

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1997

ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 6

1.700 ΔΡΧ.

ΑΦΙΕΡΩΜΑ:

Δυναμική συστημάτων και πλανητικό οικοσύστημα



- Προς έναν συνετό και βιώσιμο κόσμο
- Τα όρια της ανάπτυξης
- Η προσωμοιωμένη Γη
- Οικογονική ανάλυση εισροών-εκροών
- Παικόσια μοντέλα
- Η τέχνη της εκτίμησης
- Απλά πειράματα στην κουζίνα
- Η σοπράνο, η κούνια και ο σιεσμός



Συλλογή Paul Mellon © 1997 Διοκτητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη Ουάσιγκτον

O Catlin κι ένας Ινδιάνος επιτίθενται σε κοπάδι βισόνων (1857/1869), του George Catlin

Ο GEORGE CATLIN (1796-1872) ΑΝΗΚΕ Σ' ΕΚΕΙΝΗ ΤΗ ΧΟΡΕΙΑ ΤΩΝ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΩΝ ΠΝΕΥΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΕΓΚΑΤΕΛΕΙΨΑΝ ένα ΕΠΑΓΓΕΛΜΑ (ΤΑ ΝΟΜΙΚΑ, ΕΝ ΠΡΟΚΕΙΜΕΝΩ), ΓΙΑ ΝΑ ΠΑΣΟΥΝ ΤΗΝ ΠΕΝΑ Ή ΤΟ ΠΝΕΛΟ (ΣΤΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ, ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ). ΓΙΑ ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΟΔΟ ΑΣΧΟΛΗΘΗΚΕ ΜΕ ΠΡΟΣΩΠΟΓΡΑΦΙΕΣ, ΉΣΤΕΡΑ ΌΜΩΣ ΜΕΤΕΒΗ ΣΤΗ ΔΥΣΗ, ΓΙΑ ΝΑ ΓΝΩΡΙΣΕΙ ΤΟΥΣ ΙΝΔΙΑΝΟΥΣ, ΟΙ ΟΠΟΙΟΙ ΤΟΝ ΕΝΔΙΕΦΕΡΑΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΑΙΔΙΚΗ ΤΟΥ ΗΛΙΚΙΑ. ΜΕ ΣΚΟΠΟ ΝΑ ΚΑΤΑΓΡΑΨΕΙ ΚΑΙ ΝΑ ΑΠΑΘΑΝΑΤΙΣΕΙ ΈΝΑΝ ΤΡΟΠΟ ΖΩΗΣ Ο ΟΠΟΙΟΣ ΕΞΈΛΕΙΠΕ, ΌΠΩΣ ΔΙΑΙΣΘΑΝΟΤΑΝ Ο ίδιος, ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΣΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΠΟ ΠΕΝΤΑΚΟΣΙΟΥΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑ, ΚΑΙ ΤΟ 1841 ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕ ΤΟ ΔΙΤΟΜΟ ΈΡΓΟ ΤΟΥ *Επιστολές και σημειώσεις για τα ήθη, τα έθιμα και τις συνθήκες ζωής των Ινδιάνων της Βορείου Αμερικής*.

Ο παραπάνω πίνακας θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια ειρωνική αναφορά (ακούσια, αναμφίβολα) στον απειλούμενο τρόπο ζωής που κατέγραφε ο Catlin — παρατηρήστε τον Ινδιάνο με το τόξο του, και τον Catlin με το τουφέκι του. Όταν οι Ευρωπαίοι πάτησαν το πόδι τους στη Βόρειο Αμερική, στις δυτικές εκτάσεις περιπλανιούνταν ελεύθεροι 60.000.000 βίσονες (ή μπούφαλο), σύμφωνα με τις εκτιμήσεις. Οι βίσονες αποτελούσαν απαραίτητο πόρο ζωής για

τους Ινδιάνους της περιοχής. Εξαιτίας όμως του εξοντωτικού κυνηγιού τους από τους αποίκους, το 1900 είχαν φτάσει στα πρόθυρα της εξαφάνισης.

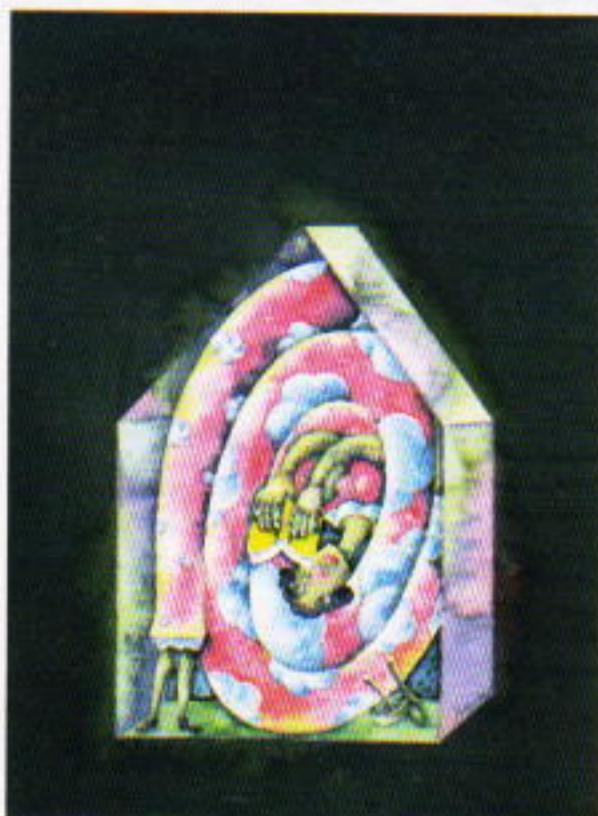
Ο William F. Cody (ο Μπούφαλο Μπλ) έγινε πασίγνωστος ως εξολοθρευτής βισόνων. Τη δεκαετία του 1860 είχε προσληφθεί για να προμηθεύει κρέας στους εργάτες που δούλευαν στο στρώσιμο των σιδηροδρομικών γραμμών, και σε περίοδο οκτώ μηνών σκότωσε 4.280 βίσονες. Ωστόσο, δεν ήταν ο μόνος που κυνηγούσε αυτό το υπέροχο ζώο. Άλλοι το φόνευαν για το δέρμα του, άλλοι απλώς για διασκέδαση, και πολλοί μόνο για τη γλώσσα του. Χάρη στις συντονισμένες προσπάθειες των κτηνοτρόφων και των υπηρεσιών για τη συντήρηση των φυσικών πόρων, οι βίσονες σώθηκαν από την εξάλειψη και τώρα αναπτύσσονται (κατά πολύ μικρότερο αριθμό) σε προστατευόμενες περιοχές που ελέγχονται από την κυβέρνηση.

Η ιστορία του αμερικανικού βίσονα είναι εξαιρετικά διαφωτιστική για τα ζητήματα της πληθυσμιακής αύξησης, των αλληλεπιδράσεων θηρευτή-θηράματος και της διαχείρισης των φυσικών πόρων. Έπρεπε λοιπόν να την αναφέρουμε σε τόύτο το ειδικό τεύχος του *Quantum*, έστω και εν συντομίᾳ.

QUANTUM

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1997

ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 6



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Η γυναικά του εξωφύλλου μας διαβάζει ένα εξαιρετικό βιβλίο, που διανοιγεί απέραντους ορίζοντες στη σκέψη της, παρότι το σώμα της έχει συστραφεί μέσα στα στενά όρια ενός κλειστού χώρου. Πρόκειται για το βιβλίο *The Limits to Growth*, το διεθνές μπεστ σέλερ του 1972.

Το παρόν τεύχος του *Quantum* είναι αφιερωμένο στην κληρονομιά που μας άφησε εκείνη η πρωτοποριακή εργασία της Λέσχης της Ρώμης. Στις σελίδες του θα βρείτε κι άλλες αλληγορικές εικόνες σαν αυτή του εξωφύλλου να κοσμούν τα πέντε κύρια άρθρα του.

Στον «Κόσμο των κβάντων» (σελ. 2), μάλιστα, μπορείτε να διαβάσετε μια σύντομη εισαγωγή στα θέματά μας, που είναι εμπνευσμένα από την εικοστή πέμπτη επέτειο της έκδοσης του ξειρετου βιβλίου.

ΑΡΘΡΑ

- 4 Η νέα εικόνα του κόσμου
Αναδρομή στα 'Όρια της ανάπτυξης**
Kurt Kreith
- 16 Μαλθουσιανά μοντέλα
Υπερβαίνοντας τα όρια**
Bob Eberlein
- 22 Μαθήματα για τον πλανήτη
Ο κόσμος σε μια γυάλα**
Joshua L. Tosteson
- 38 Κυκλική συμπεριφορά
Μαθαίνοντας από έναν ιό**
Matthias Ruth
- 46 «Καλά» και «κακά»
Επιστήμη κάθε άλλο παρά απαισιόδοξη**
Dean Button, Faye Duchin και Kurt Kreith

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Προς έναν συνετό και βιώσιμο κόσμο
- 14 Πώς λύνεται;**
- 15 Σπαζοκεφαλιές**
- 31 Σκόπελοι**
Η τέχνη της εκτίμησης
- 36 Καλειδοσκόπιο**
Ας αλλάξουμε το κλίμα
- 54 Στα πεδία της φυσικής**
Συνταρακτικές δονήσεις
- 58 Στο μαυροπίνακα**
Το μυρμήγκι και η κονσέρβα
- 62 Στο εργαστήριο**
Φυσική στην κουζίνα
- 65 Απαντήσεις, υποδείξεις και λύσεις**
- 70 Ιππολογισμοί**
Χαλασμένο γάλα

Προς έναν συνετό και βιώσιμο κόσμο

«Μολονότι υπάρχουν “όρια” σ’ έναν συγκεκριμένο τύπο δραστηριότητας, δεν υπάρχουν όρια στη μάθηση και τη δημιουργικότητα.»

—Λέσχη της Ρώμης

MΕΓΑΛΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ τεύχους του *Quantum* είναι αφιερωμένο σ’ ένα γεγονός που συνέβη πριν από είκοσι πέντε χρόνια —πολλοί από τους αναγνώστες μας δεν είχαν τότε καν γεννηθεί—, την έκδοση του *The Limits to Growth* (Τα όρια της ανάπτυξης), το 1972. Αλλά γιατί θεωρούμε τόσο σημαντικό αυτό το βιβλίο;

Για να αρχίσουμε να απαντούμε σε τούτο το ερώτημα, πρέπει να πάμε ακόμη πιο πίσω, στο 1967. Τότε, ένας ιταλός βιομήχανος, ο Aurelio Peccei, κι ένας σκώτος εποτήμονας, ο Alexander King, διαπίστωσαν ότι οι κυβερνήσεις του πλανήτη φαίνονταν ανίκανες να αντιληφθούν πως ορισμένες παγκόσμιες τάσεις απειλούσαν την ευημερία των μελλοντικών γενεών. Παρατήρησαν ότι ο παγκόσμιος πληθυσμός αυξανόταν με κλιμακούμενο ρυθμό, ότι οι μη ανανεώσιμοι φυσικοί πόροι εξαντλούνταν ολοένα ταχύτερα και ότι εκατομμύρια άνθρωποι ζούσαν στο επίπεδο της συντηρήσεως ή υπό την απειλή της λιμοκτονίας, ενώ οι προοπτικές βελτίωσης ήταν ελάχιστες. Διαισθάνθηκαν ότι είχε φτάσει η ώρα να κινητοποιήσουν όσους σκέφτονταν με παρόμοιο τρόπο, ώστε όλοι μαζί να δραστηριοποιηθούν προς την κατεύθυνση ενός περισσότερο συνετού και βιώσιμου κόσμου.

Τον Απρίλιο του επόμενου έτους, τριάντα έξι ευρωπαίοι οικονομολόγοι, εποτήμονες και πολιτικοί συναντήθηκαν στη Ρώμη, προκειμένου να συζητήσουν γι’ αυτά τα ζητήματα πέρα

από πολιτικές ή ιδεολογίες. Συνέχισαν να συναντιούνται σε άλλες πόλεις, και οι γραμμές τους ενισχύθηκαν-ωστόσο, ο τόπος της αρχικής συνάντησής τους έδωσε το όνομα στην ομάδα τους: Λέσχη της Ρώμης.

To 1969, τα μέλη της Λέσχης κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ένα ποσοτικό μοντέλο της παρούσας και της μελλοντικής «δυσχερούς θέσης του ανθρώπινου είδους» ίσως αποδεικνυόταν περισσότερο πειστικό στα κέντρα λήψης αποφάσεων απ’ ό,τι οι φραστικές προειδοποιήσεις. To 1970, η Λέσχη της Ρώμης απευθύνθηκε στον Jay Forrester, θεωρητικό συστημάτων στο MIT, ο οποίος είχε αναπτύξει μια υπολογιστική τεχνική για την αντιμετώπιση των περιπλοκών της βιομηχανικής παραγωγής: την είχε μάλιστα εφαρμόσει και σε σχέση με ορισμένα κοινωνικά ζητήματα. Στα τέλη του 1970 εξασφαλίστηκε χρηματοδότηση, και μια διεθνής ομάδα από δεκαεπτά ειδικούς του MIT, υπό τη διεύθυνση του Dennis Meadows, άρχισε να επεξεργάζεται ένα παγκόσμιο μοντέλο βασισμένο στην προσέγγιση της δυναμικής συστημάτων του Forrester. Καρπός των εργασιών της ομάδας του MIT —εκτός από τις τεχνικές αναφορές που παρουσιάστηκαν σε συνέδρια κατά το 1971— ήταν το βιβλίο της Donella Meadows με τίτλο *The Limits to Growth*, το οποίο απευθύνοταν στο ευρύ κοινό.

To εν λόγω βιβλίο χαιρετίστηκε αμέσως από πολλούς ως επαναστατικό έργο, που μας διδάσκει πώς να

θεωρούμε τη Γη ως κλειστό σύστημα και μας ενθαρρύνει (με τις περίπλοκες αλληλεξαρτημένες σχέσεις, τις εξισώσεις και τους πίνακες δεδομένων που περιλαμβάνει) να εγκύψουμε σε προβλήματα τα οποία φαίνονταν πολύπλοκα σε απογοητευτικό βαθμό. Άλλοι πάλι το κατέκριναν υπογραμμίζοντας τις ασαφείς μεταβλητές, την επινοητικότητα των ανθρώπινων όντων όσον αφορά την υπέρβαση των ορίων, την καταφανή αποτυχία προγενέστερων μοντέλων (και, προπάντων, εκείνου που προτάθηκε από τον Thomas Malthus το 1798) κ.λπ. Κατά ειρωνικό τρόπο, το βιβλίο «γεννήθηκε» μέσα σ’ έναν κόσμο που επί μία εικοσαετία βρισκόταν στην κορυφή της οικονομικής ανάπτυξης. Ποιος νοιαζόταν για τις απαισιόδοξες (υποτίθεται) προβλέψεις του; Ωστόσο, δύο χρόνια αργότερα, ένα εμπάργκο πετρελαίου συγκλόνισε τον βιομηχανικό κόσμο, και το ζήτημα της παραγωγής και της κατανάλωσης ενέργειας προσέλαβε νέα μορφή.

Η διαμάχη που πυροδοτήθηκε από τότε συνεχίζεται και σήμερα, καθώς οι ερευνητές αναθεωρούν τα μοντέλα τους και τα εμπλουτίζουν με νέα στοιχεία που υποστηρίζουν τις αειφορικές (ή βιώσιμες, ή αυτοσυντρούμενες) οικονομίες. Στις μέρες μας, πολλοί επικεντρώνουν το ενδιαφέρον τους περισσότερο σε κρίσιμες εκτιμήσεις των οικονομικών μοντέλων παρά σε «παγκόσμια μοντέλα» τύπου Forrester. Η ίδια η Λέσχη της Ρώμης δίνει πλέον έμφαση σε διαφορετικά ζητήματα, επλέγοντας να εγκύψει σε ξεχωριστές

όψεις των προβλημάτων του πλανήτη (λόγου χάρη, στη διεθνή σύμβαση για το δίκαιο των θαλασσών). Στην πο πρόσφατη μονογραφία της (με τίτλο *Taking Nature into Account*, την οποία επιμελήθηκε ο Wouter Van Diepen, διευθυντής του Ινστιτούτου Περιβάλλοντος και Ανάλυσης Συστημάτων στο Άμστερνταμ) επικρίνει το είδος της «εθνικής λογιστικής» που καθιστά το ακαθάριστο εθνικό προϊόν ένα τόσο καθοριστικό (και παραπομένο) μέτρο της οικονομικής επιτυχίας.

Ας επανέλθουμε όμως στο αρχικό μας ερώτημα: γιατί αξίζει να τιμούμε την επέτειο της έκδοσης του *The Limits to Growth*? Διότι αποτελεί ορόσημο: ήταν η πρώτη φορά που ένα ανεξάρτητο σώμα (και όχι κάποια κυβέρνηση ή τα Ηνωμένα Εθνη) παρήγγειλε την κατασκευή ενός τέτοιου είδους πλανητικού μοντέλου. Το σημαντικότερο, όμως, είναι ότι επρόκειτο για την πρώτη μελέτη που συνέδεσε σαφέστατα την οικονομική ανάπτυξη με τις συνέπειες για το περιβάλλον. Έθεσε υπό αμφισβήτηση το κυριαρχού δόγμα ότι «η ανάπτυξη είναι καλή», και εισήγαγε με δυναμισμό στις πολιτικές διαμάχες μας την έννοια της αειφορικότητας.

Ελπίζουμε ότι το παρόν τεύχος του *Quantum* θα σας κάνει να νιώσετε τον ενθουσιασμό και την αισιοδοξία που εμπνέει η ενασχόληση με τη δυναμική συστημάτων και την κατασκευή παγκόσμιων μοντέλων. Τα πέντε κύρια άρθρα του, που αποτελούν ένα δείγμα από αυτό τον τεράστιο γνωστικό τομέα, θα εμπλουτίσουν τη σκέψη σας με συναρπαστικές νέες ιδέες και τεχνικές.

Το *Quantum* θα ήθελε από αυτή τη θέση να ευχαριστήσει τον καθηγητή μαθηματικών Kurt Kreith του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Νταϊβίς, ο οποίος εργάστηκε ακαταπόνητα για την επιμέλεια του παρόντος ειδικού τεύχους. Με μεγάλη χαρά θα δεχτούμε τα σχόλια των αναγνωστών μας. Οι διευθύνσεις του περιοδικού είναι *Quantum*, 1840 Wilson Boulevard, Arlington VA 22201-3000, USA, και quantum@nsta.org.

— Tim Weber,
Αρχισυντάκτης

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντικές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντικές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντικές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης

Timothy Weber

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Sergey Ivanov

Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων

Edward Lozansky

Σύμβουλοι σύνταξης

Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Κvant

Συμβουλευτική επιφορή

Bernard V. Khoury, Λώντερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

Linda Rosen, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιούανα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λόκει Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητήρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητήρια Μαθηματικών, Λόκει του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάροις, Φλόριντα

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής

Άλεκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Κώστας Κορφιάτης-βιολόγος,

Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Κώστας Σκανδάλης-μαθηματικός, Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός,

Γιώργος Κυριακόπουλος, Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός και Άλεκος Μάραλης-φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια

Γιώργος Κυριακόπουλος

Τυποτεχνική επιμέλεια

Ηρακλής Ντούσης

Υπεύθυνη λογιστρίδια

Μαρία Μάραλη

Ιδρυτικός διευθυντικής σύνταξης και Εδικός συνεργάτης:

Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Εδικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ιόριμα Τεχνολογίας και Ερευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στασιαρχεία, σελιδοποίηση

Δ. Τερπονέρα

Φίλμ, μοντάζ

Γ. Κεραράς

Εκτύπωση

N. Πουλόπουλος

Βιβλιοθεία

Θ. Αρχοντουλάκης

To *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Άλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Άλ. Μάραλης.

Διαφριμίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,

Ισαύρων 10 και Δαφνονήλη, 114 71 Αθήνα,

τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.

Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αροακρείου (Πανεπιστημίου 49),

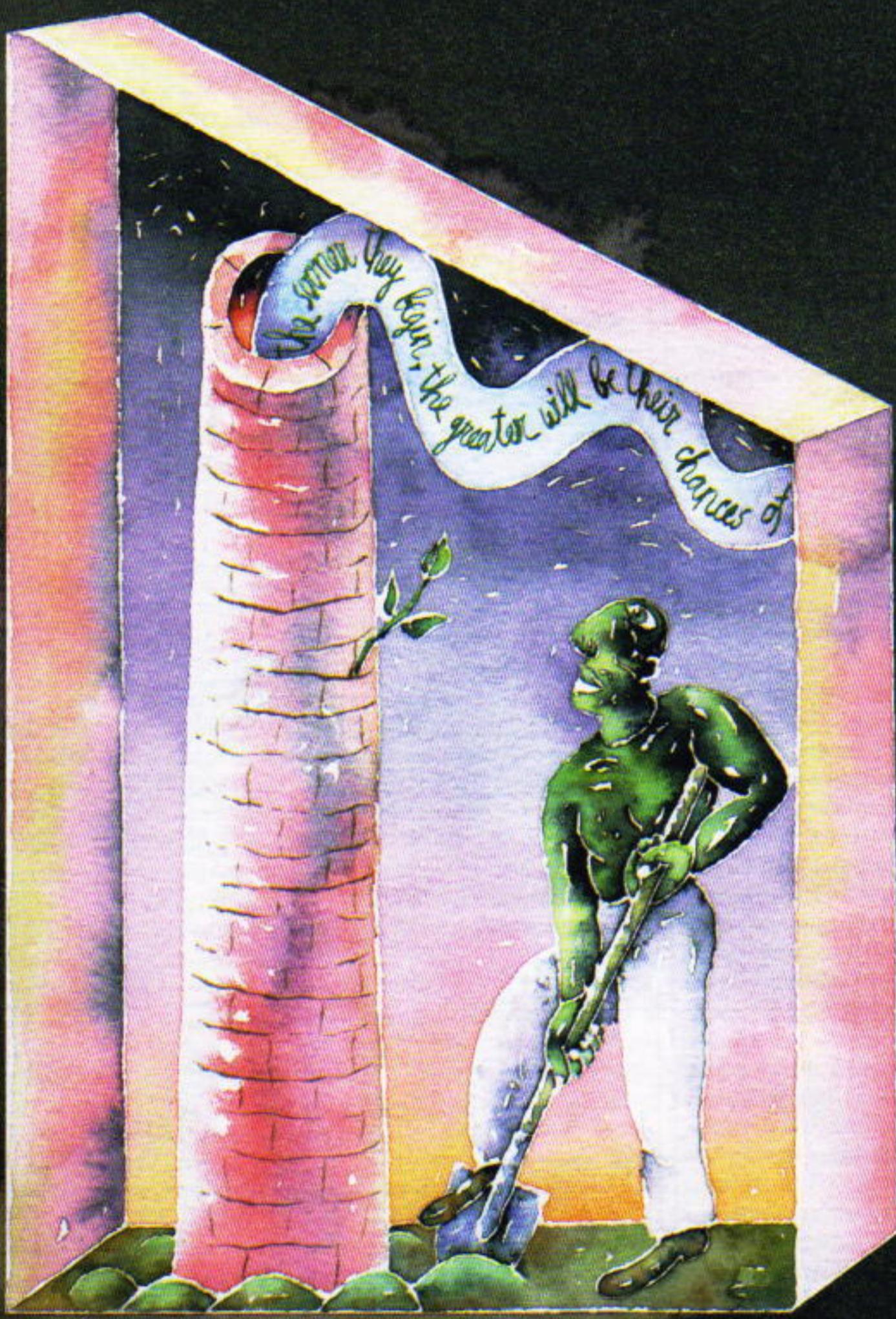
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.

Ετησία συνδρομή: 8.000 δρχ., για ιδιώτες, 14.000 δρχ., για βιβλιοθήκες, μέριμνα και οργανισμούς.

Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.



The earlier they begin, the greater will be their chances of

Αναδρομή στα 'Όρια της ανάπτυξης

Λίγα ιστορικά στοιχεία και μια πρόκληση για τους αναγνώστες μας

Kurt Kreith

EΧΟΥΝ ΠΕΡΑΣΕΙ ΕΙΚΟΣΙ ΠΕΝΤΕ χρόνια αφότου η Λέσχη της Ρώμης δημοσίευσε την προκλητική μελέτη της *The Limits to Growth* (LTG, για συντομία). Για να τιμήσει την επέτειο, το *Quantum* αφιερώνει το παρόν τεύχος σ' εκείνη τη μελέτη και εξετάζει τις επιπτώσεις της. Επιπλέον, καλεί τους αναγνώστες του να ασχοληθούν με την κατασκευή δυναμικών μοντέλων όπως περιγράφεται σ' αυτό και σε επόμενα άρθρα.

Αντίθετα με ό,τι συνηθίζεται στο *Quantum*, η παρούσα εισαγωγή δεν θα πραγματευτεί κάποιο γνωστό επιστημονικό φαινόμενο ή μαθηματική δομή. Εδώ θα αποπειραθούμε να παρουσιάσουμε το πλαίσιο στο οποίο το LTG μάς προτείνει να θεωρήσουμε την ικανότητα της Γης να συντηρεί το ανθρώπινο είδος και τη βιομηχανική μας οικονομία. Επίσης, θα εξοικειωθούμε με ένα σημαντικό είδος λογισμικού, που θα μας βοηθήσει να αναπτύξουμε το δικό μας πλαίσιο στο οποίο θα εξετάσουμε αυτό που οι ιδρυτές της Λέσχης της Ρώμης ονόμαζαν «δυσχερή θέση του ανθρώπινου είδους».

Προτού στραφούμε στο LTG, όμως, θα ήταν ίσως χρήσιμο να θυμηθούμε κάποια άλλα ιστορικά γεγονότα. Όταν ο Νικόλαος Κοπέρνικος δημοσίευσε το μνημειώδες έργο του *De Revolutionibus Orbium Celestium* (Περί της περιστροφής των ουράνιων σφαιρών), προσέφερε παράλληλα στον κόσμο ένα νέο και αμφιλεγόμενο πλαίσιο για τη θεώρηση ενός συστήματος—συγκεκριμένα του ηλιακού, που αποτε-

λείται από τη Γη, τον Ήλιο και τους πλανήτες του. Εκ των υστέρων μπορούμε να δούμε ότι το άμεσο ερώτημα «Έχει δίκιο ο Κοπέρνικος;» δεν ήταν και το σημαντικότερο. Το κοπερνίκειο μοντέλο, όπου η Γη και οι πλανήτες διαγράφουν κυκλικές τροχιές γύρω από τον ακίνητο Ήλιο, είναι λανθασμένο στις λεπτομέρειές του. Ωστόσο, η μελέτη των ουράνιων μεταβολών στο ηλιοκεντρικό πλαίσιο του Κοπέρνικου αποτέλεσε γιγάντιο βήμα, που προετοίμασε το έδαφος για τον Κέπλερ, τον Νεύτωνα και όλους τους άλλους οι οποίοι συμπλήρωσαν τις τελευταίες πινελιές.

Παρόμοια, όταν ο Κάρολος Δαρβίνος δημοσίευσε το *Origin of Species* (Η προέλευση των ειδών), προσπάθησε να εξηγήσει την ποικιλομορφία των ζωικών μορφών στη Γη χωρίς καμιά αναφορά στις σύγχρονες αρχές της κληρονομικότητας (για να μην αναφέρουμε το DNA). Εντούτοις, η δαρβινική θεωρία της φυσικής επλογής παρέσχε ένα σημαντικό νέο πλαίσιο, το οποίο βοήθησε άλλους στοχαστές να διαμορφώσουν μια περισσότερο γόνιμη θεώρηση του φυσικού κόσμου. Χωρίς να υποστηρίζουμε ότι το LTG πρόκειται να διαδραματίσει έναν συγκριτικό ρόλο στην κατανόηση των περιβαλλοντικών προβλημάτων που αντιμετωπίζει ο πολιτισμός μας, αξιζεί να επισημάνουμε ότι, συχνά, η επιστήμη δεν προοδεύει με έναν απόλυτα εύτακτο τρόπο.

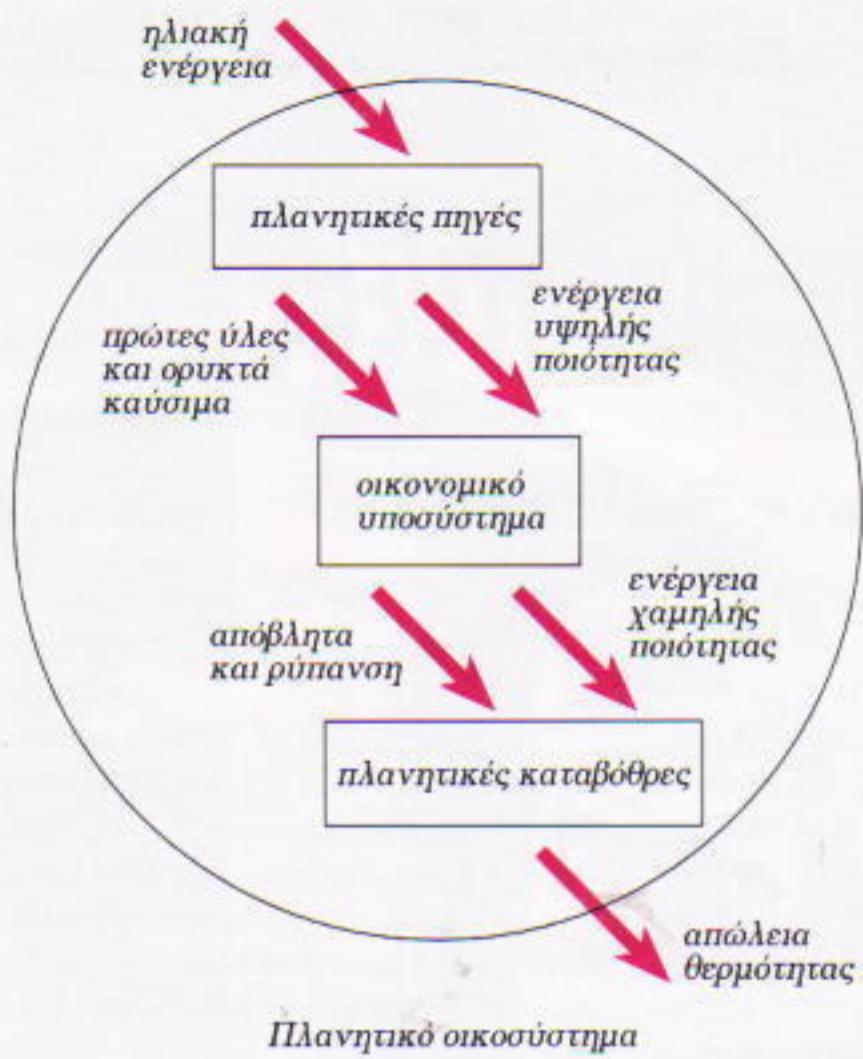
Επίσης, αν κρίνουμε από τέτοια ιστορικά παραδείγματα, συμπεραίνουμε ότι είκοσι πέντε χρόνια δεν επαρ-

κούν για να επλύσουμε τα αμφιλεγόμενα ζητήματα που σχετίζονται με το LTG. Πέρασαν περισσότερα από εκατό χρόνια προτού ο Νεύτων επιτύχει την οριστική επαλήθευση του κοπερνίκειου μοντέλου, αποδεικνύοντας ότι η κίνηση των πλανητών υπακούει στο νόμο του αντίστροφου τετραγώνου. Και παρ' όλο το σεβασμό που εξακολουθεί να εμπνέει ο δαρβινισμός, ο ακριβής ρόλος της φυσικής επιλογής στην εξελικτική αλλαγή παραμένει ανοιχτό ζήτημα ώς τις ημέρες μας.

Αντίστοιχα, το παρόν τεύχος του *Quantum* είναι στην καλύτερη περιπτώση ένας προσωρινός απολογισμός για το LTG. Στόχος του είναι να περιγράψει το πλαίσιο που μας παρέχει το LTG για να αναλογιστούμε «τη δυσχερή θέση του ανθρώπινου είδους», αλλά και να προσφέρει στους αναγνώστες του μια εισαγωγή στο πεδίο της «δυναμικής συστημάτων». Πράγματι, τα ακαταμάχητα επιχειρήματα του LTG για την ανάγκη να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα των περιβαλλοντικών αλλαγών μέσα από το πλέγμα σχέσεων του «πλανητικού οικοσυστήματος» ίσως αποδειχτούν η πιο ανθεκτική στο χρόνο κληρονομιά του.

Το πλανητικό οικοσύστημα

Τί είναι λοιπόν το πλανητικό οικοσύστημα στο οποίο μας επέστησε την προσοχή το LTG με τόση επιμονή; Εν ολίγοις, το LTG μάς καλεί να ενσωματώσουμε την ανθρώπινη δραστηριότητα στο γήινο οικοσύστημα και, συνεπώς, να λάβουμε υπόψη το πλή-



Σχήμα 1

θος των συνδέσεων και των αλληλεπιδράσεων που υπάρχουν στη φύση. Η όλη ιδέα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1 [προέρχεται από το *Beyond the Limits* (Πέρα από τα όρια), τη συνέχεια του LTG, που εκδόθηκε το 1992].

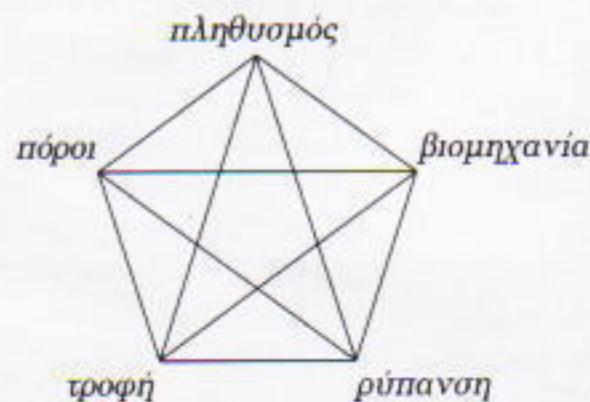
Ένα τέτοιο διάγραμμα θέτει ζητήματα από τις φυσικές εποικίμες τα οποία έχουν αναλυθεί σε προηγούμενα τεύχη του *Quantum*. Ο μεγάλος κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνορο του φυσικού μας συστήματος, το οποίο είναι ανοιχτό στη ροή ενέργειας, αλλά (αν αγνοήσουμε την περιστασιακή είσοδο μετεωριτών ή μεσοπλανητικής οκόνης) κλειστό στη ροή ύλης. Ένα τέτοιο κλειστό σύστημα υπόκειται στους νόμους της θερμοδυναμικής, επομένως είναι δυνατόν να μελετηθεί με βάση τις γνωστές φυσικές αρχές. Στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1996 («Η ισχύς του Ήλιου και εσείς») οι V. και T. Lange επισημαίνουν ότι ένα τετραγωνικό μέτρο προσανατολισμένο κάθετα στις ακτίνες του Ήλιου, σε απόσταση 150.000.000 km από αυτόν, δέχεται 1,4 kJ ηλιακής ακτινοβολίας ανά δευτερόλεπτο. Στο τεύχος του Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1996 («Λιγότερη θερμότητα, περισσότερο φως») ο Y. Amstislavsky επισκοπεί τους φυσικούς νόμους που

διέπουν τη θερμική ακτινοβολία (την «απώλεια θερμότητας» του παραπάνω διαγράμματος).

Μολονότι στο βάθος υπολανθάνει μια τέτοια θερμοδυναμική ανάλυση του πλανητικού οικοσυστήματος, ο πυρήνας του LTG βρίσκεται στο κεντρικό ορθογώνιο, που φέρει τον τίτλο «οικονομικό υποσύστημα», διότι αυτό αποτελεί ένα υποσύστημα του κλειστού πλανητικού οικοσυστήματος που υπόκειται στις αποφάσεις τις οποίες λαμβάνει ο ίδιος ο άνθρωπος. Ενώ ο χαρακτήρας των φυσικών συστημάτων τείνει να είναι

ντετερινιστικός, πιστεύεται ότι το εν λόγω οικονομικό υποσύστημα διέπεται από την ελεύθερη βούληση. Άλλωστε, στο επίκεντρο των προσπαθειών μας για την αντιμετώπιση των περιβαλλοντικών προβλημάτων δεν βρίσκονται παρά οι αποφάσεις που λαμβάνουμε σε ατομικό και σε κυβερνητικό επίπεδο.

Οι συντελεστές του LTG, εστιάζοντας το ενδιαφέρον τους σ' αυτό το οικονομικό υποσύστημα, ξεχώρισαν τρεις κύριες συνιστώσες: τον ανθρώπινο πληθυσμό, την τροφή και τη βιομηχανική παραγωγή. Αν στη συνέχεια συνταυτίσουμε τις «πλανητικές πηγές» με τους φυσικούς πόρους και τις «πλανητικές καταβόθρες» με τη ρύπανση, καταλήγουμε στις πέντε μεταβλητές, τις αλληλεπιδράσεις των οποίων μελετά το LTG.



Σχήμα 2

Με μαθηματικούς όρους, είναι δελεαστική η ιδέα να αναπαραστήσουμε αυτές τις πέντε μεταβλητές του LTG ως κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου (Σχήμα 2). Έργο αποθαρρυντικής δυσκολίας για τους συγγραφείς του LTG ήταν η διατύπωση «συναρτησιακών σχέσεων» μεταξύ των μεταβλητών του Σχήματος 2—δηλαδή, σχέσεων που καθορίζουν πώς οι αλλαγές μιας μεταβλητής επηρεάζουν τις υπόλοιπες. Μερικές από αυτές τις σχέσεις είναι οικείες, όπως η εξάρτηση του πληθυσμού από την τροφή και η εξάρτηση της βιομηχανικής παραγωγής από τους πόρους. Άλλες, όμως, όπως η εξάρτηση της τροφής από τη ρύπανση και τη βιομηχανική παραγωγή είναι περισσότερο δυσδιάκριτες. Η ουσία του «Κόσμου 3», του μοντέλου στο οποίο βασίζεται το LTG, είναι η διατύπωση τέτοιων συναρτησιακών σχέσεων και, κατόπιν, η μετάφρασή τους σε γλώσσα κατανοητή από έναν υπολογιστή.

Γιατί προκάλεσε διαμάχη το LTG;

To *The Limits to Growth* κυκλοφόρησε το 1972, και αποτελούσε τη μη τεχνική αναφορά της ομάδας εργασίας του ερευνητικού προγράμματος που διηγήθηκε στο MIT ο Dennis Meadows. Ύστερα από μια περιγραφή της εκθετικής αύξησης που χαρακτήρισε τον ανθρώπινο πληθυσμό και τη βιομηχανική δραστηριότητα στη διάρκεια του 20ού αιώνα, το LTG παρουσίαζε μια σειρά από «οινάρια» που παρήγαγε το μοντέλο Κόσμος 3. Επίσης, παρέθετε τρία συμπεράσματα, το πρώτο από τα οποία μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη:

- 1α. Αν εξακολουθήσουν αρετάβλητες οι παρούσες τάσεις του παγκόσμιου πληθυσμού, της εκβιομηχάνισης, της ρύπανσης, της παραγωγής τροφής και της εξάντλησης των πόρων, θα φτάσουμε στα όρια ανάπτυξης αυτού του πλανήτη μέσα στα επόμενα εκατό χρόνια.
- 1β. Το πιθανότερο αποτέλεσμα θα είναι μια μάλλον απότομη και ανεξέλεγκτη μείωση τόσο του πληθυσμού όσο και

της βιομηχανικής δυναμικότητας.

Ανέλυσα το Συμπέρασμα 1 σε δύο μέρη, διότι επιθυμώ να διαχωρίσω το αμφιλεγόμενο από το κοινότοπο. Απλοί πρόχειροι υπολογισμοί επιβεβαιώνουν το Συμπέρασμα 1a. Με τους τρέχοντες εκθετικούς ρυθμούς αύξησης (διπλασιασμός κάθε 40 χρόνια), ο ανθρώπινος πληθυσμός θα υπερβαίνει τα 30 δισεκατομμύρια το 2100. Αυτό αντιστοιχεί σε 400 περίπου τετραγωνικά μέτρα καλλιεργήσιμης έκτασης ανά άτομο —σε σύγκριση με τα 8.000 σχεδόν τετραγωνικά μέτρα που χρησιμοποιούνται σήμερα για να εξασφαλίζεται η διατροφή και ο τρόπος ζωής του μέσου Αμερικανού. Αν κάποιοι επιμένουν να αντιτίθενται στο Συμπέρασμα 1a, αρκεί απλώς να αλλάξουμε τα «100 χρόνια» σε «200 χρόνια». Αντί, λοιπόν, να επιμείνουμε σ' αυτό το ζήτημα, ας δεχτούμε τη διαβεβαίωση του LTG ότι η εκθετική αύξηση δεν μπορεί να συντηρείται επ' άπειρον.

Τι συμβαίνει όμως με το Συμπέρασμα 1b; Μήπως σπέρνει άνευ λόγου τον πανικό; Μήπως η προσέγγιση των ορίων οδηγήσει απλώς και μόνο σε μείωση της αύξησης, γεγονός που θα αντιστοιχεί σε ομαλή σταθεροποίηση του ανθρώπινου πληθυσμού και της βιομηχανικής παραγωγής; Πού βασίζεται το LTG ώστε να προβάλλει ως πθανό σενάριο το φάσμα μιας «μάλλον απότομης και ανεξέλεγκτης μείωσης του πληθυσμού και της βιομηχανικής δυναμικότητας»;

Οι επικριτές έχουν θέσει και άλλα ερωτήματα. Ως ποιο βαθμό οι συναρτησιακές σχέσεις που συνδέουν τις πέντε μεταβλητές του LTG αντανακλούν την πολυπλοκότητα του «πραγματικού κόσμου»; Με ποια έννοια οι ιδέες που αναπτύχθηκαν κατά την εργασία με το Κόσμος 3 υποστηρίζουν τα συμπεράσματα του LTG; Σ' αυτό το σημείο ανέκυψε μια σειρά σοβαρότατων ερωτημάτων σχετικά με τη φύση και τη σημασία της κατασκευής μαθηματικών μοντέλων.

Δεν ήταν απρόσμενα αυτά τα ερωτήματα. Πριν από το Κόσμος 3 του LTG είχε προηγηθεί ένα άλλο «παγκόσμιο μοντέλο», το οποίο περιέγραψε ο Jay Forrester στο βιβλίο του *World*

Dynamics (Παγκόσμια δυναμική). Τόσο το LTG όσο και το *World Dynamics* υπογράμμιζαν τη διαφορά μεταξύ προβλέψεων και σεναρίων, επισημαίνοντας ότι τα υπολογιστικά μοντέλα τείνουν να παράγουν σενάρια. Επιπλέον, αυτοί οι συγγραφείς δεν υποστήριξαν ότι θα αναπαραστήσουν τον πραγματικό κόσμο με όρους πέντε μόνο μεταβλητών. Τόνιζαν, όμως, ότι όλες οι ανθρώπινες αποφάσεις βασίζονται σε κάποιο είδος διανοητικού μοντέλου και πως, αντίθετα απ' ότι συμβαίνει με το Κόσμος 3, πολλές από τις παραδοχές που υπεισέρχονται στα διανοητικά μοντέλα μας δεν είναι ρητά διατυπωμένες. Οι συγγραφείς του LTG πίστευαν ότι το Κόσμος 3, λαμβάνοντας υπόψη φαινόμενα που δεν είναι ούτε διαισθητικά αλλά ούτε και αποτελούν μέρος της εμπειρίας μας, προσέφερε νέες ιδέες, οι οποίες μπορούσαν να αποτελέσουν πολύτιμες προσθήκες στα δικά μας διανοητικά μοντέλα.

Οι αναγνώστες του *Quantum* που επιθυμούν να παρακολουθήσουν αυτή τη διαμάχη, μπορούν να ξεκινήσουν διαβάζοντας το *The Limits to Growth* ή τη συνέχειά του, το *Beyond the Limits*. Θα είναι τότε σε θέση να αντιμετωπίσουν τα επιχειρήματα των επικριτών του LTG (η σχετική βιβλιογραφία παρατίθεται στο τέλος του άρθρου). Για τους δικούς μας σκοπούς, όμως, θα ήταν περισσότερο γόνιμο να αντιπαρέλθουμε αυτή τη διαμάχη και να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στις υποκείμενες ιδέες που πρέρχονται από τη δυναμική συστημάτων. Διότι η εξοικείωση με μερικές από τις τεχνικές «μοντελοποίησης» που εμφανίζονται στο LTG θα μας βοηθήσει να καταλήξουμε στα δικά μας συμπεράσματα σχετικά με τις χρήσεις και τους περιορισμούς του Κόσμος 3 και των μαθηματικών μοντέλων γενικότερα.

Ωστόσο, προτού αφήσουμε στην άκρη το LTG, ας αναφέρουμε τα δύο άλλα συμπεράσματά του. Το Συμπέρασμα 2 αντανακλά το γεγονός ότι το Κόσμος 3 δεν είναι εγγενώς «κασσανδρικό». Δηλαδή, αν αλλάξουμε κάποια από τα δεδομένα στα οποία βασίζονται τα πιο απαισιόδοξα σενάρια του LTG, το Κόσμος 3 είναι σε θέση να παραγάγει σενάρια που ενσωματώνουν «βιω-

σιμότητα». Σύμφωνα με αυτό το πνεύμα, το δεύτερο συμπέρασμα δηλώνει:

2. Είναι δυνατόν να αλλάξουν αυτές οι τάσεις αύξησης και να εγκαθιδρυθεί μια κατάσταση οικολογικής και οικονομικής σταθερότητας που να είναι αειφορική (βιώσιμη, αυτοσυντηρούμενη). Η κατάσταση παγκόσμιας ισορροπίας θα μπορούσε να σχεδιαστεί έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι βασικές υλικές ανάγκες κάθε ανθρώπου και να παρέχεται σε όλους ίση δυνατότητα για αξιοποίηση του προσωπικού ανθρώπινου δυναμικού τους.

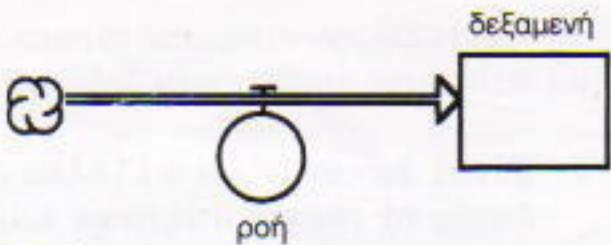
Το τρίτο και τελικό συμπέρασμα, στο οποίο θα επανέλθουμε εκ νέου αφού πρώτα ασχοληθούμε με την κατασκευή κάποιων μοντέλων, μας βεβαιώνει ότι:

3. Αν οι ανθρώποι αποφασίσουν να αγωνιστούν για το δεύτερο παρά για το πρώτο ενδεχόμενο, όσο νωρίτερα αρχίσουν να εργάζονται προς αυτή την κατεύθυνση τόσο μεγαλύτερες θα είναι οι πιθανότητες επιτυχίας.

Εισαγωγή στο STELLA

Κατά την ανάπτυξη του Κόσμος 3, οι συγγραφείς του LTG χρησιμοποίησαν ιδέες από τη δυναμική συστημάτων που σήμερα πλέον είναι ενσωματωμένες σε πολλά είδη λογισμικού. Μεταξύ αυτών είναι ένα αξιοσημείωτο λογισμικό προσομοιώσεων βασισμένο σε εικονίδια, το STELLA®. Προετοιμάζοντας το έδαφος για μερικά από τα άλλα μοντέλα που θα γνωρίσετε στο παρόν τεύχος του *Quantum*, είναι χρήσιμο να περιγράψουμε ορισμένα από τα χαρακτηριστικά του STELLA.

Η κατασκευή μοντέλων με το STELLA βασίζεται σε τέσσερα εικονίδια που μας επιτρέπουν να αναπαριστούμε δυναμικά συστήματα. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας ένα παράδειγμα με δύο μόνο εικονίδια. Το πρώτο είναι ένα ορθογώνιο, που αναπαριστά μια δεξαμενή (ή απόθεμα) και το δεύτερο εί-



Σχήμα 3

ναι ένας αγωγός με βέλος στη μια άκρη, που ονομάζεται ροή (Σχήμα 3).

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το απλό σύστημα του Σχήματος 3 είναι ένα δοχείο που γεμίζει με νερό. Αν χρησιμοποιήσουμε ως μονάδα όγκου το λίτρο και ως μονάδα χρόνου το λεπτό, η μονάδα της ροής θα είναι το λίτρο/λεπτό.

Μια από τις οημαντικότερες ικανότητες του STELLA είναι η εξής: με δεδομένη μια συγκεκριμένη ροή (εκφρασμένη σε λίτρα ανά λεπτό), μπορεί να υπολογίσει την ποσότητα (λίτρα) νερού που συγκεντρώνονται στο δοχείο σε T λεπτά.

Αν η ροή είναι σταθερή (ας πούμε, 3 λίτρα ανά λεπτό), η απάντηση είναι εύκολη. Η ποσότητα νερού που συγκεντρώνεται στο δοχείο σε T λεπτά είναι $3T$ (3 είναι ο ρυθμός της ροής και T το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί). Όταν όμως η ροή μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, το πρόβλημα γίνεται απαιτητικότερο. Ας συμβολίσουμε τη μη σταθερή ροή με $f(t)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την ποσότητα νερού που συγκεντρώνεται στο δοχείο σε χρόνο T , αν (1) καταγράψουμε το ρυθμό της ροής σε τακτά μικρά χρονικά διαστήματα, (2) υποθέσουμε ότι η ροή είναι ουσιαστικά σταθερή μεταξύ δύο τέτοιων καταγραφών, και (3) υπολογίσουμε την προκύπτουσα ποσότητα νερού σ' αυτά τα χρονικά διαστήματα εφαρμόζοντας τον κανόνα «όγκος = ρυθμός × χρόνος».

Ας αποσαφηνίσουμε αυτή την ιδέα εξετάζοντας την περίπτωση ενός δοχείου που γεμίζει επί 4 λεπτά με ροή $f(t) = 2t + 1$ λίτρα/λεπτό. Θα συμβολίσουμε με $A(t)$ την προσεγγιστική τιμή της ποσότητας του νερού που συγκεντρώνεται στο δοχείο (Σχήμα 4).

Αν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την $A(t)$ στις στιγμές $t = 1, 2, 3$ και 4 , τότε αρκεί η βοήθεια ενός απλού προγράμματος λογιστικού φύλλου (δείτε το δικό μου άρθρο «Απειροστικός λογισμός — ναι ή όχι;» στο τεύχος

Χρόνος	$f(t)$	$A(t)$
$0 \leq t \leq 1$	1	t
$1 \leq t \leq 2$	3	$1 + 3(t - 1)$
$2 \leq t \leq 3$	5	$4 + 5(t - 2)$
$3 \leq t \leq 4$	7	$9 + 7(t - 3)$

Σχήμα 4

Ιανουαρίου /Φεβρουαρίου 1995 του Quantum). Αυτό το λογιστικό φύλλο αντιστοιχεί στην κατ' επανάληψη εφαρμογή του κανόνα

$$A(T) = A(T - 1) + f(T - 1) \quad (1)$$

για $T = 1, 2, 3$ και 4 (Σχήμα 5).

Πρόβλημα 1. Επαληθεύστε ότι η εξίσωση (1) αντιστοιχεί στην $A(T) = A(0) + f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + \dots + f(T - 1) \cdot 1$, όπου $A(0)$ είναι ο όγκος του νερού τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Πρόβλημα 2. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Σχήματος 4 (ή του Σχήματος 5) στη ροή $f(t) = 1 + t^2$ για να υπολογίσετε το $A(4)$.

Αν όμως επιθυμούμε μεγαλύτερη ακρίβεια, μπορούμε να καταγράψουμε τη ροή συχνότερα από μία φορά το λεπτό. Αν καταγράψουμε μια τέτοια ροή τέσσερις φορές το λεπτό, θα χρειαστούμε την κατ' επανάληψη εφαρμογή του κανόνα $A(t) = A(t - 0,25) + f(t - 0,25)/4$. Όπως στο Πρόβλημα 1, παραπάνω, οδηγούμαστε στην

$$A(T) = A(0) + \frac{f(0)}{4} + \frac{f(0,25)}{4} + \frac{f(0,5)}{4} + \frac{f(0,75)}{4} + \dots + \frac{f(T - 0,25)}{4}$$

Οσοι είναι εξοικειωμένοι με τον απειροστικό λογισμό θα αναγνωρίσουν ότι η $A(T)$ είναι απλώς το «άθροισμα Riemann που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα της $f(t)$ από $t = 0$ έως $t = T$ ». Με άλλα λόγια, πίσω από τα φιλικά εικονίδια του STELLA κρύβεται ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου που

εκτελεί αριθμητική ολοκλήρωση, και συνεπώς δίνει προσεγγιστικές λύσεις σε προβλήματα όπως

$$\frac{dA}{dt} = f(t),$$

$$A(0) = A_0.$$

Ωστόσο, ένα από τα χαρίσματα των προγραμμάτων τέτοιου είδους είναι ότι μας επιτρέπουν να αναλύσουμε εννοιακά ένα δυναμικό σύστημα και να το «τρέξουμε», χωρίς να απαιτείται η χρήση απειροστικού λογισμού. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό μάς παρέχει επίσης τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε σύνθετα μοντέλα, μορφοποιημένα βάσει εικονιδίων, γεγονός που απαιτεί μόνο άλγεβρα και συναρτησιακό συμβολισμό.

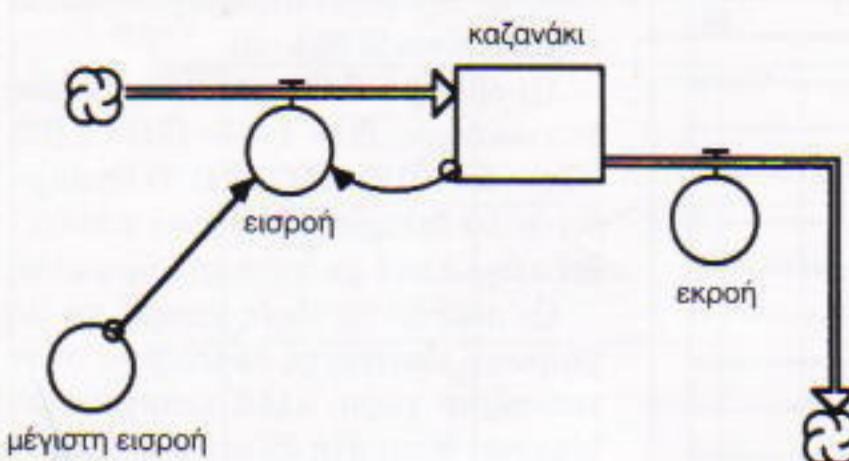
Θα παρουσιάσουμε τα άλλα δύο εικονίδια του STELLA εξετάζοντας ένα κοινότατο παράδειγμα: το καζανάκι μιας συνηθισμένης τουαλέτας! Σ' αυτό έχουμε μια εκροή (ή οποία δημιουργείται από το φαινόμενο σιφωνία) και μια εισροή (ή οποία το ξαναγεμίζει με νερό). Μέσα στο καζανάκι υπάρχει ένα «φλοτέρ» το οποίο συνδέει το ρυθμό της εισροής με την ποσότητα του νερού που υπάρχει στο καζανάκι, και είναι υπεύθυνο για τη διακοπή της ροής μόλις το νερό φτάσει στο προκαθορισμένο επίπεδο. Κατά τη μοντελοποίηση ενός τέτοιου συστήματος, το STELLA χρησιμοποιεί ένα συνδετήρα, για να αναπαραστήσει το γεγονός ότι η εισροή εξαρτάται από την ποσότητα του νερού μέσα στο καζανάκι (Σχήμα 6).

Στο Σχήμα 6 περιλαμβάνεται επίσης ένα κυκλικό εικονίδιο που ονομάζεται μετατροπέας και μπορεί να χρησιμεύσει για την εισαγωγή μιας μεταβλητής ή «παραμέτρου» που επηρέαζει τη δυναμική του συστήματος.

Στα πλαίσια του Σχήματος 5, ο μετατροπέας που ονομάζεται **μέγιστη**

A	B	C
1 Time	$f(t)$	$A(t)$
2 0	$=2*A2+1$	0
3 $=A2+1$	$=2*A3+1$	$=C2+B2*1$
4 $=A3+1$	$=2*A4+1$	$=C3+B3*1$
5 $=A4+1$	$=2*A5+1$	$=C4+B4*1$
6 $=A5+1$	$=2*A6+1$	$=C5+B5*1$

Σχήμα 5



Σχήμα 6

εισροή συνδέεται με την **εισροή**. Εν προκειμένω, αυτό που έχουμε κατά νου είναι το γεγονός ότι τα καζανάκια της τουαλέτας έχουν βαλβίδες ασφαλείας ρυθμισμένες να ελέγχουν τον μέγιστο ρυθμό με τον οποίο γεμίζουν.

Αφού δημιουργήσουμε ένα τέτοιο σύστημα, οι θυρίδες διαλόγου του STELLA μάς επιτρέπουν να προγραμματίσουμε στο λογιστικό φύλλο που βρίσκεται πίσω από τα εικονίδια κανόνες όπως τους εξής:

1. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το **καζανάκι** περιέχει 11 λίτρα νερό — δηλαδή, $A(0) = 11$.
2. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ και επί 2 δευτερόλεπτα το καζανάκι αδειάζει με ρυθμό εκροής 7 λίτρα / δευτερόλεπτο.
3. Ο μετατροπέας **μέγιστη εισροή** έχει ρυθμιστεί στα 2 λίτρα / δευτερόλεπτο.
4. Η **εισροή** ισούται με το μικρότερο από τα μεγέθη **μέγιστη εισροή** και **11 – καζανάκι**.

Όταν τραβάμε αυτό το συμβολικό καζανάκι, το νερό εκρέει ταχύτατα από το εσωτερικό του επί δύο δευτερόλεπτα. Μόλις ο όγκος του γίνει μικρότερος από 11 λίτρα, το καζανάκι αρχίζει να ξαναγεμίζει, όπως ορίζεται από την **εισροή** στον Κανόνα 4, μέχρι να ξαναφτάσει τα 11 λίτρα.

Το STELLA δεν θα υπολογίσει μόνο τις παραπάνω αλλαγές στις μεταβλητές, αλλά θα σχεδιάσει και ένα γράφημα το οποίο περιγράφει τη δυναμική του συστήματος (Σχήμα 7).

Όπως ίσως να έχετε ήδη μαντέψει, αυτές οι υπολογιστικές τεχνικές είναι δυνατόν να εφαρμοστούν και σε άλλα φαινόμενα εκτός από καζανάκια και ροές νερού. Η δεξαμενή

μπορεί να αναπαριστά έναν πληθυσμό, ενώ οι εισροές και εκροές μπορεί να αντιπροσωπεύουν γεννήσεις και θανάτους. Η δεξαμενή μπορεί επίσης να αντιπροσωπεύει τα κεφάλαια μιας τράπεζας, ενώ οι εισροές και εκροές, καταθέσεις και αναλήψεις. Πράγματι, τεράστιο πλήθος μεταβλητών που υπόκεινται σε αυξομειώσεις σύμφωνα με κάποιον μαθηματικό κανόνα μπορεί να αναπαρασταθεί από τέτοια εικονίδια. Επιπλέον, ο ρυθμός αλλαγής μιας μεταβλητής μπορεί να εξαρτάται από την ίδια τη μεταβλητή (φαινόμενο που ονομάζεται *ανάδραση*) και από την κατάσταση των άλλων μεταβλητών (φαινόμενο που ισχύει στα *συστήματα*).

Έχοντας αυτό το υπόβαθρο, μπορούμε πλέον να αναπτύξουμε το Σχήμα 2 με βάση τις φόρμες του STELLA. Οι κορυφές του πενταγώνου θα αντικατασταθούν από πέντε «τομείς» που περιέχουν δεξαμενές με πολυάριθμες εισροές και εκροές. Τα δέκα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές θα αντικατασταθούν από μια μεγάλη ομάδα συνδετήρων και μετατροπέων που αντανακλούν τις συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ πληθυσμού, τροφής, ρύπανσης, βιομηχανικής δυναμικότητας και φυσικών πόρων. Το «εικονιδιακό» διάγραμμα που

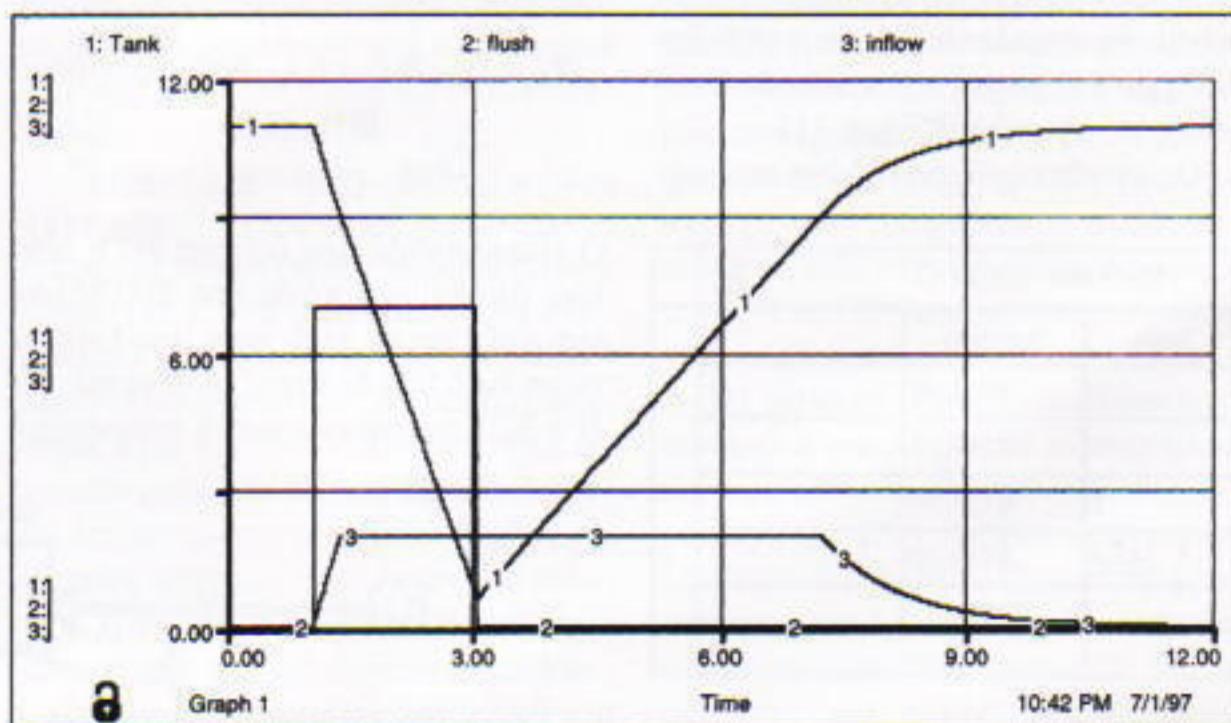
προκύπτει, παρέχει ένα λεπτομερές σχέδιο σε όσους αναζητούν την πλήρη κατανόηση των υποθέσεων στις οποίες βασίζεται το συγκεκριμένο «παγκόσμιο μοντέλο».

Το 1972, όταν εκδόθηκε το LTG, λιγοστοί ήταν σε θέση να κατανοήσουν τέτοιου είδους μοντέλα, τις χρήσεις τους και τους περιορισμούς τους. Αντίθετα (όπως θα δούμε στη συνέχεια), ένα λογισμικό όπως το STELLA επιτρέπει πλέον σε οποιονδήποτε κάτοχο ενός σύγχρονου υπολογιστή γραφείου να προσεγγίσει τις υποκείμενες ιδέες τέτοιων μοντέλων.

Δυναμική πληθυσμών

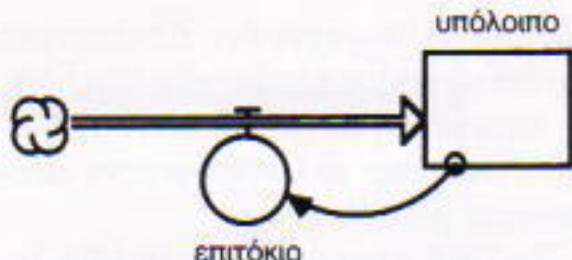
Στο άρθρο «Απειροστικός λογισμός — ναι ή όχι;» χρησιμοποιήσαμε λογιστικά φύλλα και παραδείγματα από την τραπεζική πρακτική, για να περιγράψουμε μερικές σημαντικές ιδέες της δυναμικής πληθυσμών. Η «κατάθεση 100 δολαρίων με ετήσιο επιτόκιο 10%» ήταν η αφετηρία μας για να αναπτύξουμε την έννοια της εκθετικής αύξησης, ενώ παραλλαγές αυτού του τραπεζικού ζητήματος οδήγησαν και σε άλλα φαινόμενα. Ας δούμε τώρα ποιες δυνατότητες παρέχει το STELLA για να πραγματευτούμε τις ίδιες ιδέες, και ειδικότερα το θέμα 2 όπως διατυπώθηκε στο άρθρο «Απειροστικός λογισμός — ναι ή όχι;».

Το υπόλοιπο μιας κατάθεσης 100 δολαρίων με ετήσιο επιτόκιο 10% αντιστοιχεί στα εικονίδια του STELLA, που παρουσιάζονται στο Σχήμα 8. Πρέπει και εδώ να χρησιμοποιήσουμε τις θυ-



Σχήμα 7

(tank: καζανάκι, flush: εκροή, inflow: εισροή, time: χρόνος)



Σχήμα 8

ρίδες διαλόγου του STELLA, για να καθορίσουμε ότι το αρχικό **υπόλοιπο** είναι 100 δολάρια και ότι το επιτόκιο είναι **0,1 · υπόλοιπο**. Αν έχουμε απλό ετήσιο ανατοκισμό, οδηγούμαστε στα αποτέλεσματα του Σχήματος 9.

Ωστόσο, μπορούμε να ζητήσουμε από το STELLA να ανατοκίζει το κεφάλαιό σας ανά τετράμηνο, χρησιμοποιώντας τον κανόνα $B(t + 0,25) = B(t) + 0,025 \cdot B(t)$ (Σχήμα 10). Αυτό το επιτυγχάνουμε θέτοντας $DT = 0,25$ στο μενού «Time Specs» του STELLA. (Στις περισσότερες από τις παλιές εκδόσεις του STELLA προκαθορισμένη επλογή είναι η $DT = 0,25$. Εκεί, για να έχουμε ετήσιο ανατοκισμό, πρέπει να θέσουμε $DT = 1$.)

Στη συνέχεια, το θέμα 2 («Απειροστικός λογισμός — ναι ή όχι;») βασίστηκε σε μια εξαιρετικά ύποπτη τράπεζα, την «Αδιαφανείς Δανεισμοί και Αποταμιεύσεις», που προσέφερε στους πελάτες της το εξαιρετικά ελκυστικό επιτόκιο 10%. Ωστόσο, η ΑΔ&Τ (όπως θεωρήσαμε τον διακριτικό της τίτλο), επιβαρύνει τους λογαριασμούς με μια «ελάχιστη» αμοιβή υπηρεσιών ίση με το 0,05% του τετραγώνου του υπολοίπου σας! Συναρτήσει των εικονιδίων του STELLA, αυτό σημαίνει ότι η δεξαμενή **υπόλοιπο** είναι συνδεδεμένη με μια εκροή την οποία θα ονομάσουμε **αμοιβή** (Σχήμα 11).

Οι συνδετήρες μεταξύ **υπόλοιπο**

Years	Balance		
.00	\$100.00		
.25	\$102.50		
.50	\$105.06		
.75	\$107.69		
1.00	\$110.38		
1.25	\$113.14		
1.50	\$115.97		
1.75	\$118.87		
2.00	\$121.84		
2.25	\$124.89		
2.50	\$128.01		
2.75	\$131.21		
Final	\$134.49		

Σχήμα 10

(years: έτη, balance: υπόλοιπο, final: τελική περίοδος)

που, **επιτοκίου** και **αμοιβής** μας επιτρέπουν να καθορίσουμε ότι **επιτόκιο = 0,1 · υπόλοιπο**, και ότι **αμοιβή = 0,0005 · υπόλοιπο · υπόλοιπο**. Όταν δώσουμε αυτούς τους ορισμούς στις θυρίδες διαλόγου, το STELLA παράγει αμέσως ένα γράφημα το οποίο περιγράφει πώς αυξάνονται 100 δολάρια κατατεθειμένα στην ΑΔ&Τ (Σχήμα 12).

Μια κατάθεση 100 δολαρίων στην ΑΔ&Τ δεν υπερβαίνει ποτέ τα 200 δολάρια. Για να δούμε γιατί συμβαίνει αυτό, ας συμβολίσουμε με $B(t)$ το υπόλοιπο έπειτα από t χρόνια. Αν θεωρήσουμε ότι ο ανατοκισμός είναι ετήσιος, μπορούμε να γράψουμε τον κανόνα της ΑΔ&Τ ως εξής:

$$\begin{aligned} B(t+1) - B(t) &= 0,1 \cdot B(t) - 0,0005 \cdot \\ &\quad B(t) \cdot B(t) \\ &= 0,0005 \cdot (200 - B(t)) \cdot B(t). \end{aligned}$$

Ο τύπος αυτός μας δείχνει ότι η αξία των υπολοίπων κάτω από 200 δολάρια αυξάνεται, ενώ των υπολοίπων πάνω από 200 δολάρια μειώνεται. Αν $B = 200$, η ετήσια αμοιβή υπηρεσιών

$(0,0005 \cdot B^2)$ είναι ακριβώς ίση με το ετήσιο επιτόκιο $(0,1 \cdot B)$.

Πρόβλημα 3. Εστω τετραμηνιαίος ανατοκισμός, $B(t + 1/4) - B(t) = 0,025 \cdot B(t) - 0,000125 \cdot B(t) \cdot B(t)$. Τι θα συμβεί σε 50 δολάρια που έχουν κατατεθεί στην ΑΔ&Τ με αυτή τη συμφωνία;

Οι παραπάνω ιδέες μπορεί να μη χάρουν ιδιαίτερης εκτίμησης στον τραπεζικό χώρο, αλλά κατέχουν εξέχουσα θέση στη δυναμική πληθυσμών. Κατά τον 19ο αιώνα, ο βέλγος βιολόγος Verhulst υπέθεσε ότι κάτω από συγκεκριμένες περιοριστικές συνθήκες (για παράδειγμα, ζυμομύκητες σε κλειστό δοχείο) οι πληθυσμοί αυξάνονται σύμφωνα με τον κανόνα $dN/dt = a \cdot N(t) - b \cdot N(t)^2$, όπου η σταθερά a εκφράζει το ρυθμό ανεξέλεγκτης αύξησης του πληθυσμού, ενώ η b τη δραστικότητα κάποιων εξωτερικών περιορισμών στη συνεχή αύξηση. Αν θεωρήσουμε ετήσια περίοδο «ανατοκισμού», η dN/dt αντιστοιχεί στην $N(t+1) - N(t)$, και η εξίσωση Verhulst γίνεται

$$\begin{aligned} N(t+1) - N(t) &= a \cdot N(t) - b \cdot N(t)^2 \\ &= b \cdot \left[\frac{a}{b} - N(t) \right] \cdot N(t). \end{aligned}$$

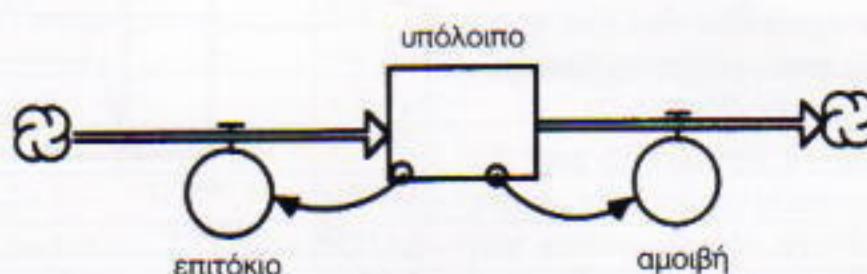
Το γεγονός ότι ένας τέτοιος πληθυσμός αυξάνει αν $N < a/b$ και μειώνεται αν $N > a/b$ μας οδηγεί να ερμηνεύσουμε το λόγο a/b ως τη «φέρουσα ικανότητα» (ή βιοχωρητικότητα) του συστήματος. Δηλαδή, αν $N(0) < a/b$, ο πληθυσμός θα αυξηθεί, χωρίς όμως να υπερβεί ποτέ την οριακή τιμή a/b . Στο LTG, τέτοιες συναρτήσεις σχήματος S λέγεται ότι αντιστοιχούν σε σιγμοειδή ανάπτυξη.

Φυσικά, τέτοια μοντέλα δεν πρέπει να τα παίρνουμε πολύ τοις μετρητοίς. Ο κανόνας $N(t+1) - N(t) = a \cdot N(t) - b \cdot N(t)^2$ οδηγεί επίσης σε σιγμοειδή ανάπτυξη — αλλά προς διαφορετικό όριο. Για να το διαπιστώσετε, αρκεί να υπολογίσετε τι συμβαίνει όταν η ΑΔ&Τ υπολογίζει το 0,05% της

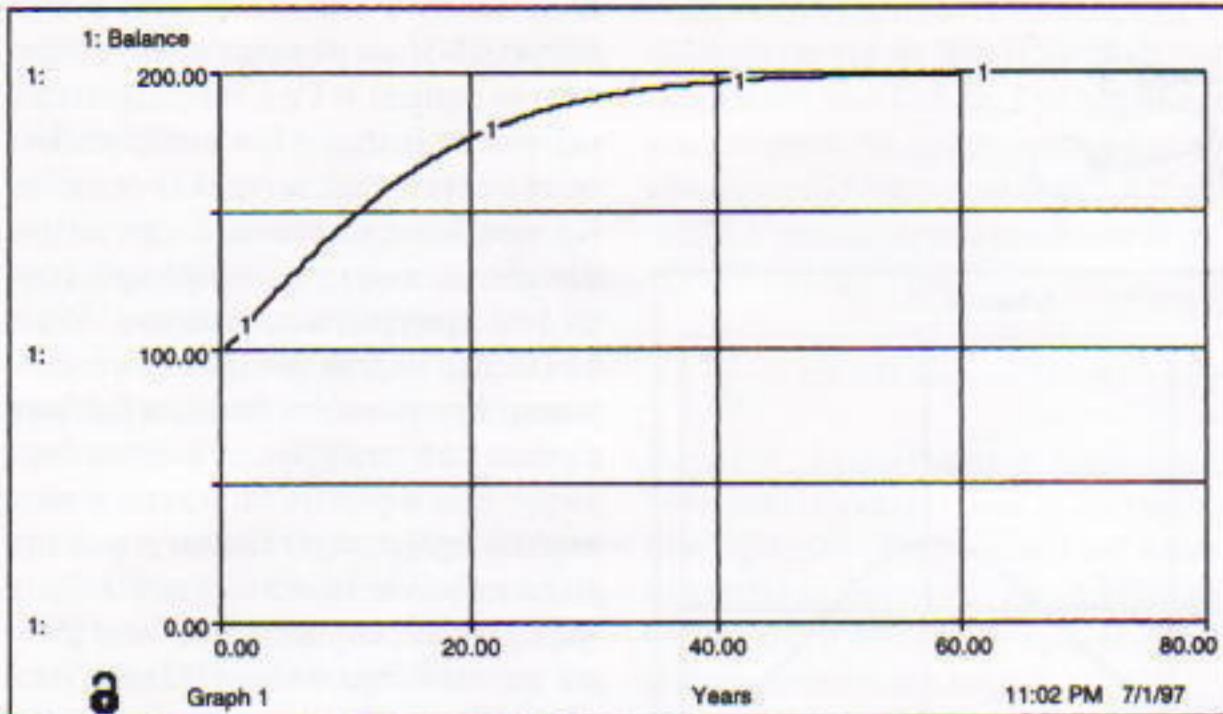
Time	Balance	
0	\$100.00	
1	\$110.00	
2	\$121.00	
Final	\$133.10	

Σχήμα 9

(time: χρόνος, balance: υπόλοιπο, final: τελική περίοδος)



Σχήμα 11



Σχήμα 12

(balance: υπόλοιπο, years: έτη)

αμοιβής της στον κύβο του υπολοίπου σας! Το σημαντικό στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι μια γραμμική ανάδραση « $a \cdot N(t)$ » αντισταθμίζεται από ένα αντίθετο φαινόμενο « $-b \cdot f(N(t))$ », όπου η $f(N)$ είναι της μορφής N^p , $p > 1$. Τέτοιοι όροι «υπεργραμμικής απόσβεσης» δημιουργούν επίσης μια μορφή σιγμοειδούς ανάπτυξης, τα όρια της οποίας καθορίζονται από τα a και b .

Πρόβλημα 4. Βρείτε τη φέρουσα ικανότητα ενός περιβάλλοντος στο οποίο ο πληθυσμός αυξάνεται σύμφωνα με τον κανόνα $N(t+1) - N(t) = 0,1 \cdot N - 0,0005 \cdot N^3$. Κάντε το ίδιο για $N(t+1) - N(t) = 0,1 \cdot N - 0,0005 \cdot N^{3/2}$.

Επιστροφή στο LTC

Το μοντέλο Κόσμος 3 του LTG εξετάζει τις αλληλεπιδράσεις πέντε διαφορετικών μεταβλητών, ενώ η εξισώση Verhulst ασχολείται μόνο με μία. Και όμως, ακόμη και μια τέτοια μονοδιάστατη «σκιά» του Κόσμους 3 μπορεί να προσφέρει σημαντικές ιδέες για τα φαινόμενα που τίθενται στο LTG. Ας υποθέσουμε πως, αφού βρήκαμε ότι το Σχήμα 9 δημιουργεί εκθετική αύξηση (όπως αυτή που χαρακτηρίζει τον ανθρώπινο πληθυσμό και τη βιομηχανική παραγωγή κατά τον 20ό αιώνα), κάναμε κάποιους πρόχειρους υπολογισμούς που υποδεικνύουν ότι η εν λόγω εκθετική αύξηση δεν είναι δυνατόν να διατηρηθεί κατά τον 21ό αιώνα. Κατόπιν, εποιητέοντας στις

σεβαστές ιδέες του Verhulst από τη δυναμική πληθυσμών, υποθέσαμε ότι υπάρχει ένα είδος «υπεργραμμικής απόσβεσης» της μορφής $-bN^2$, η οποία ίσως εκφράζει τις συνέπειες της ρύπανσης και της μείωσης των πόρων του παγκόσμιου οικοσυστήματος.

Όλα καλά ως εδώ. Η σιγμοειδής ανάπτυξη που δίνει το μοντέλο του Verhulst αντιστοιχεί σε μια «ομαλή προσγείωση», όπου ο πληθυσμός σταθεροποιείται στη φέρουσα ικανότητά του $N = a/b$. (Το ιδιαίτερο γεγονός ότι η φέρουσα ικανότητα μπορεί και αυτή να αλλάζει με την πάροδο του χρόνου περιγράφεται στις εξισώσεις (2) και (3) στη συνέχεια.) Εδώ εγείρεται το εξής σημαντικό ερώτημα: Ποιο ήταν το στοιχείο του Κόσμους 3 που αντιστοιχούσε σε μια «μάλλον απότομη και ανεξέλεγκτη μείωση του πληθυσμού και της βιομηχανικής δυναμικότητας»;

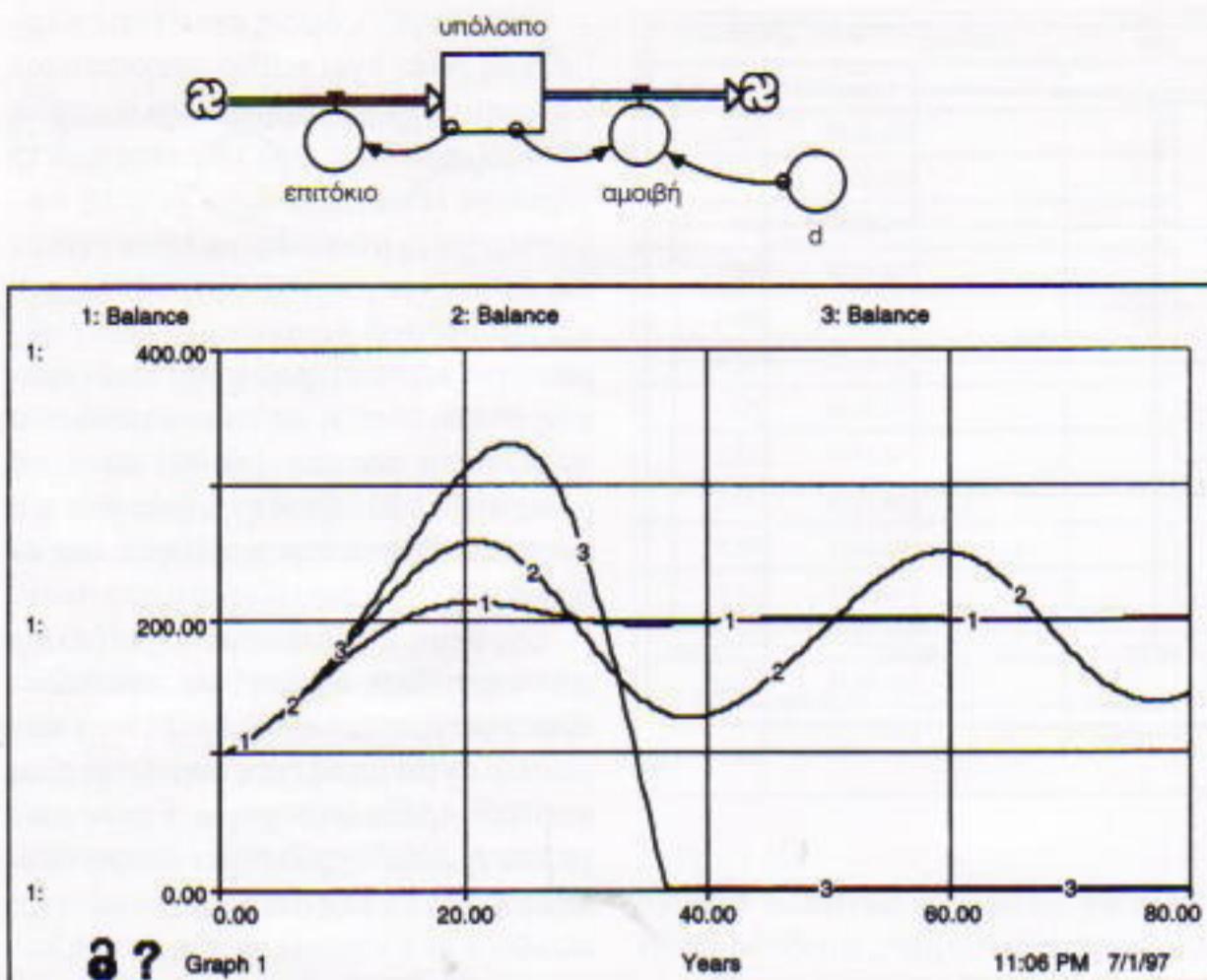
Το θέμα 2 στο άρθρο «Απειροστικός λογισμός — ναι ή όχι;» υποδεικνύει ότι μέρος τουλάχιστον της απάντησης βρίσκεται σ' ένα φαινόμενο που ονομάζεται «ανάδραση με χρονική υστέρηση». Θυμηθείτε πως, όταν απαντούσαμε στις θυρίδες διαλόγου που αντιστοιχούν στο Σχήμα 12, υποδείχαμε ότι το τρέχον υπόλοιπο καθορίζει τις πληρωμές και αναλήψεις στο τέλος του χρόνου. Παρόμοιες παραδοχές υπόκεινται και της εξισώσης του Verhulst και των σχετικών μοντέλων στα οποία η υπεργραμμική απόσβεση οδηγεί σε σιγμοειδή ανάπτυξη.

Τι θα συμβεί, όμως, όταν ένας πληθυσμός εισαγάγει καθυστερήσεις στον μη γραμμικό όρο απόσβεσης ο οποίος καθορίζει τα όρια που τίθενται από τη φέρουσα ικανότητά του; Τέτοιες καθυστερήσεις μπορούν να προκύψουν ως αποτέλεσμα της εξάρτησης της κοινωνίας από μη ανανεώσιμους πόρους για τη συντήρηση της οικονομικής ανάπτυξης ή από το γεγονός ότι παρέρχεται κάποιος χρόνος ώσπου η ρύπανση να βλάψει την υγεία μας και να υποβαθμίσει την ποιότητα του εδάφους.

Στο θέμα 2 βρίσκουμε μερικές σημαντικές ιδέες σχετικά με την «απόσβεση με χρονική υστέρηση», που παρουσιάζονται μέσω ενός παραδείγματος από τον τραπεζικό χώρο. Υποθέτουμε ότι η ΑΔ&Τ προσφέρει στους διακεκριμένους πελάτες της — μεταξύ αυτών και εσείς — την εξής εναλλακτική μέθοδο υπολογισμού της αμοιβής υπηρεσιών. Έπειτα από 10 χρόνια δοσοληψιών μαζί της, η αμοιβή υπηρεσιών δεν θα βασίζεται στο υπόλοιπο του λογαριασμού σας εκείνης της χρονιάς, αλλά στο υπόλοιπο του λογαριασμού σας πριν από 4, 6 ή 8 χρόνια. Ποια θα είναι τα αποτελέσματα μιας τέτοιας καθυστερημένης απόσβεσης στις καταθέσεις σας;

Το STELLA προσφέρει μια εύκολη μέθοδο για να απαντούμε σε τέτοια ερωτήματα. Κατά τον προγραμματισμό της θυρίδας αμοιβής για το Σχήμα 12, θα αντικαταστήσουμε απλώς τη σχέση **αμοιβή = 0,0005 · υπόλοιπο · υπόλοιπο** με την **αμοιβή = DELAY(0,0005 · υπόλοιπο · υπόλοιπο, d)**, όπου το d αναφέρεται σ' ένα μετατροπέα με θετική τιμή. Το STELLA μάς παρέχει τώρα τη δυνατότητα να ζητήσουμε τη «ροή ευαισθησίας», και σχεδιάζει το γράφημα του υπολοίπου για ένα πεδίο τιμών, τέτοιο όπως το $d = 4, 6$ και 8 . Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 13.

Με αυτό το μοντέλο απόσβεσης με υστέρηση μπορούμε να υλοποιήσουμε τους τέσσερις τρόπους συμπεριφοράς που το LTG συνέδεσε με έναν αξιανόμενο πληθυσμό. Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι η θετική ανάδραση οδηγεί σε εκθετική αύξηση όταν δεν υπάρχουν όρια, και σε σιγμοειδή ανάπτυξη όταν εμφανίζεται υπεργραμμική απόσβεση με άμεση ανάδραση. Οι



Σχήμα 13

(balance: υπόλοιπο, years: έτη)

δύο άλλοι τρόποι τους οποίους μόλις πρόσφατα ανακαλύψαμε με τη βοήθεια του STELLA ονομάζονται **υπέρβαση και ταλάντωση** προς την **ισορροπία**, και **υπέρβαση και κατάρρευση**. Στην περίπτωση της τροποποιημένης μας εξίσωσης Verhulst, το πρώτο από αυτά τα φαινόμενα αντιστοιχεί σε ανάδραση με μικρή και το δεύτερο με μεγάλη χρονική υστέρηση. Στο πλαίσιο του Κόσμου 3, τέτοια φαινόμενα συνοδεύονται από μείωση της φέρουσας ικανότητας (που αντανακλάται επιστρέφοντας στο μοντέλο Malthus-Condorcet, στο οποίο θα αναφερθούμε στη συνέχεια). Αν και πολύ απλούστερο από το Κόσμο 3, το θέμα 2 μάς παρέχει τις απαραίτητες μαθηματικές ιδέες για να κατανοήσουμε το τελικό συμπέρασμα του LTG:

«Αν οι άνθρωποι αποφασίσουν να αγωνιστούν για το δεύτερο (αειφορικότητα) παρά για το πρώτο ενδεχόμενο, όσο νωρίτερα αρχίσουν να εργάζονται προς αυτή την κατεύθυνση τόσο μεγαλύτερες θα είναι οι πιθανότητες επιτυχίας».

Περισσότερα ερωτήματα και διαμάχες

Λοιπόν, έχετε γνωρίσει πλέον μερικές εφαρμογές του STELLA, και πή-

ρατε μιαν ιδέα για τα δυναμικά μοντέλα. Ποιες είναι όμως οι συνέπειες όλων αυτών για τα όρια της ανάπτυξης;

Το δικό μου συμπέρασμα είναι ότι το πλαίσιο που προσέφερε το LTG για να εξετάσουμε τα περιβαλλοντικά ζητήματα υπήρξε ρηξικέλευθο. Πρώτον, χάραξε νέους δρόμους στη χρήση της τεχνολογίας των υπολογιστών για τη μοντελοποίηση των περιβαλλοντικών ζητημάτων σε πλανητική κλίμακα μέσα στο πλαίσιο του κλειστού συστήματος. Δεύτερον, μας κάλεσε να λάβουμε υπόψη τις χρονικές υστερήσεις κατά την κατασκευή τέτοιων μοντέλων, μια σημαντική καινοτομία την οποία θεωρητικοί όπως ο Verhulst δεν θα μπορούσαν πιθανότατα να αντιμετωπίσουν. Πράγματι, το θέμα 2 («Απειροστικός Λογισμός —ναι ή όχι;») αντιστοιχεί στην αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης καθυστέρησης $dN/dt = 0,1N(t) - 0,0005N(t-d)^2$. Η μαθηματική θεωρία τέτοιων εξισώσεων δεν έχει ηλικία μεγαλύτερη των 50 ετών.

Άλλοι καταλήγουν σε πολύ διαφορετικά συμπεράσματα. Ο καθηγητής πληθυσμιακής βιολογίας στο Πανεπιστήμιο Rockefeller της Νέας Υόρκης Joel Cohen στο πρόσφατο βιβλίο του

How Many People Can the Earth Support? (Πόσους ανθρώπους μπορεί να συντηρήσει η Γη), προβληματίζεται για το βαθμό στον οποίο μπορεί πραγματικά ένα μοντέλο, όπως το Κόσμος 3, να αντανακλά την πολυπλοκότητα και τη μη προβλεψιμότητα του πραγματικού κόσμου. Πόσο κοντά στο «αληθινό» πρέπει να βρίσκεται ένα μοντέλο, ώστε να διαδραματίσει κάποιον χρήσιμο ρόλο σε διαμάχες που αφορούν τα σχετικά κοινωνικά ζητήματα; Ο Cohen χαρακτηρίζει τα μοντέλα αυτού του είδους «μαθηματικές καρικατούρες» που μπορεί να αποδειχτούν αποτελεσματικά τόσο στη μετάδοση όσο και στην παραποίηση μιας αλήθειας.

Εντούτοις, και ο ίδιος ο Cohen δεν κατορθώνει να αντισταθεί στον πειρασμό της κατασκευής μοντέλων. Σ' ένα πρόσφατο άρθρο του με τίτλο «Population Growth and Earth's Human Carrying Capacity» (Science, 21 Ιουλίου 1995) αναπτύσσει μια διαφορετική γενίκευση της εξίσωσης Verhulst, την οποία ονομάζει μοντέλο Malthus-Condorcet. Ο Cohen, αντί να στηρίχτει σε μία και μοναδική διαφορετική εξίσωση $dN/dt = a \cdot N(t) - b \cdot N(t)^2 = b[a/b - N(t)]N(t)$, θεωρεί ένα σύστημα εξισώσεων

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)[K(t) - P(t)], \quad (2)$$

$$\frac{dK}{dt} = c \cdot \frac{dP}{dt}, \quad (3)$$

με την εξής ενδιαφέρουσα ερμηνεία. Η εξίσωση (2) θυμίζει την εξίσωση Verhulst για έναν πληθυσμό μεγέθους $P(t)$ σε περιβάλλον με φέρουσα ικανότητα K . Ωστόσο, όπως και στον πραγματικό κόσμο, η K δεν είναι σταθερή. Αντίθετα, σύμφωνα με την εξίσωση (3), η K έχει ρυθμό αύξησης ανάλογο προς το ρυθμό αύξησης της $P(t)$. Αυτό αντανακλά την άποψη ότι «κάθε ανθρώπινη ύπαρξη δεν είναι απλώς ένα ακόμη στόμα που ζητά τροφή, αλλά και ένα ζευγάρι εργατικά χέρια». Το κατά πόσο η παραγωγικότητα των χεριών μας υπερβαίνει τις ανάγκες του στόματός μας — σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο — σχετίζεται με τη θετική ή αρνητική τιμή της c . Και η περίπτωση $c < 0$ είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μείωση

των αποθεμάτων των φυσικών πόρων, έννοια καθοριστικής σημασίας στο LTG.

Κατά την ανάλυση αυτών των εξισώσεων, ο Cohen παρατηρεί ότι η λύση του «ετήσιου ανατοκισμού» παράγει τους ίδιους τέσσερις τρόπους συμπεριφοράς που συναντήσαμε στο LTG (εκθετική αύξηση, σιγμοειδής ανάπτυξη, υπέρβαση και ταλάντωση προς την ισορροπία, υπέρβαση και κατάρρευση) και οι οποίοι εμφανίστηκαν και όταν εισαγάγαμε καθυστέρηση στην εξισώση Verhulst ($dN/dt = aN(t) - bN(t-d)^2$). Ο Cohen, ασκώντας κριτική στο LTG, παρατηρεί ότι, για να παραχθούν οι τρόποι συμπεριφοράς που το LTG συνδέει με το Κόσμος 3 αρκεί ένα μοντέλο τόσο διαυγές όσο οι εξισώσεις (2) και (3). Αναφωτιέται, λοιπόν, μήπως οι συγγραφείς του LTG στήριξαν τα συμπεράσματά τους σ' ένα άνευ λόγου περίπλοκο μοντέλο, το οποίο, όντας τόσο δυσνόητο, μπορεί να παραπλανήσει όσους δεν είναι εξοικειωμένοι με τη δυναμική συστημάτων.

Αντί να επιχειρήσουμε κάποια ανάλυση αυτών των διαφορετικών ερμηνειών, θα σημειώσουμε απλώς ότι το μοντέλο Malthus-Condorcet, που προσφέτα παρουσιάστηκε σ' ένα από τα εγκυρότερα ερευνητικά περιοδικά, είναι άμεσα προσπελάσιμο σε οποιονδήποτε έχει ένα συστημικό λογισμικό όπως το STELLA. Το διάγραμμα του Σχήματος 14 θα σας βοηθήσει να ξεκινήσετε.

Μάλιστα, μπορείτε ακόμη και να τροποποιήσετε το μοντέλο Malthus-Condorcet του Cohen. Για παράδειγμα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ενσωματωμένη εντολή DELAY του STELLA και να αντικαταστήσετε την εξισώση (2) με την

$$\frac{dP}{dt} = rK(t)P(t) - rP(t-d)^2. \quad (2')$$

Βλέπετε, λοιπόν, ότι η τεχνολογία των υπολογιστών και η δυναμική συστημάτων σάς βοηθούν να καταπαστείτε με ζητήματα που αποτελούν αντικείμενο του πλέον πρωθυμένου επιστημονικού διαλόγου.

Ασκήσεις

1. Ας υποθέσουμε ότι η ΑΔ&Τ προσπαθεί να γλιτώσει χρήματα, ενημερώνοντας το λογαριασμό σας κάθε δέκα χρόνια αντί κάθε ένα. Αυτό σημαίνει ότι έπειτα από 10 χρόνια θα εισπράξετε $10 \times 10\% = 100\%$ τόκο επί του τελευταίου υπολοίπου σας, ενώ θα πληρώσετε αριθμή υπηρεσιών ίση με το $10 \times 0,05\% = 0,5\%$ επί του τετραγώνου του τελευταίου υπολοίπου σας. Υπολογίστε την αξία 100 δολαρίων έπειτα από 10, 20 και 30 χρόνια. Τι πιστεύετε ότι θα συμβεί σε 100 δολάρια κατατεθειμένα στην ΑΔ&Τ επί 100 χρόνια;

2. Ας υποθέσουμε ότι η ΑΔ&Τ γίνεται ακόμη πολύτιμη και ανατοκίζει κάθε 30 χρόνια αντί για κάθε 10. Υπολογίστε την αξία 100 δολαρίων έπειτα από 30, 60 και 90 χρόνια. Τι πιστεύετε

ότι θα συμβεί σε 100 δολάρια κατατεθειμένα στην ΑΔ&Τ επί 1.000 χρόνια;

3. Οταν στην εξισώση (3) η $c > 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε την εξής γενίκευση: αντικαθιστούμε τη c με $L/P(t)$, όπου L είναι μια θετική σταθερά και $P(t)$ το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t . Αυτό αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι η δυνατότητα του πληθυσμού να αυξάνει τη φέρουσα ικανότητα της Γης μειώνεται όσο αυξάνεται το P . Ποιοι επιπλέον μετατροπείς και συνδετήρες απαιτούνται ώστε να προσαρμόσουμε το Σχήμα 14 σ' αυτή τη γενίκευση;

4. Στο πλαίσιο του μοντέλου Malthus-Condorcet (εξισώσεις (2) και (3)) γενικεύστε την Ασκήση 3, έτσι ώστε η $K(t)$ να αυξάνεται όταν $P < 2$ και να μειώνεται όταν $P > 2$.

Προτεινόμενη βιβλιογραφία

D.L. Meadows κ.ά., *The Limits to Growth* (Νέα Υόρκη: Universe Books, 1972).

J. Forrester, *World Dynamics* (Καμπριτζ, Μασασαχουσέτη: Wright Allen Press, 1971).

Donella Meadows, Dennis Meadows και Jørgen Randers, *Beyond the Limits* (Βέρμοντ: Chelsea Green Publishing, 1992).

D.L. Meadows κ.ά., *Dynamics of Growth In a Finite World* (Πόρτλαντ, Όρεγκον: Productivity Press, 1974).

D.L. Meadows κ.ά., *Towards Global Equilibrium* (Πόρτλαντ, Όρεγκον: Productivity Press, 1973).

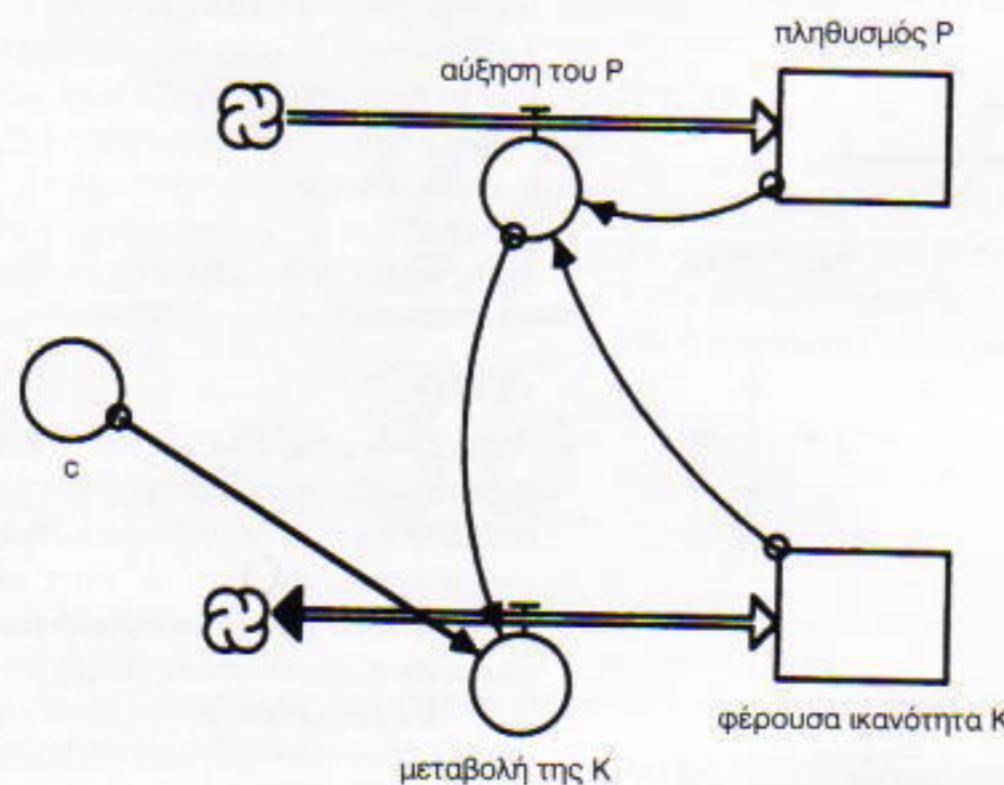
H.S.D. Cole κ.ά., *Thinking About the Future: A Critique of The Limits to Growth* (Λονδίνο: Lamb, Chatto and Windus, 1973). [Επίσης, έχει εκδοθεί ως *Models of Doom*, από Universe Books, 1973.]

L. LaRouche, *There Are No Limits To Growth* (Νέα Υόρκη: New Benjamin Franklin House, 1983).

J. Cohen, *How Many People Can the Earth Support?* (Νέα Υόρκη: Norton, 1995.)

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65**

Ο Kurt Kreith είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Νταϊντζι. Είναι υπεύθυνος της σύνταξης των άρθρων που αφορούν το LTG σ' αυτό το ειδικό τεύχος του Quantum.



Σχήμα 14

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M106

Σύμπτωση στο επίπεδο. Έστω το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες που ικανοποιούν την εξίσωση $|y - 2x| = x$, και έστω το σύνολο των σημείων που ορίζει η εξίσωση $|mx + ny| = y$. Βρείτε όλα τα ζεύγη των αριθμών m και n για τους οποίους τα δύο αυτά σύνολα συμπίπτουν. (D. Averyanov)

M107

Συναντήσεις με περιγεγραμμένους κύκλους. Στο τρίγωνο ABC οι πλευρές CB και CA είναι ίσες με a και b , αντίστοιχα. Η διχοτόμος της γωνίας ACB τέμνει την πλευρά AB στο σημείο K , ενώ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο M . Το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας CA και του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο AMK κύκλου είναι το P . Βρείτε το μήκος του AP . (V. Protasov)

M108

Ένα σκληρό πρόβλημα. Λύστε το επόμενο σύστημα εξισώσεων για τυχαία a, b, c :

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} + xz = c, \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} + xy = a, \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} + yz = b. \end{cases}$$

M109

Επικάλυψη μιας πυραμίδας. Αποδείξτε ότι μπορούμε να διπλώσουμε ένα χάρτινο τρίγωνο έτσι ώστε να καλύψει την επιφάνεια ενός μοναδιαίου κανονικού τετραέδρου (δηλαδή, μιας τριγωνικής πυραμίδας της οποίας οι ακμές ισούνται με 1) χωρίς επικαλύψεις, αν (1) το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με τις ίσες πλευρές να έχουν μήκος 2 και τη μεταξύ τους γωνία να είναι 120° , ή (2) αν δύο

πλευρές του τριγώνου ισούνται με 2 και $2\sqrt{3}$ και η μεταξύ τους γωνία είναι 150° . (I. Sharygin)

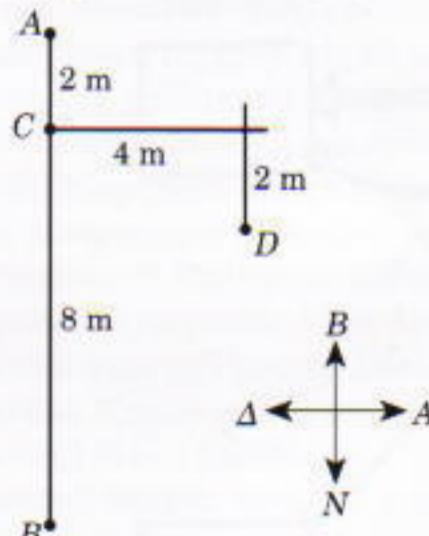
M110

Η αναπαράσταση του 1997. Ας συμβολίσουμε με $b(n)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να αναπαραστήσουμε το n με τη μορφή $n = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_k \cdot 2^k$, όπου οι συντελεστές a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, παίρνουν τις τιμές 0, 1 ή 2. Υπολογίστε το $b(1997)$. (V. Protasov)

Φυσική

F106

Συνδεδεμένοι αθλητές. Δύο δρομείς που συνδέονται με ελαστικό νήμα στέκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αρχίζουν να τρέχουν ταυτόχρονα: ο δρομέας A προς τα ανατολικά με ταχύτητα $v_0 = 1 \text{ m/s}$, και ο B προς τα νότια με ορισμένη σταθερή επιτάχυνση. Υπολογίστε αυτή την επιτάχυνση, αν είναι γνωστό ότι ένας κόμπος C του νήματος κατά τη μετατόπισή του διέρχεται από δεδομένο σημείο D (βλ. Σχήμα 1). (S. Krotov)



Σχήμα 1

F107

Καύσωνας σε αεροδυναμική σήραγγα. Ένα μοντέλο πηδαλιουχούμενου αεροστατού δοκιμάζεται σε αεροδυναμι-

κή σήραγγα όπου ρεύμα αέρα ταχύτητας $v = 300 \text{ m/s}$ κατευθύνεται προς αυτό. Στο σημείο A (που βρίσκεται ακριβώς στον άξονά του), η ταχύτητα της ροής μηδενίζεται (βλ. Σχήμα 2). Προσδιορίστε τη θερμοκρασία του αέρα πλησίον του συγκεκριμένου σημείου. Η θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα είναι $T = 300 \text{ K}$. (A. Zilberman)



Σχήμα 2

F108

Ρίχνοντας τον υδραργυρό. Γιατί απαιτείται τόσο πολύς χρόνος για να θερμομετρήσουμε έναν άνθρωπο με υδραργυρικό θερμόμετρο (περίπου 10 min), ενώ είναι δυνατόν να κατεβάσουμε την υδραργυρική στήλη σχεδόν αμέσως μετά τη θερμομέτρηση τινάζοντας το θερμόμετρο; (G. Kosourov)

F109

Θρυμματισμένο φορτίο. Μια αγώγιμη σφαίρα εξερράγη και παρήγαγε πλήθος θραύσματα που διεσπάρησαν σε μεγάλη απόσταση. Λεπτά σύρματα συνδέουν τα θραύσματα μεταξύ τους με αυθαίρετο τρόπο. Ποια είναι μεγαλύτερη, η χωρητικότητα του συστήματος των θραυσμάτων ή η χωρητικότητα της αρχικής σφαίρας; Θεωρήστε τη χωρητικότητα των συρμάτων αμελητέα.

F110

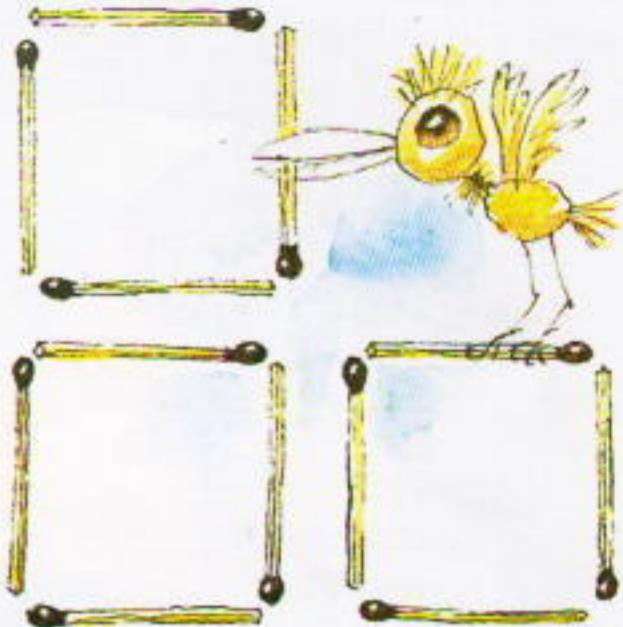
Ανάκλαση μιας ηλιαχτίδας. Κάποιος παρατηρητής «συλλαμβάνει» μια λεπτή δέσμη φωτός με έναν μικρό καθρέφτη ενώ στέκεται μπροστά σ' έναν άλλο, μεγάλο, όπου βλέπει το ειδωλό του. Τι θα δει αν κατευθύνει τη δέσμη στο ειδωλό του μικρού καθρέφτη που σχηματίζεται μέσα στον μεγάλο; (S. Krotov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Για να περνά η ώρα

Σ106

Τετράγωνα από σπίρτα. Στην εικόνα βλέπετε δώδεκα σπίρτα που σχηματίζουν τρία τετράγωνα. Τοποθετήστε τα σπίρτα έτσι ώστε να σχηματίζουν έξι τετράγωνα (με μήκος πλευράς ένα σπίρτο). (I. Sharygin)



Σ108

Ορθολογικές αναλογίες. Κάθε έβδομος μαθηματικός είναι φιλόσοφος, και κάθε ένατος φιλόσοφος είναι μαθηματικός. Ποιοι είναι περισσότεροι, οι μαθηματικοί ή οι φιλόσοφοι; (A. Spivak)



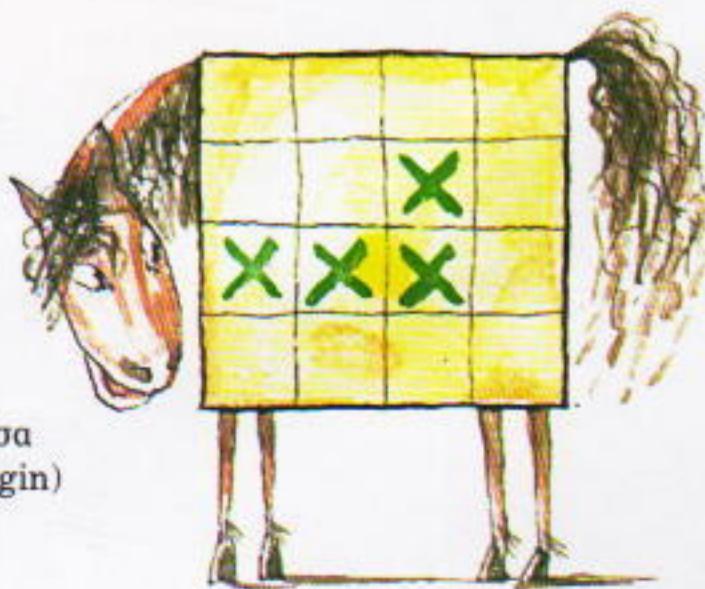
Σ110

Τέλειος χωρισμός. Χωρίστε το τετράγωνο του σχήματος σε τέσσερα ίσα σχήματα, έτσι ώστε κάθε τμήμα να περιέχει ακριβώς ένα X. (I. Sharygin)



Σ109

Ενδιάμεσο κλάσμα. Βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ των $96/35$ και $97/36$ που έχει τον μικρότερο δυνατό παρονομαστή. (D. Averyanov)





more boats - more fish

more boats - less shade

Υπερβαίνοντας τα όρια

Επίπεδα ισορροπίας και τρόποι προσέγγισής τους

Bob Eberlein

TO THE LIMITS TO GROWTH (LTG) EINAI ENA APO TA πΟ πΟΛΥΣΟΥΖΗΤΙΜΕΝΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΗΣ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑΣ ΕΙΚΟΣΙΠΕΝΤΑΕΤΙΑΣ, κΑΙ — όπως συνηθίζει να λέει μια από τους συγγραφείς του, η Donella Meadows — «η σύζητηση αυτή έχει παραγάγει περισσότερο ζέστη παρά φως». Ένα από τα πολλά ζητήματα που θέτει η εν λόγω εργασία είναι εξαιρετικά σημαντικό, αλλά έχει συχνά παραβλεφθεί λόγω της απλότητάς του. Αν και πολλοί υποστηρίζουν ότι το *World Dynamics** και το LTG δεν είναι παρά επαναδιατυπώσεις του έργου *Essay on the Principle of Population* (Δοκίμιο περί της αρχής του πληθυσμού) του Malthus, υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά. Ενώ ο Malthus προσπαθεί να εξηγήσει γιατί η ανθρώπινη κατάσταση θα είναι αναπόφευκτα η συνεχής ένδεια, το LTG εξετάζει τη δυναμική της αλλαγής, δείχνοντας ότι η ανθρώπινη κατάσταση μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά, αλλά και να υποβαθμιστεί ακόμη ταχύτερα.

Ο Thomas Malthus ήταν άγγλος οικονομολόγος που έζησε από το 1766 έως το 1834. Είναι διάσημος κυρίως για την εργασία του στην οποία υποστηρίζει ότι, αν δεν υπάρχουν περιορισμοί, ο ανθρώπινος πληθυσμός θα οδηγηθεί σε ανεξέλεγκτη εκθετική αύξηση. Επίσης, θεώρησε ότι η παραγωγή τροφής μπορεί να αυξηθεί μόνο γραμμικά. Έτσι, συμπέρανε ότι η πλειοψηφία των ανθρώπων θα ζει πάντοτε με ένα ισχνό εισόδημα στα όρια του επιπέδου συντηρήσεως. Η συγκεκριμένη εργασία του Malthus οδήγησε κάποιους να χαρακτηρίσουν την οικονομική εποιτήμη «απαισιόδοξη».

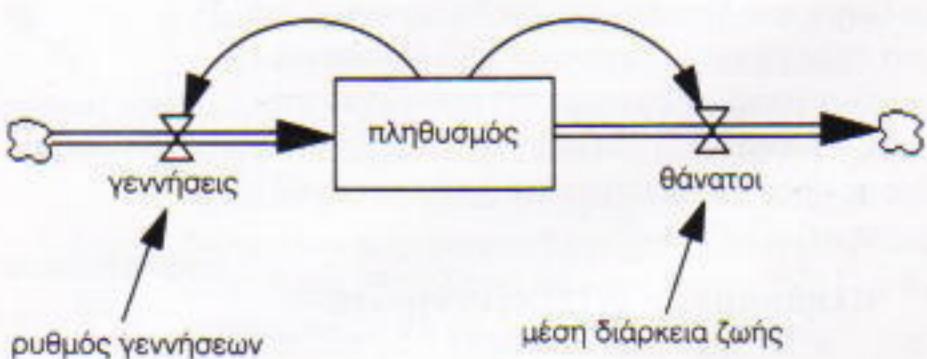
Ο Malthus χρησιμοποίησε τη λογική τεκμηρίωση και τη μαθηματική ανάλυση για να υπόστηριξε τις θέσεις του. Το LTG χρησιμοποιεί το μοντέλο προσομοίωσης. Οι δύο αυτές προσεγγίσεις δεν αλληλοαποκλείονται — αντίθετα, θα πρέπει να θεωρηθούν συμπληρωματικές. Τα μαθηματικά και ορθολογικά επιχειρήματα μπορούν συχνά να χρησιμοποιηθούν για να συνοψίσουν τα αποτελέσματα

μιας προσομοίωσης. Επιπλέον, μέσω των μοντέλων προσομοίωσης μπορούμε να ελέγξουμε εικασίες και να διερευνήσουμε ζητήματα που δεν είναι εύκολο να τα πραγματευτούμε με την αυστηρή μαθηματική ανάλυση. Σε τούτο το άρθρο θα περιγράψω τη χρήση των μοντέλων προσομοίωσης στη μελέτη του λεγόμενου «προβλήματος της υπέρβασης».

Το περιβάλλον προσομοίωσης που χρησιμοποιούμε σ' αυτό το άρθρο είναι το Vensim®PLE. Το συγκεκριμένο λογισμικό παρέχεται δωρεάν για εκπαιδευτική χρήση, και στο τέλος του άρθρου θα βρείτε πληροφορίες για το πώς μπορείτε να το αποκτήσετε.

Η πληθυσμιακή αύξηση

Στον πυρήνα του όλου ζητήματος βρίσκεται το γεγονός ότι «λόγω της δύναμης του πληθυσμού, ένα δισεκατομμύριο άτομα διπλασιάζονται σε 25 χρόνια το ίδιο εύκολα όσο και τα χίλια» (Malthus). Με περισσότερο μαθηματικούς όρους, «ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος με τον ίδιο τον πληθυσμό». Αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα ροής και αποθέματος της δυναμικής συστημάτων, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το γεγονός με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 1. Το βέλος με τη διπλή γραμμή παριστά τον αγωγό μέσω του οποίου μια «ροή» μεταβάλλει ένα «απόθεμα». Οι γεννήσεις αυξάνουν τον πληθυσμό, και αυτό υποδηλώνεται από το βέλος γεννή-



Σχήμα 1

Απλό μοντέλο πληθυσμιακής αύξησης

* Για το βιβλίο αυτό γίνεται αναφορά στη σελ. 7.

σεις που κατευθύνεται στον **πληθυσμό**. Η μεταβλητή **θάνατοι** μειώνει τον **πληθυσμό**,
και αυτό συμβολίζεται με το βέλος **θάνατοι**
που κατευθύνεται προς τα δεξιά. Με τα σύν-
νεφα που υπάρχουν στις άκρες των βελών 450 δ.
υποδηλώνουμε ότι η πηγή των **γεννήσεων**
και η δεξαμενή των **θανάτων** βρίσκονται
πέρα από τα σύνορα του μοντέλου. Τα βέλη
με τη μονή γραμμή που συνδέουν τον **πλη-**
θυσμό με τους **θανάτους**, τη **μέση διάρ-**
κεια ζωής με τους **θανάτους**, κ.ο.κ., χρησ-
μοποιούνται για να υποδηλώσουν τη συναρ-
τητοιακή εξάρτηση. Τούτο σημαίνει ότι, για να
καθορίσουμε την τιμή των **θανάτων**, πρέπει
να γνωρίζουμε και τον **πληθυσμό** και τη
μέση διάρκεια ζωής.

Η εικόνα αυτή αντιπροσωπεύει ένα βασι-
κό μοντέλο πληθυσμιακής αύξησης, αλλά δεν
είναι πλήρης. Δείχνει ότι οι **γεννήσεις** καθο-
ρίζονται από τον **πληθυσμό** και το **ρυθμό**
γεννήσεων, αλλά δεν προσδιορίζει την ακρι-
βή φύση αυτής της σχέσης. Οι πραγματικοί τύποι ή εξισώ-
σεις που ορίζουν τις ακριβείς σχέσεις μεταξύ των μεταβλη-
τών κρύβονται πίσω από την εικόνα. Για τις **γεννήσεις**
έχουμε

$$\text{γεννήσεις} = \text{πληθυσμός} * \text{ρυθμός γεννήσεων}. \quad (1)$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι ο αριθμός των **γεννήσεων**
σε κάθε δεδομένη στιγμή είναι ανάλογος με τον **πληθυ-
σμό** την ίδια στιγμή. Η μονάδα του χρόνου είναι κεντρικό^{600 δ.}
στοιχείο σε όλα τα μοντέλα δυναμικών συστημάτων, συ-
χνά όμως σιωπάται κατά τη διατύπωση των θεμελιωδών
εξισώσεων.

Η εξίσωσή μας για τους **θανάτους** διατυπώνεται κά-
πως διαφορετικά. Αφού ο ετήσιος ρυθμός θανάτων σ' έναν
(σταθερό) πληθυσμό με μέσο εύρος ζωής 10 ετών είναι 10%,
μπορούμε να αντικαταστήσουμε το **ρυθμό θανάτων** με
το **1 / μέση διάρκεια ζωής**. Οδηγούμαστε έτσι στην εξί-
σωση

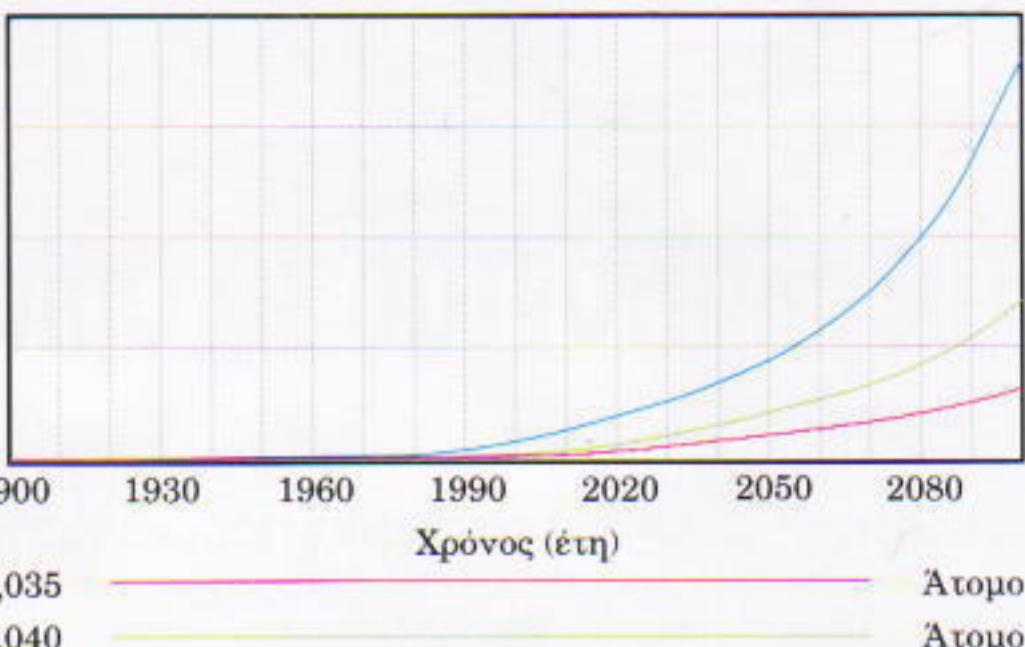
$$\text{θάνατοι} = \text{πληθυσμός} / \text{μέση διάρκεια ζωής}. \quad (2)$$

Η εξίσωση για τον πληθυσμό δεν μοιάζει πολύ με τις
προηγούμενες, διότι ο **πληθυσμός** αποτε-
λεί μια συσσώρευση, ένα σύνολο, το μέγε-
θος του οποίου αλλάζει σύμφωνα με τις
γεννήσεις μείον τους θανάτους. Στην
εξίσωση (3) έχουμε χρησιμοποιήσει το συμ-
βολισμό του Vensim, για να δηλώσουμε ότι
για έναν αρχικό πληθυσμό 1,65 δισεκατομ-
μηρίων ατόμων επισωρεύονται οι (**γεννή-
σεις - θάνατοι**) – δηλαδή, η μεταβολή κάθε
έτους προστίθεται στην τιμή του προηγού-
μενου:

$$\text{πληθυσμός} = \text{INTEG}(\text{γεννήσεις} - \text{θάνατοι}, 1.65e9). \quad (3)$$

Σε τούτο το απλό μοντέλο θα μπορούσα-
με να προσδιορίσουμε μια λύση κλειστής

πληθυσμός για διαφορετικές τιμές του «ρυθμού γεννήσεων»



Σχήμα 2

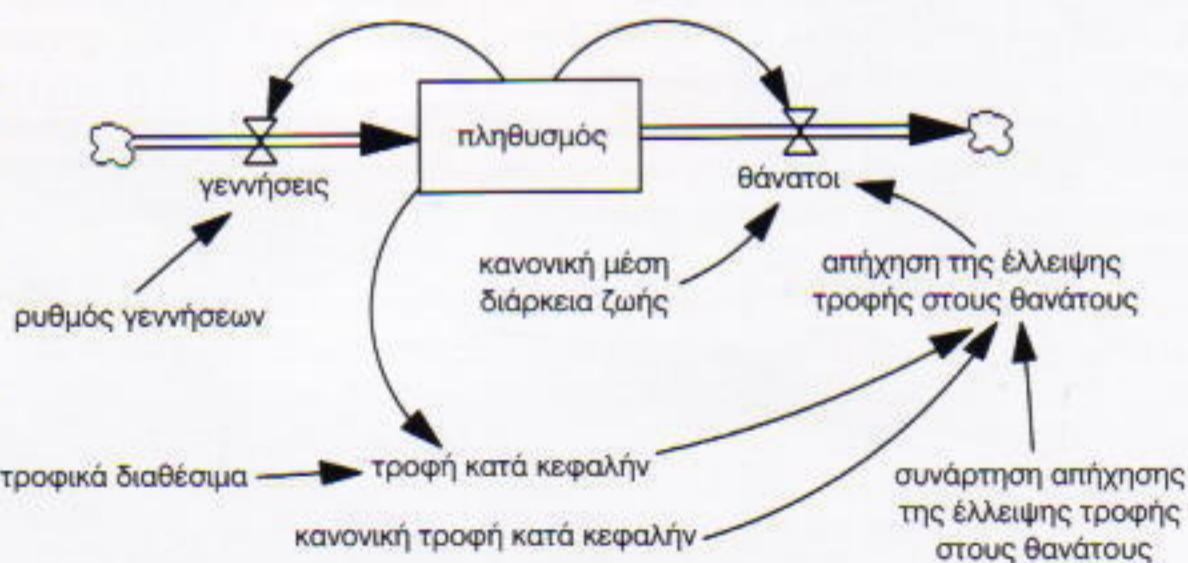
Πληθυσμιακή αύξηση χωρίς περιορισμούς.

μορφής που θα έδινε τον **πληθυσμό** ως συνάρτηση του χρόνου (δείτε το Πρόβλημα 1 στο τέλος του άρθρου). Ωστόσο, αυτό γενικά δεν είναι εφικτό, και η αντιμετώπιση των προβλημάτων μέσω προσομοίωσης στηρίζεται σε αριθμη-
τικούς υπολογισμούς και όχι σε εύρεση «αναλυτικών λύ-
σεων» με τύπους ή αλγεβρικές παραστάσεις. Αν θέσουμε
τη **μέση διάρκεια ζωής** ίση με 65 χρόνια, μπορούμε να
προσομοιώσουμε το συγκεκριμένο μοντέλο για αρκετές
διαφορετικές τιμές του **ρυθμού γεννήσεων**, και να οδη-
γηθούμε στα αποτελέσματα του Σχήματος 2.

Για **ρυθμό γεννήσεων** μεγαλύτερο του **ρυθμού θανάτων**, όλες οι προσομοιώσεις που παράγει το μοντέλο εμφανίζουν τον ίδιο τύπο συμπεριφοράς, και συγκεκρι-
μένα εκθετική αύξηση. Η διαφορά στα αποτελέσματα που επφέρουν φαινομενικά μικρές διαφορές στο **ρυθμό γεν-
νήσεων** είναι εντυπωσιακή.

Τα περιοσμένα τροφικά διαθέσιμα

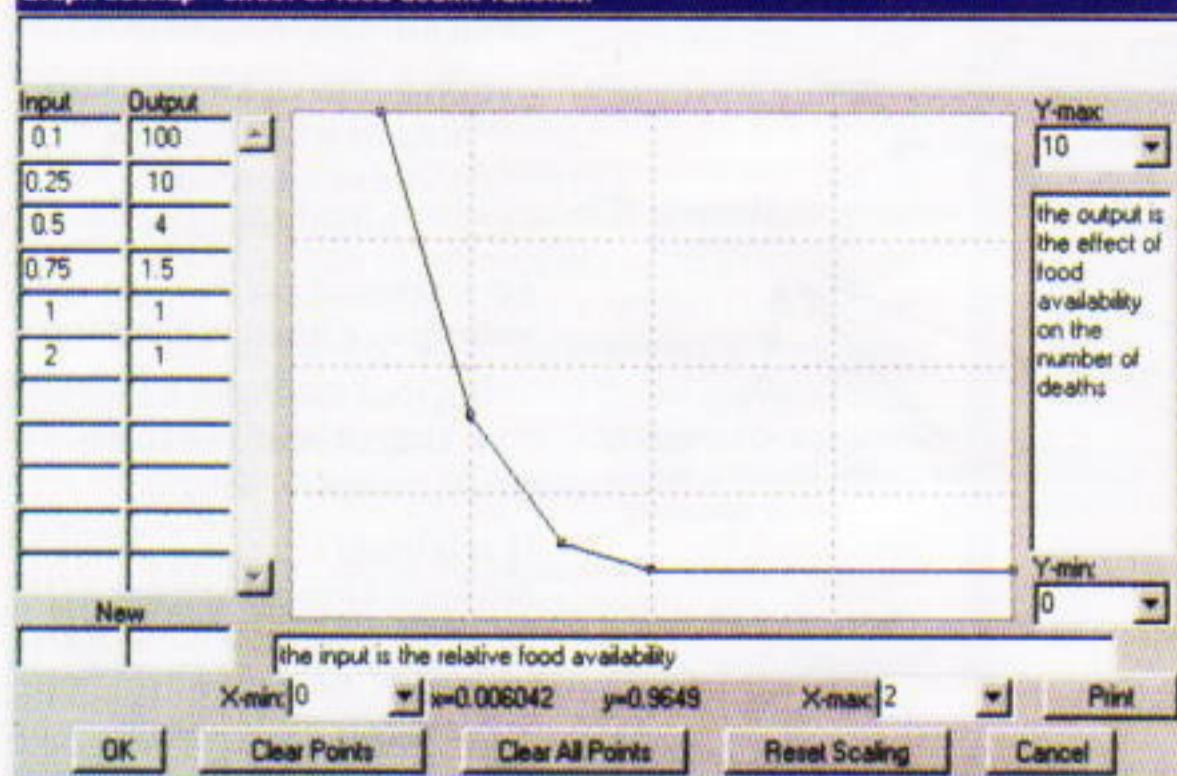
Η σπουδαιότερη υπόθεση του Malthus ήταν ότι οι πε-
ριορισμοί στα τροφικά διαθέσιμα θα εμπόδιζαν την ανε-
ξέλεγκτη αύξηση του πληθυσμού που θα προέκυπτε σε



Σχήμα 3

Μοντέλο πληθυσμιακής αύξησης με περιορισμούς τροφής.

Graph Lookup - effect of food deaths function



Σχήμα 4

Η συνάρτηση «απήχηση της έλλειψης τροφής στους θανάτους».

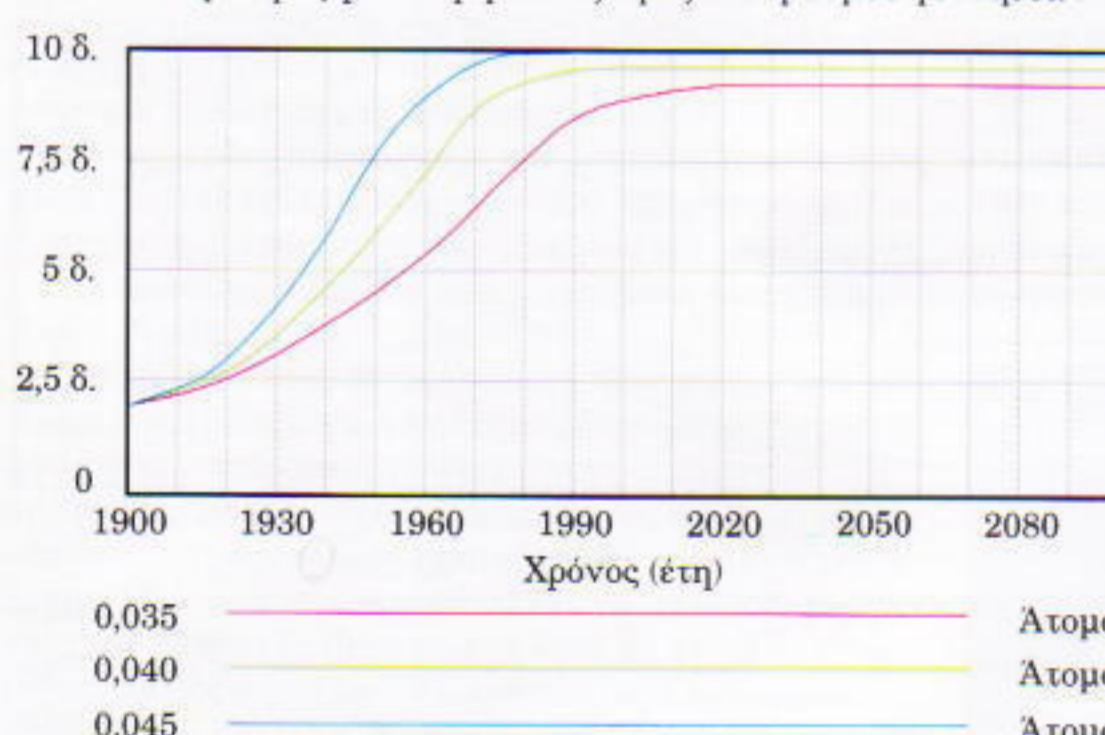
διαφορετική περίπτωση. Υποστήριξε ότι, καθώς αυξάνεται ο πληθυσμός, η ποσότητα τροφής ανά άτομο μειώνεται, και καθίσταται πιθανότερη η εκδήλωση επιδημιών, πολέμων και λιμών. Στο πλαίσιο της δικής μας προσέγγισης με όρους δυναμικών συστημάτων, πρέπει να προσδιορίσουμε τις συναρτησιακές σχέσεις μέσω των οποίων τα ανεπαρκή τροφικά διαθέσιμα συμβάλλουν στους θανάτους. Αυτό περιλαμβάνεται στη **συνάρτηση απήχησης της έλλειψης τροφής στους θανάτους** του Σχήματος 3.

Για να προσδιορίσουμε τις συναρτησιακές σχέσεις του Σχήματος 3, αντικαθιστούμε την εξίσωση (2) με την

θάνατοι =

(πληθυσμός / κανονική μέση διάρκεια ζωής) *
απήχηση της έλλειψης τροφής στους θανάτους. (4)

Πληθυσμός για διαφορετικές τιμές του «ρυθμού γεννήσεων»



Σχήμα 5

Πληθυσμιακή αύξηση με σταθερά τροφικά διαθέσιμα.

Με το συμβολισμό του Vensim, η επόμενη εξίσωση είναι

απήχηση της έλλειψης τροφής στους θανάτους =
συνάρτηση απήχησης της έλλειψης τροφής στους θανάτους (τροφή κατά κεφαλήν / κανονική τροφή κατά κεφαλήν). (5)

Αν μετρήσουμε την τροφή σε τόνους και τα τροφικά διαθέσιμα σε τόνους/έτος, μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε μια μη γραμμική σχέση μεταξύ του λόγου **τροφή κατά κεφαλήν / κανονική τροφή κατά κεφαλήν** και της προκύπτουσας αύξησης στους θανάτους. Η παράσταση του Vensim

συνάρτηση απήχησης της έλλειψης τροφής στους θανάτους ((0.1, 100), (0.25, 10), (0.5, 4), (0.75, 1.5), (1, 1), (2, 1)) (6)

προσδιορίζει ακολουθία ζευγών (x, y) που δίνουν τη συνάρτηση του Σχήματος 4.

Σ' αυτό το πλαίσιο, συμπληρώνουμε το μοντέλο με τους εξής τύπους του Vensim:

τροφή κατά κεφαλήν =
τροφικά διαθέσιμα / πληθυσμός (7)

τροφικά διαθέσιμα = $3e + 009$ (8)

κανονική μέση διάρκεια ζωής = 65 (9)

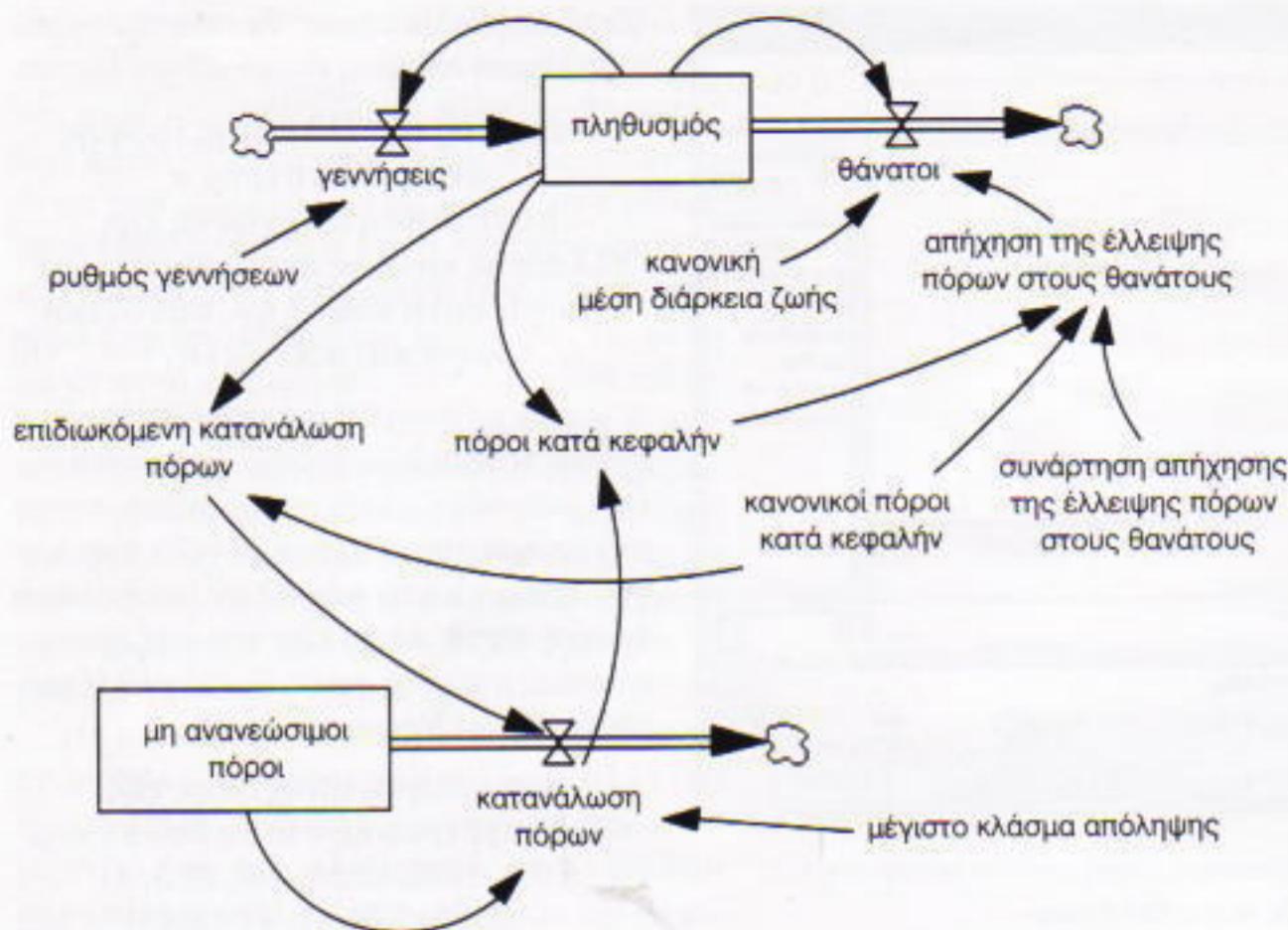
κανονική τροφή κατά κεφαλήν = 0.5 (10)

Αν «τρέξουμε» μια τέτοια προσομοίωση για αρκετούς ρυθμούς γεννήσεων, θα πάρουμε τα αποτελέσματα του Σχήματος 5. Μπορούμε να συναγάγουμε τρία ενδιαφέροντα συμπεράσματα από αυτό. Πρώτον, ο πληθυσμός αυξάνεται και φτάνει σ' ένα επίπεδο ισορροπίας (ή επίπεδο κορεσμού), όπως ακριβώς υποστήριξε ο Malthus. Δεύτερον, παρά τις διαφορές που προκύπτουν από τις αλλαγές στο **ρυθμό γεννήσεων**, ο πληθυσμός προσεγγίζει μια ισορροπία ανεξάρτητα από τον εν λόγω ρυθμό. Τρίτον, όσο μικρότερος είναι ο ρυθμός γεννήσεων, τόσο μικρότερος είναι ο πληθυσμός στην κατάσταση ισορροπίας, και επομένως τόσο περισσότερη είναι η τροφή κατά κεφαλήν.

Η ανάλυσή μας κατέληξε σε ορισμένα ενδιαφέροντα αποτελέσματα, τα οποία όμως είναι ουσιαστικά ίδια με εκείνα του Malthus. Ωστόσο, οι μηχανισμοί τους οποίους «μοντελοποιήσαμε» είναι περισσότερο κατάλληλοι για κοινωνίες «κυνηγών-τροφοσυλλεκτών» παρά για πολύπλοκες κοινωνικές μορφές, συμπεριλαμβανομένου του σύγχρονου βιομηχανικού πολιτισμού μας. Αυτό μας οδηγεί στο ερώτημα: «Τι άλλο θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε ακόμη;»

Οι μη ανανεώσιμοι πόροι

Μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ του LTG και



Σχήμα 6

Μοντέλο πληθυσμιακής αύξησης με μη ανανεώσιμους πόρους.

του Σχήματος 5 είναι ότι στο πρώτο περιλήφθηκε ένα πεπερασμένο απόθεμα μη ανανεώσιμων φυσικών πόρων. Το εν λόγω απόθεμα μειώνεται καθώς οι πόροι χρησιμοποιούνται ως μέρος της οικονομικής δραστηριότητας. Προκειμένου να συνδέουμε το συγκεκριμένο απόθεμα με το προηγούμενο μοντέλο, θα περιλάβουμε μια μεταβλητή για την επιδιωκόμενη κατανάλωση πόρων, η οποία εξαρτάται από τον πληθυσμό. Για να παρουσιάσουμε την εξάρτηση της γεωργίας από φυσικούς πόρους όπως τα καύσιμα, το νερό και τα λιπάσματα, αλλάζουμε τα ονόματα μερικών μεταβλητών και επισημαίνουμε το γεγονός ότι η έλλειψη πόρων μπορεί επίσης να συμβάλλει στους θανάτους (Σχήμα 6).

Το πάνω μέρος του Σχήματος 6 είναι ίδιο ακριβώς με αυτό που εξετάσαμε προηγουμένως, με τη διαφορά ότι στα ονόματα των μεταβλητών οι πόροι έχουν αντικαταστήσει την τροφή. Η μεταβλητή τροφικά διαθέσιμα έχει ενσωματωθεί στην περισσότερο πολύπλοκη σχέση κατανάλωση πόρων, η οποία δεν είναι πλέον σταθερή, αλλά εξαρτάται από την επιδιωκόμενη κατανάλωση πόρων και τους μη ανανεώσιμους πόρους. Η εξίσωση του Vensim για την κατανάλωση πόρων είναι

$$\text{κατανάλωση πόρων} = \text{MIN} \\ (\text{επιδιωκόμενη κατανάλωση πόρων}, \\ \text{μη ανανεώσιμοι πόροι}^*) \\ \text{μέγιστο κλάσμα απόληψης}. \quad (11)$$

Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι οι πόροι καταναλόνονται με ρυθμό που ικανοποιεί τις ανάγκες του πληθυσμού, αλλά και ότι υπάρχει ένα όριο στην ταχύτητα εκμετάλλευσης των πόρων που απομένουν.

Η εξίσωση για την επιδιωκόμενη κατανάλωση πόρων είναι
επιδιωκόμενη κατανάλωση πόρων = πληθυσμός *
κανονικοί πόροι
κατά κεφαλήν, \quad (12)

και η εξίσωση για τους μη ανανεώσιμους πόρους είναι

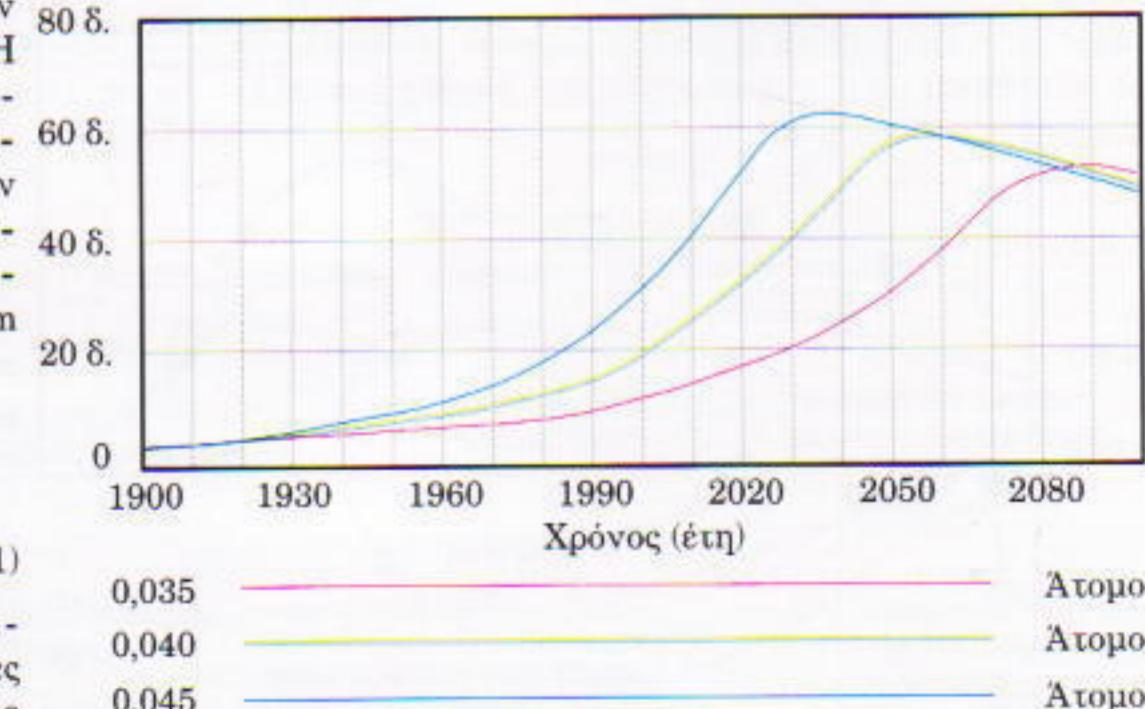
$$\text{μη ανανεώσιμοι πόροι} = \\ \text{INTEG(-κατανάλωση πόρων, 5e+12)}. \quad (13)$$

Η τελευταία εξίσωση δηλώνει ότι ένα αρχικό απόθεμα πόρων $5 \cdot 10^{12}$ μονάδων μειώνεται λόγω κατανάλωσης πόρων. Αυτές οι μονάδες πόρων αντιστοιχούν σε μια ποσότητα η οποία θα επαρκούσε για 10 δισεκατομμύρια ανθρώπους επί 1.000 χρόνια με ένα ρυθμό κανονικής κατανάλωσης 10 μονάδων /άτομο /έτος. Το μέγιστο κλάσμα απόληψης έχει τεθεί i-

σο με 0,005 /έτος, τιμή που αντιστοιχεί σε διάστημα επιταχυνόμενης εκμετάλλευσης 200 ετών. Είναι δυνατόν να αποδειχτεί (βλ. Πρόβλημα 2) ότι από τη στιγμή που ένας πληθυσμός είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ασκεί πίεση στην εκμετάλλευση των φυσικών πόρων, τα αποθέματα μη ανανεώσιμων πόρων θα μειωθούν εκθετικά, σχεδόν όπως μια ραδιενεργός ουσία με χρόνο ημιζωής περίπου 140 ετών.

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που παίρνουμε αν «τρέξουμε» αυτή την προσομοίωση για διαφορετικούς ρυθμούς γεννήσεων. Στην προκειμένη περίπτωση, ο πληθυσμός δεν αυξάνεται πλέον μονοτονικά προς ένα επίπεδο ισορροπίας, αλλά υπερβαίνει κατά πολύ τα επίπεδα στα οποία έφτανε στα προηγούμενα μοντέλα, και

Πληθυσμός για διαφορετικές τιμές του «ρυθμού γεννήσεων»



Σχήμα 7

Πληθυσμιακή αύξηση με μη ανανεώσιμους πόρους.

κατόπιν μειώνεται. Οι διαφορετικές τιμές στο ρυθμό γεννήσεων αλλάζουν τόσο τη χρονική στιγμή όσο και το πληθυσμιακό επίπεδο όπου συμβαίνει η μεταστροφή.

Με την προοθήκη του αποθέματος των μη ανανεώσιμων φυσικών πόρων, έχουμε εισαγάγει ένα καινούργιο πρότυπο συμπεριφοράς στο μοντέλο. Η εν λόγω συμπεριφορά προκύπτει από το γεγονός ότι οι μη ανανεώσιμοι πόροι υπάρχουν αρχικά σε αφθονία, αλλά, εξαιτίας της συνεχούς κατανάλωσής τους, καθίστανται τελικά ανεπαρκείς να στηρίξουν έναν εκθετικά αυξανόμενο πληθυσμό. Το συγκεκριμένο φαινόμενο δεν περιορίζεται μόνο στην εξάρτηση μιας κοινωνίας από τους μη ανανεώσιμους πόρους.

Ακόμη κι αν δεχτούμε ότι οι πόροι ανανεώνονται με σταθερό ρυθμό, εμφανίζεται και πάλι υπέρβαση των ορίων. Το υποκείμενο πρόβλημα έγκειται στο ότι, ενώ υπάρχει μια παρακαταθήκη πόρων που μπορεί να στηρίξει έναν πολύ μεγάλο πληθυσμό για κάποιο διάστημα, η εκθετική αύξηση, όταν συνεχίζεται αδιάπτωτη, εξαντλεί κάθε πόρο που δεν αυξάνει και ο ίδιος εκθετικά. Ένα τραγικό παράδειγμα είναι η Νήσος του Πάσχα. Στην προκειμένη περίπτωση, οι κάτοικοι του νησιού υλοτομούσαν τα δάση ταχύτερα απ' όσο μπορούσαν εκείνα να ξαναφυτρώσουν, και το αποτέλεσμα ήταν να μην έχουν πλέον τη δυνατότητα να κατασκευάσουν τα κανό που χρειάζονταν για το ψάρεμα.

Παραπάνω, στην εξίσωση (11) θεωρήσαμε ότι οι πόροι καταναλώνονται σύμφωνα με τις ανάγκες του πληθυσμού, μόνο που μέσα σε ένα έτος δεν μπορεί να καταναλωθεί περισσότερο από το 0,5% των υπαρχόντων πόρων. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε αρκετά ομαλά στο όριο των πόρων. Μια περισσότερο περιπλοκή και ίσως ρεαλιστικότερη διατύπωση, όπως εκείνες που χρησιμοποιούνται στα μοντέλα Κόσμος, μπορεί να οδηγήσει σε πιο απότομη υπέρβαση και πτώση.

Συμπεράσματα

Τα διδάγματα που αποκομίζουμε από το LTG ξεπερνούν κατά πολύ τα ζητήματα τα οποία θίξαμε εδώ. Η κεντρική ιδέα που υποστηρίζεται στο παρόν άρθρο είναι ότι η προσαρμογή στα όρια δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά και μονοτονική προσέγγιση σε ένα επίπεδο ισορροπίας. Όσο περισσότερο ρεαλισμό εισάγουμε στο μοντέλο, λαμβάνοντας υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ της ρύπανσης, του βιομηχανικού κεφαλαίου, της γεωργίας και του εδάφους, τόσο εντονότερες καθίστανται η υπέρβαση και η επακόλουθη πτώση.

Οι προσομοιώσεις σε υπολογιστή προσφέρουν μια συναρπαστική μέθοδο για να αντιμετωπίζουμε το ζητήμα της μονοτονικότητας χωρίς αναφορά στον απειροστικό λογισμό και τις διαφορικές εξισώσεις. Ως δομικό στοιχείο της έρευνας, η προσομοίωση έχει άλλο ένα μεγάλο πλεονέκτημα. Μολονότι ίσως είναι δύσκολο να ξεκινήσουμε έχοντας μια πλήρως επεξεργασμένη δομή ως μοντέλο, η προσομοίωση μας επιτρέπει να οικοδομήσουμε κατασκευές σε απλούστερα μοντέλα. Επιπλέον, από τη στιγμή που περιλαμβάνουμε την πρόσθετη δομή, το προκύπτον μοντέλο εξακολουθεί να προσφέρει λύσεις που βασίζονται στην

Vensim® PLE

Το Vensim® PLE (Personal Learning Edition) είναι ένα μέλος της οικογένειας λογισμικού Vensim, σχεδιασμένο για να διευκολύνει την ανάπτυξη και τη χρήση υψηλής ποιότητας μοντέλων δυναμικών συστημάτων. Το Vensim® PLE παρέχεται δωρεάν για εκπαιδευτική και προσωπική χρήση. Μπορείτε να το φορτώσετε από τον Παγκόσμιο Ιστό, στη διεύθυνση <http://www.vensim.com>. Το Vensim® PLE περιλαμβάνει το μοντέλο Κόσμος 2, που αναπτύσσεται στο *World Dynamics*, και το μοντέλο Κόσμος 3 με την αναθεωρημένη μορφή που παρουσιάζεται στο *Beyond the Limits*. Για περισσότερες πληροφορίες απευθυνθείτε στην

Ventana Systems, Inc., 149 Waverly Street, Belmont MA 02178 USA. Τηλ.: (617) 489 5249 Fax: (001-617) 489 5316, E-mail: vensim@vensim@vensim.com, URL: <http://www.vensim.com>

προσομοίωση. Αντίθετα, μόνο τα απλούστερα προβλήματα επιτρέπουν λύσεις κλειστής μορφής, και ως εκ τούτου είναι εξαιρετικά δύσκολο να αναπτυχθούν ευρετικές ιδέες.

Ο πειραματισμός με την προσομοίωση θα δίνει πάντοτε αποτελέσματα. Αν αυτά αξιοποιηθούν κατάλληλα, μπορούν να προσφέρουν σημαντικές νέες ιδέες και γνώσεις.

Προβλήματα

1. Μια ετήσια απογραφή αποκαλύπτει ότι ένας πληθυσμός 100 κουνελιών εμφανίζει ρυθμό γεννήσεων 20% ανά έτος και μέση διάρκεια ζωής 10 ετών. Βρείτε έναν τύπο για το πλήθος των κουνελιών μετά την πάροδο *n* ετών.

2. Ένας πληθυσμός χρησιμοποιεί κάθε έτος το (1/200)-οστό των μη ανανεώσιμων φυσικών πόρων του. Σε πόσα χρόνια θα μειωθούν τα αποθέματα των πόρων στο 50% του αρχικού επιπέδου; ◻

Ο Bob Eberlein είναι διευθυντής στο τμήμα ανάπτυξης προϊόντων της Ventana Systems, Inc. Έχει πάρει διδακτορικό στο μάνατζμεντ από το MIT και εργάζεται στο πεδίο των δυναμικών συστημάτων ως σύμβουλος και καθηγητής από το 1984.

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 22 τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή.

Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Για να το αρχειοθετήσετε, προμηθευτείτε τις καλαίσθητες θήκες του, από το βιβλιοπωλείο μας ή με αντικαταβολή.



Ο κόσμος σε μια γυάλα

«Πλανητική διαχείριση» στα κλειστά οικολογικά συστήματα της Βιόσφαιρας 2

Joshua L. Tosteson

TΟ 1968, ΜΙΑ ΠΟΛΥΠΡΟΣΩΠΗ ΔΙΕΘΝΗΣ ομάδα επιστημόνων, οικονομολόγων, πολιτικών και εκπαιδευτικών δημιούργησε έναν νέο οργανισμό, τη Λέσχη της Ρώμης, η οποία σύντομα παρήγγειλε να πραγματοποιηθεί μια ρηξικέλευθη μελέτη, γνωστή ως «Πρόγραμμα για τη δυσχερή θέση του ανθρώπου είδους». Σκοπός του προγράμματος ήταν να διερευνηθούν οι αυξανόμενες επιπτώσεις της ανθρώπινης δραστηριότητας στο πλανητικό οικοσύστημα, καθώς και η δυσχερής θέση μας, δεδομένου ότι «παρά τις αξιόλογες γνώσεις και δεξιότητές μας, δεν κατανοούμε την προέλευση, τη σημασία και τις αλληλεξαρτημένες σχέσεις των πάμπολλων συνιστώσων του, ώστε να σχεδιάσουμε αποτελεσματικές αντιδράσεις». Το βιβλίο *The Limits to Growth* (LTG, για συντομία) —την επίδραση και την κληρονομιά του οποίου διερευνούμε στο παρόν τεύχος του *Quantum*— αποτέλεσε την απειρά του προγράμματος —και, πιθανόν, την πρώτη συστηματική προσπάθεια της ανθρωπότητας— να καταγράψει και να αποτιμήσει αυτές τις αλληλεξαρτημένες σχέσεις σε πλανητική κλίμακα.

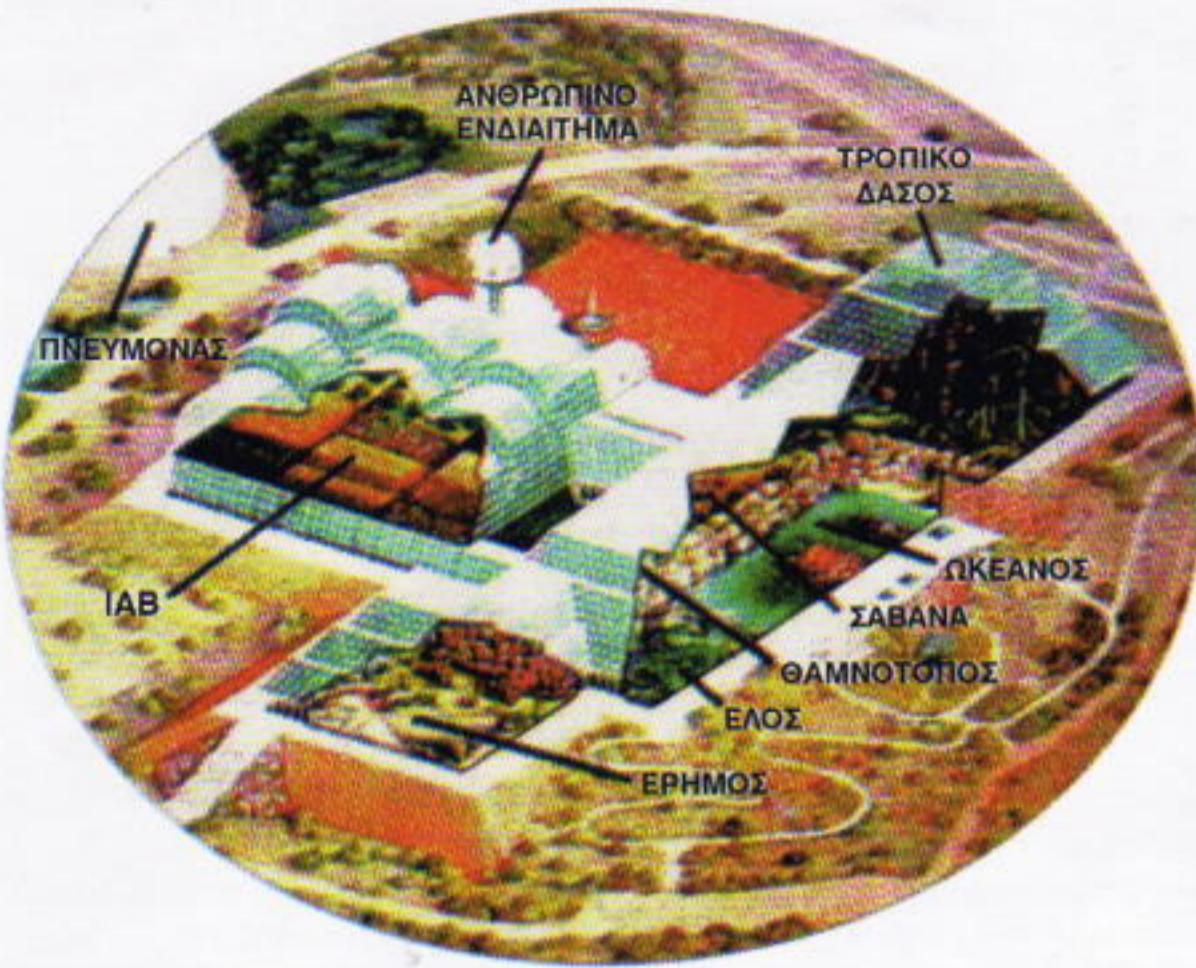
Η σημαντικότερη ίσως συμβολή του LTG στην πνευματική μας κληρονομιά έγκειται στον τρόπο με τον οποίο μας ανάγκασε να θεωρήσουμε τη γήινη βιόσφαιρα —τα αλληλοσυνδεόμενα φυσικά συστήματα μέσα στα οποία ανθούν οι ανθρώπινες οικονομίες και κοινωνίες, και αναπτύσσεται η ζωή στον πλανήτη— ως ένα

«κλειστό» σύστημα. Σε αντίθεση με τα «ανοιχτά» συστήματα, στα οποία η ύλη μπορεί να εισρέει ή να εκρέει, στα κλειστά συστήματα δεν επιτρέπεται οποιαδήποτε ανταλλαγή ύλης. Κατά τη μεγαλύτερη περίοδο της ιστορίας τους, οι άνθρωποι έδρασαν ωσάν η Γη να ήταν ανοιχτό σύστημα, με απειρούστους πόρους και άπειρη ικανότητα απορρόφησης των επιπτώσεων της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ήταν εύκολο να πραγματοποιηθεί τούτη η παραδοχή, διότι μέχρι πριν από εκατόν πενήντα χρόνια η κλίμακα του ανθρώπινου πολιτισμού, σε σχέση με το μέγεθος του πλανήτη, παρέμενε αρκετά μικρή.

Ωστόσο, με τη συνεχή αύξηση του ανθρώπινου πληθυσμού αλλά και την τεχνολογική πρόοδο του, η κλίμακα της ανθρώπινης δραστηριότητας πάνω στη Γη από τα μέσα του 19ου αιώνα μάς οδήγησε να αντιληφθούμε σαφέστατα ότι οι πόροι της Γης και τα συστήματα στήριξης της ζωής έχουν πράγματι όρια. Παρότι η γήινη βιόσφαιρα είναι ανοιχτή όσον αφορά την ενέργεια και την πληροφορία (κάτι που σημαίνει ότι το φως του Ήλιου, η βαρύτητα και άλλες πηγές ενέργειας και δύναμης επιδρούν στη Γη), στην πραγματικότητα αποτελεί κλειστό σύστημα όσον αφορά την ύλη —μοιάζει με τεράστια, κλειστή γυάλα. Αν εξαιρέσουμε τις σπάνιες περιπτώσεις διαφυγής κάποιων ελαφρών χημικών στοιχείων στο Διάστημα και την είσοδο μετεωρίτων ή μεσοπλανητικής σκόνης στην ατμόσφαιρά της, η Γη ούτε προσλαμβάνει ούτε αποβάλ-

λει ύλη. Το LTG μάς κατέδειξε, μέσω του υπολογιστικού μοντέλου Κόσμος 3, πώς τα ανθρώπινα όντα θα μπορούσαν πθανότατα να εξαντλήσουν τους φυσικούς πόρους του πλανήτη και να θέσουν σε δοκιμασία την ικανότητά του να στηρίζει την ανθρώπινη ζωή. Παρ' όλη τη δύναμη του μοντέλου, όμως, δεν ήταν εύκολο για τους ανθρώπους να αντιληφθούν πώς τα αποτελέσματά του συνδέονταν πραγματικά με τη ζωή τους και με το περιβάλλον τους. Είκοσι πέντε χρόνια αργότερα, ένα ζωντανό μοντέλο, ένας απομονωμένος μικρόκοσμος, έριξε και πάλι φως σε πολλά από τα θέματα στα οποία το LTG είχε για πρώτη φορά επικεντρώσει την παγκόσμια προσοχή, μ' έναν ιδιαίτερα άμεσο και παραστατικό τρόπο.

Η Βιόσφαιρα 2, μια περιοχή περίπου 13 στρεμμάτων στην έρημο βόρεια της Τούκσον, στην Αριζόνα, είναι μια ερευνητική εγκατάσταση η οποία έχει αιχμαλωτίσει τη φαντασία τόσο των επιστημόνων όσο και του κοινού (αλλά και με διαμφισθητίσεις από καιρού εις καιρόν) κατά τα έξι χρόνια της ύπαρξής της. Στην εγκατάσταση στεγάζονται έξι φυσικά βιοσυστήματα (τροπικό δάσος, έρημος, σαβάνα και θαμνότοπος, εκβολή ποταμού, και ωκεανός με κοραλλιογενή ύφαλο), ένα βιοσύστημα εντατικής αγροτοκαλλιέργειας (IAB) και ανθρώπινα ενδιαιτήματα (βλ. Σχήμα 1). Από το 1991 ως το 1994, στην εγκατάσταση έζησαν δύο ερευνητικές ομάδες, που παρέμειναν κλεισμένες στη Βιόσφαιρα 2 και είχαν την ευθύνη να



Σχήμα 1

Η εγκατάσταση της Βιόσφαιρας 2.

καλύψουν όλες τις ανάγκες της επιβίωσής τους. Πιο πρόσφατα, υπό τη διεύθυνση του Πανεπιστημίου της Κολούμπια, η εγκατάσταση χρησιμοποιήθηκε για να διερευνηθούν ζητήματα που σχετίζονται με τις ανθρώπινες επιδράσεις στο περιβάλλον του πλανήτη μας.

Ως κλειστό (όσον αφορά την ύλη) σύστημα, το κλίμα της Βιόσφαιρας 2, η ατμοσφαιρική σύστασή της καθώς και η ανακύκλωση του νερού και των θρεπτικών συστατικών —όλες οι βασικές λειτουργίες στηρίζεται στης ζωής τις οποίες μας προσφέρει ο πλανήτης μας— πρέπει να οργανώνονται σχεδόν εξ ολοκλήρου από τους ανθρώπους. Για να στηρίξουν την ανθρώπινη ζωή μέσα στον αποκλεισμένο χώρο, οι επιστήμονες που κατέστρωσαν το αρχικό πρόγραμμα έπρεπε να φροντίσουν ώστε οι περιβαλλοντικές συνθήκες των συστημάτων της Βιόσφαιρας 2 να μεγιστοποιούν την παραγωγή τροφής, να διατηρούν ασφαλή ισορροπία ανάμεσα στα επίπεδα οξυγόνου και διοξειδίου του άνθρακα, να διαφυλάσσουν κάποιο υψηλό επίπεδο βιοποικιλότητας και να ανακυκλώνουν επιτυχώς τα θρεπτικά συστατικά και το νερό (πόσιμο και βρόχινο) —και όλα αυτά, χωρίς εισροή ή εκροή ύλης. Εν ολίγοις, έπρεπε να διαχειρι-

στούν όλες τις βασικές λειτουργίες του πλανήτη για τη στήριξη της ζωής μέσα σ' έναν αποκλεισμένο χώρο, όχι πολύ μεγαλύτερο από δύο γήπεδα ποδοσφαίρου!

Στο παρόν άρθρο θα περιγράψω μερικές από τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουμε στην προσπάθεια να διαχειριστούμε το πολύπλοκο σύστημα της Βιόσφαιρας 2. Θα επικεντρώσω το ενδιαφέρον μου κυρίως στην ιστορία της Απόστολής 1, κατά την οποία μια οκταμελής ομάδα έζησε στη Βιόσφαιρα 2 για δύο χρόνια, από το 1991 ως το 1993. Κατόπιν, θα χρησιμοποιήσω μερικά από τα διδάγματα που αποκομιδώμασse από τη συγκεκριμένη εμπειρία προκειμένου να εξετάσω τη Γη (τη «Βιόσφαιρα 1») ως κλειστό σύστημα και να προσεγγίσω με μια νέα θεωρηση τις ιδέες που γεννήθηκαν πριν από είκοσι πέντε χρόνια στο βιβλίο *The Limits to Growth*. Καθώς θα διεξέρχομαι το θέμα μου, θα διατυπώσω ορισμένα προβλήματα με σκοπό να προκαλέσω περαιτέρω διερεύνηση των ζητημάτων τα οποία θίγω στο άρθρο.

Η Αποστολή 1 στη Βιόσφαιρα 2

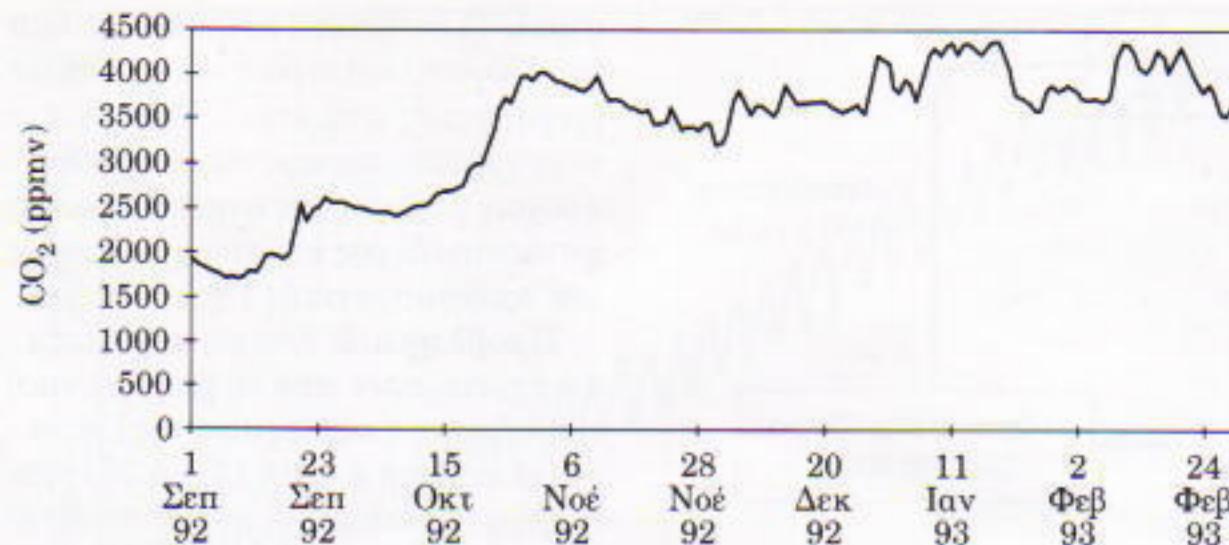
Πώς θα ήταν η ζωή μας αν έπρεπε να διαχειριστούμε τις συνθήκες της Γης έτσι ώστε το οξυγόνο (O_2) της α-

τρόσφαιρας να διατηρείται σε ασφαλή επίπεδα (μεταξύ 19% και 21%). Τι θα συνέβαινε αν οι διεθνείς δυνάμεις για την αντιμετώπηση επειγόντων περιστατικών έπρεπε να ανασυνταχθούν για να αποτρέψουν την άνοδο των επιπέδων του ατμοσφαιρικού διοξειδίου του άνθρακα (CO_2) πέραν της ειμής των 2.000 μερών ανά εκατομμύριο (τα τρέχοντα επίπεδα CO_2 είναι περίπου 355 μέρη ανά εκατομμύριο); Κι αν κάποια μικρά λάθη στις επιλεγμένες στρατηγικές αντιμετώπισης αυτών των προβλημάτων οδηγούσαν τον πλανήτη σε μια καταστροφική κατάρρευση; Κοντολογίς, τι θα συνέβαινε αν έπρεπε να οργανώσουμε τα συστήματα που χρησιμεύουν ως υπόβαθρο για τη ζωή στον πλανήτη μας έτσι ώστε να καλύψουμε όλες τις ανάγκες της επιβίωσής μας;

Αυτή ήταν εν ολίγοις η ζωή της πρώτης αποστολής στη Βιόσφαιρα 2, για δύο χρόνια, από τον Σεπτέμβριο του 1991 ως τον Σεπτέμβριο του 1993. (Η δεύτερη ομάδα έζησε στην ίδια εγκατάσταση από τον Μάρτιο ως τον Σεπτέμβριο του 1994.) Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, οι βασικές προτεραιότητες για τα μέλη της ομάδας ήταν να τραφούν, να βεβαιωθούν ότι η χημική σύσταση της ατμόσφαιρας παραμένει ασφαλής και να διατηρήσουν ένα υψηλό επίπεδο βιοποικιλότητας. Εφγάζονταν με την παραδοχή ότι το σύστημα θα έμενε κλειστό για εκατό χρόνια και ότι δεν θα εισάγονταν νέα ζωικά και φυτικά είδη —με άλλα λόγια, η Βιόσφαιρα έπρεπε απαραίτητως να θεωρείται απολύτως κλειστό σύστημα. Οπως αποδείχτηκε, ήταν σχεδόν αδύνατον να επιτευχθούν οι στόχοι τους, για λόγους που θα ερευνήσουμε στη συνέχεια.

Διαχείριση του τροπικού δάσους

Για να αρχίσουμε, ας δούμε πώς η ομάδα διαχειρίστηκε το βιοσύστημα του τροπικού δάσους προκειμένου να καλύψει τις ανάγκες της επιβίωσής της. Το τροπικό δάσος αποτελούσε βιοσύστημα κρίσιμης σημασίας για την ομάδα, και τούτο για αρκετούς λόγους. Πρώτον, το τροπικό δάσος συντηρούσε μεγάλο μέρος της βιοποικιλότητας της Βιόσφαιρας —και η ομάδα αγωνιούσε για να την εξασφα-



Σχήμα 2

Επίπεδα του CO_2 στη Βιόσφαιρα 2, από τον Σεπτέμβριο του 1992 ως τον Μάρτιο του 1993.

λίσει. Το σπουδαιότερο δύον αφορά την επιβίωσή της, όμως, ήταν ότι το τροπικό δάσος έπαιζε καθοριστικό ρόλο στην προσπάθεια να διατηρηθεί η ισορροπία O_2 και CO_2 στην ατμόσφαιρα της Βιόσφαιρας. Τα φυτά προσλαμβάνουν, ή δεσμεύουν, διοξείδιο του άνθρακα μέσω της διαδικασίας της φωτοσύνθεσης, και ταυτόχρονα απελευθερώνουν οξυγόνο. Η διαδικασία περιγράφεται από την ακόλουθη χημική αντίδραση:



όπου το CH_2O εκφράζει τον γενικό τύπο της παραγόμενης οργανικής ύλης.

Επειδή τα τροπικά δάση είναι εξαιρετικά παραγωγικά οικοσυστήματα (γεγονός που σημαίνει ότι τα φυτά τους απορροφούν το CO_2 με ταχύτατους ρυθμούς), παράγουν μεγάλο μέρος του οξυγόνου της γήινης ατμόσφαιρας (της Βιόσφαιρας 1) και κρατούν το διοξείδιο του άνθρακα σε σχε-

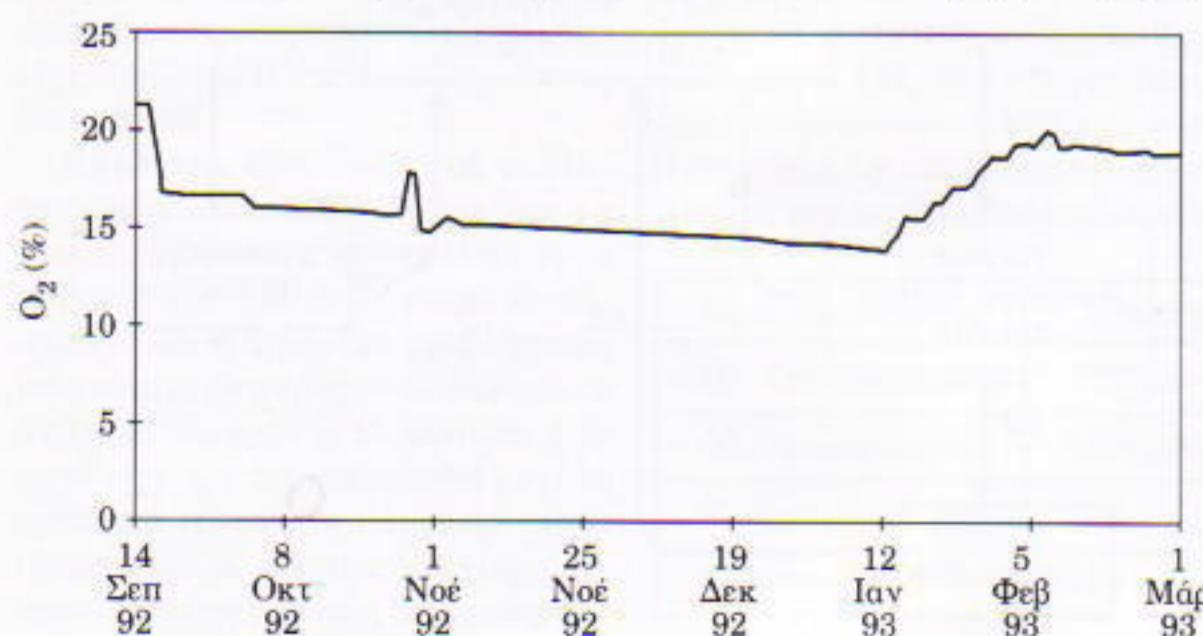
τικά χαμηλά επίπεδα. Στη Βιόσφαιρα 2, το βιοσύστημα του τροπικού δάσους εκτελούσε μια παρόμοια λειτουργία: εξασφάλιζε υψηλά επίπεδα O_2 (περίπου 21%) και σχετικά χαμηλά επίπεδα CO_2 .

Το φθινόπωρο του 1992, όμως, ένα χρόνο αφότου είχε «σφραγιστεί» αρχικά η Βιόσφαιρα 2, οι «κάτοικοί» της ανησύχησαν για την άνοδο του επιπέδου CO_2 στην εγκατάσταση (Σχήμα 2) και για τη σταθερή υποχώρηση του επιπέδου O_2 (Σχήμα 3). Ήταν σαφές πως η φωτοσύνθεση αδυνατούσε να αντισταθμίσει κάποιες άλλες διαδικασίες που προσέθεταν στην ατμόσφαιρα CO_2 και τις αποσπόύσαν O_2 . Στην προκειμένη περίπτωση, ο ρόλος του τροπικού δάσους στην προσπάθεια των κατοίκων της Βιόσφαιρας να ανυψώσουν το επίπεδο οξυγόνου και να διακόψουν την αύξηση του διοξειδίου του άνθρακα έγινε εξαιρετικά σημαντικός.

Το τροπικό δάσος της Βιόσφαιρας 2

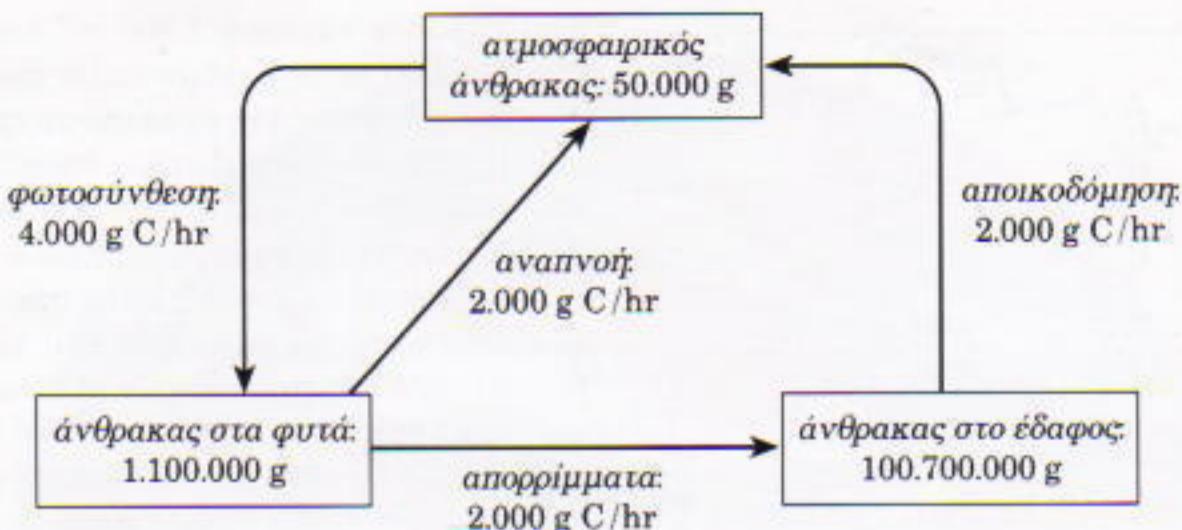
έχει εμβαδόν περίπου 1.900 m^2 και όγκο 35.000 m^3 — σχεδόν το 1/4 του συνολικού όγκου της εγκατάστασης (βλ. Σχήμα 1). Το ψηλότερο σημείο του απέχει περίπου 22 m από το έδαφος. Από ειδικούς αεραγωγούς (οι οποίοι έχουν εγκατασταθεί στο υπόγειο που υπάρχει κάτω από όλα τα βιοσυστήματα), περνούν διαμέσου του τροπικού δάσους ρεύματα ψυχρού και θερμού αέρα, και με τον τρόπο αυτό ελέγχεται η θερμοκρασία και η υγρασία. Επίσης, ειδικοί φεκαστήρες στο έδαφος και στην οροφή προκαλούν βροχή, και ένα σύστημα παραγωγής ομίχλης επιτρέπει στο τροπικό δάσος να βρίσκεται σε πολύ υψηλά επίπεδα υγρασίας. Αισθητήρες μέσα στο τροπικό δάσος καταγράφουν την ατμοσφαιρική σύσταση, τη θερμοκρασία, το φως και την υγρασία χάρη σ' αυτούς, τόσο οι κάτοικοι της Βιόσφαιρας 2 όσο και οι επιστήμονες έξω από αυτήν μπορούν να παρακολουθούν και να καταγράφουν τις συνθήκες της εγκατάστασης σε πραγματικό χρόνο. (Μπορείτε κι εσείς να εξετάσετε τα δεδομένα της Βιόσφαιρας 2 σε πραγματικό χρόνο αν ανατρέξετε στη διεύθυνση www.bio2.edu στον Παγκόσμιο Ιστό.)

Έχοντας αυτά τα μέσα στη διάθεσή της, η ομάδα φρόντισε ώστε να αναπτυχθούν κάποια είδη ζιζανίων που μεγάλωναν σε σύντομο χρονικό διάστημα, διότι αυτά είχαν την ικανότητα να απορροφούν ταχύτατα διοξείδιο του άνθρακα και να παράγουν οξυγόνο. Σε άλλη περιοχή του τροπικού δάσους, η ομάδα κλάδεψε ορισμένα φυτά προκειμένου να ζωηρέψει τη φωτοσύνθεση. Μην ξεχνάτε, όμως, ότι η Βιόσφαιρα είναι κλειστό σύστημα. Οι κάτοικοι της δεν έπρεπε απλώς να αποθέσουν τα κομμένα κλαδιά στο έδαφος, διότι θα αποκοδομούνταν, θα αποσυνετίθεντο: ο άνθρακας τον οποίο τα φυτά είχαν απορροφήσει από την ατμόσφαιρα (και ο οποίος βρισκόταν αποθηκευμένος στον ιστό τους) θα απελευθερώνόταν και θα επέστρεφε στο ατμοσφαιρικό απόθεμά του (με μορφή διοξειδίου του άνθρακα). Τα βακτήρια και οι μύκητες που ζουν στο έδαφος έχουν ως πηγή τροφής τη νεκρή οργανική ύλη (νεκρά φυτά και ζώα). Κατά την αποκοδόμηση που της επιφέρουν, λοιπόν,



Σχήμα 3

Επίπεδα του O_2 στη Βιόσφαιρα 2, από τον Σεπτέμβριο του 1992 ως τον Μάρτιο του 1993.



Σχήμα 4

Απλό μοντέλο του κύκλου του άνθρακα στο βιοσύστημα του τροπικού δάσους της Βιόσφαιρας 2.

αφαιρείται από την ατμόσφαιρα οξυγόνο και απελευθερώνεται σ' αυτήν διοξείδιο του άνθρακα. Η διαδικασία περιγράφεται από την ακόλουθη χημική αντίδραση:



όπου το CH_2O εκφράζει τον γενικό τύπο της οργανικής ύλης στο έδαφος.

Επομένως, η ομάδα έπρεπε να απορρίψει την περιττή βιομάζα (που προέκυψε από το κλάδεμα) στο υπόγειο, έτσι ώστε να εμποδίσει τον άνθρακα που είχε αφαιρεθεί από την ατμόσφαιρα να επανέλθει σε ενεργό κυκλοφορία μέσα στο σύστημα. Με αυτό τον τρόπο, οι κάτοικοι της Βιόσφαιρας 2 ήλπιζαν ότι θα κατόρθωναν να οργανώσουν μια διαδικασία μέσω της οποίας θα αφαιρούσαν σταθερά τον άνθρακα από την ατμόσφαιρά τους, και θα προσέθεταν συνεχώς οξυγόνο. Δεν είναι εύκολο να ζεις σ' ένα κλειστό σύστημα!

Προβλήματα

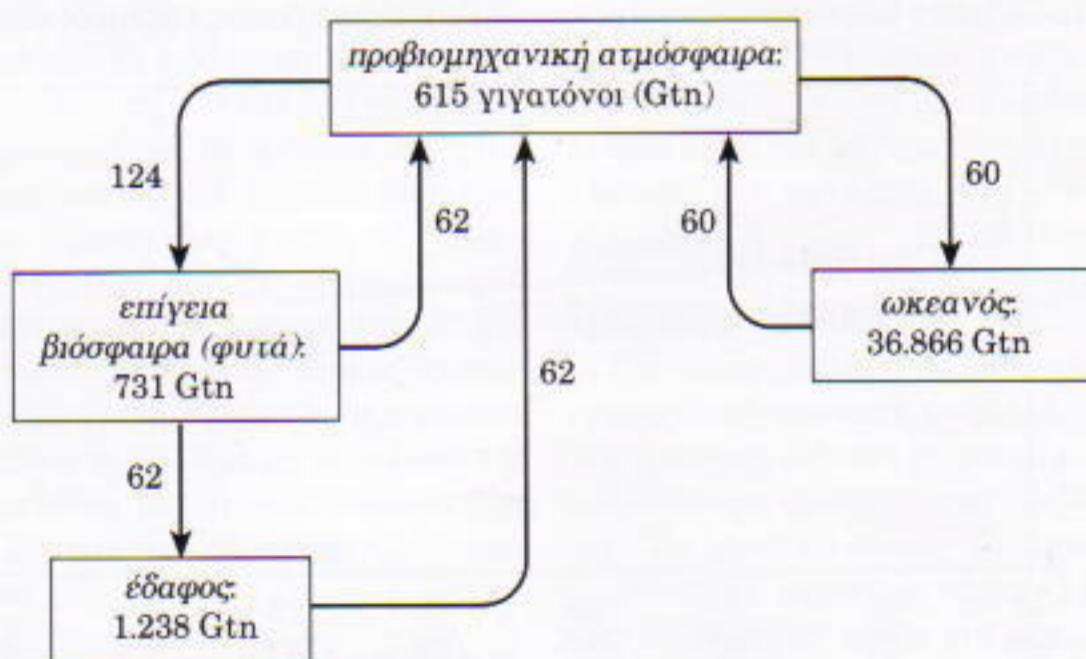
Η κινητικότητα που χαρακτηρίζει τον κύκλο του άνθρακα σ' ένα οικοσύστημα (η βιολογική, η εδαφική και η ατμοσφαιρική δεξαμενή, όπου αποθηκεύεται ο άνθρακας του συστήματος, και οι διαδικασίες που μεταφέρουν τον άνθρακα από τη μια δεξαμενή στην άλλη) συνδέεται στενά με το χρόνο που θα χρειάζονταν οι ροές για να αφαιρέσουν όλο το CO_2 ή το CH_2O από τις δεξαμενές άνθρακα. Αν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία (η εισροή ισούται με την εκροή), ο δείκτης της κινητικότητας προκύπτει αν διαιρέσουμε την ποσότητα άνθρακα που είναι αποθηκευμένη σε μια δεξαμενή

σταση. Ο άνθρακας μετριέται σε GtN (γιγατόνους) και οι ροές του σε GtN/yr (γιγατόνους ανά έτος). Υπολογίστε τους χρόνους παραμονής των ανθρακούχων μορίων στην ατμόσφαιρα, στα φυτά, στο έδαφος και στους οceans της προβιομηχανικής Γης.

Πρόβλημα 3. Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις, πριν από τη βιομηχανική επανάσταση η ατμόσφαιρα της Γης περιείχε περίπου 0,028% CO_2 , ή 280 ppm (μέρη ανά εκατομμύριο). Τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν στο Αστεροσκοπείο του Μάουνα Λόα στη Χαβάη (Σχήμα 6) δείχνουν ότι από το 1960 έως το 1990 το επίπεδο του CO_2 στη γήινη ατμόσφαιρα ανήλθε περίπου κατά 2 ppm / yr. Θεωρώντας ότι το πρόσθετο CO_2 προέρχεται από την κατανάλωση ορυκτών καυσίμων, εκτιμήστε πόσοι γιγατόνοι άνθρακα και γίγονται κάθε χρόνο.

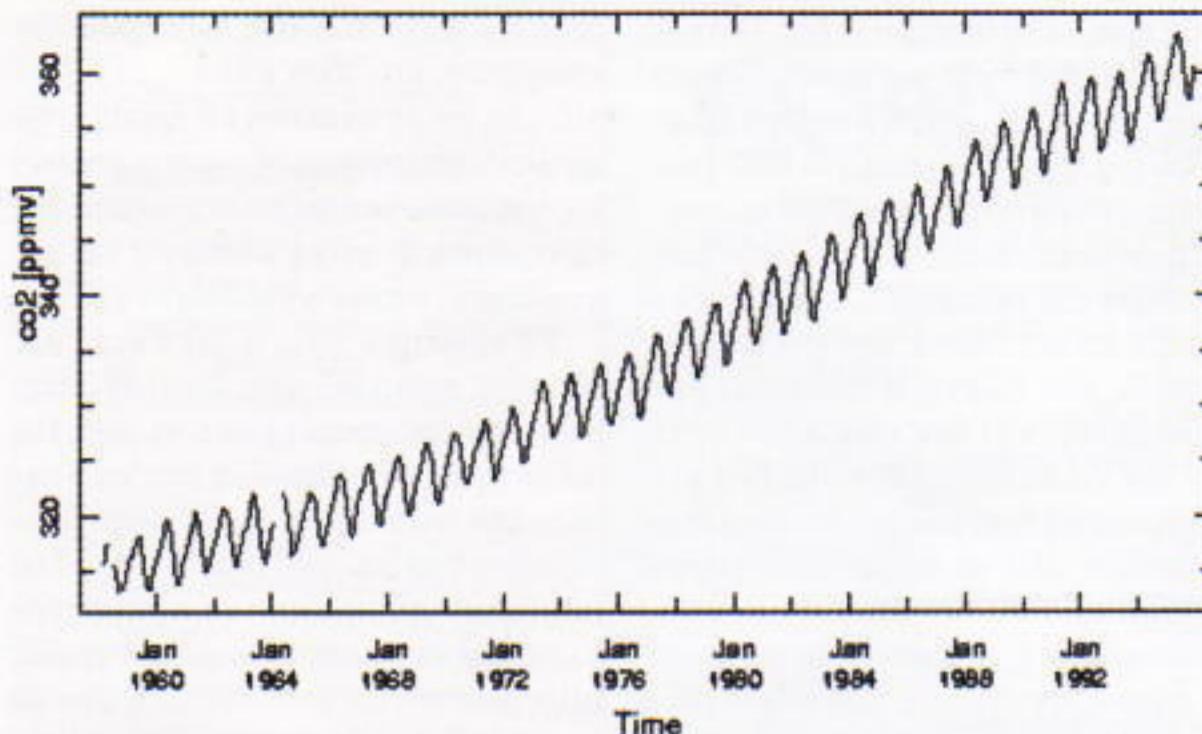
Από πού προέρχεται ο άνθρακας:

Παρά τις ακαταπόνητες προσπάθειες των μελών της ομάδας, οι στρατηγικές διαχείρισης του τροπικού δάσους τις οποίες εφάρμοσαν απέβησαν ελάχιστα επιτυχείς στον περιορισμό της απώλειας οξυγόνου από την ατμόσφαιρά τους, όπως φαίνεται σαφέστατα στο Σχήμα 3. Μάλιστα, το επίπεδο οξυγόνου βυθίστηκε τόσο χαμηλά τον Ιανουάριο του 1993 — στο απειλητικό για την υγεία ποσοστό του 14% —, ώστε οι υπεύθυνοι του προγράμματος πήραν τη δύσκολη απόφαση να διοχετεύσουν O_2 στη Βιόσφαιρα μέσω



Σχήμα 5

Πλανητικός κύκλος του άνθρακα (από το McElroy, «The Atmosphere: An Essential Component of the Planet's Life Support System», κείμενο για το Science A -30, Harvard University).



Σχήμα 6

Τα επίπεδα του ατμοσφαιρικού CO_2 , όπως μετρήθηκαν στο Μάουνα Λόα της Χαβάης (πηγή: Κέντρο ανάλυσης πληροφοριών για το διοξείδιο του άνθρακα).

των «πνευμόνων» (εξ ου και η απότομη άνοδος του επιπέδου του οξυγόνου που φαίνεται στο Σχήμα 3). Ευτυχώς για τους κατοίκους της, σε περίπτωση ανάγκης η Βιόσφαιρα 2 μπορούσε να μετατραπεί σε ανοιχτό σύστημα. Αν όμως βρισκόταν στο Διάστημα, είναι σίγουρο ότι τα μέλη της ομάδας θα είχαν πεθάνει.

Η Linda Leigh, μέλος της Αποστολής 1, θυμάται το κουραστικό ταξίδι που έκανε μέσα στη Βιόσφαιρα ώσπου να φτάσει στους «πνεύμονες» για να αναπνεύσει το εισερχόμενο οξυγόνο, και σκέφτεται ότι «υπήρχε κάτι το ποιητικό στην προσπάθεια να συρθείς προς τον "πνεύμονα" για ν' αναπνεύσεις, για να κερδίσεις τη ζωή». Κατέστη σαφές, λοιπόν, ότι η στρατηγική της ομάδας προκειμένου να ικανοποιήσει τις ανάγκες της επιβίωσής της ήταν αναποτελεσματικές. Ωστόσο, δεν είχε διαπιστωθεί για ποιο λόγο συνέβαινε αυτό.

Κλήθηκαν ερευνητές από το Πανεπιστήμιο της Κολούμπια, για να προσπαθήσουν να ανακαλύψουν τι ακριβώς συνέβαινε. Σύντομα διαπίστωσαν ότι η αιτία του προβλήματος πθανότατα βρισκόταν στο πλούσιο σε άνθρακα έδαφος της Βιόσφαιρας 2. Σ' αυτό είχε αρχικά εναποτεθεί μεγάλη ποσότητα οργανικής ύλης, την οποία (όπως είπαμε παραπάνω) χρησιμοποιούν ως πηγή τροφής οι μικροοργανισμοί του εδάφους. Οι ερευνητές, λοιπόν, σκέφτηκαν ότι, επειδή υπήρχε τόσο μεγάλη ποσότητα οργανικού

άνθρακα στη Βιόσφαιρα 2, η διαδικασία της αποικοδόμησης συνέβαινε με εξαιρετικά ταχύ ρυθμό. Και επειδή το γυαλί του περιβλήματος της εγκατάστασης και τα πλαίσια στήριξής του εμπόδιζαν το 45% —υψηλότατο ποσοστό— του εξωτερικού φωτός να φτάσει στα φυτά, ο ρυθμός της φωτοσύνθεσης δεν μπορούσε να «παρακλαλούθησε» το ρυθμό της συγκεκριμένης αποικοδόμησης. Έτσι, υπέθεσαν ότι αυτό οδηγούσε σε σταθερή συσσώρευση του CO_2 στην ατμόσφαιρα της Βιόσφαιρας 2 και ελάττωση του O_2 .

Για να είναι ισχυρή η εν λόγω υπόθεση, όμως, ο αριθμός των μορίων CO_2 (εκφρασμένος σε γραμμομόρια) που προσετίθετο στην ατμόσφαιρα της Βιόσφαιρας 2 έπρεπε να είναι ίσος με τον αριθμό των μορίων O_2 που χάνονταν από αυτήν. Και τούτο διότι, όπως δείχνουν οι εξισώσεις (1) και (2), για κάθε μόριο CO_2 που απορροφάται ή απελευθερώνεται μέσω της φωτοσύνθεσης ή της αποικοδόμησης, αντίστοιχα, απελευθερώνεται ή απορροφάται κάτιον O_2 .

Αέριο, Ημερομηνία	Μέτρηση
CO_2 , Σεπτέμβριος 1992	2.000 ppm
CO_2 , Ιανουάριος 1993	4.000 ppm
O_2 , Σεπτέμβριος 1992	21%
O_2 , Ιανουάριος 1993	14%

Σχήμα 7

Μεταβολές στα επίπεδα διοξειδίου του άνθρακα και οξυγόνου στη Βιόσφαιρα 2.

φάται και ένα μόριο O_2 .

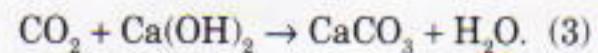
Ωστόσο, τα δεδομένα στο Σχήμα 7 αποκαλύπτουν ότι μεταξύ Σεπτεμβρίου 1992 και Ιανουαρίου 1993 ο αριθμός των γραμμομορίων CO_2 που απελευθερώθηκαν στην ατμόσφαιρα της Βιόσφαιρας 2 ήταν μικρότερος από τον αριθμό των γραμμομορίων O_2 που απορροφήθηκαν. Κατά την περίοδο αυτή, μόνο $1.1 \cdot 10^4$ γραμμομόρια CO_2 —περίπου— προστέθηκαν στην ατμόσφαιρα, ενώ απορροφήθηκαν σχεδόν $5.4 \cdot 10^5$ γραμμομόρια O_2 .

Σαφέστατα, η συνολική ποσότητα CO_2 που απελευθερώθηκε στην ατμόσφαιρα της Βιόσφαιρας 2 ήταν κατά μία ολόκληρη τάξη μεγέθους μικρότερη από τη συνολική ποσότητα O_2 που αφαιρέθηκε από αυτήν. Ωστόσο, παρ' όλες τις ενδείξεις περί του αντιθέτου, τα εν λόγω δεδομένα δεν ακυρώνουν κατ' ανάγκη την αρχική υπόθεση της ερευνητικής ομάδας. Γιατί; Διότι θα μπορούσε να λαμβάνει χώρα κάποια άλλη διαδικασία —ανεξάρτητη από τις διαδικασίες του οικοσυστήματος τις οποίες εξετάσαμε (τη φωτοσύνθεση και την αποικοδόμηση)—, η οποία θα αφαιρούσε άνθρακα από την ατμόσφαιρα χωρίς να απελευθερώνει οξυγόνο σ' αυτήν. Όπως αποδείχτηκε, πράγματι συντελούνταν δύο τέτοιες διαδικασίες.

Απαντήσεις σε απίθανα μέρη

Κατ' αρχάς, οι χημικές πλυντρίδες δέσμευαν αυτόματα, και για αρκετό χρόνο, CO_2 από την ατμόσφαιρα. Με γρήγορους υπολογισμούς, όμως, αποκαλύφθηκε ότι η ποσότητα του CO_2 που δεσμεύτηκε από την ατμόσφαιρα της Βιόσφαιρας 2 δεν ήταν τόση ώστε να εξηγείται η συνολική ποσότητα του «ελλείποντος» άνθρακα.

Οι ερευνητές βρέθηκαν σε αμηχανία και άρχισαν να διερευνούν διάφορες δυνατότητες, προσπαθώντας να εντοπίσουν το πρόβλημα. Διατυπώθηκε η πρόταση ότι το σκυρόδεμα (μπετόν) της Βιόσφαιρας αντιδρούσε με το ατμοσφαιρικό CO_2 σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:



Οι ερευνητές πήραν δείγματα του σκυροδέματος: αν όντως αντιδρούσε με το ατμοσφαιρικό CO_2 , τότε θα είχε και υψηλή περιεκτικότητα σε CaCO_3 ,

(ανθρακικά άλατα). Διαπίστωσαν ότι πράγματι υπήρχαν υψηλά επίπεδα CaCO_3 στο σκυρόδερμα, και τούτο αρκούσε για να επιβεβαιωθεί η υπόθεση ότι όντας το σκυρόδερμα ήταν αυτό που απορροφούσε τον ατμοσφαιρικό άνθρακα «*αποκρύπτοντας*» τις επιπτώσεις της ταχείας αποικοδόμησης και της αργής φωτοσύνθεσης. Οι χημικές πλυντρίδες και, κυρίως, το σκυρόδερμα συγκάλυπταν τη σημαντικότερη δυναμική διαδικασία του συστήματος, η οποία απειλούσε τη ζωή των κατοίκων του —δηλαδή, το ότι η αποικοδόμηση είχε ξεπεράσει σε σημαντικό βαθμό τη φωτοσύνθεση, εξαιτίας της υπεραφθονίας οργανικής ύλης στο έδαφος της Βιόσφαιρας 2.

Μέσα στον αποκλεισμένο χώρο του βιοσυστήματος, η στρατηγική διαχείρισης έπρεπε να είναι ένας ευφυής τρόπος να διατηρηθεί υγιεινή ατμοσφαιρική σύσταση και, παράλληλα, να εξασφαλιστεί το υψηλό επίπεδο βιοποικιλότητας. Επειδή όμως οι κάτοικοι της Βιόσφαιρας δεν διέθεταν τις κατάλληλες γνώσεις αναφορικά με το εξαιρετικά πολύπλοκο σύστημά τους, αδυνατούσαν να κατανοήσουν γιατί η στρατηγική τους ήταν αναποτελεσματική: το μόνο που μπορούσαν να κάνουν ήταν να παρατηρούν τη συνεχή υποχώρηση των επιπέδων οξυγόνου στο εσωτερικό της εγκατάστασης. Με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες της Βιόσφαιρας (υψηλά επίπεδα οργανικού άνθρακα στο έδαφος και χαμηλά επίπεδα φωτός για δύο χρόνια), εσείς πώς θα διαχειρίζοσασταν το σύστημα —χωρίς οποιεσδήποτε εισροές από το εξωτερικό του συστήματος—, έτοι ώστε να μετριάσετε τη συσώρευση CO_2 και την απώλεια O_2 ? Πιστεύετε ότι η στρατηγική των κατοίκων της Βιόσφαιρας 2 ήταν καλά μελετημένη;

Ιστορία δύο κλειστών συστημάτων

Παρά τις φιλότιμες προσπάθειές της, η Αποστολή 1 αδυνατούσε να βρει λύση στα προβλήματά της με τέτοιον τρόπο ώστε να μην παραβιάζεται ο «*υλικός αποκλεισμός*» της εγκατάστασης. Ευτυχώς για την ομάδα, είχε τη δυνατότητα σε κάποια κρίσιμη στιγμή να ζητήσει την τροφοδότηση της εγκατάστασης με οξυγόνο, διαφορετι-

κά θα είχε πολύ άσχημο τέλος. Η σχεδόν τραγική ιστορία της προσφέρει μια σύγχρονη αλληγορία, εξαιρετικά διδاكتيكή για την ανθρωπότητα που βρίσκεται στο κατώφλι του 21ου αιώνα.

Πρώτον και κύριον, η εμπειρία των κατοίκων της Βιόσφαιρας 2 μας υπενθυμίζει ότι οι γνώσεις μας για τις λειτουργίες του πλανήτη μας είναι περιορισμένες, και δεν επαρκούν ούτε καν για να κατασκευάσουμε ένα μικρό ομοιόματό του, μια μινιατούρα που θα διέθετε όλα τα σημαντικά χαρακτηριστικά του. Με αυτή την έννοια, η Βιόσφαιρα 2, ως μοντέλο, απέτυχε να αναπαραγάγει τις ουσιώδεις συμπεριφορές του μεγαλύτερου συστήματος (της Γης) το οποίο υποτίθεται ότι θα προσομοιώνε. Η εμπειρία της Αποστολής 1 αποκαλύπτει ότι ο πλανήτης μας είναι ένα ασύλληπτα πολύπλοκο κλειστό σύστημα, το οποίο δεν θα πάψει να μας εκπλήσσει με τη συμπεριφορά του —άλλοτε με τρόπο ευχάριστο και άλλοτε, ίσως, με τραγικό.

Ωστόσο, αν και δεν έχουμε επαρκείς γνώσεις —και παρότι η φύση θα συνεχίσει να μας εκπλήσσει κάποιες φορές—, ξέρουμε τι μπορεί να συμβεί όταν ένα πραγματικά πολύπλοκο σύστημα εκτραπεί από την ισορροπία. Στη Βιόσφαιρα 2, οι σχεδιαστές του συστήματος υπέπεισαν σ' ένα θεμελιώδες σφάλμα. Οργάνωσαν το σύστημα «*φυτά-έδαφος-ατμόσφαιρα*» με τέτοιον τρόπο ώστε η ισορροπία μετάξυ CO_2 και O_2 , η οποία εδραιώνεται από τους ρυθμούς φωτοσύνθεσης και αποικοδόμησης, να μην μπορεί να διατηρείται ώστε να στηρίζει την ανθρώπινη ζωή για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στη Βιόσφαιρα 1, εμείς οι άνθρωποι είμαστε πλέον οι σχεδιαστές του συστήματος, είτε έχουμε πλήρη επίγνωση του γεγονότος είτε όχι. Άλλοιώντας τις δεξαμενές και τις ροές των αναρίθμητων χημικών ειδών και των φυσικών πόρων, από τα φυτά και το έδαφος ως τα ορυκτά και τα ύδατα, ουσιαστικά σχεδιάζουμε εκ νέου το εξαιρετικά πολύπλοκο σύστημά μας —το οποίο, όμως, βρισκόταν σε δυναμική ισορροπία επί χιλιετίες. Και τώρα, πλέον, πληθαίνουν τα απειλητικά μηνύματα —απώλεια του στρατοσφαιρικού ζόντος εξαιτίας των χλωροφθορανθράκων, άνοδος των επιπέδων του ατμοσφαιρικού CO_2 λόγω

μεγάλης κατανάλωσης των ορυκτών καυσίμων, και τόσα άλλα —που θυμίζουν, με εντυπωσιακό τρόπο, την τρομακτική απώλεια οξυγόνου μάρτυρες της οποίας υπήρξαν οι κάτοικοι της Βιόσφαιρας 2, όντας ανίκανοι να την ανακόψουν στον κατάλληλο χρόνο.

Το ερώτημα που ανακύπτει από όλα όσα προηγήθηκαν είναι το εξής: πόσο έχουμε προσεγγίσει τα όρια της ικανότητας του πλανήτη μας να στηρίζει την ανθρώπινη ζωή; Αραγε διαταράσσουμε τα συστήματα της Γης με τέτοιον τρόπο ώστε να αδυνατούν πλέον να εκτελέσουν τις λειτουργίες τους που είναι απαραίτητες για τη δική μας ζωή; Οπως μας δίδαξε η Βιόσφαιρα 2, δεν είμαστε και τόσο ικανοί να κατασκευάζουμε και να διαχειρίζομαστε «*πλανήτες*». Σε αντίθεση όμως με τους κατοίκους εκείνης της τεχνητής εγκατάστασης, εμείς, οι κάτοικοι της Γης, όταν δούμε ότι τα πράματα δυσκολεύουν, δεν μπορούμε απλώς να ανοίξουμε την πόρτα και να βγούμε με σκυμμένο κεφάλι στα αποδυτήρια της Βιόσφαιρας 1, της δικής μας βιόσφαιρας.

Ευχαριστίες

Ο συγγραφέας θα ήθελε να ευχαριστήσει τον δρ. Kurt Kreith, για τις πολλές χρήσιμες συμβουλές και τα σχόλιά του όσον αφορά το άρθρο, καθώς και τον δρ. Bruno Marino και τη δρ. Debra Colodner, που επίσης έκαναν εύστοχες παρατηρήσεις για το κείμενο. Το μεγαλύτερο μέρος του άρθρου γράφτηκε με τη γενναιόδωρη υποστήριξη του Κέντρου της Βιόσφαιρας 2, θυγατρικού ιδρύματος του Πανεπιστημίου της Κολούμπια. Ο συγγραφέας εκφράζει την ευγνωμοσύνη του γι' αυτή την υποστήριξη. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Ο Joshua L. Tosteson συνεργάζεται με το Κέντρο της Βιόσφαιρας 2 (που βρίσκεται στο Όρακλ της Αριζόνας) από το 1994, αρχικά ως ειδικός επιστήμων σε θέματα περιβαλλοντολογίας, δημοσίου συμφέροντος και εκπαίδευσης, και αργότερα ως συντονιστής των εκπαιδευτικών προγραμάτων του ιδρύματος. Τώρα ασχολείται με διδακτορικές σπουδές στο Γεωλογικό Ινστιτούτο του Πανεπιστημίου της Κολούμπια και στο Τμήμα Επιστημών της Γης και του Περιβάλλοντος.

Η τέχνη της εκτίμησης

Ήμουν μικρούλα κι άπραγη και δροσερή κι ωραία
πώς τό πάθα μανούλα μου κι αγάπησα εκδορέα.

—Νίκος Γκάτσος

G.V. Meledin

HZΩΗ ΜΑΣ ΕΙΝΑΙ ΓΕΜΑΤΗ ΑΠΟ υπολογισμούς και πρόχειρες εκτιμήσεις κάθε είδους. Θα φτάσω στον προορισμό μου έγκαιρα; Τα χρήματα που έχω μαζί μου επαρκούν; Είμαι αρκετά δυνατός για να μεταφέρω αυτό το φορτίο; Προλαβαίνω το φανάρι;

Στην επιστήμη, η ικανότητα σωστών εκτιμήσεων αποτελεί επαγγελματικό προσόν. Είναι εκ των ων ουκάνευ στην εκπόνηση νέων σχεδίων και προγραμμάτων. Μια πρόχειρη εκτίμηση —ο υπολογισμός της τάξης μεγέθους— αποτελεί απαραίτητο στάδιο στο σχεδιασμό ενός πειράματος, στην ανέγερση μιας εγκατάστασης, στη θεωρητική επεξεργασία ενός προγράμματος. Μερικές φορές μια πρώτη εκτίμηση υποδεικνύει το δρόμο προς την ακριβή λύση, και προσδιορίζει την περιοχή τιμών για τις οποίες η λύση μπορεί να είναι έγκυρη —επίσης, πώς θα έπρεπε να τροποποιήσετε το πρόβλημα εάν η επιθυμητή λύση βρίσκεται εκτός αυτής της περιοχής.

Μαζί με τη διαισθηση, η ικανότητα σωστών εκτιμήσεων είναι πολύ σημαντική στις δημιουργικές εργασίες.

Η φυσική διατύπωση του προβλήματος —η επλογή και ανάπτυξη του απλούστερου φυσικού μοντέλου— αποτελεί το σημαντικότερο και δυσκολότερο στάδιο. Και πρέπει να διακρίνετε τις παραμέτρους οι οποίες είναι κρίσιμες για το πρόβλημα από εκείνες

που είναι ελάσσονος σημασίας. Η σωστή χρήση των φυσικών νόμων και ορισμών είναι ζωτικής σημασίας. Συχνά η χονδρική εκδοχή ενός ορισμού ή η ποιοτική ερμηνεία ενός φυσικού νόμου επαρκεί.

Δύο σχόλια πριν στραφούμε σε μερικά προβλήματα. Πρώτον, ας συμφωνήσουμε για το τι εννοούμε με την έκφραση τάξη μεγέθους. Δύο αριθμητικές τιμές λέγεται ότι διαφέρουν κατά μια τάξη μεγέθους εάν ο λόγος τους είναι περίου ίσος με 10· εάν προσεγγιστικά ισούται με 100, οι τιμές λέγεται ότι διαφέρουν κατά δύο τάξεις μεγέθους, κ.ο.κ. Από αυτή την άποψη ο αριθμός 89 θεωρείται ότι είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τον 100, και ο αριθμός 15 είναι της τάξης του 10. Εάν ο λόγος δύο αριθμών είναι, για παράδειγμα, ίσος με 1,3, λέμε ότι έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Το ίδιο αληθεύει ακόμη και όταν ο λόγος είναι 2,3 ή ακόμη και 5. Για χονδρικές εκτιμήσεις τέτοια οφάλματα δεν είναι σημαντικά.

Δεύτερον, ας ξεκαθαρίσουμε τη σημασία των συμβόλων. Το σύμβολο \approx σημαίνει ακριβή ισότητα, ενώ το \cong δηλώνει προσεγγιστική ισότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το σύμβολο \sim . Η παραδοσιακή του σημασία είναι ότι οι τιμές εκατέρωθεν του είναι ανάλογες. Στο παρόν άρθρο θα σημαίνει ότι οι τιμές είναι ίσες ως προς την τάξη μεγέθους, υπογραμμίζοντας έτσι το γεγονός ότι οι αδιάστατοι παράγοντες

αναλογίας στους τύπους μας είναι της τάξης μεγέθους της μονάδας. Θα ήθελα να τονίσω ότι, εάν ο «αληθινός» παράγων αναλογίας είναι αρκετές φορές ο «εκτιμηθείς» (ή αντιστρόφως), η διαφορά δεν θεωρείται σημαντική για τους σκοπούς μας.

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, μερικά απλά σχετικά προβλήματα.

Πρόβλημα 1. Εκτιμήστε την πίεση που ασκεί στο χαρτί ένα στυλό διαρκείας, όταν κάποιος γράφει με αυτό.

Για να κάνουμε αυτή την εκτίμηση, χρησιμοποιούμε άμεσα τον ορισμό της πίεσης: $P = F/S$. Ποιες είναι οι αριθμητικές τιμές της δύναμης και του εμβαδού; Η γραμμή που χαράσσει ένα στυλό διαρκείας μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από μια σειρά ξεχωριστών κουκκίδων· κάθε κουκκίδα έχει διάμετρο d ίση με το πάχος της γραμμής, και εμβαδόν $S = \pi d^2/4$. Ας θεωρήσουμε ότι $d \sim 0,2$ mm (η οποία είναι μάλλον αρκετή). Η δύναμη F που εφαρμόζεται στο στυλό μπορεί επίσης να χονδρικά να προσδιοριστεί: δεν υπερβαίνει το βάρος του χεριού, αλλά είναι μεγαλύτερη από το βάρος του στυλό. Ας θεωρήσουμε ότι $F \sim 1$ N. Τότε:

$$P = \frac{F}{S} \sim \frac{4F}{\pi d^2} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2.$$

Για να αντιληφθούμε κατά πόσον αυτό είναι πολύ ή λίγο, ας κάνουμε τη σύγκριση με ένα βαρίδι 1 kg τοποθε-



τημένο πάνω στο τραπέζι. Η διάμετρος του είναι περίπου 4 cm, οπότε η πίεση που ασκεί προκύπτει ότι είναι της τάξης των $8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$. Αυτό σημαίνει ότι η πίεση του στυλό διαρκείας είναι μερικές χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από εκείνη του βαριδιού.

Πρόβλημα 2. Εκτιμήστε την ταχύτητα του ατμού που εξέρχεται από το στόμιο μιας τσαγιέρας με νερό σε βρασμό.

Ας συμβολίσουμε την ισχύ του θερμαντικού στοιχείου με W , και τη λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης του νερού με L . Ας υποθέσουμε ακόμη ότι το κλάσμα της ισχύος που δαπανάται για τη δημιουργία ατμού είναι ρ . Τότε nW/L είναι η μάζα του ατμού που δημιουργείται ανά μονάδα χρόνου. Προφανώς, η ποσότητα ατμού που εγκαταλείπει την τσαγιέρα είναι η ίδια με εκείνη που παράγεται λόγω της προσφερόμενης ισχύος από το θερμαντικό στοιχείο. Έτοι,

$$\frac{nW}{L} = \rho u S,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ατμού

στο σημείο βρασμού, u η ζητούμενη ταχύτητα και S η διατομή του στομίου εξόδου της τσαγιέρας. Συμφώνα με την καστατική εξίσωση, η πυκνότητα του ατμού θα είναι $\rho = P\mu/RT$, όπου P είναι η τάση του ατμού, μ η γραμμομοριακή μάζα του νερού, R η παγκόσμια σταθερά των αερίων και T η θερμοκρασία του ατμού. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$u = \frac{nW}{L\rho S} = \frac{nWRT}{LP\mu S}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι η ισχύς του θερμαντικού μέσου είναι $W = 1 \text{ kW}$, το $n \sim 0.5$, το $S \sim 1 \text{ cm}^2$, η $T \sim 373 \text{ K}$, η $P \sim 10^5 \text{ N/m}^2$ (επειδή η τάση του κορεομένου ατμού στο σημείο βρασμού είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση), και δεδομένου ότι οι σταθερές είναι ίσες με $L = 4.2 \text{ kJ/kg}$, $R = 8.3 \text{ J/(kg \cdot K)}$ και $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$, παίρνουμε

$$u \sim 2 \text{ m/s.}$$

Πρόβλημα 3. Εκτιμήστε πόσο περισσότερο φωτίζεται ο πλανήτης μας μια ηλιόλουστη μέρα απ' ότι μια νύχτα με πανούέληνο.

Η Σελήνη δεν εκπέμπει δικό της φως, αλλά απλώς ανακλά το ηλιακό φως που πέφτει πάνω της. Θα υποθέσουμε ότι ο φωτισμός της Γης και της Σελήνης από τον Ήλιο είναι περίπου ίδιος, και θα τον συμβολίσουμε με B_H ,



Άρα η φωτεινή ροή που προσπίπτει στην επιφάνεια της Σελήνης θα είναι $B_H \pi R^2$ (όπου R είναι η ακτίνα της Σελήνης). Ένα ποσοστό του φωτός που ανακλάται από τη Σελήνη προσπίπτει στη Γη, και έτσι ο φωτισμός της Γης από τη Σελήνη θα είναι:

$$B_S = \frac{B_H \pi R^2 k}{2\pi \ell^2},$$

όπου k είναι η ανακλαστική ικανότητα (άλμπεντο) της σεληνιακής επιφάνειας και ℓ η απόσταση Γης-Σελήνης (υποθέτουμε ότι η Σελήνη ανακλά το ηλιακό φως ομοιόμορφα, μέσα σε στερεά γωνία ίση με το μισό της μέγιστης δυνατής). Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο

$$\frac{B_H}{B_S} = \frac{2}{k} \left(\frac{\ell}{R} \right)^2 = \frac{8}{k} \left(\frac{2R}{\ell} \right)^{-2},$$

όπου $2R/\ell$ είναι το γωνιακό μέγεθος της Σελήνης (της τάξης των 0,01 rad). Τελικά, θεωρώντας το $k = 0.2$, βρίσκουμε

$$\frac{B_H}{B_S} \sim 4 \cdot 10^6.$$

Πρόβλημα 4. Εκτιμήστε πόσο μακρύτερα θα φτάσει μια χειροβομβίδα εάν ο στρατιώτης την εκσφενδονίσει τρέχοντας.

Ας υποθέσουμε ότι κατά την κίνησή της η χειροβομβίδα φτάνει σε ύψος H από το έδαφος. Τότε, ο χρόνος πτήσης της είναι

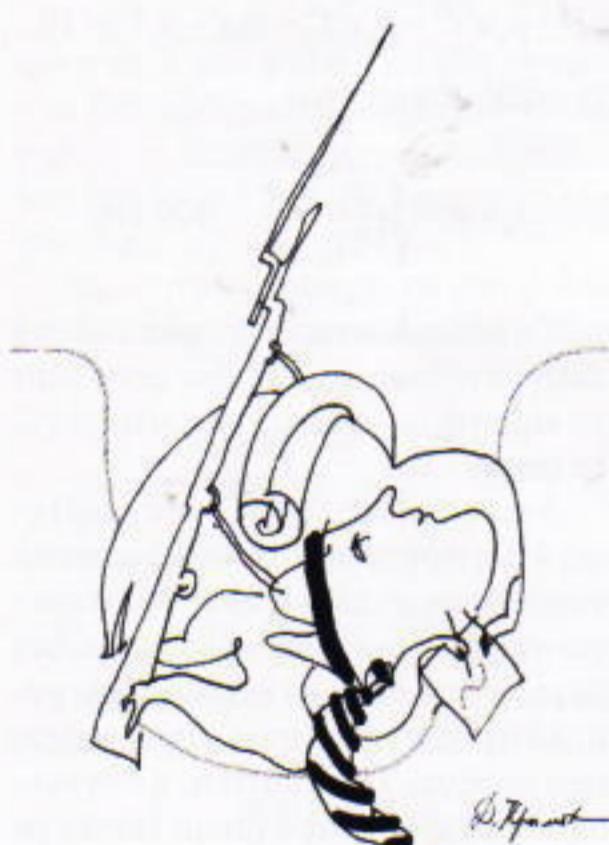


$$2\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Εάν η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας εκτόξευσης της χειροβομβίδας αυξηθεί κατά u , και η κατακόρυφη συνιστώσα της παραμείνει πρακτικά η ίδια, ο χρόνος της πτήσης της δεν αλλάζει, αλλά το βεληνεκές της, η απόσταση του σημείου πρόσπτωσης από το σημείο εκτόξευσης, αυξάνεται κατά

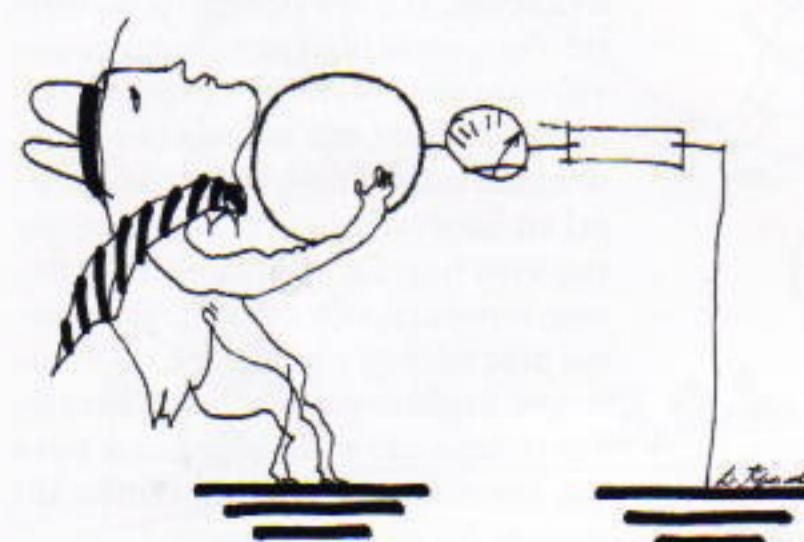
$$t = 2u \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το



$H \sim 5 \text{ m}$ και η $u \sim 8 \text{ m/s}$ (θα θυμάστε ότι ένας καλός αθλητής τρέχει τα εκατό μέτρα σε 10 με 12 δευτερόλεπτα περίπου). Έτσι,

$$t \sim 20 \text{ m.}$$



Πρόβλημα 5. Εκτιμήστε το χρόνο που χρειάζεται να εκφορτιστεί μια φορτισμένη μεταλλική σφαίρα όταν συνδέεται με τη γη μέσω γνωστής ωμικής αντίστασης.

Ας συμβολίσουμε το δυναμικό της σφαίρας με V και το φορτίο της με $Q = CV$, όπου $C = 4\pi\epsilon_0 a$ είναι η χωρητικότητα της σφαίρας, και a η ακτίνα της. Αφού η σφαίρα συνδεθεί με το έδαφος, ρεύμα I αρχίζει να διαρρέει το κύκλωμα μέχρις ότου το δυναμικό της και το φορτίο της να μηδενιστούν. Βέβαια, το ρεύμα εξαρτάται από το χρόνο, αλλά εμείς θα αγνοήσουμε το εν λόγω γεγονός. Έτσι, παίρνουμε

$$I = Q/t = V/R,$$

όπου R είναι η αντίσταση και t ο χρόνος εκφόρτισης. Από αυτή τη σχέση προκύπτει

$$t = QR/V = CR = 4\pi\epsilon_0 a R.$$

Ας πούμε ότι $a = 1 \text{ m}$ και $R = 1 \text{ M}\Omega$ εφόσον $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Cb/V} \cdot \text{m}$, προκύπτει

$$t \sim 10^{-4} \text{ s.}$$

Το παλιό, καλό ρωσικό βιβλίο *Φυσική για διασκέδαση* του Υ.Ι. Perelman (γράφτηκε το 1913) περιέχει μια ιστορία με τίτλο «Βγαίνοντας στεγνός από το νερό». Αρχίζει με το ακόλουθο πρόβλημα: «Τοποθετήστε ένα κέρμα σ'ένα ρηχό πάτο φαγητού, σκεπάστε το μ'ένα λεπτό στρώμα νερού, και ζητήστε από τους φίλους σας να το βγάλουν από το νερό χωρίς να βρέξουν τα δάχτυλά τους.

»Αυτό το φαινομενικά άλιτο πρόβλημα μπορεί να λυθεί εύκολα αν χρησιμοποιήσετε ένα άδειο ποτήρι και ένα κομμάτι χαρτί. Βάλτε φωτιά στο χαρτί και τοποθετήστε το μέσα στο ποτήρι· αναστρέψτε γρήγορα το ποτήρι και ακουμπήστε τα χείλη του στο πάτο, δίπλα στο νόμισμα. Το χαρτί σταματά να καίγεται, το ποτήρι γεμίζει λευκό καπνό, και το νερό αναρροφάται μέσα στο ποτήρι. Το νόμισμα μένει εκεί που βρισκόταν και, αφού στεγνώσει, μπορείτε να το πάσετε χωρίς να βρέξετε τα δάχτυλά σας.«

Ας εξετάσουμε ένα πρόβλημα που σχετίζεται με την παραπάνω ιστορία.

Πρόβλημα 6. Εκτιμήστε την ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία πρέπει να θερμάνετε το ποτήρι ώστε να αναρροφηθεί όλο το νερό του πάτου.

Ας λύσουμε αρχικά το πρόβλημα με ακρίβεια (κάνοντας ορισμένες υποθέσεις, βέβαια, τις οποίες θα προσδιορίσουμε παρακάτω). Πριν το ποτήρι έλθει σε επαφή με το νερό, η πίεση στο εσωτερικό του είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_a . Ας συμβολίσουμε την άγνωστη θερμοκρασία του ποτηριού με T_x . Αφού το ποτήρι κρυώσει και αναρροφήσει μια ποσότητα νερού μάζας m , η πίεση στο εσωτερικό του θα είναι P , η θερμοκρασία του θα είναι ίση με τη θερμοκρασία T του δωματίου και ο όγκος του αέρα μέσα στο ποτήρι θα έχει μειωθεί κατά τον όγκο του νερού —δηλαδή θα γίνει ίσος με $S\ell - m/r$, όπου S και ℓ είναι η διατομή και το ύψος του ποτηριού, αντίστοιχα, και r η πυκνότητα του νερού. Σύμφωνα με το νόμο των ιδανικών αερίων, ισχύει

$$\frac{P_a S\ell}{T_x} = \frac{PS\left(\ell - \frac{m}{\rho S}\right)}{T}.$$

Η συνθήκη ισορροπίας για την ανυψωμένη στήλη νερού δίνει $PS + mg = P_a S$. Έτσι,

$$T_x = T \frac{1}{1 - \frac{mg}{PS}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{\rho S}}.$$

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις έμμεσες υποθέσεις που χρησιμοποιήσαμε στην επίλυση του προβλήματος. Υποθέσαμε ότι η θερμοκρασία του αέρα στο εσωτερικό του ποτηριού ήταν η ίδια με εκείνη των επιφανειών του ποτηριού. Υποθέσαμε επίσης ότι το ποτήρι τοποθετήθηκε μέσα στο νερό σταδιακά, οπότε η αρχική εσωτερική πίεση αμέσως μετά την επαφή ήταν ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Εππλέον, υποθέσαμε ότι τόσο η τάση των υδρατμών στο εσωτερικό του ποτηριού όσο και τα τριχοειδή φανόμενα μπορούσαν να θεωρηθούν αμελητέα.

Είναι ενδιαφέρον ότι η έκφραση για την T_x περιέχει τόσο τη σχετική μεταβολή της πίεσης (εξαρτίας της εισροής νερού στο ποτήρι) όσο και τη σχετική

μεταβολή του όγκου του αέρα, ως ανεξάρτητους παράγοντες. Είναι καλή ιδέα, λοιπόν, να αναλύσουμε την επίδραση κάθε παράγοντα ξεχωριστά.

Ο πρώτος όρος μπορεί να μετασχηματιστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{P_a S}} = \frac{1}{1 - \frac{P_v}{P_a}} \equiv 1 + \frac{P_v}{P_a}.$$

Η ατμοσφαιρική πίεση αντιστοιχεί στην πίεση στήλης νερού ύψους 10 μέτρων. Το ύψος του νερού στο ποτήρι δεν μπορεί να υπερβαίνει το ύψος του ποτηριού — δηλαδή, περίπου 10 cm. Έτσι, μπορούμε να αγνοήσουμε την υδροστατική πίεση και να θεωρήσουμε ότι ο παράγοντας αυτός είναι κατά προσέγγιση ίσος με 1:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{P_a S}} \equiv 1.$$

Ο δεύτερος όρος περιγράφει τη μεταβολή του όγκου του αέρα μέσα στο ποτήρι. Η διαφορά μεταξύ του όγκου του νερού και εκείνου του ποτηριού δεν είναι τόσο μεγάλη όσο η διαφορά των πέσεων, πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τον όγκο του νερού. Έτσι,

$$T_x \equiv \frac{T}{1 - \frac{m}{\rho_a S}}.$$

Θέτοντας στον τύπο τις τιμές $T = 300$ K, $m = 30$ g, $\ell = 10$ cm και $S = 20$ cm² (θεωρώντας τον όγκο του ποτηριού περίπου 200 cm³), παίρνουμε

$$T_x \sim 353$$
 K,

ή

$$\theta = 80^\circ\text{C}.$$

Η διόρθωση που απαιτείται προκειμένου να λάβουμε υπόψη τη μεταβολή της πίεσης είναι $\Delta T_x \equiv T_x(mg/P_a S) \sim 0.1$ K, η οποία είναι μικρή συγκρινόμενη με την τιμή τής T_x .

Μερικές φορές, μια περισσότερο πολύπλοκη κατάσταση απαιτεί προσεκτικότερη προσέγγιση στην εκτίμηση. Ιδού ένα καλό παράδειγμα.

Πρόβλημα 7. Εκτιμήστε τη συχνότητα του ήχου που παράγεται κατά την πτήση ενός κουνουπιού.

Είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι ο



ήχος παράγεται από το περιοδικό φτερούγισμα του κουνουπιού. Στην πραγματικότητα, η φυσική της πτήσης του κουνουπιού δεν είναι τόσο απλή. Θα χρησιμοποιήσουμε, ωστόσο, ένα εξαιρετικά χονδροειδές μοντέλο, υποθέτοντας ότι το φτερούγισμα παράγει ανυψωτική δύναμη που αντισταθμίζει την έλξη της βαρύτητας. Αυτή η ανυψωτική δύναμη δίνεται από τη μεταβολή της ορμής η οποία μεταφέρεται στον αέρα που βρίσκεται κάτω από τα φτερά ανά μονάδα χρόνου:

$$\Delta P/\Delta t = mg.$$

Θα συμβολίσουμε την επιφάνεια των φτερών με S και την ταχύτητά τους με u . Κινούμενα προς τα κάτω, τα φτερά ωθούν προς τα κάτω μάζα αέρα $\Delta m = \rho_a u \Delta t S$ σε χρονικό διάστημα Δt . Αυτή συνοδεύεται από μεταφορά ορμής $\Delta P = \Delta m u = \rho_a u^2 \Delta t S$. Η προκύπτουσα ανυψωτική δύναμη είναι

$$F = \Delta P/\Delta t = \rho_a u^2 S,$$

όπου ρ_a είναι η πυκνότητα του αέρα. Το μήκος του κουνουπιού είναι, ας



πούμε, $\ell = 4$ mm. Η επιφάνεια των φτερών του είναι $S = \ell^2$ (υποθέτουμε ότι το μήκος του σώματος του κουνουπιού είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το άνοιγμα των φτερών του). Είναι εύλογο να πάρουμε $(1/10)\ell^3$ για το όγκο του κουνουπιού, εφόσον το πλάτος και το ύψος του είναι σημαντικά μικρότερα από το μήκος του. Θα θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα του σώματος του εντόμου είναι ίση με την πυκνότητα του νερού ρ_v . Συμβολίζοντας τη συχνότητα του φτερουγίσματος με v , έχουμε $u \sim \ell v$. Η συνθήκη ισορροπίας μάς δίνει

$$F = \rho_a u^2 \ell^2 \sim \rho_a v^2 \ell^4 = mg = \rho_v \ell^3 g / 10,$$

το οποίο οδηγεί στην

$$v_n \sim v \sim \sqrt{\frac{\rho_v}{10 \rho_a}} \cdot \frac{g}{\ell} \sim 400 \text{ Hz.}$$

Το αποτέλεσμα δίνει μια εύλογη τάξη μεγέθους, αν και δεν μπορούμε να είμαστε πολύ κατηγορηματικοί για το ψηφίο «4».

Αυτός ο τύπος οδηγεί στην πρόβλεψη ότι η συχνότητα μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα προς την τετραγωνική ρίζα του ℓ . Με άλλα λόγια, όσο μεγαλύτερο είναι το έντομο τόσο χαμηλότερης συχνότητας είναι ο ήχος που παράγει. Πραγματικά, η σύγκριση του βόμβου μιας αγριομέλισσας με τον υψηλής συχνότητας ήχο ενός κουνουπιού δείχνει ότι αυτή η πρόβλεψη είναι δικαιολογημένη.

Πολύ συχνά οι εκτιμήσεις γίνονται με τη χρήση της τεχνικής της διαστατικής ανάλυσης. Η μέθοδος στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι παράμετροι που εμφανίζονται στο πρόβλημα συνδυάζονται ως παράγοντες στο τελικό εξαγόμενο. Φυσικά, αυτή η προσέγγιση δεν μπορεί να δώσει τις αριθμητικές τιμές των παραγόντων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτοί μπορούν να εκτιμήθουν μέσω μιας ειδικής περίπτωσης, αλλά ποσού συχνά λαμβάνονται ίσοι με 1. Τούτο είναι εύλογο εάν ενδιαφέρομαστε μόνο για την τάξη μεγέθους του αποτελέσματος. Νά ένα παράδειγμα.

Πρόβλημα 8. Εκτιμήστε το χρόνο που χρειάζεται ο ήχος του κεραυνού για να φτάσει στον παρατηρητή που είδε ένα δέντρο να κεραυνοβολείται 3 χιλιόμετρα μακριά.

Η ταχύτητα του φωτός είναι, κατά προσέγγιση, $3 \cdot 10^5$ km/s, και επομένως ο παρατηρητής θα δει τη λάμψη σε -10^{-5} s. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι κατά πολύ μικρότερη. Ας προσπαθήσουμε να την εκτιμήσουμε χρησιμοποιώντας την τεχνική της διαστατικής ανάλυσης.

Η ταχύτητα u του ήχου εξαρτάται από τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν το μέσο στο οποίο διαδίδεται. Για τον αέρα θα θεωρήσουμε ως τέτοιες παραμέτρους την πίεση p και την πυκνότητα ρ . Θα υποθέσουμε ότι

$$u = p^x \rho^y,$$

όπου τα x και y είναι ακόμη άγνωστα. Εάν πράγματι υπάρχει μια τέτοια σχέση, οι διαστάσεις του αριστερού και του δεξιού μέλους πρέπει να είναι ίδιες.

Ας συμφωνήσουμε να συμβολίζουμε τη διάσταση του A με $[A]$. Τότε

$$\begin{aligned} [u] &= m \cdot s^{-1} \\ [p] &= kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}, \\ [\rho] &= kg \cdot m^{-3}, \end{aligned}$$

και μπορούμε να γράψουμε

$$m \cdot s^{-1} = (kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2})^x (kg \cdot m^{-3})^y.$$

Αυτή η ισότητα ισχύει με την προϋπόθεση ότι

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ -x - 3y &= 1, \\ -2x &= -1. \end{aligned}$$

Από αυτές βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}, \\ y &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

που μας οδηγούν στη σχέση:

$$u = \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Ο αριθμητικός παράγοντας σ' αυτή την έκφραση δεν μπορεί να καθοριστεί με την τεχνική της διαστατικής ανάλυσης. Θα υποθέσουμε ότι είναι της τάξης του 1 (γενικά, αυτό θα έπρεπε να επαληθευτεί).

Για να εκτιμήσουμε την ταχύτητα του ήχου, πρέπει να αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές για την ατμοσφαιρική πίεση ($p = 1$ bar = 10^5 N/m²) και την πυκνότητα του αέρα ($\rho \sim 1,3$ kg/m³, υπό κανονικές συνθήκες). Τότε, η ταχύτητα του ήχου θα είναι

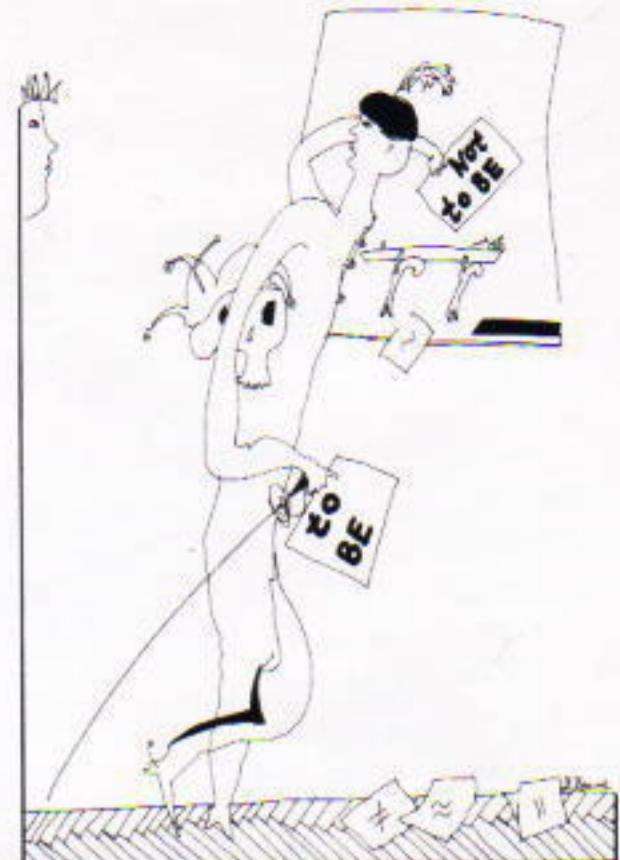
$$u = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = 300 \text{ m/s},$$

και ο χρόνος που θα χρειαστεί για να ακούσει ο παρατηρητής τη βροντή

$$t = \frac{3 \cdot 10^3 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} \sim 10 \text{ s.}$$

Αυτός είναι κατά έξι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερος από το χρόνο που χρειάστηκε το φως για να φτάσει στον παρατηρητή, και η εμπειρία μάς λέει ότι το αποτέλεσμα είναι λογικό.

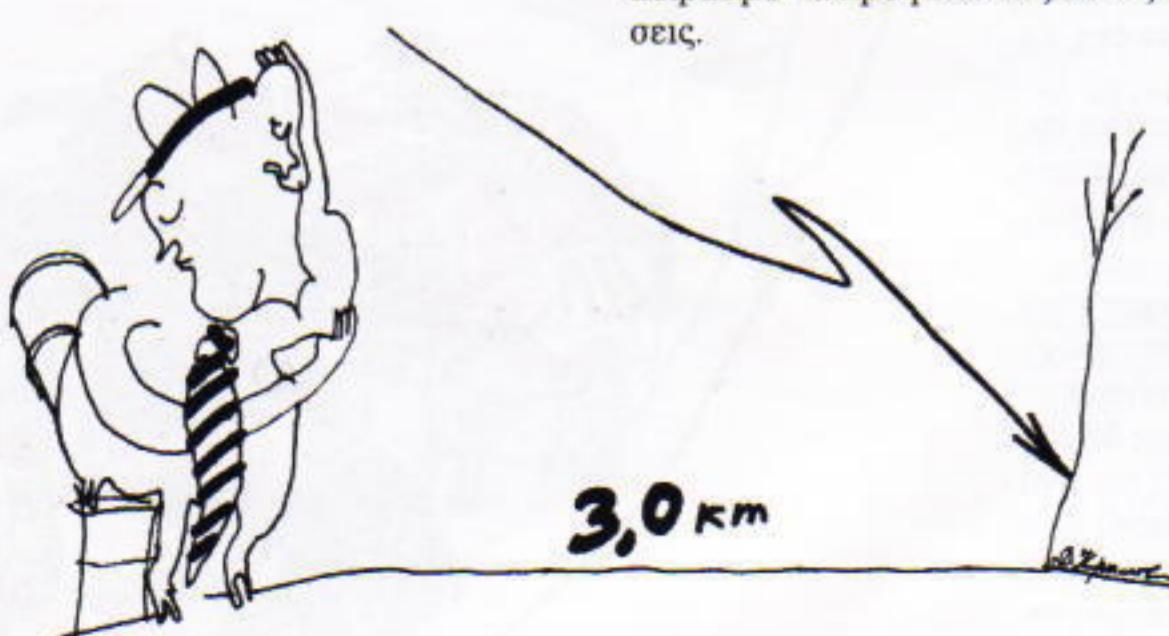
Τώρα πλέον δεν μένει παρά να σας προτείνω μερικά προβλήματα εκτίμησης, για να τα σκεφτείτε μόνοι σας. Προσπαθήστε να αντισταθείτε στον πειρασμό να κρυφοκοιτάξετε τις λύσεις.



Προβλήματα για λύση

- Εκτιμήστε τη μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης που θα πρέπει να έχει όλο το νερό των οceans εξατμιζόταν.
- Εκτιμήστε την ταχύτητα καθόδου ενός αλεξιπτωτιστή με ανοικτό αλεξίπτωτο.
- Εκτιμήστε τη μέση πυκνότητα του Ήλιου.
- Εκτιμήστε πόσες τούμπες θα κάνει ένα αυτοκίνητο καθώς πέφτει με ταχύτητα σε βάραθρο που έχει βάθος 1 km.
- Εκτιμήστε τη δύναμη με την οποία εκπινάσσει τη σφαίρα ένας σφαιροβόλος.
- Εκτιμήστε την τάση της αλυσίδας ενός ποδηλάτου όταν ανεβαίνετε μ' αυτό μια ανηφοριά.
- Εκτιμήστε την ταχύτητα μιας σταγόνας νερού, αν τη στιγμή της μετωπικής σύγκρουσής της με τοίχο του ασκεί πίεση 10 N/m^2 .
- Εκτιμήστε την τάση της ζώνης ασφαλείας του οδηγού, εάν το αυτοκίνητο προσκρούει σε στύλο με ταχύτητα 30 km/h και η λαμαρίνα του βουλιάζει κατά 30 cm .
- Εκτιμήστε την απόσταση στην οποία κάποιος που φορά ανοικτόχρωμα ρούχα χάνεται από το οπτικό πεδίο του παρατηρητή σ' ένα πευκοδάσος. (Στην περιοχή δεν υπάρχουν θάμνοι.)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65



Ας αλλάξουμε!



ΟΠΩΣ ΘΑ ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΑΤΕ, ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΖΗΤΗΜΑ του παρόντος τεύχους είναι η «δυσχερής θέση του ανθρώπινου είδους», κάπι που ποτέ δεν πρέπει να το ξεχνάμε. Από την άλλη, όμως, δεν θα έβλαπτε να διασκεδάσουμε λίγο γι' αυτό, το καλειδοσκόπο σας προσφέρει μια σειρά από ψυχαγωγικά προβλήματα —σας ζητάμε να απαντήσετε σε δώδεκα σπαζοκεφαλιές και να βρείτε τη νικηφόρα στρατηγική σε τρία παιχνίδια. Η μόνη δυσκολία: λύστε τα χωρίς χαρτί και μολύβι. Καλή σας διασκέδαση!

Προβλήματα

1. Γράφουμε τον αριθμό 606 σ' ένα φύλλο χαρτί. Ποια πράξη πρέπει να εκτελέσουμε για να γίνει ο αριθμός 3/2 φορές μεγαλύτερος;
2. Ποιο μαθηματικό σύμβολο πρέπει να μπει μεταξύ των ψηφίων 5 και 6 ώστε να προκύψει ένας αριθμός μεγαλύτερος του 5 αλλά μικρότερος του 6;
3. Ένα ρολόι χρειάζεται τέσσερα δευτερόλεπτα για να χτυπήσει τρεις φορές. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να χτυπήσει εννέα φορές;
4. Το άθροισμα των τριών αριθμών 1, 2 και 3 ισούται με το γινόμενό τους. Υπάρχουν άλλες τριάδες ακεραίων με αυτή την ιδιότητα;
5. Έχω δύο κέρματα στην τσέπη μου που έχουν συνολική αξία 11 δραχμές. Είναι δυνατόν το ένα να μην είναι δραχμή;
6. Πόσες φορές πρέπει να χτυπήσουμε το στόχο της διπλανής εικόνας, και ποιους κύκλους πρέπει να πετύχουμε, ώστε να συγκεντρώσουμε ακριβώς 100 βαθμούς;
7. Ο πύργος τηλεπικοινωνιών της Μόσχας έχει ύψος 530 μέτρα και βάρος 30.000 τόνους. Πόσα γραμμάρια ζυγίζει ένα μοντέλο του πύργου που είναι κατασκευασμένο από το ίδιο υλικό και έχει ύψος 53 cm;
8. Έχω ένα κουτί με καρφιά, ένα με βίδες και ένα με παξιμάδια. Όλα τα κουτιά έχουν μια ετικέτα που φανερώνει το περιεχόμενό τους. Μια μέρα, ο μικρός αδελφός μου άλλαξε τις ετικέτες έτσι ώστε καμία να

ΕΛΛΑΣ ΤΟ ΚΛΙΜΑ



μην αντιστοιχεί στο περιεχόμενο του κουτιού της. Είναι δυνατόν να βρω τι περιέχει κάθε κουτί ανοίγοντας μόνο το ένα από αυτά;

9. Βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο που γίνεται τετράγωνο ενός ακεραίου όταν πολλαπλασιαστεί με το 2 και κύβος ενός ακεραίου όταν πολλαπλασιαστεί με το 3.

10. Έξι ποτήρια βρίσκονται στη σειρά πάνω σ' ένα ράφι. Τα τρία είναι γεμάτα με νερό, και τα υπόλοιπα είναι άδεια (δείτε την εικόνα). Μπορείτε, αγγίζοντας ένα μόνο ποτήρι, να τα διευθετήσετε έτσι ώστε να εναλλάσσονται τα γεμάτα με τα κενά ποτήρια;

11. Βρείτε δύο αριθμούς με ίσο άθροισμα, γινόμενο και πηλίκο.

12. Ένα ποτήρι με νερό βρίσκεται πάνω σε μια πετσέτα απλωμένη σ' ένα τραπέζι. Πώς μπορούμε να τραβήξουμε την πετσέτα και να αφήσουμε το ποτήρι πάνω στο τραπέζι χωρίς να αγγίξουμε το ποτήρι;

Παιχνίδια

1. Έχετε δύο σωρούς με πέτρες και δύο παίκτες. Καθένας παίζει με τη σειρά του και (1) απομακρύνει τον έναν από τους δύο σωρούς, (2) χωρίζει αυτόν που απομένει σε δύο σωρούς. Ο παίκτης που δεν μπορεί να χωρίσει το σωρό (διότι αποτελείται από μία μόνο πέτρα) χάνει.

2. Στο έδαφος είναι τοποθετημένοι μερικοί πάσσαλοι. Δύο παίκτες ενώνουν εναλλάξ με σχοινιά ζεύγη πασσάλων που δεν έχουν συνδεθεί νωρίτερα. Ο πρώτος που θα δημιουργήσει ένα κλειστό σχήμα κερδίζει.

3. Δύο παίκτες μαδάνε τα πέταλα μιας μαργαρίτας, αφαιρώντας κάθε φορά ένα μόνο πέταλο ή δύο γειτονικά. Κερδίζει αυτός που βγάζει το τελευταίο. □

—Anatoly Savin

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Εικονογράφηση: Edward Nazarov

when I die I'll go to the clouds...
you'll go there anyway..

Μαθαίνοντας από έναν Ιό

Μια εφαρμογή της συστημικής σκέψης και της κατασκευής δυναμικών μοντέλων

Matthias Ruth

AΝΑΡΩΤΗΘΗΚΑΤΕ ΠΟΤΕ ΓΙΑΤΙ Η ΕΠΙΔΗΜΙΑ ΤΗΣ ΓΡΙΠΗΣ φαινομενικά εξαφανίζεται, αφού ταλαιπωρήσει μεγάλο πλήθος ανθρώπων, μόνο για να επανεμφανιστεί μερικές εβδομάδες αργότερα; Η απορήσατε ποτέ πώς είναι δυνατόν οι οικονομολόγοι να αναλώνονται σε συζητήσεις σχετικά με την ισορροπία της προσφοράς και της ζήτησης, ενώ οι τιμές τείνουν να διακυμαίνονται χωρίς να σταθεροποιούνται ποτέ; Επιπλέον, πώς είναι δυνατόν τα δάση του Καναδά και των ΗΠΑ να φαίνονται θαλερά και υγιή, και κατόπιν, μέσα σε ένα καλοκαίρι, οι πληθυσμιακές εκρήξεις των εντόμων να αφανίζουν το φύλλωμα των δέντρων μετατρέποντας το δάσος από πράσινο σε φαιό; Ως τον επόμενο χρόνο τα έντομα εξαφανίζονται παντελώς, και το δάσος επιστρέφει αργά στην αρχική του κατάσταση, μόνο για να προσβληθεί και πάλι μερικά χρόνια αργότερα.

Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα

Όλα τα προαναφερθέντα φαινόμενα έχουν μερικά κοινά γνωρίσματα. Πρώτον, τα συστήματα που επιδεικνύουν παρόμοια φαινομενικά ακανόνιστη συμπεριφορά απαρτίζονται από ξεχωριστά μέρη που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Στην περίπτωση της γρίπης, υπάρχει μια ομάδα ανθρώπων που είναι φορείς του ιού, και μια δεύτερη ομάδα, που μολύνεται από τον ιό διά της επαφής με τα μέλη της πρώτης. Στην περίπτωση των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στην προσφορά και τη ζήτηση, έχουμε μια αγορά στο πλαίσιο της οποίας οι παραγωγοί και οι καταναλωτές ανταλλάσσουν αγαθά και υπηρεσίες. Στην περίπτωση των πληθυσμιακών εκρήξεων των εντόμων, έχουμε τα έντομα που κατατρέχουν τα φύλλα, και τα δέντρα που τα παράγουν. Η πρώτη προϋπόθεση για να κατανοήσουμε τα δυναμικά συστήματα είναι να προσδιορίσουμε τις βασικές συνιστώσεις τους.

Ένα δεύτερο κοινό γνώρισμα όλων αυτών των συστημάτων είναι ότι οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα ξεχωριστά μέρη τους δεν συντελούνται ακαριαία, αλλά με έναν

τρόπο που χαρακτηρίζεται από χρονική υστέρηση. Όσοι προσβάλλονται από τη γρίπη μπορεί να εξακολουθήσουν να περιφέρονται επί μερικές ημέρες και να μεταδίδουν τον ιό σε άλλους. Οι παραγωγοί που προσφέρουν τα αγαθά και τις υπηρεσίες τους στην αγορά μπορεί να δημιουργήσουν υπερβάλλουσα προσφορά, η οποία οδηγεί σε πτώση των τιμών. Ως εκ τούτου, ενδέχεται να περιορίσουν την παραγωγή κατά την επόμενη περίοδο, πράγμα που οδηγεί σε ελλείψεις και συνακόλουθες αυξήσεις των τιμών. Καθώς τα δάση αναπτύσσονται, προσφέρουν αυξανόμενες ποσότητες τροφής για τους πληθυσμούς των εντόμων, οι οποίοι διογκώνονται τόσο ώστε τελικά το δάσος να αδυνατεί να τους αντέξει. Επομένως, η δεύτερη προϋπόθεση για να κατανοήσουμε τα δυναμικά συστήματα είναι να προσδιορίσουμε σε ποιο βαθμό οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις συνιστώσεις του συστήματος υπόκεινται σε χρονικές υστερήσεις.

Ένα τρίτο γνώρισμα των διαδικασιών του πραγματικού κόσμου είναι ότι η απόκριση μιας συνιστώσας του συστήματος μπορεί να μην εκδηλώνεται σε ευθεία αναλογία με τη διέγερση που δέχεται. Αντίθετα, οι αποκρίσεις είναι δυνατόν να συνδέονται με το τετράγωνο της αρχικής διέγερσης ή να ακολουθούν κάποια διαφορετική μη γραμμική σχέση.

Για να κατανοήσουμε τον κόσμο όπου ζούμε, απαιτείται να κατανοήσουμε το ρόλο των σύνθετων διαδικασιών ανάδρασης και τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η έντασή τους με την πάροδο του χρόνου. Και οι κατασκευαστές μοντέλων συχνά υποκύπτουν στον πειρασμό να διαμελίζουν το σύστημα σε υποσυστήματα για τα οποία είναι δυνατόν να προσδιοριστούν σχέσεις αιτίας-αποτέλεσματος που οδηγούν σε λύσεις «κλειστής μορφής», σαν κι αυτές που συναντάμε συνήθως στα γεχειρίδια. Δυστυχώς, οι μέθοδοι που επιτρέπουν τέτοιες λύσεις μπορεί να περιορίζουν την έκταση στην οποία κατορθώνει κανείς να ενσωματώσει τις χρονικές υστερήσεις και τις μη γραμμικές σχέσεις. Εάν δώσουμε υπερβολική έμφαση στην εξεύ-

ρεση κλειστών λύσεων, διατρέχουμε τον κίνδυνο να εξαλείψουμε από τα μοντέλα μας τα ίδια τα χαρακτηριστικά που τα καθιστούν ενδιαφέροντα.

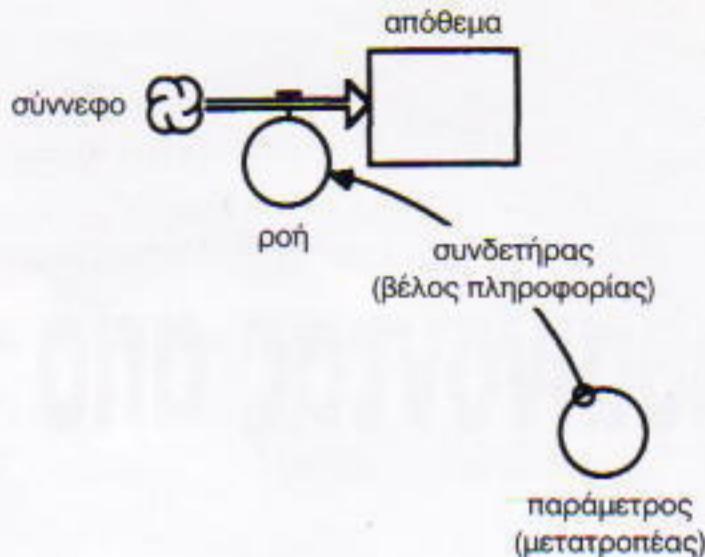
Ευτυχώς, η τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών μάς παρέχει εναλλακτικά εργαλεία, τα οποία μας επιτρέπουν να εμφυσήσουμε περισσότερη ζωή στα μοντέλα που αφορούν διαδικασίες του πραγματικού κόσμου. Στο παρόν άρθρο θα σας εισαγάγω σε μια γλώσσα προγραμματισμού γραφικών που επιτρέπει στους πάντες σχεδόν να περιγράψουν, να «μοντελοποιήσουν» και να αναλύσουν σύνθετα δυναμικά συστήματα. Χάρη σ' αυτές τις δυνατότητές του, το συγκεκριμένο λογισμικό παρέχει ένα πολύτιμο εργαλείο σε όσους προσπαθούν να κατανοήσουν τον κόσμο στον οποίο ζούμε. Αποτελεί μια αφετηρία για τη διερεύνηση των μη γραμμικών δυναμικών φαινομένων και προσφέρει μια ευκαιρία να αποτιμήσουμε τα όρια της γνώσης μας για τα εν λόγω φαινόμενα, να αναθερμάνουμε το διάλογο γι' αυτά και να δημιουργήσουμε καινούργια γνώση.

Συστημική σκέψη και κατασκευή δυναμικών μοντέλων

Αναπτύσσουμε μοντέλα δυναμικών διαδικασιών καθημερινά. Όταν προσπαθούμε να διασχίσουμε μιαν οδό με έντονη κίνηση, εκτιμούμε το πλάτος της, τη δική μας ταχύτητα και την ταχύτητα των επερχόμενων αυτοκινήτων. Στη σκέψη μας αφαιρούμε τις λεπτομέρειες που θεωρούμε άσχετες, όπως, για παράδειγμα, το χρώμα των αυτοκινήτων. Εν συνεχείᾳ, συσχετίζουμε τις υπόλοιπες πληροφορίες μεταξύ τους και κάνουμε μια προβολή του πιθανού αποτελέσματος στο οποίο θα κατέληγε η απόπειρα να διασχίσουμε το δρόμο. Εάν συμπεράνουμε ότι είναι ασφαλές να την επιχειρήσουμε, και το συμπέρασμα αποδειχτεί οντικός ορθός, τότε θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το μοντέλο μας σε ανάλογες περιστάσεις. Εάν είναι λανθασμένο —αλλά έχουμε αρκετή τύχη—, θα αναθεωρήσουμε το μοντέλο μας για την επόμενη φορά.

Για ορισμένες αποφάσεις, τα διανοητικά μοντέλα είναι αρκούντως απλά και ακριβή, ώστε να προσφέρουν μια βάση για δράση. Εντούτοις, όσο αυξάνεται το πλήθος των συνιστώσων και όσο περισσότερες χρονικές ρυθμίσεις και μη γραμμικότητες υπάρχουν στο σύστημα, τόσο περισσότερο δυσκολευόμαστε να αναπτύξουμε διανοητικά μοντέλα επαρκή για τη λήψη αποφάσεων. Επιπλέον, στην περίπτωση μεγάλων, σύνθετων συστημάτων, ενδέχεται να επιθυμούμε να αποφύγουμε τον άμεσο πειραματισμό. Για παράδειγμα, είναι πολύ ασφαλέστερο και λιγότερο δαπανηρό να διεξάγουμε πειράματα μεταβολής του κλίματος σε πλανητική κλίμακα στον υπολογιστή παρά στον πραγματικό κόσμο.

Για να μοντελοποιήσουμε και να κατανοήσουμε καλύτερα ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα, απαιτείται να περιγράψουμε τις κύριες συνιστώσες του και τις αλληλεπιδράσεις τους. Οι συνιστώσες του συστήματος είναι δυνατόν να περιγραφούν με τη βοήθεια ενός συνόλου «καταστατικών μεταβλητών» —θα τις ονομάζουμε επίσης αποθέματα— όπως ο αριθμός των κατοίκων μιας χώρας, η μάζα ενός οργανισμού ή η ποσότητα του κεφαλαίου σε μια



Σχήμα 1

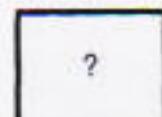
οικονομία. Οι καταστατικές μεταβλητές επηρεάζονται από «ροές», όπως οι γεννήσεις και οι θάνατοι, η ανάπτυξη ενός οργανισμού ή οι επενδύσεις νέου κεφαλαίου. Το μέγεθος των ροών μπορεί να εξαρτάται με τη σειρά του από τα ίδια τα αποθέματα ή από άλλες παραμέτρους του συστήματος.

Υπάρχουν διάφορες γλώσσες προγραμματισμού που έχουν σχεδιαστεί ειδικά ώστε να διευκολύνουν την ανάπτυξη μοντέλων για μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Ανάμεσά τους, το λογισμικό προσομοιώσεων βάσει εικονιδίων STELLA® συγκαταλέγεται σ' εκείνες τις γλώσσες προγραμματισμού που έχουν το μεγαλύτερο εύρος εφαρμογών. Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για τη δυναμική ορισμένου συστήματος χρησιμοποιώντας το STELLA, αρχίζουμε προσδιορίζοντας τα αποθέματα, τις ροές και τις παραμέτρους του συστήματος, και εν συνεχείᾳ καθορίζουμε τις κατάλληλες συνδέσεις μεταξύ τους.

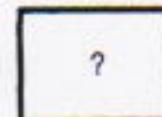
Το STELLA αναπαριστά τα αποθέματα, τις ροές και τις παραμέτρους (που επίσης ονομάζονται μετατροπείς) με τα σύμβολα που φαίνονται στο Σχήμα 1. Επιλέγοντας ένα από αυτά τα σύμβολα από τη γραμμή εργαλείων του STELLA και τοποθετώντας το σε ένα παράθυρο διαγράμματος, καθορίζουμε τις συνιστώσες του μοντέλου μας.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για την εξάπλωση ενός ιού σε κάποια πόλη με αρχικό πληθυσμό 1.020 κατοίκων. Υπάρχουν δύο κατηγορίες ανθρώπων στη συγκεκριμένη πόλη —μια ομάδα 1.000 ατόμων που δεν έχουν ανοσία, και επομένως είναι προσβλητοί από την ασθένεια, και μια ομάδα 20 ανθρώπων που είναι φορείς του ιού. Αυτές οι δύο ομάδες είναι οι καταστατικές μεταβλητές μας και συνιστούν το πρώτο μέρος του δυναμικού μοντέλου μας (Σχήμα 2). Αφού ονομάσσουμε τα εν λόγω αποθέματα, στρέφουμε την προσοχή μας στα ερωτηματικά, που υποδηλώνουν ότι δεν έχει καθοριστεί ακόμη το μέγεθος του κάθε αποθέματος. Εάν τοποθετήσετε το δείκτη σε καθένα από τα αποθέματα και πατήσετε δύο κλικ με το ποντίκι, ανοίγει μια θυρίδα διαλόγου, όπου σας ζητείται να καθορίσετε το αρχι-

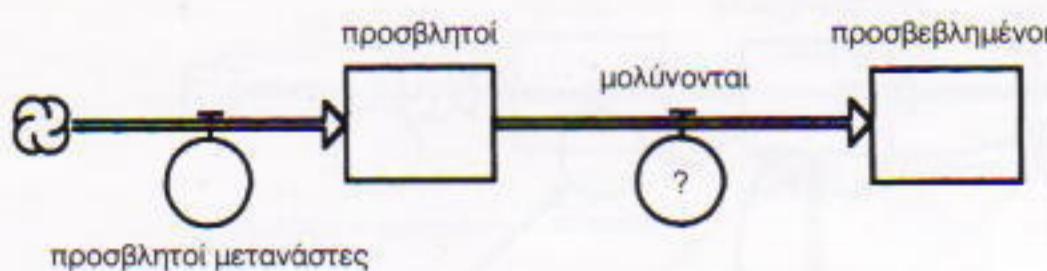
προσβλητοί



προσβεβλημένοι



Σχήμα 2



Σχήμα 3

κό μέγεθος του αποθέματος. Έτοι, σας παρέχεται η ευχέρεια να εισαγάγετε τα μεγέθη του κάθε πληθυσμού, 1.000 και 20 αντίστοιχα. Με ένα απλό κλικ στο OK, η θυρίδα διαλόγου του αποθέματος κλείνει, και το ερωτηματικό εξαφανίζεται.

Στη συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε με ποιον τρόπο αυτά τα αποθέματα μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου — για παράδειγμα, ότι κάθε εβδομάδα στην πόλη την οποία μοντελοποιούμε υπάρχει ορισμένη εισροή ανθρώπων που δεν έχουν ανοσία. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν επτά μετανάστες στο σύστημα. Για να συλλάβουμε τη συγκεκριμένη μετανάστευση, επλέγουμε από τη γραμμή εργαλείων το σύμβολο «ροή», το τοποθετούμε στο διάγραμμα και σύρουμε το βέλος πάνω στο απόθεμα ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ. Το γεγονός ότι οι μετανάστες που δεν έχουν ανοσία προέρχονται από ένα μέρος το οποίο δεν αποτελεί τμήμα του συστήματος αναπαριστάται από το γεγονός ότι η ροή εκπηγάζει από ένα σύννεφο. Εν συνέχεια, προσδιορίζουμε το μέγεθος της εν λόγω ροής, στην περίπτωσή μας εισάγοντας τον αριθμό «7» στη θυρίδα διαλόγου του συμβόλου της ροής. Με παρόμοιο τρόπο, συμπεριλαμβάνουμε στο σύστημα μια ροή ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ, για να μοντελοποιήσουμε το ρυθμό με τον οποίο άνθρωποι από το απόθεμα ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ μεταβαίνουν στο απόθεμα ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ των ανθρώπων που είναι φορείς του ιού (Σχήμα 3).

Προτού ασχοληθούμε με το ερωτηματικό που εμφανίζεται στη ροή ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ (δεν έχουμε ακόμη καθορίσει το μέγεθός της), ας δεχτούμε ότι το 90% των ανθρώπων που προσβάλλονται από τον ιό επιζούν από την ασθένεια και ότι ένα άλλο 10% πεθαίνουν. Όσοι επιζούν, αποκτούν ανοσία στον ιό και δεν τον μεταδίδουν σε άλλους. Απαιτούνται δύο ροές ακόμη, ώστε να αφαιρούν ανθρώπους

από το απόθεμα ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ εκείνων που είναι φορείς του ιού (Σχήμα 4).

Τώρα επιλέγουμε το εικονίδιο που παριστά μια παράμετρο, όπως το ποσοστό επιβίωσης. Κάνοντας διπλό κλικ στο ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ, ανοίγουμε μια καινούργια θυρίδα διαλόγου και θέτουμε την τιμή της συγκεκριμένης παραμέτρου ίση με 9/10.

Εν συνέχεια, πρέπει να πληροφορήσουμε το STELLA πώς επιδρά το ποσοστό επιβίωσης στο μέγεθος των διαφόρων ροών. Για να το πετύχουμε, απαιτείται ένα τέταρτο εργαλείο μοντελοποίησης. Το βέλος πληροφορίας εκφράζει το γεγονός ότι το ένα μέρος του μοντέλου επηρεάζει το άλλο. Εδώ, θα ορίσουμε ότι το ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ και το απόθεμα ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ καθορίζουν από κοινού το πλήθος των ατόμων που επιζούν κάθε εβδομάδα:

$$\text{ΕΠΙΖΩΝΤΕΣ} = \text{ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ} *$$

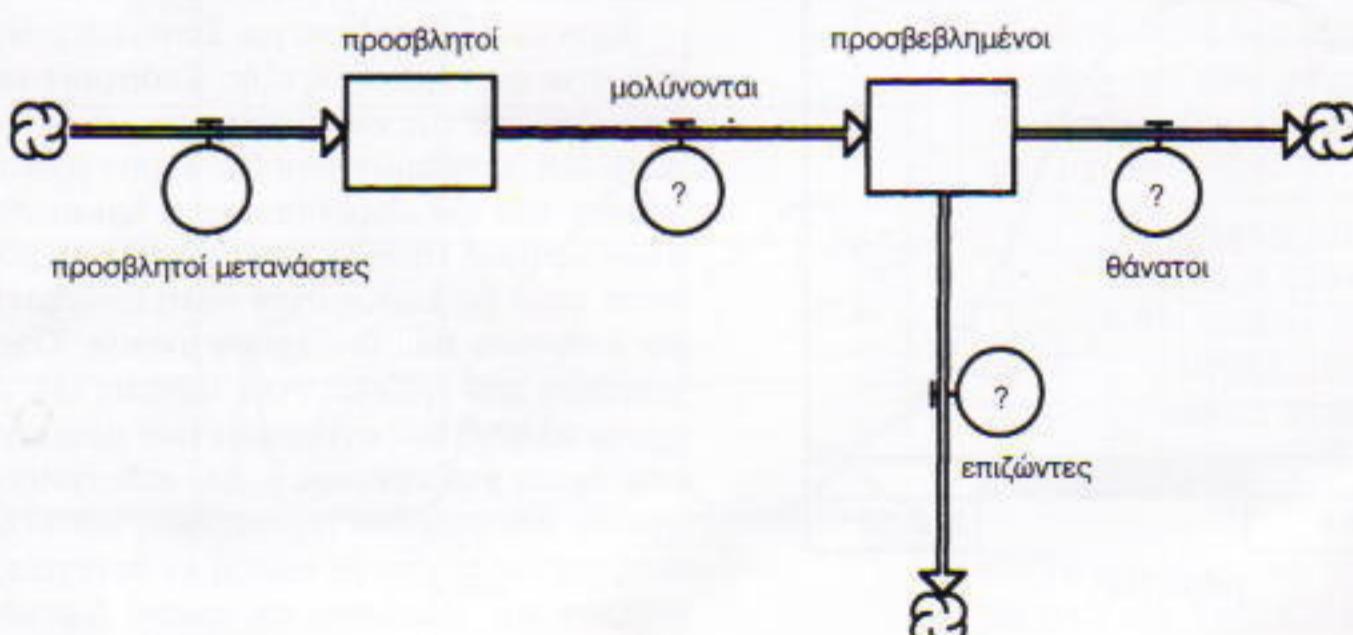
ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ. (1)

Εφόσον η θνησιμότητα ισούται με (1 - ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ), τα ίδια εικονίδια καθορίζουν εβδομαδιαίο ρυθμό θανάτων, ως εξής:

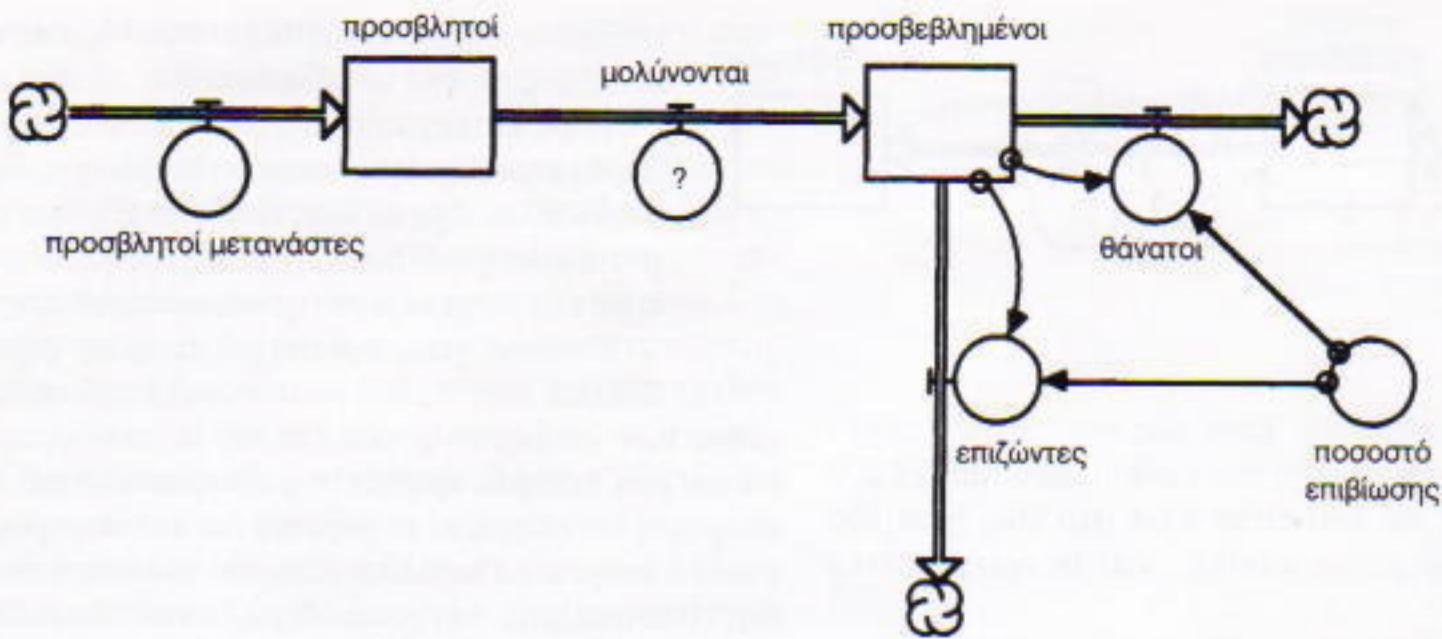
$$\text{ΘΑΝΑΤΟΙ} = (1 - \text{ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ}) *$$

ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ. (2)

Το μοντέλο μας μοιάζει τώρα μ' εκείνο που απεικονίζεται στο Σχήμα 5. Παρατηρήστε ότι τα άτομα δεν διατέρχονται το σύστημα ακαριαία. Το μοντέλο εκτελείται με διακριτά χρονικά βήματα. Σε κάθε χρονικό βήμα, ο υπολογιστής επεξεργάζεται τις εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική του συστήματος. Για παράδειγμα, άτομα εισέρχονται ως ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΣ και ενσωματώνονται στο απόθεμα ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ, όπου παραμένουν προσωρινά. Όσο αποτελούν μέρος του αποθέματος ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ, είναι ευάλωτοι στη νόσο. Μερικοί από το απόθεμα ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ κατά το επόμενο χρονικό βήμα θα μετακινηθούν στο απόθεμα ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ, όπου θα παραμένουν επί ένα χρονικό βήμα, ώσπου να εγκαταλείψουν το σύστημα ως επιζώντες ή ως θανόντες. Μικραίνοντας τα χρονικά βήματα της προσομοίωσης, μπορούμε να προσεγγίσουμε το συνεχή χρόνο. Εντούτοις, η διαδοχή των βημάτων που



Σχήμα 4



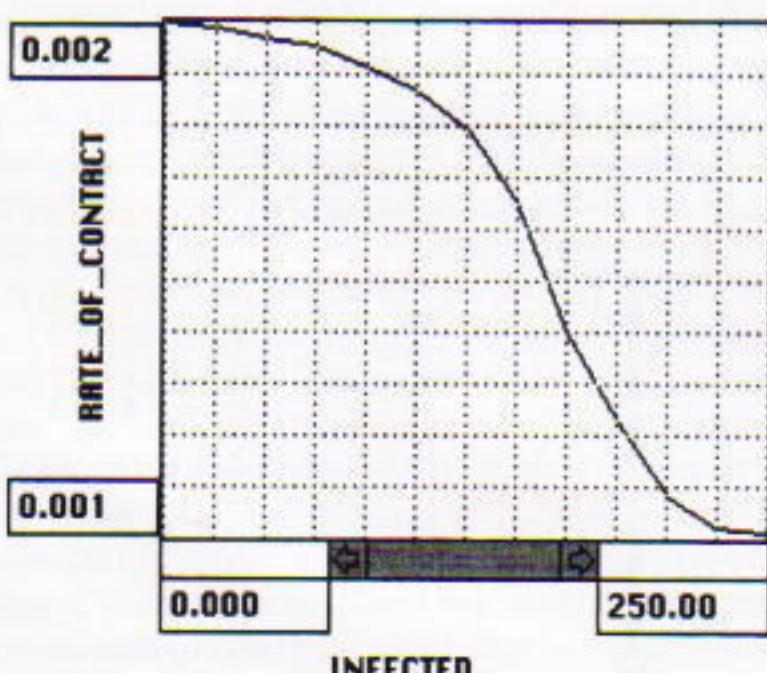
Σχήμα 5

περιγράφουν την προδευτική κίνηση από τους ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΥΣ στους ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΥΣ συλλαμβάνει την ουσία της χρονικής υστέρησης κατά την οποία η νόσος μπορεί να μεταδοθεί στους άλλους.

Απομένει ακόμη να καθορίσουμε το μηχανισμό με τον οποίο μεταδίδεται ο ίδιος από άτομο σε άτομο. Ως προς τούτο, οι επδημιολόγοι υποστηρίζουν ότι το πλήθος των συναντήσεων ανάμεσα σε δύο άτομα δεν έχουν ανοσία και στους προσβεβλημένους είναι ανάλογο με τα μεγέθη των δύο πληθυσμών. Ο τριπλασιασμός του μεγέθους των ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΩΝ θα οδηγούσε σε τριπλασιασμό του πλήθους των συναντήσεων, ενώ ο υποδιπλασιασμός του θα μείωνε το πλήθος των συναντήσεων στο μισό. Για να περιγράψουμε έναν τέτοιο μηχανισμό, σύρουμε βέλη από τους ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΥΣ και τους ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΥΣ προς τη ροή ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ και, στη θυρίδα διαλόγου που εμφανίζεται, πολλαπλασιάζουμε το μέγεθος των δύο πληθυσμών με κάποιο ΡΥΘΜΟ ΕΠΑΦΗΣ. Αυτό αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$\text{ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ} = \text{ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ} * \\ \text{ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ} * \text{ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ}. \quad (3)$$

Μένει να ορίσουμε το ΡΥΘΜΟ ΕΠΑΦΗΣ. Εδώ θα υποθέουμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο έρχονται σε επαφή οι

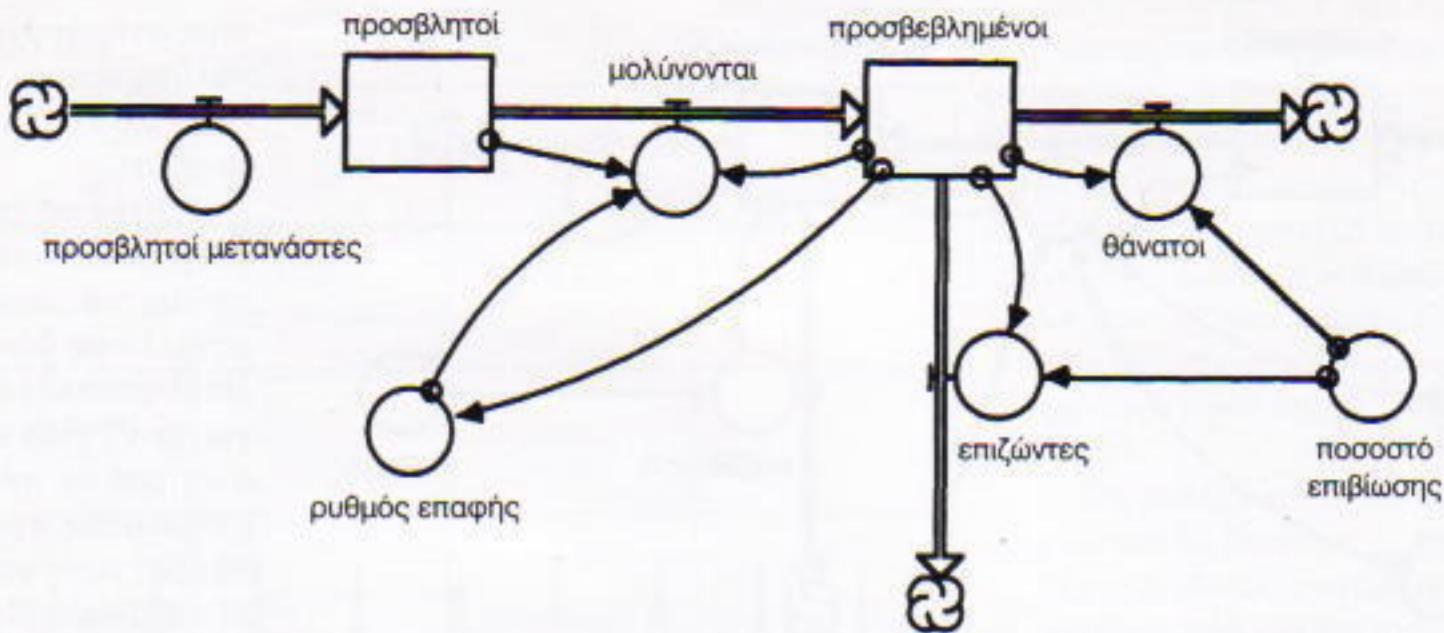


Σχήμα 6
(rate-of-contact: ρυθμός επαφής, infected: προσβεβλημένοι)

άνθρωποι εξαρτάται από το μέγεθος του αποθέματος ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ, πράγμα που εκφράζεται από ένα βέλος πληροφορίας από τους ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΥΣ προς το ΡΥΘΜΟ ΕΠΑΦΗΣ. Υποθέτουμε επίσης ότι αυτός ο ρυθμός είναι υψηλός, εφόσον ο αριθμός των ανθρώπων που υποφέρουν από τη νόσο είναι μικρός. Εντούτοις, όσο περισσότεροι άνθρωποι ασθενούν, τόσο μειώνεται ο ρυθμός επαφής (οι άρρωστοι βρίσκονται στο σπίτι τους, στο κρεβάτι). Για να ενσωματώσουμε τη συγκεκριμένη υπόθεση στο μοντέλο μας, πατάμε διπλό κλικ στο εικονίδιο ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ και εισάγουμε, σε γραφική μορφή, μια εικασία για το πώς σχετίζεται ο ρυθμός επαφής με το πλήθος των ανθρώπων που είναι φορείς του ιού. Αυτή η υπόθεση (Σχήμα 6) συμπεριλαμβάνεται στο μοντέλο μας.

Ο προσδιορισμός της παραπάνω (σε μεγάλο βαθμό μη γραμμικής) σχέσης ολοκληρώνει την κατασκευή του μοντέλου με τη βοήθεια του STELLA (Σχήμα 7). Η μη γραμμική σχέση ανάμεσα στους ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΥΣ και στο ΡΥΘΜΟ ΕΠΑΦΗΣ οδήγησε σ' ένα μοντέλο που δεν επιδέχεται λύση κλειστής μορφής. Επιπροσθέτως, δεν διαθέτουμε κάποια διαισθητική βάση για να συναγάγουμε την πορεία της νόσου. Ωστόσο, έχοντας στη διάθεσή μας λογισμικό όπως το STELLA, μπορούμε να επιτύχουμε για το μοντέλο μας μιαν αριθμητική λύση. «Τρέχοντάς» το για προσομοίωση περιόδου 300 εβδομάδων, λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στο Σχήμα 8.

Έχοντας εξασφαλίσει μια λύση, μπορούμε να συνοψίσουμε το φαινόμενο ως εξής: Υπάρχουν περιοδικές σφοδρές εξάρσεις της νόσου κατά τις οποίες τόσο τα αποθέματα των ανθρώπων που δεν έχουν ανοσία όσο και των φορέων του ιού αυξάνουν αργά και σταθερά. Ο προκύπτων αριθμός επαφών είναι αρχικά μικρός, αλλά αυξάνεται γρήγορα καθώς στην πόλη εισέρχονται περισσότεροι άνθρωποι που δεν έχουν ανοσία. Όσο αυξάνεται το γινόμενο που ορίζεται στην εξίσωση (3), τόσο αυξάνεται και το πλήθος των ανθρώπων που μετακινούνται από τα αποθέματα στα σύννεφα —είτε πεθαίνουν είτε αποκτούν ανοσία. Και στις δύο περιπτώσεις, δεν υπάρχει λόγος να τους παρακολουθούμε, επειδή, εν συνεχείᾳ, ουδόλως επηρεάζουν την εξάπλωση της νόσου. Αφότου αυτοί οι άνθρωποι εγκαταλείψουν το μοντέλο, η ροή ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ ελαττώνεται πάλι, με αποτέλεσμα να εξαφανίζεται φα-



Σχήμα 7

νομενικά η νόσος, μόνο για να επανεμφανιστεί μερικές εβδομάδες αργότερα.

Εκτός από το γεγονός ότι αποκτούμε μια διόραση για την κυκλική φύση της επιδημίας, παρατηρούμε ότι οι διαδοχικές κορυφές γίνονται μικρότερες. Μπορείτε να αναπτύξετε κάποια υπόθεση που να δικαιολογεί γιατί, σε πολύ μακροπρόθεσμη βάση, ο αριθμός των ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΩΝ σταθεροποιείται σε κάποιο χαμηλό επίπεδο; Πόσο περίπου θα έπρεπε να είναι το συγκεκριμένο επίπεδο; (Απάντηση μπορείτε να βρείτε στη σελ. 65.)

Ένα απλό μοντέλο για τον ιό Έμπολα

Τώρα που αποκτήσαμε κάποια διόραση για ένα είδος επιδημίας, μπορούμε να ρωτήσουμε πώς θα τροποποιούνται οι εξάρσεις της επιδημίας εάν ο ιός μεταδιδόταν από το ένα είδος στο άλλο, παρόμοια με την εξάπλωση του ιού Έμπολα. Σ' αυτή την περίπτωση, ο ένας πληθυσμός (οι πιθήκοι P) είναι φορέας ενός ιού που μπορεί να μεταδοθεί σ' έναν δεύτερο πληθυσμό (τους ανθρώπους A). Ο ιός μεταδίδεται επίσης εντός του πληθυσμού των πιθήκων, από τα προσβεβλημένα μέλη σε όσα δεν έχουν ανοσία, αλλά οι πιθήκοι δεν μολύνονται από τους ανθρώπους.

Αντίθετα, οι άνθρωποι μπορεί να κολλήσουν τον ιό τόσο από τους πιθήκους όσο και από άλλους ανθρώπους που είναι φορείς του.

Το μοντέλο του STELLA που αντιστοιχεί σ' αυτή την περίπτωση απαρτίζεται από δύο υπομοντέλα, το καθένα από τα οποία είναι όμοιο με το μοντέλο που εξετάσαμε ήδη. Έχουμε λοιπόν επιδημίες που εξαπλώνονται ανάμεσα στους πιθήκους και ανάμεσα στους ανθρώπους, με ένα σημαντικό επιπλέον χαρακτηριστικό: ένα βέλος πληροφορίας από τους ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΥΣ P προς τη ροή ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ A αντιστοιχεί στο γεγονός ότι ο ιός μπορεί να μεταδοθεί στους ανθρώπους εκτός από προσβεβλημένους συνανθρώπους και από προσβεβλημένους πιθήκους. Για να απλουστεύσουμε το μοντέλο, στην περίπτωση αυτή θα υποθέσουμε ότι οι διάφοροι «ρυθμοί επαφής», αντί να εξαρτώνται από το μέγεθος των προσβεβλημένων πληθυσμών, είναι σταθεροί.

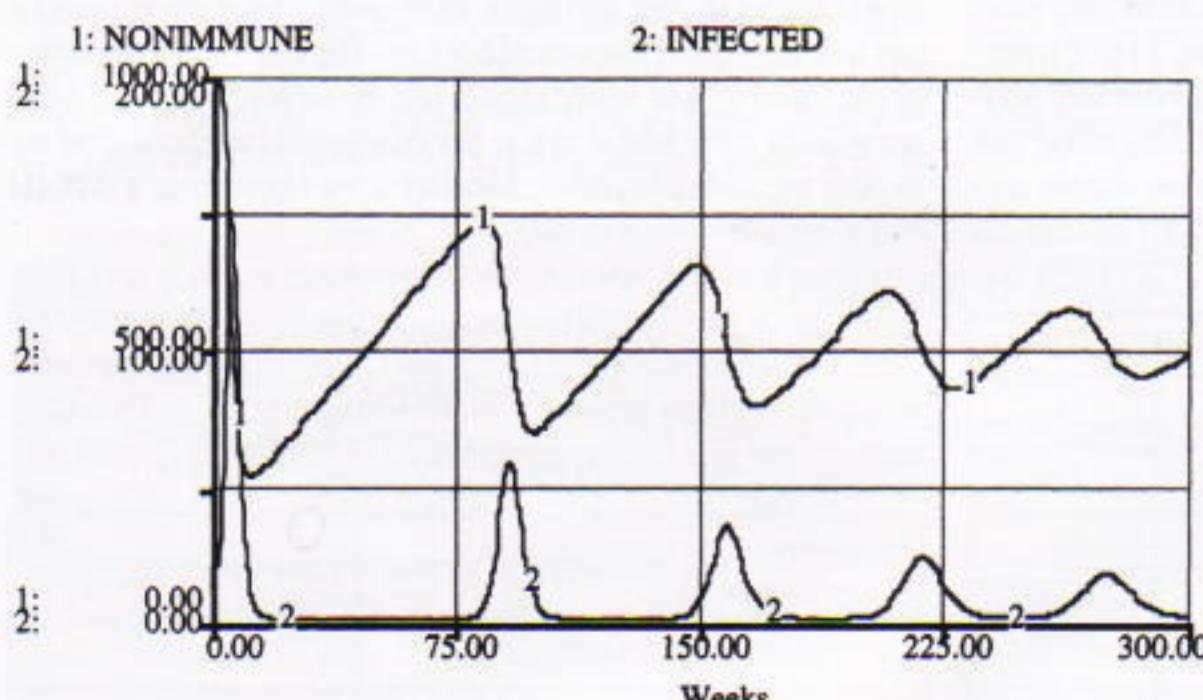
Η δομή του προκύπτοντος μοντέλου στο STELLA απεικονίζεται στο Σχήμα 9. Το γεγονός ότι οι πιθήκοι μολύνονται με τον ιό μόνο από τους υπόλοιπους οροίους τους αντανακλάται στη σχέση

$$\text{ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ } P = \begin{aligned} &\text{ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ } P * \\ &\text{ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ } P * \\ &\text{ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ } P. \end{aligned} \quad (4)$$

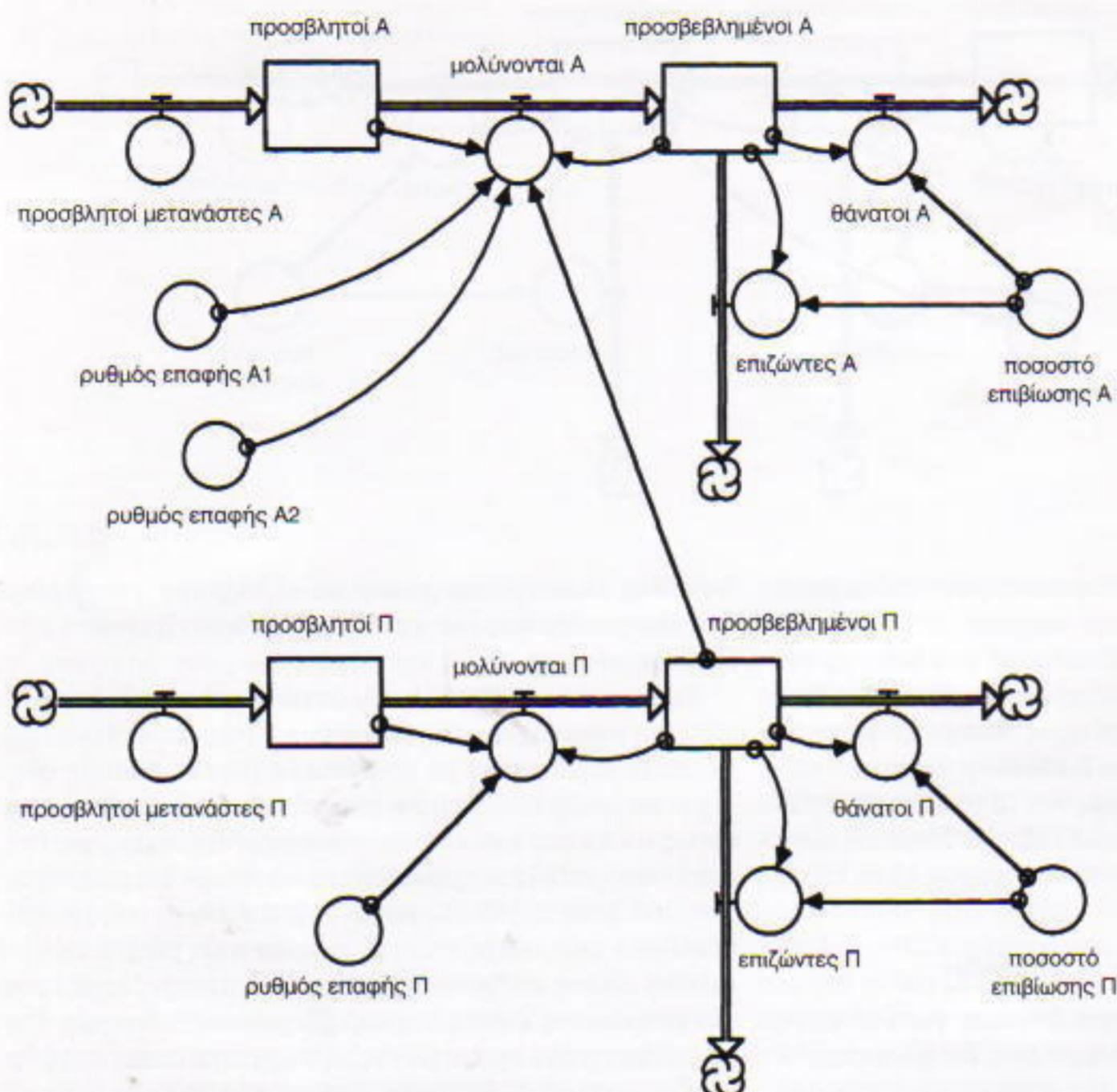
Το γεγονός ότι οι άνθρωποι δέχονται τον ιό τόσο από τους πιθήκους όσο και από τους συνανθρώπους τους αντανακλάται στη σχέση

$$\text{ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ } A = \begin{aligned} &\text{ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ } A1 * \\ &\text{ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ } A * \\ &\text{ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ } A + \\ &\text{ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ } A2 * \\ &\text{ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ } P * \\ &\text{ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ } A. \end{aligned} \quad (5)$$

Τα ερωτηματικά που εμφανίστηκαν αρχικά στο Σχήμα 9 απομακρύνθηκαν με τον προσδιορισμό του αρχικού μεγέθους των τεσσάρων αποθεμάτων, των



Σχήμα 8
(nonimmune: προσβλητοί, infected: προσβεβλημένοι, weeks: εβδομάδες)



Σχήμα 9

διαφόρων ρυθμών επαφής και των ποσοστών επιβίωσης τόσο για τους πιθήκους όσο και για τους ανθρώπους.

Οι υποθετικές αρχικές συνθήκες μας και οι παράμετροι του μοντέλου παρουσιάζονται στο Σχήμα 10. Η καταχώριση «μεταβλητός» που εμφανίζεται στο Σχήμα 10 αντιστοιχεί στην παραδοχή ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές ποικιλίες του ιού. Το ένα είδος μεταδίδεται από τους πιθήκους στους ανθρώπους με άμεση επαφή. Ενώ η πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο είναι χαμηλή, εντούτοις πρόκειται για το πλέον θανατηφόρο είδος. Το άλλο είδος του ιού μπορεί να μεταδίδεται από τους πιθήκους στους ανθρώπους μέσω του αέρα. Ενώ η πιθανότητα να προσβάλει

παραμείνει στον ανθρώπινο πληθυσμό επί μακρόν. Η συμπεριφορά της ασθένειας καθρεφτίζει εκείνη του πρώτου μας μοντέλου, όπου θεωρήσαμε μόνο έναν πληθυσμό. Οι περιοδικές εξάρσεις ακολουθούνται από μακρές περιόδους κατά τις οποίες η ασθένεια προσβάλλει ελάχιστα άτομα. Ωτόσο, η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση απεικονίζεται στα αποτελέσματα της δεύτερης εκτέλεσης. Εδώ παρουσιάζεται μια παρόμοια εικόνα εξάρσεων της ασθένειας, προσωρινής ύφεσης και νέων εξάρσεων. Η ασθένεια, όμως, εξαφανίζεται εντελώς όταν η προσομοιούμενη περίοδος υπερβεί τις 290 εβδομάδες. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί; (Η απάντηση δίνεται στη σελ. 65.)

Όπως και στο προηγούμενο μοντέλο, αυτή η περιγραφή τείνει στην υπεραπλούστευση, με πολύ λίγα αποθέματα (τέσσερα) και ροές (οκτώ) και έναν πολύ περιορισμένο αριθμό μη γραμμικοτήτων. Εντούτοις, είναι πολύ πλουσιότερη απ' ό,τι θα ανέμεναν πολλοί από εμάς! Σε μια πε-

	Ανθρωποι	Πιθήκοι
ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΣ	7	10
ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ	1.000	1.000
ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ	5	20
ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ	A1 = 0,008 A2 μεταβλητός	0,003
ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ	μεταβλητό	0,2

Σχήμα 10

Εκτέλεση προγράμματος	ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ A2	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ A
1	0,00025	0,155
2	0,00015	0,065

Σχήμα 11

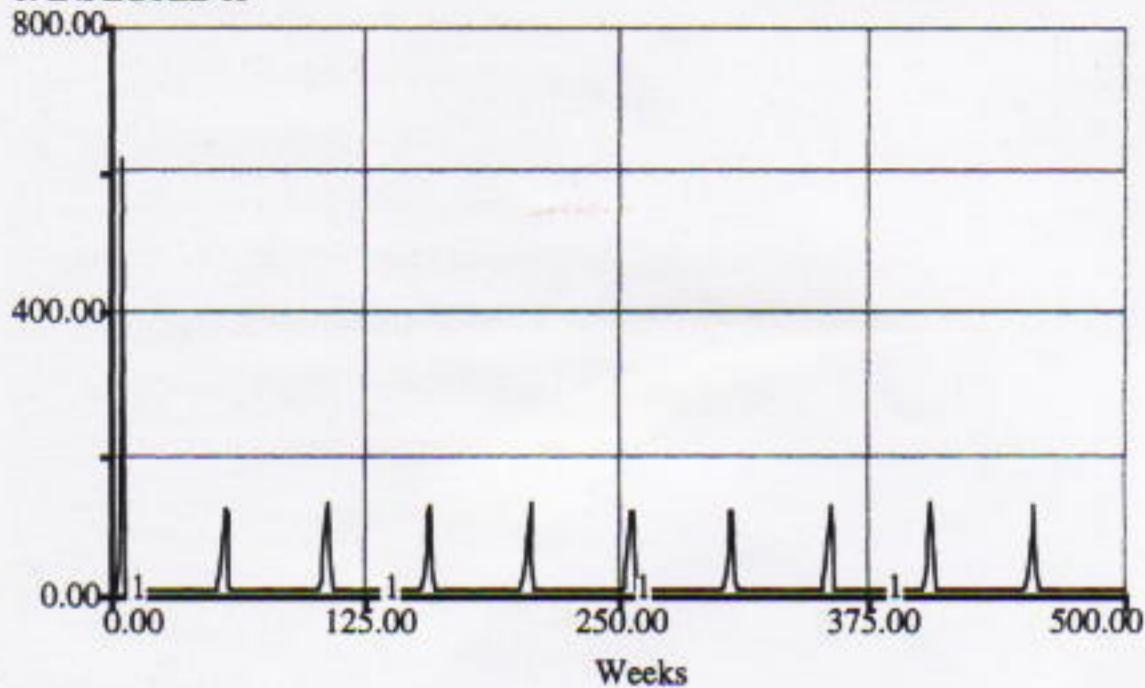
τους ανθρώπους είναι μεγαλύτερη, αυτό το είδος δεν είναι τόσο θανατηφόρο όσο το πρώτο.

Τούτες οι σκέψεις μάς υποβάλλουν την ιδέα ότι πρέπει να «τρέξουμε» το μοντέλο με βάση τις ακόλουθες εναλλακτικές τιμές για το ΡΥΘΜΟ ΕΠΑΦΗΣ A2 ανάμεσα σε πιθήκους και ανθρώπους και τις αντίστοιχες τιμές για το ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ A. Η πρώτη εκτέλεση του προγράμματος αντιστοιχεί στον «αερομεταφερόμενο» ιό, με υψηλότερο ρυθμό επαφής και το υψηλότερο ποσοστό επιβίωσης. Η δεύτερη εκτέλεση του προγράμματος αντιστοιχεί στον ιό που μεταδίδεται με άμεση επαφή, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μικρότερο ποσοστό επιβίωσης (Σχήμα 11). Το Σχήμα 12 δίνει τα αποτελέσματα που αποκομίζουμε από τις δύο εκτελέσεις του προγράμματος.

Τα αποτελέσματα για το πρώτο μοντέλο δείχνουν ότι ο ιός είναι δυνατόν να

Model Run 1

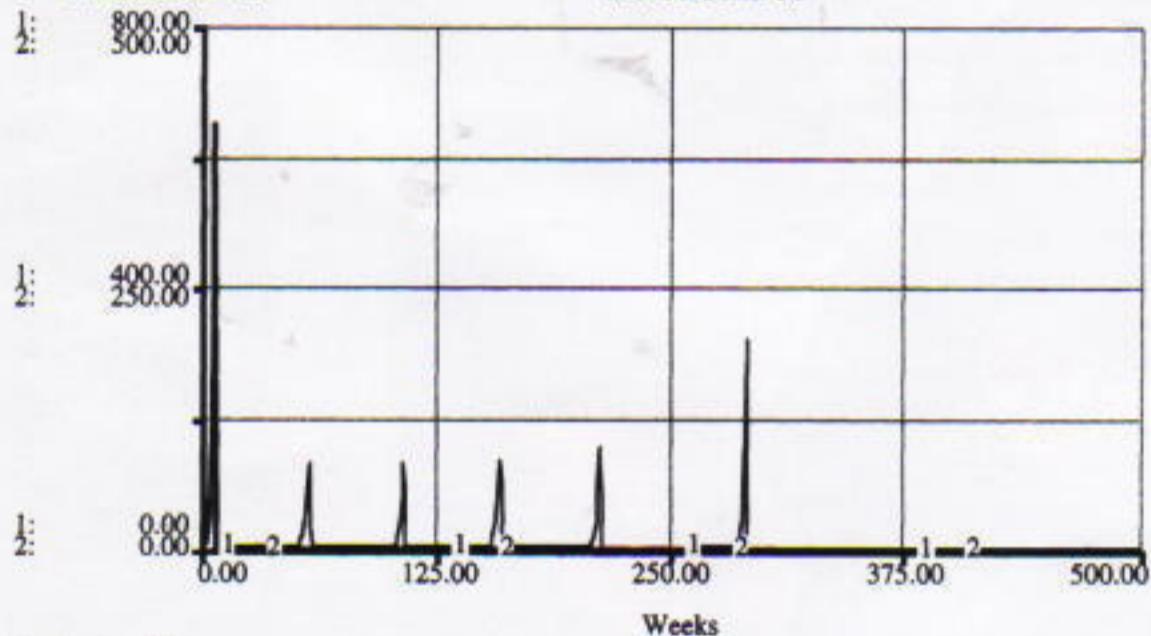
1: INFECTED H



Model Run 2

1: INFECTED H

2: INFECTED M



Σχήμα 12

(model run: εκτέλεση προγράμματος, infected H: προσβεβλημένοι Α, weeks: εβδομάδες, infected M: προσβεβλημένοι Π)

ρίπτωση, η ασθένεια παρουσιάζει περιοδικές εξάρσεις και υπάρχει πάντα θετικός αριθμός προσβεβλημένων ανθρώπων. Σε άλλη περίπτωση, αφού υποβάλουμε σε μικρές μεταβολές παραμέτρους όπως ο ρυθμός επαφής, ανακαλύπτουμε ότι η ασθένεια εξαφανίζεται ολοκληρωτικά. Τα εν λόγω ευρήματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η κατανόηση των ρυθμών επαφής είναι βασική προκειμένου

να κατανοήσουμε την εξάπλωση και την εμμονή της ασθένειας σε κάποιον πληθυσμό στην πορεία του χρόνου. Αυτά τα ευρήματα υποδηλώνουν επίσης ότι μπορεί να αποδειχτεί δύσκολο να αντιδράσουμε σε εξάρσεις εξαιρετικά μεταδοτικών ασθενειών —πιθανώς δεν θα διαθέτουμε αρκετό χρόνο για να ανακαλύψουμε κάποιο εμβόλιο, οπότε η ασθένεια μπορεί να εξαφανιστεί αφού σπείρει το θάνατο στον πληθυσμό.

Τα μαθήματα αυτού του μοντέλου, ωστόσο, υπερβαίνουν τα συγκεκριμένα ευρήματα. Αποκρυσταλλώνοντας την κατανόησή μας για τις συστημικές διαδικασίες μέσα στο πλαίσιο των δυναμικών μοντέλων, συναρμολογώντας επιπλέον τα τμήματα ενός συστήματος και «τρέχοντάς» τα σε αμοιβαία αλληλεπίδραση, επιτύχαμε να φέρουμε στο φως τις δυναμικές συνέπειες της υπόθεσής μας και να παραγάγουμε διόραση που θα ήταν πολύ δύσκολο να αποκτήσουμε χωρίς τη βοήθεια του μοντέλου και ενός προγράμματος σαν το STELLA. Το μοντέλο μάς βοήθησε επίσης να προσδιορίσουμε βασικές παραμέτρους της δυναμικής ενός συστήματος —όπως ο ρυθμός επαφής που περιγράφει μια σημαντική πλευρά της διάδοσης της ασθένειας—, και μέσω αυτού είναι δυνατόν να καθοδηγηθεί η συλλογή και η ανάλυση δεδομένων. Στην πορεία είναι πιθανό να έχουν τεθεί νέα ερωτήματα, οι απαντήσεις στα οποία μπορούν να βρεθούν με επεκτάσεις του μοντέλου μας ή με την ανάπτυξη ενός νέου μοντέλου.

Ο Matthias Ruth είναι καθηγητής του Κέντρου Ενέργειας και Περιβαλλοντικών Μελετών και του τμήματος γεωγραφίας του Πανεπιστημίου της Βοστώνης. Έχει συγγράψει αρκετά βιβλία με θέμα την ανάπτυξη δυναμικών μοντέλων, που έχουν εκδοθεί από τον οίκο Springer-Verlag. Η ηλεκτρονική διεύθυνση του δρ. Ruth είναι <http://web.bu.edu/CEES/readmoreMR.html>.

Σχετικά με το STELLA®

Το STELLA γίνεται ολοένα δημοφιλέστερο στις κοινωνικές και φυσικές εποικήμες, όπως επίσης και στη λήψη επιχειρησιακών αποφάσεων. Χρησιμοποιείται σε υπολογιστές Macintosh, IBM και —σε συνδυασμό με μεταγλωτιστές— σε κεντρικούς υπολογιστές και υπερυπολογιστές. Όλο και περισσότερα βιβλία με εισαγωγικές γνώσεις για τη συστημική σκέψη και την κατασκευή δυναμικών μοντέλων εμφανίζονται στην αγορά, μερικά από τα οποία κάνουν εκτεταμένη χρήση του λογισμικού STELLA. Ελπίζω ότι με τη βοήθεια αυτών και πολλών άλλων συλλογικών προσπαθειών μπορούμε να οικοδομήσουμε μια κοινότητα «μοντελοποιών» από σπουδαστές, καθηγητές και ερευνητές, οι οποίοι θα διαδώσουν τον ενθουσιασμό για την κατασκευή δυναμικών μοντέλων και για τη συστημική σκέψη, τόσο με την προφορική επικοινωνία όσο και με την εργασία ανά ομάδες των δύο-τριών ατόμων που, καθισμένα γύρω από έναν υπολογιστή, θα μελετούν κάποιο μοντέλο, θα αναπτύσσουν κάποιο νέο ή θα κρίνουν αυτό που ανέπτυξε μια παρόμοια ομάδα.

carbon 60%, nitrogen 63% : sulphur

one good, one bad, please



Επιστήμη κάθε άλλο παρά απαισιόδοξη

Πώς η οικονομική ανάλυση εισροών-εκροών φωτίζει τα περιβαλλοντικά ζητήματα

Dean Button, Faye Duchin και Kurt Kreith

TO QUANTUM ΑΥΤΟΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ ως «περιοδικό για τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά». Έχει άραγε θέση στις σελίδες του η «απαισιόδοξη επιστήμη» των οικονομικών; Με άλλα λόγια, έχει νόημα να μιλάμε για επικάλυψη των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, από τη μια, με την οικονομική επιστήμη, από την άλλη;

Όπως είναι ίσως αναμενόμενο, στο παρόν άρθρο σκοπεύουμε να προτείνουμε ορισμένες καταφατικές απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα. Επιπλέον, εφόσον αυτό το τεύχος εστιάζεται στην τεχνολογία των υπολογιστών, τη δυναμική συστημάτων και το βιβλίο *The Limits to Growth* (LTG), θα χρησιμοποιήσουμε λογιστικά φύλλα και το λογισμικό STELLA® για να εντάξουμε το θέμα μας σ' ένα περιβαλλοντικό πλαίσιο.

Χρησιμοποιώντας τα εικονίδια του STELLA, μπορούμε να παραστήσουμε την παραδοσιακή οικονομική θεωρία με το διάγραμμα του Σχήματος 1. Εδώ η «οικονομία» αντιστοιχεί σ' ένα εξαιρετικά πολύπλοκο σύστημα —ένα σύστημα που απορροφά ευρύ φάσμα «πόρων», τους οποίους μετασχηματίζει σε αγαθά («καλά») που καταναλώ-

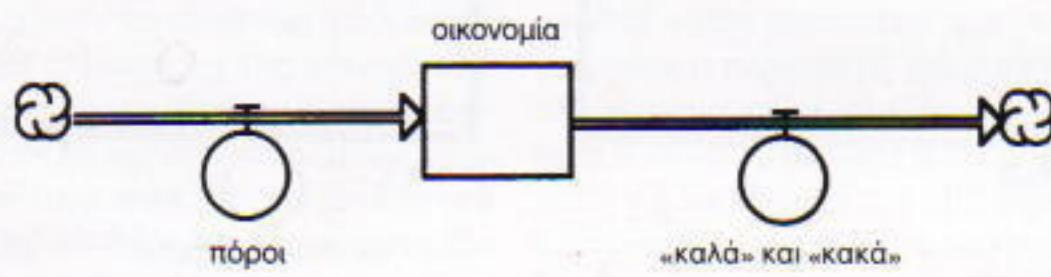
νει η κοινωνία μας. Τελευταία, όμως, συνειδητοποιούμε όλο και περισσότερο την ύπαρξη ανεπθύμητων παραπροϊόντων και βλαπτικών καταλοίπων που συνδέονται με συγκεκριμένες οικονομικές διαδικασίες. Για να απεικονίσουμε το γεγονός, έχουμε συμπεριλάβει στην ονομασία της εκροής της οικονομίας, εκτός των «καλών», και τα «κακά».

Σημαντικότερο από τις ονομασίες των εικονίδιων στο Σχήμα 1 είναι το γεγονός ότι οι «πόροι» πηγάζουν από ένα σύννεφο τα «καλά και κακά» καταλήγουν επίσης σ' ένα σύννεφο. Αυτά τα εικονικά σύννεφα αντικατοπτρίζουν το γεγονός ότι η συμβατική οικονομική θεωρία αντιπαρέχεται δύο κρίσιμα προβλήματα, δηλαδή αφ' ενός από πού προέρχονται οι πόροι μιας οικονομίας και αφ' ετέρου πού τελικά καταλήγουν τα αγαθά και τα βλαπτικά κατάλοιπά της. Με άλλα λόγια, ένα μεγάλο μέρος της οικονομικής θεωρίας δεν λαμβάνει υπόψη τον ευρύτερο βιοφυσικό κόσμο μέσα στον οποίο υπάρχει η οικονομία, αλλά την εξετάζει σαν να ήταν ένα κλειστό σύστημα. Στην πραγματικότητα, η οικονομία είναι ανοιχτό σύστημα που υπάρχει μέσα σ' ένα πολύ μεγαλύτερο

σύστημα, κλειστό όσον αφορά την ύλη. Εντούτοις, τα «σύννεφα» του STELLA μάς υπενθυμίζουν το γεγονός ότι οι πηγές και οι καταβόθρες δεν έχουν περιληφθεί στο Σχήμα 1, σε συμφωνία με την παραδοσιακή αντίληψη.

Σε αντιδιαστολή με την κυριαρχησιμβατική άποψη, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι μελέτες όπως το LTG φέρνουν την παραδοσιακή οικονομική επιστήμη αντιμέτωπη με μια θεμελιώδη πρόκληση. Απαιτούν από τους οικονομολόγους να ακολουθήσουν το παράδειγμα των φυσικών επιστημών και να ενσωματώσουν τις θεωρίες τους σ' ένα μεγαλύτερο σύστημα, αυτό της Γης και της βιόσφαιράς της (δείτε το Σχήμα 1 στο άρθρο «Αναδρομή στα Όρια της ανάπτυξης», στο παρόν τεύχος).

Στην πραγματικότητα, οι προσπάθειες να αντιμετωπίστει αυτή η πρόκληση προηγούνται του LTG. O Nicholas Georgescu-Roegen ξεκίνησε την επαγγελματική σταδιοδρομία του ως μαθηματικός, και μελέτησε θερμοδυναμική υπό την καθοδήγηση του Emile Borel. Στη συνέχεια, έστρεψε την προσοχή του στα οικονομικά και προσπάθησε να εναρμονίσει τους νόμους της θερμοδυναμικής με τις λειτουργίες των οικονομικών συστημάτων. Ειδικότερα, προέταξε στους θεωρητικούς οικονομολόγους τον Δεύτερο Νόμο της θερμοδυναμικής, ισχυριζόμενος ότι η οικονομική δραστηριότητα (όπως και κάθε άλλη φυσική διαδικασία σε μονωμένο σύστημα) αυξάνει το μέτρο της αταξίας, τη λεγόμενη ε-



Σχήμα 1

ντροπία. Ένας άλλος εξέχων οικονομόλογος που ανταποκρίθηκε σε τέτοιες προκλήσεις ήταν ο Wassily Leontief. Συνάδελφος του Georgescu-Roegen στο Χάρβαρντ, ο Leontief επιστράτευσε την ισχύ των υπολογιστών για να αναπτύξει ό,τι ονόμαζε ανάλυση εισροών-εκροών. Οι πρώτες του προσπάθειες είχαν στόχο να βελτιώσουν το Σχήμα 1, με την αποδοχή του γεγονότος ότι οι οικονομίες χρησιμοποιούν διαφορετικές κατηγορίες πόρων —που τις ονόμασε εισροές—, όπως σίδηρο, άνθρακα, πετρέλαιο, ξυλεία, εργασία κ.λπ., για να παράγουν πολλές κατηγορίες αγαθών —που τα ονόμασε εκροές—, όπως τροφές, μηχανήματα, υφάσματα, κατοικίες κ.λπ. Ο Leontief δημούργησε μαθηματικά εργαλεία για να εκφράσει τις αμοιβαίες συσχετίσεις μεταξύ τέτοιων εισροών και εκροών. Στην πορεία του προς το βραβείο Νόμπελ για τη συνολική προσφορά του, ο Leontief βρήκε το χρόνο να εξηγήσει το έργο του σε εκλαϊκευτικά έντυπα (στο *Scientific American*).

Παρότι η ανάλυση εισροών-εκροών εφαρμόστηκε αρχικά σε κλειστά συστήματα, ο Leontief και οι συνεργάτες του σύντομα συνειδητοποίησαν την ανάγκη να αναγνωρίσουν τη σημασία των πηγών και των καταβοθρών που βρίσκονται έξω από το οικονομικό σύστημα (το οποίο είναι ενταγμένο στο οικοσύστημα της Γης). Η ανάλυση εισροών-εκροών αποτέλεσε το θεμέλιο στο οποίο στηρίχτηκε η ανάπτυξη και, εν συνεχείᾳ, η βελτίωση ενός μοντέλου για την παγκόσμια οικονομία. Μολονότι οι λεπτομέρειες του εν λόγω παγκόσμιου μοντέλου βρίσκονται έξω από τα πλαίσια αυτού του άρθρου, θα μπορέσουμε να παρουσιάσουμε κάποια από τα υποκείμενα μαθηματικά.

Ανάλυση εισροών-εκροών

Σε ένα από τα άρθρα του, ο Leontief παρουσιάζει την ανάλυση εισροών-εκροών εφαρμόζοντάς τη σε μια οικονομία που αποτελείται από τρεις μόνο τομείς: Γεωργία, Μεταποίηση και Νοικοκυριά. Οι τομείς αυτοί παράγουν τρία διαφορετικά αγαθά: σιτάρι (που μετριέται σε μπούσελ¹), ύ-

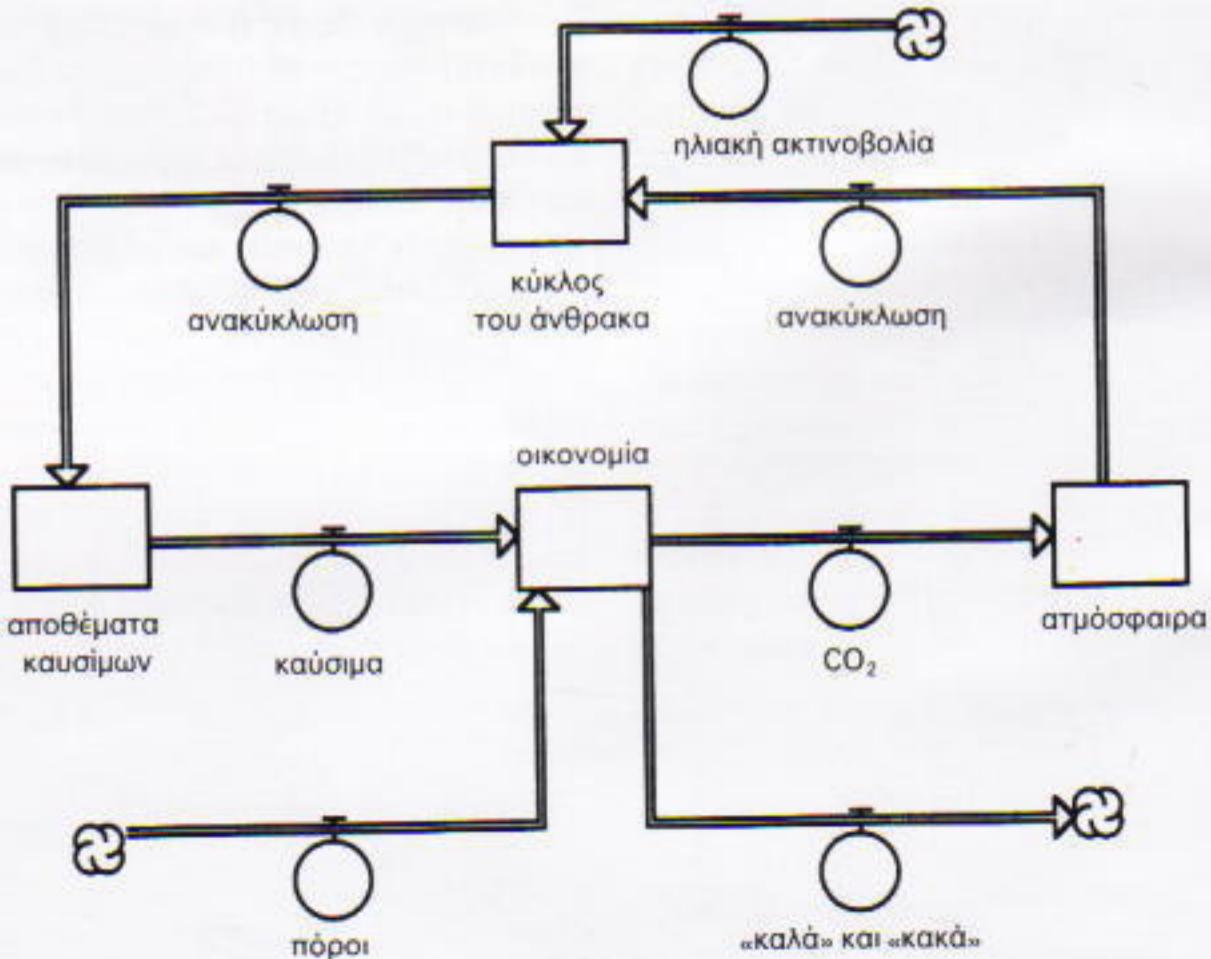
φασμα (που μετριέται σε μέτρα) και εργασία (που μετριέται σε έτη εργασίας). Η ανάλυση εισροών-εκροών μάς παρέχει ακριβώς τη μαθηματική αναπαράσταση της αλληλεξάρτησης αυτών των τομέων. Εποιητικά, η γεωργία χρειάζεται σιτάρι για τη σπορά της επόμενης χρονιάς, ύφασμα για σακιά, εργασία για την καλλιέργεια των χωραφιών· η μεταποίηση, τις ίνες του σιταριού για την παραγωγή νήματος, ύφασμα για τη συσκευασία των προϊόντων της, εργασία για τα υφαντουργεία. Τα νοικοκυριά, τέλος, χρειάζονται σιτάρι για τροφή, ύφασμα για ρουχισμό, εργασία για διάφορες οικιακές ανάγκες. Το οικονομικό μοντέλο που προκύπτει, αντιστοιχεί στο Σχήμα 1 από την άποψη ότι ουδόλως επιχειρείται να αντιμετωπιστεί το ζητήμα της προέλευσης αυτών των τριών κατηγοριών «πόρων» ή της τελικής κατάληξης αυτών των τριών κατηγοριών «καλών και κακών» (στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν μόνο αγαθά, χωρίς βλαπτικές συνέπειες).

Για να πάρουμε μια ιδέα για τα ζητήματα που ανακύπτουν σ' ένα κλειστό οικονομικό σύστημα, ας αντικαταστήσουμε στην υποθετική οικονομία μας τον τομέα της Μεταποίησης με έναν τομέα Ενέργειας. Η εν λόγω αντικατάσταση μας επιτρέπει να διατηρήσουμε την απλότητα μιας οικο-

νομίας τριών τομέων και παράλληλα να εισαγάγουμε το χαρακτηριστικό ότι ένας από τους πόρους της (τα ορυκτά καύσιμα που εισρέουν στο σύστημα) είναι δυνατόν να εξαντληθεί, και το γεγονός ότι το CO₂ που παράγεται από την καύση των ορυκτών καυσίμων πρέπει να ανακυκλωθεί και/ή να απορροφηθεί από το γήινο οικοσύστημα (Σχήμα 2).

Αφού αναπτύξουμε τις ουσιώδεις μαθηματικές ιδέες στο πλαίσιο των τριών οικονομικών τομέων, θα επανεισαγάγουμε τη Μεταποίηση ως τέταρτο τομέα. Σ' αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε μερικά πρόσθετα μαθηματικά —συγκεκριμένα, τη θεωρία μητρώων, που απαιτείται για την επίλυση τριών γραμμικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Με τέτοια εργαλεία στη διάθεσή μας, όταν μεταβούμε στην οικονομία των τεσσάρων τομέων, θα έχουμε τη δυνατότητα να εξηγήσουμε τις μαθηματικές ιδέες που απαιτούνται για συνθετότερες εφαρμογές —για παράδειγμα, το παγκόσμιο μοντέλο που στηρίζεται σε σαράντα τέσσερις τομείς και αποτελεί τη βάση ενός πρόσφατου βιβλίου με τίτλο *The Future of the Environment* (Το μέλλον του περιβάλλοντος, Oxford University Press, 1994).

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν με μια οικονομία τριών τομέων, οι οποίοι ονο-



Σχήμα 2

1. Αμερικανική μονάδα χωρητικότητας, ίση με 35,237 λίτρα. (Σ.τ.μ.)

Πίνακας 1	Απαιτήσεις γεωργίας	Απαιτήσεις ενέργειας	Απαιτήσεις νοικοκυριών	Σύνολο
Εκρόξις γεωργίας	$x_{11} = 10$ μπούσελ	$x_{12} = 20$ μπούσελ	$x_{13} = 70$ μπούσελ	100 μπούσελ
Εκρόξις ενέργειας	$x_{21} = 20$ βαρέλια	$x_{22} = 10$ βαρέλια	$x_{23} = 20$ βαρέλια	50 βαρέλια
Εκρόξις νοικοκυριών	$x_{31} = 220$ ώρες εργασίας	$x_{32} = 50$ ώρες εργασίας	$x_{33} = 30$ ώρες εργασίας	300 ώρες εργασίας

μάζονται τώρα Γεωργία, Ενέργεια και Νοικοκυριά. Υποθέτουμε ότι η ετήσια εκρόξις είναι 100 μπούσελ σιταριού, 50 βαρέλια καύσιμης ύλης και 300 ώρες εργασίας, και παριστούμε τις εκρόξις αυτών των τριών τομέων ως $x_1 = 100$, $x_2 = 50$ και $x_3 = 300$.

Η ανάλυση εισοροών-εκροών απαιτεί τώρα να προσδιορίσουμε πώς κατανέμονται τα συγκεκριμένα προϊόντα στους διάφορους τομείς. Αυτή η πληροφορία μπορεί να διαβιβαστεί αποτυπωμένη σ' ένα γραμμογραφημένο πλέγμα 3×4 , όπως εκείνο του Πίνακα 1. (Σημείωση: η μορφή του πίνακα ακολουθεί τη σύμβαση που ορίζεται στην άλγεβρα μητρώων, όπου οι μήτρες προσδιορίζονται βάσει του πλήθους των γραμμών και του πλήθους των στηλών ($r \times c$) που περιέχουν. Εδώ έχουμε τρεις γραμμές και τέσσερις στήλες, που αντιπροσωπεύονται από τη μη-σκιασμένη περιοχή.)

Στην τιμή x_{ij} ο πίνακας αντιστοιχίζει το πλήθος των μονάδων του αγαθού i που απαιτούνται για να συντηρηθεί η συγκεκριμένη εκρόξις του αγαθού j , όπου αγαθά 1, 2, 3 είναι, αντίστοιχα, το σιτάρι, τα καύσιμα και η εργασία. Στην περίπτωσή μας έχουμε ότι $x_{11} = 10$, $x_{21} = 20$ και $x_{31} = 220$, πράγμα που σημαίνει πως, για να διατηρηθεί η παραγωγή 100 μπούσελ σιταριού, απαιτούνται 10 μπούσελ σιταριού, 20 βαρέλια καύσιμου και 220 ώρες εργασίας.

Σ' αυτό το σημείο είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε μια θεμελιώδη διαφορά μεταξύ των πρώτων δύο τομέων (Γεωργία και Ενέργεια) και του τρίτου (Νοικοκυριά). Οι τομείς 1 και 2 αντιπροσωπεύουν αγαθά (τροφή και καύσιμα) που απαιτούνται για να συντηρηθεί η ευημερία της κοινότητας. Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, τα νοικοκυριά αυτής της συγκεκριμένης κοινότητας απαιτούν 70 μπούσελ σιταριού και 20 βαρέλια καύσιμου. Τα νοικοκυριά, πάλι, πρέπει να επενδύουν 300 συνολικά ώρες εργασίας για

να συντηρήσουν αυτό το επίπεδο κατανάλωσης. Αφού, λοιπόν, τα $x_{13} = 70$ και $x_{23} = 20$ είναι οι απαιτήσεις που θέτει στην οικονομία το συγκεκριμένο επίπεδο κατανάλωσης, τα χαρακτηρίζουμε εξωγενείς μεταβλητές.

Εξαιτίας του ειδικού ρόλου των εν λόγω μεταβλητών, κάνουμε μια αλλαγή στο συμβολισμό μας. Στο υπόλοιπο άρθρο, θέτουμε $x_{13} = y_1$ και $x_{23} = y_2$. Όσον αφορά τα $x_{31} = 220$, $x_{32} = 50$, $x_{33} = 30$ και $x_3 = 300$, θα θεωρήσουμε ότι η κοινότητα έχει κάποια ευελιξία στην ποσότητα εργασίας που μπορεί να διαθέσει για τη συντηρηση της οικονομίας της. Έτσι, η ανάλυσή μας θα αγνοήσει προς στιγμήν τις συγκεκριμένες μεταβλητές.

Αυτές οι αλλαγές μάς επιτρέπουν να συνωψίσουμε τις δύο πρώτες γραμμές του Πίνακα 1 ως εξής:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + y_1 &= x_1, \\ x_{21} + x_{22} + y_2 &= x_2, \\ \text{ή} \\ (x_1 - x_{11}) - x_{12} &= y_1, \\ -x_{21} + (x_2 - x_{22}) &= y_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Παρατηρήστε ότι οι εξωγενείς μεταβλητές έχουν πλέον απομονωθεί στο δεξιό μέλος των εξισώσεων (1).

Θα απλοποιήσουμε κι άλλο το τελευταίο σύστημα εξισώσεων, ορίζοντας τους συντελεστές εισροής

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad \text{για } i = 1, 2 \text{ και } j = 1, 2. \quad (2)$$

Αφού x_{ij} είναι η ποσότητα του αγαθού i που απαιτείται για να συντηρηθεί η παραγωγή x_j μονάδων του αγαθού j , έπειτα ότι a_{ij} είναι η ποσότητα του αγαθού i που απαιτείται για να συντηρηθεί η παραγωγή m_i μονάδας του αγαθού j . Για παράδειγμα, αφού απαιτούνται 20 βαρέλια καύσιμου ($x_{21} = 20$) για να παραχθούν 100 μπούσελ σιταριού ($x_1 = 100$), απαιτούνται 0,2 βαρέλια καύσιμου για να παραχθεί 1 μπούσελ σιταριού. Βάσει αυτής της

λογικής, εισάγουμε το συντελεστή εισροής $a_{21} = x_{21}/x_1$. Αυτή η τελευταία αλλαγή συμβολισμού μάς επιτρέπει να γράψουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) ως

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= y_1, \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= y_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των x_i και x_j από τον Πίνακα 1, το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} 0,9x_1 - 0,4x_2 &= y_1, \\ -0,2x_1 + 0,8x_2 &= y_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Πρόβλημα 1. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις (4) για να επαληθεύσετε ότι, εάν στις εξωγενείς μεταβλητές δώσουμε τις τιμές $y_1 = 70$, $y_2 = 20$, θα προκύψει η λύση $x_1 = 100$ και $x_2 = 50$.

Το σύστημα εξισώσεων (4) είναι εξαιρετικά σημαντικό, διότι ενσωματώνει τη διάρθρωση της συγκεκριμένης οικονομίας. Αν αυξηθεί ο πληθυσμός αυτής της κοινότητας, μπορούμε να περιμένουμε ότι θα αυξηθούν και οι τιμές των εξωγενών μεταβλητών —αν και όχι απαραίτητα με τον ίδιο ρυθμό. Τότε, με τη βοήθεια των εξισώσεων (4) (και υποθέτοντας, φυσικά, ότι η διάρθρωση της οικονομίας δηλαδή οι απαιτήσεις εισροής ανά μονάδα εκροής— παραμένει αμετάβλητη), έχουμε τη δυνατότητα να απαντήσουμε στο ερώτημα «ποιες θα είναι οι συνέπειες μιας τέτοιας αύξησης του πληθυσμού στην οικονομία;».

Για να δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός της κοινότητας διπλασιάζεται. Ο διπλασιασμός των τιμών των εξωγενών μεταβλητών ($y_1 = 140$, $y_2 = 40$) θα απαιτούσε το διπλασιασμό της ετήσιας εκροής ολόκληρης της οικονομίας, από $x_1 = 100$ μπούσελ σε 200, και από $x_2 = 50$ σε 100 βαρέλια καύσιμης ύλης.

Τι θα συμβεί, όμως, αν αυτή η κοινότητα αποδεχτεί την εφαρμογή μετρών εξοικονόμησης ενέργειας με αποτέλεσμα να διατηρηθεί σταθερό το

τρέχον επίπεδο κατανάλωσης καυσίμου των νοικοκυριών σε $y_2 = 20$ βαρέλια /έτος, παρά το διπλασιασμό του πληθυσμού; Αν αυξήθει και πάλι η τροφοδοσία του πληθυσμού στα 140 μπούσελ σιταριού, τα μέτρα εξοικονόμησης δεν θα επιτύχουν να κρατήσουν την παραγωγή των καυσίμων στο προ της αύξησης επίπεδο, δηλαδή στα $x_2 = 50$ βαρέλια /έτος. Αντίθετα, μολονότι οι ανάγκες των νοικοκυριών σε καύσιμα μένουν σταθερές, θα αυξηθούν οι απαιτήσεις της γεωργίας και της ενέργειας, οπότε πρέπει πλέον να υπολογίσουμε τα x_1 και x_2 εκ νέου, λύνοντας το σύστημα

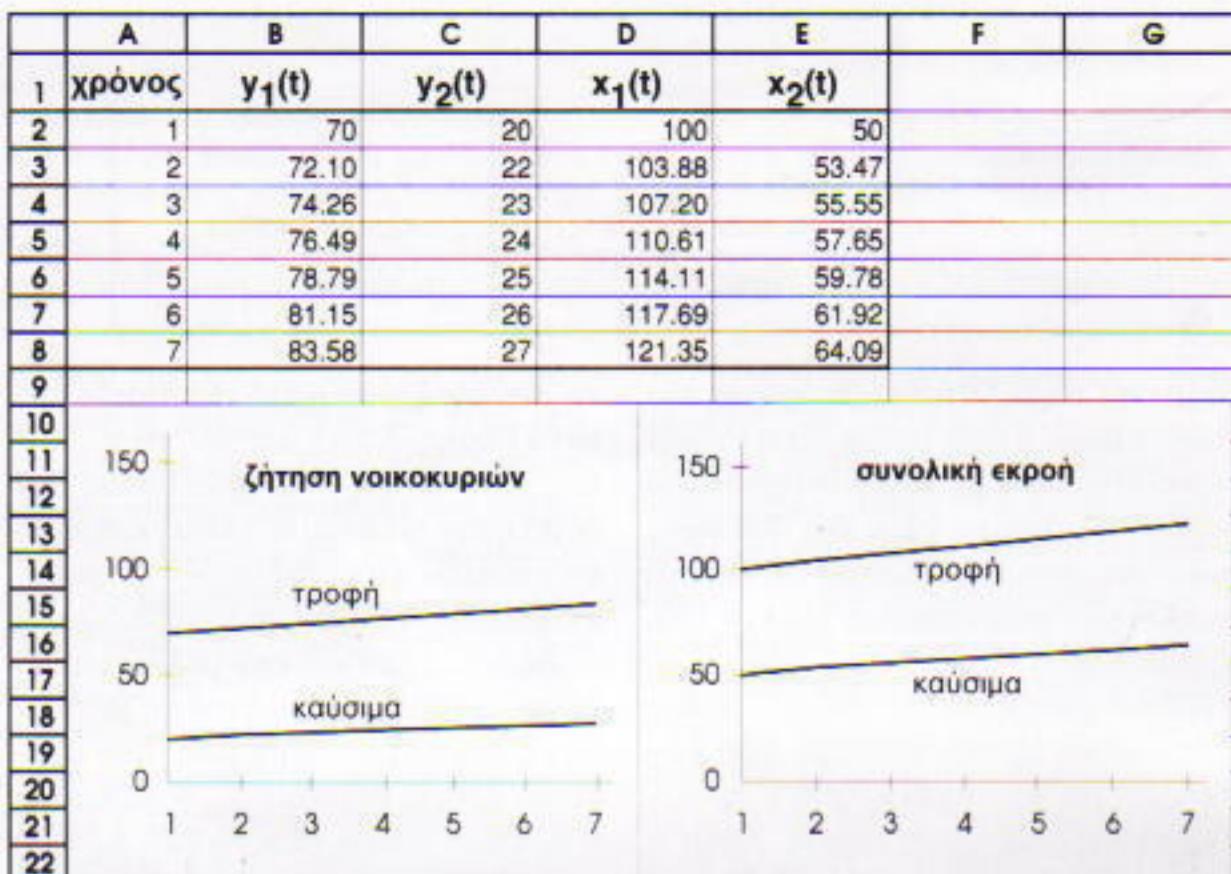
$$\begin{aligned} 0,9x_1 - 0,4x_2 &= 140, \\ -0,2x_1 + 0,8x_2 &= 20. \end{aligned} \quad (5)$$

Πρόβλημα 2. Επλύστε το σύστημα των εξισώσεων (5). Εξηγήστε γιατί δεν διπλασιάζεται το x_1 παρότι που τα νοικοκυριά απαιτούν διπλάσια ποσότητα τροφής. Ερμηνεύστε την αύξηση του x_2 .

Στατική εναντίον δυναμικής

Οι αναγνώστες που προσμένουν την επέκταση αυτών των ιδεών σε τέσσερις τομείς (ο Leontief μελέτης οικονομίες που περιγράφονται με όρους εκατοντάδων τομέων) έχουν πθανώς διαπιστώσει την ανάγκη να επιπλέουμε συστήματα μεγαλύτερα από το (3). Πριν καταπιστούμε με αυτό το ζήτημα, όμως, πρέπει να επισημάνουμε τη στατική φύση των τεχνικών που μελετήσαμε μέχρι στιγμής. Με δεδομένη μια οικονομία όπως εκείνη που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4), είναι δυνατόν να καθορίσουμε τις εκροές x_1 και x_2 που αντιστοιχούν στις τιμές των εξωγενών μεταβλητών $y_1 = 70$, $y_2 = 20$, και έπειτα αυτές που αντιστοιχούν στις εξωγενείς τιμές $y_1 = 140$, $y_2 = 20$. Για κάθε νέο σύνολο τιμών των y_1 και y_2 , χρειάζεται να επιλύσουμε εξαρχής το σύστημα εξισώσεων (4).

Τι συμβαίνει, όμως, όταν ενδιαφέρομαστε για την εξέλιξη αυτής της οικονομίας μέσα στο χρόνο; Εδώ πλέον η ανάλυση εισροών-εκροών γίνεται πο περίπλοκη, εισάγοντας τη μελέτη του ρόλου που διαδραματίζουν παράμετροι όπως οι τεχνολογικές αλλαγές και η συσσώρευση κτιρίων, μηχανη-



Σχήμα 3

μάτων, εργαλείων κ.λπ., οι οποίες επιτρέπουν την παραγωγή ενός συνόλου αγαθών με μεταβαλλόμενη σύνθεση. Εντούτοις, ακόμη κι αν παραιτηθούμε από την εισαγωγή παρόμοιων εννοιών, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα δυναμικό μοντέλο· αρκεί να διατυπώσουμε συγκεκριμένους κανόνες για το πώς μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου τα y_1 και y_2 , και κατόπιν να αναζητήσουμε την αντίστοιχη μεταβολή των $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Για να δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις ενός νοικοκυριού για τροφή αυξάνονται ετησίως κατά 3%, ενώ οι απαιτήσεις του για ενέργεια ορίζονται από τη σχέση $y_2(t) = 20 + t$. Αν υποθέσουμε ότι η διάρθρωση της οικονομίας παραμένει σταθερή, πώς θα μεταβάλλεται η συνολική ζήτηση ενέργειας με την πάροδο του χρόνου;

Ένας τρόπος να απαντήσουμε σ' αυτά τα ερωτήματα είναι η χρήση ενός προγράμματος λογιστικού φύλλου που επιλύει κατ' επανάληψη τις εξισώσεις (4). Το γεγονός ότι η λύση των εξισώσεων (4) δίνεται από τις

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{0,8y_1 + 0,4y_2}{0,64}, \\ x_2 &= \frac{0,2y_1 + 0,9y_2}{0,64}, \end{aligned} \quad (6)$$

μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα λογιστικό φύλλο για να υπολογί-

σουμε τις μεταβαλλόμενες τιμές των x_1 και x_2 (και να κατασκευάσουμε ένα γράφημά τους), συναρτήσει των μεταβολών των y_1 και y_2 (Σχήμα 3).

Πρόβλημα 3. Άς υποθέσουμε ότι η y_1 αυξάνεται ετησίως κατά 2%, ενώ η y_2 μειώνεται ετησίως κατά 1%. Αναπτύξτε ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου που θα καθορίζει τις αντίστοιχες τιμές των $x_1(t)$ και $x_2(t)$.

Μεγαλύτερα συστήματα

Οι αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με τις μήτρες έχουν ενδεχομένως αντιληφθεί ότι είναι δυνατόν να καταλήξουμε στις εξισώσεις (6) και με άλλα μέσα. Δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε τις εξισώσεις (4) ως μια εξίσωση μητρώων της μορφής $Cx = y$, όπου C είναι η 2×2 μήτρα

$$C = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix},$$

x είναι το στηλοδιάνυσμα με συνιστώσες (x_1 , x_2) και y είναι το στηλοδιάνυσμα με συνιστώσες (y_1 , y_2). Στη γλώσσα των μητρώων, οι εξισώσεις (6) αντιστοιχούν πλέον στη $x = C^{-1}y$, δηλαδή στην

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C^{-1}y = \frac{1}{0,64} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Οπως καταλαβαίνουμε από αυτό το παράδειγμα, το πρόβλημα της επίλυσης μεγάλων συστημάτων γραμμικών

Πίνακας 2	Απαιτήσεις γεωργίας	Απαιτήσεις μεταποίησης	Απαιτήσεις ενέργειας	Απαιτήσεις νοικοκυριών	Σύνολο
Εκρόές γεωργίας	10 μπούσελ	10 μπούσελ	20 μπούσελ	70 μπούσελ	110 μπούσελ
Εκρόές μεταποίησης	5 μέτρα	10 μέτρα	15 μέτρα	20 μέτρα	50 μέτρα
Εκρόές ενέργειας	20 βαρέλια	20 βαρέλια	10 βαρέλια	20 βαρέλια	70 βαρέλια
Εκρόές νοικοκυριών	220 ώρες εργασίας	80 ώρες εργασίας	50 ώρες εργασίας	30 ώρες εργασίας	380 ώρες εργασίας

εξισώσεων αποτελεί κυρίως πρόβλημα αντιστροφής μεγάλων μητρώων $n \times n$.

Για να συνδέουμε τις συγκεκριμένες ιδέες με το σύστημα εξισώσεων (3), θα εισαγάγουμε τη μήτρα \mathbf{I} , της οποίας όλα τα στοιχεία είναι μηδέν, εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου της, που είναι μονάδες. Η εν λόγω μήτρα, γνωστή ως μοναδιαία (ή ταυτοτική), μας επιτρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις (3) στη μορφή $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}$, όπου \mathbf{A} είναι η μήτρα των συντελεστών εισροής με στοιχεία τους συντελεστές a_{ij} που ορίστηκαν στην εξίσωση (2). Με αυτό το συμβολισμό, η λύση των εξισώσεων (3) είναι η $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$, οπότε αντιμετωπίζουμε πλέον την πρόκληση να υπολογίσουμε την αντιστροφή μήτρα $\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε ότι οι πληροφορίες που ενσωματώνονται στην $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ συλλέγονται τακτικά από στατιστικές και κυβερνητικές υπηρεσίες ανά τον κόσμο και αξιοποιούνται σε παρόμοιες, αν και περισσότερο σύνθετες, οικονομικές αναλύσεις.

Μια οικονομία τεσσάρων τομέων

Έχοντας όλα τα παραπάνω κατά νου, ας επανεισαγάγουμε τον τομέα της Μεταποίησης στην οικονομία των τριών τομέων που εξετάσαμε. Ένα μοντέλο εισροών-εκροών γι' αυτή την οικονομία τεσσάρων τομέων θα μας φέρει αντιμέτωπους με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Παρότι υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης τέτοιων συστημάτων, η προσέγγισή μας θα βασιστεί σε μεθόδους μητρώων που μπορούν να εφαρμοστούν σχεδόν αυτούσιες και σε μεγαλύτερα συστήματα.

Θα αρχίσουμε περιγράφοντας τη συγκεκριμένη οικονομία με έναν πίνακα 4×5 (βλ. Πίνακα 2). Βλέπουμε ότι $x_{11} = 10$, $x_{12} = 10$, $x_{13} = 20$, ..., ενώ

$x_1 = 100$, $x_2 = 40$, ..., και ο προηγούμενος τρόπος ανάλυσης μας οδηγεί στο σύστημα $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}$, όπου

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,9091 & -0,2 & -0,286 \\ -0,045 & 0,8 & -0,214 \\ -0,182 & -0,4 & 0,8571 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Οι αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με τον πολλαπλασιασμό μητρώων καλούνται να επαληθεύσουν ότι

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,2419 & 0,5914 & 0,5618 \\ 0,1616 & 1,5054 & 0,4301 \\ 0,3387 & 0,828 & 1,4866 \end{pmatrix}$$

αποδεικνύοντας ότι $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}$. Αυτό το γεγονός μάς επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$ για να δείξουμε ότι οι τιμές των εξωγενών μεταβλητών $y_1 = 70$, $y_2 = 20$ και $y_3 = 20$ οδηγούν στις $x_1 = 110$, $x_2 = 50$ και $x_3 = 70$.

Αν χρησιμοποιήσουμε ένα λογιστικό φύλλο, μπορούμε και πάλι να δημιουργήσουμε μια δυναμική εκδοχή αυτού του μοντέλου των τεσσάρων τομέων. Στο επόμενο πρόγραμμα υιοθετείται η παραδοχή ότι η y_1 αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 3%, η y_2 αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 1%, ενώ η y_3 παραμένει σταθερή στα 20 βαρέλια/έτος (βλ. το Σχήμα 4, στην επόμενη σελίδα).

Το κονό μας μέλλον

Στην εποτημονική κοινότητα αναπτύσσεται μια διευρυνόμενη συνένεση για το ότι σε πολλές περιπτώσεις (όχι όμως σε όλες) οι παραδοσιακές, μονομερείς προσεγγίσεις δεν αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τα προβλήματα που σχετίζονται με έναν πολύπλοκο και εξαιρετικά διασυνδεδεμένο κόσμο. Ολοένα περισσότερο α-

ναγνωρίζουμε ότι ο κόσμος μας αποτελείται από αλληλουσχετιζόμενα και επικαλυπτόμενα συστήματα, και πως η απομόνωση ενός ή δύο κομμάτων από το παζλ μπορεί να «δουλεύει» στη θεωρία, όχι όμως και στον πραγματικό κόσμο. Αντίθετα, είναι πολύ πο γόνιμο, αν και συνιστά προφανώς μεγαλύτερη πρόκληση, το να εξετάζουμε τα ζητήματα από ποικίλες απόψεις και να προσπαθούμε να τα επιλύσουμε μέσα στο πλαίσιο όπου όντως υπάρχουν. Για ορισμένους, αυτή η «καθολική» προσέγγιση απαιτεί ριζική αλλαγή προοπτικής.

Ας θυμηθούμε πόσο ριζικά διαφορετική από τη συμβατική σοφία της εποχής της ήταν η κοπερνίκεια ιδέα ότι οι πλανήτες κινούνται γύρω από τον ακίνητο Ήλιο. Όπως ακριβώς το πλαίσιο που δημιούργησε ο Κοπέρνικος καθοδήγησε τους επιγόνους του, έτσι και το LTG βοήθησε πολλούς να αντιληφθούν πόσο σημαντικό είναι να αντιμετωπίζουν πολλά από τα σημερινά προβλήματα από μια «συστημική προοπτική».

Η ανάλυση εισροών-εκροών αποτελεί ισχυρό εργαλείο για μια περισσότερο συστημική προσέγγιση ζητημάτων που αφορούν τη χρήση των φυσικών πόρων, το μετασχηματισμό τους σε αγαθά που τα χρειάζονται και τα επιθυμούν οι ανθρώπινες κοινωνίες, και το πώς επηρεάζουν τον υπόλοιπο κόσμο οι τρόποι με τους οποίους καλύπτουμε τις υλικές μας ανάγκες.

Στο παρόν άρθρο είδαμε ότι η ανάλυση εισροών-εκροών μάς επιτρέπει να κατασκευάσουμε το μαθηματικό μοντέλο ενός οικονομικού συστήματος εξετάζοντας τους διαφορετικούς τομείς του και να αναλύσουμε τις σχέσεις ανάμεσα στις εισροές και εκροές του κάθε τομέα. Επίσης, μάς παρέχει τη δυνατότητα να διαμορφώσουμε έναν τυπικό μηχανισμό μέσω του οποίου μπορούμε να εξετάσουμε

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		εισροή τροφής	εισροή μεταπ.	εισροή καυσιμ.	εισροή εργασίας	σύνολο				
2	εκροή τροφής	10	10	20	70	110	0.0909	0.2	0.2857	
3	εκροή μεταποίησης	5	10	15	20	50	A = 0.0455	0.2	0.2143	
4	εκροή καυσιμών	20	20	10	20	70	0.1818	0.4	0.1429	
5										
6	I - A =	0.9091	-0.2	-0.286			1.2419	0.5914	0.5618	
7		-0.045	0.8	-0.214			0.1613	1.5054	0.4301	
8		-0.182	-0.4	0.8571			0.3387	0.828	1.4866	
9										
10	ορίζουσα ($I - A$) = 0.4831									
11	Πώς επηρεάζουν τις συνολικές εκροές									
12	οι μεταβολές στις απαιτήσεις των νοικοκυριών;									
13	χρόνος	1	2	3	4	5	6	7		
14	$\gamma_1(t)$	70	72.1	74.263	76.491	78.786	81.149	83.584		
15	$\gamma_2(t)$	20	20.2	20.402	20.606	20.812	21.02	21.23		
16	$\gamma_3(t)$	20	20	20	20	20	20	20		
17										
18	$x_1(t)$	110	112.73	115.53	118.42	121.39	124.45	127.6		
19	$x_2(t)$	50	50.64	51.293	51.959	52.64	53.334	54.043		
20	$x_3(t)$	70	70.877	71.777	72.7	73.648	74.621	75.62		
21										
22	ζήτηση νοικοκυριών	140	120	100	80	60	40	20	0	απαιτούμενες εκροές
23										
24	τροφή									τροφή
25										μεταποίηση
26	καύσιμα & μεταποίηση									καύσιμα
27										
28		1	2	3	4	5	6	7		

Σχήμα 4

από πού προέρχονται οι πόροι που απαιτούνται για την παραγωγική διαδικασία, καθώς και πού καταλήγουν τελικά τα παραγόμενα προϊόντα και τα συμπαραρτούντα απόβλητα. Αυτό επιτρέπει στην οικονομική εποικόμη να επιτύχει τον σημαντικό στόχο που αναφέραμε νωρίτερα — να εντάξει την οικονομική θεωρία σ' ένα μεγαλύτερο, υλικό σύστημα. Εππλέον, η ανάλυση εισροών - εκροών βοήθησε τους φυσικούς και τους κοινωνικούς εποικόμονες να αποκτήσουν μια ευκρινέστερη και λεπτομερέστερη εικόνα

αυτού που αληθινά συμβαίνει στον πραγματικό κόσμο. Ο κατεπείγων χαρακτήρας πολλών από τα προβλήματα της εποχής μας απαιτεί λύσεις πολύ περισσότερο συγκεκριμένες από εκείνες που μπορούν να μας προσφέρουν οι παραδοσιακές μέθοδοι.

Προ δεκαετίας συντάχθηκε μια έκθεση με τίτλο *To κοινό μας μέλλον* (γνωστότερη ως έκθεση Brundtland, από το όνομα του πρωθυπουργού της Νορβηγίας που προήδρευσε της σχετικής επιτροπής), και υποβλήθηκε στην Παγκόσμια Επιτροπή για το Πε-

ριβάλλον και την Ανάπτυξη. Η εν λόγω έκθεση κατέστησε ευρύτερα γνωστό τον όρο «αειφορική (ή βιώσιμη) ανάπτυξη», που την ορίζει ως την ικανότητα της ανθρωπότητας «να εξασφαλίσει ότι αντιμετωπίζει τις ανάγκες του παρόντος χωρίς να διακυβεύει την ικανότητα των μελλοντικών γενεών να ικανοποιήσουν τις δικές τους ανάγκες». Η έκθεση περιγράφει τα περιβαλλοντικά και οικονομικά προβλήματα που αντιμετωπίζει η παγκόσμια κοινότητα, προσδιορίζει τεχνολογικά και οργανωτικά μέτρα τα οποία είναι δυνατόν να εφαρμοστούν ώστε να επιτευχθεί αειφορικότητα (ή βιώσιμότητα) και συμπεραίνει ότι δύο φαινομενικά αντίθετοι στόχοι — η οικονομική ανάπτυξη και η προστασία του περιβάλλοντος — μπορούν, στην πραγματικότητα, να επιτευχθούν μέσω της κατάλληλης διαχείρισης της τεχνολογίας και της κοινωνικής οργάνωσης. Όταν αυτοί οι στόχοι θεωρούνται μέσα στο πλαίσιο των εντενόμενων προσπαθειών για να βελτιωθούν οι υλικές συνθήκες διαβίωσης του αυξανόμενου παγκόσμιου πληθυσμού, καθίσταται φανερό ότι απαιτείται εξαντλητική έρευνα προκειμένου να μάθουμε αν είναι πραγματικά δυνατή η επίτευξή τους.

Μια κριτική της έκθεσης Brundtland

Οι Faye Duchin και Glenn-Marie Lange, στο βιβλίο τους *The Future of the Environment*, χρησιμοποιούν την ανάλυση εισροών - εκροών, για να εξετάσουν επιμελέστερα μερικές από τις προτάσεις της έκθεσης Brundtland. Η οικονομική τους ανάλυση αποκαλύπτει ότι πολλές από τις θέσεις που υποστηρίζονται σ' αυτήν είναι υπεραισιόδοξες ή μη ρεαλιστικές. Στη συνέχεια, οι Duchin και Lange εφαρμόζουν την ανάλυση εισροών - εκροών, για να αναπτύξουν και να αποτιμήσουν μια σειρά επιλογών — τα λεγόμενα σενάρια — οι οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως εναλλακτικοί δρόμοι προς την επίτευξη της βιώσιμης ανάπτυξης. Σε αντίθεση με την παραδοσιακή οικονομική ανάλυση, η οποία τείνει να εστιάζει την προσοχή της στην αποκάλυψη των «σωστών τιμών» που θα οδηγήσουν στην αποδοτικότερη κατανομή των πόρων

ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις και οι προτιμήσεις των καταναλωτών, η ανάλυση των Duchin και Lange προσπαθεί να επιτύχει περισσότερα. Η προσέγγισή τους επιχειρεί να υπερβει αυτές τις περιορισμένες ιδέες, για να ολοκληρώσει μια ευρύτερη συστηματική προοπτική και να προσφέρει την εμπειρική τεκμηρίωση που είναι αναγκαία όταν πρέπει να λάβουμε ρεαλιστικές και θεμελιωμένες στη γνώση αποφάσεις για σημαντικά ζητήματα.

Οι Duchin και Lange ξεκινούν κατασκευάζοντας διάφορα αναπτυξιακά σενάρια: το σενάριο του «Κοινού μας μέλλοντος», που στηρίζεται στις υποθέσεις και τις προτάσεις της έκθεσης Brundtland· το σενάριο «Αναφορά», το οποίο βασίζεται στην παραδοχή ότι μετά το 1990 δεν εμφανίζονται τεχνικές αλλαγές που να βελτιώνουν τις περιβαλλοντικές συνθήκες· τρία ακόμη σενάρια τα οποία βασίζονται όλα τους σε πολλές από τις υποθέσεις που περιέχονται στο *Κοινό μας μέλλον* αλλά εκχωρούν σημαντικότερο ρόλο σε εναλλακτικές πηγές ενέργειας (υδροηλεκτρική, πυρηνική ή ηλιακή) σε συνδυασμό με ταχύτερο εκσυγχρονισμό των ενεργοβόρων τομέων στις μεγαλύτερες αναπτυσσόμενες οικονομίες του κόσμου (Κίνα και Ινδία). Αυτό το είδος εργασίας, προσφέροντας μεθόδους και δεδομένα με τα οποία μπορούμε πραγματικά να αξιολογήσουμε τούτες τις διαφορετικές πορείες ανάπτυξης, ξεπερνά την αποκλειστική ενασχόληση με τις τιμές, και έτσι μας παρέχει μια ρεαλιστικότερη εικόνα του τι συμβαίνει στην πραγματική παγκόσμια οικονομία.

Οι οικονομολόγοι (παρόμοια με τους μαθηματικούς και τους φυσικούς) πρέπει να κάνουν παραδοχές. Ωστόσο, όπως έχουν διαπιστώσει πολλές φορές οι αναγνώστες του *Quantum*, η διατύπωση παραδοχών εγκυμονεί κινδύνους. Οπως και στις άλλες εποικήμες, είναι απαραίτητο να αναγνωρίζουμε ρητά τις παραδοχές μας, διότι ο ρόλος τους μπορεί να αποδειχτεί —και συνήθως έτσι συμβαίνει— ιδιαίτερα καθοριστικός για τα συμπεράσματα στα οποία θα καταλήξουμε. Για παράδειγμα, η έκθεση Brundtland υποθέτει ότι στις επόμενες δεκαετίες, σε όλα τα τμήματα της παγκόσμιας οικονομίας, θα υιοθετηθούν «καθαρές» και αποδο-

τικές μοντέρνες τεχνολογίες όσον αφορά τη χρήση της ενέργειας και των πρώτων υλών κατά την παραγωγική διαδικασία. Οι Duchin και Lange συγκέντρωσαν στοιχεία για την κατάρτιση πινάκων εισροών-εκροών και άλλα αναγκαία δεδομένα, για να αναλύσουν τις συνέπειες αυτής της υπόθεσης, και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι είναι υπερβολικά αισιόδοξη.

Συγκεκριμένα, μελέτησαν τα επίπεδα εκπομπής τριών ρύπων που συνδέονται με την παραγωγή ενέργειας: του άνθρακα, του θείου και του αζώτου. Παρατήρησαν ότι, αν και στα μοντέλα τους τα επίπεδα εκπομπών εμφανίζονται σημαντικά μειωμένα σε σύγκριση με τα επίπεδα που θα είχαμε στην περίπτωση που δεν θα συνέβαινε καμία τεχνολογική αλλαγή ή βελτίωση (όπως υποθέτει το σενάριο «Αναφορά», το οποίο οι Duchin και Lange κατασκεύασαν για να χρησιμοποιηθεί ως βάση σύγκρισης), εντούτοις οι εκπομπές αυτές εξακολουθούν να αυξάνονται σημαντικά: του άνθρακα κατά 60%, του αζώτου κατά 63% και του θείου κατά 16%.

Ένα μετριοπαθές σενάριο

Η ανάλυση των Duchin και Lange μάς προσφέρει μια λεπτομερέστερη εικόνα του μέλλοντος σε σύγκριση με εκείνη την οποία παρουσιάζει η έκθεση Brundtland. Η εικόνα που αναδύεται δεν είναι απλώς τελείως διαφορετική, αλλά και περισσότερο δομημένη και συστηματική. Τα δεδομένα τους δείχνουν ότι, εκτός της αύξησης του επιπέδου ρύπανσης σε ολόκληρο τον κόσμο, παρουσιάζεται μετατόπιση της βασικής πηγής ρύπανσης από το ανεπτυγμένο βόρειο στο ταχέως αναπτυσσόμενο νότιο ημισφαίριο.

Παρότι μπορεί να ανακουφίζει ορισμένους το γεγονός ότι τα επίπεδα ρύπανσης μειώνονται στο βορρά, από τη συστηματική προοπτική είναι φανερό ότι τις συνέπειες της ρύπανσης τις υφίσταται ολόκληρος ο πλανήτης. Όταν το θεωρήσουμε σε ευρύτερο πλαίσιο, αυτό το μερονωμένο «γεγονός» δεν αφήνει πολλά περιθώρια μακροπρόθεσμης αισιόδοξίας. Σε αντίθεση με τις αισιόδοξες προβλέψεις της έκθεσης Brundtland, πλήθος εμπειρικά τεκμήρια —ανάμεσά τους και αυτό που πα-

ρουσιάσαμε προηγουμένως— οδηγούν στο συμπέρασμα ότι, για να επιτευχθεί ο στόχος του καθαρότερου αέρα και νερού, απαιτούνται πολύ μεγαλύτερες προσπάθειες απ' ότι θα συμπέραινε κανείς μελετώντας την έκθεση Brundtland.

Η αύξηση του πληθυσμού, η μείωση των αποθεμάτων φυσικών πόρων, η υποβάθμιση του περιβάλλοντος, η καταστροφή των ενδιαιτημάτων και η αλλαγή του κλίματος αποτελούν πλέον συνηθισμένα θέματα της καθημερινής ειδησεογραφίας. Ποτέ άλλοτε δεν ήταν τόσο άμεση η ανάγκη να εξευρεθεί τρόπος ώστε να κατορθώσουμε —ως άτομα και ως κοινωνίες— να πάρουμε καλύτερες, ευφυέστερες αποφάσεις σχετικά με την κατεύθυνση του μέλλοντος, του δικού μας και του περιβάλλοντος, κατά τις πρώτες δεκαετίες του 21ου αιώνα.

Υπάρχουν πολλές ευκαιρίες για να συμμετάσχουμε ενεργά στην ανάπτυξη των πρωτοποριακών και αποδοτικών εργαλείων που περιγράφαμε, και τα οποία μπορούν να συμβάλουν θετικά στην επίλυση των περιβαλλοντικών και οικονομικών προβλημάτων. Η ανάγκη κατασκευής νέων σεναρίων που θα βοηθήσουν στην ανάπτυξη εναλλακτικών λύσεων, διαφορετικών από αυτές που προσφέρονται σήμερα, είναι ουσιαστικά απεριόριστη. Αν συνδυαστεί η αυστηρή ποσοτική ανάλυση την οποία προσφέρει η ανάπτυξη εισροών-εκροών με τη δημιουργία της και τη φαντασία μιας νέας γενιάς ερευνητών, μπορούμε βάσιμα να ελπίζουμε ότι όντως είναι δυνατόν να βρεθούν ρεαλιστικές και εφαρμόσιμες λύσεις.

Λοιπόν, τα οικονομικά είναι «απαισιόδοξη» επιστήμη; Όχι δα!

O Dean Button είναι διευθυντής του Προγράμματος Ανάπτυξης στη Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών του Πολυτεχνικού Ινστιτούτου Rensselaer.

O Faye Duchin είναι κοσμήτορας της ίδιας σχολής στο παραπάνω ίδρυμα και συγγραφέας του βιβλίου *The Future of the Environment*.

O Kurt Kreith είναι καθηγητής μαθημάτων στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Νταϊντζις.

Συνταρακτικές δονήσεις

«Ο κόσμος δεν σιγά ποτέ· ακόμη και στη σιωπή του αντηχούν αιώνια οι ίδιες νότες, σε δονήσεις που διαφεύγουν απ' τ' αυτιά μας.»

—Albert Camus

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΣΑΝ ΨΑΡΙ ΠΟΥ ΣΠΑΡΤΑΡΑΕΙ ΣΤΟΝ αέρα, οι σπασμοί από τα έγκατα της Γης συνταράσσουν μια κρεμαστή γέφυρα. Σε κάποια μακρινή παιδική χαρά, ένα παιδί κινεί με χάρη το σώμα του, ωθώντας την κούνια του σε νέα ύψη. Μια υψίφωνος σπάει ένα κολονάτο ποτήρι με την κρυστάλλινη φωνή της.

Η Γη, το παιδί και η υψίφωνος παιζουν με τις ταλαντώσεις. Αρνούνται να περιοριστούν στις απλές κινήσεις των ηχητικών κυμάτων, της μάζας που κρέμεται από το ελατήριο ή του εκκρεμούς· αυτή η δραστηριά παρέα ασκεί βία στα διάφορα συστήματα προκαλώντας συναρπαστικά φαινόμενα. Για να κατανοήσουμε τι ακριβώς συμβαίνει, πριν διερευνήσουμε τις συνθετότερες δραστηριότητες των παιχτών μας, θα εξετάσουμε για μία ακόμη φορά το απλούστερο ταλαντούμενο σύστημα.*

Μια μάζα κρέμεται από αβαρές ελατήριο. Στη θέση ισορροπίας, το βάρος της μάζας είναι ίσο και αντίθετο με τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου —συνθήκη η οποία ορίζει τη θέση ισορροπίας x_0 του συστήματος:

$$mg - kx_0 = mg = 0,$$

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

* Δείτε και το άρθρο «Το εκκρεμές που στάζει» (Ιούλ./Αύγ. 1995).

Εάν απομακρύνουμε το σύστημα κάτω από τη θέση ισορροπίας του, η συνισταμένη δύναμη θα οθεί τη μάζα προς τα πάνω. Μπορούμε να συμφωνήσουμε να θεωρούμε την επιμήκυνση του ελατηρίου πέρα από τη θέση ισορροπίας της μάζας ως την απομάκρυνσή της x από την εν λόγω θέση. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της κίνησης ως εξής:

$$-kx = mg = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

«Εικάζετε» τη μορφή της λύσης της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης; Πρέπει να είναι της μορφής

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Παραγωγίζοντάς τη βρίσκουμε εκφράσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση της μάζας συναρτήσει του χρόνου:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \cos(\omega t + \varphi),$$

$$y = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Για να διαπιστώσουμε κατά πόσον η εικασία μας ήταν επιτυχής, αντικαθιστούμε τις παραπάνω εκφράσεις για το x και το d^2x/dt^2 στην εξίσωση κίνησης· βρίσκουμε ότι η (1) όντως αποτελεί λύση, αρκεί να ισχύει η ισότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2)$$

όπου η ποσότητα $\omega/2\pi$ είναι η συχνότητα ταλάντωσης v του ταλαντούμενου σώματος.

Η κατάσταση περιπλέκεται αμέσως μόλις επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε περισσότερο την πραγματικότητα. Σε όλα τα ταλαντούμενα συστήματα υπάρχει μια επιβραδύνουσα δύναμη. Συχνά η εν λόγω «δύναμη απόσβεσης» είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος. Έτσι, το πλάτος μιας τέτοιας ταλάντωσης μειώνεται συνεχώς, έως ότου η μάζα τελικά πρεμεί. Άλλαζει, ωστόσο, η συχνότητα της ταλάντωσης υπό την επενέργεια αυτής της δύναμης; Η εξίσωση κίνησης είναι πλέον

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Μια λύση της συγκεκριμένης εξίσωσης, εάν ο b (η σταθερά απόσβεσης) είναι μικρός, είναι η εξής:

$$x = A e^{-bt/2m} \sin(\omega' t + \varphi), \quad (3)$$

όπου

$$\omega' = 2\pi v' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (4)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω λύσης δείχνει μια ταλάντωση σταθερής συχνότητας που φθίνει εκθετικά. Η διερεύνηση της συγκεκριμένης λύσης θα αποτελέσει μέρος του προβλήματός μας σ' αυτό το τεύχος.

Μια πλέον ενδιαφέρουσα κίνηση



προκύπτει όταν κάποια μεταβαλλόμενη εξωτερική δύναμη διεγείρει την ταλαντούμενη μάζα, στην οποία ασκείται ταυτόχρονα και η δύναμη απόσβεσης. Το ρόλο της διεγείρουσας δύναμης παίζει η κατάλληλη τοποθέτηση του σώματος του παιδιού, που υποχρεώνει την κούνια του να φτάσει ακόμη ψηλότερα, ή η φωνή της υψηφώνου, που διεγείρει τα μόρια του ποτηριού. Σ' αυτή την περίπτωση, η εξίσωση της κίνησης παίρνει τη μορφή

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \operatorname{συν}(\omega''t) = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Μια λύση αυτής της εξίσωσης είναι η

$$x = \frac{F_0}{G} \eta \mu (\omega''t - \varphi), \quad (5)$$

όπου

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2} \quad (6)$$

και

$$\varphi = \operatorname{τοξσυν} \frac{b\omega''}{G}. \quad (7)$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τώρα η συχνότητα ταλάντωσης είναι αυτή της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης και όχι η φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του συστήματος. Εάν η διεγείρουσα συχνότητα ισούται με τη φυσική συχνότητα και η δύναμη απόσβεσης είναι μηδενική ($b = 0$), παρατηρούμε ότι το G μηδενίζεται, και η απομάκρυνση x γίνεται απείρως μεγάλη. Αυτό ακριβώς το φαινόμενο ονομάζεται συντονισμός. Φυσικά, δεν υπάρχει ποτέ περίπτωση η δύναμη απόσβεσης να είναι ακριβώς μηδέν. Βρίσκουμε, λοιπόν, ότι ο συντονισμός συνεπάγεται όντως εξαιρετικά μεγάλες απομακρύνσεις, αλλά όχι άπειρες. Έτσι εξηγείται γιατί καταρρέει η κρεμαστή γέφυρα, σπάει το ποτήρι και το παιδί αιωρούμενο κατορθώνει να φτάνει όλο και ψηλότερα.

Το πρόβλημά μας «ταλαντώνεται» ανάμεσα σε μερικές απλές ασκήσεις και κάποια ερωτήματα που απαιτούν γραφική και μαθηματική ανάλυση.

Το ερώτημα Α αποτελούσε μικρό μέρος ενός κουίζ που τέθηκε στην πολύ επιτυχημένη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής στο Σάντμπερυ του Καναδά, η οποία διεξήχθη φέτος το καλο-

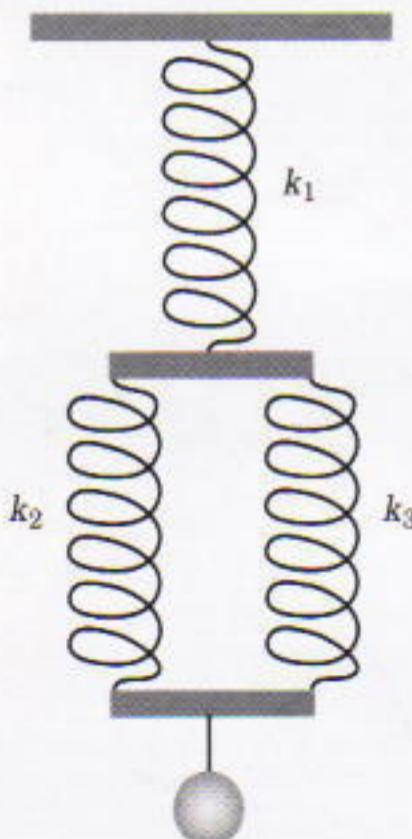
καίρι. Πράγματι, ο τοπικός ραδιοσταθμός προσέφερε ένα βραβείο σε όποιον ακροατή θα τους τηλεφωνούσε και θα έδινε τη λύση.

Α. Μια μάζα κρέμεται από αβαρές ελατήριο και ταλαντώνεται με συχνότητα 1 Hz . Εάν το ελατήριο κοπεί στη μέση, πόση θα είναι η νέα συχνότητα ταλάντωσης;

Β. Μια μάζα m κρέμεται από 3 αβαρή ελατήρια, με σταθερές k_1 , k_2 και k_3 , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η m μετατοπιστεί κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας της και αφεθεί ελεύθερη, ποια θα είναι η περιόδος της ταλάντωσης;

Γ. (1) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της λύσης για ταλάντωση σώματος με απόσβεση. (2) Ως χρόνος αποκατάστασης ορίζεται αυτός που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος της ταλάντωσης στο $1/e$ της αρχικής τιμής του. Βρείτε, λοιπόν, μια έκφραση για το χρόνο αποκατάστασης. (3) Ένα σώμα μάζας 2 kg κρέμεται από αβαρές ελατήριο σταθεράς 10 N/m . Το σώμα μετατοπίζεται κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας του κατά 12 cm . Εάν η σταθερά απόσβεσης b ισούται με $0,18 \text{ kg/s}$, προσδιορίστε τον αριθμό των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στο χρονικό διάστημα κατά το οποίο το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται στο $1/4$ της αρχικής του τιμής. (4) Εξαγάγετε έναν τύπο για την ταχύτητα του σώματος σε κάθε δεδομένη στιγμή.

Δ. Το διεγείρον αίτιο σε μια εξανα-



γκασμένη ταλάντωση μπορεί να επφέρει ουσιωδώς διαφορετικά αποτέλεσματα για το ταλαντούμενο σώμα.

(1) Δειξτε γραφικά πώς εξαρτάται το πλάτος από το λόγο της διεγείρουσας συχνότητας ω'' προς την ιδιοσυχνότητα ω για τις εξής τιμές του συντελεστή απόσβεσης b : 0 , $\pi\omega/4$, $\pi\omega/2$, $\pi\omega$, $2\pi\omega$. (2) Εξαγάγετε τύπο για την ταχύτητα της μάζας σε κάθε δεδομένη στιγμή.

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum.

ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΕΣ ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Οπως προβλεπόταν, ο Mars Pathfinder προσεδαφίστηκε στον Άρη στις 4 Ιουλίου 1997 και μας απέστειλε φανταστικές φωτογραφίες από την επιφάνεια του κόκκινου πλανήτη.

Το πρόβλημα του τεύχους Μαΐου / Ιουνίου διερευνούσε δύο απλουστεύμένους τρόπους για να εγκαταλείψει ένας δορυφόρος την τροχιά του γύρω από τον Άρη και να προσεδαφιστεί στην αρειανή επιφάνεια.

Α. Η βαρυτική έλξη που ασκείται σε δορυφόρο μάζας m ο οποίος εκτελεί τροχιά γύρω από τον Άρη δίνεται από την έκφραση

$$F = \frac{GmM}{(R+h)^2},$$

όπου G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, M και R η μάζα και η ακτίνα του Άρη, αντίστοιχα, και h το ύψος της τροχιάς πάνω από την επιφάνεια. Επειδή η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη δίνεται από τον τύπο

$$g = GM/R^2,$$

η ίδια δύναμη μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}.$$

Αν εξισώσουμε μια από τις δύο παραπάνω εκφράσεις για τη βαρυτική δύναμη με την κεντρομόλο δύναμη $mv_0^2/(R+h)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την τροχιακή ταχύτητα v_0 :

$$v_0 = R \sqrt{\frac{g}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}.$$

Χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδούμένα του προβλήματος, βρίσκουμε $v_0 = 3,38 \text{ km/s}$.

Β. Σύμφωνα με την περιγραφή της πρώτης μεθόδου προσεδάφισης, η πορεία που θα ακολουθήσει ο δορυφόρος είναι τμήμα μιας έλλειψης η οποία εφάπτεται στην τροχιά και στην αρειανή επιφάνεια στα δύο άκρα της. Εστω ότι η ταχύτητα του δορυφόρου ισούται με v_x έπειτα από την πυροδότηση των ανασχετικών πυραύλων, και με v_A στην επιφάνεια του πλανήτη. Γράφουμε τις εκφράσεις για τη διατήρηση της στροφορμής

$$mv_A R = mv_x(R + h),$$

και τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{GMm}{R+h}.$$

Επλύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς v_x , λαμβάνουμε

$$v_x = v_0 \sqrt{\frac{2R}{2R+h}} = 3,29 \text{ km/s}.$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής προκύπτει ότι

$$v_A = v_x \frac{R+h}{R} = 3,65 \text{ km/s}.$$

Η συγκεκριμένη απάντηση είναι εύλογη, επειδή η ταχύτητα πρέπει να αυξηθεί καθώς ο δορυφόρος κατέρχεται στην επιφάνεια.

Γ. Αυτή τη φορά οι πύραυλοι πυροδοτούνται στην ακτινική διεύθυνση. Επομένως, δεν μεταβάλλουν τη στροφορμή του δορυφόρου. Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της στροφορμής, έχουμε ότι

$$mv_B R = mv_0(R + h).$$

Έτσι, η v_B υπολογίζεται αμέσως:

$$v_B = v_0 \frac{R+h}{R} = 3,74 \text{ km/s}.$$

Μπορούμε εν συνεχείᾳ να χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, για να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο σημείο X. Ας συμβολίσουμε την εν λόγω ταχύτητα με v_Y , για να τη διακρίνουμε από την ταχύτητα v_X που προσδιορίσαμε

κατά τη μελέτη της πρώτης μεθόδου. Τότε μπορούμε να γράψουμε την εξισώση

$$\frac{1}{2}mv_Y^2 - \frac{GmM}{R+h} = \frac{1}{2}mv_X^2 - \frac{GmM}{R}.$$

Επλύνοντάς την ως προς v_Y και χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκαμε προηγουμένως για τη v_B , παίρνουμε

$$v_Y = v_0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} = 3,40 \text{ km/s}.$$

Δ. Στις λύσεις που μας έστειλαν μερικοί αναγνώστες υπογραμμίζουν ότι μπορούμε να επιτύχουμε πολύ καλύτερες συγκρίσεις υπολογίζοντας τις μεταβολές στο σημείο X αλγεβρικά παρά χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά μας αποτελέσματα. Στην πρώτη περίπτωση, οι v_0 και οι v_X έχουν την ίδια κατεύθυνση, και μπορούμε απλώς να τις αφαιρέσουμε, για να πάρουμε

$$\Delta v_A = v_0 - v_X = v_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{2R+h}} \right) = 87,7 \text{ m/s}.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, τα δύο διανύσματα της ταχύτητας v_0 και v_Y δεν είναι παράλληλα, αλλά γνωρίζουμε ότι $v_Y = v_0 + v_r$, όπου v_r είναι η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας που προσδίδουν στο δορυφόρο οι πυραύλοκινητήρες. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα, για να βρούμε

$$\Delta v_B = v_r = v_0 h / R = 365 \text{ m/s}.$$

Συνεπώς, το $\Delta v_A / \Delta v_B = 0,240$, οπότε η Δv_A ισούται περίπου με το $1/4$ της Δv_B .

Εν συνεχείᾳ, πρέπει να συγκρίνουμε τις ταχύτητες προσεδάφισης

$$v_A = v_X \frac{R+h}{R} = v_0 \left(\frac{R+h}{R} \right) \sqrt{\frac{2R}{2R+h}},$$

$$v_B = v_0 \left(\frac{R+h}{R} \right).$$

Έτσι,

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{2R}{2R+h}} = 0,974. \quad \square$$

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Albert Jacquard

Η ΕΠΙΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Εθνικός Λαογραφικός Ιδρυματούπλιστος
Εθνικό Καινοτομικό Κέντρο

Albert Jacquard

Η ΕΠΙΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Ανθρώπινη επιβίωση και πολιτισμός σε έναν πεπερασμένο κόσμο

Σ' αυτό το μικρό βιβλίο, ο Albert Jacquard εκφράζει τις απόψεις του για την εξέλιξη του πλανήτη μας, την οικονομία της αγοράς και την πορεία της ανθρωπότητας, επιμένοντας σε μια διαπίστωση κεφαλαιώδους σημασίας: ο ανθρωπος οδηγήθηκε σε μια απερίσκεπτη κυριαρχία στο περιβάλλον του και απειλείται από τη βία, την πείνα και τον όλεθρο. Ο μεγάλος διανοητής αποδεικνύεται πιο ρεαλιστής από τους πολιτικούς, που δεν έχουν επίγνωση των ορίων, ξεχνούν ότι όλοι ζούμε σε έναν μικρό πλανήτη, έναν πεπερασμένο κόσμο: αυτό που επηρεάζει μια ομάδα ανθρώπων, αφορά ολόκληρη την ανθρωπότητα. Πρέπει να αντιληφθούμε ότι έφτασε η ώρα των επιλογών.

Σελ.: 174, 14 x 21 εκ., 3.800 δρχ.

κάτοπτρο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ: Ισαύρων 10, 11471 Αθήνα,
τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: Στοά του βιβλίου (Πεσματζόγλου 5), 10564 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Το μυρμήγκι και η κονσέρβα

Βρείτε τη συντομότερη διαδρομή από το A στο B

Igor Akulich

ΔΥΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΥΖΗΤΟΥΝ ΓΙΑ ΤΟ Εξής πρόβλημα: Μια κονσέρβα έχει σχήμα ορθού κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους H . Ένα μυρμήγκι στέκεται στο σημείο A της περιμέτρου μιας από τις βάσεις της (Σχήμα 1) και θέλει να φτάσει στο πλέον απομακρυσμένο σημείο της κονσέρβας, το σημείο B της περιμέτρου της άλλης βάσης του (το σημείο B είναι συμμετρικό του A ως προς το κέντρο της κονσέρβας). Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή για το μυρμήγκι;

«Το πρόβλημα είναι απλούστατο!», ισχυρίζεται όλο σιγουριά ο πρώτος. «Άρκει απλώς να θεωρήσουμε το επίπεδο ανάπτυγμα της κονσέρβας. Ας πούμε ότι το μυρμήγκι προχωρεί πρώτα κατά μήκος της πλευρικής επιφάνειας, και στη συνέχεια κατά μήκος της πάνω βάσης (φυσικά, μπορεί να ακολουθήσει τη συμμετρική διαδρομή: πρώτα κατά μήκος της κάτω βάσης και μετά κατά μήκος της πλευρικής επιφάνειας — το μήκος αυτών των δια-

δρομών είναι το ίδιο). Αν αναπτύξουμε την κονσέρβα στο επίπεδο (Σχήμα 2α), αμέσως διαπιστώνουμε ότι η συντομότερη διαδρομή περιλαμβάνει κατ' αρχάς τη γενέτειρα AM του κυλίνδρου και συνεχίζει με τη διάμετρο MB . Επομένως, το μήκος της είναι $S_{\min} = H + 2R$.»

«Γιά περίμενε λίγο», του απαντά ο δεύτερος μαθητής. «Μπορούμε να αναπτύξουμε διαφορετικά την κονσέρβα! Ας πετάξουμε τα καπάκια της, και ας ξεδιπλώσουμε την πλευρική της επιφάνεια, ώστε να προκύψει ένα ορθογώνιο (Σχήμα 2β). Τότε, η συντομότερη διαδρομή είναι το τμήμα που ενώνει τα σημεία A και B : εύκολα βρίσκουμε ότι έχει μήκος

$$S_{\min} = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2}.$$

Μάλιστα, η μορφή αυτής της διαδρομής στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι σπειροειδής.»

Οι μαθητές ήταν έτοιμοι να καβγαδίσουν, ώσπου σκέφτηκαν να συγκρίνουν τις δύο διαδρομές —η συντομότερη θα έδινε και τη σωστή απάντηση. Κατ' αρχάς, για να καθορίσουν τη συνθήκη υπό την οποία τα μήκη των δύο διαδρομών είναι ίσα, θεώρησαν την ισότητα

$$H + 2R = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2}.$$

Στη συνέχεια μετασχημάτισαν την εν λόγω συνθήκη ως εξής:

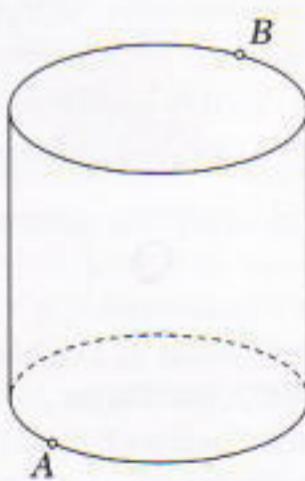
$$(H + 2R)^2 = H^2 + \pi^2 R^2,$$

$$H^2 + 4HR + 4R^2 = H^2 + \pi^2 R^2,$$

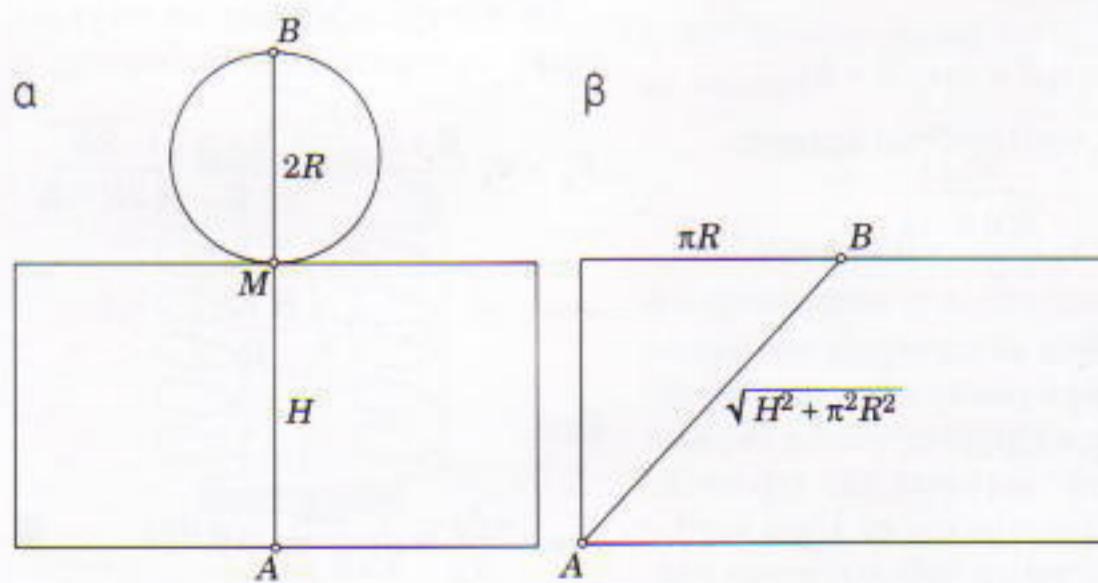
$$4H = (\pi^2 - 4)R,$$

και τελικά κατέληξαν στη σχέση

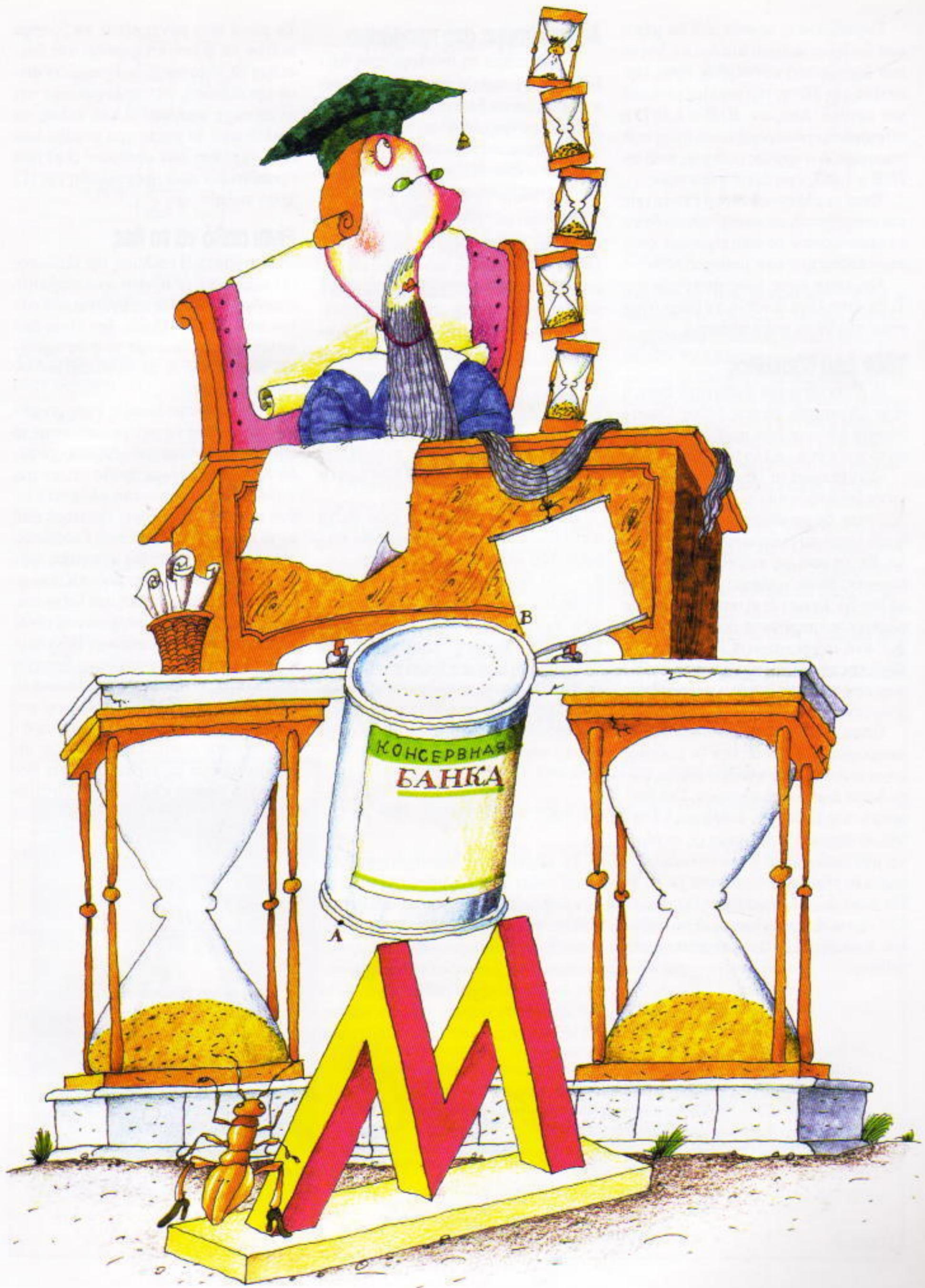
$$\frac{H}{R} = \frac{\pi^2}{4} - 1 \equiv 1,467.$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Συμπέραναν, λοιπόν, ότι τα μήκη των διαδρομών είναι ίσα όταν ο λόγος του ύψους της κονσέρβας προς την ακτίνα της βάσης της ισούται με αυτό τον αριθμό. Άρα, αν $H/R < 1,467$, η συντομότερη διαδρομή είναι αυτή που υποστηρίζει ο πρώτος μαθητής, ενώ αν $H/R > 1,467$, έχει δίκιο ο δεύτερος.

Έτσι, οι μαθητές ένιωσαν ευτυχείς και υπερήφανοι, ανυπομονούσαν δε να ανακοινώσουν το συμπέρασμά τους στον καθηγητή των μαθηματικών.

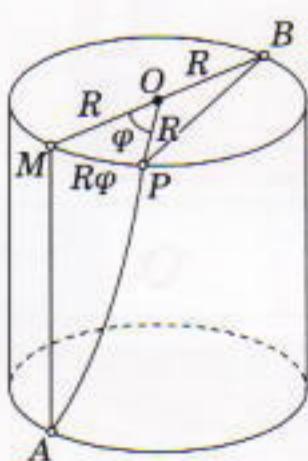
Ερώτηση προς τους αναγνώστες: Τι θα τους λέγατε εσείς, αν βρισκόσασταν στη θέση του καθηγητή;

Τάδε έφη δάσκαλος

Η απάντηση του καθηγητή ήταν η εξής: «Αγαπητοί, κάνετε λάθος! Οπωδήποτε λύσατε ένα πρόβλημα, αλλά αυτό ήταν ένα... άλλο πρόβλημα.

»Συγκεκριμένα, θεωρήσατε δύο δυνατές διαδρομές από το A στο B και καθορίσατε τις συνθήκες υπό τις οποίες η μια είναι συντομότερη από την άλλη. Εκτός από τις συγκεκριμένες διαδρομές, όμως, υπάρχουν και πολλές άλλες (βλ. Σχήμα 3) οι οποίες, μέσω της πλευρικής επιφάνειας, οδηγούν από το A σ' ένα τυχαίο σημείο P της περιμέτρου της πάνω βάσης, και στη συνέχεια από το P στο B , μέσω μιας ευθείας γραμμής».

Οπως μπορείτε να διαπιστώσετε, οι διαδρομές που πρότειναν οι μαθητές είναι απλώς ειδικές περιπτώσεις των εν λόγω άπειρων διαδρομών. Στη διαδρομή που προτείνει ο πρώτος μαθητής, το σημείο P συμπίπτει με το M , ενώ στη διαδρομή που προτείνει ο δεύτερος το σημείο P συμπίπτει με το B . Με άλλα λόγια, οι μαθητές θεώρησαν δύο «οριακές» περιπτώσεις. Αναμφίβολα, η αλήθεια βρίσκεται κάπου στη μέση.



Σχήμα 3

Άς σκύψουμε στο πρόβλημα

Αναζητούμε τη συντομότερη διαδρομή. Αν συμβολίσουμε με O το κέντρο της πάνω βάσης και με φ το μέτρο της γωνίας MOP σε ακτίνια, βρίσκουμε, χωρίς πολύ κόπο, ότι το μήκος του τόξου MP ισούται με $R\varphi$, το μήκος της συντομότερης καμπύλης AP ισούται με $\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}$ (σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα), και, τέλος, ότι το μήκος του τμήματος PB ισούται με $2R\sin(\varphi/2)$. Επομένως, το μήκος ολόκληρης της διαδρομής είναι συνάρτηση της φ — και συγκεκριμένα,

$$S = \sqrt{H^2 + R^2\varphi^2} + 2R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Αρκεί πλέον να βρούμε το ελάχιστο αυτής της συνάρτησης στο διάστημα $\varphi \in [0, \pi]$.

Πιθανότατα γνωρίζετε πώς θα τα καταφέρουμε. Η συνάρτηση θα παρουσιάζει ελάχιστο είτε σε κάποιο άκρο του διαστήματος είτε σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο. Όσον αφορά τα άκρα, έχουν ήδη εξεταστεί από τους μαθητές (οι διαδρομές που πρότειναν αντιστοιχούν σε $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi$). Πώς θα βρούμε, όμως, το ελάχιστο μέσα στο διάστημα; Εδώ την απάντηση τη δίνει ο διαφορικός λογισμός. Ας θεωρήσουμε την παράγωγο:

$$S' = \frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} - R\eta\mu\frac{\varphi}{2}.$$

Τα σημεία του διαστήματος $(0, \pi)$ όπου μηδενίζεται η παράγωγος, ή όπου δεν ορίζεται (μολονότι αυτό είναι αδύνατον στην περίπτωσή μας), είναι πθανά σημεία ακροτάτου. Αν η συνάρτηση έχει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα στο συγκεκριμένο διάστημα, αυτά βρίσκονται σε σημεία τέτοιου είδους. Ας εξισώσουμε λοιπόν την παράγωγο με το μηδέν:

$$\frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} - R\eta\mu\frac{\varphi}{2} = 0,$$

ή, έπειτα από τις απλοποιήσεις,

$$\frac{R\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} = \eta\mu\frac{\varphi}{2}. \quad (1)$$

Το μόνο που μένει είναι να βρούμε εκείνα τα φ (αν υπάρχουν) στο διάστημα $(0, \pi)$ τα οποία ικανοποιούν αυτή την εξίσωση, να υπολογίσουμε την αντίστοιχη τιμή του S και, τέλος, να επιλέξουμε το μικρότερο μεταξύ των $S(0)$, $S(\pi)$ και των αριθμών $S(\varphi)$ που προκύπτουν από την επίλυση της (1). Τόσο απλά!

Είναι απλό να το θες

Πράγματι. Η επίλυση της εξίσωσης (1) αποτελεί το πρώτο ανυπέρβλητο εμπόδιο. Η εξίσωση αυτή είναι αδύνατον να λυθεί — δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να εκφράσουμε το φ συναρτήσει των H και R μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων.

Τι θα κάνουμε λοιπόν; Υπάρχει μόνο ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα: να βρούμε μια «έμμεση» μέθοδο. Ας επισημάνουμε πρώτα ότι, αν μια συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο, τότε φθίνει αριστερά από αυτό και αυξάνει δεξιά του. Επομένως, η παράγωγός της είναι αρνητική αριστερά από το σημείο, μηδενίζεται σ' αυτό, και γίνεται θετική στα δεξιά του. Με άλλα λόγια, η παράγωγος είναι αύξουσα σε κάποια περιοχή του τοπικού ελαχίστου. Συνεπώς, η δεύτερη παράγωγος πρέπει να είναι θετική (ή μηδενική στην ακραία περίπτωση) στο σημείο ελαχίστου. Αν η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική, μπορούμε να αποφανθούμε με βεβαιότητα ότι δεν υπάρχει τοπικό ελάχιστο σ' αυτό το σημείο (αν υπάρχει ακρότατο, είναι προφανώς μέγιστο).

Ας υπολογίσουμε, λοιπόν, τη δεύτερη παράγωγο:

$$S'' = \frac{R^2H^2}{(\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2})^3} - \frac{R}{2}\sigma\sin\frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Πρέπει να βρούμε το πρόσημό της στα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος — δηλαδή, στα σημεία όπου ισχύει η εξίσωση (1). Πώς θα το πετύχουμε όμως αυτό; Ας δοκιμάσουμε το επόμενο «τέχνασμα»: μετασχηματίζουμε τις ποσότητες $\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}$ και H^2 χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1):

$$\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2} = \frac{R\varphi}{\eta\mu\frac{\varphi}{2}},$$

άρα

$$H^2 = \left(\frac{R\varphi}{\eta\mu \frac{\varphi}{2}} \right)^2 - R^2 \varphi^2$$

$$= R^2 \varphi^2 \left(\frac{1}{\eta\mu^2 \frac{\varphi}{2}} - 1 \right)$$

$$= R^2 \varphi^2 \left(\frac{\operatorname{συν}^2 \frac{\varphi}{2}}{\eta\mu^2 \frac{\varphi}{2}} \right).$$

Αντικαθιστούμε αυτούς τους τύπους στην εξίσωση (2):

$$S'' = \frac{R^2 \cdot R^2 \varphi^2 \frac{\operatorname{συν}^2 \frac{\varphi}{2}}{\eta\mu^2 \frac{\varphi}{2}}}{\left(\frac{R\varphi}{\eta\mu \frac{\varphi}{2}} \right)^3} - \frac{R}{2} \operatorname{συν} \frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{R}{2\varphi} \operatorname{συν} \frac{\varphi}{2} \left(2\operatorname{συν} \frac{\varphi}{2} \eta\mu \frac{\varphi}{2} - \varphi \right)$$

$$= \frac{R}{2\varphi} \operatorname{συν} \frac{\varphi}{2} \cdot (\eta\mu\varphi - \varphi).$$

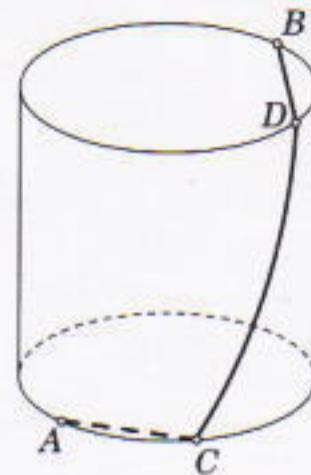
Αν $0 < \varphi < \pi$, ο παράγοντας αριστερά από την παρένθεση είναι θετικός, και συνεπώς το πρόσημο της S'' συμπίπτει με το πρόσημο της παράστασης $\eta\mu\varphi - \varphi$. Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι, όταν $0 < \varphi < \pi$, τότε $\eta\mu\varphi < \varphi$. Άρα $\eta\mu\varphi - \varphi < 0$ όταν $\varphi \in (0, \pi)$. Επομένως, αν η συνάρτηση S έχει ακρότατο στο διάστημα αυτό, θα είναι μέγιστο —όχι ελάχιστο!

Τελικά οι μαθητές είχαν δίκιο

Επομένως, διαπιστώνουμε ότι η S έχει την ελάχιστη τιμή της σε ένα από τα άκρα του διαστήματος $[0, \pi]$. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές βρήκαν τη σωστή απάντηση. Είχαν δίκιο!

Ωστόσο, οι αντιρρήσεις μας ήταν επίσης σωστές. Δεν συμφωνείτε ότι αυτό μοιάζει με παράδοξο;

Εντούτοις, δεν είναι. Ήταν απλώς θέμα καλής τύχης: η λανθασμένη λύση των μαθητών έδωσε τη σωστή απάντηση στο πρόβλημα. Τέτοιες καταστάσεις δεν είναι καθόλου σπάνιες —πιθανώς θυμάστε ότι κάτι παρόμοιο έχει συμβεί και σ' εσάς. Στην πραγματικότητα, ο στόχος αυτού του άρθρου ήταν να σας δώσει μια μικρή

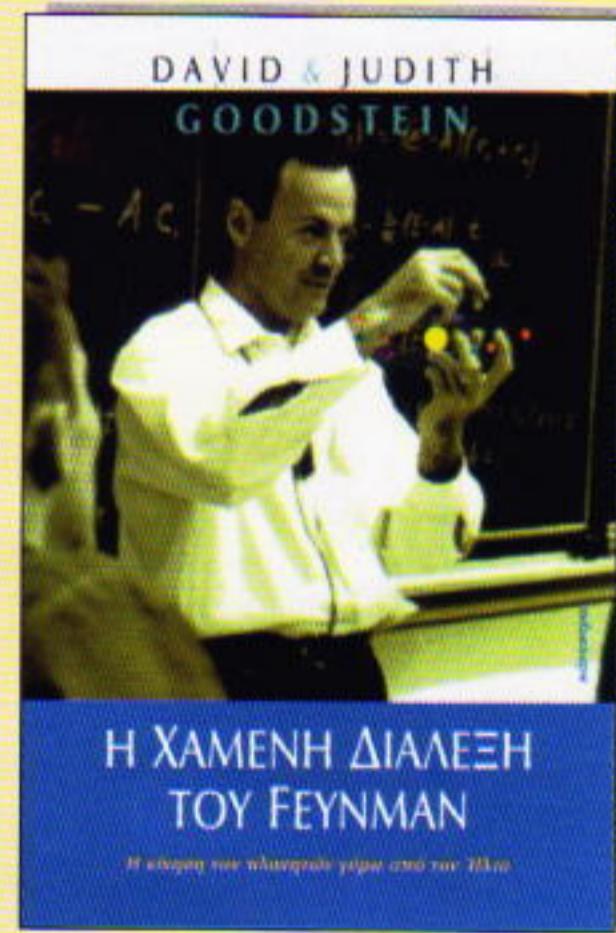


Σχήμα 4

συμβουλή (που μπορεί ήδη να έχετε ακούσει, αλλά αξίζει να την επαναλαμβάνουμε): ακόμη κι όταν χρησιμοποιείτε τις πλέον προφανείς και αξιόπιστες μεθόδους (για παράδειγμα, τη μέθοδο του επίπεδου αναπτύγματος όταν αναζητούμε τη συντομότερη διαδρομή), πρέπει να είστε πολύ προσεκτικοί και να δυσπιστείτε στη συλλογιστική σας. Διαφορετικά, μπορεί να μπείτε σε φασαρίες.

Παρεμπιπόντως, ούτε και η λύση μας είναι πλήρης. Δεν εξετάσαμε διαδρομές όπως αυτή του Σχήματος 4. Σκεφτείτε πώς πρέπει να τις αντιμετωπίσουμε· και ελέγξτε την απάντησή σας στις τελευταίες σελίδες του περιοδικού, όπως συνήθως. ◻

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ



David και Judith Goodstein

Η ΧΑΜΕΝΗ ΔΙΑΛΕΞΗ ΤΟΥ FEYNMAN

Η κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο

«Οι ιδιοφυείς επιστήμονες ανήκουν σε δύο κατηγορίες: οι συνηθισμένοι επιτυχάνουν αποδαία πράγματα, αλλά σε αφήνουν να πιστέψεις ότι θα τα καταφερνες κι εσύ, αν είχες δουλέψει αρκετά σκληρά· από την άλλη υπάρχουν οι «μάγοι», που αδυνατείς να ανακαλύψεις την πηγή της έμπνευσής τους. Ο Feynman ήταν ένας «μάγος».»

— HANS BETHE, θεωρητικός φυσικός, βραβείο Νόμπελ

«Οι Goodstein αφηγούνται το αγωνιώδες κυνήγι ενός χαμένου ντοκουμέντου και παρουσιάζουν με εναισθησία ένα συγκινητικό πορτρέτο του μεγάλου φυσικού. Επιπλέον, προσφέρουν μια ευχάριστη, προσπήτη αλλά και εμπεριστατωμένη εισαγωγή σ' ένα θεμελιώδες επιστημονικό πρόβλημα. Ο Feynman, από τη μεριά του, θα ανταμείψει πλουσιοπάροχα όσους είναι πρόθυμοι να τον παρακολουθήσουν στους συναρπαστικούς συλλογισμούς του.»

— I. BERNARD COHEN, καθηγητής ιστορίας των φυσικών επιστημών στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

Φυσική στην κουζίνα

Απλά πειράματα με βραστό νερό

I.I. Mazin

ΙΑ ΝΑ ΕΚΤΕΛΕΣΟΥΜΕ ΤΑ ΑΚΟΛΟΥΘΑ πειράματα, χρειαζόμαστε ένα άδειο ποτήρι, μια κατσαρόλα, ένα θερμός, ένα βραστήρα, ένα ηλεκτρικό μάτι και... τι άλλο ακόμη; Φυσικά το σημαντικότερο: ένα φιλέρευνο μυαλό, συν την επιθυμία να κάνουμε μερικά φυσικά «κόλπα».

Γιατί αναρροφάται το νερό;

Πάρτε μια συνηθισμένη κατσαρόλα και ρίξτε μέσα της νερό μέχρι ύψος 2-3 cm. Στη συνέχεια, τοποθετήστε μέσα στην κατσαρόλα ένα άδειο ποτήρι αναποδογυρισμένο. Βάλτε την κατσαρόλα πάνω στο ηλεκτρικό μάτι, και αφήστε το νερό να βράσει για 5 λεπτά περίπου. Σβήστε το ηλεκτρικό μάτι. Θα παρατηρήσετε σύντομα ότι το νερό αναρροφάται στο ποτήρι, ανεβαίνοντας όλο και ψηλότερα, ώσπου να καταλάβει το μεγαλύτερο μέρος του!

Ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το φαινόμενο. Ποια δύναμη άραγε προκαλεί την ανύψωση της στάθμης του νερού μέσα στο ποτήρι; Προφανώς, η αιτία δεν μπορεί να είναι άλλη από τη δύναμη της ατμοσφαιρικής πίεσης (δηλαδή της πίεσης του περιβάλλοντος αέρα). Τούτο σημαίνει ότι η πίεση του αέρα μέσα στο ποτήρι είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση έξω από αυτό. Κατά πόσο όμως; Δεν είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε την εν λόγω διαφορά πίεσης (ΔP) — είναι ίση με την υδροστατική πίεση της στήλης νερού μέσα στο ποτήρι κατά το τέλος του πειράματος. Υποθέστε ότι το ύψος της υδάτινης στήλης είναι $h \equiv 10$ cm, η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3$ kg/m³, και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s². Βάσει των συγκεκρι-

μένων τιμών βρίσκουμε ότι

$$\Delta P = \rho g h \equiv 10^3 \text{ N/m}^2 \equiv 0,01 \text{ at.}$$

Γιατί, λοιπόν, η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του ποτηριού έγινε μικρότερη από την ατμοσφαιρική; Η πρώτη σκέψη που έρχεται στο νου μας είναι η εξής: καθώς το νερό βράζει, ο αέρας στο ποτήρι θερμαίνεται — οπότε διαστέλλεται, και ένα μέρος του διαφεύγει από το ποτήρι. Πράγματι, αν πατηρήσουμε προσεκτικά, θα δούμε φυσαλίδες αέρα να εξέρχονται από τα χείλη του ποτηριού. Όταν ο υπόλοιπος αέρας ψυχθεί (αφού θα έχουμε σβήσει το μάτι), συστέλλεται, οπότε ο χώρος που εκκενώνεται καταλαμβάνεται από το νερό. Ας εκτιμήσουμε το μέγεθος αυτού του φαινομένου.

Ας υποθέσουμε ότι ο όγκος του νερού είναι $V = 200 \text{ cm}^3$, η αρχική θερμοκρασία (πριν από τη θέρμανση) $T_1 = 300 \text{ K}$, η τελική θερμοκρασία $T_2 = 373 \text{ K}$, και η ατμοσφαιρική πίεση $P = 1 \text{ at} \equiv 10^5 \text{ N/m}^2$. Από την καταστατική εξισώση υπολογίζουμε το κλάσμα της μάζας του αέρα που παραμένει στο ποτήρι έπειτα από το βρασμό:

$$PV = \frac{m_1}{M} RT_1,$$

$$PV = \frac{m_2}{M} RT_2,$$

απ' όπου βρίσκουμε

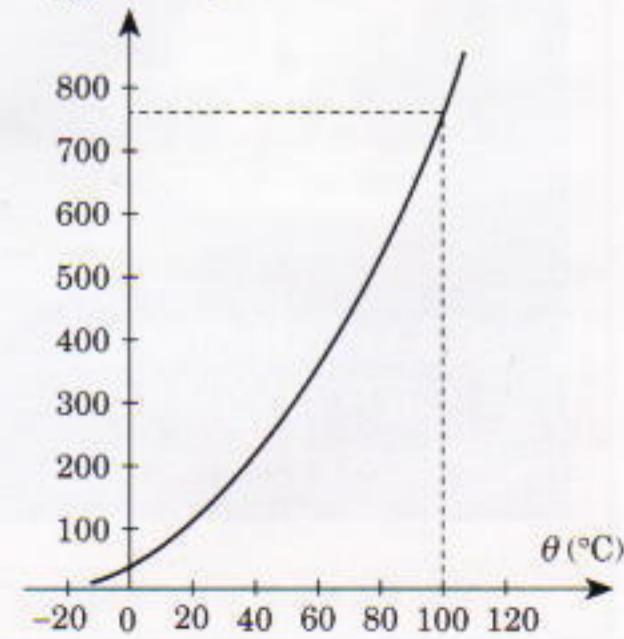
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2} \equiv 0,8.$$

Ετοι, η ψύξη του θερμού αέρα ώς την αρχική θερμοκρασία επφέρει τη συστολή του στο 80% του όγκου του ποτηριού. Επομένως, μόνο το 20% καταλαμβάνεται από νερό. Ωστόσο,

κατά την εκτέλεση του πειράματος είδαμε ότι το νερό γέμισε περισσότερο από το μισό ποτήρι. Στην καλύτερη περίπτωση, λοιπόν, καταφέρνουμε να εξηγήσουμε μόνο το ένα τρίτο του φαινομένου. Αν λάβουμε υπόψη ότι η στάθμη του νερού ανέρχεται σε διάστημα λίγων δευτερολέπτων, και ότι αυτός ο χρόνος είναι πολύ μικρός ώστε ο αέρας να ψυχθεί σε θερμοκρασία δωματίου, εξαναγκαζόμαστε να παραδεχτούμε ότι η εξήγησή μας είναι λανθασμένη και ότι πρέπει να αναζητήσουμε άλλη.

Πού κάναμε λάθος; Φαίνεται πως το σφάλμα μας εντοπίζεται στην υπόθεσή μας ότι το ποτήρι είναι γεμάτο μόνο με αέρα. Ξεχάσαμε τους υδρατμούς. Πράγματι, κατά τα πέντε λεπτά του έντονου βρασμού, εισέρχονταν στο ποτήρι συνεχώς ατμοί νερού, που αναμειγνύονταν με τον αέρα και προσπαθούσαν να τον εκτοπίσουν. Όταν σβήσαμε το μάτι, το ποτήρι ήταν κυρίως γεμάτο όχι από αέρα αλλά από ατμούς. Και όχι απλώς από ατμούς, αλλά από

$P_{\text{κ.α.}} (\text{mm Hg})$





κορεσμένους ατμούς. Η τάση των κορεσμένων ατμών $P_{\text{κ.α.}}$ μειώνεται κατά την ψύξη, και η πτώση της πίεσης είναι ιδιαίτερα απότομη (βλ. το σχήμα). Αρκεί να ψύξουμε το νερό μόλις κατά $0,3^{\circ}\text{C}$, για να μειώσουμε την πίεση κατά 0,01 at. Προφανώς, μια τέτοια ψύξη μπορεί να επέλθει σχεδόν ακαριαία.

Το πείραμά μας δείχνει επίσης ότι, εάν το νερό βράσει επί αρκετά μεγάλο χρόνο, κατά την ψύξη του θα καταλάβει σχεδόν ολόκληρο τον όγκο του ποτηριού. Ουσιαστικά δεν τίθεται περιορισμός στο ύψος της στήλης του νερού — σε τελευταία ανάλυση, απαιτείται στήλη νερού ύψους 10 m για να δημιουργήσει πίεση 1 at.

Ανακύπτει το ερώτημα: αρκεί χρόνος 5 λεπτών για να εξαερωθεί η αναγκαία ποσότητα νερού; Άς προσπαθήσουμε να βρούμε μια απάντηση. Ο ρυθμός εξαέρωσης εξαρτάται από την ισχύ που παρέχει το ηλεκτρικό μάτι, από το μέγεθος της κατσαρόλας κ.ο.κ., οπότε ας χρησιμοποιήσουμε τις πραγματικές τιμές που προέκυψαν στο πείραμά μας. Στην περίπτωσή μας, ένα στρώμα νερού βάθους 1 cm εξαρώθηκε από την κατσαρόλα σε 30 λεπτά περίπου. Επομένως, σε 5 λεπτά, από επιφάνεια ίση με την εγκάρσια διατομή του ποτηριού — περίπου 20 cm^2 — θα εξαερωθούν $m \equiv 3 \text{ g}$ νερού. Σε θερμοκρασία $T = 373 \text{ K}$ και πίεση $P = 1 \text{ at}$, αυτός ο κορεσμένος ατμός καταλαμβάνει όγκο

$$V = \frac{m}{M} \frac{RT}{P} \equiv 5 \text{ lt!}$$

Υποθέτοντας ότι το μείγμα υδρατμών και αέρα είναι ομογενές, βρίσκουμε ότι μόνο $(0,2 \text{ lt} / 5 \text{ lt}) \cdot 100\% = 4\%$ του όγκου του ποτηριού καταλαμβάνεται από τον αέρα, ενώ το υπόλοιπο 96% καταλαμβάνεται από νερό. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα όντως μπορεί να παρατηρηθεί.

Τραβήξτε το φελλό από το θερμός

Για το δεύτερο πείραμά μας χρειάζόμαστε ένα θερμός, κατά προτίμηση με στενό φελλό που εφαρμόζει σφιχτά στο λαιμό, χωρίς όμως να χώνεται όλος μέσα του. Πρώτα βράζουμε νερό σ' ένα βραστήρα (μια χύτρα με ράμφος), και κατόπιν το αδειάζουμε στο

θερμός. Λίγο αργότερα το χύνουμε, και πωματίζουμε σφιχτά το θερμός με το φελλό. Μερικές ώρες αργότερα προσπαθήστε να τραβήξετε το φελλό από το θερμός — θα διαποτώσετε πόσο σφιχτά έχει σφηνώσει στο λαιμό. Δεν θα σας φανεί καθόλου εύκολο να τον βγάλετε! (Γι' αυτό, πρέπει απαραίτητα να χρησιμοποιήσουμε φελλό που να προεξέχει αρκετά από το λαιμό.) Εάν, αντί να πωματίσουμε το θερμός άδειο, το είχαμε πωματίσει γεμάτο με βραστό νερό, το φαινόμενο της αναρρόφησης θα ήταν ασθενέστατο, ή και θα απουσίαζε εντελώς.

Τί θα συμβεί, όμως, αν γεμίσουμε το θερμός κατά το ήμισυ ή κατά το ένα τέταρτο με βραστό νερό; Πιθανώς θα νομίζετε ότι η δύναμη της αναρρόφησης θα κυμαινόταν κάπου ανάμεσα στις δύο ακραίες τιμές. Όμως δεν έχουν έτοι τα πράγματα. Το φαινόμενο θα είναι μόνο ελαφρώς εντονότερο από ό,τι με το θερμός γεμάτο. Ας εξετάσουμε το γιατί.

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα του θερμός είναι ότι περιορίζει δραστικά τη διάδοση της θερμότητας. Σ' ένα καλό θερμός του ενός λίτρου, η θερμοκρασία του νερού μειώνεται κατά $2-3^{\circ}\text{C}$ ημερησίως. Εφόσον η ειδική θερμότητα του νερού ισούται με $4,2 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$, μπορούμε να εκτιμήσουμε την ημερήσια ποσότητα των απώλειών θερμότητας ($\equiv 10 \text{ kJ}$). Ένα άδειο θερμός έχει μάζα περίπου 200 g. (Η ειδική θερμότητα του υλικού του θερμός (γυαλί και μέταλλο) είναι $0,5 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ περίπου, οπότε απώλεια θερμότητας 10 kJ αντιστοιχεί σε πτώση θερμοκρασίας περίπου 100°C .) Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την εκτίμηση, είναι εύλογο να αναμένουμε ότι σε μερικές ώρες το θερμός θα ψυχθεί σε θερμοκρασία δωματίου — δηλαδή η πτώση της θερμοκρασίας θα είναι 80°C . Σύμφωνα με το νόμο του Charles, η συγκεκριμένη πτώση θερμοκρασίας αντιστοιχεί σε διαφορά πίεσης 0,2 at. Για ένα φελλό με εγκάρσια διατομή 5 cm^2 περίπου, η συγκεκριμένη διαφορά πίεσης ιοδυναμεί με μια μάλλον υπολογίσιμη δύναμη περίπου 10 N.

Εφόσον η ειδική θερμότητα του νερού είναι σχεδόν δεκαπλάσια από του γυαλιού, ακόμη και 100 g νερού μέσα στο θερμός θα μειώσουν την πτώση της θερμοκρασίας (και την αντίστοιχη

διαφορά πίεσης) κατά παράγοντα 4. Για θερμός γεμάτο κατά το ένα τέταρτο, η διαφορά πίεσης θα είναι μικρότερη κατά παράγοντα 7· για μισογεμάτο θερμός, θα είναι μικρότερη από ό,τι για ένα άδειο θερμός κατά παράγοντα 15.

Πώς το εξηγείτε αυτό;

Ιδού ένα τελευταίο πείραμα. Γεμίστε ένα θερμός ως τη μέση με πολύ καυτό γάλα, πωματίστε το με φελλό και αναταράξτε το δυνατά. Θα πατηρήσετε φυσαλίδες γάλατος γύρω από το φελλό: από το θερμός διαφεύγει αέρας. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

Στο δρόμο για το Νόμπελ

Το Ινστιτούτο Φυσικής της Πολωνικής Ακαδημίας Επιστημών καλεί μέσω του QUANTUM τους έλληνες μαθητές να συμμετάσχουν στον ετήσιο Διεθνή Διαγωνισμό «First Step to Nobel Prize in Physics» που συνεχίζεται για έκτη χρονιά με εξαιρετική επιτυχία (και ιδιαίτερα επιπτυχή ελληνική συμμετοχή). Σκοπός του διαγωνισμού είναι να δώσει στους νέους την ευκαιρία να παρουσιάσουν τις δικές τους ερευνητικές εργασίες. Οι γενικοί κανόνες είναι οι εξής:

— Γίνονται δεκτοί οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κάτω των 20 ετών, αρκεί να μη φοιτούν σε πανεπιστημιακό κολέγιο.

— Δεν υπάρχουν περιορισμοί στο θέμα και το επίπεδο των εργασιών, ούτε στις μεθόδους που θα εφαρμοστούν. Ωστόσο, οι εργασίες πρέπει να έχουν ερευνητικό χαρακτήρα και να αφορούν θέματα φυσικής. Κάθε εργασία πρέπει να είναι γραμμένη στα αγγλικά, και να μην υπερβαίνει τις 25 τυπωμένες σελίδες.

— Οι συγγραφείς των βραβευμένων εργασιών θα προσκληθούν στο Ινστιτούτο, για να κάνουν έρευνα για ένα μήνα. Το Ινστιτούτο θα καλύψει τα έξοδα διαμονής στην Πολωνία (όχι, όμως, τα έξοδα του ταξιδιού).

— Οι διαγωνιζόμενοι πρέπει να αποστέλλουν την εργασία τους σε δύο αντίγραφα μέχρι τις 31 Μαρτίου 1998 στην διεύθυνση: Mrs. Maria Ewa Gorzkowska, M.A., Secretary of the FIRST STEP, Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, al. Lotników 32/46, 02-668 Warszawa, Πολωνία.

Για περισσότερες πληροφορίες απευθύνετε στον κ. Waldemar Gorzkowski, τηλ. (022) 435212, fax: 430926, e-mail: gorzk@gamma.iifpan.edu.pl. Βλ. επίσης στον υποκατάλογο pub/competitions της διεύθυνσης ftp.iifpan.edu.pl., ή στη <http://nobelprizes.com/firststep/>.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

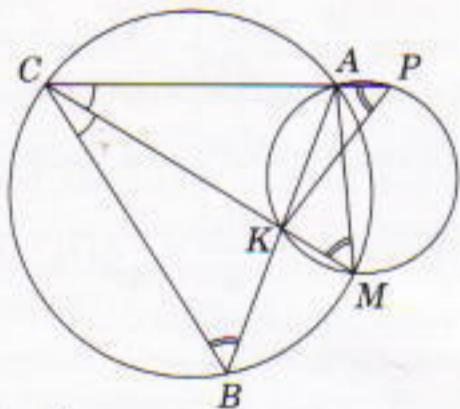
Μαθηματικά

M106

Το σύνολο που ορίζεται από την $|y - 2x| = x$ αποτελείται από δύο ημιευθείες: $y = x$, $x \geq 0$, και $y = 3x$, $x \geq 0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $|3x - 2y| = y$ ορίζει τις ίδιες ημιευθείες. Δεν υπάρχουν άλλες λύσεις.

M107

Το τρίγωνο CPK ισούται με το τρίγωνο CBK , διότι έχουν κοινή την πλευρά CK (Σχήμα 1), $\angle PCK = \angle BCK$, και $\angle KPC = \angle KMA = \angle CBK$. Οι δύο τελευταίες ισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων γωνιών. Επομένως, $AP = |CP - CA| = |a - b|$.



Σχήμα 1

M108

Το σύστημα είναι γραμμικό ως προς τις παραμέτρους a , b , c . Ας εκφράσουμε τα a , b , c συναρτήσει των x , y , z . Αντί να χρησιμοποιήσουμε ορίζουσες, ας εργαστούμε ως εξής: Απαλείφουμε τους παρονομαστές στη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση, και αντικαθιστούμε το c με την παράσταση από την πρώτη εξίσωση. Μετά τις απλοποιήσεις έχουμε

$$\begin{cases} -a(1+x^2)yz + b(xz+y)x \\ = x^2z^2y - x^3y^2z, \\ a(y-xz)z - b(1+z^2)xy \\ = -x^2z^2y - xy^2z^3. \end{cases}$$

Εξαλείφουμε το b (πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις με $(1+z^2)y$ και $(xz+y)$, αντίστοιχα, και προσθέτοντας την

πρώτη εξίσωση στη δεύτερη). Προκύπτει

$$\begin{aligned} -a((1+x^2)(1+z^2)y^2z + (y-xz)(y+xz)z) \\ = xyz((xz-x^2y)(1+z^2)y \\ - (xz+yz^2)(xz+y)), \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} a(-x^2y^2z^3 - x^2y^2z - y^2z^3 - y^2z + y^2z \\ - x^2z^3) = xyz(xyz + xyz^3 - x^2y^2 - \\ x^2y^2z^2 - x^2z^2 - xyz - xyz^3 - y^2z^2) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$az(x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) = \\ xyz(x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2).$$

Εντούτοις, είναι προφανές ότι x , y , $z \neq 0$. Συνεπώς, $a = xy$. Παρόμοια, βρίσκουμε ότι $b = yz$, $c = xz$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο σύστημα

$$\begin{cases} a = xy, \\ b = yz, \\ c = xz. \end{cases}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη αυτές τις εξισώσεις, βρίσκουμε $abc = x^2y^2z^2$. Άρα $abc > 0$ και $xyz = \pm\sqrt{abc}$. Η απάντηση λοιπόν είναι

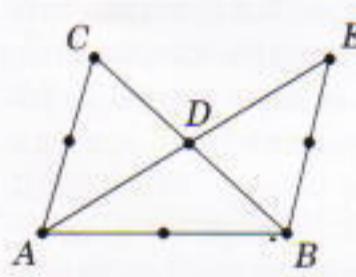
$$\left(\frac{\pm\sqrt{abc}}{b}, \frac{\pm\sqrt{abc}}{a}, \frac{\pm\sqrt{abc}}{c} \right).$$

M109

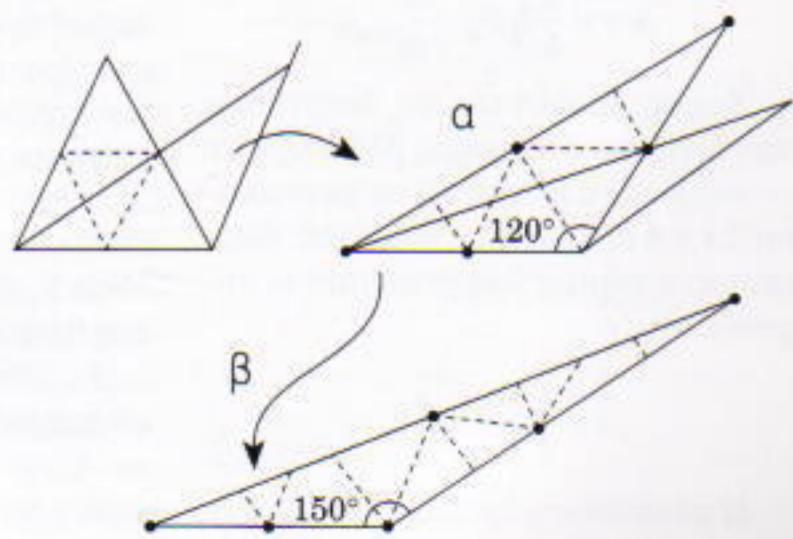
Θεωρούμε ένα τρίγωνο ABC το οποίο μπορεί να διπλωθεί γύρω από

ένα μοναδιαίο κανονικό τετράεδρο (χωρίς επικαλύψεις), έτσι ώστε οι κορυφές του τετραέδρου να αντιστοιχούν στις κορυφές του τριγώνου και στα μέσα των πλευρών του. Φέρουμε τη διάμεσο AD του τριγώνου και την προεκτείνουμε πέρα από το σημείο D κατά απόσταση ίση με το μήκος της. Προκύπτει έτσι το σημείο E . Τώρα, μπορούμε να διπλώσουμε το τρίγωνο ABE γύρω από την επιφάνεια του ίδιου τετραέδρου, έτσι ώστε οι κορυφές του τετραέδρου να αντιστοιχούν στις κορυφές του τριγώνου και στα μέσα των πλευρών του. (Αυτό το γεγονός είναι μάλλον προφανές. Μπορούμε να πούμε ότι το τρίγωνο ACD αντικαθίσταται από το τρίγωνο BED , που καταλαμβάνει τη θέση του ACD στην επιφάνεια του τετραέδρου.)

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε πώς είναι δυνατόν, μέσω του μετασχηματισμού που περιγράφαμε, να προκύψουν τα τρίγωνα του (α) και (β) μέρους της εκφώνησης από ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2. Το τρίγωνο αυτό είναι το ανάπτυγμα ενός μοναδιαίου κανονικού τετραέδρου, οι κορυφές του οποίου αντιστοιχούν στις κορυφές και τα μέσα των πλευρών του τριγώνου. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι είναι δυνατόν να διπλώσουμε αυτά τα τρίγωνα γύρω από την επιφάνεια ενός μοναδιαίου κανονικού τετραέδρου.



Σχήμα 2



Παρατηρούμε ότι $b(2n+1) = b(n)$. (Το πρώτο ψηφίο σε μια τέτοια αναπάρασταση του $2n+1$ είναι το 1. Αν το αφαιρέσουμε και διαιρέσουμε όλα τα υπόλοιπα με το 2, προκύπτει μια αναπάρασταση του n . Επομένως, έχουμε βρει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των αναπαραστάσεων του n και του $2n+1$.) Παρατηρούμε επίσης ότι $b(2n) = b(n) + b(n-1)$ (ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην περίπτωση $a_0 = 0$ και ο δεύτερος στην περίπτωση $a_1 = 2$). Και τώρα υπολογίζουμε το $b(1997)$:

$$\begin{aligned} b(1997) &= b(998) = b(499) + b(498) = \\ &2b(249) + b(248) = 3b(124) + b(123) = \\ &3(b(62) + b(61)) + b(61) = 3b(62) + \\ &4b(61) = 3b(31) + 7b(30) = 10b(15) + \\ &7b(14) = 17b(7) + 7b(6) = 24b(3) + \\ &7b(2) = 31b(1) + 7b(0) = 31 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = \\ &38. \end{aligned}$$

Φυσική

Φ106

Ενόσω οι αθλητές τρέχουν, σε κάθε στιγμή το νήμα τεντώνεται ομοιόμορφα, οπότε ο λόγος των αποστάσεων από το σημείο C ως τα άκρα του νήματος δεν μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Το σχήμα που συνοδεύει την εκφώνηση του προβλήματος δείχνει ότι ο συγκεκριμένος λόγος ισούται αρχικά με

$$|AC|:|CB| = 1:4.$$

Η μετατόπιση Δx του κόμπου προς τα ανατολικά καθορίζεται προφανώς από τη μετατόπιση ΔS_x του δρομέα A —ισούται πάντα με τα $4/5$ αυτής της μετατόπισης:

$$\Delta x = \frac{4}{5} \Delta S_x = \frac{4}{5} u_0 t.$$

Χρησιμοποιώντας τις διαστάσεις που δίνονται στο σχήμα, βλέπουμε ότι το σημείο D αντιστοιχεί σε μετατόπιση $\Delta x = 4$ m προς τα ανατολικά. Επομένως, ο κόμπος διέρχεται από το σημείο D όταν

$$t = \frac{5 \Delta x}{4 u_0} = 5 \text{ s.}$$

Η μετατόπιση Δy του κόμπου προς τα νότια καθορίζεται από τη μετατόπιση ΔS_y του δρομέα B , οπότε σε κάθε

χρονική στιγμή $\Delta y = \Delta S_y/5$. Τη στιγμή $t = 5$ s ο κόμπος έχει μετατοπιστεί από την αρχική θέση προς τα νότια κατά $\Delta y = 2$ m. Έτσι, ο δρομέας B , κινούμενος με επιτάχυνση y , διανύει την απόσταση $\Delta S_y = 5\Delta y = 10$ m σε χρόνο $t = 5$ s —δηλαδή ισχύει

$$\frac{1}{2} y t^2 = \Delta S_y,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$y = 2 \frac{\Delta S_y}{t^2} = \frac{20}{25} \text{ m/s}^2 = 0,8 \text{ m/s}^2.$$

Φ107

Θα συμβολίσουμε τη θερμοκρασία και την πίεση του αέρα μακριά από το μοντέλο με T_1 ($T_1 = T = 300$ K) και P_1 , και τις αντίστοιχες τιμές κοντά στο σημείο A με T_2 και P_2 . Στην περίπτωση της μόνιμης ροής, μπορούμε να μελετήσουμε οποιοδήποτε «δοκιμαστικό τμήμα» του αέρα —το πώς κινείται και τι ακριβώς του συμβαίνει. Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, ας πάρουμε 1 mole αέρα (η μοριακή μάζα του είναι $M = 29$ g/mole) και ας εξετάσουμε τη φλέβα στην οποία εισέρχεται από μακριά και από την οποία εξέρχεται πλησίον του μοντέλου. Για να αποφύγουμε καθαρά φορμαλιστικές δυσκολίες οι οποίες συνδέονται με την απόλυτη ακίνησία του αέρα κοντά στο σημείο που μας απασχολεί, θα θεωρήσουμε αυτή την ταχύτητα μικρή σε σύγκριση με την αρχική (αλλά όχι ακριβώς ίση με μηδέν!).

Ο εξωτερικός αέρας, ο οποίος «ωθεί» στην είσοδο της φλέβας το υπό εξέταση δοκιμαστικό τμήμα, παράγει έργο

$$W_1 = P_1 V_1,$$

όπου V_1 είναι ο όγκος του 1 mole αέρα στη θερμοκρασία T_1 . Καθώς εγκαταλείπει τη φλέβα, το δοκιμαστικό τμήμα αέρα παράγει έργο «απωθώντας» τον περιβάλλοντα αέρα —με άλλα λόγια, παράγει αρνητικό έργο:

$$W_2 = -P_2 V_2,$$

όπου V_2 είναι ο όγκος του 1 mole αέρα στη θερμοκρασία T_2 .

Ας υποθέσουμε ότι το δοκιμαστικό τμήμα στη φλέβα δεν ανταλλάσσει θερμότητα με τον περιβάλλοντα αέρα. (Αν θέλουμε να είμαστε αυστηροί, πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η υπόθεσή μας στην πραγματικότητα

δεν ισχύει. Εντούτοις, δεν υπάρχει κάποιος εύλογος τρόπος για να εκπιμήσουμε αυτή την ανταλλαγή θερμότητας. Επομένως, περιορίζομετε να υπολογίσουμε το άνω όριο για τη θερμοκρασία που αναζητούμε.) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του υπό εξέταση τμήματος αέρα καθορίζεται από το έργο που παρήγαγαν οι εξωτερικές δυνάμεις και από τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συγκεκριμένου τμήματος ως όλου:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + \frac{Mu^2}{2} &= \Delta U \\ &= C_V(T_2 - T_1) \\ &= \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

(εφόσον ο αέρας είναι διατομικό αέριο, η γραμμομοριακή ειδική του θερμότητα υπό σταθερό όγκο είναι $C_V = 5R/2$).

Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση για 1 mole ιδανικού αερίου, $PV = RT$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} W_1 &= P_1 V_1 = RT_1, \\ W_2 &= -P_2 V_2 = -RT_2. \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$RT_1 - RT_2 + \frac{Mu^2}{2} = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1),$$

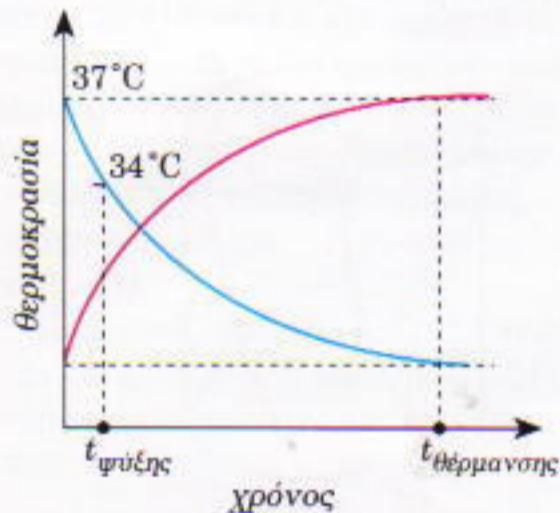
από όπου παίρνουμε

$$T_2 = T_1 + \frac{Mu^2}{7R} \approx 345 \text{ K.}$$

Φ108

Κατά τη θερμομέτρηση, το θερμόμετρο πρέπει να θερμανθεί από τη θερμοκρασία δωματίου ως εκείνη του ανθρώπινου σώματος —δηλαδή κατά 15-17°C περίπου. Αντίθετα, μπορούμε να κατεβάσουμε τον υδράργυρο του θερμομέτρου τινάζοντάς το, εφόσον η θερμοκρασία του ελαττωθεί όλο κι όλο κατά 3-4°C. Με δεδομένο ότι η κλίμακα του θερμομέτρου αρχίζει από τους 34°C, πτώση της θερμοκρασίας κατά λίγους μόνο βαθμούς δημιουργεί τον κενό χώρο πάνω από τη στένωση του τριχοειδούς σωλήνα. Πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι, κατά τη θέρμανση και την ψύξη των αντικειμένων, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας τους είναι ανάλογος της

διαφοράς θερμοκρασίας ανάμεσα σ' αυτά και στο περιβάλλον τους. Επομένως, η εξάρτηση της θερμοκρασίας ενός θερμομέτρου από το χρόνο μοιάζει με την καμπύλη του Σχήματος 3. Συνεπώς, ο αναγκαίος χρόνος για να ψυχθεί ένα θερμόμετρο ώς τη θερμοκρασία στην οποία μπορούμε να κατεβάσουμε τον υδράργυρό του πινάζοντάς το είναι πολύ μικρότερος απ' ότι χρειάζεται για να μετρήσουμε τη θερμοκρασία του σώματος.



Σχήμα 3

Φ109

Ας δώσουμε φορτίο q στο σύστημα των θραυσμάτων ($q > 0$) και ας αρχίσουμε να ανακατασκευάζουμε τη σφαίρα από τα θραύσματα που συνδέονται με σύρματα (των οποίων τη χωρητικότητα θεωρούμε αμελητέα). Προφανώς, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου οποιουδήποτε μέρους της αποκαθιστάμενης σφαίρας θα είναι θετική. Έτσι, οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις που ασκούν μεταξύ τους τα θραύσματα είναι συνεχώς απωστικές. Επομένως, χρειάζεται να παραγάγουμε έργο $W > 0$ προκειμένου να αποκαταστήσουμε τη σφαίρα στην αρχική της κατάσταση.

Το φορτίο της αποκατεστημένης πλέον σφαίρας θα είναι q , και η ηλεκτροστατική της ενέργεια $E_o = q^2/(2C_o)$, όπου C_o είναι η χωρητικότητα της σφαίρας. Η ενέργεια του συστήματος των θραυσμάτων ήταν $E_\theta = q^2/(2C_\theta)$, όπου C_θ η χωρητικότητά του. Προφανώς, $W = E_o - E_\theta$ — δηλαδή

$$\frac{q^2}{2C_o} > \frac{q^2}{2C_\theta}.$$

Επομένως, $C_o < C_\theta$ — δηλαδή η χωρητικότητα της αρχικής σφαίρας είναι μικρότερη από την ολική χωρητικό-

τητα των συνδεόμενων θραυσμάτων.

Φ110

Η φωτεινή κηλίδα που μπορεί να δει κανείς μέσα στον μεγάλο καθρέφτη δεν είναι παρά το είδωλο μιας φωτεινής κηλίδας που σχηματίζεται πάνω σε μιαν «οθόνη» μπροστά στον μεγάλο καθρέφτη. Το ρόλο της οθόνης μπορεί να τον παίξει το σώμα του παρατηρητή, ένας τοίχος που κατοπτρίζεται στον καθρέφτη, κ.ο.κ. Ωστόσο, η οθόνη έχει μια «τρύπα» — τον ίδιο τον μικρό καθρέφτη. Εάν το ηλιακό φως, αφού ανακλαστεί πρώτα από τον μικρό καθρέφτη, και έπειτα από τον μεγάλο, επιστρέφει στον μικρό καθρέφτη, τότε δεν θα υπάρχει κηλίδα φωτός. Μετά την πρώτη ανάκλαση από τον μικρό καθρέφτη, η δέσμη προσπίπτει κάθετα στο επίπεδο του μεγάλου καθρέφτη, και έτσι «χτυπάει» το είδωλο του μικρού καθρέφτη μέσα στον μεγάλο. Επομένως, αν ο παρατηρητής κατευθύνει τη φωτεινή κηλίδα της στο είδωλο του μικρού καθρέφτη, θα πάψει να βλέπει πλέον τη φωτεινή κηλίδα.

Μαθαίνοντας από έναν ίο

Γιατί να υπάρχει σταθεροποίηση του αριθμού των ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΩΝ στην περίπτωση της νόσου που εξαπλώνεται σε έναν μόνο πληθυσμό; Ποιο θα είναι το πλήθος των ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΩΝ μακροπρόθεσμα; Το μοντέλο δείχνει αρχικά μια σφραγίδα στην ασθένεια, επειδή τα αρχικά αποθέματα των ΠΡΟΣΒΛΗΤΩΝ και των ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΩΝ ανθρώπων είναι μεγάλα. Επομένως, το γινόμενο

ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ * ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ * ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ

είναι μεγάλο. Καθώς οι προοβεβλημένοι είτε πεθαίνουν είτε επιζούν στη συνέχεια, τα αποθέματα γίνονται μικρότερα. Μακροπρόθεσμα, οι μόνοι ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ μέσα στον πληθυσμό είναι οι ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΣ, στους οποίους θα μεταδοθεί η ασθένεια. Έτσι, ο αριθμός των ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΩΝ θα είναι, σε μακροπρόθεσμη προοπτική, αυτοί οι επτά ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΣ.

Γιατί εξαφανίζεται εντελώς η νόσος στο μοντέλο των δύο πληθυσμών στην περίπτωση που ο ίος μεταδίδεται με

άμεση επαφή; Με έναν μικρότερο ρυθμό επαφής, το απόθεμα ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ Α μπορεί προσωρινά να αυξηθεί πάλι μετά την πρώτη σφραγίδα έξαρση της νόσου, και το απόθεμα ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ Α γίνεται μεγαλύτερο με κάθε έξαρση που επακολουθεί. Όσο περισσότερα άτομα μολύνονται, τόσο περισσότερα απομακρύνονται κατά την επόμενη περίοδο από το σύστημα, και οι ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ Π τείνει στο μηδέν, και ως αποτέλεσμα

ΜΟΛΥΝΟΝΤΑΙ Α = ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ

A1 * ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ Α *

ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ Α + ΡΥΘΜΟΣ ΕΠΑΦΗΣ A2 * ΠΡΟΣΒΛΗΤΟΙ Α * ΠΡΟΣΒΕΒΛΗΜΕΝΟΙ Π = 0.

Ένας από τους τρόπους με τους οποίους η ασθένεια μπορεί να επανέλθει στον πληθυσμό είναι αν επανεμφανιστεί σε μεταλλαγμένη μορφή. Μπορείτε να μοντελοποιήσετε αυτή την περίπτωση;

Για μια διεισδυτική περιγραφή της δυναμικής του ιού Έμπολα, δείτε το *The Hot Zone* (Η καυτή ζώνη) του R. Preston (Νέα Υόρκη, Anchor Books, 1995).

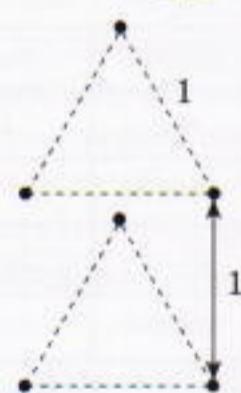
Σπαζοκεφαλίες

Σ106

Σχηματίστε έναν κύβο με μήκος ακμής ένα σπίρτο.

Σ107

Μια δυνατή απάντηση είναι να θεωρήσουμε τις κορυφές δύο ισόπλευρων τριγώνων με μοναδιαίο μήκος πλευράς και σε μοναδιαία απόσταση μεταξύ τους (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Σ108

Έστω x το πλήθος των ανθρώπων

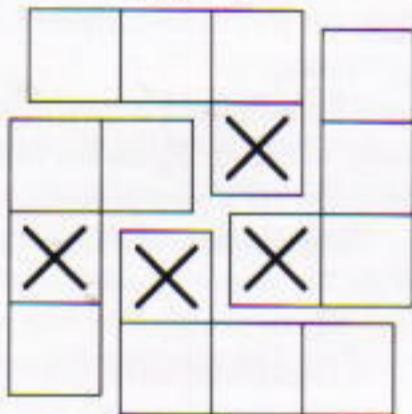
που είναι και μαθηματικοί και φιλόσοφοι. Τότε, το πλήθος των μαθηματικών είναι $7x$ και των φιλόσοφων $9x$. Επομένως, οι φιλόσοφοι είναι περισσότεροι. (Θα μπορούσε να αναρωθεί κανείς αν το x είναι μηδέν. Αν το σκεφτήκατε κι εσείς, τότε είστε και μαθηματικός και φιλόσοφος, οπότε το x είναι διάφορο του μηδενός.)

Σ109

Σκοπός μας είναι να βρούμε τον μικρότερο φυσικό n , τέτοιον ώστε να υπάρχει ακέραιος αριθμός μεταξύ των $(96/35)n$ και $(97/36)n$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 7, και το κλάσμα είναι το $19/7$ (όντως, $(96/35)7 \geq 19 \geq (97/36)7$). Μπορούμε να επαληθεύσουμε με άμεσο υπολογισμό ότι οι μικρότεροι του 7 αριθμοί είναι ακατάλληλοι.

Σ110

Δείτε το Σχήμα 5.



Σχήμα 5

Αναδρομή στα Όρια

1. Η αξία των 100 δολαρίων δίνεται στον επόμενο πίνακα. Αν συνέχισετε τη διαδικασία για λίγες ακόμη δεκαετίες, θα πειστείτε κατά πάσα πθανότητα ότι ο λογαριασμός σας δεν θα ξεπέρασε ποτέ τα 200 δολάρια.

ΧΡΟΝΟΣ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ	ΤΟΚΟΣ-ΑΜΟΙΒΗ
0-10 έτη	100	$100 - 50 = 50$
10-20 έτη	150	$150 - 112,50 = 37,50$
20-30 έτη	187,50	$187,50 - 175,78 = 11,72$
30 έτη	199,22	

2. Η αξία των 100 δολαρίων δίνεται στον επόμενο πίνακα. Αυτή η μορφή «πονηρής» τραπεζικής πρακτικής οδηγεί σε υπόλοιπα που ταλαντώνονται γύρω από τα 200 δολάρια

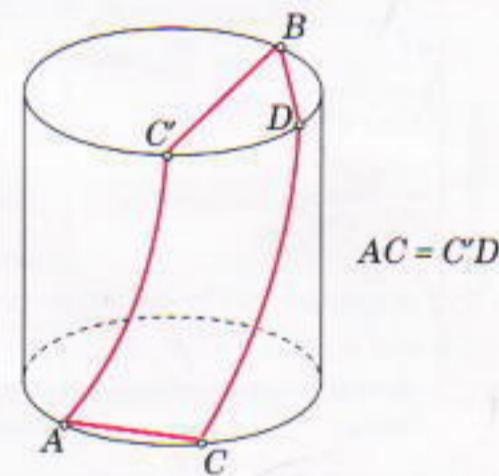
και αντιστοιχεί στο φαινόμενο του «χάους».

ΧΡΟΝΟΣ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ	ΤΟΚΟΣ-ΑΜΟΙΒΗ
0-30 έτη	100	$300 - 150 = 150$
30-60 έτη	250	$750 - 937,50 = - 187,50$
60-90 έτη	62,50	$187,50 - 58,59 = 128,91$
90-120 έτη	191,41	$574,22 - 549,55 = 24,67$

αύξηση του CO_2 κατά 2 ppm (ή 0,0002%) σε γιγατόνους: $(0,000002 \text{ CO}_2 \text{ κάθε έτος}) \cdot (2,2 \cdot 10^6 \text{ Gt αέρα}) = (x \text{ Gt πρόσθετοι κάθε έτος})$, από όπου $x = 4,4 \text{ Gt CO}_2$ πρόσθετοι κάθε έτος.

Το μυρμήγκι

Το μήκος της διαδρομής $ACDB$ ισούται με αυτό της διαδρομής $AC'DB$ (βλ. Σχήμα 6). Και η δεύτερη διαδρομή είναι φανερά μεγαλύτερη από την $AC'B$. Επομένως, η απάντησή μας είναι όντως σωστή.



Σχήμα 6

Η τέχνη της εκτίμησης

1. $\Delta\rho \sim (2/3)\rho_{\text{αερ}}gH \sim 3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ (εφόσον τα δύο τρίτα της επιφάνειας της Γης καλύπτονται από νερό και το μέσο βάθος H των ωκεανών είναι 4 km).

2. $\rho_{\text{αερ}} u^2 S - mg$, από την οποία παίρνουμε $u = (mg/\pi R^2 \rho_{\text{αερ}})^{1/2} \sim 5 \text{ m/s}$ (για $m \sim 100 \text{ kg}$ και $R \sim 3 \text{ m}$).

3. $\rho_H = M_H / V_H = (24\pi/GT^2)(D_H/T)^{-3} \sim 10^3 \text{ kg/m}^3 \sim 1 \text{ g/cm}^3$. (Εδώ $D_H/r \sim 0,01$ είναι το γωνιακό μέγεθος του Ήλιου, και $T \sim 3 \cdot 10^7 \text{ s}$ είναι η περίοδος περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο.)

4. $n = (2gh)^{1/2}/\pi u \sim 1,5$ (για $u \sim 30 \text{ m/s}$). Υπόδειξη: όταν το κέντρο μάζας του αυτοκινήτου καλύπτει την απόσταση του μήκους του, η κατακόρυφη ταχύτητα λαμβάνει την τιμή $u \sim gl/u$ και η γωνιακή του ταχύτητα την τιμή $\omega = u/(l/2) \sim 2gu$. Έτσι, ο αριθμός των περιστροφών θα ισούται με $n \sim t\omega/2\pi \sim (2gh)^{1/2}/\pi u$.

5. $F\ell = mu^2/2 \sim mgL/2$, από την οποία παίρνουμε $F = mgL/(2\ell) \sim 800 \text{ N}$ (για $m \sim 8 \text{ kg}$, $L \sim 20 \text{ m}$, $\ell \sim 1 \text{ m}$).

6. $F \cdot R \sim mg \cdot 2R$, όπου R είναι η ακτίνα του δίσκου και $2R$ η απόσταση από τον άξονά του ώς το πετάλι. Έτσι, $F \sim 2mg \sim 1.400 \text{ N}$ (για $m \sim 70 \text{ kg}$).

7. $mu = Ft$, ή $\rho \cdot (4/3)\pi r^3 \cdot u = P \cdot \pi r^3 \cdot r/u$, οπότε $u = (P\rho)^{1/2} \sim 30 \text{ m/s}$.

8. $F = my = mu^2/2S = 7 \cdot 10^3 \text{ N}$ (για $m \sim 60 \text{ kg}$).

9. Ας συμβολίσουμε με d τη μέση διάμετρο του κορμού ενός πεύκου. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι τα πέυκα μετατοπίζονται και τοποθετούνται κατά μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου, ώστε να σχηματίζουν ένα συνεχή «φράκτη». Τότε η ζητούμενη απόσταση x δεν είναι παρά η ακτίνα του εν λόγω κύκλου! Υπάρχουν περίπου $2\pi d$ πέυκα στο φράκτη μήκους $2\pi x$. Αυτά τα δέντρα έχουν «συλλεχθεί» από μια επιφάνεια πx^2 . Εάν η μέση πυκνότητα του δάσους είναι 1 πεύκο ανά ℓ^2 τετραγωνικά μέτρα, τότε στην επιφάνεια πx^2 έχουμε $\pi x^2/\ell^2$ πεύκα.

Επομένως, $2\pi d \sim \pi x^2/\ell^2$. Για $\ell \sim 3 \text{ m}$ και $d \sim 0.2 \text{ m}$, βρίσκουμε $x \sim 2\ell^2/d \sim 100 \text{ m}$.

Καθειδοσκόπιο

Προβλήματα

1. Αναποδογυρίστε τον αριθμό.

2. Η υποδιαστολή.

3. 16 δευτερόλεπτα. Το διάστημα μεταξύ δύο χτύπων είναι 2 δευτερόλεπτα. Το πλήθος των διαστημάτων είναι κατά ένα μικρότερο από το πλήθος των χτύπων.

4. Ναι. Για παράδειγμα, οι $(-1, -2, -3)$ ή οι $(a, 0, -a)$ για κάθε ακέραιο a .

5. Φυσικά και είναι δυνατόν. Το ένα νόμισμα — που δεν είναι δραχμή — είναι δεκάρικο, και είναι δραχμή το άλλο!

6. Πρέπει να βρούμε το στόχο έξι φορές· να πετύχουμε τέσσερις φορές το 17 και δύο το 16.

7. 30 γραμμάρια. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο λόγος των μαζών (δηλαδή των όγκων) όμοιων σχημάτων ισούται με τον κύβο του λόγου των πλευρών τους.

8. Είναι. Για παράδειγμα, αν βρούμε βίδες στο κουτί που έχει ετικέτα «καρφιά», τότε το κουτί «παξιμάδια» περιέχει καρφιά (διότι δεν μπορεί να περιέχει παξιμάδια), και το κουτί «βίδες» περιέχει παξιμάδια.

9. Είναι το 72. Αν ο αριθμός είναι το N , τότε το πλήθος των παραγόντων 2 του N πρέπει να είναι περιττό πολλαπλάσιο του 3, και το πλήθος των παραγόντων 3 πρέπει να είναι άρτιο

και κατά ένα μικρότερο από ένα πολλαπλάσιο του 3.

10. Αδειάστε το νερό από το δεύτερο ποτήρι στο πέμπτο.

11. $1/2$ και -1 .

12. Τυλίξτε την πετσέτα, σπρώχνοντας απαλά το ποτήρι με το τυλιγμένο μέρος της.

Νικηφόρες στρατηγικές για τα παιχνίδια

1. Αν και οι δύο σωροί είναι αρχικά «περιττοί» (δηλαδή περιέχουν περιττό πλήθος πέτρες), χάνει ο πρώτος παικτης: ανεξάρτητα από την κίνηση που θα επλέξει, αφήνει δύο σωρούς, ο ένας από τους οποίους είναι «άρτιος». Τότε, ο δεύτερος παικτης μπορεί να χωρίσει τον άρτιο σωρό σε δύο περιττούς και να απομακρύνει τον άλλο, επαναφέροντας έτοι την αρχική κατάσταση. Με λίγη σκέψη καταλαβαίνουμε ότι ο δεύτερος παικτης θα μπορεί πάντα να κάνει κίνηση.

Αν έχουμε έναν τουλάχιστον άρτιο σωρό στην αρχή, τότε ο πρώτος παικτης μπορεί να τον χωρίσει σε δύο περιττούς, και να δημιουργήσει έτοι μια θέση στην οποία χάνει ο δεύτερος (βάσει του προηγούμενου συλλογισμού).

2. Αν υπάρχει πάσσαλος συνδεδεμένος με δύο άλλους, τότε ο παικτης που έχει σειρά κερδίζει ενώνοντας αυτούς τους δύο. Επομένως, το παιχνίδι συνεχίζεται για όσο διάστημα υπάρχουν δύο τουλάχιστον «ελεύθεροι» πάσσαλοι (δηλαδή πάσσαλοι που είναι συνδεδεμένοι με έναν μόνο πάσσαλο). Αν το πλήθος των πασσάλων, n , είναι άρτιο, απαιτούνται $n/2$ κινήσεις, ενώ αν είναι περιττό $(n-1)/2$ κινήσεις. Επομένως, ο πρώτος παικτης κερδίζει αν το n διαιρείται με το 4 (δηλαδή αν είναι άρτιο το $n/2$) ή αν το υπόλοιπο της διαιρεσης του n με το 4 ισούται με 1 (αν, δηλαδή, είναι άρτιο το $(n-1)/2$). Αν το υπόλοιπο είναι 2 ή 3, κερδίζει ο δεύτερος.

3. Κερδίζει πάντα ο δεύτερος παικτης. Αφού ο πρώτος παικτης κάνει την κίνησή του, ο δεύτερος μπορεί να κόψει ένα ή δύο πέταλα έτοι ώστε να μοιράσει τα υπόλοιπα σε δύο ίσα τμήματα. Τότε, πλέον, ο δεύτερος παικτης έχει τη δυνατότητα να επαναλαμβάνει τις κινήσεις του πρώτου στο άλλο μισό του λουλουδιού.

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Κάτοπτρο

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ



Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, δημιουργήθηκε ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον, όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους.

Εκεί, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο — μαζί με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης — άνοιξαν ένα βιβλιοπωλείο / εκθετήριο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παραγωγής. Περιμένουμε το αναγνωστικό κοινό να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

Νέα στοά Αρσακείου
(Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου
5), 105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785

Χαλασμένο γάλα

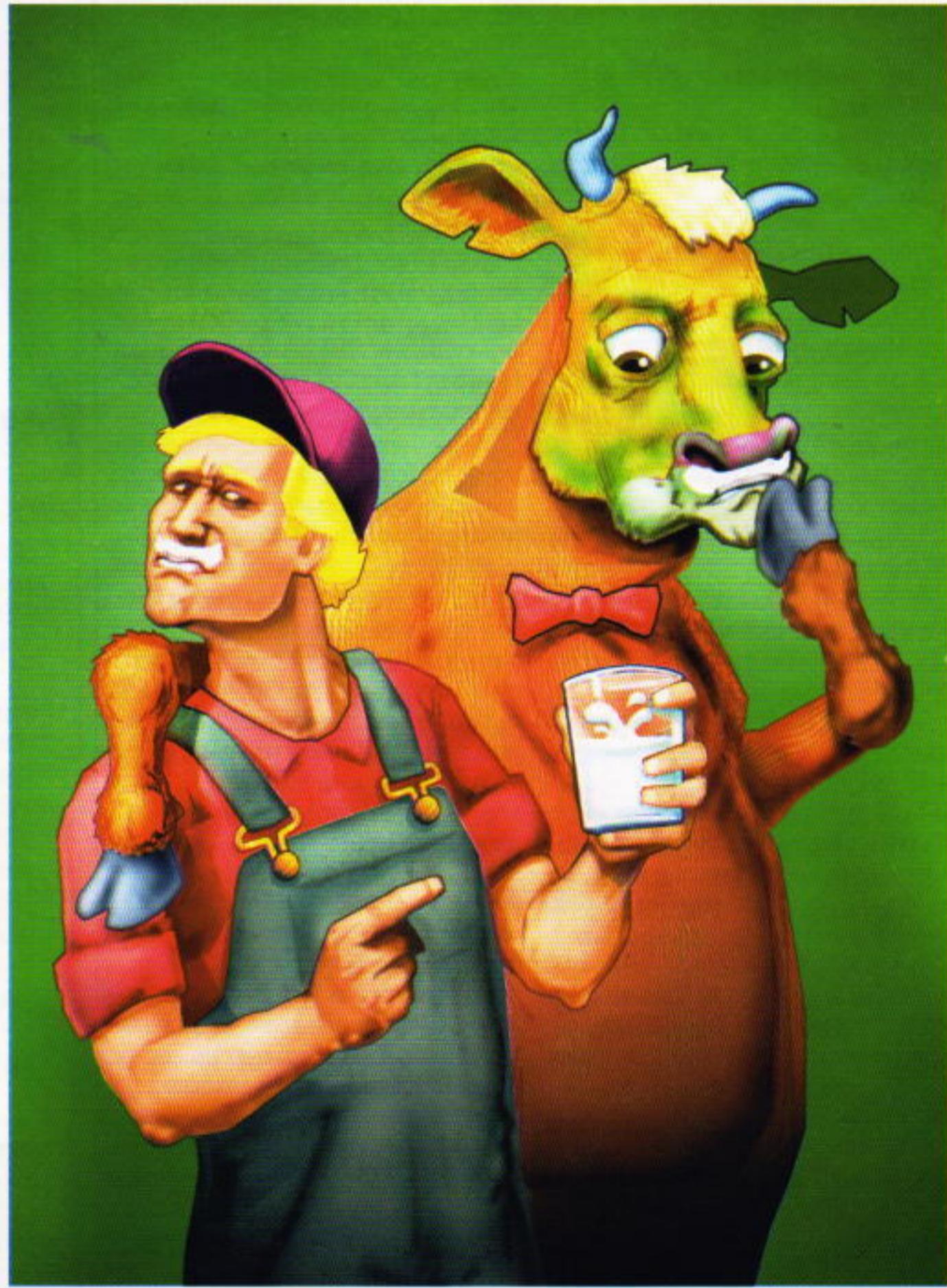
Ενα δυναμικό σύστημα που ξίνισε

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ στους ιππολογισμούς, τη στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά.

Η μέση ημερήσια παραγωγή γάλατος μιας αγελάδας στο κτήμα του κυρίου Πωλ είναι 10 γαλόνια. Το γάλα συλλέγεται αμέσως από τις αμελκτικές μηχανές και συγκεντρώνεται σε ψυκτικούς θαλάμους. Ενα φορτηγό ψυγείο περνά από το κτήμα του κυρίου Πωλ κάθε ημέρα, επι 365 ημέρες το χρόνο, και έτοιμο γάλα που παράγουν οι αγαπητές μου φίλες φτάνει σε μία-δύο μέρες στο γαλακτοπωλείο της γειτονιάς σας, έτοιμο να το απολαύσετε.

Το κλειδί για τη διατήρηση του γάλατος είναι η ψύξη. Χωρίς αυτήν, η διάρκεια ζωής αυτού του γλυκού, υγιεινού προϊόντος στα ράφια των καταστημάτων είναι πολύ σύντομη. Βακτήρια, τα οποία εισέρχονται στο γάλα από πολλές πηγές —καμία από τις οποίες δεν θα ήθελα να σχολιάσω δημοσίως—, αρχίζουν να πολλαπλασιάζονται, και τελικά μετασχηματίζουν το γλυκό νέκταρ των αγελάδων μας σε μια ξινισμένη μάζα. Ο κύριος Πωλ έχει διαπιστώσει ότι η αύξηση των βακτηρίων στο γάλα γίνεται σύμφωνα με ένα Διακριτό Δυναμικό



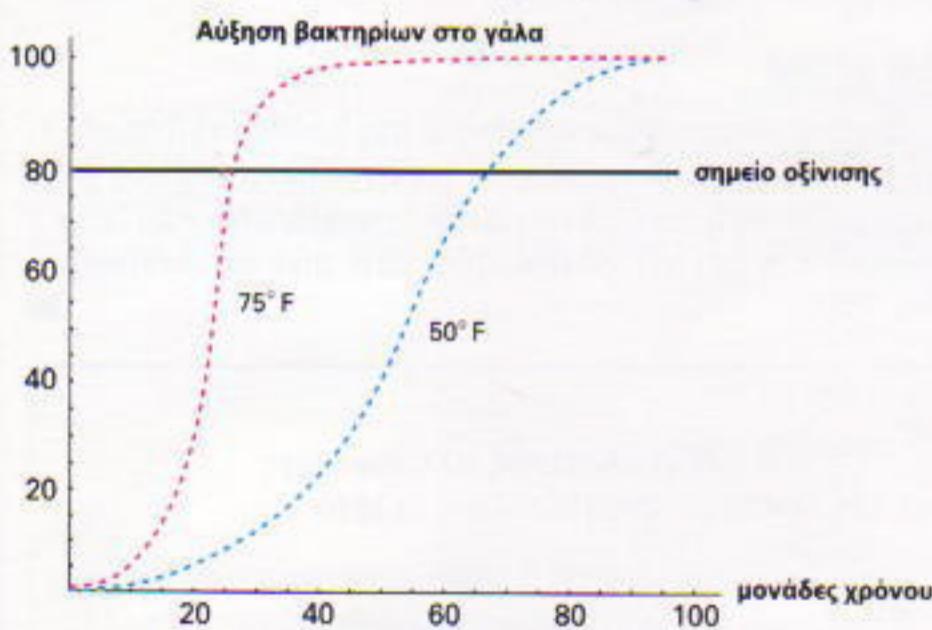
Εικονογράφηση: Mark Brennenan

Σύστημα (ΔΔΣ) παρόμοιο με το μοντέλο που χρησιμοποιείται για να προβλεφθεί η πληθυσμιακή αύξηση των ανθρώπων.

Σύμφωνα με το μοντέλο του κυρίου Πωλ, αν εκτελέσουμε μια ακολουθία μετρήσεων του πλήθους των βακτηρίων στο γάλα σε ίσα χρονικά διαστήματα, τότε η μεταβολή στα απαριθμούμενα βακτηρία ακολουθεί το εξής μοντέλο λογιστικής αύξησης (σημείωση: αν *now* είναι η παρούσα χρονική περίοδος, *now - 1* είναι η προηγούμενη χρονική περίοδος, όπου το 1 παριστά μια σταθερή μονάδα χρόνου· η θερμοκρασία —temperature— μετριέται σε βαθμούς Fahrenheit):

```
Bacteria[0]=1;
Bacteria[now]=Bacteria[now-1]+
(Temperature-32) Bacteria[now-1]
200
(1-Bacteria[now-1])
200
```

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φτάσει ο πληθυσμός των βακτηρίων την ένδειξη 80 είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο ξινίζει το γάλα. Η διάρκειά του εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τη θερμοκρασία αποθήκευσης του γάλατος. Ιδού ένα διάγραμμα της αύξησης των βακτηρίων στο γάλα για δύο θερμοκρασίες, 50°F και 75°F:



Ιδού λοιπόν η σημερινή μας πρόκληση:

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Με δεδομένο το μοντέλο του κυρίου Πωλ για την αύξηση των βακτηρίων στο γάλα, υπολογίστε σε ποια θερμοκρασία ξινίζει το γάλα δύο φορές ταχύτερα απ' όσο στους 50°F.

Λύση του Ιπποπροβλήματος 5

Την τελευταία φορά σάς είχα ζητήσει να μοιράσετε δικαιαία ένα χρηματικό βραβείο σε δύο ομάδες που διέκοψαν τους αγώνες τους πριν συμπληρώσει κάποια από τις δύο 50 νίκες.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Γράψτε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει τα κέρδη κάθε ομάδας σύμφωνα με τον κανόνα του κυρίου Πωλ. Θα υποθέσετε ότι, αν το τρέχον αποτέλεσμα είναι Πανιπικός: H και AET: J , τότε η πθανότη-

τα να κερδίσει τον επόμενο αγώνα ο Πανιπικός είναι $H/(H+J)$, ενώ η πθανότητα να τον κερδίσει η AET είναι $J/(H+J)$. Επίσης, αν η πθανότητα να κερδίσει η AET πρώτη τους 50 αγώνες ισούται με P , τότε πρέπει να πάρει ως μερίδιο τα $P \cdot 1000$ του βραβείου. Αναφέρετε τα αποτελέσματά σας για τη σειρά αγώνων που έληξε με 35 νίκες του Πανιπικού και 41 νίκες της AET.

Έστω $\text{ProbJWins}[H,J]$ η πθανότητα να κερδίσει πρώτη η AET 50 παιχνίδια, όταν μέχρι στιγμής ο Πανιπικός έχει κερδίσει H παιχνίδια και η AET J παιχνίδια. Προφανώς, $\text{ProbJWins}[H,50] = 1$ για $H < 50$, διότι τότε η AET έχει κερδίσει 50 παιχνίδια. Επίσης, $\text{ProbJWin}[50,J] = 0$, για $J < 50$, διότι τότε ο Πανιπικός έχει συμπληρώσει 50 νικηφόρους αγώνες. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από αυτές τις οριακές συνθήκες και να δουλέψουμε με την εξής αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} \text{ProbJWins}[H,J] = & \frac{H}{H+J} \text{ProbJWins}[H+1,J] \\ & + \frac{J}{H+J} \text{ProbJWins}[H,J+1]. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή μας λέει απλώς ότι με δεδομένο το σκορ H προς J , ο μόνος τρόπος να κερδίσει η AET είναι είτε (α) να κερδίσει το επόμενο παιχνίδι (με πθανότητα $H/(H+J)$) ο Πανιπικός και στη συνέχεια να ολοκληρώσει η AET νικηφόρα τη σειρά των αγώνων «ξεκινώντας» από σκορ $H+1$ προς J , είτε (β) να κερδίσει το επόμενο παιχνίδι η AET (με πθανότητα $J/(H+J)$) και στη συνέχεια να ολοκληρώσει νικηφόρα τη σειρά των αγώνων η AET «ξεκινώντας» από σκορ H προς $J+1$. Θα συμβεί ένα μόνο από αυτά τα δύο αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα.

Στο Mathematica® προσδιορίζουμε αυτές τις συνθήκες ως εξής:

```
Clear[ProbJWins]
ProbJWins[H_, 50]:=1/H<50
ProbJWins[50, J_]:=0/J<50
ProbJWins[H_, J_]:=

ProbJWins[H, J]= $\frac{H}{H+J}$  ProbJWins[H+1, J]
+ $\frac{J}{H+J}$  ProbJWins[H, J+1]
```

Το ποσό που θα κερδίσει η AET με δεδομένη τη σειρά αγώνων που έληξε με 35 νίκες του Πανιπικού και 41 νίκες της AET είναι

$1000 \cdot \text{ProbJWins}[35, 41]$

924.09

Καθόλου άσχημα, σε σύγκριση μάλιστα με ότι που θα κέρδιζαν αν είχαμε χρησιμοποιήσει μια από τις άλλες μεθόδους που προτάθηκαν.

Παρατηρούμε ότι σ' αυτό τον υπολογισμό η προηγούμενη απόδοση είναι δείκτης της μελλοντικής απόδοσης, διότι ο παράγοντας $H/(H+J)$ —η πθανότητα να κερδίσει ο Πανιπικός το επόμενο παιχνίδι— ευνοεί τον Πανιπικό όταν προηγείται στο σκορ μέχρι στιγμής. Το συγκεκριμένο πρόβλημα, στην κλασική του μορφή, ονομάζεται

πρόβλημα των σημείων, και χρησιμοποιεί μια σταθερή πθανότητα νίκης, p , σε κάθε παιχνίδι. Σ' αυτή την περίπτωση, η προηγούμενη απόδοση δεν είναι δείκτης της μελλοντικής. Αν υποθέσουμε ότι ο Πανιππικός και η AET είναι απόλυτα ισάξιοι σε κάθε παιχνίδι, τότε σε κάθε αγώνα $p = 0,5$, και εφαρμόζουμε το κλασικό μοντέλο. Θα έχουμε το εξής σύνολο αναδρομικών σχέσεων:

```
Clear[ProbJWins]
ProbJWins[H_, 50]:=1/;H<50
ProbJWins[50, J_]:=0/;J<50
ProbJWins[H_, J_]:=ProbJWins[H,J]=.5
ProbJWins[H+1,J]+.5ProbJWins[H,J+1]
```

Αν χρησιμοποιήσουμε το κλασικό μοντέλο για μια σειρά αγώνων που έληξε με 35 νίκες του Πανιππικού και 41 νίκες της AET, καταλήγουμε στο ακόλουθο χρηματικό έπαθλο για την AET:

```
1000.ProbJWins[35,41]
894.98
```

Η διαφορά δεν είναι τόσο μεγάλη όσο θα περίμενε κανείς. Μόνο 30 δολάρια λιγότερα. Αυτή η κλασική μορφή του προβλήματος τέθηκε για πρώτη φορά το 1654 στον γάλλο μαθηματικό Pascal, με τη μορφή ενός προβλήματος χαρτοπαιξίας: πώς να μοιραστεί το στοίχημα σε μια παρτίδα που διακόπηκε πριν ολοκληρωθεί, με δεδομένη την παρούσα κατάσταση της παρτίδας. Στην κλασική περίπτωση υπάρχει μια μαθηματική λύση κλειστής μορφής, όχι όμως και στο Ιπποπρόβλημα 5. Εδώ χρειαζόμαστε έναν ιππολογιστικό αλογόριθμο.

Μια λύση προσομοίωσης

Μια άλλη μέθοδος λύσης αυτού του προβλήματος είναι η προσομοίωση της πραγματικής σειράς των αγώνων, όπου αποφασίζουμε το ποιος κερδίζει κάθε φορά χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς. Σύμφωνα με τον κανόνα του κυρίου Πωλ, όταν το τρέχον αποτέλεσμα είναι Πανιππικός: H και AET: J , η AET κερδίζει τον επόμενο αγώνα αν $\text{Random}[] < J/(H+J)$. Διαφορετικά, κερδίζει ο Πανιππικός (η $\text{Random}[]$ επλέγει έναν τυχαίο αριθμό μεταξύ 0 και 1). Όταν φτάσει μια ομάδα τις 50 νίκες, η σειρά ολοκληρώνεται. Έτσι, ξεκινάμε με το αποτέλεσμα Πανιππικός: 35, AET: 41 και βλέπουμε ποιος φτάνει πρώτος στις 50 νίκες. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία 1.000 φορές και υπολογίζουμε το ποσοστό των περιπτώσεων που η AET φτάνει πρώτη στις 50 νίκες.

Ο Morton Goldberg έστειλε μια μεταγλωττισμένη λύση σε Mathematica. Ιδού μια παραλλαγή της λύσης του:

Ξεκινάμε οριζόντας τη συνάρτηση Play , η οποία παίρνει την τρέχουσα κατάσταση του παιχνιδιού {νίκες του Πανιππικού, νίκες της AET, στόχος}, παίζει έναν αγώνα, και ενημερώνει την κατάσταση του παιχνιδιού. Από τη στιγμή που μια ομάδα φτάσει στο στόχο, η κατάσταση του παιχνιδιού παραμένει η ίδια:

```
Play[s_]:=Module[{h=s[[1]],j=s[[2]]},
  If[Random[]<j/(h+j),{h,j+1,s[[3]]},
  {h+1,j,s[[3]]}]];
Play[s_]:=/;Max[s[[1]],s[[2]]]==s[[3]]
```

Η σειρά τερματίζεται από τη στιγμή που θα φτάσει μια ομάδα στο στόχο (50 νίκες), οπότε η Play παραμένει σταθερή. Στο Mathematica αυτό το ελέγχει η συνάρτηση FixedPoint . Χρειάζεται τώρα να καταγράψουμε πόσες φορές φτάνει κάθε ομάδα πρώτη στις 50 νίκες. Ορίζουμε τη συνάρτηση Tally : αν φτάσει πρώτος το στόχο ο Πανιππικός, αυξάνουμε κατά ένα το πλήθος των κερδισμένων σειρών αγώνων για τον Πανιππικό, διαφορετικά το αυξάνουμε για την AET:

```
Tally[s_]:=If[s[[1]]==s[[3]],Panippikos++,AET++];
```

Το μόνο που απομένει είναι να θέσουμε τις μεταβλητές ίσες με το μηδέν και να ορίσουμε τις αρχικές συνθήκες:

```
{Panippikos=0,AET=0};
standing={35,41,50};
```

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία 1.000 φορές και τυπώνουμε το αποτέλεσμα:

```
Do[Tally[FixedPoint[Play,standing]],{1000}];
{Panippikos,AET,N[AET/(AET+Panippikos),3]}
{69931,0.931}
```

Ο Morton Goldberg υπολόγισε τον μέσο όρο 10 ανεξάρτητων προσομοιώσεων και βρήκε ότι $P = 0,925 \pm 0,003$, από όπου προκύπτει βραβείο 925 δολαρίων για την AET. Η τιμή αυτή βρίσκεται πολύ κοντά στην αναλυτική λύση των 924,09 δολαρίων.

Και τέλος...

Στείλτε τους ιππολογισμούς σας στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Για να δείτε όλα τα προηγούμενα θέματά μας, ανατρέξτε στη διεύθυνση <http://usaco.uwp.edu/cow-culations>, ή στα τεύχη του *Quantum* από τον Ιανουάριο του 1997. 

Περισσότερες πληροφορίες στον Παγκόσμιο Ιστό

Παραθέτουμε έναν κατάλογο διευθύνσεων στο World Wide Web που αναφέρονται σε διάφορα άρθρα του παρόντος τεύχους για το LTG.

- Βιόσφαιρα 2: www.bio2.org
- High Performance Systems, Inc. (STELLA): www.hps-inc.com
- Ventana Systems, Inc. (Vensim): www.vensim.com
- Matthias Ruth: web.bu.edu/CEES/readmoreMR.html

Η λέσχη της Ρώμης έχει τη δική της διεύθυνση στον Παγκόσμιο Ιστό (www.ClubOfRome.org), όπου μπορείτε να βρείτε την ιστορία της οργάνωσης, μια «επιτομή» του *The Limits to Growth*, και πολλούς χρήσιμους συνδέσμους.

Μια διεύθυνση στο Πανεπιστήμιο του Ιλλινόις από την οποία μπορείτε να μεταφέρετε αρχεία (ftp.ncsa.uiuc.edu/GlobalModels/SoftWare) διαθέτει μια εκδοχή του μοντέλου Κόσμος 3 για Mac, η οποία περιέχει εκπαιδευτικό υλικό (BeyondTheLimits.Mac.SEAS.hpx) και άλλα ενδιαφέροντα στοιχεία.

Μπορείτε επίσης να αναζητήσετε στον Παγκόσμιο Ιστό πολλές άλλες διευθύνσεις, εισάγοντας όρους όπως «system dynamics», «sustainability», «World3» κ.ά.

Francis Crick

ΜΙΑ ΕΚΠΛΗΚΤΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

Η επιστημονική αναζήτηση της ψυχής

ΣΕΙΡΑ: Εγκέφαλος και Νόηση

«Περισσότερο ίσως από οποιονδήποτε άλλο, ο Crick είναι αυτός που μας προσέφερε τη σύγχρονη κατανόηση της μοριακής βάσης της ζωής. Τώρα μας προσφέρει μια εκπληκτική υπόθεση στη σύγχρονη επιστήμη του εγκεφάλου απολαύστε τον.»

—CARL SAGAN, αστροφυσικός

«Διάβασα το βιβλίο με θαυμασμό. Ο Crick συνθέτει σε ένα συνεκτικό οικοδόμημα πληροφορίες, παρατηρήσεις και δεδομένα από ευρύτατο φάσμα διαφορετικών επιστημονικών τομέων. Οπωσδήποτε θα ενθουσιάσει και θα γοτεύσει ένα εξίσου ευρύ φάσμα αναγνωστών.»

—OLIVER SACKS, νευροβιολόγος

«Είναι αξιοθαύμαστη η ικανότητά του να διεισδύει στον πυρήνα των επιστημονικών προβλημάτων, χωρίς να χάνει την επαφή του με τον μη ειδικό αναγνώστη. Κατορθώνει να μας οδηγήσει στα βαθύτερα ζητήματα της επιστήμης του εγκεφάλου και της νόησης. Το βιβλίο του είναι απαραίτητο σε κάθε ανήσυχο αναγνώστη.»

—PATRICIA CHURCHLAND,
φιλόσοφος

«Ο Crick εγκύπτει στο πιο μυστηριώδες πρόβλημα του σύμπαντος: τη φύση της συνείδησης. Αναλύει με εντυπωσιακή δεξιοτεχνία τα πιο σύγχρονα δεδομένα της έρευνας, χωρίς να απαιτεί από τον αναγνώστη του ειδικές γνώσεις, παρά μόνο αληθινό ενδιαφέρον.»

—STUART SUTHERLAND,
Daily Telegraph

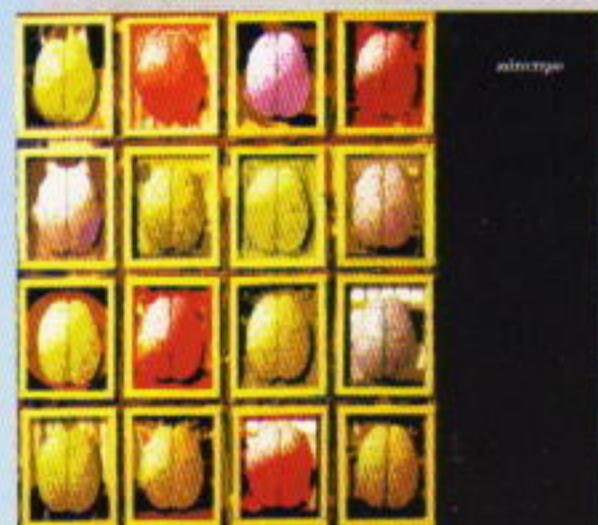
«Ο νομπελίστας Crick διατηρεί την πολυπόθητη εκείνη περιέργεια που οδηγεί τους ανθρώπους προς την επιστήμη. Δεν θα δει τον 21ο αιώνα να εκτυλίσσεται, όμως, το πιθανότερο, χάρη σ' αυτόν θα είναι πολύ πιο ενδιαφέρων...»

—The Times Higher Educational
Supplement



Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε στο βιβλιοπωλείο των Εκδόσεων Κάτοπτρο, στη Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πειραιάς 5), τηλ.: 3247785, καθώς επίσης και σε όλα τα καλά βιβλιοπωλεία. Αν θέλετε μπορούμε να σας το ταχυδρομήσουμε τα έξοδα αποστολής θα επιβαρύνουν εμάς.

Γράψτε μας ή τηλεφωνήστε μας:
Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ιανόρων 10, 114 71 Αθήνα.
Τηλ.: 3643272, 3645098
Fax: 3641864



ΜΙΑ ΕΚΠΛΗΚΤΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

Η επιστημονική αναζήτηση της ψυχής

FRANCIS CRICK

Νέαντζ Ιταλίας

Σελ.: 441, Μέγ.: 14 x 21 εκ., 7.000 δρχ.

Πριν σαράντα χρόνια οι Francis Crick και James Watson έγραψαν ιστορία ανακαλύπτοντας τη δομή του DNA· το επίτευγμά τους έμελλε να αλλάξει για πάντα την αντίληψή μας για τη ζωή. Τώρα ο Crick έχει στρέψει το ενδιαφέρον του στο μυστήριο της ανθρώπινης συνείδησης, και βρίσκεται για άλλη μία φορά στην πρώτη γραμμή της επιστημονικής έρευνας.

Έχει αφοσιωθεί στην προσπάθεια να αποκρυπτογραφήσει την πολυπλοκότητα του εγκεφάλου και, κυρίως, να «χαρτογραφήσει» τη νευροβιολογία της όρασης.

Ο καρπός των εργασιών του —το παρόν βιβλίο— είναι μια σαφής, εμπεριστατωμένη, οξυδερκής και λεπτομερής ανάλυση του τρόπου με τον οποίο «βλέπει» ο εγκέφαλος, και, ταυτόχρονα, μια τολμηρή εξερεύνηση των θεμελιωδέστερων ζητημάτων της ανθρώπινης ύπαρξης: Έχουμε ελεύθερη βούληση; Τι ακριβώς είναι αυτό που μας καθιστά νοήμονα όντα και μας διαφοροποιεί από τα άλλα ζώα; Υπάρχει ψυχή;

Ή μήπως δεν είμαστε τίποτε άλλο παρά μια ασύλληπτα πολύπλοκη συλλογή νευρώνων;

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ