

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1997  
ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 3  
1.500 ΔΡΧ.

*Όγκοι χωρίς ολοκληρώματα*



- Ο τετραγωνισμός της υπερβολής
- Διαστημικές εξερευνήσεις
- Το παράδοξο του ελαιογραφιστική
- Πινγκ πογκ στην μπανιέρα
- Η μακρά πορεία προς το γεωγραφικό μήκος
- Η Πεντάμορφη και το Τέρας: προβλήματα εγγοπισμού
- Κοσμικά σφυρίγματα
- Επιστημονικός αναλφαβητισμός
- Τρεις φυσικοί κι ένα κούτσουρο



Συλλογή Andrew W. Mellon © 1997 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον

### *Η οικογένεια Washington (1789-1796), του Edward Savage*

ΠΡΟΤΟΥ ΓΙΝΕΙ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΟΣ, ΓΑΙΟΚΤΗΜΟΝΑΣ ΚΑΙ ΠΡΕΔΡΟΣ των ΗΠΑ, ο George Washington ήταν τοπογράφος. Στα 16 του εργάστηκε ως βοηθός του επίσημου τοπογράφου της κομητείας Prince William, στη Βιρτζίνια, και κατέγραψε τις εμπειρίες του σε ημερολόγιο, όπου αναφέρει πόσο δύσκολο ήταν να κοιμηθεί «κάτω από μια κουρελιασμένη κουβέρτα που το βάρος της διπλασιάζοταν από τα ζωύφια: τους ψύλλους και τις ψείρες», και περιγράφει τη συνάντησή του με μια ομάδα ινδιάνων πολεμιστών που κρατούσαν ένα σκαλπ. Ένα χρόνο αργότερα, ο Washington ανέλαβε τη θέση του επίσημου τοπογράφου της κομητείας Culpeper, χάρη στην οποία αποκόμισε κι άλλες εμπειρίες στην αντιμετώπιση των προκλήσεων της άγριας φύσης.

Στον παραπάνω πίνακα, όπου εικονίζεται ο ίδιος —πολλά χρόνια αργότερα— και η οικογένειά του, τα σύμβολα της ωριμότητας και της νιότης του αναμειγνύονται. Ο χάρτης που είναι απλωμένος στο τραπέζι και η υδρόγειος σφαίρα στα αριστερά αντανακλούν τη δράση ενός δημόσιου άνδρα που αφοσιώθηκε στα διεθνή ζητήματα,

αλλά και την ιδιωτική ζωή ενός πολίτη που απέκτησε αρκετά μεγάλες εκτάσεις. Ο υιοθετημένος γιος του κρατάει ένα διαβήτη, σάμπως ο πατέρας του να του ζήτησε μόλις πριν από λίγο να βρει πόσα στρέμματα είναι το εμβαδόν του Μάουντ Βέρνον.

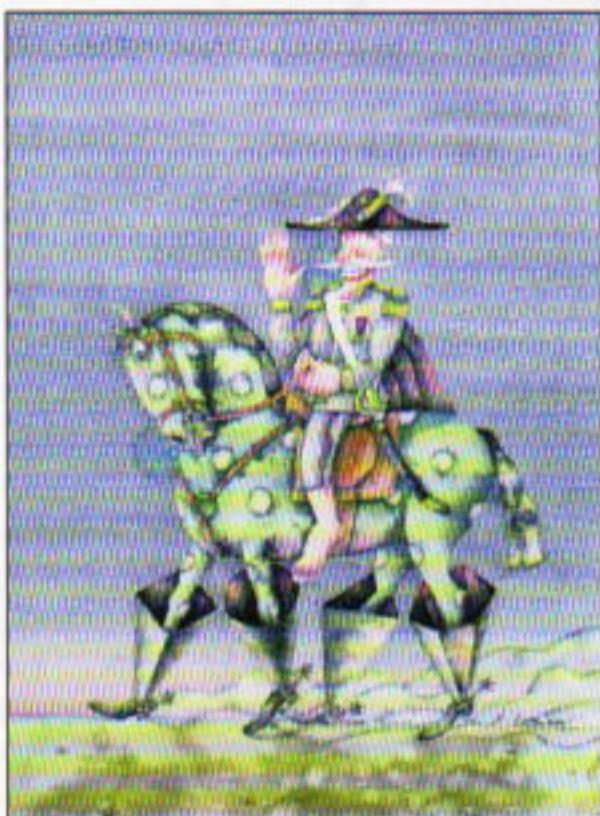
Η υδρόγειος σφαίρα διαθέτει ένα παράξενο εξάρτημα, που ίσως χρησιμεύει για να προσδιορίζεται η θέση του Ήλιου ή κάποιου άλλου ουράνιου σώματος. Το πιθανότερο είναι ότι δείχνει το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος, με κάποιον εύλογο βαθμό ακριβείας. Άραγε ο Washington, ως νεαρός τοπογράφος, είχε ακούσει ιστορίες για τόπο δύσκολο ήταν κάποτε να προσδιοριστεί με ακρίβεια το γεωγραφικό μήκος μιας περιοχής και για τόπος η εφεύρεση του ναυτικού χρονομέτρου το 1735 (όταν ο ίδιος ήταν μόλις τριών ετών) έφερε επανάσταση στη ναυσιπλοΐα;

Ομολογουμένως, αυτό ήταν το σημαντικότερο επιστημονικό πρόβλημα εκείνης της εποχής· αν το βρίσκετε ενδιαφέρον, διαβάστε το άρθρο «Η μακρά πορεία προς το γεωγραφικό μήκος», στη σελ. 59.

# QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1997

ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Ο καμαρωτός ιππέας του εξωφύλλου μας φαίνεται πεπεισμένος ότι το άλογό του είναι «πεταλωμένο» με τον πιο άνετο τρόπο. Γνωρίζει πως όλες οι μπότες έχουν τον ίδιο όγκο, παρότι τα σχήματά τους είναι διαφορετικά.

Αλλά πώς το ξέρει αυτό; Διότι δεν είναι άλλος από τον Francesco Bonaventura Cavalieri, και ήδη από το 1629 έχει αναπτύξει μια μέθοδο για τον προσδιορισμό του όγκου χωρίς τη χρήση ολοκληρωμάτων (στη μέθοδο του εμπλέκονται τα «αδιαίρετα»). Ο Cavalieri ήταν μαθητής του Galilaiou, και, σαν πραγματικός ιππότης, καθυστέρησε να δημοσιεύσει τα συμπεράσματά του επί έξι χρόνια, διότι ο δάσκαλός του σχεδίαζε μια εργασία με το ίδιο θέμα.

Διαβάστε για την αρχή του Cavalieri στο Καλειδοσκόπιο του παρόντος τεύχους.

## ΑΡΘΡΑ

- 5 Διαστημικές εξερευνήσεις  
**Πηδώντας από άστρο σε άστρο**  
Vladimir Surdin
- 10 Μαθηματικά σε δράση  
**Καταδίωξη σε έναν άπειρο κύλινδρο**  
A. Chkhartishvili και E. Shikin
- 22 Θεμελιώδεις γνώσεις  
**Ο τετραγωνισμός της υπερβολής**  
Andrey Yegorov
- 38 Ατμοσφαιρική φυσική  
**Σφυρίζοντας στον αέρα**  
Pavel Bllokh

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων  
Εποπτημονικός αναλφαριτισμός
- 4 Κβαντικά χαμόγελα  
Το παράδοξο του ελαιοχρωματιστή
- 19 Στο μαυροπίνακα I  
Τρεις φυσικοί κι ένα κούτσουρο
- 30 Πώς λύνεται;  
Λύσεις για τα παραπάνω άρθρα
- 32 Στο μαυροπίνακα II  
Ένα πλανητικό αερόφρενο
- 35 Σπαζοκεφαλίες
- 36 Καλειδοσκόπιο  
Ογκοί χωρίς ολοκληρώματα
- 47 Μαθηματικές αναζητήσεις  
Ο εξισωτής ενός τριγώνου
- 48 Στα πεδία της φυσικής  
Διαστημικές εξερευνήσεις
- 52 Μαθηματικά απρόοπτα  
Λίγη μαθηματική μαγεία
- 56 Στο εργαστήριο  
Πίνγκ πονγκ στην μπανιέρα
- 59 Αναδρομές  
Η μακρά πορεία προς το γεωγραφικό μήκος
- 66 Απαντήσεις, Υποδείξεις  
και Λύσεις
- 70 Ιππολογισμοί  
Προβλήματα εμφιάλωσης

# Επιστημονικός αναλφαβητισμός

Υπεύθυνοι επιστήμονες-ενημερωμένοι πολίτες:  
μια αναγκαία συνάντηση

Bernard V. Khoury

**Ο**ΠΟΥ ΚΙ ΑΝ ΕΧΩ ΠΑΕΙ, ΕΧΩ ΔΙΑ-  
ΠΙΣΤΩΣΕΙ ότι οι σημαντικότε-  
ρες ειδήσεις προέρχονται από  
την επιστήμη (science) και την  
τεχνολογία. Συναρπαστικά θέματα  
από το χώρο της αστρονομίας και της  
αστροφυσικής αναλύονται σχεδόν  
κάθε εβδομάδα στην εφημερίδα *The  
New York Times*. Η *Washington Post*  
και το περιοδικό *Time* αναφέρονται  
τακτικά στις καινοτομίες που εμφα-  
νίζονται στη βιολογία και τις επιστή-  
μες της υγείας. Εντυπωσιακές φωτο-  
γραφίες από το Διαστημικό Τηλεσκό-  
πο Hubble κοσμούν συχνά τα περι-  
δικά, και χρησιμεύουν ακόμη και ως  
διακοσμητικές αφίσες.

Οι γονιμοποιήσεις *in vitro* χαρί-  
ζουν το θαύμα της ζωής σε ζευγάρια  
που διαφορετικά θα έμεναν άτεκνα.  
Τώρα πλέον, τα πρώτα βρέφη συνή-  
θως επιβιώνουν, υπερβαίνοντας τις  
δυσκολίες που άλλοτε ήταν συντρι-  
πτικές. Στην τηλεόραση βλέπουμε συ-  
ναρπαστικές εικόνες από το εσωτερι-  
κό των έμβιων οργανισμών. Ολοένα  
ταχύτεροι ηλεκτρονικοί υπολογιστές  
εμπλουτίζουν (και περιπλέκουν) τη  
ζωή μας. Ο έλεγχος του DNA και άλ-  
λες εργαστηριακές τεχνικές έχουν  
επιφέρει επανάστασή στο χώρο της  
δικαιοσύνης και της εφαρμογής των  
νόμων. Μέρα με τη μέρα αποκαλύ-  
πτονται και τα πιο απόκρυφα μυστι-  
κά της λειτουργίας του γκεφάλου  
και φωτίζονται οι πιο απροσπέλαστες  
πτυχές της συνείδησης και της νο-  
ημοσύνης. Ασθένειες που κάποτε ισο-

*Aχ! σπούδασα φιλοσοφία  
και νομική και γιατρική  
κι αλί μου και θεολογία  
με κόπο και μ' επιμονή.  
Και νά 'μαι δω με τόσα φώτα,  
εγώ ο μωρός, όσα και πρώτα!  
Με λένε μάγιστρο,  
ακόμα δόκτορα,  
και σέρνω δέκα χρόνια τώρα  
από τη μύτη εδώ και κει  
τους μαθητές μου  
—και το βλέπω,  
δεν μπορεί κανένας  
κάπι να γνωρίζει!  
—Φάουστ, Γκαίτε*

(Μετ.: Κωνσταντίνος Χατζόπουλος)

δυναμούσαν με καταδίκη έχουν υ-  
ποταχθεί στη δύναμη της ιατρικής. Η  
υπεραγωγιμότητα μας παρέχει τη  
δυνατότητα δραστικής μείωσης —ου-  
σιαστικά εξάλειψης— των απωλει-  
ών κατά τη μεταφορά και αποθήκευ-  
ση ηλεκτρικής ενέργειας. Οι μικρο-  
επεξεργαστές αποτελούν πολύτιμο  
εξοπλισμό για τα σπίτια, τα οχήματα,  
τα καταστήματα, τα εργοστάσια και  
τα γραφεία μας.

Ακόμη και στους κόλπους της ί-  
διας της επιστημονικής κοινότητας, η  
εκθετική αύξηση του πλήθους των  
επιστημονικών περιοδικών αντανα-  
κά την απίστευτη ανάπτυξη των ε-

ρευνητικών δραστηριοτήτων. Στο χώ-  
ρο της φυσικής, συνιελείται η «συγ-  
χώνευση» της κβαντικής μηχανικής  
και της κοσμολογίας, ο εκπληκτικός  
συγκερασμός των πολύ μικρών και  
των πολύ μεγάλων κλιμάκων του  
σύμπαντος. Από τα γεγονότα που συ-  
νέβησαν κατά το πρώτο τετράκις εκα-  
τομμυριστό του δευτερολέπτου μετά  
τη Μεγάλη Έκρηξη εξηγείται η δέκα  
διοεκατομμυρίων ετών ιστορία του  
Κόσμου, και δεν είναι λίγοι εκείνοι  
που ποτεύουν ότι δεν θα αργήσει να  
διατυπωθεί μια τελική ενοποιημένη  
θεωρία, μια Θεωρία των Πάντων.

Αφού λοιπόν η επιστήμη αναπτύσ-  
σεται ραγδαία και η τεχνολογία ανα-  
διαρθρώνει την παγκόσμια οικονομία,  
γιατί γίνεται τόσος λόγος για τη θλι-  
βερή κατάσταση της επιστημονικής  
παιδείας; Αφού η επιστήμη και η  
τεχνολογία είναι πανταχού παρούσες  
στη ζωή μας, γιατί λέγεται συχνά ότι  
επικρατεί «επιστημονικός αναλφα-  
βητισμός»; Και, για να αναφερθώ κυ-  
ρίως στον δικό μου τομέα, τη φυσική,  
γιατί οι πιο έγκριτοι ειδικοί σε θέμα-  
τα παιδείας επισημαίνουν ότι οι μα-  
θητές μας δεν κατανοούν αυτό που  
νομίζουμε πως τους διδάσκουμε, μο-  
λονότι κατορθώνουν να πάρουν έναν  
καλό βαθμό και να περάσουν το μά-  
θημα;

Ως επιστήμονας, είμαι γοητευμέ-  
νος από τον ενθουσιασμό που επι-  
κρατεί σε όλους τους τομείς της επι-  
στήμης. Ως πολίτης, χαιρομαι που η  
έρευνα και η τεχνολογία έχουν ανα-

μορφώσει και ενισχύσει την οικονομία μας. Ως δάσκαλος, όμως, ανησυχώ για το γεγονός ότι οι περισσότεροι συμπολίτες μας αγνοούν ακόμη και τα στοιχειώδη σχετικά με την επιστήμη και την τεχνολογία, στις οποίες στηρίζεται η κοινωνία μας σε ολοένα μεγαλύτερο βαθμό.

Οπωσδήποτε, δεν μπορούμε να έχουμε την απαίτηση κάθε ανθρώπου να θέλει να γίνει επιστήμονας. Αρκετοί, μάλιστα, δεν έχουν καν την υπομονή ή τη διάθεση να μάθουν και πολλά πράγματα σχετικά με τις «ποσοτικές» όψεις της επιστήμης. Εντούτοις, η κοινότητα των —εκκολαπτόμενων ή εν ενεργεία— επιστημόνων και των καθηγητών των θετικών επιστημών οφείλει να αναγνωρίσει και να αναλάβει τη μόνιμη ευθύνη της, που δεν είναι άλλη από το να καλλιεργεί συνεχώς το ενδιαφέρον όλων των πολιτών για τα επιστημονικά ζητήματα.

Το κενό που ανοίγεται ανάμεσα στον περιορισμένο αριθμό των επιστημόνων οι οποίοι δημιουργούν τις συναρπαστικές επιστημονικές και τεχνολογικές καινοτομίες και στο ολόενα αυξανόμενο πλήθος των πολιτών που αγνοούν την επιστήμη και την τεχνολογία στις οποίες στηρίζεται ουσιαστικά η καθημερινή τους ζωή είναι ήδη αρκετά μεγάλο. Και οι δύο πλευρές πρέπει να φροντίσουν ώστε αυτό το κενό να μη γίνει αγεφύρωτο χάσμα.

Η επιστήμη, βέβαια, θα συνεχίσει να αναπτύσσεται ακόμη και με τον σημερινό αριθμό επιστημόνων. Αν οι πολίτες, όμως, δεν είναι ενημερωμένοι όσον αφορά τα επιστημονικά θέματα, η κοινωνία μας θα αλλοτριώνεται συνεχώς από τις επιστημονικές και τεχνολογικές δυνάμεις που προσδιορίζουν το μέλλον μας. Και μια κοινωνία αποξενωμένη από την επιστήμη δεν μπορεί να έχει ούτε επιστήμη υψηλών αξιώσεων ούτε ελπιδοφόρο μέλλον.

**O Bernard V. Khoury είναι φυσικός, μέλος του διοικητικού συμβουλίου της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT).**

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,  
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεποπτέλλων εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο της Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπερκλέϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιουντάκης  
Timothy Weber

Υπεύθυνος εικονογράφησης  
Sergey Ivanov

Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων  
Edward Lozansky

Σύμβουλοι σύνταξης

Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Larissa Panyushkina, Αρχιουντάκη, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιφύλη

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

Linda Rosen, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιάνια

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λόκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητής Μαθηματικών, Λύκειο της Ρίβερντεϊλ, Λουζίνια

Ted Vittitoe, Συνιαξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδότης / Διευθυντής

Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός,

Γιώργος Κατσιλιέρης -φυσικός, Μιχάλης Λάμπρου -μαθηματικός, Κώστας Σκανδάλης -μαθηματικός,

Γιώργος Κυριακόπουλος και Αλέκος Μάραλης -φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια

Παντελής Μπουκάλας

Τυποποιητική επιμέλεια

Ηρακλής Ντουστής

Υπεύθυνη λογοτερία

Μαρία Μάραλη

Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης και Ειδικός συνεργάτης:

Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Ερευνών

Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθετία, σελιδοποίηση

Δ. Τερπονέρα

Φωτ., μοντάζ

Γ. Κεραράς

Εκτύπωση

N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία

Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κατοπτρό  
Υπεύθυνος για την ελληνική εκδοση σύμφωνα με το νόμο: Α.λ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κατοπτρό.

Ιοαύρων 10 και Δαφνονέρλη, 114 71 Αθήνα.

τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.

Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αροάκειου (Πανεπιστημίου 49),

105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απογορεύεται η αναδειγμούσιος ή μετάβοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέριμνης του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.

Τιμή καθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.

Ετησία συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιώτες, 14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, βιβλιμάτα και οργανισμούς.

Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.

# Το παράδοξο του ελαιοχρωματιστή

Πόσο κοστίζει τελικά το βάψιμο του δωματίου σας;

A.A. Panov

**O**ΛΟΙ ΟΣΟΙ ΕΧΟΥΝ ΒΑΨΕΙ ΚΑΠΟΤΕ έναν τοίχο γνωρίζουν ότι όσο μεγαλύτερη είναι η επιφάνεια τόσο περισσότερη μπογιά χρειάζομαστε. Με άλλα λόγια, η ποσότητα του χρώματος είναι ανάλογη με το εμβαδόν της επιφάνειας που βάφουμε.

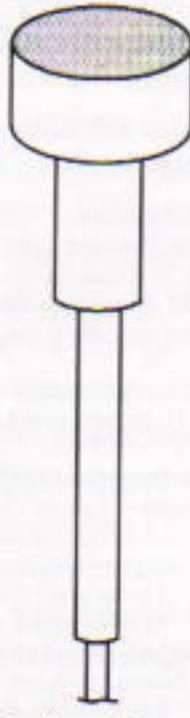
1. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, μια επίπεδη επιφάνεια που αποτελείται από άπειρο πλήθος ορθογώνιων, όπως στο Σχήμα 1. Εδώ, το πρώτο ορθογώνιο είναι ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1 cm. Καθένα από τα επόμενα ορθογώνια έχει διπλάσιο μήκος από το προηγούμενό του αλλά το μισό του πλάτος. Είναι φανερό ότι όλα αυτά τα ορθογώνια έχουν εμβαδόν 1 cm<sup>2</sup>. Επομένως, το εμβαδόν ολόκληρου του σχήματος  $S$  είναι άπειρο:

Σχήμα 1

$$S = (1 + 1 + \dots) \text{ cm}^2,$$

οπότε για να το βάψουμε απαιτείται άπειρη ποσότητα χρώματος.

2. Ας δούμε τώρα το ζήτημα διαφορετικά. Περιστρέφουμε το επίπεδο σχήμα μας γύρω από την ημιευθεία που αποτελεί το



Σχήμα 2

ένα σύνορό του. Το προκύπτον στερεό εκ περιστροφής αποτελείται από άπειρο πλήθος κυλίνδρων (Σχήμα 2). Ο όγκος του ισούται με το άθροισμα των όγκων όλων των κυλίνδρων:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης  $r$  και ύψος  $h$  ισούται με  $\pi r^2 h$ . Για τον  $n$ -οστό κύλινδρο (μετρώντας από την κορυφή του Σχήματος 2), έχουμε

$$r = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ cm},$$

$$h = 2^{n-1} \text{ cm}^3.$$

Συνεπώς,

$$V_n = \frac{\pi}{2^{n-1}} \text{ cm}^3,$$

και επομένως

$$V = \pi \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \text{ cm}^3.$$

Στην παρένθεση έχουμε το πασίγνωστο άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου. Ισούται με 2, οπότε  $V = 2\pi \text{ cm}^3$ .

Ας φανταστούμε ότι το εκ περιστροφής στερεό μας είναι κενό. Το

γεμίζουμε έως το χείλος με  $2\pi \text{ cm}^3$  χρώμα και κατόπιν βυθίζουμε το επίπεδο σχήμα μας στο εσωτερικό του. Όταν το ξαναβγάλουμε, θα είναι σιγουρά βαμμένο —και μάλιστα, και από τις δύο πλευρές!

Έχουμε λοιπόν δύο παραδείγματα αφεγάδιαστων συλλογισμών που οδηγούν σε αντιφατικά συμπεράσματα. Ακολουθώντας την πρώτη σειρά επιχειρημάτων, συμπεραίνουμε ότι χρειαζόμαστε άπειρη ποσότητα χρώματος, ενώ με τη δεύτερη βλέπουμε ότι μας αρκούν μόνο  $2\pi \text{ cm}^3$  χρώματος. Αυτό είναι το παράδοξο του ελαιοχρωματιστή. Νομίζω ότι θα διασκεδάστε προσπαθώντας να το διαλευκάνετε! ◻



# Πηδώντας από άστρο σε άστρο

Πώς να επιταχύνετε ένα διαστημικό όχημα έτσι ώστε να φτάσει στα βάθη του σύμπαντος

Vladimir Surdin

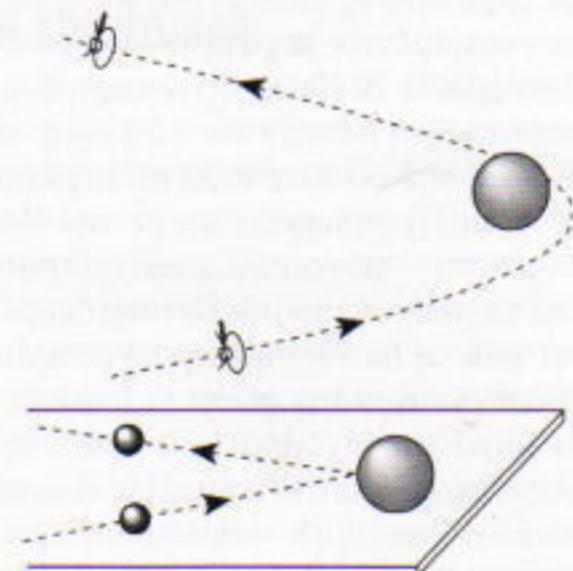
**Η** ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΔΙΑΣΤΡΙΚΩΝ ΠΤΗΣΕΩΝ αποτελεί ιδιαίτερα δελεαστικό πρόβλημα. Εάν κατορθώναμε να το λύσουμε, θα ανοίγονταν νέοι ορίζοντες. Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τις επιφάνειες διαφορετικών ειδών άστρων, να ανακαλύψουμε νέα πλανητικά συστήματα, και ακόμη (να τολμήσουμε να το πούμε;) να έρθουμε σε επαφή με εξωγήινους πολιτισμούς. Στο παρόν άρθρο δεν θα εξετάσουμε κάθε λύση που θα μπορούσε ίσως να ουλλάβει κανείς για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Τα τελευταία χρόνια προτάθηκαν πολλά έξυπνα προγράμματα, ξεκινώντας από διαστημόπλοια που θα κινούνται με πυρηνική ενέργεια ή με εκπομπή φωτονίων (για παράδειγμα, το βρετανικό πρόγραμμα Daedalus) και φτάνοντας σ' ένα σχέδιο που προβλέπει τη χρησιμοποίηση ενός ηλιακού ιστίου. Αντίθετα, θα εξετάσουμε μια σχετικά καινούργια ιδέα, η οποία κατ' αρχήν καθιστά δυνατή την αποστολή πολλών μικρών αυτόματων εξερευνητικών συσκευών στα διάφορα άστρα του Γαλαξία μας.

## Το φαινόμενο του εφαπτηρίου

Οι τροχιές των διαπλανητικών πτησεών συχνά σχεδιάζονται έτσι ώστε το διαστημόπλοιο να διέρχεται από κάποιον πλανήτη όχι μόνο για να τον μελετήσει αλλά και για να επιταχύνθει το ίδιο αξιοποιώντας τη βαρύτητα του πλανήτη. Η αλλαγή στην τροχιά

της πτήσης εξαιτίας της δράσης του βαρυτικού πεδίου κάποιου πλανήτη αναφέρεται συνήθως ως «φαινόμενο του εφαπτηρίου». Το εν λόγω φαινόμενο αξιοποιήθηκε επανειλημμένως κατά την πτήση του διαστημοπλοίου Voyager II στο δρομολόγιο Γη-Δίας-Κρόνος-Ουρανός-Ποσειδών. Για να εξερευνήσει τις πολικές περιοχές του Ήλιου, το διαστημόπλοιο Ulysses εκτοξεύτηκε, παραδόξως, προς τον Δία (δεν είναι τετριμμένη υπόθεση το να πλησιάσεις τον Ήλιο —βλ. το άρθρο «Μια πτήση στον Ήλιο», στο τεύχος Ιανουαρίου /Φεβρουαρίου 1997). Για να ελαχιστοποιηθεί η κατανάλωση καυσίμων κατά την αποστολή του στον Δία, το διαστημόπλοιο Galileo κατευθύνθηκε πρώτα προς την Αφροδίτη. Σύμφωνα με τα σχέδια πτήσης το διαστημόπλοιο πρέπει να διέρχεται κοντά από κάθε πλανήτη του οποίου η βαρύτητα είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί για να επιταχυνθεί το διαστημόπλοιο και για να αποκτήσει την κατάλληλη κατεύθυνση.

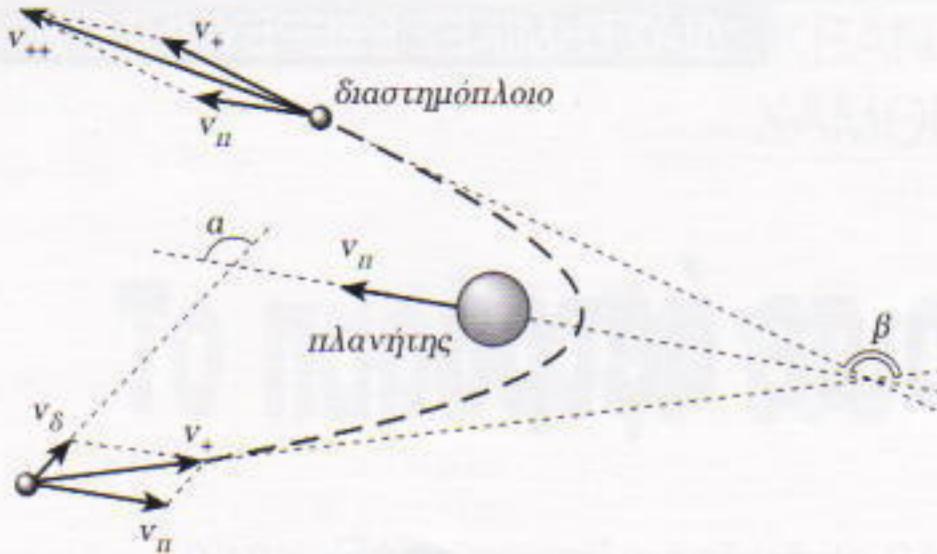
Η μηχανική αυτού του απλού φαινομένου γίνεται εύκολα κατανοητή από το εξής απλό παράδειγμα: Εάν μια βαριά σφαίρα που κυλά πάνω σ' ένα τραπέζι συγκρουστεί με μια αντίθετα κινούμενη ελαφριά σφαίρα, η πρώτη θα διατηρήσει την ταχύτητά της σχεδόν αμετάβλητη, ενώ η δεύτερη θα αντιστρέψει τη φορά της κίνησής της αποκτώντας μεγαλύτερη ταχύτητα. (Βλ. Σχήμα 1. Λύστε μόνοι σας το συ-



Σχήμα 1

γκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και της ορμής.) Ανάλογο είναι το φαινόμενο της «βαρυτικής κρούσης» ενός πλανήτη μεγάλης μάζας με ένα ελαφρό διαστημόπλοιο. Η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι η κρούση δύο στερεών σωμάτων είναι σχεδόν ακαριαία, ενώ η βαρυτική αντίστοιχη της διαρκεί επί μακρό χρόνο. Οι νόμοι της μηχανικής, ωστόσο, είναι και στις δύο περιπτώσεις οι ίδιοι. Έτσι, αφού το διαστημόπλοιο πετάξει γύρω από τον πλανήτη, αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα. Πόσο μεγαλύτερη όμως;

Το Σχήμα 2 θα μας βοηθήσει να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα. Χρησιμοποιούμε τον απλό κανόνα της διανυσματικής πρόσθεσης των ταχυτήτων, για να συσχετίσουμε τις παραπορούμενες ταχύτητες σε δύο α-



Σχήμα 2

δρανειακά συστήματα αναφοράς. Σύμφωνα με την άποψη ενός μακρινού παρατηρητή (ο οποίος παρακολουθεί την πτήση ενώ κάθεται άνετα, ας πούμε, στον Ήλιο), ο πλανήτης κινείται με ταχύτητα  $v_p$ , ενώ το διαστημόπλοιο με ταχύτητα  $v_\delta$ . Οι κατευθύνσεις των συγκεκριμένων ταχυτήτων σχηματίζουν γωνία  $a$ . Κατά την άποψη ενός παρατηρητή πάνω στον πλανήτη, το διαστημόπλοιο πλησιάζει με ταχύτητα  $v$ , και απομακρύνεται με την ίδια ταχύτητα — μόνο που η κατεύθυνση της ταχύτητας απομάκρυνσης διαφέρει από τη διεύθυνση της ταχύτητας προσέγγισης κατά γωνία  $\beta$ . Στο συλλογισμό μας δεχόμαστε ότι το σύστημα αναφοράς του πλανήτη είναι πρακτικά αδρανειακό — πράγματι, είναι απειροελάχιστη η διαταραχή της κίνησης του πλανήτη που προκαλείται από την πτήση ενός διαστημόπλοιου κοντά του. Σύμφωνα με τον μακρινό παρατηρητή, το διαστημόπλοιο απομακρύνεται από τον πλανήτη με ταχύτητα  $v_+$ . Χρησιμοποιώντας τον κάνονα του παραλληλογράμου παίρνουμε

$$v_-^2 = v_\delta^2 + v_p^2 - 2v_\delta v_p \cos a$$

και

$$v_{++}^2 = v_+^2 + v_p^2 - 2v_+ v_p \cos(\beta/2).$$

Καθισταται αμέσως σαφές ότι, αν ο πλανήτης και το διαστημόπλοιο κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις ( $a \approx 180^\circ$ ), και εάν η συνάντησή τους αναγκάσει το διαστημόπλοιο να αντιστρέψει τη φορά της κίνησής του ( $\beta \approx 180^\circ$ ), η ταχύτητα του διαστημόπλοιου θα αυξηθεί κατά το διπλάσιο της ταχύτητας του πλανήτη. Αυτή είναι η πλέον αποδοτική περίπτωση (Σχήμα 3). Για να κάνουμε ωστόσο ευλόγως

αποδοτικό τον ελιγμό ως μηχανισμό επιτάχυνσης, και οι δύο γωνίες πρέπει να βρίσκονται στην περιοχή  $a, \beta \geq 90^\circ$ . Φυσικά, το διαστημόπλοιο πρέπει να πετάξει κοντά στον πλανήτη, αλλά να μη συντριβεί πάνω του. Είτοι, η ελάχιστη απόσταση από το κέντρο του πλανήτη πρέπει να υπερβαίνει την ακτίνα του. Οι νόμοι της ουράνιας μηχανικής προβλέπουν ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η μέγιστη ταχύτητα απομάκρυνσης του διαστημόπλοιου ως προς τον πλανήτη μετά τη συνάντησή τους θα είναι  $v_{max} = 0.46v_{\text{διαφ}}$ , όπου  $v_{\text{διαφ}}$  είναι η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια του πλανήτη. Εάν ο πλανήτης περιφέρεται γύρω από κάποιο άστρο, η αντίστοιχη τιμή θα είναι  $v_{max} \equiv v_{\varphi} + 0.5v_{\text{διαφ}}$ , όπου  $v_{\varphi}$  είναι η τροχιακή ταχύτητα του πλανήτη.

Για να μπορέσει ένα διαστημόπλοιο να διαφύγει από το ηλιακό σύστημα αφού πλησιάσει έναν πλανήτη του, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη  $v_{max} \geq \sqrt{2} v_{\varphi}$  — δηλαδή η ταχύτητα του διαστημόπλοιου πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα που απαιτείται για να διαφύγει από την τροχιά του πλανήτη. Ο Πίνακας 1 δείχνει ότι δεν είναι αποτελεσματικοί «ενισχυτές προώθησης» όλοι οι πλανήτες του ηλιακού συστήματος — μόνο οι γιγαντιαίοι πλανήτες μπορούν να εκτινάξουν το διαστημόπλοιο έξω

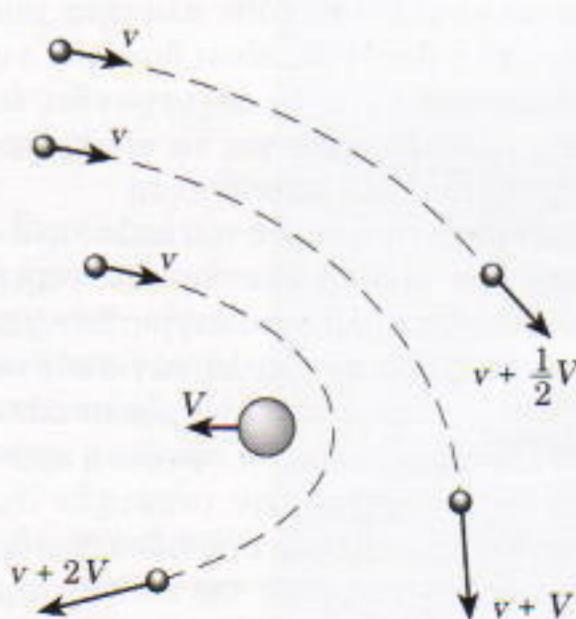
από το ηλιακό σύστημα με έναν μοναδικό ελιγμό «έφαλσης». Η τελευταία στήλη του Πίνακα 1 δείχνει την ταχύτητα ενός διαστημόπλοιου που εγκαταλείπει το ηλιακό σύστημα λόγω ενός τέτοιου ελιγμού.

### Ο αστρικός καταπέλτης

Γνωρίζουμε λοιπόν ότι επλέγοντας μια διαδρομή προς κάποιον κοντινό πλανήτη μπορούμε να προσδώσουμε επιπρόσθετη ταχύτητα σ' ένα διαστημόπλοιο χωρίς κατανάλωση καυσίμων, και έτοι να το στείλουμε έξω από το ηλιακό σύστημα. Προφανώς, η επιπλέον ενέργεια προέρχεται από τη μηχανική ενέργεια του πλανήτη. Μπορούμε άραγε να βρούμε κάποιον ανάλογο μηχανισμό για να επιταχύνουμε ένα διαστημόπλοιο στις αχανείς εκτάσεις του Γαλαξία; Στο κάτω κάτω, και τα άστρα κινούνται ένας ελιγμός έφαλσης κοντά τους θα μπορούσε να αυξήσει την ταχύτητα του διαστρικού εξερευνητικού μας οχήματος.

Οι αστρονόμοι γνωρίζουν ότι οι χαρακτηριστικές ταχύτητες της κίνησης των άστρων κυμαίνονται μεταξύ 10-20 km/s για νεαρά άστρα και μεταξύ 250-300 km/s για τα πιο γερασμένα. Έτοι, κάθε συνάντηση μ' ένα άστρο κατά μήκος κάποιας κατάλληλης τροχιάς θα προσθέσει εκατοντάδες αν όχι χιλιάδες χιλιομέτρων ανά δευτερόλεπτο στην ταχύτητα του διαστημόπλοιου. Οπως συμβαίνει και στην περίπτωση του πλανήτη, το όριο ενός αποδοτικού ελιγμού καθορίζεται από την τιμή  $v_{max}$ , η οποία για τα άστρα είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι για τους πλανήτες (βλ. Πίνακα 2). Παρά τη μεγάλη ποικιλία των μαζών και των μεγεθών, ωστόσο, τα συνηθισμένα άστρα έχουν παρόμοιες τιμές της  $v_{max}$ , κατά προσέγγιση ίσες με εκείνη του Ήλιου μας. Η συγκεκριμένη τιμή δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη (~300 km/s), άρα δεν θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε τέτοια άστρα. Ιδιαίτερη σημασία έχουν τα τέτοιους ελιγμούς έφαλσης — οι λευκοί νάνοι, οι αστέρες νετρονίων και ίσως οι μαύρες τρύπες (αυτές πάντως δεν θα εξετάσουμε εδώ, αφού πολύ λίγα γνωρίζουμε για τη φύση τους).

Η λαμπρότητα των περισσότερων



Σχήμα 3

Πίνακας 1

Πλανήτης	Τροχιακή ταχύτητα $v_p$ (km/s)	Ταχύτητα διαφυγής στην επιφάνεια $v_{\text{esc}}$ (km/s)	Απαιτούμενη ταχύτητα για διαφυγή από το ηλιακό σύστημα (km/s)
Ερμής	48	4,2	-
Αφροδίτη	35	10	-
Γη	30	11	-
Άρης	24	5	-
Δίας	13	60	36
Κρόνος	10	36	22
Ουρανός	6,8	21	13
Ποσειδών	5,4	24	14
Πλούτων	4,7	1;	-

Δεδομένα σχετικά με τους ελιγμούς έφαλσης που εκτελούνται στη γειτονιά των διαφόρων πλανητών του ηλιακού συστήματος.

συμπαγών άστρων δεν είναι υψηλή, και η ηλεκτρομαγνητική τους ακτινοβολία δεν αποτελεί πηγή μεγάλων κινδύνων για ένα διαστημόπλοιο που πετά κοντά τους. Υπάρχει ωστόσο ένα φυσικό φαινόμενο που μπορεί να περιορίσει δραστικά την ίδια τη δυνατότητα εκτέλεσης ελιγμού έφαλσης, και τούτο αποτελεί ιδιαίτερα σημαντικό γεγονός για μια πτήση στη γειτονιά ενός αστέρα νετρονίων. Αναφέρομαι στην παλιρροϊκή δράση του βαρυτικού πεδίου ενός άστρου, το οποίο τείνει να προσδώσει μια διαφορική επιτάχυνση  $\gamma = 2GM/\Delta r/R^3$  στα μέρη του διαστημόπλοιου, όπου  $G$  είναι η βα-

ρυτική σταθερά,  $M$ , η μάζα του άστρου,  $R$  η απόσταση του διαστημόπλοιου από το κέντρο του άστρου, και  $\Delta r$  η απόσταση μεταξύ των τμημάτων του διαστημόπλοιου. Ο Πίνακας 2 δείχνει ότι οι παλιρροϊκές δυνάμεις κοντά σ' έναν αστέρα νετρονίων είναι πολύ ισχυρές, επομένως ενδέχεται να αποβούν επικίνδυνες για την ακεραιότητα του διαστημόπλοιου. Σήμερα μπορείτε να βρείτε ηλεκτρικές και μηχανικές συσκευές ικανές να αντέξουν σε παλιρροϊκές επιτάχυνσεις έως και  $10^5 \text{ m/s}^2$ , άρα οι ελάχιστες αποστάσεις μεταξύ του διαστημόπλοιου εξερευνητικού οχήματος και της

επιφάνειας ενός αστέρα νετρονίων που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 φαίνονται εντελώς εύλογες.

Θα έπρεπε να παρατηρήσουμε ότι σε αντίθεση με τα κοινά άστρα, που η μάζα τους είναι κατά προσέγγιση ανάλογη με την ακτίνα τους —επομένως δεν επηρεάζει σημαντικά τη  $v_{\text{max}}$ —, οι ακτίνες των αστέρων νετρονίων και των λευκών νάνων ελαττώνονται καθώς οι μάζες τους αυξάνονται. Το χαρακτηριστικό αυτό επηρεάζει δραματικά τη  $v_{\text{max}}$ . Ο Πίνακας 2 δείχνει μόνο τις μέσες τιμές για τούτα τα παράξενα άστρα, οι οποίες μπορεί να διαφέρουν από εκείνη που χαρακτηρίζει ένα ξεχωριστό άστρο της συγκεκριμένης κατηγορίας κατά παράγοντα 3 ή 4.

## Πόσο θα διαρκέσει η επιτάχυνση;

Η στρατηγική για την επιτάχυνση των διαστρικών εξερευνητικών οχημάτων είναι σαφής: καθώς το διαστημόπλοιο προσέγγιζε τον επόμενο αστρικό επιταχυντή, ο αυτόματος πλότος του πρέπει να επλέξει από τα πλησιέστερα άστρα ένα που να κινείται προς το σκάφος, και να ρυθμίσει την προσέγγιση προς το πρώτο άστρο με τέτοιο τρόπο ώστε ο ελιγμός έφαλσης να αποστείλει το σκάφος στο δεύτερο άστρο. Εάν η διόρθωση πορείας λάβει χώρα αρκετά μακριά από το σημείο εγγύτατης διέλευσης, η ποσότητα καυσίμων που θα καταναλωθεί θα είναι αμελητέα. Πιθανώς έως τότε θα έχουν επινοηθεί άλλοι τρόποι ελέγχου της πτήσης —με τη χρήση των διαστρικών μαγνητικών πεδίων ίσως, ή με την πίεση ακτινοβολίας— έτοιμως να μη χρειαστούν καθόλου καύσιμα.

Ας εκτιμήσουμε τώρα τον απαιτούμενο χρόνο για να αποκτήσει το εξερευνητικό σκάφος την ταχύτητα  $v_{\text{max}}$ , στην περίπτωση που εκτοξεύτηκε από το ηλιακό σύστημα με ταχύτητα  $v_0$ . Για λόγους απλότητας, θα υποθέσουμε ομογενή κατανομή των άστρων στο χώρο, με μέση μεταξύ τους απόσταση  $\ell$ . Όλα τα άστρα έχουν την ίδια ταχύτητα  $\sigma$ , η οποία έχει τυχαία κατεύθυνση. Εάν κάθε «κρούση» μ' ένα άστρο αυξάνει την ταχύτητα του εξερευνητικού οχήματος κατά  $\Delta v = \sigma$ , τότε αυτό θα χρειαστεί να εκτε-

Πίνακας 2

Παράμετρος	Κοινό άστρο (Ηλιος)	Λευκός νάνος	Αστέρας νετρονίων	
			$R_{\min} = R_s$	$R_{\min} = 50R_s$
Μάζα $M$ του άστρου	1	0,7	2	2
Ακτίνα $R_s$ του άστρου	1	0,01	20 km	20 km
Ταχύτητα διαφυγής στην επιφάνεια $v_{\text{esc}}$ (km/s)	617	5.165	$15 \cdot 10^4$	$23 \cdot 10^3$
Μέγιστη ταχύτητα $v_{\text{max}}$ (km/s) του οχήματος	309	2.583	$8 \cdot 10^4$	$12 \cdot 10^3$
Παλιρροϊκή επιτάχυνση $\gamma$ ( $\text{m/s}^2$ ) για $\Delta r = 1 \text{ m}$	$10^{-6}$	0,5	$7 \cdot 10^7$	530

Μέγιστη ταχύτητα ενός εξερευνητικού οχήματος και παλιρροϊκή επιτάχυνση για διελεύσεις από άστρα διαφόρων τύπων.

λέσει  $N = (v_{max} - v_0)/\sigma$  ελιγμούς έφαλσης, οι οποίοι θα απαιτήσουν χρόνο

$$t = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\ell}{v_0 + k\sigma}$$

Για μια πρόχειρη εκτίμηση, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το εν λόγω άθροισμα με  $t - \ell/v_0$  όταν  $v_0 \ll \sigma$ , και με ένα ολοκλήρωμα για  $v_0 > \sigma$ , το οποίο δίνει  $t - (\ell/\sigma)\ln(v_{max}/v_0)$ . Παρατηρούμε ότι η εξάρτηση του χρόνου επιτάχυνσης από την αρχική και την τελική ταχύτητα είναι ασθενής: για  $v_0 = 100$  km/s, και  $300$  km/s  $\leq v_{max} \leq 10^3$  km/s, έχουμε  $1 \leq \ln(v_{max}/v_0) \leq 7$ . Έτσι, σε όλες τις περιπτώσεις ο τύπος

$$t \approx 2\ell \left( \frac{1}{v_0} + \frac{1}{\sigma} \right)$$

προσφέρει μια μάλλον ακριβή εκτίμηση. Περιέχει τρεις τιμές. Ποιες είναι αυτές;

## Διαφεύγοντας από το ηλιακό σύστημα

Ποια ταχύτητα χρειάζεται το εξερευνητικό μας όχημα για να εγκατα-

λείψει το ηλιακό μας σύστημα; Ως τώρα έχουν χρησιμοποιηθεί μόνο ελιγμοί έφαλσης κοντά σε γιγαντιαίους πλανήτες για την επιτάχυνση των διαστημοπλοίων Pioneer και Voyager στο διαστρικό Διάστημα. Οι ταχύτητες των εν λόγω εξερευνητικών σκαφών ως προς τον Ήλιο ήταν περίπου 20 km/s. Κατ' αρχήν, ένας περιπλοκός ελιγμός έφαλσης στο βαρυτικό πεδίο του Δια ή του Κρόνου θα μπορούσε να επιταχύνει ένα διαστημόπλοιο σε ταχύτητα σχεδόν 100 km/s. Για να συμβεί όμως κάτι τέτοιο, πρέπει οι πλανήτες να βρίσκονται σε ορισμένη διάταξη.

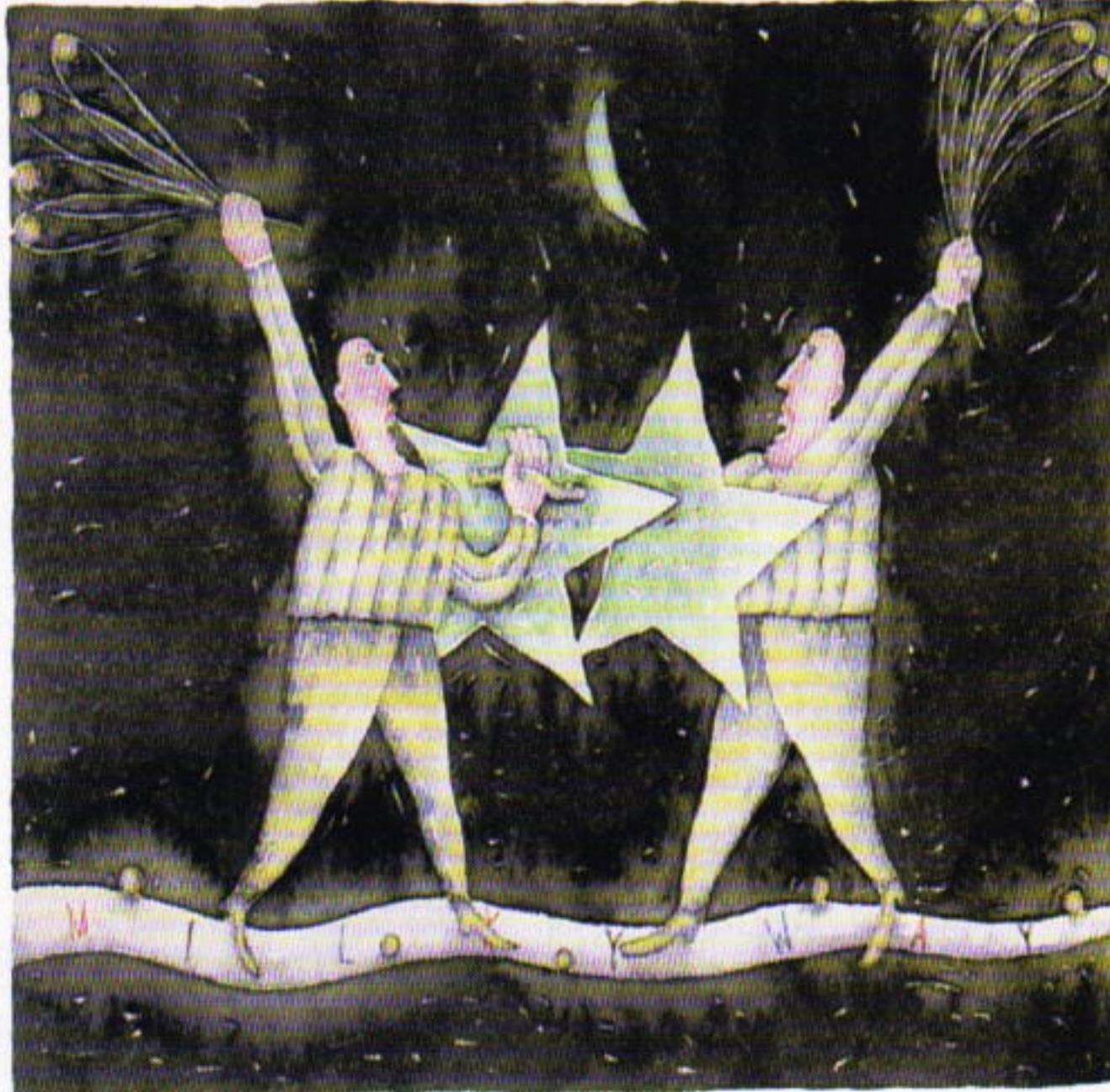
Μια διαφορετική μέθοδος εισόδου στο διαστρικό Διάστημα, η οποία φαίνεται απολύτως εφικτή σήμερα, είναι η επιτάχυνση μικρών εξερευνητικών συσκευών με τη βοήθεια ηλεκτρομαγνητικών επιταχυντών μάζας. Τέτοιοι επιταχυντές αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο του προγράμματος «Πόλεμος των άστρων». Εργαστηριακές εκδοχές τέτοιων επιταχυντών επιτάχυναν μια μάζα 10 g σε ταχύτητα 10 km/s. Αναμένεται ότι ένας μεγάλης κλίμακας

ηλεκτρομαγνητικός επιταχυντής θα μπορούσε να προσδώσει σ' ένα αντικείμενο μάζας περίπου 1 kg ταχύτητα στην περιοχή των 20-40 km/s. Επομένως, θα μπορούσε κανείς να ελπίζει ότι θα κατασκευαστεί ένας ηλεκτρομαγνητικός επιταχυντής στο διάστημα — τέτοιος ώστε να μπορεί να επιταχύνει μικρές εξερευνητικές συσκευές σε ταχύτητες τουλάχιστον 100 km/s, και ο οποίος θα μπορούσε να στραφεί σε οποιαδήποτε κατεύθυνση κάθε στιγμή, χωρίς να έχει σημασία ο τρόπος διάταξης των πλανητών.

## Η καλύτερη θέση

Ας υποθέσουμε ότι ένα διαστρικό εξερευνητικό όχημα άφησε το ηλιακό σύστημα με ταχύτητα  $v_0 = 100$  km/s. Ο χρόνος επιτάχυνσης εξαρτάται από τον τύπο των άστρων που θα επλέγουν για τον ελιγμό. Ο Πίνακας 3 δείχνει τους χρόνους που απαιτούνται για να επιταχυνθεί το ερευνητικό όχημα στη μέγιστη ταχύτητα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η συγκέντρωση των άστρων σχετίζεται με τη μέση διαστρική απόσταση μέσω του απλού τύπου  $\ell = n^{-1/3}$ .

Οπως βλέπουμε, κοντά στον Ήλιο οι χρόνοι επιτάχυνσης είναι εκατοντάδες χιλιάδες έτη, ανεξάρτητα από τον αστρικό «πληθυσμό» που χρησιμοποιείται. Εάν όμως βρισκόμασταν στο κέντρο ενός σφαιρωτού αστρικού σμήνους, ο εν λόγω χρόνος θα μειωνόταν σε λίγες χιλιάδες έτη, και στο κέντρο του Γαλαξία μας σε μερικές μόνο εκατοντάδες έτη. Για ένα πλανητικό σύστημα στο κέντρο του Γαλαξία μας, θα ήταν εύλογο να εκτοξεύονται εξερευνητικά όχηματα με ταχύτητα  $v_0 = 300-400$  km/s. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το εξερευνητικό όχημα θα επιταχυνόταν σε ταχύτητα 5.000 km/s από λευκούς νάνους σε 100 μόνο έτη, και από αστέρες νετρονίων σε ταχύτητα 100.000 km/s σε 300 μόνο έτη (με την προϋπόθεση φυσικά ότι θα μπορούσε να αντέξει τις φοβερές παλιρροϊκές δυνάμεις στη γειτονιά ενός αστέρα νετρονίων). Κατ' αρχήν, είναι δυνατές ακόμη και πο εκλεπτυσμένες παραλλαγές



### Πίνακας 3

Θέση εκτόξευσης	Τύπος αστρικού πληθυσμού	$n$ (pc <sup>-3</sup> )	$\sigma$ (km/s)	$t$ (έτη)	$v_{max}$ (km/s)
Κοντά στον Ήλιο	άστρα του δίσκου	0,1	45	$10^5$	400
	άστρα της άλω	0,005	250	$2 \cdot 10^5$	400
	λευκοί νάνοι	0,05	50	$2 \cdot 10^5$	5.000
	αστέρες νετρονίων	( $10^{-3}$ )	(100)	$4 \cdot 10^5$	$10^5$
Αστρικό σμήνος	κοινά άστρα	$4 \cdot 10^4$	20	$4 \cdot 10^3$	400
	λευκοί νάνοι	( $5 \cdot 10^4$ )	20	$3 \cdot 10^3$	5.000
	αστέρες νετρονίων	( $10^3$ )	20	$10^4$	$10^5$
Κέντρο του Γαλαξία ( $R = 1$ pc)	λευκοί νάνοι	( $10^6$ )	250	300	5.000
	αστέρες νετρονίων	( $10^4$ )	250	$10^3$	$10^5$

Χαρακτηριστικός χρόνος επιτάχυνσης για ένα διαστημόπλοιο που εκτοξεύεται από διάφορες θέσεις και χρησιμοποιεί διάφορα αστρικά σμήνη στο Γαλαξία. Η αρχική ταχύτητα είναι  $v_0 = 100$  km/s. Οι εντός παρενθέσεων αριθμοί είναι θεωρητικές τιμές· όλες οι υπόλοιπες στηρίζονται στην παρατήρηση.

της βαρυτικής επιτάχυνσης διαστρικών εξερευνητικών οχημάτων. Για παράδειγμα, οι αστροφυσικοί γνωρίζουν συστήματα διπλών άστρων, που αποτελούνται από έναν αστέρα νετρονίων και έναν λευκό νάνο. Αυτά τα συμπαγή άστρα διαγράφουν τροχιές με ταχύτητα μεγαλύτερη από 1.000 km/s. Η προσέγγιση σε μία από τις συνιστώσες ενός τέτοιου συστήματος θα αύξανε την ταχύτητα του εξερευνητικού οχημάτος κατά 2.000 km/s! Τα εν λόγω συστήματα βρίσκονται συνήθως στα βάθη των σφαιρωτών αστρικών σμηνών. (Στην πραγματικότητα, οι κεντρικές περιοχές αυτών των αστρικών σμηνών αποτελούν ιδιαιτέρως ελκυστικά μέρη για πολιτισμούς που τολμούν να κάνουν τα πρώτα βήματα στο δρόμο του αποκινού του διαστήματος.)

### Αόρατοι διαστημικοί ανιχνευτές

Σήμερα διαθέτουμε πολύ συμπαγείς και ενεργειακά αποδοτικές συσκευές πληροφοριών. Μικρομεταλλάκτες και μικροεπεξεργαστές βρίσκονται στα πιο απρόβλεπτα μέρη — σε τηλεφωνικές συσκευές, στυλό διαρκείας, τετράδια και ευχετήριες κάρτες. Βρισκόμαστε μάλιστα στο κατώφλι μιας νέας εποχής στη μικροχει-

ρουργική, κατά την οποία μικροσκοπικές συσκευές που θα ακολουθούν την κυκλοφορία του αίματος θα συλλέγουν πληροφορίες για διάγνωση και θα θεραπεύουν.

Η διαστημική έρευνα θα ακολουθήσει πιθανώς ανάλογη πορεία. Σήμερα είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι θα μπορούσε πράγματι να κατασκευαστεί κάποια μέρα ένα διαστρικό διαστημόπλοιο, όπως ο προτεινόμενος Daedalus, που απαιτεί πύραυλο μήκους ενός χιλιομέτρου με πυρηνικό κινητήρα. Ένα τέτοιο τέρας θα μπορούσε να συναρμολογηθεί μόνο σε τροχιά γύρω από τη Γη, και το αναγκαίο έργο θα διαρκούσε 15 χρόνια. Για μία πτήση με ολιγομελές πλήρωμα, θα έπρεπε να ξοδεύτει ολόκληρο το απόθεμα των πυρηνικών καυσίμων που υπάρχει στον πλανήτη. Μόνο τότε θα μπορούσε ο εν λόγω πύραυλος να επιταχυνθεί σε ταχύτητα λίγων εκατοντάδων χιλιομέτρων ανά δευτερόλεπτο. Ένα ταξίδι στο πλανήστερο άστρο θα διαρκούσε εκατό χρόνια περίπου. Τεράστια ποσότητα προσπάθειας και χρήματος θα έπρεπε να δαπανηθεί για μία μόνο αποστολή, το κόστος της οποίας θα ανερχόταν σε τρισεκατομμύρια δολάρια. Αυτό το σχέδιο δεν αποτελεί παρά ένα όνειρο. Μια πολυεπιδοφόρος μέθοδος με-

λέτης του μακρινού σύμπαντος θα ήταν να κατασκευάσουμε πολλές όμοιες, σχετικά ανέξοδες εξερευνητικές μικροσυσκευές, μεγέθους περίπου 1 m και μάζας 10-100 kg. Με δεδομένο τον σημερινό γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης εξαρτημάτων σε όλο και μικρότερες κλίμακες, οι εν λόγω συσκευές θα μπορούσε να είναι ακόμη μικρότερες. Αυτή είναι η μοναδική προσέγγιση στην έρευνα του Γαλαξία που δεν θα εξαντλούσε τις ενεργειακές και υλικές εφεδρείες του πλανήτη. Εφόσον οι εξερευνητικές μικροσυσκευές θα είναι πράγματα μικρές, θα μπορούν να εισέλθουν σε περιοχές σχετικά πυκνής διαστρικής και διαπλανητικής ύλης και να πλησιάσουν πολύ συμπαγή και μεγάλης μάζας αντικείμενα.

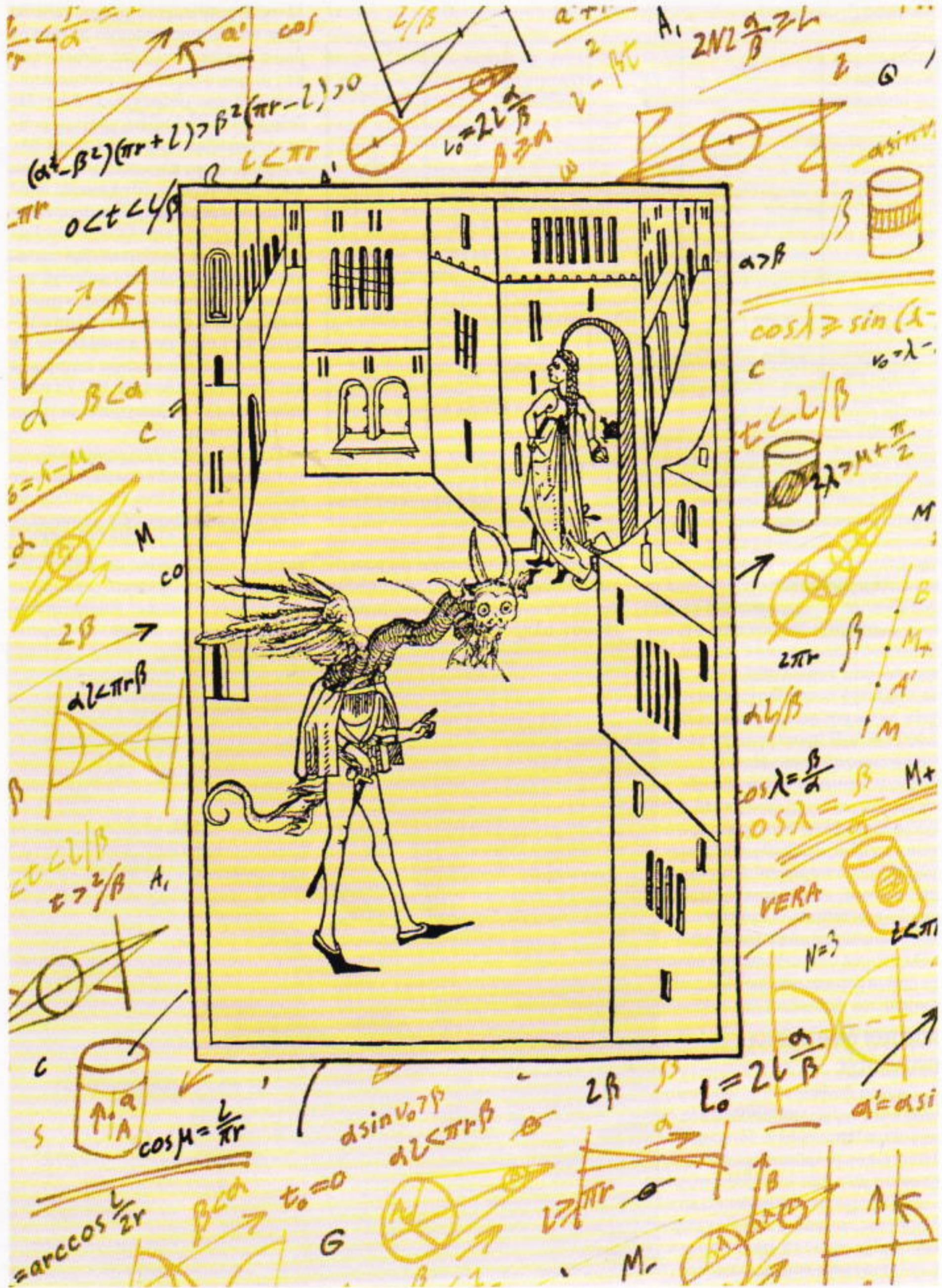
Η στρατηγική της χρησιμοποίησης των εξερευνητικών μικροσυσκευών πρέπει να αποτελέσει το αντικείμενο ενός άλλου άρθρου. Μια τέτοια εξέταση θα περιλάμβανε το δυναμικό της οπτικής επικοινωνίας ως της ευνοϊκότερης για τις τεράστιες αποστάσεις που εμπλέκονται, και επίσης τη δυνατότητα της επιστροφής των εξερευνητικών οχημάτων στον τόπο εκτόξευσή τους.

Εάν έχουν εισέλθει στο ηλιακό μας σύστημα παρόμοιες εξερευνητικές συσκευές, οι οποίες πιθανόν εκτόξευτηκαν από άλλα πλανητικά συστήματα, προς το παρόν δεν διαθέτουμε τρόπο ανίχνευσή τους. Χωρίς αμφιβολία, το ίδιο θα αλήθευε και για τις δικές μας μελλοντικές εξερευνητικές συσκευές, αλλά και για οποιεδήποτε νοήμονες μορφές ζωής ελπίζουμε να συναντήσουμε. Έτσι, η μέθοδος που προτείνουμε για τη γαλαξιακή αναγνωριστική αποστολή φαίνεται η ασφαλέστερη και η πιο υπεύθυνη για τις μορφές ζωής του πλανήτη μας.

### — ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ —

**Το φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο**

ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6, Τ.Κ. 106 79 - ΑΘΗΝΑ,  
ΤΗΛ.: 36 28 492



# Καταδίωξη σε έναν άπειρο κύλινδρο

Μια γεωμετρική προσέγγιση προβλημάτων ανίχνευσης και εντοπισμού

A. Chkhartishvili και E. Shikin

**Α**ΡΚΕΤΑ ΣΥΧΝΑ ΑΝΑΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ και ανίχνεύουμε με ευκολία στην καθημερινή ζωή τις ρίζες ακόμη και των πλέον αφηρημένων μαθηματικών προβλημάτων. Μερικές φορές, οι περιστάσεις που γεννούνται αυτά τα προβλήματα είναι εξαιρετικά απομακρυσμένες από τα μαθηματικά.

Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε μια τέτοια κατηγορία προβλημάτων: την ανίχνευση και τον εντοπισμό.

Δεν χρειάζεται να τονίσουμε τη σημασία των προβλημάτων αναζήτησης στη ζωή μας. Είναι μάλιστα αδύνατον να προσδιορίσουμε με ακρίβεια πότε άρχισαν να ελκύουν την προσοχή του ανθρώπου τέτοια προβλήματα.

Εύκολα μπορούμε να φανταστούμε έναν μακρινό πρόγονό μας να μπαίνει προσεκτικά σε μια σπηλιά κρατώντας έναν πυρσό. Έπρεπε οπωσδήποτε να βεβαιωθεί ότι το πιθανό κατάλυμά του δεν είχε επικίνδυνους κατοίκους όπως άγρια ζώα, δηλητηριώδη φυτά, φίδια ή αράχνες. Αν υπήρχαν, ο πρόγονός μας έπρεπε να τα βρει και να τα εκδιώξει.

Μια ελαφρώς εκσυγχρονισμένη εκδοχή αυτής της προϊστορικής περιπέτειας συναντάμε στο δυναμικό παιχνίδι που ονομάζεται «Η Πεντάμορφη και το Τέρας», όπου το Τέρας πρέπει να συλλάβει την Πεντάμορφη μέσα σ' ένα σκοτεινό δωμάτιο. Το δωμάτιο έχει τυχαίο σχήμα, γνωστό και στους δύο παίκτες (ίσως επειδή υπάρχουν μικροί φεγγίτες ψηλά στους τοίχους, που αφήνουν να περάσει

λίγο φως). Το Τέρας, που υποτίθεται ότι είναι εξαιρετικά ευφυές, κινείται με σταθερή ταχύτητα και μπορεί να αλλάζει στιγμιαία την κατεύθυνσή του, ενώ η Πεντάμορφη έχει απόλυτη ελευθερία κινήσεων. Η σύλληψη επιτυγχάνεται όταν η απόσταση μεταξύ του Τέρατος και της Πεντάμορφης γίνει μικρότερη από μια δεδομένη τιμή.

Ιδιού ένα ακόμη παράδειγμα. Φανταστείτε ένα μεσαιωνικό κάστρο που περιβάλλεται από όμορφο δάσος. Ο ιδιοκτήτης του, ένας πλούσιος και ευγενής δούκας, για να αποτρέψει τις εχθρικές εισβολές, έχει διατάξει να κατασκευαστεί δρόμος γύρω από το κάστρο, όπου περιπολούν οι ποστοί του ιππότες (Σχήμα 1). Ο δούκας πρέ-

πει να αποφασίσει πόσοι ιππότες χρειάζονται ώστε κανένας εχθρός να μην μπορεί να διασχίσει απαρατήρητος το δρόμο. Θα απαντήσουμε αργότερα στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Όπως διαπιστώνουμε, όσοι συμμετέχουν σ' αυτά τα προβλήματα αναζήτησης έχουν διαφορετικούς στόχους: κάποιοι αναζητούν, ενώ άλλοι προσπαθούν να κρυφτούν ή να διαφύγουν. Τα προβλήματα που θα μελετήσουμε εδώ αφορούν ένα μόνο αντικείμενο που αναζητεί —τον «ερευνητή»— και, εν γένει, τυχαίο πλήθος αναζητούμενων αντικειμένων. Η συμπεριφορά των αναζητούμενων αντικειμένων μπορεί επίσης να ποικίλλει. Επομένως, πρέπει να διακρίνουμε τις αναζητήσεις που αφορούν στάσιμα από αυτές που αφορούν κινούμενα αντικείμενα. Στη δεύτερη περίπτωση, τα ποι ενδιαφέροντα προβλήματα είναι εκείνα στα οποία τα αναζητούμενα αντικείμενα προσπαθούν να αποφύγουν τη σύλληψη και, επομένως, χρησιμοποιούν κατά την κίνησή τους όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες για τον αντίπαλό τους.

Τα σύνολα αναζήτησης —δηλαδή τα σύνολα στα οποία διεξάγεται η διαδικασία αναζήτησης— παρουσιάζουν αφάνταστη ποικιλία. Ένα από τα απλούστερα είναι ο άπειρος κύλινδρος, και σ' αυτόν θα διαδραματίστούν τα περισσότερα από τα βασικά γεγονότα που ακολουθούν.

Σε τούτο το άρθρο προτείνουμε μια γεωμετρική προσέγγιση των προβλημάτων αναζήτησης που χρησιμοποιεί



Σχήμα 1

συγκεκριμένα βοηθητικά σύνολα, η μορφή και θέση των οποίων αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Θα μας διευκολύνει αν αρχίσουμε να εξετάζουμε τη φύση τους, την προέλευσή τους και τις χρήσιμες ιδιότητές τους στην επίπεδη περίπτωση (δηλαδή όταν όλα τα αντικείμενα κινούνται σε ένα μοναδικό επίπεδο).

### Απλή αναζήτηση στο επίπεδο

Έστω  $A$  και  $B$  δύο σημειακά αντικείμενα σ' ένα επίπεδο. Υποθέτουμε ότι μπορούν να μετακινηθούν με σταθερές ταχύτητες  $a$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, όπου  $a > \beta$ , και ότι δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί στη συμπεριφορά τους. Θα λέμε ότι το αντικείμενο  $B$  ανιχνεύεται από το αντικείμενο  $A$  όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι μικρότερη ή ίση ενός σταθερού θετικού αριθμού  $\ell$ . Θα ονομάζουμε το  $A$  ερευνητή και το  $B$  φυγάδα.

**Πληροφορίες διαθέσιμες στα αντικείμενα.** Υποθέτουμε ότι και τα δύο αντικείμενα γνωρίζουν τη μορφή του συνόλου αναζήτησης και τις τιμές των παραμέτρων  $a$ ,  $\beta$  και  $\ell$ . Εππλέον, ο φυγάς  $B$  γνωρίζει τη μελλοντική τροχιά του ερευνητή  $A$  καθώς και τη θέση τού  $A$ , οποιαδήποτε στιγμή, μέσα στο σύνολο αναζήτησης. Από την άλλη πλευρά, ο ερευνητής  $A$  αγνοεί τη θέση του αντικειμένου  $B$  ώς τη στιγμή του πιθανού εντοπισμού.

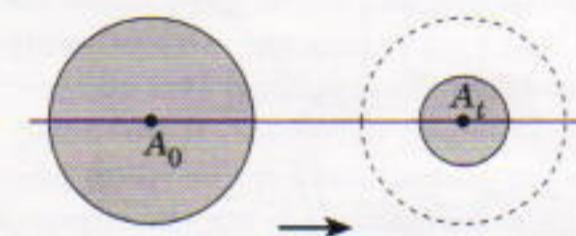
Όταν η ταχύτητα ενός αντικειμένου είναι σταθερή, λέμε ότι η κίνησή του είναι «απλή».

Το αντικείμενο ερευνητής,  $A$ , ακολουθείται από έναν φανταστικό κύκλο ακτίνας  $\ell$ , στου οποίου το κέντρο παραμένει συνεχώς (Σχήμα 2). Αν το αντικείμενο φυγάς,  $B$ , βρεθεί στον  $\ell$ -κύκλο εντοπισμού, εκπληρώνεται ο στόχος του  $A$ . Προφανώς, το  $A$  προσπαθεί να βρει το  $B$ , που με τη σειρά του προσπαθεί να αποφύγει τη σύλληψη.

**Απαγορευμένα σύνολα.** Όσο το  $A$  παραμένει ακίνητο, ο  $\ell$ -κύκλος εντοπισμού είναι απαγορευμένο σύ-

νόλο για το  $B$ . Από τη στιγμή, όμως, που το  $A$  αρχίζει να κινείται (με ταχύτητα  $a$ ), αρχίζει να μεγαλώνει το απαγορευμένο σύνολο για το  $B$ . Θα δείξουμε γιατί συμβαίνει αυτό.

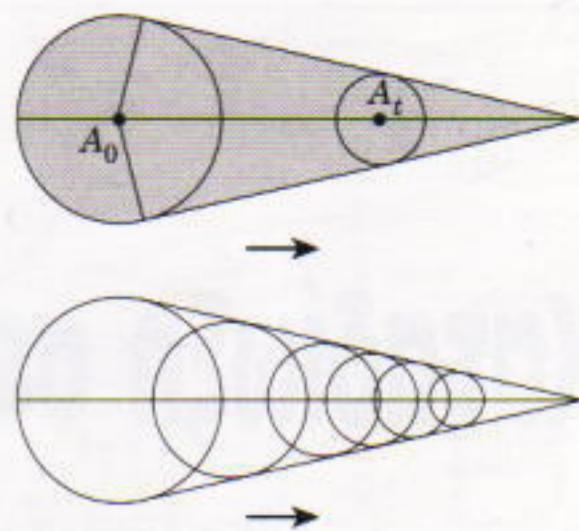
Ας υποθέσουμε ότι το  $A$  κινείται κατά μήκος μιας ευθείας  $L$ . Τότε, κάθε στιγμή κοντά στην  $L$  και κατά την κατεύθυνση που κινείται το  $A$ , δημιουργείται ένα σύνολο μέσα στο οποίο δεν πρέπει να βρεθεί το  $B$ , διότι διαφορετικά θα εντοπιστεί από το  $A$ . Ας κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, θεωρώντας ότι το  $A$  αρχίζει την κίνησή του κατά τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $A$  ξεκινά από το σημείο  $A_0$  και ότι έπειτα από  $t$  μονάδες χρόνου φτάνει στο σημείο  $A_t$  (Σχήμα 3). Στη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος το  $B$  μπορεί να απομακρυνθεί κατά απόσταση  $\beta t$  το



Σχήμα 3

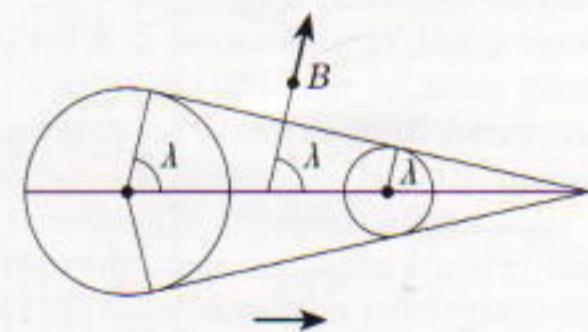
πολύ (προς οποιαδήποτε κατεύθυνση), και επομένως, αν βρεθεί σε έναν κύκλο ακτίνας  $\ell - \beta t$  γύρω από το  $A$ , θα εντοπιστεί. Άρα, αυτός ο κύκλος αποτελεί τμήμα του απαγορευμένου για το  $B$  συνόλου. Είναι φανερό ότι, αν το  $B$  βρίσκεται αρχικά σ' αυτό τον κύκλο, τότε τη στιγμή  $t$ , όταν το  $A$  φτάνει στο  $A_t$ , θα εισέλθει στον  $\ell$ -κύκλο εντοπισμού.

Αυτή η επιχειρηματολογία ισχύει για κάθε  $t$  μεταξύ του 0 και του  $\ell/\beta$ . Συνεπώς, όλοι οι κύκλοι που σχεδιάζονται με αυτό τον τρόπο (οι οποίοι στοιχίζονται κατά μήκος της  $L$  και οι ακτίνες τους μειώνονται κατά την κατεύθυνση που κινείται το  $A$ ) είναι επίσης απαγορευμένοι για το  $B$ . Η ένωσή τους φράσσεται από ένα τόξο ενός κύκλου ω ακτίνας  $\ell$  και από δύο ευθύγραμμα τμήματα τα οποία εφαπτούνται σ' αυτό τον κύκλο και ξεκινούν από το σημείο της  $L$  που απέχει  $a t / \beta$  από το κέντρο του κύκλου (Σχήμα 4). Θα ονομάσουμε αυτό το σχήμα περιοχή προειδοποίησης. Η γωνία  $\lambda$  που σχηματίζουν η  $L$  και η ακτίνα τού  $\omega$  προς το σημείο επαφής ορίζεται από την εξισώση  $\sin \lambda = \beta/a$ .



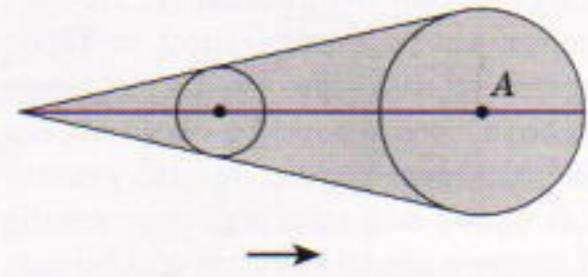
Σχήμα 4

Καλούμε τον αναγνώστη να αποδειξεί ότι, αν το  $B$  βρίσκεται εκτός της περιοχής προειδοποίησης, μπορεί να ξεφύγει από το  $A$  εάν κινηθεί κατά τη διεύθυνση που σχηματίζει γωνία  $\lambda$  με την τροχιά τού  $A$  (ή, ισοδύναμα, αν κινηθεί κάθετα προς το ευθύγραμμο κομμάτι του συνόρου της περιοχής προειδοποίησης) (Σχήμα 5).



Σχήμα 5

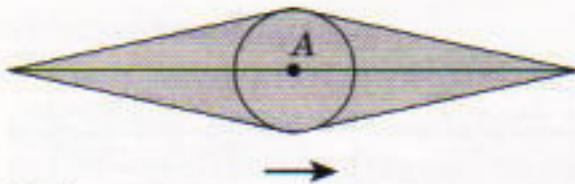
Υπάρχει και άλλο ένα σύνολο στο οποίο δεν μπορεί να εισέλθει το  $B$ : είναι η περιοχή από την οποία έχει απομακρυνθεί το  $A$  μαζί με τον  $\ell$ -κύκλο εντοπισμού. Η δομή της είναι απολύτως όμοια με αυτήν της περιοχής προειδοποίησης: είναι ένωση κύκλων με κέντρα που ανήκουν στην τροχιά τού  $A$  και με ακτίνες που αυξάνονται σταδιακά (έως ότου γίνουν  $\ell$  — την ακτίνα του  $\ell$ -κύκλου εντοπισμού). Θα ονομάσουμε αυτό το σύνολο υπολειμματική περιοχή. Παρατηρήστε ότι έπειτα από χρονικό διάστημα  $\ell/\beta$  μετά την έναρξη της κίνησης του  $A$  η υπολειμματική περιοχή παίρνει τη μορφή του Σχήματος 6.



Σχήμα 6



Σχήμα 2



Σχήμα 7

Θα ονομάσουμε την ένωση της περιοχής προειδοποίησης και της υπολειμματικής περιοχής **περιοχή ανίχνευσης** (Σχήμα 7).

**Ιδιότητες της περιοχής ανίχνευσης** (στην περίπτωση που η τροχιά του αντικειμένου  $A$  είναι ευθεία γραμμή).

1. Το μήκος του τμήματος της τροχιάς που ανήκει στην περιοχή ανίχνευσης ισούται με

$$L_0 = 2\ell \frac{a}{\beta}.$$

2. Το σχήμα της περιοχής ανίχνευσης δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση της κίνησης ούτε από χρονικές στιγμές  $t$  μεγαλύτερες από τη θεωρούμενη  $\ell/\beta$ .

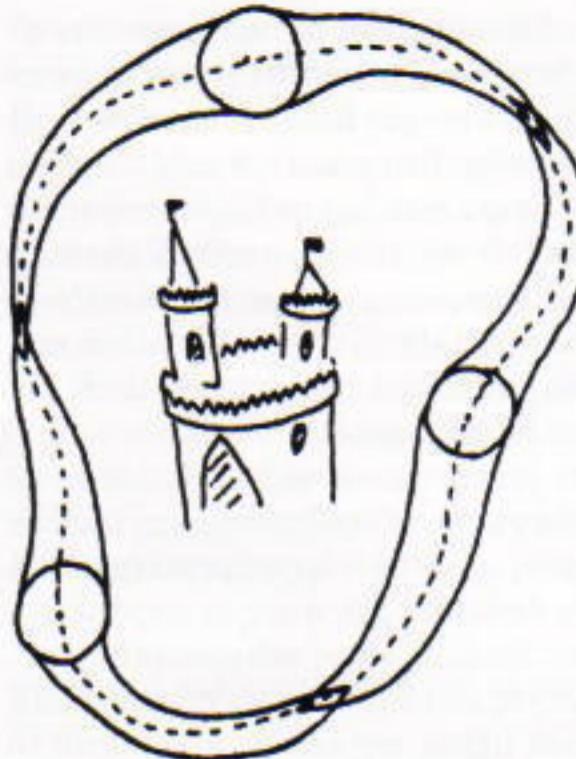
3. Η ευθεία  $L$  είναι áξονας συμμετρίας της περιοχής ανίχνευσης, και το κέντρο του  $\ell$ -κύκλου εντοπισμού είναι κέντρο συμμετρίας της.

Ας επανέλθουμε στους ιππότες που περιπολούν στο μονοπάτι γύρω από το κάστρο. Ας υποθέσουμε ότι κινούνται όλοι με την ίδια ταχύτητα  $a$  και ότι η μεγαλύτερη ταχύτητα την οποία μπορεί να αναπτύξει ένας από τους εχθρούς που προσπαθούν να μπουν στο κάστρο (πρέπει να διασχίσει το μονοπάτι για να το καταφέρει) είναι  $\beta < a$ . Υποθέτουμε επίσης ότι ένας ιππότης μπορεί να αναγνωρίσει έναν κατάσκοπο όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι το πολύ  $\ell$ .

Κάθε ιππότης, καθώς περιπολεί στο μονοπάτι, μεταφέρει μαζί τη δική του περιοχή ανίχνευσης. Αυτές οι περιοχές καθορίζονται από τους αριθμούς  $a$ ,  $\beta$ , και  $\ell$  και από την τροχιά — δηλαδή από τη διαδρομή των φρουρών που έχει μήκος  $L$ . Κάθε περιοχή ανίχνευσης αποκόπτει από το μονοπάτι ένα τμήμα μήκους  $L_0$ . Επομένως, το πλήθος  $N$  των ιπποτών που απαιτούνται για να προστατέψουν το κάστρο από την εχθρική εισβολή πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$2N\ell \frac{a}{\beta} \geq L$$

(δείτε το Σχήμα 8, όπου  $N = 3$ ).



Σχήμα 8

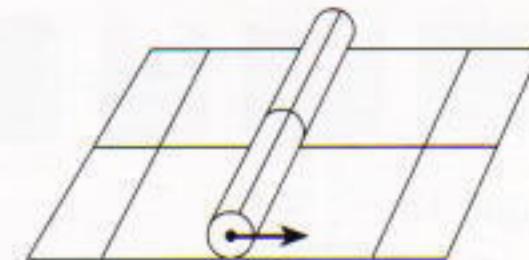
### Αναζήτηση στον άπειρο κύλινδρο

Ορίζουμε ως άπειρο κύλινδρο το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από δεδομένη ευθεία γραμμή — τον λεγόμενο **άξονα του κυλίνδρου**. Η τομή του κυλίνδρου με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονά του είναι ένας κύκλος, που ονομάζεται **οδηγός**. Η ακτίνα του οδηγού κύκλου είναι ανεξάρτητη από το τέμνον επίπεδο και ονομάζεται ακτίνα του κυλίνδρου. Η τομή του κυλίνδρου και κάθε επιπέδου που περιέχει τον άξονά του είναι δύο ευθείες γραμμές — οι γενέτειρες του κυλίνδρου.

Έστω  $C$  ένας άπειρος κύλινδρος ακτίνας  $r$ . Θεωρούμε μια άπειρη λωρίδα  $P$  του επιπέδου, πλάτους  $2\pi r$  (δηλαδή ένα τμήμα του επιπέδου που φράσσεται από δύο παράλληλες ευθείες). Προφανώς, μπορούμε να τυλίξουμε τη λωρίδα  $P$  γύρω από τον κύλινδρο έτσι ώστε οι ευθείες που την ορίζουν να συμπέσουν μεταξύ τους και με μία από τις γενέτειρες του κυλίνδρου. Ή, αν ξεκινήσουμε από τον κύλινδρο, μπορούμε να τον κόψουμε κατά μήκος μιας από τις γενέτει-



Σχήμα 9

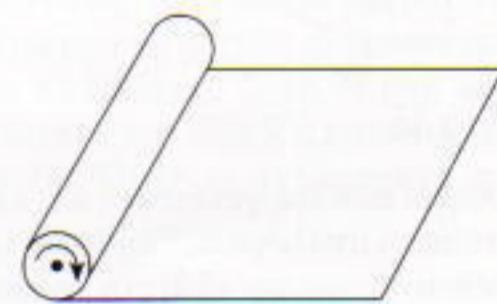


Σχήμα 10

ρες και να τον «ξετυλίξουμε», ώστε να προκύψει μια λωρίδα πλάτους  $2\pi r$  (Σχήμα 9).

**Επίπεδο ανάπτυγμα του κυλίνδρου.** Φανταστείτε τώρα ότι βάφουμε μία γενέτειρα του κυλίνδρου και έναν από τους οδηγούς κύκλους με χρώμα που δεν στεγνώνει ποτέ. Έπειτα από κάθε περιστροφή του κυλίνδρου, μία γενέτειρα θα αποτυπώνει στο επίπεδο μια ευθεία γραμμή. Η απόσταση μεταξύ αυτών των αποτυπώμάτων θα ισούται με  $2\pi r$  — την περιφέρεια του οδηγού κύκλου. Το ίχνος που αφήνει ο οδηγός κύκλος είναι επίσης ευθεία γραμμή (Σχήμα 10).

Αν αντιστρέψουμε τη διαδικασία, μπορούμε να τυλίξουμε ολόκληρο το επίπεδο, ώστε να σχηματιστεί κύλινδρος (Σχήμα 11). Ποια μορφή θα έχουν οι ευθείες του επιπέδου έπειτα από αυτή τη διαδικασία;



Σχήμα 11

Μπορούμε να κατατάξουμε σε τρεις κατηγορίες αυτές τις ευθείες, ανάλογα με τη γωνία που σχηματίζουν με τη διεύθυνση της περιτύλιξης:

1. Ευθείες παράλληλες προς αυτή τη διεύθυνση (σχηματίζουν τους οδηγούς κύκλους του κυλίνδρου (Σχήμα 12)).



Σχήμα 12

2. Ευθείες κάθετες προς αυτή τη διεύθυνση (η καθεμία τους μετατρέπεται σε γενέτειρα (Σχήμα 13)).



Σχήμα 13

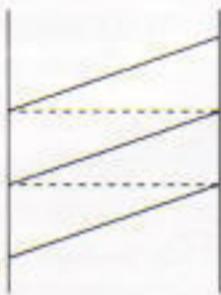
3. Ευθείες που σχηματίζουν οξεία γωνία με αυτή τη διεύθυνση (μετατρέπονται σε καμπύλες επί του κυλίνδρου, που ονομάζονται έλικες (Σχήμα 14)).



Σχήμα 14

Έχει ενδιαφέρον να ερευνήσουμε τη μορφή που παίρνουν οι έλικες στο επίπεδο ανάπτυγμα του κυλίνδρου.

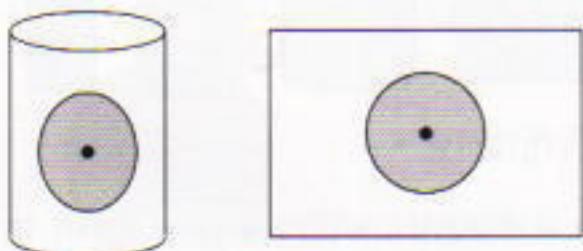
Έστω μια έλικα  $\Gamma$  σ' έναν κύλινδρο  $C$ . Κόβουμε τον  $C$  κατά μήκος μιας γενέτειρας και τον αναπτύσσουμε στο επίπεδο. Το Σχήμα 15 παρουσιάζει την εικόνα της έλικας έπειτα από αυτή τη διαδικασία. Παρατηρήστε ότι δεν είναι συνεχής γραμμή.



Σχήμα 15

Οδηγοί κύκλοι, γενέτειρες και έλικες είναι τα ανάλογα των ευθειών του επιπέδου: έχουν την ιδιότητα να είναι οι συντομότερες διαδρομές μεταξύ σημείων. Γραμμές με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται γεωδαισιακές.

Ας θεωρήσουμε όλες τις δυνατές γεωδαισιακές που ξεκινούν από ένα τυχαίο σημείο του κυλίνδρου  $C$ , και ας σημειώσουμε όλα τα τρίγματα που έχουν μήκος  $\ell < \pi r$  μονάδες. Η ένωση όλων αυτών των τριγμάτων ονομάζεται γεωδαισιακός κύκλος ακτίνας  $\ell$  (Σχήμα 16).

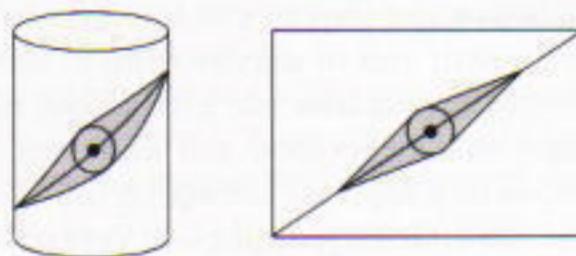


Σχήμα 16

Δύο οημειακά αντικείμενα — το αντικείμενο ερευνητής  $A$  και το αντικείμενο φυγάς  $B$  — κινούνται σε έναν κύλινδρο  $C$  ακτίνας  $r$ . Υποθέτουμε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων τους  $a$  και  $b$  (αντίστοιχα) είναι σταθερά και ότι  $a > b$ . Θεωρούμε ότι το  $B$  εντοπίζεται όταν εισέλθει στον γεωδαισιακό κύκλο με ακτίνα  $\ell$  και κέντρο το  $A$ .

Ας θεωρήσουμε ότι αρχικά το  $B$  δεν βρίσκεται κοντά στο  $A$ , και ότι το τελευταίο γνωρίζει σε ποιο από τα ημίση του κυλίνδρου βρίσκεται το  $B$ . Θα δείξουμε ότι, όταν οι παράμετροι του προβλήματος ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες, υπάρχει μια έλικα κατά μήκος της οποίας κινούμενο το  $A$  οπωσδήποτε θα εντοπίσει το  $B$ .

Είναι φανερό πως, όταν το  $A$  κινείται σε μια έλικα, εμφανίζεται γύρω του μια περιοχή ανίχνευσης η οποία είναι ένωση γεωδαισιακών κύκλων. Αν αναπτύξουμε τον κύλινδρο στο επίπεδο, η έλικα θα μετατραπεί σε ευθεία και οι γεωδαισιακοί κύκλοι σε συνηθισμένους κύκλους, και, επομένως, η περιοχή ανίχνευσης θα μετατραπεί σε μια συνηθισμένη επίπεδη περιοχή ανίχνευσης (Σχήμα 17).

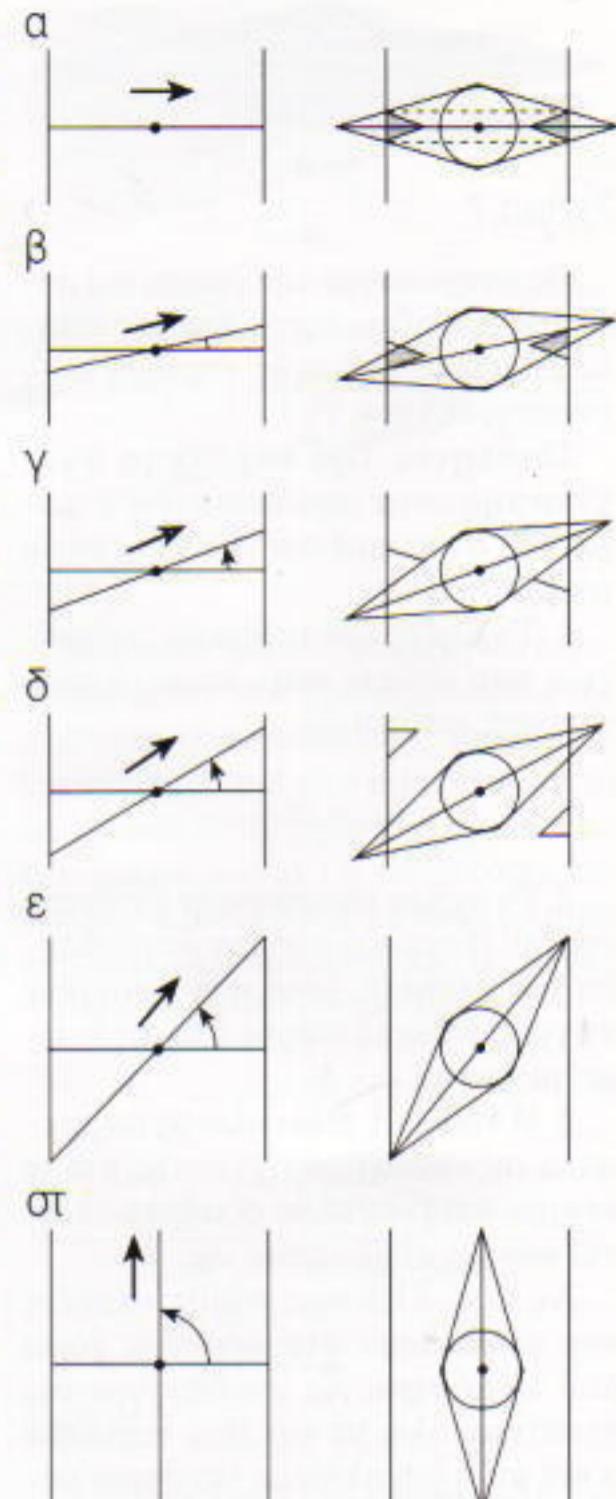


Σχήμα 17

Ας δούμε πώς μεταβάλλεται η κατάσταση όταν αλλάζουμε τη γωνία μεταξύ της τροχιάς του  $A$  και του οδηγού κύκλου (δηλαδή τη γωνία κλίσης). Ας υποθέσουμε ότι ικανοποιείται η επόμενη ανισότητα:

$$al > \pi r b.$$

Έστω ότι το αντικείμενο  $A$  αρχίζει να κινείται κατά μήκος ενός οδηγού κύκλου του κυλίνδρου. Η περιοχή ανίχνευσης θα περιέχει τότε μια κυλινδρική λωρίδα, μη μηδενικού πλάτους, που είναι απαγορευμένη για το  $B$  (Σχήμα 18a). Όταν το  $A$  κινείται κατά μήκος μιας έλικας με μικρή γωνία κλίσης, η περιοχή ανίχνευσης εξακολουθεί να περιβάλλει τον κύλινδρο, ενώ η περιοχή προειδοποίησης και η υπολειμματική περιοχή επικαλύπτονται (Σχήμα 18β). Αυτό θα εξακολου-



Σχήμα 18

θήσει να συμβαίνει ως τη στιγμή που η περιοχή προειδοποίησης και η υπολειμματική περιοχή θα ακουμπήσουν εφαπτομενικά η μια την άλλη (αυτό μας το εξασφαλίζει η τρίτη από τις ιδιότητες της περιοχής ανίχνευσης που ισχύουν όταν η τροχιά του αντικειμένου  $A$  είναι ευθεία). Μπορούμε να υπολογίσουμε (Σχήμα 18γ) ότι αυτό συμβαίνει όταν η γωνία μεταξύ της έλικας και του οδηγού κύκλου είναι ίση με

$$v_0 = \lambda - \mu,$$

όπου το  $\lambda$  ορίζεται όπως πριν και

$$\mu = \text{τοξουν}(\ell/\pi r).$$

Μόλις αυξηθεί κι άλλο η γωνία  $v_0$ , η εικόνα αλλάζει απότομα: η περιοχή ανίχνευσης δεν περιλαμβάνει πλέον καμία κυλινδρική λωρίδα (Σχήμα 18δ και 18ε). Το αντικείμενο του Σχήματος 18στ κινείται κατά μήκος μιας γε-

γενέτειρας του κυλίνδρου.

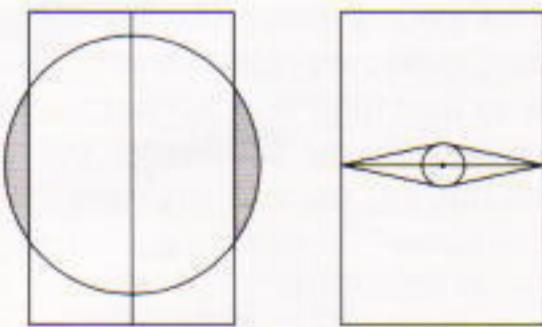
Όταν το  $A$  κινείται κατά μήκος μιας γεωδαισιακής του κυλίνδρου, το σχήμα της περιοχής ανίχνευσης παραμένει σταθερό, όπως ακριβώς όταν κινείται κατά μήκος μιας ευθείας του επιπέδου με σταθερή ταχύτητα. Επομένως, όταν ακολουθεί μια έλικα  $\Gamma_0$  που σχηματίζει γωνία  $v_0$  με τον οδηγό κύκλο, είναι αδύνατον να περάσει το  $B$  στο άλλο μέρος του κυλίνδρου. Αν επιπλέον η προβολή της ταχύτητας του  $A$  στον άξονα του κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του  $B$  (δηλαδή, αν  $a\mu v_0 > \beta$ ), τότε το  $A$  θα προλάβει το  $B$ .

Αφού  $\sigma_{vA} = \beta/a$  και  $v_0 = \lambda - \mu$ , η τελευταία ανισότητα γράφεται ως

$$2\lambda > \mu + \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Επομένως, αν ικανοποιείται ο τύπος (1), ο εντοπισμός είναι δυνατός, και επιτυγχάνεται όταν το  $A$  κινείται κατά μήκος μιας έλικας  $\Gamma_0$  που σχηματίζει με τον οδηγό κύκλο γωνία  $v_0$ .

Αν  $\ell \geq \pi r$ , το  $A$  μπορεί απλώς να κινηθεί κατά μήκος μιας γενέτειρας, και θα προλάβει το  $B$  λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητάς του. Τέλος, στην περίπτωση που  $a\ell < \pi r\beta$ , ο εντοπισμός είναι πρακτικά αδύνατος (Σχήμα 19).



Σχήμα 19

## Δύο προβλήματα ανίχνευσης στον άπειρο κύλινδρο

Η εφαρμογή της έννοιας της περιοχής ανίχνευσης στα προβλήματα αναζήτησης δεν μας δίνει μόνο τις θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων που αρκούν για τον επιτυχή εντοπισμό. Μας επιτρέπει επιπλέον να καθορίσουμε τις αναγκαίες τροχιές.

**A. Η απειριότητη περίπτωση.** Αποδείξαμε προηγουμένως ότι το αντικείμενο  $A$ , το οποίο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου  $a$ , θα εντοπίσει πάνω σ' έναν άπειρο κυλιν-

δρο ακτίνας  $r$  το αντικείμενο  $B$ , που κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου  $\beta$ , με την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η ανισότητα (1) και όταν γνωρίζει σε ποιο από τα δύο ημίση του κυλίνδρου βρίσκεται αρχικά το  $B$ . Στην πραγματικότητα, όταν ικανοποιείται η ανισότητα (1), η δεύτερη πληροφορία είναι πλεονασμός. Ας δούμε γιατί.

Σύμφωνα με τις δυνατότητές του, το  $A$  διαλέγει αρχικά ως τροχιά την έλικα  $\Gamma_0$ , που σχηματίζει με τον οδηγό κύκλο γωνία

$$v_0 = \lambda - \mu,$$

όπου τα  $\lambda$  και  $\mu$  ορίζονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{vA} = \beta/a, \quad \sigma_{vB} = \ell/\pi r.$$

Ανεξάρτητα από τη διεύθυνση της κίνησης του  $A$ , η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του (υποθέτουμε ότι ο κύλινδρος  $C$  είναι προσανατολισμένος όπως στο Σχήμα 20) είναι σταθερή και ισούται με

$$a' = a\mu v_0.$$



Σχήμα 20

Προφανώς, το καλύτερο που μπορεί να κάνει το  $B$  είναι να κινηθεί κατά μήκος μιας γενέτειρας του κυλίνδρου. Επομένως, η προσπάθειά μας να δείξουμε ότι δεν έχει σημασία σε ποιο τμήμα του κυλίνδρου βρίσκεται αρχικά το  $B$  θα διευκολυνθεί αν θεωρήσουμε τις προβολές της κίνησης των δύο αντικειμένων στον κατακόρυφο άξονα.

Έστω δύο αντικείμενα  $A'$ ,  $B$  που κινούνται με ταχύτητες σταθερών μέτρων  $a'$  και  $\beta$  αντίστοιχα (όπου  $\beta < a'$ ) κατά μήκος μιας (κατακόρυφης) ευθείας. Θα περιγράψουμε μια στρατηγική που επιτρέπει στο  $A'$  να πλησιάσει σε απόσταση  $\ell$  από το  $B$ . Ας φανταστούμε δύο νέα αντικείμενα  $M_+$  και  $M_-$  που ξεκινούν από την αρχική θέση τού  $A'$  και κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητα



Σχήμα 21

$$\frac{a'+\beta}{2}$$

(Σχήμα 21). Το αντικείμενο  $A'$  αρχίζει να κινείται προς τα πάνω ακολουθώντας την ευθεία, και μόλις προλάβει το  $M_+$  (λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητάς του), αλλάζει αρμέσως κατεύθυνση και κινείται προς τα κάτω. Όταν φτάσει το  $M_-$ , αλλάζει ξανά κατεύθυνση και αρχίζει να καταδιώκει το  $M_+$ , και ούτω καθεξής.

Είναι φανερό ότι με αυτό τον τρόπο το  $A'$  θα βρεθεί αργά ή γρήγορα σε απόσταση μικρότερη του  $\ell$  από το  $B$ .

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η κίνηση του  $A'$  κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου αντιστοιχεί στην κίνηση του  $A$  επί της ελίκας  $\Gamma_0$ .

### B. Η περιορισμένη περίπτωση.

Ας υποθέσουμε ότι το αντικείμενο ερευνητής  $A$  γνωρίζει αρχικά ότι το αντικείμενο φυγάς  $B$  βρίσκεται σε μια κυλινδρική ζώνη  $G$  που φράσσεται από δύο οδηγούς κύκλους (Σχήμα 22). Όταν το αντικείμενο ερευ-

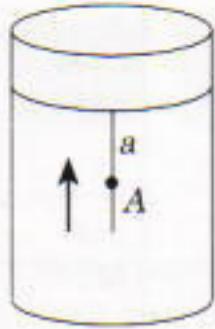


Σχήμα 22

νητής βρίσκεται αρκετά μακριά από αυτή τη ζώνη αβεβαιότητας  $G$ , τότε με την πάροδο του χρόνου το πλάτος της  $G$  αυξάνει (με ρυθμό  $2\beta$ ).

Θα περιγράψουμε μια τροχιά που επιτρέπει στο αντικείμενο  $A$  να εντοπίσει υποχρεωτικά το αντικείμενο  $B$ , υποθέτοντας ότι οι παραμέτροι του προβλήματος ικανοποιούν την ανισότητα (1).

Υπάρχουν τρεις δυνατότητες. Κατά την αρχική στιγμή  $t_0 = 0$ , ο  $\ell$ -κύ-

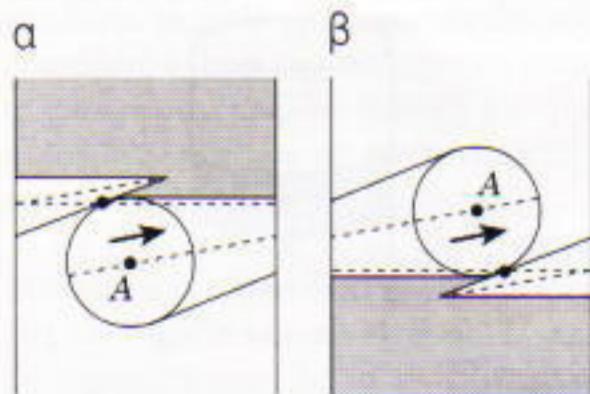


Σχήμα 23

κλος εντοπισμού που περιβάλλει το  $A$

- (1) βρίσκεται έξω από τη ζώνη  $G$ ,
- (2) περιέχεται εξ ολοκλήρου στη ζώνη  $G$ ,
- (3) τέμνει μερικώς τη ζώνη  $G$ .

Στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο κάνονας κατασκευής της τροχιάς αναζήτησης είναι κοινός. Πρώτα, το  $A$  κινείται προς τον κοντινότερο συνοριακό κύκλο της ζώνης  $G$  κατά μήκος μιας γενέτειρας του κυλίνδρου  $C$ , ώσπου η απόστασή του από αυτό τον κύκλο να γίνει μικρότερη ή ίση του  $a = \text{ήμημ}$  (Σχήμα 23). Τη στιγμή αυτή το  $A$  αλλάζει τροχιά, και ακολουθεί την έλικα  $\Gamma_0$  (βλ. Σχήμα 24a, όπου παρουσιάζεται η θέση της περιοχής προειδοποίησης και του συνοριακού κύκλου εκείνη τη στιγμή). Στη συνέχεια, κινείται πάνω στη  $\Gamma_0$  έως ότου η απόστασή του από το άλλο σύνορο της ζώνης γίνει μικρότερη ή ίση του  $\text{ήμημ}$ . Το Σχήμα 24b απεικονίζει τη θέση της υπολειμματικής περιοχής και του δεύτερου συνοριακού κύκλου κατά την τελευταία φάση του παιχνιδιού αναζήτησης.

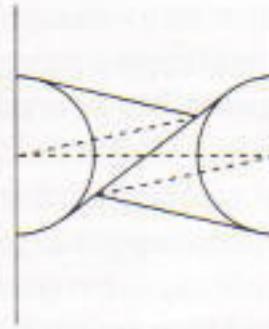


Σχήμα 24

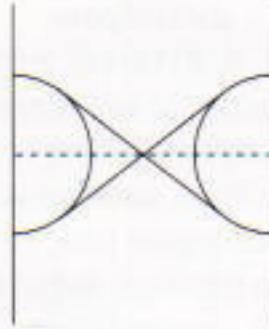
Αφού μας ενδιαφέρει να βρούμε μόνο ικανές για την επιτυχή ανίχνευση συνθήκες, μπορούμε να αναγάγουμε την τρίτη περίπτωση σε μία από τις δύο προηγούμενες.

### Προβλήματα απώθησης, περιπολίας και παρενόχλησης

Όταν θεωρούμε την κίνηση τυχαίων αντικειμένων  $A$  και  $B$  στην ε-



Σχήμα 25



Σχήμα 26

κλος. Τότε, η περιοχή προειδοποίησης και η υπολειμματική περιοχή έχουν κοινή κορυφή, και έτσι το  $A$ , περιπολώντας, εμποδίζει το  $B$  να περάσει από αυτή την περιοχή του κυλίνδρου (Σχήμα 26).

**Γ. Παρενόχληση.** Ας υποθέσουμε ότι

$$\ell/\pi r < \beta/a \leq 1.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, το  $A$  δεν μπορεί να εμποδίσει την κίνηση του  $B$  στον κύλινδρο. Μπορεί όμως να παρενοχλεί τις κινήσεις του  $B$  κινούμενο πάνω στην έλικα  $\Gamma_0$  που σχηματίζει γωνία  $\mu - \lambda$  με τον οδηγό κύκλο, περιβάλλει συνεχώς τον κύλινδρο με την περιοχή ανίχνευσης. Επειδή όμως η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι μικρότερη ή ίση του  $\beta$ , το  $A$  μπορεί μόνο να απωθεί το  $B$ , και μάλιστα μόνο όταν γνωρίζει σε ποιο μέρος του κυλίνδρου βρισκόταν αρχικά. Το Σχήμα 25 παρουσιάζει αυτή την κατάσταση (βλέπουμε το ανάπτυγμα του κυλίνδρου, ενώ η τομή έχει γίνει κατά μήκος της γενέτειρας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου εντοπισμού).

**Α. Απώθηση.** Ας υποθέσουμε ότι

$$\ell < \pi r, \beta < a, \text{ and } \lambda < \eta\mu(\lambda - \mu).$$

Σ' αυτή την περίπτωση, όταν το  $A$  κινείται πάνω στην έλικα  $\Gamma_0$  που σχηματίζει γωνία  $\nu_0 = \lambda - \mu$  με τον οδηγό κύκλο, περιβάλλει συνεχώς τον κύλινδρο με την περιοχή ανίχνευσης. Επειδή όμως η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι μικρότερη ή ίση του  $\beta$ , το  $A$  μπορεί μόνο να απωθεί το  $B$ , και μάλιστα μόνο όταν γνωρίζει σε ποιο μέρος του κυλίνδρου βρισκόταν αρχικά. Το Σχήμα 25 παρουσιάζει αυτή την κατάσταση (βλέπουμε το ανάπτυγμα του κυλίνδρου, ενώ η τομή έχει γίνει κατά μήκος της γενέτειρας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου εντοπισμού).

Από την άλλη πλευρά, αν

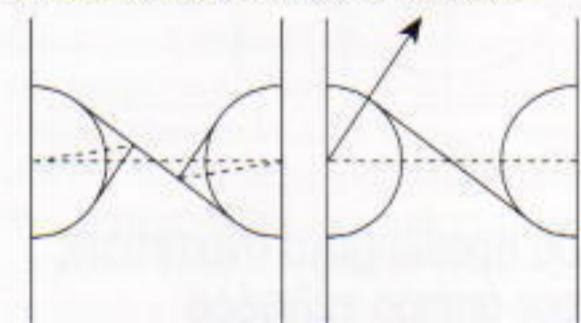
$$\ell \geq \pi r, \beta \geq a,$$

ο ίδιος ο κύκλος εντοπισμού θα περιβάλλει τον κύλινδρο, και αν επιπλέον το  $A$  γνωρίζει σε ποιο μέρος του κυλίνδρου βρισκεται το  $B$ , μπορεί να το απωθήσει κινούμενο κατά μήκος μιας γενέτειρας.

**Β. Περιπολία.** Ας υποθέσουμε ότι

$$\ell/\pi r = \beta/a < 1.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η βέλτιστη τροχιά για το  $A$  είναι ένας οδηγός κύ-



Σχήμα 27

Τα τελευταία προβλήματα μπορεί να σας φάνηκαν μάλλον απλά (καταφέραμε να επισημάνουμε ακόμη και ποιες σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων εξασφαλίζουν τη λύση καθενός, αλλά και ποιες στρατηγικές οδηγούν σε επιτυχία τα αντικείμενα). Αυτό όμως το πετύχαμε επειδή μπορούσαμε να βασίσουμε τις λύσεις μας στην πρηγούμενη ανάλυση του δυσκολότερου προβλήματος του εντοπισμού. ◻

# Τρεις φυσικοί κι ένα κούτσουρο

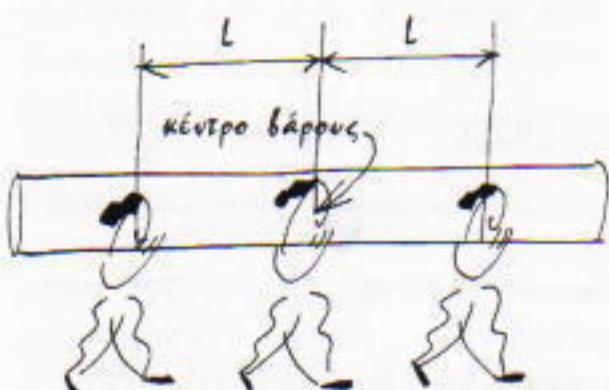
Τότε ήμασταν νέοι και δυνατοί. Τώρα ξέρουμε φυσική.

Roman Vinokur

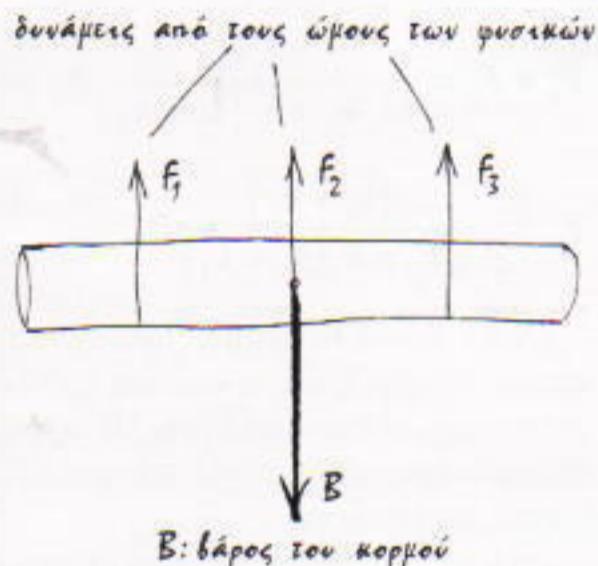
**M**ΙΑ ΦΟΡΑ ΚΙ ΕΝΑΝ ΚΑΙΡΟ ΉΤΑΝ τρεις φυσικοί που μετέφεραν κορμούς για να χτίσουν ένα σπίτι (Σχήμα 1). Οι ώμοι τους πονούσαν, αλλά κανείς δεν παραπονιόταν. Οι φυσικοί, ωστόσο, είναι φυσικοί ακόμη και όταν κάνουν βαριές δουλειές. Κάποιος από αυτούς, λοιπόν, έθεσε ένα ενδιαφέρον ζήτημα: Ποια ακριβώς θέση κάτω από τον κορμό —μπροστά, στη μέση ή πίσω— δέχεται το μεγαλύτερο φορτίο; Διέκοψαν για λίγο, λοιπόν, για να σχεδιάσουν το διάγραμμα στατικής ισορροπίας στο χώμα (Σχήμα 2). Θεώρησαν τρία υποστηρίγματα (τους ώμους τους) ισαπέχοντα (σε απόσταση  $L$  το ένα από το άλλο), με το μεσαίο υποστηρίγμα να βρίσκεται ακριβώς κάτω από το κέντρο βάρους του δοκαριού. Υπέθεσαν ότι ο κορμός ήταν οριζόντιος, έτσι ώστε οι δυνάμεις  $F_1$ ,  $F_2$  και  $F_3$  στα υποστηρίγματα να είναι κατακόρυφες.

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις για τη στατική ισορροπία μπορούσαν να γραφτούν με τη μορφή

$$F_1 L = F_3 L$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(λόγω της ισότητας των ροπών ως προς το κέντρο βάρους) ή

$$F_1 = F_3 \quad (1)$$

και

$$F_1 + F_2 + F_3 = B \quad (2)$$

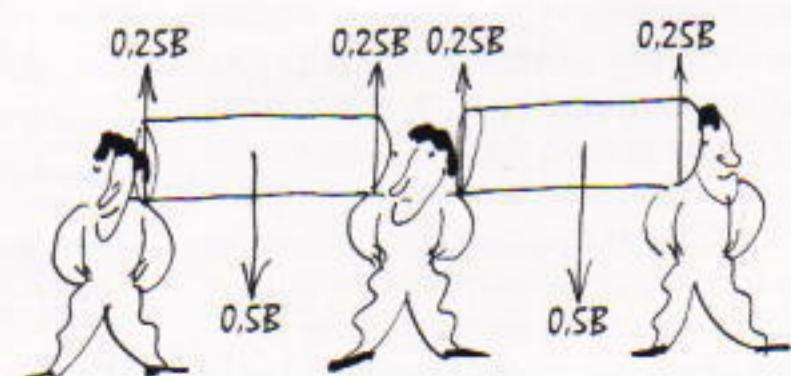
(το βάρος  $B$  του δοκαριού ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων  $F_1$ ,  $F_2$  και  $F_3$ ). Οι φυσικοί, λοιπόν, κατέληξαν στις δύο γραμμικές εξισώσεις (1) και (2), που περιέχουν τρεις αγνώστους. Ο αριθμός των δυνατών λύσεων σε μια τέτοια περίπτωση είναι άπειρος. Για παράδειγμα,  $F_1 = F_3 = 0$ ,  $F_2 = B$  (δηλαδή ο ένας δουλεύει σκληρά και οι άλλοι ξεκουράζονται) ή  $F_1 = F_3 = B/2$ ,  $F_2 = 0$  (όπου η προηγούμενη κατάσταση έχει αντιστραφεί). Φυσικά, αληθεύει επίσης η «δίκαιη» λύση  $F_1 = F_2 = F_3 = B/3$ .

Αργότερα οι φυσικοί, αφού έψαξαν σε μερικά βι-

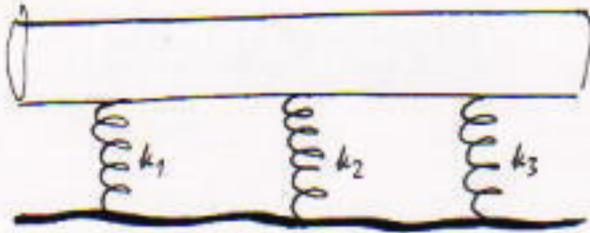
βλία, έμαθαν ότι ένα τέτοιο πρόβλημα ονομάζεται στατικά απροσδιόριστο. Οφείλω να σημειώσω εδώ ότι οι φυσικοί μας ήταν πολύ νέοι. Στην πραγματικότητα, ήταν απλώς πρωτοετείς φοιτητές της φυσικής, και ανάμεσά τους συγκαταλεγόταν ο συγγραφέας.

«Λοιπόν», είπε ο Jeff, «ξέρω τι θα κάνουμε. Ας θεωρήσουμε ότι ο κορμός είναι κομμένος στη μέση του. Δηλαδή ότι αποτελείται από δύο όμοια μέρη. Έστω τώρα ότι ο Peter και ο Roman υποστηρίζουν τα εξωτερικά άκρα, και ότι εγώ μένω στο κέντρο, κρατώντας τα εσωτερικά άκρα» (Σχήμα 3).

«Το πρόβλημα διαθέτει μία μοναδική λύση», συνέχισε ο Jeff. «Ο καθένας σας βάζει δύναμη  $B/4$ , κι εγώ πρέπει να αντέξω φορτίο  $2(B/4) = B/2$ , επειδή υποστηρίζω και τα δύο άκρα ταυτόχρονα. Δεν έχω δίκιο; Βέβαιως! Άρα η μοναδική λύση είναι  $F_1 = F_3 = B/4$ ,  $F_2 = B/2$ . Ο δυστυχής που βρίσκεται στο κέντρο πρέπει να δουλεύει σκληρότερα. Ε, λοιπόν, μου φαίνεται ότι η «μέση οδός» δεν είναι πάντοτε η καλύτερη!»



Σχήμα 3



Σχήμα 4

«Γιά περίμενε λίγο!», διαμαρτυρήθηκε ο Peter. «Ήμουν και στη μέση και πίσω, και δεν παρατήρησα καμία διαφορά. Νομίζω, Jeff, ότι το μοντέλο είναι λανθασμένο! Ισως δεν είναι και τόσο καλή ιδέα να “κόψουμε” τον κορμό. Τι λες κι εσύ, Roman?»

«Δεν είμαι βέβαιος», απάντησα χαμηλόφωνα. «Μου φαίνεται όμως ότι χρειάζεται να καταστρώσουμε μερικές συμπληρωματικές εξισώσεις, ώστε να λάβουμε υπόψη την παραμόρφωση του δοκαριού και των σωμάτων μας. Δεν θα είναι εύκολο, αλλά...»

Και ίδου η λύση που καταφέραμε να βρούμε.

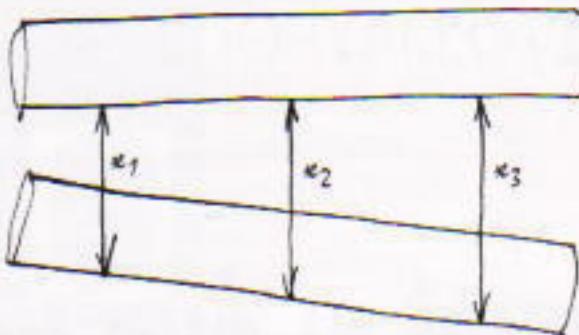
Αφού το ξύλο είναι σκληρότερο από το ανθρώπινο σώμα, δεχτήκαμε ότι ο κορμός είναι απολύτως στερεός (δεν υφίσταται καμία παραμόρφωση). Από την άλλη, θεωρήσαμε τα σώματά μας ως απλά ελατήρια, με σταθερές  $k_1$ ,  $k_2$  και  $k_3$  (Σχήμα 4). Από την άποψη της φυσικής, το μοντέλο μόνο δίνει την εντύπωση ότι ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα: όσο δυνατότερος ο μεταφορέας τόσο μεγαλύτερη η σταθερά ελατηρίου του.

Εάν όλα τα ελατήρια είχαν αρχικά το ίδιο ύψος, οι παραμορφώσεις τους  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  μετά το φόρτωμα σχετίζονται γραμμικά:

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \quad (3)$$

(βλ. Σχήμα 5). Αυτή η απλή σχέση ισχύει επειδή ο κορμός θεωρείται ευθύγραμμος και άκαμπτος, και το μεσαίο υποστήριγμα ισαπέχει από το πρόσθιο και το οπίσθιο υποστήριγμα. Οι παραμορφώσεις  $x_1$ ,  $x_2$  και  $x_3$  θεωρήθηκαν μικρές, ώστε να αποφευχθεί η κλίση του κορμού κατά μεγάλη γωνία. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι οριζόντιες συνιστώσεις των δυνάμεων είναι σχετικά ασήμαντες, και μπορούμε να τις παραβλέψουμε χωρίς σοβαρές συνέπειες.

Χρησιμοποιώντας τον πασίγνωστο



Σχήμα 5

νόμο του Hooke ( $F_i = k_i x_i$ , όπου  $i = 1, 2, 3$ ) και την εξίσωση (3), βρήκαμε

$$\frac{F_2}{k_2} = \frac{F_1/k_1 + F_3/k_3}{2}. \quad (4)$$

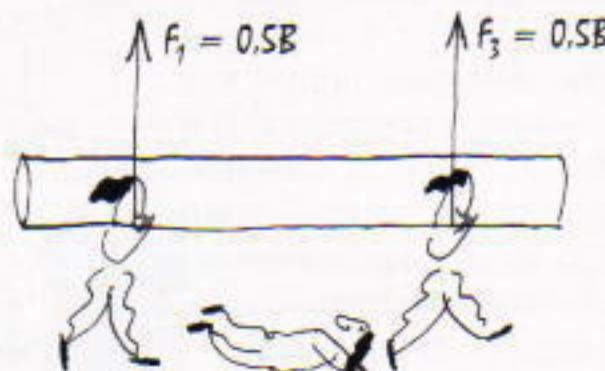
Αφού λύσαμε το σύστημα των τριών γραμμικών εξισώσεων (1), (2) και (4), καταλήξαμε στην τελική λύση:

$$F_1 = F_3 = \frac{2k_1 k_3}{4k_1 k_3 + k_2(k_1 + k_3)} B, \\ F_2 = \frac{k_2(k_1 + k_3)}{4k_1 k_3 + k_2(k_1 + k_3)} B. \quad (5)$$

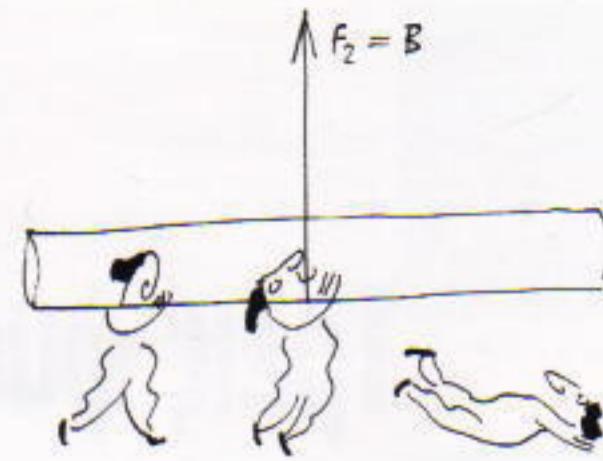
Οι εν λόγω εκφράσεις φαίνονται κάπως άκομψες, και επομένως χρειάζονται περαιτέρω ανάλυση. Ως αρχή, ανασκοπήσαμε εν τάχει τις απλούστερες περιπτώσεις.

Εάν τα ελατήρια είναι ίδια ( $k_1 = k_2 = k_3$ ), οι εξισώσεις μας δίνουν  $F_1 = F_2 = F_3 = B/3$ . Έτσι, το φορτίο κατανέμεται εξίσου στους «ιοδύναμους» μεταφορείς. Τι θα συμβεί, όμως, εάν κάποιος από εμάς σκοντάψει και πέσει;

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση αυτή για τον μεσαίο φυσικό (Σχήμα 6). Τώρα  $k_1 = k_3$ ,  $k_2 = 0$ . Οι εξισώσεις (5) συνεπάγονται  $F_2 = 0$ ,  $F_1 = F_3 = B/2$ . (Παρεμπιπτόντως, στην περίπτωση των δύο μεταφορέων το πρόβλημα είναι στατικά προσδιορισμένο, και μπορούμε να το λύσουμε χωρίς να καταφύγουμε στην εξίσωση (4).) Έτσι, το φορτίο το οποίο σηκώνουν οι φυσικοί που βρίσκονται μπροστά και πίσω



Σχήμα 6



Σχήμα 7

αυξάνεται κατά 50% σε σχέση με την περίπτωση των τριών φυσικών.

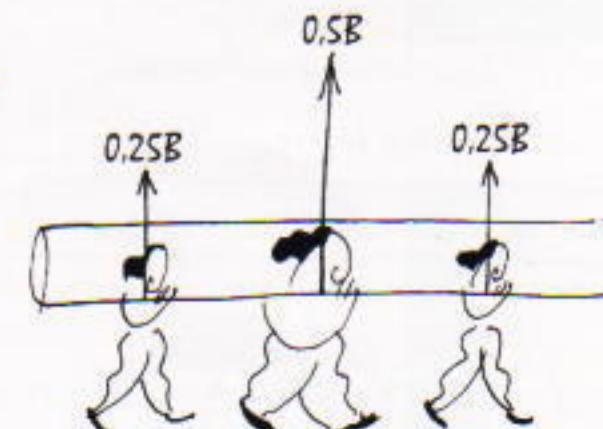
Εάν πέσει ο μπροστινός φυσικός (Σχήμα 7), έτσι ώστε  $k_2 = k_1$ ,  $k_3 = 0$ , το αποτέλεσμα της εξίσωσης (5) φαίνεται παράδοξο:  $F_1 = F_3 = 0$ ,  $F_2 = B$ . Ο Θεός να βοηθήσει τον δυστυχή που βρίσκεται στη μέση! Όλο το βάρος πέφτει στους ώμους του. Εάν μάλιστα ο πίσω φυσικός προσπαθήσει να βοηθήσει σπρώχνοντας προς τα πάνω το άκρο του κορμού, δημιουργείται ροπή που τείνει να στρέψει το δοκάρι κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού —επομένως, να το απομακρύνει από τη θέση ισορροπίας του...

Φυσικά, παρόμοιο είναι το σενάριο στην περίπτωση που γλιστρήσει και πέσει ο πίσω μεταφορέας.

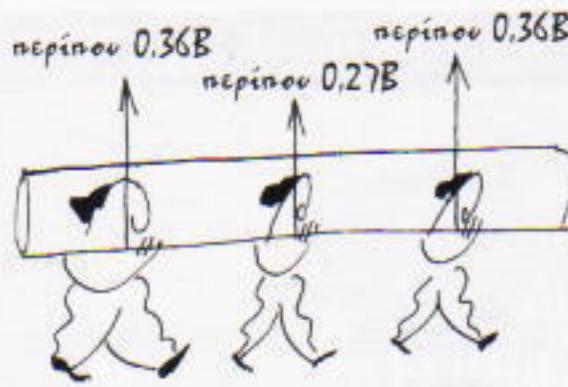
Στο σημείο αυτό, ο Peter και ο Jeff θυμήθηκαν ότι δεν ήταν καθόλου «ισοδύναμοι». Ο Jeff ήταν δύο φορές δυνατότερος από τον κάθε φίλο του (ήταν πρωταθλητής της άρσης βαρών στην πόλη του).

«Εντάξει, λοιπόν», είπε ο Peter, «ας υποθέσουμε ότι η μία από τις σταθερές ελατηρίου είναι διπλάσια από τις άλλες δύο. Είσαι γίγαντας, Jeff κι οι δύο μας σε θαυμάζουμε!»

Αναλύσαμε δύο περιπτώσεις: (1) με τον Jeff στη μέση, και (2) με τον Jeff πίσω. Στην πρώτη περίπτωση,  $k_1 = k_3$



Σχήμα 8



Σχήμα 9

και  $k_2 = 2k_1$ . Εφαρμόζοντας τις συγκεκριμένες σχέσεις στις εξισώσεις (5), πήραμε  $F_1 = F_3 = B/4$ ,  $F_2 = B/2$  (Σχήμα 8).

«Ε, αυτό μου φαίνεται γνωστό!», αναφώνησε ο Jeff ξεσπώντας σε γέλια. «Το αρχικό μου μοντέλο αποδειχτήκε λανθασμένο, αλλά εξακολούθω να είμαι στη μέση σηκώνοντας το μεγαλύτερο βάρος!»

«Όχι μόνο εσύ», είπε ο Peter. «Κοιταξε τη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 9). έχουμε  $k_2 = k_3$  και  $k_1 = 2k_2$ . Και το αποτέλεσμα είναι  $F_1 = F_3 = 4B/11$ ,  $F_2 = 3B/11$ . Έτσι, όταν μετακινήθηκα από πίσω στη μέση, δεν ένιωσα καμία σημαντική διαφορά, επειδή  $3B/11 \approx 0.27B$  είναι μόλις λίγο περισσότερο από  $0.25B$ . Ο Jeff, βέβαια, δοκίμασε μια ποση σημαντική αλλαγή:  $4B/11 \approx 0.36B$  αντί  $0.5B$ . Άρα, και οι δύο είχαμε δίκιο, Jeff! Γι' αυτό εσύ αισθάνθηκες διαφορά αλλάζοντας θέση από πίσω στη μέση, ενώ εγώ όχι.

Για μία ακόμη φορά διαπιστώνουμε πόσο σημαντικό είναι να γνωρίζεις φυσική!

«Και πόσο σημαντικό είναι να έχουμε καλούς φίλους», προσέθεσε εγώ.

Αυτά συνέβησαν εδώ και πολλά χρόνια. Από τότε, τα πράγματα άλλαξαν αρκετά. Είναι αλήθεια ότι τώρα πλέον μπορούμε να λύνουμε κάθε στατικά απροσδιόριστο πρόβλημα, αλλά όσον αφορά τη μεταφορά κορμών μάλλον δεν μας το επιτρέπουν οι ώμοι μας...

**O Roman Vinokur** είναι φυσικός, απόφοιτος του Πολυτεχνείου της Μόσχας, με ειδίκευση στη μηχανική. Εργάζεται ως μηχανικός στην εταιρεία Valeo Engine Cooling, στο Τζαϊμστάουν της Νέας Υόρκης. (Το παρόν άρθρο στηρίζεται σε πραγματικά γεγονότα.)

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

### Η ΓΟΗΤΕΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Serge Lang  
Πανεπιστήμιο Yale

Serge Lang

### Η γοητεία των Μαθηματικών

Τρεις συζητήσεις με το κοινό

«Ιως νιώθατε έκπληξη αν κάποιος ισχυριζόταν ότι τα μαθηματικά είναι κάπι εξαιρετικά όμορφα... Πολλοί είναι εκείνοι που τα αντιμετωπίζουν με προκατάληψη, η οποία αναπτύσσεται ήδη από τις πρώτες τάξεις της στοιχειώδους εκπαίδευσης... Μεγάλο μέρος της ύλης των σχολικών μαθηματικών είναι πολύ στεγνό και τεχνικό· συνεπώς, ίσως δεν είχατε ποτέ την τύχη να διαπιστώσετε πόσο όμορφα μπορεί να είναι στην πραγματικότητα. Ελπίζω ότι σ' αυτό το βιβλίο θα βρείτε κάπι πον να συμπληρώνει τα μαθηματικά που σας δίδαξαν η σας επέβαλαν, όποια κι αν είναι αυτά...»

—Serge Lang

Σε τούτο το βιβλίο περιλαμβάνονται οι τρεις συζητήσεις που είχε με το κοινό ο διακεκριμένος μαθηματικός Serge Lang κατά τις επισκέψεις του στο Palais de la Découverte του Παρισιού. Στις σελίδες του παρακολουθούμε πώς ο Lang, με αξιοθαύμαστη δεξιοτεχνία, κατορθώνει να αναλύσει σημαντικά ζητήματα των μαθηματικών (τους πρώτους αριθμούς, τις διοφαντικές εξισώσεις και μεγάλα προβλήματα της γεωμετρίας), να μεταδώσει κάπι από τη βαθύτερη γοητεία τους και να προκαλέσει το έντονο ενδιαφέρον του κοινού. Ο αναγνώστης δεν μπορεί παρά να νιώσει τον ίδιο ενθουσιασμό που συνεπήρε το ακροατήριο αυτού του πεπειραμένου δασκάλου.

O Serge Lang είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Yale.

Σελ.: 190, 14 × 21 εχ., 4.500 δρχ.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ**

# Ο τετραγωνισμός της υπερβολής

Μια διαφορετική προσέγγιση των λογαρίθμων και των εκθετικών συναρτήσεων

Andrey Yegorov

**Σ**ΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ, Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ  $x \rightarrow a^x$  εισάγεται συνήθως έπειτα από αρκετές γενικεύσεις της πράξης της ύψωσης αριθμών σε δύναμη. Στην αρχή ορίζονται οι δυνάμεις με φυσικούς εκθέτες, κατόπιν οι δυνάμεις με ρητούς εκθέτες, και τελικά οι δυνάμεις με άρρητους εκθέτες. Σ' αυτό το σημείο ορίζεται ο λογάριθμος ως η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης.

Στο παρόν άρθρο θα ακολουθήσουμε την αντίθετη προσέγγιση: θα αρχίσουμε από τον ορισμό του λογαρίθμου και μετά θα περάσουμε στην αντίστροφή του συνάρτηση, την «εκθετική». Ο ορισμός που θα δώσουμε προβάλλει πολλές από τις βασικές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων και επιτρέπει να κάνουμε εκτιμήσεις χρήσιμες στη φυσική. Επίσης, αποτελεί παράδειγμα μιας μαθηματικής μεθόδου που χρησιμοποιείται συχνά για την παραγωγή νέων συναρτήσεων με βάση αυτές που ήδη γνωρίζουμε.

Θα εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο στη συνάρτηση  $x \rightarrow 1/x$ , το γράφημα της οποίας ( $y = 1/x$ ) είναι, όπως γνωρίζετε, μια υπερβολή.

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** Έστω  $b$  ένας θετικός αριθμός. Συμβολίζουμε με  $\ln b$  τον πραγματικό αριθμό του οποίου η απόλυτη τιμή ισούται με το εμβαδόν του σχήματος που φράσσεται από το γράφημα της  $y = 1/x$ , τον θετικό άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = b$ . Θεωρούμε θετικό το πρόσημο αυτού του εμβαδού όταν  $b > 1$  (Σχήμα 1a) και αρνητικό

όταν  $b < 1$  (Σχήμα 1b). Αν  $b = 1$ , θέτουμε  $\ln b = 0$ . Καλούμε τη συνάρτηση  $b \rightarrow \ln b$  φυσικό λογάριθμο.

Ξαναγράφω διαφορετικά αυτό τον ορισμό για τους αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του ολοκληρώματος:

$$\ln b = \int_1^b \frac{1}{x} dx, \text{ για } b > 0.$$

Αν είστε πρόθυμοι να παρακολουθήσετε ολόκληρη την επιχειρηματολογία μας με κάθε αυστηρή λεπτομέρεια και να λύσετε όλα τα προβλήματα (που αποτελούν σημαντικό μέρος αυτού του άρθρου), χρειάζεστε βαθιά κατανόηση των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους. Το άρθρο πάντως είναι έτοι γραμμένο —τουλάχιστον αυτός ήταν ο στόχος μου— ώστε να κατανοήσουν όλες τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων και των εκθετών ακόμη και όσοι είναι εξοικειωμένοι μόνο με την «απλοϊκή» μορφή των εννοιών του ορίου, των πραγματικών αριθμών, της συ-

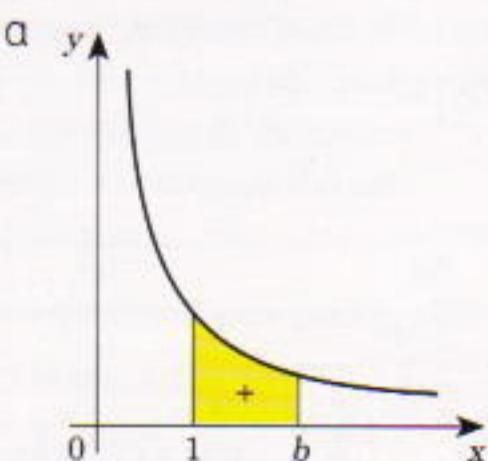
νέχειας, κ.λπ., και δεν γνωρίζουν όλες τις λεπτομέρειες που υπεισέρχονται στους αυστηρούς ορισμούς τους.

## Εμβαδόν

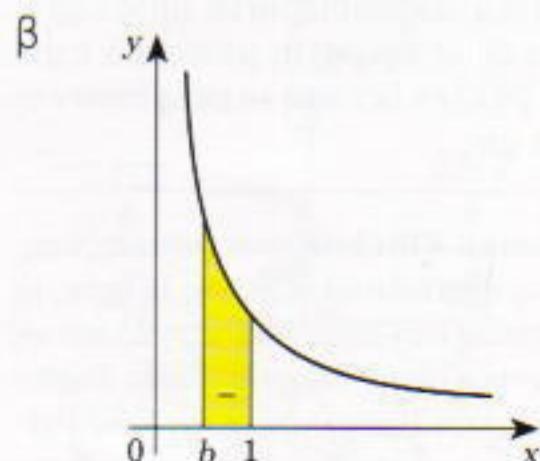
Μία από τις έννοιες που απαιτούν αυστηρό ορισμό είναι αυτή του εμβαδού. Πραγματικά, χρειάζεται να εξηγήσουμε τι εννοούμε με την πρόταση «το εμβαδόν ενός καμπυλόγραμμου τραπέζιου» (βλ. Σχήμα 1). Στο σχολείο έχουμε ακούσει για το εμβαδόν ενός πολυγώνου ή το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα και τμημάτων του, εδώ όμως έχουμε ένα «τραπέζιο» που η μα πλευρά του είναι υπερβολή.

Θα περιοριστούμε στη σημείωση ότι το εμβαδόν μπορεί να οριστεί για μεγάλη κλάση σχημάτων (που περιλαμβάνει όλα τα πολύγωνα, όλα τα κυρτά φραγμένα σχήματα και, επίσης, το «τραπέζιό» μας). Πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

1. Το εμβαδόν κάθε σχήματος είναι θετικός αριθμός.



Σχήμα 1

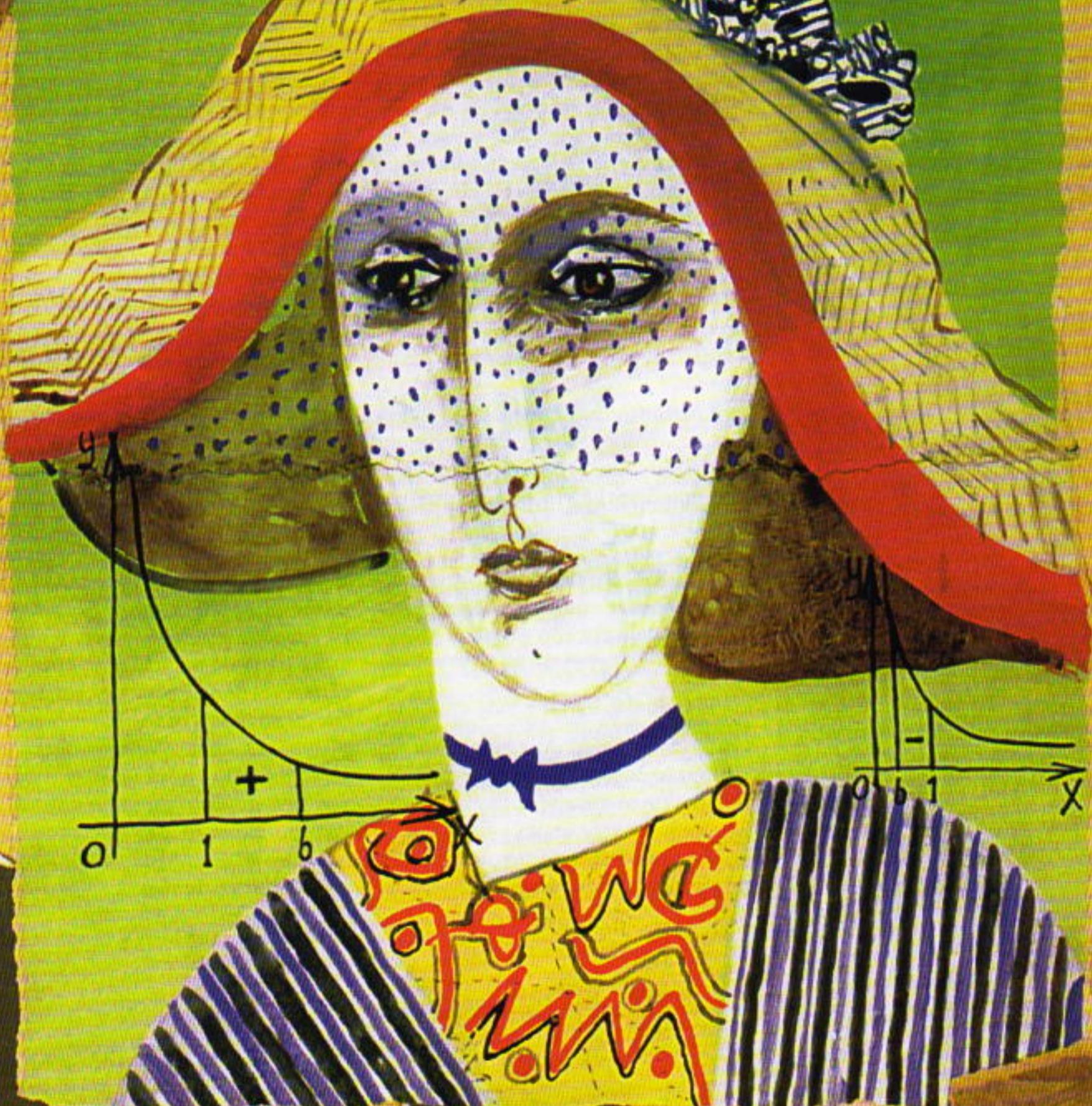


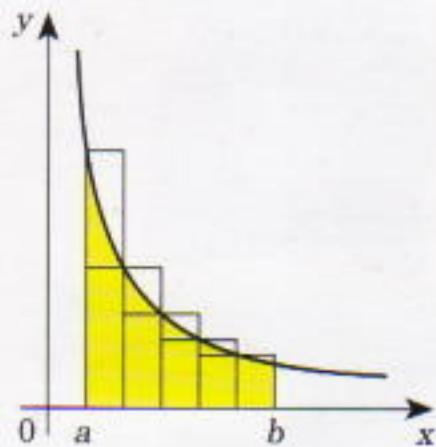
$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$a < x < b;$$

$$0 < y < \frac{1}{x}$$





Σχήμα 2

2. Τα σχήματα έχουν ίσα εμβαδά.
3. Αν χωρίσουμε ένα σχήμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε να ορίζεται και για τα δύο το εμβαδόν, τότε το άθροισμα των δύο εμβαδών ισούται με το εμβαδόν του αρχικού σχήματος.
4. Ένα ορθογώνιο με πλευρές  $a$  και  $b$  έχει εμβαδόν  $ab$ .

Δεν θα περιγράψω την κλάση των σχημάτων για τα οποία ορίζεται το εμβαδόν  $S$ , αλλά θα αποδείξω ότι το εμβαδόν ενός «καμπυλόγραμμου τραπεζίου»  $a < x < b, 0 < y < 1$  (Σχήμα 2) ορίζεται μονοσήμαντα από τις προηγούμενες συνθήκες 1-4.

Ας διαιρέσουμε το τμήμα  $[a, b]$  σε  $n$  ίσα τμήματα και ας κατασκευάσουμε δύο κλιμακωτές συναρτήσεις — δηλαδή σχήματα που μοιάζουν με σκάλες και αποτελούνται από ορθογώνια, με βάσεις  $(b-a)/n$  πάνω στον θετικό άξονα  $x$ . Η μία από αυτές περιέχει το «τραπέζιο», ενώ η δεύτερη περιέχεται σ' αυτό (Σχήμα 2). Εστω  $S'_n$  και  $S''_n$  τα εμβαδά των δύο κλιμακωτών συναρτήσεων. Τα εμβαδά αυτά είναι καλά ορισμένα βάσει των συνθηκών 3 και 4. Είναι προφανές ότι  $S'_n < S < S''_n$ .

Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$S'_n - S''_n = \frac{b-a}{n} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (1)$$

Πράγματι, αν  $(b-a)/n = k$ , τότε η προηγούμενη διαφορά ισούται με το άθροισμα των διαφορών

$$k \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+k} \right) + k \left( \frac{1}{a+2k} - \frac{1}{a+k} \right) \\ + k \left( \frac{1}{a+3k} - \frac{1}{a+2k} \right) + \dots + \\ k \left( \frac{1}{a+nk} - \frac{1}{a+(n-1)k} \right).$$

Το άθροισμα αυτό είναι τηλεσκοπικό (οι περισσότεροι όροι απαλείφονται), και το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός ότι  $a+nk = b$ .

Η ισότητα (1) μάς δείχνει ότι επλέγοντας αρκετά μεγάλο  $n$  μπορούμε να κάνουμε όσο μικρή θέλουμε τη διαφορά μεταξύ των  $S'_n$  και  $S''_n$ . Επομένως, υπάρχει ένας μόνο αριθμός  $S$  που βρίσκεται μεταξύ των  $S'_n$  και  $S''_n$  για κάθε τιμή του  $n$  (έπειτα επίσης ότι και οι δύο ακολουθίες  $S'_n, S''_n$  τείνουν στο  $S$  καθώς το  $n$  αυξάνει — δηλαδή, το  $S$  είναι το κοινό τους όριο).

Αποσαφηνίσαμε έτοι την έννοια του εμβαδού ενός «καμπυλόγραμμου τραπεζίου» και ταυτόχρονα τον ορισμό που δώσαμε για τη συνάρτηση  $y = \ln x$ .

### Ο φυσικός λογάριθμος

Ο επόμενος τύπος εκφράζει τη θεμελιώδη ιδιότητα του φυσικού λογαρίθμου:

$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (2)$$

(για  $x_1 > 0, x_2 > 0$ ). Αυτό σημαίνει ότι ο φυσικός λογάριθμος ενός γινομένου ισούται με το άθροισμα των φυσικών λογαρίθμων των παραγόντων του.

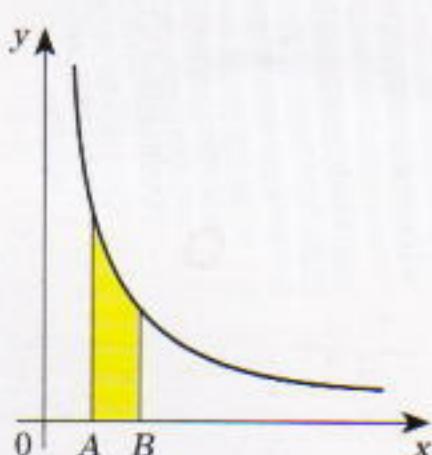
Πριν αποδείξουμε την ισότητα (2), ας εξετάσουμε μια σημαντική ιδιότητα των καμπυλόγραμμων τραπεζίων που συνδέονται με το καμπυλόγραμμο τραπέζιο. Συνεπώς, το εμβαδόν των καμπυλόγραμμων τραπεζίων παραμένει το ίδιο.

τα των καμπυλόγραμμων τραπεζίων που σχηματίζονται από τη συνάρτηση  $y = 1/x$ . Εστω  $S[A, B]$  το εμβαδόν ενός καμπυλόγραμμου τραπεζίου με κορυφές  $A$  και  $B$  (Σχήμα 3). Τότε, αν  $b > a > 0$  και αν  $k$  είναι ένας τυχαίος θετικός αριθμός, έχουμε (Σχήμα 4)

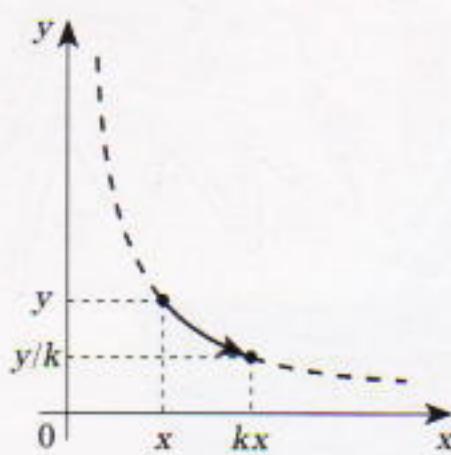
$$S[a, b] = S[ka, kb]. \quad (3)$$

Για να αποδείξουμε αυτή την πρόταση, θεωρούμε το μετασχηματισμό του επιπέδου που απεικονίζει το σημείο  $(x, y)$  στο σημείο  $(kx, y/k)$ . (Μπορείτε να τον θεωρήσετε ως συνδυασμό δύο μετασχηματισμών, ενός που πολλαπλασιάζει όλες τις αποστάσεις από τον γάλονα  $k$  φορές και ενός που διαιρεί  $k$  φορές όλες τις αποστάσεις από τον θετικό γάλονα  $x$  (Σχήμα 4).) Διαπιστώνουμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός μεταφέρει το τραπέζιο από το τμήμα  $a \leq x \leq b$  στο τμήμα  $ka \leq x \leq kb$  (Σχήμα 5). Πράγματι, αν το σημείο  $(x, y)$  ανήκει στο πρώτο τραπέζιο, τότε  $a < x < b$  και  $0 < xy \leq 1$ . Αυτό όμως σημαίνει ότι  $ka < kx < kb$  και  $0 < (kx)(y/k) \leq 1$  — δηλαδή, το σημείο  $(kx, y/k)$  ανήκει στο δεύτερο τραπέζιο. Αντίστροφα, όταν το  $(kx, y/k)$  είναι σημείο του δεύτερου τραπεζίου, τότε το σημείο  $(x, y)$  ανήκει στο πρώτο.

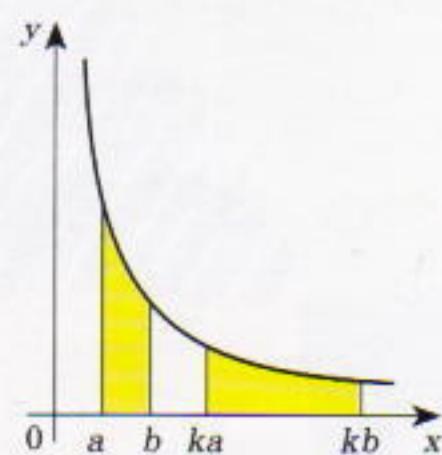
Παρατηρήστε ότι αυτή η απεικόνιση δεν μεταβάλλει το εμβαδόν του τραπεζίου (ή οποιουδήποτε άλλου σχήματος). Πράγματι, αφού δεν αλλάζει το εμβαδόν των ορθογωνίων που έχουν πλευρές παράλληλες προς τους άξονες (οι βάσεις τους πολλαπλασιάζονται επί  $k$  και τα ύψη τους διαιρούνται με  $k$ ), παραμένουν σταθερά και τα εμβαδά των κλιμακωτών σχημάτων που συνδέονται με το καμπυλόγραμμο τραπέζιο. Συνεπώς, το εμβαδόν των καμπυλόγραμμων τραπεζίων παραμένει το ίδιο.



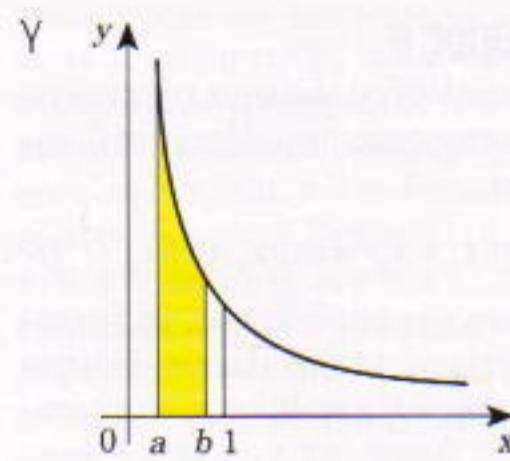
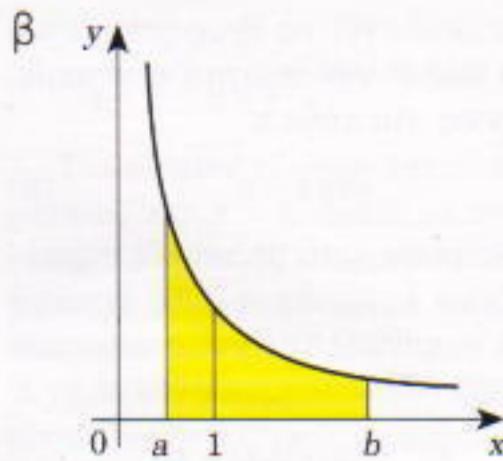
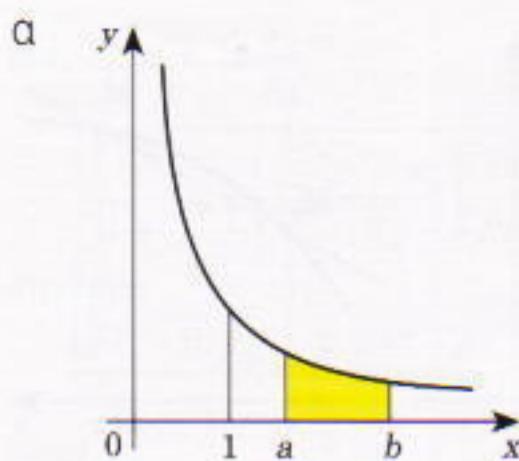
Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Επομένως,

$$S[a, b] = S[ka, kb].^1$$

Τώρα πλέον μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι  $S[a, b] = \ln b - \ln a$ . Στο Σχήμα 6 βλέπετε τις διαφορετικές περιπτώσεις που προκύπτουν, ανάλογα με το πρόσημο του εμβαδού που αντιπροσωπεύει τα  $\ln a$  και  $\ln b$ . Τότε άμως

$$\ln b - \ln a = \ln kb - \ln ka. \quad (3')$$

Αν και μέχρι στιγμής ο τύπος αυτός αποδείχτηκε μόνο για  $b > a$ , ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς  $a, b$ , διότι, αν  $a > b$ , έχουμε την ισότητα

$$\ln a - \ln b = \ln ka - \ln kb,$$

που ισοδυναμεί με την (3').

Η θεμελιώδης ιδιότητα του λογαρίθμου προκύπτει τώρα άμεσα από την (3'). Αρκεί να θέσουμε  $b = x_2$ ,  $a = 1$ ,  $k = x_1$ . Ειδικά, όταν  $x_2 = 1/x_1 = x$ , παίρνουμε

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Οι επόμενες ισότητες προκύπτουν εύκολα από τη θεμελιώδη ιδιότητα (εξίσωση (2)):

$$\ln x_1 x_2 \dots x_n = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n, \quad (5)$$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2. \quad (6)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ισότητες στη συνέχεια.

## Το γράφημα της $x \rightarrow \ln x$

Η εξίσωση (2) μάς επιτρέπει να μάθουμε περισσότερα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης  $y = \ln x$ . Ας επαληθεύσουμε πρώτα ότι η  $\ln x$  τεί-

1. Δηλαδή,  $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_{ka}^{kb} \frac{1}{x} dx$ .

νει στο άπειρο όταν αυξάνεται το  $x$ . Πράγματι, επειδή  $\ln 2 > 0$  και, λόγω τής (5),  $\ln 2^n = \ln(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2) = \ln 2 + \ln 2 + \dots + \ln 2 = n \ln 2$ , ο  $\ln 2^n$  αυξάνει απεριόριστα όταν το  $n$  τείνει στο άπειρο. Συνεπώς, ισχύει το ίδιο για την  $y = \ln x$ . (Πράγματι,  $\ln x > n \ln 2$  για  $x > 2^n$  —αφήνω για τον αναγνώστη την απόδειξη της μονοτονίας του  $\ln x$ .)

Ας εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά του λογαρίθμου όταν το  $x$  τείνει στο 0. Αφού

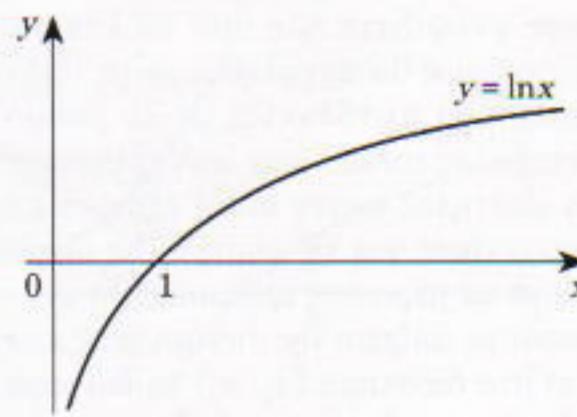
$$\ln \frac{1}{2^n} = -\ln 2^n = -n \ln 2,$$

διαποτώνουμε ότι  $\ln x < -n \ln 2$ , για  $0 < x < 1/2^n$  —δηλαδή, όταν το  $x$  είναι αρκετά μικρό, ο λογαρίθμος μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλη αρνητική τιμή.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να σχεδιάσουμε προσεγγιστικά το γράφημα της  $y = \ln x$  (Σχήμα 7).

## Εκθετικές συνάρτησεις

Αποδεικνύεται ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι τιμή της συνάρτησης που εξετάσαμε προηγουμένως. Επιπλέον, η συνάρτηση αυτή παίρνει κάκαθε τιμή μία μόνο φορά —δηλαδή, για κάθε πραγματικό  $x$  υπάρχει μία μόνο λύση  $y$  της εξίσωσης  $x = \ln y$ . Ο πραγματικός αριθμός  $y$  που ικανοποιεί αυτή την εξίσωση συμβολίζεται με



Σχήμα 7

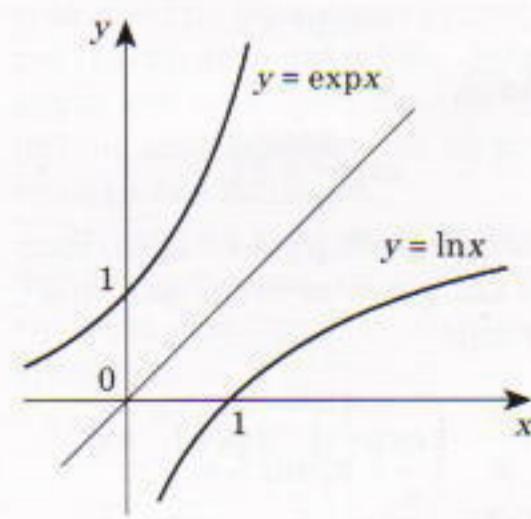
$$y = \exp x.$$

Προκύπτει ότι μια καινούργια συνάρτηση  $x \rightarrow \exp x$ , αντίστροφη της  $x \rightarrow \ln x$ . Ονομάζεται εκθετική. Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης έπειται η ταυτότητα  $\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x$ , για  $x > 0$ . (7)

Τα γραφήματα των συναρτήσεων  $y = \exp x$  και  $y = \ln x$  είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία  $y = x$ . Πραγματικά, αφού η εξίσωση  $y = \exp x$  είναι ισοδύναμη με την  $\ln y = x$ , το γράφημα της εκθετικής συνάρτησης μπορεί να προκύψει από το γράφημα της λογαρίθμικής μέσω του μετασχηματισμού που απεικονίζει το σημείο  $(x, y)$  στο σημείο  $(y, x)$ . Αυτή η απεικόνιση είναι απλώς η συμμετρία ως προς την ευθεία  $y = x$  (Σχήμα 8).<sup>2</sup>

Επομένως, η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα, ορίζεται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών  $-\infty < x < +\infty$  και λαμβάνει θετικές τιμές. Επιπλέον, καθώς το  $x$  τείνει στο  $+\infty$  οι τιμές της αυξάνονται απεριόριστα, ενώ καθώς το  $x$  τείνει στο  $-\infty$  οι τιμές της τείνουν στο μηδέν.

2. Για να επαληθεύσετε ότι αυτό το σχήμα είναι σωστό, αποδειξτε ότι  $\ln x < x$  για κάθε  $x > 0$ .



Σχήμα 8

## Ο αριθμός $e$

Η θεμελιώδης ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης εκφράζεται από την ισότητα

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2. \quad (8)$$

Για να την αποδείξουμε, θα χρησιμοποιήσουμε τη θεμελιώδη ιδιότητα του φυσικού λογαρίθμου και την ισότητα (7). Αφού  $\ln y_1 y_2 = \ln y_1 + \ln y_2$ , τότε για  $y_1 = \exp x_1$ ,  $y_2 = \exp x_2$ , έχουμε  $\ln y_1 y_2 = x_1 + x_2$  — δηλαδή,  $y_1 \cdot y_2 = \exp(x_1 + x_2)$ , ή  $\exp x_1 \cdot \exp x_2 = \exp(x_1 + x_2)$ . Από τη θεμελιώδη ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης (ή την αντιστοιχη ιδιότητα του λογαρίθμου) μπορούμε να συναγάγουμε τις ισότητες

$$\exp(-x) = 1/\exp x$$

και

$$\begin{aligned} \exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ = \exp x_1 \cdot \exp x_2 \cdot \dots \cdot \exp x_n. \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο  $e$  για τον αριθμό  $\exp 1$ . Με άλλα λόγια, το  $e$  είναι η λύση της εξίσωσης  $\ln e = 1$ .

Με τη βοήθεια της θεμελιώδους ιδιότητας (8), θα αποδείξουμε ότι για κάθε ρητό  $x = m/n$ , ισχύει  $\exp x = e^x$ . Πράγματι, για  $m$  φυσικό, έχουμε:

$$\begin{aligned} \exp m &= \exp(1 + 1 + \dots + 1) \\ &= \exp 1 \cdot \exp 1 \cdot \dots \cdot \exp 1 = e^m \end{aligned}$$

και

$$\exp(-m) = \frac{1}{\exp m} = \frac{1}{e^m} = e^{-m}.$$

Επομένως, για κάθε ακέραιο  $m$ , είναι  $\exp m = e^m$ . Εππλέον, για φυσικό αριθμό  $n$  έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\exp \frac{1}{n}\right)^n &= \exp \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \exp 1 = e \end{aligned}$$

— δηλαδή,

$$\exp \frac{1}{n} = \sqrt[n]{e}.$$

Έτσι, για κάθε ρητό  $x = m/n$  (όπου  $n > 0$  και τα  $n, m$  είναι ακέραιοι), παίρνουμε

$$\exp \frac{m}{n} = \left(\exp \frac{1}{n}\right)^m = (\sqrt[n]{e})^m = e^{m/n}$$

— δηλαδή,  $\exp x = e^x$  για κάθε ρητό  $x$ .

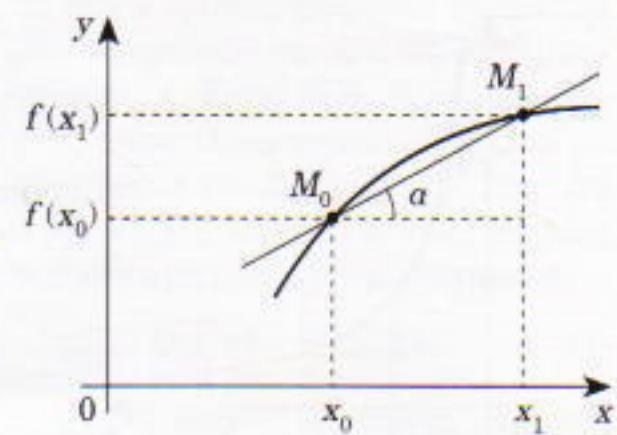
Όταν το  $a$  είναι άρρητος αριθμός

μάς διευκολύνει να θεωρήσουμε ως ορισμό του  $e^a$  την ισότητα  $e^a = \exp a$ . Επομένως, για κάθε  $x$ ,

$$\exp x = e^x. \quad (9)$$

Ο τύπος αυτός, μαζί με τον (7), σημαίνουν ότι ο λογαρίθμος κάθε θετικού  $x$  είναι ο αριθμός εκείνος στον οποίο όταν υψώνουμε το  $e$  παίρνουμε το  $x$ :

$$e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x.$$



Σχήμα 9

Φυσικό να ονομάσουμε το λόγο

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

μέση ταχύτητα μεταβολής της συνάρτησης  $x \rightarrow f(x)$  στο διάστημα  $[x_0, x_1]$ . Πράγματι, αν το  $x$  είναι χρόνος και  $f(x)$  η απόσταση που διέσχισε ένα σώμα μετακινούμενο ως τη στιγμή  $x$ , τότε το  $\Delta f / \Delta x$  είναι η μέση ταχύτητά του στο διάστημα  $[x_0, x_1]$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $x_0$  είναι σταθερό και ότι το  $x_1$  τείνει στο  $x_0$ . Αν ο λόγος  $\Delta f / \Delta x$  τείνει προς κάποιο όριο, θα ονομάσουμε το όριο αυτό παράγωγο της συνάρτησης  $x \rightarrow f(x)$  στο σημείο  $x_0$  και θα το συμβολίσουμε με  $f'(x_0)$ . (Μπορούμε να το θεωρήσουμε ως τον στιγμαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κατά τη χρονική στιγμή  $x_0$ ). Η παράγωγος περιγράφει τη συμπεριφορά της συνάρτησης κοντά στο  $x_0$ .

Η παράγωγος έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία. Εστω  $M_0$  το σημείο του γραφήματος της  $y = f(x)$  που αντιστοιχεί στο  $x = x_0$  — δηλαδή, το σημείο με συντεταγμένες  $(x_0, f(x_0))$ . Εστω  $M_1$  το σημείο  $(x_1, f(x_1))$ . Φέρουμε την ευθεία  $M_0 M_1$ . Η κλίση αυτής της ευθείας — δηλαδή, η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα  $x$  — ισούται με

$$\text{εφα} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Καθώς το  $x_1$  τείνει στο  $x_0$ , η τέμνουσα ευθεία τείνει σε μια οριακή θέση — την εφαπτομένη της καμπύλης  $y = f(x)$  στο σημείο  $x_0$ . Επομένως, η παράγωγος στο  $x = x_0$  ισούται με την κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της  $x \rightarrow f(x)$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$ .

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = \ln x$ . Η αύξηση της συνάρτησης στο διάστημα  $[x_0, x_1]$  ισούται με

$$\ln x_1 - \ln x_0 = \ln \frac{x_1}{x_0} = \ln \left( 1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0} \right),$$

συνεπώς

$$\frac{\ln x_1 - \ln x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{\ln(1+h)}{h}, \quad (10)$$

όπου

$$h = \frac{x_1 - x_0}{x_0}.$$

Όταν το  $x_1$  τείνει στο  $x_0$ , το  $h$  τείνει στο 0. Επομένως, αρκεί να βρούμε πώς συμπεριφέρεται ο λόγος  $[\ln(1+h)]/h$  για μικρές τιμές του  $h$ .

Ο ορισμός του λογαρίθμου που δώσαμε προηγουμένως θα μας επιτρέψει να κάνουμε μερικές απλές εκτιμήσεις, απ' όπου θα συμπεράνουμε ότι το  $[\ln(1+h)]/h$  τείνει στο 1 όταν το  $h$  τείνει στο μηδέν — δηλαδή

$$\ln(1+h) \approx h \text{ (για μικρά } h\text{).} \quad (11)$$

Η ισότητα αυτή μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για εκτιμήσεις. Μπορούμε να την ξαναγράψουμε ως εξής:

$$\exp h \approx 1 + h \text{ (για μικρά } h\text{).} \quad (12)$$

Από αυτές προκύπτουν οι βασικοί τύποι για τις παραγώγους των λογαρίθμικών και εκθετικών συναρτήσεων:

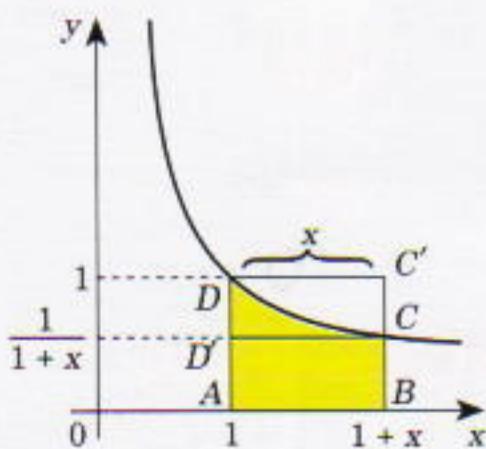
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (13)$$

και

$$(\exp x)' = \exp x. \quad (14)$$

## Εκτίμηση του λογαρίθμου κοντά στο 1

Ιδού μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες του λογαρίθμου:



Σχήμα 10

$$x - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x. \quad (15)$$

Για να αποδείξουμε αυτές τις ανισότητες για  $x > 0$ , αρκεί να συγκρινουμε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου  $ABCD$  με τα εμβαδά των ορθογωνίων  $AD'C'B$  και  $ADC'B$  (Σχήμα 10). Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι  $\ln(1+x)$ , ενώ το εμβαδόν του  $AD'C'B$  ισούται με

$$AB \cdot BC = x \cdot \frac{1}{x+1},$$

και το εμβαδόν του  $ADC'B$  είναι  $AB \cdot AD = x \cdot 1 = x$ . Οι αναγνώστες καλούνται να επαληθεύσουν μόνοι τους αυτή την εκτίμηση για  $-1 < x < 0$ .

Οι ανισότητες (15) μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του λογαρίθμου (δείτε την εξίσωση (10)). Ας θέσουμε στην (15)  $x = (x_1 - x_0)/x_0$ . Θα πάρουμε

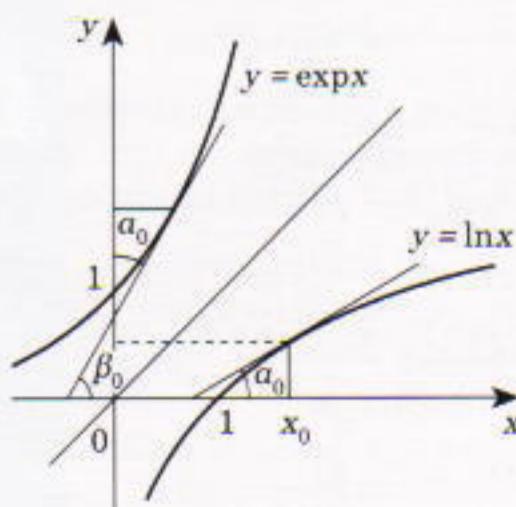
$$\frac{(x_1 - x_0)/x_0}{(x_1 - x_0)/x_0 + 1} = \frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

$$< \ln \frac{1 + x_1 - x_0}{x_0} < \frac{x_1 - x_0}{x_0},$$

$$\frac{1}{x_1} < \frac{\ln(1 + (x_1 - x_0)/x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{1}{x_0}$$

(για  $x_1 > x_0$ ). Όταν το  $x_1$  τείνει στο  $x_0$ , το κλάσμα τείνει στο  $1/x_0$ , και έτσι αποδεικνύεται η εξίσωση (13) για την παράγωγο του λογαρίθμου. Επομένως, έχουμε δείξει ότι σε κάθε σημείο του γραφήματος του λογαρίθμου υπάρχει εφαπτομένη και ότι η κλίση της ισούται με  $1/x_0$  για  $x = x_0$ .

Για να βρούμε την κλίση μιας ε-



Σχήμα 11

φαπτομένης του γραφήματος της εκθετικής συνάρτησης, αρκεί να θυμηθούμε ότι το γράφημά της είναι συμμετρικό με αυτό του λογαρίθμου ως προς την ευθεία  $y = x$ . Οπως διαπιστώνουμε από το Σχήμα 11,  $a_0 + \beta_0 = \pi/2$ , και αφού  $a_0$  είναι η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος του λογαρίθμου στο σημείο  $(x_0, y_0)$ , έχουμε εφα  $a_0 = 1/x_0$ . Καταλήγουμε τελικά στην

$$\begin{aligned} \text{εφ} \beta_0 &= \text{εφ} \left( \frac{\pi}{2} - a_0 \right) = \frac{1}{\text{εφ} a_0} \\ &= x_0 = e^{y_0} \end{aligned}$$

— δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της εκθετικής συνάρτησης στο σημείο  $x$  ισούται με την τιμή της εκθετικής συνάρτησης στο  $x$ , και συνεπώς αποδεικνύεται ο τύπος (14). Για τυχαία βάση  $a$ , αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \ln a, \quad (13')$$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (14')$$

Παρατηρήστε ότι και οι δύο αυτές ισότητες ισχύουν για τον φυσικό λογάριθμο και την εκθετική συνάρτηση με βάση  $e$ . Για τις άλλες εκθετικές συναρτήσεις, ο στιγμαίος ρυθμός μεταβολής είναι ανάλογος (και όχι ίσος) με την τιμή στο σημείο  $x_0$ .

Ας εξετάσουμε ακόμη μία φορά τα φράγματα στην ανισότητα (15). Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η προσεγγίστική ισότητα (11) και, συνεπώς, η ισοδύναμη της (12) προκύπτουν άμεσα από αυτά. Στην πραγματικότητα, όταν το  $|x|$  είναι πολύ μικρότερο του 1, συμβολικά  $|x| \ll 1$ , η ποσότητα  $x^2$  είναι αμελητέα συγκριτικά με το  $x$ . Για παράδειγμα, όταν  $|h| \approx 0.1$ , το σχετικό σφάλμα στις προσεγγίσεις (11) και (12) είναι το πολύ 1% — δηλαδή ο λόγος του αριστερού και του δεξιού μέλους τους διαφέρει από τη μονάδα το πολύ ένα εκατοστό.

Από τα ίδια φράγματα της εκτίμησης (15) μπορούμε να συναγάγουμε την εξής αξιοσημείωτη ιδιότητα του αριθμού  $e$ :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

και, γενικότερα, την εξής εξίσωση για

την εκθετική συνάρτηση:

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (16)$$

(δείτε το Πρόβλημα 1 παρακάτω).

## Ανάπτυγμα της $e^x$ σε σειρά

Ο τύπος (16) είναι δύσχρηστος σε υπολογισμούς, διότι, όταν θέλουμε ικανοποιητική ακρίβεια, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολύ μεγάλο  $n$ . Σε τούτο το τμήμα του άρθρου θα εξετάσουμε μια διαφορετική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης, η οποία την εκφράζει ως άθροισμα άπειρης σειράς:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^k}{1 \cdot 2 \cdots k} + \dots, \quad (17)$$

όπως ακριβώς η γεωμετρική πρόοδος  $1 + x + x^2 + \dots$  αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση  $y = 1/(1-x)$  για  $|x| < 1$ .

Το ανάπτυγμα αυτό μας εξυπηρετεί για δύο λόγους. Πρώτον, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της εκθετικής συνάρτησης, απαιτείται ένα συγκριτικά μικρό πλήθος όρων της προσέγγισης

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

(αυτό είναι σημαντικό όταν εργαζόμαστε με υπολογιστές). Δεύτερον, το ανάπτυγμα αυτό μας επιτρέπει μια διεισδυτικότερη προσέγγιση της εκθετικής συνάρτησης — για παράδειγμα, μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι το  $e$  είναι άρρητος αριθμός (δείτε τα Πρόβλημα 11 και 12 παρακάτω). Θα αποδείξουμε τον τύπο (17) μόνο για  $x > 0$ .

Έστω

$$T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

και

$$S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \exp x$$

Από το ανάπτυγμα του διωνύμου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{n^2} \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k} \\ &+ \dots + \frac{x^n}{n^n} \\ &= 1 + x + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} x^2 \\ &+ \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} x^k \\ &+ \dots + \frac{x^n}{n^n}. \end{aligned}$$

Όλοι οι αριθμοί στις παρενθέσεις του δεξιού μέλους είναι μικρότεροι από τη μονάδα. Αν τους αντικαταστήσουμε όλους με το 1, το δεξιό μέλος θα αυξηθεί, και επομένως

$$T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < S_n(x). \quad (18)$$

Από την άλλη πλευρά, αν κρατήσουμε μόνο τους πρώτους  $k$  όρους στο δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας, θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &> 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} \\ &+ \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Όταν το  $k$  είναι σταθερό και το  $n$  τείνει στο άπειρο, το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας συγκλίνει στο  $S_k(x)$ , αφού κάθε όρος στις παρενθέσεις τείνει στο 1, ενώ το  $\left(1 + x/n\right)^n$  τείνει στο  $\exp x$ . Τελικά, έχουμε

$$\exp x > S_k(x)$$

για κάθε  $k$  — δηλαδή η ακολουθία  $S_k(x)$  είναι άνω φραγμένη και (για  $x > 0$ ) αύξουσα. Άρα υπάρχει το όριό της, και συνεπώς

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_k(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\ &+ \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \leq \exp x. \end{aligned}$$

Από τον τύπο (18), αν θεωρήσουμε το όριο καθώς  $n \rightarrow \infty$ , παίρνουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \geq \exp x.$$

Έπειτα ότι

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

## Προβλήματα

1. (a) Αποδείξτε τις ανισότητες

$$\frac{nx}{n+x} < n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) < x$$

(για  $x > -n$ , όπου  $n$  είναι φυσικός αριθμός).

(b) Αποδείξτε με τη βοήθειά τους την ισότητα

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2. Βρείτε τα επόμενα όρια:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}.$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}.$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

3. Βρείτε τα εμβαδά των καμπυλώγραμμων τραπεζίων που ορίζονται από τις συναρτήσεις  $y = a^x$  και  $y = \log_a x$ .

4. Βρείτε τα επόμενα όρια:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+2x} + \dots + \frac{1}{n+nx} \right).$$

5. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

6. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

συγκλίνει.

7. Αποδείξτε ότι

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \ln 2.$$

8. Βρείτε τις κλίσεις των εφαπτομένων των καμπυλών  $y = a^x$  και  $y = \log_a x$ .

9. Βρείτε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1).$$

10. Χρησιμοποιήστε τον γεωμετρικό ορισμό του λογαρίθμου για να αποδείξετε τις ανισότητες

$$\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$$

για  $x > 0$ , και με τη βοήθειά τους αποδείξτε ότι

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + x^3.$$

11. Αποδείξτε ότι

$$0 < e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

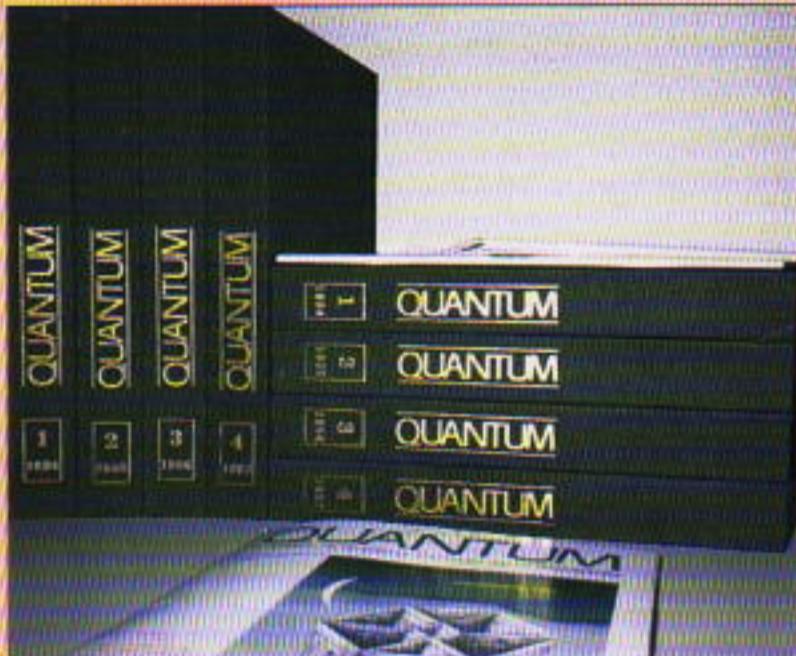
$$< \frac{x^n e^x}{(n+1)!}$$

για  $x > 0$ .

12. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 11 για να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $e$  (α) είναι άρρητος, (β) δεν είναι λύση μιας εξισώσης  $ax^2 + bx + c = 0$  με ακέραιους συντελεστές.  $\square$



# QUANTUM



## Τάξη και κομψότητα!

Θα θέλατε αυτές οι δύο βασικές ιδιότητες των μαθηματικών να αντικατοπτρίζονται στη... βιβλιοθήκη σας;

Τώρα μπορείτε να τακτοποιήσετε τα τεύχη του Quantum στις τέσσερις κομψές

—αντάξιες της υψηλής αισθητικής του περιοδικού—

θήκες που παραγγείλαμε για σας. Οι θήκες είναι επενδεδυμένες με λινό πράσινο ύφασμα και φέρουν χρυσοτυπία στη ράχη τους.

Μπορείτε να τις αγοράσετε από το βιβλιοπωλείο μας ή να τις προμηθευτείτε μέσω αντικαταβολής (για να τις παραγγείλετε, τηλεφωνήστε στα γραφεία μας ή ταχυδρομήστε μας τα στοιχεία σας).

Η τιμή πώλησης καθε θήκης είναι 2.000 δρχ. (για τους συνδρομητές 1.500 δρχ.).\*

Μην ξεχνάτε ότι το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης, ένα από τα πολυτιμότερα δώρα που μπορείτε να κάνετε στον εαυτό σας και σε όποιον άλλο αγαπά τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες.

\*Η παραπόνω τιμή επιβαρύνεται με ΦΠΑ 18%. Στην περίπτωση ταχυδρόμησης, επιβαρύνεται επιπλέον με 600 δρχ. ανά δέμα ως έξοδα αντικαταβολής και με 150 δρχ. ανά θήκη ως έξοδα αποστολής.

# Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

## Μαθηματικά

M91

**Πληθωριστικές εναλλαγές.** Βρείτε έναν θετικό δεκαδικό αριθμό (ο οποίος μπορεί να μην είναι ακέραιος) που θα πολλαπλασιαστεί 1996 φορές όταν εναλλάξουμε το πρώτο με το πέμπτο δεκαδικό του ψηφίο.

(D. Averianov)

M92

**Εναλλαγές και τετράγωνα.** Βρείτε όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών  $x$  και  $y$  για τους οποίους τα  $x^2 + 3y$  και  $y^2 + 3x$  είναι τέλεια τετράγωνα.

(I. Sharygin)

M93

**Σχέση χωρίς ρίζες.** Βρείτε μια σχέση μεταξύ των  $a$ ,  $b$  και  $c$  αν  $a = x + 1/x$ ,  $b = y + 1/y$ ,  $c = xy + 1/xy$ . Η σχέση δεν πρέπει να περιέχει ρίζικά.

M94

**Κοινοβουλευτική πρακτική.** Κάθε μέλος του κοινοβουλίου της Ιλαρίας χαστούκισε τρία ακριβώς μέλη του σε βασιστού αυτού σώματος. Χρειάζεται να σχηματιστούν διάφορες κοινοβουλευτικές επιτροπές, που πρέπει να οργανωθούν έτσι ώστε κάθε μέλος του κοινοβουλίου να συμμετέχει σε μία (και μόνο) επιτροπή.

Για να αποφευχθούν οι συγκρούσεις στις επιτροπές, είναι αναγκαίο να τις απαρτίσουν βουλευτές που δεν έχουν χαστούκισει ποτέ ο ένας τον άλλο. Αποδείξτε ότι, αν το πλήθος των επιτροπών είναι τουλάχιστον 7, μπορούμε πάντα να ικανοποιήσουμε αυτή τη συνθήκη, αν όμως είναι μικρότερο, ο στόχος μας αποδεικνύεται μερικές φορές αδύνατος. (A. Belov)

M95

**Κυκλικοί συλλογισμοί.** Εγγράφουμε σε έναν κύκλο το τραπέζιο  $ABCD$  (με βάσεις  $AD$  και  $BC$ ). Οι διαγώνιοι του τέμνονται στο σημείο  $M$ . Έστω μια ευθεία γραμμή κάθετη στις βάσεις του  $ABCD$  η οποία τέμνει την  $BC$  στο  $K$  και τον κύκλο στο  $L$  (όπου το  $L$  είναι τέτοιο ώστε το  $M$  να ανήκει στο ευθύγραμμό τμήμα  $KL$ ). Έστω  $MK = a$  και  $LM = b$ . Εκφράστε συναρτήσει των  $a$  και  $b$  την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται στα τμήματα  $AM$  και  $BM$ , και συγχρόνως εφάπτεται εσωτερικά στον περιγεγραμμένο κύκλο του τραπεζίου  $ABCD$ .

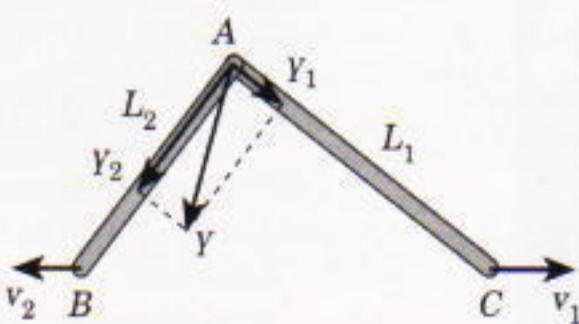
(I. Sharygin)

## Φυσική

F91

**Γωνία σε κίνηση.** Δύο στερεές ράβδοι μήκους  $L_1$  και  $L_2$  συνδέονται με άρθρωση στο ένα άκρο τους  $A$ . Τα ελεύθερα άκρα τους απομακρύνονται ομαλά μεταξύ τους με ταχύτητες  $v_1$  και  $v_2$  που διατηρούν την ίδια διεύθυνση (Σχήμα 1). Βρείτε την επιτάχυνση του σημείου  $A$  τη στιγμή που οι ράβδοι σχηματίζουν γωνία  $90^\circ$ . Οι ράβδοι κινούνται στο ίδιο επίπεδο.

(B. Bukhovtsev)



Σχήμα 1

F92

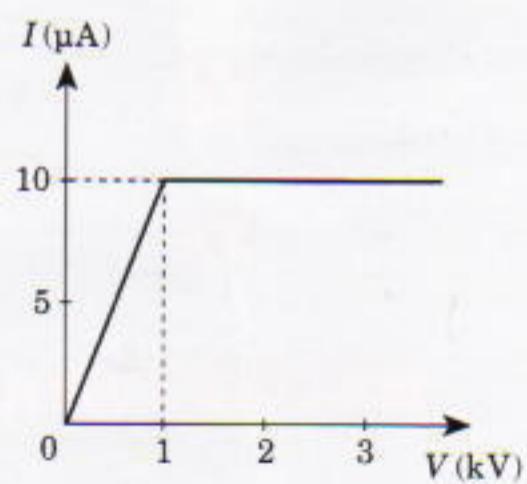
**Θερμαίνοντας έναν πλανήτη.** Ο πλανήτης «Γ» μοιάζει εντελώς με τη Γη, με τη διαφορά ότι εκεί τις τελευταίες πλανητικές εκλογές τις κέρδισαν οι φανατικοί αντίπαλοι του οικολογικού κινήματος. Έχτισαν λοιπόν τεράστιους πυρηνικούς αντιδραστήρες σε κάθε σημείο της στεριάς και των θαλασών.

Όταν οι αντιδραστήρες βρίσκονται σε λειτουργία, εκλύεται ισχύς 1.000 W ανά τετραγωνικό μέτρο της επιφάνειας του πλανήτη. Πόσο σύντομα, μετά την έναρξη της παραγωγής, θα ανέλθει η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας κατά 1 K; Υποθέστε ότι ο πλανήτης ο ίδιος δεν θερμαίνεται και ότι η ενέργεια διαχέεται στο χώρο με σταθερό ρυθμό.

(S. Varlamov)

F93

**Ηλεκτρική εκκένωση.** Η εξάρτηση του ηλεκτρικού ρεύματος  $I$  που διαρρέει μια λυχνία αερίου από την τάση  $V$  στους πόλους της, στην περίπτωση μη αυτοτελούς αγωγιμότητας, δίνεται στο Σχήμα 2. Η συγκεκριμένη λυχνία συνδέεται κατά σειρά με αντίσταση  $R = 3 \cdot 10^8 \Omega$ , και στους ακροδέκτες της



Σχήμα 2

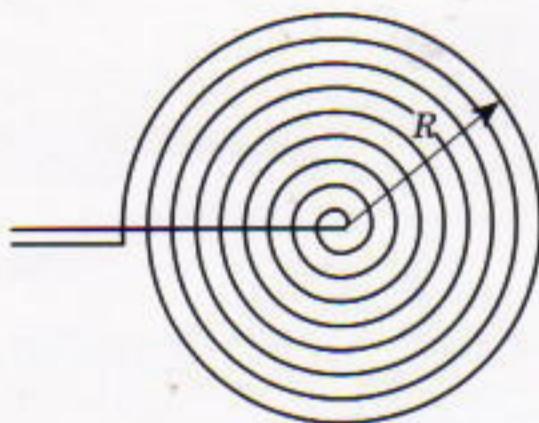
διάταξης συνδέεται ηλεκτρική πηγή σταθερής ηλεκτρεγερτικής δύναμης  $E = 6 \text{ kV}$ . Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει τη λυχνία και την τάση ανάμεσα στα ηλεκτρόδια της. Παραβλέψτε την εσωτερική αντίσταση της ηλεκτρικής πηγής.

(V. Mozhayev)

### Φ94

**Μαγνητισμένο σπείραμα.** Μια επίπεδη έλικα, με μεγάλο αριθμό σπειρών  $n$  και εξωτερική ακτίνα  $R$  (Σχήμα 3), τοποθετείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο  $B = B_0 \sin \omega t$  και είναι κάθετο στο επίπεδό της. Υπολογίστε την ΗΕΔ που επάγεται στα άκρα της έλικας. Η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών σπειρών είναι σταθερή.

(I. Slobodetsky)



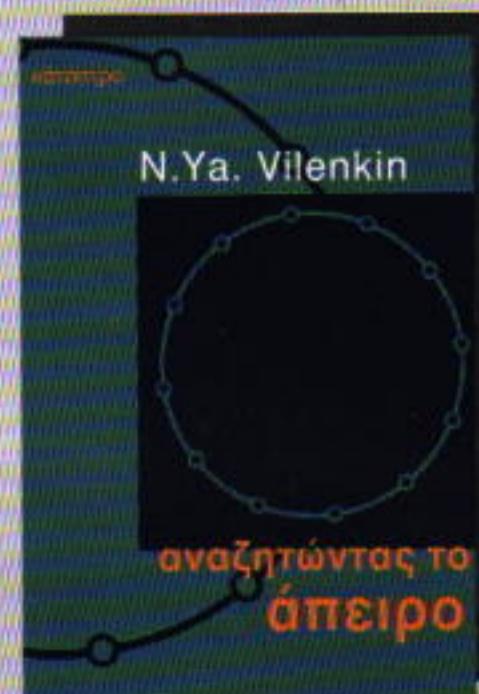
Σχήμα 3

### Φ95

**Φωτοδημοσιογραφία.** Μια σελίδα εφημερίδας φωτογραφήθηκε δύο φορές με μηχανή της οποίας ο αντικειμενικός φακός έχει εστιακή απόσταση  $F = 50 \text{ mm}$ . Η πρώτη φωτογραφία τραβήχτηκε από την ελάχιστη απόσταση (για τον συγκεκριμένο αντικειμενικό φακό)  $a_1 = 0,5 \text{ m}$ . Πριν ληφθεί η δεύτερη φωτογραφία, προσαρμόστηκε στη μηχανή ένας δακτύλιος πάχους  $h = 25 \text{ mm}$ , ο οποίος αυξάνει την απόσταση μεταξύ του φίλμ και του αντικειμενικού φακού. Βρείτε το λόγο των μεγεθών των ειδώλων στο φίλμ για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



N.Ya. Vilenkin

### Αναζητώντας το άπειρο

Το άπειρο ιπτήρει για αιώνες μια από τις πιο γοητευτικές και αινιγματικές ιδέες που αυχμαλώνιζαν τη σκέψη των επιστημόνων, αλλά και των απλών ανθρώπων. Ήδη από την αρχαιότητα, η αντιφατική του φύση αποτέλεσε αντακείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους.

Στα μαθηματικά, οι αντιφάσεις που συνδέονται με το άπειρο εντάθηκαν μετά τη δημιουργία της θεωρίας των απειροσυνόλων – κατά τα τέλη του 19ου αιώνα –, η οποία οδήγησε σε μια σειρά παραδόξων εξαπίας των οποίων αμφισβητήθηκε ακόμη και η ίδια η θεμελίωσή της.

Σε τούτο το βιβλίο περιγράφεται η διαδρομή που ακολούθησε η ανθρώπινη σκέψη – από τον Ζήνωνα και τον Αριστοτέλη μέχρι τον Cantor και τον Russell – στην προσπάθειά της να κατανοήσει την ιδέα του απείρου στα μαθηματικά και τη φυσική.

Ο Vilenkin, γράφοντας με αξιοθαύμαστη δεξιοτεχνία και διαύγεια, βοηθάει ακόμη και τον μη ειδικό αναγνώστη να συλλάβει τη βαθύτερη φύση του ζητήματος και τη οπουδαιότητά του για την κατανόηση του κόσμου μας.

«Διειδυτικό, εμφριθές αλλά και προστό στον μη ειδικό. Δεν μπορώ να φανταστώ καλύτερη εισαγωγή στην έννοια του απείρου.»

— American Mathematical Monthly

«Είναι αξιοθαύμαστη η ικανότητά του να αφηγείται τη συναρπαστική ιστορία των απείρων, να προκαλεί τη φαντασία μας, να οξύνει τη διαισθησή μας... Περιγράφει με μοναδικό τρόπο τη θέση που κατέχει το άπειρο σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης σκέψης, από τη φιλοσοφία ως τη φυσική και τα μαθηματικά.»

— John Stillwell, Πανεπιστήμιο Monash, Αυστραλία

Σελ.: 218, 14 × 21 εκ., 4.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΩΠΤΡΟ

# Ένα πλανητικό αερόφρενο

Αντίσταση εκ τριβής και επιβράδυνση στην περιστροφή της Γης

D.C. Agrawal και V.J. Menon

**A**Σ ΔΟΥΜΕ ΚΑΤΑ ΠΟΣΟ ΜΠΟΡΟΥμε να υπολογίσουμε την επιβράδυνση της περιστροφής της Γης που οφείλεται στην αντίσταση λόγω της τριβής με την ατμόσφαιρά της. Τα περισσότερα καθιερωμένα συγγράμματα παραθέτουν τον τύπο του Νεύτωνα για την εσωτερική τριβή ως

$$F = -\eta S \frac{dv}{dx}, \quad (1)$$

όπου  $\eta$  είναι ο συντελεστής εσωτερικής τριβής (ή ιξώδους),  $S$  το εμβαδόν της θεωρούμενης επιφάνειας,  $v$  η ταχύτητα κατά μήκος των ρευματικών γραμμών του στρώματος σε ύψος  $x$ , και  $dv/dx$  η βαθμίδα της ταχύτητας στο συγκεκριμένο ύψος. Ας εξετάσουμε πρώτα ένα εργαστηριακό παράδειγμα, πριν επεκτείνουμε τις εν λόγω ιδέες στην περιστροφή της Γης.

## Ένα εργαστηριακό παράδειγμα

Θεωρήστε μια σκάφη που περιέχει νερό μέχρι βάθους  $h$ . Ας κινήσουμε ένα ορθογώνιο κομμάτι γυαλιού οριζόντια με ταχύτητα  $v$  έτσι ώστε η κάτω επιφάνειά του μόλις να εφάπτεται με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Σύμφωνα με τη συνθήκη μη ολίσθησης (ή πρόσφυσης) μεταξύ του στερεού και του υγρού, το νερό που βρίσκεται σε επαφή με το γυαλί πρέπει να κινείται με την ίδια ταχύτητα  $v$ . Λόγω της εσωτερικής τριβής του νερού, διαδοχικά στρώματα σε προδευτικά αύξοντα βάθη θα αποκτούν συνεχώς μικρότερες ταχύτητες, ώσπου η ταχύτητα να μηδενιστεί στον πυθμένα. Εάν δεχτούμε ότι η κίνηση



της πλάκας προκαλεί μόνο στρωτή ροή, η βαθμίδα της ταχύτητας γίνεται  $dv/dx = v/h$ , όπου η κατακόρυφη συντεταγμένη  $x$  μετρήθηκε από τον πιθμένα της σκάφης. Επομένως, η εξωτερική δύναμη που απαιτείται για να συνεχίσει η γυάλινη πλάκα να κινείται με τη συγκεκριμένη σταθερή ταχύτητα, βάσει της εξίσωσης (1), δίνεται από τον τύπο

$$F = \eta S \frac{v}{h},$$

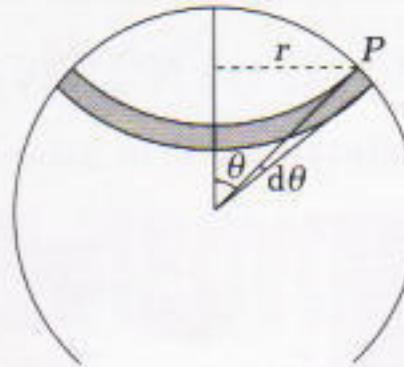
όπου  $S$  είναι το εμβαδόν της πλάκας.

Αξίζει να υπογραμμιστούν μερικές ενδιαφέρουσες πλευρές της παραπάνω εξίσωσης. Η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη με το βάθος του νερού, πράγμα που σημαίνει ότι απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη όταν το νερό είναι ρηχό παρά όταν είναι βαθύ. Η εν λόγω ιδέα μπορεί κατά προσέγγιση να γενικευτεί στην κίνηση μιας βάρκας σε μια μικρή λίμνη που τα νερά της πρεμούν, με την προϋπόθεση ότι αγνοούμε την πρόσθετη αντίσταση που προβάλλει το νερό επειδή ένα σχετικά μεγάλο μέρος της βάρκας είναι βυθισμένο σ' αυτό.

## Η περιστροφή της Γης

Είναι ευρέως γνωστό ότι η Γη έχει κινητική ενέργεια λόγω της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της. Η συγκεκριμένη ενέργεια ανέρχεται περίπου σε  $2,2 \cdot 10^{29}$  J. Γνωρίζουμε επίσης από πειραματικά δεδομένα ότι η περίοδος της εν λόγω περιστροφής μειώνεται με ρυθμό 1 ms ανά αιώνα. Αυτό συνεπάγεται μια συνεχή μείωση της κινητικής ενέργειας περιστροφής κατά  $1,1 \cdot 10^{12}$  W. Ο βασικός λόγος για την απώλεια αυτή αποδίδεται στην παλιρροϊκή τριβή στο σύστημα Γης-Σελήνης, αλλά θα έπρεπε να υπάρχει επίσης και κάποια συνεισφορά από την ασκούμενη αντίσταση σε τριβής στη Γη εξαιτίας της παρουσίας της ατμόσφαιράς της.

Ας εκτιμήσουμε την επίδραση της ατμόσφαιρας χρησιμοποιώντας ένα απλό μοντέλο και καταβάλλοντας ελάχιστη μαθηματική προσπάθεια. Εάν υποθέσουμε ότι η Γη έχει ακτίνα  $R$  και γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  προς τον άξονα Βορρά-Νότου, ένα σημείο  $P$  σε γεωγραφικό πλάτος  $\theta$  (βλ. το σχήμα) θα έχει γραμμική ταχύτητα  $v = \omega r =$



$\omega R \cdot \eta \mu \theta$ . Το σημείο  $P$  βρίσκεται σε μια στενή κυκλική λωρίδα ακτίνας  $r = R \cdot \eta \mu \theta$ , πλάτους  $R \cdot d\theta$  και εμβαδού  $dS = 2\pi R^2 \cdot \eta \mu \theta d\theta$ . Το ατμοσφαιρικό στρώμα που βρίσκεται σε επαφή με τη συγκεκριμένη λωρίδα κινείται με ταχύτητα  $v$ , αλλά η ταχύτητα των ανώτερων στρωμάτων βαθμιαία μειώνεται, ώσπου να μηδενιστεί σε κάποιο ύψος  $h$  πάνω από το έδαφος. Εφόσον η βαθμίδα της ταχύτητας είναι  $v/h$ , η δύναμη αντίστασης που ασκείται στη λωρίδα είναι

$$dF = \eta (2\pi R^2 \cdot \eta \mu \theta d\theta) \frac{v}{h}.$$

Η ισχύς την οποία καταναλώνει η αντίσταση εκ τριβής που ασκείται στη λωρίδα ισούται τότε με

$$dP = vdF = \eta (2\pi R^2 \cdot \eta \mu \theta d\theta) \frac{v^2}{h}.$$

Η ολική απώλεια ισχύος της Γης που οφείλεται στην αντίσταση εκ τριβής δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$P = \int_0^\pi dP = \frac{8\pi \eta \omega^2 R^4}{3h}.$$

Εισάγοντας τις μέσες αριθμητικές τιμές:  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m,  $\eta = 18,1 \cdot 10^{-6}$  poise,  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$  s<sup>-1</sup> και  $h = 10^5$  m, παίρνουμε:  $P = 1,3 \cdot 10^{10}$  W, το οποίο ισούται με το 1% μόνο των απωλειών ισχύος λόγω παλιρροϊκής τριβής. Φυσικά, η τιμή που υπολογίσαμε πρέπει να εκληφθεί μόνο ως προσεγγιστικό αποτέλεσμα της άμεσης εφαρμογής του τύπου του Νεύτωνα. Υπάρχουν επιπρόσθετες περιπλοκές, όπως η μεταβολή του  $\eta$  με το υψόμετρο, η αβεβαιότητα στην επιλογή του  $h$  και η παρουσία υδρατμών και σκόνης στην ατμόσφαιρα. ◻

**O.D.C. Agrawal** είναι έκτακτος καθηγητής στο Τμήμα Αγροτικής Τεχνολογίας στο Πανεπιστήμιο της Μπεναρές, στην Ινδία. **O.V.J. Menon** είναι ερευνητής στο Τμήμα Φυσικής του ίδιου ιδρύματος.

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Henry Plotkin

### Η φύση της γνώσης

Προσαρρογές, ένστικτα και η εξέλιξη της νοημοσύνης

Τούτο το βιβλίο αποτελεί την καλύτερη ίσως εισαγωγή στον νέο επιστημονικό κλάδο της εξελικτικής ψυχολογίας, η οποία ερμηνεύει την ανθρώπινη νόηση και τους γνωστικούς της μηχανισμούς με δρους της εξέλιξης και της προσαρμογής. Στις μέρες μας αναπτύσσεται μια επιστήμη της γνώσης, και, αν πραγματικά θέλουμε να γνωρίσουμε τη φύση της μάθησης, της λογικής σκέψης και της νοημοσύνης, πρέπει να ακούσουμε προσεκτικά τι έχουν να μας πουν γι' αυτήν οι βιολόγοι.

Το βιβλίο του Henry Plotkin κατορθώνει να παρουσιάσει καυτά προβλήματα της επιστημονικής έρευνας με αξιοθαύμαστη διαύγεια και οξυδέρκεια, με τρόπο απόλυτα κατανοητό και από τον μη ειδικό αναγνώστη.

«Κατορθώνει να μιλήσει απλά για έννοιες που βρίσκονται στην αιχμή της επιστήμης... Πρέπει να το διαβάσει κάθε ακεπτόμενος άνθρωπος.»

—David Singlon, Times

Ένα βιβλίο που πρέπει να το διαβάσει οποιοσδήποτε ενδιαφέρεται για το πώς γνωρίζει αυτά που γνωρίζει.

Σελ.: 352, 14 x 21 εκ., 6.000 δρχ

### Κάποιατρο

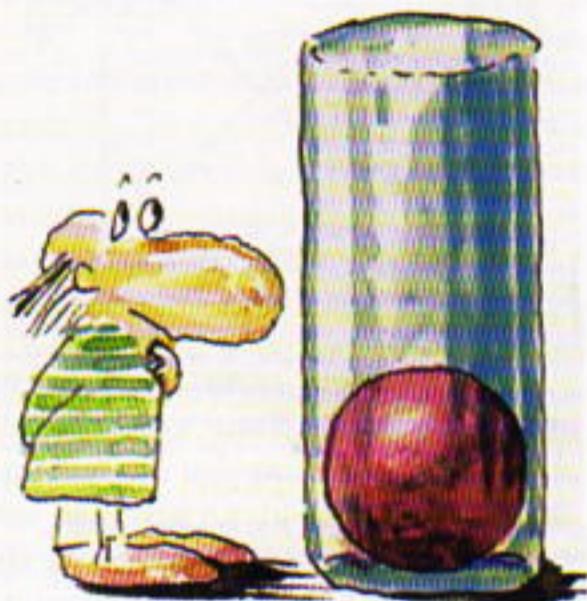
Ισαύρων 10 & Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα,  
τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

# Για να περνά η ώρα

Σ91

Επίφοβη εξίσωση. Επλύστε την επόμενη εξίσωση:

$$10 - 9(9 - 8(8 - 7(7 - 6(6 - 5(5 - 4(4 - 3(3 - 2(2 - x))))))) = x.$$



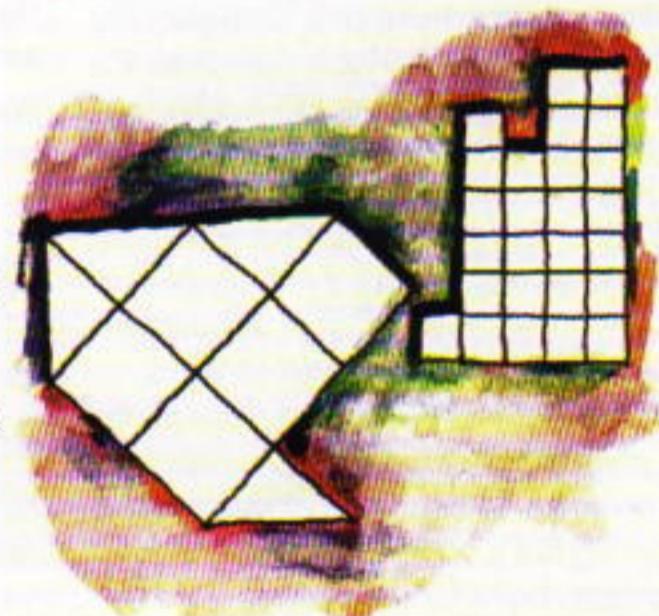
Σ92

Μπάλα σε κύλινδρο. Η Χριστίνα έπαιζε μαζί με τα αδέλφια της, τον Νίκο και τον Δημήτρη, με μια μπάλα διαμέτρου 4 cm. Κάποια στιγμή έριξαν την μπάλα σ' ένα κυλινδρικό δοχείο το στόμιο του οποίου είχε διάμετρο 5 cm. Τα παιδιά κατάφεραν να τη βγάλουν χωρίς να αναποδογυρίσουν το δοχείο. Πώς το πέτυχαν;



Σ93

Ευθεία γραμμή. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε σε δύο ισεμβαδικά χωρία καθένα από τα δύο σχήματα της εικόνας δεξιά, με μία μοναδική ευθεία;



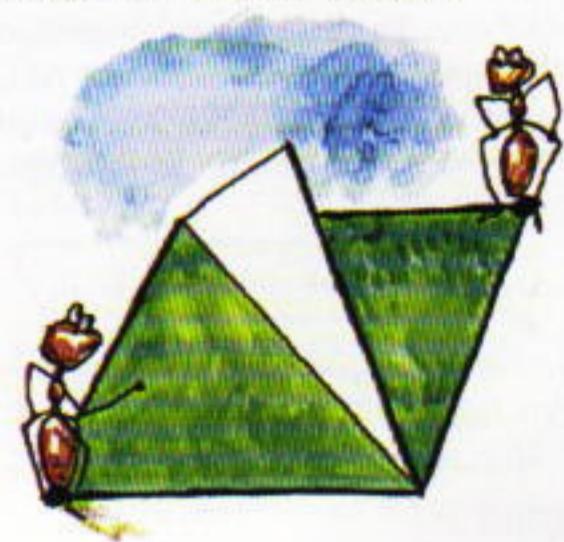
Σ94

Καυτό λάδι. Ένα πρωινό, μια βοηθός εργαστηρίου σ' ένα επιστημονικό ίνστιτούτο ζύγισε με ζυγαριά εξαιρετικής ακριβείας ένα ανοικτό δοχείο που περιείχε καυτό λάδι. Το απόγευμα, όταν το λάδι είχε κρυώσει, το ζύγισε ξανά. Το αποτέλεσμα ήταν εντυπωσιακά διαφορετικό. Τι είχε συμβεί;



Σ95

Περιηγήσεις μυρμηγκιών. Δύο μυρμήγκια στέκονται στις απέναντι γωνίες ενός τετραγώνου με πλευρά μήκους 1 μέτρου. Ανάμεσά τους υπάρχει ένα εμπόδιο που έχει τη μορφή μισού τετραγώνου (με μήκος πλευράς επίσης 1 μέτρο) και είναι τοποθετημένο κατά μήκος της διαγωνίου του πρώτου τετραγώνου. Το ένα μυρμήγκι θέλει να επισκεφθεί το άλλο. Ποιο είναι το μήκος της συντομότερης διαδρομής;



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

**Σ**Ε ΤΟΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΘΑ ΣΥΝΑΓΑΓΟΥΜΕ ΤÚΠΟΥΣ για τον υπολογισμό όγκων χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα. Θα στηριχτούμε κυρίως σε μια αρχή που διατύπωσε το 1629 ένας μαθητής του Γαλιλαίου.

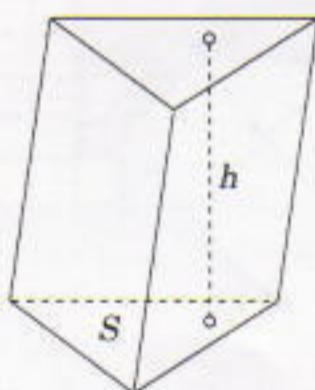
## Τετράεδρο

Αυτή η μέθοδος υπολογισμού του όγκου ενός τετραέδρου δεν χρησιμοποιεί ούτε ολοκληρώματα ούτε όρια. Στηρίζεται όμως σε μια διαισθητική αρχή, την αρχή της ομοιότητας, που συγκαλύπτει το ολοκλήρωμα.

**ΑΡΧΗ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ.** Αν πολλαπλασιαστούν όλες οι ακμές ενός τετραέδρου επί τον παράγοντα  $k$ , ο όγκος του πολλαπλασιάζεται επί τον παράγοντα  $k^3$ .

Ειδικά, αν πολλαπλασιασούμε όλες τις ακμές επί 2, ο όγκος θα πολλαπλασιαστεί επί 8.

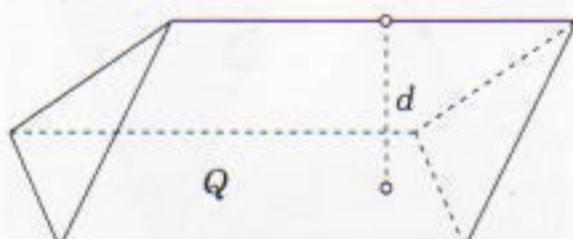
Προτού αποδείξουμε τον τύπο για τον όγκο του τετραέδρου, ας θυμηθούμε δύο τύπους για τον όγκο του τριεδρικού πρίσματος. Ας υποθέσουμε ότι  $S$  είναι η βάση του και  $h$  το ύψος του (Σχήμα 1). Τότε, ο όγκος του είναι  $V = Sh$ . Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε



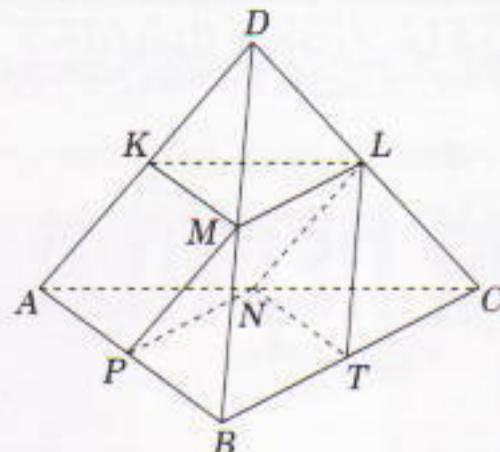
Σχήμα 1

τον όγκο του πρίσματος συναρτήσει του εμβαδού μιας παράπλευρης έδρας του,  $Q$ , και της απόστασης  $d$  αυτής της έδρας από την απέναντι ακμή:  $V = \frac{1}{2} Qd$  (Σχήμα 2).

Ας εξετάσουμε τώρα το τετράεδρο  $ABCD$  στο οποίο το εμβαδόν τού  $ABC$  ισούται με  $S$ , ενώ το ύψος που άγεται σ' αυτή την έδρα ισούται με  $h$  (Σχήμα



Σχήμα 2



Σχήμα 3

3). Εστω  $V$  ο όγκος του τετραέδρου. Συμβολίζουμε τα μέσα των ακμών του τετραέδρου με τα γράμματα  $K, L, M, N, P, T$ , όπως στο Σχήμα 3. Χωρίζουμε το τετράεδρο σε τέσσερα πολύεδρα: στα δύο τετράεδρα  $DKML$  και  $LNTC$ , οι ακμές των οποίων είναι ίσες με το ήμισυ των ακμών του αρχικού τετραέδρου, και στα δύο τριεδρικά πρίσματα  $APNKL$  και  $PMBNL$ . Σύμφωνα με την αρχή της ομοιότητας οι όγκοι των τετραέδρων  $DKML$  και  $LNTC$  ισούνται με  $V/8$ . Ας εκφράσουμε τους όγκους των δύο πρίσματων με τη βοήθεια των αντιστοιχών τύπων. Ο όγκος του πρώτου πρίσματος είναι

$$\frac{S}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} Sh,$$

και του δεύτερου

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} Sh.$$

Καταλήγουμε στην εξής ισότητα για τον όγκο  $V$ :

$$V = \frac{V}{4} + \frac{1}{4} Sh,$$

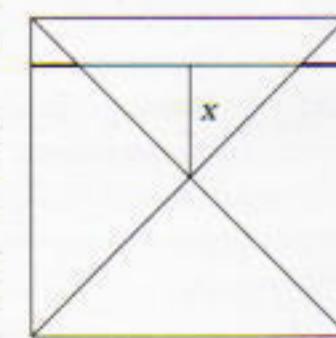
απ' όπου προκύπτει ο τύπος που αναζητούμε:

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

## Σφαίρα

Για να συναγάγουμε τον τύπο του όγκου της σφαίρας, θα χρησιμοποιήσουμε μια άλλη διάστημα αρχή:

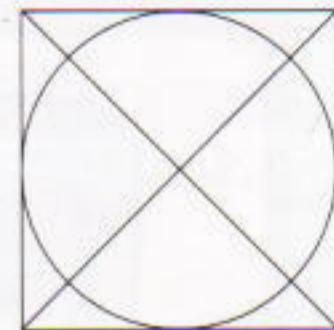
**ΑΡΧΗ ΤΟΥ CAVALIERI.** Δύο σώματα που βρίσκονται μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων έχουν ίσους όγκους όταν όλες οι τομές τους από επίπεδα παράλληλα προς αυτά τα δύο έχουν ίσα εμβαδά.



Σχήμα 5

# Όγκοι χωρίς

Θα μας βοηθήσει;

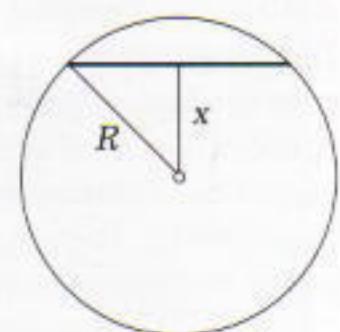


Σχήμα 4

Ας θεωρήσουμε τέσσερα στερεά: μια σφαίρα ακτίνας  $R$ , έναν κύλινδρο περιγεγραμμένο στη σφαίρα και δύο κατακόρυφους κώνους. Οι κορυφές των κώνων συμπίπτουν με το κέντρο της σφαίρας και οι βάσεις τους συμπίπτουν με τις βάσεις του κυλίνδρου. Στο Σχήμα 4 βλέπουμε την τομή αυτού του στερεού από ένα επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα του κυλίνδρου. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την εικόνα, για να δείξουμε πώς προκύπτει ο τύπος του όγκου της σφαίρας από την αρχή του Cavalieri όταν είναι γνωστοί οι τύποι του όγκου του κυλίνδρου και του κώνου.

Ας θεωρήσουμε ξεχωριστά τη σφαίρα από τον κύλινδρο και ας φανταστούμε ότι αφαιρούμε τους δύο κώνους από τον κύλινδρο. (Στο Σχήμα 5 βλέπετε τις τομές αυτών των δύο σωμάτων ξεχωριστά σχεδιασμένες. Η σφαίρα βρίσκεται ανάμεσα στις βάσεις του κυλίνδρου.)

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο παράλληλο προς τις βάσεις του κυλίνδρου που απέχει  $x$  από το κέντρο της σφαίρας.



# Ποκληρώματα

η αρχή του Cavalieri

ρας. Η τομή αυτού του επιπέδου και της σφαίρας είναι ένας κύκλος ακτίνας  $\sqrt{R^2 - x^2}$ . Το εμβαδόν του εν λόγω κύκλου είναι  $\pi(R^2 - x^2)$ . Η τομή του επιπέδου με το δεύτερο σώμα είναι ένας κυκλικός δακτύλιος εξωτερικής ακτίνας  $R$  και εσωτερικής ακτίνας  $x$ . Προφανώς, και το εμβαδόν αυτού του δακτυλίου ισούται επίσης με  $\pi(R^2 - x^2)$ . Σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri, μπορούμε να εξισώσουμε τον όγκο της σφαίρας με τον όγκο του κυλίνδρου μείον τους όγκους των δύο κώνων:

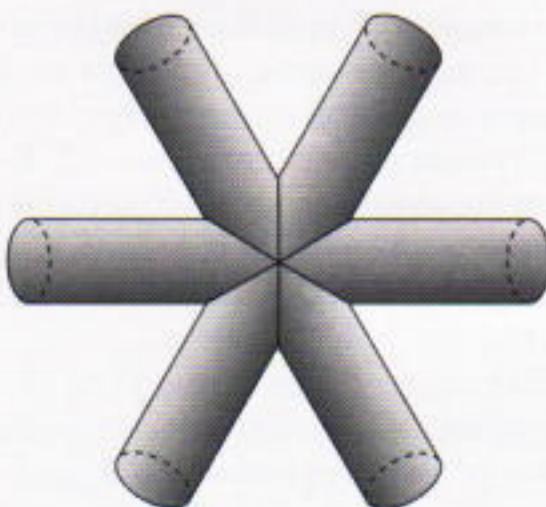
$$V = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

## Τεμνόμενοι κύλινδροι

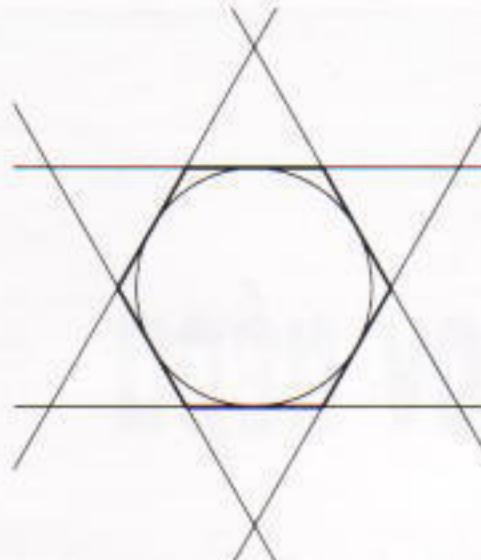
Ας λύσουμε το επόμενο πρόβλημα:

Υπολογίστε τον όγκο του κοινού τμήματος τριών άπειρων κυλίνδρων ακτίνας  $R$  οι άξονες των οποίων ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, διέρχονται από το ίδιο σημείο και σχηματίζουν ίσες γωνίες μεταξύ δύο διαδοχικών αξόνων είναι  $\pi/n$ .

Λύση. Θεωρούμε μια σφαίρα ακτίνας  $R$  με κέντρο το σημείο τομής των αξόνων των κυλίνδρων (Σχήμα 7). Φέρουμε ένα τυχαίο επίπεδο, παράλληλο προς το επίπεδο των αξόνων. Η τομή αυτού του επιπέδου με το κοινό τμήμα των κυλίνδρων είναι ένα κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο στον κύκλο



Σχήμα 6



Σχήμα 7

που είναι τομή του επιπέδου και της σφαίρας. Ο λόγος των εμβαδών αυτών των δύο τομών είναι ανεξάρτητος από το επιλεγμένο επίπεδο και ισούται με  $2\sqrt{3}/\pi$ . Συνεπώς, ο λόγος των όγκων του κοινού τμήματος και της σφαίρας είναι ο ίδιος. Επομένως, ο ζητούμενος όγκος ισούται με  $(8\sqrt{3}/3)R^3$ .

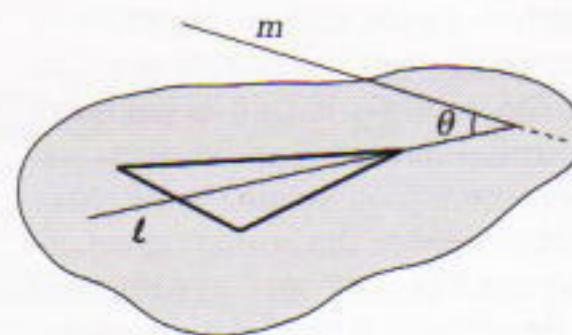
Η ιδέα αυτή μας επιτρέπει να λύσουμε ένα παρόμοιο πρόβλημα όπου το πλήθος των κυλίνδρων είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος  $n$  (δηλαδή, οι άξονες των κυλίνδρων ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, διέρχονται από το ίδιο σημείο και η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών αξόνων είναι  $\pi/n$ ).

## Ένα πρόβλημα περιστροφής

Η αρχή του Cavalieri μπορεί να μας βοηθήσει να λύσουμε και το επόμενο πρόβλημα:

Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση  $a$  και ύψος  $h$  (προς αυτή τη βάση). Εστω ότι το ύψος ανήκει στην ευθεία  $\ell$ . Η ευθεία  $m$  τέμνει την  $\ell$ , ανήκει σε επίπεδο κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου και σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την  $\ell$ . Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του τριγώνου γύρω από την  $m$  (Σχήμα 8).

Αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή του Cavalieri, μπορούμε να δείξουμε ότι ο ζητούμενος όγκος ισούται με τον όγκο



Σχήμα 8

ενός κώνου με κυκλική βάση ακτίνας  $a$  και ύψος  $h$  συνθ. Πράγματι, ας προβάλουμε το ύψος του τριγώνου στην ευθεία  $m$ . Προκύπτει ένα τμήμα μήκους  $h$  συνθ. Κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο με ύψος αυτό το τμήμα και βάση  $a$ . (Σ' αυτό το τρίγωνο, η απέναντι της βάσης κορυφή είναι η προβολή της αντίστοιχης κορυφής του αρχικού τριγώνου.) Αν περιστρέψουμε γύρω από την  $m$  το τρίγωνο που κατασκευάσαμε, θα προκύψει ο κώνος που προναφέρθηκε. Η τομή ενός επιπέδου κάθετου στην  $m$  με το στερεό του οποίου αναζητούμε τον όγκο είναι ένας δακτύλιος, ενώ με τον κώνο είναι ένας κύκλος. Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι τα εμβαδά αυτών των σχημάτων είναι ίσα, για να βρούμε ότι

$$V = \frac{\pi a^2 h \sin \theta}{12}.$$

## Ένα πρόβλημα απόστασης

Ολοκληρώνουμε το άρθρο με ένα απλό πρόβλημα, η λύση του οποίου βασίζεται στην κοινή λογική:

Δίνεται ένα επίπεδο κυρτό σχήμα με εμβαδόν  $S$  και περίμετρο  $L$ . Βρείτε τον όγκο του σώματος το οποίο αποτελείται από όλα τα σημεία του χώρου που η απόστασή τους από το σχήμα είναι μικρότερη ή ίση ενός δεδομένου θετικού αριθμού  $d$ .

Η λύση του προβλήματος είναι εύκολη όταν το σχήμα είναι ένα επίπεδο πολύγωνο. Σ' αυτή την περίπτωση, το στερεό που αναζητούμε αποτελείται από δύο πρίσματα ύψους  $d$  και βάσης  $S$ , από ένα πλήθος ημικυλίνδρων ακτίνας  $d$  και συνολικού ύψους  $L$ , και μερικά τμήματα σφαίρας με ακτίνα  $d$ , η ένωση των οποίων ισούται με ολόκληρη τη σφαίρα (τα τμήματα αυτά πρόσκεινται στις κορυφές του πολυγώνου, και οι επιφάνειές τους αποτελούνται από μία σφαιρική άτρακτο και δύο ημικύκλια). Συνεπώς, στην περίπτωση που το αρχικό σχήμα είναι πολύγωνο, μπορούμε να γράψουμε τον εξής τύπο για τον όγκο:

$$V = 2Sd + \frac{1}{2}\pi d^2 L + \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Στην πραγματικότητα, είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ο ίδιος τύπος ισχύει για κάθε κυρτό σχήμα. □

—I.F. Sharygin

# Σφυρίζοντας στον αέρα

Ας μελετήσουμε την περιοχή κοντά στη Γη χωρίς να εγκαταλείψουμε το έδαφος

Pavel Bliokh

**Ο**ΧΩΡΟΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗ ΓΗ ΔΕΝ είναι τόσο «άδειος» όσο θα νομίζατε. Μπορείτε να βρείτε εκεί ουδέτερα σωματίδια (άτομα και μόρια των αερίων της ατμόσφαιρας) αλλά και ελεύθερα φορτία —τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα που σχηματίζουν το γαλαξιακό πλάσμα. Ακόμη κι αν ζούμε σχεδόν αποκλειστικά στο βυθό ενός ωκεανού αέρα, είναι σημαντικό για μας να γνωρίζουμε τι συμβαίνει στα υπόλοιπα στρώματα της ατμόσφαιρας, επειδή οι διαδικασίες που αναπτύσσονται στο απότερο διάστημα συνδέονται στενά με τις συνθήκες της ζωής στη Γη.

Τα κοσμικά σωματίδια και τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στα μεγάλα ύψη συνήθως παρακολουθούνται με συσκευές τοποθετημένες σε δορυφόρους και πυραύλους. Υπάρχουν ωστόσο και άλλοι τρόποι για να γίνει αυτό. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να συλλέξουμε πολλές πληροφορίες για τις ιδιότητες της ατμόσφαιρας εκατοντάδες και χιλιάδες χιλιόμετρα μακριά από τη Γη χωρίς να εγκαταλείψουμε το εργαστήριο. Αυτές οι «επίγειες μελέτες του διαστήματος» γίνονται με πολύ απλές μεθόδους. Ο εξοπλισμός που απαιτείται στοιχίζει όσο περίπου ένα καλό ραδιόφωνο ή μια συσκευή τηλεοράσεως. Άλλα για να εκμεταλλευτείτε τούτες τις δελεαστικές δυνατότητες, πρέπει να μάθετε ν' ακούτε το κοσμικό «οφύριγμα» (ηλεκτρομαγνητικά σήματα που προέρχονται από το απότερο διάστημα, το χώρο πέρα από την εξώ-

σφαιρα). Σ' αυτό λοιπόν το θέμα θα εστιαστεί το άρθρο μας.

## Ραδιοκύματα σε ουδέτερο αέριο

Τα ραδιοκύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις με συχνότητες  $f$  που κυμαίνονται από μερικά hertz έως μερικές χιλιάδες gigahertz ( $1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$ ). Για να καταστεί δυνατή η σύγκριση, μια συμβατική ηλεκτρική συσκευή λειτουργεί σε συχνότητες που κυμαίνονται από μερικές εκατοντάδες kilohertz (kHz) έως και μερικές εκατοντάδες megahertz (MHz). Στο παρόν άρθρο, το ενδιαφέρον μας στρέφεται σε συχνότητες στην περιοχή των μερικών kilohertz ( $f = 10^3 - 10^4 \text{ Hz}$ ).

Η διάδοση των ραδιοκυμάτων σε κάποιο μέσο διαφέρει από τη διάδοσή τους στο κενό. Το μέσο περιέχει πάντοτε ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια, τα οποία μπορεί να βρίσκονται είτε σε «σταθερή» (ή δέσμια) κατάσταση (δηλαδή ηλεκτρόνια σε ουδέτερα άτομα) είτε σε «ελεύθερη» (ηλεκτρόνια σε πλάσμα). Εκτός από τα ηλεκτρόνια, τους φορείς του αρνητικού φορτίου, το μέσο περιέχει θετικά φορτισμένα σωματίδια (ιόντα). Στην περιοχή των συχνοτήτων που θα μας απασχολήσει εδώ, ο ρόλος των ιόντων είναι μικρός, επειδή έχουν πολύ μεγάλη μάζα (σε σύγκριση με τα ηλεκτρόνια), και έτσι ταλαντώνονται με πολύ μικρό πλάτος. Τα ηλεκτρόνια όμως που τα-

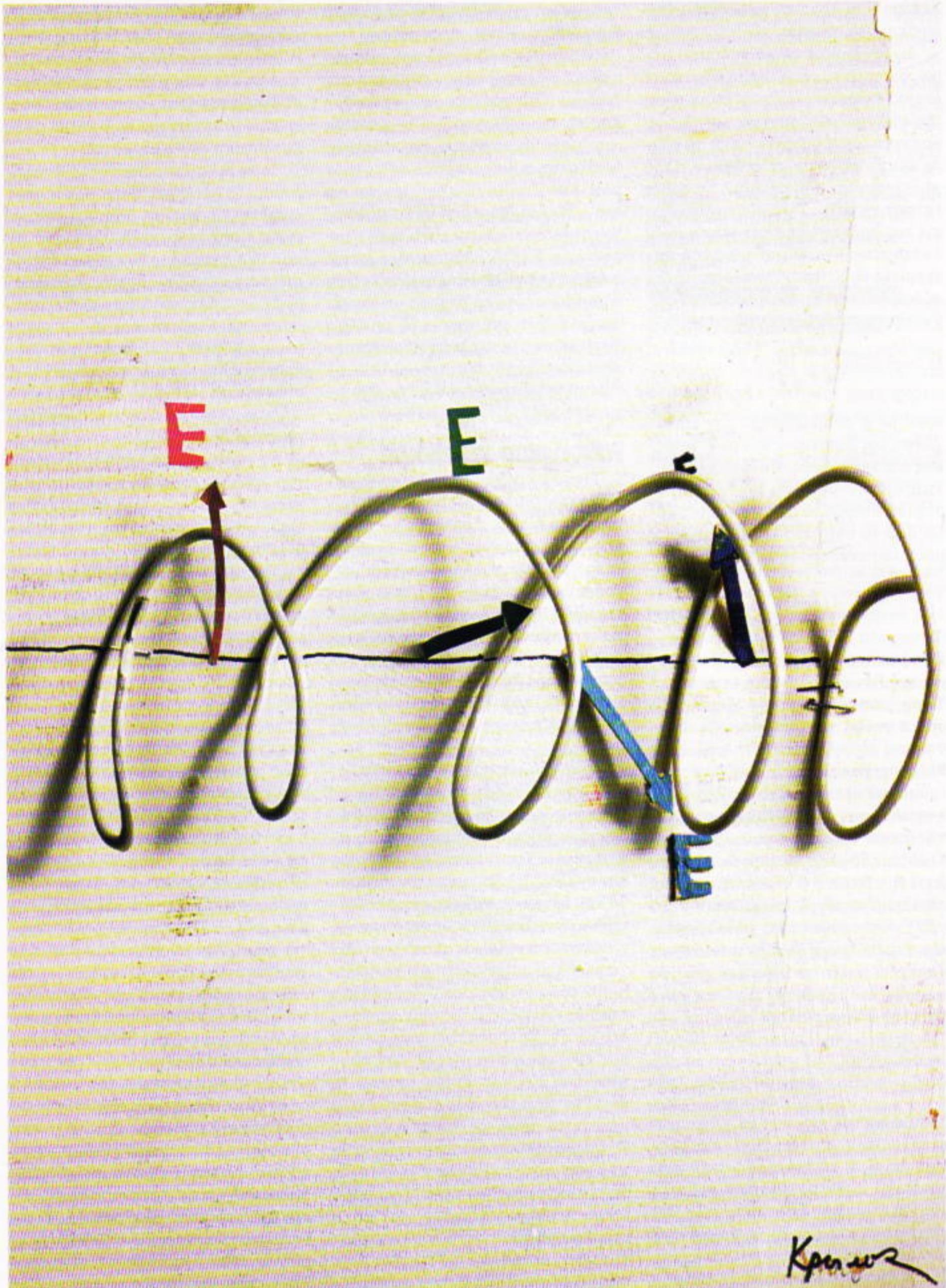
λαντώνονται στο ηλεκτρικό πεδίο των ραδιοκυμάτων μετατρέπονται με τη σειρά τους σε πηγές δευτερογενών κυμάτων της ίδιας συχνότητας.

Το κύμα που δημιουργείται σ' ένα μέσο δεν διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα. Η μεταβολή της ταχύτητας του κύματος εξηγείται από το δείκτη διάθλασης  $n$ , ο οποίος εκφράζει τον παράγοντα κατά τον οποίο η ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο μέσο είναι μικρότερη από την αντίστοιχη στο κενό:

$$v_\varphi = \frac{c}{n(\omega)}. \quad (1)$$

Το νόημα του δείκτη « $\varphi$ » θα το εξετάσουμε παρακάτω. Συμβολίζοντας το δείκτη διάθλασης με  $n(\omega)$ , δίνουμε έμφαση στο γεγονός ότι γενικά ο δείκτης διάθλασης δεδομένου μέσου μπορεί να είναι διαφορετικός για διαφορετικές κυκλικές συχνότητες. Το φαινόμενο της εξάρτησης του  $n$  από το ωκαλείται διασκεδασμός, και γίνεται ιδιαίτερα αισθητό όταν υπάρχει συντονισμός —δηλαδή όταν η συχνότητα του ραδιοκύματος  $\omega$  ισούται κατά προσέγγιση με τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης των ηλεκτρονίων  $\omega_0$ . Εάν η διαφορά των συχνοτήτων είναι αρκετά μεγάλη —για παράδειγμα,  $\omega < \omega_0$  — ο διασκεδασμός είναι πολύ μικρός.

Στο παρόν άρθρο η φύση της συνάρτησης  $n(\omega)$  παίζει αποφασιστικό ρόλο· γι' αυτό, ως πρώτο βήμα χρειάζεται να εκτιμήσουμε τις φυσικές συχνότητες της ταλάντωσης του η-



Krausz

λεκτρονίου τόσο σε ουδέτερο αέριο όσο και στο πλάσμα.

Ας αρχίσουμε με το ουδέτερο αέριο, όπου τα ηλεκτρόνια παραμένουν δέσμια εντός των ατόμων. Οι ακριβείς υπολογισμοί των φυσικών κυκλικών συχνοτήτων τους γίνονται με τη χρήση κραντομηχανικών μεθόδων, αλλά μπορούμε να οδηγηθούμε σε ορθές εκτιμήσεις στηριζόμενοι στην αναλογία του απλούστερου ταλαντούμενου συστήματος — του μαθηματικού εκκρεμούς. Θυμηθείτε την περίφημη εκφραση για την (φυσική) κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων του:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad (2)$$

όπου με  $g$  συμβολίζουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας και με  $\ell$  το μήκος του εκκρεμούς. Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του υπορρίζου (της ποσότητας κάτω από το σύμβολο της ρίζας) με τη μάζα του εκκρεμούς  $m$ , παίρνουμε

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F_g}{m\ell}}. \quad (3)$$

Η παραπάνω έκφραση περιέχει τη βαρυτική δύναμη  $F_g = mg$  αντί της  $g$ . Τώρα μπορούμε να την τροποποιήσουμε για να περιγράψουμε τις ταλαντώσεις των ηλεκτρονίων. Απλώς στη θέση της βαρυτικής δύναμης  $F_g$  θέτουμε την ηλεκτροστατική δύναμη  $F_e$ , η οποία «συγκρατεί» τα ηλεκτρόνια στο άτομο. Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb, ισούται με  $F_e = e^2 / 4\pi\epsilon_0 a^2$ , όπου  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  το φορτίο του ηλεκτρονίου και  $a \equiv 10^{-10} \text{ m}$  η ακτίνα του ατόμου (που εδώ παίζει το ρόλο του μήκους του εκκρεμούς). Θέτοντας  $\ell = a$  στην εξίσωση (3), παίρνουμε

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{e^2}{\epsilon_0 ma^3}}. \quad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη μάζα του ηλεκτρονίου  $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , βρίσκουμε  $\omega_0 \equiv 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , τιμή που χονδρικά αντιστοιχεί στην περιοχή συχνοτήτων του ορατού φωτός και υπερβαίνει κατά πολύ τη συχνότητα των ραδιοκυμάτων για την οποία ενδιαφερόμαστε. Επομένως, η ανισό-

τητα  $\omega \ll \omega_0$  είναι ορθή με υψηλό βαθμό αξιοποστίας, πράγμα που σημαίνει ότι το ουδέτερο αέριο ουσιαστικά δεν ασκεί καμία επίδραση στη διάδοση των ραδιοκυμάτων. Ακόμη και στα χαμηλότερα και πυκνότερα στρώματα της ατμόσφαιρας, ο δείκτης διάθλασης  $n$  διαφέρει από τη μονάδα μόνο στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο, και στο απώτερο διάστημα οι επιπτώσεις του ουδέτερου αερίου είναι ακόμη μικρότερες. Εκδηλώνεται μόνο έμμεσα, όταν τα «ελεύθερα» ηλεκτρόνια (του πλάσματος) συγκρούονται με τα ουδέτερα μόρια του αερίου. Οι εν λόγω συγκρούσεις προκαλούν κάποια απόσβεση των ταλαντώσεων, αλλά στην περίπτωσή μας μπορούμε να την αγνοήσουμε.

## Ραδιοκύματα στο πλάσμα

Υπό την επίδραση εξωτερικών παραγόντων (για παράδειγμα, της ακτινοβολίας ή των κρούσεων), κάποια από τα ηλεκτρόνια μπορεί να αποσπαστούν από τα άτομα, οπότε θα εμφανιστούν «ελεύθερα» ηλεκτρόνια και ιόντα. Το εν λόγω ιονισμένο αέριο οι φυσικοί το ονομάζουν πλάσμα. Το πλάσμα περιέχει συνήθως και ουδέτερα σωματίδια, αλλά όσο λιγότερα είναι αυτά, τόσο σαφέστερα εκδηλώνονται οι χαρακτηριστικές ιδιότητές του.

Πρακτικά δεν υπάρχει φυσικό πλάσμα στα κατώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, επειδή εδώ είναι πολύ ασθενέστερη η ιονίζουσα ηλιακή ακτινοβολία (υπεριώδης ακτινοβολία και ακτίνες X). Σε υψόμετρο περίπου 50 km, αρχίζουν να γίνονται εντονότερα τα φαινόμενα ιονισμού λόγω της ηλιακής ακτινοβολίας. Αυτό αποτελεί χαρακτηριστική ένδειξη ότι εισερχόμαστε στην ιονόσφαιρα — δηλαδή στο στρώμα του πλάσματος που περιβάλλει τη Γη. Σε υψόμετρο μεταξύ 300 και 400 km η πυκνότητα των ηλεκτρονίων και των ιόντων αποκτά τη μέγιστη τιμή της, και στη συνέχεια μειώνεται αργά, μολονότι η ένταση των παραγόντων ιονισμού αυξάνει με το ύψος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η πυκνότητα του αέρα είναι πολύ μικρή σε τέτοια υψόμετρα — αν και η ατμόσφαιρα είναι σχεδόν πλήρως ιονισμένη, εντούτοις το πλήθος των «ελεύθερων» ηλεκτρονίων και των ι-

όντων παραμένει πολύ μικρό. Στις απώτερες περιοχές του διαστήματος ο βαθμός ιονισμού είναι εξαιρετικά υψηλός, και, σύμφωνα με τις προσφατες εκτιμήσεις, περίπου 99,9% του ορατού σύμπαντος βρίσκεται στην κατάσταση του πλάσματος.

Τιως προσέξατε πως, όταν αναφέρομαι στα ηλεκτρόνια του πλάσματος, επιμένω να θέτω τη λέξη «ελεύθερα» εντός εισαγωγικών. Ιδιού ο λόγος: Αν και τα ηλεκτρόνια δεν είναι δέσμια στα άτομά τους, εντούτοις εξακολουθούν να αλληλεπιδρούν με τα υπόλοιπα ηλεκτρόνια και με τα ιόντα μέσω ηλεκτρικών πεδίων. Οι συγκριμένες δυνάμεις δρουν σε μεγάλες αποστάσεις, και σ' αυτές οφείλονται ορισμένες από τις ταλαντώσεις του πλάσματος.

Ας υποθέσουμε ότι η πυκνότητα των ηλεκτρονίων αυξάνεται τυχαία μέσα σε κάποιο μικρό όγκο. Τούτο σημαίνει ότι εδώ δημιουργείται περισσεια αρνητικών φορτίων, και το ηλεκτρικό πεδίο που παράγουν αυτά ωθεί τα ηλεκτρόνια έξω από τη συγκριμένη περιοχή. Τελικά η τοπική περίσσεια φορτίου εξαλείφεται, αλλά κατά τη συγκεκριμένη διαδικασία τα ηλεκτρόνια αποκτούν ταχύτητα και απομακρύνονται το ένα από το άλλο. Κατά συνέπεια, η πυκνότητα των ηλεκτρονίων στον όγκο που θεωρήσαμε γίνεται μικρότερη από τη μέση, ενώ η πυκνότητα των θετικών ιόντων δεν μεταβάλλεται. Η έλλειψη ηλεκτρονίων ισοδυναμεί με την εμφάνιση ενός θετικού φορτίου και ενός ηλεκτρικού πεδίου που έλκει ξανά προς τα πίσω τα απομακρυνόμενα ηλεκτρόνια. Όταν όμως τα ηλεκτρόνια επιστρέφουν, αποκτούν και πάλι ταχύτητα, και προσπερνούν το σημείο ισορροπίας εξαιτίας της αδράνειάς τους, με αποτέλεσμα να συσσωρεύεται αρνητικό φορτίο. Έτσι, ο κύκλος αρχίζει εκ νέου.

Για να εκτιμήσουμε την κυκλική συχνότητα της παραπάνω ταλάντωσης, χρησιμοποιούμε και πάλι την εξίσωση (4), αλλά αντί για την ακτίνα του ατόμου  $a$  εισάγουμε τη μέση απόσταση (στην κατάσταση ισορροπίας) μεταξύ των ηλεκτρονίων. Έστω ότι ο μέσος αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου ( $1 \text{ m}^3$ ) είναι  $N_0$ . Τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι

$N_0^{-1/3}$  (κατά μέσο όρο, βέβαια). Υποθέτοντας ότι  $a = N_0^{-1/3}$  στην εξίσωση (4), παίρνουμε τον τύπο για τη φυσική κυκλική συχνότητα των ηλεκτρονικών ταλαντώσεων στο πλάσμα:

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{e^2 N_0}{\epsilon_0 m}}. \quad (5)$$

Αν μετράμε τη συχνότητα σε hertz και την πυκνότητα των ηλεκτρονίων σε  $m^{-3}$  και εισάγουμε στην εξίσωση (5) τις αριθμητικές τιμές των  $\epsilon_0$ ,  $e$  και  $m$ , καταλήγουμε στον ακόλουθο απλό τύπο:

$$f_p [\text{Hz}] \equiv 9 \sqrt{N_0 [\text{m}^{-3}]}.$$

Η μέγιστη πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι περίπου  $10^{12} \text{ m}^{-3}$ , επομένως η φυσική συχνότητα  $f_p = 10 \text{ MHz}$  βρίσκεται στην περιοχή των ραδιοκυμάτων. Αυτό σημαίνει ότι ο δείκτης διάθλασης της ιονόσφαιρας μπορεί να διαφέρει ουσιαστικά από το 1, και για  $\omega \approx \omega_p$  έχουμε ισχυρό διασκεδασμό. Πράγματι, ο τύπος για το δείκτη διάθλασης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (6)$$

Ας προσέξουμε τα κύρια χαρακτηριστικά της τελευταίας εξίσωσης (την οποία απλώς σας έδωσα χωρίς να την εξαγάγω βήμα προς βήμα). Αν αυξήσουμε την κυκλική συχνότητα των ραδιοκυμάτων, αρχίζοντας από την περιοχή όπου  $\omega < \omega_p$  και κινούμενοι προς τις τιμές  $\omega > \omega_p$ , μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι ιδιότητες του πλάσματος μεταβάλλονται δραματικά στο συντονισμό — δηλαδή όταν  $\omega = \omega_p$ . Όταν  $\omega < \omega_p$ , το υπόρριζο στην εξίσωση (6) γίνεται αρνητικό, και ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει φανταστικές τιμές. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι τα συγκεκριμένα κύματα χαμηλής συχνότητας δεν μπορούν να διαδοθούν στο πλάσμα. Αντιθέτως, όταν  $\omega > \omega_p$ , τότε ο δείκτης διάθλασης  $n$  είναι μικρότερος του 1, και πλησιάζει στο 1 καθώς η συχνότητα τείνει στο άπειρο. Η τάση του  $n(\omega)$  να πλησιάζει το 1 καθώς το  $\omega \rightarrow \infty$  αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε μέσου, και όχι αποκλειστικά του πλάσματος.

Εξηγείται από το γεγονός ότι, εξαιτίας της αδράνειας, τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να ταλαντώνονται με άπειρη συχνότητα. Έτσι, δεν δημιουργούνται στο μέσο δευτερογενή κύματα εξαιρετικά υψηλών συχνοτήτων, και το πρωτογενές ηλεκτρομαγνητικό κύμα διέρχεται διά του μέσου σαν να διαδιδόταν στο κενό.

Όταν  $n < 1$ , η εξίσωση (1) δίνει  $v_\phi > c$ , πράγμα που σημαίνει ότι το κύμα διαδίδεται στο πλάσμα με υπερσχετική ταχύτητα. Θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι η τελευταία σχέση παραβιάζει τη βασική αρχή της θεωρίας του Αϊνστάιν, σύμφωνα με την οποία τίποτε (ούτε φυσικό σώμα ούτε διαταραχή πεδίου ή σήμα) δεν είναι δυνατόν να κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός  $c$ . Στην πραγματικότητα, όμως, δεν επέρχεται καμία παραβίαση. Η ταχύτητα που υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (1) αφορά ένα κύμα ορισμένης συχνότητας. Ένα τέτοιο κύμα είναι μια άπειρη ημιτονοειδής κύμανση, η οποία αδυνατεί να διαβιβάσει σήμα, επειδή το σχήμα της διατηρείται σταθερό για πάντα.

Για να μεταδώσει κανείς ένα σήμα, πρέπει να χρησιμοποιήσει όχι μία συχνότητα αλλά ομάδα συχνοτήτων, από τις οποίες είναι δυνατόν να σχηματίσει κύμα της απαιτούμενης μορφής. Η ταχύτητα διάδοσης ολόκληρης της ομάδας κυμάτων είναι διαφορετική από την ταχύτητα ενός μεμονωμένου κύματος, και καθορίζεται από την εξίσωση

$$v_o = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \quad (7)$$

Για να διακρίνουμε τους δύο τύπους ταχυτήτων, η ταχύτητα που καθορίζεται από την εξίσωση (1) ονομάζεται ταχύτητα φάσης, ενώ η ταχύτητα που καθορίζεται από την εξίσωση (7) ονομάζεται ταχύτητα ομάδας (πράγμα που εξηγεί το δείκτη « $o$ » στην εξίσωση (7)). Στο κενό,  $n = 1$  και  $dn/d\omega = 0$ , οπότε  $v_\phi = v_o = c$ . Εάν υπολογίσουμε τη  $dn/d\omega$  χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6), μπορούμε να δείξουμε ότι στο πλάσμα ισχύει

$$v_\phi \cdot v_o = c^2.$$

Εφόσον  $v_\phi > c$ , τότε  $v_o < c$ , το οποίο

σημαίνει ότι τα ραδιοφωνικά σήματα διαδίδονται στο πλάσμα με ταχύτητα μικρότερη από  $c$ , σε συμφωνία με την προαναφερθείσα αρχή της θεωρίας της σχετικότητας: καθώς το  $\omega$  πλησιάζει στο  $\omega_p$  από υψηλότερες κυκλικές συχνότητες, η ταχύτητα φάσης απειρίζεται ( $v_\phi \rightarrow \infty$ ) και η ταχύτητα ομάδας τείνει στο 0 ( $v_o \rightarrow 0$ ). Αυτό σημαίνει ότι σήματα με  $\omega \leq \omega_p$  δεν υπάρχουν (δηλαδή δεν διαδίδονται) στο πλάσμα.

## Ραδιοκύματα σε μαγνητικά ενεργοποιημένο πλάσμα

Μαγνητικά πεδία υπάρχουν πάντού στο σύμπαν. Δημιουργούνται από ηλεκτρικά ρεύματα (ροές φορτισμένων σωματιδίων) και από τα μόνιμα μαγνητισμένα ουράνια σώματα (όπως είναι η Γη). Το κύριο μαγνητικό πεδίο στην ιονόσφαιρα είναι το γεωμαγνητικό πεδίο. Πρόκειται για το πεδίο που προσανατολίζει τη μαγνητική βελόνα μιας πυξίδας.

Τώρα, ας διευκρινίσουμε πώς πρέπει να τροποποιηθεί η εξίσωση (6) εάν το πλάσμα βυθιστεί σε σταθερό μαγνητικό πεδίο (ένα τέτοιο πλάσμα ονομάζεται μαγνητικά ενεργοποιημένο). Οπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, οι ιδιότητες διασκεδασμού ενός μέσου — δηλαδή η φύση της συνάρτησης  $n(\omega)$  — συνδέονται στενά με τις φυσικές κυκλικές συχνότητες των ηλεκτρονικών ταλαντώσεων. Εν αυσία μαγνητικού πεδίου, τα ηλεκτρόνια του πλάσματος κινούνται (ταλαντώνονται) με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις κατευθύνσεις. Η φυσική κυκλική συχνότητα των εν λόγω ιστορικών ταλαντώσεων (δηλαδή των ταλαντώσεων που είναι ανεξάρτητες από την κατεύθυνση της ταχύτητας) καθορίζεται από την εξίσωση (5). Όταν το πλάσμα τεθεί εντός μαγνητικού πεδίου  $B_0$ , τότε αλλάζει ριζικά ο χαρακτήρας της κίνησης των ηλεκτρονίων: εμφανίζεται μια ισχυρή εξάρτηση από την κατεύθυνση της ταχύτητας  $v$ .

Ας θυμηθούμε ότι το μαγνητικό πεδίο δεν επηρεάζει όσα φορτία είναι ακίνητα ή κινούνται κατά μήκος των μαγνητικών δυναμικών γραμμών. Τα φορτία ωστόσο που κινούνται κάθετα προς το  $B_0$  δέχονται την επίδραση της δύναμης Lorentz με κατεύθυνση κάθετη στα  $v$  και  $B_0$ . Το μέτρο

της εν λόγω δύναμης δίνεται από τον τύπο

$$F_m = ev_{\perp}B_0, \quad (8)$$

όπου  $v_{\perp}$  είναι η προβολή του διανύσματος της ταχύτητας  $v$  στο κάθετο προς το  $B_0$  επίπεδο.

Ας αναλύσουμε την τυχαία ταχύτητα  $v$  ενός ηλεκτρονίου σε παράλληλη και γεγάρσια προς το  $B_0$  συνιστώσα:  $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ . Η κίνηση κατά τη διεύθυνση του  $B_0$  δεν επηρεάζεται από το μαγνητικό πεδίο, οπότε η παράλληλη ταχύτητα  $v_{\parallel}$  δεν «αισθάνεται» την παρουσία του  $B_0$ . Ετοι οι διαμήκεις ταλαντώσεις των ηλεκτρονίων χαρακτηρίζονται από την ίδια κυκλική συχνότητα  $\omega_p$  που υπολογίσαμε προηγουμένως (εξίσωση (5)).

Η κίνηση των ηλεκτρονίων στο εγκάρσιο επίπεδο, ωστόσο, είναι εντελώς διαφορετική. Επειδή η δύναμη Lorentz (εξίσωση (8)) είναι κάθετη προς τη  $v_{\perp}$ , η ταχύτητα δεν αλλάζει κατά μέτρο, αν και η τροχιά καμπύλωνται συνεχώς. Ως εκ τούτου, το ηλεκτρόνιο περιφέρεται σ' έναν κύκλο ακτίνας  $r$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_m$ . Επομένως, για την γεγάρσια ταχύτητα ισχύει  $v_{\perp} = r\omega_m$  και για τη δύναμη

$$F_m = er\omega_m B_0.$$

Επιστρέφοντας στην αρχική εξίσωση (3) και αντικαθιστώντας το  $\omega_0$  με  $\omega_m$ , το  $l$  με  $r$  και το  $F_g$  με  $F_m$ , παίρνουμε

$$\omega_m = \sqrt{\frac{F_m}{mr}} = \sqrt{\frac{er\omega_m B_0}{m}}.$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης δίνει

$$\omega_m = \frac{eB_0}{m}. \quad (9)$$

Η εν λόγω τιμή είναι γνωστή ως γυρομαγνητική κυκλική συχνότητα ή κυκλική συχνότητα μετάπτωσης *Larmor* των ηλεκτρονίων. Στην ιονόσφαιρα,  $B_0 \approx 4 \cdot 10^{-5}$  T και  $\omega_m \sim 10^6$  s<sup>-1</sup>. Η συγκεκριμένη κυκλική συχνότητα βρίσκεται στην περιοχή των ραδιοκυμάτων, επομένως το μαγνητικό πεδίο της Γης ασκεί σημαντική επίδραση στη διάδοση των ραδιοσημάτων στην ιονόσφαιρα στο βαθμό που η κυκλική συχνότητά τους  $\omega$  προσεγγίζει την  $\omega_m$ .

Σημειώστε ότι οι εξισώσεις (5) και (9), οι οποίες δίνουν τις φυσικές κυκλικές συχνότητες των ταλαντώσεων των ηλεκτρονίων στο πλάσμα, περιέχουν σύμβολα ισότητας, αντίθετα με την εξίσωση (4). Και τούτο διότι ο αυστηρός υπολογισμός των  $\omega_p$  και  $\omega_m$  καταλήγει στα ίδια αποτελέσματα.

Τώρα χρειάζεται να γράψουμε την έκφραση για το δείκτη διάθλασης στο μαγνητικά ενεργοποιημένο πλάσμα. Το συγκεκριμένο έργο δεν είναι εύκολο, επειδή η ταχύτητα διάδοσης των ραδιοκυμάτων εξαρτάται από την κατεύθυνσή της σχετικά με το  $B_0$ . Επιπρόσθιτως, πρέπει να λάβουμε υπόψη και τη δομή του ηλεκτρικού πεδίου στο κύμα (δηλαδή την πόλωσή του). Στο παρόν άρθρο θα περιοριστούμε στην απλή περίπτωση της διαμήκους διάδοσης κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής. Ακόμη και σ' αυτή την περίπτωση, ωστόσο, υπάρχουν δύο εξισώσεις (όχι μία) για τους δείκτες διάθλασης:

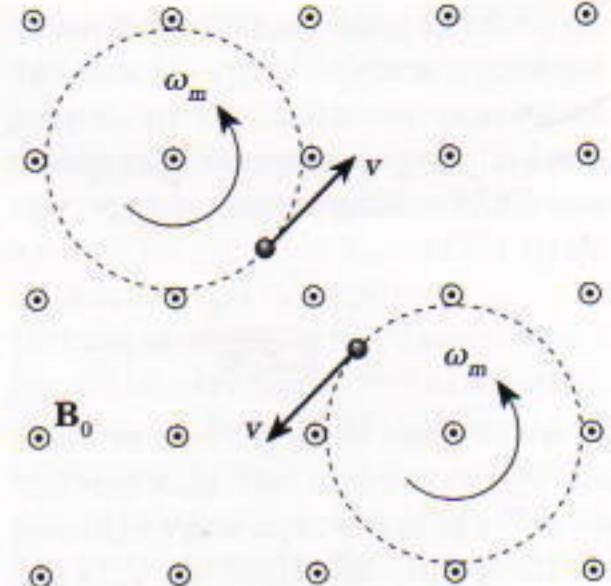
$$n_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_m)}}, \quad (10)$$

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_m)}}. \quad (11)$$

(Για να μην απομακρυνθώ από τους στόχους του άρθρου, σας έδωσα απλώς τις εξισώσεις χωρίς να σας δείξω πώς εξάγονται.)

### Τακτικά και έκτακτα κύματα

Η συνθήκη συντονισμού που διατυπώθηκε παραπάνω ως η σύμπτωση της συχνότητας του ραδιοκύματος με τη φυσική συχνότητα των ταλαντώσεων των ηλεκτρονίων (στην περίπτωση όπου  $\omega = \omega_m$ ) αποτελεί αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για συντονισμό παρουσία μαγνητικού πεδίου. Είναι επίσης αναγκαίο να αντιστοιχεί η δομή του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος (η πόλωση) στο χαρακτήρα της κίνησης των ηλεκτρονίων. Καθώς τα ηλεκτρόνια περιστρέφονται γύρω από τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές του  $B_0$  (Σχήμα 1), το ηλεκτρικό πεδίο του ραδιοκύματος πρέπει επίσης να περιστρέφεται. Το ηλεκτρικό πεδίο, ωστόσο, μπορεί να



Σχήμα 1

Ηλεκτρόνια σε μαγνητικό πεδίο, τα οποία διαγράφουν κύκλους κατά την ίδια φορά για οποιαδήποτε αρχική τους ταχύτητα. Το μαγνητικό πεδίο  $B_0$  έχει κατεύθυνση προς τον αναγνώστη, κάθετα στο επίπεδο της σελίδας.

περιστρέφεται με τη μια ή την άλλη φορά, ανάλογα με τον τρόπο παραγωγής των ραδιοκυμάτων. Ο συντονισμός στην κυκλική συχνότητα  $\omega = \omega_m$  θα επέλθει μόνο στην περίπτωση που η φορά της περιστροφής συμπίπτει με αυτή του ηλεκτρικού πεδίου. Όπως δείχνει η εξίσωση (10), ο δείκτης διάθλασης  $n_1(\omega)$  στο συντονισμό τείνει στο άπειρο. Στην πραγματικότητα ο  $n_1$  είναι φραγμένος, και θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το μέγιστο του εάν λαμβάναμε υπόψη τις συγκρούσεις των ηλεκτρονίων με τα άλλα σωματίδια. Βρίσκουμε τότε ότι ένα κύμα με δείκτη διάθλασης  $n_1$  έχει ορισμένες πολύ παράξενες ιδιότητες, και ως εκ τούτου αναφέρεται ως έκτακτο.

Στην αντίθετη περίπτωση, όταν το ηλεκτρικό πεδίο περιστρέφεται με αντίθετη φορά από εκείνη της περιστροφής των ηλεκτρονίων, δεν αναμένεται τίποτε το ασυνήθιστο όταν  $\omega = \omega_m$ . Πράγματι, η εξίσωση (11) υποτροπίζει ένα τέτοιο συμπέρασμα. Γενικά οι ιδιότητες του κύματος  $n_2$  είναι σε μεγάλο βαθμό παρεμφερείς με τις ιδιότητες ενός κύματος που διαδιδεται σε απουσία μαγνητικού πεδίου. Έτοι, ονομάζεται **τακτικό** κύμα.

Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των κυμάτων  $n_1$  και  $n_2$  εκδηλώνονται σαφέστατα. Ας θυμηθούμε ότι στο πλάσμα, εν απουσία μαγνητικού πεδίου, ένα ραδιοκύμα με συχνότητα  $\omega < \omega_p$  δεν μπορεί να διαδοθεί, λόγω του αρνητικού υπορρίζου στην εξίσωση (6). Για ένα τακτικό κύμα  $n_2$  ισχύει η ίδια

ιδιότητα, αν και το όριο των χαμηλών συχνοτήτων καθορίζεται από μια ελαφρώς διαφορετική ανισότητα:  $\omega + \omega_m < \omega_p$ .

Τα έκτακτα κύματα συμπεριφέρονται εντελώς διαφορετικά. Εάν  $\omega < \omega_m$ , ο δεύτερος όρος του υπορρίζου της εξίσωσης (10) γίνεται θετικός, και έτσι για ένα έκτακτο κύμα δεν επιβάλλεται κανένας περιορισμός στην κίνηση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η διάδοση των ραδιοκυμάτων στην περιοχή των kilohertz περιορίζεται από τις ακόλουθες ισχυρές ανισότητες:  $\omega \ll \omega_m$  και  $\omega \ll \omega_p^2 / \omega_m$ . Σε χαμηλές συχνότητες, η εξίσωση (10) για τον  $n_1$  απλουστεύεται — το 1 στο υπόρριζο μπορεί να παραλειφθεί, και έτσι παίρνουμε

$$n_1 \equiv \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega \omega_m}}. \quad (12)$$

Θυμόμαστε ότι ο δείκτης διάθλασης του πλάσματος εν απουσίᾳ μαγνητικού πεδίου είναι πάντοτε μικρότερος του 1. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όμως,  $n_1 \gg 1$ , λόγω των ανισοτήτων που προαναφέρθηκαν. Αυτό σημαίνει ότι το κύμα έχει πολύ μικρή ταχύτητα σε σχέση με τη  $c$  ( $v_\phi = c/n_1 \ll c$ ). Για να αποκτήσετε μια αισθηση της δομής του, σχεδιάστε την ένταση του ηλεκτρικού (ή του μαγνητικού) πεδίου ως ένα βέλος  $E$  και παρακολουθήστε την κίνησή του. Αν φτιάχναμε μια ταινία «κινουμένων σχεδίων» με τα σχήματά μας, θα βλέπαμε ότι το πίσω άκρο του βέλους κινείται με ταχύτητα  $v_\phi$  κατά μήκος των δυναμικών μαγνητικών γραμμών, ενόσω η αιχμή του περιστρέφεται γύρω από το  $B_0$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , ενώ το

διάνυσμα  $E$  παραμένει πάντοτε κάθετο στο  $B_0$  (Σχήμα 2).

Η ταυτόχρονη μετατόπιση και περιστροφή έχουν αποτέλεσμα μια ελικοειδή τροχιά για την αιχμή του διανύσματος  $E$ . Εδώ ακριβώς οφείλεται και το όνομά του — ελικοειδές κύμα. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν και τα συνώνυμα: συρίζον κύμα, συριγμός, ατμοσφαιρικός συριγμός. Οι συγκεκριμένες λέξεις δεν έχουν καμιά σχέση με τη δομή του ηλεκτρικού πεδίου — περιγράφουν τα παράξενα φυσικά φαινόμενα που προκαλούνται από τη διάδοση των ελικοειδών κυμάτων. Τα εν λόγω φαινόμενα ονομάζονται συρίζοντα παράσιτα και χρησιμοποιούνται στην επίγεια έρευνα, στην οποία αναφερθήκαμε και στην αρχή του άρθρου.

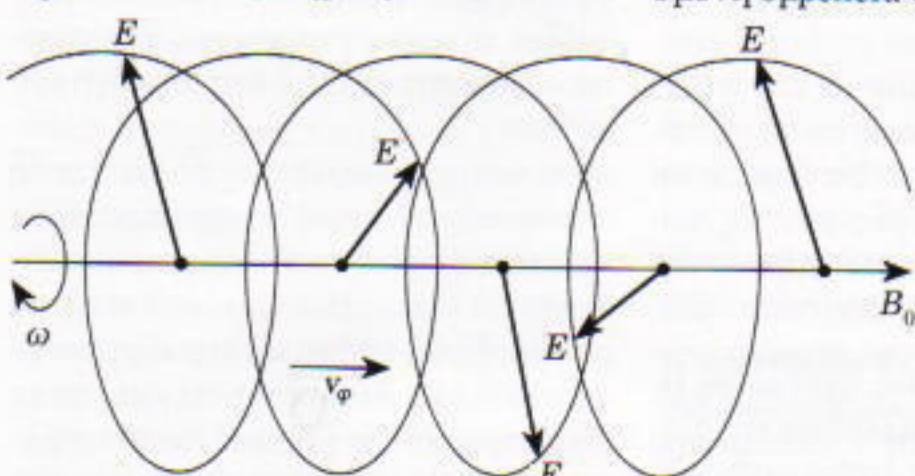
## Συρίζοντα παράσιτα

Τα ατμοσφαιρικά παράσιτα είναι φυσικές ηλεκτρικές εκκενώσεις στην ατμόσφαιρα που γενικά προκαλούνται από τους κεραυνούς. Χωρίς αμφιβολία θα τα έχετε συναντήσει, αν κάποια στιγμή ανοίξετε το ραδιόφωνο στα μεσαία κατά τη διάρκεια καταιγίδας. Ο παρόμοιος με τρίξιμο θόρυβος προκαλείται από τα ατμοσφαιρικά παράσιτα. Τη φύση της συγκεκριμένης παρεμβολής την καταλαβαίνουμε καλά. Εκτός από μια λάμψη φωτός και έναν εκκωφαντικό θόρυβο, ο κεραυνός παράγει έντονη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία σε ευρύ φάσμα συχνοτήτων. Η εν λόγω ακτινοβολία ανιχνεύτηκε για πρώτη φορά το 1895, όταν ο Alexander Popov κατασκεύασε τον «ανιχνευτή καταιγίδων» του. Οι πρώτοι δέκτες είχαν περιορισμένη εμβέλεια ανιχνευσης, αλλά με

ρικά παράσιτα είναι ραδιοπαλμοί με ταχέως μεταβαλλόμενη συχνότητα στην περιοχή των kilohertz. Δέκτης για την ανίχνευση τους μπορεί να είναι ένας απλός ενισχυτής χαμηλών συχνοτήτων (ακόμη και χωρίς ανορθωτή!). Τα ενισχυόμενα ατμοσφαιρικά παράσιτα τα αντιλαμβανόμαστε ως σφυρίγματα, πράγμα που εξηγεί το όνομά τους.

Η χαρακτηριστική περίοδος της μεταβολής των συχνοτήτων σε έναν παλμό κυμαίνεται μεταξύ κάποιου κλάσματος του δευτερολέπτου και ενός δευτερολέπτου, ενώ οι περιόδοι των ταλαντώσεων  $T = 1/f$  είναι πολύ μικρότερες — της τάξεως των  $10^{-3}$  -  $10^{-4}$  s. Έτσι, μπορούμε να μιλάμε για «στιγμαία συχνότητα»  $f(t)$  τη δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ . Θα δούμε παρακάτω ότι η εξάρτηση της συχνότητας από το χρόνο περιέχει πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες του κοσμικού πλάσματος σε απόσταση χιλιάδων χιλιομέτρων από τη Γη.

Κατά κανόνα, τα σήματα δεν ανιχνεύονται μερονωμένα, αλλά μάλλον ως σειρές παλμών: οι παλμοί διαδέχονται ο ένας τον άλλο με παύσεις μεταξύ τους της τάξεως του δευτερολέπτου. Λίγο μετά την ανακάλυψη των συρίζοντων παρασίτων κατέστη σαφές ότι ολόκληρη η σειρά παραγόταν από την ίδια ατμοσφαιρική εκκένωση, και έτσι αποτελούνταν από επαναλαμβανόμενα σήματα ηχούς. Πώς μπορούμε όμως να εξηγήσουμε τα τόσο μακρά διαλείμματα (της τάξεως του δευτερολέπτου ή και περισσότερο); Απλούστατα, δεν υπάρχουν τέτοιες αποστάσεις στη Γη! Ακόμη και η ηχώ ενός ραδιοκύματος η οποία θα έκανε το γύρο της Γης — και δεδομένου ότι διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός —, θα έφτανε σε 0,13 s περίπου. Μια πειστική υπόθεση παρουσιάστηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1950. Διατυπώθηκε η άποψη ότι οι παλμοί διαδίδονται από τον κεραυνό στον ανιχνευτή όχι κατά μήκος της γήινης επιφάνειας αλλά διαμέσου του απότερου διαστήματος, ακολουθώντας μια δυναμική γραμμή του γήινου μαγνητικού πεδίου<sup>1</sup> η οποία ε-

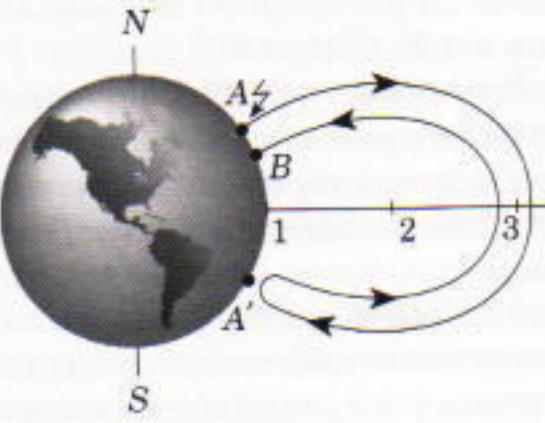
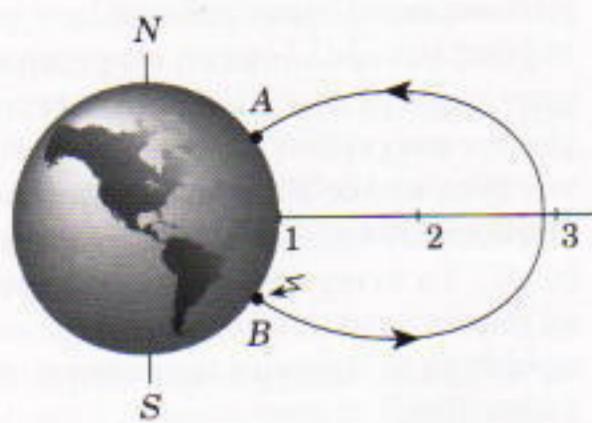


Σχήμα 2

Ελικοειδές κύμα διαδιδόμενο σε πλάσμα κατά μήκος σταθερού μαγνητικού πεδίου  $B_0$  με ταχύτητα φάσης  $v_\phi$ . Η αιχμή του διανύσματος  $E$  διαγράφει έλικα περιστρεφόμενη με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ .

την εμφάνιση της λυχνίας κενού κατέστη δυνατή η ανίχνευση κεραυνών σε μεγάλες αποστάσεις. Έτσι, το 1919, έκαναν την εμφάνισή τους οι πρώτες αναφορές για περιεργά ραδιοσήματα, που αποκλήθηκαν «συρίζοντα παράσιτα». Τα ατμοσφαι-

1. Μαγνητικά συζυγή σημεία είναι τα σημεία της επιφάνειας της Γης τα οποία κείνται στην ίδια μαγνητική δυναμική γραμμή.



Σχήμα 3

Διαγράμματα που παρουσιάζουν το μηχανισμό δημιουργίας πρώιμων (αριστερά) και καθυστερημένων (δεξιά) συριγμών. Α είναι η θέση της εκκένωσης του κεραυνού, Β είναι ο δέκτης και Α' είναι η θέση όπου ανακλάται το σήμα. Οι αποστάσεις μετριούνται σε γήινες ακτίνες.

κτείνεται ανάμεσα σε δύο μαγνητικά συζυγή σημεία (Σχήμα 3). Αν η εκκένωση σημειώθει κοντά στο δέκτη, το κύριο ατμοσφαιρικό παράσιτο καταγράφεται πρώτο (διαδίδεται κατά μήκος της περιφέρειας της Γης και ακούγεται ως σύντομος τριγμός που ονομάζεται γεωσφαιρικό παράσιτο). Αργότερα ο ανιχνευτής λαμβάνει ένα συρίγμο που «ταξιδεψε» κατά μήκος της μαγνητικής δυναμικής γραμμής στο αντίθετο ημισφαίριο και επέστρεψε ακολουθώντας την ίδια πορεία αφού ανακλάστηκε από τη Γη (τον λεγόμενο «καθυστερημένο συρίγμο»). Όταν ο κεραυνός και ο δέκτης βρίσκονται σε διαφορετικά ημισφαίρια, τα γεωσφαιρικά παράσιτα απουσιάζουν, και τα πρώτα σήματα που καταγράφονται είναι τα συρίζοντα παράσιτα («πρώιμοι συριγμοί»). Και στις δύο περιπτώσεις, ακούγεται μια κατ' επανάληψη ανακλασθείσα ηχώ (έως και 20 επαναλήψεις), με λόγους παύσεων 2 : 4 : 6... για τους καθυστερημένους συριγμούς και 1 : 3 : 5... για τους πρώιμους συριγμούς (Σχήμα 3).

Η υπόθεση ότι τα σήματα διαδίδονται κατά μήκος των γεωμαγνητικών δυναμικών γραμμών εξηγεί επίσης χαρακτηριστικά των ατμοσφαιρικών συριγμών όπως η αύξηση στην καθυστέρηση ανιχνευσης με το γεωγραφικό (ή ακριβέστερα το μαγνητικό) πλάτος της θέσης παρατήρησης, και το γεγονός ότι οι ατμοσφαιρικοί συριγμοί σπανίως παρατηρούνται σε μικρά πλάτη. Πολύτιμη υποστήριξη στην εν λόγω υπόθεση προσέφεραν πειράματα που διεξήχθησαν το 1958 με τεχνητές πηγές ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Σήματα που εκπέμπο-

νταν στη συχνότητα των 15,5 kHz ελήφθησαν στο αντίθετο ημισφαίριο με καθυστέρηση  $t = 0,7$  s. Οι ατμοσφαιρικοί συριγμοί που καταγράφηκαν στα ίδια συζυγή σημεία και στην ίδια συχνότητα παρουσίασαν την ίδια τιμή καθυστέρησης. Η κοινή καθυστέρηση αντιστοιχούσε στο μήκος που υπολογίστηκε ότι είχε η γεωμαγνητική δυναμική γραμμή.

Η παρατηρούμενη καθυστέρηση εξηγείται με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων στα οποία καταλήξαμε προηγουμένως. Ας θυμηθούμε ότι ένα σήμα διαδίδεται στο πλάσμα με ταχύτητα ομάδας  $v_o$ , η οποία δίνεται από την εξίσωση (7). Χρησιμοποιώντας την απλουστευμένη εξίσωση για το δείκτη διάθλασης του συριγμού (εξίσωση (12)), μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\omega \frac{dn_1}{d\omega} = -\frac{n_1}{2}$$

και

$$v_o = 2v_\varphi = \frac{2c}{n_1} = \frac{2c\sqrt{\omega\omega_m}}{\omega_p}$$

Το μήκος της διαδρομής  $L$  και η καθυστέρηση  $t$  συνδέονται με τη συνθισμένη σχέση  $L = v_o t$ . Θα έπρεπε να επισημανθεί ότι οι τιμές των  $\omega_m$  και  $\omega_p$  μεταβάλλονται κατά μήκος της διαδρομής, όπως και η ταχύτητα ομάδας  $v_o$ . Επομένως, στην προαναφερθείσα εξίσωση πρέπει να πάρουμε κάποια μέση τιμή για τη  $v_o$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες τιμές για το μαγνητικό πεδίο και τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων, οι οποίες είναι χαρακτηριστικές για ύψη μερικών χιλιάδων χιλιομέτρων:  $B_0 \equiv$

$4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ ,  $N_0 \sim 10^9 \text{ m}^{-3}$ . Για συχνότητα  $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$  παίρνουμε  $n_1 = 10$  και  $v_o = 6 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Εφόσον το μήκος της μαγνητικής δυναμικής γραμμής μεταξύ των συζυγών σημείων στο πειραμά μας ήταν  $L = 40.000 \text{ km}$ , η τιμή της ταχύτητας ομάδας που υπολογίσαμε αντιστοιχεί σε μια καθυστέρηση  $t = L/v_o \sim 0,67 \text{ s}$ , η οποία συμφωνεί αρκετά με τις πειραματικές τιμές. Αυτό υποστηρίζει την υπόθεση ότι οι ατμοσφαιρικοί συριγμοί είναι πράγματα τα ελικοειδή κύματα που εξετάσαμε παραπάνω.

Δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να υπολογίσουμε τη σχέση της καθυστέρησης με τη συχνότητα του σήματος. Προς τούτο εισάγουμε την τιμή  $v_o(\omega)$  που βρήκαμε προηγουμένως στην εξίσωση  $t = L/v_o$  και παίρνουμε  $t = L\omega_p/(2c\sqrt{\omega\omega_m})$ . Η συγκεκριμένη εξίσωση γράφεται συνήθως ως

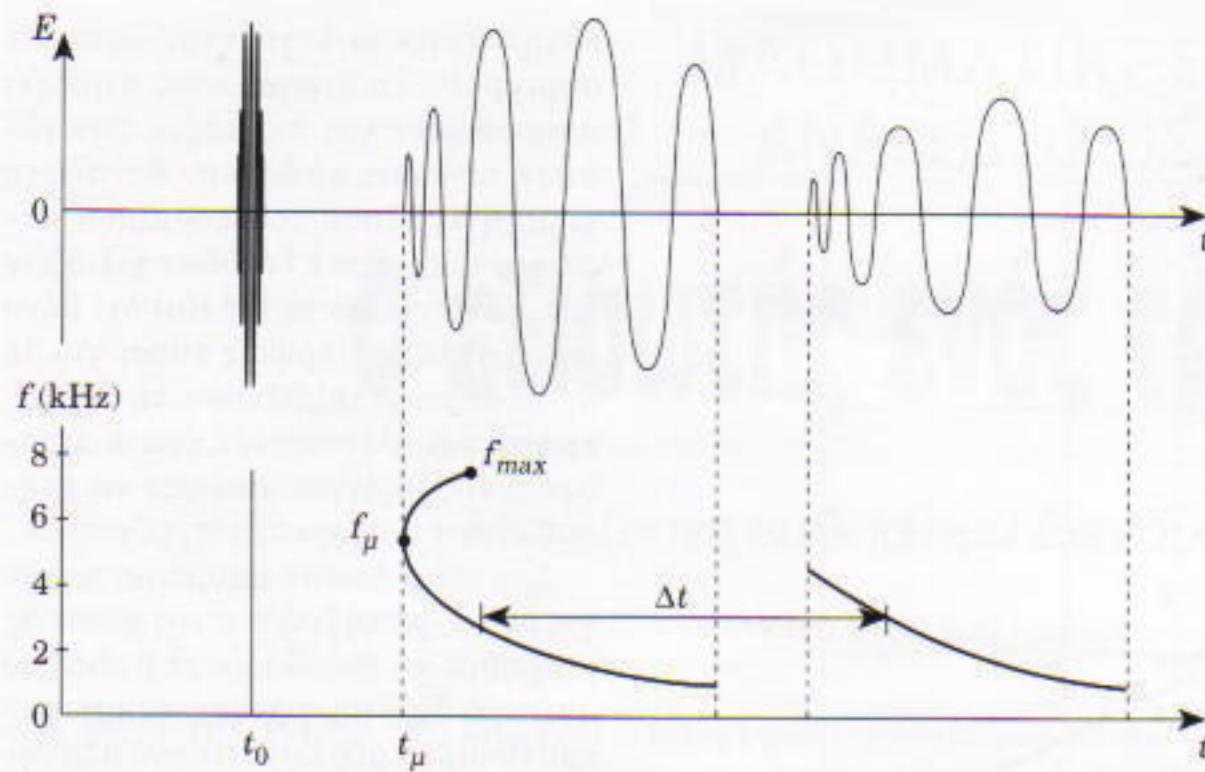
$$t = \frac{D}{\sqrt{f}}, \quad (13)$$

όπου

$$D = \frac{L\omega_p}{2c\sqrt{2\pi\omega_m}}$$

Ο παράγοντας  $D$  δεν επηρεάζεται από τη συχνότητα, αλλά εξαρτάται όντως από τις παραμέτρους του πλάσματος και από το μήκος της διαδρομής του ατμοσφαιρικού συριγμού. Ο συγκεκριμένος συντελεστής ονομάζεται διασπορά του ατμοσφαιρικού συριγμού. Βρίσκεται πειραματικά με την ανάλυση της συνάρτησης  $f(t)$  — δηλαδή του φασματικού διαγράμματος των ατμοσφαιρικών συριγμών (Σχήμα 4). Ανάλογα με την τιμή του  $D$  που βρίσκουμε, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων και την ένταση του μαγνητικού πεδίου.

Δεν υπάρχει καμία αρφιβολία για τη σύνδεση των συριζόντων παρασίτων και των εκκενώσεων των κεραυνών, υπάρχει όμως μια φαινομενική αντίφαση που πρέπει να την εξετάσουμε. Σε κάθε δεδομένη στιγμή, στην ατμόσφαιρα της Γης μαίνονται περίπου 2.000 καταιγίδες. Οι καταιγίδες αυτές παράγουν σχεδόν 100 κεραυνούς ανά λεπτό κατά μέσο όρο. Εντούτοις, ο ρυθμός ανιχνευσης ατμοσφαιρικών συριγμών στις εύκρατες



Σχήμα 4

Συρίζον παράσιτο (πάνω) και το φασματικό του διάγραμμα (κάτω). Τη στιγμή  $t_0$  η εκκένωση του κεραυνού διεγείρει ταυτοχρόνως όλες τις συχνότητες (στην περιοχή χαμηλών συχνοτήτων), οι οποίες αναπαρίστανται με μια κατακόρυφη γραμμή στο κάτω γράφημα. Σε μια χρονική στιγμή  $t_\mu$  έφτασε η «μύτη» του ατμοσφαιρικού συριγμού. Επειτα από ορισμένη καθυστέρηση  $\Delta t$  ανιχνεύεται το σήμα, αφού ανακλάστηκε από το μαγνητικά συζυγές σημείο στο αντίθετο ημισφαίριο.

Ζώνες είναι μόνο μερικά γεγονότα ανά λεπτό. Γιατί άραγε διαφέρουν τόσο πολύ οι συγκεκριμένοι αριθμοί; Η απάντηση είναι ότι ένας δέκτης τοποθετημένος σε ορισμένη θέση δεν «ακούει» τους περισσότερους από τους ατμοσφαιρικούς συριγμούς. Για να ανιχνεύσει έναν ατμοσφαιρικό συριγμό, πρέπει να βρίσκεται είτε κοντά στην εκκένωση του κεραυνού είτε κοντά στο μαγνητικά συζυγές της σημείο. Οι καταιγίδες ωστόσο κατανέμονται με μεγάλη ανομοιομορφία στην ατμόσφαιρα της Γης. Λαμβάνουν χώρα κατά κύριο λόγο στις περιοχές του ισημερινού, αλλά εκεί οι ατμοσφαιρικοί συριγμοί δεν παρατηρούνται, λόγω της απρόσφορης γεωμετρίας του γεωμαγνητικού πεδίου (οι γραμμές του πεδίου βρίσκονται πολύ κοντά στη Γη). Υπάρχει ένας επιπλέον λόγος για τον χαμηλό ρυθμό των ανιχνευόμενων ατμοσφαιρικών συριγμών. Ο ατμοσφαιρικός συριγμός δημιουργείται μόνο όταν ο ηλεκτρομαγνητικός παλμός βρίσκεται πολύ κοντά στη μαγνητική δυναμική γραμμή (όταν «προσκολλάται» πάνω της). Μερικές ειδικές συνθήκες είναι αναγκαίες για να συμβεί κάτι τέτοιο — συνθήκες που δεν εκπληρώνονται πάντοτε για κάθε δεδομένη εκκένωση κεραυνού. Η «προσκόλληση»

συμβαίνει μόνο όταν το πλάσμα περιέχει διακυμάνσεις που διαδίδονται παράλληλα με το μαγνητικό πεδίο. Ακόμη και σε ομογενές μαγνητικά ενεργοποιημένο πλάσμα, ωστόσο, η κατεύθυνση της ροής ενέργειας των ελικοειδών κυμάτων πλησιάζει την κατεύθυνση του  $B_0$ . Υπολογισμοί δείχνουν ότι η οριακή γωνία εκτροπής της ταχύτητας ομάδας από αυτή την κατεύθυνση είναι περίπου  $20^\circ$  όταν η κυκλική συχνότητα  $\omega_m$  είναι πολύ μικρότερη από την κυκλική γυροσύχνοτητα  $\omega_m$ . Παρ' όλα αυτά, η συγκεκριμένη συχνότητα δεν μπορεί να εξασφαλίσει μόνη της τη διάδοση ενός ατμοσφαιρικού συριγμού κατά μήκος της γεωμαγνητικής δυναμικής γραμμής. Όταν τα συρίζοντα παράσιτα ανιχνεύονται από δορυφόρο, το πλήθος τους είναι πολύ μεγαλύτερο απ' ότι στις επίγειες παρατηρήσεις, επειδή τα όργανα στο δορυφόρο ανιχνεύουν όλα τα σήματα, και όχι μόνο όσα παγιδεύονται στον κυματοδηγό.

### Η μέτρηση των χαρακτηριστικών του διαστημικού πλάσματος

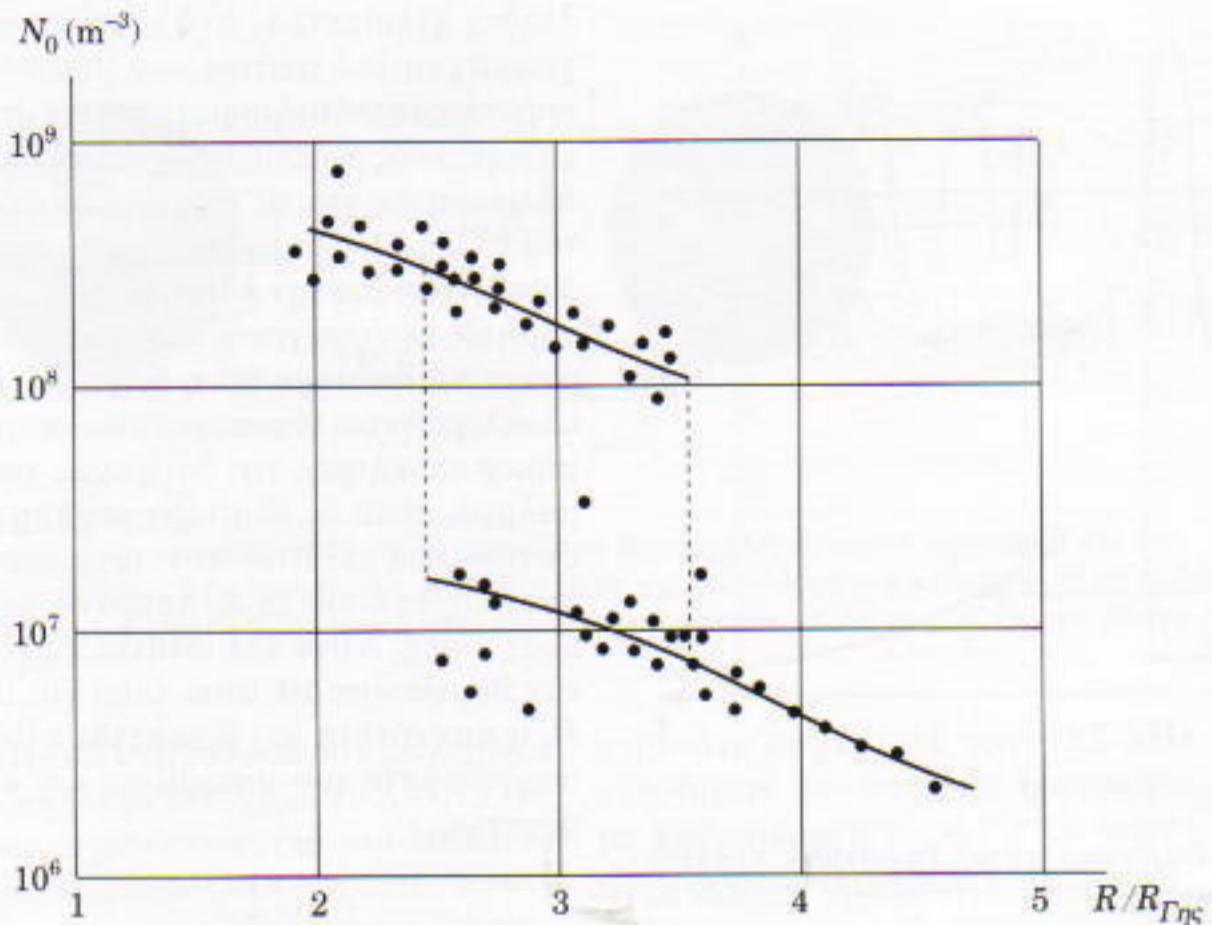
Μια γεωμαγνητική δυναμική γραμμή (ο φορέας των συριζόντων παρασίτων) μπορεί να εκτείνεται πολύ μακριά από τη Γη — έως και δεκάδες χιλιάδες χιλιόμετρα, ανάλογα με το γεωμαγνητικό πλάτος του σημείου παρατήρησης. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβολές ενός ραδιοσήματος περιέχουν πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά του πλάσματος σε πολύ μεγάλα ύψη. Υπολογίζοντας την καθυστέρηση του σήματος σε επερογενές πλάσμα, μπορούμε να δείξουμε ότι η διασπορά  $D$  ολοκληρώνεται (συσσωρεύεται) κατά μήκος ολόκληρης της διαδρομής του παλμού, είναι δε ιδιαίτερα μεγάλη η συνεισφορά εκείνων των τμημάτων της τροχιάς όπου το  $B_0$  λαμβάνει μικρές τιμές. Αυτό καθιστάται σαφές εάν θυμηθούμε ότι, στον τύπο για το  $D$ , η συχνότητα  $\omega_m$  βρίσκεται στον παρονομαστή του υπορρίζου, και επομένως

$$D = \frac{1}{\sqrt{B_0}}.$$

Αν και δεν είναι δυνατόν να καθορίσουμε την πυκνότητα του πλάσματος σε διάφορα ύψη απευθείας από τη διασπορά  $D$  (αφού μόνο μια ολοκληρωμένη ποσότητα κατά μήκος ολόκληρης της τροχιάς μπορεί να υπεισέρχεται στην εξίσωση), είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση αυτή για να ελέγξουμε το ένα ή το άλλο μοντέλο που περιγράφει την εξάρτηση του  $N_0$  από το υψόμετρο. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό ότι, λόγω της δραστικής εξασθένισης του  $B_0$  με την απόσταση από τη Γη, η βασική συνεισφορά στη διασπορά προέρχεται από τιμές του  $N_0$  κοντά στο απόγειο της τροχιάς (δηλαδή στα μεγαλύτερα ύψη).

Τα συρίζοντα παράσιτα έπαιξαν και συνεχίζουν να παιζουν σημαντικό ρόλο στις εξερευνήσεις του διαστήματος κοντά στη Γη. Τα στοιχεία που ελήφθησαν από τέτοιες έρευνες οδήγησαν στην αναθεώρηση των απώφεων σχετικά με το πόσο μακριά εκτείνεται η ιονόσφαιρα της Γης (υπήρχε συμφωνία ότι το πάχος της ήταν το πολύ μερικές χιλιάδες χιλιόμετρα). Το συμπέρασμα ότι υπάρχουν υψηλές συγκεντρώσεις ηλεκτρονίων σε μεγάλες αποστάσεις, το οποίο προέκυψε από την ανάλυση των ατμοσφαιρικών συριγμών, επιβεβαιώθηκε άμεσα αργότερα από τις μετρήσεις που διεξήχθησαν σε πυραύλους και δορυφόρους.

Η ιστορία της ανακάλυψης του



**Σχήμα 5**

Η δραστική μεταβολή της συγκέντρωσης των ηλεκτρονίων («γόνατο») στο σύνορο του εσωτερικού στρώματος της μαγνητόσφαιρας (σκιασμένη περιοχή). Τα σημεία του διαγράμματος προέκυψαν από την ανάλυση ατμοσφαιρικών συριγμών. Η απόσταση από τη Γη μετριέται σε γήινες ακτίνες.

αποκαλούμενου «γόνατου» (μιας δραστικής μείωσης της πυκνότητας των ηλεκτρονίων σε υψόμετρο 15.000-20.000 χιλιομέτρων — βλ. Σχήμα 5) αποτελεί ένα άλλο παράδειγμα γόνιμης έρευνας που εμπλέκει τους ατμοσφαιρικούς συριγμούς. Τα σύνορα της εσωτερης περιοχής της μαγνητόσφαιρας, η οποία πληρούται από σχετικά πυκνό πλάσμα ( $N_0 \geq 10^8 \text{ m}^{-3}$ ) και περιοτέρεται μαζί με τη Γη, βρίσκονται σ' αυτά τα ύψη. Αποδείξεις για την ύπαρξη ενός τέτοιου τεράστιου στρώματος πλάσματος γύρω από τη Γη προέκυψαν από μετρήσεις που διεξήγαγαν τόσο ένας οσβιετικός πύραυλος το 1959 όσο και ο αμερικανικός δορυφόρος Explorer I το 1963. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την τεχνική των ατμοσφαιρικών συριγμών επιβεβαίωσαν επίσης την ύπαρξη του «γόνατου» και μας επέτρεψαν να καταγράψουμε επακριβώς τα σύνορα του στρώματος με ακρίβεια 0,1 γήινων ακτίνων.

Απέδειξα τη χρησιμότητα των ατμοσφαιρικών συριγμών με το παράδειγμα των μετρήσεων της ηλεκτρονικής πυκνότητας. Στη συγκεκριμένη απόδειξη χρησιμοποίησα την εξίσωση (13), η οποία ισχύει, αν το θυμάστε, σε

περιορισμένη περιοχή συχνοτήτων — περίπου από 1 έως 7 kHz. Σε υψηλότερες συχνότητες η συνθήκη  $\omega \ll \omega_m$  παραβιάζεται (τη χρησιμοποίησαμε όταν εξαγάγαμε την προσεγγιστική εξίσωση (12) για τον  $n_1(\omega)$ ), ενώ το κάτω όριο των συχνοτήτων οφείλεται στο γεγονός ότι εξαρχής αγνοήσαμε την κίνηση των ιόντων.

Εάν διευρυνθεί η περιοχή συχνοτήτων για την καταγραφή των ατμοσφαιρικών συριγμών, εμφανίζονται νέες δυνατότητες. Απλώς θα σημειώσω ορισμένες. Συχνά παρατηρούνται ατμοσφαιρικοί συριγμοί που έχουν ελάχιστο χρόνο άφιξης σε ορισμένη συχνότητα και ονομάζονται συριγμοί «μύτης» (στη συχνότητα  $f_m$  στο Σχήμα 4). Σε υψηλότερες συχνότητες εμφανίζονται δύο κλάδοι στο φασματικό διάγραμμα: ένας αύξων, που σταματά απότομα σε κάποια συχνότητα  $f_{max}$ , και ένας φθίνων, ο οποίος και εισέρχεται στην περιοχή την οποία αναλύσαμε. Στην εν λόγω περιοχή συχνοτήτων, όπου  $\omega \leq \omega_m$ , η επίδραση του μαγνητικού πεδίου εκδηλώνεται πολύ έντονα, και τα συρίζοντα παράσιτα παίζουν το ρόλο φυσικών «μαγνητομέτρων».

Σε πολύ χαμηλές συχνότητες, πα-

ρατηρούνται οι λεγόμενοι «ιονικοί συριγμοί». Το φάσμα τους περιέχει πληροφορίες για τις μάζες των ιόντων, οι οποίες καθιστούν δυνατή τη χημική ανάλυση του κοσμικού αερίου σε αποστάσεις δεκάδων χιλιάδων χιλιομέτρων από τη Γη! Και όχι μόνο αυτό, αλλά οι ακριβείς τύποι για το  $n_1(\omega)$  συμπεριλαμβάνουν τη θερμοκρασία των ηλεκτρονίων, άρα οι ατμοσφαιρικοί συριγμοί μπορούν να χρησιμεύσουν και ως «τηλεθερμόμετρα»...

Δεν είναι λοιπόν θαυμάσιο το γεγονός ότι, με τη βοήθεια της φυσικής, μπορούμε να διεισδύσουμε βαθιά στο απότερο διάστημα χωρίς να απομακρυνθούμε καθόλου από τον πλανήτη μας; Αυτό δεν το λέμε για να μειώσουμε την αξία εκείνων που κατασκευάζουν πυραύλους ή τον εξελιγμένο εξοπλισμό που μεταφέρουν — αυτά αποτελούν μνημεία της ανθρώπινης εφευρετικότητας. Είναι σημαντικό, όμως, ότι η ίδια η φύση μάς προσέφερε τη δυνατότητα να εκτελούμε μετρήσεις εξ αποστάσεως για τα κοσμικά φαινόμενα. Έχει «στρώσει» κυματοδηγούς μήκους χιλιάδων χιλιομέτρων κατά μήκος των γεωμαγνητικών δυναμικών γραμμών που εκτείνονται από το ένα ημισφαίριο στο άλλο μέσω του απότερου διαστήματος. Υπάρχουν αφότου σχηματίστηκε η Γη, αλλά πριν εμφανιστούν οι ραδιοεπικονιωνίες δεν υπήρχε η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε ένα τόσο θαυμάσιο «όργανο».

### ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 19 τεύχη. Αυτά, για δύο χρόνια θα σπάρχουν διαθέσιμα

αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχων.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

Τώρα μπορείτε να προμηθεύσετε και τις καλαισθήτες θίκες, από το βιβλιοπωλείο μας ή με αντικαταβολή, για την αρχειοθέτηση των τευχών σας.

# Ο εξισωτής ενός τριγώνου

Μια έξυπνη ευθεία που έχει δύο ρόλους

George Berzsenyi

**Ε**ΣΤΩ  $\ell$  ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ του τριγώνου  $ABC$ . Θα ονομάζουμε την  $\ell$  εξισωτή του  $ABC$  όταν χωρίζει το τρίγωνο σε δύο τμήματα με ίσα εμβαδά και ίσες περιμέτρους. Για παράδειγμα, αν στο παρακάτω σχήμα έχουμε

$$\text{εμβαδόν}(CPQ) = \text{εμβαδόν}(PQAB)$$

και

$$CP + PQ + QC = PQ + QA + AB + BP,$$

λέμε ότι η  $PQ$  είναι εξισωτής του τριγώνου  $ABC$ . Η πρώτη πρόκληση για τους αναγνώστες μου είναι η εξής: Αποδείξτε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει ένας εξισωτής. Για να το επιτύχετε, σας συμβουλεύω να χρησιμοποιήσετε προσεκτικά ένα επιχείρημα συνέχειας.

Υπάρχουν τρίγωνα που έχουν ακόμη και τρεις εξισωτές. Ωστόσο, ο φίλος μου και πρώην συνάδελφος επιτιμος καθηγητής Herb Bailey διεξήγαγε πειράματα σε υπολογιστές τα οποία δείχνουν ότι δεν υπάρχουν τρίγωνα με δύο ακριβώς εξισωτές. Η επόμενη πρόκλησή μου, λοιπόν, είναι: Αποδείξτε ή καταρρίψτε αυτό τον ισχυρισμό. Επιπλέον, προκαλώ τους αναγνώστες μου να αποδείξουν ή να διαψεύσουν τον ισχυρισμό ότι δεν υπάρχουν τρίγωνα με περισσότερους από τρεις εξισωτές. Το σχήμα ισως δη-

μιουργήσει την εντύπωση ότι ένα τρίγωνο μπορεί να έχει ακόμη και έξι εξισωτές. Για παράδειγμα, αν  $CP < CA$  και  $CQ < CB$ , μπορούμε να αντιστρέψουμε τα  $P$  και  $Q$  (δηλαδή, να θεωρήσουμε τα συμμετρικά τους ως προς τη διχοτόμο της  $\angle BCA$ ), και το ίδιο μπορεί να γίνει όταν τα  $P$  και  $Q$  ανήκουν στα δύο άλλα ζεύγη πλευρών. Έχω όμως την πεποίθηση ότι το άνω φράγμα του πλήθους των εξισωτών είναι το τρία.

Για να αναλύσουμε την κατάσταση μέσω πειραμάτων σε υπολογιστή, ας θεωρήσουμε ότι  $a, b, c$  είναι τα μήκη των πλευρών  $BC, CA$  και  $AB$ , αντίστοιχα, και ας υποθέσουμε ότι  $a \leq b \leq c = 1$ . Υπάρχει τότε μια ένα πρός ένα αντίστοιχα ανάμεσα σ' αυτά τα «υπό κλίμακα» τρίγωνα και τα σημεία  $(a, b)$  της περιοχής του επιπέδου που φράσσεται από τις ευθείες  $x + y = 1$ ,  $x = 1$  και  $y = x$ . Συνεπώς, αν εισαγάγουμε ένα λεπτό πλέγμα στο επίπεδο, μπορούμε να σημειώσουμε σ' αυτό εκείνα τα σημεία που τα αντίστοιχα τους τρίγωνα έχουν έναν, τρεις ή οποιοδήποτε άλλο πλήθος από εξισωτές.

Για να απλουστεύσουμε την περαιτέρω εξέτασή μας, ας θέσουμε  $PC = p$  και  $QC = q$ . Τότε οι απαιτούμενες σχέσεις για να είναι η  $PQ$  εξισωτής εκφράζονται από τις συνθήκες:

$$pq = \frac{1}{2}ab$$

και

$$p + q = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

όπου η πρώτη συνθήκη προέρχεται από την  $\frac{1}{2}pq \text{ημ}C = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}ab \text{ημ}C)$  και η δεύτερη από τη  $c + (a - p) + PQ + (b - q) = p + q + PQ$ .

$- q) = p + q + PQ$ . Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα  $p$  και  $q$  είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξισώσης

$$r^2 - \frac{1}{2}(a + b + c)r + \frac{1}{2}ab = 0.$$

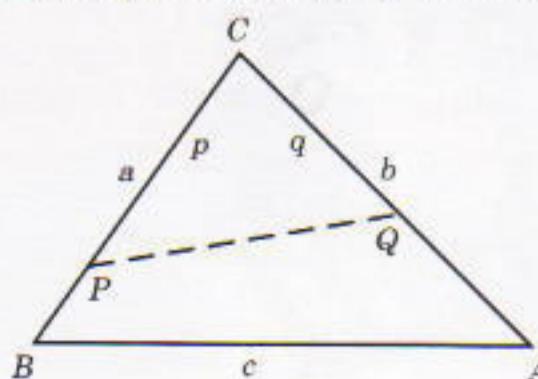
Αν θέσουμε  $s = (a + b + c)/2$ , έπειτα ότι

$$p, q = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2 - 2ab})$$

Προφανώς, πρέπει να ισχύει  $s^2 \geq 2ab$ , καθώς και  $p \leq a, q \leq b$ . Παρόμοια ανάλυση εφαρμόζεται και σε κάθε άλλο δυνατό εξισωτή.

Το ερέθισμα για την παρούσα έρευνα ήταν ένα όμορφο πρόβλημα που ετέθη στον Μαθηματικό Διαγωνισμό της Σκωτίας το 1988-1989. Περισσότερες πληροφορίες γι' αυτό το θαυμάσιο πρόγραμμα μπορείτε να βρείτε στη στήλη μου «Problems, Puzzles and Paradoxes» στο τεύχος της άνοιξης του 1997 του περιοδικού *Consortium*.

Κλείνοντας την παρούσα στήλη, θα ήθελα να επισημάνω ότι υπάρχει και το τρισδιάστατο ανάλογο του εξισωτή. Η τελευταία μου πρόκληση, λοιπόν, είναι η εξής: Αποδείξτε ότι για κάθε τετράεδρο υπάρχει ένα επίπεδο που το χωρίζει σε δύο τμήματα ίσου όγκου και ίσου επιφανειακού εμβαδού. Βέβαια, πολλά από τα ερωτήματα που τέθηκαν για τους εξισωτές του τριγώνου έχουν τα κατάλληλα ανάλογα στην περίπτωση του τετραέδρου, τα οποία πρέπει να απασχολήσουν τους αναγνώστες μου. Στείλτε μου τις ανακαλύψεις σας στη διεύθυνση c/o Quantum, 1840 Wilson Boulevard, Arlington VA 22201-3000. Είναι πιθανό να προκαλέσουν περαιτέρω συζητήσεις σε μελλοντική στήλη.



# Διαστημικές εξερευνήσεις

«Το πρώτο πράγμα που έκανε ο θεός είναι το μακρινό ταξίδι...»

—Ημερολόγιο καταστρώματος, Β', Γιώργος Σεφέρης

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

**E**ΠΙΘΥΜΗΣΑΤΕ ΠΟΤΕ ΝΑ ΠΑΤΕ στον Άρη; Ο Άρης είναι το επόμενο σύνορο. Όσοι από σας είστε τόσο νέοι ώστε δεν προλάβατε να παρακολουθήσετε τις πράκτειες προσάθειες για την αποστολή των πρώτων ανθρώπων στη Σελήνη, ίσως θα έχετε την τύχη να συμμετάσχετε στην επόμενη μεγάλη διαστημική εξερεύνηση. Ίσως να είστε ένας αστροναύτης ή ένας μηχανικός ή κάποιος αναλυτής ηλεκτρονικών υπολογιστών που θα βοηθήσει στην επιχείρηση. Θα χρειαστούν χιλιάδες άνθρωποι. Πρόσφατα, το ενδιαφέρον του κοινού εντάθηκε ύστερα από τις ανακοινώσεις της NASA ότι πιθανώς οι επιστήμονες ανακάλυψαν στοιχεία για την ύπαρξη πρωτόγονης ζωής στον αρχέγονο Άρη.

Η αποστολή ανθρώπων στον Άρη θα απαιτήσει μεγάλη προπαρασκευή. Η επιχείρηση έχει ήδη αρχίσει. Πέρα από το κρίσιμο έργο που αφορά τη μελέτη της συμπεριφοράς των ανθρώπων κατά τη μακρόχρονη παραμονή τους στο διάστημα, πρόσφατα πραγματοποιήθηκαν δύο εκτοξεύσεις, που θα θέσουν δορυφόρους σε τροχιά γύρω από τον πλησιέστερο πλανητικό γείτονά μας.

Στις 7 Νοεμβρίου 1996 η NASA εκτόξευσε τον Mars Global Surveyor (MGS), ο οποίος θα φτάσει στον Άρη στις 12 Σεπτεμβρίου 1997 και θα τεθεί σε τροχιά, για να αρχίσει μια διετή έρευνα της επιφάνειας και της ατμόσφαιρας του Άρη. Το ταξίδι του MGS

θα διαρκέσει 309 ημέρες. (Μπορείτε να μάθετε περισσότερα για τον MGS μέσω του Internet στη διεύθυνση: <http://mgswww.jpl.nasa.gov>.)

Στις 4 Δεκεμβρίου 1996 η NASA εκτόξευσε τον Mars Pathfinder με τέτοιο σχέδιο πτήσης ώστε να προσγειωθεί στην επιφάνεια του Άρη την Ημέρα της Ανεξαρτησίας των ΗΠΑ, δηλαδή ύστερα από ταξίδι 212 ημέρων. Ο Mars Pathfinder θα μεταφέρει ένα ανιχνευτικό μικρούχημα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για να αναπτυχθούν και να εγκατασταθούν επιστημονικά όργανα και να εξερευνηθεί η περιοχή γύρω από το σημείο προσεδάφισης. (Μπορείτε να μάθετε περισσότερα για τον Mars Pathfinder στη διεύθυνση <http://mpfwww.jpl.nasa.gov>.)

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι ο δορυφόρος που εκτοξεύτηκε τελευταίος θα φτάσει στον Άρη πρώτος. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε μελετώντας ένα απλουστευμένο πρόβλημα τροχιών.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δορυφόρο σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο με ακτίνα ίση προς τη μέση ακτίνα της τροχιάς της Γης. Ας πυροδοτήσουμε τους πυραύλους του κατά την εφαπτομένη της τροχιάς του. Εάν αυξήσουμε την ταχύτητα του δορυφόρου όσο χρειάζεται, ο δορυφόρος θα τεθεί σε ελλειπτική τροχιά που θα έχει τη μέγιστη απόστασή της από τον Ήλιο ίση με τη μέση ακτίνα της τροχιάς του Άρη. Αν η Γη και ο Άρης βρί-

σκονταί στις κατάλληλες σχετικές θέσεις, ο δορυφόρος θα τεθεί σε τροχιά γύρω από τον Άρη ή και θα προσεδαφιστεί σ' αυτόν. Στους υπολογισμούς μας αγνοούμε τις βαρυτικές επιδράσεις της Γης και του Άρη λαμβάνουμε υπόψη μόνο τη βαρύτητα του Ήλιου.

Μπορούμε να βρούμε την απαιτούμενη ταχύτητα του δορυφόρου εφαρμόζοντας τους νόμους διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 - \frac{Gmm_H}{r_{\Gamma}} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{Gmm_H}{r_A}$$

και διατήρησης της στροφορμής

$$mv_{\Gamma}r_{\Gamma} = mv_Ar_A,$$

όπου  $m$  και  $m_H$  είναι οι μάζες του δορυφόρου και του Ήλιου αντιστοίχως,  $r_{\Gamma}$  και  $r_A$  οι ακτίνες των τροχιών της Γης και του Άρη αντιστοίχως, με  $v_{\Gamma}$  και  $v_A$  συμβολίζονται οι τροχιακές ταχύτητες του δορυφόρου στο περιήλιο και στο αφήλιο του. Σημειώστε ότι οι εν λόγω ταχύτητες παρατηρούνται στα δύο άκρα της έλλειψης — δηλαδή όταν  $r = r_{\Gamma}$  και  $r = r_A$ , αντιστοίχως, και ότι οι ταχύτητες είναι κάθετες στις ακτίνες. Λύνοντας το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων, βρίσκουμε ότι

$$v_{\Gamma} = v_0 \sqrt{\frac{2r_A}{r_{\Gamma} + r_A}},$$

όπου



$$v_0 = \sqrt{\frac{Gm_H}{r_r}}$$

είναι η τροχιακή ταχύτητα της Γης. Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $r_A = 1,53r_r$  παίρνουμε  $v_r = 1,10v_0$ . Γνωρίζοντας ότι  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ,  $m_H = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  και  $r_r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ , καταλήγουμε στις αριθμητικές τιμές  $v_0 = 29,7 \text{ km/s}$  και  $v_r = 32,7 \text{ km/s}$ . Επομένως, πρέπει να αυξήσουμε την ταχύτητά του κατά  $3,0 \text{ km/s}$ .

Μπορούμε να κάνουμε έναν ανάλογο υπολογισμό στο άλλο άκρο της έλλειψης, για να βρούμε πόσο πρέπει να επιταχύνουμε το δορυφόρο για να εξισώσουμε την ταχύτητά του με την τροχιακή ταχύτητα του Άρη. Η διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται ότι  $v_A = 21,4 \text{ km/s}$  και ότι η τροχιακή ταχύτητα του Άρη είναι  $24,1 \text{ km/s}$ . Επομένως, η ταχύτητα του δορυφόρου πρέπει να αυξηθεί κατά  $2,7 \text{ km/s}$ .

Οι νόμοι του Kepler ισχύουν για κάθε σώμα που περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο· μπορούμε, λοιπόν, να εφαρμόσουμε τον τρίτο νόμο του Kepler, για να υπολογίσουμε πόσο χρόνο θα χρειαστεί ο δορυφόρος για να φτάσει στον Άρη. Ας συγκρίνουμε την κυκλική τροχιά της Γης με την ελλειπτική τροχιά του δορυφόρου που συνδέει τη Γη με τον Άρη και έχει μεγάλο άξονα ίσο με  $r_r + r_A$ :

$$\left(\frac{T_\delta}{T_r}\right)^2 = \left(\frac{r_r + r_A}{2r_r}\right)^3.$$

Επομένως,  $T_\delta = 1,42T_r = 1,42$  έτη. Επειδή ο δορυφόρος διαγράφει μόνο το μισό της τροχιάς, ο απαιτούμενος χρόνος ισούται με  $0,71$  έτη = 260 ημέρες. Μπορούμε να πάρουμε μικρότερους ή

μεγαλύτερους χρόνους εάν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικούς τρόπους εκτόξευσης από τη Γη και εισόδου στην τροχιά του Άρη. Για ακριβέστερο υπολογισμό, χρειάζεται να συνυπολογίσουμε τα βαρυτικά πεδία της Γης και του Άρη.

Το πρόβλημα του παρόντος τεύχους στηρίζεται σ'ένα πρόβλημα που ετέθη στον δεύτερο διαγωνισμό για την επιλογή των μελών της ομάδας φυσικής των ΗΠΑ, η οποία θα συμμετείχε στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής στην Αυστραλία, το 1995.

Ας υποθέσουμε ότι ο Mars Global Surveyor βρίσκεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Άρη, στο προβλεπόμενο ύψος των  $367 \text{ km}$  πάνω από την επιφάνειά του. Επίσης, υποθέτουμε ότι μπορούμε να αγνοήσουμε την επιδραση της ατμόσφαιρας του Άρη, ότι ο πλανήτης έχει ακτίνα  $R = 3.400 \text{ km}$  και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά του είναι  $g = 3,72 \text{ m/s}^2$ .

A. Υπολογίστε την ταχύτητα του δορυφόρου στην κυκλική τροχιά του γύρω από τον Άρη βάσει των δεδομένων τιμών.

Αν και ο MGS δεν είναι σχεδιασμένος γι' αυτό τον οκοπό, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να τον προσεδαφίσουμε στον Άρη. Ο δορυφόρος θα μπορούσε να φτάσει στην επιφάνεια πυροδοτώντας τους πυραύλους του για σύντομο χρονικό διάστημα. Θα εξετάσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις.

B. Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο, οι ανασχετικοί πύραυλοι πυροδοτούνται στο σημείο X κατά την εφαπτομένη της τροχιάς, ώστε να επιβράδύνουν το δορυφόρο. Η κυκλική τροχιά μετατρέπεται σε ελλειπτική, και ο δορυφόρος προσεδαφίζεται σ'ένα σημείο A της επιφάνειας του Άρη, το

οποίο είναι αντιδιαμετρικό του σημείου X, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

(i) Υπολογίστε την ταχύτητα του δορυφόρου αμέσως μετά την πυροδότηση των ανασχετικών πυραύλων.

(ii) Υπολογίστε την ταχύτητα του δορυφόρου καθώς φτάνει στην επιφάνεια του Άρη, στο σημείο A.

Γ. Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο, οι ανασχετικοί πύραυλοι πυροδοτούνται στο σημείο X κάθετα προς την εφαπτομένη της τροχιάς, προσδίδοντας στο δορυφόρο μια συνιστώσα ορμής με κατεύθυνση προς τον Άρη. Η κυκλική τροχιά μετατρέπεται σε ελλειπτική, και ο δορυφόρος προσεδαφίζεται σ'ένα σημείο B, στο ένα τέταρτο της διαδρομής γύρω από τον Άρη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

(i) Υπολογίστε την ταχύτητα του δορυφόρου όταν φτάνει στην επιφάνεια του Άρη, στο σημείο B.

(ii) Υπολογίστε την ταχύτητα του δορυφόρου αμέσως μετά την πυροδότηση των πυραύλων.

Δ. Τι συμπεραίνετε για τις δύο μέθόδους από τη σύγκριση των μεταβολών της ταχύτητας στο σημείο X;

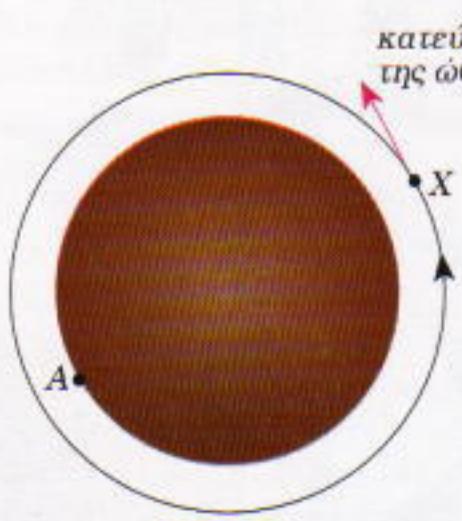
Ε. Τι συμπεραίνετε για τις δύο μέθόδους από τη σύγκριση των ταχυτήτων του δορυφόρου όταν φτάνει στην επιφάνεια του Άρη;

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum.

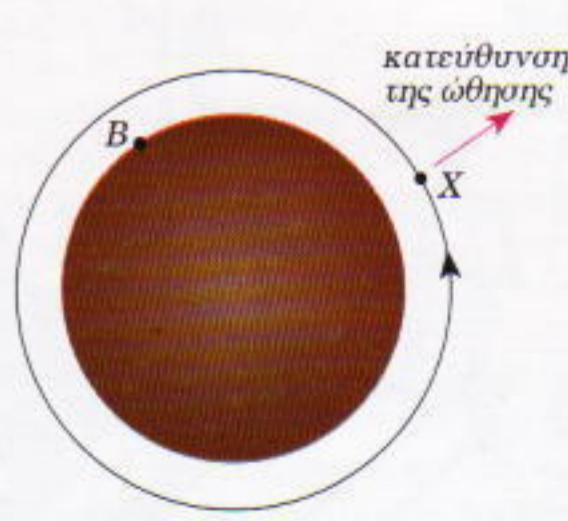
## Εκρήξεις στον αέρα

Θα ακολουθήσουμε τη λύση που έδωσε πριν από μερικά χρόνια ο Taiwan Wang, προπτυχιακός φοιτητής και πρώην μέλος της κινεζικής ολυμπιακής ομάδας.

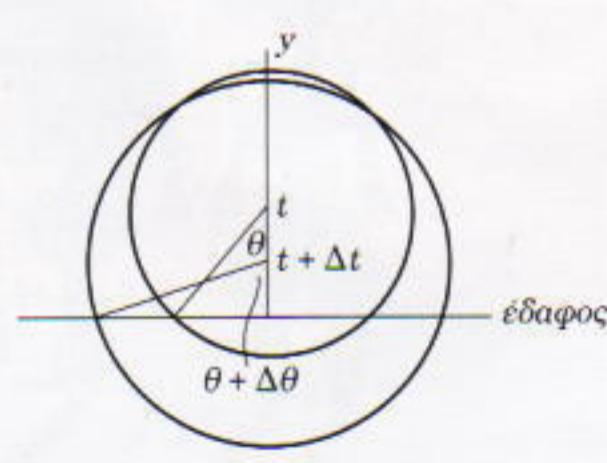
Εάν δεχτούμε ότι όλα τα θραύσματα έχουν την ίδια ταχύτητα ως προς το κέντρο μάζας, τότε τα θραύσματα θα σχηματίζουν σφαίρα με κέντρο το



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

κέντρο μάζας. Η ακτίνα της εν λόγω σφαιράς θα αυξάνεται αναλόγως του χρόνου καθώς η σφαίρα θα κατεβαίνει προς το έδαφος με επιτάχυνση  $g$ .

Το Σχήμα 3 δείχνει τη διαστέλλομενη σφαίρα τις χρονικές στιγμές  $t$  και  $t + \Delta t$ . Κατά το χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , όλα τα θραύσματα εντός της γωνίας  $\Delta\theta$  έχουν προσκρούσει στο έδαφος.

Η κίνηση των θραύσμάτων περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t,$$

$$r(t) = v_1t,$$

όπου  $v_0$  είναι η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας και  $v_1$  η ταχύτητα με την οποία διαστέλλεται η σφαίρα.

Εφόσον

$$r \sin \theta = y,$$

$$\sin \theta = \frac{h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2}{v_1t},$$

μπορούμε να βρούμε τα θραύσματα εντός της  $\Delta\theta$  συγκρίνοντας το εμβαδόν του συγκεκριμένου στοιχείου επιφάνειας με το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της σφαίρας. Το εμβαδόν του στοιχείου επιφάνειας ισούται —εάν υποθέσουμε ότι το  $\Delta t$  είναι πολύ μικρό— με το γινόμενο της περιφέρειας του οριζόντιου κύκλου που ορίζει το συγκεκριμένο στοιχείο επιφάνειας επί το μήκος του στοιχειώδους τόξου ( $r\Delta\theta$ ).

Επομένως, το πλήθος των θραύσμάτων που προσκρούουν στο έδαφος μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t$  και  $t + \Delta t$  είναι

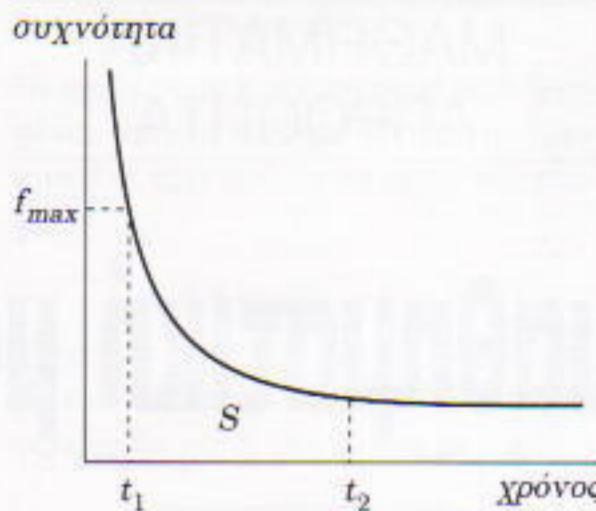
$$\Delta n = \frac{(2\pi r \eta \mu \theta)(r\Delta\theta)}{4\pi r^2} N$$

$$= \frac{1}{2} N \eta \mu \theta \Delta\theta,$$

όπου  $N$  το ολικό πλήθος των θραύσμάτων.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συχνότητα με την οποία τα θραύσματα φτάνουν στο έδαφος:

$$f = \frac{dn}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta t}$$



Σχήμα 4

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N}{2} \eta \mu \theta \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} N \eta \mu \theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} N \frac{ds \sin \theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2} N \left( \frac{g}{2v_1} + \frac{h}{v_1} \frac{1}{t^2} \right). \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης φαίνεται στο Σχήμα 4. Το  $t_1$  είναι η χρονική στιγμή που το πρώτο θράυσμα προσκρούει στο έδαφος· αυτή είναι και η ζητούμενη στιγμή, η στιγμή κατά την οποία η συχνότητα προσκρουσης των σωματιδίων στο έδαφος είναι μέγιστη.

Ος έλεγχος της λύσης μας, το εμβαδόν  $S$  κάτω από την καμπύλη πρέπει να ισούται με το ολικό πλήθος  $N$  των σωματιδίων:

$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = \int dn = \int_0^\pi \frac{N}{2} \eta \mu \theta d\theta = N.$$

Φαίνεται άραγε εύλογο το αποτέλεσμα μας από φυσική άποψη; Φανταστείτε μια οριακή περίπτωση όπου η ταχύτητα των θραύσμάτων είναι πάρα πολύ μεγάλη. Μπορούμε τότε να δούμε ότι τα σωματίδια που εκτοξεύτηκαν προς τα κάτω θα έχουν πολύ μικρή διαφορά στις κατακόρυφες ταχύτητές τους, και θα συναντήσουν το έδαφος σχεδόν ταυτόχρονα. Τα σωματίδια που εκτοξεύτηκαν κατευθείαν προς τα πάνω θα παρουσιάζουν επίσης μικρή διαφορά στις κατακόρυφες ταχύτητές τους. Αυτή η μικρή διαφορά, όμως, θα έχει αποτέλεσμα έναν μεγάλο χρόνο καθυστέρησης λόγω του μακρού χρόνου πτήσης τους. □

## ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

### ΚÁΤΟΠΤΡΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ



Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, δημιουργήθηκε ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον,

όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους.

Εκεί, οι Εκδόσεις Κάτοπτρο—μαζί με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης—άνοιξαν ένα βιβλιοπωλείο / εκθετήριο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παραγωγής. Περιμένουμε το

αναγνωστικό κοινό

να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

**Νέα στοά Αρσακείου  
(Πανεπιστημίου και  
Πειραιάρχη 5), 105 64 Αθήνα  
Τηλ.: 3247785**

# Λίγη μαθηματική μαγεία

Όμοια αθροισμάτα σε τετράγωνα, εξάγωνα και υπερκύβους

John Conway

**M**ΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΕΣ ΚΑΙ γνωστότερες μορφές μαθηματικής ψυχαγωγίας είναι η δημιουργία μαγικών τετραγώνων. Το πρόβλημα έγκειται στη διεύθετηση των αριθμών από το 1 έως το  $n^2$  σ' έναν  $n \times n$  πίνακα έτσι ώστε όλες οι γραμμές, οι στήλες καθώς και οι δύο διαγώνιοι να έχουν το ίδιο άθροισμα (το μαγικό άθροισμα).

Ας βρούμε πρώτα ποιο είναι το μαγικό άθροισμα. Ο μέσος όλων των αριθμών από το 1 έως το  $n^2$  ισούται με τον μέσο του πρώτου και του τελευταίου από αυτούς —συγκεκριμένα,  $(n^2 + 1)/2$ . Συνεπώς, ο μέσος των άθροισμάτων των γραμμών είναι  $n$  φορές αυτός ο αριθμός —συγκεκριμένα,  $n(n^2 + 1)/2$ .

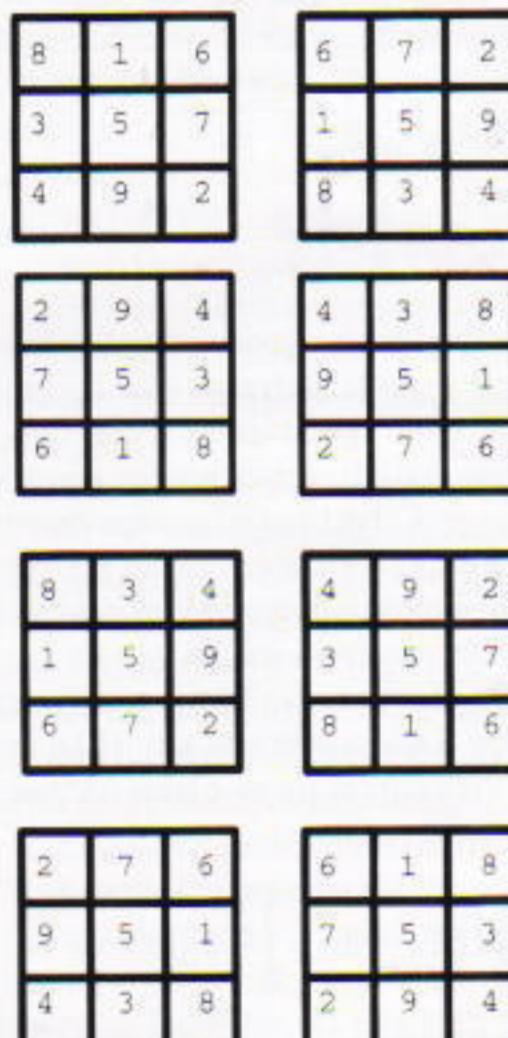
Για  $n = 3$ , παίρνουμε 15. Στην πραγματικότητα υπάρχει ένα μόνο μαγικό τετράγωνο τρίτης τάξης, που το ανακάλυψαν οι Κινέζοι πριν από πολλούς αιώνες και το ονόμασαν Λο Σου.<sup>1</sup> Σύμφωνα με το θρύλο, ήταν γραμμένο στο καβούκι μιας τεράστιας χελώνας που βρέθηκε στον Κίτρινο Ποταμό.

Ιδού το τετράγωνο του Λο Σου:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Στην πραγματικότητα, αυτό είναι το ένα από οκτώ τετράγωνα:

1. Δείτε το άρθρο «Η μαγεία του  $3 \times 3$ » στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1996.



Αφού όμως όλα προκύπτουν με περιστροφές και κατοπτρικές συμμετρίες του πρώτου, θεωρούνται συνήθως ως ένα τετράγωνο.

Επέλεξα τον συγκεκριμένο αρχικό προσανατολισμό του Λο Σου για να επιδείξω τον κανόνα του de la Louvrey για τη συμπλήρωση ενός μαγικού τετραγώνου οποιασδήποτε περιττής τάξης. Ο de la Louvrey (1600-1674) ήταν ο πρώτος πρεσβευτής της Γαλλίας στο Σιάμ, και αυτός ο κανόνας ήταν ένα από τα πολλά ενδιαφέροντα πράγματα που έμαθε εκεί.

Θα κατανοήσουμε ευκολότερα τον κανόνα αν θεωρήσουμε ότι το τετρά-

γωνο «τυλίγεται», όπως συμβαίνει σε πολλά ηλεκτρονικά παιχνίδια, ότι ωστε κάθε κίνηση από τη γραμμή της κορυφής προς τα πάνω να μας μεταφέρει στην κάτω γραμμή, ενώ όταν κινούμαστε από τη δεξιά στηλή να μεταφερόμαστε στην αριστερή. Ο κανόνας του de la Louvrey μάς λέει ότι γράφουμε τους αριθμούς ξεκινώντας από το μέσο της πάνω γραμμής και συνεχίζουμε μετακινούμενοι διαγώνια προς τα πάνω και δεξιά, όταν οδηγούμαστε σε άδειο τετράγωνο. Όταν συναντάμε τετράγωνο που περιέχει ήδη αριθμό, κατεβαίνουμε ένα κελί προς τα κάτω.

Ας δούμε πώς σχηματίζεται το Λο Σου με αυτό τον τρόπο. Το πρώτο βήμα μετά το 1 μάς μεταφέρει από την πάνω γραμμή στην κάτω

		1
		2

και έπειτα το βήμα από το 2 στο 3 μάς μεταφέρει από τη δεξιά στηλή στην αριστερή:

		1
3		
		2

Τώρα όμως το διαγώνιο βήμα προς τα πάνω μάς οδηγεί από το 3 στο 1, και έτσι κατεβαίνουμε ένα κελί κάτω από το 3 (όχι από το 1!) και συνεχίζουμε:

	1	6
3	5	
4		2

και το τετράγωνο συμπληρώνεται αμέσως μετά το δεύτερο «κατέβασμα» από το 6 στο 7:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Με λίγη εξάσκηση θα μπορείτε να συμπληρώνετε εύκολα αυτά τα τετράγωνα. Ιδού το τετράγωνο de la Louvre 5ης τάξης:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Είναι εύκολο να διατυπώσουμε έναν γενικό τύπο για όλα τα μαγικά τετράγωνα τρίτης τάξης, ακόμη και όταν οι αριθμοί που περιέχουν δεν είναι οι 1, ..., 9. Το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι το μαγικό άθροισμα  $S$  ισούται με το τριπλάσιο του κεντρικού αριθμού  $m$ . Υπάρχουν τέσσερις ευθείες που διέρχονται από το κέντρο, επομένως, αν τις προσθέσουμε διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα όλων των αριθμών που σημειώνονται στο παρακάτω τετράγωνο είναι ίσο με  $4S$ :

\	1	/
-	$\Sigma$	-
/	1	\

Τοποθετούμε σημάδι σε ένα κελί κάθε φορά που προσθέτουμε τον αριθμό που περιέχει — βλέπετε ότι το κεντρικό κελί έχει τέσσερα σημάδια. Συνεπώς, το άθροισμα που υπολογίσαμε είναι ίσο με το άθροισμα όλων των κελιών — δηλαδή,  $3S$  — συν τρεις φορές το μεσαίο κελί. Έτσι,

$$4S = 3S + 3m,$$

από όπου παίρνουμε

$$S = 3m.$$

Οι αριθμοί σε κάθε γραμμή που διέρχεται από το κέντρο δίνουν άθροισμα  $3m$ , άρα πρέπει να είναι της μορφής

$$m+x \quad m \quad m-x.$$

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι οι δύο πάνω γωνίες είναι  $m+a$  και  $m+b$ , οι κάτω γωνίες θα είναι  $m-b$  και  $m-a$ :

$m+a$	?	$m+b$
?	$m$	?
$m-b$	?	$m-a$

και αφού κάθε ακραία γραμμή έχει άθροισμα  $3m$ , συμπληρώνουμε εύκολα το τετράγωνο:

$m+a$	$m-a-b$	$m+b$
$m-a+b$	$m$	$m+a-b$
$m-b$	$m+a+b$	$m-a$

Το γενικό μαγικό τετράγωνο τρίτης τάξης.

Πολύ εύκολα πλέον αποδεικνύεται ότι το Λο Σου είναι μοναδικό. Το μαγικό άθροισμα πρέπει να είναι το ένα τρίτο του  $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ , δηλαδή 15, και επομένως ο κεντρικός αριθμός  $m$  ισούται με 5. Δεν ενδιαφέρομαστε για τις περιστροφές και τις συμμετρίες, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα  $a$  και  $b$  είναι θετικά, αφού με την αλλαγή του προσήμου ενός από αυτά παίρνουμε απλώς το συμμετρικό ως προς τη διαγώνιο τετράγωνο. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το  $a$  είναι μεγα-



Μελαγχολία I (1514) του Albrecht Dürer, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον.

λύτερο του  $b$ , διότι με την εναλλαγή τους παίρνουμε το συμμετρικό ως προς τη μεσαία στήλη τετράγωνο. Ο μικρότερος αριθμός που εμφανίζεται είναι το  $(m - a - b)$  — που θα ισούται επομένως με το 1. Αφού  $m = 5$ , πρέπει να είναι  $a + b = 4$ , από όπου παίρνουμε  $a = 3$ ,  $b = 1$ , και τα πάντα είναι πλέον γνωστά.

Το 1693 ο Frenicle de Bessy κατέγραψε όλα τα μαγικά τετράγωνα τέταρτης τάξης. Ανακάλυψε ότι, αν αγνοηθούν οι περιστροφές και οι συμμετρίες, υπάρχουν ακριβώς 880 τέτοια τετράγωνα. Θα δούμε ένα εύκολο τρόπο εύρεσης των περισσότερων από αυτά. Μπορούμε να διευθετήσουμε με πολλούς τρόπους τους αριθμούς από το 1 έως το 16 έτσι ώστε να σχηματίσουν έναν πίνακα πρόσθεσης:

$A+a$	$A+b$	$A+c$	$A+d$
$B+a$	$B+b$	$B+c$	$B+d$
$C+a$	$C+b$	$C+c$	$C+d$
$D+a$	$D+b$	$D+c$	$D+d$

και όταν το κάνουμε αυτό, μπορούμε να τους αναδιατάξουμε ως εξής, για να σχηματίσουν μαγικό τετράγωνο:

$A+a$	$C+d$	$D+b$	$B+c$
$D+c$	$B+b$	$A+d$	$C+a$
$B+d$	$D+a$	$C+c$	$A+b$
$C+b$	$A+c$	$B+a$	$D+d$

Πόσα τετράγωνα παίρνουμε με αυτό τον τρόπο; Ιδού 6 πίνακες πρόσθεσης:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	5	6
3	4	7	8
9	10	13	14
11	12	15	16

1	3	5	7
2	4	6	8
9	11	13	15
10	12	14	16

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

1	3	9	11
2	4	10	12
5	7	13	15
6	8	14	16

1	2	9	10
3	4	11	12
5	6	13	14
7	8	15	16

ο καθένας τους δίνει με μετάθεση των γραμμών και των στηλών του  $24 \times 24$  τετράγωνα. Προκύπτουν έτσι  $6 \times 24$

$\times 24 = 3.456$  μαγικά τετράγωνα συνολικά, ή  $3.456/8 = 432$ , αν αγνοήσουμε τις περιστροφές και τις συμμετρίες.

Ένα από αυτά τα τετράγωνα — συγκεκριμένα το

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

που προέρχεται από το

16	12	13	11
14	10	13	9
8	4	7	2
6	3	5	1

εμφανίζεται στην περίφημη αυτοπροσωπογραφία του Albrecht Dürer, «Μελαγχολία I», όπου οι δύο μεσαίοι αριθμοί της κάτω γραμμής δηλώνουν τη χρονολογία του έργου.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα του πίνακα πρόσθεσης για να εξαγάγουμε έναν απλό τύπο για το γενικό μαγικό τετράγωνο τέταρτης τάξης, παρόμοιο με αυτόν που δώσαμε νωρίτερα για το τρίτης τάξης. Θα επισυνάψουμε απλώς δύο νέες παραμέτρους,  $x$  και  $y$ :

$A+a+x$	$C+d+x$	$D+b+y$	$B+c+y$
$D+c+x$	$B+b+y$	$A+d+x$	$C+a+y$
$B+d+y$	$D+a+x$	$C+c+y$	$A+b+x$
$C+b+y$	$A+c+y$	$B+a+x$	$D+d+x$

Το γενικό τετράγωνο τέταρτης τάξης.

Εδώ, οι 10 παράμετροι δεν είναι ανεξάρτητες, αφού μπορούμε να μειώσουμε κατά ένα ποσό τα  $A, B, C, D$  ή τα  $a, b, c, d$  και να κρατήσουμε το τετράγωνο αμετάβλητο αυξάνοντας κατά το ίδιο ποσό τα  $x$  και  $y$ . Επομένως μπορείτε, αν θέλετε, να θέσετε  $D = d = 0$ , και τότε οι υπόλοιπες οκτώ παράμετροι  $A, B, C, a, b, c, x, y$ , θα είναι ανεξάρτητες.

Εδώ προκύπτει ένα γενικότερο ερώτημα σχετικά με το πλήθος των παραμέτρων που απαιτούνται για το γενικό μαγικό τετράγωνο τάξης  $n$ . Η απάντηση είναι 1, αν  $n = 1$  ή  $n = 2$ , και  $n(n - 2)$ , αν  $n > 2$ . Και ποιο είναι το πλήθος των μαγικών τετραγώνων που μπορούμε να κατασκευάσουμε

χρησιμοποιώντας τους αριθμούς από το 1 έως το  $n^2$ ; Δυστυχώς, ουδείς γνωρίζει την απάντηση για  $n > 4$ .

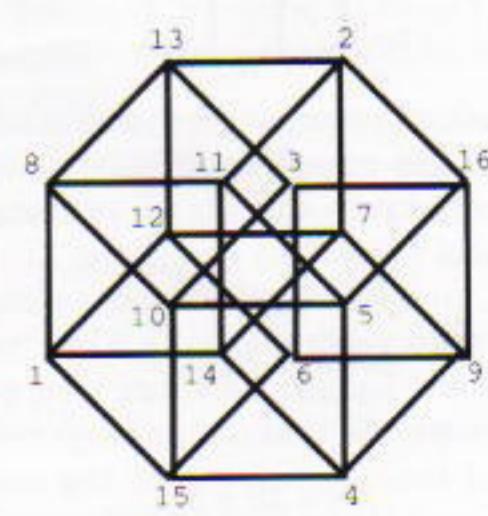
Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον είδος τετραγώνου είναι το ονομαζόμενο «πανδιαγώνιο», στο οποίο όλες οι «επεκταμένες διαγώνιοι», όπως η παρακάτω

#	.	.	.
.	.	.	#
.	.	#	.
.	#	.	.

δίνουν επίσης το μαγικό άθροισμα. Βεβαίως, ένα τετράγωνο τέταρτης τάξης μπορεί να είναι πανδιαγώνιο μόνο όταν όλοι οι αριθμοί του είναι ίσοι, αφού πρέπει να ισούνται όλοι με το ένα τρίτο του μαγικού αθροίσματος! Το γενικό τετράγωνο τέταρτης τάξης είναι πανδιαγώνιο μόνο αν

$$A + C = B + D, \\ a + c = b + d, \\ x = y.$$

Υπάρχει μια όμορφη σχέση μεταξύ των τέταρτης τάξης πανδιαγώνιων τετραγώνων και του τετραδιάστατου υπερκύβου. Στο επόμενο σχήμα οι κορυφές του υπερκύβου έχουν αριθμηθεί από το 1 έως το 16. Κάθε δισδιάστατη έδρα δίνει άθροισμα 34, επομένως αυτός είναι ένας μαγικός υπερκύβος! Αν ξεκινήσουμε από οποιαδήποτε κορυφή και κινηθούμε γύρω από μια έδρα, παίρνουμε την πρώτη γραμμή ενός μαγικού τετραγώνου, τις υπόλοιπες γραμμές του οποίου τις βρίσκουμε διαβάζοντας με την ίδια σειρά τους αριθμούς στις κορυφές των παράλληλων εδρών. Προσπαθή-



στε να διατυπώσετε μόνοι σας τους ακριβείς κανόνες.

Ένα από τα τετράγωνα που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο είναι το εξής:

12	7	2	13
6	9	16	3
15	4	5	10
1	14	11	8

Μπορείτε να αντιστοιχίσετε τις γραμμές και τις στήλες του σε έδρες του υπερκύβου;

Υπάρχουν 384 αποτελεσματικές διατάξεις των αριθμών, που αντιστοιχούν στους 384 διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τον υπερκύβο έτσι ώστε να καταλαμβάνει το ίδιο τμήμα του τετραδιάστατου χώρου. Μας δίνουν συνολικά 384 πανδιαγώνια τετράγωνα τέταρτης τάξης, ή 48, αν αγνοήσουμε τις περιστροφές και τις συμμετρίες.

Υπάρχουν πολλά ακόμη σχήματα για να ασκήσουμε τη μαγεία μας. Ένα από τα πιο αξιοσημείωτα είναι το

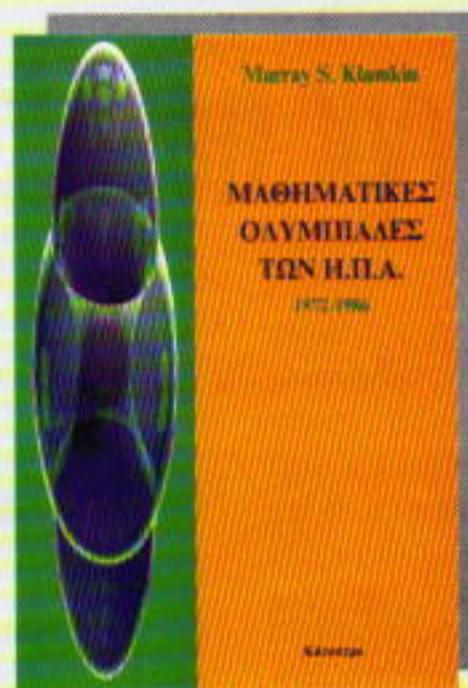
	15	
9	14	13
6	8	10
11	5	12
1	2	
18	7	16
17	19	
	3	

Το θαυμαστό μαγικό εξάγωνο του Adams.

στο οποίο όλες οι παράλληλες προς τις πλευρές γραμμές έχουν το ίδιο άθροισμα, 38. Ονομάστηκε έτοι διότι ο Clifford W. Adams είχε τέτοιο πάθος με αυτό το πρόβλημα, ώστε κατασκεύασε 19 αριθμημένες πήλινες πινακίδες τις οποίες ανακάτευε κάθε τόσο επί 47 χρόνια έως ότου κατάφερε τελικά να βρει τη λύση — λύση που, όπως απέδειξε αργότερα ο Charles W. Trigg, είναι μοναδική.

Στην πραγματικότητα, το εξάγωνο του Adams είχε ανακαλυφθεί από πολιά, και συγκεκριμένα από τον William Radcliffe, που το κατέγραψε το 1896 στο Stationers Hall, στο Λονδίνο. ◻

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Murray Klamkin

Μαθηματικές Ολυμπιάδες των ΗΠΑ

(1972-1986)

Αυτό είναι το πρώτο βιβλίο με θέματα μαθηματικών ολυμπιάδων που κυκλοφορεί στην Ελλάδα, και έρχεται να καλύψει ένα σοβαρότατο κενό της ελληνικής βιβλιογραφίας.

Ο διακεκριμένος μαθηματικός του Πανεπιστημίου της Αλμπέρτα Murray Klamkin έχει συγκεντρώσει όλα τα προβλήματα που τέθηκαν στις Μαθηματικές Ολυμπιάδες των ΗΠΑ κατά τα έτη 1972-1986, τα έχει ταξινομήσει σε θεματικές ενότητες (άλγεβρα, θεωρία αριθμών, επιπεδομετρία, στερεομετρία, ανισότητες, συνδυαστική και πιθανότητες) και παρέχει κομψές λύσεις, προεκτάσεις και εναλλακτικές προσεγγίσεις για κάθε πρόβλημα· το βιβλίο περιλαμβάνει επίσης ένα πλούσιο και καταπολιτικό γλωσσάριο μαθηματικών όρων καθώς και εκτενέστατη βιβλιογραφία — που οπωσδήποτε θα αποδειγμεί εξαιρετικά χρήσιμη σε κάθε ενδιαφερόμενο.

«Οι έλληνες μαθητές και καθηγητές έχουν πλέον στη διάθεσή τους μια συναρπαστική, πρωτότυπη συλλογή προβλημάτων, ένα πολύτιμο εργαλείο για τη μελέτη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση.»

— Θεόδωρος Μπόλης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Αν αντιλαμβάνεστε τη μαγεία των μαθηματικών και σας γοητεύει η ιδέα να αναμετρηθείτε με ένα απαιτητικό μαθηματικό πρόβλημα, τότε το βιβλίο θα σας συναρπάσει.

Σελ.: 152, 17 x 25 εκ., 3.900 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Πινγκ πονγκ στην μπανιέρα

Αλλά αφήστε τις ρακέτες σας στην άκρη

Alexey Byalko

**T**Α ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΠΟΥ ΘΑ ΑΝΑΦΕΡΩ εδώ είναι προσιτά σε όλους. Δεν απαιτούν καθόλου ειδικό εξοπλισμό. Το μόνο που θα χρειαστείτε είναι μια μπάλα του πινγκ πονγκ, νιπτήρα (ή μπανιέρα ή νεροχύτη), έναν χιλιοστομετρικό κανόνα, ένα τρίλιτρο δοχείο και ένα χρονόμετρο (ή ένα ρολόι του καρπού με δεικτή δευτερολέπτων).

**Πείραμα 1.** Κλείστε την έξοδο του νιπτήρα και αφήστε το νερό να τρέξει μέχρι να φτάσει σε ύψος 3 έως 5 cm. Ακουμπήστε μια μπάλα του πινγκ πονγκ στο σημείο όπου η στήλη νερού της βρύσης χτυπά στην ελεύθερη επιφάνειά του στο νιπτήρα, και αφήστε την. Η διαισθησή σας λέει ότι η υδάτινη στήλη θα διώξει την μπάλα μακριά της. Και όμως, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει! Το ρεύμα του νερού αιχμαλωτίζει την μπάλα —παραμένει ακριβώς εκεί όπου τη βάλατε.

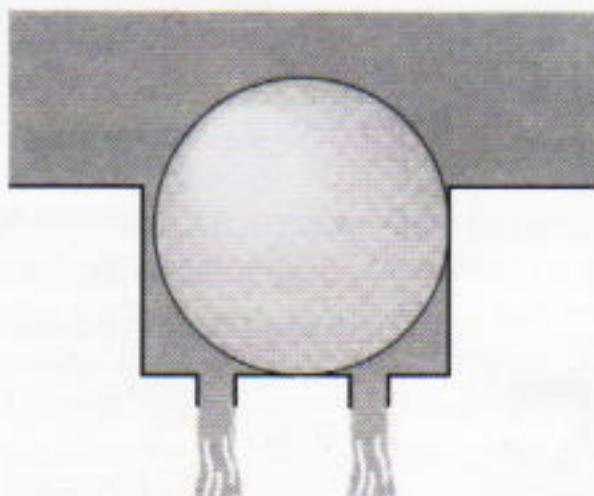
Κοιτάξτε πιο προσεκτικά. Η μπάλα δεν μένει ακίνητη, έτσι δεν είναι; Ταλαντώνεται ελαφρώς υπό την επιδραση του νερού που πέφτει. Βάλτε τα χέρια σας σε σχήμα κυπέλλου κάτω από την μπάλα, έτσι ώστε αυτή να μπορεί να συνεχίσει να επιπλέει, αλλά χωρίς να ακουμπά στις παλάμες σας. Ανυψώστε λίγο τα χέρια σας, και την μπάλα, κατά μήκος του ρεύματος. Θα παρατηρήσετε ότι η συχνότητα των ταλαντώσεων της μπάλας ελαττώνεται.

**Πείραμα 2.** Ανοίξτε την έξοδο του νιπτήρα. Σ' έναν συνηθισμένο νιπτήρα το άνοιγμα είναι κυλινδρικό, με βάθος περίπου 20 mm και διάμετρο 40

mm· στη βάση του μάλιστα έχει ένα προστατευτικό δίκτυωτό. Μια μπάλα πινγκ πονγκ είναι κατά τι μικρότερη: έχει διάμετρο 37 mm· έτσι, μπορεί να χωθεί στο άνοιγμα αφήνοντας περιμετρικά κενό περίπου 1-2 mm (Σχήμα 1).

Κρατήστε την μπάλα μόλις πάνω από την έξοδο του νιπτήρα και αφήστε τη να φύγει. Το ρεύμα του νερού θα την τραβήξει μέσα στο άνοιγμα, παρότι η μπάλα συνήθως αντιστέκεται στη βύθισή της. Και ακούτε έναν χαμηλό βομβώδη ήχο; Πρέπει να προέρχεται από τις ταλαντώσεις της μπάλας. Το πρώτο πράγμα που πιθανώς θα σκεφτείτε είναι ότι η μπάλα αναπηδά στο δίκτυωτό. Άλλα δεν συμβαίνει αυτό. Αγγίξτε την μπάλα στην κορυφή της και θα πειστείτε ότι δεν ταλαντώνεται κατακόρυφα αλλά οριζόντια όσο επιτρέπει το άνοιγμα.

Τώρα κοιτάξτε το εμπορικό σήμα πάνω στην μπάλα. Θα παρατηρήσετε ότι η μπάλα περιστρέφεται —τόσο αργά μάλιστα που μπορείτε να παρακολουθείτε την περιστροφή της άνετα.



Σχήμα 1

Περιστρέφεται για λίγο προς τη μια κατεύθυνση, κατόπιν αλλάζει, και αρχίζει να περιστρέφεται προς την άλλη.

**Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε τα παραπάνω πειράματα;** Αμέσως μπορούμε να πούμε ότι και τα δύο επιδεικνύουν παραστατικά το νόμο του Bernoulli, έναν από τους πρώτους νόμους της υδροδυναμικής. Ποιοτικά μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: στη ροή των υγρών η πίεση είναι μεγαλύτερη εκεί όπου η ταχύτητα του υγρού είναι μικρότερη, και αντιστρόφως —όπου η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη, η πίεση είναι μικρότερη. Με άλλα λόγια, καθώς η ταχύτητα οποιουδήποτε υγρού αυξάνεται, η πίεση στο εσωτερικό του ελαττώνεται. Και στα δύο πειράματα η μείωση της πίεσης που προκαλείται από τη ροή του νερού τραβά την πλαστική μπάλα μέσα στο ρεύμα.

Ο ίδιος νόμος θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τις ταλαντώσεις της μπάλας τόσο στο ρεύμα του νερού όσο και στο άνοιγμα του νιπτήρα. Πρώτ' απ' όλα, όμως, ας υπολογίσουμε την ταχύτητα του νερού καθώς εξέρχεται από τη βρύση.

Δεν είναι δύσκολο να ρυθμίσουμε τη ροή της βρύσης έτσι ώστε η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο νιπτήρα να παραμένει ουσιαστικά σταθερή. Μπορούμε να μετρήσουμε τη μάζα του νερού που αποχετεύεται ανά μονάδα χρόνου με το τρίλιτρο δοχείο και το χρονόμετρο. Κατά προσέγγιση θα είναι περίπου 80-100 g/s. Τώρα ας χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα για να

προσδιορίσουμε τη διάμετρο της υδατινής στήλης κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια. Είναι περίπου 6 mm. Αυτό συνεπάγεται ότι η ταχύτητα του ρεύματος νερού κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια του είναι περίπου 3 m/s (πράγμα που μπορείτε να το ελέγξετε μόνοι σας). Φυσικά, η εν λόγω ταχύτητα μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί, αλλά στους υπολογισμούς μας ας χρησιμοποιήσουμε τη συγκεκριμένη τιμή.

Για να εξετάσουμε λεπτομερέστερα τα παραπάνω φαινόμενα, θα χρειαστούμε, πλην της ποιοτικής, την ποσοτική διατύπωση του νόμου του Bernoulli. Σύμφωνα με τον συγκεκριμένο νόμο, σε κάθε διατομή του ρεύματος του υγρού το άθροισμα  $\rho v^2/2 + p + \rho gh$  παραμένει σταθερό, όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $v$  η ταχύτητα,  $p$  η πίεση του υγρού και  $h$  το υψόμετρο της διατομής που επλέξαμε.

**Εξήγηση του πειράματος 1.** Ας απλουστεύσουμε το έργο μας επί του παρόντος: αντί της αλληλεπίδρασης μιας κυλινδρικής στήλης και μιας σφαιρικής μπάλας, ας εξετάσουμε την επίδραση μιας παραλληλεπίπεδης στήλης και ενός κυλίνδρου. Η ουσία του φυσικού φαινομένου δεν θα αλλάξει εξαιτίας αυτού —απλώς θα διευκολύνει τους υπολογισμούς μας.

Κατ' αρχάς, ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου κύλινδρος ακτίνας  $R$  αγγίζει ελαφρά το ρεύμα, και ας εκτιμήσουμε τη δύναμη που δρα πάνω του (Σχήμα 2). Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli, η πίεση μέσα στο κα-

μπολωμένο ρεύμα μειώνεται κατά ποσόν

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} (v^2 - v_0^2)$$

(μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο  $\rho g R$ , αφού στην περίπτωσή μας  $gR \equiv 0,2 \text{ m}^2/\text{s}^2$  είναι πολύ μικρότερο από  $v^2/2 \equiv 4,5 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ). Η τροχιά των σωματιδίων του καμπυλωμένου ρεύματος είναι κυκλικό τόξο, επομένως διαθέτουν κεντρομόλο επιτάχυνση. Η εν λόγω επιτάχυνση οφείλεται στη διαφορά μεταξύ της ατμοσφαιρικής πίεσης  $p_0$  (ΐδια πίεση με αυτή στο ευθύγραμμό ρεύμα) και της πίεσης  $p$  στο καμπυλωμένο ρεύμα:

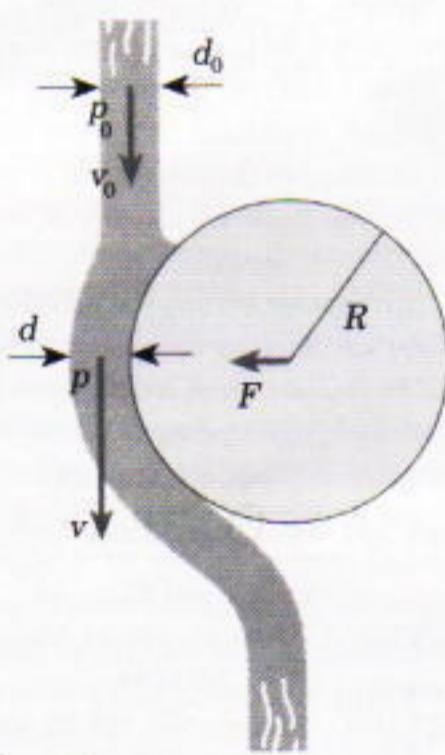
$$m \frac{v^2}{R} = (p_0 - p)S,$$

όπου  $S$  είναι η επιφάνεια επαφής μεταξύ της υδατινής στήλης και του κυλίνδρου. Η ταχύτητα  $v$  του καμπυλωμένου ρεύματος δεν είναι πάρα λίγο μεγαλύτερη από την αρχική ταχύτητα  $v_0$  του ευθύγραμμου ρεύματος (και του οποίου το πάχος  $d$  είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα  $R$  του κυλίνδρου). Επομένως, η δύναμη που εκτρέπει το ρεύμα ισούται με

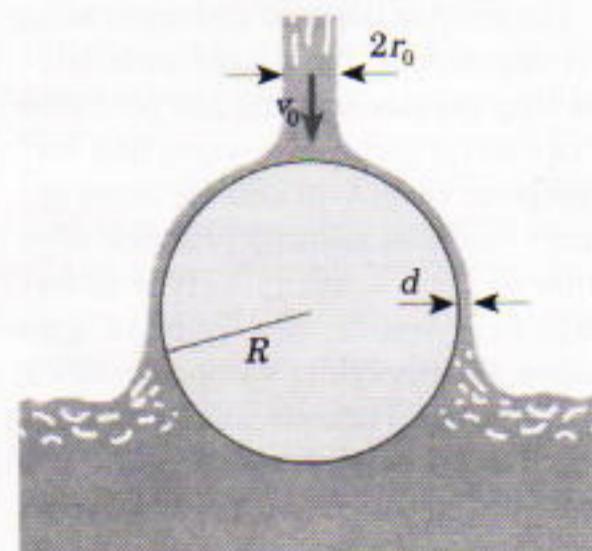
$$F = (p_0 - p)S = \frac{\rho v_0^2 d}{R} S.$$

Η δύναμη που δρα στον κύλινδρο είναι ίση κατά μέτρο, αλλά με αντίθετη κατεύθυνση.

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε για ροή γύρω από κύλινδρο ισχύει και για ροή γύρω από σφαίρα, αλλά, ίσως, με διαφορετικό αριθμητικό συντελεστή. Η επιφάνεια επαφής του ρεύματος με τη σφαίρα είναι πάντοτε πρακτικά της τάξεως του τετρα-



Σχήμα 2



Σχήμα 3

γώνου της ακτίνας της  $R$ . Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, η δύναμη η οποία ασκείται στην μπάλα όταν βρίσκεται μέσα στο ρεύμα νερού είναι της τάξεως μεγέθους

$$F \sim \rho v_0^2 R d.$$

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την περίπτωση στην οποία η στήλη νερού πέφτει κατευθείαν στην κορυφή της μπάλας (Σχήμα 3). Το νερό ρέει ολόγυρα από την μπάλα, συμμετρικά, και έτοι η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί πάνω της θα είναι μηδενική. Δεν είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε το πάχος του στρώματος  $d$  για τη συγκεκριμένη περίπτωση ροής γύρω από την μπάλα. Λαμβάνοντας υπόψη τη σταθερότητα της παροχής, έχουμε

$$d \sim \frac{r_0^2}{R}$$

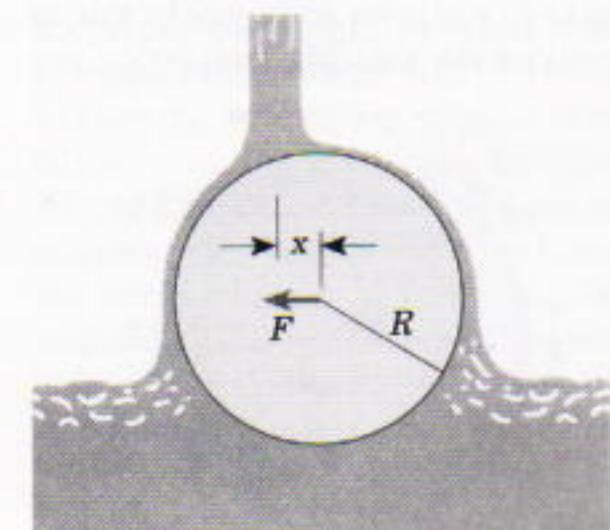
(ελέγξτε το μόνοι σας).

Τέλος, στην ενδιάμεση περίπτωση όπου η μετατόπιση  $x$  της μπάλας ως προς τον άξονα συμμετρίας του ρεύματος δεν είναι μεγάλη σε σύγκριση με την ακτίνα της μπάλας  $R$  (Σχήμα 4), η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στην μπάλα εξαρτάται γραμμικά από το  $x$  και έχει τέτοια κατεύθυνση που να τείνει να επαναφέρει την μπάλα στη θέση τοπορίας:

$$F_{\text{ad}} = -\rho v_0^2 d \cdot x = -\frac{\rho v_0^2 r_0^2}{R} x.$$

(Δυστυχώς, είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε την ακριβή τιμή της δύναμης  $F_{\text{ad}}$  στη συγκεκριμένη περίπτωση.)

Επομένως, η μπάλα υπό την επίδραση αυτής της δύναμης θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η κυκλι-



Σχήμα 4

κή συχνότητα των ταλαντώσεων μπορεί να εκφραστεί κατ' αναλογία με τις ταλαντώσεις μικρής μάζας υπό την επίδραση ελατηρίου:

$$F_{el} = -kx \Rightarrow \omega_{el} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$F_{mu} = -\frac{\rho v_0^2 r_0^2}{R} x \Rightarrow \omega_{mu} \sim v_0 r_0 \sqrt{\frac{\rho}{RM}}.$$

Εάν η μάζα της μπάλας είναι  $M \approx 3$  g, παίρνουμε

$$\omega_{mu} \approx 40 \text{ s}^{-1},$$

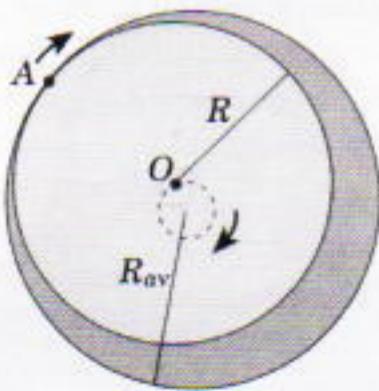
και

$$v_{mu} \approx 6 \text{ Hz}.$$

Όταν ανυψώνουμε την μπάλα μέσα στις παλάμες μας κατά μήκος του ρεύματος, τα  $r_0$  και  $v_0$  μεταβάλλονται ταυτόχρονα, αλλά το γινόμενο  $v_0 r_0$  παραμένει σταθερό. Καθώς το  $r_0$  αυξάνεται, το γινόμενο  $v_0 r_0$  μειώνεται. Έτσι, ενόσω η μπάλα ανυψώνεται προς τη βρύση, η συχνότητα των ταλαντώσεων πρέπει να μειώνεται, όπως ακριβώς παρατηρήσαμε και στο πείραμα.

Όταν η συχνότητα των ταλαντώσεων ελαττώνεται, παρατηρούμε επιπλέον ότι η μπάλα στρέφεται προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Σε λεπτά, αργά υδάτινα ρεύματα η ταλάντωση και η περιστροφή της μπάλας συνδυάζονται δημιουργώντας μια πολύπλοκη και όμορφη κίνηση γύρω από το ρεύμα. Μπορείτε να το ελέγξετε πειραματικά μόνοι σας.

**Εξήγηση του πειράματος 2.** Ας υποθέσουμε ότι η αρχική θέση της μπάλας είναι όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5 (κοιτώντας την από πάνω). Εκτιμήστε την ταχύτητα της ροής στο διάκενο ανάμεος στην μπάλα και το άνοιγμα του νιπτήρα. Το εμβαδόν του



Σχήμα 5

κενού δεν εξαρτάται από τη θέση της μπάλας και ισούται με  $\pi(R_{av}^2 - R^2) \equiv 1 \text{ cm}^2$ . Επομένως, η μέση ταχύτητα ροής γύρω από την μπάλα θα είναι  $v \equiv 1 \text{ m/s}$ . Η συγκεκριμένη ταχύτητα, ωστόσο, απέχει πολύ από το να έχει σταθερή τιμή σε όλη την έκταση του διάκενου — είναι σημαντικά μεγαλύτερη στο πλατύτερο τμήμα του απ' ότι στο στενότερο (δηλαδή, κοντά στο σημείο επαφής A), όπου η ροή επιβραδύνεται λόγω της τριβής με τα τοιχώματα.

Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli, η πίεση στο στενότερο τμήμα του διάκενου θα είναι μεγαλύτερη απ' ότι στο πλατύτερο. Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη που προκύπτει έχει κατεύθυνση προς το πλατύτερο τμήμα του διάκενου και προκαλεί την ταλάντωση της μπάλας.

Ωτόσο, η πραγματική κίνηση της μπάλας δεν συνίσταται μόνο σε μια απλή μετακίνηση από τοίχωμα σε τοίχωμα μέσω του κέντρου. Η μπάλα ασκεί πίεση στο τοίχωμα της εξόδου, το σημείο επαφής A γλιστρά στα χείλη του ανοίγματος και το κέντρο  $O$  της μπάλας διαγράφει έναν μικρό κύκλο (τη διακεκομένη γραμμή του Σχήματος 5). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της μπάλας ισούται με

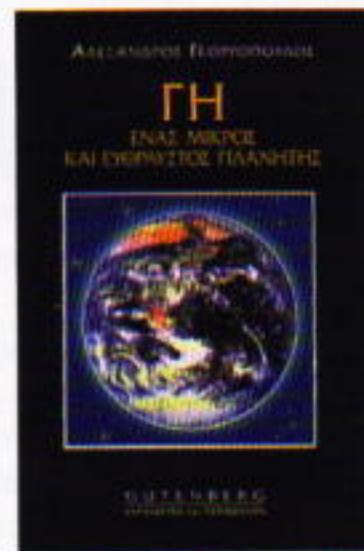
$$\Omega = \omega(R_{av} - R)/R_{av}$$

— δηλαδή κατά προσέγγιση ισούται με το ένα δέκατο της  $\omega$ . Και δεν είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα με τη βοήθεια ενός χρονομέτρου και καταμετρώντας το πλήθος των περιστροφών που εκτέλεσε το εμπορικό σήμα (κατά προσέγγιση 2-3 περιστροφές ανά δευτερόλεπτο).

Προκύπτει τώρα το ερώτημα: κατά την περιστροφή της η μπάλα ακολουθεί τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή την αντίστροφη; Η κίνηση που παρατηρείτε εξαρτάται από τις περιστάσεις — από όλα τα συμβάντα που οδηγούν σ' αυτή —, και τρία είναι τα δυνατά ενδεχόμενα: εάν η μπάλα ηρεμούσε, θα συνεχίσει να ηρεμεί· εάν η αρχική ώθηση κίνησε το σημείο επαφής A κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, η μπάλα θα περιστρέφεται κατά την αντίθετη φορά· και το αντίστροφο. ■

## ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

### GUTENBERG



ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ

**ΓΗ**  
ΕΝΑΣ ΜΙΚΡΟΣ ΚΑΙ  
ΕΥΘΡΑΥΣΤΟΣ ΠΛΑΝΗΤΗΣ

Το παρόν βιβλίο είναι ένα πολύ σημαντικό «εργαλείο» γι' αυτούς που θέλουν να έχουν μια συνολική αποφή για τα περιβαλλοντικά προβλήματα του σήμερα. Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε ν' αναλυθούν σχεδόν όλα τα θέματα που αφορούν τη σχέση Ανθρώπου και Πλανήτη.

Στο πρώτο μέρος εξετάζονται τα φυσικά οικοσυστήματα, το δεύτερο μέρος του αναφέρεται στον πληθυσμό του πλανήτη, ενώ το τρίτο αναλύει τα προβλήματα διαχείρισης των φυσικών πόρων: ορυκτά καύσιμα και μέταλλα, δάση και υγρότοποι, άγρια ζωή, νερό, έδαφος, παραγωγή τροφής. Στο τέταρτο μέρος εξετάζονται οι μορφές ρύπανσης: αέρια, υδάτινη, ηχορύπανση.

Ειδικά κεφάλαια αναφέρονται στο φαινόμενο θερμοκηπίου, στην τρύπα του δζοντος και την δίνη βροχής.

Ταυτόχρονα υπάρχουν κάποιες έννοιες και θέματα που διατρέχουν όλο το βιβλίο, όπως η αειφορική ανάπτυξη, η σχέση Βορρά-Νότου και η εξοικονόμηση ενέργειας.

Σελ. 597, 14 x 21 εκ., 6.000 δρχ.

**GUTENBERG**  
ΕΚΔΟΣΕΙΣ: Διδότου 55, 106 81 Αθήνα,  
τηλ.: 3826684  
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: Σόλωνος 103, 106 78 Αθήνα,  
τηλ.: 3800798, fax: 3800127

# Η μακρά πορεία προς το γεωγραφικό μήκος

Πώς τελικά γίναμε «συντεταγμένοι»

A.A. Mikhailov

**Η**ΘΕΣΗ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ της Γης καθορίζεται από δύο συντεταγμένες: το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος. Γνωρίζετε την πρόσλευση αυτών των δύο εννοιών; Τον 2ο μ.Χ. αιώνα ο έλληνας αστρονόμος και γεωγράφος Κλαύδιος Πτολεμαίος εισήγαγε τις έννοιες του μήκους και του πλάτους για να μετρήσει την έκταση των χωρών που βρέχονταν από τη Μεσόγειο Θάλασσα, η οποία εκτεινόταν εξ ανατολών προς δυσμάς. Τις μετρήσεις κατά μήκος της Μεσογείου τις ονόμασε «μήκος», ενώ τις μετρήσεις κατά την εγκάρσια διεύθυνση τις ονόμασε «πλάτος». Αργότερα οι συγκεκριμένες έννοιες, οι οποίες μπορούσε να εφαρμοστούν σε κάθε αντικείμενο, τροποποιήθηκαν έτσι ώστε να περιγράφουν τη θέση ενός αντικειμένου στην επιφάνεια της Γης, και επιπλέον επινοήθηκαν ειδικοί όροι: γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος. Αν και αυτές οι έννοιες είναι γνωστές σε όλους, και εύκολα σας τις υποδεικνύουν πάνω σε μια υδρόγειο σφαίρα, πολλοί αγνοούν τους ακριβείς ορισμούς τους.

Λέγεται συχνά ότι το γεωγραφικό πλάτος φίνεται η γωνιώδης απόσταση ορισμένου σημείου από τον ισημερινό της Γης και ότι το γεωγραφικό μήκος λέγεται η διεδρη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα του δεδομένου μεσημβρινού και ενός άλλου, που συμβατικά ορίστηκε ως μεσημβρινός μεθενικού γεωγραφικού μήκους (ή ο πρώτος μεσημβρινός). Έτσι, εάν πάνω στην επιφάνεια του πλανήτη χαρα-

χτεί το δίκτυο των μεσημβρινών και των παραλλήλων του γεωγραφικού πλάτους, είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι γεωγραφικές συντεταγμένες οποιουδήποτε τόπου πάνω στη Γη. Φυσικά, η γνώση των συντεταγμένων είναι απαραίτητη. Πώς όμως προσδιορίζουμε τις δικές μας γεωγραφικές συντεταγμένες; Το επιτυχάνουμε μέσω ορισμένων αστρονομικών παρατηρήσεων. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε υπολογίσει το γεωγραφικό πλάτος και μήκος της θέσης μας. Μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι το σημείο πάνω στην υδρόγειο σφαίρα με τις συγκεκριμένες συντεταγμένες είναι το πραγματικό σημείο της Γης όπου βρισκόμαστε; Η απάντηση είναι ένα εμφατικό «όχι» —ακόμη κι αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες μας με την ύψιστη ακρίβεια.

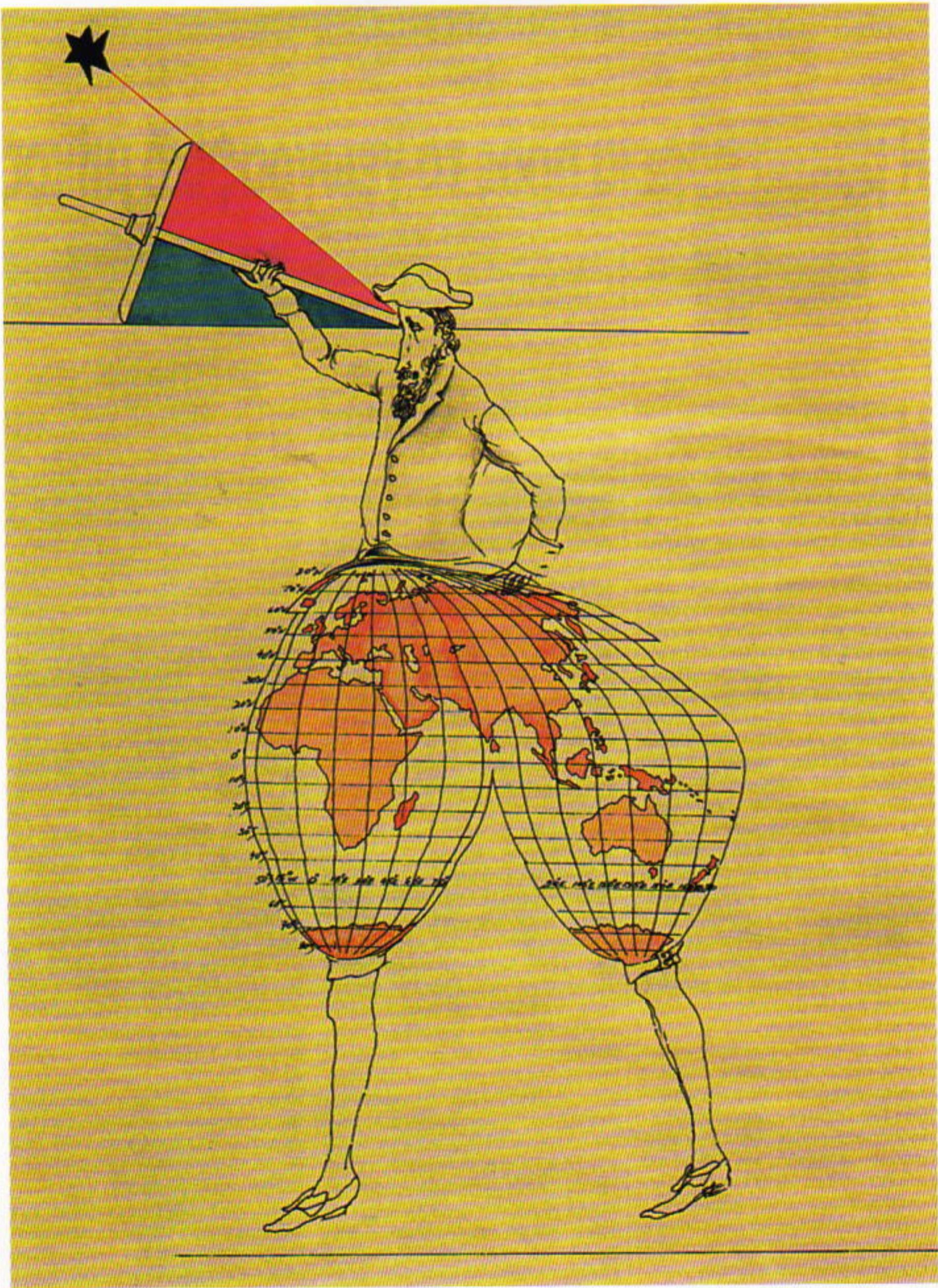
Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η Γη δεν είναι αληθινή σφαίρα, ενώ η υδρόγειος σφαίρα —ένα απλουστεύμένο και πολύ ατελές μοντέλο της Γης— είναι. Ακριβώς στο ακανόνιστο (μη σφαιρικό) σχήμα της Γης οφείλεται η απόκλιση των γεωγραφικών συντεταγμένων που προσδιορίζονται βάσει αστρονομικών παρατηρήσεων από εκείνες που σημειώνονται πάνω σ' ένα χάρτη ή σε μια υδρόγειο σφαίρα για κάποια συγκεκριμένη τοποθεσία.

Εάν η Γη είχε ακριβώς το σχήμα σφαίρας, κάθε κατακόρυφος από την επιφάνειά της θα έπρεπε να διέρχεται από το κέντρο της. Επιπλέον, ο ισημερινός και οι μεσημβρινοί θα ήταν κύκλοι της ίδιας ακτίνας, ισης με ε-

κείνη του πλανήτη. Σ' αυτή την περίπτωση, το γεωγραφικό πλάτος θα μπορούσε να μετρηθεί ως το τόξο του μεσημβρινού που εκτείνεται από το ισημερινό επίπεδο έως τη δεδομένη θέση, και το γεωγραφικό μήκος ως το τόξο του ισημερινού που εκτείνεται από τον συμβατικό πρώτο μεσημβρινό έως τον μεσημβρινό του δεδομένου σημείου.

Το αληθινό σχήμα της Γης (γεωειδές) είναι μάλλον περίπλοκο, αν και πλησιάζει το σχήμα ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, πεπλατυσμένου στις πολικές περιοχές. Το εν λόγω σχήμα οφείλεται στην ετερογενή κατανομή της μάζας τόσο στο εσωτερικό του πλανήτη όσο και στην επιφάνειά του —συγκεκριμένα, στην ύπαρξη των ηπείρων με τα υψηλά όρη τους και των ωκεανών με τις βαθιές τάφρους τους.

Λόγω του ελλειψοειδούς σχήματος της Γης, μια κατακόρυφος δεν διέρχεται κατ' ανάγκη από το κέντρο του πλανήτη: αλλά και οι ανωμαλίες του γεωειδούς σχήματος έχουν αποτέλεσμα επιπρόσθετες πλάγιες αποκλίσεις της κατακορύφου, οπότε είναι δυνατόν να μην τέμνει καν τον άξονα της Γης. Οι εν λόγω παράγοντες οδηγούν στις λεγόμενες αποκλίσεις της κατακορύφου —δηλαδή στις «ανωμαλίες» (από την οπτική γωνία που θεωρεί τη Γη σφαίρα) μεταβολές στη διεύθυνσή της για διαφορετικές τοποθεσίες στην επιφάνεια της Γης. Εάν λάβουμε υπόψη ότι η πρακτική μέθοδος προσδιορισμού του γεωγραφικού πλάτους και μήκους χρησιμοποιεί την



κατακόρυφο ως τη βασική διεύθυνση για τον προσανατολισμό των αστρονομικών οργάνων, καθίσταται πλήρως κατανοητή η ασυμφωνία ανάμεσα στις αληθείς γεωγραφικές συντεταγμένες ενός σημείου της γήινης επιφάνειας και σ' εκείνες που παρουσιάζονται σε μια υδρόγειο σφαίρα.

Τώρα είναι η στιγμή να διατυπώσουμε αυστηρά τους ορισμούς του γεωγραφικού πλάτους και μήκους. Το γεωγραφικό πλάτος είναι η γωνία που σχηματίζεται από την τοπική κατακόρυφο και από το ισημερινό επίπεδο. Σημειώστε ότι δεν είπα «το επίπεδο του ισημερινού της Γης». Λόγω των αποκλίσεων της κατακορύφου, ο ισημερινός της Γης (δηλαδή η γραμμή της οποίας όλα τα σημεία έχουν μηδενικό γεωγραφικό πλάτος) αποκλίνει όντως από την επίπεδη διατομή της Γης κατά την τιμή της απόκλισης της κατακορύφου, η οποία φτάνει τα  $10''$  ή περισσότερο (ειδικά σε ορεινές περιοχές) και αντιστοιχεί σε γραμμική απόσταση 300 m περίου. Αυτό αλληλεύει όχι μόνο για τον ισημερινό αλλά και για τους παραλλήλους του γεωγραφικού πλάτους (δηλαδή για τις γραμμές ίσου γεωγραφικού πλάτους), οι οποίοι δεν αποτελούν επίπεδες καμπύλες, για τους ίδιους λόγους.

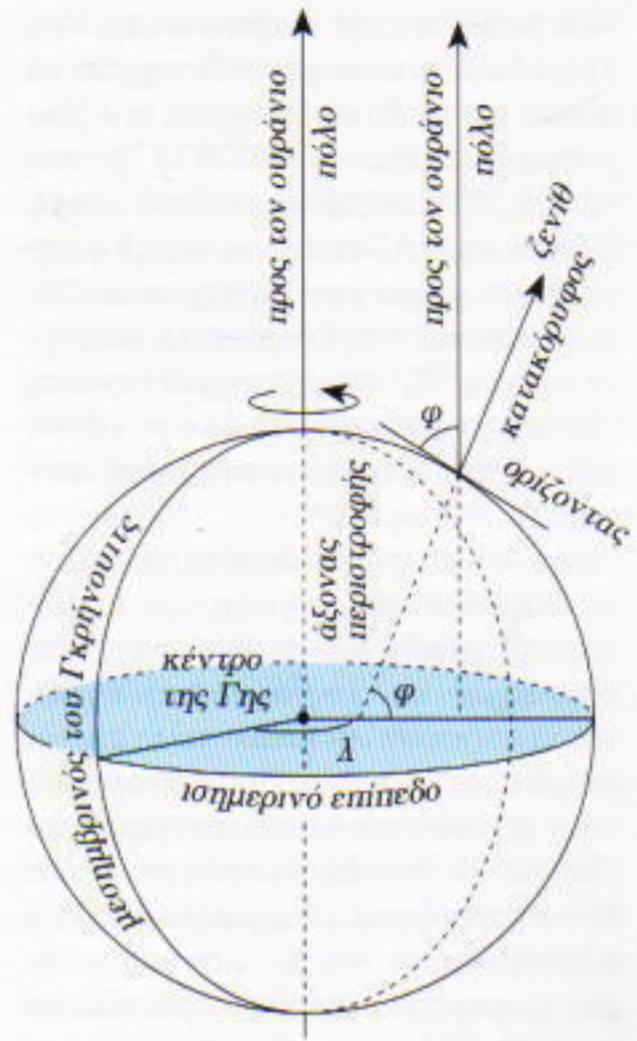
Ο αυστηρός ορισμός του γεωγραφικού μήκους έχει ως εξής: το γεωγραφικό μήκος είναι η διεδρη γωνία που σχηματίζεται από δύο επίπεδα παράλληλα προς τον άξονα περιστροφής της Γης, ένα από τα οποία περιέχει την κατακόρυφο σε ένα επλεγμένο σημείο αναφοράς και το άλλο την κατακόρυφο στη θέση της οποίας ζητούνται οι συντεταγμένες. Αντί να μετράμε το γεωγραφικό μήκος σε μοίρες, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούμε μονάδες χρόνου. Ο υπολογισμός που απαιτείται είναι απλός: η πλήρης περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της (δηλαδή οι  $360^\circ$ ) διαρκεί 24 ώρες: επομένως, η 1 ώρα αντιστοιχεί σε  $15^\circ$ , ή το 1 λεπτό της ώρας αντιστοιχεί σε  $15'$  («15 λεπτά») της μοίρας, ή το 1 δευτερόλεπτο της ώρας αντιστοιχεί σε  $15''$  («15 δευτερόλεπτα») της μοίρας. Γνωρίζουμε ότι η μεσημβρία (ή το μεσονύκτιο) επέρχεται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές σε τόπους με διαφορετικά γεωγραφικά μήκη. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσου-

με ότι η χρονική διαφορά μεταξύ της μεσημβρίας σε έναν δεδομένο τόπο και της μεσημβρίας σε κάποια θέση αναφοράς (της οποίας το γεωγραφικό πλάτος λαμβάνεται ως μηδενικό) ισούται απλώς με το γεωγραφικό μήκος του τόπου.

Σύμφωνα με μια διεθνή συμφωνία που κυρώθηκε το 1884, το γεωγραφικό μήκος αναφοράς (μηδέν) αντιστοιχεί στη θέση του Αστεροσκοπείου του Γκρήνουιτς, κοντά στο Λονδίνο, το οποίο ιδρύθηκε το 1675. Πριν από τη συμφωνία, ως θέσεις αναφοράς χρησιμευαν τα εθνικά αστεροσκοπεία διαφόρων χωρών: στη Ρωσία ήταν το Αστεροσκοπείο του Πούλκοφ, κοντά στην Αγία Πετρούπολη στη Γαλλία, το Αστεροσκοπείο του Παρισιού, κ.ο.κ. Στους αιώνες που προηγήθηκαν, τα γεωγραφικά μήκη μετριούνταν από την νήσο Φιέρρο στις Καναρίους Νήσους — το απότερο σημείο προς δυσμάς του Παλαιού Κόσμου (ο οποίος περιλάμβανε τις ηπείρους της Ευρώπης, της Ασίας και της Αφρικής). Εκείνη την εποχή τα μήκη μετριούνταν στην ίδια κατεύθυνση (οι τιμές είχαν το ίδιο πρόσημο) — προς τα ανατολικά του Φιέρρου.

Εξαιτίας των αποκλίσεων της κατακορύφου, όλοι οι μεσημβρίνοι (οι γραμμές ίσου γεωγραφικού μήκους) δεν αποτελούν, ομοίως, επίπεδες καμπύλες που προκύπτουν από μια διατομή της Γης με επίπεδα που περιέχουν τον άξονα περιστροφής του πλανήτη, αλλά μάλλον είναι ελαφρώς καμπυλωμένες γραμμές μεταποιημένες ώς και μερικές εκατοντάδες μέτρα είτε προς τη μία είτε προς την άλλη πλευρά των επίπεδων διατομών.

Πόσο ακριβείς είναι οι γεωγραφικές συντεταγμένες που προσδιορίζονται βάσει αστρονομικών παρατηρήσεων; Κατά βάση εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο διεξάγονται οι μετρήσεις. Οι ακριβέστερα προσδιορισμένες συντεταγμένες είναι εκείνες των αστεροσκοπείων: τα γεωγραφικά τους πλάτη είναι γνωστά με ακρίβεια  $0'',1$  και τα γεωγραφικά τους μήκη με περιθώριο σφάλματος  $0,01$  δευτερολέπτων της ώρας. Σημειώστε ότι τόξο  $1''$  ενός μεσημβρίνου αντιστοιχεί σε  $31$  m πάνω στην επιφάνεια της Γης, ενώ  $0'',1$  της ώρας αντιστοιχεί σε  $46$  m στον ισημερινό (και περίου στο



Σχήμα 1

Το γεωγραφικό πλάτος δεδομένου σημείου (η γωνία μεταξύ της κατακορύφου στη συγκεκριμένη θέση και του ισημερινού επίπεδου) ισούται με τη γωνιώδες ύψος του ουράνιου πόλου πάνω από το τοπικό επίπεδο του ορίζοντα.

Το επίπεδο του ορίζοντα καθορίζεται στην πράξη από την ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού μέσα σ' ένα δοχείο, από μια φυσαλίδα στο σωλήνα ενός αλφαδιού ή από την κάθετη κατεύθυνση προς την κατακόρυφο στη δεδομένη τοποθεσία. Η άλλη κατεύθυνση — δηλαδή εκείνη προς τον ουράνιο πόλο — προσδιορίζεται από αστρονομικές παρατηρήσεις. Ο ουράνιος πόλος βρίσκεται στο μέσο των σημείων της άνω και της κάτω μεσουράνησης κάθε αειφανούς αστρου.

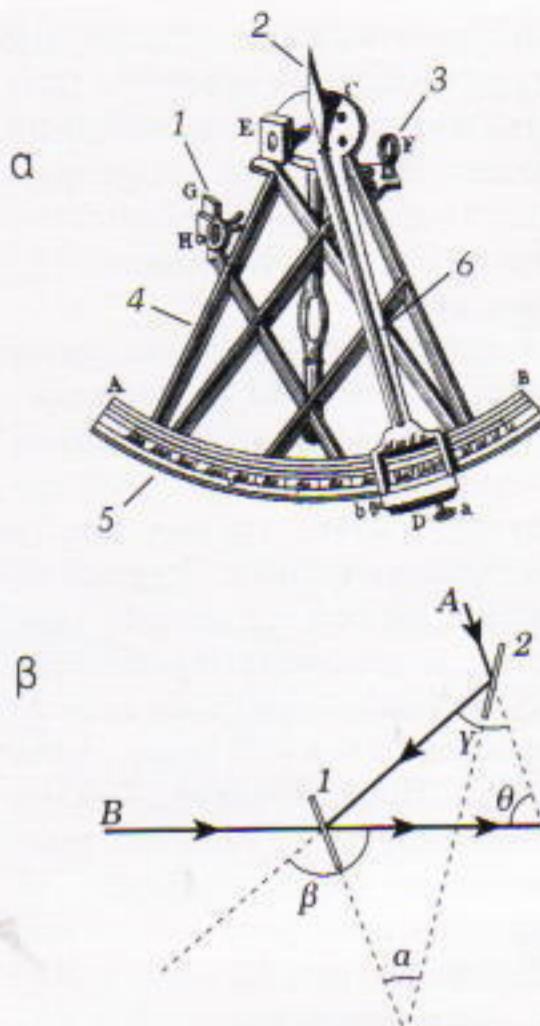
Ο ακριβής προσδιορισμός του γεωγραφικού μήκους σε δεδομένο σημείο της επιφάνειας της Γης ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό του τοπικού χρόνου. Εχοντας επιλέξει τη θέση αναφοράς μηδενικού μήκους κατά σύμβαση, σημειώνουμε τον τοπικό χρόνο στη θέση αναφοράς, ο οποίος μετριέται από ένα χρονόμετρο ή κάποιο άλλο όργανο μέτρησης του χρόνου. Τότε ο τοπικός χρόνος για το δεδομένο σημείο της επιφάνειας της Γης προσδιορίζεται μέσω της παρατήρησης του Ήλιου ή κάποιου άλλου ουράνιου σώματος. Υπέρρηπτα, συγκρίνοντας τον τοπικό χρόνο με το χρόνο αναφοράς, μπορούμε να βρούμε το γεωγραφικό μήκος του συγκεκριμένου τόπου.

μισό αυτού σε μέσα γεωγραφικά πλάτη). Εποι, οι τιμές που προαναφέρθηκαν αντιστοιχούν κατά προσέγγιση

σε 3 m πάνω στην επιφάνεια της Γης. Τώρα διαπιστώνουμε ότι δεν αρκεί να πούμε ότι το Αστεροσκοπείο του Παρισιού βρίσκεται σε  $48^{\circ}50'11''$  βόρειο πλάτος,  $0^{\text{h}}9^{\text{m}}20^{\text{s}},93$  ανατολικό μήκος. Πρέπει να δηλώσουμε το ακριβές σημείο στο χώρο του αστεροσκοπείου που έχει τις συγκεκριμένες συντεταγμένες. (Σ' αυτή την περίπτωση, πρόκειται για τη θέση του οργάνου που μετρά τις συντεταγμένες των ουράνιων σωμάτων.)

Ας δούμε τώρα πώς είναι δυνατόν να υπολογιστούν το γεωγραφικό πλάτος και μήκος βάσει αστρονομικών παρατηρήσεων. Το γεωγραφικό πλάτος προσδιορίζεται πολύ απλά: απλώς μετράτε το γωνιώδες ύψος του ουράνιου πόλου<sup>1</sup> πάνω από τον ορίζοντα (Σχήμα 1). Επειδή ο ουράνιος πόλος δεν εντοπίζεται με κάποιο άστρο ή πλανήτη στον ουρανό, οι αστρονόμοι χρησιμοποιούν είτε ένα άστρο με γνωστή γωνιώδη απόσταση από τον ουράνιο πόλο είτε τον Ήλιο, το γωνιώδες ύψος του οποίου δίνεται για κάθε μέρα του τρέχοντος έτους από τις αστρονομικές εφημερίδες.<sup>2</sup>

Η μέτρηση του ύψους εκτελείται όταν το ουράνιο σώμα διέρχεται από τον ουράνιο μεσημβρινό (δηλαδή όταν το συγκεκριμένο ύψος γίνεται μέγιστο). Για το σκοπό αυτό εφευρέθηκαν ειδικά όργανα ικανά να μετρούν γωνίες με υψηλό βαθμό ακριβείας. Το πρώτο, πρωτόγονο όργανο μέτρησης γωνιών, που πήρε το όνομα ράβδος του Ιακώβ, χρησιμοποιήθηκε κατά τον Μεσαίωνα, ενώ στη δεκαετία του 1730 ανακαλύφθηκε στην Αγγλία ο εξάντας (Σχήμα 2), ο οποίος χρησιμοποιείται ακόμη για μετρήσεις στη θάλασσα ή στον αέρα. Ενώ διεξάγονται οι οπτικές σκοπεύσεις, ο εξάντας κρατιέται στο χέρι για να μειώνονται οι επιπτώσεις των κλυδωνισμών. Συνήθως ρυθμίζουμε το όργανο ώστε το είδωλο του Ήλιου (ή ενός άστρου τη νύχτα) να συμπέσει με τον ορίζοντα στον προσοφθάλμιο φακό. Εάν κάποιος διαθέτει αρκετή εμπειρία, μπο-



Σχήμα 2

(α) Τα είδωλα δύο αντικειμένων, τη γωνιώδη απόσταση των οποίων θέλουμε να μετρήσουμε, υπερτίθενται στη διόπτρα (3) με τη βοήθεια δύο κάτοπτρων (1, 2). Το κάτοπτρο (1), στερεωμένο σε σταθερό πλαίσιο (4), καλύπτεται από άργυρο μόνο ώς τη μέση του το υπόλοιπο κάτοπτρο είναι διαφανές. Το πλαίσιο τελειώνει με μια άντυγα (5), η οποία είναι ένα κυκλικό τόξο  $60^{\circ}$  (πράγμα που εξηγεί το όνομα του οργάνου — εξάντας). Το κάτοπτρο (2) είναι στερεωμένο στο κινητό μέρος του πλαισίου, το λεγόμενο αλιδάδ (6), το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της άντυγας και είναι κάθετος προς το επίπεδο της. (β) Αυτό το σχήμα δείχνει πώς η άντυγα βοηθάει να βρεθεί η γωνία  $a$  που σχηματίζεται από τα δύο κάτοπτρα. Η εν λόγω γωνία συνδέεται με τη γωνιώδη απόσταση  $\theta$  μεταξύ των παρατηρούμενων αντικειμένων μέσω του τύπου  $\theta = \beta - \gamma = 2(\beta/2 - \gamma/2) = 2a$ .

ρει να μετρήσει το γωνιώδες ύψος πάνω από τον ορίζοντα με ακριβεία 1 λεπτού της μοίρας ή και λιγότερο. Ωστόσο, όταν μετράμε τις γωνίες στην ξηρά, όπου είναι δυνατόν να στερεώσουμε μια συσκευή σ' έναν τρίποδα, χρησιμοποιούμε ακριβέστερα όργανα — για παράδειγμα, το γωνιόμετρο, το οποίο μπορεί να μετρήσει γωνιώδεις αποστάσεις με ακρίβεια  $1''$  ή και καλύτερη.

Κατ' αρχήν, είναι πολύ εύκολο να προσδιορίσουμε το γεωγραφικό μή-

κος: η διαφορά των γεωγραφικών μηκών δύο σημείων ισούται με τη διαφορά των τοπικών χρόνων την ίδια στιγμή. Ωστόσο, πριν εφευρεθεί η ασύρματη επικοινωνία, ο προσδιορισμός του γεωγραφικού μήκους στην πράξη ήταν πολύ δύσκολος. Πράγματι, χωρίς μέσα άμεσης επικοινωνίας, πώς μπορούσε κανείς να γνωρίζει σε δεδομένη στιγμή τον ακριβή χρόνο στο Γκρήνουιτς (τη θέση αναφοράς για τη μέτρηση του γεωγραφικού μήκους), ενώ βρισκόταν εκατοντάδες ή και χιλιάδες χιλιόμετρα μακριά; Παλιά, μια μέθοδος ήταν να χρησιμοποιούν ένα αστρονομικό φαινόμενο ορατό ταυτόχρονα και από τους δύο αυτούς τόπους και το οποίο λάμβανε χώρα σε ορισμένο χρόνο Γκρήνουιτς (ο οποίος ήταν γνωστός εκ των προτέρων) — για παράδειγμα, την έκλειψη της Σελήνης ή την έκλειψη των δορυφόρων του Δια. (Η δυνατότητα χρησιμοποίησης των εκλείψεων για τον υπολογισμό των γεωγραφικών μηκών προτάθηκε από τον Γαλιλαίο, ο οποίος ανακάλυψε τους δορυφόρους του Δια το 1610.)

Δυστυχώς, τα εν λόγω φαινόμενα δεν είναι στιγμαία, αλλά ενδέχεται να διαρκέσουν αρκετά λεπτά επομένως, καταγράφονται με κάποιο σχετικό σφάλμα. Το 1 λεπτό της ώρας αντιστοιχεί σε 28 km στον ισημερινό, και ως εκ τούτου η συγκεκριμένη μέθοδος προσδιορισμού του γεωγραφικού μήκους έχει ένα ενδογενές σφάλμα εκατοντάδων χιλιομέτρων. Υπήρχαν όμως και άλλα μειονεκτήματα: ήταν σχεδόν αδύνατον να παρατηρηθούν οι εκλείψεις των δορυφόρων του Δια από το κατάστρωμα ενός κλυδωνιζόμενου πλοίου· θα περνούσαν μέρες μέχρι να συμβεί η επόμενη έκλειψη· επιπλέον, ο πλανήτης δεν μπορούσε να παρατηρηθεί για αρκετούς μήνες στη διάρκεια του έτους. Οι εκλείψεις της Σελήνης αποτελούν πολύ σπανιότερα γεγονότα, που συμβαίνουν δύο φορές το έτος το πολύ. Οι ταξιδιώτες θα έπρεπε να περιμένουν μέρες ή και εβδομάδες πριν εκτελέσουν αρκετές παρατηρήσεις (και χρειάζονται, πράγματι, αρκετές για να αποκτηθούν οι απαραίτητες τιμές ελέγχου και για να βελτιωθεί η ακριβεία των μετρήσεων). Προφανώς ήταν αδύνατον να χρησιμοποιηθεί μια τέτοια μέθοδος

1. Δείτε τα «Ερμηνευτικά σχόλια» στη σελίδα 64.

2. Οι αστρονομικές εφημερίδες είναι πίνακες οι οποίοι δίνουν τις θέσεις των ουράνιων σωμάτων για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή (μερικές φορές και για πολλά χρόνια στο μέλλον).

μέτρησης του γεωγραφικού μήκους για την πλοήγηση στη θάλασσα.

Τον 16ο αιώνα επινόθηκε ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού του τοπικού χρόνου στον κεντρικό μεσημβρινό μιας ατράκτου,<sup>\*</sup> η αποκαλούμενη μέθοδος της «σεληνιακής μετατόπισης», αν και η εφαρμογή της στην πράξη δεν κατέστη δυνατή μέχρι την εφεύρεση του εξάντα. Η Σελήνη ακολουθεί την πορεία της γύρω από τη Γη όπως ο δείκτης ενός ρολογιού που κινείται πάνω στην αστρική «πλάκα». Ο συγκεκριμένος δείκτης, ωστόσο, περιστρέφεται πολύ αργά — με το 1/55 της ταχύτητας του ωροδείκτη ενός συνηθισμένου ρολογιού. Προφανώς μπορεί κάποιος να προσδιορίζει το χρόνο μόνο μέσω του ωροδείκτη, αλλά εξαιτίας της αργής της κίνησης τετοιες «μετρήσεις» θα περιέχουν μεγάλα σφάλματα. Εφόσον ο σεληνιακός «δείκτης» κινείται ακόμη πιο αργά, δεν είναι δυνατόν να περιμένει κανείς ότι θα αποκομίσει ακριβή δεδομένα από το σεληνιακό ρολόι.

Η κατάσταση όμως δεν είναι τόσο απογοητευτική όσο φαίνεται, επειδή η πλάκα του εν λόγω ρολογιού έχει κατασκευαστεί με μεγάλη ακρίβεια: οι θέσεις των άστρων είναι γνωστές, οπότε οι «υποδιαιρέσεις» της συγκεκριμένης πλάκας είναι πολύ λεπτές και ακριβείς. Απλώς χρειάζεται να προσδιοριστεί η θέση της Σελήνης σχετικά με τα άστρα με πολύ μεγάλη ακρίβεια μέσω γωνιομετρικών οργάνων μεγάλης ακρίβειας. Σε 1 ώρα η Σελήνη μετατοπίζεται σχετικά με τα άστρα κατά απόσταση ίση με τη διάμετρό της, η οποία φαίνεται από τη Γη υπό γωνία περίπου 30°. Εάν προσδιορίσουμε τη θέση της Σελήνης σχετικά με τα άστρα με ακρίβεια 1', τότε η αντίστοιχη μέτρηση του χρόνου θα έχει ακρίβεια 2 λεπτών.

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή, πρέπει να γνωρίζουμε και τις παραμικρές λεπτομέρειες της κίνησης της Σελήνης. Μόνο τότε η φανόμενη θέση της Σελήνης μπορεί να δώσει τον τοπικό χρόνο στον κεντρικό μεσημβρινό μιας ατράκτου και, επομένως,

\*Διά μεσημβρινών τόξων η επιφάνεια της Γης διαιρείται σε 24 ατράκτους. Η διαφορά μήκους του κεντρικού μεσημβρινού κάθε ατράκτου από τον προηγούμενο του είναι 1 h. (Σ.τ.μ.)

και τη διαφορά μεταξύ του τοπικού χρόνου στη θέση του παρατηρητή και στο Γκρήνουιτς (δηλαδή το γεωμετρικό μήκος). Η συγκεκριμένη μέθοδος δημιούργησε μεγάλες απαιτήσεις από την ουράνια μηχανική, η οποία ανέπτυξε τη θεωρία της μάλλον περίπλοκης κίνησης της Σελήνης. Αν και η μέθοδος της σεληνιακής μετατόπισης δεν ήταν αισθητά ακριβέστερη από την προηγούμενη μέθοδο, μπορούσε να εφαρμοστεί κάθε φορά που η Σελήνη ήταν ορατή γι' αυτόν λοιπόν το λόγο ήταν ιδιαίτερα διαδεδομένη μεταξύ των ταξιδιωτών, ειδικά μεταξύ των ναυτικών.

Μολαταύτα, η μέθοδος της σεληνιακής μετατόπισης δεν ικανοποιούσε πλήρως τους θαλασσόλυκους, λόγω των πολύπλοκων υπολογισμών που απαιτούνταν και της σχετικά χαμηλής της ακρίβειας. Τα μακρά ταξίδια των ιστιοφόρων εξαρτώνταν πολύ από τη δύναμη και την κατεύθυνση του ανέμου, και πολύ συχνά οι ναυτικοί δεν αντίκριζαν ξηρά για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Επομένως, ήταν ιδιαίτερα σημαντικό να γνωρίζουν τη θέση του πλοίου (δηλαδή το γεωγραφικό μήκος και πλάτος). Το 1713 η βρετανική κυβέρνηση (εκείνο τον καιρό η Μεγάλη Βρετανία διέθετε τον μεγαλύτερο και πιο ανεπτυγμένο στόλο στον κόσμο) προσέφερε το τεράστιο βραβείο των 20.000 χρυσών λιρών για την επινόηση μιας αξιόπιστης μεθόδου προσδιορισμού του γεωγραφικού μήκους με ακρίβεια 0,5°. Ένα μέρος του βραβείου απονεμήθηκε (μετά θάνατο, αλιμόνο) στον γερμανό αστρονόμο Tobias Mayer για τους πίνακές του αναφορικά με την κίνηση της Σελήνης, οι οποίοι επέτρεψαν τη βελτίωση της ακρίβειας των μετρήσεων, όταν χρησιμοποιούνταν η μέθοδος της σεληνιακής μετατόπισης. Το μισό του βραβείου δόθηκε στον άγιο ωρολογοποιό και εφευρέτη John Harrison, ο οποίος το 1735 κατασκεύασε το ναυτικό χρονόμετρο.<sup>3</sup>

Το ναυτικό χρονόμετρο είναι ένα

3. Για μια συναρπαστική εξιστόρηση των επιευγμάτων του John Harrison, βλ. το βιβλίο *Longitude* (Το γεωγραφικό μήκος) της Dava Sobel (Νέα Υόρκη, Walker and Company, 1995), και το οποίο σημειώνει εξαιρετική εμπορική επιτυχία στις ΗΠΑ τα τρία τελευταία χρόνια.

ρολόι με ελατήριο που μοιάζει πολύ με σύγχρονο ρολόι τσέπης. Το χρονόμετρο είχε τρεις δείκτες — για τις ώρες, τα λεπτά και τα δευτερόλεπτα. Αυτό που το έκανε ιδιαίτερα βολικό ήταν ότι μπορούσε να μεταφερθεί στη θάλασσα χωρίς επιπτώσεις στην ακρίβειά του. Ήταν τοποθετημένο σ' ένα κουτί με ανάρτηση Cardano, οπότε το ρολόι διατηρούσε την οριζόντια θέση του ακόμη και αν το κουτί έγερνε.

Σύντομα η εν λόγω μέθοδος μεταφοράς των χρονομέτρων διαδόθηκε και για εργασίες στην ξηρά. Οι επιστήμονες επιδόθηκαν σε εκστρατείες, για να προσδιορίσουν τα μήκη των κατοικημένων περιοχών για λόγους που αφορούσαν την κατασκευή χαρτών και για να μετρήσουν ακριβέστερα τα γεωγραφικά μήκη των εθνικών αστεροσκοπείων. Για παράδειγμα, ο πρώτος διευθυντής του Αστεροσκοπείου του Πούλκοβο, ο V.Y. Struve, οργάνωσε μια ειδική αποστολή το 1843, εξοπλισμένη με 60 χρονόμετρα, για να προσδιορίσει τη διαφορά γεωμετρικού μήκους μεταξύ Πούλκοβο και Γκρήνουιτς.

Το πρόβλημα της μέτρησης του γεωγραφικού μήκους λύθηκε με έναν εντελώς απροσδόκητο τρόπο, όταν εφευρέθηκε ο τηλεγράφος στα μέσα του περασμένου αιώνα. Τώρα πλέον κατέστη δυνατή η μετάδοση του μέσου χρόνου Γκρήνουιτς (GMT) και, κατά συνέπεια, ο προσδιορισμός της διαφοράς μεταξύ του τοπικού χρόνου και του GMT με μια ακρίβεια κλασμάτων του δευτερολέπτου που ώς τότε ήταν ακατόρθωτη. Φυσικά, η δεδομένη τοποθεσία θα χρειαζόταν τηλεγραφική σύνδεση για να είναι δυνατόν κάτι τέτοιο, και έτοι η μέθοδος ήταν άχρηστη για τα πλοία. Ωστόσο, τα τηλεγραφικά καλώδια που απλώθηκαν στο βυθό του ωκεανού συνέδεσαν τις ηπείρους και κατέστησαν δυνατόν να προσδιοριστεί με μεγάλη ακρίβεια το γεωγραφικό μήκος του Αστεροσκοπείου της Ουάσινγκτον. Στη Ρωσία, ο επίσημος χρόνος ήταν εκείνος της Αγίας Πετρούπολης (για να μιλήσουμε αυστηρά, ο μέσος χρόνος του Πούλκοβο). Μεταδιδόταν τηλεγραφικά από το Αστεροσκοπείο του Πούλκοβο στο κεντρικό τηλεγραφικό γραφείο της Αγίας Πετρούπολης, και

## Ερμηνευτικά σχόλια

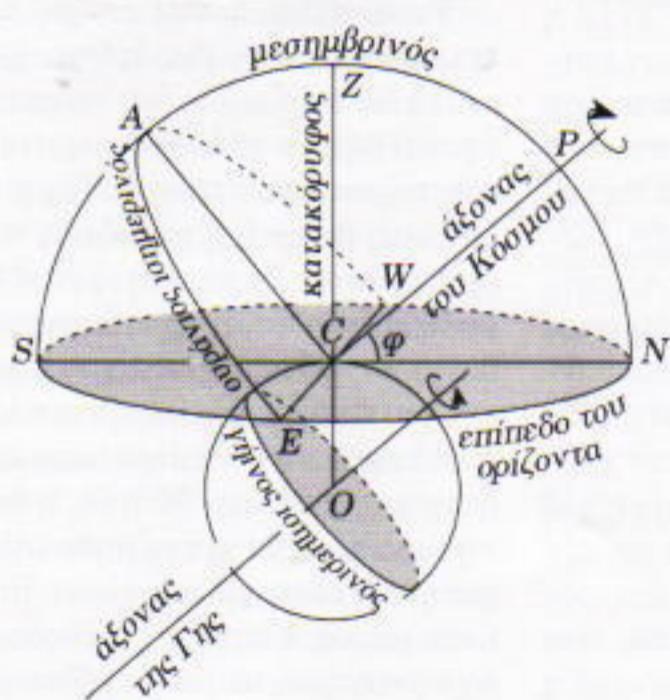
ΕΑΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΤΕ ΤΟΝ ΝΥΧΤΕΡΙΝΟ ουρανό επί μερικές ώρες, θα μπορέσετε να δείτε ότι οι αστερισμοί αλλάζουν θέση σχετικά με τον ορίζοντα. Για παράδειγμα, στο ανατολικό μέρος της ουράνιας σφαίρας, τα άστρα ανεβαίνουν πάνω από τον ορίζοντα και κινούνται προς τα δεξιά. Στο βόρειο μέρος του ουρανού, τα περισσότερα άστρα διαγράφουν τους ημερήσιους ομόκεντρους κύκλους τους. Μπορούμε να πούμε ότι ολόκληρο το στερέωμα (η ουράνια σφαίρα) περιστρέφεται γύρω από κάποια ευθεία που ονομάζεται άξονας του Κόσμου. Τα σημεία όπου ο εν λόγω άξονας τέμνει την ουράνια σφαίρα ονομάζονται ουράνιοι πόλοι (βόρειος και νότιος). Ο βόρειος πόλος είναι εκείνος όπου ένας παρατηρητής στην εξωτερική όψη του στερεώματος θα έβλεπε την ουράνια σφαίρα να περιστρέφεται ακολουθώντας τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Είναι σαφές ότι ο άξονας του Κόσμου είναι παράλληλος προς τον άξονα του πλανήτη.

Εκτός από τον άξονα του Κόσμου και τους πόλους, υπάρχουν ορισμένα χαρακτηριστικά σημεία και γραμμές στην ουράνια σφαίρα (Σχήμα A). Το επίπεδο SWNE είναι το επίπεδο του ορίζοντα — δηλαδή το επίπεδο που εφάπτεται στη γήινη σφαίρα στο σημείο C, όπου θεωρούμε ότι βρίσκεται κάποιος παρατηρητής. Η ευθεία NS είναι η μεσημβρινή ευθεία (τη μεσημβρία τα κατακό-

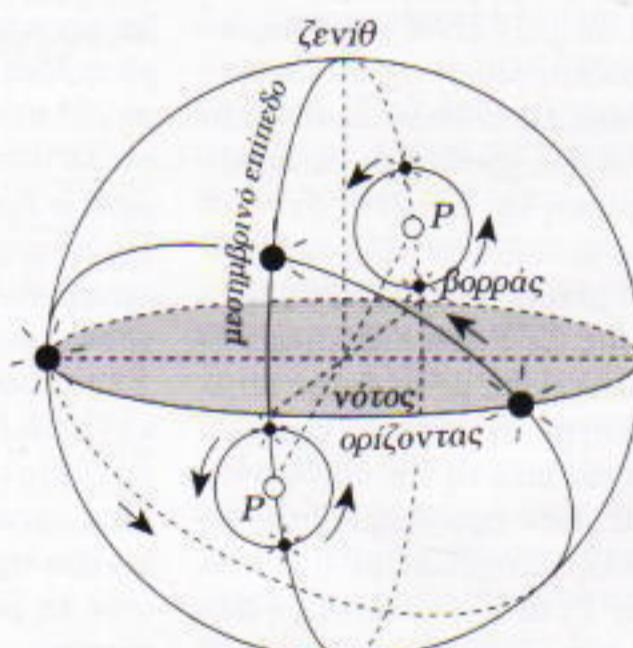
ρυφα αντικείμενα ρίχνουν τη οκιά τους κατά μήκος της εν λόγω ευθείας). Μια κατακόρυφης διερχόμενη από το σημείο C τέμνει την ουράνια σφαίρα στο ζενίθ Z. Το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία S, Z, P (τον ουράνιο βόρειο πόλο) και N είναι το ουράνιο μεσημβρινό επίπεδο. Ο ουράνιος ισημερινός είναι η γραμμή κατά την οποία η ουράνια σφαίρα τέμνει το επίπεδο που είναι κάθετο προς τον άξονα του Κόσμου και διέρχεται από τον παρατηρητή (σημείο C).

Κάθε άστρο διασταυρώνεται με τον ουράνιο μεσημβρινό δύο φορές την ημέρα (οι συγκεκριμένες «μεσουράνησεις» είναι οι αντίστοιχες θέσεις τους). Όταν κάποιο άστρο βρίσκεται στην άνω μεσουράνησή του, τότε έχει το μέγιστο ύψος πάνω από τον ορίζοντα. Επομένως, η κάτω μεσουράνηση είναι η χαμηλότερη θέση ενός άστρου σε σχέση με τον ορίζοντα (Σχήμα B).

Τόσο η άνω όσο και η κάτω μεσουράνηση είναι δυνατόν να παρατηρηθούν για άστρα που βρίσκονται κοντά σε έναν ουράνιο πόλο. Τα άστρα που ανατέλλουν και δύουν, από την άλλη, έχουν μόνο άνω μεσουράνηση (η κάτω λαμβάνει χώρα κάτω από τον ορίζοντα). Η στιγμή της άνω μεσουράνησης του Ήλιου ονομάζεται αληθής μεσημβρία, και της κάτω μεσουράνησης του αληθές μεσονύκτιο.



Σχήμα A



Σχήμα B

από εκεί στους τηλεγραφικούς και σιδηροδρομικούς σταθμούς ολόκληρης της χώρας. Τη μεσημβρία, ώρα Πούλκοβο, ένα κανόνι έβαλλε από το Φρούριο Πέτρου και Παύλου.

Οπως μπορείτε να μαντέψετε, η εφεύρεση του ασύρματου τηλεγράφου έδωσε την οριστική και καθολική λύση στο παλιό πρόβλημα του

γεωγραφικού μήκους. Ήδη από το 1921 ο ραδιοφωνικός σταθμός Nova-gollandia στην Αγία Πετρούπολη άρχισε να μεταδίδει (αρκετές φορές την ημέρα) ρυθμικά ωριαία σήματα που αποτελούνταν από 61 τικ ανά λεπτό, με αποτέλεσμα ένα χρονικό διάστημα 1/60 του λεπτού μεταξύ δύο διαδοχικών τικ. Συγχρονίζοντας

κανείς τα τικ του χρονομέτρου του με τα τικ που μεταδίδονταν από το ραδιόφωνο, μπορούσε να συντονίσει το ρολό του με τον μέσο χρόνο Γκρήνουιτς με ακρίβεια μερικών εκατοστών του δευτερολέπτου.

Ωστόσο, η διαδικασία δεν ήταν τελεια. Η ελαττωματική λειτουργία ενός από τα ρολόγια του αστεροο-

πείου και οι άλλες τεχνικές δυσκολίες στην εκπομπή των ραδιοφωνικών σημάτων θα μπορούσαν να προκαλέσουν σφάλμα της τάξεως κλάσματος του δευτερολέπτου. Το συγκεκριμένο σφάλμα πάντως μπορούσε να διορθωθεί αργότερα, αφού είχαν ληφθεί τα σήματα στο αστεροσκοπείο και είχαν καταγραφεί οι χρόνοι των υπό εξέλιξη αστρονομικών φαινομένων. Ειδικά αστρονομικά δελτία εκδίδονταν κάθε μήνα γι' αυτό το σκοπό, τα οποία έδιναν τις ακριβείς στιγμές της μετάδοσης των παρελθόντων σημάτων, παρέχοντας έτσι τον τρόπο για να διορθώνονται εκ των υστέρων τα χρονόμετρα. Φυσικά, μια τέτοια διαδικασία ήταν αναγκαία μόνο για τον προσδιορισμό του γεωγραφικού μήκους με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Για την πρακτική πλοήγηση, όπου ακριβεία 1 s είναι υπεραρκετή, τέτοιες δημοσιευμένες διορθώσεις δεν είχαν καμιά αξία. Στην εποχή μας, με την εφεύρεση των ρολογιών με κρυστάλλους χαλαζία και αργότερα των

μοριακών και ατομικών ρολογιών,<sup>4</sup> τα οποία δείχνουν την ώρα για πολλούς μήνες με ακρίβεια χιλιοστού του δευτερολέπτου, οι διορθώσεις για τα μεταδοθέντα ραδιοσήματα έχουν πρακτικά μηδενιστεί. Επιτέλους, το πανάρχαιο πρόβλημα της εύρεσης του γεωγραφικού μήκους έχει λυθεί με την υπέρτατη ακρίβεια.

Θα κλείσω το άρθρο με ένα παράδειγμα. Φανταστείτε κάποιο πρόσωπο που γνωρίζει τα αστρονομικά τερτίπια για την εύρεση των γεωγραφικών συντεταγμένων. Στείλτε το σ' ένα τυχαίο μέρος — σ' ένα έρημο νησί, στα βουνά, σε μια ερημιά έξω από τους χάρτες — οπουδήποτε. Και, για

4. Το ρόλο του εκκρεμούς σ' ένα ρόλο με κρυστάλλους χαλαζία τον παίζει μια πολύ λεπτή φέτα χαλαζία κομμένη με ορισμένο τρόπο. Στον κρύσταλλο διεγείρονται ηλεκτρικές ταλαντώσεις, ησυχνότητα των οποίων δεν μεταβάλλεται για μακρό χρονικό διάστημα. Η λειτουργία των μοριακών και ατομικών ρολογιών στηρίζεται στις φυσικές ταλαντώσεις ορισμένων μορίων και ατόμων.

να περιπλέξουμε το πρόβλημα, ας υποθέσουμε ότι δεν γνωρίζει σε ποια χώρα βρίσκεται, ούτε καν σε ποιο ημισφαίριο. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι έχει χάσει την επαφή με το χρόνο και αγνοεί ποια μέρα ή ποιος μήνας είναι. Δώστε του, ωστόσο, ένα αντίγραφο της αστρονομικής επετηρίδας με λογαριθμικούς πίνακες, ένα θεοδόλιχο ή ένα γωνιόμετρο, ένα χρονόμετρο που να δείχνει κάποιον αυθαίρετο χρόνο, έναν ραδιοφωνικό δέκτη (για να ακούει μόνο τα ωριαία σήματα). Το μόνο που θα χρειαστεί να κάνει για να προσδιορίσει (μετά τους αναγκαίους υπολογισμούς) το μήνα, την ημέρα, το γεωγραφικό πλάτος και μήκος του τόπου όπου βρίσκεται, θα είναι να παρατηρήσει τα άστρα μια αίθρια νύχτα και τον Ήλιο το επόμενο πρωί. Κοιτώντας σ' ένα χάρτη, θα μπορούσε να βρει τη θέση του και τη διαδρομή προς την πλησιέστερη πόλη ή οποιδήποτε άλλο μέρος. Με άλλα λόγια, ένα μορφωμένο άτομο δεν μπορεί ποτέ να χαθεί στον πλανήτη Γη.

## B | B | A | I | O | P | O | L | E | I | O



G U T E N B E R G

**Στο πολυώροφο βιβλιοπωλείο μας  
θα βρείτε την πληρέστερη  
συλλογή βιβλίων  
όλων των εκδοτικών  
οίκων της Ελλάδας  
για όλες  
τις βαθμίδες της εκπαίδευσης  
και πολλά άλλα!!!**

**Λειτουργεί**  
τμήμα χαρτικών  
και ειδών γραφείου.

**Τμήμα  
ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥ  
Φροντιστηριακού βιβλίου**

**ΚΑΙ ΑΚΟΜΗ**  
σας παραγγέλνουμε  
οποιοδήποτε βιβλίο  
από το εξωτερικό

ΣΟΛΩΝΟΣ 103 • ΤΗΛ / FAX: 38 00 127

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

### Μαθηματικά

**M91**

Είναι φανερό ότι στον αριθμό που αναζητούμε όλα τα ψηφία αριστερά από την υποδιαστολή καθώς και το πρώτο δεκαδικό ψηφίο είναι μηδενικά (διαφορετικά, θα ήταν αδύνατον να αυξηθεί τόσο πολύ με την εναλλαγή των ψηφίων). Έστω  $x$  ο ζητούμενος αριθμός και α το ψηφίο του στην πέμπτη δεκαδική θέση:  $x = 0,0***a*$ .... Αν εναλλάξουμε τα ψηφία της πρώτης και της πέμπτης δεκαδικής θέσης, προκύπτει ο αριθμός

$$x + \frac{a}{10} - \frac{a}{10^5}.$$

Συνεπώς, προκύπτει η εξίσωση

$$x + \frac{a}{10} - \frac{a}{10^5} = 1996x,$$

από την οποία παίρνουμε

$$\begin{aligned} x &= \frac{9999a}{1995 \cdot 10^5} = \frac{3333}{665 \cdot 10^5}a \\ &= (0,0000501...)a. \end{aligned}$$

Το  $a$ , όμως, είναι το πέμπτο δεκαδικό ψηφίο του  $x$ . Από τον παραπάνω πολλαπλασιασμό βλέπουμε ότι ο αριθμός  $5a$  καταλήγει στο ψηφίο  $a$ . Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν  $a = 5$ . Επομένως,

$$x = \frac{3333 \cdot 5}{665 \cdot 10^5} = \frac{3333}{13300000}.$$

**M92**

Αν  $x^2 + 3y = p^2$ , τότε προφανώς  $p > x$ , και έτσι μπορούμε να γράψουμε  $x^2 + 3y = (x + m)^2$  για κάποιον θετικό ακέραιο  $m$ . Παρομοίως, έχουμε  $y^2 + 3x = (y + n)^2$  για κάποιον θετικό ακέραιο  $n$ . Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε ότι

$$x = \frac{2nm^2 + 3n^2}{9 - 4mn},$$

$$y = \frac{2n^2m + 3m^2}{9 - 4mn}.$$

Τα  $x, y, m, n$ , όμως, είναι όλα φυσικοί αριθμοί. Επομένως,  $9 - 4mn > 0$ ,  $mn = 1$  ή  $mn = 2$ . Στην πρώτη περίπτωση,  $m = n = 1$ , και συνεπώς  $x = y = 1$ . Στη δεύτερη περίπτωση, είτε  $n = 2$  και  $m = 1$  (οπότε  $x = 16, y = 11$ ) είτε  $n = 1$  και  $m = 2$  (οπότε  $x = 11, y = 16$ ).

**M93**

Έχουμε

$$\begin{aligned} a + b &= x + y + \frac{x + y}{xy} \\ &= (x + y) \frac{xy + 1}{xy}. \end{aligned} \quad (1)$$

Επίσης,

$$ab = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} ab - c &= \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} \\ &= \frac{(x + y)^2}{xy} - 2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$ab - c + 2 = \frac{(x + y)^2}{xy}. \quad (2)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο την εξίσωση (1) και διαιρούμε το αποτέλεσμα με την εξίσωση (2). Παίρνουμε

$$\frac{(a + b)^2}{ab - c + 2} = \frac{(xy + 1)^2}{xy} = xy + \frac{1}{xy} + 2.$$

Έτσι,

$$\frac{(a + b)^2}{ab - c + 2} = c + 2,$$

ή έπειτα από απλοποίηση

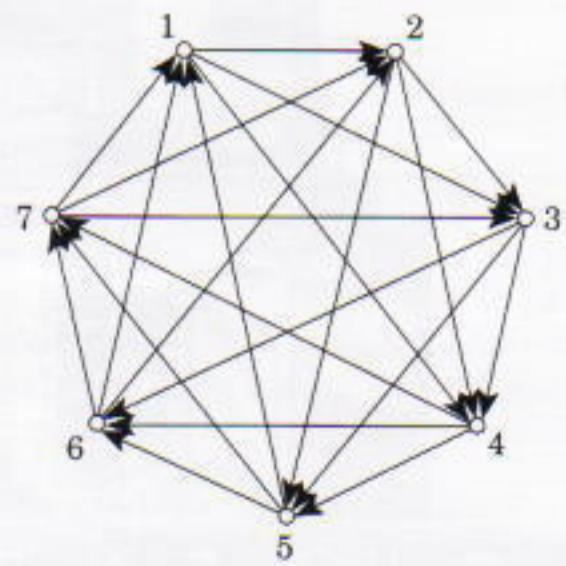
$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4.$$

**M94**

Θα κατασκευάσουμε μια περίπτωση όπου οι έξι επιτροπές δεν επαρκούν. Θεωρούμε μια ομάδα επτά βουλευτών. Μπορούμε να τους αριθμήσουμε 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7. Ας υποθέσουμε ότι ο πρώτος βουλευτής έχει χαστουκίσει τους βουλευτές 2, 3, 4. Συμβολίζουμε αυτό το γεγονός ως  $1 \rightarrow 2, 3, 4$ . Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε  $2 \rightarrow 3, 4, 5$  και  $3 \rightarrow 4, 5, 6$  και  $4 \rightarrow 5, 6, 7$  και  $5 \rightarrow 6, 7, 1$  και  $6 \rightarrow 7, 1, 2$  και  $7 \rightarrow 1, 2, 3$ .

Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά την κατάσταση όπως στο Σχήμα 1. Οι κορυφές συμβολίζουν τους βουλευτές και τα βέλη τις μεταξύ τους σχέσεις. Προφανώς είναι αδύνατον να τοποθετήσουμε κάποιο ζεύγος βουλευτών στην ίδια επιτροπή. Κάθε βουλευτής έχει χτυπήσει ή έχει χτυπηθεί από όλους τους υπόλοιπους!

Ας αποδείξουμε τώρα ότι επτά επιτροπές είναι αρκετές. Θα χρησιμοποιήσουμε τέλεια επαγωγή επί του πλήθους των βουλευτών. Ας υποθέσουμε ότι η πρώτηση ισχύει για κάθε κοινοβούλιο με  $n$  βουλευτές. Θεωρούμε ένα τέτοιο κοινοβούλιο. Πρέπει να υπάρχει ένας βουλευτής που τον έχουν χαστουκίσει τρεις το πολύ φορές (διαφορετικά, το πλήθος των χτυ-



Σχήμα 1

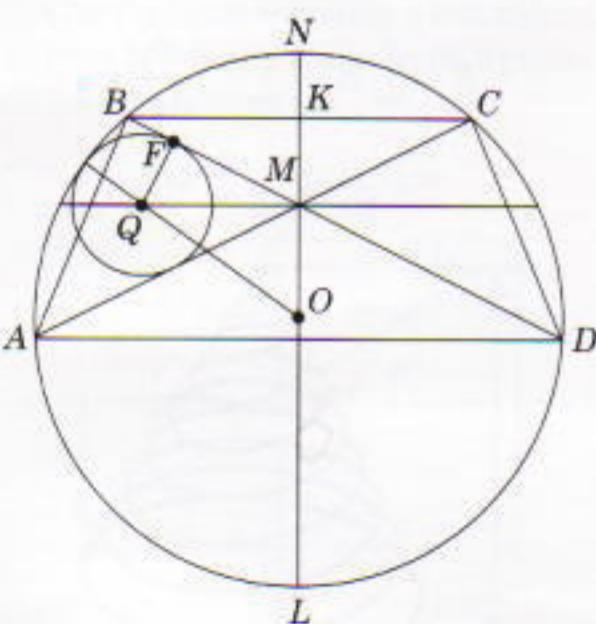
πημάτων που έχουν δεχτεί οι βουλευτές θα είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των χτυπημάτων που έχουν δώσει). Οι υπόλοιποι  $n$  βουλευτές αποτελούν ένα Κοινοβούλιο στο οποίο ο καθένας έχει δώσει το πολύ τρία χαστούκια. Αυτό δεν δυσκολεύει την κατάσταση (μπορούμε να υποθέσουμε πρόσθετα χαστούκια, αν χρειαστεί, για να ικανοποιείται η επαγγελματική υπόθεση). Σύμφωνα με την επαγγελματική υπόθεση, μπορούμε να κατανείμουμε τους υπόλοιπους  $n$  βουλευτές σε επτά επιτροπές έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του προβλήματος. Αφού όμως ο τελευταίος βουλευτής χαστούκισε τρεις άλλους και δέχτηκε το πολύ τρία χτυπήματα, υπάρχει κάποια επιτροπή στην οποία μπορούμε να τον εντάξουμε (τουλάχιστον μία από τις 7 επιτροπές δεν θα περιέχει άτομο που τον χτύπησε ή χτυπήθηκε από αυτόν).

### M95

Έστω  $O$  το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο  $ABCD$ ,  $Q$  το κέντρο του αναζητούμενου κύκλου,  $N$  το αντιδιαμετρικό σημείο του  $L$ , και  $F$  το σημείο επαφής του μικρότερου κύκλου με την  $BM$ . Έστω  $NK = c$ , και έστω  $x$  η ζητούμενη ακτίνα. Έχουμε  $BK^2 = BK \cdot KC = NK \cdot KL = c(a+b)$ .

Αν εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $BKM$ , παίρνουμε  $BK^2 = BM^2 + KM^2 = c(a+b) + a^2$ . (1)

Γνωρίζουμε ότι η  $BC$  είναι παράλληλη προς τη  $MQ$  (διότι οι  $MK$  και  $MQ$  είναι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπλη-



Σχήμα 2

ρωματικών γωνιών). Από αυτό συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα  $BKM$  και  $MFQ$  είναι όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Επομένως, έχουμε  $QM = (BM \cdot QF) / MK$ . Αν θέσουμε  $QF = x$ ,  $MK = a$ , και αντικαταστήσουμε το  $BM$  με την τιμή που βρήκαμε στην ισότητα (1), παίρνουμε

$$QM = \frac{x}{a} \sqrt{c(a+b) + a^2}. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $QMF$ , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $OQ = (a+b+c)/2 - x$ ,  $OM = |ML - OL| = |b - (a+b+c)/2| = |a+c-b|/2$  και την τιμή του  $QM$  που βρήκαμε προηγουμένως (ισότητα (2)):

$$\begin{aligned} \left( \frac{a+b+c}{2} - x \right)^2 &= \\ \frac{(a-b+c)^2}{4} + \frac{x^2}{a^2} [c(a+b) + a^2] &= \end{aligned} \quad (3)$$

Μετά την επίπονη, αλλά όχι δύοκολη, απλοποίηση αυτής της ισότητας, θα απαλειφθούν όλοι οι όροι που περιέχουν το  $c^2$ . Σιη συνέχεια, ομαδοποιούμε τους όρους που περιέχουν το  $c$  και όσους δεν το περιέχουν, και βρίσκουμε

$$c(a+b)x^2 + a^2x - a^2b + a^2[(a+b)x - ab] = 0.$$

Παραγοντοποιούμε το πρώτο δευτεροβάθμιο τριώνυμο και παίρνουμε

$$c(a+b)x - ab](x+a) + a^2[(a+b)x - ab] = 0.$$

Άρα, παραγοντοποιείται όλο το αριστερό μέλος της εξίσωσης και έχουμε

$$[(a+b)x - ab][c(x-a) + a^2] = 0.$$

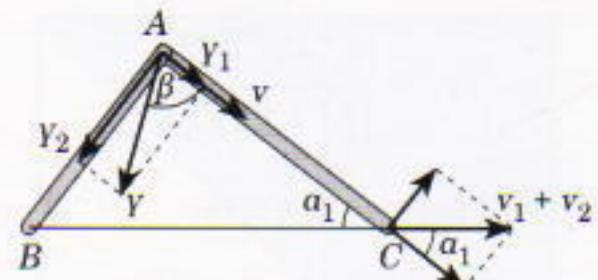
Εξισώνουμε κάθε όρο με το μηδέν και βρίσκουμε

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

### Φυσική

#### Φ91

Αναλύστε το διάνυσμα  $\gamma$  της ολικής επιτάχυνσης του σημείου  $A$  τη στιγμή που οι δύο ράβδοι σχηματίζουν γωνία  $90^\circ$  σε δύο συνιστώσες  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  οι οποίες διευθύνονται παράλ-



Σχήμα 3

ληλα με τις αντίστοιχες ράβδους (βλ. το σχήμα που συνοδεύει την εκφωνηση του προβλήματος). Για να υπολογίσουμε τις  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ , αξιοποιούμε το γεγονός ότι η επιτάχυνση δεν μεταβάλλεται κατά τη μετάβαση από ένα αδρανειακό σύστημα σε άλλο.

Ας περάσουμε λοιπόν σ' ένα αδρανειακό σύστημα που κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα  $v_2$ . Στο συγκριμένο σύστημα, το αριστερό άκρο της αριστερής ράβδου (σημείο  $B$ ) πρεμεί, και το δεξιό άκρο της δεξιάς ράβδου (σημείο  $C$ ) κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $v_1 + v_2$ , ενώ το σημείο  $A$  διαγράφει κύκλο ακτίνας  $L_2$  (Σχήμα 3). Ετοι, η επιτάχυνση  $\gamma$  μπορεί να αναλυθεί στην κεντρομόλο και την επιτρόχια συνιστώσα της. Οι εν λόγω συνιστώσες συμπίπτουν με τις επιτάχυνσεις  $\gamma_2$  και  $\gamma_1$  αντιστοίχως.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι  $\gamma_2 = v^2/L_2$ , όπου  $v$  είναι η γραμμική ταχύτητα του σημείου  $A$  καθώς διαγράφει τον κύκλο. Τη στιγμή που οι ράβδοι σχηματίζουν γωνία  $90^\circ$ , το άνυσμα της ταχύτητας  $v$  διευθύνεται κατά μήκος της δεξιάς ράβδου. Ακριβώς εκείνη τη στιγμή το δεξιό άκρο της ράβδου  $AC$  έχει ταχύτητα  $v_1 + v_2$  με διεύθυνση προς τα δεξιά. Εφόσον η ράβδος είναι στερεά, οι προβολές των ταχυτήτων των άκρων της πάνω στην ίδια τη ράβδο πρέπει να είναι ίσες (αλλιώς το μήκος της θα μεταβαλλόταν). Ετοι (βλ. Σχήμα 3)

$$v = (v_1 + v_2) \sin a_1 = \frac{(v_1 + v_2)L_1}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}.$$

Επομένως,

$$\gamma_2 = \frac{v^2}{L_2} = \frac{(v_1 + v_2)^2 L_1^2}{(L_1^2 + L_2^2)L_2}.$$

Ομοίως, εάν μεταβούμε σ' ένα σύστημα αναφοράς που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα  $v_1$ , παίρνουμε

$$Y_1 = \frac{(v_1 + v_2)^2 L_1^2}{(L_1^2 + L_2^2)L_1}.$$

Η ολική επιτάχυνση είναι

$$\gamma = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{(L_1^2 + L_2^2)L_1 L_2} \sqrt{L_1^6 + L_2^6}.$$

Η γωνία  $\beta$  που σχηματίζει το διάνυσμα  $\gamma$  και η ράβδος  $AC$  δίνεται από τον τύπο

$$\text{εφ} \beta = \frac{Y_2}{Y_1} = \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^3.$$

### Φ92

Κατά την περιγραφόμενη διαδικασία ο αέρας θα διαστέλλεται υπό σταθερή πίεση, που καθορίζεται από το βάρος της υπερκείμενης στήλης αέρα. Ο αέρας θεωρείται μείγμα δύο διατομικών αερίων, του οξυγόνου και του αζώτου (παραλείπουμε όλα τα υπόλοιπα αέρια). Υπό σταθερή πίεση, η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του εν λόγω αέριου μείγματος ισούται με  $2,5R + R = 3,5R$ . Χρειάζεται να βρούμε μόνο μία τιμή ακόμη: τον ολικό αριθμό γραμμομορίων  $n$  του αερίου στην ατμόσφαιρα. Η πίεση στην επιφάνεια του πλανήτη καθορίζεται από το βάρος ολόκληρης της ατμόσφαιρας. Επειδή το πάχος της ατμόσφαιρας είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα του πλανήτη, μπορούμε να παραβλέψουμε τη μείωση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με το υψόμετρο.

Εάν με  $m$  συμβολίζουμε τη μάζα της ατμόσφαιρας, με  $S$  το εμβαδόν της επιφάνειας του πλανήτη και με  $M$  τη μέση γραμμομοριακή μάζα του αερίου, τότε για  $P = 1 \text{ atm}$  έχουμε

$$P = \frac{mg}{S} = \frac{nMg}{S}$$

και

$$n = \frac{PS}{Mg}.$$

Ο χρόνος  $t$  που απαιτείται για να ανυψωθεί η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας κατά  $1 \text{ K}$  μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση θερμικού ιοοζυγίου:

$$3,5Rn\Delta T = NSt,$$

όπου  $N$  η εκλυόμενη ιοχύς ανά μονάδα εμβαδού της επιφάνειας του πλανήτη. Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει

$$\tau = \frac{3,5RP\Delta T}{MgN} \equiv 10^4 \text{ s}.$$

### Φ93

Στο Σχήμα 4 φαίνεται η συνδεσμολογία της λυχνίας αερίου. Ας υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή της ΗΕΔ που προκαλεί το ρεύμα κόρου στο σωλήνα:

$$E_{\min} = V_k + I_k R,$$

όπου  $V_k = 10^3 \text{ V}$  και  $I_k = 10^{-5} \text{ A}$  (βλ. το σχήμα που συνοδεύει την εκφώνηση του προβλήματος). Εισάγοντας τις συγκεκριμένες τιμές στην παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε  $E_{\min} = 4 \text{ kV}$ .

Στην περίπτωσή μας, για την ΗΕΔ της πηγής ισχύει  $E > E_{\min}$ . Άρα, το ρεύμα που διαρρέει τη λυχνία ισούται με το ρεύμα κόρου. Έτοιμη, η τάση  $V$  στα άκρα της λυχνίας θα δίνεται από τη σχέση  $E = V + I_k R$ , από την οποία παίρνουμε

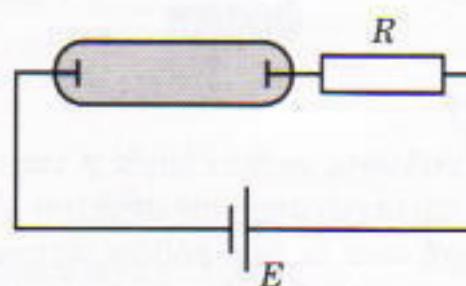
$$V = E - I_k R = 3 \text{ kV}.$$

[Θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το ρεύμα της λυχνίας και με διαφορετικό τρόπο. Ας δεχτούμε ότι είναι μικρότερο από το ρεύμα κόρου. Στην εν λόγω περίπτωση, από το νόμο του Ohm έχουμε

$$E = I(R_{eo} + R),$$

όπου  $R_{eo}$  είναι η εσωτερική αντίσταση της λυχνίας. Αυτή μπορούμε να την υπολογίσουμε από την κλίση του γραμμικού τμήματος της χαρακτηριστικής καμπύλης της λυχνίας στο σχήμα που συνοδεύει την εκφώνηση του προβλήματος]:

$$R_{eo} = \frac{V_k}{I_k} = 10^8 \Omega.$$



Σχήμα 4

Έτοιμη,

$$I = \frac{E}{R_{eo} + R} = 15 \mu\text{A}.$$

Η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από το  $I_k$ . Επομένως, η αρχική μας παραδοχή ότι  $I < I_k$  ήταν εσφαλμένη. Αυτό σημαίνει ότι ο σωλήνας διαρρέεται από το ρεύμα κόρου.]

### Φ94

Η επαγόμενη ΗΕΔ σε μία σπείρα ακτίνας  $r$ , ισούται με

$$E_i = -\frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t},$$

όπου  $\Delta \Phi_i$  είναι η μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα από την επιφάνεια που περιορίζεται από τη σπείρα στη διάρκεια ενός βραχέος χρονικού διαστήματος  $\Delta t$ . Άλλα

$$\Delta \Phi_i = S_i \Delta B$$

$$\begin{aligned} &= \pi r_i^2 B_0 (\sin[\omega(t + \Delta t)] - \sin \omega t) \\ &= -2\pi r_i^2 B_0 \left[ \eta \mu \omega \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \eta \mu \omega \frac{\Delta t}{2} \right] \\ &= -\pi r_i^2 B_0 \omega \Delta t \eta \mu \omega t. \end{aligned}$$

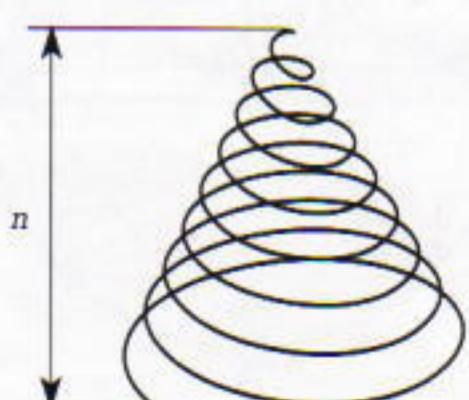
Εφόσον το  $\Delta t$  είναι μικρό, ισχύει

$$\eta \mu \omega \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \equiv \eta \mu \omega t,$$

$$\eta \mu \omega \frac{\Delta t}{2} \equiv \omega \frac{\Delta t}{2}.$$

Η ολική ΗΕΔ που επάγεται σε ολόκληρη την έλικα είναι το άθροισμα των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων που επάγονται σε όλες τις σπείρες:

$$\begin{aligned} E &= \sum E_i = \sum -\frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t} \\ &= B_0 \omega \eta \mu \omega t \sum \pi r_i^2. \end{aligned}$$



Σχήμα 5

Η ποσότητα  $\pi r_i^2$  μπορεί να θεωρηθεί ως ο όγκος ενός κυλίνδρου ύψους ίσου με τη μονάδα και εμβαδού βάσης  $\pi r_i^2$ . Τότε το  $\Sigma \pi r_i^2$  είναι το άθροισμα των όγκων τέτοιων κυλίνδρων. Αφού η διαφορά των ακτίνων γειτονικών κυλίνδρων είναι μικρή (το πλήθος των σπειρών είναι μεγάλο), ο ολικός όγκος όλων του των των κυλίνδρων ισούται κατά προσέγγιση με τον όγκο κώνου ύψους  $n$  και εμβαδού βάσης  $\pi R^2$  (Σχήμα 5):

$$\sum \pi r_i^2 = V = \frac{1}{3} \pi R^2 n.$$

Έτσι, η ολική ΗΕΔ που επάγεται στην έλικα είναι

$$E = \frac{1}{3} \pi R^2 n B_0 \omega \eta \mu \omega t.$$

### Φ95

Όταν η εφημερίδα φωτογραφίζεται για πρώτη φορά, ένα ευκρινές ειδώλο σχηματίζεται σε απόσταση  $b_1$  από το φακό, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε από την εξίσωση των φακών

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

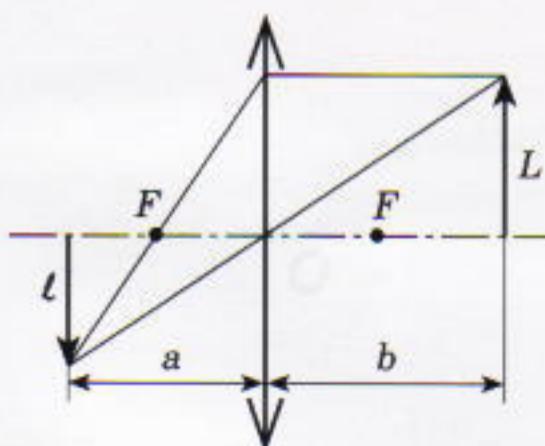
Έτσι,

$$b_1 = \frac{a_1 F}{a_1 - F}.$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση το γραμμικό μέγεθος του ειδώλου (βλ. Σχήμα 6) θα είναι

$$\ell_1 = L \frac{b_1}{a_1} = L \frac{F}{a_1 - F}.$$

Όταν χρησιμοποιείται ο διαφορετικός πάχος  $h$ , ευκρινές είδωλο θα σχηματιστεί σε απόσταση



Σχήμα 6

</div

# Προβλήματα εμφιάλωσης

Οι αλγόριθμοι της διανομής γάλατος

Δρ. Χμ

**Κ**ΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ιππολογισμούς, τη στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία αντιμετωπίζονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογορίθμικά με τη βοήθεια ιππολογιστή.

Στις δύο προηγούμενες στήλες αναφέρθηκα σε μερικά από τα προβλήματα που απασχολούν εμάς τα άλογα που ζούμε στο κτήμα του κυρίου Πωλ. Δεν θα ήθελα όμως να πιστέψετε ότι αδιαφορώ για τα ζητήματα των

υπόλοιπων ζώων του κτήματός μας. Πράγματι, οι αγελάδες μας έχουν χτυπηθεί άσχημα από την υπερπαραγωγή στην κτηνοτροφία. Όλο και πο δύσκολα πουλάμε στο τυροκομείο τα δοχεία με το γάλα τους. Η περσινή πτώση της τιμής του γάλατος είχε τα αντίστοιχα δυσάρεστα αποτελέσματα στο εισόδημα του κτήματός μας. Και αυτή η κατάσταση φυσικά με ενοχλεί και με προβληματίζει.

Ο κύριος Πωλ, το αφεντικό μου,

αποφάσισε να πάρει δραστικά μέτρα για να αυξήσει το οικογενειακό εισόδημα. Σκοπεύει να κάνει μόνος του τη διανομή του γάλατος. Σχεδιάζει να εμφιαλώνει το γάλα, όπως έκανε παλιά, στα πρώτα του βήματα ως κτηματίας, και να το μοιράζει ο ίδιος από πόρτα σε πόρτα. Τα πανέμορφα γυάλινα μπουκάλια που είχε προσεκτικά αποθηκεύσει πριν από σαράντα χρόνια θα επιστρέψουν στην ενεργό υπηρεσία.



Τις προάλλες ο κύριος Πωλ πήρε ένα δοχείο δέκα γαλονιών\* και άρχισε να αδειάζει το περιεχόμενό του σε μερικά από τα παλιά μπουκάλια που βρήκε στο κτήμα (τα οποία, όπως ανακάλυψε, είχαν διαφορετικές χωρητικότητες —2 γαλονιών, 1 γαλονιού, 1/2 γαλονιού, 1/4 γαλονιού, 1/8 γαλονιού και 1/16 γαλονιού). Οταν τελείωσε, ανακάλυψε ότι είχε κατανείμει το γάλα στα δοχεία ως εξής:

Μέγεθος	2 γαλ.	1 γαλ.	1/2 γαλ.	1/4 γαλ.	1/8 γαλ.	1/16 γαλ.
Πλήθος	1	3	2	13	3	6

Ιδού κάτι ενδιαφέρον, σκέψητα. Με πόσους τρόπους μπορεί να κατανείμει ο κύριος Πωλ ένα δοχείο δέκα γαλονιών στα διαφορετικού μεγέθους μπουκάλια που έχουμε στον παραπάνω πίνακα; Δύο κατανομές θεωρούνται όμοιες αν περιέχουν το ίδιο πλήθος μπουκαλιών από κάθε χωρητικότητα. Θέλω να μάθω τις διαφορετικές κατανομές. Αν όμως μπορείτε να λύσετε το πρόβλημα για τα 10 γαλόνια, θα το λύσετε εξίσου εύκολα για 20, 30 ή ακόμη και  $N$  γαλόνια. Ιδού λοιπόν η πρόκληση αυτού του τεύχους:

**ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.** Βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που θα ιππολογίζει με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανείμουμε  $N$  γαλόνια γάλατος σε μπουκάλια που έχουν μεγέθη όπως αυτά που βρίσκονται στην αποθήκη του κυρίου Πωλ.

Μπορείτε να μου στείλετε τους ιππολογισμούς σας στη διεύθυνση [drmu@cs.uwp.edu](mailto:drmu@cs.uwp.edu).

## Λύση του Ιπποπροβλήματος 2α

Στο τελευταίο τεύχος παρουσιάσαμε την ιδέα του υπερπρώτου αριθμού. Υπερπρώτος είναι ένας πρώτος αριθμός που παραμένει πρώτος και μετά την αφαίρεση οποιουδήποτε πλήθους ψηφίων από τη δεξιά του πλευρά. Για παράδειγμα, ο 59393 είναι υπερπρώτος, διότι οι 59393, 5939, 593, 59 και 5 είναι όλοι τους πρώτοι αριθμοί.

Ο κύριος Πωλ χρειάζεται όσο το δυνατόν περισσότερους υπερπρώτους

\* Το αμερικανικό γαλόνι ισούται με 3,785 λίτρα. (Σ.ε.ρ.)

αριθμούς, για να χαρακτηρίζει τα (όλο και περισσότερα) αραβικά άλογα του κτήματος. Η δική σας δουλειά ήταν να βρείτε όλους τους υπερπρώτους αριθμούς (αν υπάρχει πεπερασμένο μόνο πλήθος τέτοιων αριθμών) ή, διαφορετικά, να επινοήσετε έναν αλγόριθμο που θα τους δημιουργεί.

### Λύση στο Mathematica:

Αρχίζουμε με τη λίστα των μονοψήφιων πρώτων οι οποίοι, φυσικά, είναι όλοι υπερπρώτοι:

```
superPrime[1] = {2, 3, 5, 7};
superPrime[n_] :=
Select[Flatten[Outer[Plus,
superPrime[n-1]*10,
{1, 3, 7, 9}]], PrimeQ]
```

Έτσι να αναζητήσουμε μια αναδρομική σχέση μεταξύ των `superPrime[n]` και `superPrime[n-1]`. Ιδού ένας ορισμός που συνδυάζει σε μία συνάρτηση τις ενέργειες που εκτελέσαμε πρηγουμένως:

```
superPrime[1] = {2, 3, 5, 7};
superPrime[n_] :=
Select[Flatten[Outer[Plus,
superPrime[n-1]*10,
{1, 3, 7, 9}]], PrimeQ]
```

Ας δοκιμάσουμε τώρα την νέα μας συνάρτηση:

```
superPrime[3]
{233, 239, 293, 311, 313, 317, 373, 379, 593, 599, 719, 733, 739, 797}
```

Ας τυπώσουμε λοιπόν σε πίνακα όλους τους υπερπρώτους:

```
Table[superPrime[n], {n, 1, 8}]
{{2, 3, 5, 7}, {23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79}, {233, 239, 293, 311, 313, 317, 373, 379, 593, 599, 719, 733, 739, 797}, {2333, 2339, 2393, 2399, 2939, 3119, 3137, 3733, 3739, 3793, 3797, 5939, 7193, 7331, 7333, 7393}, {23333, 23339, 23399, 23993, 29399, 31193, 31379, 37337, 37339, 37397, 59393, 59399, 71933, 73331, 73939}, {233993, 293999, 373379, 373393, 593933, 593993, 719333, 739391, 739393, 739397, 739399}, {2339933, 2393999, 3733799, 5939333, 7393913, 7393931, 7393933}, {23399339, 29399999, 37337999, 59393339, 73939133}}
```

Οι διψήφιοι υπερπρώτοι κατασκεύαζονται από τους μονοψήφιους αν πολλαπλασιαστεί κάθε ψηφίο με το 10 και προστεθεί ένα από τα τέσσερα ψηφία {1, 3, 7, 9}. Όλοι οι πρώτοι που είναι μεγαλύτεροι του 5 πρέπει να καταλήγουν σε ένα από αυτά τα ψηφία. Με τη βοήθεια του Mathematica βρίσκουμε όλα τα δυνατά αθροίσματα των στοιχείων του `superPrime[1]*10` και των {1, 3, 7, 9}:

```
Outer[Plus, superPrime[1]*10,
{1, 3, 7, 9}]
{{21, 23, 27, 29}, {31, 33, 37, 39}, {51, 53, 57, 59}, {71, 73, 77, 79}}
```

Το αποτέλεσμα του τελευταίου υπολογισμού συμβολίζεται με %. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `Flatten` για να διευθετήσουμε το αποτέλεσμα αυτό σε λίστα:

```
Flatten[%]
{21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 51, 53, 57, 59, 71, 73, 77, 79}
```

Αυτοί είναι όλοι οι πιθανοί διψήφιοι υπερπρώτοι. Επιλέγουμε τώρα (με τη συνάρτηση `Select`) όσους αποδεικνύονται πραγματικά πρώτοι (με άλλα λόγια, εκείνους για τους οποίους η `PrimeQ[x]` είναι αληθής):

```
Select[#, PrimeQ]
{23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73}
```

Ορίστε! Ανακαλύψαμε τους διψήφιους υπερπρώτους. Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια τακτική για να βρούμε τους τριψήφιους. Οδηγούμαστε

Όπως προκύπτει, δεν υπάρχουν υπερπρώτοι αριθμοί με περισσότερα από οκτώ ψηφία:

```
superPrime[9]
{}
```

Η συνάρτηση `PrimeQ` του Mathematica 3.0 είναι ταχύτατη, και γνωρίζουμε ότι δουλεύει σωστά για κάθε  $n < 2.5 \cdot 10^{10}$ , έναν αριθμό πολύ μεγαλύτερο από το πλήθος όλων των αλόγων που έχουν ζήσει μέχρι σήμερα. Όσοι προγραμματίζετε σε C ή Pascal

πρέπει να δημιουργήσετε τη δική σας συνάρτηση `primeQ`.

**Λύσεις σε C:**

Ο Kenny Brazier, μαθητής της Α' λυκείου στη Σχολή Pinewood του Γουντλαντ Πάρκ στο Κολοράντο, προτίνει μια συνάρτηση `primeQ` που την ονομάζει `chkPrime`. Η συνάρτηση δουλεύει για  $n \leq 2.147.483.647 = 2^{31} - 1$  και είναι η εξής:

```
int chkPrime(long n)
{
    long i;

    for (i=3; i*i <= n; i += 2)
        if ((n % i) == NULL)
            return 0;
    return 1;
}
```

Το σύντομο και όμορφο πρόγραμμα του Kenny μπορείτε να το δείτε ολόκληρο στη σελίδα του δικτύου που αναφέρουμε στο τέλος του άρθρου.

**Γράφημα υπερπρώτων:**

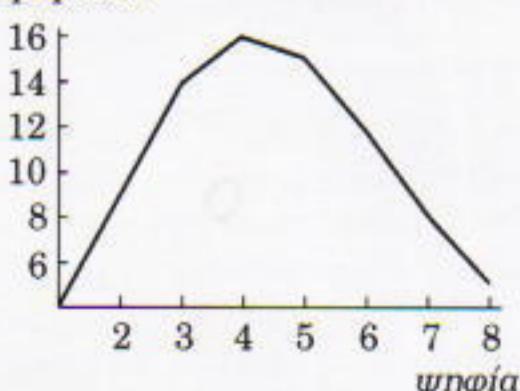
Πόσοι υπερπρώτοι υπάρχουν για κάθε τιμή του  $n$ ? Θα ιππολογίσουμε το πλήθος τους και θα παραστήσουμε γραφικά τα αποτελέσματα. Στο Mathematica η `Length` μετρά το μέγεθος μιας λίστας. Για παράδειγμα, υπάρχουν 8 επταψήφιοι υπερπρώτοι:

```
Length[superPrime[7]]
8
```

Στο Σχήμα 1 έχουμε το γράφημα του πλήθους των υπερπρώτων αριθμών με 1 έως 8 ψηφία:

```
ListPlot[Table[Length
[superPrime[n]], {n, 1, 8}],
PlotJoined->True,
AxesLabel->
{"ψηφία", "υπερπρώτοι"}]
```

υπερπρώτοι



Σχήμα 1

## Λύση του ΙΠΠΟΠΡΩΤΗΜΑΤΟΣ 2β

Όπως θα θυμάστε, στο προηγούμενο άρθρο είχαμε επισημάνει ότι υπάρχουν αριστερόχειρες κτηνοτρόφοι που προτιμούν να αποκόπτουν τα ψηφία από την αριστερή μεριά. Τι συμβαίνει λοιπόν με τους πρώτους που παραμένουν πρώτοι όταν αποκόπτουμε οποιοδήποτε πλήθος ψηφίων από τα αριστερά; Τους αριθμούς αυτούς τους ονομάσαμε ρεπυπρώτους, και το ΙΠΠΟΠΡΩΤΗΜΑ 2β ζητούσε να τους δημιουργήσετε.

**Λύση σε Mathematica:**

Αρχίζουμε με το σύνολο των μονοψήφιων πρώτων:

```
repusPrime[1]={2,3,5,7}
{2, 3, 5, 7}
```

Όπως προηγουμένως, επισυνάπτουμε όλα τα ψηφία από το 1 έως το 9 στα αριστερά:

```
Flatten[Outer[Plus,10*Range[9],
repusPrime[1]]]
{12, 13, 15, 17, 22, 23,
25, 27, 32, 33, 35, 37, 42,
43, 45, 47, 52, 53, 55, 57,
62, 63, 65, 67, 72, 73, 75,
77, 82, 83, 85, 87, 92, 93,
95, 97}
```

(Δεν πρόσθεσα το 0 μπροστά από τα ψηφία, για να αποφύγω την εμφάνιση αριθμών όπως το 007.) Επιλέγουμε στη συνέχεια τους πρώτους:

```
Select[#,PrimeQ]
{13, 17, 23, 37, 43, 47,
53, 67, 73, 83, 97}
```

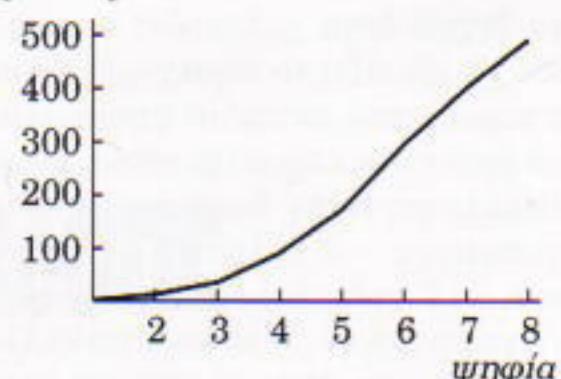
Όπως και πριν, η συνάρτηση `repusPrime` ορίζεται αναδρομικά:

```
repusPrime[n_]:=Select[Flatten[Outer
[Plus,10^(n-1)*Range[9],
repusPrime[n-1]]],PrimeQ]
```

Ας τη δοκιμάσουμε:

```
repusPrime[3]
{113, 137, 167, 173, 197,
223, 283, 313, 317, 337, 347,
353, 367, 373, 383, 397, 443,
467, 523, 547, 613, 617, 643,
647, 653, 673, 683, 743, 773,
797, 823, 853, 883, 937, 947,
953, 967, 983, 997}
```

ρεπυπρώτοι



Σχήμα 2

Τι συμβαίνει με τους οκταψήφιους αριθμούς;

```
Length[repusPrime[8]]
521
```

Αντίθετα με τους υπερπρώτους, οι ρεπυπρώτοι αυξάνονται. Ας το επιβεβαιώσουμε κατασκευάζοντας το γράφημα του πλήθους των ρεπυπρώτων με 1 έως 8 ψηφία:

```
ListPlot[Table[Length
[repusPrime[n]], {n, 1, 8}],
PlotJoined->True, AxesLabel->
{"ψηφία", "ρεπυπρώτοι"}]
```

Στο Σχήμα 2 βλέπετε το γράφημα αυτής της συνάρτησης. Απ' ότι φαίνεται, οι αριστερόχειρες κτηματίες θα βρίσκουν πάντοτε όσους ρεπυπρώτους χρειάζονται.

**Άλλες λύσεις:**

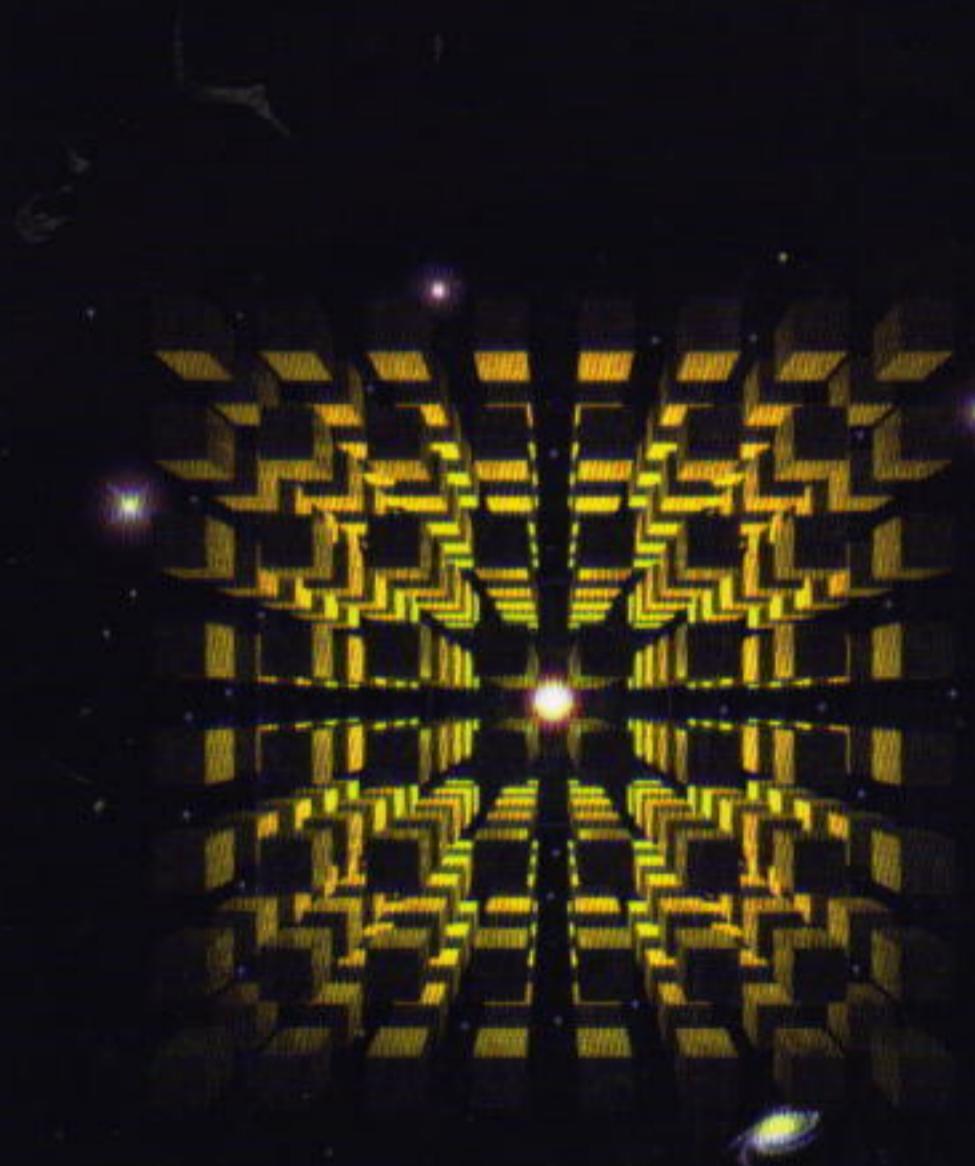
Ο Benjamin Mathews, μαθητής της Α' λυκείου στο St. Mark's School στο Ντάλλας του Τέξας, πρότεινε μια εντυπωσιακή, υψηλής ακριβείας λύση, γραμμένη σε C και για τα δύο προβλήματα. Βρίσκεται μαζί με τη λύση του Kenny στη σελίδα των Ιππολογισμών στη διεύθυνση <http://usa-co.uwp.edu/cowculations>.

Ο Ben μάλιστα επισημαίνει ότι το 1997 είναι ένα ρεπυπρώτο έτος. Επειδή όμως το 1 δεν είναι πρώτος αριθμός, δυστυχώς το έτος 1997 δεν είναι συγχρόνως και υπερπρώτο.

Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους δύο φίλους των Ιππολογισμών που έστειλαν λύσεις σε Pascal: τον Po-Shen Loh, μαθητή της Γ' γυμνασίου στο James Madison Memorial High School του Μάντισον, και τον Noam Zeilberger, μαθητή της Α' λυκείου στο West Windsor-Plainsboro High School στο Ουέστ Ουίντσορ του Νιού Τζέρσεϋ.

«Έχω πουλήσει περισσότερα βιβλία για τη φυσική απ' όσα η Madonna για το σεξ. Αυτό σημαίνει ότι το κοινό ενδιαφέρεται για ορισμένα σημαντικά ερωτήματα...»

—Stephen Hawking



Το *Χρονικό του Χρόνου* είναι το κορυφαίο βιβλίο της δεκαετίας. Μόνο ο Stephen Hawking θα μπορούσε να φανταστεί ότι θα ήταν δυνατόν να γίνει ακόμη καλύτερο. Βέβαια, χρειάστηκε αρκετό χρόνο για να ετοιμάσει τη νέα εκδοχή του βιβλίου, αλλά τελικά άξιζε τον κόπο να περιμένουμε. Τώρα πλέον το *Χρονικό του Χρόνου* —Εικονογραφημένο κυκλοφορεί σε όλες τις γλώσσες.