

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 2

1.700 ΔΡΧ.

Τυχερά παιγνίδια και πιθανότητες



- Ο κομήτης του *Halley* και οι νόμοι του *Kepler*
- Δυναμικό και βαρυτικά πεδία
- Επίπεδη τοπολογία και οδικά δίκτυα
- Ακουστικοί κυματοδηγοί
- Η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου
- Μια πρώιμη προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου
- Η επιστήμη των ήχων στις ωκεάνιες έρευνες
- Περί λαμπτήρων πυρακτώσεως



Διαρεά της Lila Acheson Wallace © 1997, Διοικητικό συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουασιγκτον.

Jarama II (1982), του Frank Stella

TΟ JARAMA ΙΙ ΕΧΕΙ ΠΑΡΕΙ ΤΟ ΟΝΟΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΜΩΝΥΜΗ πίστα αγώνων αυτοκινήτων που βρίσκεται έξω από τη Μαδρίτη, στην Ισπανία. Το έργο ανήκει στη σειρά «Σιρκούι» που δημιούργησε ο αμερικανός καλλιτέχνης (και φανατικός των αγώνων ταχύτητας) Frank Stella. Κάθε κομμάτι της σειράς φέρει το όνομα μιας διαφορετικής πίστας αγώνων. Όπως και το γλυπτό, μια πίστα αγώνων μπορεί να έχει μια περίπλοκη επικαλυπτόμενη

δομή. Ωστόσο, οι διασταυρώσεις μπορεί να δημιουργήσουν συβαρά προβλήματα στους σχεδιαστές μιας πίστας αγώνων —καθώς και στους οδηγούς που πρέπει να τις διασχίσουν. Οι διασταυρώσεις ενδιαφέρουν εξίσου και τους σχεδιαστές επίπεδων γραφημάτων. Ανακαλύψτε σε αυτό το τεύχος του Quantum τα περιπλοκα σχήματα που αναδύονται μέσα από τέτοια γραφήματα. Το σχετικό άρθρο θα το βρείτε στη σελ. 12.

QUANTUM

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Η αρετή της αποταμίευσης δεν φαίνεται να συγκινεί ιδιαίτερα το γουρουνάκι του εξωφύλλου μας. Μάλλον ενθουσιάζεται περισσότερο από την προοπτική ενός εύκολου κέρδους, γι' αυτό και φαίνεται διατεθειμένο να παιξει τα πάντα κορόνα - γράμματα.

Για να κατανοήσετε το λόγο που ο τετράποδος φίλος μας είναι πρόθυμος να στοιχηματίσει ακόμη και όλο το αγρόκτημα στο στριφογύρισμα ενός κέρματος, γυρίστε στη σελίδα 29.

ΑΡΘΡΑ

- 4 Πεδία βαρύτητας και ταχύτητες διαφυγής
Το πλανητικό δίχτυ**
V. Mozhayev
- 12 Επίπεδη τοπολογία
Επίπεδα γραφήματα**
A.Y. Olshansky
- 22 Ακουστικοί κυματοδηγοί
Ωκεάνια τηλέφωνα**
A. Varlamov και A. Malyarovsky
- 29 Πιθανότητες και κέρδη
Ο χαρτοπαίκτης, ο φιλότεχνος και η Αγία Πετρούπολη**
Leon Taylor
- 52 Ποσειδώνεια ακουστική
Κύματα υπό τα κύματα**
L. Brekhovskikh και V. Kurterov
- 56 Πλανήτες, κομήτες και άλλα τινά
Οι καρποί του αγώνα του Kepler**
B.E. Belonuchkin

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Εκλαϊκευση της εξειδικευμένης γνώσης
- 11 Σπαζοκεφαλιές**
- 19 Στο μαυροπίνακα I**
Λαμπτήρες πυρακτώσεως
- 27 Στο μαυροπίνακα II**
Με κανόνα και διαβήτη
- 36 Καθειδοσκόπιο**
Μοριακή αναμέτρηση
- 38 Στο εργαστήριο**
Υπερβολική τάση
- 40 Στα πεδία της φυσικής**
Τοπικά πεδία
- 44 Πώς λύνεται;**
- 45 Gradus ad Parnassum**
- 52 Σκόπελοι**
Mια απλή ερώτηση
- 61 Αναδρομές**
Οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη
- 63 Απαντήσεις, Υποδείξεις
και Λύσεις**
- 70 Ιππολογισμοί**

Εκθαίκευση της εξειδικευμένης γνώσης

«Οι φυσικοί, όπως οι καλλιτέχνες, ισως δεν μπορούν πάντοτε να γίνονται κατανοητοί από το ευρύ κοινό, αλλά το να προσπαθούν από μόνοι τους να γίνονται ακατανόητοι είναι γελοίο.»

—Steven Weinberg, βραβείο Νόμπελ φυσικής

HΠΡΟΣΦΑΤΗ ΣΦΟΔΡΗ ΔΗΜΟΣΙΑ αντιπαράθεση για την κλιματική αλλαγή παρέχει στους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων μια πρώτης τάξεως ευκαιρία να διερευνήσουν τον ανιγματικό ρόλο της επιστήμης στις σύγχρονες κοινωνίες. Ενώ οι πρόεδροι και οι πρωθυπουργοί ενημερώνονται και για τις τελευταίες εξελίξεις σχετικά με το φαινόμενο του θερμοκηπίου και την επίδρασή του στις παγκόμιες κλιματολογικές συνθήκες, ελάχιστοι από τους απλούς πολίτες έχουν δει έστω κι ένα ίχνος από το βουνό των ντοκουμέντων που παρουσιάστηκαν στη Διακυβερνητική Διάσκεψη για το Περιβάλλον, στο Κίότο της Ιαπωνίας. Μόνο μια ιοχνή μειοψηφία ανησυχούντων μπόρεσε να αποτιμήσει νηφάλια τα αντικρουόμενα επιχειρήματα σε έγκυρα έντυπα όπως τα περιοδικά *Science* και *Nature*.

Τελευταίες σφυγμομετρήσεις στις ΗΠΑ και την Ευρώπη δείχνουν πως, παρά την απουσία προσωπικής μελέτης και την ανεπάρκεια της βασικής εκπαίδευσης σε θέματα επιστήμης, οι περισσότεροι πολίτες έχουν αντιληφθεί πως η υπερθέρμανση του πλανήτη τους αφορά άμεσα και δεν είναι αποκύημα της φαντασίας, για παράδειγμα, των χιλιαστών. Ως εκ τούτου ο Πρόεδρος Κλίντον, προκειμένου να βοηθήσει τους ουμπατριώτες του να μην μπλέκονται με τεχνικές λεπτομέρειες, επιστράτευσε για την αντιμετώπιση του θέματος εκατό δημοφιλείς αστέρες της τηλεόρασης. Πώς ήταν δυνατόν, όμως, άνθρωποι χωρίς καν στοιχειώδη γνώση της επιστήμης του κλί-

ματος να αναγορεύονται σε δικαστές και ενόρκους και να αποφαίνονται για το πο φλέγον ζήτημα που αντιμετώπισε ποτέ η ανθρωπότητα;

Καθώς η επιστήμη είναι στις μέρες μας πανταχού παρούσα, έχει ξεφύγει από τα στενά όρια του εργαστηρίου και από την αποκλειστική δικαιοδοσία του ειδικά καταρτισμένου προσωπικού της. Εντάχθηκε πα στις κοινές δημόσιες συζητήσεις αναλαμβάνοντας νέους κοινωνικούς ρόλους, πέρα από αυτόν της αυτοτηρής τεχνικής εξερεύνησης της φύσης. Στο σαλόνι μας, στο μπαρ ή στο γραφείο η επιστήμη —ή και η αμφιοβήτησή της— επιστρατεύεται προκειμένου να δικαιώσει ηθικές αξίες ή ακόμη και τις καθημερινές ασχολίες. Οι άνθρωποι αυτοπροσδιορίζονται πλέον σε σχέση με την επιστήμη, χρησιμοποιούν την επιστημονική γνώση για να επιβεβαιώσουν την ταυτότητά τους και να δώσουν μια συνεκτική ερμηνεία του κόσμου.

Για παράδειγμα, επίδοξοι περιβαλλοντολόγοι, ανίκανοι να διακρίνουν την κλίμακα Φαρενάιτ από την κλίμακα Κελσίου, εντρυφούν με ενθουσιασμό στην επιστήμη της κλιματικής αλλαγής —τουλάχιστον όσο η ζυγαριά των επιστημονικών ενδείξεων κλίνει προς το μέρος τους. Από την άλλη, το ίδιο επιπόλαια, οι βιομήχανοι που αντιτίθενται σ' αυτούς επινοούν περισπούδαστες θεωρίες περί συνωμοσίας, αγνοώντας προκλητικά ένα συνεχώς αυξανόμενο όγκο δεδομένων που αντιβαίνουν στις επιδιώξεις τους. Αν αλλάξουμε θέμα και μιλήσουμε π.χ. για τη χρήση της πυρηνικής ενέργειας

ή για την ακτινοβόληση των τροφίμων, οι δυο πλευρές θα διασταυρώσουν και πάλι τα ξίφη τους χωρίς πολλή σκέψη.

Μια επιοκόπηση αυτής της εμφανώς συγκεχυμένης κατάστασης θα μας επέβαλλε να καταλογίσουμε ευθύνες στους άφρονες πολιτικούς, οι οποίοι ακόμη μία φορά υπονομεύουν την επιστήμη αποδεχόμενοι την είσοδο ενός ελλιπώς πληροφορημένου κοινού στη δημόσια αντιπαράθεση. Η αλλαγή του κλίματος καταγράφεται ως ένα ακόμη επεισόδιο της ολέθριας συγκρουσης ανάμεσα στην επιστήμη και την άφρονα, επιφανειακή διερεύνηση, με θύμα πάντοτε την αντικειμενικότητα και την ενδελέχεια. Το συμπέρασμα απ' αυτή την επισκόπηση είναι ότι η επιστήμη, και η ανθρωπότητα εν γένει, αποδυναμώνεται.

Μια άλλη άποψη αναγνωρίζει ότι η ευρύτερη κοινωνιαστικοποίεται κάποτε ορισμένους τύπους εξειδικευμένης επιστημονικής γνώσης. Για παράδειγμα, σε μια προσπάθεια να κατανοήσει καλύτερα τις ανησυχοστικές εμπειρίες της αστικοποίησης και του εκβιομηχανισμού κατά το 19ο αιώνα, ο πολύς κόσμος ήρθε αποσπαστικά σε επαφή με στοιχεία που αναδύονταν στα νέα πεδία των οικονομικών και της ψυχολογίας. Υιοθετώντας οργανωτικές κατηγορίες και ορολογία, οι άνθρωποι ήταν πα σε θέση να προσεγγίσουν φαινόμενα όπως η ανεργία και η διανοητική υγεία καλύτερα.

Αυτή η πρώτη αλληλεπίδραση προετοίμασε το έδαφος για μια διαλεκτική σχέση ανάμεσα στους ειδικούς αυτών των επιστημονικών κλάδων και

το ευρύτερο κοινό. Αν και η εν λόγω διαδικασία δεν έχει σε καμιά περίπτωση ολοκληρώθει, όλο και περισσότεροι κοινωνικοί επιστήμονες αρχίζουν να συνειδητοποιούν ότι δεν τους επιτρέπεται να περιχαρακωθούν μακριά από τις επιδράσεις του περιβάλλοντός τους από φόβο μήπως πληγεί η αντικείμενη κότητά τους από την έκθεση στην «κοινή θέα». Αυτό το τετριμένο επιχείρημα καταντά ολοένα και πιο αστήρικτο τη στιγμή που οι επιφανέστεροι ερευνητές συνδέονται προσωπικά με τους ανθρώπους - αντικείμενα των ερευνών τους. Αυτή η νέα μορφή παραγωγής γνώσης έχει συχνά το χαρακτήρα διελκυστίνδας. Οι ανακαλύψεις των ειδικών συνήθως δοκιμάζονται πάνω στην κοινή εμπειρία, και η εν λόγω διαδικασία επιβεβαίωσης ανατροφοδοτεί διαρκώς την έρευνα.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε αυτή την οικείωση του απλού ανθρώπου με την επιστήμη ως την πιο πρόσφατη φάση μιας διαδικασίας πνευματικής ωρίμανσης 400 χρόνων. Στη διάρκεια αυτής της περιόδου οι περιβαλλοντικές και φυσικές επιστήμες έχουν «διαχυθεί» — καλώς ή κακώς — σε όλους σχεδόν τους τομείς της σύγχρονης ζωής. Οι πρόσφατοι διαξιφίσμοι για θέματα όπως η υπερθέρμανση του πλανήτη υποδηλώνουν ότι το κοινό επιχειρεί να προσεγγίσει αυτή τη γνώση, έστω κι αν το κάνει αδέξια και, μερικές φορές, με πολιτική σκοπιμότητα. Τέτοιες εξελίξεις σηματοδοτούν την άμεση ανάγκη όσοι διδάσκουν την επιστήμη να την κάνουν περισσότερο προστή, και μέσω αυτής της διαδικασίας να εδραιώσουν το ρόλο της στη ζωή των απλών ανθρώπων.

Είναι απαραίτητο, βεβαίως, να μη θυσιαστεί η αυστηρότητα στην επιδιωξή μας για εκλαίκευση της εξειδικευμένης γνώσης. Επιβάλλεται επιτακτικά, όμως, οι επιστήμονες και οι διδάσκοντες την επιστήμη να συνειδητοποιήσουν την ολοένα κεντρικότερη θέση της ειδικευούσας τους και να βρουν λειτουργικές μεθόδους μετάδοσης της ειδικής γνώσης τους στο ευρύ κοινό.

—Maurie J. Cohen

O Maurie J. Cohen είναι επικεφαλής ερευνητής στο Κέντρο για το Περιβάλλον, την Ηθική και την Κοινωνία, στο Mansfield College του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη συμπράξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής NSTA

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χαρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Συρμουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρονξφίλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης

Kenneth L. Roberts

Αντεπιτέλλων αρχισυντάκτης

Mike Donaldson

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Sergey Ivanov

Σύμβουλος σύνταξης

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Irina Oleynik, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιφορμή

Bernard V. Khouri, Ανώτερος εκπλεοτικός υπάλληλος, AAPT

Linda Rosen, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιάνο

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λόκει Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητής Μαθηματικών, Λοκείο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρις, Φλόριντα

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης / Διευθυντής

Άλεκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου - μαθηματικός,

Κώστας Σκανδάλης - μαθηματικός, Μιχάλης Λάρπρου - μαθηματικός, Θεοφάνης Κοντός - φυσικός,

Θεόδωρος Πιερράτος - φυσικός, Αθηνά Τσαγκογέωργα - φυσικός, Αγγελική Ηλία - φυσικός,

Γιώργος Κατοιλιέρης - φυσικός και Άλεκος Μάραλης - φυσικός

Γλωσσική επμέλεια

Σπύρος Καράμπαλης

Τυποποιητική επμέλεια

Θανάσης Ντούσης

Υπεύθυνη λογιστήριου

Μαρία Μάραλη

Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης και Εδικός συνεργάτης Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάρπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός εποπτής Α' βαθμίδας, Ιόνια Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδοσίης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεοία, σελιδοποίηση

Αβ. Μαχαιρίδης

Φίλμ, μοντάζ

Γ. Κεραμάς

Εκτύπωση

N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία

Θ. Αρχοντουλάκης

To Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο

Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση συμφωνά με το νόμο: Άλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Άλ. Μάραλης.

Διάφρμοισις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,

Ιστόρων 10 και Δαφνούπλι, 114 71 Αθήνα,

τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.

Βιβλιοπωλείο: Νεα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49),

105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απογορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάβοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια των εκδότων.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

Ετήσια συνδρομή: 9.000 δρχ., για ιδιώτες, 16.000 δρχ., για βιβλιοθήκες, μέρματα και οργανισμούς.

Τιμή παλαιόν τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

Το πλανητικό δίχτυ

Μελετώντας το δυναμικό σε βαρυτικά πεδία

V. Mozhayev

ΒΑΡΥΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ Η ΑΣΘΕΝΕΣΤΕΡΗ δύναμη της φύσης, ωστόσο, αποτελεί τη δύναμη που κυριαρχεί συνήθως στο μακρόκορμο. Ας εξετάσουμε τη βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ σωμάτων τα οποία είναι ακίνητα ή κινούνται αργά (συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός). Υπό αυτές τις συνθήκες ισχύει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης (ή νόμος της βαρύτητας) του Νεύτωνα. Σύμφωνα μ' αυτόν, δύο οποιαδήποτε υλικά σημεία (δηλαδή, σώματα των οποίων οι γραμμικές διαστάσεις είναι πολύ μικρότερες από τη μεταξύ τους απόσταση), με μάζες m_1 και m_2 , έλκονται αμοιβαία με δύναμη F η οποία είναι ανάλογη του γινομένου των δύο μαζών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Η σταθερά αναλογίας G είναι γνωστή ως σταθερά της παγκόσμιας έλξης κι έχει την τιμή $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$.

Τα νευτώνεια πεδία βαρύτητας — κανοποιούν την αρχή της υπέρθεσης — η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των βαρυτικών δυνάμεων που ακούν πάνω του όλα τα υπόλοιπα σωματίδια — δυνάμεις ανεξάρτητες η μια από την άλλη.

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης υποδεικνύει ότι το βαρυτικό πεδίο πρ-

έρχεται από δυναμικό, κάτι που οημαίνει πως όταν ένα σώμα κινείται κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής, επιστρέφοντας τελικά στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε, το πεδίο δεν παράγει έργο. Η ιδιότητα αυτή του βαρυτικού πεδίου έχει ως συνέπεια η δύναμη βαρύτητας F που δρα στο υλικό σωματίδιο και η δυναμική ενέργεια U του σωματιδίου να συνδέονται μεταξύ τους με μια σχέση η οποία, στην περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού βαρυτικού πεδίου, έχει τη μορφή

$$F_r = -\frac{dU}{dR},$$

όπου F_r είναι η ακτινική συνιστώσα της δύναμης. Στη συγκεκριμένα παραδείγματα κίνησης σε πεδία με σφαιρική συμμετρία,

Πρόβλημα 1. (α) Υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης, υποθέτοντας ότι η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται στο άπειρο. Θεωρήστε τη Γη ως ορογενή σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ . Μελετήστε τις περιπτώσεις που το σώμα βρίσκεται στο εσωτερικό της Γης αλλά και έξω από αυτήν. (β) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να ανέλθει ένα μικρό σώμα μάζας m αν το εκτοξεύσουμε από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα (v_ψ) τόση όση θα είχε αν περιφερόταν σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη και σε αμελητέο

ύψος από την επιφάνειά της;

Λύση. (α) Θεωρούμε κατ' αρχάς την περίπτωση που το σώμα μάζας m βρίσκεται σε τυχαία απόσταση r από το κέντρο της Γης, και $r > R_\Gamma$. Τότε, στο σώμα ασκείται η δύναμη της βαρύτητας $F = -GmM_\Gamma/r^2$, με κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης. Από τον τύπο $F = -dU/dr$, όπου U είναι η δυναμική ενέργεια του σώματος μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, έχουμε

$$U = - \int F dr + C_1,$$

όπου C_1 είναι μια σταθερά την τιμή της οποίας θα προσδιορίσουμε από τη ουνοριακή συνθήκη $U(\infty) = 0$. Αντικαθιστώντας τη δύναμη από το νόμο της παγκόσμιας έλξης και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$U(r) = -G \frac{m M_\Gamma}{r} + C_1.$$

Είναι φανερό ότι $C_1 = 0$.

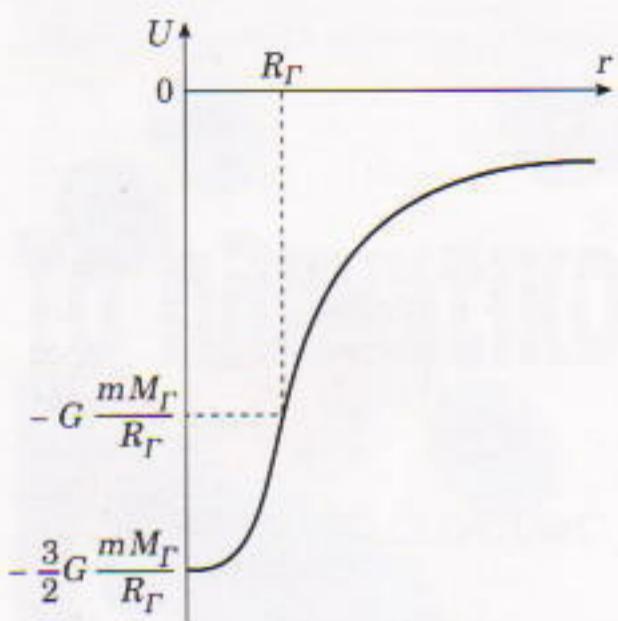
Ας έρθουμε τώρα στην περίπτωση όπου $r < R_\Gamma$. Η δύναμη της βαρύτητας στο εσωτερικό της Γης δίνεται από τον τύπο $F = -GmM_\Gamma r/R_\Gamma^3$ (αποδείξτε τον). Επομένως,

$$U(r) = \int \frac{GmM_\Gamma r dr}{R_\Gamma^3} + C_2.$$

Η σταθερά C_2 μπορεί να προσδιορίστει από τη ουνοριακή συνθήκη $U(R_\Gamma) = -GmM_\Gamma/R_\Gamma$.

Υστερα από λίγες πράξεις προκύπτει ότι





Σχήμα 1

$$C_2 = -\frac{3GM_\Gamma}{2R_\Gamma}.$$

Επομένως,

$$U(r) = G \frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_\Gamma} \right)^2 - \frac{3}{2} \right].$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $U(r)$ φαίνεται στο Σχήμα 1. Προφανώς, μια παρόμοια συνάρτηση θα περιγράφει όχι μόνο το βαρυτικό πεδίο της Γης αλλά και κάθε πεδίο βαρύτητας που δημιουργείται από μια ομογενή σφαίρα.

Συνήθως η εξάρτηση που εμφανίζεται στο Σχήμα 1 αποκαλείται «πηγάδι δυναμικού». Το όνομα σχετίζεται με το γεγονός ότι αν η ολική ενέργεια ενός σώματος μέσα σ' ένα τέτοιο πεδίο είναι αρνητική, το σώμα βρίσκεται «παγιδευμένο» μέσα στο πηγάδι· αυτό σημαίνει ότι το σώμα δεν μπορεί να απομακρυνθεί σε άπειρη απόσταση από τη Γη, κι επομένως η κίνησή του είναι περατωμένη. Η μέγιστη δυνατή απομάκρυνση του σώματος προσδιορίζεται από τα τοιχώματα του πηγαδιού πάνω στα οποία η ταχύτητά του μηδενίζεται και το σώμα επιστρέφει στη Γη.

(β) Για συγκεκριμένη αρχική ταχύτητα v_0 , το σώμα θα απομακρυνθεί στη μέγιστη δυνατή απόσταση H από τη Γη εάν η διεύθυνση της ταχύτητάς του είναι ακτινική. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση αυτού του απώτατου σημείου μέσω της αρχής διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma} = - G \frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma + H},$$

από την οποία προκύπτει

$$H = \frac{R_\Gamma}{2GM_\Gamma / (R_\Gamma v_0^2) - 1}.$$

Δεδομένου ότι η ταχύτητα με την οποία θα περιφερόταν το σώμα γύρω από τη Γη (v_φ , τροχιακή ταχύτητα) σε μηδενικό υψόμετρο ισούται με

$$v_\varphi = \sqrt{GM_\Gamma / R_\Gamma},$$

από την προηγούμενη σχέση παρανομε

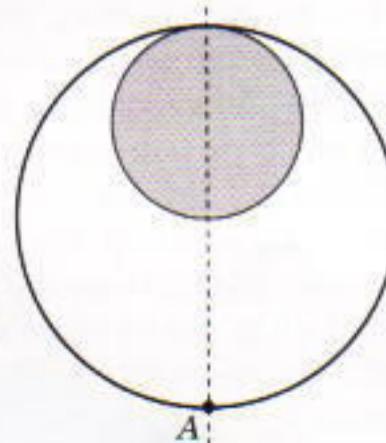
$$H = R_\Gamma.$$

Πρόβλημα 2. Η ταχύτητα διαφυγής από έναν πλανήτη είναι $v = 12$ km/s. Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας διαφυγής από έναν παρόμοιο πλανήτη στον οποίο όμως υπάρχει μια κοιλότητα όπου η ύλη έχει διπλάσια πυκνότητα από την ύλη του υπόλοιπου πλανήτη (δηλαδή, ο λόγος των δύο πυκνοτήτων είναι $\beta = 2$) (Σχήμα 2). Ο λόγος της ακτίνας της κοιλότητας προς την ακτίνα του πλανήτη είναι $a = 1/2$.

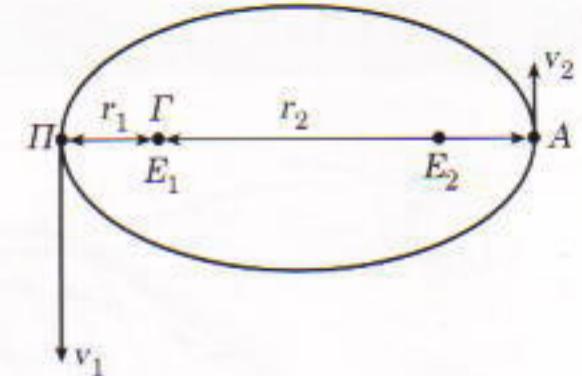
Λύση. Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από έναν πλανήτη αντιστοιχεί στην ταχύτητα που μηδενίζει την ολική ενέργεια του σώματος. Για έναν ομογενή πλανήτη μάζας M και ακτίνας R , η συνθήκη αυτή οδηγεί στην εξισωση

$$\frac{v^2}{2} - G \frac{M}{R} = 0.$$

Στην περίπτωση ενός ανομοιογενούς πλανήτη στον οποίο υπάρχει μια κοιλότητα με πυκνότητα ύλης



Σχήμα 2



Σχήμα 3

$$\rho = \frac{3\beta M}{4\pi R^3},$$

θεωρούμε την κοιλότητα αυτή ως την υπέρθεση δύο περιοχών —η μια με πυκνότητα ίση με την κανονική πυκνότητα του πλανήτη

$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

και η άλλη με πυκνότητα

$$\rho_1 = \frac{3(\beta - 1)M}{4\pi R^3}.$$

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος στην επιφάνεια του εν λόγω πλανήτη ισούται με το άθροισμα των δυναμικών ενέργειών μέσα στα πεδία βαρύτητας ενός ομογενούς πλανήτη πυκνότητας ρ_0 και μιας σφαίρας με πυκνότητα ρ_1 και ακτίνα ίση με την ακτίνα της κοιλότητας.

Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας διαφυγής θα προκύπτει για εκείνο το σημείο της επιφάνειας του πλανήτη στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη, κατ' απόλυτο τιμή (το σημείο A στο Σχήμα 2). Αν ονομάσουμε την ταχύτητα διαφυγής σ' αυτό το σημείο v_1 , τότε η συνθήκη μηδενισμού της ολικής ενέργειας του σώματος θα είναι

$$\frac{v_1^2}{2} - G \frac{M}{R} - G \frac{a^3(\beta - 1)M}{(a + 1)R} = 0,$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές των a και β , έχουμε

$$v_1^2 - \frac{13}{6} G \frac{M}{R} = v_1^2 - \frac{13}{12} v^2 = 0.$$

Επομένως,

$$v_1 = \sqrt{\frac{13}{12}} v \equiv 12,5 \text{ km/s.}$$

Πρόβλημα 3. Υπολογίστε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς που διαγράφει ένας δορυφόρος καθώς περιφέρεται γύρω από τη Γη έχοντας ολική ενέργεια (κινητική συν δυναμική) ίση με E .

Λύση. Έστω ότι η Γη βρίσκεται στην αριστερή εστία E_1 της ελλειπτικής τροχιάς που αναπαριστάται στο Σχήμα 3. Σ' αυτή την περίπτωση το σημείο A (απόγειο) αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο υψόμετρο του δορυφόρου ενώ το σημείο P (περίγειο) αντιστοιχεί στο χαμηλότερο υψόμετρο. Συμβολίζουμε το μήκος του τμήματος PE_1 με r_1 και το μήκος E_1A με r_2 , οπότε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα, a , προκύπτει από τη σχέση $2a = r_1 + r_2$.

Για την ολική ενέργεια του δορυφόρου στο σημείο P μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM_r}{r_1} = E,$$

όπου m είναι η μάζα του δορυφόρου, v_1 το μέτρο της ταχύτητάς του και M_r η μάζα της Γης. Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο νόμο του Kepler (νόμος των εμβαδών), σύμφωνα με τον οποίο το διάνυσμα θέσης που συνδέει τη Γη και το δορυφόρο διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσες χρονικές περιόδους. Από το νόμο αυτόν προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση για τα σημεία A και P της τροχιάς:

$$v_1 r_1 = v_2 r_2.$$

Ας ονομάσουμε το παραπάνω γινόμενο L . Εκφράζοντας τη v_1 σε σχέση με το L και αντικαθιστώντας την στην εξίσωση της ολικής ενέργειας, προκύπτει:

$$r_1^2 + G \frac{mM_r}{E} r_1 - \frac{mL^2}{2E} = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες, οι οποίες αντιστοιχούν στα σημεία A και P , διότι ο συντελεστής τού r_1 και ο σταθερός όρος της εξίσωσης είναι ίδιοι και για τα δύο σημεία. Έτσι παίρνουμε

$$r_1 = -G \frac{mM_r}{2E} - \sqrt{\left(G \frac{mM_r}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}},$$

$$r_2 = -G \frac{mM_r}{2E} + \sqrt{\left(G \frac{mM_r}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}}.$$

Προκύπτει αμέσως ότι ο μεγάλος ημιάξονας α της ελλειπτικής τροχιάς του δορυφόρου δίνεται από τη σχέση

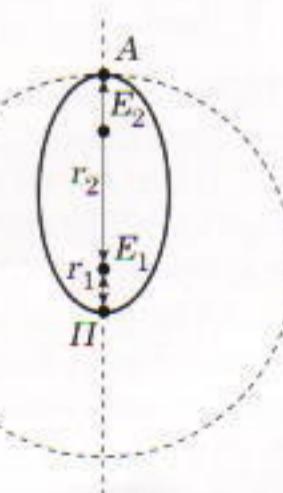
$$2a = r_1 + r_2 = -G \frac{mM_r}{E}.$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ολική ενέργεια E έχει αρνητική τιμή, όπως πρέπει να συμβαίνει πάντοτε όταν η κίνηση είναι περατωμένη. (Μην ξεχνάτε ότι εξ αρχής θεωρήσαμε ότι η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται στο άπειρο.)

Ποια είναι η φυσική σημασία αυτής της εξίσωσης; Για δεδομένη (σταθερή) ολική ενέργεια, ένας δορυφόρος μπορεί να διαγράψει διάφορες ελλειπτικές τροχιές, ωστόσο όλες πρέπει να έχουν τον ίδιο μεγάλο ημιάξονα. Αν γνωρίζουμε το μέγεθος αυτού του ημιάξονα, μπορούμε να υπολογίσουμε την ολική ενέργεια του δορυφόρου. Φυσικά, η παραπάνω σχέση δεν ισχύει μόνο για τους δορυφόρους της Γης αλλά και για τις τροχιές των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος και των δορυφόρων τους, θεωρώντας ότι οι δορυφόροι (φυσικοί ή τεχνητοί) έχουν μάζες πολύ μικρότερες από τη μάζα του σώματος γύρω από το οποίο κινούνται.

Πρόβλημα 4. Ένα διαστημικό σκάφος κινείται γύρω από τη Γη διαγράφοντας ελλειπτική τροχιά της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας ισούται με $2a$. Το κέντρο της Γης βρίσκεται στην εστία E_1 (Σχήμα 4). Τη στιγμή που το σκάφος διέρχεται από το ποι απομακρυσμένο σημείο της τροχιάς του, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση r_2 από το κέντρο της Γης, πυροδοτούνται οι πρωθητικοί του πύραυλοι για μικρό χρονικό διάστημα. Με ποιο ρυθμό πρέπει να μεταβληθεί η ταχύτητα του δια-

Σχήμα 4



στημπλοίου ώστε πλέον να διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας r_2 ? Η ακτίνα της Γης είναι R_r και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της g .

Λύση. Καθώς η νέα τροχιά θέλουμε να είναι κυκλική, η ταχύτητα του σκάφους πρέπει να είναι κάθετη προς το διάνυσμα θέσης που συνδέει το κέντρο της Γης με το κέντρο μάζας του. Ας υπολογίσουμε το μέγεθος και το πρόσημο της μεταβολής της ταχύτητας.

Το μέγεθος της τροχιακής ταχύτητας ενός διαστημοπλοίου σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_2 προσδιορίζεται εξισώνοντας την κεντρομόλο δύναμη με τη δύναμη της βαρύτητας:

$$\frac{mv_0^2}{r_2} = \frac{GmM_r}{r_2^2},$$

Επομένως,

$$v_0 = \sqrt{G \frac{M_r}{r_2}} = \sqrt{R_r g \frac{R_r}{r_2}}.$$

Η ταχύτητα v_A του διαστημοπλοίου στο σημείο A μόλις πριν την πυροδότηση των πυραύλων μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση που συνδέει το μεγάλο ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς και την ολική ενέργεια του διαστημοπλοίου (βλ. Πρόβλημα 3). Στη συγκεκριμένη περίπτωση η σχέση αυτή γίνεται

$$\frac{mv_A^2}{2} - G \frac{mM_r}{r_2} = -G \frac{mM_r}{2a},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$v_A = \sqrt{G \frac{M_r}{r_2} \left(2 - \frac{r_2}{a}\right)} = v_0 \sqrt{2 - \frac{r_2}{a}}.$$

Δεδομένου ότι $r_2 > a$, θα είναι $v_A < v_0$. Επομένως, προκειμένου το διαστημοπλοίο να μεταβάλει την τροχιά του από ελλειπτική σε κυκλική, πρέπει να αυξήσει την ταχύτητα του κατά

$$\Delta v = v_0 - v_A = \sqrt{R_r g \frac{R_r}{r_2}} \left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_2}{a}}\right).$$

Πρόβλημα 5. Υπολογίστε κατά προσέγγιση την ταχύτητα διαφυγής ενός πυραύλου που εκτοξεύεται από τη Γη, προκειμένου να εγκαταλείψει για πάντα το ηλιακό μας σύστημα. Α-

γνοήστε την επίδραση των υπόλοιπων πλανητών. Θεωρήστε, ακόμη, ότι η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι κυκλική με ακτίνα $R_{HG} = 1,5 \cdot 10^8$ km και η περίοδος περιφοράς της είναι $T = 1$ χρόνος. Η τροχιακή ταχύτητα κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι $v_p = 7,9$ km/s.

Λύση. Ας διαιρέσουμε την κίνηση του πυραύλου σε δύο στάδια. Θα μελετήσουμε το πρώτο στάδιο στο σύστημα αναφοράς της Γης, θεωρώντας ότι το πεδίο βαρύτητας του Ήλιου στη γειτονιά του πλανήτη μας είναι ομογενές. Υποθέτοντας ότι η μάζα M_Γ της Γης είναι απείρως μεγαλύτερη από τη μάζα m του πυραύλου, γράφουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

όπου v είναι η ταχύτητα του πυραύλου πάνω στην επιφάνεια της Γης και v_∞ η ταχύτητά του όταν πλέον βρίσκεται τόσο μακριά από τη Γη ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δεν υφίσταται την επίδραση του βαρυτικού της πεδίου. Ας εκφράσουμε τη δυναμική ενέργεια του πυραύλου σε σχέση με την τροχιακή ταχύτητα ενός δορυφόρου που εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, κοντά στην επιφάνειά της:

$$G \frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma} = mv_p^2.$$

Οπότε,

$$v_\infty^2 = v^2 - 2v_p^2.$$

Κατά το δεύτερο στάδιο, ο πύραυλος έχει πλέον «εγκαταλείψει» το βαρυτικό πεδίο της Γης και κινείται πλέον μέσα στο πεδίο βαρύτητας του Ήλιου. Στο σύστημα αναφοράς του Ήλιου, η ταχύτητα του πυραύλου είναι το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας v_∞ και της ταχύτητας V της κυκλικής κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο. Ας υπολογίσουμε το μέτρο της παραβολικής ταχύτητας v_∞ (μαντέψτε γιατί ονομάζεται «παραβολική») την οποία χρειάζεται να έχει ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη Γη προκειμένου να απομακρυσθεί για

πάντα από το ηλιακό μας σύστημα. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\frac{mv_\infty^2}{2} - G \frac{mM_H}{R_{HG}} = 0,$$

από την οποία παίρνουμε

$$v_\infty = \sqrt{2G \frac{M_H}{R_{HG}}} = \sqrt{2V}.$$

Η ελάχιστη ταχύτητα v_{min} του πυραύλου θα προκύψει όταν το διάνυσμα της ταχύτητας του είναι ομόρροπο με το διάνυσμα της ταχύτητας της Γης — δηλαδή, όταν $v_\infty = v_\infty + V$. Αφού $V = 2\pi R_\Gamma / T \approx 30$ km/s και $v_p = 7,9$ km/s, θα είναι τελικά $v_{min} = 16,7$ km/s.

Πρόβλημα 6. Υπολογίστε την ελάχιστη επιπλέον ταχύτητα που πρέπει να προσδώσουμε, μέσω μιας σύντομης ώθησης, σε ένα δορυφόρο ο οποίος κινείται σε μια πολύ μεγάλου υψομέτρου κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη ώστε να τον στείλουμε στον Ήλιο. Θεωρήστε ότι οι τροχιές του Ήλιου και της Γης είναι κυκλικές. Η ακτίνα R_{HG} της τροχιάς της Γης είναι ίση με $1,5 \cdot 10^8$ km και η ακτίνα R_{HA} της τροχιάς του Ήλιου είναι 1,52 φορές μεγαλύτερη.

Λύση. «Πολύ μεγάλου υψομέτρου κυκλική τροχιά» οημαίνει ότι η ακτίνα της τροχιάς του δορυφόρου είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης, οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τη σχετική ταχύτητα του δορυφόρου ως προς τον πλανήτη. Επομένως, όντας δορυφόρος της Γης, κινείται μαζί της γύρω από τον Ήλιο σε κυκλική τροχιά και με ταχύτητα

$$V = \sqrt{\frac{GM_H}{R_{HG}}} \approx \frac{2\pi R_{HG}}{T} \approx 30 \text{ km/s},$$

όπου M_H είναι η μάζα του Ήλιου και T η περίοδος περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο. Αν επιταχύνουμε το δορυφόρο κατά τη διεύθυνση της τροχιακής κίνησης της Γης, θα διαγράψει ελλειπτική τροχιά με μεγάλο άξονα, μεγαλύτερο από τη διάμετρο της τροχιάς της Γης, και ο οποίος θα μεγαλώνει με τη μεταβολή της ταχύτητας. Έτσι, ο δορυφόρος θα φθάσει στον Ήλιο εάν το πο απομακρυσμένο οη-

μείο της τροχιάς του «εισέρχεται» στην κυκλική τροχιά του Ήλιου. Μια τέτοια διαδρομή αναπαριστάται στο Σχήμα 5 με διακεκομένη γραμμή. Ο μεγάλος άξονας της ισούται με $2a = R_{HG} + R_{HA}$. Σ' αυτή την τροχιά η ολική ενέργεια του δορυφόρου, μάζας m , είναι

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM_H}{R_{HG}}$$

$$= \frac{m(V+v)^2}{2} - mV^2$$

$$= \frac{m(v^2 + 2Vv - V^2)}{2}.$$

Ανακαλώντας τη σχέση που συνδέει το μεγάλο άξονα μιας έλλειψης και την ολική ενέργεια του δορυφόρου, έχουμε:

$$R_{HG} + R_{HA} = \frac{2GM_H}{V^2 - 2Vv - v^2}$$

$$= \frac{2V^2 R_{HG}}{V^2 - 2Vv - v^2}.$$

Μετά από λίγες απλές πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$v^2 + 2Vv - \frac{(R_{HA} - R_{HG})V^2}{R_{HA} + R_{HG}} = 0,$$

η οποία έχει, φυσικά, δύο ρίζες:

$$v_1 = V \left(\sqrt{\frac{2R_{HA}}{R_{HA} + R_{HG}}} - 1 \right)$$

$$\approx 2,95 \text{ km/s}$$

και

$$v_2 = -V \left(1 + \sqrt{\frac{2R_{HA}}{R_{HA} + R_{HG}}} \right)$$

$$\approx -62,95 \text{ km/s}$$

Καθώς επιταχύνουμε το διαστημόπλοιο στην κατεύθυνση της ταχύτητας της Γης, προκύπτει ως λύση η πρώτη ρίζα. Παρατηρήστε, ωστόσο, ότι «μένα συμπάρο» λύσαμε ακόμη ένα πρόβλημα — η δεύτερη ρίζα είναι επίσης σωστή και περιγράφει την επιτάχυνση του διαστημόπλοιου προς την αντί-

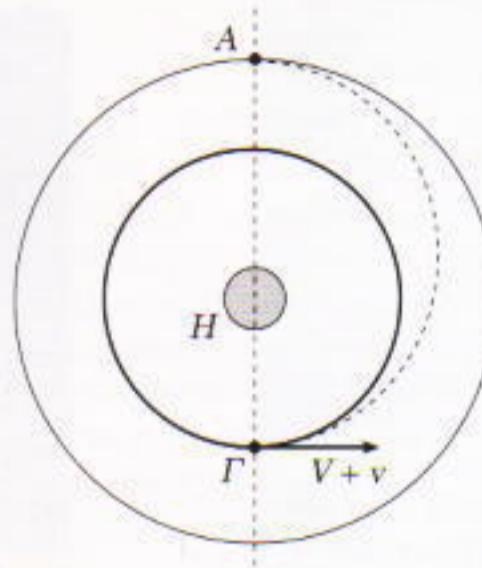
θετή κατεύθυνση. Προσέξτε ότι η v_2 είναι ακριβώς ίση με τη v_1 συν το διπλάσιο της ταχύτητας (60 km/s) κινησης της Γης γύρω από τον Ήλιο.

Ασκησης. (1) Φανταστείτε ένα στενό πηγάδι το οποίο ξεκινά από την επιφάνεια της Γης και καταλήγει στο κέντρο της. Ένα αντικείμενο πέφτει μέσα στο πηγάδι από άπειρη απόσταση, στην οποία είχε μηδενική ταχύτητα. Ποια θα είναι η ταχύτητά του στο κέντρο της Γης; Θεωρήστε τη Γη ως ομογενή σφαίρα ακτίνας R_g . Στην επιφάνειά της η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με g . Υπόδειξη: Εδώ, άπειρη απόσταση σημαίνει τόσο μεγάλη απόσταση από τη Γη, ώστε η έλξη ανάμεσα στο αντικείμενο και τη Γη να είναι αμελητέα· ωστόσο, αμφότερα περιφέρονται σαν ένα σώμα γύρω από τον Ήλιο.

(2) Η ταχύτητα διαφυγής από έναν πλανήτη είναι $v_0 = 10 \text{ km/s}$. Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας διαφυγής από έναν παρόμοιο πλανήτη που έχει μια κοιλότητα (Σχήμα 2) γεμάτη με ύλη της οποίας η πυκνότητα είναι η μισή αυτής του πλανήτη. Ο λόγος της ακτίνας της κοι-

λότητας προς την ακτίνα του πλανήτη είναι 0,5.

(3) Ένα διαστημόπλοιο κινείται γύρω από τη Γη διαγράφοντας ελλειπτική τροχιά με μεγάλο ημιάξονα a . Το κέντρο της Γης βρίσκεται στην εστία E , της έλλειψης (Σχήμα 4). Όταν το



Σχήμα 5

διαστημόπλοιο βρεθεί στο σημείο P (περίγειο) όπου η απόστασή του από το κέντρο της Γης είναι r_1 , πυροδοτούνται οι πρωθητικοί του πύραυλοι. Με ποιο ρυθμό πρέπει να μεταβληθεί η ταχύτητά του στο σημείο αυτό ώστε

να τεθεί σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_1 ? Θεωρήστε ως δεδομένες τις τιμές της ακτίνας R_g της Γης, και της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνειά της.

(4) Μια σφαίρα εκτινάσσεται από ένα δορυφόρο ο οποίος κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα v_0 . Η κατεύθυνση της βολής της σφαίρας σχηματίζει γωνία $\phi = 120^\circ$ με εκείνη της ταχύτητας του δορυφόρου. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα της σφαίρας ως προς το δορυφόρο ώστε να διαφύγει στο άπειρο;

Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- «Οι καρποί του αγώνα του Kepler», B. Belonuchkin, στο παρόν τεύχος.
- «Μια πτήση στον Ήλιο», Alexey Byalko, Ιαν./Φεβ. 1997.
- «Πηδώντας από άστρο σε άστρο», Vladimir Surdin, Μάιος/Ιούν. 1997.
- «Από την άκρη του Σύμπαντος στα Τάρταρα», Albert Stasenko, Μάιος/Ιούν. 1996.
- «Η άνοδος και η πτώση», A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, Μάιος/Ιούν. 1996.

ΧΩΡΟΣ, ΧΡΟΝΟΣ, ΠΡΑΓΜΑΤΑ
Επιπειρατικές ιδέες για τη φυσική
BRIAN K. RIDLEY
Επειρεπιτίμονας του Καναδανού
Σελ.: 248, 5.500 δρχ.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Brian Ridley

ΧΩΡΟΣ, ΧΡΟΝΟΣ, ΠΡΑΓΜΑΤΑ

Έννοιες και μέθοδοι της φυσικής

• «Επιτυγχάνει ό,τι ακριβώς ο Arthur Eddington το 1928 με το *The Nature of the Physical World*.»
— *The New Scientist*

• «Εξαιρετικό βιβλίο... Η σαφήνεια του ύφους κάνει πραγματικά απολαυστική την ανάγνωση.»
— *Physics Education*

• «Πρέπει να το προτείνουμε σε όσους επιθυμούν να εντυφώσουν στην επιστήμη της φυσικής.»
— *American Journal of Physics*

Εκδόσεις Κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Για να περνά η ώρα



Σ116

Οι καλοί λογαριασμοί κάνουν τους καλούς φίλους. Ο Νίκος, ο Γιάννης και ο Γιώργος πήγαν μια μέρα στο γήπεδο. Στο δρόμο ο Νίκος αγόρασε πέντε σακούλες με πατατάκια, ο Γιάννης δύο ενώ ο Γιώργος δεν αγόρασε καμία. Στη διάρκεια του παιχνιδιού τα καταβρόχθισαν όλα —ο καθένας την ίδια ποσότητα. Μετά το τέλος του αγώνα ο Γιώργος υπολόγισε πόσο κόστιζε κάθε σακούλα πατατάκια και έδωσε 140 δραχμές. Πόσα χρήματα θα πρέπει να πάρει ο Νίκος;

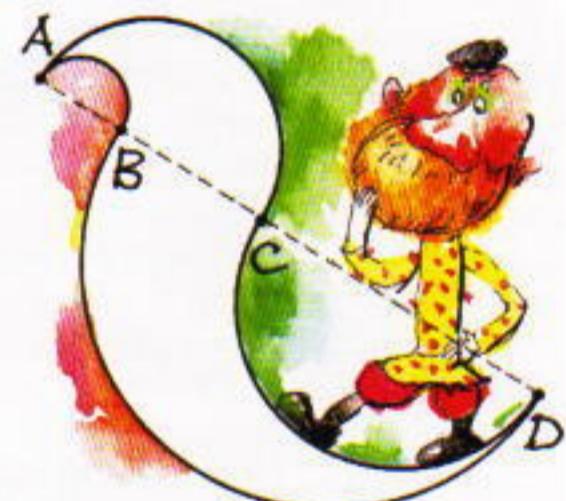
Σ117

«Επιχρυσωμένο» πρόβλημα. Η εικόνα δεξιά παριστάνει μια διακοσμητική κατασκευή που θέλουμε να επιχρυσώσουμε. (Το περίγραμμά της αποτελείται από τέσσερα ημικύκλια με διαμέτρους AB , AC , BD και CD .) Η ποσότητα χρυσού που απαιτείται για την κάλυψη της κατασκευής εξαρτάται, φυσικά, από το εμβαδόν της. Ο τεχνίτης γνωρίζει δύο μόνο αριθμούς: τα μήκη των AD και BC . Μπορεί να υπολογίσει το εμβαδόν της;



Σ118

Κινήσεις στη σκακιέρα. Ένα πιόνι ξεκινά από το κάτω αριστερό τετράγωνο της σκακιέρας που βλέπετε στην εικόνα (στην οποία λείπει το μεσαίο τετράγωνο). Πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να ακολουθήσει για να φθάσει στο πάνω δεξιό τετράγωνο; Το πιόνι μπορεί να μετακινηθεί μόνο προς δύο κατευθύνσεις: πάνω και δεξιά.



Σ119

Ενώστε τις κορυφές. Μπορείτε να σχεδιάσετε μια τεθλασμένη γραμμή αποτελούμενη από έξι τμήματα η οποία να διέρχεται από όλες τις κορυφές ενός κύβου;



Σ120

Εφαπτόμενα σημεία. Δύο τροχοί κινούνται ο ένας προς τον άλλο με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Τη στιγμή της σύγκρουσης, εφάπτονται στα σημεία που ακουμπούσαν το έδαφος τη στιγμή κατά την οποία άρχισαν να κυλούν. Είναι δυνατόν να έχουν διαφορετικές ακτίνες;



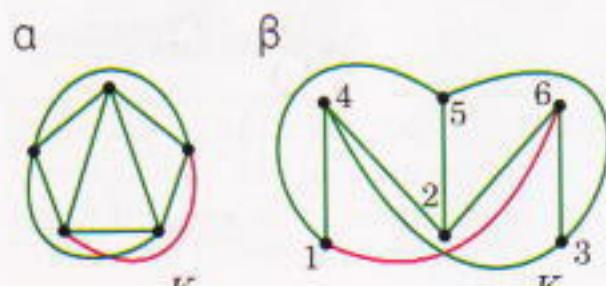
Επίπεδα γραφήματα

Μπορείτε να ενώσετε τις κουκίδες;

A.Y. Olshansky

ΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ, ΤΑ Ο-δικά δίκτυα, οι γεωγραφικοί χάρτες, οι χημικοί συντακτικοί τύποι και τα γενεαλογικά δέντρα είναι παραδείγματα γραφημάτων στα οποία συγκεκριμένα σημεία συνδέονται μέσω καμπυλών οι οποίες παριστάνουν κάποια σχέση μεταξύ των σημείων. Σε αυτό το άρθρο θα ασχοληθούμε με εκείνες τις ιδιότητες των επίπεδων γραφημάτων που μένουν αμετάβλητες κάτω από συνεχείς μετασχηματισμούς —με άλλα λόγια, με τις τοπολογικές ιδιότητες των γραφημάτων.

Τα βασικά γεγονότα της επίπεδης τοπολογίας, τα οποία περιγράφηκαν τον 18ο και τον 19ο αιώνα (για παράδειγμα, τα θεωρήματα του Euler και του Jordan) είναι διαισθητικώς προφανέστατα. Εντυπωσιακότερες είναι ορισμένες πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, όπως το εξαιρετικό θεώρημα του A.A Klyachko και το απλό αλλά κομψό λήμμα του J.R. Stallings (βλ. τα μέρη 6 και 7, στη συνέχεια) που δημοσιεύτηκαν το 1993 και το 1987, αντίστοιχα, και τα οποία συνδέονται με μερικά προβλήματα της συνδυαστικής θεωρίας ομάδων.



Σχήμα 1

Η θεωρία γραφημάτων βρίσκει εφαρμογές, για παράδειγμα, στο σχεδιασμό κυκλωμάτων υπολογιστών. Οι συνδέσεις μεταξύ των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων πρέπει να βρίσκονται πάνω στην επίπεδη επιφάνεια μιας πλακέτας. Παρόμοια προβλήματα μπορούμε να τα λύσουμε στο πλαίσιο της θεωρίας γραφημάτων. Επί παραδείγματι, ας υποθέσουμε ότι δινονται πέντε σημεία του επιπέδου. Είναι δυνατόν να συνδέσουμε κάθε σημείο με όλα τα υπόλοιπα μέσω ενός συστήματος καμπυλών που δεν τέμνονται μεταξύ τους; Στο Σχήμα 1α όλα τα ζεύγη σημείων συνδέονται με πράσινες γραμμές εκτός από ένα που ενώνεται με κόκκινη. Αυτής, αυτή η κόκκινη γραμμή τέμνει μία πράσινη. Μήπως όμως θα ήταν δυνατόν να αποφύγουμε τις τομές των γραμμών επινοώντας κάποια άλλη σύνδεση;

Παρόμοιο είναι και το παλιό πρόβλημα των τριών πηγαδιών. Υπάρχουν τρία πηγάδια (4, 5, 6) και τρία αγροκτήματα (1, 2, 3) οι ιδιοκτήτες των οποίων δεν έχουν και τις καλύτερες σχέσεις. Για να αποφεύγονται λοιπόν οι προστριβές, πρέπει να χαράξουμε τα μονοπάτια από κάθε κτήμα προς κάθε πηγάδι έτσι ώστε να μη διασταυρώνονται μεταξύ τους (Σχήμα 1β).*

Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε σε αυτά και σε άλλα ερωτήματα, θα



* Δείτε ακόμη τα άρθρα «Τόροι, τόροι, τόροι», Μάιος/Ιούν. 1994, «Γραφήματα», Ιαν./Φεβ. 1996, «Σήματα, γραφήματα, βασιλιάδες και οπείρες», Ιαν./Φεβ. 1996. (Σ.τ.μ.)

πρέπει πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τις ιδιότητες της γραμμής στο επίπεδο.

1. Επίπεδες καμπύλες

Ένας κύκλος, η περίμετρος ενός τετραγώνου ή η διαδρομή 1-4-2-6-3-5-1 στο Σχήμα 1β, συμφωνούν με το πώς αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά μια απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο —μια γραμμή που δεν τέμνεται με τον εαυτό της, την οποία μπορούμε να σχεδιάσουμε εκκινώντας από ένα σημείο και επιστρέφοντας σε αυτό χωρίς να αναγκαστούμε να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Όταν το τέλος της καμπύλης δεν συμπίπτει με την αρχή της, θα την ονομάζουμε **τόξο**.

Αυτή η διαισθητική έννοια της α-

πλής κλειστής καμπύλης αρκεί για να κατανοήσουμε όσα ακολουθούν στο παρόν άρθρο. Θα δώσουμε όμως και έναν τυπικό ορισμό, για να καλύψουμε τους αναγνώστες που δεν έμειναν ικανοποιημένοι από μια τέτοια «οπτική» ερμηνεία. Ο ορισμός αυτός γενικεύει την εξής απλή παρατήρηση: η περίμετρος ενός τετραγώνου μπορεί να προκύψει από μια συνεχή απεικόνιση του περιγεγραμμένου του κύκλου (όπως, για παράδειγμα, μέσω της προβολής κάθε σημείου του κύκλου στην πλησιέστερη πλευρά του τετραγώνου).

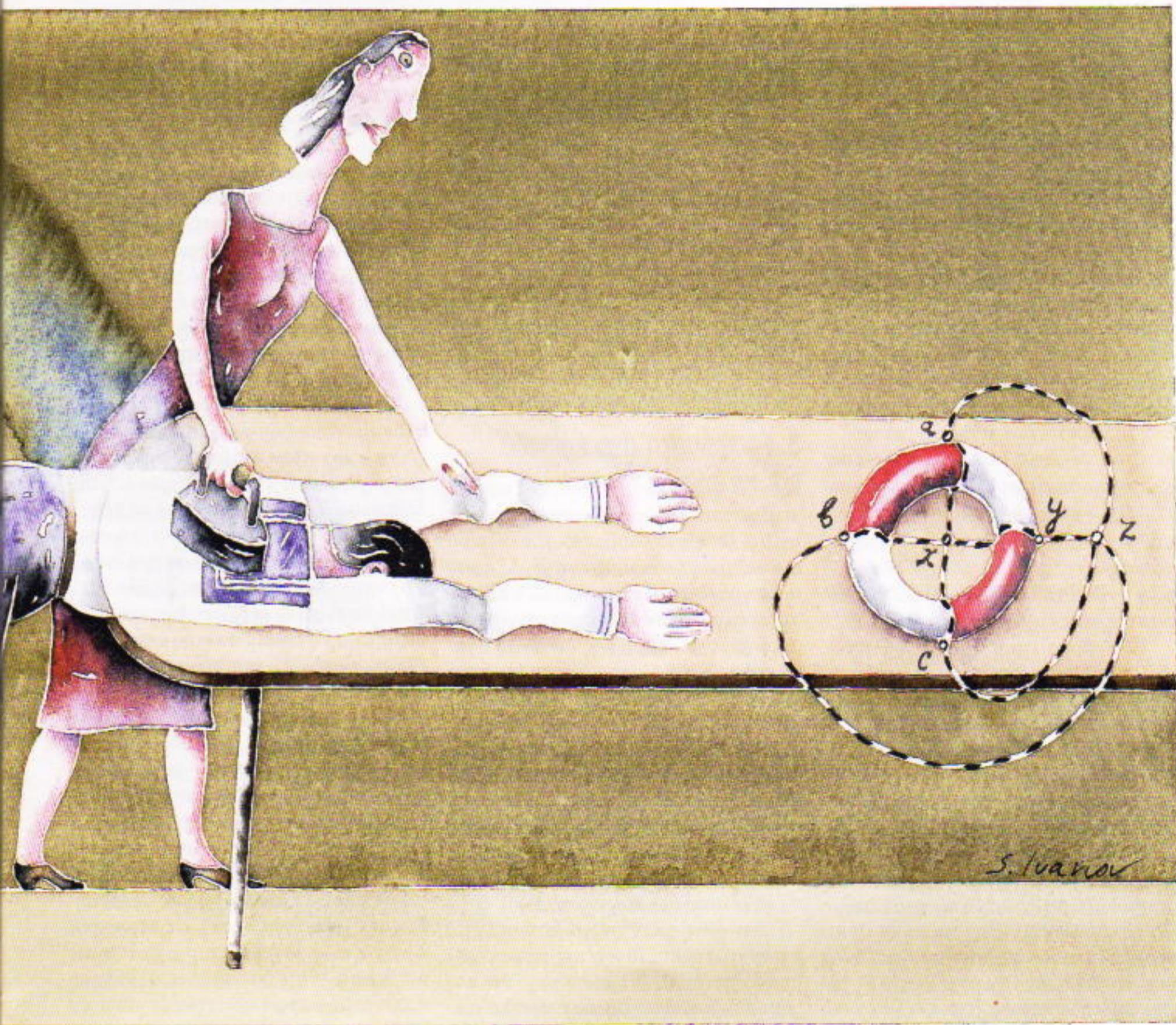
Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε μια τυχαία συνεχή απεικόνιση f του μοναδιαίου κύκλου O σε κάποιο σύ-

νολο C του επιπέδου τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής:

(α) η f είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση —δηλαδή, κάθε σημείο X του κύκλου έχει μία εικόνα $Y = f(X)$ στο C και, αντιστρόφως, κάθε σημείο Y του C έχει ακριβώς μία αντίστροφη εικόνα $X \in O$ ($f(X) = Y$),

(β) η απεικόνιση f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε θετικό αριθμό ε , οσοδήποτε μικρό, μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε $X_1, X_2 \in O$ που η μεταξύ τους απόσταση είναι μικρότερη ή ίση του δ , η απόσταση μεταξύ των εικόνων τους $Y_1 = f(X_1)$ και $Y_2 = f(X_2)$ να είναι μικρότερη του ε .

Αν υπάρχει μια απεικόνιση $f: O \rightarrow$



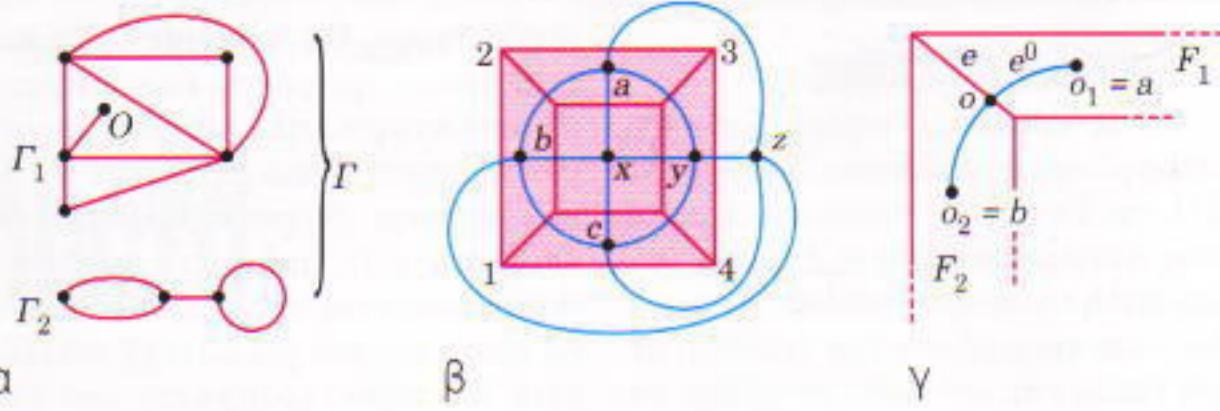
С με τις ιδιότητες (1) και (2), λέμε ότι το σύνολο C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη. Όταν το μεταβλητό σημείο X διατρέχει τον O , το αντίστοιχο σημείο $Y = f(X)$ διατρέχει την καμπύλη C .

Ο ορισμός του επίπεδου τόξου d διαφέρει από τον προηγούμενο σε μία μόνο λεπτομέρεια: αντί του κύκλου O , θεωρούμε το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$. Όταν το σημείο $X \in [0, 1]$ μεταβάλλεται από το 0 έως το 1, η εικόνα του $Y = f(X)$ «διατρέχει» το τόξο d . Οι εικόνες των σημείων 0 και 1 είναι τα άκρα του τόξου d .

2. Το Θεώρημα του Jordan

Ο μοναδιαίος κύκλος χωρίζει το καρτεσιανό επίπεδο σε δύο συνιστώσες: την εσωτερική, η οποία αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν την ισότητα $x^2 + y^2 < 1$, και την εξωτερική, που ορίζεται από τη συνθήκη $x^2 + y^2 > 1$. Είναι αδύνατον να συνδέσουμε ένα σημείο $P(x_1, y_1)$ της εσωτερικής συνιστώσας και ένα σημείο $Q(x_2, y_2)$ της εξωτερικής συνιστώσας με ένα τόξο που δεν τέμνει τον κύκλο O . Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα που βασίζεται στην έννοια της συνέχειας. Ας υποθέσουμε ότι το σημείο (x, y) κινείται επί ενός τόξου που συνδέει το P με το Q . Τότε, η απόσταση μεταξύ του (x, y) και της αρχής των αξόνων μεταβάλλεται συνεχώς (το μέτρο της δίνεται από τη συνάρτηση $\sqrt{x^2 + y^2}$). Αφού λαμβάνει τιμή μικρότερη του 1 στο P και μεγαλύτερη του 1 στο Q , πρέπει να παίρνει ακριβώς την τιμή 1 σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο R . Το σημείο αυτό πρέπει να ανήκει στον κύκλο.

Το θεώρημα του Jordan δηλώνει ότι την ιδιότητα αυτή των κύκλων την έχει και κάθε απλή κλειστή καμπύλη C του επίπεδου. Δηλαδή, το σύνολο των σημείων του επίπεδου που δεν ανήκουν στην C χωρίζεται σε δύο περιοχές: το εσωτερικό (ή φραγμένο) τμήμα E_1 και το εξωτερικό (μη φραγμένο) τμήμα E_2 . Κάθε ζεύγος σημείων της ίδιας περιοχής μπορούν να συνδεθούν με ένα τόξο το οποίο ανήκει εξ ολοκλήρου στην περιοχή, είναι όμως αδύνατον να συνδέσουμε ένα σημείο του E_1 και ένα σημείο του E_2 με ένα τόξο που δεν θα τέμνει την C .



Σχήμα 2

Το θεώρημα αυτό συμπληρώνεται από το θεώρημα του Schenfliss: κάθε σημείο $Z \in E$, μπορεί να συνδεθεί με κάθε σημείο Y της C μέσω ενός τόξου του οποίου όλα τα σημεία (εκτός του Y) θα ανήκουν στο E . Η αντίστοιχη πρόταση ισχύει για τα σημεία του E_2 .

Οι αυτηρές αποδείξεις των θεωρημάτων του Jordan και του Schenfliss είναι εξαιρετικά δύσκολες, και ουνήθως στα εισαγωγικά μαθήματα τοπολογίας παραλείπονται. Ούτε εμείς θα τις παρουσιάσουμε εδώ. Εν μέρει δικαιολογούμαστε, διότι οι πράσεις αυτών των θεωρημάτων είναι διαισθητικά ξεκάθαρες. Επιπλέον, για τους δικούς μας σκοπούς αρκεί να θεωρήσουμε τεθλασμένες γραμμές με πεπερασμένο πλήθος τμημάτων και όχι τυχαίες καμπύλες (αλλά και σε αυτή ακόμη την περίπτωση το θεώρημα του Jordan δεν είναι τετριμένο!).

3. Γραφήματα στο επίπεδο

και τη σφαίρα

Πρώτα απ' όλα, ας συμφωνήσουμε ότι θα εξετάσουμε μόνο πεπερασμένα γραφήματα. Ορίζουμε ως επίπεδο γράφημα Γ ένα σύνολο $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ σημείων του επίπεδου, τα οποία ονομάζονται κορυφές, μαζί με ένα σύνολο $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ ακμών που ενώνουν ορισμένες από τις κορυφές του V . Μια ακμή που ενώνει δύο διαφορετικές κορυφές είναι τόξο, ενώ μια ακμή που ξεκινά και καταλήγει στην ίδια κορυφή είναι μια κλειστή καμπύλη (μια τέτοια ακμή καλείται μερικές φορές βρόχος). Καμία ακμή δεν μπορεί να έχει κοινό σημείο με άλλη ακμή (εκτός των άκρων της).

Ένα γράφημα Γ ονομάζεται συνεκτικό αν κάθε ζεύγος κορυφών του μπορεί να συνδεθεί μέσω μιας συνεχούς διαδρομής η οποία αποτελείται

από ακμές του γραφήματος. Για παράδειγμα, το γράφημα του Σχήματος 2α δεν είναι συνεκτικό: διαχωρίζεται σε δύο συνεκτικές συνιστώσες Γ_1 και Γ_2 . Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε μόνο επίπεδα γραφήματα με μια τουλάχιστον ακμή.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Jordan, κάθε απλή κλειστή καμπύλη (των τεθλασμένων γραμμών συμπεριλαμβανομένων) που αποτελείται από τις ακμές ενός επίπεδου γραφήματος Γ χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές, διασπώντας έτσι ολόκληρο το γράφημα Γ σε διάφορες περιοχές ή έδρες. Το κόκκινο γράφημα του Σχήματος 2β αποτελείται από πέντε εσωτερικές έδρες (ροζ χρώματος) και μια εξωτερική (μη φραγμένη) έδρα —την επίπεδη περιοχή με εσωτερικό σύνορο 1-2-3-4-1.

Τα θεωρήματα του Jordan και του Schenfliss μας δίνουν τη δυνατότητα να συσχετίσουμε με κάθε επίπεδο γράφημα Γ ένα άλλο γράφημα Γ^0 , το δυϊκό του. Το επιτυγχάνουμε ως εξής: αρχίζουμε επιλέγοντας ένα σημείο μέσα σε κάθε έδρα του γραφήματος Γ (τα σημεία a, b, c, x, y στο Σχήμα 2β). Αυτά θα είναι οι κορυφές του γραφήματος Γ^0 . Εστω ε μια κοινή ακμή των έδρων F_1 και F_2 του γραφήματος Γ , και o_1 και o_2 τα δύο επιλεγμένα σημεία στο εσωτερικό αυτών των δύο έδρων. Επιλέγουμε τότε ένα σημείο e εξαιρουμένων των άκρων της, και φέρουμε τα τόξα $o-o_1$ και $o-o_2$ στο εσωτερικό των αντίστοιχων έδρων. (Στο Σχήμα 2γ βλέπετε μια λεπτομέρεια του Σχήματος 2β, όπου εικονίζεται η εν λόγω κατασκευή για τις έδρες F_1 και F_2 που περιέχουν τις κορυφές $o_1 = a$ και $o_2 = b$.) Κατασκευάζουμε μια ακμή του γραφήματος Γ^0 (την οποία ονομάζουμε e^0) σχεδιάζοντας το

τόξο o_1 - o_2 , το οποίο συνδέει τις κορυφές o_1 και o_2 και τέμνει την ακμή ε του αρχικού γραφήματος.

Το γράφημα Γ^0 , το δυϊκό του κόκκινου γραφήματος Γ , έχει σχεδιαστεί με μπλε γραμμές στο Σχήμα 2β. Εξ ορισμού, το πλήθος των κορυφών του γραφήματος Γ^0 ισούται με το πλήθος των εδρών του Γ , το πλήθος των ακμών του γραφήματος Γ^0 ισούται με το πλήθος των ακμών του Γ (οι αναγνώστες καλούνται να το επαληθεύσουν) και το πλήθος των εδρών του γραφήματος Γ^0 ισούται με το πλήθος των κορυφών του Γ .

Μπορούμε εύκολα να φανταστούμε πώς θα τοποθετήσουμε ένα επίπεδο γράφημα στη σφαίρα. Άλλα και αντίστροφα, κάθε γράφημα Γ μιας σφαίρας μπορεί να υλοποιηθεί στο επίπεδο: Θεωρούμε ένα σημείο O (το οποίο ονομάζουμε βόρειο πόλο) στο εσωτερικό μίας από τις έδρες του και, με κέντρο το σημείο O , προβάλλουμε το γράφημα Γ στο επίπεδο που εφαπτεται της σφαίρας στο νότιο πόλο της. Ειδικά, αν «φουσκώσουμε» τις έδρες ενός κύβου ώστε να σχηματίσουν μια σφαίρα (ένας τρόπος να το πετύχουμε αυτό είναι να προβάλλουμε τις ακμές του κύβου από το κέντρο του στην επιφάνεια της περιγεγραμμένης σφαίρας) και μετά εφαρμόσουμε στο προκύπτον σφαιρικό γράφημα τη στερεογραφική προβολή που περιγράψαμε προηγουμένως, θα πάρουμε το κόκκινο γράφημα του Σχήματος 2β. Μία από τις επιφάνειες του κύβου (αυτή που βρίσκεται κάτω από το βόρειο πόλο) αντιστοιχεί στη μη φραγμένη έδρα του επίπεδου γραφήματος 2β. Ομοίως, οι κορυφές, οι ακμές και οι έδρες κάθε κυρτού πολυέδρου μετατρέπονται σε κορυφές, ακμές και έδρες ενός επίπεδου γραφήματος. (Οι αναγνώστες μπορούν, για παράδειγμα, να επαληθεύσουν ότι το γράφημα που προκύπτει από το οκτάεδρο μέσω αυτής της διαδικασίας είναι δυϊκό του γραφήματος που προκύπτει από τον κύβο.)

4. Ο τύπος του Euler

Εστω K , A , και E το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των εδρών, αντίστοιχα, ενός πολυέδρου P . Επί παραδείγματι, αν το P είναι κύβος, τότε $(K, A, E) = (8, 12, 6)$ ενώ αν εί-

ναι οκτάεδρο, $(K, A, E) = (6, 12, 8)$. Στο τετράεδρο αυτή η τριάδα ισούται με $(4, 6, 4)$ και στο δωδεκάεδρο (Σχήμα 3α) με $(20, 30, 12)$. Ακόμη, σε μια n -γωνική πυραμίδα η τριάδα είναι $(n+1, 2n, n+1)$ και σε ένα n -γωνικό πρίσμα είναι $(2n, 3n, n+2)$. Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι σε όλες αυτές τις περιπτώσεις ισχύει:

$$K + E = A + 2 \quad (1)$$

Πρόκειται απλώς για περιεργησύμπτωση ή είναι ένας γενικός κανόνας;

Αποδεικνύεται ότι ο τύπος του Euler (1) ισχύει για κάθε επίπεδο γράφημα Γ , και συνεπώς για όλα τα κυρτά πολύέδρα, αφού μπορούμε να τα «απλώσουμε» στο επίπεδο έτοι ώστε η μία έδρα τους να μετατραπεί σε μη φραγμένη περιοχή. Ο τύπος του Euler αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή επί του A , δηλαδή επί του πλήθους των ακμών ενός επίπεδου γραφήματος Γ . Ας υποθέσουμε ότι $A = 1$. Τότε υπάρχουν δύο δυνατότητες: είτε η μοναδική ακμή του Γ είναι βρόχος είτε είναι ένα απλό τόξο. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει μία μόνο κορυφή και, σύμφωνα με το θεώρημα του Jordan, δύο έδρες. Στη δεύτερη περίπτωση, $(K, A, E) = (2, 1, 1)$. Βλέπουμε ότι η (1) ισχύει και στις δύο περιπτώσεις.

Αν $A > 1$, υπάρχουν πάλι δύο περιπτώσεις:

(α) Το γράφημα Γ περιέχει μία κορυφή o ή l ή b ή m βαθμού —δηλαδή, μία κορυφή που ανήκει μόνο σε μία ακμή ε η οποία δεν είναι βρόχος (όπως η κορυφή O στο γράφημα Γ του Σχήματος 2α). Τότε, το γράφημα Γ , το οποίο προκύπτει αν αφαιρέσουμε την ακμή e και την κορυφή O από το γράφημα Γ , είναι συνεκτικό, και ισχύει γι' αυτό

$$K' = K, A' = A - 1, E' = E. \quad (2)$$

Αφού $A' = A - 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο τύπος του Euler έχει ήδη αποδειχτεί για το Γ' : $K' + E' = A' + 2$. Αν αντικαταστήσουμε τα K' , A' , E' βάσει των σχέσεων (2), προκύπτει ο τύπος του Euler για το Γ .

(β) Κάθε φορά που έχουμε διατρέξει μια ακμή $e = e_1$, μπορούμε να συνεχίσουμε να κινούμαστε πάνω σε μια άλλη ακμή e_2 . Αφού το πλήθος των ακμών του γραφήματος Γ είναι

πεπερασμένο, αν συνεχίσουμε ότι, θα περάσουμε αναπόφευκτα από ακμές που έχουμε ήδη διατρέξει. Συνέπως, με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε μια απλή κλειστή διαδρομή που αποτελείται από διαδοχικές ακμές e_1, e_2, \dots, e_k του γραφήματος Γ (μπορεί να έχουμε $k = 1$). Από τα θεώρημα του Jordan και του Schenfliss έπειται (και είναι, επιπλέον, διαισθητικά προφανές) ότι αν αφαιρέσουμε την ακμή e από το γράφημα Γ (χωρίς να αφαιρέσουμε τις ακμές που αποτελούν τα άκρα της), το πλήθος των εδρών μειώνεται κατά 1—δηλαδή, στο γράφημα Γ' που προκύπτει κατ' αυτό τον τρόπο έχουμε

$$K' = K, A' = A - 1, E' = E' - 1.$$

Τώρα πλέον μπορούμε να ολοκληρώσουμε την επαγωγική απόδειξη όπως ακριβώς στην προηγούμενη περίπτωση.

5. Επίπεδα γραφήματα

Θα εφαρμόσουμε τώρα τον τύπο του Euler σε συγκεκριμένα σφαιρικά και επίπεδα γραφήματα. Πρόκειται για γραφήματα στα οποία το πλήθος των ακμών που διατρέχουμε προκειμένου να κινηθούμε γύρω από οποιαδήποτε έδρα τους (περιλαμβανομένης και της εξωτερικής όταν πρόκειται για επίπεδα γραφήματα) είναι μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου σταθερού ακεραιού $n > 2$. Αν κινηθούμε γύρω από όλες τις έδρες και αθροίσουμε το πλήθος των ακμών από τις οποίες έχουμε διέλθει, θα μετρήσουμε τουλάχιστον nE ακμές. Έτοιμος, έχουμε πα απαριθμήσει κάθε ακμή δύο φορές, οπότε καταλήγουμε στην ανισότητα

$$2A \geq nE.$$

Ας πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (1) επί n και ας προσθέσουμε το αποτέλεσμα σε αυτή την ανισότητα. Παίρνουμε

$$A \leq \frac{n(K-2)}{n-2}. \quad (3)$$

Η ανισότητα (3) συχνά αποδεικνύεται χρήσιμη όταν θέλουμε να καθορίσουμε αν είναι δυνατή η σχέδιαση ενός «αφηρημένου» γραφήματος στο επίπεδο ή στη σφαίρα. Με τον όρο «αφηρημένο» γράφημα εννοούμε μια συλλογή πεπερασμένου πλήθους

κορυφών οι οποίες ενώνονται με ακμές που δεν έχουν κοινά σημεία εκτός των άκρων τους, ανεξάρτητα από το αν είναι ή όχι δυνατό να το σχεδιάσουμε στο επίπεδο.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε το γράφημα K_5 (Σχήμα 1α) στο επίπεδο χωρίς να τέμνει τον εαυτό του. Πράγματι, σε αυτό το γράφημα δεν υπάρχουν βρόχοι ή πολλαπλές ακμές (δύο ή περισσότερες ακμές με κοινά άκρα), και επομένως, αν τοποθετηθεί στο επίπεδο, η κάθε έδρα του θα έχει τουλάχιστον τρεις συνοριακές ακμές. Αν όμως θέσουμε στον τύπο (3) $n = 3$, βλέπουμε ότι δεν ισχύει για το γράφημα K_5 , διότι αυτό έχει 5 κορυφές και 10 ακμές.

Επίσης, αν υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να υλοποιήσουμε στο επίπεδο το γράφημα $K_{3,3}$ (Σχήμα 1β), τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (3) θέτοντας $n = 4$, αφού στο $K_{3,3}$ δεν υπάρχουν κλειστές διαδρομές αποτελούμενες από τρεις ακμές. (Για παράδειγμα, αν διασχίσουμε τρεις διαδοχικές ακμές ξεκινώντας από ένα αγρόκτημα, θα καταλήξουμε αναπόφευκτα σε πηγάδι.) Επομένως, φθάνουμε πάλι σε αντίφαση με την (3), διότι $K = 6$ και $A = 9$.

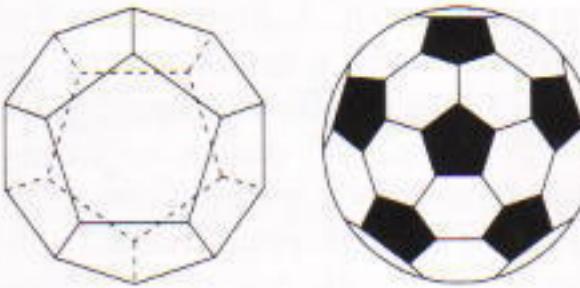
Προφανώς αν κάποιο γράφημα περιέχει ένα μικρότερο γράφημα (υπογράφημα) το οποίο είναι αδύνατο να τοποθετηθεί στο επίπεδο, τότε και το ίδιο δεν είναι επίπεδο. Επίσης, κάθε γράφημα του οποίου ομοιομορφική εικόνα είναι ένα από τα K_5 ή $K_{3,3}$ (δηλαδή, κάθε γράφημα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε με νέες ακμές κάθε ακμή στων K_5 και $K_{3,3}$ προσθέτοντας σε αυτή νέες κορυφές) δεν είναι επίπεδο.

Το πασίγνωστο θεώρημα των Kuratowski και Pontrjagin μας διαβεβαιώνει ότι δεν υφίσταται κανένα άλλο εμπόδιο για να είναι επίπεδο ένα γράφημα:

Ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογραφήματα των οποίων ομοιομορφική εικόνα είναι ένα από τα K_5 ή $K_{3,3}$.

Αποδείξαμε ότι η συνθήκη του θεώρηματος είναι αναγκαία. Είναι όμως πολύ πο δύσκολο να αποδείξουμε ότι είναι και ικανή (δείτε το μέρος 3).

Άλλη μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή



Σχήμα 3

του τύπου (3) έχουμε αν θέσουμε $n = 6$. Είναι πασίγνωστο ότι οι μέλισσες κατασκευάζουν την κηρήθρα τους από εξάγωνα κελιά. Θα ήταν δυνατόν να δώσουν σφαιρική μορφή στην κηρήθρα και να ισχύει ο ίδιος κανόνας κατασκευής; Από τον τύπο (3) προκύπτει η ανισότητα

$$A < \frac{3}{2}K. \quad (4)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι από κάθε κορυφή ξεκινούν τουλάχιστον τρεις ακμές. Συνεπώς $3K \leq 2A$ (θέσαμε το συντελεστή 2 στο δεξιό μέλος, διότι όταν απαριθμούμε όλες τις ακμές που ξεκινούν από τις κορυφές, υπολογίζουμε δύο φορές κάθε ακμή). Αυτή η ανισότητα έρχεται σε αντίφαση με την (4), οπότε συμπεραίνουμε ότι η κατασκευή μιας σφαιρικής κηρήθρας δεν είναι δυνατή.

Επιπλέον, με την ίδια επιχειρηματολογία διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχουν κυρτά πολύεδρα των οποίων οι έδρες να έχουν τουλάχιστον έξι πλευρές. Αυτός είναι ο λόγος που κατασκευάζουμε τις μπάλες ποδοσφαίρου από εξάγωνα και πεντάγωνα κομμάτια.

Πρόβλημα. Βρείτε τις ανισότητες που συνδέουν το πλήθος των κορυφών και το πλήθος των ακμών μιας μπάλας που αποτελείται από k πεντάγωνα και ℓ εξάγωνα κομμάτια, και αποδείξτε ότι $k \geq 12$.

(Υπόδειξη: Το πλήθος των ακμών είναι $(5k + 6\ell)/2$ και το πλήθος των κορυφών είναι το πολύ $(5k + 6\ell)/3$.) Είναι δυνατή η κατασκευή μπάλας με 12 πεντάγωνα τμήματα — όπως ακριβώς το δωδεκάεδρο, που αποτελείται από 12 πεντάγωνα —, μια τέτοια μπάλα όμως δεν θα ήταν αρκετά στρογγυλή. Στην πραγματικότητα, οι μπάλες ποδοσφαίρου κατασκευάζονται από 12 πεντάγωνα και 20 εξάγωνα τμήματα, τα οποία ράβονται στις 90 ακ-

μές τους (Σχήμα 3β). Βρείτε το πλήθος των κορυφών της μπάλας χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler.

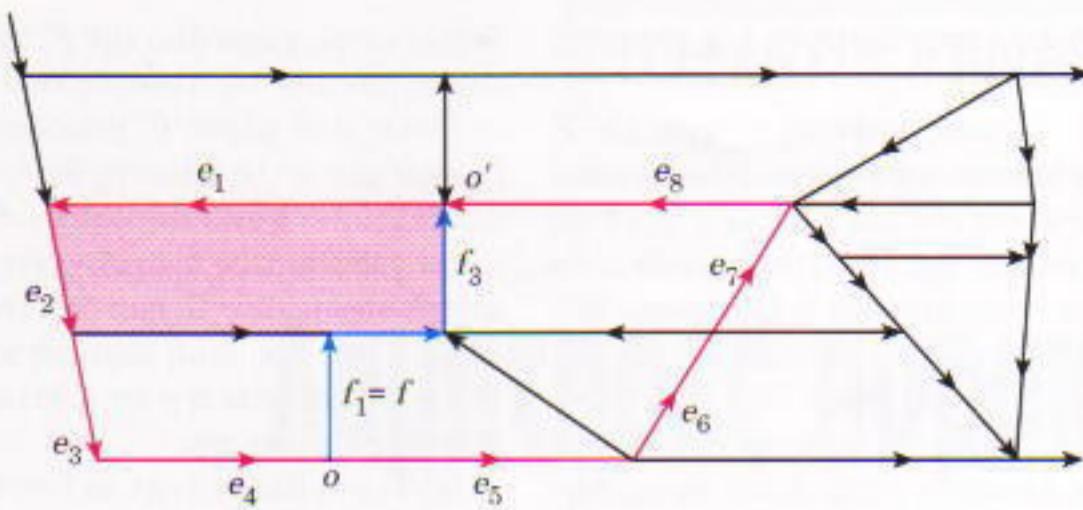
6. Κυκλοφορία σε μονόδρομους

Το λήμμα του Stallings μάς λέει ότι σε μια πόλη όπου υπάρχουν μόνο μονόδρομοι πρέπει να υπάρχει ένα οικοδομικό τετράγωνο γύρω από το οποίο μπορούμε να κινηθούμε χωρίς να παραβιάσουμε τη σήμανση.

Η αυτηρή μαθηματική διατύπωση του λήμματος έχει ως εξής: Έστω G ένα προσανατολισμένο επίπεδο γράφημα — δηλαδή, ένα επίπεδο γράφημα στο οποίο αντιστοιχεί σε κάθε ακμή μια κατεύθυνση (όπως αυτή που συμβολίζεται με βέλος στο Σχήμα 4). (Δεν θα εμβαθύνουμε εδώ στις μαθηματικές λεπτομέρειες). Αν όλες οι ακμές που ξεκινούν από μια κορυφή έχουν κατεύθυνση που «απομακρύνεται» από αυτήν, θα ονομάζουμε την κορυφή πηγή, ενώ αν όλες οι ακμές κατευθύνονται προς μια κορυφή, θα την ονομάζουμε καταβόθρα. Ένα γράφημα καλείται «σωστό» αν δεν περιέχει ούτε πηγές ούτε καταβόθρες. Αν το δίκτυο κυκλοφορίας που περιγράψαμε παραπάνω είναι λογικό, τότε το γράφημα που αντιστοιχεί σε αυτό είναι σωστό· διαφορετικά, οι οδηγοί θα είναι αναγκασμένοι να παραβιάζουν τους κανόνες κυκλοφορίας.

Θα αποδείξουμε το λήμμα του Stallings χρησιμοποιώντας μεθόδους διαφορετικές από αυτές του μέρους 2. Θέλουμε, λοιπόν, να δείξουμε ότι ένα σωστό γράφημα G περιέχει μια εσωτερική έδρα την οποία μπορούμε να περιτρέξουμε ακολουθώντας τον προσανατολισμό των πλευρών της. Ένα παράδειγμα είναι η ροζ έδρα του Σχήματος 4.

Κατ' αρχάς, θα παρατηρήσουμε το εξής: μόλις διατρέξουμε μια ακμή e_1 , μπορούμε πάντοτε να συνεχίσουμε με μια άλλη ακμή e_2 , διότι, από την υπόθεσή μας, το πέρας της e_1 δεν είναι καταβόθρα. Αφού το πλήθος των ακμών του γραφήματος G είναι πεπερασμένο, θα εμφανιστούν αναπόφευκτα επαναλήψεις στην ακολουθία e_1, e_2, \dots , πράγμα που σημαίνει ότι στο γράφημα G υπάρχει μια κλειστή προσανατολισμένη διαδρομή r . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή η διαδρομή δεν τέμνει τον εαυτό της, διαφο-



Σχήμα 4

ρετικά την αντικαθιστούμε με ένα τμήμα της. Ένα παράδειγμα είναι η κόκκινη διαδρομή στο Σχήμα 4.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Jordan για τις καμπύλες, η p χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές. Η εσωτερική περιοχή O περιλαμβάνει διάφορες έδρες F_1, F_2, \dots, F_k του γραφήματος Γ (στο Σχήμα 4, $k = 5$). Ας υποθέσουμε ότι επλέγουμε τη διαδρομή p ώστε το πλήθος των εδρών που περιέχονται στο O να είναι το μικρότερο δυνατό. Για να αποδείξουμε το λήμμα του Stallings, αρκεί να δείξουμε ότι $k = 1$ (δηλαδή, ότι η p διατρέχει μία ακριβώς έδρα).

Αν υποθέσουμε ότι $k > 1$, καταλήγουμε στο σύμπερασμα ότι κάποιες ακμές του γραφήματος Γ βρίσκονται στο εσωτερικό της περιοχής O . Αφού το γράφημα Γ είναι συνεκτικό, μία από αυτές τις ακμές f θα έχει κοινή κορυφή o με την περίμετρο p της περιοχής O (Σχήμα 4). Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η f «απομακρύνεται» από το o . Η αντίθετη περίπτωση (όταν η f «κατευθύνεται» προς το o) συνάγεται από αυτήν αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό όλων των ακμών του Γ .

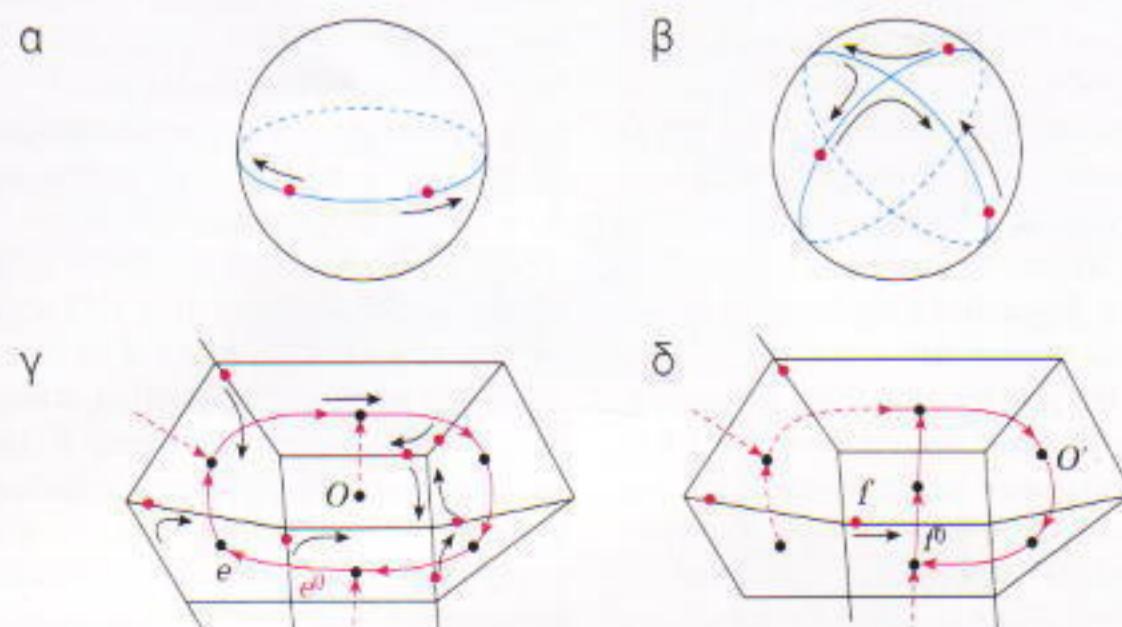
Αφού το άκρο o , της $f = f_1$ δεν είναι καταβόθρα, πρέπει να υπάρχει μία ακμή f_2 που απομακρύνεται από αυτήν. Αν συνεχίσουμε τη συγκεκριμένη κατασκευή, θα δημιουργήσουμε μία διαδρομή q αποτελούμενη από τις ακμές f_1, f_2, \dots (η μπλε διαδρομή του Σχήματος 4), στο εσωτερικό της περιοχής O . Λόγω της συνθήκης του ελαχίστου που θέσαμε για τη διαδρομή p , η διαδρομή q δεν θα τέμνει τον εαυτό της. Επομένως, η προσανατολισμένη διαδρομή q τέμνει το σύνορο p της περιοχής O σε κάποια άλλη κορυ-

στροφα διάφορα σημεία (πιθανόν με μεταβαλλόμενες ταχύτητες). Για να διακρίνουμε τα κινούμενα από τα στάσιμα σημεία του γραφήματος, θα ονομάσουμε τα πρώτα «αυτοκίνητα». Επομένως, ένα αυτοκίνητο κινείται γύρω από το σύνορο κάθε έδρας του γραφήματος. Αφού διατυπώσουμε ακριβέστερα το πρόβλημα, θα αποδείξουμε ότι οι τέτοια κατάσταση τα αυτοκινητικά ατυχήματα είναι αναπόφευκτα.

Εύκολα διαποτώνουμε πως η πρώτη σημείο είναι αληθής όταν το γράφημα έχει μία μόνο κορυφή και μία ακμή e (ένα βρόχο). Για παράδειγμα, αν η e είναι ισημερινός που διαιρεί τη σφαίρα σε βόρειο και νότιο ημιοφαίριο (Σχήμα 5α), τότε το ένα αυτοκίνητο θα πρέπει να κινηθεί γύρω από το βόρειο ημιοφαίριο, δεξιόστροφα (για ένα φανταστικό παρατηρητή που στέκεται στο βόρειο πόλο) κατά μήκος του ισημερινού, ενώ το άλλο αυτοκίνητο θα κινηθεί δεξιόστροφα γύρω από το νότιο ημιοφαίριο (αλλά για έναν παρατηρητή που στέκεται στο νότιο πόλο).

Το αναπόφευκτο των ατυχημάτων στην περίπτωση ενός γραφήματος με δύο κορυφές, το οποίο χωρίζει τη σφαίρα σε ένα πλήθος από «φέτες» (Σχήμα 5β), δεν είναι εξίσου προφανές, και ίσως μερικοί αναγνώστες προσπαθήσουν να οργανώσουν την κυκλοφορία έτσι ώστε να μην υπάρχουν ατυχήματα (προσπάθεια, δυστυχώς, μάταιη). Είναι ακόμη λιγότερο προφανής η ισχύς της πρότασης σε γραφήματα με μεγαλύτερο πλήθος πλευρών.

Ας κάνουμε μερικές επιπλέον υ-



Σχήμα 5

ποθέσεις καταστρώνοντας το πρόβλημά μας. Πρώτα απ' όλα, υποθέτουμε ότι το γράφημα Γ δεν περιέχει κορυφές ή βαθμού (διαφορετικά, θα μπορούσε κάποιος να αποφύγει τη σύγκρουση με το να «κρύβεται» συνεχώς στη μοναδική ακμή που πρόσκειται σε αυτή την κορυφή). Δεύτερον, ο χρόνος που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο για να διασχίσει μια ακμή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από μια σταθερά $T > 0$, ίδια για όλα τα αυτοκίνητα. Διαφορετικά, μερικά αυτοκίνητα θα μπορούσαν, για παράδειγμα, να κινούνται με «απειρώς μικρή» ταχύτητα και να μην απομακρύνονται ποτέ αρκετά από την αρχική τους θέση. Τρίτον, όταν ένα αυτοκίνητο φθάνει σε μια κορυφή, πρέπει να μετακινηθεί αμέσως στην επόμενη ακμή. (Μπορούμε να «χαλαρώσουμε» αυτή τη συνθήκη και να επιτρέψουμε τη στάση σε μια κορυφή, αλλά για περιορισμένο χρονικό διάστημα.) Τέλος, όλα τα αυτοκίνητα πρέπει να κινούνται δεξιόστροφα γύρω από την έδρα τους. Η αντίστροφη κίνηση δεν επιτρέπεται. (Όταν ένα αυτοκίνητο κινείται «δεξιόστροφα», η έδρα που αντιστοιχεί σε αυτό βρίσκεται πάντα δεξιά της κατεύθυνσης της κίνησης του. Θα αποφύγουμε εδώ μια λεπτομερέστερη εξήγηση αυτής της έννοιας.)

Αν τα αυτοκίνητα κινούνται γύρω από τις έδρες ενός οφαιρικού γραφήματος Γ έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις που κάναμε προγουμένως, λέμε ότι η κυκλοφορία είναι κανονική.

Θεώρημα του Klyachko. Μια κανονική κυκλοφορία, ανεξάρτητα από τις αρχικές θέσεις των αυτοκινήτων, είναι αδύνατον να συνεχιστεί επ' απειρον. Με άλλα λόγια, με την πάροδο κάποιου χρόνου δύο αυτοκίνητα αναπόφευκτα θα συγκρουστούν.

Θα αποδείξουμε την πρόταση αυτή με εις άτοπο απαγωγή (παρατηρήστε ότι στο βήμα (a) η πρόταση τίθεται λίγο πιο γενικά απ' ότι εδώ).

(a) Θα μας διευκολύνει να θεωρήσουμε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$, δεν υπάρχουν περισσότερα από ένα αυτοκίνητα σε μια κορυφή του γραφήματος Γ . Μπορούμε πάντοτε να ικανοποιήσουμε αυτή τη συνθήκη μέσω μιας πολύ μικρής τοπικής αλλαγής του χρονοδιαγράμματος των

κινήσεων έτοις ώστε να μη γίνονται συγκρουσεις.

(β) Σε κάθε χρονική στιγμή $t > T$, αποκλείεται να έχουμε δύο αυτοκίνητα σε οημεία της ίδιας ακμής, εκτός των άκρων της. Πράγματι, αφού κάθε αυτοκίνητο κινείται δεξιόστροφα γύρω από την έδρα του, όταν τα αυτοκίνητα κινούνται πάνω στην κοινή ακμή των εδρών τους έχουν διαφορετικές κατεύθυνσεις. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι σύντομα πρόκειται να συναντηθούν ή πως συναντιηθηκαν μια προηγούμενη χρονική στιγμή $t' > t - T > 0$ και τώρα απομακρύνονται το ένα από το άλλο.

(γ) Ας θεωρήσουμε το δυϊκό γράφημα Γ^0 . Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t > T$, το i -οστό αυτοκίνητο, το οποίο κινείται γύρω από την έδρα F_i του γραφήματος Γ (το μαύρο γράφημα στο Σχήμα 5γ) βρίσκεται στην ακμή e^0 αυτής της έδρας (όχι όμως σε μια κορυφή της). Επιλέγουμε τότε την ακμή e^0 του γραφήματος Γ^0 , η οποία τέμνει την ακμή e . Προσανατολίζουμε στη συνέχεια την ακμή e^0 έτσι ώστε να τέμνει την ακμή e από τα δεξιά προς τα αριστερά (κοιτάζοντας προς την κατεύθυνση της κίνησης του i -οστού αυτοκινήτου). Βάσει των αποτελεσμάτων του μέρους 2, δεν θα υπάρχει πρόβλημα ως προς την επιλογή του προσανατολισμού της ακμής e^0 .

Επομένως, για κάθε χρονική στιγμή $t > T$, κατά την οποία δεν υπάρχουν αυτοκίνητα σε κορυφή, έχουμε κατασκευάσει ένα προσανατολισμένο γράφημα Δ_t (στο Σχήμα 5γ οι ακμές αυτού του γραφήματος είναι κόκκινες), που αποτελείται από όλες τις κορυφές του γραφήματος Γ^0 και από όσες ακμές του ιδίου γραφήματος ϵ πιλέξαμε, προσανατολισμένες με τον τρόπο που ορίσαμε προηγουμένως. [Συνεπώς, (το πλήθος των ακμών του Δ_t) = (το πλήθος των αυτοκινήτων) = (το πλήθος των εδρών του Γ) = (το πλήθος των κορυφών του Γ^0) = (το πλήθος των κορυφών του Δ_t).]

(δ) Για κάθε κορυφή του Δ_t υπάρχει μια (και μόνο μια) ακμή e^0 του ίδιου γραφήματος που «απομακρύνεται» από αυτή, διότι, εξ ορισμού, η εν λόγω κορυφή βρίσκεται στο εσωτερικό μιας έδρας F_i του γραφήματος Γ και σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή το i -οστό αυτοκίνητο, το οποίο κινείται

δεξιόστροφα γύρω από την F_i , βρίσκεται σε μία από τις πλευρές της.

Όπως στο μέρος 6, μπορούμε να βρούμε μια απλή κλειστή διαδρομή p αποτελούμενη από τις ακμές $e = e_1, e_2, \dots$ του γραφήματος Δ_t (η συνεχής κόκκινη διαδρομή στο Σχήμα 5γ). Ονομάζουμε O τη οφαιρική περιοχή με όριο την p τέτοια ώστε η p να κινείται δεξιόστροφα γύρω της.

(ε) Τι συμβαίνει όταν το i -οστό αυτοκίνητο κινηθεί μέσω μιας κορυφής από την ακμή e στην επόμενη; Είναι προφανές ότι πρέπει να αφαιρεθεί από το γράφημα Δ_t η ακμή e^0 , που αντιστοιχεί στην e , έτσι ώστε το νέο γράφημα Δ_t (που ορίζεται μονοσήμαντα) να περιέχει αντί της e^0 μια άλλη προσανατολισμένη ακμή f^0 (Σχήμα 5δ). Όμως, η ακμή f^0 εξακολουθεί να ανήκει στην περιοχή O , αφού το αυτοκίνητο κινείται δεξιόστροφα γύρω από την F_i . Μπορούμε να επεκτείνουμε την προσανατολισμένη διαδρομή ξ εκινώντας από την ακμή f^0 , έως ότου βρούμε μια κλειστή διαδρομή p' στο γράφημα Δ_t , η οποία θα περικλείει μια περιοχή O' με λιγότερες κορυφές του γραφήματος Γ (ή έδρες του Γ^0) από τη O (δείτε τη συνεχή κόκκινη διαδρομή του Σχήματος 5δ).

(σ) Το πλήθος των κορυφών του γραφήματος Γ που περικλείονται στα μέλη της ακολουθίας των διαδρομών p, p', p'', \dots δεν μπορεί να μειώνεται επ' απειρον. Επομένως, υπάρχει μια χρονική στιγμή $t_0 > T$ κατά την οποία το γράφημα Δ_{t_0} δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν δύο αυτοκίνητα βρίσκονται στην ίδια ακμή του γραφήματος Γ την ίδια χρονική στιγμή. Βάσει του βήματος (β), κάτι τέτοιο συνεπάγεται ότι έχει συμβεί, ή θα γίνει σύντομα, σύγκρουση. ◻

ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ

Το φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο

Ιπποκράτεος 6, 106 79 Αθηνα,
τηλ.: 3628492

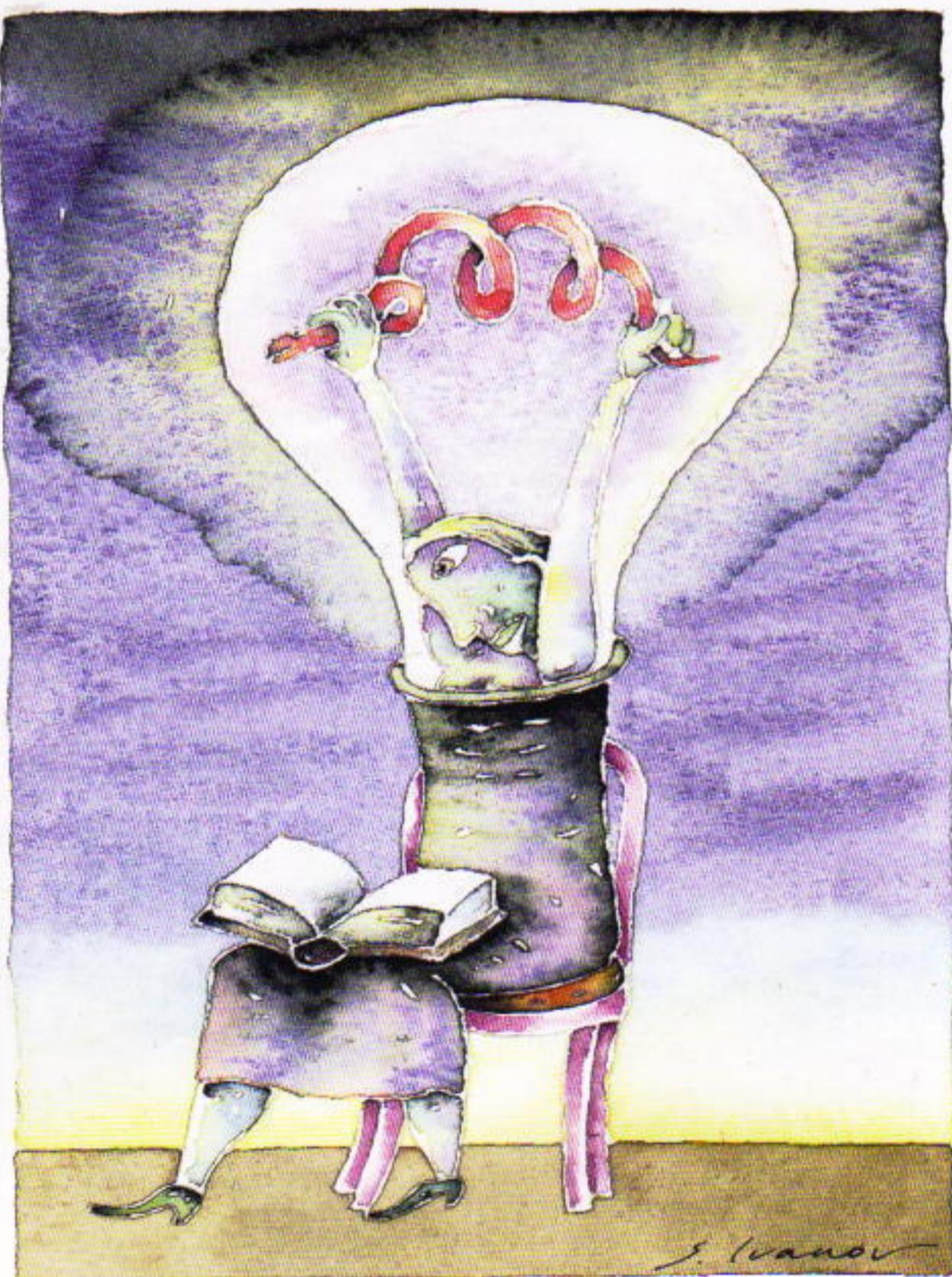
Λαμπτήρες πυρακτώσεως

Pixνοντας φως στη θερμική διαστολή

D.C. Agrawal και V.J. Menon

ΟΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΑΠΟ ΣΑΣ ΕΧΕΤΕ ακούσει για τη θερμική διαστολή, μια ιδιότητα που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε πολλούς μηχανικούς σχεδιασμούς. Το πλέον συνηθισμένο παράδειγμα που απαντάται στα εγχειρίδια είναι οι οιδηροδρομικές γραμμές —οι οποίες διακόπτονται με κενά, ώστε να υπάρχει χώρος για τη διαστολή τους όποτε ο καιρός γίνεται ζεστός. Άλλα και η λειτουργία του θερμοστάτη στις οικιακές συσκευές στηρίζεται στην άνιση διαστολή των μετάλλων στο διμεταλλικό έλασμα. Ωστόσο, η πιο κοινή οικιακή μονάδα που εμφανίζει θερμική διαστολή είναι ο λαμπτήρας πυρακτώσεως.

Αν ο καθηγητής σας της φυσικής σάς ρωτήσει ποιο είναι το θερμότερο αντικείμενο στο σπίτι σας, θα πρέπει να απαντήσετε: «Το νήμα των ηλεκτρικών λαμπτήρων». Όντως, το νήμα ενός κοινού λαμπτήρα των 100 W που λειτουργεί στα 120 V έχει πολύ υψηλή θερμοκρασία, της τάξης των 2.900 K —περίπου το μισό της μέσης θερμοκρασίας της ηλιακής φωτόσφαιρας. Όλα τούτα εγείρουν ορισμένα ερωτήματα. Λόγου χάρη, πώς ξέρουμε ότι το νήμα όντως έχει τέτοια θερμοκρασία; Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι το νήμα διαστέλλεται σημαντικά τόσο κατά το μήκος όσο και κατά τη διάμετρό του, δεδομένου ότι η θερμοκρασία του δωματίου (-300 K) είναι πολύ χαμηλότερη. Ποια είναι τα φυσικά αποτελέσμα-



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

τα της εν λόγω διαστολής; Ας προποθήσουμε να απαντήσουμε σε τούτα τα ερωτήματα, χρησιμοποιώντας ορισμένα βασικά φυσικά επιχειρήματα και μερικές αριθμητικές εκτιμήσεις.

Τα νήματα των λαμπτήρων των 100 W είναι κατασκευασμένα από λειο και εξαιρετικά λεπτό σύρμα βολφραμίου το οποίο, σε θερμοκρασία δωματίου $T_0 = 300 \text{ K}$, έχει μήκος $L_0 = 0,475 \text{ m}$ και ακτίνα $r_0 = 3,05 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Προκειμένου να χωρέσει στο μικρό γυάλινο περίβλημα, το νήμα τυλίγεται ως σπείρα ή ακόμη και ως περιελιγμένη σπείρα. Σε θερμοκρασία δωματίου η αντίσταση του συγκεκριμένου σύρματος είναι αρκετά μικρή,

$$R_0 = \frac{\rho_0 L_0}{\pi r_0^2} = 9,18 \Omega,$$

όπου $\rho_0 = 5,65 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ είναι η ειδική αντίσταση του βολφραμίου.

Όταν ανάβουμε μια τέτοια λάμπα, αρχίζει να ρέει ρεύμα μεγάλης σχετικά έντασης,

$$I_0 = \frac{V}{R_0} = 13,1 \text{ A},$$

όπου V είναι η σταθερή ή η ενεργός τιμή της τάσης στις περιπτώσεις που το ρεύμα είναι, αντίστοιχα, συνεχές ή εναλλασσόμενο. Όπως ήταν αναμενόμενο, η μεγάλη τιμή του ρεύματος παράγει οημαντική ποσότητα θερμότητας Joule, με αποτέλεσμα να αυξηθεί γρήγορα η θερμοκρασία του νήματος. Μέσα σε 0,1 s περίπου η θερμοκρασία φθάνει στην κανονική τιμή

λειτουργίας T και ο λαμπτήρας εκπέμπει με τη μέγιστη λαμπρότητά του.

Οι φυσικές ιδιότητες των μεταλλών συνήθως εξαρτώνται από τη θερμοκρασία. Λόγου χάρη, έχει ανακαλυφθεί πειραματικά ότι η ειδική θερμότητα του βολφραμίου υπακούει στον εξής εκθετικό νόμο:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,215}.$$

Επιπλέον, η εξάρτηση του μήκους από τη θερμοκρασία δίνεται από τη σχέση:

$$L = L_0 [1 + \sigma(T)],$$

όπου

$$\sigma(T) = \frac{L - L_0}{L_0}$$

είναι ο ενεργός συντελεστής θερμικής διαστολής του βολφραμίου σε θερμοκρασία T . Ο εν λόγω συντελεστής έχει μετρηθεί από τους μεταλλουργούς, οι οποίοι έχουν καθορίσει την τιμή του ως συνάρτηση της εκατοστιαίας μεταβολής του μήκους. Η θερμοκρασία αναφοράς για τη μέτρηση του μήκους είναι η κανονική θερμοκρασία των 293 K (ή 20°C). Η τιμή του συντελεστή κυμαίνεται σε μια ευρεία περιοχή τιμών —από 0,003% στους 300 K έως 2,209% στους 3.655 K. Σε πολλά εγχειρίδια ο $\sigma(T)$ γράφεται κατά προσέγγιση ως $a(T - T_0)$, όπου το a θεωρείται σταθερά (και ονομάζεται συντελεστής θερμικής διαστολής). Ωστόσο, στο μεγάλο εύρος

των θερμοκρασιών που θα εξετάσουμε εδώ, η τιμή του a για το βολφράμιο ποικίλλει οημαντικά.

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο της θερμικής διαστολής τόσο για το μήκος όσο και για την ακτίνα του νήματος, βρίσκουμε ότι η αντίστασή του σε θερμοκρασία T γίνεται

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho L}{\pi r^2} \\ &= \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,215} \cdot \left[\frac{L_0 [1 + \sigma(T)]}{\pi r_0^2 [1 + \sigma(T)]^2} \right] \\ &= R_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,215} \cdot \frac{1}{1 + \sigma(T)}. \end{aligned}$$

Όπως ίσως θα θυμάστε, η μέση ιοχύς ενός λαμπτήρα σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας περιγράφεται από το ρυθμό παραγωγής θερμότητας Joule,

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2 [1 + \sigma(T)]}{R_0^2} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1,215}. \quad (1)$$

Κατ' αρχήν, αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς T , αν και ίσως να φαίνεται περιπλοκό εξαιτίας της παρουσίας του $\sigma(T)$, ο οποίος μας είναι γνωστός μόνο υπό τη μορφή πινάκων σε σχετικά συγγράμματα. Ευτυχώς όμως, η τιμή του $\sigma(T)$ είναι μικρή συγκριτικά με τη μονάδα, σε όλο το θερμοκρασιακό εύρος $300 \text{ K} \leq T \leq 3.655 \text{ K}$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να καταφύγουμε σε μια απλή προσεγγιστική τεχνική προκειμένου να βρούμε τη λύση.

Γι' αυτό το σκοπό, ας εισαγάγουμε μια πρότυπη θερμοκρασία T' η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (1) όταν $\sigma(T) = 0$. Επομένως,

$$T' = T_0 \left(\frac{V^2}{R_0 P} \right)^{\frac{1}{1,215}}. \quad (2)$$

Η φυσική σημασία της T' είναι ότι αντιπροσωπεύει τη θερμοκρασία ενός υποθετικού πυρακτωμένου νήματος το οποίο δεν εμφανίζει θερμική διαστολή. Εφόσον αναμένουμε ότι η τιμή της T' θα βρίσκεται λογικά κοντά στην άγνωστη θερμοκρασία T , μπορούμε ως αρχική προσέγγιση να αντικαταστήσουμε το $\sigma(T)$ με το $\sigma(T')$ (μια

Πίνακας 1

P (W)	L_0 (m)	r_0 (m)	T' (K)	$\sigma(T')$ (%)	T (K)	$T - T'$ (K)
6	0,371	$5,71 \cdot 10^{-6}$	2.276	1,092	2.296	20
60	0,533	$2,29 \cdot 10^{-5}$	2.497	1,251	2.523	26
100	0,475	$3,05 \cdot 10^{-5}$	2.890	1,553	2.927	37
500	0,874	$9,02 \cdot 10^{-5}$	2.773	1,458	2.806	33
1.000	0,973	$1,45 \cdot 10^{-4}$	3.134	1,752	3.179	45
5.000	1,128	$3,68 \cdot 10^{-4}$	3.418	1,996	3.474	56
10.000	1,384	$5,84 \cdot 10^{-4}$	3.492	2,061	3.551	59

σταθερά), και εν συνέχεια να λύσουμε την εξίσωση (1), παίρνοντας

$$T \approx T' \left(1 + \sigma(T')\right)^{\frac{1}{1.215}}.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του διωνύμου μπορούμε, επιχειρώντας νέα προσέγγιση, να ξαναγράψουμε την παραπάνω έκφραση ως

$$T \approx T' \left[1 + \frac{\sigma(T')}{1.215}\right]. \quad (3)$$

Αυτή είναι η ζητούμενη θερμοκρασία του νήματος. Η διαφορά μεταξύ της T και της T' οφείλεται στη θερμική διαστολή.

Αν εισαγάγουμε στην εξίσωση (2) τις χαρακτηριστικές παραμέτρους για ένα λαμπτήρα των 100 W, βρίσκουμε $T' = 2.890$ K. Στη συνέχεια, από το εγχειρίδιο φυσικών σταθερών και μονάδων μέτρησης *CRC Handbook of Physics and Chemistry* εντοπίζουμε το ζεύγος θερμοκρασιών που «περιβάλλουν» την T' (σημεία στηρίξεως) και τις αντιστοιχες τιμές του σ (τιμές στηρίξεως). Με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής υπολογίζουμε την τιμή της $\sigma(T')$.*

Έτσι, βρίσκουμε $\sigma(2.890$ K) = 1,553%. Άρα,

$$T \approx (2.890 \text{ K}) \left(1 + \frac{0,016}{1,215}\right) = 2.927 \text{ K}.$$

Τα στοιχεία καθώς και τα αποτέλεσματα για άλλους λαμπτήρες που κατασκευάζονται από την General Electric φαίνονται στον Πίνακα 1.

Μολονότι ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\sigma(T)$ είναι μικρός, η διαφορά $T - T' \approx 37$ K είναι σημαντική. Τούτο το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα οφείλεται στο γεγονός ότι η θερμοκρασία T' στην εξίσωση (3) είναι μεγάλη συγκριτικά με τη θερμοκρασία δωματίου. Τα παραπάνω δικαιώνουν την άποψή μας ότι οι λαμπτήρες πρακτώσεως παρέχουν μια ικανοποιητική περιγραφή των αποτελεσμάτων της θερμικής διαστολής στα μέταλλα.

* Αν T_1 και T_2 είναι τα δύο σημεία στηρίξεως εκατέρωθεν της T' , και $\sigma(T_1)$ και $\sigma(T_2)$ οι αντιστοιχες τιμές στηρίξεως, τότε, σύμφωνα με τη μέθοδο γραμμικής παρεμβολής, $\sigma(T) = \sigma(T_1) + \frac{T' - T_1}{T_2 - T_1} (\sigma(T_2) - \sigma(T_1))$. (Σ.τ.ε.)

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



N. Βασίλιεφ και A. Γεγκόροφ

ΠΑΝΕΝΩΣΙΑΚΕΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ
ΤΗΣ Ε.Σ.Δ.

1961-1991

Εκδόσεις Κάτοπτρο

N. Βασίλιεφ και A. Γεγκόροφ

Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Δ. (1961-1991) —Τόμος 2—

Στο βιβλίο ο αναγνώστης θα βρει προβλήματα εξαιρετικής ποιότητας από διάφορους τομείς των μαθηματικών (άλγεβρα, θεωρία αριθμών, ανισότητες, επιπεδομετρία, στερεομετρία, συνδυαστική και πιθανότητες, κ.λπ.), που θα του δώσουν την ευκαιρία να εφαρμόσει όσα γνωρίζει και, παράλληλα, να εξασκήσει την επινοητικότητα και τη φαντασία του.

Σ' αυτή την απολαυστική διανοητική προσπάθεια θα τον βοηθήσουν οι ανεκτίμητης διδακτικής αξίας λύσεις, προεκτάσεις και εναλλακτικές προσεγγίσεις τις οποίες παρέχουν οι συγγραφείς.

Στη σειρά «Ολυμπιάδες» κυκλοφορούν ήδη τα βιβλία:

- N. Βασίλιεφ και A. Γεγκόροφ, *Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Δ. (1961-1991)*, τόμος 1
- M. Κλάμκιν, *Μαθηματικές Ολυμπιάδες των Η.Π.Α. (1972-1986)*
και σύντομα θα κυκλοφορήσει το βιβλίο:
- P. Ιωάννου, *Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής (1967-1997)*

Εκδόσεις Κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Ωκεάνια τηλέφωνα

Μπορεί ένα ακουστικό τηλέφωνο να έχει το μήκος του ισημερινού;

Andrey Varlamov και Alexey Malyarovskiy

ΠΙΝ ΑΠΟ ΠΕΝΗΝΤΑ ΧΡΟΝΙΑ ΠΕΡΙΠΟΥ, σοβιετικοί και αμερικανοί επιστήμονες ανακάλυψαν ένα εκπληκτικό φαινόμενο. Ήχητικά κύματα που διαδίδονταν μέσα στη θάλασσα μπορούσαν μερικές φορές να εντοπιστούν χιλιάδες χιλιόμετρα μακριά από την πηγή τους. Σε ένα από τα πιο επιτυχημένα πειράματα, ο ήχος μιας υπόγειας έκρηξης που προκλήθηκε από επιστήμονες έξω από τις ακτές της Αυστραλίας έκανε το μισό γύρο της Γης για να καταγραφεί από μια άλλη ερευνητική ομάδα στις Βερμούδες, κάπου 19.600 km μακριά (απόσταση-ρεκόρ για τη διάδοση παλαικών ηχητικών σημάτων). Αυτό σημαίνει ότι η ένταση του ήχου σχεδόν δεν μεταβλήθηκε μολονότι αυτός απομακρύνθηκε τόσο από την πηγή του. Ποιος είναι ο μηχανισμός της διάδοσης του ήχου σε τόσο μεγάλες αποστάσεις; Αποδεικνύεται ότι οι ωκεανοί διαθέτουν ακουστικούς κυματοδηγούς —δηλαδή διαύλους κατά μήκος των οποίων τα ηχητικά κύματα ταξιδεύουν χωρίς πρακτικά να εξασθενούν (χωρίς απώλεια έντασης).

Άλλο παράδειγμα ακουστικού κυματοδηγού είναι ο σωλήνας επικονιωνίας μεταξύ της γέφυρας και του μηχανοστασίου των πλοίων, ο οποίος χρησιμοποιείται από παλιά. Είναι χαρακτηριστικό ότι η εξασθένηση του ήχου ο οποίος ταξιδεύει κατά μήκος ενός κυματοδηγού στον αέρα είναι τόσο μικρή, που αν κατασκευάζαμε ένα σωλήνα 750 km μακρύ, θα μπο-

ρούσε να λειτουργήσει ως «τηλέφωνο» για επικοινωνία μεταξύ Ρώμης και Μονάχου. Ωστόσο, θα αποδεικνύται άβολο να προσπαθήσετε να συνομιλήσετε μέσω μιας τέτοιας γραμμής, διότι το πρόσωπο στην άλλη άκρη θα χρειαζόταν να περιμένει μισή ώρα για να ακούσει τη φωνή σας.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η ανάκλαση από τα όρια ενός κυματοδηγού αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμά του: χάρη σ' αυτή την ιδιότητα, η ενέργεια του κύματος δεν «ακτινοβολείται» προς όλες τις κατευθύνσεις και διαδίδεται κατά μήκος του κυματοδηγού.

Τα παραπάνω παραδείγματα, λοιπόν, μας επιτρέπουν να υποθέσουμε ότι η διάδοση του ήχου σε πολύ μεγάλες αποστάσεις στον ωκεανό οφείλεται σε κάποιο είδος μηχανισμού κυματοδηγησης. Άλλα πώς σχηματίζεται ένας τέτοιος γιγαντιαίος κυματοδηγός; Κάτω από ποιες συνθήκες εμφανίζεται και ποια είναι τα ανακλαστικά όρια που δίνουν τη δυνατότητα στα ηχητικά κύματα να ταξιδεύουν τόσο μακριά;

Αφού η επιφάνεια του ωκεανού μπορεί να ανακλά τον ήχο αρκετά καλά, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε πως αποτελεί το ανώτερο όριο του κυματοδηγού. Ο λόγος της έντασης του ανακλώμενου κύματος προς αυτή την κύματος που διαπερνά τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις πυκνότητες των μέσων και την

ταχύτητα του ήχου σε καθένα από αυτά. Αν τα δύο μέσα διαφέρουν σημαντικά —για παράδειγμα, αν αυτά είναι ο αέρας και το νερό, οι πυκνότητες τους διαφέρουν κατά παράγοντα 1.000 και οι αντίστοιχες ταχύτητες του ήχου κατά παράγοντα 4,5—, τότε, ακόμη και όταν ένα ηχητικό κύμα προσπίπτει κάθετα στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια νερού-αέρα, πρακτικά ανακλάται ολόκληρο και επιστρέφει στο νερό η ένταση του κύματος που περνά στον αέρα αποτελεί μόνο το 0,01% αυτής του προσπίπτοντος κύματος. Η ανάκλαση είναι ακόμη ισχυρότερη όταν το κύμα προσπίπτει πλάγια στη διαχωριστική επιφάνεια. Παρά ταύτα, η επιφάνεια του ωκεανού δεν μπορεί να είναι εντελώς επίπεδη, λόγω των πανταχού παρόντων θαλάσσιων κυμάτων· αυτά προκαλούν χαοτική ανάκλαση των ηχητικών κυμάτων, με συνέπεια να διαταράσσουν την κυματοδηγητική δράση της επιφάνειας του ωκεανού.

Τα αποτελέσματα δεν είναι καλύτερα όσον αφορά την υπόθεση πως κατώτερο όριο του κυματοδηγού αποτελεί ο πυθμένας (ή βυθός) του ωκεανού. Η πυκνότητα των ζημάτων στο βυθό της θάλασσας έχει συνήθως τιμές στην περιοχή $1,24-2,0 \text{ g/cm}^3$, και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου μέσω αυτών των ζημάτων είναι μόνο 2-3% μικρότερη απ' ό,τι στο νερό. Έτσι, όταν ένα ηχητικό κύμα προσπίπτει στον πυθμένα του ωκεανού, σημαντικό μέρος της ενέργειάς του απο-



CEPTER NAPKIN 1595-1-2

ροφάται από αυτόν και η ανάκλαση του κύματος είναι ασθενής.

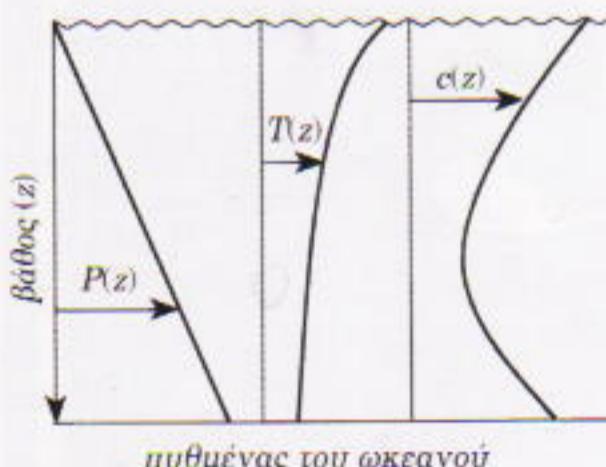
Άρα, τα όρια του ωκεανίου κυματοδηγού πρέπει να αναζητηθούν κάπου μεταξύ του βυθού και της ελεύθερης επιφάνειας. Και, πράγματι, εκεί βρέθηκαν. Αποδείχτηκε ότι αυτά τα όρια είναι υδάτινα στρώματα σε διάφορα βάθη.

Πώς όμως ανακλώνται τα ηχητικά κύματα από τα «τοιχώματα» του ωκεανίου ακουστικού κυματοδηγού; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, πρέπει να εξετάσουμε το μηχανισμό διάδοσης του ήχου στη θάλασσα.

Ο ήχος στο νερό

Μέχρι τώρα, αναφερόμενοι στους κυματοδηγούς υποθέσαμε σιωπηρά ότι η ταχύτητα του ήχου μέσα σ' αυτούς είναι σταθερή. Στην πραγματικότητα, όμως, η ταχύτητα του ήχου στον ωκεανό ποικίλλει από 1.450 έως 1.540 m/s. εξαρτάται από τη θερμοκρασία του νερού, την αλατότητα, την υδροστατική πίεση και άλλους παράγοντες. Για παράδειγμα, η αύξηση της υδροστατικής πίεσης $P(z)$ σε συνάρτηση με το βάθος z οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου κατά 1,6 m/s για κάθε 100 m βάθος. Η αύξηση της θερμοκρασίας $T(z)$ επίσης οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας του ήχου. Πάντως, η θερμοκρασία του νερού, κατά κανόνα, ελαττώνται ταχύτατα καθώς μετακινούμαστε από τα ανώτερα, θερμά στρώματα, προς τα βάθη του ωκεανού, όπου η θερμοκρασία πρακτικά διατηρείται σταθερή.

Εξαιτίας αυτών των δύο μηχανισμών —υδροστατική πίεση και θερμοκρασία— η εξάρτηση της ταχύτητας του ήχου $c(z)$ από το βάθος είναι όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Κοντά στην επιφάνεια ο κυριαρχος παράγων



Σχήμα 1

είναι η θερμοκρασία —η οποία μειώνεται ταχύτατα. Εδώ, η ταχύτητα διάδοσης του ήχου ελαττώνεται με το βάθος. Όσο κατεβαίνουμε βαθύτερα, ο ρυθμός ελάττωσης της θερμοκρασίας μειώνεται, αλλά η υδροστατική πίεση συνεχίζει να αυξάνεται. Σ' ένα συγκεκριμένο βάθος, αυτοί οι δύο παράγοντες εξισορροπούνται: η ταχύτητα του ήχου φθάνει στην ελάχιστη τιμή της. Σε ολοένα μεγαλύτερο βάθος, η ταχύτητα αυξάνεται λόγω της ανόδου της υδροστατικής πίεσης.

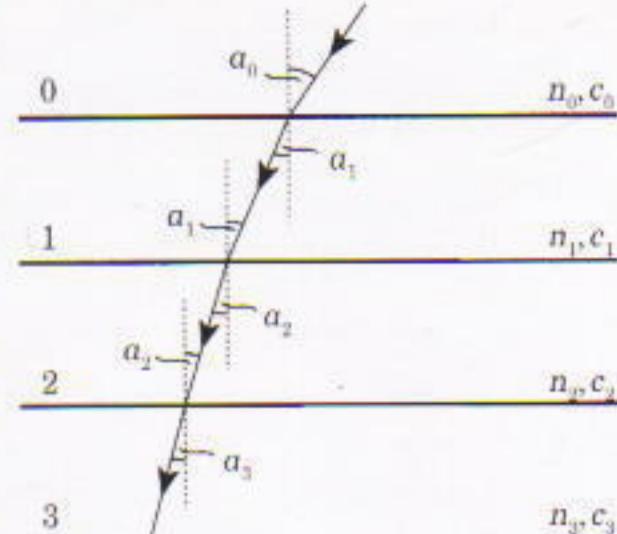
Διαπιστώνουμε ότι η ταχύτητα του ήχου στο θαλάσσιο νερό εξαρτάται από το βάθος, γεγονός που επηρεάζει τη φύση της διάδοσής του. Για να κατανοήσουμε τον τρόπο που οι «ηχητικές δέσμες» κινούνται στη θάλασσα, θα καταφύγουμε σε ένα οπτικό ανάλογο. Θα εξετάσουμε πώς μια φωτεινή ακτίνα διαδίδεται μέσα από μια σειρά επίπεδων, παράλληλων μεταξύ τους, διαφανών πλακιδίων με μεταβαλλόμενους δείκτες διάθλασης. Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τα συμπράσματα για μέσο στο οποίο ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται ομαλά.

Το φως στο νερό

Ας θεωρήσουμε μια στοιβά από k επίπεδα παράλληλα πλακίδια με δείκτες διάθλασης n_0, n_1, \dots, n_k , όπου $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ (Σχήμα 2). Υποθέστε ότι η γωνία πρόσπτωσης μιας φωτεινής ακτίνας στο πρώτο πλακίδιο (η γωνία που οχηματίζει η ακτίνα με την κάθετη στην επιφάνεια του πλακιδίου στο σημείο πρόσπτωσης) είναι a_0 . Η ακτίνα, αφού διαθλαστεί στη διαχωριστική επιφάνεια 0-1 (γωνία διάθλασης a_1), κινείται στο πλακίδιο 1 και προσπίπτει υπό γωνία a_1 στη διαχωριστική επιφάνεια 1-2. Μετά τη διάθλασή της σ' αυτή, η ακτίνα προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια 2-3 υπό γωνία a_2 , κ.ο.κ. Σύμφωνα με το νόμο του Snell, έχουμε

$$\frac{\eta\mu a_0}{\eta\mu a_1} = \frac{n_1}{n_0}, \quad \frac{\eta\mu a_1}{\eta\mu a_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\eta\mu a_{k-1}}{\eta\mu a_k} = \frac{n_k}{n_{k-1}}.$$

Ενθυμούμενοι ότι ο λόγος των δείκτων διάθλασης δύο οπτικών μέσων είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου των ταχυτήτων διάδοσης του φωτός σ' αυτά, θα γράψουμε τις προηγούμενες εξισώσεις στην ακόλουθη μορφή:



Σχήμα 2

$$\frac{\eta\mu a_0}{\eta\mu a_k} = \frac{c_0}{c_k}, \quad \frac{\eta\mu a_1}{\eta\mu a_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{\eta\mu a_{k-1}}{\eta\mu a_k} = \frac{c_{k-1}}{c_k}.$$

($c_0 > c_1 > \dots > c_k$). Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις εξισώσεις κατά μέλη, παίρνουμε

$$\frac{\eta\mu a_0}{\eta\mu a_k} = \frac{c_0}{c_k}.$$

Ελαττώνοντας το πάχος κάθε πλακίδιου στο μηδέν και αυξάνοντας το πλήθος τους ώς το άπειρο, θα οδηγήθουμε στο γενικευμένο νόμο της διάθλασης (νόμος του Snell):

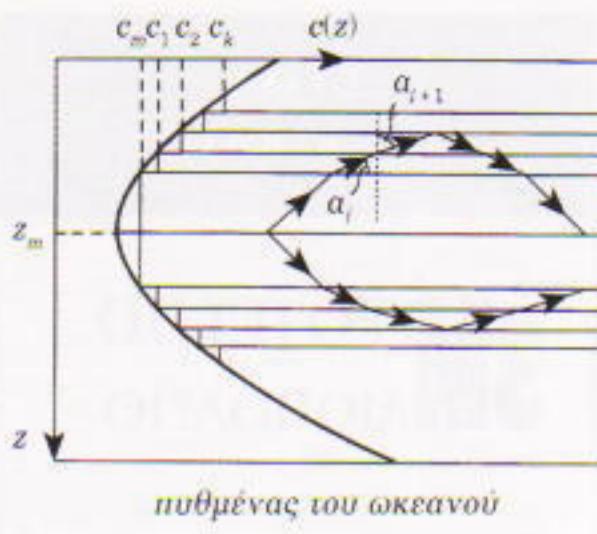
$$c(z) \cdot \eta\mu a(0) = c(0) \cdot \eta\mu a(z),$$

όπου $c(0)$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο σημείο που η ακτίνα εισχωρεί στο μέσο και $c(z)$ η ταχύτητα του φωτός σε απόσταση z από το προηγούμενο σημείο. Επομένως, όταν το φως διαδίδεται σ' ένα οπτικό μέσο αυξανόμενου δείκτη διάθλασης, η φωτεινή ακτίνα (καθώς η ταχύτητα του φωτός ελαττώνται και ο δείκτης διάθλασης αυξάνεται) διαθλάται όλο και περισσότερο πλησιάζοντας την κάθετο.

Επομένως, αν γνωρίζουμε πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα του φωτός σ' ένα ετερογενές μέσο, μπορούμε να δείξουμε, μέσω του νόμου του Snell, πώς διαδίδεται μέσα σ' αυτό οποιαδήποτε ακτίνα. Οι ηχητικές δέσμες που διαδίδονται σ' ένα ετερογενές μέσο, στο οποίο η ταχύτητα του ήχου μεταβάλλεται, κάμπτονται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Ο ωκεανός αποτελεί ένα παράδειγμα τέτοιου μέσου.

Υδάτινοι κυματοδηγοί

Ας επιστρέψουμε τώρα στο ερώτη-



Σχήμα 3

μα της διάδοσης του ήχου στον οκεάνιο ακουστικό κυματοδηγό. Φανταστείτε ότι η πηγή του ήχου βρίσκεται σε βάθος z_m , το οποίο αντιστοιχεί στην ελάχιστη ταχύτητα του ήχου (Σχήμα 3). Πώς ταξιδεύει ο ήχος καθώς απομακρύνεται από την πηγή; Η ηχητική δέσμη που εκπέμπεται οριζόντια διαδίδεται επί του οριζόντιου επιπέδου το οποίο διέρχεται από την πηγή. Άλλα οι δέσμες που εγκαταλείπουν την πηγή υπό γωνία ως προς το οριζόντιο επίπεδο κάμπτονται λόγω διάθλασης. Και αφού η ταχύτητα του ήχου αυξάνεται τόσο πάνω όσο και κάτω από το οριζόντιο επίπεδο $z = z_m$, όλες οι ηχητικές δέσμες θα κάμπτονται τείνοντας να γίνουν οριζόντιες. Σε κάποια συγκεκριμένα σημεία οι εν λόγω δέσμες θα υποστούν ολική ανάκλαση, και θα αρχίσουν να πλησιάζουν προς το οριζόντιο επίπεδο.

Επομένως, το φαινόμενο της διάθλασης του ήχου στο νερό του οκεανού επτρέπει σ' ένα ηχητικό σήμα να διαδοθεί χωρίς να ανέλθει μέχρι την επιφάνεια ή να κατέλθει ώς τον πυθμένα του οκεανού. Και τούτο σημαίνει ότι έχουμε έναν οκεάνιο ακουστικό κυματοδηγό. Το ρόλο των «τοιχω-

μάτων» τον παίζουν τα στρώματα νερού στα οποία ανακλώνται οι ηχητικές δέσμες.

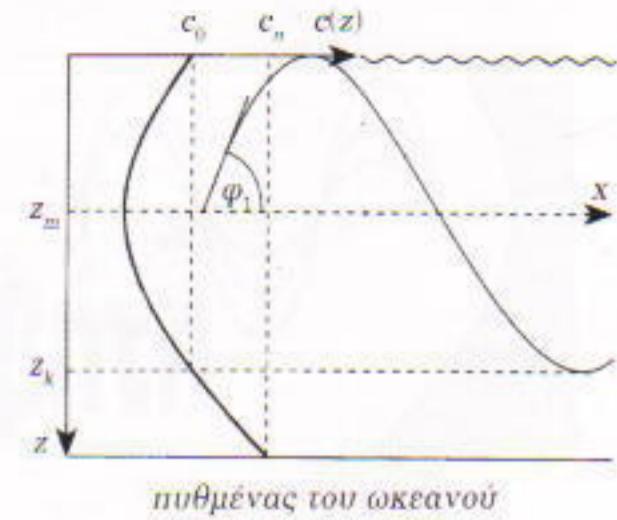
Το βάθος z_m όπου η ταχύτητα του ήχου έχει την ελάχιστη τιμή της ονομάζεται «άξονας» του κυματοδηγού. Συνήθως αυτά τα βάθη κυμαίνονται μεταξύ των 1.000-1.200 m, αλλά σε μικρότερα γεωγραφικά πλάτη, όπου το νερό είναι θερμότερο σε μεγαλύτερο βάθος, ο άξονας μπορεί να κατέβει μέχρι τα 2.000 m. Από την άλλη μεριά, στα μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη η επίδραση της θερμοκρασίας στην κατανομή της ταχύτητας του ήχου είναι σημαντική μόνο στο εγγύς στην επιφάνεια στρώμα, και επομένως ο άξονας του κυματοδηγού ανεβαίνει σε βάθος 200-500 m. Στα πολικά γεωγραφικά πλάτη ανεβαίνει ακόμη πλησιέστερα στην επιφάνεια.

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι οκεάνιου κυματοδηγού. Ο πρώτος τύπος εμφανίζεται όταν η ταχύτητα του ήχου κοντά στην επιφάνεια (c_0) είναι μικρότερη απ' ότι στον πυθμένα του οκεανού (c_n). Αυτό συνήθως συμβαίνει σε βαθιά νερά, όπου η πίεση στο βυθό φθάνει τις εκατοντάδες ατμόσφαιρες. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο ήχος ανακλάται σημαντικά στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-αέρα. Έτσι, αν η επιφάνεια του οκεανού είναι ομαλή (εντελώς ήρεμη), μπορεί να λειτουργήσει ως το ανώτερο όριο του κυματοδηγού. Τότε, ο δίαυλος (ή κανάλι) απλώνεται σε όλη τη μάζα του νερού, από την επιφάνεια ώς τον πυθμένα (βλ. Σχήμα 4).

Ας δούμε ποιο κλάσμα της ηχητικής δέσμης «αιχμαλωτίζεται» στον δίαυλο. Θα ξαναγράψουμε το νόμο του Snell ως εξής:

$$c(z) \sin \varphi_1 = c_1 \sin \varphi(z),$$

όπου φ_1 και $\varphi(z)$ είναι οι γωνίες που σχηματίζονται από τις ηχητικές ακτίνες με την οριζόντιο στα βάθη z_1 και z αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι $\varphi_1 = \pi/2 - \alpha_1$, $\varphi(z) = \pi/2 - \alpha(z)$. Αν η πηγή του ήχου βρίσκεται στον άξονα του διαύλου ($c_1 = c_m$), η απώτατη ηχητική ακτίνα που αιχμαλωτίζεται στο δίαυλο πρέπει στον πυθμένα του οκεανού να σχηματίζει γωνία $\varphi(z) = 0$ (Σχήμα 4). Επομένως, όλες οι ακτίνες που εγκαταλείπουν την πηγή υπό γωνίες οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη



Σχήμα 5

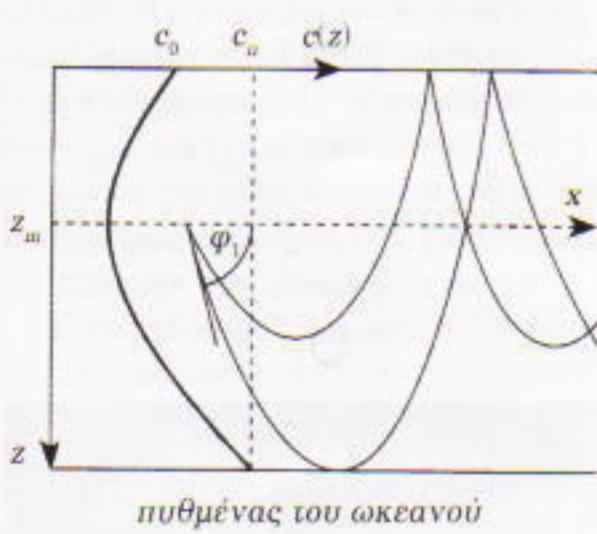
$$\text{ουν} \varphi_1 \geq c_m / c_n$$

θα περιέχονται στο δίαυλο.

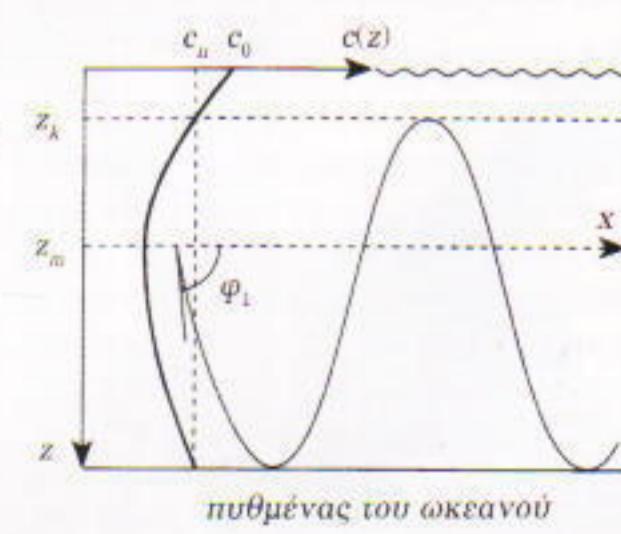
Όταν η επιφάνεια του νερού είναι ταραγμένη, όλες οι ηχητικές δέσμες θα ανακλώνται απ' αυτή. Όσες, λοιπόν, εγκαταλείπουν την επιφάνεια υπό μεγαλύτερες γωνίες θα φθάνουν στο βυθό και θα απορροφώνται σ' αυτόν. Έτσι, ακόμη και σ' αυτή την περιπτωση, ο δίαυλος μπορεί να αιχμαλωτίσει όλες τις ακτίνες που λόγω της διάθλασης φθάνουν έως και κάτω ακριβώς από την ταραγμένη επιφάνεια (Σχήμα 5). Ο δίαυλος θα απλώνεται από την επιφάνεια έως βάθος z_k , το οποίο μπορεί να καθοριστεί από τη συνθήκη $c(z_k) = c_0$. Είναι ξεκάθαρο ότι ένας τέτοιος δίαυλος αιχμαλωτίζει όλες τις ηχητικές ακτίνες με γωνίες

$$\varphi_1 \leq \text{τοξουν} c_m / c_0.$$

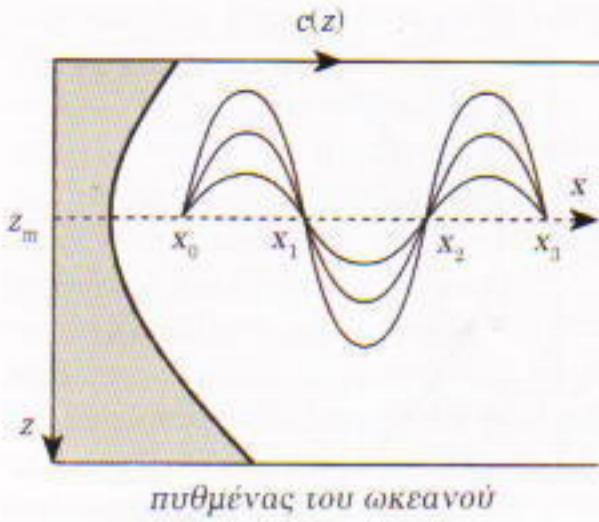
Ο δεύτερος τύπος κυματοδηγού αποτελεί γνώρισμα των ρηχών νερών. Εμφανίζεται μόνον όταν η ταχύτητα του ήχου κοντά στην επιφάνεια είναι μεγαλύτερη απ' αυτή κοντά στον πυθμένα (βλ. Σχήμα 6), καταλαμβάνοντας το υδάτινο στρώμα από τον πυθμένα έως βάθος z_k , όπου



Σχήμα 4



Σχήμα 6



Σχήμα 7

$c(z_k) = c_a$. Είναι σαν να αναποδογυρίσαμε τον πρώτο τύπο κυματοδηγού.

Για ορισμένους τύπους εξάρτησης της ταχύτητας του ήχου από το βάθος, ο κυματοδηγός επιδρά πάνω στις ηχητικές δέσμες όπως ο συγκεντρωτικός φακός στο φως. Αν η πηγή του ήχου βρίσκεται επί του άξονα, οι ακτίνες που εκπέμπει υπό διαφορετικές γωνίες θα συγκλίνουν περιοδικά σε σημεία κατά μήκος του άξονα. Αυτά τα σημεία ονομάζονται εστίες του διαύλου. Έτσι, αν η ταχύτητα του ήχου στο διαύλο μεταβάλλεται με το βάθος σχεδόν παραβολικά — $c(z) = c_m(1 + 1/2b^2z^2)$ — τότε, για ακτίνες που εγκαταλείπουν την πηγή υπό μικρές γωνίες ως προς την οριζόντιο, οι εστίες θα βρίσκονται στα σημεία $x_n = x_0 + np/b$, όπου $n = 1, 2, \dots$ και b συντελεστής με διαστάσεις αντίστροφες του βάθους (m^{-1}) (Σχήμα 7). Αυτός ο τύπος καμπύλης για την $c(z)$ προεγγίζει την πραγματική εξάρτηση της ταχύτητας του ήχου από το βάθος στους κυματοδηγούς του βαθέος οκεανού. Οι αποκλίσεις, όμως, από την ακριβή παραβολική εξάρτηση της $c(z)$ καταλήγουν τελικά στην εξαφάνιση των εστιών κατά μήκος του άξονα των εν λόγω κυματοδηγών.

Εφαρμογές(;

Είναι δυνατόν να εκπέμψουμε ένα ηχητικό σήμα κατά μήκος ενός οκεάνιου ακουστικού κυματοδηγού και να το λάβουμε στο σημείο εκπομπής, αφού εκτελέσει μια πλήρη περιφορά γύρω από τη Γη. Η απάντηση είναι ένα κατηγορηματικό όχι. Πρώτα απόλα, οι ήπειροι παρεμβάλλουν αδιαπέραστα εμπόδια, όπως και οι βαθιές πεδιάδες και κοιλότητες στα βάθη των οκεανών της Γης. Έτσι, είναι αδύνατο να επιλέξουμε μια διεύθυνση κατά

μήκος της οποίας θα μπορούσε να υπάρχει μόνο ένας κυματοδηγός που να κυκλώνει ολόκληρη την υδρόγειο. Άλλα αυτός δεν είναι ο μόνος λόγος. Το ηχητικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος ενός οκεάνιου ακουστικού κυματοδηγού διαφέρει από τα ηχητικά κύματα στους σωλήνες επικοινωνίας των πλοίων, που αναφέραμε στην αρχή του άρθρου. Το ηχητικό κύμα που ταξιδεύει από τη γέφυρα στο μηχανοστάσιο είναι μονοδιάστατο, και το εμβαδόν του μετώπου του σταθερό σε οποιαδήποτε απόσταση από την πηγή. Επομένως, η ένταση του ήχου θα είναι επίσης σταθερή σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος του σωλήνα. Όσον αφορά τον οκεάνιο ακουστικό κυματοδηγό, όμως, το ηχητικό κύμα δεν διαδίδεται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής αλλά προς όλες τις κατεύνοσεις στο επίπεδο $z = z_m$. Έτσι, εδώ το μέτωπο του κύματος είναι μια κυλινδρική επιφάνεια. Εξαιτίας αυτού, η ένταση του ήχου ελαττώνεται με την απόσταση.

Μια άλλη αιτία εξασθένησης του ήχου είναι η απόσβεσή του καθώς ταξιδεύει μέσα στα νερά του οκεανού. Ενέργεια από το κύμα μετατρέπεται σε θερμότητα εξαιτίας του ιξώδους του νερού καθώς και άλλων μη αντιστρεπτών διαδικασιών. Επίσης, ένα ηχητικό κύμα διασκορπίζεται μέσα στον οκεανό λόγω ποικίλων ετερογενειών, όπως τα αιωρούμενα σωματίδια, οι φυσαλίδες αέρα, το πλαγκτόν, ακόμη και οι νυκτικές κύστες των ψαριών.

Πριν κλείσουμε, θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο υποβρύχιος ηχητικός διαύλος δεν είναι το μοναδικό παραδειγμα κυματοδηγού στη φύση. Η εκπομπή σε μεγάλες αποστάσεις από ραδιοφωνικούς ή τηλεοπτικούς σταθμούς είναι εφικτή μόνο λόγω της διάδοσης των ραδιοκυμάτων στην ατμόσφαιρα μέσω γιγαντιαίων κυματοδηγών. Και είμαστε σίγουροι ότι έχετε ακούσει για αντικατοπτρισμούς, ακόμη κι αν δεν έχετε δει ποτέ κανέναν. Κάτω από συγκεκριμένες ατμοσφαιρικές συνθήκες, μπορούν να σχηματιστούν δίαυλοι κυματοδηγησης για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην ορατή περιοχή. Αυτό εξηγεί την ξαφνική εμφάνιση ενός πλοίου στη μέση μιας ερήμου, ή γιατί μια πόλη αναδύεται στη μέση του οκεανού. ◻

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΚΑΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ



Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, δημιουργήθηκε ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον, όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους.

Έκει, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο —μαζί με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης— άνοιξαν ένα βιβλιοπωλείο / εκθετήριο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παραγωγής. Περιμένουμε το αναγνωστικό κοινό να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

Νέα στοά Αρσακείου
(Πανεπιστημίου και Πειραιάζηλους 5), 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785

Με κανόνα και διαβήτη

Κατασκευή των λύσεων της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

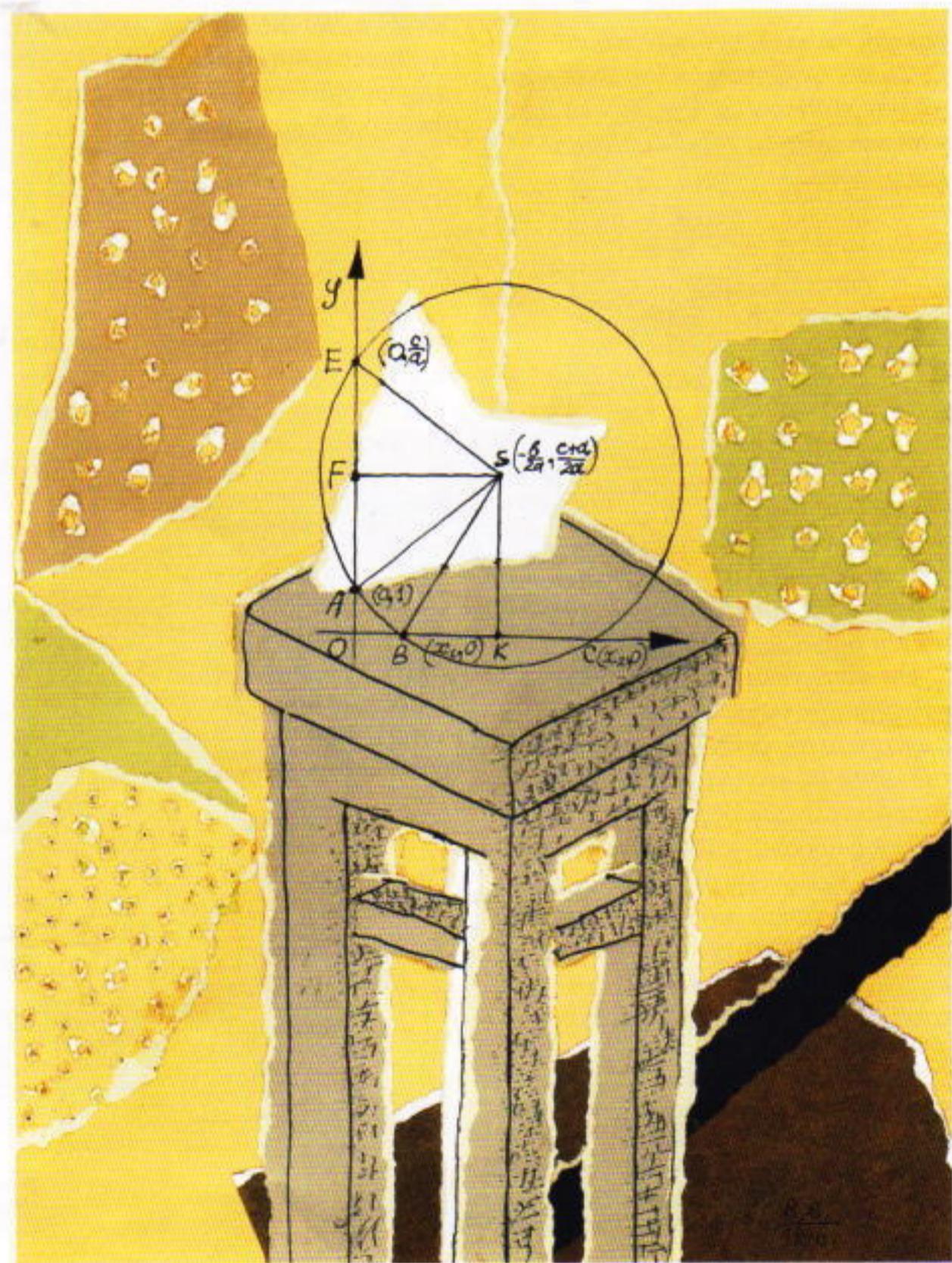
A.A. Presman

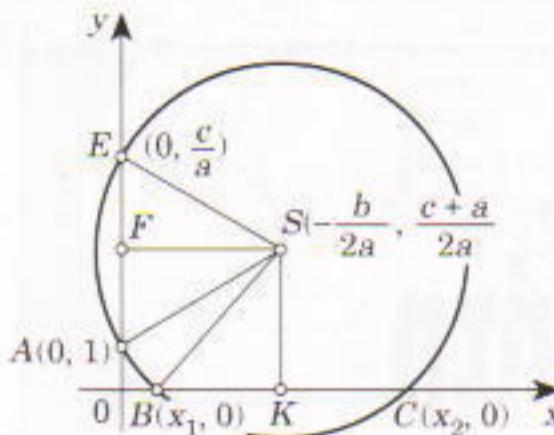
ΕΝΑΣ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΤΗΣ λύσης μας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι η κατασκευή του γραφήματος της αντίστοιχης παραβολής: είναι κάτι που γίνεται εύκολα με τη βοήθεια ενός προγράμματος υπολογιστή, αλλά είναι αρκετά επίπονο όταν εργαζόμαστε με το χέρι. Στη γεωμετρία χρησιμοποιούμε συχνά τα κλασικά εργαλεία κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων, τον κανόνα και το διαβήτη.

Μια μέρα ένας από τους μαθητές μου μου υπέβαλε την εξής ερώτηση: «Γιατί δεν λύνουμε τις δευτεροβάθμιες εξίσωσεις με κανόνα και διαβήτη, αφού με αυτά είναι τόσο εύκολη η κατασκευή ενός κύκλου;» Έτσι, στη διάρκεια του μαθήματος ανέκυψε το εξής πρόβλημα.

Πρόβλημα. Δίνονται τρεις πραγματικοί αριθμοί a, b, c , οι οποίοι είναι οι συντελεστές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$. Βρείτε την ακτίνα και τις συντεταγμένες του κέντρου ενός κύκλου ο οποίος τέμνει τον άξονα x στα σημεία εκείνα των οποίων οι τετμημένες είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (υποθέτουμε πάντοτε πως $a \neq 0$).

Είναι εξ αρχής φανερό ότι έχουμε περισσότερους από έναν τέτοιους κύκλους. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $B(x_1, 0)$ και $C(x_2, 0)$, όπου x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, και (για να είναι μοναδική η λύση μας) α-





Σχήμα 1

πό το σημείο $A(0, 1)$ (βλ. Σχήμα 1). Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα για τη δύναμη σημείου,¹ έχουμε

$$OC \cdot OB = OE \cdot OA,$$

από όπου παίρνουμε

$$OE = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{x_1 x_2}{1} = \frac{c}{a},$$

δηλαδή, το γινόμενο των ριζών.

Το κέντρο S του κύκλου είναι η τομή των καθέτων SF και SK που άγονται στα μέσα των χορδών AE και BC . Επομένως,

$$OK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2} = \frac{-b}{2a}$$

και

$$OF = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη.

Θα υποθέσουμε ότι, όταν δίνονται ευθύγραμμα τμήματα μήκους p και q , ο αναγνώστης γνωρίζει τον τρόπο κατασκευής με κανόνα και διαβήτη των τμημάτων με μήκος $p+q$, $p-q$, kp και p/k (k φυσικός), καθώς και τον τρόπο κατασκευής των p/q και p/q δίνεται ένα τμήμα μοναδιαίου μήκους.

Αρχίζουμε κατασκευάζοντας τα σημεία $S(-b/2a, (c+a)/2a)$ (το κέντρο του κύκλου) και $A(0, 1)$. Στη συνέ-

χεια, σχεδιάζουμε τον κύκλο με ακτίνα SA . Οι τετμημένες των σημείων τομής του κύκλου με τον άξονα x είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει την ορθότητα της κατασκευής. Εμεις θα επισημάνουμε μόνο τρεις ειδικές περιπτώσεις που πρέπει να διακρίνουμε και μια μέθοδο γραφικού εντοπισμού των μιγαδικών ριζών της εξίσωσης.

(1) Η ακτίνα του κύκλου είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του κέντρου. Ο κύκλος τέμνει τον άξονα x στα σημεία $B(x_1, 0)$ και $C(x_2, 0)$ (βλ. Σχήμα 1). Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες.

(2) Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με την τεταγμένη του κέντρου. Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x στο σημείο $B(x_1, 0)$ (βλ. Σχήμα 2). Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες. Η τετμημένη του σημείου επαφής είναι

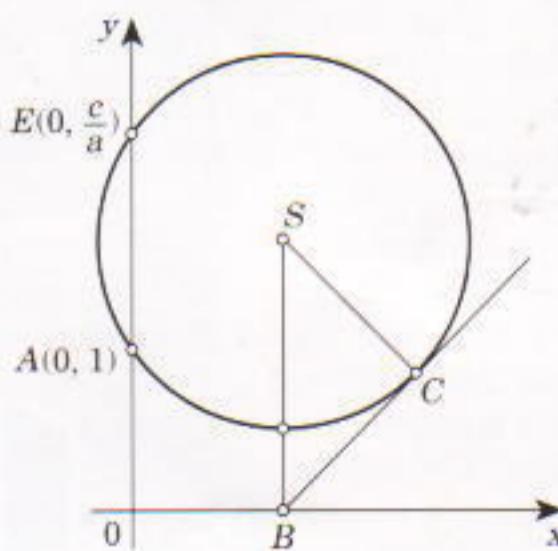
$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

(3) Η ακτίνα του κύκλου είναι μικρότερη από την τεταγμένη του κέντρου. Ο κύκλος δεν τέμνει τον άξονα x (Σχήμα 3).

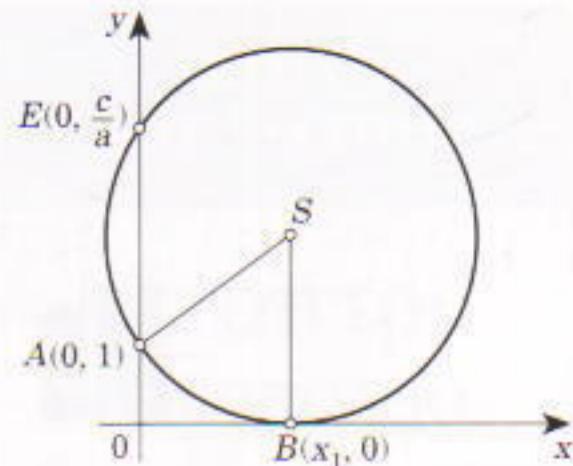
Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση έχει δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i.$$

Το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ρίζας εκφράζεται από το μήκος του $OB = -b/2a$ — της τετμημένης του κέντρου. Η απόλυτη τιμή του φανταστικού μέρους ισούται με το μήκος της εφαπτομένης BC .



Σχήμα 3



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια αυτής της κατασκευής είναι εύκολη η διερεύνηση των ιδιοτήτων των ριζών, καθώς και η εύρεση τύπων για το άθροισμα και το γινόμενό τους (που δεν θα ήταν όμως τίμιο να χρησιμοποιήσουμε όταν επαληθεύσουμε την κατασκευή μας). Γι' αυτό θα ολοκληρώσουμε το άρθρο δινοντας μια αλγεβρική ερμηνεία της προτεινόμενης λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, θα θεωρήσουμε το ιοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c + ay^2 - (c + a)y = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Κάθε ρίζα x_1 της εξίσωσης αντιστοιχεί στη λύση $x = x_1, y = 0$ του συστήματος, και αντιστρόφως. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος ορίζει έναν κύκλο (οι αναγνώστες μπορούν να το επαληθεύσουν) και η δεύτερη τον άξονα x . Τα σημεία τομής είναι σημεία $(x_i, 0)$, όπου x_i είναι οι ρίζες.

Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με κανόνα και διαβήτη εμφανίζεται ήδη στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η λύση όμως εξισώσεων μεγαλύτερου βαθμού (όπως των περισσότερων τριτοβάθμιων) είναι αδύνατη με την ίδια μέθοδο. Το εν λόγω γεγονός συνδέεται με δύο από τα τρία μεγάλα προβλήματα κατασκευών της αρχαιότητας: την ιριχοτόμηση μιας γωνίας και το διπλασιασμό του κύβου. Οι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν στην πλούσια βιβλιογραφία σχετικά με την εξέλιξη αυτού του ενδιαφέροντος ζητήματος ανά τους αιώνες. Το τρίτο πρόβλημα, ο τετραγωνισμός του κύκλου, θίγεται στο άρθρο «Οι μηνισκοί του Ιπποκράτη», στη σελ. 61 του παρόντος τεύχους. ◻

1. Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι αν φέρουμε τέμνουσα σε έναν κύκλο από ένα εξωτερικό του σημείο, τότε το γινόμενο ολόκληρης της τέμνουσας επί το εκτός του κύκλου τμήμα της είναι σταθερό και ανεξάρτητο της τέμνουσας.

Ο χαρτοπάίκτης, ο φιλότεχνος και η Αγία Πετρούπολη

Πώς μπορείτε να κερδίσετε μια περιουσία

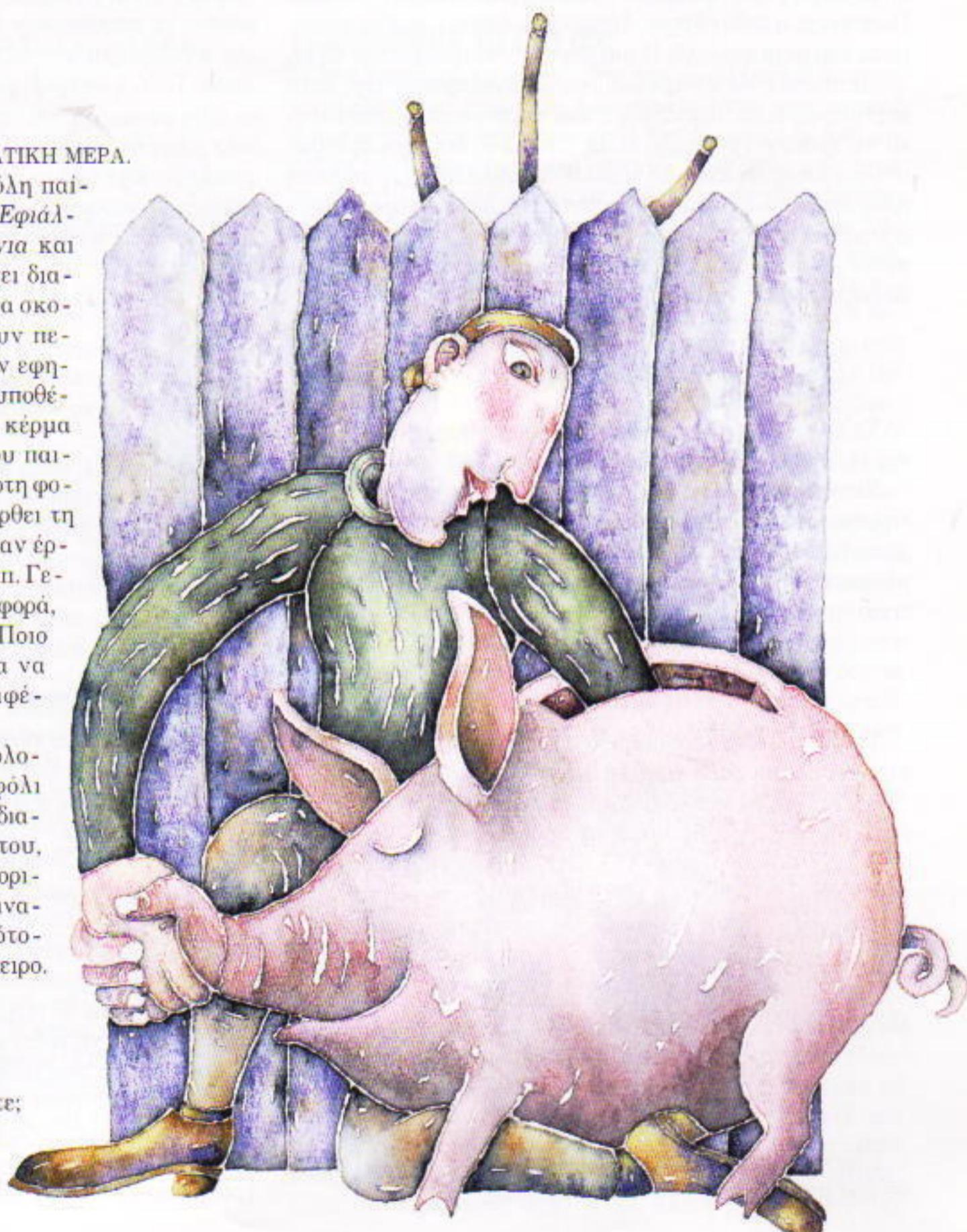
Leon Taylor

EΙΝΑΙ ΜΙΑ ΒΑΡΕΤΗ ΧΕΙΜΩΝΙΑΤΙΚΗ ΜΕΡΑ. Οι κινηματογράφοι στην πόλη παιζουν για άλλη μια φορά τον Εφιάλτη στη λεωφόρο Πενσυλβανία και το ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα έχει διακοπει. Ιδού, λοιπόν, ένας τρόπος να οκτώσουμε την ώρα μας. Μου έχουν περισσέψει μερικά κέρματα από την εφημερίδα που αγόρασα το πρωί. Ας υποθέσουμε ότι αρχίζω να ρίχνω ένα κέρμα έως ότου έρθει κεφαλή. Τέλος του παιγνιδιού. Αν έρθει κεφαλή την πρώτη φορά, θα σας δώσω 1 δολάριο, αν έρθει τη δεύτερη, θα σας δώσω 2 δολάρια, αν έρθει την τρίτη, 4 δολάρια, κ.λπ., κ.λπ. Γενικά, αν έρθει κεφαλή την n -οστή φορά, θα σας πληρώσω 2^{n-1} δολάρια. Ποιο ποσό, αλήθεια, θα ρισκάρετε για να συμμετάσχετε σε αυτό το ενδιαφέρον τυχερό παιγνίδι;

Λοιπόν, αν οκεφίεστε σαν υπολογιστής, θα ρισκάρετε το πορτοφόλι σας, την πιστωτική σας κάρτα, το διαμέρισμά σας μαζί με τα κλειδιά του, και το χριστουγεννιάτικο αεροπορικό σας εισιτήριο για την Ταϊτή. Η αναμενόμενη τιμή αυτών των μονότονων στοιχημάτων φθάνει στο άπειρο.

Μια απροσδόκητη αναμενόμενη τιμή

Δυσκολεύεστε να το πιστέψετε; Ας διερευνήσουμε το ζήτημα. Η αναμενόμενη τιμή του στοιχήματος είναι η βέλτιστη μαθη-



ματική πρόβλεψη της αξίας του. Για να την υπολογίσετε, πρέπει να φανταστείτε όλα όσα μπορεί να συμβούν, το πόσο πιθανό είναι να συμβούν και το τι θα κερδίσετε εφόσον συμβούν. Ένα παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι συμφωνούμε να στρίψω το κέρμα μία μόνο φορά. Τότε έχετε 50% πιθανότητα να έρθει κεφαλή, και να κερδίσετε το σπουδαιό βραβείο του ενός δολαρίου, και 50% πιθανότητα να έρθουν γράμματα, οπότε δεν κερδίζετε τίποτα. Κεφαλή ή γράμματα: αυτές είναι οι μοναδικές δυνατότητες. Έτσι, η αναμενόμενη τιμή αυτού του στοιχήματος είναι $(1/2)1 + (1/2)0 = 0,5$ δολάρια.

Ωστόσο, η αρχική μας συμφωνία δεν ήταν να στρίψω το κέρμα μία μόνο φορά. Δέχτηκα να το ρίχνω συνέχεια, αδιαφορώντας για τον πρημένο μου αντίχειρα, έως ότου έρθει κεφαλή.

Αν το εν λόγω ευτυχές γεγονός συμβεί τη δεύτερη φορά, θα κερδίσετε 2 δολάρια. Για να έρθει όμως κεφαλή κατά τη δεύτερη ρίψη πρέπει να έρθουν γράμματα στην πρώτη. Ποια είναι η πιθανότητα, λοιπόν, να έρθουν πρώτα γράμματα και μετά κεφαλή; Η μία ρίψη δεν επηρεάζει την άλλη, οπότε πρέπει να αντιμετωπίσουμε ανεξάρτητα την κάθε περίπτωση. Στην πρώτη ρίψη του νομίσματος η πιθανότητα να έρθουν γράμματα είναι 50%. Στη δεύτερη, η πιθανότητα να έρθει κεφαλή είναι 50%. Δηλαδή, έχουμε μισές πιθανότητες να έρθουν γράμματα την πρώτη φορά, ενώ τη δεύτερη έχουμε τις μισές από αυτές να έρθει κεφαλή. Επομένως, η πιθανότητα να έρθει για πρώτη φορά κεφαλή στη δεύτερη ρίψη είναι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Το προσδοκώμενο κέρδος σε αυτή την περίπτωση θα είναι $(1/4)2 = 0,5$ δολάρια.

Συνεχίζουμε. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει για πρώτη φορά κεφαλή στην τρίτη ρίψη; Πρέπει να φέρουμε γράμματα τις δύο πρώτες φορές και αμέσως μετά κεφαλή. Επομένως, η πιθανότητα της πρώτης κεφαλής στην τρίτη ρίψη είναι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Το σχήμα είναι ευδιάκριτο: Η πιθανότητα να εμφανιστεί για πρώτη φορά κεφαλή στη n -οστή ρίψη είναι $(1/2)^n$.

Τέλος, για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του στοιχήματος, προσθέτουμε τα προσδοκώμενα κέρδη για όλες τις δυνατές ρίψεις. Άλλωστε, μπορεί να φανείτε τυχεροί: είναι δυνατόν να μην εμφανιστεί κεφαλή μέχρι τη δέκατη ρίψη —ή την εκατοστή. Θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας όλες τις δυνατότητες. Ας εφοδιαστούμε με λίγο χαρτί (όλο το χαρτί του κόσμου για την ακρίβεια) και ας χρησιμοποιήσουμε την εξής σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1}) \frac{1}{2^n} = 0,5 + 0,5 + 0,5 + \dots \quad (1)$$

Εδώ έχουμε ένα άπειρο πλήθος μισών δολαρίων. Περισσότερα απ' όσα χωρά όλος ο Γαλαξίας.

Γιατί προκύπτει αυτό το παράδοξο αποτέλεσμα; Σε κάθε στρίψιμο του νομίσματος η προσδοκία να έρθει κεφαλή μοοσταθμίζεται με το κέρδος που προκύπτει όταν τελικά αυτό συμβαίνει. Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή την πρώτη φορά είναι $1/2$, αλλά το κέρδος σας είναι μόλις 1 δολάριο. Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή για πρώτη φορά στη δέκατη ρίψη είναι μόνο $1/1.024$, αλλά το κέρδος τότε θα είναι 512 δολάρια. Για κάθε περίπτωση, το αναμενόμενο κέρδος είναι μόνο μισό δολάριο. Άλλα είναι δυνατόν να έρθει για πρώτη φορά κεφαλή σε οποιαδήποτε από ένα άπειρο πλήθος ρίψεων. Το στοιχήμα «προβλέπει» όλη αυτή την απειρία δυνατοτήτων, και έτσι αυτό που θα μπορούσαμε κάπως αυθαίρετα να καλέσουμε «αναμενόμενη αξία» του —στην πραγματικότητα δεν είναι δυνατόν να την υπολογίσουμε— αποκλίνει στο άπειρο.

Βλέποντας μια τέτοια σειρά είναι εξαιρετικά έντονος ο πειρασμός να αναφωνήσουμε: «Μα και βέβαια, η τιμή της δεν είναι πεπερασμένη· περιέχει άπειρο πλήθος όρων!». Ας υποθέσουμε όμως ότι κερδίζετε μόνο 1 δολάριο, ανεξάρτητα από το πότε έρχεται για πρώτη φορά κεφαλή. Τότε, η αναμενόμενη τιμή του στοιχήματος θα ήταν

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1) \frac{1}{2^n} = 0,5 + 0,25 + 0,125 + \dots \quad (2)$$

Και αυτή είναι μια άπειρη σειρά, μόνο που οι όροι της γίνονται όλο και μικρότεροι —συρρικνώνονται, κατά κάποια έννοια, έως το μέγεθος ατόμου, νετρονίου, κουάρκ ... Το αξιοσημείωτο είναι ότι το άθροισμά της είναι μόνο 1 δολάριο. Μπορείτε να το επαληθεύσετε και μόνοι σας: γράψτε ένα σχετικό πρόγραμμα για τον υπολογιστή σας και αφήστε το να «τρέξει» για λίγες ώρες· ή μέρες· ή δοκιμάστε το εξής:

Πρόβλημα 1. Θεωρήστε δεδομένο τον τύπο του αθροίσματος μιας άπειρης γεωμετρικής προόδου. Χρησιμοποιήστε τον για να αποδείξετε ότι η (2) συγκλίνει στο 1.

Ας επιστρέψουμε στην (1). Η σειρά αυτή είναι ένα πραγματικό αριστούργημα. Ένα στοιχήμα με άπειρο κέρδος! Και όμως, στην πραγματικότητα δεν θα ποντάρατε όλη σας την περιουσία σε αυτό. Γιατί;

Ένα πιο ρεαλιστικό παιγνίδι

Πιθανόν δυσκολεύεστε να πιστέψετε ότι είμαι άπειρα πλούσιος (το ίδιο και η γυναίκα μου). Έτσι, ακόμη και αν έρθουν πολλές φορές γράμματα, το μόνο που μπορώ να κάνω είναι να σας δώσω ό,τι έχω —γεγονός που περιορίζει το αναμενόμενο κέρδος σας. Ο γάλλος μαθηματικός Poisson το απέδειξε αυτό με ένα ωραιότατο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι κερδίζετε 2^n όταν έρθει κεφαλή στη n -οστή ρίψη. Επίσης, ας δεχτούμε ότι αυτό είναι ακριβώς το ποσό που διαθέτω —θα το ονομάσουμε M . Σκεφτείτε τώρα το εξής παιγνίδι: Θα ρίξω το νόμισμα N φορές ή μέχρι να έρθει κεφαλή (όποιο από τα δύο συμβεί πρώτο), και θα σας πληρώσω μόνο όσα μπορώ. Φυσικά, το N μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε.

Για να καταλάβουμε πώς επηρεάζει η τεράστια περιουσία μου την αναμενόμενη τιμή του στοιχήματος, θα χρειαστεί να συνδέσουμε με κάποιο τρόπο την περιου-

σία μου και το πλήθος των ρίψεων. Ο Poisson, για λόγους που ελπίζω ότι σε λίγο θα γίνουν φανεροί, θα έγραφε την περιουσία μου ως $M = 2^v(1 + h)$. Εδώ το v είναι ένας ακέραιος τον οποίο αργότερα θα συγκρίνουμε με το πλήθος των ρίψεων του νομίσματος και το h είναι ένας αριθμός μεταξύ του 0 και του 1. Στην αρχή θα βρούμε ένα v τέτοιο ώστε το M να είναι κατά προσέγγιση ίσο με την περιουσία μου και στη συνέχεια θα επιλέξουμε το h έτσι ώστε η προσέγγιση να γίνει ακριβέστερη.

Και τώρα ήρθε η ώρα να βγάλετε τα κομπουτεράκια από το συρτάρι σας...

Πρόβλημα 2. Ας υποθέσουμε ότι η περιουσία μου, M , είναι 67,5 εκατομμύρια δολάρια (κάπως απίθανο!). Ποια είναι τα v και h ;

Όποιο και αν είναι το v , ας δούμε τι συμβαίνει στις πρώτες v ρίψεις. Η προσδοκία σας σύμφωνα με το στοιχήμα γι' αυτές τις ρίψεις είναι

$$\left(\frac{1}{2}\right)2 + \left(\frac{1}{4}\right)4 + \cdots + \left(\frac{1}{2^v}\right)2^v = 1 + 1 + \cdots + 1 = v.$$

Θυμηθείτε ότι $M = 2^v(1 + h) > 2^v$. Αν πρέπει να ρίξω το κέρμα περισσότερες από v φορές για να έρθει κεφαλή, τότε είμαι υποχρεωμένος να σας δώσω όλα όσα έχω — δηλαδή, $2^v(1 + h)$. Συνεπώς, η αναμενόμενη τιμή του στοιχήματος (και όχι μόνο για τις πρώτες v ρίψεις) είναι

$$v + 2^v(1 + h)\left(\frac{1}{2^{v+1}} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \quad (3)$$

ή

$$v + (1 + h)\left(1 - \frac{1}{2^{N-v}}\right). \quad (4)$$

Όταν το N τείνει στο άπειρο, η προσδοκία σας καταλήγει κάπου μεταξύ των $v + 1$ και $v + 2$. Για παράδειγμα, όταν η περιουσία μου είναι 67,5 εκατομμύρια δολάρια, θα ρισκάρετε 27 ή 28 το πολύ δολάρια.

Πρόβλημα 3. Πώς γνωρίζουμε ότι η σχέση (3) είναι σωστή;

Πρόβλημα 4. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του αθροίσματος μιας πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς για να αποδείξετε ότι η (4) προκύπτει από την (3).

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι, εάν η περιουσία μου είναι 67,5 εκατομμύρια δολάρια, δεν χρειάζεται να στοιχηματίσετε περισσότερα από 27 ή 28 δολάρια προκειμένου να την κάνετε δική σας.

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι όταν το N τείνει στο άπειρο, η προσδοκία, σύμφωνα με το στοιχήμα, της (4) σταθεροποιείται μεταξύ των $v + 1$ και $v + 2$.

Τα στοιχήματα που υπολογίσαμε — 27 ή 28 δολάρια — μοιάζουν πράγματι λογικά. Αξίζει όμως να θυμηθούμε ότι ανώνυμο σχόλιο για τον Poisson: «Οποτε έπρεπε να διαλέξει μεταξύ δύο αντίθετων ιδεών αυτή που θα επιβεβαιώνε την εφαρμογή της ανάλυσής του, έκανε συνήθως τη λάθος επιλογή». Ακόμη και αν η περιουσία του Caesar

Palace* είναι μικρότερη από το ομοσπονδιακό αποθεματικό της Νέας Υόρκης, οι όποιες πιθανότητες χρεοκοπίας του δεν αποτελούν επαρκή λόγο για να παιξτε εκεί έστω και λίγα δολάρια.

Ο γάλλος μαθηματικός Joseph Bertrand υποστήριξε ότι, για τους σκοπούς του παιγνιδιού, ένα καζίνο μπορεί πάντα να περιορίσει τη μέγιστη δυνατή απώλειά του επαναπροσδιορίζοντας τις μονάδες βάσει των οποίων πληρώνει. Ας υποθέσουμε ότι το κεφάλαιό του είναι 600.000 δολάρια ή 60.000.000 πένες. Τότε, όταν έρχεται κεφαλή την πρώτη φορά, μπορεί να πληρώσει μία πένα μόνο ή ένα ρινισμα χαλκού ή έναν κόκκο άμμου ή ένα μόριο υδρογόνου. «Ο κίνδυνος της χρεοκοπίας μπορεί να μειωθεί απεριόριστα», ισχυρίστηκε ο Bertrand. Πάντως, είτε καταφέρετε να τινάξετε την μπάνκα είτε όχι, το βασικό ερώτημα παραμένει: γιατί οι περισσότεροι από εμάς θα στοιχημάτιζαν μόνο λίγα δολάρια σε ένα στοιχήμα με αναμενόμενη τιμή πολλών χιλιάδων δολαρίων;

ΣΤΟΙΧΗΜΑΤΙΣΤΕ ΤΗ ΖΩΗ ΣΑΣ

Μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος θα ήταν να εξετάσουμε παρόμοια στοιχήματα στην πραγματική ζωή και να αναρωτηθούμε γιατί δεν δέχονται οι άνθρωποι να ποντάρουν τα πάντα σε αυτά. Ας θεωρήσουμε έναν παράγοντα που μοιάζει να μη φοβάται ποτέ τη χρεοκοπία — την κυβέρνηση. Υποθέτουμε ότι εκδίδει λαχεία. Το Λαχείο 1 κερδίζει 1 δολάριο αν έρθει κεφαλή την πρώτη φορά. Το Λαχείο 2 δίνει κέρδος 2 δολάρια αν έρθει κεφαλή για πρώτη φορά στη δεύτερη ρίψη, το Λαχείο 3 κερδίζει 4 δολάρια αν έρθει πρώτη φορά κεφαλή στην τρίτη ρίψη, ενώ το Λαχείο 4 δίνει κέρδος 8 δολάρια αν έρθει κεφαλή στην τέταρτη ρίψη, κ.ο.κ. Με μισό δολάριο το λαχνό, θα αγοράζατε ίσως τα Λαχεία 1 και 2. Θα πάρνατε όμως ποτέ το Λαχείο 50.000.000; Σίγουρα όχι, σύμφωνα τουλάχιστον με τον Antoine-Augustin Cournot, το θεμελιωτή των οικονομικών μαθηματικών. Ο Cournot υπέδειξε το παράδειγμα της γαλλικής λοταρίας, όπου επιλέγεις πέντε αριθμούς ανάμεσα σε ενενήντα έχοντας τη δυνατότητα να στοιχηματίσεις σε διάφορους συνδυασμούς. Κάποια στιγμή καταργήθηκε η δυνατότητα να στοιχηματίζεις σε ένα μόνο συνδυασμό πέντε αριθμών, επειδή κανείς σχεδόν δεν το προτιμούσε. «Φανταζόμαστε», έγραψε ειρωνικά ο Cournot, «ότι πρέπει να υπάρχει ένα όριο στο απειροελάχιστο των πιθανοτήτων».

Ίσως μερικές πιθανότητες είναι υπερβολικά μικρές για να τις λάβουμε υπόψη μας. Κατά το 18ο αιώνα, η πιθανότητα αιφνίδιου θανάτου ενός άνδρα ηλικίας 56 ετών ήταν 1 στις 10.000. Οι περισσότεροι άνθρωποι κατά την γενετή τους δεν υπολογίζουν ποτέ τη θλιβερή προοπτική να μη ζουν την επόμενη μέρα, γι' αυτό και είναι λογικό, όπως υποστήριξε ο γάλλος φυσιοδίφης Buffon, να θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα 1 προς 10.000 είναι πέρα από την αντιληφτή μας. Κι εσείς, όταν υπολογίζετε την αναμενόμενη τιμή του στοιχήματός μου, θα θέσετε αυτή την πιθανότητα, και τις μικρότερες, ίση με το μηδέν. (Είναι πιθανόν να αναρωτήστε γιατί δεν επέλεξε ο Buffon την πιθανότητα να πεθάνει ένας άνθρωπος είκοσι ετών. Ο λόγος είναι, ίσως, ότι ο Buffon είχε μονομαχήσει σε αυτή την ηλικία, όταν ήταν φοιτητής στην Ανζέ. Όταν μεγάλωσε έγινε

* Καζίνο στο Λας Βέγκας. (Σ.τ.μ.)

συνετότερος, μέχρι του σημείου να περιγράφει τη χαρτοπαιξία ως *le mal epidémique* (επιδημικό κακό).

Ο Buffon, άνθρωπος προσγειωμένος, που φυτιλαμβάνοταν το άπειρο ως *une idée de privation* (μια έννοια απουσίας), επινόησε την πρόταση ότι μερικά γεγονότα είναι εξαιρετικά απίθανα, και συνεπώς δεν αξίζει να ανησυχούμε γι' αυτά. Όταν το άκουει αυτό ο Edward Gibbon, κάγχασε. «Αν γινόταν κάποια κλήρωση για να επλέγει το θύμα μιας εκτέλεσης», έγραψε ο άγγλος ιστορικός, «και το όνομά σας ήταν γραμμένο σε έναν από δέκα χιλιάδες λαχνούς, θα ήσασταν απόλυτα ήσυχος.»

Ο σύγχρονος άνθρωπος θα αισθάνοταν εξασφαλισμένος με ένα εκατομμύριο λαχνούς; Σύμφωνα με τους ομοσπονδιακούς νόμους των ΗΠΑ, η συγκέντρωση μιας επικίνδυνης ουσίας πρέπει να είναι τέτοια ώστε η πιθανότητα θανάτου από την καθημερινή κατανάλωσή της επί εβδομήντα έτη να μην είναι μεγαλύτερη από μία στο εκατομμύριο. Μπορούμε λοιπόν να προβλέψουμε πιθανότητες που δεν τις πρόβλεπαν οι πρόγονοι μας; Ισως. Ή, πιθανόν, φοβόμαστε περισσότερο ότι θα πεθάνουμε. Η επιλογή ενός κατωφλίου πιθανότητας αρχίζει να μοιάζει αυθαίρετη. Ο Condorcet είχε προτείνει ως κατώφλιο τον κίνδυνο του ταξιδιού με πλοίο από το Ντόβερ στο Καλαί. Αυτό πριν τη Γαλλική Επανάσταση. (Αν λάβουμε υπόψη την τύχη του Condorcet, θα έπρεπε να είχε θεωρήσει ως ελάχιστο κίνδυνο αυτόν του ταξιδιού από το Καλαί στο Ντόβερ πέθανε στις γαλλικές φυλακές.) Μας φαίνεται σήμερα αμελητέα η πιθανότητα να πνιγούμε στο στενό της Μάγχης, πλέοντας προς τη Γαλλία;

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΚΕΣ ΈΡΙΔΕΣ

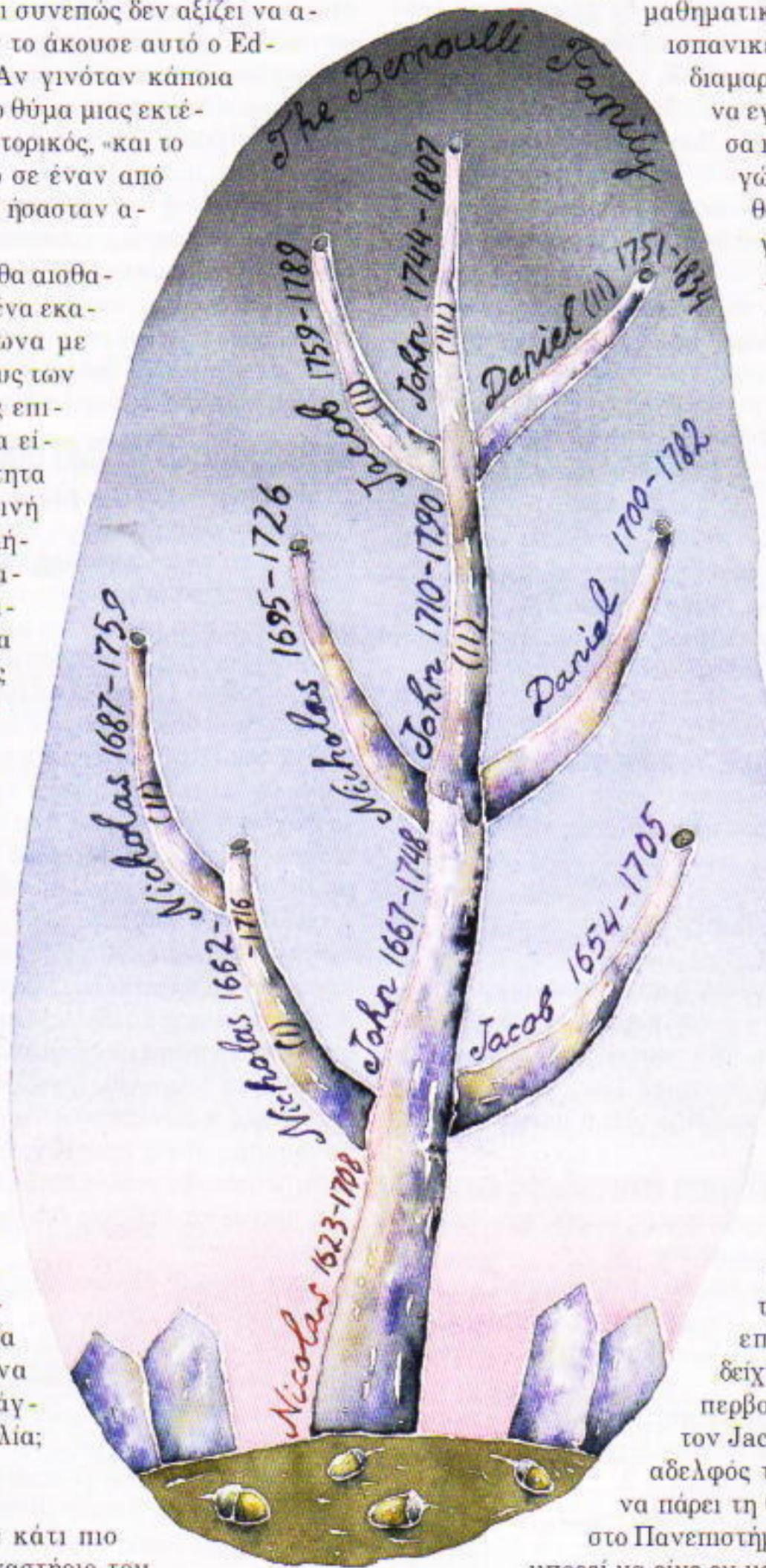
Τέλος, ας δοκιμάσουμε κάτι ποιολό: ένα πείραμα στο εργαστήριο του νου μας. Ας υποθέσουμε ότι βρίσκεστε σ' ένα καζίνο που μπορεί να πληρώσει άπειρη ποσότητα χρημάτων. Θα διακινδυνεύατε να στοιχηματίσετε όλη σας την περιουσία; Ούτε εγώ.

Γιατί όμως οι άνθρωποι αρνούνται ένα στοιχηματικό

πειρό κέρδος —δηλαδή, με άπειρη μαθηματική προοδοκία; Η ποι διάσημη λύση σε αυτό το πρόβλημα δόθηκε από τον Daniel Bernoulli, ως απάντηση σε ένα ερώτημα που είχε θέσει ο εξάδελφός του Nicholas. Οι Bernoulli ήταν οικογένεια διακεκριμένων και παράφορων μαθηματικών. Κατάγονταν από τις ισπανικές Κάτω Χώρες, αλλά ως διαμαρτυρόμενοι αναγκάστηκαν να εγκαταλείψουν την Αρβέρσα κατά τη διάρκεια των σφράγων που εξαπέλυσαν οι καθολικοί το 1583. Τελικά, εγκαταστάθηκαν στη Βασιλεία της Ελβετίας, όπου άρχισαν να δολοπλοκούν ο ένας εναντίον του άλλου.

Αισθήματα ζήλιας κατέτρεχαν τους Bernoulli. Ο επαναστάτης θείος του Daniel, ο Jacob, έγινε αστρονόμος, ακολουθώντας το αγαπημένο του απόφθεγμα *Invito patre, sidera verso* (Ενάντια στη θέληση του πατέρα μου, στρέφομαι προς τα άστρα). Ο Jacob ήταν επίσης θαυμάσιος μαθηματικός. Υπήρξε ο πρώτος που πρότεινε έναν τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας ενός γεγονότος, όπως το να έρθει για πρώτη φορά κεφαλή κατά τη δέκατη ρίψη ενός κέρματος. Δίδαξε κρυφά μαθηματικά το μικρότερο αδελφό του John (ο οποίος δεν συμμορφώθηκε με την επιθυμία του πατέρα τους να ασχοληθεί με τις επιχειρήσεις). Ο John αποδείχτηκε άξιος μαθητής —υπερβολικά άξιος σύμφωνα με τον Jacob, που υποπτεύοταν ότι ο αδελφός του μηχανορραφούσε για να πάρει τη θέση του ως μαθηματικού στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Ο Jacob μπορεί να είχε εν μέρει δίκιο: όταν πέθανε, το 1705, ο John όντως πήρε τη θέση του.

Ο John, υπερόπτης, ηγεμονικός και αιόμακρος, ο επιφανέστερος μαθηματικός της εποχής του, έβλεπε με ζήλια τον ταλαντούχο γιο του Daniel, ο οποίος άρχισε να μελετά μαθηματικά σε ηλικία 11 ετών με τη βοήθεια του



έφηβου αδελφού του. Ο John προσπάθησε να κατευθύνει το γιο του στις επιχειρήσεις, αλλά ο Daniel προτίμησε την ιατρική και τα μαθηματικά. Ευτυχώς, οι προοπτικές του ήταν αισιόδοξες. Στα 25 του αποφάσισε να εγκαταλείψει τη Βασιλεία δελεασμένος από την πρόταση να διδάξει στη νέα Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης. Η Ακαδημία δεν είχε άλλους φοιτητές πέρα από τους δύο που έφερνε μαζί του κάθε καθηγητής. Για ένα μαθηματικό που ενδιαφέροταν για την έρευνα, σε μια εποχή που οι περισσότεροι μαθηματικοί ανάλωναν όλο σχεδόν το χρόνο τους στη διδασκαλία, η Ακαδημία ήταν παράδεισος. Ωστόσο, η Αγία Πετρούπολη —η νέα πρωτεύουσα του Μεγάλου Πέτρου, που κτίστηκε στους βάλιους του Νέβα με κόστος χιλιάδων ζωών, του αρχιτέκτονα ουμπεριλαμβανομένου— ήταν νέα, σκληρή και άξεστη. Η αυλή μάλιστα εφάρμοζε τέτοια πολιτική ώστε, όταν εξαντλήθηκαν τα κονδύλια για την Ακαδημία, το μέλλον του ιδρύματος προδιαγραφόταν σκοτεινό. Ο Daniel Bernoulli, προβάλλοντας ως πρόσχημα κάποια ασθένεια, εγκατέλειψε την πόλη έπειτα από οκτώ χρόνια, το 1733, ρίχνοντας κυριολεκτικά μαύρη πέτρα πίσω του. Προσέφερε τη θέση του με ευγνωμοσύνη (αρετή σπάνια για έναν Bernoulli) σε ένα θαρραλέο νεαρό φίλο του από την Ελβετία, ο οποίος μπορούσε να ξεπέταξε μια νέα δημοσίευση μεταξύ δύο προσκλήσεων σε γεύμα. Το όνομα του φίλου του ήταν Leonhard Euler.

Ο φιλότεχνος Daniel περιφρόνησε την καθημερινότητα της χαρτοπαιξίας στην αγία Ρωσία. Χάρη όμως σ' αυτήν φαίνεται ότι άρχισε να κατανοεί γιατί ένας χαρτοπαικτής θα οτοιχημάτιζε ελάχιστα χρήματα σε ένα παιγνίδι με φαινομενικά άπειρο κέρδος; ο χαρτοπαικτής δεν σκέφτεται τα χρήματα αλλά τη χρησιμότητά τους, τη δυνατότητά τους να προσφέρουν ευημερία.

Ας υποθέσουμε ότι κάθε επιπλέον δολάριο αυξάνει όλο και λιγότερο την ικανοποίησή σας. Το πρώτο δολάριο που ξοδεύετε σας δίνει περισσότερη από το εκατοστό· το εκατοστό περισσότερη από το εκατομμυριοστό. Τότε, ακόμη και αν το στοίχημα μπορεί να σας δώσει άπειρο πλήθος δολαρίων, η ικανοποίηση που σας προσφέρουν όλα αυτά τα χρήματα μπορεί να είναι περιορισμένη. Πιθανότατα θα δίνετε λίγα μόνο δολάρια γι' αυτήν.

Ο Bernoulli υποστήριξε ότι η ικανοποίηση ενός ανθρώπου από το κέρδος είναι ευθέως ανάλογη με το μέγεθος του κέρδους και αντιστρόφως ανάλογη με το μέγεθος της περιουσίας του. Χίλια απρόσμενα δολάρια θα σας ευχαριστήσουν περισσότερο από δέκα απρόσμενα δολάρια, αλλά τα χίλια δολάρια έχουν μεγαλύτερη σημασία αν είσαστε ζητιάνος παρά εκατομμυριούχος. Έστω x το ποσό των χρημάτων που έχετε στην κατοχή σας και Δx η αύξηση των χρημάτων σας. Ακόμη, έστω y η ικανοποίηση από τα χρήματά σας και Δy η αύξηση της ικανοποίησής σας. Τότε, ο Bernoulli υποστηρίζει ότι

$$\Delta y = \frac{k \cdot \Delta x}{x}, \quad (5)$$

για κάποιον θετικό k .

Η (5) σε απλή γλώσσα: Η μεταβολή της ικανοποίησής σας είναι ευθέως ανάλογη της μεταβολής των χρημάτων σας και αντιστρόφως ανάλογη με το ποσό των χρημάτων

που έχετε. Για παράδειγμα, αν είστε πλούσιος σαν Kroissos (εννοείται, πριν του αρπάξει τα πάντα ο Κύρος), ένα δώρο γενεθλίων 5 δολαρίων από την αγαπημένη σας γιαγιά αυξάνει ελάχιστα την ικανοποίησή σας· το Δy είναι μηδαμινό. Πολλά, βέβαια, εξαρτώνται από το k . Αυτό είναι μια θετική σταθερά που εκφράζει την εμπειρία ενός ανθρώπου ως καταναλωτή, την ικανότητά του να χειρίστει την απότομη αύξηση της περιουσίας του. Οι μορφωμένοι άνθρωποι μπορεί να έχουν υψηλές τιμές του k ; Θα απολαύσετε περισσότερο ένα εκατομμύριο δολάρια αν ξέρετε τι να τα κάνετε. Σε μια προσπάθεια να εκφράσει τις παραπάνω ιδέες, ο Bernoulli χρησιμοποιήσε τον απειροστικό λογισμό κατορθώνοντας να συναγάγει από την (5) μια λογαριθμική συνάρτηση που να συνδέει την ικανοποίηση με την περιουσία:

$$y(x) = k \log x + c,$$

όπου c είναι μια σταθερά. Ας θέσουμε αυτή τη σταθερά ίση με το γινόμενο του -1 , του k και του λογαρίθμου της περιουσίας σας πριν το στοίχημα —περιουσία που θα ονομάσουμε a :

$$y(x) = k \log x - k \log a,$$

η

$$y(x) = k \log\left(\frac{x}{a}\right). \quad (6)$$

Εδώ η y εκφράζει κατάλληλα το σχετικό κέρδος (ή απώλειά σας) σε ευημερία όταν η περιουσία σας αυξάνεται (ή συρρικνώνεται). Σαν τους νεόκοπους οικονομολόγους, θα ονομάσουμε αυτή τη συνάρτηση ωφελιμότητα του ποσού x των χρημάτων που κερδίζετε. Αν η περιουσία σας παραμείνει ίση με a , ο μετρητής της ευημερίας σας «κολλά» στο μηδέν, διότι $y = k \log 1 = 0$.

Επιστρέφουμε στο στοίχημα. Για να απλουστεύσουμε τα πράγματα, θέτουμε $k = 1$. Αρχίζετε λοιπόν με περιουσία a . Αν έρθει κεφαλή στη n -οστή ρίψη, προσθέτετε στο a το ποσό 2^{n-1} . Η θαυμαστή περιουσία σας, x , ανέρχεται τώρα στο $a + 2^{n-1}$. Η ωφελιμότητα, $y(x)$, αυτής της περιουσίας για σας θα είναι $\log((a + 2^{n-1})/a)$. Η πιθανότητα να αποκτήσετε αυτή την περιουσία είναι $1/2^n$. Αν συνυπολογίσουμε κάθε ρίψη στην οποία εμφανίζεται για πρώτη φορά κεφαλή, μπορούμε να ορίσουμε την αναμενόμενη από το στοίχημα ωφελιμότητα U :

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) \log\left(\frac{a + 2^{n-1}}{a}\right). \quad (7)$$

Πόσα θα διακινδυνεύατε αποδεχόμενοι το παραπάνω στοίχημα; Σίγουρα, όχι περισσότερα απ' όσο νομίζετε ότι είναι η αξία του στοιχήματος για σας. Διαπιστώσαμε ήδη ότι το εν λόγω ποσό είναι μικρότερο από τη μαθηματική προδοκία του βασικού στοιχήματος του Bernoulli στην Αγία Πετρούπολη, η οποία είναι άπειρη. Τίθεται τώρα το ερώτημα κατά πόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ωφελιμότητας ώστε να αποκτήσουμε ακριβέστερη προσέγγιση της αξίας που έχει το στοίχημα για σας

ουναρτήσει της ικανοποίησης που σας δίνει. Ίσως μας βοηθήσει η αντίστροφη προσέγγιση του προβλήματος. Ας υποθέσουμε ότι έχετε δικαιώμα δωρεάν συμμετοχής στο στοίχημα. Πόσο θα έπρεπε να σας πληρώσω για να μην ασκήσετε αυτό το δικαιώμα σας; Πρέπει να είναι ένα ποσό —ας το ονομάσουμε D — το οποίο, πιστεύετε, θα σας αφήσει εξίσου ικανοποιημένους με το στοίχημα. Ας υποθέσουμε ότι προσθέτετε το D στην περιουσία a που ήδη κατέχετε. Τότε —θυμηθείτε την (6)!— η ωφελιμότητα της νέας σας περιουσίας θα είναι $\log[(a+D)/a]$. Θα παρατηθείτε από το στοίχημα μόνο όταν τούτη η ωφελιμότητα είναι τουλάχιστον ίση με αυτή που περιμένετε να έχετε από το στοίχημα. Πρέπει, λοιπόν, να επιλέξουμε το D έτοιμο ώστε $\log[(a+D)/a]$ να είναι ίση με την τιμή της (7). Για να το πετύχουμε αυτό, γράφουμε την (7) σε μια πιο εύληπτη μορφή. Έχουμε: $\log(x_1/x_2) = \log x_1 - \log x_2$, επομένως

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) \log(a + 2^{n-1}) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) \log a.$$

Το $\log a$ είναι σταθερό, οπότε εξαιρείται από το άθροισμα:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) \log(a + 2^{n-1}) - \log a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right).$$

Όμως, για καλή μας τύχη, η τελευταία σειρά έχει άθροισμα 1, και συνεπώς

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) \log(a + 2^{n-1}) - \log a. \quad (8)$$

Τέλος, αφού θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το D ως θέμα λογαριθμικής συνάρτησης, ας μετασχηματίσουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο τμήμα της (8) σε μια λογαριθμική συνάρτηση. Ισχύει $\log x_1 + \log x_2 = \log(x_1 x_2)$ και $r \log x = \log x^r$, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την (8) ως

$$U = \log \left[\prod_{n=1}^{\infty} (a + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} \right] - \log a. \quad (9)$$

Έχουμε πλέον την παράστασή μας για το D :

$$D = \prod_{n=1}^{\infty} (a + 2^{n-1})^{\frac{1}{2^n}} - a.$$

Πρόβλημα 7. Αποδείξτε ότι, όπως σας υποσχέθηκα, η τιμή της (9) ισούται με $\log[(a+D)/a]$.

Σύμφωνα με τον υπολογισμό του Bernoulli, αν αρχίσετε με μια περιουσία 100 δολάριαν (δηλαδή, αν $a = 100$ δολάρια), δεν θα διαθέσετε περισσότερα από 4 περίπου δολάρια για να συμμετάσχετε σ' αυτό το στοίχημα (δηλαδή, το D είναι περίπου 4 δολάρια· όταν δοκίμασα την εξίσωση του Bernoulli με τον ψηφιακό μου βοηθό, την QBasic, βρήκα $D = 4,39$ δολάρια.) Με άλλα λόγια, θα εγκαταλείψετε το στοίχημα για κάθε προσφορά αρκετά

μεγαλύτερη των 4 δολαρίων.

Πρόβλημα 8. Επαληθεύστε την εκτίμηση του Bernoulli ότι, αν από την αρχή έχετε 100 δολάρια, δεν θα διαθέσετε παραπάνω από 4 περίπου δολάρια για το στοίχημα.

Πρόβλημα 9. Αρχίζοντας με 1.000 δολάρια, πόσα περίπου θα είσαστε πρόθυμοι να πληρώσετε;

Ο Bernoulli ουσιαστικά σφετερίστηκε την παλιά απόφη για την προσδοκία, την οποία είχαν αναπτύξει οι νομομαθείς του 17ου αιώνα προκειμένου να αντικρούσουν τη θέση της εκκλησίας ότι τα τυχερά παιγνίδια και ο δανεισμός με τόκο είναι άδικα. Είχαν προσπαθήσει να υπολογίσουν μια δίκαιη ανταμοιβή για τους τραπεζίτες και τους ασφαλιστές, οι οποίοι αναλάμβαναν κάποιον κίνδυνο. Δικαιοσύνη, σύμφωνα με την άποψή τους, ήταν όλοι να χρεώνουν με το ίδιο ποσό την ανάληψη κάποιου κινδύνου —με τη μαθηματική του προσδοκία δηλαδή. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη ερμηνεία της προσδοκίας, κάποιος απενίζει το μέλλον σαν άτεγκτος δικαιοτής. Αντίθετα, στη θεωρία του Bernoulli αντιμετωπίζουμε το μέλλον σαν ανήσυχοι έμποροι. Η αξία του κινδύνου διαφέρει από άτομο σε άτομο: δεν πρόκειται να συμφωνήσουν όλοι στην ίδια τιμή. Το επιχείρημα αυτό εξόργισε τον Nicholas Bernoulli, καθηγητή του ρωμαϊκού και εκκλησιαστικού δικαιου. Υποστήριξε ότι ο εξάδελφός του απέτυχε «να εκτιμήσει τις προσδοκίες αυτών οι οποίοι συμβάλλονται με ισότητα και δικαιοσύνη». Ο Daniel απάντησε πολύ απλά ότι η θεωρία του «εναρμονίζεται απόλυτα με την εμπειρία». Αυτός προσάρμοζε τα μαθηματικά ώστε να ταιριάζουν με τη ζωή.

Τι αξίζει πραγματικά;

Ας κάνουμε τώρα ένα άλμα ενός αιώνα ή και περισσότερο. Ανάμεσα στους οικονομολόγους εμφανίζονται οι μεταρρυθμιστές, κραδαίνοντας ως όπλο τους τον απειροστικό λογισμό. Κάνουν κομμάτια με απόλαυση τη διδασκαλία των κλασικών ότι η αξία ενός αγαθού εξαρτάται από την ποσότητα εργασίας που ενσωματώνεται σε αυτό κατά την παραγωγή του. Δεν είναι έτοι, διατείνονται· η αξία ενός αγαθού εξαρτάται από την ικανοποίηση που δίνει στον καταναλωτή, και ειδικά από την ικανοποίηση που δίνει η τελευταία μονάδα που καταναλώνεται. Οι μεταρρυθμιστές ονόμασαν αυτή τη μονάδα περιθωριακή ωφελιμότητα και την έκαναν λυδία λίθο τους. Παραδόξως, απέδωσαν την πατρότητα αυτής της έννοιας όχι στον Bernoulli αλλά σε έναν άγγλο φιλόσοφο, τον Jeremy Bentham.

Τον 20ό αιώνα, οι οικονομολόγοι άρχισαν σιγά σιγά να κατανοούν τον οοφό από την Αγία Πετρούπολη. Ένας εξ αυτών, ο Karl Menger, έθεσε το ζήτημα: τι θα συμβεί αν η απόδοση του στοιχήματος στη n -οστή ρίψη γίνει μεγαλύτερη του 2^{n-1} ? Αυτό θα μπορούσαμε να το πετύχουμε καθορίζοντας μια λογαριθμική συνάρτηση n οποία δεν είναι φραγμένη. Όσο το ποσό των χρημάτων, x , τείνει προς το άπειρο, το ίδιο αυξάνει και η ωφελιμότητά τους, $U(x)$. Για παράδειγμα, είναι απόλυτα εφικτό να βρούμε ένα άθροισμα χρημάτων x_n , τέτοιο ώστε $U(x_n) = 2^{n-1}$. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, η ωφελιμότητα του στοιχήματος είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n-1}\right) \left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

Καλώς ήλθατε ξανά στο άπειρο.

Η προφανής λύση είναι να ορίσουμε ένα ανώτατο όριο για το ποσό ικανοποίησης που μπορεί να προσφέρει οποιοδήποτε ποσό χρημάτων —δηλαδή να φράξουμε τη συνάρτηση ωφελιμότητας. Για την (6) αυτό θα σήμαινε να προσδιορίσουμε μια μέγιστη τιμή της $y(x)$ —λ.χ., ένα εκατομμύριο μονάδες ωφελιμότητας για κάθε εισόδημα μεγαλύτερο των δέκα εκατομμυρίων δολαρίων. Για παράδειγμα, ένας χαρτοπαίκτης με αυτή τη συνάρτηση ωφελιμότητας δεν θα αντλούσε καμιά επιπλέον ικανοποίηση αν κέρδιζε περισσότερα από δέκα εκατομμύρια δολάρια. Επομένως, δεν θα στοιχημάτιζε ποτέ ποσό μεγαλύτερο των δέκα εκατομμυρίων. Στην πραγματικότητα, ο Bernoulli γνώριζε αυτή τη λύση. Στην εργασία του συμπεριέλαβε την παρατήρηση ενός άλλου ελβετού μαθηματικού, του Gabriel Cramer, ότι η συνάρτηση αξίας πρέπει να είναι φραγμένη. (Ο Cramer είχε πράγματι ταλέντο στο να ξεδιαλύνει προβλήματα. Ο κανόνας του για την επίλυση συστημάτων με οριζόντες μας βοηθά ακόμη στη δημιουργία μοντέλων για οτιδήποτε, από τους τυφώνες έως την παγκόσμια οικονομία.) Ατυχώς, ο Cramer είχε επινοήσει μια συνάρτηση στην οποία η συνολική αξία των χρημάτων ήταν ίση με τη συνολική ποσότητα των χρημάτων ώς τη συσσώρευση, ας πούμε, δέκα εκατομμυρίων. Από κει και πέρα η αξία των επιπλέον χρημάτων ήταν μηδενική. Η μείωση της αξίας δεν μπορεί, βεβαίως, να είναι τόσο απότομη.

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ζήτημα κομψότερα με μια συνάρτηση, η γραφική παράσταση της οποίας είναι υπερβολή. Έστω w η περιουσία μας και Z η κατάσταση μέγιστης ικανοποίησης. Έχουμε τότε την εξής συνάρτηση:

$$U(w) = \frac{Zw}{Z+w}. \quad (10)$$

Πρόβλημα 10. Δείξτε ότι η (10) δίνει μηδενική ωφελιμότητα όταν η περιουσία είναι μηδενική, περιθωριακή ωφελιμότητα 1 όταν η περιουσία είναι μηδενική, ενώ όταν η περιουσία αυξάνεται, η ωφελιμότητα ακολουθεί μια ομαλή, ασυμπτωτική πορεία προς το Z .

Τι αξία έχουν όλα αυτά σήμερα; Ας αναρωτηθούμε γιατί επενδύουν τόσο λίγα οι κοινωνίες στη συσσώρευση γνώσης. Πάρτε τα καθαρά μαθηματικά —αυτό το θεμελιώδες στοιχείο της επιστήμης και της τεχνολογίας. Τα καθαρά μαθηματικά επιτρέπουν στις οικονομίες να αναπτυχθούν, ξοδεύουμε όμως ελάχιστα για να τα προαγάγουμε. Το ίδιο ισχυε, βέβαια, και την εποχή του Daniel Bernoulli. Παρότι οι ηγεμόνες αναγνώριζαν ότι τα μαθηματικά θα βελτιώναν τη ναυσιπλοΐα και την ακρίβεια των κανονιών τους, πολύ λίγοι ήταν διατεθειμένοι να ξοδεψουν αρκετά χρήματα γι' αυτά. Ο σύντομος σχετικός κατάλογος ξεκινά με τον Φρειδερίκο της Πρωσίας και τελειώνει με την Αικατερίνη της Ρωσίας. (Τα χρήματά τους έπασαν τόπο, καθώς δόθηκαν σε μαθηματικούς παθιασμένους με τη δουλειά τους. Ο Euler, για παράδειγμα,

διαβάζοντας την Αινειάδα συνάντησε τη φράση: «Η άγκυρα πέφτει, η ορμητική καρίνα σταματά». Αφούς το βιβλίο, πήρε την πένα του και δημιούργησε ένα μοντέλο για το σταμάτημα του πλοίου.) Αυτό που αναζωπύρωνε το φθόνο μεταξύ των Bernoulli ήταν ο ασταμάτητος ανταγωνισμός για μια φούχτα δουλειές και βραβεία. «Αλλωστε», όπως παρατηρεί ένας εξέχων ιστορικός των μαθηματικών, ο E.T. Bell,* «αν λογικοί άνθρωποι ενθουσιάζονται από ένα παιγνίδι με χαρτιά, γιατί να μην παθιάζονται με τα μαθηματικά, που είναι απειρως συναρπαστικότερα;»

Για τα κράτη η επένδυση στη βασική έρευνα είναι ένα τυχερό παιγνίδι, μια τυφλή αναζήτηση ιδεών υψηλής απόδοσης και μικρής πιθανότητας —η προσμονή να έρθει κεφαλή την εκατοστή φορά. Αν το μόνο που είχε σημασία ήταν το προσδοκώμενο κέρδος, θα ήμασταν ανόητοι να μην ξοδεύουμε για έρευνα. Προσέξτε, όμως, τι μας λέει ο Bernoulli: Σημασία δεν έχει το ποσό των χρημάτων που θα κερδίσουμε αλλά η ικανοποίηση που θα πάρουμε από αυτό. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν και πολλά πράματα να κάνουμε με ένα επιπλέον δισεκατομμύριο δολάρια, τότε είναι αρκετά πιθανό να προτιμήσουμε να κρατήσουμε το εισόδημα που ήδη έχουμε, παρά να διακινδυνεύσουμε κάποιο μέρος του σε ένα παιγνίδι.

Γι' αυτό το λόγο, η έκκληση για μεγαλύτερη χρηματοδότηρη της έρευνας προκειμένου στο μέλλον να μας αποφέρει χρηματικά κέρδη δεν πρόκειται να συναγείρει τις κυβερνήσεις. Όμως, οι καρδιές και τα πορτοφόλια μπορεί να ανοίξουν αν ζητήσουμε χρήματα για την έρευνα με την ιδέα ότι είναι ένα συναρπαστικό τυχερό παιγνίδι, μια ιστορική πρόκληση. Θυμηθείτε την κούρσα για τη Σελήνη!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

* Στα ελληνικά κυκλοφορεί το βιβλίο του *Οι μαθηματικοί*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. (Σ.τ.μ.)

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

To Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει είκοσι τέσσερα τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

To Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης. φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Τώρα μπορείτε να προμηθευτείτε και τις καλαίσθητες θήκες του, από το βιβλιοπωλείο μας ή με αντικαταβολή, για την αρχειοθέτηση των τευχών σας.

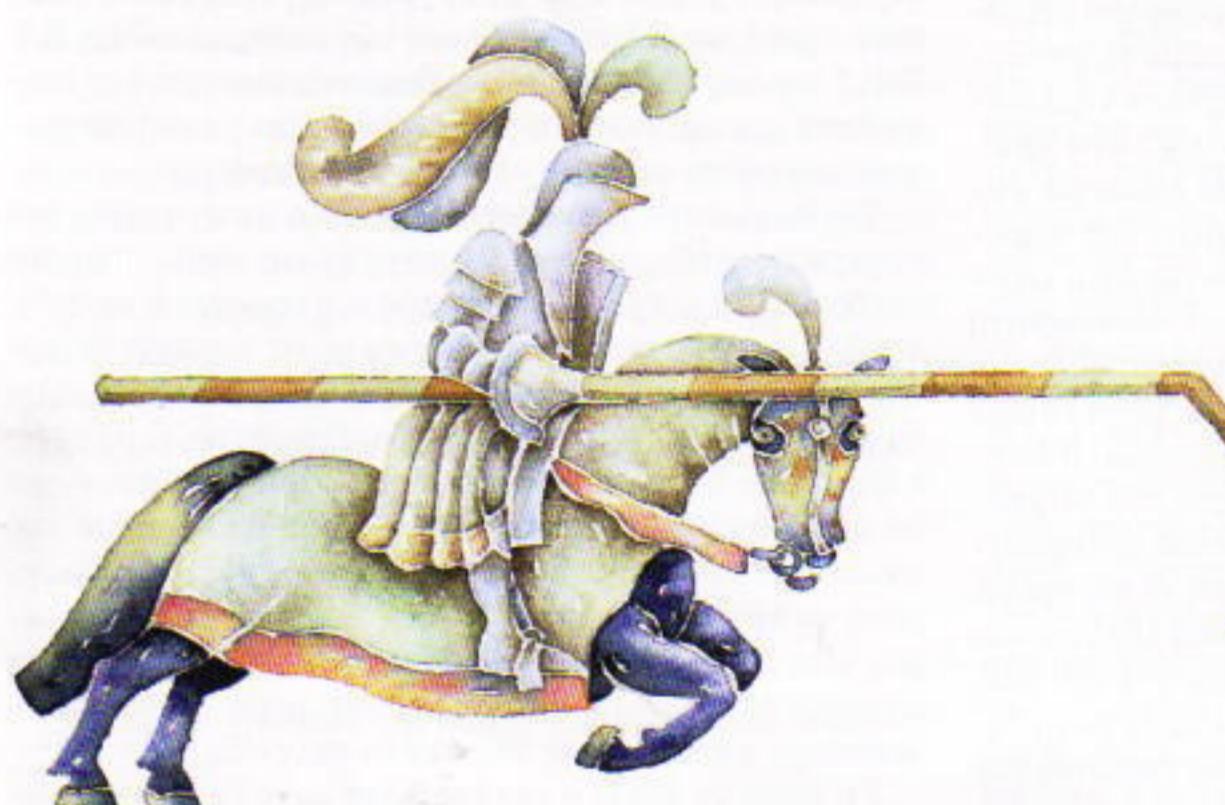
«Ούτ' εξ ενός πολλά γίγνεσθαι ούτε εκ πολλών εν, αλλά τη τούτων συμπλοκή και περιπαλάξει πάντα γεννάσθαι...»

—Αριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ

ΚΑΛΕΙΔ

Μοριακή

Γνωρίζετε πράγματα πό-



ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΠΙΝΕΛΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕ-
ΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΟ-
ΡΙΩΝ: Είναι τόσο μικρά, ώστε αν κα-
θένας μας πάνω στη Γη είχε στην
κατοχή του ένα δισεκατομμύριο μόρια,
η συνολική μάζα τής κατ' αυτό τον τρό-
πο συγκεντρωθείας ύλης δεν θα ξεπε-
νούσε λίγα δισεκατομμυριοστά του γραμ-
μαρίου...

Είναι τόσο πολυάριθ-
μα, ώστε αν ρίχναμε ένα
ποτήρι γεμάτο με «ιχνη-
θετημένα» μόρια νερού
στη θάλασσα, τότε, μετά
την πάροδο μεγάλου χρο-
νικού διαστήματος, ένα
ποτήρι νερού από οποια-
δήποτε θάλασσα του πλανήτη δεν θα
περιείχε λιγότερα από διακόσια ιχνηθε-
τημένα μόρια...

Είναι τόσο «συνωστισμένα», ώστε
ένα μόριο αερίου υπό κανονικές συν-
θήκες πραγματοποιεί σε ένα δευτερό-
λεπτο 10 δισεκατομμύρια συγκρούσεις
με τα άλλα μόρια...

Είναι τόσο γρήγορα, ώστε ένα μόριο
αέρα, αν υποθέσουμε πως δεν συγκρού-
εται με τα άλλα μόρια, θα μπορούσε κι-
νούμενο κατακόρυφα, και πριν σταμα-
τήσει από τη δράση της βαρύτητας, να
φθάσει σε υψόμετρο 10 km...

Ωστόσο, παρά το μικρό τους μέγεθος
και τη γρήγορη κίνησή τους, τα μόρια

προδίδουν την παρουσία τους με αρκε-
τούς τρόπους. Ελπίζουμε πως λύνοντας
τα παρακάτω προβλήματα δεν θα επ-
τρέψετε στα μόρια να κρύβονται από
βλέμματα οπλισμένα με σύγχρονες
γνώσεις.

Ερωτήσεις και προβλήματα

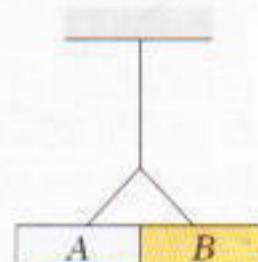
1. Γιατί ο όγκος μείγματος νερού και
αλκοόλης είναι μικρότερος απ' ό,τι το
άθροισμα των όγκων των δύο συστατι-
κών χωριστά;

2. Για ποιο λόγο ένα μπαλόνι που έ-
χουμε φουσκώσει καλά και έχουμε
κλείσει οφιχτά ζαρώνει μετά την πάρο-
δο μερικών ημερών;

3. Ένας κλειστός σωλήνας από μι-
κροπορώδες υλικό τοποθετείται μέσα
σε δεξαμενή από την οποία έχει αντιλη-
θεί ο αέρας. Αν ο σωλήνας περιέχει μείγ-
μα αερίων, το αέριο που συσσωρεύεται
στη δεξαμενή εμφανίζει υψηλότερη συ-
γκέντρωση ελαφρύτερων μορίων. Για
ποιο λόγο;

4. Υπάρχουν τρία ιούτοπα του υδρο-
γόνου, με μαζικούς αριθμούς 1, 2 και 3.
Ποιου ιοτόπου τα ιόντα κινούνται τα-
χύτερα προς την κάθοδο κατά τη διάρ-
κεια της ηλεκτρόλυσης;

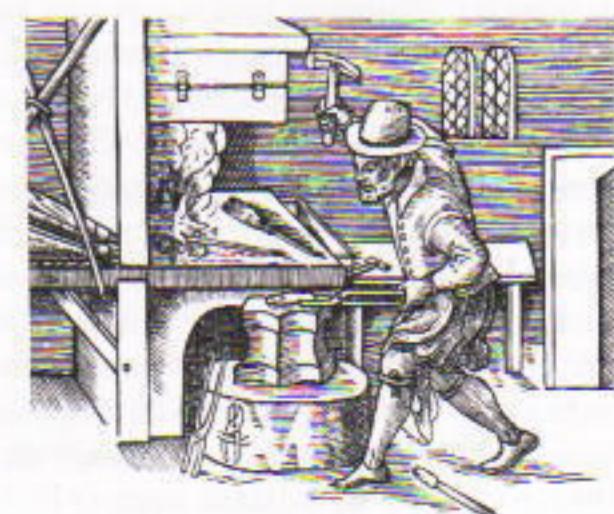
5. Καλύπτουμε τη μια όψη του ά-
κρου (B) μιας γυάλινης ράβδου με στρώ-
μα χαλκού, και αναρτούμε τη ράβδο α-
πό νήμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Η



Σχήμα 1

ράβδος μέσα στον αέρα δεν κινείται· αν
όμως αντικαταστήσουμε τον αέρα με
χλωρίο, η ράβδος περιστρέφεται —δεξι-
όστροφα, κοιτώντας την από πάνω. Εξη-
γήστε το φαινόμενο. Υπόδειξη: Τα μόρια
του χλωρίου κατά τις συγκρούσεις τους
με τη ράβδο απορροφώνται από το χαλ-
κό, αλλά ανακλώνται από το γυαλί.

6. Ένας σιδηρουργός για να συγκολ-
λήσει δύο κομμάτια σίδερο τα θερμαίνει
στον κλίβανο μέχρι να πυρακτωθούν·
εν συνεχείᾳ τα τοποθετεί στο αρόνι, το



«Η αρχή των πραγμάτων δεν είναι ορατή στο ανθρώπινο μάτι.»

—Λουκρήτιος

να μέτρηση

μικρά είναι τα μόρια;



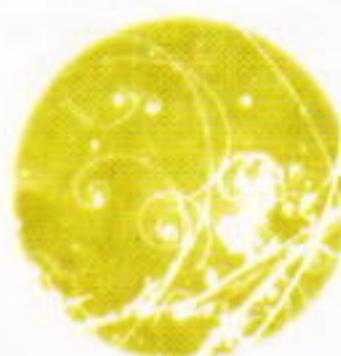
ένα πάνω στο άλλο, και τα σφυρηλατεί με δυνατά χτυπήματα. Η σύνδεση που δημιουργείται είναι εξαιρετικά ισχυρή. Γιατί;

7. Δύο πανομοιότυπα δοχεία τοποθετούνται στις πλάστιγγες μιας ζυγαριάς ίσων βραχιόνων. Το ένα δοχείο είναι γεμάτο με ξηρό αέρα ενώ το άλλο με υγρό αέρα ίδιας πίεσης και θερμοκρασίας. Ποιο δοχείο είναι βαρύτερο;



8. Σε ποια ατμοσφαιρικά στρώματα ο αέρας συμπεριφέρεται περισσότερο ως ιδανικό αέριο — κοντά στην επιφάνεια της Γης (στην τροπόσφαιρα) ή ψηλότερα (στη στρατόσφαιρα);

9. Το μαγνητικό πεδίο σε ένα θάλαμο νεφώσεως Wilson είναι ομογενές. Γιατί η τροχιά ενός φορτισμένου οιωματίδιου έχει μεταβαλλόμενη (διαρκώς φθίνουσα) καμπυλότητα;



Είναι ενδιαφέρον ότι...

...στην κοιλάδα του ποταμού Τεννεσοή κατασκευάστηκαν τεράστιες εγκαταστάσεις για το διαχωρισμό δύο ισοτόπων του ουρανίου (^{235}U και ^{238}U). Το αέριο μείγμα των δύο ισοτόπων κυκλοφορούσε στους θαλάμους διαμέσου των τοιχωμάτων τους από πορώδες υλικό. Τα ελαφρύτερα μόρια διαχέονταν ταχύτερα μέσω των τοιχωμάτων σε σχέση με τα βαρύτερα· έτσι καθίστατο δυνατός ο διαχωρισμός τους.

...στα νέφη μεσοαστρικού αερίου οι ερευνητές ανακάλυψαν όχι μόνο σχετικώς απλά μόρια, όπως μόρια νερού και



αμμωνίου, αλλά επίσης και σύνθετες οργανικές ενώσεις. Οι ενώσεις ανιχνεύτηκαν από τις φασματικές γραμμές εκπομπής και απορρόφησης στην περιοχή των ραδιοσυχνοτήτων.



Μικροπειραματισμοί

Θερμάνετε νερό σε μια τσαγιέρα ακριβώς μέχρι το σημείο βρασμού και κλείστε την εστία. Παρατηρείτε ότι από το στόμιο της τσαγιέρας εκτοξεύεται αμέσως ένας πίδακας υδρατμού, μολονότι προηγουμένως δεν φαινόταν καθόλου ατμός. Για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό;

—A. Leonovich

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- «Αγάπη και μίσος στο μοριακό κόσμο», A. Stasenko, Ιανουάριος /Φεβρουάριος 1995.

- «Κάτω από το απόλυτο μήδεν», H. Schreiber, Μάρτιος /Απρίλιος 1997.

- «Ο van der Waals και η εξίσωσή του», B. Yavelov, Ιανουάριος /Φεβρουάριος 1998.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Υπερβολική τάση

Ένας απλούστερος τρόπος μέτρησης του συντελεστή επιφανειακής τάσης

I.I Vorobyov

Ο ΣΥΝΗΘΗΣ ΤΡΟΠΟΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ του συντελεστή επιφανειακής τάσης ενός υγρού βασίζεται στο κατά πόσον ανυψώνεται το συγκεκριμένο υγρό σε έναν τριχοειδή σωλήνα. Ωστόσο, δεν έχουμε πάντοτε στη διάθεσή μας τριχοειδείς σωλήνες καθώς και μικροσκόπιο για τη μέτρηση της εσωτερικής διαμέτρου τους. Ευτυχώς, μπορούμε στη θέση των παραπάνω να χρησιμοποιήσουμε δύο λεπτές γυάλινες πλάκες.

Αρχίστε εμβαπτίζοντας τις πλάκες σε ένα δοχείο με νερό και τοποθετώντας τις παράλληλα μεταξύ τους. Πλησιάστε αργά τη μία κοντά στην άλλη, διατηρώντας τον παράλληλο προσανατολισμό. Όταν οι πλάκες βρεθούν πολύ κοντά, το νερό θα αρχίσει να ανεβαίνει στο χώρο ανάμεσά τους εξαιτίας της δράσης της επιφανειακής τάσης (Σχήμα 1). Από το ύψος, y , και το πάχος, d , του υδάτινου τοιχώματος μεταξύ των πλακών μπορούμε εύκολα να βρούμε το συντελεστή επιφανειακής τάσης, σ . Πράγματι, η δύ-

ναμη εξαιτίας της επιφανειακής τάσης που αναπτύσσεται στο υδάτινο τοίχωμα ισούται με $F = 2\sigma L$, όπου L είναι το μήκος της κάθε πλάκας (ο παράγοντας 2 εμφανίζεται επειδή το υδάτινο τοίχωμα έλκεται και από τις δύο πλάκες). Η εν λόγω δύναμη αντισταθμίζει το βάρος του υδάτινου τοιχώματος μάζας $m = \rho L dy$, όπου ρ είναι η πυκνότητα του νερού. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$2\sigma L = \rho L dy g.$$

Επομένως,

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho g d y. \quad (1)$$

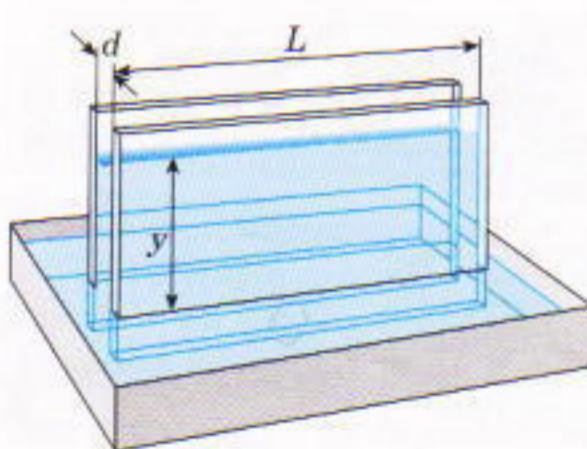
Η συγκεκριμένη διάταξη μας δίνει τη δυνατότητα να εκτελέσουμε ένα ενδιαφέρον πείραμα. Ας πέσουμε τις πλάκες ώστε το ένα τους άκρο να ενωθεί ενώ στο άλλο να υπάρχει κάποιο διάκενο (Σχήμα 2). Το νερό θα ανυψωθεί ανάμεσα στις πλάκες σχηματίζοντας μια εκπληκτικά κανονική επιφάνεια (ασφαλώς οι γυάλινες πλάκες που θα χρησιμοποιήσετε θα πρέπει να είναι καθαρές και οτεγνές). Εύκολα μπορούμε να καταλάβουμε ότι η κατακόρυφη διατομή της εν λόγω επιφάνειας σχηματίζει μια υπερβολή. Για να το διαπιστώσετε, αντικαταστήστε το d στην εξίσωση (1) με το πλάτος του διάκενου (ακριβέστερα, με την εξάρτησή του από το x). Όπως βλέπουμε από τα όμοια τρίγωνα του Σχήματος 2, ισχύει

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho g y D \frac{x}{L},$$

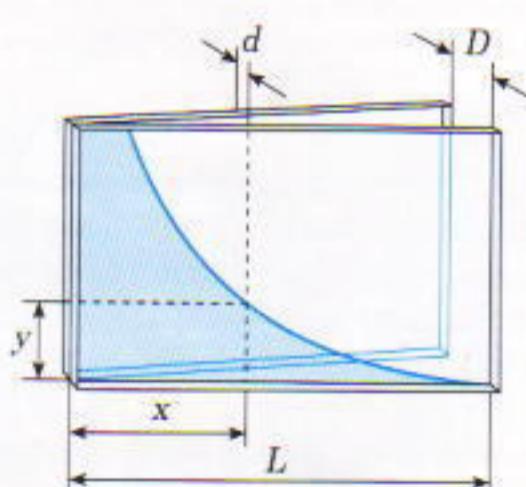
$$y = \frac{2\sigma L}{\rho g D} \cdot \frac{1}{x}. \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) όντως περιγράφει μια υπερβολή.

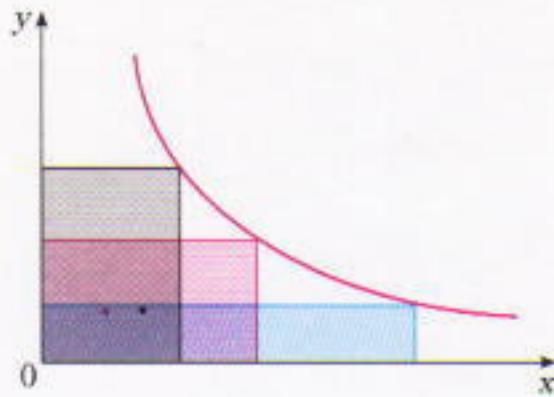
Για να εκτελέσετε το συγκεκριμένο πείραμα, χρησιμοποιήστε κομμάτια τζαμιού διαστάσεων 10 επί 20 cm. Με τη βοήθεια ενός σπίτου και σελοτέπ



Σχήμα 1



Σχήμα 2

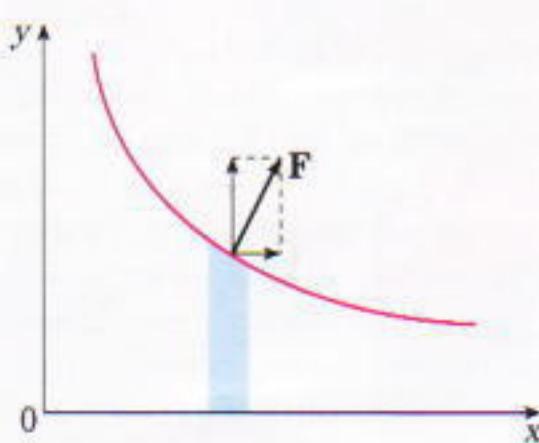


Σχήμα 3

σταθεροποιήστε το διάκενο, ενώ ως δοχείο νερού χρησιμοποιήστε μια ρηχή λεκάνη από φωτογραφικό εργαστήριο. Το ύψος της στάθμης του νερού μπορεί να μετρηθεί με ευκολία, αν επικολλήσετε στην εξωτερική επιφάνεια της μίας γυάλινης πλάκας χιλιοστομετρικό χαρτί. Όταν το νερό σχηματίσει την καμπύλη, βεβαιωθείτε ότι πρόκειται για υπερβολή. Θυμηθείτε πως όλα τα ορθογώνια που βρίσκονται κάτω από την υπερβολή είναι ιορμβαδικά (βλ. Σχήμα 3).

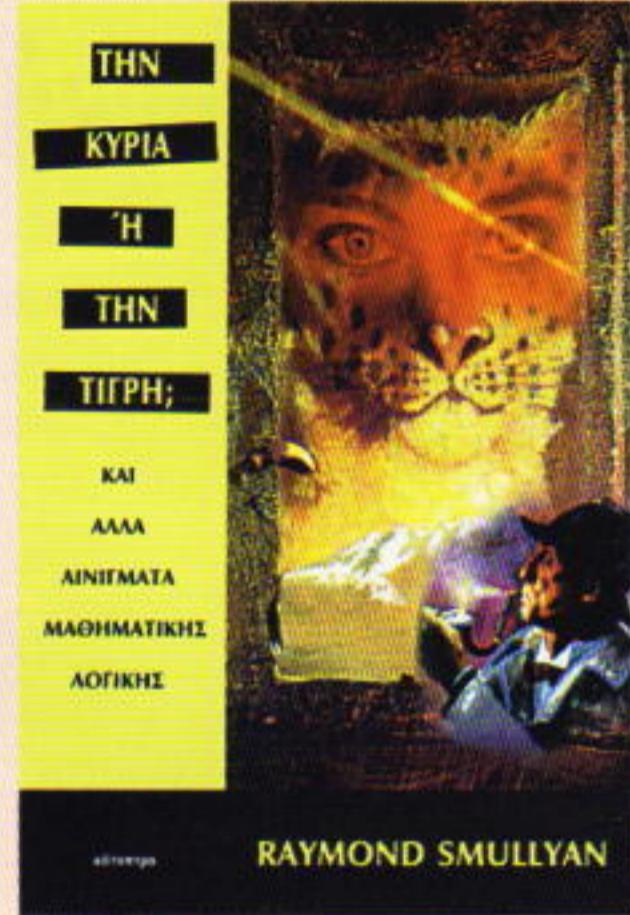
Με τη συγκεκριμένη διάταξη μπορείτε να επιχειρήσετε και άλλα διδακτικά πειράματα. Για παράδειγμα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα θερμόμετρο για να μετρήσετε τη θερμοκρασία του νερού και να βρείτε την εξάρτηση της επιφανειακής τάσης από αυτή. Μπορείτε ακόμη να μελετήσετε πώς ακριβώς επιδρούν στο εν λόγω φυσικό φαινόμενο διάφοροι διαλύτες.

Τέλος, προσπαθήστε να απαντήσετε στο παρακάτω ερώτημα: Η διεύθυνση της επιφανειακής τάσης F είναι κάθετη στη γραμμή επαφής της επιφάνειας του νερού του γυαλιού (Σχήμα 4). Η κατακόρυφη συνιστώσα της εν λόγω δύναμης αντισταθμίζεται από το βάρος της υδάτινης στήλης. Από ποια δύναμη αντισταθμίζεται η οριζόντια συνιστώσα;



Σχήμα 4

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΥΝΤΟΜΑ



Raymond Smullyan

Την κυρία ή την τίγρη; και άλλα αινίγματα μαθηματικής λογικής

Το βιβλίο, μια εξαιρετική συλλογή προβλημάτων —παραδόξων, μεταγρίφων, αινιγμάτων συνδυαστικής, κ.λπ.— της σύγχρονης μαθηματικής λογικής, έχει ως κύριο σκοπό του να εξηγήσει, με τρόπο μοναδικό, το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel και το θεώρημα της τυπικής μη ορισμότητας της αλήθειας του Tarski.

- «Σπινθηροβόλα συλλογή προβλημάτων και παραδόξων της λογικής από τον πιο ψυχαγωγικό επαίοντα της μαθηματικής λογικής και της θεωρίας συνόλων που υπήρξε ποτέ...»

Martin Gardner

- «Έξυπνο, διδακτικό, διασκεδαστικό βιβλίο... Ο τελευταίος μεταγρίφος "Ποιος είναι ο κατάσκοπος;" αποτελεί τον πιο ευφυή γρίφο λογικής που διατυπώθηκε ποτέ...»

G. Boolos, Καθηγητής φιλοσοφίας στο MIT

- «Ο Ray Smullyan είναι ο Lewis Carroll της εποχής μας...»

P. Denning, Καθηγητής πληροφορικής στο Πανεπιστήμιο Pardue

Ένα βιβλίο για κάθε λάτρη του είδους: από μαθητές λυκείου μέχρι ωριμους μαθηματικούς, λογικολόγους και επιστήμονες των υπολογιστών.

Εκδόσεις Κάτοπτρο

Τοπικά πεδία

«Καθόμουν στο γραφείο ευρεσιτεχνιών στη Βέρνη, όταν εντελώς ξαφνικά μια σκέψη πέρασε από το μυαλό μου: αν κάποιος πέφτει ελεύθερα, δεν θα αισθάνεται το βάρος του! Ξαφνιάστηκα...»

Άλμπερτ Αϊνστάιν, (Διάλεξη στο Κιότο, 1922)

Arthur Eisenkraft και D. Larry Kirkpatrick

HΗΜΕΡΑ ΕΝΟΣ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΗ ΜΠΟΡΕΙ να κυλά πού έντονα απ' ό,τι η δική σας, αλλά η φυσική παραμένει κατά βάση η ίδια. Μπαίνετε σ' έναν ανελκυστήρα και αισθάνεστε κατά τι βαρύτερος καθώς ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα πάνω. Ομοίως, το διαστημικό λεωφορείο στο οποίο επιβαίνει ο αστροναύτης επιταχύνεται προς τα πάνω και εκείνος αισθάνεται τρεις φορές βαρύτερος. Πηδάτε από ένα σκαλοπάτι και νιώθετε δίχως βάρος για λιγότερο από ένα δευτερόλεπτο. Ο αστροναύτης ζει στο διαστημικό λεωφορείο ή στο διαστημικό σταθμό και η εμπειρία της έλλειψης βαρύτητας παρατείνεται επί ημέρες ή και μήνες.

Πώς εξηγούμε αυτή την αισθηση, να νιώθουμε δηλαδή βαρύτεροι ή ελαφρύτεροι; Μπορούμε να διακρίνουμε τις επιταχύνσεις από τα βαρυτικά πεδία; Το πρόβλημα του ανελκυστήρα είναι κλασικό στη στοιχειώδη φυσική. Εάν ένας ανελκυστήρας προσδίδει σε ένα φοιτητή μάζας 60 kg επιτάχυνση μέτρου 3 m/s^2 και κατεύθυνσης προς τα πάνω, ποιο είναι το βάρος του φοιτητή; Γνωρίζετε πως αν στέκεστε πάνω σε μια ζυγαριά μπάνιου μέσα σε έναν ακίνητο ανελκυστήρα, η ζυγαριά σάς υποστηρίζει ασκώντας σας κάθετη δύναμη ιοη κατά το μέτρο με τη βαρυτική έλξη της Γης. Η δύναμη που σας ασκεί η ζυγαριά δεν είναι παρά ό,τι ονομάζουμε «βάρος» σας. Όταν ο ανελκυστήρας αρχίζει να κινείται

προς τα πάνω, η ζυγαριά σάς ωθεί με μια επιπρόσθετη δύναμη —απαραίτητη για να επιταχυνθείτε μαζί με τον ανελκυστήρα:

$$\sum F = my$$

$$F_z - F_\beta = my$$

$$F_z = m(y + y_\beta)$$

$$F_z = (60 \text{ kg})(3 \text{ m/s}^2 + 9.8 \text{ m/s}^2) \\ = 768 \text{ N},$$

όπου F_z είναι η κάθετη δύναμη της ζυγαριάς και F_β η βαρυτική έλξη.

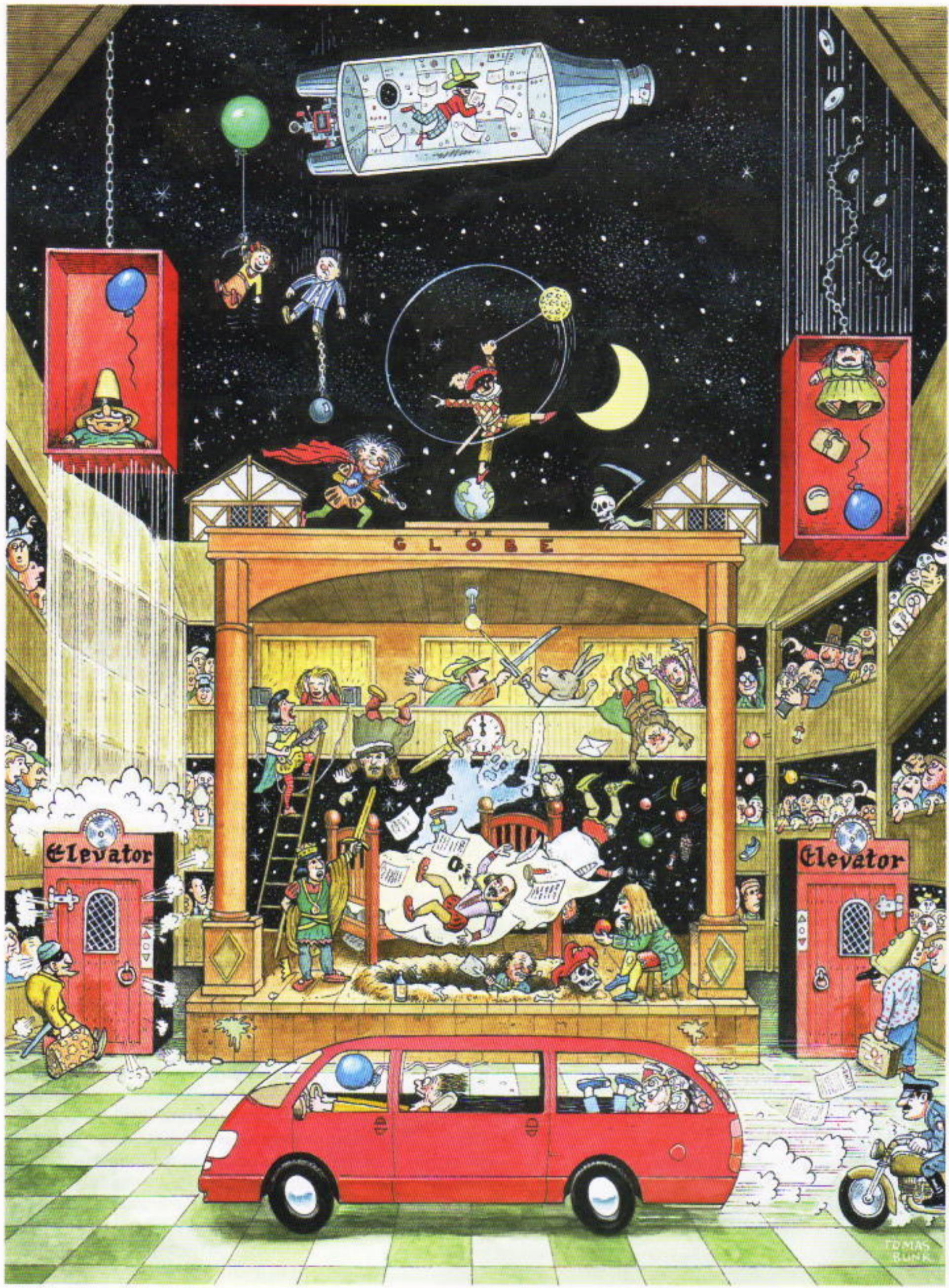
Η ζυγαριά δείχνει 768 N, ή 180 N περισσότερο από το κανονικό σας βάρος. Άλλα δεν πρόκειται μόνο για την ένδειξη της ζυγαριάς. Οντως αισθάνεστε βαρύτερος ενόσω ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα πάνω. Δοκιμάζετε την ίδια αισθηση που θα νιώθατε σε έναν πλανήτη με ισχυρότερη βαρυτική έλξη.

Εάν περάσουμε στις δύο διαστάσεις, προκύπτει ένα πού ενδιαφέρον φαινόμενο. Καθώς το αυτοκίνητό σας επιταχύνεται, πέζεστε και «κολλάτε» πάνω στο κάθισμα. Είναι σχεδόν σαν να εμφανίστηκε κάποιος άλλος πλανήτης πίσω από το αυτοκίνητό σας. Αισθάνεστε τόσο τη βαρυτική έλξη της Γης όσο και τη φαινόμενη βαρυτική έλξη που συνδέεται με την επιτάχυνση. Εάν η επιτάχυνση του αυτοκίνητου ιούται με 9.8 m/s^2 , αισθάνεστε το συνδυασμένο αποτέλεσμα του διανυσματικού αθροίσματος της βαρύτητας και της επιτάχυνσης.

Εάν αγνοήσουμε την εκ των προτέρων γνώση ότι τα αυτοκίνητα μένουν οριζόντια, είναι αδύνατον να διακρίνουμε ανάμεσα στις δύο επιταχύνσεις.

Ένα ενδιαφέρον πείραμα αφορά ένα μπαλόνι φουσκωμένο με ήλιο το οποίο έχετε δέσει με λεπτό νήμα μέσα στο αυτοκίνητό σας —ας πουμε από το κάθισμα του συνοδηγού. Καθώς επιταχύνετε το αυτοκίνητο προς τα εμπρός, το νήμα με το μπαλόνι θα κλίνει και αυτό προς τα εμπρός. Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι για να εξηγήσουμε το φαινόμενο. Ο πρώτος εμπλέκει την αδράνεια του αέρα. Η επιτάχυνση προς τα εμπρός προκαλεί συμπίεση του αέρα στο πίσω μέρος της καμπίνας. Η εν λόγω αύξηση της πίεσης αναγκάζει το μπαλόνι να κλίνει προς τα εμπρός, προς την περιοχή όπου επικρατεί χαμηλότερη πίεση. Εναλλακτικά, μπορούμε να φανταστούμε ότι η επιτάχυνση του αυτοκίνητου ισοδυναμεί με ένα βαρυτικό πεδίο με κατεύθυνση προς τα πίσω. Μπορούμε να προσδιορίσουμε την ενεργό βαρύτητα προσθέτοντας διανυσματικά τις δύο βαρυτικές δυνάμεις. Το μπαλόνι με το ήλιο θα «δειχνεί» αντίθετα απ' ό,τι το εν λόγω διανυσματικό άθροισμα, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που όταν το αυτοκίνητο δεν επιταχύνεται, το μπαλόνι «δειχνεί» αντίθετα απ' ό,τι η βαρυτική έλξη της Γης.

Το διανυσματικό άθροισμα των



βαρυτικών πεδίων το ονομάζουμε «τοπικό πεδίο».

Και οι δύο προσεγγίσεις —τόσο η διαφορά των πέσεων όσο και το τοπικό πεδίο— μπορούν να χρησιμεύσουν για να εξηγήσουμε την κίνηση του μπαλονιού. Το πλεονέκτημα, όμως, της πεδιακής ερμηνείας είναι ότι η γωνία του νήματος μας επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου. Αν, για παράδειγμα, η συγκεκριμένη γωνία ισούται με 45° , τότε το αυτοκίνητο θα πρέπει να επιταχύνεται με $9,8 \text{ m/s}^2$.

Ζούμε πάνω σ' έναν πλανήτη που επιταχύνεται. Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της, και σε όλα τα σώματα πάνω της πρέπει να ασκείται κεντρομόλος δύναμη, με φορά προς τον άξονα της περιστροφής. Απαιτείται μεγαλύτερη κεντρομόλος δύναμη για τα σώματα που βρίσκονται στον ισημερινό απ' ό,τι για όσα βρίσκονται σε μέσα γεωγραφικά πλάτη. Για τα σώματα στο Βόρειο Πόλο, μάλιστα, δεν απαιτείται καθόλου κεντρομόλος δύναμη. Ποια είναι, λοιπόν, η δύναμη που ευθύνεται για την εμφάνιση της κεντρομόλου; Πρέπει να είναι η βαρυτική έλξη από τη Γη —η μοναδική παρούσα ελκτική δύναμη. Εάν για την κεντρομόλο επιτάχυνοντας απαιτείται μια συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης, τότε ως βάρος του σώματος θα πρέπει να θεωρείται το υπόλοιπο της εν λόγω δύναμης. Αν δεχτούμε ότι η Γη είναι σφαιρική, το βάρος ενός σώματος στον ισημερινό (ό,τι, δηλαδή, θα έδειχνε μια ζυγαριά μπάνιου) θα ήταν μικρότερο από το βάρος του ίδιου σώματος στο Βόρειο Πόλο.

Η ζυγαριά μπάνιου στον ανερχόμενο ανελκυστήρα μάς δείχνει βαρύτερους λόγω της επιτάχυνσης. Αυτό το βάρος μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο του τοπικού πεδίου. Ομοίως, μπορούμε να θεωρήσουμε το τοπικό πεδίο της Γης για κάθε γεωγραφικό πλάτος. Το τοπικό πεδίο ισούται με τη διανυσματική διαφορά του βαρυτικού πεδίου και της κεντρομόλου επιτάχυνσης· και τα φαινόμενα που συνδέονται με αυτά τα τοπικά πεδία είναι απολύτως πραγματικά. Οι αστροναύτες τα αισθάνονται, εμείς τα αισθανόμαστε, η Γη τα αισθάνεται. Το τοπικό πεδίο ορίζει την κατεύθυνση της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων

και την κάθετο προς την ελεύθερη επιφάνεια των υγρών. Στο πέρασμα του χρόνου, το τοπικό πεδίο είναι αυτό που άλλαξε πραγματικά το σχήμα της Γης!

Στο πρόβλημα του παρόντος τεύχους ζητείται από σας να μελετήσετε μερικά τοπικά πεδία στην επιφάνεια μιας εξιδανικευμένης σφαιρικής Γης.

(1) Υπολογίστε το τοπικό πεδίο στον ισημερινό, στο Βόρειο Πόλο και σε γεωγραφικό πλάτος 40° .

(2) Προσδιορίστε τη γωνιακή απόκλιση του τοπικού πεδίου σε γεωγραφικό πλάτος 40° από την ακτινική διεύθυνση προς το κέντρο της Γης.

(3) Το τοπικό πεδίο σ' ένα σημείο επί του ισημερινού έχει τη διεύθυνση της ακτίνας· το τοπικό πεδίο στο Βόρειο Πόλο έχει επίσης τη διεύθυνση της ακτίνας. Για όλα τα υπόλοιπα γεωγραφικά πλάτη, το τοπικό πεδίο αποκλίνει από την αντίστοιχη ακτινική διεύθυνση. Σε ποιο γεωγραφικό πλάτος καθίσταται μέγιστη η εν λόγω απόκλιση του τοπικού πεδίου; Υπολογίστε την τιμή της συγκεκριμένης απόκλισης.

Το σουφλέ της φυσικής

Στο τεύχος Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1997, ζητήσαμε από τους αναγνώτες μας να αναλύσουν την ατμόσφαιρα ενός άγνωστου πλανήτη χρησιμοποιώντας ένα μη βαθμονομημένο γράφημα της πίεσης συναρτήσει του χρόνου, το οποίο παρήχθη καθώς μια ερευνητική συσκευή κατερχόταν κατακόρυφα. Αρχίζουμε εξετάζοντας μια μικρή φέτα της ατμόσφαιρας σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με εμβαδόν οριζόντιας διατομής S και πάχος Δy . Η δύναμη που ασκείται στη φέτα λόγω της διαφοράς πίεσης στην κατακόρυφη διεύθυνση πρέπει να εξισορροπεί το βάρος του αέρα που περιέχεται στη φέτα. Επομένως, ισχύει η εξίσωση

$$(P_x - P_\pi)S = \rho Sg \Delta y,$$

όπου P_x και P_π είναι οι πέσεις στην πάνω και στην κάτω οριζόντια επιφάνεια της φέτας, αντίστοιχα, ρ η μέση πυκνότητα του αέρα και g η τιμή του τοπικού βαρυτικού πεδίου. Έτοι,

$$\Delta P = \rho g \Delta y.$$

Εάν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το μικρό χρονικό διάστημα Δt που

χρειάστηκε η ερευνητική συσκευή για να κατέλθει από την πάνω επιφάνεια της φέτας στην κάτω, μπορούμε να προσδιορίσουμε πώς μεταβάλλεται η πίεση με την πάροδο του χρόνου:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \rho g \frac{\Delta y}{\Delta t} = \rho g v,$$

όπου v είναι η ταχύτητα καθόδου της ερευνητικής συσκευής.

Επειδή αγνοούμε την πυκνότητα του αέρα, χρησιμοποιούμε την καταστική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$PV = nRT,$$

οπότε βρίσκουμε ότι

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT},$$

όπου n είναι ο αριθμός των γραμμομορίων του αέρα, M το μοριακό του βάρος, R η παγκόσμια σταθερά των αερίων και T η απόλυτη θερμοκρασία του αέρα. Έτοι, καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα

$$v = \frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{RT}{PMg}.$$

Εν συνεχεία, χρησιμοποιούμε αυτή τη σχέση για να προσδιορίσουμε την ταχύτητα της ερευνητικής συσκευής ακριβώς πριν την πρόσκρουσή της στην επιφάνεια, του πλανήτη. Βρίσκουμε την τιμή της $\Delta P/\Delta t$ στην επιφάνεια υπολογίζοντας την κλίση της καμπύλης που παριστά γραφικά την πίεση συναρτήσει του χρόνου ακριβώς πριν τη μετατροπή της σε οριζόντια γραμμή. Κατά προσέγγιση προσδιορίζουμε τιμή $0,060 \pm 0,006$ μονάδες/ s . Χρησιμοποιώντας τις τιμές της απόλυτης θερμοκρασίας $T_{ep} = 400 \text{ K}$ και της πίεσης (από τη γραφική παράσταση) $P_{ep} = 60$ μονάδες στην επιφάνεια του πλανήτη, καθώς και τα δεδομένα $M = 44 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$, $g_{ep} = 9,9 \text{ m/s}^2$ και $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mole}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $v_{ep} = 7,6 \pm 0,8 \text{ m/s}$, όπου η αβεβαιότητα στην ταχύτητα οφείλεται στην αβεβαιότητα της κλίσης. Παρατηρούμε ότι η μονάδα της πίεσης, και επομένως η βαθμονόμηση, δεν έχουν σημασία, επειδή στο λόγο $\Delta P/P$ οι μονάδες απλοποιούνται. Συνεπώς, η βαθμονόμηση της πίεσης δεν είναι απαραίτητη γι' αυτή τη μέτρηση.

Εάν η ερευνητική συσκευή κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα, ο απαιτούμενος χρόνος για να πέσει από ύψος $h = 15$ km είναι

$$t = h / v_{\text{exp}} = (2.000 \pm 200) \text{ s.}$$

Για $t = 2.000$ s, $P = 15,0$ μονάδες, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ στο συγκεκριμένο υψόμετρο, και $\Delta P / \Delta t = 0,012$ μονάδες/s, βρίσκουμε

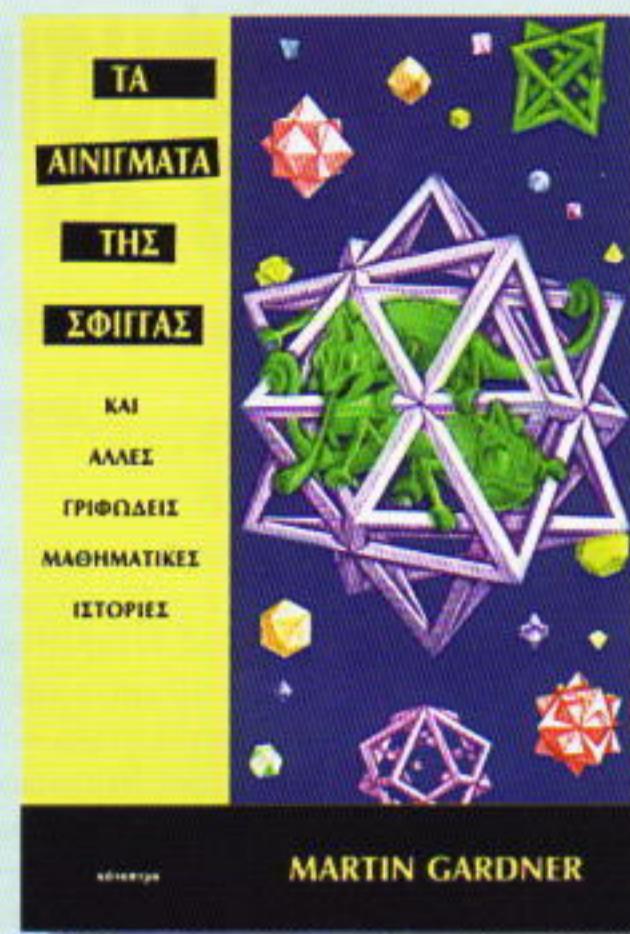
$$T = \frac{PMgv_{\text{exp}}}{R \frac{\Delta P}{\Delta t}} = 490 \text{ K.}$$

Χρησιμοποιώντας τους υπόλοιπους χρόνους και τις αντίστοιχες πέσεις και κλίσεις, καταλήγουμε στην εκτίμηση ότι υπάρχει αβεβαιότητα 90 K, ή και περισσότερο, όσον αφορά τη θερμοκρασία. Επομένως, αδυνατούμε να προσδιορίσουμε τη θερμοκρασία με ιδιαίτερη ακρίβεια.

Σημαντική για την ανάλυσή μας είναι η παραδοχή ότι η ερευνητική συσκευή διατηρεί σταθερή την ταχύτητά της ενόσω καλύπτει το ύψος των 15 km. Εάν η ερευνητική συσκευή είχε αποκτήσει μια ορική ταχύτητα προτύπου φθάσει στο ύψος των 15 km, τότε θα έπρεπε να επιβραδύνεται, αφού η αντίσταση του αέρα θα αυξανόταν με την αύξηση της πυκνότητας της ατμόσφαιρας. Εάν η ερευνητική συσκευή χρειαστεί 20% περισσότερο χρόνο απ' ότι υπολογίσαμε προηγουμένως προκειμένου να ολοκληρώσει την κάθοδό της από τα 15 km, τότε η υπολογιζόμενη θερμοκρασία μειώνεται στους 430 K περίπου. Εάν η ερευνητική συσκευή δεν είχε αποκτήσει μια ορική ταχύτητα στο ύψος των 15 km, τότε ο χρόνος καθόδου θα ήταν αρκετά βραχύτερος, με αποτέλεσμα η θερμοκρασία να είναι πολύ υψηλότερη.

Συνοψίζοντας, θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι στην πραγματικότητα δεν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία με αξιοζήλευτη ακρίβεια και ακόμη ότι, σε ενδεχόμενη επανάληψη της αποστολής, οι συμμετέχοντες επιστήμονες θα πρέπει να κατορθώσουν να μετρήσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια το πώς ακριβώς μεταβάλλεται η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται η ερευνητική συσκευή.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



MARTIN GARDNER

Martin Gardner

Τα αινίγματα της Σφίγγας και άλλες γριφώδεις μαθηματικές ιστορίες

Το βιβλίο αποτελεί μια συλλογή γρίφων και σπαζοκεφαλιών του μετρών ψυχαγωγικών μαθηματικών Martin Gardner, η οποία εκδόθηκε στα αγγλικά το 1988 από την Αμερικανική Μαθηματική Ένωση.

Περιλαμβάνει τριάντα πέντε κεφάλαια, σε καθένα από τα οποία διατυπώνεται ένα πρόβλημα μαθηματικών ή φυσικής· αυτό λύνεται στον τομέα των πρώτων απαντήσεων. Η συγκεκριμένη λύση συχνά οδηγεί σε ένα άλλο πρόβλημα, το οποίο λύνεται στον τομέα των δεύτερων απαντήσεων. Από την εν λόγω διαδικασία μερικές φορές εγείρεται μια τρίτη ερώτηση και, σε κάποιες περιπτώσεις, και μια τέταρτη· οι απαντήσεις και οι λύσεις δίνονται στους αντίστοιχους τομείς. Τέλος παρατίθεται επιπρόσθετο υλικό που προέκυψε από την αλληλογραφία του συγγραφέα με αναγνώστες. Πολλά από τα προβλήματα του βιβλίου οδηγούν σε μη τετριμμένες περιοχές των μαθηματικών και της φυσικής· ωστόσο, ο αναγνώστης, είτε ενδιαφέρεται γι' αυτό είτε όχι, θα διασκεδάσει με τους γρίφους και τις σπαζοκεφαλιές του βιβλίου και θα μπορέσει να ακονίσει δημιουργικά το μυαλό του.

Εκδόσεις Κάτοπτρο

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),
105 64, Αθήνα, τηλ.: 3247785

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M116

Επιταφήρια απαίτηση. Βρείτε το μήκος της μεγαλύτερης γεωμετρικής πρόσδου, της οποίας όλοι οι όροι να είναι επιταφήριοι θετικοί ακέραιοι.

M117

Υψη τριγώνων. Στο τριγώνο ABC , η $\angle BAC$ ισούται με a . Τα σημεία επαφής των πλευρών του τριγώνου με τον εγγεγραμμένο σε αυτό κύκλο είναι τα K , L και M , με το σημείο M να ανήκει στην πλευρά BC . Αποδείξτε ότι ο λόγος του μήκους του ύψους MM , του τριγώνου KLM προς το μήκος του ύψους AA , του τριγώνου ABC ισούται με $\eta\mu(a/2)$.

M118

Τριγωνομετρικές σχέσεις. Αποδείξτε ότι

$$\varepsilon\varphi \frac{3\pi}{11} + 4\eta\mu \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}.$$

M119

Επλύσιμο σύστημα. Επλύστε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{2-x}{1-2x} \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{3+y}{1+3y}. \end{cases}$$

(Αντι υπόδειξης: διαβάστε τις δύο πρώτες γραμμές της λύσης.)

M120

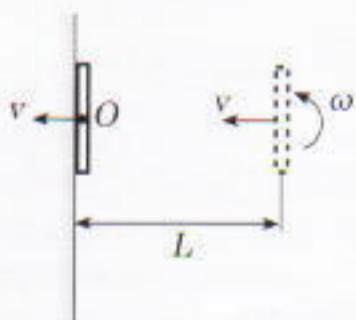
Ίσως άπειρη πρόσδος. Διαιρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών σε δύο ξένα μέρη. Το ένα από αυτά δεν περιέχει καμία αριθμητική πρόσδο με τρεις όρους. Πρέπει το άλλο να περιέχει οπωσδήποτε αριθμητική πρόσδο με

άπειρο πλήθος όρων; (A. Skopenkov)

Φυσική

Φ116

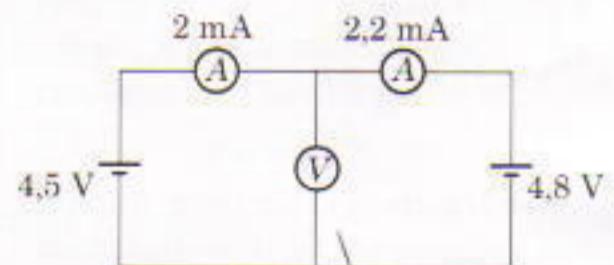
Η ράβδος στον τοίχο. Μια ράβδος μήκους $l = 10$ cm ολισθαίνει πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια με ταχύτητα $v = 10$ cm/s και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσο της. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να έχει η ράβδος, ώστε να συγκρουστεί με τον τοίχο «κατά μέτωπο» (βλ. Σχήμα 1). Αρχικά η ράβδος είναι τοποθετημένη παράλληλα προς τον τοίχο, σε απόσταση $L = 50$ cm. (I. Poterayiko)



Σχήμα 1

Φ117

Η σύντομη ζωή μιας σαπουνόφουσκας. Ένα κορίτσι σχηματίζει μια σαπουνόφουσκα φυσώντας μέσα από ένα μακρύ καλάρι. Όταν η φυσαλίδα διασταλεί αρκετά, το κορίτσι ανοίγει το οπίσθιο στόμιο του καλαμιού, οπότε η φυσαλίδα ουστέλλεται και καταρρέει σε χρόνο t_1 . Ποιος θα είναι ο χρόνος ζωής μιας φυσαλίδας με διπλάσια διάμετρο; Υποθέστε ότι ο αέρας κινείται αργά στο εσωτερικό του σωλήνα και ότι οι ιδιότητες της μεμβράνης των δύο φυσαλίδων είναι πανομοιότυπες. (D. Kuptsov)



Σχήμα 2

Φ118

Τόσο απλό κύκλωμα. Το κύκλωμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 2 περιλαμβάνει ιδανικές πηγές και πανομοιότυπα αμπερόμετρα. Ποια θα είναι η ένδειξη του βολτομέτρου σ' αυτό το κύκλωμα; Ποιες είναι οι ωμικές αντιστάσεις των αμπερομέτρων και του βολτομέτρου; Έχετε κατά νου όυ μερικές φορές τα πραγματικά όργανα διαφέρουν πολύ από τα ιδανικά! (A. Zilberman)

Φ119

Ηλεκτρική εκκένωση σε αέριο. Κατά τη διάρκεια ηλεκτρικής εκκένωσης σε αραιό αέριο νέον (Ne) και σε θερμοκρασία δωματίου, ιονίζεται μόνο ένα μικρό κλάσμα ατόμων νέου. Η ατομική μάζα του νέου είναι $4 \cdot 10^{-4}$ φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου. Η μέση ελεύθερη διαδρομή των παραγόμενων ηλεκτρονίων (δηλαδή η μέση απόσταση που διανύει κάθε ηλεκτρόνιο μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων) είναι $l = 0.1$ mm. Το αέριο βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $E = 10$ V/cm. Υπολογίστε τη μέση κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων και την αντιστοιχη «θερμοκρασία» τους. Η σταθερά του Boltzmann είναι $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K, και το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου είναι $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. (D. Kuptsov)

Η συνέχεια στη σελ. 46

Παραλλαγές σε ένα θέμα

Η ανισότητα αριθμητικού μέσου-γεωμετρικού μέσου

Mark Saul και Titu Andreescu

ΤΟ ΘΕΜΑ ΤΗΣ ΣΤΗΛΗΣ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ κλασική ανισότητα, η ονομαζόμενη «ανισότητα αριθμητικού μέσου-γεωμετρικού μέσου» (AM-GM). Πριν όμως προχωρήσουμε στο θέμα μας, θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία που ακολούθησε και ο Μπετόβεν στις «Παραλλαγές» του για πάνω, έργο 35: Δίνουμε μερικές προκαταρκτικές παραλλαγές πριν από το κυρίως θέμα. Ασχοληθείτε κατ' αρχάς με αυτές προτού συνεχίσετε την ανάγνωση.

Παραλλαγή -3: Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού;

Παραλλαγή -2: Στο Σχήμα 1 βλέπετε ένα ημικύκλιο με κέντρο O . Η διάμετρός του έχει χωριστεί σε δύο τμήματα μήκους a και b . Ποιο σίναι μεγαλύτερο, το OP ή το XY ;

Παραλλαγή -1: Στο τραπέζιο $ABCD$, το τμήμα MN συνδέει τα μέσα των πλευρών AD και BC . Το τμήμα XY χωρίζει το τραπέζιο σε δύο μικρότερα τραπέζια, όμοια μεταξύ τους. Στο Σχήμα 2 το XY είναι πλησιέστερα στη

μικρότερη βάση, και συνεπώς μικρότερο του MN . Είναι αυτό σωστό;

ΘΕΜΑ: Ο αριθμητικός μέσος δύο τυχαίων θετικών πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού τους μέσου. Οι δύο μέσοι είναι ίσοι αν και μόνο αν οι δύο αριθμοί είναι ίσοι.

Με άλλα λόγια, αν $a, b > 0$, τότε

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

και

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$$

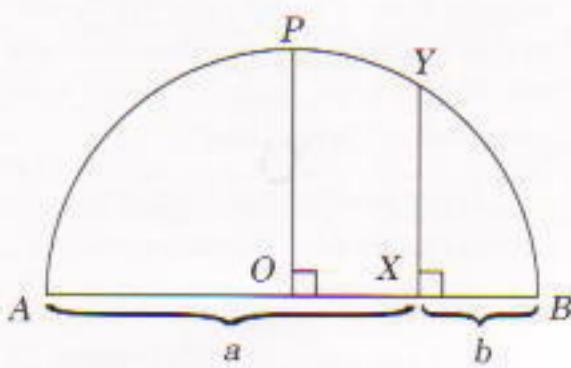
αν και μόνο αν $a = b$.

Απόδειξη: Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικό. Συνεπώς $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι

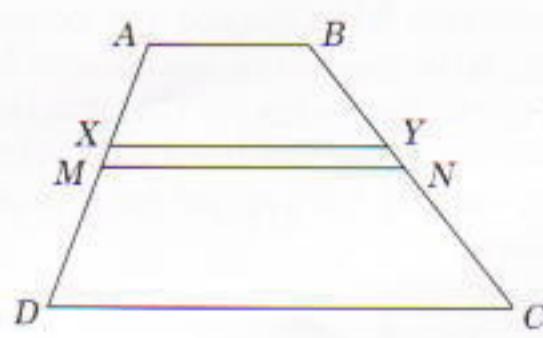
$$(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0,$$

ή

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

από όπου συνάγουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, δηλαδή όταν $a = b$.

Μπορείτε τώρα να διακρίνετε το νόημα των παραλλαγών -3, -2, -1; Θα βρείτε περισσότερες ασκήσεις στις επόμενες παραλλαγές. Η ανισότητα AM-GM χρησιμοποιείται συχνά για τη σύγκριση ενός γινομένου με ένα άθροισμα ή για το μετασχηματισμό του ενός στο άλλο. Προσέξτε τώρα πώς «εκτυλίσσεται» το θέμα μας.

Παραλλαγή 1: Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 20. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό εμβαδόν του;

Παραλλαγή 2: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 100. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή περίμετρός του;

Παραλλαγή 3: Γενικεύστε τη λύση των Παραλλαγών 1 και 2 δείχνοντας ότι (a) αν το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι σταθερό, τότε το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί είναι ίσοι, και (β) αν το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι σταθερό, το άθροισμά τους γίνεται ελάχιστο όταν οι αριθμοί είναι ίσοι.

Παραλλαγή 4: Αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $x + \frac{1}{x}$.

Παραλλαγή 5: Αν ο x είναι πραγματικός θετικός αριθμός, αποδείξτε ότι $2\sqrt{x} - x \leq 1$.

Παραλλαγή 6: Αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, προσπαθείστε να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή

της παράστασης $(x+4)(6-x)$.

Παραλλαγή 7: Αν $0 < x < \pi/2$, βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $\epsilon^x + \sigma^x$.

Παραλλαγή 8: Για κάθε πραγματικό αριθμό x , μπορείτε να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης $(\eta\mu^2x)(\sigma\nu^2x)$;

Παραλλαγή 9: Αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $2^x + 2^{-x}$.

Παραλλαγή 10. Αν x, y, z είναι μη αρητικοί πραγματικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι

$$x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy} \leq xy + yz + zx.$$

Παραλλαγή 11. Αν a, b, c και d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Παραλλαγή 12: Επιλέγουμε το σημείο D στο εσωτερικό γωνίας ABC . Μια μεταβλητή ευθεία διέρχεται από το D και τέμνει την BA στο M και την BC στο N . Βρείτε τη θέση της ευθείας MN για την οποία προκύπτει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν του τριγώνου MBN . (Αντί υπόδειξης σε αυτό το αρκετά δύσκολο πρόβλημα, μπορείτε να δείτε το σχήμα της λύσης, χωρίς όμως να διαβάσετε τις λεπτομέρειες.)

Παραλλαγή 13: Αρχίζουμε με n θετικούς αριθμούς x_1, x_2, \dots, x_n , το γινόμενο των οποίων ισούται με 1. Αποδείξτε ότι αν σε κάθε αριθμό προσθέσουμε τη μονάδα, το γινόμενο των νέων αριθμών θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2^n .

Στην τελευταία μας παραλλαγή θα ακολουθήσουμε και πάλι τα βήματα του Μπετόβεν. Όπως και η δική του, θα είναι ένα είδος επεκτεταμένης φούγκας που χρησιμοποιεί μια μάλλον προχωρημένη γενικευση της ανισότητας AM-GM: Έστω n θετικοί αριθμοί a_1, a_2, \dots, a_n . Τότε έχουμε

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

(Δηλαδή, ο αριθμητικός μέσος n αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού τους μέσου.) Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Μια όμορφη απόδειξη αυτής της

γενικευμένης ανισότητας, την οποία οφείλουμε στον Cauchy, μπορείτε να βρείτε, για παράδειγμα, στο *An Introduction to Inequalities* των Edwin Beckenbach και Richard Bellman (Mathematical Association of America, Ουάσιγκτον, 1961).

Παραλλαγή 14: (Το εν λόγω πρόβλημα έθεσε ο ένας από τους συγγραφείς του άρθρου στον τελικό γύρο της Ρουμανικής Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας το 1984.) Έστω n αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_n στο ανοικτό διάστημα $(1/4, 1)$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \log_{x_3}\left(x_4 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right).$$

Για ποιες τιμές των x_1, x_2, \dots, x_n εμφανίζεται το ελάχιστο; **Υπόδειξη:** Ως πρώτο βήμα, χρησιμοποιήστε την ανισότητα AM-GM για να βρείτε ένα κάτιο φράγμα της παράστασης $x_k^2 + \frac{1}{4}$. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 44

Φ120

Φωτεινό νήμα. Μια φωτεινή πηγή αποτελείται από λεπτό νήμα μήκους $L = 10$ cm και είναι τοποθετημένη κατά μήκος του κύριου άξονα συγκλίνοντος φακού, εστιακής απόστασης $f = 5$ cm και διαμέτρου $D = 1$ cm. Το πλησιέστερο άκρο του νήματος απέχει από το οπτικό κέντρο του φακού απόσταση $a = 10$ cm. Βρείτε την απόσταση στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί οθόνη, κάθετα στον κύριο άξονα, στην άλλη πλευρά του φακού, έτοις ώστε η φωτεινή κηλίδα που θα σχηματίζεται να έχει το ελάχιστο δυνατόν μέγεθος. Υπολογίστε το μέγεθος της κηλίδας στην εν λόγω περιπτωση.

(A. Zilberman)

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ

Η ΓΟΗΤΕΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Serge Lang
Yale University, Yale

Serge Lang

Η γοητεία των Μαθηματικών

Τρεις συζητήσεις με το κοινό

Σε τούτο το βιβλίο περιλαμβάνονται οι τρεις συζητήσεις που είχε με το κοινό ο διακεριμένος μαθηματικός Serge Lang κατά τις επισκέψεις του στο Palais de la Découverte του Παρισιού. Στις σελίδες του παρακολουθούμε πώς ο Lang, με αξιοθαύμαστη δεξιοτεχνία, κατορθώνει να αναλύσει σημαντικά ζητήματα των μαθηματικών (τους πρώτους αριθμούς, τις διοφαντικές εξισώσεις και μεγάλα προβλήματα της γεωμετρίας), να μεταδώσει κάτι από τη βαθύτερη γοητεία τους και να προκαλέσει το έντονο ενδιαφέρον του κοινού. Ο αναγνώστης δεν μπορεί παρά να νιώσει τον ίδιο ενθουσιασμό που συνεπήρε το ακροατήριο αυτού του πεπειραμένου διασκάλου.

• «Ιωσής νιώθατε έκπληξη αν κάποιος ισχυρίζόταν ότι τα μαθηματικά είναι κάτι εξαιρετικά όμορφα... Πολλοί είναι εκείνοι που τα αντιμετωπίζουν με προκατάληψη... Ελπίζω ότι σ' αυτό το βιβλίο θα βρείτε κάτι που να συμπληρώνει τα μαθηματικά που σας δίδαξαν ή σας επέβαλαν, όποια κι αν είναι αυτά» — Serge Lang

O Serge Lang είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Yale.

Σελ.: 190, 14 × 21 εκ., 5.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Μια απλή ερώτηση

Πώς ρέει το ηλεκτρικό ρεύμα στα μέταλλα;

Andrey Varlamov

ΑΥΤΗ Η ΕΡΩΤΗΣΗ ΣΥΝΗΘΩΣ ΔΕΝ δυσκολεύει τους μαθητές. Πώς ρέει, λοιπόν, το ρεύμα; Είναι α- πλό. Αν δημιουργήσουμε διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων ενός μεταλλικού αγωγού, στο εσωτερικό του αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο αυτό δρα πάνω στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου προσδίδοντάς τους επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το άκρο με το υψηλότερο δυναμικό (τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητικό φορτίο). Δημιουργείται έτσι μια ροή φορτίων, η οποία είναι αυτό που ονομάζουμε ηλεκτρικό ρεύμα.

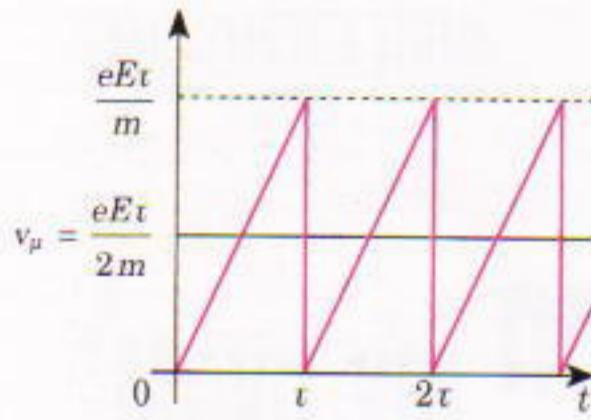
Δεν μπορούμε, βέβαια, να ισχυριστούμε πως η απάντηση είναι λανθασμένη. Ο, τι λέει, αληθεύει. Ωστόσο, παρότι με την πρώτη ματιά φαίνεται πλήρης, γεννά μια σειρά από νέα ερωτήματα και ενοτάσσεις. Ας προσπαθήσουμε να βάλουμε τα πράγματα σε μια τάξη.

Πώς κινούνται τα ηλεκτρόνια μέσα σ' έναν αγωγό όταν δημιουργήσουμε διαφορά δυναμικού στα άκρα του; Θα μπορούσαμε να πούμε ότι επιταχύνονται συνεχώς, εφόσον δρα σταθερά πάνω τους δύναμη $F = eE$ (E είναι το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό). Από την άλλη, αν όντως συνέβαινε κάτι τέτοιο, τότε η ένταση του ρεύματος σε κάθε εγκάρσια διατομή του αγωγού θα αυξανόταν με το χρόνο: τούτο, όμως, έρχεται σε αντίφαση με το νόμο του Ohm, ο οποίος λέει ότι η ένταση του ρεύματος που αναπτύσ-

σεται στον αγωγό εξαιτίας της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του είναι σταθερή και ισούται με $I = V/R$. Τι συμβαίνει λοιπόν; Ας ξαναθυμηθούμε ότι γνωρίζουμε σχετικά με την εσωτερική δομή ενός μετάλλου.

Τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του μετάλλου συνδέονται χαλάρα με τα άτομα στα οποία ανήκουν. Έτσι, όταν διαμορφώνεται το κρυσταλλικό πλέγμα, τα εν λόγω ηλεκτρόνια μπορούν πολύ εύκολα να α-





Σχήμα 1

ποχωριστούν από τα άτομα, σχηματίζοντας ένα αρκετά πυκνό αέριο ηλεκτρονίων (μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε ότι ακόμη και αν κάθε άτομο χάνει μονάχα ένα ηλεκτρόνιο, η συγκέντρωση του ηλεκτρονικού αερίου θα είναι της τάξης του 10^{29} ηλεκτρόνια ανά κυβικό μέτρο). Παραπάνω, όταν μιλήσαμε για ηλεκτρικό ρεύμα μέσα σ' ένα μεταλλικό αγωγό, θεωρήσαμε ότι τα ηλεκτρόνια είναι ελεύθερα. Αυτό κατά μια έννοια είναι σωστό, ωστόσο δεν πρέπει να ξεχνάμε το κρυσταλλικό πλέγμα ιόντων που περιβάλλει τα ηλεκτρόνια.

Η κλασική ηλεκτρονική θεωρία για την αντίσταση των μετάλλων, η οποία διατυπώθηκε στα τέλη του 19ου αιώνα προς τις αρχές του 20ού, αναφέρει ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που κινούνται εξαιτίας ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου συγκρούονται με τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Σε μερικές από τις συγκρούσεις τα ηλεκτρόνια προσφέρουν στο πλέγμα όλη την κινητική ενέργεια που έχουν αποκτήσει κατά την επιτάχυνσή τους απ' το ηλεκτρικό πεδίο. Οι συγκεκριμένες συγκρούσεις, που ονομάζονται *ενεργές*, είναι αυτές οι οποίες ευθύνονται για την αντίσταση των μετάλλων. Οι υπόλοιπες συγκρούσεις δεν είναι ουσιαστικές για την κατανόηση της ροής των ηλεκτρονίων διαμέσου του μεταλλικού υλικού (καθώς αλλάζουν μονάχα τη διεύθυνση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων και όχι το μέτρο της).

Ας συμβολίσουμε με τ το μέσο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο συγκρούσεων. Στο διάστημα μεταξύ των στιγμών 0 και τ , το ηλεκτρόνιο κινείται με επιτάχυνση $y = eE/m$, κι έτσι η προβολή της ταχύτητας του στη διεύθυνση του **E** αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο: $v = yt = eEt/m$. Τη

χρονική στιγμή το ηλεκτρόνιο συγκρούεται με ένα ιόν και προοφέρει ολόκληρη την κινητική του ενέργεια στο πλέγμα. Στη συνέχεια επιταχύνεται εκ νέου από το ηλεκτρικό πεδίο, και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Η γραφική παράσταση της εξάρτησης της ταχύτητας του ηλεκτρονίου από το χρόνο στην εν λόγω διατεταγμένη κίνηση φαίνεται στο Σχήμα 1. Η κίνηση αυτή ουσιαστικά ισοδυναμεί με ομαλή ολίσθηση των ηλεκτρονίων σε κατεύθυνση αντίθετη αυτής του ηλεκτρικού πεδίου, με μέση ταχύτητα $v_\mu = eEt/(2m)$. Ας υπολογίσουμε την ένταση του ρεύματος που συνδέεται με τη συγκεκριμένη κίνηση.

Το πλήθος των ηλεκτρονίων τα οποία διαπερνούν μια εγκάρσια διατομή του αγωγού εμβαδού S σε χρόνο Δt είναι $\Delta N = nSv_\mu \Delta t$. Ο πληθυσμός αυτός μεταφέρει φορτίο

$$\Delta q = e\Delta N = neSv_\mu \Delta t.$$

Επομένως, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό θα ισούται με

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nev_\mu S = \frac{ne^2 \tau}{2m} SE.$$

Η ποσότητα

$$j = \frac{I}{S} = \frac{ne^2 \tau}{2m} E.$$

ονομάζεται πυκνότητα ρεύματος. Ο συντελεστής του πεδίου **E** στην παραπάνω σχέση εκφράζει το αντίστροφο της ειδικής αντίστασης του μετάλλου.

Τώρα τα πράγματα μοιάζουν πολλά. Ωστόσο, παραμένουν ορισμένα ερωτηματικά. Λόγου χάρη, ας υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων. Υποθέτουμε ότι ο αγωγός μας είναι χάλκινο σύρμα διατομής $S = 10 \text{ mm}^2$ και πως διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I = 10 \text{ A}$. ακόμη, ότι η συγκέντρωση του ηλεκτρονικού αερίου είναι $n = 1,67 \cdot 10^{29}$ ηλεκτρόνια ανά κυβικό μέτρο. Τότε η ζητούμενη μέση ταχύτητα είναι:

$$v_\mu = \frac{I}{neS} \equiv 0,04 \text{ mm/s.}$$

Αν υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργών συγκρούσεων, χρησιμοποιώντας ως τιμή της ειδικής α-



ντίστασης του χαλκού αυτήν την οποία έχουμε βρει πειραματικά, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, λαμβάνουμε $t = 10^{-14} \text{ s}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή για τις ενεργές συγκρούσεις καλύπτεται με μέση ταχύτητα $v_p = 0,1 \text{ mm/s}$, καταλήγουμε στο παρόλογο συμπέρασμα πως η απόσταση που διανύει ένα ηλεκτρόνιο μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργών συγκρούσεων ισούται με $l = v_p t = 10^{-18} \text{ m}$ — αριθμός κατά πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερος από την απόσταση μεταξύ των ιόντων του πλέγματος!

Για μία ακόμη φορά, όμως, παραβλέψαμε κάτι. Συγκεκριμένα, δεν λάβαμε υπόψη μας πως τα σωματίδια του ηλεκτρονικού αερίου — τα ελεύθερα ηλεκτρόνια — ενός μετάλλου, όπως και τα σωματίδια ενός ιδανικού αερίου μέσα σ' ένα δοχείο, βρίσκονται σε συνεχή χαοτική κίνηση. Ωστόσο, ακόμη κι αν χρησιμοποιήσουμε αυτή την αναλογία και αντικαταστήσουμε την τιμή v_p στον τύπο του l με την τιμή της μέσης ταχύτητας λόγω της τυχαίας θερμικής κίνησης,

$$v_p = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

δεν θα αρκούσε για να καταλήξουμε σε μια τιμή συνεπή με τα πειραματικά δεδομένα (αποδείξτε το μόνοι σας).

Έχουμε εξαντλήσει όλες τις δυνατότητες της κλασικής φυσικής. Στην πραγματικότητα, μια συνεπής θεωρία για την αντίσταση των μετάλλων διαμορφώθηκε μόλις στα μέσα του 20ού αιώνα με τη βοήθεια των ιδεών της κβαντικής φυσικής. Βρέθηκε ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου κινούνται με πολύ υψηλές ταχύτητες: $v_p = 0,01c$ (όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό). Η χαοτική κίνηση των σωματίδιων του ηλεκτρονικού αερίου, η οποία έχει καθαρά κβαντική παρά θερμική προέλευση, δεν σταματά ούτε στο απόλυτο μηδέν. Ωστόσο, ακόμη κι αν η εν λόγω χαοτική κίνηση των ηλεκτρονίων πραγματοποιείται με τόσο μεγάλες ταχύτητες, το μέσο φορτίο που διαπερνά μια εγκάρσια διατομή του αγωγού, όταν δεν υπάρχει εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, ισούται με το μηδέν. Όταν πάλι εφαρμόζεται κάποιο εξωτερικό

ηλεκτρικό πεδίο, η ολιοθηση των ηλεκτρονίων σε κατεύθυνση αντίθετη αυτής του ηλεκτρικού πεδίου υπερτίθεται στην παραπάνω χαοτική κίνηση τους. Η μεγάλη ταχύτητα με την οποία πραγματοποιείται η χαοτική κίνηση των σωματίδιων του ηλεκτρονικού αερίου εξηγεί την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργών συγκρούσεων. Για το χάλκινο αγωγό αυτή η απόσταση είναι μερικές δεκάδες (ή και εκατοντάδες) διατομικές αποστάσεις, γεγονός το οποίο φαίνεται λογικό.

Και μια τελευταία έκπληξη. Σύμφωνα με τους νόμους της κβαντικής μηχανικής, ένα ηλεκτρόνιο κινείται ανάμεσα στα ιόντα ενός ιδανικού περιοδικά κατανεμημένου κρυσταλλικού πλέγματος με τέτοιον τρόπο, ώστε δεν συγκρούεται ποτέ με αυτά. Ήραία, λοιπόν και τι γίνεται τώρα, έπειτα από όλες τις προηγούμενες νοητικές κατασκευές μας; Εν τέλει, πώς μεταδίδουν τα ηλεκτρόνια την ενέργειά τους στο πλέγμα;

Αποδεικνύεται ότι σε χαμηλές θερμοκρασίες τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα ιόντα των προσμείξεων καθώς και με άλλες ατέλειες που πάντοτε υπάρχουν σε ένα κρυσταλλικό πλέγμα. Αν απομακρύναμε αυτές τις ατέλειες, η ειδική αντίσταση του κρυσταλλικού μετάλλου θα μπορούσε να ελαττωθεί και να φθάσει σε απειροστά μικρές τιμές.

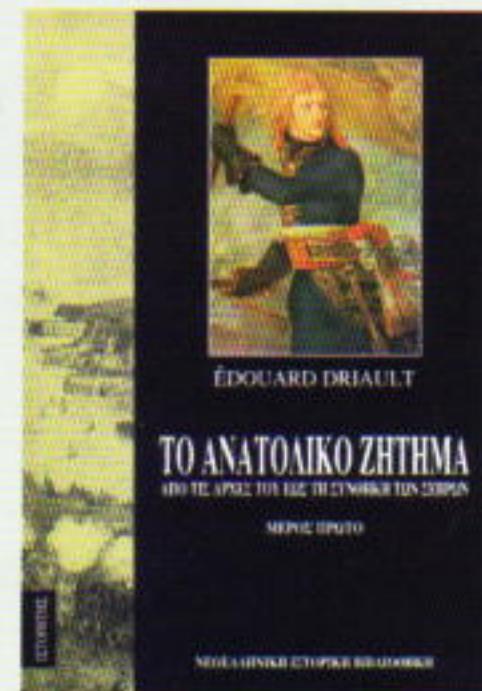
Σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, πάλι, τα ηλεκτρόνια σκεδάζονται κατά βάση στις ταλαντώσεις του πλέγματος. Σε ένα ιδανικό (ακίνητο) πλέγμα τα ηλεκτρόνια θα μπορούσαν, κατά κάποιον τρόπο, να ρυθμίσουν τη συμπεριφορά τους έτσι ώστε να αποφεύγουν όλα τα περιοδικώς τοποθετημένα ιόντα αν όμως τα ιόντα συμμετέχουν σε θερμικές ταλαντώσεις, τα ηλεκτρόνια αδυνατούν να συντονιστούν με τη χαοτική κίνηση των ιόντων και αναπόφευκτα συγκρούονται μαζί τους.

— κ ο ρ φ ή —

**Βιβλία για όλες τις βαθμίδες
της εκπαίδευσης**

Κεντρική πώληση: Βιβλιοπωλείο
Gutenberg, Σόλωνος 103, 106 78 Αθήνα,
τηλ.: 3800127, fax: 3800798

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Édouard Driault

ΤΟ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΖΗΤΗΜΑ

Από τις αρχές του έως τη Συνθήκη των Σεβρών

O Édouard Driault (1864-1947), καθηγητής της ιστορίας στη Σορβόνη, δημοσίευσε συμπληρωμένο το μνημόδεις έργο του *To Anatolikó Zítima* το 1921. Από τότε το βιβλίο του θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα εγχειρίδια για τη γνώση και κατανόηση όλων εκείνων των βαθύτερων αιώνων που προκάλεσαν, και εξακολουθούν να προκαλούν, εντάσεις και τριβές μεταξύ των λαών και κρατών, διασαλεύοντας την παγκόσμια ειρήνη. Σ' αυτό εξετάζεται αναλυτικά και σφαιρικά η ιστορία του Ανατολικού ζητήματος, από τις απαρχές του κατά τους χρόνους του Βυζαντίου, την παγίωση του επί Οθωμανικής αυτοκρατορίας, μέχρι και τη Συνθήκη των Σεβρών (1920). Άξιο προσοχής είναι ότι μελετά το συγκρουσιακό πρότυπο που ορίζει τις σχέσεις των Μεγάλων Δυνάμεων, με όλες τις εναλλαγές τους κατά τις διάφορες ιστορικές περιόδους, αλλά και τη δυναμική που αναπτύσσεται στο διεθνές πολιτικό πεδίο. Ενδιαφέρει ιδιαίτερως το σύγχρονο αναγνώστη, διότι στις σελίδες του εξηγούνται σημερινές καταστάσεις και προβλήματα της Βαλκανικής χερσανήσου και των λαών της τέλος, ερμηνεύεται με τρόπο διαφωτιστικό και η σημερινή ελληνοτουρκική αντιπαράθεση.

Σελ.: 527, Εως.: A/M, 14 × 21 εκ., 7.500 δρ.

ΙΣΤΟΡΗΤΙΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

κάτοπτρο

Κύματα υπό τα κύματα

Η επιστήμη του ήχου στις ωκεάνιες έρευνες

L. Brekhovskikh και V. Kurtevov

ΣΤΟ ΑΡΘΡΟ ΤΟΥΣ «ΩΚΕΑΝΙΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ» (σελ. 22), οι A. Varlamov και A. Malyarovskiy μας εξηγούν πώς οι ωκεάνιοι ακουστικοί κυματοδηγοί επιτρέπουν στον ήχο να διαδίδεται σε αποστάσεις χιλιάδων χιλιομέτρων. Αυτοί οι υποβρύχιοι δρόμοι του ήχου, εκτός από το να προσφέρουν ένα βολικό μέσο επικοινωνίας στους ογκώδεις κατοίκους της θάλασσας, επιτρέπουν στους επιστήμονες να συλλέγουν τεράστιες ποσότητες δεδομένων για μεγάλες εκτάσεις των ωκεανών.

Στις μέρες μας ενδιαφέρομαστε έντονα να μάθουμε όσο περισσότερα είναι δυνατόν για την κατάσταση του παγκόσμιου ωκεανού, για την κίνηση των υδάτων του και τη δομή του πυθμένα του. Η γνώση όλων αυτών αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμη στην επιφανειακή και υποβρύχια ναυσιπλοΐα, στην εύρεση περιοχών μέγιστης βιολογικής παραγωγικότητας, για το συνυπολογισμό της επίδρασης του ωκεανού στο κλίμα και τον καιρό και για πολλούς ακόμη σκοπούς.

Η χρήση των ηχητικών κυμάτων στην εξερεύνηση των ωκεανών είναι μια ωκεανογραφική μέθοδος ολοένα μεγαλύτερης σημασίας, καθώς ο περιορισμός της παραδοσιακής συλλογής δεδομένων καθιστανται εμφανείς. Πολλά ερευνητικά σκάφη από διαφορετικές χώρες πλέουν συνεχώς στους ωκεανούς: καταγράφουν την κατάσταση του νερού σε διαφορετικά βάθη καθώς και τα χαρακτηριστικά της ατμόσφαιρας πάνω από τους ωκεανούς

ή του εδάφους κάτω από αυτούς. Παρότι αυτά τα δεδομένα είναι πολύ σημαντικά, παρέχουν ελάχιστες πληροφορίες για τη λεπτομερή περιγραφή της παρούσας κατάστασης των ωκεανών του πλανήτη. Προς τούτο, η ροή δεδομένων θα έπρεπε να αυξηθεί κατά χιλιάδες φορές, πράγμα που μπορεί να γίνει μόνο με τη βοήθεια τεχνητών δορυφόρων και διαστημικών σταθμών.

Τα δορυφορικά συστήματα συγκέντρωσης δεδομένων μπορούν ταχύτατα να συλλέξουν στοιχεία για πολλά χαρακτηριστικά του ωκεανού σε τεράστιες εκτάσεις. Μετρήσεις της ενδογενούς ωκεάνιας ακτινοβολίας στην υπέρυθρη και την εκατοστομετρική περιοχή μηκών κύματος καθιστούν δυνατή την καταγραφή των θερμοκρασιών της επιφάνειας του ωκεανού. Με την ανάλυση της διάχυσης των εκατοστομετρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην επιφάνεια του ωκεανού, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά των επιφανειακών κυμάτων, των επιφανειακών ρευμάτων και των ανέμων πλησίον της επιφάνειας.

Με την ανάλυση του χρόνου που απαιτείται για να ταξιδέψει ένας ηλεκτρομαγνητικός παλμός ώς την επιφάνεια του ωκεανού και να επιστρέψει στο δορυφόρο, μπορούμε να μετρήσουμε μεταβολές στη στάθμη του θαλάσσιου νερού σε τεράστιες εκτάσεις. Η συγκεκριμένη μέθοδος κατέστησε δυνατή την ανακάλυψη ενός «βαθουλώματος» περίου 23 m στην

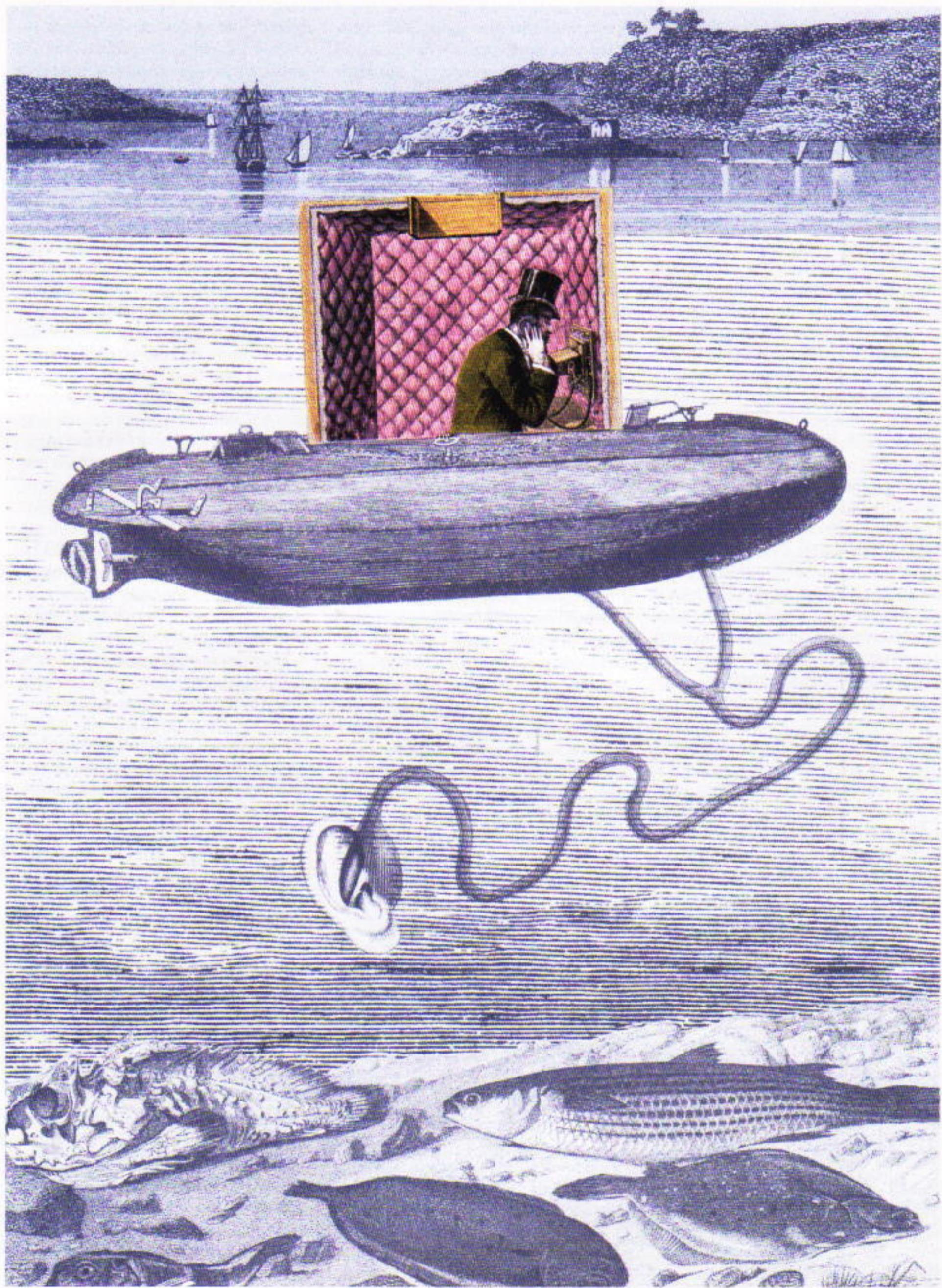
επιφάνεια του ωκεανού, πάνω ακριβώς από την τάφρο του Πουέρτο Ρίκο, που υπάρχει στο βυθό του.

Όλα αυτά τα δεδομένα, πάντως, αφορούν την επιφάνεια του ωκεανού. Το λόγο μπορούμε να τον μαντέψουμε: τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα απλώς δεν μπορούν να διειδύσουν στο θαλάσσιο νερό σε υπολογίσιμο βάθος. Το φως εξασθενεί μέσα σε πολύ μικρή απόσταση, και μια ισχυρή ακτίνα λέιζερ διειδύει μόνο λίγες εκατόνταδες μέτρα.

Το εργαλείο για να εξερευνήσουμε τα βάθη του ωκεανού μάς το προσφέρει η ακουστική. Μόνο τα ηχητικά κύματα μπορούν να διαδίδονται στο νερό σε πολύ μεγάλες αποστάσεις. Πράγματι, σε υποθαλάσσια πειράματα ο ήχος σχετικά μικρών υποβρύχιων εκρήξεων εντοπίστηκε από επιστήμονες σε απόσταση 22.000 km!

Ας θυμηθούμε μια ανακάλυψη που έγινε περίου μισό αιώνα πριν. Επιστήμονες παρατήρησαν στη Θάλασσα της Ιαπωνίας ένα ενδιαφέρον φαινόμενο: Όταν ανθυποβρυχιακές βόμβες εκρήγνυντο σε βάθος περίου 100 m, τα ηχητικά κύματα διαδίδονταν χωρίς αξιοσημείωτη εξασθένηση για εκατοντάδες χιλιόμετρα. Η εξονυχιστική ανάλυση των πειραματικών δεδομένων έδειξε ότι το εν λόγω φαινόμενο οφείλεται στην εξάρτηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου από το βάθος.

Ακριβέστερα, η ταχύτητα του ήχου στο θαλάσσιο νερό μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία, την αλατότητα και



την υδροστατική πίεση. Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων στη Θάλασσα της Ιαπωνίας η αλατότητα ήταν σχεδόν ανεξάρτητη του βάθους, γι' αυτό και δεν επηρέασε τα πειραματικά αποτελέσματα. Με αύξηση του βάθους από μηδέν μέχρι τα 300 m περίπου, η ταχύτητα του ήχου ελαττώθηκε λόγω πτώσης της θερμοκρασίας. Σε μεγαλύτερα βάθη η μεταβολή της θερμοκρασίας ήταν σχεδόν αμελητέα, περίπου 0,3-0,5°C. Πάντως, περαιτέρω αύξηση του βάθους (το μέγιστο βάθος στη Θάλασσα της Ιαπωνίας είναι 3.700 m) οδήγησε σε σημαντική αύξηση της υδροστατικής πίεσης, η οποία προκάλεσε βαθμιαία αύξηση στην ταχύτητα του ήχου. Όλοι οι παραπάνω παραγοντες, λοιπόν, κατατείνουν σε μια συγκεκριμένη εξάρτηση της ταχύτητας του ήχου από το βάθος.

Ένα παράδειγμα τέτοιας εξάρτησης (η κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας του ήχου) φαίνεται στο Σχήμα 1. Η ελάχιστη ταχύτητα του ήχου εμφανίζεται σε βάθος 300 m, αυξανόμενη όμως πάνω και κάτω από αυτό το επίπεδο. Τι προκύπτει από μια τέτοια μεταβολή της ταχύτητας του ήχου σε συνάρτηση με το βάθος;

Το Σχήμα 2 δείχνει ηχητικές δέσμες να εγκαταλείπουν μια γεννήτρια ηχητικών κυμάτων που βρίσκεται σε βάθος 100 m και να διαδίδονται μέχρι ένα δέκτη ο οποίος βρίσκεται σε βάθος 300 m και 184 km μακριά από τη γεννήτρια. Λόγω της διάθλασης του ήχου οι δέσμες κάμπτονται και επιστρέφουν περιοδικά στον οριζόντιο άξονα, ο οποίος αντιστοιχεί στην ελά-

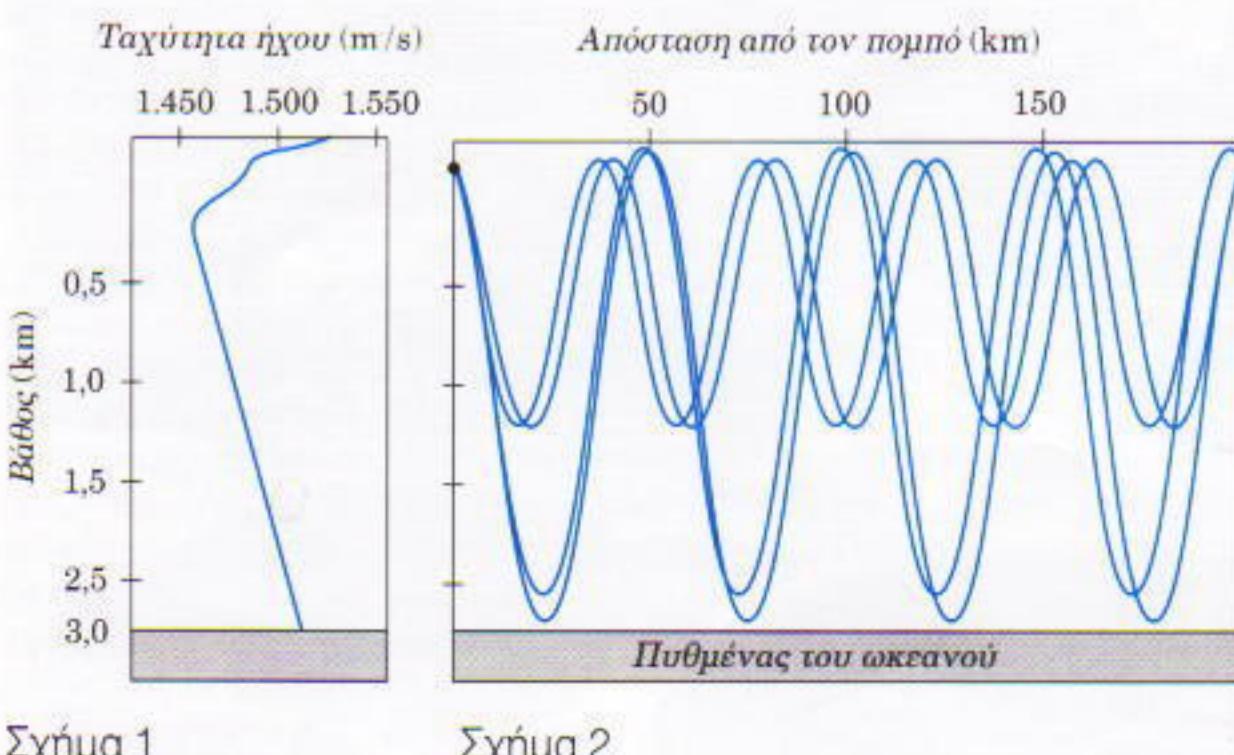
χιστή ταχύτητα του ήχου. Ετοι, ολόκληρη η οικογένεια των δεσμών (μερικές από αυτές φαίνονται στο Σχήμα 2) ούτε έρχεται σε επαφή με τον πυθμένα του ωκεανού, όπου ο ήχος θα μπορούσε να απορροφηθεί, ούτε φθάνει στην επιφάνεια του ωκεανού, όπου ο ήχος θα μπορούσε να διασκορπιστεί από ποικίλες ανομοιογένειες. Ως αποτέλεσμα, ο ήχος ταξιδεύει μέχρι το δέκτη με πολύ μικρή απώλεια έντασης, μέσω δρόμων που είναι γνωστοί ως ωκεάνιοι ακουστικοί κυματοδηγοί. Αυτό το φαινόμενο καθιστά δυνατή την καταγραφή ηχητικών σημάτων χιλιάδες χιλιόμετρα μακριά από την πηγή τους, σε κάθε θάλασσα ή ωκεανό, αρκεί να είναι αρκετά βαθύς.

Τα εκπεμπόμενα ηχητικά σήματα ταξιδεύουν μέσω διαφορετικών κυματοδηγών και φθάνουν στο δέκτη σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Οποιοδήποτε αλλαγές στην κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας του ήχου, έστω και μικρές, οδηγούν σε διακυμάνσεις στο χρόνο άφιξης των σημάτων μέσω καθενός κυματοδηγού. Οι συγκεκριμένες διακυμάνσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να χαρακτηρίσουν καθέναν από τους κυματοδηγούς. Αφού οι ιδιότητες του νερού καθορίζουν εξ ολοκλήρου τους χρόνους αφίξεως των σημάτων, τα σήματα καθεαυτά αποτελούν εξαιρετικά ευαίσθητους δείκτες του υδάτινου μέσου διάδοσής τους.

Συνάγεται έτοι ότι η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται όχι μόνο από το βάθος, αλλά και από την οριζόντια θέση. Στην πραγματικότητα, η ταχύτητα του

ήχου σε μια οριζόντια «φέτα» του ωκεανού μπορεί να θεωρηθεί σταθερή μόνο σε μια περιοχή λίγων δεκάδων χιλιομέτρων. Το 1970 ανακαλύφθηκε ότι τον πο σημαντικό ρόλο στην οριζόντια μεταβολή της ταχύτητας του ήχου παίζουν οι ωκεάνιοι στρόβιλοι. Βρέθηκε συγκεκριμένα ότι το ισχυρό θαλάσσιο ρεύμα που συνδέεται με τους αληγείς ανέμους στον Ατλαντικό Ωκεανό περιέχει γιγαντιαίους υδάτινους στρόβιλους, διαμέτρου εκατοντάδων χιλιομέτρων, οι οποίοι ψούνε με τους ατμοσφαιρικούς κυκλώνες. Περαιτέρω έρευνες έδειξαν ότι τέτοιοι στρόβιλοι απαντώνται ουσιαστικά σε όλο τον παγκόσμιο ωκεανό. Τα κέντρα των γιγαντιαίων στρόβιλων ταξιδεύουν με ταχύτητες που φθάνουν τα 300 m/h, αλλά η περιστροφική τους κίνηση είναι δέκα φορές ταχύτερη. Το πέρασμα ενός ισχυρού στρόβιλου μερικές φορές προκαλεί αλλαγές ικανές να διακόψουν μια ακουστική μετάδοση ή, από την άλλη, να παραγάγουν έναν ηχητικό «αντικατοπτρισμό» —δηλαδή, μπορούν να κάνουν ακουστές συνήθως μη ακουστές πηγές ήχου.

Πριν μερικά χρόνια συζητήθηκε η ιδέα μακροπρόθεσμων (διάρκειας ενός έτους) παρατηρήσεων της μεταβλητής μεγάλης κλίμακας του ωκεανού σε έκταση περίπου 10^6 km^2 αξιοποιώντας την υψηλή ευαισθησία των ηχητικών σημάτων σε μεταβολές των ιδιοτήτων του νερού. Προς τούτο θα χρειαζόταν να τοποθετήσουμε ένα σύστημα αγκυρωμένων ακουστικούλεκτρικών γεννητριών και δεκτών σε ποικίλα βάθη κατά μήκος της ισημερινής περιμέτρου της περιοχής, και τότε να μετρήσουμε τις διακυμάνσεις των χρόνων αφίξεως των σημάτων που ταξιδεύουν μέσω όλων των δυνατών κυματοδηγών. Όπως προαναφέραμε, τα εν λόγω σήματα μεταφέρουν πληροφορίες για τις ανομοιογένειες που συναντούν στο δρόμο τους. Κατ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να «σαρώσουμε» τη θάλασσα και να συνθέσουμε την εικόνα ενός ολόκληρου όγκου νερού. Κανένας στόλος επιστημονικών πλοίων δεν μπορεί να εκτελέσει τόσο μεγάλο πλήθος ταυτόχρονων μετρήσεων. Με την καταγραφή των διαφορών χρόνου των λαμβανόμενων σημάτων θα μπορούσαμε



να αναδημιουργήσουμε το πεδίο ταχύτητας του ήχου — δηλαδή να προσδιορίσουμε την τιμή της ταχύτητας του ήχου σε διαφορετικές θέσεις στην υδάτινη έκταση. Η εν λόγω μέθοδος είναι γνωστή ως ακουστική τομογραφία. Η ανάλυση των παραπάνω δεδομένων παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τους στροβίλους.

Η αρχή της μεθόδου ανακατασκευής ενός πεδίου ταχύτητας του ήχου έχει ως εξής. Η υπό μελέτη περιοχή χωρίζεται σε N κυψελίδες όγκου των οποίων το μέγεθος (δεκάδες χιλιόμετρα οριζόντια και εκατοντάδες μέτρα κατακόρυφα) είναι μικρό σε σύγκριση με αυτό των στροβίλων. Η ταχύτητα του ήχου μέσα στη n -οστή κυψελίδα τη στιγμή t , σε βάθος z και για οριζόντιες συντεταγμένες (x, y) , μπορεί να γραφεί ως

$$c_n(x, y, z, t) = c_0(z) + \Delta c_n(x, y, z, t),$$

με $n = 1, 2, \dots, N$.

Εδώ, $c_0(z)$ είναι η γνωστή τιμή της ταχύτητας του ήχου απουσία στροβίλων και Δc_n είναι η μεταβολή της ταχύτητας του ήχου, η οποία προκαλείται από τους στροβίλους, στη n -οστή κυψελίδα. Ας προσδιορίσουμε τις τιμές των Δc_n .

Η κατακόρυφη κατανομή $c_0(z)$ αντιστοιχεί σε ένα σύνολο από M κυματοδηγούς (δέσμες), οι οποίοι απουσία στροβίλων συνδέουν όλες τις πηγές με όλους τους δέκτες. Αυτές οι δέσμες «αναφοράς» διαφέρουν από τις «πραγματικές», οι οποίες διαδίδονται στο πραγματικό μέσο με στροβίλους. Οι τροχιές των δέσμων αναφοράς και οι περιόδοι t_{0m} (με $m = 1, 2, \dots, M$) διάδοσης του ήχου κατά μήκος αυτών υπολογίζονται από ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Όταν οι τιμές $|\Delta c_n|$ είναι πολύ μικρότερες από την c_0 (συνήθης περίπτωση), οι πραγματικές δέσμες δεν διαφέρουν σημαντικά από τις δέσμες αναφοράς. Συμβολίζοντας τη διάρκεια της διάδοσης του σήματος κατά μήκος της m -οστής δέσμης αναφοράς με t_m , καταλήγουμε σε μια προεγγιστική εξίσωση για τις διακυμάνσεις των χρόνων αφίξεως $\Delta t_m = t_m - t_{0m}$ με την ακόλουθη μορφή:

$$\Delta t_m = \sum_{n=1}^N E_{mn} \Delta c_n.$$

Θεωρώντας όλες τις δυνατές δέ-

σμες, παίρνουμε ένα σύνολο από M εξισώσεις ως προς τα Δc_n (με $n = 1, 2, \dots, N$). Οι συντελεστές E_{mn} μπορούν να υπολογιστούν εάν η τροχιά της m -οστής δέσμης αναφοράς και η γεωμετρία της n -οστής κυψελίδας είναι γνωστές. Για τις κυψελίδες τις οποίες δεν «επισκέπτεται» η m -οστή ακτίνα, οι $E_{mn} = 0$. Μετρώντας τις διακυμάνσεις των χρόνων αφίξεως Δt_m των ηχητικών σημάτων και λύνοντας το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων, λαμβάνουμε τις τιμές Δc_n για κάθε κυψελίδα. Αυτή είναι η βασική υπολογιστική διαδικασία, παρόλο που στην πράξη υπάρχουν επιπλέον τεχνικά και μαθηματικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν.

Αν πετύχουμε να ανακατασκευάσουμε την κατανομή της ταχύτητας του ήχου $c_n(x, y, z, t)$, είμαστε σε θέση πα, μέσω σχέσεων γνωστών στη φυσική ωκεανογραφία, να βρούμε τις προσεγγιστικές τιμές της θερμοκρασίας, της αλατότητας και της πυκνότητας του νερού. Πληροφορίες σχετικά με τη θερμοκρασία του ωκεανού για μεγάλη έκταση υδάτων βοηθούν να προσδιορίσουμε το θερμικό περιχόμενο του ωκεανού, το οποίο είναι προαπαιτούμενο για την πρόβλεψη του καιρού. Παρόλο που αυτό δεν είναι καθόλου ασήμαντο, η ακουστική τομογραφία μπορεί να κάνει πολύ περισσότερα. Μετρώντας τη διαφορά των χρόνων που απαιτούνται για να ταξιδέψουν τα σήματα προς και από δύο ακουστικώς συνδεδεμένα σημεία, μπορούμε να βρούμε τη μέση προβολή του ωκεανού ρεύματος στην κατεύθυνση διάδοσης του ήχου. Οι ερευνητές ελπίζουν να εφαρμόσουν αυτή την προσέγγιση στη μέτρηση της μεγάλης κλίμακας κυκλοφορίας του ωκεανού, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με τις παραδοσιακές μεθόδους. Υπάρχουν παγκόσμια προγράμματα που προβλέπουν την ένταξη τεράστιων εκτάσεων των ωκεανών του πλανήτη μας σε ένα τομογραφικό δίκτυο. Αυτό θα σήμαινε επανάσταση στη μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ του ωκεανού και της ατμόσφαιρας, που είναι και το κρίσιμο πρόβλημα στη θεωρία σχηματισμού του κλίματος στη Γη.

Μια άλλη πιθανή εφαρμογή της ακουστικής τομογραφίας σχετίζεται



Σχήμα 3

με τη μελέτη του ωκεανίου βυθού. Δεν πρόκειται για απλή δουλειά — οι ερευνητές χωρίζονται από το αντικείμενό τους με μια στήλη νερού μήκους αρκετών χιλιομέτρων. Οι διαθέσιμες μέθοδοι — εύρεση της κατατομής του ωκεανίου πυθμένα με σεισμικές μεθόδους και γεωτρήσεις βαθέος ύδατος — είναι επίπονες και πανάκριβες. Πάντως, υπάρχουν εναλλακτικές προσεγγίσεις.

Το οπλοστάσιο των επιστημονικών υδροακουστικών διατάξεων γίνεται πο «εκλεπτυσμένο» με τους αυτόνομους σταθμούς βυθού (AGS). Οι εν λόγῳ σταθμοί, εξοπλισμένοι με δέκτες ήχου (υδρόφωνα), ειδικούς υπολογιστές και καταγραφείς μαγνητοτανίας, μπορούν να βυθιστούν και να λειτουργήσουν στον πυθμένα του ωκεανού. Το ερευνητικό σκάφος εκπέμπει ηχητικά σήματα τα οποία λαμβάνει ο αυτόνομος σταθμός βυθού· τα σήματα διαδίδονται τόσο μέσω του νερού όσο και μέσω των ιζηματογενών πετρωμάτων του πυθμένα (στα οποία υφίστανται διάθλαση) (Σχήμα 3). Τα σήματα, λοιπόν, καταγράφονται ως προς το θόρυβο υποβάθρου ο οποίος παράγεται από τις μηχανές του σκάφους και τους ήχους που διαχέονται στην επιφάνεια του ωκεανού και στις ανομοιογένειες του πυθμένα. Οταν το πλοίο κινείται, οι «τροχιές» που ακολουθούν οι δύο ηχητικές δέσμες (στο νερό και στο βυθό) αλλάζουν, οπότε μεταβάλλονται και οι σχετικές χρονικές υστερήσεις των σημάτων.

Χωρίζονται αυθαίρετα τα ωκεάνια ιζηματογενή πετρώματα σε στρώματα με προσωρινά άγνωστες τιμές της ταχύτητας του ήχου, μπορούμε να ενσωματώσουμε αυτές τις τιμές σε ένα σύστημα εξισώσεων παρόμοιο με

Η συνέχεια στη σελ. 69

Οι καρποί του αγώνα του Kepler

«Η ουσία του σύμπαντος δεν ενέχει τη δύναμη να αντιστέκεται στην τόλμη της γνώσης.»

—Georg Wilhelm Friedrich Hegel

B.E. Belonuchkin

ΟTAN ΚΑΠΟΤΕ ΡΩΤΗΣΑΝ ΤΟΝ Karl Marx «Τι σημαίνει για σας ευτυχία;» εκείνος απάντησε: «Αγώνας». Λίγοι όμως θυμούνται ότι στην ερώτηση: «Ποιοι είναι οι μεγαλύτεροί σας ήρωες;» είχε απαντήσει: «Ο Σπάρτακος και ο Kepler». Ο συνδυασμός Σπάρτακου και αγώνα φαίνεται λογικός. Άλλα Kepler και αγώνα; Είναι μάλλον δύσκολο να συσχετίσουμε την εικόνα του ανθρώπου που ανακάλυψε τους νόμους της κίνησης των ουράνιων σωμάτων με την εικόνα ενός οκλάβου που αγωνιστήκε για την ελευθερία. Κι όμως, ο Johannes Kepler υπήρξε όντως μαχητής.

Φαίνεται ότι όλη του τη ζωή τη διέκρινε η ένταση· πάλεψε ενάντια σε όλους και σε όλα — στις αδυναμίες του εαυτού του, στα ελαττώματα της γυναικας του, στις προκαταλήψεις του επιστημονικού κατεστημένου της εποχής του, στην ασάφεια των νέων επιστημονικών δεδομένων —, ακόμη και ενάντια στο δάσκαλο και προστάτη του Tycho Brahe. Ο Brahe προσέφερε στον Kepler ανεκτίμητο υλικό — τα αποτελέσματα των δικών του, ιδιαίτερα ακριβών για την εποχή αστρονομικών παρατηρήσεων· μέσω αυτών ο Kepler οδηγήθηκε στους περίφημους νόμους του. Του προσέφερε επίσης μια θέση δίπλα του, στην αυλή του μισότρελου αυτοκράτορα Ροδόλφου του Β', στην πρωτεύουσα των Αψβούργων, την Πράγα. Αυτό θα εξασφάλιζε στον Kepler τη διατροφή του και πρόσθετη υλική υποστήριξη· ωστόσο, το γεγονός τον εξόργιζε: γιατί ο Brahe δεν του

κατέβαλλε ένα σταθερό μισθό, παραπονούνταν, αντί να του πετάει «ψιχία»; Ο Kepler αγνοούσε, όμως, ότι τα κονδύλια που ο αυτοκράτορας Ροδόλφος προσέφερε στον Brahe είχαν εξαντληθεί προ πολλού. Τα χρήματα είχαν ξοδευτεί όχι τόσο για την κατασκευή ενός «ναού της αστρονομίας» αλλά για λαμπρές τελετές προς τιμή διάσημων επισκεπτών του. Ο Brahe διοργάνωνε τις εν λόγω τελετές όχι για διασκέδαση δική του και των διακεκριμένων επισκεπτών του αλλά για να προφυλάξει την πόλη του Ουράνιενμποργκ από τις λεηλασίες του ντόπιου πληθυσμού. Ο μεγάλος αστρονόμος είχε βάσιμους λόγους να φοβάται τέτοιες εξελίξεις. Πριν καλά καλά πεθάνει στην εξορία, μακριά από την πατρίδα του τη Δανία (πέρασε μόνο τέσσερα χρόνια μακριά της), το Ουράνιενμποργκ μετατράπηκε σε ερείπια.*

Ο δάσκαλος και ο μαθητής δεν συμφωνούσαν ούτε στα επιστημονικά ζητήματα. Ο Brahe ήταν οπαδός μιας συμβιβαστικής θεωρίας περί του ηλιακού συστήματος: ο Ήλιος κινείται γύρω από την ακίνητη Γη, και οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο. Δεν είχε αποδεχτεί την κοπερνίκεια «αίρεση». Ακόμη, ο Brahe είχε ένα μάλ-

λον θυελλώδη χαρακτήρα· είναι γνωστό ότι έχασε τη μύτη του σε μονομαχία στην οποία απερίσκεπτα πήρε μέρος ωθούμενος από μια ακαδημαϊκή διαφωνία. Αρκεί λοιπόν να φανταστούμε απλώς τις συζητήσεις ανάμεσα στον ευέξαπτο Brahe και τον ξιπασμένο και πεισματάρη Kepler.

Ο Kepler αγωνίστηκε με πάθος ακόμη και ενάντια στον εαυτό του, ενάντια στις ίδιες του τις απόψεις. Κι όμως, στην αρχή τα πράγματα εξελίσσονταν ομαλά! Ας εγγράψουμε έναν κύβο στη σφαίρα που ορίζει η τροχιά του Κρόνου (που, σύμφωνα με όσα πίστευε ο Kepler την εποχή εκείνη, ήταν, βεβαίως, κυκλική). Εν συνεχείᾳ, στον ίδιο κύβο ας εγγράψουμε τη σφαίρα που ορίζει η τροχιά του Δια. Στη σφαίρα του Δια εγγράφουμε ακολούθως ένα κανονικό τετράεδρο, και μέσα σ' αυτό, πάλι, τη σφαίρα που ορίζει η τροχιά του Άρη. Συνεχίζοντας έως ότου εξαντληθούν όλα τα κανονικά πολύεδρα και οι πλανήτες, θα ανακαλύψουμε —όπως και ο Kepler — ένα «κοσμικό μυστήριο» (Κοσμογραφικό μυστήριο ήταν ο τίτλος του πρώτου βιβλίου του Kepler, στο οποίο παρουσιάζει αυτές τις μυστικιστικές συσχετίσεις). Η αρμονία των σφαιρών! Θα

* Στο κείμενο υπάρχει μια ιστορική ανακρίβεια: ο Ροδόλφος ο Β' δεν σχετίζεται με το Ουράνιενμποργκ και τη Δανία. Ουράνιενμποργκ ονομάστηκε το αστεροοκοπείο που κατασκεύασε ο Brahe πάνω στο νησί Βεν, έξω από την Κοπεγχάγη· το νησί και την απαραίτητη οικονομική ενίσχυση παραχώρισε στον Brahe ο βασιλιάς της Δανίας Φρειδερίκος ο Β'. Ο Brahe, λόγω των ιδιαίτερα τεταμένων σχέσεων του με τον Χριστιανό τον Δ', γιο και διάδοχο του Φρειδερίκου, έκλεισε το Ουράνιενμποργκ και εγκατέλειψε το Βεν το 1597, για να καταφύγει στην αυτοκρατορική αυλή του Ροδόλφου, στην Πράγα —όπου το 1600 συνάντησε τον Kepler. Ο Ροδόλφος παραχώρισε ένα νέο αστεροοκοπείο στον Brahe, και μαζί έναν τεράστιο μισθό. (Σ.τ.μ.)



τον ζήλευε και ο ίδιος ο Πυθαγόρας!

Αλλά... οκτώ λεπτά του τόξου απόκλιση ανάμεσα στις προβλεπόμενες και τις παρατηρούμενες θέσεις του Αρη ανάγκασαν τον Kepler να απορρίψει την ιδέα περί κανονικής περιφοράς των πλανητών σε κυκλικές τροχιές —ιδέα αποδεκτή όχι απλώς επί αιώνες, αλλά επί χιλιετίες. Δεν πρέπει όμως, με κανένα τρόπο, να υπομησούμε το ρόλο του Tycho Brahe: ήταν ο δεύτερος (μετά τον Ulugbeck) που πέτυχε ακριβεία δύο λεπτών του τόξου στις μετρήσεις του —πρακτικά, το όριο για παρατήρηση με γυμνό οφθαλμό. Αν οι μετρήσεις του ήταν λιγότερο ακριβείς, κατά παράγοντα 3, ο Kepler δεν θα μπορούσε να διακρίνει τη διαφορά ανάμεσα σε μία έλλειψη κι έναν κύκλο.

Η «*αρμονία των οφαίρων*» είχε κυριολεκτικά καταρρέυσει· αντικαταστάθηκε από τους ακόλουθους νόμους.

Πρώτος νόμος του Kepler: *Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλειψεις στη μία εστία των οποίων βρίσκεται ο Ήλιος.*

Δεύτερος νόμος του Kepler: *Η επιβατική ακτίνα, η οποία συνδέει τον Ήλιο με έναν πλανήτη κατά την κίνησή του γύρω απ' αυτόν, «σαρώνει» σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.*

Ο Kepler δημοσίευσε αυτούς τους δύο νόμους το 1609 στο βιβλίο του με τίτλο *Nέα αστρονομία*. Ωστόσο, το βιβλίο είδε το φως της δημοσιότητας χάρη στην εύνοια της τύχης και μόνο. Η εργασία ανήκε στον Ροδόλφο, αυτοκράτορα της Αγίας Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, αφού γράφτηκε κατά διαταγή του. Άλλα ο αυτοκράτορας αδυνατούσε να πληρώσει τα έξοδα του τυπογραφείου, και το βιβλίο έμεινε στη διάθεση του συγγραφέα. Ο Kepler, για μία ακόμη φορά, είχε απομείνει χωρίς μέσα για να συντηρηθεί. Τα βιβλία την εποχή εκείνη δεν απέφεραν κανένα ειοόδημα, ειδικά όταν προπαγάνδιζαν τις αιρετικές απόψεις του Κοπέρνικου. Αντιθέτως, μόνο προβλήματα μπορούσαν να δημιουργήσουν. Ως προτεστάντης, ο Kepler καταδιωκόταν από την Καθολική Εκκλησία στις προτεσταντικές χώρες, πάλι, καταδιωκόταν από τους «ομοιδεάτες» του ως αιρετικός οπαδός του Κοπέρνικου. (Η *Επιτομή της κοπερνίκειας αστρονομίας* (1621) του Kepler περιλαμβανόταν

στον «Κατάλογο των απαγορευμένων βιβλίων» πολύ πριν την έκδοσή της.)

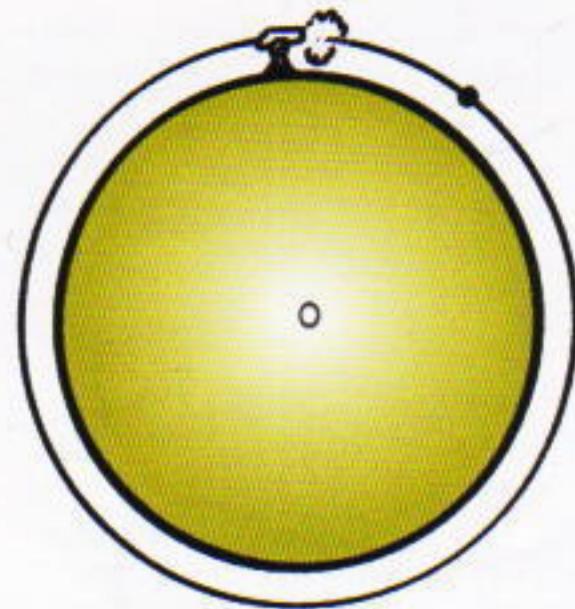
Ο τριακονταετής πόλεμος επίσης, ο οποίος άρχισε το 1618, λίγο έλειψε να εμποδίσει τη δημοσίευση του βιβλίου του *Κοσμικές αρμονίες* (1619), στο οποίο περιλαμβάνεται ο

Τρίτος νόμος του Kepler: *Τα τετράγωνα των περιόδων των πλανητών είναι ανάλογα των κύβων των αποστάσεων τους από τον Ήλιο (ακριβέστερα, ανάλογα των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων των τροχιών τους).*

Παραθέσαμε λοιπόν τους τρεις νόμους του Kepler. Ο πρώτος αναφέρεται στις τροχιές όλων των πλανητών, ο δεύτερος συγκρίνει διαφορετικά τμήματα της τροχιάς ενός μόνο πλανήτη και ο τρίτος συσχετίζει τις τροχιές διαφορετικών πλανητών. Ας προσπαθήσουμε τώρα να αντιμετωπίσουμε μερικά προβλήματα με τη βοήθεια αυτών των νόμων.

Πρόβλημα 1. Μπορεί να τεθεί σε τροχιά γύρω από τη Γη ένα βλήμα που εκτοξεύεται από κανόνι;

Ας κάνουμε ένα πρώτο σκαρίφημα μιας τέτοιας εκτόξευσης (Σχήμα 1). Προφανώς το βλήμα —όπως και κάθε τεχνητός δορυφόρος— κινείται κατά μήκος μιας έλλειψης: αυτό σημαίνει ότι μετά από μία περιφορά πρέπει να διέλθει πάλι από το σημείο εκτόξευσης με ίση ταχύτητα (κατά μέτρο και φορά). Το σημαντικό δεν έγκειται στο ότι η τροχιά είναι ελλειπτική αλλά στο ότι είναι κλειστή καμπύλη. Επομένως, σε κάποιο σημείο το βλήμα θα προ-



Σχήμα 2

σκρούσει στη Γη. Παρ' όλα αυτά...

Ας δούμε το Σχήμα 2. Μπορούμε να εκτοξεύσουμε το βλήμα από ένα ψηλό βουνό. Η πλέον κατάλληλη τοποθεσία θα ήταν το όρος Κιλιμάντζαρο (και όχι το Έβερεστ, δεδομένου ότι το Κιλιμάντζαρο βρίσκεται κοντά στον ισημερινό· αν λάβουμε υπόψη ότι η Γη είναι πεπλατυσμένη, η κορυφή του απέχει 6 χιλιόμετρα περισσότερο από το κέντρο της «σφαίρας» απ' ότι το Έβερεστ). Αν τώρα η ταχύτητα του βλήματος είναι αρκετά μεγάλη, μπορεί να αποφευχθεί ο κίνδυνος της πρόσκρουσής του με τη Γη. Αυτό αληθεύει, παραλείψαμε όμως την αντίσταση του αέρα. Ο Kepler δεν θα ήταν κατ' αρχήν αντίθετος με μια τέτοια εκτόξευση (εξάλλου στις μέρες μας όλοι οι τεχνητοί δορυφόροι εκτοξεύονται μέσω πυραύλων).

Τα επόμενα δύο προβλήματα αφορούν τον Αρη. Ο Tycho Brahe ερεύνησε λεπτομερώς την κίνηση αυτού του πλανήτη, και από τούτες τις παρατηρήσεις ο Kepler συνήγαγε τους δύο πρώτους νόμους του. Γενικά, ο Αρης προσέλκυε την προσοχή της ανθρωπότητας περισσότερο από κάθε άλλον πλανήτη. Κατά την εποχή της μεγάλης αντίθεσης το 1887, όταν ο ιταλός αστρονόμος Giovanni Schiaparelli ανακάλυψε στον Αρη παράξενους σχηματισμούς τους οποίους ονόμασε canali (κοίτες ποταμών), ανέκυψε ένα σοβαρό ζήτημα, που ακόμη δεν έχει απαντηθεί: «Υπάρχει ζωή στον Αρη;». Ο αμερικανός αστρονόμος Percival Lowell υποστήριξε ότι αυτά στην πραγματικότητα ήταν τεχνητά αυλάκια, διώρυγες τις οποίες είχαν διανοίξει οι ευφυείς κάτοικοι του Αρη. Από τότε



Σχήμα 1

μέχρι σήμερα (στις 4 Ιουλίου 1997 προσεδαφίστηκε στον κόκκινο πλανήτη ο Mars Pathfinder) διαλύθηκε οριστικά ο μύθος της ύπαρξης διωρύγων, ωστόσο οι έρευνες δεν έδωσαν οριστική απάντηση στο κατά πόσον υπάρχει κάποια μορφή ζωής στο γειτονικό πλανήτη.

Ας αρχίσουμε λοιπόν τη δική μας «έρευνα».

Πρόβλημα 2. Οι αντιθέσεις¹ του Άρη συμβαίνουν κάθε 780 ημέρες. Αν συμβολίσουμε με T_A την περίοδο περιφοράς του πλανήτη γύρω από τον Ήλιο, μπορείτε να την υπολογίσετε;

Για να λάβει χώρα αντίθεση, απαιτείται χρονικό διάστημα μεγαλύτερο του έτους επειδή ο Άρης κινείται με φορά ίδια με αυτήν της κίνησης της Γης. Σε $T = 780$ ημέρες, η Γη εκτελεί κάτι περισσότερο από 2 περιφορές —ποι συγκεκριμένα, $k = T/T_0 = 780/365,25 = 2,1355$ περιφορές ($T_0 = 365,25$ ημέρες είναι το γήινο έτος). Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η αντίθεση μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο εάν ο Άρης έχει εκτελέσει τουλάχιστον 1,1355 περιφορές. Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος που ψάχνουμε είναι $T_M = T/1,1355 = 687$ ημέρες.

(Ο προσεκτικός αναγνώστης θα σημειώσε προφανώς κάποια «επιτήδευση» στους υπολογισμούς μου: υπερβολική ακρίβεια. Ομολογώ ότι υπέκυψα στην παρόρμηση να ταιριάξω το αποτέλεσμα με τη γνωστή τιμή. Σας ζητώ συγγνώμη για την επιμονή μου και σας υπόσχομαι ότι στη συνέχεια θα προσπαθήσω να την εγκαταλείψω.)

Πρόβλημα 3. Όταν λαμβάνει χώρα μεγάλη αντίθεση, η απόσταση μεταξύ Γης και Άρη είναι η μικρότερη δυνατή και ιούται με $\ell = 56 \cdot 10^6$ km. Πόση είναι η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των δύο πλανητών ενόσω βρίσκονται σε αντίθεση;

Σημείωση: Στο Πρόβλημα 2 υποθέσαμε σιωπηρά ότι οι τροχιές είναι κυκλικές. Τώρα, όμως, κάτι τέτοιο θα ήταν αδύνατον: αν υποθέσουμε ότι οι τροχιές είναι κυκλικές, πώς προκύπτουν οι μεγάλες αντιθέσεις; Επειδή η εκκεντρότητα της τροχιάς της Γης

είναι σχετικά μικρή, θα τη θεωρήσουμε κυκλική, όπως και προηγουμένως. Η τροχιά του Άρη, όμως, δεν μπορεί να θεωρηθεί κυκλική.

Τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας είναι τα εξής: η περίοδος περιφοράς της Γης είναι $T_0 \approx 365$ ημέρες, η περίοδος του Άρη $T_A \approx 687$ ημέρες και η ακτίνα της τροχιάς της Γης $R_0 \approx 1,5 \cdot 10^8$ km = 1 AU.² Από τον τρίτο νόμο του Kepler θα υπολογίσουμε το μεγάλο άξονα της τροχιάς του Άρη:

$$2a_A = 2R_0 \left(\frac{T_A}{T_0} \right)^{2/3}$$

$$\approx 3,05 \text{ AU} \approx 4,57 \cdot 10^8 \text{ km.}$$

Με μια απλή ματιά στο Σχήμα 3 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η απόσταση που ζητούμε είναι

$$L = 2a_A - 2R_0 - \ell \approx 10^8 \text{ km.}$$

(Αυτή τη φορά η στρογγυλοποίηση είναι μάλλον χονδροειδής. Η ακριβής απάντηση —δηλαδή η τιμή που μπορείτε να βρείτε σ' ένα βιβλίο αστρονομίας— είναι $97,5 \cdot 10^6$ km.)

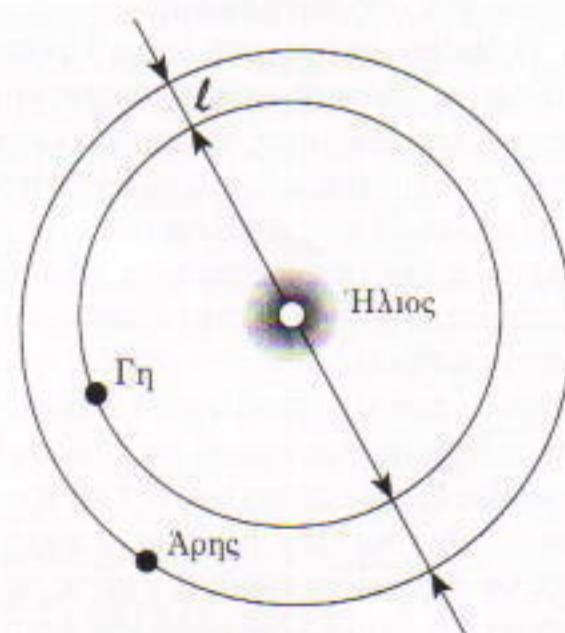
Στον παραπάνω υπολογισμό υποθέσαμε ότι τα επίπεδα της τροχιάς της Γης και του Άρη συμπίπτουν. Αυτό είναι αρκετά λογικό, αφού στην πραγματικότητα η αντίστοιχη γωνία είναι μικρότερη από 2° . Γενικά, το ηλιακό μας σύστημα είναι στο σύνολό του μάλλον επίπεδο. Η μέγιστη απόκλιση από την εκλειπτική (δηλαδή από το επίπεδο της τροχιάς της Γης) παρουσιάζεται στον Πλούτωνα και είναι 17° . Για τον Ήρμη είναι μόνο 7° ενώ των υπόλοιπων πλανητών οι αποκλίσεις δεν ξεπερνούν τις $3,5^\circ$. Καμιά από αυτές, όμως, δεν ισχύει για τους κομήτες, στους οποίους θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας.

Πριν τριακόσια περίπου χρόνια ουδείς αμφισβήτησε την επιρροή ενός κομήτη στα καθημερινά πράγματα. Οι κομήτες προκαλούσαν πολέμους, λιμούς, ξηρασίες, θανάτους γαλαζοαίματων. Στην πραγματικότητα, και πριν το 17ο αιώνα υπήρχαν ελεύθερα πνεύματα που διακωμαδούσαν αυτές τις πεποιθήσεις: ωστόσο, βρέθηκε ένα μέλος της γαλλικής βασιλικής οικογένειας που έπεισε την αυτοκράτειρα της Αυστρίας να αποστέλλει στην Αγγλία τον αστρονόμο Τζέιμς Χέλι για να ανατρέψει την παραπομπή της πεποιθήσεως.

νειας να τους αποστομώσει: «Για σας είναι εύκολο να κοροϊδεύετε, κύριοι. Σεις δεν είστε πρίγκιπες! Το 15ο αιώνα πάλι, ο πάπας Κάλλιστος ο Γ' τα είχε κυριολεκτικά χαμένα. Τους πρώτους μήνες του 1453, όταν οι Χριστιανοί υπερείχαν ακόμη έναντι των Μουσουλμάνων, εμφανίστηκε στο στερέωμα ένας κομήτης, γεγονός που ο πάπας θεώρησε προάγγελο νίκης. Όμως, την ίδια χρονιά οι Μουσουλμάνοι άλωσαν την Κωνσταντινούπολη και έδωσαν οριστικά τέλος στη Βυζαντινή Αυτοκρατορία. Αυτομάτως, λοιπόν, ο κομήτης θεωρήθηκε καταραμένος! Πολλά χρόνια αργότερα ο κομήτης ταυτοποιήθηκε. Είναι ο πιο διάσημος απ' όλους: ο κομήτης του Halley.

Ο εν λόγω κομήτης είναι διάσημος για πολλούς λόγους. Ο σπουδαιότερος, επειδή η τροχιά του χρησιμοποιήθηκε για να προσδιοριστούν οι τροχιές των κομητών γενικά. Ακόμη και ο Kepler και ο Γαλιλαίος πιστεύαν ότι διαγράφουν ευθύγραμμες τροχιές. Άλλα το 1680 ο άγγλος αστρονόμος Edmund Halley κατάφερε να δειξει ότι η τροχιά ενός συγκεκριμένου κομήτη ήταν καμπυλωμένη. Επρόκειτο, ασφαλώς, για τον κομήτη που ούντομα πήρε το όνομά του. Για την ακριβεία, ο κομήτης του Halley εμφανίστηκε το 1682.

Μια οιγμή, όμως: ποια είναι η ακριβής χρονολογία εμφάνισης του κομήτη του Halley: το 1680 ή το 1682; Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι οι κομήτες έχουν συχνά δύο χρονολογίες εμφάνισης: η πρώτη αναφέρεται στην πρώτη παρατήρηση και η δεύτερη στο χρόνο κατά τον οποίο φθάνουν στο περιήλιο της τροχιάς τους. Το δεύτερο



Σχήμα 3

1. Οταν ένας πλανήτης είναι «σε αντίθεση», αυτός και ο Ήλιος βρίσκονται εκατέρωθεν της Γης και σχηματίζουν μαζί της ευθεία γραμμή. Η «μεγάλη αντίθεση» περιγράφεται στο Πρόβλημα 3.

2. Η αστρονομική μονάδα (AU) είναι η μέση απόσταση μεταξύ Γης και Ήλιου.

τέρο σύστημα χρησιμοποιείται συχνότερα για τους περιοδικούς κομήτες, στους οποίους ανήκει και ο κομήτης του Halley. Έτσι, το 1680 ο Halley παρατήρησε τον κομήτη του 1682, ενώ το 1453 ο πάπας Κάλλιστος ο Γ' πρώτα ευλόγησε και μετά καταράστηκε τον κομήτη του 1456.

Ο Halley, ευτυχώς, δεν περιορίστηκε στον προσδιορισμό της καμπύλης τροχιάς του κομήτη. Υπέθεσε ότι οι κομήτες του 1607 και του 1531 δεν ήταν παρά ο κομήτης του 1682, και μάλιστα πρόβλεψε την επανεμφάνισή του το 1758.

Πρόβλημα 4. Η περίοδος περιφοράς του κομήτη του Halley είναι $T_H = 76,7$ έτη. Όταν βρίσκεται στο περιήλιο της τροχιάς του απέχει $r = 0,59$ AU από τον Ήλιο. Ποια είναι, λοιπόν, η μεγαλύτερη απόσταση του κομήτη από τον Ήλιο;

Αν τα καταφέρατε με το Πρόβλημα 3, θα μπορέστε να λύσετε και αυτό χωρίς δυσκολία. (Μπορείτε να ελέγξετε τη λύση σας στο τμήμα απαντήσεων του περιοδικού.)

Αλλά πώς προέκυψαν τα 76,7 έτη; Αν καταγράψουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια ποιες χρονολογίες ο κομήτης του Halley βρέθηκε στο περιήλιο της τροχιάς του, δηλαδή: 1456, 1531, 1607, 1682 και, τελικά, 1759 (όχι 1758!), προκύπτει το ακόλουθο σύνολο τιμών: 75,2, 76,2, 74,9, 76,5 έτη. Η περίοδος των 76,7 ετών είναι μεγαλύτερη από το καθένα από αυτά τα χρονικά διαστήματα. Ανακύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: είναι ο εν λόγω κομήτης απόλυτα περιοδικός ή όχι; Μπορούμε εν τέλει να είμαστε βέβαιοι πώς προκειται για τον ίδιο κομήτη;

Ο Halley όντως είχε δίκιο. Πρέπει απλώς να λάβουμε υπόψη μας τις παρελκτικές διαταραχές που ασκούν στην κίνηση του κομήτη οι πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος. Αυτό ακριβώς έκανε ο περίφημος γάλλος μαθηματικός A. Clairaut όταν ο κομήτης καθυστέρησε στο πρώτο «ραντεβού» που είχε προβλεφθεί. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς του Clairaut, ο οποίος έλαβε υπόψη του την επίδραση του Δία και του Κρόνου, ο κομήτης θα έπρεπε να περάσει από το περιήλιό του όχι το 1758 αλλά τον Απρίλιο του 1759 (συν-πλην ένα μήνα). Και όντως, πέρασε από το περιήλιό

του στις 13 Μαρτίου 1759! Άλλα ακόμη κι έτσι, γιατί 76,7 έτη;

Αφότου ο Halley ανακάλυψε την περιοδικότητα του ομώνυμου κομήτη, πολλοί άρχισαν με ενθουσιασμό να ερευνούν για προηγούμενες εμφανίσεις του. Κατάφεραν τελικά να ανασυνθέσουν την ιστορία του, ανατρέχοντας μέχρι την αρχαιότητα. Ο κομήτης του Halley ήταν που το 1378 προανήγγειλε τη σφαγή του Μαραγέφ (Βόλγογκραντ) και το μεγάλο σχίσμα της Δυτικής Εκκλησίας, την κατάκτηση της Αγγλίας από τον Γουλιέλμο τον Κατακτητή, δούκα της Νορμανδίας, το 1066, το θάνατο του πρίγκιπα Όλεγκ της Ρωσίας το 912, την πτώση της Ιερουσαλήμ και την καταστροφή της Πομπηίας το 66.* Το 989, επίσης, σημάδεψε την επικράτηση του Χριστιανισμού στη Ρωσία, ενώ ο μεγάλος Giotto τον ζωγράφισε το 1301. Ακόμη, μια πήλινη επιγραφή από την αρχαία Βαβυλώνα αναφέρει την εμφάνιση ενός λαμπρού αντικειμένου στους ουρανούς το 164 π.Χ., αποτελώντας μια «σελίδα» της «βιογραφίας» του κομήτη του Halley.

Αλλά αυτοί που συνέλεξαν τα περισσότερα δεδομένα για τον κομήτη είναι οι Κινέζοι. Η πρώτη αξιόποστη πληροφορία στα κινεζικά χρονικά χρονολογείται στις 25 Μαΐου του 240 π.Χ. Υπάρχει όμως και μια άλλη ημερομηνία: 7 Μαρτίου 1057 π.Χ.! Και ανάμεσά τους οκτώ αιώνες απόλυτης σιωπής. Τι είχε συμβεί άραγε;

Πρόκειται για την ιστορία τής διχως όρια ανθρώπινης ματαιοδοξίας. Για να την αντιληφθούμε καλύτερα, ας θυμηθούμε ένα επεισόδιο από το έργο του σατιρικού συγγραφέα του 19ου αιώνα Saltykov-Shchedrin. «Κάποιος αρχιστράτηγος ονόματι Αρπαγας-Πάρταγας³ μπήκε στην Ηλιθιούπολη καβάλα σ' ένα άσπρο άλογο· το πρώτο πράγμα που έκανε ήταν να

* Η καταστροφή της Πομπηίας από μεγάλο σεισμό σημειώνεται το 62 μ.Χ. ενώ το 79 μ.Χ. θάβεται κάτω από τη λαβή του Βεζούβιου. Όσον αφορά την Ιερουσαλήμ, το 66 μ.Χ. σημειώνεται εξέγερση κατά των Ρωμαίων η οποία οδηγεί τελικά στην πτώση και την καταστροφή της πόλης από τους Ρωμαίους το 70 μ.Χ. (Σ.τ.μ.)

3. Κάποιοι σχολιαστές συσχετίζουν το χαρακτήρα αυτό με τον καταπεστικό τάφο Νικόλαο του Α', ο οποίος βασίλευσε από το 1825 ως το 1855.

πυρπολήσει το σχολείο και να καταργήσει τη μάθηση. Έτσι, η ιστορία σταμάτησε πα να κυλά κανονικά, προφανώς μόνο μέσα στα όρια αυτής της πόλης.» Ας έρθουμε όμως στα πραγματικά περιστατικά. Ο αυτοκράτορας Σιχ Χουάνγκ-Τί, ιδρυτής της δυναστείας των Τσ'ιν (και «ο ιδανικός κυβερνήτης» σύμφωνα με τον Μάο), αποφάσισε ότι η Ιστορία έπρεπε να αρχίσει με τη βασιλεία του. Και για να μην υπάρχει καμιά αρφιβολία γι' αυτό, εκτέλεσε 460 σοφούς και έκαψε όλα τα βιβλία ιστορίας. Επειδή κάποια αστρονομικά χρονικά περιείχαν αναφορές σε γεγονότα που συνέβησαν πριν τη δυναστεία των Τσ'ιν, κατέστρεψαν και αυτά τα χειρόγραφα. Ελάχιστα απ' αυτά γλιτώσαν, σαν από θαύμα, τις φλόγες· και ανάμεσά τους η περιγραφή της εμφάνισης του κομήτη το 1057 π.Χ. Η «μεγάλη δυναστεία των Τσ'ιν» κυβέρνησε την «υπό τον ουρανό αυτοκρατορία» όλα κι όλα δεκατέσσερα χρόνια... Δύο χιλιάδες χρόνια αργότερα, στο κέντρο της Ευρώπης, εμφανίστηκε το «χιλιόχρονο Ράιχ»· και πάλι κάηκαν βιβλία, και πάλι εκτελέστηκαν εποτήμονες. Αυτό διήρκεσε δώδεκα χρόνια...

Ας επιστρέψουμε, όμως, στον κομήτη. Αν το χρονικό διάστημα από 25 Μαΐου 240 π.Χ. μέχρι 9 Φεβρουαρίου 1986 μ.Χ. διαιρεθεί με τις είκοσι εννέα περιφορές που πραγματοποίησε συνολικά ο αυτό το διάστημα ο κομήτης του Halley, έχουμε κατά μέσον όρο μία περιφορά κάθε 76,7 χρόνια. Όλες οι αποκλίσεις οφείλονται βασικά στην επιρροή του Δία. Γενικά, ο Δίας, του οποίου η μάζα είναι διπλάσια από τη μάζα όλων των άλλων πλανητών μαζί, προκαλεί μεγάλες διαταραχές στις τροχιές πολλών κομητών. Διαθέτει μάλιστα τη δική του οικογένεια κομητών. Η οικογένεια του Δία είναι μια ομάδα από κομήτες που έχουν το αφήλιό τους κοντά στην τροχιά του. Ο γιγάντιος πλανήτης τους «έχει συλλάβει» και τους «απαγορεύει» να επιστρέψουν στις πολλές απομακρυσμένες περιοχές του ηλιακού συστήματος. Θα γνωρίσουμε έναν τέτοιο κομήτη στο επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 5. Ο κομήτης Grigg-Skjellerup ανήκει στην ομάδα του Δία.

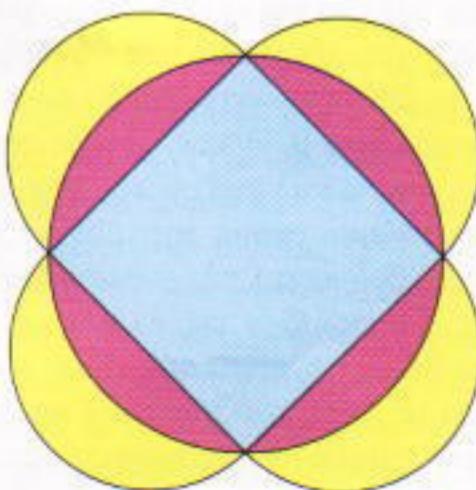
Οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη

Μια πρώτη προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου

V.N. Berezin

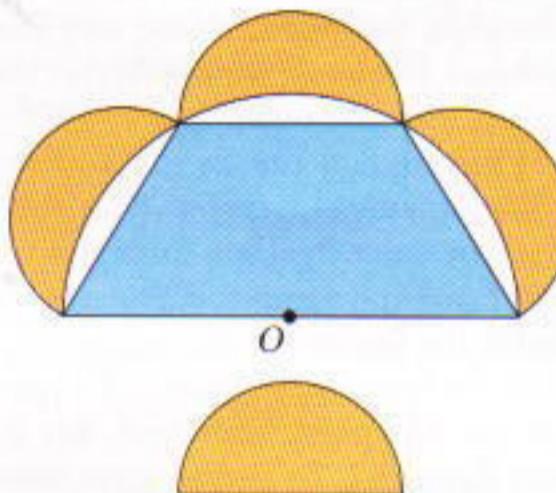
ΟΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ Ο ΧΙΟΣ ΕΖΗΣΕ ΤΟΝ δο αιώνα π.Χ. στην Ελλάδα. Σε αυτόν οφείλεται η πρώτη γνωστή προσπάθεια καταταγραφής των βασικών αρχών της γεωμετρίας* —έργο το οποίο δυστυχώς δεν έχει διασωθεί.

Σύμφωνα με ένα θρύλο, ο Ιπποκράτης ήταν ένας άτυχος έμπορος που έπεσε θύμα πειρατών και έφθασε στην Αθήνα ζητώντας δικαιοσύνη. Εκεί γνώρισε οιφούς που ασχολούνταν με την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Έτσι, αφού απέτυχε να προσαγγίγει σε δίκη τους ληστές, αποφάσισε να επιδοθεί στη μελέτη της γεωμετρίας ξεπερνώντας τους μεγαλύτερους από αυτούς τους οιφούς.**



Σχήμα 1

* Στα Σχόλια στο Ιοββλίο των "Στοιχείων" του Ευκλείδου (§64) ο Πρόκλος αναφέρει ότι «πρώτος γαρ ο Ιπποκράτης των μνημονευομένων και Στοιχεία ουνέγραψεν». (Σ.τεπουμ.)



Σχήμα 2

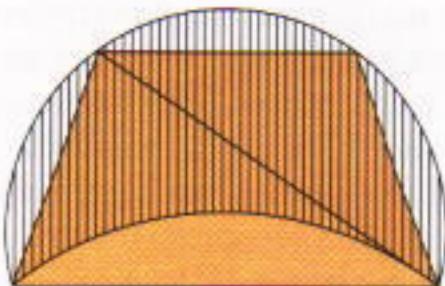
Ο Ιπποκράτης προσπαθούσε να «τετραγωνίσει τον κύκλο» —δηλαδή, να κατασκευάσει μόνο με κανόνα και διαβήτη έναν κύκλο με εμβαδόν ίσο προς το εμβαδόν ενός δεδομένου τετραγώνου. Ο «τετραγωνισμός» του τριγώνου ή του τετραπλεύρου είναι απλός, ως εκ τούτου ο Ιπποκράτης μάλλον πιστεύει ότι ο κύριος στόχος του ήταν εύκολο να επιτευχθεί. Δυστυχώς δεν τα κατάφερε (διότι, όπως απέδειξε στα τέλη του προηγούμενου αιώνα ο Carl Louis Ferdinand von Lin-

** Κατά τον Ιωάννη το Φιλόπονο στα σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη (§31), «Ιπποκράτης, Χίος τις έμπορος, ληστρική ντρι περιποιών και πάντα απολέσας, ήλθεν Αθήνας γραφόμενος (= να δικάσει) τους ληστάς, και πολὺν παραμένων εν Αθήναις δια την γραφήν χρόνον, εφοίτηρεν εις φιλοσόφους, και εις τοσούτον έξεις γεωμετρικής ήλθεν, ώς επιχειρήσαι ευρείν τον κύκλου τετραγωνισμόν». (Σ.τεπουμ.)

demann, ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος), κατάφερε όμως να κατασκευάσει αρκετές επίπεδες περιοχές φραγμένες από κυκλικά τόξα και με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου.

Στην ιστορία της γεωμετρίας το όνομα του Ιπποκράτη έχει συνδεθεί με σχήματα ειδικής μορφής, τους αποκαλούμενους «μηνίσκους». Μπορούμε να ορίσουμε το μηνίσκο ως εξής: αν σχεδιάσουμε ένα ημικύκλιο στο εξωτερικό μιας χορδής ενός κύκλου έτσι ώστε τα άκρα του να συμπίπτουν με αυτά της χορδής, τότε το σχήμα που φράσσεται από το έλασσον τόξο του κύκλου και από το ημικύκλιο είναι ο μηνίσκος.

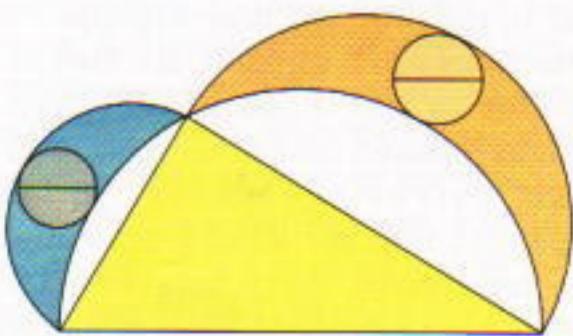
Στο Σχήμα 1 βλέπουμε τέσσερις κίτρινους μηνίσκους. Ο Ιπποκράτης παρατήρησε ότι το άθροισμα των εμβαδών τους ισούται με το εμβαδόν του γαλάζιου τετραγώνου. Πράγματι, ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι το άθροισμα των εμβαδών των ημικυκλίων που κατασκευάζονται στις πλευρές του τετραγώνου ισούται με το εμβαδόν του περιγεγραμμένου στο τετράγωνο κύκλου. Αν διαγράψουμε τα μοβ τμήματα των ημικυκλίων, προκύπτουν οι τέσσερις μηνίσκοι, ενώ αν αφαιρέσουμε τα ίδια τμήματα από τον κύκλο, προκύπτει το τετράγωνο. Αυτό δείχνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων μηνίσκων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου.



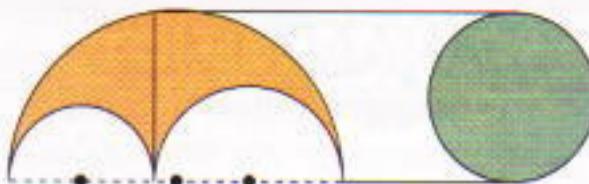
Σχήμα 3

Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται ένα ακόμη θεώρημα του Ιπποκράτη. Βλέπουμε ένα τραπέζιο, η βάση του οποίου είναι διάμετρος του μεγάλου ημικυκλίου, ενώ οι άλλες τρεις πλευρές του έχουν μήκος ίσο με την ακτίνα του ημικυκλίου. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν του εν λόγω τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των πορτοκαλί μηνίσκων και του πορτοκαλί ημικυκλίου. (Αυτοί οι μηνίσκοι είναι εκ κατασκευής ίσοι μεταξύ τους, ενώ το ημικύκλιο ισούται με τα τρία άλλα ημικύκλια που σχηματίζουν την εξωτερική πλευρά των μηνίσκων.) Η απόδειξη του εν λόγω θεωρήματος είναι όμοια με του προηγούμενου.

Η κατασκευή του Σχήματος 3 έχει επίσης προταθεί από τον Ιπποκράτη. Η μεγάλη βάση του τραπεζίου έχει μήκος $\sqrt{3}$, ενώ η μικρή βάση και οι άλλες δύο πλευρές του έχουν μήκος 1. Το κατώτερο τόξο το οποίο φράσσει τη σκιασμένη με μαύρες γραμμές περιοχή του Σχήματος 3 (μπορούμε να ονομάσουμε αυτή την περιοχή «γενικευμένο μηνίσκο») εφάπτεται στη διαγώνιο του τραπεζίου. Αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου (αρκεί να επαληθεύσουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των μηνίσκων στις δύο πλευρές του τραπεζίου και του μηνίσκου της μικρής βάσης είναι ίσο με το εμβαδόν του μηνίσκου της μεγάλης βάσης).



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Στο Σχήμα 4 έχουμε μια κατασκευή της οποίας τις ιδιότητες ο Ιπποκράτης μάλλον αγνοούσε. Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου στο Σχήμα 4 ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των μηνίσκων. Η απόδειξη αυτής της πρότασης προκύπτει εύκολα από το πυθαγόρειο θεώρημα. Παρεμπιπόντως, σε τούτη την κατασκευή βρίσκουμε μια ακόμη υπέροχη ιδιότητα: Οι μηνίσκοι έχουν ίσο πλάτος. Ακριβέστερα, οι διάμετροι των μέγιστων κύκλων που μπορούν να εγγραφούν στους μηνίσκους ισούνται με την ημιδιαφορά του αθροίσματος των δύο κάθετων πλευρών του ορθογώνιου και της υποτείνουσας.

Η κατασκευή του Σχήματος 5 αποδίδεται στον Αρχιμήδη. Έτοι τουλάχιστον υποστηρίζει ο διάσημος αράβιας μαθηματικός του 9ου αιώνα Thabit ibn Qurrah, ο οποίος ήταν ειδικός στα έργα του Αρχιμήδη. Τα γράπτα του Αρχιμήδη, δυστυχώς, δεν έχουν διασωθεί. Το σχήμα αυτό ονομάζεται *άρβηλος*.*

Ο Αρχιμήδης απέδειξε (*Λήμματα*, δ') ότι το εμβαδόν της αρβήλου ισούται με το εμβαδόν ενός κύκλου, το μέγεθος και ο τρόπος κατασκευής του οποίου φαίνονται στο Σχήμα 5. Προσκαλούμε τους αναγνώστες να βρουν μια απόδειξη αυτής της πρότασης. ◻

* Το έργο του Αρχιμήδη όπου υπάρχει η σχετική αναφορά είναι το *Λήμματα*. Το αρχαίο κείμενο έχει χαθεί, αλλά σώζεται η αρριβική του μετάφραση από τον Thabit ibn Qurrah. Ο Ευάγ. Σταμάτης έχει μεταφράσει εκ νέου τα *Λήμματα* στη νεα ελληνική (καθώς και στη δωρική διάλεκτο) και τα έχει συμπεριλάβει στα *Απαντά του Αρχιμήδη* (Εκδ. Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα 1974). (Σ.τεπουμ.)

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 60

Έχει περίοδο 4,9 ετών και το αφήλιό του απέχει 5,0 AU από τον Ήλιο. Είναι δυνατόν αυτός ο κομήτης να τμήσει την τροχιά της Γης;

Οι υπολογισμοί (που αφήνουμε σ' εσάς να επαληθεύσετε) δίνουν ως μικρότερη απόσταση κομήτη-Ήλιου 0,77 AU — δηλαδή ο κομήτης πλησιάζει περισσότερο τον Ήλιο απ' ό,τι η Γη. Έτοι, κατ' αρχήν είναι δυνατόν να τμήσει ο κομήτης Grigg-Skjellerup την τροχιά της Γης.

Όπως όμως ήδη αναφέραμε, η τροχιά ενός κομήτη είναι δυνατόν να έχει σημαντική κλίση ως προς το επίπεδο της εκλειπτικής. Η τομή, επομένως, των προβολών των τροχιών κομητών και πλανητών σε αυτό το επίπεδο δεν συνέπαγεται οπωσδήποτε την τομή και των ίδιων των τροχιών.

Η μικρότερη απόσταση μεταξύ της τροχιάς του κομήτη του Halley και της τροχιάς της Γης είναι τώρα περίπου 0,064 AU — δηλαδή 10 εκατομμύρια χιλιόμετρα περίπου. Το πλησιέστερο στη Γη σημείο απ' όπου πέρασε ο κομήτης του Halley ήταν 0,04 AU (6 εκατομμύρια χιλιόμετρα) αυτό συνέβη το 837. Δεν υπάρχει φυσικά άμεση απόδειξη για το εν λόγω γεγονός, και ούτε μπορεί να υπάρξει. Μόνο μετά τον Halley έγινε δυνατό να απεικονίσουμε με λιγότερη ή περισσότερη ακρίβεια τις τροχιές των κομητών.

Αν λύσατε το Πρόβλημα 4, τότε γνωρίζετε τις παραμέτρους της τροχιάς του κομήτη του Halley. Για να λύσετε το έκτο και τελευταίο πρόβλημά μας, χρειάζεται απλώς να θυμηθείτε το δεύτερο νόμο του Kepler.

Πρόβλημα 6. Πόσος χρόνος απαιτείται για να καλύψει ο κομήτης του Halley το μισό τμήμα της τροχιάς του το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στον Ήλιο; (Το εμβαδόν της έλλειψης, αν δεν το θυμάστε, είναι πab , όπου a και b είναι τα μήκη του μεγάλου και του μικρού ημιάξονα της τροχιάς, αντίστοιχα.)

Αφού λύσετε το πρόβλημα αυτό, μπορείτε να συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το δικό μου, στο τμήμα των απαντήσεων του περιοδικού.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M116

Ας θεωρήσουμε μια πρόοδο με πρώτο όρο $b_1 = 2^{20}$ και λόγο $q = 5/4$. Αφού $b_1 > 10^6$ και $b_{11} = 5^{10} < 10^7$ και οι όροι από τον πρώτο έως τον ενδέκατο είναι φυσικοί αριθμοί, συμπεραίνουμε ότι οι πρώτοι έντεκα όροι αυτής της πρόοδου είναι επταψήφιοι αριθμοί. Ας αποδείξουμε τώρα ότι το έντεκα είναι το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια πρόοδος με δώδεκα ή περισσότερους επταψήφιους αριθμούς και ότι $q = m/n$ ο λόγος αυτής της πρόοδου (όπου m/n ανάγωγο κλάσμα και $q > 1$) και b_1 ο πρώτος της όρος. Τότε $m \leq 4$. Πράγματι, αν $m > 4$, τότε

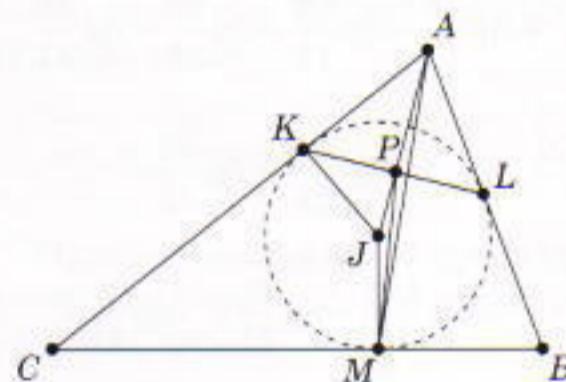
$$10^7 \geq b_{12} = b_1 q^{11} = \frac{b_1 m^{11}}{n^{11}} \geq m^{11}$$

(διότι ο b_{12} πρέπει να είναι ακέραιος, και επομένως, ο b_1 διαιρείται με το n^{11}), άτοπο. Από την άλλη, $m^{11} \geq 5^{11} > 10^7$. Άρα $m \leq 4$ και, συνεπώς, η ελάχιστη δυνατή τιμή του q είναι $4/3$. Όμως τότε, $(4/3)^{11} > 10$, επομένως $b_{12} = b_1 q^{11} \geq 10^6 \cdot (4/3)^{11} > 10^7$, άτοπο.

M117

Ας υποθέσουμε ότι J είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο ABC κύκλου και ότι η AJ τέμνει την KL στο P (Σχήμα 1). Το τρίγωνο JKA είναι ορθογώνιο (διότι η JK είναι ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου). Η AJ είναι κάθετη στην KL (αφού K το σημείο επαφής) και η AJ διχοτομεί τη $\angle KAL$. Επίσης, KP είναι το επί την υποτείνουσα ύψος του ορθογώνιου τριγώνου KAJ . Συνεπώς, $JK^2 = JP \times JA$. Όμως, $JM = JK$. Άρα, $JM^2 = JP \times JA$ ή

$$\frac{JM}{JP} = \frac{JA}{JM}.$$



Σχήμα 1

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι τα τρίγωνα JPM και JMA είναι όμοια (διότι $\angle PJM = \angle AJM$). Άρα,

$$\frac{PM}{AM} = \frac{JM}{JA} = \frac{JK}{JA} = \eta\mu \frac{a}{2}. \quad (1)$$

Επιπλέον, $\angle JPM = \angle JMA$, και επομένως

$$\begin{aligned} \angle MPL &= 90^\circ - \angle JPM \\ &= 90^\circ - \angle JMA = \angle AMB. \end{aligned} \quad (2)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ζητούμενο λόγο:

$$MM_1 = PM \cdot \eta\mu \angle MPL, \quad (3)$$

$$AA_1 = AM \cdot \eta\mu \angle AMB.$$

Από τις (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{MM_1}{AA_1} = \frac{PM \eta\mu \angle MPL}{AM \eta\mu \angle AMB} =$$

$$\frac{PM}{AM} = \eta\mu \frac{a}{2}.$$

M118

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επί $\sin(3\pi/11)$ και εν συνεχεία υψώνουμε τα δύο μέλη στο τετράγωνο:

$$\left(\eta\mu \frac{3\pi}{11} + 4\eta\mu \frac{2\pi}{11} \sin \frac{3\pi}{11} \right)^2$$

$$= \left(\sqrt{11} \sigma u v \frac{3\pi}{11} \right)^2,$$

ή

$$\eta\mu^2 \left(\frac{3\pi}{11} \right)$$

$$+ 8\eta\mu \left(\frac{3\pi}{11} \right) \eta\mu \left(\frac{2\pi}{11} \right) \sigma u v \left(\frac{3\pi}{11} \right)$$

$$+ 16\eta\mu^2 \left(\frac{2\pi}{11} \right) \sigma u v^2 \left(\frac{3\pi}{11} \right)$$

$$= 11\sigma u v^2 \left(\frac{3\pi}{11} \right). \quad (1)$$

Μπορούμε τώρα να αντιμετωπίσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά. Ο σκοπός μας είναι να τους εκφράσουμε όλους ως άθροισμα συνημιτόνων συγκεκριμένων γωνιών.

Αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\eta\mu^2 A = (1 - \sin 2A)/2$, παίρνουμε

$$\eta\mu^2 \left(\frac{3\pi}{11} \right) = \left(1 - \sin \frac{6\pi}{11} \right)/2.$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\eta\mu 2A = 2\eta\mu A \sin A$$

και

$$\sin(A - B) - \sin(A + B) = 2\eta\mu A \eta\mu B,$$

έχουμε

$$8\eta\mu \left(\frac{3\pi}{11} \right) \eta\mu \left(\frac{2\pi}{11} \right) \sigma u v \left(\frac{3\pi}{11} \right)$$

$$= 4\eta\mu \left(\frac{6\pi}{11} \right) \eta\mu \left(\frac{2\pi}{11} \right)$$

$$= 2\sin \left(\frac{4\pi}{11} \right) - 2\sin \left(\frac{8\pi}{11} \right).$$

Ομοιως,

$$\begin{aligned} & 16\eta\mu^2 \left(\frac{2\pi}{11} \right) \sigma_{uv}^2 \left(\frac{3\pi}{11} \right) \\ & = 4 \left(1 - \sigma_{uv} \frac{4\pi}{11} \right) \left(1 + \sigma_{uv} \frac{6\pi}{11} \right) \\ & = 4 - 4\sigma_{uv} \frac{4\pi}{11} + 4\sigma_{uv} \frac{6\pi}{11} \\ & \quad - 2\sigma_{uv} \frac{2\pi}{11} - 2\sigma_{uv} \frac{10\pi}{11}, \end{aligned}$$

και τέλος,

$$11\sigma_{uv}^2 \frac{3\pi}{11} = \frac{11}{2} + \frac{11}{2} \sigma_{uv} \frac{6\pi}{11}.$$

Επιστρέφουμε τώρα στην (1) και αντικαθιστούμε κάθε όρο της με ένα άθροισμα συνημιτόνων. Αν μεταφέρουμε όλα τα συνημίτονα αριστερά και όλες τις σταθερές δεξιά, προκύπτει η

$$\begin{aligned} & 2\sigma_{uv} \frac{2\pi}{11} + 2\sigma_{uv} \frac{4\pi}{11} + 2\sigma_{uv} \frac{6\pi}{11} \\ & + 2\sigma_{uv} \frac{8\pi}{11} + 2\sigma_{uv} \frac{10\pi}{11} = -1. \end{aligned}$$

Έχουμε έτοι στο αριστερό μέλος ένα άθροισμα συνημιτόνων γωνιών τα οποία αποτελούν αριθμητική πρόδο, οπότε χρησιμοποιούμε το εξής έχπνο, αλλά και καθιερωμένο τέχνασμα. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\eta\mu(\pi/11)$ (το ημίτονο του μισού της διαφοράς των όρων της αριθμητικής πρόδου) και έχουμε

$$\begin{aligned} & 2\eta\mu \frac{\pi}{11} \sigma_{uv} \frac{2\pi}{11} + 2\eta\mu \frac{\pi}{11} \sigma_{uv} \frac{4\pi}{11} \\ & + 2\eta\mu \frac{\pi}{11} \sigma_{uv} \frac{6\pi}{11} + 2\eta\mu \frac{\pi}{11} \sigma_{uv} \frac{8\pi}{11} \\ & + 2\eta\mu \frac{\pi}{11} \sigma_{uv} \frac{10\pi}{11} = -\eta\mu \frac{\pi}{11}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ταυτότητα

$$2\eta\mu A \sigma_{uv} B = \eta\mu(A+B) + \eta\mu(A-B)$$

$$= \eta\mu(A+B) - \eta\mu(B-A)$$

για να μετασχηματίσουμε τα γινόμενα του αριστερού μέλους σε αθροισματα. Παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \eta\mu \frac{3\pi}{11} - \eta\mu \frac{\pi}{11} + \eta\mu \frac{5\pi}{11} - \eta\mu \frac{3\pi}{11} \\ & + \eta\mu \frac{7\pi}{11} - \eta\mu \frac{5\pi}{11} + \eta\mu \frac{9\pi}{11} - \eta\mu \frac{7\pi}{11} \\ & + \eta\mu \frac{11\pi}{11} - \eta\mu \frac{9\pi}{11} \\ & = \eta\mu \frac{11\pi}{11} - \eta\mu \frac{\pi}{11} = -\eta\mu \frac{\pi}{11}, \end{aligned}$$

οπότε επαληθεύεται η ισότητα.

M119

Αρχίζουμε εισάγοντας τις νέες μεταβλητές u και v :

$$x = \frac{u-1}{u+1}, \quad y = \frac{v-1}{v+1}.$$

Στη συνέχεια, μετασχηματίζουμε κάθε παράσταση στην πρώτη εξίσωση. Έχουμε

$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{(u-1)(v+1)+(v-1)(u+1)}{(u+1)(v+1)+(u-1)(v-1)}$$

$$\frac{2uv-2}{2uv+2} = \frac{uv-1}{uv+1},$$

και

$$\frac{2-x}{1-2x} = \frac{2(u+1)-(u-1)}{u+1-2(u-1)} = \frac{u+3}{-u+3}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{uv-1}{uv+1} = \frac{u+3}{-u+3}, \quad u^2v = -3.$$

Ομοιως, από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $u = -2v^2$. Αν αντικαταστήσουμε το u στην πρώτη εξίσωση βάσει αυτής της σχέσης, βρίσκουμε

$$v^5 = -\frac{3}{4},$$

και επομένως,

$$v = -\sqrt[5]{\frac{3}{4}}.$$

Επίσης,

$$u = -2v^2 = -\sqrt[5]{18}.$$

Απάντηση:

$$x = \frac{\sqrt[5]{18}+1}{\sqrt[5]{18}-1}, \quad y = \frac{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{4}}.$$

M120

Οχι απαραίτητα. Μια αριθμητική πρόδος φυσικών αριθμών προσδιορίζεται μονοσήμαντα από ένα ζεύγος (a, d) , όπου a είναι ο πρώτος όρος της και d η διαφορά μεταξύ των όρων. Είναι συνεπώς δυνατό να απαριθμήσουμε όλες αυτές τις πρόδους. (Χωρίζουμε τα ζεύγη (a, d) σε ομάδες με ίσο άθροισμα $a+d$ και διατάσσουμε τις ομάδες αυτές κατά αυξανόμενο άθροισμα $a+d$. Στη συνέχεια απαριθμούμε τις πρόδους μέσα σε κάθε ομάδα —λ.χ., κατά αύξον μέγεθος του a .) Αυτή η μέθοδος αριθμησης θα μας δώσει την εξής ακολουθία ζευγών: $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), \dots$) Έστω A_i , $i = 1, 2, \dots$, η i -οστή πρόδος σύμφωνα με την απαριθμησή μας. Αρχίζουμε με έναν τυχαιό αριθμό p_1 της A_1 και στη συνέχεια επλέγουμε τον p_2 από την A_2 , τον p_3 από την A_3 , κ.ο.κ., έτσι ώστε ο p_{i+1} να είναι μεγαλύτερος του $2p_i$. Τότε, το σύνολο $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ δεν περιέχει αριθμητικές πρόδους με τρεις όρους, διότι $p_k - p_j > p_j > p_j - p_i$ για κάθε $k > j > i$. Ταυτόχρονα, το σύνολο των φυσικών αριθμών που δεν ανήκουν στο P δεν περιέχει μια άπειρη αριθμητική πρόδο, διότι ένα τουλάχιστον στοιχείο κάθε τέτοιας πρόδου ανήκει στο P .

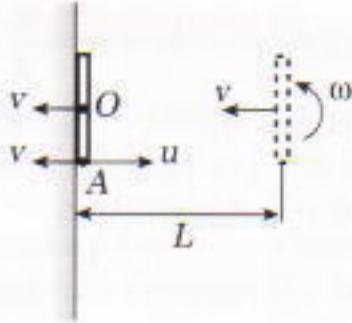
ΦΥΣΙΚή

F116

Η απόσταση L μεταξύ του μέσου της ράβδου και του τοίχου θα καλυφθεί σε χρόνο $\tau = L/v = 5$ s. Για να πραγματοποιηθεί η κρούση τη στιγμή κατά την οποία η ράβδος είναι παράλληλη προς τον τοίχο («κατά μέτωπο»), πρέπει σε χρόνο τ η ράβδος να έχει εκτελέσει ακέραιο αριθμό ημιπεριστροφών. Δηλαδή πρέπει

$$\omega_n \tau = n\pi,$$

όπου $n = 1, 2, 3, \dots$, απ' όπου προκύπτει



Σχήμα 2

$$\omega_n = n \frac{\pi}{\tau}. \quad (3)$$

Τελειώσαμε; Η (3) είναι η τελική λύση; Οχι. Αν η ω είναι αρκετά μεγάλη, η ράβδος θα χτυπήσει με το ένα άκρο της τοίχο, προτού συμβεί η «κατά μέτωπο» κρούση. Για το σωστό υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι, τη στιγμή της κρούσης, η συνολική ταχύτητα v_A του άκρου A της ράβδου (Σχήμα 2) πρέπει να έχει φορά προς τον τοίχο. Πραγματικά, αν η συνολική ταχύτητα του σημείου A είχε φορά προς την αντίθετη μεριά απ' αυτή του τοίχου, αυτό θα σήμαινε ότι λίγο πριν την κρούση η ράβδος «βρισκόταν μέσα στον τοίχο», κάτι που βέβαια είναι αδύνατον. Η συνολική ταχύτητα του σημείου A είναι το άθροισμα δύο ταχυτήτων: της ταχύτητας v λόγω της μεταφορικής κίνησης της ράβδου και της γραμμικής ταχύτητας u λόγω της περιοτροφικής κίνησης γύρω από το μέσο της. Έτοι,

$$v_A = u - v = \frac{\omega l}{2} - v < 0,$$

από την οποία προκύπτει η ακόλουθη συνθήκη για την ω :

$$\omega < \frac{2v}{l} = 2 \text{ s}^{-1}.$$

Επομένως, από την (3) γίνονται δεκτές ως λύσεις του προβλήματος μόνο οι ακόλουθες τρεις τιμές της ω_n : $\omega_1 = 0,63 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 1,26 \text{ s}^{-1}$, $\omega_3 = 1,89 \text{ s}^{-1}$.

Φ117

Ο αέρας στο καλάμι κινείται αργά και έτοι η εσωτερική τριβή μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη της πρώτης δύναμης της ταχύτητας του αέρα. Η επιπλέον πίεση (υπερπίεση) στη φυσαλίδα είναι μικρή σε σχέση με την ατμο-

σφαιρική πίεση, οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τις μεταβολές στην πυκνότητα του αέρα που περικλείει η φυσαλίδα.

Κάθε χρονική στιγμή η εσωτερική τριβή σχεδόν εξισορροπείται από τη δύναμη που οφείλεται στην επιπλέον πίεση ΔP , και η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας της φυσαλίδας. Επομένως, για την ταχύτητα του αέρα ισχύει

$$v \propto \Delta P \propto \frac{1}{r}. \quad (1)$$

Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της φυσαλίδας είναι ανάλογος της ταχύτητας του αέρα:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \propto v \propto \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Επομένως,

$$\frac{\Delta V}{V} \propto \frac{\Delta t}{r^4}. \quad (3)$$

Αν έχουμε δύο φυσαλίδες με ακτίνες r_1 και r_2 , ο λόγος των χρονικών διαστημάτων που απαιτούνται προκειμένου να μειωθούν οι όγκοι τους κατά το ίδιο μικρό κλάσμα θα δίνεται από την οχέον

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{r_1^4}{r_2^4}. \quad (4)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η συνεχής διαδικασία συστολής της φυσαλίδας γίνεται με μικρά βήματα στα οποία κάθε φυσαλίδα μειώνει τον όγκο της κατά το ίδιο κλάσμα, διαπιστώνουμε ότι καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας, ο λόγος των ακτίνων είναι σταθερός και ίσος με τον αρχικό τους λόγο. Επομένως, η εξίσωση (4) ισχύει όχι μόνο για στοιχειώδεις τιμές Δt , αλλά επίσης για ολόκληρο το χρόνο ζωής των φυσαλίδων. Άρα,

$$t_2 = 16 t_1.$$

Φ118

Υπάρχουν δύο απαντήσεις στο πρόβλημα. Αν η εσωτερική αντίσταση R_V του βολτόμετρου είναι μεγάλη, τότε το διαρρέει ρεύμα έντασης $0,2 \text{ mA}$. Στην περίπτωση αυτή η πιώση τάσης V στο βολτόμετρο θα είναι μετα-

ξύ $4,5$ και $4,8 \text{ V}$ εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm στα δύο αμπερόμετρα εσωτερικής αντίστασης R_A , έχουμε:

$$4,8 - V = 2,2R_A \text{ και } V - 4,5 = 2R_A.$$

(Εννοείται ότι την αντίσταση των αμπερομέτρων τη μετράμε σε $k\Omega$.) Η λύση του συστήματος δίνει

$$V = 4,64 \text{ V} \text{ και } R_A = 0,071 \text{ k}\Omega$$

(οπότε $R_V = 4,64 \text{ V} / 0,2 \text{ mA} = 23,2 \text{ k}\Omega$).

Στην άλλη (και πολύ πιθανή) περίπτωση, αν η εσωτερική αντίσταση του βολτόμετρου είναι μικρή, τότε η πιώση τάσης V α' αυτό είναι μικρότερη από την τάση και της μας και της άλλης πηγής. Επομένως, το βολτόμετρο θα διαρρέει από ρεύμα συνολικής έντασης $4,2 \text{ mA}$. Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων είναι:

$$4,8 - V = 2,2R \text{ και } 4,5 - V = 2R.$$

Η λύση του δίνει $V = 1,5 \text{ V}$ και $R = 1,5 \text{ k}\Omega$. (Η εσωτερική αντίσταση R_V του βολτόμετρου θα είναι $1,5 \text{ V} / 4,2 \text{ mA} = 0,36 \text{ k}\Omega$, η οποία δεν αποτελεί καθόλου καλή χαρακτηριστική τιμή για βολτόμετρο.)

Φ119

Σύμφωνα με τις συνθήκες του προβλήματος, μόνο ένα μικρό κλάσμα ατόμων νέου ιονίζεται. Αυτό σημαίνει ότι οι περισσότερες κρούσεις μεταξύ ατόμων και ηλεκτρονίων μπορούν να θεωρηθούν ελαστικές. Εφαρμόζοντας τις αρχές διατήρησης της ενέργειας και της ορμής μπορούμε να υπολογίσουμε την απώλεια κινητικής ενέργειας που υφίσταται ένα ηλεκτρόνιο (μάζα m), όταν συγκρούεται μετωπικά με ένα ακίνητο άτομο νέου (μάζα M):

$$\Delta KE_1 = \frac{4m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2},$$

όπου v είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου πριν την κρούση (λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $m \ll M$).

Υποθέσουμε ότι μεταξύ δύο κρούσεων, οι διάρκεια χρόνου $\tau = l/v$, το ηλεκτρόνιο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $y = eE/m$. Μετά την κρούση η ταχύτητα του ηλεκτρονίου μπορεί να έχει οποιαδήποτε κατεύθυνση, αλλά η κατά μέσον όρο αύξηση της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου

μεταξύ δύο κρούσεων είναι της τάξης του

$$\Delta KE_2 = eE \frac{\gamma t^2}{2} = \frac{(eEt)^2}{2mv^2}.$$

Η ταχύτητα (και συνεπώς η κινητική ενέργεια) κάθε ηλεκτρονίου δεν θα μεταβάλλεται αν $\Delta KE_1 = \Delta KE_2$. Επομένως, η μέση κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι

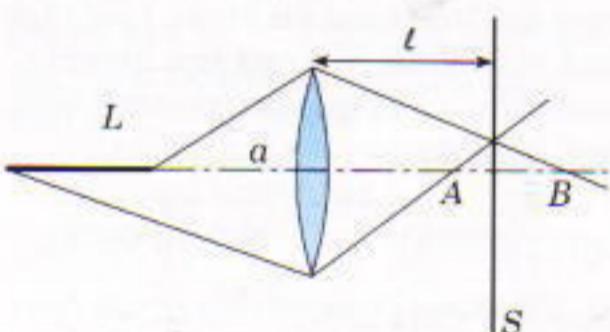
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eEt}{4} \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Η αντίστοιχη «θερμοκρασία» των ηλεκτρονίων είναι

$$T = \frac{mv^2}{3k} = \frac{eEt}{6k} \sqrt{\frac{M}{m}} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ K}.$$

Φ 120

Ένα απλό σχεδιάγραμμα της διαδρομής του φωτός (βλ. Σχήμα 3) μάς



Σχήμα 3

δίνει τη θέση της οθόνης S που αντιστοιχεί στη μικρότερη φωτεινή κηλίδα. Οι θέσεις των σημείων A και B μπορούν να εντοπιστούν από τον τύπο των φακών, ενώ το μέγεθος της κηλίδας υπολογίζεται εύκολα από όμοια τρίγωνα. Έτσι, βρίσκεται ότι η απόσταση του σημείου A από το φακό είναι $20/3$ cm και η αντίστοιχη απόσταση του σημείου B 10 cm. Από τα όμοια τρίγωνα προκύπτει

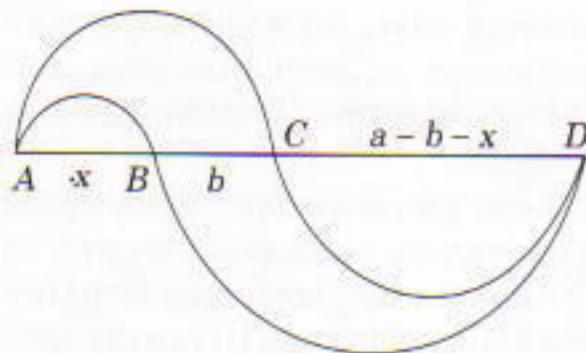
$$\frac{10 - t}{10} = \frac{t - \frac{20}{3}}{\frac{20}{3}}.$$

Επομένως, $t = 8$ cm. Η διάμετρος d της κηλίδας είναι $0,2 D$, δηλαδή $d = 2$ m.

Σπαζοκεφαλίες

Σ 116

Ο Νίκος πρέπει να πάρει συνολι-



Σχήμα 4

κά 160 δραχμές, διότι και ο Γιάννης του χρωστά 20 δραχμές. Πράγματι, σε κάθε παιδί αναλογούν τα $7/3$ μιας σακούλας. Επομένως, το $1/3$ μιας σακούλας κοστίζει 20 δραχμές και ο Γιάννης έφαγε $1/3$ της σακούλας περισσότερο απ' όσο αγόρασε.

a	$a + b$
	b

Σχήμα 5

1	5	9	17	34
1	4	4	8	17
1	3		4	9
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Σχήμα 6

$$+ (2a - b - 2x)b] = ab \frac{\pi}{4}.$$

Συνεπώς, αυτές οι πληροφορίες μας αρκούν για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της κατασκευής.

Σ 118

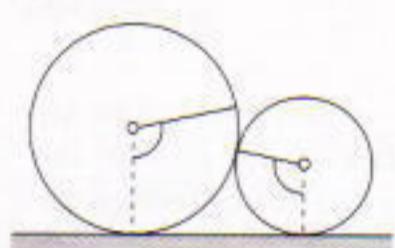
Ας θεωρήσουμε τρία τετράγωνα διατεταγμένα όπως στο Σχήμα 5. Αν το πλήθος των διαδρομών έως το αριστερό τετράγωνο είναι a και το πλήθος των διαδρομών έως το κάτω τετράγωνο είναι b , τότε το πλήθος των διαδρομών έως το τρίτο τετράγωνο είναι $a + b$. Επομένως, μπορούμε απλώς να ξεκινήσουμε από το κάτω αριστερά και να γράψουμε σε κάθε τετράγωνο το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών που οδηγούν σε αυτό (βλ. Σχήμα 6).

Σ 119

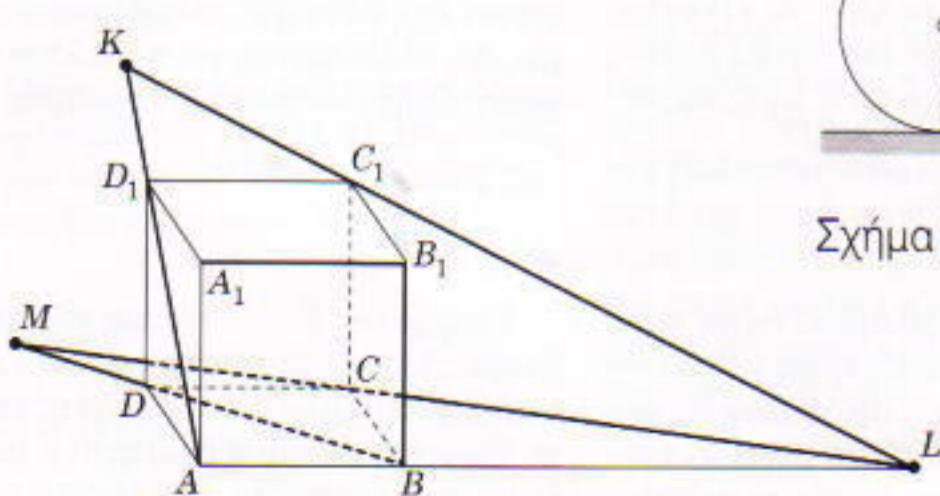
Η τεθλασμένη ευθεία $AKLMBB_1A_1$ (Σχήμα 7) διέρχεται από όλες τις κορυφές του κύβου $ABCDA_1B_1C_1D_1$. (Το D_1 ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα AK , το C_1 στο KL , το C στο LM και το D στο MB .)

Σ 120

Ας θεωρήσουμε τις γωνίες τις οποίες σχηματίζουν οι ακτίνες που είναι κατακόρυφες όταν οι κύκλοι εφαπτονται και οι ακτίνες οι οποίες ήταν κατακόρυφες στο ξεκίνημα. Είναι δεδομένο ότι τα τόξα αυτών των επικεντρων γωνιών είναι ίσα, οπότε είναι ίσες και οι γωνίες. Άλλα τούτο μπορεί να καταστεί δυνατό μόνο όταν οι ακτίνες είναι ίσες (βλ. Σχήμα 8).



Σχήμα 8



Καθειδοσκόπιο

1. Στο μείγμα νερού και αλκοόλης, τα μόρια «οτοιβάζονται» πολύ πο κοντά το ένα με το άλλο απ' ό,τι στο κάθε συστατικό υγρό, όπου υπάρχουν πολύ σημαντικά κενά μεταξύ των μορίων.

2. Εξαιτίας της διαφοράς πίεσης ανάμεσα στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του μπαλονιού, τα μόρια του αέρα διαχέονται διαμέσου των ελαστικών τοιχωμάτων, με αποτέλεσμα τη μείωση της πίεσης.

3. Η μέση κινητική ενέργεια κάθε μορίου του αερίου μείγματος είναι ίδια (καθορίζεται από τη θερμοκρασία του αερίου): έτσι, τα ελαφρύτερα μόρια έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες σε σχέση με τα βαρύτερα, και επομένως διαχέονται γρηγορότερα διαμέσου των τοιχωμάτων του σωλήνα.

4. Βραδύτερα κινούνται τα ιόντα με τη μεγαλύτερη μάζα: έτσι, στον «αγώνα ταχύτητας» προς την κάθοδο το ιούτοπο H^+ «μένει πίσω» σε σχέση με τα «αδέλφια» του.

5. Εξαιτίας των πλαστικών κρουσών μεταξύ των μορίων χαλκού και χλωρίου, η συνεπαγόμενη πίεση στο άκρο που έχει καλυφθεί με χαλκό είναι περίπου το μισό της πίεσης στο αντίθετο άκρο.

6. Τα χτυπήματα του σφυριού συμπέζουν τα κομμάτια του σιδήρου και τα υποχρεώνουν να «ενωθούν». Τα μόρια σιδήρου κάθε κομματιού διαχέονται σημαντικά εντός του άλλου, δημιουργώντας την πολύ ισχυρή συγκόλληση.

7. Εφόσον η πίεση και η θερμοκρασία των δύο αερίων είναι ακριβώς ίδια, ισοι όγκοι αερίων θα περιέχουν το ίδιο πλήθος μορίων. Η μέση μοριακή μάζα του αέρα είναι μεγαλύτερη από εκείνη του μείγματος νερού και αέρα. Επομένως, το δοχείο που περιέχει υγρό αέρα θα είναι ελαφρύτερο σε σχέση με το αντιστοιχό που περιέχει ξηρό.

8. Στη στρατόσφαιρα, γιατί εκεί είναι πο αραιός.

9. Η ακτίνα της τροχιάς ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι ανάλογη της ταχύτητάς του. Η τροχιά του σωματιδίου στο θάλαμο νεφώσεως Wilson γίνεται ορατή χάρη στον ιονισμό

ατόμων του αερίου κατά μήκος της ουγκεκριμένης τροχιάς. Ο εν λόγω ιονισμός προκαλεί ελάττωση της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου. Κατά συνέπεια, το σωματίδιο επιβραδύνεται, οπότε η ακτίνα της τροχιάς του διαρκώς μικραίνει.

Μικροπειραματισμοί

Οι ίδιοι οι υδρατμοί δεν είναι ορατοί. Όσο χρόνο η εστία είναι αναμμένη, ρεύματα θερμού αέρα κινούνται γύρω από την τοαγιέρα θερμαίνοντας τους υδρατμούς: όταν την κλείνουμε, οι υδρατμοί ψύχονται και συμπυκνώνονται. Έτσι, αυτό το οποίο παρατηρούμε είναι ένα νέφος που αποτελείται από μικροοκοπικά σταγονίδια νερού.

Gradus

Παραλλαγή -3: Η απάντηση είναι, φυσικά, 0.

Παραλλαγή -2: Το τμήμα XY είναι το μισό μιας συγκεκριμένης χορδής ενώ το τμήμα OP είναι το μισό της διαμέτρου. Αφού η διάμετρος ενός κύκλου είναι η μεγαλύτερη χορδή του, $OP > XY$. Αναλυτικά, αυτό έπειται από το κύριο θεώρημά μας (ή μπορεί να θεωρηθεί απόδειξή του), αφού $OP = (a + b)/2$ και $XY = \sqrt{ab}$.

Παραλλαγή -1: Είναι σωστό. Εδώ όμως θα μας διευκόλυνε να στηριχτούμε στο θεώρημα του θέματός μας. Εστω $AB = a$ και $CD = b$. Τότε, βάσει γνωστού θεωρήματος, $MN = (a + b)/2$. Αν τα τραπέζια $ABYX$ και $XYCD$ είναι όμοια, τότε $AB:XY = XY:CD$, από όπου παίρνουμε $XY = \sqrt{ab}$. Από το θέμα μας έχουμε ότι $XY < MN$, και συνεπώς βρίσκεται πλησιέστερα στη μικρότερη βάση.

Παραλλαγή 1: Αν το μήκος και το πλάτος του ορθογώνιου είναι, αντίστοιχα, a και b , τότε έχουμε ότι $a + b = 10$, και ζητούμε τη μέγιστη τιμή του ab . Από την ανισότητα AM-GM έπειται $2\sqrt{ab} \leq a + b = 10$, και επομένως

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 25.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι το μέγιστο προκύπτει για $a = b = 5$. Σε αυτή την περίπτωση το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Παραλλαγή 2: Αν συμβολίσουμε

με a και b το μήκος και το πλάτος, αντίστοιχα, του ορθογώνιου, έχουμε ότι $ab = 100$. Ζητούμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $2a + 2b$ ή, ισοδύναμα, της $a + b$. Και πάλι από την ανισότητα AM-GM παίρνουμε $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 20$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $a = b = 10$). Το ελάχιστο ορθογώνιο είναι (ξανά) τετράγωνο και η περιμετρός του ισούται με 40.

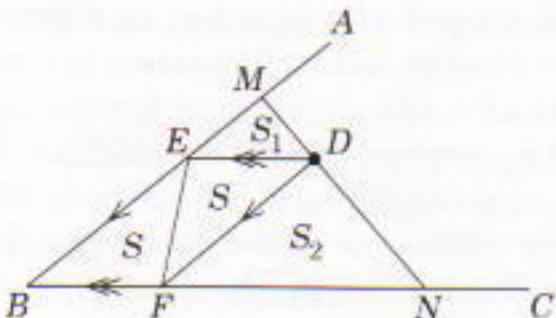
Παραλλαγή 3: Οι γενικεύσεις είναι άμεσες. (α) Αν το $a + b$ είναι σταθερό, τότε και το $[(a + b)/2]^2$ είναι σταθερό, αποτελώντας παράλληλα άνω φράγμα του ab . Οι δύο παραστάσεις είναι ίσες αν και μόνο αν $a = b$. (β) Αν το ab είναι σταθερό, τότε και το $2\sqrt{ab}$ είναι σταθερό, αποτελώντας ταυτόχρονα κάτω φράγμα του $a + b$, το οποίο επίσης επιτυγχάνεται όταν $a = b$.

Παραλλαγή 4: Αφού το γινόμενο του x επί το $1/x$ είναι σταθερό (ισούται με 1), το άθροισμά τους γίνεται ελάχιστο όταν οι δύο παράγοντες είναι ίσοι — δηλαδή όταν $x = 1/x = 1$. Η ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης είναι 2.

Παραλλαγή 5: Αυτή η παραλλαγή μοιάζει διαφορετική από την προηγούμενη, αλλά θα γίνει ίδια αν την ξαναγράψουμε έτσι ώστε να συγκρίνει ένα άθροισμα (και όχι μια διαφορά) με ένα γινόμενο. Αν τη γράψουμε ως $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ και θέσουμε $a = 1$ και $b = x$ στην ανισότητα AM-GM, παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Παραλλαγή 6: Θα μπορούσαμε, φυσικά, να εκτελέσουμε τις πράξεις, να καταλήξουμε σε μια δευτεροβάθμια συνάρτηση του x και να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις συνήθεις τεχνικές για να βρούμε το μέγιστο της. Όμως, αν παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα $(x + 4) + (6 - x) = 10$ είναι σταθερό, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το γινόμενο αυτών των δύο αριθμών γίνεται μέγιστο όταν είναι ίσοι. Αυτό συμβαίνει όταν $x = 1$, οπότε το μέγιστο της παράστασης είναι 5.

Έως τώρα δεν έχουμε παραβιάσει τη συνθήκη που απαιτεί στην ανισότητα AM-GM και οι δύο αριθμοί να είναι θετικοί. Θα μπορούσε, ωστόσο, κανείς να αναρωτηθεί μήπως προκύπτει ακόμη μεγαλύτερο γινόμενο αν κάποιος από τους αριθμούς είναι αρνητικός (περίπτωση που δεν καλύπτεται από την ανισότητα AM-GM).



Σχήμα 9

Σε αυτή την περίπτωση, όμως, το γινόμενο είναι αρνητικό, και επομένως μικρότερο από τη μέγιστη τιμή που βρήκαμε. Οι αναγνώστες μπορούν να διερευνήσουν τι ισχύει με τις παραστάσεις της μορφής $(x-a)(b-x)$ για διάφορες τιμές των a και b .

Παραλλαγή 7: Στο δεδομένο πεδίο τιμών, για κάθε x για το οποίο ορίζονται η εφχ και η σφχ, έχουμε $\text{ef}x \cdot \text{sf}x = 1$. Συνεπώς, το άθροισμά τους είναι ελάχιστο όταν $\text{ef}x = \text{sf}x$, το οποίο συμβαίνει όταν $\text{ef}x = 1$. Η ζητούμενη ελάχιστη τιμή είναι 2.

Παραλλαγή 8: Το άθροισμα $\eta\mu^2x + \sigma\mu^2x$ είναι σταθερό (ισούται με 1). Επομένως, το δεδομένο γινόμενο είναι μέγιστο όταν οι παράγοντές του είναι ίσοι — για παράδειγμα, όταν $x = \pi/4$. Η μέγιστη τιμή ισούται με $1/4$. Παρατηρούμε ότι αυτό συνεπάγεται πως, για $0 < x < \pi/2$, η μέγιστη τιμή της παράστασης $\eta\mu x + \sigma\mu x$ είναι $1/2$. Αυτό μας οδηγεί σε μια άλλη λύση: έχουμε $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x + \sigma\mu x$, η μέγιστη τιμή του οποίου είναι $1/2$.

Παραλλαγή 9: Το γινόμενο $(2^x)(2^{-x})$ είναι σταθερό (ισούται με 1), επομένως η παράσταση γίνεται ελάχιστη όταν $2^x = 2^{-x}$, δηλαδή όταν $x = 0$. Η ελάχιστη τιμή είναι 2.

Αν θεωρήσουμε την παραπλήσια παράσταση $(e^x + e^{-x})/2$ (όπου e είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων), τότε μελετούμε τη συνάρτηση $y = \cosh x$ (υπερβολικό συνημίτονο του x), η οποία είναι οημαντική στη μηχανική και στα θεωρητικά μαθηματικά. Η ελάχιστη τιμή για πραγματικούς αριθμούς x είναι επίσης 2.

Παραλλαγή 10: Οι τετραγωνικές ρίζες στο αριστερό μέλος της ανισότητας μάς «καλούν» φανερά να εφαρμόσουμε την ανισότητα AM-GM. Έτοιμος είναι

$$x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$$

$$\leq x \frac{y+z}{2} + y \frac{x+z}{2} + z \frac{x+y}{2} \\ = xy + yz + xy.$$

$$\frac{S_1}{S} \frac{S_2}{S} = \frac{MD}{DN} \frac{DN}{MD} = 1.$$

Συνεπώς, το γινόμενο $S_1 S_2 = S^2$ είναι σταθερό, οπότε το $S_1 + S_2$ γίνεται ελάχιστο όταν $S_1 = S_2 = S$. Αυτό συμβαίνει όταν η MN είναι παράλληλη προς την EF .

Παραλλαγή 13: Γνωρίζουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_n = 1$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 2^n.$$

Με τη βοήθεια της ανισότητας AM-GM μπορούμε να μετασχηματίσουμε κάθε άθροισμα του αριστερού μέλους αυτής της ανισότητας σε γινόμενο. Έχουμε

$$1+x_1 \geq 2\sqrt{1+x_1} = 2\sqrt{x_1},$$

κ.ο.κ., για όλα τα άθροισμα. Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, βρίσκουμε

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq$$

$$(2\sqrt{x_1})(2\sqrt{x_2})\dots(2\sqrt{x_n}) = 2^n \cdot 1,$$

που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Παραλλαγή 14: Θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα AM-GM στην παράσταση $x_k - 1/4$, αλλά αυτή δυστυχώς δεν αποτελεί άθροισμα δύο θετικών αριθμών. Ακολουθούμε λοιπόν την υπόδειξη και εξετάζουμε την $x_k^2 + 1/4$, η οποία αποτελεί άθροισμα δύο θετικών αριθμών. Από την ανισότητα AM-GM έχουμε

$$x_k^2 + \frac{1}{4} \geq 2\sqrt{x_k^2 \cdot \frac{1}{4}} = x_k,$$

ή

$$x_k^2 \geq x_k - \frac{1}{4}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση, μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τους λογαρίθμους του ζητούμενου άθροισματος. Θεωρούμε πρώτα τους λογαρίθμους ως προς βάση x_{k-1} των μελών της προηγούμενης ανίσωσης (έχουμε $x_{k-1} < 1$, οπότε η φορά της ανισότητας αντιστρέφεται):

$$\log_{x_{k-1}} x_k^2 = 2 \log_{x_{k-1}} x_k$$

$$\leq \log_{x_{k-1}} \left(x_k - \frac{1}{4} \right).$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε ένα κάτω φράγμα του δεδομένου αθροίσματος. Αν ονομάσουμε το άθροισμα S , έχουμε

$$\begin{aligned} S &= \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4} \right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4} \right) \\ &+ \log_{x_3} \left(x_4 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4} \right) \\ &\geq 2 \log_{x_1} x_2 + 2 \log_{x_2} x_3 + 2 \log_{x_3} x_4 \\ &\quad + \dots + 2 \log_{x_n} x_1, \end{aligned}$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &\geq \log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \log_{x_3} x_4 \\ &\quad + \dots + \log_{x_n} x_1. \end{aligned}$$

Το παραπάνω είναι ένα άθροισμα θετικών αριθμών, διότι, για κάθε k , τα x_k και x_{k-1} είναι μικρότερα του 1. Μπορούμε συνεπώς να εφαρμόσουμε ακόμη μία φορά την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ και να βρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &\geq \log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 \\ &\quad + \log_{x_3} x_4 + \dots + \log_{x_n} x_1 \\ &\geq n \sqrt[n]{(\log_{x_1} x_2)(\log_{x_2} x_3) \dots (\log_{x_n} x_1)}. \end{aligned}$$

Με πολλαπλή χρήση του τύπου $\log_\beta a \cdot \log_\beta y = \log_\beta y$, έπειτα ότι το υπόρριζο ισούται με $\log_{x_1} x_1 = 1$, οπότε κάτω φράγμα του S είναι το $2n$. Η ανισότητα ισχύει αν όλα τα x_k ισούνται με $1/2$.

Ο χαρτοπαίκτης

Πρόβλημα 1: Εστω S το άθροισμα της γεωμετρικής πρόδου στο (2):

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Διπλασιάζουμε:

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Κάθε όρος του αθροίσματος S είναι πεπερασμένος, οπότε μπορούμε να αφαιρέσουμε το S από το $2S$:

$$\begin{aligned} 2S - S &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \dots \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να απαλείψουμε αρκετούς όρους και να καταλήξουμε

$$S = 1. \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζουμε επί τη σταθερά 1 δολάριο, και παίρνουμε

$$S = 1 \text{ δολάριο.}$$

Πρόβλημα 2. Ζητούμε έναν ακέραιο v τέτοιον ώστε ο 2^v να είναι περίπου 67.500.000 δολάρια. Ας θέσουμε $2^v = 67.500.000$ και κατόπιν ας στρογγυλέψουμε το v στον πλησιέστερο ακέραιο. Παίρνουμε τους φυσικούς λογαρίθμους των μελών της 1-σότητας και λύνουμε ως προς v :

$$v = \frac{\ln 67.500.000}{\ln 2} = 26,0083841664.$$

Ας θέσουμε λοιπόν $v = 26$. Έχουμε τώρα $2^{26} = 67.108.864$ δολάρια. Για να είναι ίσο το $2^{26}(1+h)$ με τα 67,5 εκατομμύρια, θέτουμε

$$h = 0,005828381.$$

Πρόβλημα 3. Μπορούμε να θεωρήσουμε την αναμενόμενη τιμή όλου του στοιχήματος ως άθροισμα δύο προσδοκιών: αυτής των πρώτων n ρίψεων και αυτής των επόμενων $N-n$ ρίψεων. Η αναμενόμενη τιμή των πρώτων ρίψεων είναι v . Η αναμενόμενη τιμή των επόμενων $N-v$ ρίψεων είναι το άθροισμα των προσδοκιών καθεμιάς από αυτές. Σε κάθε περίπτωση, η προσδοκία αυτή ισούται με την πθανότητα να έρθει κεφαλή σε αυτή τη ρίψη επί το ποσό που θα κερδίσετε αν συμβεί αυτό το γεγονός.

Πρόβλημα 5. Χρησιμοποιήστε τις κατάλληλες τιμές για το v και το h στην (4).

Πρόβλημα 6. Θεωρήστε ότι το h μπορεί να μεταβάλλεται από 0 έως 1.

Πρόβλημα 9. Περίου 6 δολάρια.

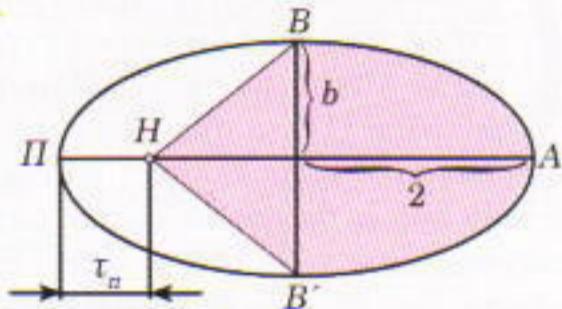
Πρόβλημα 10. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι $U(0) = 0$, $U'(0) = 1$ και $U(w) = Z$ όταν το w τείνει στο άπειρο.

Kepler

4. Αν συγκρίνετε την τροχιά του

κομήτη με αυτή της Γης και χρησιμοποιήσετε τον τρίτο νόμο του Kepler, μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς του κομήτη: $a = 18,5$ AU. Έτοι, η μεγαλύτερη απόσταση του κομήτη από τον Ήλιο θα είναι περίπου 35,5 AU.

6. Δείτε το Σχήμα 10. Ενόσω ο κομήτης διαγράφει το μισό τμήμα της τροχιάς του το οποίο είναι περισσότερο απομακρυσμένο από τον Ήλιο, η επιβατική ακτίνα σαρώνει εμβαδόν BHB'A, το οποίο ισούται με $\pi ab/2 + b(a - r_p)$. Το υπόλοιπο του εμβαδού πab , όπως υπολογίζουμε εύκολα, καλύπτεται σε 14,7 έτη.



Σχήμα 10

⇒ **Συνέχεια από τη σελ. 55**

εκείνο που αναφέραμε παραπάνω στο πρόβλημα της ωκεάνιας τομογραφίας. Αντί για τα Δt_m , το εν λόγω σύστημα θα περιλαμβάνει τις τιμές των χρονικών υστερήσεων των σημάτων, όπως αυτές μετρώνται από τον αυτόνομο σταθμό βυθού. Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων, ανακατασκευάζουμε την κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας του ήχου στα ιζηματογενή πετρώματα. Αφού ολοκληρωθεί η συλλογή δεδομένων, ο σταθμός μπορεί να ανασυρθεί και το πείραμα μπορεί να επαναληφθεί σε άλλη τοποθεσία.

Οι ακουστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται επίσης ευρέως για να μελετηθούν οι ανομοιογένειες και τα φαινόμενα μικρής κλίμακας στον ωκεανό. Για παράδειγμα, οι παραμορφώσεις ενός ηχητικού σήματος που διασκορπίζεται από τον πυθμένα του ωκεανού μεταφέρουν πληροφορίες για την ανομοιομορφία της διαχωριστικής επιφάνειας πυθμένα-νερού και για τις ανομοιογένειες στα ιζηματογενή στρώματα. Στο μέλλον, η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να οδηγήσει στη σύνθεση μιας ακουστικής απεικόνισης του πυθμένα του ωκεανού.

Κουλουράκια πιπερόριζας

Ανιππολόγιστη νοστιμιά

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΛΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ ΣΤΗΛΗ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΦΙΕΡΩΜΕΝΗ ΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΛҮΝΟΝΤΑΙ ΑΛΟΓΟΡΙΘΜΙΚΑ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΚΑΛΥΤΕΡΟ ΤΡΟΠΟ. Ο αγαπητός μου φίλος, γείτονας και γαλακτοπαραγωγός John Dough μου έφερε πριν μερικές μέρες λίγα από τα θαυμάσια κουλουράκια πιπερόριζας* που φτιάχνει, όπως κάθε χρόνο, τέτοια εποχή. Αυτή τη φορά, μάλιστα, μου έδωσε και λίγη από την εξαίσια πιπερόριζα που ο ίδιος καλλιεργεί, οπότε θα έχω τη δυνατότητα να πειραματιστώ με τις δικές μου συνταγές.

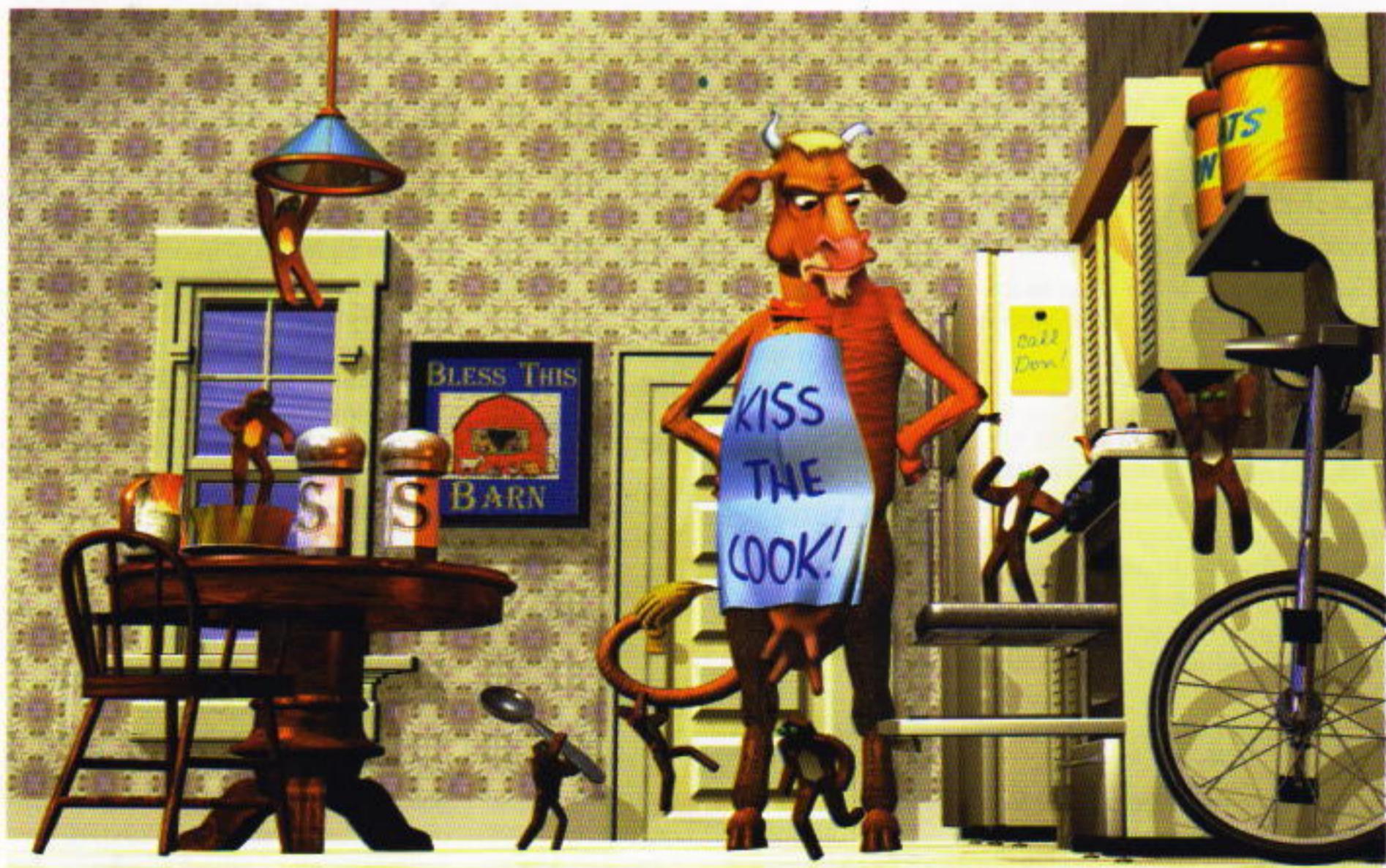
Διάβασα πρόσφατα ένα άρθρο του Robert Devaney σε ένα παλιό τεύχος του περιοδικού *Algorithm*, δημοσιευμένο τον Ιανουάριο του 1992. Ανέφερε πως ένα από τα πρώτα περιεργά αντικείμενα που συνάντησε πειραματι-

ζόμενος με γραφικά υπολογιστών ήταν ένας πιπερόριζας. Όλα άρχισαν με μια πολύ απλή επανάληψη στο επίπεδο, ξεκινώντας από ένα μοναδικό σημείο. Όταν κατασκεύασε το γράφημα της τροχιάς των επαναλήψεων αυτού του σημείου, εμφανιστήκε ως διά μαγείας η εικόνα ενός πιπερόριζα. Ήταν κάτι που έπρεπε να δω με τα μάτια μου.

Η συνάρτηση που δημιούργησε αυτή την εικόνα, η οποία ορίζεται σε σημεία του επιπέδου, μπορεί να γραφεί στο *Mathematica* ως

```
GBM[{x_, y_}] := {1 - y + Abs[x], x}
```

Έτσι, εκκινώντας από ένα τυχαιό σημείο {1, 2} εφάρμοσα επαναληπτικά τη συνάρτηση GBM. Στο *Mathematica* αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή *NestList*, η



Εικονογράφηση: Mark Brenneman

οποία δημιουργεί επαναληπτικά την εικόνα του αρχικού σημείου α μέσω της συνάρτησης f . Για παράδειγμα,

```
NestList[f, a, 4]
{a, f[a], f[f[a]], f[f[f[a]]], f[f[f[f[a]]]]}
```

Όταν εφάρμοσα τη συνάρτηση GBM στο σημείο {1, 2}, πήρα την ακολουθία

```
NestList[GBM, {1, 2}, 6]
```

```
{(1, 2), (0, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 2)}
```

Η τροχιά της συνάρτησης GBM επανέρχεται στο αρχικό σημείο {1, 2} έπειτα από 6 μετασχηματισμούς. Άλλα σημεία δίνουν διαφορετικές ακολουθίες:

```
NestList[GBM, {1, 5}, 19]
```

```
{(1, 5), (-3, 1), (3, -3), (7, 3), (5, 7),
{-1, 5), (-3, -1), (5, -3), (9, 5), (5, 9),
(-3, 5), (-1, -3), (5, -1), (7, 5), (3, 7),
(-3, 3), (1, -3), (5, 1), (5, 5), (1, 5)}
```

Τι μπορούμε να παρατηρήσουμε για τις τροχιές της συνάρτησης GBM; Ορισμένες επανέρχονται στο αρχικό σημείο. Για παράδειγμα, η τροχιά του {1, 2} επανέρχεται στο {1, 2} έπειτα από 6 μετασχηματισμούς. Η τροχιά του {1, 5} εποτέρεψει στο {1, 5} έπειτα από 19 μετασχηματισμούς. Η περίοδος μιας τροχιάς ιούται με το ελάχιστο πλήθος των βημάτων που απαιτούνται για να επανέλθει στο αρχικό σημείο.

Ο Devaney ανακάλυψε ότι ορισμένα σημεία έχουν εξαιρετικά μεγάλες περιόδους και πως, όταν σχεδιαστεί η τροχιά αυτών των σημείων, εμφανίζεται ο πιπερόριζας. Μελέτησα το ζήτημα και έγραψα ένα σύντομο πρόγραμ-

μα στο Mathematica· αυτό δημιουργεί μια τροχιά που αποτελείται από 50.000 σημεία, περιστρέφει την εικόνα κατά 135° ($\{x, y\} \rightarrow \{y - x, -y - x\}$) και δημιουργεί το γράφημα ενός πιπερόριζα που στέκεται όρθιος (ο αρχικός ήταν οριζόντιωμένος).

Κάτι, όμως, λείπει από το πρόγραμμά μου. Είναι το αρχικό σημείο $\{a, b\}$ που δημιουργεί τον πιπερόριζα. Ένα από τα καθήκοντα που θα σας αναθέσω στο παρόν άρθρο είναι η ανακάλυψή του.

```
Clear [gingerbreadMan]
gingerbreadMan = NestList[GBM, {a, b}, 50000];
ListPlot[gingerbreadMan/. {x_, y_} \rightarrow {y - x,
-y - x},
Frame \rightarrow True, FrameTicks \rightarrow None,
AspectRatio \rightarrow 1.5, Axes \rightarrow None]
```

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 8. Βρείτε ένα αρχικό σημείο $\{a, b\}$ το οποίο να δημιουργεί έναν πιπερόριζα. Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα βρίσκει την περίοδο ενός σημείου του επιπέδου στο οποίο εφαρμόζουμε τη συνάρτηση GBM. Πού βρίσκονται τα σημεία με μικρές περιόδους και πού αυτά που δημιουργούν τον πιπερόριζα; Είναι πεπερασμένη η περίοδος για τον πιπερόριζα;

Λύση του ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 6

Πριν δύο τεύχη σας ζήτησα να ασχοληθείτε με το μοντέλο του κυρίου Πωλ για την αύξηση των βακτηρίων στο γάλα. Σύμφωνα με αυτό, αν εκτελέσουμε μια ακολουθία μετρήσεων του πλήθους των βακτηρίων στο γάλα σε ίσα χρονικά διαστήματα, τότε η μεταβολή στα απαριθμούμενα βακτηρία ακολουθεί το εξής μοντέλο λογιστικής αύξησης. (Σημείωση: αν now είναι η παρούσα χρονική περίοδος, $now - 1$ είναι η προηγούμενη χρονική περίοδος, όπου το 1 παριστά μια σταθερή μονάδα χρόνου· η θερμοκρασία —temperature— μετριέται σε βαθμούς Fahrenheit.)

```
Bacteria[0] = 1;
Bacteria [now] = Bacteria[now - 1]
+ (Temperature - 32) / 200 Bacteria[now - 1]
× (1 - Bacteria[now - 1] / 100)
```

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φθάσει ο πληθυσμός των βακτηρίων την ένδειξη 80 είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο ξινίζει το γάλα. Στο ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 6 σας ζητήθηκε να υπολογίσετε τη θερμοκρασία T στην οποία το γάλα ξινίζει δύο φορές ταχύτερα απ' όσο στους $50^\circ F$.

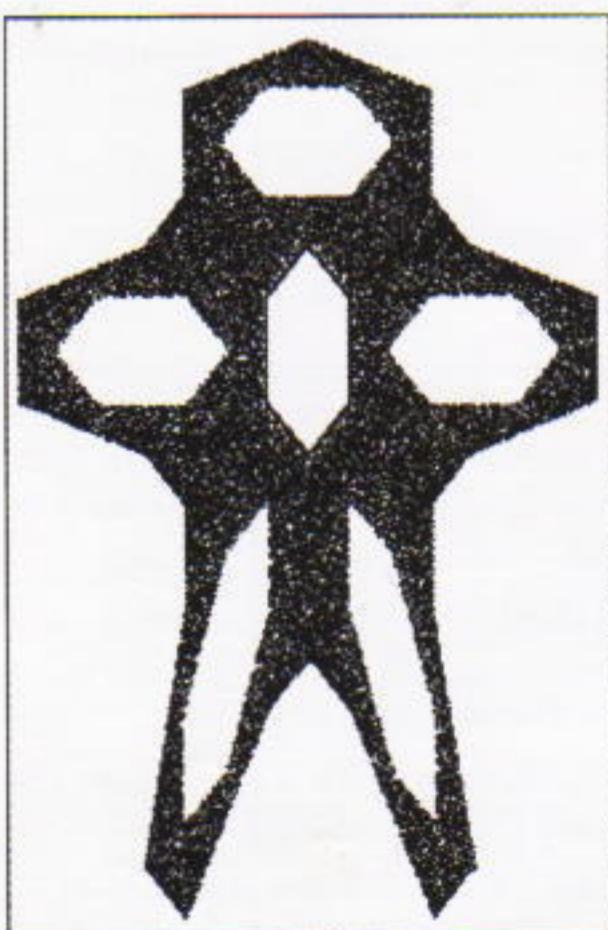
Πρώτα, ας δούμε σε πόσο χρόνο ξινίζει το γάλα όταν η θερμοκρασία είναι $50^\circ F$.

```
T = 50.; b = 1; i = 0;
```

```
While[b < 80, b = b + (T - 32.) / 200 b (1 - b / 100); i++]; i
```

68

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε σε ποια θερμοκρασία το πλήθος των βακτηρίων φθάνει την ένδειξη 80 στο



* Τα κουλουράκια πιπερόριζας (gingerbread) είναι ένα γλυκό που περιέχει μελάσα και πιπερόριζα. Όταν φτίζονται παίρνουν διάφορα σχήματα, που πολλές φορές μοιάζουν με ανθρωπάκια. Υπάρχει ένα παλιό παραμύθι όπου ένα τέτοιο κουλουράκι ζωντανεύει και δραπετεύει από το φούρνο (είναι ο gingerbread man (GBM), ο πιπερόριζας). (Σ.τ.μ.)

μισό χρονικό διάστημα, δηλαδή σε 34 χρονικές μονάδες. Κατ' αρχάς, θα δημιουργήσουμε τη συνάρτηση `sourTime` η οποία διαβάζει τη θερμοκρασία και μας δίνει το χρονικό διάστημα που περνά έως ότου ξινίσει το γάλα.

```
sourTime[T_] := Module[{b = 1, i = 0},
  While[b < 80, b = b + (T - 32.) / 200 b (1 - b / 100); i++]; i]
```

Θα εντοπίσουμε τώρα τη θερμοκρασία στην οποία το γάλα ξινίζει μέσα σε 34 χρονικές μονάδες.

```
T = 50;
delta = 1.;
Do[While[sourTime[T] > 34, T += delta];
 T = T - delta;
 delta = delta/10, {3}]
Print["Η απάντηση είναι ", T + 10
delta]
Η απάντηση είναι 68.67
```

Ας το επαληθεύσουμε.

```
sourTime[68.67]
```

34

Ο, τι ακριβώς θέλαμε.

Μια προχωρημένη λύση

Ο Morton Goldberg πρότεινε ένα λεπτομερέστερο ιππολογισμό που βασίζεται στη λύση ενός συνεχούς μοντέλου (μιας διαφορικής εξίσωσης) του διακριτού προβλήματος.

Αντικαθιστώντας $Bacteria \rightarrow b$, $n - 1 \rightarrow t$, και θεωρώντας ως μονάδα χρόνου το Δt , μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη αναδρομική σχέση ως

$$\frac{b[t + \Delta t] - b[t]}{\Delta t} = \frac{(T - 32)}{200} b[t] \left(1 - \frac{b[t]}{100}\right).$$

Αν πάρουμε το όριο καθώς $\Delta t \rightarrow 0$, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$b'[t] = \frac{(T - 32)}{200} b[t] \left(1 - \frac{b[t]}{100}\right),$$

με αρχική συνθήκη $b[0] = 1$. Το *Mathematica* μπορεί να βρει μια κλειστής μορφής λύση αυτής της εξίσωσης μέσω της `DSolve`.

```
Clear[b, T]
solution = DSolve[{b'[t] == (T - 32)/200 b[t] (1 - b[t]/100),
b[0] == 1}, b[t], t]
{{b[t] == -100/(1 + E^(1/(32 - T)) t)^(200/100)}}
```

Η παραπάνω λύση μπορεί να απλοποιηθεί:

$$b[t_, T_] = \frac{100}{1 + 99 E^{(32-T)t/200}}$$

$$\frac{100}{1 + 99 E^{\frac{i}{200}(32-T)t}}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να ιππολογίσουμε την `timeToSour` μέσω της $b[t, T]$, η οποία μετρά το χρόνο τ μέσα στον οποίο ξινίζει το γάλα όταν η θερμοκρασία είναι T .

```
Clear[timeToSour]
FindRoot[b[timeToSour, 50] == 80.,
{timeToSour, 60}]
{timeToSour -> 66.4602}
timeToSour = timeToSour /. First[%]
66.4602
```

Τέλος, υπολογίζουμε τη θερμοκρασία στην οποία το γάλα ξινίζει δυο φορές πιο γρήγορα.

```
FindRoot[b[timeToSour/2, T] == 80.,
{T, 60}]
{T -> 68.}
```

Ο ιππολογισμός αυτός διαφέρει από την ασυνεχή λύση, διότι το ασυνεχές μοντέλο προσεγγίζει το συνεχές.

Νέο έτος (πίγιο καθυστερημένα)

Στην αρχή κάθε καινούργιου χρόνου ερχόμαστε «αντιμέτωποι» με ένα νέο αριθμό —αυτή τη φορά το 1998. Μόλις τώρα έχουμε αρχίσει να συνθίζουμε το 1998, το οποίο, αντιθετα με το 1997, δεν είναι πρώτος αριθμός. Ωστόσο, βρίσκεται μεταξύ δύο πρώτων: 1997 και 1999 (δύο πρώτοι μεταξύ των οποίων μεσολαβεί μόνο ένας σύνθετος ακέραιος ονομάζονται «δίδυμοι»). Αυτό, όπως μας δείχνει ο επόμενος ιππολογισμός, θα ξανασυμβεί έπειτα από 30 χρόνια:

```
Table[Prime[PrimePi[1997] + i], {i,
0, 6}]
```

{1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029}

Στο *Mathematica*, η `PrimePi[n]` ισούται με το πλήθος των πρώτων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n και η `Prime[j]` ισούται με τον j -οστό πρώτο αριθμό.

Τι άλλο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο αριθμός 1998; Ας βρούμε τους διαιρέτες του:

```
Divisors[1998]
```

{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999, 1998}

Θεωρούμε τους γνήσιους διαιρέτες του 1998 και τους προσθέτουμε:

```
Apply[Plus, Drop[Divisors[1998], -1]]
2562
```

Ονομάζουμε το 1998 «υπερτέλειο» αριθμό, διότι το εν λόγω άθροισμα είναι μεγαλύτερο του 1998. Είμαι ιδιαίτερα αισιόδοξος για το «υπερτέλειο» έτος 1998 το οποίο περιβάλλεται από δύο πρώτους αριθμούς. Νομίζω πως άφθονες θά 'ναι και οι χαρές που θα χαρίσει σε όλους μας. ☐