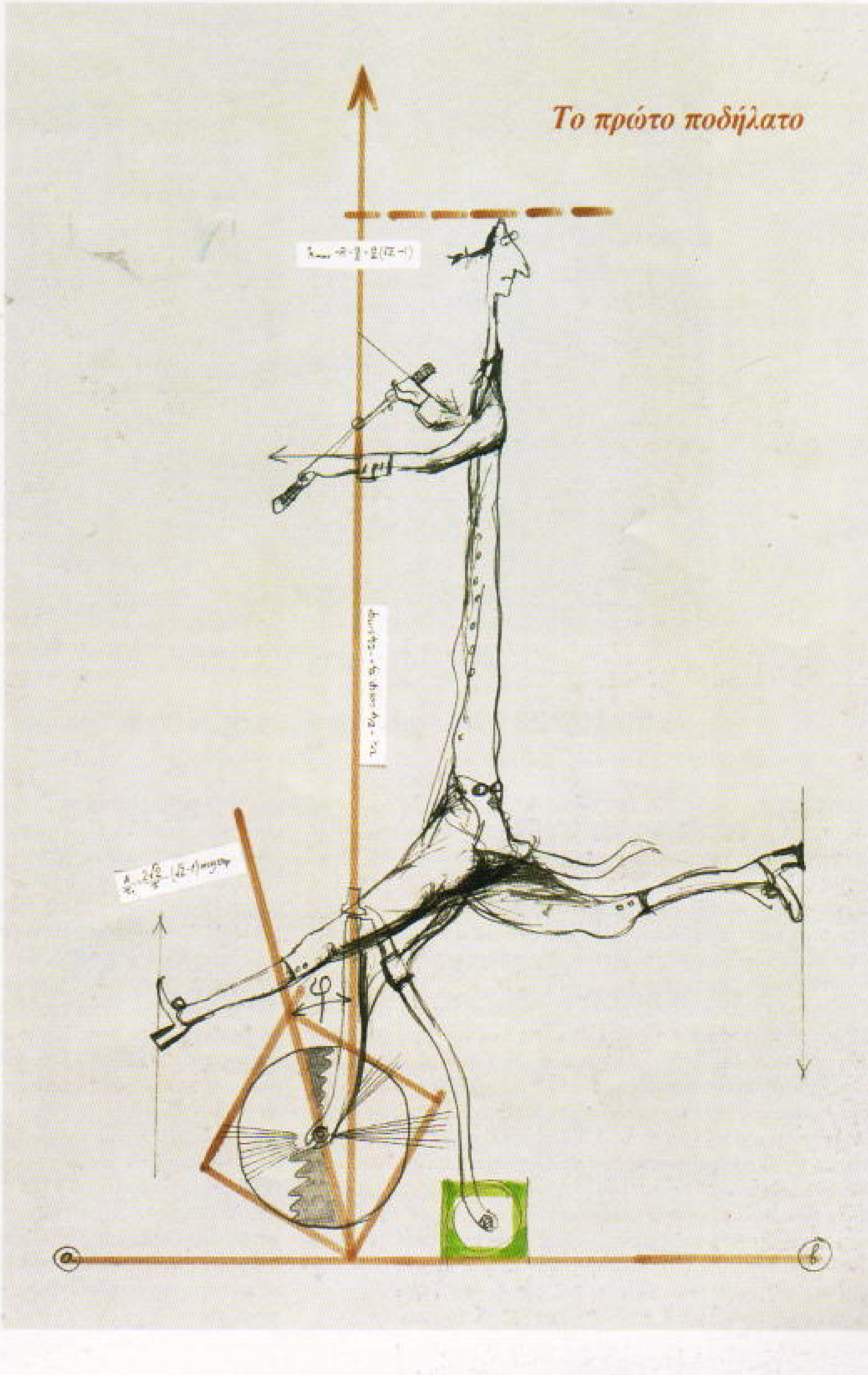
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

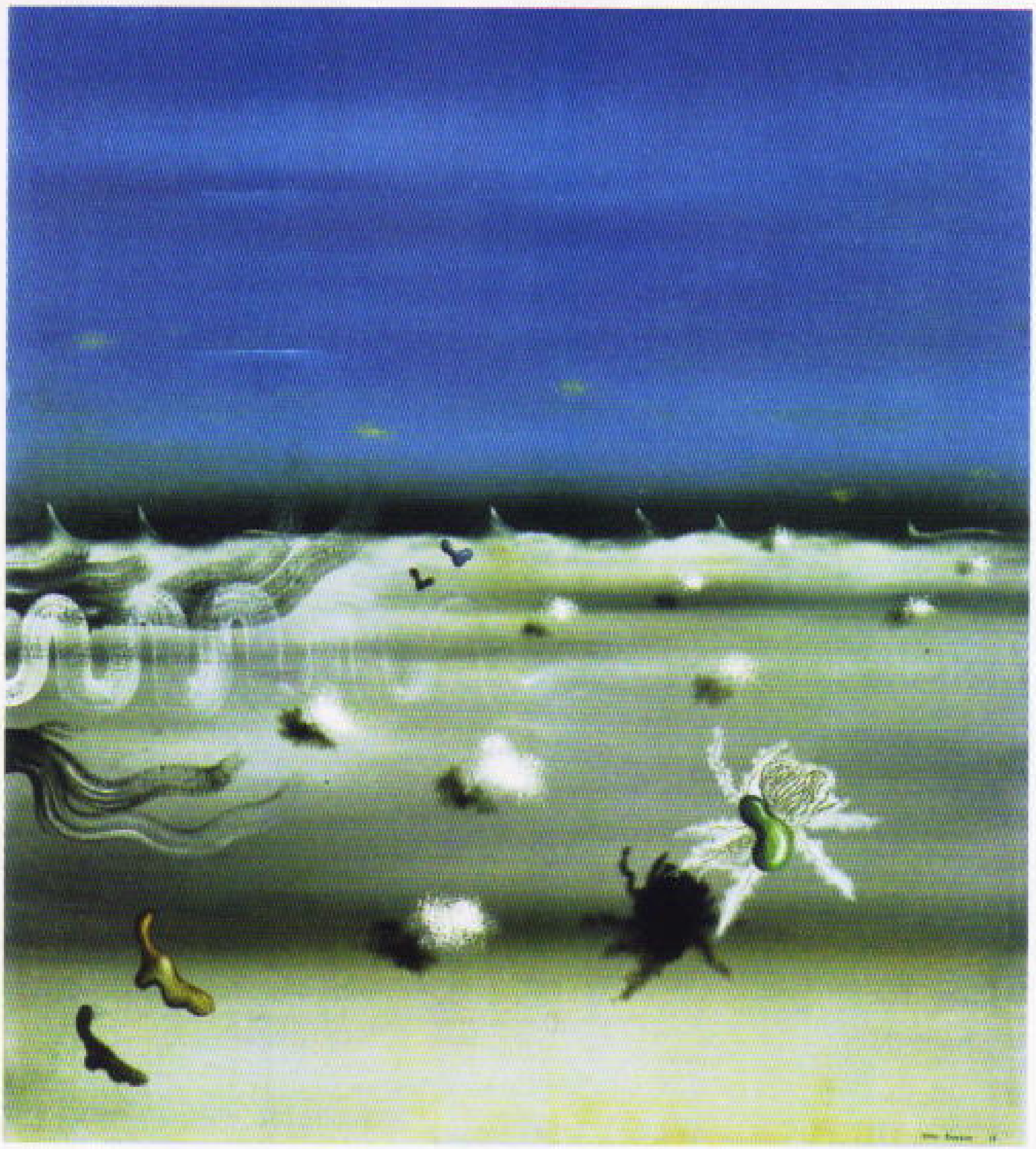
ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1997
ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 2
1.500 ΔΡΧ.



Το πρώτο ποδήλατο

- *Το τελευταίο θεώρημα του Fermat*
- *Κάτω από το απόλυτο μηδέν*
- *Η μη ευκλείδεια γεωμετρία*
- *Το ψυγείο-θερμάστρα*
- *Από έναν ρωμαϊκό μύθο στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα*
- *Κρούση σφαιρών, πυρηνική σχάση και φαινόμενο Compton*
- *Πολυωνυμικές αναζητήσεις*
- *Περί στατικού ηλεκτρισμού*
- *Ο κοχλίας του Αρχιμήδη*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



Η όψη του κεχριμπαριού (1929) του Yves Tanguy

ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ, ΤΟΥΤΟΣ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΧΕΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ σχέση με την εξωτερική εμφάνιση της απολιθωμένης ρητίνης που κοινώς ονομάζεται «κεχριμπάρι». Μολονότι ο Tanguy μάλλον δεν γνώριζε ότι το κεχριμπάρι στα ελληνικά λέγεται και «ήλεκτρον», οπωσδήποτε είχε αντιληφθεί το ρόλο που έπαιξε στην ιστορία του ηλεκτρισμού. Τα αντικείμενα που αιωρούνται στο ονειρικό τοπίο του, είναι φορτισμένα από αυτή τη μυστηριώδη δύναμη.

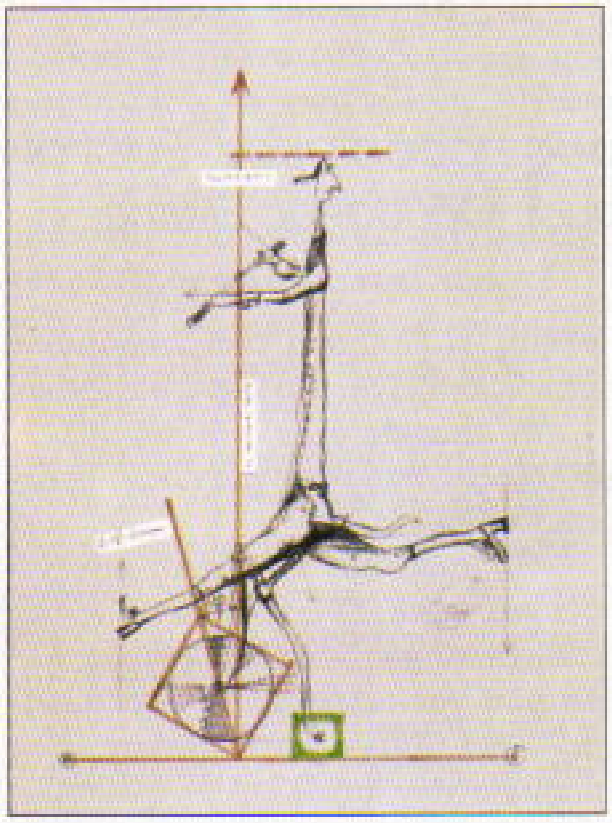
Γύρω στο 600 π.Χ. ο έλληνας φιλόσοφος Θαλής παρατήρησε ότι το ήλεκτρο, αν το τρίψει κανείς στη γούνα ενός ζώου, αποκτά την ιδιότητα να έλκει πούπουλα και άλλα ελαφρά αντικείμενα. Αιώνες αργότερα, ο William Gilbert, οποίος εισήγαγε τον όρο «ηλεκτρισμός», διαπίστωσε ότι την ίδια ιδιότητα αποκτά και το γυαλί. Το 1733, ο γάλλος χημικός Charles Francis de Cisteay Du Fay ανακάλυψε ότι δύο φορτισμένα κομμάτια ήλεκτρου απωθούνται μεταξύ τους, όπως και δύο ράβδοι γυαλιού, ενώ ένα φορτισμένο κομμάτι ήλεκτρου έλκει μια γυάλινη φορτισμένη ράβδο, και επιπλέον, αν αυτά έρθουν σε επαφή, χάνουν τα φορτία τους. Τούτη η παρατήρηση τον οδήγησε να υποθέσει ότι υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου, το «εκ ρητίνης» και το «εξ υάλου».

Ο αμερικανός λόγιος Βενιαμίν Φραγκλίνος σκέφτηκε διαφορετικά. Υπέθεσε ότι υπάρχει ένα και μοναδικό «ρευστό». Με την τριβή, το γυαλί καθίσταται «θετικά φορτισμένο» (ρέει μέσα του ηλεκτρισμός), ενώ το ήλεκτρο «αρνητικά». Όταν τα δύο υλικά έρχονται σε επαφή, το ρευστό περνάει από το γυαλί στο ήλεκτρο, ώσπου να επέλθει μια εξισορρόπηση. Όπως παρατηρεί ο Isaac Asimov στο βιβλίο του για τις επιστημονικές ανακαλύψεις, «αν αντικαταστήσουμε το "ρευστό" του Φραγκλίνου με τη λέξη "ηλεκτρόνια" και αν αντιστρέψουμε την κατεύθυνση της ροής (στην πραγματικότητα, τα ηλεκτρόνια ρέουν από το ήλεκτρο στο γυαλί), μπορούμε να πούμε ότι η υπόθεσή του ουσιαστικά ήταν σωστή».

Μολονότι κατά τον 18ο αιώνα πραγματοποιήθηκαν πάμπολλες έρευνες με αντικείμενο τον ηλεκτρισμό (στις οποίες συμπεριλαμβάνεται το γνωστό πείραμα του Φραγκλίνου με το χαρταετό), μόλις το 1785 ο Charles Augustin de Coulomb έκανε το πρώτο βήμα για την ποσοτική περιγραφή του. Προς τιμήν του Coulomb, λοιπόν, το Καλειδοσκόπιο του παρόντος τεύχους προσφέρει μια συλλογή από «φορτισμένα» γεγονότα και προβλήματα που θα «ηλεκτρίσουν» το μυαλό του αναγνώστη.

QUANTUM

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1997 ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση: Yury Vashchenko

Μερικές φορές, μια εφεύρεση προηγείται κάπως της εποχής της. Αυτή τουλάχιστον είναι η ειρωνική προϋπόθεση του άρθρου «Το πρώτο ποδήλατο» (σελίδα 48). Το συγκεκριμένο όχημα σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε, όπως λέει η ιστορία, από τον «μεγάλο εφευρέτη Nga-Nga». Το μοναδικό πρόβλημα ήταν ότι δεν είχε ανακαλυφθεί ακόμη ο τροχός. Οι «τροχοί» αυτού του πρώτου ποδηλάτου αποτελούνταν από δύο ραβδιά δεμένα σταυροειδώς —δηλαδή, επρόκειτο ουσιαστικά για τετράγωνους τροχούς. Η ποδηλασία, όπως καταλαβαίνετε, ήταν αρκετά δύσκολη, αλλά η σχετιζόμενη φυσική εξαιρετικά ενδιαφέρουσα.

Όπως συμβαίνει πάντοτε, το αρχικό σχέδιο επιδεχόταν πάμπολλες βελτιώσεις, και οι εξίσου θρυλικοί απόγονοι του Nga-Nga πράγματι μόχθησαν αρκετά προς αυτή την κατεύθυνση. Δεν γνωρίζουμε όμως αν τελικά επινόησαν και τον κυκλικό τροχό, μια και το επίτευγμα αυτό καλύπτεται από την ομίχλη της προϊστορίας.

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

ΣΤΟ ΚΟΣΜΟΣ
ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

Καίριες παρατηρήσεις

«...Λόγια όχι σαν τ' άλλα μα κι αυτά μ' ένα μοναδικό τους προορισμόν: Εσένα!»
—Προσανατολισμοί, *Οδυσσέας Ελύτης*

ΣΤΟ ΠΑΡΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟ —ΤΟ ΟΠΟΙΟ αποτελεί τμήμα άρθρου που δημοσιεύτηκε στην εφημερίδα *Τα Νέα* (28-12-96) με τίτλο «Επαρχιωτισμός με εξαιρέσεις»— ο φυσικός και πρώην πρύτανης του Πανεπιστημίου Κρήτης Γιώργος Γραμματικάκης υπογραμμίζει τη σημασία που έχει η γνώση της επιστήμης και των εξελίξεών της για κάθε πολίτη, και αναπτύσσει ιδέες που θα έπρεπε να μας βάλουν όλους —πολιτικούς, δημοσιογράφους, διανοουμένους, επιστήμονες και ευρύτερο κοινό— σε σκέψεις. Οι επισημάνσεις του είναι τόσο σοβαρές —αλλά και η δημοσίευση τέτοιων προβληματισμών στον ελληνικό τύπο τόσο σπάνια—, ώστε θεωρήσαμε χρέος μας να αναδημοσιεύσουμε μερικές από αυτές (ελπίζοντας ότι η αναφορά του συγγραφέα στις εκδόσεις μας δεν θα αποτελέσει αφορμή να κατηγορηθούμε για αυταρέσκεια...).

«Στη χώρα μας, ο επιστημονικός λόγος και η σκέψη, όπου υπάρχει, υπάρχει σπασμωδικά. Πρέπει όμως να αναγνωρισθεί ότι τα σημεία βελτιώσεως είναι εμφανή. Ο Τύπος συχνά πια αναφέρεται σε βιβλία ή γεγονότα επιστημονικά· τα δημοσιεύματά του βέβαια είναι ακόμα ευκαιριακά και πρόχειρες —με κάποιες αξιοσημείωτες εξαιρέσεις— μεταφράσεις από διεθνή έντυπα. Όσο για την τηλεόραση, παρά την ακατάσχετη φλυαρία της, μετρημένες στα δάχτυλα του ενός χεριού θα είναι, σε περίοδο πολλών ετών, οι ζωντανές αναφορές σε επιστημονικά θέματα. Ακόμα και μερικές θαυμάσιες διεθνείς σειρές, για την επιστήμη και τις εξελίξεις της, που διαθέτει η κρατική τηλεόραση, προβάλλονται —ωσάν για να ξορκιστεί το κακό— σε ώρες ακατάλληλες και χωρίς καμιά σοβαρή ενημέρωση. Στο χώρο των ελληνικών πανεπιστημίων ή ερευνητικών ιδρυμάτων, πάντως, υπάρχουν αυτή τη στιγμή αξιόλογες επιστημονικές μονάδες, που θα είχαν πολλά να πουν με το έργο ή τη ζωή τους.

»Μέχρι πρόσφατα, κι ενώ κυκλοφορούν δεκάδες λογοτεχνικά, λογοτεχνίζοντα ή ασαφώς χαρακτηριζόμενα έντυπα —χώρια τα ιδεολογικής χροιάς— δεν υπήρχε κανένα που να εστιάζει, με εύληπτο τρόπο, στις επιστήμες και την παρουσία τους στον σύγχρονο κόσμο. Το *Περισκόπιο της επιστήμης*, παρά τη φιλότιμη και μάλλον βελτιούμενη προσπάθειά του, απέχει από το να εκπληρώνει αυτόν τον δύσκολο ρόλο. Το *Experiment*, εντυπωσιακό σε εμφάνιση και τεχνική, στηρίζεται ως επί το πλείστον σε μεταφράσεις (όχι πάντοτε προσεκτικές) από έγκυρο διεθνές περιοδικό. Σε άλλο, πιο εξειδικευμένο επίπεδο, αξιόλογη είναι η παρουσία του *Quantum*, "περιοδικού για τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά". Τα θέματά του θά 'πρεπε τουλάχιστον —πράγμα που δεν φαίνεται ότι συμβαίνει— να έχουν ως αναγνώστες τους καθηγητές των θετικών επιστημών στα σχολεία. Ας σημειωθεί ότι οι καλές *Εποχές*, της δεκαετίας του 1960, περιοδικό "προβληματισμού και γενικής παιδείας", είχαν, ανάμεσα σε άλλα, αξιόλογα κείμενα για την επιστήμη. Η έλλειψη ενός παρόμοιου περιοδικού είναι και σήμερα εμφανής —και απορίας άξια, για τις πολλές φιλοδοξίες που υπάρχουν στον εκδοτικό χώρο.

»Θα μπορούσε κανείς να συνεχίσει επί πολύ. Ο επιστημονικός μας επαρχιωτισμός —όρος αδόκιμος, αλλά που χαρακτηρίζει την κατάσταση— δεν ανιχνεύεται μόνον στην απουσία των κατάλληλων ερεθισμάτων. Φοβούμαι ότι έχει να κάνει με κάποια αδιόρατη νοοτροπία —ένα είδος εθνικού συνδρόμου, που απωθεί ή και αποστρέφεται τον ορθολογισμό, την ευθύνη ή τη λιτότητα που χαρακτηρίζει τον επιστημονικό λόγο. Έχουμε μάθει να μιλούμε με αναπόδεικτα σχήματα, με πληθωρισμό λεκτικό και σκέψη δογματική, και συχνά αδυνατούμε να θέσουμε ερωτήματα επί της ουσίας. Ό,τι δηλαδή αντίθετο με το βαθύτερο νόημα ή τη λειτουργία της επιστημονικής σκέψης. Η δεσπόζουσα συλλογιστική μας παραμένει υπερτροφικά πολιτική ή νομικίστικη —με δύο λόγια, μίζερη. Δεν εννοώ μόνο τον μέσο άνθρωπο. Νομίζω ότι πολλοί διανοούμενοι ή έγκυροι σχολιαστές, ικανοί δημοσιογράφοι και άνθρωποι με πνευματική επιρροή, πολιτικοί με ευρύτητα αλλά και άνθρωποι με σοβαρή κουλτούρα, εξαντλούν την επιστήμη σε κάποιες επιφανειακές γνώσεις ή παρεξηγήσεις. Από τη θεωρία της σχετικότητας, για παράδειγμα, αυτό που απομένει είναι ότι "όλα είναι σχετικά", που βέβαια καθόλου δεν συμπεραίνεται από τη σκέψη του Αϊνστάιν. Ούτε οι θεωρίες του χάους έχουν να κάνουν —όπως πιθανόν νομίζει ο καλός πολίτης— με τη χαώδη ανθρώπινη προσωπικότητα ή το χάος στη σύγχρονη Ελλάδα...

»... Ο ελληνικός "επαρχιωτισμός" συνδέεται με τη συνεχή μας ομφαλοσκόπηση, με μια εκπαίδευση που λίγο έχει να κάνει με την παιδεία, με τις ιστορικές ή κοινωνικές μας ανέχειες. Είναι συνηθισμένο, αυτός ο επαρχιωτισμός, που συνήθως περιέχει και ψήγματα ορθοδοξίας ή αρχαιολατρίας, να ανάγεται σε εθνική αρετή, απέναντι σε μια δήθεν στείρα Ευρώπη ή κακοποιό Αμερική. Τότε μάλιστα, από γραφικό στίγμα της κακομοιριάς μας, γίνεται επικίνδυνος, αφού αποτελεί ένα είδος ιδεολογίας, είτε στα διεθνή θέματα εκδηλώνεται είτε στα θέματα των γραμμάτων και του πολιτισμού. Και τότε είναι το ίδιο επικίνδυνος με τον ανυπόκριτο θαυμασμό για οτιδήποτε ευρωπαϊκό ή ξένο, ο οποίος ευθύνεται ήδη για πολλά εθνικά ή πνευματικά μας δεινά.

»Δεν είναι λοιπόν περίεργο που ο επαρχιωτισμός αυτός ανάγει σε μοναδική, περισπούδαστη αξία πλήθος πνευματικές ασημαντότητες μόνο και μόνο επειδή αναπτύσσονται εις την ελληνική επικράτεια, έχουν να κάνουν δήθεν με την παράδοσή μας, γράφονται εις —συνήθως άσχημα— ελληνικά, παίζονται μουσικά ή ζωγραφίζονται από χέρια συμπατριωτών μας. Αν υπάρχει μια εξαίρεση, που πρέπει να αναφερθεί επειδή έχει σημασία, είναι ο κινηματογράφος και η κουλτούρα που τον συνοδεύει:

»Εδώ, κάθε καλή ξένη ταινία προβάλλεται έγκαιρα, το κοινό είναι ενήμερο και παρακολουθεί με ιδιάζουσα θέρμη, η κριτική βοηθά με τον τρόπο της. Μόνο στο συνδικαλισμό των ανθρώπων του κινηματογράφου παρουσιάζονται αντίστοιχα φαινόμενα επαρχιακής λογικής. Όσο για την πολιτική, ούτε λόγος: Είναι εντυπωσιακή η απομόνωσή της σε έναν κύκλο —που δεν είναι κατ' ανάγκην φαύλος— όπου κάθε βλακώδης ρήση γηγενούς στελέχους προκαλεί μεγαλύτερη συζήτηση ή ταραχή από τα κοσμογονικά, επικίνδυνα ή ελπιδοφόρα, που συμβαίνουν στην παγκόσμια σκηνή.

Συνέχεια στη σελ. 63 ⇨

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης
Timothy Weber

Υπεύθυνος εικονογράφησης
Sergey Ivanov

Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων
Edward Lozansky

Σύμβουλοι σύνταξης
Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας
Yuli Danilov, Ερευνητής Α΄ Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή
Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT
Linda Rosen, Διοικητικός διευθυντής, NCTM
George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντέιλ, Λουιζιάνα
Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάμαλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Στέλιος Ζαχαρίου** - μαθηματικός, **Γιώργος Κατσιλιέρης** - φυσικός, **Μιχάλης Λάμπρου** - μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης** - μαθηματικός, **Γιώργος Κυριακόπουλος** και **Αλέκος Μάμαλης** - φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια
Παντελής Μπουκάλας

Τυποτεχνική επιμέλεια
Ηρακλής Ντούσης

Υπεύθυνη Λογιστηρίου
Μαρία Μάμαλη

Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης και Ειδικός συνεργάτης:
Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Επιστημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α΄ βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση
Δ. Τεμπονέρα

Φιλμ, μοντάζ
Γ. Κεραμάς

Εκτύπωση
Ν. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία
Θ. Αρχοντουλάκης

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιώτες, 14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.


S. Ivanov

Γόνιμες απαντήσεις

Κάθε τέλος, μια καινούργια αρχή...

Barry Mazur

ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΒΡΕΙΤΕ *ΟΛΕΣ* ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΕΝΟΣ ΤΡΙΤΟβάθμιου πολυωνύμου μίας μεταβλητής, όταν σας δοθούν οι δύο από αυτές; Για παράδειγμα, μπορείτε να βρείτε την τρίτη λύση της εξίσωσης

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

όταν γνωρίζετε ότι $x = 1$ και $x = 2$ είναι λύσεις της; Αν μπορείτε, τότε έχετε όλες τις γνώσεις που χρειάζονται για να διαβάσετε αυτό το άρθρο. (Αν πάλι το επίπεδο των γνώσεών σας χρειάζεται λίγη βελτίωση, ανατρέξτε σε οποιοδήποτε σχετικό εγχειρίδιο και διαβάστε το κεφάλαιο για τη διαίρεση των πολυωνύμων.)

Όλοι όσοι ενθουσιαζόμαστε με τα μαθηματικά πιστεύουμε ότι απαντούν και λύνουν προβλήματα όπως το προηγούμενο. Προσπαθούμε επίμονα να λύσουμε κάποιο μαθηματικό πρόβλημα επειδή μας βασανίζει η περιέργεια για την απάντησή του. Ή, κατά δεύτερο λόγο, επειδή κάποιος μας έθεσε το πρόβλημα είτε ως πρόκληση είτε για να μας δοκιμάσει. Προσπαθούμε επίμονα, και όταν καταλήξουμε στην «απάντηση», ίσως και να πιστέψουμε ότι έφτασε η στιγμή να χαλαρώσουμε. Θέλω να ανατρέψω αυτή την εικόνα και να υποστηρίξω ότι ένα μεγάλο μέρος της τέχνης των μαθηματικών έρχεται στο προσκήνιο μόνο όταν έχουμε την «απάντηση». Αν καταφέρουμε να κάνουμε τις σωστές *ερωτήσεις* σχετικά με την απάντηση που βρήκαμε, μπορεί να οδηγηθούμε σε ακόμη πιο ενδιαφέροντα πράγματα.

Ας αρχίσουμε με ένα «ανάλαφρο» ερώτημα για αριθμούς και ας αναλογιστούμε σε ποια νέα ερευνητέα ερωτήματα μας «οδηγεί» η λύση του. Δεν θα προσπαθήσω να αποδείξω τα γεγονότα συστηματικά, αλλά θα σας ζητήσω μερικές φορές να κάνετε κάποιους υπολογισμούς.

Ερώτηση. Ο αριθμός 210 είναι γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων ($210 = 14 \times 15$) καθώς και γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων ($210 = 5 \times 6 \times 7$). Πόσοι άλλοι αριθμοί έχουν αυτήν την ιδιότητα —να εκφράζονται ως γινόμενο τριών και δύο διαδοχικών ακεραίων;

Πριν αρχίσουμε να αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα, ας σκεφτούμε για τη φύση του. Γιατί το διάλεξα; Ποιον άσσο κρύβω στο μανίκι μου; Προτού συνεχίσετε την ανάγνωση του άρθρου, προσπαθήστε να βρείτε μερικούς ακόμη αριθμούς που είναι γινόμενο δύο και τριών διαδοχικών ακεραίων.

Η ερώτησή μας μπορεί φυσικά να επαναδιατυπωθεί ως αλγεβρικό πρόβλημα. Θεωρήστε τον αριθμό μας N ως γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων. Αν X είναι ο μεσαίος από τους τρεις, έχουμε

$$N = (X - 1) \cdot X \cdot (X + 1) = X^3 - X.$$

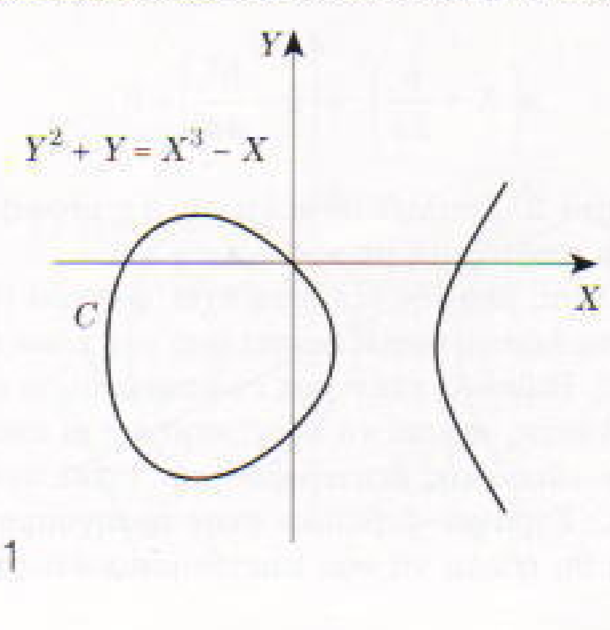
Ας θεωρήσουμε τώρα τον N ως γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων. Αν Y είναι ο μικρότερος από αυτούς, έχουμε

$$N = Y \cdot (Y + 1) = Y^2 + Y.$$

Συνεπώς έχουμε μια λύση «N» στο πρόβλημά μας, κάθε φορά που βρίσκουμε ένα ζεύγος (X, Y) ακεραίων με την ιδιότητα

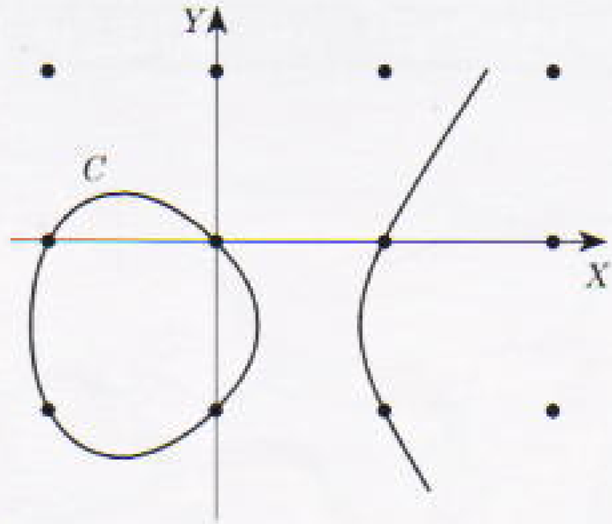
$$Y^2 + Y = X^3 - X.$$

Αντιμετωπίζουμε λοιπόν μια εξίσωση δύο μεταβλητών X και Y, ο μεγιστοβάθμιος όρος της οποίας είναι ένας κύβος, και αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις της. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε γραφικά τις πραγματικές λύσεις αυτής της εξίσωσης ως μια καμπύλη C του επιπέδου (X, Y) (Σχήμα 1). Το γράφημα της εξίσωσης αποτελείται από δύο τμήματα ξένα μεταξύ τους. Θα την αντιμετωπίσου-



Σχήμα 1

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 2

με, όμως, ως μια «καμπύλη» (έτσι μιλούν οι μαθηματικοί) και θα την ονομάσουμε καμπύλη C (έτσι συμβολίζουν οι μαθηματικοί).

Πρέπει να έχουμε κατά νουν ότι το γράφημα που σχεδιάσαμε, με τα δύο τμήματά του (το αριστερό κομμάτι είναι οβάλ και το δεξιό θυμίζει ένα λυγισμένο τόξο άπειρου μήκους), διαγράφει όλες τις *πραγματικές* λύσεις της εξίσωσής μας. Εμείς όμως αναζητούμε τα σημεία της C με ακέραιες συντεταγμένες (X, Y). Γι' αυτό, ας επιθέσουμε στο γράφημα το άπειρο πλέγμα των σημείων (X, Y) του επιπέδου με *ακέραιες* συντεταγμένες (τα σημεία αυτά έχουν σχεδιαστεί ως «έντονες τελείες» στο Σχήμα 2).

Αφού το κάνουμε, «βλέπουμε» αμέσως έξι λύσεις. Σ' αυτό το σημείο, όμως, για να κατανοήσουμε το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, θέλω να κάνω μια παύση και να συγκρίνω αυτή την εξίσωση με μια πολύ απλούστερη, που αποτελεί τυπικό θέμα της λυκειακής άλγεβρας, και είναι σε όλους γνωστή.

Η δευτεροβάθμια εξίσωση μίας μεταβλητής

Βρείτε τις τιμές της μεταβλητής X που επαληθεύουν τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$aX^2 + bX + c = 0.$$

Όλοι γνωρίζουμε το τέχνασμα που εφαρμόζεται σε αυτή την περίπτωση —μια ιδέα που προέρχεται από την εποχή των Βαβυλωνίων: όταν θέλουμε να βρούμε τους αριθμούς X που ικανοποιούν αυτή την εξίσωση (και μπορεί να ενδιαφερόμαστε για τις ακέραιες λύσεις, ή για ρητούς αριθμούς X, ή για πραγματικούς ή και μιγαδικούς αριθμούς), «συμπληρώνουμε το τετράγωνο» ξαναγράφοντας την εξίσωση ως

$$a\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=0.$$

Πρόβλημα 2. Επαληθεύστε ότι αυτή η μορφή της εξίσωσης είναι ισοδύναμη με την πρώτη.

Αυτή η νέας μορφής εξίσωση έχει *φανερά* (το πολύ δύο) όμορφες λύσεις που δίνονται από τον τύπο της δευτεροβάθμιας. Βεβαίως, όταν μας ενδιαφέρουν οι ακέραιες ή οι ρητές λύσεις, πρέπει να ελέγξουμε αν οι απαντήσεις που δίνει ο τύπος της δευτεροβάθμιας είναι ακέραιες ή ρητές, κ.ο.κ. Έγραψα «βεβαίως» στην προηγούμενη πρόταση, αλλά θα ήθελα να σας υπενθυμίσω ότι το ζήτημα αν «οι απαντήσεις που δίνονται από τον τύπο της δευτεροβάθμιας είναι ακέραιες ή ρητές» δεν ήταν, ιστορικά τουλάχιστον, τόσο τετριμμένο. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι η εξίσωση $X^2 - 2 = 0$ *δεν έχει* ρητές λύσεις (δηλαδή, το γεγονός ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος) επέφερε κρίση στους πυθαγόρειους μαθηματικούς που πρώτοι το ανακάλυψαν. Το άρρητο της τετραγωνικής ρίζας του 2 θεωρήθηκε τόσο απόκρυφο μυστικό ώστε, σύμφωνα με ένα θρύλο που τον αναφέρει σχολιαστής του Ευκλείδη, αυτός που το αποκάλυψε στους αμύητους ρίχτηκε στη θάλασσα («ναυαγίω περιπεσεῖν»).

Η ιστορία μπορεί να είναι αληθινή, μπορεί και όχι, αλλά ένα πράγμα είναι σίγουρο: η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο *το πολύ λύσεις*, ενώ κάθε πολυωνυμική εξίσωση βαθμού d μιας μεταβλητής X έχει *το πολύ d* λύσεις.[1] Μια από τις συναρπαστικές πλευρές του τύπου του προβλήματος που θέτει η εξίσωση $Y^2 + Y = X^3 - X$ είναι ότι δεν έχουμε καμία ιδέα *για το πλήθος των λύσεων που πρέπει να αναμένουμε!*

Πόσες λύσεις βρήκατε;

Ας ξεκινήσουμε από τις έξι «εύκολες» λύσεις της $Y^2 + Y = X^3 - X$, λύσεις τόσο σεμνές που μπορεί και να τις παραβλέπατε αν δεν τις αποκάλυπτε το γράφημά μας:

$$X = 0,\ Y = 0,$$
$$X = 0,\ Y = -1,$$
$$X = \pm 1,\ Y = 0,$$
$$X = \pm 1,\ Y = -1.$$

Όλες τους μας δίνουν $N = 0$:

$$0 = 0\cdot 1\cdot 2 = 0\cdot 1 = 0\cdot 1\cdot 2 = (-1)\cdot 0.$$

Βρήκατε αυτές τις σχετικά σεμνές απαντήσεις στην πρώτη μας ερώτηση; Θα επιστρέψουμε αργότερα στο ζήτημα που αφορά το πόσο ακριβώς σεμνές είναι αυτές οι λύσεις.

Μήπως ανακαλύψατε επίσης και τις

$$X = 2,\ Y = -3,$$
$$X = 2,\ Y = 2;$$

Αυτές οι λύσεις μάς δίνουν $N = 6$:

$$6 = 1\cdot 2\cdot 3 = (-3)\cdot(-2) = 1\cdot 2\cdot 3 = 2\cdot 3.$$

Επίσης υπάρχουν και οι λύσεις που δίνονται στη διατύπωση του ίδιου του προβλήματος:

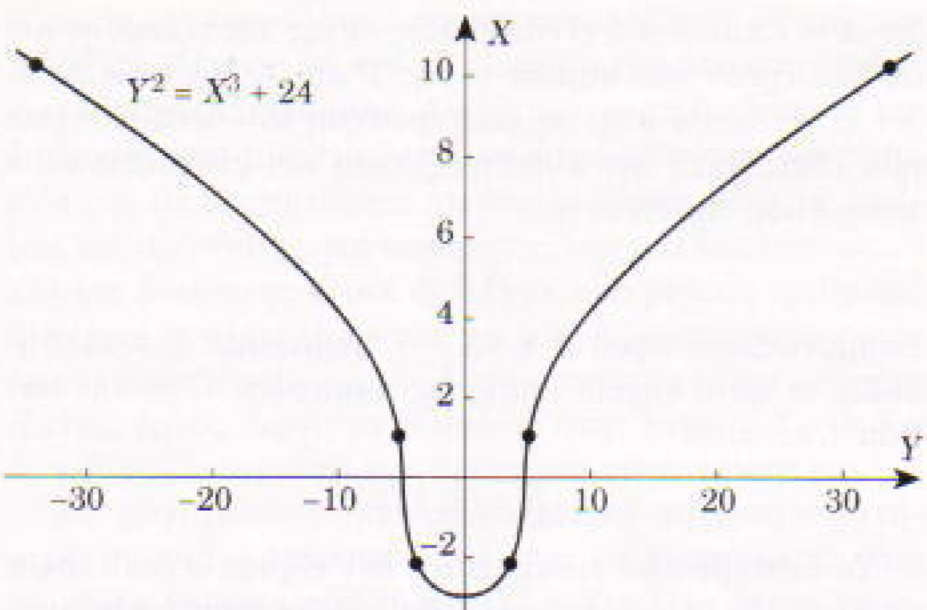
$$X = 6,\ Y = -15,$$
$$X = 6,\ Y = 14.$$

Αυτές οι λύσεις δίνουν $N = 210$:

$$210 = 5\cdot 6\cdot 7 = (-15)\cdot(-14) = 5\cdot 6\cdot 7 = 14\cdot 15.$$

Βρήκατε άλλες; Ας υποθέσουμε ότι δοκιμάσατε όλους τους αριθμούς έως το εκατομμύριο και δεν ανακαλύψατε επιπλέον λύσεις. Θα είστε σίγουροι ότι δεν υπάρχουν

1. Η απόδειξη αυτής της πρότασης έπεται, για παράδειγμα, από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, σύμφωνα με το οποίο κάθε μη σταθερή πολυωνυμική εξίσωση έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα.



Σχήμα 3

άλλες; Αν και το να αισθάνεσαι σίγουρος είναι μια πολύτιμη αρετή που έχει μεγάλη σημασία για τη μαθηματική εργασία, η συμβουλή μου σε ό,τι αφορά αυτό ακριβώς το είδος υπολογισμού είναι να μην είστε σίγουροι ότι έχετε βρει όλες τις λύσεις. Επιτρέψτε μου να γίνω πιο παραστατικός με τη βοήθεια ενός ελαφρά διαφορετικού προβλήματος.

Πρόβλημα. Βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$Y^2 = X^3 + 24.$$

Δηλαδή, βρείτε τα τέλεια τετράγωνα («Y^2») που είναι μεγαλύτερα κατά 24 από έναν τέλειο κύβο («X^3»). Είμαι βέβαιος ότι βρήκατε εύκολα μερικές από τις λύσεις. Για παράδειγμα, τα $X = -2$, $X = 1$ και $X = 10$ μας δίνουν λύσεις αυτού του προβλήματος:

$$4^2 = (-2)^3 + 24,$$
$$5^2 = 1^3 + 24,$$
$$32^2 = 10^3 + 24.$$

Δεν είναι όμως μόνο αυτές: λείπει μία ακόμη τιμή του X που ικανοποιεί την εξίσωση, αλλά αν θελήσουμε να σημειώσουμε αυτήν την τιμή του X στο γράφημα του Σχήματος 3 θα πρέπει να το επεκτείνουμε —από τα 10 εκατοστά που καταλαμβάνει στη σελίδα, στα 800 μέτρα![2]

Μια «βασική συμμετρία»

Το πρώτο πράγμα που μας ελκύει την προσοχή όταν δοθούν οι λύσεις της $Y^2 + Y = X^3 - X$ που ανακαλύψαμε προηγουμένως, είναι ότι σχηματίζουν ζεύγη που το καθένα δίνει την ίδια τιμή για το N. Στην πραγματικότητα, ολόκληρη η καμπύλη C απεικονίζεται στον εαυτό της μέσω της «συμμετρίας»

$$X \to X,\ Y \to -Y - 1$$

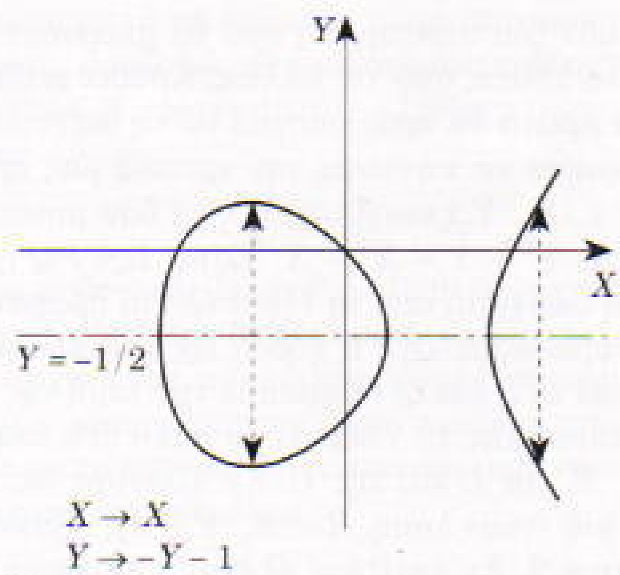
(δείτε το Σχήμα 4). Με άλλα λόγια,

$$P = (X, Y) \leftrightarrow \overline{P} = (X, -Y - 1),$$

και έτσι έχουμε

$$(1, 0) \leftrightarrow (1, -1),$$

2. Παρατηρήστε ότι στο Σχήμα 3 οι άξονες δεν έχουν τη συνηθισμένη τους θέση. Ο άξονας y είναι οριζόντιος και ο x κατακόρυφος.



Σχήμα 4
Η «βασική συμμετρία».

$$(2, 2) \leftrightarrow (2, -3),$$
$$(6, 14) \leftrightarrow (6, -15),$$

και ούτω καθεξής.

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτή τη συμμετρία, μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες λύσεις της εξίσωσής μας ξεκινώντας από τις παλιές: όταν δίνεται η λύση (1, 0), μπορούμε να «ανακαλύψουμε» μέσω της συμμετρίας τη λύση (1, −1), κ.ο.κ. Αυτές οι ανακαλύψεις δεν είναι ιδιαίτερα συναρπαστικές, διότι η συμμετρία $X \to X$, $Y \to -Y - 1$ είναι τελείως στοιχειώδης. Μήπως όμως υπάρχουν άλλες γεωμετρικές ιδιότητες του γραφήματος της εξίσωσής μας που θα μπορέσουμε να τις χρησιμοποιήσουμε ώστε να αναγκάσουμε τις «παλιές λύσεις» να μας οδηγήσουν με κάποιον τρόπο σε νέες;

Συγγραμμικά σημεία

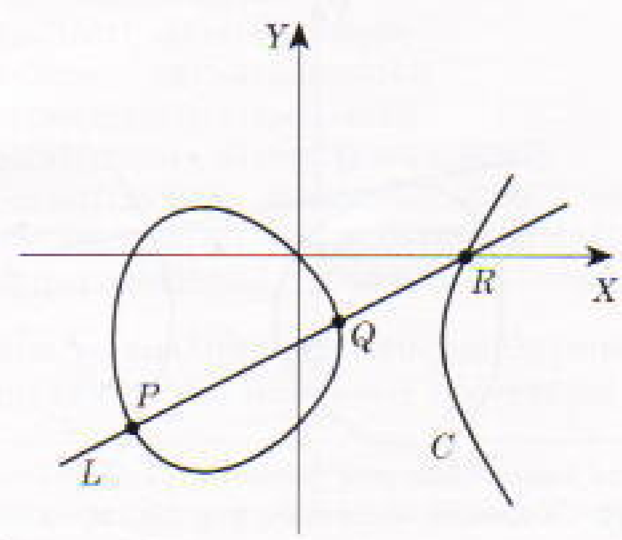
Θέλω τώρα να χρησιμοποιήσω μια γεωμετρική ιδιότητα της καμπύλης C η οποία είναι πολύ λεπτότερη από τη συμμετρία που μόλις εξετάσαμε:

Κάθε ευθεία L του επιπέδου (X, Y) τέμνει την καμπύλη C σε τρία το πολύ σημεία.

Η απόδειξη αυτού του γεγονότος είναι εύκολη: αντικαθιστούμε στην εξίσωσή μας

$$Y^2 + Y = X^3 - X$$

την εξίσωση $Y = mX + b$ της ευθείας L, και επιλύουμε ως προς X. Καταλήγουμε σε ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο της μεταβλητής X το οποίο μπορεί να έχει τρεις το πολύ λύσεις (δείτε το Σχήμα 5)!



Σχήμα 5

Ιδού λοιπόν μια στρατηγική που θα μπορούσε να παραγάγει νέες λύσεις από τις παλιές. Κρύβει μερικές παγίδες, αλλά πρώτα θα προσπαθήσω να τη διατυπώσω. Θα έχουμε ευκαιρία να κάνουμε την κριτική μας αργότερα.

Έστω $P = (X_1, Y_1)$ και $Q = (X_2, Y_2)$ δύο ρητές λύσεις της εξίσωσης $Y^2 + Y = X^3 - X$. Έστω $L = PQ$ η ευθεία γραμμή που διέρχεται από τα P και Q. Για προφανείς λόγους θα ονομάσουμε την L *χορδή της καμπύλης C που διέρχεται από τα P και Q*. Θεωρούμε την τομή της ευθείας L και της καμπύλης C. Υπάρχει το πολύ ένα ακόμη σημείο τομής, R, της L και της C. Αν λύσουμε ως προς R, παίρνουμε μια «νέα» λύση, $R = (X_3, Y_3)$, της εξίσωσής μας.

Πρόβλημα 3. Αν τα P και Q έχουν ακέραιες συντεταγμένες, πρέπει να έχει και το R ακέραιες συντεταγμένες;

Αυτή η στρατηγική μάς δίνει μια νέα λύση, αλλά φαίνεται να εξαρτάται από την ύπαρξη *δύο διαφορετικών λύσεων P και Q* ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να φέρουμε τη χορδή L που διέρχεται από αυτές.

Ερώτηση. Χωρίς να διαβάσετε παρακάτω, μπορείτε να σκεφτείτε έναν «φυσικό» τρόπο επέκτασης αυτής της στρατηγικής «εντοπισμού του τρίτου σημείου τομής», έτσι ώστε να αποδίδει ακόμη και όταν τα *«δύο σημεία P και Q συμπίπτουν»*;

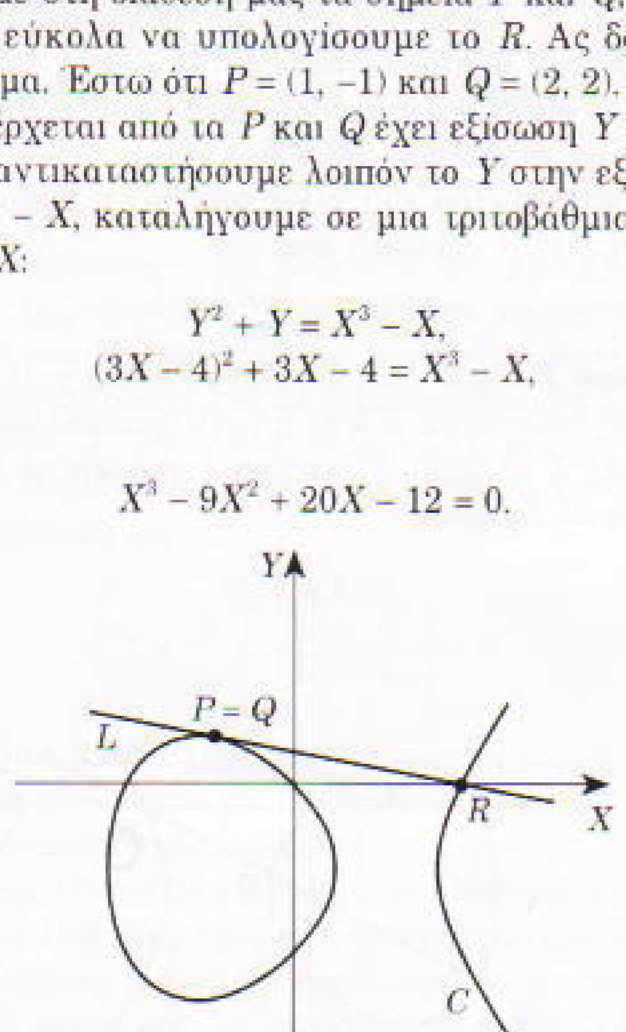
Με λίγη σκέψη μπορούμε να δούμε ότι πραγματικά υπάρχει τρόπος να επεκτείνουμε τη στρατηγική μας όταν έχουμε ένα σημείο «$P = Q$»: Θα θεωρήσουμε απλώς ότι L είναι η *εφαπτόμενη* της C στο σημείο P (Σχήμα 6). Παρεμπιπτόντως, αυτή η στρατηγική δημιουργίας νέων λύσεων με βάση τις παλιές αναφέρεται μερικές φορές ως *διαδικασία χορδής και εφαπτομένης*.

Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα αυτή τη στρατηγική. Αν έχουμε στη διάθεσή μας τα σημεία P και Q, μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε το R. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι $P = (1, -1)$ και $Q = (2, 2)$. Η ευθεία L που διέρχεται από τα P και Q έχει εξίσωση $Y + 1 = 3(X - 1)$. Αν αντικαταστήσουμε λοιπόν το Y στην εξίσωση $Y^2 + Y = X^3 - X$, καταλήγουμε σε μια τριτοβάθμια εξίσωση ως προς X:

$$Y^2 + Y = X^3 - X,$$
$$(3X - 4)^2 + 3X - 4 = X^3 - X,$$

ή

$$X^3 - 9X^2 + 20X - 12 = 0.$$



Σχήμα 6
Αν $P = Q$, τότε πρέπει να επιλέξουμε την L εφαπτόμενη της C στο P.

Τα $X = 1$ και $X = 2$ είναι λύσεις αυτής της εξίσωσης και αντιστοιχούν στα σημεία τομής P και Q της ευθείας L. Αν απαντήσατε στην αρχική ερώτηση του άρθρου, έχετε ήδη λύσει αυτή την κυβική εξίσωση και γνωρίζετε ότι η *τρίτη* λύση της είναι η

$$X = 6.$$

Επομένως, και αφού $Y = 3X - 4$, παίρνουμε $Y = 14$. Δηλαδή, το τρίτο σημείο τομής της καμπύλης C με την ευθεία L είναι το

$$R = (6, 14).$$

Το δίδαγμα εδώ είναι ότι αν *δεν* είχαμε ανακαλύψει τη λύση (6, 14) «μόνοι μας», θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε στην ύπαρξή της με τη βοήθεια αυτής της στρατηγικής... με την προϋπόθεση πως είχαμε βρει προηγουμένως τις λύσεις (1, −1) και (2, 2). Για να το διατυπώσουμε διαφορετικά, η διαδικασία χορδής και εφαπτομένης είναι μια στρατηγική που αναγκάζει τις «παλιές» λύσεις να «δουλέψουν για μας» και πιθανώς να δημιουργήσουν νέες λύσεις.

Υπάρχουν όμως κάποιες παγίδες σ' αυτή τη στρατηγική. Η πρώτη, μικρής σημασίας, είναι ότι *για μερικές επιλογές των P και Q δεν υπάρχει τρίτο σημείο τομής.* Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η ευθεία L είναι κατακόρυφη ή, ισοδύναμα, αν οι X συντεταγμένες των σημείων P και Q είναι ίσες. Αυτό είναι το ίδιο με το να πούμε ότι τα P και Q είναι συμμετρικά σημεία της καμπύλης C.

Η δεύτερη παγίδα, όμως, ανοίγει ένα ολόκληρο καινούργιο ζήτημα: *μερικές φορές το σημείο R δεν έχει ακέραιες συντεταγμένες αλλά ρητές.* Δηλαδή, μερικές φορές η μία ή και οι δύο συντεταγμένες της νέας λύσης είναι κλάσμα και όχι ακέραιος (όπως θα θέλαμε). Δεν χρειάζεται να προσπαθήσετε πολύ για να συναντήσετε μια τέτοια περίπτωση. Για παράδειγμα, ας πάρουμε $P = (1, 0)$ και $Q = (6, 14)$. Τότε, η ευθεία που διέρχεται από τα P και Q έχει την άβολη εξίσωση $5Y = 14(X - 1)$, που μας δίνει παρονομαστή 5 όταν επιλύσουμε ως προς Y:

$$Y = \frac{14}{5}(X - 1)$$

Αν συνεχίσουμε όπως προηγουμένως και καταλήξουμε στο τρίτο σημείο τομής των L και C, θα βρούμε ότι αυτό το σημείο R είναι

$$R = \left(\frac{21}{25}, -\frac{56}{125}\right)$$

Με δυο λόγια, η στρατηγική μας δεν διατηρεί το *ακέραιο* των λύσεων, διατηρεί όμως το *ρητό*. Ας εξετάσουμε τα επιχειρήματά μας για να διαπιστώσουμε αν το R έχει πράγματι ρητές συντεταγμένες, όταν είναι ρητές οι συντεταγμένες των P και Q. Πώς μπορεί αλήθεια να προκύψει κάποιος άρρητος; Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα P και Q και το τμήμα που αποτέμνει στον άξονα Y είναι ρητοί (φυσικά, εφόσον η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη). Μπορούμε επομένως να εκφράσουμε την ευθεία με τη μορφή $Y = mX + b$, και να αντικαταστήσουμε αυτή την παράσταση στην εξίσωση της καμπύλης ώστε να καταλήξουμε σε μια τριτοβάθμια εξίσωση ως προς X. Έχουμε ήδη δύο (ρητές) λύσεις αυτής της εξίσωσης. Αν εξετάσετε τη διαδικασία της διαίρεσης που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τρίτη ρίζα της, θα διαπιστώσετε ότι περιλαμβάνει μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Όταν ξεκινάμε από ρητούς αριθμούς, αυτές οι πράξεις μπορούν να μας δώσουν μόνο ρητές απαντήσεις. Επομένως, η X συντεταγμένη του σημείου R είναι ρητός. Αφού το R ανήκει στην ευθεία $Y = mX + b$, η Y συντεταγμένη του πρέπει να είναι επίσης ρητή.

Αν χρησιμοποιήσουμε συστηματικά αυτή τη στρατηγική, θα αναγκαστούμε περιέργως να θεωρήσουμε όλες τις *ρητές λύσεις* της εξίσωσης $Y^2 + Y = X^3 - X$, και τις ακέραιες λύσεις (τις οποίες αναζητούσαμε αρχικά!) να τις αντιμετωπίσουμε στη συνέχεια ως ένα ιδιαίτερο υποσύνολο των ρητών. Αυτό μπορεί να το εκλάβετε σαν βήμα οπισθοχώρησης, αφού, κατά πάσαν πιθανότητα, υπάρχουν πολύ περισσότερες ρητές λύσεις παρά ακέραιες, και συνεπώς η δουλειά μας θα είναι πολύ πολύ σκληρότερη. Θα ακολουθήσουμε αυτή την πορεία, για να δούμε πού θα οδηγηθούμε. Ως ρητή λύση P της εξίσωσης $Y^2 + Y = X^3 - X$ θα εννοούμε απλώς ένα ζεύγος ρητών αριθμών $P = (x, y)$ που ικανοποιούν την εξίσωση. Αν προτιμήσουμε να σκεφτόμαστε γεωμετρικά, μπορούμε επίσης να ονομάζουμε το P *ρητό σημείο της* C.

Ένα θεώρημα

Ιδού η εντυπωσιακή απάντηση στο ερώτημα «πόσες είναι όλες οι ρητές λύσεις της $Y^2 + Y = X^3 - X$;». Υπάρχουν άπειρες ρητές λύσεις. Μην απελπίζεστε όμως! Το θαύμα εδώ είναι ότι μπορείτε να βρείτε *όλες* τις ρητές λύσεις αν ξεκινήσετε από τη λύση $P = (0, 0)$ και συνεχίσετε να παράγετε «νέες λύσεις από τις παλιές», εφαρμόζοντας συστηματικά τη βασική συμμετρία $P \to P$ και τη διαδικασία χορδής και εφαπτομένης σε κάθε ζεύγος σημείων που προκύπτει στην πορεία.

Σύμφωνα με τον βασιλιά Ληρ, «τίποτε δεν προκύπτει από το τίποτε», αλλά στην περίπτωση του προβλήματός μας η σεμνή «διπλά μηδενική» λύση (0, 0) της εξίσωσης $Y^2 + Y = X^3 - X$ *παράγει όλες τις άπειρου πλήθους ρητές λύσεις* μέσω της διαδικασίας χορδής και εφαπτομένης. Δεν γνωρίζω καλύτερο ή πιο ευχάριστο τρόπο για να αντιληφθείτε τα μαθηματικά που βρίσκονται πίσω από τη διαδικασία χορδής και εφαπτομένης και για να μάθετε πόσο αποδοτική είναι αυτή η μέθοδος στην παραγωγή ρητών λύσεων μιας κυβικής εξίσωσης δύο μεταβλητών, παρά την ανάγνωση του βιβλίου *Rational Points on Elliptic Curves* («Ρητά σημεία σε ελλειπτικές καμπύλες») των J. Silverman και J. Tate (Springer-Verlag, 1992).

Ίσως πιστεύετε ότι η σταθερή εφαρμογή και επανάληψη της διαδικασίας χορδής και εφαπτομένης στις λύσεις μιας κυβικής εξίσωσης δύο μεταβλητών θα οδηγήσει σ' έναν φρικτό κυκεώνα λύσεων που θα συσσωρεύονται ανοργάνωτα καθώς η μέθοδός μας θα τους παράγει με ζήλο μαθητευόμενου μάγου. Όμως όχι: το τελικό αποτέλεσμα είναι εκπληκτικά «οργανωμένο» —ένα μικρό θαύμα! Επιστρέφοντας στην εξίσωση $Y^2 + Y = X^3 - X$ θα διατυπώσω αυτή τη διαδικασία ως θεώρημα (η απόδειξη του οποίου, ομολογώ, *δεν είναι* στοιχειώδης!).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Υπάρχει άπειρο πλήθος ρητών λύσεων της εξίσωσης*

$$Y^2 + Y = X^3 - X.$$

Η «διπλά μηδενική» λύση $P_1 = (0, 0)$ παράγει όλες τις ρητές λύσεις μέσω της διαδικασίας χορδής και εφαπτομένης. Υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος «κατάταξης» όλων αυτών των ρητών λύσεων μέσω μιας ένα προς ένα αντιστοιχίας με το σύνολο όλων των μη μηδενικών (θετικών και αρνητικών) ακεραίων

$$1 \leftrightarrow P_1 = (0, 0)$$

$$\vdots$$

$$n \leftrightarrow P_n = (x_n, y_n)$$

όπου αυτή η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία έχει τις εξής ιδιότητες:

Α. Το P_n αντιστοιχεί στο P_{-n} μέσω της «βασικής συμμετρίας». Δηλαδή

$$x_n = x_{-n} \quad \textit{και} \quad y_n = -y_{-n} - 1.$$

Β. Τρία ρητά σημεία P_n, P_m και P_r (με δείκτες τρεις διαφορετικούς μη μηδενικούς ακέραιους n, m και r) ανήκουν στην ίδια ευθεία L του επιπέδου (X, Y) αν και μόνο αν $n + m + r = 0$.

Ιδού η αρχή αυτού του καταλόγου για θετικές τιμές του n (για να πάρετε τον κατάλογο με τις αντίστοιχες αρνητικές τιμές, απλώς θα εφαρμόσετε τη «βασική συμμετρία» —δηλαδή, θα αντικαταστήσετε την Y συντεταγμένη με το $-Y - 1$):

P_1 = [0, 0]
P_2 = [1, 0]
P_3 = [−1, −1]
P_4 = [2, −3]
P_5 = [1/4, −5/8]
P_6 = [6, 14]
P_7 = [−5/9, 8/27]
P_8 = [21/25, −69/125]
P_9 = [−20/49, −435/343]
P_{10} = [161/16, −2065/64]
P_{11} = [116/529, −3612/12167]
P_{12} = [1357/841, 28888/24389]
P_{13} = [−3741/3481, −43355/205379]
P_{14} = [18526/16641, −2616119/2146689]
P_{15} = [8385/98596, −28076979/30959144]
P_{16} = [480106/4225, 332513754/274625]
P_{17} = [−239785/2337841, 331948240/3574558889]
P_{18} = [12551561/13608721, −8280062505/50202571769]
P_{19} = [−59997896/67387681, −641260644409/553185473329]
P_{20} = [683916417/264517696, −18784454671297/4302115807744]

Μπορείτε να επαληθεύσετε τους υπολογισμούς μου,[3] διότι υπάρχουν πολλοί θαυμαστοί περιορισμοί σ' αυτόν

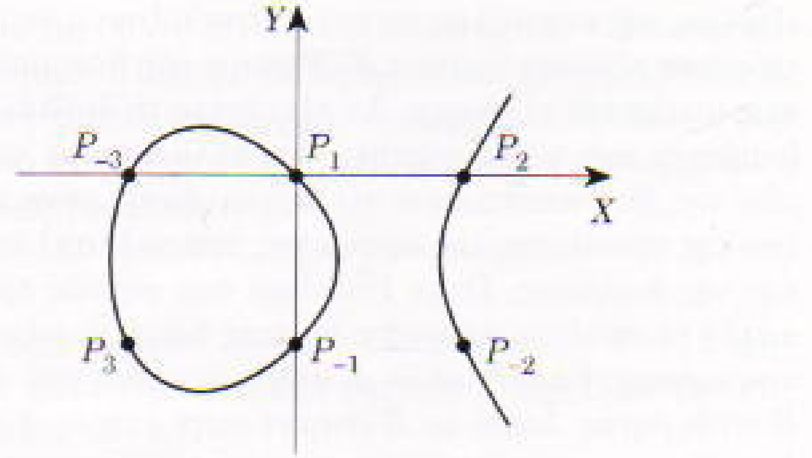
3. Ομολογώ ότι δεν έκανα αυτούς τους υπολογισμούς με το χέρι. Για να καταρτίσω τον πίνακα χρησιμοποίησα το ιδιαίτερα εξυπηρετικό πρόγραμμα PARI.

τον κατάλογο αριθμών: είναι όλοι λύσεις της $Y^2 + Y = X^3 - X$· επίσης, αν πάρετε οποιοδήποτε ζεύγος διαφορετικών ακεραίων n, m, τότε, βάσει του μέρους Β του προηγούμενου θεωρήματος, τα P_n, P_m και $P_{-(n+m)}$ ανήκουν στην ίδια ευθεία του επιπέδου (X, Y). Για παράδειγμα, αφού $3 + 5 + (-8) = 0$, τα τρία σημεία $P_3 = (-1, -1)$, $P_5 = (1/4, -5/8)$, $P_{-8} = (21/25, -56/125)$ πρέπει να είναι συγγραμμικά. (Και καλά θα κάνουν να είναι, επειδή διαφορετικά υπάρχει λάθος στον κατάλογό μου!)

Θα ήθελα τώρα να διακόψουμε για λίγο και να ρίξουμε μια ματιά στον κατάλογο των λύσεων P_n. Αν είμαστε τόσο προσεκτικοί όσο όταν εξετάζουμε τις απαντήσεις που μας δίνει κάποιος στα ερωτήματά μας, τότε υπάρχει κάτι σ' αυτό τον κατάλογο —το γενικό του σχήμα— που είναι αδύνατον να μας διαφύγει. Μπορείτε να διακρίνετε την καμπύλη μορφή της παραβολής που κρύβεται σ' αυτόν; Για να γίνει εμφανέστερη, ας κάνουμε περισσότερο συμπαγή τα δεδομένα μας και ας θεωρήσουμε τον επόμενο, ελαφρά εκτενέστερο κατάλογο, όπου δίνω μόνο τις απόλυτες τιμές των αριθμητών των X συντεταγμένων των σημείων P_n για τις περιττές τιμές του n, αρχίζοντας από το $n = 9$:

20
116
3741
8385
239785
59997896
1849037896
270896443865
16683000076735
2786836257692691
314892968128574031б
34211575692760792742O
280251129922563291422645
804287518035141565236193151
743043134297049053529252783151
3239336802390544740129153150480400
2613390252458014344369424012613679600
12518737094671239826683031943583152550351
596929565407758846078157850477988229836340351
2385858586329829631608077553938139264431352010155
56186054018434753527022752382280291882048809582857380
2389750519110914018630990937660635435269956452770356625916
65008789078766455275600750711306493793995920750429546912218291
8633815035886806713921361263456572740784038065917674315913775417535
432767834389488863125880304044414443134065755534366254416432880924019065
593076045469642658948956761739794324482729234687114512318727773285876671389

Μπορείτε τώρα να δείτε να σχηματίζεται καθαρά η μορφή της παραβολής από τα ψηφία των υπολογισμών μας. Αυτή η εικόνα αποτελεί μια έντονη ένδειξη πως ο ρυθμός αύξησης του μεγέθους των λύσεών μας ακολουθεί ένα κανονικό σχήμα. Μπορούμε να το αποδείξουμε αυτό; Μπορούμε να «διερευνήσουμε τις απαντήσεις μας» τόσο επισταμένα ώστε να καταλήξουμε (ουρανοί, βοηθήστε μας!) στις εξισώσεις αυτής της παραβολής; Αν το πετύχουμε, θα οδηγηθούμε σε μια ακόμη βαθύτερη κατανόηση της αριθμητικής που βρίσκεται πίσω από το αρχικό μας ερώτημα; Η απάντηση σε όλες αυτές τις ερωτήσεις είναι καταφατική, και προσπαθώντας να τις αντιμετωπίσετε θα έρθετε σε στενή επαφή με μεγάλο μέρος της συναρπαστικής εργασίας που έχει γίνει στη θεωρία αριθ-



Σχήμα 7

μών κατά τη διάρκεια του δεύτερου μισού του αιώνα μας![*]

Ρητές και ακέραιες λύσεις

Καταλήξαμε να περιπλανιόμαστε στην εκθαμβωτική άπειρη περιοχή *ρητών λύσεων* της εξίσωσής μας $Y^2 + Y = X^3 - X$, μολονότι στην αρχή της έρευνάς μας σκοπεύαμε να μελετήσουμε μόνο τις *ακέραιες λύσεις*. Αυτό το κάναμε διότι οι ρητές λύσεις του προβλήματος, παρότι άπειρες, έχουν μια συγκεκριμένη κανονική δομή που δεν είναι φανερή όταν επικεντρωνόμαστε μόνο στις ακέραιες λύσεις. Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε και να επιλέξουμε τα κοσμήματα —τις ακέραιες λύσεις— από τον άπειρο κατάλογό μας; *Ποια είναι, αλήθεια, η απάντηση στο αρχικό ερώτημα*; Δηλαδή, ποιοι είναι οι αριθμοί N που μπορούν να γραφούν ως γινόμενο δύο και τριών διαδοχικών ακεραίων;

Η απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι ναι. Για τον Mordell, πριν από πενήντα χρόνια, ήταν φανερό ότι μπορούμε πραγματικά να βρούμε όλες τις ακέραιες λύσεις, και υπάρχει ένα κομψός τρόπος να το πετύχουμε «επιλέγοντάς τες» μέσα από το άπειρο πλήθος των ρητών λύσεων. Η απάντηση στο αρχικό μας ερώτημα είναι ότι το $N = 210$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο καθώς και τριών διαδοχικών ακεραίων.

Παρότι τα βήματα απόδειξης της τελευταίας πρότασης είναι πιο πολύπλοκα από τα μαθηματικά του υπόλοιπου άρθρου, αισθάνομαι υποχρεωμένος να παρουσιάσω τον βασικό σκελετό των επιχειρημάτων. Για να λύσουμε το πρόβλημά μας, χρειάζεται να κάνουμε τρία πράγματα.[4] Ας επιστρέψουμε στο γράφημα της εξίσωσής μας στο επίπεδο (X, Y), που είναι διασπασμένο σε δύο τμήματα: το οβάλ στα αριστερά και το δεξιό τμήμα «που εκτείνεται από τη σελίδα ώς το άπειρο» (Σχήμα 7).

(1). Πρώτα επιβεβαιώνουμε ότι τα μόνα ακέραια σημεία στο οβάλ τμήμα είναι τα τέσσερα ακέραια σημεία $P_1 = (0, 0)$, $P_{-1} = (0, -1)$, $P_3 = (-1, -1)$ και $P_{-3} = (-1, 0)$.

(2). Επαληθεύουμε ότι τα σημεία P_n με περιττό δείκτη

---

* Βλ. το άρθρο «Το τελευταίο θεώρημα του Fermat» στο παρόν τεύχος.

4. Το πρώτο από αυτά μπορείτε να προσπαθήσετε να το αποδείξετε αμέσως τώρα. Το δεύτερο και το τρίτο θα δοκιμάσετε φυσιολογικά να το αντιμετωπίσετε όταν θα διαβάζετε το *Rational Points on Elliptic Curves* των Silverman και Tate.

n ανήκουν στο οβάλ τμήμα, ενώ τα σημεία P_n με άρτιο δείκτη n ανήκουν στο δεξιό τμήμα, που επεκτείνεται έως το άπειρο.

(3). Επαληθεύουμε ότι αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί τους παρονομαστές των X και Y συντεταγμένων των P_n, τότε διαιρεί επίσης τους παρονομαστές των X και Y συντεταγμένων των P_{2n}.

Ας υποθέσουμε ότι έχετε αντιμετωπίσει αυτά τα προβλήματα και ότι γνωρίζετε το θεώρημα που διατυπώσαμε νωρίτερα και τον κατάλογο των P_n για μικρές τιμές του n. Εξοπλισμένοι με όλα αυτά τα εφόδια είστε σε θέση να αποδείξετε το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Οι μοναδικοί αριθμοί N που είναι γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων καθώς και γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι οι $N = 0$, 6 και 210.*

Απόδειξη. Θα αναζητήσουμε στον άπειρο κατάλογο P_m των ρητών λύσεων της εξίσωσης $Y^2 + Y = X^3 - X$ αυτές που είναι ακέραιες —δηλαδή, όσες έχουν την ιδιότητα ο παρονομαστής και της X και της Y συντεταγμένης τους να μην είναι μεγαλύτερος του 1. Αν μια λύση P_m είναι ακέραιη, τότε η εικόνα της μέσω της «βασικής συμμετρίας», P_{-m}, είναι επίσης ακέραιη, επομένως κατά την αναζήτησή μας μπορούμε να περιοριστούμε απλώς στις θετικές τιμές του m για τις οποίες η P_m είναι ακέραιη. Γράφουμε $m = 2^e \cdot m_0$, όπου m_0 είναι περιττό και $e \geq 0$. Χρησιμοποιούμε το (3) για να δείξουμε ότι αν το σημείο P_m έχει ακέραιες συντεταγμένες (X, Y) τότε για κάθε $j = e - 1, e - 2, \ldots, 0$, το σημείο $P_{2^j \cdot m_0}$ έχει επίσης ακέραιες συντεταγμένες. Αφού το m_0 είναι περιττό, από το (2) γνωρίζουμε ότι το m_0 είναι είτε 1 είτε 3. Ας εξετάσουμε τώρα ξεχωριστά τις περιπτώσεις $m_0 = 1$ και $m_0 = 3$.

(α) Αν $m_0 = 1$, τότε το m είναι 2^e, και είδαμε προηγουμένως ότι το P_{2^j} έχει ακέραιες συντεταγμένες (X, Y) για κάθε $j \leq e$. Από τον κατάλογό μας, όμως, βλέπουμε πως το

$$P_{2^3} = P_8 = \left(\frac{21}{25}, -\frac{69}{125}\right)$$

δεν έχει ακέραιες συντεταγμένες (X, Y). Συνεπώς, $e \leq 2$, και το m είναι 1, 2 ή 4.

(β) Αν $m_0 = 3$, τότε χρησιμοποιούμε παρόμοια επιχειρηματολογία και παρατηρούμε ότι το

$$P_{2^2 \cdot 3} = P_{12} = \left(\frac{1357}{841}, \frac{28888}{24389}\right)$$

δεν είναι ακέραιο. Αυτό σημαίνει ότι το m είναι 3 ή 6. ◙

Ο **Barry Mazur** είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ. Το παρόν άρθρο βασίστηκε σε μια διάλεξη που έδωσε την άνοιξη του 1996 στο πλαίσιο της σειράς διαλέξεων Arnold Ross, που διεξήχθη με τη χορηγία της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας (AMS).

Ο συγγραφέας αφιερώνει το άρθρο στους Grace και Nick.


TISHKOV

Η δύναμη της ομοιότητας

«Έρχονται ρυθμικά οι καμήλες απ' την έρημο (...) με νωχελικό βάδισμα φεύγουν φορτωμένες οι καμήλες για την έρημο, υποταχτικές, ανυποψίαστες —καμιάν άλλη έρημο δεν έχουν φανταστεί.»

—Δημήτρης Δούκαρης

S.R. Filonovich

Η «ΑΝΑΛΟΓΙΑ» ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥΧΡΗΣΙμοποιημένη λέξη. Την έχουμε συνηθίσει τόσο πολύ ώστε μερικές φορές δεν δίνουμε ιδιαίτερη προσοχή στη σημασία της. Αν ανατρέξουμε σε κάποιο λεξικό, ανάμεσα στις διάφορες σημασίες της θα συναντήσουμε και την ακόλουθη: «ομοιότητα σε μερικά επί μέρους χαρακτηριστικά ανάμεσα σε πράγματα ανόμοια από άλλη άποψη». Χρησιμοποιώντας αναλογίες, μπορούμε να αποκτήσουμε γνώσεις για κάποιο αντικείμενο μελετώντας ένα άλλο, διαφορετικό αντικείμενο.

Οι αναλογίες παίζουν σημαντικό ρόλο στη φυσική. Με τη βοήθεια της αναλογίας μπορούμε να οδηγηθούμε σε σημαντικά συμπεράσματα χωρίς αυστηρούς και επίπονους υπολογισμούς. Για παράδειγμα, μια αναλογία ανάμεσα στον ήχο και το φως αποδείχτηκε σημαντική για την ανάπτυξη της κυματικής θεωρίας του φωτός στις αρχές του 19ου αιώνα. Στη δεκαετία του 1920 μια ονομαστή αναλογία οπτικής και μηχανικής διευκόλυνε σε μεγάλο βαθμό τη δημιουργία της κβαντικής μηχανικής.

Οι αναλογίες συχνά μπορούν να σας βοηθήσουν στη μελέτη της φυσικής στο σχολείο. Αλλά κάθε αναλογία έχει και τις αδυναμίες της: αν επιμείνουμε σ' αυτήν πέρα από ορισμένα όρια, μπορεί να καταλήξουμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Η διαίσθηση που αναπτύσσουμε λύνοντας ασκήσεις φυσικής θα μας βοηθήσει να χρησιμοποιήσουμε σωστά το ισχυρό εργαλείο της αναλογίας. Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε μερικά παραδείγματα, μέσω των οποίων θα κατανοήσουμε πώς πρέπει να χρησιμοποιούμε τις αναλογίες στη φυσική.

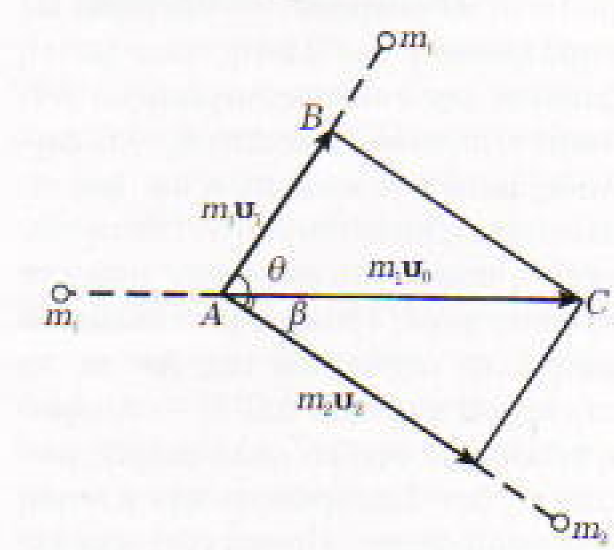
Ένα πρόβλημα για μαθητές

Στα βιβλία του λυκείου συναντάμε συχνά προβλήματα που σχετίζονται με τη σύγκρουση σφαιρών. Τα εν λόγω προβλήματα είναι ιδιαίτερα δημοφιλή στη σχολική ύλη διότι δίνουν την ευκαιρία για γνωριμία και εμπέδωση των θεμελιωδών νόμων της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής.

Η μελέτη των κρούσεων αποτελεί, σε κάποιο βαθμό, ένδειξη σεβασμού προς την παράδοση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα βρέθηκε στο επίκεντρο της προσοχής του Καρτέσιου και του Huygens κατά τον 17ο αιώνα, ενώ τον 19ο αιώνα ο γάλλος φυσικός Gustave-Gaspard Coriolis εξέδωσε το έργο του *Η μαθηματική θεωρία των φαινομένων του μπιλιάρδου*, το οποίο έγινε κλασικό. Δεν πρέπει να πιστεύουμε, όμως, ότι στην εποχή μας η αξία του προβλήματος της κρούσης των σφαιρών περιορίζεται απλώς και μόνο στο γεγονός ότι προσφέρεται για την επίδειξη των φυσικών νόμων. Αποδεικνύεται ότι το μοντέλο της κρούσης συνδέεται στενά με τα προβλήματα της μοντέρνας φυσικής. Για να δούμε πώς, ας αντιμετωπίσουμε ένα πολύ απλό πρόβλημα.

Πρόβλημα. Μια σφαίρα μάζας m_1 που κινείται με ταχύτητα υ_0 χτυπά μια ακίνητη σφαίρα μάζας m_2. Η κρούση είναι ελαστική, και οι δύο σφαίρες απομακρύνονται έπειτα από αυτήν. Να υπολογιστεί η σχετική μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας m_2 μετά την κρούση, αν αγνοήσουμε την περιστροφή των σφαιρών.

Λύση. Ας εξετάσουμε το γενικό πρόβλημα μιας μη μετωπικής κρούσης, κατά την οποία οι ταχύτητες των



Σχήμα 1

Διάγραμμα ορμών για μια μη μετωπική κρούση δύο σφαιρών.

Εικονογράφηση: Leonid Tishkov

σφαιρών μετά την κρούση σχηματίζουν γωνίες θ και β με την αρχική διεύθυνση της $\mathbf{u}_0$. Το Σχήμα 1 δείχνει το νόμο της διατήρησης της γραμμικής ορμής για την περίπτωση της υπό μελέτη ελαστικής κρούσης. Από τον εν λόγω νόμο έπεται ότι:

$$(m_2 \upsilon_2)^2 = (m_1 \upsilon_1)^2 + (m_1 \upsilon_0)^2 - 2m_1^2 \upsilon_1 \upsilon_0 \text{συν}\theta. \qquad (1)$$

Αφού η κρούση είναι ελαστική, ο νόμος διατήρησης της ενέργειας μας δίνει:

$$\frac{m_1 \upsilon_0^2}{2} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2}. \qquad (2)$$

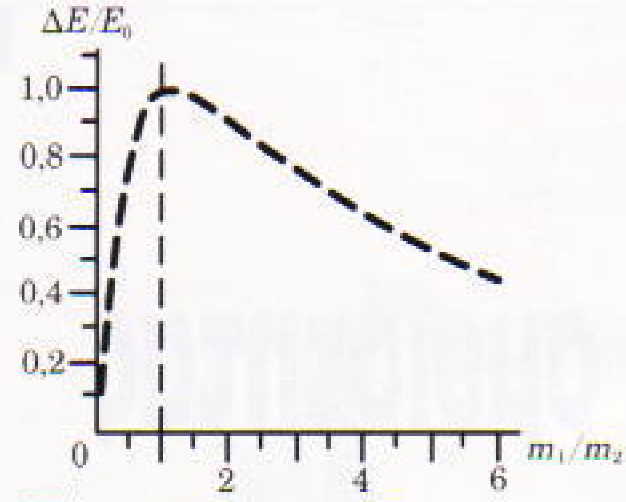
Από τις εξισώσεις (1) και (2) μπορούμε να προσδιορίσουμε την υ_1 για κάθε δεδομένη γωνία σκέδασης θ. Δεν θα παραθέσουμε εδώ τον γενικό τύπο (μπορείτε να τον εξαγάγετε μόνοι σας). Ας γράψουμε μόνο την απάντηση για την ειδική περίπτωση μιας μετωπικής κρούσης κατά την οποία οι σφαίρες, μετά τη σύγκρουση, κινούνται κατά μήκος της ευθείας AC:

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_0.$$

Επιπλέον, θα γράψουμε την έκφραση για τη σχετική μεταβολή της κινητικής ενέργειας της προσπίπτουσας σφαίρας m_1:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon_1^2}{\upsilon_0^2} = \frac{4\, m_1/m_2}{\left(1 + m_1/m_2\right)^2} \qquad (3)$$

Δεν υπάρχει τίποτε το ιδιαίτερα περίεργο στην παραπάνω έκφραση. (Μερικοί από σας ίσως τη βρήκατε ήδη μόνοι σας.) Θα τη μελετήσουμε, ωστόσο, κάπως λεπτομερειακά. (Αυτό μάλιστα θα μπορούσε να θεωρηθεί ως επαλήθευση της λύσης μας με τη βοήθεια της «κοινής λογικής».) Αν, λοιπόν, $m_1 << m_2$, τότε $\Delta E/E_0 \to 0$. Δηλαδή, μετά την κρούση, η σφαίρα m_1 κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη που κινούνταν πριν από την κρούση, χωρίς όμως να μεταβληθεί το μέτρο της ταχύτητάς της. Αν $m_1 >> m_2$, ισχύει και πάλι $\Delta E/E_0 \to 0$, αφού η κρούση με σφαίρα πολύ μικρής μάζας m_2 δεν διαταράσσει την κίνηση της σφαίρας m_1. Προφανώς, για τις ενδιάμεσες τιμές του λόγου m_1/m_2, το $\Delta E/E_0 \neq 0$. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο λόγος $\Delta E/E_0$



Σχήμα 2

Σχετική μεταβολή της κινητικής ενέργειας σφαίρας σε μετωπική ελαστική κρούση ως συνάρτηση του λόγου των μαζών των δύο σφαιρών.

λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του για $m_1/m_2 = 1$ (Σχήμα 2).

Αν χρησιμοποιήσουμε αυστηρά επιστημονική ορολογία, μπορούμε να πούμε ότι η ενέργεια της κινούμενης σφαίρας μεταφέρεται κατά τον αποτελεσματικότερο τρόπο όταν προσκρούει σε ακίνητη σφαίρα ίδιας μάζας. Αφού λύσαμε το πρόβλημα (αγνοώντας την περιστροφή των σφαιρών και την εσωτερική δομή τους), είμαστε πλέον σε θέση να εφαρμόσουμε τα συμπεράσματά μας σε φαινόμενα που εμπίπτουν σε άλλους τομείς της φυσικής.

Χρήσιμες απώλειες

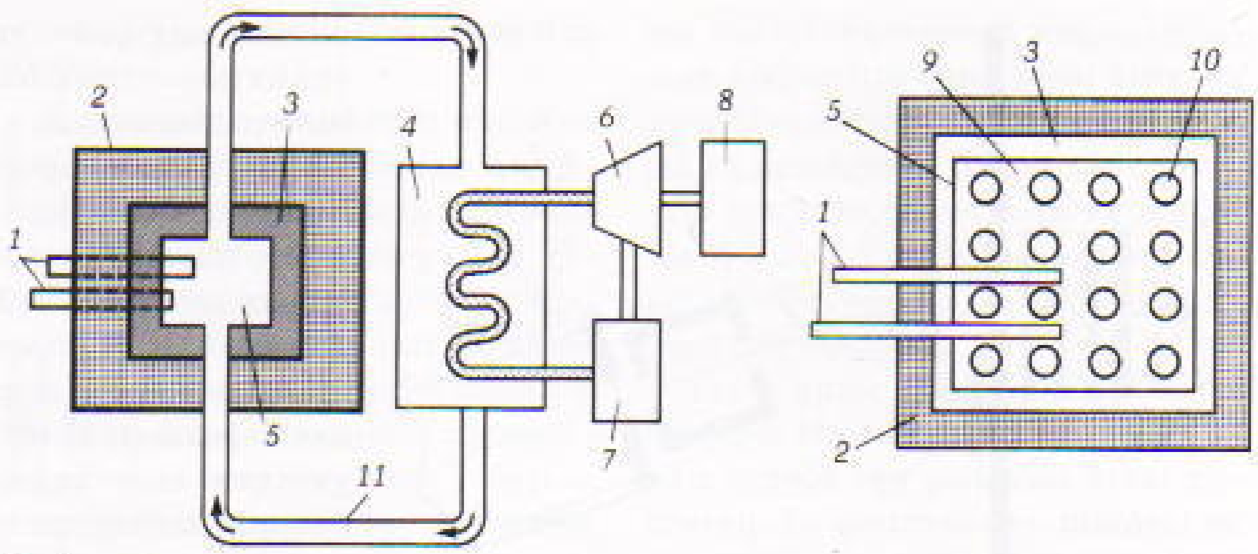
Κατά τη δεκαετία του 1940 η αλυσιδωτή αντίδραση της πυρηνικής σχάσης παρείχε ικανούς λόγους ώστε να επανέλθουν οι φυσικοί στο πρόβλημα των συγκρουόμενων σφαιρών. Μπορούμε να περιγράψουμε την ουσία του προβλήματος ως εξής:

Όταν ένας πυρήνας ουρανίου απορροφά ένα νετρόνιο, διασπάται σε δύο σχεδόν ίσα μέρη, ενώ παράλληλα απελευθερώνεται τεράστια ποσότητα ενέργειας. Επίσης, εκπέμπονται νέα νετρόνια. Κατά μέσο όρο τα εν λόγω νετρόνια είναι περισσότερα από ένα, επομένως συντελείται «πολλαπλασιασμός» νετρονίων. Τα νετρόνια που παράγονται κατά την αντίδραση σχάσης μπορούν να απορροφηθούν από άλλους πυρήνες ουρανίου, με αποτέλεσμα να προκληθούν νέες αντιδράσεις σχάσης, κ.ο.κ. Ο αριθμός των νετρονίων αυξάνεται, και παράλληλα αυξάνεται το πλήθος των πυρήνων που διασπώνται. Η συγκεκριμένη διαδικασία ονομάζεται αλυσιδωτή αντίδραση, και η ενέργεια που απελευθερώνεται μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάφορους σκοπούς.

Δυστυχώς, αυτή η απλή περιγραφή δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Το φυσικό ουράνιο είναι μείγμα δύο διαφορετικών ατόμων, που χαρακτηρίζονται από διαφορετικό μαζικό αριθμό και καλούνται ισοτόπα: του ${}_{92}U^{238}$ και του ${}_{92}U^{235}$. Οι πυρήνες και των δύο ισοτόπων μπορούν να διασπαστούν, αλλά για αντίδραση σχάσης με ${}_{92}U^{238}$, το νετρόνιο που συλλαμβάνεται από τον πυρήνα πρέπει να έχει κινητική ενέργεια μεγαλύτερη από 1 MeV. Αν η ενέργεια είναι μικρότερη από την εν λόγω τιμή, αλλά όχι πολύ χαμηλή, ο πυρήνας του ${}_{92}U^{238}$ συλλαμβάνει το νετρόνιο χωρίς να πραγματοποιηθεί σχάση. Από την άλλη, οι πυρήνες του ${}_{92}U^{235}$ συλλαμβάνουν μόνο βραδέα νετρόνια, με ενέργεια πολύ μικρότερη από 1 MeV—από 70 έως 200 eV. Μετά τη διάσπαση των πυρήνων του ουρανίου, όμως, η ενέργεια των εκπεμπόμενων νετρονίων είναι μικρότερη από 1 MeV, αλλά πολύ μεγαλύτερη από 200 eV. Το αποτέλεσμα είναι ότι δεν μπορούν να προκαλέσουν σχάση των πυρήνων ${}_{92}U^{238}$. Στο φυσικό ουράνιο, η αναλογία των πυρήνων ${}_{92}U^{238}$ προς τους πυρήνες ${}_{92}U^{235}$ είναι περίπου 140 προς 1, πράγμα που σημαίνει ότι στο φυσικό μείγμα των ισοτόπων του ουρανίου δεν μπορεί ποτέ να πραγματοποιηθεί αλυσιδωτή αντίδραση: μετά τις σπάνιες περιπτώσεις διασπάσεων πυρήνων, τα νετρόνια κατά πάσαν πιθανότητα θα απορροφηθούν από πυρήνες ${}_{92}U^{238}$, χωρίς οποιαδήποτε σχάση.[1]

Είναι όμως δυνατόν να υπερβούμε αυτό το δυσάρεστο εμπόδιο. Κατ' αρχάς, μπορούμε να αυξήσουμε τον αριθμό των πυρήνων ${}_{92}U^{235}$ στο μείγμα των ισοτόπων. Ταυτόχρονα, όμως, μπορούμε να επιχειρήσουμε να επιβραδύνουμε τα νετρόνια —δηλαδή να μειώσουμε την ενέργειά τους σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μην απορροφώνται από πυρήνες ${}_{92}U^{238}$ αλλά να συλλαμβάνονται κυρίως από πυρήνες

1. Για να απλουστεύσουμε την εικόνα δεν αναφέραμε άλλες διαδικασίες που προκαλούν απώλεια νετρονίων. Κατά την κατασκευή ενός πυρηνικού αντιδραστήρα, τέτοια φαινόμενα πρέπει να ληφθούν υπόψη.



Σχήμα 3

Διάγραμμα πυρηνικού αντιδραστήρα με γραφίτη ως επιβραδυντή: (1) ράβδοι ελέγχου, (2) θωράκιση, (3) ανακλαστήρας, (4) εναλλάκτης θερμότητας, (5) ενεργός ζώνη, (6) ατμοστρόβιλος, (7) συμπυκνωτής, (8) γεννήτρια, (9) επιβραδυντής, (10) καύσιμο, (11) ψυκτικό μέσο.

$_{92}U^{235}$. Έτσι θα χάσουμε μέρος της κινητικής ενέργειας των νετρονίων, αλλά θα κερδίσουμε μεγάλο μέρος της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στους πυρήνες του ουρανίου. Μια εξαιρετικά αποδοτική απώλεια, πράγματι!

Πώς όμως θα καταφέρουμε να επιβραδύνουμε τα νετρόνια; Για να βρούμε την απάντηση, θα χρησιμοποιήσουμε μιαν αναλογία. Ας θεωρήσουμε τη σύγκρουση ενός νετρονίου με έναν πυρήνα (όχι αναγκαστικά πυρήνα ουρανίου) ως σύγκρουση δύο σφαιρών που έχουν τον ίδιο λόγο μαζών με εκείνον του νετρονίου και του πυρήνα. Η αναλογία θα είναι αποτελεσματική μόνο αν δεν λαμβάνουν χώρα πυρηνικές αντιδράσεις κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης. Αυτό σημαίνει ότι, μετά τη σύγκρουση, το νετρόνιο και ο πυρήνας πρέπει να απομακρυνθούν και πάλι, έχοντας διαφορετικές ταχύτητες. Σε τέτοια περίπτωση, μπορούμε αμέσως να πούμε πότε θα έχουμε τη μεγαλύτερη απώλεια ενέργειας για το νετρόνιο: όταν η μάζα του πυρήνα είναι ίση με τη μάζα του νετρονίου. Αφού η μάζα του πρωτονίου ισούται σχεδόν με τη μάζα του νετρονίου, οι πιο αποδοτικές κρούσεις (από τη δική μας άποψη) θα ήταν αυτές ενός νετρονίου με τον ακίνητο πυρήνα ενός ατόμου υδρογόνου —σε μια τέτοια κρούση, το πρώτο θα χάσει όλη την κινητική του ενέργεια. Στην πράξη, όμως, το κοινό υδρογόνο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επιβράδυνση νετρονίων.[2] Για το σκοπό αυτό, οι φυσικοί χρησιμοποιούν άλλες ουσίες (που ονομάζονται «επιβραδυντές»), όπως είναι το βαρύ ύδωρ ή ο γραφίτης (καθαρός άνθρακας) —βλ. Σχήμα 3.

Το βαρύ ύδωρ είναι μια χημική ουσία που μοιάζει με το συνηθισμένο νερό, με τη διαφορά ότι τη θέση του συνηθισμένου υδρογόνου —που ο πυρήνας του αποτελείται από ένα όλο κι όλο πρωτόνιο— την κατέχει δευτέριο. Το δευτέριο είναι ένα ισότοπο του υδρογόνου που ο πυρήνας του αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο· έτσι, έχει διπλάσια μάζα από το συνηθισμένο υδρογόνο.

Όταν ένα νετρόνιο συγκρουστεί με έναν ακίνητο πυρήνα δευτερίου, χάνει τα 8/9 της κινητικής του ενέργειας, όπως μπορούμε να δούμε από την εξίσωση (3). Επομένως, ύστερα από μία σύγκρουση, διατηρεί μόνο το $(1 - 8/9)$ της αρχικής του ενέργειας, έπειτα από δύο συγκρούσεις το $(1 - 8/9)^2$, κ.ο.κ. Για να μειωθεί η ενέργεια του νετρονίου από $E_\alpha = 1$ MeV σε $E_\tau = 100$ eV, πρέπει να πραγματοποιηθούν n το πλήθος κρούσεις μεταξύ του νετρονίου και πυρήνων δευτερίου· η τιμή του n καθορίζεται από την προφανή σχέση $E_\tau = E_\alpha (1 - 8/9)^n$. Οι υπολογισμοί μάς δίνουν $n \cong 4$. Όταν το νετρόνιο μεταφέρει την ενέργειά του συγκρουόμενο με πυρήνες άνθρακα $_6C^{12}$, χάνει τα $24/49 \cong 1/2$ της κινητικής του ενέργειας. Και πάλι μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των κρούσεων που χρειάζονται για να πάρουμε ένα βραδύ νετρόνιο: $n \cong 13$. Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης, θα αναφέρουμε ότι το τυπικό πλήθος κρούσεων του νετρονίου με βαρείς πυρήνες μαζικού αριθμού $A = 90$ είναι $n \cong 210$.

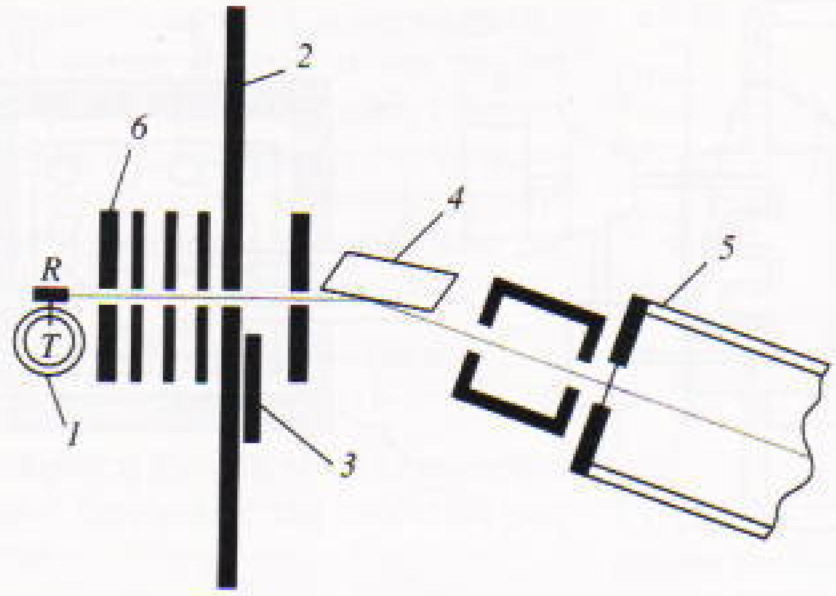
Ο λόγος που αναγκάζει τους φυσικούς να προσπαθούν να μειώσουν τον αριθμό n είναι ότι κατά το μεσοδιάστημα μεταξύ των «καλών» κρούσεων (δηλαδή αυτών που επιβραδύνουν τα νετρόνια), μερικά νετρόνια ενδέχεται να συλληφθούν από τους πυρήνες κάποιας ξένης πρόσμειξης, με αποτέλεσμα να μην μπορούν πλέον να αξιοποιηθούν για την πρόκληση αλυσιδωτής αντίδρασης. Επιπλέον, αν το πλήθος των συγκρούσεων n είναι πολύ μεγάλο, το νετρόνιο μπορεί να διαφύγει από τη ζώνη αντίδρασης και να μείνει πάλι αναξιοποίητο.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι μια απλή αναλογία ανάμεσα στη σύγκρουση σφαιρών και τη σκέδαση νετρονίων σε ατομικούς πυρήνες μάς βοήθησε να κατανοήσουμε τη βασική αρχή της λειτουργίας του αντιδραστήρα με επιβραδυντή, και να εκτελέσουμε ορισμένους υπολογισμούς. Δεν πρέπει να ξεχνάμε, όμως, ότι η αναλογία είναι έγκυρη μόνο αν δεν πραγματοποιηθούν πυρηνικές αντιδράσεις κατά τη σύγκρουση του νετρονίου με τον επιβραδυντή. Σε αντίθετη περίπτωση, η αναλογία μας δεν έχει νόημα. Και τώρα ας δούμε ένα διαφορετικό παράδειγμα.

Το φαινόμενο Compton

Κατά τις πρώτες δεκαετίες του 20ού αιώνα, οι φυσικοί όλου του κόσμου εξέταζαν το πρόβλημα: τι είναι το φως, κύματα ή σωματίδια; Ο μεγάλος Αϊνστάιν απέδειξε όχι μόνο ότι το φως εκπέμπεται σε πακέτα ακτινοβολίας, αλλά ότι τα εν λόγω πακέτα (τα κβάντα) διατηρούν την αυτοτελή υπόστασή τους και κατά τη διάδοση του φωτός. Στην αρχή του αιώνα, οι φυσικοί υποδέχτηκαν τη συγκεκριμένη θεωρία χωρίς ιδιαίτερο ενθουσιασμό, για να χρησιμοποιήσουμε ήπιες εκφράσεις. Ο σκεπτικισμός τους παρέμενε ζωντανός και

2. Το υδρογόνο του συνηθισμένου νερού δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον συγκεκριμένο σκοπό, επειδή η αλληλεπίδραση ενός μορίου νερού με ένα νετρόνιο προκαλεί ορισμένες διαδικασίες που δεν επιτρέπουν τη συμμετοχή του νετρονίου στην αλυσιδωτή αντίδραση.



Σχήμα 4
Διάγραμμα της πειραματικής διάταξης του Compton. Η γωνία σκέδασης είναι η γωνία που σχηματίζουν τα δύο τμήματα της δέσμης ακτίνων X στο σημείο R. Το συγκεκριμένο διάγραμμα αντιστοιχεί σε $\theta = 90°$: (1) σωλήνας ακτίνων X, (2) μολύβδινος θάλαμος, (3) φωτοφράκτης, (4) κρύσταλλος, (5) θάλαμος ιονισμού.

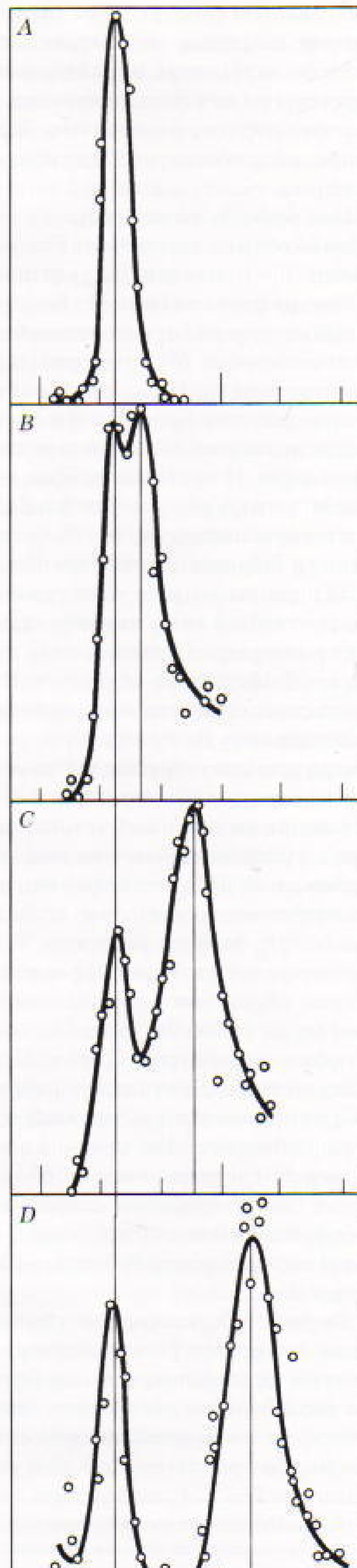
μετά το 1914, όταν ο αμερικανός φυσικός Robert A. Millikan επιβεβαίωσε πειραματικά την εξίσωση του Αϊνστάιν για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η εν λόγω εξίσωση βασίζεται στην ιδέα ότι η ενέργεια ενός κβάντου φωτός (ή φωτονίου) καθορίζεται από τη συχνότητά του ν και ισούται με $E_\varphi = h\nu$ (όπου h είναι η σταθερά του Planck, η οποία ισούται με $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s). Το 1916, ο Αϊνστάιν πρότεινε ότι το φωτόνιο διαθέτει όχι μόνο ενέργεια αλλά και ορμή, η οποία ισούται με $P_\varphi = h\nu/c$ (όπου c η ταχύτητα του φωτός). Ωστόσο, η ορμή ενός φωτονίου που ανήκει στο ορατό φάσμα είναι πολύ μικρή, και επί μακρόν δεν είχε αποδειχτεί πειραματικά ότι έχουν ορμή όλα τα φωτόνια. Μόνο αργότερα, το 1923, ο αμερικανός φυσικός Arthur Holly Compton κατάφερε να το αποδείξει. Έκτοτε, το σχετικό φαινόμενο ονομάζεται φαινόμενο Compton.

Ο Compton μελέτησε τη σκέδαση ακτίνων X με τη διάταξη που απεικονίζεται διαγραμματικά στο Σχήμα 4. Μια δέσμη ακτίνων X, που προερχόταν από το σωλήνα T, σκεδαζόταν από ένα αντικείμενο R, και αφού διερχόταν από μια σειρά σχισμών, υποβαλλόταν σε μελέτη με ένα φασματόμετρο (έναν κρύσταλλο και ένα θάλαμο ιονισμού).

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία, η σκέδαση των ακτίνων X πραγματοποιείται ως εξής: Τα ηλεκτρόνια της ουσίας αρχίζουν να ταλαντώνονται μέσα στο εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητικού κύματος (είχε ήδη αποδειχτεί ότι οι ακτίνες X αποτελούν μια μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας). Η συχνότητα των ταλαντώσεων ισούται με τη συχνότητα του κύματος. Καθώς τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται κατά την ταλάντωσή τους, μετατρέπονται σε πηγές ακτινοβολίας. Έτσι, τα ηλεκτρόνια της ουσίας γίνονται πηγές δευτερογενών κυμάτων, η κατεύθυνση των οποίων δεν μπορεί να συμπίπτει με εκείνη του πρωτογενούς διεγείροντος κύματος. Μ' αυτό τον τρόπο δημιουργείται το φαινόμενο της σκέδασης.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της κλασικής θεωρίας της σκέδασης είναι η ισότητα των συχνοτήτων (και των μηκών κύματος) της προσπίπτουσας και της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας, οποιαδήποτε γωνία κι αν σχηματίζουν οι κατευθύνσεις διάδοσής τους. Οι φυσικοί πίστευαν ότι μόνο η ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης. Αλλά ο Compton ανακάλυψε ότι η σκεδαζόμενη ακτινοβολία περιείχε και μια συνιστώσα με μήκος κύματος λ', διαφορετικό από το μήκος κύματος λ της πρωτογενούς ακτινοβολίας. Διαπίστωσε επίσης ότι $\lambda' > \lambda$ (βλ. Σχήμα 5). Η διαφορά ανάμεσα στα μήκη κύματος $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ (που ονομάζεται μετατόπιση Compton) εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης και αυξάνεται με τη γωνία.

Είναι αξιοσημείωτο ότι ο Compton, που ήταν πειραματικός φυσικός, κατόρθωσε όχι μόνο να εξηγήσει ποιοτικά το φαινόμενο αλλά και να δια-



Σχήμα 5
Εξάρτηση της μετατόπισης Compton από τη γωνία σκέδασης. Η καμπύλη A απεικονίζει το φάσμα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Οι καμπύλες B, C και D απεικονίζουν το φάσμα της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας για $\theta = 45°, 90°$ και $135°$, αντίστοιχα.

τυπώσει τη στοιχειώδη θεωρία του. Θεώρησε ότι οι ακτίνες X είναι μια δέσμη κβάντων με μεγάλη ενέργεια $h\nu$ και σχετικά μεγάλη ορμή $h\nu/c$. Μέσα στη σκεδάζουσα ουσία τα κβάντα αλληλεπιδρούν με ελεύθερα «ακίνητα» ηλεκτρόνια. Ο Compton παρομοίασε την εν λόγω σκέδαση με μια μη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωματιδίων. Η μόνη διαφορά της συγκεκριμένης περίπτωσης από το πρόβλημα των δύο σφαιρών που εξετάσαμε έγκειται στο ότι το φωτόνιο είναι σωματίδιο που κινείται με την ταχύτητα του φωτός. Κατά συνέπεια, για να γράψουμε τις εξισώσεις διατήρησης, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον σχετικιστικό τύπο της ενέργειας και της ορμής του ηλεκτρονίου. Σε γενικές γραμμές, το διάγραμμα των ορμών θα είναι το ίδιο: αντί για $|m_1\mathbf{u}_0|$ πρέπει να γράψουμε $h\nu/c$· αντί για $|m_1\mathbf{u}_1|$, $h\nu'/c$· και αντί για $|m_2\mathbf{u}_2|$, p_e (όπου ν και ν' είναι οι συχνότητες της προσπίπτουσας και της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας αντίστοιχα, και p_e η ορμή του ηλεκτρονίου).

Δεν θα γράψω εδώ το σύστημα των εξισώσεων, αν και δεν είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο. Η λύση του συστήματος δίνει:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \text{συν}\theta). \qquad (4)$$

Ο συγκεκριμένος τύπος παρουσιάζει ενδιαφέρον διότι παρατηρούμε ότι η μετατόπιση Compton δεν εξαρτάται από το λ, αλλά μόνο από τη θ και τις θεμελιώδεις σταθερές m, c και h.[3] Η ορθότητα του συμπεράσματος επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι η πειραματική τιμή του $\Delta\lambda$ δεν εξαρτάται από τη φύση της σκεδάζουσας ουσίας, αφού τα ηλεκτρόνια είναι παντού ίδια.

Ταυτόχρονα, τα αποτελέσματα που συγκέντρωσε ο Compton σε σχέση με την εξάρτηση του $\Delta\lambda$ από τη θ περιγράφονται αρκετά καλά από την εξίσωση (4): όταν μεταβάλλουμε τη θ από 0 σε π, το $\Delta\lambda$ αυξάνεται από 0 σε $2h/mc$.

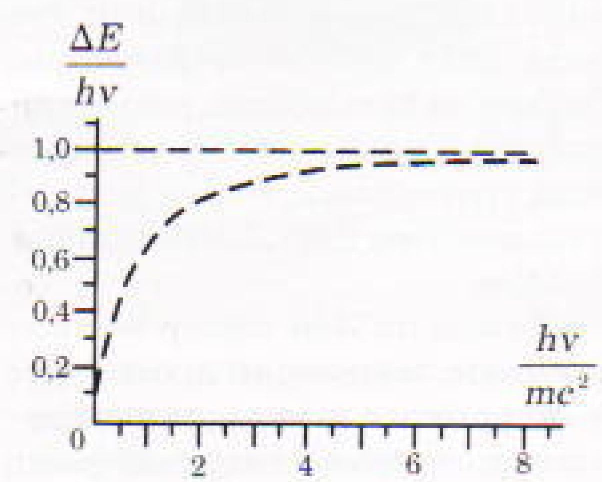
Επομένως, η αναλογία ανάμεσα στη σκέδαση του φωτονίου από ελεύθερα ηλεκτρόνια και τη σύγκρουση σφαιρών αποδείχτηκε γόνιμη. Είναι όμως απόλυτη; Όταν ένα φωτόνιο αλληλεπιδρά με ένα ηλεκτρόνιο, το ηλεκτρόνιο αποκτά ορμή και κινητική ενέργεια εξαιτίας της κρούσης, ενώ το φωτόνιο χάνει ενέργεια, και το μήκος κύματός του αυξάνεται. Αν και υπάρχουν κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ των δύο φαινομένων, ωστόσο υπάρχει και μια σημαντική διαφορά. Για να αντιληφθούμε ποια, ας υπολογίσουμε την ενέργεια που χάνει ένα φωτόνιο όταν υφίσταται σκέδαση προς τα πίσω ($\theta = \pi$) ως συνάρτηση της αρχικής του ενέργειας:

$$\Delta E = h\nu - h\nu' = \frac{ch}{\lambda} - \frac{ch}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{2h^2\nu^2}{mc^2 + 2h\nu},$$

αφού για $\theta = \pi$, $\Delta\lambda = 2h/mc$. Η σχετική απώλεια ενέργειας είναι

$$\frac{\Delta E}{h\nu} = \frac{2h\nu}{mc^2 + 2h\nu}.$$

Το Σχήμα 6 απεικονίζει την παραπάνω συνάρτηση. Βλέπουμε ότι η καμπύλη διαφέρει ριζικά από εκείνη του Σχήματος 2: δεν παρουσιάζει μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς αυξάνεται η ενέργεια του φωτονίου, όλο και μεγαλύτερο μέρος της μεταφέρεται στο ηλεκτρόνιο. Η καμπύλη, όμως, «τείνει στο όριο» μόνο όταν $h\nu \to \infty$. Επομένως, το φωτόνιο δεν μπορεί να μεταβιβάσει όλη του την ενέργεια στο ηλεκτρόνιο. Εδώ εντοπίζεται η διαφορά ανάμεσα στο συγκεκριμένο φαινόμενο και την απλή σύγκρουση σφαιρών.



Σχήμα 6
Η εξάρτηση της σχετικής απώλειας ενέργειας του φωτονίου από την ενέργεια του αρχικού (προσπίπτοντος) φωτονίου στο φαινόμενο Compton.

Γιατί όμως εμφανίζεται αυτή η διαφορά; Η απάντηση είναι πολύ απλή: η μάζα του φωτονίου είναι μηδενική. Το φωτόνιο δεν υπάρχει σε κατάσταση ηρεμίας, και επομένως δεν μπορεί να ακινητοποιηθεί, όπως γίνεται με μια σφαίρα. Αυτός είναι ένας από τους περιορισμούς που δεν επιτρέπουν την απόλυτη εφαρμογή της αναλογίας ανάμεσα στα δύο φαινόμενα. Εξετάσαμε τη σύγκρουση των σφαιρών με βάση την κλασική μηχανική, ενώ το φαινόμενο Compton είναι από τη φύση του σχετικιστικό.

Ένα άλλο πρόβλημα, μια άλλη αναλογία

Μελετήσαμε δύο παραδείγματα που αφ' ενός παρουσιάζουν ομοιότητες με τη σύγκρουση σφαιρών και αφ' ετέρου διαφέρουν από αυτήν. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εξαντλήσαμε τις δυνατότητες της αναλογίας; Όχι βέβαια. Ως τώρα εξετάσαμε μόνο περιπτώσεις ελαστικής κρούσης. Μπορούμε να βρούμε κάποιο φαινόμενο της σύγχρονης φυσικής που να είναι ανάλογο με την ανελαστική σύγκρουση σφαιρών; Υπάρχει μια τέτοια αναλογία, η οποία σχετίζεται με τη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων. Θα την κατανοήσετε ευκολότερα αφού εξετάσουμε πρώτα ένα άλλο πολύ απλό πρόβλημα.

Πρόβλημα. Να υπολογιστεί ποιο μέρος της κινητικής ενέργειας μιας κινούμενης σφαίρας με μάζα m μετατρέπεται σε θερμότητα σε μια τελείως ανελαστική σύγκρουση[4] με μια ακίνητη σφαίρα ίσης μάζας.

Λύση. Έστω ότι η πρώτη σφαίρα κινείται με ταχύτητα υ_0. Η κινητική της ενέργεια είναι $E_0 = m\upsilon_0^2/2$. Όταν η κρούση είναι ανελαστική, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

3. Τώρα αποσαφηνίζεται γιατί είναι σχεδόν αδύνατο να διακρίνουμε το φαινόμενο Compton στο ορατό φάσμα. Αν για τις ακτίνες X ο μέγιστος λόγος $(\Delta\lambda/\lambda)_{max}$ έχει σχετικά μεγάλη τιμή (για $\lambda = 10^{-10}$ m, $(\Delta\lambda/\lambda)_{max} = 2{,}4\cdot10^{-2}$), για το ορατό φως ($\lambda \cong 5\cdot10^{-7}$ m) το $(\Delta\lambda/\lambda)_{max} = 4{,}8\cdot10^{-6}$, —είναι δηλαδή πολύ μικρός.

4. Δύο σφαίρες, αφού συγκρουστούν τελείως ανελαστικά, κινούνται σαν ένα σώμα.

Εξακολουθεί, ωστόσο, να ισχύει ο νόμος διατήρησης της ορμής:

$$mu_0 = 2mu',$$

όπου u' είναι η ταχύτητα του σώματος $2m$ που σχηματίζεται μετά την κρούση. Έτσι, η κινητική ενέργεια μετά την κρούση θα είναι

$$E' = \frac{2mu'^2}{2} = \frac{E_0}{2}.$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η μισή κινητική ενέργεια της κινούμενης σφαίρας μετατράπηκε σε θερμότητα.

Και τώρα ας αλλάξουμε λίγο το πρόβλημα. Δύο σφαίρες ίσης μάζας κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με την ίδια ταχύτητα και συγκρούονται ανελαστικά. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η ορμή του συστήματος πριν από την κρούση είναι μηδέν. Μετά την κρούση, οι σφαίρες θα ακινητοποιηθούν. Επομένως, όλη η κινητική ενέργειά τους θα μετατραπεί σε θερμότητα.

Τα δύο πολύ απλά προβλήματα που εξετάσαμε παραπάνω έχουν στενή σχέση με τη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων. Η συνηθέστερη πειραματική μέθοδος στον εν λόγω τομέα σχετίζεται με κρούσεις. Κατά την κρούση ενός ταχέος σωματιδίου με έναν ακίνητο στόχο, ένα μέρος της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου καταναλώνεται για το σχηματισμό νέων σωματιδίων. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μέρος αυτό είναι μια ποσότητα ανάλογη της θερμότητας που παράγεται κατά την ανελαστική κρούση δύο σφαιρών. Εφόσον η ορμή του συστήματος πριν από την κρούση ήταν πεπερασμένη, δεν μπορεί να καταναλωθεί όλη η κινητική ενέργεια για την παραγωγή νέων σωματιδίων. Επομένως, τα προϊόντα της αντίδρασης πρέπει να έχουν μη μηδενική ορμή και κινητική ενέργεια. Αυτό σημαίνει πως όταν ο στόχος είναι ακίνητος, ένα μέρος της κινητικής ενέργειας που αποκτά το σωματίδιο στον επιταχυντή «πηγαίνει χαμένο». Αν επεκτείνουμε την αναλογία, μπορούμε να συμπεράνουμε πως, όταν έχουμε σύγκρουση δύο ίδιων σωματιδίων (από τα οποία το ένα κινείται και το άλλο είναι ακίνητο), χάνεται πάντα το μισό της κινητικής ενέργειας. Είναι δυνατόν οι επιστήμονες να κατασκευάζουν όλο και ισχυρότερους επιταχυντές με ακίνητους στόχους και να συμβιβάζονται με «απόδοση» 50%; Η απάντηση είναι όχι.

Γιατί; Επειδή η αναλογία δεν είναι έγκυρη. Πραγματικά, η αναλογία δεν μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε ποιο μέρος της ενέργειας καταναλώνεται για το σχηματισμό των νέων σωματιδίων. Η σύγκρουση στοιχειωδών σωματιδίων είναι ένα σχετικιστικό φαινόμενο, και για να τη μελετήσουμε, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Με βάση τους συγκεκριμένους τύπους, οι φυσικοί διαπίστωσαν ότι το ποσοστό της «χρήσιμης» ενέργειας μειώνεται όσο αυξάνεται η κινητική ενέργεια των κινούμενων σωματιδίων. Έτσι, οι επιταχυντές με ακίνητους στόχους γίνονται όλο και λιγότερο αποδοτικοί. Τι μπορούμε να κάνουμε τότε; Η αναλογία μπορεί να μας προσφέρει μια απάντηση.

Θυμάστε πώς είναι δυνατόν να μετατραπεί όλη η κινητική ενέργεια των σφαιρών σε θερμότητα σε μια κρούση; Το ίδιο ισχύει και για τις κρούσεις μεταξύ στοιχειωδών σωματιδίων. Ένας νέος τύπος επιταχυντή, ο λεγόμενος «επιταχυντής συγκρουόμενων δεσμών», βασίζεται ακριβώς σ' αυτήν την ιδέα —τη σύγκρουση δηλαδή σωματιδίων (πρωτονίων) που κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με την ίδια ταχύτητα. Οι ελπίδες των φυσικών υψηλών ενεργειών στηρίζονται τώρα στον προαναφερθέντα νέο τύπο επιταχυντή. Έτσι, η αναλογία με ένα πολύ απλό κλασικό πρόβλημα μας βοήθησε να καταλάβουμε γιατί οι επιστήμονες χρειάζονται τέτοιες τεράστιες εγκαταστάσεις, όπως οι επιταχυντές, που στοιχίζουν δισεκατομμύρια δολάρια.

Ύστερα απ' όσα είπαμε θα συμφωνήσετε, πιστεύω, ότι οι αναλογίες είναι χρήσιμες τόσο στην επιστημονική έρευνα όσο και στην ακαδημαϊκή μελέτη της φυσικής. Ανακαλύπτοντας τα κοινά χαρακτηριστικά των φαινομένων και διευκρινίζοντας τις διαφορές τους, σίγουρα κατανοούμε καλύτερα τους φυσικούς νόμους.

Η καθιέρωση μιας επανάστασης

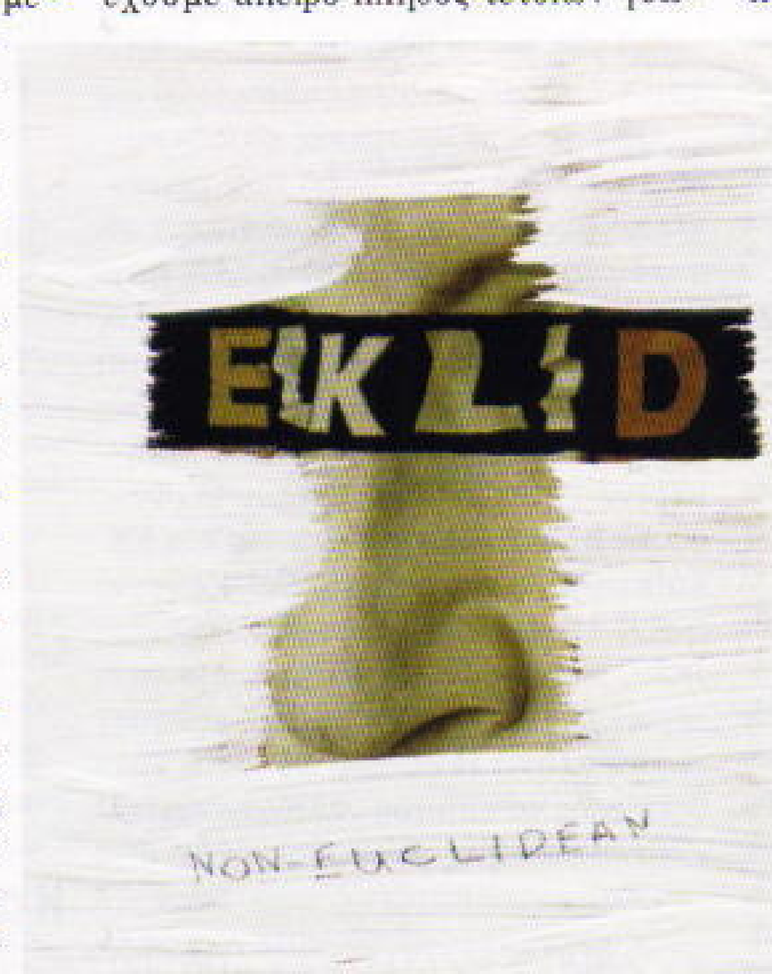
Πώς η μη ευκλείδεια γεωμετρία κατέκτησε τη θέση της στη μαθηματική ορθοδοξία

E.B. Vinberg

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Η ΜΟΝΗ δυνατή γεωμετρία. Η ανακάλυψη αυτή, που επιτεύχθηκε από τους Gauss, Lobachevsky και Bólyai στις αρχές του 19ου αιώνα, επηρέασε τον τρόπο που βλέπει η ανθρωπότητα τον κόσμο όσο και οι μεγάλες ανακαλύψεις των φυσικών επιστημών, όπως το ηλιοκεντρικό σύστημα του Κοπέρνικου ή η θεωρία της εξέλιξης του Δαρβίνου. Εκτός, από τους ειδικούς, όμως, ελάχιστοι γνωρίζουν ότι η μη ευκλείδεια γεωμετρία, μαζί με την ευκλείδεια, από τα τέλη του περασμένου αιώνα αποτελεί ένα από τα εργαλεία των σύγχρονων μαθηματικών, παρά το γεγονός ότι «ο χώρος όπου ζούμε» είναι, στο βαθμό που τον γνωρίζουμε, περισσότερο ευκλείδειος παρά μη ευκλείδειος.

Είναι χαρακτηριστικό της φύσης των μαθηματικών θεωριών το ότι οι βασικές τους έννοιες (για τη γεωμετρία, τα σημεία, οι ευθείες γραμμές, οι μετασχηματισμοί, κ.ο.κ.) είναι δυνατόν να ερμηνευτούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και να εφαρμοστούν σε διαφορετικά είδη αντικειμένων. Ειδικά η γεωμετρία, δεν εφαρμόζεται μόνο στο «χώρο όπου ζούμε» αλλά και σε άλλους χώρους που εμφανίζονται στις θεωρίες των μαθηματικών και της φυσικής. Οι γεωμετρίες αυτών των χώρων μπορεί να είναι διαφορετικών τύπων —και συγκεκριμένα, να μην είναι ευκλείδειες.

Αν με την έκφραση «μη ευκλείδεια» χαρακτηρίσουμε κάθε γεωμετρία τα αξιώματα της οποίας διαφέρουν από εκείνα του Ευκλείδη, θα έχουμε άπειρο πλήθος τέτοιων γεωμετριών και θα ήταν αδύνατον να ειπωθεί κάτι που να ισχύει για όλες τους. Σε τούτο το άρθρο θα χρησιμοποιήσω τον όρο «μη ευκλείδεια γεωμετρία» με μάλλον στενή σημασία, αυτή της γεωμετρίας Lobachevsky ή της γεωμετρίας πάνω στη σφαίρα (οι οποίες, όπως θα δούμε, είναι από μια άποψη ισοδύναμες). Μαζί με την ευκλείδεια, οι δύο αυτές γεωμετρίες καταλαμβάνουν ειδική θέση μεταξύ των γεωμετριών που περιέχουν την έννοια της απόστασης μεταξύ σημείων. Μπορεί να περιγραφούν ως γεωμετρίες μέγιστης ομοιογένειας, ή ως γεωμετρίες σταθερής καμπυλότητας.



Οι πρώτες εφαρμογές της γεωμετρίας Lobachevsky έγιναν από τον ίδιο τον Lobachevsky, ο οποίος τη χρησιμοποίησε για να υπολογίσει διάφορα ολοκληρώματα. Τα αποτελέσματα ήταν μάλλον ειδικά και δεν αναπτύχθηκαν περισσότερο. Μερικά από τα ολοκληρώματα Lobachevsky, όμως, εμφανίζονται ακόμη και σήμερα σε πολλά τυπολόγια.

Στα τέλη του περασμένου αιώνα ο Poincaré και ο Klein απέδειξαν ότι η γεωμετρία Lobachevsky συνδέεται στενά με τη θεωρία των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής και με τη θεωρία αριθμών (ακριβέστερα, με την αριθμητική των απροσδιόριστων τετραγωνικών μορφών). Έκτοτε, η γεωμετρία Lobachevsky και οι μέθοδοί της αποτελούν αναπόσπαστο μέρος αυτών των μαθηματικών κλάδων.

Η σημασία της γεωμετρίας Lobachevsky έχει αυξηθεί ακόμη περισσότερο τα τελευταία 15 χρόνια χάρη στην εργασία του αμερικανού μαθηματικού William Thurston (βραβευ-

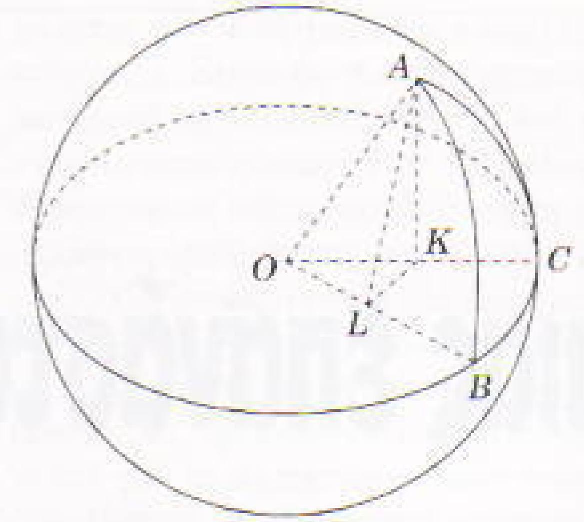
Εικονογράφηση: Yury Vashchenko

μένου με το μετάλλιο Fields το 1983), που ανακάλυψε τη σχέση της με την τοπολογία των τριοδιάστατων πολλαπλοτήτων. Κάθε χρόνο δημοσιεύονται δεκάδες άρθρα σ' αυτό το πεδίο. Είναι λογικό επομένως να υποστηρίξουμε ότι έχει τελειώσει η «ρομαντική περίοδος» στην ιστορία της γεωμετρίας Lobachevsky, κατά τη διάρκεια της οποίας οι προσπάθειες των ερευνητών είχαν κύριο στόχο την ερμηνεία της από την άποψη της θεμελίωσης της γεωμετρίας. Οι σύγχρονες έρευνες απαιτούν όλο και μεγαλύτερη πρακτική γνώση των μεθόδων της.

Στο παρόν άρθρο θα δώσω αρκετά παραδείγματα θεωρημάτων της μη ευκλείδειας γεωμετρίας και θα διατυπώσω μιαν αρχή που μας επιτρέπει να εξάγουμε θεωρήματα της γεωμετρίας Lobachevsky από θεωρήματα της σφαιρικής γεωμετρίας. Στη συνέχεια θα εξετάσω μερικά προβλήματα της μη ευκλείδειας γεωμετρίας που παίζουν κεντρικό ρόλο στις εφαρμογές της.

Το σφαιρικό ισοδύναμο του πυθαγόρειου θεωρήματος

Υπάρχουν ευκλείδεια μοντέλα της σφαιρικής γεωμετρίας. Δηλαδή, μπορούμε να βρούμε αντικείμενα που συμπεριφέρονται όπως αυτά της σφαιρικής γεωμετρίας. Στην πραγματικότητα, αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εύκολα: η σφαιρική γεωμετρία συμπίπτει με τη γεωμετρία στην επιφάνεια μιας συνηθισμένης ευκλείδειας σφαίρας (απ' όπου και το όνομά της!). Επιλέγουμε μια τυχαία σφαίρα και θεωρούμε τους μέγιστους κύκλους της ως ευθείες γραμμές και τα μήκη των τόξων της (ή τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες πολλαπλασιασμένες επί την ακτίνα της σφαίρας —που είναι το ίδιο) ως αποστάσεις. Συνεπώς, όταν αλλάζει η ακτίνα της σφαίρας, όλες οι αποστάσεις πολλαπλασιάζονται επί έναν σταθερό παράγοντα, και έτσι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ των γεωμετριών διαφορετικών σφαιρών. Μας εξυπηρετεί επομένως να θέσουμε την ακτίνα ίση με 1 και στη συνέχεια, όταν δεν δηλώνεται κάτι διαφορετικό, θα υποθέτουμε ότι ισχύει αυτή η συνθήκη.



Σχήμα 1

Ας βρούμε το ανάλογο του πυθαγόρειου θεωρήματος στη σφαίρα —δηλαδή, έναν τύπο που θα εκφράζει την υποτείνουσα ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του.

Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC (η ορθή γωνία[1] είναι η C) σε μια σφαίρα κέντρου O. Θέτουμε

$$|BC| = a, \ |CA| = b, \ |AB| = c. \qquad (1)$$

(Εδώ αντιλαμβανόμαστε με τη σφαιρική έννοια το μήκος ενός τμήματος —δηλαδή, ως το μήκος του αντίστοιχου τόξου μέγιστου κύκλου.)

Θα κάνουμε ορισμένες κατασκευές στον ευκλείδειο χώρο που περιέχει τη σφαίρα μας. Από το σημείο A φέρουμε πρώτα την ευθεία AK κάθετη προς την ακτίνα OC. Αφού τα επίπεδα AOC και BOC είναι κάθετα μεταξύ τους, η ευθεία AK είναι κάθετη προς το επίπεδο BOC (το «ισημερινό επίπεδο» στο Σχήμα 1). Φέρουμε από το σημείο K την ευθεία KL κάθετη προς την ακτίνα OB. Εφόσον η AK είναι κάθετη προς το επίπεδο BOC, το επίπεδο ALK, το οποίο την περιέχει, είναι επίσης κάθετο προς το επίπεδο BOC. Η ευθεία BO είναι κάθετη προς το επίπεδο ALK, άρα είναι κάθετη και προς την ευθεία AL.

Έστω

$$a = \angle BOC, \ b = \angle COA, \ c = \angle AOB. \quad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AOK έχουμε $OK = \text{συν} b$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο AOL έχουμε $OL = \text{συν} c$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο KOL έχουμε $OL = OK\text{συν} a = \text{συν} a \cdot \text{συν} b$.

Αν συγκρίνουμε τις δύο τιμές του OL, βρίσκουμε

$$\text{συν} c = \text{συν} a \cdot \text{συν} b. \qquad (3)$$

Αυτό είναι το πυθαγόρειο θεώρημα στη σφαιρική γεωμετρία.

Σε μια σφαίρα ακτίνας R ισχύει ο εξής τύπος:

$$\text{συν}\frac{c}{R} = \text{συν}\frac{a}{R} \cdot \text{συν}\frac{b}{R}. \qquad (4)$$

Όσο το $R \to \infty$, η σφαίρα γίνεται όλο και πιο επίπεδη και η γεωμετρία της προσεγγίζει την ευκλείδεια. Ας υποθέσουμε ότι τα a και b είναι σταθερά και ας χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική ισότητα

$$\text{συν} x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad (5)$$

η οποία ισχύει για μικρές τιμές του x.[2] (Εδώ το $o(x^2)$ παριστάνει μία ποσότητα πολύ μικρότερη από το x^2, με την έννοια ότι το πηλίκο της διά x^2 τείνει στο μηδέν καθώς το x τείνει στο 0.) Τότε, από την εξίσωση (4) παίρνουμε

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

$$= \left[1 - \frac{a^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]\left[1 - \frac{b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{a^2 + b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right). \qquad (6)$$

Συνεπώς

$$c^2 = a^2 + b^2 + o(1/R^2), \qquad (7)$$

και οριακά, όταν $R \to \infty$, παίρνουμε το σύνηθες πυθαγόρειο θεώρημα:

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (8)$$

όπως θα περιμέναμε φυσιολογικά.

Η αρχή της ισοδυναμίας

Στρεφόμαστε τώρα στη γεωμετρία Lobachevsky. Μπορούμε να την περιγράψουμε λέγοντας ότι το επίπεδο του Lobachevsky είναι απλώς μια «σφαίρα ακτίνας i» (όπου i είναι η φανταστική μονάδα). Ποιο μπορεί να είναι το νόημα αυτής της εξωφρενι-

1. Δύο μέγιστοι κύκλοι σχηματίζουν ορθή γωνία όταν τα επίπεδα που ορίζουν είναι κάθετα.

2. Η προσέγγιση αυτή προκύπτει από τη σειρά Taylor του συνx, που μελετάται στον απειροστικό λογισμό.

κής δήλωσης; Ουσιαστικά, το μόνο που σημαίνει είναι ότι η γεωμετρία Lobachevsky παράγεται από τη σφαιρική αν πάρουμε όλους τους τύπους της και διαιρέσουμε με το i τους πρωτοβάθμιους όρους που περιέχουν. Παρότι υπάρχουν και άλλοι τρόποι περιγραφής του επιπέδου Lobachevsky, θα χρησιμοποιήσουμε ως σημείο εκκίνησης αυτή την «αρχή ισοδυναμίας».

Για όλες τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε, αποδεικνύεται ότι κάθε αλγεβρικός τύπος με πραγματικούς αριθμούς εξακολουθεί να ισχύει και για μιγαδικούς (αυτό μας το εξασφαλίζει η «αρχή της αναλυτικής συνέχισης» των μιγαδικών συναρτήσεων). Αληθεύει επίσης ότι το ημίτονο και το συνημίτονο ενός μιγαδικού αριθμού ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\text{συν}ix = \cosh x,$$
$$\text{ημ}ix = i\sinh x, \qquad (9)$$

όπου τα *υπερβολικό ημίτονο* (sinhx) και *υπερβολικό συνημίτονο* (coshx) ορίζονται ως εξής:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \qquad (10)$$

Οι τύποι αυτοί είναι δυνατόν να γραφούν ως

$$\text{συν}\frac{x}{i} = \cosh x,$$
$$\text{ημ}\frac{x}{i} = \frac{1}{i}\sinh x. \qquad (11)$$

Έτσι, όταν μετατρέπουμε έναν τύπο της σφαιρικής γεωμετρίας σε τύπο της υπερβολικής γεωμετρίας, πρέπει να αντικαταστήσουμε όλες τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις γραμμικών όρων με τις ισοδύναμες υπερβολικές συναρτήσεις (οι φανταστικές μονάδες που προκύπτουν από ημίτονα εξαφανίζονται αυτομάτως). Οι αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με τη θεωρία συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής μπορούν να θεωρήσουν αυτή την τελευταία πρόταση (μαζί με μερικές λεπτομέρειες που περιγράφονται πιο κάτω) ως διατύπωση της αρχής της ισοδυναμίας.

Ειδικά, ο τύπος (3) της σφαιρικής γεωμετρίας δίνει το επόμενο υπερβολικό ισοδύναμο του πυθαγόρειου θεωρήματος:

$$\cosh c = \cosh b \cdot \cosh a. \qquad (12)$$

Σε μια «σφαίρα» ακτίνας iR, ο τύπος αυτός παίρνει τη μορφή

$$\cosh\frac{c}{R} = \cosh\frac{a}{R} \cdot \cosh\frac{b}{R}. \qquad (13)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $R \to \infty$, όπως κάναμε στην περίπτωση της συνηθισμένης σφαίρας, καταλήγουμε οριακά στο σύνηθες πυθαγόρειο θεώρημα.

Η περιφέρεια ενός κύκλου

Ένα σύνολο σημείων ενός μη ευκλείδειου επιπέδου που βρίσκονται σε σταθερή απόσταση από δεδομένο σημείο ονομάζεται κύκλος με ακτίνα r και κέντρο το δεδομένο σημείο, ακριβώς όπως και στην ευκλείδεια γεωμετρία. Προφανώς ένας κύκλος ακτίνας r στη μοναδιαία σφαίρα είναι απλώς ένας ευκλείδειος κύκλος ακτίνας ημr. Επομένως, η περιφέρειά του C δίνεται από τον τύπο

$$C = 2\pi\,\text{ημ}r. \qquad (14)$$

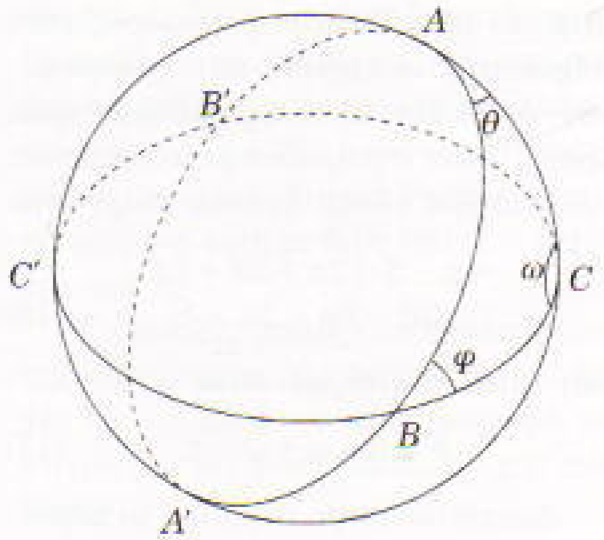
Αν εφαρμόσουμε την αρχή της ισοδυναμίας που διατυπώθηκε προηγουμένως, βρίσκουμε έναν τύπο για την περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r στο επίπεδο Lobachevsky:

$$C = 2\pi\sinh r. \qquad (15)$$

Με μια ματιά στην εξίσωση (10) διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση sinh$r$ αυξάνει πάρα πολύ γρήγορα όταν το r τείνει στο άπειρο. Συνεπώς, στη γεωμετρία Lobachevsky η περιφέρεια ενός κύκλου δεν είναι ανάλογη με την ακτίνα του, όπως στην ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά αυξάνεται πολύ ταχύτερα. Αντίστοιχα, ένας κύκλος στο επίπεδο Lobachevsky καταλαμβάνει πολύ μεγαλύτερη επιφάνεια απ' όση ένας ευκλείδειος κύκλος της ίδιας ακτίνας.

Το εμβαδόν ενός τριγώνου

Όλοι οι μη ευκλείδειοι τύποι που σχολιάσαμε έχουν ευκλείδεια ισοδύναμα. Υπάρχουν όμως και πολλοί τύποι στη μη ευκλείδεια γεωμετρία χωρίς ισοδύναμα στην ευκλείδεια



Σχήμα 2

γεωμετρία. Ο τύπος που περιγράφει το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει μόνο των γωνιών του είναι ένας από αυτούς.

Ας βρούμε μια έκφραση για το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου (Σχήμα 2). Το σφαιρικό τρίγωνο ABC μπορεί να θεωρηθεί ως τομή των τριών ημισφαιρίων P, Q και R, οι συνοριακοί κύκλοι των οποίων περιέχουν, αντίστοιχα, τις πλευρές BC, CA και AB. (Στο Σχήμα 2, P είναι το «πάνω» ημισφαίριο, Q το «μπροστινό» και R το «δεξιό».) Το εμβαδόν μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $4\pi r^2$, επομένως όταν η σφαίρα έχει ακτίνα 1, το εμβαδόν του ημισφαιρίου είναι 2π. Αποδεικνύεται ότι η «σχίζα» που σχηματίζεται από την τομή δύο ημισφαιρίων έχει εμβαδόν ίσο με το διπλάσιο του μέτρου της γωνίας που σχηματίζουν οι συνοριακοί κύκλοι των ημισφαιρίων. Συνεπώς, οι τομές των Q και R, R και P, P και Q, έχουν εμβαδά 2θ, 2φ και 2ω, αντίστοιχα (όπου θ, φ και ω είναι οι γωνίες του τριγώνου μας —δείτε το Σχήμα 2.)

Η ένωση των ημισφαιρίων P, Q και R μάς δίνει ολόκληρη τη σφαίρα χωρίς το τρίγωνο $A'B'C'$ στον «αντίποδα». Έστω S το εμβαδόν του τριγώνου ABC. Τότε, το εμβαδόν του $A'B'C'$ είναι επίσης S, και συνεπώς το εμβαδόν της ένωσης των P, Q και R είναι $4\pi - S$.

Υπάρχει, όμως, ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε αυτό το εμβαδόν: προσθέτουμε τα εμβαδά των τριών ημισφαιρίων, αφαιρούμε τα εμβαδά των τριών τομών τους (αφού καθεμιά εμφανίζεται δύο φορές σ' αυτό το άθροισμα) και προσθέτουμε το εμβαδόν του τριγώνου ABC, το οποίο δεν έχουμε λάβει υπόψη μέχρι στιγμής (το προσθέσαμε τρεις φορές όταν αθροίσαμε τα εμβαδά των ημισφαιρίων, αλλά έπειτα το αφαιρέσαμε τρεις φορές όταν αφαιρούσαμε το εμβαδόν των τομών τους). Τελικά παίρνουμε

$$4\pi - S = 2\pi + 2\pi + 2\pi - 2\theta - 2\varphi - 2\omega + S, \qquad (16)$$

απ' όπου συμπεραίνουμε

$$S = \theta + \varphi + \omega - \pi. \qquad (17)$$

Διαπιστώνουμε τώρα ότι το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο του π και ότι το υπερβαίνει κατά ποσόν ίσο με το εμβαδόν του. Όταν το τρίγωνο είναι πολύ μικρό, τότε το άθροισμα των γωνιών του προσεγγίζει το π, διότι το τρίγωνο αυτό είναι σχεδόν ευκλείδειο.

Αν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν ενός τριγώνου στο επίπεδο Lobachevsky, πρέπει, σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, να διαιρέσουμε όλες τις γραμμικές τιμές της εξίσωσης (17) με το i. Το δεξιό μέλος αυτής της παράστασης δεν περιέχει γραμμικούς όρους, και θα μείνει αναλλοίωτο (το γωνιακό μέτρο είναι αδιάστατο). Το εμβαδόν θα διαιρεθεί με το $i \cdot i = -1$. Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με -1, παίρνουμε

$$S = \pi - (\theta + \varphi + \omega). \qquad (18)$$

Έτσι, το άθροισμα των γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου είναι πάντα μικρότερο του π κατά ποσότητα ίση με το εμβαδόν του. Το άθροισμα των γωνιών ενός πολύ μικρού υπερβολικού τριγώνου είναι σχεδόν ίσο με π.

Γενικά, η γεωμετρία μιας μικρής περιοχής ενός μη ευκλείδειου χώρου είναι από κάθε άποψη παρόμοια με την ευκλείδεια —όσο μικρότερη είναι η περιοχή τόσο καλύτερη η προσέγγιση. Ως εκ τούτου, είναι αδύνατον να αποδείξουμε πειραματικά ότι «ο χώρος όπου ζούμε» είναι ευκλείδειος. Πράγματι, παρότι μπορεί να μας φαίνεται εξαιρετικά μεγάλος, αντιμετωπίζουμε πάντοτε πεπερασμένο μόνο τμήμα αυτού του χώρου, και οι μετρήσεις μας έχουν πεπερασμένη μόνο ακρίβεια. Ακόμη και αν ανακαλύψουμε ότι η γεωμετρία αυτού του τμήματος δεν αποκλίνει από την ευκλείδεια, θα μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι ο χώρος μας είναι μη ευκλείδειος αλλά ότι το τμήμα του που εξερευνούμε είναι τόσο μικρό (σε σύγκριση με το μέγεθος του σύμπαντος) ώστε είναι αδύνατον —λαμβάνοντας υπόψη την ακρίβεια των μετρήσεών μας— να εντοπίσουμε μη ευκλείδεια χαρακτηριστικά.

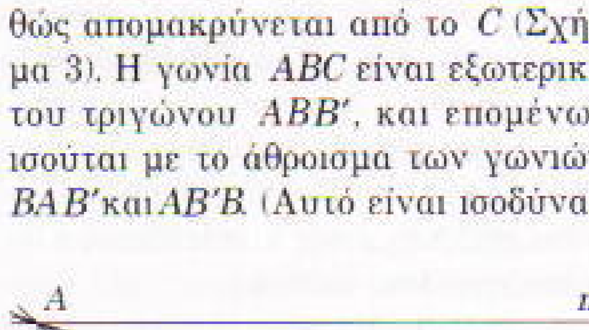
(Στην πραγματικότητα, η κατάσταση είναι ακόμη πιο περίπλοκη. Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας είναι αδύνατον να θεωρήσουμε το χώρο οντότητα ανεξάρτητη από το χρόνο —πρόκειται γι' αυτό που ονομάζεται χωρόχρονος. Έτσι, το ερώτημα σχετικά με τον «ευκλείδειο χώρο» χρειάζεται να επαναδιατυπωθεί.)

Παράλληλες ευθείες στη γεωμετρία Lobachevsky

Για να κατανοήσουμε τι συμβαίνει με τις παράλληλες ευθείες στο επίπεδο Lobachevsky, χρειάζεται πρώτα να εξετάσουμε το θέμα στο ευκλείδειο επίπεδο, όσο κι αν αυτό το ζήτημα φαίνεται τετριμμένο.

Δύο ευθείες του ευκλείδειου επιπέδου ονομάζονται παράλληλες όταν δεν τέμνονται. Είναι πασίγνωστο ότι για κάθε σημείο A του ευκλείδειου επιπέδου εκτός μιας ευθείας ℓ υπάρχει μία μοναδική ευθεία m που περιέχει το A και είναι παράλληλη προς την ℓ. Η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη. Μπορούμε να θεωρήσουμε την ευθεία m ως την οριακή θέση της ευθείας AB που συνδέει το σημείο A με το σημείο B της ℓ, καθώς το B, κινούμενο προς σταθερή κατεύθυνση, τείνει στο άπειρο. Ας φέρουμε την AC, κάθετη από το A στην ℓ, και ας δούμε πώς μεταβάλλονται οι γωνίες ABC και BAC.

Έστω B' η θέση του σημείου B καθώς απομακρύνεται από το C (Σχήμα 3). Η γωνία ABC είναι εξωτερική του τριγώνου ABB', και επομένως ισούται με το άθροισμα των γωνιών BAB' και $AB'B$. (Αυτό είναι ισοδύναμο με την πρόταση ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABB' ισούται με π.) Συνεπώς



Σχήμα 3

$$\angle AB'C < \angle ABC. \qquad (19)$$

Επιπλέον, αν $|BB'| = |AB|$ —δηλαδή, αν το τρίγωνο ABB' είναι ισοσκελές— τότε $\angle BAB' = \angle AB'B$, και συνεπώς

$$\angle AB'C = \frac{1}{2}\angle ABC. \qquad (20)$$

Έπεται ότι όταν το σημείο B τείνει στο άπειρο, η γωνία ABC τείνει στο μηδέν.

Επιπλέον, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με π, έχουμε

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle ABC. \qquad (21)$$

Συνεπώς, η γωνία BAC τείνει στο $\pi/2$. Αυτό σημαίνει ότι η οριακή θέση της AB είναι η ευθεία m που είναι κάθετη στην AC. Η ίδια ευθεία προκύπτει όταν το B τείνει στο άπειρο κινούμενο προς την αντίθετη κατεύθυνση. Η ευθεία m είναι η μοναδική παράλληλη της ℓ που περιέχει το A.

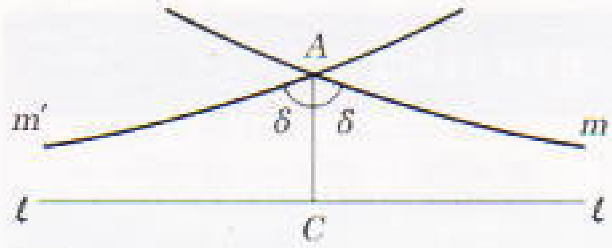
Ας προχωρήσουμε τώρα σε μια παρόμοια κατασκευή στο επίπεδο Lobachevsky όπου (όπως επισημάναμε προηγουμένως) οι γωνίες ενός τριγώνου έχουν άθροισμα μικρότερο του π. Η ανισότητα (19) γίνεται τώρα ισχυρότερη, ενώ η ισότητα (20) μετατρέπεται στην ανισότητα

$$\angle AB'C < \frac{1}{2}\angle ABC. \qquad (22)$$

Άρα, το τελικό μας συμπέρασμα σχετικά με τον τρόπο που μεταβάλλεται η γωνία παραμένει αληθές: η γωνία προσεγγίζει μονότονα το μηδέν. Η ισότητα (21) μετατρέπεται στην ανισότητα

$$\angle BAC < \frac{\pi}{2} - \angle ABC, \qquad (23)$$

ενώ η διαφορά μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέλους της, η οποία ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ABC, μπορεί μόνο να αυξηθεί. Συνεπώς η γωνία BAC τείνει προς κάποια οξεία γωνία δ. Η οριακή ευθεία m, η οποία σχηματίζει γωνία δ με την κάθετη AC, δεν τέμνει την ευθεία ℓ.



Σχήμα 4

Στη γεωμετρία Lobachevsky συμφωνούμε ότι από όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A μόνο η m θα ονομάζεται *παράλληλη* προς την ℓ, παρότι υπάρχουν και άλλες ευθείες διερχόμενες από το A που δεν τέμνουν την ℓ.

Όταν το σημείο B κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, η ευθεία AB τείνει σε μια άλλη οριακή ευθεία, την m', η οποία σχηματίζει επίσης γωνία δ με την κάθετη —αυτή τη φορά όμως η γωνία βρίσκεται στην άλλη πλευρά τής AC. Και η ευθεία m' ονομάζεται παράλληλη της ℓ, αλλά «προς την αντίθετη κατεύθυνση». Το Σχήμα 4 μάς δίνει μια γενική ιδέα της κατάστασης (γενική ιδέα διότι είναι αδύνατον να απεικονίσουμε ένα μη ευκλείδειο σχήμα στο ευκλείδειο επίπεδο της σελίδας ενός περιοδικού).

Έτσι, στο επίπεδο Lobachevsky για κάθε σημείο A εκτός μιας ευθείας ℓ υπάρχουν δύο ακριβώς ευθείες που διέρχονται από το A και είναι παράλληλες προς την ℓ. Καμία από τις ευθείες που βρίσκονται μεταξύ τους δεν τέμνει την ℓ (αλλά δεν τις ονομάζουμε παράλληλες προς την ℓ).

Η γωνία δ ονομάζεται γωνία παραλληλίας. Εξαρτάται μόνο από την απόσταση $|AC| = d$. Ακριβέστερα

$$\delta = 2\text{τοξεφ}(e^{-d}). \qquad (24)$$

Μπορείτε να προσπαθήσετε να εξαγάγετε μόνοι σας αυτό τον τύπο. Για να το καταφέρετε, πρέπει να εφαρμόσετε τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε κατά την απόδειξη του σφαιρικού ισοδυνάμου του πυθαγόρειου θεωρήματος και να αποδείξετε ορισμένες σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου. Κατόπιν μπορείτε να βρείτε, με τη βοήθεια της αρχής της ισοδυναμίας, τις αντίστοιχες σχέσεις για ένα ορθογώνιο υπερβολικό τρίγωνο ABC (Σχήμα 3) και να περάσετε στο όριο.

Πλακοστρώσεις του επιπέδου με κανονικά πολύγωνα

Το τετραγωνισμένο χαρτί και η κερήθρα είναι παραδείγματα πλακοστρώσεων του ευκλείδειου επιπέδου με ίσα κανονικά πολύγωνα (τετράγωνα στη μια περίπτωση, εξάγωνα στην άλλη).

Το άθροισμα των γωνιών ενός ευκλείδειου p-γώνου ισούται με $(p-2)\pi$, συνεπώς κάθε γωνία ενός κανονικού p-γώνου ισούται με $(1-2/p)\pi$. Αν σε κάθε κορυφή μιας πλακόστρωσης συναντώνται q πολύγωνα, θα έχουμε

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\pi = \frac{2\pi}{q}, \qquad (25)$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}. \qquad (26)$$

Η εξίσωση αυτή έχει τρεις μόνο ακέραιες θετικές λύσεις:

$$(p, q) = (3, 6), (4, 4), (6, 3). \qquad (27)$$

Οι δύο τελευταίες λύσεις αντιστοιχούν στις πλακοστρώσεις με τετράγωνα και κανονικά εξάγωνα που αναφέραμε προηγουμένως. Η πρώτη λύση αντιστοιχεί σε πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα.

Ο τύπος του αθροίσματος των γωνιών ενός p-γώνου του ευκλείδειου χώρου συνάγεται από τον αντίστοιχο τύπο για το τρίγωνο μέσω της διαμέρισης του πολυγώνου σε $p-2$ τρίγωνα (αν φέρουμε τις διαγωνίους από μία κορυφή του πολυγώνου). Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού p-γώνου ισούται με $(p-2)\pi$ επηυξημένο με το εμβαδόν του (ενώ του υπερβολικού ισούται με $(p-2)\pi$ μείον το εμβαδόν του).

Επομένως, είναι φανερό ότι η γωνία ενός κανονικού σφαιρικού p-γώνου είναι μεγαλύτερη από το $(1-2/p)\pi$ και ότι, σε αντίθεση με την ευκλείδεια περίπτωση, εξαρτάται από την ακτίνα του περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου. Όταν η ακτίνα είναι μικρή, το πολύγωνο μοιάζει πολύ με ευκλείδειο, και η διαφορά μεταξύ της γωνίας του και του $(1-2/p)\pi$ είναι πολύ μικρή. Όταν η ακτίνα τείνει στο $\pi/2$ (τη μέγιστη δυνατή τιμή), το πολύγωνο τείνει σε ημισφαίριο, και η γωνία του τείνει στο π. Επομένως, η γωνία ενός κανονικού σφαιρικού p-γώνου μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ του $(1-2/p)\pi$ και του π.

Συνεπώς, υπάρχει πλακόστρωση της σφαίρας με ίσα κανονικά p-γωνα, τέτοια ώστε σε κάθε κορυφή να συναντώνται q από αυτά, αν και μόνο αν

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}. \qquad (28)$$

Η ανισότητα αυτή έχει πέντε λύσεις:

$$(p, q) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3). \qquad (29)$$

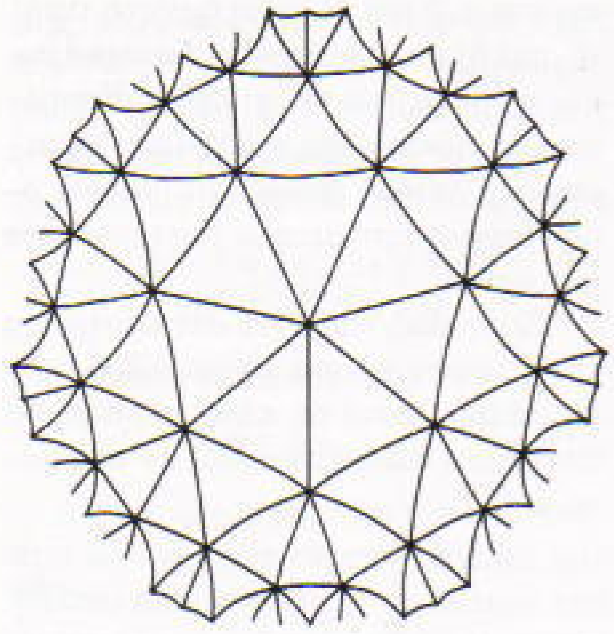
Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία[3] μεταξύ αυτών των πλακοστρώσεων και των κανονικών πολυέδρων του ευκλείδειου χώρου. Δηλαδή, αν προβάλουμε την επιφάνεια ενός κανονικού πολυέδρου από το κέντρο του στην περιγεγραμμένη του σφαίρα, παίρνουμε μια πλακόστρωση της σφαίρας με κανονικά πολύγωνα (εικόνες των εδρών του πολυέδρου). Αντίστροφα, κάθε πλακόστρωση της σφαίρας με ίσα κανονικά πολύγωνα ορίζει ένα κανονικό πολύεδρο, οι κορυφές του οποίου συμπίπτουν με αυτές της πλακόστρωσης.

Άρα, το προηγούμενο αποτέλεσμα σημαίνει ότι υπάρχουν πέντε μόνο κανονικά πολύεδρα. Είναι τα λεγόμενα πλατωνικά, το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο, ο κύβος και το δωδεκάεδρο (όλα τους γνωστά από την αρχαιότητα).

Παρομοίως, η γωνία ενός κανονικού υπερβολικού p-γώνου είναι μικρότερη από $(1-2/p)\pi$. Βρίσκεται πολύ κοντά σ' αυτή την τιμή όταν η ακτίνα του πολυγώνου είναι μικρή, ενώ τείνει στο μηδέν όταν η ακτίνα τείνει στο άπειρο. Επομένως, η γωνία ενός κανονικού υπερβολικού p-γώνου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε (θετικός) αριθμός μικρότερος του $(1-2/p)\pi$.

Έχουμε επίσης την επόμενη ανισότητα που περιγράφει τις πλακοστρώσεις του επιπέδου Lobachevsky με κανονικά πολύγωνα:

3. Αποκαλούμε *αμφιμονοσήμαντη* μια απεικόνιση όταν είναι ένα προς ένα και επί.



Σχήμα 5

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}. \tag{30}$$

Οι λύσεις αυτής της ανισότητας είναι όλα τα ζεύγη (p, q) εκτός από τα προηγούμενα οκτώ που είναι λύσεις της ισότητας (26) και της ανισότητας (28). Στο Σχήμα 5 βλέπετε μια αναπαράσταση της πλακόστρωσης που αντιστοιχεί στη λύση (3, 7). Διαπιστώνουμε ότι, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά τις πλακοστρώσεις, το επίπεδο Lobachevsky προσφέρει πολύ περισσότερες δυνατότητες από το ευκλείδειο επίπεδο ή τη σφαίρα.

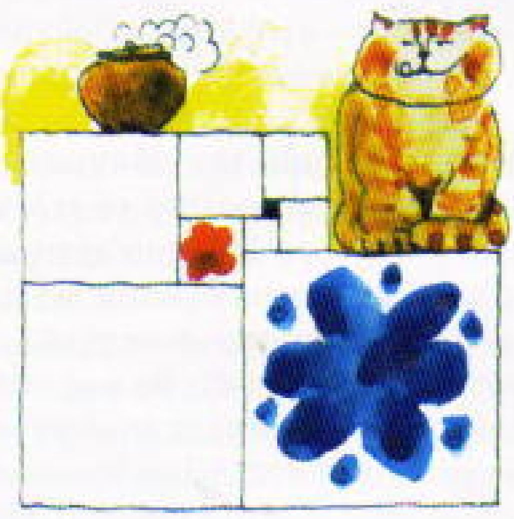
Ακόμη περισσότερες δυνατότες ανακύπτουν όταν εξαλείψουμε τη συνθήκη της κανονικότητας των πολυγώνων της πλακόστρωσης (μια τεχνητή συνθήκη στην πραγματικότητα)- και απαιτήσουμε μόνο να είναι ίσα. Οι εφαρμογές της γεωμετρίας Lobachevsky στη θεωρία αριθμών και στη θεωρία συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής που αναφέραμε στην αρχή του άρθρου συνδέονται με αυτό ακριβώς το είδος πλακοστρώσεων.

Μπορούμε παρομοίως να ερευνήσουμε πλακοστρώσεις του χώρου με κανονικά πολύεδρα. Στην περίπτωση του ευκλείδειου χώρου, αυτές οι έρευνες σχετίζονται στενά με την κρυσταλλογραφία, ενώ στην περίπτωση του χώρου Lobachevsky με την τοπολογία των τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων. Σε ό,τι αφορά το δεύτερο θέμα, η θεωρία τέτοιων πλακοστρώσεων απέχει ακόμη πολύ από την πληρότητα, παρότι το 1954 ο Coxeter έδωσε μια περιγραφή όλων των πλακοστρώσεων του χώρου Lobachevsky με ίσα κανονικά πολύεδρα. ◙

Για να περνά η ώρα

Σ86

Φιλικές σκιές. Δύο φίλοι —ο ένας ψηλός, ο άλλος κοντύτερος— απομακρύνονται από μια λάμπα του δρόμου ακολουθώντας αντίθετες κατευθύνσεις με την ίδια ταχύτητα. Ποια από τις δύο σκιές κινείται ταχύτερα;



Σ87

Σπείρα από τετράγωνα. Παρατηρήστε τα τετράγωνα της εικόνας. Ας υποθέσουμε ότι το μαύρο τετράγωνο είναι μοναδιαίο. Ποιο είναι το μήκος των πλευρών των τετραγώνων με την κόκκινη και την μπλε κηλίδα;

Σ88

Νερό και πάγος. Ρίχνουμε 100 g νερού θερμοκρασίας 10°C σ' ένα δοχείο που περιέχει 50 g πάγου θερμοκρασίας −10°C. Ποια θα είναι η θερμοκρασία ισορροπίας του νερού στο δοχείο; Αγνοήστε τη θερμοχωρητικότητα και τη θερμική αγωγιμότητα του δοχείου.

Σ89

Ο συνδυασμός που συμφέρει. Στην ψαραγορά, τα ψάρια προσφέρονται σε δύο μεγέθη: μεγάλα και μικρά. Σήμερα μπορείτε να αγοράσετε τρία μεγάλα ψάρια και ένα μικρό με τα ίδια χρήματα που θα δίνατε χθες για να αγοράσετε πέντε μεγάλα. Από την άλλη πλευρά, δύο μεγάλα ψάρια και ένα μικρό κοστίζουν σήμερα όσο κόστιζαν χθές τρία μεγάλα και ένα μικρό. Ποια είναι ακριβότερα, ένα μεγάλο και δύο μικρά ψάρια σήμερα ή πέντε μικρά ψάρια χθες;

Σ90

Καρφί και μαγνήτης. Πάνω σ' ένα τραπέζι βρίσκεται ένα καρφί όπως αυτό της εικόνας. Πώς πρέπει να πλησιάσετε στο καρφί έναν μαγνήτη με σχήμα πετάλου για να κολλήσουν ταυτόχρονα το κεφάλι και η αιχμή του καρφιού στους πόλους του μαγνήτη;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Το τελευταίο θεώρημα του Fermat

Στο περιθώριο των Αριθμητικών του Διόφαντου ο Fermat διατύπωσε ένα θεώρημα που το άφησε αναπόδεικτο, λόγω... έλλειψης χώρου. Πρόσφατα ο Andrew Wiles συμπλήρωσε αυτό το μικρό κενό.

Ο ERIC TEMPLE BELL, Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΒΙΟΓΡΑΦΟΣ πολλών μαθηματικών, πίστευε ότι το τελευταίο θεώρημα του Fermat θα ήταν από τα ερωτήματα που θα παρέμεναν αναπάντητα, ακόμη και τη μέρα που ο ανθρώπινος πολιτισμός θα αυτοκαταστρεφόταν σ' έναν πυρηνικό πόλεμο. Ο Bell διατύπωσε αυτή την πρόβλεψη λίγο πριν από το θάνατό του, το 1960. Αν ζούσε λίγες δεκαετίες ακόμη, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να δούμε τι θα τον εξέπληττε περισσότερο: το γεγονός ότι η ανθρωπότητα συνεχίζει να επιβιώνει ή το ότι ανακοινώθηκε η απόδειξη του εν λόγω θεωρήματος;

Το ίδιο το θεώρημα διατυπώνεται εύκολα. Ο Pierre de Fermat ισχυρίστηκε ότι, εάν a, b και c είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και αν n είναι ακέραιος μεγαλύτερος του 2, τότε η εξίσωση

$$a^n + b^n = c^n$$

είναι αδύνατη. Η απλότητα της διατύπωσης είναι απατηλή: η πρόταση είχε αντισταθεί σε όλες τις απόπειρες απόδειξης για περισσότερο από 350 χρόνια. Και η πρόσφατη απόδειξη, την οποία επινόησε ο Andrew Wiles του Πανεπιστημίου του Πρίνστον, απαιτεί για την προσέγγιση του προβλήματος ένα εξαιρετικό οπλοστάσιο μαθηματικών εργαλείων και τεχνικών. Η απόδειξη του Wiles εμπεριέχεται σ' ένα πυκνό και δύσκολο χειρόγραφο 200 σελίδων, το οποίο ενσωματώνει μέσω παραπομπών μια κατά πολύ μεγαλύτερη ποσότητα μαθηματικού έργου που αναπτύχθηκε τα τελευταία τριάντα ή και περισσότερα χρόνια.

Το παρόν κείμενο αποτελεί σύνθεση τμημάτων των άρθρων "Fermat's Last Theorem and Modern Arithmetic" των K.A. Ribet και B. Hayes (*American Scientist*, Μάρτιος/Απρίλιος 1994), "Andrew Wiles: A Math Whiz Battles 350-Year-Old Puzzle" της G. Kolata (*Math Horizons*, Χειμώνας 1993), και τμημάτων του Κεφαλαίου 3 του βιβλίου *From Here to Infinity* του Ian Stewart (Oxford University Press, 1996), σε μετάφραση του Κώστα Γαβρά, μαθηματικού, και του Φάνη Γραμμένου, φυσικού. Ευχαριστούμε τον καθηγητή κ. Λάμπρου Μιχάλη για τις υποδείξεις του στη μετάφραση συγκεκριμένων όρων, και τον κ. Ευαγγελόπουλο Γιώργο, ο οποίος μας προσέφερε το παραπάνω υλικό στα αγγλικά και μας ενθάρρυνε για το εγχείρημα.

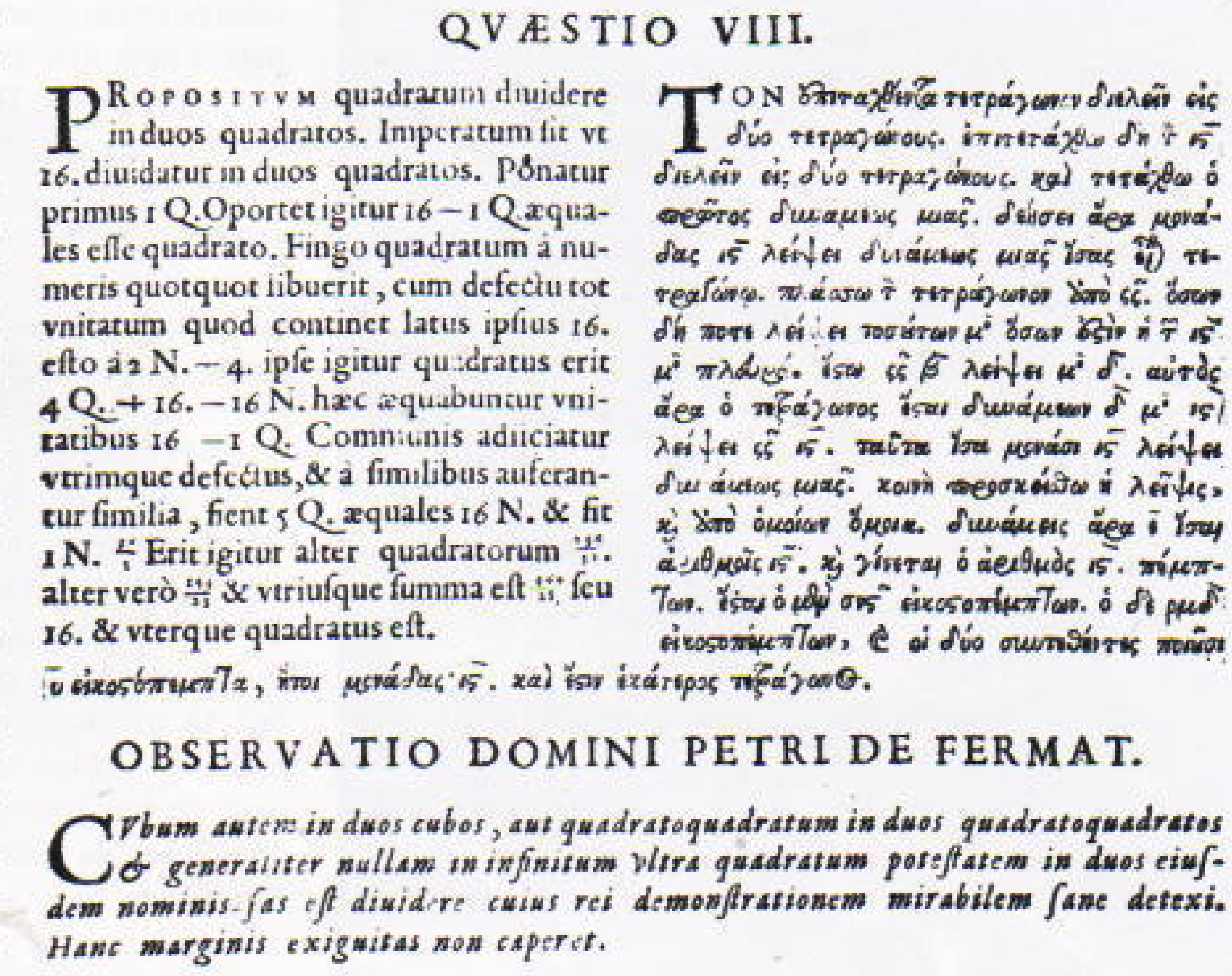
Είναι σημαντικό να καταλάβουμε την πραγματική θέση που κατέχει στα σύγχρονα μαθηματικά το τελευταίο θεώρημα του Fermat: είναι ένα διάσημο αίνιγμα, αλλά μετά δυσκολίας μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια πρόταση κεντρικής ή θεμελιώδους σπουδαιότητας. Η απόδειξη του θεωρήματος δεν σημαίνει ότι θα μας οδηγήσει σε πολλά άλλα μαθηματικά συμπεράσματα μεγάλου ενδιαφέροντος. Από την άλλη, η αναζήτηση μιας απόδειξής του έχει συνεισφέρει στην ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων μεγάλης σπουδαιότητας. Ειδικότερα, ο Wiles προσέγγισε το πρόβλημα ξεκινώντας να αποδείξει μιαν άλλη πρόταση, γνωστή ως εικασία των Taniyama-Shimura, από την οποία το τελευταίο θεώρημα του Fermat έπεται ως πόρισμα.

Η εικασία των Taniyama-Shimura είναι βαθύτερη και ενδεχομένως πιο σημαντική από το ίδιο το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Ανήκει σ' ένα πεδίο μαθηματικών που αναπτύσσεται ραγδαία τις τελευταίες τρεις δεκαετίες, χωρίς ωστόσο να προκαλεί μεγάλο ενδιαφέρον στους χώρους πέραν του μαθηματικού επαγγέλματος. Το πεδίο αυτό ονομάζεται «αριθμητική αλγεβρική γεωμετρία», ή «μοντέρνα αριθμητική»· προήλθε από την προσπάθεια εφαρμογής μεθόδων των σύγχρονων μαθηματικών στη μελέτη προβλημάτων, γνωστών ως διοφαντικών προβλημάτων, στα οποία ο σκοπός είναι η εύρεση όλων των ακέραιων λύσεων μιας οικογένειας εξισώσεων. Η σύγχρονη αριθμητική διαθέτει καθ' εαυτή πλούσια δομή και φαίνεται να συνδέεται, με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, με κάθε άλλο κλάδο των μαθηματικών. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι το αφηρημένο οπλοστάσιο αυτού του κλάδου έχει οδηγήσει σε μια νέα κατανόηση του πλέον διάσημου όλων των διοφαντικών προβλημάτων — του τελευταίου θεωρήματος του Fermat.

Σημειώσεις στο περιθώριο

Η ιστορία περί του πώς ο Fermat πρότεινε το τελευταίο θεώρημά του είναι γνωστή, αλλά είναι τόσο καλή ώστε δεν μπορούμε παρά να την αναφέρουμε για άλλη μία φορά. Ο Pierre de Fermat γεννήθηκε στη νότια Γαλλία το 1601 και πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Τουλούζη, όπου εργάστηκε ως διακεκριμένος νομικός στη δημόσια διοίκηση, υπηρετώντας τον Λουδοβίκο τον ΙΔ'. Ως μαθηματικός υπήρξε ερασιτέχνης, αλλά με ιδιαίτερα καλές γνωριμίες και επαφές· διατηρούσε εκτεταμένη αλληλογραφία με τους René Descartes, Blaise Pascal και άλλους φωστήρες της εποχής. Πράγματι, η κύριά μας πηγή γνώσης γύρω από το μαθηματικό του έργο είναι η αλληλογραφία του —καθώς και οι σημειώσεις του στα περιθώρια βιβλίων.

Γύρω στα 1630, ο Fermat μελέτησε τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου του Αλεξανδρέως, ένα έργο που πιθανότατα γράφτηκε τον 3ο αιώνα μ.Χ. και αναφέρεται σε διάφορα προβλήματα των οποίων οι λύσεις είναι ακέραιοι ή γενικότερα ρητοί αριθμοί. Ο Fermat έγραψε πολυάριθμα σχόλια στο περιθώριο του αντιτύπου των *Αριθμητικών* που διέθετε· το σχόλιο που μας αφορά ειδικότερα αναφέρεται στο Πρόβλημα 8 του Βιβλίου 2, όπου ο Διόφαντος θέτει το εξής ζήτημα: «Τόν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους» (δοθέντος ενός τελείου τετραγώνου, να το αναλύσετε ως άθροισμα δύο τελείων τετραγώνων). Η σημείωση του Fermat, μεταφρασμένη από τα λατινικά, αναφέρει: «Είναι αδύνατον να αναλύσουμε έναν κύβο σε δύο τέλειους κύβους ή μια τέταρτη δύναμη σε δύο τέλειες τέταρτες δυνάμεις ή, γενικά, κάθε δύναμη μεγαλύτερη της δευτέρας σε δύο δυνάμεις ίδιου βαθμού. Έχω ανακαλύψει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να τη χωρέσει».


QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 – 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. – 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. – 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 – 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. 16/5 Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter verò 144/25 & vtriusque summa est 400/25 seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ις μο πλευρά. ἔστω ςς β λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μο ις λείψει ςς ις. ταῦτα ἴσα μονάσι ις λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις πεμπτῶν. ἔσται ὁ μὲν σνς εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ις. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Σχήμα 1
Η περίφημη σημείωση του Pierre de Fermat βρίσκεται στην έκδοση των Αριθμητικών *του Διόφαντου από το γιο του Fermat, τον Samuel. Ο Fermat είχε διαβάσει τα* Αριθμητικά *στην πρώτη σύγχρονη έκδοσή τους —όπως δημοσιεύτηκαν το 1621 από τον Claude-Gaspar Bachet—, όμως το αντίτυπο με τις παρατηρήσεις του δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμη. Ο Samuel Fermat, στην έκδοσή του, έχει αντιγράψει τη σημείωση και την παραθέτει κάτω από το λατινικό και το ελληνικό κείμενο του Προβλήματος 8 του Βιβλίου 2.*

Ο βασανιστικός υπαινιγμός για μια απόδειξη που κάποτε υπήρξε γνωστή αλλά χάθηκε στη συνέχεια έχει αναμφίβολα συνεισφέρει στη δημοφιλή ρομαντική ιστορία γύρω από το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Έτσι προέκυψε ο χαρακτηρισμός «τελευταίο», για τον οποίο ο Fermat δεν φέρει καμία ευθύνη. Ασφαλώς το θεώρημα δεν ήταν το τελευταίο που πρότεινε κατά τη διάρκεια της ζωής του· έζησε έως το 1665, συνεισφέροντας πολλά ακόμη στα μαθηματικά. Η ονομασία «τελευταίο» εμφανίστηκε τον 18ο ή 19ο αιώνα, και μάλλον στόχευε στην αναγνώριση του θεωρήματος ως της τελευταίας πρότασης του Fermat που θα παρέμενε είτε αναπόδεικτη είτε χωρίς αντιπαράδειγμα.

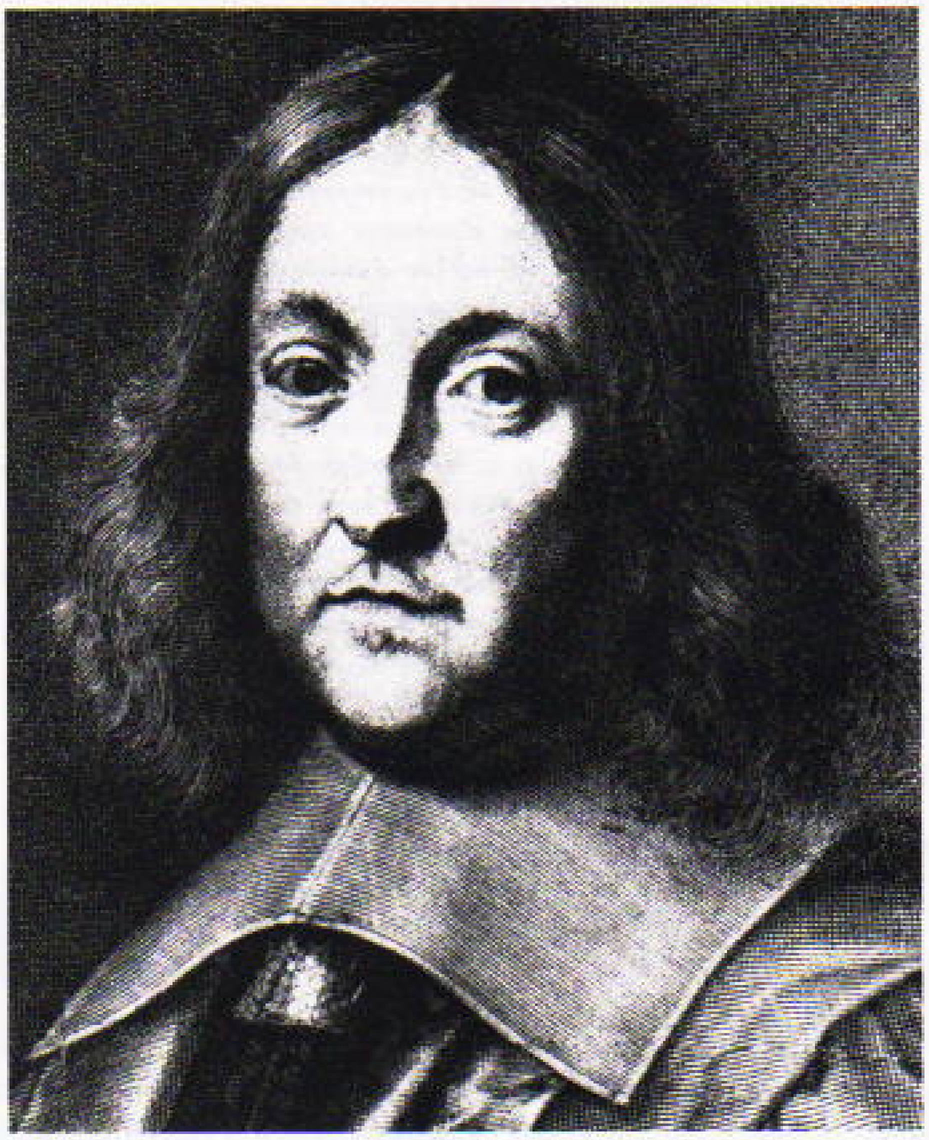
Διέθετε πράγματι ο Fermat μια «θαυμάσια» απόδειξη, την οποία θα μπορούσε να είχε γράψει αν το περιθώριο ήταν λίγο μεγαλύτερο; Πρόκειται για ακόμη ένα από εκείνα τα ερωτήματα που έχουν σοβαρή πιθανότητα να διαρκέσουν περισσότερο από τον ανθρώπινο πολιτισμό. Μια πιθανή απάντηση είναι ότι ο Fermat νόμισε πως είχε καταλήξει σε μια απόδειξη, αργότερα όμως ανακάλυψε σ' αυτήν κάποια ατέλεια. Σε μεταγενέστερες επιστολές προς συναδέλφους του, ο Fermat παρέπεμψε σε αποδείξεις των ειδικών περιπτώσεων για $n = 3$ και $n = 4$, αλλά τη γενική απόδειξη δεν τη μνημόνευσε ποτέ ξανά.

Πρώιμες προσπάθειες

Η ανεύρεση ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $a^n + b^n = c^n$ δεν είναι δύσκολη όταν $n = 1$ καθώς, στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση ανάγεται στην απλή μορφή $a + b = c$. Επειδή το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο ακεραίων είναι επίσης ακέραιος αριθμός, για κάθε a και b υπάρχει πάντοτε ένας c που ικανοποιεί την εξίσωση. Όταν $n = 2$ (η περίπτωση που εξέτασε ο Διόφαντος), το πρόβλημα γίνεται ελάχιστα δυσκολότερο. Βεβαίως, η εξίσωση $a^2 + b^2 = c^2$ είναι ο τύπος του Πυθαγόρα, η οποία συνδέει τις κάθετες πλευρές και την υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου, και επιδέχεται άπειρες το πλήθος ακέραιες λύσεις —αρχής γενομένης από τη γνωστή $3^2 + 4^2 = 5^2$. Αιώνες πριν από τον Διόφαντο, ο Ευκλείδης έδωσε μια μέθοδο σχηματισμού όλων των συνόλων τέτοιων πυθαγόρειων τριάδων.

Με δεδομένη την απειρία λύσεων όταν $n = 1$ ή $n = 2$, η πιθανότητα να μην υπάρχει καμία ακέραιη λύση για όλα τα $n \geq 3$ φαίνεται να εκπλήσσει, όμως αυτός είναι ο ισχυρισμός του Fermat.

Ο ίδιος ο Fermat απέδειξε το θεώρημα για την περίπτωση $n = 4$ (και αυτή τη φορά ανέπτυξε την επιχειρηματολογία του σε μια άλλη σημείωση στο περιθώριο).



Σχήμα 2.
Ο Pierre de Fermat (1601-1665) υπήρξε διακεκριμένος νομικός, αλλά κέρδισε την αθανασία χάρη σ' ένα χόμπυ του: τα μαθηματικά.

Ουσιαστικά, ο Fermat απέδειξε μια ελαφρώς γενικότερη πρόταση, δείχνοντας ότι η εξίσωση $a^4 + b^4 = c^2$ δεν επιδέχεται ακέραιες λύσεις· αφού κάθε τέλεια τέταρτη δύναμη είναι επίσης και τέλειο τετράγωνο, το αποτέλεσμα αυτό συνεπάγεται την ορθότητα του αρχικού θεωρήματος για $n = 4$. Για να το διατυπώσουμε διαφορετικά, ο Fermat έδειξε ότι δεν υπάρχουν πυθαγόρειες τριάδες $a^2 + b^2 = c^2$ όπου τα ίδια τα a, b να είναι τέλεια τετράγωνα. Η ιδέα στην οποία βασίζεται η απόδειξη αποτελεί μια τεχνική που επινόησε ο Fermat και ονομάζεται μέθοδος της άπειρης καθόδου. Αφετηρία είναι η υπόθεση ότι υπάρχουν πράγματι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $a^4 + b^4 = c^2$. Ο Fermat ανακάλυψε μια σειρά πράξεων με τις οποίες, δοθείσης μιας οιασδήποτε τέτοιας λύσης, δημιουργείται μία μικρότερή της. Η εφαρμογή της ίδιας ακολουθίας πράξεων στη νέα λύση έχει ως αποτέλεσμα μία ακόμη μικρότερη λύση. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα, δημιουργώντας μια απειροσειρά από ολοένα μικρότερες λύσεις. Η ύπαρξη όμως μιας τέτοιας σειράς από συνεχώς μικρότερους αριθμούς είναι αδύνατη στο σύνολο των θετικών ακεραίων, το οποίο διαθέτει ένα καλώς ορισμένο κάτω φράγμα (τον αριθμό 1). Ο μόνος τρόπος αποφυγής αυτού του ατόπου είναι η απόρριψη της αρχικής υπόθεσης περί ύπαρξης ακέραιης λύσης.

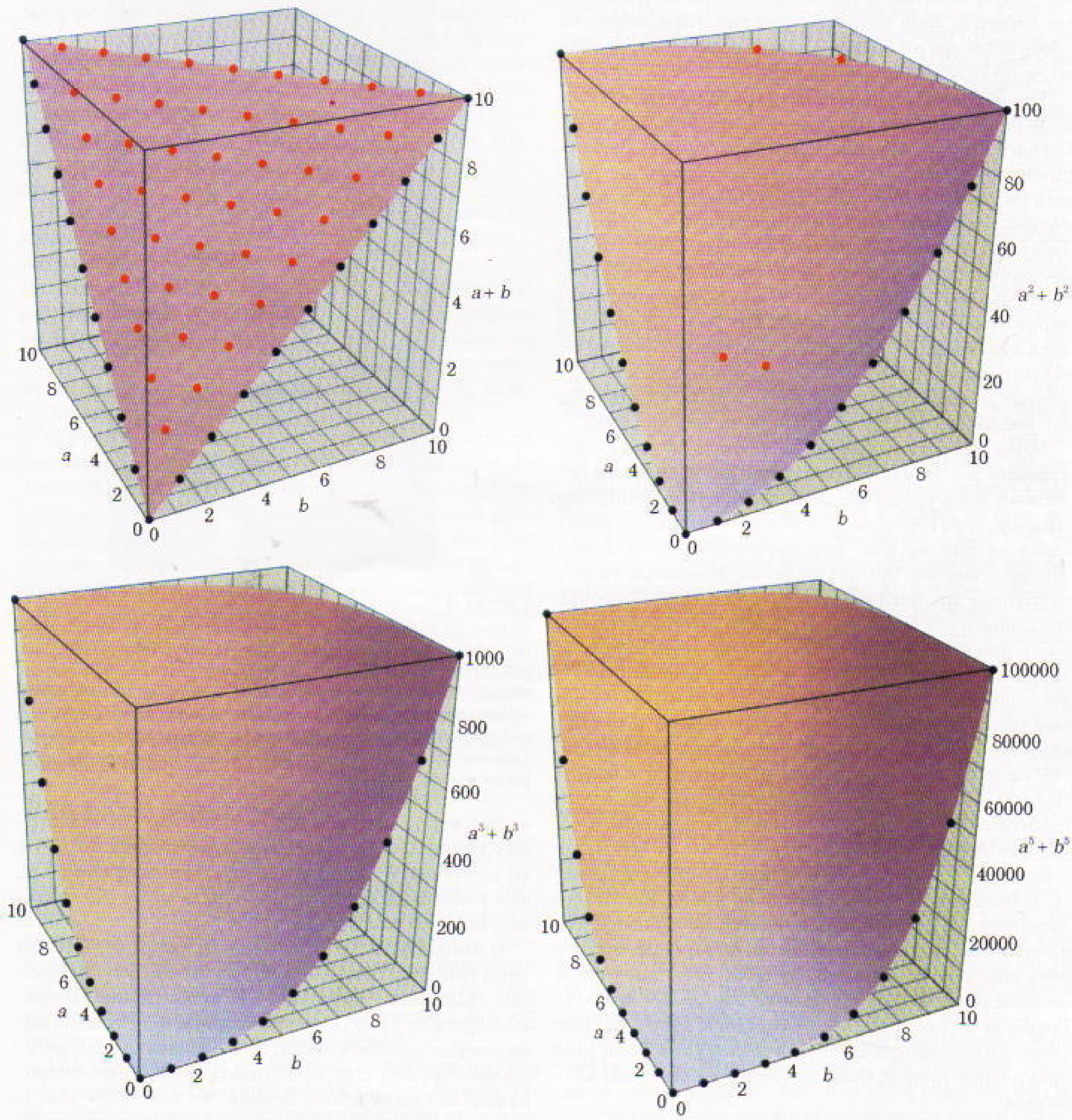
Η περίπτωση $n = 3$ εξετάστηκε από τον Leonhard Euler, τον μεγάλο ελβετό μαθηματικό του 18ου αιώνα. Και η δική του απόδειξη βασίζεται στην άπειρη κάθοδο, αλλά είναι περισσότερο πεπλεγμένη από την απόδειξη για $n = 4$. Στα χρόνια που ακολούθησαν, αποδείχτηκαν αρκετές ειδικές περιπτώσεις του τελευταίου θεωρήματος του Fermat. Γύρω στα 1820, ο Γάλλος Adrien-Marie Legendre και ο Γερμανός P.G. Lejeune Dirichlet έδωσαν αποδείξεις για την περίπτωση $n = 5$. Ο Dirichlet προσπάθησε να αποδείξει και την περίπτωση $n = 7$, αλλά τελικά το κατόρθωσε μόνο για $n = 14$· η απόδειξη για $n = 7$ επινοήθηκε αργότερα, από τον Γάλλο Gabriel Lamé. Τότε, το 1847, διατυπώθηκε μια σημαντική πρόοδος από τον Γερμανό Ernst E. Kummer, ο οποίος έφτασε πολύ κοντά σε μια γενική απόδειξη του θεωρήματος. Το έργο του Kummer αποδείκνυε ότι το τελευταίο θεώρημα του Fermat αληθεύει για άπειρο πλήθος εκθετών, συγκεκριμένα για όλες τις τιμές του n που διαιρούνται από «κανονικούς» πρώτους αριθμούς. Οι τελευταίοι αποτελούν ένα υποσύνολο των πρώτων αριθμών (δηλαδή των θετικών ακεραίων που διαιρούνται μόνο από τον εαυτό τους και τη μονάδα). Οι μόνοι μη κανονικοί πρώτοι, μικρότεροι του 100, είναι οι 37, 59 και 67, αλλά ο Kummer πέτυχε στην πορεία να επινοήσει απόδειξη και γι' αυτές τις ειδικές τιμές. Έτσι, το τελευταίο θεώρημα του Fermat είχε αποδειχτεί για όλα τα $n < 100$.

Τα τελευταία χρόνια, μελέτες με τη βοήθεια υπολογιστών είχαν πετύχει μεγάλη ανύψωση του κάτω ορίου κάθε δυνατού αντιπαραδείγματος. Ένα αποτέλεσμα που δημοσιεύτηκε τον Ιούλιο του 1993 (από τους Buhler, Crandall, Ernvall και Metsänkylä) δείχνει ότι το τελευταίο θεώρημα του Fermat αληθεύει για όλους τους εκθέτες $n < 4.000.000$, οπότε κάθε ακέραιη λύση της $a^n + b^n = c^n$ θα έπρεπε να αποτελείται από αστρονομικά μεγάλους ακεραίους. (Αποδεικνύεται ότι η μικρότερη δυνατή τιμή του c^n θα ήταν ένας αριθμός με περισσότερα από 26 εκατομμύρια δεκαδικά ψηφία.) Εντούτοις, δεν υπήρξε μαθηματικός που να θεώρησε το θέμα λήξαν μόνο και μόνο επειδή εξαντλήθηκε ένας πεπερασμένος αριθμός περιπτώσεων. Υπάρχει άπειρο πλήθος από τους μη κανονικούς πρώτους αριθμούς του Kummer, συνεπώς όσο και να επεκτεινόταν η κατά περίπτωση ανάλυση, θα ήταν αδύνατον να οδηγήσει σε ολοκληρωμένο αποτέλεσμα.

Η εικασία Taniyama

Ο δρ. Andrew Wiles είναι ήσυχος και πράος άνθρωπος, μ' ένα ντροπαλό χαμόγελο. Ωστόσο, βρήκε το κουράγιο να επενδύσει επτά χρόνια εργαζόμενος μυστικά στο πλέον διάσημο μαθηματικό πρόβλημα και αντιμετωπίζοντας μια τρομερή πρόκληση που έφερε σε αμηχανία τους καλύτερους μαθηματικούς επί περισσότερο από 300 χρόνια. Στις 23 Ιουνίου 1993, και παρ' όλες τις αντιξοότητες, ο Wiles ήταν σε θέση να αναγγείλει ότι βρήκε τη λύση του προβλήματος. Ήταν ένα επίτευγμα το οποίο, εάν αλήθευε, θα εκτόξευε τον σαραντάχρονο καθηγητή μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Πρίνστον στο στρατόπεδο των γιγάντων αυτού του γνωστικού πεδίου: ο Wiles θα έφτανε στον κολοφώνα της δόξας του δημιουργώντας ένα είδος ινδάλματος στην επιστημονική κοινότητα.

Η απόδειξη του Wiles για το τελευταίο θεώρημα του Fermat δεν είναι του είδους που μπορεί να γραφεί σ' ένα φύλλο χαρτί· μάλιστα απαιτεί πολύ ειδικές γνώσεις για



Σχήμα 3

Το τελευταίο θεώρημα του Fermat επιδέχεται μια απλή γεωμετρική ερμηνεία. Για κάθε δεδομένη τιμή του n, η συνάρτηση $f(a, b) = a^n + b^n$ ορίζει μια λεία επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Στην περίπτωση $n = 1$ (άνω αριστερά), η επιφάνεια είναι ένα επίπεδο που διέρχεται από άπειρα το πλήθος σημεία με ακέραιες συντεταγμένες· πράγματι, σε κάθε σημείο όπου τα a και b είναι ακέραιοι, η τρίτη συντεταγμένη $a + b$ είναι επίσης ακέραιος αριθμός. Ακέραια σημεία όπου το a ή το b ισούνται με μηδέν έχουν σχεδιαστεί με μαύρες κουκκίδες· άλλα ακέραια σημεία υποδηλώνονται με κόκκινες κουκκίδες. Για $n = 2$ (άνω δεξιά), η επιφάνεια είναι ένα παραβολοειδές, και τα μόνα ακέραια σημεία είναι όσα ικανοποιούν την πυθαγόρεια εξίσωση $a^2 + b^2 = c^2$. Πέραν των σημείων κατά μήκος του άξονα όπου $a = 0$ ή $b = 0$, υπάρχουν μόνο τέσσερα τέτοια σημεία επί του μικρού τμήματος της επιφάνειας που απεικονίζεται στο σχήμα· τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στις εξισώσεις $3^2 + 4^2 = 5^2$ και $6^2 + 8^2 = 10^2$. Το πλήθος των ακέραιων σημείων σε ολόκληρη την επιφάνεια είναι άπειρο. Τμήματα της επιφάνειας για $n = 3$ (κάτω αριστερά) και $n = 5$ (κάτω δεξιά) δεν διαθέτουν ακέραια σημεία (παρά μόνο κατά μήκος των αξόνων $a = 0$ και $b = 0$ αντίστοιχα). Από το τελευταίο θεώρημα του Fermat απορρέει ότι αυτές οι επιφάνειες μπορούν να επεκταθούν στο άπειρο χωρίς να διέλθουν ποτέ από κάποιο σημείο με τρεις ακέραιες συντεταγμένες. Επιπλέον, το ίδιο ισχύει και για κάθε επιφάνεια που αντιστοιχεί σε τιμή του n μεγαλύτερη του 2.

την πλήρη κατανόησή της. Ωστόσο, οι γενικές γραμμές της απόδειξης είναι κατανοητές, κι έτσι στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια ιδέα αυτής της δραματικής εξέλιξης στη θεωρία αριθμών.

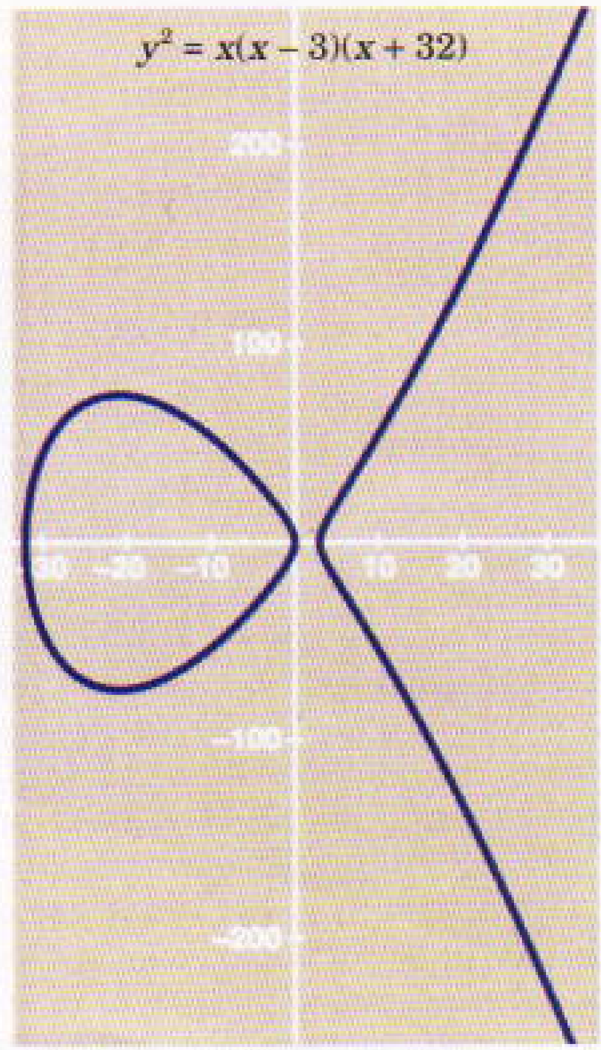
Το αποφασιστικό σημείο στην ιστορία μας εμφανίστηκε περίπου πριν από μία δεκαετία, το 1985, όταν ο δρ. Gerhard Frey του Πανεπιστημίου της Σάαρλαντ της Γερμανίας ισχυρίστηκε ότι το τελευταίο θεώρημα του Fermat θα προέκυπτε αυτομάτως αν αλήθευε μια άλλη, φαινομενικά άσχετη με αυτό πρόταση, η εικασία του Taniyama (ή εικασία Taniyama-Shimura-Weil —όνομα που οφείλεται στο γεγονός ότι το 1955 ο Taniyama έθεσε κάποια ερωτήματα τα οποία γενικεύτηκαν και έγιναν ακριβέστερα από τους Shimura και Weil). Η πρόταση αυτή αναφέρεται σε μαθηματικά αντικείμενα γνωστά ως ελλειπτικές καμπύλες, δηλαδή μια κλάση κυβικών εξισώσεων οι οποίες είχαν μελετηθεί σε βάθος από τον ίδιο τον Fermat, αν και όχι σε σχέση με το θεώρημά του.

Μπορούμε να εννοήσουμε τη γενική ιδέα που κρύβει η εικασία του Taniyama, θεωρώντας μια πολύ ειδική περίπτωση. Υπάρχει μια ιδιαίτερα στενή σχέση μεταξύ της εξίσωσης του Πυθαγόρα $a^2 + b^2 = c^2$, του κύκλου μοναδιαίας ακτίνας και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Μπορούμε να συναγάγουμε την αναφερόμενη σχέση ως εξής: Γράφουμε την εξίσωση του Πυθαγόρα στη μορφή $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, οπότε μπορούμε να την ερμηνεύσουμε λέγοντας ότι το σημείο (x, y) με $x = (a/c)$ και $y = (b/c)$, βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Η θεωρία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων παρέχει τότε έναν κομψό και απλό τρόπο παραμετρικοποίησης του κύκλου, έτσι ώστε να τον παραστήσουμε μέσω μίας μόνο βοηθητικής μεταβλητής. Η θεμελιώδης σχέση που συνδέει το ημίτονο και το συνημίτονο οποιασδήποτε γωνίας A είναι: $\text{συν}^2 A + \text{ημ}^2 A = 1$. Τούτο σημαίνει πως αν θέσουμε $x = \text{συν}A$ και $y = \text{ημ}A$, τότε το σημείο με συντεταγμένες (x, y) βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Για να συνοψίσουμε: η επίλυση της πυθαγόρειας εξίσωσης στο σύνολο των ακέραιων αριθμών ισοδυναμεί με την εύρεση μιας γωνίας A, τέτοιας ώστε το $\text{συν}A$ και το $\text{ημ}A$ να είναι ρητοί αριθμοί (αντίστοιχα ίσοι με a/c και b/c). Επειδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν πολλών ειδών καλές ιδιότητες, τούτη η ιδέα είναι η βάση μιας πραγματικά γόνιμης θεωρίας για την εξίσωση του Πυθαγόρα.

Η εικασία του Taniyama δηλώνει ότι η ίδια τακτική μπορεί να ακολουθηθεί αν ο κύκλος αντικατασταθεί από μια ελλειπτική καμπύλη, αλλά με χρήση συναρτήσεων πιο εκλεπτυσμένων από τις τριγωνομετρικές, των ονομαζόμενων «modular» συναρτήσεων. Ειδικότερα δηλώνει ότι κάθε ελλειπτική καμπύλη είναι δυνατόν να παραμετρικοποιηθεί μέσω κατάλληλων modular συναρτήσεων, όπως ακριβώς συμβαίνει για τον κύκλο μέσω του ημιτόνου και του συνημιτόνου.

Η ελλειπτική καμπύλη του Frey

Μεταξύ των ετών 1970-1975 ο Yves Hellegouarch δημοσίευσε μια σειρά εργασιών που αφορούσαν τη σύνδεση των καμπυλών Fermat $x^n + y^n = z^n$ και των ελλειπτικών καμπυλών· χρησιμοποίησε δε τις εργασίες αυτές για να συναγάγει θεωρήματα για τις ελλειπτικές καμπύλες, από γνωστά επιμέρους συμπεράσματα πάνω στο τελευταίο θεώρημα του Fermat.



Σχήμα 4

Ελλειπτική καμπύλη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη κυβική εξίσωση. Τέτοιου είδους καμπύλες βρίσκονται σε στενή σύνδεση με το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Ειδικότερα, αν υπήρχε ένα αντιπαράδειγμα στο θεώρημα, θα συνεπαγόταν την ύπαρξη μιας ελλειπτικής καμπύλης με κάποιες πολύ ξεχωριστές ιδιότητες. Η καμπύλη που παρουσιάζεται εδώ, ορίζεται από την εξίσωση $y^2 = x^3 + 29x^2 - 96x$, ή σε παραγοντοποιημένη μορφή $y^2 = x(x - 3)(x + 32)$.

Ο Jean-Pierre Serre πρότεινε τη χρήση της ιδέας με την αντίστροφη πορεία, δηλαδή την αναζήτηση ιδιοτήτων των ελλειπτικών καμπυλών για απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικών με το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Βρήκε στοιχεία που έδειχναν ότι η συγκεκριμένη αυτή γραμμή προσέγγισης είχε τη δυνατότητα να λύσει το πρόβλημα· κι έτσι οι ειδικοί άρχισαν να πιστεύουν πως το τελευταίο θεώρημα του Fermat βρισκόταν στην πορεία για να αποκαλύψει τα μυστικά του. Θα χρειαζόταν όμως μεγάλος τεχνικός αγώνας.

Το 1985, σε μια διάλεξη που δόθηκε στο διεθνές κέντρο μαθηματικών ερευνών στο Ομπερβόλφαχ, στον Μέλανα Δρυμό της Γερμανίας, ο Gerhard Frey συγκεκριμενοποίησε την πρόταση του Serre, εισάγοντας μια καμπύλη —γνωστή πλέον με το όνομα ελλειπτική καμπύλη του Frey— σε σχέση με την υποθετική λύση για το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Η μορφή που επιλέχθηκε για την εν λόγω καμπύλη ανάγεται στον Hellegouarch, αλλά ο Frey σκόπευε να τη χρησιμοποιήσει με διαφορετικό τρόπο. Υποθέστε ότι υπάρχει μια μη τετριμμένη λύση $A^n + B^n = C^n$ για την εξίσωση του Fermat (δηλαδή τα A, B, C είναι όλα διάφορα του 0). Διαλέγουμε αυτή την υποθετική λύση και στο εξής τα A, B, C θα συμβολίζουν σταθερούς (αλλά άγνωστους) μη μηδενικούς ακεραίους. Το μόνο γνωστό στοιχείο για τους A, B, C είναι το ότι ικανοποιούν τη σχέση $A^n + B^n = C^n$ για κάποιο $n \geq 3$, αν και μπορούμε να θέσουμε ένα επιπλέον στοιχείο, υποθέτοντας ότι οι A, B και C είναι μεταξύ τους πρώτοι.

Τώρα θεωρήστε τη συγκεκριμένη (αλλά άγνωστη και πιθανώς ανύπαρκτη) ελλειπτική καμπύλη, με εξίσωση $y^2 = x(x + A^n)(x - B^n)$. Πρόκειται για την ελλειπτική καμπύλη του Frey, και υπάρχει αν και μόνο αν το τελευταίο θεώρημα του Fermat δεν αληθεύει. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι τούτη η καμπύλη δεν μπορεί να υπάρξει. Ο τρόπος για να επιτύχουμε το σκοπό μας είναι να υποθέσουμε αρχικά ότι η καμπύλη υπάρχει, και στη συνέχεια να καταλήξουμε σε κάποιο αντιφατικό συμπέρασμα.

Ο Frey είχε την ιδέα ότι, αν η καμπύλη του υπήρχε, τότε θα ήταν πραγματικά ένα πολύ παράξενο τέρας. Το 1986 ο Kenneth Ribet επαλήθευσε την ιδέα του Frey, αποδεικνύοντας πως, αν η εικασία του Taniyama είναι αληθής, τότε η ελλειπτική καμπύλη του Frey δεν είναι δυνατόν να παραμετρικοποιηθεί μέσω modular συναρτήσεων. Αν λοιπόν η εικασία του Taniyama αληθεύει, τότε ως απόρροια αληθεύει και το τελευταίο θεώρημα του Fermat.

Κάτι τέτοιο αποτελεί ουσιαστικής σημασίας κρίκο στην αλυσίδα Fermat, διότι δείχνει πως το τελευταίο θεώρημα του Fermat δεν είναι απλά ένα απομονωμένο αξιοπερίεργο, αλλά τοποθετείται στην καρδιά της σύγχρονης θεωρίας αριθμών.

Επτά χρόνια προσπαθειών

Από τα παιδικά του χρόνια ακόμη, ο Andrew Wiles επιθυμούσε να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Όταν όμως έγινε επαγγελματίας μαθηματικός, απέκτησε τη γνώμη πως επρόκειτο για ένα απομονωμένο και δύσκολο πρόβλημα —το οποίο θα ήταν όμορφο να αποδειχτεί αλλά όχι αντάξιο της φήμης του. Κατόπιν έμαθε για την εργασία του Ribet και μετέβαλε ριζικά την άποψή του, αποφασίζοντας μάλιστα να αφιερώσει όλη του την ερευνητική εργασία για μια απόδειξη.

Γρήγορα αντελήφθη ότι δεν ήταν απαραίτητη η χρήση της εικασίας του Taniyama σε όλη της την έκταση, για να επιτευχθεί αυτή η προσέγγιση· απαραίτητη ήταν μόνο μια ειδική περίπτωση, που καλύπτεται από την εικασία, συγκεκριμένα εκείνη που αφορά μια κατηγορία ελλειπτικών καμπυλών γνωστών ως «ημιευσταθών». Ο Wiles «έσπασε» το πρόβλημα σε έξι κομμάτια, τα οποία έλυσε τμηματικά, μέχρι που τελικά μόνο ένα από αυτά του αντιστεκόταν σθεναρά. Και τότε, μια διάλεξη του Barry Mazur,* με τελείως διαφορετικό αντικείμενο, του έδωσε μια ιδέα καθοριστικής σημασίας. Σε μια εργασία του όγκου 200 σελίδων ο Wiles επιστράτευσε αρκετά ισχυρούς μηχανισμούς, ώστε να δείξει πως η εικασία του Taniyama ίσχυε για τις ημιευσταθείς καμπύλες. Κάτι τέτοιο του ήταν αρκετό για να μπορέσει στη συνέχεια να αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα: Έστω M και N δύο άνισοι, μη μηδενικοί και πρώτοι μεταξύ των ακέραιοι, τέτοιοι ώστε ο αριθμός $MN(M - N)$ να είναι διαιρετός διά 16. Τότε η ελλειπτική καμπύλη

$$y^2 = x(x + M)(x + N)$$

είναι δυνατόν να παραμετρικοποιηθεί μέσω modular συναρτήσεων. Πράγματι, η συνθήκη περί διαιρετότητας διά 16 υποδηλώνει ότι η παραπάνω καμπύλη είναι ημιευσταθής. Έτσι, η περίπτωση της εικασίας του Taniyama, που αφορά τις ημιευσταθείς καμπύλες, εδραιώνει την ύπαρξη της αναγκαίας ιδιότητας.

Ας εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα του Wiles στην καμπύλη του Frey, θέτοντας $M = A^n$ και $N = -B^n$. Τότε $M - N = A^n + B^n = C^n$, οπότε $MN(M - N) = -A^nB^nC^n$, και αρκεί να δείξουμε ότι το τελευταίο γινόμενο είναι πολλαπλάσιο του 16. Κάτι τέτοιο, όμως, είναι αρκετά απλό. Τουλάχιστον ένας από τους A, B, C πρέπει να είναι άρτιος —αφού αν οι A και B είναι περιττοί, τότε ο C^n ως άθροισμα δύο περιττών θα είναι άρτιος, πράγμα που σημαίνει ότι και ο C είναι άρτιος. Μια κίνηση τακτικής μπορεί να μας διευκολύνει σοβαρά στην περαιτέρω πορεία: να θεωρήσουμε ότι $n \geq 4$, αντί $n \geq 3$, μια και η απόδειξη του Euler καλύπτει την περίπτωση όπου $n = 3$. Παρατηρούμε τώρα ότι η τέταρτη ή οποιαδήποτε υψηλότερη δύναμη ενός άρτιου αριθμού είναι διαιρετή διά $2^4 = 16$, οπότε και το γινόμενο $-A^nB^nC^n$ είναι πολλαπλάσιο του 16.

Επομένως, η καμπύλη του Frey ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Wiles, γεγονός που συνεπάγεται τη δυνατότητα παραμετρικοποίησής της μέσω modular συναρτήσεων. Ο Frey όμως είχε ήδη αποδείξει πως κάτι τέτοιο είναι αδύνατον!

Ιδού, λοιπόν, η αντίφαση που εξαρχής αναζητούσαμε. Το ονειρικό οικοδόμημα που κτίσαμε, υποθέτοντας την ύπαρξη μη τετριμμένης λύσης για την εξίσωση του Fermat —με $n \geq 3$— κατέρρευσε. Έτσι αποδεικνύεται ότι μια τέτοια λύση δεν μπορεί να υπάρξει, και συνακολούθως το τελευταίο θεώρημα του Fermat είναι αληθές.

Συνοψίζοντας: η στρατηγική που ακολούθησε ο Wiles δείχνει την ορθότητα της εικασίας του Taniyama για ημιευσταθείς καμπύλες, κάτι που με τη σειρά του δείχνει πως το επιχείρημα του Ribet αποδεικνύει ότι η καμπύλη του Frey δεν υπάρχει —και ο Fermat δικαιώνεται.

Ο Wiles είχε ένα ισχυρό οπλοστάσιο τεχνικών στη διάθεσή του, αλλά χρειάστηκαν επτά χρόνια εντατικής εργασίας για να συνθέσει μια απόδειξη. Ωστόσο, μόλις η αποδεικτική του διαδικασία κοινοποιήθηκε, ανέκυψαν ερωτήματα και αμφιβολίες για την ακεραιότητά της. Τελικά, όμως, ο Mazur εξέφρασε την ομόφωνη παραδοχή του μαθηματικού κόσμου για την ορθότητα της μεθόδου.

Αναστάτωση τον όγδοο χρόνο

Η πλήρης παρουσίαση της εργασίας του Wiles ακολού-

* Βλ. και το άρθρο του Barry Mazur «Γόνιμες απαντήσεις» στο παρόν τεύχος (σελ. 4).

θησε μιαν ασυνήθη οδό. Δεν δημοσιεύτηκε ευρέως, αλλά υποβλήθηκε στο εγκυρότερο μαθηματικό περιοδικό, το *Inventiones Mathematicae*, μέσω του οποίου εστάλη σε έξι ειδικούς κριτές. Στο μεταξύ, σταχυολογήματα τεχνικών λεπτομερειών της απόδειξης —από ανθρώπους που παρευρίσκονταν στο Ινστιτούτο Newton του Πανεπιστημίου του Καίμπριτζ κατά την ανακοίνωση του Wiles— έγιναν έναυσμα για τα πρώτα σχόλια, απορίες, ακόμη και αστεϊσμούς.

Σχήμα 5

Ο Andrew Wiles· εάν είχατε λύσει ένα πρόβλημα 350 ετών, δεν θα χαμογελούσατε κι εσείς;

Ύστερα από μερικές εβδομάδες ενθουσιασμού, άρχισαν να διαρρέουν φήμες για κάποιο πιθανό λάθος. Στις 6 Δεκεμβρίου του 1993, ο Wiles έδωσε το δικό του μήνυμα μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, στο οποίο ανέφερε, σε γενικές γραμμές, τα εξής: «τα όσα προβλήματα προέκυψαν κατά την κρίση της εργασίας, είχαν όλα επιλυθεί εκτός από ένα. Παρά το ότι η κύρια αναγωγή της εικασίας του Taniyama στο υπολογισμό της ομάδας Selmer ήταν ορθή, ο τελικός υπολογισμός ενός επακριβούς άνω φράγματος για την εν λόγω ομάδα, στην ημιευσταθή περίπτωση, δεν ήταν ολοκληρωμένος».

Δεν παρέλειψε όμως να εκφράσει την αισιοδοξία του για τη σύντομη διευθέτηση της εναπομένουσας λεπτομέρειας. Παρ' όλα αυτά, ο χρόνος κυλούσε χωρίς να συμμερίζεται την αισιοδοξία του Wiles.

Δικαίωση τον ένατο χρόνο

Το φθινόπωρο του 1994, πολλοί ειδικοί είχαν αρχίσει να απελπίζονται με την εκκρεμότητα της απόδειξης, εκτιμώντας ότι μια περίοδος τριών ακόμη ετών ήταν απαραίτητη για την κάλυψή της. Στις 26 Οκτωβρίου 1994, ένα μήνυμα από τον Rubin, τον μαθηματικό του Πολιτειακού Πανεπιστημίου του Οχάιο, ήρθε να μεταβάλει εντελώς την κατάσταση. Το μήνυμα έλεγε τα εξής:

«Σήμερα το πρωί δημοσιεύτηκαν δύο χειρόγραφες εργασίες: οι ελλειπτικές καμπύλες και το τελευταίο θεώρημα του Fermat, από τον Andrew Wiles, και θεωρητικές ιδιότητες των δακτυλίων για ορισμένες άλγεβρες Hecke, από τους Richard Taylor και Andrew Wiles.

»Η πρώτη (εκτενής) αναγγέλλει —μεταξύ άλλων— μια απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, στηριζόμενη, για ένα βασικό της βήμα, στη δεύτερη εργασία.

»Όπως οι περισσότεροι γνωρίζετε, στην επιχειρηματολογία που παρουσιάστηκε από τον Wiles στις διαλέξεις του στο Καίμπριτζ προέκυψε ένα σοβαρό κενό —συγκεκριμένα η κατασκευή ενός συστήματος Euler. Έπειτα από ανεπιτυχείς προσπάθειες, ο Wiles επιχείρησε εκ νέου μια διαφορετική προσέγγιση, την οποία, αν και είχε πρωτύτερα δοκιμάσει, την είχε εγκαταλείψει προς χάριν της ιδέας του συστήματος Euler. Μπόρεσε έτσι να ολοκληρώσει την απόδειξή του, με την υπόθεση ότι ορισμένες άλγεβρες Hecke είναι τοπικές πλήρεις τομές. Η εν λόγω ιδέα, καθώς και οι υπόλοιπες που παρουσιάστηκαν στις διαλέξεις του Καίμπριτζ, αναγράφονται στο πρώτο χειρόγραφο. Οι Taylor και Wiles εδραιώνουν την απαραίτητη ιδιότητα που διαθέτουν οι άλγεβρες Hecke από κοινού στη δεύτερη εργασία».

Ως το 1995 οι δύο ανωτέρω εργασίες είχαν κριθεί, εγκριθεί και γίνει δεκτές για δημοσίευση. Το μυθιστόρημα του Fermat είχε φτάσει στο τέλος του, ή, ακριβέστερα, σε μια νέα αρχή. Ήδη η απόδειξη απλοποιείται. Η νεώτερη επιχειρηματολογία του Wiles είναι συντομότερη σε έκταση και πολύ απλούστερη από την πρώτη ανολοκλήρωτη προσπάθεια. Λέγεται ότι ο αριθμοθεωρητικός του Πανεπιστημίου της Βόνης Faltings έχει ήδη απλουστεύσει κάποια τμήματά της. Το σημαντικότερο, έχουμε πλέον πρόσβαση σ' ένα πλήθος από νέες ισχυρές τεχνικές —ειδικότερα, την ημιευσταθή περίπτωση της εικασίας του Taniyama— τις οποίες μπορούμε να εφαρμόσουμε σε άλλα ερωτήματα που αφορούν τις ελλειπτικές καμπύλες και οτιδήποτε συνδέεται με αυτές. Μια νέα δύναμη εμφανίζεται στην καρδιά της θεωρίας αριθμών.

Επίλογος

Διέθετε άραγε ο Fermat μια απόδειξη του θεωρήματός του;

Είναι εντελώς απίθανο να είχε κατά νου κάτι παρόμοιο με την απόδειξη που μας παρέδωσε ο Wiles. Πολλές μαθηματικές έννοιες μεγάλης σπουδαιότητας —όπως οι ελλειπτικές καμπύλες και οι modular συναρτήσεις— ήταν άγνωστες την εποχή του Fermat. Η προσέγγιση του Wiles περιλαμβάνει μεγάλο μέρος της μοντέρνας αλγεβρικής θεωρίας αριθμών και της αλγεβρικής γεωμετρίας. Η οπτική γωνία του 20ού αιώνα θα ήταν εντελώς ακατανόητη για τον 19ο αιώνα, πόσο μάλλον για τον 17ο.

Κάτι τέτοιο αφήνει δύο ενδεχόμενα. Είτε ο Fermat είχε κάνει λάθος, νομίζοντας πως διέθετε μιαν απόδειξη, ή η ιδέα του ήταν πολύ διαφορετική.

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M86

«Αστρικές» ιδιότητες. Ορίζουμε την πράξη $*$ σ' ένα σύνολο S με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε τρία στοιχεία a, b, c του S να ισχύει (i) $a * (b * c) = b * (c * a)$, (ii) αν $a * b = a * c$, τότε $b = c$. Αποδείξτε ότι η πράξη $*$ είναι (α) αντιμεταθετική —δηλαδή, για κάθε ζεύγος στοιχείων a, b του S ισχύει $a * b = b * a$, και (β) προσεταιριστική —δηλαδή, για κάθε τρία στοιχεία a, b, c του S ισχύει $a * (b * c) = (a * b) * c$.

M87

Διαγραφή και αντικατάσταση. Γράφουμε στο μαυροπίνακα ένα σύνολο n θετικών αριθμών. Ένας μαθητής μπορεί να διαλέξει δύο από αυτούς, να τους σβήσει και να τους αντικαταστήσει με τον αριθμό $(a + b)/4$. Η συγκεκριμένη διαδικασία επαναλαμβάνεται $n - 1$ φορές έως ότου απομείνει ένας μόνο αριθμός στο μαυροπίνακα. Αποδείξτε ότι αν όλοι οι n αρχικοί αριθμοί ήταν ίσοι με το 1, ο αριθμός που απομένει είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $1/n$. (B. Berlov)

M88

Ασκήσεις διαιρετότητας. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει ένας αριθμός με δεκαδική αναπαράσταση που αποτελείται από n ψηφία, όλα ίσα με 1 ή 2, και ο οποίος διαιρείται με τον 2^n.

M89

Διαίρεση σε ίσα τμήματα. Ένα τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Έστω ότι οι ευθείες AB και CD τέμνονται στο σημείο M και οι ευθείες BC και AD τέμνονται στο K, έτσι ώστε το σημείο B να ανήκει στο τμήμα AM και το σημείο D στο τμήμα AK. Έστω P το ίχνος της καθέτου από το M προς την ευθεία AK και L το ίχνος της καθέτου από το K στην ευθεία AM. Αποδείξτε ότι το LP διχοτομεί το BD.

M90

Ναι ή όχι. Ένας ντετέκτιβ πρέπει να εξετάσει το μάρτυρα ενός εγκλήματος σχετικά με μια κρίσιμη λεπτομέρεια. Ο ντετέκτιβ έχει επινοήσει μια σειρά 91 το πολύ ερωτήσεων που πρέπει να απαντηθούν μόνο με ένα «ναι» ή ένα «όχι», και οι οποίες θα του επιτρέψουν να μάθει την κρίσιμη λεπτομέρεια —με την προϋπόθεση ότι ο μάρτυρας λέει την αλήθεια (κάθε ερώτηση μπορεί να εξαρτάται από την απάντηση μίας ή περισσότερων προηγούμενων ερωτήσεων).

Ας υποθέσουμε όμως ότι ο μάρτυρας είναι δυνατόν να πει ψέματα μία φορά το πολύ. Αποδείξτε ότι ο ντετέκτιβ μπορεί να αναθεωρήσει τον προγραμματισμό των ερωτημάτων του και να εκμαιεύσει και πάλι την κρίσιμη λεπτομέρεια χρησιμοποιώντας 105 το πολύ «ναι-όχι» ερωτήσεις.

Φυσική

Φ86

Έλκηθρο στον πάγο. Ένα μακρύ έλκηθρο γλιστράει στην επιφάνεια πολύ λείου πάγου, εισέρχεται σε ασφαλτοστρωμένο δρόμο και σταματάει αφού διανύσει απόσταση μικρότερη από το μισό μήκος του. Στη συνέχεια δίνεται μια τέτοια ώθηση στο έλκηθρο ώστε επαναποκτά την αρχική του ταχύτητα, διανύει μια απόσταση και σταματάει για δεύτερη φορά. Ποιος είναι ο λόγος των χρόνων πέδησης και των αποστάσεων πέδησης στις δύο περιπτώσεις; (S. Krotov)

Φ87

Δύο μεταλλικές ράβδοι. Δύο ράβδοι κατασκευασμένες από διαφορετικό υλικό με συντελεστές γραμμικής διαστολής a_1 και a_2 έχουν στους 0°C σχεδόν ίσα μήκη (ℓ_1, ℓ_2) και εμβαδά διατομών (S_1, S_2). Σε ποιες θερμοκρασίες θα έχουν οι ράβδοι (α) ίσα μήκη, (β) ίσα εμβαδά διατομών, (γ) ίσους όγκους; (B. Bukhovtsev)

Φ88

Τρεις φορτισμένες πλάκες. Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλες μεγάλες τετραγωνικές πλάκες εμβαδού S που απέχουν μεταξύ τους μικρή απόσταση d. Μια τρίτη πλάκα από το ίδιο υλικό, που φέρει φορτίο Q, τοποθετείται στη μέση τής μεταξύ τους απόστασης. Οι εξωτερικές πλάκες συνδέονται μέσω αγωγού υψηλής αντίστασης R. Ξαφνικά η εσωτερική πλάκα κινείται γρήγορα προς τη μια εξωτερική πλάκα, και μέχρι απόσταση $d/3$ από αυτήν. Πόση θερμότητα εκλύεται από την αντίσταση μετά την εν λόγω μετατόπιση;

Φ89

Σωληνοειδές και κύλινδρος. Σταθερό ρεύμα I διαρρέει ένα μακρύ σωληνοειδές ακτίνας r που έχει N σπείρες ανά μέτρο. Είναι γνωστό ότι στο εξωτερικό ενός τέτοιου πηνίου το μαγνητικό πεδίο είναι ασθενές, ενώ στο εσωτερικό του είναι πρακτικά ομογενές. Στον ίδιο άξονα με το σωληνοειδές υπάρχει ένας μακρύς (αν και όχι τόσο μακρύς όσο το ίδιο το πηνίο) χάρτινος κύλινδρος ακτίνας R

Συνέχεια στη σελ. 60 ⇨

Φορτισμέ

«Η αμοιβαία έλξη του ηλεκτρικού ρευστού π
συνήθως καλείται αρνητικό είναι αντιστρό
—Charles Augusti

Όπως ίσως πιθανολογείτε, ο Coulomb δεν υπήρξε ο πρώτος ερευνητής που επιχείρησε να ανακαλύψει το νόμο ο οποίος διέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ των φορτισμένων σωμάτων. Όσοι προηγήθηκαν πρότειναν ενδιαφέρουσες υποθέσεις, εισήγαγαν εξεζητημένες αναλογίες και πραγματοποίησαν εντυπωσιακά πειράματα. Πολλές εξέχουσες επιστημονικές προσωπικότητες έλαβαν μέρος σ' αυτήν την επιστημονική έφοδο, μεταξύ των οποίων και οι Daniel Bernoulli, Joseph Priestley, Franz Aepinus και Henry Cavendish. Ωστόσο, ο Coulomb ήταν εκείνος που κατόρθωσε να ολοκληρώσει τις ανεξάρτητες, ενδελεχείς και πειστικές μελέτες που έθεσαν τα θεμέλια της ποσοτικής ηλεκτροστατικής. Το παράταιρο και κατά κύριο λόγο ποιοτικό μωσαϊκό των ηλεκτρικών φαινομένων απέκτησε ενότητα και αρμονία. Ήταν πλέον δυνατόν να γίνεται αναφορά σε μια μονάδα ηλεκτρικού φορτίου και να εξηγείται η συντριπτική πλειονότητα των συσσωρευμένων δεδομένων. Ακόμη σημαντικότερο αποδείχτηκε το γεγονός ότι η επιτυχία του Coulomb βοήθησε να εισαχθούν στη θεωρία του ηλεκτρισμού οι καλά ανεπτυγμένες ιδέες και μέθοδοι της θεωρητικής μηχανικής. Μέχρις εκείνη τη στιγμή ήταν πρακτικά αδύνατον για τη φυσική να εξηγήσει τις ηλεκτρικές επιδείξεις —ήταν δύσκολο να αποφασίσει κανείς αν θα έπρεπε να τις αποκαλέσει πειράματα ή ψυχαγωγία. Ο νόμος που ανακάλυψε ο Coulomb άνοιξε το δρόμο για τη γοργή και θεαματική πρόοδο στη μελέτη των ηλεκτρικών φαινομένων.

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Με δεδομένο ότι υπάρχουν (συγκριτικά) τεράστιοι κενοί χώροι μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων, αλλά και μεταξύ των ατόμων, τι μας εμποδίζει να πέσουμε διαπερνώντας το πάτωμα;

2. Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται από δύο ίδια φορτία σε ένα τρίτο το οποίο βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει;

Σχήμα 1

3. Μια φορτισμένη σφαίρα έλκει ένα κομμάτι χαρτιού (Σχήμα 1). Πώς θα μεταβληθεί η ελκτική δύναμη αν περιβάλουμε με ένα μεταλλικό φύλλο (α) τη σφαίρα, (β) το κομμάτι του χαρτιού;

4. Πώς θα μεταβληθεί η έλξη μεταξύ της σφαίρας και του χαρτιού στην προηγούμενη ερώτηση αν γειώσουμε το μεταλλικό φύλλο γύρω από τη φορτισμένη σφαίρα;

5. Με όλες τις υπόλοιπες συνθήκες ίδιες, πότε θα είναι ισχυρότερη η ηλεκτρική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο φορτισμένων μεταλλικών σφαιρών που βρίσκονται η μια πλησίον της άλλης —όταν τα φορτία τους θα είναι ομώνυμα ή ετερώνυμα;

Σχήμα 2

6. Μια θετικά φορτισμένη σφαίρα A τοποθετείται κοντά σε μια μεταλλική σφαίρα B (Σχήμα 2). Οι μετρήσεις δεν ανίχνευσαν μεταξύ τους οποιαδήποτε ηλεκτρική δύναμη. Είναι η σφαίρα B φορτισμένη ή όχι;

7. Δύο μικρές αβαρείς σφαίρες αναρτώνται ξεχωριστά από κοινό σημείο με λεπτά μη αγώγιμα νήματα του ίδιου μήκους. Τι θα συμβεί εάν οι σφαίρες είναι φορτισμένες με ίδια φορτία;

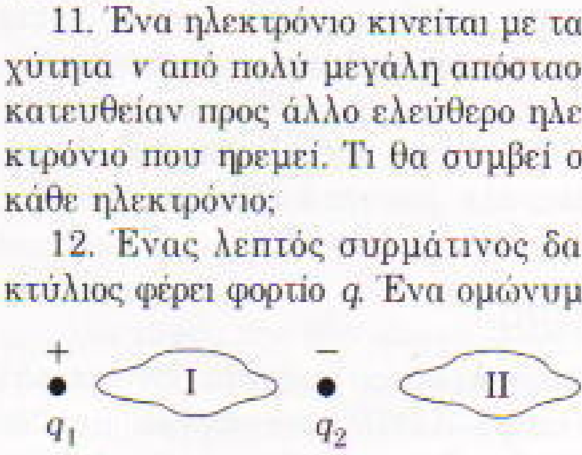
8. Τα φορτία δύο ακριβώς ίδιων μικρών σφαιρών που απέχουν μεταξύ τους ορισμένη απόσταση διαφέρουν κατά παράγοντα τέσσερα. Θα αλλάξει η ηλεκτρική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ τους αν οι σφαίρες συνδεθούν με σύρμα για βραχύ χρονικό διάστημα;

9. Δύο ετερώνυμα σημειακά φορτία q_1 και q_2 στερεώνονται σε ορισμένη απόσταση το ένα από το άλλο (Σχήμα 3). Σε ποια περιοχή (I, II ή III) μπορεί να ισορροπήσει ένα τρίτο φορτίο; Θα διαφέρει η απάντηση αν τα φορτία q_1 και q_2 είναι ομώνυμα;

10. Δύο ετερώνυμα σημειακά φορτία έλκουν το ένα το άλλο με ορισμένη δύναμη. Θα μεταβληθεί η εν λόγω δύναμη, αν τοποθετηθεί ανάμεσά τους μια γυάλινη σφαίρα;

11. Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα v από πολύ μεγάλη απόσταση κατευθείαν προς άλλο ελεύθερο ηλεκτρόνιο που ηρεμεί. Τι θα συμβεί σε κάθε ηλεκτρόνιο;

12. Ένας λεπτός συρμάτινος δακτύλιος φέρει φορτίο q. Ένα ομώνυμο



Σχήμα 3

α πνεύματα

υ καλείται θετικό και του ηλεκτρικού ρευστού που υς ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης...»

de Coulomb (1736-1806)

φορτίο Q τοποθετείται στο κέντρο του δακτυλίου. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των εν λόγω φορτίων;

13. Μια σαπουνόφουσκα, που επικοινωνεί με την ατμόσφαιρα μέσω ενός λεπτού κατακόρυφου σωλήνα, συρρικνώνεται και μετά από ορισμένο χρόνο μετατρέπεται σε μια σχεδόν επίπεδη μεμβράνη στο άκρο του σωλήνα. Θα αλλάξει ο χρόνος αυτός αν η σαπουνόφουσκα είναι (α) αρνητικά φορτισμένη, (β) θετικά φορτισμένη;

14. Γιατί τα σωματίδια α που εκπέμπονται από ραδιενεργές ουσίες δεν μπορούν να προκαλέσουν πυρηνικές αντιδράσεις στα βαρέα στοιχεία;

Μικροπειραματισμοί

Προσπαθήστε να τοποθετήσετε απαλά μια μεταλλική βελόνα στην επιφάνεια του νερού ενός ποτηριού, έτσι ώστε να επιπλέει. Πάρτε μια πλαστική χτένα και φορτίστε την τρίβοντάς τη στα ρούχα σας. Πλησιάστε τη φορτισμένη χτένα στη βελόνα. Πώς συμπεριφέρεται η βελόνα και γιατί;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

...μια αναλογία με τη νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας βοήθησε τον γερμανό επιστήμονα Franz Maria Aepinus (που εργάστηκε στην Αγία Πετρούπολη στα τέλη του 18ου αιώνα) να διατυπώσει τη δική του θεωρία για τα ηλεκτρικά φαινόμενα. Ξεκινώντας από «την αρμονία και την οικονομία» στη φύση, ο Aepinus διατύπωσε την υπόθεση ότι τόσο οι ηλεκτρικές όσο και οι μαγνητικές δυνάμεις είναι αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της απόστασης.

...ο νόμος της αλληλεπίδρασης των ηλεκτρικών φορτίων αποδείχτηκε για πρώτη φορά πειραματικά από τον Henry Cavendish. Όπως και για πολλές από τις ανακαλύψεις του, ωστόσο, θεώρησε ότι αφορούσε «την προσωπική του ευχαρίστηση», και δεν δημοσίευσε το εύρημά του. Την εν λόγω ανακάλυψη την κατέστησε δημοσίως γνωστή ο James Clerk Maxwell στα μέσα του περασμένου αιώνα.

...σύμφωνα με τις θεωρητικές αντιλήψεις που επικρατούσαν πριν από τον Coulomb, η ηλεκτρική αλληλεπίδραση υπήρχε μόνο σε μια ειδική «ατμόσφαιρα» που περιέβαλλε στενά το ηλεκτρισμένο σώμα.

... ο Coulomb ονόμασε ζυγό στρέψης τη συσκευή που κατασκεύασε «για να μετρήσει και τον μικρότερο βαθμό δύναμης», και τη χρησιμοποίησε για να μελετήσει την τριβή. Οι ανακαλύψεις που κατέστησαν αθάνατο το όνομά του ήταν στην πραγματικότητα υποπροϊόντα της κύριας κατεύθυνσης της εργασίας του —ώς τότε ο Coulomb δεν είχε δείξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό.

...επαναλαμβάνοντας τα πειράματα του Cavendish, ο Coulomb διαπίστωσε ότι ο «ηλεκτρισμός» κατανεμόταν πάνω στην επιφάνεια των αγωγών. Χρησιμοποιώντας το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου απέδειξε θεωρητικά την εν λόγω ιδιότητα.

...ο Michael Faraday, όντας πεπεισμένος ότι όλες οι φυσικές δυνάμεις αλληλοσυνδέονται, προσπάθησε να αποδείξει πειραματικά πως ο ηλεκτρισμός και η βαρύτητα είναι αλληλένδετες.

...αν και υπάρχει ομοιότητα από μαθηματική άποψη μεταξύ του νόμου του Coulomb και του νόμου της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, ανάμεσά τους εκτείνεται ένα πολύ βαθύ χάσμα. Με όλες τις άλλες συνθήκες ίδιες, οι ηλεκτρικές δυνάμεις είναι πολύ ισχυρότερες από τις βαρυτικές, και, επιπλέον, μέχρι σήμερα δεν έχει παρατηρηθεί βαρυτική άπωση. Η ύπαρξη δύο ειδών ηλεκτρικών φορτίων και η ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ τους έχει αποτέλεσμα μια τόσο ακριβή ισορροπία των εν λόγω φορτίων σε κάθε υλικό σώμα ώστε να μην είναι εύκολη υπόθεση η παρατήρηση ηλεκτρικών δυνάμεων. Η ελάχιστη διαταραχή της ηλεκτρικής ουδετερότητας των σωμάτων τείνει να εξαναγκάσει τα φορτία να την αποκαταστήσουν με όλη την αδάμαστη δύναμή τους.

...οι επιστήμονες κατάφεραν να εξηγήσουν (τουλάχιστον μερικώς) την προέλευση των ελαστικών δυνάμεων και της τριβής μόνο αφού κατανόησαν τη φύση των ηλεκτρικών δυνάμεων μεταξύ ουδέτερων συστημάτων —δηλαδή μεταξύ των μορίων.

...στη σχολική φυσική, και σχεδόν πάντοτε στην τεχνολογία, οι ηλεκτρικές και οι μαγνητικές δυνάμεις αντιμετωπίζονται ξεχωριστά. Στο ερώτημα, ωστόσο, ποια δύναμη —ηλεκτρική ή μαγνητική— εμφανίζεται κατά την κίνηση των ελεύθερων φορτίων, η απάντηση εξαρτάται απολύτως από το σύστημα των συντεταγμένων.

...το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας μπορεί να εξηγηθεί μέσω της σύζευξης των ελεύθερων ηλεκτρονίων σε ζεύγη, τα οποία μπορούν να κινούνται στο εσωτερικό των μετάλλων χωρίς τριβή. Παρά τη μεταξύ τους ηλεκτροστατική άπωση, η αλληλεπίδραση των ζευγών Cooper (έτσι ονομάζονται) με το κρυσταλλικό πλέγμα αντιστρέφει το πρόσημο της μεταξύ τους δύναμης, με αποτέλεσμα να έλκονται. (Βλ. και το άρθρο «Νικώντας τις αντιστάσεις» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1994.)

...τα πειράματα ηλεκτροστατικής με αγώγιμες σφαίρες έχουν επιβεβαιώσει ότι ο εκθέτης στο νόμο του Coulomb ισούται με 2 με ακρίβεια 1 προς 10^{13}

—A. Leonovich

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ

Από έναν ρωμαϊκό μύθο στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα...

Ή πώς να πετύχετε μια συμφέρουσα αγορά

I.F. Sharygin

ΣΤΗ ΡΩΜΑΪΚΗ ΜΥΘΟΛΟΓΙΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ένα θρύλος για τη Διδώ (ή Ελίσσα), την κόρη του Βήλου, του φοίνικα βασιλιά της Τύρου. Η Διδώ είχε παντρευτεί τον Συχαίο (ή Σιχάρμπα), τον ζάπλουτο ιερέα του Ηρακλή. Ο Πυγμαλίων, ο αδελφός της Διδώς, δολοφόνησε τον Συχαίο για να αρπάξει την περιουσία του, και η Διδώ υποχρεώθηκε να εγκαταλείψει την πατρίδα της παίρνοντας ένα μέρος από τα πλούτη του συζύγου της. Τελικά, μαζί με πολλούς συντρόφους έφτασε στην Αφρική, όπου αγόρασε μιαν έκταση γης από το βασιλιά του τόπου. Στη συμφωνία τους υπήρχε ο όρος ότι θα έπαιρνε τόση γη όση μπορούσε να χωρέσει μέσα στη δορά ενός ταύρου. Έτσι, η Διδώ έκοψε τη δορά σε λεπτές λουρίδες και περιέφραξε με αυτές μια μεγάλη περιοχή. Εκεί ίδρυσε την πόλη Καρχηδόνα με ακρόπολη τη Βύρσα (*βύρσα* στα αρχαία ελληνικά σήμαινε «γδαρμένο δέρμα ζώου, τομάρι»).

Αυτός είναι ο θρύλος. Ιδού και μια πασίγνωστη σπαζοκεφαλιά:

Είναι δυνατόν να ανοίξουμε μια τρύπα σε ένα φύλλο τετραδίου διαστάσεων 20 × 30 cm έτσι ώστε να μπορεί να περάσει ένας ενήλικος μέσα από αυτήν;

Είναι σαφής η ομοιότητα αυτής της σπαζοκεφαλιάς με το πρόβλημα που έλυσε η Διδώ. Παρά τον πρόσθετο περιορισμό ότι δεν μπορείτε να κόψετε το χαρτί σε κομμάτια, η μέθοδος της Διδώς εφαρμόζεται και σ' αυτή την περίπτωση. Παρεμπιπτόντως, είναι πολύ πιθανό ότι και η Διδώ έλυσε το ίδιο ακριβώς πρόβλημα, αλλά αργότερα η ιστορία παρανοήθηκε ή παρερμηνεύτηκε. Οι μυθογράφοι, οι ιστορικοί και οι μεταφραστές δίνουν συνήθως ελάχιστη προσοχή στην ακριβή διατύπωση των προβλημάτων. (Αν η σπαζοκεφαλιά σάς φάνηκε ιδιαίτερα δύσκολη, μπορείτε να ανατρέξετε στη σελ. 64 για μια από τις δυνατές λύσεις.)

Από μαθηματική άποψη, η σπαζοκεφαλιά είναι διατυπωμένη αυστηρότερα σε σχέση με την πρόκληση της Διδώς, αλλά εξακολουθεί να της λείπει η ακρίβεια που απαιτείται για να ονομαστεί «μαθηματική». Γενικά, η «διατύπωση προβλημάτων» είναι ο πρωταρχικός στόχος κατά τη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων, το κύριο πρόβλημα που καλούνται να λύσουν τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Από μια άποψη, η ικανότητα σωστής διατύπωσης των προβλημάτων είναι σημαντικότερη από την ικανότητα επίλυσής τους.

Πριν συνεχίσουμε με το μαθηματικό μέρος του άρθρου, ας θυμηθούμε ένα ακόμη θέμα που το συναντάμε σε λαϊκούς θρύλους και στη λογοτεχνία. Το διήγημα «Πόση γη χρειάζεται ένας άνθρωπος;» του Λέοντος Τολστόι, το παρουσιάζει πολύ καλά: ο ήρωας της ιστορίας θα κερδίσει το κομμάτι γης γύρω από το οποίο θα περπατήσει σε μία μέρα.

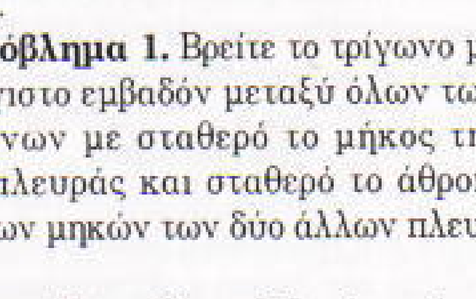
Με βάση αυτά τα μυθολογικά και λογοτεχνικά θέματα μπορούμε να επινοήσουμε μια ολόκληρη σειρά προβλημάτων. Ιδού ένα από τα απλούστερα.

Πρόβλημα 1. Βρείτε το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των τριγώνων με σταθερό το μήκος της μίας πλευράς και σταθερό το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων πλευρών.

Λύση. Έστω $2a$ το δεδομένο μήκος της μίας πλευράς και $2b$ το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών. (Παρατηρήστε ότι η τριγωνική ανισότητα μας εξασφαλίζει ότι $a < b$.) Θα συμβολίσουμε το ένα από τα άγνωστα μήκη ως $b + x$, οπότε το άλλο θα είναι ίσο με $b - x$ (Σχήμα 1). Ο τύπος του Ήρωνος μας δίνει

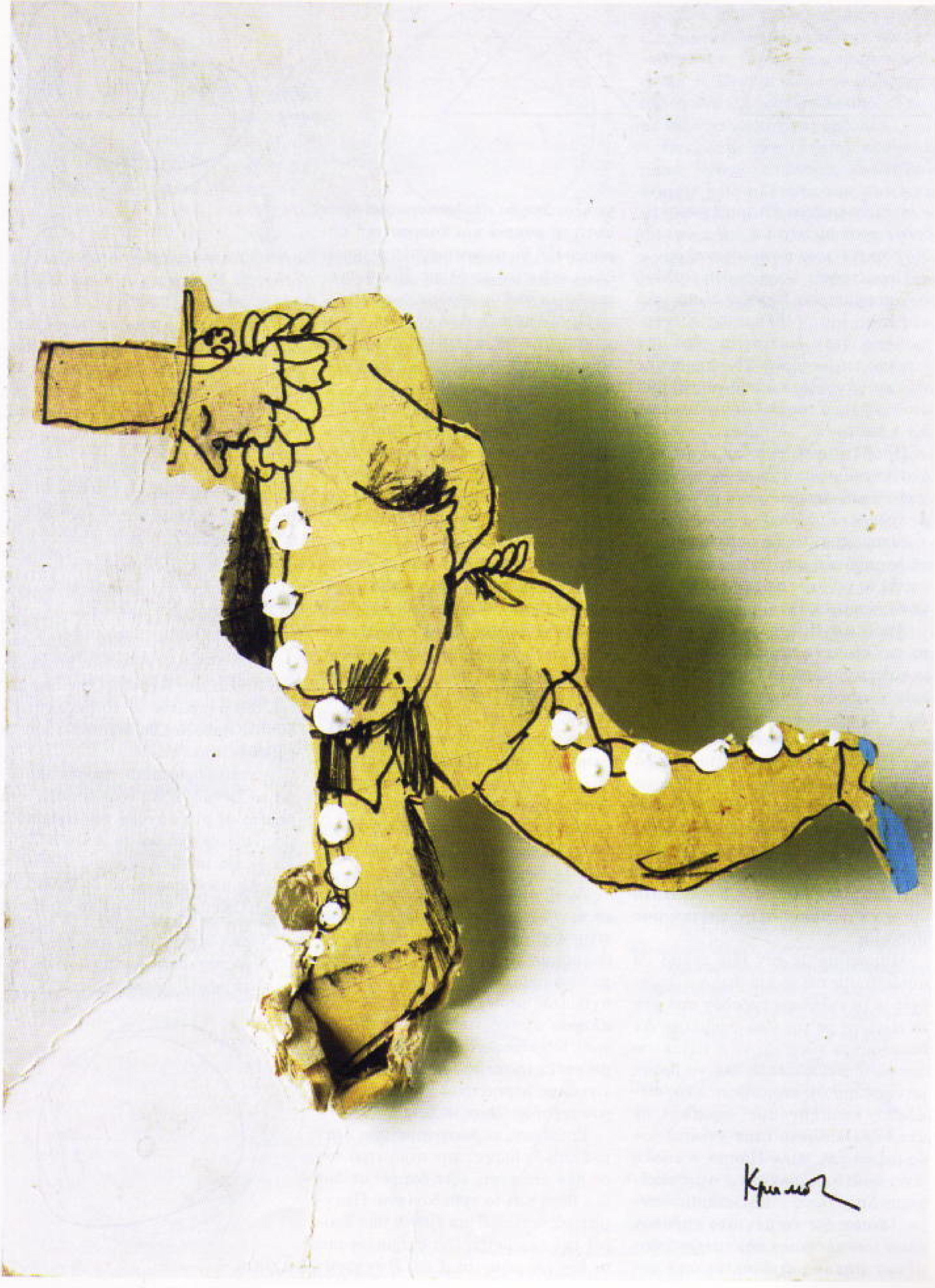
$$S^2 = (a + b)(b - a)(a + x)(a - x)$$
$$= (b^2 - a^2)(a^2 - x^2)$$

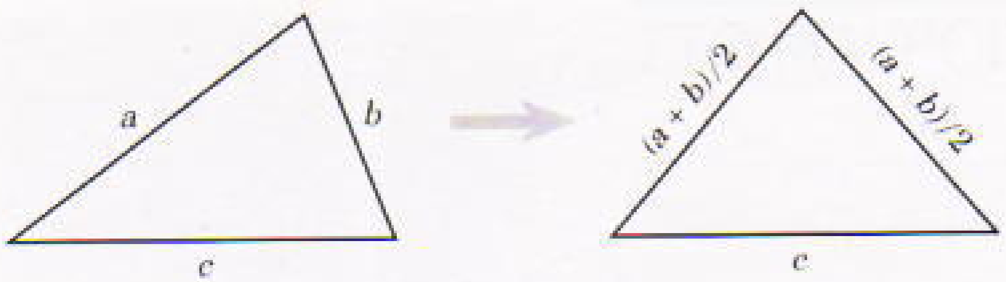
(αφού η ημιπερίμετρος ισούται με a



Σχήμα 1

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov





Σχήμα 2

$+ b$). Είναι φανερό ότι το μέγιστο εμβαδόν προκύπτει για $x = 0$ —δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Παρατηρήστε ότι η σωστή επιλογή των παραμέτρων βοήθησε εξαιρετικά στη λύση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, όταν δίνεται το άθροισμα δύο ποσοτήτων (εδώ $2b$), μπορούμε να εισαγάγουμε κάποια συμμετρία στο πρόβλημα συμβολίζοντάς τες ως $b + x$ και $b - x$.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι από όλα τα τρίγωνα δεδομένης περιμέτρου το ισόπλευρο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Είναι σημαντική η παρατήρηση ότι στην απόδειξή μας θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός πως ένα τέτοιο τρίγωνο *υπάρχει*.

Απόδειξη. Θεωρήστε ένα τρίγωνο με τη δεδομένη περίμετρο και με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν. Ας υποθέσουμε ότι *δεν είναι* ισόπλευρο. Αυτό σημαίνει ότι δύο τουλάχιστον από τις πλευρές του είναι διαφορετικές (Σχήμα 2). Ας συμβολίσουμε τα μήκη τους με a και b ($a \neq b$), και έστω c το μήκος της τρίτης πλευράς. Από το προηγούμενο πρόβλημα έπεται ότι το τρίγωνο με πλευρές $(a + b)/2$, $(a + b)/2$, c έχει μεγαλύτερο εμβαδόν και την ίδια περίμετρο $a + b + c$. Αυτό όμως αντιφάσκει στην αρχική μας υπόθεση.

Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να αποδείξουμε ότι το κανονικό n-γωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν από όλα τα n-γωνα με την ίδια περίμετρο. Αν θεωρήσουμε τώρα ότι το n τείνει στο άπειρο (όπως κάνουμε για να βρούμε τον τύπο της περιφέρειας ενός κύκλου), καταλήγουμε «οριακά» σε κύκλο. (Όλα αυτά ήταν γνωστά τον 4ο αιώνα μ.Χ. στον Πάππο, ο οποίος δίνει αυστηρές αποδείξεις στην περίφημη *Συναγωγή* του.) Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το μέγιστο εμβαδόν όλων των κλειστών καμπυλών δεδομένου μήκους φράσσεται από τον κύκλο. Δεν θα ακολουθήσουμε όμως αυτή τη μακριά και κουραστική πορεία, αλλά θα αντιμετωπίσουμε απευθείας το βασικό πρόβλημα. Πρώτα πρέπει να το διατυπώσουμε σωστά.

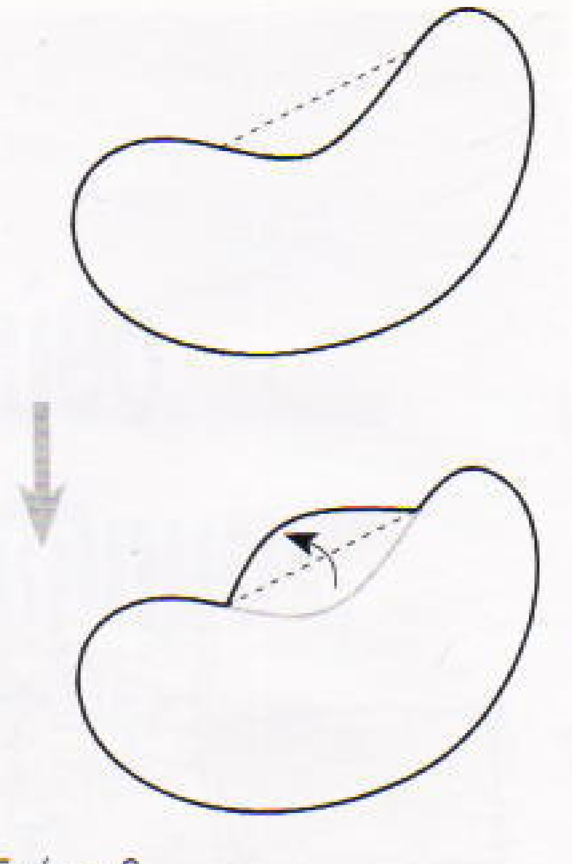
Πρόβλημα 3. Από όλες τις δεδομένου μήκους κλειστές καμπύλες του επιπέδου βρείτε εκείνη που περικλείει το μέγιστο εμβαδόν.

Αυτό είναι το διάσημο *ισοπεριμετρικό* πρόβλημα. (Γνωρίζουμε τη σημασία του όρου «περίμετρος» όταν αφορά πολύγωνα, είναι όμως δυνατόν να την επεκτείνουμε και για ένα τυχαίο σχήμα.) Ονομάζεται επίσης «πρόβλημα της Διδώς».

Όπως και πριν, θα στηρίξουμε τους συλλογισμούς μας στην *ύπαρξη* ενός τέτοιου σχήματος. Με άλλα λόγια, θα υποθέσουμε ότι μεταξύ όλων των καμπυλών δεδομένου μήκους υπάρχει μία που περικλείει το μέγιστο εμβαδόν. (Αυτό είναι εύκολο να το αποδεχτούμε αν αναλογιστούμε όλα τα δυνατά σχήματα δεδομένης περιμέτρου και παρατηρήσουμε ότι το σύνολο των τιμών του εμβαδού τους είναι φραγμένο.) Ακολουθεί μια περιγραφή της λύσης που βρήκε ο εξέχων ελβετός γεωμέτρης Jacob Steiner (1796-1863).

Λύση. Πρώτ' απ' όλα, παρατηρούμε ότι το επιθυμητό σχήμα πρέπει να είναι κυρτό (δηλαδή, οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ενώνει δύο σημεία του εσωτερικού ή του συνόρου του σχήματος περιέχεται επίσης εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό ή το σύνορό του), διότι διαφορετικά θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα σχήμα της ίδιας περιμέτρου και μεγαλύτερου εμβαδού (δείτε το Σχήμα 3).

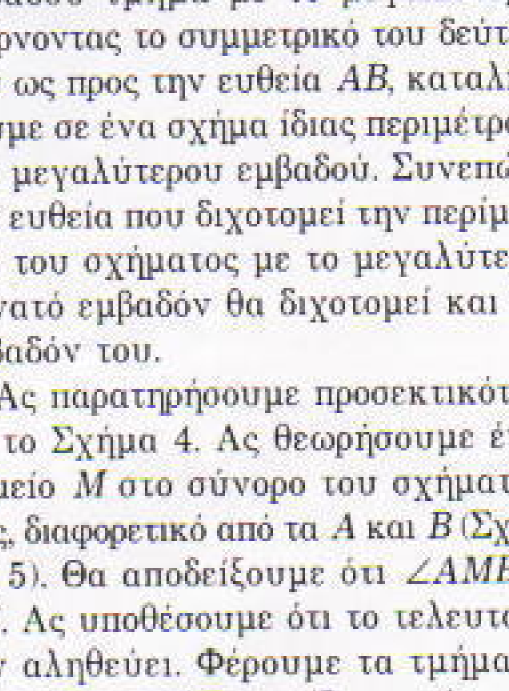
Επιπλέον, παρατηρούμε πως όταν μια ευθεία διαιρεί την περίμετρό του σε δύο ίσα μέρη, τότε διαιρεί σε δύο ίσα μέρη και το εμβαδόν του. Πραγματικά, έστω AB μια ευθεία που διαιρεί την περίμετρο του σχήματός μας σε δύο ίσα μέρη (τα A και B ανήκουν



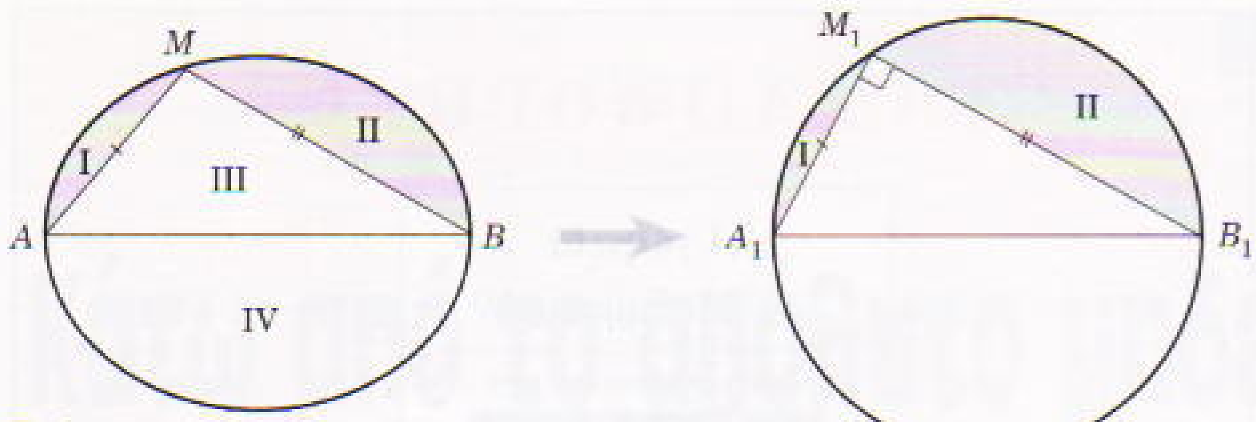
Σχήμα 3

στο σύνορο του σχήματος —Σχήμα 4). Ας υποθέσουμε ότι ένα από τα δημιουργούμενα τμήματα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το άλλο. Αν αντικαταστήσουμε τώρα το μικρότερου εμβαδού τμήμα με το μεγαλύτερο παίρνοντας το συμμετρικό του δεύτερου ως προς την ευθεία AB, καταλήγουμε σε ένα σχήμα ίδιας περιμέτρου και μεγαλύτερου εμβαδού. Συνεπώς, μια ευθεία που διχοτομεί την περίμετρο του σχήματος με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν θα διχοτομεί και το εμβαδόν του.

Ας παρατηρήσουμε προσεκτικότερα το Σχήμα 4. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο M στο σύνορο του σχήματός μας, διαφορετικό από τα A και B (Σχήμα 5). Θα αποδείξουμε ότι $\angle AMB = 90°$. Ας υποθέσουμε ότι το τελευταίο δεν αληθεύει. Φέρουμε τα τμήματα AM, MB και AB, χωρίζοντας έτσι το σχήμα σε τέσσερις τομείς που τους ονομάζουμε I, II, III και IV. Κατασκευάζουμε ένα νέο σχήμα ως εξής:



Σχήμα 4



Σχήμα 5

σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $A_1M_1B_1$ με $A_1M_1 = AM$, $M_1B_1 = MB$ και $\angle A_1M_1B_1 = 90^\circ$. Προσαρτούμε τομείς ίσους με τους I και II στις δύο κάθετες πλευρές, και τέλος θεωρούμε το συμμετρικό της κατασκευής μας ως προς την υποτείνουσα A_1B_1. Προκύπτει ένα σχήμα ίδιας περιμέτρου και μεγαλύτερου εμβαδού, αφού το εμβαδόν του τριγώνου $A_1M_1B_1$ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του AMB. Αποδείξαμε επομένως ότι αν μια ευθεία διχοτομεί την περίμετρο του σχήματος με το μεγαλύτερο εμβαδόν, τότε, όταν θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο M διαφορετικό από τα A, B στο σύνορο του σχήματος, έχουμε $\angle AMB = 90^\circ$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το M ανήκει στον κύκλο με διάμετρο το AB. Συνεπώς, η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος είναι ο κύκλος.

Αν πιστεύετε ότι αυτό είναι μια μεμονωμένη σπαζοκεφαλιά χωρίς αληθινές συνέπειες, θα ήθελα να επισημάνω ότι το ισοπεριμετρικό πρόβλημα ουσιαστικά γέννησε έναν από τους σημαντικότερους κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών —το λογισμό μεταβολών.

Το λογικό θα ήταν να ολοκληρώσουμε εδώ τη συζήτησή μας, αλλά θα κάνουμε ένα ακόμη βήμα (δεν γνωρίζω καν αν είναι βήμα προς τα μπροστά ή προς τα πίσω). Όπως προανέφερα, η διαδρομή από τα πολύγωνα στον κύκλο μοιάζει απολύτως φυσική. Η μέθοδος, όμως, που χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα δεν στηρίζεται καθόλου στις ιδιότητες των πολυγώνων με μέγιστο εμβαδόν. Πράγματι, μερικές ιδιότητες αυτών των πολυγώνων αποδεικνύονται αρκετά εύκολα βάσει αυτού του γενικού αποτελέσματος, ενώ οι αποδείξεις των ιδιοτήτων τους που δεν στηρίζονται σ' αυτό το αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα περίπλοκες. Ιδού ένα παράδειγμα.

Πρόβλημα 4. Θεωρήστε όλα τα δυνατά πολύγωνα με δεδομένες πλευρές διατεταγμένες σε δεδομένη σειρά. (Μπορούμε να φανταστούμε ένα πολύγωνο οι πλευρές του οποίου ενώνονται με συνδέσμους. Θεωρούμε όλα τα πολύγωνα που είναι δυνατόν να προκύψουν από παραμόρφωση ενός τέτοιου πολυγώνου.) Αποδείξτε ότι μεταξύ τους υπάρχει ένα πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και ότι αυτό έχει το μέγιστο εμβαδόν.

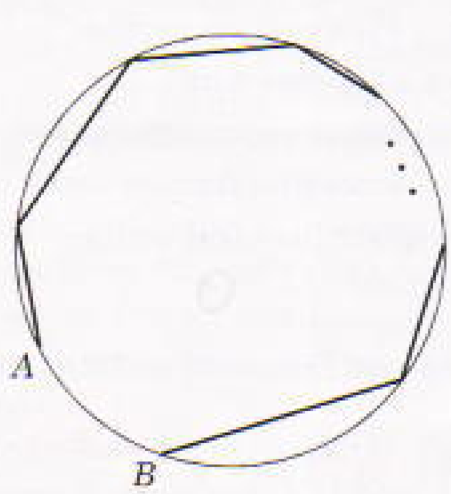
Λύση. Θεωρούμε έναν κύκλο αρκετά μεγάλο ώστε αν φέρουμε διαδοχικά χορδές ίσες με τις πλευρές του πολυγώνου, ξεκινώντας από ένα τυχαίο σημείο A του κύκλου, το άθροισμα των αντίστοιχων τόξων να είναι μικρότερο από τον κύκλο. Έστω B το άκρο της τελευταίας χορδής (Σχήμα 6). Μειώνουμε την ακτίνα του κύκλου ώσπου να συμπέσουν τα A και B. Έχουμε τώρα το επιθυμητό πολύγωνο (Σχήμα 7α). Ας αποδείξουμε ότι έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Θεωρούμε ένα τυχαίο πολύγωνο με τις δεδομένες πλευρές. Κατασκευάζουμε στις πλευρές του κυκλικά τμήματα ίσα με τα αντίστοιχα κυκλικά τμήματα των πλευρών του εγγεγραμμένου πολυγώνου (Σχήμα 7β). Το μήκος των συνόρων αυτών των κυκλικών τμημάτων ισούται με το μήκος του περιγεγραμμένου κύκλου. Συνεπώς, από το τελευταίο μας αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν της περιοχής που φράσσουν τα τόξα αυτών των κυκλικών τμημάτων είναι μικρότερο από το εμβαδόν του κύκλου του Σχήματος 7α. Αν αφαιρέσουμε τα κυκλικά τμήματα, διαπιστώνουμε ότι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου (Σχήμα 7α) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν κάθε άλλου πολυγώνου με ίδιες πλευρές (Σχήμα 7β).

Ας θυμηθούμε ξανά το βασικό ισοπεριμετρικό μας πρόβλημα (Πρόβλημα 3). Αυτό καθαυτό το γεγονός ότι *υπάρχει* λύση —γεγονός αρκετά προφανές για κάθε νου ανεπηρέαστο από τη μαθηματική σχολαστικότητα— μας επιτρέπει να τη βρούμε.* Θα σας διηγηθώ μια σχετική ιστορία που έχει περάσει στην παράδοση των σύγχρονων μαθηματικών.

Κάποτε δόθηκε ένα δύσκολο πρόβλημα σε μια ομάδα επιστημόνων, στους οποίους περιλαμβάνονταν έ-

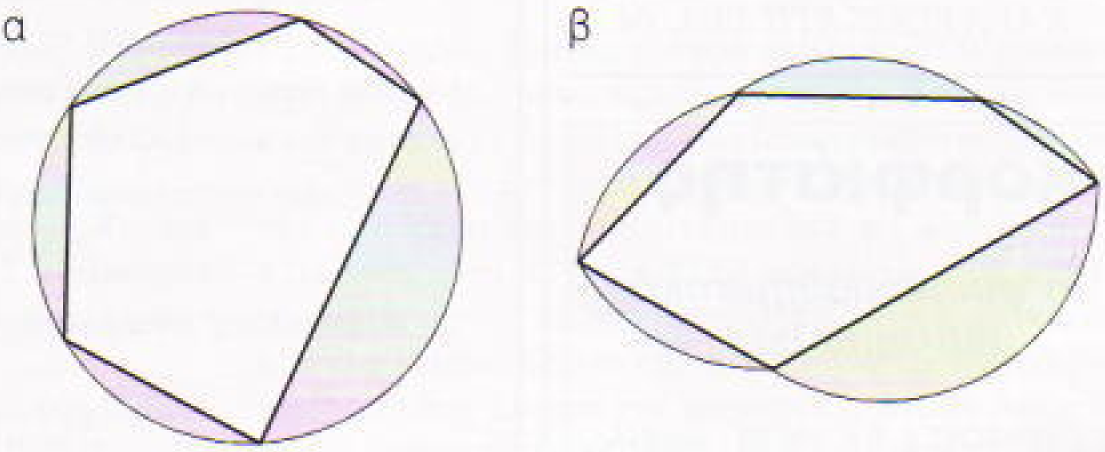
* Ο ίδιος ο Steiner είχε παραλήψει να αποδείξει την ύπαρξη λύσης, κενό το οποίο συμπλήρωσε αργότερα ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής.) (Σ. επιστ. συμβ.)



Σχήμα 6

α

β



Σχήμα 7

νας μαθηματικός και ένας φυσικός. Όταν ξανασυναντήθηκαν έπειτα από κάποιο χρονικό διάστημα, ο μαθηματικός ανακοίνωσε χαρούμενος στον φυσικό ότι είχε καταφέρει να αποδείξει την ύπαρξη λύσης του προβλήματος. Και ο φυσικός, έκπληκτος, του απάντησε πως αν ο ίδιος είχε και την ελάχιστη αμφιβολία για την ύπαρξη λύσης, δεν θα είχε ασχοληθεί καν με ένα τέτοιο πρόβλημα!

Προβλήματα

1. Θεωρούμε όλα τα τρίγωνα στα οποία η μια πλευρά ισούται με a και η απέναντι γωνία ισούται με θ. Ποιο από αυτά έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

2. Θεωρούμε ένα τυχαίο τρίγωνο με εμβαδόν 1. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή περίμετρος ενός τέτοιου τριγώνου;

3. Επιλέγουμε τα σημεία A, B σε σταθερό κύκλο. Βρείτε σημεία K και M στο έλασσον τόξο AB τέτοια ώστε το τετράπλευρο $AKMB$ να έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.

4. Αποδείξτε ότι για κάθε σχήμα περιμέτρου ℓ και εμβαδού Δ ισχύει $\ell^2 > 12{,}5\Delta$.

5. Δίνεται ένα σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων. Θεωρούμε όλα τα δυνατά πολύγωνα που κατασκευάζονται με πλευρές ίσες προς τα δοθέντα τμήματα ακολουθώντας μια τυχαία (αλλά σταθερή) σειρά. Αποδείξτε ότι το μέγιστο εμβαδόν αυτών των πολυγώνων είναι ανεξάρτητο από την επιλεγμένη σειρά.

6. Έστω όλα τα n-γωνα με $n-1$ δεδομένες πλευρές. Αποδείξτε ότι μεγαλύτερο εμβαδόν έχει εκείνο το n-γωνο που είναι εγγεγραμμένο και η «ελεύθερη» πλευρά του συμπίπτει με τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

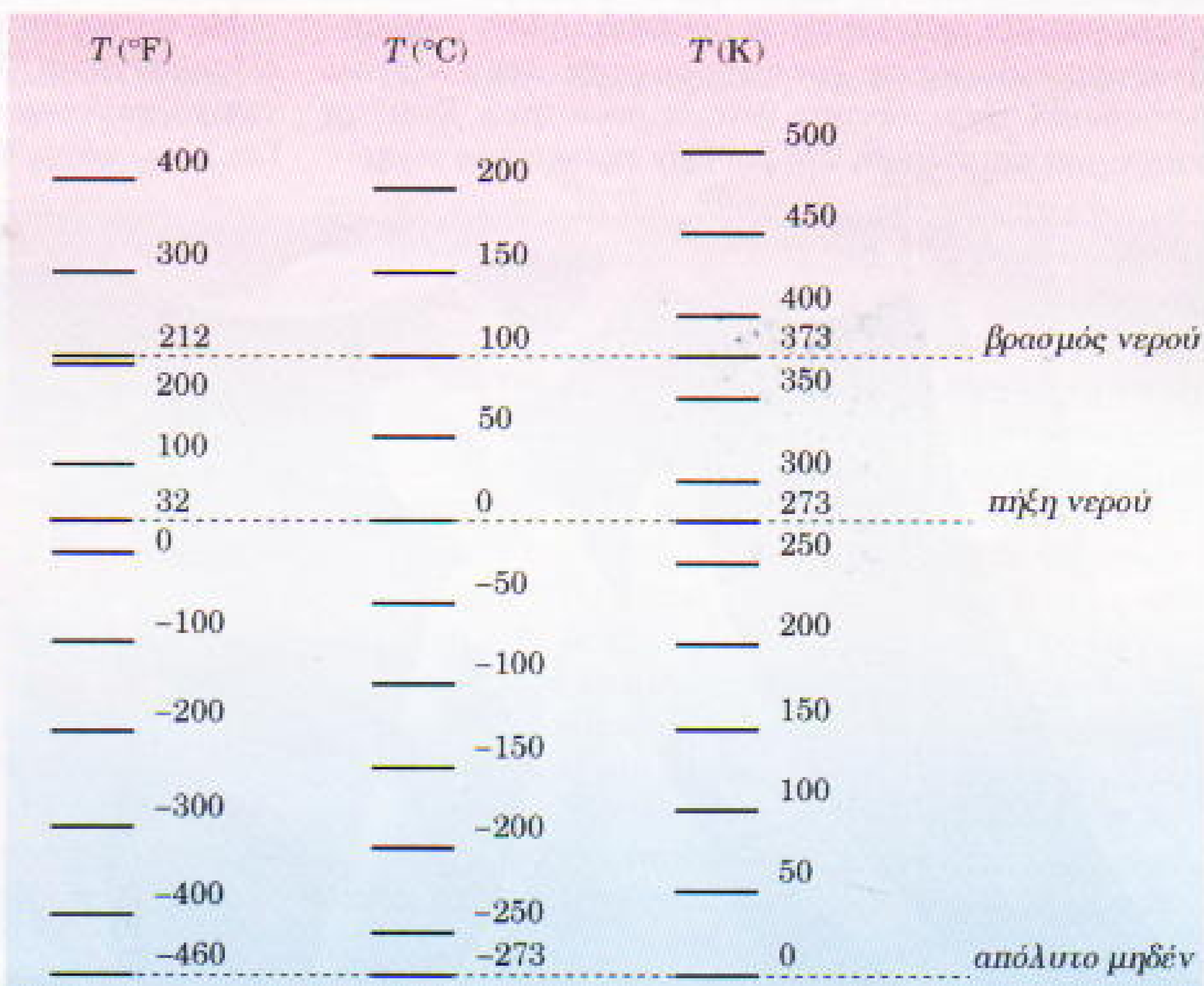
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Κάτω από το απόλυτο μηδέν

Λένε ότι δεν θα μπορούσες να φτάσεις εκεί όσο σκληρά κι αν προσπαθούσες. Αλλά αν ίσως δεν προσπαθούσες τόσο σκληρά;... Ή αν έφτανες εκεί από διαφορετική κατεύθυνση;...

Henry D. Schreiber

Η ΠΙΟ «ΨΥΧΡΗ» ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΕΙΝΑΙ το απόλυτο μηδέν —δηλαδή το μηδέν στην κλίμακα Kelvin. Κατά συνέπεια, αν το μηδέν είναι η χαμηλότερη δυνατή τιμή, οι απόλυτες θερμοκρασίες είναι πάντοτε θετικές. Φαίνεται ότι αρνητικές θερμοκρασίες στην κλίμακα Kelvin είναι αδύνατες. Σε τελευταία ανάλυση, η προφανής λεωφόρος γιά να φτάσουμε σε αρνητικές θερμοκρασίες θα ήταν αυτή όπου η θερμοκρασία θα συνεχίζει να μειώνεται ώσπου να γίνει μικρότερη του μηδενός. Η φύση όμως διαθέτει έναν άλλο, πιο δημιουργικό δρόμο για να περάσει κάτω από το απόλυτο μηδέν —και, από τη στιγμή που θα βρεθεί εκεί, εμφανίζει ακόμη πιο παράδοξες ιδιότητες.

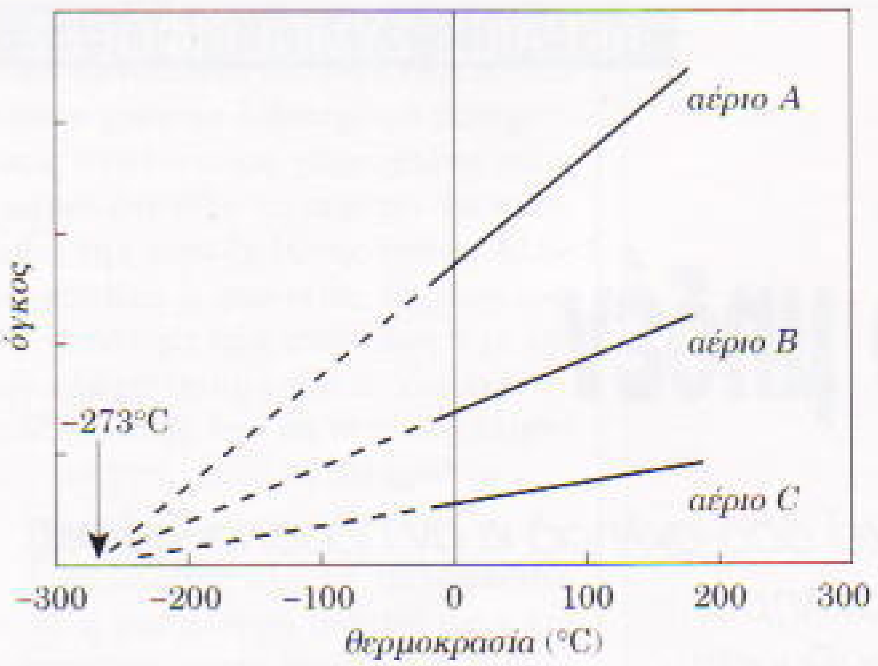


Σχήμα 1

Θερμοκρασία

Οι περισσότεροι άνθρωποι, αν τους ζητηθεί να ορίσουν τη θερμοκρασία, θα την αναγάγουν στο κατά πόσο «ζεστή» ή «κρύα» είναι μια ουσία. Ως τέτοια, η θερμοκρασία είναι ο παράγοντας που καθορίζει τη ροή θερμότητας. Όταν δύο αντικείμενα βρίσκονται σε επαφή, η θερμότητα ρέει από το θερμότερο (αυτό που βρίσκεται σε υψηλότερη θερμοκρασία) στο ψυχρότερο (αυτό που βρίσκεται σε χαμηλότερη θερμοκρασία). Κάποια στιγμή τα δύο αντικείμενα θα φτάσουν σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας, οπότε οι θερμοκρασίες τους εξισώνονται.

Υπάρχουν τρεις κλίμακες για τη μέτρηση της θερμοκρασίας: Fahrenheit, Κελσίου (Celsius) και Kelvin, όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 1. Οι κλίμακες Fahrenheit και Κελσίου είναι σχετικές, αφού ορίζουν τις θερμοκρασίες σχετικά με ορισμένα σημεία αναφοράς. Και στις δύο περιπτώσεις, οι εν λόγω τιμές αντιστοιχούν στις θερμοκρασίες πήξης και βρασμού του νερού. Αυθαίρετα επιλεγμένες από εκείνους που ανέπτυξαν τις συγκεκριμένες κλίμακες, είναι 32°F και 212°F έναντι των 0°C και 100°C αντιστοίχως, για τα δύο προαναφερθέντα σημεία αναφοράς. Η κλίμακα Kelvin επινοήθηκε για να εξηγηθεί ο νόμος του Gay-Lussac για τα αέρια, ο οποίος ορίζει ότι ο όγκος ενός αερίου μεταβάλλεται ευθέως ανάλογα προς την επικρατούσα σ' αυτό θερμοκρασία. Εάν παραστήσου-



Σχήμα 2

με γραφικά τους όγκους διαφόρων δειγμάτων αερίων ως συναρτήσεις των θερμοκρασιών τους σε °C, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, και παρεκτείνουμε τις καμπύλες σε μηδενικό όγκο, θα διαπιστώσουμε ότι η αντίστοιχη θερμοκρασία είναι −273°C. Έτσι, στην κλίμακα Kelvin αυτή η θερμοκρασία ορίζεται ως το απόλυτο μηδέν —θερμοκρασίες μικρότερές της δεν είναι δυνατές, αφού οι όγκοι των ουσιών είναι πάντοτε θετικές ποσότητες. Έτσι, υπάρχει μια μετατόπιση 273 βαθμών μεταξύ των κλιμάκων Kelvin και Κελσίου. Η κλίμακα Kelvin μάς παρέχει απόλυτες θερμοκρασίες, επειδή το σημείο αναφοράς του απόλυτου μηδενός είναι σταθερή τιμή για όλες τις ουσίες. Το απόλυτο μηδέν στην κλίμακα Kelvin αποτελεί, συνεπώς, την πιο χαμηλή θερμοκρασία που μπορούμε να διανοηθούμε.

Μια από τις θεμελιώδεις προτάσεις της κινητικής θεωρίας των αερίων (των αρχών που περιγράφουν τα αέρια ως σωματίδια σε διαρκή κίνηση) είναι ότι η κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του, όταν η τελευταία μετριέται στην κλίμακα Kelvin. Καθώς η θερμοκρασία ελαττώνεται, η ενέργεια των μορίων γίνεται αναλογικά μικρότερη. Έτσι, ένας εναλλακτικός τρόπος να αντιληφθούμε το απόλυτο μηδέν σε τούτη την κλασική —και όχι κβαντομηχανική— προσέγγιση είναι ως τη θερμοκρασία εκείνη στην οποία παύει να υπάρχει μοριακή κίνηση. Οι θερμοκρασίες, επομένως, μπορούν να πλησιάζουν το απόλυτο μηδέν, αλλά ουδέποτε παίρνουν ακριβώς τη συγκεκριμένη τιμή. Έχουν όντως καταγραφεί πολύ χαμηλές θερμοκρασίες —έως και 0,00001 K· ποτέ όμως δεν μπορεί να αφαιρεθεί όλη η κίνηση ή όλη η ενέργεια από ένα σύστημα.

Με τέτοιες αντιλήψεις για το απόλυτο μηδέν και την κλίμακα Kelvin, φαίνεται εύλογο που δεν μπορούμε ούτε καν να φανταστούμε αρνητικές απόλυτες θερμοκρασίες. Στο κάτω κάτω, δεν είναι δυνατόν να αναμένει κανείς

μικρότερο από μηδενικό όγκο για μια ουσία, ούτε βέβαια και μικρότερη από μηδενική κίνηση. Υποθέστε, ωστόσο, ότι επιχειρείτε κάποια περιήγηση στον κόσμο των μορίων —και συγκεκριμένα για να δείτε πώς κατανέμουν τα μόρια μεταξύ τους τη διαθέσιμη ενέργεια. Μπορείτε τότε να ταξιδέψετε στα έσχατα άκρα της απόλυτης θερμομετρικής κλίμακας —όχι μόνο στο πολύ ψυχρό αλλά και στο πολύ θερμό. Θα εκπλαγείτε όταν διαπιστώσετε ότι σε ορισμένα συστήματα υπάρχουν αρνητικές απόλυτες θερμοκρασίες. Και όχι μόνο αυτό· θα διαπιστώσετε ότι υπάρχει ορισμένη συμμετρία των αρνητικών και θετικών απόλυτων θερμοκρασιών γύρω από το απόλυτο μηδέν, αλλά όχι με τον τρόπο που θα περιμένατε. Τέτοια είναι η ζωή των μορίων «κάτω» από το απόλυτο μηδέν.

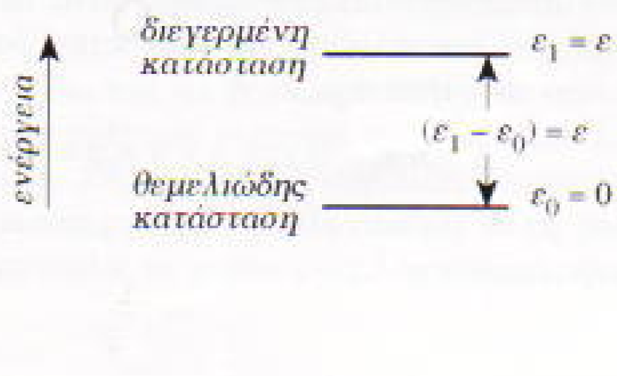
Κατανομή της ενέργειας μεταξύ των μορίων

Κάθε μόριο κατέχει ορισμένη ποσότητα ενέργειας. Υποθέστε ότι θεωρείτε ένα σύστημα στο οποίο τα μόρια έχουν την επιλογή να βρίσκονται στη μια ή την άλλη από δύο ενεργειακές καταστάσεις —σε μια θεμελιώδη κατάσταση ή σε μια διεγερμένη κατάσταση. Σχετικό παράδειγμα αποτελεί ένα μαγνητικό σύστημα όπου μερικά μόρια προσανατολίζονται παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο, και έτσι βρίσκονται σε κατάσταση χαμηλής ενέργειας, ή *θεμελιώδη κατάσταση*, ενώ άλλα μόρια προσανατολίζονται αντιπαράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο —επομένως χρειάζονται περισσότερη ενέργεια για να εισέλθουν στη *διεγερμένη κατάσταση*. Δηλαδή, σε δεδομένη θερμοκρασία μερικά μόρια έχουν αρκετή ενέργεια για να πάνε «κόντρα στα νερά», καθώς ο προσανατολισμός του μορίου καθορίζει την ενεργειακή του κατάσταση. Το Σχήμα 3 δείχνει διαγραμματικά ένα τέτοιο σύστημα με δύο μόνο ενεργειακές καταστάσεις —μια θεμελιώδη, με ενέργεια ε_0, και μια διεγερμένη, με ενέργεια ε_1. Χάριν ευκολίας, θεωρήστε ότι η ενέργεια αναφοράς για τη θεμελιώδη κατάσταση είναι μηδέν, με αποτέλεσμα η ενεργειακή διαφορά ε να ισούται με την ενέργεια της διεγερμένης κατάστασης.

Η κατανομή Boltzmann, η οποία στηρίζεται στη στατιστική για να τοποθετήσει τα μόρια στις ενεργειακές στάθμες, περιγράφει τον αριθμό των μορίων σε κάθε ενεργειακή κατάσταση όταν επικρατεί ισορροπία. Εάν εφαρμόσουμε τη συγκεκριμένη κατανομή σε ένα απλό σύστημα δύο μόνο ενεργειακών σταθμών καταλήγουμε στην εξίσωση

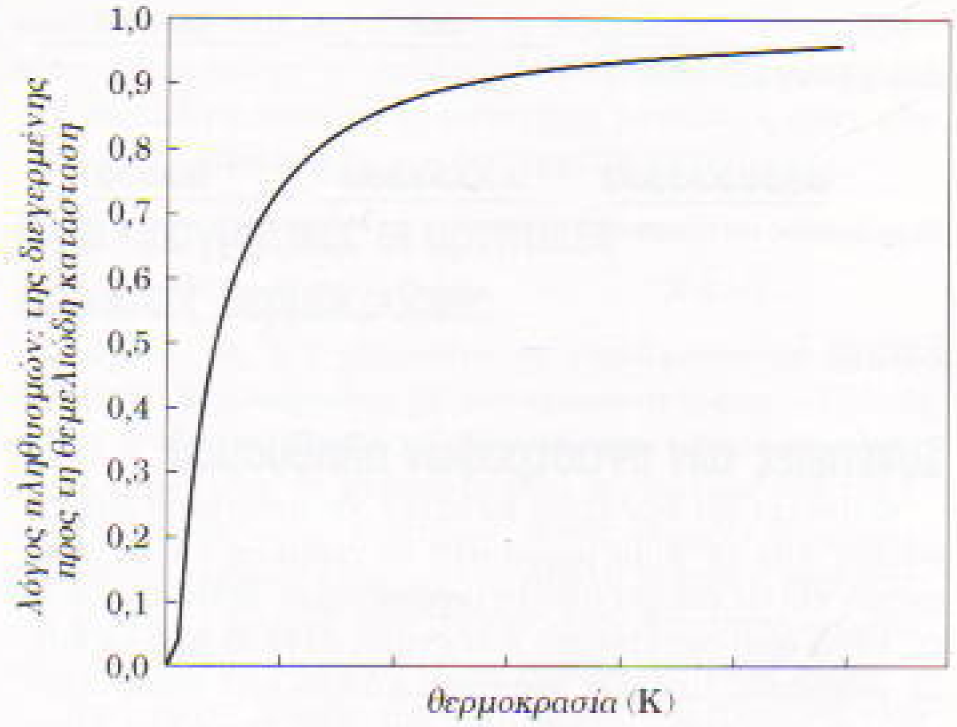
$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\varepsilon/kT},$$

όπου n_1 και n_0 είναι ο πληθυσμός των μορίων στις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες, ε η απόσταση μεταξύ των δύο ενεργειακών επιπέδων, T η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin και k η σταθερά Boltzmann. Η σταθερά Boltzmann είναι μια εκδοχή της παγκόσμιας σταθεράς των ιδανικών αερίων ανά μόριο, και ισούται επακριβώς με την παγκόσμια σταθερά διαιρεμένη διά του αριθμού του Avogadro. Η αριθμητική της τιμή είναι $1{,}380658 \cdot 10^{-23}$ J/K.



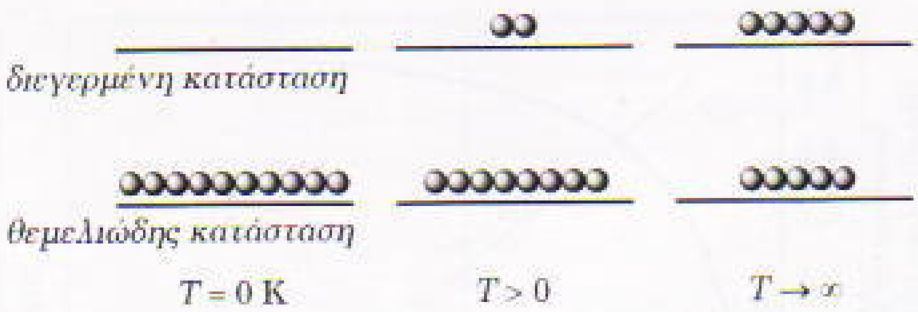
Σχήμα 3

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 4

Μια διερευνητική ματιά στην εξίσωση που περιγράφει την κατανομή Boltzmann μάς αποκαλύπτει ότι καθώς αυξάνει η απόσταση ε των δύο ενεργειακών σταθμών, όλο και μικρότερο μέρος του μοριακού πληθυσμού υπάρχει στη διεγερμένη κατάσταση για την ίδια θερμοκρασία· όλο και λιγότερα μόρια έχουν αρκετή ενέργεια για να αντεπεξέλθουν στην μεγαλύτερη απαίτηση ενέργειας ώστε να βρεθούν στη διεγερμένη κατάσταση. Επίσης, όπως φαίνεται από την ίδια εξίσωση, η τιμή του n_1 αυξάνεται σε σχέση με το n_0 καθώς αυξάνει η θερμοκρασία. Η διαθέσιμη ενέργεια για τα μόρια αυξάνει με τη θερμοκρασία, έτσι ώστε το πλήθος των μορίων στη διεγερμένη κατάσταση να αυξάνεται σε σχέση με το πλήθος στη θεμελιώδη κατάσταση. Το Σχήμα 4 περιλαμβάνει τη γραφική παράσταση του λόγου n_1/n_0 ως συνάρτησης της απόλυτης θερμοκρασίας, όπως περιγράφεται από την κατανομή Boltzmann για ένα σύστημα με δύο ενεργειακές στάθμες σε σταθερή απόσταση. Η εν λόγω γραφική παράσταση δείχνει ότι καθώς η θερμοκρασία πλησιάζει το απόλυτο μηδέν, ο λόγος n_1/n_0 τείνει στο μηδέν. Κάτι τέτοιο φαίνεται εύλογο, επειδή στο απόλυτο μηδέν δεν υπάρχει ενέργεια διαθέσιμη για να κατανεμηθεί, έτσι ώστε όλος ο πληθυσμός να πέφτει στη θεμελιώδη κατάσταση. Στο άλλο άκρο, καθώς η θερμοκρασία γίνεται πολύ υψηλή, η μαθηματική έκφραση για την κατανομή δείχνει ότι ο λόγος n_1/n_0 πλησιάζει στο e^{-0}, ή αλλιώς στη μονάδα. Συνεπώς, στο όριο της άπειρης θερμοκρασίας, $n_1 = n_0$ —δηλαδή τα μόρια «ενοικούν» εξίσου τη θεμελιώδη και τη διεγερμένη κατάσταση. Το Σχήμα 5 δείχνει την εξάρτηση από τη θερμοκρασία για 10 μόρια κατανεμημένα σε δύο επίπεδα. Είναι ενδιαφέρον ότι υπάρχει ένα όριο για το κλάσμα των μορίων που βρίσκονται στη διεγερμένη κατάσταση όταν επικρατεί ισορροπία.



Σχήμα 5

Συνέπειες των αντιστροφών πληθυσμού

Φαίνεται ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερα από τα μισά μόρια στη διεγερμένη κατάσταση, ακόμη και σε άπειρα υψηλή θερμοκρασία. Είναι άραγε το εν λόγω όριο πραγματικό ή τεχνητό; Λίγο κι από τα δύο. Σε ισορροπία, υπάρχει πράγματι κάποιο όριο όπως δίνεται από την κατανομή Boltzmann. Από την άλλη, είναι άραγε δυνατόν να υπάρξουν προσωρινά συστήματα που τα μόριά τους έχουν απορροφήσει αρκετή ενέργεια ώστε να υπάρχουν περισσότερα στη διεγερμένη κατάσταση παρά στη θεμελιώδη (δηλαδή, $n_1 > n_0$, ή $n_1/n_0 > 1$); Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι προσφέρετε ενέργεια σε ένα σύστημα έτσι ώστε τα μόρια να διεγερθούν στην υψηλότερη στάθμη ταχύτερα απ' όσο καταφέρνουν να επανέλθουν στη θεμελιώδη κατάσταση. Με μια έννοια, παγιδεύετε τα μόρια στην ανώτερη ενεργειακή κατάσταση. Ή, εναλλακτικά, υποθέστε ότι έχετε μια κατανομή ισορροπίας μορίων εκτεθειμένων σε μαγνητικό πεδίο· οπότε αντιστρέφετε τη φορά του μαγνητικού πεδίου. Ό,τι ήταν η διεγερμένη ενεργειακή κατάσταση είναι τώρα η θεμελιώδης κατάσταση και αντιστρόφως, τουλάχιστον προς στιγμήν. Το Σχήμα 6 δείχνει τέτοιες περιπτώσεις, οι οποίες ονομάζονται *πληθυσμιακές αντιστροφές*.

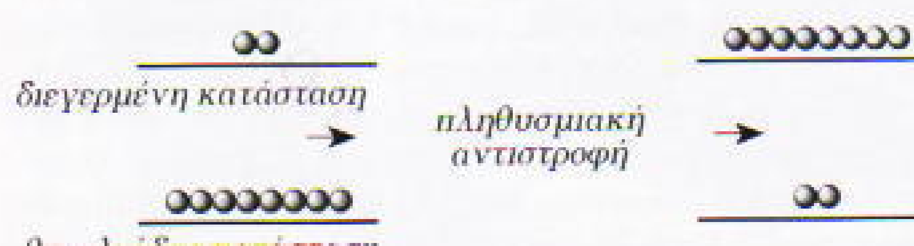
Ποιες είναι οι συνέπειες των πληθυσμιακών αντιστροφών (οι οποίες ομολογουμένως δεν συνιστούν φαινόμενα ισορροπίας); Πρώτα, παίρνοντας τον φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών της εξίσωσης που περιγράφει την κατανομή Boltzmann, βρίσκουμε

$$\ln\frac{n_1}{n_0} = -\frac{\varepsilon}{kT},$$

ή, εάν αναδιατάξουμε την εξίσωση,

$$\frac{1}{T} = -\frac{k}{\varepsilon}\ln\frac{n_1}{n_0}.$$

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει την απόλυτη θερμοκρασία του συστήματος με τη βοήθεια των σχετικών πληθυσμών των δύο ενεργειακών σταθμών. Αν όμως ο λόγος n_1/n_0 είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, τότε το $1/T$ είναι αρνητικό· και αυτό σημαίνει πως και η T είναι αρνητική! Ιδού λοιπόν: μια αρνητική απόλυτη (ναι, στην κλίμακα Kelvin) θερμοκρασία!



Σχήμα 6

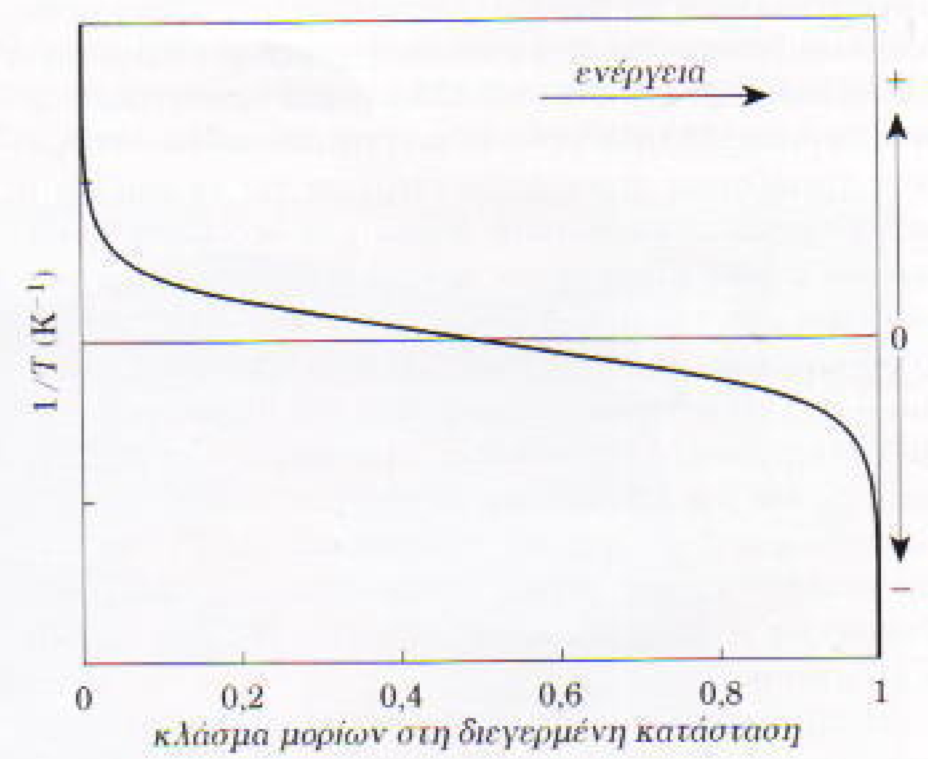
Συνεχίζοντας, μπορούμε να ορίσουμε κλάσματα των μοριακών πληθυσμών σε κάθε επίπεδο —δηλαδή $x_1 = n_1/N$ και $x_0 = n_0/N$, όπου το N ισούται με $n_0 + n_1$, ή αλλιώς με το συνολικό πλήθος μορίων στο σύστημα. Η προηγούμενη εξίσωση, με τη βοήθεια των κλασμάτων των πληθυσμών αντί των πραγματικών πληθυσμών, παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{T} = -\frac{k}{\varepsilon}\ln\frac{n_1/N}{n_0/N} = -\frac{k}{\varepsilon}\ln\frac{x_1}{x_0}$$

Επειδή τα κλάσματα των πληθυσμών πρέπει προστιθέμενα να δίνουν μονάδα ($x_1 + x_0 = 1$), μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως εξής

$$\frac{1}{T} = -\frac{k}{\varepsilon}\ln\frac{x_1}{1-x_1}.$$

Το Σχήμα 7 περιλαμβάνει τη γραφική παράσταση του $1/T$ ως συνάρτησης του x_1, του κλάσματος των μορίων



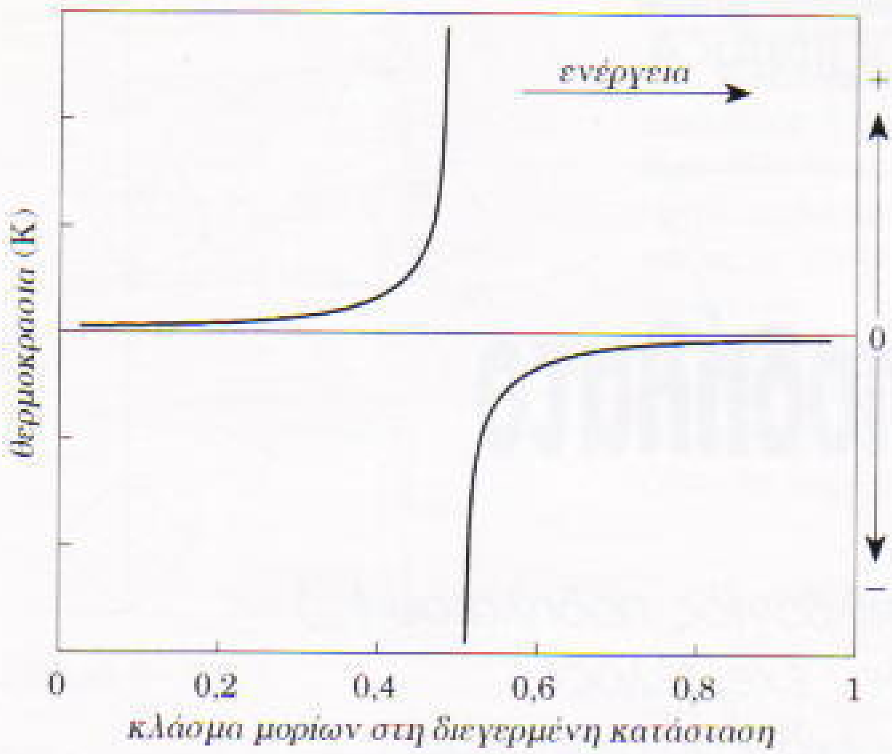
Σχήμα 7

στη διεγερμένη κατάσταση. Σημειώστε ότι το πρόσημο του $1/T$ είναι θετικό όσο το x_1 είναι μικρότερο από 0,5 —δηλαδή, όσο η διεγερμένη κατάσταση έχει μικρότερο πληθυσμό από τη θεμελιώδη κατάσταση, όπως περιγράφτηκε προηγουμένως. Από την άλλη, το πρόσημο του $1/T$ —επομένως και της απόλυτης θερμοκρασίας— γίνεται αρνητικό όταν το x_1 είναι μεγαλύτερο από 0,5 —δηλαδή όταν συμβαίνουν πληθυσμιακές αντιστροφές.

Η ολική ενέργεια E για το δεδομένο σύστημα με τις δύο διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες είναι το άθροισμα των γινομένων του πληθυσμού κάθε επιπέδου επί την ενέργεια που το χαρακτηρίζει, ή

$$E = n_1\varepsilon_1 + n_0\varepsilon_0 = n_1\varepsilon + n_0 0 = n_1\varepsilon.$$

Διαιρώντας με N (το συνολικό πλήθος μορίων) καταλήγουμε στην έκφραση



Σχήμα 8

$$\frac{E}{N} = \frac{n_1}{N}\varepsilon = x_1\varepsilon,$$

ή, αν E' είναι η μέση ενέργεια ανά μόριο ($E' = E/N$),

$$\frac{E'}{\varepsilon} = x_1.$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η ενέργεια του συστήματος αυξάνει καθώς αυξάνει το x_1. Έτσι, ο άξονας των x_1 στο Σχήμα 7 μετρά επίσης την ενέργεια του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι οι αρνητικές απόλυτες θερμοκρασίες αντιστοιχούν σε πολύ υψηλότερες ενέργειες απ' ό,τι οι θετικές θερμοκρασίες. Το συγκεκριμένο γεγονός φαίνεται «εύλογο»: χρειάζεται περισσότερη διαθέσιμη ενέργεια ώστε να υπάρχει μεγαλύτερο ποσοστό των μορίων στη διεγερμένη κατάσταση. Με άλλα λόγια, περιέργως, οι αρνητικές θερμοκρασίες είναι «θερμότερες» από τις θετικές θερμοκρασίες.

Στο Σχήμα 8 το T παριστάνεται ως συνάρτηση του x_1 —μια αναδιάταξη ή τροποποίηση του προηγούμενου σχήματος. Όπως αναμένεται, η αριστερή πλευρά της γραφικής παράστασης αναφέρεται σε θετικές θερμοκρασίες· καθώς όλο και μεγαλύτερο μέρος του συνολικού πληθυσμού καταλήγει στη διεγερμένη κατάσταση, η θερμοκρασία αυξάνει συστηματικά μέχρι να ορίσει μια ασύμπτωτη καθώς το x_1 πλησιάζει το 0,5. Τότε η μαθηματική εξίσωση περιγράφει το κατοπτρικό είδωλο της συνάρτησης πάνω από το $x_1 = 0{,}5$. Έτσι οδηγούμαστε στις αρνητικές απόλυτες θερμοκρασίες όχι προχωρώντας κάτω από το απόλυτο μηδέν, αλλά ξεπερνώντας τις άπειρες θετικές θερμοκρασίες. Όταν $x_1 = 0{,}5$ (οι δύο ενεργειακές στάθμες έχουν ίσους πληθυσμούς), η θερμοκρασία αναστρέφεται από τις θετικές στις αρνητικές άπειρες θερμοκρασίες από απλή μαθηματική ιδιοτροπία της συνάρτησης που συνδέει τη θερμοκρασία με την αναλογία των πληθυσμών. Για μία ακόμη φορά, ο άξονας x_1 παριστάνει επίσης την αύξουσα ενέργεια προς τα δεξιά. Συνεπώς, η «ψυχρότερη» θερμοκρασία πλησιάζει το απόλυτο μηδέν από θετικές τιμές (δηλαδή, καθώς το x_1 τείνει στο μηδέν, ή όταν όλα τα μόρια καταλήγουν στη θεμελιώδη κατάσταση), και παραδόξως, οι θερμότερες «θερμοκρασίες» πλησιάζουν το απόλυτο μηδέν από αρνητικές τιμές (δηλαδή καθώς το x_1 τείνει στη μονάδα, ή όταν όλα τα μόρια καταλήγουν στη διεγερμένη κατάσταση).

Είναι πραγματικές οι αρνητικές απόλυτες θερμοκρασίες;

Παραδόξως, δεν μπορούμε να επιτύχουμε αρνητικές απόλυτες θερμοκρασίες με τον προφανή τρόπο —δηλαδή μέσω ψύξης του σώματος από θετικές θερμοκρασίες. Μπορούμε όμως να φτάσουμε εκεί περνώντας από τις άπειρες θερμοκρασίες. Επιπλέον, οι πιο «θερμές» θερμοκρασίες είναι ακριβώς κάτω από το απόλυτο μηδέν, αριθμητικά όχι πολύ μακριά από τις πιο «ψυχρές» θερμοκρασίες, που βρίσκονται ακριβώς πάνω από το απόλυτο μηδέν.

Έχει άραγε κάποιο φυσικό νόημα αυτή η έφοδος στην παραδοξότητα, ή θα έπρεπε να την περιορίσουμε στον κόσμο της φαντασίας, αντιμετωπίζοντάς την ως θεωρητικό αξιοπερίεργο; Οι πληθυσμιακές αντιστροφές είναι πραγματικές —αποτελούν τη βάση της λειτουργίας των λέιζερ, όπου περισσότερα μόρια «ενοικούν» τη διεγερμένη κατάσταση παρά τη θεμελιώδη. Μια συνέπεια είναι ότι οι εξαιρετικά υψηλές ενέργειες των λέιζερ οδηγούν στην εμφάνιση ιδιοτήτων περιγράψιμων από το σύμπαν των αρνητικών απόλυτων θερμοκρασιών. Ομοίως, η εν λόγω έννοια των αρνητικών απόλυτων θερμοκρασιών έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά για πυρήνες που οι ενέργειές τους καθορίζονται από τον προσανατολισμό τους υπό την επίδραση μαγνητικών πεδίων.

Τέτοια φαινόμενα, ωστόσο, δεν αποτελούν περιπτώσεις που είναι δυνατόν να μετρηθούν με συνηθισμένα θερμόμετρα. Τα θερμόμετρα είναι χρήσιμα μόνο για θετικές απόλυτες θερμοκρασίες. Οι απόλυτες θερμοκρασίες είναι αρνητικές σε εξαιρετικές περιστάσεις, όταν το μοριακό σύστημα περιπλανάται στον παράξενο κόσμο των πληθυσμιακών αντιστροφών. Οι μαθηματικές εξισώσεις, όπως εκείνη που συνδέει την απόλυτη θερμοκρασία με το λόγο των πληθυσμών των ενεργειακών σταθμών στο σύστημα—

$$T = -\frac{\varepsilon}{k\ln(x_1/x_0)}$$

—είναι ο καλύτερος τρόπος να αποτιμήσουμε τις ιδιότητες ενός συστήματος με αρνητικές απόλυτες θερμοκρασίες. Τα μαθηματικά, παρά την αφηρημένη φύση τους, είναι μερικές φορές ικανά να περιγράψουν ό,τι είναι από τη φύση του δύσκολο να συλλάβουμε εννοιολογικά. Οι μαθηματικές εξισώσεις προσφέρουν στην επιστήμη από πολλές απόψεις την ίδια κατανόηση όπως και τα ποιητικά στιχουργήματα στη λογοτεχνία. Και τα δύο κοιτάζουν τον κόσμο από μια διαφορετική, πλεονεκτική σκοπιά, προσδίδοντας ομορφιά σε ό,τι περιγράφεται και αποκαλύπτοντας τα κρυμμένα νοήματα.

Ο **Henry D. Schreiber** *είναι καθηγητής χημείας στο Στρατιωτικό Ινστιτούτο της Βιρτζίνια, στο Λέξινγκτον. Η διεύθυνση του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου του είναι hs@vmi.edu.*

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ

II

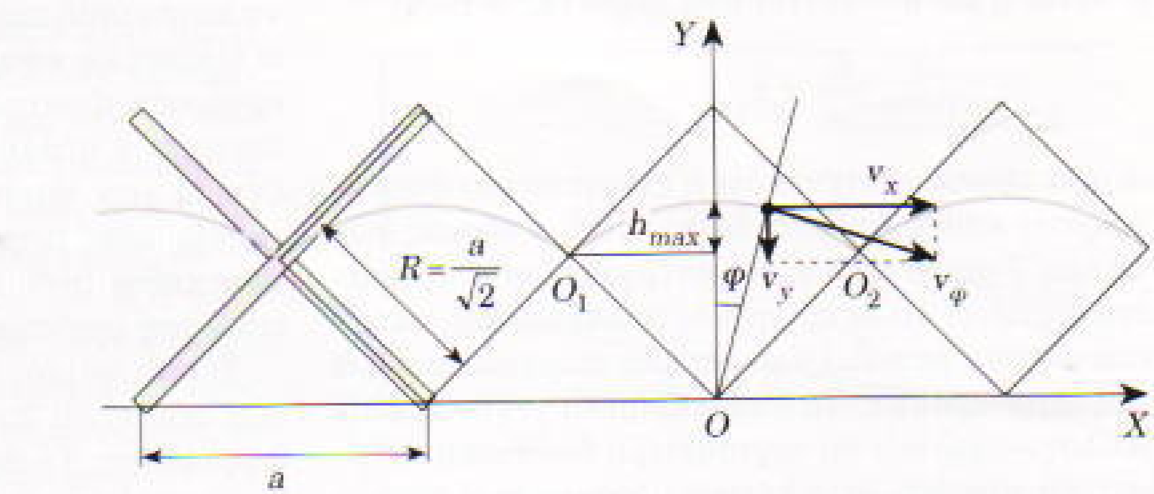
Το πρώτο ποδήλατο

«Η ποίησις είναι ανάπτυξις στίλβοντος ποδηλάτου (...)
Η εκδρομή αυτή δεν έχει τέλος».
—Ανδρέας Εμπειρίκος

Albert Stasenko

ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ χρόνια περίπου (σύμφωνα με τους αρχαίους μύθους), ο μεγάλος εφευρέτης Nga-Nga κατασκεύασε το πρώτο ποδήλατο χωρίς να γνωρίζει ότι οι τροχοί θα έπρεπε να είναι κυκλικοί... Φυσικά, πώς μπορούσε να το ξέρει; Από τότε έχουν ανακύψει πολλά ερωτήματα στη θεωρία του ποδηλάτου. Για παράδειγμα, πόση ισχύς δαπανάται κατά την κίνησή του; Ποιος είναι ο πλέον αποδοτικός τρόπος ποδηλασίας; Πώς μπορεί να γίνει πιο σταθερό το ποδήλατο; Και τόσα άλλα. Στο παρόν άρθρο θα πραγματευτούμε μερικά μόνο από αυτά.

Και πρώτα, ας κοιτάξουμε τον «τροχό» του πρώτου ποδηλάτου —δύο ραβδιά δεμένα σταυροειδώς σφιχτά (Σχήμα 1). Θα μετράμε τη γωνία στροφής του τροχού από τον κατακόρυφο άξονα OY προς τα δεξιά. Η θέση 1 αντιστοιχεί στη γωνία $\varphi_1 = -\pi/4$, και η θέση 2 στη γωνία $\varphi_2 = +\pi/4$. Καθώς κινείται από τη θέση 1 στη θέση 2, ο «άξονας του τροχού» διαγράφει το τεταρτοκύκλιο O_1O_2 ακτίνας $R = a/\sqrt{2}$ με κέντρο το O (υποθέτουμε ότι ο τροχός δεν ολισθαίνει καθόλου). Συμβολίζοντας τη γραμμική ταχύτητα κατά μήκος του τόξου με v_φ, βρίσκουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του κέντρου του τροχού:

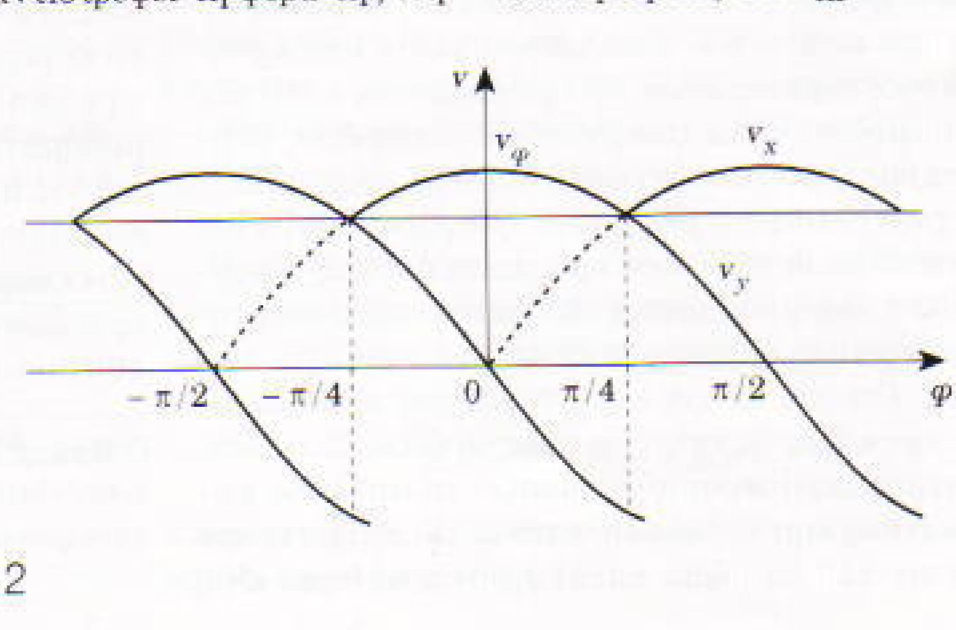


Σχήμα 1

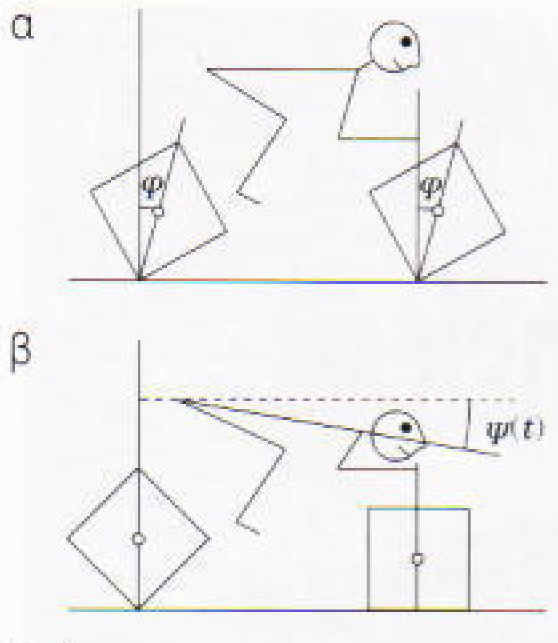
$$v_x = v_\varphi \,\text{συν}\varphi \qquad (1)$$
$$v_y = -v_\varphi \,\text{ημ}\varphi$$

Η εξάρτηση των εν λόγω συνιστωσών από τη γωνία φ φαίνεται στο Σχήμα 2. Μπορούμε να δούμε ότι έπειτα από κάθε τεταρτοκύκλιο η κατακόρυφη ταχύτητα αλλάζει απότομα —αντιστρέφει τη φορά της (δηλαδή αλλάζει πρόσημο) αλλά διατηρεί το μέτρο της.

Εάν το ποδήλατο κινείται με σταθερή γραμμική ταχύτητα v_φ, η γωνία φ θα είναι ευθέως ανάλογη με το χρόνο. Σ' αυτή την περίπτωση, στο Σχήμα 2 φαίνονται οι ταλαντώσεις των συνιστωσών της ταχύτητας ως συναρτήσεις του χρόνου. Φυσικά,



Σχήμα 2



Σχήμα 3

δεν μπορούμε να αποκαλέσουμε τις εν λόγω ταλαντώσεις «αρμονικές», παρότι περιγράφονται από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (1).

Ξεκινώντας από τη θέση 1, το κέντρο του τροχού θα φτάσει το υψηλότερό του σημείο, που βρίσκεται σε απόσταση R από το έδαφος, αφού στραφεί κατά $\pi/4$. Έτσι, σχετικά με το σημείο O_1, ανέρχεται στο ύψος

$$h_{\max} = R - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ένας τροχός, ωστόσο, δεν κάνει το ποδήλατο, όπως έλεγαν οι άνθρωποι την εποχή του Nga-Nga. Κοιτάζοντας το Σχήμα 3, ο μεγάλος εφευρέτης μάντεψε αμέσως ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον δυνατοί τρόποι λειτουργίας.

Α. Εάν οι τροχοί τεθούν αρχικά στην ίδια θέση και δεν υπάρχει ολίσθηση, οι περιστρεφόμενες «διάμετροι» θα σχηματίζουν πάντα την ίδια γωνία φ με την κατακόρυφο. Τα κέντρα τους θα βρίσκονται πάντοτε στο ίδιο ύψος (το οποίο φυσικά εξαρτάται από το χρόνο). Όπως άρεσε στον μεγάλο Nga-Nga να λέει, τα κέντρα θα ταλαντώνονται «σε φάση». Στη συγκεκριμένη περίπτωση όλα τα σημεία του ποδηλάτου, όπως και ο ποδηλάτης, θα ταλαντώνονται επίσης κατακόρυφα. Το κέντρο μάζας ενός τέτοιου ποδηλάτου θα ανεβαίνει περιοδικά στο ύψος $h_{\max}$, το οποίο υπολογίσαμε νωρίτερα.

Β. Εάν οι τροχοί δεν τεθούν στην ίδια θέση αρχικά αλλά είναι στραμμένοι όπως στο Σχήμα 3β, τα κέντρα τους θα κινούνται με διαφορά φάσης 45°. Κατά τη διάρκεια μιας τέτοιας διαδρομής η σπονδυλική στήλη του Nga-Nga θα ταλαντώνεται σε κύκλο ($\psi(t)$), αλλά ταυτοχρόνως το κέντρο μάζας θα μπορεί να κινείται τελείως οριζόντια.

Ας θεωρήσουμε τον τρόπο Α. Για να ανέλθει το κέντρο μάζας ολόκληρου του συστήματος στο ύψος $h_{\max}$, χρειάζεται να παραχθεί έργο

$$W = mgh_{\max} = mg\frac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Εάν η ταχύτητα v_φ διατηρείται σταθερή, το συγκεκριμένο έργο θα παραχθεί στο χρόνο που απαιτείται για να περιστραφεί ο τροχός κατά $\pi/4$, δηλαδή στο 1/8 του χρόνου μιας πλήρους περιστροφής του:

$$\tau_1 = \frac{1}{8}\frac{2\pi R}{v_\varphi} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{a}{v_\varphi}.$$

Έτσι, η μέση ισχύς που πρέπει να αναπτύξει ο ποδηλάτης στο εν λόγω χρονικό διάστημα είναι περίπου

$$\frac{W}{\tau_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\sqrt{2}-1\right)mgv_\varphi. \qquad (2)$$

Τι ταχύτητα v_φ μπορεί να αναπτύξει ένας ποδηλάτης μ' αυτό το ποδήλατο με τις δικές του αποκλειστικά δυνάμεις; Γνωρίζουμε ότι ένα άτομο συνηθισμένο στη σωματική εργασία (και ο Nga-Nga δεν ήταν κανένα βουτυρόπαιδο) χρειάζεται περίπου 5.000 χιλιοθερμίδες ημερησίως, και ο συντελεστής απόδοσης της ανθρώπινης χειρωνακτικής εργασίας είναι κατά προσέγγιση 25%. Έτσι, η ισχύς μιας «ανθρώπινης μηχανής» είναι περίπου

$$P_\mu = 5.000\cdot 10^3\ \text{cal/ημ.} \times \frac{4{,}2\ \text{J/cal}}{3.600\ \text{s/h}\cdot 24\ \text{h/ημ.}}\cdot 0{,}25 \cong 60\ \text{W}.$$

Εκτιμώντας την ολική μάζα του ποδηλάτου και του ποδηλατιστή σε $m \sim 100$ kg, υπολογίζουμε την ταχύτητα από την εξίσωση (2):

$$v_{\varphi_1} = \frac{P_\mu \pi}{mg2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} \cong 15\ \text{cm/s}.$$

Η παραπάνω έκφραση, ωστόσο, αληθεύει μόνο για το πρώτο όγδοο της πλήρους περιστροφής του τροχού. Αφού φτάσει στο ύψος $h_{\max}$, ο ποδηλάτης μπορεί να ξεκουραστεί για λίγο! Αν αμελήσουμε οποιεσδήποτε απώλειες ενέργειας, ο ποδηλάτης πέφτει από το ύψος $h_{\max}$ σε χρόνο

$$\tau_2 \sim \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}}$$

με κατακόρυφη ταχύτητα

$$v_{\varphi_2} \sim \sqrt{2gh_{\max}}.$$

Εάν ο κραδασμός εξαιτίας αυτής της πτώσης είναι πολύ μεγάλος, ο ποδηλάτης μπορεί να ασκεί αντίθετη πίεση στα πετάλια, ώστε να κατεβαίνει πιο μαλακά, αλλά αυτός ο τρόπος απαιτεί πρόσθετο έργο. Επιπλέον, θα αυξηθεί η περίοδος της ταλάντωσης, με αποτέλεσμα το ποδήλατο να κινείται πιο αργά. Ο συγκεκριμένος τρόπος, λοιπόν, δεν είναι ο πλέον άνετος για ποδηλασία.

Ο τρόπος Β είναι ελκυστικότερος από ενεργειακή άποψη: δεν χρειάζεται να ανυψώνουμε το κέντρο μάζας και εν συνεχεία να επιβραδύνουμε την πτώση του. Παρ' όλα αυτά, όμως, οι κρότοι από τους τετράγωνους τροχούς και το χοροπήδημα του μυαλού παραμένουν... Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ο Ngo-Ngo, ο γιος του Nga-Nga, βελτίωσε τη σχεδίαση και έφτιαξε έναν οκτάγωνο «τροχό». Η εγγονή του Nga-Nga, η Ngi-Ngi, προχώρησε ακόμη περισσότερο — το ποδήλατό της διέθετε δεκαεξάγωνους τροχούς. Και έτσι συνεχίστηκε η ιστορία, ώσπου ο Αρχιμήδης ο ίδιος απέδειξε ότι η εν λόγω διαδοχή των τροχών έτεινε στον κύκλο. (Αλλά τώρα μπαίνουμε στα χωράφια των μαθηματικών...)

Αποδείχτηκε ότι οι κυκλικοί τροχοί απαιτούσαν δρόμους, ενώ το πρώτο ποδήλατο του Nga-Nga μπορούσε να περνάει πάνω από πέτρες και κορμούς δέντρων. Λέτε τελικά ο Nga-Nga να ήταν πολύ εξυπνότερος απ' όσο τον θεωρούμε εμείς; ◙

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Υπόσχεστε να μην το πείτε;

«Κι όμως λανθάνουμε (...) ψεύτικα ήσαν τα μηνύματα (ή δεν τ' ακούσαμε, ή δεν τα νοιώσαμε καλά)...»
—Κ.Π. Καβάφης

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΚΡΑΤΗΣΕΤΕ ΜΥΣΤΙΚΟ; Σε μια γνωστή τηλεοπτική σειρά, ο Τζωρτζ αρνήθηκε να αποκαλύψει στη μνηστή του τον κωδικό της τραπεζικής κάρτας του για ανάληψη μετρητών. «Μου είπαν να μην τον φανερώσω σε κανέναν. Μόνο αν η ζωή κάποιου δικού μου προσώπου βρεθεί σε κίνδυνο ίσως χρειαστεί ν' αποκαλύψω τον κωδικό.» Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, φρόντιζαν να υπενθυμίζουν συνεχώς στους πολίτες ότι «η φλυαρία βυθίζει πλοία». Μόνο με το έργο του Alan Turing (διάσημου για τη συμβολή του στη θεωρία των υπολογιστών) και άλλων, κατάφεραν οι Βρετανοί να σπάσουν τον κώδικα των δυνάμεων του Άξονα και να κερδίσουν τον πόλεμο μαζί με τους Συμμάχους. Στον Ειρηνικό οι Ιάπωνες γνώρισαν την ήττα επειδή θεωρούσαν ότι ήταν αδύνατον να σπάσει ο κώδικάς τους.

Με δεδομένο ότι πυκνώνουν οι επικοινωνίες μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου ή οι ηλεκτρονικές τραπεζικές συναλλαγές μέσω του Internet, θεωρούμε εύλογο ότι έχει δοθεί αποτελεσματική λύση στο ζήτημα της ασφάλειας και του απορρήτου. Διαβάζοντας όμως στις εφημερίδες ότι η ασφάλεια παραβιάζεται, μένουμε εμβρόντητοι και αναρωτιόμαστε πόσο ασφαλές είναι ολόκληρο το σύστημα. Το ενδιαφέρον έχει στραφεί στους τομείς των τυχαίων αριθμών και των κβαντικών ιδιοτήτων της ύλης, με την ελπίδα ότι θα μπορούσε να ενισχυθεί το απόρρητο.

Εν τοιαύτη περιπτώσει, με ποιον τρόπο θα επιχειρούσατε να στείλετε ένα μήνυμα ώστε να μπορέσει να το καταλάβει μόνο ο νόμιμος παραλήπτης του; Αν και τα βιβλία κωδίκων και οι αριθμητικές ακολουθίες σημείωσαν κάποιες επιτυχίες στο παρελθόν, μπορούμε να στραφούμε στις ιδιότητες των κυμάτων, για να βελτιώσουμε τις απόρρητες μεταδόσεις μας. Είναι δυνατόν να στείλουμε κάποιο σήμα με τέτοιον τρόπο ώστε ένα πρόσωπο να το λάβει και κάποιο άλλο όχι; Ας επαναδιατυπώσουμε το ερώτημα όπως θα το έθετε ένας φυσικός: μπορούμε να εκπέμψουμε ένα κύμα που θα είναι εντοπισμένο;

Τα κύματα που εκπέμπονται από μια σημειακή πηγή αποκλίνουν προς όλες τις κατευθύνσεις. Έναν λαμπτήρα φωτισμού μπορούμε να τον διακρίνουμε από κάθε σημείο γύρω του. Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να κατευθύνουμε μια δέσμη φωτός προς συγκεκριμένο σημείο, επειδή μας έχει τύχει να χρησιμοποιήσουμε ηλεκτρικό φακό ή να παρατηρήσουμε τη δέσμη κάποιου φάρου. Μπορούμε να σχηματίσουμε μια παράλληλη δέσμη με τη βοήθεια ενός φακού ή ενός κατόπτρου. Εάν η πηγή του φωτός βρίσκεται στην κύρια εστία ενός φακού, η διαδιδόμενη δέσμη θα είναι παράλληλη προς τον κύριο άξονα. Αντίστοιχα, αν η πηγή βρίσκεται στην εστία ενός κοίλου κατόπτρου, το φως που ανακλάται στο κάτοπτρο θα διαδίδεται παράλληλα προς τον κύριο άξονα. Διαφορετικά, και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις το φως από τον φακό ή το κάτοπτρο θα διαδίδεται προς περισσότερες κατευθύνσεις, με αποτέλεσμα οι ενδιαφερόμενοι να έχουν τη δυνατότητα να λάβουν το σήμα μας, αν και ασθενέστερο, και από άλλες θέσεις.

Τι συμβαίνει όταν εκπέμπουμε δύο σήματα; Αυτά σε άλλες περιοχές συμβάλλουν ενισχυτικά και σε άλλες αναιρετικά. Ακολουθώντας την αχαλίνωτη φαντασία μας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αν γνωρίζουμε τη θέση του συμμάχου μας και τη θέση του εχθρού, είναι δυνατόν, θεωρητικά τουλάχιστον, να διευθετήσουμε το ζευγάρι των πομπών μας με τέτοιον τρόπο ώστε ο σύμμαχός μας να λαμβάνει ενισχυτική συμβολή και ο εχθρός μας αναιρετική.

Ως παράδειγμα μπορούμε να εξετάσουμε μια απλή εκδοχή του πειράματος της διπλής σχισμής του Young. Εάν το φως εκπέμπεται από δύο πηγές, μπορούμε να υπολογίσουμε τις θέσεις όπου θα προκύψει ενισχυτική συμβολή (κοιλίες) και εκείνες όπου θα σημειωθεί αναιρετική συμβολή (δεσμοί). Για να εμφανιστεί κοιλία σε ένα σημείο του χώρου, πρέπει οι αποστάσεις του από τις δύο πηγές να διαφέρουν κατά άρτιο αριθμό ημι-

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


LOOSE LIPS SINK SHIPS
TOM BUNK

μηκών κύματος. Αντίστοιχα, οι δεσμοί πρέπει να διαφέρουν κατά περιττό αριθμό ημιμηκών κύματος.

Πολλοί έχουν την εμπειρία της αναιρετικής συμβολής των κυμάτων του ραδιοφώνου· όταν σταματάτε σε κόκκινο φανάρι κοντά σε κάποιο μεγάλο κτίριο, παρατηρείτε συχνά ότι το ραδιόφωνο του αυτοκινήτου σας κάνει πολλά παράσιτα. Το απευθείας σήμα από τον πομπό και το σήμα που ανακλάται από το κτίριο δημιουργούν τα δυσάρεστα παράσιτα. Εάν προχωρήσετε λίγο, το αυτοκινητό σας μπορεί να βρεθεί σε κοιλία —οπότε θα συνεχίσετε να απολαμβάνετε με ευκρίνεια τη μουσική σας.

Και στα δύο παραπάνω παραδείγματα οι δύο πηγές βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Όταν όμως εκπέμπουμε τα μυστικά μας μηνύματα, δεν είναι ανάγκη να συμβαίνει το ίδιο. Αυτό μας προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία στην επιλογή θέσεων για τους πομπούς μας.

Το πρόβλημα της στήλης μας στο παρόν τεύχος αποτελεί μια διασκευή ενός προβλήματος που ετέθη στην 16η Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής, η οποία διεξήχθη στο Πορτορόζ της Γιουγκοσλαβίας το 1985.

Ένας ραδιοερασιτέχνης διατηρεί επαφή με δύο φίλους του που ζουν σε διαφορετικές πόλεις. Οι δύο κεραίες είναι έτσι τοποθετημένες ώστε όταν ο ένας φίλος, που ζει στην πόλη Α, λαμβάνει μέγιστο σήμα, ο άλλος, που ζει στην πόλη Β, δεν δέχεται καθόλου σήμα, και αντιστρόφως. Οι δύο κεραίες εκπέμπουν με ίσες εντάσεις ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις στο οριζόντιο επίπεδο.

Α. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των δύο κεραιών και τον προσανατολισμό τους έτσι ώστε τα ηλεκτρικά σήματα να παρέχουν μέγιστο σήμα για τον έναν φίλο και καθόλου σήμα για τον άλλο. Υποθέστε ότι οι δύο κεραίες εκπέμπουν το σήμα σε συμφωνία φάσης.

Β. Βρείτε τις παραμέτρους της διάταξης (δηλαδή την απόσταση μεταξύ των κεραιών, τον προσανατολισμό τους και τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων με τα οποία τροφοδοτούνται οι κεραίες) έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ των κεραιών να είναι ελάχιστη.

Γ. Βρείτε την αριθμητική λύση εάν ο ραδιοσταθμός εκπέμπει στα 27 MHz και οι γωνίες μεταξύ του βορρά και των κατευθύνσεων της πόλης Α και της πόλης Β είναι 72° και 157° αντιστοίχως.

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum*.

Μπόινγκ, μπόινγκ, μπόινγκ...

Πολλοί αναγνώστες μάς έστειλαν τις λύσεις τους υπογραμμίζοντας ότι ο ευκολότερος τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα είναι να χρησιμοποιήσουμε το καθιερωμένο σύστημα συντεταγμένων για την επίλυση προβλημάτων κεκλιμένων επιπέδων, δηλαδή με τον άξονα των x παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και τον άξονα των y κάθετο προς το ίδιο επίπεδο.

Στη συνέχεια μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα ως πλάγια βολή, ένα θέμα που όλοι γνωρίζουμε και αγαπάμε, με την επιπρόσθετη επιπλοκή μιας επιτάχυνσης κατά τον άξονα των x. Μπορούμε τότε να λύσουμε το πρόβλημα γενικά χωρίς να χρειάζεται να εξετάσουμε χωριστά κάθε αναπήδηση.

Η κίνηση κατά τον άξονα των y είναι όμοια με την κίνηση μιας μπάλας που αναπηδά προσκρούοντας τελείως ελαστικά στο «πάτωμα»· η επιτάχυνση της κίνησης είναι σταθερή, ίση με τη συνιστώσα του g κάθετα προς το επίπεδο: $g/\sqrt{2}$.

Επόμενως, ο χρόνος πτήσης της μπάλας μεταξύ δύο διαδοχικών προσκρούσεών της στο επίπεδο είναι πάντοτε ο ίδιος. Εξαιτίας της συμμετρίας της κίνησης κατά τη διεύθυνση των y, ο χρόνος πτήσης είναι διπλάσιος του χρόνου που χρειάστηκε η μπάλα για να προσκρούσει στο επίπεδο την πρώτη φορά —δηλαδή, $t_1 = 2t_0$, όπου

$$t_0 = \sqrt{\frac{2g}{h}}$$

όπως υπολογίζεται στο άρθρο. Ομοίως, η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των y ακριβώς πριν από κάθε αναπήδηση είναι πάντοτε η ίδια —είναι η κάθετη προς το επίπεδο συνιστώσα τής v_0,

$$v_y = \frac{v_0}{\sqrt{2}},$$

όπου $v_0 = \sqrt{2gh}$ λόγω της διατήρησης της ενέργειας. Αν χρησιμοποιήσουμε το n για να αριθμήσουμε τις αναπηδήσεις, αντιστοιχίζοντας στην πρώτη αναπήδηση το 0, μπορούμε να γράψουμε

$$v_{yn} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Η παράλληλη προς το επίπεδο κίνηση έχει σταθερή επιτάχυνση, ίση με την παράλληλη προς το επίπεδο συνιστώσα του g: $g/\sqrt{2}$. Επομένως, η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x δίνεται από τον τύπο

$$v_x = \frac{gt}{\sqrt{2}},$$

όπου μετράμε το t από τη στιγμή που η μπάλα αφήνεται να πέσει ελεύθερα.

Η αναπήδηση υπ' αριθμόν 0 συμβαίνει για $t = t_0$, η αναπήδηση υπ' αριθμόν 1 για $t = 3t_0$, η υπ' αριθμόν 2 για $t = 5t_0$, κ.ο.κ. Επομένως, η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x ακριβώς πριν (και μετά) από κάθε αναπήδηση είναι

$$v_{xn} = \frac{(2n+1)gt_0}{\sqrt{2}} = (2n+1)\sqrt{gh}$$

$$= \frac{(2n+1)v_0}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως, η ταχύτητα της μπάλας σε κάθε αναπήδηση είναι:

$$v_n^2 = \frac{\left[(2n+1)^2 + 1\right]v_0^2}{2}.$$

Στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων το πιο εύκολο είναι να υπολογίσουμε την εφαπτομένη της γωνίας σχετικά με το επίπεδο. Ακριβώς πριν από κάθε αναπήδηση έχουμε

$$\text{εφ}\varphi_n = \frac{v_{yn}}{v_{xn}} = \frac{1}{2n+1},$$

Συνέχεια στη σελ. 56 ⇨

Δύο καθημερινά φαινόμενα ζητούν ερμηνεία

Πώς μπορείτε να συγκρατήσετε μόνοι σας ένα ολόκληρο πλοίο, και πώς μ' ένα ψυγείο να κάνετε «φούρνο» το σπίτι σας

Alexander Buzdin

ΕΑΝ ΕΙΣΤΕ ΣΑΝ ΚΑΙ ΜΕΝΑ, ΔΥΣΚΟλα θα περάσει μια μέρα χωρίς να αναρωτηθείτε «άραγε πώς δουλεύει αυτό;» ή «τι ακριβώς συμβαίνει εδώ;» ή «είναι *αυτό* πράγματι καλύτερο από *εκείνο*;». Λοιπόν, συνάντησα κάτι σε ένα μυθιστόρημα, και κάτι άλλο στην πραγματική ζωή, που μου έφεραν στο νου αυτά τα ερωτήματα...

Ρεμετζάρισμα και τριβή

Πιθανόν όλοι γνωρίζουν ότι μόλις ένα πλοίο πλευρίζει στην αποβάθρα, οι ναύτες πετούν ένα καραβόσκοινο με θηλιά στην άκρη, που το ονομάζουν κάβο, ώστε κάποιος πάνω στην αποβάθρα να το περάσει σ' ένα πακτωμένο, στιβαρό στήριγμα, μια δέσιρα, η οποία στη γλώσσα των ναυτικών λέγεται μπίντα. Πριν το πλοίο αρχίσει να παρασύρεται από το νερό και να απομακρύνεται από την αποβάθρα, αλλά μερικές φορές αφού κάτι τέτοιο έχει ήδη αρχίσει, ένας ναύτης τυλίγει γρήγορα σε σχήμα 8 την άλλη άκρη του καραβόσκοινου σ' ένα διπλό στήριγμα του καταστρώματος, το οποίο ονομάζεται επίσης μπίντα. Με τον τρόπο αυτό, κατορθώνει να ακινητοποιήσει το πλοίο. Πώς τα καταφέρνει όμως ο ναύτης; Είναι προικισμένος με υπεράνθρωπη δύναμη;

Πολλοί άνθρωποι, συμπεριλαμβανομένου του Ιουλίου Βερν, έτειναν

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

να καταλήξουν σ' αυτό ακριβώς το συμπέρασμα. Ο Βερν, λοιπόν, στο βιβλίο του *Ματίας Σαντόρφ*[1] διηγείται ένα επεισόδιο στο οποίο ο δυνατός άνδρας και αθλητής Ματιφού επιτέλεσε ένα καταπληκτικό κατόρθωμα. Καθώς το Trabokolo, ένα νέο σκάφος, καθελκυόταν με την πρύμνη μπροστά, ο ήρωάς μας απέτρεψε τη σύγκρουσή του με ένα μικρό γιοτ αναψυχής —το οποίο, σε αντίθετη περίπτωση, θα είχε καταστραφεί.

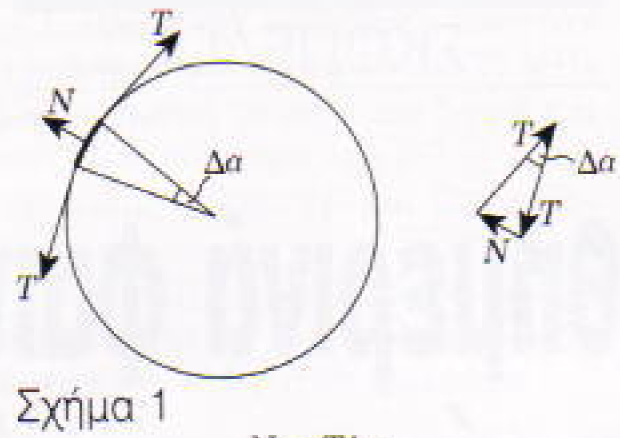
«Το Trabokolo γλιστρούσε γρήγορα προς τα κάτω. Ένα σύννεφο λευκού καπνού στροβιλιζόταν γύρω από την πλώρη καθώς τριβόταν με τα ξύλα της ράμπας ενώ η πρύμνη του ήδη είχε βουτήξει στα νερά του κόλπου.

»Απροσδόκητα ένας άνθρωπος εμφανίζεται, αρπάζει τον κάβο που κρεμόταν από την πλώρη του Trabokolo, και αγωνίζεται να σταματήσει το πλοίο. Στη στιγμή τυλίγει τον κάβο γύρω από έναν μεταλλικό στύλο στερεωμένο στο έδαφος, μια μπίντα, και —αν και ο ίδιος κινδύνευε να συντριβεί— κρατά με υπεράνθρωπη δύναμη τον κάβο στα χέρια του για 10 ολόκληρα δευτερόλεπτα.»

Ο Ιούλιος Βερν είχε δίκιο να δίνει έμφαση στο ρόλο που έπαιξε η τριβή καθώς το πλοίο γλιστρούσε στη ράμπα —τη θέρμανση της πλώρης και τον καπνό που είχε ως αποτέλεσμα. Υποτίμησε όμως το ρόλο κάποιας άλλης τριβής (και έτσι υπερεκτίμησε το ρόλο του Ματιφού) κατά την περιγραφή των κατορθωμάτων του αθλητή.

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τι δύναμη χρειάζεται για να κρατήσουμε τον κάβο τυλιγμένο στην μπίντα.

Κατ' αρχάς θα αμελήσουμε την τριβή και θα θεωρήσουμε ένα ακίνητο τμήμα του σκοινιού, καμπυλωμένο από το υποστήριγμα κατά μικρή γωνία $\Delta\alpha$ (Σχήμα 1). Ας υποθέσουμε ότι η τάση του σκοινιού είναι T και ότι το υποστήριγμα του ασκεί κάθετη δύναμη N. Εφόσον το τμήμα του σκοινιού βρίσκεται σε ισορροπία, η συνισταμένη των δυνάμεων πρέπει να ισούται με μηδέν. Για μικρές γωνίες, το διανυσματικό διάγραμμα στο Σχήμα 1 δείχνει ότι



Σχήμα 1

$$N \cong T\Delta\alpha$$

(εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για μικρές γωνίες ημ$\Delta\alpha \cong \Delta\alpha$).

Όταν υπάρχει τριβή, το σκοινί μπορεί να παραμείνει ακίνητο ακόμη και αν οι δυνάμεις τάσης δεξιά και αριστερά του τμήματος διαφέρουν ελαφρά. Το σκοινί αρχίζει να γλιστρά όταν η διαφορά μεταξύ αυτών των δυνάμεων φτάσει τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής:

$$\Delta T = F_{\tau\rho} = \mu N \cong \mu T \Delta\alpha,$$

όπου μ είναι ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σκοινιού και του υποστηρίγματος. Από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι η μεταβολή της τάσης ως προς τη γωνία περιέλιξης είναι ανάλογη με την τάση:

$$\frac{\Delta T}{\Delta\alpha} \sim T, \text{ ή } \frac{\Delta T}{\Delta\alpha} \cong -\mu T.$$

Εδώ το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η τάση μειώνεται καθώς αυξάνει η γωνία περιέλιξης.

Υπάρχουν πολλά φαινόμενα στη φυσική κατά τα οποία ο ρυθμός μεταβολής κάποιας ποσότητας είναι ανάλογος της ίδιας της ποσότητας. Για παράδειγμα, σκεφτείτε τη ραδιενέργεια: η μείωση του αριθμού των ραδιενεργών πυρήνων ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογη του πλήθους τους. Άλλο παράδειγμα είναι η εκφόρτιση ενός πυκνωτή μέσω μιας αντίστασης: Η μείωση του φορτίου του πυκνωτή είναι ανάλογη του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση, το οποίο με τη σειρά του είναι ανάλογο του φορτίου που φέρει ο πυκνωτής. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις παρατηρείται μια όλο και ταχύτερη μεταβολή στην αντίστοιχη ποσότητα. Εάν, για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας (η επιτάχυνση) ενός σώματος είναι σταθερός, τότε η ταχύτητα αυξάνει γραμμικά με το χρόνο. Εάν όμως η επιτάχυνση είναι ανάλογη με την ταχύτητα, η ταχύτητα αυξάνει όλο και πιο απότομα (εκθετικά).

Η ίδια εξάρτηση ισχύει και στην περίπτωσή μας για τη μεταβολή της τάσης του σκοινιού. (Εξακολουθούμε να πραγματευόμαστε εδώ την ελάχιστη δυνατή διαφορά μεταξύ των τάσεων στα άκρα του σκοινιού —όταν το σκοινί μόλις και αρχίζει να γλιστρά πάνω στο υποστήριγμα.) Το πρόβλημα αυτό το μελέτησε πρώτος ο μεγάλος μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός και αστρονόμος Leonhard Euler (1707-1783). Απέδειξε ότι η τάση T μεταβάλλεται σύμφωνα με τον ακόλουθο νόμο:

$$T = T_0 e^{-\mu\alpha},$$

όπου $e = 2{,}72...$, η βάση των φυσικών λογαρίθμων, και T_0 η αρχική τάση του σκοινιού (το οποίο δεν έχει τυλιχτεί ακόμη γύρω από το υποστήριγμα).

Η γωνία α (μετρούμενη σε ακτίνια) συνδέεται με το πλήθος των στροφών n του σκοινιού γύρω από την μπίντα μέσω μιας απλής σχέσης: $\alpha = 2\pi n$. Έτσι, εάν η τάση του σκοινιού μειώνεται κατά παράγοντα k έπειτα από μία στροφή, δηλαδή

$$\frac{T_1}{T_0} = e^{-2\pi\mu} = \frac{1}{k},$$

έπειτα από n στροφές μειώνεται κατά παράγοντα k^n:

$$\frac{T_n}{T_0} = \frac{T_1}{T_0}\frac{T_2}{T_1}\cdots\frac{T_n}{T_{n-1}} = e^{-2n\pi\mu} = \frac{1}{k^n}.$$

Για συντελεστή τριβής $\mu = 0{,}3$, για παράδειγμα, μία στροφή του σκοινιού γύρω από την μπίντα μειώνει την τάση κατά παράγοντα 6,6. Εάν τυλιχτεί ακόμη δύο φορές, η τάση μειώνεται κατά παράγοντα 43. Καθώς το πλήθος των στροφών αυξάνεται, η τάση του σκοινιού (χάρη στην τριβή) γίνεται όλο και μικρότερη, και βαθμιαία τείνει στο μηδέν.

Επιστρέφοντας στον Ματιφού, τον ήρωα του Βερν, μπορούμε πλέον να πούμε ότι τυλίγοντας το σκοινί στον σιδερένιο στύλο έκανε το έργο του πολύ ευκολότερο. Αν, για παράδειγμα, είχε καταφέρει να τυλίξει το σκοινί γύρω από την μπίντα τρεις φορές, ακόμη και ένα παιδί θα μπορούσε να συγκρατήσει το σκάφος όσο κι αυτός. Το ίδιο ισχύει και για τους ναύτες. Δεν χρειάζονται απίστευτη δύναμη.

1. Μετ. Γ. Δεληγιάννη, Εκδόσεις Αστήρ, Αθήνα, 1969.

Απλώς πρέπει να είναι προσεκτικοί και γρήγοροι καθώς θα τυλίγουν το σκοινί γύρω από την μπίντα.

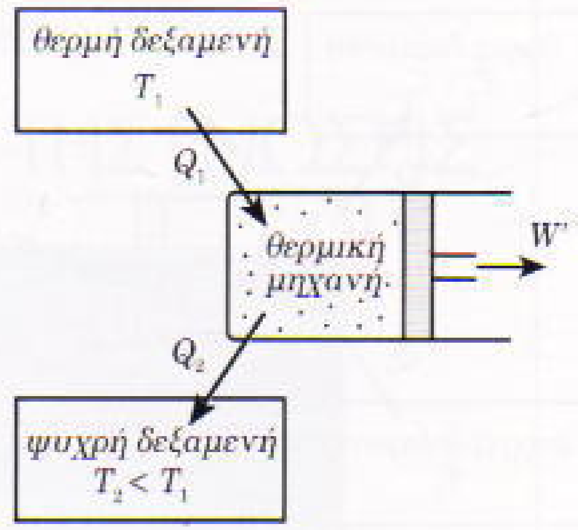
Είναι σχεδόν περιττό να υπογραμμίσω ότι ο καθένας σας συναντά αυτό το φαινόμενο πρακτικά κάθε μέρα, οποτεδήποτε δένετε κάτι —τα κορδόνια των παπουτσιών, ένα κασκόλ, μια παλιά χορδή. Ένας κόμπος δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σκοινί τυλιγμένο γύρω από ένα «υποστήριγμα» (το σκοινί το ίδιο)!

Μια αντλία θερμότητας

Όλοι γνωρίζετε την ηλεκτρική θερμάστρα χώρου. Αρκεί μόνο να τη βάλετε στην πρίζα και να νιώσετε τη θαλπωρή της στο κρύο δωμάτιο. Η ηλεκτρική θερμάστρα μετατρέπει την ενέργεια του ηλεκτρικού ρεύματος σε θερμότητα. Ο σχεδιασμός της είναι πολύ απλός —το λειτουργικό μέρος της αποτελείται απλώς από ένα θερμαντικό σπείραμα, δηλαδή μια αντίσταση. Το σύνολο της ηλεκτρικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα, εκτός από το μέρος που μετασχηματίζεται σε φωτεινή ακτινοβολία —εφόσον βέβαια το σπείραμα θερμανθεί αρκετά και εκπέμπει φως. Παρεμπιπτόντως, μ' αυτή τη λογική μια λάμπα φωτισμού δεν αποτελεί τόσο μέσο θέρμανσης όσο ηλεκτρική θερμάστρα, εφόσον σημαντικό ποσοστό της ηλεκτρικής ενέργειας σ' αυτήν μετατρέπεται σε φωτεινή ακτινοβολία. Εντούτοις, όσο περίεργο κι αν φαίνεται, η λάμπα είναι περισσότερο μέσο θέρμανσης παρά πηγή φωτός —δηλαδή θερμαίνει περισσότερο απ' όσο φωτίζει.

Η ηλεκτρική θερμάστρα δείχνει ότι ανταποκρίνεται ιδανικά στο πρόβλημα της μετατροπής όλης (πρακτικά) της ηλεκτρικής ενέργειας στην απαιτούμενη θερμότητα. Θα μπορούσαμε άραγε, χρησιμοποιώντας ορισμένη ποσότητα ενέργειας, να πάρουμε, ας πούμε, δύο φορές περισσότερη θερμότητα —περιορίζοντας έτσι και τα έξοδά μας για θέρμανση; Αν και το ερώτημα είναι προκλητικό στους χαλεπούς καιρούς μας, εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι αποκλείεται —αντιφάσκει στο νόμο διατήρησης της ενέργειας. Ωστόσο, ας μην είμαστε βιαστικοί· ας εξετάσουμε το πρόβλημα λεπτομερέστερα. Και αρχίζουμε με ένα ψυγείο!

Ένα ψυγείο απορροφά θερμότητα από τον ψυκτικό θάλαμο —δεξαμενή θερμότητας χαμηλής θερμοκρασίας (ψυχρή δεξαμενή)— και την αποδίδει στο περιβάλλον, στο δωμάτιο —δεξαμενή θερμότητας υψηλής θερμοκρασίας (θερμή δεξαμενή). Μια



Σχήμα 2

τέτοια διαδικασία, όμως, δεν μπορεί να συμβαίνει από μόνη της. Η θερμότητα δεν ρέει αφ' εαυτής από ένα ψυχρό σώμα προς ένα θερμό (αυτό αποτελεί μία από τις διατυπώσεις του Δεύτερου Νόμου της θερμοδυναμικής).

Η μεταφορά θερμότητας απαιτεί σταθερή προσφορά ενέργειας. Και αυτή δεν είναι παρά το έργο που παρέχεται από το συμπιεστή του ψυγείου. Δεν είναι ανάγκη να γνωρίζουμε τις κατασκευαστικές λεπτομέρειες του ψυγείου· ωστόσο, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι για να λειτουργεί, πρέπει πάντοτε να καταναλώνει ενέργεια.

Ας υποθέσουμε ότι λόγω του έργου W που κατανάλωσε, το ψυγείο αφαίρεσε από τον ψυκτικό θάλαμο ποσότητα θερμότητας Q_2. Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας, θα απελευθερώσει στο δωμάτιο ποσότητα θερμότητας $Q_1 = Q_2 + W$.

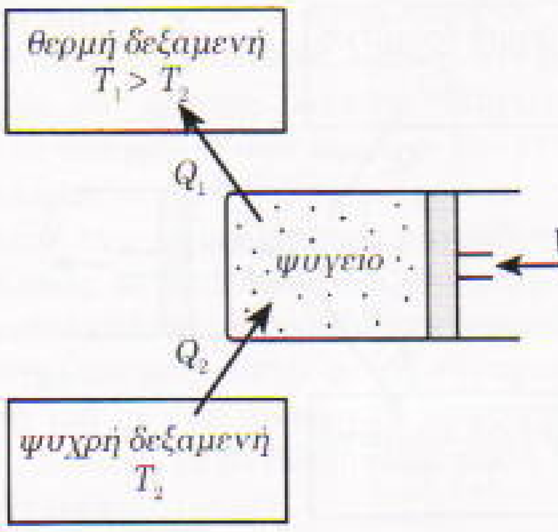
Ας προσδιορίσουμε το συντελεστή απόδοσης του ψυγείου, αξιοποιώντας την ιδέα ότι το ψυγείο είναι ψυκτική μηχανή, δηλαδή απλώς θερμική μηχανή που εργάζεται αντίστροφα!

Όπως γνωρίζετε, μια θερμική μηχανή (Σχήμα 2) παραλαμβάνει ποσότητα θερμότητας Q_1 από μια θερμή δεξαμενή, μετατρέπει μέρος αυτής σε έργο W', και και την υπόλοιπη ποσότητα θερμότητας Q_2 την αποδίδει σε μια ψυχρή δεξαμενή. Ο μέγιστος συντελεστής απόδοσης μιας ιδανικής θερμικής μηχανής είναι ίσος με

$$\eta_{\theta.\ \max} = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

όπου T_1 είναι η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής και T_2 η θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής.

Ο συντελεστής απόδοσης η_ψ του



Σχήμα 3

ψυγείου ορίζεται ως ο λόγος της ποσότητας της θερμότητας που αφαιρείται από τον ψυκτικό θάλαμο προς το έργο που απαιτείται για να συντελεστεί αυτή η διαδικασία. Για ένα ιδανικό ψυγείο (Σχήμα 3), αυτός ισούται με

$$\eta_{\psi,\max} = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$= \frac{1 - \eta_{\theta,\max}}{\eta_{\theta,\max}}.$$

Παρατηρήστε ότι από αυτό τον τύπο προκύπτει πως ο συντελεστής απόδοσης του ψυγείου μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα.

Τώρα πλέον είναι εύκολο να μαντέψετε πώς ένα ψυγείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να θερμάνει το σπίτι σας το χειμώνα: τοποθετείτε τον ψυκτικό θάλαμο (με την πόρτα ανοικτή) έξω από το σπίτι, κρατάτε όμως όλη την υπόλοιπη συσκευή μέσα στο σπίτι! Το ψυγείο θα απορροφά θερμότητα Q_2 από τον εξωτερικό χώρο, και μαζί με το έργο W που θα παράγει ο συμπιεστής (καταναλώνοντας ηλεκτρική ενέργεια από το δίκτυο), θα απελευθερώνει ποσότητα θερμότητας $Q_1 = W + Q_2 > W$ μέσα στο σπίτι. Είναι ξεκάθαρο ότι δεν υπάρχει καμία αντίφαση με το νόμο της διατήρησης της ενέργειας: η επιπλέον ενέργεια, με τη μορφή θερμότητας, αφαιρείται από το ψυχρό, εξωτερικό περιβάλλον.

Ένα ψυγείο που λειτουργεί κατ' αυτό τον τρόπο ονομάζεται «αντλία θερμότητας» —αντλεί θερμότητα από το εξωτερικό περιβάλλον και την αποδίδει στο σπίτι. Λόγω της λειτουργίας του, το εσωτερικό του σπιτιού γίνεται θερμότερο, ενώ το εξωτερικό περιβάλλον γίνεται ψυχρότερο (φυσικά, όχι πολύ ψυχρότερο —η επίδραση στην ατμόσφαιρα από μια αντλία θερμότητας είναι αμελητέα). Ο συντελεστής απόδοσης η_θ της εν λόγω αντλίας θερμότητας ορίζεται ως ο λόγος της ποσότητας θερμότητας η οποία εισήχθη στο δωμάτιο προς το εξωτερικό έργο που χρειάζεται για να γίνει αυτό. Στην ιδανική περίπτωση αυτός ισούται με

$$\eta_{\theta,\max} = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

$$= \frac{1}{\eta_{\theta,\max}},$$

και είναι πάντοτε μεγαλύτερος της μονάδας.

Για παράδειγμα, θεωρήστε την περίπτωση όπου η θερμοκρασία του εξωτερικού περιβάλλοντος είναι -20°C ($T_2 = 253$ K), ενώ στο εσωτερικό του σπιτιού πρέπει να διατηρούμε θερμοκρασία 20°C ($T_1 = 293$ K). Τότε $\eta_\theta = 293/40 \cong 7{,}3$ —δηλαδή, χρησιμοποιώντας ηλεκτρική ενέργεια για να λειτουργήσει η εν λόγω αντλία θερμότητας, παίρνουμε θερμότητα επτά φορές περισσότερη απ' όση αν χρησιμοποιούσαμε ηλεκτρική θερμάστρα χώρου. Ο πραγματικός συντελεστής απόδοσης, βεβαίως, είναι πάντοτε χαμηλότερος. Ωστόσο, η δική μας αντλία θερμότητας είναι αρκετά οικονομικότερη από την ηλεκτρική θερμάστρα.

Παρεμπιπτόντως, γνωρίζατε ότι το κλιματιστικό σας μηχάνημα, που σας δροσίζει τους καλοκαιρινούς μήνες, είναι στην πραγματικότητα μια αντλία θερμότητας; Αντλεί θερμότητα από το δωμάτιο, αποβάλλοντάς τη στο εξωτερικό περιβάλλον. Εάν η «εισαγωγή» και η «εξαγωγή» αέρα αντιστρέφονταν, θα διαθέταμε ένα οικονομικό μέσο θέρμανσης κατά τους ψυχρούς μήνες.

Γιατί, λοιπόν, οι αντλίες θερμότητας, παρά τις χαμηλότερες απαιτήσεις σε ενέργεια, δεν έχουν αντικαταστήσει τις ηλεκτρικές θερμάστρες; Η ουσία είναι ότι οι ηλεκτρικές θερμάστρες είναι εξαιρετικά απλές και φτηνές, ενώ μια αντλία θερμότητας είναι ένα μάλλον πολύπλοκο, ογκώδες και ακριβό μηχάνημα. Αλλά σημειώστε τα λόγια μου: στο μέλλον, οι αντλίες θερμότητας θα χρησιμοποιούνται ευρέως και εις βάρος των σπάταλων ηλεκτρικών θερμαστρών. ◙

⇨ Συνέχεια από τη σελ. 52

Παρατηρήστε ότι τόσο η εφαπτομένη όσο και η γωνία τείνουν στο 0. Καθώς η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x αυξάνει, η μπάλα προσκρούει στο επίπεδο σε διεύθυνση που τείνει να γίνει παράλληλη προς αυτό. Μπορείτε να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας σχετικά με την πραγματική κατακόρυφο στρέφοντας το σύστημα των συντεταγμένων κατά 45° και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\text{εφ}(\alpha - \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha - \text{εφ}\beta}{1 + \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta},$$

με $\alpha = \varphi$ και $\beta = 45^\circ$. Έτσι,

$$\text{εφ}\theta_n = \frac{n}{n+1}.$$

Η συντεταγμένη της μπάλας κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου δίνεται από τον τύπο

$$x = \frac{gt^2}{2\sqrt{2}}.$$

Έτσι,

$$x_n = \frac{(2n+1)^2 h}{\sqrt{2}}.$$

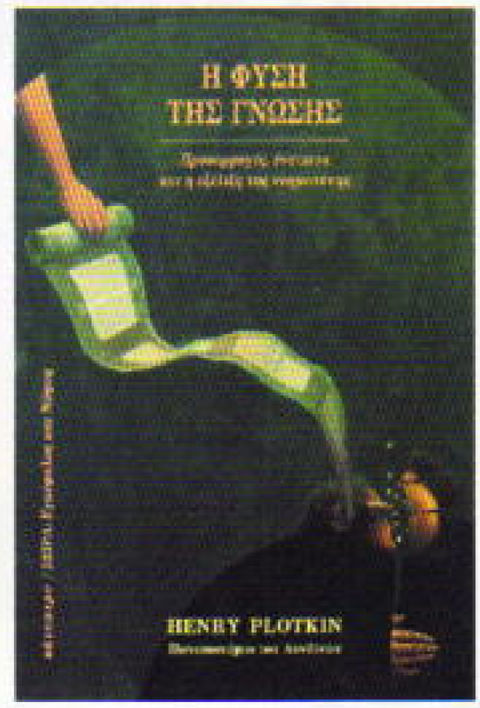
Επομένως, η απόσταση που διανύει η μπάλα παράλληλα προς το επίπεδο κατά το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο αναπηδήσεων είναι

$$L_n = x_n - x_{n-1} = \frac{8nh}{\sqrt{2}} = nL_1$$

Τέλος, ένας νεαρός αναγνώστης πρότεινε την ακόλουθη πολύ ελκυστική επίδειξη ως επέκταση του προβλήματος: Ας υποθέσουμε ότι αφήνουμε στο $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ έναν «ελαστικό» δίσκο ελεύθερο να κινηθεί χωρίς τριβή κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Κάθε φορά που η μπάλα θα προσκρούει στο επίπεδο, ο δίσκος θα βρίσκεται ακριβώς από κάτω της. Εάν έχετε καλύψει την μπάλα με μελάνι, δεν θα παρατηρήσετε ποτέ σημάδια μελανιού στο επίπεδο. Ο ίδιος αναγνώστης παρατηρεί ότι η φυσική στην οποία στηρίζεται η εν λόγω επίδειξη είναι αυτή της άσκησης «πυροβολήστε τη μαϊμού» που περιγράφεται στα περισσότερα διδακτικά βιβλία. ◙

Henry Plotkin

Η ΦΥΣΗ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ



Προσαρμογές, ένστικτα
και η εξέλιξη της νοημοσύνης

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ:
Ευάγγελος Καφετζόπουλος

Τούτο το βιβλίο αποτελεί την καλύτερη ίσως εισαγωγή στον νέο επιστημονικό κλάδο της εξελικτικής ψυχολογίας, η οποία ερμηνεύει την ανθρώπινη νόηση και τους γνωστικούς της μηχανισμούς με όρους της εξέλιξης και της προσαρμογής, τους μοναδικούς που έχουν νόημα στη βιολογία. Όπως εξηγεί ο Henry Plotkin, η έρευνα αποκαλύπτει απροσδόκητους δεσμούς ανάμεσα στην ικανότητά μας να γνωρίζουμε και στον αγώνα για την επιβίωση και την αναπαραγωγική επιτυχία.
Στις μέρες μας αναπτύσσεται μια επιστήμη της γνώσης, και, αν πραγματικά θέλουμε να γνωρίσουμε τη φύση της μάθησης, της λογικής σκέψης και της νοημοσύνης, πρέπει να ακούσουμε προσεκτικά τι έχουν να μας πουν γι' αυτήν οι εξελικτικοί βιολόγοι.
Είναι λοιπόν ευνόητο γιατί το βιβλίο του Henry Plotkin απέσπασε τα εγκωμιαστικά σχόλια του κοινού και των ειδικών: προσεγγίζει ένα ζήτημα θεμελιώδες για κάθε ψυχολογία.
Επιπλέον, κατορθώνει να παρουσιάσει καυτά προβλήματα της επιστημονικής έρευνας με αξιοθαύμαστη διαύγεια και οξυδέρκεια, με τρόπο απόλυτα κατανοητό ακόμη και από τον μη ειδικό αναγνώστη.
Είναι ένα βιβλίο που πρέπει να το διαβάσει οποιοσδήποτε ενδιαφέρεται για το πώς γνωρίζει αυτά που γνωρίζει.

Σελ.: 352, Μεγ.: 14 × 21 εκ., 6.000 δρχ.

«Αναλύει με εκπληκτική σαφήνεια ακόμη και τα πιο πολύπλοκα ζητήματα. Η ανάγνωση του βιβλίου είναι απολαυστική και προκαλεί γόνιμο προβληματισμό.»

—Nature

«Ο Plotkin γράφει με ανυπέρβλητη δεξιοτεχνία και μας προσφέρει μια προκλητική βιολογική προσέγγιση στη γνώση.»

—Lewis Wolpert, Sunday Times

«Όσοι ενδιαφέρονται για τη φιλοσοφία και τη γνωσιακή επιστήμη πρέπει απαραιτήτως να το διαβάσουν.»

—The Times Higher Education Supplement

«Είναι εξαιρετική η ικανότητά του να περιγράφει με απλότητα τα δυσκολότερα θέματα ακόμη και στον μη ειδικό.»

—Science and Technology

«Κατορθώνει να μιλήσει για έννοιες που βρίσκονται στην αιχμή της επιστήμης χωρίς να γίνεται δυσπρόσιτος για τον μη ειδικό αναγνώστη. Αυτό το βιβλίο πρέπει να το διαβάσει κάθε σκεπτόμενος άνθρωπος.»

—David Sington, Times

Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε σε όλα τα καλά βιβλιοπωλεία.
Αν θέλετε, μπορούμε να σας το ταχυδρομήσουμε (τα έξοδα αποστολής θα επιβαρύνουν εμάς).
Γράψτε μας, τηλεφωνήστε μας ή επισκεφθείτε μας:

Κάτοπτρο
Βιβλιοπωλείο:
Στοά του Βιβλίου
(Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5)
105 64 Αθήνα,
τηλ.: 3247785
Εκδόσεις:
Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη,
114 71 Αθήνα,
τηλ.: 3643272, 3645098,
fax: 3641864

ΣΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Ο κοχλίας του Αρχιμήδη

«... και πόσο θαυμαστός είναι, αφήνω να το κρίνουν όσοι τον έχουν κατανοήσει πλήρως.»

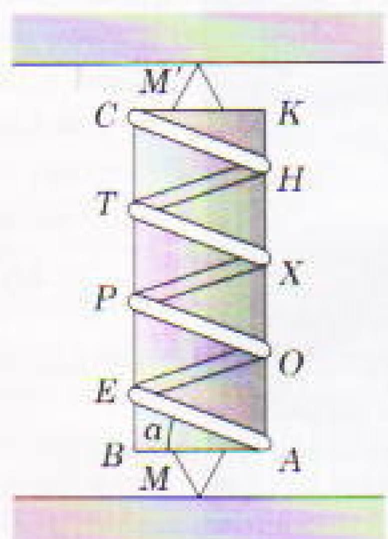
—Γαλιλαίος

M. Golovey

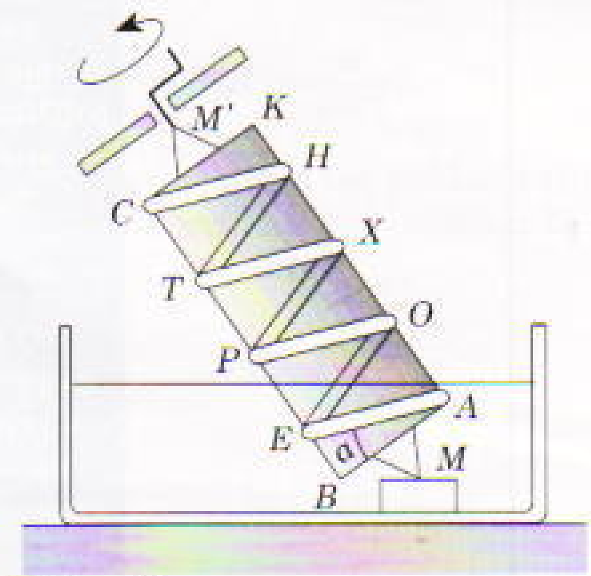
Η ΠΡΩΙΜΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙκής συνδέεται στενά με την εφεύρεση διαφόρων μηχανισμών με τους οποίους απλουστεύονται οι δύσκολες εργασίες. Χρησιμοποιώντας πολύ πρωτόγονες μεθόδους και υλικά, και εφαρμόζοντας τις βασικές αρχές της γεωμετρίας, της μηχανικής και της υδραυλικής που οι ίδιοι τις είχαν αναπτύξει για να λύσουν πρακτικά προβλήματα, οι μηχανικοί της αρχαιότητας επινόησαν ποικίλες μηχανές, που μας εντυπωσιάζουν ακόμη και σήμερα με την έξυπνη σχεδίαση και κατασκευή τους και αντανακλούν μια βαθιά κατανόηση του προς επίλυση προβλήματος.

Ένας από τους πλέον ιδιοφυείς εφευρέτες της αρχαιότητας υπήρξε ο Αρχιμήδης. Αν και στην εποχή μας το όνομά του συνδέεται συνήθως με την άνωση, τη δύναμη που δρα σε κάθε σώμα βυθισμένο σε ρευστό, ο Αρχιμήδης επινόησε τεράστιο πλήθος αξιοσημείωτα ευφυών εφευρέσεων. Η σπουδαιότερη ανάμεσά τους είναι η συσκευή που έγινε γνωστή διαμέσου των αιώνων ως «κοχλίας του Αρχιμήδη». Σε μια από τις εργασίες του ο Γαλιλαίος έγραφε ότι η εν λόγω εφεύρεση «δεν ήταν απλώς όμορφη, ήταν και θαυματουργή, διότι βλέπουμε το νερό να ανυψώνεται στον κοχλία, ενώ ρέει συνεχώς προς τα κάτω».

Πράγματι, με την πρώτη ματιά είναι δύσκολο να φανταστούμε πώς το νερό, που ρέει προς τα κάτω στο «σπείρωμα» του κοχλία, καταφέρνει ταυτόχρονα να αναρριχάται. Ο Γαλιλαίος περιέγραψε εξαντλητικά την αρχή



Σχήμα 1



Σχήμα 2

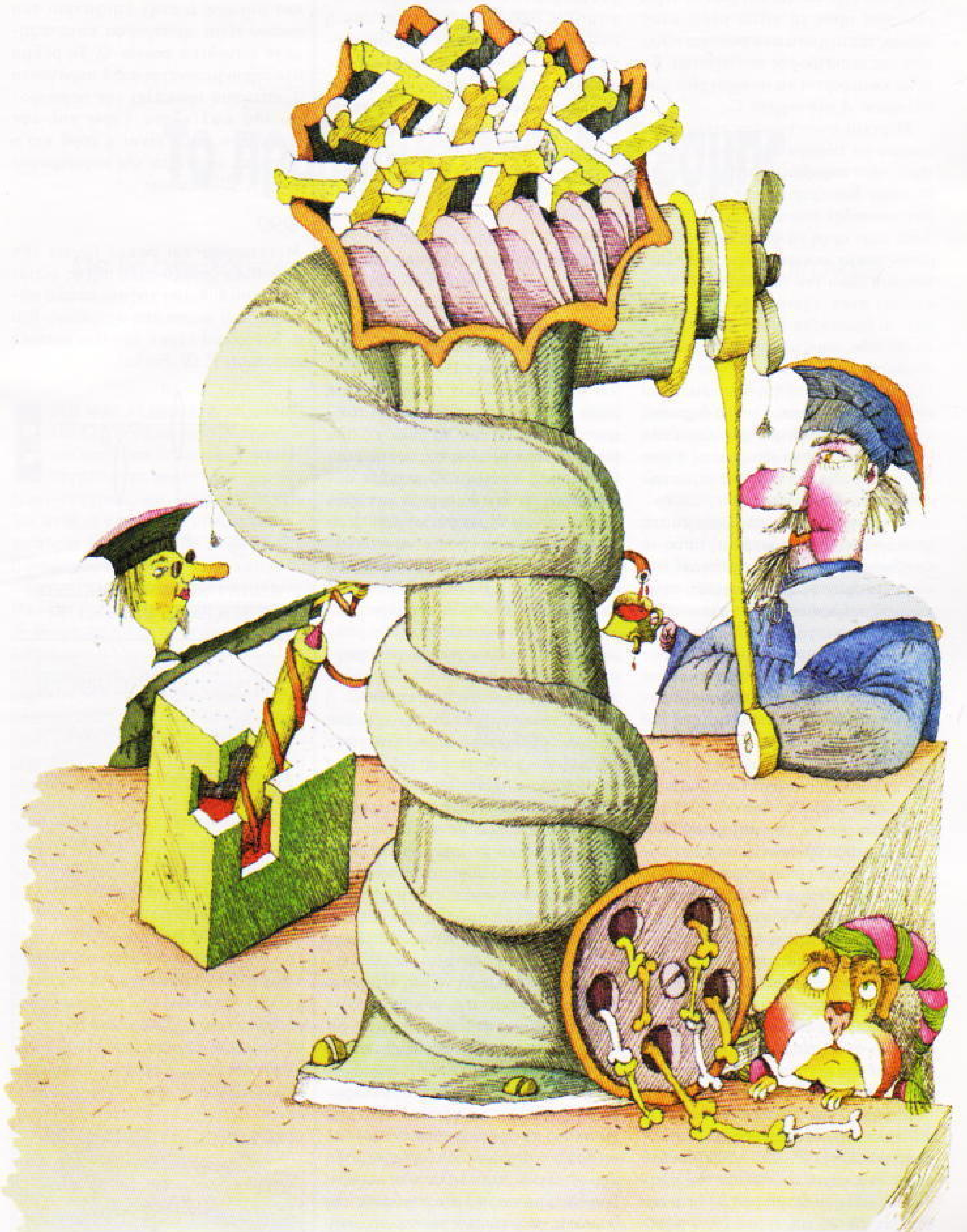
λειτουργίας της εν λόγω υδραντλίας και την αποκάλεσε αρχιμήδειο κοχλία για την ανύψωση του νερού. Όντως, από απόσταση μοιάζει με κοχλία.

Πώς λειτουργεί όμως ο κοχλίας του Αρχιμήδη; Κοιτάξτε το Σχήμα 1. Δείχνει έναν κύλινδρο *AKCB* του οποίου η πλευρική επιφάνεια φέρει έναν σπειροειδή αγωγό *AEOPXTHC*. Το νερό μπορεί να ρέει προς τα κάτω μέσα στον συγκεκριμένο αγωγό χωρίς να χύνεται. Ομοίως και μια σφαίρα μπορεί να κυλήσει προς τα κάτω μέσα στον αγωγό. Εάν γείρουμε τον κύλινδρο, βυθίσουμε το άκρο *A* του σπειροειδούς αγωγού στο νερό (Σχήμα 2) και αρχίσουμε να στρέφουμε τον κύλινδρο γύρω από τον άξονά του *MM′*, το νερό θ' αρχίσει να ρέει προς τα πάνω μέσα στον σπειροειδή αγωγό και να χύνεται από το πάνω άκρο *C*. Παραδόξως, καθ' όλη τη διάρκεια το νερό πράγματι ρέει προς τα κάτω σε σχέση με την επιφάνεια του σπειροειδούς αγωγού—όμως, παρ' όλα αυτά, ως αποτέλεσμα, ανεβαίνει στο σημείο *C*.

Ας προσπαθήσουμε να αντιληφθούμε πώς είναι δυνατόν κάτι τέτοιο. Έστω α η γωνία που σχηματίζει το τμήμα του σπειροειδούς αγωγού *AE* με τον πυθμένα του κυλίνδρου *AB*. Δώστε στον κύλινδρο κλίση μεγαλύτερη από τη γωνία α. Το νερό θα γεμίσει το τμήμα *AE* αλλά και ένα μέρος του *EO*.

Τώρα αρχίστε να στρέφετε τον κύλινδρο γύρω από τον άξονά του. Όλα τα σημεία στο τμήμα *AE* (εκτός από το σημείο *A*) αρχίζουν να ανυψώνονται, και όλα τα σημεία στο τμήμα *EO* (εκτός από το σημείο *E*) να κατεβαίνουν, ενώ το νερό ρέει βαθμιαία από το «γεμάτο» τμήμα κατά μήκος του αγωγού, χάνοντας ύψος σε σχέση μ' αυτόν αλλά κερδίζοντας σε σχέση με το έδαφος. Κατά τη διάρκεια της περιστροφής τα διαφορετικά μέρη του αγωγού, που αντικαθιστούν συνεχώς το ένα το άλλο, έχουν

Εικονογράφηση: V. Ivanyuk



σε σχέση με το νερό την ίδια ακριβώς θέση που είχε το AE, και έτσι το νερό, ενώ ρέει προς τα κάτω μέσα στον αγωγό, ταυτόχρονα ανυψώνεται εξαιτίας της περιστροφής του αγωγού. Εν τέλει καταφέρνει να αναρριχηθεί από το σημείο A στο σημείο C.

Μερικοί αναγνώστες είναι ίσως έτοιμοι να θέσουν ένα φυσικό ερώτημα: «Δεν παραβιάζει αυτή η συσκευή το νόμο διατήρησης της ενέργειας; Δεν αποτελεί ένα είδος αεικίνητου;» Ίσως στην αρχή να φαίνεται έτσι. Περιστρέφουμε τον κύλινδρο, και εξαιτίας του ίδιου του του βάρους το νερό κυλάει στον αγωγό προς τα κάτω, σαν να βρισκόταν πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, αποκτώντας ταχύτητα και ανεβαίνοντας ώς το ανώτερο στόμιο του κοχλία (δηλαδή η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται). Για να δημιουργήσουμε ένα αεικίνητο, χρειάζεται όλο κι όλο να μπορεί να μετατραπεί η επιπλέον ενέργεια του νερού σε περιστροφική ενέργεια του κοχλία!

Εάν σας ζητούσαν στο μάθημα της φυσικής να απαντήσετε σ' αυτό το πρόβλημα, ίσως θα προσφεύγατε στο νόμο διατήρησης της ενέργειας, υπογραμμίζοντας ότι η παραπάνω συλλογιστική αντιφάσκει σ' αυτόν. Ίσως θα προχωρούσατε περισσότερο προσθέτοντας ότι το νερό ανέρχεται στον αγωγό λόγω της ενέργειας που προσφέρεται από κάποια άλλη πηγή και δαπανάται στην περιστροφή του κοχλία, έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια του νερού να είναι πάντοτε μικρότερη από την ενέργεια που εν τέλει καταναλώνεται για την ανύψωσή του.

Όλα τούτα βρίσκονται κοντά στην αλήθεια, αλλά είναι πολύ «θεωρητικά» και δεν εξηγούν τις λεπτομέρειες. Πώς μεταφέρει ο αγωγός ενέργεια στο νερό; Πού συμβαίνει αυτό; Ποια κατεύθυνση έχει η δύναμη που δρα στο νερό; Προσπαθήστε να απαντήσετε μόνοι σας στα ερωτήματα αυτά. Για να απλουστεύσετε το πρόβλημα, μπορείτε να αντικαταστήσετε τη ροή του νερού με την κίνηση μιας μικρής σφαίρας μέσα στον σπειροειδή αγωγό.

Μπορείτε να κατασκευάσετε στο σπίτι σας ένα απλό μοντέλο του κοχλία του Αρχιμήδη. Για τον κύλινδρο πάρτε ένα κομμάτι δύσκαμπτου πλαστικού σωλήνα διαμέτρου 3–5 cm και μήκους 20–30 cm, ή μια ξύλινη ράβδο παρόμοιων διαστάσεων. Ο αγωγός μπορεί να είναι οποιοσδήποτε εύκαμπτος σωλήνας από ελαστικό ή PVC διαμέτρου μερικών mm (όσο μεγαλύτερη η διάμετρος τόσο καλύτερα). Το ιδεώδες θα ήταν να χρησιμοποιήσετε διαφανή σωλήνα — τότε θα μπορούσατε να παρακολουθήσετε την κίνηση του νερού ή της σφαίρας μέσα στον αρχιμήδειο κοχλία.

Τυλίξτε σπειροειδώς τον εύκαμπτο σωλήνα γύρω από τη ράβδο και στερεώστε τα άκρα του με σύρμα ή σπάγκο κοντά στο ανώτερο και κατώτερο άκρο της. Αυτό είναι όλο — είστε έτοιμοι να χρησιμοποιήσετε το μοντέλο σας. Βυθίστε το ένα άκρο σ' ένα δοχείο με νερό και δώστε στον κοχλία μεγαλύτερη κλίση από τη γωνία που σχηματίζουν η σπείρα και η βάση του κυλίνδρου. Τώρα περιστρέψτε τον κοχλία, σαν να βιδώνετε μια βίδα στο νερό, κρατώντας τον σε σταθερό ύψος. Έπειτα από μερικές περιστροφές, το νερό θα αρχίσει να εκρέει από το πάνω στόμιο του κοχλία. Αντί για νερό, θα μπορούσατε να εισαγάγετε μπίλιες από ρουλεμάν στο κάτω άκρο του. Αυτές θα αναρριχηθούν και θα εξέλθουν από το πάνω άκρο του.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα μπορούσατε να κατασκευάσετε μια πραγματική αντλία που θα λειτουργούσε με τη δύναμη του ανέμου, ας πούμε, ή με βενζινοκινητήρα. Συγκρινόμενος με μια εμβολοφόρο υδραντλία, που λειτουργεί μόνο με καθαρό νερό, ο αρχιμήδειος κοχλίας παρουσιάζει ένα σημαντικό πλεονέκτημα: μπορεί να αντλήσει νερό μαζί με σωματίδια (λάσπη, μεταλλικά ρινίσματα) που αιωρούνται σ' αυτό. Συγκρινόμενος όμως με τις φυγοκεντρικές αντλίες, εμφανίζεται θλιβερά απαρχαιωμένος και δεν μπορεί να τις ανταγωνιστεί. Στην εποχή μας χρησιμοποιείται πολύ σπάνια για την άντληση νερού. Μπορείτε ωστόσο να συναντήσετε κάποιον τύπο αρχιμήδειου κοχλία εν λειτουργία σε ορισμένες υπό ανάπτυξη χώρες.

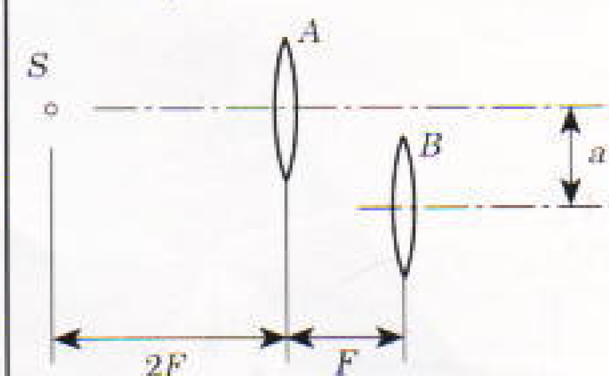
Ο τύπος της συσκευής που φαίνεται στα σχήματα ονομάζεται «μεταφορικός κοχλίας» στη γλώσσα των μηχανικών, και χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλές μηχανές για την ανάμειξη υγρών, ξηρών και εύπλαστων ουσιών. Παράδειγμα αποτελεί ο στροφέας της οικιακής χειροκίνητης κρεατομηχανής.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 35*

και μήκους L στην επιφάνεια του οποίου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο συνολικό φορτίο Q. Το ρεύμα στο πηνίο μειώνεται κατά παράγοντα 3, κάτι που προκαλεί την περιστροφή του κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του. Ποια είναι η φορά και η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής του; (A. Zilberman)

Φ90

Μετατοπισμένοι φακοί. Βρείτε την απόσταση μεταξύ μιας πηγής φωτός S και του ειδώλου της στο οπτικό σύστημα του παρακάτω σχήματος. Και οι δύο φακοί έχουν την ίδια εστιακή απόσταση F. (V. Serbo)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Το πρόβλημα της *N*-δέσμης

Με τις οφειλόμενες ευχαριστίες στους δημιουργούς του Math.Note

George Berzsenyi

ΕΣΤΩ N ΕΝΑΣ ΘΕΤΙΚΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ και $C(N)$ ένα σύνολο N σημείων του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες τα οποία ανά τρία δεν είναι συγγραμμικά και ανά τέσσερα δεν ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Θα λέμε ότι το $C(N)$ είναι μια N-δέσμη αν η απόσταση μεταξύ κάθε ζεύγους σημείων της είναι ακέραιος αριθμός. Θα λέμε ότι το $C(N)$ είναι μια αρχική N-δέσμη αν είναι αδύνατον να προκύψει από άλλη N-δέσμη με πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων των σημείων της με κάποιον θετικό ακέραιο. Είναι προφανές ότι η ιδιότητα ενός συνόλου σημείων να είναι N-δέσμη παραμένει αναλλοίωτη έπειτα από παράλληλες μετατοπίσεις (δηλαδή, την πρόσθεση του ίδιου ακεραίου X στις συντεταγμένες x και του ίδιου ακεραίου Y στις συντεταγμένες y των σημείων της), από συμμετρίες ως προς τις ευθείες $y = \pm x$, και από στροφές 90°. Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε ως μέγεθος μιας N-δέσμης είτε τη μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της είτε την ακτίνα του μικρότερου κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και περιέχει μια παράλληλη μετατόπιση της εν λόγω N-δέσμης. Ο Stan Rabinowitz (ο δημιουργός του αρχείου Math. Note στην DEC), χρησιμοποιώντας το δεύτερο κριτήριο βρήκε ότι η «μικρότερη» 5-δέσμη (μεγέθους 56) είναι η $\{(0, 0), (56, 0), (-16, 30), (16, 30), (0, -33)\}$, ενώ η «μικρότερη» 6-δέσμη (μεγέθους 1275) είναι η $\{(0, 0), (1155, 540), (546, -272), (132, -720), (960, -720), (546, 1120)\}$. (Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη στήλη μου του τεύχους Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1996 του *Quantum* για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το αρχείο Math.Note.) Προηγουμένως, οι δημιουργοί της έννοιας της N-δέσμης (οι Bell και Chongo) είχαν ανακαλύψει την 5-δέσμη $\{(0, 0), (0, -153), (136, 102), (-136, 102), (224, 207)\}$ η οποία είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερη από τη δέσμη του Stan.

Είναι φανερό ότι 3-δέσμες κατασκευάζονται από πυθαγόρειες και ηρώνειες τριάδες. Η τριάδα (a, b, c) ονομάζεται ηρώνεια αν τα a, b, c είναι ακέραιοι και αν το εμβαδόν του (ηρώνειου) τριγώνου με πλευρές a, b και c είναι επίσης ακέραιος. Η πρώτη πρόκληση για τους αναγνώστες μου είναι *να αποδείξουν ότι όλα τα ηρώνεια τρίγωνα προκύπτουν από τη συγκόλληση δύο πυθαγόρειων τριγώνων*. Η δεύτερη πρόκληση είναι *να αποδείξουν ή να διαψεύσουν το ότι δεν υπάρχουν άλλες 3-δέσμες*.

Όταν $N = 4$, η κατασκευή των 4-δεσμών περιπλέκεται από το γεγονός ότι τα σημεία δεν πρέπει να ανήκουν σε κύκλο. Πάντως, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε άπειρες στο πλήθος αρχικές 4-δέσμες αν ξεκινήσουμε από ηρώνεια τρίγωνα, που δεν είναι πυθαγόρεια, και θεωρώντας στη συνέχεια τα συμμετρικά ως προς τις πλευρές τους. Η επόμενη πρόκληση προς τους αναγνώστες μου είναι *να βρουν 4-δέσμες που είναι αδύνατον να διαχωριστούν σε δύο ηρώνεια τρίγωνα με τη μέθοδο που προαναφέρθηκε*.

Υπάρχουν πολλά ακόμη αναπάντητα ερωτήματα που αφορούν τις N-δέσμες. Μερικά τα εξέτασαν ο Stan Rabinowitz και οι συνάδελφοί του στην DEC, χωρίς όμως να επιτύχουν κάποια πρόοδο. Για παράδειγμα:

- *Υπάρχουν N-δέσμες για $N > 6$;*
- *Υπάρχει άπειρο πλήθος αρχικών 5-δεσμών και 6-δεσμών;*
- *Υπάρχει τρόπος να δημιουργήσουμε μια $(N + 1)$-δέσμη από μια δεδομένη N-δέσμη;*
- *Τι συμβαίνει όταν μεταφερόμαστε στο τρισδιάστατο πλέγμα;*
- *Πώς διαμορφώνεται η κατάσταση στις μεγαλύτερες διαστάσεις;*
- *Τι θα συμβεί αν μεταφερθούμε στο τριγωνικής δομής πλέγμα του επιπέδου, όπου τα πυθαγόρεια τρίγωνα αντικαθίστανται από προπυθαγόρεια και μεταπυθαγόρεια τρίγωνα;* (Βλ. και πάλι το τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1996.)

Στείλτε μου τις απαντήσεις σας στη διεύθυνση c/o *Quantum*, 1840 Wilson Boulevard, Arlington VA 22201-3000, USA. Είναι πιθανό να αποτελέσουν το έναυσμα ευρύτερης συζήτησης σε κάποια μελλοντική στήλη μου.

Η πράσινη αναλαμπή

Ένα ασυνήθιστο θέαμα στο τέλος της ημέρας

Lev Tarasov

ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΥση του Ήλιου μπορείτε να παρακολουθήσετε ένα υπέροχο φαινόμενο —τη λεγόμενη «πράσινη αναλαμπή». Όταν ο δίσκος του Ήλιου έχει κρυφτεί σχεδόν εντελώς, πίσω από τον ορίζοντα, ξαφνικά λάμπει ένα έντονο πρασινωπό φως για λίγα δευτερόλεπτα. Το χείλος του Ήλιου παίρνει ένα εντυπωσιακό έντονο πράσινο χρώμα, αντί του συνηθισμένου ερυθροκίτρινου, και εκπέμπει «πράσινες» ακτίνες σε όλες τις κατευθύνσεις. Ένα, δύο, τρία δευτερόλεπτα..., και το υπέροχο θέαμα εξαφανίζεται.

Αυτό το πράσινο φως είναι σπάνιος επισκέπτης του ουρανού. Το βλέπουμε συνήθως το σούρουπο, όταν ο Ήλιος παραμένει λαμπρός ώς την τελευταία στιγμή της δύσης του και δεν αλλάζει χρώμα, παραμένοντας κίτρινος ή κιτρινοπορτοκαλής. Ο ρώσος αστρονόμος G.A. Tikhov, που μελέτησε το εν λόγω φαινόμενο επί πολλά χρόνια, υπογράμμιζε: «Εάν ο Ήλιος κατά τη δύση είναι κόκκινος και είναι εύκολο να τον κοιτάζεις, τότε μπορείς να πεις με βεβαιότητα ότι δεν θα υπάρξει πράσινη αναλαμπή. Αντίθετα, αν το λευκοκίτρινο χρώμα του Ήλιου δεν αλλάξει αισθητά καθώς ο Ήλιος δύει με πλήρη λαμπρότητα, τότε μάλλον σίγουρα θα κάνει την εμφάνισή της η πράσινη αναλαμπή. Σημαντικό στοιχείο, ο ορίζοντας να είναι μια καθαρή γραμμή χωρίς αυξομειώσεις στο ύψος του (εξαιτίας δέντρων, κτιρίων, κ.ο.κ.). Τέτοιες συνθήκες συναντώνται πολύ εύκολα στη θάλασσα, και έτσι εξηγείται γιατί η πράσινη αναλαμπή είναι πολύ οικεία στους ναυτικούς».

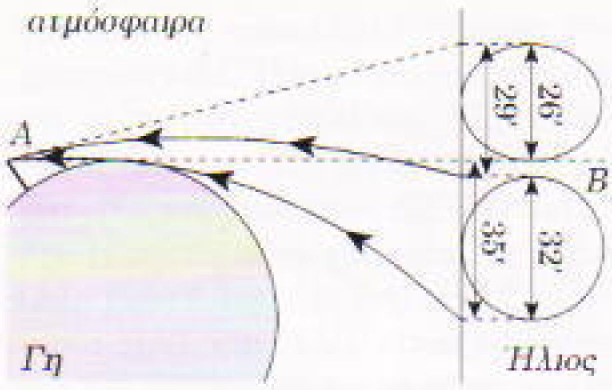
Η φυσική της πράσινης αναλαμπής στηρίζεται σε τρία φαινόμενα: (1) τη διάθλαση του φωτός σε ένα οπτικά μη ομογενές μέσο (εδώ, τη γήινη ατμόσφαιρα)· (2) την εξάρτηση της διάθλασης του φωτός από το μήκος κύματος (διασκεδασμός ή διασπορά)· (3) τη σκέδαση του φωτός στην ατμόσφαιρα (ή, ακριβέστερα, στην εξασθένηση του συγκεκριμένου φαινομένου στον καθαρό, ήρεμο αέρα). Ας εξετάσουμε τους παράγοντες αυτούς έναν προς έναν.

Όταν μια δέσμη φωτός διέρχεται από την ατμόσφαιρα, κάμπτεται κατά τέτοιον τρόπο ώστε η καμπυλότητα της τροχιάς της «να είναι στραμμένη» πάντοτε προς τα αραιότερα στρώματα αέρα. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ο Ήλιος κατά τη δύση του φαίνεται λίγο πεπλατυσμένος στην κατακόρυφη διεύθυνση —η κατακόρυφη φαινόμενη διάμετρός του είναι 26′, κατά 6′ μικρότερη από την αντίστοιχη

Ευγενική παραχώρηση του Lu Rarogiewicz και του Αστεροσκοπείου του Όρους Γουίλσον.

Οι αναγνώστες που έχουν πρόσβαση στο Internet μπορούν να βρουν φωτογραφίες (όπως η παραπάνω) και συμπληρωματικές πληροφορίες για την «πράσινη αναλαμπή», όπως και άλλα σχετικά φαινόμενα, στην ηλεκτρονική διεύθυνση του Αστεροσκοπείου του Όρους Γουίλσον:

http://www.mtwilson.edu/Tour/Lot/Green_Flash

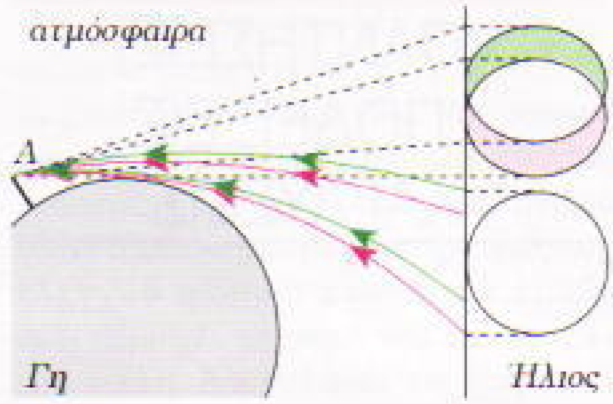


Σχήμα 1

οριζόντια διάμετρό του.[1] Πού οφείλεται η εν λόγω διαφορά; Η πυκνότητα της ατμόσφαιρας μειώνεται με το ύψος, και αυτό οδηγεί σε συνεχή κάμψη των ακτίνων φωτός (δηλαδή σε διάθλαση). Όταν, ενώ θαυμάζουμε τη δύση στην παραλία, βλέπουμε τη χαμηλότερη άκρη του ηλιακού δίσκου να αγγίζει τον ορίζοντα, συνήθως δεν συνειδητοποιούμε ότι η εν λόγω άκρη στην πραγματικότητα βρίσκεται 2°35′ χαμηλότερα από τον ορίζοντα στο συγκεκριμένο σημείο (πράγμα που σημαίνει ότι και ολόκληρος ο δίσκος του Ήλιου βρίσκεται ήδη κάτω από τον ορίζοντα). Ο αριθμός 2°35′ απαρτίζεται από δύο μέρη: αυτό των 2° εξηγείται από το χρόνο που χρειάζεται το φως για να φτάσει στη Γη (περίπου 8 λεπτά), και αυτό των 35′ οφείλεται στην ατμοσφαιρική διάθλαση του φωτός. Σημειώστε ότι, εξαιτίας της διάθλασης, το ανώτερο χείλος του δίσκου «ανυψώνεται» λιγότερο από το κατώτερο: όχι κατά 35′ αλλά μόνο κατά 29′ (ο δείκτης διάθλασης ελαττώνεται με το ύψος). Να λοιπόν γιατί ο Ήλιος που δύει μοιάζει σαν πεπλατυσμένος δίσκος. Το Σχήμα 1 δείχνει παραστατικά τα παραπάνω (με *A* σημειώνεται ένας παρατηρητής, με *AB* ο ορίζοντας).

Ας λάβουμε τώρα υπόψη τον παράγοντα (2): όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος κύματος του φωτός τόσο μεγαλύτερη είναι η διάθλασή του. Αυτή η σχέση εξηγεί γιατί το «λευκό» φως αναλύεται σ' ένα φάσμα χρωμάτων όταν διέρχεται από ένα πρίσμα. Οι «πράσινες» και «μπλε» ακτίνες διαθλώνται περισσότερο από τις «κόκκινες». Χάριν απλότητας, φανταστείτε ότι το ηλιακό φως αποτελείται από

1. Βλ. και το άρθρο «Τι κάνουν τα μικρά αστέρια» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1994.



Σχήμα 2

δύο μόνο χρώματα: πράσινο και κόκκινο. Με τη συγκεκριμένη απλοποίηση, ο «λευκός» ηλιακός δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ως συνδυασμός δύο δίσκων (πράσινου και κόκκινου), με τον έναν τοποθετημένο επί του άλλου. Η ατμοσφαιρική διάθλαση «ανυψώνει» τον πράσινο δίσκο περισσότερο από τον κόκκινο.

Κατόπιν αυτών, ένας παρατηρητής βλέπει τον δύοντα Ήλιο ακριβώς όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Το ανώτερο χείλος του Ήλιου είναι πράσινο και το κατώτερο κόκκινο. Το κεντρικό τμήμα συντίθεται και από τα δύο χρώματα, και φαίνεται «λευκό».

Το παραπάνω σενάριο είναι σωστό όσο δεν υπάρχει η σκέδαση του φωτός στη γήινη ατμόσφαιρα. Στην πραγματικότητα, όμως, η ατμόσφαιρα σκεδάζει το ηλιακό φως. Αυτό σημαίνει ότι οι ακτίνες που χαρακτηρίζονται από μικρότερα μήκη κύματος είναι πιθανότερο να απουσιάζουν από το φως που φτάνει στον παρατηρητή. (Το νόμο αυτό τον διατύπωσε ο σερ John Rayleigh: η ένταση του σκεδαζόμενου φωτός είναι αντιστρόφως ανάλογη της τέταρτης δύναμης του μήκους κύματός του.) Ως εκ τούτου, δεν θα δούμε το πράσινο χείλος στο ανώτατο άκρο του Ήλιου, και ολόκληρος ο δίσκος δεν θα είναι «λευκός» αλλά κοκκινωπός.

Φανταστείτε, όμως, ότι σχεδόν ολόκληρος ο ηλιακός δίσκος έχει εξαφανιστεί κάτω από τον ορίζοντα και μόνο ένα ελάχιστο ανώτατο χείλος παραμένει ακόμη ορατό. Εάν ο καιρός είναι διαυγής και ήρεμος, και ο αέρας καθαρός, η σκέδαση του φωτός θα είναι μάλλον ασθενής. Αυτές ακριβώς οι συνθήκες μπορούν να δημιουργήσουν το υπέροχο θέαμα: μια βεντάλια από πράσινες δέσμες, οι οποίες απλώνονται από το λαμπρό πράσινο χείλος του Ήλιου που δύει. ◘

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 3*

«Σ' αυτό το πλαίσιο, η φτωχή παρουσία και προβολή της επιστημονικής σκέψεως στα πνευματικά μας πράγματα ηχεί περίπου ως συνέπεια αυτονόητη. Ας σημειωθεί, ωστόσο, για την εκτίμηση του φαινομένου, ότι τις τελευταίες δεκαετίες η σκέψη αυτή γνωρίζει μοναδική άνθηση παγκοσμίως, εν μέρει επειδή παρακολουθεί την έκρηξη των ίδιων των επιστημών. Την ίδια στιγμή, στη λογοτεχνίζουσα χώρα μας υπάρχει αφθονία περιοδικών, σημειωμάτων στις εφημερίδες, εκδηλώσεων αλληλοθαυμασμού και εκδηλώσεων φθόνου γύρω από τον λογοτεχνικό χώρο —που, όπως κάθε περιφραγμένος χώρος, έχει τα καλά και τα κακά του άνθη...

»... Το νόημα, λοιπόν, του παρόντος κειμένου είναι να αποδείξει, στον ευαίσθητο και σκεπτόμενο αναγνώστη, την ύπαρξη ενός τοπίου που λίγο το υποπτεύεται. Σ' αυτό το επιστημονικό τοπίο υπάρχουν ήδη ρήξεις, ρήξεις σημαντικές για τον εγγενή επαρχιωτισμό μας. Η Ελλάδα διαρκώς υπερηφανεύεται, επειδή λέει παράγει πολλαπλάσιες από τον οποιονδήποτε μέσο όρο ποιητικές συλλογές. Όσοι τα λένε αυτά, δεν διερωτώνται πόσοι από τους παραγωγούς των συλλογών είναι πραγματικοί, ή έστω δυνάμει, ποιητές. Με τον ίδιο τρόπο η χώρα μας παράγει και υπερβολική "πολιτική", ενώ πολιτικούς διαθέτει μετρημένους στα δάχτυλα. Καθώς λοιπόν η Ελλάδα κατ' ανάγκην εκσυγχρονίζεται —με τον τρόπο της φυσικά!— αναδεικνύεται και ένας άλλος διανοητικός χώρος, αυτός της επιστήμης. Ένας χώρος που ενώ στις καλές του στιγμές διαθέτει μεγάλη γοητεία και δύναμη, έχει και το πλεονέκτημα ότι τη γλώσσα του τη μιλά η εποχή.

»Έτσι κι αλλιώς πάντως η επιστήμη, από μόνη της, θα εξακολουθεί να αφηγείται. Άλλοτε για εφιάλτες, άλλοτε για παραμύθια και άλλοτε για τις εποποιίες των ανθρώπων της...

—Γιώργος Γραμματικάκης.»

Ευχαριστούμε τον συγγραφέα και την εφημερίδα *Τα Νέα* για την άδεια να αναδημοσιεύσουμε αποσπάσματα του άρθρου.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M86

Θα αποδείξουμε πρώτα την αντιμεταθετικότητα. Ας θεωρήσουμε δύο στοιχεία a, c του S. Αν θέσουμε $a = b$ στη συνθήκη (i), παίρνουμε $a * (a * c) = a * (c * a)$. Από τη συνθήκη (ii) συμπεραίνουμε ότι $a * c = c * a$. Η προσεταιριστικότητα έπεται από τη συνθήκη (i) και την αντιμεταθετικότητα. Πράγματι, για κάθε τριάδα a, b, c έχουμε $a * (b * c) = b * (c * a) = c * (a * b) = (a * b) * c$ (η τελευταία ισότητα προκύπτει από την αντιμεταθετικότητα των στοιχείων c και $a * b$).

Διαπιστώσαμε ότι η συνθήκη (i) και η αντιμεταθετικότητα συνεπάγονται την προσεταιριστικότητα της $*$. Αν η $*$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική, τότε σίγουρα ισχύει η συνθήκη (i). Όμως, η προσεταιριστικότητα και η συνθήκη (i) δεν συνεπάγονται τη αντιμεταθετικότητα, και έτσι η συνθήκη (ii) είναι απαραίτητη σ' αυτό το πρόβλημα. Έστω, για παράδειγμα, ότι $S = \{0, 1, 2, 3\}$ και ότι η πράξη $*$ ορίζεται έτσι ώστε $1 * 2 = 3$, ενώ $a * b = 0$ για όλες τις υπόλοιπες επιλογές των a και b (και ειδικά $2 * 1 = 0$). Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι αυτή η πράξη είναι προσεταιριστική και ότι ικανοποιεί τη συνθήκη (i), αλλά σίγουρα δεν είναι αντιμεταθετική. Μπορούν επίσης να δώσουν ένα παράδειγμα που θα δείχνει ότι η συνθήκη (i) μόνη της δεν συνεπάγεται την προσεταιριστικότητα.

M87

Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των αντιστρόφων των αριθμών του μαυροπίνακα μπορεί μόνο να μειωθεί. Αφού το άθροισμα των αντιστρόφων των αρχικών n αριθμών ισούται με n, ο αντίστροφος του μοναδικού αριθμού που απομένει πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του n. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο ίδιος ο αριθμός ισούται τουλάχιστον με $1/n$.

Για να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των αντιστρόφων των αριθμών δεν αυξάνεται, ας θεωρήσουμε δύο από τους αριθμούς που διαγράφονται, έστω a και b. Ένα τετράγωνο δεν μπορεί να είναι αρνητικό, επομένως $(a - b)^2 \geq 0$, ή $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ή $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \geq 4ab$. Αφού τα a, b είναι θετικά, θα είναι επίσης θετικά το άθροισμα και το γινόμενό τους· επομένως μπορούμε να διαιρέσουμε την προηγούμενη ανισότητα με $ab(a + b)$, και να πάρουμε

$$(a + b)/ab = (1/a) + (1/b) \geq 4/(a + b).$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

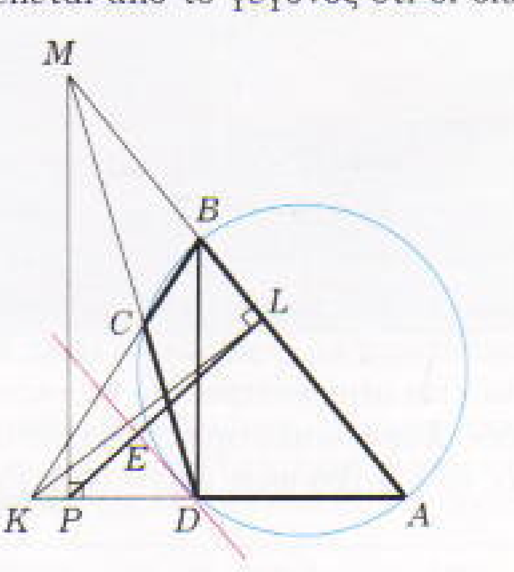
M88

Ας ονομάσουμε «κατάλληλο» κάθε αριθμό με δεκαδική αναπαράσταση που αποτελείται μόνο από τα ψηφία 1 και 2. Θα αποδείξουμε ότι δύο κατάλληλοι αριθμοί με n ψηφία δίνουν διαφορετικό υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον 2^n. Τότε, και αφού υπάρχουν 2^n τέτοιοι κατάλληλοι αριθμοί καθώς και 2^n διαφορετικά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός αριθμού με τον 2^n (του 0 συμπεριλαμβανομένου), ένας από αυτούς τους κατάλληλους αριθμούς πρέπει να διαιρείται από τον 2^n.

Για να αποδείξουμε ότι διαφορετικοί κατάλληλοι αριθμοί δίνουν διαφορετικά υπόλοιπα, θα χρησιμοποιήσουμε τέλεια επαγωγή. Για $n = 1$ μπορούμε να επαληθεύσουμε την πρόταση απευθείας: χρειάζεται να ελέγξουμε δύο αριθμούς και δύο υπόλοιπα. Υποθέτουμε τώρα ότι αν δύο $(n - 1)$-ψήφιοι κατάλληλοι αριθμοί αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι με τον 2^{n-1}, είναι ίσοι. Θα αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε ζεύγος κατάλληλων n-ψηφίων αριθμών. Ας ονομάσουμε αυτούς τους αριθμούς a_n και b_n. Εφόσον αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον 2^n, τότε είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί — επομένως, το τελευταίο τους ψηφίο (των μονάδων) είναι ίδιο. Άρα, μπορούμε να γράψουμε $a_n = 10a_{n-1} + i$, $b_n = 10b_{n-1} + i$, όπου το i είναι 1 ή 2 και τα a_{n-1}, b_{n-1} είναι κατάλληλοι $(n - 1)$-ψήφιοι αριθμοί. Ο $a_n - b_n$ διαιρείται από τον 2^n, επομένως ο $10(a_{n-1} - b_{n-1})$ διαιρείται επίσης από τον 2^n. Έπεται ότι ο $a_{n-1} - b_{n-1}$ διαιρείται από τον 2^{n-1} ή, ισοδύναμα, ότι οι a_{n-1} και b_{n-1} αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον 2^{n-1}. Τότε, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, είναι ίσοι. Άρα, όλα τα ψηφία των a_n και b_n είναι ίδια, συνεπώς οι δύο αυτοί αριθμοί είναι ίσοι. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

M89

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\angle KBA < 90^\circ$ και επομένως το L ανήκει στο AB. Τότε, $\angle MDK = \angle KBA < 90^\circ$ και το P βρίσκεται εκτός του τμήματος AD. Φέρουμε από το σημείο D μια ευθεία παράλληλη προς την AM, και έστω ότι αυτή τέμνει το LP στο σημείο E (Σχήμα 1). Θα αποδείξουμε ότι $DE = BL$. Αυτό σημαίνει ότι το $DEBL$ είναι παραλληλόγραμμο, και το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι οι δια-



Σχήμα 1

γώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Παρατηρούμε αρχικά ότι τα τρίγωνα PED και PLA είναι όμοια (διότι το DE είναι παράλληλο του AL), και επομένως $DE/PD = AL/PA$. Η σχέση αυτή γράφεται ως $DE = (AL \cdot PD)/PA = (AL/PA) \cdot PD$. Τα τρίγωνα AKL και AMP είναι ορθογώνια και έχουν μια κοινή οξεία γωνία στο A, συνεπώς είναι όμοια και $AL/PA = KL/MP$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $DE = (KL/MP) \cdot PD = KL \cdot (PD/MP)$. Τέλος, θεωρούμε τα τρίγωνα ALB και MPD, τα οποία είναι επίσης ορθογώνια. Το τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, συνεπώς η $\angle CBA$ είναι παραπληρωματική τής $\angle CDA$, πράγμα που σημαίνει ότι $\angle CBA = \angle CDP$. Άρα, τα τρίγωνα ALB και MPD είναι επίσης όμοια, και $PD/MP = BL/KL$. Έχουμε τώρα $DE = KL \cdot (BL/KL) = BL$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

M90

Ο ντετέκτιβ μπορεί να ρωτήσει, έπειτα από οποιαδήποτε ερώτηση ή έπειτα από οποιαδήποτε ομάδα ερωτήσεων: «Μου δώσατε ψεύτικη απάντηση σε κάποια από τις προηγούμενες ερωτήσεις;» Προσέξτε ότι αν ο μάρτυρας απαντήσει «όχι» σ' αυτή την ερώτηση ελέγχου, λέει αναγκαστικά την αλήθεια, διότι αν πει «όχι» και ψεύδεται, τότε έχει δώσει ψεύτικη απάντηση και σε κάποια από τις προηγούμενες ερωτήσεις, υπερβαίνοντας έτσι το επιτρεπτό πλήθος ψευδών απαντήσεων. Συνεπώς, αυτή η ερώτηση ελέγχει πραγματικά την ειλικρίνεια του μάρτυρα για κάθε δεδομένο σύνολο ερωτήσεων.

Έχοντας αυτό υπόψη ο ντετέκτιβ, μπορεί να εφαρμόσει την εξής τακτική. Ακολουθεί την αρχική σειρά για τις πρώτες 13 ερωτήσεις. Στη θέση της 14ης ερώτησης κάνει την ερώτηση ελέγχου. Αν η απάντηση είναι «όχι», συνεχίζει με τις επόμενες 12 ερωτήσεις, κάνει την ερώτηση ελέγχου γι' αυτές, συνεχίζει με τις επόμενες 11, κάνει την ερώτηση ελέγχου γι' αυτές τις ένδεκα, κ.ο.κ., μέχρι να κάνει την τελευταία από τις αρχικές του ερωτήσεις (έχουμε έτσι 13 + 12 + 11 + ... + 1 = 91 αρχικές ερωτήσεις).

Επισημαίνουμε ότι ο μάρτυρας μπορεί να απαντήσει μία μόνο φορά «ναι» σε ερώτηση ελέγχου. Αν πει ψέματα απαντώντας σε μια από τις αρχικές ερωτήσεις, τότε δεν μπορεί να πει ψέματα και σε μια από τις ερωτήσεις ελέγχου, οπότε πρέπει να απαντήσει «ναι» μόνο στην ερώτηση ελέγχου η οποία αφορά την ομάδα που περιέχει το ψέμα του και σε καμία άλλη. Αν θελήσει να χρησιμοποιήσει το ψέμα του σε μια ερώτηση ελέγχου, τότε, όπως είδαμε, πρέπει να απαντήσει «όχι» σε όλες τις άλλες ερωτήσεις ελέγχου και να πει την αλήθεια σε όλες τις αρχικές ερωτήσεις.

Συνεπώς, ο ντετέκτιβ μπορεί να περιμένει έως ότου ο μάρτυρας απαντήσει «ναι» σε μία ερώτηση ελέγχου και να επαναλάβει τις ερωτήσεις στις οποίες αναφέρεται αυτή. Ο μάρτυρας τώρα πρέπει να απαντήσει με ειλικρίνεια (έχει ήδη χρησιμοποιήσει το ψέμα του, είτε για την ερώτηση ελέγχου είτε για μια από τις αρχικές ερωτήσεις). Αν το δεύτερο σύνολο απαντήσεων περιέχει μία που διαφέρει από τις πρώτες, ο ντετέκτιβ γνωρίζει ότι το δεύτερο σύνολο είναι το σωστό. Αν και τα δύο είναι όμοια, γνωρίζει ότι ο μάρτυρας είπε ψέματα στην ερώτηση ελέγχου. Και στις δύο περιπτώσεις έχει την πληροφορία που χρειάζεται.

Ο ντετέκτιβ δεν χρειάζεται να κάνει άλλες ερωτήσεις ελέγχου από τη στιγμή που ο μάρτυρας απαντήσει με «ναι» σε μία από αυτές, διότι γνωρίζει ότι η απάντηση στις υπόλοιπες πρέπει να είναι «όχι».

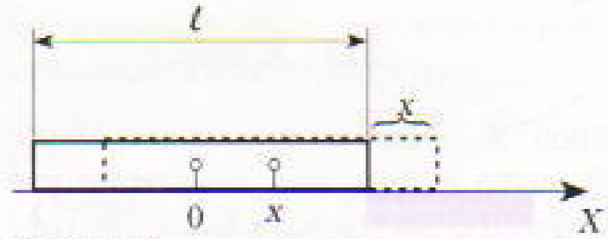
Πόσες ερωτήσεις έχει χρησιμοποιήσει; Αν ο μάρτυρας απαντήσει «ναι» στην k ερώτηση ελέγχου, ο ντετέκτιβ πρέπει να κάνει $k + (14 - k) = 14$ επιπλέον ερωτήσεις, και επομένως βρίσκει την αλήθεια έπειτα από 105 ερωτήσεις.

Στη γενική περίπτωση, όταν το αρχικό σχέδιο του ντετέκτιβ περιέχει N ερωτήσεις, η μέθοδος αυτή δίνει την αλήθεια έπειτα από $N + q$ ερωτήσεις, όπου q είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $N \le q(q-1)/2$. (A. Andjans, I. Solovyov και V. Slitinsky)

Φυσική

Φ86

Ας υποθέσουμε ότι το έλκηθρο έχει μήκος ℓ, μάζα m, αρχική ταχύτητα v_0, και ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησής του επί της ασφάλτου είναι μ. Από τη στιγμή που το έλκηθρο εισέρχεται στον ασφαλτοστρωμένο δρόμο, η δύναμη που το επιβραδύνει είναι η τριβή ολίσθησης, οπότε η εξίσωση της κίνησής του (βλ. Σχήμα 2) θα είναι



Σχήμα 2

$$mx'' = -\mu g \frac{m}{\ell} x. \qquad (1)$$

Αυτή είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης, οπότε η εξάρτηση της απόστασης από το χρόνο δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = X_1 \, \text{ημ}\, \omega_0 t,$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\mu g/\ell}$ και X_1 είναι η συντεταγμένη του έλκηθρου τη στιγμή που σταματάει (αυτό αντιστοιχεί στο πλάτος της «ταλάντωσης»). Προφανώς εκείνη τη στιγμή όλη η κινητική ενέργεια του έλκηθρου θα έχει καταναλωθεί από τη δύναμη τριβής. Η τιμή του X_1, λοιπόν, μπορεί να προσδιοριστεί από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}\mu g \frac{mX_1}{\ell} X_1 = \frac{\mu m g X_1^2}{2\ell}$$

($\mu g m X_1/2\ell$ είναι η μέση τιμή της τριβής ολίσθησης), απ' όπου βρίσκουμε

$$X_1 = v_0 \sqrt{\frac{\ell}{\mu g}} = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Ο χρόνος t_1 από τη στιγμή που το έλκηθρο ακουμπά στην άσφαλτο ώς τη στιγμή που σταματάει για πρώτη φορά ισούται με το ένα τέταρτο της περιόδου της «ταλάντωσης» κυκλικής συχνότητας ω_0 —δηλαδή είναι

$$t_1 = \frac{2\pi}{4\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, όταν το έλκηθρο αποκτάει εκ νέου ταχύτητα v_0, η εξίσωση της κίνησής του θα παραμείνει η ίδια (εξίσωση (1)). Η χρονική εξάρτηση της συντεταγμένης x ($x > X_1$) θα είναι

$$x(t) = \widetilde{X}_1 \,\text{ημ}\,\omega_0 t,$$

όπου $\widetilde{X}_1$ η συντεταγμένη του έλκηθρου τη στιγμή που σταματάει για δεύτερη φορά (το νέο πλάτος της «ταλάντωσης»).

Για να βρούμε το χρόνο πέδησης και την απόσταση πέδησης στη δεύτερη περίπτωση, υποθέτουμε ότι το έλκηθρο ξεκινά την κίνησή του με ταχύτητα u_0, και αφού ολισθήσει για απόσταση X_1, κινείται με ταχύτητα v_0. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, έχουμε

$$\frac{mu_0^2}{2} = \frac{1}{2}\mu g \frac{m\widetilde{X}_1}{\ell}\widetilde{X}_1 = \frac{\mu m g \widetilde{X}_1^2}{2\ell},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\widetilde{X}_1 = u_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}} = \frac{u_0}{\omega_0}.$$

Η ταχύτητα u_0 μπορεί να προσδιοριστεί από το ίδιο θεώρημα

$$\frac{mu_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}\mu g\frac{mX_1^2}{\ell},$$

απ' όπου προκύπτει

$$u_0 = v_0\sqrt{2}.$$

Επομένως,

$$\widetilde{X}_1 = \frac{v_0}{\omega_0}\sqrt{2}.$$

Έτσι, η απόσταση που διήνυσε το έλκηθρο από τη στιγμή που δέχτηκε την ώθηση μέχρι να σταματήσει πάλι ισούται με

$$X_2 = \widetilde{X}_1 - X_1 = \frac{v_0}{\omega_0}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

άρα ο λόγος των αποστάσεων πέδησης είναι

$$X_1 : X_2 = 1 : \left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Με δεδομένη την αρχική ταχύτητά του $u_0 = v_0\sqrt{2}$, το έλκηθρο διανύει απόσταση X_1 σε χρόνο $\widetilde{t}_1$, ο οποίος καθορίζεται από τη συνθήκη $v = v_0\sqrt{2}\,\text{συν}\,\omega_0\widetilde{t}_1$ —δηλαδή,

$$\widetilde{t}_1 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}.$$

Πριν σταματήσει για τελευταία φορά, το έλκηθρο κινείται για χρονικό διάστημα

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$$

(θυμηθείτε ότι η περίοδος της ταλάντωσης δεν εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα). Έτσι, ο χρόνος κατά τον οποίο κινείται το έλκηθρο από τη στιγμή που δέχεται την ώθηση μέχρι να σταματήσει πάλι είναι

$$t_2 = t_1 - \widetilde{t}_1 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}},$$

άρα ο λόγος των χρόνων πέδησης είναι

$$t_1 : t_2 = 2 : 1.$$

Φ87

Εφόσον τα μήκη, τα εμβαδά των διατομών, συνεπώς και οι όγκοι των ράβδων, στους 0°C είναι σχεδόν ίσα, οι θερμοκρασίες που αναζητούμε υπακούουν στην ανισότητα $a\theta \ll 1$. Υπό τη συγκεκριμένη συνθήκη, ο συντελεστής κυβικής διαστολής $\cong 3a$, και ο συντελεστής επιφανειακής διαστολής $\cong 2a$.

Η θερμοκρασία στην οποία οι ράβδοι έχουν το ίδιο μήκος μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$\ell_1(1 + a_1\theta_1) = \ell_2(1 + a_2\theta_1).$$

Ακολούθως, για να βρούμε τη θερμοκρασία θ_2 στην οποία οι ράβδοι έχουν ίσα εμβαδά διατομών, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη εξίσωση

$$S_1(1 + 2a_1\theta_2) = S_2(1 + 2a_2\theta_2),$$

ενώ η θερμοκρασία θ_3 στην οποία οι ράβδοι έχουν ίσους όγκους λαμβάνεται από την εξίσωση

$$V_1(1 + 3a_1\theta_3) = V_2(1 + 3a_2\theta_3).$$

Επομένως,

$$\theta_1 = \frac{\ell_1 - \ell_2}{a_2\ell_2 - a_1\ell_1},$$

$$\theta_2 = \frac{S_1 - S_2}{2(a_2S_2 - a_1S_1)},$$

$$\theta_3 = \frac{V_1 - V_2}{3(a_2V_2 - a_1V_1)}.$$

Φ88

Επειδή οι οπλισμοί του πυκνωτή συνδέονται αγώγιμα, η ολική δύναμη που δρα στη μεσαία πλάκα στην αρχική της θέση είναι μηδέν. Σύμφωνα με τη εκφώνηση του προβλήματος, η μεσαία πλάκα μετακινείται πολύ γρήγορα, οπότε τα φορτία στις εξωτερικές πλάκες δεν προλαβαίνουν να αλλάξουν. Επομένως, η δύναμη παραμένει μηδέν, και δεν παράγεται καθόλου μηχανικό έργο.

Ένα πράγμα θα έπρεπε να σημειώσουμε: γύρω από τον πυκνωτή υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, επειδή το ολικό φορτίο όλων των πλακών δεν είναι μηδέν. Το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο δεν μεταβάλλεται καθώς μετακινείται η μεσαία πλάκα, οπότε στο συλλογισμό μας μπορεί να αγνοηθεί η ενέργεια του εν λόγω πεδίου. Επομένως, η ποσότητα της εκλυόμενης θερμότητας είναι ίση με τη διαφορά της ενέργειας του πεδίου μέσα στον πυκνωτή για την αρχική και τελική θέση της μεσαίας πλάκας.

Η ένταση του πεδίου στις δύο πλευρές της πλάκας μπορεί να βρεθεί από την απαίτηση να μην υπάρχει διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο εξωτερικών πλακών. Αυτό δίνει την έκφραση για την ολική ενέργεια:

$$U(x) = \frac{Q^2 x(1 - x/d)}{2\varepsilon_0 S},$$

όπου x είναι η απόσταση μεταξύ της μεσαίας και μιας από τις εξωτερικές πλάκες. Υπολογίζοντας τη διαφορά μεταξύ των τιμών της ενέργειας για $x = d/2$ και $x = d/3$, βρίσκουμε

$$\Delta U = \frac{Q^2 d}{72\varepsilon_0 S}.$$

Φ89

Μεταβολή του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές επάγει ένα στροβιλώδες ηλεκτρικό πεδίο που περιστρέφει τον κύλινδρο. Ο περιστρεφόμενος φορτισμένος κύλινδρος δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του ακριβώς όπως το σωληνοειδές που διαρρέεται από ρεύμα. Οι αντίστοιχες εκφράσεις για τα μαγνητικά πεδία είναι μάλλον απλές, αλλά μπορούμε να τα καταφέρουμε και χωρίς αυτές, εάν θυμηθούμε ότι ένα μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό σωληνοειδούς είναι ανάλογο του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαρρέει —δηλαδή, του γινομένου του φορτίου επί τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, ο κύλινδρος είναι πολύ ελαφρός, και επομένως η μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου του που προκαλείται από το σωληνοειδές πρέπει να εξουδετερώνεται από τη ροή του δικού του μαγνητικού πεδίου. Από αυτό μπορούμε να συναγάγουμε τους τύπους που περιγράφουν τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις: (1) όταν ο κύλινδρος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, και (2) όταν το σωληνοειδές βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του κυλίνδρου:

$$\omega_1 = \frac{4\pi NIL}{3Q}, \quad \text{για } R < r,$$

$$\omega_2 = \frac{4\pi NIL\left(r^2/R^2\right)}{3Q}, \quad \text{για } R > r.$$

Εάν το φορτίο Q είναι θετικό, ο κύλινδρος θα περιστρέφεται κατά την ίδια φορά με το ρεύμα στο πηνίο.

Φ90

Το είδωλο S_1 της πηγής S που παράγεται από το φακό A βρίσκεται στα δεξιά του και σε απόσταση διπλάσια της εστιακής (Σχήμα 3). Πράγματι ο τύπος των φακών δίνει

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F},$$

από τον οποίο λαμβάνουμε $f_1 = 2F$. Αυτό σημαίνει ότι στο φακό B προσπίπτει μια συγκλίνουσα φωτεινή δέσμη. Η εν λόγω δέσμη θα συγκεντρωθεί στο σημείο S_2, το οποίο αποτελεί και το τελικό είδωλο της πηγής.

Για το φακό B το σημείο S_1 παίζει ρόλο φανταστικού αντικειμένου. Έτσι, σύμφωνα με το Σχήμα 3,

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F},$$

όπου $d_2 = F$. Επομένως,

$$f_2 = \frac{F}{2}.$$

Η απόσταση $\ell = SS_2$ μεταξύ της πηγής S και του ειδώλου της S_2 στο εν λόγω οπτικό σύστημα είναι $\ell = \sqrt{SK^2 + h^2}$, όπου $SK = 3{,}5F$. Η απόσταση h μπορεί να βρεθεί από τα όμοια τρίγωνα $O_2S_1E_2$ και $S_2S_1E_1$:

$$\frac{h}{a} = \frac{F - f_2}{F}$$

απ' όπου $h = 0{,}5a$.

Τελικά έχουμε

$$\ell = SS_2 = \sqrt{12{,}25F^2 + 0{,}25a^2}.$$

Σπαζοκεφαλιές

Σ86

Έστω L το ύψος του φανοστάτη, h το ύψος του ανθρώπου, d η απόστασή του από το φανοστάτη και s το μήκος της σκιάς του. Από όμοια τρίγωνα έχουμε

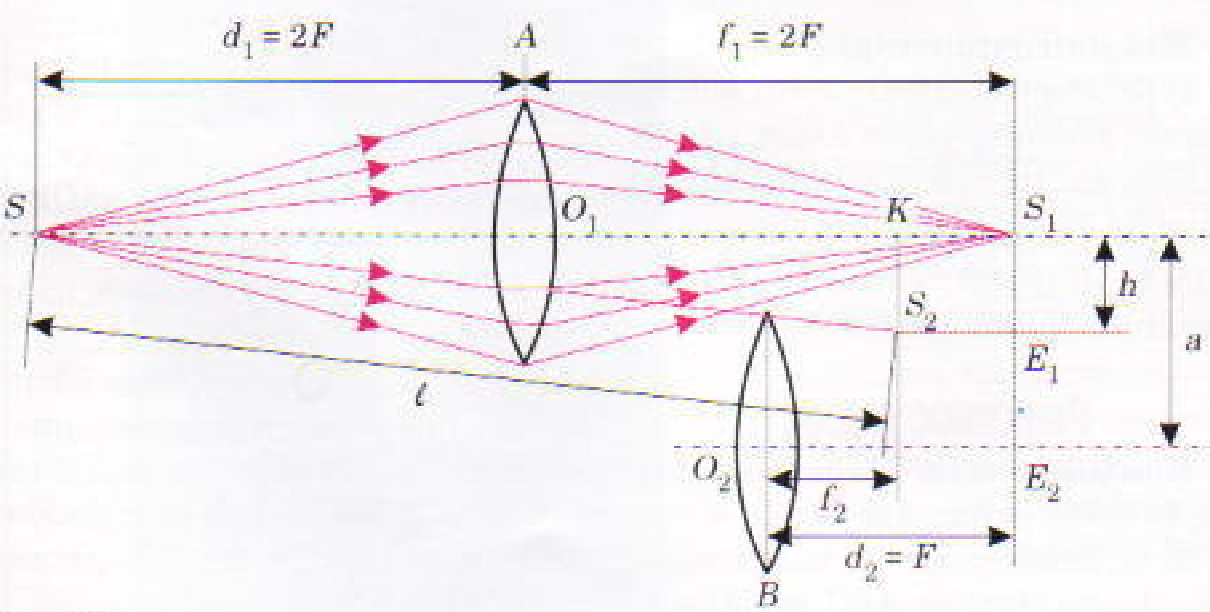
$$\frac{L}{d+s} = \frac{h}{s},$$

ή

$$s = \frac{d}{1 + L/h}.$$

Αν υπολογίσουμε την ταχύτητα για μια μικρή μετακίνηση του ανθρώπου, παίρνουμε

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{1 + L/h}\frac{\Delta d}{\Delta t}.$$

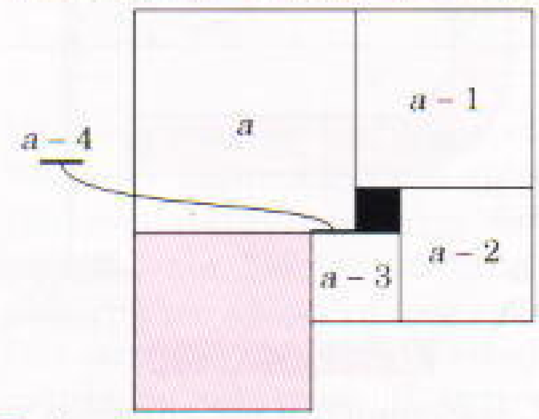


Σχήμα 3

Επομένως, η σκιά του ψηλότερου ανθρώπου κινείται ταχύτερα.

Σ87

Έστω a το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που βρίσκεται αριστερά από το μαύρο (Σχήμα 4). Μπορούμε



Σχήμα 4

τώρα, ακολουθώντας τη φορά των δεικτών του ρολογιού, να υπολογίσουμε διαδοχικά τα μήκη των πλευρών των υπόλοιπων τετραγώνων που εφάπτονται με το μαύρο. Βρίσκουμε έτσι ότι το μήκος της πλευράς του κόκκινου τετραγώνου είναι $a - (a - 4) = 4$. Παρόμοια, μπορούμε να βρούμε την πλευρά του μπλε τετραγώνου. Ισούται με 15.

Σ88

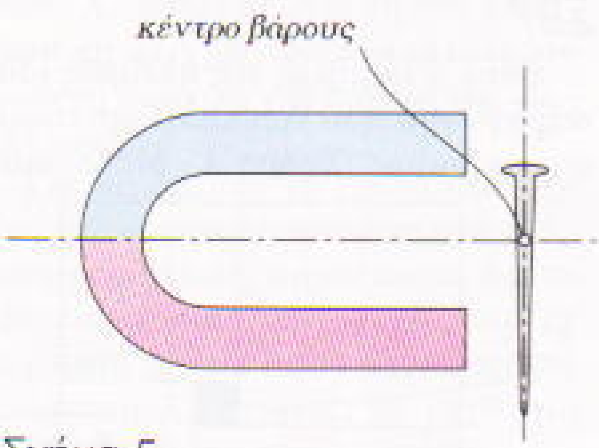
Για να θερμάνουμε 50 g πάγου από τους −10°C στους 0°C, χρειαζόμαστε 0,43 cal/(g · °C) · 50 g · 10°C = 215 cal, ενώ για να λιώσουμε αυτό τον πάγο απαιτούνται επιπλέον 80 cal/g · 50 g = 4.000 cal. Η ψύξη 100 g νερού από τους +10°C στους 0°C απελευθερώνει μόνο 1 cal/(g · °C) · 100 g · 10°C = 1.000 cal. Επομένως, δεν λιώνει όλος ο πάγος, και το δοχείο θα περιέχει ένα μείγμα πάγου και νερού με θερμοκρασία 0°C.

Σ89

Έστω x η χθεσινή τιμή του μεγάλου ψαριού και y η σημερινή. Έστω a και b οι αντίστοιχες τιμές των μικρών ψαριών. Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε $3y + b = 5x$ και $2y + b = 3x + a$. Συνεπώς, $b = 5x - 3y$, $a = 2y + b - 3x = 2y + 5x - 3y - 3x = 2x - y$. Έχουμε να συγκρίνουμε το $y + 2b$ με το $5a$. Αν εκφράσουμε τα a και b συναρτήσει των x και y, βρίσκουμε ότι $y + 2b = y + 10x - 6y = 10x - 5y = 5a$. Άρα, ένα μεγάλο ψάρι και δύο μικρά κοστίζουν σήμερα όσο ακριβώς κόστιζαν χθες πέντε μικρά.

Σ90

Δείτε το Σχήμα 5.



Σχήμα 5

Καλειδοσκόπιο

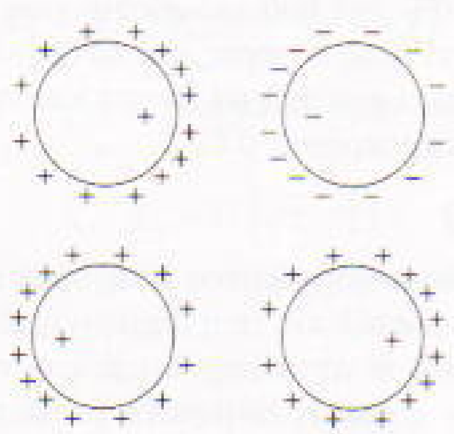
1. Η δύναμη που μας εμποδίζει να πέσουμε διαμέσου του πατώματος ή του εδάφους είναι η ηλεκτρική άπωση μεταξύ των ατόμων των επιφανειών που έρχονται σε επαφή.

2. Μηδέν.

3. (α) Η δύναμη δεν θα μεταβληθεί· (β) η δύναμη στο χαρτί θα είναι μηδενική, αλλά η φορτισμένη σφαίρα θα έλκει το φύλλο εξ επαγωγής (ή εξ επιδράσεως).

4. Η σφαίρα και το χαρτί δεν θα αλληλεπιδρούν.

5. Η δύναμη θα είναι μεγαλύτερη για αντίθετα φορτισμένες σφαίρες, επειδή η ηλεκτροστατική επαγωγή έχει αποτέλεσμα την ανακατανομή των φορτίων πάνω στις σφαίρες, ύστερα από την οποία τα ομώνυμα φορτία θα βρίσκονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις το ένα από το άλλο απ' ό,τι τα ετερώνυμα (Σχήμα 6).



Σχήμα 6

6. Η σφαίρα *B* είναι φορτισμένη, και το φορτίο της είναι θετικό, επειδή αν ήταν ηλεκτρικά ουδέτερη θα ελκόταν από την *A*.

7. Θα απομακρυνθούν ακαριαία σε απόσταση διπλάσια από το μήκος του νήματος.

8. Εάν οι σφαίρες ήταν φορτισμένες με αντίθετα φορτία, η έλξη θα μετατρεπόταν σε μικρότερη άπωση. Εάν οι σφαίρες έφεραν φορτία ίδιου προσήμου, η δύναμη της άπωσης θα αυξανόταν.

9. Στην πρώτη περίπτωση, το τρίτο φορτίο δεν μπορεί να ισορροπήσει σε καμιά από τις περιοχές. Στη δεύτερη περίπτωση, μπορεί να βρεθεί σε ασταθή ισορροπία στην περιοχή *I* (στο μέσο μεταξύ των q_1 και q_2).

10. Θα αυξηθεί. Θεωρήστε την πόλωση της γυάλινης σφαίρας (Σχήμα 7)

Σχήμα 7

και εκτιμήστε τη συνισταμένη δύναμη που δρα, ας πούμε, στο φορτίο q_2.

11. Η ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση των δύο ηλεκτρονίων επιβραδύνει το πρώτο και επιταχύνει το δεύτερο. Τα ηλεκτρόνια πλησιάζουν σε μια ελάχιστη απόσταση, οπότε το πρώτο θα σταματήσει και το δεύτερο (που αρχικά ηρεμούσε) θα απομακρυνθεί με ταχύτητα *v*.

12. Ο φορτισμένος δακτύλιος θα τεντωθεί· η δύναμη επί του *Q* θα ισούται με μηδέν.

13. Ο χρόνος αυξάνει και στις δύο περιπτώσεις, επειδή στην επιφανειακή τάση αντιτίθεται η ηλεκτρική άπωση των ομώνυμων φορτίων της εξωτερικής επιφάνειας της σαπουνόφουσκας.

14. Η ενέργεια των σωματιδίων α δεν είναι αρκετά μεγάλη για να υπερνικήσουν την ηλεκτρική άπωση ενός βαρέος ατομικού πυρήνα και να τον διαπεράσουν.

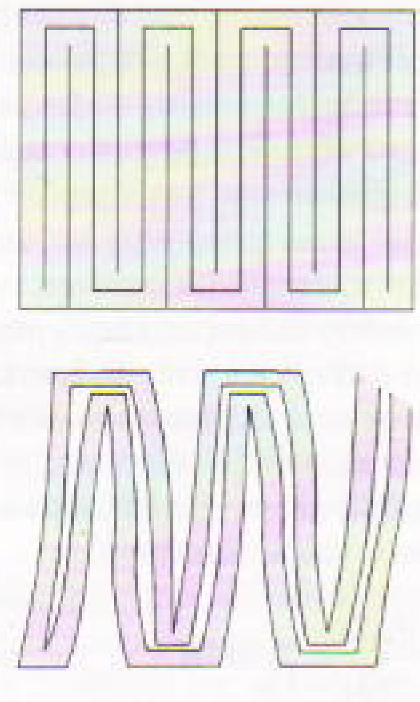
Μικροπειραματισμοί

Η βελόνα θα απομακρυνθεί από τη χτένα, επειδή η χτένα έλκει και τη βελόνα και το νερό. Κάτω από τη βελόνα θα δημιουργηθεί ένα «φούσκωμα», και αυτή θα αρχίσει να απομακρύνεται «κάνοντας σέρφινγκ».

Ρωμαϊκός μύθος

Σπαζοκεφαλιά. Βλέπετε μια από τις δυνατές τρύπες στο Σχήμα 8.

1. Ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο τρίγωνο είναι το *ABC*, με $BC = a$, $\angle BAC = \theta$. Αν θεωρήσουμε σταθερά



Σχήμα 8

τα *B* και *C*, ο τόπος των δυνατών θέσεων του *A* είναι ένα τόξο κύκλου με άκρα τα *B* και *C*. Το εμβαδόν του τριγώνου *ABC* είναι το ήμισυ του γινομένου της πλευράς *BC* επί την κατακόρυφη απόσταση του *A* από την ευθεία *BC*. Αυτό είναι μέγιστο όταν το *A* είναι μέσο του τόξου, και επομένως το μέγιστο εμβαδόν προκύπτει όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2. Θα αποδείξουμε ότι η ελάχιστη περίμετρος αντιστοιχεί σε ισόπλευρο τρίγωνο. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει και ότι το τρίγωνο έχει δύο άνισες πλευρές. Έστω *AB* η τρίτη πλευρά και *C* η απέναντι κορυφή. Όταν το *C* κινείται σε ευθεία *m* παράλληλη προς την *AB*, το εμβαδόν του τριγώνου *ABC* παραμένει σταθερό. Έστω *M* σημείο της *m* τέτοιο ώστε το τρίγωνο *AMB* να είναι ισοσκελές. Θα αποδείξουμε ότι η περίμετρος του *AMB* είναι μικρότερη από την περίμετρο του *ABC* (εφόσον το *M* δεν συμπίπτει με το *C*). Πράγματι, έστω B' το συμμετρικό του *B* ως προς την ευθεία *m*. Μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι τα σημεία *A*, *M* και B' είναι συγγραμμικά (αποδεικνύοντας, για παράδειγμα, ότι $\angle AMB' = 180°$). Επομένως, $AB' = AM + MB < AC + CB' = AC + CB$ για κάθε άλλη θέση του σημείου *C*.

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν δύο πλευρές του τριγώνου είναι άνισες, μπορούμε να μικρύνουμε την περίμετρο χωρίς να μεταβάλουμε το εμβαδόν. Έπεται ότι η μικρότερη περίμετρος αντιστοιχεί σε ισόπλευρο τρίγωνο.

3. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία *K*

και M τριχοτομούν το τόξο AB. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι το σημείο K βρίσκεται πλησιέστερα στο A απ' όσο στο M. Τότε, το τρίγωνο AKM δεν είναι ισοσκελές. Έστω K' το μέσο του τόξου AM. Η απόσταση του K' από την AM είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του K από την AM, και επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $K'AM$ είναι μεγαλύτερο από του τριγώνου KAM. Άρα, αν το K δεν είναι μέσο του τόξου AM, μπορούμε να αυξήσουμε το εμβαδόν του τετραπλεύρου. Ομοίως, το M πρέπει να είναι μέσο του τόξου KB, οπότε τα K και M τριχοτομούν το τόξο AB.

4. Για κάθε δεδομένη τιμή του ℓ το σχήμα με το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι κύκλος, δηλαδή $\pi r^2 \geq \Delta$. Συνεπώς έχουμε $\ell^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi(\pi r^2) \geq 4\pi\Delta > 12{,}5\Delta$.

5. Θεωρούμε ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο που οι πλευρές του ισούνται με τα τμήματα της σειράς (όπως γνωρίζουμε από το Πρόβλημα 4 του άρθρου, έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν). Αλλάζουμε τη θέση δύο διαδοχικών πλευρών. Το πολύγωνο παραμένει εγγεγραμμένο, το εμβαδόν του δεν αλλάζει, αλλά η σειρά των πλευρών μεταβάλλεται. Αλλάζοντας διαδοχικά τα ζεύγη πλευρών παίρνουμε στο τέλος εγγεγραμμένα πολύγωνα με όλες τις δυνατές σειρές τμημάτων. Όλα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

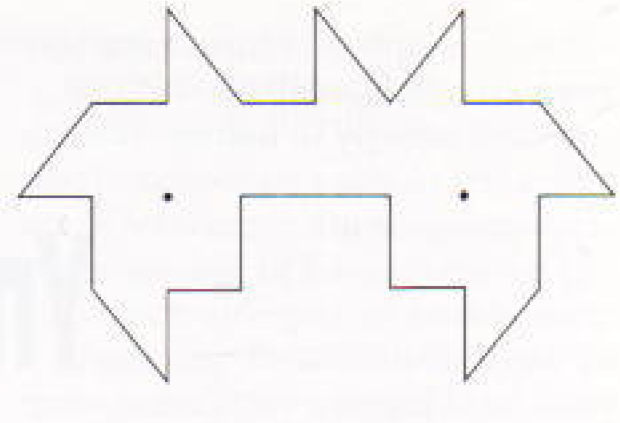
6. Θεωρούμε ένα τυχαίο πολύγωνο του δεδομένου τύπου και προσαρτούμε σ' αυτό το συμμετρικό του ως προς τη μεταβαλλόμενη πλευρά. Προκύπτει ένα πολύγωνο με σταθερές πλευρές και διπλάσιο εμβαδόν. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 4.

Αναδράσεις

1. Ο David Castro, σπουδαστής στο Κολέγιο του Μακάλεστερ στη Μινεσότα, μας υπέδειξε μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου να διορθώσουμε μια εσφαλμένη αναφορά στο άρθρο «Τα μαθηματικά του μπιλιάρδου», τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1997 (σελ. 44):

«Στο ερώτημα αν υπάρχει πολύγωνο με κατοπτρικά τοιχώματα και εσωτερικά σημεία A και B τέτοια ώστε μια φωτεινή δέσμη που ξεκινά από το A να μη φωτίζει το B έχει δοθεί καταφατική απάντηση. Η λύση δημοσιεύτηκε από τον George Tokarsky στο τεύχος Δεκεμβρίου 1995 του *American Mathematical Monthly* ("Polygonal Rooms Not Illuminated From Every Point", σελ. 867-879). Σ' αυτό το άθρο, ο Tokarsky δείχνει πώς μπορεί να κατασκευαστεί μια κλάση τέτοιων πολυγώνων αν σχηματίσουμε τα είδωλα ενός ορισμένου συνόλου τριγώνων στο επίπεδο.

»Τη συγκεκριμένη αναφορά στο άρθρο του *Quantum* μου την επισήμανε ο καθηγητής μου Stan Wagon, διότι παλαιότερα, την άνοιξη του 1996, είχα αναλάβει ως εργασία το φωτισμό των πολυγώνων στο πλαίσιο των μαθημάτων γεωμετρίας τα οποία παραδίδει στο κολέγιο. Στο άρθρο του, ο Tokarsky παρουσιάζει ένα εικοσιεξάπλευρο πολύγωνο με την επιθυμητή ιδιότητα. Διαπίστωσα ότι το παράδειγμά του μπορεί να τροποποιηθεί, έτσι ώστε να παραχθεί ένα εικοσιτετράπλευρο πολύγωνο (βλ. σχήμα)».



(*Σημείωση των εκδοτών*: το άρθρο «Τα μαθηματικά του μπιλιάρδου» πρωτοδημοσιεύτηκε στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1995 του ρωσικού Kvant.)

2. Ο καθηγητής Mario Velucchi από την Πίζα της Ιταλίας επικοινώνησε μαζί μας μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου για να μας επισημάνει ότι το σχήμα για την Άσκηση 1 στον Παιχνιδότοπο του τεύχους Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1996 είναι προβληματικό, εξαιτίας δικής μας παραδρομής. Το διάγραμμα, όπως έχει τυπωθεί, επιδέχεται «δύο λύσεις: 1. Βασιλιάς: a3-b3, και 1. Αξιωματικός: h2-d6, και τούτο είναι άσχημο για σκακιστικό πρόβλημα». Υποστηρίζει ότι η σωστή αρχική θέση του λευκού βασιλιά είναι το c3, «οπότε υπάρχει μόνο μία σωστή λύση: 1. Βασιλιάς c3-b3» ◙

Υπερπρώτα άλογα

Ειδικοί αριθμοί για ειδικά καθαρόαιμα

Δρ. Χμ

Εικονογράφηση: Franz Marc

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ιππολογισμούς. Είναι το δεύτερο άρθρο μιας νέας στήλης αφιερωμένης σε προβλήματα τα οποία αντιμετωπίζονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογοριθμικά με τη βοήθεια ιππολογιστή, ...ε, συγγνώμη, αλγοριθμικά με τη χρήση υπολογιστή. (Θα πρέπει να πω, για όσους μας επισκέπτονται πρώτη φορά, ότι ζω στο στάβλο του κυρίου Πωλ και ότι οι διαλογισμοί μου στρέφονται συχνά στα θέματα που απασχολούν την καθημερινή ζωή των συντρόφων μου και των ανθρώπων που μας προσέχουν.)*

Κάθε σοβαρό ιπποτροφείο δίνει ιδιαίτερη σημασία στη ράτσα των αλόγων που εκτρέφει, και πάντα προσπαθεί να βελτιώσει την ταχύτητά τους με τις κατάλληλες διασταυρώσεις.

Υπερπρώτοι

Το αφεντικό μου, ο κύριος Πωλ, είναι υπερήφανος επειδή εκτρέφει μερικά από τα καλύτερα καθαρόαιμα αραβικά άλογα. Τα αποκαλεί χαϊδευτικά «υπερπρώτα» και τα χαρακτηρίζει με κάποιους πολύ ειδικούς πρώτους αριθμούς —τους υπερπρώτους. Πρόκειται για πρώτους αριθμούς που έχουν την ιδιότητα να παραμένουν πρώτοι ακόμη και όταν σβήσουμε οποιοδήποτε πλήθος ψηφίων τους από τα δεξιά.

Για παράδειγμα, ο 5939333 είναι

* Δείτε και το άρθρο «Ρυθμοί διατροφής και αλγόριθμοι» στο τεύχος Ιανουαρίου / Φεβρουαρίου 1997.

υπερπρώτος διότι οι 5939333, 593933, 59393, 5939, 593, 59 και 5 είναι όλοι πρώτοι αριθμοί.

Εξέτασα τους αριθμούς αυτού του καταλόγου με τη βοήθεια της συνάρτησης **PrimeQ[p]** του Mathematica, η οποία παίρνει τιμή True (αληθής) αν και μόνο αν ο p είναι πρώτος. Φυσικά, όλοι οι αριθμοί του παραδείγματός μας είναι, εξ ορισμού, υπερπρώτοι.

```
sample = {5939333, 593933, 59393,
5939, 593, 59, 5}; PrimeQ[sample]
```

```
{True, True, True, True, True,
True, True}
```

Ο κύριος Πωλ είναι ιπποτρόφος εδώ και πολλά χρόνια, και το κοπάδι των υπερπρώτων αλόγων του έχει πλέον αξιοσέβαστο μέγεθος. Όπως ήταν αναμενόμενο, άρχισε να τον δυσκολεύει η ανακάλυψη νέων υπερπρώτων αριθμών, και ζήτησε τη βοήθειά μου.

Αφιέρωσα όλο τον προηγούμενο μήνα σε υπολογισμούς σχετικά με αυτό το πρόβλημα. Όπως είναι γνωστό από την εποχή του Ευκλείδη, υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών. Επίσης, το περίφημο Θεώρημα Πρώτων Αριθμών μάς βεβαιώνει ότι η πυκνότητα των πρώτων αριθμών, την οποία υπολογίζουμε απαριθμώντας τους πρώτους που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n, αυξάνει ανάλογα προς το **n/Log[n]** (στο Mathematica η πυκνότητα δίνεται από την **PrimePi[n]**).

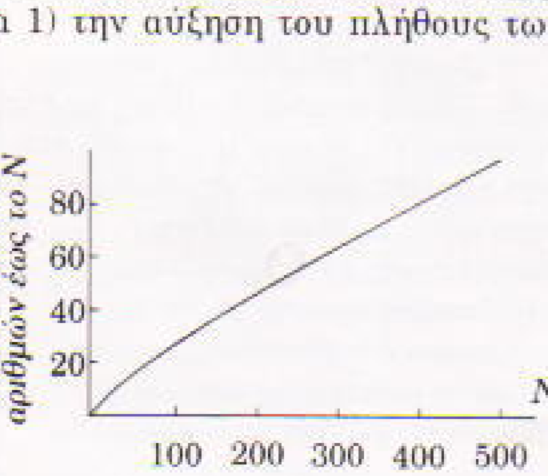
Για παράδειγμα, ο επόμενος υπολογισμός με το Mathematica μάς δείχνει ότι υπάρχουν 78.498 πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 1.000.000:

```
PrimePi[10^6]
```

```
78498
```

Ας παραστήσουμε γραφικά (Σχήμα 1) την αύξηση του πλήθους των πρώτων αριθμών μεταξύ του 1 και του 500:

```
Plot[PrimePi[n], {n, 1, 500},
   AxesLabel->{«N»,«Πλήθος πρώτων
αριθμών έως το N»}]
```



Σχήμα 1

Είμαστε σίγουροι, επομένως, ότι υπάρχουν αρκετοί πρώτοι αριθμοί για να ονομάσουμε τα μέλη ενός κοπαδιού οποιουδήποτε μεγέθους. Ο κύριος Πωλ, όμως, θέλει να χρησιμοποιήσει μόνον υπερπρώτους. Θα υπάρχουν πάντα αρκετοί τέτοιοι αριθμοί; Τι λέει η διαίσθησή σας;

Καιρός λοιπόν να χρησιμοποιήσετε τον υπολογιστή σας για να βρείτε μερικούς υπερπρώτους αριθμούς (ίσως και όλους). Αν δουλεύετε με την Pascal ή τη C/C++, θα χρειαστεί να κατασκευάσετε μια γρήγορη συνάρτηση PrimeQ. (Ο καλύτερος τρόπος για το πετύχετε είναι να χρησιμοποιήσετε τον πασίγνωστο αλγόριθμο του κόσκινου του Ερατοσθένη, που μπορείτε να τον βρείτε σχεδόν σε κάθε εγχειρίδιο προγραμματισμού.)

Ρεπυπρώτοι

Είναι φανερό ότι οι υπερπρώτοι, από τον τρόπο κατασκευής τους, ευνοούν τους δεξιόχειρες. Υπάρχουν, όμως, αριστερόχειρες ιπποτρόφοι που προτιμούν να αποκόβουν τα ψηφία από την αριστερή πλευρά. Όταν όλοι οι αριθμοί που προκύπτουν είναι πρώτοι, τους ονομάζουμε ρεπυπρώτους (διαβάστε το ρεπυ ανάποδα και θα καταλάβετε γιατί). Ας δούμε αν είναι ρεπυπρώτος ο 5939333:

```
sample2 = {5939333, 939333, 39333,
9333, 333, 33, 3}; PrimeQ[sample2]
```

```
{True, False, False, False, False,
False, True}
```

Αποτυχία! Μην απελπίζεστε όμως· ιδού ένας ρεπυπρώτος:

```
sample3 = {739397, 39397, 9397,
397, 97, 7}; PrimeQ[sample3]
```

```
{True, True, True, True, True,
True}
```

Τι μπορούμε να πούμε για το πλήθος των ρεπυπρώτων; Θα βρίσκουμε άραγε αρκετούς ρεπυπρώτους για τα κοπάδια που ανήκουν σε αριστερόχειρες κτηματίες, οσοδήποτε μεγάλα και αν είναι;

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 2α. Βρείτε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο δημιουργίας υπερπρώτων αριθμών.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 2β. Βρείτε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο δημιουργίας ρεπυπρώτων αριθμών. Θα έχουν και οι δεξιόχειρες και οι αριστερόχειρες εκτροφείς τη δυνατότητα να μεγαλώνουν συνεχώς το κοπάδι τους;

Σημείωση: Το ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 2α χρησιμοποιήθηκε ως πρόβλημα στην προετοιμασία για τον τελικό γύρο της Ολυμπιάδας Πληροφορικής των ΗΠΑ το 1994.

Μπορείτε να στείλετε τις απαντήσεις σας με το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Επισκεφθείτε τη σελίδα μας στο http://usaco.uwp.edu/cowculations και διαβάστε τις προτάσεις που έχουν στείλει διάφοροι φίλοι για τα προηγούμενα προβλήματα. Αν θέλετε να μάθετε τα τελευταία νέα για την Ολυμπιάδα Πληροφορικής στις ΗΠΑ, μπορείτε να σταθείτε στο πρώτο τμήμα της διεύθυνσης.

Καιρός λοιπόν να ανάψετε τις μηχανές σας και να δημιουργήσετε τους ειδικούς πρώτους αριθμούς που χρειάζομαι —και γρήγορα. Ο κύριος Πωλ έχει τόσες δουλειές, που δεν μπορεί να καθυστερεί με αργοκίνητους αλγόριθμους. Η ταχύτητα μετράει!

Λύση: ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

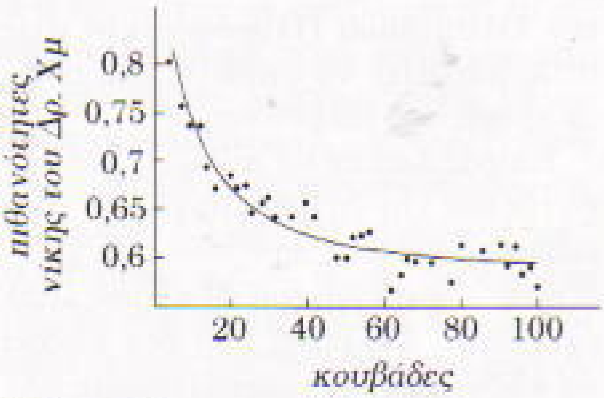
Στο προηγούμενο τεύχος σάς μίλησα για το παράξενο παιχνίδι του κυρίου Πωλ. Στο πρόβλημα για «Ίδια ή Περισσότερη Ποσότητα Όμορφου Σανού» 1α, ή ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 1α, σας ζήτησα να βρείτε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο με τον οποίο θα μπορούσα να κερδίζω πάντοτε όποτε μας ταΐζουν, με την προϋπόθεση ότι ξεκινώ πρώτος. Ιδού ο αλγόριθμος που έστειλε ο Catalin Drula από τη Ρουμανία, μαθητής της τελευταίας τάξης του λυκείου στο Σχολείο Επιστήμης των Υπολογιστών του Βουκουρεστίου.

«Ο υπολογισμός μου είναι απλός. Στην αρχή οι κουβάδες έχουν τη σειρά feed = $\{П, А, П, А, ..., П, А\}$, όπου $П$ είναι οι κουβάδες με περιττούς δείκτες $\{1, 3, 5, ..., p-1\}$ και A οι κουβάδες με άρτιους δείκτες $\{2, 4, 6, ..., p\}$, όπου p είναι το πλήθος τους.

»Το παιχνίδι αρχίζει, και ο Δρ. Χμ μπορεί να πάρει είτε τον άρτιο κουβά στο p είτε τον περιττό στο 1. Ας υποθέσουμε ότι τρώει από τον περιττό κουβά στην πρώτη θέση:

```
DrHm={O}
feed={A,Π,A,Π,...,A}
```

»Από τη στιγμή που ο Δρ. Χμ επιλέγει, ο αντίπαλος είναι υποχρεωμένος να διαλέξει άρτιο κουβά (αφού και στα δύο άκρα έχουμε κουβάδες με άρτιους δείκτες). Ο Δρ. Χμ, διαλέγοντας πάντα τους περιττούς, έχει τη δυνατότητα να αναγκάσει τον αντίπαλό του να τρώει πάντα από άρτιους κουβάδες, και επομένως, αν το άθροισμα των περιττών κουβάδων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του αθροίσματος των άρτιων, θα κερδίσει. Αν όμως η κατάσταση είναι αντίστροφη και το άθροισμα των άρτιων κουβάδων είναι μεγαλύτερο, ο Δρ. Χμ μπορεί να αλλάξει τη στρατηγική του και να διαλέγει τους άρτιους κουβάδες αναγκάζοντας τον αντίπαλό του να τρώει μόνο από περιττούς. Αφού ο Δρ. Χμ μπορεί να επιλέξει πρώτος, θα υπολογίσει στην αρχή τα δύο αθροίσματα και θα διαλέξει τους κουβάδες με το μεγαλύτερο —τους άρτιους ή τους περιττούς. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζει τη νίκη.»



Σχήμα 2

Σημείωση του Δρ. Χμ: Ο Catalin προτείνει επίσης έναν υπολογισμό δυναμικού προγραμματισμού που επιτρέπει να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα της τροφής μου ανάλογα με τις επιλογές του δεύτερου αλόγου. Θα τον βρείτε στη διεύθυνση http://usaco.uwp.edu/cowculations. Πραγματικά, υπάρχει τρόπος να μεγιστοποιήσω την ποσότητα της τροφής μου χρησιμοποιώντας την προηγούμενη στρατηγική. Αντί να υπολογίσω μία μόνο φορά τα αθροίσματα των άρτιων και των περιττών κουβάδων στην αρχή, μπορώ να επαναλαμβάνω τον υπολογισμό σε κάθε στάδιο του παιχνιδιού όταν είναι η σειρά μου να διαλέξω κουβά, και να αλλάζω όποτε με συμφέρει από τους άρτιους στους περιττούς (ή αντιστρόφως). Αυτό θα συμβαίνει όταν το άθροισμα των υπόλοιπων περιττών είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των άρτιων (ή αντιστρόφως). Έχω τον πλήρη έλεγχο, και το μόνο που μπορεί να κάνει το δεύτερο άλογο είναι να ακολουθήσει τον αλγόριθμο του λαίμαργου.

Έναν ακόμη υπολογισμό έστειλε ο Tony Capra, μαθητής στο White Station High School του Μέμφις του Τενεσί. Στη σελίδα του δικτύου που προαναφέραμε μπορείτε να βρείτε τα πλήρη προγράμματα όλων των υπολογισμών που προτάθηκαν.

Στο ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 1β σάς είχα ζητήσει να υπολογίσετε τις πιθανότητες που έχω να κερδίσω την Μπέσυ όταν χρησιμοποιούμε και οι δύο τον αλγόριθμο του λαίμαργου. Περίμενα μια απλή προσομοίωση λίγων —ας πούμε, 1.000— παιχνιδιών μου με την Μπέσυ και την καταγραφή των νικητήριων αποτελεσμάτων μου. Εκτέλεσα αυτούς τους υπολογισμούς με το πλήθος των κουβάδων να μεταβάλλεται από το 4 έως το 100. Όπως ίσως περιμένατε, οι πιθανότητες νίκης μου μειώνονται όσο αυξάνεται το πλήθος των κουβάδων. Στο Σχήμα 2 βλέπετε το γράφημα των αποτελεσμάτων που κατασκεύασα με το Mathematica.