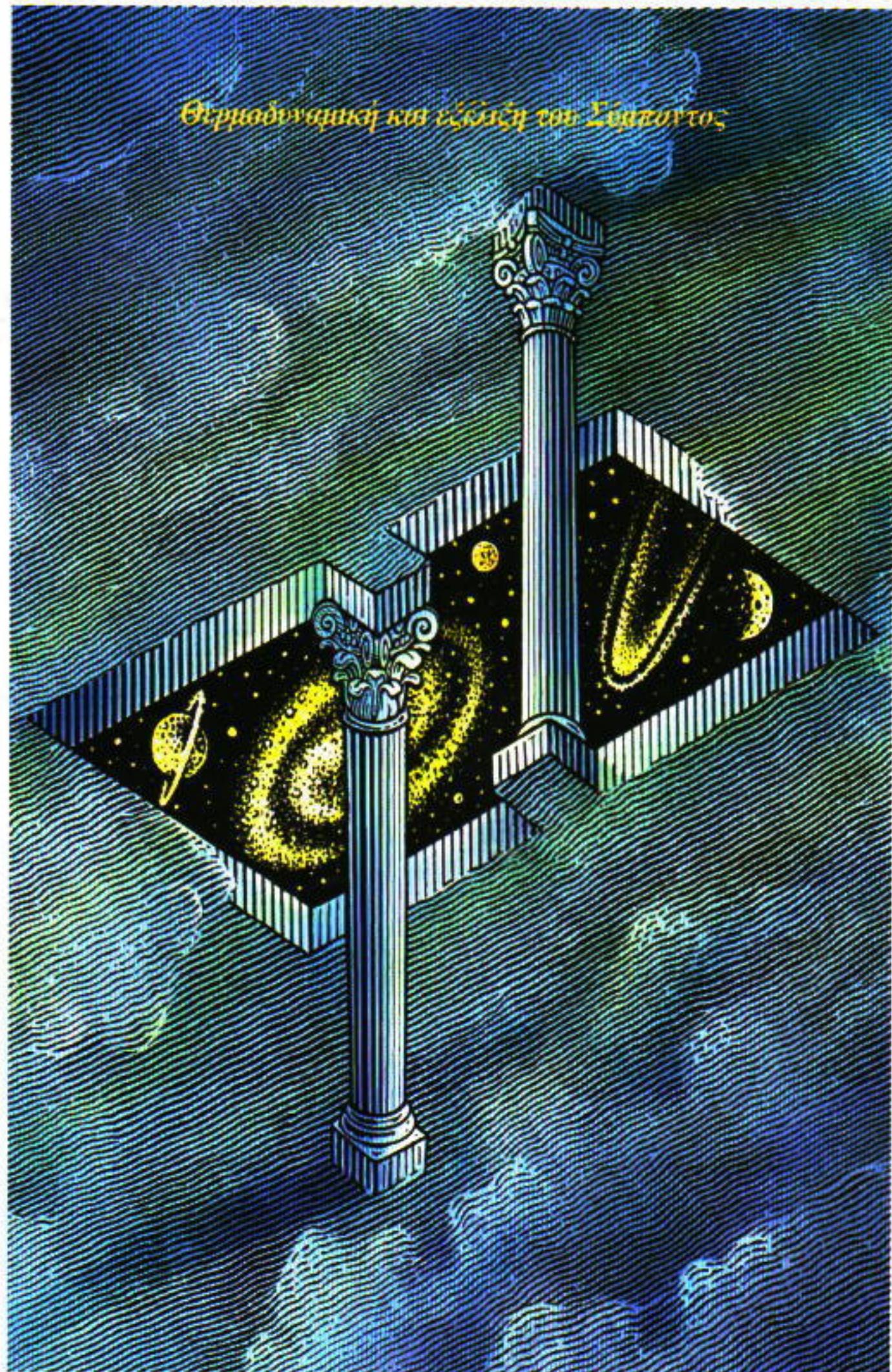


# QUANTUM

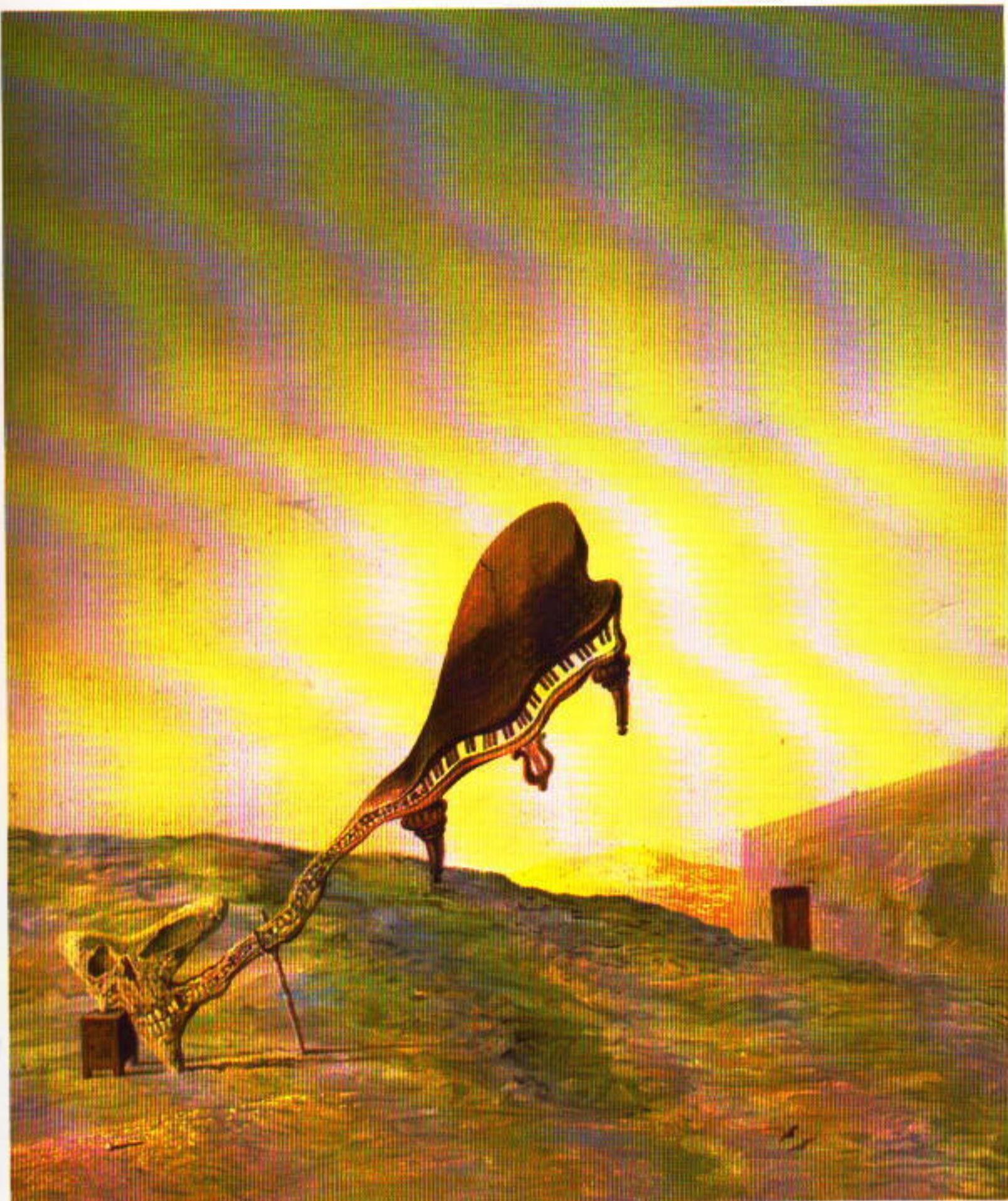
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1998  
ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 3  
1.700 ΔΡΧ.

Θερμοδιναμική και εξόπλη των Σύμπολτος



- *Ramanujan: ο εμπνευσμένος μαθηματικός από την Ινδία*
- *Η ουράνια χρωματική παλέτα*
- *Ασυνήθιστες μαθηματικές πράξεις*
- *Συζευγμένες ταλαντώσεις*
- *Ενδιαφέροντα σημεία στο τρίγωνο*
- *Οι οδυνηρές συνέπειες του συντονισμού*
- *Περπάτημα πάνω στο νερό και σε γαλάνιες προδήμες*
- *Η συμμετρία στην άλγεβρα*



Λάδι σε μουσαρά, 180 × 230 εκ., Συλλογή του Μουσείου Salvador Dalí, Σαιντ Πητερσμπεργκ, Φλόριντα.

*Κρανίο με το λυρικό του προσάρτημα στηριζόμενο σ' ένα κομοδίνο που έχει την ακριβή θερμοκρασία της φωλιάς ενός πορφυρού πουλιού (1934), του Salvador Dalí*

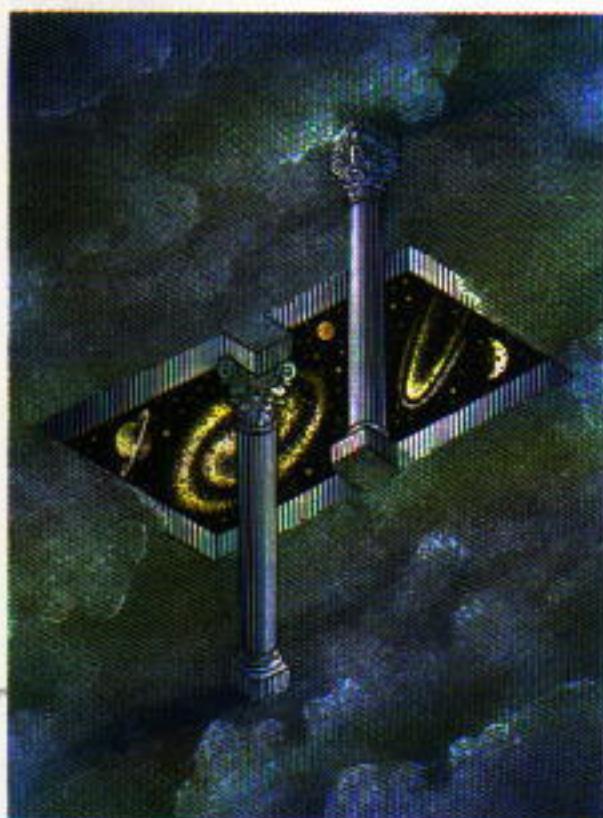
**Θ**ΥΜΑΣΤΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΠΙΑΝΟΥ ΠΟΥ ΣΑΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑ-  
ζαν οι γονείς σας να παρακολουθήσετε όταν ήσασταν  
παιδί; Ένας αδιόρατος φόβος σας πλημμύριζε την καρδιά,  
που σαν «αντηχείο» παλλόταν σε συντονισμό με τις χορ-  
δές του πάνου. Ιως πάλι τα μαθήματα αυτά να σας ήταν  
απλώς βαρετά· μήπως όμως δεν έχουν, από άλλες εμπει-  
ρίες, αποτυπωθεί στη μνήμη σας κάποιες περισσότερο ρε-

αλιστικές (σε αντίθεση με τις οουρεαλιστικές) απειλές για  
τη ζωή σας; Εν πάσῃ περιπτώσει, η κουβέντα αυτή μοιάζει  
άχαρη: ωστόσο, προκειμένου να ανακαλύψετε γιατί ένας  
διάδρομος προσγείωσης μπορεί μια μέρα να κάνει την καρ-  
διά σας να «αντηχήσει» από τρόπο, γυρίστε στη σελίδα 49  
και διαβάστε το άρθρο «Οι οδυνηρές συνέπειες του συντο-  
νισμού».

# QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση: Istvan Orosz

Η διαστολή του Σύμπαντος αποτελεί καυτό θέμα συζήτησης από τις αρχές του αιώνα. Πολλές θεωρίες έχουν αναπυχθεί για να εξηγήσουν πώς η βαρύτητα και άλλοι παράγοντες επιδρούν τόσο στη διαστολή όσο και στη συστολή του Σύμπαντος.

Ωστόσο, η επισταμένη εξέταση των θεωριών αυτών αποκαλύπτει κάποιες αντιφατικές όψεις, όπως και στο σχέδιο του εξωφύλλου μας, οι οποίες μας εμποδίζουν να σχηματίσουμε σαφή εικόνα τού τι ακριβώς ισχύει για το Σύμπαν.

Στη σελίδα 12 μπορείτε να διαβάσετε περισσότερα για τις μακροχρόνιες προσπάθειες των επιστημόνων να συμφωνήσουν για τη δημιουργία και την εξέλιξη του Σύμπαντος· πρόκειται για μια θερμή αντιπαράθεση.

## ΑΡΘΡΑ

- 5 Σοφία πέρα από τα καθιερωμένα  
**Το φαινόμενο Ramanujan**  
S.G. Gindikin
- 12 Κοσμολογικές θεωρήσεις  
**Το θερμοδυναμικό Σύμπαν**  
I.D. Novikov
- 18 Φυσική και κίνηση  
**Περιπατώντες επί τα ύδατα**  
K. Bogdanov
- 24 Εναλλακτική αριθμητική  
**Αριθμητικές περιπλανήσεις**  
E. Egorov και A. Kofova
- 38 Επιτραπέζια φυσική  
**Αιωρείται ένα μολύβι κατά την πτώση του;**  
Leaf Turner και Jane Pratt

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 **Ο κόσμος των κβάντων**  
Ο θρίαμβος του εμβρύου
- 17 **Σπαζοκεφαλίες**
- 29 **Στο μαυροπίνακα I**  
Ενδιαφέροντα σημεία
- 33 **Σκόπελοι**  
Γιατί ο ουρανός είναι γαλάζιος;
- 36 **Καλειδοσκόπιο**  
Κανόνες κατασκευών
- 43 **Πώς λύνεται;**
- 44 **Αναδρομές**  
Επαναστατική διδασκαλία
- 49 **Στο μαυροπίνακα II**  
Οι οδυνηρές συνέπειες του συντονισμού
- 52 **Στα πεδία της φυσικής**  
Περί στροφικής κινήσεως
- 56 **Στο εργαστήριο**  
Εκκρεμή που κατασκευάζονται στο σπίτι
- 62 **Gradus ad Parnassum**  
Η συμμετρία στην άλγεβρα
- 64 **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 70 **Ιππολογισμοί**

# Ο θρίαμβος του εμβρύου

«Ας ορκισθούμε πως δεν θα πεθάνουμε ποτέ.»

—Νίκος Εγγονόπουλος

Lewis Wolpert

**Π**ΩΣ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ ΤΟ ΩΑΡΙΟ, ΚΑΤΙ έτσι μικρό και πληκτικό, να σχηματίζει ένα πολύπλοκο ανθρώπινο ον; Πού βρίσκεται ο μηχανισμός ο οποίος μετατρέπει αυτό το μικρό κύτταρο σε ιστούς του σώματος; Πώς μπορούν τα γονίδια, δηλαδή το κληρονομικό υλικό, να ελέγξουν τις διαδικασίες αυτές και πώς παράγουν την καταπληκτική ποικιλία της ζωής; Ιδού ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της βιολογίας! Η πρόσφατη πρόοδος, ιδιαίτερα συναρπαστική, φέρνει την έρευνα κοντά στις απαντήσεις.

Το γονιμοποιημένο ωάριο παράγει πληθώρα κυττάρων —μερικά δισεκατομμύρια στον άνθρωπο—, τα οποία οργανώνονται σε δομές όπως είναι τα μάτια, οι μύτες, τα χέρια, οι καρδιές και οι εγκέφαλοι. Πώς άραγε εμπεριέχονται οι δομές αυτές, ή τουλάχιστον τα σχέδια κατασκευής τους, στο ωάριο; Προφανώς είναι αδύνατον να βρίσκονται προσχηματισμένες μέσα του —η ανάπτυξη δεν συντελείται απλά μέσω της επέκτασης ενός προϋπάρχοντος προτύπου. Ακόμη κι αν αφαιρεθούν τμήματα από ένα πρώιμο έμβρυο, αυτό μπορεί να ρυθμίσει τις απώλειες και να αναπτυχθεί φυσιολογικά παρά την αναστάτωση.

Για να κατανοήσουμε την ανάπτυξη πρέπει να στραφούμε τόσο στα κύτταρα όσο και στα γονίδια: την κατανούμε καλύτερα με όρους κυτταρικής συμπεριφοράς που ελέγχεται από γονίδια. Τα κύτταρα είναι οι βασικές μονάδες του αναπτυσσόμενου εμβρύου.

Το ωάριο διαιρείται και πολλαπλασιάζεται σχηματίζοντας διάφορα είδη κυττάρων: τα μυϊκά κύτταρα, τα νευρικά κύτταρα, τα κύτταρα του αμφιβληστροειδούς φακού, του δέρματος κ.ο.κ. Ο οργανισμός μας διαθέτει περιπου διακόσια πενήντα διαφορετικά είδη κυττάρων. Ωστόσο, η ανάπτυξη είναι κάτι περισσότερο από την παραγωγή κυττάρων διαφορετικών ειδών. Τα κύτταρα πρέπει να υποστούν το σχηματισμό προτύπων και τη μορφογένεση. Ας αναφέρουμε ένα παράδειγμα: υπάρχουν δομές όπως τα πάνω και τα κάτω άκρα· τόσο τα μεν όσο και τα δε περιέχουν κύτταρα με μεγάλες ομοιότητες. Αυτό αφορά το σχηματισμό προτύπων, ο οποίος προσδίδει σε κάθε κύτταρο μια χωροθεσική ταυτότητα ώστε να αναπυχθεί με τον πρόσκοντα τρόπο. Πρόκειται για την οργάνωση στο χώρο, για το πώς θα τοποθετηθούν οστά και μύες στη σωστή θέση ώστε τα πάνω άκρα να διαφέρουν από τα κάτω· ή οι φτερούγες μιας νυχτερίδας να διαφέρουν από τις φτερούγες των πτηνών. Η μορφογένεση, από την άλλη, έχει να κάνει με τους φυσικούς μηχανισμούς που αλλάζουν τη μορφή του εμβρύου. Για παράδειγμα, ο εγκέφαλός μας έχει αρχικά τη μορφή μιας επίπεδης κυτταρικής στιβάδας, η οποία προοδευτικά καμπύλωνται και σχηματίζει ένα σωλήνα. Αυτό συμβαίνει με ενεργές κινήσεις των κυττάρων και με μεταβολές στην ικανότητά τους να προσκολλώνται το ένα στο άλλο. Σε γενικές γραμμές, ο

σχηματισμός προτύπων προηγείται της μορφογένεσης και υποδεικνύει στα κύτταρα πού πρέπει να αλλάξουν σχήμα ή να μεταβάλλουν την προσκόλλησή τους.

Πράγματι, αυτό που μας διακρίνει από τα άλλα σπονδυλωτά είναι μάλλον η διαφορά ως προς το σχηματισμό προτύπων —άρα ως προς την οργάνωση στο χώρο— παρά οι καθεαυτοί διαφορετικοί κυτταρικοί τύποι. Ενώ υπάρχουν μικρές μόνο διαφορές μεταξύ των κυττάρων των χεριών, για παράδειγμα, και του εγκεφάλου των σπονδυλωτών, αυτό που έχει μεγάλη σημασία είναι η οργάνωσή τους στο χώρο.

Κατά την ανάπτυξη τα κύτταρα πολλαπλασιάζονται, μεταβάλλουν το χαρακτήρα τους, ασκούν δυνάμεις και ανταλλάσσουν σήματα. Όλες αυτές οι δραστηριότητες ελέγχονται από τη γενετική πληροφορία των γονιδίων, τα οποία περιέχονται στο DNA των χρωμοσωμάτων. Το DNA είναι ένα μάλλον παθητικό και σταθερό χημικό μόριο: καταφέρνει να ελέγχει την κυτταρική συμπεριφορά έχοντας τον έλεγχο της κατασκευής των πρωτεΐνων μέσα στο κύτταρο. Οι πρωτεΐνες είναι οι μάγιοι που «κινούν τα νήματα» στο κύτταρο: ελέγχουν τόσο τις χημικές του αντιδράσεις όσο και τις δομές του. Στην πραγματικότητα, κάθε κύτταρο χαρακτηρίζεται από τις ειδικές πρωτεΐνες που διαθέτει. Οι πρωτεΐνες προκαλούν τις κυτταρικές κινήσεις, καθορίζουν το σχήμα του κυττάρου και του δίνουν τη δυνατότητα να πολλαπλασιά-

**ζεται.** Κάθε κύτταρο έχει το δικό του σύνολο πρωτεΐνων — τα ερυθροκύτταρα την αιμοσφαιρίνη, τα κύτταρα του παγκρέατος την ισνουλίνη, κ.λπ. Εφόσον όμως το DNA περιέχει τις πληροφορίες κατασκευής όλων των πρωτεΐνών, και εφόσον κάθε πρωτεΐνη είναι κωδικοποιημένη σ'ένα γονίδιο, η παρουσία μιας πρωτεΐνης σ'ένα δεδομένο κύτταρο εξαρτάται από το εάν το αντίστοιχο γονίδιο λειτουργεί ή όχι. Επομένως, η έναρξη και η διακοπή της λειτουργίας των γονιδίων αποτελούν το κεντρικό στοιχείο της διαδικασίας της ανάπτυξης, αφού αυτές ελέγχουν ποιες πρωτεΐνες κατασκευάζονται και συνεπώς ποια είναι η αντίστοιχη κυτταρική συμπεριφορά. Κάθε κύτταρο περιέχει τις ίδιες γενετικές πληροφορίες που υπήρχαν στο ωάριο, οι διαφορές όμως που παρατηρούνται μεταξύ των κυττάρων είναι αποτέλεσμα της λειτουργίας ή μη διαφορετικών γονιδίων.

Πώς άραγε προκύπτουν αυτές οι διαφορές στη δραστηριότητα των γονιδίων; Μερικές οφείλονται στο γεγονός ότι το ωάριο δεν είναι τόσο πληκτικό δύο υπέθεσα αρχικά. Για παράδειγμα, στους βατράχους και τις μύγες υπάρχουν ειδικές πρωτεΐνες σε ειδικές περιοχές του ωαρίου: τοποθετούνται εκεί από τη μητέρα, κατά τη διάρκεια της ωογένεσης. Όταν λοιπόν το ωάριο διαρρεθεί, ορισμένα κύτταρα παραλαμβάνουν μια πρωτεΐνη, ορισμένα άλλα μιαν άλλη, και οι πρωτεΐνες αυτές έχουν τη δυνατότητα να ενεργοποιήσουν πολύ διαφορετικά γονίδια. Ωστόσο, αυτές οι διαφορές στο ωάριο καθορίζουν μάλλον χονδρικά τις διαφορετικές περιοχές: η μέθοδος που χρησιμεύει κυρίως για το σχηματισμό προτύπου του εμβρύου είναι η κυτταρική επκοινωνία. Τα ανθρώπινα έμβρυα φαίνεται ότι χρησιμοποιούν αποκλειστικά την ενδοκυτταρική επικοινωνία, επειδή τίποτε δεν συνηγορεί στη σκέψη ότι στο ανθρώπινο ωάριο υπάρχουν διαφορές ανάμεσα σε κάποιες περιοχές του. Και, φυσικά, η ικανότητα των εμβρύων να ρυθμίζουν την ανάπτυξή τους — να συνεχίζουν να αναπτύσσονται κανονικά ακόμη και όταν υφίστανται διαταράξεις — οπωδήποτε προϋποθέτει την ύπαρξη κυτταρικής επικοινωνίας, διότι πώς αλλιώς θα κατάφερνε το έμβρυο να αναπληρώσει, λόγου χάρη, τις απώλειες;

Τότε όμως, πώς άραγε τα κύτταρα του εμβρύου γνωρίζουν τι ακριβώς πρέπει να κάνουν; Εν μέρει, η απάντηση στο ερώτημα αυτό υπάρχει: στηρίζονται στο ότι «γνωρίζουν» σε ποια θέση βρίσκονται. Αυτό θα γίνει αρκετά κατανοητό αν μιλήσουμε όχι για έμβρυα — τα οποία είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα — αλλά για σημαίες. Άς σταθούμε λίγο στην εικόνα της γαλλικής σημαίας. Φανταστείτε ότι υπάρχει μια σειρά κυττάρων, καθένα από τα οποία μπορεί να εξελιχθεί σε «μπλε», «άσπρο» ή «κόκκινο» κύτταρο. Στην περίπτωση αυτή, ποιος μηχανισμός άραγε θα μπορούσε να δημιουργήσει με ακρίβεια το σχέδιο της γαλλικής σημαίας, δηλαδή το πρώτο τρίτο της σειράς των κυττάρων να γίνει «μπλε», το επόμενο τρίτο «άσπρο» και το τελευταίο τρίτο «κόκκινο»; Το συγκεκριμένο παράδειγμα δεν απέχει πολύ από το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα κύτταρα στο πρώτο έμβρυο. Στα πρώτα στάδια της ανάπτυξης το έμβρυο διαιρείται σε διάφορες περιοχές, οι οποίες θα διαμορφώσουν δομές όπως ο σκελετός και οι μύες, το στομάχι και το δέρμα.

Υπάρχουν διάφορες λύσεις γι' αυτό το πρόβλημα. Πιθανόν όμως η πλέον γενική και ενδιαφέρουσα να είναι ότι κάθε κύτταρο χρειάζεται αναγκαστικά μια ταυτότητα που να καθορίζει τη θέση του. Εάν τα κύτταρα «γνωρίζουν» τη θέση τους σε σχέση με την άκρη της σειράς, τότε, χρησιμοποιώντας τις γενετικές οδηγίες που περιέχουν, και που είναι οι ίδιες σε κάθε κύτταρο, θα μπορέσουν να υπολογίσουν σε ποιο τρίτο του σχεδίου ανήκουν, και επομένως να εξελιχθούν σε «μπλε», «άσπρα» ή «κόκκινα» κύτταρα. Ένας τρόπος λειτουργίας αυτού του συστήματος θα μπορούσε να είναι η ύπαρξη κάποιου βαθμωτής συγκέντρωσης μορίου — ενός μορφογόνου — κατά μήκος της σειράς: «διαβάζοντας» τη συγκέντρωση του μορφογόνου, τα κύτταρα θα μπορούσαν να πληροφορηθούν τη θέση τους. Υψηλότερη συγκέντρωση θα αντιστοιχούσε στην ανάπτυξη «κόκκινων» κυττάρων κ.ο.κ. Ακόμη γενικότερα, εάν υποθέσουμε ότι τα κύτταρα έχουν ειδικές θέσεις και πώς διαθέτουν γενετικές οδηγίες για το τι ακριβώς πρέπει να κάνουν σε κάθε θέση, τότε θα μπορούσε να δημιουργηθεί πλήθωρα διαφορετικών προτύπων.

Ένα όμορφο παράδειγμα του πώς σημαίνεται η θέση των κυττάρων μπορεί να δοθεί μέσα από ένα κλασικό πειράμα της αναπτυξιακής βιολογίας που γίνεται στα πρώιμα στάδια ανάπτυξης του βατράχου. Το εμβρυϊκό πρότυπο αρχικά καθορίζεται από τις επιφανειακές στιβάδες του οφαερικού εμβρύου που προκύπτει από τη διαιρεση του ωαρίου. Αυτό ουσιαστικά παράγει ένα διοδιάστατο πρότυπο, και περιοχές όπως είναι εκείνες που θα σχηματίσουν το στομάχι και το σκελετό βρισκούνται ακόμη στο εξωτερικό του εμβρύου. Στη συνέχεια, οι περιοχές αυτές μετατοπίζονται προς το εσωτερικό με μια διαδικασία που ονομάζεται γαστριδίωση. Το σημείο στο οποίο οι εν λόγω επιφανειακές περιοχές εισέρχονται στο εσωτερικό του εμβρύου αποτελεί μια περιοχή σημάνσεως, που ευθύνεται για τη διαμόρφωση του βασικού προτύπου του κεντρικού άξονα του σώματος. Αν αυτή η περιοχή μεταρριζεύεται σ'ένα άλλο έμβρυο, είναι ικανή να χορηγήσει στον ξενιστή το σήμα και να επάγει την ανάπτυξη ενός πλήρους νέου εμβρύου, με κεφαλή και σώμα.

Άλλο ένα παράδειγμα χωροθεσικής σημάνσεως είναι η ανάπτυξη των μελών. Η περιοχή που χορηγεί το σήμα βρίσκεται στην οπίσθια παρυφή του αρχικού εξογκώματος από το οποίο θα προέλθει το μέλος αυτή χορηγεί το σήμα για τη θέση που θα πάρουν τα δάχτυλα. Αν μεταρριζεύσουμε την εν λόγω περιοχή στην πρόσθια παρυφή κάποιου άλλου αρχικού εξογκώματος, το σήμα της θα προκαλέσει την ανάπτυξη ενός μέλους με δύο σειρές δάχτυλων — η μια κατοπτρικό είδωλο της άλλης. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της τοποθέτησης του σηματού με μια κατοπτρική διαβάθμιση πυκνότητας ενός μορφογόνου.

Τα κύτταρα χρειάζονται να καταγράψουν και να διατηρήσουν στη μνήμη τους τη χωροθεσική τους ταυτότητα. Πολλές μελέτες που αφορούν τα πρώιμα στάδια της ανάπτυξης των εντόμων οδηγήσαν σε θαυμαστές επιτυχίες ως προς τον εντοπισμό των γονιδίων που ευθύνονται για το σχηματισμό του εμβρύου σύμφωνα μ'ένα προτύπο. Αποκαλύφθηκε ότι η ταυτότητα των διαφόρων τμημάτων του σώματος των εντόμων ελέγχεται από γο-

νίδια που έχουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και ονομάζονται ομοιωτικά. Εάν τα ομοιωτικά γονίδια υποστούν μεταλλάξεις, τότε παρατηρούνται μετατροπές ενός τρήματος του σώματος σ' ένα άλλο, όπως η μετατροπή της κεραίας μιας μύγας σε πόδι. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ομοίωση. Όλα τα ομοιωτικά γονίδια περιέχουν μια κοινή μικρή περιοχή γνωστή ως ομοιωτικό κουτί (αλληλουχία 180 νουκλεοτίδων). Είναι αξιοσημείωτο ότι γονίδια που περιέχουν ομοιωτικό κουτί υπάρχουν και σε όλα τα άλλα ζώα, στα οποία φαίνεται ότι έχουν αντίστοιχη αποστολή: να καταγράφουν τη χωροθεσική ταυτότητα. Υπάρχει ένα καλά ορισμένο πρότυπο της έκφρασης των ομοιωτικών γονίδιων κατά μήκος του κυρίου άξονα του σώματος, γνωστό στον ποντικό και στο βάτραχο, το οποίο φαίνεται ότι προσδίδει τη χωροθεσική ταυτότητα στα κύτταρα του εμβρύου. Αν τα γονίδια αυτά δεν εκφρασθούν στη συστή τους θέση, τότε τα πλευρά ή τα άκρα, για παράδειγμα, ενδέχεται να σχηματισθούν σε λάθος θέση. Χρειαζόμαστε, όμως, ακόμη πολλή δουλειά για να κατανοήσουμε ζητήματα όπως το πώς περνάμε από τα σήματα και τα ομοιωτικά γονίδια στα πέντε δάχτυλα του χεριού, με την πολύπλοκη διάταξη μυών, οστών και τενόντων.

Οσο κι αν μια μύγα φαίνεται διαφορετική σε σύγκριση μ' έναν ποντικό ή έναν άνθρωπο, η πρόσφατη πρόοδος της μοριακής εμβρυολογίας δείχνει ότι τα ζώα αυτά αναπτύσσονται με παρόμοιους μηχανισμούς: χρησιμοποιούν μάλιστα γι' αυτό και παρόμοια γονίδια. Υπάρχουν πλέον ενδείξεις ότι τα γονίδια και τα σήματα που οχηματίζουν σύμφωνα μ' ένα πρότυπο της φρούγες της μύγας και τα μέλη των σπονδυλωτών εμφανίζουν μεγάλες ομοιότητες. Φαίνεται ότι για την τροποποίηση της κυτταρικής συμπεριφοράς κατά την ανάπτυξη ευθύνονται λεπτές διαφορές στα γονίδια, και αυτές δημιουργούν την ποικιλότητα του ζωικού κόσμου.

**Lewis Wolpert** είναι Καθηγητής βιολογίας στο University College του Λονδίνου. Είναι μέλος της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου. Στα ελληνικά κυκλοφορεί το βιβλίο του Πάθος για τα μυρμήγκια και τ' αστέρια: η αθέατη πλευρά της επιστήμης.

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,  
με τη συμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντιπατέλλων έκδοσης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές συνταξης:

Yuri Ossipyan, Προεδρος, Γραφείο Κvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόρτικ (Φυσική), Πανεπιστήμιο της Χαρβάρντ

William P. Thurston, Μεταλλίο Φιλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπερκλέϊ

Διευθυντές συνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές συνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Συμβουλος Υπολογιστών, Σχολή των Μπρονξί, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιμυντάκτης

Kenneth L. Roberts

Αντιπατέλλων μηχανιστής

Mike Donaldson

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Sergey Ivanov

Συμβουλια συνταξης

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Irina Oleynik, Αρχιουνιπάτιρη, Γραφείο Κvant

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khouri, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιόνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λοκείο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητήρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Κολεγίο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Λοκείο του Ρίβερντιέ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνιδιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κεντρικό Θετικόν Επιστημών και Μαθηματικών, Λανσινγκ, Μίτσιγκαν

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης / Διευθυντής

Αλέκος Μαραλής

Μεταφραστής και Επιστροφική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργαστικά οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός, Χάρης Καζλαρής -βιολόγος,

Μιχάλης Λαμπρου -μαθηματικός, Θεόδωρος Πιερράτος -φυσικός, Γιώργος Μαλάμης -βιολόγος,

Γιώργος Κατσιλιέρης -φυσικός και Αλέκος Μάραλης -φυσικός

Τυπογραφικές διαφορώνεις

Μαρία Τσαούση

Τυποτεχνική επιμέλεια

Θανάσης Ντούσης

Υπεύθυνη λογιστήριος

Μαρία Μαραλή

Ιδρυτικός διευθυντής συνταξης και Ειδικός αντριγράφης: Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Επιστροφικοί απαρτούτοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επικουρός καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Επικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ιεργια Τεχνολογίας και Ερευνας

Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επικουρός καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στογγειοθεοί, σελιδοποιητής

Α.Β. Μαχαριδής

Φωτ., μονταζ.

Γ. Κεραμάς

Εκτυπωση

N. Πουλοπούλος

Βιβλιοθεοί

Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται από την ΗΠΑ από την Εκδοτική οίκο Springer και από την Ελλάδα από την Εκδόσεις Κάτοπτρο

Υπεύθυνος για την ελληνική εκδοση συμφωνα με το νόμο: Α. Μαραλής

Quantum, διεργατικό περιοδικό, ISSN: 1106-2681.

Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Α. Μ. Μαραλής

Διαφορημένες και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,

Ισταύρων 10 και Δαφνονήπηλη 114 71 Αθηνα.

ηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864

Βιβλιοπωλείο: Νέα από Αρετάκην (Παντεπιστήμιο 49),

105 64 Αθήνα, ηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση της μεταδοση με οποιοδή-

ποτε μέσον ολου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την

εγγραφή άδεια του εκδότη

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

Ετηνια ουνδρομή: 9.000 δρχ. για ιδιοτέλεια, 16.000 δρχ. για

βιβλιοθήκες, εβρίτιμη και οργανισμοί

Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλ

# Το φαινόμενο Ramanujan

Ο εμπνευσμένος μαθηματικός από την Ινδία

S.G. Gindikin

**Σ**ΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 1913 Ο ΚΑΘΗΓΗΤής του Πανεπιστημίου του Καμπριτζ Godfrey H. Hardy έλαβε μια επιστολή από το Μαντράς της Ινδίας. Ο Hardy, μόλις 36 ετών εκείνη την εποχή, είχε ήδη γράψει μια σειρά από υπέροχα μαθηματικά άρθρα και εθεωρείτο παγκοσμίως ένας από τους καλύτερους ειδικούς στον απειροστικό λογισμό και τη θεωρία αριθμών. Αποστολέας ήταν ο Srinivasa Ramanujan, υπάλληλος στο λογιστήριο του ταχυδρομικού γραφείου του Μαντράς με μισθό που δεν ξεπερνούσε τις είκοσι λίρες ετησίως. Στην επιστολή ανέφερε ότι δεν είχε αποφοιτήσει από κάποιο πανεπιστήμιο και ότι, αφότου τελείωσε το σχολείο, είχε μελετήσει μόνος του μαθηματικά με το δικό του τρόπο χωρίς να ακολουθήσει το παραδοσιακό σύστημα.

Μια επιστολή αυτού του είδους δεν θα είχε, κατά πάσα πιθανότητα, εντυπωσιάσει τον Hardy, μαζί της όμως υπήρχε και ένας κατάλογος τύπων τους οποίους ο Ramanujan πρότεινε για δημοσίευση, αν τους έβρισκε ενδιαφέροντες ο Hardy (ο ίδιος ο Ramanujan δεν μπορούσε να τους δημοσιεύσει εξαιτίας της φτώχειας του). Ο Hardy, όταν εξέτασε τους τύπους, ενθουσιάστηκε. Κατάλαβε ότι βρισκόταν μπροστά σ' ένα εξαιρετικό ταλέντο. Απάντησε στον Ramanujan με μια επιστολή που εξέφραζε το ενδιαφέρον του έτσι, ξεκίνησε μια έντονη αλληλογραφία μεταξύ τους (είναι εντυπωσιακό το πόσο γρήγορα ταξίδευαν τα ταχυδρομικά μηνύματα μεταξύ Αγγλίας και Ινδίας εκείνη την εποχή). Μέσω



Η φωτογραφία από το διαβατήριο του Ramanujan, το 1919, όταν επέστρεψε στην Ινδία.

αυτής της αλληλογραφίας ο Hardy συγκέντρωσε περίπου 120 τύπους.

Οι τύποι του Ramanujan αφορούσαν κυρίως σχέσεις μεταξύ απειρων ριζικών (δείτε το Πλαίσιο 2), απειρων σειρών, γινομένων και συνεχών κλασμάτων (δείτε τα Πλαίσια 1, 3, 4) και ταυτότητες με ολοκληρώματα. Ο Hardy αναγνώρισε αμέσως ότι οι τύποι ξεπερνούσαν κατά πολύ τα όρια των στοιχειωδών μαθηματικών. Επιπλέον, προέκυπτε μια σειρά ερωτημάτων: Ήταν ήδη γνωστοί; Αν ναι, ο συγγραφέας των επιστολών τους είχε αποδείξει ανεξάρτητα; Και στην περίπτωση που δεν γνωστοί, ήταν άραγε

σωστοί; Ο Hardy συνειδητοποίησε σύντομα ότι βρισκόταν σε περίεργη θέση: αυτός, ένας κορυφαίος ειδικός στον απειροστικό λογισμό, αντιμετώπιζε μια συλλογή τύπων που του ήταν τελείως αγνωστοί.

Ο Hardy είχε εντυπωσιαστεί από τους τύπους που αφορούσαν άπειρες σειρές (Πλαίσιο 1). Μελετώντας τους, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «ο Ramanujan πρέπει να γνωρίζει κάποιο πολύ γενικότερο θεώρημα και κρατά πολλά από τα χαρτιά του κλειστά».<sup>1</sup>

Περισσότερο όμως ο Hardy είχε μείνει έκπληκτος από τις σχέσεις που αφορούσαν συνεχή κλάσματα (ένα παράδειγμα τέτοιας σχέσης, την οποία ο Ramanujan ανακάλυψε αργότερα, δίνεται στο Πλαίσιο 3). Όπως λέει ο ίδιος ο Hardy, «(αυτές οι σχέσεις) με συγκλόνισαν· δεν είχα ποτέ μου δει κάτι παρόμοιο. Μια απλή ματιά σ' αυτές αρκεί για να καταλάβεις ότι μπορεί να τις έχει γράψει μόνο ένας μαθηματικός ανώτατου επιπέδου».

## Το θαύμα από την Κουμπακόνα

Πώς έφτασε λοιπόν ο Ramanujan να γίνει ο μαθηματικός που κατέπληξε σε τέτοιο βαθμό τον Hardy; Ο Srinivasa Aiyangar Ramanujan γεννήθηκε στις 22 Δεκεμβρίου του 1887 στο χωριό Erode της νότιας Ινδίας. Πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της παιδικής

1. Τα αποσπάσματα εντός εισαγωγικών προέρχονται από το βιβλίο του Robert Kanigel *The Man Who Knew Infinity* (1991, Charles Scribner's Sons).



Το σπίτι που έζησε ο Ramanujan τα παιδικά του χρόνια στην Κουμπακόναρ της νότιας Ινδίας.

του ηλικίας στη μικρή κωμόπολη Κουμπακόναρ (260 χιλιόμετρα από το Μαντράς), όπου ο πατέρας του δούλευε λογιστής σ' ένα μικρό εμπορικό κατάστημα υφασμάτων. Ο Ramanujan ανήκε στην κάστα των Βραχμάνων, αλλά ο πλούτος της οικογένειάς του είχε χαθεί πριν από πολύ καιρό. Οι γονείς του, ειδικά η μητέρα του, ήταν εξαιρετικά θρήσκοι και ο Ramanujan ανατράφηκε ακολουθώντας ποιτά τις παραδόσεις της κάστας του. Το μεγάλωμα σε μια πόλη όπου κάθε πέτρα συνδέεται με την αρχαία θρησκεία και ανάμεσα σε ανθρώπους που ανήκαν στην υψηλότερη κάστα διαδραμάτισε σημαντικότατο ρόλο στην ανάπτυξη του Ramanujan ως μαθηματικού.

Ο Ramanujan πήγε σχολείο όταν ήταν 5 ετών και ολοκλήρωσε τη στοιχειώδη εκπαίδευση στην ηλικία των 10. Εκείνη την εποχή άρχισε να φανερώνει δείγματα εξαιρετικού ταλέντου και κέρδισε μια υποτροφία που κάλυπτε το ήμισυ των διδάκτρων. Όταν ο Ra-

manujan ήταν 14 ετών, ένας σπουδαστής από το Μαντράς του χάρισε τους δύο τόμους του *Οδηγού Τριγωνομετρίας* του Loney. Σύντομα, ο Ramanujan έμαθε τριγωνομετρία τόσο καλά ώστε μπορούσε να βοηθά το σπουδαστή στη λύση προβλημάτων. Οι πρώτες διηγήσεις και θρύλοι για τον Ramanujan αναφέρονται σ' αυτή την περίοδο της ζωής του. Για παράδειγμα, λέγεται ότι ανακάλυψε μόνος του τον τύπο του Euler και απογοητεύτηκε ιδιαίτερα όταν τον βρήκε στο δεύτερο τόμο του βιβλίου του Loney.

Ο Ramanujan πίστευε ότι τα μαθηματικά, όπως και κάθε άλλη επιστήμη, έκρυβαν στην ουσία τους μια «ανώτερη αλήθεια», την οποία θα έπρεπε να αναζητήσουμε και να ρωτήσουμε τους δασκάλους μας γι' αυτήν. Οι δάσκαλοι, όμως, του απαντούσαν μόνο με ελάχιστα πειστικές αναφορές στο πυθαγόρειο θεώρημα και στα ποσοστά ως αναλογίες.

Η δίτομη *Σύνοψη στοιχειωδών αποτελεσμάτων των Καθαρών και Εφηρμοσμένων Μαθηματικών*, που γράφτηκε από τον άγγλο μαθηματικό George Shoobridge Carr το 1880-1886, έπεισε στα χέρια του Ramanujan το 1903, όταν ήταν 16 ετών. Η επίδραση του βιβλίου στη μαθηματική ανάπτυξη του Ramanujan ήταν τεράστια. Περιείχε 6.165 θεωρήματα και τύπους, που παραθέτονταν μαζί με ελάχιστες επεξηγήσεις και χωρίς καμία σχεδόν απόδειξη. Το βιβλίο ήταν αφιερωμένο

κατά κύριο λόγο στην άλγεβρα, την τριγωνομετρία, τον απειροστικό λογισμό και την αναλυτική γεωμετρία.

Σύμφωνα με ανθρώπους που γνώριζαν τον Ramanujan εκείνη την εποχή, το βιβλίο του Carr παρακίνησε το νεαρό μαθηματικό να αποδείξει μόνος του όλους τους τύπους. Τα αντικείμενα του ενδιαφέροντός του βαθμιαία μεταβάλλονταν. Ασχολήθηκε με μαγικά τετράγωνα και προσπάθησε να τετραγωνίσει τον κύκλο (σύμφωνα μ'ένα θρύλο, υπολόγισε το π με τέτοια ακρίβεια που επέτρεπε τη μέτρηση του μήκους του ισημερινού με σφάλμα μόνο 1 ή 2 μέτρων). Τέλος, στράφηκε στις απειροσειρές. Από εκείνη τη στιγμή άρχισε να ζει με τα αληθινά μαθηματικά.

Το βιβλίο του Carr βοήθησε ιδιαίτερα στο σχηματισμό των απόψεων του Ramanujan για τα μαθηματικά. Η επιρροή του όμως είχε και μια άλλη συνέπεια: λόγω της έλλειψης αυστηρών αποδείξεων στο βιβλίο, ο Ramanujan ανάπτυξε μάλλον περιεργες μεθόδους απόδειξης της μαθηματικής αλήθειας. Πέραν τούτου, ζώντας στην Ινδία, δεν μπορούσε να βρει κατάλληλα εγχειρίδια που θα τον δίδασκαν τον αυστηρό συλλογισμό. Ο Hardy, σχολιάζοντας τον τρόπο με τον οποίο ο Ramanujan αποδείκνυε την ορθότητα ενός τύπου, αναφέρει: «Οι ιδέες του σχετικά με το τι είναι μαθηματική απόδειξη ήταν εξαιρετικά νεφελώδεις. Σε όλα τα αποτελέσματά του, καινούργια ή παλιά, ορθά ή εσφαλμένα, είχε καταλήξει μέσω μιας διαδικασίας ανάμιξης συλλογισμών, έμπνευσης και επαγωγής, την οποία του ήταν αδύνατον να πε-

### Πλαίσιο 1. Ένα άπειρο άθροισμα που υπολόγισε ο Ramanujan.

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}$$

Αυτός ο υπέροχος τύπος υπήρχε στον κατάλογο που συνόδευε την πρώτη επιστολή του Ramanujan. Ο Hardy πέρασε πολύ καιρό διερωτώμενος πώς είναι δυνατόν το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ , όπου το  $a_n$  δίδεται από την

$$a_n = (-1)^n (4n+1) \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^3,$$

να είναι ίσο με  $2/\pi$ . Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα κομπουτεράκι για να πειστείτε ότι ο τύπος ισχύει ως κατά προσέγγιση ισότητα. Δεν υπάρχει στοιχειώδης μέθοδος απόδειξης της ακριβούς ισότητας.

## Πλαίσιο 2. Απείρως επαναλαμβανόμενα ριζικά.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}}=3.$$

Ο Ramanujan βρήκε αυτό τον όμορφο τύπο όταν ήταν ακόμη μαθητής, γράφοντας τη σειρά των προφανών ισοτήτων

$$n(n+2)=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}=\dots$$

και αντικαθιστώντας  $n = 1$ . Το ερώτημα αν έχουμε δικαίωμα να περάσουμε στο όριο δεν τον απασχόλησε. Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να αποδείξουν με τον ίδιο τρόπο τον εξής παρόμοιο τύπο:

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\dots}}}}=4.$$

ριγράψει με συνέπεια».

Η ζωή του Ramanujan ως μαθηματικού καθορίστηκε σχεδόν απόλυτα κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Ποτέ δεν άλλαξε την κατεύθυνση της έρευνάς του ή τον τρόπο σκέψης του. Είναι σίγουρα ατυχές το γεγονός ότι ο Ramanujan εξελίχθηκε σ' ένα τόσο σκληρό περιβάλλον. Κάτω από διαφορετικές περιστάσεις είναι βέβαιο ότι θα είχε πάρει καλύτερη μαθηματική εκπαίδευση. Μπορούμε, όμως, να είμαστε βέβαιοι ότι θα είχε γίνει ένας τέτοιος μοναδικός στοχαστής; Θα είχε καταλάβει ή ανακαλύψει τόσα πολλά αν είχε διδαχτεί από νωρίς τους κανόνες της μαθηματικής συμπεριφοράς, αν δημοσίευε αυστηρές αποδείξεις των αποτελεσμάτων του, και αν στήριζε τους συλλογισμούς του όχι σ' ένα μικρό σχετικά σύνολο γεγονότων αλλά στο σύνολο των ανθρώπινων γνώσεων;

## Από τους αριθμούς στους τύπους

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του τρόπου με τον οποίο προσέγγιζε ο Ramanujan τα μαθηματικά διαμορφώθηκε από το συνδυασμό του αρχικού αποθέματος μαθηματικών γεγονότων (που έμαθε από το βιβλίο του Carr) και ενός μεγάλου πλήθους παρατηρήσεων πάνω σε συγκεκριμένους αριθμούς. Είχε αρχίσει να συλλέγει τέτοια αριθμητικά γεγονότα από την εποχή που ήταν ακόμα παιδί. Ένας συμμαθητής του αναφέρει ότι ο Ramanujan θυμόταν ένα τεράστιο πλήθος ψηφίων από τα δεκαδικά αναπτύγματα των  $\pi$  και  $e$ . Διέθετε τη θαυμαστή ικανότητα να συνάγει αριθμητικές κα-

νονικότητες από παρατηρήσεις ενός πελώριου πλήθους αριθμητικών δεδομένων, μια τέχνη στην οποία διακρίθηκαν ο Euler και ο Gauss, αλλά που σχεδόν λησμονήθηκε με την αρχή του 20ού αιώνα.

Ο Ramanujan είχε ανακαλύψει πολλά από τα αριθμητικά δεδομένα του κάτω από τελείως καθημερινές περιστάσεις. Ο Hardy θυμόταν μια φορά που επισκέφτηκε τον Ramanujan σ' ένα νοσοκομείο και του είπε ότι το ταξί που τον έφερε είχε τον «αδιάφορο» αριθμό 1729. Ο Ramanujan διαμαρτυρήθηκε έντονα: «Μά, όχι Hardy. Είναι ένας πολύ ενδιαφέρων αριθμός. Είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους». ( $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ .)

Ο Ramanujan αύξησε αρέσως το απόθεμα γεγονότων που είχε αποκτήσει από το βιβλίο του Carr. Στη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ανακάλυπτε με εκπληκτική ταχύτητα αποτέλεσματα που ανήκαν στους Euler, Gauss και Jacobi. Το ίδιο είχε κάνει πριν από αυτόν ο νεαρός Gauss όταν ζούσε στο Μπράουνοβιγκ και, μη έχοντας πρόσβαση στη μαθηματική βιβλιογραφία, κατάφερε να βρει σε σύντομο διάστημα γεγονότα που οι παλαιότεροι μαθηματικοί χρειάστηκαν δεκατείς για να ανακαλύψουν.

Ο Ramanujan βαθμιαία εγκατέλειψε τη συλλογή των παρατηρήσεών του καθώς άρχισε να τον

συναρπάζει ο κόσμος των τύπων. Γι' αυτόν οι τύποι δεν ήταν απλώς βοηθητικά μέσα αποδείξεων ή υπολογισμών. Για τον Ramanujan, η εσωτερική ομορφιά ενός τύπου είχε άπειρη αξία.

## Επιλογή καριέρας

Το 1904 ο Ramanujan εισήχθη στο Πανεπιστήμιο του Μαντράς. Σημείωσε πρόσδοτο όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και στα αγγλικά. Όμως τα μαθηματικά είχαν αρχίσει να τον συνεπάρουν και αυτό σύντομα φάνηκε στους βαθμούς του. Δεν μπόρεσε καν να τελειώσει το πρώτο έτος του πανεπιστημίου. Έφυγε ταξίδι μ' έναν φίλο του, αργότερα προσπάθησε να επιστρέψει στο πανεπιστήμιο, και τελικά προσπάθησε να πάρει πτυχίο ως εξωτερικός φοιτητής, το 1907. Όλες όμως οι προσπάθειες υπήρξαν μάταιες.

Το 1909 ο Ramanujan παντρεύτηκε. Η σύζυγός του ήταν τότε μόνο ενέα ετών και έζησε μέχρι το 1987, κρατώντας πάντα τρυφερές αναμνήσεις από το σπουδαίο σύντροφό της. Ο



Το κοινωνικό λύκειο στην Κουμπακόναμ.



G.H. Hardy.

Ramanujan έπρεπε να εξασφαλίσει τα προς το ζειν, αλλά δεν μπορούσε να βρει κάποια κατάλληλη δουλειά. Το 1910 έδειξε τα μαθηματικά του αποτελέσματα στον Ramaswamy Iyer, τον ιδρυτή της Ινδικής Μαθηματικής Εταιρείας, και μετά στους Seshu Iyer, καθηγητή στο Κολλέγιο της Κουμπάκόναμ, και Ramachandra Rao, ένα σημαντικό κυβερνητικό λειτουργό που είχε σπουδάσει μαθηματικά στο πανεπιστήμιο. Οι τρεις τους έγιναν αργότερα βιογράφοι του Ramanujan.

Στην αρχή o Rao χρησιμοποίησε την περιουσία για να υποστηρίξει τον Ramanujan και μετά τον βοήθησε να πάρει τη θέση στο ταχυδρομικό γραφείο. Το 1911 εκδόθηκε μια μικρή αναφορά σχετικά με τα αποτελέσματα του Ramanujan, γραμμένη από τον Seshu

Iyer, και λίγο αργότερα εμφανίστηκε ένα άρθρο του ίδιου του Ramanujan. Κάποιοι άγγλοι αξιωματούχοι με επιρροή αρχίζουν να παίζουν ρόλο στην τύχη του Ramanujan. Το Μάιο του 1913 κέρδισε μια διετή υποτροφία των 75 ρουπιών (5 λίρες) το μήνα, ποσό που αρκούσε για μια λιτή ζωή. O Ramanujan εγκατέλειψε την υπαλληλική σταδιοδρομία και έγινε «επαγγελματίας μαθηματικός».

Ετοι ο Ramanujan βρήκε, αν όχι κατανόηση, κάποια αναγνώριση του έργου του από ανθρώπους του περιβάλλοντός του. Όπως είπαμε, στις αρχές του 1913 έγραψε στον Hardy. Τι περίμενε; Ήλπιζε να βρει κάποιον που θα μπορούσε να κατανοήσει και να εκτιμήσει τα αποτελέσματά του και να τον βοηθήσει να κατευθύνει τις περαιτέρω έρευνές του; Ο σκοπός του ήταν μάλλον πιο πεζός: ο Ramanujan δεν αναζητούσε την αναγνώριση ή τη φήμη, αλλά απλώς έναν τρόπο να τα βγάλει πέρα οικονομικά.

Θα πρέπει να παραδεχθούμε πως, όσον αφορά τα μαθηματικά, ο Ramanujan επέλεξε να απευθυνθεί στον κατάλληλο άνθρωπο: είναι αμφιβόλο αν υπήρχε άλλος μαθηματικός στον κόσμο που θα μπορούσε να κατανοήσει τόσο γρήγορα και με τέτοια πληρότητα τα αποτελέσματα του Ramanujan. Ο Hardy κατάλαβε σύντομα ότι έπρεπε να κάνει κάτι περισσότερο από το να εκτιμήσει απλώς τα επιτεύγματα ενός άγνωστου ερασιτέχνη —έπρεπε να σώσει ένα τεράστιο ταλέντο. Ταυτόχρονα, ο Hardy πειθόταν όλο και περισσότερο ότι ο Ramanujan είχε αποκαλύψει ένα μικρό μόνο μέρος των

μυστικών που γνώριζε. Ο Hardy πίστευε ότι ο Ramanujan είχε καταλήξει σε μερικά πολύ γενικά αποτελέσματα και παρουσίαζε μόνο κάποια ιδιαίτερα παραδείγματά τους. Αυτό όμως που απασχολούσε πραγματικά τον Hardy ήταν το γεγονός ότι δεν μπορούσε να κατανοήσει τις μεθόδους του Ramanujan. Επιθυμούσε να μάθει τις τεχνικές που είχε εφαρμόσει ο αλληλογράφος του. Όμως, ο Ramanujan αρνήθηκε πεισματικά να αποκαλύψει τη μέθοδό του. Σ' ένα γράμμα του, με ημερομηνία 27 Φεβρουαρίου του 1913, γράφει στον Hardy:

«Δεν θα μπορέσετε να ακολουθήσετε τις αποδεικτικές μου μεθόδους αν περιγράψω την πορεία που ακολουθώ σε μια απλή επιστολή. Θα ρωτήσετε ίσως πώς είναι δυνατόν να δεχθείτε αποτελέσματα που βασίζονται σε λανθασμένες ηγούμενες προτάσεις. Το μόνο που μπορώ να σας πω είναι το εξής: Ελέγχετε τα αποτελέσματα που σας δίνω και, αν συμφωνούν μ' αυτά στα οποία έχετε εσείς καταλήξει παίρνοντας το δρόμο που ακολουθούν στις μέρες μας οι μαθηματικοί, θα πρέπει τουλάχιστον να δεχθείτε ότι ίσως υπάρχει κάποια αλήθεια στη θεμελιώδη μου βάση».

Ο Hardy υπέθεσε ότι ο Ramanujan φοβόταν πως οι μέθοδοι του θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν από άλλους, και έτσι προσπάθησε να διασκεδάσει τις ανησυχίες του· όμως, η απάντηση που έλαβε στις 17 Απριλίου ήταν η εξής: «Με πλήγωσαν λίγο αυτά που μου γράψατε· ελάχιστα με ενδιαφέρει αν θα χρησιμοποιήσει κάποιος άλλος τη μέθοδό μου. Αντιθέτως, η μέθοδός μου υπάρχει εδώ και οκτώ χρό-

### Πλαίσιο 3. Αριθμητική ταυτότητα με ένα άπειρο άθροισμα και ένα συνεχές κλάσμα.

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \dots}}}}}}} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Αυτός είναι πιθανόν ο ωραιότερος τύπος του Ramanujan —ένα πραγματικό αριστούργημα υψηλής μαθηματικής τέχνης. Συνδέει μια άπειρη σειρά και ένα συνεχές κλάσμα. Το θαυμάσιο είναι ότι ούτε η σειρά ούτε το κλάσμα μπορούν να εκφραστούν μέσω των πασίγνωστων σταθερών  $\pi$  και  $e$ , αλλά μυστηριωδώς το άθροισμά τους αποδεικνύεται ίσο με  $\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$ !

#### Πλαίσιο 4. Ταυτότητα Ramanujan -Rogers.

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11}) \cdots (1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14}) \cdots}$$

Ο Ramanujan ανακάλυψε αυτή την όμορφη ταυτότητα το 1911, τότε όμως δεν μπορούσε να την αποδείξει. Και ο Hardy επίσης δεν τα κατάφερε. Το 1917, διαβάζοντας μαθηματικά περιοδικά (κάτι που έκανε σπάνια), βρήκε ένα άρθρο του 1894, γραμμένο από τον άγγλο μαθηματικό Rogers. Το άρθρο, το οποίο μέχρι τότε είχε περάσει απαρατήρητο, περιείχε μια πλήρη απόδειξη του τύπου. Αργότερα αποδείχτηκε ότι αυτή η ταυτότητα συνδέεται στενά με το πλήθος,  $p(n)$ , των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό  $n$  ως άθροισμα (δείτε το Πλαίσιο 5). Και πριν από δέκα χρόνια εμφανιστήκε στο πεδίο της στατιστικής φυσικής.

νια και δεν βρήκα ποτέ κανένα να την εκτιμήσει. Όπως σας ανέφερα στο τελευταίο μου γράμμα, έχω βρει σ' εσάς έναν αγαπητό φίλο και είμαι πρόθυμος να θέσω χωρίς επιφυλάξεις στη διάθεσή σας τα λίγα που γνωρίζω».

Ο Hardy είχε πειστεί ότι ο Ramanujan έπρεπε να γνωρίσει ενεργούς μαθηματικούς. Δεν μπορούσε όμως αυτό να γίνει όσο έμενε στην Ινδία και, επομένως, έπρεπε να έλθει αμέσως στην Αγγλία. Ο Hardy κατάφερε να βρεθεί μια υποτροφία για τον Ramanujan στο Καίμπριτζ. Άλλα έπρεπε να συμφωνήσει και ο Ramanujan, ο οποίος ήταν απόλυτα ικανοποιημένος με την κατάστασή του εκείνη την περίοδο· και υπήρχε και η μητέρα του, η συγκατάθεση της οποίας ήταν απαραίτητη, που αντιδρούσε σθεναρά στην ιδέα του ταξιδιού. Οι φίλοι του προσπάθησαν να προσελκύσουν το δημόσιο ενδιαφέρον. Ο μαθηματικός του Καίμπριτζ, Neville, ο οποίος ταξίδεψε στο Μαντράς το 1914, δραστηριοποιήθηκε έντονα γι' αυτόν το σκοπό, ζητώντας ακόμη και από τον πρύτανη του εκεί πανεπιστήμιου να υποστηρίξει τις προσπάθειές του, χωρίς όμως καμιά επιτυχία.

Άλλα ό,τι δεν κατάφεραν οι επιστήμονες, το πέτυχε εύκολα η θεά Ναμαγκίρι. Η μητέρα του Ramanujan ονειρεύτηκε το γιο της περιτριγυρισμένο από Ευρωπαίους σ' ένα αμφιθέατρο, και τη θεά να της λέει ότι δεν πρέπει να αντιτίθεται σ' αυτό το ταξίδι. Έτσι, στις 17 Μαρτίου του 1914, ο Ramanujan έφυγε για την Αγγλία. Τον περιμένε μια διετής υποτροφία 250 λιρών το χρόνο. Από το ποσό αυτό θα μπορούσε να στέλνει 50 λίρες στη μητέρα του. Μικρό διάστημα μετά την άφίξη του, η υποτροφία αυξήθηκε κατά 60 λίρες.

#### Στο Καίμπριτζ

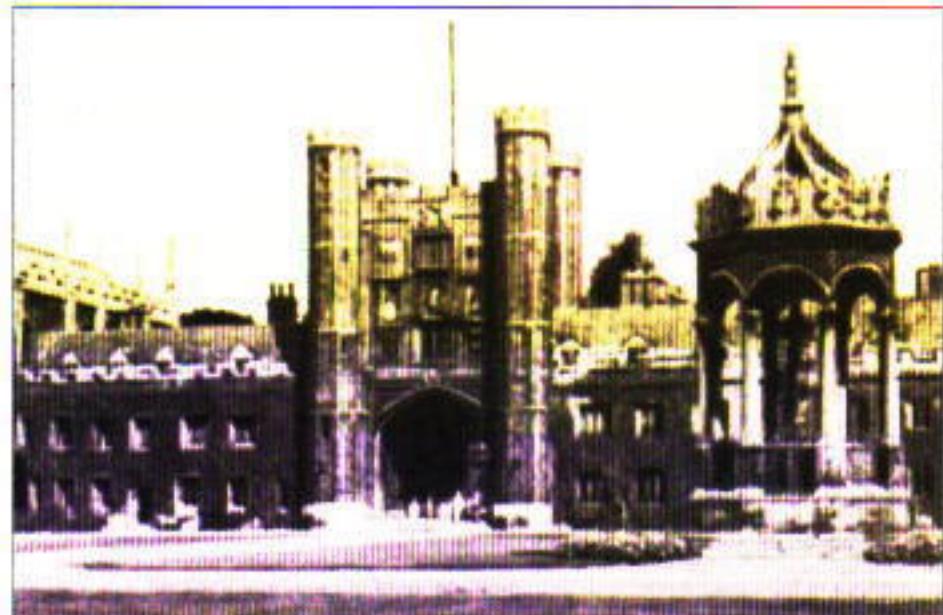
Όταν έφτασε στο Καίμπριτζ, ο Ramanujan ήταν 27 ετών. Τη σημαντικότερη για την ανάπτυξή του ως μαθηματικού περίοδο της ζωής του την είχε περάσει στην Ινδία, απομονωμένος από συβαρούς επιστήμονες και χωρίς πρόσβαση στη μαθηματική βιβλιογραφία. Οι άνθρωποι που ζουν σε διαφορετικές χώρες σε διαφορετικές περιόδους της ζωής τους πιστεύουν ότι φθάνουν στην ωριμότητα σε διαφορετικές ηλικίες. Για την Ινδία των αρχών του αιώνα μας, με το χαρηλότατο προσδόκιμο επιβίωσης, τα 27 χρόνια ήταν η ηλικία ενός ώριμου άντρα. Η χήρα του Ramanujan θυμόταν ότι στο σύζυγό της άρεσε να ασχολείται με τα ωροσκόπα και ότι το δικό του πρέβλεπε ότι θα πεθάνει πριν από τα 35.

Ο Hardy έπρεπε να πάρει μια σημαντική απόφαση: ήταν απαραίτητο να διακόψει τις μελέτες του Ramanujan προκειμένου να μάθει τα σύγχρονα μαθηματικά; Βρήκε τη μοναδική, όπως βλέπουμε εκ των υστέρων, δυνατή λύση. Αποφάσισε να μην αλλάξει το στυλ και την κατεύθυνση των ερευνών του Ramanujan αλλά να προσπαθήσει να επιφέρει κάποιες διορθώσεις λαμβάνοντας υπόψη τα σύγχρονα επιτεύγματα των μαθηματικών, δοκιμάζοντας να εξηγήσει κάτι και νούργιο και προτείνοντας την κατάλληλη βιβλιογραφία.

Ο Ramanujan δούλεψε έντονα και γόνιμα. Είχε πολλά κοινά ενδιαφέροντα με

τον Hardy. Ο συνδυασμός της υπέροχης διαισθησης του Ramanujan και των εκλεπτυσμένων μεθόδων του Hardy παρήγαγε θαυμάσια αποτελέσματα. Η αναγνώριση ήρθε για τον Ramanujan το 1918, όταν έγινε καθηγητής στο Καίμπριτζ και ο πρώτος Ινδός που εξελέγη μέλος της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου.

Δεν θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι ήταν εύκολη η ζωή του Ramanujan. Τηρούσε πιστά όλους τους περιορισμούς της θρησκείας του, όπως ακριβώς είχε υποσχεθεί στους γονείς του. Ήταν χορτοφάγος και έπρεπε να μαγειρεύει ο ίδιος το φαγητό του. Αρνήθηκε να παραβιάσει αυτούς τους περιορισμούς ακόμη και όταν αρρώστησε από φυματίωση, το 1917. Η ιδιαιτερότητα της δίαιτάς του μπορεί να επιτάχυνε την εξέλιξη της ασθένειας (σύμφωνα με τη χήρα του, και ο Ramanujan το αναγνώριζε αυτό). Ο Ramanujan πέρασε τα δύο τελευταία των χρόνια στην Αγγλία σε νοσοκομεία και σανατόρια, αναγκασμένος να



Την εποχή της γνωριμίας του με τον Ramanujan, ο Hardy ζούσε στο New Court του Trinity College.

## Πλαίσιο 5. Θεώρημα Hardy-Ramanujan.

Το θεώρημα αυτό δίνει μια προσέγγιση του πλήθους,  $p(n)$ , των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό  $n$  ως άθροισμα φυσικών αριθμών. (Για παράδειγμα,  $p(5) = 7$ , αφού  $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ .) Συγκεκριμένα,

$$p(n) \approx A_n e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3} \left( n - \frac{1}{24} \right)}},$$

όπου

$$A_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{\sqrt{6}\left(n - \frac{1}{24}\right)} - \frac{1}{2\left(n - \frac{1}{24}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

είναι συνάρτηση του  $n$ . Για παράδειγμα, όταν  $n = 200$ , αυτός ο «προσεγγιστικός» τύπος των Hardy και Ramanujan δίνει  $p(200) = 3.972.999.029.388$ . Αυτή είναι η ακριβής απάντηση! Το πλέον μυστηριώδες μέρος αυτού του τύπου είναι η μικρή «διόρθωση»  $(-1/24)$  που είχε προτείνει ο Ramanujan. Κανείς, ούτε ο Hardy ούτε καν ο Ramanujan, μπορούσε να εξηγήσει πώς εμφανίζεται. Ακόμη μια παρέμβαση της θεάς Ναμαγκίρι; Πάντως, αυτή η μυστήρια διόρθωση έκανε τον τύπο να δουλεύει. Ο Hardy και ο Ramanujan δεν σταμάτησαν όμως στον προσεγγιστικό τύπο. Αργότερα ανακάλυψαν μια ακριβή λιστή για το  $p(n)$ .

μειώσει την ένταση των μελετών του.

Ο Hardy έκανε πολλά για τον Ramanujan. Επέβλεπε τις μελέτες του, προσπαθούσε να συμπληρώσει τα κενά στη μαθηματική του εκπαίδευση, να στηρίξει την κοινωνική του θέση και να τον βοηθήσει στην καθημερινή του ζωή. Και ο Ramanujan ήταν γεμάτος ευγνωμοσύνη και αγάπη για τον Hardy.

Όταν αρρώστησε ο Ramanujan, άρχισε να σκέφτεται την ιδέα της επιστροφής στην πατρίδα του. Στις αρχές του 1919 η φυσική του κατάσταση είχε βελτιωθεί αρκετά ώστε να του επιτρέπει να κάνει το μακρύ ταξίδι. Του είχε προσφερθεί μια θέση στο Πανεπιστήμιο του Μαντράς —η φήμη του είχε φτάσει πλέον στην Ινδία. Ο Ramanujan έστειλε μια ευχαριστήρια επιστολή στον πρύτανη στην οποία του ζητούσε συγγνώμη διότι τον τελευταίο καιρό δούλευε λιγότερο εξαιτίας της ασθένειάς του. Δεν επρόκειτο όμως να αναλάβει τα καθήκοντά του στο πανεπιστήμιο καθώς του έμενε λιγότερο από ένας χρόνος ζωής στην πατρική γη. Έπειτα από τρεις μήνες παραμονής στο Μαντράς μετακόμισε στην Κουμπακόνα. Στις 20 Ιανουαρίου του 1920 έστειλε το τελευταίο του γράμμα στον Hardy και του ανέφερε ότι δούλευε με μια καινούργια κλάση συναρτήσεων θήτα. Ούτε οι

γιατροί ούτε οι συγγενείς μπορούσαν να πείσουν τον βαρύτατα ασθενή επιστήμονα να σταματήσει τις έρευνές του. Ο Ramanujan πέθανε στις 26 Απριλίου του 1920 δεν ήταν καν 33 ετών.

### Η καπρονομία του Ramanujan

Τα νέα για το θάνατο του Ramanujan συγκλόνισαν τους φίλους του στην Ινδία και την Αγγλία. Αισθάνθηκαν καθήκον τους να κατανοήσουν το εξαιρετικό φαινόμενο Ramanujan. Ο Hardy έγραψε:

«Είναι πιθανόν ότι η μεγάλη εποχή των τύπων έχει παρέλθει και ότι ο Ramanujan έπρεπε να γεννηθεί εκατό χρόνια νωρίτερα. Ήταν όμως ο μεγαλύτερος φορμαλιστής της εποχής του.»

Οι φίλοι και οι συνάδελφοι του προσπάθησαν να αποτιμήσουν τη θέση του Ramanujan στα σύγχρονα μαθηματικά. Δεν είχαν καμία αμφιβολία για το υπέροχο ταλέντο του και την εκθαμβωτική ομορφιά των τύπων του. Όλοι όμως συμφώνησαν ότι τα θέματα που επέλεξε ο Ramanujan δεν του επέτρεψαν να πάρει τη θέση που άξιζε στην ιστορία των μαθηματικών.

Έχουν περάσει περισσότερα από 75 χρόνια από το θάνατο του Ramanujan και είναι φανερό πως αυτό που ο Hardy και οι σύγχρονοι του δεν μπορού-

σαν να προβλέψουν: η ιδιοφυΐα του Ramanujan βρισκόταν σε συμφωνία όχι μόνο με το παρελθόν αλλά και με το μέλλον των μαθηματικών. Βρίσκουμε συχνά τις αριθμητικές ταυτότητες του Ramanujan να καταλαμβάνουν κεντρική θέση στο νέα οκηνή της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών και είναι αδύνατον να μην αναρρωθούμε πώς μπόρεσε να εμπνευσθεί αυτές τις ταυτότητες αγνοώντας όλα τα γεγονότα που πρέπει να γνωρίζει κάποιος για να τις καταλάβει. Αργότερα, το ενδιαφέρον για συγκεκριμένους τύπους αναβίωσε τόσο στα καθαρά όσο και στα εφημοσμένα μαθηματικά.

Τα σύγχρονα μαθηματικά και κατά καιρούς η θεωρητική φυσική προσφέργουν σε εξαιρετικά αφηρημένους κλάδους των μαθηματικών στους οποίους σημαντικό ρόλο παίζουν κάποιοι ιδιαίτεροι τύποι. Ακολουθούν δύο σχετικά πρόσφατα παραδείγματα τα οποία συνδέονται με τον Ramanujan.

Ο Rodney J. Baxter, διάσημος για την κατασκευή επακριβώς ολοκληρωσιμών μοντέλων στατιστικής μηχανικής, ανακάλυψε ξαφνικά ότι μελετώντας το μοντέλο ενός «στερεού εξαγώνου» συναντούσε συνεχώς τις ταυτότητες Rogers-Ramanujan και Ramanujan (Πλαίσιο 1).

Ο βραβευμένος με Νόμπελ φυσικός Steven Weinberg θυμάται ότι στις αρχές τις δεκαετίας του 1970, όταν μελετούσε τη —δημοφιλή σήμερα— θεωρία χορδών, αντιμετώπισε το πρόβλημα του υπολογισμού του πλήθους  $p(n)$  των αναλύσεων σε άθροισμα του  $n$ , όταν το  $n$  είναι μεγάλο. Αποδείχτηκε ότι όλοι οι τύποι που χρειαζόταν είχαν ανακαλυφθεί από τον Hardy και τον Ramanujan το 1918 (Πλαίσιο 5).

Η σύμφυτη ωραιότητα των τύπων του Ramanujan τους έχει προσδώσει την υπέροχη ιδιότητα να εμφανίζονται κατά καιρούς κάτω από τις πλέον ασυνήθιστες περιστάσεις. ◻

#### Για περισσότερο διάβασμα...

*Ramanujan: Letters and Commentary.* Bruce C. Berndt και Robert A. Rankin. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1995.

*The Man Who Knew Infinity: A life of the Genius Ramanujan.* Robert Kanigel. New York: Charles Scribner's Sons, 1991.

αίδρα

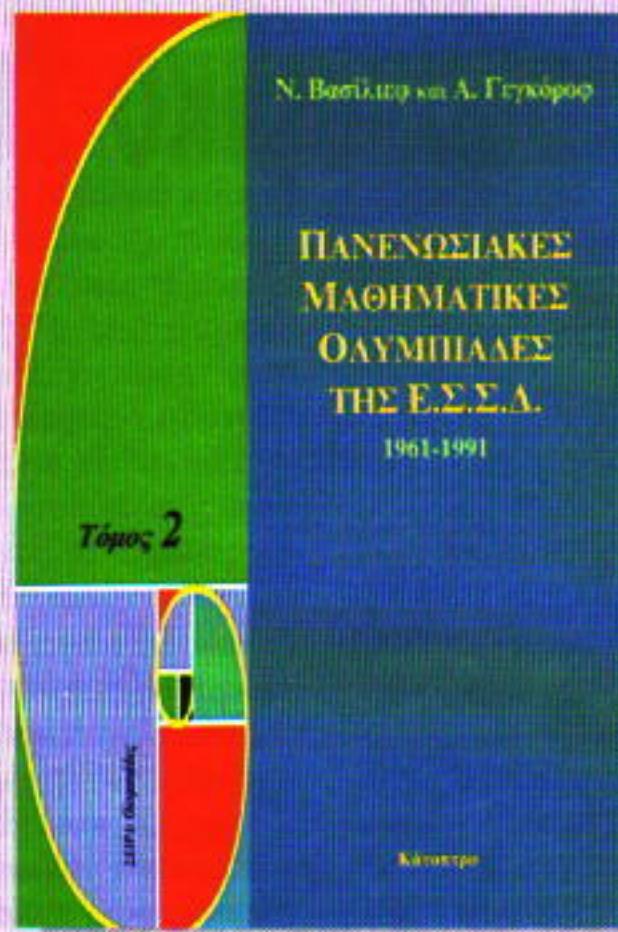
#### ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΕΚΔΟΣΕΙΣ

- Όλα τα σύγχρονα βιβλία Μαθηματικών, Φυσικής, Χημείας, Αστρονομίας, Μετεωρολογίας, Γεωλογίας, Πληροφορικής
- Βιβλία Διδακτικής, Φιλοσοφίας, Ιστορίας και Επιστημολογίας των Θετικών Επιστημών
- Βοηθήματα για μαθητές, φοιτητές, μεταπτυχιακούς, ερευνητές
- Άλαντα Αρχαίων Ελλήνων Θετικών Επιστημών
  - Παλά και σπάνια φυσικομαθηματικά βιβλία

Διαθέτουμε περίπου 30.000 τίτλους βιβλίων από το 1532 έως σήμερα

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ 1 (από Σόλωνος 116)  
106 81 Αθήνα, τηλ.: 3301 269, 3302 622

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



N. Βασίλιεφ και A. Γεγκόροφ

### Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Σ.Δ. (1961-1991)

#### —Τόμος 2—

Στο βιβλίο ο αναγνώστης θα βρει προβλήματα εξαιρετικής ποιότητας από διάφορους τομείς των μαθηματικών (άλγεβρα, θεωρία αριθμών, ανισότητες, επιπεδομετρία, στερεομετρία, συνδυαστική και πιθανότητες, κ.λπ.), που θα του δώσουν την ευκαιρία να εφαρμόσει όσα γνωρίζει και, παράλληλα, να εξασκήσει την επινοητικότητα και τη φαντασία του. Σ' αυτή την απολαυστική διανοητική προσπάθεια θα τον βοηθήσουν οι ανεκτίμητης διδακτικής αξίας λύσεις, προεκτάσεις και εναλλακτικές προσεγγίσεις τις οποίες παρέχουν οι συγγραφείς.

Στη σειρά «Ολυμπιάδες» κυκλοφορούν ήδη τα βιβλία:

- N. Βασίλιεφ και A. Γεγκόροφ, *Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Σ.Δ. (1961-1991)*, τόμος 1
- M. Κλάμκιν, *Μαθηματικές Ολυμπιάδες των Η.Π.Α. (1972-1986)*
- P. Ιωάννου, *Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής (1967-1997)*

#### Εκδόσεις Κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Το θερμοδυναμικό σύμπαν

Έχει ο χρόνος αρχή και τέλος;

I.D. Novikov

**T**Ο ΣΥΜΠΑΝ ΜΑΣ ΔΙΑΣΤΕΛΛΕΤΑΙ. Το γεγονός αυτό προβλέφθηκε θεωρητικά από το σοφιστικό μαθηματικό Alexander Friedmann και επιβεβαιώθηκε παρατηρησιακά στα τέλη της δεκαετίας του 1920 από τον αμερικανό αστρονόμο Edwin Hubble. Το γεγονός ότι η ύλη του Σύμπαντος μέσα στο οποίο ζούμε βρίσκεται σε σταθερή κίνηση είναι θεμελιώδους σημασίας για την κατανόηση των φυσικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα σ' αυτό.

Στο παρόν άρθρο θα μελετήσουμε μερικά γενικά χαρακτηριστικά των θερμικών διεργασιών του μακρόκοσμου και τις συνέπειές τους στην εξέλιξη του Σύμπαντος. Οι πρώτες προσπάθειες να εφαρμοστούν οι νόμοι της θερμοδυναμικής —οι οποίοι ανακαλύφθηκαν το 19ο αιώνα— σε ολόκληρο το Σύμπαν οδήγησαν σε παράξενα συμπεράσματα και καθαρούς παραλογισμούς. Πριν να συζητήσουμε τα εν λόγω κοσμολογικά προβλήματα, ας θυμηθούμε εν συντομίᾳ τα πιο σημαντικά σημεία των θεωρητικών προβλέψεων του Friedmann.

Η ακρογωνιαία ιδέα του Friedmann ήταν μεγαλοφυής: ωστόσο, ιδιαίτερα απλή. Διακηρύσσει ότι σε πολύ μεγάλη κλίμακα (σήμερα γνωρίζουμε ότι αυτό σημαίνει αποστάσεις μεγαλύτερες από εκατοντάδες εκατομμύρια έτη φωτός) η ύλη κατανέμεται ομοιόμορφα σχηματίζοντας γαλαξίες και σμήνη γαλαξιών. Αυτές οι τεράστιες μάζες έλκονται μέσω βαρυτικών δυνάμεων, και εξ αυτών καθορίζεται η κίνησή τους. Το κατά πόσον η εν λό-

γω έλξη θα οδηγήσει τελικά στη διαστολή ή τη συστολή του συστήματος των αλληλεπιδρώντων μαζών εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα, εξαρτάται από το αν κάποτε κάποιες άγνωστες δυνάμεις προσέδωσαν ή όχι αποκλίνουσες αρχικές ταχύτητες στο υλικό που αργότερα σχημάτισε το Σύμπαν (δηλαδή, εάν συνέβη ή όχι η Μεγάλη Έκρηξη). Θα μπορούσε μάλιστα η ύλη αρχικά να ήταν εξαιρετικά διασκορπισμένη, αλλά οι βαρυτικές δυνάμεις να την υποχρέωσαν να συσταλεί με σταθερά αυξανόμενη ταχύτητα.

Ο Alexander Friedmann χρησιμοποίησε τη σχετικιστική θεωρία της βαρύτητας που διατύπωσε ο Αϊνστάιν, ο οποίος γενίκευσε το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα ώστε να συμπεριλάβει την περιγραφή εξαιρετικά ισχυρών βαρυτικών πεδίων. Ωστόσο, τα σημαντικότερα αποτελέσματα της εργασίας του Friedmann μπορούν να εξηγηθούν μέσα στο πλαίσιο του νόμου του Νεύτωνα.

Κατ' αρχάς μας είναι απαραίτητος ο βασικός νόμος κίνησης της ύλης του Σύμπαντος. Ο νόμος αυτός μπορεί να προκύψει με τον ακόλουθο τρόπο: Θεωρήστε μέσα στο Σύμπαν μια μεγάλη σφαιρική περιοχή ακτίνας  $R$  ίσης με πολλές εκατοντάδες έτη φωτός. Σε τόσο μεγάλες κλίμακες η κατανομή της ύλης μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενής. Συμβολίστε με  $M$  τη μάζα της συγκεκριμένης περιοχής. Οι αστρονόμοι έχουν ανακαλύψει ότι οι γαλαξίες απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο· επομένως, η εν λόγω περιοχή

διαστέλλεται και η επιφάνειά της κινείται ακτινικά προς τα έξω. Πώς μεταβάλλεται όμως η ταχύτητα αυτής της διαστολής ως προς το χρόνο;

Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, ένας γαλαξίας μάζας  $m \ll M$  που βρίσκεται στην επιφάνεια της εν λόγω σφαίρας έλκεται βαρυτικά από ολόκληρη τη μάζα της σφαίρας. Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$F = \frac{GMm}{R^2}.$$

Η δύναμη αυτή επιβραδύνει τη διαστολή. (Δεν λαμβάνουμε υπόψη τις βαρυτικές δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο γαλαξία από την ύλη που εκτείνεται σε τεράστιες αποστάσεις προς κάθε κατεύθυνση έξω από τη σφαίρα, επειδή οι δυνάμεις αυτές αλληλοεξουδετερώνονται — κάτι που δεν θα αποδείξουμε εδώ.)

Τώρα μπορούμε εύκολα να γράψουμε το νόμο κίνησης του γαλαξία που βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας —δηλαδή το νόμο κίνησης της ίδιας της επιφάνειας. Για να προχωρήσουμε, χρειαζόμαστε την έκφραση της ολικής ενέργειας  $E$  του γαλαξία. Αυτή συνιστάται τόσο από την κινητική του ενέργεια,  $E_k = mv^2/2$ , όσο και τη βαρυτική δυναμική του ενέργεια,  $E_g = -GMm/R$  (προσέξτε ότι η τελευταία έχει αρνητική τιμή):

$$E = E_k + E_g = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R}. \quad (1)$$

Λόγω του νόμου διατήρησης της

ενέργειας, η ολική ενέργεια του γαλαξία θα είναι σταθερή:  $E = c$ .

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι, αν  $E > 0$ , η ακτίνα της σφαίρας μπορεί να αυξάνεται επ' άπειρον: μολονότι η  $\nu$  ελαττώνεται κατά τη διάρκεια της διεργασίας αυτής, δεν μηδενίζεται ποτέ. Όταν μάλιστα  $R \rightarrow \infty$ , η  $E$  προσδιορίζεται αποκλειστικά από την κινητική ενέργεια. Από την άλλη, αν  $E < 0$ , οι βαρυτικές δυνάμεις ανακόπτουν τη διαστολή της σφαίρας· τη στιγμή μάλιστα που η  $\nu$  μηδενίζεται, η ακτίνα λαμβάνει τη μέγιστη πυρή της

$$R_{\max} = \frac{GMm}{|E|}. \quad (2)$$

Στη συνέχεια, η σφαίρα αρχίζει να συρρικνώνεται.

Επειδή επιλέξαμε τυχαία τα όρια της σφαίρας, κι επειδή η ύλη κατανέμεται ομοιόμορφα στο Σύμπαν, η εξέλιξη της σφαιρικής επιφάνειας περιγράφει την κινητή οποιασδήποτε μεγάλης μάζας μέσα στο Σύμπαν. Έτσι, διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωση (1) με  $m$ , λαμβάνουμε

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = c_2, \quad (3)$$

όπου η σταθερά  $c_2$  ισούται με  $E/m$ . Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της απόστασης  $R$  μεταξύ δύο οποιωνδήποτε απομακρυσμένων γαλαξιών ή, όταν ακόμη δεν είχαν σχηματιστεί οι γαλαξίες, της απόστασης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σωμάτων «πρωτούλης». Επομένως, η εξίσωση (3) αποτελεί το βασικό νόμο κινητής της ύλης του Σύμπαντος.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Αϊνστάιν, η βαρύτητα μεταβάλλει τη γεωμετρία του χώρου καθιστώντας τον «καμπύλο». Εάν η σταθερά της εξίσωσης (3) είναι αρνητική (δηλαδή  $E < 0$ ), η γεωμετρία είναι σφαιρική —οπότε οι παράλληλες «ευθείες γραμμές» τέμνονται — και ο χώρος είναι κλειστός —επομένως έχει πεπερασμένο όγκο. Η καμπύλη του χώρου περιγράφεται από την ακτίνα καμπύλητας  $\ell$  του Σύμπαντος. Ο συνολικός όγκος του κλειστού Σύμπαντος είναι της τάξης του  $\ell^3$ . Η ακτίνα καμπύλητας  $\ell$  μεταβάλλεται ως προς το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση (3), όπως και

οποιαδήποτε άλλη απόσταση μέσα στο Σύμπαν. Παρεκτείνοντας τη μεταβολή των  $R$  και  $\ell$  στο παρελθόν, συμπεραίνουμε ότι η διαστολή φαίνεται να ξεκίνησε από ένα υλικό σημείο μηδενικής διάστασης και απείρως μεγάλης πυκνότητας  $\rho$ , δηλαδή από μια κατάσταση «ανωμαλίας» του χωρόχρονου. Λέμε «φαίνεται», διότι μπορεί κάποιοι άγνωστοι φυσικοί νόμοι να παίζουν σημαντικό ρόλο σε τέτοιες τεράστιες πυκνότητες ( $\rho \sim 10^{94} \text{ g/cm}^3$ , σύμφωνα με κάποιους υπολογισμούς)· οπότε ένα τέτοιο συμπέρασμα αποτελεί απλά μια μαθηματική εξίδανικευση. Πιο συγκεκριμένα, υπό τέτοιες συνθήκες θα μπορούσαν να δημιουργηθούν οι πλασματικές καταστάσεις ισορροπίας (το ψευδές κενό) οι οποίες προκάλεσαν την εμφάνιση των εξαιρετικά μεγάλων απωστικών δυνάμεων που απαιτούνταν για την πραγματοποίηση της Μεγάλης Έκρηξης.

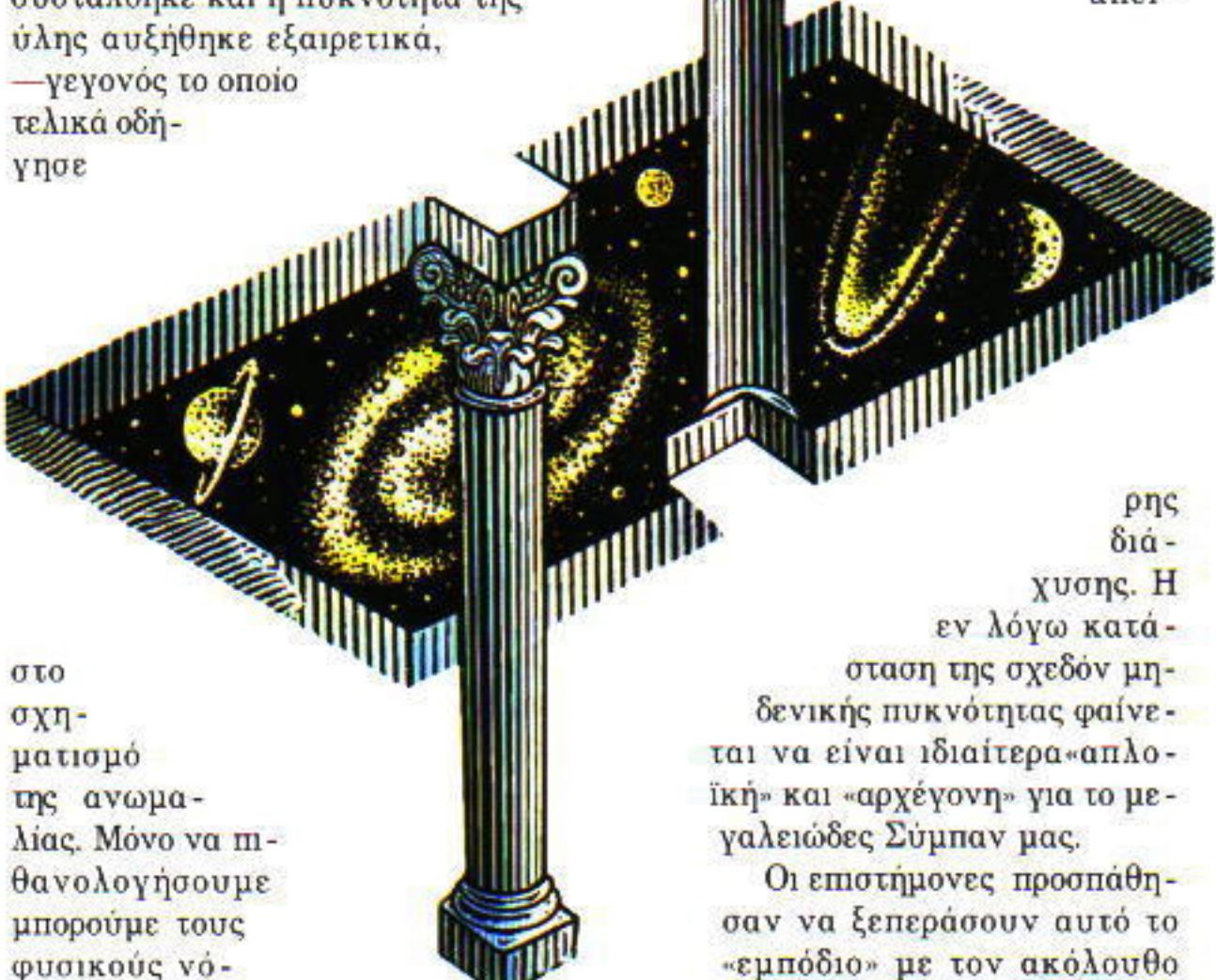
Τι υπήρχε, όμως, πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη; Κανείς δεν γνωρίζει στα σίγουρα ωστόσο οι εποικήμονες προβαίνουν σε κάποιες εικασίες.

Σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη αναφέρει, είναι δυνατόν να «κοιτάξουμε» πίσω στο παρελθόν και να περιγράψουμε την εξέλιξη του Σύμπαντος με τον ακόλουθο τρόπο: Πριν από την εμφάνιση της χωροχρονικής ανωμαλίας, το Σύμπαν συστάλθηκε και η πυκνότητα της ύλης αυξήθηκε εξαιρετικά, —γεγονός το οποίο τελικά οδήγησε

μους που περιγράφουν αυτή την κατάσταση της ύλης. Είναι δυνατόν να αναπτύχθηκαν τρομερά μεγάλες απωστικές βαρυτικές δυνάμεις, οι οποίες έθεσαν τέλος στη συστολή του Σύμπαντος και προκάλεσαν τη διαστολή που ακολούθησε — και την οποία παρατηρούμε σήμερα.

Μπορεί όμως να εξελίχθηκαν τα πράγματα σύμφωνα μ' αυτό το σενάριο; Κατ' αρχήν, ναι. Μέχρι πρόσφατα, μερικοί επιστήμονες το θεωρούσαν αρκετά πιθανό. Ταυτό το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης ευνοείται και από την κοινή λογική μας. Πράγματι, σ' αυτό το μοντέλο ο χρόνος κυλάει από το μείον άπειρο προς το συν άπειρο. Μολονότι η ανωμαλία είναι μια κατάσταση κάπως «αδιευκρινιστη», ο απειρουμένος πόταμός του χρόνου δεν πηγάζει από πουθενά ούτε καταλήγει κάπου — προοπτική η οποία φαίνεται προφανής ή διαισθητικά σωστή στους περισσότερους.

Ωστόσο, αυτό το απλό μοντέλο εμφανίζει μια σημαντική αδυναμία: υπόθετε ότι στο εξαιρετικά μακρινό παρελθόν το Σύμπαν άρχισε να συστέλλεται ενώ βρισκόταν σε μια κατάσταση άπει-



στο σχηματισμό της ανωμαλίας. Μόνο να πθανολογήσουμε μπορούμε τους φυσικούς νό-

ρης διάχυσης. Η εν λόγω κατάσταση της σχεδόν μηδενικής πυκνότητας φαίνεται να είναι ιδιαίτερα «απλοϊκή» και «αρχέγονη» για το μεγαλειώδες Σύμπαν μας.

Οι εποικήμονες προσπάθησαν να ξεπεράσουν αυτό το «εμπόδιο» με τον ακόλουθο

τρόπο: Υποθέστε ότι η τιμή της σταθεράς στην εξίσωση (3) είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι τη διαστολή του Σύμπαντος ακολουθεί η συστολή του. Αν θεωρήσουμε και ότι τη συστολή (αφού το Σύμπαν διέλθει από την ανωμαλία) διαδέχεται μια νέα περίοδος διαστολής —δεν γνωρίζουμε αν αυτό είναι σωστό ή όχι—, τότε ολόκληρος ο κύκλος θα μπορούσε να επαναλαμβάνεται άπειρες φορές. Έτσι καταλήγουμε στο μοντέλο του παλλόμενου Σύμπαντος.

Με πρώτη ματιά, το μοντέλο του παλλόμενου Σύμπαντος φαίνεται ελκυστικό. Πράγματι, ο ποταμός του χρόνου δεν πηγάζει από πουθενά, και το Σύμπαν υπάρχει για πάντα. Επιπλέον, δεν εξαρτάται από την ύπαρξη μιας παράξενης κατάστασης απίστευτα χαμηλής πυκνότητας στο εξαιρετικά μακρινό παρελθόν. Σε αντίθεση μ' αυτήν τη θαμπή εικόνα, έχουμε ένα ζωντανό, αιώνιο και σταθερό Σύμπαν, το οποίο επανεμφανίζεται άπειρες φορές. Μολαταύτα, ακόμη και τούτο το όμορφο αρμονικό μοντέλο εμφανίζει εγγενείς αδυναμίες, οι οποίες έχουν τις ρίζες τους στη φυσική που αναπτύχθηκε στα μέσα του 19ου αιώνα.

Το 1850 ο γερμανός φυσικός Rudolf Clausius και το 1851 ο άγγλος φυσικός William Thomson (ο λόρδος Κέλβιν), ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ανακάλυψαν το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής. Σύμφωνα με τη διατύπωση του λόρδου Κέλβιν, δεν είναι δυνατόν ένα σύστημα να απορροφά θερμότητα από μια δεξαμενή θερμικής ενέργειας και να τη μετατρέπει εξ ολοκλήρου σε έργο· πρέπει ταυτόχρονα να παρέχει ένα μέρος της θερμότητας σε μια δεξαμενή θερμικής ενέργειας χαμηλότερης θερμοκρασίας. Με άλλα λόγια, είναι αδύνατον να μετατραπεί όλη η θερμική ενέργεια σε μηχανική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι τελικά κάθε μορφής ενέργεια που περιέχεται σ' ένα απομονωμένο σύστημα θα μετασχηματιστεί σε θερμική ενέργεια, ομοιόμορφα κατανεμημένη μέσα στο σύστημα, το οποίο πλέον θα βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Στην πράξη γνωρίζουμε το νόμο αυτόν καλά. Σε κάθε μηχανικό σύστημα είναι παρούσα η τριβή, η οποία μετασχηματίζει μηχανική ενέρ-

γεια σε θερμική.

Είναι αλήθεια ότι στις θερμικές μηχανές πραγματοποιείται η αντιστροφή διεργασία, δηλαδή η μετατροπή θερμικής ενέργειας σε έργο. Ωστόσο, η θερμική μηχανή μπορεί να λειτουργήσει μόνο αν οι δύο δεξαμενές θερμότητας έχουν διαφορετικές θερμοκρασίες. Για να διατηρηθεί όμως η εν λόγω θερμοκρασιακή διαφορά απαιτείται ενέργεια, και μέρος αυτής της ενέργειας μετασχηματίζεται επίσης σε θερμική. Συμπερασματικά: κάθε μορφής ενέργεια μετατρέπεται συνεχώς σε θερμική ως αποτέλεσμα, λαμβάνει χώρα μη αντιστρεπτή συσσώρευση θερμικής ενέργειας και εξάλειψη κάθε άλλης μορφής ενέργειας. Αργότερα, ο Clausius προέβη στη μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής.

## Ο θερμικός θάνατος...

Οι Thomson και Clausius αντιλήφθηκαν τη σημασία του νέου νόμου που ανακάλυψαν για τη θεωρία της εξέλιξης του Σύμπαντος. Πράγματι, το Σύμπαν μπορεί να θεωρηθεί ως απομονωμένο σύστημα, το οποίο δεν ανταλλάσσει ενέργεια με καμιά άλλη υποθετική δεξαμενή θερμότητας. Συνεπώς, κάθε μορφή ενέργειας μέσα στο Σύμπαν θα μετασχηματιστεί τελικά σε θερμική ενέργεια, και η οποία θα ισοκατανεμηθεί. Μολονότι η διεργασία αυτή δεν παραβιάζει το νόρο διατήρησης της ενέργειας, δεδομένου ότι η ενέργεια δεν εξαφανίζεται, οδηγεί ωστόσο στην υποβάθμισή της, μια και αυτή δεν μπορεί να μετατραπεί σε μηχανικό έργο. Τούτο σημαίνει ότι δεν θα μπορούν να εκτελούνται πλέον μακροσκοπικές κινήσεις μέσα στο Σύμπαν. Η συγκεκριμένη δυσάρεστη εξέλιξη είναι γνωστή ως «θερμικός θάνατος» του Σύμπαντος.

Ωστόσο, το Σύμπαν μας απέχει πολύ από το να βρίσκεται στην κατάσταση του θερμικού θανάτου! Προκειμένου να δικαιολογήσουμε το γεγονός, μπορούμε να υποθέσουμε είτε ότι κάποιος, ή κάτι, παρεμβαίνει στην εξέλιξη του Σύμπαντος και το προστατεύει από το θερμικό θάνατο —υπόθεση που ανήκει στο χώρο της μεταφυσικής— είτε ότι το Σύμπαν είναι μικρής ηλικίας και δεν είχε επαρκή χρόνο για να οδηγηθεί μέχρι σήμερα

στο θερμικό θάνατό του.

Ας δούμε πώς αυτή η ζοφερή πρόγνωση διαψεύσθηκε από την επιστήμη. Οι ιδέες των Clausius και Thomson γύρω από τη θερμοδυναμική αντύχθηκαν περαιτέρω από τον αυστριακό φυσικό Ludwig Boltzmann, ο οποίος αποκάλυψε τη φυσική σημασία του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής. Η θερμική ενέργεια είναι η χαοτική (στοχαστική) κίνηση των ατόμων και των μορίων που συνιστούν την ύλη. Επομένως, η μετατροπή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σε θερμική ενέργεια σημαίνει το μετασχηματισμό της οργανωμένης (μακροσκοπικής) κίνησης σε χαοτική κίνηση: το χάος μέσα στο σύστημα αυξάνεται. Το ίδιο ακριβώς θα συμβεί και με τις υπόλοιπες μορφές κίνησης και ενέργειας. Σύμφωνα με τους νόμους της στατιστικής μηχανικής, η αύξηση του χάους είναι αναπόφευκτη.

Ο Boltzmann έδειξε ότι το χάος μπορεί να μετρηθεί. Η παράμετρος που περιγράφει το μέγεθός του είναι η εντροπία, έννοια η οποία είχε εισαχθεί νωρίτερα από τον Clausius. Όσο μεγαλύτερο είναι το χάος τόσο υψηλότερη τιμή έχει η εντροπία. Η μετατροπή της μακροσκοπικής κίνησης σε θερμική ενέργεια συνοδεύεται αναπόφευκτα από αύξηση της εντροπίας. Και όταν πλέον κάθε μορφή ενέργειας θα έχει μετατραπεί σε θερμική ενέργεια, ομοιόμορφα κατανεμημένη μέσα στο σύστημα, η ποσότητα του χάους θα παραμένει αμετάβλητη: θα έχει επιτευχθεί πλέον η κατάσταση μέγιστης εντροπίας.

Η εν λόγω στατιστική ερμηνεία υποδηλώνει ότι ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής δεν είναι απαραίτητο να ισχύει ανά πάσα στιγμή, και, κατ' αρχήν, η παραβίασή του είναι δυνατή. Πράγματι, σύμφωνα με το νόμο αύξησης της εντροπίας τα σωματίδια ενώς απομονωμένου συστήματος μεταπίπτουν σε ολοένα πιθανότερες καταστάσεις χαοτικής κίνησης. Μολαταύτα, κάποιες τυχαίες αποκλίσεις, ή διακυμάνσεις, είναι δυνατές ο' ένα στατιστικό σύστημα.

Για παράδειγμα, εξαιτίας των τυχαίων συγκρούσεων που συμβαίνουν σε μια μικρή περιοχή αερίου, τα συγκεκριμένα άτομα μπορούν στοχαστικά να αποκτήσουν ορμή προς μια

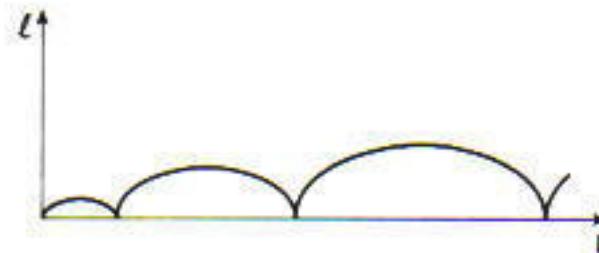
συγκεκριμένη κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι τα εν λόγω άτομα θα εκτελέσουν μεταφορική κίνηση προς αυτή την κατεύθυνση: δηλαδή, από τη θερμική ενέργεια θα προκύψει μακροσκοπική κίνηση! Βεβαίως, τέτοια περιστατικά είναι εξαιρετικά σπάνια. Επίσης, μια τέτοια εξεζητημένη περιπτώση μακροσκοπικής διακύμανσης θα είναι ακόμη πιο σπάνια αν θεωρήσουμε μεγαλύτερη περιοχή αερίου.

Συνεπώς, κατά κανόνα η εντροπία ενός απομονωμένου συστήματος πάντοτε αυξάνεται, και το σύστημα μεταπίπτει στην πιο πιθανή κατάσταση (αυτή της μέγιστης εντροπίας), όπου παραμένει επ' ἄπειρον. Ωστόσο, πολύ σπάνια μπορούν να συμβούν αποκλίσεις από την ισορροπία σε κάποιο τμήμα του συστήματος — αν και, κατά κανόνα, θα είναι πολύ μικρές.

### ... και η θεωρητική ανάσταση

Ο Boltzmann προσπάθησε να αποφύγει τη ζοφερή πρόβλεψη του θερμικού θανάτου του Σύμπαντος ως εξής: Το απείρου μεγέθους Σύμπαν, σκέφθηκε, βρίσκεται στην πιο πιθανή κατάσταση της θερμοδυναμικής ισορροπίας έχοντας τη μέγιστη δυνατή εντροπία. Ωστόσο, σπάνιες διακύμανσεις απ' αυτή την κατάσταση είναι πιθανό να συμβούν σε οποιοδήποτε τμήμα του Σύμπαντος. Αξιοσημείωτες διακυρώσεις σε μεγάλες περιοχές όντως αποτελούν εξαιρετικά σπάνια περιστατικά· μολαταύτα, εάν έχουμε στη διάθεσή μας άπειρο χρόνο παρατήρησης, θα μπορούμε να περιμένουμε μέχρι να πραγματοποιηθεί μια μεγάλη διακύμανση. Σύμφωνα με τον Boltzmann, λοιπόν, ζούμε μέσα σε μια τέτοια ακριβώς γιγάντια διακύμανση.

Μέχρι να πραγματοποιηθούν οι ανακαλύψεις του Friedmann και του Hubble, η υπόθεση διακύμανσης του Boltzmann ήταν η μοναδική προσπάθεια, στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής του 19ου αιώνα, να ανακλήθει η πρόγνωση του θερμικού θανάτου. Οι ανακαλύψεις όμως αυτές τροποποίησαν ριζικά τις αντιλήψεις μας για την κατεύθυνση και την τελική κατάσταση της εξελικτικής πορείας του Σύμπαντος. Κατ' αρχάς, έγινε κατανοητό ότι η βαρύτητα διαδραματίζει πρωταγωνιστικό ρόλο στην ανάπτυξη του



Σύμφωνα με τον αμερικανό φυσικό R. Tolman, η καρπύλη δείχνει το πώς μεταβάλλεται η ακτίνα του Σύμπαντος συναρτήσει του χρόνου.

Σύμπαντος. Το πολύ σημαντικό αυτό γεγονός είχε αγνοηθεί πλήρως από τη θεωρία του θερμικού θανάτου —θεωρία εντελώς λανθασμένη.

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε για τη μετατροπή όλων των μορφών ενέργειας σε θερμική και τη συνεπαγόμενη βαθμιαία εξάλειψη όλων των διεργασιών σ' ένα απομονωμένο σύστημα, η ολική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται. «Γιατί όχι;», θα μπορούσε να ρωτήσει ο αναγνώστης. Βεβαίως, το σύστημα είναι απομονωμένο. Από πού, λοιπόν, θα μπορούσε να πρέλθει η επιπλέον ενέργεια η οποία απαιτείται για να διατηρηθούν οι μακροσκοπικές κίνησεις μέσα στο σύστημα;

Η διατήρηση της ενέργειας είναι νόμος ακλόνητος. Ωστόσο, όταν τον εφαρμόζουμε στο Σύμπαν, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια. Η ενέργεια αυτή έχει την ιδιαιτερότητα να είναι αρνητική (βλ. εξίσωση (1)). Τι συνέπειες έχει το συγκεκριμένο γεγονός στην εξέλιξη των διεργασιών του Σύμπαντος;

Ας θεωρήσουμε το εξής παράδειγμα: έχουμε στο χώρο μια σφαιρική περιοχή γεμάτη από σωματίδια αερίου τα οποία αλληλεπιδρούν βαρυτικά μεταξύ τους. Εστω ότι αρχικά το αέριο είναι ψυχρό και διασκορπισμένο στο χώρο, οπότε οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων είναι εξαιρετικά μικρές και η βαρυτική δυναμική ενέργεια σχεδόν μηδενική. Ωστόσο, μολονότι η βαρύτητα είναι ασθενής, υποχρεώνει το διασκορπισμένο αέριο να συσσωρεύεται σχηματίζοντας μια μπάλα, η οποία συστέλλεται συνεχώς υπό την επίδραση των βαρυτικών δυνάμεων.

Έτοιμοι, τα σωματίδια του αερίου αποκτούν ολοένα μεγαλύτερες ταχύτητες με αποτέλεσμα η κινητική τους ενέργεια να αυξάνεται σε βάρος της αρνη-

τικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας, η δυναμική ενέργεια μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι η απόλυτη τιμή της αυξάνεται (επειδή  $E_s < 0$ ). Άρα, η συμπίσηση του συστήματος που προκαλείται από τη βαρύτητα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της θετικής (κινητικής) ενέργειας. Οι παλαιότερες θεωρίες δεν έλαβαν υπόψη το γεγονός αυτό· αγνόησαν τη βαρύτητα. Εάν η θετική ενέργεια μπορεί να αυξηθεί σ' ένα απομονωμένο σύστημα, η αύξηση της εντροπίας δεν οδηγεί απαραίτητα στην εξάλειψη των μακροσκοπικών διεργασιών.

Επομένως, η θεωρία του θερμικού θανάτου στη μορφή που διατυπώθηκε το 19ο αιώνα —τότε που η δυναμική φύση του Σύμπαντος παρέμενε άγνωστη— ήταν λανθασμένη. Ας δούμε τώρα πώς «ενεργεί» η βαρύτητα στο μνητέλο του παλλόμενου Σύμπαντος και με ποιον τρόπο ανασκευάζει τη θεωρία του θερμικού θανάτου.

### Παραδόξως, το πλάτος αυξάνεται!

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής —ο οποίος υποθέτουμε ότι ισχύει παντού μέσα στο Σύμπαν—, θερμική ενέργεια και εντροπία παράγονται σε κάθε κύκλο του παλλόμενου Σύμπαντος. Για παράδειγμα, θερμική ενέργεια συσσωρεύεται σε μεγάλη κλίμακα λόγω της ακτινοβολίας των άστρων. Επίσης, θεωρούμε ότι η εντροπία δεν μειώνεται σημαντικά όταν το Σύμπαν διέρχεται από την κατάσταση ανωμαλίας.

Επομένως, η εντροπία αυξάνεται από κύκλο σε κύκλο. Με μια πρώτη ματιά, το γεγονός αυτό θα έπρεπε να οδηγήσει στη μείωση του πλάτους ταλάντωσης και τη σταθεροποίηση του Σύμπαντος. Η εξελικτική πορεία του Σύμπαντος θα έμοιαζε τότε με τη φθίνουσα ταλάντωση ενός εκκρεμούς του οποίου η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σταδιακά σε θερμική εξατίας της τριβής. Στην πραγματικότητα, όμως, το μνητέλο αυτό προβλέπει μια εντελώς διαφορετική συμπεριφορά: ιην αύξηση του πλάτους ταλάντωσης του Σύμπαντος! Ας εξηγήσουμε το φαινόμενο.

Θυμηθείτε την εξίσωση (3). Σε κάθε κύκλο, τη στιγμή που η διαστολή του Σύμπαντος καθίσταται η μέγιστη δυνατή (μόλις πριν αρχίσει η συστολή) η ταχύτητα ν της ύλης της σφαίρας μηδενίζεται. Θέτοντας στην εξίσωση (3)  $v = 0$  προκύπτει η συνθήκη που ισχύει εκείνη τη στιγμή:

$$\frac{GMm}{R_{\max}} = -c_2.$$

(Μην ξεχνάτε ότι στο μοντέλο μας η σταθερά  $c_2$  είναι αρνητική). Θέτουμε τώρα στην τελευταία εξίσωση τη σχέση  $M = (4/3)\pi R_{\max}^3 \rho_*$ , όπου  $\rho_*$  είναι η πυκνότητα της ύλης τη στιγμή της μέγιστης διαστολής. Έτσι, προκύπτει ότι  $\rho_* R_{\max}^2 = \text{σταθ.} = c_3$ . Τέλος, ας θυμηθούμε ότι η ακτίνα καμπυλότητας  $\ell$  του Σύμπαντος μεταβάλλεται ως προς το χρόνο με τον ίδιο τρόπο που μεταβάλλεται η ακτίνα  $R$  της σφαίρας (Σχήμα 1). Αρα, η ακτίνα καμπυλότητας  $\ell_{\max}$  τη στιγμή της μέγιστης διαστολής θα είναι

$$\rho_* \ell_{\max}^2 = \text{σταθ.} = c_4. \quad (4)$$

Οπως αναφέραμε νωρίτερα, ο όγκος  $V$  του κλειστού Σύμπαντος είναι της τάξης του  $\ell^3$ . Τη στιγμή επομένως της μέγιστης διαστολής ο όγκος αυτός είναι της τάξης του  $\ell_{\max}^3$  και η συνολική μάζα της ύλης του Σύμπαντος θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\rho_* \ell_{\max}^3 = M. \quad (5)$$

Διαιρώντας την εξίσωση (5) με την εξίσωση (4) παίρνουμε

$$\ell_{\max} = \frac{M}{c_4}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, το  $\ell_{\max}$  είναι ανάλογο προς τη συνολική μάζα της ύλης του Σύμπαντος. Εντούτοις, σύμφωνα με την αρχή ισοδυναμίας μάζας-ενέργειας του Αϊνστάιν, η μάζα του Σύμπαντος είναι το άθροισμα της μάζας των σωματιδίων, της κινητικής ενέργειας τους και της ενέργειας των φωτονίων. Καθώς η θερμική ενέργεια αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, αυξάνεται και η συνολική μάζα του Σύμπαντος. Η μάζα του όμως είναι ανάλογη προς την  $\ell_{\max}$ : επομένως το πλάτος ταλάντωσης του Σύμπαντος αντί να μειώνεται θα αυξάνεται με το χρόνο. Στο συμπέρασμα

αυτό κατέληξε ο αμερικανός φυσικός Richard Tolman το 1934.

Από πού όμως προέρχεται η απαιτούμενη ενέργεια για την αύξηση του πλάτους των ταλαντώσεων; Από την αρνητική δυναμική ενέργεια του βαρυτικού πεδίου (η συνολική ενέργεια δεν μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας).

Είναι πιθανό τούτο το μοντέλο να περιγράφει το Σύμπαν; Μάλλον όχι. Πράγματι, μολονότι δεν υπάρχει καμία ομοιότητα ανάμεσα στο μοντέλο του παλλόμενου Σύμπαντος και την παλαιότερη θεωρία του θερμικού θανάτου, το πρώτο προβλέπει τη σταθερή αύξηση της θερμικής ενέργειας και της εντροπίας του Σύμπαντος — γεγονός που βρίσκεται σε αντίθεση με τις σύγχρονες γνώσεις μας. Επομένως, ο αριθμός των ταλαντώσεων πρέπει να είναι πεπερασμένος. Αν όντως συμβαίνει κάτι τέτοιο, το πιο ελκυστικό χαρακτηριστικό του παλλόμενου Σύμπαντος — ο άπειρος χρόνος της ύπαρξης του — παύει να υφίσταται.

Έχοντας καταρρίψει το μύθο του θερμικού θανάτου, οι επιστήμονες προσπαθούν να λύσουν το αίνιγμα για το πώς ξεκίνησε η διαστολή του Σύμπαντος. Σε τούτο το πρόβλημα εστιάζουν πλέον την προσοχή τους αστρονόμοι και κοσμολόγοι. Αυτή είναι εξάλλου η μοίρα της επιστήμης: η λύση ενός μυστηρίου της φύσης να οδηγεί αναπόφευκτα σε ένα ακόμη πιο περίπλοκο πρόβλημα. ◻

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

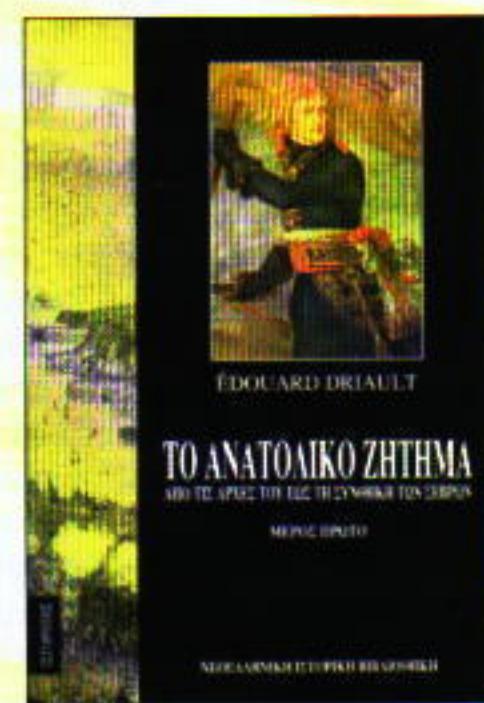
L. Smolin, «Τι είναι ο χρόνος;», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1995.

W.A. Hiscock, «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες», Μάιος/Ιούνιος 1995.

P. Davies, «Τι συνέβη πριν από τη Μεγάλη Έκρηξη;», Ιούλιος/Αύγουστος 1996.

A. Sakharov, «Υπάρχει στοιχειώδες μήκος?», Ιούλιος/Αύγουστος 1997.

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Édouard Driault

### ΤΟ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΖΗΤΗΜΑ

Από τις αρχές του έως τη Συνθήκη των Σεβρών

Ο Édouard Driault (1864-1947), καθηγητής της ιστορίας στη Σορβόνη, δημοσίευσε συμπληρωμένο το μνημώδες έργο του *Το Ανατολικό ζήτημα* το 1921. Από τότε το βιβλίο του θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα εγχειρίδια για τη γνώση και κατανόηση όλων εκείνων των βαθύτερων αιτίων που προκάλεσαν, και εξακολουθούν να προκαλούν, εντάσεις και τριβές μεταξύ των λαών και κρατών, διασαλεύοντας την παγκόσμια ειρήνη. Σ' αυτό εξετάζεται αναλυτικά και σφαιρικά η ιστορία του Ανατολικού ζητήματος, από τις απαρχές του κατά τους χρόνους του Βυζαντίου, την παγίωσή του επί Οθωμανικής αυτοκρατορίας, μέχρι και τη Συνθήκη των Σεβρών (1920). Άξιο προσοχής είναι ότι μελετά το συγκρουσιακό πρότυπο που ορίζει τις σχέσεις των Μεγάλων Δυνάμεων, με όλες τις εναλλαγές τους κατά τις διάφορες ιστορικές περιόδους, αλλά και τη δυναμική που αναπτύσσεται στο διεθνές πολιτικό πεδίο. Ενδιαφέρει ιδιαιτέρως το σύγχρονο αναγνώστη, διότι στις σελίδες του εξηγούνται σημερινές καταστάσεις και προβλήματα της Βαλκανικής χερσονήσου και των λαών της: τέλος, ερμηνεύεται με τρόπο διαφωτιστικό και η σημερινή ελληνοτουρκική αντιπαράθεση.

Σελ.: 527, Εικ.: A/M, 14 × 21 εκ., 7.500 δρχ.

ΙΣΤΟΡΗΤΙΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

κάτοπτρο

## ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

### Το φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα,  
τηλ.: 3628492

# Για να περνά η ώρα

**Σ121**

Κοστολόγηση λουκουμάδων. Για να αγοράσετε είκοσι πέντε λουκουμάδες πρέπει να δώσετε τόσα χιλιάρικα όσους λουκουμάδες αγοράζετε με ένα χιλιάρικο. Πόσο κοστίζει ένας λουκουμάς;



**Σ122**

Παιχνίδια στο πάρκο. Τριάντα παιδιά κάθονται σε κυκλική γραμμή ώστε το καθένα να κοιτάζει την πλάτη του μπροστινού του. Όλα τα κορίτσια βρίσκονται πίσω από αγόρι, τα μισά αγόρια βρίσκονται πίσω από αγόρι και τα υπόλοιπα πίσω από κορίτσι. Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια υπάρχουν;



**Σ123**

Απολαύσεις του σκασιαρχείου. Όταν έφτασε στο σχολείο ο Λάκης, η πρώτη ώρα είχε αρχίσει ήδη πριν από 35 λεπτά. Έτσι, αποφάσισε να πάει μέχρι το κοντινότερο ζαχαροπλαστείο και να αγοράσει ένα παγωτό. Δυστυχώς, όταν επέστρεψε, είχε ήδη αρχίσει η δεύτερη ώρα. Αμέσως έτρεξε να αγοράσει ένα ακόμη παγωτό, κάνοντας την ίδια ακριβώς ώρα όπως προηγουμένως. Όταν επέστρεψε τη δεύτερη φορά, διαπίστωσε ότι έμεναν ακόμα 50 λεπτά για να αρχίσει η τέταρτη ώρα. Αν κάθε ώρα μαθήματος (μαζί με το διάλειμμα που την ακολουθεί) διαρκεί 55 λεπτά, έχει αρκετή ώρα για να πάει να αγοράσει και να φάει ένα τρίτο παγωτό;



**Σ124**

Παράδοξο τετράπλευρο. Υπάρχει τετράπλευρο που διαιρείται από μία ευθεία σε δύο ίσα τμήματα, χωρίς όμως να είναι δυνατόν να διαιρεθεί σε ίσα τμήματα ούτε από τις διαγωνίους του ούτε από τις ευθείες που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του;



**Σ125**

Φουσκωμένα φτερά. Γιατί τα πουλιά φουσκώνουν το φτέρωμά τους όταν κάνει πολύ κρύο;



# Περιπατώντες επί τα ύδατα

Οι παράξενοι τρόποι με τους οποίους μετακινούμαστε όλοι εμείς, πλάσματα μικρά και μεγάλα

K. Bogdanov

**Σ**ΥΝΘΕΙΖΟΥΜΕ ΝΑ ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ ΤΑ πλάσματα σε υδρόβια και σε χερ- σόβια. Εντούτοις, αρκετά είδη ε- ντόμων περνούν σχεδόν ολόκλη- ρη τη ζωή τους στη διαχωριστική επι- φάνεια αέρα και νερού. Σ' αυτά συγκα- ταλέγεται και η νεροαράχνη (γερρίς).

Η νεροαράχνη γλιστρά γρήγορα πά- νω στην επιφάνεια του νερού, όπως οι παγοδρόμοι πάνω στον πάγο. Τα μα- κριά πόδια της είναι λοξά προς τα έξω και μπορούν να στηρίζουν το επίμη- κες και λεπτό σώμα της. Την αξιόπι- στη «παγοδρομική πίστα» δεν της την εξασφαλίζει η ανώτερη στιβάδα του νερού, η οποία εμφανίζει υψηλή επι- φανειακή τάση. Αν το έντομο βρεθεί σε περιοχή όπου η επιφανειακή τάση εί- ναι σημαντικά χαμηλότερη, τότε βυ- θίζεται στο νερό παραδέρνοντας αβο- ήθητο. Μια τέτοια περιοχή μπορεί να δημιουργηθεί εάν ραντίσουμε την επι- φάνεια του νερού με μερικές σταγό- νες εξανίου. Ο συντελεστής επιφανει- ακής τάσης του εξανίου (όταν βρίσκε- ται σ' επαφή με τον αέρα) είναι  $a = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ , μόλις το ένα τέταρτο περί- που του αντίστοιχου συντελεστή του νερού ( $7,0 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ ). (Ωστόσο, η πρ- σεκτική παρατήρηση αποκαλύπτει ότι οι νεροαράχνες έχουν την ικανότητα να διακρίνουν αλάνθαστα την «απο- δεκτή» επιφάνεια από την επικίνδυ- νη: αν την ήρεμη επιφάνεια της λίμνης ταράξουν μερικές σταγόνες βροχής, σπεύδουν αμέσως στην όχθη και πε- ριμένουν ώσπου το νερό να ήρεμήσει και πάλι.)

Ας επιχειρήσουμε όμως να εξετά-

σουμε ποσοτικά πώς κατορθώνει η νε- ροαράχνη να κινείται πάνω στην επι- φάνεια του νερού χωρίς να βυθίζεται. Το μήκος του εντόμου μόλις υπερβαι- νει τα 5 χιλιοστά. Έχει δύο ζεύγη επι- μήκων ποδιών που το κρατούν στην ε- πιφάνεια και ένα ζεύγος από κοντύ- τερα πόδια, η βασική λειτουργία των ο- ποίων είναι να συλλαμβάνουν τη λεία τους. Η μάζα μιας μεγάλης νεροαρά- χνης δεν υπερβαίνει τα 0,05 g. Η επι- φανειακή τάση που κρατά το έντομο στην επιφάνεια μπορεί να εκτιμηθεί από το γινόμενο  $a \cdot L$ , όπου  $L$  είναι το μήκος της περιμέτρου του τμήματος της επιφάνειας του νερού που έχει υ- ποστεί παραμόρφωση. Από την ισότη- τα  $mg = a \cdot L$  (συνθήκη πλεύσης) προ- κύπτει ότι το  $L$  ισούται με  $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ N} / (70 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}) \cong 7,1 \text{ mm}$ . Τι ισχύει όμως στην πραγματικότητα;

Ας κοιτάξουμε το Σχήμα 1, όπου α- πεικονίζονται δύο όψεις της επιφά- νειας επαφής ποδιού - νερού. Το μυστι- κό της καταπληκτικής ικανότητας του εν λόγω εντόμου να «πατινάρει» πάνω στην επιφάνεια του νερού κρύβεται στο



Σχήμα 1

Δύο όψεις των ποδιών μιας νεροαράχνης στην επιφάνεια του νερού.

κάτω τμήμα των ποδιών του, το οποίο καλύπτεται πυκνά από αδιάβροχες τρί- χες. Εφόσον μια νεροαράχνη διαθέτει μόνο έξι πόδια, το μέγιστο μήκος της περιμέτρου, στην οποία δρα κάθετα η επιφανειακή τάση  $T$ , ανέρχεται σε 12 mm περίπου.

Αξιοπρόσεκτο είναι ότι σε καταστά- σεις «έκτακτης ανάγκης» ορισμένα έ- ντομα που ζουν στην επιφάνεια του νερού εκτοξεύουν έναν πίδακα υγρού που έχει συντελεστή επιφανειακής τάσης χαμηλότερο από του νερού. Κα- θώς τρέπονται σε φυγή αφήνουν πίσω τους ένα είδος «ουδέτερης ζώνης» για να βυθίζονται και να πνίγονται οι διώκτες τους.

## Οι ατρόμητοι «βάδιστές υαλοπινάκων»

Πώς μπορεί η μύγα να περπατάει πάνω - κάτω στην κατακόρυφη επιφά- νεια ενός υαλοπίνακα; Το συγκεκριμέ- νο ερώτημα κίνησε την περιέργεια του μεγάλου φυσικού του 17ου αιώνα Robert Hooke, ο οποίος υπέθεσε ότι η α- πάντηση βρισκόταν στα μικροσκοπι- κά νύχια που έχουν οι μύγες στο κάτω τμήμα των έξι ποδιών τους. (Το 1665 ο Hooke περιέγραψε λεπτομερώς αυτά τα νύχια στο βιβλίο του *Μικρογραφία*.) Η εν λόγω εξήγηση φαίνεται αρκετά εύλογη όταν πρόκειται για βάδισμα σε μια τραχιά επιφάνεια. Άλλα στην περι- πτωση του λείου γυαλιού, αυτή η πρ- σέγγιση παρουσιάζει κάποια κενά.

Βρετανοί εποπτήμονες χρησιμοποι- ίσαν τον πλέον προηγμένο εποπτημο- νικό εξοπλισμό για να αποδείξουν ότι

και η ικανότητα των μυγών να περπατούν πάνω σε εξαιρετικά λείες επιφάνειες συνδέεται με την επιφανειακή τάση. Οι επιστήμονες ανακάλυψαν ότι υπάρχουν τρίχες που φύονται ανάμεσα στα νύχια στο άκρο κάθε ποδιού και σχηματίζουν μια πυκνή βούρτσα. Κάθε ξεχωριστή τρίχα καταλήγει σε μια δισκοειδή βεντούζα με επιφάνεια εμβαδού  $2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ .

Όταν εξέτασαν τα αποτυπώματα που αφήνει η μύγα σε καθαρή επιφάνεια αποκαλύφθηκε ότι το σχήμα τους είναι ταυτόσημο μ' εκείνο της βεντούζας. Τα αποτυπώματα δεν εξατμίζονται, και η χημική ανάλυση της σύστασής τους απέδειξε ότι πρόκειται για λίπη. Βέβαια, το λίπος είναι συνήθως ιδιαίτερα ολισθηρή ουσία αλλά, στη συγκεκριμένη περίπτωση, διευκολύνει την πρόσφυση της τρίχας στο γυαλί. Και τούτο επειδή ο συντελεστής επιφανειακής τάσης του λίπους είναι υψηλός. Αν τα πόδια της μύγας «απολιπανθούν» — πράγμα που μπορούμε να το επιτύχουμε βυθίζοντάς τα για λίγο σε εξάνιο —, η μύγα χάνει προσωρινά την ικανότητά της να βαδίζει σε γυάλινες επιφάνειες.

Για να προσδιορίσουν τη δύναμη που συγκρατεί τη μύγα σ' έναν οριζόντιο υαλοπίνακα, οι επιστήμονες προσέδεσαν μία σ' ένα ειδικό ζυγό και μέτρησαν τη δύναμη που απαιτείται για την αποκόλληση. Μία μύγα ζυγίζει περίου  $7,2 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ . Όταν στηρίζεται μόνο στα τέσσερα πόδια της, αρκεί για να την ανυψώσει δύναμη  $1,03 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ . Όταν όμως στηρίζεται και στα έξι πόδια της, τότε απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη:  $2,4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ . Το συγκεκριμένο πείραμα αποκαλύπτει ότι η δύναμη πρόσφυσης προέρχεται κυρίως από την επιφανειακή τάση. (Αν παραστήσουμε γραφικά την εν λόγω δύναμη ως συνάρτηση του αριθμού των ποδιών που βρίσκονται σ' επαφή με την επιφάνεια, διαπιστώνουμε μη γραμμική εξάρτηση, ίσως επειδή υπάρχει διαφορετικός αριθμός τριχών στα εμπρόσθια και οπίσθια πόδια της μύγας.)

## Αυτό θα πει να χρησιμοποιείτε το κεφάλι σας

Ακόμη κι αν δεν σας δόθηκε ποτέ η ευκαιρία να ταξιδέψετε στην Αφρική ή στη Νότια Ασία, όλοι θα έχετε δει στην τηλεόραση ή στον κινηματογράφο πώς



**Σχήμα 2**

Η καρπούλη που διαγράφει το κέντρο μάζας ενός ανθρώπου καθώς βαδίζει.

οι γυναίκες των περιοχών αυτών μεταφέρουν τεράστια φορτία πάνω στο κεφάλι τους. Μερικές φορές το βάρος του φορτίου ανέρχεται στο 70% του βάρους ενός ανθρώπου, και απαιτείται η συνδρομή δύο ανδρών για να το σηκώσουν και να το τοποθετήσουν πάνω στο κεφάλι της γυναίκας. Ωστόσο, αφότου το φορτίο τοποθετηθεί στο κεφάλι της, εκείνη μπορεί πλέον να το μεταφέρει εύκολα οπουδήποτε. Γιατί, όμως, είναι ευκολότερο να μεταφέρει κανείς ένα φορτίο πάνω στο κεφάλι του παρά να το ανυψώσει;

Η ενέργεια την οποία δαπανά ένας άντρας ή μια γυναίκα που εκτελεί κάποια εργασία μπορεί να μετρηθεί από το ρυθμό κατανάλωσης οξυγόνου. Ένα λίτρο καταναλισκόμενου οξυγόνου αντιστοιχεί σε 20,1 kJ δαπανώμενης ενέργειας. Πειράματα με εθελοντές απέδειξαν ότι, εφόσον το φορτίο μεταφέρεται με το συνηθισμένο τρόπο (στην πλάτη του μεταφορέα), η κατανάλωση οξυγόνου αυξάνεται ανάλογα με το βάρος του. Για παράδειγμα, αν το βάρος του φορτίου είναι ίσο με το μισό του βάρους του μεταφορέα, η κατανάλωση ενέργειας αυξάνεται κατά 50%. Παρόμοια αποτελέσματα προέκυψαν όταν ζητήθηκε από ανεξοικείωτα άτομα να κουβαλήσουν φορτία πάνω στα κεφάλια τους.

Μπορείτε να φανταστείτε πόσο εξεπλάγησαν οι επιστήμονες όταν διαπίστωσαν ότι οι Αφρικανές που μετέφεραν φορτίο ίσο με το 50% του βάρους τους αύξαναν την κατανάλωση οξυγόνου μόνο κατά 30%. Πώς το κατόρθωνταν; Την απάντηση την προσέφερε η

περαιτέρω επισταμένη παρατήρηση.

Μια γυναίκα που επιστρέφει στο σπίτι της κουβαλώντας ένα πιθάρι στο κεφάλι της γεμάτο με νερό αποτελεί συνηθισμένο θέαμα στην Αφρική. Όσο όμως παράξενο κι αν φαίνεται, το νερό ποτέ δεν χύνεται. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει καθόλου (ή σχεδόν καθόλου) κατακόρυφη επιτάχυνση, πράγμα που μαρτυρεί πως δεν υπάρχει ταλάντωση του κέντρου μάζας της γυναίκας στην κατακόρυφη διεύθυνση.

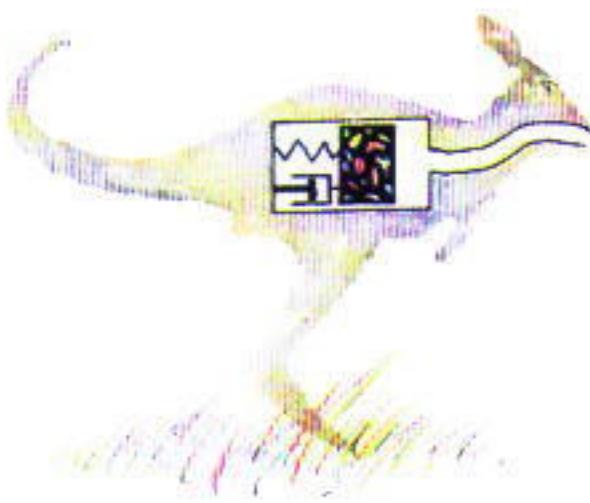
Είναι γνωστό ότι, όταν κανείς βαδίζει κανονικά, το κέντρο μάζας του σώματός του μετατοπίζεται αισθητά. Το Σχήμα 2 δείχνει δύο διαδοχικές φάσεις του βαδίσματος. Εάν δεχτούμε ότι το πόδι που έρχεται σε επαφή με το δρόμο δεν είναι λυγισμένο (είναι ίσο στην άρθρωση του γόνατου), το κέντρο μάζας, τη στιγμή κατά την οποία και τα δύο πόδια αγγίζουν το έδαφος, βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο του. Το κέντρο μάζας ανεβαίνει στο υψηλότερο σημείο του τη στιγμή που το στηρίζομε στο έδαφος πόδι λαμβάνει κατακόρυφη θέση. Αυτό μας υποβάλλει την ιδέα ότι το κέντρο μάζας κινείται κατά μήκος ενός κυκλικού τόξου που η ακτίνα του ισούται με το μήκος του ποδιού, ανεβοκατεβαίνοντας περιοδικά κατά μερικά εκατοστά.

Μολονότι η εν λόγω κίνηση του κέντρου μάζας στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι εντελώς ανώφελη, καταναλώνει ενέργεια. Ο τρόπος με τον οποίο έχουμε συνηθίσει να περπατάμε μπορεί να παραληλιστεί με την προσπάθεια ενός άπειρου οδηγού να διατηρήσει σταθερή την ταχύτητα του οχήματος πατώντας διαδοχικά τα πεντάλ του φρένου και του γκαζιού, και, βέβαια, καταναλώνει πολύ περισσότερη βενζίνη.

Σε αντίθεση με τους Ευρωπαίους, πολλοί Αφρικανοί και Νοτιοαστιάτες ανέπτυξαν έναν ιδιαίτερο τρόπο βάδισης: κρατούν το κέντρο μάζας τους σε σταθερό ύψος, γεγονός το οποίο συνέπαγεται σημαντική μείωση της ενέργειας που καταναλώνουν.

## Και τώρα θίγετε το αεροβικό

Ίσως έχετε συναντήσει στα σχολικά βιβλία φυσικής ένα πείραμα στο οποίο δύο εκκρεμή, αναρτημένα από σταθερή οριζόντια ράβδο, συνδέονται μεταξύ τους μηχανικά (π.χ. μέσω ενός



**Σχήμα 3**

Το «αναπνευστικό εκκρεμές» στο σώμα ενός ζώου, το οποίο προσομοιώνεται με ένα έμβολο χωρίς τριβές στρεωμένο σ' ένα ελατήριο και ένα αμορτισέρ.

ελατηρίου ή ενός νήματος). Αν εκτρέψετε το ένα από την κατακόρυφη θέση και το αφήσετε ελεύθερο, αρχίζει να ταλαντώνεται ελαττώνοντας βαθμιαία το πλάτος του, ενώ ταυτόχρονα αρχίζει να ταλαντώνεται και το άλλο εκκρεμές, σε συγχρονισμό με το πρώτο, αυξάνοντας βαθμιαία το δικό του πλάτος. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στο σώμα ενός ζώου που τρέχει αλληλεπιδρούν δύο «εκκρεμή»: το ζώο, ως όλον, και οι πνεύμονες του.

Στο Σχήμα 3 φαίνεται το «εκκρεμές» με το οποίο εξομοιώνουμε τους πνεύμονες ενός καγκουρό. Λειτουργεί με τον εξής τρόπο: κατά την εισπνοή —όταν οι πνεύμονες γεμίζουν με αέρα— το κέντρο μάζας της κοιλιάς μετατοπίζεται προς τα αριστερά, ενώ κατά την εκπνοή μετατοπίζεται προς τα δεξιά. Οι ελαστικές ιδιότητες του δια-

φράγματος και άλλων ιστών αναπτύσσονται στο σχήμα ως ελατήριο, τα δε όργανα που αποσβένουν τις ταλαντώσεις ως ένα αμορτισέρ. Με αυτό τον τρόπο τα κοιλιακά όργανα ουμπεριφέρονται σε είδει εμβόλου που ταλαντώνεται σε συμφωνία φάσης με την αναπνοή.

Ένα ζώο, λοιπόν, που τρέχει καταναλώνει την ελάχιστη δυνατή ενέργεια αφού οι αδρανειακές δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα του από την περιοδική του επιτάχυνση και επιβράδυνση μάλλον βοηθούν παρά δυσχεραίνουν τη διαδικασία της αναπνοής. Τέτοιες σκέψεις μάς οφεύνουν να υποστηρίξουμε την άποψη ότι ο ρυθμός αναπνοής θα πρέπει να ισούται κατά προσέγγιση με τη συχνότητα διασκελισμού του ζώου.

Ειδικά πειράματα στα οποία χρησιμοποιήθηκαν καγκουρό, άλογα, κουνέλια και σκυλιά επιβεβαίωσαν την υπόθεση. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο πλέον πρόσφορος λόγος της συχνότητας διασκελισμού προς το ρυθμό αναπνοής (ειδικά όταν τα ζώα τρέχουν πολύ γρήγορα) είναι 1:1. Στους ανθρώπους η συγκεκριμένη σχέση αποδεικνύεται περισσότερο περιπλοκή, καλύπτοντας μια ολόκληρη περιοχή τιμών (4:1, 3:1, 2:1, 1:1, 5:2, 3:2), αν και ο λόγος 2:1 προβάλλει ως ο πλέον κατάλληλος.

Η όρθια στάση του σώματος στον άνθρωπο μπορεί να εξηγήσει γιατί ο ρυθμός αναπνοής του δεν εξαρτάται από την ταχύτητα με την οποία τρέχει: στους ανθρώπους η αναπνοή συνοδεύεται από κατακόρυφη μετατόπιση των κοιλιακών οργάνων, ενώ οι αδρανειακές δυνάμεις δρουν στην οριζόντια διεύθυνση. Συνεπώς, οι αδρανειακές δυνάμεις επηρεάζουν το «αναπνευστικό εκκρεμές» στους ανθρώπους πολύ λιγότερο απ' ότι στα ζώα.

Επιστρέφοντας στο πείραμα του σχολικού βιβλίου με τα δύο εκκρεμή, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι επαγόμενες ταλαντώσεις του δεύτερου εκκρεμούς εμφανίζουν μέγιστο πλάτος όταν και τα δύο έχουν την αυτή ιδιοπερίοδο ταλαντώσης. Επομένως, μπορούμε να αναμένουμε ότι οι φυσικές ταλαντώσεις του αναπνευστικού εκκρεμούς δεν θα πρέπει να διαφέρουν αισθητά

από το ρυθμό διασκελισμού. Και τα πειραματικά δεδομένα υποστηρίζουν τη συγκεκριμένη υπόθεση. Πειράματα με σκυλιά έδειξαν ότι η ιδιοσυχνότητα των ταλαντώσεων του αναπνευστικού εκκρεμούς ήταν περίπου 4 Hz, και η συχνότητα των διασκελισμών ήταν τα σκυλιά ανέπτυσσαν πλήρη ταχύτητα ήταν 3.2 Hz.

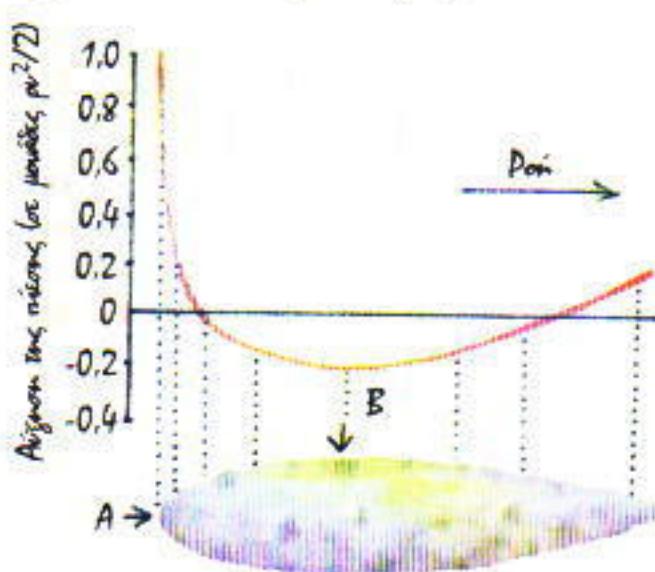
Εφόσον η ιδιοσυχνότητα του αναπνευστικού εκκρεμούς είναι σταθερή για δεδομένο ζώο, προκειμένου να ελαχιστοποιείται η κατανάλωση ενέργειας, ο ρυθμός διασκελισμού θα πρέπει να διατηρείται σταθερός ακόμη κι όταν η ταχύτητα μεταβάλλεται. Πράγματι, τόσο τα τετράποδα όσο και τα διπόδια ζώα (για παράδειγμα το καγκουρό) διατηρούν σταθερό το ρυθμό διασκελισμού τους, ενώ το μήκος των διασκελισμών τους μπορεί να μεταβάλλεται κατά έναν παράγοντα 2 ή 3.

## Ο Bernoulli υπάρχει για χάρη των πουλιών

Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli [ $\rho u^2/2 + p = \text{σταθ.}$ , όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού,  $u$  η ταχύτητα της κίνησής του και  $p$  η (στατική) πίεση], η μεταβολή στην ταχύτητα ροής συνοδεύεται από αντίστοιχη αλλαγή της πίεσης. Πρόκειται για μια άμεση συνέπεια του νόμου διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, αφού η ποσότητα  $\rho u^2/2$  ισούται αριθμητικά με την κινητική ενέργεια του ρευστού, ενώ η περιπρόσωπεί τη δυναμική ενέργεια λόγω της συμπίεσής του (ενέργεια πίεσης).

Ο νόμος του Bernoulli προβλέπει ότι, όταν ένα σώμα κινείται μέσα σ' ένα ρευστό (ή όταν υπάρχει στρωτή ροή ρευστού γύρω από το σώμα), η πίεση του ρευστού μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο στην περιοχή που περιβάλλει άμεσα το σώμα. Το Σχήμα 4 απεικονίζει αυτήν τη μεταβολή για σώμα με σχήμα σταγόνας.

Σε σημεία όπου το ρευστό προσπίπτει στο σώμα σχεδόν μετωπικά (ση-



**Σχήμα 4**

Κατανομή της πίεσης σε ρευστό που ρέει γύρω από ένα συμμετρικό σώμα με σχήμα σταγόνας. (Εφόσον η μεταβολή της πίεσης είναι πάντοτε ανάλογη του  $\rho u^2/2$ , μπορούμε να την εκφράσουμε παριστώντας γραφικά τον αδιάστατο λόγο  $2p/\rho u^2$ .)



**Σχήμα 5**

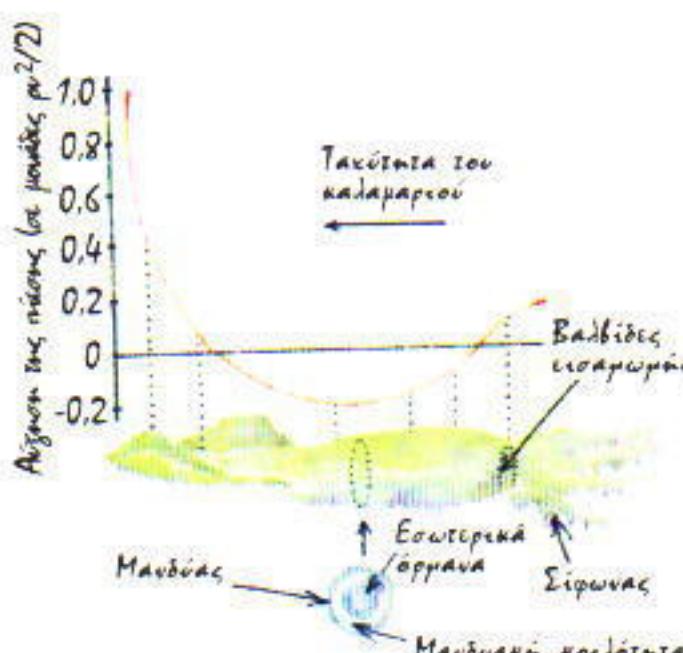
Η ροή του αέρα γύρω από την πτέρυγα του αεροπλάνου.

μείο Α) η ταχύτητά του μειώνεται ενώ η πίεση αυξάνεται. Καθώς το ρευστό προχωρεί κατά μήκος της επιφάνειας του σώματος, η κίνησή του επιταχύνεται και σε μερικές περιοχές κοντά στο σώμα (σήμερο Β) κινείται ταχύτερα από τι το υπόλοιπο ρευστό σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli, η εν λόγω αύξηση της ταχύτητας συνοδεύεται από μείωση της πίεσης. Έτοι, η υψηλή πίεση που ασκείται στο μετωπικό τμήμα του σώματος τείνει να συμπέσει το σώμα, ενώ η χαμηλή πίεση στην περιοχή των πλευρικών επιφανειών του τείνει να το πλατύνει.

Ο άνθρωπος κατόρθωσε να χρησιμοποιήσει προς όφελός του το νόμο του Bernoulli. Το Σχήμα 5 δείχνει την εγκάρσια διατομή μιας πτέρυγας αεροπλάνου. Ας θεωρήσουμε την κίνηση δύο σωματιδίων αέρα. Ας υποθέσουμε ότι τα σωματίδια βρίσκονται το ένα κοντά στο άλλο προτού προσκρούσουν στη μετωπική επιφάνεια της πτέρυγας. Στη συνέχεια χωρίζουν και κινούνται κατά μήκος της άνω και της κάτω, αντίστοιχα, επιφάνειας της πτέρυγας, ώσπου να συναντηθούν τελικά στο πισω άκρο. Ωστόσο, το σωματίδιο Α διανύει μεγαλύτερη διαδρομή από τι το σωματίδιο Β, γεγονός που σημαίνει ότι η μέση ταχύτητά του πρέπει να είναι μεγαλύτερη. Έτοι, σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli, η μέση πίεση πάνω από την πτέρυγα είναι χαμηλότερη από τη κάτω από αυτήν. Στην προκύπτουσα διαφορά πίεσης οφείλεται η δυναμική άνωση που αναπτύσσεται στην πτέρυγα (η οποία εξαρτάται βεβαίως από το εμβαδόν της επιφάνειας και το σχήμα της πτέρυγας).

Πώς βρίσκει όμως εφαρμογή στον κόσμο των ζώων ο νόμος του Bernoulli; Η πτήση των πτηνών σε μεγάλα υψη αποτελεί το πλέον παραστατικό παράδειγμα. Μολονότι ακόμη και σήμερα δεν κατανοούμε απολύτως την αεροδυναμική της εν λόγω πτήσης, τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι παρόμοια με εκείνα της ανθρώπινης απομίμησης, του αεροπλάνου. Οφείλουμε να παραδεχτούμε ότι η φύση κρύβει πολλά ακόμη μυστήρια που μπορούν να εξιχνιαστούν με τη βοήθεια του νόμου του Bernoulli.

Οι περισσότεροι ασφαλώς γνωρίζετε ότι το καλαμάρι χρησιμοποιεί την ισχύ ενός πίδακα για να ξεφύγει από



Σχήμα 6

Η κατανομή της πίεσης του νερού γύρω από το σώμα ενός κινούμενου καλαμαριού και η εγκάρσια διατομή του σώματός του.

τους διώκτες του, εκτοξεύοντας νερό από τη μανδυακή κοιλότητά του. Οι επιστήμονες μόνο πρόσφατα κατανόησαν πώς γεμίζει αυτή η κοιλότητα με νερό.

Στο Σχήμα 6 υπάρχει η σχηματική αναπαράσταση ενός καλαμαριού και φαίνεται η κατεύθυνση της κίνησής του, η οποία προκαλείται από τον πίδακα νερού που εκτοξεύεται από το σωλήνα (το σίφωνα) που υπάρχει κοντά στο κεφάλι του μαλάκιου. Οι βαλβίδες εισαγωγής, διαμέσου των οποίων το νερό εισέρχεται στη μανδυακή κοιλότητα, βρίσκονται επίσης κοντά στο κεφάλι και στα πλάγια του σώματος του ζώου.

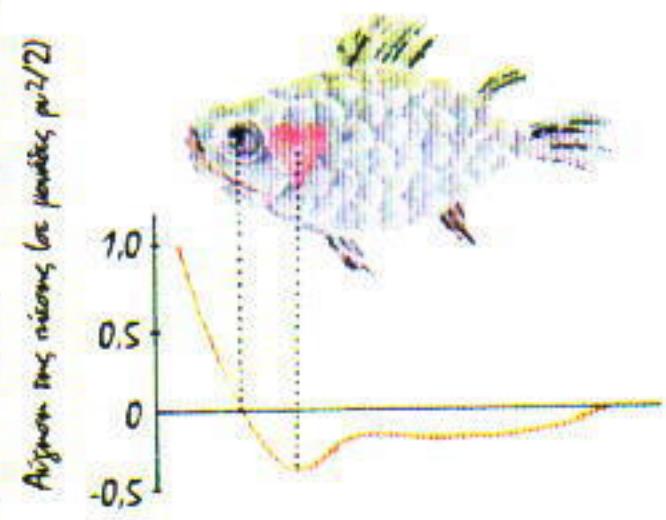
Όλες οι γνώσεις μας για την πτώση της πίεσης ενός ρευστού που ρέει γύρω από ένα σώμα μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν στο καλαμάρι. Όταν το καλαμάρι κολυμπά, η πίεση του νερού λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο μέσο του σώματός του, κοντά στη μανδυακή κοιλότητα (Σχήμα 6). Οι βαλβίδες εισαγωγής βρίσκονται ακόμη πιο πίσω, ώστε η πίεση στο σημείο εκείνο να είναι μεγαλύτερη από τη μέση πίεση που επικρατεί εντός της μανδυακής κοιλότητας. Λόγω ακριβώς αυτής της πτώσης πίεσης το νερό αναρροφάται στην κοιλότητα.

Ο βαθμός στον οποίο ο νόμος του Bernoulli «συμμετέχει» στο μηχανισμό μέσω του οποίου η μανδυακή κοιλότητα γεμίζει με νερό υπολογίστηκε με τη βοήθεια μοντέ-

λων που καθιστούν δυνατή την αριθμητική προσομοίωση. Η βαθμίδα πίεσης (δηλαδή η μεταβολή της πίεσης ανά μονάδα μήκους) που προβλέπει ο νόμος του Bernoulli εξαρτάται από την ταχύτητα του καλαμαριού και ευθύνεται για το 50% ως και 90% της εισοροής νερού όταν η ταχύτητά του αυξάνεται από 3 σε 9 m/s. Καθίσταται λοιπόν σαφές ότι ο νόμος του Bernoulli είναι πράγματι ιδιαίτερα σημαντικός για τη δραστηριότητα του καλαμαριού, εφόσον, υπό κανονικές συνθήκες, η ταχύτητά του κυμαίνεται από 5 έως 10 m/s.

Από όλα τα ζώα, όμως, στα ψάρια συναντάμε τον αποτελεσματικότερο ίσως τρόπο εφαρμογής του νόμου του Bernoulli. Η μακρά πορεία εξέλιξής τους βελτιστοποίησε τα σώματά τους σε τέτοιο βαθμό ώστε η συνολική πτώση της πίεσης κοντά στο μέσο του σώματός τους ισούται περίπου με την αύξηση της πίεσης στο εμπρόσθιο τμήμα (συγκρίνετε τα Σχήματα 4 και 7). Οι επιστήμονες πιστεύουν ότι μια σημαντική πτώση της πίεσης στην περιοχή κοντά στην καρδιά του ψαριού ενδέχεται να υποβοηθά την καρδιακή λειτουργία, δεδομένου ότι η χαμηλή πίεση στις κοιλίες της καρδιάς αυξάνει την εισροή αίματος.

Ακόμη, η κατασκευή του σώματος του ψαριού είναι τέτοια ώστε υπάρχει μια περιοχή όπου η πίεση δεν εξαρτάται από την ταχύτητα της κίνησής του και ισούται πάντα με την υδροστατική πίεση. Πρόκειται για την περιοχή που βρίσκονται τα μάτια του ψαριού. Κατά συνέπεια, τα μάτια — τα όργανα με την ελάχιστη προστασία ενάντια στην πα-



Σχήμα 7

Κατανομή της πίεσης γύρω από το σώμα ενός ψαριού που κολυμπάει.

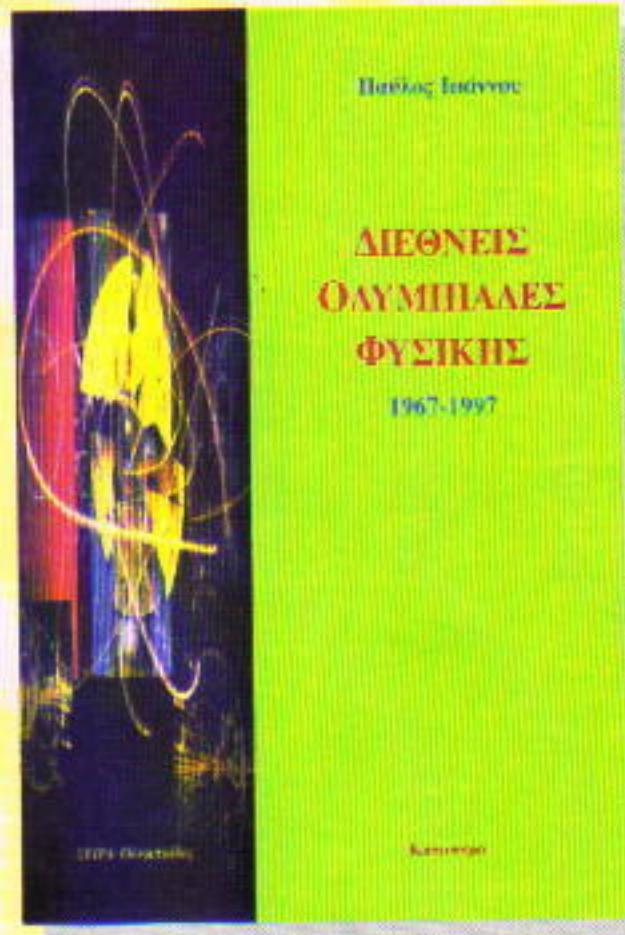
ραμόρφωση— δεν δοκιμάζουν ποτέ την αύξηση της πίεσης του νερού που οφείλεται στην αύξηση της ταχύτητας κολύμβησης.

Είναι γνωστό ότι ορισμένα είδη σκαθαριών περνούν το μεγαλύτερο διάστημα της ζωής τους κάτω από το νερό. Στο διάστημα αυτό αναπνέουν αέρα από μια φυσαλίδα την οποία μεταφέρουν πάντα μαζί τους. Το είδος *potamodites tuberosus*, το οποίο ζει στα ποτάμια της Δυτικής Αφρικής, συγκαταλέγεται στα «υποβρύχια» σκαθάρια. Αυτό το σκαθάρι, μαζί με τη φυσαλίδα που μεταφέρει, ενόσω βρίσκεται σε τρεχούμενα νερά προσκολλάται συνήθως σε μια πέτρα. Μόλις το σκαθάρι βρεθεί σε στάσιμα νερά, η φυσαλίδα αρχίζει να συρρικνώνεται και σε δύο ώρες εξαφανίζεται τελείως. Έτσι, το σκαθάρι εξαναγκάζεται να αναζητήσει άλλη φυσαλίδα. Όταν τη βρει, το σκαθάρι προτιμά να παραμείνει σε τρεχούμενα νερά.

Ο νόμος του Bernoulli μπορεί να μας βοηθήσει να εξηγήσουμε και το γεγονός ότι η φυσαλίδα του αέρα είναι περισσότερο σταθερή σε τρεχούμενα νερά. Η πίεση του νερού που ρέει γύρω από τη φυσαλίδα, η οποία επιμηκύνεται κατά τη διεύθυνση της ροής, είναι μικρότερη από την υδροστατική πίεση σε όλο σχεδόν το μήκος της επιφάνειάς της. Επομένως, η πίεση του αέρα στο εσωτερικό της φυσαλίδας στα τρεχούμενα νερά είναι μικρότερη απ' ό,τι στα στάσιμα. Αν το σκαθάρι βρίσκεται σε ένα αβαθές μέρος, η πίεση του αέρα μέσα στη φυσαλίδα είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση· ως αποτέλεσμα, ο αέρας που υπάρχει διαλυμένος στο νερό (υπό ατμοσφαιρική πίεση) τείνει να εισέλθει στη φυσαλίδα, η οποία αρχίζει ήδη να διαστέλλεται.

Ακόμη και σε βάθος μερικών εκατοστών, μια φυσαλίδα αέρα συχνά παραμένει σταθερή, παρόλο που η υδροστατική πίεση τείνει να τη συρρικνώσει. Οι σχετικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι, για να είναι σταθερή μια φυσαλίδα σε βάθος 1 cm, η ταχύτητα της ροής του νερού θα πρέπει να υπερβαίνει την τιμή 1 m/s, ενώ, σε βάθος 4 cm, η ταχύτητα ροής θα πρέπει να υπερβαίνει τα 2 m/s.

## ΠΡΩΤΗ ΦΟΡΑ ΣΤΑ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ



Παύλος Ιωάννου

Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής

1967-1997

Το παρόν σύγγραμμα είναι η πρώτη προσπάθεια παγκόσμια για συνολική παρουσίαση των θεμάτων όλων των Διεθνών Ολυμπιάδων Φυσικής που διοργανώθηκαν μέχρι σήμερα. Τα ζητήματα των είκοσι οκτώ συνολικά διαγωνισμών παρουσιάζονται αναλυτικά και συνοδεύονται από τις λύσεις τους με προτάσεις και υποδείξεις.

Το βιβλίο απευθύνεται αφ' ενός στους μαθητές των τελευταίων τάξεων του λυκείου με ενδιαφέρον για τις θετικές επιστήμες και στους φοιτητές των θετικών επιστημών και των πολυτεχνικών σχολών αφ' ετέρου στους καθηγητές τους. οι οποίοι θα μπορέσουν να αντλήσουν πολλές ιδέες και να αξιοποιήσουν προτάσεις από τα θέματα που περιλαμβάνει. Ακόμη, το βιβλίο θα φανεί χρήσιμο σε οποιονδήποτε θέλει να διευρύνει τους ορίζοντές του στο γοητευτικό αντικείμενο της φυσικής και θεωρεί την ενασχόλησή του μ' αυτή και ως διασκέδαση.

Στη σειρά «Ολυμπιάδες» κυκλοφορούν ήδη τα βιβλία:

- N. Βασιλιεφ και A. Γεγκόροφ. *Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της E.S.S.D. (1961-1991)*, τόμ. 1 και 2
- M. Κλάμκιν. *Μαθηματικές Ολυμπιάδες των Η.Π.Α. (1972-1986)*

Εκδόσεις Κάτοπτρο - Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Αριθμητικές περιπλανήσεις

Εξερεύνηση μερικών ασυνήθιστων μαθηματικών πράξεων

A. Egorov και A. Kotova

**Ο**Ι ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΑΝΑΓΝΩΣΤΕΣ θα εκπλαγούν (ή και θα προβληματιστούν) από τις επόμενες ισότητες:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 &= 1, \\ 2 \cdot 5 &= 3, \\ 3 \cdot 2 &= 0. \end{aligned}$$

Οι προτάσεις αυτές είναι απολύτως ορθές αν θεωρήσουμε ότι τα σύμβολα του πολλαπλασιασμού και της ισότητας σημαίνουν κάτι διαφορετικό από αυτό που μάθαμε στο σχολείο.

## Αριθμητική των ψηφίων

Ας ξεκινήσουμε μ' ένα παράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο των ψηφίων 0, 1, ..., 9. Ας πούμε ότι το άθροισμα (ή το γινόμενο) δύο ψηφίων είναι το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματός τους (ή του γινομένου τους). Τότε,

$$2 + 5 = 7, \quad 7 + 6 = 3, \quad 5 + 5 = 0,$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4
7	7	0	9	0	1	2	3	4	5
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7

$$7 \cdot 7 = 9, \quad 2 \cdot 5 = 0, \quad 8 \cdot 8 = 4.$$

Τέτοιες αριθμητικές πράξεις δεν είναι κατά κανένα τρόπο κατώτερες από τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ακεραιών. Πραγματικά, για κάθε τριάδα ψηφίων  $a, b, c$  ισχύουν οι επόμενες ταυτότητες:

1.  $a + b = b + a$ ,
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,
3.  $a + 0 = a$ ,
4. Για κάθε ψηφίο  $a$  υπάρχει ένα ψηφίο  $(-a)$  τέτοιο ώστε  $a + (-a) = 0$  (για παράδειγμα,  $-4 = 6, -5 = 5, -1 = 9$ ),
5.  $ab = ba$ ,
6.  $a \cdot 1 = a$ ,
7.  $a(b + c) = ab + ac$ .

Η ισχύς αυτών των ταυτοτήτων προκύπτει άμεσα από τις ανάλογες ιδιότητες των πράξεων με συνηθισμέ-

νους αριθμούς. Μπορούμε επίσης εκτός από πρόσθεση να εκτελούμε και αφαίρεση με ψηφία αν ορίσουμε ότι

$$a - b = a + (-b).$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} 2 - 7 &= 2 + (-7) = 2 + 3 = 5, \\ 4 - 6 &= 4 + (-6) = 4 + 4 = 8, \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής.

Μπορούμε να σχηματίσουμε πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού για την αριθμητική μας με ψηφία (Σχήμα 1). Ένας αριθμός στη διασταύρωση μιας γραμμής και μιας στήλης είναι το άθροισμα (ή το γινόμενο) των αριθμών που βρίσκονται στην αρχή της γραμμής και της στήλης. Οι αναγνώστες θα παρατηρήσουν χωρίς αμφιβολία την ουσιαστική διαφορά μεταξύ της «νέας» και της παραδοσιακής αριθμητικής. Το γινόμενο δύο μηδενικών ψηφίων μπορεί να ισούται με το μηδέν!

Όταν συμβαίνει αυτό, λέμε ότι η αριθμητική περιέχει «διαιρέτες του μηδενός» — αριθμούς  $a \neq 0$  και  $b \neq 0$  τέτοιους ώστε  $ab = 0$ .

## Ασκήσεις

1. Βρείτε το τελευταίο ψηφίο των αριθμών: (α)  $7^{1993}$ , (β)  $2^{7^{1993}}$ , (γ)  $3^{1993}$ .
2. Αποδείξτε ότι το γινόμενο των δύο τελευταίων ψηφίων του τετραγώνου ενός ακεραιού είναι άρτιος.
3. Λύστε την εξίσωση  $x^2 - 1 = 0$  εφαρμόζοντας την αριθμητική ψηφίων.



## Αριθμητική υπολοίπων modulo $m$

Το ψηφίο των μονάδων ενός ακέραιου είναι απλώς το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 10. Συνεπώς, η ψηφιακή αριθμητική μας δεν είναι παρά η αριθμητική των υπολοίπων της διαίρεσης των αριθμών με το 10. Αυτό μας οδηγεί σε μια φυσική γενίκευση της ψηφιακής μας αριθμητικής.

Έστω  $m > 1$  ένας τυχαίος φυσικός αριθμός. Κάθε ακέραιος, όταν τον διαιρεύμε με τον  $m$ , αφήνει ένα υπόλοιπο. Υπάρχουν  $m$  διαφορετικά υπόλοιπα:

$$0, 1, 2, \dots, m - 1.$$

Παρατηρήστε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης με τον  $m$  συμπίπτει με το τελευταίο ψηφίο της παράστασης ως προς βάση  $m$  του αριθμού που διαιρούμε.

0	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	1
3	0	3	1	4
4	0	4	3	2
0	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	0
3	0	3	0	3
4	0	4	2	0
5	0	5	4	3

Σχήμα 2

Θα εισάγουμε τώρα την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των υπόλοιπων της διαίρεσης διά  $m$ . Θα ορισουμε ως άθροισμα των υπολοίπων  $a$  και  $b$  το υπόλοιπο της διαίρεσης του συνηθισμένου αθροίσματος των  $a$  και  $b$  με τον  $m$ . Ο ανάλογος ορισμός ισχύει για το γινόμενο.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και οι επτά ιδιότητες που παραθέσαμε προηγουμένως για το άθροισμα και το γινόμενο των ψηφίων ισχύουν και για τις πράξεις με τα υπόλοιπα. Φυσικά, και στην αριθμητική των υπολοίπων

μπορούμε να εκτελέσουμε αφαιρέσεις. Η αφαιρεση ορίζεται, όπως προηγουμένως, από τον κανόνα  $a - b = a + (-b)$ .

Το σύνολο των υπολοίπων της διαίρεσης διά  $m$  εφοδιασμένο με την παραπάνω αριθμητική συμβολίζεται παραδοσιακά με  $\mathbf{Z}_m$ . Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι εργαζόμαστε modulo  $m$  με βάση  $m$ .

Στο Σχήμα 2 βλέπετε τους πίνακες πολλαπλασιασμού για τα  $\mathbf{Z}_5$  και  $\mathbf{Z}_6$  (δεν παρουσιάζουμε τους αντιστοιχους πίνακες για την πρόσθεση διότι οι ιδιότητές τους είναι παρόμοιες για όλα τα  $m$ ). Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με το  $\mathbf{Z}_6$ , το  $\mathbf{Z}_5$  δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός. Γιατί συμβαίνει αυτό; Οι επόμενες ασκήσεις θα μας βοηθήσουν να διαλευκάνουμε το φαινόμενο.

### Ασκήσεις

4. Κατασκευάστε πίνακες πολλαπλασιασμού για την αριθμητική υπολοίπων modulo 7, 8, 9, 11, 12 και 13.

5. Λύστε τις εξισώσεις  $x^2 = 1$  και  $x^2 = -1$ , όταν το  $x$  ανήκει σ' ένα από τα συστήματα υπολοίπων της Ασκήσης 4. Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να βρείτε όλους τους ακέραιους  $x$  για τους οποίους το  $x^2 - 1$  ή το  $x^2 + 1$  διαιρείται από την αντιστοιχή βάση.

6. Θεωρήστε την αριθμητική των υπολοίπων modulo 100. Βρείτε όλους τους διαιρέτες του μηδενός. Ποιο είναι το πλήθος τους; Αποδείξτε ότι, αν ο  $a$  δεν είναι διαιρέτης του μηδενός, τότε  $a^{40} = 1$ . (Ένα πόρισμα αυτού του γεγονότος είναι ότι αν ο  $a$  είναι αριθμός πρώτος προς το 100, τότε ο  $a^{40} - 1$  διαιρείται από το 100.)

7. Αποδείξτε ότι το άθροισμα

$$1 + 2^{1997} + \dots + 1996^{1997}$$

διαιρείται με το 1997.

## Υπόλοιπα modulo $p$ , όπου $p$ πρώτος

Έστω  $p$  ένας τυχαίος πρώτος αριθμός. Θεωρούμε τα υπόλοιπα της διαίρεσης με τον  $p$ :

$$0, 1, 2, \dots, p - 1.$$

Θεωρήμα 1. Το σύνολο των μη μηδενικών υπολοίπων modulo  $p$  (όπου

$p$  πρώτος) δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν στο  $\mathbf{Z}_p$  δύο υπόλοιπα modulo  $p$ , τα  $a$  και  $b$ , τέτοια ώστε  $a \neq 0, b \neq 0$  και  $ab = 0$ .

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός  $ab$  διαιρείται από το  $p$ . Αφού ο  $p$  είναι πρώτος, έπειτα ότι ένας από τους  $a$  και  $b$  διαιρείται από το  $p$ , πράγμα αδύνατον, αφού  $0 < a < p$  και  $0 < b < p$ .

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε το σύνολο των μη μηδενικών υπολοίπων του  $\mathbf{Z}_p$  με  $\hat{\mathbf{Z}}_p$ .

Από το Θεώρημα 1 έπειται άμεσα ότι, αν  $ab = ac$  και  $a \neq 0$ , τότε  $b = c$  (οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν αυτή την πρόταση). Αυτό όμως σημαίνει ότι, αν  $a \neq 0$ , τότε τα στοιχεία του  $\hat{\mathbf{Z}}_p$  της μορφής

$$a, 2a, \dots, (p - 1)a$$

είναι διαφορετικά και, επομένως (αφού είναι  $p - 1$  το πλήθος), ακριβώς ένα από αυτά ισούται με 1. Αυτό σημαίνει ότι το  $\hat{\mathbf{Z}}_p$  περιέχει ένα υπόλοιπο  $b$  τέτοιο ώστε  $ab = 1$ .

Συμβολίζουμε αυτό το μοναδικό στοιχείο του  $\hat{\mathbf{Z}}_p$  με  $a^{-1}$ , ή  $1/a$ , και το ονομάζουμε πολλαπλασιαστικό αντιστροφο του  $a$ . Προφανώς, αν  $a^{-1} = b^{-1}$  για δύο υπόλοιπα  $a$  και  $b$ , τότε  $a = b$ .

Επομένως, όταν ο  $p$  είναι πρώτος μπορούμε να ορίσουμε τη διαίρεση στο  $\hat{\mathbf{Z}}_p$ : αν  $b \neq 0$ , τότε το  $a/b$  ορίζεται ως το  $a \cdot b^{-1}$ .

### Ασκήσεις

8. Αποδείξτε ότι

$$(a)(a^{-1})^{-1} = a,$$

$$(-a)^{-1} = -a^{-1},$$

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$

(δ) κάθε εξισώση  $ax = b$ , όπου  $a \neq 0$ , έχει μία μοναδική ρίζα.

9. Αποδείξτε ότι για κάθε πρώτο αριθμό  $p$  ο αριθμός

$(p - 1)!(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/(p - 1))$  διαιρείται από τον  $p$ .

10. Αποδείξτε ότι ένα υπόλοιπο που ανήκει στο  $\mathbf{Z}_m$  είναι αντιστρέψιμο (έχει αντιστροφο στοιχείο) αν και μόνο αν δεν είναι διαιρέτης του μηδενός (δηλαδή, αν είναι σχετικά πρώτο προς τον  $m$ ).

## Θεώρημα Wilson

Η αριθμητική των υπολοίπων ως προς βάση έναν πρώτο αριθμό μάς επιτρέπει να αποδείξουμε το επόμενο κριτήριο για το αν είναι πρώτος ένας ακέραιος  $p$ .

**Θεώρημα Wilson.** Ενας ακέραιος αριθμός  $p$  είναι πρώτος αν και μόνο αν ο αριθμός  $A = (p-1)! + 1$  διαιρείται από τον  $p$ .

Απόδειξη. Εστω  $p$  πρώτος αριθμός. Θα δείξουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση ο  $A$  διαιρείται από τον  $p$ . Όταν  $p = 2$ , η πρόταση είναι προφανής. Αν  $p > 2$ , παρατηρούμε ότι για κάθε μη μηδενικό υπόλοιπο modulo  $p$  ορίζεται το αντίστροφό του, και ότι τα υπόλοιπα  $a$  και  $a^{-1}$  είναι διαφορετικά μεταξύ τους αν  $a \neq 1$  και  $a \neq p-1$ . Πράγματι, αν  $a = a^{-1}$ , τότε

$$0 = 1 - 1 = a \cdot a^{-1} - 1 = a^2 - 1 \\ = (a+1)(a-1).$$

Αυτό όμως μπορεί να αληθεύει μόνο αν  $a = 1$  ή αν  $a = p-1$ , διότι διαφορετικά ούτε το  $a+1$  ούτε το  $a-1$  διαιρούνται από τον  $p$ .

Επομένως στο γινόμενο  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$  μπορούμε να συνδυάσουμε όλα τα υπόλοιπα εκτός από το 1 και το  $p-1$  σε ζεύγη που αποτελούνται από ένα υπόλοιπο και το αντίστροφό του. Συνεπώς,

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) = 1 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) \cdot (3 \cdot 3^{-1}) \cdot \dots \cdot [(p-1)/2] \cdot ((p-1)/2)^{-1} \cdot (p-1) \\ = 1 \cdot (p-1) = p-1 = -1.$$

Στο  $\mathbf{Z}_p$  λοιπόν ισχύει η ισότητα  $(p-1)! = -1$ , πράγμα που σημαίνει ότι ο ακέραιος αριθμός  $(p-1)! + 1$  διαιρείται από τον  $p$ .

Εστω τώρα  $p$  ένας σύνθετος αριθμός. Δηλαδή, ας υποθέσουμε ότι  $p = kd$ , όπου  $k, d$  ακέραιοι αριθμοί διαφορετικοί της μονάδας. Τότε ένας από τους παράγοντες του  $(p-1)!$  είναι ο  $d$ , και μπορούμε να γράψουμε το  $(p-1)!$  στη μορφή  $nd$ , όπου  $n$  ακέραιος. Τότε όμως το  $(p-1)! + 1 = nd + 1$  δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του  $d$  και, επομένως, δεν διαιρείται από τον  $p$ .

Δυστυχώς το κριτήριο αυτό είναι ένα πολύ όμορφο μαθηματικό γεγονός αλλά ελάχιστα εξυπηρετικό: η χρήση του είναι εξαιρετικά δύσκολη όταν ο  $p$  είναι μεγάλος. Για παράδειγμα, για να ελέγξουμε αν είναι πρώτος αριθμός ο

1997 θα πρέπει να υπολογίσουμε τον τεράστιο αριθμό  $1996! + 1$  και να τον διαιρέσουμε με τον 1997.

### Ασκήσεις

11. Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 + 1 = 0$  έχει λύσεις στο  $\mathbf{Z}_p$  αν  $p = 4k + 1$ .

12. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί

(α)  $91! \cdot 1901! - 1$

(β)  $92! \cdot 1990! + 1$

διαιρούνται από το 1993.

## Περιοδικότητα των δυνάμεων

Έστω  $a \neq 0$  ένα στοιχείο του  $\mathbf{Z}_p$ , όπου  $p$  πρώτος αριθμός. Τι μπορούμε να πούμε για τα  $a^2, a^3, a^4, \dots$ ;

Αφού υπάρχουν μόνο  $p-1$  διαφορετικά στοιχεία στο  $\mathbf{Z}_p$ , συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να βρούμε δύο ίσα στοιχεία ανάμεσα στους πρώτους  $p$  όρους της ακολουθίας  $a, a^2, \dots, a^m, \dots$ . Έστω ότι είναι τα  $a^k$  και  $a^l$ . Τότε  $a^{k-l} = 1$ .

Κατά συνέπεια, μια από τις δυνάμεις του  $a$  είναι ίση με 1.

Έστω  $a \neq 1$  και έστω  $d$  ο ελάχιστος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε  $a^d = 1$ . Προφανώς (α)  $d \neq 1$ , (β) όλες οι δυνάμεις  $a, a^2, \dots, a^d$  είναι διαφορετικές και (γ)  $a^{k-d} = a^k$ , για κάθε ακέραιο  $k$ . Επομένως, η ακολουθία των δυνάμεων του υπόλοιπου  $a$  είναι περιοδική (με περίοδο  $d$ ).

Ορισμός. Ο αριθμός  $d$  που οριστήκε στην προηγούμενη παράγραφο ονομάζεται **τάξη του  $a$  modulo  $p$**  και συμβολίζεται με  $d_p(a)$ .

Ας επισημάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες της τάξης ενός στοιχείου:

1. Αν  $d_p(a) = d$  και  $a^m = 1$ , τότε το  $m$  διαιρείται από τον  $d$ .

2. Αν  $d_p(a) = m$  και  $m = kl$ , τότε  $d_p(a^k) = l$ .

3.  $d_p(a) = d_p(a^{-1})$ .

4. Αν  $d_p(a) = m$  και  $d_p(b) = n$ , τότε ο  $d_p(ab)$  διαιρεί το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών  $m$  και  $n$ .

5. Αν  $d_p(a) = m$ ,  $d_p(b) = n$  και οι αριθμοί  $m, n$  είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε  $d_p(ab) = mn$ .

### Ασκήσεις

13. Αποδείξτε τις Ιδιότητες 2 και 3.

14. Αποδείξτε την Ιδιότητα 4 και επαληθεύστε ότι το  $d_p(ab)$  δεν είναι απαραίτητα ίσο με το ελάχιστο κοινό

πολλαπλάσιο των  $m$  και  $n$ .

Ας αποδείξουμε την Ιδιότητα 1. Έστω  $a^m = 1$  και ας υποθέσουμε ότι ο  $m$  δεν διαιρείται από τον  $d$  (δηλαδή  $m = qd + r$ , όπου  $0 < r < d$ ). Τότε,

$$1 = a^m = a^{qd+r} = a^{qd}a^r = (a^d)^qa^r = a^r = a^r = a^r.$$

Ο  $d$  είναι, εξ ορισμού, η ελάχιστη δύναμη για την οποία έχουμε  $a^d = 1$ . Βρήκαμε όμως έναν αριθμό  $r$  μικρότερο του  $d$  για τον οποίο ισχύει η ίδια συνθήκη. Συνεπώς, έχουμε αντίφαση.

Ιδού μια απόδειξη της Ιδιότητας 5. Έστω  $d_p(ab) = d$ . Ο  $d$  δεν υπερβαίνει το  $mn$  διότι

$$(ab)^{mn} = (a^m)^n(b^n)^m = 1 \cdot 1 = 1.$$

Από την άλλη πλευρά, και αφού  $(ab)^d = 1$ , έχουμε ότι  $a^d = (b^d)^{-1} = (b^{-1})^d$  και, επομένως (δείτε την Ιδιότητα 3),  $a^{nd} = (b^{-1})^{nd} = 1$ . Άρα, ο  $nd$  διαιρείται από τον  $m$  (Ιδιότητα 1). Τα  $m$  και  $n$  όμως είναι πρώτοι μεταξύ τους και, συνεπώς, ο  $m$  διαιρεί τον  $d$ . Παρομοίως αποδεικνύουμε ότι ο  $n$  διαιρεί τον  $d$ . Επομένως, ο  $d$  διαιρείται από τον  $mn$  και, αφού ο  $d$  δεν είναι μεγαλύτερος από τον  $mn$ , θα είναι ίσος του.

Την τάξη του  $a$  στο  $\mathbf{Z}_p$  την ονομάζουμε επίσης **εκθέτη του  $a$  modulo  $p$** .

### Ασκήσεις

15. Βρείτε την τάξη του υπόλοιπου  $2$  στα  $\mathbf{Z}_7, \mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{13}$ .

16. Αποδείξτε ότι

(α) αν το  $A = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$  είναι διαιρετό διά του 5, τότε είναι διαιρετό και διά του 625.

(β) αν το  $a^3 + b^3 + c^3$  είναι διαιρετό διά του 7, τότε και το  $abc$  είναι διαιρετό διά του 7.

(γ) αν το  $a^2 + b^2$  είναι διαιρετό διά του 7, τότε είναι διαιρετοί διά του 7 και ο  $a$  και ο  $b$ .

17. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό  $n$  το  $5^{2n-1} + 3^{n-2} \cdot 2^{n-1}$  διαιρείται διά του 19.

## Συνάρτηση Euler

Έστω  $m$  ένας φυσικός αριθμός, όχι αναγκαστικά πρώτος. Θεωρούμε το σύνολο όλων των υπόλοιπων modulo  $m$  που είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή το  $\mathbf{Z}_m^*$ . Θα συμβολίζουμε με  $\phi(m)$  το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $\mathbf{Z}_m^*$ .

1	2	3	...	$n$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$3n$
...	...	...	...	...
$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	$(m-1)n+3$	...	$mn$

### Σχήμα 3

Η συνάρτηση  $\phi(m)$ , η οποία σε κάθε φυσικό αριθμό  $m$  αντιστοιχεί το πλήθος των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι από τον  $m$  και πρώτοι προς τον  $m$ , ονομάζεται συνάρτηση Euler.<sup>1</sup> Ειδικά, για κάθε πρώτο αριθμό  $p$  είναι:

$$\begin{aligned}\phi(p) &= p - 1, \\ \phi(p^2) &= p(p - 1)\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$\phi(p^n) = p^{n-1}(p - 1)$$

Θεώρημα 2. Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών  $m$  και  $n$ , που είναι πρώτοι μεταξύ τους, έχουμε

$$\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n).$$

Λόγω αυτής της ιδιότητας λέμε ότι η συνάρτηση Euler είναι πολλαπλασιαστική.

Απόδειξη. Μπορούμε να απαριθμήσουμε το πλήθος των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι του  $mn$  και πρώτοι προς αυτόν με τον εξής τρόπο. Θεωρούμε τον πίνακα του Σχήματος 3 που περιέχει τους αριθμούς από το 1 έως τον  $mn$ . Κάθε γραμμή του πίνακα περιέχει ακριβώς  $\phi(n)$  αριθμούς που είναι πρώτοι προς τον  $n$  και κάθε στήλη περιέχει ακριβώς  $\phi(m)$  αριθμούς που είναι πρώτοι προς τον  $m$ .

Επιπλέον, η θέση σε μια γραμμή των αριθμών που είναι πρώτοι προς το  $n$  δεν εξαρτάται από την επιλογή της γραμμής. (Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να βρουν γιατί συμβαίνει αυτό.)

Αφού οι  $m$  και  $n$  είναι πρώτοι μεταξύ τους, κάθε αριθμός του πίνακα θα είναι πρώτος προς τον  $mn$  αν και μόνο αν είναι πρώτος και προς τον  $m$  και προς τον  $n$ . Επομένως, θα ανήκει σε μια στήλη που αποτελείται από αριθμούς πρώτους προς τον  $n$ . Κάθε στήλη όμως περιέχει ακριβώς  $\phi(m)$  α-

ριθμούς πρώτους προς τον  $m$ . Συνεπώς, υπάρχουν  $\phi(m)\phi(n)$  αριθμοί τέτοιου είδους. Από την άλλη πλευρά, ο  $\phi(mn)$  είναι εξ ορισμού ίσος με

αυτή την ποσότητα.

$$\text{Άρα, } \phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n).$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε έναν τύπο για τον  $\phi(m)$ . Ας παραστήσουμε τον  $m$  ως γινόμενο διαφορετικών πρώτων:

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}.$$

Τότε,

$$\phi(m) = \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s})$$

$$= \phi(p_1^{k_1}) \cdot \cdots \cdot \phi(p_s^{k_s}).$$

Όμως, οι  $p_1, p_2, \dots, p_s$  είναι πρώτοι αριθμοί και, επομένως,

$$\begin{aligned}\phi(m) &= p_1^{k_1-1}(p_1 - 1) \cdot p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) \cdots \\ &\quad \cdot p_s^{k_s-1}(p_s - 1) = \\ &= p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{k_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \\ &\quad \cdot p_s^{k_s} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = \\ &= m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).\end{aligned}$$

Για παράδειγμα,

$$\phi(20) = 20(1 - 1/2)(1 - 1/5) = 8.$$

### Ασκήσεις

18. Αποδείξτε ότι ο  $\phi(n)$  είναι άριθμος όταν  $n \neq 2$ .

19. Βρείτε τον  $d_{210}(11)$ .

Μια ακόμη υπέροχη ιδιότητα της συνάρτησης του Euler περιγράφεται από το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα Euler. Αν ο αριθμός  $a$  είναι πρώτος προς το φυσικό αριθμό  $m$  τότε ο  $a^{\phi(m)} - 1$  διαιρείται από τον  $m$ .

Απόδειξη. Ας γράψουμε τα στοιχεία του  $\mathbf{Z}_m$  στη σειρά:

$$1 = a_1, a_2, \dots, a_{\phi(m)}$$

Αφού ο  $a$  είναι πρώτος προς τον  $m$ , το υπόλοιπο  $\bar{a}$  της διαιρεστης του  $a$  με τον  $m$  δεν είναι διαιρέτης του μηδενός (δηλαδή,  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{Z}}_m$ ). Επομένως, αν αποδειξουμε ότι ο  $\bar{a}^{\phi(m)} = 1$  στο  $\hat{\mathbf{Z}}_m$ , έχουμε τελειώσει.

Πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία του  $\hat{\mathbf{Z}}_m$  με τον  $\bar{a}$  και παίρνουμε τη νέα σειρά

$$\bar{a}, \bar{a}a_1, \bar{a}a_2, \dots, \bar{a}a_{\phi(m)}.$$

Όλα τα υπόλοιπα α' αυτή τη σειρά είναι διαφορετικά και, επομένως, έχουμε και πάλι το πλήρες σύνολο των στοιχείων του  $\hat{\mathbf{Z}}_m$ , πιθανόν με μερικά από αυτά σε διαφορετική σειρά. Ας πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους αυτά τα στοιχεία:

$$\begin{aligned}a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{\phi(m)} \\ = a^{\phi(m)} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{\phi(m)}.\end{aligned}$$

Όμως, το γινόμενο  $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{\phi(m)}$  είναι πρώτο προς τον  $m$  και, επομένως, αυτή η ισότητα σημαίνει ότι  $\bar{a}^{\phi(m)} = 1$ .

Ένα απλό πόρισμα του θεώρηματος Euler είναι το «μικρό» θεώρημα του Fermat: αν ο  $p$  είναι πρώτος αριθμός και αν ο  $a$  δεν διαιρείται με τον  $p$ , τότε ο  $a^{p-1} - 1$  διαιρείται με τον  $p$ . (Η πρόταση προκύπτει άμεσα από το θεώρημα του Euler, δεδομένου ότι  $\phi(p) = p - 1$ .)

Σημείωση. Από το «μικρό» θεώρημα του Fermat και την Ιδιότητα 1 της τάξης ενός στοιχείου προκύπτει ότι ο  $p - 1$  είναι διαιρετός από τον  $d_p(a)$  για κάθε μη μηδενικό υπόλοιπο  $a$ .

### Ασκήσεις

20. Αποδείξτε ότι

(α) Ο  $2^{131} - 1$  διαιρείται από το 263.

(β) Ο  $2^{3^6} + 1$  διαιρείται από το  $3^{n-1}$  ενώ δεν διαιρείται από τον  $3^{n+2}$ .

21. Αποδείξτε ότι, αν ένας πρώτος αριθμός  $p$  διαιρεί τον  $x^2 + 1$  (όπου ο  $x$  είναι ακέραιος μεγαλύτερος του 1), τότε  $p = 4k + 1$ .

22. Αποδείξτε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών της μορφής  $p = 4k + 1$ .

23. Γράφουμε ένα ρητό κλάσμα  $p/q$  (όπου ο  $q$  είναι πρώτος προς το 10 και  $q > 10$ ) με τη μορφή ενός άπειρου περιοδικού δεκαδικού αριθμού με περίοδο  $m$ . Αποδείξτε ότι ο  $m$  διαιρεί τον  $\phi(q)$ . ◻

1. Δείτε και το άρθρο «Πρόγραμμα και ακέραιων» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1996.

# Ενδιαφέροντα σημεία

Μοναδικές θέσεις σε ένα τρίγωνο

I.F. Sharygin

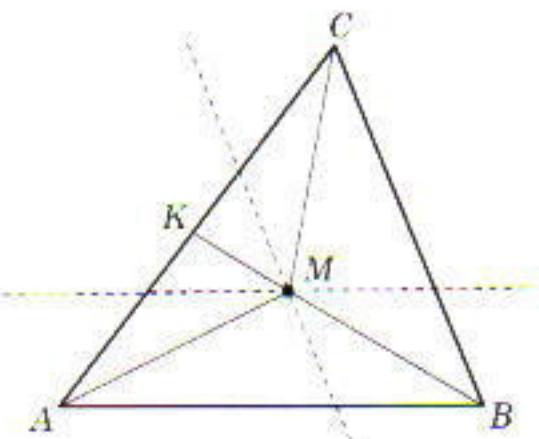
**Σ**ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΑΘΑΙΝΟΥΜΕ ΓΙΑ διάφορα αξιοπρόσεκτα σημεία ενός τριγώνου, όπως το κέντρο βάρους, το κέντρο του περιγεγραμένου κύκλου, το έγκεντρο και το ορθόκεντρο. Σ' αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε μερικές αξιόλογες ιδιότητες αυτών των σημείων. Πολλές από αυτές, μάλιστα, είναι πλήρως ισοδύναμες με τους ορισμούς των σημείων. Δηλαδή, κάθε φορά, το «αξιοπρόσεκτο σημείο» είναι το μοναδικό που έχει την ιδιότητα που περιγράφουμε.

## ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΒΆΡΟΥΣ

Ένα από τα περισσότερο ενδιαφέροντα σημεία ενός τριγώνου είναι το κέντρο βάρους του: το σημείο τομής των διαμέσων του. Ας υποθέσουμε προς στιγμήν πως ο αναγνώστης αγνοεί ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ακόμη περισσότερο, ας ξεχάσουμε τελείως το κέντρο βάρους. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα σημείο  $M$  στο εσωτερικό τριγώνου  $ABC$  τέτοιο ώστε τα τρίγωνα  $ABM$ ,  $BCM$  και  $CAM$  να έχουν ίσα εμβαδά (Σχήμα 1). Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει το σημείο αυτό κατασκευάζοντάς το. Πού μπορεί να βρίσκεται το σημείο  $M$ ? Τα τρίγωνα  $ABM$  και  $ABC$  έχουν κοινή την πλευρά  $AB$  και, επομένως, αν θέλουμε να είναι το  $|ABM|$  ίσο με το  $(1/3)|ABC|$  (χρησιμοποιούμε το σύμβολο της απόλυτης τιμής για τα εμβαδά), πρέπει το ύψος (επί της πλευράς  $AB$ ) του τριγώ-





Σχήμα 1

νου  $ABM$  να είναι ίσο με το  $1/3$  του αντίστοιχου ύψους του  $ABC$ . Κατά συνέπεια, το  $M$  πρέπει να ανήκει σε μία ευθεία παράλληλη προς την  $AB$  και σε απόσταση ίση με το  $1/3$  του ύψους του τριγώνου  $ABC$  που άγεται στην πλευρά  $AB$ . Όμως, το  $M$  πρέπει να έχει την ίδια σχέση με την πλευρά  $BC$ —δηλαδή πρέπει να ανήκει σε μία ευθεία παράλληλη προς την  $BC$  και σε απόσταση ίση με το  $1/3$  του ύψους του τριγώνου  $ABC$  που άγεται στην πλευρά  $BC$ . Ο μοναδικός υποψήφιος για το  $M$  είναι η τομή αυτών των ευθειών (που προφανώς δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους). Και πράγματι, αυτό είναι το σημείο  $M$  που ζητάμε διότι, αν  $|AMB| = |BCM| = (1/3)|ABC|$ , τότε και  $|CAM| = (1/3)|ABC|$ , και η κατασκευή μας αποδεικνύει ότι αυτό είναι το μοναδικό δυνατό σημείο  $M$ .

Ας επιστρέψουμε τώρα στις διαμέσους. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλες οι διάμεσοι του  $ABC$  διέρχονται από το  $M$  και ότι το σημείο αυτό διαιρεί κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα με λόγο μηκών  $2 : 1$  (μετρώντας από την κορυφή του τριγώνου). Πράγματι, ας προεκτείνουμε τη  $BM$  έτσι ώστε να τμήσει την  $AC$  στο  $K$ .

Αφού  $|AMB| = |BMC|$ , τα ύψη αυτών των τριγώνων επί την κοινή τους πλευρά  $BM$  είναι ίσα. Οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν (για παράδειγμα, φέροντας αυτά τα ύψη και θεωρώντας ίσα τρίγωνα) ότι αυτό συνεπάγεται πως το  $K$  είναι μέσο της  $AC$  και, επομένως, η  $BK$  (που διέρχεται από το  $M$ ) είναι διάμεσος. Επίσης,  $|AMC| = (1/3)|ABC|$  και, συνεπώς (όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει), η απόσταση από το  $M$  έως την  $AC$  ισούται με το  $1/3$  της απόστασης του  $B$  από την  $AC$ . Αν φέρουμε τις καθέτους από τα  $M$  και  $B$  προς την  $AC$  και θεωρήσουμε τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται, βρίσκουμε ότι  $MK = (1/3)BK$  και, επομένως, το  $M$  διαιρεί τη διάμεσο  $BK$  σε λόγο  $2 : 1$  (μετρώντας από την κορυφή  $B$ ). Φυσικά το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για τις δύο άλλες διαμέσους του  $ABC$ .

Άρα, έχουμε βρει την εξής εναλλακτική περιγραφή του κέντρου βάρους:

**Εναλλακτική περιγραφή 1:** Το σημείο  $M$  είναι κέντρο βάρους του τριγώνου  $ABC$  αν και μόνο αν τα τρίγωνα  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CAM$  έχουν ίσα εμβαδά.

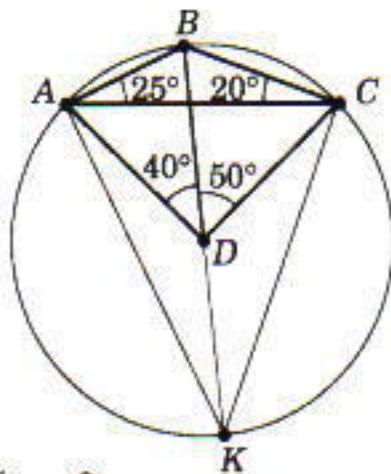
## ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Ένα άλλο χαρακτηριστικό σημείο ενός τριγώνου είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, ή **περίκεντρο**.

**Πρόβλημα 1:** Στο τρίγωνο  $ABC$  η  $\angle A = 30^\circ$  και η  $\angle B =$



Σχήμα 2



Σχήμα 3

$80^\circ$ . Επλέγουμε το σημείο  $K$  στο εσωτερικό του τριγώνου  $ABC$  έτσι ώστε το τρίγωνο  $BCK$  να είναι ισόπλευρο. Βρείτε τη  $\angle KAC$ .

**Λύση:** Εδώ θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το νόμο των ημιτόνων αλλά είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το  $K$  είναι το περίκεντρο του τριγώνου  $ABC$ . Πράγματι, η πλευρά  $BC$  φαίνεται από το περίκεντρο υπό γωνία διπλάσια της  $\angle BAC$ , δηλαδή  $60^\circ$  (βλ. Σχήμα 2). Επίσης, το περίκεντρο ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς  $BC$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σημείο  $K$  είναι το μοναδικό που ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες και, επομένως, είναι το περίκεντρο. Τότε,  $\angle CKA = 2\angle CBA = 160^\circ$  και, άρα,  $\angle KAC = 10^\circ$ .

**Πρόβλημα 2:** Στο κυρτό τετράπλευρο  $ABCD$  η  $\angle BAC = 25^\circ$ , η  $\angle BCA = 20^\circ$ , η  $\angle BDC = 50^\circ$  και η  $\angle BDA = 40^\circ$ . Βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του τετραπλέυρου.

**Λύση:** Θα δουλέψουμε έμμεσα και θα δείξουμε ότι το σημείο  $D$  είναι το περίκεντρο του τριγώνου  $ABC$ . Αφού το τριγώνο  $ABC$  είναι αμβλυγώνιο, το περίκεντρό του βρίσκεται στο αντίθετο μέρος της πλευράς  $AC$  απ' ότι το σημείο  $B$ , και βλέπει τις πλευρές  $BA$  και  $BC$  υπό γωνίες  $40^\circ$  και  $50^\circ$ , αντίστοιχα. Οι αναγνώστες καλούνται να επαληθεύσουν ότι ένα μόνο τέτοιο σημείο μπορεί να υπάρχει και, συνεπώς, είναι το σημείο  $D$ . Το πρόβλημα τώρα μπορεί να λυθεί εύκολα.

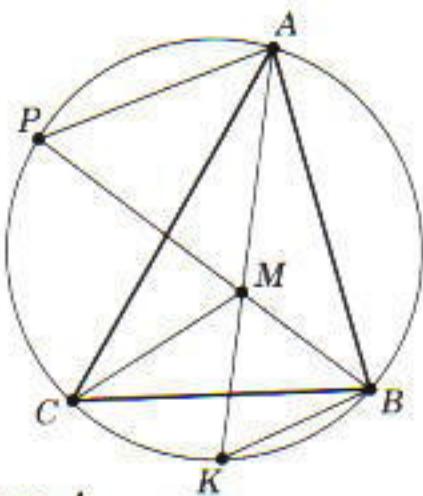
Στη γεωμετρία, όμως, είναι συνήθως προτιμότερος ο εύθυς τρόπος απόδειξης. Αφού έχουμε πλέον μαντέψει τον πραγματικό ρόλο του σημείου  $D$ , μπορούμε να προσπαθήσουμε να λύσουμε άμεσα το πρόβλημά μας. Θα αρχίσουμε σχεδιάζοντας τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $ABC$  και προεκτείνοντας τη  $BD$  ώστε να τμήσει τον κύκλο (Σχήμα 3). Στο τρίγωνο  $DKA$  η  $\angle DKA = \angle BCA = 20^\circ$ , και η εξωτερική γωνία στην κορυφή  $D$  είναι  $40^\circ$ . Συνεπώς,  $\angle DAK = 20^\circ$  και  $DK = DA$ . Παρομοίως,  $DK = DC$  και, άρα, το  $D$  είναι το περίκεντρο του  $ABC$ . Μπορούμε τώρα να βρούμε εύκολα τη γωνία των διαγωνίων: είναι  $85^\circ$ .

## ΤΟ ΈΓΚΕΝΤΡΟ

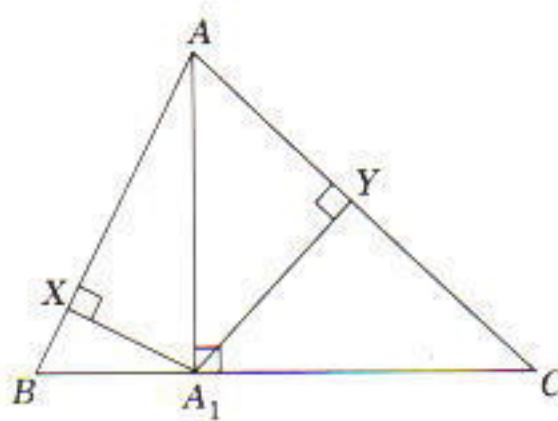
Ένα άλλο χαρακτηριστικό σημείο ενός τριγώνου είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, ή **έγκεντρο**. Εστω  $I$  το έγκεντρο του τριγώνου  $ABC$ . Θα αρχίσουμε παραθέτοντας δύο ιδιότητες αυτού του σημείου που θα μας βοηθήσουν να βρούμε εναλλακτικές περιγραφές του έγκεντρου  $I$ .

**Ιδιότητα  $I_1$ :** Αν  $I$  είναι το έγκεντρο του τριγώνου  $ABC$ , τότε η  $\angle AIC = 90^\circ + (1/2)\angle B$ .

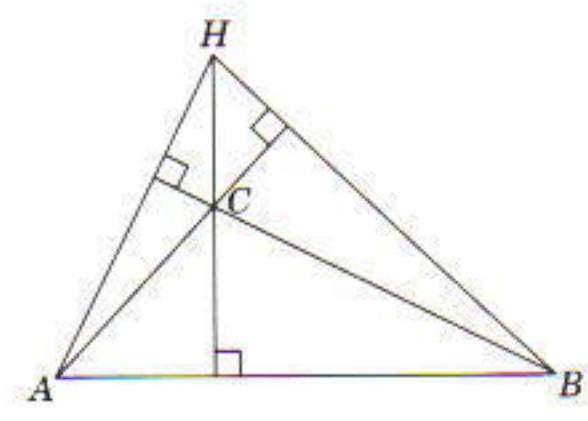
**Ιδιότητα  $I_2$ :** Αν  $I$  είναι το έγκεντρο του τριγώνου  $ABC$ ,



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Η ευθεία  $BI$  διέρχεται από το περίκεντρο του τριγώνου  $AIC$ .

Οι επόμενες εναλλακτικές περιγραφές του έγκεντρου βασίζονται στις Ιδιότητες 1 και 2:

**Εναλλακτική περιγραφή  $I_1$ :** Έστω ένα εσωτερικό σημείο  $M$  του τριγώνου  $ABC$  τέτοιο ώστε η  $\angle BMC = 90^\circ + (1/2)\angle A$  και έστω ότι η ευθεία  $AM$  διέρχεται από το περίκεντρο του τριγώνου  $AMC$ . Τότε το  $M$  είναι το έγκεντρο του τριγώνου  $ABC$ .

**Εναλλακτική περιγραφή  $I_2$ :** Έστω ένα εσωτερικό σημείο  $M$  του τριγώνου  $ABC$  τέτοιο ώστε η ευθεία  $AM$  να διέρχεται από το περίκεντρο του  $BMN$  και η ευθεία  $MB$  να διέρχεται από το περίκεντρο του  $AMC$ . Τότε το  $M$  είναι το έγκεντρο του  $ABC$ . (Οι αναγνώστες μπορούν να επιβεβαιώσουν τα αντίστροφα — δηλαδή, αν το  $M$  είναι το έγκεντρο, τότε ισχύουν οι δύο προηγούμενες ιδιότητες.)

Θα περιοριστούμε στην απόδειξη της Εναλλακτικής  $I_2$ . Έστω ότι ο περιγεγραμμένος στο  $ABC$  κύκλος τέμνει για δεύτερη φορά τις ευθείες  $AM$  και  $BM$  στα σημεία  $K$  και  $P$ , αντίστοιχα (Σχήμα 4).

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι  $\angle MCB = 90^\circ - \angle KMB$ . Πράγματι, το περίκεντρο  $O$  του τριγώνου  $MCB$  (που δεν εμφανίζεται στο Σχήμα 4) ανήκει στην  $AM$  και, αν  $\angle MCB = x$ , τότε  $\angle MOB = 2x$  και (αφού το τρίγωνο  $OMB$  είναι ισοσκελές)

$$\angle KMB = (1/2)(180^\circ - 2x) = 90^\circ - x.$$

Αυτό είναι το αποτέλεσμα που χρειαζόμαστε.

Παρομοίως,  $\angle MCA = 90^\circ - \angle PMA$ . Οι γωνίες  $KMB$  και  $PMA$  είναι ίσες, οπότε  $\angle MCA$  και  $\angle MCB$  είναι επίσης ίσες και η  $MC$  διχοτομεί τη  $\angle C$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \angle KMB &= 90^\circ - \angle MCB = 90^\circ - (1/2)\angle ACB \\ &= 90^\circ - (1/2)\angle MKB = (1/2)(\angle KMB + \angle KBM). \end{aligned}$$

Δηλαδή  $\angle KMB = \angle KBM$  και, επομένως,  $KM = KB$ . Άρα, ο κύκλος με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $KB$  διέρχεται από το  $M$ . Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι διέρχεται και από το  $C$ . Πράγματι,  $\angle MCB = 90^\circ - \angle KMB$  και  $\angle MKB = 180^\circ - 2\angle KMB$ . Συνεπώς,  $\angle MCB = (1/2)\angle MKB$ , πράγμα που σημαίνει ότι το  $C$  ανήκει στον κύκλο που θέλουμε.

Τότε όμως, το  $K$  είναι το περίκεντρο του τριγώνου  $MKB$  και, επομένως, η  $AK$  διχοτομεί τη  $\angle CAB$ . Παρομοίως, η  $MB$  διχοτομεί τη  $\angle CBA$  και το  $M$ , η τομή τους, είναι το έγκεντρο του τριγώνου  $ABC$ .

**Ασκήσεις 1-3:** Αποδείξτε τις Ιδιότητες  $I_1$ ,  $I_2$  και την Εναλλακτική  $I_1$ .

Η επόμενη ιδιότητα του έγκεντρου ενός τριγώνου βασίζεται σε διανύσματα και μας εξυπηρετεί στη λύση πολλών προβλημάτων. Η πλέον αξιοσημείωτη πλευρά αυτής της ιδιότητας είναι το ότι γενικεύεται στον τριοδιάστατο χώρο (καθώς και σε χώρους ανώτερων διαστάσεων).

**Εναλλακτική περιγραφή  $I_3$ :** Αν  $a, b, c$  είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $ABC$  και  $I$  το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, τότε  $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = 0$ .

Απόδειξη. Έστω ότι η  $AI$  τέμνει τη  $BC$  στο σημείο  $A_1$ . Τότε

$$\begin{aligned} a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} &= a\vec{IA} + b(\vec{IA}_1 + \vec{A}_1B) + c(\vec{IA}_1 + \vec{A}_1C) \\ &= (a\vec{IA} + b\vec{IA}_1 + c\vec{IA}_1) + (b\vec{A}_1B + c\vec{A}_1C) = k\vec{IA}. \end{aligned}$$

(Στον τελευταίο μετασχηματισμό χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα της διχοτόμου:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b},$$

οπότε  $b\vec{A}_1B + c\vec{A}_1C = 0$ .

Επομένως, το διανυσματικό άθροισμα στο αριστερό μέλος είναι ουγγραμμικό της ευθείας  $AI$ . Παρομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι ουγγραμμικό και με τις  $BI$  και  $CI$ . Άρα, πρέπει να έχει μήκος 0.

**Άσκηση 4:** Αποδείξτε ότι η εξισωση στην Εναλλακτική  $I_3$  είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι το  $I$  είναι το έγκεντρο του τριγώνου  $ABC$ .

## Το ορθόκεντρο

Ένα ακόμη αξιοπρόσεκτο σημείο του τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του, το ορθόκεντρο. Μπορούμε να αποδείξουμε με πολλούς τρόπους ότι τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Θα δώσουμε μια απόδειξη που σχετίζεται μ' αυτή που παρουσιάσαμε για τις διάμέσους. Οι αναγνώστες καλούνται να ανακαλύψουν ποια είναι η σχέση.

Θα δείξουμε ότι το ύψος που φέρουμε προς τη  $BC$  είναι το σύνολο των σημείων για τα οποία ο λόγος της απόστασής τους από τις  $AB$  και  $AC$  είναι ίσος με  $\sin B / \sin A$ .

Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα οξυγώνιο τρίγωνο  $ABC$ . Εξετάζουμε τις αποστάσεις του  $A$ , από τις  $AB$  και  $AC$  (βλ. Σχήμα 5, όπου τα τμήματα που μετρούν αυτές τις αποστάσεις είναι τα  $AX$  και  $AY$ , αντίστοιχα). Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AA_1X$  βρίσκουμε  $A_1X = AA_1 \cdot \eta \mu \angle BAA_1$ . Όμως, από το ορθογώνιο τρίγωνο  $ABA_1$  διαπιστώνουμε ότι

ημ  $\angle BAA_1 = \text{συν} \angle B$  και, επομένως,  $A_1X = AA_1 \text{ συν} \angle B$ . Παρομοίως,  $A_1Y = AA_1 \text{ συν} \angle C$ , και ο λόγος

$$\frac{A_1X}{A_1Y} = \frac{\text{συν} B}{\text{συν} C}.$$

Επλέγουμε τώρα ένα τυχαίο σημείο  $P$  του ύψους  $AA_1$  και παρατηρούμε ότι ο λόγος των αποστάσεων του από τις  $AB$  και  $AC$  είναι επίσης ίσος με  $(\text{συν} \angle B) / (\text{συν} \angle C)$ . Ακόμη καλύτερα, το ύψος  $AA_1$  είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις  $AB$  και  $AC$  είναι ίσος με  $(\text{συν} \angle B) / (\text{συν} \angle C)$ . (Την απόδειξη αυτών των ισχυρισμών, που βασίζεται σε όμοια τρίγωνα, την αφήνουμε στους αναγνώστες.) Εννοείται ότι αντίστοιχες προτάσεις ισχύουν για τα άλλα δύο ύψη.

Εστω τώρα  $H$  η τομή των υψών  $AA_1$  και  $BB_1$ . Τότε ο λόγος των αποστάσεων του  $H$  από τις  $AB$  και  $AC$  ισούται με  $(\text{συν} \angle B) / (\text{συν} \angle C)$ , και ο λόγος των αποστάσεων του  $H$  από τις  $AB$  και  $BC$  ισούται με  $(\text{συν} \angle A) / (\text{συν} \angle C)$ . Έτσι, συνάγεται ότι ο λόγος των αποστάσεων του  $H$  από τις  $BC$  και  $AC$  ισούται με

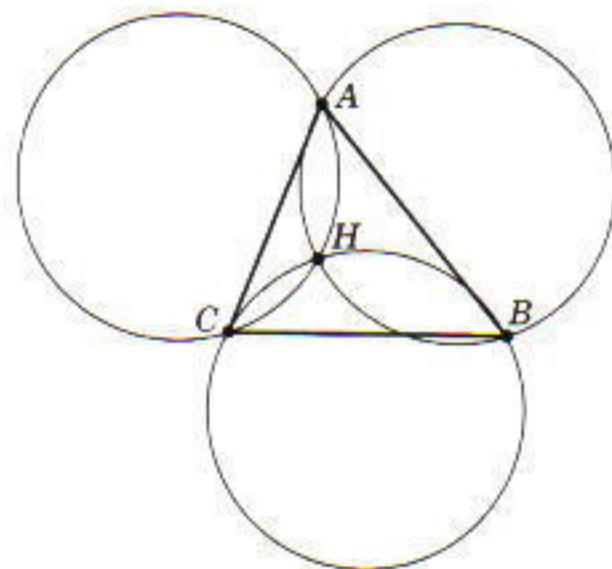
$$\frac{\text{συν} B}{\text{συν} C} = \frac{\text{συν} B}{\text{συν} A}.$$

$$\frac{\text{συν} C}{\text{συν} A}$$

Αυτό, όμως, σημαίνει ότι το  $H$  ανήκει στο ύψος  $CC_1$  και, επομένως, τα τρία ύψη συντρέχουν.

Στην περίπτωση ενός ορθογώνιου τριγώνου η κατάσταση είναι απλή: Το ορθόκεντρο είναι απλώς η κορυφή του ορθογώνιου τριγώνου. Στην περίπτωση του αμβλυγώνιου τριγώνου οι αναγνώστες μπορούν να επινοήσουν μια απόδειξη που θα είναι παραλλαγή αυτής που δώσαμε προηγουμένως. Η  $H$ , μπορούμε να επισημάνουμε ότι, αν το  $H$  είναι το σημείο τομής δύο υψών  $AH$  και  $BH$  ενός αμβλυγώνιου τριγώνου  $ABC$ , τότε οι  $AC$  και  $BC$  βρίσκονται κατά μήκος των υψών του οξυγώνιου τριγώνου  $ABH$  (βλ. Σχήμα 6). Αυτό σημαίνει ότι το  $C$  είναι ορθόκεντρο του οξυγώνιου τριγώνου  $ABH$  και, επομένως, η κάθετος από το  $H$  στην  $AB$  διέρχεται από το  $C$ . Τότε, όμως, το τρίτο ύψος του  $ABC$  ανήκει σ' αυτή την ευθεία, και τα τρία ύψη συντρέχουν στο  $H$ .

**Άσκηση 5:** Αποδείξτε ότι, γενικά, αν  $H$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ABC$ , τότε οποιοδήποτε από τα ση-



Σχήμα 7

μεία  $A, B, C$  και  $H$  είναι ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζουν τα άλλα τρία.

Η επόμενη ιδιότητα είναι χρήσιμη για τη λύση προβλημάτων που συνδέονται με το ορθόκεντρο ενός τριγώνου:

**Ιδιότητα  $O_1$ :** Η ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από δύο κορυφές ενός τριγώνου και από το ορθόκεντρο του ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Η ιδιότητα αυτή είναι συνέπεια μιας ελαφρά ισχυρότερης πρότασης:

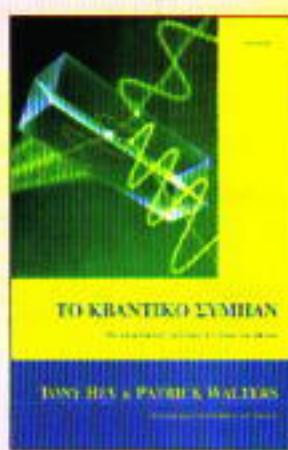
**Ιδιότητα  $O'_1$ :** Ο κύκλος που διέρχεται από δύο κορυφές του τριγώνου και το ορθόκεντρο είναι συμμετρικός (ως προς την αντίστοιχη πλευρά) του περιγεγραμμένου κύκλου.

**Άσκηση 6:** Αποδείξτε την Ιδιότητα  $O_1$  αποδεικνύοντας την Πρόταση  $O'_1$ .

Ολοκληρώνουμε το άρθρο μ' ένα επιπλέον θεώρημα.

**Πρόβλημα 3:** Τρεις ίσοι κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο. Αποδείξτε ότι αυτό το σημείο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζουν τα άλλα σημεία όπου τέμνονται (ανά δύο) οι κύκλοι.

**Λύση:** Εστω ότι οι κύκλοι τέμνονται στο σημείο  $H$  και ότι  $A, B, C$  είναι τα υπόλοιπα σημεία τομής τους (Σχήμα 7). Αφού ο κύκλος που διέρχεται από τα  $B, C$  και  $H$  είναι συμμετρικός του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABH$  (ως προς τη  $BH$ ), πρέπει να περιέχει το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ABH$ . Παρομοίως, ο κύκλος που διέρχεται από τα  $A, C, H$  περιέχει το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ABH$ . Συνάγεται, λοιπόν, ότι το ορθόκεντρο του  $ABH$  είναι το  $C$ , και, βάσει της Άσκησης 5, ότι το  $H$  είναι ορθόκεντρο του τριγώνου  $ABC$ . ◻



T. Hey και P. Walters  
**ΤΟ ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΣΥΜΠΑΝ**

«Το βιβλίο έχει ένα δικό μου απόσπασμα στην αρχή κάθε κεφαλαίου: παρ' όλα αυτά είναι ένα τρομερά καλό βιβλίο.»

**Richard Feynman**

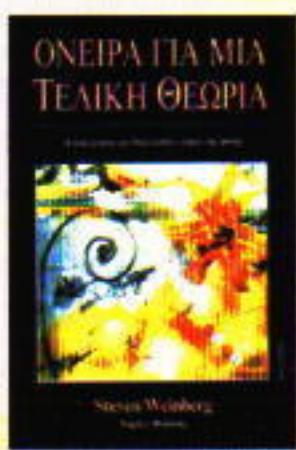
255 σελ., Έγχρ. και Α/Μ, 6.000 δρχ.

Steven Weinberg  
**ΟΝΕΙΡΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ**

«Αν ενδιαφερόμαστε σοβαρά για τη φύση της πραγματικότητας, πρέπει να διαβάσουμε προσεκτικά το βιβλίο του Weinberg.»

**Roger Penrose**

347 σελ., Α/Μ, 6.500 δρχ.



# Γιατί ο ουρανός είναι γαλάζιος;

«Μέσα στην Άνοιξη ο Λυκαβηττός...  
...σα να σχιστηκε ο ουρανός απ' τα γαλάζια χέρια των πηγών  
και δείχνει ένα λίγο του Παράδεισου.»

—Νίκος Καρούζος

Alexander Buzdin και Sergei Krotov

**Ε**ΧΕΤΕ ΑΝΑΡΩΤΗΘΕΙ ΠΟΤΕ, ΓΙΑΤΙ ο ουρανός είναι γαλάζιος; Το ερώτημα αυτό, μαζί με πλήθος άλλα, απασχόλησε τους επιστήμονες για πολλά χρόνια. Πόσα χρώματα υπάρχουν; Γιατί είναι διαφορετικά; Χάρη στην επιστημονική έρευνα, σήμερα γνωρίζουμε αρκετά για να δώσουμε τις απαντήσεις.

Το 17ο αιώνα ο σερ Ισαάκ Νεύτων συνέβαλε σημαντικά στην πρόοδο της μελέτης των χρωμάτων. Παρατήρησε ότι το ηλιακό (λευκό) φως, όταν περνάει μέσα από ένα γυάλινο πρίσμα, αναλύεται σε πολλά χρώματα. Το εν λόγω φάσμα αντιστοιχεί ακριβώς στα χρώματα του ουρανίου τόξου. Έτσι, ο Νεύτων

δημιούργησε τεχνητά το δικό του ουράνιο τόξο, με τα χρώματα **κόκκινο, πορτοκαλί, κίτρινο, πράσινο, κυανό, λουλακί** και **ιώδες**. Τα πειράματα του Νεύτωνα μας βοήθησαν να αντιληφθούμε ότι το λευκό φως είναι μίγμα των χρωμάτων που το συνθέτουν· η ανάμιξη των χρωμάτων που παράγει το γυάλινο πρίσμα αναπαράγει και πάλι το λευκό φως.

Πέρασε πολύς καιρός από τότε μέχρι οι επιστήμονες να ανακαλύψουν ότι το φως είναι ταλαντώσεις άρρηκτα συνδεδεμένων ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων που διαδίδονται στο χώρο —με άλλα λόγια, ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Ένα άλλο συνηθι-

σμένο παράδειγμα ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι τα ραδιοκύματα. Η φύση του φωτός και των ραδιοκυμάτων είναι ταυτόσημη και η μόνη διαφορά τους έγκειται στη συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης: η συχνότητα των ραδιοκυμάτων είναι χιλιάδες φορές μικρότερη απ' αυτήν του ορατού φωτός.<sup>1</sup> Εππλέον, κάθε χρώμα έχει τη δική του χαρακτηριστική συχνότητα ταλάντωσης. Χρησιμοποιώντας ένα μουσικό ανάλογο, το κόκκινο αντιστοιχεί στους χαμηλούς (μπάσους) τόνους και το ιώδες στους υψηλούς.

Η ταχύτητα *c* του φωτός ισούται με  $3 \cdot 10^8$  m/s και είναι πολλές χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από την ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων. Έτσι, ο ακρατής του ραδιοφωνικού σταθμού του Χονγκ Κονγκ ακούει το μουσικό που παίζει στη Βουδαπέστη νωρίτερα από αυτόν ο οποίος βρίσκεται στην αίθουσα της συναυλίας. Ωστόσο, η παραπάνω τιμή ταχύτητας αφορά μόνο τη διάδοση του φωτός στο κενό. Όταν το φως διέρχεται μέσα από κάποιο διαφανές μέσο, η ταχύτητά του είναι μικρότερη. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι και το γεγονός ότι τα διαφορετικά χρώματα διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες μέ-

1. Δείτε ακόμη τα άρθρα: A. Leonovich, «Διασχίζοντας το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα», Μάρτιος/Απρίλιος 1995· A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, «Η φύση του φωτός», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1997, και «Δημιουργία χρωμάτων», Ιούλιος/Αύγουστος 1997.



σα σ' ένα διαφανές μέσο. Το συγκεκριμένο φαινόμενο ονομάζεται διασκεδασμός, και είναι αυτό που καθιστά δυνατή την ανάλυση του λευκού φωτός στα χρώματα που προαναφέραμε.

Από το λευκό φως μπορούν να προκύψουν όλα τα χρώματα του ουράνιου τόξου. Γιατί, ωστόσο, τα αντικείμενα γύρω μας έχουν κάποια συγκεκριμένα χρώματα; Αν είχαμε μια κίτρινη μπάλα μέσα σ' ένα οκτεινό δωμάτιο, δεν θα μπορούσαμε να διακρίνουμε το χρώμα της· ο λόγος: δεν εκπέμπει καθόλου φως. Για να δούμε ότι είναι κίτρινη πρέπει να τη φωτίσουμε με λευκό φως. Οταν, λοιπόν, η μπάλα φωτίζεται, απορροφά κάποιο μέρος του προσπίπτοντος φωτός και κάποιο ανακλά· εμεις βλέπουμε μόνο το ανακλώμενο μέρος. Τα διάφορα σώματα, λόγω της ξεχωριστής μοριακής δομής τους, απορροφούν ή ανακλούν φως διαφόρων φαινοματικών περιοχών, και με τρόπο διαφορετικό.

Ας πάρουμε για παράδειγμα μια ντομάτα. Στα διάφορα στάδια ωριμασής της θα ανακλά επιλεκτικά «πράσινες» ή «κόκκινες» φωτεινές ακτίνες. Το γεγονός αυτό οφείλεται στις μοριακές ανακατατάξεις που συμβαίνουν στη ντομάτα καθώς ωριμάζει. (Δεν είναι σύμπτωση ότι στη χημεία το χρώμα θεωρείται σημαντικό χαρακτηριστικό μιας ουσίας.)

## Ουράνια παρέτα

«Το χρώμα του ουρανού είναι γαλάζιο», έγραψε ο γεωργιανός ποιητής Nico Baratashvily. Είναι όμως τούτο

σωστό από φυσική άποψη; Συνήθως αποδίδουμε το γαλάζιο χρώμα του ουρανού στη σκέδαση του φωτός από την ατμόσφαιρα. Γιατί, τότε, δεν είναι γαλάζιος ο νυχτερινός ουρανός όταν έχουμε πανσέληνο; Και γιατί τα διάφορα τμήματά του εμφανίζουν διαφορετική απόχρωση —άλλα φωτεινό μπλε και άλλα πιο σκοτεινό; Και πού οφείλονται τα κοκκινοπορτοκαλομενεξεδί χρώματα του κατά το ηλιοβασίλεμα;

Ο παρατηρητικός αναγνώστης θα έχει προσέξει ότι κατά τη διάρκεια του ηλιοβασιλέματος το δυτικό τμήμα του ουρανού βάφεται σε αποχρώσεις του κίτρινου και του πορτοκαλί· κατόπιν, όταν ο Ήλιος αποκτά το κόκκινο χρώμα της φωτιάς, ο ουρανός χρωματίζεται μ' ένα φωτεινό κόκκινο· τελικά γίνεται μενεξεδής μέχρι ύψος περίπου  $25^{\circ}$  πάνω από τον ορίζοντα. Όλες αυτές οι συναρπαστικές χρωματικές εναλλαγές όντως οφείλονται στη σκέδαση του ηλιακού φωτός από τη γήινη ατμόσφαιρα· ας μελετήσουμε, λοιπόν, το φαινόμενο με περισσότερες λεπτομέρειες.

Η ερμηνεία των χρωμάτων του ουρανού δόθηκε από τον άγγλο φυσικό J. W. Rayleigh. Με απλά λόγια είναι η εξής: Το χρώμα του ουρανού καθορίζεται από το γεγονός ότι οι διάφορες συχνότητες του φωτός σκεδάζονται διαφορετικά. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υποχρεώνουν τα ηλεκτρόνια των μορίων του αέρα να ταλαντώνονται· την ιοχυρότερη επίδραση, μάλιστα, ασκούν οι ακτίνες του ιώδους άκρου του φάσματος. Ετοι, τα ηλεκτρόνια των

μορίων του αέρα «αιχμαλωτίζουν» από το προσπίπτον ηλιακό φως ενέργεια, η οποία αντιστοιχεί στο γαλάζιο χρώμα, και εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση. Όμως, εξαιτίας αυτού του γεγονότος τα ηλεκτρόνια εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Ωστόσο, η εν λόγω δευτερεύουσα ακτινοβολία διαδίδεται προς όλες τις κατεύθυνσεις κι όχι μόνο προς την κατεύθυνση του προσπίπτοντος ηλιακού φωτός. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως σκέδαση του φωτός.

Ένα εξίσου οημαντικό φαινόμενο που συμμετέχει στην παραπάνω διαδικασία είναι η ετερογενής κατανομή των μορίων της ατμόσφαιρας, όπως γίνεται αντιληπτό από τις διαρκείς διακυμάνσεις της πυκνότητας του αέρα. Πράγματι, αν τα μόρια του αέρα ήταν κατανεμημένα ομοιόμορφα, η σκέδαση θα λειτουργούσε εντελώς διαφορετικά και ο ουρανός θα ήταν τελείως μαύρος.

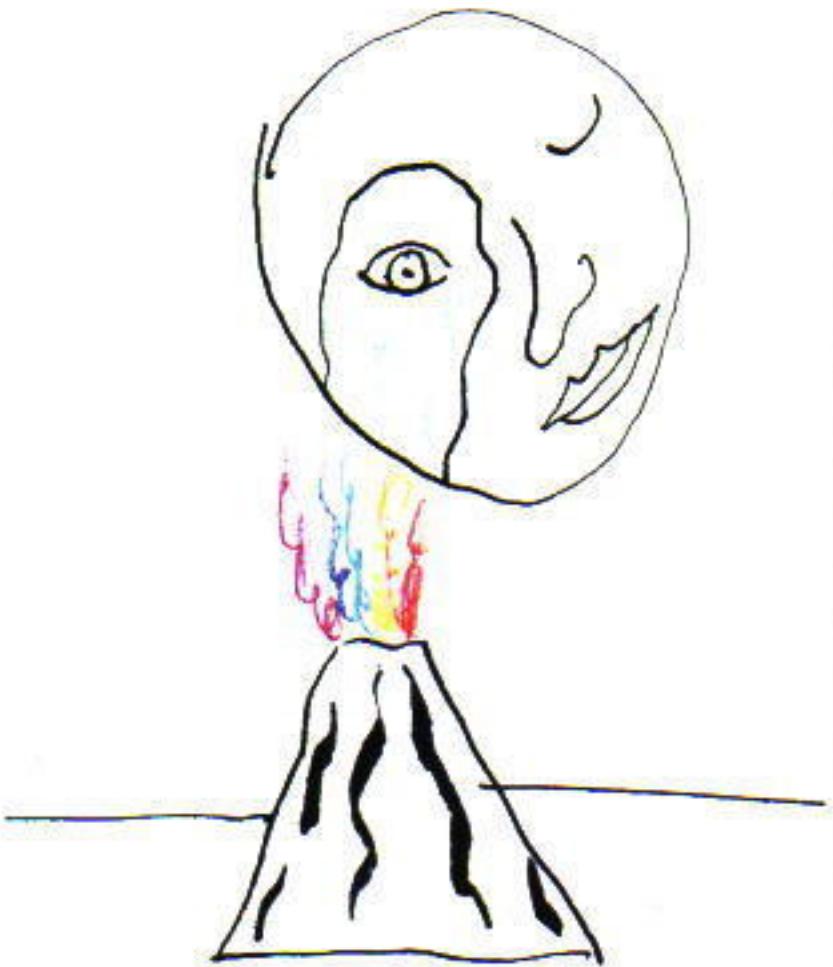
Συμπερασματικά, τα μόρια του αέρα σκεδάζουν περισσότερο την μπλε ουνιστώσα του ορατού φάσματος, και τις διάφορες περιοχές του ουρανού τις αντιλαμβανόμαστε σε αποχρώσεις του γαλάζιου και του λουλακί. (Εδώ εγείρεται η ερώτηση, γιατί με βάση τα παραπάνω το χρώμα του ουρανού δεν είναι ιώδες. Για δύο λόγους: πρώτον, το ανθρώπινο μάτι δεν είναι αρκετά ευαίσθητο στο ιώδες φως και, δεύτερον, το ηλιακό φως έχει «λιγότερες» ιώδεις ακτίνες απ' ό,τι μπλε.)

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διαδρομή του ηλιακού φωτός μέσα στην ατμόσφαιρα τόσο λιγότερες γαλάζιες ακτίνες του απομένουν. Αυτό ακριβώς το γεγονός εξηγεί το κοκκινωπό-πορτοκαλί χρώμα του ουρανού κατά τη δύση του Ήλιου. Το απόγευμα το ηλιακό φως έχει να διανύσει πολύ μεγαλύτερη απόσταση μέσα στην ατμόσφαιρα απ' ό,τι το μεσημέρι, που ο ηλιακός δίοκος βρίσκεται από πάνω μας.

## Η συμβολή των σωματιδίων

Είναι φανερό ότι ο καπνός, η σκόνη και άλλα μικροσκοπικά σωματίδια που αιωρούνται στον αέρα επηρεάζουν σημαντικά την ατμόσφαιρική σκέδαση του φωτός. Επειτα από ιοχυρές εκρήξεις ηφαιστείων, τα χρώματα κατά την ανατολή και τη δύση του Ήλιου





είναι υπέροχα· οι δίσκοι του Ήλιου και της Σελήνης μπορεί να φαίνονται ακόμη και μπλε! Η παρακάτω περιγραφή έγινε από ένα ρώσο επιστήμονα και αφορά φαινόμενα που παρατηρήθηκαν μετά την καταστροφική έκρηξη του ηφαιστείου Κρακατάο, στην Ιάβα, το 1883: «Λεπτά σύννεφα στάχτης έκρυψαν τον Ήλιο στην Ιαπωνία και σε άλλες περιοχές που βρίσκονταν σε απόσταση μεγαλύτερη από 3.000 km. Οι στάχτες αιωρούνταν στην ατμόσφαιρα για μεγάλο χρονικό διάστημα προκαλώντας τη γαλαζωπή απόχρωση του ηλιακού και του σεληνιακού δίσκου, η οποία καταγράφηκε στην Αφρική και τα νησιά του Ειρηνικού Ωκεανού».

Το μπλε χρώμα του Ήλιου και της Σελήνης οφείλεται στη σκέδαση του φωτός από τα ατμοσφαιρικά αιωρήματα που συνιστάνται από σωματίδια με διαστάσεις από 0,4 έως 0,9 μμ, κι επομένως το μέγεθός τους είναι συγκρισιμό με το μήκος κύματος του ορατού φωτός. Εξαιτίας του σχετικά μεγάλου μεγέθους τους, σκεδάζουν το κόκκινο φως ισχυρότερα απ' ό,τι το ιώδες. Ο Ήλιος και η Σελήνη, όταν παρατηρούνται μέσα από τέτοια αιωρήματα, φαίνονται να έχουν γαλαζωπούς δίσκους, καθώς μετά τη σκέδαση της κόκκινης συνιστώσας του λευκού φωτός μόνο οι «μπλε» ακτίνες φτάνουν στο ανθρώπινο μάτι.

Μερικές φορές μια όμορφη, μυστηριώδης γαλαζωπή ομίχλη πλανάται πάνω από ένα καταπράσινο ξάγναντο, μακριά από την επιβαρημένη βιομηχανική ζώνη. Τα Μπλου Μάουνταϊνς δυτικά του Σίδνεϋ, στην Αυστραλία, και του Όρεγκον, στις ανατολικές ΗΠΑ, οφείλουν τα ονόματά τους στην περιφημη αυτή γαλαζωπή ομίχλη. Το χρώμα της οφείλεται στη σκέδαση του ηλιακού φωτός από μικροσκοπικά σωματίδια, πολύ μικρότερα από το μήκος κύματος του ορατού φωτός. Αυτά τα σωματίδια μπορεί να είναι οργανικά μακρομόρια που απελευθερώνονται

από την πλούσια τοπική βλάστηση ή μικρά θρύμματα που αποσπάστηκαν από τις άκρες των φυτών λόγω των ηλεκτρικών πεδίων της ατμόσφαιρας.

Κλείνοντας αυτό το άρθρο θα θέλαμε να συμπεράνουμε ότι τα χρώματα της ουράνιας σφαίρας οφείλονται στη συνδυασμένη δράση της «σκέδασης Rayleigh» και της «σκέδασης από μικρά αιωρούμενα σωματίδια». Και είναι ευχάριστο να γνωρίζουμε ότι το χρώμα του ουρανού έχει έγκυρη φυσική υπόσταση. Ιδού τώρα μερικά σχετικά θέματα για να μελετήσετε:

1. Γιατί ένα χριστουγεννιάτικο δέντρο στολισμένο με πολύχρωμα φωτάκια φαίνεται κόκκινο όταν το κοιτάζουμε το σύρουπο από μεγάλη απόσταση;

2. Την επόμενη φορά που θα κάθεστε σε ένα ξέφωτο γύρω από φωτιά ρωτήστε τους φίλους σας: γιατί ο καπνός φαίνεται γαλάζιος όταν το κοιτάζετε με φόντο τα δέντρα (κοντά στο έδαφος) ενώ όταν τον κοιτάζετε με φόντο τον ουρανό ο ίδιος καπνός φαίνεται κιτρινωπός;

3. Αφήστε μερικές σταγόνες γάλα να πέσουν μέσα σ' ένα ποτήρι νερό και παρατηρήστε ένα λαμπτήρα μέσω του ποτηριού: φαίνεται κοκκινοπορτοκαλής. Ωστόσο, το φως του λαμπτήρα που έχερχεται από την άκρη του ποτηριού είναι γαλάζιο. Εξηγήστε αυτή τη διαφορά στα χρώματα.

## ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

### ΚÁΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ



Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, υπάρχει ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον, όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους. Εκεί, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο—μαζί με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης—έχουν το δικό τους βιβλιοπωλείο / εκθετήριο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παρογωγής. Περιμένουμε το αναγνωστικό κοινό να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

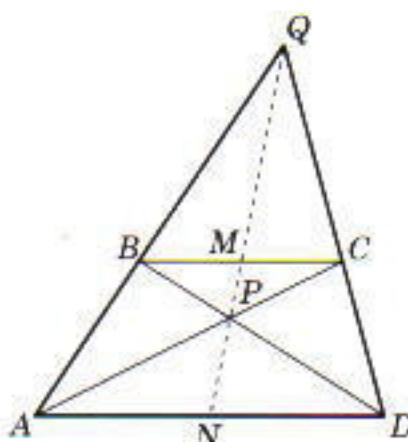
**Νέα στοά Αρσακείου**  
*(Πανεπιστημίου και Πειραιάς)*  
5), 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785

# Kavóneç

**Σ**ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ συνήθως για τις κατασκευές μας κανόνα και διαβήτη, μπορούμε όμως να πραγματοποιήσουμε αρκετές κατασκευές μόνο με κανόνα. Οι κατασκευές χωρίς διαβήτη ονομάζονται κατασκευές Steiner, προς τιμήν του εξαιρετού γερμανού γεωμέτρη του 19ου αιώνα. Ας μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο τύπο κατασκευών Steiner: αυτές που αρχίζουν με δύο παράλληλες ευθείες στο επίπεδο. Πολλές τους στηρίζονται στην εξής ιδιότητα του τραπεζίου:

1. Θεωρούμε το τραπέζιο  $ABCD$  με βάσεις  $AD$  και  $BC$ . Εστω  $P$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $Q$  το σημείο τομής των πλάγιων πλευρών του. Τότε, η ευθεία  $PQ$  διέρχεται από τα μέσα των βάσεων  $AD$  και  $BC$ .

Απόδειξη. Εστω  $N$  και  $M$  τα μέσα των  $AD$  και  $BC$ , αντίστοιχα (Σχήμα 1). Θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα σημεία  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  είναι συγγραμμικά. Τα τρίγωνα  $BCQ$  και  $ADQ$  είναι όμοια και, επομένως, οι γωνίες που σχηματίζουν οι διά-



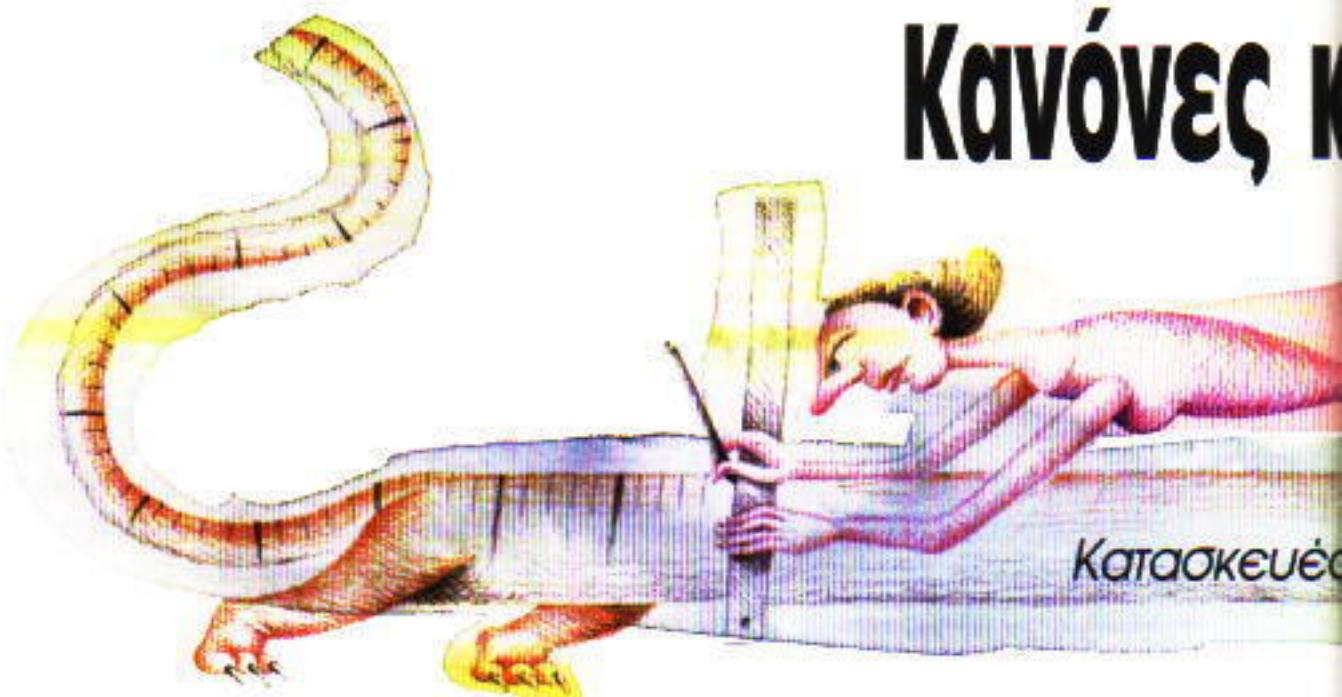
Σχήμα 1

μεσοί  $QM$  και  $QN$  με τις  $BQ$  και  $AQ$ , αντίστοιχα, είναι ίσες δηλαδή,  $\angle BQM = \angle AQN$ , και αφού τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  είναι συγγραμμικά θα είναι και τα  $Q$ ,  $M$ ,  $N$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τα όμοια τρίγωνα  $BCP$  και  $DAP$ , μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να αποδείξουμε ότι και τα σημεία  $P$ ,  $M$ ,  $N$  είναι συγγραμμικά. Συνεπώς, τα τέσσερα σημεία  $P$ ,  $Q$ ,  $N$  και  $M$  ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Μπορούμε τώρα να λύσουμε εύκολα τα δύο επόμενα προβλήματα:

2. Με τη βοήθεια μόνο του κανόνα να διαιρεθεί ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα τμήματα όταν δίνεται μια ευθεία παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα. Είναι εύκολο να βρούμε τη λύση αν θεωρήσουμε το  $AD$  ως το δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα (Σχήμα 1).

3. Θεωρήστε δύο παράλληλες ευθείες και ένα σημείο  $Q$  του επιπέδου. Κατα-



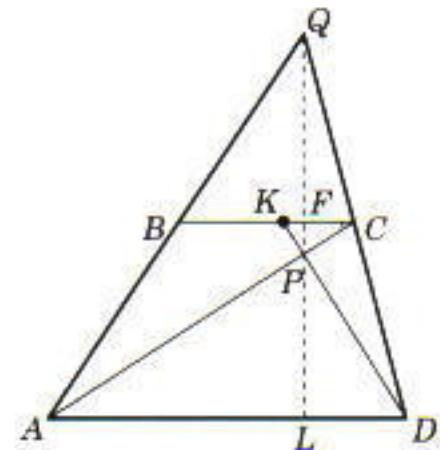
Κατασκευές

σκευάστε, με κανόνα, ευθεία που να διέρχεται από το  $Q$  και να είναι παράλληλη προς τις δύο δεδομένες. Ενσωματώνουμε τις δύο ευθείες σ' ένα αντίγραφο του Σχήματος 1: φέρουμε από το σημείο  $Q$  δύο ευθείες που τέμνουν τη μία από τις δεδομένες παράλληλες στα σημεία  $A$  και  $D$  και την άλλη στα σημεία  $B$  και  $C$ . Έχουμε τώρα το τραπέζιο  $ABCD$ . Αν φέρουμε τις διαγωνίους  $AC$  και  $BD$ , βρίσκουμε το σημείο  $P$  και, αν φέρουμε την ευθεία  $QP$ , βρίσκουμε τα μέσα  $M$  και  $N$ . Σχεδιάζουμε τις ευθείες  $AM$  και  $CN$  και ονομάζουμε  $R$  το σημείο τομής τους. Τότε, η ευθεία  $QR$  είναι παράλληλη προς τις  $AD$  και  $BC$ . Πράγματι, από όμοια τρίγωνα βρίσκουμε ότι  $RC : RN = MC : AN = BM : AN = QB : AQ$ . Οι ευθείες  $AD$ ,  $BC$ ,  $QR$  ορίζουν ανάλογα τμήματα στις τέμνουσες  $QA$ ,  $RN$ , οπότε είναι παράλληλες. Αφήνουμε για τους αναγνώστες την περίπτωση που το  $Q$  βρίσκεται ανάμεσα στις δύο ευθείες (και η οποία αντιμετωπίζεται ανάλογα).

Η Πρόταση 1 μας βοηθά επίσης να λύσουμε το επόμενο πρόβλημα:

4. Θεωρούμε την ευθεία  $\ell$  και τρία σημεία της,  $A$ ,  $N$  και  $D$ , τέτοια ώστε  $AN = ND$ . Εστω  $Q$  ένα σημείο εκτός της  $\ell$ . Χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα, να αχθεί η ευθεία που διέρχεται από το  $Q$  και είναι παράλληλη προς την  $\ell$ . Αφήνουμε τη λύση για τους αναγνώστες (μπορούμε, για παράδειγμα, να κατασκευάσουμε άλλη μία φορά το Σχήμα 1).

Αν εφαρμόσουμε πολλές φορές την κατασκευή του Προβλήματος 1, μπορούμε να διαιρέσουμε ένα δεδομένο



Σχήμα 2

τμήμα σε τμήματα που έχουν λόγο  $1 : 2^k$ , για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ . Όμως, όταν δίνεται ένα τμήμα και μια ευθεία παράλληλη προς αυτό, μπορούμε να κάνουμε κάτι περισσότερο: μπορούμε να διαιρέσουμε το τμήμα σε τμήματα που έχουν λόγο  $1 : n$ , για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο  $n$ . Η κατασκευή βασίζεται στο επόμενο πρόβλημα, ειδική περίπτωση του οποίου αποτελεί το Πρόβλημα 1.

5. Εστω ότι οι πλάγιες πλευρές  $AB$  και  $CD$  του τραπεζίου  $ABCD$  τέμνονται στο σημείο  $Q$  και έστω  $K$ ένα τυχαίο σημείο του τμήματος  $BC$ . Εστω  $P$  το σημείο τομής των  $KD$  και  $AC$  και έστω ότι η  $QP$  τέμνει την  $AD$  στο  $L$ . Τότε, αν  $KC = \lambda BC$ , έχουμε

$$LD = \frac{\lambda}{\lambda + 1} AD.$$

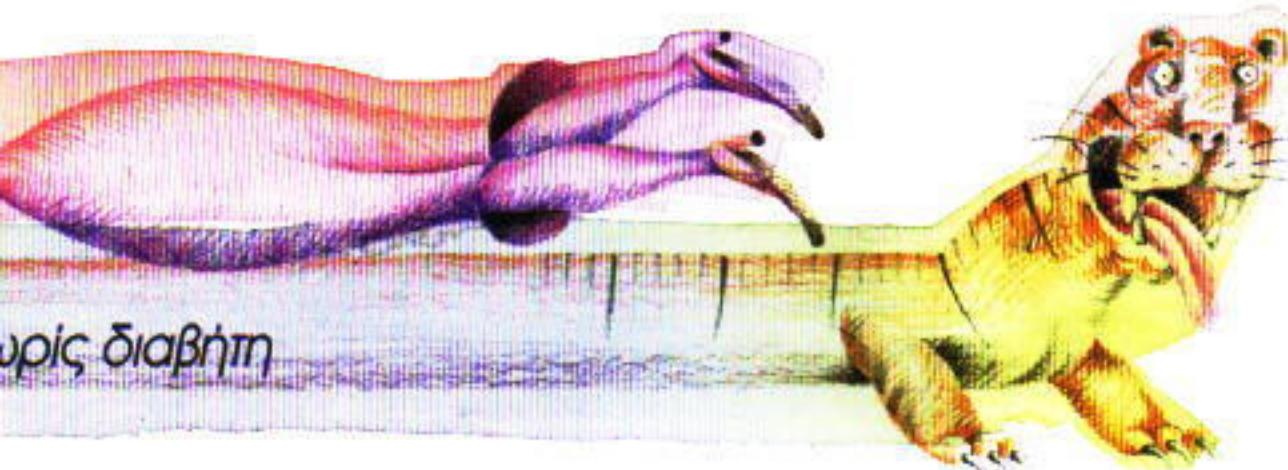
Απόδειξη. Εστω ότι η  $QL$  τέμνει την  $BC$  στο  $F$  (βλ. Σχήμα 2). Ας υποθέσουμε ότι  $LD = xAD$ . Τότε, αφού τα τρίγωνα  $APD$  και  $CPK$  είναι όμοια, έχουμε  $KF = xKC$ . Συνεπώς,

$$FC = (1 - x)KC = (1 - x)\lambda BC.$$

Όμως, τα τρίγωνα  $QBC$  και  $QAD$  εί-

# ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

μερις διαβήτη



ναι επίσης όμοια. Επομένως,

$$(1-x)\lambda = \frac{FC}{BC} = \frac{LD}{AD} = x.$$

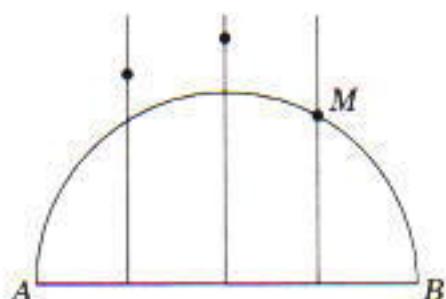
Δηλαδή,  $(1-x)\lambda = x$ , και

$$x = \frac{\lambda}{\lambda + 1}.$$

Η πρόταση λοιπόν αποδείχτηκε. Θεωρούμε τώρα ότι το δεδομένο τμήμα είναι το  $AD$ . Έχουμε επίσης μια ευθεία παράλληλη προς την  $AD$ , η οποία μπορεί να παίξει το ρόλο της  $BC$  του Σχήματος 1. Γνωρίζουμε επομένως πώς να διαιρέσουμε τη  $BC$  σε λόγο  $1 : 2$ . Αν θέσουμε στην τελευταία εξίσωση  $\lambda = 1/2$ , βρίσκουμε ότι αυτή μας επιτρέπει να διαιρέσουμε την  $AD$  σε λόγο  $1 : 3$ . Μπορού-

θεία που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο  $M$  κάθετη προς την ευθεία  $AB$ .

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση του Σχήματος 3. Τα τμήματα  $AF$  και  $BN$  είναι ύψη του τριγώνου  $AMB$  διότι οι εγγεγραμμένες γωνίες  $ANB$  και  $AFB$  βαίνουν στη διάμετρο  $AB$ . Άρα, το σημείο  $H$  είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου  $AMB$ , και, συνεπώς, η  $MH$  είναι κάθετη στην  $AB$ . Επομένως, στην



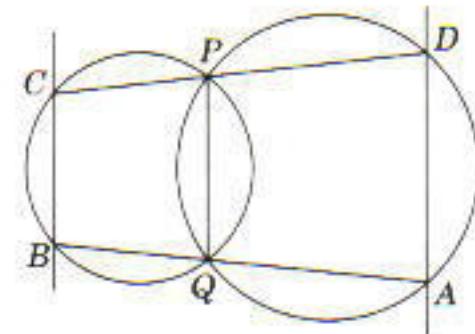
Σχήμα 4

περίπτωση του Σχήματος 3 το πρόβλημα έχει λυθεί. Τι κάνουμε όμως όταν το σημείο  $M$  ανήκει στο τόξο  $AB$  (Σχήμα 4) ή σε κάποιο άλλο «άβολο» μέρος;

Σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε δύο τυχαία «βολικά» σημεία του επιπέδου και φέρουμε από αυτά κάθετες προς την ευθεία  $AB$ . Στη συνέχεια φέρουμε από το σημείο  $M$  παράλληλη προς αυτές τις δύο με τον τρόπο που περιγράφαμε στο Πρόβλημα 3.

7. Δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι στο επίπεδο. Να προσδιοριστούν τα κέντρα τους χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα.

Εδώ θα χρειαστούμε ένα άλλο απλό γεγονός: αν φέρουμε τις ευθείες που διέρχονται από τα σημεία τομής δύο κύκλων, τότε οι χορδές που ορίζονται στους κύκλους είναι παράλληλες. (Στο Σχήμα 5 οι χορδές αυτές είναι οι  $BC$  και  $AD$ .)



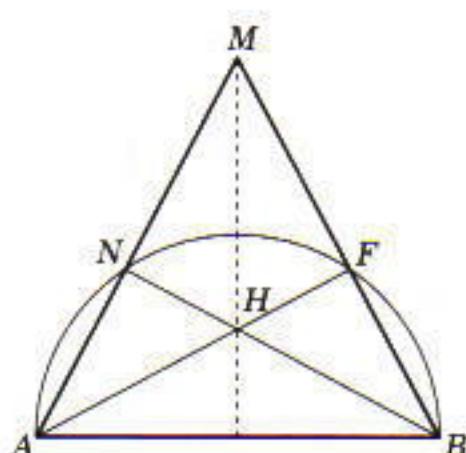
Σχήμα 5

Η συγκεκριμένη πρόταση αποδεικνύεται εύκολα αν θυμηθούμε ότι οι απέναντι γωνίες τετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι παραπληρωματικές. Πράγματι,  $\angle CBQ = \angle QPD$  αφού είναι παραπληρωματικές της  $\angle CPQ$ . Όμως, η  $\angle QPD$  είναι παραπληρωματική της  $\angle QAD$ , κατά συνέπεια, η  $\angle CBQ$  παραπληρωματική της  $\angle QAD$  και, άρα, οι  $BC$  και  $AD$  είναι παράλληλες.

Έχουμε πλέον ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα Προβλήματα 2 και 3 για να βρούμε το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα  $C$ ,  $B$  και  $P$ . Χρειαζόμαστε ένα ζεύγος παράλληλων χορδών αυτού του κύκλου. Μπορούμε να το βρούμε με τη βοήθεια του Προβλήματος 3, το οποίο μας λέει πώς να σχεδιάσουμε μια χορδή (αυτού του κύκλου) που διέρχεται από το  $P$  και είναι παράλληλη προς τη  $CB$ . Τότε, βάσει του Προβλήματος 2, μπορούμε να διχοτομήσουμε τις χορδές. Οι αναγνώστες μπορούν να αποδείξουν ότι αυτή η ευθεία πρέπει να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Αν ξεκινήσουμε τώρα ξανά από την αρχή, με δύο ακόμη ευθείες που διέρχονται από τα  $P$  και  $Q$ , θα βρούμε δύο ακόμη παράλληλες χορδές, μία σε κάθε κύκλο. Θα τις χρησιμοποιήσουμε ξανά για να βρούμε παράλληλες χορδές στον κύκλο που διέρχεται από τα  $C$ ,  $B$  και  $P$ . Η ευθεία που ενώνει τα σημεία που διχοτομούν τις νέες παράλληλες χορδές διέρχεται επίσης από το κέντρο και το σημείο τομής της με την προηγούμενη είναι το ζητούμενο κέντρο του κύκλου. Φυσικά, μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με τον άλλο κύκλο.

Η τελευταία κατασκευή είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη για να την εκτελέσουμε πραγματικά. Μερικές φορές λέμε ότι οι γεωμετρικές κατασκευές επιτυγχάνονται «με τη βοήθεια της γλώσσας» — δηλαδή αποδεικνύουμε απλώς ότι είναι δυνατές χωρίς στην πραγματικότητα να τις υλοποιούμε.

— Igor Sharygin



Σχήμα 3

με τότε να κάνουμε το ίδιο στην  $BC$ , πράγμα που μας επιτρέπει να διαιρέσουμε την  $AD$  σε λόγο  $1 : 4$  κ.ο.κ.

Ας εξετάσουμε τώρα άλλες κατασκευές που μπορούν να γίνουν μόνο με κανόνα.

6. Σχεδιάζουμε στο επίπεδο ένα ημικύκλιο με άκρα  $A$  και  $B$ . Να αχθεί η ευ-

# Αιωρείται ένα μολύβι κατά την πτώση του;

Όταν η κάθετη δύναμη παρουσιάζει ασυνέχεια

Leaf Turner και Jane L. Pratt

**Α**Ν ΚΑΙ ΕΝΑ ΜΟΛΥΒΙ ΑΠΟΤΕΛΕΙ το απλούστερο μηχανικό σύστημα που μπορεί να διανοηθεί κανείς, εντούτοις η μελέτη του είναι δυνατόν να μας αποκαλύψει μια πλούσια, περίπλοκη φυσική. Πόσες φορές στερεώσατε ένα μολύβι στη μύτη του πάνω στο γραφείο σας και το αφήσατε να πέσει από κατακόρυφη θέση; Αναμφίβολα, η πτώση εκτυλίχθηκε τόσο γρήγορα ώστε δεν προλάβατε να προσέξετε αν η μύτη του εγκατέλειψε ποτέ την επιφάνεια του γραφείου. Είναι άραγε δυνατόν να συμβεί μια τέτοια «δυναμική αιώρηση»;

Πριν καταπαστούμε με το συγκεκριμένο ερώτημα, θα αναφέρουμε μια ανεκδοτολογική ιστορία που ανάγει τη γέννηση του κοσμολογικού μοντέλου της «σταθερής κατάστασης» στην πτώση ενός μολυβιού. Ο φυσικός Fred Hoyle, λοιπόν, είχε συχνά την εμπειρία να του πέφτει από το γραφείο κάποιο μικροαντικείμενο (στην προκειμένη περίπτωση ένα μολύβι) και έπειτα να μην μπορεί να το βρει. Ο ίδιος ισχυρίστηκε, με κάποια δόση εκκεντρικότητας, ότι οδηγήθηκε στην υπόθεση για τη συνεχή δημιουργία της ύλης στην προσπάθειά του να φανταστεί τη χρονική αναστροφή αυτής ακριβώς της εμπειρίας! Ωστόσο, οι πτώσεις μολυβιών που θα απασχολήσουν εμάς δεν θα έχουν τόσο μνημειώδεις συνέπειες.

## Στατική τριβή

Θα θεωρήσουμε το μολύβι ως μια απειρως λεπτή ράβδο, η ολική μάζα



του οποίου κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλο το μήκος του  $L$ . Επομένως το κέντρο βάρους του (KB) βρίσκεται στο μέσο της. Όταν το μολύβι, που στη-

ρίζεται κάθετα στην οριζόντια επιφάνεια του γραφείου, αρχίζει να πέφτει, δεν ολισθαίνει· η ολίσθησή του αρχίζει όταν έχει αποκτήσει ορισμένη κλί-

ση. Ολισθαίνει, όμως, στην ίδια κατεύθυνση με εκείνη της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας του KB του ή μήπως στην ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση; Παύει κάποια στιγμή η μύτη του να βρίσκεται σε επαφή με το γραφείο ή όχι; Οι μόνες ελεύθερες παράμετροι που έχουμε στη διάθεσή μας είναι οι συντελεστές στατικής τριβής και κινητικής τριβής (ή τριβής ολισθήσεως),  $\mu_s$  και  $\mu_k$ , αντίστοιχα. Πράγματι, αν η τριβή απουσιάζε, δεν θα ασκούνταν καμία οριζόντια δύναμη στο μολύβι, οπότε το KB του θα έπεφτε κατάκρυφα.

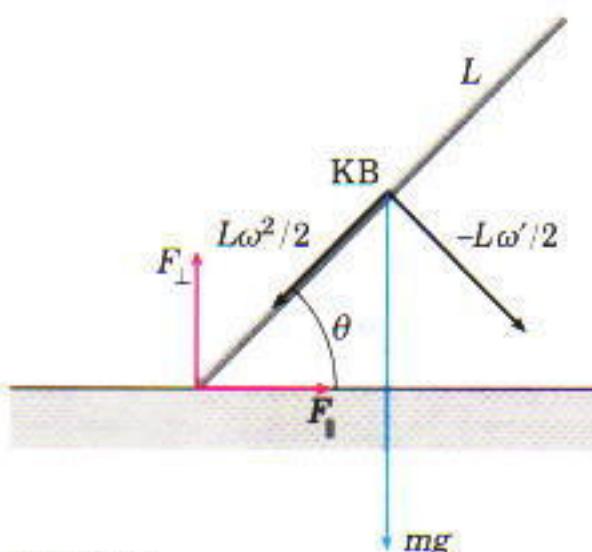
Καθώς το μολύβι αρχίζει να πέφτει, η στατική τριβή το εμποδίζει να ολισθήσει. Αν συμβολίσουμε με  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζει το μολύβι με την οριζόντια διεύθυνση και με  $\omega$  και  $\omega'$ , αντίστοιχα, τη γωνιακή ταχύτητα και τη γωνιακή επιτάχυνση του μολυβιού, τότε μπορούμε να συνδέσουμε τις εν λόγω μεταβλητές με την κατακόρυφη και την οριζόντια συνιστώσα της επιτάχυνσης του KB προτού αρχίσει η ολισθηση. Υπάρχουν, λοιπόν, δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης του KB: η επιτρόχιος ( $-L\omega'/2$ ) και η κεντρομόλος ( $L\omega^2/2$ ), όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 1. Εάν συμφωνήσουμε να δηλώνουμε με  $\parallel$  και  $\perp$  την παράλληλη και την κάθετη προς την επιφάνεια του γραφείου διεύθυνση, αντίστοιχα, τότε, με τη βοήθεια του Σχήματος 1, συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$Y_{\parallel} = -\frac{L\omega^2}{2} \sin \theta - \frac{L\omega'}{2} \eta \mu \theta, \quad (1a)$$

$$Y_{\perp} = -\frac{L\omega^2}{2} \eta \mu \theta + \frac{L\omega'}{2} \sin \theta. \quad (1b)$$

(Σημειώστε ότι η  $\omega'$  είναι αρνητική.)

Εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας προτού αρχίσει η ολισθηση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να προσδιορίσουμε πώς εξαρτάται η  $\omega^2$  από τη  $\theta$ . Αφού το μολύβι περιστρέφεται γύρω από τη μύτη του, η κινητική του ενέργεια ισούται με  $\Theta\omega^2/2$ , όπου  $\Theta = mL^2/3$  είναι η ροπή αδρανείας του  $\omega$  προς τη μύτη του. Εάν θυμηθούμε ότι το KB του απέχει από τη μύτη απόσταση  $L/2$ , αντιλαμβανόμαστε ότι η δυναμική ε-



Σχήμα 1

νέργεια του μολυβιού την ίδια στιγμή ισούται με  $(mgL/2)\eta \mu \theta$ . Αφού κατά την έναρξη της πτώσης του το μολύβι είναι ουσιαστικά κατακόρυφο και ακίνητο, η ολική μηχανική ενέργειά του πρέπει να ισούται με  $mgL/2$ . Συνεπώς καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{1}{6}mL^2\omega^2 + \frac{mgL}{2}\eta \mu \theta = \frac{mgL}{2},$$

ή, ισοδύναμα,

$$\omega^2 = \frac{3g}{L}(1 - \eta \mu \theta). \quad (2)$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε αμέσως τη γωνιακή επιτάχυνση  $\omega'$  υπολογίζοντας τις ροπές  $\omega$  προς το (σταθερό) σημείο επαφής μολυβιού-γραφείου. Η μόνη δύναμη που δεν διέρχεται από το σημείο επαφής είναι το βάρος. Έτοι, βρίσκουμε ότι

$$M = -\Theta\omega' = -\frac{mL^2}{3}\omega' = \frac{mgL}{2}\sin \theta,$$

από όπου προσδιορίζουμε την  $\omega'$  συναρτήσει της  $\theta$ :

$$\omega' = -\frac{3g}{2L}\sin \theta. \quad (3)$$

Βάσει των εξισώσεων 1a, 1b, 2 και 3 μπορούμε πλέον να εκφράσουμε τις  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  ως συναρτήσεις της  $\theta$ .

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την κάθετη δύναμη  $F_{\perp}(\theta)$  που ασκείται από το γραφείο στο μολύβι όταν η γωνία κλίσης του μολυβιού ως προς την οριζόντια είναι  $\theta$ . Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, το άθροισμα των κατακόρυφων συνιστώσων όλων των δυνάμεων ισούται με  $m\gamma_{\perp}$ . Δηλαδή

$$F_{\perp} - mg = m\gamma_{\perp}.$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις μας για τις  $\omega^2$  και  $\omega'$  (εξισώσεις 2 και 3) στην εξίσωση 1b, μπορούμε να βρούμε την τιμή της  $F_{\perp}$  για κάθε  $\theta$ :

$$F_{\perp}(\theta) = \frac{mg}{4}(1 - 3\eta \mu \theta)^2.$$

Παρατηρούμε ότι η  $F_{\perp}$  μηδενίζεται όταν η  $\theta$  λαμβάνει τιμή τοξημ(1/3), ή  $19.5^\circ$  περίπου.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε και την οριζόντια δύναμη τριβής, που είναι παράλληλη προς την επιφάνεια του γραφείου. Εφόσον η οριζόντια επιτάχυνση  $\gamma_{\parallel}$  δίνεται από την εξίσωση 1a και αφού η μόνη οριζόντια δύναμη που προκαλεί αυτή την επιτάχυνση είναι η τριβή  $F_{\parallel}(\theta)$  ανάμεσα στο τραπέζι και το μολύβι στο σημείο επαφής τους, βρίσκουμε ότι

$$F_{\parallel} = m\gamma_{\parallel},$$

οπότε, εισάγοντας τις εκφράσεις μας για τις  $\omega^2$  και  $\omega'$  στην εξίσωση 1a, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$F_{\parallel}(\theta) = \frac{3mg \sin \theta}{2} \left( \frac{3}{2} \eta \mu \theta - 1 \right). \quad (4)$$

Η ολισθηση αρχίζει όταν η γωνία λάβει την κρίσιμη τιμή  $\theta_{\text{κρ}}$  οπότε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης εξισώνεται με τη μέγιστη δύναμη που είναι δυνατόν να ασκηθεί λόγω της τριβής:  $\mu_s F_{\perp}$ . Συνεπώς, η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η εν λόγω γωνία είναι

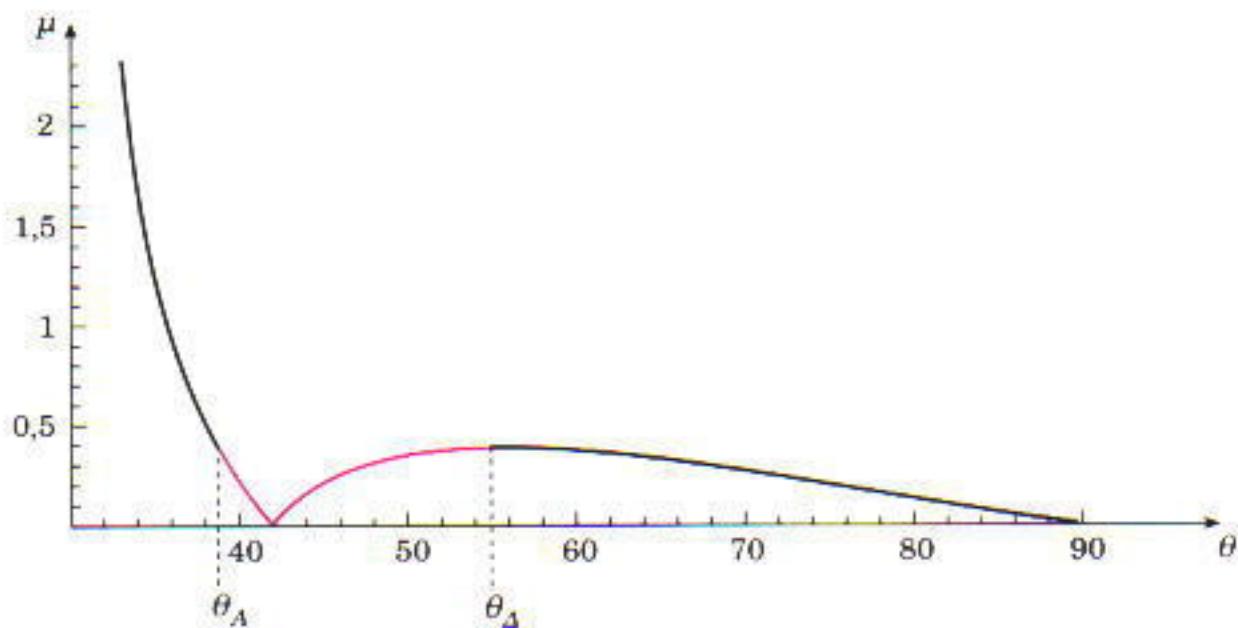
$$\mu_s = \mu(\theta_{\text{κρ}}),$$

όπου η  $\mu(\theta)$  απλώς παριστά το λόγο του μέτρου της παράλληλης δύναμης  $F_{\parallel}$  προς την κάθετη δύναμη  $F_{\perp}$  για δεδομένη γωνία  $\theta$  — δηλαδή,

$$\mu(\theta) = \frac{|F_{\parallel}(\theta)|}{|F_{\perp}(\theta)|} = \frac{|3\sin \theta(3\eta \mu \theta - 2)|}{(1 - 3\eta \mu \theta)^2}.$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω έκφρασης συναρτήσει της  $\theta$  (σε μοιρες) απεικονίζεται στο Σχήμα 2.

Ας μελετήσουμε προσεκτικά και ας αναλύσουμε το Σχήμα 2. Καθώς θεωρούμε μολύβια που έχουν προοδευτικά αύξουσες τιμές του  $\mu_s$  οι οποίες ξεκινούν από το μηδέν, οι αντίστοιχες τιμές της  $\theta_{\text{κρ}}$  μειώνονται από τις  $90^\circ$  ως τη γωνία  $\theta_d$  όπου ο λόγος μ των δυνάμεων παρουσιάζει ένα σχετικό



Σχήμα 2

μέγιστο. Βάσει της παραπάνω έκφρασης για τον  $\mu$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδη θεωρήματα του απειροστικού λογισμού προκειμένου να εντοπίσουμε το δεξιό άκρο  $\theta_A$  του διαστήματος της ανεξάρτητης μεταβλητής που συνδέεται με το κόκκινο τμήμα της καμπύλης του Σχήματος 2. Υπολογίζουμε την παράγωγο  $d\mu(\theta)/d\theta$ , εξισώνουμε το αποτέλεσμα με μηδέν και λύνουμε ως προς  $\theta$  την προκύπτουσα εξίσωση. Καταλήγουμε στο αποτέλεσμα  $\theta_A = \text{τοξημ}(9/11) \equiv 54,9^\circ$ . Σ' αυτή την τιμή της  $\theta_{\omega}$

$$\mu_{\omega} = \mu \left[ \text{τοξημ} \left( \frac{9}{11} \right) \right] = \frac{15\sqrt{10}}{128} \approx 0,371.$$

Καθεμιά από τις τιμές τού  $\mu$  που συνδέεται με το κόκκινο τμήμα της καμπύλης έχει ήδη ληφθεί στο διάστημα  $54,9^\circ < \theta < 90^\circ$ . Εάν κάποιο μολύβι παρουσιάζει  $\mu_{\omega}$  ίσο με μία από αυτές τις τιμές, θα είχε ήδη αρχίσει να ολισθαίνει σε κάποια γωνία μεγαλύτερη από  $54,9^\circ$ . Όταν ο  $\mu_{\omega}$  υπερβαίνει ελαφρώς τη  $\mu(\theta_A)$ , αυτό σημαίνει ότι βρισκόμαστε εκτός του διαστήματος που αντιστοιχεί στο κόκκινο τμήμα της καμπύλης. Κατά συνέπεια, ένα μολύβι δεν μπορεί να αρχίσει να ολισθαίνει στο εν λόγω διάστημα. Εάν εξισώσουμε τον αριθμητή τού  $\mu(\theta)$  με το μηδέν, διαπιστώνουμε ότι ο  $\mu(\theta)$  μηδενίζεται όταν  $\theta = \text{τοξημ}(2/3) \equiv 41,8^\circ$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν υπολογιστή για να βρούμε το αριστερό άκρο  $\theta_A$  του διαστήματος που αντιστοιχεί στο κόκκινο τμήμα της καμπύλης. Απλώς λύνουμε για την τιμή  $\theta_A$  της  $\theta$  που ικανοποιεί την εξίσωση  $\mu(\theta_A) = 15\sqrt{10}/128$  στο διάστημα, ας πού-

με, ανάμεσα στις  $35^\circ$  και  $40^\circ$ , οπότε βρίσκουμε ότι  $\theta_A \equiv 38,8^\circ$ . Εφόσον ο παρονομαστής τού  $\mu(\theta)$  τείνει στο μηδέν καθώς η  $\theta$  πλησιάζει την τιμή  $\text{τοξημ}(1/3) \equiv 19,5^\circ$ , το αριστερό τμήμα της καμπύλης έχει τη γραμμή  $\theta = \text{τοξημ}(1/3)$  ως ασύμπτωτη. Έτσι, η ολισθηση θα αρχίζει πάντοτε προτού το μολύβι φθάσει στις  $19,5^\circ$  από την οριζόντια!

### Κινητική τριβή

Προς ποια κατεύθυνση θα ολισθήσει όμως η μύτη του μολυβιού; Εάν ο  $\mu_{\omega}$  είναι μικρότερος από την προσεγγιστική τιμή  $0,371$ , η ολισθηση θα αρχίσει σε γωνία μεγαλύτερη από  $54,9^\circ$  περίπου. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4), συμπεραίνουμε ότι η  $F_{\parallel}$  θα είναι θετική. Αντίθετα, εάν ο  $\mu_{\omega}$  υπερβαίνει την προσεγγιστική τιμή  $0,371$ , η ολισθηση θα αρχίσει για κάποια γωνία ανάμεσα στις  $38,8^\circ$  και  $19,5^\circ$  περίπου. Στο εν λόγω διάστημα η  $F_{\parallel}$  είναι αρνητική. Κάτι τέτοιο μπορεί όμως να συμβεί μόνον εάν η μύτη του μολυβιού ολισθαίνει: στη μεν πρώτη περίπτωση, σε κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη της κίνησης του KB, στη δε δεύτερη, στην κατεύθυνση της οριζόντιας κίνησης του KB! Η κατεύθυνση της ολισθησης, λοιπόν, εξαρτάται από το συντελεστή στατικής τριβής! Μικρός συντελεστής οδηγεί σε ολισθηση προς τα πίσω μεγάλος συντελεστής οδηγεί σε ολισθηση προς τα μπρος. Αυτό φαίνεται εύλογο επειδή, εφόσον ο συντελεστής στατικής τριβής υπερβαίνει την τιμή  $\mu(\theta_A)$ , το μολύβι θα έχει τη δυνατότητα να αποκτήσει κάποια σημαντική οριζόντια

ορμή προτού αρχίσει να ολισθαίνει. Σημειώστε όμως ότι, ενόσω το μολύβι τελεί υπό την επίδραση της στατικής τριβής, δεν εγκαταλείπει ποτέ την επιφάνεια του γραφείου.

Είναι άραγε δυνατόν να εγκαταλείψει το τραπέζι αφότου αρχίσει η ολισθηση; Για να δώσουμε μια απάντηση στη συγκεκριμένη ερώτηση απαιτείται να επιδειξουμε σε σημαντικό βαθμό περισσότερη οξύνοια, τόσο από άποψη μαθηματικών όσο και από άποψη φυσικής, επειδή η ολική μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται πλέον και όλα τα σημεία του μολυβιού είναι ελεύθερα να επιταχυνθούν!

Στην περίπτωση κατά την οποία όλα τα σημεία ενός αντικειμένου είναι ελεύθερα να επιταχυνθούν, στον προσδιορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης  $\omega'$  μας διευκολύνει να υπολογίσουμε τις ροπές χρησιμοποιώντας το KB ως αρχή. Από το Σχήμα 1 βλέπουμε ότι

$$M_{KB} = F_{\perp}^{\kappa} \frac{L}{2} \sin \theta - F_{\parallel}^{\kappa} \frac{L}{2} \eta \mu \theta - \Theta_{KB} \omega'. \quad (5)$$

Ο εκθέτης  $\kappa$  δηλώνει ότι αναφέρμαστε στην περίπτωση που δρα η κινητική τριβή. Παρατηρούμε ότι η δύναμη της τριβής δίνεται από τη σχέση  $F_{\parallel}^{\kappa} = \pm \mu_{\kappa} F_{\perp}^{\kappa}$ , όπου το πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε να συμφωνεί με την ανάλυση που προηγήθηκε. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\Theta_{KB} = mL^2/12$  και την εξίσωση των ροπών, μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση συναρτήσει της  $\theta$  και της  $F_{\perp}^{\kappa}$ :

$$\omega' = -6 \frac{F_{\perp}^{\kappa}}{mL} (\sin \theta \mp \mu_{\kappa} \eta \mu \theta). \quad (6)$$

Αν εισαγάγουμε την παραπάνω έκφραση για την  $\omega'$  στην εξίσωση 1β, μπορούμε να προσδιορίσουμε την  $F_{\perp}^{\kappa}$  από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:  $F_{\perp}^{\kappa} - mg = m\gamma_{\perp}$ . (Αντιλαμβάνεστε γιατί η εξίσωση 1β, αλλά όχι και η 1α, παρένει έγκυρη και στην περίπτωση που υπάρχει ολισθηση;) Όταν το μολύβι ολισθαίνει,

$$F_{\perp}^{\kappa} = m \left[ g - \frac{L\omega^2}{2} \eta \mu \theta \right] \frac{1 + 3 \sin^2 \theta (1 \mp \mu_{\kappa} \epsilon \phi \theta)}{1 + 3 \sin^2 \theta (1 \pm \mu_{\kappa} \epsilon \phi \theta)}.$$

Εάν στη συνέχεια επιστρέψουμε

οτον τύπο για την  $\omega'$  (εξίσωση 6) και αντικαταστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για την  $F_1^*$ , παίρνουμε:

$$\omega' = -\frac{6 \sin \theta}{L} \left[ \frac{g - \frac{L \omega^2}{2} \eta \mu \theta}{3 \sin^2 \theta + (1 \mp \mu_x \epsilon \phi \theta)^{-1}} \right]$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση περιέχει την αναγκαία πληροφορία για την αιώρηση της μύτης του μολυβιού! Αν αποκρυπτογραφήσουμε το μήνυμά της, θα μάθουμε τα πάντα για όλες τις περιπτώσεις χωρίς να υπάρχει λόγος να εκτελέσουμε οποιουσδήποτε αριθμητικούς υπολογισμούς!

Πρώτα θα εξετάσουμε το μήνυμα που περιέχει ο αριθμητής του κλάσματος μέσα στις αγκύλες. Ας υποθέσουμε ότι κάποια στιγμή ενόσω το μολύβι ολισθαίνει το γραφείο εξαφανίζεται. Τη συγκεκριμένη στιγμή το KB επταχυνόταν κατευθείαν προς τα κάτω λόγω της βαρύτητας. Αν όμως το γραφείο εξαφανιζόταν, θα έπαιε πλέον να αναπτύσσεται ροπή στο μολύβι ως προς το κέντρο βάρους του (επειδή το τραπέζι ασκούσε τόσο μια κάθετη δύναμη όσο και μια δύναμη τριβής στη μύτη του μολυβιού), οπότε και η γωνιακή επιτάχυνση του μολυβιού θα μηδενιζόταν. Έτσι, η μύτη του μολυβιού θα στρεφόταν με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από το KB. Κατά συνέπεια, θα είχε μόνο την κεντρομόλο επιτάχυνση  $L \omega^2 / 2$ , με κατεύθυνση προς το KB. Σημειώστε ότι όπως συνάγεται από το Σχήμα 1, το μολύβι έχει προς στιγμήν γωνία κλίσης  $\theta$  σε σχέση με την οριζόντια. Η ολική επιτάχυνση της μύτης του μολυβιού σχετικά με το τραπέζι ισούται με το άθροισμα της επιτάχυνσης της μύτης του μολυβιού ως προς το KB και της επιτάχυνσης του KB ως προς το τραπέζι. Συνεπώς, η μύτη του μολυβιού θα είχε μια επιτάχυνση προς τα κάτω ίση με  $g - (L \omega^2 / 2) \eta \mu \theta$ , η οποία συμπίπτει με τον αριθμητή! Ας συμφωνήσουμε να ονομάζουμε την εν λόγω ποσότητα «δυνητική» επιτάχυνση και να τη συμβολίζουμε με  $\gamma_\delta$ . Εφόσον η  $\theta$  και η  $\omega$  είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου, συμπεραίνουμε ότι η  $\gamma_\delta$ , όταν αρχίζει η ολισθηση, είναι θετική. (Απλώς εισάγουμε την έκφραση για την  $\omega^2$  (εξίσωση 2), η οποία ισχύει ώσπου να αρχίσει η ολι-

σθηση, στον αριθμητή ώστε να επιβεβαιώσουμε ότι η  $\gamma_\delta$  ισούται με

$$g \left[ \frac{3}{2} \left( \eta \mu \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{8} \right]$$

και, επομένως, όταν αρχίζει η ολισθηση είναι θετική.) Απαξ και το μολύβι αρχίσει να ολισθαίνει, θα αιωρείται μόνον εφόσον η  $\gamma_\delta$  αλλάξει πρόσημο. Ας προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε τι ακριβώς μας λέει η εξίσωση 7 σχετικά μ' αυτό το πρόσημο.

Σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην περιπτώση της περιστροφικής κίνησης, το αποτέλεσμα μιας ροπής που στρέφεται ένα αντικείμενο κατά ορισμένη γωνία μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια περιστροφής έτσι ώστε

$$K_{KB} - K_0 = - \int_{\theta_0}^{\theta} M_{KB} d\theta,$$

όπου  $K_0$  είναι η αρχική κινητική ενέργεια περιστροφής, δηλαδή όταν  $\theta = \theta_0$ . Το αρνητικό πρόσημο υπογραμμίζει το γεγονός ότι κατά την πτώση, η γωνία κλίσης  $\theta$  του μολυβιού μειώνεται καθώς η κινητική ενέργεια του μολυβιού αυξάνεται. Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής της  $K_{KB}$  συναρτήσει της  $\theta$  είναι μια αρνητική ποσότητα η οποία καθορίζεται από τη ροπή βάσει του τύπου  $dK_{KB}/d\theta = -M_{KB}$ . Ας θυμηθούμε ότι η κινητική ενέργεια περιστροφής  $K_{KB}$  του μολυβιού γύρω από το KB ισούται με  $(\Theta_{KB}/2)\omega^2$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5), καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\frac{\Theta_{KB}}{2} \frac{d\omega^2}{d\theta} = \Theta_{KB} \omega'.$$

Μπορούμε να διαγράψουμε τις ροπές αδράνειας και να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση 7 ώστε να καταλήξουμε στη σχέση

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{d\theta} = -\frac{6 \sin \theta}{L} \times \left[ \frac{g - \frac{L \omega^2}{2} \eta \mu \theta}{3 \sin^2 \theta + (1 \mp \mu_x \epsilon \phi \theta)^{-1}} \right]. \quad (8)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας περιγράφει το πώς μεταβάλλεται η γωνιακή

ταχύτητα του μολυβιού συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ . Θέλουμε να ευιάσουμε την προσοχή μας στο πρόσημο της  $\gamma_\delta$ , δηλαδή του αριθμητή του κλάσματος μέσα στις αγκύλες. Ας υποθέσουμε ότι η  $\gamma_\delta$  όντως αλλάζει πρόσημο. Τότε υπάρχει κάποια γωνία  $\theta_0$  για την οποία η  $\gamma_\delta$  διέρχεται από το μηδέν. Για τη συγκεκριμένη γωνία ο μηδενισμός της  $\gamma_\delta$  απαιτεί να ισχύει

$$\omega^2 = \frac{2g}{L \eta \mu \theta_0}.$$

Επιπλέον, επειδή στη  $\theta_0$  η  $\gamma_\delta$  μηδενίζεται, παρατηρούμε ότι η εξίσωση 8 μας λέει πως η  $d\omega^2/d\theta_0$  ισούται επίσης με μηδέν. Τέλος, παρατηρούμε ότι στη  $\theta_0$  η παράγωγος της  $\gamma_\delta$  είναι ίση με

$$\frac{dY_\delta}{d\theta_0} = \frac{d \left( g - \frac{L \omega^2}{2} \eta \mu \theta_0 \right)}{d\theta_0} = -\frac{L \omega^2}{2} \sin \theta_0 = -g \sigma \phi \theta_0,$$

ποσότητα η οποία είναι σαφώς αρνητική για τιμές της  $\theta_0$  στο διάστημα από  $0^\circ$  ως  $90^\circ$ . Βλέπετε πού ανακύπτει η δυσκολία; Όπως αποδείξαμε παραπάνω, όταν αρχίζει η ολισθηση η συνάρτηση  $\gamma_\delta$  λαμβάνει θετικές τιμές. Συνεπώς, αν επρόκειτο να διέλθει από το μηδέν καθώς το μολύβι πέφτει με γωνία κλίσης  $\theta$  που διαρκώς φθίνει, αυτό πρέπει να συμβεί με θετική κλίση —κοντολογίς, η  $d\gamma_\delta/d\theta_0$  πρέπει να είναι θετική.

Η παραδοχή ότι η  $\gamma_\delta$  μπορεί να διέλθει από το μηδέν, ή ότι το μολύβι μπορεί να αιωρείται, μας οδήγησε σε αντίφαση. Προκειμένου να αποφύγουμε την αντίφαση συμπεραίνουμε ότι το μολύβι ενόσω ολισθαίνει είναι αδύνατον να αιωρείται —συνεπώς ουδέποτε η μύτη του πάνει να βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο γραφείο.

Προτού ολοκληρώσουμε, ας επισημάνουμε το βασικό χαρακτηριστικό της δυναμικής της πτώσης το οποίο τη διακρίνει από ένα σώμα που ολισθαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου. Στη δεύτερη περιπτώση, λοιπόν, καθώς αυξάνουμε τη γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου, φτάνουμε σε μια κρίσιμη γωνία στην οποία ένα σώμα που παρέμενε ακίνητο λόγω της στατικής τριβής αρχίζει αιφνιδίως να

ολισθαίνει. Σ' αυτό το σημείο, η κάθετη δύναμη που ασκείται στη μάζα δεν υφίσταται ασυνεχή μεταβολή, κάτι που βρίσκεται σε απόλυτη αντίθεση με τη συμπεριφορά της κάθετης δύναμης που δρα στο μολύβι μας κατά την πτώση του. Εξαιτίας της διαφορετικής δυναμικής που παρουσιάζουν η στατική και η κινητική τριβή του περιστρεφόμενου μολυβιού, η κάθετη δύναμη —η οποία για τιμές μεν τής θ μικρότερες της  $\theta_{kp}$  παρίσταται από την  $F_1^x$ , για τιμές δε τής θ μεγαλύτερες της  $\theta_{kp}$  από την  $F_1$ — παρουσιάζει ασυνέχεια, με άλμα πεπερασμένου ύψους στο σημείο όπου η δυναμική αλλάζει χαρακτήρα.

## Εγκαρδιωτικό, μολονότι δεν αιωρείται

Εντρυφήσαμε στη δυναμική του απλούστατου από τα φυσικά συστήματα, ενός μολυβιού που γέρνει και

πέφτει. Αποκαλύψαμε μια ενδιαφέρουσα και πλούσια φυσική χρησιμοποιώντας απλώς λίγη τριγωνομετρία και ψήγματα απειροστικού λογισμού ή έναν υπολογιστή. Επομένως με ότι η μετάβαση από τη δυναμική της στατικής τριβής στη δυναμική της κινητικής τριβής (με την οποία μετάβαση, μπορούμε να πούμε, είναι εξοικειωμένος όποιος έχει μελετήσει εισαγωγική φυσική) συνεπάγεται μια ασυνέχεια στην κάθετη δύναμη που δρα στο μολύβι κατά την πτώση του. Και τελικά δειξαμε ότι το μολύβι ουδέποτε αιωρείται πάνω από το οριζόντιο γραφείο ενόσω τελεί υπό την επίδραση της στατικής τριβής, αλλά ούτε και αφ' ης στιγμής αρχίζει να ολισθαίνει.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι ίδιες τεχνικές και τα ίδια αποτελέσματα εμφανίζονται και στην περίπτωση ενός κεκλιμένου τραπεζιού. Η κρίσιμη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι, όταν το τραπέζι παρουσιάζει κλίση, η

αρχική τιμή της δυνητικής επιτάχυνσης κατά την έναρξη της ολίσθησης ενδέχεται να είναι αρνητική, οπότε και το μολύβι αντί να ολισθαίνει θα αιωρείται.

Τέτοιες «ανώμαλες» κάθετες δυνάμεις είναι δυνατόν να εμφανιστούν μόνον εάν η γωνία κλίσης του τραπεζιού υπερβαίνει την τιμή τοξημ(4/5), ή τις  $53,13^\circ$  περίπου. Είναι η πρώτη φορά που αντικρίσαμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη καθέτων 3 και 4 (ένα από τα προσφιλέστερα στους αρχαίους) να αναδύεται από την εσώτερη φύση ενός προβλήματος φυσικής. □

**O Leaf Turner** είναι θεωρητικός φυσικός στο Εθνικό Εργαστήριο του Λος Άλαμος, στο Νιού Μέξικο (διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: tleaf@lanl.gov). **H Jane L. Pratt** είναι επί του παρόντος φοιτήτρια στο Κολλέγιο Harvey Mudd, στο Κλαίρμοντ της Καλιφόρνιας.

## Το μοναδικό φυσικομαθηματικό περιοδικό



# QUANTUM

## Ένα πολύτιμο δώρο

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας... — σε όποιον αγαπά τα μαθηματικά και της φυσικές επιστήμες. Το Quantum δεν είναι δημοσιογραφικό περιοδικό: δεν μιλά για την επιστήμη: κάνει επιστήμη.

### Αποφασίστε το τώρα.

Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa). Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη: η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

### κάτοπτρο

Εκδόσεις: Ισαύρων 10 και Διαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5)  
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

## Μαθηματικά

### M121

**Βασιλική οδός.** Στην κάτω αριστερή γωνία μιας σκακιέρας διαστάσεων  $6 \times 6$  βρίσκεται ένας βασιλιάς. Μπορεί να μετακινηθεί είτε ένα τετράγωνο προς τα πάνω είτε ένα τετράγωνο προς τα δεξιά είτε ένα τετράγωνο προς τα πάνω και ένα τετράγωνο προς τα δεξιά. Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών που μπορεί να ακολουθήσει για να φτάσει στην πάνω δεξιά γωνία της σκακιέρας;

### M122

**Προβλήματα δολοφόνων.** Εστω ένα άπειρο πλήθος κακοποιών, που καθένας τους έχει αναλάβει «συμβόλαιο» να δολοφονήσει έναν ακριβώς από τους υπόλοιπους. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο αυτών των κακοποιών, κανένα από τα μέλη του οποίου δεν έχει συμβόλαιο για άλλον κακοποίο που ανήκει σ' αυτό το υποσύνολο.

### M123

**Επίπεδο σχήμα.** Να βρεθεί το εμβαδόν του επίπεδου σχήματος που ορίζεται από την ανισότητα

$$(y^3 - \text{τοξημ}x)(x^3 + \text{τοξημ}y) \geq 0,$$

όπου  $x, y$  είναι οι συνήθεις καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο.

### M124

**Συστηματικά μαθηματικά.** Να λυθεί το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} \\ \quad + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 8. \end{cases}$$

### M125

**Αναλογία τιμημάτων.** Στο τρίγωνο  $ABC$  έχουμε ότι  $\angle B \neq 90^\circ$  και  $AB : BC$

=  $k$ . Εστω  $M$  το μέσο της  $AC$ . Δύο ευθείες συμμετρικές της  $BM$  ως προς τις  $AB$  και  $BC$  τέμνουν την ευθεία  $AC$  στα σημεία  $D$  και  $E$ , αντίστοιχα. Βρείτε το λόγο  $BD : BE$ .

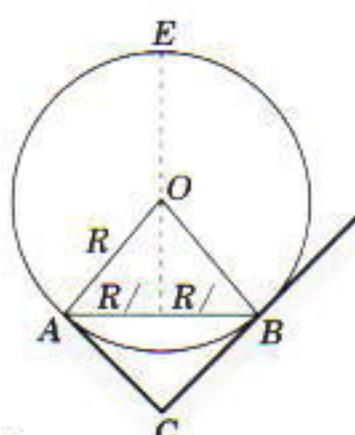
## Φυσική

### Φ121

**Έροντα ζωύφια.** Μία κατσαρίδα και δύο σκαθάρια κινούνται αργά πάνω σ' ένα μεγάλο οριζόντιο τραπέζι. Κάθε σκαθάρι μπορεί να κινείται με ταχύτητα  $v$  έως και  $1 \text{ cm/s}$ . Αρχικά τα ζωύφια βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τρίγωνου. Πόση πρέπει να είναι η μέγιστη ταχύτητα της κατσαρίδας ώστε να διατηρείται ισόπλευρο το τρίγωνο οποιαδήποτε και αν είναι η κίνηση των σκαθαριών; (A. Korshkov)

### Φ122

**Μπάλα σε τουσλήθρα.** Μια μπάλα κυλάει, χωρίς να ολισθαίνει, με ταχύτητα  $v$  κατά μήκος τουσλήθρας  $ACB$  της οποίας η «ράχη» σχηματίζεται από δύο πλευρικά τοιχώματα σε ορθή γω-



Σχήμα 1

νία (Σχήμα 1). Η απόσταση  $AB$  ισούται με την ακτίνα της μπάλας. Ποια σημεία της μπάλας έχουν μέγιστη ταχύτητα; (S. Krotov)

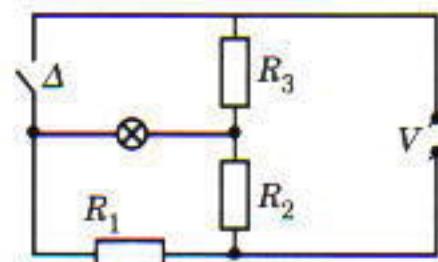
### Φ123

**Σταγόνα που εξατμίζεται.** Θεωρήστε μια σταγόνα υγρού που εξατμίζε-

ται μέσα στον αέρα. Η εξάτμιση πραγματοποιείται υπό σταθερή θερμοκρασιακή διαφορά, λόγω της θερμότητας που μεταφέρεται στη σταγόνα από το περιβάλλον. Υπολογίστε την εξάτμιση της ακτίνας της σταγόνας από το χρόνο, θεωρώντας ότι η ροή θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας μιας σφαιρικής σταγόνας είναι ανάλογη της θερμοκρασιακής διαφοράς και αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας της σταγόνας. Πόσος χρόνος απαιτείται για να εξατμιστεί εντελώς μια σταγόνα της οποίας η ακτίνα μειώνεται στο μισό της αρχικής της τιμής σε 10 λεπτά; (A. Stasenko).

### Φ124

**Λάμπα σε ηλεκτρικό κύκλωμα.** Ο λαμπτήρας πυρακτώσεως στο κύκλωμα του Σχήματος 2 φωτοβολεί το ίδιο



Σχήμα 2

είτε ο διακόπτης  $\Delta$  είναι ανοιχτός είτε κλειστός. Τα στοιχεία του κυκλώματος έχουν τιμές  $R_1 = R_3 = 90 \Omega$ ,  $R_2 = 180 \Omega$  και  $V = 54 \text{ V}$ . Υπολογίστε την πτώση τάσης στα άκρα του λαμπτήρα. (V. Chivilev).

### Φ125

**Άτομο εκπέμπει φωτόνιο.** Ένα διεγερμένο άτομο υδρογόνου ακτινοβολεί φως. Υπολογίστε τη μεταβολή του μήκους κύματος του φωτός λόγω της ανάκρουσης του πυρήνα, η οποία οφείλεται στο φωτόνιο που εκπέμπεται. (V. Mozhayev)

# Επαναστατική διδασκαλία

Για την πατρίδα, τις επιστήμες και τη δόξα

Yuri Solovyov

**Σ**ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΑΚΡΙΒΩΣ ΤΟΥ ΚΑΡΤΙΕ Λατέν, στο Παρίσι—όχι πολύ μακριά από το Πάνθεον, τη Σορβόννη και το Λύκειο του Λουδοβίκου του Μεγάλου—θα βρείτε τη μικρή και όσυχη οδό Ντεκάρτ. Εδώ βρισκόταν για περισσότερο από ενάμιση αιώνα η περίφημη Πολυτεχνική Σχολή (École Polytechnique).

Η σχολή ιδρύθηκε το 1794, κατά τα πρώτα και πιο χαοτικά χρόνια της Γαλλικής Επανάστασης. Η σαρωτική αυτή αλλαγή επηρέασε κάθε επίπεδο της γαλλικής κοινωνίας. Για πρώτη φορά ίσως στην ιστορία, οι πολιτικοί και τα δημόσια πρόσωπα άφησαν να εκτιμούν πόσο σημαντική είναι η επιδραση της επιστήμης στην πολιτική, τη βιομηχανία και το εμπόριο. Οι πόλεμοι στους οποίους ενεπλάκη η επανάσταση και ο ξέφρενος ανταγωνισμός μεταξύ Γαλλίας και Αγγλίας ανάγκασαν την κυβέρνηση να ενδιαφέρθει για την εκπαίδευση εξαιρετικά ικανών ειδικών, οι οποίοι θα μπορούσαν να προσφέρουν απαντήσεις στο πλήθος των προκλήσεων που αντιμετώπιζε η νεαρή δημοκρατία. Το αποτέλεσμα ήταν τα κυβερνητικά ιδρύματα του επαναστατικού κράτους να στελέχωθούν με μεγάλο αριθμό σπουδαίων επιστημόνων. Για παράδειγμα, ο Gaspard Monge, ο εξαιρετος γεωμέτρης, έγινε υπουργός ναυτιλίας: ο Lazare Carnot, ο χα-

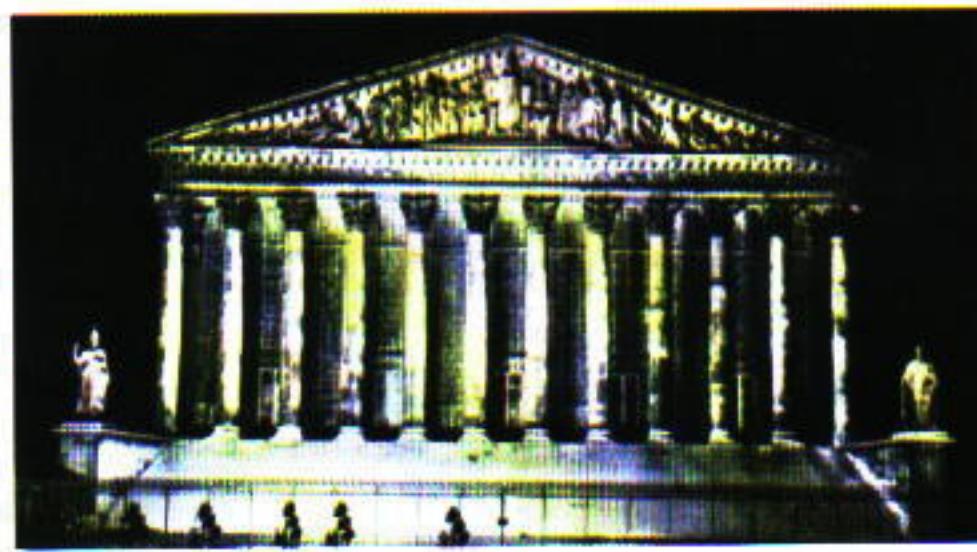
ρισματικός μαθηματικός και ειδικός στη μηχανική, ήταν ένας από τους ιδρυτές των Ενόπλων Δυνάμεων της δημοκρατίας και της πολεμικής βιομηχανίας της.

Η μέγιστη όμως συνεισφορά αυτών των επιστημόνων στη νέα δημοκρατία αφορούσε το πεδίο της ανώτατης εκπαίδευσης. Πριν από την επανάσταση το σύστημα ανώτατης εκπαίδευσης στη Γαλλία ήταν οικτρό, κυρίως διότι στηριζόταν σε είκοσι δύο απαρχαιωμένα πανεπιστήμια που ταλανίζονταν από τις μεσαιωνικές παραδόσεις και τους σχολαστικούς. Ιδιαίτερα, οι τομείς των μαθηματικών, της φυσικής και της χημείας ήταν σε άθλια κατάσταση. Οι μοναδικές εξαιρέσεις σ' αυτό το αρχαϊκό σύστημα ήταν λίγες εκλεκτές στρατιωτικές σχολές μηχανικών: η Σχολή Γεφυρών και Οδοστρωμάτων (Ponts et Chaussees), η Σχολή Mezieres για Στρατιωτικούς Μηχανικούς (στην οποία δίδα-

ξε ο Monge και από την οποία αποφοίτησε ο Carnot) και η Σχολή Πυροβολικού.

Κατά τα πρώτα χρόνια της επανάστασης έκλεισαν πολλά ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα και εξειδικευμένες σχολές. Το 1793 το ανώτατο σώμα της επαναστατικής εξουσίας —η Συνέλευση— άρχισε να αναδιοργανώνει το εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας. Με το ψήφισμα της 29ης Φριμέρ (σύμφωνα με το καινούργιο επαναστατικό ημερολόγιο αντιστοιχεί στη δική μας 19η Δεκεμβρίου 1793) η στοιχειώδης εκπαίδευση έγινε δωρεάν και υποχρεωτική για όλους.

Την ίδια περίου εποχή, έπειτα από υπόδειξη του Monge και άλλων σημαντικών επιστημόνων, συστάθηκε η Επιτροπή για τα Δημόσια Έργα. Αυτή η επιτροπή πρότεινε τη δημιουργία μίας νέας ανώτατης σχολής η οποία θα εκπαίδευε ειδικούς στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Σε αντίθεση με το ιδανικό μιας εκπαίδευσης που επιδιώκει την ολόπλευρη ανάπτυξη της προσωπικότητας, προσανατολισμός ο οποίος αναπτύσσεται το 18ο αιώνα, η νέα σχολή στόχευε στην ταχύτερη δυνατή επίτευξη αποτελεσμάτων στα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία. Οι σπουδαστές ενθαρρύνονταν να φτάσουν στα



Πρόσοψη του Παλατιού των Βουρβώνων.



G. Monge (1746-1818).

ανώτατα επίπεδα γνώσης όσο το δυνατόν γρηγορότερα με την υπόσχεση υλικών αμοιβών και τιμών.

Η επιτροπή υποστήριξε ολοκληρωτικά τον Monge και ανέθεσε σ' αυτόν και άλλους επιστήμονες να επεξεργαστούν την πρόταση. Στις 21 Βεντόζ του έτους ΙΙ της επανάστασης (11 Μαρτίου 1794) η επιτροπή υιοθέτησε την πρόταση ίδρυσης μίας νέας σχολής για την εκπαίδευση μηχανικών: της Σχολής Δημόσιων Έργων. Στο τέλος του ακαδημαϊκού έτους το όνομα της σχολής άλλαξε σε Πολυτεχνική Σχολή για να περιγραφούν καθαρότερα οι στόχοι της. Σκοπός της σχολής ήταν «να εκπαιδεύει μηχανικούς διαφόρων ειδικοτήτων, να αποκαταστήσει τη διδασκαλία των θετικών επιστημών, που είχε διακοπεί λόγω της κρίσης της επανάστασης, και να προσφέρει ανώτερη επιστημονική διδασκαλία σε νέους οι οποίοι είτε θα βοηθούσαν την κυβέρνηση στο έργο της Δημοκρατίας είτε θα διαφωτίζαν τους κατοίκους των τόπων καταγωγής τους και θα διέδιδαν τις χρήσιμες γνώσεις τους».

Η επιτροπή οργάνωσε εισαγωγικές εξετάσεις σε είκοσι δύο γαλλικές πόλεις για να επλεγούν τετρακόσιοι άρρενες, ηλικίας μεταξύ 16 και 20 ετών, οι οποίοι «θα είχαν αποδείξει την αφοσίωσή τους στις δημοκρατικές αρχές και θα διέθεταν καλή γνώση της αριθμητικής και των στοιχείων της άλγεβρας και της γεωμετρίας». Λόγω της δύσκολης κατάστασης στη χώρα στάθηκε αδύνατον να τηρηθεί ο αυστηρός περιορισμός της ηλικίας των υποψηφίων. Έτσι, ενώ ο νεότερος από αυτούς ήταν 12 μόνο ετών, υπήρχαν άλλοι αρκετά μεγαλύτεροι από 20 ετών. Πρώτος διευθυντής της σχολής ήταν

o Lamblardi, πρώην επικεφαλής της Σχολής Γεφυρών και Οδοστρωμάτων. Σύντομα αντικαταστάθηκε από τον Monge, που παρέμεινε σ' αυτήν τη θέση επί τέσσερα χρόνια.

Η σχολή στεγάστηκε αρχικά στο Παλάτι των Βουρβώνων. Τα μαθήματα άρχισαν στις 21 Δεκεμβρίου του 1794. Ο κύκλος σπουδών διαρκούσε τρία χρόνια και περιλάμβανε απειροστικό λογισμό, γεωμετρία, παραστατική γεωμετρία, τεχνικό σχέδιο, μηχανική, φυσική, χημεία, αρχιτεκτονική και στρατιωτική μηχανική. Καθηγητές ήταν εξέχοντες γάλλοι επιστήμονες, όπως οι Lagrange, Monge, Laplace, Le Peletier, Berthollet και Neveux. Ακόμη και στο πρώτο έτος διδασκαν εξαιρετοί επιστήμονες όπως ο Biot (ο αστρονόμος και φυσικός), ο Poinsot (γνωστός για το έργο του στη γεωμετρία και τη θεωρητική μηχανική), ο Malus (που ανακάλυψε την πόλωση του φωτός) και ο αρχαιολόγος de Chezy (που αποκρυπτογράφησε την ασυριακή σφηνοειδή γραφή).

Ο Monge αφιέρωσε όλο το χρόνο του και τις δυνάμεις του στη σχολή. Δημιούργησε έναν κύκλο σπουδών παραστατικής γεωμετρίας —της βάσης πολλών τεχνικών επιστημών. «Κανείς δεν ήταν τόσο καλός διδάσκαλος όσο ο Monge» αναφέρει ο Brisson, ένας φημισμένος μηχανικός. «Οι χειρονομίες του, οι στάσεις του, ο τόνος της φωνής του, όλα εξυπρετούσαν την ανάπτυξη της σκέψης του. Παρακολουθούσε πάντα τα μάτια των ακροατών του και μπορούσε να εκτιμήσει το βαθμό κατανόησης του καθενός. Ο Monge, αυτός ο καταπληκτικός άνθρωπος, ήταν αφιερωμένος στους νέους και την επιστήμη. Βρισκόταν πάντα ανάμεσά μας. Επειτα από τις διαλέξεις γεωμετρίας, απειροστικού λογισμού και φυσικής ακολουθούσαν προσωπικές συζητήσεις που ανέπτυσσαν ακόμη περισσότερο τις ικανότητές μας. Ήταν φίλος με όλους τους φοιτητές του, μας ενθάρρυνε στη δουλειά μας και απολάμβανε την επιτυχία μας».

Μετά το τέλος του πρώτου ακαδημαϊκού έτους ο κύκλος των σπουδών συντομεύτηκε σε δύο χρόνια αντικατοπτρίζοντας μια αλλαγή στους στόχους της σχολής. Αντί πλήρως εκπαιδευμένους μηχανικούς θα προετοί-



L. Carnot (1753-1823).

μαζε πτυχιούχους φοιτητές ικανούς να παρακολουθήσουν δύο επιπλέον χρόνια εξειδικευμένης διδασκαλίας στις σχολές Γεφυρών και Οδοστρωμάτων, Μεταλλείων, Στρατιωτικών Μηχανικών κ.λπ. Οι φοιτητές εισάγονταν στις σχολές με βάση την ποιότητα του έργου τους. Ένας απόφοιτος με υψηλή βαθμολογία μπορούσε να παρακολουθήσει οποιαδήποτε σχολή. Όμως, όσο χαμηλότερη ήταν η βαθμολογία του τόσο λιγότερες ήταν και οι επλογές του.

Οι συγκεκριμένες σχολές δέχονταν επίσης και άλλους φοιτητές που παρακολουθούσαν τετραετείς κύκλους σπουδών. Αυτοί όμως δεν ήταν ισότιμοι με τους απόφοιτους της Πολυτεχνικής Σχολής, οι οποίοι εθεωρούντο δημόσιοι υπάλληλοι και ελάμβαναν μισθό. Καθιερώθηκε νέο σύστημα εισαγωγικών εξετάσων. Οι υποψήφιοι εξετάζονταν στην αριθμητική, τη γεωμετρία και την άλγεβρα, ενώ στην ύλη περιλαμβανόταν η επίλυση πλυντηρικών εξισώσεων δεύτερου, τρίτου και τέταρτου βαθμού και η θεωρία απειροσειρών. Τα επόμενα είναι μερικά παραδείγματα θεμάτων από αυτές τις εξετάσεις:

1. Αποδείξτε ότι ένα τρίγωνο με δύο ίσες διχοτόμους είναι ισοσκελές.
2. Διαιρέστε τις πλευρές ενός τριγώνου σε τμήματα ανάλογα προς τα τετράγωνα των προσκείμενων πλευρών και ενώστε τα σημεία διαίρεσης με τις απέναντι κορυφές. Αποδείξτε ότι οι ευθείες που προκύπτουν κατ' αυτό τον τρόπο συντρέχουν σ' ένα σημείο, στο κέντρο βάρους του τριγώνου που σχηματίζεται από τις προβλές του σημείου στις πλευρές του δεδομένου τριγώνου.

3. Δίνεται γωνία  $AOB$  και σημείο  $P$ . Βρείτε ένα σημείο  $M$  στην πλευρά  $AO$  της γωνίας τέτοιο ώστε οι κύκλοι  $C$  και  $C'$  που διέρχονται από τα  $M$  και  $P$ , και εφάπτονται της πλευράς  $OB$ , να τέμνονται υπό δεδομένη γωνία.

4. Κατασκευάστε ένα τρίγωνο όταν δίνονται: μία από τις γωνίες του, η περιμετρός του και το εμβαδόν του.

5. Εστω  $a, b, c$ , και  $d$  τα μήκη, κατά σειρά μεγέθους, των πλευρών ενός τετραπλεύρου. Αποδείξτε ότι ο λόγος της ακτίνας του περιγέγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου που σχηματίζουν οι διχοτόμοι του δεδομένου τετραπλεύρου προς την ακτίνα του περιγέγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών του ισούται με

$$\frac{a+c-b-d}{a+c+b+d}.$$

Στην Πολυτεχνική Σχολή η διδασκαλία γινόταν από τους καθηγητές (που είχαν την ευθύνη των μαθημάτων), τους βοηθούς (που εξηγούσαν τις διαλέξεις και επέβλεπαν την πρακτική εξάσκηση) και τους εξεταστές (που έλεγχαν τις γνώσεις των φοιτητών με εξαιρετικά δύσκολες εξετάσεις, τις οποίες έπρεπε να περάσουν όλοι). Η διδασκαλία ακολουθούσε ένα καλοσχεδιασμένο πρόγραμμα. Κατά την πρώτη δεκαετία από την ίδρυση της η μεγαλύτερη έμφαση δίνοταν στα μαθηματικά, στα οποία αφιερώνονταν 20 περίπου ώρες την εβδομάδα. Περιλάμβαναν απεροστικό λογισμό, συνθετική και αναλυτική γεωμετρία, μηχανική, παραστατική γεωμετρία και τεχνικό σχέδιο. Η πειραματική φυσική και η χημεία αποτελούσαν ένα μεγάλο τμήμα του δεύτερου έτους σπουδών.

Η δημοσίευση όλων των μαθημάτων που διδάσκονταν στην Πολυτεχνική Σχολή ήταν επιβεβλημένη διάνομου. Αντίγραφά τους τυπώνονταν και διανέμονταν σε κάθε φοιτητή και συχνά έφταναν πολύ μακριά από τη σχολή. Η επίδραση αυτών των διαλέξεων ήταν σημαντικότατη: η πλειοψηφία των γαλλικών μαθηματικών εγχειριδίων κατά το πρώτο μισό του 19ου αιώνα βασίστηκε σ' αυτές. Η διεύθυνση της σχολής κατέβαλλε κάθε

προσπάθεια για να αναπτύξουν οι φοιτητές της τη διανοητική περιέργεια και την επιστημονική δημιουργικότητα.

Στις 18 Μπριμέρ του έτους VII (9 Νοεμβρίου του 1799), ένας τριαντάχρονος διοικητής των στρατιωτικών δυνάμεων της περιοχής του Παρισιού, ο στρατηγός Ναπολέων Βοναπάρτης, ανακηρύχθηκε έπειτα από πραξικό πημα πρώτος Υπαρχοντής της Δημοκρατίας. Ο Ναπολέων ήταν χαρισματικός στρατιωτικός ηγέτης, αλλά και μέλος του τμήματος μηχανικής του Γαλλικού Ινστιτούτου.<sup>1</sup> Τον ενδιέφεραν τα μαθηματικά, είχε μελετήσει αστρονομία και ήταν συγγραφέας ενός άρθρου για τη βαλλιστική. Θεωρούσε σημαντικό να εξασφαλίσει την υποστήριξη των επιστημόνων και των φοιτητών της Πολυτεχνικής Σχολής. Λίγο καιρό αφότου πήρε την εξουσία, προσέφερε τον τίτλο του γερουσιαστή σε τρεις από τους καθηγητές της σχολής — τους Berthollet, Monge και Laplace. Υιοθετήθηκε νέος κανονισμός της σχολής, ο οποίος διατηρήθηκε μέχρι το 1853.

Την 1η Μαΐου του 1804 με ψήφισμα της Γερουσίας ο Ναπολέων ανακηρύχθηκε «Αυτοκράτορας της Γαλλίας, ελέω Θεού και δικαίω του κράτους της Δημοκρατίας» και η Γαλλία έγινε αυτοκρατορία. Ο Ναπολέων αναδιοργάνωσε την Πολυτεχνική Σχολή υπάγοντάς τη στο στρατό. Στην πραγματικότητα ακόμη και πριν από το 1804 το καθεστώς φοιτησης των σπουδαστών δεν διέφερε και πολύ από αυτό των δοκίμων στις στρατιωτικές σχολές. Γεννημένη κατά τη διάρκεια των ποδύσκολων χρόνων της επανάστασης, η σχολή είχε δημιουργηθεί με στρατιωτική πειθαρχία και τώρα, στις 16 Ιουλίου του 1804, ο στρατιωτικός της χαρακτήρας γινόταν επίσημος. Οι φοιτητές αποτελούσαν ένα τάγμα πέντε λόχων υπό τις διαταγές ενός στρατηγού. Οι κοιτώνες τους εθεωρούντο στρατώνας και οι ίδιοι ότι υπηρετούσαν τη στρατιωτική τους θητεία. Πληρώνονταν με το μισθό ενός λοχία πυροβολικού. Η σχολή μεταφέρθηκε από το Παλάι των Βουρβώνων στα ανακαινισμένα κτίρια δύο παλαιότερων

1. Το Γαλλικό Ινστιτούτο, που ιδρύθηκε το 1795, συμπεριλάμβανε πέντε εθνικές ακαδημίες και ανάμεσά τους την Ακαδημία των Εποτημάτων.

σχολών: του Κολλεγίου της Ναβάρρα και του Κολλεγίου de Boncoeur.

Ο Ναπολέων οδήγησε τη Γαλλία σε μια — λίγο ως πολύ — μόνιμη κατάσταση πολέμου, που παρέσυρε φοιτητές και καθηγητές και είχε ως αποτέλεσμα τη χαλάρωση των απαιτήσεων στις εξετάσεις, τη μείωση των προχωρημένων κύκλων σπουδών, και άλλα επακόλουθα. Ο Ναπολέων, έχοντας πλήρη συνείδηση της στρατιωτικής αξίας της σχολής, απάλλαξε τους φοιτητές από τα βαριά στρατιωτικά καθήκοντα. Με αυτό τον τρόπο η σχολή μπορεί να συνεχίσει την ανάπτυξη και την πρόοδό της.

Κατά την παρουσίαση του σχέδιου του ιδρυτικού νόμου της σχολής στη Συνέλευση το 1794, ο Fourcroy, μέλος της επιτροπής Δημόσιας Ασφαλείας, δήλωσε: «Προβλεπώ, χωρίς καμία αμφιβολία, ότι η νέα σχολή θα φέρει δόξα στη Γαλλία». Τα λόγια αυτά αποδειχτικάν προφητικά. Η Πολυτεχνική Σχολή υπήρξε ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες επιστημονικής προόδου κατά το 19ο αιώνα. Το κύρος της ήταν τόσο μεγάλο, ώστε οι απόφοιτοι της, ανεξάρτητα από όποιο άλλο αξιώμα, είχαν κατακτήσει, υπέγραφαν συχνά ως «τέως φοιτητής της Πολυτεχνικής Σχολής». Η σχολή δημιουργήσε μια επιστημονική ελίτ με κριτήριο την προσωπική ικανότητα και το ταλέντο, και όχι την κοινωνική τάξη.

Είναι αδύνατον να δώσουμε έναν πλήρη κατάλογο με τις εξέχουσες προσωπικότητες των θετικών επιστημών, της στρατιωτικής επιστήμης και της τεχνολογίας που ανακαλύπτουμε ανάμεσα στους αποφοίτους της. Μεταξύ άλλων είναι οι γάλλοι μαθηματικοί Cauchy, Hermite, Jordan και Poincaré. Οι φυσικοί Arago και Fresnel. Ολόκληρη η δυνατοτεία Becquerel. Ο χημικός Gay-Lussac και οι φιλόσοφοι Comte και Sorel. Οι στρατάρχες Joffre και Foch.

Εως τις μέρες μας αυτό το μοναδικό εκπαιδευτικό ίδρυμα συνεχίζει να διδάσκει την αφρόκρεμα των γάλλων φοιτητών στις θετικές επιστήμες και στις σχολές μηχανικών. Για περισσότερα από διακόσια χρόνια η σχολή έχει μείνει ποτήρι στην αρχή της «για την πατρίδα, τις επιστήμες και τη δόξα».

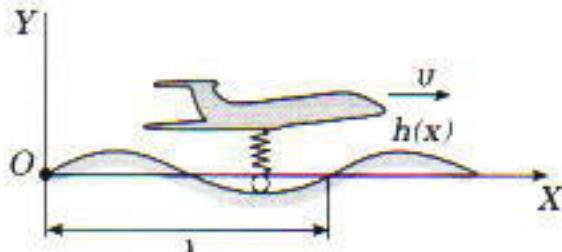
# ΟΙ ΟΔΥΝΗΡΕΣ ΣΥΝΕΠΙΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

*Είστε έτοιμοι για ανώμαλη προσγείωση;*

Albert Stasenko

**ΟΛΛΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ** μας εισάγουν στο φαινόμενο του συντονισμού μέσω του εντυπωσιακού παραδείγματος της στρατιωτικής ομάδας που παρελαύνει με βήμα πάνω σε μια ξύλινη γέφυρα· ο ρυθμικός βιηματισμός μπορεί να προκαλέσει την κατάρρευση της γέφυρας! Έστι εξηγείται γιατί οι στρατιώτες περνούν τις γέφυρες με ελεύθερο βήματισμό.

Παρόμοια κατάσταση μπορεί να αντιμετωπίσουν και οι επιβάτες ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται. Όσο καλά κι αν έχει κατασκευαστεί ο διάδρομος προσγείωσης, αποκλείεται να



Σχήμα 1

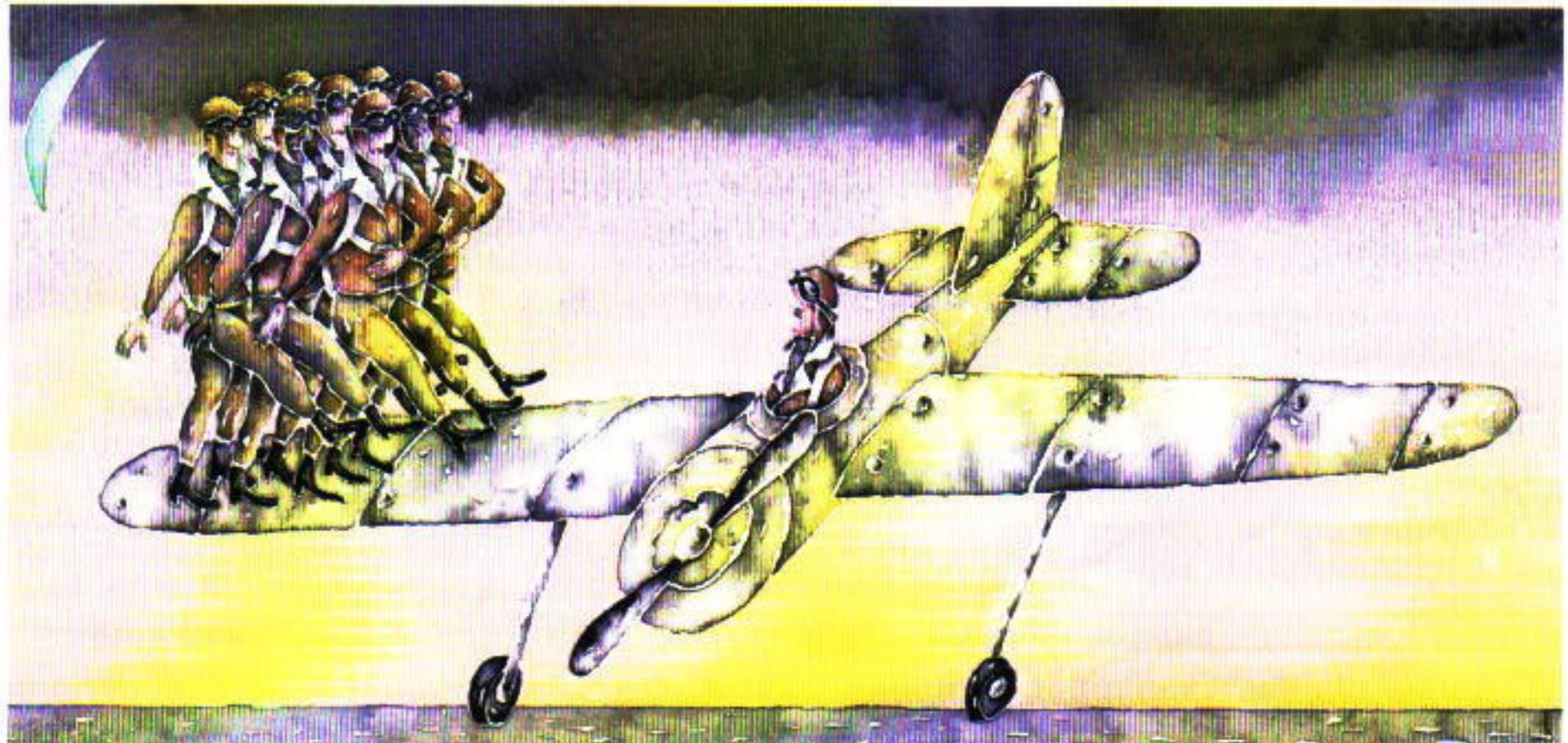
είναι απολύτως επίπεδος. Κατά συνέπεια, το αεροπλάνο μπορεί να «χοροπηδάει» πάνω στο διάδρομο καθώς προσγειώνεται με μεγάλη ταχύτητα. Ας μελετήσουμε προσεκτικά το εν λόγω πρόβλημα.

Θεωρούμε ένα αεροπλάνο μάζας  $m$  το οποίο κινούμενο με σταθερή ταχύ-

τητα  $v$  αγγίζει το διάδρομο προσγείωσης με τους τροχούς του (Σχήμα 1). Υποθέτουμε ότι κάθε τροχός στηρίζεται σ' ένα ελατήριο σταθεράς  $k$ , και πως τα ελατήρια έχουν φυσικό μήκος  $H$ . Αν λοιπόν μια τυχαία στιγμή η απόσταση του κέντρου μάζας του αεροπλάνου από το διάδρομο ισούται με  $y$  και το μέγεθος των ανωμαλιών του διαδρόμου είναι ίσο με  $h$ , η παραμόρφωση κάθε ελατηρίου θα είναι  $\Delta y = y - H - h$ . Επομένως, κάθε ελατήριο αναπτύσσει δύναμη μέτρου

$$F = -k\Delta y = -k(y - H - h). \quad (1)$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η



εν λόγω δύναμη (και η οποία ασκείται στο αερoplάνο) αντιτίθεται στην παραμόρφωση Δυ του ελατήριου. Όταν το ελατήριο επιμκύνεται, η δύναμη που υφίσταται το αερoplάνο κατευθύνεται προς τα κάτω, ενώ, όταν συμπιέζεται, η δύναμη κατευθύνεται προς τα πάνω. Επομένως, η συγκριμένη δύναμη τείνει να επαναφέρει το ελατήριο στη θέση ισορροπίας του (γι' αυτό και ονομάζεται δύναμη επαναφοράς).\*

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η κατακόρυφη κίνηση του αερoplάνου θα περιγράφεται από την εξίσωση  $mg_y = -mg + 2F$ . (Ο συντελεστής 2 εξηγείται από το γεγονός ότι το αερoplάνο έχει δύο συστήματα τροχών.) Αντικαθιστώντας την έκφραση της δύναμης επαναφοράς στην εξίσωση κίνησης λαμβάνουμε

$$mg_y = -mg - 2k(y - H - h). \quad (2)$$

Μπορούμε να αναφερθούμε αμέσως στην ειδική περίπτωση της ισορροπίας, όταν το αερoplάνο μένει ακίνητο στο διάδρομο προσγείωσης (υπόθεστε, χάριν απλότητας, ότι σ' αυτή τη θέση  $h = 0$ ). Τότε η επιτάχυνση του αερoplάνου είναι μηδενική (οπότε  $y_y = 0$ ), και από την τελευταία εξίσωση προκύπτει η στατική παραμόρφωση του ελατήριου:

$$y_0 - H = -\frac{mg}{2k}. \quad (3)$$

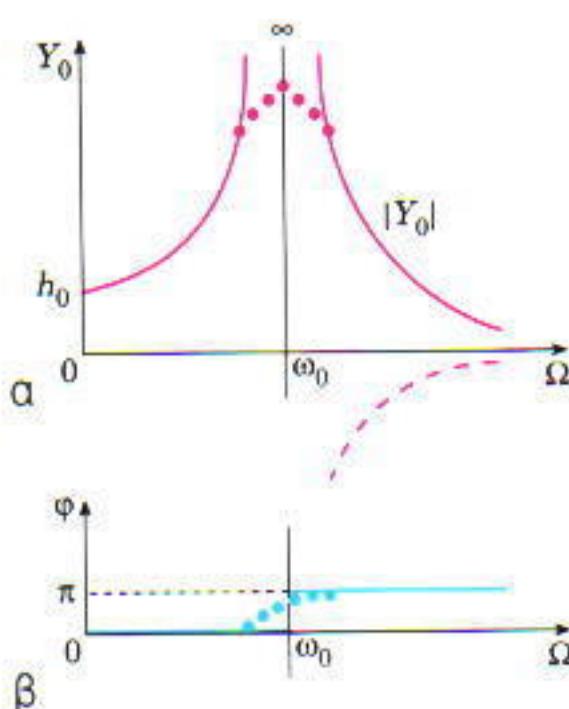
Η τιμή αυτή είναι αρνητική επειδή το ελατήριο συμπιέζεται λόγω του βάρους του αερoplάνου.

Από τις εξισώσεις (2) και (3), και θέτοντας την κατακόρυφη απομάκρυση του κέντρου μάζας του αερoplάνου από τη θέση ισορροπίας  $y - y_0 = Y$ , λαμβάνουμε

$$Y_y = -\frac{2k}{m}(Y - h). \quad (4)$$

Ας ασχοληθούμε τώρα με το μετασχηματισμό αυτής της εξισώσης. Κατ' αρχάς θυμόμαστε ότι η επιτάχυνση είναι η δεύτερη παράγωγος της απομάκρυνσης ως προς το χρόνο:  $y_y = Y''$ .

\* Για μια λεπτομερέστερη παρουσίαση του νόμου του Hooke δείτε το άρθρο του A. Dzorogov «Η μεγάλη βουτιά», στο τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1994. (Σ.τ.μ.)



Σχήμα 2

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η ανώμαλη επιφάνεια του διαδρόμου προσγείωσης περιγράφεται κατά μήκος του άξονα  $x$  από μια αρμονική συνάρτηση με μήκος κύματος  $\lambda$  και πλάτος  $h_0$ :

$$h = h_0 \eta \mu \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right).$$

Επιπλέον, το γεγονός ότι η οριζόντια ταχύτητα του αερoplάνου είναι σταθερή σημαίνει ότι  $x = ut$  μπορούμε τέλος να θέσουμε

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m}.$$

Έτοιμο, η εξίσωση (4) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$Y'' + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 h_0 \eta \mu \left( 2\pi \frac{u}{\lambda} t \right). \quad (5)$$

Αν το δεξιό μέλος της εξισώσης (5) ήταν ίσο με το μηδέν, οι περισσότεροι αναγνώστες θα αναγνώριζαν την εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης, με ιδιοσυχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Όμως το δεξιό μέλος είναι ημιτονοειδής συνάρτηση, με πλάτος  $\omega_0^2 h_0$  και περίοδο  $T = \lambda/u$  (ή συχνότητα  $\Omega = 2\pi/T = 2\pi u/\lambda$ ). Αυτές οι παράμετροι προσδιορίζονται από τις εξωτερικές συνθήκες — το μήκος κύματος  $\lambda$  και το μέγιστο «βάθος»  $h_0$  της ανώμαλης επι-

φάνειας — και ακριβώς χαρακτηρίζουν το εξωτερικό αίτιο που διεγείρει την ταλάντωση. Γι' αυτό οι εν λόγω ταλάντωσεις ονομάζονται εξηναγκασμένες.

Ας δούμε τώρα πώς το ταλαντούμενο σύστημά μας (ένα αερoplάνο με δύο ελατήρια) ανταποκρίνεται στις ανωμαλίες του διαδρόμου προσγείωσης. Αναζητούμε μια λύση που να έχει τη μορφή αυτής της αρμονικής ταλάντωσης, με συχνότητα  $\Omega$  (της διεγειρουσας, εξωτερικής δύναμης):

$$Y = Y_0 \eta \mu \Omega t. \quad (6)$$

Αν από την (6) πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο της  $Y$  ως προς το χρόνο (η οποία είναι  $Y'' = -\Omega^2 Y_0 \eta \mu \Omega t$ ), την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (5) και απλοποιήσουμε τον όρο  $\eta \mu \Omega t$ , θα λάβουμε την εξίσωση για το πλάτος  $Y_0$  της εξηναγκασμένης ταλάντωσης του αερoplάνου:

$$Y_0(-\Omega^2 + \omega_0^2) = \omega_0^2 h_0.$$

Στο Σχήμα 2α αναπαριστάται ποιοτικά η εξάρτηση του πλάτους  $Y_0$  της εξηναγκασμένης ταλάντωσης από τη συχνότητα  $\Omega$  της εξωτερικής διέγερσης. Διαπιστώνουμε πως, αν η  $\Omega$  τείνει στο μηδέν — αν δηλαδή η ταχύτητα είναι μικρή ( $u \rightarrow 0$ ) ή το μήκος κύματος της ανώμαλης επιφάνειας είναι πολύ μεγάλο ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) —, το  $Y_0$  τείνει στο  $h_0$ ; με άλλα λόγια, αν το αερoplάνο προσγειώνεται με μικρή ταχύτητα ή ο διάδρομος προσγείωσης είναι εντελώς επίπεδος, το σκάφος θα κινείται στο διάδρομο με σταθερότητα, χωρίς να υφίσταται κραδασμούς. Ωστόσο, εάν το μήκος κύματος του διαδρόμου προσγείωσης και η ταχύτητα του αερoplάνου έχουν τέτοιες τιμές ώστε η συχνότητα του εξωτερικού, διεγειρούτα παράγοντα να είναι ίση κατά προσέγγιση με την ιδιοσυχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης του αερoplάνου ( $\Omega \rightarrow \omega_0$ ), θα συμβεί κάτι τρομερό: Το πλάτος ταλάντωσης θα γίνει (θεωρητικά) απειρώς μεγάλο ( $Y_0 \rightarrow \infty$ ), γεγονός το οποίο συνεπάγεται (πρακτικά) την εμφάνιση πολύ ισχυρών κραδασμών που θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην ατυχή εξέλιξη ο πλάτος να χάσει τον έλεγχο του αεροσκάφους. Αυτή είναι η περίπτωση του συντονισμού.

Για μεγάλες συχνότητες ( $\Omega > \omega$ ), το  $Y_0$  γίνεται αρνητικό (η διακεκομέ-

νη γραμμή στο Σχήμα 2α)· μπορούμε όμως να «κρύψουμε» το αρνητικό πρόσημο μέσα στο όρισμα της ημιτονοειδούς συνάρτησης:

$$-|Y_0| \eta \mu \Omega t = |Y_0| \eta \mu (\Omega t + \pi).$$

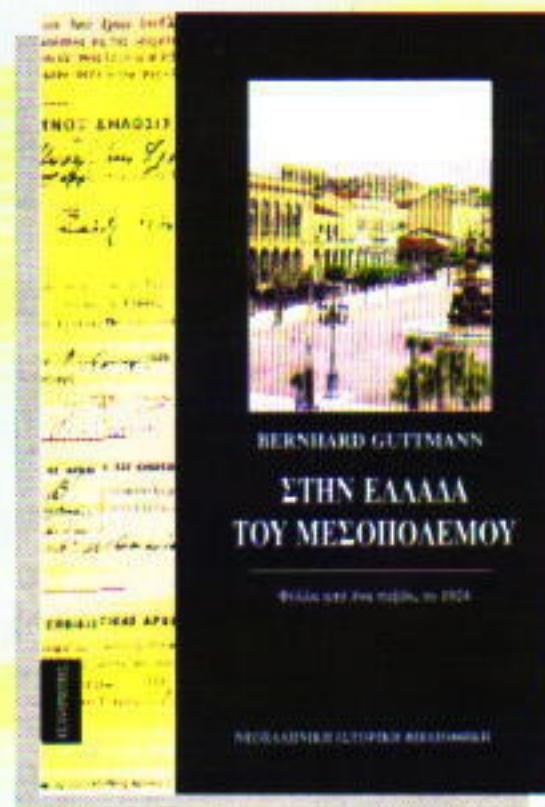
Με άλλα λόγια, αν η διεγείρουσα δύναμη έχει συχνότητα ίση περίπου με την ιδιοσυχνότητα του αεροπλάνου —δηλαδή, αν  $\Omega = \omega_0$ —, η φάση φτης ταλάντωσης μεταβάλλεται κατά π (Σχήμα 2β).

Φυσικά, οι επιστήμονες και οι μηχανικοί καταβάλλουν προσπάθειες να αποφεύγεται ο «καταστροφικός» συντονισμός (αποκλειόντας την πιθανότητα  $|Y_0| \rightarrow \infty$ ). Ένας τρόπος είναι η απόσβεση των ταλαντώσεων εξαιτίας τριβής. Για παράδειγμα, μπορεί να συνδεθεί σε σειρά με κάθε ελατήριο ένα αμορτισέρ λαδιού (ένα έμβολο μέσα σε κύλινδρο γεμάτο με λάδι). Η τεχνική αυτή οδηγεί σημαντικό μέρος της μηχανικής ενέργειας στη γνωστή ενεργειακή «καταβόθρα» της τριβής, μετατρέποντάς το σε θερμότητα, οπότε το  $|Y_0|$  δεν θα τείνει στο άπειρο (βλ. τη διάστικτη καμπύλη στο Σχήμα 2).

Υπάρχουν δύο επιπλέον λόγοι χάρη στους οποίους τα αεροσκάφη αποφεύγουν τον «καταστροφικό» συντονισμό. Πρώτον, η ανώμαλη επιφάνεια του διαδρόμου δεν λειτουργεί ποτέ ως μια αυστηρώς περιοδική συνάρτηση (με σταθερό μήκος κύματος λ). Δεύτερον, τα αεροπλάνα ούτε προσγειώνονται ούτε απογειώνονται με σταθερή ταχύτητα· επταχύνονται κατά την απογείωση και επιβραδύνονται κατά την προσγείωση.

Ωστόσο, για τα διάφορα τροχοφόρα εδάφους (για παράδειγμα, για τα βαγόνια ενός τρένου), τόσο το λ (το μήκος κύματος των γραμμών του τρένου) όσο και η υ (η ταχύτητα του τρένου) είναι ως επί το πλείστον σταθερά μεγέθη, οπότε μερικές φορές μπορείτε να παρατηρήσετε το συντονισμό. Τα βαγόνια αρχίζουν να ταλαντώνονται με διάφορους τρόπους: να στρέφονται γύρω από τον κατακόρυφο ή τους οριζόντιους άξονες, να χοροπηδούν πάνω - κάτω (τρομώδης κίνηση) ή μπροσ- πίσω (παλινδρομική κίνηση). Άλλα ένα βαγόνι έχει πολλούς τροχούς και ελατήρια, επομένως η κίνησή του περιγράφεται από πολύπλοκες εξισώσεις· ας αφήσουμε την μελέτη του, λοιπόν, για ένα επόμενο άρθρο.

## Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΕΙ, ΚΑΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΕΙ, ΚΑΘΕ ΑΝΘΡΩΠΟ



**Bernhard Guttman**

### ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΠΟΛΕΜΟΥ

**Φύλλα από ένα ταξίδι, το 1924**

Ο Guttman (1869-1959), ηγετική μορφή της γερμανικής δημοσιογραφίας, σπουδαίος ιστορικός και συγγραφέας με πολύπλευρο έργο, επισκέφθηκε την Ελλάδα το 1924. Κάτοχος ανθρωπιστικής παιδείας, ενδιαφέρεται για τα λείφανα της Αρχαιότητας. Ωστόσο, δεν λειτουργεί ως απλός, ρομαντικός περιηγητής· παρατηρεί τη σύγχρονη κατάσταση, το χαρακτήρα του Ελληνικού λαού, το φυσικό και το κοινωνικό του περιβάλλον. Ανιχνεύει το ιστορικό παρελθόν και ερμηνεύει το παρόν μέσα από την ιστορική εξέλιξη των γεγονότων.

Περιεχόμενα: Ελλάδα, η πύλη της Ανατολής - Κέρκυρα - Πάτρα - Ελευσίνα, Ναύπλιο και Μυήνες - Ταξίδι στους Δελφούς - Αθήνα - Η Ελληνική επαρχία - Περί της Ελληνικής κοινωνίας - Δάσκαλος και πατάς - Η γλωσσική διαμάχη - Πολιτικά χαρακτηριστικά -

Οι πρόσφυγες - Θεσσαλονίκη - Μια δεκαετία

Νεοελληνικής Ιστορίας.

Σελ.: 287, Εικ.: Α/Μ, 14 × 21 εκ., 5.500 δρχ.

ΙΣΤΟΡΗΤΗΣ / ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο**

Βιβλιοπωλείο: Στοά των βιβλίων (Πανεπιστημίου και Πειραιώς 5),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

# Περί στροφικής κινήσεως

«Ολοένα περιστρέφομαι, έλκομαι από έναν ήλιο  
πιο μεγάλο, σε μια ατέλειωτη γυρίζω τροχιά...»

—Βασίλης Λιάσκας

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

**Ο**ΤΑΝ ΚΑΝΕΙΣ ΘΕΛΕΙ ΝΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΕΙ με τρόπο που να ξεφεύγει από τα συνηθισμένα, η επίσκεψη σ' ένα λούνα πάρκ αποτελεί μια εναλλακτική λύση που υπόσχεται πολλά. Μαγικός τόπος χαράς, ανεμελιάς και ατέλειωτης εξερεύνησης για τα παιδιά, έχει πολλά θέλγητρα για να απολαύσουν και όσοι ενήλικες διακατέχονται από μια παιδικότητα ή όσοι την αναπολούν με νοσταλγία και σχεδιάζουν μια μικρή απόδραση από την ισοπεδωτική καθημερινότητα. Θα μπορούσαμε να το ονομάσουμε «εργοστάσιο αναψυχής», αφού τυπικά αποτελεί τόπο συγκέντρωσης μεγάλων και σχετικά πολύπλοκων μηχανών που τίθενται στην υπηρεσία της διασκέδασης του επισκέπτη. Ασυνήθιστες για την καθημερινή εμπειρία μορφές κίνησης αποτελούν τον κεντρικό πρήνα της λειτουργίας του. Εξέχουσα θέση ανάμεσά τους κατέχουν οι στροφικές κίνησεις. Το πιο κοινό παράδειγμα είναι τα «αλογάκια» σχεδόν

δεν υπάρχει άνθρωπος που να μην έχει ανέβει. Πρόκειται όμως για μια απλή πρόγευση των εντονότερων συγκινήσεων που επιφυλάσσουν στον επισκέπτη οι υπόλοιποι «γύροι», τους οποίους επινόησαν ή βελτίωσαν πολυάριθμοι εφευρέτες και μηχανικοί στην ιστορία των λούνα πάρκ. Αν σας έλκει η αίσθηση του κινδύνου και σας διεγείρει ευχάριστα η αυξημένη παρουσία αδρεναλίνης στον οργανισμό σας, είναι σίγουρο πως θα διασκεδάσετε!

Οι στροφικές κίνησεις μπορεί να αποδειχθούν διασκεδαστικές και στα μαθήματα φυσικής στην τάξη, μολονότι δεν θα ελπίζαμε ποτέ πως θα μπορούσαν να σχηματιστούν ουρές ανθρώπων επί δύο ώρες για να μάθουν σχετικά με την κεντρομόλο δύναμη και τη στροφορμή.

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, μερικά κλασικά παραδείγματα στροφικής κίνησης προτού περάσουμε σε ορισμένες ενδιαφέρουσες παραλλαγές. Θα επιλέξουμε προβλήματα που λύνονται ιδιαίτερα εύκολα εάν χρησιμοποιήσουμε τους νόμους διατήρησης της ορμής, της στροφορμής και της κινητικής ενέργειας.

Θεωρούμε έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας  $R_1$ , μάζας  $M_1$  και ροπής αδράνειας  $\Theta_1$ , ο οποίος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1$  γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Η στροφορμή του είναι  $G_1 = \Theta_1 \omega_1$ , η κινητική του ενέργεια περιστροφής  $KE_1 =$

$(1/2)\Theta_1 \omega_1^2$  και, εάν πρόκειται για ομογενή δίσκο, η ροπή αδράνειας του  $\Theta_1 = (1/2)M_1 R_1^2$ , όπου όλες οι ποσότητες έχουν υπολογιστεί ως προς το κέντρο μάζας του δίσκου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αφήνουμε έναν παρόμοιο δίσκο να πέσει έτσι ώστε να προσγειωθεί ακριβώς πάνω στον πρώτο, πρόσωπο με πρόσωπο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Τότε, σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της στροφορμής, θα ισχύει

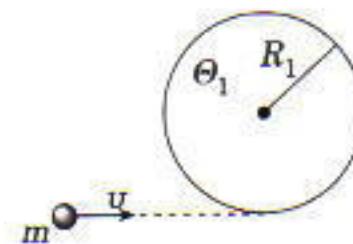
$$G_r = G_1 + G_2 = \Theta_1 \omega_1 + \Theta_2 \omega_2 = (\Theta_1 + \Theta_2) \omega_r,$$

όπου ο δείκτης  $r$  δηλώνει τις τιμές των διαφόρων μεγεθών στην τελική κατάσταση. Ως εφαρμογή θέστε  $\omega_2 = 0$  και  $\Theta_1 = \Theta_2$ : προκύπτει ότι  $\omega_r = \omega_1/2$ , όπως θα αναμέναμε.

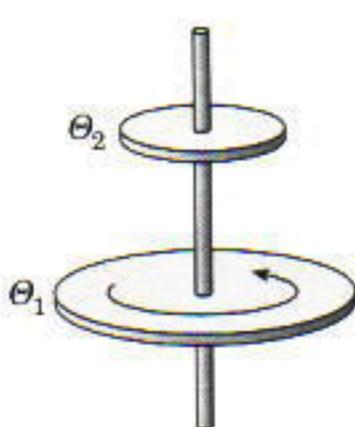
Μολονότι η στροφορμή του συστήματος διατηρείται, δεν ισχύει το ίδιο και για την κινητική του ενέργεια. Ας παραμείνουμε στην περίπτωση όπου  $\omega_2 = 0$ . Τότε,

$$KE_r = \frac{1}{2} \Theta_r \omega_r^2$$

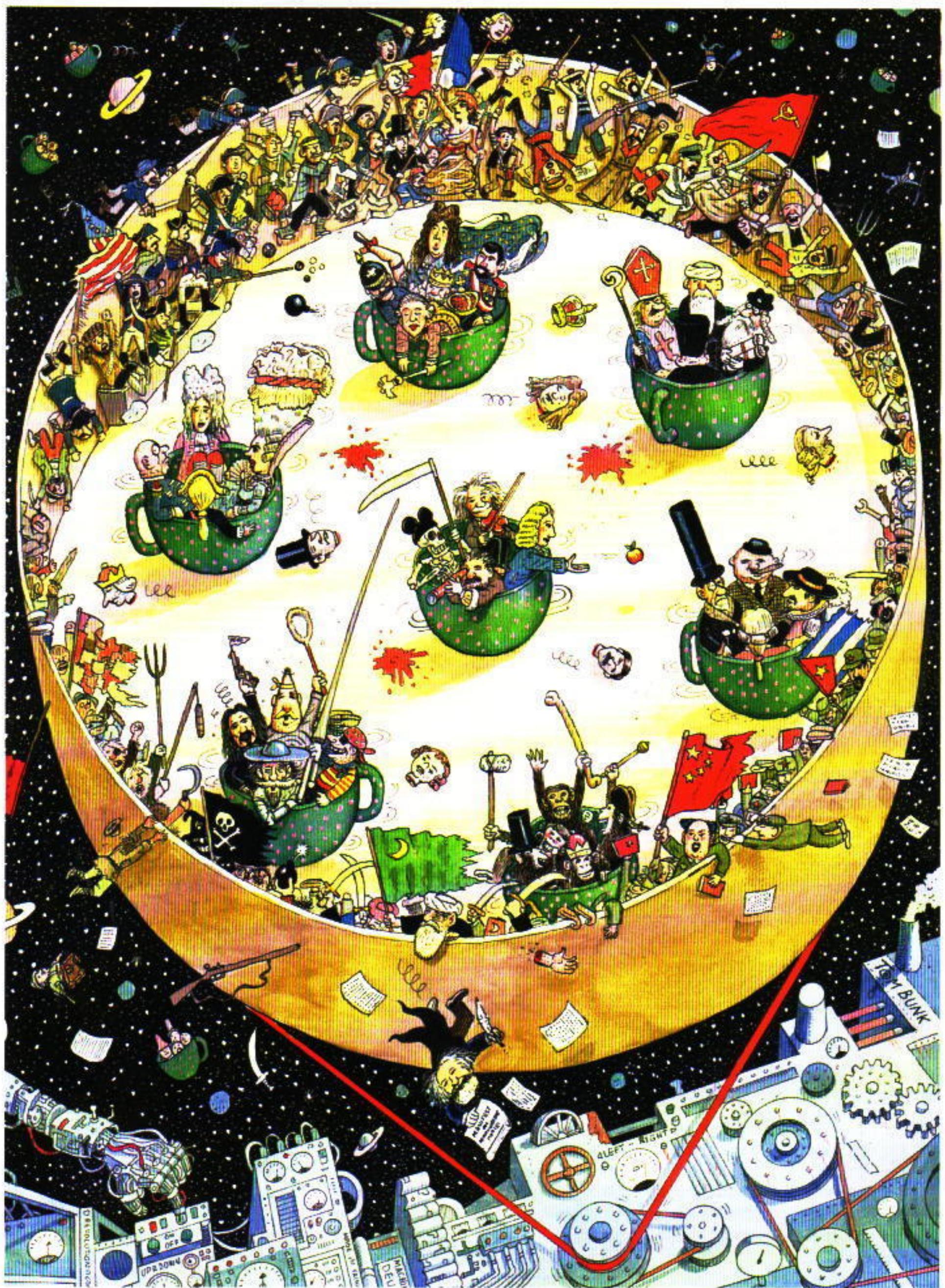
και



Σχήμα 2



Σχήμα 1



$$KE_r = \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)\omega_r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_1^2}{\Theta_1 + \Theta_2}\right)\omega_1^2 \\ = KE_a\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2}\right).$$

Σημειώστε ότι η  $KE_r$  είναι πάντοτε μικρότερη από την  $KE_a$  και ότι η κρούση των δίσκων είναι μη ελαστική. Εάν  $\Theta_1 = \Theta_2$ , τότε χάνεται η μισή αρχική κινητική ενέργεια.

Ως δεύτερη εφαρμογή ας αναφέρουμε την περίπτωση μιας μικρής μπάλας, με μάζα  $m$  και ταχύτητα  $v$ , που συγκρούεται με το χείλος ενός κυκλικού δίσκου όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

Υποθέτουμε ότι ο δίσκος, που αρχικά πρεμούσε, είναι ελεύθερος να στρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του, και ότι η μπάλα προσκολλάται στο χείλος του. Με πόση γωνιακή ταχύτητα θα περιστρέφεται ο δίσκος;

Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της στροφορμής. Ενδέχεται να σκεφτείτε ότι αρχικά, πριν από την κρούση, η στροφορμή του συστήματος δίσκου-μπάλας ισούται με μηδέν· αλλά ακόμη και όταν η μπάλα κινείται ευθύγραμμα έχει μη μηδενική στροφορμή ως προς όλα τα σημεία που δεν κείνται στην ευθεία της κίνησής της:

$$G_a = mvR_1.$$

Ακόμη, η τελική στροφορμή του συστήματος θα ισούται με

$$G_r = \Theta_r \omega_r,$$

όπου  $\Theta_r$  είναι η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος. Εάν ο δίσκος υποτεθεί ομογενής, έχουμε

$$\Theta_r = \Theta_1 + mR_1^2 = \left(\frac{1}{2}M_1 + m\right)R_1^2.$$

Επειδή  $\Theta_r > \Theta_1$ , ισχύει

$$\omega_r < v/R_1,$$

οπότε η μπάλα επιβραδύνεται. Για την περίπτωση ίσων μαζών, θα έχουμε

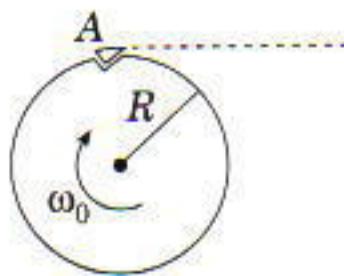
$$\omega_r = \frac{2v}{3R_1}.$$

Αφήνουμε σε σας να επαληθεύσετε ότι στην εν λόγω εφαρμογή χάνεται το ένα τρίτο της αρχικής κινητικής ενέργειας.

Το πρώτο από τα προβλήματα του

παρόντος τεύχους βασίζεται σε τμήμα άσκησης από την προκριματική εξέταση που διεξήχθη σε πανεθνικό επίπεδο τον Ιανουάριο προκειμένου να επλεγούν τα μέλη της ολυμπιακής ομάδας φυσικής των ΗΠΑ (η οποία θα διαγωνιστεί στην Ισλανδία το προσεχές καλοκαίρι).

A. Ένας δίσκος ακτίνας  $R$  στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$  γύρω από τον άξονά του τον οποίο συγκρατούν οριζόντιο και σε σταθερό ύψος κατάκρυψα στηρίγματα. Η τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στον άξονα και τα στηρίγματα θεωρείται αμελητέα. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι  $\Theta_0$ . Σε



Σχήμα 3

κάποια χρονική στιγμή, ένα μικρό θραύσμα μάζας  $m$  αποσπάται από το χείλος του δίσκου και εκτοξεύεται κατά την εφαπτομένη του δίσκου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αφού αποσπαστεί το θραύσμα;

B. Μια μπάλα μάζας  $m$  και ταχύτητας  $v$  προσκρούει στο άκρο λεπτής ράβδου μάζας  $M$  και μήκους  $a$ , όπως



Σχήμα 4

φαίνεται στο Σχήμα 4. Θεωρήστε ότι η ράβδος κείται σε λειο τραπέζι και ότι η μπάλα μετά την κρούση ακινητοποιείται. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου και η γωνιακή ταχύτητα με την οποία στρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της; Για ποια περιοχή τιμών της μάζας  $m$  είναι δυνατή μια τέτοια κρούση; (Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ράβδου ως

προς το ένα άκρο της είναι  $Ma^2/3$  και ως προς το κέντρο μάζας της  $Ma^2/12$ .)

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum.

## Συνταρακτικές δονήσεις

Στο τεύχος Νοεμβρίου / Δεκεμβρίου 1997 το πρόβλημά μας διερευνούσε μερικά κλασικά προβλήματα της φυσικής των ταλαντώσεων. Τα δύο πρώτα μέρη καταπάνονταν με τη μεταβολή της σταθεράς του ελατήριου (και, συνεπώς, της συχνότητας ταλάντωσης) όταν τα ελατήρια συνδέονται «σε σειρά» ή «παράλληλα». Οι περισσότεροι αναγνώστες βρήκαν ότι το πρόβλημα με τα δύο ελατήρια σε παράλληλη σύνδεση ήταν μάλλον βατό. Δύο πανομοιότυπα ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα πρέπει να σηκώσουν το καθένα τους το μισό βάρος της αναρτημένης μάζας. Έτοι, κάθε ελατήριο θα επιμηκυνθεί κατά το ήμισυ ώστε να ασκήσει τη μισή δύναμη. Η ισοδύναμη σταθερά ελατήριου για το ζεύγος των δύο πανομοιότυπων ελατηρίων θα είναι  $2k$ , αφού η επιμήκυνση του ζεύγους είναι η μισή από εκείνη που θα υφίσταται ένα ελατήριο σταθερά  $k$ :

$$F = kx = 2k \frac{x}{2}.$$

Ο γενικός κανόνας για ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα είναι

$$k' = k_1 + k_2.$$

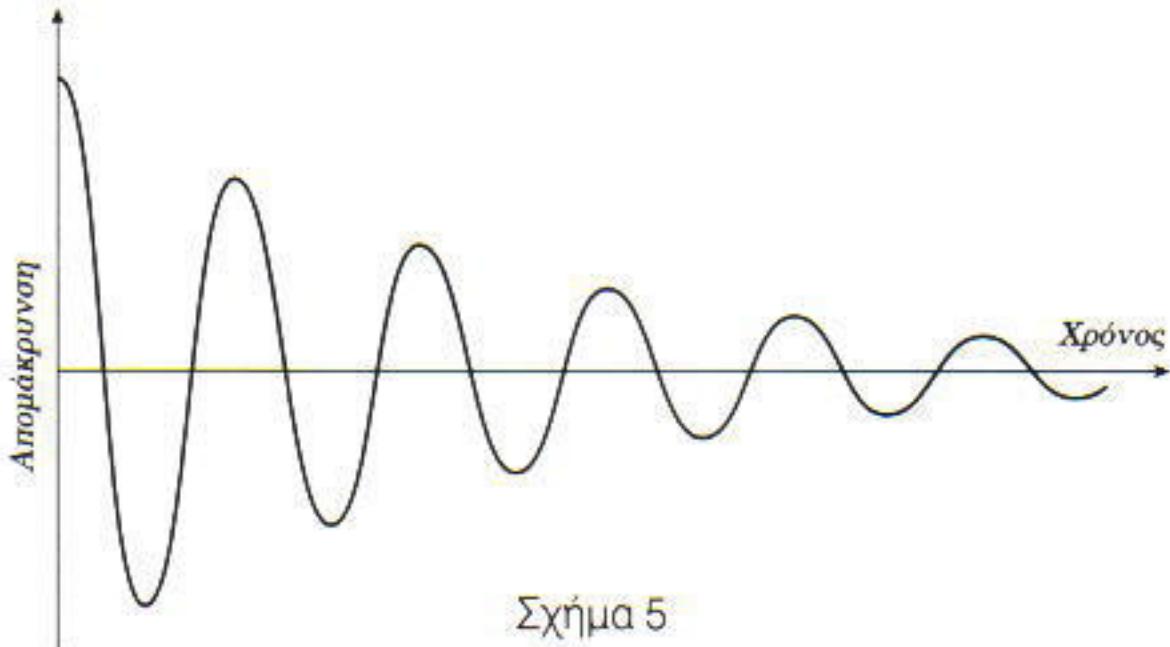
Αντίθετα, το καθένα από τα ελατήρια που είναι συνδεδεμένα σε σειρά πρέπει να σηκώνει ολόκληρο το βάρος της αναρτημένης μάζας. Έτοι, η ολική επιμήκυνση των δύο πανομοιότυπων ελατηρίων θα είναι διπλάσια από εκείνη του ενός μόνο ελατηρίου. Η ισοδύναμη σταθερά για το σύστημα των ελατηρίων θα ισούται με  $k/2$ :

$$F = kx = \frac{k}{2}2x.$$

Ο γενικός κανόνας για ελατήρια που συνδέονται σε σειρά είναι

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Στο μέρος A του προβλήματος κάποιο ελατήριο κόβεται στη μέση. Η νέα σταθερά, για το μισό μόνο μέρος του



Σχήμα 5

ελατηρίου, θα είναι  $2k$ . Δύο πανομοιότυπα μισά ελατήρια στη σειρά, με σταθερά  $2k$  το καθένα, θα έδιναν την (αρχική) ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου  $k$ . Δεδομένου ότι η  $k$  διπλασιάζεται επειδή το ελατήριο κόπηκε στη μέση, η συχνότητα είναι πλέον

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{2k}{m}}} = v_0\sqrt{2},$$

όπου  $v_0$  η αρχική συχνότητα.

Στο μέρος B, τα ελατήρια  $k_2$  και  $k_3$  συνδέονται παράλληλα. Η ισοδύναμη σταθερά του σύνθετου ελατηρίου είναι  $k_2 + k_3$ , όπως προκύπτει από τον πρώτο μας κανόνα. Εάν προστεθεί και το ελατήριο  $k_1$  σε σειρά, η ισοδύναμη σταθερά του συνδυασμού προκύπτει από το δεύτερο κανόνα

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 + k_3},$$

ή

$$k = \frac{k_1(k_2 + k_3)}{k_1 + k_2 + k_3}.$$

Η αντίστοιχη περίοδος  $T$  είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2 + k_3)}{k_1(k_2 + k_3)}}.$$

Γ. Χρησιμοποιώντας ένα λογιστικό φύλλο σε υπολογιστή και το αντίστοιχο πρόγραμμα γραφικών, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γράφημα της λύσης για τον ταλαντωτή με απόσβεση (Σχήμα 5). Ο χρόνος αποκατάστασης μπορεί να υπολογιστεί εάν στην εξίσωση που καθορίζει την εξάρτηση του πλάτους από το χρόνο αντικαταστήσουμε το πλάτος της τα-

λάντωσης με  $A/e$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{e}A &= Ae^{-\frac{bt}{2m}} \\ \ln \frac{1}{e} &= -\frac{bt}{2m} \\ t &= \frac{2m}{b}. \end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων απαιτείται να υπολογίσουμε πρώτα τη συχνότητα και το χρόνο που πρέπει να παρέλθει ώσπου η μέγιστη μετατόπιση (δηλαδή το πλάτος) να μειωθεί σε  $A/4$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}A &= Ae^{-\frac{bt}{2m}} \\ t &= (\ln 4)\left(\frac{2m}{b}\right) = 30,8 \text{ s}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης, η  $\omega$  ισούται με  $2,236 \text{ rad/s}$ , τιμή η οποία αντιστοιχεί σε συχνότητα  $0,356 \text{ Hz}$ . Επομένως,

$$(0,356 \text{ ταλαντώσεις/s})(30,8 \text{ s}) = 11 \text{ ταλαντώσεις}.$$

Η αντίστοιχη ταχύτητα μπορεί να υπολογιστεί εάν παραγωγίσουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης:

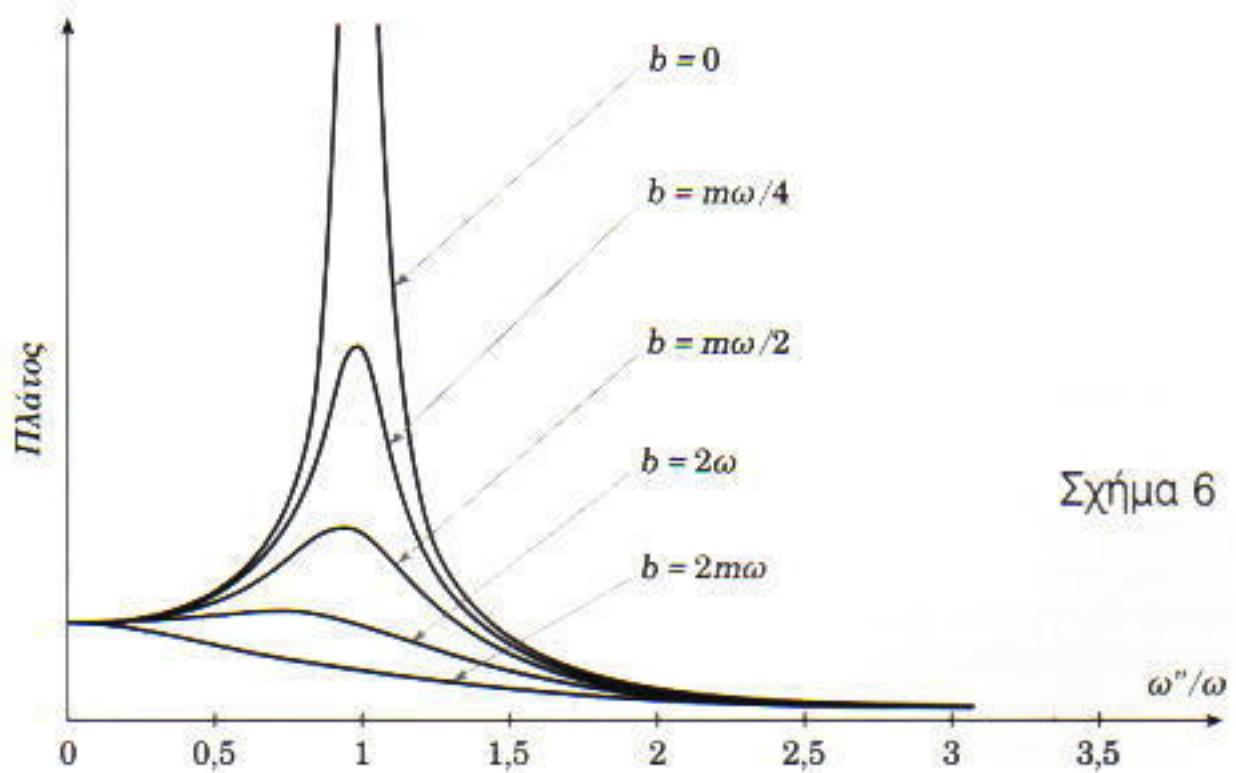
$$u = \frac{dx}{dt} = Ae^{-\frac{bt}{2m}}[-\eta\mu(\omega't + \varphi)]\omega' + x\left(-\frac{b}{2m}\right)$$

$$u = -Ae^{-\frac{bt}{2m}}\left[\omega'\eta\mu(\omega't + \varphi) + \left(-\frac{b}{2m}\right)\sigma\sin(\omega't + \varphi)\right].$$

Δ. Χρησιμοποιώντας ένα λογιστικό φύλλο σε υπολογιστή και το αντίστοιχο πρόγραμμα γραφικών, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της λύσης για έναν ταλαντωτή με απόσβεση, για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $b$  (Σχήμα 6). Παρατηρεί κανείς ότι, αν  $b = 0$  και η διεγείρουσα συχνότητα 1-σούται με τη φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα), έχουμε έναν οξύτατο συντονισμό και, θεωρητικά τουλάχιστον, το πλάτος της ταλάντωσης απειρίζεται. Καθώς ο συντελεστής απόσβεσης  $b$  αυξάνεται, παρατηρούμε ότι η οξύτητα του συντονισμού τείνει να μειώνεται.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη ταχύτητα παραγωγίζοντας την εξίσωση της απομάκρυνσης:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{G}\omega''\sin(\omega''t - \varphi).$$



Σχήμα 6

# Εκκρεμή που κατασκευάζονται στο σπίτι

Εμβαθύνοντας στην ταλάντωση των αντικειμένων

G.L. Kotkin

**Α**ΙΓΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ είναι τόσο λιτές και έγκυρες όσο τα εκκρεμή. Έτσι, πειράματα με αυτά μπορούν να αποσαφηνίσουν πολλά ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά των διαδικασιών ταλάντωσης, οι οποίες είναι εξαιρετικής σημασίας όχι μόνο στη μηχανική αλλά και στην ηλεκτρομηχανική.

Προσπαθήστε να πραγματοποιήσετε τα πειράματα που ακολουθούν και να εξηγήσετε τα παρατηρούμενα φαινόμενα. Μόλονότι τα πειράματα αυτά καθεαυτά είναι απλά, δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο να τα ερμηνεύσετε. Θα πρέπει να γνωρίζετε τους βασικούς νόμους της αρμονικής ταλάντωσης και να έχετε εξασκηθεί αρκετά με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Επομένως, οι προχωρημένοι αναγνώστες πρέπει να είναι σε θέση να καταλάβουν το άρθρο, ενώ οι νεότεροι μπορούν να πραγματοποιήσουν τα πειράματα και να ερμηνεύσουν μερικές μόνο από τις παρατηρήσεις τους.

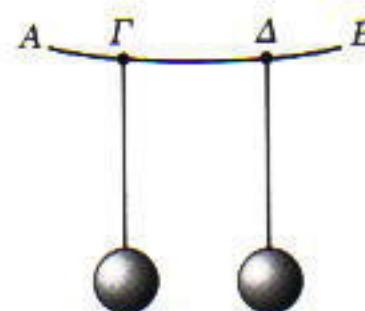
## Εκκρεμές ανάρτησης γ

Φτιάξτε ένα εκκρεμές το οποίο αναρτάται από δύο σημεία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Το μήκος  $\ell$  του νήματος του εκκρεμούς πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το ύψος της «διχάλας» που σχηματίζεται στο υψηλότερο τμήμα του εκκρεμούς.

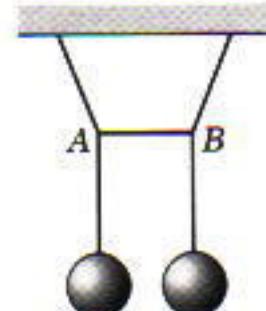
Εκτρέψτε το εκκρεμές κατά μικρή γωνία ως προς την κατακόρυφο και αφήστε το ελεύθερο. Θα δείτε ότι αρχικά το εκκρεμές ταλαντώνεται στη διεύθυνση που το εκτρέψατε. Ωστόσο, ύ-



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

στέρα από λίγο, η κίνησή του μετατρέπεται σταδιακά σε κυκλική γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. Κατόπιν επιστρέφει πάλι σε ταλαντώσεις πάνω σε ένα επίπεδο, το οποίο όμως τώρα είναι διαφορετικό από το προηγούμενο. Τί συμβαίνει στη συνέχεια; Το εκκρεμές κινείται και πάλι σε κυκλική τροχιά —αλλά τώρα προς την αντίθετη κατεύθυνση! Σταδιακά, η κίνησή του επανέρχεται στο επίπεδο της αρχικής ώθησης. Η διαδοχή αυτών των φαινομένων επαναλαμβάνεται αυτούσια πολλές φορές. Μπορείτε να μαντέψετε τι ευθύνεται για την παράξενη συμπεριφορά του εν λόγω εκκρεμούς;

## Συζευγμένα εκκρεμή

(a) Αναρτήστε δύο πανομοιότυπα εκκρεμή, το καθένα από τα οποία συνίσταται από ένα βαριδι βεμένο σ' ένα νήμα, από ένα άλλο νήμα  $AB$  το οποίο δεν είναι ιδιαίτερα τεντωμένο (Σχήμα 2). Εκτρέψτε ένα από τα εκκρεμή, αφήστε το ελεύθερο και παρακολουθήστε την κίνησή του συστήματος. Μεταβάλλετε τη μάζα των βαριδιών, το μήκος των εκκρεμών, την τάση του νήματος

ανάρτησης και παρατηρήστε πώς επηρεάζεται η κίνηση του συστήματος των δύο εκκρεμών.

(β) Αναρτήστε δύο πανομοιότυπα εκκρεμή σε δύο διαφορετικά σημεία του ίδιου στερεού στηρίγματος. Συνδέστε τα σε κάποιο ύψος με μια κλωστή (Σχήμα 3). Εκτρέψτε ένα από τα εκκρεμή, αφήστε το ελεύθερο και παρακολουθήστε την κίνηση του συστήματος.

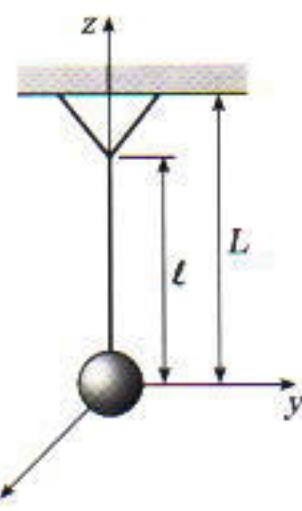
## Διπλό εκκρεμές

Κατασκευάστε ένα διπλό εκκρεμές με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 4. Τα δύο νήματα έχουν ίδιο μήκος,



Σχήμα 4





Σχήμα 5

αλλά το βαρίδι που βρίσκεται ποι ψηλά είναι αρκετά βαρύτερο από εκείνο που βρίσκεται χαμηλότερα. Εκτρέψτε το κάτω βαρίδι, αφήστε το ελεύθερο και παρατηρήστε την επακόλουθη κίνηση.

Και τώρα, αφού πειραματιστήκαμε και διασκεδάσαμε μ' αυτά τα εκκρεμή, ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την ταλαντωτική κίνησή τους.

1. Η περιπλοκή κίνηση του εκκρεμούς ανάρτησης Υ μπορεί να αναλυθεί σε δύο απλές ταλαντώσεις: μία παράλληλη προς το επίπεδο  $xy$  και μία κάθετη σ' αυτό (Σχήμα 5). Αυτές οι ταλαντώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (αρκεί το εκκρεμές να μην εκτρέπεται σημαντικά από την κατακόρυφο). Οι αντίστοιχες περίοδοι κίνησης είναι

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

και

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L-t}{g}}.$$

Αρχικά ας δούμε με ποιον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του βαριδιού στο δικό μας σύστημα αναφοράς. Έστω ότι το σημείο  $A$  (βλ. Σχήμα 6) εκτελεί κυκλική κίνηση με ακτίνα  $a$ , γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και φορά η οποία είτε είναι αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 6a) είτε είναι ίδια μ' αυτή

(Σχήμα 6b). Η προβολή  $B$  του σημείου  $A$  στον άξονα  $x$  εκτελεί αρμονική ταλαντωση πλάτους  $a$  και κυκλικής συχνότητας  $\omega$  ίσης με  $2\pi/T$ .

Η προβολή  $G$  του σημείου  $A$  στον άξονα  $y$  εκτελεί μια παρόμοια αρμονική ταλαντωση, φτάνει όμως στο σημείο της μέγιστης απομάκρυνσης με χρονική καθυστέρηση  $T/4$  (δηλαδή τη στιγμή που η ακτίνα  $OA$  έχει πραγματοποιήσει το  $1/4$  μιας πλήρους περιφοράς γύρω από το σημείο  $O$ ).

Η παραπάνω περιγραφή της κίνησης των σημείων  $B$  και  $G$  μπορεί να καταστεί αρκετά ποι σύντομη αν χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα των μαθηματικών. Πράγματι από το Σχήμα 6α προκύπτει

$$\begin{cases} x = OB = a \sin \varphi = a \sin \omega t, \\ y = OG = a \cos \varphi = a \cos \omega t \\ = a \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = a \sin \omega \left( t - \frac{T}{4} \right). \end{cases} \quad (1)$$

(Αυτοί οι τύποι ισχύουν για κάθε γωνία (όχι μόνο για οξείες γωνίες), όπως προκύπτει από τους ορισμούς των ημιτονοειδών συναρτήσεων.)

Όταν η κίνηση του σημείου  $A$  γίνεται σύμφωνα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 6b), μπορούμε να δούμε ότι οι ταλαντώσεις του σημείου  $G$  προηγούνται των ταλαντώσεων του σημείου  $B$  κατά  $T/4$ . Από την άλλη, μπορούμε να πούμε ότι οι ταλαντώσεις του σημείου  $G$  ακολουθούν αυτές του σημείου  $B$  με καθυστέρηση  $3T/4$ . Σ' αυτή την περίπτωση η γωνία  $\omega t$  είναι αρνητική, οπότε ισχύει

$$\begin{cases} x = -a \sin(-\omega t) = a \sin \omega t, \\ y = a \cos(-\omega t) = a \cos \omega t \\ = a \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = a \sin \left( \omega t - \frac{3\pi}{2} \right) \\ = a \sin \omega \left( t - \frac{3T}{4} \right). \end{cases} \quad (2)$$

Έστω τώρα ότι το σημείο  $A$  εκτελεί αρμονική ταλαντωση κατά μήκος της γραμμής  $E\Delta$  (Σχήμα 7) με κυκλική συχνότητα  $\omega$  και πλάτος  $b = OD = OE$ . Σ' αυτή την περίπτωση οι προβολές του  $B$  και του  $G$  λαμβάνουν ταυτόχρονα τις πιο θετικές ή αρνητικές απομακρύνσεις τους πάνω στους άξονες  $x$  και  $y$  και διέρχονται ταυτόχρονα από το σημείο  $O$ . Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι αμφότερα τα σημεία κατά την ταλαντωσή τους βρίσκονται σε «συμφωνία φάσης». Θεωρήστε, χάριν απλότητας, ότι  $\angle \Delta O x = \pi/4$ . Σ' αυτή την περίπτωση τα πλάτη ταλαντώσης των σημείων  $B$  και  $G$  είναι ίσα με

$$b \sin \frac{\pi}{4} = b \eta \frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

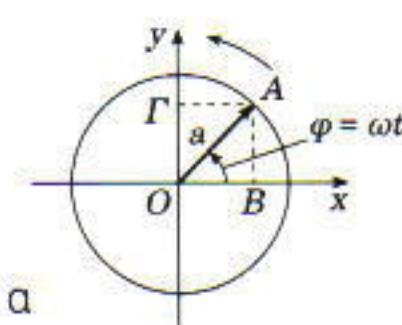
Αφού  $OB = b \sin \omega t$ , εδώ ισχύει

$$x = y = \frac{b}{\sqrt{2}} \sin \omega t. \quad (3)$$

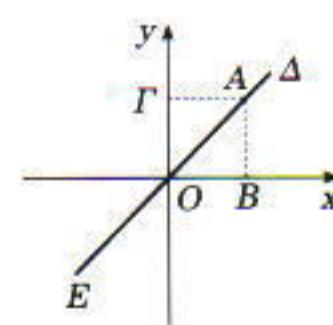
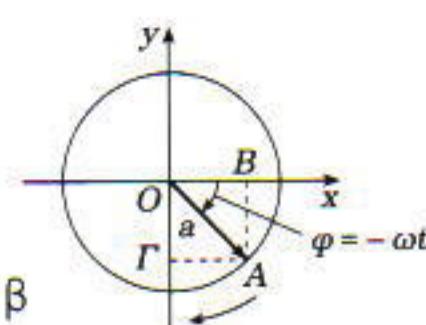
Ας δούμε και την περίπτωση που το σημείο  $A$  ταλαντώνεται κατά μήκος της γραμμής  $E\Delta'$  (Σχήμα 8). Τότε, τη στιγμή που το σημείο  $B$  λαμβάνει τη μέγιστη θετική απομάκρυνση κατά μήκος του άξονα  $x$ , το σημείο  $G$  βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνση κατά μήκος του άξονα  $y$ . Μπορούμε να πούμε ότι τα σημεία  $B$  και  $G$  κατά την ταλαντωσή τους βρίσκονται σε «αντίθεση φάσης». Δηλαδή, οι ταλαντώσεις του σημείου  $G$  ακολουθούν αυτές του σημείου  $B$  με καθυστέρηση μισής περιόδου (ή, ισοδύναμα, προηγούνται κατά το ίδιο χρονικό διάστημα).

Εποι, εδώ ισχύει

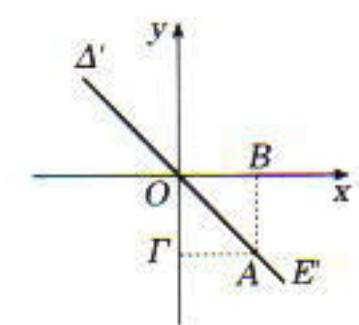
$$\begin{cases} x = \frac{b}{\sqrt{2}} \sin \omega t, \\ y = -\frac{b}{\sqrt{2}} \sin \omega t = \frac{b}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - \pi) \\ = \frac{b}{\sqrt{2}} \sin \omega \left( t - \frac{T}{2} \right). \end{cases} \quad (4)$$



Σχήμα 6



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Ας επιστρέψουμε στο εκκρεμές ανάρτησης  $Y$ . Αν θεωρήσουμε ότι το βαρίδι εκτρέπεται κατά απόσταση  $b$  στη διεύθυνση  $O\bar{D}$  (Σχήμα 7) και αφήνεται ελεύθερο, οι συντεταγμένες του θα μεταβάλλονται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} x = a \sin \omega_1 t, \\ y = a \cos \omega_2 t, \end{cases} \quad (5)$$

όπου

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Θυμηθείτε, όμως, ότι τα μήκη  $l$  και  $L$  είναι σχεδόν ίσα· αυτό σημαίνει ότι οι συχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  θα είναι σε πρώτη προσέγγιση ίσες. Επομένως, αρχικά οι ταλαντώσεις κατά μήκος των αξόνων  $x$  και  $y$  θα βρίσκονται σχεδόν σε συμφωνία φάσης.

Επειδή  $\omega_1 > \omega_2$ , όσο κυλάει ο χρόνος η ταλάντωση στον άξονα  $y$  θα καθυστερεί όλο και περισσότερο σε σχέση με την ταλάντωση στον άξονα  $x$ . Παραπάνω καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι, κατά την κυκλική κίνηση ενός σημείου με φορά αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού, οι προβολές του σημείου πάνω στους άξονες  $x$  και  $y$  ταλαντώνονται με διαφορά φάσης  $T/4$ . Άρα, όσον αφορά τις συντεταγμένες του βαριδιού, όταν η χρονική καθυστέρηση της ταλάντωσης στον άξονα  $y$  ως προς την ταλάντωση στον άξονα  $x$  γίνει  $T/4$ , το βαρίδι θα κινείται κατά μήκος ενός κυκλου με φορά αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Όταν η εν λόγω χρονική καθυστέρηση γίνει  $T/2$ , το εκκρεμές θα ταλαντώνεται κατά μήκος της γραμμής  $E'D'$ . Η χρονική καθυστέρηση αυξάνει σταθερά, και κάποια στιγμή γίνεται  $3T/4$ -τότε, το βαρίδι εκτελεί κυκλική κίνηση ομόρροπη προς τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Τέλος, η χρονική καθυστέρηση μεταξύ των δύο ταλαντώσεων θα γίνει ίση με  $T$ , οπότε το βαρίδι θα ταλαντώνεται κατά

μήκος της γραμμής  $ED$ . (Και ο κύκλος επαναλαμβάνεται.) Αυτή ακριβώς ήταν η συμπεριφορά του εκκρεμούς ανάρτησης  $Y$  που παρατηρήσαμε κατά την πραγματοποίηση του πειράματος.

Τα παραπάνω μπορούν να επαναδιατυπωθούν στη γλώσσα των μαθηματικών. Οι εξισώσεις (5), λοιπόν, μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\begin{cases} x = a \sin \omega_1 t, \\ y = a \cos(\omega_1 t - \varphi), \end{cases} \quad (6)$$

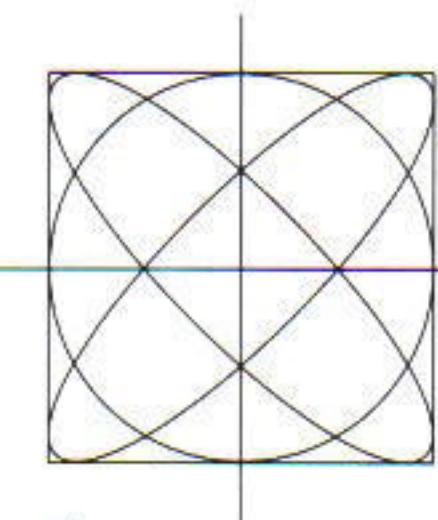
όπου  $\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t$ . Θέτοντας τις τιμές  $\varphi = 0, \pi/2, \pi$  και  $3\pi/2$  στις εξισώσεις (6) προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις (3), (1), (4) και (2). Όταν γίνεται  $\varphi = 2\pi$ , το βαρίδι ταλαντώνεται ξανά κατά μήκος της γραμμής  $ED$ .

Η θεωρία που αναπτύξαμε μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά. Πράγματι, μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο που χρειάζεται το βαρίδι ώστε να εκτελέσει έναν πλήρη κύκλο. Αν συμβολίσουμε αυτόν το χρόνο με  $T_0$ , τότε  $\varphi_0 = (\omega_1 - \omega_2)T_0 = 2\pi$ , απ' όπου λαμβάνουμε

$$2\pi/T_0 = (\omega_1 - \omega_2), \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}. \quad (7)$$

Πρέπει επομένως να μετρήσουμε τις περιόδους  $T_1$  και  $T_2$  — για την πρώτη, εξαναγκάζοντας το βαρίδι να ταλαντώθει πάνω στο επίπεδο  $yz$  για τη δεύτερη, πάνω στο επίπεδο  $xz$ . Η περίοδος  $T_0$  μετριέται ανεξάρτητα του τρόπου με τον οποίο προκαλούμε την ταλάντωση. Ελέγχετε τη σχέση (7) μετρώντας τις  $T_2$ ,  $T_1$  και  $T_0$ . Για να προσδιορίσετε την τιμή της  $T_1$  (ή της  $T_2$ ),



Σχήμα 9

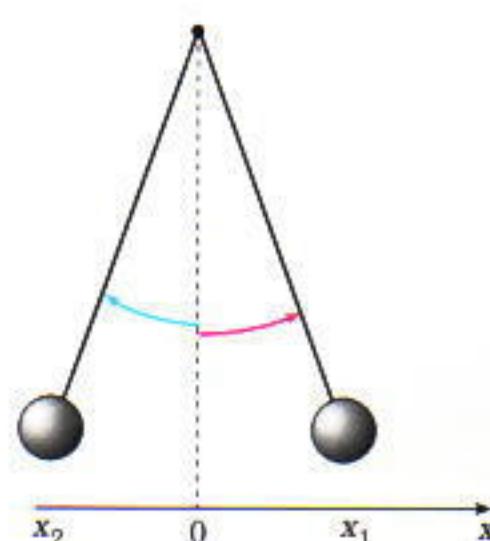
μετρήστε τη διάρκεια 10 ταλαντώσεων (και διαιρέστε τη διά 10). Κατά την πραγματοποίηση αυτών των μετρήσεων προσέξτε τους παράγοντες που προκαλούν τις αποκλίσεις των πειραματικών αποτελεσμάτων από τα θεωρητικά. Φαίνεται ότι ο πιο σημαντικός λόγος είναι η μείωση του πλάτους ταλάντωσης που οφείλεται στην αντίσταση του αέρα. Επομένως, το βαρίδι του εκκρεμούς δεν πρέπει να είναι ιδιαίτερα ελαφρύ.

Στην πραγματικότητα, η κίνηση του εκκρεμούς ανάρτησης  $Y$  δεν γίνεται κατά μήκος ενός κύκλου ή μιας γραμμής αλλά μιας περιπλοκης τροχιάς (Σχήμα 9), η οποία κατά κάποιον τρόπο «γεμίζει» ομοιόμορφα ένα ολόκληρο τετράγωνο.

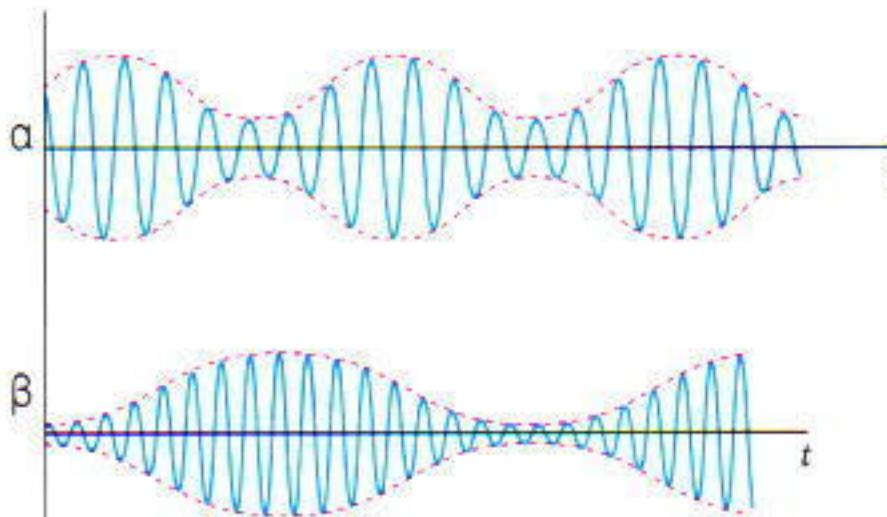
2. Ας εξηγήσουμε τώρα τις ταλαντώσεις των συζευγμένων εκκρεμών (Σχήματα 2 και 3). Εάν αρχικά εκτρέψουμε το ένα από αυτά και το αφήσουμε ελεύθερο, το άλλο θα αρχίσει να ταλαντώνεται με πλάτος που αυξάνεται σταδιακά. Το γεγονός αυτό είναι συνέπεια της μετατόπισης του νήματος  $AB$  που προκαλείται από τις ταλαντώσεις του πρώτου εκκρεμούς. Όταν το νήμα  $AB$  μετατοπίζεται, η



Σχήμα 10



Σχήμα 11

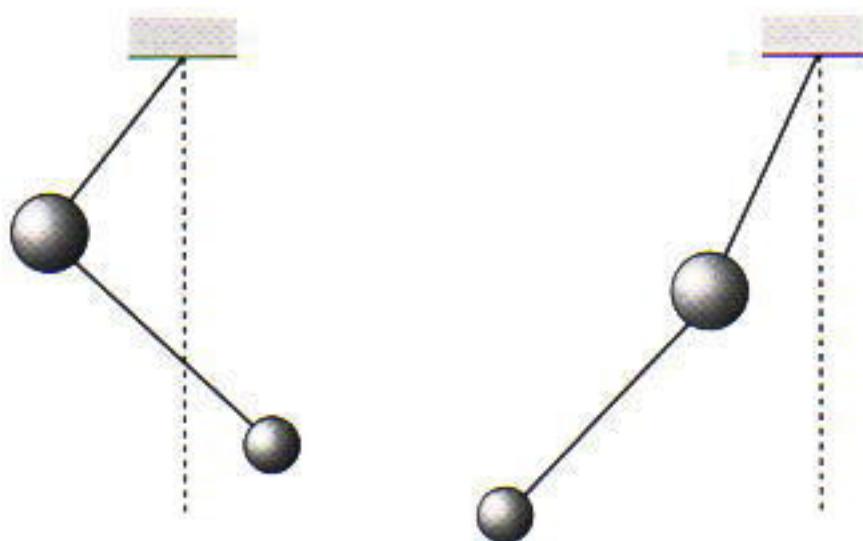


Σχήμα 12

ελαστική δύναμη παραμόρφωσης που αναπτύσσεται επιδρά στο δεύτερο εκκρεμές και του προσδίδει επιτάχυνση. Επομένως, ενέργεια μεταφέρεται από το πρώτο εκκρεμές στο δεύτερο. Ως αποτέλεσμα, το πλάτος ταλάντωσης του ενός εκκρεμούς θα μειώνεται ενώ ταυτόχρονα του άλλου θα αυξάνεται. Κάποια στιγμή το πρώτο εκκρεμές θα ακινητοποιηθεί. Εκείνη τη στιγμή το πλάτος ταλάντωσης του δεύτερου εκκρεμούς θα έχει γίνει μέγιστο. Στη συνέχεια, το πρώτο εκκρεμές θα αρχίσει να ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος, ώσπου το δεύτερο να ακινητοποιηθεί κ.ο.κ.

Η περίπλοκη ταλαντωτική κίνηση του συστήματος των δύο εκκρεμών μπορεί να περιγραφεί ως το αποτέλεσμα της πρόσθεσης (υπέρθεσης) δύο ταλαντώσεων με κυκλικές συχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$ . Η πρώτη από αυτές αντιστοιχεί στη συχνότητα της συμμετρικής ταλάντωσης, η οποία πραγματοποιείται όταν αμφότερα τα εκκρεμή μετατοπιστούν προς την ίδια κατεύθυνση και αφεθούν ταυτόχρονα ελεύθερα να κινηθούν (Σχήμα 10). Η δεύτερη συχνότητα περιγράφει την ασύμμετρη ταλάντωση, η οποία πραγματοποιείται όταν τα εκκρεμή μετατοπιστούν σε αντίθετες κατεύθυνσεις και αφεθούν ταυτόχρονα ελεύθερα (Σχήμα 11).

Καθώς πειραματίζεστε με τα συζευγμένα εκκρεμή, παρατηρήστε ότι η γωνιακή συχνότητα  $\omega_2$  είναι μεγαλύτερη από την  $\omega_1$ . Αυτές οι δύο ταλαντώσεις είναι γνωστές ως φυσικοί (κανονικοί) τρόποι ταλάντωσης των συζευγμένων εκκρεμών. Ας γράψουμε τώρα τα δύο συστήματα εξισώσεων που περιγράφουν τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης. Το πρώτο είναι



Σχήμα 13

$$\begin{cases} x'_1 = \text{ασυν} \omega_1 t \\ x'_2 = \text{ασυν} \omega_1 t, \end{cases}$$

ενώ το δεύτερο

$$\begin{cases} x''_1 = \text{ασυν} \omega_2 t \\ x''_2 = -\text{ασυν} \omega_2 t. \end{cases}$$

Ας προσθέσουμε τις αντίστοιχες απομάκρυνσεις  $x'_1$  και  $x''_1$  καθώς και τις  $x'_2$  και  $x''_2$ :

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x''_1 = \text{ασυν} \omega_1 t + \text{ασυν} \omega_2 t, \\ x_2 = x'_2 + x''_2 = \text{ασυν} \omega_1 t - \text{ασυν} \omega_2 t. \end{cases}$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας λαμβάνουμε

$$\begin{cases} x_1 = 2 \text{ασυν} \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \text{συν} \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \\ x_2 = 2 \alpha \eta \mu \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \eta \mu \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right). \end{cases} \quad (8)$$

Ο τύπος για τη  $x_1$  μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x_1 = A \text{συν} \Omega t,$$

όπου

$$A = 2 \text{ασυν} \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

και

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Επειδή η  $\omega_1$  είναι περίου ίση με την  $\omega_2$ , η ποσότητα

$$\text{συν} \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

μεταβάλλεται πολύ αργά. Επομένως, ο παράγοντας

$$2 \text{ασυν} \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

στον τύπο της απομάκρυνσης  $x_1$  μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αργά μεταβαλλόμενο πλάτος (η κόκκινη διακεκομένη γραμμή στο Σχήμα 12a). Σε παρόμοια συμπεράσματα καταλήγουμε για την απομάκρυνση  $x_2$ . Στα Σχήματα 12a, β φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ταλαντώσεων που περιγράφονται από τις σχέσεις (8). Τέτοιου είδους κινήσεις είναι γνωστές ως διακροτήματα. Η περίοδος του διακροτήματος ισούται με το μισό της περιόδου της ημιτονοειδούς (διακεκομένης) καμπύλης και προσδιορίζεται από τον τύπο

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} T_0 = \pi,$$

ή από τον

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1},$$

όπου  $T_1$  και  $T_2$  είναι οι περίοδοι των φυσικών τρόπων ταλάντωσης. Η συχνότητα του διακροτήματος είναι ίση με τη διαφορά των συχνοτήτων των φυσικών τρόπων ταλάντωσης. Όσο λιγότερο διαφέρουν οι  $T_1$  και  $T_2$  τόσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος του διακροτήματος.

3. Η κίνηση του διπλού εκκρεμούς συνιστά επίσης διακρότημα. Το ελαφρύ εκκρεμές είτε ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος είτε είναι σχεδόν ακί-

νητο. Η κίνηση του βαρύτερου εκκρεμούς μπορεί να είναι σχεδόν ανεπαισθητή. Διακροτήματα τέτοιας μορφής εξηγούνται από την πρόσθεση των φυσικών τρόπων ταλάντωσης που φαίνονται στο Σχήμα 13. Εξηγήστε αυτή την κίνηση μόνοι σας.

### Προβλήματα

1. Παράγετε τύπο για την περίοδο ταλάντωσης ενός απλού εκκρεμούς που όμως κινείται διαγράφοντας κυκλική τροχιά γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

2. Βρείτε πειραματικά το μήκος εκκρεμούς ανάρτησης Υ το οποίο απαιτείται ώστε η τροχιά της κίνησης του βαρύδιου να σχηματίζει «οκτάρι».

3. Ρυθμίστε τα μήκη δύο ανεξάρτητων εκκρεμών έτσι ώστε κάποιος να μπορεί να μετράει περιόδους των 10 s, 20 s, κ.ο.κ., χωρίς να απαριθμεί κάθε ταλάντωση. Τέτοια εκκρεμή μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση των καρδιακών χτύπων ενός ανθρώπου ύστερα από φυσική άσκηση. (Ο Γαλιλαίος μέτρησε την περίοδο ταλάντωσης ενός πολυελαίου χρησιμοποιώντας ως χρονόμετρο το σφυγμό του.)

### ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

*To Quantum* εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994.

Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει είκοσι πέντε τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχους.

*To Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Τώρα μπορείτε να προμηθευτείτε και τις καλαίσθητες θήκες του, από το βιβλιοπωλείο μας ή με αντικαταβολή, για την αρχειοθέτηση των τευχών σας.

## ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΓΙΑ ΤΡΥΦΕΡΟΥΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΕΣ



Εισαγωγή στην ειδική και στη γενική θεωρία της σχετικότητας



«Πιστεύετε ότι τη θεωρία του Αϊνστάνιν μπορεί να την κατανοεί μόνο η επιστημονική κοινότητα; Τότε διαβάστε τα βιβλία του Stannard και μετά χαρίστε τα στα παιδιά σας.»

The Herald

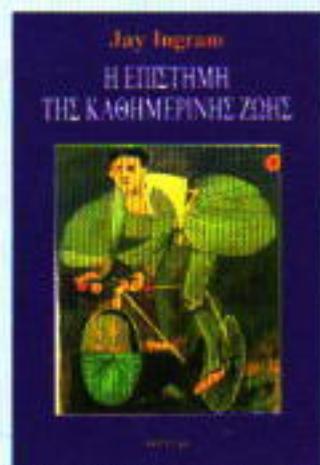
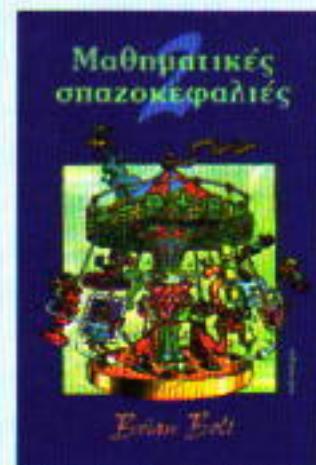


Εισαγωγή στην κβαντομηχανική και στη σύγχρονη κοσμολογία



«Μέσα από τα βιβλία διαφαίνεται ο ένθερμος ζήλος με τον οποίο ο Stannard εισάγει τους νεαρούς αναγνώστες στα μυστικά της φυσικής... Δροσερό ανάγνωσμα, γνήσια επιστήμη.»

Physics World

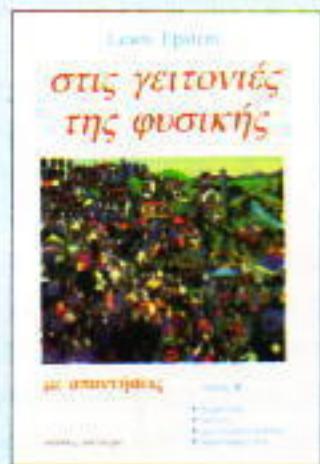


«Αν δεν μπορέστε να κατανοήσετε τη γενετική απ' αυτό το βιβλίο, πολύ φοβάμαι ότι δεν θα το καταφέρετε ποτέ.»

The New Scientist



Εκατοντάδες πρωτότυπα και διασκεδαστικά ερωτήματα από όλους τους τομείς της φυσικής



κάτοπτρο

Στοά του βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), Αθήνα

# Η συμμετρία στην Άλγεβρα

*Mια θεμελιώδης μαθηματική έννοια  
που γίνεται αντιληπτή μόνο με το μάτι του νου*

Mark Saul και Titu Andreescu

**H**ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ μαθηματική έννοια. Η συστηματική μελέτη της γίνεται στη θεωρία ομάδων, που επι δύο αιώνες αποτελεί μια παραγωγική περιοχή της μαθηματικής έρευνας, ο πλούτος της οποίας σε μεθόδους και αποτελέσματα δεν δείχνει να έχει στρειδία εξάντλησης.

Στη γεωμετρία η συμμετρία ορισμένων σχημάτων είναι πρόδηλη και η τέχνη έγκειται στο να τη χρησιμοποιήσουμε ώστε να επιτύχουμε συγκεκριμένα αποτελέσματα. Στην άλγεβρα όμως η συμμετρία δεν είναι πάντα εμφανής. Η αλγεβρική συμμετρία γίνεται αντιληπτή με τη νόηση και όχι με το μάτι, ενώ αποκαλύπτεται σιγά σιγά καθώς αντιμετωπίζουμε μια σειρά προβλημάτων. Εδώ θα εξετάσουμε μερικές τέτοιες περιπτώσεις.

**Παράδειγμα:** Να λυθεί το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x + 5y = 9 \\ 5x + y = 15 \end{cases}$$

Αν ακολουθήσουμε τη συνηθισμένη μέθοδο των σχολικών βιβλίων, θα πολλαπλασιάσουμε τη μία από τις εξισώσεις επί 5, και μετά θα αφαιρέσουμε κατά μέλη. Έτσι, θα οδηγηθούμε φυσικά στην απάντηση, ενώ η μέθοδος γενικεύεται για οποιοδήποτε σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων καθώς και για συστήματα με περισσό-

τερες μεταβλητές.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε ως προς  $x$  τη μία εξισώση και να αντικαταστήσουμε στη δεύτερη. Και αυτή η μέθοδος γενικεύεται για οποιοδήποτε σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων (αν και γίνεται δύσκολη όταν έχουμε περισσότερες μεταβλητές).

Υπάρχει όμως μια ευφυέστερη μέθοδος η οποία γενικεύται προς διαφορετική κατεύθυνση: Έχουμε ότι  $x + 5y = 9$  και  $5x + y = 15$ . Αν προσθέσουμε βρίσκουμε  $6x + 6y = 24$  και, επομένως,  $x + y = 4$ . Αν αφαιρέσουμε την τελευταία ισότητα από την πρώτη εξισώση, θα πάρουμε  $4y = 5$ , ή  $y = 5/4$ . Τέλος, αφαιρώντας από τη δεύτερη εξισώση, έχουμε  $4x = 11$  και, συνέπολες,  $x = 11/4$ .

Γιατί είναι αποτελεσματική αυτή η μέθοδος; Διότι τα αριστερά μέλη των δύο εξισώσεων είναι συμμετρικά ως προς  $x$  και  $y$ : οι δύο μεταβλητές παιζουν τον ίδιο ρόλο. (Φυσικά, αν δώσουμε συγκεκριμένες τιμές στις μεταβλητές και εκτελέσουμε τις πράξεις, το αποτέλεσμα θα είναι διαφορετικό. Γι' αυτό το λόγο είναι διαφορετικά τα δεξιά μέλη των εξισώσεων.) Στα ανώτερα μαθηματικά αυτή η έννοια της αλγεβρικής συμμετρίας γίνεται ακόμη πιο ακριβής.

Τα επόμενα προβλήματα μπορούν να θεωρηθούν γενικεύσεις του προηγούμενου παραδείγματος. Σε γενικές γραμμές, όταν αντιλαμβανόμαστε την

ύπαρξη συμμετρίας σ' ένα σύστημα εξισώσεων, πρέπει να ενεργούμε έτοιμοι να διατηρείται.

1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 14 \\ 2x + y + z = 12 \\ x + y + 2z = 18. \end{cases}$$

2. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ y + z = -2 \\ z + x = 9. \end{cases}$$

3. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ yz = 15 \\ zx = 10. \end{cases}$$

4. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 24 \\ (y+1)(z+1) = 30 \\ (z+1)(x+1) = 20. \end{cases}$$

5. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} xy - x - y = 11 \\ yz - y - z = 14 \\ zx - x - z = 19. \end{cases}$$

6. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = 4 \\ y(x+y+z) = 6 \\ z(x+y+z) = 54. \end{cases}$$

7. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\} = 1,1 \\ \{x\}+y+[z] = 2,2 \\ [x]+\{y\}+z = 3,3. \end{cases}$$

Εδώ, το  $[x]$  συμβολίζει «το ακέραιο μέρος του  $x$ » και το  $\{x\}$  συμβολίζει «το κλασματικό μέρος του  $x$ ». δηλαδή  $\{x\} = x - [x]$ .

8. Έστω  $a$  ένας γνήσιος θετικός πραγματικός αριθμός. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} x^2 - xy = a \\ y^2 - xy = a(a-1). \end{cases}$$

9. Να λυθεί το επόμενο σύστημα  $n$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους (όπου  $n$  ακέραιος μεγαλύτερος του 2).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_n = 3 \\ \dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = n. \end{cases}$$

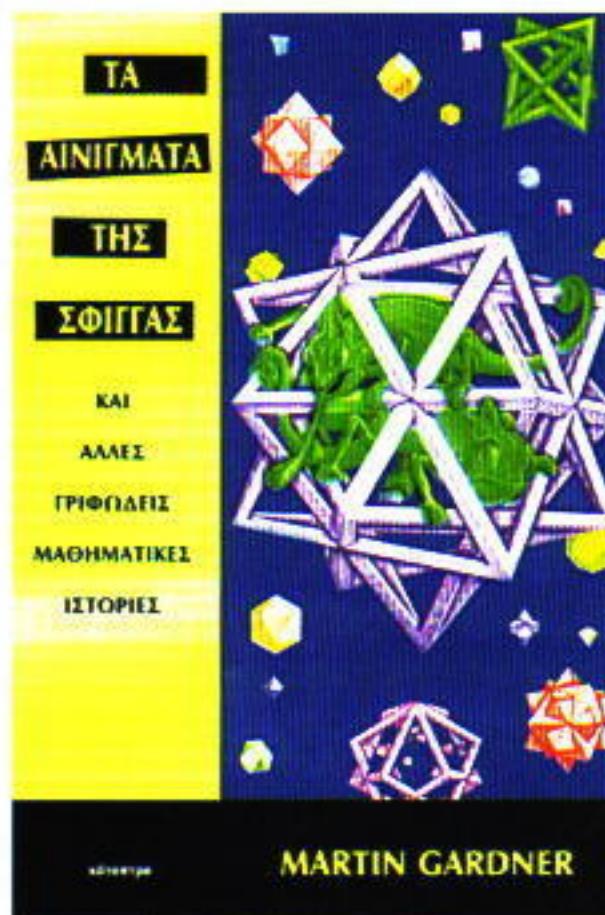
10. Ενα τρίγωνο έχει πλευρές μήκους 13, 14 και 15. Ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο κύκλος χωρίζει κάθε πλευρά σε δύο τμήματα. Βρείτε το μήκος αυτών των έξι τμημάτων.

11. Τα τρία ύψη του οξυγώνιου τριγώνου  $ABC$  (με πλευρές  $a$ ,  $b$  και  $c$ ) ορίζουν έξι τμήματα πάνω στις πλευρές του τριγώνου (βλ. Σχήμα 1). Αν θέσουμε  $x = \text{συν} A$ ,  $y = \text{συν} B$ ,  $z = \text{συν} C$ , τότε οι τριγωνομετρικές σχέσεις που ισχύουν στα ορθογώνια τρίγωνα μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τα έξι τμήματα όπως στο Σχήμα 1. Προφανώς, έχουμε

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a. \end{cases}$$

Λύστε αυτό το σύστημα εξισώσεων ως προς  $x$ ,  $y$ ,  $z$  συναρτήσει των  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

## ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



**Martin Gardner**

**Τα αινίγματα της Σφίγγας  
και άλλες γριφώδεις μαθηματικές ιστορίες**

Το βιβλίο αποτελεί μια συλλογή γρίφων και σπαζοκεφαλιών του μετρών ψυχαγωγικών μαθηματικών Martin Gardner, η οποία εκδόθηκε στα αγγλικά το 1988 από την Αμερικανική Μαθηματική Ένωση.

Περιλαμβάνει τριάντα πέντε κεφάλαια, σε καθένα από τα οποία

διατυπώνεται ένα πρόβλημα μαθηματικών ή φυσικής.

αυτό λύνεται στον τομέα των πρώτων απαντήσεων. Η συγκεκριμένη

λύση συχνά οδηγεί σε ένα άλλο πρόβλημα, το οποίο λύνεται

στον τομέα των δεύτερων απαντήσεων. Από την εν λόγω

διαδικασία μερικές φορές εγείρεται μια τρίτη ερώτηση και, σε κάποιες περιπτώσεις, και μια τέταρτη· οι απαντήσεις και οι λύσεις δίνονται στους αντίστοιχους τομείς. Τέλος παρατίθεται επιπρόσθιτο υλικό που προέκυψε από την αλληλογραφία του συγγραφέα με αναγνώστες.

Πολλά από τα προβλήματα του βιβλίου οδηγούν σε μη τετριμένες περιοχές των μαθηματικών και της φυσικής· ωστόσο, ο αναγνώστης, είτε

ενδιαφέρεται γι' αυτό είτε όχι, θα διασκεδάσει με τους γρίφους

και τις σπαζοκεφαλίες του βιβλίου και θα μπορέσει να ακονίσει δημιουργικά το μυαλό του.

**Εκδόσεις Κάτοπτρο**

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),  
105 64, Αθήνα, τηλ.: 3247785

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

### Μαθηματικά

#### M121

Μπορούμε πάντα να βρούμε τα «προηγούμενα» κάθε τετραγώνου της σκακιέρας — δηλαδή τα τετράγωνα από τα οποία μπορεί να μετακινηθεί ο βασιλιάς σ' αυτό κάνοντας μία μόνο κίνηση. Προφανώς, το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών που οδηγούν σ' ένα τετράγωνο ισούται με το άθροισμα του πλήθους των διαδρομών που οδηγούν σε καθένα από τα «προηγούμενά» του. Μπορούμε τώρα να γράψουμε «1» στο κάτω αριστερό τετράγωνο και στη συ-

1	11	61	231	681	1683
1	9	41	129	321	681
1	7	25	63	129	231
1	5	13	25	41	61
1	3	5	7	9	11
1	1	1	1	1	1

Σχήμα 1

νέχεια να συμπληρώσουμε τα υπόλοιπα τετράγωνα (Σχήμα 1).

#### M122

Πρώτα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα άπειρο πλήθος κακοποιών που έχουν αναλάβει να σκοτώσουν τον ίδιο κακοποιό, ας πούμε τον Άρη. Τότε, οι κακοποιοί που κυνηγούν τον Άρη είναι η λύση του προβλήματός μας.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δεν υπάρχει τέτοιος Άρης — δηλαδή ότι κάθε κακοποιός απειλείται από πεπερασμένο πλήθος κακοποιών. Θα κατασκευάσουμε το ζητούμενο σύνολο επαγγελμάτων.

Διαλέγουμε έναν κακοποιό, τον Βασίλη, και σκοτώνουμε όλους τους εχθρούς του. Ο Βασίλης θα είναι το πρώτο μέλος του υποσυνόλου μας. Επέλεγουμε έναν από τους κακοποιούς που έχουν επιβιώσει. Έχουμε σκοτώσει πεπερασμένο πλήθος κακοποιών

(το πλήθος των εχθρών του Βασίλη είναι πεπερασμένο), οπότε αυτοί που απομένουν είναι άπειροι, και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε έναν, ας πούμε τον Γιώργο, που δεν είναι στόχος του Βασίλη. Επιπλέον, ο Γιώργος δεν κυνηγά τον Βασίλη (έχουμε ήδη σκοτώσει όλους τους εχθρούς του Βασίλη). Σκοτώνουμε τώρα όλους τους εχθρούς του Γιώργου. Επιλέγουμε μετά έναν τρίτο κακοποιό, τον Δημήτρη, που δεν είναι στόχος ούτε του Γιώργου ούτε του Βασίλη, σκοτώνουμε όλους τους εχθρούς του, κ.ο.κ.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη επιλέξει ή κακοποιούς. Το πλήθος των κακοποιών που έχουμε σκοτώσει είναι πεπερασμένο (διότι έχουμε υποθέσει ότι όλοι οι κακοποιοί έχουν πεπερασμένο πλήθος εχθρών) και συνεπώς απομένει ακόμη άπειρο πλήθος από το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε έναν ( $n + 1$ )-οστό κακοποιό που δεν είναι στόχος κάποιου από τους προηγούμενους  $n$ . Το σύνολο (Βασίλης, Γιώργος, Δημήτρης, ...) ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

#### M123

Η συνάρτηση στο αριστερό μέλος της ανισότητας ορίζεται στο τετράγωνο  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ . Εστω  $M = (x_0, y_0)$  ένα σημείο αυτού του τετραγώνου για το οποίο η παράσταση του αριστερού μέλους είναι γνήσια θετική. Δηλαδή

$$(y_0^3 - \text{τοξημ}x_0)(x_0^3 + \text{τοξημ}y_0) < 0.$$

Τότε, για το σημείο  $M'(y_0, -x_0)$ , 1-σχύει

$$(-x_0^3 - \text{τοξημ}y_0)(y_0^3 - \text{τοξημ}x_0) \\ = -(y_0^3 - \text{τοξημ}x_0)(x_0^3 + \text{τοξημ}y_0) < 0.$$

Με άλλα λόγια, όταν το σημείο  $M$  ανήκει στο σχήμα που ορίζει η ανισότητα, τότε η εικόνα του μέσω δεξιόστροφης περιστροφής κατά  $90^\circ$  περί τον άξονα,  $M'$ , δεν ανήκει στο σχήμα αυτό. Αντιστρόφως, μια αριστερόστρο-

φη περιστροφή κατά  $90^\circ$  περί τον άξονα απεικονίζει σημεία που δεν ανήκουν στο σχήμα σε σημεία που ανήκουν. Συνεπώς, το εμβαδόν του σχήματος ισούται με το εμβαδόν του συμπληρωματικού του στο εν λόγω τετράγωνο (στην πραγματικότητα αυτά τα δύο σύνολα είναι ίσα) και είναι

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

(Έχουμε υποθέσει ότι το «εμβαδόν» της περιοχής για την οποία ισχύει  $(y^3 - \text{τοξημ}x)(x^3 + \text{τοξημ}y) = 0$  είναι μηδέν, γεγονός ασφαλώς ορθό.)

#### M124

Θεωρήστε τα πέντε διανύσματα:

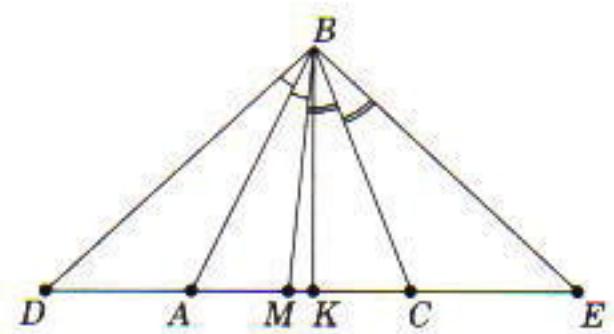
$$\mathbf{a}(x, \sqrt{1-x^2}), \mathbf{b}(y, \sqrt{4-y^2}),$$

$$\mathbf{c}(z, \sqrt{9-z^2}), \mathbf{d}(t, \sqrt{16-t^2}), \mathbf{e}(6, 8).$$

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξής διανυσματική ισότητα:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{e}$ . Όμως,  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, |\mathbf{c}| = 3, |\mathbf{d}| = 4$  και  $|\mathbf{e}| = 10$ . Δηλαδή,  $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}|$ . Αυτό είναι δυνατόν να συμβαίνει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι όλα συγγραμμικά. Μπορούμε τώρα να βρούμε την απάντηση εύκολα. Για παράδειγμα, ας βρούμε το  $x$ . Εστω  $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{e}$ , οπότε  $x = 16$  και  $\sqrt{1-x^2} = \lambda 8$ . Τότε,  $\lambda = 0,1$  και  $x = 0,6$ . Παρόμοια βρίσκουμε  $y = 1,2, z = 1,8$  και  $t = 2,4$ .

#### M125

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η  $\angle ABC$



Σχήμα 2

είναι οξεία. Θα δείξουμε ότι, σ' αυτή την περίπτωση, το  $D$  ανήκει στην ημιευθεία  $MA$  (και όχι στην  $ME$ , όπως θα συνέβαινε αν η  $\angle ABC$  ήταν αμβλεία). Ας υποθέσουμε ότι σχεδιάζουμε ένα ημικύκλιο με διάμετρο  $AC$ . Τότε, αν η  $\angle ABC$  είναι οξεία, το σημείο  $B$  βρίσκεται έξω από το ημικύκλιο. Αυτό σημαίνει ότι  $BM > AM$  και, επομένως, στο τρίγωνο  $ABM$  έχουμε ότι  $\angle BAM > \angle ABM$  και το σημείο  $D$  ανήκει στην ημιευθεία  $MA$ . Παρομοίως, το σημείο  $E$  ανήκει στην ημιευθεία  $MC$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την πλευρά που τέμνει σε τυμάτα ανάλογα προς τις δύο άλλες πλευρές. Αν εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα στα τρίγωνα  $DBM$  και  $BEM$ , προκύπτει ότι  $DB/BM = DA/AM$ ,  $BE/BM = CE/CM$ . Διαιρούμε την πρώτη από τις ισότητες με τη δεύτερη και βρίσκουμε

$$\frac{DB}{BE} = \frac{DA}{CE}. \quad (1)$$

Έστω ότι η διχοτόμος της  $\angle DBE$  τέμνει την  $DE$  στο σημείο  $K$ . Τότε

$$\frac{DB}{BE} = \frac{DK}{KE}. \quad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι, αν  $a/b = c/d$ , τότε

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

(όπως εύκολα μπορεί να επαληθεύσει ο αναγνώστης πολλαπλασιάζοντας, για παράδειγμα, άκρους με μέσους). Έπειτα επομένως ότι

$$\frac{DB}{BE} = \frac{DK - DA}{KE - CE} = \frac{AK}{KC}.$$

Αφού η  $BK$  διχοτομεί την  $\angle DBE$ , μπορούμε να γράψουμε

$$2\angle ABM + \angle MBK = \angle DBK = \angle EBK = 2\angle CBM - \angle MBK,$$

και, επομένως,  $2\angle ABM = 2\angle CBM - 2\angle MBK$ . Αν διαιρέσουμε με το 2 και κάνουμε τις απλοποιήσεις βρίσκουμε ότι  $\angle ABM = \angle CBK$ . Έστω  $\angle ABM = \alpha$  και  $\angle MBC = \beta$ . (Οπότε,  $\angle CBK = \alpha$  και  $\angle ABK = \beta$ ).

Συμβολίζουμε τώρα το εμβαδόν του τριγώνου  $XYZ$  με  $S_{XYZ}$ . Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{ABK}}{S_{CBK}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BK \text{ ημβ}}{\frac{1}{2}CB \cdot BK \text{ ημβ}}$$

$$= \frac{AB^2}{CB^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}CB \cdot BM \text{ ημβ}}{\frac{1}{2}AB \cdot BM \text{ ημβ}} \\ = k^2 \cdot \frac{S_{CBM}}{S_{ABM}} = k^2.$$

Συνεπώς,  $DB/BM = k^2$ . Οι αναγνώστες μπορούν να εξετάσουν την περίπτωση που η  $\angle ABC$  είναι αμβλεία.

### Φυσική

#### Φ121

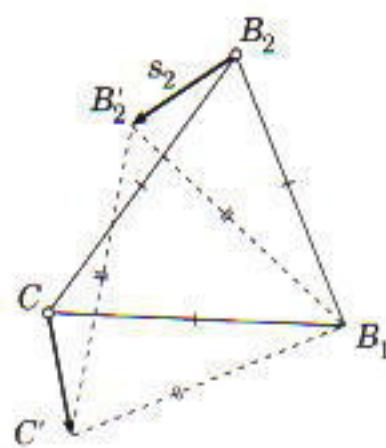
Ας θεωρήσουμε ένα μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$  κατά τη διάρκεια του οποίου το πρώτο σκαθάρι διανύει απόσταση  $\vec{s}_1 = \vec{v}_1 \Delta t$  και το δεύτερο απόσταση  $\vec{s}_2 = \vec{v}_2 \Delta t$ .

Πώς πρέπει να κινηθεί η κατσαρίδα προκειμένου τα τρία ζωύφια να βρίσκονται οποιαδήποτε στιγμή στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου; Υπόθεστε ότι το πρώτο σκαθάρι παραμένει ακίνητο, ενώ το δεύτερο μετατοπίζεται κατά  $\vec{s}_2$  (Σχήμα 3). Τότε, προκειμένου το τρίγωνο  $B_1 B_2 C'$  να παραμείνει ισόπλευρο, η κατσαρίδα πρέπει να μετατοπιστεί από τη θέση της κατά  $\vec{CC}'$ .

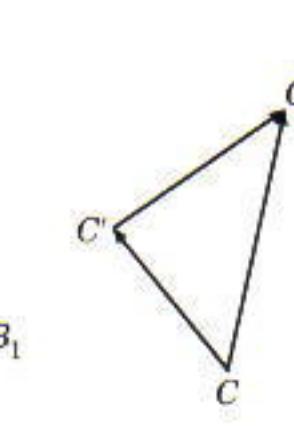
$$|\vec{CC}'| = |\vec{s}_2| = v_2 \Delta t.$$

Έστω τώρα ότι το δεύτερο σκαθάρι παραμένει ακίνητο και το πρώτο μετατοπίζεται κατά  $\vec{s}_1$ . Στην περίπτωση αυτή η κατσαρίδα πρέπει να μετατοπιστεί κατά  $\vec{C'C''}$  για το οποίο ισχύει

$$|\vec{C'C''}| = |\vec{s}_1| = v_1 \Delta t.$$



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Εάν και τα δύο σκαθάρια μετατοπιστούν ταυτόχρονα κατά  $\vec{s}_1$  και  $\vec{s}_2$ , η κατσαρίδα θα πρέπει να εκτελέσει αμφότερα τα βήματα  $\vec{CC}'$  και  $\vec{C'C''}$ :

$$\vec{CC}' + \vec{C'C''} = \vec{CC''}.$$

Από το διανυσματικό διάγραμμα (Σχήμα 4) προκύπτει

$$|\vec{CC''}| \leq |\vec{CC'}| + |\vec{C'C''}| = (v_1 + v_2) \Delta t.$$

Συνεπώς η ταχύτητα η οποία αντιστοιχεί στην κίνηση της κατσαρίδας είναι

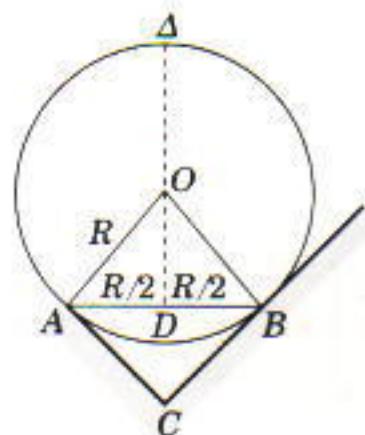
$$v_c = \frac{|\vec{CC''}|}{\Delta t} \leq v_1 + v_2 \leq 2v.$$

Η ισότητα ισχύει όταν οι μετατοπίσεις της κατσαρίδας  $\vec{CC'}$  και  $\vec{C'C''}$  είναι ομόρροπες.

#### Φ122

Σύμφωνα με τη διατύπωση του προβλήματος, η μπάλα κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. επομένως, κάθε στιγμή οι ταχύτητες των σημείων  $A$  και  $B$  (Σχήμα 5), τα οποία βρίσκονται σε επαφή με την τσουλήθρα, είναι ίσες με μηδέν. Θεωρούμε ότι η μπάλα είναι ένα απολύτως στερεό σώμα, γεγονός που σημαίνει ότι η απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων σημείων της δεν μεταβάλλεται. Συνεπώς, όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  είναι ανάπτυσσα στιγμή ακίνητα. Άρα η μπάλα στρέφεται γύρω από το στιγμαίο άξονα  $AB$ .

Η στιγμαία γραμμική ταχύτητα νόμιμη σημείου της μπάλας είναι ίση με ωρ, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και  $\rho$  η απόσταση του σημείου από τον άξονα  $AB$ . Η απόσταση του κέντρου  $O$  της σφαίρας από τον άξονα  $AB$  είναι



Σχήμα 5

$$\rho_0 = |OD| = R \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επομένως, αν  $v$  είναι η ταχύτητα του κέντρου  $O$  θα ισχύει

$$\omega = \frac{v}{\rho_0} = \frac{2v}{R\sqrt{3}}.$$

Άρα, τα σημεία που κινούνται με τη μέγιστη ταχύτητα βρίσκονται όσο το δυνατόν πολλά από τον άξονα  $AB$ . Από γεωμετρική σκοπιά είναι φανερό ότι υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σημείο: το σημείο  $E$  (Σχήμα 5). Η απόστασή του από τον άξονα  $AB$  είναι

$$\rho_E = \rho_0 + R = R \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

οπότε η ταχύτητά του

$$v_E = v_{max} = \omega \rho_E$$

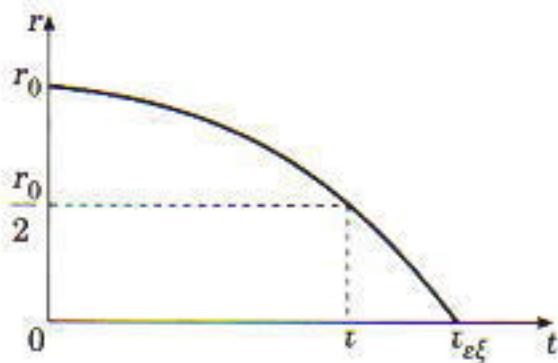
$$= \frac{2v}{R\sqrt{3}} R \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = v \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

### Φ123

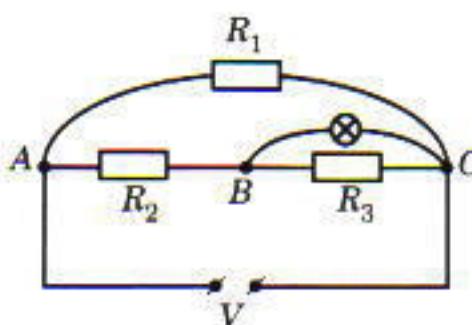
Σύμφωνα με τις συνθήκες του προβλήματος το ποσό της θερμότητας που μεταφέρεται κατά τη διάρκεια μικρού χρονικού διαστήματος  $\Delta t$  σε εμβαδόν  $4\pi r^2$  της επιφάνειας της σταγόνας ισούται με

$$\Delta Q = \frac{a(T_a - T_o)}{r} 4\pi r^2 \Delta t,$$

όπου  $r$  είναι η ακτίνα της σφαίρας,  $a$  ένας συντελεστής ο οποίος εξαρτάται από τη θερμική αγωγιμότητα του περιβάλλοντος μέσου και  $T_a$  και  $T_o$  είναι οι θερμοκρασίες του αέρα και της σταγόνας ( $T_a > T_o$ ). Η θερμότητα αυτή καταναλώνεται προκειμένου να εξατμιστεί ποσότητα υγρού μάζας  $\Delta m$ . Συμβολίζοντας τη λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης με  $L$ , μπορούμε να



Σχήμα 6



Σχήμα 7

γράψουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας στη μορφή:

$$L\Delta m = -\Delta Q = -a(T_a - T_o)4\pi r\Delta t.$$

Το αρνητικό πρόσημο στο δεύτερο μέλος δηλώνει ότι η μάζα μειώνεται με το χρόνο. Επειδή  $m = (4/3)\pi r^2 \rho_0$ , όπου  $\rho_0$  η πυκνότητα της σταγόνας, είναι

$$\Delta m = 4\pi r^2 \rho_0 \Delta r,$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, προκύπτει ότι

$$r\Delta r = -\frac{a(T_a - T_o)}{L\rho_0} \Delta t,$$

ή ισοδύναμα

$$(r^2)' = -\beta,$$

όπου  $\beta = a(T_a - T_o)/2L\rho_0$ , μια θετική σταθερά.

Επομένως, το τετράγωνο της ακτίνας της σταγόνας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο:

$$r^2 = r_0^2 - \beta t,$$

όπου  $r_0$  είναι η αρχική ακτίνα της σταγόνας τη στιγμή  $t = 0$ . Έτοιμο, η ελάττωση της ακτίνας (βλ. Σχήμα 6) δίνεται από τη σχέση

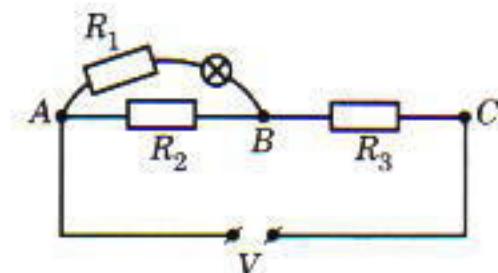
$$r = \sqrt{r_0^2 - \beta t}.$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες του προβλήματος, η ακτίνα μειώνεται στο μισό της αρχικής της τιμής σε χρόνο  $\tau = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$ . Δηλαδή γίνεται ίση με  $r_0/2$ , οπότε

$$\frac{r_0^2}{4} = r_0^2 - \beta \tau,$$

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{r_0^2}{\tau}.$$

Ας συμβολίσουμε με  $t_{e\xi}$  τη διάρκεια



Σχήμα 8

ζωής της σταγόνας (ο χρόνος που απαιτείται για να εξατμιστεί εντελώς) όταν  $t = t_{e\xi}$  θα είναι  $r = 0$ , οπότε προκύπτει

$$\tau_{e\xi} = \frac{r_0^2}{\beta} = \frac{4}{3} \tau = 800 \text{ s}.$$

### Φ124

Κατ' αρχάς, ας επιστήσουμε την προσοχή στο εξής: Η ηλεκτρική αντίσταση ενός λαμπτήρα πυρακτώσεως δεν είναι σταθερή μεταβάλλεται με την πτώση τάσης στα άκρα της: όσο μεγαλύτερη είναι η τάση τόσο μεγαλύτερη είναι η θερμοκρασία του νήματος του λαμπτήρα —κατά συνέπεια και η αντίστασή της. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, η φωτοβολία του λαμπτήρα παραμένει η ίδια και για τις δύο θέσεις του διακόπτη: άρα, τόσο η πτώση τάσης  $V_1$  στα άκρα του λαμπτήρα όσο και η αντίστασή του παραμένουν επίσης ίδιες και στις δύο περιπτώσεις.

Τα ισοδύναμα κυκλώματα που προκύπτουν όταν ο διακόπτης είναι κλειστός ή ανοικτός φαίνονται στα Σχήματα 7 και 8, αντίστοιχα. Οι αντιστάσεις των κλάδων  $BC$  και  $AC$  όταν ο διακόπτης είναι κλειστός ισούται με

$$R_{BC} = \frac{RR_3}{R + R_3}, \quad R_{AC} = R_2 + R_{BC}. \quad (1)$$

Θέτοντας τις τιμές των  $R_2$  και  $R_3$  (σε ohms) στην (1), προκύπτει

$$R_{BC} = \frac{90R}{R + 90}, \quad (2)$$

$$R_{AC} = \frac{270(R + 60)}{R + 90}.$$

Η πτώση τάσης στα άκρα του λαμπτήρα, όταν ο διακόπτης είναι κλειστός, είναι

$$V_1 = \frac{V}{R_{AC}} R_{BC}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2) και τη δεδομένη τιμή  $V = 54$  V, έχουμε

$$V_1 = \frac{18R}{R+60}. \quad (3)$$

Για την περίπτωση που ο διακόπτης είναι ανοικτός, με παρόμοιο υπολογισμό προκύπτει

$$V_1 = \frac{36R}{R+150}. \quad (4)$$

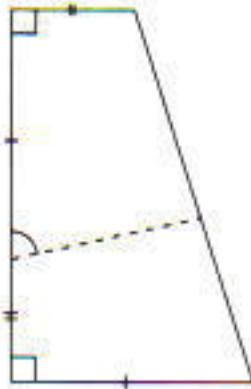
Τελικά, από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι η πτώση τάσης στα άκρα της λάμπας ισούται με  $V_1 = 6$  V.

## Φ125

Για να λύσουμε το πρόβλημα, θα χρησιμοποιήσουμε τους νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής σε απομονωμένο σύστημα. Αρχικά, πριν από την εκπομπή του φωτονίου, το σύστημα συνιστάται από ένα ακίνητο άτομο υδρογόνου σε διεγερμένη κατάσταση, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι το τροχιακό ηλεκτρόνιο δεν βρίσκεται στο χαμηλότερο ενέργειακό επίπεδο  $E_1$  (θεμελιώδης κατάσταση) αλλά σε κάποιο άλλο επίπεδο με υψηλότερη ενέργεια  $E_n$ . Ένα άτομο μπορεί να διεγερθεί εξαιτίας κάποιου εξωτερικού γεγονότος, όπως αν συγκρουστεί με άλλα άτομα ή ελεύθερα ηλεκτρόνια ή αν απορροφήσει ένα φωτόνιο (ένα κβάντο φωτός). Στην εξιδανικευμένη περίπτωση κατά την οποία δεν συμβαίνει ανάκρουση, η συχνότητα  $\nu_0$  του εκπεμπόμενου φωτός προσδιορίζεται από την εξίσωση  $E_n - E_1 = h\nu_0$ . Η ολική ενέργεια ενός ακίνητου άτομου ισούται με την ενέργεια ηρεμίας του πυρήνα (πρωτονίου)  $m_n c^2$  και την ενέργεια  $E_n$  του ηλεκτρονίου, ενώ η ολική ορμή του άτομου ισούται με μηδέν.

Μετά την εκπομπή ενός φωτονίου ενέργειας  $h\nu$ , το απομονωμένο σύστημα συμπεριλαμβάνει τόσο το φωτόνιο όσο και το άτομο υδρογόνου που έχει αποκτήσει ταχύτητα  $v$  λόγω της ανάκρουσης. Στην περίπτωση αυτή η ολική ενέργεια του συστήματος ισούται με

$$m_n c^2 + E_1 + \frac{m_n v^2}{2} + h\nu,$$



Σχήμα 9

και η ολική ορμή του με

$$\frac{hv}{c} - m_n v.$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τους νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής, έχουμε

$$m_n c^2 + E_1 = m_n c^2 + E_1 + \frac{m_n v^2}{2} + h\nu,$$

$$0 = \frac{hv}{c} - m_n v.$$

$$\text{Επειδή } E_n - E_1 = h\nu_0, \text{ προκύπτει ότι}$$

$$h\nu = h\nu_0 - h\nu_0$$

$$= -\frac{m_n v^2}{2} = -\frac{(hv)^2}{2m_n c^2},$$

ή, ισοδύναμα,

$$\Delta\nu = -\frac{hv^2}{2m_n c^2} = -\frac{h}{2m_n \lambda^2}.$$

Για σχετικά μικρές μεταβολές της συχνότητας ( $\Delta\nu \ll \nu$ ) μπορούμε να εφαρμόσουμε το  $\Delta$  ως ανάπτυγμα Taylor, οπότε

$$\Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda.$$

Τελικά,

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2m_n c} = 6,7 \cdot 10^{-16} \text{ m.}$$

## Σπαζοκεφαλίες

### Σ121

Έστω  $t$  το πλήθος των λουκουμάδων που μπορούμε να αγοράσουμε με ένα χιλιάρικο. Τότε  $1/t = t/25$  και, επομένως,  $t = 5$ . Άρα, ένας λουκουμάς κοστίζει 200 δραχμές.

### Σ122

Ας πάρουμε τρεις ομάδες παιδιών: τα κορίτσια, τα αγόρια που βρίσκονται πίσω από κορίτσια και τα αγόρια που βρίσκονται πίσω από αγόρια. Αφού κάθε κορίτσι βρίσκεται πίσω από αγόρι, πίσω από κάθε κορίτσι υπάρχει ένα αγόρι (διαφορετικά, θα υπήρχε κορίτσι μετά από κορίτσι). Επομένως, το πλήθος των αγοριών που βρίσκονται πίσω από κορίτσια είναι ίσο με το πλήθος όλων των κοριτσιών. Γνωρίζουμε όμως ότι το πλήθος των αγοριών που βρίσκονται πίσω από αγόρια. Επομένως, οι τρεις αυτές ομάδες αποτελούνται από ίσο πλήθος παιδιών. Άρα, υπάρχουν 10 κορίτσια και 20 αγόρια.

### Σ123

Για δύο βόλτες στο ζαχαροπλαστείο ο Λάκης χρειάστηκε  $3 \times 55 - 35 - 50 = 80$  λεπτά. Χρειάζεται, επομένως, 40 λεπτά για να αγοράσει το παγωτό, να το φάει και να επιστρέψει στο σχολείο, οπότε έχει μπροστά του άφθονο χρόνο για μία ακόμη επίσκεψη.

### Σ124

Δείτε το Σχήμα 9.

### Σ125

Ο αέρας είναι κακός αγωγός της θερμότητας. Με το φούσκωμα του φτερώματος τα πουλιά αυξάνουν το στρώμα αέρα μεταξύ του σώματός τους και της ατμόσφαιρας.

## Gradus ad Parnassum

1. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις τρεις εξισώσεις, θα πάρουμε

$$4x + 4y + 4z = 44,$$

ή

$$x + y + z = 11.$$

Αν αφαιρέσουμε διαδοχικά την τελευταία ισότητα από καθεμία εξισώση, βρίσκουμε πολύ γρήγορα ότι  $y = 3$ ,  $x = 1$  και  $z = 7$ . Όσοι αναγνώστες δοκίμασαν τη μέθοδο της αντικατάστασης θα μπορέσουν να εκτιμήσουν πόσο ευκολότερη είναι αυτή η λύση.

2. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις τρεις εξισώσεις, θα πάρουμε

$$2x + 2y + 2z = 14,$$

ή

$$x + y + z = 7.$$

Αν αφαιρέσουμε διαδοχικά αυτή την ισότητα από καθεμία εξισώση, βρίσκουμε  $z = 0$ ,  $x = 9$  και  $y = -2$ .

3. Αν πολλαπλασιάσουμε τις τρεις εξισώσεις, βρίσκουμε  $x^2y^2z^2 = 6 \cdot 15 \cdot 10$ , οπότε  $xyz = \pm 30$ . Αν διαιρέσουμε αυτή την ισότητα με καθεμία από τις τρεις εξισώσεις, θα βρούμε  $(x, y, z) = \pm(2, 3, 5)$ .

4. Θέτουμε  $p = x + 1$ ,  $q = y + 1$  και  $r = z + 1$ . Τότε έχουμε  $pq = 24$ ,  $qr = 30$ ,  $rp = 20$  και καταλήγουμε στο ίδιο είδος συστήματος όπως στο Πρόβλημα 3. Βρίσκουμε ότι  $(p, q, r) = (4, 6, 5)$  ή  $(-4, -6, -5)$ . Οι αντίστοιχες πινές για τα  $x, y, z$  είναι  $(3, 5, 4)$  ή  $(-5, -7, -6)$ .

5. Με ένα τέχνασμα το πρόβλημα αυτό γίνεται όμοιο με το Πρόβλημα 4. Προσθέτουμε το 1 σε κάθε εξισώση. Για παράδειγμα, η πρώτη εξισώση γίνεται

$$xy - x - y + 1 = 12,$$

ή

$$(x - 1)(y - 1) = 12.$$

Θέτουμε τώρα  $p = x - 1$ ,  $q = y - 1$ ,  $r = z - 1$ , και συνεχίζουμε όπως πρηγουμένως. Βρίσκουμε  $(x, y, z) = (5, 4, 6)$  ή  $(-3, -2, -4)$ .

6. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις τρεις εξισώσεις και παραγοντοποιήσουμε το αριστερό μέλος, θα βρούμε  $(x + y + z)^2 = 64$ , οπότε  $x + y + z = \pm 8$ . Διαιρούμε τώρα κάθε εξισώση με αυτή την ισότητα και βρίσκουμε

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{27}{4} \right)$$

ή

$$\left( -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{27}{4} \right).$$

7. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις τρεις εξισώσεις, θα πάρουμε

$$2x + 2y + 2z = 6,6,$$

ή

$$x + y + z = 3,3.$$

Αν αφαιρέσουμε την πρώτη εξισώση από αυτήν τη νέα σχέση, θα βρούμε  $\{y\} + [z] = 2,2$ . Αυτό όμως σημαίνει ότι  $[z] = 2$  και  $\{y\} = 0,2$ . Αφαιρώντας τη δεύτερη εξισώση του συστήματος, βρίσκουμε ότι  $\{x\} + [z] = 1,1$  και, επομέ-

νως,  $\{x\} = 1$ ,  $\{z\} = 0,1$ , ενώ αφαιρώντας την τρίτη παίρνουμε  $\{x\} + [y] = 0$  και, συνεπώς,  $\{x\} = 0$ ,  $[y] = 0$ . Προσθέτοντας, τώρα, τα κλασματικά και τα ακέραια μέρη των  $x, y, z$ , βρίσκουμε  $x = 1$ ,  $y = 0,2$ ,  $z = 2,1$ .

8. Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις, βρίσκουμε

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = a^2,$$

οπότε  $x - y = \pm a$ .

Γράφουμε τις δεδομένες εξισώσεις ως

$$x(x - y) = a, \quad -y(x - y) = a(a - 1),$$

και διαιρούμε την καθεμία με το  $x - y$ . Βρίσκουμε  $(x, y) = (1, 1 - a)$  ή  $(-1, a - 1)$ .

9. Εδώ δεν θα προσθέσουμε τις εξισώσεις αλλά θα επωφεληθούμε από τη συμμετρική τους σχέση με το άθροισμα

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

Αν συμβολίσουμε αυτό το άθροισμα με  $S$  (ξεχωρίζοντας προς στιγμήν ότι γνωρίζουμε ήδη πως είναι ίσο με 1) μπορούμε να γράψουμε το σύστημά μας ως εξής:

$$\begin{cases} S - x_2 = 2 \\ S - x_3 = 3 \\ \dots \\ S - x_{n-1} = n-1 \\ S - x_n = n. \end{cases}$$

Στη συνέχεια, θυμόμαστε πάλι το γεγονός ότι  $S = 1$  και διαπιστώνουμε άμεσα ότι

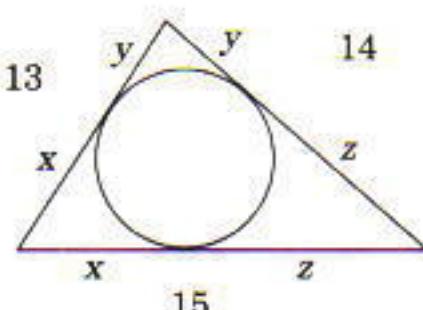
$$x_2 = -1, x_3 = -2, x_4 = -3, \dots, x_n = (-n+1).$$

Γνωρίζουμε (από έναν πολύ γνωστό τύπο) ότι

$$x_2 + x_3 + \dots + x_n = -[1 + 2 + \dots + (n-1)] = -\frac{n(n-1)}{2}.$$

Τέλος,

$$x_1 = 1 - (x_2 + x_3 + \dots + x_n) =$$



Σχήμα 10

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

10. Τα τμήματα πάνω στις πλευρές του τριγώνου είναι ανά δύο ίσα, διότι οι εφαπτόμενες που άγονται από ένα σημείο προς έναν κύκλο είναι ίσες. Έστω ότι τα μήκη τους είναι  $x, y, z$  (βλ. Σχήμα 10). Έχουμε

$$x + y = 13$$

$$y + z = 14$$

$$z + x = 15.$$

Μπορούμε να λύσουμε αυτό το σύστημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που εφαρμόσαμε στο Πρόβλημα 2. Βρίσκουμε  $x = 7$ ,  $y = 6$  και  $z = 8$ .

11. Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Προβλήματος 2 (ή του Προβλήματος 3) διότι οι συντελεστές των  $x, y, z$  δεν εμφανίζουν εδώ παρόμοια συμμετρία. Αν όμως διαιρέσουμε τις εξισώσεις με  $ab$ ,  $ac$  και  $bc$ , αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = \frac{c}{ab},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{b}{ac},$$

$$\frac{z}{c} + \frac{y}{a} = \frac{a}{bc}.$$

Τώρα, μπορούμε να θέσουμε  $A = x/a$ ,  $B = y/b$ ,  $C = z/c$  και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Προβλήματος (2). Βρίσκουμε ότι

$$A = \left( \frac{c^2 + b^2 + a^2}{2abc} \right) - \frac{a}{bc}$$

$$= \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2abc},$$

και αντίστοιχες παραστάσεις για τα  $B$  και  $C$ . Βρίσκουμε εύκολα τώρα ότι

$$x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc},$$

$$y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Βέβαια, αν θυμόμαστε το νόμο των συνημιτόνων, αυτό το γνωρίζατε ήδη!

# Διανομές γάλακτος

*Βρείτε το δρόμο σας*

Δρ. Χμ

**Κ**ΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά. Ο φετεινός χειμώνας ήταν αρκετά βαρύς στην περιοχή μας (όπως και κάθε σχεδόν χρονιά, άλλωστε) και, έτσι, τον περισσότερο καιρό μας τον περνάγαμε, λίγο βαρετά αλήθεια, στο στάβλο. Πάντως πρέπει να πω ότι μας αποζημιώνε η θέα του χιονισμένου τοπίου γύρω από το αγρόκτημά μας που ήταν πράγματι καταπληκτική. Η μόνη που γκρίνιαζε διαρκώς ήταν η φίλη μου η Μπέσυ, που έπρεπε κάθε μέρα να βοηθά το αφεντικό μας, τον κύριο Πωλ, στη διανομή του γάλακτος στους πελάτες του (πράγμα που πρέ-

πει να επισημάνω ότι μάλλον καλό της έκανε γιατί η φίλη μας χρειάζεται σίγουρα λίγη γυμναστική).

Όλοι οι πελάτες του κυρίου Πωλ ζουν σε μια περιοχή που έχει σχήμα τετραγώνου, στο Ουισκόνσιν, στη νοτιοδυτική άκρη της οποίας βρίσκεται το αγρόκτημά μας ενώ στη βορειοανατολική της η κωμόπολη Παρίς· όλοι οι πελάτες βρίσκονται πάνω στη διαδρομή που οδηγεί από το αγρόκτημα στην κωμόπολη. Πιο συγκεκριμένα, από τη στιγμή που ο κύριος Πωλ και η Μπέσυ φεύγουν από το αγρόκτημα, η διαδρομή που ακολουθούν περνά από όλους τους πελάτες και ταυτόχρονα πλησιάζει όλο και περισσότερο στην κωμόπολη.



Μια μέρα η Μπέσυ ήρθε να με βρει αρκετά προβληματισμένη. Την προηγούμενη νύχτα το χιόνι είχε αποκλείσει αρκετούς δρόμους, και ήταν φανερό ότι έπρεπε να γίνουν κάποιοι υπολογισμοί για να δούμε αν μπορούσε ακόμη να πάει στην κωμόπολη —περνώντας φυσικά από όλους τους πελάτες και πλησιάζοντας διαρκώς προς την πόλη.

Οι δρόμοι της περιοχής μας, της Cream County, απλώνονται σ' έναν τετραγωνικό πίνακα διαστάσεων  $M \times M$ . Το αγρόκτημά μας βρίσκεται στο τετράγωνο  $(1, 1)$  και η κωμόπολη στο  $(M, M)$ . Οι πελάτες μας είναι στους δρόμους  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)\}$  σε τέτοιες θέσεις ώστε να είναι δυνατόν να περάσεις από όλους ακολουθώντας μια διαδρομή που οδηγεί όλο και πο κοντά στην κωμόπολη. Οι χιονοστιβάδες βρίσκονται στους δρόμους  $\{(sx_1, sy_1), (sx_2, sy_2), \dots, (sx_j, sy_j)\}$ .

## Ο χάρτης του οδικού μας δικτύου

Θα χρησιμοποιήσω το *Mathematica* για να σχεδιάσω ένα χάρτη του οδικού μας δικτύου και να σας δείξω τις θέσεις των πελατών και των χιονοστιβάδων. Οι συντεταγμένες  $\{x, y\}$  των δρόμων στους οποίους βρίσκονται οι πελάτες είναι οι:

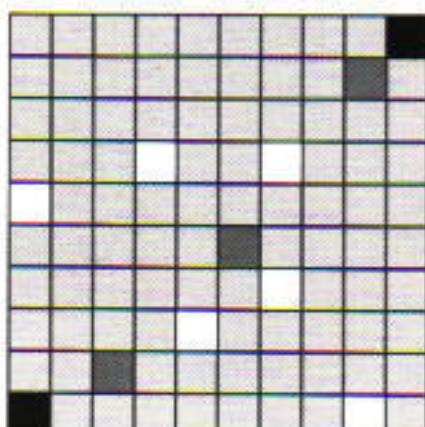
```
customers = {{2, 3}, {5, 6}, {9, 9}};
ενώ οι χιονοστιβάδες είναι στους
snowdrifts = {{3, 5}, {4, 7}, {1, 9}, {7,
4}, {7, 7}, {6, 1}};
```

Υπάρχουν 100 δρόμοι σε μια περιοχή  $10 \times 10$ . Θέτω 0 στις θέσεις του πίνακα που αντιπροσωπεύουν το αγρόκτημα και την κωμόπολη. Σε όλους τους δρόμους των πελατών έχει αντιστοιχηθεί η τιμή 1, ενώ στις χιονοστιβάδες η τιμή 3. Ο-λοι οι υπόλοιποι δρόμοι, οι οποίοι είναι ανοικτοί, έχουν τιμή 2. Όλα αυτά επιτυγχάνονται με την εξής σειρά εντολών του *Mathematica*:

```
n = 10;
road[1, 1] = 0;
road[n, n] = 0;
road[x_, y_] := 1 /;
MemberQ[customers, {x, y}]

(*Αυτή η τελευταία εντολή σημαίνει: αντιστοίχισε
το 1 στην road[x, y] εφόσον το {x, y} είναι στοιχείο της λίστας των πελατών*)

road[x_, y_] := 3 /;
MemberQ[snowdrifts, {x, y}]
```



Υπόμνημα δρόμων: μαύρο = αγρόκτημα και κωμόπολη, άσπρο = χιονοστιβάδα, σκούρο γκρι = πελάτες, ανοιχτό γκρι = όλοι οι άλλοι.

```
road[x_, y_] := 2;
CreamCounty = Array[road, {n, n}];
```

Μπορούμε να δούμε το χάρτη της Cream County με τη βοήθεια της *ListDensityPlot*.

```
CCMap = ListDensityPlot[CreamCounty,
Frame -> False]
```

## Η διαδρομή του γάλακτος

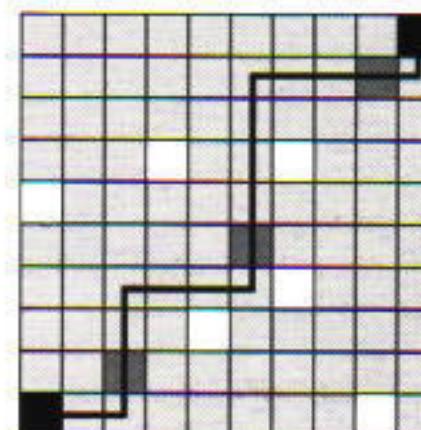
Μια διαδρομή γάλακτος είναι ένας κατάλογος δρόμων που οδηγούν από το αγρόκτημα  $(1, 1)$  στην κωμόπολη  $(10, 10)$ . Για παράδειγμα:

```
milkRoute = {{1, 1}, {3, 1}, {3, 4}, {6, 4},
{6, 9}, {10, 9}, {10, 10}};
```

Αφαιρούμε 0,5 από κάθε θέση δρόμου,

```
milkRoute - .5
```

```
{(0.5, 0.5), (2.5, 0.5), (2.5, 3.5), (5.5,
3.5), (5.5, 8.5), (9.5, 8.5), (9.5, 9.5)}
```



και σχεδιάζουμε μια ελαφρά έντονη γραμμή που διέρχεται από τα κέντρα των δρόμων που ανήκουν στη διαδρομή γάλακτος.

```
Show[CCMap, Graphics[{Thickness[.02],
Line[milkRoute - .5]}]]
```

Όλα αυτά μας οδηγούν στο εξής πρόβλημα που, όπως μαντέψατε, θα είναι η πρόκλησή μας στο παρόν άρθρο.

## ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 9

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το πλήθος των διαδρομών από το αγρόκτημα στην κωμόπολη, οι οποίες πλησιάζουν πάντα προς την κωμόπολη, περνούν από όλους τους πελάτες και δεν περνούν από χιονοστιβάδα. Δύο διαδρομές θεωρούνται διαφορετικές όταν διαφέρουν έστω και σ' ένα δρόμο. Το πρόγραμμά σας θα είναι, φυσικά, σε θέση να αντιμετωπίσει οποιοδήποτε οδικό σύστημα και κάθε σύνολο πελατών και χιονοστιβάδων.

## Λύση του ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 7

Το ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 7 είχε τεθεί πριν από δύο τεύχη. Με δεδομένη μια ακολουθία  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ακεραίων, μήκους  $n$ , βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο (τάξης  $n$ ) που θα βρίσκει μια υπακολουθία  $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_H\}$  διαδοχικών όρων με το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα. Ο αλγόριθμος να δίνει τους δείκτες του αρχικού και του τελικού όρου,  $L$  και  $H$ , και το μέγιστο άθροισμα  $\sum_{i=L}^H x_i$ .

Ο Richard Rice (rrice@aw.sgi.com) έστειλε την «αφρόκρεμα» των λύσεων. Η λύση του βασίζεται σ'έναν εντυπωσιακά απλό αλγόριθμο τάξης  $n$ . Ξεκινά και αθροίζει διαδοχικούς όρους αρχίζοντας από τον πρώτο θετικό όρο (ας πούμε στο  $j$ ) και εφόσον το αθροίσμα παραμένει θετικό εξακολουθεί να προσθέτει όρους. Κρατά το μεγαλύτερο μερικό αθροίσμα στη μεταβλητή MaxSoFar. Από τη στιγμή που το αθροίσμα γίνει αρνητικό, (ας πούμε, στον όρο  $k$ ) επαναλαμβάνει τη διαδικασία με σημείο έναρξης τον πρώτο μετά τον  $k$  θετικό όρο. Συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο, συγκρίνοντας τα μερικά αθροίσματα με τη MaxSoFar. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε ως σημείο έναρξης οποιοδήποτε όρο μεταξύ του  $j+1$  και του  $k$  (αναλογιστείτε το ζήτημα). Ιδού η λύση του Rice στο Mathematica:

```
cremeDeLaCreme[x_] := Module[
{SubSum = 0, MaxSoFar = 0, n = Length[x],
 L = 0, low = 0, high = 0, H, term},
 Do[term = x[[H]];
 If[SubSum <= 0, SubSum = term; L = H,
 SubSum += term];
 If[SubSum > MaxSoFar,
 MaxSoFar = SubSum; low = L; high =
 H], {H, 1, n}];
 {MaxSoFar, {low, high}}]
```

Ας εφαρμόσουμε τη λύση αυτή σε λίστες κερδών που αποτελούνται από τυχαιούς αριθμούς μεταξύ του -50 και του 50 και έχουν μήκη από 100 έως 1.000.000 (σε διαστή-

ματα δυνάμεων του 10).

```
Table[winnings = Table[Random[Integer,
{(-50), 50}], {10^i}];
{10^i, Timing[cremeDeLaCreme[winnings]]},
{i, 2, 6}] // MatrixForm
```

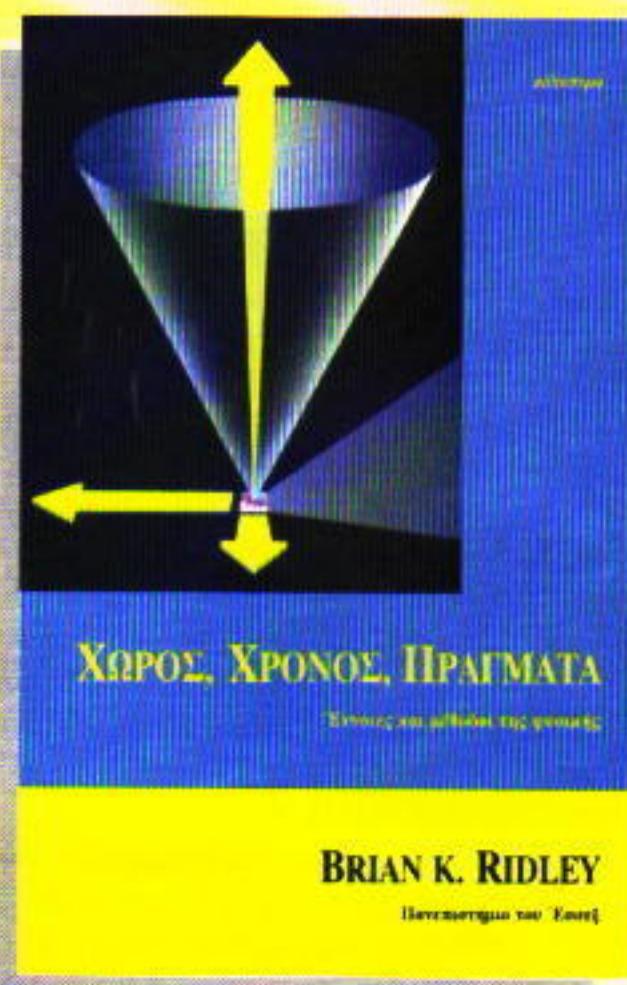
100	{0.05 Second, {290, {54, 91}}}
1000	{0.11 Second, {1117, {635, 905}}}
10000	{0.99 Second, {3049, {5174, 6498}}}
100000	{9.56 Second, {6335, {40966, 59940}}}
1000000	{95.84 Second, {15795, {313633, 367146}}}

Καθόλου άσχημα. Χρειάστηκε 1/10 περίπου του δευτερόλεπτου για να λύσει το πρόβλημα όταν  $n = 1.000$ . Θυμηθείτε την εκτίμησή μας ότι με το Mathematica ο κυβικός αλγόριθμος θα χρειαζόταν 4,5 ώρες για να το λύσει.

Παρατηρήστε επίσης ότι όταν το  $n$  αυξάνει κατά παράγοντα 10, τότε και ο χρόνος αυξάνει κατά παράγοντα 10, και επομένως ο αλγόριθμος είναι γραμμικός. Όταν  $n = 1.000.000$ , το γραμμικό μοντέλο χρειάζεται περίπου ενάμισι λεπτό, ενώ το κυβικό (η χειρότερη περίπτωση) θα απαιτούσε πάνω από 50 χρόνια σ'έναν υπερυπολογιστή Cray. Οι καλοί αλγόριθμοι (όπως και η καλή τροφή) κάνουν τη διαφορά.

## Και τέλος...

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Λύσεις των παλαιότερων προβλημάτων μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση <http://usaco.uwp.edu/cowculations>. ◻



ΧΩΡΟΣ, ΧΡΟΝΟΣ, ΠΡΑΓΜΑΤΑ

Σύνοψη και απόψεις των φυσικών

BRIAN K. RIDLEY

Πανεπιστήμιο του Εαυτού

Σελ.: 248, 5.500 δρχ.

## ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

**Brian Ridley**

**ΧΩΡΟΣ, ΧΡΟΝΟΣ, ΠΡΑΓΜΑΤΑ**

Έννοιες και μέθοδοι της φυσικής

- «Επιτυγχάνει ό,τι ακριβώς ο Arthur Eddington το 1928 με το *The Nature of the Physical World*.»  
—The New Scientist
- «Εξαιρετικό βιβλίο... Η σαφήνεια του ύφους κάνει πραγματικά απολαυστική την ανάγνωση.»  
—Physics Education
- «Πρέπει να το προτείνουμε σε όσους επιθυμούν να εντρυφήσουν στην επιστήμη της φυσικής.»  
—American Journal of Physics

## Εκδόσεις Κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785