[x_, y_, i_] := (x < customers
[[i, 1]]  $\wedge$  y > customers[[i, 2]]  $\vee$ 
(x > customers[[i, 1]]  $\wedge$  y < customers
[[i, 2]])

```

(β) Θέτουμε  $\text{routes}[x, y] = 0$  σε όλες τις θέσεις  $\{x, y\}$  όπου η `noRoutesQ` είναι αληθής για κάποιον πελάτη.

(γ) Θέτουμε μηδενικά στις χιονοστιβάδες.

(δ) Ορίζουμε την αναδρομική σχέση μεταξύ των διαδρομών που διέρχονται από το  $\{x, y\}$  και από αυτές που διέρχονται από τα  $\{x - 1, y\}$  και  $\{x, y - 1\}$ .

(ε) Θέτουμε  $\text{routes}[x, y] = 1$  στα σημεία που είναι ανατολικά ή βόρεια από το αγρόκτημα.

(στ) Παρουσιάζουμε τις διαδρομές που διέρχονται από όλες τις τοποθεσίες της Cream County. Καταλήγουμε στο ότι υπάρχουν χίλιες εκατόν είκοσι δύο διαδρομές προς την κωμόπολη.

```

Clear[routes]
routes[x_, y_] := 0 /; Or @@
Table[noRoutesQ[x, y, i], {i, 3}]
routes[x_, y_] := 0 /; MemberQ[snowdrifts,
{x, y}]
routes[x_, y_] := 1 /; x == 1 [Or] y == 1
routes[x_, y_] := routes[x, y] = routes[x
- 1, y] + routes[x, y - 1]
Reverse[Array[routes, {n, n}]] // MatrixForm

```

0	0	0	0	0	0	0	0	561	1122
0	0	0	0	0	33	66	198	561	561
0	0	0	0	0	33	33	132	363	0
0	0	0	0	0	33	0	99	231	0
0	0	0	0	0	33	66	99	132	0
0	0	3	12	21	33	33	33	33	0
0	0	3	9	9	12	0	0	0	0
0	0	3	6	0	3	0	0	0	0
1	2	3	3	3	3	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

## KAI TÉPОС...

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Λύσεις των παλαιότερων προβλημάτων μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση <http://usaco.uwp.edu/cowculations>. Αν σας ενδιαφέρουν διαγωνισμοί με θεματολογία παρόμοια της παρούσας στήλης, μπορείτε να ανατρέξετε στη διεύθυνση <http://usaco.uwp.edu>, στη σελίδα της Ολυμπιάδας Υπολογιστών των ΗΠΑ.

Με την ευκαιρία να αναφέρουμε ότι η στήλη «Ιππολογισμοί» ξεκίνησε στο τεύχος Ιανουαρίου / Φεβρουαρίου 1997. Ο συγγραφέας της, ο Δρ. Χρ., έχει σπουδάσει με ιπποτροφία στους Στάβλους του Πανεπιστημίου του Ουινσκόνσιν, όπου σήμερα εργάζεται ως καθηγητής της επιστήμης των ιππολογιστών. □