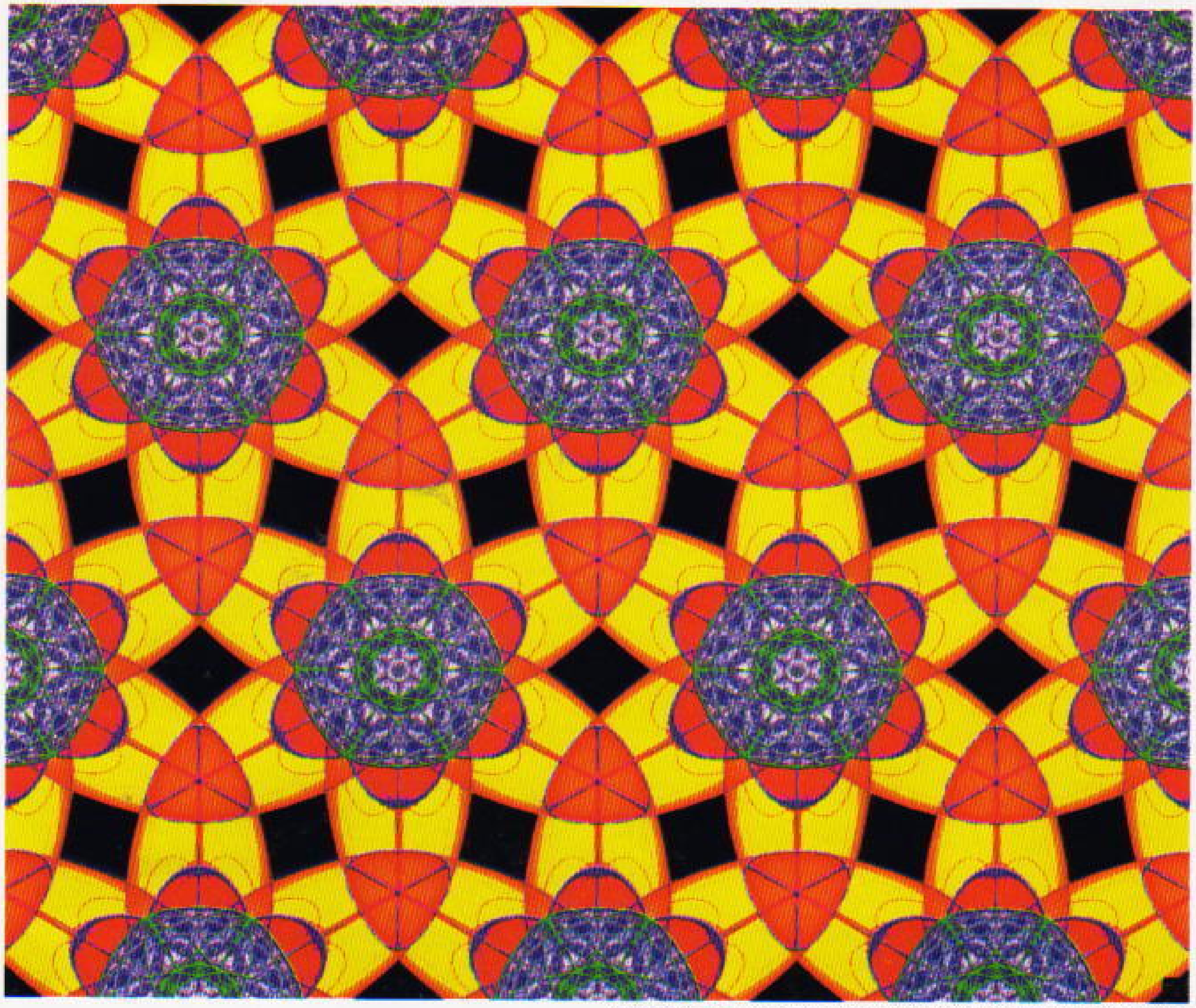
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1997
ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 4
1.500 ΔΡΧ.

- *Συνέντευξη με τον Γιάννη Μοσχοβάκη*
- *Υπάρχει στοιχειώδες μήκος;*
- *Ταχύτητα του φωτός: το έσχατο όριο*
- *Πλακοστρώσεις και συμμετρία*
- *Πλανήτης Γη: το αρχαιότερο χρονόμετρο*
- *Πρόσθεση γωνιών στις τρεις διαστάσεις*
- *Μαγνήτες, φορτία και πλανήτες*
- *Πυκνότητα: γνωρίζετε τα πάντα γι' αυτήν;*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



Από το βιβλίο *Συμμετρία στο χάος* © 1992 Michael Field και Martin Golubitsky

Ολλανδικό πάπλωμα (1992) των Michael Field και Martin Golubitsky

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΑΠΟΤΕΛΟΥΣΕ ΠΑΝΤΟΤΕ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΣΤΟΙχείο στην τέχνη. Οι μαθηματικοί Michael Field και Martin Golubitsky, στο βιβλίο τους *Symmetry in Chaos: A Search for Pattern in Mathematics, Art and Nature*, προσφέρουν πάμπολλα παραδείγματα τέτοιας συμμετρίας, από ένα ακτινωτό παράθυρο στον καθεδρικό ναό της Σαρτρ έως το σήμα μιας Mercedes Benz.

Αλλά και η φύση είναι πλήρης συμμετρίας —εύλογα μπορούμε να αναρωτηθούμε κατά πόσον θα ήταν τόσο συμμετρική η τέχνη μας αν δεν υπήρχε τόση συμμετρία στη φύση. Ωστόσο, και σε βαθμό που δεν τον συναντάμε στην τέχνη, η φύση είναι χαοτική. Ένα χαοτικό σύστημα είναι απρόβλεπτο, περίπλοκο και ευαίσθητο στις αρχικές συνθήκες. Συχνά περιγράφεται με ένα αξιοσημείωτα περιεκτικό σύνολο κανόνων —ανεπαίσθητες όμως παρεκκλίσεις από αυτούς οδηγούν σε εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα.

Οι Field και Golubitsky δεν προσφέρουν μόνο μια οπτική πανδαισία από συμμετρικές εικόνες, «παπλώματα» και συμμετρικά φράκταλ, αλλά και τα μαθηματικά που κρύβονται πίσω τους, καθώς και τον κώδικα σε QuickBasic που τις δημιουργεί. Μπορείτε να βρείτε πολλές από τις εικόνες του βιβλίου καθώς και τον αντίστοιχο κώδικα προγράμματος στη διεύθυνση http://math.uh.edu/~chaos.

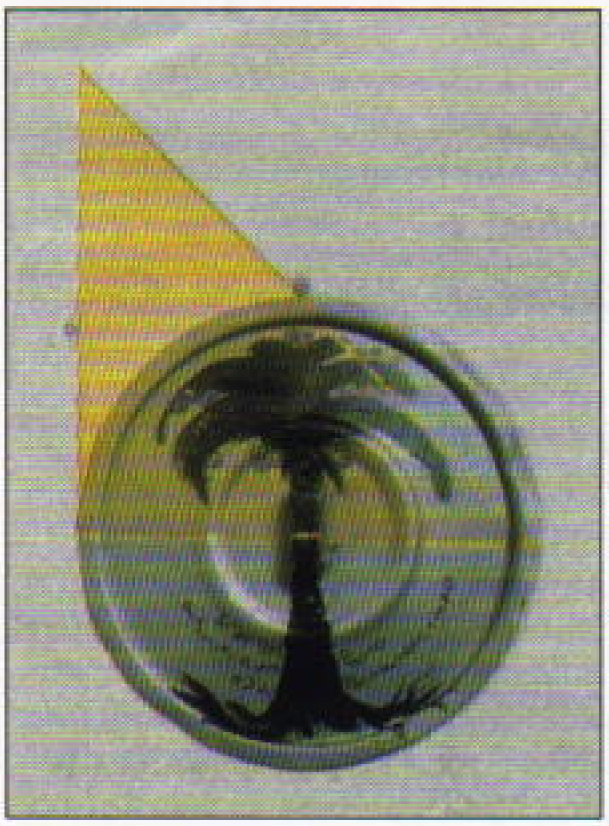
Παρότι οι συγγραφείς ονομάζουν το εικονιζόμενο σχέδιο «Ολλανδικό πάπλωμα», αυτό μας θυμίζει επίσης τα σχήματα που βλέπουμε σ' ένα καλειδοσκόπιο. Το «Ολλανδικό πάπλωμα» βασίζεται, όπως και τα σχήματα του καλειδοσκοπίου, σε μια εξαγωνική πλακόστρωση του επιπέδου.

Για να ανακαλύψετε πλευρές του καλειδοσκοπίου πολύ διαφορετικές από αυτές του απλού κυλινδρικού παιχνιδιού, περάστε στη σελίδα 4 και αρχίστε να κοιτάτε...

QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1997

ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 4



Εικονογράφηση: Yury Vashchenko

«Η ευγένεια υποχρεώνει», ενώ μια ανάγωγη συμπεριφορά προκαλεί πολλές φορές προβλήματα. Είναι εντυπωσιακό όμως το πλήθος των προβλημάτων που συνδέονται με τον «ανάγωγο» χαρακτήρα ορισμένων πολυωνύμων.

Αν δουλέψετε υπομονετικά με το άρθρο της σελίδας 40, θα αντιληφθείτε την ισχυρή σύνδεση που υπάρχει μεταξύ των *άρρητων αριθμών* και των *ανάγωγων πολυωνύμων*. Μια σύνδεση που, όπως θα δείτε, έχει πραγματικά αρχαίες ρίζες.

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Ταχύτητα του φωτός: το έσχατο όριο

*«Ο ήλιος κυκλοδίωκτος, ως αράχνη, μ' εδίπλωνε
και με φως και με θάνατον ακαταπαύστως.»*
—Ανδρέας Κάλβος

W. Daniel Hillis

Πιθανότατα έχετε ακούσει ότι τίποτε δεν μπορεί να κινηθεί ταχύτερα από το φως· αναρωτηθήκατε όμως ποτέ γιατί ισχύει ο νόμος αυτός; Τι συμβαίνει όταν ταξιδεύετε με το διαστημόπλοιό σας και αναπτύσσοντας συνεχώς μεγαλύτερη ταχύτητα φτάνετε το φράγμα του φωτός; Μήπως λιώνουν ξαφνικά οι κρύσταλλοι διλιθίου που προσφέρουν την κινητήρια ισχύ στη μηχανή σας; Μήπως εξαφανίζεστε από το γνωστό σύμπαν; Μήπως αρχίζετε να πηγαίνετε πίσω στο χρόνο; Τίποτε απ' όλα αυτά. Μην αισθάνεστε άσχημα, όμως, αν δεν γνωρίζετε την απάντηση· κανείς στον κόσμο δεν τη γνώριζε, ώσπου την ανακάλυψε ο Άλμπερτ Αϊνστάιν.

Ο ευκολότερος τρόπος για να καταλάβετε την εξήγηση του Αϊνστάιν είναι να κατανοήσετε την απλή εξίσωση, την οποία έχετε πιθανότατα ξαναδεί: $E = mc^2$. Για να την κατανοήσουμε, ας θεωρήσουμε μια παρόμοια εξίσωση, η οποία αφορά τη μετατροπή τετραγωνικών εκατοστομέτρων σε τετραγωνικά μέτρα. Εάν λ είναι ο αριθμός των τετραγωνικών εκατοστομέτρων και κ ο αριθμός των τετραγωνικών μέτρων, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση: $\lambda = 10.000\kappa$. Ο παράγοντας 10.000 μπορεί να γραφεί και ως 100^2 (θυμηθείτε ότι 1 μέτρο περιλαμβάνει 100 εκατοστόμετρα). Ένας άλλος τρόπος για να γράψουμε την ίδια εξίσωση θα ήταν $\lambda = \kappa c^2$, όπου το c στην προκειμένη περίπτωση ισούται με 100 εκατοστόμετρα ανά μέτρο. Έτσι, μπορούμε μέσω της συγκεκριμένης εξίσωσης να μετατρέπουμε οποιαδήποτε μέτρηση επιφάνειας σε οποιαδήποτε άλλη· μόνο η σταθερά c θα διαφέρει. Για παράδειγμα, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετατροπή τετραγωνικών δεκατομέτρων σε τετραγωνικά μέτρα, οπότε το c θα ισούται με 10, δηλαδή με τον αριθμό των δεκατομέτρων ανά μέτρο. Το c^2 είναι απλώς η σταθερά μετατροπής.

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει επειδή τα τετραγωνικά εκατοστόμετρα και τα τετραγωνικά μέτρα αποτελούν διαφορετικούς τρόπους μέτρησης του ίδιου πράγματος· εκφράζουν το ίδιο πράγμα: το εμβαδόν. Προς έκπληξη όλων, ο Αϊνστάιν συνειδητοποίησε ότι η ενέργεια και η μάζα αποτελούν επίσης δύο διαφορετικούς τρόπους μέτρησης του ίδιου πράγματος. Αποδεικνύεται ότι μια ελάχιστη ποσότητα μάζας ισούται με μια τεράστια ποσότητα ενέργειας, άρα στην εξίσωση η σταθερά μετατροπής είναι πάρα πολύ μεγάλη. Για παράδειγμα, εάν μετρήσουμε τη μάζα σε χιλιόγραμμα και την ενέργεια σε τζάουλ, η εξίσωση μπορεί να γραφεί: $E = m \cdot 90.000.000.000.000.000$. Αυτό σημαίνει, για παράδειγμα, ότι μια φορτισμένη μπαταρία (η οποία περιέχει ενέργεια περίπου 1.000.000 τζάουλ) ζυγίζει περίπου 0,00000000001 χιλιόγραμμα περισσότερο από μια μπαταρία η οποία έχει αποφορτιστεί.

Εάν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές μονάδες, η σταθερά μετατροπής θα διαφέρει. Για παράδειγμα, εάν μετρήσουμε τη μάζα σε τόνους και την ενέργεια σε θερμίδες, τότε το c^2 θα ισούται με 376.830.000.000.000. (Παρεμπιπτόντως, αποδεικνύεται ότι σε κάθε δεδομένο σύστημα μονάδων η σταθερά μετατροπής ισούται πάντοτε με την ταχύτητα του φωτός στις συγκεκριμένες μονάδες —αλλά αυτό είναι μια άλλη ιστορία.) Εάν μετρούσαμε τόσο την ενέργεια όσο και τη μάζα χρησιμοποιώντας αυτό που οι φυσικοί ονομάζουν «φυσικές μονάδες» (στις οποίες $c = 1$), θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση: $E = m$, η οποία γίνεται ευκολότερα κατανοητή· σημαίνει απλώς ότι ενέργεια και μάζα είναι το ίδιο πράγμα.

Δεν έχει σημασία αν η ενέργεια είναι ηλεκτρική, χημική ή και πυρηνική. Το βάρος ανά μονάδα ενέργειας είναι πάντοτε το ίδιο. Η εξίσωση «δουλεύει» ακόμη και με την κινητική ενέργεια. Για παράδειγμα, όταν ρίχνω μια μπάλα του μπέιζμπολ, της προσδίδω ενέργεια ωθώντας τη με το χέρι μου. Σύμφωνα με την εξίσωση του Αϊνστάιν, τότε η μπάλα αποκτά πρόσθετη μάζα, ουσιαστικά γίνεται βαρύτερη. (Εδώ ένας φυσικός ίσως θα έδειχνε υπερβολική σχολαστικότητα, διακρίνοντας ένα πράγμα που γίνεται βαρύτερο από ένα άλλο που αυξάνει τη μάζα του, αλλά νομίζω ότι αυτή η επιμονή δεν έχει ουσιαστική αξία για τη συζήτησή μας. Το βασικό είναι ότι η ρίψη της μπάλας καθίσταται δυσκολότερη.) Όσο μεγαλύτερη είναι λοιπόν η ταχύτητα με την οποία πετώ την μπάλα, τόσο βαρύτερη γίνεται. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Αϊνστάιν, $E = mc^2$, υπολογίζω ότι, εάν μπορούσα να πετάξω μια μπάλα του μπέιζμπολ με ταχύτητα 160 χιλιομέτρων την ώρα (κάτι αδύνατο για μένα, αλλά όχι και για έναν καλό παίκτη του μπέιζμπολ), τότε η μπάλα στην πραγματικότητα θα βάραινε κατά 0,000000000002 γραμμάρια —που δεν είναι πολλά.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο διαστημόπλοιό σας. Ας υποθέσουμε ότι οι κινητήρες του τροφοδοτούνται αντλώντας ενέργεια από κάποια εξωτερική πηγή, ώστε να μη χρειάζεται να ανησυχείτε για τη μεταφορά καυσίμων. Καθώς αυξάνετε την ταχύτητα του διαστημοπλοίου σας όλο και περισσότερο, του προσδίδετε όλο και περισσότερη ενέργεια· επομένως, το σκάφος θα γίνεται όλο και βαρύτερο. (Και πάλι, ακριβέστερα θα έπρεπε να λέω «αποκτά μεγαλύτερη μάζα» και όχι «γίνεται βαρύτερο»· τι νόημα μπορεί να έχει στο Διάστημα η δεύτερη έκφραση;) Όταν θα έχετε φτάσει στο 90% της ταχύτητας του φωτός, το σκάφος σας θα έχει αποκτήσει τόση ενέργεια ώστε ουσιαστικά θα διαθέτει διπλάσια μάζα από όση είχε στην κατάσταση ηρεμίας. Επειδή είναι τόσο βαρύ, οι κινητήρες του δυσκολεύονται να το επιταχύνουν όλο και περισσότερο. Όσο προσεγγίζετε την ταχύτητα του φωτός, το αποτέλεσμα της δράσης των κινητήρων γίνεται όλο και πιο πενιχρό —όσο περισσότερη ενέργεια έχει το σκάφος, τόσο βαρύτερο γίνεται, άρα τόσο περισσότερη ενέργεια απαιτείται για να επιταχυνθεί έστω και ελάχιστα, οπότε γίνεται ακόμη βαρύτερο, κ.ο.κ.

Τα πράγματα είναι ακόμη χειρότερα απ' ό,τι θα μπορούσατε να φανταστείτε, εξαιτίας όσων συμβαίνουν στο εσωτερικό του σκάφους. Τα πάντα, μαζί κι εσείς, επιταχύνονται αποκτώντας συνεχώς μεγαλύτερη ενέργεια, με αποτέλεσμα να καθίστανται όλο και

Η συνέχεια στη σελ. 35 ⇨

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιώτες, 14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.


Рис. 2. Обычный калейдоскоп

Περί καλειδοσκοπίων

Μια πολυδιάστατη μαθηματική θεώρηση

E.B. Vinberg

ΤΟ ΚΑΛΕΙΔΟΣΚΟΠΙΟ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΟΠΟΥ οι πολλαπλές αντανακλάσεις μικρών χρωματιστών κομματιών γυαλιού σε τρία κάτοπτρα δημιουργούν εντυπωσιακά σχήματα. Τα κάτοπτρα είναι τοποθετημένα όπως οι τρεις έδρες ενός κανονικού τριγωνικού πρίσματος και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες ίσες με $\pi/3$. Αν ήταν διαφορετικές οι τιμές των γωνιών, τότε, γενικά, θα είχαμε επικάλυψη των ειδώλων, και τα συμμετρικά σχήματα δεν θα εμφανίζονταν. Πάντως, υπάρχουν μερικές εξαιρέσεις που θα συναντήσουμε στη συνέχεια του άρθρου.

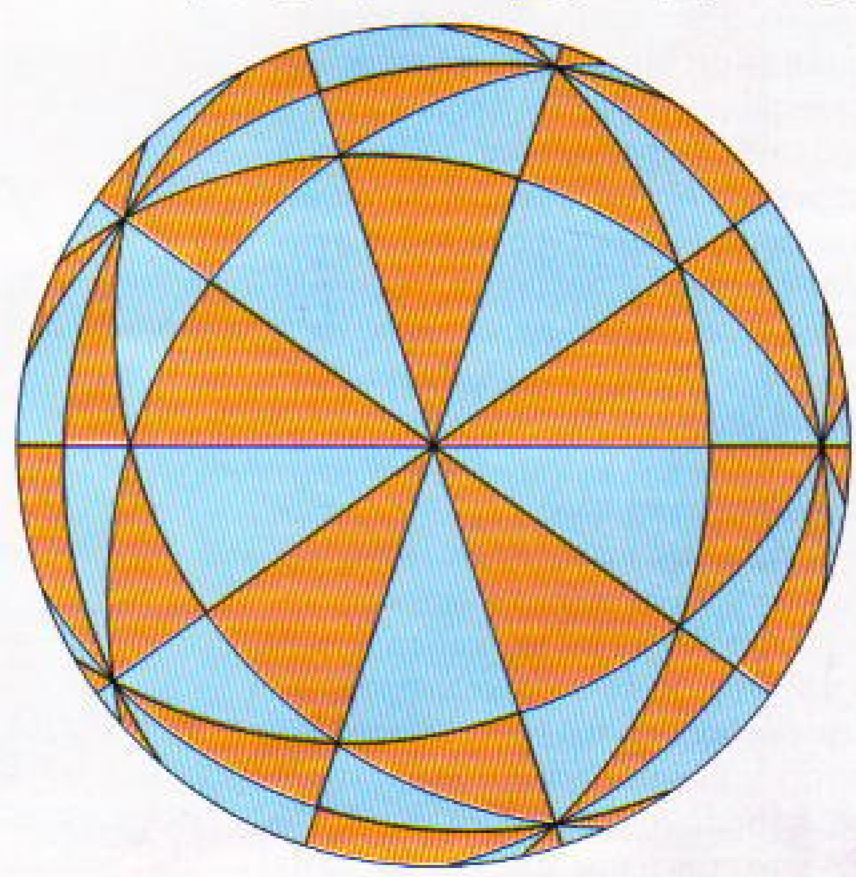
Το συνηθισμένο καλειδοσκόπιο που μόλις περιγράψαμε είναι στην πραγματικότητα δισδιάστατο, αφού σ' αυτό παρατηρούμε απλώς ένα επίπεδο σχήμα. Μπορούμε να φανταστούμε ένα τρισδιάστατο καλειδοσκόπιο, μια πολυεδρική αίθουσα με καθρέφτες στους τοίχους. Ένας παρατηρητής τοποθετημένος στο εσωτερικό της θα έβλεπε επαναλαμβανόμενα είδωλα όλων των αντικειμένων που υπάρχουν στην αίθουσα. Τα είδωλα θα επικαλύπτονται, εκτός από λίγες ιδιαίτερες περιπτώσεις, που θα τις αναφέρουμε στη συνέχεια και στις οποίες εμφανίζεται ένα συμμετρικό τρισδιάστατο σχήμα.

Χωρίς να αναφερθούμε στο ζήτημα της υλοποίησής τους, μπορούμε να μιλήσουμε για πολυδιάστατα καθώς και για μη ευκλείδεια καλειδοσκόπια—δηλαδή για καλειδοσκόπια στη σφαίρα και στο χώρο Lobachevsky. Ο άγγλος μαθηματικός H.S.M. Coxeter δημοσίευσε το 1934 μια πλήρη περιγραφή όλων των καλειδοσκοπίων στον ευκλείδειο χώρο καθώς και σε σφαίρες οποιασδήποτε διάστασης. Το εξώφυλλο της ρωσικής μετάφρασης του βιβλίου του Coxeter παρουσιάζει ένα καλειδοσκόπιο σε μια συνηθισμένη (δισδιάστατη) σφαίρα (Σχήμα 1). Υπάρχει μια στενή σχέση των σφαιρικών καλειδοσκοπίων με τα κανονικά πολύεδρα την οποία θα εξετάσουμε λεπτομερέστερα στη συνέχεια.

Στα τέλη του προηγούμενου αιώνα, οι Poincaré και Klein χρησιμοποίησαν τα καλειδοσκόπια του επιπέδου Lobachevsky κατά τις έρευνές τους στη θεωρία των μερόμορφων συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής. Το 1958-1960, ο σπουδαίος ολλανδός ζωγράφος M.C. Escher βασίστηκε σ' αυτά για να δημιουργήσει εντυπωσιακά σχέδια.

Από το 1965 τα καλειδοσκόπια στο χώρο Lobachevsky έχουν γίνει αντικείμενο εντατικής έρευνας σε σύνδεση με συγκεκριμένα προβλήματα της θεωρίας ομάδων. Απέχουμε ακόμη πολύ από την πλήρη περιγραφή τέτοιων καλειδοσκοπίων σε χώρους οποιασδήποτε διάστασης. Υπάρχει ένα απρόσμενο θεώρημα (που το έχει αποδείξει ο συγγραφέας του παρόντος άρθρου) το οποίο βεβαιώνει ότι δεν υπάρχουν καλειδοσκόπια στον n-διάστατο χώρο Lobachevsky αν $n \geq 30$. Παραδείγματα τέτοιων καλειδοσκοπίων είναι γνωστά μόνο για $n \leq 8$.

Εκτός από τις εφαρμογές τους στη γεωμετρία (κανονικά πολύεδρα), τη θεωρία συναρτήσεων μιγαδικής με-

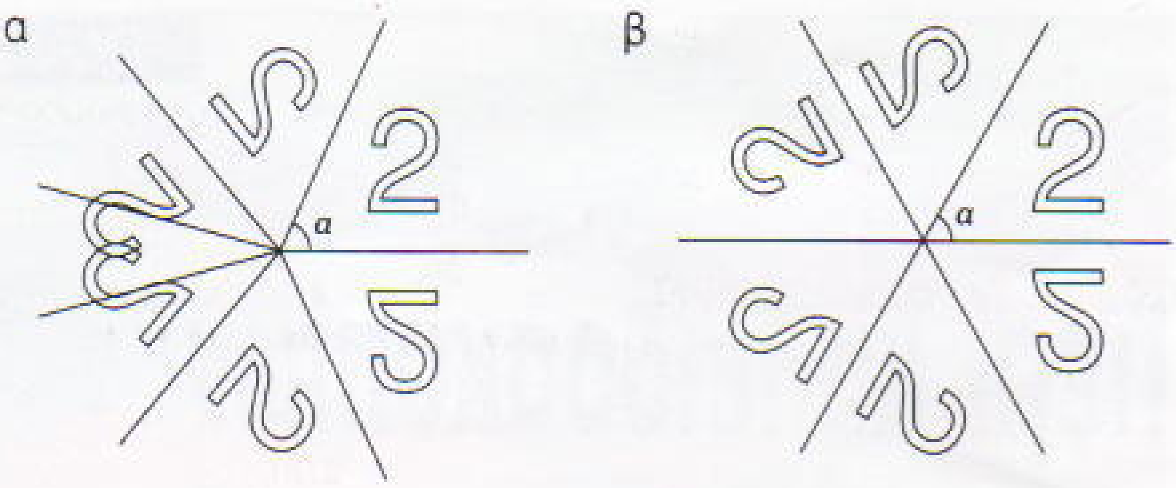


Σχήμα 1

Εικονογράφηση: V. Ivanyuk

ταβλητής και τη θεωρία ομάδων, τα καλειδοσκόπια παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία αριθμών, τη θεωρία των αλγεβρών Lie, την αλγεβρική γεωμετρία και σε πολλούς άλλους κλάδους των μαθηματικών. Πάντως, πρέπει να επισημάνω ότι η λέξη «καλειδοσκόπιο» δεν εμφανίζεται στη μαθηματική βιβλιογραφία. Οι μαθηματικοί προτιμούν να μιλούν για μια «διακριτή ομάδα παραγόμενη από κατοπτρισμούς».

Σε τούτο το άρθρο δεν θα έχουμε την ευκαιρία να εξετάσουμε τις εφαρμογές των καλειδοσκοπίων (με εξαίρεση τη σύνδεση των σφαιρικών καλειδοσκοπίων και των κανονικών πολυγώνων). Ωστόσο, η μελέτη των καλειδοσκοπίων αυτών καθ' εαυτά κατέχει σημαντική θέση στο πεδίο της γεωμετρίας.



Σχήμα 2

Θεμελιώδης ιδιότητα

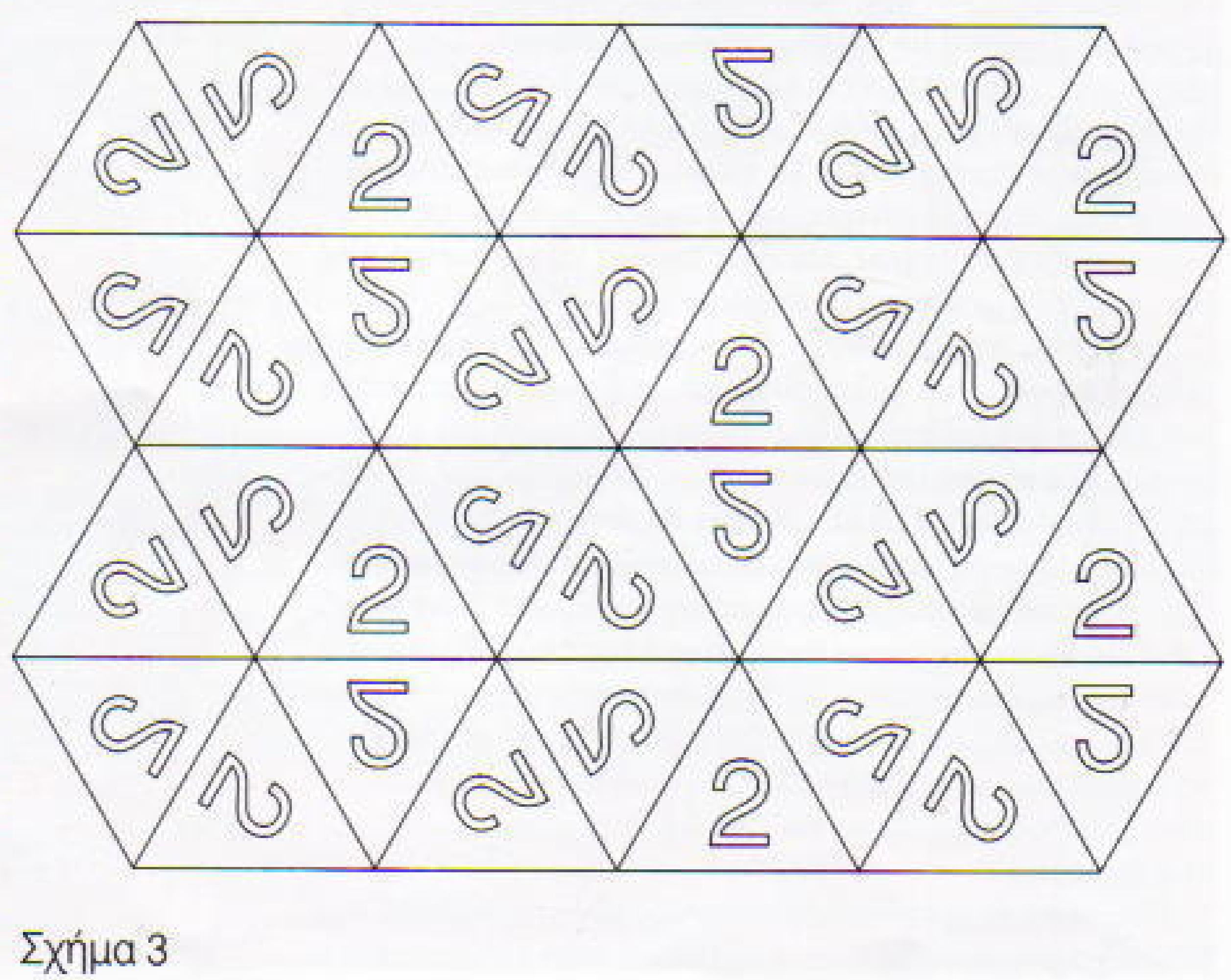
Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των καλειδοσκοπίων θεωρώντας την απλούστερη περίπτωση: δύο κάτοπτρα που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία α. Αν $\alpha = \pi/k$ για κάποιο ακέραιο k, θα λέμε ότι η α είναι *ακέραιο υποπολλαπλάσιο* του π. Αν η α δεν είναι ακέραιο υποπολλαπλάσιο του π, τότε (δείτε το Σχήμα 2α) τα είδωλα ενός αντικειμένου που τοποθετείται ανάμεσα στα κάτοπτρα επικαλύπτονται, με αποτέλεσμα να παρατηρούμε τα είδωλα δύο διαφορετικών σημείων στο ίδιο σημείο. (Στην πραγματικότητα, βλέπετε τα είδωλα δύο διαφορετικών σημείων ταυτόχρονα μόνο όταν αλλάζετε οπτική γωνία, αλλά αυτό δεν έχει σημασία για τη θεωρητική μας συζήτηση.) Αντίθετα, όταν η α είναι ακέραιο υποπολλαπλάσιο του π, δεν παρουσιάζονται επικαλύψεις (Σχήμα 2β).

Αφού τα είδωλα όλων των σημείων ανήκουν στο επίπεδο που είναι κάθετο στον κοινό άξονα των κατόπτρων (αυτό είναι το επίπεδο που απεικονίζεται στο Σχήμα 2), το φαινόμενο που ανακαλύψαμε προηγουμένως έχει επίπεδη φύση. Μπορούμε να μιλάμε για κατοπτρισμούς επίπεδων σχημάτων ως προς ευθείες γραμμές, και το Σχήμα 2 μας δείχνει ότι τα επαναλαμβανόμενα κατοπτρικά είδωλα ενός επίπεδου σχήματος ως προς τις πλευρές μιας γωνίας δεν επικαλύπτονται αν και μόνο αν η τιμή α της γωνίας είναι ακέραιο υποπολλαπλάσιο του π. Ακριβέστερα, αν $\alpha = \pi/k$, όπου $k \geq 2$, είναι θετικός ακέραιος, τότε το επίπεδο χωρίζεται σε $2k$ ίσες γωνιώδεις περιοχές με κοινή κορυφή, ενώ το είδωλο της αρχικής περιοχής εμφανίζεται σε καθεμιά από αυτές. Στις μισές περιοχές το είδωλο εμφανίζεται ανεστραμμένο. Στις άλλες μισές, της αρχικής συμπεριλαμβανομένης, είναι κανονικό.

Ας φανταστούμε μια κυρτή πολυγωνική περιοχή που σχηματίζεται από κάτοπτρα. Τι πρέπει να ισχύει ώστε να μην επικαλύπτονται τα είδωλα που προκύπτουν από τις επαναλαμβανόμενες ανακλάσεις πάνω τους; Σύμφωνα με την προηγούμενη επιχειρηματολογία μας, όλες οι γωνίες του πολυγώνου πρέπει να είναι ακέραια υποπολλαπλάσια του π. Είναι δυνατόν να αποδειχτεί ότι αυτή η συνθήκη είναι ικανή. Όταν ισχύει, το επίπεδο χωρίζεται σε πολύγωνα, ίσα με το αρχικό, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς κάθε κοινή τους πλευρά. Κάθε πολύγωνο αυτής της πλακόστρωσης περιέχει ένα είδωλο της αρχικής περιοχής. Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται η πλακόστρωση που προκύπτει από ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Στην πραγματικότητα, αυτή είναι η πλακόστρωση που βλέπετε σ' ένα συνηθισμένο καλειδοσκόπιο.

Παρομοίως, τα επαναλαμβανόμενα είδωλα του εσωτερικού ενός κυρτού πολυέδρου που προκύπτουν από κατοπτρισμούς ως προς τις έδρες του, δεν επικαλύπτονται αν και μόνο αν όλες οι δίεδρες γωνίες του πολυέδρου είναι ακέραια υποπολλαπλάσια του π. Το θεώρημα αυτό ισχύει ακόμη και για μη ευκλείδεια πολύγωνα και πολύεδρα.

Ένα πολύγωνο (ή πολύεδρο) οι (δίεδρες) γωνίες του



Σχήμα 3

οποίου είναι όλες ακέραια υποπολλαπλάσια του π ονομάζεται *πολύγωνο (πολύεδρο) Coxeter*. Επομένως, η περιγραφή όλων των θεωρητικώς δυνατών καλειδοσκοπίων ισοδυναμεί με την περιγραφή όλων των πολυγώνων και πολυέδρων Coxeter.

Δισδιάστατα καλειδοσκόπια

Είναι εύκολο να βρούμε όλα τα πολύγωνα Coxeter στο ευκλείδειο επίπεδο. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός ευκλείδειου πολυγώνου ισούται με $\pi(n-2)$. Επομένως, η μέση τιμή των γωνιών του είναι $\pi(1-2/n)$, οπότε για $n=4$ παίρνουμε μέση τιμή $\pi/2$. Όμως, από τον ορισμό του πολυγώνου Coxeter έπεται ότι καμία από τις γωνίες του δεν μπορεί να υπερβαίνει το $\pi/2$. Συνεπώς, το μοναδικό τετράπλευρο Coxeter είναι το ορθογώνιο, ενώ δεν υπάρχουν πολύγωνα Coxeter με περισσότερες από τέσσερις πλευρές.

Επιπλέον, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι π, έχουμε την εξής διοφαντική εξίσωση για το τρίγωνο Coxeter με γωνίες π/k, π/ℓ, π/m:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}=1. \tag{1}$$

Αν δεν λάβουμε υπόψη τις μεταθέσεις των k, ℓ, m, η εξίσωση αυτή έχει τρεις λύσεις:

(3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6).

Επομένως, υπάρχουν ακριβώς τρία διαφορετικά τρίγωνα Coxeter: ισόπλευρο τρίγωνο, ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο και ορθογώνιο τρίγωνο με οξείες γωνίες ίσες με $\pi/3$ και $\pi/6$. Το Σχήμα 4 παρουσιάζει τις αντίστοιχες πλακοστρώσεις του επιπέδου. Αυτές, μαζί με την πλακόστρωση του ορθογωνίου, αποτελούν τους τέσσερις τύπους δισδιάστατων ευκλείδειων καλειδοσκοπίων.

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να βρούμε όλα τα δισδιάστατα σφαιρικά καλειδοσκόπια. Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού n-γώνου είναι μεγαλύτερο του $\pi(n-2)$. Τι μπορούμε να πούμε λοιπόν για το πλήθος των γωνιών ενός σφαιρικού πολυγώνου Coxeter; Πολύ απλά, το εξής: δεν υπάρχουν άλλα σφαιρικά πολύγωνα Coxeter εκτός των τριγώνων. Στην περίπτωση του σφαιρικού τριγώνου Coxeter, η εξίσωση (1) αντικαθίσταται από την ανισότητα

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}>1, \tag{2}$$

η οποία έχει τέσσερις λύσεις:

(2, 2, m), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5).

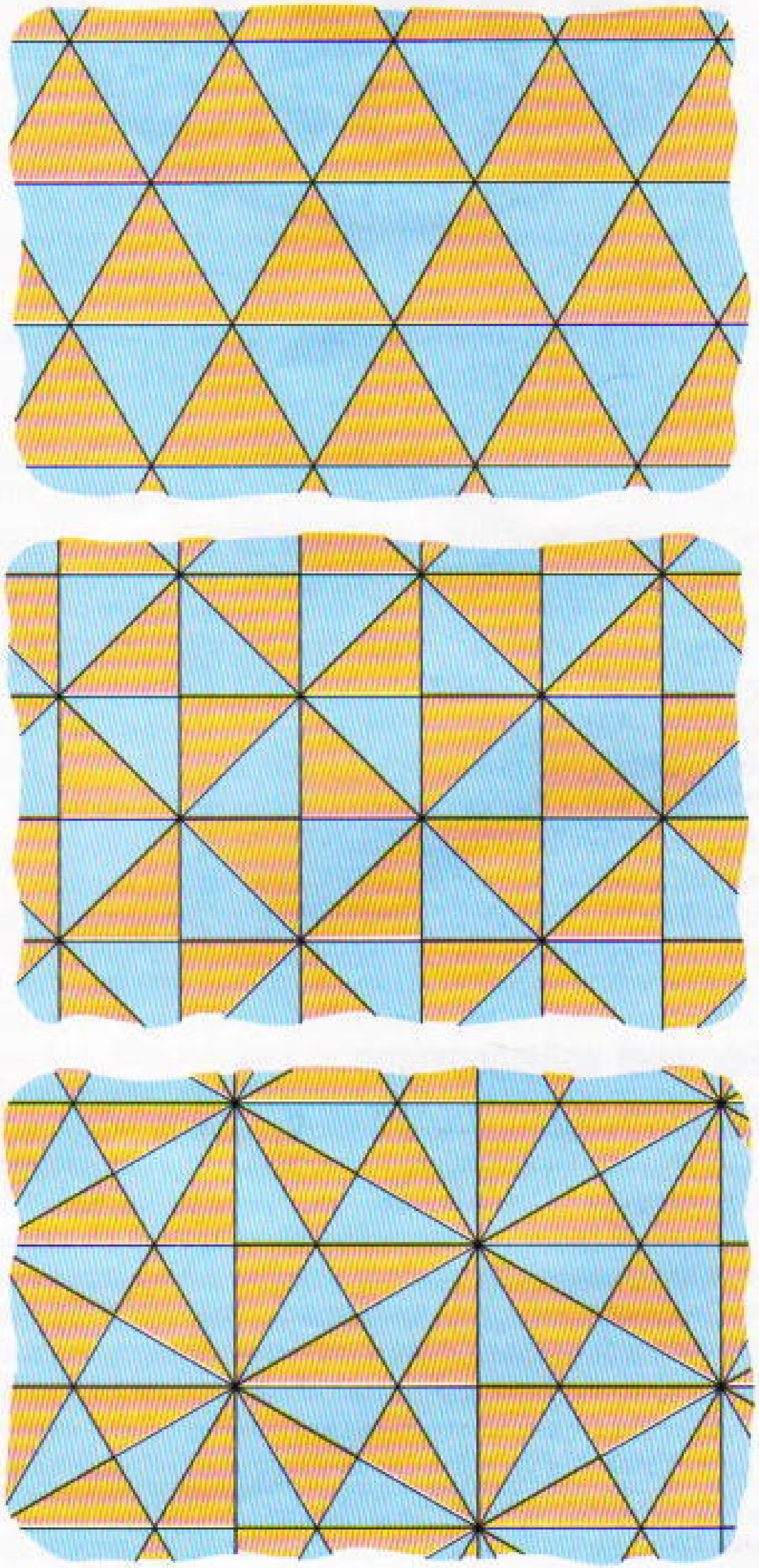
Η πρώτη από αυτές τις λύσεις αντιστοιχεί στην πλακόστρωση της σφαίρας με $4m$ «δισορθογώνια» τρίγωνα που δημιουργούνται από τον ισημερινό και $2m$ μεσημβρινούς που ισαπέχουν μεταξύ τους. Η λύση (2, 3, 5) αντιστοιχεί στην πλακόστρωση του Σχήματος 1.

Θα επιστρέψουμε στα σφαιρικά καλειδοσκόπια αργότερα, όταν θα εξετάσουμε τη σύνδεσή τους με τα κανονικά πολύεδρα.

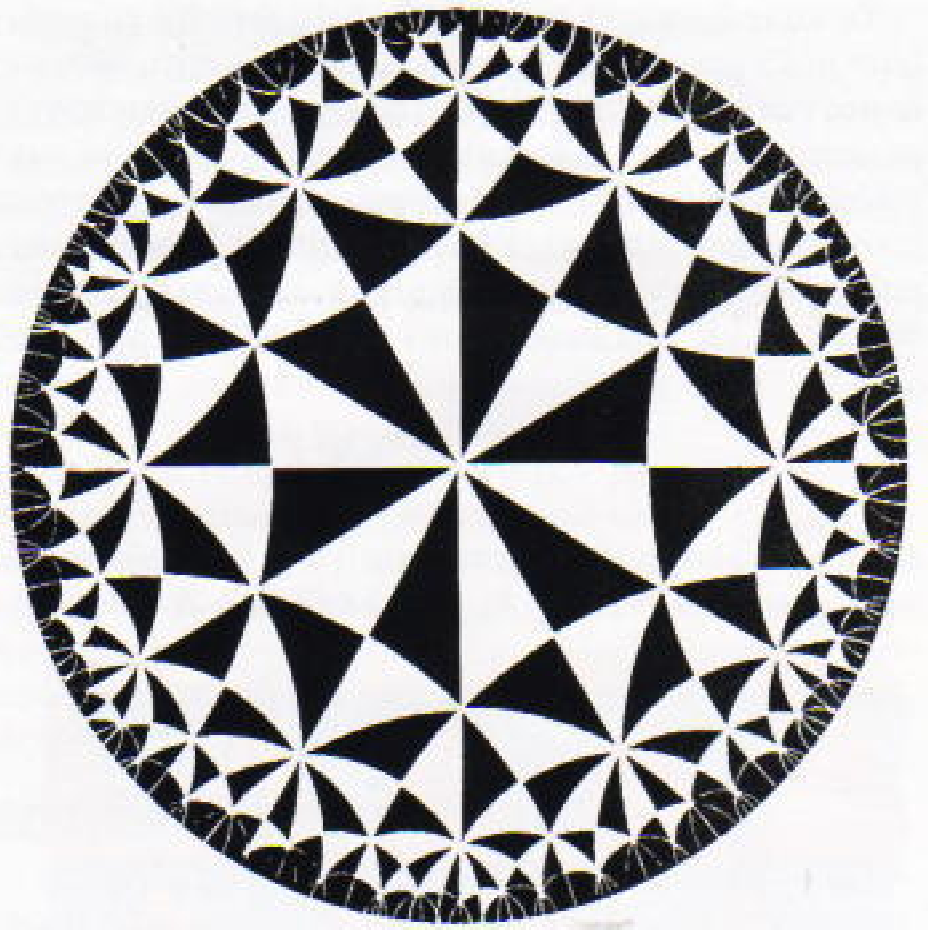
Τα καλειδοσκόπια στο επίπεδο Lobachevsky εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη ποικιλία. Οτιδήποτε είναι αδύνατο στο ευκλείδειο επίπεδο ή στη σφαίρα, μπορεί να πραγματοποιηθεί στο επίπεδο Lobachevsky. Το άθροισμα των γωνιών ενός n-γώνου στο επίπεδο Lobachevsky είναι μικρότερο του $\pi(n-2)$. Έτσι, στο επίπεδο Lobachevsky υπάρχει ένα n-γωνο με γωνίες $\pi/k_1, \pi/k_2, \ldots, \pi/k_n$, για όλα τα $k_1, k_2, \ldots, k_n$ που ικανοποιούν την ανισότητα

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}<n-2.$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει αυτόματα για $n>4$, ενώ όταν $n=4$ ισχύει μόνο όταν $(k_1, k_2, k_3, k_4) \neq (2, 2, 2, 2)$. Αν $n=3$,



Σχήμα 4



Σχήμα 5

προκύπτει η εξής ανισότητα για το τρίγωνο Coxeter με γωνίες π/k, π/ℓ, π/m:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}<1. \tag{3}$$

Οι λύσεις της είναι όλες οι τριάδες (k, ℓ, m), εκτός από αυτές που είναι λύσεις της εξίσωσης (1) και της ανισότητας (2).

Για παράδειγμα, στο επίπεδο Lobachevsky υπάρχει ένα τριγωνικό καλειδοσκόπιο με γωνίες $\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/6$. Η πλακόστρωση που αντιστοιχεί σ' αυτό παρουσιάζεται στο Σχήμα 5. Εδώ χρησιμοποιούμε το ονομαζόμενο μοντέλο Poincaré, στο οποίο το επίπεδο Lobachevsky αντιπροσωπεύεται από έναν ανοικτό δίσκο, οι ευθείες γραμμές αντιπροσωπεύονται από τις διαμέτρους του καθώς και από τα τόξα κύκλων που είναι κάθετα προς το σύνορό του. Οι γωνίες συμπίπτουν με τις ευκλείδειες.[1]

Σφαιρικά καλειδοσκόπια και κανονικά πολύεδρα

Κάθε κανονικό πολύεδρο μπορεί να αντιστοιχιστεί με ένα σφαιρικό καλειδοσκόπιο.

Έστω M ένα κανονικό πολύεδρο με κέντρο O. Έστω A το κέντρο μιας από τις έδρες του, B το μέσο μιας ακμής που πρόσκειται σ' αυτή την έδρα και C η μία από τις δύο κορυφές που ανήκουν σ' αυτή την ακμή. Θα ονομάζουμε *θεμελιώδη κώνο* του πολυέδρου M τον τριεδρικό κώνο K με κορυφή O και ακμές που διέρχονται από τα σημεία A, B, C (δείτε το Σχήμα 6, όπου το M είναι κύβος).

Αν διαλέξουμε διαφορετικές έδρες, ακμές και κορυφές, προκύπτουν πολλοί διαφορετικοί θεμελιώδεις κώνοι για κάθε δεδομένο πολύεδρο. Δεν επικαλύπτονται, και η ένωσή τους καλύπτει όλο το χώρο. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των θεμελιωδών κώνων με τη βοήθεια ενός από τους επόμενους τύπους:

$$N = 2pF = 4E = 2qV, \tag{4}$$

όπου:

F είναι το πλήθος των εδρών του πολυέδρου M,
E το πλήθος των ακμών του,
V το πλήθος των κορυφών του,
p το πλήθος των πλευρών της (κάθε) έδρας,
q το πλήθος των ακμών που ξεκινούν από κάθε κορυφή.

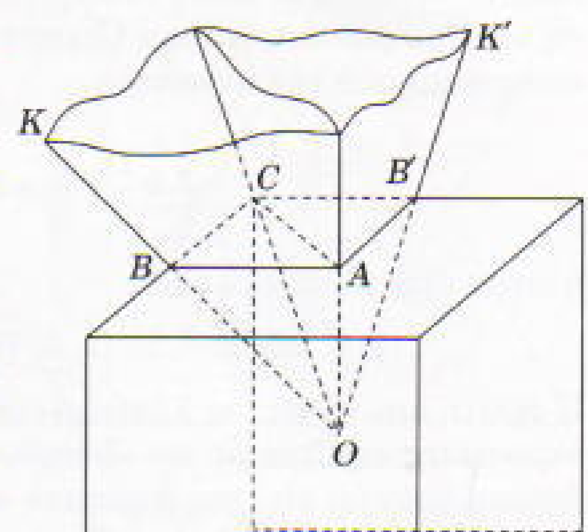
Συνεπώς, για έναν κύβο έχουμε

$$F = 6,\ E = 12,\ V = 8,\ p = 4,\ q = 3,\ N = 48.$$

Το πολύεδρο M είναι συμμετρικό ως προς κάθε επίπεδο που περιέχει μια έδρα του θεμελιώδους κώνου, και δύο προσκείμενοι θεμελιώδεις κώνοι είναι μεταξύ τους συμμετρικοί ως προς την κοινή τους έδρα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε έναν κύβο, τότε το επίπεδο OAC είναι το επίπεδο συμμετρίας του που διέρχεται από δύο απέναντι ακμές. Επίσης, ο κώνος K', που είναι συμμετρικός του K ως προς αυτό το επίπεδο, είναι ο θεμελιώδης κώνος που διέρχεται από τα σημεία A, C, B' (δείτε το Σχήμα 6).

Η ακμή OA του θεμελιώδους κώνου K είναι κοινή σε $2p$ διαφορετικούς θεμελιώδεις κώνους, οι οποίοι σχηματίζουν ίσες δίεδρες γωνίες σ' αυτήν. Επομένως, η δίεδρη γωνία του κώνου K στην ακμή OA ισούται με π/p. Παρομοίως, η δίεδρη γωνία στην ακμή OB ισούται με $\pi/2$ και η γωνία στην ακμή OC ισούται με π/q. Άρα, η τομή του θεμελιώδους κώνου και μιας σφαίρας που έχει κέντρο το κέντρο του κύβου είναι ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με οξείες γωνίες π/p και π/q. Όταν δύο τέτοια τρίγωνα έχουν κοινή πλευρά, θα είναι συμμετρικά ως προς αυτήν. Κατ' αυτό τον τρόπο προκύπτει ένα σφαιρικό καλειδοσκόπιο.

Όταν μεταβαίνουμε από το κανονικό πολύεδρο στο σφαιρικό καλειδοσκόπιο, κάποιες πληροφορίες χάνονται. Δεν γνωρίζουμε πλέον ποια ακμή του θεμελιώδους κώνου (η OA ή η OB) διέρχεται από το κέντρο της έδρας ούτε ποια ακμή διέρχεται από μια κορυφή του πολυέδρου M. Το ίδιο καλειδοσκόπιο αντιστοιχεί στο πολύεδρο M', οι κορυφές του οποίου αντιστοιχούν στα κέ-



Σχήμα 6

1. Μπορείτε να βρείτε τις εντυπωσιακές πλακοστρώσεις του M.C. Escher σε όλα σχεδόν τα βιβλία που αναφέρονται στην τέχνη του. Δείτε, για παράδειγμα, το *M.C. Escher Kaleidocycles* των Doris Schattschneider και Wallace Walker (Pomegranate Artbooks, 1977). Η εικόνα της σελίδας 19 χρησιμοποιεί τρίγωνα και τετράγωνα σε μια πλακόστρωση με ψάρια του Escher.

ντρα των εδρών του πολυέδρου M. Κανονικά πολύεδρα M και M' αυτού του είδους ονομάζονται δυϊκά. Για παράδειγμα, ο κύβος είναι δυϊκός ενός οκταέδρου. Το τετράεδρο είναι δυϊκό του εαυτού του (ή, με άλλα λόγια, είναι το δυϊκό ενός κανονικού πολυέδρου το οποίο είναι τετράεδρο). Οι αριθμοί p και q εναλλάσσονται όταν μεταβαίνουμε από το M στο M', όπως και οι αριθμοί F και V.

Κάθε σφαιρικό καλειδοσκόπιο που ορίζεται από τις λύσεις

$$(2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$$

της ανισότητας (2) αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος δυϊκών κανονικών πολυέδρων. Τα ζεύγη αυτά είναι, αντίστοιχα, τετράεδρο-τετράεδρο, κύβος-οκτάεδρο και δωδεκάεδρο-εικοσάεδρο. Στη λύση $(2, 2, m)$ δεν αντιστοιχεί κανένα κανονικό πολύεδρο, διότι η ύπαρξή του συνεπάγεται $p, q \geq 3$.

Είναι γνωστό ότι το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου ισούται με τη γωνιακή του υπεροχή —δηλαδή, με το άθροισμα των γωνιών του μείον π. Ιδιαίτερα, το εμβαδόν ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου με οξείες γωνίες π/p και π/q είναι ίσο με $(1/p + 1/q - 1/2)\,\pi$. Αν λάβουμε υπόψη ότι το εμβαδόν ολόκληρης της σφαίρας ισούται με 4π, καταλήγουμε σ' έναν άλλο τύπο για το υπολογισμό του N:

$$N = \frac{4}{1/p + 1/q - 1/2}. \qquad (5)$$

Συγκρίνετε αυτή την εξίσωση με την εξίσωση (4).

Μια παρόμοια σύνδεση βρίσκουμε μεταξύ των κανονικών n-διάστατων πολυέδρων και των καλειδοσκοπίων σε μια σφαίρα διάστασης $n - 1$. Είναι εντυπωσιακό ότι στον τρισδιάστατο χώρο υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά πολύεδρα, στον τετραδιάστατο χώρο βρίσκουμε έξι, ενώ στους n-διάστατους χώρους (με $n > 4$) υπάρχουν μόνο τρία (είναι τα ανάλογα του τετραέδρου, του κύβου και του οκταέδρου).

Τρισδιάστατα καλειδοσκόπια

Η προσπάθεια ανακάλυψης όλων των πολυέδρων Coxeter περιπλέκεται, επειδή οι σχέσεις μεταξύ των δίεδρων γωνιών ενός πολυέδρου δεν είναι το ίδιο απλές όσο οι σχέσεις μεταξύ των γωνιών ενός πολυγώνου.

Η τομή ενός κυρτού πολυέδρου M και μιας μικρής σφαίρας το κέντρο C της οποίας βρίσκεται σε μια από τις κορυφές του, ορίζει ένα κυρτό σφαιρικό πολύγωνο με γωνίες ίσες με τις δίεδρες γωνίες που σχηματίζονται στις αντίστοιχες ακμές του M. Επομένως, αν το πλήθος των ακμών που ξεκινούν από την κορυφή C είναι q, τότε το άθροισμα των δίεδρων γωνιών που σχηματίζονται σ' αυτές τις ακμές είναι μεγαλύτερο του $\pi(q - 2)$. Άρα, αν όλες οι δίεδρες γωνίες του πολυέδρου M είναι μικρότερες ή ίσες του $\pi/2$ (ειδικά όταν είναι πολύεδρο Coxeter), τότε από οποιαδήποτε κορυφή του θα ξεκινούν τρεις μόνο ακμές. Τα πολύεδρα που ικανοποιούν αυτή την τελευταία συνθήκη ονομάζονται *πρωταρχικά*. Έτσι, ο κύβος και το τετράεδρο είναι πρωταρχικά πολύεδρα, ενώ το οκτάεδρο δεν είναι.

Το σύνολο, όμως, των σχέσεων μεταξύ των δίεδρων γωνιών ενός κυρτού πολυέδρου δεν εξαντλείται σ' αυτές τις απλές ανισότητες.

Ας θεωρήσουμε την απλούστερη περίπτωση, όπου το M είναι μια τριγωνική πυραμίδα. Ας αντιστοιχίσουμε τυχαίους αριθμούς στις έδρες της, και ας συμβολίσουμε τη γωνία μεταξύ της i-οστής και της j-οστής έδρας ως $a_{ij} = a_{ji}$.

Με τη βοήθεια της γραμμικής άλγεβρας μπορούμε να δείξουμε ότι οι γωνίες μιας ευκλείδειας τριγωνικής πυραμίδας ικανοποιούν την επόμενη σχέση:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sigma\upsilon\nu a_{12} & -\sigma\upsilon\nu a_{13} & -\sigma\upsilon\nu a_{14} \\ -\sigma\upsilon\nu a_{12} & 1 & -\sigma\upsilon\nu a_{23} & -\sigma\upsilon\nu a_{24} \\ -\sigma\upsilon\nu a_{13} & -\sigma\upsilon\nu a_{23} & 1 & -\sigma\upsilon\nu a_{34} \\ -\sigma\upsilon\nu a_{14} & -\sigma\upsilon\nu a_{24} & -\sigma\upsilon\nu a_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

(Η ορίζουσα στο αριστερό μέλος της ισότητας ονομάζεται *ορίζουσα Gramm* των ορθογώνιων προς τις έδρες της πυραμίδας μοναδιαίων διανυσμάτων. Μηδενίζεται διότι αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.)

Επισημαίνουμε ότι με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε πως οι γωνίες ενός ευκλείδειου τριγώνου ικανοποιούν τη συνθήκη

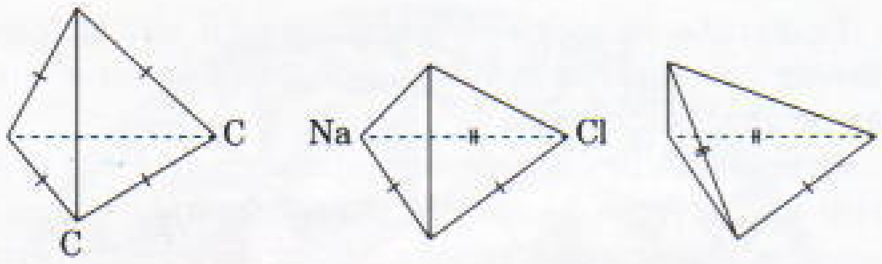
$$\begin{vmatrix} 1 & -\sigma\upsilon\nu a & -\sigma\upsilon\nu\beta \\ -\sigma\upsilon\nu a & 1 & -\sigma\upsilon\nu\gamma \\ -\sigma\upsilon\nu\beta & -\sigma\upsilon\nu\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αν, όμως, το άθροισμα κάθε ζεύγους από αυτές τις γωνίες είναι μικρότερο του π, η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την ισότητα $a + \beta + \gamma = \pi$. (Προσπαθήστε να το αποδείξετε!) Η εξίσωση (6) δεν είναι δυνατόν να αναχθεί σε τόσο απλή μορφή.

Η εξίσωση (6) και οι ανισότητες που βρήκαμε προηγουμένως είναι αναγκαίες και ικανές για την ύπαρξη μιας τριγωνικής πυραμίδας με δίεδρες γωνίες a_{ij} στον ευκλείδειο χώρο. Αν βασιστούμε σ' αυτό το γεγονός, μπορούμε να βρούμε όλες τις ευκλείδειες τριγωνικές πυραμίδες οι δίεδρες γωνίες των οποίων είναι ακέραια υποπολλαπλάσια του π. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τρεις ακριβώς. Παρουσιάζονται στο Σχήμα 7, όπου έχουμε υιοθετήσει τον εξής συμβολισμό: οι δίεδρες γωνίες στις ακμές χωρίς σημάδια ισούνται με $\pi/2$, ενώ αυτές που σχηματίζονται στις ακμές με ένα ή δύο σημάδια ισούνται αντίστοιχα με $\pi/3$ και $\pi/4$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η πρώτη από τις πυραμίδες του Σχήματος 7 χωρίζεται από το επίπεδο συμμετρίας σε δύο πυραμίδες όμοιες με τη δεύτερη. Η τρίτη πυραμίδα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από τη δεύτερη.

Εκτός από αυτά τα τρία, υπάρχουν μόνο τέσσερα ακόμη καλειδοσκόπια στον ευκλείδειο χώρο που είναι δυνατόν, κατά μία έννοια, να αναχθούν σε επίπεδα καλειδοσκόπια. Αποτελούνται από ορθά πρίσματα οι βάσεις των οποίων σχηματίζουν δισδιάστατα καλειδοσκόπια.

Τα τρισδιάστατα ευκλείδεια καλειδοσκόπια έχουν άμεση σχέση με την κρυσταλλογραφία. Μερικά κρυσταλλικά πλέγματα μπορούν να προκύψουν αν τοποθετήσουμε με συγκεκριμένο τρόπο άτομα σε ένα τέτοιο καλειδοσκόπιο, και αν θεωρήσουμε όλα τα είδωλά τους που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενους κατοπτρισμούς ως προς τις πλευρές του καλειδοσκοπίου. Έτσι, το πλέγμα ενός



Σχήμα 7

διαμαντιού προκύπτει από το πρώτο καλειδοσκόπιο του Σχήματος 7 αν τοποθετήσουμε άτομα άνθρακα στις δύο κορυφές που σημειώνονται στο σχήμα. Το πλέγμα του επιτραπέζιου αλατιού προκύπτει από το δεύτερο αν τοποθετήσουμε άτομα νατρίου και χλωρίου στις υποδεικνυόμενες κορυφές.

Μπορούμε επίσης να βρούμε καλειδοσκόπια στην τρισδιάστατη σφαίρα. Όλα είναι (σφαιρικές) τριγωνικές πυραμίδες. Το σύμβολο της ισότητας στην εξίσωση (6) αντικαθίσταται από το σύμβολο «μεγαλύτερο του», όπως ακριβώς το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου γίνεται μεγαλύτερο του π όταν μεταβαίνουμε από το επίπεδο στη σφαίρα.

Το θεώρημα Andreyev

Στο χώρο Lobachevsky το σύμβολο της ισότητας στην εξίσωση (6) αντικαθίσταται από το σύμβολο «μικρότερο του». Εκεί μπορούμε να βρούμε όλα τα πολύεδρα Coxeter που έχουν μορφή τριγωνικής πυραμίδας, τα οποία όμως αποτελούν ένα ασήμαντο μέρος όλων των πολυέδρων Coxeter που υπάρχουν σ' αυτή την περίπτωση. Όπως ακριβώς στο επίπεδο Lobachevsky έχουμε πολύγωνα Coxeter με οσοδήποτε μεγάλο πλήθος πλευρών (στην πραγματικότητα, με οποιοδήποτε πλήθος πλευρών), έτσι και στο χώρο Lobachevsky υπάρχουν πολύεδρα Coxeter με οσοδήποτε μεγάλο πλήθος εδρών. Εντούτοις, αντίθετα με τα πολύγωνα, η συνδυαστική τους δομή μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκη. Έτσι, είναι δύσκολο να δώσουμε μια πλήρη περιγραφή τους.

Πιθανόν η πληρέστερη περιγραφή όλων των δυνατών πολυέδρων Coxeter του χώρου Lobachevsky περιέχεται στο θεώρημα που απέδειξε ο E.M. Andreyev το 1970. Είναι ένα γενικό θεώρημα που δεν αφορά μόνο τα πολύεδρα Coxeter αλλά όλα τα πολύεδρα με δίεδρες γωνίες που δεν υπερβαίνουν το $\pi/2$. Τα πολύεδρα αυτά ονομάζονται *οξυγώνια* (αν και μπορεί να έχουν ορθές δίεδρες γωνίες). Όπως αποδείξαμε προηγουμένως (δεν χρειάζονται διορθώσεις στην απόδειξη στην περίπτωση του χώρου Lobachevsky), κάθε οξυγώνιο πολύεδρο είναι πρωταρχικό.

Το θεώρημα Andreyev θέτει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ενός οξυγώνιου πολυέδρου με δεδομένη συνδυαστική δομή (διαφορετική από αυτή της τριγωνικής πυραμίδας) στο χώρο Lobachevsky. Οι συνθήκες αυτές είναι οι εξής:

1. Αν τρεις έδρες του πολυέδρου συναντώνται σε μια κορυφή, τότε το άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν είναι μεγαλύτερο του π (η αναγκαιότητα αυτής της συνθήκης αποδείχτηκε προηγουμένως).
2. Αν τρεις έδρες του πολυέδρου είναι προσκείμενες αλλά δεν συναντώνται σε μια κορυφή, τότε το άθροισμα των μεταξύ τους δίεδρων γωνιών είναι μικρότερο του π.
3. Αν τέσσερις έδρες συνδέονται μεταξύ τους «κυκλικά» (όπως οι παράπλευρες έδρες ενός τετράπλευρου πρίσματος), τότε υπάρχουν μεταξύ τους δίεδρες γωνίες διαφορετικές του $\pi/2$.
4. Αν το πολύεδρο είναι τριγωνικό πρίσμα, τότε μερικές από τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ της βάσης του και των παράπλευρων εδρών είναι διαφορετικές του $\pi/2$.

Το θεώρημα Andreyev είναι από μια άποψη ανάλογο με το διάσημο θεώρημα του A.D. Alexandrov, το οποίο αναφέρεται στην ύπαρξη ενός ευκλείδειου πολυέδρου με δεδομένο ανάπτυγμα. Δεν υπάρχει όμως ακριβές ευκλείδειο ανάλογο αυτού του θεωρήματος (και δεν είναι δυνατόν να υπάρξει). Είναι ένα από τα θεωρήματα που είναι χαρακτηριστικά της γεωμετρίας Lobachevsky, όπως το κριτήριο ισότητας τριγώνων με ίσες γωνίες.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Andreyev μπορούμε να αποδείξουμε, για παράδειγμα, ότι στο χώρο Lobachevsky υπάρχουν «ορθογώνια» πολύεδρα (δηλαδή, πολύεδρα των οποίων όλες οι δίεδρες γωνίες είναι ορθές) με οσοδήποτε μεγάλο πλήθος πλευρών. (Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να αποδείξουν αυτή την πρόταση.) Συνεπώς, στο χώρο Lobachevsky υπάρχουν πολλά διαφορετικά ορθογώνια καλειδοσκόπια. Επειδή δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε όλα λεπτομερώς, θα περιοριστώ να επισημάνω ότι από το τέλος του προηγούμενου αιώνα τα καλειδοσκόπια στο χώρο Lobachevsky έχουν βρει εφαρμογές στην αριθμητική των τετραγωνικών μορφών, ενώ τα τελευταία 15 χρόνια χρησιμοποιούνται στην τρισδιάστατη τοπολογία.

Υπάρχει στοιχειώδες μήκος;

Εντυπωσιακές συνέπειες της θεωρίας της σχετικότητας και της κβαντικής μηχανικής

Andrey Sakharov

Οι ΦΥΣΙΚΟΙ ΟΛΟΥ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ προσδοκούν από τη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων να προσφέρει αποτελέσματα μεγάλης πρακτικής αλλά και φιλοσοφικής σημασίας, ορίζοντας ίσως με μεγαλύτερη ακρίβεια τις έννοιες του χρόνου, του χώρου και της αιτιότητας. Δεν υπάρχει λόγος να αναμένουμε παρόμοιες τροποποιήσεις των θεμελιωδών αρχών σε άλλους κλάδους της φυσικής, όπου τα ατομικά σωματίδια (τα ηλεκτρόνια, τα φωτόνια, οι πυρήνες) είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι βασικές οντότητες. Στην οπτική, τη βιοφυσική, τη φυσική των μορίων και των κρυστάλλων και τις περισσότερες άλλες περιοχές, οι βασικές αρχές της κβαντικής μηχανικής, της στατιστικής φυσικής και της θεωρίας της σχετικότητας προσφέρουν το στερεό και αποδεδειγμένα αξιόπιστο θεμέλιο για τη θεωρητική περιγραφή και εξήγηση των παρατηρούμενων φαινομένων καθώς και για νέες προβλέψεις, ανακαλύψεις και πρακτικές εφαρμογές (όπως τα τρανζίστορ, τα λέιζερ, η ηλεκτροφωταύγεια, ο παραμαγνητικός συντονισμός, το φαινόμενο Mössbauer, η ολογραφία κ.ο.κ.). Είμαστε βέβαιοι ότι στους συγκεκριμένους κλάδους της φυσικής κάθε καινούργιο φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί περιεκτικά βάσει των γνωστών αρχών, αν και μερικές φορές ίσως χρειάζεται να επιστρατεύουμε ισχυρές υπολογιστικές τεχνικές και συμπληρωματικά πειραματικά δεδομένα (όπως συνέβη πρόσφατα, για παράδειγμα, με τα φαινόμενα της υπερρευστότητας και της υπεραγωγιμότητας).

Όταν όμως οι φυσικοί προσπαθούν να εξηγήσουν τη φύση της μάζας, του ηλεκτρικού φορτίου και άλλων ιδιοτήτων των ίδιων των στοιχειωδών σωματιδίων, όπως επίσης και των αμοιβαίων αλληλεπιδράσεών τους και των αλληλομετατροπών τους, δημιουργείται η εντύπωση ότι μας λείπουν ορισμένες θεμελιώδεις αρχές στον εν λόγω τομέα της φυσικής. Η έρευνα που διεξάγεται με τη βοήθεια επιταχυντών σωματιδίων, όπως και πειράματα με «φυσικούς επιταχυντές» (κοσμικές ακτίνες), προκάλεσαν τη μια έκπληξη μετά την άλλη. Μόνο στα δέκα τελευταία χρόνια ανακαλύφθηκαν δεκάδες νέα σωματίδια[1] με αλλόκοτες ιδιότητες, στα οποία συμπεριλαμβάνονται δύο «τύποι» νετρίνων (του ηλεκτρονικού και του μιονικού). Επιπλέον, ο κατάλογος των ανακαλύψεων περιλαμβάνει παραβιάσεις της συμμετρικής φύσης του φυσικού νόμου ως προς τον κατοπτρισμό, ως προς την αντικατάσταση των σωματιδίων με τα αντισωματίδιά τους και ως προς την αναστροφή της κατεύθυνσης που ακολουθούν οι φυσικές διαδικασίες. Η εκπληκτικότερη είναι η τελευταία παραβίαση της συμμετρίας, αφού δεν διαθέτουμε έστω μία φαινομενολογική περιγραφή της.

Μόνο τανύζοντας υπερβολικά τη φαντασία του μπορεί ο συγγραφέας να θεωρήσει τον εαυτό του ειδικό στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων. Εντούτοις, θα αποτολμήσει να πραγματευτεί ένα από τα βασικά προβλήματα του πεδίου αυτού —το πρόβλημα του στοιχειώδους μήκους. Αυτό έχει κάποια σχέση με την υποτιθέμενη ύπαρξη ενός κατ' αρχήν περιορισμού στην εφαρμοσιμότητα των βασικών ιδεών της σύγχρονης επιστήμης σχετικά με το χώρο και την αιτιότητα (δηλαδή των θεωριών της κβαντικής μηχανικής και της σχετικότητας). Συνεπάγεται την ανάγκη να περιγραφούν τα φαινόμενα «μικρής κλίμακας» που κείνται πέραν ενός συγκεκριμένου ορίου με τη βοήθεια νέων, περισσότερο αφηρημένων και θεμελιωδέστερων φυσικών εννοιών και μαθηματικών μεθόδων.

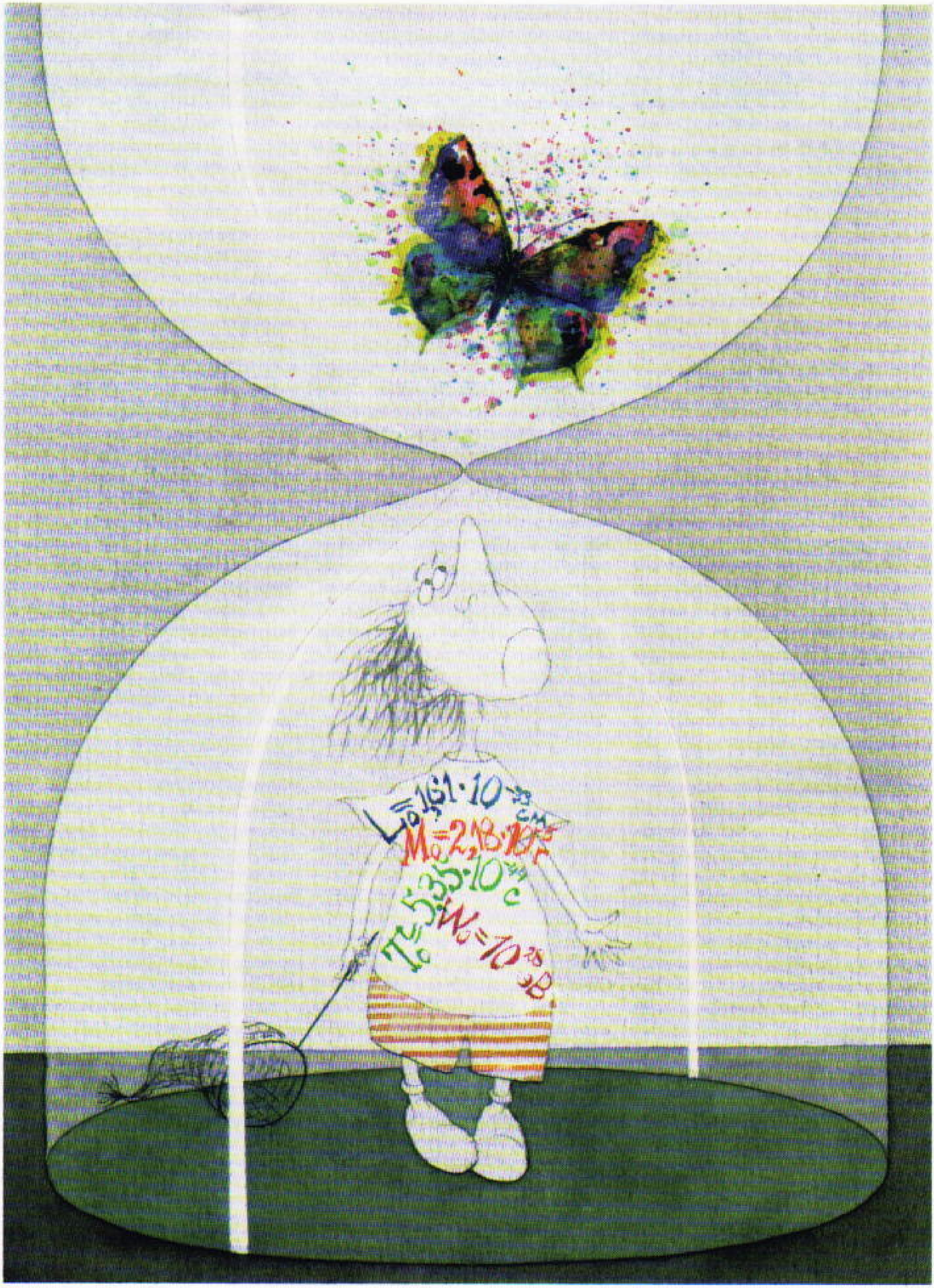
Το παρόν άρθρο δεν θα περιγράψει νέες και έξοχες ανακαλύψεις. Η φύση

Το κείμενο αυτό προέρχεται από ένα άρθρο του μεγάλου επιστήμονα και υπέρμαχου των ανθρωπίνων δικαιωμάτων Andrey Dmitryevich Sakharov που γράφτηκε το 1968 για το περιοδικό *Φυσική στη μέση εκπαίδευση*. Δημοσιεύτηκε το 1991 στο *Kvant*.

Για μια αναλυτική παρουσίαση της ζωής και του έργου αυτής της επιβλητικής προσωπικότητας, βλ. το βιβλίο *Αντρέι Ζαχάρωφ* των Sidney Drell και Sergei Kapitza (Εκδόσεις Κωσταράκη, Αθήνα 1994).

1. Στο πεδίο των στοιχειωδών σωματιδίων έχουν σημειωθεί πολλές αλλαγές από το 1968. Υπάρχουν πλέον τρεις τύποι νετρίνων, το μιόνιο δεν θεωρείται πλέον μεσόνιο, και τα γλοιόνια είναι οι φορείς της ισχυρής δύναμης. Εντούτοις, λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσιάζει το άρθρο από ιστορική πλευρά, αποφασίσαμε να το αφήσουμε στην αρχική του μορφή.

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky


$L_0 = 1{,}61 \cdot 10^{-33}$ см
$M_0 = 2{,}18 \cdot 10^{-5}$ г
$T_0 = 5{,}35 \cdot 10^{-44}$ с
$W_0 = 10^{28}$ эВ

της βασικής του θέσης είναι μάλλον αρνητική. Παρά ταύτα, ο συγγραφέας αισθάνεται πως, όταν πρόκειται για το πρόβλημα των πρώτων αρχών της επιστήμης (τέτοιες θεμελιώδεις έννοιες όπως το μήκος και το χρονικό διάστημα), κάθε βήμα προς τα εμπρός και κάθε ακριβέστερος προσδιορισμός των δυσκολιών δεν θα έπρεπε να απασχολεί μόνο τους ειδικούς. Έτσι, όσο ασαφής κι αν είναι η κατάσταση, ο συγγραφέας αποφάσισε να μιλήσει για τη δραματική περιπλοκή των ιδεών σε μια γωνία της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής, όπως τη βλέπει ο ίδιος.

Ακόμη και πριν δημιουργηθεί η κβαντική θεωρία, όταν προσπαθούσαν να περιγράψουν το ηλεκτρόνιο ως σημειακό σωματίδιο, οι επιστήμονες προσέκρουαν σ' ένα εμπόδιο κατά τον υπολογισμό της ηλεκτροστατικής του ενέργειας. Ας θυμηθούμε ότι η ηλεκτροστατική ενέργεια σφαιρικού αγωγού με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου δίνεται από τον τύπο $U = e^2/(2r)$, όπου e είναι το φορτίο και r η ακτίνα.[2] Για αυθαίρετη κατανομή της πυκνότητας φορτίου κατά την ακτινική διεύθυνση, έχουμε $U \sim e^2/r$. Το σημειακό ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί στο όριο $r \to 0$, οπότε $U \to \infty$. Σύμφωνα με τον περίφημο τύπο του Αϊνστάιν, η ενέργεια U σχετίζεται με τη μάζα ηρεμίας μέσω του τύπου $m = U/c^2$, και επομένως η μάζα του σημειακού ηλεκτρονίου πρέπει να είναι άπειρη. Εάν εισαγάγει κανείς την πειραματικά προσδιοριζόμενη μάζα του ηλεκτρονίου στον τύπο $m = e^2/(rc^2)$, τότε προκύπτει $r = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm. Αυτή η τιμή είναι γνωστή ως η κλασική ακτίνα του ηλεκτρονίου.

Η κατάσταση περιπλέχτηκε ακόμη περισσότερο με την ανάπτυξη της κβαντικής μηχανικής. Από τη μια, τα κβαντικά φαινόμενα συνεπάγονται πολύ μικρότερες αριθμητικές τιμές της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου για ίδια ακτίνα r, παραμένει ωστόσο το πρόβλημα του απειρισμού της ενέργειας $W \to \infty$ καθώς $r \to 0$, αν και η W είναι πλέον ανάλογη του $\ln(r^{-1})$ και όχι του r^{-1}. Από την άλλη, οι κύριες δυσκολίες που παρουσιάζονται όταν θεωρούμε το ηλεκτρόνιο σημειακό σωματίδιο ανακύπτουν κατά τον υπολογισμό των τιμών των άλλων βασικών θεωρητικών μεγεθών: της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων, των πιθανοτήτων σκέδασης ή διάσπασης, κ.ο.κ. Εντούτοις, είναι πολύ δύσκολο να συμβιβαστεί η ιδέα ενός μη σημειακού σωματιδίου με τις αρχές της θεωρίας της σχετικότητας —πράγματι, σε εκτεταμένο σωματίδιο, αν το θεωρούσαμε ως στερεό σώμα, θα ήταν δυνατή η διάδοση σημάτων με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός.

Προβλήθηκε η άποψη ότι η κβαντική θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων είναι ελλιπής τόσο από λογική όσο και από μαθηματική άποψη. Αυτή τη σκέψη τη διατύπωσε με τη μέγιστη σαφήνεια κατά τη δεκαετία του 1930 ο εξέχων γερμανός θεωρητικός φυσικός Werner Heisenberg. Ιδού η κατεύθυνση του επιχειρήματός του. Κατά τη γνώμη του, οι δυσκολίες της θεωρίας των στοιχειωδών σωματιδίων έχουν βαθιές, εγγενείς ρίζες· άπτονται θεμελιωδών αρχών, ακριβώς όπως τα προβλήματα της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας των κινούμενων σωμάτων πριν δημιουργηθεί η θεωρία της σχετικότητας, που φαινομενικά δεν επιδέχονταν λύση, ή τα παράδοξα των ατομικών φαινομένων πριν από την εποχή της κβαντικής μηχανικής.

Θα ήταν αδύνατον να ξεπεραστούν οι δυσκολίες της ηλεκτροδυναμικής χωρίς να αναθεωρηθεί και να περιγραφεί λεπτομερώς μια φαινομενικά τόσο αυτονόητη έννοια όπως το ταυτόχρονο. Οι νέοι τύποι της σχετικότητας αποτελούν απλώς δευτερεύον αποτέλεσμα μιας τέτοιας επιστημολογικής αναθεώρησης των βασικών εννοιών. Τα παράδοξα του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού οδήγησαν στην ανάπτυξη ακόμη βαθύτερων ιδεών —της αρχής της συμπληρωματικότητας και της στατιστικής ερμηνείας της κυματοσυνάρτησης. Οι ασυνέπειες που χαρακτηρίζουν τη θεώρηση των στοιχειωδών σωματιδίων ως σημειακών αντικειμένων, η απουσία από τη σύγχρονη θεωρία οποιωνδήποτε κριτηρίων που θα καθόριζαν τις αριθμητικές τιμές της μάζας και των φορτίων των στοιχειωδών σωματιδίων, αυτές, κατά τον Heisenberg, είναι εκδηλώσεις του ελλιπούς και ανακριβούς χαρακτήρα των ίδιων των εννοιών του χώρου, του χρόνου και της αιτιότητας για τα φαινόμενα «μικρής κλίμακας».

Ο Heisenberg σημείωσε ότι η θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν διαφέρει από τις ιδέες του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα για το χώρο και το χρόνο κατά το ότι εισάγει αξιωματικά την ύπαρξη μιας απόλυτης μονάδας της ταχύτητας, η οποία στη θεωρία του Αϊνστάιν είναι η μέγιστη ταχύτητα για τη διάδοση των αλληλεπιδράσεων και ισούται αριθμητικά με την ταχύτητα του φωτός στο κενό ($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s). Για ταχύτητες πολύ μικρότερες από τη c, οι προσχετικιστικές έννοιες περιγράφουν σωστά την πραγματικότητα. Ομοίως, η συνοριακή γραμμή μεταξύ των κβαντικών και των κλασικών (δηλαδή των μη κβαντικών) θεωριών καθορίζεται από μια άλλη θεμελιώδη σταθερά, η οποία έχει τις διαστάσεις του γινομένου ενέργεια × χρόνος: τη σταθερά του Planck $\hbar$, η οποία είναι ο συντελεστής αναλογίας ανάμεσα στην ενεργειακή διαφορά δύο κβαντικών καταστάσεων και την κυκλική συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται ή απορροφάται κατά την κβαντική μετάβαση:

$$E_1 - E_2 = \hbar\omega.$$

Η αριθμητική τιμή της σταθεράς $\hbar$ ισούται με $1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg · s. Ο ίδιος ο Planck χρησιμοποιούσε αντί της ω, που μετριέται σε μονάδες γωνιακής ταχύτητας (rad/s), τη συχνότητα της ταλάντωσης $\nu = \omega/(2\pi)$, που μετριέται σε s^{-1}, και επομένως όρισε τη σταθερά ως $h = 2\pi\hbar = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg · s. Ο ορισμός και ο συμβολισμός του $\hbar$ εισήχθησαν από τον Dirac.[3]

Οι κλασικές έννοιες αντιστοιχούν στην πραγματικότητα όταν αντιμετωπίζει κανείς μακροσκοπικές διαδι-

2. Σ' αυτό το σύστημα μονάδων, η σταθερά του Coulomb $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ τίθεται ίση με τη μονάδα.

3. Κατά κανόνα, οι φυσικοί δεν χρησιμοποιούν το Διεθνές Σύστημα μονάδων (SI), προτιμώντας αντ' αυτού το σύστημα cgs (από τα αρχικά των διεθνών ονομάτων των θεμελιωδών μονάδων: εκατοστόμετρο, γραμμάριο και δευτερόλεπτο). Στο συγκεκριμένο σύστημα, το erg είναι η μονάδα της ενέργειας (1 erg = 10^{-7} J). Εάν κάποιο μέγεθος μετριέται σε μονάδα που δεν διαθέτει ιδιαίτερο όνομα, οι φυσικοί γράφουν «μονάδα cgs».

κασίες —για παράδειγμα, όταν ερευνά τη μετάδοση ραδιοκυμάτων, και η εκπεμπόμενη ενέργεια E είναι πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια ενός μεμονωμένου κβάντου $\hbar\omega$. Η κλασική προσέγγιση, ωστόσο, αποδεικνύεται άχρηστη όταν θεωρούμε, για παράδειγμα, την εκπομπή ενός φωτονίου από ένα διεγερμένο άτομο.

Ο Heisenberg σημείωσε επιπλέον ότι οι δυσκολίες στην κβαντική θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων ανέκυψαν κατά την ανάλυση προβλημάτων όπου ήταν σημαντική η μεταφορά μεγάλης ποσότητας ενέργειας ή ορμής —δηλαδή στις κρούσεις σωματιδίων τα οποία είναι πολύ εντοπισμένα στο χώρο και επομένως έχουν πολύ μικρό μήκος κύματος de Broglie. Έτσι, ο Heisenberg προέβαλε την υπόθεση ότι οι νόμοι της κβαντικής και της σχετικιστικής θεωρίας παύουν να ισχύουν σε κάποιο στοιχειώδες μήκος ℓ_0 (στην πρώτη εκδοχή της ιδέας του θεώρησε ότι αυτό ήταν η κλασική ακτίνα r του ηλεκτρονίου), και ότι για να περιγράψουμε έναν τόσο μικροσκοπικό κόσμο, χρειαζόμαστε νέες έννοιες, περισσότερο αφηρημένες από εκείνες που χρησιμοποιούνται στις προαναφερθείσες θεωρίες.

Κατά τον Heisenberg, ακριβώς η τιμή ℓ_0 καθορίζει επίσης τη χαρακτηριστική κλίμακα για τις μάζες των στοιχειωδών σωματιδίων. Λαμβάνοντας ως μονάδα της μάζας την ποσότητα $\hbar/(c\ell_0) = 70$ MeV$/c^2$, παίρνουμε με μεγάλη ακρίβεια τις εξής τιμές για τις μάζες ηρεμίας των σωματιδίων (ο κατάλογος που ακολουθεί βασίζεται στο τρέχον σύνολο των στοιχειωδών σωματιδίων):

μ-μεσόνιο	3/2
π-μεσόνιο	2
Κ-μεσόνιο	7
η-μεσόνιο	8
πρωτόνιο, νετρόνιο	13,5
Λ-υπερόνιο	16
Σ-υπερόνιο	17
Ξ-υπερόνιο	19
ηλεκτρόνιο	1/137
φωτόνιο, νετρίνο, βαρυτόνιο κ.λπ.	0

Κάνοντας μια μικρή παρέκβαση, ας σημειώσουμε ότι το γεγονός πως διαθέτουμε δύο «φυσικές μονάδες» στη σύγχρονη θεωρία (οι διαστάσεις τους είναι $[c]$ = μήκος/χρόνος και $[\hbar]$ = ενέργεια × χρόνος) οδηγεί στην κατάσταση όπου, μεταξύ των τριών βασικών μονάδων που απαρτίζουν τη βάση οποιουδήποτε συστήματος μονάδων (για παράδειγμα, στο SI, m, s, kg), μόνο μία μονάδα (ας πούμε του μήκους L) μπορεί να θεωρηθεί αυθαίρετη. Η μονάδα του χρόνου μπορεί να οριστεί ως $T = L/c$· η μονάδα της μάζας ως $M = \hbar/(Lc)$· η μονάδα της ενέργειας ως $E = \hbar c/L$. Στη θεωρητική φυσική αποτελεί συνήθη πρακτική να θεωρούν $\hbar = c = 1$, και να μετρούν όλες τις παραμέτρους σε δυνάμεις του μήκους. Αυτό το τέχνασμα απλουστεύει πολύ τους τύπους, από τους οποίους εξαφανίστηκαν οι παράγοντες $\hbar$ και c. Στο συγκεκριμένο σύστημα, η ορμή p, η μάζα m και η ενέργεια E εκφράζονται σε μονάδες αντίστροφου μήκους —λόγου χάρη σε cm^{-1}. Οι σχετικιστικοί τύποι για την ορμή και την ενέργεια έχουν την εξής μορφή:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{m^2+p^2},$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Η μαγνητική ροπή εκφράζεται σε μονάδες μήκους ή σε μονάδες αντίστροφης μάζας. Για παράδειγμα, η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου (γνωστή και ως μαγνητόνη του Bohr —βλ. παρακάτω) ισούται με $e/(2m)$. Με ανάλογο τρόπο είναι δυνατόν να εκφραστούν και άλλα φυσικά μεγέθη. Η εφαρμογή αυτού του «μονοδιάστατου» συστήματος μονάδων είναι μάλλον αποτελεσματική, με την προϋπόθεση ότι τα μεγέθη της μονάδας μήκους ή μάζας χαρακτηρίζουν το υπό έρευνα φαινόμενο. Ας επανέλθουμε όμως στις ιδέες του Heisenberg.

Όταν ο Heisenberg προέβαλε τις ιδέες του, ο κατάλογος των στοιχειωδών σωματιδίων περιλάμβανε μόνο το ηλεκτρόνιο (και το αντισωματίδιό του, το ποζιτρόνιο), το πρωτόνιο, το νετρόνιο και το φωτόνιο. Στην εποχή μας αυτός ο κατάλογος έχει επεκταθεί και περιλαμβάνει δεκάδες σωματίδια. Ανάμεσα σε όσα προστέθηκαν είναι το μ-μεσόνιο (μιόνιο) και δύο «είδη» νετρίνων, τα οποία μαζί με το ηλεκτρόνιο και τα αντίστοιχα αντισωματίδια σχηματίζουν την οικογένεια των ασθενώς αλληλεπιδρώντων σωματιδίων, των λεπτονίων. Επιπροσθέτως, ανακαλύφθηκε πλήθος νέων, ισχυρά αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Σ' αυτά συγκαταλέγονται σωματίδια με πολύ μικρό χρόνο ζωής· είναι οι λεγόμενοι «συντονισμοί» (λόγου χάρη το η-μεσόνιο στον παραπάνω κατάλογο). Τα ισχυρώς αλληλεπιδρώντα σωματίδια (αδρόνια) υποδιαιρούνται σε δύο μεγάλες ομάδες: τα λεγόμενα βαρυόνια, τα οποία έχουν παρόμοιες ιδιότητες με το πρωτόνιο και το νετρόνιο (τα μακρόβια βαρυόνια Λ, Σ, Ξ ονομάστηκαν υπερόνια), και τα μεσόνια —τυπικά παραδείγματα είναι τα π- και τα ρ-μεσόνια, που είναι υπεύθυνα για τις πυρηνικές δυνάμεις, όπως επίσης και τα Κ- και η-μεσόνια (τα οποία συμπεριλαμβάνονται επίσης στον παραπάνω κατάλογο).

Δεν έχουμε κανένα λόγο να υποθέτουμε ότι η μάζα οποιουδήποτε φυσικού σωματιδίου είναι κατ' ανάγκην της τάξεως του $1/\ell_0 = 70$ MeV (θέτοντας $\hbar = c = 1$, χρησιμοποιούμε το 1 MeV ως μονάδα όχι μόνο για την ενέργεια αλλά και για τη μάζα, την ορμή και το αντίστροφο μήκος). Για παράδειγμα, έχουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε ότι υπάρχουν σωματίδια (πιθανώς ασταθή) με πολύ μεγαλύτερες μάζες. Ομοίως, το επιχείρημα που στηρίζεται στην κλασική εκτίμηση της ηλεκτρομαγνητικής μάζας δεν φαίνεται πειστικό, λόγω της προαναφερθείσας ελάττωσης αυτής της τιμής στην κβαντική θεωρία. Το τελευταίο σημείο προκαλεί την εντύπωση ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικό.

Ο Heisenberg υπέθεσε ότι θα υπάρξουν δραστικές αποκλίσεις από τη σύγχρονη θεωρία στους νόμους της αλληλεπίδρασης των στοιχειωδών σωματιδίων για ενέργειες μεγαλύτερες από $1/\ell_0 = 70$ MeV. Αρχικά, όταν ανακαλύφθηκαν νέα σωματίδια στις κοσμικές ακτίνες, τα οποία παρουσίαζαν μεγάλες διεισδυτικές ικανότητες, θεωρήθηκε ότι ήταν ηλεκτρόνια υψηλής ενέργειας και ότι συνεπώς δεν «υπάκουαν» στους νόμους της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Ωστόσο, σύντομα κατέστη σαφές ότι ήταν απλώς συνηθισμένα σωματίδια με μάζα 200 φορές μεγαλύτερη της μάζας των ηλεκτρονίων, και ότι σ' αυτή την «τετριμμένη» ιδιότητά τους οφειλόταν η μοναδική διεισδυτική τους ικανότητα. Στην εποχή μας δεν υπάρχουν φαινόμενα τα οποία θα μπορούσαν να ερμηνευτούν με βεβαιότητα ως έκδηλες παραβιάσεις της σύγχρονης θεωρίας. Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα αυτό το σημείο.

Η σύγχρονη φυσική γνωρίζει τέσσερα είδη αλληλεπίδρασης:

1. «Ισχυρές» αλληλεπιδράσεις (οι πυρηνικές δυνάμεις αποτελούν τυπικό παράδειγμα).
2. Ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις.
3. «Ασθενείς» αλληλεπιδράσεις (οι οποίες ευθύνονται για τα φαινόμενα της διάσπασης βήτα).
4. Βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

Διαθέτουμε μια περιεκτική ποσοτική θεωρία και εκτεταμένα πειραματικά δεδομένα για τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, οι οποίες ως εκ τούτου αποτελούν προνομιακό πεδίο για να αναζητήσει κανείς πιθανές αποκλίσεις από τη σύγχρονη θεωρία. Ως τώρα, όλες οι προσπάθειες σ' αυτή την κατεύθυνση κατέληξαν σε αρνητικά αποτελέσματα. Θα περιγράψω μερικά από αυτά, επειδή ακόμη και ένα αρνητικό αποτέλεσμα είναι σημαντικό για ένα τέτοιο καίριο πρόβλημα —η ανάλυση της πειραματικής ακρίβειας μάς επιτρέπει να εκτιμήσουμε τα δυνατά όρια της εγκυρότητας των σύγχρονων απόψεων. Είναι επίσης σημαντικό το ότι το συγκεκριμένο ζήτημα συνδέεται διαφοροτρόπως με άλλα πεδία της σύγχρονης φυσικής, οπότε παρουσιάζει ενδιαφέρον αυτό καθ' εαυτό.

Προς το παρόν, από τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες των στοιχειωδών σωματιδίων έχει μελετηθεί περισσότερο η μαγνητική ροπή. Σύμφωνα με μια υπόθεση, που την προέβαλαν οι Uhlenbeck και Goudsmit το 1925, το ηλεκτρόνιο μοιάζει με μικροσκοπική σβούρα —έχει στροφορμή ίση με 1/2 (σε μονάδες $\hbar$) και επίσης έχει μαγνητική διπολική ροπή $e/(2m)$. Στην πορεία των φασματοσκοπικών ερευνών των μαγνητικών φαινομένων συνελέγησαν πολλές ενδείξεις που συνηγορούσαν υπέρ της συγκεκριμένης υπόθεσης. Αργότερα, ο εξέχων άγγλος φυσικός Paul Dirac απέδειξε ότι η υπόθεση των Uhlenbeck και Goudsmit ήταν συμβιβαστή με την περιγραφή του ηλεκτρονίου ως φορτισμένου σημειακού σωματιδίου που υπακούει στις εξισώσεις της κβαντικής μηχανικής και της σχετικότητας.

Προς γενική έκπληξη, κατά τη δεκαετία του 1930 ανακαλύφθηκε ότι η μαγνητική ροπή του πρωτονίου ήταν 2,9 φορές μεγαλύτερη από $e/(2m_p)$, όπου m_p η μάζα του πρωτονίου. Επιπλέον, οι ρώσοι θεωρητικοί Tamm και Altshuler προέβλεψαν —και ο αμερικανός φυσικός Luis Alvarez ανίχνευσε πειραματικά— την ύπαρξη μαγνητικής ροπής του νετρονίου, το οποίο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο και σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο δεν θα έπρεπε να έχει καθόλου μαγνητική ροπή. Σήμερα έχει καθιερωθεί η πρακτική να ονομάζουμε την ποσότητα $\mu_0 = e/(2m)$ κανονική μαγνητική ροπή, και να αντιμετωπίζουμε ως «ανώμαλη» την τυχόν πρόσθετη ροπή. Σύμφωνα με τις σύγχρονες απόψεις, η ανώμαλη μαγνητική ροπή του πρωτονίου και του νετρονίου οφείλεται στην εσωτερική τους δομή, αλλά δεν διαθέτουμε θεωρία για το φαινόμενο αυτό —όπως και μια θεωρία για τα ισχυρώς αλληλεπιδρώντα σωματίδια.

Ως το 1947 πιστευόταν ότι το ηλεκτρόνιο δεν διαθέτει ανώμαλη μαγνητική ροπή. Ωστόσο, μια μελέτη της ενέργειας αλληλεπίδρασης ανάμεσα στη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου και στην αντίστοιχη του πρωτονίου είχε αποτέλεσμα κάποιες ασυμφωνίες. (Παρεμπιπτόντως, στην εν λόγω αλληλεπίδραση οφείλονται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα —με μήκος κύματος $\lambda = 21$ cm— που εκπέμπονται από το ατομικό υδρογόνο στο σύμπαν, τα οποία παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη ραδιοαστρονομία.) Ο αμερικανός θεωρητικός Gregory Breit πρότεινε —και λίγο αργότερα δύο συμπατριώτες του, οι πειραματιστές Kusch και Foley ανακάλυψαν— μια μικροσκοπική ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου. Η σχετική τιμή αυτής της ροπής ήταν περίπου $1{,}2 \cdot 10^{-3}$. Η θεωρία της ανώμαλης μαγνητικής ροπής είχε δημιουργηθεί από τον εξέχοντα αμερικανό θεωρητικό Julian Schwinger, ως αποτέλεσμα των μεγάλων προόδων που σημειώθηκαν στο μαθηματικό οπλοστάσιο της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής στη δεκαετία του 1940 με το έργο του Schwinger και, ανεξάρτητα, των Sinitiro Tomonaga, Hans Bethe, Hendrik Kramers, Richard Feynman, Freeman Dyson και άλλων.

Κατά τον Schwinger, η σχετική ανώμαλη μαγνητική ροπή δίνεται από τον τύπο

$$a = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} = \frac{e^2}{2\pi} = 1{,}16 \cdot 10^{-3}$$

και προκύπτει από την αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου ή μ-μεσονίου με τις ηλεκτρομαγνητικές κβαντικές διακυμάνσεις (ή ταλαντώσεις μηδενικού σημείου) του κενού.

Στην κβαντική θεωρία, το κενό δεν είναι συνώνυμο της κενότητας. Για κάθε σύστημα, η συγκεκριμένη θεωρία εισάγει την έννοια των ενεργειακών σταθμών (υπόθεση του Bohr). Εάν επεκτείνουμε αυτή την προσέγγιση στο κενό, τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε το φωτόνιο ως διεγερμένη κατάσταση ενός από τους ηλεκτρομαγνητικούς ταλαντούμενους βαθμούς ελευθερίας του κενού. Η βασική κατάσταση (στάθμη) κάθε βαθμού ελευθερίας αντιστοιχεί στην απουσία φωτονίου με δεδομένο μήκος κύματος. Αν και η μέση τιμή του κβαντομηχανικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σ' αυτό το σύστημα μηδενίζεται για κάθε χρονική στιγμή, το πεδίο όντως υπάρχει, επειδή το πλάτος του, που αντιστοιχεί σε δεδομένο βαθμό ελευθερίας, δεν μπορεί να μηδενίζεται και υφίσταται κβαντικές ταλαντώσεις μηδενικού σημείου (κβαντικές διακυμάνσεις), δημιουργώντας ένα «νέφος πιθανότητας» κοντά στη μέση κατάσταση (κατάσταση ισορροπίας). Η πλήρης ενέργεια της αλληλεπίδρασης ανάμεσα σ' ένα φορτισμένο σωματίδιο και τις ταλαντώσεις μηδενικού σημείου του κενού προέρχεται από την αλληλεπίδραση με τις ταλαντώσεις μηδενικού σημείου των διαφόρων μηκών κύματος, και η μεταβολή αυτής της ενέργειας παρουσία «εξωτερικού» μαγνητικού πεδίου ερμηνεύτηκε από τον Schwinger ως οφειλόμενη στην ανώμαλη μαγνητική ροπή.

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης των ηλεκτρονίων με τις ταλαντώσεις μηδενικού σημείου του κενού μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια ενός ολοκληρώματος που εκτείνεται σε όλες τις δυνατές τιμές της ορμής p (δηλαδή του αντίστροφου μήκους κύματος) των εν λόγω ταλαντώσεων, όπου p_0 είναι το υποτιθέμενο όριο για την εφαρμοσιμότητα των τρεχουσών εννοιών. Έτσι, η ενέργεια είναι ανάλογη με

$$m_e - e^2\int_0^{p_0} \mathrm{d}p\frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} \cong \int_m^{p_0} e^2 m\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

$$= me^2 \ln\frac{p_0}{m}.$$

Για διαστατικούς λόγους, παρουσία κάποιου μαγνητικού πεδίου έντασης H, η ολοκληρωτέα έκφραση θα μεταβληθεί κατά ποσότητα ανάλογη του e^3H/p^2. Επομένως, η μεταβολή της ενέργειας του ηλεκτρονίου σε ένα μαγνητικό πεδίο, που τη θεωρούμε ανάλογη με τη $\mu - \mu_0$ σύμφωνα με την ιδέα του Schwinger, είναι ανάλογη με $me^3H\int_m^{p_0}\frac{\mathrm{d}p}{p^3}$. Έτσι,

$$\mu - \mu_0 \sim me^3\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{p_0^2}\right).$$

Κατά τον Schwinger, ο παράγων αναλογίας στον παραπάνω τύπο είναι $1/(4\pi)$. Προηγουμένως γράψαμε τον συγκεκριμένο τύπο ως

$$\mu - \mu_0 = \frac{e^2}{2\pi}\mu_0 = \frac{e^3}{4\pi m}$$

—δηλαδή χωρίς τον παράγοντα $(1 - m^2/p_0^2)$, πράγμα που αντιστοιχεί στο να περάσουμε στο όριο $p_0 \to \infty$. Όταν $p_0 \neq \infty$, έχουμε διορθώσεις στην ανώμαλη ροπή ανάλογες με το m^2/p_0^2. Εάν συμβολίσουμε με a_θ τη θεωρητική τιμή που υπολόγισαν ο Schwinger και άλλοι θεωρητικοί, η οποία αποτελεί μια ακριβέστερη εκτίμηση στο πλαίσιο της σύγχρονης θεωρίας, έχουμε (σε τάξη μεγέθους)

$$\delta = \frac{a - a_\theta}{a_\theta} \cong \frac{m^2}{p_0^2},$$

ή

$$p_0 = \frac{m}{\sqrt{\delta}}.$$

Ο παραπάνω τύπος δείχνει ότι το πιο «πρόσφορο» αντικείμενο για τη μελέτη των παραβιάσεων της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής είναι το βαρύτερο μεταξύ των γνωστών σωματιδίων —το μ-μεσόνιο, η ανώμαλη μαγνητική ροπή του οποίου διακυμαίνεται (το συγκεκριμένο γεγονός το επισήμανε ο σοβιετικός φυσικός Berestetsky).

Τα πρώτα πειράματα που ανίχνευσαν την ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου διεξήχθησαν με τη μέθοδο της μοριακής δέσμης. Η ανάπτυξη της συγκεκριμένης μεθόδου, η οποία ανάγεται στα κλασικά πειράματα των Stern και Gerlach, οφείλεται κατά κύριο λόγο στον αμερικανό φυσικό Isidor Rabi. Ωστόσο, οι ακριβέστερες μετρήσεις του a (με σχετική ακρίβεια $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$ για το ηλεκτρόνιο και $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ για το μ-μεσόνιο) διεξήχθησαν σε ορισμένα αμερικανικά εργαστήρια πολύ αργότερα και με διαφορετική μέθοδο. Αυτά τα πειράματα έδειξαν ότι $a = 1{,}162 \cdot 10^{-3} \pm 0{,}004 \cdot 10^{-3}$ (τα συγκεκριμένα στοιχεία αφορούν τα μ^+-μεσόνια· παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα των Farley και Brown για μ^--μεσόνια). Με όλες τις γνωστές διορθώσεις, η θεωρητική τιμή a_θ ισούται με $1{,}1654 \cdot 10^{-3}$ —δηλαδή συμπίπτει με την πειραματική για τη δεδομένη ακρίβεια των μετρήσεων. Επομένως, η τιμή $\delta = (a - a_\theta)/a_\theta$ που ορίσαμε προηγουμένως είναι αναμφίβολα μικρότερη από $4 \cdot 10^{-3}$. Έτσι, η κβαντική ηλεκτροδυναμική είναι αναμφισβήτητα ορθή για ενέργειες και ορμές μικρότερες από $p_0 = m/\sqrt{4 \cdot 10^{-3}}$ —δηλαδή όταν οι συγκεκριμένες τιμές είναι μικρότερες από μερικά GeV.

Μια διαφορετική μέθοδος για τη μελέτη της εφαρμοσιμότητας της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής στηρίζεται στις συγκρούσεις ηλεκτρονίων με ηλεκτρόνια και ηλεκτρονίων με ποζιτρόνια στις λεγόμενες συγκρουόμενες δέσμες. Άραγε γιατί χρειαζόμαστε τις συγκρουόμενες δέσμες; Η θεωρία της σχετικότητας συνενώνει το διάνυσμα της (κινητικής) ορμής $\mathbf{p}$ και την ενέργεια του σωματιδίου E στο λεγόμενο τετραδιάνυσμα. Τα τρισδιάστατα διανύσματα χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι το εσωτερικό τους γινόμενο παραμένει σταθερό κατά τη στροφή των αξόνων συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Όταν όμως έχουμε έναν γενικότερο μετασχηματισμό Lorentz, ο οποίος αφορά όχι μόνο τη στροφή των αξόνων συντεταγμένων αλλά και τη μετάβαση σε άλλο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, αναδύεται μια γενικότερη αναλλοίωτη ποσότητα: το βαθμωτό γινόμενο των τετραδιανυσμάτων κατά Einstein-Minkowski. Για δύο συγκρουόμενα σωματίδια, το βαθμωτό γινόμενο των τετραδιανυσμάτων ορμής-ενέργειας δίνεται από την έκφραση

$$I = E_1E_2 - p_{1x}p_{2x} - p_{1y}p_{2y} - p_{1z}p_{2z}.$$

Προφανώς όλες οι ποιοτικές θεωρητικές αποφάνσεις, και ειδικότερα οι αποκλίσεις από τη σύγχρονη θεωρία, μπορούν να εξαρτώνται μόνο από ένα αναλλοίωτο μέγεθος. Όταν ένα ηλεκτρόνιο σε ηρεμία ($p_1 = 0$) συγκρούεται με ένα ηλεκτρόνιο που έχει ορμή $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, έχουμε

$$I_1 = m\sqrt{m^2 + p^2}.$$

Από την άλλη, για συγκρουόμενες δέσμες ηλεκτρονίων που έχουν ορμές $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$ και $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}$, το αναλλοίωτο ισούται με

$$I_2 = m^2 + 2p^2.$$

Εάν $p = 10^3m$ (δηλαδή έχει ενέργεια 500 MeV), τότε $I_2 = 2 \cdot 10^3 I_1$. Το πλεονέκτημα της μεθόδου των συγκρουόμενων δεσμών καθίσταται προφανές όταν συγκρίνουμε τα I_1 και I_2.

Πειράματα με συγκρουόμενες δέσμες διεξήχθησαν στο Νοβοσιμπίρσκ (Ρωσία) υπό την καθοδήγηση του Budker, και φαίνονται να υπόσχονται πολλά. Μέσα στα όρια της ακριβείας, τα συγκεκριμένα πειράματα δεν έδειξαν αποκλίσεις από τη σύγχρονη θεωρία.

Έτσι, το σώμα των θεωρητικών και πειραματικών επιχειρημάτων μάς εξαναγκάζει να παραδεχτούμε ότι το θεωρητικό όριο του Heisenberg $\ell_0 = r$ πρέπει να μετατοπιστεί σε πολύ υψηλότερες ενέργειες. Αν και αρνητικό ως προς το χαρακτήρα του, αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό για τη σύγχρονη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων.

Εδώ και πολύ καιρό ο αμερικανός φυσικός Eugene Wigner υπογράμμισε ότι η ίδια η ιδέα της μέτρησης μικροσκοπικών διαστημάτων χρόνου και χώρου ($\Delta x \leq L_0 = 10^{-33}$ cm· $\Delta t \leq L_0/c = 10^{-44}$ s) συναντά κατ' αρχήν δυσκολίες, εάν κανείς συνυπολογίσει ταυτόχρονα τα κβαντικά φαινόμενα και τη βαρύτητα. Τα διαστήματα χρόνου και απόστασης ανάμεσα σε δύο γεγονότα στο χώρο Einstein-Minkowski (δηλαδή ανάμεσα σε δύο γεγονότα) πρέπει να υπόκειται σε κβαντικές διακυμάνσεις, ή σε κβαντικές ταλαντώσεις μηδενικού σημείου, ακριβώς όπως κάθε άλλο φυσικό μέγεθος. Από αυτή την άποψη το βαρυτικό πεδίο δεν μπορεί να διαφέρει ποιοτικά από το ηλεκτρομαγνητικό ή οποιοδήποτε άλλο πεδίο. Σημειώστε ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε το L_0 με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης. Στην εποχή του ο Max Planck σημείωσε ότι, εάν χρησιμοποιήσει κανείς την αριθμητική τιμή της παγκόσμιας βαρυτικής σταθεράς $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ μονάδες cgs καθώς και τις σταθερές $\hbar$ και c, μπορεί να κατασκευάσει ένα σύστημα «φυσικών» μονάδων για όλα τα φυσικά μεγέθη (με άλλα λόγια, να αντικαταστήσει το «μονοδιάστατο» σύστημα που αναφέραμε παραπάνω με το σύστημα μονάδων «μηδενικής διάστασης»). Για παράδειγμα, η μονάδα του μήκους L_0 μπορεί να οριστεί ως

$$L_0 = G^{1/2}\,\hbar^{1/2}\,c^{-1/2} = 1{,}61 \cdot 10^{-33}\ \text{cm}.$$

Αντίστοιχα, η μονάδα του χρόνου T_0 θα είναι

$$T_0 = L_0/c = G^{1/2}\,\hbar^{1/2}\,c^{-3/2} = 5{,}35 \cdot 10^{-44}\ \text{s},$$

η μονάδα της ενέργειας

$$E_0 = \hbar / T_0 = G^{-1/2}\,\hbar^{1/2}\,c^{3/2} = 2 \cdot 10^{16}\ \text{erg} = 10^{28}\ \text{eV},$$

και της μάζας

$$M_0 = E_0/c^2 = G^{-1/2}\,\hbar^{1/2}\,c^{-1/2} = 2{,}18 \cdot 10^{-5}\ \text{g}.$$

Αποδεικνύεται ότι η εργασία του Wigner (την αναφέραμε παραπάνω) οδηγεί στην ανάδειξη αυτών των δύο μεγεθών, των L_0 και T_0, ως των ορίων της σύγχρονης άποψης περί της φύσεως του χώρου και του χρόνου. Μερικοί επιστήμονες (συμπεριλαμβανομένου του ρώσου θεωρητικού Kompaneyets) τόνισαν ότι η χρησιμοποίηση του L_0 ως της ενεργού ακτίνας του ηλεκτρονίου δεν οδηγεί σε υπερβολικά μεγάλη ηλεκτρομαγνητική μάζα στην κβαντική ηλεκτροδυναμική, αντίθετα με ό,τι θα συνέβαινε στην κλασική ηλεκτροδυναμική. Ο λόγος έγκειται στο γεγονός που προαναφέραμε, δηλαδή ότι στην κβαντική ηλεκτροδυναμική η ηλεκτρομαγνητική μάζα είναι ανάλογη του $\ln(r^{-1})$. Πρόσφατα ο ρώσος επιστήμονας Markov διατύπωσε την υπόθεση ότι το L_0 (και το συναφές μέγεθος $M_0 = 1/L_0$) καθορίζει επίσης τη μέγιστη δυνατή μάζα ενός στοιχειώδους σωματιδίου. Επινόησε γι' αυτό το σωματίδιο τον όρο «maximon» (μεγιστόνιο). Είναι γνωστό ότι ο σχηματισμός σταθερών σωματιδίων από συστατικά μέρη που τα ίδια μπορεί να είναι ασταθή οδηγεί στη μείωση της ολικής μάζας (το «έλλειμμα» μάζας που ανακύπτει στην πυρηνική φυσική ως μικρή διόρθωση στο νόμο του Prout). Έτσι, αν ακολουθήσουμε τον Markov, δεν θα έπρεπε να εκπλαγούμε από το γεγονός ότι τα παρατηρήσιμα σταθερά σωματίδια (ηλεκτρόνια, πρωτόνια κ.ο.κ.) έχουν μάζες πολύ μικρότερες από τη «φυσική» μονάδα της μάζας $M_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ g.

Ολοένα περισσότεροι φυσικοί πιστεύουν τώρα ότι το συγκεκριμένο όριο L_0 θα οδηγήσει στις δραστικότερες αλλαγές των απόψεών μας. Εντούτοις, είναι πολύ σημαντικό να βεβαιωθούμε ότι δεν υπάρχουν άλλες χαρακτηριστικές τιμές ανάμεσα στην $r = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm και στην $L_0 = 1{,}61 \cdot 10^{-33}$ cm που θα μπορούσαν να παίξουν παρόμοιο θεμελιώδη ρόλο. Προς το παρόν, στο συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί να δοθεί απάντηση μόνο βάσει έμμεσων θεωρητικών συλλογισμών. Θα παρουσιάσουμε ένα από τα επιχειρήματα αυτά, που το αντλήσαμε από μια ανάλυση των αρχών της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

Είναι γνωστό ότι η κίνηση των υλικών σωμάτων σε βαρυτικό πεδίο περιγράφεται στη θεωρία του Αϊνστάιν ως κίνηση κατά μήκος της καμπύλης ελάχιστου μήκους στον «καμπύλο» χωρόχρονο. Εξαιτίας της εν λόγω «καμπυλότητας», η βραχύτατη διαδρομή δεν είναι η «ευθεία» γραμμή αλλά μια καμπύλη στο χωρόχρονο που περιγράφεται από το σύνολο των εξισώσεων

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t),\ \ z = f_3(t),$$

όπου οι f_1, f_2 και f_3 είναι μη γραμμικές συναρτήσεις.

Στη θεωρία του Αϊνστάιν, ο βαθμός καμπυλότητας του χώρου βρίσκεται από μια συνθήκη που μπορεί να περιγραφεί ποιοτικά με τον ακόλουθο τρόπο. Στη γειτονιά των σωμάτων που διαθέτουν μάζα (ή ενέργεια, που είναι το ίδιο πράγμα), ο χώρος επηρεάζεται από μια «δύναμη» (φυσικά, ο όρος «δύναμη» χρησιμοποιείται εδώ με μια ορισμένη γενικευμένη έννοια) που τείνει να τον καμπυλώσει. Ταυτόχρονα, ο χώρος έχει την ιδιότητα της «ελαστικότητας» που αντιτίθεται στη δύναμη που προκαλεί την καμπύλωση. Η ισορροπία αυτών των δύο «δυνάμεων» καθορίζει το βαθμό καμπυλότητας. Συνήθως οι αποκλίσεις των ιδιοτήτων του χώρου από τις ιδιότητες που περιγράφονται από την ευκλείδεια γεωμετρία είναι μάλλον μικρές —πράγμα που ισοδυναμεί με το συμπέρασμα ότι η «ελαστικότητα» του χώρου είναι πολύ μεγάλη.

Τι καθορίζει την ελαστικότητα του κενού; Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι είναι οι μεταβολές των κβαντικών διακυμάνσεών του. Αναφερθήκαμε νωρίτερα στις εν λόγω διακυμάνσεις σε σχέση με τη θεωρία του Schwinger για την ανώμαλη μαγνητική ροπή. Σ' αυτή την περίπτωση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, όταν ο χωρόχρονος είναι «καμπύλος», οι διακυμάνσεις «στριμώχνονται» και «παραβιάζουν» τα όρια, πράγμα που έχει αποτέλεσμα την αύξηση της ενέργειας του κενού. Κατά μια φορμαλιστική έννοια, αυτός ο μηχανισμός οδηγεί σε απειρισμό, αν ληφθούν υπόψη οι διακυμάνσεις και του ελάχιστου μήκους κύματος. Η τιμή της βαρυτικής σταθεράς (δηλαδή του αντίστροφου του «συντελεστή ελαστικότητας του χώρου») θα έχει τη σωστή αριθμητική τιμή μόνο εάν οι διακυμάνσεις έχουν μήκος κύματος μεγαλύτερο από $L_0 \sim 10^{-33}$ cm. Το μέλλον θα δείξει κατά πόσον είναι ορθή η συγκεκριμένη συλλογιστική.

Τι υπάρχει, λοιπόν, πέρα από το όριο που καθορίζεται από το L_0; Ποιες τροποποιήσεις της κβαντικής θεωρίας θα χρειαστούν (αν χρειαστούν) για διαδικασίες που πραγματοποιούνται σε αποστάσεις μικρότερες από 10^{-33} cm ή χαρακτηρίζονται από ενέργειες μεγαλύτερες από 10^{28} eV; Ουδείς γνωρίζει. Πιθανώς θα έπρεπε να συμφωνήσουμε με εκείνους που προσδοκούν βαθιές, θεμελιώδεις αλλαγές στον τρόπο με τον οποίο σκεφτόμαστε για τη φυσική. Η τιμή 10^{28} eV υπερβαίνει τόσο πολύ την περιοχή των ενεργειών που ερευνώνται στην εποχή μας (ο μεγαλύτερος ρωσικός κυκλικός επιταχυντής, στο Σερπούχοφ, έχει ενέργεια «μόλις» $7 \cdot 10^{10}$ eV) ώστε η οριστική αποσαφήνιση αυτού του κύκλου προβλημάτων μπορεί να παραμείνει απρόσιτη στο εγγύς μέλλον.

Για να περνά η ώρα

Σ96

Παράδοξος πίνακας. Στην αίθουσα αναμονής του δρ. Ευτυχίδη υπάρχει ένας πίνακας ζωγραφικής. Το παράδοξο σ' αυτό τον πίνακα είναι ο τρόπος που έχει κρεμαστεί στον τοίχο. Ο δρ. Ευτυχίδης έχει καρφώσει δύο καρφιά αντί για ένα, και ισχυρίζεται ότι έχει τυλίξει το σύρμα του πίνακα γύρω από αυτά με τέτοιο τρόπο ώστε, αν βγει οποιοδήποτε από τα δύο, ο πίνακας θα πέσει κάτω. Πώς το κατάφερε αυτό; (A. Spivak)

Σ97

Με ένα ψηφίο λιγότερο. Πόσο θα αλλάξει ο αριθμός 1/1.996 (δηλαδή, πόσο θα αυξηθεί ή θα ελαττωθεί, και κατά ποιον παράγοντα), αν παραλειφθεί το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο από το δεκαδικό του ανάπτυγμα; (D. Averiyanov)

Σ98

Λαδόξιδο. Φανταστείτε ότι προετοιμάζετε ένα πρόχειρο γεύμα για το πικ νικ που θα πάτε με έναν φίλο σας και ότι θα θέλατε να ετοιμάσετε και μια σαλάτα. Το πρόβλημα είναι ότι εσείς προτιμάτε τη σαλάτα μόνο με ξίδι, ενώ ο φίλος σας θέλει να έχει μόνο λάδι· δεν έχετε, όμως, αρκετό χώρο και για τα δύο μπουκάλια. Αφού το λάδι και το ξίδι δεν αναμειγνύονται, υποχρεώνεστε να βάλετε και τα δύο υγρά στο ίδιο μπουκάλι. Είναι δυνατόν, λοιπόν, να πάρετε λίγο ξίδι για τη σαλάτα σας και μια κουταλιά λάδι για τη σαλάτα του φίλου σας αφήνοντας το υπόλοιπο ξίδι και λάδι στο μπουκάλι;

Σ99

Τρίγωνα σ' ένα παραλληλόγραμμο. Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία στο εσωτερικό ενός παραλληλογράμμου. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σημεία αυτά με όλες τις κορυφές του παραλληλογράμμου (δείτε το σχήμα). Αποδείξτε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κόκκινων τριγώνων είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο μπλε. (I. Sharygin)

Σ100

Οικογενειακός σχεδιασμός. Μια τετραμελής οικογένεια (πατέρας, μητέρα, γιος και κόρη) ξεκίνησαν για πεζοπορία στην εξοχή. Περπάτησαν όλη την ημέρα, και όταν πια άρχισε να νυχτώνει έφτασαν σε μια παλιά γέφυρα πάνω από ένα βαθύ φαράγγι. Ήταν πολύ σκοτεινά και είχαν μόνο ένα φακό μαζί τους. Η γέφυρα ήταν τόσο στενή και ετοιμόρροπη, ώστε μπορούσε να αντέξει μόνο δύο άτομα ταυτόχρονα. Ας υποθέσουμε ότι ο γιος μπορεί να διασχίσει τη γέφυρα σε 1 λεπτό, η κόρη σε 3, ο πατέρας σε 8 και η μητέρα σε 10. Είναι δυνατόν να διασχίσει όλη η οικογένεια τη γέφυρα σε 20 λεπτά; Αν ναι, πώς μπορεί να το πετύχει; (Όταν περνούν τη γέφυρα δύο άτομα, η ταχύτητά τους είναι ίση με την ταχύτητα του βραδύτερου. Επίσης, όποιοι διασχίζουν τη γέφυρα πρέπει να χρησιμοποιούν το φακό.)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

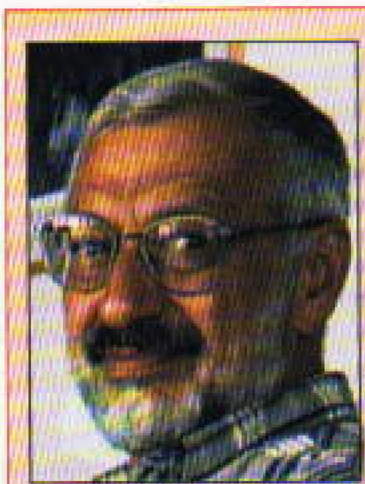
Το λογικό οικοδόμημα

Ο Γιάννης Μοσχοβάκης μιλά στο ελληνικό Quantum

Στο παρόν τεύχος έχουμε τη χαρά να φιλοξενούμε τη συνέντευξη που έδωσε ο κ. Γιάννης Μοσχοβάκης, *διαπρεπής καθηγητής της μαθηματικής λογικής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Λος Άντζελες, στον* κ. Γιώργο Ευαγγελόπουλο, *ειδικό συνεργάτη του ελληνικού* Quantum.

Ερ.: *Κύριε καθηγητά, θα ήθελα να ξεκινήσω από το γεγονός ότι, μετά τη μακρά και λαμπρή σταδιοδρομία σας στις ΗΠΑ, αποφασίσατε να μοιράζετε από φέτος το χρόνο σας ανάμεσα στο UCLA και το Πανεπιστήμιο Αθηνών. Είστε, μάλιστα, από τα ιδρυτικά μέλη του καινούργιου μεταπτυχιακού προγράμματος στη θεωρία λογικής, αλγορίθμων και υπολογισμού το οποίο μόλις ξεκίνησε. Ποιοι λόγοι σάς ώθησαν σ' αυτή την απόφαση, και σε τι ελπίζετε, σε τι στοχεύετε με το καινούργιο πρόγραμμα;*

Απ.: Κάθε μετανάστης έχει μια φιλοδοξία: να γυρίσει κάποτε και να προσφέρει κάτι στην πατρίδα του (ίσως μόνο, ή κατά κύριο λόγο, για την προσωπική του ικανοποίηση —ποιος ξέρει), όπως επίσης και να βρεθεί πάλι στο φυσικό του περιβάλλον, να μιλήσει τη γλώσσα του, έστω κουτσά, έπειτα από χρόνια αχρησίας. Δεν νομίζω να διαφέρω ως προς αυτό από τα εκατομμύρια Ελλήνων που έχουν μεταναστεύσει από τους αρχαιότατους χρόνους, ούτε και έχω τίποτα πρωτότυπο να πω για την «ψυχή» ή την ψυχολογία του μετανάστη.



Ο Γιάννης Μοσχοβάκης γεννήθηκε στην Αθήνα το 1938. Τελείωσε το Κολέγιο Αθηνών το 1956 και σπούδασε μαθηματικά στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασσαχουσέττης (MIT) και στο Πανεπιστήμιο του Ουϊσκόνσιν, όπου το 1963 έγραψε τη διδακτορική του διατριβή στη μαθηματική λογική με την καθοδήγηση του S.C. Kleene. Από το 1964 είναι καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Λος Άντζελες (UCLA), και από φέτος επίσης και στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Το κύριο ερευνητικό του έργο είναι στη θεωρία αναδρομής, την περιγραφική συνολοθεωρία και τη θεωρητική πληροφορική. Έχει δημοσιεύσει σαράντα περίπου εργασίες και τρία βιβλία: *Elementary Induction on Abstract Structures*, North Holland 1974, *Descriptive Set Theory*, North Holland 1979, και *Σημειώσεις στη συνολοθεωρία*, Εκδόσεις Νεφέλη 1993 (και στα αγγλικά, *Notes on Set Theory*, Springer-Verlag 1994). Έχει τιμηθεί με τις υποτροφίες Sloan, Guggenheim και Fullbright, είναι επίτιμος διδάκτωρ του Πανεπιστημίου Αθηνών και αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Αθηνών. Υπήρξε πρόεδρος του Μαθηματικού Τμήματος του UCLA για την τριετία 1984-1987, και πρόεδρος της διεθνούς οργάνωσης λογικολόγων Association for Symbolic Logic από το 1991 μέχρι το 1994.

Για το καινούργιο μεταπτυχιακό μας πρόγραμμα, έχω μεγάλες φιλοδοξίες: το επιστημονικό αντικείμενό του, η «μαθηματική» και «λογική», ας πούμε, βάση της πληροφορικής, πιστεύω ότι είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον· υπάρχουν πολλοί, διακεκριμένοι έλληνες επιστήμονες (τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό) που το πραγματεύονται· υπάρχουν ικανότατοι φοιτητές που ενδιαφέρονται· και ο σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε σταδιακά ένα κέντρο έρευνας και εκπαίδευσης στον κλάδο που να τιμά την πατρίδα μας και ο οποίος θα βοηθήσει την ανάπτυξη της πληροφορικής στην Ελλάδα. Το πρόγραμμα στηρίζεται από έξι Τμήματα που εκπροσωπούν τρία Ανώτατα Ιδρύματα, και ελπίζω, με τον καιρό, να βρούμε υλική υποστήριξη (ιδιαίτερα για υποτροφίες φοιτητών) και έξω από το χώρο της εκπαίδευσης, στην ελληνική βιομηχανία.

Ερ.: *Νομίζω ότι θα ήταν ενδιαφέρον θέμα για τους αναγνώστες του* Quantum *το να αναφερθούμε σ' ένα ιδιαίτερα σημαντικό ζήτημα της μαθηματικής λογικής, στα επαναστατικά συμπεράσματα του Kurt Gödel. Θα μπορούσατε να μας εξηγήσετε, λοιπόν, τη σημασία του θεωρήματος του Gödel για τα μαθηματικά;*

Απ.: Υποθέτω ότι αναφέρεστε στο πιο διάσημο από τα πολλά θεωρήματα του Gödel, το περίφημο *θεώρημα μη πληρότητας*, που δημοσιεύτηκε το 1931.

Επιτρέψτε μου όμως να πάω λίγο πιο πίσω και να πω πρώτα μερικά πράγματα για το *θεώρημα πληρότητας*, το αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής του Gödel, που δημοσιεύτηκε ένα χρόνο πριν, το 1930. Υπάρχει μια επιφανειακή σύγκρουση ανάμεσα στα συμβατικά ονόματα αυτών των δύο θεωρημάτων, σαν να πήρε ο Gödel το διδακτορικό του με κάποιο περιώνυμο θεώρημα, και ύστερα από ένα χρόνο να απέδειξε το αντίθετο! Στην πραγματικότητα, βέβαια, όχι μόνο δεν συγκρούονται αυτά τα δύο βασικά θεωρήματα, αλλά, αντιθέτως, αλληλοσυμπληρώνονται· η εξήγηση του φαινομενικού παράδοξου είναι το κλειδί για τη σωστή κατανόηση και των δύο.

Τα θεωρήματα του Gödel αφορούν την πρωτοβάθμια (κατηγορηματική) λογική· πρέπει, λοιπόν, να πω πρώτα μερικά πράγματα γι' αυτή την τόσο βασική μαθηματική δομή.

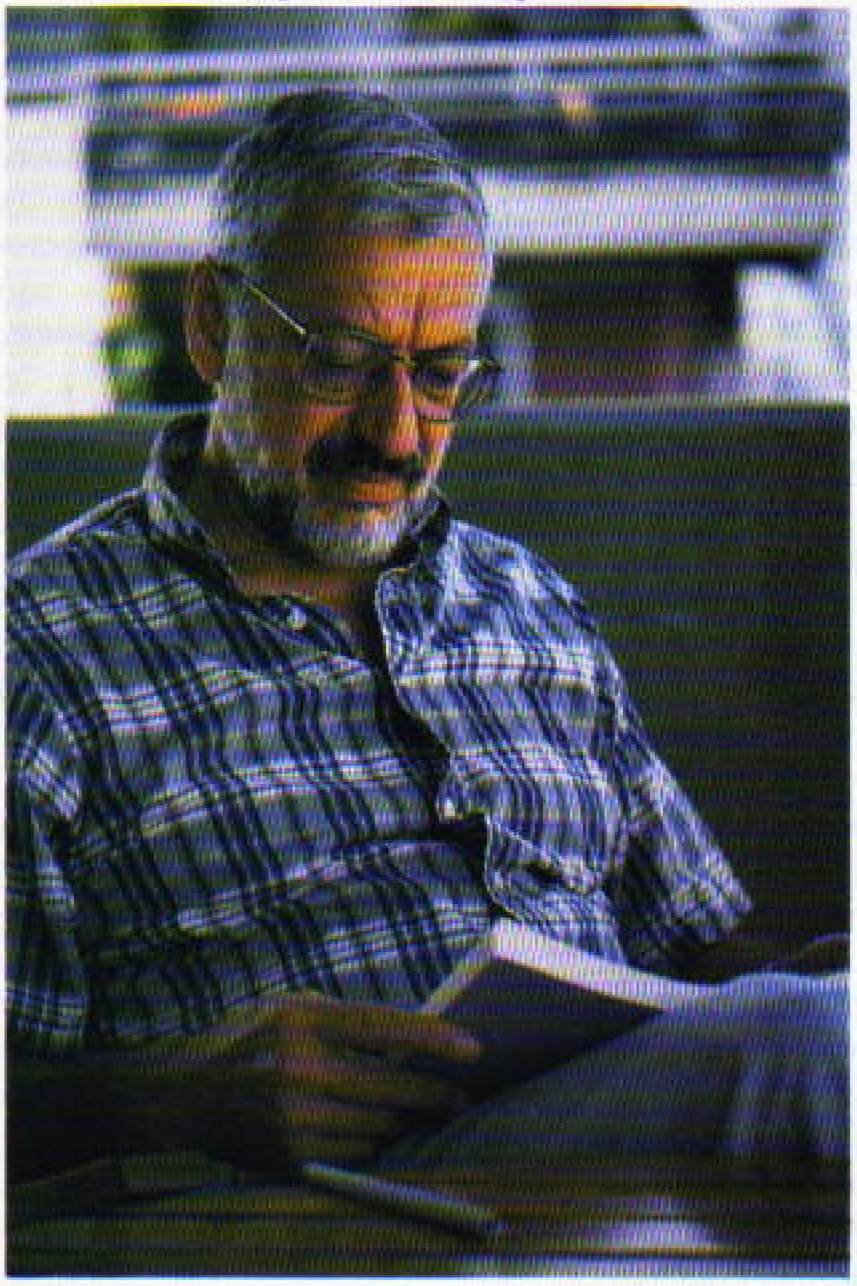
Μια πρωτοβάθμια γλώσσα L καθορίζεται από ένα *λεξιλόγιο* συμβόλων, τα οποία ονομάζουν τις βασικές σταθερές, συναρτήσεις και σχέσεις κάποιας θεωρίας. Οι *προτάσεις* της κατασκευάζονται από αυτά τα σύμβολα, και από μεταβλητές x, y, ...· το σύμβολο της ισότητας (=), τους προτασιακούς συνδέσμους: άρνηση ($\neg$), *σύζευξη* ($\wedge$), *διάζευξη* ($\vee$), *συνεπαγωγή* ($\rightarrow$), και τους ποσοδείκτες: *για κάθε* ($\forall$) και *υπάρχει* ($\exists$). Η γλώσσα της αριθμοθεωρίας, για παράδειγμα, έχει σύμβολα 0, 1, + και $\cdot$, και τυπική της πρόταση (για το σύνολο των φυσικών αριθμών) είναι η

$$(\forall x)[\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)[x = y + 1]],$$

που σημαίνει ότι «κάθε φυσικός αριθμός $x \neq 0$ είναι ο επόμενος κάποιου άλλου». Πιο ενδιαφέρουσα είναι η

$$(\forall x)(\exists y)[(\exists z)[(x + z) + 1 = y] \wedge (\forall u)(\forall v)[y = u \cdot v \rightarrow (u = 1 \vee u = y]], \quad (1)$$

που εκφράζει το γεγονός ότι «για κάθε αριθμό x, υπάρχει κάποιος άλλος, y, μεγαλύτερος του x (εφόσον $x + z + 1 = y$ για κάποιο z), ο οποίος διαιρείται (ακριβώς) μόνο από το 1 και από τον εαυτό του»· με άλλα λόγια, «υπάρχουν απείρως πολλοί πρώτοι αριθμοί». Στην πραγματικότητα, σχεδόν κάθε πρόταση της κλασικής αριθμοθεωρίας μπορεί να εκφραστεί (με λίγη προσπάθεια) σ' αυτή την τόσο απλή, πρωτοβάθμια γλώσσα.



Πιο σημαντική είναι η πρωτοβάθμια γλώσσα της συνολοθεωρίας, που έχει μόνο ένα διμελές σύμβολο ($\in$), για τη σχέση του «ανήκειν», στην οποία μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα κλασικά μαθηματικά! Αυτό, βέβαια, δεν είναι προφανές —για την απόδειξή του, πρέπει να απεικονίσουμε πιστά στον κόσμο των συνόλων όλες τις δομές των μαθηματικών (τους φυσικούς, πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς, τις συναρτήσεις σ' αυτά τα σύνολα, κ.λπ.) και να επικαλεστούμε μερικά από τα βασικότερα μαθηματικά αποτελέσματα του περασμένου αιώνα—, αλλά είναι γεγονός· επομένως, τα θεωρήματα του Gödel επηρεάζουν άμεσα όλα τα μαθηματικά.

Είπα προηγουμένως ότι η πρόταση (1) εκφράζει το «θεώρημα του Ευκλείδη», ότι δηλαδή υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι φυσικοί αριθμοί, αλλά αυτό ισχύει μόνον αν επιλέξουμε το σύνολο N των φυσικών αριθμών ως πεδίο κύμανσης των μεταβλητών και ερμηνεύσουμε τα σύμβολα 0, 1, + και $\cdot$ ως τους φυσικούς αριθμούς 0 και 1, και τις συνηθισμένες πράξεις της αριθμητικής. Αυτό, όμως, δεν είναι υποχρεωτικό: θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις μεταβλητές ως ονόματα τυχαίων (μη αρνητικών) ρητών αριθμών και να ερμηνεύσουμε τα 0, 1, + και $\cdot$ ανάλογα· τότε, η (1) δεν αληθεύει πια, εφόσον δεν υπάρχουν «θετικά πρώτα κλάσματα». Γενικά, μια *ερμηνεία* ή *δομή* M της τυχαίας πρωτοβάθμιας γλώσσας L προσδιορίζεται από ένα μη κενό σύνολο A_M και μια ανάθεση στα σύμβολα της L συγκεκριμένων στοιχείων του A_M και συναρτήσεων και σχέσεων στο A_M, έτσι ώστε οι προτάσεις της L να αποκτούν νόημα, και καθεμία από αυτές *να είναι αληθής* ή *ψευδής* στην M.

Είναι σημαντικό και χαρακτηριστικό στοιχείο της μαθηματικής λογικής, γενικά, ότι διακρίνει αυτές τις δύο ξεχωριστές και συμπληρωματικές απόψεις μιας γλώσσας L, είτε πρόκειται για πρωτοβάθμια είτε για φυσική γλώσσα (π.χ. ελληνικά ή αγγλικά) ή, ακόμη, για γλώσσα προγραμματισμού: το *συντακτικό* της L προσδιορίζει τις «γραμματικά ορθές» εκφράσεις της γλώσσας, αυτές που επιδέχονται νόημα, και η *σημασιολογία* της L αναθέτει νόημα σ' αυτές τις εκφράσεις, για κάθε δεδομένη ερμηνεία (λεξικό) του λεξιλογίου της L. Στην περίπτωση της πρωτοβάθμιας γλώσσας, το συντακτικό είναι πολύ απλό και η σημασιολογία καθορίζεται με τους απλούς κανόνες που υπολογίζουν την αληθοτιμή της κάθε πρότασης στο τυχαίο πρότυπο.

Τελικά υπάρχει και η έννοια της *απόδειξης*, που δίνει «βεβαιότητα» στα μαθηματικά και τα ξεχωρίζει από τις άλλες επιστήμες. Δεν μπορούμε, βεβαίως, να αποδείξουμε τα πάντα, πρέπει να ξεκινήσουμε από κάτι· τυπικά ξεκινάμε με ένα σύνολο T *αξιωμάτων*, προτάσεων που αποδεχόμαστε για κάποιο λόγο —επειδή μας φαίνονται «προφανείς» σε κάποιο πρότυπο, π.χ. τα αξιώματα της επιπεδομετρίας, ή επειδή εκφράζουν τους βασικούς νόμους κάποιας επιστήμης, π.χ. της φυσικής ή των οικονομικών, ή, απλά, επειδή έχουν ενδιαφέρον, όπως όταν οι προτάσεις του T εκφράζουν τις νόμιμες κινήσεις στο σκάκι. *Πρωτοβάθμια θεωρία* είναι ακριβώς ένα τέτοιο, τυχαίο σύνολο προτάσεων, και η τυχαία πρόταση θ είναι (τυπικό) *θεώρημα* της T, αν υπάρχει *απόδειξη* της θ από το T, δηλαδή κάποια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $\theta_1, ..., \theta_n$, όπου η θ είναι η τελευταία πρόταση θ_n και κάθε θ_i είτε είναι αξίωμα (μέλος του T) ή είναι το *συμπέρασμα* κάποιου *λογικού κανόνα*, του οποίου οι *υποθέσεις* προηγούνται της θ_i στην απόδειξη. Οι «λογικοί κανόνες» είναι ελάχιστοι, απλοί και αποτέλεσμα μιας αναζήτησης του ανθρώπινου γένους για τους «έγκυρους συλλογισμούς» —η οποία ξεκίνησε με τον Αριστοτέλη (ίσως ακόμη πιο πριν) και συμπληρώθηκε μόλις στο τέλος του περασμένου αιώνα. Για παράδειγμα, ένας από τους πλέον βασικούς κανόνες είναι ο εξής:

από τη θ και τη $\theta \to \varphi$, συμπεραίνουμε τη φ.

Αυτή η έννοια απόδειξης δεν είναι παρά η αυστηρή, πρωτοβάθμια εκδοχή της έννοιας που μάθαμε στην ευκλείδεια γεωμετρία, στο σχολείο. Προσφέρει στους μαθηματικούς μια σίγουρη μέθοδο να ελέγξουν (τουλάχιστον κατ' αρχήν) χωρίς περιθώριο λάθους αν κάποια απόδειξη που προτείνεται είναι όντως σωστή. Οι λογικοί κανόνες είναι αρκετά απλοί, έτσι ώστε η ακρίβεια κάθε επίκλησής τους να ελέγχεται εύκολα, και επομένως η ορθότητα μιας τυχαίας απόδειξης να μπορεί να ελεγχθεί τέλεια, «βήμα προς βήμα». Αυτή τη βεβαιότητα με την οποία ελέγχουμε αποδείξεις επικαλούμαστε όταν μιλάμε για τη «βέβαιη γνώση» που απορρέει από τα μαθηματικά.

Η τυχαία δομή M είναι *πρότυπο* (μοντέλο) της θεωρίας T αν κάθε αξίωμα της T αληθεύει στην M· και η τυχαία πρόταση θ είναι *λογικό συμπέρασμα* της T αν αληθεύει σε κάθε πρότυπο της T. Έτσι, έχουμε δύο κλάσεις προτάσεων που συνάγονται από τα αξιώματα μιας θεωρίας T «μόνο με τη λογική», τα θεωρήματα της T που συνάγονται συνδυαστικά, διότι επιδέχονται αποδείξεις, και τα λογικά συμπεράσματα της T που συνάγονται σημασιολογικά, επειδή αληθεύουν σε κάθε πρότυπο της T· η βασική ανακάλυψη του Gödel είναι ότι αυτές οι δύο κλάσεις συμπίπτουν.

Θεώρημα πληρότητας του Gödel. *Η τυχαία πρωτοβάθμια πρόταση θ είναι θεώρημα της τυχαίας πρωτοβάθμιας θεωρίας T, τότε και μόνον αν η θ αληθεύει σε κάθε πρότυπο της T.*

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες είναι οι *έγκυρες προτάσεις* που είναι λογικά συμπεράσματα της «κενής θεωρίας», δηλαδή αληθεύουν σε κάθε δομή, ή (ισοδύναμα, από το θεώρημα πληρότητας) είναι «απόλυτα» θεωρήματα της λογικής. Μπορούμε να πούμε ότι αυτές είναι οι «λογικές αλήθειες», οι προτάσεις που αληθεύουν ανεξάρτητα από την «πραγματικότητα», όπως αυτή απεικονίζεται σε μια πρωτοβάθμια δομή.

Το θεώρημα πληρότητας έχει πολλές και σημαντικές εφαρμογές σε μαθηματικές θεωρίες, αλλά η πρωταρχική του σημασία βρίσκεται στο τι μας λέει για τα λογικά θεμέλια της επιστήμης. Προσωπικά, πιστεύω ότι έλυσε οριστικά και τελεσίδικα ένα πανάρχαιο ερώτημα της επιστήμης: Τι συνάγεται από τι, αναγκαστικά και μόνο με τη λογική; Με άλλα λόγια, ποιες επιστημονικές προτάσεις (νόμους, θέσεις) πρέπει υποχρεωτικά να αποδεχτούμε ως θέμα λογικής (και ανεξάρτητα από το πώς, πράγματι, είναι φτιαγμένος ο κόσμος μας), αν παραδεχτούμε πρώτα μερικούς συγκεκριμένους νόμους; Το ερώτημα είναι προφανώς θεμελιακό, όχι μόνο για μαθηματικούς και φιλοσόφους (που θέλουν να κατανοήσουν τις έννοιες της «λογικής αλήθειας» και της «λογικής συνεπαγωγής»), αλλά και για επιστήμονες κάθε κλάδου που θέλουν να διαχωρίσουν τους βασικούς νόμους της επιστήμης τους από τα λογικά τους συμπεράσματα.

Όσον αφορά, τώρα, το θεώρημα μη πληρότητας.

Ας διατυπώσουμε πρώτα μιαν απλή εκδοχή αυτού του κορυφαίου θεωρήματος για τη θεωρία ZFC (Zermelo-Fraenkel Choice —τη συνήθη, αξιωματική συνολοθεωρία), που δεν διαφέρει σημαντικά από την αρχική διατύπωσή του.

Θεώρημα μη πληρότητας του Gödel. *Αν η* ZFC είναι σωστή για την αριθμητική, τότε δεν αποδεικνύει όλες τις αριθμητικές αλήθειες.

Για να ορίσουμε απλά την έννοια της «αριθμητικά σωστής» θεωρίας, ας ταυτίσουμε πρώτα την τυχαία *αριθμητική πρόταση* (δηλαδή πρόταση της πρωτοβάθμιας γλώσσας της αριθμοθεωρίας) θ με την κλασική της μετάφραση θ_s στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων. Μια θεωρία T στη γλώσσα της συνολοθεωρίας είναι *σωστή για την αριθμητική*, αν κάθε αριθμητική πρόταση θ που είναι θεώρημα της T αληθεύει στη συνήθη δομή των φυσικών αριθμών. Έτσι ορισμένη, η υπόθεση του θεωρήματος είναι γενικά παραδεκτή στα μαθηματικά· και από αυτήν, με το θεώρημα μη πληρότητας, συνάγεται ότι η ZFC δεν είναι «πλήρης», με την έννοια ότι κάποια αληθής αριθμητική πρόταση θ δεν είναι θεώρημα της ZFC —και, βέβαια, ούτε και η άρνησή της $\neg\theta$ είναι θεώρημα της ZFC, εφόσον η $\neg\theta$ είναι ψευδής και η ZFC είναι αριθμητικά σωστή. Ο Gödel, μάλιστα, κατασκεύασε μια συγκεκριμένη τέτοια πρόταση γ, «αναποκρίσιμη στη ZFC», που είναι *προφανώς αληθής* στη συνήθη δομή! (Πολύ περιληπτικά, η γ εκφράζει τη σκέψη ότι «δεν υπάρχει απόδειξη της γ»· το τέχνασμα είναι να δείξουμε ότι μια τέτοια «αυτοαναφορική» δήλωση μπορεί να εκφραστεί στην πρωτοβάθμια γλώσσα της αριθμοθεωρίας.)

Αυτό το απλό γεγονός, ότι η αξιωματική συνολοθεωρία δεν μπορεί να αποδείξει όλες τις πρωτοβάθμιες αριθμητικές αλήθειες είναι πράγματι συγκλονιστικό, αφού όλα τα κλασικά θεωρήματα των μαθηματικών συνάγονται από τα αξιώματά της! Επιπλέον, εκτός από το (κάπως τεχνητό) παράδειγμα γ του Gödel, τι άλλες προτάσεις στη γλώσσα της συνολοθεωρίας μπορεί να είναι αναποκρίσιμες στη ZFC; Μήπως ανάμεσα σ' αυτές βρίσκονται και μερικές από τις κλασικές, αναπόδεικτες εικασίες των μαθηματικών; Το 1939, οκτώ χρόνια μετά από την απόδειξη του θεωρήματος μη πληρότητας, ο Gödel έδειξε ότι η ZFC δεν αποδεικνύει την άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς· και το 1963, είκοσι τέσσερα χρόνια αργότερα, ο Paul Cohen έδειξε ότι ούτε η υπόθεση του συνεχούς είναι θεώρημα της ZFC, με αποτέλεσμα το σημαντικότερο, ανοικτό πρόβλημα της συνολοθεωρίας να μετατεθεί έξω από τα όρια των κλασικών μαθηματικών, αναγκαστικά ανεπίλυτο με τις κλασικές μεθόδους. Στη συνέχεια, σχεδόν κάθε κρίσιμη ερώτηση για τα σύνολα που δεν είχε απαντηθεί πριν από το 1940 αποδείχτηκε αναποκρίσιμη στη ZFC, και η θεωρία συνόλων άλλαξε κατεύθυνση και προσανατολίστηκε στη μελέτη «ισχυρών αξιωμάτων», πέραν της ZFC. Μαζί με πολλούς άλλους, έχω και εγώ εργαστεί για μεγάλο μέρος της ζωής μου σ' αυτό το πρόγραμμα· το ίδιο έχει κάνει και ο μαθητής μου Αλέξανδρος Κεχρής, που μίλησε γι' αυτό κάπως πιο συγκεκριμένα στη συνέντευξή την οποία σας παραχώρησε τον περασμένο Δεκέμβριο. Συνεπώς, δεν υπάρχει ανάγκη να πω περισσότερα γι' αυτό.

Αξίζει, όμως, να διερευνήσουμε για λίγο τον πιο προφανή τρόπο επέκτασης της ZFC, τον οποίο μας υποδεικνύει η απόδειξη του Gödel: εφόσον η γ αληθεύει, γιατί να μην την προσθέσουμε στα αξιώματα; Μήπως μπορούμε με αυτό τον τρόπο να κατασκευάσουμε μια πλήρη θεωρία; Δυστυχώς (ή ευτυχώς;) όχι· η απόδειξη του Gödel εφαρμόζεται στην επεκταθείσα θεωρία ZFC + γ, και μας δίνει μια καινούργια πρόταση γ', που επίσης είναι αληθής, αλλά που δεν είναι θεώρημα της ZFC + γ. Και ούτω καθεξής: η απόδειξη του Gödel (πολύ βασικότερη από τη διατύπωση του θεωρήματός του, όπως τόσο συχνά συμβαίνει στα μαθηματικά) δείχνει αναμφισβήτητα ότι *κάθε σωστή για την αριθμητική, υπολογιστικά αξιωματική θεωρία T στη γλώσσα της συνολοθεωρίας δεν είναι πλήρης*, και, συγκεκριμένα, ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε (κατευθείαν από τον ορισμό της T) κάποια αριθμητική πρόταση γ_T που αληθεύει αλλά που δεν είναι θεώρημα της T. Για να ορίσουμε αυστηρά την έννοια της «υπολογιστικά αξιωματικής θεωρίας», χρειαζόμαστε μερικά στοιχεία από τη θεωρία αναδρομής, όμως, οπωσδήποτε, η συγκεκριμένη έννοια καλύπτει κάθε επέκταση T της ZFC με πεπερασμένο αριθμό προτάσεων —και αυτό, από μόνο του, είναι αρκετά εντυπωσιακό.

Στο επόμενο βήμα εφαρμόζεται το θεώρημα πληρότητας, και εγγυάται ότι *υπάρχει κάποιο πρότυπο M_γ της* ZFC *στο οποίο η πρόταση γ του Gödel είναι ψευδής*, επειδή, αν η γ αλήθευε σε κάθε πρότυπο της ZFC, τότε θα ήταν θεώρημα της ZFC. Αυτό το πρότυπο M_γ μάς δίνει μια καινούργια, «ασυνήθη» (ιδιάζουσα) έννοια του «συνόλου», μια «επανερμηνεία» της γλώσσας της συνολοθεωρίας, με την οποία, από τη μια μεριά, όλα τα θεωρήματα των κλασικών μαθηματικών παραμένουν αληθή (επειδή είναι θεωρήματα της ZFC), και από την άλλη, η πρόταση γ του Gödel είναι ψευδής. Ποια είναι η δομή των φυσικών αριθμών στο M_γ; Πολύ παράξενη, ασυνήθιστη, και όμως αρκετά κοντά στη συνήθη δομή, έτσι ώστε κάθε θεώρημα της κλασικής αριθμοθεωρίας να παραμένει αληθές. Ο μεγάλος νορβηγός μαθηματικός Skolem είχε αποδείξει πριν από τον Gödel, και με άλλον τρόπο, ότι υπάρχουν τέτοια ασυνήθη πρότυπα, όμως η απόδειξη του Gödel μάς δίνει πληρέστερη εξήγηση γι' αυτό το κάπως απίθανο αποτέλεσμα.

Ελπίζω ότι, έπειτα απ' όλα αυτά, δεν είναι δύσκολο να δούμε τη σχέση ανάμεσα στα θεωρήματα πληρότητας και μη πληρότητας, και την εξήγηση της φαινομενικής αντίθεσής τους: το πρόβλημα ανακύπτει επειδή στις διατυπώσεις αυτών των δύο θεωρημάτων χρησιμοποιούμε τη λέξη «πλήρης» με δύο διαφορετικές σημασίες. Για τη ZFC, συνοπτικά, το θεώρημα πληρότητας εγγυάται ότι κάθε πρόταση θ που *αληθεύει σε κάθε πρότυπο της* ZFC είναι και θεώρημα της ZFC, ενώ το θεώρημα μη πληρότητας μας δίνει παραδείγματα προτάσεων που *αληθεύουν στο σύνηθες πρότυπο* της ZFC αλλά που δεν είναι θεωρήματα της ZFC.

Ερ.: *Σας ευχαριστώ για την αναλυτική απάντησή σας. Θα ήθελα να σας ρωτήσω ποια είναι η σημασία της «Θέσης Church-Turing», σύμφωνα με την οποία η έννοια της μηχανής Turing (ή κάποιας ισοδύναμης) στην πραγματικότητα ορίζει αυτό που εννοούμε στα μαθηματικά όταν λέμε «αλγοριθμική» (ή «ενεργό», ή «αναδρομική» ή «μηχανική») διαδικασία.*

Απ.: Η ερώτησή σας είναι πολύ σημαντική, και ο συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο τη θέσατε μου δίνει την ευκαιρία να εξηγήσω (ή, τουλάχιστον, να εκφράσω τη γνώμη μου για) μερικά λεπτά θέματα που συνδέονται με τη Θέση Church-Turing. Θα δεχτώ ως συνώνυμες (προσωρινά) όλες τις εκφράσεις που χρησιμοποιήσατε, «αλγοριθμική ή ... ή μηχανική διαδικασία», και θα προσθέσω σ' αυτές τους παραδοσιακούς όρους «υπολογιστική διαδικασία» και «αλγόριθμος», τις οποίες και προτιμώ.

Από ιστορική άποψη, κατ' αρχάς, ο Church και ο Turing εργάστηκαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο (το 1936, σημαδιακό χρόνο για τη λογική), με τον ίδιο στόχο: να λύσουν το λεγόμενο *Entscheidungsproblem* του Hilbert («Entscheidung» θα πει «εξακρίβωση» ή «απόκριση»).

Το Entscheidungsproblem του Hilbert: *Υπάρχει υπολογιστική διαδικασία που να εξακριβώνει αν η τυχαία πρόταση θ της πρωτοβάθμιας λογικής είναι θεώρημα, ή, ισοδύναμα από το θεώρημα πληρότητας, αληθής σε κάθε δομή;*

Παρόμοιες ερωτήσεις, που απαιτούν κάποια «υπολογιστική διαδικασία» για την απάντησή τους, είχαν ανακύψει πολλές φορές στα μαθηματικά, π.χ. το εξής κλασικό παράδειγμα από την άλγεβρα του 19ου αιώνα: *υπάρχει υπολογιστική διαδικασία που να εξακριβώνει αν το τυχαίο πολυώνυμο* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ *με (θετικούς ή αρνητικούς) ακέραιους συντελεστές έχει πραγματική ρίζα;* Η απάντηση δίνεται από τον περίφημο *αλγόριθμο του Sturm*, που μάλιστα υπολογίζει (από τους δοσμένους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$) τον ακριβή αριθμό k πραγματικών ριζών του πολυωνύμου ($0 \leq k \leq n$)· οπότε θα υπάρχει πραγματική ρίζα όταν $k > 0$. Υπήρχαν πολλά τέτοια παραδείγματα, απ' όλους τους κλάδους των μαθηματικών, όμως όλα είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό: η απάντηση ήταν πάντοτε καταφατική σε κάθε περίπτωση όπου το πρόβλημα είχε λυθεί και η λύση συνίστατο στην περιγραφή κάποιας συγκεκριμένης διαδικασίας α και την απόδειξη ότι η α παράγει το ζητούμενο αντικείμενο. Η «υπολογιστικότητα» της α δεν είχε ποτέ αμφισβητηθεί· ήταν πάντα προφανής. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος του Sturm, μια όμορφη παραλλαγή του κλασικού ευκλείδειου αλγορίθμου (που υπολογίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο φυσικών αριθμών), βασικά δεν είναι τίποτα άλλο παρά «επαναληπτική διαίρεση πολυωνύμων». Όσο περίπλοκη κι αν είναι η «τακτοποίηση» αυτών των διαιρέσεων, κι όσο έξυπνη η απόδειξη ότι οδηγούν στο ζητούμενο, δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι η διαδικασία είναι «υπολογιστική» —τόσο που το ζήτημα της «υπολογιστικότητάς» της δεν ανακύπτει καν. Έτσι, δεν είχε δημιουργηθεί η ανάγκη να δοθεί αυστηρός ορισμός του «αλγορίθμου»· αρκούσαν οι λεπτομερείς περιγραφές συγκεκριμένων αλγορίθμων. Η περίπτωση όμως του *Entscheidungsproblem* ήταν διαφορετική, επειδή, γενικά, όλοι πίστευαν ότι είχε *αρνητική απάντηση*· και για να δώσουμε αυστηρή απόδειξη ότι *δεν υπάρχει αλγόριθμος* που να υπολογίζει κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση, πρέπει προφανώς να δώσουμε πρώτα έναν αυστηρό ορισμό της έννοιας του «αλγορίθμου».

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα κάπως πιο προσεκτικά, έστω S^* το σύνολο από πεπερασμένες ακολουθίες ή (απλούστερα) *λέξεις* από κάποιο πεπερασμένο σύνολο S, π.χ. το ελληνικό ή το λατινικό αλφάβητο, ή ακόμη το (μεγαλύτερο) σύνολο από 256 «χαρακτήρες» που χρησιμοποιούμε τώρα στον προγραμματισμό. Ανάμεσα στις λέξεις του S^* βρίσκουμε τις προτάσεις της τυχαίας πρωτοβάθμιας γλώσσας, αλλά, επίσης, τους ακεραίους (στο δεκαδικό σύστημα, με + ή − στην κεφαλή), τα πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές, κ.λπ. Με αναφορά σε κάποια συγκεκριμένη έννοια *αλγορίθμου στο* S^*, καλούμε την τυχαία συνάρτηση $f: S^* \to S^*$ *υπολογίσιμη* αν κάποιος αλγόριθμος την υπολογίζει, και το τυχαίο σύνολο $A \subseteq S^*$ *αποκρίσιμο* αν η «χαρακτηριστική συνάρτησή» του X_A είναι υπολογίσιμη, όπου

$$x_A(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \theta \text{ είναι μέλος του } A, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (2)$$

Το *Entscheidungsproblem* είναι το πρόβλημα *αποκρισιμότητας* του συνόλου των έγκυρων πρωτοβάθμιων προτάσεων.

Μπήκα στις λεπτομέρειες, επειδή το ιστορικό πλαίσιο έχει πάντα ενδιαφέρον (έτσι τουλάχιστον πιστεύω), αλλά και πιο συγκεκριμένα επειδή συχνά λέγεται ότι οι Church και Turing ξεκίνησαν ακριβώς με αυτό που μόλις είπα ότι είναι το ζητούμενο, δηλαδή με έναν αυστηρό ορισμό του «αλγορίθμου». Δεν έχουν όμως ακριβώς έτσι τα πράγματα· οι Church και Turing όρισαν κατευθείαν την κλάση των *υπολογίσιμων συναρτήσεων* (στο S^*), αυτών για τις οποίες *υπάρχει αλγόριθμος που τις υπολογίζει*, παρακάμπτοντας τον ορισμό της έννοιας του αλγορίθμου.

Συνοπτικά, ο Turing όρισε πρώτα ένα σύνολο (αφηρημένων) «μηχανών», αυτών που σήμερα φέρουν το όνομά του, οι οποίες δρουν πάνω στις λέξεις από κάποιο αλφάβητο και (μερικές φορές, όταν ο υπολογισμός τους «συγκλίνει») αποδίδουν κάποια λέξη ως «τιμή». Πολλοί από τους αναγνώστες του *Quantum* θα ξέρουν τον αυστηρό ορισμό, αλλά, οπωσδήποτε, αυτό έχει μόνο ιστορικό ενδιαφέρον σήμερα· χωρίς να χάσουμε τίποτα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την έννοια της μηχανής Turing με έναν PC της εποχής μας που υλοποιεί κάποιο συγκεκριμένο πρόγραμμα και έχει τη δυνατότητα να απαιτήσει επιπρόσθετη (εξωτερική) μνήμη χωρίς περιορισμό κατά τη διάρκεια του υπολογισμού. Χωρίς να ξέρει τίποτα γι' αυτές τις τόσο προσφιλείς μηχανές (και αυτό είναι πράγματι αξιοθαύμαστο), ο Turing υποστήριξε πολύ εύγλωττα ότι *κάθε υπολογιστική διαδικασία μπορεί να προσομοιωθεί από μια μηχανή*, και απ' αυτό συμπέρανε την εξής διάσημη δήλωση.

Θέση Church-Turing: *Η τυχαία συνάρτηση* $f: S^* \to S^*$ *στις λέξεις από κάποιο πεπερασμένο σύνολο S είναι υπολογίσιμη* (από κάποιον αλγόριθμο) *τότε και μόνον αν η f είναι υπολογίσιμη από κάποια μηχανή Turing.*

Κατόπιν έδειξε ότι η συνάρτηση (2) δεν υπολογίζεται από καμιά μηχανή Turing, επομένως, δεν υπολογίζεται από κανέναν αλγόριθμο (από τη Θέση), και η απάντηση στο *Entscheidungsproblem* είναι αρνητική. Ο Church έκανε κάτι παρόμοιο, χρησιμοποιώντας λ-όρους αντί για μηχανές Turing, αλλά με λιγότερη ευγλωττία, επειδή οι λ-όροι δεν είναι πολύ φιλικά αντικείμενα.

Πιστεύω ότι έχω πια θέσει το πλαίσιο για δύο από τις παρατηρήσεις που ήθελα να κάνω για τη Θέση Church-Turing, τις μηχανές Turing και τους αλγορίθμους.

Η πρώτη είναι ότι ουδέποτε επικαλούμαστε τη Θέση Church-Turing για να αποδείξουμε ότι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση είναι υπολογίσιμη —γι' αυτό το σκοπό, αρκεί ο προσδιορισμός μιας συγκεκριμένης διαδικασίας α που αποδίδει το ζητούμενο και είναι «προφανώς» υπολογιστική.

Η δεύτερη, ότι οι μηχανές Turing ή οι λ-όροι δεν αποδίδουν ικανοποιητικό *ορισμό* της έννοιας του *αλγορίθμου*, επειδή, κατ' αρχήν, δρουν σε σύνολα λέξεων. Μερικοί ισχυρίζονται ότι *όλοι οι υπολογισμοί είναι συμβολικοί*, και ίσως το σλόγκαν πράγματι να ισχύει για τους υπολογισμούς αληθινών, υλικών μηχανών, αλλά σίγουρα δεν είναι αυτό που εννοούν οι μαθηματικοί όταν μιλούν για «αλγορίθμους». Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος του Sturm συνήθως ορίζεται στην κλάση πολυωνύμων με τυχαίους *πραγματικούς* συντελεστές, και τίποτα στην περιγραφή του ή στην ανάλυση τού *πώς* εφαρμόζεται δεν απαιτεί οι συντελεστές να είναι ακέραιοι ή ρητοί. Αν θελήσουμε να τον *υλοποιήσουμε* σε κάποιον αληθινό υπολογιστή ή κάποια ιδεώδη μηχανή Turing, τότε, βέβαια, πρέπει να προσεγγίσουμε τους πραγματικούς συντελεστές του δοσμένου πολυωνύμου με ρητούς και να επιλέξουμε συγκεκριμένες συμβολικές παραστάσεις αυτών των ρητών· αλλά υπάρχουν πολλοί τρόποι να κάνουμε αυτές τις επιλογές, και κανένας τους δεν αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο του *αλγορίθμου του Sturm*. Πιστεύω πως είναι πιο χρήσιμο να δεχτούμε ότι ο *αλγόριθμος του Sturm* είναι συγκεκριμένο αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο που επιδέχεται πολλές *υλοποιήσεις* σε διάφορα πρότυπα υπολογισμού από το να αναγνωρίσουμε πολλούς «αλγορίθμους Sturm» με διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες. Από αυτή τη σκοπιά, ο αλγόριθμος του Sturm δρα κατευθείαν σε τυχαία, πραγματικά πολυώνυμα, οι (πολλές και ποικίλες) υλοποιήσεις του δρουν σε συμβολικές προσεγγίσεις πραγματικών πολυωνύμων, και η σχέση ανάμεσα στον αφηρημένο αλγόριθμο και τις υλοποιήσεις του είναι πρόβλημα για μελέτη, πρόβλημα στο οποίο ο ικανός προγραμματιστής θα αφιερώσει ικανό χρόνο.

Μέχρι τώρα, δεν υπάρχει ακόμη ένας γενικά αποδεκτός, αυστηρός ορισμός της έννοιας του αλγορίθμου στα μαθηματικά ή την πληροφορική, ανάλογος των ορισμών του «πραγματικού αριθμού», της «στοχαστικής μεταβλητής», κ.λπ., και τούτο παρά την τεράστια πρόοδο που έχει επιτευχθεί στη μελέτη των αλγορίθμων τα τελευταία χρόνια. Αυτό δεν είναι, ίσως, τόσο παράδοξο όσο ακούγεται· π.χ., ο λογισμός αναπτύχθηκε εξαιρετικά για 200 χρόνια περίπου προτού θεμελιωθεί ικανοποιητικά με αυστηρούς ορισμούς των πραγματικών αριθμών, των ορίων, των παραγώγων, κ.λπ. Οι μαθηματικοί δεν αναζήτησαν τέτοιους ορισμούς, μέχρις ότου η θεωρία έφτασε σε τέτοιο σημείο ανάπτυξης ώστε να μπορεί να τους χρησιμοποιήσει —και μάλιστα τους χρειαζόταν. Πιστεύω, όμως, ότι και η θεωρητική πληροφορική έχει φτάσει πια στο ανάλογο σημείο της ανάπτυξής της, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιήσει και μάλιστα να χρειάζεται μια αυστηρή και εύχρηστη θεωρία αλγορίθμων. Πάντοτε συνιστώ αυτή την περιοχή έρευνας, και, όπως ίσως γνωρίζετε, δουλεύω κι εγώ σ' αυτό το θέμα τα τελευταία χρόνια.

Ερ.: *Θα θέλατε τώρα να μας πείτε κάτι για την εργασία σας πάνω στους αναδρομικούς αλγορίθμους;*

Απ.: Ίσως μπορέσω να εισαγάγω μερικές από τις βασικές ιδέες μ' ένα απλό παράδειγμα, από τη δουλειά του Stephen Kleene, ενός από τους πρωτοπόρους της θεωρίας αναδρομής. Θέτουμε

$R(m, n) \Leftrightarrow m \geq n$ και οι n, $n + 2$ είναι και οι δύο πρώτοι αριθμοί,

και θεωρούμε το σύστημα *αναδρομικών εξισώσεων*

$$\begin{aligned} &f(m) = g(m, 0) \\ &g(m, n) = \text{αν } R(m, n) \text{ τότε } 0, \text{ αλλιώς } g(m, n + 1) + 1. \end{aligned} \qquad (3)$$

Είναι προφανές πως από αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να παραγάγουμε οδηγίες για τον υπολογισμό της τιμής $f(m)$, για τυχαίο m. Για παράδειγμα, αν $m = 7$, προφανώς

$\neg R(7, 0), \neg R(7, 1), ..., \neg R(7, 9), \neg R(7, 10)$, αλλά $R(7, 11)$.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις και εφαρμόζοντας επανειλημμένα την εξίσωση για τη συνάρτηση g, υπολογίζουμε διαδοχικά τις τιμές

$g(7, 0) = g(7, 1) + 1 = ... = g(7, 10) + 10 = g(7, 11) + 11 = 0 + 11 = 11,$

και επομένως $f(7) = g(7, 0) = 11$. Δεν είναι δύσκολο να δώσουμε γενικό, αυστηρό ορισμό αυτής της «αναδρομικής διαδικασίας» και να δείξουμε ότι, για κάθε m, υπολογίζει την τιμή

$f(m) = n \geq m$ τέτοιος ώστε οι n και $n + 2$ να είναι πρώτοι αριθμοί,

αν υπάρχει κάποιος $n \geq m$ που να είναι το πρώτο μέλος «ζεύγους δίδυμων πρώτων», ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, η διαδικασία δεν συγκλίνει (εξακολουθεί επ' άπειρον). Αυτή, η δεύτερη περίπτωση μάλλον δεν ανακύπτει, εφόσον οι αριθμοθεωρητικοί (γενικά) πιστεύουν τη λεγόμενη *εικασία των δίδυμων πρώτων*, ότι δηλαδή υπάρχουν άπειρα το πλήθος ζεύγη δίδυμων πρώτων· αν όμως, παρ' ελπίδα, κάνουν λάθος, τότε η f που υπολογίζεται από αυτή τη διαδικασία είναι *μερική συνάρτηση*, με πεδίο ορισμού το αρχικό διάστημα των φυσικών που είναι μικρότεροι κάποιου ζεύγους δίδυμων πρώτων. Είναι μάλιστα εύκολο να δείξουμε ότι, *αν η εικασία των δίδυμων πρώτων είναι ψευδής, τότε δεν υπάρχει ζεύγος f, g* (ολικά ορισμένων) *συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς που να ικανοποιούν το σύστημα* (3).

Μέχρι στιγμής, έχω αναφερθεί σε δύο από τις βασικές ιδέες της *θεωρίας αναδρομικών εξισώσεων*: ότι οι αναδρομικές εξισώσεις (όπως αυτές στο (3)) πρέπει να ερμηνεύονται ως εξισώσεις ανάμεσα σε μερικές συναρτήσεις (διαφορετικά μπορεί να μην επιδέχονται λύση), και ότι παράγουν οδηγίες για υπολογισμούς, έτσι που μπορούμε να πούμε ότι *ορίζουν αλγορίθμους*. Υπάρχει, όμως, ένα και μοναδικό αντικείμενο που (προφανώς) ορίζεται από το σύστημα (3), και αυτό είναι το ζεύγος *συναρτησιακών*

$$\begin{aligned} &\varphi(m, f, g) = g(m, 0) \\ &\psi(m, n, f, g) = \text{αν } R(m, n) \text{ τότε } 0, \text{ αλλιώς } g(m, n + 1) + 1, \end{aligned} \qquad (4)$$

όπου τώρα θεωρούμε τις f και g ως μεταβλητές που κυμαίνονται πάνω στις μερικές συναρτήσεις· και, πάλι προφανώς, από αυτό το ζεύγος μπορούμε να παραγάγουμε κάθε αντικείμενο που καθορίζεται από το σύστημα, όπως οι υπολογισμοί που περιγράψαμε παραπάνω. Έπεται ότι αυτό το ζεύγος είναι καλός υποψήφιος για την απεικόνιση του *αλγορίθμου του Kleene* που «παράγει» το (3).

Γενικά, πρέπει να θεωρήσουμε πεπερασμένα συστήματα συναρτησιακών που ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες, έτσι που να παράγουν υπολογισμό της «κανονικής τους λύσης», η οποία είναι κάποια μερική συνάρτηση. Τέτοια συστήματα τα ονομάζω *αναδρομείς*, και ο ισχυρισμός είναι ότι απεικονίζουν πιστά τους «αλγορίθμους», όπως οι τομές Dedekind απεικονίζουν τους πραγματικούς αριθμούς και οι μετρήσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο πιθανοτήτων απεικονίζουν τις στοχαστικές μεταβλητές.

Στην πράξη, αυτή η προσέγγιση ταυτίζει τη θεωρία αλγορίθμων με τη θεωρία αναδρομικών εξισώσεων, της οποίας η υφή θυμίζει έντονα την κλασική θεωρία διαφορικών εξισώσεων. Και στις δύο περιπτώσεις, π.χ., αρχίζουμε με βασικά θεωρήματα ύπαρξης λύσεων· παράγουμε ιδιότητες των λύσεων από τη μορφή των εξισώσεων· και μελετούμε και συγκρίνουμε υπολογιστικές μεθόδους λύσης. Οι «αναδρομείς» αντιστοιχούν στους «διαφορικούς τελεστές», και οι «υλοποιήσεις» στα «σχήματα» της αριθμητικής ανάλυσης για τη λύση διαφορικών εξισώσεων. Βέβαια, πρέπει να τονίσω ότι αναφέρομαι πρωταρχικά σε μια αναλογία εννοιών και όχι σε μια κοινή θεωρία αναδρομικών και διαφορικών εξισώσεων, αλλά, έστω ως αναλογία, είναι πολύ χρήσιμη, ιδίως επειδή μας προτρέπει να ξεκαθαρίσουμε τις σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες έννοιες της θεωρίας αλγορίθμων και (ιδιαίτερα) τη σχέση ανάμεσα στους αλγορίθμους, τις υλοποιήσεις τους και τις μερικές συναρτήσεις που υπολογίζουν.

Ερ.: *Ποια νομίζετε ότι είναι η βοήθεια που μπορεί να προσφέρει η σύγχρονη μαθηματική λογική στη μελέτη (επαναδιατύπωση ή επανεπεξεργασία) σημαντικών φιλοσοφικών ερωτημάτων που τέθηκαν ήδη στο παρελθόν;*

Απ.: Πολλοί από τους θεμελιωτές της σύγχρονης μαθηματικής λογικής ήταν φιλόσοφοι, όπως ο Frege και ο Russell, και οι μαθηματικοί ανάμεσά τους (ο Hilbert, ο Skolem, ο Gödel) είχαν όλοι φιλοσοφική παιδεία και βαθιά φιλοσοφικά ενδιαφέροντα. Αναμφίβολα, λοιπόν, η λογική οφείλει πολλά στη φιλοσοφία. Από την άλλη μεριά, η λογική έχει επίσης ασκήσει τεράστια επίδραση στη φιλοσοφία του αιώνα μας, ιδιαίτερα στη φιλοσοφία της επιστήμης και, βεβαίως, στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Οι κυριότερες προσφορές της, πιστεύω, είναι η έννοια της *τυπικής* (δηλαδή αυστηρά ορισμένης) *γλώσσας*, που προσφέρει ιδεώδη μαθηματικά πρότυπα για μικρά κομμάτια της φυσικής γλώσσας, και η έμφαση στην ανάγκη να διαχωρίσουμε το *συντακτικό* από τη σημασιολογία μιας γλώσσας. Η υιοθέτηση και εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας στη μελέτη της γλώσσας ρίχνει φως σε πολλά κλασικά προβλήματα της φιλοσοφίας, και εξηγεί εύκολα μερικά φαινομενικά παράδοξα.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη μελέτη της *αναγκαιότητας*, που συνήθως καλείται *τροπική λογική*: ποια η διαφορά σε νόημα ανάμεσα στις προτάσεις «ο άνθρωπος είναι θνητός» και «ο άνθρωπος είναι αναγκαστικά θνητός»; Οι φιλόσοφοι έχουν μελετήσει τέτοια προβλήματα από την αρχαιότητα, αλλά η πρόοδος είναι δύσκολη, και ακόμη δυσκολότερο είναι να εξηγήσεις τι ακριβώς προσφέρει για τη λύση του προβλήματος κάποια συγκεκριμένη θεωρία, χωρίς να «τοποθετηθείς» (κατά κάποιον τρόπο) «έξω» από τη φυσική γλώσσα και να θεωρήσεις εναλλακτικές ερμηνείες της. Ο Kripke, στο τέλος της δεκαετίας του 1950, δημιούργησε ακριβώς μια τέτοια, αυστηρή θεωρία για ένα μικρό κομμάτι της φυσικής γλώσσας, συγκεκριμένα την επέκταση της πρωτοβάθμιας γλώσσας με τον τροπικό τελεστή που εκφράζει την «αναγκαιότητα»· όρισε την «αλήθεια» και το «ψεύδος» για τροπικές προτάσεις στις κατάλληλες δομές· και απέδειξε ένα *θεώρημα πληρότητας* για την τροπική λογική, το οποίο επεκτείνει το θεώρημα πληρότητας της πρωτοβάθμιας λογικής. Αυτή η λογική ανάλυση της αναγκαιότητας δεν απάντησε (και δεν μπορούσε με κανέναν τρόπο να απαντήσει) στα βασικά, αρχαία, φιλοσοφικά ερωτήματα, έτσι που ακόμη δεν γνωρίζουμε, με βεβαιότητα, αν είμαστε απλά «θνητοί» ή «αναγκαστικά θνητοί»· έριξε όμως φως στο τι ακριβώς σημαίνουν αυτά τα ερωτήματα, και ιδιαίτερα ξεκαθάρισε την έννοια της «λογικής αλήθειας» για τροπικές προτάσεις. Είναι σημαντικό εδώ να τονίσουμε ότι η θεμελιακή ιδέα των «ενδεχόμενων κόσμων», στην οποία στήριξε ο Kripke την ανάλυσή του, είχε ήδη εισαχθεί στη φιλοσοφία από τον Leibniz, και ήταν από τότε αντικείμενο εκτεταμένης μελέτης, ιδιαίτερα από τον Carnap, στον αιώνα μας. Αυτό που επέτρεψε στον Kripke να προχωρήσει στο θέμα τόσο πιο πολύ απ' ό,τι ο Carnap, ήταν ακριβώς η εφαρμογή μεθόδων από τη μαθηματική λογική, και ιδιαίτερα ο σαφής διαχωρισμός του συντακτικού από τη σημασιολογία και η αναζήτηση του κατάλληλου θεωρήματος πληρότητας.

Ένας άλλος κλάδος της φιλοσοφίας στον οποίο η λογική μπορεί να προσφέρει πολλά είναι η *θεωρία σημασίας*. Κατά τον Frege, οι προτάσεις έχουν και *σημασία*, εκτός από την *αληθοτιμή* τους: για παράδειγμα, οι προτάσεις «1 + 1 = 2» και «υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι αριθμοί» είναι και οι δύο αληθείς, αλλά δεν «σημαίνουν» το ίδιο πράγμα· κανένας μαθητής δεν θα κομπάσει ότι επιτέλους κατάλαβε γιατί 1 + 1 = 2, ενώ μερικοί, ίσως, νιώσουν ιδιαίτερη ικανοποίηση όταν καταλάβουν την απόδειξη της δεύτερης πρότασης. Αλλά τι αντικείμενα είναι αυτές οι «σημασίες», και με ποιους κανόνες αναθέτουμε σε κάθε πρόταση τη (μοναδική) σημασία της; Ο Frege δεν επιχείρησε να δώσει αυστηρές απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα, αλλά τα εξερεύνησε εκτενώς και διατύπωσε διάφορους νόμους που διέπουν τις σημασίες, ανάμεσά τους και τον εξής:

Η πιστή μετάφραση από μια γλώσσα σε κάποια άλλη πρέπει να σέβεται τη σημασία των προτάσεων.

Αυτή η πρόταση μου προκάλεσε έντονο ενδιαφέρον όταν την πρωτοδιάβασα, ίσως επειδή είμαι δίγλωσσος, και η συνεχής μετάφραση από τα ελληνικά στα αγγλικά και αντιστρόφως είναι καθημερινό μου πρόβλημα. Πώς θα εκφράσεις στα αγγλικά το ακριβές νόημα της τυχαίας ελληνικής πρότασης θ, και, κατ' αρχήν, είναι δυνατόν κάτι τέτοιο; Για παράδειγμα, θεωρήστε την επόμενη πρόταση:

Ο Νιάρχος και ο Ωνάσης ήταν μπατζανάκηδες. (A)

Πώς θα το πεις αυτό στα αγγλικά, που δεν έχουν ξεχωριστές λέξεις για τις διαφορετικές συγγένειες ανάμεσα σε «γυναικάδελφους» —«μπατζανάκης», «γαμπρός», «κουνιάδος»; Οι περισσότεροι δίγλωσσοι ομιλητές θα δέχονταν την πρόταση

The wives of Niarchos and Onassis were sisters (οι σύζυγοι του Νιάρχου και του Ωνάση ήταν αδελφές) (B)

ως πιστή μετάφραση της (A), αλλά η επικρατούσα θεωρία μετάφρασης αρνείται αυτή την επιλογή, επειδή η *γραμματική δομή* τής (B) είναι δραματικά διαφορετική από εκείνη της (A), και κατά τη θεωρία *η πιστή μετάφραση σέβεται τη γραμματική δομή των προτάσεων*. Μάλιστα, από αυτή τη θεωρία έπεται ότι *η* (A) *δεν επιδέχεται πιστή μετάφραση στα αγγλικά* —κάτι προφανώς ανόητο, λες και οι Άγγλοι και οι Αμερικανοί να μην μπορούν να εκφράσουν στη γλώσσα τους ακριβώς τη συγγένεια που συνέδεε τους δύο μεγαλοεφοπλιστές.

Εγώ πρότεινα να ταυτίσουμε τη σημασία μιας πρότασης θ με τη *διαδικασία α που πρέπει να εκτελέσουμε για να υπολογίσουμε την αληθοτιμή τής θ*. Ως φιλοσοφική άποψη για τη φυσική γλώσσα, η πρόταση συνεπάγεται ότι παρά τη διαφορετική τους δομή, η ελληνική (A) και η αγγλική (B) έχουν την ίδια σημασία, επειδή θα ακολουθήσουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία για να μάθουμε αν αληθεύουν: θα ψάξουμε στα διάφορα αρχεία, για να δούμε αν οι γυναίκες του Νιάρχου και του Ωνάση ήταν πράγματι αδελφές. Η άποψη είναι εύλογη και (επιφανειακά) δεν διαφέρει σημαντικά από πολλές, παλαιότερες ερμηνείες του Frege —αλλά δεν είναι και δυνατόν να τη συγκρίνουμε με άλλες απόψεις χωρίς αυστηρό ορισμό της έννοιας της «διαδικασίας», που, προφανώς, είναι η ουσία της. Είχα όμως στη διάθεσή μου έναν τέτοιο ορισμό, συγκεκριμένο και αυστηρό, τουλάχιστον για τα κομμάτια της φυσικής γλώσσας για τα οποία έχουμε ακριβές συντακτικό και αυστηρή σημασιολογία: σ' αυτές τις περιπτώσεις έπεται από τη γενική θεωρία αλγορίθμων, για την οποία μίλησα παραπάνω, ότι για κάθε δομή M μπορούμε να αναθέσουμε σε κάθε πρόταση θ έναν (ιδεώδη) αλγόριθμο α (έναν «αναδρομέα» στην τεχνική γλώσσα) που υπολογίζει την αληθοτιμή τής θ στη δομή M —και αυτό τον α καλώ «τη σημασία της θ στην M».

Ανεξάρτητα από τη φιλοσοφική αξία της θεωρίας, αυτή η πρόταση έχει το πλεονέκτημα κάθε μαθηματικής απεικόνισης έννοιας: μπορούμε να υπολογίσουμε «σημασίες» σε συγκεκριμένες δομές και να διερευνήσουμε αν δύο προτάσεις είναι «συνώνυμες» —δηλαδή, αν έχουν την ίδια σημασία. Το κύριο μαθηματικό αποτέλεσμα είναι *η αποκρισιμότητα της συνωνυμίας* για μια ευρεία κλάση από γλώσσες και δομές: μπορούμε, υπολογιστικά, να εξακριβώσουμε αν οι τυχαίες προτάσεις θ και *η έχουν την ίδια σημασία*, ακόμη και στην περίπτωση που δεν έχουμε ιδέα αν οι θ και η είναι αληθείς ή ψευδείς! Ο Frege το θεωρούσε αυτό αναγκαία ιδιότητα της «σημασίας», και έτσι μας δίνει κάποια ικανοποίηση να το αποδείξουμε αυστηρά, έστω για τα μικρά κομμάτια της φυσικής γλώσσας στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία αλγορίθμων.

Η μελέτη της φιλοσοφίας είναι πολλές φορές απογοητευτική για έναν μαθηματικό, επειδή έχουμε μάθει να αναζητούμε αυστηρούς ορισμούς και αδιάτρητες αποδείξεις· συχνά, μερικές από τις καλύτερες φιλοσοφικές ιδέες μάς φαίνονται ασαφείς. Πρέπει όμως να ομολογήσω ότι έχω βρει μεγάλη ικανοποίηση στη μελέτη (ιδιαίτερα) της φιλοσοφίας της γλώσσας και των μαθηματικών, και στην προσπάθεια να δω αν η μαθηματική λογική μπορεί να με βοηθήσει να καταλάβω καλύτερα τα βασικά τους προβλήματα. Τη συνιστώ σε νέους μαθηματικούς, τουλάχιστον ως χόμπι!

Ερ.: *Με την ευκαιρία, ας έλθουμε λίγο στην εκπαίδευση. Από πόσο νωρίς νομίζετε ότι θά 'πρεπε να αρχίζει η διδασκαλία της μαθηματικής λογικής στα σχολεία, και ποια μορφή θά 'πρεπε να πάρει αυτή;*

Απ.: Πιστεύω ότι το πιο σημαντικό πράγμα είναι να διδάξουμε τη μαθηματική μεθοδολογία των *αυστηρών ορισμών που ακολουθούνται από σωστές αποδείξεις*, όσο πιο νωρίς είναι δυνατόν, και οπωσδήποτε στο λύκειο. Ότι η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, π.χ., μπορεί να διατυπωθεί και να αποδειχτεί με πλήρη αυστηρότητα στο δημοτικό, και η απόδειξη είναι θαυμάσιο παράδειγμα της *εις άτοπον απαγωγής*, όπως κάποτε λέγαμε. Το ίδιο ισχύει και για την απόδειξη της απειρότητας του συνόλου των πρώτων, κατευθείαν από τον Ευκλείδη. Οι αποδείξεις με τη «μέθοδο της επαγωγής» είναι πιο δύσκολες, αλλά πιστεύω ότι πρέπει απαραιτήτως να διδάσκονται επιμελώς στο λύκειο, τουλάχιστον στους μαθητές που ετοιμάζονται για περαιτέρω εκπαίδευση στις επιστήμες.

Όσο για τη λογική, ως ξεχωριστό μάθημα, παλιά ανησυχούσα ότι είναι τόσο πιο αφηρημένη από τα μαθηματικά —αυτή η ιδέα του να δεις τη γλώσσα απέξω και να μελετήσεις «προτάσεις» και «αποδείξεις» ως μαθηματικά αντικείμενα— που ίσως είναι καλύτερο να αναβάλλουμε τη μελέτη της μέχρι το πανεπιστήμιο. Πρόσφατα, όμως, άλλαξα κάπως τη γνώμη μου, μετά την εισαγωγή της πληροφορικής στα σχολεία. Οι γλώσσες προγραμματισμού προσφέρουν θαυμάσια παραδείγματα γλωσσικών δομών με αυστηρό διαχωρισμό συντακτικού και σημασιολογίας, και ο μαθητής πρέπει να καταλάβει κάτι από τη σχέση ανάμεσα σ' αυτά τα δύο για να μπορέσει να γράψει προγράμματα που «τρέχουν» και κάνουν (ελπίζουμε) αυτό που θέλουμε. Επίσης, μπορούμε να βρούμε στον προγραμματισμό πολλά παραδείγματα διαισθητικών αποδείξεων, όπως αυτά από τα μαθηματικά, στα οποία αναφέρθηκα παραπάνω: μπορεί ο μαθητής να αποδείξει (ίσως με τη διερεύνηση περιπτώσεων) ότι το πρόγραμμά του, όντως, θα τυπώσει τους αρχικούς 100 πρώτους αριθμούς; Πολλές τέτοιες απλές ιδιότητες προγραμμάτων χρειάζονται επαγωγή για την απόδειξή τους, και επομένως αυτό μας προσφέρει μια ευκαιρία. Επιπλέον, οι προτασιακοί σύνδεσμοι είναι ενσωματωμένοι σε κάθε γλώσσα προγραμματισμού. Ίσως, λοιπόν, μπορούμε να επιλέξουμε μερικές από τις απλούστερες, βασικές ιδέες από την πρωτοβάθμια λογική και να τις διδάξουμε κι αυτές ως μέρος της πληροφορικής —άλλωστε, οι τυπικές αποδείξεις δεν διαφέρουν και τόσο πολύ από τα προγράμματα. Πρέπει όμως να ομολογήσω ότι δεν έχω πείρα διδασκαλίας στα σχολεία, και οι δάσκαλοι που πάνε καθημερινά στα χαρακώματα μάλλον έχουν διαυγέστερη ιδέα τού τι είναι εφικτό —αρκεί να ξέρουν κάτι από τη λογική· επιπλέον, υποστηρίζω ένθερμα τη διδασκαλία της λογικής σε όσους διδάσκουν ή ετοιμάζονται να διδάξουν μαθηματικά και πληροφορική στη μέση εκπαίδευση.

Ερ.: *Γνωρίζοντας το εκπαιδευτικό σύστημα τόσο της Ελλάδας όσο και των ΗΠΑ, σε ποια συμπεράσματα καταλήγετε αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών;*

Απ.: Όσον αφορά την πρωτοβάθμια και τη μέση εκπαίδευση, δυστυχώς δεν ξέρω σχεδόν τίποτα για τη σημερινή πραγματικότητα στην Ελλάδα, και μόνο λίγα για την Αμερική: εκεί η κάθε πόλη και η κάθε κοινότητα μπορούν να έχουν (και συχνά έχουν) την ξεχωριστή, «δική τους» φιλοσοφία για το πώς πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά στα σχολεία, και έτσι είναι κάπως δύσκολο να βγάλει κανείς γενικά συμπεράσματα. Θα κάνω, όμως, μια παρατήρηση για τη γενική διαμόρφωση του διαλόγου σχετικά με την παιδεία, που δεν διαφέρει πολύ από τη μια χώρα στην άλλη.

Το «καυτό» θέμα είναι αν πρέπει να δώσουμε έμφαση στην *κατανόηση* ή την *αποστήθιση*, και το ερώτημα, διατυπωμένο κατ' αυτό τον τρόπο, έχει βέβαια προφανή απάντηση: κανείς δεν θα σηκώσει παντιέρα για την υπεράσπιση της «αποστήθισης». Έτσι, βρίσκουμε στην Αμερική μαθητές του λυκείου (και του πανεπιστημίου) που προσπαθούν με όλες τις καλές προθέσεις να «κατανοήσουν» το σοβαρό φυλετικό πρόβλημα της χώρας, δίχως να έχουν «αποστηθίσει» το αν ο πόλεμος της ανεξαρτησίας της Αμερικής έγινε *πριν* ή *μετά* τον Εμφύλιο Πόλεμο —πράγμα κάπως δύσκολο, αφού η αναβολή της λύσης του προβλήματος της δουλείας στη σύνταξη του συντάγματος των ΗΠΑ ήταν, οπωσδήποτε, τόσο μια από τις κυριότερες αιτίες του Εμφυλίου δύο γενιές αργότερα, όσο και της διαιώνισης του φυλετικού προβλήματος. Πιο κοντά στο θέμα μας, βρίσκουμε μαθητές (και στην Ελλάδα, πιστεύω), που προσπαθούν να «κατανοήσουν» την τριγωνομετρία χωρίς να ξέρουν απλούς αλγεβρικούς τύπους, ή το λογισμό χωρίς επαρκή γνώση της τριγωνομετρίας. (Κάποτε στα φροντιστήρια μας υποχρέωναν να αποστηθίσουμε πάνω από εκατό τριγωνομετρικούς τύπους· είμαι περίεργος με πόσους παραγεμίζουν τα παιδιά σήμερα.)

Η πραγματική διάσταση, κατά τη γνώμη μου, είναι ανάμεσα στη *διδασκαλία* και την *προπόνηση*· η πρώτη αποσκοπεί στη *μάθηση*, που χρειάζεται και τα δύο, κατανόηση και αποστήθιση (ενδεχομένως σε ίσα και συνδεόμενα μέρη), ενώ η δεύτερη προετοιμάζει τους «μαθητές» για συγκεκριμένους διαγωνισμούς, όπου η επιτυχία εξαρτάται κατά μεγάλο μέρος από τη γνώση της δομής των ερωτήσεων που συνήθως μπαίνουν, και από πολλά άλλα, κάπως άσχετα με την πραγματική παιδεία. Δεν θέλω να πάρω θέση στο επίμαχο πρόβλημα των πανελληνίων εξετάσεων, ούτε και να υποβαθμίσω την προπόνηση· έχει κι αυτή να παίξει το ρόλο της στη σωστή διδασκαλία. Αλλά είναι, πιστεύω, σημαντικό να διαχωρίσουμε το πρόβλημα της προετοιμασίας των μαθητών για συγκεκριμένους διαγωνισμούς από την *παιδεία*, με την κλασική της έννοια, και, ως δάσκαλοι, να μην υποβαθμίσουμε τη μάθηση στο όνομα της «διαγωνισμομανίας».

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M96

Προσοχή στους αρνητικούς. Βρείτε τη μοναδική πραγματική ρίζα της εξίσωσης

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

M97

Τετραγωνισμένοι αριθμητές. Αποδείξτε ότι αν

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1,$$

τότε

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

M98

Κότες και κόκορες. Η κυρία Πουλοπούλου αγόρασε κάποτε μία κότα, η οποία —αφού πρώτα γέννησε δύο αυγά— κατέληξε ένα θαυμάσιο δείπνο. Όπως όλοι γνωρίζουμε, από ένα αυγό μπορεί να προέλθει είτε μία κότα είτε ένας κόκορας. Η κυρία Πουλοπούλου μαγείρευε τους κόκορες μόλις μεγάλωναν λίγο, ενώ για τις κότες περίμενε πρώτα να γεννήσουν δύο αυγά. Τη συνήθειά της αυτή τη διατήρησε για αρκετά χρόνια, έως ότου είχε μια φυσιολογική κατάληξη: απόμειναν μόνο κόκορες, που φαγώθηκαν όλοι. Αποδείχτηκε ότι σε όλο αυτό το διάστημα μαγειρεύτηκαν 1.997 κόκορες. Πόσες κότες έφαγαν συνολικά; (A. Yegorov)

M99

Τα μέσα όλων των χορδών. Σ' έναν κύκλο φέρουμε όλες τις χορδές τα άκρα των οποίων βρίσκονται εκατέρωθεν μιας δεδομένης ευθείας που τέμνει τον κύκλο. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων όλων αυτών των χορδών. (I. Sharygin)

M100

Ανακαλύψτε το κέντρο. Δίδεται ένας κύκλος στο επίπεδο. Το κέντρο του δεν φαίνεται. Βρείτε το κέντρο του κύκλου χρησιμοποιώντας ένα διαβήτη (αλλά όχι και κανόνα) χωρίς να σχεδιάσετε περισσότερους από έξι κύκλους ή τόξα κύκλου. (V. Panfyorov)

Φυσική

Φ96

Σύστημα σε ισορροπία. Ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα με μάζες 1 kg και 3 kg στερεωμένες στα άκρα του είναι περασμένο από ελαφριά τροχαλία, ο άξονας της οποίας δεν είναι λείος· η τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα σ' αυτόν και την τροχαλία είναι ανάλογη με την αντίδραση του άξονα. Στο σύστημα η επιτάχυνση της μεγαλύτερης μάζας είναι $2\ \mathrm{m/s^2}$. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε τη μικρότερη μάζα ώστε να ισορροπήσει το σύστημα;

Φ97

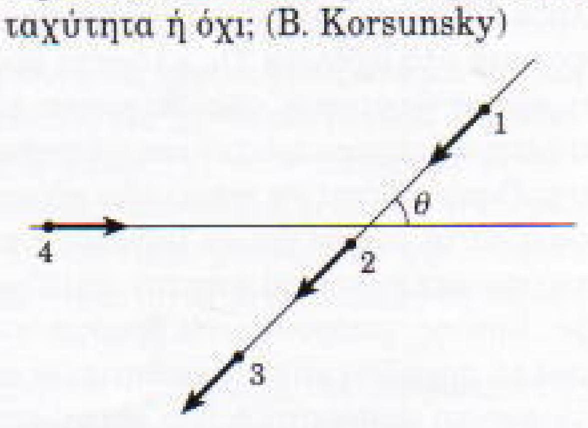
Μπάλες στον πάγο. Μπάλα μάζας M γλιστρά στον πάγο με ταχύτητα v_0 και προσκρούει σε άλλη μπάλα, μάζας $2M$, που ηρεμεί. Μετά τη σύγκρουση, η πρώτη μπάλα σταματά. Η δεύτερη μπάλα προσκρούει σε τοίχο, και αφού ανακλαστεί ελαστικά χτυπάει μετωπικά την πρώτη μπάλα. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες που έχουν οι δύο μπάλες έπειτα από την τελευταία κρούση. Σημειώστε ότι, κατά τη διάρκεια μιας κρούσης, ορισμένο κλάσμα της μέγιστης δυναμικής ενέργειας παραμόρφωσης μετατρέπεται σε θερμότητα. (A. Vargin)

Φ98

Αέριο κάτω από έμβολο. Ένα γραμμομόριο ιδανικού μονοατομικού αερίου τοποθετείται κάτω από βαρύ θερμομονωτικό έμβολο μέσα σε κατακόρυφο θερμικά μονωμένο κύλινδρο σε θερμοκρασία T_0. Το έμβολο κατέρχεται, οπότε προκαλεί τη συμπίεση του αερίου παράγοντας έργο W. Στη συνέχεια το έμβολο απελευθερώνεται και ηρεμεί σε νέα θέση ισορροπίας. Προσδιορίστε τη θερμοκρασία T_x για την τελική κατάσταση του συστήματος αέριο-έμβολο. (V. Uzdin)

Φ99

Πορεία σύγκρουσης. Τέσσερα στρατιωτικά αεριωθούμενα εκτελούν ελιγμούς. Τρία από αυτά (τα 1, 2 και 3) ακολουθούν το ένα το άλλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα· το τέταρτο πετάει σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με την πορεία των αεροπλάνων 1, 2 και 3. Καμία από τις ταχύτητες του διαγράμματος δεν είναι γνωστή. Γνωρίζουμε όμως ότι οι πιλότοι των αεροπλάνων 1, 2 και 3 αρχίζουν ν' ακούνε ταυτόχρονα τον ήχο του αεροπλάνου 4. Γνωρίζουμε επίσης ότι ο πιλότος του αεροπλάνου 1 αρχίζει ν' ακούει τον ήχο του αεροπλάνου 4 όταν απέχουν τριπλάσια απόσταση από την ελάχιστη απόσταση που είναι δυνατή κατά την προσέγγιση του αεροπλάνου 4. Το αεροπλάνο 1 πετάει με υπερηχητική ταχύτητα ή όχι; (B. Korsunsky)



Φ100

Δύο είδωλα, ένα αντικείμενο. Δύο είδωλα σχηματίζονται από έναν μοναδικό φακό εστιακής απόστασης f σε οθόνη τοποθετημένη σε απόσταση L από το αντικείμενο. Το ένα από τα δύο είδωλα είναι μεγαλύτερο από το αντικείμενο, ενώ το άλλο μικρότερο. Να υπολογιστεί ο λόγος των διαστάσεών τους. (E. Kuznetsov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Ένα ρολόι κουρδισμένο για πάντα

Η Γη είναι ένα χρονόμετρο που, σχεδόν, μπορεί να μετρήσει την ηλικία της!

V.I. Kusnetsov

ΙΣΩΣ ΕΧΕΤΕ ΔΙΑΒΑΣΕΙ ΠΩΣ ΟΙ ΕΠΙστήμονες χρησιμοποιούν τη μέθοδο χρονολόγησης με άνθρακα 14 για να προσδιορίσουν πότε κατασκευάστηκαν πολύ παλαιά αντικείμενα. Η συγκεκριμένη τεχνική στηρίζεται στη μέτρηση της συγκέντρωσης του ραδιενεργού ισοτόπου του άνθρακα ^{14}C. Οι δυνατότητες αυτής της μεθόδου, ωστόσο, είναι περιορισμένες: η συγκέντρωση του ισοτόπου ^{14}C σε αντικείμενα που η ηλικία τους υπερβαίνει τα 50.000-70.000 έτη είναι εξαιρετικά μικρή. Μερικές φορές μάς ενδιαφέρουν γεγονότα τα οποία συνέβησαν πολύ παλαιότερα. Σε τελευταία ανάλυση, ο *Homo sapiens* έχει ιστορία περίπου 500.000 ετών, και η οργανική ζωή εμφανίστηκε στη Γη τουλάχιστον ένα δισεκατομμύριο έτη πριν.

Οι σκελετοί και τα ίχνη που άφησαν σε πετρώματα αρχαία έμβια όντα μπορούν να αποκαλύψουν πολλά για την εξέλιξη της ζωής στη Γη. Η διάταξη των γεωλογικών στρωμάτων μάς προσφέρει πολλές πληροφορίες για τη σχετική χρονολόγηση ορισμένων γεγονότων. Ωστόσο, είναι πολύ δυσκολότερο να βρούμε την απόλυτη χρονολογία τους, αν και μερικές φορές μπορεί να επιτύχουμε εκτιμήσεις στηριγμένες στο πάχος των ιζηματογενών πετρωμάτων. Πώς όμως να καθορίσουμε την ηλικία των πετρωμάτων αλλά και της ίδιας της Γης;

Οι πρώτες εκτιμήσεις για την ηλικία της Γης στηρίχτηκαν στην παραδοχή ότι η θερμοκρασία κατά το σχηματισμό της ήταν ίση με τη σημερινή θερμοκρασία του Ήλιου —περίπου 6.000 K. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή η ηλικία της Γης θεωρείται ίση με το χρόνο που απαιτείται για να ψυχθεί και να σχηματιστεί ένας στερεός φλοιός, επαυξημένο κατά την ηλικία του ίδιου του φλοιού. Όταν καταπιάστηκε με το εν λόγω πρόβλημα ο μεγάλος άγγλος φυσικός λόρδος Kelvin, δέχτηκε ότι η Γη είχε αρχικά τη θερμοκρασία μάγματος και ότι με την πάροδο του χρόνου ψυχόταν βαθμιαία, ακτινοβολώντας ενέργεια από την επιφάνειά της στο Διάστημα. Βασιζόμενος στους υπολογισμούς του, ο λόρδος Kelvin συμπέρανε ότι δεν απαιτούνταν περισσότερα από 100 εκατομμύρια χρόνια για να ψυχθεί η επιφάνεια του πλανήτη μας τόσο ώστε να καταστεί κατάλληλη για την ανάπτυξη χλωρίδας και πανίδας.

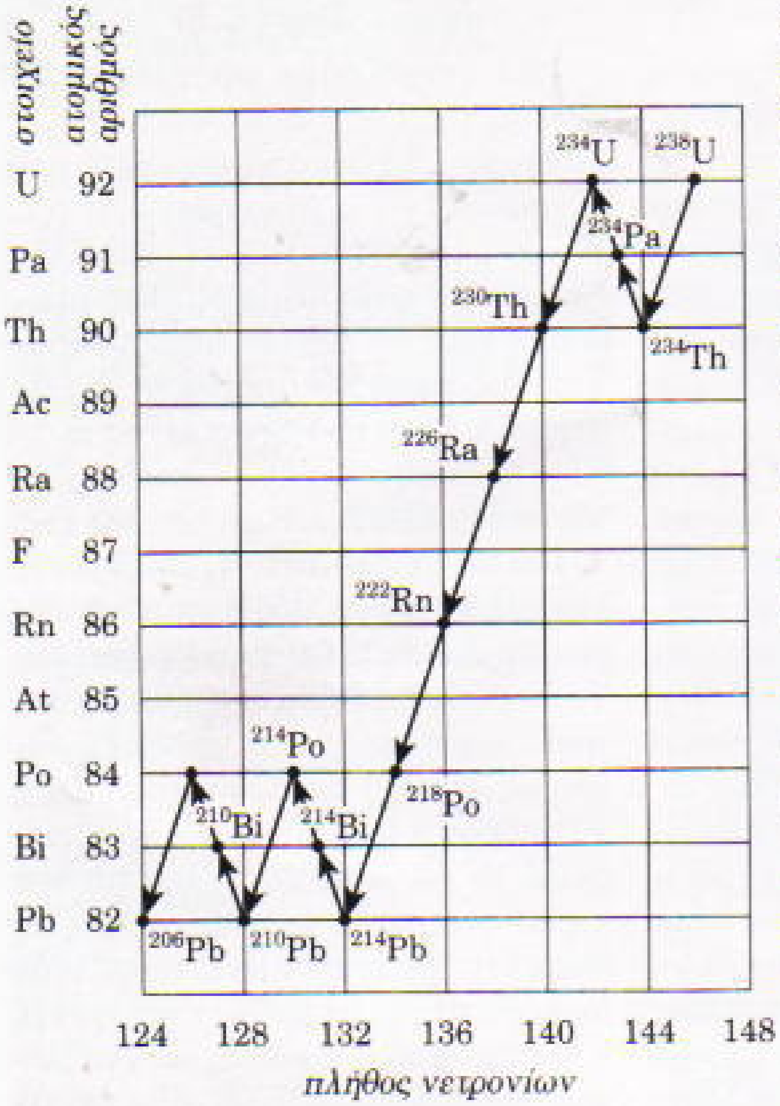
Οι εκτιμήσεις του λόρδου Kelvin ανάγονται στην εποχή πριν από την ανακάλυψη της ραδιενέργειας. Ως εκ τούτου, δεν λάμβαναν υπόψη την επιπλέον θερμότητα που απελευθερωνόταν στο εσωτερικό της Γης, εξαιτίας των πυρηνικών αντιδράσεων. Αργότερα οι επιστήμονες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι αυτή η «ραδιενεργού προέλευσης» θερμότητα επιβράδυνε σημαντικά το ρυθμό της ψύξης. Έτσι, η εκτίμηση για το χρόνο που απαιτούνταν ώστε να σχηματιστεί ο φλοιός αυξήθηκε σταδιακά —αρχικά σε 200 εκατομμύρια έτη, και στη συνέχεια σε 1,5 δισεκατομμύριο έτη.

Εάν γνωρίζουμε την ηλικία του φλοιού της Γης και προσθέσουμε σ' αυτήν τα 1,5 δισεκατομμύριο έτη που χρειάστηκαν για το σχηματισμό του, το άθροισμα θα αντιπροσωπεύει την ηλικία του πλανήτη μας. Πώς μπορούμε όμως να καθορίσουμε το χρονικό διάστημα που παρήλθε από τη στιγμή που σχηματίστηκαν τα πρώτα ορυκτά ώς σήμερα —το οποίο ισούται με την ηλικία του φλοιού της Γης;

Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε ένα ρολόι που να μετρά εκατοντάδες εκατομμύρια και δισεκατομμύρια έτη. Το συγκεκριμένο ρολόι πρέπει να μετράει «συσσωρευμένο» χρόνο. Παράδειγμα τέτοιου οργάνου αποτελεί η κλεψύδρα —ρολόι νερού, το οποίο μετρά το χρόνο με την ποσότητα του νερού που στάζει από το ένα δοχείο στο άλλο. «Μου απομένει πολύ νερό ακόμη», είχε πει κάποιος εναγόμενος σ' ένα ρωμαϊκό δικαστήριο, εννοώντας ότι διέθετε αρκετό χρόνο για να αποδείξει ότι το δίκαιο ήταν με το μέρος του. Άλλο παράδειγμα είναι η κλεψύδρα άμμου, όπου η πάροδος του χρόνου σημειώνεται από τη ροή της άμμου.

Όπως η κλεψύδρα νερού και η κλεψύδρα άμμου, το ραδιενεργό ρολόι μετρά επίσης συσσωρευμένο χρόνο. Όσο περισσότερα άτομα του ραδιενεργού ισοτόπου έχουν διασπαστεί τόσο παλαιότερο είναι το ορυκτό. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού (ή χρόνος ημιζωής), $T_{1/2}$, μιας ουσίας που προσφέρεται για να μετριούνται περίοδοι της τάξεως των εκατομμυρίων ετών πρέπει να είναι επίσης της ίδιας τάξεως μεγέθους. Μόνο εφόσον ικανοποιείται η συγκεκριμένη συνθήκη θα έχει διατηρηθεί ώς σήμερα σημαντικός αριθμός ραδιενεργών ατόμων στο ορυκτό.

Η μεταστοιχείωση των ισοτόπων του ουρανίου σε μόλυβδο ήταν ο πρώτος τύπος ραδιενεργού διάσπασης που χρησιμοποιήθηκε για να υπολογιστεί η ηλικία των ορυκτών. Το φυσικό ουράνιο αποτελείται από τρία είδη ατόμων, που έχουν διαφορετικές μάζες: τα ισότοπα ^{238}U, ^{235}U και ^{234}U. Το πιο διαδεδομένο ισότοπο του ουρανίου είναι το ^{238}U. Αποτελεί το 99,3% των μεταλλευμάτων ουρανίου που λαμβάνονται από οποιονδήποτε τόπο στον πλανήτη μας.



Σχήμα 1

Η ραδιενεργός διάσπαση του ουρανίου. Ο άξονας των τετμημένων παριστά τον αριθμό των νετρονίων ενός πυρήνα και ο άξονας των τεταγμένων τον αριθμό των πρωτονίων (τον ατομικό αριθμό ενός στοιχείου). Τα βέλη που κατευθύνονται προς τα κάτω δείχνουν τη διαδικασία της διάσπασης άλφα. Κατά τη διαδικασία αυτή ο ατομικός πυρήνας εκπέμπει έναν ταχύ πυρήνα ηλίου (σωματίδιο άλφα), χάνοντας με αυτό τον τρόπο ένα ζεύγος πρωτονίων και δύο νετρόνια. Τα βέλη που κατευθύνονται προς τα άνω δείχνουν διάσπαση βήτα. Εδώ ένα νετρόνιο του πυρήνα μετατρέπεται σε πρωτόνιο, επιφέροντας αύξηση του ατομικού αριθμού κατά ένα.

Ας παρακολουθήσουμε τα βήματα της διάσπασης του ισοτόπου ^{238}U (Σχήμα 1). Τα άτομα $^{238}_{92}U$ μετατρέπονται αργά σε άτομα μολύβδου $^{206}_{82}Pb$ και ηλίου $^{4}_{2}He$. Πρέπει να παρέλθουν τεσσεράμισι εκατομμύρια έτη πριν μετατραπεί σε μόλυβδο και ήλιο η μισή από την αρχική ποσότητα ^{238}U. Η εν λόγω διαδικασία περιλαμβάνει 14 ραδιενεργές μεταστοιχειώσεις, όπου κάθε αποσυντιθέμενο άτομο ουρανίου δίνει ένα σταθερό άτομο μολύβδου και επίσης οκτώ άτομα ηλίου:

$$^{238}_{92}U \to 8\,^{4}_{2}He + ^{206}_{82}Pb + 6\,^{0}_{-1}e.$$

Είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την ηλικία ενός τεμαχίου συμπαγούς πετρώματος —ας πούμε γρανίτη— εάν το αλέσουμε σ' ένα μύλο, διαλύσουμε τη σκόνη σε κάποιο οξύ, εξαγάγουμε το μόλυβδο και το ουράνιο, και στη συνέχεια προσδιορίσουμε πόσα άτομα του ισοτόπου ^{206}Pb ανά άτομο ^{238}U περιέχει το μείγμα. Πώς μας δίνει αυτό την ηλικία του πετρώματος; Θα δούμε αμέσως.

Ας συμβολίσουμε με N τον αριθμό των ατόμων του ουρανίου και με N_1 τον αριθμό των ατόμων του μολύβδου ^{206}Pb που υπήρχαν στο κομμάτι του πετρώματος τη στιγμή της ανάλυσης. Τότε $N_0 = N + N_1$ είναι ο αριθμός των ατόμων του ουρανίου κατά τη στιγμή σχηματισμού του γρανίτη. Εδώ δεχόμαστε ότι όλα τα άτομα μολύβδου στο γρανίτη προήλθαν από ραδιενεργό διάσπαση. Σύμφωνα, λοιπόν, με το νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων,

$$\frac{N}{N_0} = \frac{N}{N+N_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}},$$

όπου t είναι η ηλικία του γρανίτη. Παίρνοντας το λογάριθμο και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης καταλήγουμε σ' έναν τύπο για τον υπολογισμό της ηλικίας του ορυκτού:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{N_0}{N}. \qquad (1)$$

Σ' αυτούς τους υπολογισμούς δεχτήκαμε ότι το δείγμα δεν περιείχε άλλο μόλυβδο εκτός απ' όσον παρήχθη από τις διασπάσεις, και ότι δεν ανταλλάσσει ύλη με το περιβάλλον του. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει πάντοτε. Πράγματι, υπάρχει ένα στοιχείο, το ραδόνιο, το οποίο σχηματίζεται κατά τη διάσπαση του ουρανίου. Το ραδόνιο ανήκει στην ομάδα των ευγενών αερίων, και εάν το δείγμα του πετρώματος δεν είναι αρκούντως συμπαγές, κάποιο μέρος του ραδονίου μπορεί να διαφύγει. Σ' αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των ατόμων μολύβδου στο δείγμα θα είναι μικρότερος από τον αριθμό των ατόμων ουρανίου που διασπάστηκαν καθ' όλο το χρόνο ύπαρξης του πετρώματος. Υπό τις συγκεκριμένες συνθήκες, η ηλικία του πετρώματος που θα υπολογιστεί βάσει του τύπου (1) θα είναι μικρότερη από την πραγματική του ηλικία.

Από την άλλη, το πέτρωμα θα μπορούσε να περιέχει μόλυβδο που σχηματίστηκε ταυτόχρονα με τα άλλα στοιχεία και πιθανώς εισχώρησε στο ορυκτό καθώς σχηματιζόταν ο φλοιός της Γης. Ο συγκεκριμένος μόλυβδος αποκαλείται πρωτογενής. Λόγω της παρουσίας πρωτογενούς μολύβδου, η υπολογιζόμενη ηλικία του πετρώματος είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι θα έπρεπε.

Για να προσδιορίσουμε ορθά την ηλικία, πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι δεν εκλύθηκε ραδόνιο από το ορυκτό αλλά και να μπορούμε να εκτιμήσουμε την αναλογία του πρωτογενούς μολύβδου στο δείγμα.

Ο μόλυβδος που προέρχεται από ραδιενεργές μεταστοιχειώσεις συσσωρεύεται όχι μόνον λόγω της διάσπασης του ^{238}U αλλά, επίσης, και λόγω της ραδιενεργού διάσπασης του ^{235}U και του ^{232}Th. Το ισότοπο ^{206}Pb είναι απόγονος του ^{238}U, ενώ τα ισότοπα ^{207}Pb και ^{208}Pb αποτελούν τα τελικά προϊόντα της διάσπασης του ^{235}U και του ^{232}Th αντίστοιχα.

Ο φυσικός μόλυβδος περιέχει επίσης το ελαφρό ισότοπο ^{204}Pb, το οποίο όμως δεν συσσωρεύεται κατά τη διάσπαση οποιουδήποτε φυσικού ραδιενεργού στοιχείου. Από πού λοιπόν προέρχεται ο «ελαφρύς» μόλυβδος; Μόνο μία απάντηση είναι δυνατή: ο μόλυβδος με μαζικό αριθμό 204 σχη-

Εικονογράφηση: Yury Vashchenko


$^{238}_{92}U \rightarrow 8\,^{4}_{2}He + \,^{206}_{82}Pb + 6\,^{0}_{-1}$

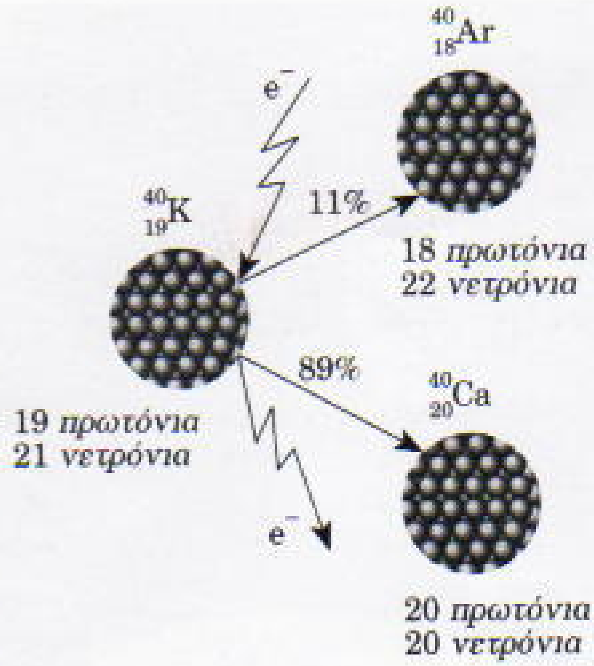
ματίστηκε ταυτόχρονα με τα υπόλοιπα στοιχεία της Γης.

Η ισοτοπική σύσταση του μολύβδου που δεν περιέχει προσμείξεις οφειλόμενες σε ραδιενεργές μεταστοιχειώσεις προσδιορίστηκε από την ανάλυση σιδηρομετεωριτών. Οι μετεωρίτες αυτοί δεν περιέχουν καθόλου ουράνιο ή θόριο —τις πηγές μολύβδου ραδιενεργού προέλευσης. Ο μόλυβδος των μετεωριτών περιέχει ένα μέρος ^{204}Pb, δέκα μέρη ^{206}Pb, δέκα μέρη ^{207}Pb και είκοσι εννέα μέρη ^{208}Pb.

Η ανάλυση της αναλογίας των ισοτόπων μάς επιτρέπει να εκτιμήσουμε την ποσότητα του πρωτογενούς μολύβδου από την ποσότητα του ^{204}Pb σ' ένα πέτρωμα. Έτσι, εάν ο μόλυβδος δεν περιέχει ^{204}Pb (ή περιέχει μόνο μικρή ποσότητα), πρακτικά είναι όλος προϊόν ραδιενεργών μεταστοιχειώσεων.

Οι πρώτες μετρήσεις της ηλικίας τόσο των ορυκτών όσο και της ίδιας της Γης έδωσαν τιμές πολύ μικρότερες από εκείνες που παραδέχεται σήμερα η επιστήμη. Ίσως παρεισέφρησε κάποιο σφάλμα που οφειλόταν στη διάχυση του ραδονίου. Αργότερα αποκτήθηκαν ακριβέστερα δεδομένα, όχι μόνο λόγω των βελτιώσεων στη μέθοδο ουρανίου-μολύβδου αλλά και εξαιτίας της ανάπτυξης άλλων τεχνικών. Τα δεδομένα θεωρούνται αξιόπιστα, εφόσον συμπίπτουν τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από αυτά με τη χρησιμοποίηση διαφορετικών μεθόδων. Ευτυχώς, τα ισότοπα του ουρανίου δεν αποτελούν το μοναδικό σύνολο πυρήνων που ο χρόνος υποδιπλασιασμού τους είναι της ίδιας τάξεως με τις γεωλογικές εποχές. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει άλλα ραδιενεργά ισότοπα που χρησιμοποιούνται για να επαληθευτεί η ηλικία ενός ορυκτού.

Το φυσικό κάλιο περιέχει μικρή ποσότητα του ραδιενεργού ισοτόπου ^{40}K, ο χρόνος υποδιπλασιασμού του



Σχήμα 2

Ραδιενεργός διάσπαση του ισοτόπου ^{40}K.

οποίου ισούται με 1,3 δισεκατομμύρια έτη. Συνήθως ο πυρήνας του ^{40}K εκπέμπει ένα ηλεκτρόνιο και μετατρέπεται σε ασβέστιο.

Είναι αδύνατον να διακρίνουμε το ασβέστιο που είναι προϊόν ραδιενεργών μεταστοιχειώσεων από το πρωτογενές ασβέστιο που έχει συσσωρευτεί στα πετρώματα. Ωστόσο, μόνο το 89% του ισοτόπου ^{40}K αποσυντίθεται με αυτό τον τρόπο, ενώ το υπόλοιπο 11% διασπάται με διαφορετικό τρόπο —με σύλληψη *K*, όπως λένε οι φυσικοί. Η σύλληψη *K* είναι η διαδικασία κατά την οποία ο πυρήνας του ατόμου συλλαμβάνει ένα τροχιακό ηλεκτρόνιο και μετατρέπεται στον πυρήνα ενός στοιχείου που ο ατομικός αριθμός του είναι μικρότερος κατά μία μονάδα. Έτσι, το $^{40}_{19}$K μετατρέπεται σ' ένα ισότοπο του αργού, το $^{40}_{18}$Ar (Σχήμα 2).

Οι μελέτες των ορυκτών έδειξαν ότι σε μερικά πετρώματα —για παράδειγμα στους μαρμαρυγίες— το αργό παγιδεύτηκε χωρίς να διαφύγει επί δισεκατομμύρια έτη. Ενώ σχηματιζόταν ο φλοιός της Γης, το πρωτογενές αργό «εκτοξεύτηκε» στην ατμόσφαιρα, οπότε τα ορυκτά πρέπει να περιέχουν αποκλειστικά αργό που προέρχεται από ραδιενεργές μεταστοιχειώσεις. Έτσι, απομονώνοντας το αργό από τους μαρμαρυγίες του γρανίτη, μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του γρανίτη από τη διάσπαση του καλίου, και στη συνέχεια να ελέγξουμε το αποτέλεσμα με τη μέθοδο ουρανίου-μολύβδου.

Μέθοδος (ισότοπο)	Μετρούμενη ηλικία (έτη)	Χρόνος υποδιπλασιασμού(έτη)
Ραδιάνθρακας (^{14}C)	100-50.000	5.570
Αργό-κάλιο (^{40}K)	> 100.000	$1{,}3 \cdot 10^{9}$
Ρουβίδιο-στρόντιο (^{87}Rb)	> 5.000.000	$5{,}0 \cdot 10^{10}$
Μόλυβδος-ουράνιο (^{238}U)	> 200.000.000	$4{,}5 \cdot 10^{9}$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε το χρόνο ημιζωής του ισοτόπου ^{40}K χρησιμοποιώντας έναν ανιχνευτή σωματιδίων βήτα και ένα συνηθισμένο ρολόι, και να βρούμε τον αριθμό N των ατόμων με χημική ανάλυση. Η τιμή N_0 ισούται με $N + N_n$, όπου N_n είναι ο αριθμός των ατόμων του ^{40}K που διασπάστηκαν σε ολόκληρη την περίοδο ύπαρξης του γρανίτη. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον N_n εάν γνωρίζουμε τον αριθμό των ατόμων αργού των μαρμαρυγιών. Ας συμβολίσουμε τον συγκεκριμένο αριθμό με A. Τότε $N_n = A/0{,}11$ (επειδή οι μεταστοιχειώσεις του καλίου σε αργό αποτελούν μόνο το 11% του ολικού αριθμού διασπάσεων του ραδιενεργού ισοτόπου του καλίου). Έτσι, $N_0 = N + A/0{,}11$. Εάν εισαγάγουμε αυτή την έκφραση στον τύπο (1), βρίσκουμε

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(1 + \frac{A}{0{,}11N}\right). \qquad (2)$$

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το ραδιενεργό ρολόι ρουβιδίου-στροντίου. Το ισότοπο του ρουβιδίου ^{87}Rb είναι ραδιενεργό και μετασχηματίζεται στο ισότοπο του στροντίου ^{87}Sr εκπέμποντας σωματίδια βήτα. Το φυσικό ρουβίδιο περιέχει το ραδιενεργό ισότοπο σε αναλογία 28%. Η μέθοδος χρονολόγησης ρουβιδίου-στροντίου των ορυκτών είναι πολύ απλή. Πρώτα υπολογίζει κανείς με χημική ανάλυση την ολική ποσότητα ρουβιδίου στο δείγμα, και στη συνέχεια την ποσότητα του ^{87}Sr σ' αυτό. Κατόπιν, εκτελούνται οι υπολογισμοί σύμφωνα με τους τύπους για τη ραδιενεργό διάσπαση.

Όλες οι μέθοδοι που εξετάστηκαν εδώ προσδιορίζουν την ηλικία των ορυκτών από τη στιγμή της κρυστάλλωσής τους. Ωστόσο, τα προϊόντα της ραδιενεργού διάσπασης συγκρατούνται κοντά στους αρχικούς πυρήνες μόνο στα στερεά σώματα. Στα τήγματα, τα άτομα αναμειγνύονται ελεύθερα μεταξύ τους, και καθώς οι χημικές ιδιότητες μιας ουσίας που συντίθεται από θυγατρικούς πυρήνες διαφέρουν από τις ιδιότητες της αρχικής ουσίας, τα προϊόντα της ραδιενεργού διάσπασης συγκεντρώνονται αλλού.

Κατά κανόνα, τα πλέον αρχαία πετρώματα κείνται κάτω από βαριά, παχιά στρώματα αποθέσεων. Μόνο σε μερικές περιοχές βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια. Στην Κόλα Πενινσούλα (στη βορειοδυτική Ρωσία, στον Αρκτικό Ωκεανό) βρέθηκε πλάκα γρανίτη που στερεοποιήθηκε και σκλήρυνε πριν από 3,4 δισεκατομμύρια έτη. Πρόκειται για ένα από τα αρχαιότερα ορυκτά στη Γη. Εάν η ηλικία του προστεθεί στο χρόνο που απαιτήθηκε για να σχηματιστεί ο στερεός φλοιός της Γης, προκύπτει ότι η συνολική ηλικία του πλανήτη είναι περίπου 5 δισεκατομμύρια έτη. Ένας περιορισμός της εν λόγω μεθόδου προσδιορισμού της ηλικίας της Γης έγκειται στο γεγονός ότι το χρονικό διάστημα για το σχηματισμό του φλοιού του πλανήτη λαμβάνεται με υπολογισμό, και οι αρχικές συνθήκες δεν είναι τόσο αξιόπιστες. Ειδικότερα, είναι πολύ δύσκολο να λάβουμε υπόψη τη θερμότητα που απωλέσθηκε από την πυρηνική σχάση στο εσωτερικό της Γης. Εντούτοις, υπάρχει ένας διαφορετικός τρόπος να βρούμε την ηλικία της Γης χωρίς περίπλοκους θερμικούς υπολογισμούς· στηρίζεται αποκλειστικά στη ραδιοχρονολόγηση.

Σύμφωνα με τις σύγχρονες απόψεις, οι μετεωρίτες και η Γη αποτελούνται από το ίδιο υλικό και συμπυκνώθηκαν κατά τον ίδιο χρόνο. Οι μάζες των μετεωριτών είναι μικρές, και έτσι χρειάστηκε πολύ λιγότερος χρόνος για να ψυχθούν απ' ό,τι η Γη. Κατά συνέπεια, μπορούμε να δεχτούμε ότι τα ορυκτά των μετεωριτών κρυσταλλώθηκαν τη στιγμή που «δημιουργήθηκε» η Γη. Η ηλικία των μετεωριτών μπορεί να προσδιοριστεί από το μόλυβδο και το ουράνιο που περιέχουν. Εάν η Γη και οι μετεωρίτες σχηματίστηκαν ταυτόχρονα, το αποτέλεσμα θα μας δώσει και την ηλικία της Γης.

Αφότου μετρήθηκε η συγκέντρωση και η ισοτοπική σύσταση του ουρανίου και του μολύβδου σε πετρώδεις μετεωρίτες (οι οποίοι περιέχουν ουράνιο, αντίθετα με τους σιδηρομετεωρίτες), η ηλικία των ουράνιων σωμάτων οριστικοποιήθηκε: περίπου πέντε δισεκατομμύρια έτη. Παρόμοια δεδομένα προέκυψαν με τις μεθόδους καλίου-αργού και ρουβιδίου-στροντίου, οι οποίες έδειξαν ότι η ηλικία των μετεωριτών κυμαίνεται από 4,3 ώς 4,8 δισεκατομμύρια έτη.

Η διαστημική έρευνα διάνοιξε νέες προοπτικές για τη ραδιοχρονολόγηση. Στο μέλλον, διαστημόπλοια και διαστημικά ερευνητικά οχήματα θα φέρνουν στη Γη δείγματα εδάφους από πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος. Τότε οι επιστήμονες θα έχουν στη διάθεσή τους ένα υλικό απ' όπου θα μπορέσουν να αντλήσουν πληροφορίες για την ηλικία των μακρινών πλανητών.

Δείγματα σεληνιακού εδάφους έχουν ήδη μελετηθεί. Περιέχουν και αυτά ραδιενεργά ισότοπα. Οι ηλικίες των ορυκτών που έχουν ληφθεί από διάφορες περιοχές της Σελήνης αποδείχτηκαν διαφορετικές. Αυτό σημαίνει ότι ο σχηματισμός του σκληρού σεληνιακού φλοιού διήρκεσε επί χρονικό διάστημα συγκρίσιμο με την ηλικία της Σελήνης. Σε μερικές περιοχές η σεληνιακή ύλη στερεοποιήθηκε νωρίτερα, σε άλλες αργότερα. Εδώ και εκεί ο ακόμη αδύναμος φλοιός διερράγη, και τα ρεύματα της λάβας γέμισαν τα κενά.

Τα σεληνιακά πετρώματα, ωστόσο, είναι εξαιρετικά παλαιά. Τα νεότερα υπάρχουν εδώ και περισσότερα από 3 δισεκατομμύρια έτη, πράγμα που αντιστοιχεί στην ηλικία των παλαιότερων ορυκτών της Γης. Έτσι, η εσωτερική γεωλογική ζωή της Σελήνης σταμάτησε το πρώτο 1,5 δισεκατομμύριο έτη της ύπαρξής της. Από τότε, όλη η ηφαιστειακή δραστηριότητα στη Σελήνη έχει πάψει, και ο φυσικός δορυφόρος της Γης κατέστη ένα παθητικό ουράνιο σώμα, που μεταβάλλεται αποκρινόμενο μόνο σε εξωτερικά γεγονότα —όπως ο ηλιακός άνεμος ή ο βομβαρδισμός από μετεωρίτες.

Τα δεδομένα σχετικά με την ηλικία των πλανητών του ηλιακού συστήματος είναι ουσιώδη στην έρευνα για την προέλευση και την ιστορία του. Το ερώτημα πώς σχηματίστηκαν τα δευτερεύοντα ουράνια σώματα κοντά στα πρωτεύοντα αποτελεί το κλειδί για την κατανόηση των διαδικασιών της δημιουργίας των δορυφορικών συστημάτων του Ουρανού, του Δία και του Κρόνου. Οι επιστήμονες πιστεύουν ότι οι έρευνες για την προέλευση των δορυφόρων των πλανητών συνιστούν την αμεσότερη πορεία προς μια γενική θεωρία που θα εξηγεί το σχηματισμό των ουράνιων σωμάτων τα οποία περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 3*

βαρύτερα. Στην πραγματικότητα, εσείς και όλες οι συσκευές του σκάφους γίνεστε αρκετά βραδυκίνητοι. Το ρολόι σας, για παράδειγμα, που πριν ζύγιζε σαράντα γραμμάρια, τώρα ζυγίζει περίπου σαράντα τόνους· και το ελατήριο στο εσωτερικό του ρολογιού σας δεν έχει γίνει καθόλου πιο ισχυρό. Άρα το ρολόι έχει επιβραδυνθεί τόσο ώστε να χτυπά μία φορά την ώρα.

Δεν έχει επιβραδυνθεί μόνο το μηχανικό ρολόι σας, αλλά και το βιολογικό. Δεν το αντιλαμβάνεστε, επειδή οι νευρώνες σας γίνονται βαρύτεροι και οι σκέψεις σας επιβραδύνονται ακριβώς όσο και το ρολόι. Κατά την άποψή σας, μάλιστα, το ρολόι σας χτυπά με τον ίδιο ρυθμό όπως και πριν! (Οι φυσικοί ονομάζουν το εν λόγω φαινόμενο «σχετικιστική συστολή του χρόνου».) Κάτι άλλο που έχει επιβραδυνθεί είναι όλος ο μηχανισμός που παρέχει την ενέργεια στους κινητήρες σας (οι κρύσταλλοι διλιθίου γίνονται βαρύτεροι και βραδύτεροι).

Επομένως, το σκάφος σας καταλήγει να είναι βαρύτερο, οι κινητήρες σας βραδύτεροι, και όσο περισσότερο πλησιάζετε την ταχύτητα του φωτός τόσο επιδεινώνεται η κατάσταση· και όσο κι αν προσπαθήσετε, απλώς δεν θα καταφέρετε ποτέ να υπερβείτε το φράγμα της ταχύτητας του φωτός.

Ο **W. Daniel Hillis** *είναι επιστήμων των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα αφορούν τις νοήμονες μηχανές, εφαρμογές των παράλληλων επεξεργαστών και των αλγορίθμων παράλληλης μάθησης, και την αρχιτεκτονική υπολογιστών. Είναι ο δημιουργός του υπολογιστή Connection Machine 5.*

Πυκνά νοήματα

«τας Νεφέλας ύδατος μεστάς (...) εμπιπτούσας εις αλλήλας παταγείν διά την πυκνότητα.»
—Αριστοφάνης, Νεφέλαι

A.A. Leonovich

«ΕΛΑ ΤΩΡΑ!», ΘΑ ΕΛΕΓΑΝ ΑΚΟΜΗ και εκείνοι οι αναγνώστες μας στες μας που είναι μαθητές λυκείου, «...αυτά είναι παχνίδια για μικρά παιδιά». Αλλά ας μην είμαστε τόσο απόλυτοι —κοιτάξτε άλλωστε άλλη μία φορά τα διπλανά αποφθέγματα. Αν και η πυκνότητα φαίνεται μια προφανής και μάλλον απλή φυσική έννοια, είναι πάντοτε έτοιμη να βοηθήσει τους επιστήμονες όταν ασχολούνται με τη μελέτη σοβαρών προβλημάτων —τη σύνθεση της ύλης, τις διαφορές των φυσικών ιδιοτήτων, τη βαρύτητα, την κίνηση των ρευστών, κ.ά. Ο κατάλογος των προβλημάτων εύκολα μπορεί να συνεχιστεί, όπως και αυτός των διανοητών που παρατίθενται στον διπλανό πίνακα με σύγχρονους επιστήμονες. Οι έρευνές τους εκτείνονται από τον μικρόκοσμο στη δομή των υπέρπυκνων άστρων αλλά και στα πέρατα του εξώτερου Διαστήματος και του διαστελλόμενου σύμπαντος, το μέλλον και το πεπρωμένο του οποίου εξαρτώνται με τρόπο δραματικό από τις αλλάγες στην πολύ μικρή πυκνότητα της ύλης.

Ωστόσο, χωρίς να περιπλανηθούμε τόσο μακριά, μπορούμε να δούμε πόσο πολύπλευρη έννοια είναι η πυκνότητα. Πράγματι, παράλληλα με την πυκνότητα μάζας, οι επιστήμονες χρησιμοποιούν επίσης τις έννοιες της πυκνότητας φορτίου, ρεύματος και ενέργειας, ενώ συναντούμε και όρους όπως επιφανειακή και γραμμική πυκνότητα. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι υπάρχουν πάρα πολλά ενδιαφέροντα πράγματα στον κόσμο μας τα οποία σχετίζονται με την πυκνότητα, και εδώ σας δίνεται η ευκαιρία να τα θυμηθείτε για μία φορά ακόμη —αλλά και να ανανεώσετε την εκτίμησή σας στην «απλή» έννοια της πυκνότητας.

> *«Φαίνεται λοιπόν ότι δεν υπάρχει πυκνή ύλη στον κόσμο.»*
> —Λουκρήτιος
>
> *«Με μια συσκευή μπορούμε να προσδιορίσουμε πότε ο αέρας είναι πυκνότερος και βαρύτερος, και πότε αραιότερος και ελαφρύτερος.»*
> —Evangelista Torricelli
>
> *«Αέρας που είναι δύο φορές πιο πυκνός είναι και δύο φορές πιο ελαστικός.»*
> —Robert Boyle
>
> *«Η πυκνότητα της Γης είναι 5,48 φορές μεγαλύτερη από την πυκνότητα του νερού.»*
> —Henry Cavendish
>
> *«Οι σχέσεις ανάμεσα στην πίεση, τη θερμοκρασία και την πυκνότητα ενός ιδανικού αερίου μπορεί να κατανοηθούν εάν υποθέσουμε ότι τα σωματίδια του κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά.»*
> —James Clerk Maxwell

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Τι κρύβεται πίσω από τη σταθερή κίνηση του νερού σ' ένα σύστημα κεντρικής θέρμανσης;

2. Τι είναι βαρύτερο, ένα κουτί γεμάτο με μικρά σκάγια ή με μεγάλα;

3. Καθώς τα πλοία αφήνουν την τελευταία δεξαμενή στη Διώρυγα του Παναμά, μετατοπίζονται αργά στα νερά του ωκεανού χωρίς να έχουν αναμμένες τις μηχανές τους. Ποιες δυνάμεις τα σπρώχνουν;

4. Ένα κομμάτι ξύλου επιπλέει στο νερό έχοντας τα τρία τέταρτα του όγκου του κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Πόση είναι η πυκνότητα του ξύλου;

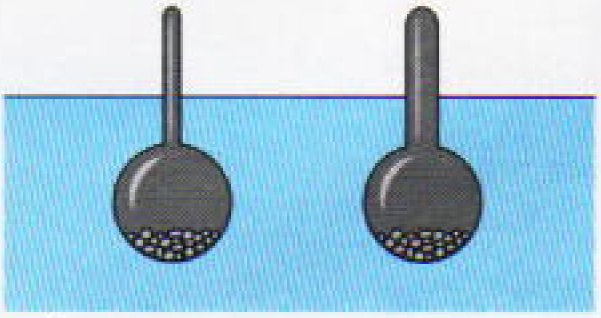
5. Ένα κομμάτι πάγος επιπλέει σ' ένα δοχείο γεμάτο νερό έχοντας στην επιφάνειά του μια ξύλινη μπάλα με πυκνότητα μικρότερη από την πυκνότητα του νερού. Θα αλλάξει η στάθμη του νερού αφού λιώσει ο πάγος;

6. Ανοίγουμε μια τρύπα στον πάγο, στο μέσο μιας μεγάλης παγωμένης λίμνης. Αν το πάχος του πάγου είναι ακριβώς 10 m, τι μήκος σχοινιού χρειαζόμαστε για να γεμίσουμε έναν κουβά με νερό;

7. Μπορείτε να προβλέψετε, προτού στερεοποιηθεί μια τηγμένη ουσία, πώς θα μεταβληθεί η πυκνότητά της, αν διαθέτετε ένα στερεό δείγμα της ουσίας;

Εικονογράφηση: Vasily Vlasov / *Η σπηλιά του σκύλου*

8. Ποιο από τα δύο αραιόμετρα που φαίνονται στο Σχήμα 1 πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να μετρήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια αλλαγές στην πυκνότητα ενός υγρού;



Σχήμα 1

9. Ένα αντικείμενο ζυγίζεται σε ζυγό ακριβείας με σταθμά, ο οποίος βρίσκεται μέσα σ' ένα γυάλινο δοχείο σε σχήμα καμπάνας. Θα αλλάξει η ένδειξη του ζυγού εάν αντλήσουμε αέρα από το δοχείο προς το περιβάλλον;

10. Έχουμε αναρτήσει ένα σώμα από δυναμόμετρο ελατηρίου και το έχουμε βυθίσει σε υγρό, σε θερμοκρασία δωματίου (Σχήμα 2). Πώς θα μεταβληθεί η ένδειξη του δυναμομέτρου αν θερμάνουμε ταυτόχρονα και το σώμα και το υγρό;

11. Στον πυθμένα δοχείου που περιέχει ένα ρευστό (αέριο ή υγρό) έχει τοποθετηθεί αντικείμενο που η πυκνότητά του είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την πυκνότητα του ρευστού. Είναι δυνατόν να ανυψώσουμε το αντικείμενο ασκώντας πίεση στο ρευστό;

Σχήμα 2

12. Αναμειγνύουμε δύο ίσες ποσότητες νερού διαφορετικής θερμοκρασίας (1°C και 7°C, αντίστοιχα). Θα αλλάξει ο συνολικός όγκος του νερού όταν θα επιτευχθεί θερμική ισορροπία; Αγνοήστε ανταλλαγές θερμότητας με το περιβάλλον.

13. Ποσότητα νερού υπόκειται σε αυξανόμενη πίεση. Πρέπει να τη θερμάνουμε ή να την ψύξουμε για να διατηρήσουμε τον όγκο της σταθερό;

14. Ένα άδειο γυάλινο μπουκαλάκι επιπλέει στο νερό ενός δοχείου σε θερμοκρασία δωματίου. Εάν προστεθεί νερό στο δοχείο, το μπουκαλάκι ανυψώνεται· αν προστεθεί κι άλλο νερό, το μπουκαλάκι βυθίζεται. Πώς μπορεί να εξηγείται το φαινόμενο;

15. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις μεταβολής της θερμοκρασίας συναρτήσει της πυκνότητας για ιδανικό αέριο κατά ισόθερμη, ισοβαρή και ισόχωρη διαδικασία, αντίστοιχα.

16. Δύο όμοια δοχεία τοποθετούνται στα δύο σκέλη μιας ζυγαριάς. Το ένα από αυτά περιέχει ξηρό αέρα ενώ το άλλο υγρό αέρα σε ίσες πιέσεις και θερμοκρασίες. Ποιο δοχείο είναι το βαρύτερο;

17. Πώς εξαρτάται η ανυψωτική δύναμη ενός αερόστατου από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος;

18. Γιατί ένας φορτισμένος αγωγός καλυμμένος από σκόνη χάνει γρήγορα το φορτίο του;

19. Δύο κυλινδρικά ηλεκτρόδια από άνθρακα είναι εν μέρει βυθισμένα σε διάλυμα θειικού χαλκού. Ο χαλκός επικάθεται στην επιφάνεια του ενός ηλεκτροδίου. Γιατί το στρώμα χαλκού είναι παχύτερο στην πλευρά του ηλεκτροδίου που βρίσκεται απέναντι από το άλλο ηλεκτρόδιο;

Μικροπειραματισμοί

Προσπαθήστε να βρείτε τη μέση πυκνότητα του σώματός σας. Τι χρειάζεστε για να το κάνετε;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

...ο αρχαίος έλληνας γιατρός Ιπποκράτης σημείωσε στα γραπτά του ότι το νερό της βροχής είναι ελαφρύτερο από τα άλλα είδη νερού. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι αρχαίοι έλληνες μπορούσαν να διακρίνουν το βρόχινο νερό από το νερό ενός πηγαδιού από τις πυκνότητές τους, και ότι χρησιμοποιούσαν το νερό της βροχής για να βαθμονομούν όγκους.

...από τον 17ο αιώνα οι άνθρωποι είχαν προσδιορίσει την πυκνότητα στερεών σωμάτων με τη χρήση του «υδροστατικού ζυγού», η εφεύρεση του οποίου αποδίδεται στον Γαλιλαίο. Αυτή η συσκευή, η οποία έμοιαζε με δυναμόμετρο ελατηρίου, επέτρεπε σε κάποιον να συγκρίνει τα βάρη των διαφόρων σωμάτων τόσο στο νερό όσο και στον αέρα.

...μελετώντας την ύπαρξη του κενού, ο Otto von Guericke αποφάσισε να ελέγξει πειραματικά τη θεωρία του Καρτέσιου, σύμφωνα με την οποία ολόκληρος ο χώρος είναι γεμάτος ύλη. Η ιδέα που βρισκόταν πίσω από αυτά τα πειράματα προκειμένου να παραχθεί το «κενό» οδήγησε αναπόφευκτα στη δημιουργία της αντλίας κενού.

...η καινοτομία των πειραμάτων του Cavendish για τον υπολογισμό της πυκνότητας της Γης έγκειται στο γεγονός ότι αφορούσαν τη βαρυτική αλληλεπίδραση ανάμεσα σε συγκριτικά μικρές μάζες και σε συνθήκες εργαστηρίου. Προηγουμένως όλες οι προσπάθειες να εκτιμηθεί αυτή η πυκνότητα βασίζοταν σε μετρήσεις της απόκλισης από την κατακόρυφο ενός νήματος της στάθμης, λόγω της επίδρασης ενός κοντινού βουνού.

...στην Ιταλία, κοντά στη Νάπολη, βρίσκεται ένα φημισμένο σπήλαιο γνωστό με το όνομα «Η σπηλιά του σκύλου». Διοξείδιο του άνθρακα (το οποίο έχει πυκνότητα 1,5 φορά αυτή του αέρα) αναδύεται συνεχώς από το χαμηλότερο τμήμα του. Αυτό το αέριο απλώνεται κατά μήκος του δαπέδου της σπηλιάς και με αργό ρυθμό βγαίνει έξω από το στόμιό της. Ένας άνθρωπος μπορεί να περπατήσει με ασφάλεια μέσα στη σπηλιά, αλλά για ένα σκύλο αυτός ο περίπατος μπορεί να αποδειχτεί θανατηφόρος.

...η πυκνότητα του κεχριμπαριού είναι σχεδόν ίση με την πυκνότητα του θαλασσινού νερού. Ως εκ τούτου, το κεχριμπάρι μπορεί να «αιωρείται» στο νερό επί δεκάδες χρόνια χωρίς να βυθίζεται.

...η αινιγματική ανώμαλη συμπεριφορά του νερού όταν η θερμοκρασία του μεταβάλλεται στην περιοχή από

0°C ώς 4°C εξηγείται από τη μοριακή δομή του. Αύξηση της θερμοκρασίας στη συγκεκριμένη περιοχή προκαλεί όχι μόνο αύξηση στις αποστάσεις μεταξύ των ατόμων αλλά και αναδιάταξη αυτής της δομής, η οποία οδηγεί σε περισσότερο πυκνή «στοίβαξη» των μορίων του νερού.

...το γεγονός καθ' εαυτό ότι οι ουσίες έχουν μια «κρίσιμη θερμοκρασία» δείχνει την απουσία θεμελιώδους διαφοράς ανάμεσα στα αέρια και τα υγρά (και όχι μόνο σε θερμοκρασίες υψηλότερες από το κρίσιμο σημείο). Πράγματι, μεταβάλλοντας την πίεση και τη θερμοκρασία μπορούμε να μετατρέψουμε ένα υγρό σε αέριο χωρίς να περάσουμε από τη διαδικασία του βρασμού —δηλαδή με ομαλό και συνεχή τρόπο.

...εάν φανταστούμε ότι η ύλη των άστρων του Γαλαξία μας κατανέμεται ομοιόμορφα στο χώρο που καταλαμβάνει, τότε η μέση πυκνότητα μάζας θα είναι κατά προσέγγιση $5 \cdot 10^{-24}$ gr/cm^3.

...1/10 του χιλιοστού του δευτερολέπτου μετά τη Μεγάλη Έκρηξη (τη στιγμή που το σύμπαν άρχισε να διαστέλλεται) η μέση πυκνότητά του ήταν περίπου 10^{14} g/cm^3 —ίση με την πυκνότητα του ατομικού πυρήνα!

...η τρέχουσα τιμή της μέσης πυκνότητας του σύμπαντος καθορίζει την παραπέρα εξέλιξή του: είτε η διαδικασία της διαστολής θα συνεχιστεί επ' άπειρον είτε θα αντικατασταθεί από τη συστολή. Επειδή είναι πολύ πιθανόν ύλη στο σύμπαν να υπάρχει και σε μορφές που είναι δύσκολο να παρατηρηθούν, δεν έχει ακόμη βρεθεί ακριβής τιμή της σημερινής πυκνότητας του σύμπαντος, με αποτέλεσμα οι προοπτικές για το μέλλον του σύμπαντος να παραμένουν ανοιχτές προς συζήτηση.

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

• A. Eisenkraft και L. Kirkpatrick, «Σχηματισμός νεφών», Μάρ./Απρ. 1995.

• W.A. Hiscock, «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες», Μάιος/Ιούν. 1995.

• A. Kingsep, «Η τέταρτη κατάσταση της ύλης», Νοέμ./Δεκ. 1995.

• I.I. Mazin, «Πρόσκληση για σάουνα», Ιούλ./Αύγ. 1996.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Άρρητοι αριθμοί και ανάγωγα πολυώνυμα

Όλα άρχισαν από την τετραγωνική ρίζα του 2...

V.A. Oleynikov

ΟΙ ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ ΓΝΩΡΙΖΑΝ και μπορούσαν να αποδείξουν ότι

η ποσότητα $\sqrt{2}$ είναι άρρητη.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι είναι ρητή. Τότε, μπορούμε να τη γράψουμε ως ανάγωγο κλάσμα, $\sqrt{2} = a/b$. Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$2 = \frac{a^2}{b^2},\ 2b^2 = a^2.$$

Είναι φανερό τώρα ότι το a διαιρείται από το 2, το a^2 διαιρείται από το 4, και επομένως το b διαιρείται επίσης από το 2. Επομένως, οι a και b είναι και οι δύο άρτιοι.

Δεν είναι δυνατόν να είναι ανάγωγο το κλάσμα a/b και ταυτόχρονα οι a και b να είναι άρτιοι, οπότε η $\sqrt{2}$ δεν είναι κλάσμα. Εξαιτίας αυτής της ιδιότητάς της, η $\sqrt{2}$ κατέληξε ένας ανεπιθύμητος επισκέπτης στον κόσμο των αριθμών, που ώς τότε τον κυβερνούσαν η αρμονία και η τάξη, η απλότητα και η τελειότητα.

Ο αριθμός $\sqrt{2}$ οφείλει την ύπαρξή του στη διαγώνιο του μοναδιαίου τετραγώνου και στις αναρίθμητες ανεπιτυχείς προσπάθειες μέτρησής της μέσω ρητών ευθύγραμμων τμημάτων. Αυτές οι αποτυχίες προβλημάτισαν έντονα τους αρχαίους Έλληνες και προκάλεσαν έντονο διανοητικό αναβρασμό. Η πραγματικότητα, ενσωματωμένη στο γεωμετρικό σχήμα, έμοιαζε να απομακρύνεται από το ωραίο και το τέλειο. Αιώνες αργότερα, η $\sqrt{2}$ διεκδίκησε το δικαίωμά της να θεωρηθεί «αριθμός» μέσω της μετατροπής της σε μια άλλη πραγματικότητα: της ρίζας της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$. Αποδείχτηκε ότι

ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος,

διότι

το πολυώνυμο $x^2 - 2$ είναι ανάγωγο.

Στόχος μας είναι να διαλευκάνουμε τη σύνδεση μεταξύ ανάγωγων πολυωνύμων και άρρητων αριθμών.

Ανάγωγα πολυώνυμα

Ένα πολυώνυμο του x, βαθμού n,

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

με ακέραιους συντελεστές

$$a_0, a_1, \ldots, a_n\ (a_n \neq 0)$$

ονομάζεται *ανάγωγο* αν δεν υπάρχουν πολυώνυμα $L(x)$ και $Q(x)$ με ακέραιους συντελεστές, βαθμού μικρότερου του n, τέτοια ώστε

$$P(x) = L(x) \cdot Q(x).$$

Διαφορετικά, το πολυώνυμο ονομάζεται *αναγώγιμο.*

Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $x^3 + x^2 + x + 1$ είναι αναγώγιμο (ισούται με $(x + 1)(x^2 + 1)$ —επαληθεύστε το!), ενώ το πολυώνυμο $x^2 + 1$ είναι ανάγωγο (σκεφτείτε γιατί).

Το γραμμικό διώνυμο $a_0 + a_1x$ είναι το απλούστερο παράδειγμα ανάγωγου πολυωνύμου. Η μοναδική του ρίζα $x = -a_0/a_1$ είναι *ρητός* αριθμός. Όμως,

ένα ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού n, όπου $n \geq 2$, δεν έχει ρητές ρίζες.

Η πρόταση αυτή έπεται από την εξής γενικότερη:

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν p είναι κοινή ρίζα δύο πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ με ακέραιους συντελεστές, και το ένα από αυτά —για παράδειγμα, το $Q(x)$— είναι ανάγωγο, τότε το πολυώνυμο $d \cdot P(x)$, για κάποιον ακέραιο αριθμό d, διαιρείται από το $Q(x)$:*

$$d \cdot P(x) = L(x) \cdot Q(x).$$

Το θεώρημα αυτό φέρει το όνομα του διάσημου γερμανού μαθηματικού Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Θα το αποδείξουμε στη συνέχεια. Η ιδιότητα που προαναφέραμε έπεται άμεσα από αυτό, αφού ένα πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου είναι αδύνατον να διαιρεί ένα γραμμικό διώνυμο.

Έχουμε πλέον τη δυνατότητα να παράγουμε πολλούς καινούργιους άρρητους αριθμούς. Μπορούμε να τους αναζητήσουμε μεταξύ των ριζών των ανάγωγων πολυωνύμων. Η επόμενη πρόταση μας εισάγει στο μυστηριώδη κόσμο των ανάγωγων πολυωνύμων:

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ EISENSTEIN. *Ας υποθέσουμε ότι για ένα δεδομένο πο-*

λυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές υπάρχει ένας πρώτος αριθμός p τέτοιος ώστε ο συντελεστής a_n του μεγιστοβάθμιου όρου δεν διαιρείται από το p, ενώ όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές a_k ($k = 0, 1, ..., n-1$) διαιρούνται από το p, ενώ ο σταθερός όρος a_0 δεν διαιρείται από το p^2. Τότε, το πολυώνυμο $P(x)$ είναι ανάγωγο.

Κατά τη διάρκεια της σύντομης ζωής του, ο γερμανός μαθηματικός F.G.M. Eisenstein (1823-1852) υπέφερε πολύ λόγω της κακοτυχίας του αλλά και της αδιαφορίας των συγχρόνων του για το έργο του. Οι ιδέες του έγιναν κατανοητές πολύ καιρό μετά το θάνατό του.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι υπάρχει ένα αναγώγιμο πολυώνυμο $P(x)$ οι συντελεστές του οποίου έχουν τις ιδιότητες που περιγράφει το κριτήριο. Μπορούμε να το παραστήσουμε ως γινόμενο

$$P(x) = L(x) \cdot Q(x)$$

των πολυωνύμων

$$L(x) = b_0 + b_1x + ... + b_\ell x^\ell,$$

$$Q(x) = c_0 + c_1x + ... + c_m x^m$$

με ακέραιους συντελεστές. Οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων b_ℓ και c_m είναι μη μηδενικοί, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \geq \ell \geq 1$. Αν προσθέσουμε τους συντελεστές των όμοιων δυνάμεων του x σ' αυτό το γινόμενο και συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με τους αντίστοιχους συντελεστές του $P(x)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0c_0,\\
a_1 &= b_0c_1 + b_1c_0,\\
a_2 &= b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0,\\
&\vdots\\
a_\ell &= b_0c_\ell + b_1c_{\ell-1} + ... + b_\ell c_0,\\
&\vdots\\
a_m &= b_0c_m + b_1c_{m-1} + ... + b_m c_0,\\
&\vdots\\
a_n &= b_\ell c_m.
\end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε την πρώτη από αυτές τις ισότητες. Γνωρίζουμε ότι ο σταθερός όρος a_0 διαιρείται με το p. Αυτό σημαίνει ότι είτε ο b_0 είτε ο c_0 διαιρούνται από το p. Από την άλλη πλευρά, είναι αδύνατον να διαιρούνται και οι δύο από το p, διότι το a_0 δεν διαιρείται από το p^2.

Ας υποθέσουμε ότι το b_0 διαιρείται από το p, ενώ το c_0 όχι. Συνεχίζουμε τώρα με τη δεύτερη ισότητα: το a_1 και το b_0c_1 διαιρούνται με το p, και συνεπώς το b_1c_0 διαιρείται επίσης από το p. Άρα, το b_1 διαιρείται από το p...

...Και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο έως ότου φτάσουμε στην ($\ell + 1$)-οστή ισότητα (που αφορά το συντελεστή a_ℓ): το a_ℓ διαιρείται από το p, όπως επίσης και τα $b_0, ..., b_{\ell-1}$. Συνεπώς, το $b_\ell c_0$, και επομένως το b_ℓ, διαιρείται από το p.

Περνάμε τώρα κατευθείαν στην τελευταία ισότητα: συμπεραίνουμε ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου $a_n = b_\ell c_m$ διαιρείται από το p, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με τη συνθήκη του κριτηρίου.

Αν υποθέσουμε στην αρχική ισότητα ότι το c_0 και όχι το b_0 διαιρείται από το p, πρέπει να ξεκινήσουμε πάλι από την αρχή, να προχωρήσουμε με τον ίδιο τρόπο έως τη ($m + 1$)-οστή ισότητα, και να περάσουμε κατόπιν στην τελευταία.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι αδύνατη η παραγοντοποίηση $P(x) = L(x) \cdot Q(x)$, και συνεπώς το $P(x)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο. Αφού αποδείξαμε το κριτήριο, προχωρούμε στο επόμενο στάδιο.

Άρρητα ριζικά

Σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein, το πολυώνυμο $x^2 - 2$ είναι ανάγωγο (θεωρήστε $p = 2$). Εκτός της $\sqrt{2}$ είναι άρρητοι και οι αριθμοί

$$\sqrt[n]{p},$$

όπου p είναι πρώτος αριθμός και $n = 2, 3, ...$. Όλοι αυτοί είναι ρίζες των πολυωνύμων

$$P(x) = x^n - p,$$

τα οποία, σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein, είναι ανάγωγα. Ο αριθμός

$$\sqrt[n]{p_1 \cdots p_k}$$

είναι άρρητος όταν τα $p_1, ..., p_k$ είναι διαφορετικοί πρώτοι. Ο αριθμός αυτός είναι ρίζα του ανάγωγου πολυωνύμου

$$P(x) = x^n - p_1 \ldots p_k.$$

Σ' αυτούς τους άρρητους μπορούμε να επισυνάψουμε τον

$$\sqrt[\ell]{a + \sqrt[m]{b + \cdots \sqrt[n]{p_1 \cdots p_k}}},$$

για φυσικούς αριθμούς $a, b, ...$ (προσπαθήστε να κατασκευάσετε μόνοι σας πολυώνυμα γι' αυτά τα τέρατα, και αποδείξτε ότι είναι ανάγωγα).

Όλα αυτά τα παραδείγματα μας δείχνουν πώς εφαρμόζεται το κριτήριο του Eisenstein. Εντούτοις, δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι έχουμε προχωρήσει πολύ πέρα απ' όσα γνώριζαν ήδη οι αρχαίοι Έλληνες. Πράγματι, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι η τελευταία παράσταση είναι άρρητη υψώνοντάς τη διαδοχικά στην ℓ-οστή, m-οστή, ..., n-οστή δύναμη και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιήσαμε κατά την απόδειξη του άρρητου της $\sqrt{2}$. Το επόμενο άθροισμα ριζικών μοιάζει εντυπωσιακότερο:

$$\frac{a_1}{b_1}\sqrt[n_1]{p^{m_1}} + \cdots + \frac{a_k}{b_k}\sqrt[n_k]{p^{m_k}}.$$

Αν όλα τα κλάσματα

$$\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$$

είναι ανάγωγα και διαφορετικά μεταξύ τους, τότε αυτό το άθροισμα είναι άρρητος αριθμός. Ας υποθέσουμε πράγματι ότι είναι ρητός και ίσος με a/b. Θέτουμε $N = n_1 \ldots n_k$. Τότε, η $\sqrt[N]{p}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές

$$\frac{a_1B}{b_1}x^{\frac{m_1N}{n_1}} + \cdots + \frac{a_kB}{b_k}x^{\frac{m_kN}{n_k}} - \frac{aB}{b},$$

όπου $B = b \cdot b_1 \ldots b_k$. Το πολυώνυμο αυτό έχει βαθμό μικρότερο του N. Σύμφωνα όμως με το θεώρημά μας, πρέπει να διαιρείται από το ανάγωγο πολυώνυμο $x^N - p$ βαθμού N, πράγμα αδύνατο.

Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε έτσι επιτυχώς (για παράδειγμα, μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο τελευταία αποτελέσματα, για να δημιουργήσουμε νέους άρρητους). Η επιτυχία εμπνέει ελπίδες, αλλά μερικές φορές προκαλεί ψευδαισθήσεις. Φαίνεται πως, αν συγκεντρώνουμε όλο και νέους άρρητους αριθμούς και αν εφαρμόζουμε τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής στους ακεραίους $a, b, ...$, θα παίρνουμε συνεχώς καινούργιους άρρητους. Στα μαθηματικά, ο καλύτερος τρόπος για να απαλλαγούμε από τις ψευδαισθήσεις μας είναι να θεωρήσουμε μια «ειδική περίπτωση». Μια τέτοια ειδική περίπτωση είναι το ερώτημα αν η παράσταση $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ είναι άρρητος αριθμός, όπου a και b είναι φυσικοί αριθμοί ($n \geq 3$). Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το τελευταίο θεώρημα του Fermat:

Δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί x, y, z τέτοιοι ώστε $x^n + y^n = z^n$, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 2.

Ο σπουδαίος γάλλος μαθηματικός του 17ου αιώνα Pierre de Fermat έθεσε αυτό το πρόβλημα και μας το κληροδότησε άλυτο. Έκτοτε, και επί τρεις αιώνες τουλάχιστον, οι καλύτεροι (και οι χειρότεροι) μαθηματικοί έχουν προσπαθήσει να το λύσουν.[1] Αυτό το φαινομενικά απλό πρόβλημα έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον αναρίθμητων ερασιτεχνών μαθηματικών, και πολλές αφελείς, ανεκπαίδευτες ψυχές χάθηκαν στα βάθη του.

Το 1908 ο γερμανός εκατομμυριούχος P. Wolfskehl προσέφερε ένα μεγάλο χρηματικό βραβείο σε όποιον θα αποδείκνυε το τελευταίο θεώρημα του Fermat, προκαλώντας έτσι μια χιονοστιβάδα εσφαλμένων «λύσεων». Οι προσπάθειες εξακολούθησαν αμείωτες παρά τη σημαντική μείωση της αξίας του βραβείου λόγω της υποτίμησης του γερμανικού μάρκου, κατά τη δεκαετία του 1930.

Ο τελικός στόχος αυτών των παρατηρήσεων είναι καθαρός: η μαζική παραγωγή άρρητων ριζικών είναι μια φαινομενικά πολλά υποσχόμενη, αλλά εξαιρετικά επικίνδυνη απασχόληση.

Παραλλαγές

Συχνά, το κριτήριο του Eisenstein δεν επαρκεί για να καθορίσουμε αν είναι ανάγωγο το πολυώνυμο $P(x)$, διότι απαιτεί να υπάρχει ένας κοινός πρώτος διαιρέτης όλων των συντελεστών $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ (εκτός του συντελεστή a_n του μεγιστοβάθμιου όρου). Υπάρχουν πολλά πολυώνυμα —για παράδειγμα, τα

$$x^2+1, \quad x^4+1, \quad x^6+x^3+1$$

—για τα οποία δεν υπάρχει τέτοιος κοινός διαιρέτης. Πάντως, απέχουμε πολύ από το να έχουμε εξαντλήσει τις δυνατότητες του κριτηρίου. Μπορούμε απλώς να «αναδιοργανώσουμε» το πολυώνυμο $P(x)$ μέσω κάποιων αντικαταστάσεων της μεταβλητής x.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Eisenstein για να απαντήσουμε στο ερώτημα αν είναι ανάγωγο το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + 1$$

με τον εξής τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι το $P(x)$ δεν είναι ανάγωγο. Τότε, όμως, δεν είναι ανάγωγο ούτε το $P(x + 1)$. Αλλά το $P(x+1) = x^2 + 2x + 2$ είναι ανάγωγο σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein για $p = 2$. Τα πολυώνυμα $x^4 + 1$ και $x^6 + x^3 + 1$ είναι ανάγωγα για τον ίδιο λόγο. Ένας παρόμοιος μετασχηματισμός μάς επιτρέπει να διαπιστώσουμε κατά πόσον είναι ανάγωγο το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$$

—το οποίο ονομάζεται *κυκλοτομικό πολυώνυμο*.[2]

Το πολυώνυμο $P(x)$ δεν είναι ανάγωγο όταν το $n = p \cdot k$ είναι σύνθετος αριθμός, διότι

$$P(x) = \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{(x^p)^k-1}{x-1} =$$

$$\frac{(x^p-1)(x^{p(k-1)}+x^{p(k-2)}+\cdots+1)}{x-1}$$

$$=(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1)$$

$$(x^{p(k-1)}+x^{p(k-2)}+\cdots+1)$$

ενώ είναι ανάγωγο αν το n είναι πρώτος αριθμός.

Πράγματι, αν το $P(x)$ δεν είναι ανάγωγο, δεν είναι ανάγωγο ούτε το $P(x + 1)$. Όμως,

$$P(x+1) = \frac{(x+1)^p-1}{(x+1)-1}$$

$$= x^{p-1} + C_p^1 x^{p-2} + \dots + C_p^{p-1}.$$

Εδώ όλοι οι συντελεστές[3] διαιρούνται από το p, διότι

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \quad (k < p),$$

και όλοι οι αριθμητές διαιρούνται από το p, ενώ οι παρονομαστές όχι. Επιπλέον, ο σταθερός όρος $C_p^{p-1} = p$ δεν διαιρείται από το p^2. Σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein, το $P(x + 1)$ είναι ανάγωγο, άρα και το $P(x)$.

Από το αποτέλεσμα αυτό έπεται ότι το κυκλοτομικό πολυώνυμο

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 = 0$$

δεν μπορεί να έχει ρητές ρίζες για πρώτο $p \geq 3$.

Αποδεικνύεται ότι το κυκλοτομικό πολυώνυμο δεν έχει ούτε πραγματικές ρίζες —ότι όλες του οι ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε ένα δυσκολότερο ερώτημα: σε ποια περίπτωση οι ρίζες αυτές δεν είναι «υπερβολικά άρρητες» —δηλαδή, πότε μπορούμε να τις εκφράσουμε μέσω *τετραγωνικών* ριζικών (που προκύπτουν από την εφαρμογή σε ακέραιους αριθμούς των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων και την εξαγωγή *τετραγωνικών* ριζών); Αυτό το ερώτημα ενδιέφερε τους αρχαίους Έλληνες, διότι είναι ισοδύναμο με το εξής πρόβλημα κατασκευής: για ποιο p είναι δυνατόν να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη ένα κανονικό p-γωνο;

Ο νεαρός Carl Friedrich Gauss αντιμετώπισε αυτή την πρόκληση και απέδειξε ότι οι ρίζες του κυκλοτομικού πολυωνύμου εκφράζονται με τετραγωνικά ριζικά αν (και μόνο αν[4]) το p είναι *πρώτος αριθμός του Fermat*: $p = 3, 5, 17, 257, \dots, 2^{2^k} + 1, \dots$. Ο Gauss ήταν ιδιαίτερα υπερήφανος για την ανακάλυψή του, και μάλιστα «εξέφρασε την επιθυμία να χαραχτεί στον

1. Το 1995 ο άγγλος μαθηματικός Andrew Wiles δημοσίευσε μια απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, στην οποία συνδέονται πολλές διαφορετικές περιοχές των σύγχρονων μαθηματικών. Για περισσότερα, βλ. το ομώνυμο άρθρο στο τεύχος Μαρτίου / Απριλίου 1997 του ελληνικού *Quantum*.

2. Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι n-οστές ρίζες του 1 (εκτός του ίδιου του 1), οι οποίες είναι όλες μιγαδικές, εκτός από την περίπτωση που το n είναι άρτιο (οπότε μία από αυτές ισούται με −1). Στο μιγαδικό επίπεδο, αυτοί οι αριθμοί είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-γώνου που είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο, τον οποίο διαιρούν σε n ίσα τόξα. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τον όρο «κυκλοτομικό».

3. Χρησιμοποιούμε τους διωνυμικούς συντελεστές C_j^i και το ανάπτυγμα του διωνύμου του Νεύτωνα.

4. Αυτό το τμήμα της πρότασης το απέδειξε ο Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), καθηγητής της Πολυτεχνικής Σχολής στο Παρίσι.

τάφο του ένα κανονικό 17-γωνο».

Ακολουθεί ένα ακόμη, πιο σεμνό, επίτευγμα του μεγάλου Gauss.

Λήμμα περί των πρωταρχικών πολυωνύμων

Το λήμμα αυτό θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε το θεώρημα που αναφέραμε προηγουμένως. Θα ονομάζουμε *πρωταρχικό* ένα πολυώνυμο

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

με ακέραιους συντελεστές αν οι συντελεστές του $a_0, a_1, \ldots, a_n$, δεν έχουν κοινούς πρώτους διαιρέτες.

Το λήμμα του Gauss μάς λέει ότι

το γινόμενο δύο πρωταρχικών πολυωνύμων είναι επίσης πρωταρχικό πολυώνυμο.

Το λήμμα αυτό χρησιμοποιείται σε πολλά θεωρήματα της άλγεβρας και της θεωρίας αριθμών. Αν παρακολουθήσατε την απόδειξη του κριτηρίου του Eisenstein, δεν θα έχετε πρόβλημα να καταλάβετε την απόδειξη που ακολουθεί, διότι έχουν πολλά κοινά σημεία.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το αντίθετο: Έστω δύο πρωταρχικά πολυώνυμα

$$L(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_\ell x^\ell,$$

$$Q(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_mx^m,$$

και έστω ότι το γινόμενό τους, το πολυώνυμο

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

δεν είναι πρωταρχικό. Έστω p ένας από τους κοινούς διαιρέτες των συντελεστών του. Έστω b_i ο συντελεστής του πιο χαμηλόβαθμου όρου του πολυωνύμου $L(x)$ ο οποίος δεν διαιρείται από το p, $0 \le i \le \ell$, και έστω c_j ο συντελεστής του πιο χαμηλόβαθμου όρου του πολυώνυμου $Q(x)$ ο οποίος δεν διαιρείται από το p, $0 \le j \le m$. Οι συντελεστές αυτοί υπάρχουν, διότι διαφορετικά τα πολυώνυμα $L(x)$ και $Q(x)$ δεν θα ήταν πρωταρχικά. Ο συντελεστής τού x^{i+j} στο γινόμενο

$$L(x) \cdot Q(x)$$

ισούται με

$$\ldots + b_{i-1}c_{j+1} + \ldots + b_{i+1}c_{j-1} + \ldots$$

και δεν διαιρείται από το p, διότι όλοι οι όροι αυτού του αθροίσματος εκτός του b_ic_j διαιρούνται από το p. Από την άλλη πλευρά, το άθροισμα αυτό ισούται με a_{i+j} —τον αντίστοιχο συντελεστή του $P(x)$—, και συνεπώς πρέπει να διαιρείται από το p. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει το λήμμα.

Και φτάνουμε πλέον στο τέλος.

Απόδειξη του θεωρήματος

Θα αποδείξουμε το θεώρημα που αναφέραμε στην αρχή: Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει την κοινή ρίζα ρ με το ανάγωγο πολυώνυμο $Q(x)$, τότε το γινόμενο του $P(x)$ επί κάποιον ακέραιο $d \ne 0$ διαιρείται από το $Q(x)$.

Ας διαιρέσουμε το πολυώνυμο $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)$:

$$\begin{array}{l|l} a_nx^n + \ldots + a_0 & c_mx^m + \ldots + c_0 \\ \cline{2-2} a_nx^n + \ldots & \dfrac{a_n}{c_m}x^{n-m} + \ldots \\ \quad\vdots & \\ \quad r_{m-1}x^{m-1} + \ldots & \end{array}$$

Προκύπτει η επόμενη ισότητα:

$$P(x) = L_1(x) \cdot Q(x) + R_1(x).$$

Το πηλίκο $L_1(x) = (a_n/c_m)x^{n-m} + \ldots$ και το υπόλοιπο $R_1(x) = r_{m-1}x^{m-1} + \ldots$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις του x με ρητούς συντελεστές.

Αν το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι μηδέν (αν δηλαδή το $P(x)$ διαιρείται από το $Q(x)$), τότε όλα είναι προφανή, διότι σ' αυτή την περίπτωση

$$P(x) = L_1(x) \cdot Q(x) = \frac{1}{d} L(x) \cdot Q(x),$$

όπου d είναι ο κοινός παρονομαστής των συντελεστών του $L_1(x)$.

Αν $R_1(x) \ne 0$, τότε ο βαθμός του είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη $Q(x)$, ενώ ο αριθμός ρ, που είναι η κοινή ρίζα των $P(x)$ και $Q(x)$, είναι ρίζα και του πολυωνύμου $R_1(x)$:

$$R_1(\rho) = P(\rho) - L_1(\rho) \cdot Q(\rho) = 0.$$

Αν διαιρέσουμε το $Q(x)$ με το $R_1(x)$, προκύπτει ένα καινούργιο υπόλοιπο $R_2(x)$ που έχει την ίδια ιδιότητα. Ο βαθμός του είναι μικρότερος του βαθμού τού $R_1(x)$, και συνεπώς μικρότερος του βαθμού τού $Q(x)$.

Διαιρώντας το $Q(x)$ διαδοχικά με τα καινούργια υπόλοιπα $R_1(x)$, $R_2(x)$, ..., $R_k(x)$, είτε θα καταλήξουμε στην αντίφαση

$$R_k(x) \equiv c \ne 0$$

(που θα σημαίνει ότι το ρ δεν είναι ρίζα του $R_k(x)$), είτε θα βρούμε ένα πολυώνυμο $R_k(x)$ που θα διαιρεί ακριβώς το $Q(x)$: $Q(x) = L_k(x) \cdot R_k(x)$. Αν τρέψουμε σε ομώνυμους τους ρητούς συντελεστές των $L_k(x)$ και $R_k(x)$ και απαλείψουμε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμητών τους, μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη ισότητα ως

$$Q(x) = \frac{a}{b}\left[L(x)R(x)\right],$$

όπου a/b είναι ανάγωγο κλάσμα και $L(x)$, $R(x)$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι ο συντελεστής a/b του τελευταίου γινομένου είναι ακέραιος —ότι δηλαδή $b = \pm 1$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Έστω p ένας πρώτος διαιρέτης του b. Τότε, από την ισότητα

$$bQ(x) = a\left[L(x)R(x)\right]$$

έπεται ότι όλοι οι συντελεστές του δεξιού μέλους διαιρούνται από το p. Το a δεν διαιρείται από το p, διότι το κλάσμα a/b είναι ανάγωγο. Συνεπώς, όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου $L(x) \cdot R(x)$ διαιρούνται με το p. Όμως, σύμφωνα με το λήμμα του Gauss, αυτό είναι αδύνατον.

Άρα, το πολυώνυμο

$$Q(x) = \left[\pm aL(x)\right]R(x)$$

δεν είναι ανάγωγο, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την αρχική συνθήκη, οπότε το θεώρημα έχει αποδειχτεί.

Η εποχή των αρχαίων Ελλήνων έχει περάσει προ πολλού. Η σύγχυση του Μεσαίωνα έχει τελειώσει, και ο 19ος αιώνας —ο αληθινός «κλασικός αιώνας» των μαθηματικών— βρίσκεται επίσης μακριά μας. Ποια θα είναι τα μαθηματικά μνημεία του δικού μας αιώνα; ■

Αποχαιρετισμός στο JCMN

Εις μνήμην Basil Rennie

George Berzsenyi

ΜΕ ΤΗ ΣΤΗΛΗ ΑΥΤΗ ΘΕΛΟΥΜΕ να τιμήσουμε τη μνήμη του Basil Rennie, ο οποίος το 1975 δημιούργησε το *James Cook Mathematical Notes* (*JCMN*), ένα μοναδικό περιοδικό που παρουσίαζε καταπληκτικές μαθηματικές έρευνες, δικές του και συναδέλφων του μαθηματικών από όλο τον κόσμο. Επειδή πλησιάζει ο καιρός που θα σταματήσω τη συγγραφή αυτής της στήλης, θα ήθελα να επιστήσω την προσοχή των αναγνωστών μου στο θαυμάσιο διαλογικό ύφος του καταπληκτικού περιοδικού του Basil, έτσι ώστε να βρουν εναλλακτικές πηγές για τις μελλοντικές τους έρευνες. Για ν' ανοίξω την όρεξή τους, παρουσιάζω στη συνέχεια μερικά από τα προβλήματα που έχουν τεθεί στο *JCMN*. Όσο γνωρίζω, πολλά από αυτά παραμένουν άλυτα. Οι παραπομπές αναφέρονται στις σελίδες των τευχών όπου εμφανίζονται τα προβλήματα. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το *JCMN* και αρκετά ακόμη προβλήματα, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη στήλη μου Problems, Puzzles, & Paradoxes του περιοδικού *Consortium*, στο θερινό τεύχος του 1997.

Πρόβλημα 1. Δίνονται m αντικείμενα και θέλουμε να επιλέξουμε το ίδιο πλήθος m υποσυνόλων τους με k στοιχεία το καθένα, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο υποσύνολα με περισσότερα από ένα κοινό στοιχείο. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό k για κάθε m; Τα λίγα πρώτα είναι τα εξής (σελ. 6137, Μάιος 1992):

m	1	2	3	4	5	6	7
k	1	1	2	2	2	2	2

Πρόβλημα 2. Δίνονται n σημεία του επιπέδου. Σχηματίζονται έτσι $n(n-1)(n-2)/2$ γωνίες που ανήκουν όλες στο κλειστό διάστημα μεταξύ του 0 και του π. Τι μπορούμε να πούμε γι' αυτές τις γωνίες; Κάτι απλό είναι ότι ο μέσος όρος τους ισούται με $60^\circ = \pi/3$. Μπορούμε ίσως να πούμε και ότι τουλάχιστον μία γωνία είναι $\leq A(n)$ και ότι τουλάχιστον μία γωνία είναι $\geq B(n)$, όπου τα $A(n)$ και $B(n)$ δίνονται από τον πίνακα

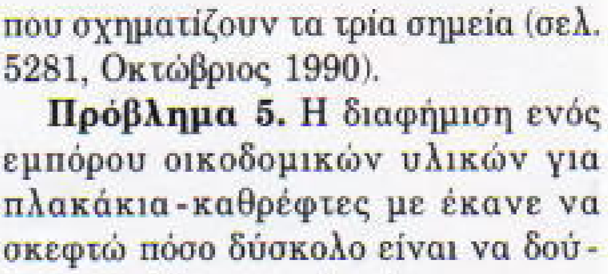
n	3	4	5	6
$A(n)$	60°	45°	36°	30°
$B(n)$	60°	90°	108°	120°

Ποια είναι η συνέχεια αυτού του πίνακα; (Σελ. 6090, Φεβρουάριος 1992.)

Πρόβλημα 3. Δύο τυχαία σημεία του μοναδιαίου δίσκου (που επιλέγονται βάσει μιας κατανομής με ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας) δίνουν ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα (με άκρα τα δύο σημεία). Ποια είναι η πιθανότητα να τέμνονται δύο τέτοια ευθύγραμμα τμήματα; (Σελ. 6017, Φεβρουάριος 1991.)

Πρόβλημα 4. Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε τρία σημεία του μοναδιαίου δίσκου βάσει της κατανομής με ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διακύμανση του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία (σελ. 5281, Οκτώβριος 1990).

Πρόβλημα 5. Η διαφήμιση ενός εμπόρου οικοδομικών υλικών για πλακάκια-καθρέφτες με έκανε να σκεφτώ πόσο δύσκολο είναι να δούμε την πλάτη μας. Αν έφτιαχνα την επένδυση των τοίχων στο μπάνιο μου με αυτά τα πλακάκια-καθρέφτες, θα μπορούσα να δω την πλάτη μου απευθείας (όχι πλαγίως); Σε ένα ορθογώνιο δωμάτιο, αυτό θα ήταν δυνατόν αν στεκόμουν σε οποιοδήποτε σημείο του ρόμβου που σχηματίζουν τα μέσα των πλευρών, ή και σε οποιοδήποτε σημείο που δεν ανήκει στις διαγωνίους, και κοιτούσα προς τη διεύθυνση μιας από τις διαγωνίους. Τι γίνεται όμως αν το δωμάτιο είναι τριγωνικό; (Σελ. 4128, Ιούνιος 1985.)



Όπως και ο Paul Erdös (με τον οποίο συνεργάστηκε πολλές φορές), ο Basil Rennie διεύρυνε σταθερά τα όρια του μαθηματικού μας σύμπαντος. Είχε το αλάνθαστο ταλέντο να θέτει προβλήματα που συνάρπαζαν τους αναγνώστες και τους φίλους του. Θα μας λείψει και αυτός και το *JCMN*. Η αλληλογραφία μας αποτέλεσε το έναυσμα για πολλές έρευνές μου

Η συνέχεια στη σελ. 57 ⇨

Δημιουργία χρωμάτων

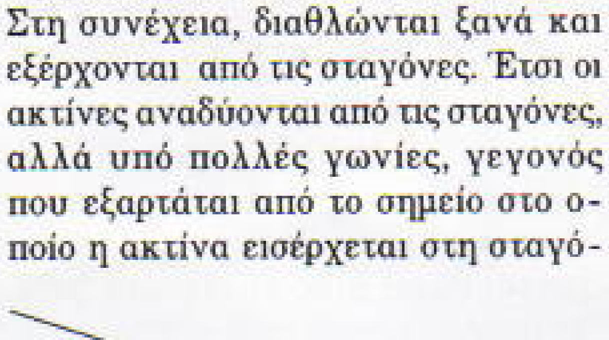
«Τώρα βλέπω το νόημα της συνουσίας των χρωμάτων.»
—Γιώργος Βαφόπουλος

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΑΓΑΠΑΜΕ ΤΑ ΧΡΩΜΑΤΑ —ΤΑ ΧΡΩματα της άνοιξης και του καλοκαιριού, τα χρώματα των φτερών της πεταλούδας και του ουράνιου τόξου, τα χρώματα των φυσαλίδων του σαπουνιού και αυτά ενός CD. Πόσο ίδια είναι αυτά τα χρώματα και πόσο διαφορετικά; Πρέπει άραγε να αναζητούμε την ίδια αιτία πίσω από φαινόμενα που δείχνουν ίδια;

Ο Ισαάκ Νεύτων, στη μελέτη του για τα χρώματα, έφερε στο φως μερικές πολύ όμορφες ανακαλύψεις· τις παρουσίασε, μαζί με μια λεπτομερή σειρά πειραμάτων, στο βιβλίο του *Opticks*, το οποίο εκδόθηκε το 1704. Σε ένα από αυτά τα πειράματα, άφησε το ηλιακό φως που έμπαινε από το παράθυρό του να περάσει μέσα από ένα γυάλινο πρίσμα, με αποτέλεσμα να εμφανιστούν τα χρώματα του φάσματος: κόκκινο, πορτοκαλί, κίτρινο, πράσινο, γαλάζιο, λουλακί, ιώδες. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός δεύτερου πρίσματος, επανένωσε αυτά τα χρώματα και είδε —κάτι που δεν είχε κάνει άλλος πριν απ' αυτόν— ότι επανεμφανιζόταν λευκό φως. Έτσι συμπέρανε ότι το λευκό φως είναι ο συνδυασμός όλων των παραπάνω χρωμάτων. Εκτός από το πρίσμα, βέβαια, τα χρώματα του φάσματος μπορούν να παρατηρηθούν και μέσω των φραγμάτων περίθλασης —αλλά και του ουράνιου τόξου.

Το ουράνιο τόξο είναι αδιαμφισβήτητα το πιο όμορφο οπτικό φαινόμενο της φύσης. Ύστερα από μια βροχή, μπορεί να δούμε τα χρώματα της ίριδας να απλώνονται από τη μια άκρη του ορίζοντα στην άλλη. Η δημιουργία του ουράνιου τόξου περιλαμβάνει τη φυσική της ανάκλασης και της διάθλασης, καθώς και μια γεωμετρία η οποία αναλύθηκε πρώτη φορά από τον Καρτέσιο. Οι ηλιακές ακτίνες διαθλώνται καθώς εισέρχονται στις σταγόνες της βροχής (Σχήμα 1). Η διάθλαση έχει ως αποτέλεσμα τα διάφορα χρώματα του λευκού φωτός να κάμπτονται κατά διαφορετικές γωνίες, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται ένα φάσμα. Ακολούθως οι ακτίνες ανακλώνται στην πίσω πλευρά των σταγόνων, και εν μέρει επιστρέφουν προς τη γενική κατεύθυνση του Ήλιου. Στη συνέχεια, διαθλώνται ξανά και εξέρχονται από τις σταγόνες. Έτσι οι ακτίνες αναδύονται από τις σταγόνες, αλλά υπό πολλές γωνίες, γεγονός που εξαρτάται από το σημείο στο οποίο η ακτίνα εισέρχεται στη σταγόνα. Ωστόσο, κάθε χρώμα τείνει να αναδυθεί υπό μια συγκεκριμένη γωνία. Έτσι, αν έχετε την πλάτη σας στραμμένη στον Ήλιο, η ειδική γωνία την οποία σχηματίζει το αναδυόμενο κόκκινο φως με τη διεύθυνση που ορίζει ο Ήλιος με το κεφάλι σας είναι 42°. Τούτο σημαίνει ότι, αν στρέψετε τα μάτια σας προς τα πάνω, σε γωνία 42° από τη διεύθυνση που ορίζει το κεφάλι σας με τη σκιά του, θα δείτε το κόκκινο χρώμα του ουράνιου τόξου.



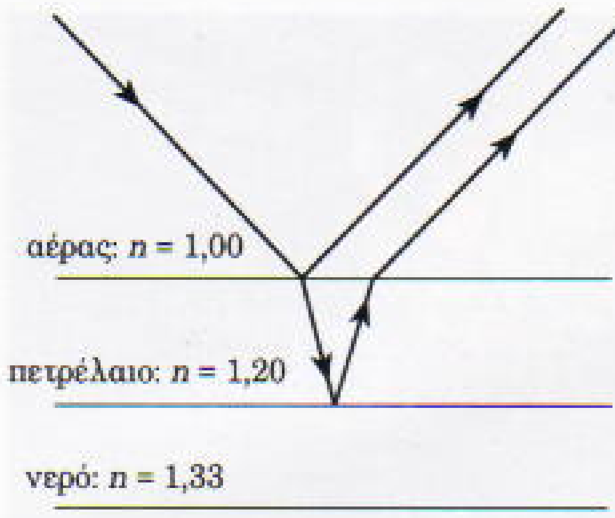
Σχήμα 1

Το ίδιο, βέβαια, συμβαίνει σε γωνία 42° προς τα αριστερά ή τα δεξιά της παραπάνω διεύθυνσης, ή, ακριβέστερα, σε γωνίες 42° γύρω της. Αυτό ακριβώς εξηγεί γιατί βλέπετε ένα κόκκινο τόξο κατά μήκος του ουρανού —ένα τόξο στις 42°. Η ειδική γωνία για το πορτοκαλί φως είναι λίγο μικρότερη από 42°· γι' αυτό, το τόξο του πορτοκαλί χρώματος βρίσκεται αμέσως πιο κάτω από το κόκκινο. Το αντίστοιχο ακριβώς ισχύει και για τα υπόλοιπα χρώματα.

Τα χρώματα που συναντούμε στις φυσαλίδες από σαπούνι και στις κηλίδες πετρελαίου δεν είναι τα ίδια με αυτά του ουράνιου τόξου. Εάν είχατε την ευκαιρία να παρατηρήσετε τα χρώματα σε σαπουνόφουσκες ή σε υπολείμματα πετρελαίου ύστερα από μια βροχή, θα διακρίνατε θαμπά τα κόκκινα και τα μπλε —καμία σχέση με την καθαρή εναλλαγή χρωμάτων που παρατηρούμε στο ουράνιο τόξο. Ο

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


ROYAL
SOCIETY
OIL
TOMAS BUNK



Σχήμα 2

λόγος για τον οποίο δημιουργούνται αυτά τα χρώματα είναι αρκετά διαφορετικός: οφείλονται στο φαινόμενο της συμβολής που λαμβάνει χώρα σε λεπτά διαφανή στρώματα ή υμένια. Συγκεκριμένα, το φως το οποίο ανακλάται στην πάνω επιφάνεια του στρώματος συμβάλλει με αυτό που ανακλάται στην κάτω επιφάνεια, με αποτέλεσμα κάποια χρώματα να ενισχύονται και κάποια άλλα να εξασθενούν.

Ας μελετήσουμε το συγκεκριμένο φαινόμενο λεπτομερέστερα (Σχήμα 2). Φανταστείτε το λεπτό στρώμα πετρελαίου που επιπλέει σε νερό. Εάν φωτίσουμε το στρώμα πετρελαίου μόνο με κόκκινο φως, τότε ένα μέρος του θα ανακλαστεί στην πάνω επιφάνεια, ενώ το υπόλοιπο θα διαθλαστεί εισερχόμενο στο εσωτερικό του στρώματος. Ένα μέρος, πάλι, του διαθλώμενου φωτός, καθώς θα προσπέσει στην κάτω επιφάνεια του στρώματος, θα ανακλαστεί με τη σειρά του και θα συνεχίσει να διαδίδεται στο εσωτερικό του στρώματος πετρελαίου. Το μεγαλύτερο μέρος του συγκεκριμένου φωτός θα εξέλθει από το στρώμα, και επομένως θα συμβάλει με το μέρος του φωτός που είχε εξαρχής ανακλαστεί.

Εάν και οι δύο αυτές φωτεινές δέσμες είχαν διανύσει ίσες αποστάσεις, εάν οι οπτικοί δρόμοι τους, όπως λέμε, ήταν ίσοι, θα συνέβαλαν μεταξύ τους ενισχυτικά, οπότε το στρώμα πετρελαίου θα αντανακλούσε έντονα κόκκινο φως. Αλλά προφανώς εκείνη η δέσμη η οποία εισχώρησε στο στρώμα διήνυσε μεγαλύτερη απόσταση. Έτσι, αν η πρόσθετη απόσταση —η διαφορά των οπτικών δρόμων— είναι ίση με ένα μήκος κύματος του κόκκινου φωτός, οι δύο δέσμες θα συμβάλουν ενισχυτικά· αν, όμως, είναι ίση με μισό ή ενάμισι μήκος κύματος, η συμβολή θα έχει αποσβεστικό χαρακτήρα. Λέγοντας αποσβεστική συμβολή εννοούμε ότι το στρώμα πετρελαίου ουσιαστικά δεν θα αντανακλά κόκκινο φως.

Ας φανταστούμε τώρα την πιο πολύπλοκη περίπτωση όπου στο λεπτό διαφανές στρώμα προσπίπτει λευκό φως. Εάν το πάχος του στρώματος είναι τέτοιο ώστε το κόκκινο φως να υφίσταται αποσβεστική συμβολή, εμείς θα βλέπουμε όλο το έγχρωμο φάσμα πλήν του κόκκινου· αυτό είναι ένα μουντό μοβ. Εάν πάλι το πάχος του στρώματος είναι τέτοιο ώστε το ιώδες φως να υφίσταται αποσβεστική συμβολή, τότε θα βλέπουμε όλο κι όλο ένα θαμπό κόκκινο χρώμα.

Στην πραγματικότητα, βέβαια, υπάρχει επιπλέον ένα λεπτό πρόβλημα το οποίο πρέπει να λάβουμε υπόψη. Όπως ίσως πολλοί από εσάς γνωρίζουν, ένα κύμα το οποίο ανακλάται σε μια επιφάνεια μπορεί να υποστεί μεταβολή της φάσης του —άλμα φάσεως, όπως λέγεται— κατά 180°· ένα «όρος» να ανακλαστεί ως «κοιλάδα». Τούτο συμβαίνει σε εκείνες μόνο τις περιπτώσεις όπου το κύμα, προερχόμενο από υλικό μικρότερου δείκτη διάθλασης, ανακλάται στην επιφάνεια υλικού *μεγαλύτερου* δείκτη διάθλασης. (Ανάλογο φαινόμενο εμφανίζεται και κατά την ανάκλαση ηχητικών κυμάτων σε σταθερή επιφάνεια, οπότε, εφόσον σχηματίζεται στάσιμο κύμα, δημιουργείται στην ανακλώσα επιφάνεια δεσμός.) Μεταβολή φάσης κατά 180° ισοδυναμεί μαθηματικά με μετατόπιση κατά μισό μήκος κύματος.

Επομένως, για να προσδιορίσουμε το πάχος που πρέπει να έχει το στρώμα ώστε να προκύπτει αποσβεστική συμβολή, πρέπει να υπολογίσουμε αφ' ενός τη διαφορά των οπτικών δρόμων λόγω του πάχους του στρώματος και αφ' ετέρου τις μετατοπίσεις φάσεως οι οποίες μπορεί να συμβαίνουν στις διαχωριστικές επιφάνειες. Δεδομένου ότι ο δείκτης διάθλασης του πετρελαίου είναι 1,20 και αυτός του νερού 1,33, συμβαίνει μετατόπιση φάσης στη δέσμη που ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-πετρελαίου *και* μετατόπιση φάσης στη δέσμη που ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια πετρελαίου-νερού.

Το φαινόμενο της συμβολής σε λεπτά στρώματα βρίσκει εφαρμογές στη βιομηχανία. Ένα από τα προβλήματα στην κατασκευή σύνθετων φακών υψηλής ποιότητας για οπτικά όργανα είναι ότι οι εσωτερικές ανακλάσεις μπορεί να προκαλέσουν απώλεια φωτός και μείωση της φωτεινότητας. Λεπτά επιστρώματα φθοριούχου μαγνησίου (ή κρυολίθου) επί των φακών μπορούν να ελαχιστοποιήσουν τις ανεπιθύμητες ανακλάσεις. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι τοποθετούμε επίστρωμα φθοριούχου μαγνήσιου, με δείκτη διάθλασης 1,36 και πάχος 100 nm, πάνω σε φακό με δείκτη διάθλασης 1,60. Ποιο μήκος κύματος του λευκού φωτός δεν θα ανακλάται από το επίστρωμα; Θα υποθέσουμε ότι το φως προσπίπτει κάθετα στις διαχωριστικές επιφάνειες.

Το φως πρέπει να διασχίσει το λεπτό επίστρωμα και να επιστρέψει, δηλαδή να διανύσει συνολική απόσταση 200 nm. Δεδομένου ότι το φθοριούχο μαγνήσιο έχει μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης από τον αέρα (1,36 > 1,00), κατά την ανάκλαση του φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-επιστρώματος λαμβάνει χώρα άλμα φάσεως το οποίο αντιστοιχεί σε μισό μήκος κύματος. Το φως το οποίο ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια επιστρώματος-γυαλιού παρουσιάζει επίσης άλμα φάσεως αντίστοιχο μισού μήκους κύματος (δεδομένου ότι 1,60 > 1,36).

Έχουμε, λοιπόν, δύο οπτικές διαδρομές. Κατά την πρώτη, το φως ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-επιστρώματος και υφίσταται μετατόπιση φάσης αντίστοιχη μισού μήκους κύματος. Κατά τη δεύτερη, το φως εισχωρεί στο επίστρωμα, διανύει απόσταση 100 nm, ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια επιστρώματος-γυαλιού και υφίσταται μετατόπιση φάσης αντίστοιχη μισού μήκους κύματος· στη συνέχεια, διανύει πρόσθετη απόσταση 100 nm προς την πρώτη διαχωριστική επιφάνεια. Αλλά τα 100 nm μέσα στο επίστρωμα δεν είναι ίδια με τα 100 nm μέσα στον αέρα· το μήκος κύματος του φωτός είναι μικρότερο μέσα στο επίστρωμα κατά παράγοντα ίσο με το δείκτη διάθλασής του. Το φως, λοιπόν, που ακολουθεί τις δύο παραπάνω διαδρομές θα συμβάλει αποσβεστικά εάν η διαφορά των οπτικών δρόμων είναι πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματός του μέσα στο επίστρωμα. Για τη λεπτότερη επίστρωση φθοριούχου μαγνησίου, η εν λόγω διαφορά πρέπει να είναι ίση με μισό μήκος κύματος του φωτός μέσα στο επίστρωμα:

$$\lambda_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho.}/2 = 200 \text{ nm},$$

ή

$$\lambda_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho.} = 400 \text{ nm}.$$

Επομένως, το μήκος κύματος του φωτός στον αέρα θα είναι

$$\lambda = \frac{\lambda_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho.}}{n} = 544 \text{ nm}.$$

Και τώρα, τα προβλήματα αυτού του τεύχους. Το ένα αποτελεί διασκευή ενός προβλήματος που για πρώτη φορά παρουσιάστηκε στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής το 1977 στην Τσεχοσλοβακία· το άλλο υπάρχει στο βιβλίο *Fundamentals of Physics* των Halliday, Resnick και Walker.

Α. Λευκό φως προσπίπτει σε υμένιο σαπουνοδιαλύματος, υπό γωνία 30° ως προς την κάθετο στην επιφάνεια του υμενίου. Στο ανακλώμενο φως κυριαρχεί ένα φωτεινό πράσινο χρώμα με μήκος κύματος 500 nm. Ο δείκτης διάθλασης του διαλύματος είναι 1,33.

(i) Ποιο είναι το ελάχιστο πάχος του υμενίου;

(ii) Τι χρώμα θα παρατηρούσαμε αν το λευκό φως προσέπιπτε κάθετα στην επιφάνεια του υμενίου;

Β. Λεπτό στρώμα ακετόνης ($n = 1{,}25$) επικαλύπτει παχύ γυάλινο πλακίδιο ($n = 1{,}5$). Λευκό φως προσπίπτει κάθετα στο στρώμα ακετόνης. Εξαιτίας της ανάκλασης έχουμε πλήρως αποσβεστική συμβολή στα 600 nm και πλήρως ενισχυτική συμβολή στα 700 nm. Υπολογίστε το ελάχιστο πάχος του στρώματος της ακετόνης.

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum*.

Η φύση του φωτός

Α. Δεδομένου ότι η ενέργεια και η ορμή ενός φωτονίου δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $E = h\nu$ και $p = h\nu/c$, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας και της ορμής στη μία διάσταση:

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}m\upsilon^2, \qquad (1)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} + m\upsilon, \qquad (2)$$

όπου ν και ν' είναι οι συχνότητες του φωτονίου πριν και μετά την κρούση, m η μάζα του ηλεκτρονίου και υ η ταχύτητά του μετά τη σύγκρουση.

Β. Υψώνοντας τις εξισώσεις (1) και (2) στο τετράγωνο, παίρνουμε

$$\nu^2 - 2\nu\nu' + \nu'^2 = \frac{m^2\upsilon^4}{4h^2}, \qquad (3)$$

$$\nu^2 + 2\nu\nu' + \nu'^2 = \frac{m^2\upsilon^2c^2}{h^2}. \qquad (4)$$

Αφαιρώντας την (3) από την (4), έχουμε

$$4\nu\nu' = \frac{m^2\upsilon^2c^2}{h^2}\left(1 - \frac{\upsilon^2}{4c^2}\right).$$

Αν αμελήσουμε τον όρο στην παρένθεση, προκύπτει το ζητούμενο:

$$h^2\nu\nu' = \left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)\left(\frac{1}{2}mc^2\right). \qquad (5)$$

Γ. Αντικαθιστώντας τον όρο της πρώτης παρένθεσης στην (5) από την εξίσωση (1), λαμβάνουμε:

$$\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'} = h\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right)\left(\frac{1}{2}mc^2\right),$$

ή

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc}. \qquad (6)$$

Δ. Η ενέργεια των ακτίνων Χ είναι

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 2{,}8 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$$

Επειδή η συγκεκριμένη ενέργεια (17,5 keV) είναι πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια σύνδεσης των ηλεκτρονίων (~10 eV), όντως μπορούμε να χειριστούμε τα ηλεκτρόνια μέσα στην ύλη σαν να ήταν ελεύθερα.

Η κινητική ενέργεια ανάκρουσης K των ηλεκτρονίων ισούται με

$$K = h(\nu - \nu') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right).$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (6), και θέτωντας $\lambda_C = h/mc$, παίρνουμε

$$K = h\nu\left(\frac{2\lambda_C}{\lambda + 2\lambda_C}\right) = 1{,}12 \text{ keV}.$$

Επειδή αυτή η ενέργεια είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου (0,511 MeV), μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ηλεκτρόνιο μη σχετικιστικά.

Ε. Αρχίζουμε με τη διατήρηση των δύο συνιστωσών της ορμής:

$$p = p'\sigma\upsilon\nu\theta + p_e\eta\mu\varphi, \qquad (7)$$

$$0 = p'\eta\mu\theta - p_e\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad (8)$$

όπου $p_e = m\upsilon$ είναι η ορμή του ηλεκτρονίου, και $p = h\nu/c = h/\lambda$ και $p' = h/\lambda'$ οι ορμές των φωτονίων. Υψώνουμε τις εξισώσεις (7) και (8) στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$p_e^2 = p^2 - 2pp'\sigma\upsilon\nu\theta + p'^2. \qquad (9)$$

Η εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας είναι

$$K = pc - p'c. \qquad (10)$$

Διαιρούμε την (10) διά c, την υψώνουμε στο τετράγωνο και την αφαιρούμε από την (9), οπότε παίρνουμε

$$p_e^2 - \frac{K^2}{c^2} = 2pp'(1 - \sigma\upsilon\nu\theta). \qquad (11)$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε το αριστερό μέλος τής (11):

$$m^2\upsilon^2 - \frac{m^2\upsilon^4}{4c^2} = m^2\upsilon^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{4c^2}\right)$$

$$\cong m^2\upsilon^2 = 2mK = 2mc(p - p')$$

—έχουμε ήδη απαλείψει τον όρο υ^2/c^2. Έτσι, η (11) παίρνει τη μορφή

$$mc(p - p') = pp'(1 - \sigma\upsilon\nu\theta).$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με pp' και εκφράζοντας τις ορμές συναρτήσει των μηκών κύματος, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta).$$

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ

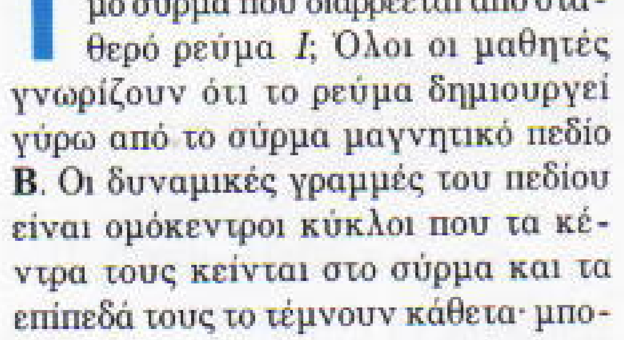
Μαγνήτες, φορτία και πλανήτες

«Η φυσική άρχισε να αντιλαμβάνεται ότι το να στοχαζόμαστε για τη φύση δεν σημαίνει απλώς να την καταγράφουμε, αλλά να της προσδίδουμε εκείνη τη μορφή ενότητας που θα της έλειπε αν δεν αποτελούσε αντικείμενο στοχασμού.»
—Pierre Teilhard de Chardin, Το ανθρώπινο φαινόμενο

Albert Stasenko

Τι θα μπορούσε να είναι στοιχειωδέστερο από ένα ευθύγραμμο σύρμα που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I; Όλοι οι μαθητές γνωρίζουν ότι το ρεύμα δημιουργεί γύρω από το σύρμα μαγνητικό πεδίο **B**. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι που τα κέντρα τους κείνται στο σύρμα και τα επίπεδά τους το τέμνουν κάθετα· μπορούμε να τις κάνουμε ορατές με τη βοήθεια των «κλασικών» ρινισμάτων σιδήρου, τα οποία απλώνουμε σε φύλλο χαρτιού τοποθετημένου κάθετα στο σύρμα. Απομένει άραγε τίποτε άλλο να πούμε;

Λοιπόν, φανταστείτε ότι τοποθετήσαμε μέσα στο εν λόγω μαγνητικό πεδίο ένα τετράγωνο αγώγιμο πλαίσιο εμβαδού $a \times a$, το οποίο διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_π (Σχήμα 1). Έστω ότι οι δύο πλευρές του πλαισίου είναι παράλληλες προς το ευθύγραμμο σύρμα και ότι οι διαστάσεις του πλαισίου είναι πολύ μικρότερες από την απόστασή του r από το σύρμα —δηλαδή $a \ll r$. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε όλες τις πλευρές του πλαισίου, οπότε κάθε πλευρά του δέχεται μαγνητική δύναμη ανάλογη με το μαγνητικό πεδίο B (που δημιουργείται από το ρεύμα I), με το μήκος της πλευράς a και με το ρεύμα I_π. Ας εξετάσουμε τις δυνάμεις αυτές.



Σχήμα 1

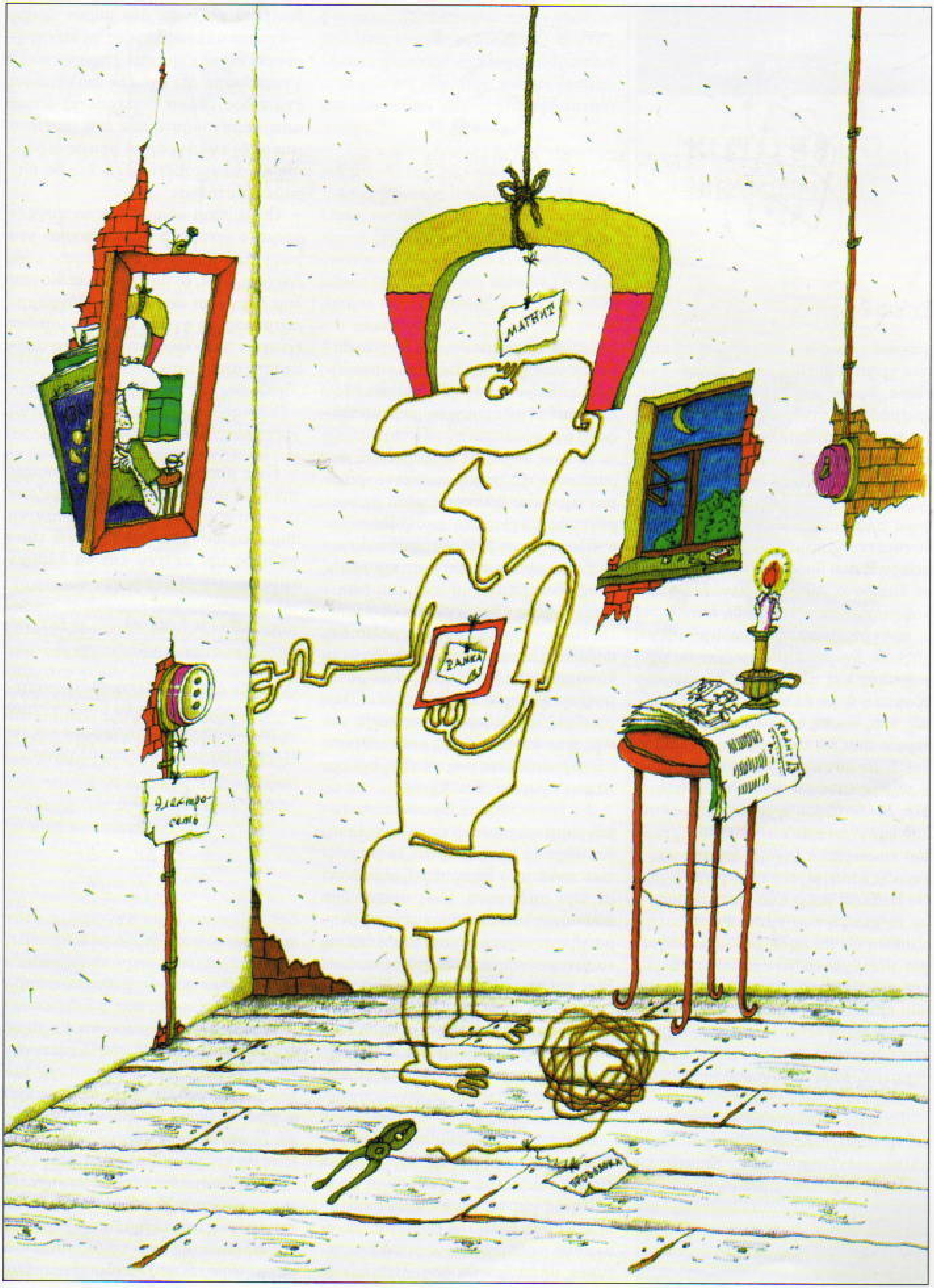
Στην πλευρά AK που βρίσκεται σε απόσταση r από το σύρμα ασκείται δύναμη κάθετη στο σύρμα, με μέτρο $F(r) = I_\pi a B(r)$. Υποθέτω ότι γνωρίζετε τον κανόνα «των τριών δακτύλων της δεξιάς χειρός» και ότι έχετε ήδη προσδιορίσει νοερά τις κατευθύνσεις των διανυσμάτων **B**, $\mathbf{I}_\pi$ και **F**. Εφόσον το ρεύμα που διαρρέει την πλευρά CD έχει αντίθετη κατεύθυνση από το ρεύμα στην AK, το μαγνητικό πεδίο θα ασκεί στη CD δύναμη με αντίθετη κατεύθυνση και μέτρο $F(r + a) = I_\pi aB(r + a)$. Η τιμή της συγκεκριμένης δύναμης διαφέρει από την $F(r)$ επειδή το μέτρο του μαγνητικού πεδίου εξαρτάται από την απόσταση από τον ρευματοφόρο αγωγό (και υποψιαζόμαστε έντονα ότι το B μειώνεται καθώς η r αυξάνει). Όσον αφορά τις άλλες δυνάμεις που ασκούνται στις πλευρές AD και KC, προφανώς αλληλοαναιρούνται (δεχόμαστε βέβαια ότι το πλαίσιο δεν παραμορφώνεται από τη δράση όλων αυτών των δυνάμεων). Έτσι, η συνισταμένη δύναμη πάνω στο πλαίσιο ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των δύο δυνάμεων που ασκούνται στις πλευρές AK και CD:

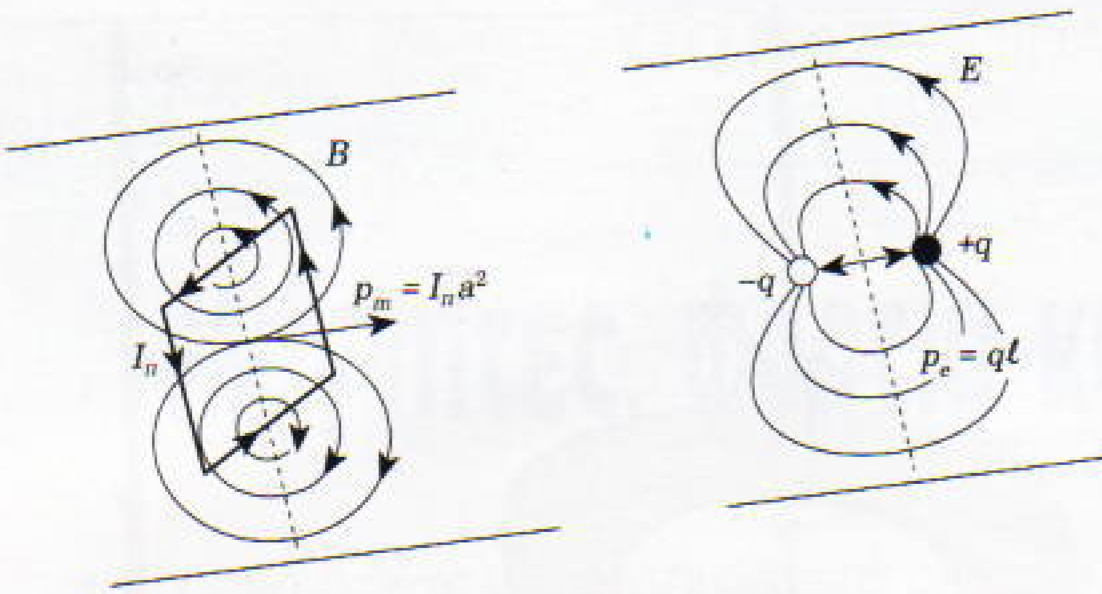
$$\begin{aligned} F &= F(r+a) - F(r) \\ &= I_\pi a[B(r+a) - B(r)] \qquad (1) \\ &= I_\pi a^2 \frac{\Delta B}{a}, \end{aligned}$$

όπου με ΔB συμβολίζουμε τη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου B σε απόσταση $a \ll r$.

Τι πετύχαμε; Ένα μικρό πλαίσιο, που διαρρέται από ρεύμα I_π και κείται στο ίδιο επίπεδο με τον συρμάτινο αγωγό ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I, έλκεται προς το σύρμα με δύναμη ανάλογη προς την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο, το εμβαδόν του πλαισίου και το ρυθμό μεταβολής του μαγνητικού πεδίου με την απόσταση από το ρευματοφόρο σύρμα ($\Delta B/a$). Για να πούμε την αλήθεια, οι «ώριμοι» φυσικοί δεν χρησι-

Εικονογράφηση: V. Ivanyuk


МАГНИТ
электро-
сеть
РАМКА



Σχήμα 2

μοποιούν τόσο πολλά λόγια. Αντ' αυτών χρησιμοποιούν μαθηματικά —τα οποία, όμως, αρχίζουν με μερικούς ορισμούς. Το γινόμενο $I_n a^2$ ονομάζεται μαγνητική διπολική ροπή p_m του ρευματοφόρου πλαισίου, επειδή οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές που παράγονται από ένα μικρό ρευματοφόρο πλαίσιο μοιάζουν πολύ με τις δυναμικές γραμμές ηλεκτροστατικού πεδίου **E** που παράγεται από ηλεκτρικό δίπολο p_e (μόνο σε μεγάλες αποστάσεις, φυσικά —δηλαδή όταν $r >> a$, πράγμα που το υποθέσαμε εξαρχής). Το Σχήμα 2 απεικονίζει τις μαγνητικές και ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, ή, με άλλα λόγια, τις γραμμές στις οποίες εφάπτονται, σε κάθε σημείο τους, τα διανυσματικά πεδία **B** και **E** αντίστοιχα. Ο λόγος $p_m \Delta B/a$, ο οποίος ισούται με την ποσότητα $\Delta(p_m B)/\Delta r$ (αφού η p_m δεν εξαρτάται από την r), ονομάζεται *βαθμίδα* (grad) του εσωτερικού γινομένου της μαγνητικής ροπής $\mathbf{p}_m$ επί το μαγνητικό πεδίο **B**. Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε τη σκέψη που εμπεριέχεται στην εξίσωση (1) με πολύ λιγότερα λόγια, και ταυτόχρονα να εικάσουμε μερικές γενικεύσεις του παραδείγματος που επιλέξαμε να παρουσιάσουμε (η στιγμή αυτή είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τους φυσικούς, και τα μαθηματικά τούς προσφέρουν εξαιρετική βοήθεια).

Το θέμα είναι ότι το πλαίσιο μπορεί να πάρει οποιοδήποτε σχήμα —κυκλικό, τριγωνικό, κ.ο.κ. Επίσης, τη θέση του πλαισίου μπορεί να την πάρει ένα πολύ διαφορετικό αντικείμενο —ας πούμε ένας μικρός μόνιμος μαγνήτης (η μαγνητική βελόνα μιας λιλιπούτειας πυξίδας). Επίσης, το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο **B** είναι δυνατόν να δημιουργείται από οποιαδήποτε αυθαίρετη πηγή και όχι οπωσδήποτε από έναν ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό.

Σε όλες αυτές τις διαφορετικές περιπτώσεις, η δύναμη που επενεργεί σε μαγνήτη που βρίσκεται μέσα σε ετερογενές μαγνητικό πεδίο θα είναι ανάλογη με τη βαθμίδα του εσωτερικού γινομένου της μαγνητικής ροπής ενός «δοκιμαστικού αντικειμένου» (μιας σημειακής μαγνητικής ροπής) επί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Για παράδειγμα, πρόκειται ακριβώς για τη δύναμη που έλκει έναν μικρό μόνιμο μαγνήτη προς το εσωτερικό σωληνοειδούς συνδεδεμένου με πηγή τάσης, ή το οποίο, επίσης, εναντιώνεται στις προσπάθειές μας να εξαγάγουμε το μαγνήτη από ένα πηνίο.

Ας επανέλθουμε λοιπόν στον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό. Είναι διαισθητικά προφανές ότι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί, εξασθενεί με την απόσταση. Πώς όμως; Την απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα την παρέχει ο νόμος του Ampère: το γινόμενο του μαγνητικού πεδίου $B(r)$ επί το μήκος $2\pi r$ κύκλου ο οποίος είναι κάθετος στον αγωγό και έχει το κέντρο του πάνω σ' αυτόν είναι ανάλογο του ρεύματος I που δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο. Δηλαδή,

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I.$$

Ο παράγων μ_0 (η μαγνητική διαπερατότητα του κενού χώρου) είναι απαραίτητος για να έχουν ίδιες διαστάσεις τα δύο μέλη της εξίσωσης. Είναι μια από τις θεμελιώδεις φυσικές σταθερές, αλλά δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα μαζί της στο παρόν άρθρο —έχουμε άλλους λαγούς να κυνηγήσουμε. Είναι σημαντικότερο να αναγνωρίσουμε ότι έχουμε διατυπώσει ένα είδος νόμου διατήρησης: όποτε απομακρυνόμαστε από ένα (άπειρου μήκους) ευθύγραμμο ρευματοφόρο σύρμα, το γινόμενο $B(r) \cdot 2\pi r$ θα παραμένει σταθερό.

Οι φυσικοί ονομάζουν το συγκεκριμένο γινόμενο «κυκλοφορία» του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος ενός βρόχου. Έτσι, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από έναν ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό άπειρου μήκους είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης από αυτόν:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του $\Delta B/\Delta r$; Όσοι γνωρίζουν τι είναι η παράγωγος, μπορούν να παραγωγίσουν τον παραπάνω τύπο ως προς την ακτίνα και να λάβουν αμέσως

$$\frac{\Delta B}{\Delta r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\Delta(1/r)}{\Delta r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}.$$

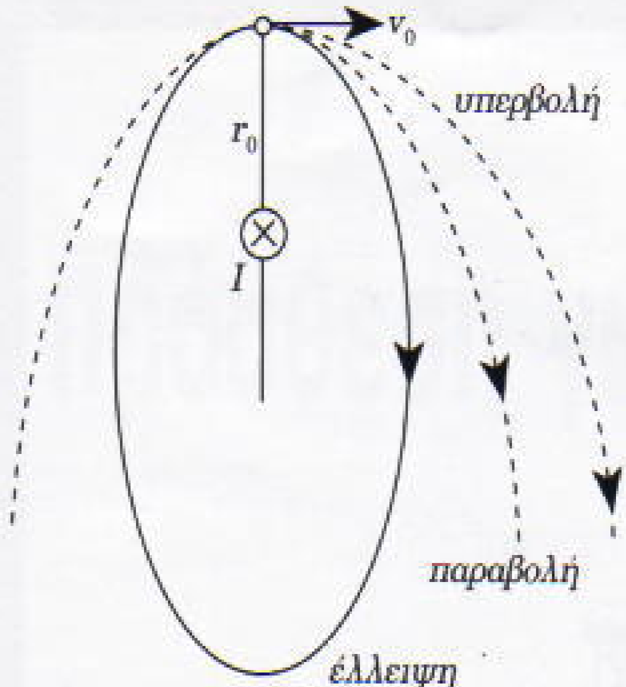
Όσοι δεν έχουν μελετήσει απειροστικό λογισμό, μπορούν να υπολογίσουν τη μεταβολή του αντιστρόφου της ακτίνας χρησιμοποιώντας άλγεβρα:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}$$
$$= \frac{r - r - \Delta r}{(r+\Delta r)r} = -\frac{\Delta r}{r^2}.$$

Στο τελευταίο βήμα αγνοήσαμε στον παρονομαστή του δεξιού μέλους το Δr, επειδή είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με το ίδιο το r —θυμηθείτε ότι συμφωνήσαμε εξαρχής πως $a = \Delta r << r$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το μικρό ρευματοφόρο πλαίσιό μας (ή ο μαγνήτης) έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα v_0 κάθετη στο ευθύγραμμο σύρμα (το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I) και σε απόσταση r_0 από αυτό. Πώς θα κινηθεί το πλαίσιο;

Γνωρίζουμε ότι στο πλαίσιο ασκείται μαγνητική δύναμη που είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από το σύρμα. Πού συναντάμε τέτοιες δυνάμεις στη φυ-



Σχήμα 3

σική; Χωρίς υπερβολή, παντού. Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, δύο μάζες έλκονται με δύναμη αντιστρόφως ανάλογη της μεταξύ τους απόστασης:

$$F_N = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

(Φυσικά, ο νόμος του Νεύτωνα περιγράφει τη δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο σωματιδίων ανεξάρτητα από τον αμοιβαίο προσανατολισμό τους στο χώρο. Στην περίπτωσή μας, η μαγνητική δύναμη κείται πάντοτε στο επίπεδο του ρευματοφόρου πλαισίου.) Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb, δύο ετερώνυμα φορτία έλκονται επίσης με δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Επομένως, το πρόβλημά μας έχει ήδη λυθεί: ένα ρευματοφόρο πλαίσιο ή ένας μόνιμος μαγνήτης θα κινηθούν κοντά στον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό ακριβώς όπως κινούνται κοντά στον Ήλιο ουράνια σώματα —θα διαγράφει είτε ελλείψεις (όπως οι πλανήτες) είτε παραβολές και υπερβολές (όπως οι κομήτες), με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητά του v_0 είναι αρκούντως μεγάλη.

Έτσι, η διαδικασία που εξετάζουμε έχει αναχθεί σε διαδικασία εντελώς διαφορετικής φύσης, η οποία, ωστόσο, διέπεται από τις ίδιες μαθηματικές εξισώσεις (στην περίπτωσή μας η ανάλογη διαδικασία περιγράφεται από τους νόμους του Kepler). Η αναζήτηση φυσικών αναλογιών αποτελεί ενασχόληση ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και εξαιρετικά χρήσιμη από πρακτική άποψη!*

Τώρα είναι η στιγμή να αναφωνήσουμε: «Τι θαύμα που ο κόσμος είναι τόσο αρμονικός, τόσο ενοποιημένος!» Όπως συνήθως, όμως, έπειτα από το πρώτο ξέσπασμα χαράς και ενθουσιασμού που προκαλεί ένα ενδιαφέρον εύρημα, αρχίζουμε να αμφιβάλλουμε: μήπως παραβλέψαμε κάτι; Βεβαίως και παραβλέψαμε.

Πρώτον, περιστρέφεται άραγε το ρευματοφόρο πλαίσιο με τέτοιο τρόπο ώστε το επίπεδό του να παραμένει κάθετο στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές σε όλα τα σημεία της τροχιάς του; Πράγματι, το πλαίσιο δεν είναι σημείο —έχει τόσο μάζα όσο και διαστάσεις. Έτσι, κατά την εξέταση της περιστροφής του πλαισίου γύρω από τον άξονά του θα έπρεπε να συνυπολογίσουμε τα αδρανειακά χαρακτηριστικά του.

Δεύτερον, στη γενική περίπτωση η απόσταση μεταξύ του πλαισίου και του ευθύγραμμου σύρματος μεταβάλλεται —και το ίδιο συμβαίνει στη μαγνητική ροή διαμέσου του επιπέδου του πλαισίου. Αυτή η μεταβολή θα επαγάγει ηλεκτρεγερτική δύναμη στο πλαίσιο, η οποία θα μεταβάλει το ρεύμα που το διαρρέει. Το εναλλασσόμενο ρεύμα θα επαγάγει με τη σειρά του ηλεκτρεγερτική δύναμη, η οποία θα τείνει να εξουδετερώσει τις μεταβολές της μαγνητικής ροής διαμέσου του πλαισίου.

Τρίτον, η εν λόγω διαδικασία θα μεταβάλει επίσης το ρεύμα που διαρρέει το ευθύγραμμο σύρμα (φαινόμενο αμοιβαίας επαγωγής).

Τέταρτον...

Αλλά σ' αυτή την περίπτωση, ίσως είναι προτιμότερο να σταματήσουμε εδώ λέγοντας ότι η θεωρία μας είναι ορθή μόνο εφόσον όλα τα προαναφερθέντα φαινόμενα επηρεάζουν ελάχιστα τη διαδικασία και, κατά συνέπεια, μπορούμε να τα αγνοήσουμε. ◙

* Δείτε και το άρθρο «Η δύναμη της ομοιότητας», του S.R. Filonovich, στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1997.

Πρόσθεση γωνιών στις τρεις διαστάσεις

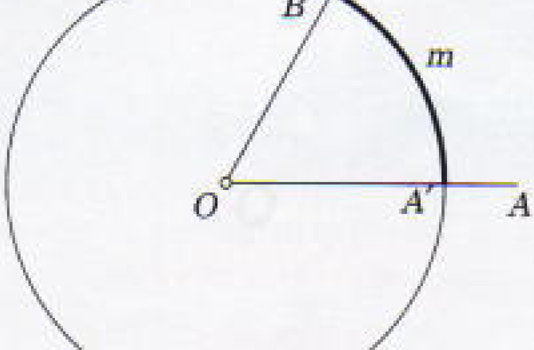
Μεταφορά ενός θεωρήματος για επίπεδα σχήματα στην επικράτεια των πολυέδρων

A. Shirshov και A. Nikitin

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ των γωνιών ενός επίπεδου πολυγώνου παίζει σημαντικό ρόλο στην ευκλείδεια γεωμετρία, και κατά συνέπεια προκύπτει αβίαστα το ζήτημα της εκδοχής του στο χώρο. Σε τούτο το άρθρο θα παρουσιάσουμε το ανάλογο θεώρημα και θα συζητήσουμε διάφορα θέματα που συνδέονται μαζί του.

Το μέτρο μιας *n*-εδρης γωνίας

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής μέθοδο μέτρησης επίπεδων και πολυεδρικών γωνιών. Έστω AOB μια γωνία του επιπέδου. Σχεδιάζουμε έναν κύκλο ακτίνας $r > 0$ με κέντρο το σημείο O. Θα ονομάσουμε *μέτρο της γωνίας* AOB το λόγο του τόξου $A'mB'$ που περιέχεται μέσα στη γωνία AOB προς το μήκος ολόκληρου του κύκλου (Σχήμα 1). Αν υιοθετήσουμε αυτή τη μέθοδο μέτρησης, το μέτρο μιας γωνίας, για παράδειγμα, 1 μοίρας είναι 1/360, ενώ μιας γωνίας π ακτινίων είναι 1/2. Τα πασίγνωστα θεωρήματα για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου διατυπώνονται ως εξής: *το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με* 1/2 *και το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού n-γώνου ισούται με* $\frac{n}{2} - 1$.



Σχήμα 1

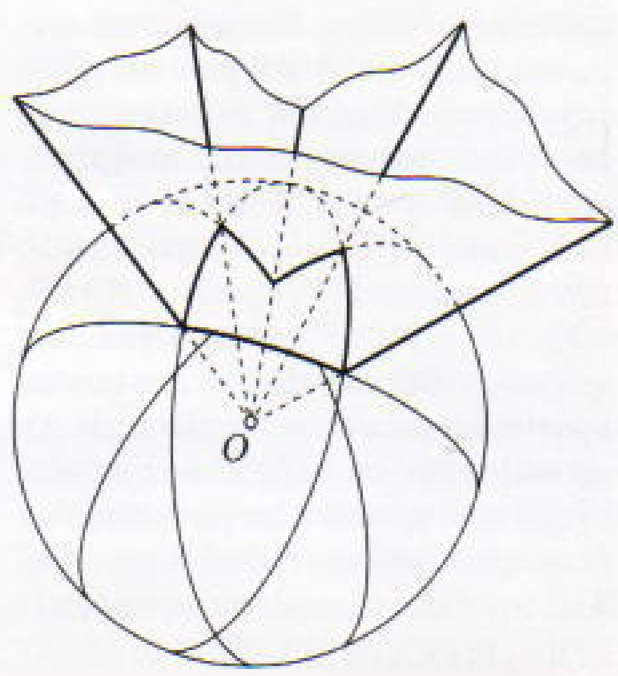
Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

Ας θεωρήσουμε τώρα μια τυχαία n-εδρη γωνία. Σχεδιάζουμε μια σφαίρα γύρω από την κορυφή της (στην περίπτωση της δίεδρης γωνίας σχεδιάζουμε μια σφαίρα γύρω από ένα τυχαίο σημείο της ακμής της) και ονομάζουμε *μέτρο της n-εδρης γωνίας* το λόγο του εμβαδού της σφαιρικής επιφάνειας που περιέχεται μέσα στη γωνία προς το εμβαδόν ολόκληρης της σφαίρας (Σχήμα 2).

Αν $n > 2$ και $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι τα σημεία τομής των ακμών της n-εδρης γωνίας και της σφαίρας, τότε θα συμβολίζουμε με $|A_1A_2 \ldots A_n|$ το μέτρο της n-εδρης γωνίας και με $|\hat{A}_1|, |\hat{A}_2|, \ldots, |\hat{A}_n|$ τα μέτρα των αντίστοιχων εσωτερικών δίεδρων γωνιών $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n$ της n-εδρης γωνίας.

Η κάθε έδρα της n-εδρης γωνίας τέμνει τη σφαίρα πάνω σε έναν μέγιστο κύκλο, και το σχήμα που ορίζουν οι τομές όλων των εδρών με τη σφαίρα ονομάζεται *σφαιρικό πολύγωνο* (Σχήμα 2).

Τα Σχήματα 3 και 4 παρουσιάζουν, αντίστοιχα, ένα σφαιρικό 2-γωνο και ένα σφαιρικό τρίγωνο.



Σχήμα 2

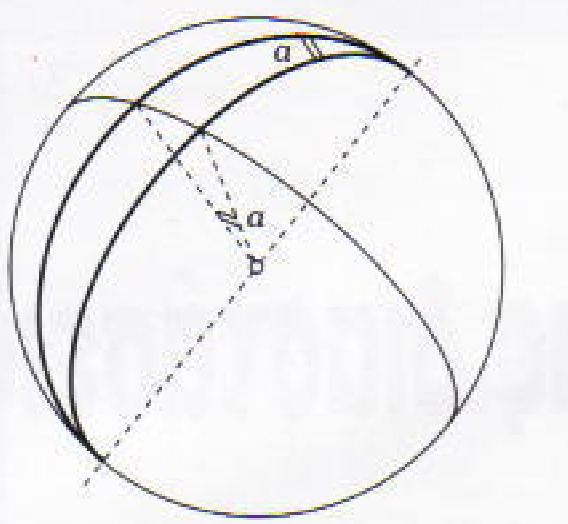
Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 3, το μέτρο μιας δίεδρης γωνίας ισούται με το μέτρο της αντίστοιχης γραμμικής γωνίας. Αν χρησιμοποιήσουμε τον νέο συμβολισμό για να διατυπώσουμε την πασίγνωστη εξίσωση που εκφράζει το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου συναρτήσει του κυκλικού μέτρου[1] των γωνιών του, προκύπτει η

$$2|ABC| = |\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - 1/2 \qquad (1)$$

όπου $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ είναι οι *εσωτερικές* δίεδρες γωνίες στις ακμές OA, OB και OC, αντίστοιχα, της τρίεδρης γωνίας.

Πράγματι, το εμβαδόν του σχήματος F_1, το οποίο αποτελείται από τα

1. Δείτε το άρθρο «Η καθιέρωση μιας επανάστασης» στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1997.

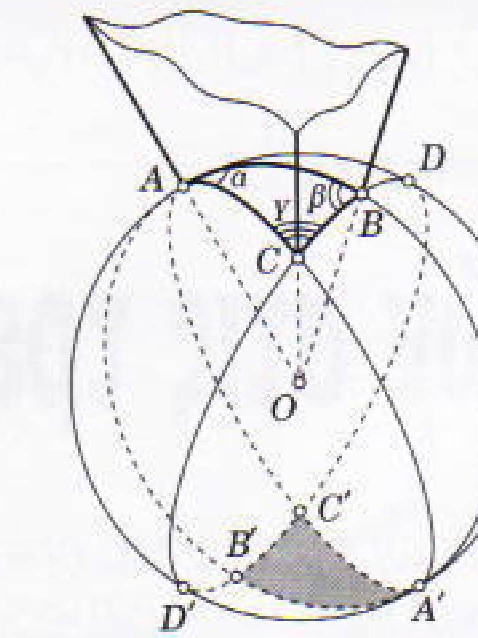


Σχήμα 3

δύο σφαιρικά τρίγωνα ADC και $A'D'C'$, ισούται με το εμβαδόν του 2-γώνου $\hat{C}$ (χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για ένα 2-γωνο και για την αντίστοιχη δίεδρη γωνία). Επίσης, το εμβαδόν του σχήματος F_2 το οποίο αποτελείται από τα δύο σφαιρικά τρίγωνα $AD'B$ και $A'DB$ ισούται με το εμβαδόν του 2-γωνου $\hat{B}$, ενώ το σχήμα F_3 που φράσσεται από τα ημικύκλια ABA' και $A'CA$ δεν είναι παρά το 2-γωνο $\hat{A}$. Το κοινό μέρος αυτών των σχημάτων $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_1$ είναι το σφαιρικό τρίγωνο ABC, το εμβαδόν του οποίου προσπαθούμε να υπολογίσουμε. Αν προσθέσουμε τα εμβαδά αυτών των σχημάτων, το αποτέλεσμα θα ισούται με το τριπλάσιο του εμβαδού του ABC. Από την άλλη πλευρά, αν αφαιρέσουμε από το εν λόγω άθροισμα το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ABC, προκύπτει το εμβαδόν του ορατού ημισφαιρίου (Σχήμα 4). Τελικά, καταλήγουμε στη σχέση $1/2 = |\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - 2|ABC|$ —δηλαδή, η ισότητα (1) είναι αληθής.

Από την (1) έπεται ότι το άθροισμα των μέτρων των εσωτερικών διέδρων γωνιών μιας τυχαίας τρίεδρης γωνίας είναι κατά $1/2$ μεγαλύτερο από το διπλάσιο του μέτρου της τρίεδρης.

Μπορούμε τώρα να βρούμε το μέτρο μιας *κυρτής* n-εδρης γωνίας. Γνωρίζουμε ότι κάθε κυρτό n-γωνο μπορεί να χωριστεί σε $n-2$ τρίγωνα. Παρομοίως, κάθε κυρτή n-εδρη γωνία ($n > 2$) μπορεί να χωριστεί σε $n-2$ τρίεδρες γωνίες, και το αντίστοιχο σφαιρικό n-γωνο σε $n-2$ σφαιρικά τρίγωνα (Σχήμα 5). Αν εφαρμόσουμε την ισότητα (1) σε όλα αυτά τα τρίγωνα, θα βρούμε ότι για ένα τυχαίο σφαιρικό n-γωνο $A_1A_2...A_n$, το οποίο



Σχήμα 4

αντιστοιχεί σε μια κυρτή n-εδρη γωνία, ισχύει η επόμενη ισότητα:

$$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| + ... + |\hat{A}_n| - 2|A_1A_2 ... A_n| = \frac{n}{2} - 1. \qquad (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι το *άθροισμα των μέτρων των εσωτερικών δίεδρων γωνιών μιας n-εδρης γωνίας είναι $\frac{n}{2}-1$ φορές μεγαλύτερο από το διπλάσιο του μέτρου της n-εδρης γωνίας.*

Η ποσότητα

$$|\hat{A}_1| + |\hat{A}_2| + ... + |\hat{A}_n| - 2|A_1A_2 ... A_n|$$

ονομάζεται «υπεροχή» της πολυεδρικής γωνίας $OA_1A_2...A_n$.

Άσκηση 1. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις (1) και (2) για να υπολογίσετε (α) το μέτρο της τρίεδης γωνίας στην κορυφή ενός κύβου, (β) το μέτρο της τρίεδρης γωνίας στην κορυφή ενός κανονικού τετραέδρου, (γ) το μέτρο της τετράεδρης γωνίας στην κορυφή ενός οκταέδρου.

Το άθροισμα των γωνιών ενός πολυέδρου

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τετράεδρο. Συμβολίζουμε με a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) τις τιμές των τρίεδρων και ως β_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) τις τιμές των δίεδρων γωνιών του. Η υπεροχή μιας τρίεδρης ισούται με $1/2$, και επομένως το άθροισμα των υπεροχών όλων των τρίεδρων γωνιών ενός τετραέδρου ισούται με 2. Παρατηρούμε ότι κάθε δίεδρη γωνία εμφανίζεται δύο φορές σ' αυτό το άθροισμα: μία φορά στην κάθε κορυφή μιας ακμής. Άρα, ισχύει η εξής ισότητα:

$$2\sum_{j=1}^{6}\beta_j - 2\sum_{i=1}^{4}a_i = 2,$$

και επομένως

$$\sum_{j=1}^{6}\beta_j - \sum_{i=1}^{4}a_i = 1. \qquad (3)$$

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία k-γωνική πυραμίδα. Έστω a το μέτρο της k-εδρης γωνίας (στην κορυφή της πυραμίδας), $\overline{a}$ το άθροισμα των μέτρων των τρίεδρων γωνιών στη βάση της, β το άθροισμα των μέτρων όλων των δίεδρων γωνιών στη βάση της και $\overline{\beta}$ το άθροισμα των μέτρων όλων των δίεδρων γωνιών που σχηματίζονται από τις παράπλευρες έδρες της. Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των υπεροχών σε όλες τις κορυφές της πυραμίδας, όπως κάναμε προηγουμένως για το τετράεδρο.

Από την ισότητα (2) έπεται

$$\overline{\beta} - 2a = \frac{k}{2} - 1,$$

ενώ από την ισότητα (1) προκύπτει

$$\overline{\beta} + 2\beta - 2a = \frac{k}{2}.$$

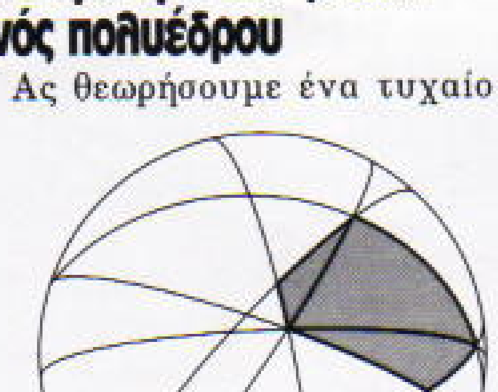
Επομένως,

$$\beta - \overline{a} + a = \frac{1}{2}, \qquad (4)$$

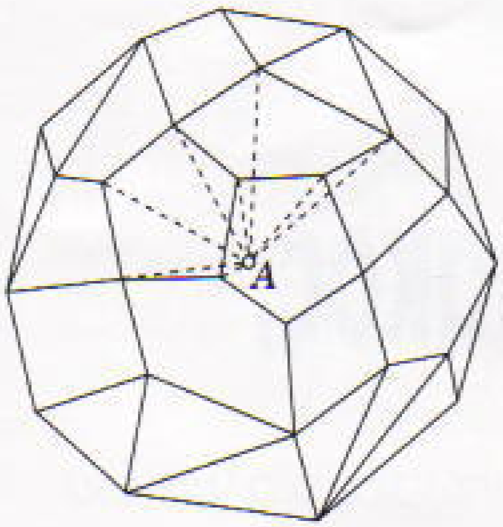
$$\beta + \overline{\beta} - (a + \overline{a}) = \frac{k+1}{2} - 1. \qquad (5)$$

Έτσι, οι εξισώσεις (3) και (5) μάς δείχνουν ότι σε ένα τετράεδρο, καθώς και *σε κάθε κυρτή k-γωνική πυραμίδα, η διαφορά μεταξύ των αθροισμάτων όλων των δίεδρων γωνιών και όλων των πολύεδρων γωνιών στις κορυφές εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των εδρών της πυραμίδας.*

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τυχαίο *κυρτό* πολύεδρο με n έδρες (Σχήμα 6). Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A στο



Σχήμα 5



Σχήμα 6

εσωτερικό του πολυέδρου και το συνδέουμε με όλα τα σημεία των ακμών του. Προκύπτει έτσι μια διαμέριση του πολυέδρου σε n πυραμίδες.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των μέτρων όλων των πολύεδρων γωνιών που σχηματίζονται στο σημείο A είναι 1, ενώ το άθροισμα των μέτρων όλων των τρίεδρων γωνιών στις βάσεις των πυραμίδων ισούται με το άθροισμα φ των μέτρων όλων των πολύεδρων γωνιών που σχηματίζονται στις κορυφές του πολυέδρου. Τέλος, το άθροισμα των μέτρων όλων των δίεδρων γωνιών στις βάσεις των πυραμίδων ισούται με το άθροισμα $\overline{\varphi}$ των μέτρων όλων των δίεδρων γωνιών του πολυέδρου. Αυτές οι παρατηρήσεις και η ισότητα (4) μάς δίνουν άμεσα την ισότητα

$$1-\varphi+\overline{\varphi}=\frac{n}{2},$$

ή

$$\overline{\varphi}-\varphi=\frac{n}{2}-1. \qquad (6)$$

Επισημαίνουμε ότι απαιτήσαμε να είναι κυρτό το πολύεδρο μόνο για να απλουστεύσουμε την επιχειρηματολογία μας. Οι αναγνώστες μπορούν να κάνουν μερικές γενικεύσεις προς αυτή την κατεύθυνση.

Το θεώρημα για το γενικευμένο άθροισμα των γωνιών ενός πολυέδρου αποδείχτηκε πρώτη φορά από τον Gué το 1783, ενώ το ανέπτυξε περαιτέρω το 1837 ο Brianchon.

Μια από τις θαυμαστές ιδιότητες της εξίσωσης (4) είναι ότι, σε αντίθεση με τα επίπεδα ανάλογά της, ισχύει και στη μη ευκλείδεια γεωμετρία.

Άσκηση 2. (α) Βρείτε το γενικευμένο άθροισμα των γωνιών του κύβου και του δωδεκαέδρου. (β) Βρείτε τα αθροίσματα των μέτρων των πολύεδρων γωνιών στις κορυφές αυτών των πολυέδρων.

Άσκηση 3. Χρησιμοποιήστε την ισότητα (1) για να υπολογίσετε την υπεροχή των πολύεδρων γωνιών ενός κυρτού πολυέδρου με A ακμές και K κορυφές. (Απάντηση: $A-K$.)

Άσκηση 4. Χρησιμοποιήστε την ισότητα (6) και το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης για να συναγάγετε την περίφημη εξίσωση του Euler που συνδέει το πλήθος των εδρών E, το πλήθος των κορυφών K και το πλήθος των ακμών A ενός κυρτού πολυέδρου: $K+E=A+2$.

Άσκηση 5. Δώστε παράδειγμα πολυέδρου για το οποίο $K-A+E=0$.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 32*

—και μακάρι να είχα μάθει περισσότερα πράγματα από αυτόν. Έφυγε από κοντά μας στις 15 Νοεμβρίου του 1996.

Το πρώτο τεύχος του *JCMN* κυκλοφόρησε το 1975, ενώ το τελευταίο (τεύχος 70) ολοκληρώθηκε λίγο πριν από το θάνατο του Basil Rennie. Τα τεύχη 1-31 του *JCMN* έχουν εκδοθεί σε τρεις δεμένους τόμους οι οποίοι πιθανόν διατίθενται ακόμη από το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου James Cook του North Queensland (Post Office James Cook, North Queensland 4811, Australia). Ο Basil πριν συνταξιοδοτηθεί ήταν καθηγητής και διευθυντής σ' αυτό —απ' όπου και η ονομασία του περιοδικού.

Μπορούμε να ελπίζουμε ότι στο κοντινό μέλλον θα εκδοθούν σε δεμένους τόμους και τα τεύχη 32-70. Τα συνιστώ ανεπιφύλακτα στους αναγνώστες μου.

ΣΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Γιατί δεν γλιστράει ο σάκος;

Και πώς ένας αθλητής της γυμναστικής μετά το εντυπωσιακό άλμα του κατορθώνει να «κολλάει» στο έδαφος;

Alexey Chernoutsan

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑτος φυσικής ο καθηγητής ακουμπάει ένα σπιρτόκουτο στην έδρα και πάνω του τοποθετεί ένα ποτήρι νερό (Σχήμα 1). «Πώς μπορείτε να τραβήξετε το κουτί χωρίς να αγγίξετε το ποτήρι; Αρκεί ένα απλό τράβηγμα; Όχι, θα μετακινήσετε μαζί και το ποτήρι. Προσέξτε εμένα...»

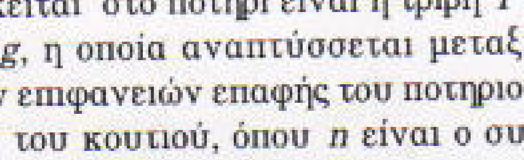
Με αυτές τις λέξεις ο καθηγητής παίρνει ένα βαρύ χάρακα και κινώντας τον με ταχύτητα πάνω στην έδρα χτυπάει το σπιρτόκουτο. Αυτό πετάγεται σε μια γωνιά της αίθουσας, τα σπίρτα σκορπίζουν τριγύρω, αλλά το ποτήρι παραμένει όρθιο πάνω στο τραπέζι, σχεδόν στην ίδια θέση!

Γιατί δεν μετακινήθηκε το ποτήρι; (Για να αποφύγουμε κάθε παρανόηση, πρέπει να σημειώσουμε ότι ο καθηγητής χτύπησε το κουτί και όχι το ποτήρι.) Η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο ποτήρι είναι η τριβή $T = nmg$, η οποία αναπτύσσεται μεταξύ των επιφανειών επαφής του ποτηριού και του κουτιού, όπου n είναι ο συντελεστής τριβής, m η μάζα του ποτηριού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Φυσικά, ακόμη και αυτή η δύναμη μπορεί να προσδώσει σημαντική ταχύτητα στο ποτήρι καθώς το σπιρτόκουτο θα μετακινείται κατά μήκος του τραπεζιού με μικρή επιτάχυνση. (Ποια θα ήταν, πράγματι, η μέγιστη επιτάχυνση πριν αρχίσει να ολισθαίνει το ποτήρι;) Το ζήτημα δεν βρίσκεται στο μέγεθος της δύναμης, αλλά στο γεγονός ότι το σπιρτόκουτο εκτινάσσεται αμέσως μετά το απότομο χτύπημά του από το χάρακα, με αποτέλεσμα η δύναμη της τριβής να δρα στο ποτήρι για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Αυτό το διάστημα είναι τόσο μικρό ώστε η τριβή δεν έχει επαρκή χρόνο να προσδώσει σημαντική ορμή $\Delta p_x = T\Delta t$ στο ποτήρι.

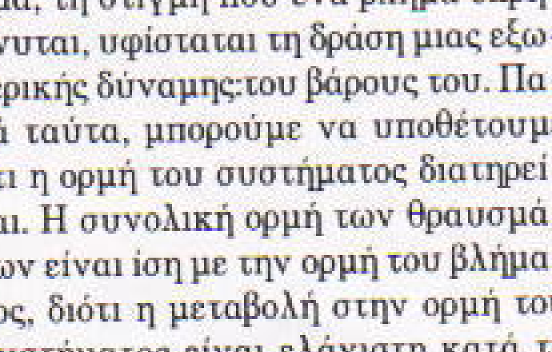
Τό παραπάνω παράδειγμα δείχνει πως, όταν αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα σώμα ή σ' ένα σύστημα σωμάτων, πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας και τη χρονική διάρκεια της δράσης τους. Για παράδειγμα, τη στιγμή που ένα βλήμα εκρήγνυται, υφίσταται τη δράση μιας εξωτερικής δύναμης:του βάρους του. Παρά ταύτα, μπορούμε να υποθέτουμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται. Η συνολική ορμή των θραυσμάτων είναι ίση με την ορμή του βλήματος, διότι η μεταβολή στην ορμή του συστήματος είναι ελάχιστη κατά τη διάρκεια του πολύ μικρού χρονικού διαστήματος της έκρηξης.

«Κάποιο λάθος πρέπει να κάνετε», θα μπορούσε να πει ένας προσεκτικός αναγνώστης. «Πάρτε για παράδειγμα μια σκληρή σφαίρα που αναπηδά στο πάτωμα. Ο χρόνος της κρούσης της είναι πολύ μικρός, αλλά η μεταβολή της ορμής της $\Delta p_y = mv - (-mv) = 2mv$ είναι αρκετά σημαντική. Τι συμβαίνει εδώ;»

Έχετε απόλυτο δίκιο. Το αποτέλεσμα της δράσης μιας δύναμης δεν είναι πάντοτε αμελητέο απλώς και μόνο επειδή ο χρόνος που επιδρά είναι πολύ μικρός. Το εν λόγω αποτέλεσμα δεν αξιολογείται ούτε από το μέγεθος της δύναμης ούτε από το χρονικό διάστημα της δράσης της. Ο σωστός τρόπος για να κρίνουμε αν μπορούμε να αμελήσουμε μια δύναμη είναι να υπολογίζουμε την ορμή την οποία θα προσέδιδε στο σώμα, εάν ήταν η μόνη δύναμη που δρούσε σ' αυτό. (Όταν η δύναμη έχει σταθερό μέτρο, η αύξηση της ορμής του σώματος ισούται με $F\Delta t$ —αυτή η ποσότητα ονομάζεται *ώθηση*· όταν έχει μεταβλητό μέτρο, η ώθησή της δίνεται από το άθροισμα $\Sigma F_i \Delta t_i = F_\mu \Delta t$.) Το αποτέλεσμα της δράσης μιας δύναμης μπορεί να αγνοηθεί μόνο εάν το μέτρο της είναι σταθερό και ο χρόνος δράσης της πολύ μικρός. Και αυτό ακριβώς ισχύει στην περίπτωση της έκρηξης του βλήματος. Δεν ισχύει όμως στην περίπτωση της μπάλας που προσκρούει στο πάτωμα. Εάν ελαττώσουμε κατά 10 φορές τη χρονική διάρκεια της κρούσης (αυξάνοντας τη σκληρότητα τόσο της μπάλας όσο και του πατώματος), η μέση τιμή της δύναμης θα αυξηθεί κατά τον ίδιο παράγοντα, με αποτέλεσμα η μεταβολή της ορμής της μπάλας να πα-

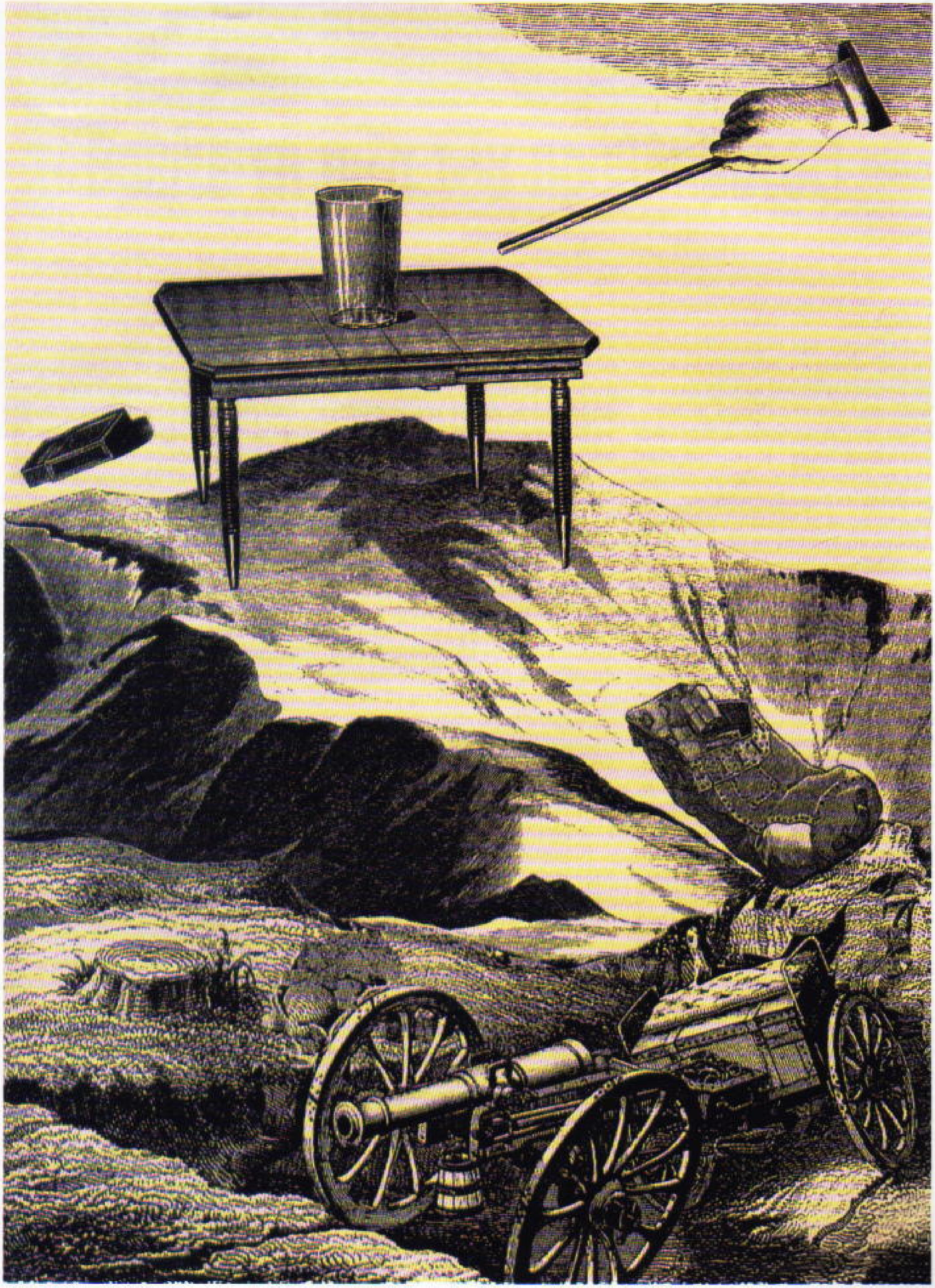


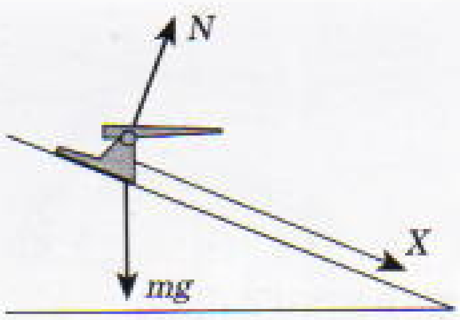
Σχήμα 1



Σχήμα 2

Εικονογράφηση: Vera Khlebnikova





Σχήμα 3

ραμείνει ίση με $2mv$. Κατά συνθήκη, τέτοιες δυνάμεις αποκαλούνται *ωστικές*. Τα αποτελέσματα της δράσης αυτών των δυνάμεων είναι σημαντικά ακόμη και για πολύ σύντομες αλληλεπιδράσεις.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση ενός κανονιού που εκπυρσοκροτεί καθώς ολισθαίνει προς τα κάτω σε κεκλιμένο επίπεδο (Σχήμα 3). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της ορμής για να βρούμε την ταχύτητα του κανονιού αμέσως μετά την εκπυρσοκρότησή του; Ναι, μπορούμε, αλλά πρώτα χρειάζεται να βρούμε τη διεύθυνση στην οποία η προβολή της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης είναι μηδέν. Ωστόσο, στην εν λόγω περίπτωση δεν υπάρχει τέτοια διεύθυνση! Στο σύστημά μας ασκούνται δύο εξωτερικές δυνάμεις: το βάρος του **mg** και η κάθετη δύναμη **N** από το κεκλιμένο επίπεδο. Εάν επιλέξουμε τον οριζόντιο άξονα, μπορούμε να αγνοήσουμε το βάρος (η προβολή του σ' αυτόν είναι μηδέν), αλλά δεν είναι μηδέν η προβολή της κάθετης δύναμης, οπότε δεν μπορούμε να αγνοήσουμε αυτή την ωστική δύναμη! Εάν επιλέξουμε τον άξονα που είναι παράλληλος προς το κεκλιμένο επίπεδο, τότε δεν είναι μηδέν η προβολή του βάρους σ' αυτόν. Ποια από τις δύο επιλογές, λοιπόν, είναι η καλύτερη;

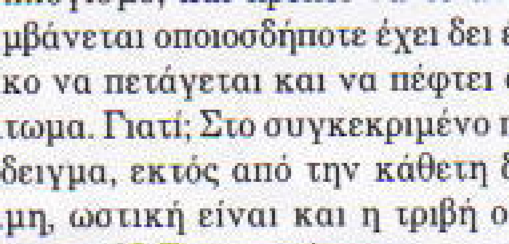
Αυτό που χρειαζόμαστε, ουσιαστικά, είναι να «ξεφορτωθούμε» την ωστική δύναμη, δηλαδή την κάθετη δύναμη. Την ώθηση του βάρους μπορούμε να την αγνοήσουμε επειδή η διάρκεια της εκπυρσοκρότησης του κανονιού είναι πολύ μικρή. Από την άλλη πλευρά, η επίδραση της ωστικής κάθετης δύναμης δεν είναι αμελητέα, και ως εκ τούτου μπορεί να προκαλέσει σημαντική μεταβολή στην ορμή του συστήματος. Ωστόσο, εφόσον αυτή η δύναμη έχει διεύθυνση κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο, η ορμή του συστήματος «κανόνι-βλήμα» δεν θα μεταβληθεί εάν προβάλουμε την εν λόγω δύναμη στη διεύθυνση κίνησης του κανονιού.

Άρα, κατά τη διάρκεια σύντομων διαδικασιών (εκρήξεις, συγκρούσεις), μόνο οι εξωτερικές ωστικές δυνάμεις τροποποιούν την ορμή ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων, ενώ η δράση των μη ωστικών δυνάμεων μπορεί να αγνοηθεί.

«Καταλάβατε;», ρωτάει ο καθηγητής. «Θαυμάσια. Ας δούμε τώρα κι ένα άλλο παράδειγμα. Ένας σάκος γλιστράει κατά μήκος μιας τσουλήθρας και πέφτει στο δάπεδο (Σχήμα 4). Τι θα συμβεί στη συνέχεια; Ο σάκος θα σταματήσει αμέσως μόλις ακουμπήσει το δάπεδο ή θα συνεχίσει για λίγο να γλιστράει λόγω της ορμής που έχει αποκτήσει;»

«Μα αυτό είναι ξεκάθαρο», απαντά ένας μαθητής. «Καθώς ο σάκος χτυπάει στο δάπεδο, δέχεται κατά την οριζόντια διεύθυνση τη δράση της τριβής· η χρονική διάρκεια της κρούσης, όμως, είναι μικρή, και συνεπώς η ορμή του σάκου κατά την οριζόντια διεύθυνση δεν θα μεταβληθεί —όπως ακριβώς και στην προηγούμενη περίπτωση με το ποτήρι. Όσον αφορά την ορμή του στην κατακόρυφη διεύθυνση, θα μηδενιστεί εξαιτίας της δράσης της ωστικής κάθετης δύναμης. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, μετά την πτώση του στο δάπεδο, ο σάκος θα συνεχίσει για κάποιο χρονικό διάστημα να γλιστράει.»

Κάποιο λάθος υπάρχει με αυτό το συλλογισμό, και πρέπει να το αντιλαμβάνεται οποιοσδήποτε έχει δει ένα σάκο να πετάγεται και να πέφτει στο πάτωμα. Γιατί; Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, εκτός από την κάθετη δύναμη, ωστική είναι και η τριβή ολίσθησης nN. Στην περίπτωση του ποτηριού, η κάθετη δύναμη είχε σταθερό μέτρο mg· έτσι, το αποτέλεσμα της δράσης της τριβής ήταν αμελητέο. Στην περίπτωση του σάκου, όμως, τόσο η κάθετη δύναμη όσο και η δύναμη τριβής είναι ωστικές δυνάμεις, με συνέπεια να μην μπορούμε να αγνοήσουμε τη μεταβολή της ορμής στην οριζόντια διεύθυνση κατά τη διάρκεια της κρούσης. Το αν ο σάκος θα σταματήσει ή όχι εξαρτάται αποκλειστικά από το συντελεστή τριβής n: εάν είναι αρκετά μεγάλος, μόλις ο σάκος ακουμπάει στο δάπεδο η ταχύτητά του «εξαφανίζεται» εντελώς! Προσπαθήστε να υπολογίσετε για ποια τιμή του συντελεστή τριβής θα ήταν δυνατόν κάτι τέτοιο.


Σχήμα 4

Παρόμοιοι συλλογισμοί μάς βοηθούν να εξηγήσουμε γιατί οι αθλητές της γυμναστικής, αμέσως έπειτα από ένα άλμα τους σε κάποιο όργανο, μπορούν να προσγειώνονται στα πόδια τους χωρίς να μετακινούνται στο ελάχιστο (ένα μέρος της εξήγησης έχει να κάνει φυσικά με την τρομερή επιδεξιότητά τους!). Προσπαθήστε τώρα να εξηγήσετε πώς ένα αντικείμενο μπορεί να ανακλαστεί σε ανώμαλο πάτωμα με γωνία διαφορετική από τη γωνία της πρόσπτωσης, ή αλλιώς τη μηχανική της «φαλτσαριστής μπαλιάς» σε διάφορα αθλήματα. Και κυρίως δείτε αν μπορείτε να βρείτε δικά σας παραδείγματα και να συνθέσετε δικά σας προβλήματα τα οποία να σχετίζονται με τις ωστικές και τις μη ωστικές δυνάμεις. ◼

Βρείτε τη ρίζα του προβλήματος!

Τι κάνουμε όταν ένα πρόβλημα φυσικής «ανάγεται» σε δευτεροβάθμια εξίσωση;

Boris Korsunsky

ΤΙ ΚΑΝΕΤΕ ΟΤΑΝ ΘΕΛΕΤΕ ΝΑ ΛΥσετε ένα πρόβλημα φυσικής; Με εξαίρεση τις περιπτώσεις που είναι καθαρά πρόβλημα εννοιών, θα χρησιμοποιήσετε όλα τα δεδομένα για να καταλήξετε σε μία ή περισσότερες εξισώσεις. Συνήθως, από τη στιγμή που έχετε τις εξισώσεις στα χέρια σας, λέτε: «Εδώ τελείωσε η φυσική, καιρός για λίγα μαθηματικά». Ή, όπως προτιμούσε να το διατυπώνει ένας διάσημος φυσικός, «το φυσικό πρόβλημα έχει πλέον αναχθεί σε μαθηματικό». Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που τα μαθηματικά παίρνουν τη μικρή τους εκδίκηση. Πολύ συνηθισμένο παράδειγμα είναι αυτό της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Όταν έχετε να την αντιμετωπίσετε κατά την επίλυση ενός προβλήματος, πρέπει να προσέξετε. Από τη στιγμή που θα λύσετε την εξίσωση, είστε υποχρεωμένοι να *ερμηνεύσετε* τη λύση. Και αυτό είναι ένα άλλο πρόβλημα *φυσικής* —και, μερικές φορές, δύσκολο.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα από διάφορες περιοχές της φυσικής.

Πρόβλημα 1. Δύο αυτοκίνητα διασχίζουν ένα δρόμο προς την ίδια κατεύθυνση. Το αυτοκίνητο 1 κινείται με σταθερή ταχύτητα v. Το αυτοκίνητο 2 ξεκινά από την ηρεμία κινούμενο με σταθερή επιτάχυνση γ. Αρχικά, το αυτοκίνητο 2 βρισκόταν σε απόσταση d πίσω από το αυτοκίνητο 1· πόσο χρόνο t θα χρειαστεί για να φτάσει και να προσπεράσει το αυτοκίνητο 1;

Δεν είναι πολύ δύσκολο, έτσι; Θα γράψετε τις εξισώσεις $x(t)$ για κάθε κινητό και, για να βρείτε τη στιγμή της συνάντησης, θα εξισώσετε τα δεύτερα μέλη. Έτσι, θα καταλήξετε σε μια σχέση όπως η επόμενη:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 - vt - d = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει, φυσικά, δύο ρίζες:

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 2\gamma d}}{\gamma}.$$

Είναι και οι δύο λύσεις δεκτές; Με άλλα λόγια, είναι δυνατόν να συναντηθούν δύο φορές τα αυτοκίνητα; Μάλλον όχι. Ποια πρέπει να διαλέξουμε, λοιπόν; Φυσικά, τη θετική. Επομένως, η απάντηση στο πρόβλημα είναι

$$t = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2\gamma d}}{\gamma}.$$

Το επόμενο παράδειγμα είναι κάπως πιο περίπλοκο.

Πρόβλημα 2. Βυθίζουμε έναν λεπτό, κατακόρυφο σωλήνα μήκους ℓ, ανοιχτό και στις δύο άκρες του, σ' ένα δοχείο με υδράργυρο, και μάλιστα ώσπου το χαμηλότερο άκρο του σωλήνα να φτάσει σε βάθος $\ell/2$ από την ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου. Στη συνέχεια σφραγίζουμε το πάνω άκρο του σωλήνα. Βρείτε το ύψος h της στήλης υδραργύρου που παραμένει στο σωλήνα, αφού τον απομακρύνουμε από το δοχείο με τον υδράργυρο. Η θερμοκρασία είναι σταθερή, και η ατμοσφαιρική πίεση ισούται με την υδροστατική πίεση στήλης υδραργύρου ύψους H.

Για να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα, αναφερόμαστε στην ισορροπία της κάτω επιφάνειας της στήλης υδραργύρου· προφανώς, η ατμοσφαιρική πίεση πρέπει να είναι ίση με την πίεση (P') του εγκλωβισμένου αέρα πάνω από τη στήλη συν την υδροστατική πίεση (P'') της ίδιας της στήλης υδραργύρου. (Τις πιέσεις μπορούμε να τις εκφράσουμε σε μονάδες μήκους στήλης υδραργύρου.) Για την πίεση του εγκλωβισμένου αέρα, χρησιμοποιώντας τη σχέση PV = σταθ., μπορούμε να γράψουμε

$$H\frac{\ell}{2} = P'(\ell - h),$$

ή

$$P' = \frac{H}{2}\frac{\ell}{\ell - h}.$$

Για τη στήλη υδραργύρου ισχύει $P'' = h$, και για την ατμοσφαιρική πίεση $P = H$.

Από τη συνθήκη $P = P' + P''$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$h^2 - (H + \ell)h + H\ell/2 = 0,$$

οι ρίζες της οποίας είναι οι

$$h = \frac{H + \ell}{2} \pm \frac{\sqrt{H^2 + \ell^2}}{2}.$$

Είστε πλέον πεπειραμένοι λύτες προβλημάτων, και είναι φανερό ότι θα αποδεχτείτε τη θετική ρίζα. Δυστυχώς, όμως, είναι *και οι δύο* ρίζες θετικές. Ωστόσο, μια δεύτερη ματιά στις ρίζες θα μας αποκαλύψει ότι η μεγαλύτερη δεν είναι απλώς θετική, αλλά και μεγαλύτερη από το ℓ! Απομένει λοιπόν μόνο η

$$h = \frac{H+\ell}{2} - \frac{\sqrt{H^2+\ell^2}}{2}.$$

Αυτά τα παραδείγματα μας δείχνουν πώς βρίσκουμε τη ρίζα που δεν είναι λύση του προβλήματος (φυσικά, μερικές φορές και οι δύο ρίζες αποτελούν λύσεις —δείτε την Άσκηση 1 στο τέλος του άρθρου). Το επόμενο πρόβλημα είναι διαφορετικό: μπορεί να λυθεί *χωρίς* να βρούμε τις ρίζες.

Πρόβλημα 3. Η εστιακή απόσταση ενός συγκλίνοντος φακού είναι f. Βρείτε την ελάχιστη δυνατή απόσταση x μεταξύ ενός αντικειμένου και του πραγματικού ειδώλου του. (Υπόδειξη: δεν χρειάζεται να ανησυχείτε αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τον απειροστικό λογισμό!)

Ο τύπος των φακών

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x-a} = \frac{1}{f}$$

μας οδηγεί στην εξής δευτεροβάθμια εξίσωση για την απόσταση a του αντικειμένου από το φακό:

$$a^2 - ax + fx = 0,$$

η ορίζουσα της οποίας είναι

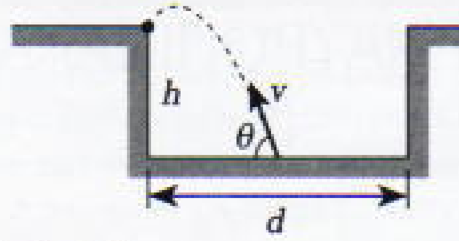
$$\Delta = x(x - 4f).$$

Το a υπάρχει μόνο αν $\Delta \geq 0$, επομένως $x \geq 4f$, και άρα $x_{min} = 4f$. Το πρόβλημα λύθηκε!

Στο επόμενο πρόβλημα η άλγεβρα είναι πιο περίπλοκη, αλλά και πάλι, αντί να προσπαθήσουμε να βρούμε τις ρίζες, θα αναλύσουμε τη διακρίνουσα.

Πρόβλημα 4. Η δοκιμή ενός πυροτεχνήματος γίνεται στο κέντρο ενός μεγάλου κυλινδρικού λάκκου που έχει διάμετρο d. Τα φλεγόμενα κομμάτια που δημιουργούνται από την έκρηξη του πυροτεχνήματος αναμένουμε ότι θα έχουν ταχύτητες που δεν υπερβαίνουν μια συγκεκριμένη τιμή v. Βρείτε το βάθος h που πρέπει να έχει ο λάκκος ώστε να είναι ασφαλείς οι παρατηρητές που στέκονται ακριβώς στο χείλος του (με την προϋπόθεση ότι είναι αρκετά προσεκτικοί ώστε να μην πέσουν μέσα στο λάκκο!).

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, θα γράψουμε την εξίσωση κίνησης ενός κομματιού του πυροτεχνήματος που καταφέρνει να φτάσει στο



Σχήμα 1

χείλος του λάκκου. Ας υποθέσουμε ότι το κομμάτι απογειώνεται υπό γωνία θ (Σχήμα 1):

$$x = (v\sigma\upsilon\nu\theta)t = \frac{d}{2},$$

$$y = (v\eta\mu\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = h.$$

Αν απαλείψουμε το χρόνο στις δύο εξισώσεις, καταλήγουμε στην επόμενη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς εφθ:

$$\varepsilon\varphi^2\theta - \frac{4v^2}{gd}\varepsilon\varphi\theta + \frac{8hv^2}{gd^2} + 1 = 0.$$

Θέλουμε η εξίσωση αυτή να *μην* έχει λύσεις. Δηλαδή, θέλουμε

$$\Delta = \left(\frac{4v^2}{gd}\right)^2 - 4\left(\frac{8hv^2}{gd^2} + 1\right) < 0,$$

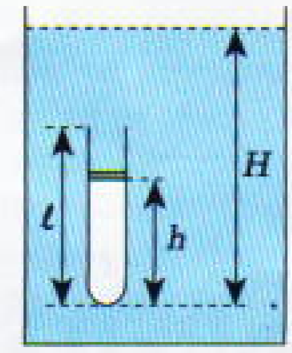
ή

$$h > \frac{v^4 - g^2d^2}{8gv^2}$$

Αν παρατηρήσουμε τον αριθμητή του δεξιού μέλους, θα διαπιστώσουμε ότι, αν $v^2 < gd$, τότε μας ικανοποιεί οποιοδήποτε h. Με άλλα λόγια, η δοκιμή μπορεί να γίνει ακόμη και στο επίπεδο του εδάφους. Διαφορετικά, ο προηγούμενος τύπος μας δίνει την απάντηση.

Με το τελευταίο πρόβλημα επιστρέφουμε στην «απόρριψη ριζών». Αυτή τη φορά, όμως, η διαδικασία δεν είναι καθόλου εύκολη, παρότι το πρόβλημα φαίνεται τελείως αθώο.

Πρόβλημα 5. Γεμίζουμε έναν δοκιμαστικό σωλήνα μήκους ℓ με αέρα υπό πίεση P και τον σφραγίζουμε με ένα ελαφρύ, κινητό έμβολο. Στη συνέχεια, βυθίζουμε τον δοκιμαστικό σωλήνα μέσα σε νερό, σε βάθος H (βλ. Σχήμα 2), και ελευθερώνουμε το έμβολο. Βρείτε το ύψος h της στήλης του αέρα μέσα στον δοκιμαστικό σωλήνα το οποίο εκφράζει τη θέση στην οποία ισορροπεί το έμβολο. Η πυκνότητα του νερού είναι ρ και η ατμοσφαιρική πίεση είναι P_a.



Σχήμα 2

Αν χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη ισορροπίας για το έμβολο, θα πάρουμε

$$\rho g(H - h) + P_a = P',$$

όπου P' είναι η νέα πίεση του αέρα μέσα στον δοκιμαστικό σωλήνα. Επιπλέον, για τον αέρα έχουμε:

$$PV = \sigma\tau\alpha\theta.,$$
$$P\ell = P'h.$$

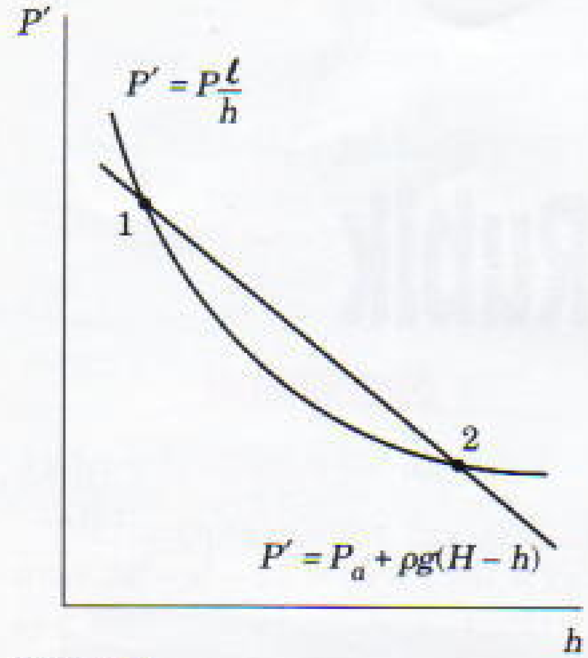
Αν συνδυάσουμε αυτές τις εξισώσεις, καταλήγουμε στην

$$h^2 - \left(H + \frac{P_a}{\rho g}\right)h + \frac{P\ell}{\rho g} = 0.$$

Και εδώ αρχίζουν τα προβλήματα! Πρώτο απ' όλα, η διακρίνουσα δεν είναι απαραίτητα θετική —κάτι που μπορεί να έχει νόημα. Για παράδειγμα, αν P πολύ μεγαλύτερο από το P_a, σχηματικά $P >> P_a$, και το H είναι ελάχιστα μεγαλύτερο από το ℓ, το έμβολο θα πεταχτεί έξω από το δοχείο. Τι συμβαίνει όμως αν όντως *υπάρχει* λύση; Διαισθητικά, θα περιμένουμε να είναι *μοναδική*, αλλά η εξίσωση μας δίνει δύο:

$$h_{\pm} = \frac{1}{2}\left(H + \frac{P_a}{\rho g}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{P_a}{\rho g}\right)^2 - \frac{P\ell}{\rho g}}.$$

Και οι δύο ρίζες είναι θετικές, και οι δύο είναι μικρότερες του ℓ. Πώς θα διαλέξουμε την «καλή»; Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα, πρέπει να εξετάσουμε την ευστάθεια της ισορροπίας (μια σημαντική έννοια που συχνά την παραβλέπουμε). Ας θεωρήσουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων $P' = P\ell/h$ και $P' = P_a + \rho g(H - h)$ (Σχήμα 3). Τα σημεία τομής 1 και 2 αντιστοιχούν στα h_- και h_+. Θεωρήστε τις μεταβολές της πίεσης που αντιστοιχούν σε μικρές αποκλίσεις από τις θέσεις ισορροπίας 1 και 2. Η ανάλυση μας αποκαλύπτει ότι μόνο το σημείο 1 αντιστοιχεί σε *ευσταθή* ισορροπία, που είναι και η μοναδι-



Σχήμα 3

κή πραγματική δυνατότητα. (Αν, με κάποιον τρόπο, το έμβολο μεταπηδήσει στη θέση 2, θα παραμείνει εκεί και θα ισχύσει η λύση 2.)

Και τώρα που αποκτήσατε κάποιο σεβασμό για τη δευτεροβάθμια εξίσωση, προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις.

Άσκηση 1. Δύο αυτοκίνητα αρχίζουν να κινούνται την ίδια στιγμή: το αυτοκίνητο 1 κινείται από το A στο B και το αυτοκίνητο 2 κινείται από το B στο A. Το αυτοκίνητο 1 κινείται με σταθερή ταχύτητα v, ενώ το αυτοκίνητο 2 ξεκινά με σταθερή ταχύτητα u έχοντας σταθερή επιτάχυνση γ με φορά από το A στο B. Γνωρίζουμε ότι τα αυτοκίνητα συναντιούνται δύο φορές ενώ μετακινούνται στην *ίδια* διεύθυνση. Βρείτε το πεδίο τιμών τής v που επιτρέπουν να συμβεί αυτό. Η απόσταση AB ισούται με ℓ.

Άσκηση 2. Τοποθετούμε τα φορτία $+Q$ και $-2Q$ σε απόσταση ℓ μεταξύ τους. Εντοπίστε το σημείο ισορροπίας ενός δοκιμαστικού φορτίου q.

Άσκηση 3. Ρίχνουμε μια πέτρα έξω από το παράθυρό μας, που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος. Η αρχική ταχύτητα της πέτρας είναι v. Βρείτε τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση ℓ της πέτρας, αν διαλέξουμε την κατάλληλη γωνία βολής. Αντιμετωπίστε το πρόβλημα παρόμοια με το Πρόβλημα 4.

Ο **Boris Korsunsky** *διδάσκει στο Mount Hermon School στο Νόρθφηλντ της Μασσαχουσέττης.*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Τέχνη και κύβος του Rubik

Οι δημιουργίες μιας φυσικού

Όχι, ο κύβος του Rubik δεν γέννησε ένα πολύεδρο τέρας. Οι κατασκευές των φωτογραφιών αυτού του άρθρου είναι έργα της δρ. Hana Bizek, φυσικού, η οποία εργάζεται στο Argonne National Laboratory και έχει δημιουργήσει πολλές ενδιαφέρουσες κατασκευές χρησιμοποιώντας πολλούς κύβους του Rubik.*

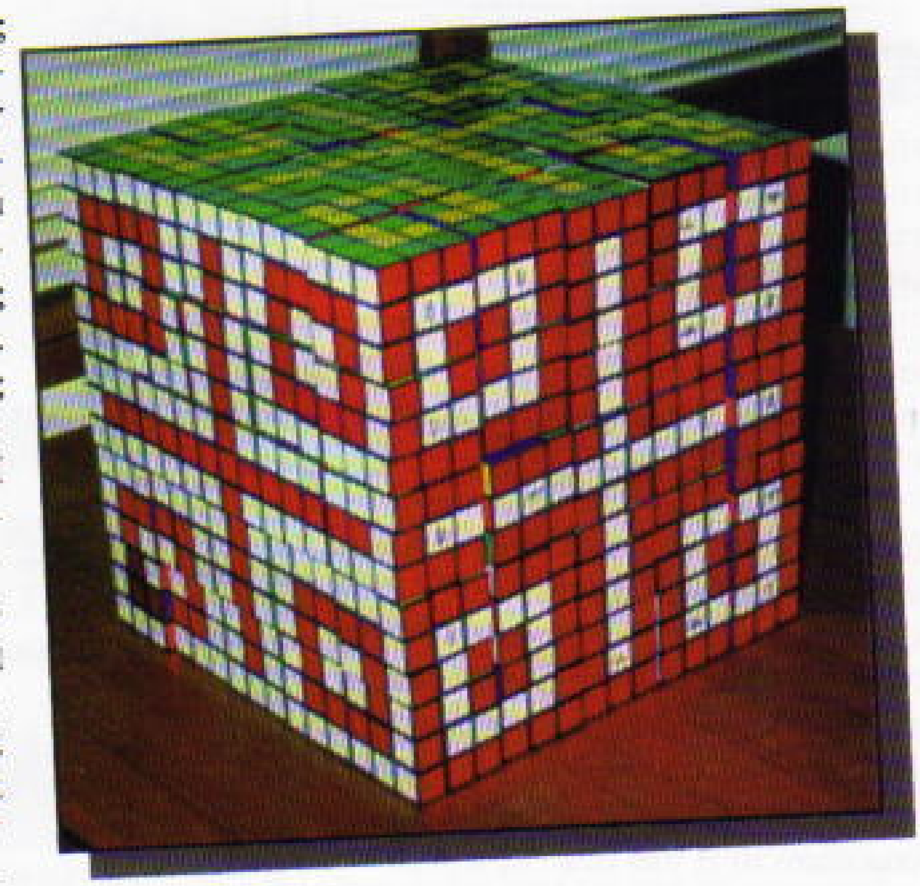
Οι δημιουργίες της δρ. Bizek συμμετείχαν σε μια έκθεση τέχνης στην Argonne. Μπορείτε να απολαύσετε μια εκδοχή με εικόνες αυτής της έκθεσης στη διεύθυνση www.anl.gov/OPA/sciart.

Μπορείτε να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις σχετικά με τις κατασκευές των φωτογραφιών;

1. Πόσους κύβους Rubik χρειάζεστε για καθεμιά από αυτές τις κατασκευές;

* Δείτε και το άρθρο «Το τελευταίο πρόβλημα του κύβου» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1995.

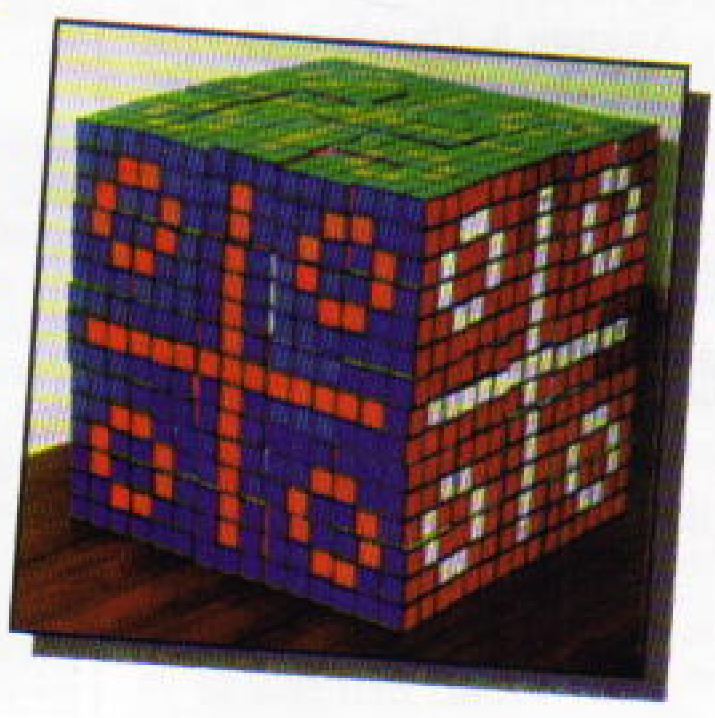
2. Μερικές φορές διαφορετικοί κατασκευαστές κύβων τύπου Rubik διευθετούν τα ίδια έξι χρώματα με διαφορετικούς τρόπους στους κύβους τους. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; Δύο χρωματισμοί θεωρούνται ίδιοι όταν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με μία στερεά κίνηση του κύβου. (Θεωρήστε διαφορετικούς τους χρωματισμούς ενός κύβου και του κατοπτρικού ειδώλου του.)



3. Μέσα σε κάθε κατασκευή υπάρχει ένα πλήθος κύβων Rubik που είναι αόρατοι απέξω. Αφού είναι αόρατοι, δεν έχει σημασία πώς είναι διευθετημένοι, αρκεί να έχουν το σωστό μέγεθος. Το πλήθος τους εξαρτάται από το συνολικό μέγεθος της κατασκευής. Πόσοι κεντρικοί κύβοι υπάρχουν στις κυβικές κατασκευές που αποτελούνται από 8, 27, 64 και 125 κύβους;

4. Υποθέστε ότι οι κατασκευές των φωτογραφιών έχουν δημιουργηθεί με όμοιους κύβους Rubik και ότι οι εφαπτόμενες εσωτερικές έδρες (οι έδρες που δεν αποτελούν μέρος του μεγάλου σχεδίου) έχουν τον ίδιο χρωματισμό. Από πόσα χρώματα θα αποτελείται μια κατασκευή που έχει δημιουργηθεί από οκτώ «λυμένους» κύβους;

5. Οι φωτογραφίες παρουσιάζουν κατασκευές που έχουν λιγότερα από έξι χρώματα, παρότι αποτελούνται από συνηθισμένους εξάχρωμους κύβους. Πώς είναι δυνατόν; ◘



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M96

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στην $2x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$, ή $2x^3 = (x+1)^3$, ή $x\sqrt[3]{2} = x + 1$. Από την τελευταία προκύπτει

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}.$$

M97

Ας πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με $a + b + c$. Κάθε όρος απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{(a+b+c)a}{b+c} = \frac{a^2}{b+c} + a,$$

$$\frac{(a+b+c)b}{a+c} = \frac{b^2}{a+c} + b,$$

$$\frac{(a+b+c)c}{a+b} = \frac{c^2}{a+b} + c,$$

επομένως, η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + a + b + c = a + b + c,$$

απ' όπου έχουμε το ζητούμενο.

M98

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι κότες που είναι ζωντανές σ' ένα δεδομένο στάδιο της διαδικασίας που περιγράψαμε γεννούν τα αυγά τους ταυτόχρονα, και ότι τα κλωσσόπουλα βγαίνουν από τα αυγά την ίδια στιγμή. Έστω ότι στο k-οστό στάδιο έχουμε a_k κότες και b_k κόκορες (δηλαδή, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$). Σύμφωνα με τη διατύπωση του προβλήματος,

$$a_{k+1} + b_{k+1} = 2a_k, \qquad (1)$$

και $a_n = 0$. Αν προσθέσουμε τις ισότητες (1) για όλα τα k από 1 έως n, παίρνουμε

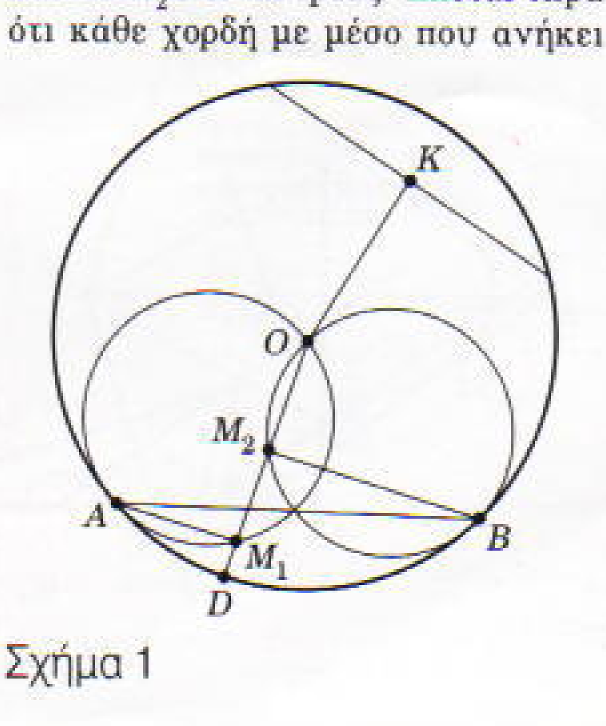
$$(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

$$= \ldots = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}).$$

Αφού $a_n = 0$ και $a_1 = 1$, παίρνουμε $(b_2 + b_3 + \ldots + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 1$. Αυτό σημαίνει ότι οι κότες ήταν κατά μία λιγότερες από τους κόκορες —δηλαδή, 1.996.

M99

Συμβολίζουμε με O το κέντρο του δεδομένου κύκλου, και έστω ότι τα σημεία τομής του με την ευθεία είναι τα A και B. Σχεδιάζουμε κύκλους με διαμέτρους OA και OB (οι οποίοι θα διέρχονται από το μέσο της AB). Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από: (1) όλα τα σημεία που ανήκουν στο εσωτερικό ακριβώς ενός από αυτούς τους δύο κύκλους, και (2) το σημείο O. Ας αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο K στο εσωτερικό του δεδομένου κύκλου υπάρχει μία μόνο χορδή με μέσο το K. Πρόκειται για τη χορδή που είναι κάθετη στην OK (το K είναι φυσικά διαφορετικό από το O). Φέρουμε μια τυχαία ευθεία που διέρχεται από το O. Έστω M_1 και M_2 τα σημεία τομής αυτής της ευθείας με τους κύκλους διαμέτρου OA και OB, αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του Σχήματος 1. Οι OA και OB είναι διάμετροι στους αντίστοιχους κύκλους, και επομένως οι $\angle AM_1O$ και $\angle BM_2O$ είναι ορθές. Έπεται τώρα ότι κάθε χορδή με μέσο που ανήκει



Σχήμα 1

στην ακτίνα OD, αλλά όχι στο τμήμα M_1M_2, βρίσκεται εξ ολοκλήρου στη μία πλευρά της ευθείας AB. Στην πραγματικότητα, M_1 είναι το μέσο της χορδής που διέρχεται από το A, και M_2 το μέσο της χορδής που διέρχεται από το B. Από την άλλη πλευρά, αν μια χορδή είναι κάθετη στο τμήμα M_1M_2 και το τέμνει σε εσωτερικό του σημείο, τότε τα άκρα της βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας AB. Αν δεν λάβουμε υπόψη προσωρινά το σημείο O, η τομή του τόπου που αναζητούμε και της ευθείας OD είναι το ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2. Η επιχειρηματολογία αυτή ισχύει για κάθε ευθεία που διέρχεται από το O, ακόμη κι όταν το σημείο O βρίσκεται μεταξύ των M_1 και M_2. Τέλος, παρατηρούμε ότι και το σημείο O ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

M100

Αρχίζουμε παρουσιάζοντας τη ζητούμενη κατασκευή, και στη συνέχεια θα αποδείξουμε την εγκυρότητά της. Ας θεωρήσουμε δύο σημεία A και B του κύκλου, τέτοια ώστε η μεταξύ τους απόσταση να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου.[1] Με κέντρο το σημείο A φέρουμε έναν κύκλο που διέρχεται από το B. Έστω ότι το δεύτερο σημείο τομής αυτού του κύκλου με τον αρχικό είναι το σημείο C (υποθέτουμε ότι τα C και B είναι διαφορετικά). Αυτός είναι ο πρώτος κύκλος της κατασκευής μας. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε το σημείο D, συμμετρικό του A ως προς την ευθεία BC. Για να το πετύχουμε αυτό, χρειαζόμαστε δύο επιπλέον κύκλους: αυτοί θα είναι ο δεύτερος και ο τρίτος κύκλος της κατασκευής μας. Σχεδιάζουμε έναν κύκλο με κέντρο D και ακτίνα DA. Έστω ότι αυτός ο (τέταρτος) κύκλος τέμνει τον πρώτο στα σημεία E και F. Οι κύκλοι με κέντρα

1. Θα θεωρήσουμε ότι για να βρούμε αυτά τα σημεία δεν χρειάζεται η κατασκευή τόξου.

τα E και F που διέρχονται από το A —ο πέμπτος και έκτος κύκλος της κατασκευής μας— τέμνονται στο σημείο O, το οποίο είναι κέντρο του αρχικού κύκλου.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι το σημείο τομής του πέμπτου και του έκτου κύκλου ανήκει στην ευθεία AD. Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι $OA = R$, όπου R είναι η ακτίνα του δεδομένου κύκλου (ο οποίος είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC). Θέτουμε $AB = AC = a$, και έστω h το μήκος του ύψους που άγεται στην πλευρά BC του τριγώνου. Ο νόμος των ημιτόνων μάς δίνει

$$\frac{AC}{\eta\mu\angle ABC} = 2R,$$

ή

$$R = \frac{AC}{2\eta\mu\angle ABC} = \frac{a^2}{2h} \qquad (1)$$

Από την άλλη πλευρά, τα τρίγωνα ADE και AEO είναι όμοια, και επομένως $AD = DE = 2h$, $AE = AC = a$. Συνεπώς

$$\frac{AO}{AE} = \frac{AE}{AD},$$

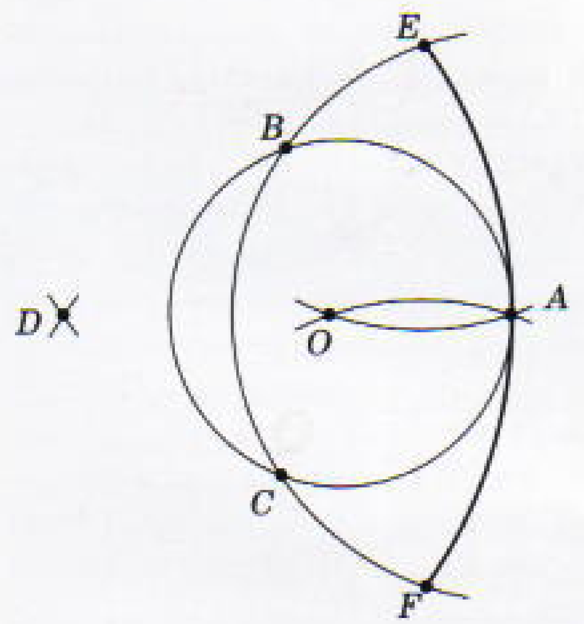
ή ισοδύναμα

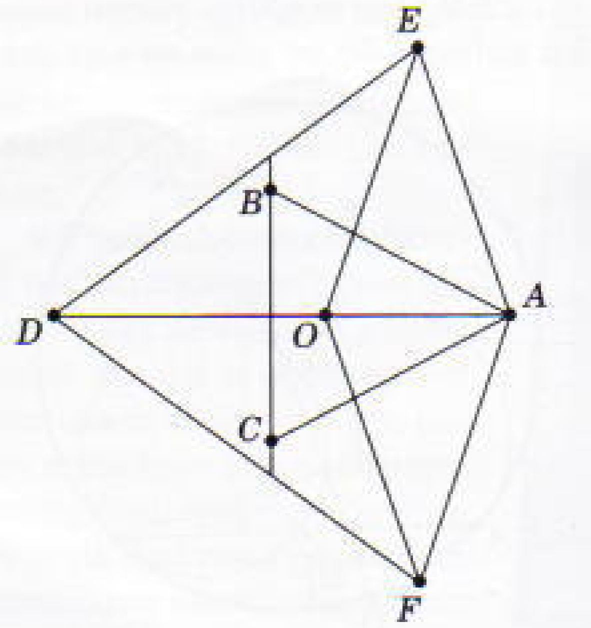
$$\frac{AO}{a} = \frac{a}{2h}.$$

Επομένως,

$$AO = \frac{a^2}{2h}.$$

Αν συγκρίνουμε αυτή την ισότητα με την (1), διαπιστώνουμε ότι $AO = R$. Συνεπώς, το O είναι κέντρο του δεδομένου κύκλου (Σχήμα 2).





Σχήμα 2

ΦΥΣΙΚΗ

Φ96

Ας υπολογίσουμε την τάση του νήματος και από τις δύο πλευρές της τροχαλίας. Υποθέστε ότι η εν λόγω τάση από την πλευρά της μάζας M = 3 kg είναι T_1. Εάν γράψουμε την εξίσωση κίνησης της M

$$Mg - T_1 = M\gamma,$$

καταλήγουμε ότι η T_1 δίνεται από τον τύπο

$$T_1 = M(g - \gamma).$$

Παρομοίως, από την άλλη πλευρά της τροχαλίας θα έχουμε

$$T_2 - mg = m\gamma,$$

οπότε ισχύει η σχέση

$$T_2 = m(g + \gamma).$$

Η διαφορά των τάσεων ανάμεσα στις δύο πλευρές της τροχαλίας εξισορροπεί την τριβή πάνω στον άξονα (αυστηρά μιλώντας, θα έπρεπε να κάνουμε λόγο για ροπές και όχι για δυνάμεις, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν υπάρχει διαφορά). Η τριβή είναι ανάλογη με την αντίδραση του άξονα —δηλαδή με τη δύναμη $T_1 + T_2$. Έτσι,

$$T_1 - T_2 = k(T_1 + T_2).$$

Αν και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή k από αυτή την εξίσωση, θα προτιμήσουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $(1 - k)/(1 + k)$, αφού ακριβώς αυτή θα χρειαστούμε παρακάτω:

$$\frac{1-k}{1+k} = \frac{m(g+\gamma)}{M(g-\gamma)}.$$

Η ισορροπία μπορεί να επιτευχθεί σε ολόκληρη περιοχή δυνατών τιμών για τη συμπληρωματική μάζα —από την ελάχιστη τιμή της (όταν μηδενίζεται η επιτάχυνση προς τα κάτω της μεγαλύτερης μάζας) ώς τη μέγιστη (όταν η εν λόγω μάζα ανυψώνεται με σταθερή ταχύτητα). Για να βρούμε την ελάχιστη αύξηση της μάζας Δm_{min} γράφουμε

$$\frac{m + \Delta m_{min}}{M} = \frac{1-k}{1+k},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\Delta m_{min} = \frac{2m\gamma}{g-\gamma} = 0{,}5 \text{ kg}.$$

Ανάλογα, για τη μέγιστη αύξηση της μάζας Δm_{max} έχουμε

$$\frac{M}{m + \Delta m_{max}} = \frac{1-k}{1+k},$$

η οποία μας δίνει

$$\Delta m_{max} = \frac{M^2(g-\gamma) - m^2(g+\gamma)}{m(g+\gamma)} = 5 \text{ kg}.$$

Φ97

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να λυθεί διά της ευθείας οδού, αν υπολογίσουμε τις κατάλληλες ποσότητες για όλες τις διαδοχικές κρούσεις χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής και λάβουμε υπόψη τις θερμικές απώλειες. Εντούτοις, το πρόβλημα διαθέτει μια διαφορετική λύση, που χαρακτηρίζεται από απλότητα και κομψότητα.

Προφανώς, μετά την πρώτη κρούση η μπάλα 2 έχει ταχύτητα $v_0/2$. Για να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της κρούσης ανάμεσα στις μπάλες μετά την ανάκλαση από τον παράπλευρο τοίχο, θα μας διευκολύνει να περάσουμε σε κινούμενο σύστημα αναφοράς που απομακρύνεται από τον τοίχο με ταχύτητα $v_0/2$. Στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, η μπάλα 2 ηρεμεί και πάλι (όπως και πριν από την κρούση), ενώ η μπάλα 1 την πλησιάζει με ταχύτητα $v_0/2$. Μετά τη δεύτερη κρούση, η μπάλα 1 σταματά, ακριβώς όπως συνέβη και στην πρώτη κρούση, ενώ η μπάλα 2 αποκτά ταχύτητα $v_0/4$. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου η μπάλα 1 έχει ταχύτητα $v_0/2$ και απομακρύνεται από τον τοίχο, και η μπάλα 2 έχει ταχύτητα $v_0/4$ και επίσης απομακρύνεται από τον τοίχο.

Φ98

Το έργο W που παρήχθη επί του συστήματος καταναλώθηκε στη μεταβολή τόσο της εσωτερικής ενέργειας του αερίου ΔU όσο και της δυναμικής ενέργειας του εμβόλου ΔE_Δ:

$$W = \Delta U + \Delta E_\Delta.$$

Για ένα γραμμομόριο μονοατομικού ιδανικού αερίου, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας δίνεται από τον τύπο

$$\Delta U = \frac{3}{2}R(T_x - T_0).$$

Έστω m η μάζα του εμβόλου. Εφόσον ισορροπεί στην αρχική και την τελική κατάσταση, το βάρος του mg ισούται με την πίεση του αερίου P (η οποία είναι προφανώς η ίδια στην αρχική και την τελική κατάσταση) επί το εμβαδόν της επιφάνειας του εμβόλου S (αγνοούμε την εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση).

Εάν συμβολίσουμε τη μεταβολή του ύψους του εμβόλου με Δh, βρίσκουμε

$$\Delta E_\Delta = mg\Delta h = PS\Delta h = P\Delta V,$$

όπου ΔV είναι η μεταβολή του όγκου του αερίου. Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων για ένα γραμμομόριο αερίου, παίρνουμε

$$\Delta E_\Delta = P\Delta V = R(T_x - T_0).$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο

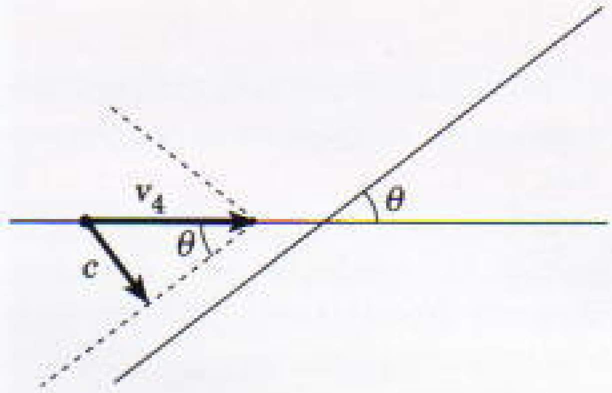
$$W = \frac{3}{2}R(T_x - T_0) + R(T_x - T_0)$$
$$= \frac{5}{2}R(T_x - T_0),$$

και συνεπώς

$$T_x = T_0 + \frac{2}{5}\frac{W}{R}.$$

Φ99

Ας προσδιορίσουμε πρώτα τη v_4. Η μοναδική περίπτωση να φτάσουν ταυτόχρονα τα ηχητικά κύματα που παράγει το αεροπλάνο 4 στα αεροπλάνα 1, 2 και 3 είναι αν το 4 κινείται με υπερηχητική ταχύτητα ($v_4 > c$, όπου c η ταχύτητα του ήχου). Τότε, γνωρίζουμε ότι το κρουστικό κύμα σχηματίζει γωνία θ με τη διεύθυνση της ταχύτητας της πηγής του, και ισχύει $\eta\mu\theta = v_4/c$. Εφόσον το μέτωπο του εν λόγω κύματος πρέπει να είναι παράλληλο με την πορεία που ακολουθούν τα υπόλοιπα τρία αεροπλάνα, μπορούμε να βρούμε με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας ότι $v_4 = c/\eta\mu\theta$ (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3

Ας εξετάσουμε τώρα την κίνηση των αεροπλάνων 1 και 4. Στο σύστημα αναφοράς του αεροπλάνου 1, το αεροπλάνο 4 πλησιάζει με ταχύτητα $v_4 - v_1$. Από το τρίγωνο του Σχήματος 4 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\eta\mu a = 1/3$. Από το νόμο των ημιτόνων παίρνουμε

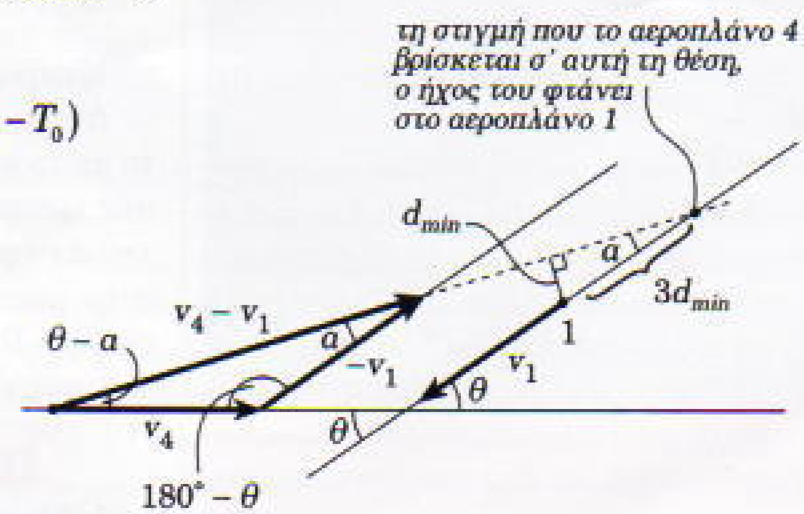
$$\frac{v_1}{\eta\mu(\theta - a)} = \frac{v_4}{\eta\mu a},$$

ή

$$\frac{v_1}{\eta\mu(\theta - a)} = \frac{c}{\eta\mu\theta\,\eta\mu a}.$$

Εάν λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς v_1 και αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων των γωνιών θ και a, καταλήγουμε στην απάντηση:

$$v_1 = 1{,}1\ c.$$



Σχήμα 4

Φ100

Έστω h το ύψος του αντικειμένου. Τότε, το ύψος του ειδώλου θα είναι $H = mh$, όπου $m = a/b$ η μεγέθυνση του φακού, οπότε ο λόγος των υψών των αντικειμένων ισούται με

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{m_1 h}{m_2 h} = \frac{a_1/b_1}{a_2/b_2}.$$

Χρειάζεται τώρα να υπολογίσουμε τα a_1, a_2, b_1 και b_2. Σύμφωνα με τον τύπο των φακών,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Από την εκφώνηση του προβλήματος, όμως, γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση

$$a + b = L.$$

Εάν απαλείψουμε το b από την τελευταία σχέση, καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση

$$a^2 - aL + fL = 0,$$

από την οποία βρίσκουμε δύο λύσεις

$$a_{1,2}\frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L}{4} - fL}.$$

Επιπροσθέτως, η αρχή του αντιστρεπτού της πορείας του φωτός έχει αποτέλεσμα τις σχέσεις $b_1 = a_2$ και $b_2 = a_1$. Επομένως,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \left(\frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 - fL}}{L/2 - \sqrt{L^2/4 - fL}}\right)^2.$$

Σπαζοκεφαλιές

Σ96

Δείτε το Σχήμα 5.

Σχήμα 5

Σ97

Ο αριθμός θα μικρύνει 50 φορές. Πράγματι, 1/1.996 = 0,0005... . Αν παραλείψουμε το πρώτο ψηφίο (5), προκύπτει ο αριθμός

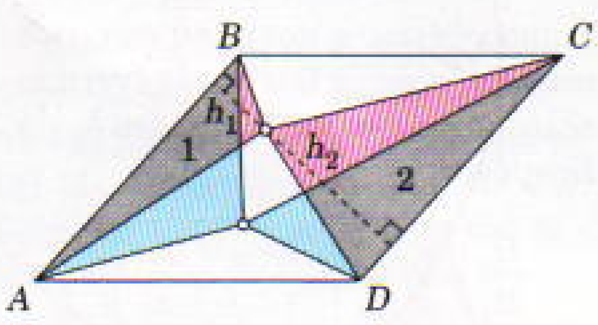
$$\left(\frac{1}{1.996}-\frac{1}{2.000}\right)\cdot 10=\frac{1}{1.996}\cdot\frac{1}{50}.$$

Σ98

Μέσα στο μπουκάλι το λάδι ισορροπεί πάνω από το ξίδι. Μπορείτε λοιπόν να ρίξετε λίγο λάδι στη σαλάτα καθώς γέρνετε το μπουκάλι από την όρθια θέση. Αν αναποδογυρίσετε το μπουκάλι έχοντας κλείσει το στόμιό του με το δάχτυλό σας, το ξίδι θα ισορροπήσει πάλι κάτω από το λάδι, αλλά τώρα θα είναι στο λαιμό του μπουκαλιού. Είναι εύκολο πλέον να ελέγξετε τη ροή του ξιδιού αφήνοντας να πέσει όση ποσότητα θέλετε.

Σ99

Αν προσθέσουμε στα κόκκινα τα τρίγωνα 1 και 2 (Σχήμα 6), θα προκύψει μια περιοχή με συνολικό εμβαδόν ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου. (Πράγματι, $S_{ABM}+S_{CDM}=\frac{1}{2}h_1\cdot AB+\frac{1}{2}h_2\cdot CD=\frac{1}{2}AB(h_1+h_2)=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, αφού $AB=CD$.) Το ίδιο ισχύει όταν προσθέτουμε τα τρίγωνα 1 και 2 στα μπλέ.



Σχήμα 6

Σ100

Στην αρχή διασχίζουν μαζί τη γέφυρα ο γιος και η κόρη. (Χρειάζονται 3 λεπτά.) Στη συνέχεια, ο ένας από τους δύο —ας πούμε ο γιος— επιστρέφει στους γονείς. (Προσθέστε 1 λεπτό.) Ο πατέρας και η μητέρα διασχίζουν τη γέφυρα μαζί (10 λεπτά). Η κόρη επιστρέφει πίσω (3 λεπτά). Ο γιος και η κόρη διασχίζουν τη γέφυρα μαζί (3 λεπτά). Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος είναι 3 + 1 + 10 + 3 + 3 = 20 λεπτά.

Καλειδοσκόπιο

1. Η διαφορά των πυκνοτήτων του νερού στις διαφορετικές θερμοκρασίες.

2. Ο όγκος που καταλαμβάνουν τα σκάγια δεν εξαρτάται από την ακτίνα τους. Άρα, οι μάζες και των δύο κουτιών είναι ίσες.

3. Το γλυκό νερό της δεξαμενής έχει μικρότερη πυκνότητα από το αλμυρό νερό του ωκεανού. Ο υδατοφράχτης ανοίγει όταν η υδροστατική πίεση και στις δύο πλευρές του είναι η ίδια —γεγονός που σημαίνει ότι η στάθμη του γλυκού νερού βρίσκεται ψηλότερα απ' ό,τι του θαλασσινού. Γι' αυτό ακριβώς ρέει νερό από τη δεξαμενή προς τον ωκεανό, και παρασύρει μαζί του το πλοίο.

4. Τρία τέταρτα της πυκνότητας του νερού.

5. Όχι.

6. Στο μέσο μιας μεγάλης λίμνης ο πάγος δεν στηρίζεται στις όχθες της αλλά επιπλέει στο νερό. Επειδή ο λόγος των πυκνοτήτων πάγου και νερού είναι 0,9, ίδιος θα είναι και ο λόγος του πάχους του πάγου που βρίσκεται βυθισμένος προς το συνολικό του πάχος. Επομένως, το πάχος του πάγου που παραμένει εκτός του νερού —άρα και το μήκος του σχοινιού— είναι 1 m.

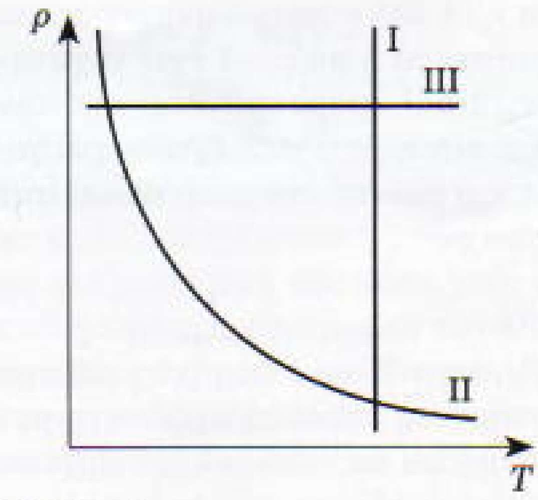
7. Ρίξτε το στερεό δείγμα στην τηγμένη ουσία. Αν επιπλεύσει, η πυκνότητα της ουσίας μετά τη στερεοποίηση θα έχει μειωθεί· αν βυθιστεί, η αντίστοιχη πυκνότητα θα έχει αυξηθεί.

8. Αυτό με τον λεπτότερο λαιμό.

9. Η ένδειξη θα αυξηθεί, αν η μέση πυκνότητα του αντικειμένου είναι μικρότερη από την πυκνότητα των σταθμών. Στην αντίθετη περίπτωση, η ένδειξη θα μειωθεί. (Αν οι πυκνότητες είναι ίσες, η ένδειξη δεν θα αλλάξει.)

10. Αν το σώμα και το υγρό διασταλούν εξίσου, η ένδειξη του δυναμομέτρου δεν θα αλλάξει. Αν το σώμα διασταλεί λιγότερο απ' ό,τι το υγρό, η ένδειξη θα αυξηθεί· και αντιστρόφως.

11. Αν κατά την άσκηση της πίεσης ο όγκος του αντικειμένου μικραίνει λιγότερο απ' ό,τι του ρευστού, τότε για κάποια τιμή πίεσης η πυκνότητα του αντικειμένου θα καταστεί μικρότερη από την πυκνότητα του ρευστού, και επομένως το αντικείμενο θα ανυψωθεί.



Σχήμα 7

12. Θα μειωθεί.

13. Αν η αρχική θερμοκρασία του νερού ήταν χαμηλότερη από 4°C, πρέπει να το ψύξουμε· στην αντίθετη περίπτωση, πρέπει να το θερμάνουμε.

14. Αρχικά προστίθεται στο δοχείο ψυχρότερο νερό απ' αυτό που περιείχε. Στη συνέχεια προστίθεται θερμότερο νερό.

15. Βλ. Σχήμα 7 (I: ισόθερμη, II: ισοβαρής, III: ισόχωρη).

16. Βαρύτερο είναι το δοχείο με τον ξηρό αέρα.

17. Η ανυψωτική δύναμη του μπαλονιού είναι ανάλογη της διαφοράς της πυκνότητας του ατμοσφαιρικού αέρα μείον την πυκνότητα του αερίου του μπαλονιού. Επειδή η πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα είναι αντιστρόφως ανάλογη της θερμοκρασίας του, η ανυψωτική δύναμη του μπαλονιού θα είναι μεγαλύτερη όταν ο ατμοσφαιρικός αέρας είναι ψυχρός.

18. Τα σωματίδια σκόνης φέρουν προεξοχές, όπου η πυκνότητα φορτίου είναι πολύ μεγάλη και απ' όπου «δραπετεύουν» τα φορτία.

19. Επειδή η πυκνότητα ρεύματος είναι μεγαλύτερη σ' αυτή την περιοχή.

Μικροπειραματισμοί

Διαιρέστε τη μάζα σας (τη βρίσκετε με το να ζυγιστείτε) διά του όγκου σας (μπορείτε να τον εκτιμήσετε από την ανύψωση της στάθμης του νερού στην μπανιέρα σας, αν βυθιστείτε μέσα της). Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την πυκνότητα του νερού.

Στο μαυροπίνακα III

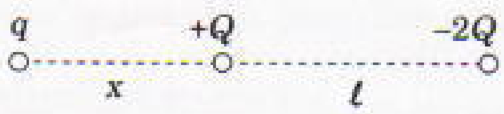
1. Οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται αν η εξίσωση

$$vt = \ell - ut + \frac{\gamma t^2}{2}$$

έχει δύο ρίζες, και τις δύο μεγαλύτερες του u/γ. Έπειτα από τις πράξεις παίρνουμε

$$\sqrt{2\gamma\ell} - u < v < \frac{\gamma\ell}{u} - \frac{u}{2}.$$

2. Διαισθητικά βλέπουμε ότι το φορτίο πρέπει να τοποθετηθεί όπως στο Σχήμα 8. Τότε, με τη βοήθεια του νόμου του Coulomb, έχουμε



Σχήμα 8

$$\frac{qQ}{x^2} = \frac{2qQ}{(x+\ell)^2},$$

ή

$$x^2 - 2\ell x - \ell^2 = 0,$$

$$x = \ell(1 \pm \sqrt{2}).$$

Το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί στην τοποθέτηση του φορτίου q μεταξύ του $+Q$ και του $-2Q$, και φυσικά σ' αυτή την περίπτωση είναι αδύνατη η ισορροπία. Επομένως, η απάντηση είναι

$$x = \ell(1 + \sqrt{2}).$$

3. Οι εξισώσεις της κίνησης είναι

$$x = (v\sigma\upsilon\nu\theta)t,$$

$$y = h + (v\eta\mu\theta)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Όταν η πέτρα φτάνει στο έδαφος, έχουμε $x = \ell$, $y = 0$. Από τις εξισώσεις κίνησης καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς εφθ (δείτε το Πρόβλημα 1). Αν λύσουμε την εξίσωση, παίρνουμε

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v^2}{g\ell}\left(1 \pm \frac{2gh}{v^2} - \frac{(g\ell)^2}{v^4}\right).$$

Η απάντηση υπάρχει αν

$$(1 + 2gh/v^2 - (g\ell)^2/v^4) \geq 0,$$

δηλαδή αν

$$\ell \leq (v/g)\sqrt{v^2 + 2gh}.$$

Επομένως, η μέγιστη απόσταση ℓ ισούται με

$$\ell = (v/g)\sqrt{v^2 + 2gh}.$$

Ληστές ζωοτροφών

Μια απερίσκεπτη πράξη

Δρ. Χμ

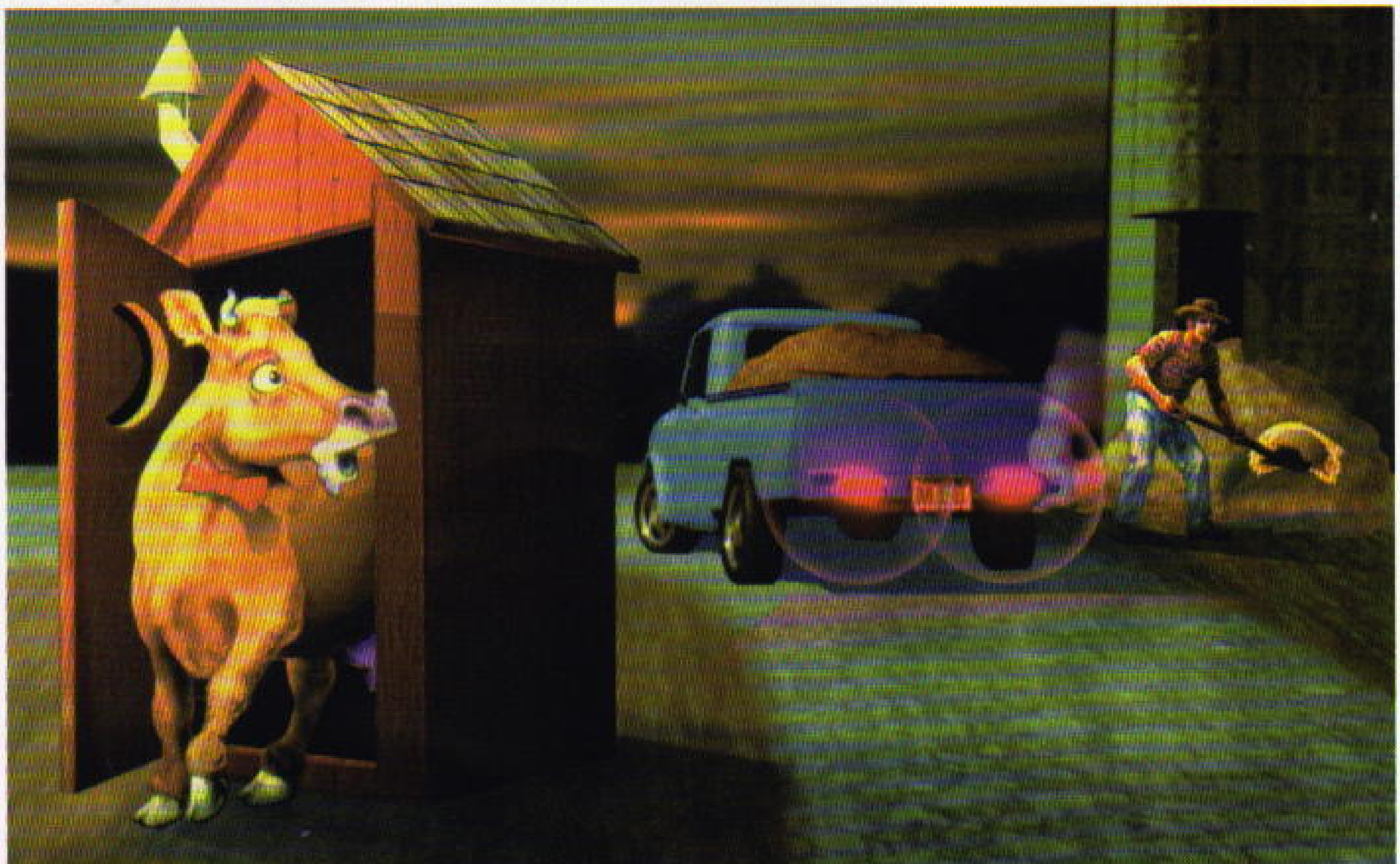
ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ιππολογισμούς, τη στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία αντιμετωπίζονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογοριθμικά μέσω ιππολογιστή.

Ένα μεγάλο τσιμεντένιο σιλό υψώνεται δίπλα στο κτήμα του κυρίου Πωλ. Εκεί αποθηκεύεται η χειμωνιάτικη τροφή μας, και έτσι δεν νομίζω ότι χρειάζεται να αναφέρω πόση σημασία έχει για όλους μας η ασφάλειά του. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο είμαστε αποφασισμένοι να ξεδιαλύνουμε ένα εξαιρετικά ενοχλητικό πρόβλημα κλοπής.

Τον περασμένο Οκτώβριο, όπως κάθε χρόνο, ο κύριος Πωλ αποθήκευσε στο σιλό 120.000 κιλά ζωοτροφή, και κατά το τέλος του φθινοπώρου άρχισε να μας μοιράζει σε ημερήσια βάση ποσότητα 300 κιλών. Όμως, χωρίς να το αντιληφθούμε, άρχισαν οι κλοπές μιας σταθερής ποσότητας ζωοτροφής. Συγκεκριμένα, κάθε βράδυ ο κλέφτης αφαιρούσε ακριβώς το $(1/n)$-οστό της τροφής που υπήρχε στο σιλό. Παραδόξως, αυτή η ποσότητα ήταν πάντα ίση με ακέραιο πλήθος κιλών. Μη με ρωτάτε πώς το γνωρίζω —τα άλογα έχουν μια έκτη αίσθηση.

Κάθε μέρα ο κύριος Πωλ έπαιρνε 300 κιλά για να μας ταΐσει, αγνοώντας τις νυχτερινές επιδρομές. Έπειτα από πέντε ημέρες και πέντε νύχτες, μια αγελάδα του κτήματος έπεσε τυχαία πάνω στο διαρρήκτη —γνωστό μούτρο του ιπποκόσμου—, τον συνέλαβε και τον παρέδωσε στον κύριο Πωλ. Το γεγονός μάς ανακούφισε όλους.

Την επόμενη ημέρα μάς επισκέ-



Εικονογράφηση: Mark Brenneman

φθηκε ο κύριος Μαρκ, ειδικός ερευνητής της Κτηνοτροφικής Ασφαλιστικής, που εξέτασε την υπόθεση και πιστοποίησε τα εξής γεγονότα:

Κάθε πρωί ο κύριος Πωλ έπαιρνε από το σιλό 300 κιλά ζωοτροφή, ενώ κάθε βράδυ ο διαρρήκτης έκλεβε το $(1/n)$-οστό της ποσότητας που είχε απομείνει (το n ήταν το ίδιο κάθε βράδυ). Αυτό επανελήφθη πέντε μέρες και πέντε νύχτες, ενώ ο κλέφτης άρπαζε πάντα ακέραιο αριθμό κιλών. Έπειτα από την ανακάλυψη της κλοπής είχε απομείνει στο σιλό τροφή που μας έφτανε —δόξα τω Θεώ— για 210 μέρες.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Για να μπορέσει να προσδιορίσει την κατάλληλη χρηματική αποζημίωση, ο κύριος Μαρκ πρέπει να βρει πόσα ακριβώς κιλά ζωοτροφή εκλάπησαν.

Αρχίστε λοιπόν! Μπορείτε να στείλετε τους ιππολογισμούς σας στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Επίσης, έχετε τη δυνατότητα να δείτε τα προηγούμενα θέματά μας στο http://usaco.uwp.edu/cowculations (και, βεβαίως, στα τρία προηγούμενα τεύχη του ελληνικού *Quantum*).

Λύση του ιπποπροβληματος 3

Την τελευταία φορά θέσαμε το εξής πρόβλημα εμφιάλωσης γάλατος: βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που θα υπολογίζει με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανείμουμε 10 γαλόνια γάλα σε μπουκάλια που έχουν τα εξής μεγέθη: δύο γαλόνια, ένα γαλόνι, μισό γαλόνι, ένα τέταρτο του γαλονιού, ένα όγδοο του γαλονιού και ένα δέκατο έκτο του γαλονιού.

Κάθε φορά που αντιμετωπίζω κάποιο σοβαρό πρόβλημα, θέλω να ξαπλώσω αναπαυτικά, να χαλαρώσω και να σκεφτώ το ζήτημα. Είναι μεγάλο σφάλμα να βιαστείς να γράψεις τον κώδικα χωρίς να του αφιερώσεις λίγες στιγμές σκέψης. Μην το κάνετε ποτέ.

Πριν αρχίσουμε, ας εισαγάγουμε κάποιους συμβολισμούς που θα μας βοηθήσουν να βάλουμε σε τάξη το πρόβλημά μας. Το πρώτο ζήτημα είναι τα διαφορετικού μεγέθους μπουκάλια που χρησιμοποιούμε. Το απλούστερο είναι να τα εκφράσουμε συναρτήσει του μεγέθους του μικρότερου μπουκαλιού (που ισούται με ένα δέκατο έκτο του γαλονιού). Έτσι, τα μπουκάλια μας των δύο, του ενός, του μισού, κ.λπ. γαλονιών εμφανίζονται στην επόμενη λίστα μπουκαλιών με μεγέθη που εκφράζονται σε δέκατα έκτα του γαλονιού.

```
size={1,2,4,8,16,32};
```

Μπορούμε να αναφερόμαστε σε καθένα από τα στοιχεία αυτής της λίστας μέσω ενός δείκτη. Έτσι, `size[[m]]` είναι το m-οστό στοιχείο της λίστας. Για παράδειγμα:

```
size[[3]]
4
```

Ορίζουμε τώρα έναν δισδιάστατο πίνακα `Whey[m,n]`, τα στοιχεία του οποίου ισούνται με το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να κατανείμουμε n δέκατα έκτα του γαλονιού γάλατος σε οποιοδήποτε σύνολο μπουκαλιών με μεγέθη `Size[[1]]`, `Size[[2]]`, ..., `Size[[m]]`. Για παράδειγμα, αν $m = 2$, και $n = 10$, τότε `Whey[2,10]` είναι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να κατανείμουμε 10 δέκατα έκτα του γαλονιού γάλατος σ' ένα συνδυασμό μπουκαλιών μεγέθους ενός δέκατου έκτου και ενός ογδόου του γαλονιού. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν αποφασίσουμε να γεμίσουμε ένα μπουκάλι του ενός ογδόου του γαλονιού, τότε απομένουν 8 δέκατα έκτα του γαλονιού που μπορούμε να κατανείμουμε σε μπουκάλια του ενός ογδόου και του ενός δέκατου έκτου του γαλονιού με `Whey[2,8]` τρόπους. Αν δεν χρησιμοποιήσουμε μπουκάλι ενός ογδόου του γαλονιού, τότε οι 10 μονάδες γάλατος κατανέμονται σε μπουκάλια του ενός δέκατου έκτου με `Whey[1,10]` τρόπους. Καταλήγουμε επομένως στην πολύ σημαντική σχέση:

```
Whey[2,10] = Whey[1,10] +
Whey[2,8]
```

Το ίδιο επιχείρημα όμως ισχύει για κάθε m και n. Αφιερώστε λίγο χρόνο σκέψης στην επομένη σχέση:

```
Whey[m_,n_]:= Whey[m-1, n] +
Whey[m, n-size[[m]]]
```

Παρατηρήστε πως όταν χρησιμοποιούμε μπουκάλι μεγέθους `size[[m]]`, το πλήθος των δέκατων έκτων του γαλονιού γάλατος που απομένουν είναι `n-size[[m]]`. Το καταλάβατε; Επομένως, μετασχηματίσαμε το πρόβλημα υπολογισμού του `Whey[m,n]` σε δύο ιπποπροβλήματα. Όμως, αν χρησιμοποιήσουμε την ίδια σχέση, τα δύο αυτά ιπποπροβλήματα μπορούν να αναχθούν σε περισσότερα ιπποπροβλήματα, έως ότου καταλήξουμε σε τρεις απλές περιπτώσεις.

1. Όπως γνωρίζουμε όλοι, όταν έχουμε μόνο μπουκάλια του ενός δέκατου έκτου του γαλονιού, μπορούμε να κατανείμουμε το γάλα σ' αυτά με έναν μόνο τρόπο. Στο Mathematica™ αυτό εκφράζεται ως

```
Whey[1,n_]=1
```

2. Αν έχετε ένα μπουκάλι μεγέθους `size[[m]]` και αν τόση ακριβώς είναι η ποσότητα γάλατος που σας έχει απομείνει (n = `size[[m]]`), τότε το γάλα μπορεί να κατανεμηθεί με έναν μόνο τρόπο —όλη η ποσότητα σ' αυτό το μπουκάλι. Τώρα πλέον δεν υπάρχει άλλο γάλα. Έτσι, όταν η ποσότητα του γάλατος έχει μηδενιστεί, εκχωρούμε την τιμή 1. Στο Mathematica™ αυτό το εκφράζουμε ως εξής:

```
Whey[m_,0]=1
```

3. Τέλος, είναι αδύνατον να χρησιμοποιήσουμε ένα μπουκάλι, ας πούμε, ενός γαλονιού, όταν η ποσότητα του γάλατος που απομένει είναι μικρότερη του ενός γαλονιού. Το ίδιο ισχύει για κάθε μέγεθος μπουκαλιού όταν n < `size[[m]]`. Στο Mathematica αυτό το εκφράζουμε ως εξής:

```
Whey[m_,n_]=0 /; n<0
```

Αν συνδυάσουμε αυτές τις εντολές, καταλήγουμε στη βασική αναδρομική λύση στο Mathematica

```
Clear[Whey]
Size={1,2,4,8,16,32};
Whey[m_,n_]:=0 /; n<0
Whey[m_,0]=1;
Whey[1,n_]=1;
Whey[m_,n_]:=Whey[m,n]=Whey[m-
1,n]+Whey[m,n-Size[[m]]]
```

Ας δούμε τώρα με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανείμουμε 10 γαλόνια (160 δέκατα έκτα) σε μπουκάλια και των έξι μεγεθών:

```
Whey[6,160]
64350
```

Ας δούμε τώρα πώς αλλάζει το πλήθος των τρόπων κατανομής όταν αυξάνουμε τα επιτρεπόμενα μεγέθη μπουκαλιών από το 1 έως το 6:

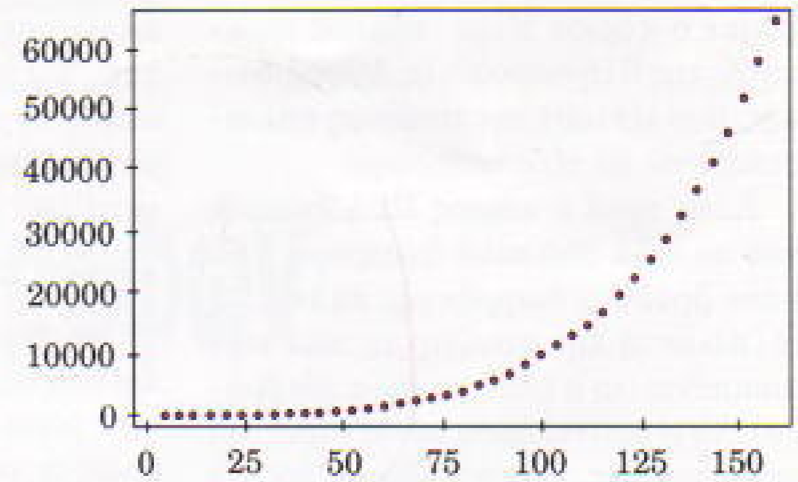
```
Table[Whey[n,160],{n,1,6}]
{1, 81, 1681, 12341, 38841,
64350}
```

Τέλος, ας δούμε τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιούμε και τα έξι μεγέθη μπουκαλιών, ενώ αλλάζουμε την ποσότητα του γάλατος από το ένα έως τα δέκα γαλόνια, με βήματα ενός τετάρτου του γαλονιού:

```
Wheys=Table[{n,Whey[6,n]},
{n,4,160,4}]
{{4, 4}, {8, 10}, {12, 20},
{16, 36}, {20, 60}, {24, 94},
{28, 140}, {32, 202},
{36, 284}, {40, 390}, {44,
524}, {48, 692}, {52, 900},
{56, 1154}, {60, 1460},
{64, 1827}, {68, 2264}, {72,
2780}, {76, 3384}, {80, 4088},
{84, 4904}, {88, 5844},
{92, 6920}, {96, 8148},
{100, 9544}, {104, 11124},
{108, 12904}, {112, 14904},
{116, 17144}, {120, 19644},
{124, 22424}, {128, 25509},
{132, 28924}, {136, 32694},
{140, 36844}, {144, 41404},
{148, 46404}, {152, 51874},
{156, 57844}, {160, 64350}}
```

Το διπλανό γράφημα μας δείχνει όλους τους τρόπους. Δημιουργήθηκε με την εντολή

```
ListPlot[Wheys,
Frame->True]
```



Υστερόγραφο. Παρατηρήστε ότι η λύση μπορεί να τροποποιηθεί εύκολα για να είναι χρήσιμη και σε χώρες όπου χρησιμοποιούνται μπουκάλια διαφορετικού μεγέθους. Πρέπει απλώς να αλλάξει η λίστα ώστε να συμφωνεί με τα υπάρχοντα δοχεία. Μπορεί επίσης να βρει και άλλες εφαρμογές. Για παράδειγμα, αν `size = {1,5, 10,25,50,100}` αντιπροσωπεύει το πλήθος των δραχμών που αντιστοιχούν σε κάθε κέρμα που κυκλοφορεί, τότε `Whey[6, 1000]` είναι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να αλλάξουμε με κέρματα ένα χιλιάρικο. Η απάντηση είναι 2.103.596.

Ελάτε στο SILO!

Όπως έχετε διαπιστώσει, το Mathematica δεν είναι απλώς η μεγαλύτερη συλλογή μαθηματικών συναρτήσεων που έχει συγκεντρωθεί ποτέ σε ένα ενιαίο λογισμικό μαθηματικών. Είναι μια ισχυρότατη συμβολική γλώσσα προγραμματισμού, που μπορεί να σας βοηθήσει να λύσετε κάθε πρόβλημά σας, με την προϋπόθεση ότι γνωρίζετε πώς δουλεύει. Αν επιθυμείτε να μάθετε το Mathematica, ελάτε να με συναντήσετε στο Internet, στο Mathematica SILO (Summer Internet Learning Opportunity). Εκεί, μια από τις εβδομάδες του Ιουλίου, θα αναμασήσω τα βασικά του Mathematica. Θα χρειαστείτε πρόσβαση στο Internet και διάθεση για δουλειά (βέβαια, όχι τόσο σκληρή όσο στο κτήμα μας). Για τη συμμετοχή σας δεν απαιτείται οποιαδήποτε προηγούμενη γνώση του Mathematica, ούτε και να έχετε το πρόγραμμα. Αν θέλετε να μας συναντήσετε στο SILO, στείλτε μου ένα μήνυμα στο drmu@cs. uwp.edu.