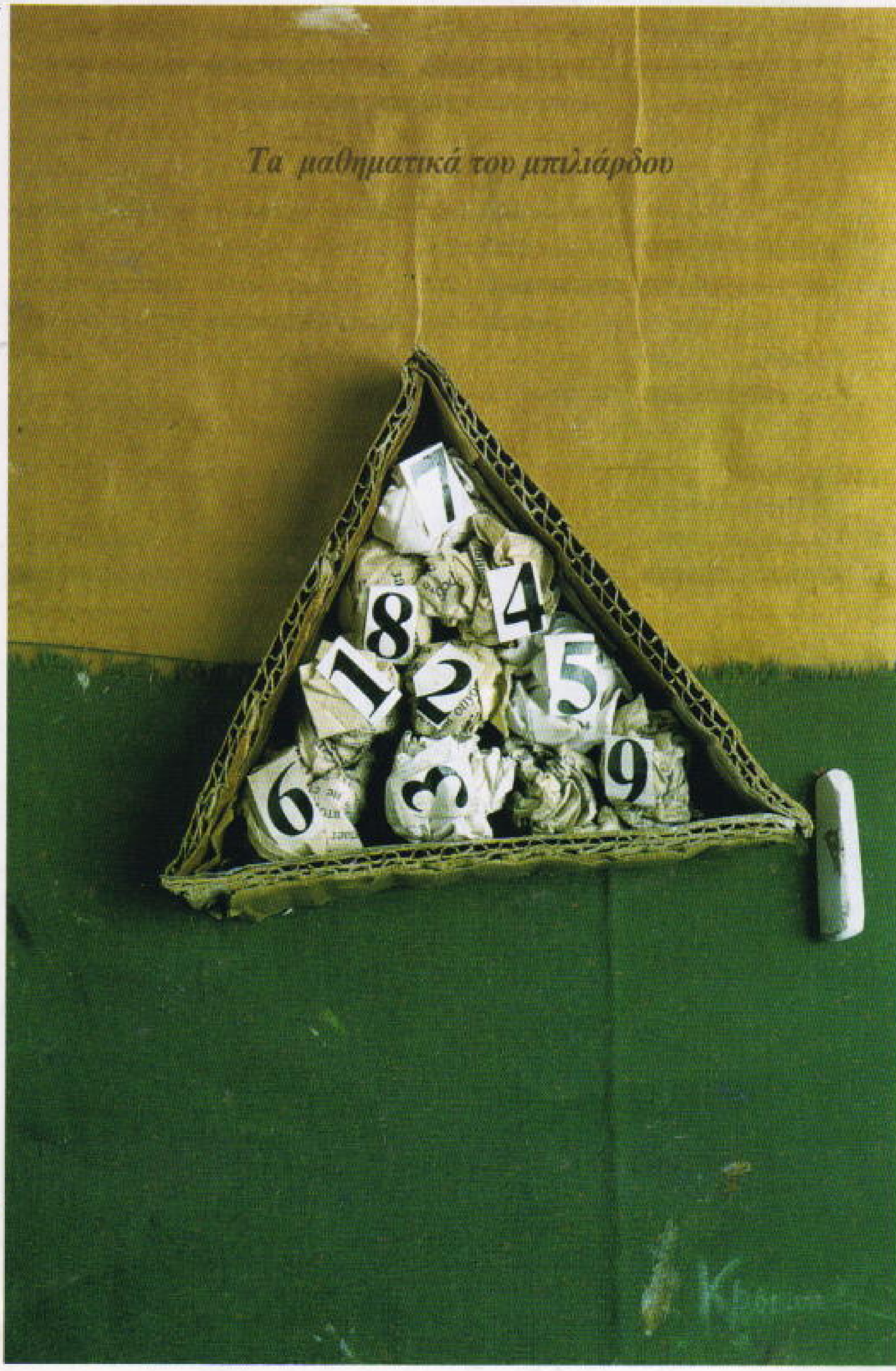
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1997
ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 1
1.500 ΔΡΧ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Η πτώση του Φαέθοντα (1605) του Peter Paul Rubens

ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΟΤΙ ΚΑΘΕ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ, ΣΕ ΚΑΠΟΙΑ ΣΤΙΓΜΗ της ιστορίας του, έχει θεοποιήσει τον Ήλιο ή έχει δημιουργήσει κάποιο θρύλο που τον τοποθετεί στο κέντρο της ύπαρξής μας —εκεί όπου συναντιούνται οι ελπίδες με τους φόβους μας. Η ισχύς και η σταθερότητα αυτής της πύρινης σφαίρας έχουν κεφαλαιώδη σημασία για τη ζωή στον πλανήτη μας. Δεν είναι δύσκολο να κατανοήσουμε τον πανικό που καταλάμβανε τους προγόνους μας όταν ο Ήλιος εξαφανιζόταν απροσδόκητα μέσα στο καταμεσήμερο. Ακόμη και σήμερα νιώθουμε έναν απροσδιόριστο φόβο όταν συμβαίνει μια ηλιακή έκλειψη, και τούτο όχι απλώς επειδή παρατηρείται κάποια πτώση της θερμοκρασίας.

Η ιστορία του Φαέθοντα αντανακλά ώς ένα βαθμό τον πανάρχαιο φόβο ότι ο Ήλιος θα μας κάνει αυτό το κακό για το οποίο, απ' ό,τι φαίνεται, είναι απόλυτα ικανός. Η εν λόγω ιστορία, όμως, έχει πολλές και διαφορετικές όψεις, όπως και οι περισσότεροι ελληνικοί μύθοι. Ο Φαέθων ήταν γιος του θεού Ήλιου και της Ωκεανίδας Κλυμένης. Επειδή τον κατηγόρησαν ότι είναι νόθος, παραπονέθηκε στον πατέρα του, ο οποίος, για να αποδείξει ότι είναι πραγματικός γιος του, του υποσχέθηκε ότι θα του έδινε ό,τι ζητούσε. Ο Φαέθων ζήτησε από τον Ήλιο να του επιτρέψει να οδηγήσει το άρμα του στον ουρανό έστω και για μία ημέρα. Παρά τις έντονες επιφυλάξεις του, ο Ήλιος συμφώνησε, διότι είχε δώσει όρκο. Ο Φαέθων όμως ήταν ανίσχυρος να ελέγξει τα άλογα του άρματος, κι έτσι παρεξέκλινε από την πορεία του, προσέγγισε υπερβολικά τη Γη, και παραλίγο να την κατακάψει. Ο παντοδύναμος Ζευς εξοργίστηκε, και, για να αποτρέψει την περαιτέρω καταστροφή, κεραυνοβόλησε τον Φαέθοντα.

Οι αναγνώστες, βέβαια, θα γνωρίζουν κι έναν άλλο ελληνικό μύθο σχετικό με τον Ήλιο. Ο Δαίδαλος, ο θρυλικός αρχιτέκτονας και γλύπτης, κατασκεύασε δύο καταπληκτικά ζεύγη φτερών με τα οποία θα διέφευγε, μαζί με το γιο του τον Ίκαρο, από την Κρήτη, όπου τους κρατούσε φυλακισμένους ο βασιλιάς Μίνως. Ο Ίκαρος όμως πέταξε πολύ κοντά στον Ήλιο. Έτσι, το κερί που συγκρατούσε τα φτερά έλιωσε, και ο Ίκαρος έπεσε στη θάλασσα και πνίγηκε. «Ιδού τα αποτελέσματα των μάταιων φιλοδοξιών μας», μπορεί να συμπεράνουν κάποιοι. «Καλύτερα να μένουμε προσγειωμένοι.»

Αλλά, βέβαια, οι άνθρωποι δεν μένουν προσγειωμένοι. Πετούν στο Διάστημα, ή στέλνουν τις μηχανές τους εκεί όπου αδυνατούν να πάνε οι ίδιοι. Στο άρθρο της σελίδας 5 μπορείτε να διαβάσετε τι χρειάζεται για να πραγματοποιηθεί μια «Πτήση στον Ήλιο».

QUANTUM

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1997

ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 1

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

Πολύ συχνά συσχετίζουμε το μπιλιάρδο με τη μελέτη της φυσικής. Αυτό το απολαυστικό παιχνίδι μάς έχει χρησιμεύσει πάμπολλες φορές, όποτε θέλουμε να περιγράψουμε με αναλογίες από τη καθημερινή ζωή τις συγκρούσεις των σωματιδίων, την ανάκλαση των φωτεινών ακτίνων, και πολλά άλλα φαινόμενα της φυσικής.

Το μπιλιάρδο, όμως, μπορεί να συσχετιστεί και με τα καθαρά μαθηματικά. Στο Καλειδοσκόπιο του παρόντος τεύχους παρουσιάζεται η μαθηματική βάση στην οποία στηρίζονται τα πιο περίτεχνα χτυπήματα. Επίσης, εξετάζονται κάποιες παραλλαγές του παιχνιδιού, στις οποίες το ίδιο το τραπέζι του μπιλιάρδου έχει διαφορετικά, και μερικές φορές αλλόκοτα, σχήματα. (Στο Ουισκόνσιν, κάπου μεταξύ του Μιλουώκη και του Μάντισον, υπάρχει ένα σφαιριστήριο όπου οι παίκτες καλούνται να δοκιμάσουν τις ικανότητές τους σε τραπέζια σχήματος L και Z. Μήπως ο ιδιοκτήτης είναι κάποιος αποτυχημένος μαθηματικός;)

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

O ΚΟΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

Από πού ερχόμαστε;

Και λοιπόν τι με νοιάζει στο Λονδίνο ή στο Πεκίνο...
Κι αν είμαι στον Άρη ή στην οδό Αρριανού...
Κάτω από τ' άστρα θά 'μαι πάλι.

—Νίκος Φωκάς

Ο ΓΙΟΣ ΜΟΥ ΕΙΧΕ ΠΟΛΛΑ ΠΡΑΓματα για να παίζει στα παιδικά του χρόνια, αλλά ένα από αυτά ήταν ξεχωριστό. Το φωνάζαμε «Μπούκλα». Ήταν μια «μπάλα» με περίεργη γούνα, αρκετούς πόντους μακριά, που το κατάστημα μικρών ζώων την κατέτασσε στους γερβίλλους, τα μικρά ποντικόμορφα τρωκτικά. Στα λίγα χρόνια της ζωής της η Μπούκλα πέρασε πολύ από το χρόνο της εξερευνώντας την κατοικία με τους πολλούς θαλάμους που της είχαμε φτιάξει, και προσπαθώντας να αποδράσει από αυτήν. Μας έλειψε, όταν πέθανε.

Για διάφορους λόγους, όταν εγώ ήμουν νέος, δεν είχαμε στο σπίτι μας κανένα ζωάκι· για κάποιο διάστημα, όμως, επιχείρησα να μεγαλώσω έναν μικρό κάκτο. Οι δραστηριότητες του κάκτου ήταν λιγότερο ενδιαφέρουσες από αυτές του γερβίλλου: μεγάλωνε, αλλά δεν έκανε καμιά προσπάθεια να αποδράσει. Παρ' όλα αυτά, λυπήθηκα όταν πήρε ένα σταχτοπράσινο χρώμα και μαράθηκε· συνειδητοποίησα ότι είχε χάσει στον αγώνα για επιβίωση.

Όλοι από μικρή ηλικία μαθαίνουμε πόσο ριζικά αλλάζει ένα «ζωντανό πράγμα» όταν πεθάνει. Αναγνωρίζουμε επίσης ότι όλα τα γνωστά μας ζωντανά πράγματα αποτελούν μικρό τμήμα ενός μεγαλύτερου περιβάλλοντος κόσμου πραγμάτων σαν το νερό, τους βράχους, το φεγγάρι —τα οποία δεν είναι ούτε υπήρξαν ποτέ ζωντανά. Ωστόσο, αυτή η γνώση ανήκει στη σύγχρονη εποχή. Επί αιώνες, πολλοί παρατηρητές, ανάμεσά τους ικανοί επιστήμονες, δεν αναγνώριζαν ότι κάτι που είναι νεκρό δεν γίνεται ζωντανό.

Νόμιζαν, για παράδειγμα, ότι η λάσπη ενός ποταμού μπορούσε να γεννήσει φίδια και ότι το ωμό κρέας μπορούσε να παράγει σκουλήκια —διαδικασία που ονομάζουμε αυθόρμητη γένεση. Μόνο μέσω πολλών προσεκτικά ελεγχόμενων πειραμάτων, με αποκορύφωμα τη σειρά πειραμάτων που πραγματοποίησε ο Louis Pasteur κατά τον 19ο αιώνα, καταρρίφθηκε η θεωρία αυτή. Τώρα πλέον αναγνωρίζουμε ότι η ζωή προέρχεται μόνο από προϋπάρχουσα ζωή, σαν μια φλόγα που μπορεί να διαιρεθεί και να διαδοθεί, αλλά αν σβήσει δεν μπορεί να ανάψει ξανά.

Τότε, όμως, πώς πρωτοεμφανίστηκε η ζωή στον πλανήτη μας —ή οπουδήποτε αλλού στο σύμπαν μπορεί να υπάρχει; Πολλές θρησκείες και μερικά φιλοσοφικά συστήματα αποφεύγουν το πρόβλημα, θεωρώντας δεδομένο ότι η ζωή υπήρχε αιώνια με τη μορφή μιας θεότητας ή κάποιου άλλου αθάνατου όντος. Στην επιστήμη, όμως, όπου αναζητούμε φυσικές παρά υπερφυσικές απαντήσεις, στρεφόμαστε σε μια άλλη πιθανότητα: η ζωή να γεννήθηκε από «μη ζωή» τουλάχιστον μία φορά, κάποια στιγμή μετά τη δημιουργία του σύμπαντος.

Προκειμένου να μάθουμε για την απαρχή της ζωής, δεν μπορούμε, προφανώς, να στηριχτούμε σε ανθρώπινες εγγραφές ή μνήμες, και πρέπει αντ' αυτού να στραφούμε σε ενδείξεις που βρίσκονται αποθηκευμένες στην ίδια τη Γη. Αυτά τα δεδομένα βρίσκονται ως απολιθώματα στο εσωτερικό ιζημάτων, των οποίων η ηλικία μπορεί να εξαχθεί από την ποσότητα ραδιενέργειας που παραμένει στα περιβάλλοντα πετρώματα. Για παράδειγμα, ένα ασταθές ισότοπο του καλίου μπορεί να εγκλωβιστεί στο εσωτερικό ενός ηφαιστειακού βράχου, όταν αυτός σχηματίζεται από στερεοποίηση λάβας. Η μισή ποσότητα του ισοτόπου διασπάται κάθε 1,3 δισεκατομμύρια χρόνια, με ένα μέρος του να μετατρέπεται στο αδρανές αέριο αργό, το οποίο παραμένει παγιδευμένο στο εσωτερικό του βράχου. Μετρώντας τις ποσότητες του υπολειπόμενου ισοτόπου καλίου και του παγιδευμένου αργού, και εκτελώντας έναν απλό υπολογισμό, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ηλικία του βράχου.

Το αρχείο των απολιθωμάτων μάς διηγείται μια υπέροχη ιστορία για το ξεκίνημα της ζωής στη Γη. Αρχίζει πριν από τριάμισι δισεκατομμύρια χρόνια με μονοκύτταρες μορφές που μοιάζουν με βακτήρια και άλγες, και οδηγεί στη συναρπαστική ποικιλία ζωντανών πλασμάτων που υπάρχουν σήμερα. Η ίδια η Γη είναι μόνο κατά ένα δισεκατομμύριο χρόνια μεγαλύτερη από την πρώτη εγγραφή ζωής που έχουμε ανακαλύψει μέχρι σήμερα. Αν παραλληλίζαμε την ηλικία της Γης με αυτήν ενός ανθρώπου

60 ετών, τότε ο χρόνος που χρειάστηκε για να εμφανιστεί η ζωή στη Γη θα μπορούσε να συγκριθεί με το χρόνο που χρειάζεται ο άνθρωπος για να φτάσει στην εφηβεία. Ο γεωλογικός χρόνος που καταλαμβάνει η καταγεγραμμένη ιστορία της ανθρωπότητας θα μπορούσε να συγκριθεί με την τελευταία περίπου μισή ώρα της ζωής του ανθρώπου. Δυστυχώς, το αρχείο της γεωλογίας δεν εκτείνεται περισσότερο πριν τα τριάμισι δισεκατομμύρια χρόνια. Δεν έχουν απομείνει πετρώματα που να μας λένε οτιδήποτε για τον τρόπο με τον οποίο πρωτοεμφανίστηκαν τα πρώτα βακτηριοειδή πλάσματα. Η διαδικασία αυτή παραμένει ένας ανεξιχνίαστος γρίφος.

Ωστόσο, ο άνθρωπος είναι πολύ πιο σύνθετο ον από ένα βακτήριο. Αν μπορούμε να καταλάβουμε την εξελικτική διαδικασία που από μονοκύτταρα πλάσματα κατέληξε σ' εμάς, και τις αναπτυξιακές μεταβολές που μετατρέπουν ένα μονοκύτταρο γονιμοποιημένο ωάριο σε πολυκύτταρο ενήλικο άτομο, τότε γιατί είναι δύσκολο να καταλάβουμε πώς θα μπορούσε να σχηματιστεί ένα βακτήριο από μη ζώσα ύλη;

Για να εκτιμήσουμε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να εξερευνήσουμε τη δομή της ζωής όπως υπάρχει σήμερα. Προφανώς, τούτο το θέμα μπορεί να γεμίσει πολλούς τόμους, εδώ, όμως, επιθυμία μου είναι να αναδείξω τη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στη ζωή και τη μη ζωή. Τα πράγματα που έχουν ζωή έχουν και υψηλού βαθμού οργάνωση. Με τη λέξη *οργάνωση* θέλω να περιγράψω την ποιότητα που ξεχωρίζει τα έργα του Σαίξπηρ από μια σειρά γραμμάτων που προκύπτει αν πατάει κανείς τυχαία τα πλήκτρα μιας γραφομηχανής. Είναι σαφές ότι και τα πράγματα που παράγονται από τις δραστηριότητες της ζωής, όπως για παράδειγμα τα έργα του Σαίξπηρ, μπορούν να χαρακτηρίζονται από οργάνωση, ενώ τα πράγματα που δεν συνδέονται με τη ζωή, όπως ένας βράχος στην επιφάνεια της Σελήνης, χαρακτηρίζονται από πολύ λιγότερη οργάνωση.

Ένα βακτήριο, συγκρινόμενο με τη μη ζώσα ύλη, διατηρεί σημαντική οργάνωση. Έτσι, η σύγκριση μεταξύ ενός σωματιδίου σκόνης και ενός βακτηρίου όντως θα έμοιαζε με την αντιπαράθεση της τυχαίας σειράς γραμμάτων με ένα έργο του Σαίξπηρ.

Μερικοί επιστήμονες που έχουν εργαστεί στο θέμα της απαρχής της ζωής πιστεύουν ότι αυτό το κενό στην οργάνωση μεταξύ ζώσας και μη ζώσας ύλης θα μπορούσε να καλυφθεί μόνο από την τύχη, αν οι δοκιμές ήταν αρκετές. Οι επιστήμονες αυτοί βρήκαν μεγάλη ενθάρρυνση από ένα διάσημο πείραμα που πραγματοποίησαν ο Stanley Miller και ο Harold Urey. Το 1953 οι Miller και Urey έδειξαν ότι ορισμένα αμινοξέα μπορούσαν να σχηματιστούν πολύ εύκολα όταν διοχέτευσαν ηλεκτρική ενέργεια μέσα από ένα απλό μείγμα αερίων. Αυτά τα αμινοξέα αποτελούν δομικούς λίθους των πρωτεϊνών, ενός από τα βασικά συστατικά της ζωής. Εάν οι ζωτικές χημικές ενώσεις μπορούν να προκύψουν τόσο άμεσα, είναι δυνατόν να συμβαίνει κάτι άλλο για τα υπόλοιπα στοιχεία της ζωής;

Δυστυχώς, η ζωή είναι οργανωμένη σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό από τα «προβιοτικά» χημικά μείγματα που σχηματίζονται σε πειράματα τύπου Miller-Urey. Φανταστείτε ότι πατώντας τυχαία τα πλήκτρα της γραφομηχανής γράφετε τις λέξεις *«να ζει»*. Ίσως αυτό σας υπενθυμίσει τον περίφημο στίχο: «Να ζει κανείς ή να μη ζει: Ιδού η απορία». Ένα επόμενο άλμα της φαντασίας θα μπορούσε να σας οδηγήσει στην ιδέα ότι και το υπόλοιπο του *Άμλετ* θα μπορούσε να προκύψει από τυχαία χτυπήματα στη γραφομηχανή. Εντούτοις, ένας προσεκτικός υπολογισμός οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα να παραχθεί κατ' αυτόν τον τρόπο ένα θεατρικό έργο ή ακόμη και ένα σονέτο είναι απελπιστικά μικρή, ακόμη κι αν κάθε μόριο πάνω στη Γη αποτελούσε μια γραφομηχανή που θα παρήγε κείμενο αδιάκοπα για τα τελευταία τεσσεράμισι δισεκατομμύρια χρόνια.

Άλλοι στοχαστές έχουν υποστηρίξει ότι η δημιουργία ζωής από μη ζώσα ύλη είναι αδύνατη με φυσικά μέσα. Αναφέρουν τον Δεύτερο Νόμο της θερμοδυναμικής, και υποστηρίζουν ότι, σύμφωνα με αυτόν, απαγορεύεται ο σχηματισμός οργανωμένης ύλης από μη οργανωμένη. Ωστόσο, ο Δεύτερος Νόμος εφαρμόζεται μόνο σε κλειστά συστήματα. Δεν απαγορεύει σε μη έμβιες χημικές ουσίες στη Γη να απορροφούν ενέργεια από μια εξωτερική πηγή, όπως ο Ήλιος, και να αποκτούν μεγαλύτερη οργάνωση. Το συγκεκριμένο κέρδος σε οργάνωση αντισταθμίζεται από τη (μεγαλύτερη) μείωση της οργάνωσης στον Ήλιο, οπότε ικανοποιείται και ο Δεύτερος Νόμος.

Ωστόσο, τα χημικά συστήματα, όταν απορροφούν ενέργεια, τη χρησιμοποιούν συνήθως για να θερμανθούν ή για να σχηματίσουν νέους δεσμούς με τρόπους που δεν οδηγούν σε κανένα κέρδος σε οργάνωση. Δεν γνωρίζουμε την κρίσιμη συνταγή —το σύνολο των ειδικών συστατικών και μορφών ενέργειας που θα μπορούσαν να οδηγήσουν χημικά συστήματα στις υψηλότερες βαθμίδες της κλίμακας οργάνωσης, στη ζωή.

Πώς θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε σ' αυτή την έρευνα; Ένας τρόπος θα ήταν να πραγματοποιήσουμε περισσότερα πειράματα σε προβιοτικές συνθήκες. Βεβαίως, πολλά έχουν πραγματοποιηθεί, αλλά συνήθως επιμένουν στην αναζήτηση των χημικών ενώσεων που είναι παρούσες στη ζωή σήμερα παρά στον προσδιορισμό της διαδικασίας της αυτοοργάνωσης. Δεν είναι πολύ πιθανό τα εξελιγμένα σε υψηλό βαθμό βιοχημικά μακρομόρια του σήμερα —πρωτεΐνες, νουκλεϊνικά οξέα και άλλες πολύπλοκες ουσίες— να ήταν παρόντα κατά τη διάρκεια των πρώτων αβέβαιων βημάτων προς τη ζωή. Αυτό ακριβώς που χρειαζόμαστε είναι πληρέστερη κατανόηση του πώς απλές χημικές ουσίες συμπεριφέρονται όταν εκτίθενται σε άφθονη και συνεχή παροχή ενέργειας, όπως το υπεριώδες φως. Το υλικό μετατρέπεται απλώς σε πίσσα ή αποβάλλει την ενέργεια ως θερμότητα; Τις περισσότερες φορές αυτό θα ήταν το αποτέλεσμα· εάν όμως επιλεγόταν το σωστό μείγμα, ίσως να αναπτύσσονταν από μόνοι τους και να συνέχιζαν να αναπτύσσονται πολύπλοκοι χημικοί κύκλοι. Εάν συνέβαινε αυτό, θα είχαμε εντοπίσει ένα σημαντικό ίχνος για το ξεκίνημα της ζωής. Μερικά πειράματα αυτού του τύπου, μάλιστα, θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν ακόμη και σε εργαστήρια προπτυχιακού ή και γυμνασιακού επιπέδου, αφού δεν θα απαιτούσαν περίπλοκο ή ακριβό εξοπλισμό.

Μια άλλη επιστημονική προσέγγιση στην αναζήτηση των απαρχών μας είναι πολύ δαπανηρή, αλλά ικανή να προσφέρει ενθουσιασμό και έμπνευση. Το ηλιακό μας σύστημα περιλαμβάνει μια εκπληκτική ποικιλία κόσμων, καθένας από τους οποίους περιέχει διαφορετικά χημικά συστήματα εκτεθειμένα σε ενέργεια για δισεκατομμύρια χρόνια. Μερικά από αυτά ίσως έχουν αναπτυχθεί προς την κατεύθυνση της οργάνωσης. Αν ανακαλύψουμε ένα σύστημα το οποίο έχει αρχίσει να ακολουθεί ένα τέτοιο μονοπάτι, ακόμη και διαφορετικό από αυτό που ακολουθήθηκε στον δικό μας πλανήτη, ίσως εντοπίσουμε ζωτικής σημασίας ίχνη τόσο για τις αρχές που εμπλέκονται στη διαδικασία της αυτοοργάνωσης όσο και για τη φύση των πρώτων βημάτων της ζωής στον πλανήτη μας. Ένα κυνήγι θησαυρού αυτού του τύπου μεταξύ των κόσμων που περιβάλλουν τον Ήλιο μας ίσως αποκάλυπτε —ίσως και όχι— πρώιμες μορφές ζωής (σίγουρα όμως θα έδινε ξανά ζωή στο διαστημικό πρόγραμμά μας).

«Από πού ερχόμαστε;» Στον τίτλο του άρθρου, διατυπώνω το ερώτημα για την απαρχή της ζωής με όρους που αναφέρονται στον τόπο, όπως θα έκανε κάθε παιδί. Πολλοί επιστήμονες έχουν υποστηρίξει ότι η ζωή άρχισε κάπου αλλού και στη συνέχεια μετανάστευσε στον πλανήτη Γη. Ακόμη κι αν έτσι έχουν τα πράγματα, το γεγονός αυτό δεν θα έδινε απάντηση στο καίριο ερώτημα, το οποίο αφορά το μηχανισμό: «Πώς φτάσαμε να υπάρχουμε;» Ο τόπος, ωστόσο, μπορεί να είναι κρίσιμος με έναν διαφορετικό τρόπο: Προκειμένου να κατανοήσουμε πώς ξεκινήσαμε, ακόμη κι αν αυτό συνέβη εδώ πάνω, ίσως πρέπει να αποτολμήσουμε να βγούμε έξω, στο ευρύτερο σύμπαν που μας περιμένει.

Robert Shapiro

Ο ***Robert Shapiro*** είναι καθηγητής χημείας στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης. Είναι συγγραφέας περισσότερων από ενενήντα άρθρων, κυρίως με θέματα που αφορούν τη χημεία του DNA.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιώτες, 14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.

Μια πτήση στον Ήλιο

Ένα άρθρο από τον Απρίλιο του 1986 του οποίου οι εικασίες έμελλε σύντομα να γίνουν πραγματικότητα

Alexey Byalko

ΜΙΑ ΠΑΡΟΙΜΙΑ ΛΕΕΙ: «Η ΠΙΟ ΕΝδιαφέρουσα επιφάνεια είναι το ανθρώπινο πρόσωπο». Υπάρχει όμως στη φύση επιφάνεια που συναγωνίζεται το ανθρώπινο πρόσωπο σε εκφραστικότητα και που είναι πιο απρόβλεπτη; Ναι, βέβαια: η επιφάνεια του Ήλιου.

Κοιτάξτε τις φωτογραφίες του Ήλιου στο Σχήμα 1. Δυστυχώς δεν μπορούν να δώσουν πλήρη εικόνα της ομορφιάς και της πολυπλοκότητάς του. Η επιφάνειά του είναι εξαιρετικά ετερογενής —δεν υπάρχουν ούτε δύο περιοχές ίδιες πάνω της— και όλη αυτή η ποικιλομορφία διαρκώς μεταβάλλεται. Επιπλέον, η ηλιακή επιφάνεια εμφανίζεται διαφορετική ανάλογα με τα μήκη κύματος των ακτινοβολιών που καταγράφουμε. Τούτο οφείλεται στο ότι η ηλιακή ακτινοβολία διαφορετικών μηκών κύματος παράγεται σε διαφορετικά ύψη μέσα στην «ατμόσφαιρα» του Ήλιου.

Τα φαινόμενα που εκτυλίσσονται στην επιφάνεια του Ήλιου —οι ηλιακές εκλάμψεις, οι ηλιακές εξάρσεις, η σπασμωδική εμφάνιση, μετακίνηση και εξαφάνιση των ηλιακών κηλίδων, κ.ο.κ.—, σε όλη την ποικιλία τους, αντανακλούν τις πολύπλοκες διαδικασίες που συντελούνται στα βάθη του φωτοδότη μας. Οι επιστήμονες αντιλαμβάνονται τι συμβαίνει στον Ήλιο σε ατομική κλίμακα. Για παράδειγμα, είναι γνωστό πώς το φως επιδρά στα ξεχωριστά άτομα, και πώς τα τελευταία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (η μάζα του Ήλιου κατά

> Αν στους θνητούς η χάρη είχε δοθεί
> Σε ύψη απίστευτα ν' ανέβουν,
> θέαμα εκθαμβωτικό
> θ' αντίκριζαν
> Τις πύλες τ' ουρανού διαβαίνοντας:
> Έναν ωκεανό φλεγόμενο,
> αιώνιο
> Μ' αιώνια κίνηση στα σπλάχνα του.
>
> Εκεί επάλξεις πύρηνες υψώνονται
> Πέρα απ' το βλέμμα των ανθρώπων.
> Εκεί της φλόγας στρόβιλοι
> αεικίνητοι
> Σε έρωτα μοιραίου
> αλληλοσπαραγμού δοσμένοι.
> Εκεί λιώνουν οι πέτρες, βράζουν
> και κοχλάζουν
> Βροχές διάπυρες το χώρο
> κατακλύζουν.*
>
> —*M.V. Lomonosov*

99,9% αποτελείται από ατομικό υδρογόνο και ήλιο). Ωστόσο, υπάρχει τεράστιο χάσμα μεταξύ των ατομικών διαστάσεων (περίπου 10^{-10} m) και του μεγέθους των ορατών —μέσω σύγχρονων τηλεσκοπίων— αντικειμένων στον Ήλιο (της τάξης των 10^6 m). Οι επιστήμονες διατυπώνουν υποθέσεις, προσπαθώντας να εξηγήσουν θεωρητικά τι συμβαίνει μέσα στο εν λόγω διάστημα των 16 τάξεων μεγέθους. Υπάρχουν υποθέσεις που αφορούν την υδροδυναμική του εσωτερικού του Ήλιου, το μηχανισμό μεταφοράς ενέργειας από το εσωτερικό προς την επιφάνεια, και τη δομή των μαγνητικών του πεδίων. Μολαταύτα, έχουμε μακρύ δρόμο να διανύσουμε μέχρι να μπορέσουμε να κατανοήσουμε πραγματικά την ηλιακή φυσική. Προς το παρόν, μας λείπει η πλήρης εξήγηση για τις ηλιακές εκλάμψεις, τις κηλίδες, και για πολλά άλλα φαινόμενα της επιφάνειας του Ήλιου.

Αβίαστα ανακύπτει το ερώτημα: τι μας εμποδίζει να παρατηρήσουμε τον Ήλιο από πιο κοντά; Και όχι μόνο να τον παρατηρήσουμε, αλλά να τον μελετήσουμε με όλα τα μέσα που έχουμε στη διάθεσή μας;

Είναι δυνατόν να αποτελεί η υψηλή θερμοκρασία εμπόδιο σ' ένα τέτοιο πρόγραμμα; Τα ηλεκτρονικά όργανα σχεδιάζονται για να λειτουργούν σε συνηθισμένες, γήινες θερμοκρασίες (γύρω στους 300 K), και ένα σύστημα που θα διερχόταν κοντά στον Ήλιο θα έπρεπε όντως να αντέξει πολύ υψηλότερες θερμοκρασίες. Ωστόσο, το συγκεκριμένο τεχνολογικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί —σ' ένα διαστημόπλοιο που θα ταξίδευε προς τον Ήλιο θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένας καταψυχόμενος θάλαμος και να διατηρείται σε θερμοκρασία δωματίου.

Ίσως, φυσικά, η διέλευση κατευθείαν μέσα από το ηλιακό στέμμα και τα ανώτερα στρώματα της ηλιακής ατμόσφαιρας να απέβαινε βλαπτική για τα όργανα ενός ερευνητικού σκάφους, όχι μόνο εξαιτίας της υπερθέρμανσης αλλά και για άλλους λό-

* Η διασκευή του ποιήματος στα ελληνικά έγινε από τον Παντελή Μπουκάλα.

γους. Για παράδειγμα, τα ισχυρά ρεύματα φορτισμένων σωματιδίων θα μπορούσαν να προκαλέσουν βλάβες από ακτινοβολία στα ηλεκτρονικά όργανα. Τέτοια ρεύματα ηλεκτρονίων και ιόντων εκπέμπονται κατά τη διάρκεια των ηλιακών εκλάμψεων. Παραδόξως, η πτήση κοντά στον Ήλιο, σε ελάχιστη απόσταση 4-5 ηλιακών ακτίνων, είναι σχετικά ασφαλής· ο λόγος είναι ότι ένα διαστημόπλοιο που θα διέλθει κοντά στον Ήλιο, σε απόσταση μικρότερη από 10 ηλιακές ακτίνες, δεν θα παραμείνει εκεί για περισσότερο από μερικές ώρες. Ο χρόνος είναι τόσο λίγος, επειδή η ταχύτητα του διαστημοπλοίου θα είναι πολύ μεγάλη. Σε απόσταση 4 ηλιακών ακτίνων από το κέντρο του Ήλιου, η ταχύτητα του σκάφους θα φτάσει τα 300 km/s. Η τιμή αυτή δείχνει πόσο ισχυρά επιταχύνονται τα σώματα από το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου.

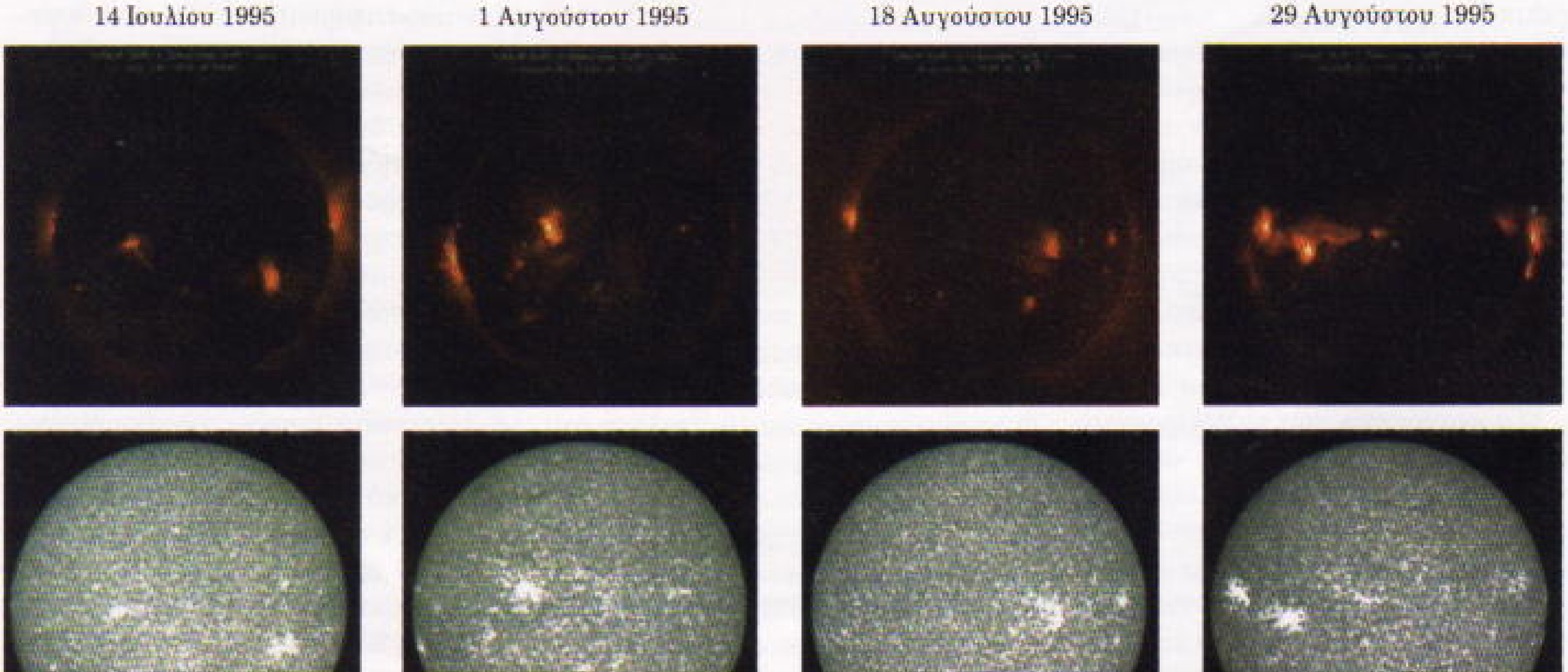
Ο κύριος λόγος για τον οποίο δεν έχει αποσταλεί ερευνητικό σκάφος στον Ηλιο είναι εκ πρώτης όψεως εντελώς απροσδόκητος. Αποδεικνύεται πολύ δύσκολο να θέσεις ένα διαστημόπλοιο σε τροχιά που να διέρχεται κοντά στον Ήλιο. Τούτη η διαπίστωση ηχεί μάλλον παράξενα: ο Ήλιος είναι η μεγαλύτερη πηγή έλξης στο ηλιακό σύστημα· επομένως, θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς, θα είλκυε από μόνος του προς το μέρος του κάθε αντικείμενο που διαθέτει μάζα. Ωστόσο, και οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο χωρίς να πέφτουν πάνω του. Μια τέτοια πτώση αποτρέπεται από την ίδια την ταχύτητα του πλανήτη, η οποία έχει κατεύθυνση κάθετη στη γραμμή που συνδέει τον πλανήτη με τον Ήλιο. Και εδώ έγκειται το πρόβλημα: για να πλησιάσουμε τον Ήλιο, πρέπει να εξουδετερώσουμε την αρχική ταχύτητα, η οποία, για έναν πύραυλο που εκτοξεύεται από τη Γη, είναι ίση με την ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο.

Η εν λόγω ταχύτητα γνωρίζουμε ότι ισούται περίπου με $v_Γ = 30$ km/s. Εάν μπορούσαμε να σταματήσουμε τον πύραυλο επιτόπου προσδίδοντάς του ταχύτητα 30 km/s αντίθετη προς εκείνη της Γης, τότε η πτώση στον Ήλιο θα καθίστατο αναπότρεπτη. Τα 30 km/s όμως είναι πολύ μεγάλη ταχύτητα. (Η ταχύτητα περιφοράς των δορυφόρων κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι περίπου 7,9 km/s.) Ως τώρα ουδείς πύραυλος έχει επιταχυνθεί σε τέτοια ταχύτητα. Βεβαίως, κάτι τέτοιο είναι κατ' αρχήν δυνατόν: θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένας πολυώροφος πύραυλος, αλλά τότε το ωφέλιμο φορτίο του —δηλαδή η μάζα του ερευνητικού σκάφους— θα έπρεπε να είναι πολύ μικρό. Εν πάση περιπτώσει, ας υπολογίσουμε το χρόνο που θα απαιτηθεί για μια τέτοια πτήση από τη Γη στον Ήλιο —θα τον χρειαστούμε στη συνέχεια.

Η τροχιά της πτώσης προς τον Ήλιο (ας τη θεωρήσουμε ευθύγραμμο τμήμα) αποτελεί οριακή περίπτωση μιας επιμηκυμένης ελλειπτικής τροχιάς της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας ισούται με τη μισή ακτίνα της τροχιάς της Γης. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Kepler, το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς οποιουδήποτε σώματος είναι ανάλογο με τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς του. Έτσι, ο χρόνος t της πτώσης προς τον Ήλιο (δηλαδή η μισή περίοδος περιφοράς πάνω σε μια επιμηκυμένη τροχιά με μεγάλο ημιάξονα $R_Γ/2$) μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\frac{(2t)^2}{T_Γ^2} = \frac{(R_Γ/2)^3}{R_Γ^3},$$

14 Ιουλίου 1995 | 1 Αυγούστου 1995 | 18 Αυγούστου 1995 | 29 Αυγούστου 1995



Σχήμα 1

Η μεταβαλλόμενη όψη του Ήλιου. Οι φωτογραφίες προέρχονται από δύο πηγές: το διαστημόπλοιο Yokoh, που εκτόξευσαν από κοινού η ISAS και η NASA (πάνω), και το Εθνικό Ηλιακό Παρατηρητήριο στο Σακραμέντο Πηκ, στο Σάνσποτ του Νιου Μέξικο (κάτω). Οι φωτογραφίες του Yokoh είναι όλες στις μαλακές ακτίνες Χ και εκείνες από το Σακραμέντο Πηκ στη γραμμή εκπομπής Κ του Ca II. Οι φωτογραφίες σε κάθε ζεύγος έχουν ληφθεί την ίδια ημέρα, αν και όχι κατ' ανάγκη την ίδια ώρα.

γους. Για παράδειγμα, τα ισχυρά ρεύματα φορτισμένων σωματιδίων θα μπορούσαν να προκαλέσουν βλάβες από ακτινοβολία στα ηλεκτρονικά όργανα. Τέτοια ρεύματα ηλεκτρονίων και ιόντων εκπέμπονται κατά τη διάρκεια των ηλιακών εκλάμψεων. Παραδόξως, η πτήση κοντά στον Ήλιο, σε ελάχιστη απόσταση 4-5 ηλιακών ακτίνων, είναι σχετικά ασφαλής· ο λόγος είναι ότι ένα διαστημόπλοιο που θα διέλθει κοντά στον Ήλιο, σε απόσταση μικρότερη από 10 ηλιακές ακτίνες, δεν θα παραμείνει εκεί για περισσότερο από μερικές ώρες. Ο χρόνος είναι τόσο λίγος, επειδή η ταχύτητα του διαστημοπλοίου θα είναι πολύ μεγάλη. Σε απόσταση 4 ηλιακών ακτίνων από το κέντρο του Ήλιου, η ταχύτητα του σκάφους θα φτάσει τα 300 km/s. Η τιμή αυτή δείχνει πόσο ισχυρά επιταχύνονται τα σώματα από το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου.

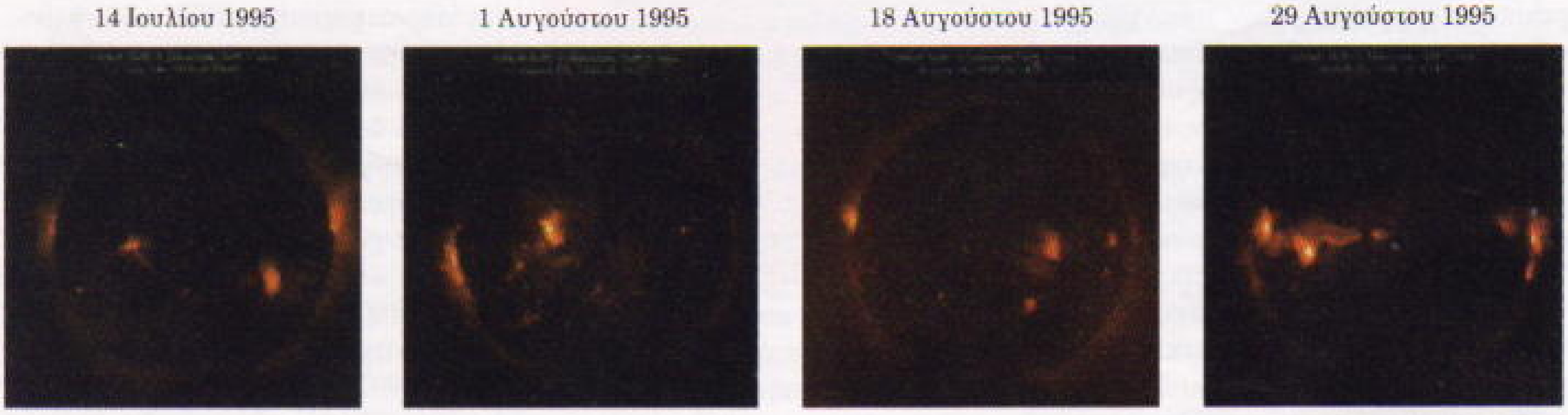
Ο κύριος λόγος για τον οποίο δεν έχει αποσταλεί ερευνητικό σκάφος στον Ηλιο είναι εκ πρώτης όψεως εντελώς απροσδόκητος. Αποδεικνύεται πολύ δύσκολο να θέσεις ένα διαστημόπλοιο σε τροχιά που να διέρχεται κοντά στον Ήλιο. Τούτη η διαπίστωση ηχεί μάλλον παράξενα: ο Ήλιος είναι η μεγαλύτερη πηγή έλξης στο ηλιακό σύστημα· επομένως, θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς, θα είλκυε από μόνος του προς το μέρος του κάθε αντικείμενο που διαθέτει μάζα. Ωστόσο, και οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο χωρίς να πέφτουν πάνω του. Μια τέτοια πτώση αποτρέπεται από την ίδια την ταχύτητα του πλανήτη, η οποία έχει κατεύθυνση κάθετη στη γραμμή που συνδέει τον πλανήτη με τον Ήλιο. Και εδώ έγκειται το πρόβλημα: για να πλησιάσουμε τον Ήλιο, πρέπει να εξουδετερώσουμε την αρχική ταχύτητα, η οποία, για έναν πύραυλο που εκτοξεύεται από τη Γη, είναι ίση με την ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο.

Η εν λόγω ταχύτητα γνωρίζουμε ότι ισούται περίπου με $v_\Gamma = 30$ km/s. Εάν μπορούσαμε να σταματήσουμε τον πύραυλο επιτόπου προσδίδοντάς του ταχύτητα 30 km/s αντίθετη προς εκείνη της Γης, τότε η πτώση στον Ήλιο θα καθίστατο αναπότρεπτη. Τα 30 km/s όμως είναι πολύ μεγάλη ταχύτητα. (Η ταχύτητα περιφοράς των δορυφόρων κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι περίπου 7,9 km/s.) Ως τώρα ουδείς πύραυλος έχει επιταχυνθεί σε τέτοια ταχύτητα. Βεβαίως, κάτι τέτοιο είναι κατ' αρχήν δυνατόν: θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένας πολυώροφος πύραυλος, αλλά τότε το ωφέλιμο φορτίο του —δηλαδή η μάζα του ερευνητικού σκάφους— θα έπρεπε να είναι πολύ μικρό. Εν πάση περιπτώσει, ας υπολογίσουμε το χρόνο που θα απαιτηθεί για μια τέτοια πτήση από τη Γη στον Ήλιο —θα τον χρειαστούμε στη συνέχεια.

Η τροχιά της πτώσης προς τον Ήλιο (ας τη θεωρήσουμε ευθύγραμμο τμήμα) αποτελεί οριακή περίπτωση μιας επιμηκυμένης ελλειπτικής τροχιάς της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας ισούται με τη μισή ακτίνα της τροχιάς της Γης. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Kepler, το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς οποιουδήποτε σώματος είναι ανάλογο με τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς του. Έτσι, ο χρόνος t της πτώσης προς τον Ήλιο (δηλαδή η μισή περίοδος περιφοράς πάνω σε μια επιμηκυμένη τροχιά με μεγάλο ημιάξονα $R_\Gamma/2$) μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\frac{(2t)^2}{T_\Gamma^2} = \frac{(Rr/2)^3}{R_\Gamma^3},$$

14 Ιουλίου 1995 | 1 Αυγούστου 1995 | 18 Αυγούστου 1995 | 29 Αυγούστου 1995



Σχήμα 1

Η μεταβαλλόμενη όψη του Ήλιου. Οι φωτογραφίες προέρχονται από δύο πηγές: το διαστημόπλοιο Yokoh, που εκτόξευσαν από κοινού η ISAS και η NASA (πάνω), και το Εθνικό Ηλιακό Παρατηρητήριο στο Σακραμέντο Πηκ, στο Σάνσποτ του Νιου Μέξικο (κάτω). Οι φωτογραφίες του Yokoh είναι όλες στις μαλακές ακτίνες X και εκείνες από το Σακραμέντο Πηκ στη γραμμή εκπομπής K του Ca II. Οι φωτογραφίες σε κάθε ζεύγος έχουν ληφθεί την ίδια ημέρα, αν και όχι κατ' ανάγκη την ίδια ώρα.

γους. Για παράδειγμα, τα ισχυρά ρεύματα φορτισμένων σωματιδίων θα μπορούσαν να προκαλέσουν βλάβες από ακτινοβολία στα ηλεκτρονικά όργανα. Τέτοια ρεύματα ηλεκτρονίων και ιόντων εκπέμπονται κατά τη διάρκεια των ηλιακών εκλάμψεων. Παραδόξως, η πτήση κοντά στον Ήλιο, σε ελάχιστη απόσταση 4-5 ηλιακών ακτίνων, είναι σχετικά ασφαλής· ο λόγος είναι ότι ένα διαστημόπλοιο που θα διέλθει κοντά στον Ήλιο, σε απόσταση μικρότερη από 10 ηλιακές ακτίνες, δεν θα παραμείνει εκεί για περισσότερο από μερικές ώρες. Ο χρόνος είναι τόσο λίγος, επειδή η ταχύτητα του διαστημοπλοίου θα είναι πολύ μεγάλη. Σε απόσταση 4 ηλιακών ακτίνων από το κέντρο του Ήλιου, η ταχύτητα του σκάφους θα φτάσει τα 300 km/s. Η τιμή αυτή δείχνει πόσο ισχυρά επιταχύνονται τα σώματα από το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου.

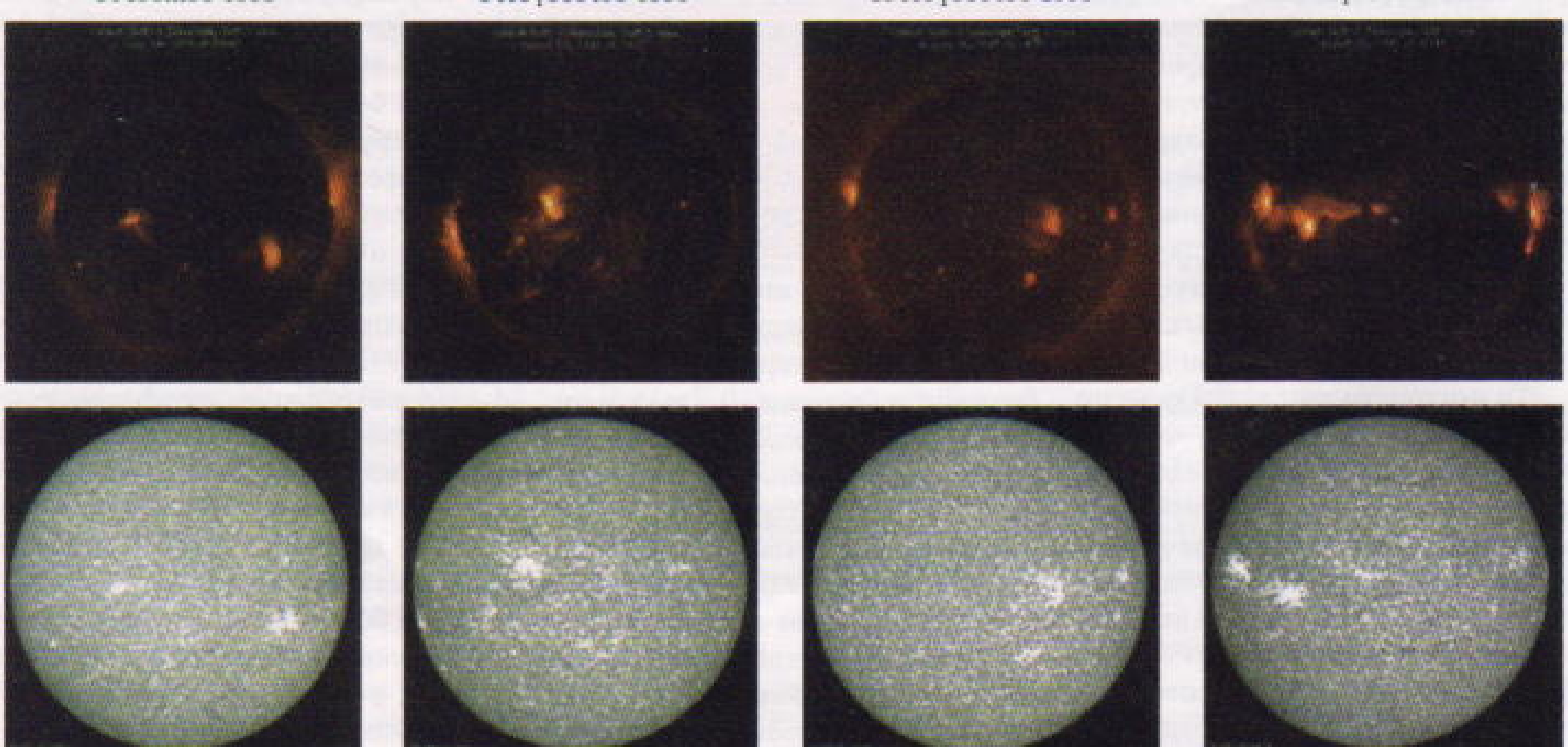
Ο κύριος λόγος για τον οποίο δεν έχει αποσταλεί ερευνητικό σκάφος στον Ηλιο είναι εκ πρώτης όψεως εντελώς απροσδόκητος. Αποδεικνύεται πολύ δύσκολο να θέσεις ένα διαστημόπλοιο σε τροχιά που να διέρχεται κοντά στον Ήλιο. Τούτη η διαπίστωση ηχεί μάλλον παράξενα: ο Ήλιος είναι η μεγαλύτερη πηγή έλξης στο ηλιακό σύστημα· επομένως, θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς, θα είλκυε από μόνος του προς το μέρος του κάθε αντικείμενο που διαθέτει μάζα. Ωστόσο, και οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο χωρίς να πέφτουν πάνω του. Μια τέτοια πτώση αποτρέπεται από την ίδια την ταχύτητα του πλανήτη, η οποία έχει κατεύθυνση κάθετη στη γραμμή που συνδέει τον πλανήτη με τον Ήλιο. Και εδώ έγκειται το πρόβλημα: για να πλησιάσουμε τον Ήλιο, πρέπει να εξουδετερώσουμε την αρχική ταχύτητα, η οποία, για έναν πύραυλο που εκτοξεύεται από τη Γη, είναι ίση με την ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο.

Η εν λόγω ταχύτητα γνωρίζουμε ότι ισούται περίπου με $v_Γ = 30$ km/s. Εάν μπορούσαμε να σταματήσουμε τον πύραυλο επιτόπου προσδίδοντάς του ταχύτητα 30 km/s αντίθετη προς εκείνη της Γης, τότε η πτώση στον Ήλιο θα καθίστατο αναπότρεπτη. Τα 30 km/s όμως είναι πολύ μεγάλη ταχύτητα. (Η ταχύτητα περιφοράς των δορυφόρων κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι περίπου 7,9 km/s.) Ως τώρα ουδείς πύραυλος έχει επιταχυνθεί σε τέτοια ταχύτητα. Βεβαίως, κάτι τέτοιο είναι κατ' αρχήν δυνατόν: θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένας πολυώροφος πύραυλος, αλλά τότε το ωφέλιμο φορτίο του —δηλαδή η μάζα του ερευνητικού σκάφους— θα έπρεπε να είναι πολύ μικρό. Εν πάση περιπτώσει, ας υπολογίσουμε το χρόνο που θα απαιτηθεί για μια τέτοια πτήση από τη Γη στον Ήλιο —θα τον χρειαστούμε στη συνέχεια.

Η τροχιά της πτώσης προς τον Ήλιο (ας τη θεωρήσουμε ευθύγραμμο τμήμα) αποτελεί οριακή περίπτωση μιας επιμηκυμένης ελλειπτικής τροχιάς της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας ισούται με τη μισή ακτίνα της τροχιάς της Γης. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Kepler, το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς οποιουδήποτε σώματος είναι ανάλογο με τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς του. Έτσι, ο χρόνος t της πτώσης προς τον Ήλιο (δηλαδή η μισή περίοδος περιφοράς πάνω σε μια επιμηκυμένη τροχιά με μεγάλο ημιάξονα $R_Γ/2$) μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\frac{(2t)^2}{T_Γ^2} = \frac{(R_Γ/2)^3}{R_Γ^3},$$

14 Ιουλίου 1995 | 1 Αυγούστου 1995 | 18 Αυγούστου 1995 | 29 Αυγούστου 1995



Σχήμα 1
Η μεταβαλλόμενη όψη του Ήλιου. Οι φωτογραφίες προέρχονται από δύο πηγές: το διαστημόπλοιο Yokoh, που εκτόξευσαν από κοινού η ISAS και η NASA (πάνω), και το Εθνικό Ηλιακό Παρατηρητήριο στο Σακραμέντο Πηκ, στο Σάνσποτ του Νιου Μέξικο (κάτω). Οι φωτογραφίες του Yokoh είναι όλες στις μαλακές ακτίνες X και εκείνες από το Σακραμέντο Πηκ στη γραμμή εκπομπής K του Ca II. Οι φωτογραφίες σε κάθε ζεύγος έχουν ληφθεί την ίδια ημέρα, αν και όχι κατ' ανάγκη την ίδια ώρα.

όπου T_Γ και R_Γ είναι η περίοδος περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο και η ακτίνα της τροχιάς της, αντίστοιχα. Αφού T_Γ = 1 έτος, $t = 1/4\sqrt{2}$ έτη ≅ 0,177 έτη.

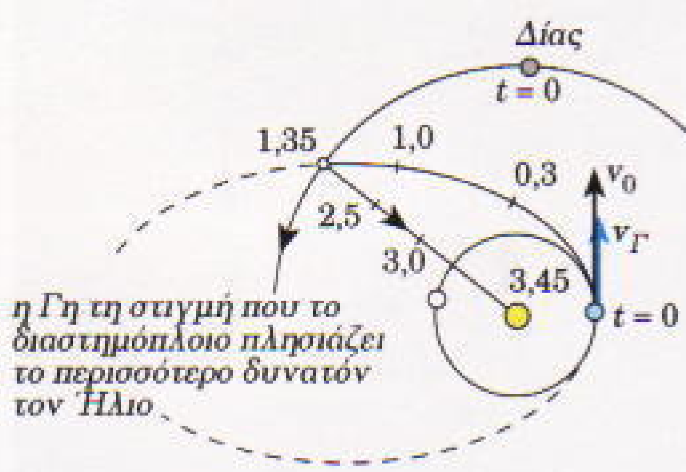
Η διάρκεια μιας πτήσης κατευθείαν προς τον Ήλιο αποδεικνύεται όχι ιδιαίτερα μεγάλη, αλλά η αναγκαία αρχική ταχύτητα προς το παρόν δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί. Πώς πρέπει λοιπόν να σχεδιάσουμε μια πτήση προς τον Ήλιο με την ελάχιστη δαπάνη ενέργειας —δηλαδή με ελάχιστη ταχύτητα εκτόξευσης; Η οικονομικότερη επιλογή, προκειμένου το διαστημόπλοιο να επιβραδυνθεί στην τροχιά του γύρω από τον Ήλιο, αξιοποιεί το βαρυτικό πεδίο του Δία. Για να εκτελέσει έναν τέτοιο ελιγμό, το ερευνητικό σκάφος πρέπει να πλησιάσει το Δία με μια συγκεκριμένη ταχύτητα. Προς τούτο, πρέπει αφ' ενός να υπερνικήσει την έλξη της Γης και αφ' ετέρου να τεθεί σε τροχιά με αρχική ταχύτητα ως προς τον Ήλιο v_0 = 40,5 km/s. Συνεπώς, ως προς τη Γη, η ταχύτητα του ερευνητικού σκάφους πρέπει να ισούται με 10,5 km/s. Επομένως, η πτήση του ξεκινά με επιτάχυνση του πυραύλου στην κατεύθυνση της τροχιακής ταχύτητας της Γης —με τι ταχύτητα εκτόξευσης όμως;

Για να υπερνικήσει την έλξη της Γης, ένα σώμα μάζας m πρέπει να διαθέτει κινητική ενέργεια όχι μικρότερη από mgR_Γ. Η εν λόγω κινητική ενέργεια αντιστοιχεί σε ταχύτητα διαφυγής $v_\delta = \sqrt{2gR_\Gamma} \cong$ 11,2 km/s. Προσέξτε τώρα! Για να βρείτε τη συνολική ταχύτητα, μην προσθέσετε αυτό τον αριθμό στην τιμή των 10,5 km/s που υπολογίσαμε προηγουμένως! Η ταχύτητα εκτόξευσης του πυραύλου από τη Γη προκύπτει από το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας· οπότε:

$$v_{\varepsilon\kappa} = \sqrt{\left(v_0 - v_\Gamma\right)^2 + 2gR_\Gamma}$$

$$\cong 15{,}5 \text{ km/s}.$$

Παρεμπιπτόντως, ξέρετε ποια είναι η καλύτερη τοποθεσία στη Γη για εκτοξεύσεις (λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις ενεργειακές απαιτήσεις κάθε εκτόξευσης); Είναι στο όρος Κιλιμάντζαρο στην Τανζανία, το ψηλότερο βουνό της Αφρικής (υψόμετρο 5.900 m), που βρίσκεται σχεδόν στον Ισημερινό. Λόγω του πεπλατυσμένου σχήματος της Γης, η κορυφή του όρους Κιλιμάντζαρο είναι το σημείο της Γης που απέχει περισσότερο από το κέντρο της Γης (περισσότερο από το Έβερεστ!). Εδώ η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι η μικρότερη σε ολόκληρη τη Γη. Η κορυφή του όμως καλύπτεται πάντα από χιόνια, και ώς τώρα ουδείς έχει διανοηθεί να ανεγείρει βάση εκτόξευσης εκεί.

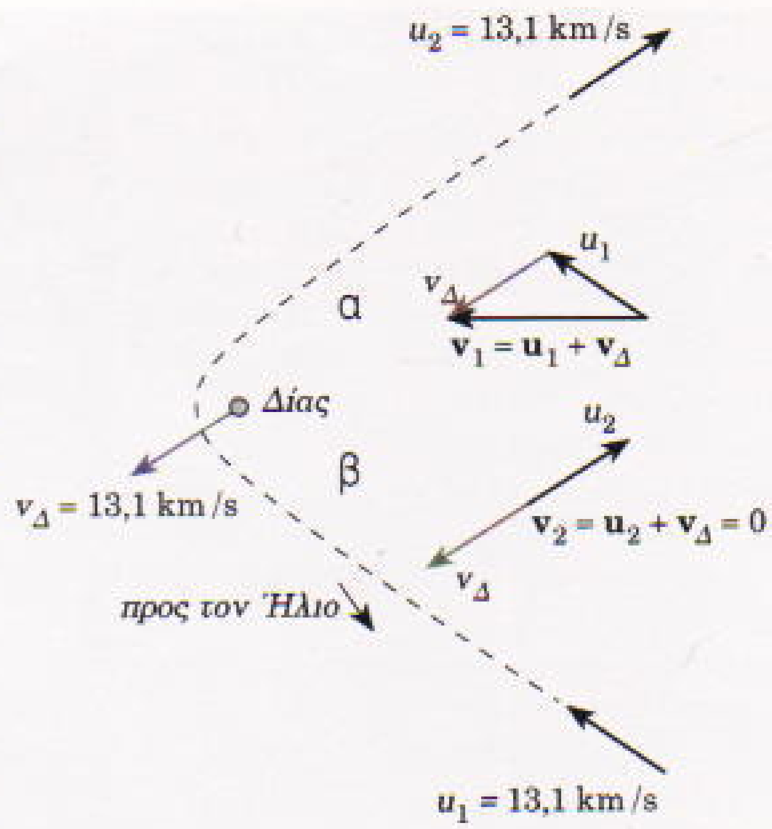


Σχήμα 2

Η τροχιά μιας πτήσης προς τον Ήλιο με την ελάχιστη ταχύτητα εκτόξευσης. Οι αριθμοί κατά μήκος της τροχιάς δείχνουν το χρόνο πτήσης σε έτη. Όταν το διαστημόπλοιο διασταυρωθεί με την τροχιά του Δία (έπειτα από πτήση 1,35 ετών), πλησιάζει τον εν λόγω πλανήτη, ο οποίος μηδενίζει την ταχύτητα του ερευνητικού σκάφους σε σχέση με τον Ήλιο. Από αυτό το σημείο, το ερευνητικό σκάφος αρχίζει την ελεύθερη πτώση του προς τον Ήλιο.

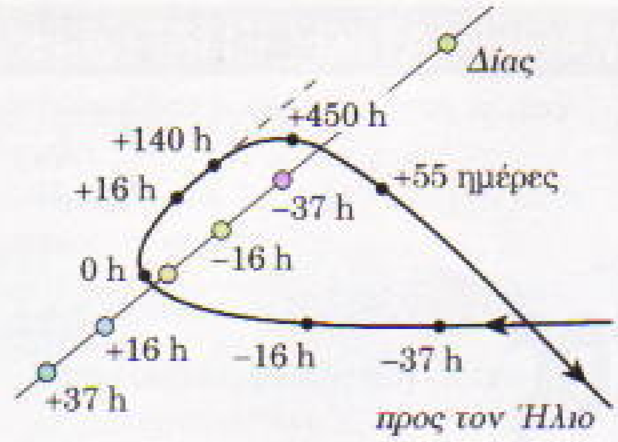
Ας συνεχίσουμε την πτήση μας. Το διαστημόπλοιο διανύει τμήμα ελλειπτικής τροχιάς και, αφού διασταυρωθεί με την τροχιά του Άρη, πλησιάζει εκείνη του Δία (Σχήμα 2) —του μεγαλύτερου πλανήτη του ηλιακού συστήματος και ενδιάμεσου στόχου του ερευνητικού σκάφους. Ο Δίας θα επιβραδύνει το διαστημόπλοιο σχετικά με τον Ήλιο, οπότε αυτό θα αρχίσει την πτώση του προς τον Ήλιο. Προκειμένου να βρίσκεται ο Δίας στην τομή της τροχιάς του και εκείνης του ερευνητικού σκάφους, κατά τη στιγμή της εκτόξευσης ο γιγαντιαίος πλανήτης πρέπει να βρίσκεται στο σημείο που σημειώνεται με μηδενικό χρόνο στο Σχήμα 2. Πρέπει επίσης να εξασφαλίσουμε ότι το ερευνητικό σκάφος, όταν θα διασταυρώνεται με την τροχιά του Άρη, θα πρέπει να βρίσκεται αρκετά μακριά από τον ερυθρό πλανήτη, ώστε να μην επηρεαστεί η τροχιά του από το βαρυτικό πεδίο του.

Αφού το διαστημόπλοιο εισέλθει στο βαρυτικό πεδίο του Δία, συνεχίζει το ταξίδι του κατά μήκος μιας υπερβολικής τροχιάς γύρω από τον πλανήτη (Σχήμα 3). Ως αποτέλεσμα του νόμου διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, οι ταχύτητες των πτήσεων από και προς το Δία σε συμμετρικά σημεία κατά μήκος της υπερβολής είναι ίσες κατά το μέτρο. Έτσι, το ερευνητικό σκάφος πρέπει να τεθεί σε τέτοια τροχιά γύρω από το Δία ώστε η ταχύτητά του u_1 (ως προς τον πλανήτη) να ισούται με την τροχιακή ταχύτητα του Δία v_Δ = 13,1 km/s (ως προς τον Ήλιο). Η πορεία της διέλευσης πρέπει να είναι τέτοια ώστε, καθώς το σκάφος απομακρύνεται από το Δία, η ταχύτητά του στο σημείο που είναι συμμετρικό του σημείου έναρξης της διέλευσης να έχει κατεύθυνση αντίθετη της τροχιακής ταχύτητας του Δία. Στο εν λόγω σημείο η ταχύτητα



Σχήμα 3

Η τροχιά του διαστημοπλοίου πλησίον του Δία, στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη. Στα δεξιά διακρίνονται τα διαγράμματα των ταχυτήτων (α) πριν από την προσέγγιση και (β) μετά την προσέγγιση.



Σχήμα 4
Η τροχιά του διαστημοπλοίου κατά τη διάρκεια της προσέγγισής του στο Δία, στο σύστημα αναφοράς του Ήλιου. Οι αριθμοί κατά μήκος της καμπύλης δείχνουν τους χρόνους ως προς τη στιγμή μέγιστης προσέγγισης σκάφους-πλανήτη.

του διαστημοπλοίου ως προς τον Ήλιο είναι κατά προσέγγιση μηδενική και, υπό την επίδραση της έλξης του Ήλιου, όσο μικρή κι αν είναι στη συγκεκριμένη απόσταση, το διαστημόπλοιο θα αρχίσει αργά να πλησιάζει τον Ήλιο. Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται όταν η ταχύτητα του σκάφους ως προς τον Ήλιο κατά την αρχική στιγμή της πτήσης του γύρω από το Δία είναι ίση με $v_1 = 14{,}3$ km/s (βλ. Σχήμα 3). Η εν λόγω τιμή είναι αυτή η οποία καθορίζει την αρχική ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τον Ήλιο: 40,5 km/s.

Έτσι, στο σύστημα αναφοράς του Δία, η τροχιά του ερευνητικού σκάφους (κοντά στον πλανήτη) είναι μια υπερβολή. Στο σύστημα αναφοράς του Ήλιου, το συγκεκριμένο τμήμα της τροχιάς φαίνεται πιο περίπλοκο (βλ. Σχήμα 4).

Πόσο διαρκεί μια τέτοια πτήση προς τον Ήλιο; Προηγουμένως εκτιμήσαμε τη διάρκεια της πτώσης προς τον Ήλιο κατά μήκος ευθείας γραμμής. Στην παρούσα περίπτωση, όταν η ελεύθερη πτώση αρχίζει από την τροχιά του Δία, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την περίοδο περιφοράς του Δία γύρω από τον Ήλιο, που είναι $T_Δ = 11{,}86$ έτη, αντί το 1 γήινο έτος (βεβαίως, συνεχίζουμε να μετράμε το χρόνο σε γήινα έτη). Επομένως προκύπτει χρόνος ελεύθερης πτώσης $T_Δ/4\sqrt{2} \cong 2{,}1$ έτη. Η συγκεκριμένη τιμή πρέπει να προστεθεί στο χρόνο που διαρκεί το ταξίδι κατά μήκος του ελλειπτικού τμήματος της τροχιάς (πριν από τη «συνάντηση» με το Δία), ο οποίος ισούται με 1,35 έτη. Ο συνολικός αναγκαίος χρόνος, λοιπόν, για την πτήση προς τον Ήλιο είναι σχεδόν 3,5 έτη.

Κοιτάζοντας την τροχιά μιας τέτοιας πτήσης (Σχήμα 4), θα σκεφτόμασταν ότι ο Δίας είναι αυτός που στέλνει το ερευνητικό σκάφος στον Ήλιο. Στην πραγματικότητα το διαστημόπλοιο το κατευθύνουν οι άνθρωποι. Καθώς αυτό πλησιάζει το Δία, είναι απαραίτητο να κάνουμε μια διόρθωση στην τροχιά του —ακόμη και ένα μικρό σφάλμα στην απόσταση της διέλευσης ή στην ταχύτητα προσέγγισης προς τον πλανήτη θα μπορούσε να οδηγήσει σε ναυάγιο ολόκληρη την προσπάθεια για έρευνα του Ήλιου. Μια επιπλέον διόρθωση πρέπει να γίνει έπειτα από την παραπάνω διέλευση, ώστε να εξουδετερωθούν τυχόν παραμένουσες αποκλίσεις και να προσδιοριστεί επακριβώς η απόσταση στην οποία το ερευνητικό σκάφος θα πλησιάσει τον Ήλιο.

Μια από τις εμπνεύσεις-κλειδιά σ' αυτή τη μέθοδο —η χρήση της έλξης ενός ενδιάμεσου πλανήτη προκειμένου να μεταβάλουμε την ταχύτητα του διαστημοπλοίου— έχει ήδη χρησιμοποιηθεί σε πραγματικές διαστημικές πτήσεις. Σχετικό παράδειγμα αποτελούν οι πτήσεις προς τον πλανήτη Αφροδίτη με τα διαστημόπλοια Vega-1 και Vega-2, τα οποία αφού προσπέρασαν τον Αυγερινό, ξεκίνησαν το ταξίδι τους προς τον κομήτη του Halley.

Είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε τα φυσικά φαινόμενα τα οποία εκτυλίσσονται στον Ήλιο. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε όλες τις συνέπειες των γνώσεων που θα αποκτήσουμε στο μέλλον. Σε αναζήτηση όμως κάποιου μέτρου σύγκρισης, ας επαναφέρουμε στη μνήμη μας την ηρωική εποχή των μεγάλων γεωγραφικών ανακαλύψεων, όταν καταφέραμε να γνωρίσουμε τον πλανήτη μας.

Είναι αρκετά πιθανό ότι η εποχή μας θα αποκαλείται κάποτε εποχή των μεγάλων διαστημικών ανακαλύψεων. Η πρώτη πτήση προς τον Ήλιο θα συγκαταλέγεται αναμφίβολα στα απαστράπτοντα επιτεύγματά της.

Προσθήκη

Όταν ο Alexey Byalko έγραφε το παρόν άρθρο, βρίσκονταν σε εξέλιξη σχέδια που αφορούσαν την εκτόξευση ενός ερευνητικού σκάφους προς τον Ήλιο τόσο στη NASA (Εθνική Υπηρεσία Αεροναυτικής και Διαστήματος) όσο και στην ESA (Ευρωπαϊκή Υπηρεσία Διαστήματος), τα οποία τελικά πήραν το όνομα *Οδυσσέας* (Ulysses). Αφού εκτοξεύτηκε από το διαστημικό λεωφορείο *Discovery* τον Οκτώβριο του 1990, ο *Οδυσσέας* πλησίασε τον πλανήτη Δία το Φεβρουάριο του 1992, όπως πρότεινε παραπάνω ο συγγραφέας. Το διαστημόπλοιο μπήκε σε πολική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, περνώντας πάνω από το νότιο πόλο το 1994 και πάνω από το βόρειο το 1995.

Όπως περιγράφηκε από τη NASA, η αποστολή *Οδυσσέας*

> *εξερεύνησε για πρώτη φορά τα ανώτερα στρώματα της ηλιόσφαιρας μακριά από το επίπεδο της εκλειπτικής. Τα κύρια αποτελέσματα της αποστολής ήταν η ανακάλυψη, σ' αυτά τα μεγάλα πλάτη, των ιδιοτήτων του ηλιακού στέμματος, του ηλιακού ανέμου, του μαγνητικού πεδίου της ηλιόσφαιρας, των ηλιακών ενεργητικών σωματιδίων, των γαλαξιακών κοσμικών ακτίνων, των ηλιακών αναλαμπών ραδιοκυμάτων και των κυμάτων πλάσματος. Άλλες ερευνητικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν τη μελέτη της κοσμικής σκόνης, των αναλαμπών ακτινών γ, και μελέτες της μαγνητόσφαιρας του Δία που διενεργήθηκαν κατά την διέλευση σε μικρή απόσταση από τον πλανήτη.*

Ο *Οδυσσέας* έχει ολοκληρώσει την πρώτη φάση της αποστολής του και τώρα επιχειρεί μια δεύτερη τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Πλούτος πληροφοριών για το πρόγραμμα είναι διαθέσιμος στο World Wide Web. Καλό μέρος για να αρχίσετε αποτελούν οι εξής διευθύνσεις:

http://ulysses.jpl.nasa.gov,
http://helio.estec.esa.nl/ulysses.

Εικονογράφηση: Ilia Likhtman

Τα κοσμήματα του στέμματος

Η ομορφιά του επαγωγικού συλλογισμού

Mark Saul

ΕΧΕΙ ΕΙΠΩΘΕΙ ΟΤΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙκά είναι η βασίλισσα των επιστημών. Αν κάτι τέτοιο είναι αλήθεια, τότε η βασίλισσα αυτή πρέπει να φορά ένα στέμμα. Τι πολύτιμα πετράδια θα έπρεπε να κοσμούν το στέμμα; Στα μαθηματικά αφθονούν τα όμορφα αποτελέσματα. Αντί να διαλέξουμε όμως οποιοδήποτε συγκεκριμένο από αυτά, θα ήταν προτιμότερο να βρούμε μια περιφανή θέση στο βασιλικό στέμμα, σε μια ευρύτερη κλίμακα, για τέτοια όμορφα μαθηματικά δημιουργήματα. Ανάμεσά τους θα μπορούσε να βρίσκεται η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής.

Η επαγωγή είναι μια αποδεικτική μέθοδος που μας προσφέρεται από τον ίδιο τον ορισμό των φυσικών αριθμών: κάθε αριθμός ακολουθείται από κάποιον «επόμενό» του αριθμό. Μια επαγωγική απόδειξη ξεκινά με την παρατήρηση του ότι μια συγκεκριμένη πρόταση εξαρτάται από μια μεταβλητή (θα την ονομάσουμε N) η οποία λαμβάνει τιμές στο σύνολο των θετικών ακεραίων. Αν η πρόταση αυτή αληθεύει για $N = 1$, και αν, για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού k, η αλήθεια της πρότασης για $N = k$ συνεπάγεται την αλήθεια της για $N = k + 1$, τότε λέμε ότι η πρόταση έχει αποδειχτεί με επαγωγή.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι η αρχή της μαθηματικής επαγωγής —το γεγονός ότι μια τέτοια διαδικασία εξασφαλίζει την αλήθεια κάποιου ισχυρισμού— είναι ισοδύναμη με διάφορες πολύ βασικές προτάσεις για τους φυσικούς αριθμούς. Είναι εντυπωσιακό το πόσο μεγάλο πλήθος από πολύπλοκες αποδείξεις μπορεί να βασιστεί σ' αυτή την απλή και στοιχειώδη αρχή.

Πώς εμφανίζεται αυτό το «στολίδι» στα κοινά σχολικά βιβλία; Ένα συνηθισμένο πρόβλημα είναι το ακόλουθο:

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό N ισχύει:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + N = N(N + 1)/2.$$

Επαγωγική απόδειξη. Μέρος 1: Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 &= 1(2)/2, \\ 1 + 2 &= 2(3)/2, \\ 1 + 2 + 3 &= 3(4)/2. \end{aligned}$$

Μέρος 2: Υποθέτουμε ότι η πρόταση αληθεύει για $N = k$, δηλαδή ότι: $1 + 2 + \ldots + k = k(k + 1)/2$. Μπορούμε να προσθέσουμε τον όρο $(k + 1)$ και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, οπότε θα βρούμε:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) \\ &= k(k + 1)/2 + (k + 1) \\ &= (k + 1)(k/2 + 1) \\ &= (k + 1)[(k + 2)/2]. \end{aligned}$$

Αφού αυτή είναι η ισότητα την οποία προέβλεπε ο αρχικός ισχυρισμός, η επαγωγική απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Όταν κανείς ασχολείται με πιο πολύπλοκα προβλήματα τέτοιας φύσεως, διαπιστώνει ότι η «δυσκολία» της απόδειξης έγκειται στο να εξασφαλιστεί η ισοδυναμία της σχέσης που προβλέπει η προς απόδειξη πρόταση με τη σχέση που προκύπτει από την πρόσθεση του επόμενου όρου. Αυτό επιτυγχάνεται με αλγεβρικούς χειρισμούς, και έτσι κάποιος μπορεί εύκολα να σκεφτεί ότι η μαθηματική επαγωγή δεν είναι παρά μία ακόμη μορφή αυτών των πληκτικών ασκήσεων με απλοποιήσεις αλγεβρικών εκφράσεων, στις οποίες πρέπει να εξασκηθεί, χωρίς όμως να αναμένει κάποια πνευματική ικανοποίηση ή κάποια έκπληξη από το αποτέλεσμα.

Η παραπάνω ζοφερή εισαγωγή δεν αφήνει να παρουσιαστούν δυο όψεις-κλειδιά της μαθηματικής επαγωγής. Η μια από αυτές τις όψεις είναι το στοιχείο της ανακάλυψης που μπορεί να προσφέρει μια επαγωγική διαδικασία.

Για παράδειγμα, θεωρήστε το ίδιο πρόβλημα να τίθεται ως εξής:

Πρόβλημα 2. Ο πρώτος «τριγωνικός» αριθμός είναι το 1:

•

Ο δεύτερος τριγωνικός αριθμός είναι το 3:

•
• •

Ο τρίτος είναι το 6:

•
• •
• • •

Βρείτε τον εκατοστό τριγωνικό αριθμό.

Σ' αυτή την παρουσίαση το πρόβλημα παραμένει ανοικτό: Ο αναγνώστης πρέπει να παρατηρήσει μια ομοιομορφία, να σχηματίσει μια υπόθεση και κατόπιν να εξηγήσει τι είναι αυτό που αναπαράγει την ομοιομορφία (το επαγωγικό βήμα).

Για παράδειγμα, μπορούμε να προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τους τριγωνικούς αριθμούς:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 3 &= 1 \times 3, \\ 6 &= 2 \times 3, \\ 10 &= 2 \times 5, \\ 15 &= 3 \times 5, \end{aligned}$$

και να παρατηρήσουμε ότι εμφανίζεται μια κανονικότητα στους παράγοντες.

Μια διορατική σκέψη για την αλγεβρική μορφή των παραγόντων δίνει την ιδέα για τη λύση του προβλήματος, και η επαγωγή μπορεί στη συνέχεια να αναλάβει. Αλλά πριν φτάσουμε ώς εδώ, είχαμε τη χαρά της ανακάλυψης, συναρμολογώντας μια εικόνα κομμάτι-κομμάτι. Αυτή η πνευματική χαρά παρουσιάζεται από τον George Polya, στο μνημειώδες έργο του: *Induction and Analogy in Mathematics* (Επαγωγή και αναλογία στα μαθηματικά), όπου μπορεί να βρει κανείς πολλά παρόμοια παραδείγματα.

Η δεύτερη όψη της μαθηματικής επαγωγής, την οποία αποκρύπτουν με την αντιμετώπισή τους τα συνηθισμένα εγχειρίδια, είναι η ευρύτητα της εφαρμογής της. Η επαγωγή δεν είναι απλά μια τεχνική υπολογισμού αθροισμάτων. Μπορεί να εφαρμοστεί σε μεγάλη ποικιλία καταστάσεων, καθώς και στην επεξεργασία ευρέος φάσματος μαθηματικών αντικειμένων.

Η συλλογή προβλημάτων που ακολουθεί, μπορεί να χρησιμεύσει σαν εισαγωγή στην επαγωγή ως ανακάλυψη και στις πολυπληθείς περιπτώσεις όπου αυτή μπορεί να εφαρμοστεί. Μπορεί να παρέλειψα την αγαπημένη σας επαγωγική απόδειξη. Συγκεκριμένα, παρέλειψα σκόπιμα το μείζον στην ιστορία των μαθηματικών παράδειγμα χρήσης της επαγωγής σε όλη της την δύναμη. Την απόδειξη του Cauchy για την ανισότητα που συνδέει τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο. Αυτή όμως μπορεί να βρεθεί αλλού (π.χ. στο βιβλίο ανισοτήτων των Beckenbach και Bellman).

Κάθε παράδειγμα παρουσιάζει μια ευκαιρία για τη διατύπωση κάποιου γενικού ισχυρισμού μέσα από κάποια παρατηρούμενη κανονικότητα. Σ' αυτό το είδος προβλημάτων επαγωγής, το πρώτο μέρος της απόδειξης είναι απλά μια επανάληψη της διαδικασίας που δημιούργησε τις αρχικές παρατηρήσεις. Αλλά μια και αποτελεί κι αυτό τμήμα της τυπικής απόδειξης, αισθάνομαι την υποχρέωση να το αναφέρω κάθε φορά.

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$100 - (99 - (98 - (97 - (\ldots - (2 - 1)) \ldots))).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} 2 - 1 &= 1, \\ 3 - (2 - 1) &= 2, \\ 4 - (3 - (2 - 1)) &= 2, \\ 5 - (4 - (3 - (2 - 1))) &= 3 \end{aligned}$$

και κάνουμε μια πρώτη υπόθεση.

Εικασία. Για κάθε φυσικό αριθμό N, ισχύει:

$$\begin{aligned} &N - (N - 1 - (N - 2 - (N - 3 - \\ &(\ldots - (3 - (2 - 1)) \ldots))) \\ &= N/2 \text{ αν } N \text{ είναι άρτιος, ή} \\ &(N + 1)/2 \text{ αν } N \text{ είναι περιττός.} \end{aligned}$$

Επαγωγική απόδειξη. Μέρος 1: Αυτό το μέρος της απόδειξης ολοκληρώθηκε με το σχηματισμό της εικασίας μας, παραπάνω.

Μέρος 2: Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $N = k$, δηλαδή

$$\begin{aligned} &k - (k - 1 - (k - 2 - \\ &(\ldots - (2 - 1)) \ldots))) \\ &= k/2 \text{ αν } k \text{ άρτιος, ή} \\ &(k + 1)/2 \text{ αν } k \text{ περιττός.} \end{aligned}$$

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Εξετάζουμε τώρα την ισχύ της πρότασης για $N = k + 1$.

Έχουμε λοιπόν:

$$k + 1 - (k - (k - 1 - (k - 2 - (\dots -(2 - 1)) \dots))) =$$
$$k + 1 - (k/2) = (k + 2)/2 = [(k + 1) + 1]/2, \text{ αν } k \text{ είναι άρτιος, ή}$$
$$k + 1 - (k + 1)/2 = (k + 1)/2, \text{ αν } k \text{ είναι περιττός,}$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με το προβλεπόμενο από την υπόθεση, διότι, αν ο k είναι άρτιος, τότε ο $k + 1$ είναι περιττός, ενώ, αν ο k είναι περιττός, τότε ο $k + 1$ είναι άρτιος.

Ένας άλλος τρόπος για την τυποποίηση του προβλήματος είναι ο σχηματισμός της ακολουθίας:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2 - 1,$$
$$a_3 = 3 - (2 - 1),$$
$$a_4 = 4 - (3 - (2 - 1)),$$

και γενικά $a_n = n - a_{n-1}$. Αυτός είναι ένας *αναδρομικός* ορισμός της ακολουθίας: κάθε όρος της ακολουθίας (εκτός του πρώτου) ορίζεται με τη χρήση του προηγούμενού του όρου. Στο Πρόβλημα 2 που είδαμε πριν, ζητείται η τιμή του a_{100}. Όπως θα δούμε, οι επαγωγικές αποδείξεις λειτουργούν πολύ καλά με χρήση τέτοιων αναδρομικών ορισμών.

Άσκηση 1. Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$100^2 - (99^2 - (98^2 - (97^2 - (\dots - (3^2 - (2^2 - 1^2)) \dots))).$$

Παράδειγμα 2. Οι αριθμοί Fibonacci ορίζονται ως εξής:

$$F_1 = F_2 = 1,$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ για } n > 2.$$

Να βρεθούν όλοι οι άρτιοι αριθμοί Fibonacci.

Λύση. Ας υπολογίσουμε τους πρώτους δέκα αριθμούς Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι δείκτες των άρτιων αριθμών Fibonacci είναι ακριβώς τα πολλαπλάσια του 3.

Εικασία. Ο F_n είναι άρτιος αν και μόνο αν ο n είναι πολλαπλάσιο του 3.

Επαγωγική απόδειξη. Μέρος 1: Εξετάστηκε πιο πάνω, για n = 1, 2, 3.

Μέρος 2: Έστω ότι η εικασία ισχύει για όλες τις τιμές του n που είναι μικρότερες ή ίσες του $3k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει επίσης και για κάθε τιμή του n μικρότερη ή ίση του $3k + 3$.

Από την επαγωγική υπόθεση, ο F_{3k} είναι άρτιος, ενώ ο F_{3k-1} είναι περιττός. Έτσι ο F_{3k+1}, που ισούται με το άθροισμά τους, θα είναι περιττός. Ακολουθώντας ανάλογο σκεπτικό μπορούμε να δείξουμε ότι ο F_{3k+2} θα είναι περιττός και ο F_{3k+3} άρτιος.

Η παραπάνω απόδειξη εκθέτει δύο παραλλαγές στην αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Η πρώτη είναι η εισαγωγή στην επαγωγική υπόθεση όχι μόνο της παραδοχής του ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, αλλά και για το ότι ισχύει για κάποιους συγκεκριμένους φυσικούς, μικρότερους ή ίσους του k. Αποδεικνύεται τελικά ότι αυτή η ισχυρότερη παραδοχή, ακόμη κι αν εμπεριέχει *όλους* τους φυσικούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι του k, επιτρέπει να προχωρήσουμε την επαγωγική απόδειξη. Η δεύτερη παραλλαγή είναι το γεγονός ότι η επαγωγή προχωρεί «βήμα βήμα»: Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για F_{3k+1}, F_{3k+2} και F_{3k+3} ξεχωριστά. Αυτές οι τρεις περιπτώσεις μαζί καλύπτουν όλους τους θετικούς ακεραίους.

Άσκηση 2. Ποιοι αριθμοί Fibonacci είναι πολλαπλάσια του 5; Ποιοι είναι πολλαπλάσια του 7;

Άσκηση 3. Κάντε μια γενική εικασία για το ποιοι αριθμοί Fibonacci είναι διαιρετοί με έναν δεδομένο αριθμό d. Ελέγξτε την εικασία σας για n = 4, 6, 8, 9, 10, 11. Κάντε μια γενική παρατήρηση για το πότε ο αριθμός F_n είναι διαιρετός με το d.

Άσκηση 4. Τί θα συνέβαινε αν αλλάζαμε τους δύο πρώτους όρους της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci, αλλά αφήναμε αναλλοίωτο τον τύπο σχηματισμού των επόμενων;

Δηλαδή, έστω ότι ορίζουμε τους αριθμούς «Gibonacci» ως εξής:

$$g_1 = 3,$$
$$g_2 = -2,$$
$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} \text{ για } n > 2$$

ή δίνοντας οποιαδήποτε τιμή στους g_1, g_2.

Ποιες από τις παραπάνω παρατηρήσεις εξακολουθούν να ισχύουν;

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x + 1$. Να υπολογιστούν τα $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ και $f(f(f(f(x))))$.

Καθεμιά από τις συναρτήσεις αυτές είναι της μορφής: $f(x) = ax + b$.

Τι παρατηρείτε για τους συντελεστές; Υπάρχει κάποια κανονικότητα σε όλα τα βήματα;

Λύση. Με άμεσο υπολογισμό βρίσκουμε:

$$f(f(x)) = 4x + 3,$$
$$f(f(f(x))) = 8x + 7,$$
$$f(f(f(f(x)))) = 16x + 15.$$

Εικασία. Αν $f_1(x) = 2x + 1$ και $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$, τότε $f_n(x) = 2^n x + 2^n - 1$.

Επαγωγική απόδειξη. Μέρος 1: Όπως παρουσιάστηκε πιο πάνω.

Μέρος 2: Έστω ότι $f_n = 2^n x + 2^n - 1$.

Τότε $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) = 2(2^n x + 2^n - 1) + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 1$, που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 5. Ορίζουμε

$$f_1(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1}$$

και σχηματίζουμε τις συναρτήσεις f_2, f_3, ..., όπως στο Παράδειγμα 3. Αυτές είναι κάπως πιο πολύπλοκες, αφού εξαρτώνται από τέσσερις πραγματικούς αριθμούς και όχι μόνο από δύο. Μπορείτε να δώσετε έναν κανόνα σχηματισμού για τις ακολουθίες που δίνουν τους τέσσερις συντελεστές; (Υπόδειξη: Αν γνωρίζετε πολλαπλασιασμό πινάκων, συγκρίνετε τους πρώτους δυο-τρεις όρους της σειράς με τις δυνάμεις του πίνακα $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ χρησιμοποιώντας το συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων.

Παράδειγμα 4. Στο βασίλειο της Aveugle κυβερνά η δυναστεία των Bourgne. Ο σημερινός βασιλέας, Bourgne ο 23ος, διαδέχτηκε στο θρόνο τον Bourgne τον 22ο, που είχε με τη σειρά του διαδεχτεί τον Bourgne τον 21ο. Μάλιστα, και οι 23 από τους τελευταίους βασιλείς της δυναστείας είχαν το ίδιο όνομα. Πιο παλιά είχαν επίσης όλοι το όνομα Bourgne, αλλά δεν συγκρατούσαν την αρίθμησή τους. Ο πρώτος βασιλέας Bourgne είχε ένα κουτί γεμάτο διαμάντια. Όταν πέθανε, ένα διαμάντι δόθηκε στον αγαπημένο του υπηρέτη, ακριβώς τα μισά από τα εναπομείναντα διαμάντια πουλήθηκαν για να βοηθηθούν οι άποροι του τόπου και τα υπόλοιπα δόθηκαν στον μοναδικό κληρονόμο του πρώην βασιλέα, ο οποίος και τον διαδέχτηκε στο θρόνο. Έτσι καθιερώθηκε μια παράδοση. Στα επόμενα χρόνια τα διαμάντια έμειναν απείραχτα μέχρι το θάνατο του βασιλέα Bourgne του N-οστού. Τότε συνέβη ό,τι ακριβώς και με το θάνατο του Bourgne του 1ου. Ένα διαμάντι δόθηκε στον αγαπημένο υπηρέτη του βασιλέα, τα μισά από τα εναπομείναντα έγιναν δωρεά στους απόρους και τα υπόλοιπα περιήλθαν στην κατοχή του διαδόχου Bourgne του $(N + 1)$-οστού. Η παράδοση διατηρήθηκε μέχρι σήμερα. Αν ο Bourgne ο 23ος έχει ακριβώς ένα διαμάντι στην κατοχή του, πόσα είχε ο Bourgne ο 1ος; (Πρόβλημα από το διαγωνισμό Wisconsin Mathematics, Engineering and Science Talent Search, 1982.)

Λύση. Αν ο Bourgne ο 23ος έχει ένα διαμάντι, τότε ο Bourgne ο 22ος πρέπει να είχε $1 + 1 + 1 = 3$ διαμάντια, ο Bourgne ο 21ος πρέπει να είχε $3 + 3 + 1 = 7$ διαμάντια, και ο Bourgne ο 20ός $7 + 7 + 1 = 15$ διαμάντια.

Εικασία. Πριν από N βασιλείς, ο τότε βασιλέας Bourgne είχε $2^{n+1} - 1$ διαμάντια.

Επαγωγική απόδειξη. Μέρος 1: Ολοκληρώθηκε με τους παραπάνω υπολογισμούς.

Μέρος 2: Έστω ότι πριν από k βασιλείς, ο τότε βασιλέας είχε $2^{k+1} - 1$ διαμάντια. Πώς περιήλθαν αυτά στην κατοχή του; Ο προκάτοχός του πρέπει να είχε $2(2^{k+1} - 1) + 1 = 2^{k+2} - 1$ διαμάντια. Δηλαδή ακριβώς ό,τι προέβλεπε η εικασία μας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο πρώτος Bourgne ήταν βασιλέας ακριβώς πριν από είκοσι δύο προκατόχους του σημερινού, άρα θα είχε $2^{23} - 1$ διαμάντια.

Άσκηση 6. Τι μπορείτε να αποφανθείτε για το πλήθος διαμαντιών που είχε ο βασιλέας Bourgne ο 1ος, αν ο σημερινός (του οποίου ο αριθμός ξεχάστηκε) έχει r διαμάντια στην κατοχή του;

Παράδειγμα 5. Ένας γεωργός έχει στην παραγωγή του ένα πλήθος μήλων. Πρόκειται να πληρωθεί γι' αυτά, με τον ακόλουθο τρόπο: Μπορεί να διαιρέσει τα μήλα σε δύο σωρούς. Το πλήθος των μήλων κάθε σωρού μετριέται προσεκτικά, και οι δύο αριθμοί πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους. Το γινόμενο μετατρέπεται σε αριθμό δολαρίων τα οποία λαμβάνει ο γεωργός, ως μέρος της ολικής αμοιβής του. Κατόπιν επιλέγει έναν από τους δύο σωρούς, και εφαρμόζεται ξανά η παραπάνω διαδικασία. Τώρα υπάρχουν τρεις σωροί από μήλα. Πάλι ο γεωργός επιλέγει έναν από αυτούς, και η αρχική διαδικασία επαναλαμβάνεται. Το ίδιο επαναλαμβάνεται ώσπου όλοι οι σωροί που προκύπτουν να αποτελούνται από ένα και μόνο μήλο. Ειδικότερα, οποιοσδήποτε σωρός από δύο μήλα πρέπει να χωριστεί σε δύο «σωρούς» από ένα μήλο. Αυτή η τελική διαίρεση των δύο μήλων θα προσθέσει $1 \times 1 = 1$ ακόμη δολάριο στην αμοιβή του γεωργού. Αν ο γεωργός έχει παραγωγή 100 μήλων, πώς πρέπει να εκτελέσει τις διαδοχικές διαιρέσεις ώστε να λάβει τη μέγιστη αμοιβή; Ποια είναι η αμοιβή αυτή; (*Kvant*, Πρόβλημα Μ100, 1987, αρ. 1.)

Λύση. Δοκιμάζοντας μερικές απλές περιπτώσεις (με δύο ή τρία μήλα) βρίσκουμε ότι η αμοιβή είναι πάντα ο τριγωνικός αριθμός $n(n + 1)/2$ δολάρια, για n μήλα, ανεξάρτητα από την τακτική που ακολουθείται στις υποδιαιρέσεις.

Εικασία. Η αμοιβή του γεωργού για n μήλα ισούται, σε δολάρια, με τον n-οστό τριγωνικό αριθμό.

Επαγωγική απόδειξη. Μέρος 1: Το αφήνουμε στον αναγνώστη, ειδικά για την περίπτωση του ενός μήλου.

Μέρος 2: Επιλέγουμε μια «ισχυρή» επαγωγική υπόθεση, όπως στο Παράδειγμα 2. Υποθέστε ότι η αμοιβή για d μήλα είναι $d(d + 1)/2$ δολάρια, ανεξάρτητα από τη μέθοδο που ακολουθείται στη διαίρεση των μήλων, για κάθε αριθμό $d \le k$. Παίρνουμε $k + 1$ μήλα και τα διαιρούμε σε δύο σωρούς, με τυχαίο τρόπο. Έστω ότι ο ένας σωρός αποτελείται από a μήλα και ο άλλος από b. Τότε $a + b = k + 1$, όπου τα a και b είναι μικρότερα ή ίσα του k. Τότε η επαγωγική υπόθεση εφαρμόζεται στη διαίρεση καθενός από αυτούς τους δύο σωρούς. Υποδιαιρώντας τους έχουμε $a(a + 1)/2$ και $b(b + 1)/2$ δολάρια. Επίσης, έχουμε ab δολάρια από το γινόμενο του πλήθους των μήλων των δύο πρώτων σωρών. Έτσι, έχουμε συνολικά $a(a + 1)/2 + b(b + 1)/2 + ab$ δολάρια αμοιβή. Αλλά

$$\begin{aligned} &a(a + 1)/2 + b(b + 1)/2 + ab \\ &\quad = (a^2 + a + b^2 + b + 2ab)/2 \\ &\quad = [(a^2 + 2ab + b^2) + (a + b)]/2 \\ &\quad = (a + b)(a + b + 1)/2 \\ &\quad = (k + 1)(k + 2)/2, \end{aligned}$$

δηλαδή, ό,τι προέβλεπε η εικασία μας.

Η απόδειξη αυτή δείχνει πόσο ισχυρή είναι η σωστά επιλεγμένη επαγωγική υπόθεση.

Παράδειγμα 6. Τρεις ευθείες γραμμές που δεν συντρέχουν (δηλαδή δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο) και είναι μη παράλληλες ανά δύο, διαιρούν το επίπεδο σε 7 περιοχές. Σε πόσες περιοχές διαιρείται το επίπεδο από n ευθείες που ανά τρεις δεν συντρέχουν και ανά δύο είναι μη παράλληλες;

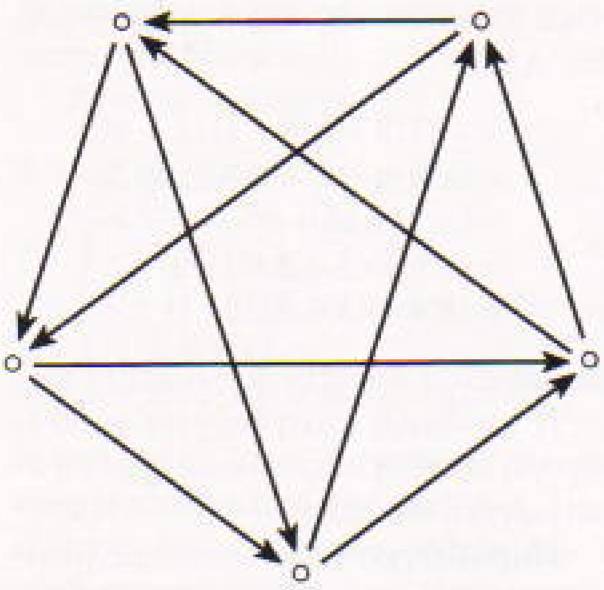
Λύση. Βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές για το πλήθος των περιοχών:

Ευθείες	Περιοχές
1	2
2	4
3	7
4	11

Δεν είναι δύσκολο να εικάσουμε (για παράδειγμα, συγκρίνοντας αυτή την ακολουθία με τους «τριγωνικούς» αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω) ότι το πλήθος των περιοχών που δημιουργούνται από n τέτοιες ευθείες είναι $(n^2 + n + 2)/2$.

Για να το αποδείξουμε, κάνουμε την παραδοχή ότι k τέτοιες ευθείες διαιρούν το επίπεδο σε $(k^2 + k + 2)/2$ περιοχές και εξετάζουμε τι συμβαίνει αν προσθέσουμε μία ακόμη ευθεία. Προφανώς η νέα ευθεία τέμνει καθεμιά από τις k αρχικές σε ένα μόνο σημείο, άρα η ίδια διαιρείται σε $k + 1$ μέρη. Καθένα από αυτά τα μέρη διαιρεί μία από τις αρχικά σχηματισμένες περιοχές σε δύο νέες, δημιουργώντας έτσι μια νέα περιοχή. Άρα σχηματίζονται συνολικά $k + 1$ νέες περιοχές. Τώρα το πρόβλημα έχει γίνει ισοδύναμο, με την απόδειξη του ότι η σχέση $(k^2 + k + 2)/2 + (k + 1) = [(k + 1)^2 + (k + 1) + 2]/2$ είναι ταυτότητα, κάτι που είναι πολύ εύκολο να ελεγχθεί.

Άσκηση 7. Τρεις κύκλοι τέμνονται ανά δύο σε δύο διαφορετικά σημεία. Σε πόσες περιοχές διαι-



Σχήμα 1

ρούν οι τρεις αυτοί κύκλοι το επίπεδο; Πόσες είναι οι περιοχές που ορίζουν στο επίπεδο n κύκλοι που τέμνονται ανά δύο σε δύο διαφορετικά σημεία;

Άσκηση 8. Θεωρήστε την Άσκηση 7, με τρίγωνα στη θέση των κύκλων.

Άσκηση 9. Θεωρήστε την Άσκηση 7, αλλά με παραβολές στη θέση των κύκλων.

Παράδειγμα 7. Να βρεθεί ένας τύπος που να δίνει το άθροισμα των πρώτων n αριθμών Fibonacci.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1 + 1 &= 2, \\ 1 + 1 + 2 &= 4, \\ 1 + 1 + 2 + 3 &= 7, \\ 1 + 1 + 2 + 3 + 5 &= 12, \end{aligned}$$

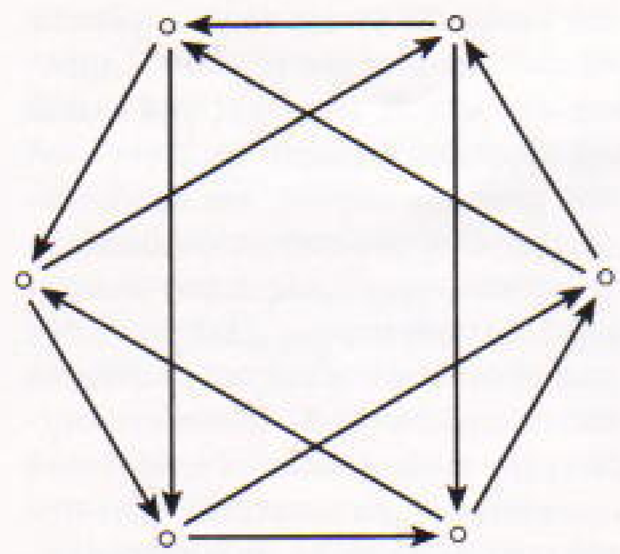
και κάθε άθροισμα είναι μικρότερο κατά μία μονάδα από κάποιον αριθμό Fibonacci.

Εικασία. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$.

Οι αρχικές περιπτώσεις έχουν ήδη διαπιστωθεί. Για να ολοκληρωθεί η επαγωγική απόδειξη, προσθέτουμε τον F_{n+1} και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και έχουμε $F_1 + F_2 + ... + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$, αφού εξ ορισμού $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$. Τώρα η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Άσκηση 10. Να βρεθεί το άθροισμα των πρώτων n αριθμών Gibonacci. (Δείτε το Παράδειγμα 2 και την άσκηση 4).

Άσκηση 11. Να βρεθεί ένας τύπος για το άθροισμα τετραγώνων των πρώτων n αριθμών Fibonacci. Ακολούθως αποδείξτε ότι ο τύπος



Σχήμα 2

σας είναι σωστός.

Παράδειγμα 8. Δίνεται το σύνολο $A_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Να σχηματιστούν όλα τα δυνατά υποσύνολα του A_{10}, τα οποία υπόκεινται στον εξής περιορισμό: σε κάθε υποσύνολο δεν υπάρχουν στοιχεία που διαφέρουν κατά μία μονάδα. Δηλαδή, π.χ. το υποσύνολο $\{1, 3, 5\}$ είναι δεκτό, αλλά όχι το $\{1, 3, 4\}$. Τα μονοσύνολα θεωρούνται δεκτά, καθώς και το κενό σύνολο (αφού δεν υπάρχουν δύο στοιχεία που διαφέρουν κατά μία μονάδα). Πόσα τέτοια υποσύνολα υπάρχουν; (Μαθηματική Ολυμπιάδα Καναδά, 1985.)

Λύση. Θα προτιμήσουμε να απαντήσουμε σ' ένα γενικότερο ερώτημα. Πόσα από τα ζητούμενα υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, 3, ... n\}$ υπάρχουν; Ας ονομάσουμε S_n το πλήθος αυτών των υποσυνόλων. Τότε, με απευθείας απαρίθμησή τους, έχουμε $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_4 = 5$, $S_5 = 8$. Φαίνεται ότι τα S_n ισούνται με τα αντίστοιχα F_n (των αριθμών Fibonacci). Αλλά γιατί συμβαίνει αυτό;

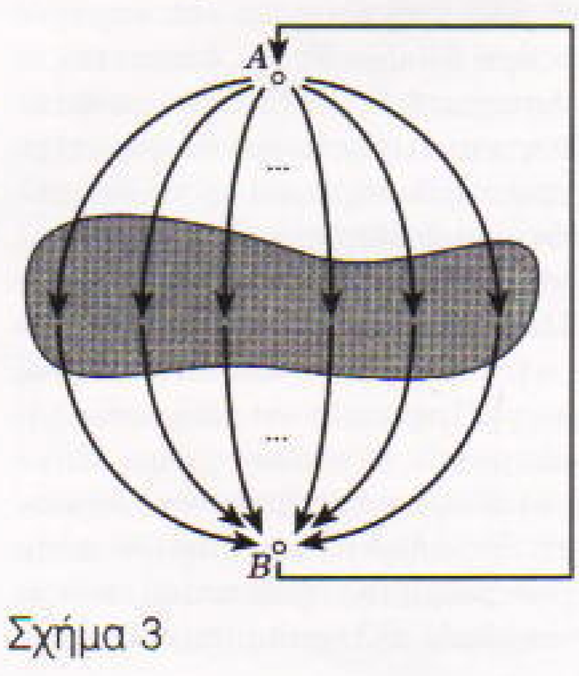
Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η ακολουθία S_n έχει αναδρομικό τύπο αντίστοιχο αυτού της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τους S_8 και S_9. Πώς θα υπολογίζαμε τον S_{10}; Οποσδήποτε καθένα από τα υποσύνολα που συνυπολογίζεται στο S_9, συνυπολογίζεται και στο S_{10}, και αυτό ακριβώς συμβαίνει για καθένα από τα ζητούμενα υποσύνολα που δεν περιέχει τον αριθμό 10.

Πόσα υποσύνολα υπάρχουν τα οποία *περιέχουν* το 10; Λοιπόν, αν διαγράψουμε το 10 από καθένα από αυτά τα υποσύνολα, θα έχουμε ένα από τα επιθυμητά υποσύνολα το οποίο έχει υπολογιστεί στο S_8, επειδή το αρχικό υποσύνολο (που περιείχε το 10) δεν περιείχε το 9, άρα ήταν από τα ζητούμενα. Έτσι, στο S_8 έχουν απαριθμηθεί μόνο εκείνα από τα επιθυμητά υποσύνολα, του S_{10}, και τα οποία περιέχουν το νέο στοιχείο 10.

Οπότε $S_{10} = S_8 + S_9$, κάτι που εύκολα γενικεύεται, κι έτσι έχουμε ότι $S_{10} = 144$.

Άσκηση 12. Ο Pierre Le Fou, σεφ στο εστιατόριο Le Quincaillerie, ξέρει να μαγειρεύει μόνο δύο φαγητά: «σκαντζόχοιρο *en colere*» και «κοάλα *bonne femme*». Κάθε βράδυ ετοιμάζει μία από τις δύο, ομολογουμένως εξαιρετικές, σπεσιαλιτέ του. Οι κανονισμοί του καταστήματος του επιτρέπουν να σερβίρει το ίδιο φαγητό δύο συνεχόμενες φορές, αλλά ποτέ τρεις. Ο Pierre επιφορτίζεται με το σχεδιασμό του μενού για πέντε συνεχόμενες ημέρες. Πόσες δυνατότητες επιλογής έχει; Πόσες είναι οι δυνατότητες αυτές, αν ο σχεδιασμός καλύπτει n μέρες στη σειρά;

Παράδειγμα 9. Μια αγροτική επαρχία αποτελείται από έναν αριθμό κωμοπόλεων, που συνδέονται μεταξύ τους με στενούς αγροτικούς δρόμους. Για να αποφεύγονται οι μετωπικές συγκρούσεις των διερχόμενων αυτοκινήτων, οι αρχές έχουν αποφασίσει κάθε δρόμος να είναι μονής κατεύθυνσης. Για εξοικονόμηση χρημάτων, οι πόλεις συνδέονται μεταξύ τους ανά δύο, με έναν το πολύ δρόμο. Για οικονομία στη σηματοδότηση, οι δρόμοι διασταυρώνονται μόνο μέσα στις κωμοπόλεις που συνδέουν.



Σχήμα 3

Όπου δύο δρόμοι συναντώνται, έχουν κατασκευαστεί ανισόπεδες διαβάσεις, έτσι ώστε όποιος θέλει να αλλάξει οδό, μπορεί να το κάνει μόνο μέσα σε κάποια πόλη. Τέλος οι δρόμοι είναι κατασκευασμένοι έτσι ώστε να μπορεί κανείς να μεταβεί από μια πόλη σε οποιαδήποτε άλλη διασχίζοντας το πολύ μία ακόμη κωμόπολη.

1. Πώς μπορούν να κατασκευαστούν οι απαραίτητες οδοί αν η επαρχία περιλαμβάνει τρεις κωμοπόλεις;

2. Δείξτε ότι οι απαραίτητες οδοί *δεν* μπορούν να κατασκευαστούν αν η επαρχία αποτελείται από δύο ή από τέσσερις κωμοπόλεις.

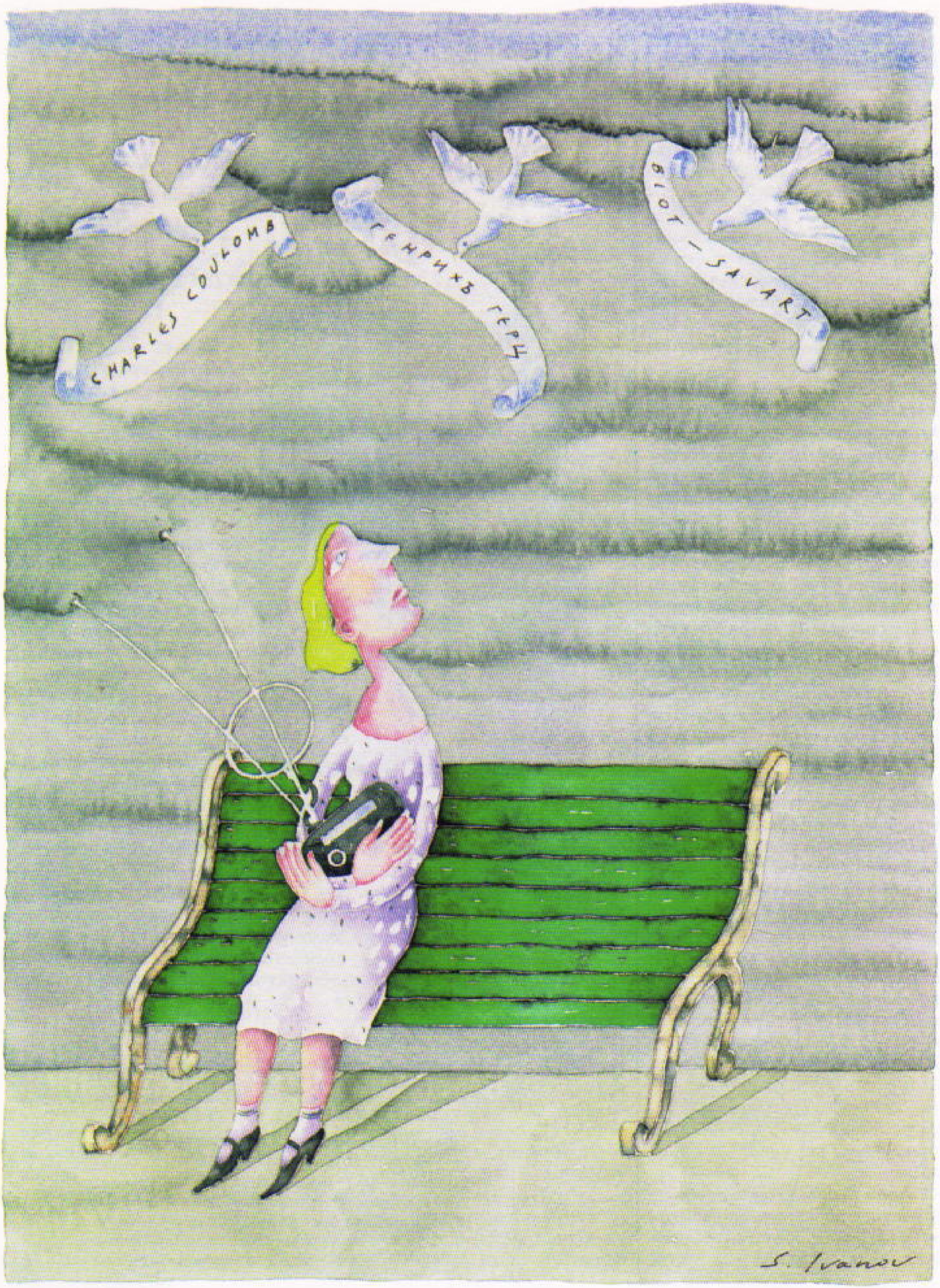
3. Δείξτε ότι το οδικό δίκτυο είναι κατασκευάσιμο αν η επαρχία αποτελείται από οποιοδήποτε πλήθος κωμοπόλεων, μεγαλύτερο του τέσσερα.

Λύση. Δείτε το Σχήμα 1 για $n = 5$ και το Σχήμα 2 για την περίπτωση όπου $n = 6$.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, υποθέτουμε αρχικά ότι το απαραίτητο δίκτυο μπορεί να κατασκευαστεί αν το πλήθος των κωμοπόλεων είναι k. Το Σχήμα 3 παρουσιάζει την κατάσταση για μια επαρχία $k + 2$ πόλεων. Μπορούμε να δείξουμε ότι το δίκτυο κατασκευάζεται, ορίζοντας δύο από τις κωμοπόλεις αυτές ως «νέες» (στο σχήμα έχουν ονομαστεί A και B) και θεωρώντας τις υπόλοιπες k ως «παλαιές» κωμοπόλεις. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, οι k «παλαιές» πόλεις μπορούν να συνδεθούν με το απαραίτητο οδικό δίκτυο.

Έστω ότι το δίκτυο αυτό έχει σχεδιαστεί (στο Σχήμα 3) κάτω από τη γραμμοσκιασμένη περιοχή. Μπορούμε να συμπεριλάβουμε τις δύο «νέες» κωμοπόλεις συνδέοντας την πόλη A με καθεμιά από τις «παλαιές» και κάθε «παλαιά» κωμόπολη με τη «νέα» κωμόπολη B. Μια τελική σύνδεση της B με την A ολοκληρώνει το δίκτυο. Δείξαμε λοιπόν ότι, αν το απαραίτητο οδικό δίκτυο είναι κατασκευάσιμο για k κωμοπόλεις, τότε είναι κατασκευάσιμο και για $k + 2$ κωμοπόλεις.

Αφού λοιπόν έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό μας για δύο διαδοχικούς ακεραίους, η επαγωγική απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ◘


CHARLES COULOMB
ГЕНРИХЪ ГЕРЦ
BIOT – SAVART
S. Ivanov

Οι ραδιοεπικοινωνίες στο προσκήνιο

Πώς και γιατί εφευρέθηκε ο ασύρματος τηλέγραφος πριν από εκατό χρόνια

Pavel Bliokh

ΩΣ ΤΑ ΜΕΣΑ ΤΟΥ 19ΟΥ ΑΙΩΝΑ Ο τηλέγραφος είχε γίνει μια κοινή μέθοδο επικοινωνίας. Τηλεγραφικά σύρματα εκτείνονταν μεταξύ των πόλεων, μεγάλων και μικρών· και το 1866 ένα ειδικό καλώδιο απλώθηκε στο βυθό του Ατλαντικού Ωκεανού —ο τηλέγραφος συνέδεε πλέον δύο ηπείρους. Τα μηνύματα μπορούσαν να μεταδίδονται γρήγορα και αξιόπιστα σε τεράστιες αποστάσεις (από και προς οποιοδήποτε σημείο της Γης), με την προϋπόθεση να ικανοποιείται μία συνθήκη: κάποιος να έχει καλύψει την ενδιάμεση απόσταση απλώνοντας ηλεκτρικό καλώδιο. Τούτο δεν ήταν εύκολο· μάλιστα παρέμενε ανυπέρβλητο εμπόδιο όταν επρόκειτο για κινούμενα αντικείμενα (όπως τα πλοία).

Προφανώς φαντάζεστε τη μεγάλη προσπάθεια των επιστημόνων και των μηχανικών στα τέλη του 19ου αιώνα να λύσουν το πρόβλημα της ασύρματης μετάδοσης σε μεγάλες αποστάσεις. Ίσως μάλιστα να σκέφτεστε ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούσε να αντιμετωπιστεί αρκετά εύκολα βάσει αρχών ευρέως γνωστών από εκατό και πλέον χρόνων. Πράγματι, ήταν διαθέσιμες μερικές απλές μέθοδοι μετάδοσης σημάτων —και μ' αυτές θα αρχίσουμε την ιστορία μας.

Εφεύρεση-φάντασμα Νο 1

Ο «ηλεκτροστατικός» ασύρματος τηλέγραφος θα μπορούσε να είχε ήδη εφευρεθεί στα τέλη του 18ου αιώνα. Είναι γνωστό ότι κάθε σώμα που φέρει ηλεκτρικό φορτίο Q δημιουργεί στον γύρω χώρο ηλεκτρικό πεδίο

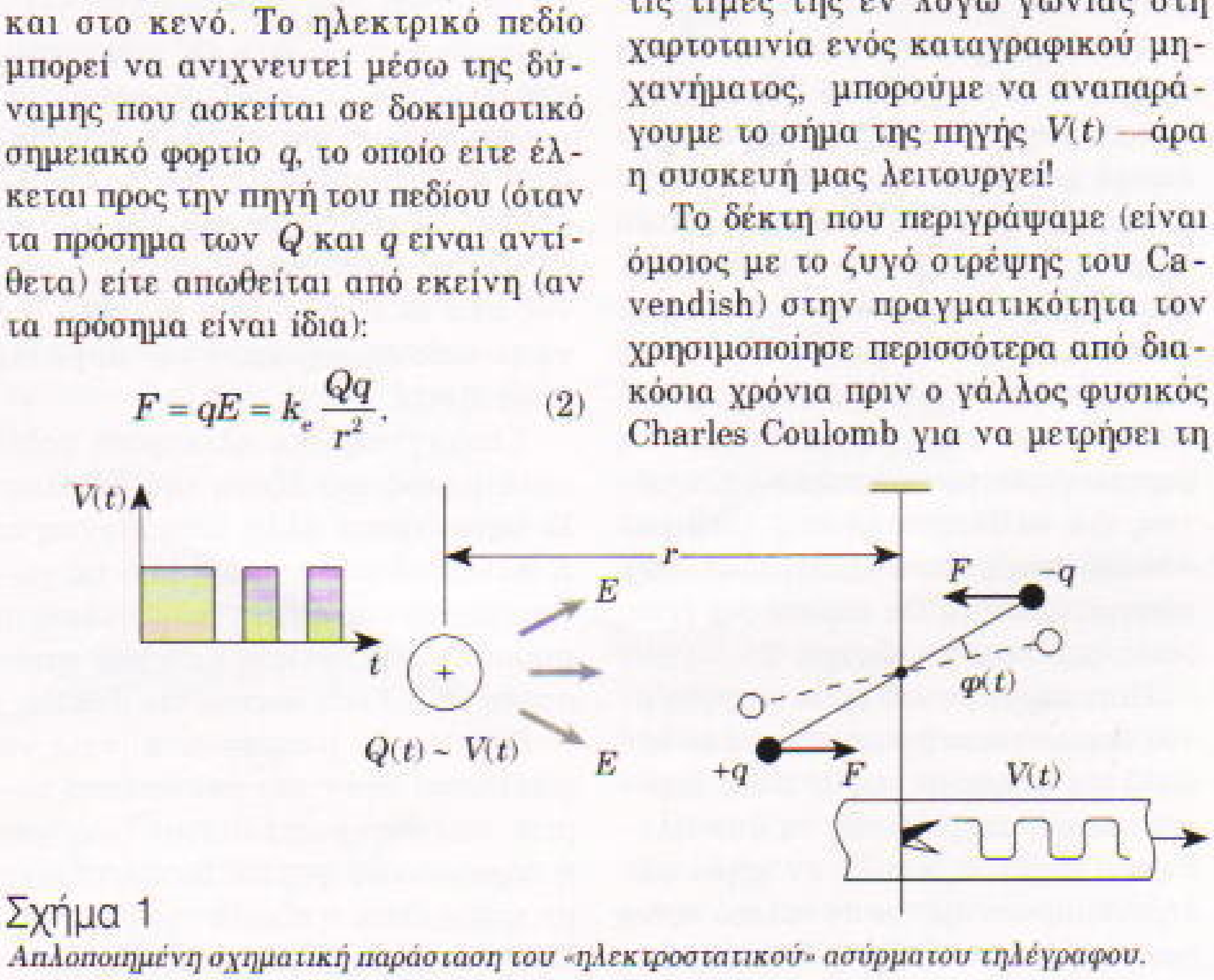
$$E = \frac{k_e Q}{r^2}. \qquad (1)$$

Ο συγκεκριμένος τύπος ισχύει όταν το σώμα είναι «σημειακό» —δηλαδή όταν το μέγεθος του είναι πολύ μικρό σε σχέση με την απόσταση r από αυτό. (Το k_e είναι ένας συντελεστής αναλογίας που εξαρτάται από το σύστημα των μονάδων.) Είναι πολύ σημαντικό ότι το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται γύρω από οποιοδήποτε φορτισμένο σώμα, χωρίς να απαιτούνται ρευματοφόρα καλώδια —ακόμη και στο κενό. Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να ανιχνευτεί μέσω της δύναμης που ασκείται σε δοκιμαστικό σημειακό φορτίο q, το οποίο είτε έλκεται προς την πηγή του πεδίου (όταν τα πρόσημα των Q και q είναι αντίθετα) είτε απωθείται από εκείνη (αν τα πρόσημα είναι ίδια):

$$F = qE = k_e \frac{Qq}{r^2}. \qquad (2)$$

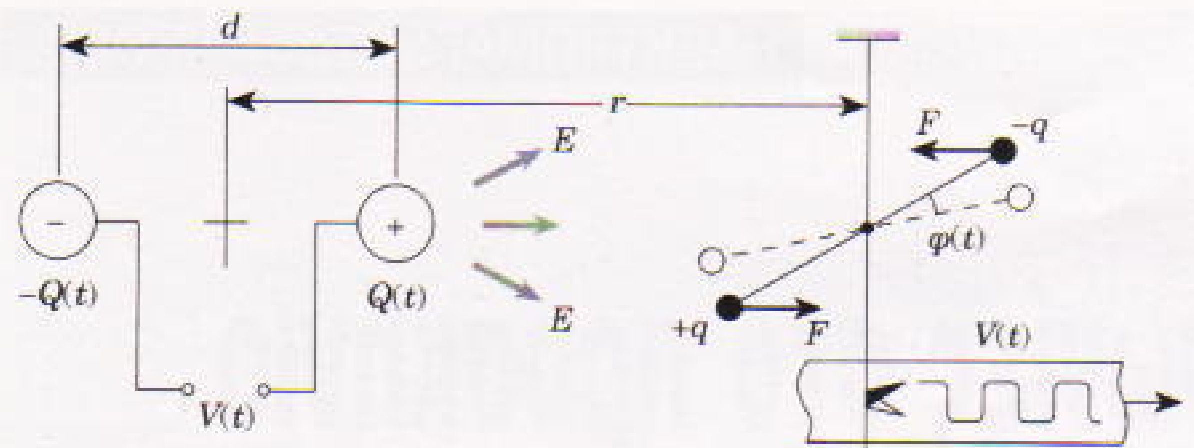
Η απλούστερη διάταξη για έναν ασύρματο τηλέγραφο που στηρίζεται στη δύναμη F παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Ο «πομπός» είναι ένα σώμα του οποίου το φορτίο $Q(t)$ μεταβάλλεται σύμφωνα με το μεταδιδόμενο σήμα $V(t)$. Ο «δέκτης» αποτελείται από δύο αντίθετα φορτία $\pm q$, στερεωμένα στα άκρα μιας μικρής ράβδου η οποία είναι αναρτημένη από λεπτό νήμα. Κατ' αρχήν, ο δέκτης απαιτεί ένα μόνο φορτίο —αλλά τότε θα ήταν λιγότερο ευαίσθητος. Η ηλεκτρική δύναμη F παράγει μια ροπή που στρέφει τη ράβδο κατά γωνία $\varphi(t)$, ανάλογη προς το $Q(t)$. Αποτυπώνοντας τις τιμές της εν λόγω γωνίας στη χαρτοταινία ενός καταγραφικού μηχανήματος, μπορούμε να αναπαράγουμε το σήμα της πηγής $V(t)$ —άρα η συσκευή μας λειτουργεί!

Το δέκτη που περιγράψαμε (είναι όμοιος με το ζυγό στρέψης του Cavendish) στην πραγματικότητα τον χρησιμοποίησε περισσότερα από διακόσια χρόνια πριν ο γάλλος φυσικός Charles Coulomb για να μετρήσει τη



Σχήμα 1
Απλοποιημένη σχηματική παράσταση του «ηλεκτροστατικού» ασύρματου τηλέγραφου.

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 2

Πραγματική σχηματική παράσταση του «ηλεκτροστατικού» ασύρματου τηλέγραφου.

δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο ηλεκτρικών φορτίων. Έτσι ανακάλυψε το θεμελιώδη νόμο του στατικού ηλεκτρισμού (τύπος (2)) —ο οποίος πήρε και το όνομά του.

Αφού η παραπάνω διάταξη φαίνεται πως μπορεί εύκολα να πραγματοποιηθεί, ανακύπτει το ερώτημα: γιατί δεν ήταν κατάλληλη για τη μετάδοση σημάτων σε μεγάλες αποστάσεις; Πρώτα απ' όλα, θυμηθείτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο E εξασθενεί αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση r ($E \sim 1/r^2$). Υπερπηδώντας μερικά ενδιάμεσα βήματα, θα τόνιζα ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός ραδιοκύματος στον ελεύθερο χώρο μειώνεται πολύ πιο αργά —αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση ($E \sim 1/r$). Αυτή είναι μάλλον μια σημαντική διαφορά, που, όπως θα δούμε παρακάτω, αποδεικνύεται πολύ πιο δραστική απ' ό,τι φαίνεται.

Το πρόβλημα έγκειται στο ότι το Σχήμα 1 περιέχει ένα θεμελιώδες λάθος. Στην πραγματικότητα το ηλεκτρικό φορτίο δεν μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί από μόνο του, επειδή ως μέγεθος διατηρείται. Για να μεταβληθεί το φορτίο Q ενός σώματος, το τελευταίο πρέπει να συνδεθεί με πηγή τάσης, η οποία έχει πάντοτε δύο πόλους και παράγει ταυτοχρόνως φορτία αντίθετων προσήμων. Επομένως, για να λειτουργήσει ο ηλεκτροστατικός ασύρματος τηλέγραφος στην πραγματικότητα θα έπρεπε να είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

Παρατηρούμε ότι η λειτουργία ενός πομπού που αποτελείται από δύο παλλόμενα φορτία $\pm Q(t)$ είναι λιγότερο αποδοτική, επειδή τα δύο ηλεκτρικά πεδία $\mathbf{E}_+$ και $\mathbf{E}_-$ εν μέρει αλληλοαναιρούνται (το συνολικό πεδίο που προκύπτει είναι το διανυσματικό άθροισμα $\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$). Θα απλοποιήσουμε τον αντίστοιχο υπολογισμό θεωρώντας την περίπτωση κατά την οποία ο δέκτης κείται επί της ευθείας που συνδέει τα δύο φορτία $\pm Q$. Τότε $\mathbf{E}_+ = k_e Q/r_+^2$ και $\mathbf{E}_- = -k_e Q/r_-^2$, όπου $r_+ = r - d/2$ και $r_- = r + d/2$ (d είναι η απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων). Στην περίπτωση που εξετάζουμε, το διανυσματικό άθροισμα μετατρέπεται σε αλγεβρικό, οπότε:

$$E = k_e Q\left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right) = \frac{2k_e Qrd}{\left(r^2 - d^2/4\right)^2}.$$

Είναι εύλογο να δεχτούμε ότι το μέγεθος του πομπού d είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με την απόσταση r ($d \ll r$). Έτσι, μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $d^2/4$ στον παρονομαστή:

$$E \cong 2k_e \frac{p_e}{r^3}, \qquad (3)$$

όπου η ποσότητα $p_e = Qd$ είναι γνωστή ως ηλεκτρική διπολική ροπή. Συνεπώς, το πραγματικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από έναν διπολικό πομπό εξασθενεί πολύ γρήγορα με την απόσταση ($E \sim 1/r^3$), γεγονός που το καθιστά ακατάλληλο για τη μετάδοση σημάτων σε *μεγάλες* αποστάσεις.

Υπολογίσαμε το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα του διπόλου. Σε οποιαδήποτε άλλη κατεύθυνση το E θα εξαρτάται επιπλέον από τις γωνιακές συντεταγμένες· ωστόσο, η παραπάνω εξάρτηση από την απόσταση ($E \sim 1/r^3$) παραμένει ίδια.

Βέβαια, θα μπορούσε κανείς να φανταστεί έναν πιο πολύπλοκο πομπό, που θα αποτελούνταν από τρία ή περισσότερα φορτία διευθετημένα με τρόπο ώστε η εξασθένηση του πεδίου να διέπεται από έναν διαφορετικό νόμο. Πράγματι, αυτό μπορεί να γίνει (τα αντίστοιχα πεδία καλούνται πολυπολικά)· τότε προκύπτει μια διαφορετική συνάρτηση για την ελάττωση της έντασης του πεδίου: $E \sim 1/r^n$. Εφόσον όμως $n \geq 3$, τα πολυπολικά πεδία αποδεικνύονται ακόμη λιγότερο κατάλληλα για την ασύρματη τηλεγραφία απ' όσο τα διπολικά.

Εφεύρεση-φάντασμα Νο 2

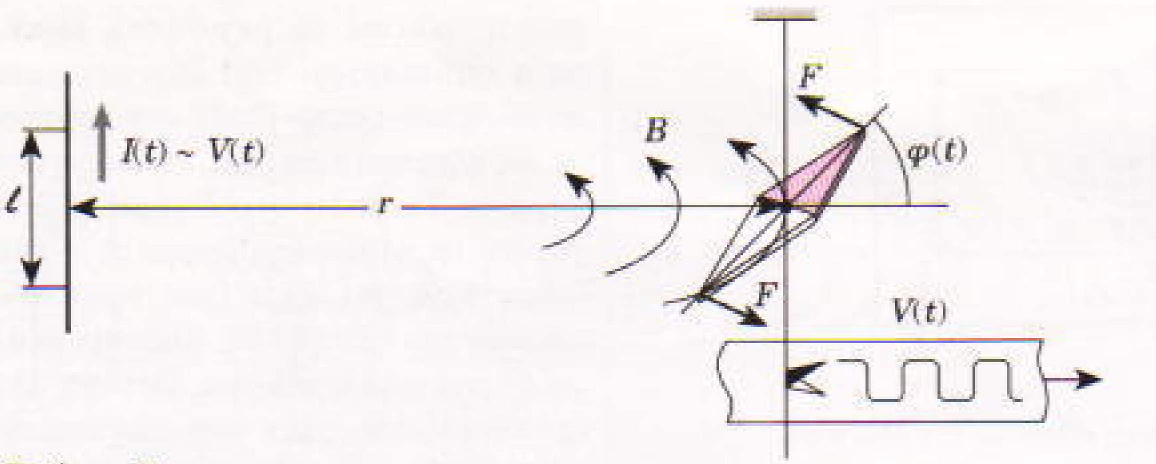
Ο «μαγνητοστατικός» ασύρματος τηλέγραφος θα μπορούσε να είχε εμφανιστεί στις αρχές του 19ου αιώνα. Η προσπάθεια να χρησιμοποιήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο δεν εστέφθη με απόλυτη επιτυχία, αλλά μήπως το μαγνητικό πεδίο θα μπορούσε να προσφέρει την επιθυμητή λύση; Τη βάση για ένα τέτοιο πείραμα αποτελεί ο νόμος Biot-Savart, που ανακαλύφθηκε από τους γάλλους φυσικούς Jean Biot και François Savart το 1820. Σύμφωνα με τον συγκεκριμένο νόμο, ηλεκτρικό ρεύμα I που διαρρέει ευθύγραμμο αγωγό μήκους ℓ παράγει στον γύρω χώρο μαγνητικό πεδίο

$$B = \frac{k_m I\ell}{r^2}, \qquad (4)$$

όπου r είναι η απόσταση από τον αγωγό, και k_m μια σταθερά αναλογίας που εξαρτάται από τις μονάδες. Το σημείο παρατήρησης υποτίθεται ότι βρίσκεται πολύ μακριά ($r \gg \ell$) και πάνω στο επίπεδο που διέρχεται από το μέσο του αγωγού και κάθετα προς αυτόν. Για όλες τις άλλες κατευθύνσεις ο παραπάνω τύπος γίνεται αρκετά περίπλοκος, αλλά η γενική εξάρτηση $B \sim 1/r^2$ παραμένει αληθής.

Στο επίπεδο που θεωρήσαμε προηγουμένως, οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κύκλοι (Σχήμα 3). Η ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου μπορεί να επιδειχτεί με μια μικρή μαγνητική βελόνα, η οποία θα ηρεμήσει «κατά μήκος» μιας ορισμένης δυναμικής γραμμής. Η όλη διάταξη μοιάζει πολύ με την πρώτη εκδοχή του ηλεκτροστατικού μας εγχειρήματος (βλ. Σχήμα 1).

Για να μεταδώσουμε ένα σήμα $V(t)$, το ρεύμα $I(t)$ πρέπει να μεταβάλλεται κατά τον ίδιο τρόπο. Ομοίως θα μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο, όπως και η ροπή που ασκείται σε μια



Σχήμα 3

Απλοποιημένη σχηματική παράσταση του «μαγνητοστατικού» ασύρματου τηλέγραφου.

μικρή μαγνητική βελόνα που είναι αναρτημένη από λεπτό νήμα. Οι αποκλίσεις της βελόνας αποτυπώνονται στη χαρτοταινία ενός καταγραφικού μηχανήματος, και κατ' αυτό τον τρόπο αναπαράγεται το σήμα.

Όλα φαίνεται να πηγαίνουν καλά: η εξασθένηση του μαγνητικού πεδίου ($B \sim 1/r^2$) είναι πολύ βραδύτερη απ' ό,τι του ηλεκτρικού διπολικού πεδίου ($E \sim 1/r^3$). Αλίμονο όμως —εδώ έχουμε διαπράξει το ίδιο λάθος που μας ανάγκασε να αντικαταστήσουμε το Σχήμα 1 με το Σχήμα 2. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι ηλεκτρικό ρεύμα μπορεί να διαρρέει τον αγωγό μόνο εάν το κύκλωμα είναι *κλειστό* —δηλαδή αν συνδέει τους δύο πόλους μιας πηγής τάσης. Επομένως η σωστή διάταξη είναι αυτή του Σχήματος 4.

Ωστόσο, σ' ένα κλειστό κύκλωμα, κάθε τμήμα του μπορεί να παραβληθεί με ένα άλλο τμήμα, που διαρρέεται από ρεύμα αντίθετης κατεύθυνσης. Τα τμήματα αυτά επισημαίνονται στο Σχήμα 4 ως I και II. Το ότι έχουμε σχεδιάσει το κύκλωμά μας σε σχήμα ορθογωνίου δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Η ουσία του σκεπτικού μας είναι ίδια, ανεξάρτητα από το σχήμα του κυκλώματος.

Τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούν τα αντίθετα ρεύματα εν μέρει αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα το συνολικό μαγνητικό πεδίο να καθορίζεται από μια έκφραση αρκετά όμοια με τον τύπο (3):

$$B \cong 2k_m \frac{p_m}{r^3}, \qquad (5)$$

όπου $p_m = IS$ είναι η μαγνητική ροπή ενός κλειστού βρόχου ρεύματος που περικλείει επιφάνεια εμβαδού S. Στην περίπτωση μας $S = \ell d$ και $p_m = I\ell d$. Η έκφραση (5) ισχύει για σημείο παρατήρησης στον άξονα του πλαισίου και αρκούντως μακριά από αυτό ($r >> \ell$, $r >> d$). Σε κάθε άλλη κατεύθυνση το B εξαρτάται από τις γωνιακές συντεταγμένες, αλλά ο νόμος $B \sim 1/r^3$ παραμένει αληθής.

Για μία ακόμη φορά έχουμε προσκρούσει στην ενοχλητική εξάρτηση $\sim 1/r^3$, η οποία πράγματι αρκεί για να ματαιώσει τα σχέδιά μας. Φυσικά μπορούμε να παρακάμψουμε την έκφραση (5) τοποθετώντας το καλώδιο II σε τόσο μεγάλη απόσταση d ώστε πρακτικά να μην επηρεάζει το μαγνητικό πεδίο που παράγει το καλώδιο I. Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, όμως, θα χρειαζόμασταν έναν «πομπό» (δηλαδή έναν κλειστό βρόχο) του ίδιου περίπου μήκους με την απόστασή του από το «δέκτη». Μάλλον υπερβολικό για «ασύρματο» τηλέγραφο!

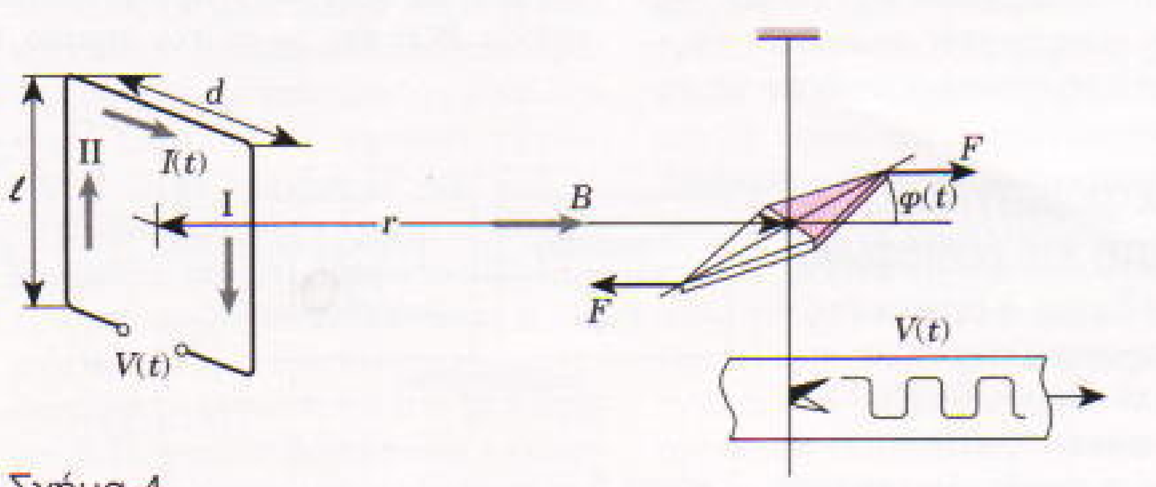
Ένα και αδιαίρετο

Στα μέσα του 19ου αιώνα είχε πλέον αναγνωριστεί ότι τα εναλλασσόμενα πεδία $E(t)$ και $B(t)$ αποτελούν ένα ενιαίο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Χάρη σ' αυτό το πεδίο κατέστη δυνατή η λύση του προβλήματος του ασύρματου τηλέγραφου.

Όταν εξετάσαμε τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους επικοινωνίας, χρησιμοποιήσαμε εκφράσεις του στατικού ηλεκτρισμού (νόμος του Coulomb) και μαγνητισμού (νόμος Biot-Savart). Είχαμε σιωπηρά υποθέσει ότι οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και όταν το φορτίο ή το ρεύμα που απαιτούνται για τη μετάδοση κάποιου σήματος μεταβάλλονται χρονικά. Εντούτοις, το σκεπτικό μας ήταν λανθασμένο, πράγμα που μπορούμε να δούμε ξεκάθαρα αν αναρωτηθούμε πόσο γρήγορα μεταδίδεται το σήμα από τον «πομπό» στο «δέκτη» στα συστήματα που εξετάσαμε παραπάνω.

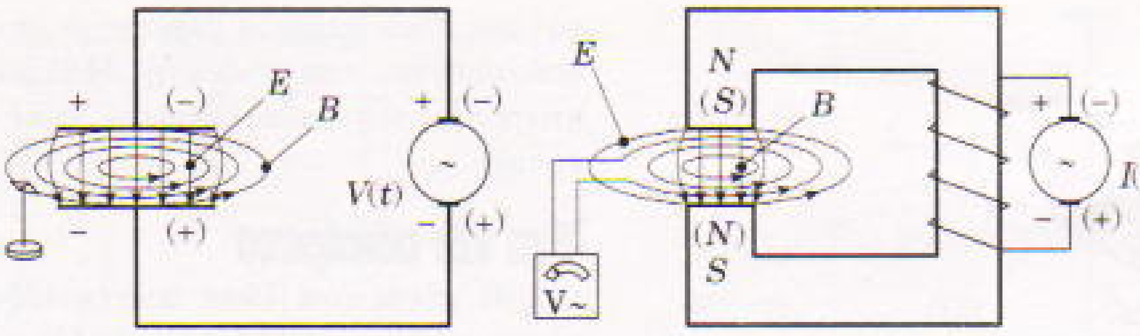
Εφόσον τα πεδία $E(t)$ και $B(t)$ «μιμούνται» σε οποιαδήποτε απόσταση επακριβώς τις μεταβολές των $Q(t)$ και $I(t)$ (μόνο τα πλάτη των E και B μειώνονται· η χρονική εξάρτησή τους είναι ακριβώς ίδια μ' αυτή των Q και I), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα σήματα διαδίδονται με *άπειρη ταχύτητα*. Το εν λόγω συμπέρασμα, όμως, αντιφάσκει με ένα πολύ σημαντικό αξίωμα της θεωρίας της σχετικότητας, σύμφωνα με το οποίο κανένα σήμα δεν μπορεί να διαδοθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή του φωτός. Έτσι, στο σκεπτικό μας δεν λάβαμε υπόψη κάτι σημαντικό —συγκεκριμένα το γεγονός ότι δεν μπορούμε να εφαρμόζουμε τους τύπους του στατικού ηλεκτρισμού και μαγνητισμού σε χρονικώς μεταβαλλόμενα φορτία και ρεύματα. (Δεν είναι τυχαίο ότι τοποθετήσαμε τις λέξεις «ηλεκτροστατικός» και «μαγνητοστατικός» εντός εισαγωγικών όταν ονοματοθετούσαμε τις συσκευές μας.)

Όταν έχουμε να κάνουμε με μεταβαλλόμενα πεδία **E** και **B**, δεν μπορούμε να τα θεωρούμε απομονωμένα το ένα από το άλλο. Οι αλληλοσυ-



Σχήμα 4

Πραγματική σχηματική παράσταση του «μαγνητοστατικού» ασύρματου τηλέγραφου.



Σχήμα 5

Πειράματα για την επίδειξη της πρώτης και της δεύτερης εξίσωσης του Maxwell.

σχετίσεις τους είναι τόσο στενές, ώστε αποτελούν ένα ενιαίο αδιαίρετο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Οι βασικές προτάσεις της σύγχρονης θεωρίας του *ηλεκτρομαγνητικού πεδίου* διατυπώθηκαν στην περίοδο 1860-1865 από τον άγγλο φυσικό James Clerk Maxwell, του οποίου το έργο πήγασε από τις ιδέες και τα πειράματα του προδρόμου του Michael Faraday. Το όνομα του Faraday είναι συνδεδεμένο με το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, και οι περίφημες εξισώσεις του Maxwell παίζουν ένα ρόλο τόσο θεμελιώδη στην ηλεκτροδυναμική, όσο οι νόμοι του Νεύτωνα στην κλασική φυσική.

Θα σας παρουσιάσω την ουσία των εξισώσεων του Maxwell με δύο φανταστικά πειράματα (τα οποία, ωστόσο, μπορείτε εύκολα να πραγματοποιήσετε στο εργαστήριο). Το αριστερό μέρος του Σχήματος 5 δείχνει έναν πυκνωτή συνδεδεμένο με μια πηγή μεταβαλλόμενης τάσης $V(t)$. Το φορτίο του πυκνωτή μεταβάλλεται διαρκώς, όπως και το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ μεταξύ των οπλισμών. Σύμφωνα με την *πρώτη εξίσωση του Maxwell*, μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(t)$ επάγει γύρω του μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Οι δύο μεταβλητές $\mathbf{r}$ και t δείχνουν ότι το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται με το χρόνο αλλά και με τη θέση. Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κύκλοι που περιβάλλουν τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές.

Προσέξτε ότι στον «κενό» χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή δεν υπάρχουν καλώδια που να διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα. Μολαταύτα, εκεί υπάρχει μαγνητικό πεδίο! Τούτο σημαίνει ότι το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, όπως ακριβώς το ηλεκτρικό ρεύμα, αποτελεί πηγή μαγνητικού πεδίου. Για να διακρίνουμε μάλιστα τις δύο πηγές μαγνητικού πεδίου, θα τις αναφέρουμε ως *ρεύμα αγωγιμότητας* (η κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων σ' έναν αγωγό) και *ρεύμα μετατόπισης* (το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο στον «κενό» χώρο ενός διηλεκτρικού). Ο Maxwell ήταν ο πρώτος που εισήγαγε στη φυσική την έννοια του ρεύματος μετατόπισης.

Τώρα κοιτάξτε το δεξιό μέρος του Σχήματος 5. Δείχνει ένα σωληνοειδές με κάποιον «κενό» χώρο στον πυρήνα του. Εναλλασσόμενο ρεύμα διαρρέει την περιέλιξη και παράγει μεταξύ των πόλων μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές διαγράφουν κύκλους γύρω από το διάκενο του πυρήνα, όπως ακριβώς οι ηλεκτρικές γραμμές γύρω από το διάκενο του πυκνωτή, στο αριστερό μέρος του Σχήματος 5. Σύμφωνα με τη *δεύτερη εξίσωση του Maxwell*, μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}(t)$ επάγει γύρω του ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (το οποίο μπορεί να ανιχνευτεί με τη βοήθεια ενός πηνίου και ενός βολτομέτρου). Μπορείτε να δείτε τη συμμετρία των ιδιοτήτων των πεδίων $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ στο σχήμα.

Η περιγραφή μας στα παραπάνω πειράματα είναι εντελώς ποιοτική. Δεν κάναμε κανέναν υπολογισμό (είναι μάλλον περίπλοκοι)· ωστόσο, οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να λυθούν αριθμητικά και να μας δώσουν λεπτομερείς ποσοτικές περιγραφές των συγκεκριμένων πειραμάτων.

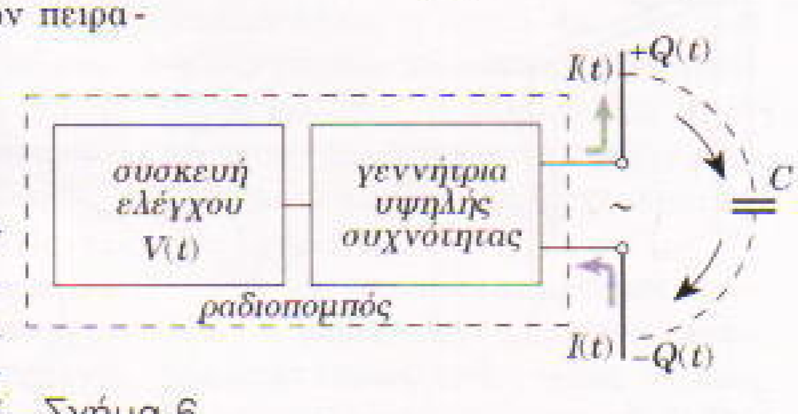
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα και ραδιόφωνο

Το Σχήμα 6 δείχνει έναν ραδιοφωνικό πομπό με κεραία. Ο πομπός διαθέτει μια γεννήτρια υψηλής συχνότητας η οποία λειτουργεί υπό τον έλεγχο του σήματος που πρόκειται να μεταδοθεί. Η κεραία αποτελείται από δύο σύρματα συνδεδεμένα στην έξοδο του πομπού.

Ας εξετάσουμε πώς λειτουργεί η κεραία. Τα βέλη στο Σχήμα 6 δείχνουν τα ηλεκτρικά ρεύματα —εδώ όμως υπάρχει κάτι που προκαλεί απορία: πώς μπορεί να υπάρχει ρεύμα σε ανοικτό κύκλωμα; Ωστόσο, όλα ξεκαθαρίζουν, όταν συνειδητοποιήσουμε ότι οι δύο βραχίονες της κεραίας δεν αποτελούν παρά τους «οπλισμούς» κάποιου είδους πυκνωτή. Το αριστερό τμήμα του Σχήματος 7 δείχνει τη βαθμιαία μεταμόρφωση ενός κοινού πυκνωτή σε κεραία. Το εναλλασσόμενο ρεύμα που παρέχεται από τον πομπό είναι το ρεύμα φόρτισης και εκφόρτισης του «πυκνωτή» της κεραίας (που παριστάνεται με διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 6). Το σχέδιο έχει απλοποιηθεί κατά το εξής: δεν υπάρχει ένας μοναδικός πυκνωτής συνδεδεμένος σε συγκεκριμένα σημεία των καλωδίων, αλλά μάλλον πολλοί «πυκνωτές» κατανεμημένοι καθ' όλο το μήκος της κεραίας. Με άλλα λόγια, η κεραία έχει μια κατανεμημένη χωρητικότητα.

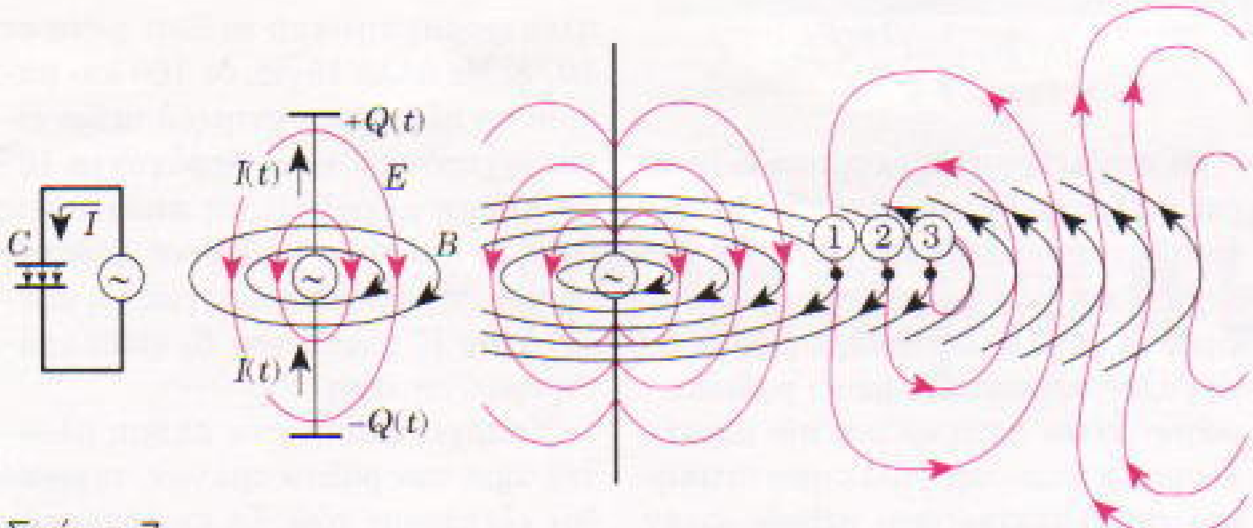
Ο κύκλος φόρτισης-εκφόρτισης του «πυκνωτή» της κεραίας που προκαλείται από το ηλεκτρικό ρεύμα $I(t)$ παράγει δύο αντίθετα φορτία $\pm Q(t)$ στους βραχίονες της κεραίας. Στο χώρο γύρω από την κεραία το ρεύμα δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}(t)$, και τα φορτία ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(t)$.

Όπως ανέφερα προηγουμένως, όμως, τα μεταβαλλόμενα πεδία $\mathbf{E}(t)$ και $\mathbf{B}(t)$ διαπλέκονται, και δεν μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε ξεχωριστά. Για παράδειγμα, κοιτάξτε το σημείο 1 στο Σχήμα 7. Μια μεταβολή στο $\mathbf{E}(t)$ θα οδηγήσει στη δημιουργία πεδίου $\mathbf{B}(t)$ όχι μόνο στο σημείο 1



Σχήμα 6

Ραδιοπομπός με κεραία.



Σχήμα 7
Μετασχηματισμός ενός πυκνωτή σε κεραία και παραγωγή ραδιοκυμάτων.

αλλά και στο γειτονικό του σημείο 2 (όμοια με το αριστερό μέρος του Σχήματος 5). Το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο **B** επάγει ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο 3 (όμοια με το δεξιό μέρος του Σχήματος 5), κ.ο.κ. Έτσι, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα σε όλα τα σημεία του χώρου γύρω από την κεραία, αλλά διαδίδονται από το ένα σημείο στο άλλο με πεπερασμένη ταχύτητα. Το εν λόγω ζεύγος διαπλεκόμενων πεδίων **E** και **B** που εκπέμπεται από την κεραία είναι γνωστό ως *ηλεκτρομαγνητικό κύμα*, ειδικότερα ως *ραδιοφωνικό κύμα* (ή *ραδιοκύμα*).

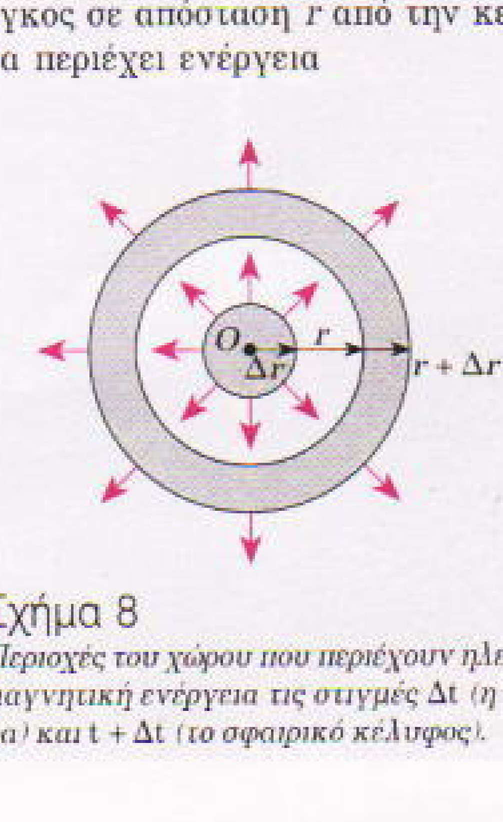
Η ταχύτητα των ραδιοκυμάτων μπορεί να υπολογιστεί από τις εξισώσεις του Maxwell. Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι η συγκεκριμένη ταχύτητα είναι ίδια με την ταχύτητα του φωτός c = 300.000 km/s. Αποδεικνύεται ότι τόσο τα φωτεινά όσο και τα ραδιοφωνικά κύματα αποτελούν βασικά το ίδιο φαινόμενο —ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαφορετικής συχνότητας. Σύμφωνα με τη σύγχρονη ορολογία, οι συχνότητες των ραδιοκυμάτων εκτείνονται από μερικά hertz ώς μερικά gigahertz (1 gHz = 10^9 Hz). Τα συστήματα μαζικής επικοινωνίας (ραδιόφωνο και τηλεόραση), ωστόσο, χρησιμοποιούν αποκλειστικά ταλαντώσεις υψηλών συχνοτήτων (στην περιοχή 10^5-10^9 Hz).

Στην πραγματικότητα, αυτό που ξεχωρίζει τον «ηλεκτροστατικό» από τον ραδιοφωνικό πομπό είναι η συχνότητα. Δεν συνιστά σημαντική διαφορά το γεγονός ότι στο μεν Σχήμα 2 τα φορτία βρίσκονται εντοπισμένα στα άκρα των καλωδίων ενώ στο Σχήμα 6 κατανέμονται καθ' όλο το μήκος του καλωδίου (της κεραίας). Εκείνο που έχει σημασία είναι ότι στην πρώτη περίπτωση τα φορτία *μεταβάλλονται κατά τον ίδιο τρόπο* με το μεταδιδόμενο σήμα $V(t)$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα φορτία και τα ρεύματα ταλαντώνονται σε πολύ υψηλή συχνότητα —πολύ υψηλότερη από τη συχνότητα του μεταδιδόμενου σήματος. Το μεταδιδόμενο σήμα απλώς διαμορφώνει τις ταλαντώσεις υψηλής συχνότητας που παράγονται στον πομπό. Στην απλή περίπτωση της μετάδοσης ενός τηλεγραφικού σήματος (στον κώδικα Morse), ο πομπός ενεργοποιείται και απενεργοποιείται από το κλειδί του χειριστή. Στην περίπτωση μετάδοσης ραδιοφωνικών ή τηλεοπτικών σημάτων, ο έλεγχος του πομπού είναι μεν πολύ περίπλοκος, ωστόσο η κεραία ακτινοβολεί μόνο υψηλής συχνότητας ραδιοκύματα και όχι τις χαμηλής συχνότητας ταλαντώσεις του μεταδιδόμενου σήματος $V(t)$.

Η θεωρητική πρόβλεψη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων απαιτούσε επιτακτικά μια πειραματική επιβεβαίωση. Την επέτυχε το 1888 ο γερμανός φυσικός Heinrich Hertz. Ο δρόμος για την ασύρματη τηλεγραφία ήταν πλέον ορθάνοικτος —αλλά χρειάστηκαν ακόμη μερικά χρόνια μέχρι να μετατραπεί η ιδέα σε συσκευή. Όταν, την άνοιξη του 1896, ο Alexander Popov προχώρησε σε επίδειξη του ραδιοτηλέγραφού του, οι πρώτες λέξεις που μεταδόθηκαν σε απόσταση 250 μέτρων ήταν «Генрих Герцъ» («Heinrich Hertz» στα ρωσικά).

Μετά τα πειράματα του Hertz η εφεύρεση του ραδιοτηλέγραφου ήταν απλώς θέμα χρόνου. Ανεξάρτητα από τον Popov, και κατ' ουσία ταυτόχρονα, μια παρόμοια ραδιοσυσκευή κατασκευάστηκε από τον ιταλό φυσικό Guglielmo Marconi, που εργαζόταν στην Αγγλία. Η εμβέλεια του ασύρματου τηλέγραφου αυξανόταν σταθερά, και το 1901 ο Marconi πέτυχε να μεταδώσει ραδιοφωνικά σήματα πέρα από τον Ατλαντικό Ωκεανό. Οι ραδιοεπικοινωνίες είχαν πλέον ενώσει τις ηπείρους.

Καθώς η ιστορία μας πλησιάζει το τέλος της, χρειάζεται να εξηγήσουμε γιατί η μετάδοση πληροφοριών μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων αποδείχτηκε πολύ αποτελεσματικότερη από την «ηλεκτροστατική» και τη «μαγνητοστατική» προσέγγιση. Ας τοποθετήσουμε έναν πομπό και την κεραία του στο σημείο O (Σχήμα 8). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο πομπός τίθεται σε λειτουργία, και έπειτα από χρόνο Δt σταματά να εκπέμπει. Όσο ο πομπός λειτουργεί, ένα ραδιοκύμα απλώνεται από την κεραία σε απόσταση $\Delta r = c\Delta t$. Υποθέτοντας ότι η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας δεν εξαρτάται από την κατεύθυνσή της, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μια σφαίρα αυτής της ακτίνας είναι ομογενώς πλήρης από ηλεκτρομαγνητική ενέργεια $\Delta W = P\Delta t$, όπου P είναι η ακτινοβολούμενη ισχύς. Αφού ο πομπός τεθεί εκτός λειτουργίας, το ραδιοκύμα απλώνεται μακρύτερα, και έπειτα από χρόνο t η ίδια ενέργεια γεμίζει ένα σφαιρικό κέλυφος που ορίζεται από τις σφαιρικές επιφάνειες ακτίνων $r = ct$ και $r + \Delta r = c(t + \Delta t)$. Ο όγκος του κελύφους τη χρονική στιγμή $t >> \Delta t$ είναι $\Delta V \cong 4\pi r^2 \Delta r$, άρα ο μοναδιαίος όγκος σε απόσταση r από την κεραία θα περιέχει ενέργεια



Σχήμα 8
Περιοχές του χώρου που περιέχουν ηλεκτρομαγνητική ενέργεια τις στιγμές Δt (η σφαίρα) και t + Δt (το σφαιρικό κέλυφος).

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\Delta W}{4\pi r^2 c \Delta t} = \frac{P}{4\pi r^2 c}.$$

Έτσι, η πυκνότητα ενέργειας ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης ($w \sim 1/r^2$).

Θυμηθείτε τώρα ότι η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου είναι $w_E = \varepsilon_0 E^2/2 = E^2/8\pi k_e$ (η μέση τιμή της ανά μονάδα χρόνου είναι ακριβώς η μισή), και ότι η ενέργεια του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ίσες. Έτσι,

$$\frac{E^2}{8\pi k_e} = \frac{P}{4\pi r^2 c},$$

οπότε το πλάτος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων είναι

$$E = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2k_e P}{c}}.$$

Η συγκεκριμένη έκφραση δείχνει ότι η ελάττωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογη του $1/r$. Το ίδιο ισχύει και για το μαγνητικό πεδίο. Άρα, νά γιατί η μετάδοση σημάτων *σε μεγάλες αποστάσεις* μέσω ραδιοκυμάτων είναι ασυγκρίτως πιο αποτελεσματική από την «ηλεκτροστατική» και «μαγνητοστατική» μέθοδο (στην πραγματικότητα είναι ο μοναδικός τρόπος που γνωρίζουμε). Υποθέστε, για παράδειγμα, ότι σε απόσταση 10 m οι εντάσεις ενός ηλεκτροστατικού και ενός υψηλής συχνότητας ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες: $E_0 = E_\sim = E$. Τότε, σε απόσταση, ας πούμε, 100 km, η ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου μειώνεται σε $10^{-12}E$, ενώ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μόνο σε $10^{-4}E$. Με άλλα λόγια, σε 100 km μακριά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι ισχυρότερο κατά παράγοντα 10^8! Σε ακόμη μεγαλύτερες αποστάσεις (τα 100 km είναι μηδαμινή απόσταση για τις ραδιοεπικοινωνίες), η υπεροχή του $E_\sim$ έναντι του E_0 είναι ακόμη εμφανέστερη.

Υπάρχει επίσης ένα ακόμη πλεονέκτημα των ραδιοκυμάτων, το οποίο δεν εξετάσαμε εδώ. Τα εν λόγω κύματα μπορούν να διαδοθούν σε οποιοδήποτε μέσο, αρκεί η ηλεκτρική του αγωγιμότητα να μην είναι πολύ υψηλή. Είναι αλήθεια ότι σ' αυτή την περίπτωση το $E_\sim$ υφίσταται επιπλέον εξασθένηση, αλλά ένα χρονικώς σταθερό ηλεκτρικό πεδίο E_0 δεν μπορεί καν να διέλθει μέσα από ένα τέτοιο μέσο. ◘

Για να περνά η ώρα

Σ81

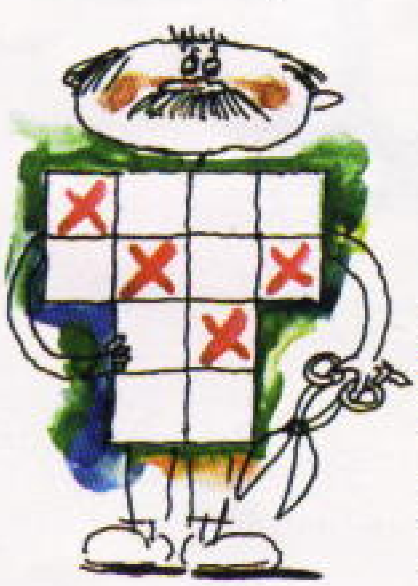
Χωρίστε το L. Χωρίστε το σχήματος L σχέδιο της εικόνας σε δύο τμήματα και κατασκευάστε από αυτά ένα τετράγωνο έτσι ώστε το σχέδιο που θα δημιουργηθεί από τα έγχρωμα τετράγωνα να είναι συμμετρικό ως προς τους άξονες συμμετρίας του μεγάλου τετραγώνου.

Σ82

Το χαμένο βάρος. Δίνεται ένα σύνολο από ζύγια που έχουν μάζες 1 g, 2 g, 3 g, ..., 101 g. Το ζύγι των 19 g λείπει. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε τα υπόλοιπα εκατό ζύγια σε δύο ομάδες που θα αποτελούνται από ίσο πλήθος στοιχείων και θα έχουν την ίδια συνολική μάζα; (V. Proizvolov)

Σ83

Φυσικοί κανόνες ασφαλείας. Είναι ασφαλέστερο, όταν πηδάτε από ύψος, να πέφτετε πάνω σε άμμο παρά σε σκληρό έδαφος. Γιατί;



Σ84

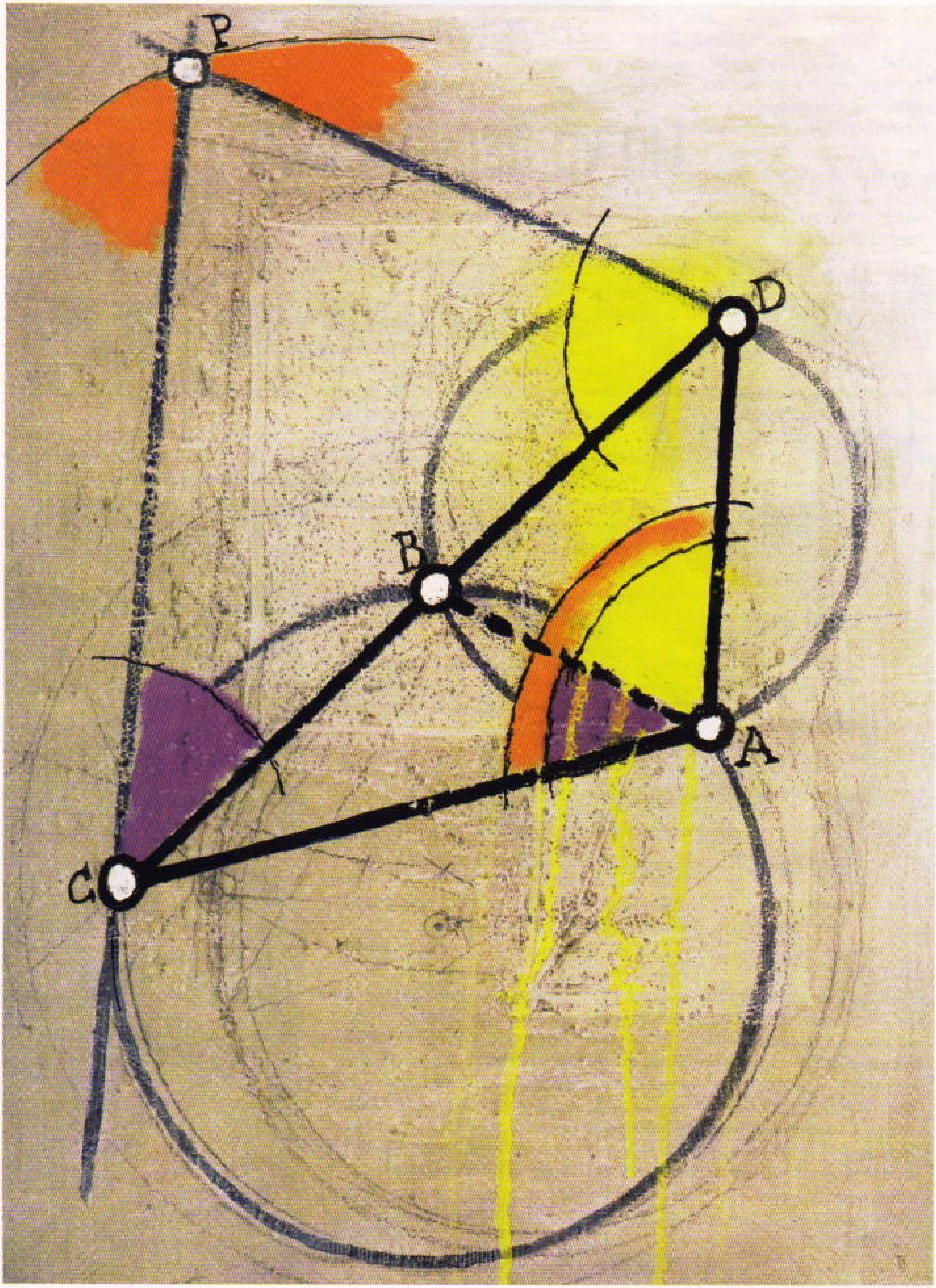
Χωρίστε το T. Χωρίστε σε τέσσερα ίσα τμήματα το σχήματος T σχέδιο της εικόνας, ακολουθώντας τις γραμμές του πλέγματος, έτσι ώστε κάθε τμήμα να περιέχει ένα μόνο σημειωμένο τετράγωνο.

Σ85

Η λογική των σκακιστικών αγώνων. Μετά το τέλος ενός τουρνουά σκακιού του ενός γύρου (κατά τον οποίο κάθε παίκτης έπαιξε με όλους τους αντιπάλους του μία φορά), οι παίκτες A, B, C, D και E (τους οποίους παραθέτουμε σύμφωνα με τη σειρά κατάταξής τους) αντάλλαξαν εντυπώσεις. «Ήταν αδύνατον να φανταστώ ότι θα ήμουν ο μοναδικός που δεν ηττήθηκε», είπε ο B. «Και εγώ ότι θα ήμουν ο μοναδικός χωρίς νίκη», παραπονέθηκε ο E. Με βάση αυτές τις πληροφορίες προσπαθήστε να κατασκευάσετε τον πλήρη πίνακα αποτελεσμάτων του τουρνουά: ποια ήταν τα αποτελέσματα των πέντε παικτών με τους αντιπάλους τους. (Σ' έναν αγώνα σκακιού, ο νικητής κερδίζει ένα βαθμό, ενώ σε περίπτωση ισοπαλίας οι παίκτες παίρνουν από μισό βαθμό. Στο συγκεκριμένο τουρνουά δεν υπήρξαν παίκτες με την ίδια βαθμολογία.) (S. Guba)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky


P
D
B
A
C

Εγγράψτε, υποτείνετε, περιγράψτε

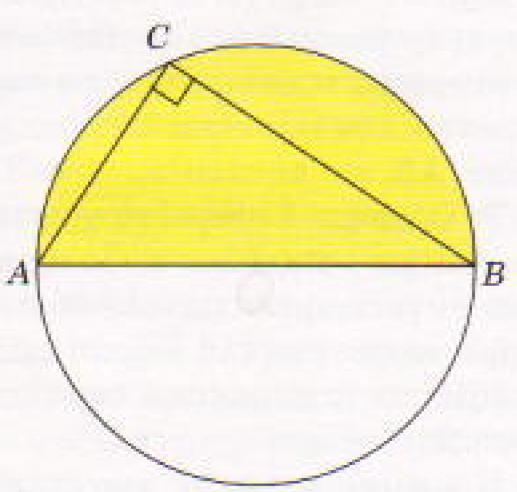
«... αν τρίγωνο μπορείς σε μισοκύκλι
χωρίς ορθή γωνία ποτέ να μπάσεις.»
—Δάντης, *Θεία Κωμωδία (Παράδεισος)* (μετ.: Νίκος Καζαντζάκης)

Vladimir Uroyev και Mikhail Shabunin

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΓΙΑ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΓΡΑΦΕΙ ο Δάντης είναι αδύνατον να υπάρξει (Σχήμα 1). Ο συγγραφέας του αθανάτου ποιήματος παρουσιάζει αυτό το γεγονός, μαζί με άλλες επιστημονικές αλήθειες οι οποίες προφανώς θεωρούνταν παγκοσμίως γνωστές, για όσους από τους συγχρόνους του είχαν κάποια παιδεία. Θα ήταν πρέπον εδώ να θυμηθούμε την εποχή που έζησε ο Δάντης Αλιγκιέρι (1265-1321) και να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι ο ίδιος δεν ήταν μαθηματικός. Άφησε τα ίχνη του στην ιστορία ως ποιητής και φιλόσοφος, ο δημιουργός της γραπτής ιταλικής παράδοσης.

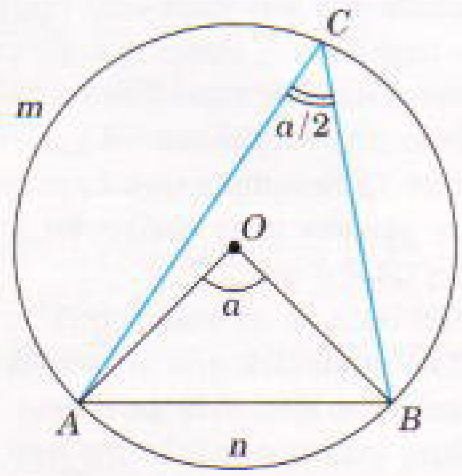
Στο παρόν άρθρο θα μελετήσουμε τρίγωνα εγγεγραμμένα σε ημικύκλια καθώς και άλλους γεωμετρικούς σχηματισμούς που βασίζονται στο παρακάτω ευρέως γνωστό θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (Θεώρημα εγγεγραμμένων γωνιών). *Μια εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το ήμισυ της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.*



Σχήμα 1

Εικονογράφηση: Yury Vashchenko



Σχήμα 2

Το εν λόγω θεώρημα συναντάται συχνά με την ακόλουθη ισοδύναμη διατύπωση:

Έστω α η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο AnB *ενός δεδομένου κύκλου (Σχήμα 2). Τότε από οποιοδήποτε σημείο του τόξου* AmB *η χορδή* AB *φαίνεται υπό γωνία α/2.*

Σύμφωνα με το θεώρημα, η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε διάμετρο είναι ορθή, κι έτσι «ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο» είναι απαραίτητα ορθογώνιο. Τούτο το γεγονός αποδεικνύεται χρήσιμο, για παράδειγμα στο ακόλουθο πρόβλημα.

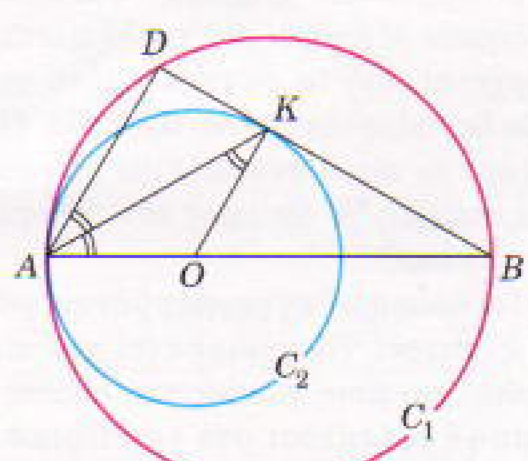
Πρόβλημα 1. Σ' έναν κύκλο C_1 που κατασκευάζεται με διάμετρο ένα ευθύγραμμο τμήμα AB, φέρνουμε τη χορδή DB. Ένας κύκλος C_2 εφάπτεται στο άκρο A του AB, και στο ευθύγραμμο τμήμα DB στο σημείο του K. Αποδείξτε ότι το τμήμα AK διχοτομεί τη γωνία DAB (Σχήμα 3).

Λύση. Έστω ότι το κέντρο του κύκλου C_2 είναι το σημείο O, επί του τμήματος AB. Η ακτίνα που χαράσσεται από το O στο σημείο επαφής K είναι κάθετη στο τμήμα DB και άρα παράλληλη του AD, αφού η γωνία ADB βαίνει σε διάμετρο. Οπότε η γωνία DAK ισούται με τη γωνία AKO. Τελικά, παρατηρούμε ότι η γωνία AKO ισούται με την KAO, αφού $OA = OK$ και $\angle DAK = \angle OAK$.

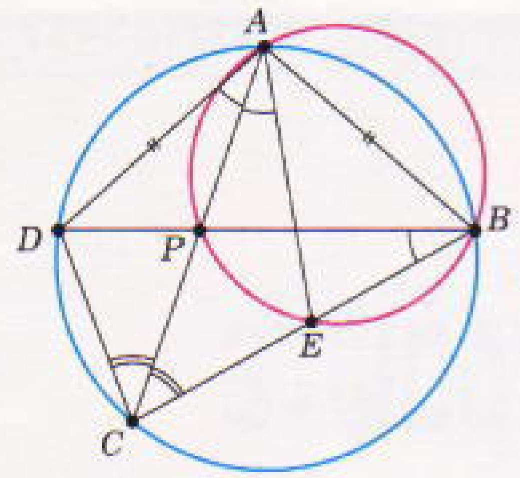
Παρατaύτα, η ακόλουθη απλή συνέπεια του Θεωρήματος 1 χρησιμοποιείται ακόμη πιο συχνά:

Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.

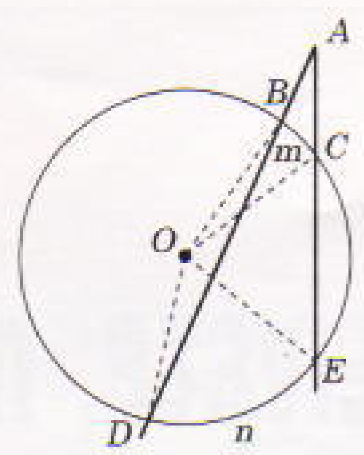
Κατά κανόνα, όταν θέλουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα με κύκλους



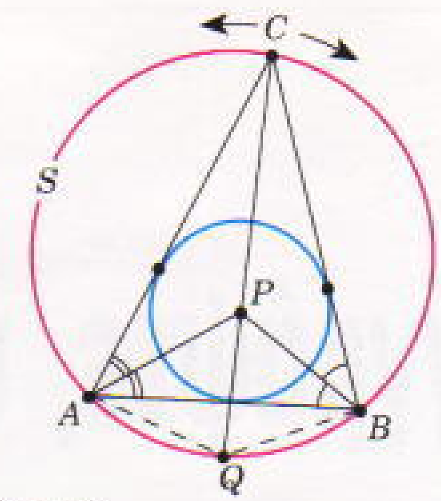
Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 7

και πολύγωνα εγγεγραμμένα σ' αυτούς, αναζητούμε ίσες εγγεγραμμένες γωνίες ή προσπαθούμε να τις κατασκευάσουμε χαράσσοντας διάφορες χορδές. Όσο περισσότερες εγγεγραμμένες γωνίες βρίσκουμε, τόσο πιο εύκολη είναι η οδός προς τη λύση.

Πρόβλημα 2. Οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου *ABCD*, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τέμνονται στο σημείο *P*. Ένας άλλος κύκλος, που διέρχεται από τα *A*, *B* και *P*, τέμνει το τμήμα *BC* στο *E*. Αποδείξτε ότι, αν $AB = AD$, τότε $CD = CE$ (Σχήμα 4).

Λύση. Φέρουμε τη χορδή *AE* και βρίσκουμε ίσες μεταξύ τους εγγεγραμμένες γωνίες. Στον έναν κύκλο υπάρχουν οι γωνίες *DAC* και *DBC*, ενώ στον άλλο οι γωνίες *PAE* και *PBE*. Επομένως, $\angle DAC = \angle CAE$. Επιπροσθέτως, οι γωνίες *DCA* και *ACB* οι οποίες βαίνουν σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες. Έτσι, έπεται ότι τα τρίγωνα *DCA* και *ECA* είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες πλευρές τους *DC* και *EC* είναι ίσες.

Άσκηση 1. Αποδείξτε το θεώρημα για τις τεμνόμενες χορδές κύκλου: *Αν οι χορδές* AB *και* CD *ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο* M, *τότε ισχύει:* $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Με άλλα λόγια, το γινόμενο των τμημάτων στα οποία το σημείο *M* διαιρεί μία χορδή η οποία διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο δεν εξαρτάται από τη χορδή. (Το γινόμενο αυτό ονομάζεται δύναμη του σημείου *M* ως προς τον δεδομένο κύκλο.)

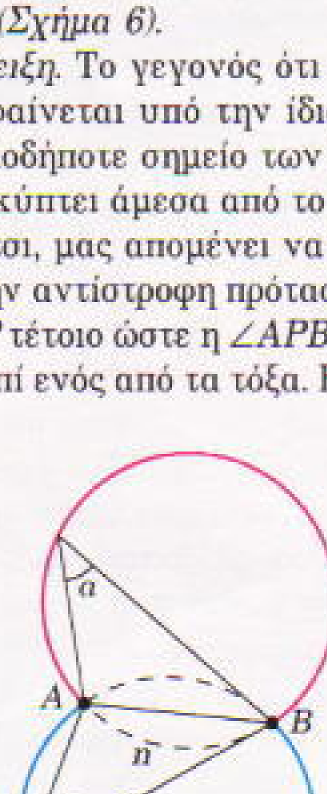
Το θεώρημα εγγεγραμμένης γωνίας μπορεί να γενικευτεί για την περίπτωση μιας γωνίας της οποίας η κορυφή βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του κύκλου.

Άσκηση 2. (α) Υποθέστε ότι μια γωνία με την κορυφή της *A* στο εξωτερικό ενός κύκλου αποκόπτει τα τόξα *BmC* και *DnE* επί του δεδομένου κύκλου (βλ. Σχήμα 5). Αποδείξτε ότι το μέτρο της γωνίας ισούται με το μισό της διαφοράς των μέτρων των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα —δηλαδή $\angle DAE = 1/_2(\angle DOE - \angle BOC)$. (β) Διατυπώστε και αποδείξτε μια παρόμοια πρόταση στην περίπτωση όπου η κορυφή *A* βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

Είναι συχνά βολικό να χρησιμοποιούμε το θεώρημα των εγγεγραμμένων γωνιών στην ακόλουθη, ισχυρότερη μορφή του:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία ένα δεδομένο τμήμα* AB *φαίνεται υπό σταθερή γωνία αποτελείται από δύο τόξα με άκρα* A *και* B *(εξαιρουμένων των* A *και* B*), συμμετρικά ως προς την* AB *(Σχήμα 6).*

Απόδειξη. Το γεγονός ότι το τμήμα *AB* φαίνεται υπό την ίδια γωνία από οποιοδήποτε σημείο των δύο τόξων προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 1. Έτσι, μας απομένει να αποδείξουμε την αντίστροφη πρόταση: Κάθε σημείο *P* τέτοιο ώστε η $\angle APB = a$ βρίσκεται επί ενός από τα τόξα. Η εν λόγω πρόταση, όμως, έπεται από την Άσκηση 2· αν το σημείο *P* βρίσκεται στο εξωτερικό του σχήματος που ορίζεται από τα τόξα, τότε $\angle APB < a$· αν το *P* βρίσκεται στο εσωτερικό του σχήματος, τότε έχουμε $\angle APB > a$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.



Σχήμα 6

Η πλέον προφανής κατηγορία προβλημάτων στα οποία εφαρμόζεται το Θεώρημα 2 είναι τα προβλήματα κατασκευών.

Άσκηση 3. Κατασκευάστε τρίγωνο αν δίνονται μια γωνία του, η απέναντί της πλευρά και (α) το ύψος, (β) η διάμεσος στην πλευρά.

Πρόβλημα 3. Ένα σημείο *C* διατρέχει το τόξο *AB* ενός κύκλου *S*. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία κινείται το έγκεντρο *P* του τριγώνου *ABC*.

Λύση. Το έγκεντρο βρίσκεται στην τομή των διχοτόμων του τριγώνου *ABC* (Σχήμα 7). Επομένως, έχουμε τις ακόλουθες ισότητες:

$$\begin{aligned}\angle APB &= 180^\circ - (1/_2\angle CAB + 1/_2\angle CBA)\\ &= 180^\circ - 1/_2(180^\circ - \angle ACB)\\ &= 90^\circ + 1/_2\angle ACB.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, το μέτρο της $\angle ACB$ είναι σταθερό· έτσι, το μέτρο της $\angle APB$ είναι επίσης σταθερό. Κατόπιν, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, το σημείο *P* διατρέχει το τόξο *AB* ενός συγκεκριμένου κύκλου. Θα δούμε αργότερα ότι το κέντρο *Q* του αναφερόμενου κύκλου είναι το μέσο του τόξου *AB*, του κύκλου *S*.

Το Θεώρημα 2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί το αν κάποιο συγκεκριμένο σύνολο σημείων ανήκει σε έναν κύκλο. Ειδικότερα, υποδηλώνει το παρακάτω σημαντικό πόρισμα:

Η κορυφή της ορθής γωνίας ενός ορθογώνιου τριγώνου βρίσκεται επί *ενός κύκλου, κατασκευασμένου με διάμετρο την υποτείνουσα του τριγώνου.*

Άσκηση 4. Οι διάμετροι AB και CD ενός κύκλου ακτίνας R σχηματίζουν δοθείσα γωνία a. Από τυχαίο σημείο M του κύκλου, φέρονται οι κάθετοι MP και MQ προς τις διαμέτρους. Αποδείξτε ότι το μήκος PQ δεν εξαρτάται από το M και εκφράστε το συναρτήσει των R και a.

Άσκηση 5. Οι κορυφές A και B των οξειών γωνιών ενός σταθερού ορθογώνιου τριγώνου ολισθαίνουν κατά μήκος δύο κάθετων ευθειών. Βρείτε την τροχιά της τρίτης κορυφής C του τριγώνου.

Για να λύσετε τις επόμενες δύο ασκήσεις, λάβετε υπόψη σας το γεγονός ότι τα ίχνη D και E των υψών DB και CE ενός τριγώνου ABC βρίσκονται επί του κύκλου με διάμετρο BC.

Άσκηση 6. Από τις κορυφές B και C ενός τριγώνου ABC φέρνουμε τα ύψη DB και CE και τις κάθετες FE και CG στην ευθεία DE. Αποδείξτε ότι $EF = DG$.

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι τα ύψη ενός τριγώνου ABC είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου DEK που σχηματίζεται με κορυφές τα ίχνη των υψών του τριγώνου ABC.

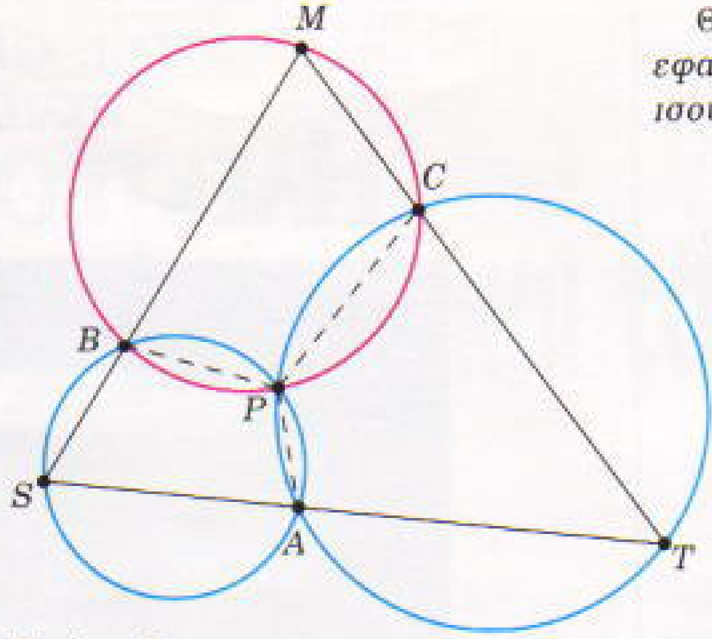
Πρόβλημα 4. Αποδείξτε ότι οι τέσσερις κύκλοι που φέρονται με διαμέτρους τις πλευρές ενός τετραπλεύρου καλύπτουν όλο το τετράπλευρο.

Λύση. Αν το τετράπλευρο έχει ένα σημείο του εξωτερικό και των τεσσάρων κύκλων, τότε κάθε πλευρά του φαίνεται υπό οξεία γωνία από το εν λόγω σημείο. Κάτι τέτοιο όμως είναι αδύνατον, διότι το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360° (για κυρτό τετράπλευρο) ή ακόμη μεγαλύτερο (αν το τετράπλευρο είναι μη κυρτό).

Τα Θεωρήματα 1 και 2 οδηγούν άμεσα στο ακόλουθο κριτήριο για εγγεγραμμένα τετράπλευρα:

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν και μόνο αν το άθροισμα δύο απέναντι γωνιών του είναι 180°.

Πρόβλημα 5. Τρεις κύκλοι διέρχονται από ένα σημείο P και τέμνονται ανά ζεύγη στα σημεία A, B, C. Οι ευθείες που χαράσσονται από ένα τυχαίο σημείο M του κύκλου PBC



Σχήμα 8

και διέρχονται από τα B και C τέμνουν τους άλλους δύο κύκλους στα σημεία S και T (Σχήμα 8). Αποδείξτε ότι η ευθεία ST διέρχεται από το σημείο A.

Λύση. Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $MBPC$, $BPAS$, $CPAT$ συνάγουμε τις ισότητες:

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle M,$$
$$\angle BPA = 180^\circ - \angle S,$$
$$\angle CPA = 180^\circ - \angle T.$$

Προσθέτοντάς τες κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$360^\circ = \angle BPC + \angle BPA + \angle CPA$$
$$= 3 \cdot 180^\circ - (\angle M + \angle S + \angle T),$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\angle M + \angle S + \angle T = 180^\circ.$$

Τούτο σημαίνει ότι το τετράπλευρο $MSAT$ είναι στην πραγματικότητα τρίγωνο —δηλαδή η $\angle SAT = 180^\circ$.[1]

Στο επόμενο πρόβλημα το κριτήριο για εγγεγραμμένα τετράπλευρα πρέπει να βελτιωθεί με την ακόλουθη επέκταση του θεωρήματος των εγγεγραμμένων γωνιών:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *Η γωνία χορδής και εφαπτομένης στο άκρο της χορδής ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της χορδής.*

Άσκηση 8. Αποδείξτε το θεώρημα.

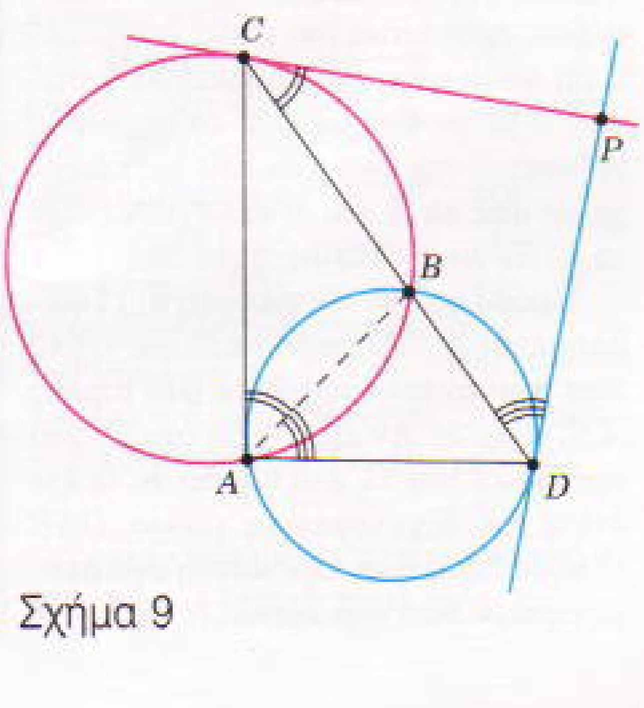
Πρόβλημα 6. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Μια ευθεία που διέρχεται από το B τέμνει τους κύκλους στα σημεία C και D (Σχήμα 9). Αποδείξτε ότι τα σημεία A, C, D, και το σημείο τομής P των εφαπτομένων των κύκλων στα C και D βρίσκονται επί του ίδιου κύκλου.

Λύση. Φέρουμε τη χορδή AB και παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τα Θεωρήματα 1 και 3, έχουμε $\angle BAD = \angle BDP$, $\angle CAB = \angle BCP$. Άρα ότι $\angle CAD = \angle BAD + \angle CAB = \angle BDP + \angle BCP = 180^\circ - \angle CPD$. Οπότε το τετράπλευρο $ACPD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, λόγω του παραπάνω κριτηρίου.

Άσκηση 9. Οι ευθείες ℓ_1 και ℓ_2 εφάπτονται σ' έναν κύκλο στα σημεία A και B. Οι αποστάσεις ενός σημείου M του κύκλου από τις ευθείες είναι αντίστοιχα a και b. Αποδείξτε ότι η απόσταση του M από το AB είναι ίση με $\sqrt{ab}$.

Άσκηση 10. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο D. Μια ευθεία εφάπτεται σε έναν από τους δύο στο σημείο A και τέμνει τον άλλον στα B και C. Αποδείξτε ότι το A ισαπέχει από τα τμήματα BD και CD.

Άσκηση 11. Από σημείο A εξωτερικό ενός κύκλου, φέρουμε μία εφαπτομένη AP και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και C. Αποδείξτε ότι $AP^2 = AB \cdot AC$. (Συγκρίνετε με την Άσκηση 1.)

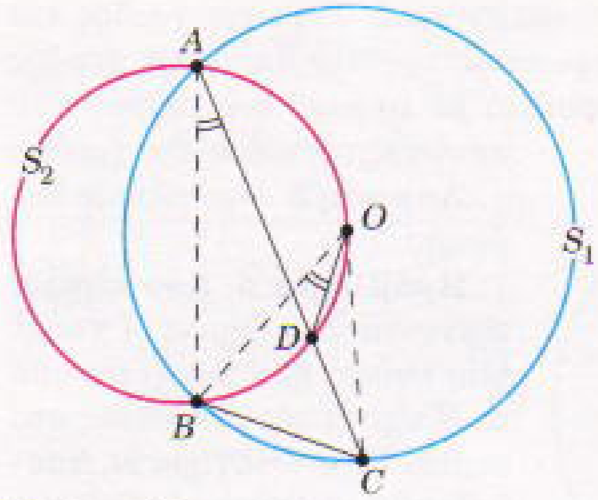


Σχήμα 9

---

1. Στην πραγματικότητα, αυτή η λύση βασίζεται κατά πολύ ουσιαστικό τρόπο στη συγκεκριμένη διευθέτηση που υποδεικνύεται στο Σχήμα 8. Για παράδειγμα, αν το M είχε ληφθεί επί του μικρού τόξου BP του κύκλου BPC στο σχήμα, τότε θα είχαμε $\angle BPA = \angle BSA$ αντί για $180^\circ - \angle BSA$, κ.ο.κ. Μολαταύτα, μετά τις απαραίτητες διορθώσεις, τα πράγματα τακτοποιούνται, οπότε θα παίρναμε είτε $\angle SAT = 180^\circ$ ή $\angle SAT = 0^\circ$.

Η πλήρης λύση απαιτεί εξονυχιστική μελέτη όλων των δυνατών περιπτώσεων, αλλά η κοπιαστική αυτή εργασία μπορεί να αποφευχθεί με τη χρήση της έννοιας των προσανατολισμένων γωνιών, πράγμα που μειώνει τον αριθμό των περιπτώσεων σε μία.



Σχήμα 10

Άσκηση 12. Αποδείξτε ότι το κέντρο του κύκλου στον οποίο κινείται το σημείο P του Προβλήματος 3 είναι το μέσο Q του τόξου AB (Σχήμα 7).

Πρόβλημα 7. Έστω ότι το κέντρο O ενός κύκλου S_1 βρίσκεται επί του κύκλου S_2 και έστω ότι τα A και B είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Φέρουμε χορδή AC του S_1 που τέμνει τον S_2 στο σημείο D (Σχήμα 10). Αποδείξτε ότι η OD είναι κάθετη στο BC.

Λύση. Οι γωνίες BAD και BOD είναι εγγεγραμμένες στον S_2 και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα είναι ίσες μεταξύ τους· η γωνία BAC είναι εγγεγραμμένη στον S_1, άρα $\angle BAC = 1/2\ \angle BOC$. Ακολούθως $\angle BOD = \angle BAD = 1/2\ \angle BOC$ —δηλαδή η OD είναι διχοτόμος της γωνίας BOC. Μένει να παρατηρήσουμε ότι η διχοτόμος OD του ισοσκελούς τριγώνου BOC συμπίπτει με το ύψος του.

Πρόβλημα 8. Σ' ένα τραπέζιο $ABCD$ ($AD \parallel BC$) η γωνία ADB ισούται με το μισό της γωνίας ACB. Ακόμη, $BC = AC = 5$ και $AD = 6$. Βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου. (Υπόδειξη: το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με έναν καθιερωμένο τρόπο, δηλαδή με χρήση του νόμου των συνημιτόνων. Ωστόσο, προκύπτει μια πολύ συντομότερη λύση αν παρατηρήσετε ότι σύμφωνα με το Θεώρημα 2 το σημείο D βρίσκεται επί του κύκλου που διέρχεται από τα A και B και έχει κέντρο το C. Το αποτέλεσμα είναι 22.)

Πρόβλημα 9. (Γενίκευση του Προβλήματος 1). Έστω δύο κύκλοι C_1, C_2 που τέμνονται εσωτερικά στο σημείο A (Σχήμα 3). Αν BD χορδή του C_1 που εφάπτεται του C_2 στο σημείο K, δείξτε ότι η AK διχοτομεί τη γωνία DAK (Υπόδειξη: φέρτε την κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.)

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M81

Από γωνία σε γωνία. Τοποθετούμε εννέα πούλια της ντάμας στην κάτω αριστερή γωνία μιας συνηθισμένης σκακιέρας διαστάσεων 8×8 και σχηματίζουμε ένα τετράγωνο διαστάσεων 3×3. Ένα πούλι a μπορεί να περάσει πάνω από ένα πούλι b και να βρεθεί σ' ένα τετράγωνο συμμετρικό του a ως προς το b, όταν το τελευταίο αυτό τετράγωνο είναι ελεύθερο. Μπορείτε να μεταφέρετε ολόκληρο το 3×3 τετράγωνο με τα πούλια της ντάμας (α) στην πάνω αριστερή ή (β) στην πάνω δεξιά γωνία της σκακιέρας, ακολουθώντας αυτό τον κανόνα; (Y. Briskin)

M82

Περιγεγραμμένα τετράπλευρα. Αποδείξτε ότι από τα n τετράπλευρα που σχηματίζουν οι διαγώνιοι ενός κυρτού n-γώνου (μαζί με τρεις διαδοχικές πλευρές) το πολύ $n/2$ μπορεί να έχουν εγγεγραμμένους κύκλους. Δώστε παράδειγμα ενός οκταγώνου με τέσσερα τέτοια τετράπλευρα. (N. Sedrakyan)

M83

Στρατηγική της ναυμαχίας. Χρησιμοποιούμε έναν «ωκεανό» διαστάσεων 7×7 για το παιχνίδι της ναυμαχίας. Ποιο είναι το μικρότερο πλή- θος βολών που απαιτούνται για να χτυπήσουμε (τουλάχιστον μία φορά) ένα πλοίο τεσσάρων τετραγώνων αν (α) είναι ορθογώνιο 1×4 μοναδιαίων τετραγώνων, (β) είναι «τετράμινο» σχήμα άγνωστης μορφής (δηλαδή, αν αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα που συνδέονται κατά μήκος των πλευρών τους); (A. Kholodov)

M84

Συνάρτηση Fibonacci. Αποδείξτε ότι η ακολουθία Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (στην οποία κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα των δύο προηγουμένων του) περιέχει τουλάχιστον τέσσερις και το πολύ πέντε m-ψήφιους αριθμούς, για κάθε $m \geq 2$.

M85

Κατανομή του μήκους των τόξων. Σημειώνουμε είκοσι ένα σημεία σ' έναν κύκλο. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον εκατό από τα τόξα με άκρα αυτά τα σημεία έχουν μέτρο που δεν υπερβαίνει τις 120°. (A. Sidorenko)

Φυσική

Φ81

Το νήμα στην μπάλα. Συγκρατούμε τη μια άκρη νήματος μήκους ℓ στην κορυφή σφαίρας ακτίνας R (Σχήμα 1). Κάποια στιγμή απελευθερώνουμε την άκρη του νήματος· βρείτε την επιτάχυνσή του αυτή τη στιγμή. (Αμελήστε κάθε φαινόμενο τριβής.) (A. Bytsko)

Σχήμα 1

Φ82

Κατοπτρικά φορτία. Σημειακή μάζα m που φέρει φορτίο Q τοποθετείται σε απόσταση L από αγώγιμο επίπεδο άπειρων διαστάσεων και αφήνεται ελεύθερη. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το επίπεδο; Αμελήστε τη δύναμη της βαρύτητας. (A. Bytsko)

Φ83

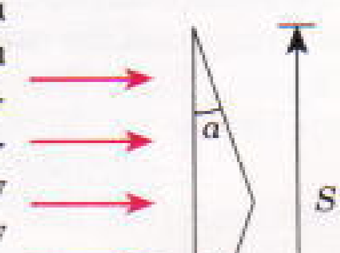
Μαγείρεμα υπό πίεση. Ρίχνουμε μικρή ποσότητα νερού σε μια χύτρα ταχύτητας, την κλίνουμε σφιχτά και την ακουμπάμε πάνω σ' ένα καυτό ηλεκτρικό μάτι. Τη στιγμή που έχει εξαερωθεί ολόκληρη η ποσότητα νερού, η θερμοκρασία στο εσωτερικό της χύτρας είναι 115°C και η πίεση 3 atm. Τι μέρος του όγκου της χύτρας ταχύτητας καταλάμβανε το νερό πριν από τη θέρμανσή του; Η αρχική θερμοκρασία στο εσωτερικό της χύτρας είναι 20°C. (A. Sheronov)

Φ84

Ηλιοφώτιστη πλάκα. Η μια όψη λεπτής μεταλλικής πλάκας φωτίζεται από τον Ήλιο. Όταν η θερμοκρασία του αέρα είναι T_0, η θερμοκρασία της φωτιζόμενης όψης είναι T_1 ενώ της μη φωτιζόμενης T_2. Ποιες θα ήταν οι θερμοκρασίες των δύο όψεων αν η εν λόγω πλάκα είχε διπλάσιο πάχος; (E. Ponomarev)

Φ85

Πρίσμα Fresnel. Όταν φως πέφτει κάθετα πάνω σε πρίσμα Fresnel (Σχήμα 2), χωρίζεται σε δύο δέσμες που, αφού διαθλαστούν από τα δύο μισά μέρη του πρίσματος, συμβάλλουν μεταξύ τους. Πόση είναι η μέγιστη απόσταση από το πρίσμα στην οποία μπορούν να παρατηρούνται κροσσοί συμβολής; Η απόσταση S μεταξύ των δύο κορυφών του πρίσματος (βλ. σχήμα) είναι 4 cm, ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού n = 1,4 και η θλαστική γωνία a του πρίσματος 0,001 rad. (V. Deryabkin)



Σχήμα 2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Πρελούδιο στη μελέτη της Φυσικής

Αντισταθείτε... ώς και σε μένα, σε μένα ακόμα που σας ιστορώ αντισταθείτε.
—Μιχάλης Κατσαρός

Robert J. Sciamanda

ΠΟΤΕ ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ Ή ΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ δεν επιλύουν ένα πραγματικό πρόβλημα. Στη θέση του, δημιουργούν ένα μοντέλο του πραγματικού προβλήματος, το οποίο και επιλύουν στη συνέχεια. Το μοντέλο πρέπει να ικανοποιεί δύο απαιτήσεις: να είναι αρκετά απλό ώστε να επιδέχεται λύση και αρκετά ρεαλιστικό ώστε να είναι χρήσιμο —δηλαδή πρέπει να είναι ταυτοχρόνως εννοιολογικά κατανοητό και εμπειρικά γόνιμο.

Οι θεωρίες και οι «νόμοι» της φυσικής αποτελούν επίσης μοντέλα. Είτε στην επίλυση κάποιου συγκεκριμένου τεχνικού προβλήματος είτε στην έρευνα για τους γενικούς νόμους της φυσικής, η τέχνη της επιστημονικής ανάλυσης έγκειται στην κατασκευή χρήσιμων μοντέλων της πραγματικότητας. Το μοντέλο αποτελεί το μέσο σύνδεσης μεταξύ της πραγματικότητας και της ανθρώπινης νόησης. Ως τέτοιο, πρέπει να εκφράζεται με ανθρώπινους όρους· μορφοποιείται μέσω εννοιών που οι ίδιοι δημιουργούμε από τα δεδομένα της εμπειρίας μας. Τα μοντέλα μας μιλούν τόσο για μας, την εμπειρία μας, τους τρόπους σκέψης μας, όσο και για την εξωτερική πραγματικότητα που τυποποιούν.

Προτιμώ να μιλάω για μοντέλα, εκεί όπου άλλοι μιλούν για θεωρίες, επειδή η λέξη «μοντέλο» δίνει έμφαση στο κριτήριο της χρησιμότητας. Έχουμε την τάση να σκεφτόμαστε κάθε θεωρία ως υποψήφια για κάποια απόλυτη, αντικειμενική αλήθεια· ένα μοντέλο χρησιμοποιείται για τη μετάβιβαση χρήσιμων πληροφοριών χωρίς την αξίωση ότι είναι μοναδικό, πλήρες ή οριστικό. Ως παράδειγμα της σύλληψης, της κυοφορίας, της γέννησης και της ανάπτυξης ενός μοντέλου στη φυσική, ας εξετάσουμε την ιστορία του «νόμου των ιδανικών αερίων», $PV = aT$, τον οποίο αναμφίβολα έχετε διδαχτεί στο μάθημα της φυσικής ή της χημείας.

Η ιστορία ενός μοντέλου

Παρά τον όγκο των αφαιρέσεων που σώρευσαν οι φιλόσοφοι σε μια περίοδο πολλών αιώνων, δεν προέκυψε η παραμικρή χρήσιμη κατανόηση της συμπεριφοράς των αερίων κατά την αρχαιότητα ή το μεσαίωνα. Η δυνατότητα για την ανάπτυξη κάποιου χρήσιμου μοντέλου έπρεπε να περιμένει την κατασκευή του θερμομέτρου και του μανομέτρου για να παρουσιαστεί. Η καθεμιά από αυτές τις δύο συσκευές χρησιμοποιεί μια νηματοειδή στήλη υδραργύρου στο εσωτερικό ενός γυάλινου σωλήνα έτσι ώστε να μας δίνει έναν αριθμό (το μήκος της υδραργυρικής στήλης), ο οποίος λαμβάνει διάφορες τιμές καθώς η συσκευή υποβάλλεται σε ποικίλες συνθήκες. Οι Boyle, Charles και Gay Lussac διερεύνησαν τη συμπεριφορά των εν λόγω συσκευών όταν «έρχονται σε επαφή» με κάποιο αέριο υπό ελεγχόμενες συνθήκες.

Για να συντομεύσουμε μια πολύ εκτενή ιστορία, τα πειράματά τους κατέληξαν στη δημιουργία της εμπειρικής σχέσης $PV = aT$, όπου οι μεταβλητές P και T παριστούν τις ενδείξεις του μανομέτρου και του θερμομέτρου αντίστοιχα· η a είναι μια σταθερά στο βαθμό που η ποσότητα του αερίου διατηρείται επίσης σταθερή. Αν κατόπιν *ορίσουμε* τα P, V και T να αποτελούν μετρήσεις κάποιων *ιδιοτήτων του αερίου*, η σχέση $PV = aT$ μετατρέπεται σ' ένα χρήσιμο μοντέλο της συμπεριφοράς των αερίων, παρόλο που τα P και T, στην παρούσα φάση, δεν έχουν κάποιο βαθύτερο νόημα—είναι απλά αριθμοί που μας παρέχονται από τις καθορισμένες συσκευές.

Ότι θα έπρεπε να υπάρχει κάποια σχέση (πολύ δε περισσότερο, μια απλή σχέση) μεταξύ των αριθμών που παίρνουμε από τις παραπάνω (ή από οποιεσδήποτε άλλες) συσκευές δεν είναι καθόλου αναμενόμενο. Ένα τέτοιο πολύτιμο εύρημα μόνο με ευγνωμοσύνη θα έπρεπε να μελετάται, κάθε φορά που εμφανίζεται. Αποτελεί παράδειγμα του βαθύτατου νοήματος μιας από τις διασημότερες φράσεις του Αϊνστάιν: «Το πλέον ακατανόητο πράγμα για τον Κόσμο είναι πως είναι κατανοητός».

Η κατασκευή του μοντέλου $PV = aT$ αποτέλεσε γιγάντιο άλμα προς τα εμπρός. Σημειώστε ότι το κρίσιμο εναρκτήριο βήμα συνίστατο στην ελεύθερη δημιουργία ενός συνόλου εννοιών, με τέτοιους όρους ώστε να είναι δυνατόν να τεθούν στη φύση ερωτήσεις με νόημα, έτσι που και η ίδια να μπορεί να δώσει απαντήσεις με νόημα. Τούτες οι έννοιες δεν βρίσκονται απλά κάπου μέσα στη φύση, αναμένοντας την ανακάλυψή τους μέσω παθητικής παρατήρησης. Πρέπει να δημιουργηθούν με την ενεργητική μας παρέμβαση. Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι ιδιότητες της ύλης. Με αυτό τον τρόπο ορίζουμε και έτσι δημιουργούμε εκείνες τις μετρήσιμες ιδιότητες της πραγματικότητας τις οποίες κρίνουμε χρήσιμες. Είναι ανθρώπινα κατασκευάσματα μέσω των οποίων μπορούμε να απευθύνουμε στη φύση ερωτήσεις με νόημα, να διαβάσουμε τις απαντήσεις της και να οργανώσουμε την αντίληψή μας σε χρήσιμα και ελέγξιμα μοντέλα.

Καθεμιά από τις ανωτέρω έννοιες είναι ποσοτική ως προς τη φύση της: ο αριθμός που παράγεται από κάποια συσκευή μέτρησης. Ο εμπειρικός μας νόμος των αερίων αποτελεί απλά μια σχέση (και μάλιστα ιδιαίτερα χρήσιμη) μεταξύ των αριθμών (P, V, T) που δίνονται από τις συσκευές μας. Είναι ένα *εμπειρικό* μοντέλο. Οι αριθμοί που παράγονται από τις συσκευές μέτρησης δεν έχουν κανένα βαθύτερο νόημα παρά μόνο στα πλαίσια της ιδέας ενός εννοιολογικού μοντέλου του υπό μέτρηση συστήματος και της επίδρασής του σ' αυτές.

Ο Boyle εκτέλεσε τους πειραματισμούς του στα 1600, ενόσω η Αμερική αποικιζόταν από τους Προσκυνητές. Μόνο στα μέσα του 19ου αιώνα, όταν οι Αμερικανοί πολεμούσαν για τη δουλεία, ο Joule συνέζευξε τις θεωρίες (τα μοντέλα) της νευτώνειας μηχανικής και του ατομισμού (που τότε ήταν αντικείμενο έντονης αμφισβήτησης) ώστε να δημιουργήσει ένα *εννοιολογικό* μοντέλο των ιδανικών αερίων ως ενός συστήματος *τυχαία κινούμενων σημειακών σωματιδίων*. Στο εν λόγω μοντέλο το P συνδέεται εντελώς φυσιολογικά με τη νευτώνεια έννοια της δύναμης και ευθύνεται για τη συμπεριφορά του υδραργυρικού μανομέτρου. Εντούτοις, δεν υπάρχει κάποια *a priori* μηχανική συσχέτιση για την εμπειρική ποσότητα T —τη «θερμοκρασία» του αερίου όπως μας τη δίνει το θερμόμετρο.

Εδώ βρίσκεται ένα υπέροχα απλό παράδειγμα της απίστευτα φοβερής ισχύος μιας αναλυτικής επιστήμης με εμπειρική βάση: η γόνιμη αλληλεπίδραση μεταξύ πειραματικής και θεωρητικής φυσικής. Οι νόμοι του Νεύτωνα οδήγησαν το εννοιολογικό μοντέλο του Joule σ' ένα πολύ διαφωτιστικό αποτέλεσμα: η αριθμητική τιμή του γινομένου PV για το αέριο του Joule είναι ανάλογη της ολικής κινητικής ενέργειας των τυχαία κινούμενων σωματιδίων του αερίου. Έτσι το μοντέλο του Joule χαρίζει στην εμπειρική θερμοκρασία T, στη σχέση $PV = aT$, μια βαθύτερη σημασία ως μια ιδιότητα του αερίου που έχει επινοηθεί από τον άνθρωπο. Γίνεται μέτρο της ενέργειας των τυχαία κινούμενων σωματιδίων του αερίου.

Ένα μοντέλο των μοντέλων

Έτσι λοιπόν το μαθηματικό μοντέλο $PV = aT$ έχει τη θεμελίωσή του ως εμπειρικό αλλά και ως εννοιολογικό μοντέλο. Το παρουσιάζω ως παράδειγμα για να επιδείξω τις ιδιότητες του μοντέλου στη φυσική:

1. Είναι ανθρώπινο κατασκεύασμα, καρπός της εμπειρίας και της φαντασίας μας συνάμα.
2. Είναι ποσοτικό και αναφέρεται σε ελεύθερα ορισμένες, μετρήσιμες ιδιότητες της ύλης.
3. Έχει και εμπειρική αλλά και εννοιολογική χρησιμότητα: παρουσιάζει μια ελέγξιμη αριθμητική ισότητα, η οποία εμπλέκει τους αριθμούς που παράγονται από καθορισμένες συσκευές μέτρησης και προσφέρει ένα εννοιολογικό πλαίσιο για την απόδοση ενός βαθύτερου νοήματος στους εν λόγω αριθμούς.
4. Η εμπειρική χρησιμότητα ενός μοντέλου είναι θέμα πειραματικής επαλήθευσης, και αφού επαληθευτεί, η χρησιμότητά του θα παραμείνει. Τα μελλοντικά μοντέλα με ευρύτερο ορίζοντα θα το συμπεριλαμβάνουν ως ειδική περίπτωση.
5. Η εννοιολογική χρησιμότητα ενός μοντέλου μπορεί να είναι πολιτισμικό θέμα, ένα θέμα καθιερωμένου και προσωπικού γούστου (περισσότερα σχετικά με τούτο σε λίγο).

Εννοιολογικοί περιορισμοί

Τα εννοιολογικά μας μοντέλα αποτελούν βέβαια προϊόντα των δεδομένων της εμπειρίας μας. Πού και πού, κλείνω τα μάτια και αισθάνομαι προσεκτικά ένα αντικείμενο, όπως ένα κομμάτι φρούτου, ένα τραπέζι, ή το ίδιο μου το πρόσωπο, και προσπαθώ να φανταστώ πώς θα ένιωθα αν δεν είχα ποτέ την αίσθηση της όρασης. Τι είδους εννοιολογικά μοντέλα θα μπορούσα να διαμορφώσω, καθώς θα εξερευνούσα την πραγματικότητα χρησιμοποιώντας μόνο την αίσθηση της αφής; (Προσπαθήστε να διαμορφώσετε την ιδέα του σχήματος ενός αντικειμένου χωρίς να προσφύγετε σε μια οπτική εικόνα.) Πώς θα μπορούσα να εκτιμήσω τη γλώσσα ενός ανθρώπου που διαθέτει όραση; Δεν υπάρχει κανένας τρόπος μέσω του οποίου κάποιος άνθρωπος που βλέπει θα μπορούσε να μου μεταβιβάσει την ενσυνείδητη εμπειρία της αντίθεσης φωτός και σκότους ή, πόσο μάλλον, της διαφοράς πράσινου και κόκκινου. Τα εννοιολογικά μοντέλα μας θα μπορούσαν να επικοινωνήσουν μόνο διαμέσου επισφαλών αναλογιών και μεταφορών· αντιθέτως, τα εμπειρικά μοντέλα μας θα μπορούσαν να επικοινωνήσουν χωρίς αμφισημία όσον αφορά τους αριθμούς που παράγουν οι συσκευές μέτρησης.

Τα εννοιολογικά μοντέλα εξαρτώνται και περιορίζονται από τον παρατηρητή. Καθώς ο φυσικός βυθίζεται στην έρευνα της συμπεριφοράς της πραγματικότητας, αγωνίζεται να δημιουργήσει μοντέλα γι' αυτή την πραγματικότητα που να διαθέτουν νόημα, χρησιμοποιώντας ως πρώτες ύλες τις έννοιες που διαμορφώνονται μέσω της ανθρώπινης εμπειρίας. Όσο περισσότερο εμβαθύνει, ανακαλύπτει ότι πρέπει να γίνεται ολοένα πιο δημιουργικός και ευρηματικός, παράγοντας αφαιρέσεις και γονιμοποιώντας τη μια ιδέα του μέσω της άλλης, με σκοπό να κατασκευάσει εννοιολογικά μοντέλα για τη συμπεριφορά της πραγματικότητας, με ανθρώπινους όρους.

Δεν υπάρχει λόγος να αναμένουμε ότι η συγκεκριμένη διαδικασία μπορεί να επεκτείνεται απεριόριστα. Φαίνεται λογικό να προβλέψουμε ότι πέρα από κάποιο επίπεδο ανάλυσης η συμπεριφορά της πραγματικότητας είναι αδύνατον να τυποποιηθεί σε εννοιολογικά μοντέλα με καθαρά ανθρώπινους όρους, αν και ενδέχεται να συνεχίσουμε να είμαστε αρκετά ευφυείς ώστε να δημιουργούμε αριθμητικές ισότητες που εμπλέκουν τις ενδείξεις των οργάνων μας. Άλλωστε, τα επιστημονικά όργανα λειτουργούν στο ίδιο επιφανειακό επίπεδο με τις αισθήσεις μας.

Βρισκόμαστε ήδη στο κατώφλι τούτου του εννοιολογικού φραγμού. Τα μαθηματικά μοντέλα της κβαντικής θεωρίας αψήφησαν ακόμη και τη φαντασία ενός Άλμπερτ Αϊνστάιν. Δεν κατάφερε ποτέ να συλλάβει ένα ικανοποιητικό εννοιολογικό μοντέλο της πραγματικότητας, πίσω από τούτες τις εξισώσεις. Όσον αφορά τη δημιουργική «εκκεντρικότητα», η σύγχρονη τέχνη και μουσική υστερούν κατά πολύ έναντι της μοντέρνας φυσικής, μολονότι οι τέχνες λειτουργούν εντελώς ελεύθερες από περιορισμούς, ενώ η φυσική λειτουργεί κάτω από τον άτεγκτο περιορισμό της εμπειρικής χρησιμότητας!

Πρότυπα, γούστο και ομορφιά

Φανταστείτε πως έχετε ναυαγήσει σ' ένα ερημονήσι και, μην έχοντας τίποτε καλύτερο για να απασχοληθείτε, αποφασίζετε να δημιουργήσετε την επιστήμη της φυσικής, από την αρχή. Κρίνετε ότι η πρώτη σας προτεραιότητα είναι να επιλέξετε (ή να σχεδιάσετε) πρότυπα για τις μετρήσεις σας που αφορούν τα διαστήματα χώρου και χρόνου. Πώς θα έπρεπε να επιλέξετε μια πρότυπη ράβδο μέτρησης και ένα πρότυπο ρολόι; Τούτη είναι μια πολύ δύσκολη ερώτηση: θα προτιμούσαμε να έχουμε στη διάθεσή μας τα παραπάνω πρότυπα *a priori*, έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να εκτελέσουμε πειράματα (τόσο πραγματικά όσο και νοητικά) για να θέσουμε ερωτήματα στη φύση, να διαβάσουμε τις απαντήσεις της και να οδηγηθούμε προς μια θεωρία για τη συμπεριφορά της ύλης. Η επιλογή του πρότυπου ρολογιού και της ράβδου μέτρησης, όμως, προϋποθέτει σημαντική κατανόηση της συμπεριφοράς της ύλης! Για παράδειγμα, η επιλογή ενός πρότυπου ρολογιού προϋποθέτει ήδη μια θεωρία δεσμευμένη με το συμπέρασμα ότι ο συγκεκριμένος μηχανισμός «χτυπά» με σταθερό ρυθμό. Η λογική συνέπεια θα ωθήσει τη θεωρία σε τούτο το συμπέρασμα. Επιλογές μεταξύ θεωριών και επιλογές μεταξύ προτύπων είναι άρρηκτα δεμένες.

Το δίλημμα που εκτέθηκε στην προηγούμενη παράγραφο δεν μας πτοεί. Χρειάζεται μόνο να αντικαταστήσουμε τη λέξη «θεωρία» (υποψήφια για μια απόλυτη, αντικειμενική αλήθεια) με τη λέξη «μοντέλο» (έναν χρήσιμο τρόπο για την περιγραφή της πραγματικότητας με ανθρώπινους όρους). Υπό τούτο το πρίσμα, η επιλογή του ρολογιού απλά ορίζει και έτσι δημιουργεί μια μετρήσιμη παράμετρο «*t*» που θα χρησιμοποιηθεί ως γραμμική χρονική βάση για την περιγραφή της εξέλιξης των φαινομένων. Θα συγκρίνουμε την πορεία όλων των άλλων φαινομένων με τη διαδοχή των κτύπων του ρολογιού.

Προφανώς η επιλογή προτύπων είναι θέμα ελεύθερου ορισμού. Κριτήριο δεν αποτελεί η αλήθεια, αλλά η χρησιμότητα: ποιες επιλογές οδηγούν στα πλέον «επιθυμητά» εμπειρικά και εννοιολογικά μοντέλα της πραγματικότητας; Ή, για να το θέσουμε διαφορετικά, πόσο «εκκεντρικό» πρέπει να γίνει ένα εννοιολογικό μοντέλο ώστε να αποβεί εμπειρικά χρήσιμο; Οι λέξεις «επιθυμητό» και «χρήσιμο» πρέπει να οριστούν από σας και /ή από την τρέχουσα επιστημονική κουλτούρα· είναι θέμα γούστου. Από την άποψη της ιστορίας και της λογικής η συγκεκριμένη διαδικασία είναι επαναληπτική, καθώς ανακαλύπτουμε βαθμιαία όλο και περισσότερες λεπτομέρειες για το πού οδηγεί το μοντέλο.

Επιτρέψτε μου να σας κεντρίσω το ενδιαφέρον με ένα διάσημο παράδειγμα. Ο Αϊνστάιν, στη θεωρία της σχετικότητας του 1905, ήταν ο πρώτος που επένδυσε σε τούτη την ελευθερία επιλογής (ράβδων και ρολογιών) με ριζοσπαστικό τρόπο. Οι ορισμοί που έδωσε για το «επιθυμητό» και το «εκκεντρικό» κινούνταν αντίθετα προς το κυρίαρχο ρεύμα της εποχής. Για τον ίδιο, το επιθυμητό μοντέλο πρέπει να διατηρεί το αναλλοίωτο του φυσικού νόμου (ειδικότερα των εξισώσεων του Maxwell) για όλους τους μη επιταχυνόμενους παρατηρητές. Η συμβατική σοφία, όμως, ισχυριζόταν πως οι ταχύτητες που εμφανίζονταν στις εξισώσεις του Maxwell πρέπει να μετρώνται από ένα απόλυτο σύστημα αναφοράς (το σύστημα του «αιθέρα»). Τούτο ήταν «επιθυμητό» για πολλούς —θεωρούσαν ικανοποιητικό το γεγονός ότι οι νόμοι της φυσικής θα έπρεπε να είναι απλοί μόνο για έναν παρατηρητή σε απόλυτη ηρεμία. Μάλιστα, οποιαδήποτε απόκλιση των πειραματικών σας αποτελεσμάτων από τους φυσικούς νόμους θα σας προσέφερε επαρκή δεδομένα ώστε να μετρήσετε τη δική σας απόλυτη ταχύτητα. Είχαν απογοητευτεί που το μοντέλο του Νεύτωνα για τη μηχανική δεν επέτρεπε τη μέτρηση της δικής μας απόλυτης ταχύτητας μέσω *μηχανικών* πειραμάτων (κι ο ίδιος ο Νεύτων πρέπει να είχε απογοητευτεί)· χάρηκαν όμως υπέρμετρα, επειδή το μοντέλο του Maxwell για την ηλεκτροδυναμική (το οποίο περιλαμβάνει το φως) θα μας επέτρεπε πλέον τη μέτρηση της απόλυτης ταχύτητάς μας με τη διεξαγωγή *οπτικών* πειραμάτων.

Ο Αϊνστάιν συνέλαβε ένα τελείως διαφορετικό εννοιολογικό μοντέλο για την ηλεκτροδυναμική του Maxwell. Επιζητούσε ένα μοντέλο στο οποίο οι εξισώσεις του Maxwell θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν εξίσου έγκυρα από όλους τους μη επιταχυνόμενους παρατηρητές, που καθένας τους θα έκανε χρήση των αριθμητικών τιμών όλων των μεγεθών (για παράδειγμα των ταχυτήτων) όπως αυτές προέκυπταν από μετρήσεις στο δικό του σύστημα αναφοράς. Αποτόλμησε να αναθεωρήσει τους ορισμούς της μέτρησης των διαστημάτων χώρου και χρόνου ώστε να επιτύχει το σκοπό του. Μια τέτοια αναθεώρηση θα επέβαλε νέες και χειρότερες εκκεντρικότητες στο μοντέλο. Σίγουρα θα μας εξανάγκαζε να σχεδιάσουμε νέα ρολόγια και ράβδους μέτρησης, με εξωτικές, «σχετικιστικές» ιδιότητες. Οι νέες εκκεντρικότητες ήταν μόνο πολιτισμικές —ότι τα κοινά ρολόγια και οι ράβδοι μέτρησης συμπεριφέρονται σχετικιστικά, και ότι μια πληθώρα φαινομένων μπορούν να περιγραφούν πιο απλά, ακόμη και φαινόμενα απομακρυσμένα από τις εξισώσεις του Maxwell. Η ευρεία αποδοχή δεν ήρθε ούτε γρήγορα ούτε και εύκολα, αλλά σήμερα η σχετικότητα όχι μόνο έχει γίνει αποδεκτή ως εμπειρικά και εννοιολογικά χρήσιμο μοντέλο, αλλά έχει αποκτήσει ομορφιά!

Συνέχεια στη σελ. 56 ⇨

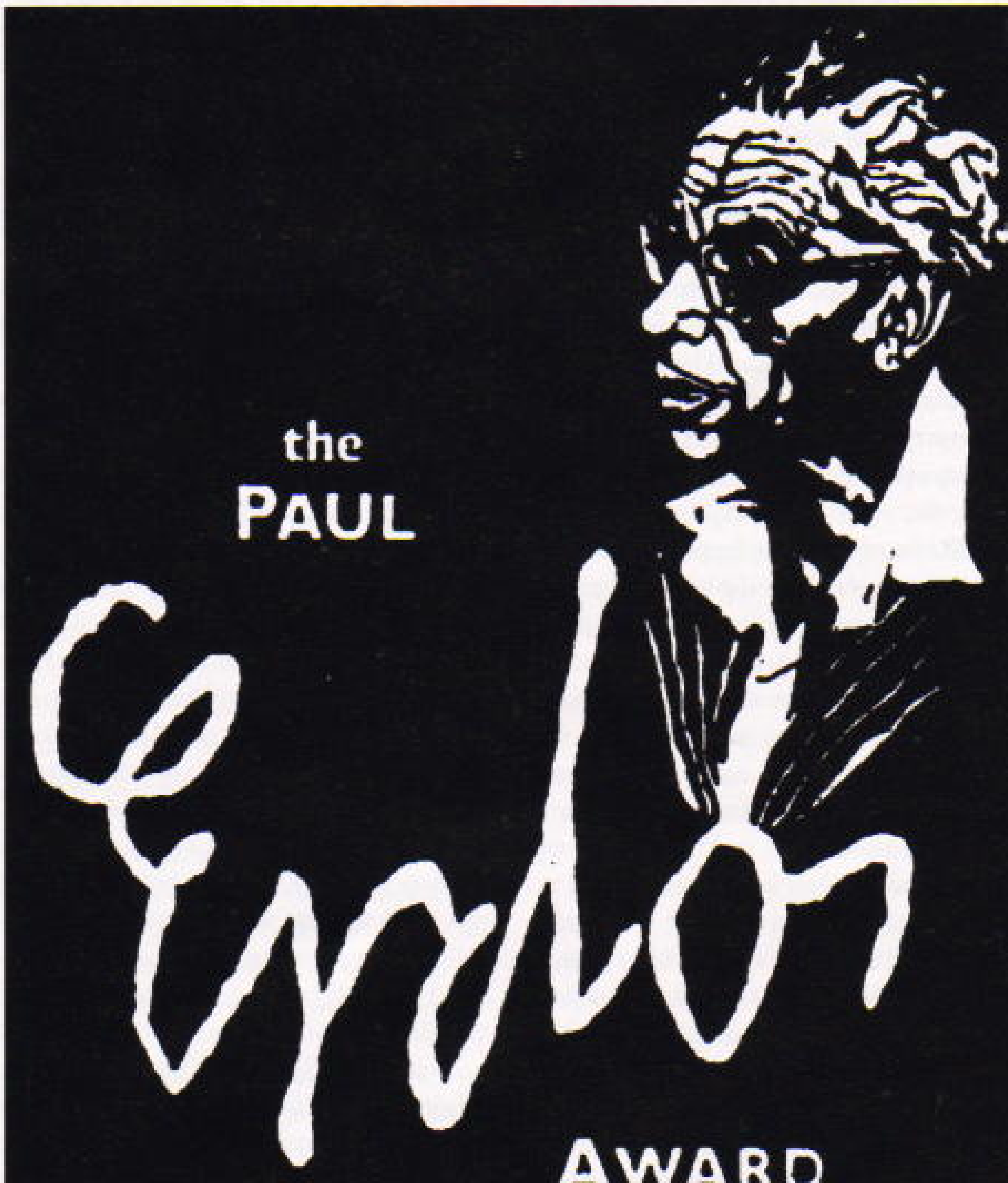
Εις μνήμην Paul Erdös (1913-1996)

Θα έχει ίσως τη χαρά να δει τις αποδείξεις του πιστά καταγεγραμμένες στο «βιβλίο» του Θεού[1]

George Berzsenyi

ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΤΕΛΕΤΗ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ των οκτώ νικητών της Ολυμπιάδας Μαθηματικών των ΗΠΑ του 1980 είχα χαρεί ιδιαίτερα βλέποντας ανάμεσα στους βραβευμένους τον Michael Finn και τον Eric Carlson, διότι αυτοί ήταν επίσης δύο από τους νικητές του ετήσιου διαγωνισμού που διεξήγαγα μέσω της στήλης "Competition Corner" του *Mathematics Student* (περιοδικού του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών, που δεν εκδίδεται πλέον). Ο κύριος στόχος μου στο *Mathematics Student* ήταν να προωθήσω το ενδιαφέρον των μαθητών του λυκείου για τη δημιουργική επίλυση προβλημάτων, και έτσι είχα πλήρη συνείδηση ότι τα προβλήματα που παρουσίαζα στη στήλη δεν ήταν ιδιαίτερα δύσκολα για τον Michael και τον Eric. Τους συμβούλεψα λοιπόν να στρέψουν την προσοχή τους σε περισσότερο απαιτητικές περιοχές προβλημάτων, όπως αυτές του *The American Mathematical Monthly* και του *Mathematics Magazine*. Η απάντηση του Michael ήταν «τα λύνω και αυτά», ενώ ο Eric μού υπενθύμισε το ρητό «η εξάσκηση τελειοποιεί». Εξακολούθησαν λοιπόν να μου στέλνουν όμορφες λύσεις για τα προβλήματα του *Mathematics Student* σε όλη τη διάρκεια των μαθητικών τους χρόνων.

Θυμάμαι συχνά τον Michael και τον Eric όταν δέχομαι διάφορες απαντήσεις και συμβολές για την παρούσα στήλη, και θέλω να προτείνω στους



Η εικόνα αυτή του Paul Erdös βασίζεται σ' έναν πίνακα του Ray Paul που ανήκει στη βιβλιοθήκη του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Σινσιννάτι.

1. Δείτε σχετικά το άρθρο «Τι είναι η κομψότητα;» στο τεύχος Μαρτίου / Απριλίου 1995.

αναγνώστες μου να στρέψουν την προσοχή τους σε πιο αξιόλογες προσπάθειες, σε σοβαρότερες μαθηματικές αναζητήσεις. Παρόλο που πολλά από τα θέματα που καλύπτει αυτή η στήλη είναι όμορφα, ίσως και συναρπαστικά, υστερούν συχνά σε βάθος και σοβαρότητα —σε ό,τι δηλαδή χαρακτηρίζει τις πραγματικές μαθηματικές αναζητήσεις. Παρότι έχω την ικανότητα να επινοώ προβλήματα κατάλληλα για μαθηματικούς διαγωνισμούς και να βοηθώ στην ανακάλυψη μαθηματικών ταλέντων, δεν είμαι ειδικός στην επέκταση των μαθηματικών συνόρων.

Αυτές ήταν οι σκέψεις μου όταν πληροφορήθηκα πρόσφατα το θάνατο του Paul Erdös, ενός ανθρώπου που αφιέρωσε τη ζωή του στην επέκταση αυτών των συνόρων, που έθεσε είτε έλυσε μερικά από τα σημαντικότερα προβλήματα αυτού του αιώνα. Θα ήθελα λοιπόν να συμβουλέψω τους αναγνώστες μου να μάθουν περισσότερα για την κληρονομιά που άφησε ο Erdös, να παρακολουθήσουν τα βήματά του και να μιμηθούν τη στάση του απέναντι στα μαθηματικά. Για να σας ανοίξω την όρεξη, παρουσιάζω στη συνέχεια τρία από τα προβλήματά του. Μου τα είχε στείλει το 1994 ως απάντηση στο αφιέρωμά μου «Χρόνια πολλά, θείε Paul» του τεύχους Ιουλίου/Αυγούστου 1994 του *Quantum*.

Πρόβλημα 1. Έστω $f(n)$ ο μέγιστος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει ένα σύνολο $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ n διαφορετικών σημείων του επιπέδου για τα οποία ισχύει η εξής ιδιότητα: για κάθε x_i του S υπάρχουν τουλάχιστον $f(n)$ σημεία του S που ισαπέχουν από το x_i. Προσδιορίστε το $f(n)$ με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Αληθεύει ότι το όριο καθώς $n \to \infty$ του $f(n)/n^{\varepsilon}$ είναι μηδέν για κάθε $\varepsilon > 0$;

Ο Erdös προσέφερε 500 δολάρια για μια απόδειξη και «πολύ λιγότερα για ένα αντιπαράδειγμα».

Πρόβλημα 2. Δίδονται επτά σημεία του επιπέδου. Αποδείξτε ότι μπορούμε πάντα να διαλέξουμε τρία από αυτά έτσι ώστε οι τρεις αποστάσεις που ορίζουν να είναι διαφορετικές.

Ο Erdös συνέχισε αναφέροντας ότι ο προηγούμενος ισχυρισμός δεν αληθεύει για έξι σημεία και αναρωτήθηκε για το αν το μοναδικό αντιπαράδειγμα είναι οι κορυφές και το κέντρο ενός κανονικού πενταγώνου. Ήθελε επίσης να μάθει το πλήθος των σημείων τα οποία απαιτούνται για να εξασφαλίσουμε πως θα μπορούμε πάντα να διαλέξουμε τέσσερα από αυτά έτσι ώστε οι έξι αποστάσεις που ορίζουν να είναι διαφορετικές. Είναι φανερό ότι μπορούμε να κάνουμε ασθενέστερες τις συνθήκες για τα τέσσερα σημεία είτε να επεκτείνουμε το πρόβλημα για περισσότερα σημεία. Επίσης, θα είχαν ενδιαφέρον και τα μικρότερα αντιπαραδείγματα.

Πρόβλημα 3. Σύμφωνα με μια παλιά εικασία, η μοναδική μη τετριμμένη λύση της $n! = a!b!$ είναι η $10! = 6!7!$. (Αν $n = k!$, τότε $(k!)! = (k! - 1)!k!$ είναι τετριμμένη λύση —για παράδειγμα, $24! = 23!4!$.) Προσπαθήσετε να παραστήσετε το $n!$ ως γινόμενο μικρότερων παραγοντικών (για παράδειγμα, $8! = 7!2!2!2!$) και αποδείξτε ότι η πυκνότητα του συνόλου των n για τα οποία αυτό είναι δυνατόν είναι 0.

Είδα για τελευταία φορά τον "Pali Bácsi" το καλοκαίρι του 1994, στο 2ο Συνέδριο της Παγκόσμιας Ομοσπονδίας Μαθηματικών Διαγωνισμών (WFNMC) στη Βουλγαρία. Είχα την ελπίδα ότι θα μπορούσε να παρευρεθεί στο 8ο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση, που έγινε στη Σεβίλλη της Ισπανίας το περασμένο καλοκαίρι, στο οποίο τιμήθηκα από την WFNMC με το «βραβείο Erdös» για τη συνεισφορά μου. Δεν μπόρεσε όμως να έρθει και πλέον δεν θα τον ξαναδούμε ποτέ!

Θα λείψει σε όλους μας, όχι μόνο ως ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, αλλά ως ένας από τους ευγενέστερους σκεπτόμενους στυλοβάτες της κοινωνίας των μαθηματικών. Μακάρι να υπάρχει πραγματικά το «μεγάλο βιβλίο στον ουρανό» που περιέχει τις κομψότερες αποδείξεις όλων των μαθηματικών θεωρημάτων, και να πάει εκεί να το απολαύσει.

Ο **George Berzsenyi** *είναι καθηγητής μαθηματικών στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman στην Ιντιάνα. Η διεύθυνσή του στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο είναι george.berzsenyi@rosehulman.edu.*

Τα μαθηματικά

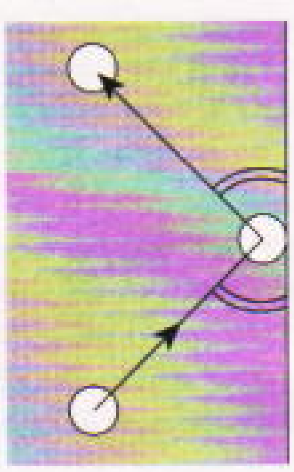
Ή τι μαθαίνει κανεί

Απ

ΤΟ ΔΗΜΟΦΙΛΕΣ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΜΠΙλιάρδου απαιτεί όχι μόνο κοφτερό μάτι και σίγουρο χέρι, αλλά και ακριβή υπολογισμό. Ο θρυλικός ήρωας του Εμφύλιου Πολέμου στη Ρωσία, στρατάρχης Semyon Mikhailovich Budyonny, συνήθιζε να λέει «όταν παίζω μπιλιάρδο, παίρνω μαθήματα φυσικής και μαθηματικών».

Η τέχνη του να παίζει κανείς μπιλιάρδο εμπεριέχει πολλά κομψά τεχνάσματα, τα οποία εμπλέκουν μη κεντρικά χτυπήματα. Τούτα αναγκάζουν τη μπάλα να στριφογυρίζει, και εξαιτίας της τριβής της με την τσόχα που καλύπτει το τραπέζι, καμπυλώνουν την τροχιά της. Τέτοιου είδους αποτελέσματα περιγράφονται από τον διάσημο γάλλο μηχανικό και φυσικό Gaspard Coriolis στο βιβλίο του *Η μαθηματική θεωρία των φαινομένων του μπιλιάρδου*, που εκδόθηκε το 1835.

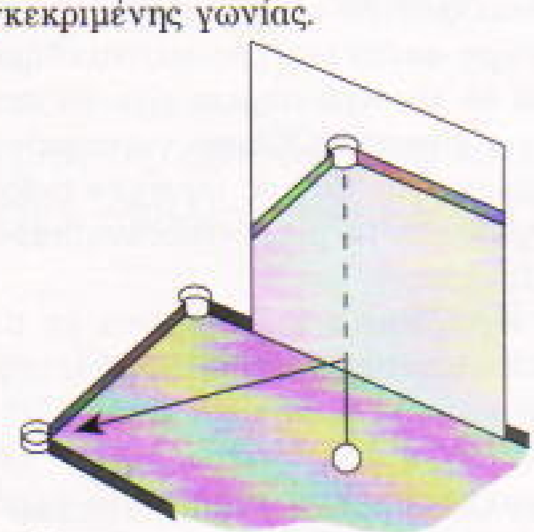
Εδώ θα θεωρήσουμε μόνο την απλούστερη ευθύγραμμη κίνηση μιας μπάλας του μπιλιάρδου και τις τροχιές που προκύπτουν από τις κρούσεις της με τα τοιχώματα τραπεζιών διαφόρων σχημάτων. Έπειτα από κάθε κρούση η μπάλα ανακλάται σύμφωνα με το γνωστό νόμο της οπτικής: *η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης* (Σχήμα 1). Δηλαδή, η τροχιά της μπάλας θα συμπίπτει με την τροχιά



Σχήμα 1

μιας ακτίνας φωτός. Σημειώστε, παρεμπιπτόντως, ότι ένα φωτόνιο μπορεί να θεωρηθεί (σε προβλήματα που εμπλέκουν την ανάκλαση) ως μιας μικρή μπάλα μπιλιάρδου.

Ας ξεκινήσουμε με το ακόλουθο πρόβλημα: Με δεδομένη τη θέση της μπάλας πάνω στο τραπέζι, προσδιορίστε την κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να χτυπηθεί η μπάλα ώστε να προσκρούσει σ' ένα τοίχωμα και να ανακλαστεί προς την «τσέπη» μιας συγκεκριμένης γωνίας.

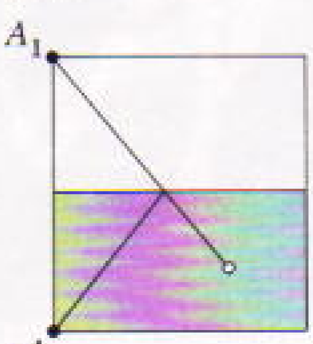


Σχήμα 2

Για να λύσετε το εν λόγω πρόβλημα, φανταστείτε ότι το τοίχωμα αντικαθίσταται από έναν καθρέφτη (Σχήμα 2). Τότε η κίνηση της μπάλας μέσα στον καθρέφτη, αφού θα έχει προσκρούσει στο τοίχωμα (καθρέφτη), θα αποτελεί προέκταση της ευθύγραμμης κίνησης που εκτελούσε πριν από την κρούση.

Σχεδιάστε το είδωλο της μπάλας του μπιλιάρδου καθώς ανακλάται στο δεδομένο τοίχωμα και ενώστε την αρχική θέση της μπάλας με το είδωλο της επιλεγμένης κορυφής (Σχήμα 3). Τώρα, η απαιτούμενη τροχιά της μπάλας λαμβάνεται από τα είδωλα των τμημάτων των ευθειών ως προς τα αντίστοιχα τοιχώματα.

Το επόμενο πρόβλημα είναι λίγο πιο δύσκολο. Δύο μπάλες, η μια κόκκινη και η άλλη άσπρη, βρίσκονται πάνω στο τραπέζι. Χτυπήστε την κόκκινη ούτως ώστε, αφού ανακλαστεί στα τοιχώματα *AB* και *BC*, να προσκρούσει στην άσπρη μπάλα.

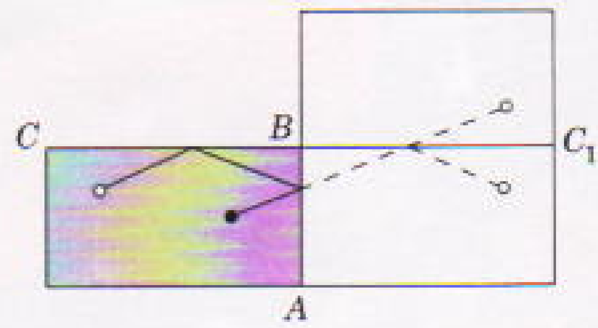


Σχήμα 3

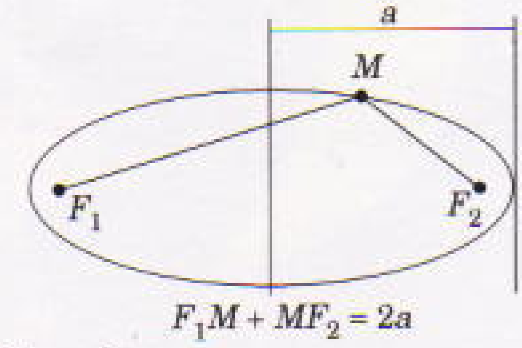
του μπιλιάρδου

στα σφαιριστήρια

y Savin



Σχήμα 4

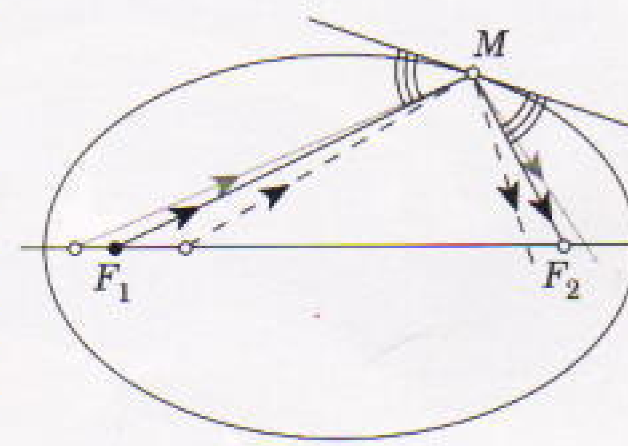


Σχήμα 6

Εδώ τα κατοπτρικά είδωλα βοηθούν και πάλι. Πρώτα θεωρούμε το είδωλο του τραπεζιού ως προς την πλευρά AB, και έστω C_1 το είδωλο της κορυφής C. Κατόπιν θεωρούμε το είδωλο του προηγούμενου ειδώλου του τραπεζιού ως προς την BC_1. Τώρα εντοπίζουμε το είδωλο της άσπρης μπάλας ως προς την AB, και το είδωλο αυτού του ειδώλου ως προς την BC. Ενώνοντας το δεύτερο είδωλο της άσπρης μπάλας με την κόκκινη μπάλα, προσδιορίζουμε τη ζητούμενη τροχιά (Σχήμα 4).

Και πώς θα κινηθεί η μπάλα πάνω σ' ένα κυκλικό τραπέζι μπιλιάρδου; Είναι σαφές πως οι χορδές που διαγράφονται από τη μπάλα μεταξύ δύο κρούσεών της με το τοίχωμα έχουν το ίδιο μήκος. Επομένως, η τροχιά θα αποτελεί είτε ένα κανονικό κυρτό πολύγωνο ή ένα κανονικό αστεροειδές πολύγωνο ή δεν θα κλείνει ποτέ, οπότε η μπάλα θα σαρώνει έναν συγκεκριμένο δακτύλιο (Σχήμα 5).

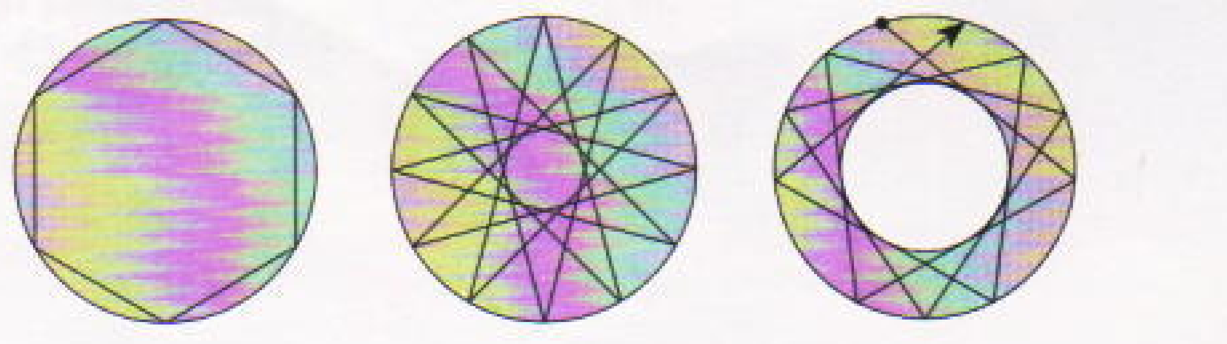
Είναι πολύ ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε την κίνηση της μπάλας πάνω σ' ένα ελλειψοειδές τραπέζι μπιλιάρδου. Το περίγραμμα ενός τέτοιου τραπεζιού μπορεί να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2 (τα οποία ονομάζονται εστίες της έλλειψης) είναι σταθερό: $F_1M + F_2M = 2a$, για κάποιον θετικό αριθμό a (Σχήμα 6).



Σχήμα 7

Η έλλειψη διαθέτει μια αξιοσημείωτη ιδιότητα: μια μπάλα με αφετηρία τη μια εστία, αφού ανακλαστεί στο τοίχωμα του τραπεζιού, θα διέλθει από την άλλη. Συνέπειά της αποτελεί το γεγονός ότι μια μπάλα που ξεκινά από το εσωτερικό της έλλειψης, από ένα σημείο επί της ευθείας που συνδέει τα F_1 και F_2 αλλά έξω από το τμήμα F_1F_2, δεν θα τμήσει ποτέ το εν λόγω τμήμα (Σχήμα 7).

Οι μαθηματικοί αναζητούσαν για πολύ καιρό ένα πολύγωνο που θα είχε δύο εσωτερικά του σημεία M_1 και M_2, τέτοια ώστε μια μπάλα που ξεκινά από το M_1 να μην μπορεί ουδέποτε να φτάσει στο M_2 (Σχήμα 8). Προς το παρόν η πλειονότητα των μαθηματικών πι-



Σχήμα 5

Συνέχεια στη σελ. 44 ⇨

3t + 1 + y + 2t = 333, y = 332 − 5t.
y
x
O

Ζητήματα απροσδιοριστίας

ax + by = c — ένα πρόβλημα ηλικίας 1.600 ετών

Boris Kordemsky

ΤΟ ΘΕΜΑ ΚΑΙ Ο ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΤΟΥ προβλήματος έχουν αλλάξει μέσα στους αιώνες, αλλά η ουσία του παραμένει η ίδια: βρείτε τους ακέραιους (συνήθως θετικούς) x και y που ικανοποιούν την εξίσωση

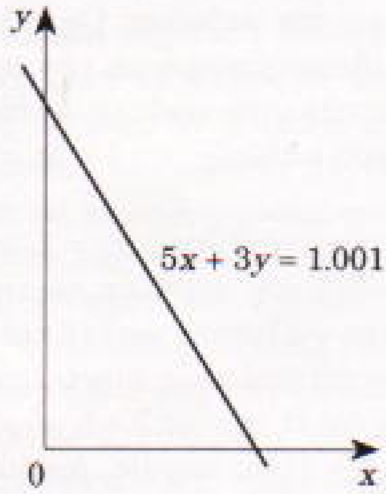
$$ax + by = c \qquad (1)$$

με δεδομένους ακέραιους συντελεστές a, b, και c.

Το c μπορεί να είναι οι χίλιες και μία ιστορίες, τα Παραμύθια της Χαλιμάς, και εμείς να ζητάμε να βρούμε επί πόσες νύχτες θα μπορεί η Σεχραζάτ να τις διηγείται, αν αφηγείται πέντε ιστορίες τη βραδιά για x νύκτες ενώ τις υπόλοιπες y νύχτες αφηγείται από τρεις. Είναι φανερό ότι οι θρύλοι της αρκούν για $x + y$ νύχτες, όπου x και y είναι οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $5x + 3y = 1.001$.

Μπορεί πάλι το c να είναι τα 10 ρούβλια και το 1 καπίκι (το 1/100 του ρουβλίου) που ξοδεύει κάποιος για x διαδρομές με το λεωφορείο (με εισιτήριο 5 καπικιών) και y διαδρομές με το τραμ (με εισιτήριο 3 καπικιών).[1] Η απάντηση για το πλήθος των διαδρομών δίνεται από την ίδια εξίσωση: $5x + 3y = 1.001$.

Κάθε λύση αυτής της εξίσωσης μας δίνει επίσης πληροφορίες για τα σημεία της ευθείας $5x + 3y = 1.001$



(δείτε το Σχήμα) οι συντεταγμένες των οποίων είναι θετικοί ακέραιοι (ή, ίσως, σε κάποιο άλλο πρόβλημα, απλώς ακέραιοι).

Οι εξισώσεις ακεραίων ονομάζονται συχνά *διοφαντικές εξισώσεις*, προς τιμήν του Διοφάντου της Αλεξανδρείας, του διάσημου έλληνα μαθηματικού που έζησε τον 2ο και 3ο αιώνα μ.Χ.

Σ' αυτό το άρθρο δεν θα ασχοληθούμε με τη θεωρία για την ύπαρξη ακέραιων λύσεων σε εξισώσεις της μορφής $ax + by = c$. Θα χρησιμοποιήσουμε απλώς τη συγκεκριμένη εξίσωση $5x + 3y = 1.001$ για να επιδείξουμε διάφορες τεχνικές επίλυσης ακέραιων εξισώσεων.[2]

Η μέθοδος του «έξυπνου μαθητή»

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης $5x + 3y = 1.001$ με τον μικρότερο συντελεστή:

$$\frac{5}{3}x + y = \frac{1.001}{3},$$

και ξεχωρίζουμε τα ακέραια μέρη στο δεξιό και στο αριστερό μέλος:

$$x + \frac{2}{3}x + y = 333 + \frac{2}{3},$$

ή

$$x + y + \frac{2(x-1)}{3} = 333. \qquad (2)$$

Αφού τα x και y είναι ακέραιοι, ο αριθμός $(x - 1)/3$ πρέπει να είναι επίσης ακέραιος. Τον συμβολίζουμε με t. Τότε $x = 3t + 1$. Αν αντικαταστήσουμε την τελευταία στην εξίσωση (2), παίρνουμε $3t + 1 + y + 2t = 333$, και επομένως $y = 332 - 5t$.

Αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις των x και y δίνουν τη *γενική λύση* της εξίσωσής μας —δηλαδή, διατρέχουν όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης καθώς το t παίρνει όλες τις τιμές του συνόλου των ακεραίων.

Αν δώσουμε τις τιμές 0, 1, 2, ..., 66 στην παράμετρο t, θα πάρουμε 67 ζεύγη δυνατών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Σεχραζάτ θέλει να διηγηθεί τις χίλιες και μία ιστορίες της επί όσο το δυνατόν περισσότερες νύχτες.[3] Με άλλα λόγια, πρέπει να βρούμε το $\max(x + y)$

1. Για τα μαθηματικά δεν έχει βέβαια καμία σημασία, αλλά πιθανόν θα σας ενδιαφέρει να μάθετε ότι εξαιτίας του πληθωρισμού και της αύξησης των τιμών, το εισιτήριο του λεωφορείου είναι σήμερα στη Μόσχα 30.000 φορές ακριβότερο από την εποχή που γράφτηκε το άρθρο, ενώ του τραμ 50.000 φορές.

2. Θυμηθείτε μόνο ότι η ύπαρξη λύσεων για την εξίσωση (1) εξασφαλίζεται από τη συνθήκη ΜΚΔ$(a, b) = 1$ (όπου ΜΚΔ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης), και επομένως η εξίσωση $5x + 3y = 1001$ έχει ακέραιη λύση.

3. Υπό τον όρο, βέβαια, ότι διηγείται τρεις ή πέντε ιστορίες κάθε νύχτα.

Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

—το μέγιστο άθροισμα των ζευγών ριζών της εξίσωσής μας.

Αφού $x + y = 333 - 2t$, το $\max(x + y)$ επιτυγχάνεται για $t = 0$. Επομένως, η Σεχραζάτ μπορεί να διηγείται τις ιστορίες της για 333 το πολύ νύχτες (αφηγούμενη τρεις ιστορίες επί 332 νύχτες και πέντε 1 μόνο φορά). Μπορεί να συντομεύσει τη διάρκεια της «δουλειάς» της σε 201 νύχτες (κάτι που δεν θα τη συνέφερε) αφηγούμενη πέντε ιστορίες επί 199 νύχτες και τρεις ιστορίες 2 μόνο φορές). Αυτή η λύση προκύπτει αν πάρουμε το μέγιστο δυνατό t —δηλαδή, $t = 66$.

Ένα επιπλέον ερώτημα

Ας υποθέσουμε ότι κατά την επίλυση μιας ακέραιης εξίσωσης με τη μέθοδο του «έξυπνου μαθητή» καταλήγετε στην

$$x + y + \frac{4y-1}{3} = 77.$$

Ποια θα είναι η πορεία των συλλογισμών σας και τι θα κάνετε για να εκφράσετε κατάλληλα τα x και y συναρτήσει μιας ακέραιης παραμέτρου t;

Η μέθοδος του «έξυπνου μαθηματικού»

Η διαδικασία[4] για τη γενική εξίσωση $ax + by = c$ (έστω, με $a > b$) έχει ως εξής: βρίσκουμε το υπόλοιπο m της διαίρεσης του a με το b και το υπόλοιπο n της διαίρεσης του c με το b. Αν $n = 0$, παίρνουμε αμέσως

$$x = bt,$$

$$y = \frac{c}{b} - at,$$

όπου $t = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Αν $n \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά το m επί 1, 2, ..., $b - 1$, και γράφουμε την ακολουθία των υπολοίπων της διαίρεσης αυτών των γινομένων με το b. Η ακολουθία αυτή θα περιέχει τον αριθμό n (διαφορετικά η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις). Τότε, μία από τις δυνατές τιμές του x είναι απλώς ο αριθμός της θέσης του n στην ακολουθία.

Για παράδειγμα, ας εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο στην εξίσωση $5x + 3y = 1.001$. Έχουμε $m = 2$, $n = 2$. Πολλαπλασιάζουμε το $m = 2$ με τους αριθμούς 1 και $2 = b - 1$, και παίρνουμε 2 και 4. Διαιρούμε τους τελευταίους με το 3 και γράφουμε τα υπόλοιπα: 2 και 1. Σ' αυτή την περίπτωση ο αριθμός n βρίσκεται στην πρώτη θέση, επομένως μπορούμε να θέσουμε $x = 1$. Έτσι καθορίζεται η αντίστοιχη τιμή του y: είναι $y = 332$.

Ορίστε λοιπόν: μια εύκολη και τελείως γενική μέθοδος επίλυσης γραμμικών απροσδιόριστων εξισώσεων δύο ακέραιων μεταβλητών!

Ωστόσο, η μέθοδος του «έξυπνου μαθηματικού», αντίθετα με την προηγούμενη, μας έδωσε ένα μόνο ζεύγος λύσεων: (1, 332). Είναι αυτό ελάττωμα της μεθόδου; Όχι! Πράγματι, ας θεωρήσουμε τη γενική λύση που προέκυψε από τη μέθοδο του «έξυπνου μαθητή»: $x = 1 + 3t$, $y = 332 - 5t$.

Οι *μερικές λύσεις* $x_0 = 1$, $y_0 = 332$ είναι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις, ενώ οι συντελεστές του t (3 και -5) καθορίζονται από τους συντελεστές της δεδομένης εξίσωσης: $3 = b$, $-5 = -a$. Και τούτο δεν είναι τυχαίο. Αντίθετα, είναι γενικός κανόνας: αν (x_0, y_0) είναι λύση της εξίσωσης $ax + by = c$, όπου a και b είναι πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί, τότε όλες οι ακέραιες λύσεις δίνονται από τους τύπους $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, όπου $t = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Η μέθοδος της ισοτιμίας

Αυτός είναι ένας όμορφος —και συχνά ο ταχύτερος— τρόπος εύρεσης των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $ax + by = c$.

Αρκεί να θυμηθούμε ότι ο συμβολισμός $a \equiv b \pmod m$ (το a ισότιμο με το b modulo m) σημαίνει ότι το $a - b$ διαιρείται με το m ή, ισοδύναμα, ότι $a = b + km$ (το m είναι θετικός ακέραιος ενώ τα a και b είναι ακέραιοι).

Επιπλέον, αν $a \equiv b \pmod m$, τότε $a \equiv b + km \pmod m$ για κάθε ακέραιο k. Για παράδειγμα, έστω $3x \equiv 2 \pmod 5$. Τότε έχουμε $3x \equiv 2 + 2 \cdot 5 \pmod 5$, $3x \equiv 12 \pmod 5$, και τελικά $x \equiv 4 \pmod 5$. (Πρέπει να σημειώσουμε ότι η διαίρεση και των δύο μελών μιας ισοτιμίας modulo m με τον κοινό τους παράγοντα q επιτρέπεται μόνο αν τα m και q είναι πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί.)

Ένα προκαταρκτικό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την ισοτιμία $11x \equiv 2 \pmod{23}$. Δεν θα είναι πρακτικό να αρχίσουμε να προσθέτουμε το 23 στο δεξιό μέλος έως ότου βρούμε ένα πολλαπλάσιο του 11. Ας αναζητήσουμε μια κομψότερη διαδικασία. Για παράδειγμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $22x \equiv 4 \pmod{23}$ και να αφαιρέσουμε το $23x$ από το αριστερό μέλος. Έτσι, προκύπτει ότι $-x \equiv 4 \pmod{23}$ και, τελικά, $x \equiv 19 \pmod{23}$.

Στην περίπτωση της αρχικής μας εξίσωσης, $5x + 3y = 1.001$, οι ισοτιμίες έχουν ως εξής: $3y \equiv 1.001 - 5x$, επομένως $3y \equiv 1.001 \pmod 5$. Αφού $1.001 = 200 \cdot 5 + 1$, έχουμε ότι $3y \equiv 1 \pmod 5$ ή $3y \equiv 6 \pmod 5$. Επομένως, $y \equiv 2 \pmod 5$, πράγμα που σημαίνει ότι $y = 2 + 5k$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$). Αυτή η λύση είναι φανερά ισοδύναμη με την προηγούμενη: $y = 332 - 5t$ ($t = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

Η μέθοδος των συνεχών κλασμάτων

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό του συνήθους κλάσματος a/b, των συντελεστών της εξίσωσης $ax + by = c$, στο *συνεχές κλάσμα*

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{1}{a_n}}},$$

το οποίο γράφεται εν συντομία ως

$$a/b = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Οι αριθμοί

$$P_k/Q_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k],\ k = 0, 1, \ldots, n$$

—που ονομάζονται *συγκλίνουσες* του συνεχόμενου κλάσματος— υπολογίζονται επαγωγικά με τη χρήση των αναδρομικών τύπων

$$P_{k+1} = P_k \cdot a_{k+1} + P_{k-1},$$
$$Q_{k+1} = Q_k \cdot a_{k+1} + Q_{k-1},$$

όπου $P_0 = a_0$, $P_1 = a_0 \cdot a_1 + 1$, $Q_0 = 1$, $Q_1 = a_1$, και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Αφού υπολογίσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της προτελευταίας συγκλίνουσας P_{n-1}/Q_{n-1} απευθείας ή με τη βοήθεια των προηγούμενων αναδρομικών τύπων, μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη λύση της εξίσωσης χρη-

4. Ο εφευρέτης αυτής της μεθόδου, ο L.F. Taylor (*Numbers*, Λονδίνο 1970), δεν της έδωσε κάποιο ιδιαίτερο όνομα.

σιμοποιώντας διαθέσιμους τύπους[5] που εκφράζουν τη γενική της λύση συναρτήσει αυτών των αριθμών:

$$\begin{cases} x=(-1)^{n-1}\cdot c\cdot Q_{n-1}+b\cdot t, \\ y=(-1)^{n}\cdot c\cdot P_{n-1}-a\cdot t, \\ t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{3}$$

Ας επιστρέψουμε για τελευταία φορά στην εξίσωση $5x + 3y = 1.001$. Μετασχηματίζουμε τον αριθμό 5/3 σε συνεχές κλάσμα:

$$3\overline{)5}\,\overset{1}{} \to a_0 = 1$$

$$\frac{3}{2}\overline{)3}\,\overset{1}{} \to a_1 = 1$$

$$\frac{2}{1}\overline{)2}\,\overset{2}{} \to a_2 = 2,$$

επομένως $5/3 = [1; 1, 2]$. Οι συγκλίνουσες είναι

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1} = 1,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{5}{3}.$$

(Στην πραγματικότητα, δεν χρειαζόμαστε την τελευταία συγκλίνουσα. Άλλωστε, πάντα είναι ίση με το δεδομένο κλάσμα. Δίνουμε αυτό τον τύπο μόνο για να θυμηθούμε ξανά πώς υπολογίζουμε τις συγκλίνουσες απευθείας από τον ορισμό.)

Αφού εδώ έχουμε $n = 2$, ο αριθμητής P_{n-1} και ο παρονομαστής Q_{n-1} της προτελευταίας συγκλίνουσας είναι

$$P_{n-1} = P_1 = 2,$$
$$Q_{n-1} = Q_1 = 1.$$

Είμαστε τώρα σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (3):

$$x = -1 \cdot 1.001 \cdot 1 + 3t,$$
$$y = -1 \cdot 1.001 \cdot 2 - 5t,$$

και τελικά

$$x = -1.001 + 3t,$$
$$y = 2.002 - 5t,$$

όπου $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Η απάντηση φαίνεται και πάλι διαφορετική, αλλά μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε ότι είναι ισοδύναμη με τις προηγούμενες μορφές. Εδώ η συγκεκριμένη λύση $x = 1$, $y = 332$ προκύπτει για $t = 334$.

Ας λύσουμε ένα τελευταίο πρόβλημα.

Μετά το ναυάγιο

Πέντε ναύτες έφτασαν σ' ένα νησί, και πριν σκοτεινιάσει μάζεψαν μια ποσότητα καρύδες. Αποφάσισαν να αναβάλουν το μοίρασμά τους για το επόμενο πρωί. Ένας από τους ναύτες ξύπνησε στη διάρκεια της νύχτας, μέτρησε τις καρύδες, έδωσε μια στον πίθηκο που είχαν μαζί τους και κράτησε για τον εαυτό του ακριβώς το 1/5 από τις υπόλοιπες. Έπειτα επέστρεψε στο κρεβάτι του και ξανακοιμήθηκε. Λίγο αργότερα, ένας ακόμη ναύτης ξύπνησε και επανέλαβε την ίδια διαδικασία. Στη συνέχεια, και με τη σειρά, έκαναν το ίδιο και οι υπόλοιποι τρεις. Κανείς τους δεν είχε την παραμικρή ιδέα για το τι είχαν κάνει οι υπόλοιποι. Το πρωί μοίρασαν σε ίσα μερίδια τις υπόλοιπες καρύδες, αλλά αυτή τη φορά ο πίθηκος δεν πήρε καμία. Πόσες καρύδες μάζεψαν οι ναύτες;

Λύση. Συμβολίζουμε με x το άγνωστο πλήθος από καρύδες. Μπορούμε να περιγράψουμε τους μετασχηματισμούς του πλήθους αυτού μέσω της επόμενης διαδοχής εξισώσεων: $x = 5a + 1$, $4a = 5b + 1$, $4b = 5c + 1$, $4c = 5d + 1$, $4d = 25y + 1$. (Αφήνω τους αναγνώστες να διερευνήσουν το νόημα αυτών των εξισώσεων.)

Αυτό το σύστημα εξισώσεων ανάγεται στην εξίσωση απροσδιορίστων

$$256x = 2.101 + 15.625y.$$

Μια καλή ανταμοιβή για την υπομονετική σας προσπάθεια με τις τέσσερις μεθόδους που παρουσιάσαμε, είναι η γρήγορη λύση αυτής της επίπονης εξίσωσης. Μπορείτε να διαλέξετε τη μέθοδο που είναι αποτελεσματικότερη σ' αυτή την περίπτωση. Η μικρότερη (εννοείται θετική) απάντηση είναι $x = 3.121$.

Ο Martin Gardner, στο βιβλίο του *Mathematical Puzzles and Diversions* περιγράφει αυτό το πρόβλημα ως μια από εκείνες τις διοφαντικές εξισώσεις για τις οποίες έχουν γίνει οι περισσότερες —αλλά και λιγότερο επιτυχημένες— προσπάθειες επίλυσης. Έπειτα από την εμφάνιση αυτού του προβλήματος το 1926 στην *The Saturday Evening Post*, η εφημερίδα εξακολούθησε να λαμβάνει επί είκοσι σχεδόν χρόνια επιστολές που είτε ζητούσαν είτε πρότειναν μια λύση.

Ασκήσεις

1. Βρείτε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $10x + 21y = 23$ χρησιμοποιώντας και τις τέσσερις μεθόδους που περιγράψαμε στο άρθρο.

2. Βρείτε έναν διψήφιο αριθμό τέτοιον ώστε το οκταπλάσιο του ψηφίου των μονάδων να είναι κατά 13 μικρότερο από το τριπλάσιο του ψηφίου των δεκάδων.

3. Ένα πλήθος τουριστών μεταφέρθηκε με λεωφορεία στον σιδηροδρομικό σταθμό σε πέντε ισοπληθείς ομάδες. (Κάθε λεωφορείο μεταφέρει 54 το πολύ επιβάτες.) Στο σταθμό προστέθηκαν άλλα 7 άτομα, και στη συνέχεια κατανεμήθηκαν όλοι ομοιόμορφα σε δεκατέσσερα βαγόνια. Ποιο ήταν το συνολικό πλήθος των τουριστών;

4. Υπάρχουν ακέραια σημεία στην ευθεία $13x - 5y + 96 = 0$ των οποίων οι συντεταγμένες έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση του 10;

5. Έστω n θετικός ακέραιος. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις τις εξίσωσης

$$nx + (n + 1)y = 2n + 1.$$

6. Πρέπει να μεταφέρουμε δεκαπέντε λίτρα υγρού σε φιάλες όγκου 0,5 l και 0,8 l, γεμίζοντας τελείως τις φιάλες. Πόσες φιάλες θα χρειαστούμε από κάθε είδος;

7. Αποδείξτε ότι για κάθε περιττό x αληθεύει η ισοτιμία $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ —δηλαδή, ότι το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού διαιρούμενο με το 8 δίνει υπόλοιπο 1.

5. Οι τύποι αυτοί αποδεικνύονται στα περισσότερα βιβλία στοιχειώδους θεωρίας αριθμών. Βλ., για παράδειγμα, *Mathematical Excursions* του H. Merril (Dover, 1957).

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ

Σκοτεινοί υπολογισμοί

Διαφωτίζοντας ένα παράδοξο στα σύνορα του σκότους και του φωτός

Chauncey W. Bowers

ΤΟ ΟΤΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ είναι ένα ανώτατο όριο αποτελεί έμμεση συνέπεια της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Ειδικότερα, από την ισοδυναμία μάζας-ενέργειας ($E = mc^2$) προκύπτει ότι, για να επιταχυνθεί μια οποιαδήποτε μάζα μέχρι την τιμή της ταχύτητας του φωτός, απαιτείται άπειρη ποσότητα ενέργειας. Επιπλέον, προκειμένου να διατηρηθεί η έννοια της αιτιότητας, τίποτε δεν μπορεί να επηρεάζει γεγονότα ταχύτερα απ' ό,τι το φως. Ωστόσο, τα όρια που επιβάλλουν οι νόμοι της φυσικής δίνουν τη δυνατότητα σε κάποια μετρήσιμα χαρακτηριστικά του καθημερινού κόσμου μας να υπερβαίνουν την ταχύτητα του φωτός. Ειδικότερα, η κίνηση της ακμής μιας σκιάς μπορεί να υπερβεί κατά πολύ την ταχύτητα του φωτός. Οι σκιές, όντως, μπορούν να παρουσιάσουν συμπεριφορά που φυσιολογικά αποκλείεται από την κοινή λογική —για παράδειγμα, μπορούν να καταλήξουν στον προορισμό πριν εγκαταλείψουν την αφετηρία τους.

Θεωρήστε τη σκιά που δημιουργεί ένας τοίχος AB ύψους Y (Σχήμα 1). Η γωνία που σχηματίζει το προσπίπτον φως με το έδαφος είναι θ. Μπορούμε να αναλύσουμε το προκύπτον τρίγωνο μέσω των βασικών τριγωνομετρικών κανόνων. (Υποθέτουμε ότι το φως προσκρούει στον τοίχο με τη μορφή παράλληλων ακτίνων, όπως αν η φωτεινή πηγή ήταν πολύ απομακρυσμένη —π.χ. αν ήταν ο Ήλιος.) Έτσι, το μήκος της σκιάς επί του εδάφους θα είναι $AC = Y\sigma\varphi\theta$. Αν χαμηλώσουμε τον τοίχο κατά Δy (από το σημείο B στο B'), η σκιά στο έδαφος θα μετακινηθεί κατά Δx (από το σημείο C στο C') —όπου $\Delta x = \Delta y \sigma\varphi\theta$. Για παράδειγμα, αν $\theta = 30°$, τότε $\sigma\varphi\theta \cong 1{,}73$ και $\Delta x \cong 1{,}73\Delta y$. Η μέση τα-

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

χύτητα οποιουδήποτε κινητού, συμπεριλαμβανομένης της ακμής μιας σκιάς, ισούται, όπως γνωρίζετε, με το πηλίκο της διανυθείσας απόστασης προς τον απαιτούμενο χρόνο. Για την ακμή της σκιάς, η μέση ταχύτητά της είναι $\Delta x/\Delta t$, όπου Δt ο χρόνος που χρειάζεται η σκιά για να μετακινηθεί κατά Δx, από το σημείο C στο C', και ο οποίος βεβαίως είναι συνάρτηση του πόσο γρήγορα χαμηλώνει ο τοίχος. Ο τοίχος δεν μπορεί να χαμηλώνει με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα c του φωτός· μπορούμε, λοιπόν, να συμβολίσουμε με ac την ταχύτητά του, όπου a είναι ένας καθαρός αριθμός μικρότερος της μονάδας.

Αν ο τοίχος χαμηλώνει με ταχύτητα πολύ μικρότερη της c (το πόσο ακριβώς μικρότερη θα το δούμε παρακάτω), η ταχύτητα v_σ της ακμής της σκιάς θα ισούται με

$$v_\sigma = ac\sigma\varphi\theta. \qquad (1)$$

Τούτο ισχύει διότι υποθέτουμε πως η σκιά αρχίζει να κινείται την ίδια στιγμή κατά την οποία αρχίζει να χαμηλώνει ο τοίχος —δηλαδή, ο χρόνος που απαιτείται για να μετακινηθεί η σκιά μπορεί να προσεγγιστεί ως ο χρόνος που απαιτείται για να χαμηλώσει ο τοίχος.

Στην πραγματικότητα, όμως, υπάρχει κάποια καθυστέρηση μεταξύ της στιγμής που ο τοίχος αρχίζει να χαμηλώνει και της στιγμής που η σκιά αρχίζει να μετακινείται —η σκιά δεν θα κινηθεί έως ότου το φως διανύσει την απόσταση $BC = Y/\eta\mu\theta$. Η εν λόγω χρονική καθυστέρηση θα ισούται με

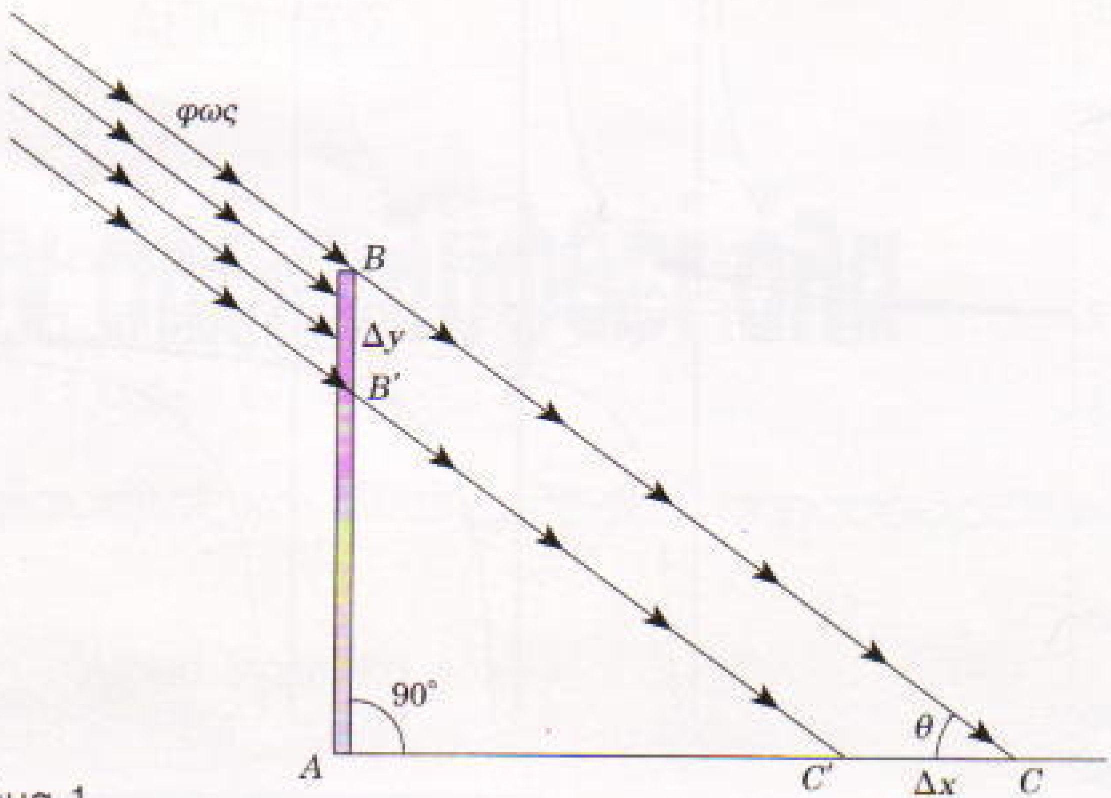
$$\Delta t_1 = \frac{Y}{c\eta\mu\theta} \qquad (2)$$

—δηλαδή, με την απόσταση που διήνυσε το φως διαιρεμένη διά την ταχύτητά του.

Πότε η σκιά ολοκληρώνει την κίνησή της, σταματώντας στο σημείο C'; Αν ο τοίχος χαμηλώσει κατά Δy με ταχύτητα ac, τότε ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει τη διαδρομή του είναι

$$\Delta t_\tau = \frac{\Delta y}{ac}.$$

Η σκιά δεν θα «φτάσει» στο σημείο C',



Σχήμα 1

παρότι ο τοίχος θα έχει φτάσει στο B', παρά μόνο αφού το φως διανύσει *και* την απόσταση $B'C'$. Η εν λόγω απόσταση ισούται με $(Y - \Delta y)/\eta\mu\theta$, και ο χρόνος στον οποίο το φως τη διανύει ισούται με

$$\Delta t_2 = \frac{Y - \Delta y}{c\eta\mu\theta}.$$

Τώρα διαθέτουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία για να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα της ακμής της σκιάς. Ο χρόνος Δt_σ κατά τον οποίο η σκιά κινείται από το C στο C' ισούται προφανώς με το χρόνο Δt_τ (στη διάρκεια του οποίου ο τοίχος χαμηλώνει από το B στο B') συν το χρόνο Δt_2 (κατά τον οποίο το φως κινείται από το B' στο C') μείον το χρόνο Δt_1 (που χρειάζεται το φως για να κινηθεί από το B στο C)· δηλαδή,

$$\Delta t_\sigma = \frac{\Delta y}{ac} + \frac{Y - \Delta y}{c\eta\mu\theta} - \frac{Y}{c\eta\mu\theta}$$

$$= \frac{\Delta y}{c}\left(\frac{\eta\mu\theta - a}{a\eta\mu\theta}\right).$$

Άρα, ο ακριβής τύπος που μας δίνει την ταχύτητα της ακμής της σκιάς είναι

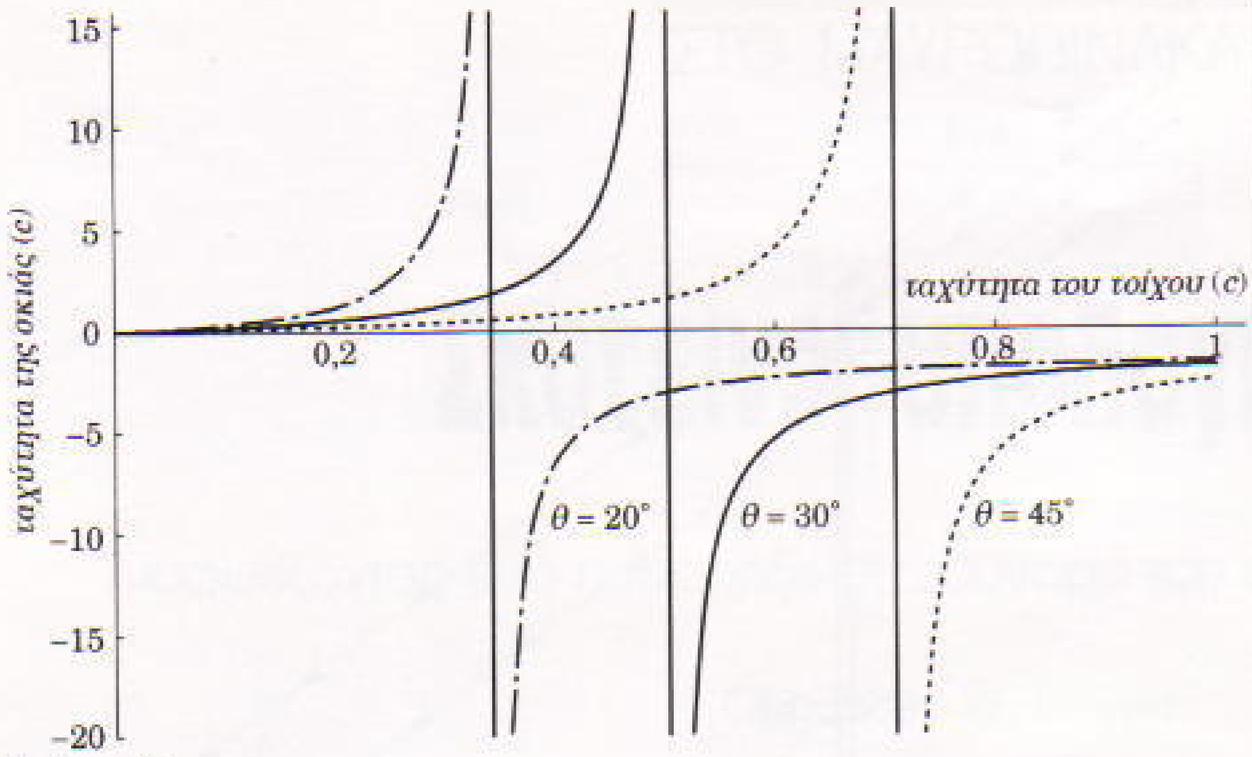
$$v_\sigma = \frac{\Delta x}{\Delta t_\sigma} = \left(\frac{ac\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta - a}\right). \qquad (3)$$

Όπως ίσως θα αναμένατε, η ταχύτητα της σκιάς είναι ανεξάρτητη τόσο από την απόσταση κατά την οποία χαμηλώνει ο τοίχος όσο και από το ύψος του· εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα με την οποία χαμηλώνει ο τοίχος και από τη γωνία υπό την οποία προσπίπτει το φως. Όπως είναι αναμενόμενο, για μικρές τιμές του a ($a \ll \eta\mu\theta$) ισχύει

$$v_\sigma = \left(\frac{ac\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right) = ac\sigma\varphi\theta.$$

—που είναι η εξίσωση (1).

Η συμπεριφορά της σκιάς, όπως περιγράφεται από την εξίσωση (3), μας εκπλήσσει. Για γωνία $\theta = 30°$ και ταχύτητα με την οποία χαμηλώνει ο τοίχος ίση με $0{,}4c$ ($a = 0{,}4$), η ταχύτητα της σκιάς είναι $3{,}5c$! Μάλιστα, η σκιά μπορεί να κινηθεί οσοδήποτε γρήγορα θέλουμε μέχρις ότου $a = \eta\mu\theta$, όπου και εμφανίζεται μια ανωμαλία. Η ταχύτητα της σκιάς δεν ορίζεται μαθηματικά στην εν λόγω ανωμαλία, και τούτο συσχετίζεται με τη συμπεριφορά της σκιάς. Όταν $a = \eta\mu\theta$, φως σαρώνει *στιγμιαία* την περιοχή από το C μέχρι το C'. Έτσι, η ταχύτητα της ακμής της σκιάς, τόσο από φυσική άποψη όσο και από μαθηματική, δεν ορίζεται. Αν η ταχύτητα του τοίχου αυξηθεί ώστε $a > \eta\mu\theta$, το πρόσημο της ταχύτητας της σκιάς αλλάζει. Και πάλι τούτο συσχετίζεται με τη φυσική συμπεριφορά της σκιάς. Όταν $a > \eta\mu\theta$, φως θα εμφανιστεί στο σημείο C' *πριν* η ακμή της σκιάς μετακινηθεί από το C. Το φως τότε θα προχωρήσει από τα αριστερά προς τα δεξιά του Σχήματος 1 (αντί από τα δεξιά προς τα αριστερά) με



Σχήμα 2

ταχύτητα που υπολογίζεται από τη σχέση (3). Ως εκ τούτου, η σκιά θα φτάσει στον προορισμό της (C') πριν ξεκινήσει από την αφετηρία της (C)! Η αύξηση της ταχύτητας με την οποία χαμηλώνει ο τοίχος σε τιμές μεγαλύτερες αυτής που αντιστοιχεί στην παραπάνω ανωμαλία προκαλεί όχι μόνο αντιστροφή στη φορά της ταχύτητας της σκιάς, αλλά και *μείωση* του μέτρου της.

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης (3) για διάφορες γωνίες θ φαίνεται στο Σχήμα 2. Διαπιστώνετε ότι μείωση της θ συνεπάγεται μείωση της ταχύτητας του τοίχου που αντιστοιχεί στην ανωμαλία. Για $\theta = 5°$, ο τοίχος αρκεί να χαμηλώσει με ταχύτητα $0{,}08c$, ώστε η σκιά να έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από $10c$.

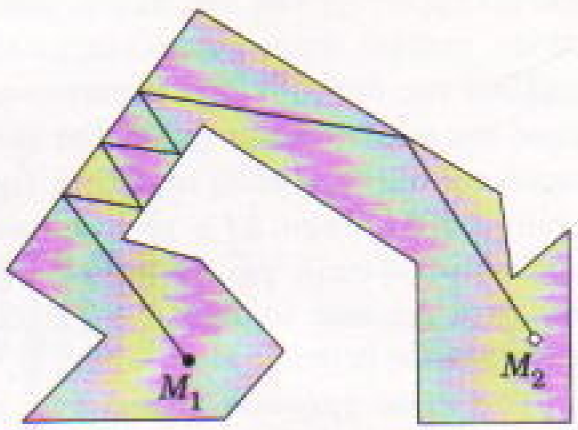
Αφήνω στον αναγνώστη να εξακριβώσει ότι η δυνατότητα για ταχύτητες της σκιάς μεγαλύτερες από c υπάρχει μόνο όταν ο τοίχος χαμηλώνει και όχι όταν ανυψώνεται. (Πράγματι, ακόμη κι αν ο τοίχος ήταν δυνατόν να ανυψωθεί, με κάποιον τρόπο, ακαριαία, η ταχύτητα της ακμής της σκιάς θα ήταν ίση μόνο με c συνθ.)

Αντιλαμβάνεστε γιατί η ισοδυναμία μάζας-ενέργειας ουδόλως εμπλέκεται στην παραπάνω συμπεριφορά της σκιάς; Επειδή δεν υπάρχει μάζα που να κινείται στην κατεύθυνση που μετατοπίζεται η ακμή της σκιάς. Η κίνησή της είναι το αποτέλεσμα του συγχρονισμού της διάδοσης του φωτός προς το έδαφος καθώς ο τοίχος χαμηλώνει. Επιπλέον, η σκιά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επηρεάσει γεγονότα ταχύτερα απ' ό,τι το φως. Επ' αυτού, πρέπει να θυμόμαστε ότι η σκιά δεν αρχίζει την κίνησή της απ' το σημείο C παρά μόνο *αφότου* το φως έχει διανύσει την απόσταση BC. Για $a <$ ημθ, η συνακόλουθη κίνηση της σκιάς με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός δεν μπορεί να επηρεάσει άλλα γεγονότα ταχύτερα, εξαιτίας αυτής της καθυστέρησης. Για $a >$ ημθ, το φως θα εμφανιστεί στο σημείο C' πριν από την καθυστέρηση που εκφράζει η εξίσωση (2), αλλά αφότου έχει διανύσει την απόσταση $B'C'$. Έτσι, οποιοσδήποτε επηρεασμός επιτυγχάνεται με ταχύτητα μικρότερη αυτής του φωτός, δεδομένου ότι πρέπει επίσης να αναμένουμε ώσπου ο τοίχος να κινηθεί από το B στο B'.

Οι ποιητές συχνά αναφέρουν τα σύνορα μεταξύ φωτός και σκότους ως μια περιοχή με παράξενη παράδοξη συμπεριφορά. Οι επιστήμονες δεν μπορεί παρά να συμφωνήσουν πως οι τελευταίοι εκφράζουν μια επαληθεύσιμη όψη της. Όντως, η ακμή μιας σκιάς είναι εύκολα προσδιορίσιμη και μετρήσιμη, και η κίνησή της δεν περιορίζεται από την ταχύτητα του φωτός που τη δημιουργεί.

O **Chauncey W. Bowers** *είναι ερευνητής στο Τμήμα Νευροεπιστημών του Ερευνητικού Ινστιτούτου Beckman στην Χόουπ. Η διεύθυνση του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου του είναι: cbowers@coh.coh.org.*

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 37*

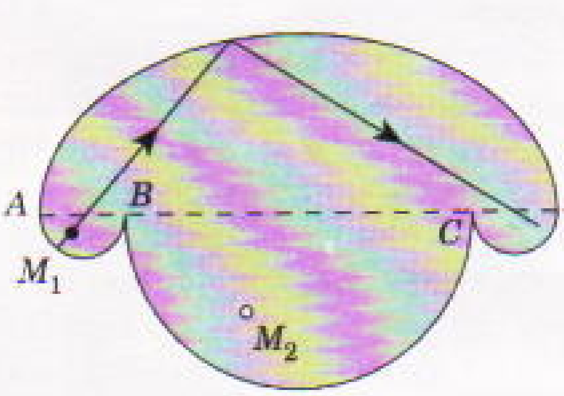


Σχήμα 8

στεύει πως ένα τέτοιου είδους πολύγωνο δεν υπάρχει, παρόλο που τούτο δεν έχει αποδειχτεί.

Ταυτοχρόνως δεν είναι δύσκολο να επινοήσουμε ένα καμπυλόγραμμο «τραπέζι» μπιλιάρδου με την εν λόγω ιδιότητα.

Ένα παράδειγμα τέτοιου τραπεζιού φαίνεται στο Σχήμα 9. Το τόξο AD είναι το ήμιου μιας έλλειψης με εστίες τα σημεία B και C· τα τόξα AB, BC και CD είναι ημικύκλια. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μια μπάλα που ξεκινά από ένα σημείο M_1 σε κάποιο από τα μικρότερα ημικύκλια, δεν θα διέλθει ποτέ από το τμήμα BC, κι έτσι δεν θα χτυπήσει οποιοδήποτε σημείο M_2 στο μεγαλύτερο ημικύκλιο.



Σχήμα 9

Οι μαθηματικοί μελετούν τις τροχιές μιας μπάλας σε ακόμη πιο πολύπλοκα καμπυλόγραμμα τραπέζια. Γιατί; Λύσεις σε προβλήματα του συγκεκριμένου τύπου μάς βοηθούν να κατανοήσουμε τους νόμους της κίνησης των μορίων των αερίων ή δεσμών σωματιδίων σε κλειστούς όγκους, και τούτοι οι νόμοι είναι χρήσιμοι σε πολλές περιοχές της φυσικής —ιδιαίτερα στην κβαντική ηλεκτρονική. Τα μόρια ανακλώνται στα τοιχώματα ακριβώς όπως μια μπάλα του μπιλιάρδου στο τοίχωμα του τραπεζιού.

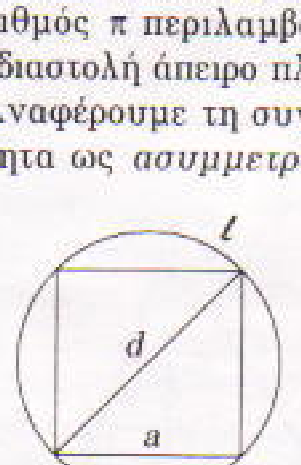
Δεν έχουν αποκαλυφθεί όλα

Περί της αρχής της αβεβαιότητας και άλλων μορφών απροσδιοριστίας

Albert Stasenko

ΤΙ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΙΟ τετριμμένο από γεωμετρική άποψη παρά ένα τετράγωνο με μια διαγώνιο ή ένας κύκλος με μια διάμετρο; Κάθε παιδί μπορεί να τα σχεδιάσει με το χέρι (Σχήμα 1). Μολαταύτα, έχουν γραφτεί τόσο πολλά για τα εν λόγω σχήματα, που θα μπορούσαν να γεμίσουν ολόκληρη εγκυκλοπαίδεια —για παράδειγμα, σχετικά με το ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}$ και π είναι άρρητοι.

Τι θα στοίχιζε στο Δημιουργό να κατασκευάσει τη Φύση κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του να ισούται ακριβώς με 3 ή, έστω, ακριβώς με 3,14 ή με 3 και εκατό ακόμη (είναι λίγα; ας πούμε τότε ένα εκατομμύριο!) ψηφία μετά την υποδιαστολή —μόνο και μόνο για να ισούται ακριβώς με κάτι! Ωστόσο, έχει αποδειχτεί ότι ο αριθμός π περιλαμβάνει μετά την υποδιαστολή άπειρο πλήθος ψηφίων. (Αναφέρουμε τη συγκεκριμένη ιδιότητα ως *ασυμμετρότητα της περιφέρειας και της διαμέτρου.*) Σπουδαστές και δάσκαλοι επινόησαν ρήσεις ως μνημονικούς κανόνες για την πρώτη δωδεκάδα ψηφίων. Άλλοι κατασκεύασαν αλγορίθμους για να υπολογίζουμε όσα ψηφία θέλουμε και τους μετέφρασαν σε γλώσσα υπολογιστή. Ακόμη και πριν από την εποχή των υπολογιστών, υπήρχαν ζηλωτές της επιστήμης που αφιέρωσαν ολόκληρη τη ζωή τους στον υπολογισμό μερικών εκατοντάδων ψηφίων —τέτοια ήταν η υπέρμετρη λαχτάρα τους να ανακαλύψουν τι κρυβόταν πέρα από τον ορίζοντα. Δεν θα υπάρξει όμως τέλος στην ακολουθία των ψηφίων του αριθμού π, ακόμη κι αν υπολογίζαμε μέχρι το τέλος του ανθρώπινου είδους.



$$\frac{\ell}{d}=\pi=3{,}1415926536...;$$

$$\frac{d}{a}=\sqrt{2}=1{,}414...;$$

Σχήμα 1

> **«ΟΙ ΘΕΟΙ δεν τα φανέρωσαν όλα εξαρχής στους ανθρώπους· αλλά ψάχνοντας οι άνθρωποι βρίσκουν με τον καιρό το καλύτερο.»**
>
> —*Ξενοφάνης*
>
> **«ΚΑΤΑΔΥΟΜΑΙ στα βάθη και στέκομαι μπροστά στο μυστήριο του κόσμου, το μυστικό των πάντων. Και κάθε φορά συνειδητοποιώ με πόνο ότι η ύπαρξη του κόσμου δεν μπορεί να είναι αυτάρκης· ότι έχει πίσω της, στα ακόμη μεγαλύτερα βάθη, ένα Μυστήριο, ένα μυστικό νόημα.»**
>
> —***Nikolay Berdyayev***

Γιατί είναι κατ' αυτό τον τρόπο δομημένος ο κόσμος μας; Τι μυστήριο ελλοχεύει στη διατομή ενός ελάτινου κορμού ή ενός κορινθιακού κίονα; Δεν είναι εξοργιστικό ότι η σύγχρονη επιστήμη με όλη της τη δύναμη δεν μπορεί να μας πει ακριβώς πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η περιφέρεια του κύκλου από τη διάμετρό του; Είναι θαύμα που οι μαθηματικοί μπορούν να κοιμούνται τη νύχτα!

Αλλά πέρα από τα μαθηματικά, στη φυσική είναι άραγε τα πάντα καλά και ακριβή; Όχι βέβαια. Όλοι γνωρίζουν πλέον ότι η φυσική σε κάθε περίπτωση αποτελεί ένα προσεγγιστικό μοντέλο του πραγματικού κόσμου. Κάθε μέτρηση ενέχει κάποιο σφάλμα, αλλά όσο τα χρόνια και οι αιώνες περνούν, οι μετρήσεις γίνονται ακριβέστερες. Ίσως μπορούμε να ελπίζουμε ότι κάποτε (στο απώτερο μέλλον) θα είμαστε, κατ' αρχήν, σε θέση να πούμε πού ακριβώς πάνω στον άξονα των x βρίσκεται κάποιο υλικό σημείο και πόση είναι η ταχύτητά του v σε μια δεδομένη στιγμή. Στο κάτω κάτω, δεν πρόκειται για τίποτε περισσότερο από την αλφαβήτα της κινηματικής.

Δυστυχώς, ένα τέτοιο ενδεχόμενο *κατ' αρχήν* αποκλείεται —στην κυριολεξία απαγορεύεται! Η εν λόγω απαγόρευση διατυπώνεται μαθηματικά με την περίφημη αρχή της αβεβαιότητας (ή απροσδιοριστίας) του Heisenberg:

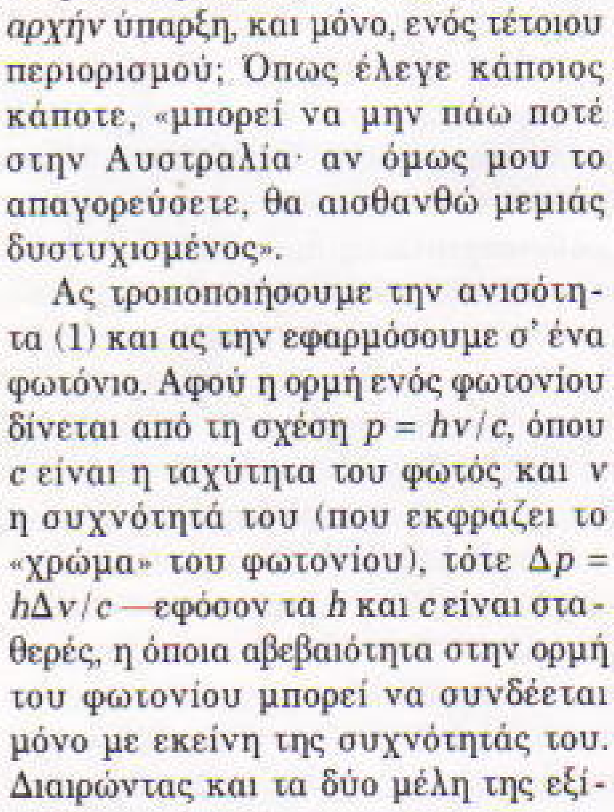
$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h, \qquad (1)$$

όπου Δx είναι η αβεβαιότητα στη μέτρηση της συντεταγμένης (σε μέτρα), Δp η αβεβαιότητα στην ορμή (σε $N \cdot s$), και $h \sim 10^{-34}$ $J \cdot s$ η σταθερά του Planck.

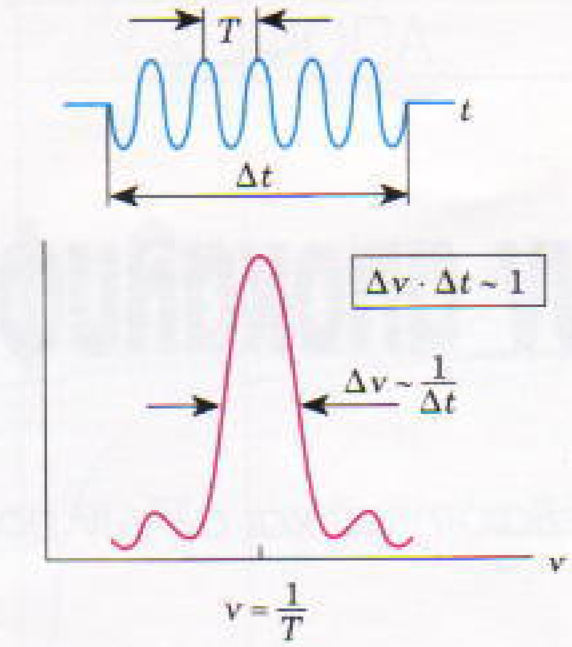
Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας C του υπό μελέτη αντικειμένου στο επίπεδο (p, x) (δηλαδή, στο επίπεδο όπου εκφράζουμε την ορμή ως προς τη θέση). Όσο ακριβέστερα προσπαθούμε να μετρήσουμε τη θέση x του σημείου (δηλαδή $\Delta x \to 0$), τόσο χειρότερη θα είναι η ταυτόχρονη μέτρηση της ορμής του ($\Delta p \to \infty$), και αντιστρόφως. Μπορούμε μόνο να πούμε ότι τα p και x του σημείου C κείνται μέσα σε μια περιοχή εμβαδού όχι μικρότερου της σταθεράς του Planck h (Σχήμα 2).

Βεβαίως, η συγκεκριμένη περιοχή είναι τόσο μικρή, που δεν μας δυσκολεύει όταν αναλύουμε την κίνηση μακροσκοπικών αντικειμένων —όπως αεροπλάνα, βλήματα, δίσκους και μπάλες του πινγκ-πονγκ. Δεν σας εμβάλλει όμως σε κατάσταση επιφυλακής, δεν σας ενοχλεί η *κατ' αρχήν* ύπαρξη, και μόνο, ενός τέτοιου περιορισμού; Όπως έλεγε κάποιος κάποτε, «μπορεί να μην πάω ποτέ στην Αυστραλία· αν όμως μου το απαγορεύσετε, θα αισθανθώ μεμιάς δυστυχισμένος».

Ας τροποποιήσουμε την ανισότητα (1) και ας την εφαρμόσουμε σ' ένα φωτόνιο. Αφού η ορμή ενός φωτονίου δίνεται από τη σχέση $p = h\nu/c$, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός και ν η συχνότητά του (που εκφράζει το «χρώμα» του φωτονίου), τότε $\Delta p = h\Delta\nu/c$ —εφόσον τα h και c είναι σταθερές, η όποια αβεβαιότητα στην ορμή του φωτονίου μπορεί να συνδέεται μόνο με εκείνη της συχνότητάς του. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με h, παίρνουμε



Σχήμα 2



Σχήμα 3

$$\frac{\Delta x}{c}\Delta\nu \geq 1,$$

ή

$$\Delta t \cdot \Delta\nu \geq 1. \qquad (2)$$

(Λάβαμε υπόψη ότι $\Delta x = c\Delta t$.)

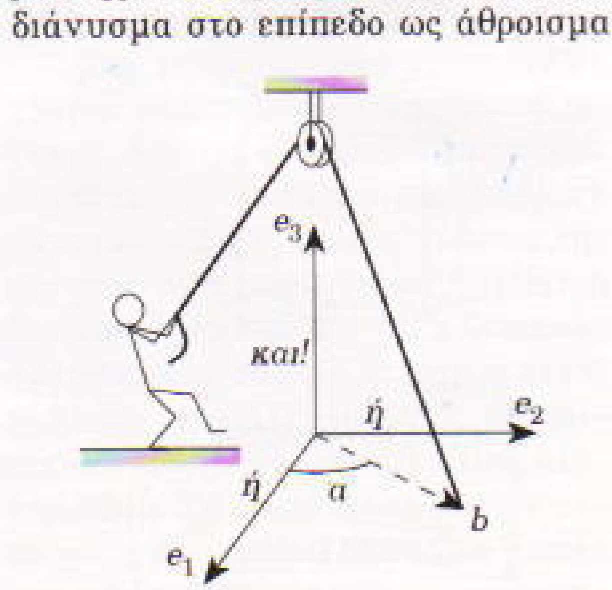
Έτσι, προκύπτει ότι όσο βραχύτερη είναι η διάρκεια της εκπομπής του φωτονίου ($\Delta t \to 0$), τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα της συχνότητάς του ($\Delta\nu \to \infty$). Για παράδειγμα, βλέπουμε το κόκκινο φως μιας επιγραφής νέον. Με τη συχνότητα των εκπεμπόμενων φωτονίων $\nu_0 \sim 5 \cdot 10^{14}$ Hz και το χρόνο εκπομπής κάθε ατόμου $\Delta t \sim 10^{-9}$ s, βρίσκουμε ότι η αβεβαιότητα στη συχνότητα δεν είναι μικρότερη από $\Delta\nu \sim 1/\Delta t \sim 10^{9}$ Hz, που μεταφράζεται σε δισεκατομμύρια κύκλους ανά δευτερόλεπτο! Ακόμη και η εν λόγω τιμή, όμως, δεν είναι μεγάλη συγκρινόμενη με τη συχνότητα του φωτονίου —υστερεί κατά παράγοντα ενός εκατομμυρίου: $\Delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-6}$. Εντούτοις, η προηγηθείσα ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το φως που εκπέμπεται δεν είναι ακριβώς «κόκκινο», αλλά μάλλον επαλληλία άπειρου πλήθους άλλων συχνοτήτων, κυρίως εντός του διαστήματος που προσδιορίσαμε (Σχήμα 3).

Η ίδια σχέση (2) διατηρεί την εγκυρότητά της και για τις μουσικές νότες (στη συγκεκριμένη περίπτωση το c συμβολίζει την ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα): όσο επίμονα κι αν προσπαθήσει ο μουσικός να παραγάγει έναν καθαρό τόνο δεν πρόκειται να τα καταφέρει. Ο ήχος που θα παραγάγει θα περιέχει κατ' αρχήν πλήθος συχνοτήτων, ακόμη κι αν μπορούσε να εξαναγκάσει τη χορδή να δονείται για μέρες, ή ακόμη και για έναν ολόκληρο χρόνο.

Φαίνεται σαν να πρέπει να επιστρέψουμε στο σημείο εκκίνησης και να αναζητήσουμε την προσδιορισιμότητα υπό τη σκέπη των μαθηματικών. Γιατί να μην αρχίσουμε από την ευκλείδεια γεωμετρία; Δεν αποτελεί ένα κλασικά καθαρό, σχεδόν αγαλμάτινο παράδειγμα αυστηρότητας; Καθόλου! Ακόμη και η ευκλείδεια γεωμετρία φέρει το δικό της στίγμα αβεβαιότητας. Αυτό δεν οφείλεται στο γεγονός ότι όσοι δημιούργησαν και ανέπτυξαν τη γεωμετρία διατύπωσαν το πέμπτο αξίωμα (της παραλληλίας των ευθειών) με εκνευριστικά αδέξιο τρόπο, γεγονός που προκάλεσε την εμφάνιση των μη ευκλείδειων γεωμετριών (του Lobachevsky, του Riemann, κ.λπ.). Όχι. Το πρόβλημα είναι ότι προσπάθησαν να κατασκευάσουν άλλες συμπερασματικές επιστήμες, ανάλογες με την ευκλείδεια γεωμετρία, και έκαναν ό,τι μπορούσαν για να τους προσδώσουν τον ίδιο βαθμό «αυστηρότητας».

Νόμιζαν ότι το μόνο που χρειαζόταν ήταν να διατυπώσουν ένα σύνολο αποφάνσεων (ένα σύστημα αξιωμάτων), οπότε όλες οι άλλες αποφάνσεις (οι οποίες εμπλέκουν τους ίδιους όρους με τα αξιώματα) θα μπορούσαν είτε να αποδειχτούν είτε να διαψευστούν με τις μεθόδους της λογικής. Ένα τέτοιο καλό σύστημα αξιωμάτων αναφέρεται ως *πλήρες* και *συνεπές* (δύο ποιότητες του «καλού»).

Για να διευκρινίσουμε αυτές τις ιδιότητες ενός αξιωματικού συστήματος, ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα. Μπορούμε να δούμε κάθε διάνυσμα στο επίπεδο ως άθροισμα



Σχήμα 4

δύο συνιστωσών —των προβολών του στους δύο άξονες συντεταγμένων:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \tag{3}$$

όπου τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$ έχουν μοναδιαίο μήκος και είναι κάθετα μεταξύ τους. Εάν προσπαθήσετε να «διευρύνετε» το συγκεκριμένο βασικό σύστημα διανυσμάτων προσθέτοντας ένα ακόμη διάνυσμα $\mathbf{e}_3$, θα σας πουν: «Με συγχωρείτε, αλλά δεν μπορείτε να κάνετε κάτι τέτοιο σ' ένα χώρο δύο διαστάσεων» (Σχήμα 4). Το νέο διάνυσμα $\mathbf{e}_3$ μπορεί να αναλυθεί σύμφωνα με την εξίσωση (3), και υπό αυτή την έννοια το σύστημα των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$ είναι *πλήρες*. Αν επιμένετε, τότε συνεχίστε και προσθέστε το $\mathbf{e}_3$ σας, αλλά αυτό σημαίνει ότι περνάτε σε άλλο είδος χώρου —στον τρισδιάστατο χώρο (ή, κατ' αναλογία, κατασκευάζετε ένα άλλο αξιωματικό σύστημα).

Τι έχει λοιπόν συντελεστεί στο χώρο των αποφάνσεων (εάν μπορείτε να φανταστείτε τέτοιο χώρο); Το 1931 αποδείχτηκε το θεώρημα του Gödel, το οποίο κατ' ουσία έλεγε ότι δεν υπάρχει ταυτοχρόνως πλήρες και συνεπές αξιωματικό σύστημα. (Δεν μοιάζει πολύ το εν λόγω θεώρημα με την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg (1), όχι βέβαια στο χώρο (p, x), αλλά στο χώρο (*πληρότητας, συνέπειας*);) Εάν κρατήσετε σταθερό το πλήθος των αξιωμάτων, τότε αργά ή γρήγορα θα συναντήσετε μιαν απόφανση που δεν μπορεί ούτε να αποδειχτεί ούτε να διαψευστεί. Εάν επιμένετε ακόμη να χειριστείτε τη συγκεκριμένη πρόταση, τότε πρέπει να διευρύνετε το αρχικό αξιωματικό σύστημα.

Ας κάνουμε όμως ένα διάλειμμα στις βαθυστόχαστες σκέψεις μας και ας θυμηθούμε μια παλιά ιστορία. Κάποιος Γιάννης πήγε κάποιον Κώστα στο δικαστήριο, διαμαρτυρόμενος ότι ο εγκαλούμενος (ο Κώστας) είχε κλέψει τη μοναδική αγελάδα του. «Θα πρέπει να την ξέρατε αυτή την αγελάδα, κύριε Πρόεδρε· κάποτε ήπιατε γάλα της», είπε ο Γιάννης. «Φυσικά και τη θυμάμαι· η αγελάδα είναι δική σου», απάντησε ο δικαστής. «Αλλά κύριε Πρόεδρε, γνωρίζετε ότι έχω δεκατέσσερα παιδιά, και όλα τους πίνουν γάλα· θά 'πρεπε νά 'ναι δική μου η αγελάδα», ικέτευσε ο Κώστας. «Και συ έχεις δίκιο», παραδέχτηκε ο δικαστής, αφού το ξανασκέφτηκε. «Μα κύριε Πρόεδρε, δεν μπορεί νά 'χουν κι οι δύο δίκιο —υπάρχει μόνο μία αγελάδα!» παρενέβη ο γραμματέας του δικαστηρίου. Αυτή τη φορά ο δικαστής έπεσε σε βαθιά σκέψη, για να αποφανθεί σε λίγο: «Και συ έχεις δίκιο, επίσης».

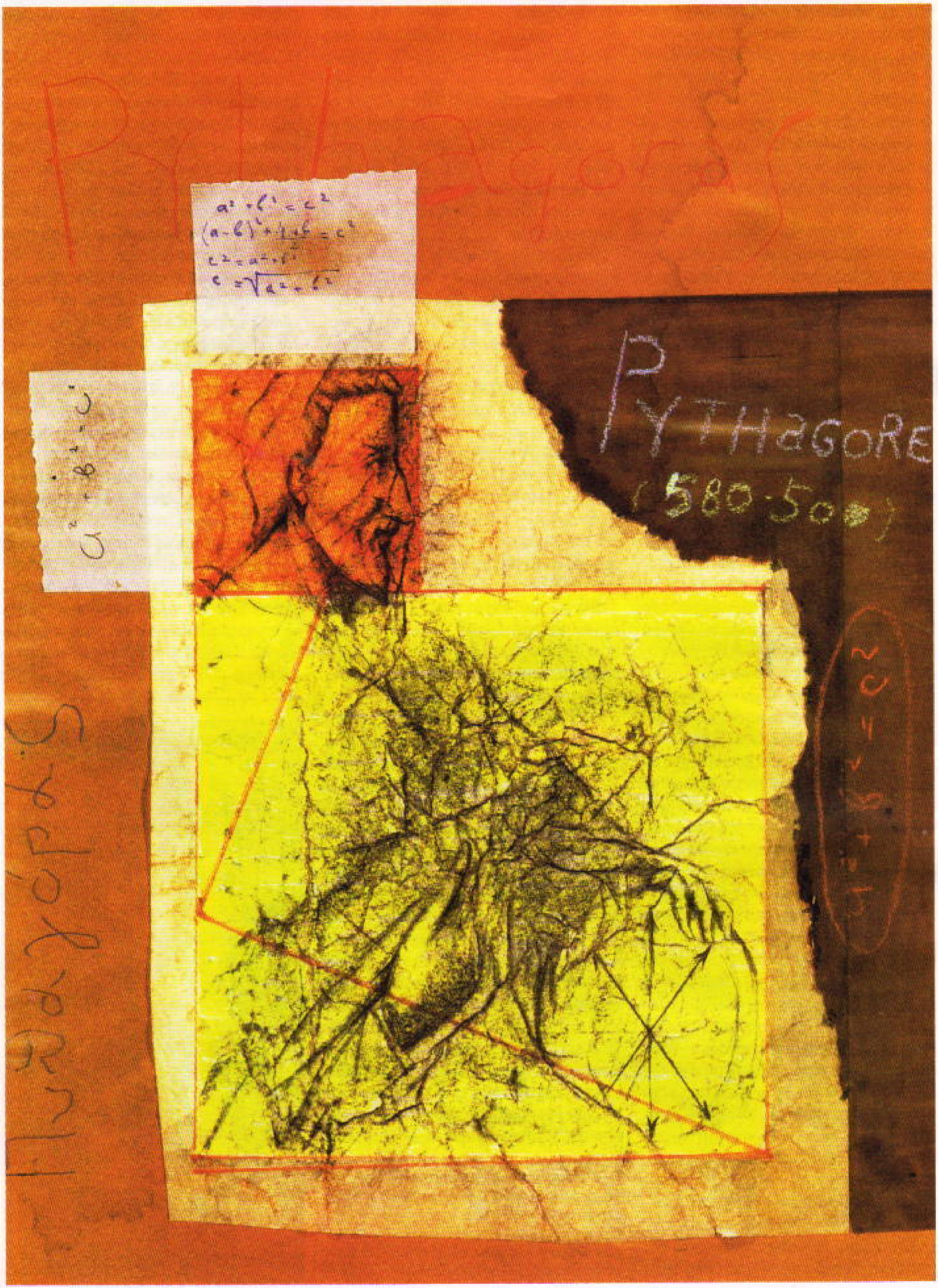
Η ιστορία αποτελεί παράδειγμα της περίπτωσης όπου ο δικαστής αποφάσισε να περάσει σ' έναν άλλο χώρο (κατασκεύασε το διάνυσμα $\mathbf{e}_3$ και έτσι διεύρυνε το αξιωματικό σύστημα). Εγκατέλειψε την καθιερωμένη τυπική λογική, όπου ο νόμος του αποκλειόμενου μέσου είναι έγκυρος (δηλαδή είτε η μια πρόταση είτε η άλλη πρέπει να αληθεύει), και πέρασε από τη διαλεκτική στην «τριαλεκτική», που δεν αντιδιαστέλλει απόλυτα το άσπρο με το μαύρο,[1] τον φίλο με τον εχθρό. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχει ανάγκη δικαστών ή «διαρκούς επανάστασης» ή στρατοπέδων συγκέντρωσης. Είναι ένας τόπος όπου άρχει η αρχαία βεδική τριάδα (Ίντρα, Άγκνι, Σουρύα), η ινδουιστική τριάδα (Κρίσνα, Σίβα, Βισνού) ή η χριστιανική Τριάδα.

Τι σχέση έχουν, όμως, η τιμή του π, η αρχή της αβεβαιότητας και το θεώρημα του Gödel με όλα αυτά; Απλώς την εξής: οι εν λόγω ιδέες (και πολλές άλλες) φαίνεται ότι περιέχουν κάποιο εσώτερο νόημα που μας απελευθερώνει από τη σιδερένια κυριαρχία της Αναγκαιότητας, αλλά όχι εντελώς (η ολοκληρωτική αβεβαιότητα θα ήταν κατά πάσα πιθανότητα χάος) —περιέχουν μια υποψία ελευθερίας. Κάτι παρόμοιο με το μικρό «παράθυρο» μέσα από το οποίο προσπάθησε ο P. Florensky να ρίξει μια κλεφτή ματιά στην «άλλη πλευρά» του κόσμου μας. Ή με το λόγο του αποστόλου Παύλου: «Γιατί τώρα βλέπουμε σαν σε καθρέφτη, αμυδρά, τότε όμως θα βλέπουμε πρόσωπο προς πρόσωπο. Τώρα γνωρίζω μερικώς, αλλά τότε θα έχω πλήρη γνώση, όπως είναι και η γνώση του Θεού για μένα». (Προς Κορινθίους Α', ιγ', 12.)

«Ο κόσμος αδιάκοπα διασπάται σε αναρίθμητα αντίγραφα του εαυτού του. ... Σύμφωνα με μια θεωρία του Everett, το παρατηρήσιμο σύμπαν αποτελεί ένα μόνο παράδειγμα της άπειρης ποικιλίας των συμπάντων που υπάρχουν πραγματικά.» (Paul Davies, *The Accidental Universe* —Το τυχαίο σύμπαν.)

Πού καταλήξαμε λοιπόν; Μήπως στο συμπέρασμα ότι κάθε πνευματώδης σπουδαστής, επικαλούμενος τις διάφορες αρχές απροσδιοριστίας, έχει το δικαίωμα να μελετά τα πράγματα «στο περίπου», ισχυριζόμενος πως αυτό είναι το Θείο Σχέδιο; Κάθε άλλο! Ο απαιτητικός αναγνώστης πρέπει να προσπαθεί να μάθει τις λεπτομέρειες με τη μέγιστη ακρίβεια. Αυτός είναι ο μοναδικός τρόπος να δρασκελίζουμε οποιοδήποτε κατώφλι της Φύσης, οποιαδήποτε πύλη μας υποβάλλει την αίσθηση του ανείπωτου μυστηρίου. Έτσι μόνο θα διαπιστώνουμε αν πίσω από την πύλη αυτή ανοίγεται ένα νέο μονοπάτι ή μία ακόμη αξεπέραστη απαγορευτική αρχή. ◙

1. Πάρτε για παράδειγμα τον Ήλιο. Φωτίζει τις ημέρες μας με λευκό φως, αλλά από την άποψη της θερμοδυναμικής και της κβαντικής μηχανικής αποτελεί σχεδόν ιδανικό παράδειγμα ενός απόλυτα μελανού σώματος· και τούτο δεν είναι απλό λογοπαίγνιο!


PYTHAGORE

Το παλιό, καλό πυθαγόρειο θεώρημα

Δεν θα πάψουμε ποτέ να το χρησιμοποιούμε —και να το αποδεικνύουμε!

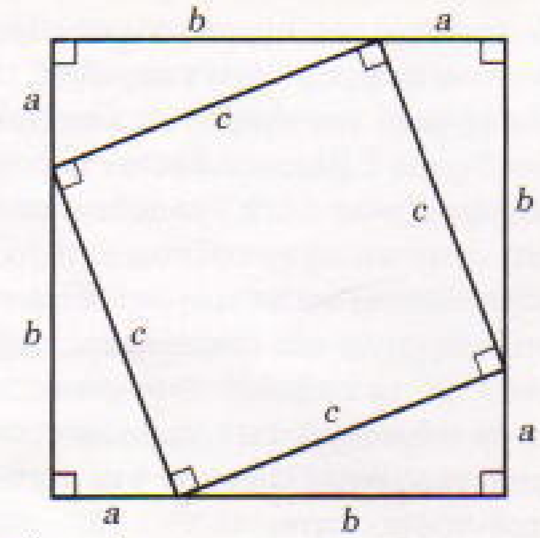
V.N. Beryozin

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟβλήματα με ασυνήθιστη μοίρα. Γιατί, για παράδειγμα, έχουν δείξει τόσο ενδιαφέρον οι μαθηματικοί, επαγγελματίες και ερασιτέχνες, για το πυθαγόρειο θεώρημα; Γιατί τόσο πολλοί από αυτούς έμειναν ανικανοποίητοι από τις υπάρχουσες αποδείξεις και επέμειναν να αναζητούν τη δική τους ανεβάζοντας έτσι το συνολικό πλήθος τους «στη διάρκεια των είκοσι πέντε αιώνων για τους οποίους διαθέτουμε σχετικά στοιχεία» σε αρκετές εκατοντάδες;

Σε ό,τι αφορά το πυθαγόρειο θεώρημα, οι ιδιαιτερότητες αρχίζουν να εμφανίζονται αμέσως, ξεκινώντας από το ίδιο το όνομά του. Επικρατεί γενικά η άποψη ότι *δεν ήταν* ο Πυθαγόρας αυτός που το διατύπωσε για πρώτη φορά. Η χρήση του θεωρήματος εμφανίζεται σε βαβυλωνιακές πινακίδες με πρακτικά μαθηματικά ήδη από το 1800 π.Χ., όπως στην πινακίδα BM85196, που βρίσκεται σήμερα στο Βρετανικό Μουσείο. Ο Πυθαγόρας είναι ο πρώτος στον οποίο αποδίδεται το θεώρημα ρητά. Παραδείγματος χάρη, γράφει ο Διογένης ο Λαέρτιος (viii 11-12) ότι «φησίν εκατόμβην θύσαι αυτόν (δηλαδή ο Πυθαγόρας), ευρόντα ότι του ορθογωνίου τριγώνου η υποτείνουσα πλευρά ίσον δύναται ταις περιεχούσαις».

Ο Πυθαγόρας έζησε τον 5ο και 4ο αιώνα π.Χ. Δεν άφησε γραπτά. Ονόμαζε τον εαυτό του φιλόσοφο —που, σύμφωνα με τον τρόπο σκέψης του, σήμαινε «εραστής της σοφίας». Ίδρυσε την πυθαγόρεια αδελφότητα, τα μέλη της οποίας ασχολούνταν με τη μουσική, τη γυμναστική, τα μαθηματικά, τη φυσική και την αστρονομία. Αν κρίνουμε από ένα θρύλο σχετικό με την άφιξή του στην Κρότωνα, πρέπει να ήταν εξαιρετικός ρήτορας. «Η πρώτη συνάντηση του Πυθαγόρα με τους Κροτωνιάτες ξεκίνησε με μια ομιλία που απευθυνόταν προς τους νέους, κατά την οποία έκανε μια τόσο εύγλωττη και συγχρόνως συναρπαστική παρουσίαση των καθηκόντων της νεολαίας, ώστε οι μεγαλύτερης ηλικίας κάτοικοι του ζήτησαν να μην αφήσει την πόλη τους πριν καθοδηγήσει και αυτούς. Κατά τη δεύτερη ομιλία του επισήμανε ότι ο νόμος και η ηθική αγνότητα είναι το θεμέλιο της οικογένειας. Στις δύο επόμενες απευθύνθηκε στα παιδιά και τις γυναίκες. Η τελευταία ομιλία, κατά την οποία στηλίτευσε την πολυτέλεια, είχε ως αποτέλεσμα να αφιερωθούν χιλιάδες πολύτιμα γυναικεία ρούχα στο ναό της Ήρας, διότι οι γυναίκες δεν τολμούσαν πλέον να εμφανιστούν με αυτά δημόσια.» Όποια κι αν είναι η αλήθεια, ακόμη και τον 2ο αιώνα μ.Χ. —δηλαδή, 700 χρόνια μετά τον Πυθαγόρα— έζησαν και δημιούργησαν πραγματικοί άνθρωποι, σπουδαίοι επιστήμονες, που ήταν φανερά επηρεασμένοι από την πυθαγόρεια αδελφότητα και είχαν βαθύτατη εκτίμηση σε όσα υποτίθεται ότι δημιούργησε ο Πυθαγόρας.

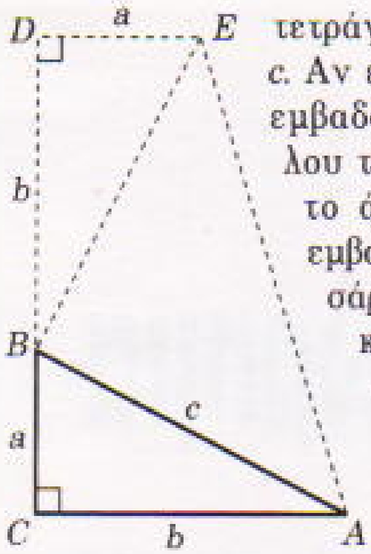
Είναι επίσης βέβαιο ότι το ενδιαφέρον για το θεώρημα οφείλεται αφ' ενός στη σημαντική θέση που κατέχει στα μαθηματικά και αφ' ετέρου στην ικανοποίηση που αισθάνονται οι δημιουργοί των νέων αποδείξεων, οι οποίοι καταφέρνουν να ξεπεράσουν το πρόβλημα που αναφέρει ο μεγάλος λατίνος ποιητής Οράτιος (65-8 π.Χ.): «Είναι δύσκολο να διατυπώσουμε όμορφα ζητήματα της κοινής γνώσης». Αρχικά, το θεώρημα καθόριζε τη σχέση μεταξύ των εμβαδών των τριγώνων που κατασκευάζονται από την υποτείνουσα και τις κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου: *το τετράγωνο που κατασκευάζεται με βάση την υποτείνουσα έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των κάθετων πλευρών.*



Σχήμα 1

Αρκετές, σχετικά απλές, αποδείξεις του θεωρήματος στηρίζονται σ' αυτή τη γεωμετρική παραλλαγή της διατύπωσής του. Βλέπουμε μια στο Σχήμα 1. Σ' αυτό, ένα τετράγωνο πλευράς $(a + b)$ χωρίζεται σε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές a, b και c, και σε ένα μικρότερο

Εικονογράφηση: Yury Vashchenko

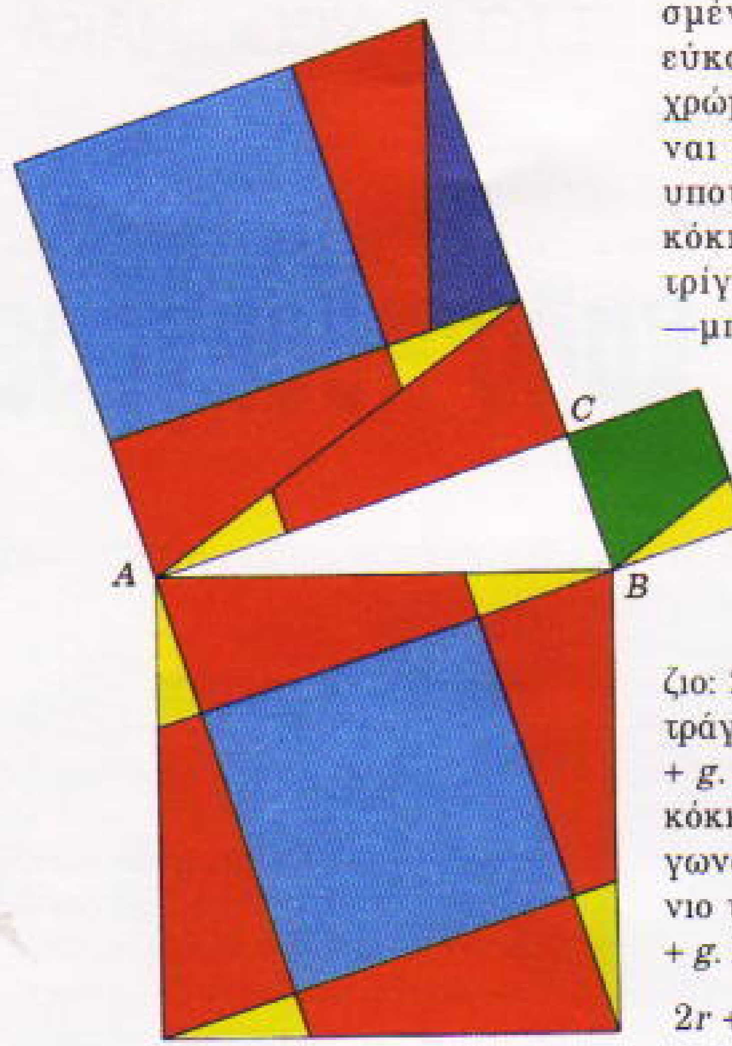


Σχήμα 2

τετράγωνο πλευράς c. Αν εξισώσουμε το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων τριγώνων και του μικρού τετραγώνου, βρίσκουμε ότι $(a + b)^2 = c^2 + 4(ab/2)$, σχέση που μας οδηγεί αλγεβρικά στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Μια δεύτερη σχετικά απλή απόδειξη ανακαλύφθηκε από έναν νεαρό στρατηγό του αμερικανικού στρατού, που αργότερα έγινε πρόεδρος της χώρας του, τον James A. Garfield. Στο Σχήμα 2 βλέπετε δύο αντίγραφα του τριγώνου ABC τοποθετημένα έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα τραπέζιο. Έπεται ότι το τρίγωνο EBA είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Αν εξισώσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην πραγματικότητα, αυτή δεν είναι νέα απόδειξη: το Σχήμα 2 είναι το μισό του Σχήματος 1 (μπορείτε να δείτε γιατί;). Μια γνήσια νέα απόδειξη παρουσιάζεται στο Σχήμα 3. Το αρχικό τρίγωνο είναι το ABC με την ορθή του γωνία στο C. Το τετράγωνο της υποτείνουσας AB έχει κατασκευαστεί εξωτερικά, ενώ τα άλλα δύο εσωτερικά. Οι πλευρές των μικρότερων τριγώνων προεκτείνονται όπου επικαλύπτονται τα τετράγωνα. Παρατηρούμε ότι η πλευρά του τετραγώνου της BC που είναι παράλληλη προς την BC διέρχεται από την κορυφή του τετραγώνου της AB που βρίσκεται απέναντι από την A. Το ανάλογο ισχύει για το τετράγωνο που κατασκευάζεται επί της άλλης καθέτου, AC.



Σχήμα 4

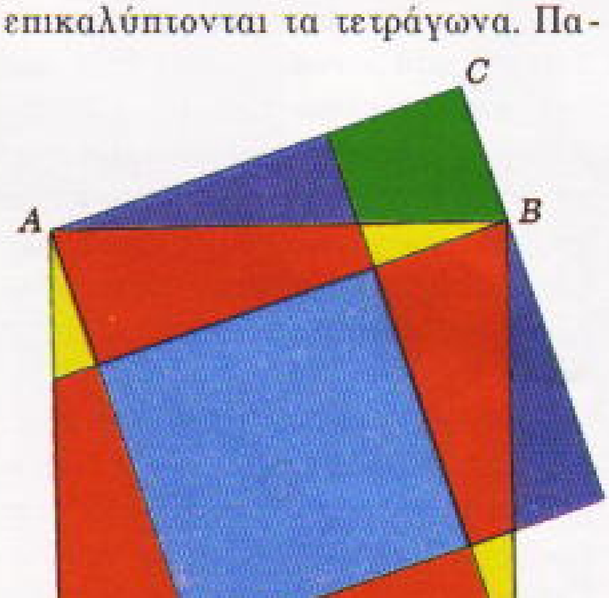
Πρόβλημα 1. Αποδείξτε αυτή την παρατήρηση. Αποδείξτε επίσης ότι παραμένει αληθής αν τα τετράγωνα των καθέτων κατασκευαστούν εξωτερικά και της υποτείνουσας εσωτερικά.

Αυτό είναι το κρίσιμο σημείο της εν λόγω απόδειξης, καθώς και ορισμένων άλλων αποδείξεων. Είναι εύκολο να δούμε τώρα ότι τα ιδίου χρώματος τμήματα στο Σχήμα 3 είναι ίσα. Το μεγάλο τετράγωνο της υποτείνουσας χωρίζεται σε τέσσερα κόκκινα τραπέζια, τέσσερα κίτρινα τρίγωνα και ένα μπλε τετράγωνο —μπορούμε επομένως να το γράψουμε ως $4r + 4y + b$. Το τετράγωνο της μεγαλύτερης καθέτου, AC, χωρίζεται σε δύο κόκκινα τραπέζια, ένα κίτρινο τρίγωνο, ένα μπλε τετράγωνο, δύο πορφυρά τρίγωνα και ένα πράσινο τραπέζιο: $2r + y + b + 2p + g$. Το τρίτο τετράγωνο μπορεί να παρασταθεί ως $y + g$. Εντούτοις, είναι φανερό ότι το κόκκινο τραπέζιο και το κίτρινο τρίγωνο συνθέτουν το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο χωρίζεται σε $p + g$. Επομένως, $p + g = r + y$. Τέλος,

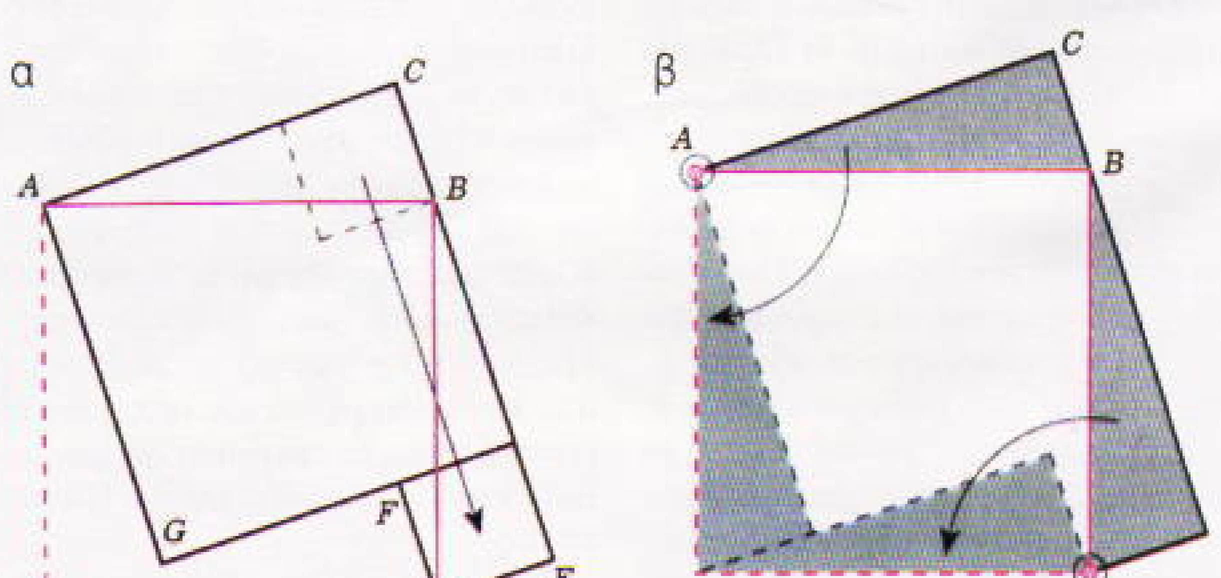
$$2r + 2y + b + 2p + 2g = 4r + 4y + b,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Στο Σχήμα 4 βλέπετε μια γραφική αναπαράσταση αυτής της «χαρτοκοπτικής» μεθόδου, όπου όλα τα τετράγωνα έχουν κατασκευαστεί εξωτερικά του τριγώνου και ένα προφυροπράσινο τρίγωνο του τετραγώνου της AC έχει αντικατασταθεί με ένα ίσο κοκκινοκίτρινο τρίγωνο (τα υπόλοιπα πορφυρά και πράσινα τμήματα των τετραγώνων των καθέτων αντιστοιχούν σε ένα από τα κοκκινοκίτρινα τρίγωνα του τετραγώνου της υποτείνουσας).

Και ιδού μία ακόμη απόδειξη με τη μέθοδο της «χαρτοκοπτικής» —θα μπορούσε να ονομαστεί και απόδειξη του «αρμού» (Σχήμα 5). Τα τετρά-



Σχήμα 3



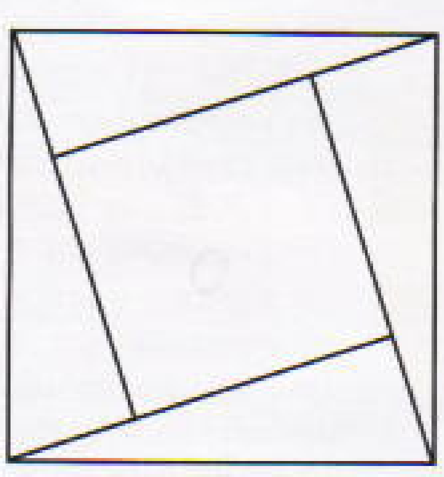
Σχήμα 5

γωνα των κάθετων πλευρών του αρχικού τριγώνου ABC κατασκευάζονται εσωτερικά και το μικρότερο —της BC— μετατοπίζεται κατά μήκος της BC έως ότου καταλήξει να συνορεύει εξωτερικά με το μεγάλο. Το τρίγωνο BDE που δημιουργείται με αυτό τον τρόπο είναι ίσο με το ABC (Σχήμα 5α). Χωρίζουμε τώρα το αποτελούμενο από δύο τετράγωνα σχήμα $ACEDFG$ κατά μήκος των BA και BD, και στρέφουμε γύρω από το A το τρίγωνο ABC κατά 90° προς τα δεξιά. Στρέφουμε επίσης το τρίγωνο BDE γύρω από το D κατά την ίδια γωνία προς τα αριστερά. Επιτυχία! Τα τρίγωνα ταιριάζουν με το υπόλοιπο τμήμα (Σχήμα 5β) και σχηματίζουν... το τετράγωνο της υποτείνουσας!

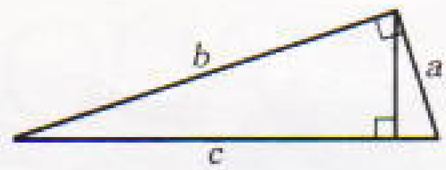
Ας προσθέσουμε ότι στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη υπάρχει απόδειξη, διαφορετική από τις παραπάνω, στο βιβλίο α', πρότασις μζ'.

Η σύγχρονη γεωμετρία προτιμά την αλγεβρική διατύπωση του πυθαγόρειου θεωρήματος: αν μετρήσουμε με την ίδια μονάδα μήκους τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου, τότε το τετράγωνο του αριθμού που εκφράζει την υποτείνουσά του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών που εκφράζουν τις καθέτους. Πιο περιεκτικά, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων. Θα παρουσιάσω δύο αποδείξεις που χρησιμοποιούν αυτή την αλγεβρική διατύπωση.

Το τετράγωνο του Σχήματος 6 χωρίζεται σε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα και ένα μικρότερο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το σχήμα αυτό συνόδευε τη διάσημη απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος που υπάρχει σε μια πραγματεία του μεγάλου



Σχήμα 6



Σχήμα 7

ινδού μαθηματικού του 12ου αιώνα Bhaskara Acharia. (Το κείμενο της απόδειξης αποτελούνταν από μία και μοναδική λέξη: «Κοίτα!»)

Αν το μήκος της πλευράς του μεγάλου τετραγώνου (που είναι η υποτείνουσα του δεδομένου ορθογώνιου τριγώνου) είναι c και αν τα μήκη των κάθετων πλευρών του τριγώνου είναι a και b, τότε το μήκος της πλευράς του μικρότερου τριγώνου είναι $|a - b|$ και έχουμε

$$c^2 = (a - b)^2 + 4ab/2,$$

ή

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

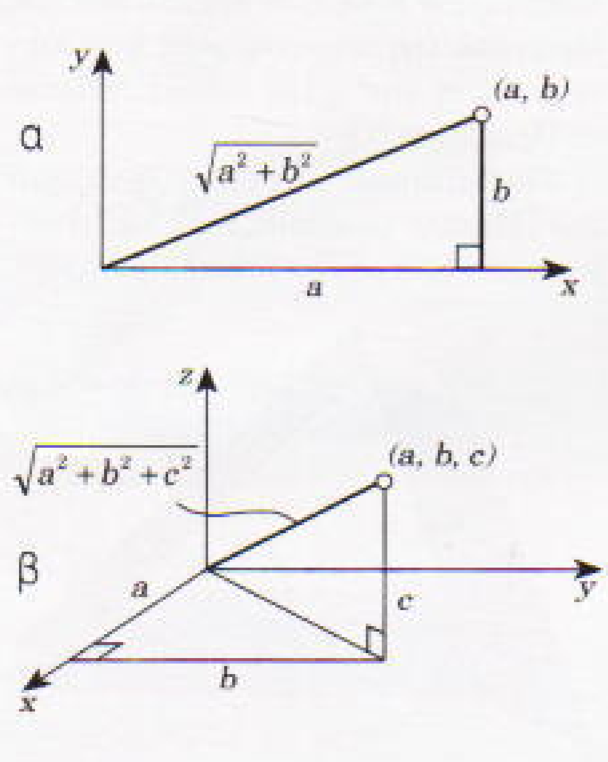
Στο Σχήμα 7 έχουμε φέρει το ύψος από την ορθή γωνία του δεδομένου τριγώνου χωρίζοντάς το σε δύο μικρότερα τρίγωνα. Τα τρία τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους. Και αυτή είναι η ιδέα για την επόμενη απόδειξη. Τα εμβαδά όλων των όμοιων σχημάτων που κατασκευάζονται στις πλευρές του δεδομένου τριγώνου είναι ανάλογα με τα τετράγωνα των εμβαδών των αντίστοιχων πλευρών. Επομένως, τα εμβαδά των τριών τριγώνων του Σχήματος 7 μπορούν να γραφούν ως ka^2, kb^2 και kc^2, όπου k είναι κάποιος σταθερός παράγοντας. Ωστόσο, το εμβαδόν του μεγάλου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των άλλων δύο —δηλαδή, $kc^2 = ka^2 + kb^2$, ή $c^2 = a^2 + b^2$. Αυτή είναι μια ιδιαίτερα διδακτική απόδειξη, με το απλούστερο δυνατό διάγραμμα.

Στη διάρκεια των αιώνων που πέρασαν από την ανακάλυψη του πυθαγόρειου θεωρήματος είναι πολλοί οι μαθητές που πήραν κακή βαθμολογία εξαιτίας κάποιου σφάλματος στην απόδειξή του. Είναι όμως σίγουρο ότι, από αυτή την άποψη, το αντίστροφο θεώρημα (πού βρίσκεται στα *Στοιχεία*, α', πρότασις μη') είναι ακόμη πιο ολισθηρό, διότι οι μαθητές συχνά συγχέουν τα δύο θεωρήματα και αναφέρονται συχνά στη δεύτερη αντί στην ευθεία πρόταση. Το αντίστροφο θεώρημα είναι το εξής: όταν οι πλευρές a, b, c ενός τριγώνου ικανοποιούν τη σχέση $a^2 + b^2 = c^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, και η ορθή του γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά c. Η απόδειξή της δεν απαιτεί σχήμα και είναι εξαιρετικά απλή. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η ισότητα $a^2 + b^2 = c^2$ για ένα δεδομένο τρίγωνο. Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές a και b. Τότε, σύμφωνα με το ευθύ πυθαγόρειο θεώρημα, η υποτείνουσά του είναι $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Έπεται ότι τα μήκη των πλευρών αυτού του τριγώνου ισούνται με τα μήκη των πλευρών του δεδομένου τριγώνου. Συνεπώς, τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, και το δεδομένο τρίγωνο είναι επίσης ορθογώνιο.

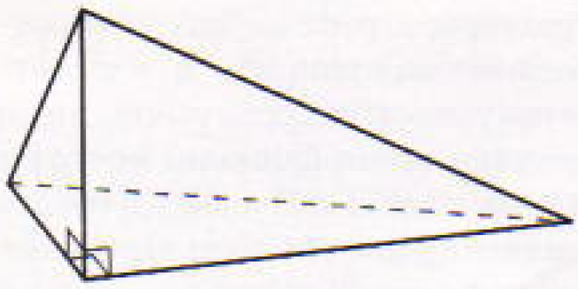
Υπάρχουν πολλοί τρόποι γενίκευσης του πυθαγόρειου θεωρήματος. Πρώτα απ' όλα, μπορεί να επαναδιατυπωθεί με την ακόλουθη μορφή, που χρησιμοποιεί συντεταγμένες, και η οποία είναι φανερά ισοδύναμη με την αρχική πρόταση: *Το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου του επιπέδου των συντεταγμένων από την αρχή των αξόνων ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων του* (Σχήμα 8α). Με αυτή τη μορφή το θεώρημα ισχύει για το χώρο των τριών ή και οσωνδήποτε άλλων διαστάσεων.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε την τρισδιάστατη εκδοχή του πυθαγόρειου θεωρήματος χρησιμοποιώντας συντεταγμένες.

Υπάρχει και μια άλλη τρισδιάστα-



Σχήμα 8



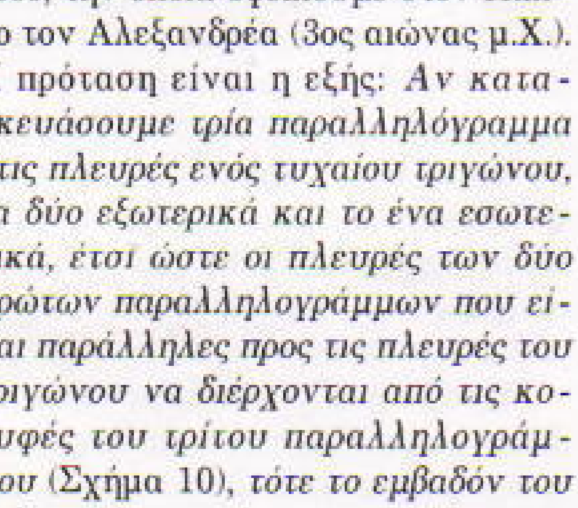
Σχήμα 9

τη γενίκευση, που πιθανότατα αποδείχτηκε κατά τον 17ο αιώνα, και η οποία χρησιμοποιείται συχνότατα στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Αν οι τρεις έδρες ενός τετραέδρου είναι ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζουν ορθή γωνία στην κοινή τους κορυφή, τότε το άθροισμα των τετραγώνων των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του εμβαδού της τέταρτης έδρας (Σχήμα 9).

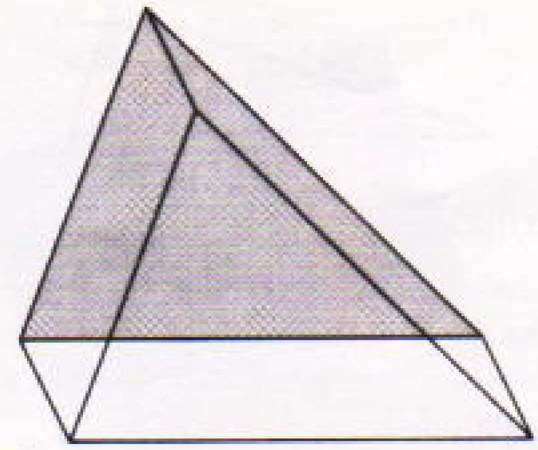
Πρόβλημα 3. Αποδείξτε το «πυθαγόρειο θεώρημα για το τετράεδρο».

Θα ήθελα ολοκληρώνοντας να επισημάνω ότι το πυθαγόρειο θεώρημα έχει και μια γενίκευση στο επίπεδο, την οποία οφείλουμε στον Πάππο τον Αλεξανδρέα (3ος αιώνας μ.Χ.). Η πρόταση είναι η εξής: *Αν κατασκευάσουμε τρία παραλληλόγραμμα στις πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου, τα δύο εξωτερικά και το ένα εσωτερικά, έτσι ώστε οι πλευρές των δύο πρώτων παραλληλογράμμων που είναι παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου να διέρχονται από τις κορυφές του τρίτου παραλληλογράμμου* (Σχήμα 10), *τότε το εμβαδόν του τελευταίου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πρώτων*. Το πυθαγόρειο θεώρημα έπεται τότε ως συνέπεια της παρατήρησης που κάναμε κατά την τρίτη απόδειξη (δείτε το Πρόβλημα 1).

Για να αποδείξουμε το θεώρημα του Πάππου, μετατοπίζουμε τις πλευρές των εξωτερικών παραλληλογράμμων παράλληλα προς τις πλευρές του τριγώνου έτσι ώστε να ξεκινούν από τις κορυφές του τρίτου παραλληλογράμμου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11. Τα εμβαδά των παραλληλογράμμων δεν αλλάζουν έπειτα από αυτή την πράξη. Αν αποκόψουμε το αρχικό τρίγωνο από το πεντάγωνο που προκύπτει (δείτε το Σχήμα 11), το εμβαδόν της περιοχής που απομένει είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών παραλληλογράμμων. Και αν αποκόψουμε από το ίδιο πεντάγωνο το σκιασμένο τρίγωνο (που είναι προφανώς ίσο με το αρχικό), θα μείνει το τρίτο παραλληλόγραμμο. Αυτό το γεγονός αποδεικνύει άμεσα το θεώρημα.



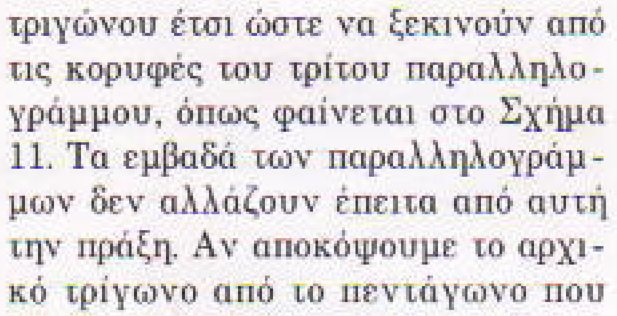
Σχήμα 10



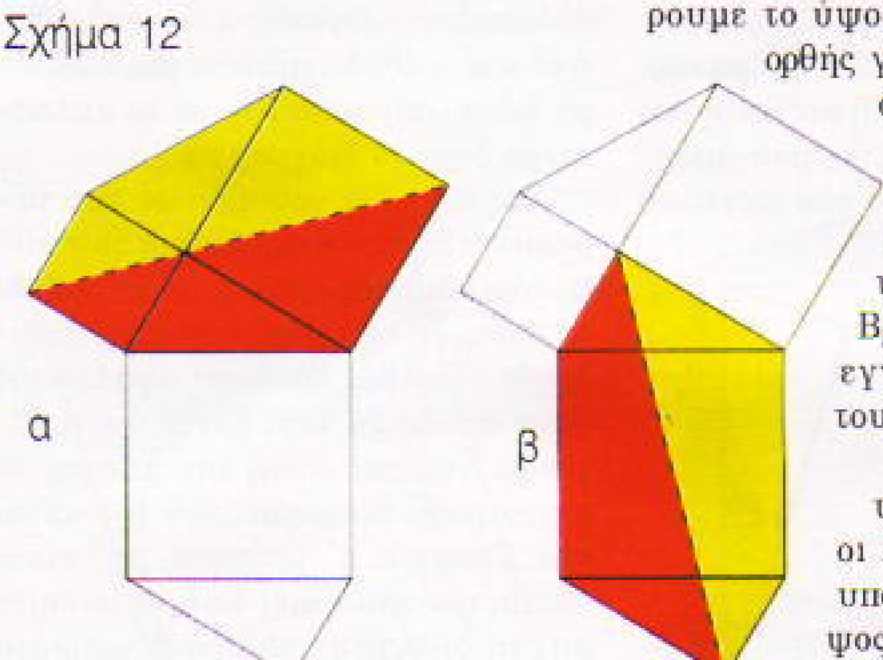
Σχήμα 11

Προβλήματα

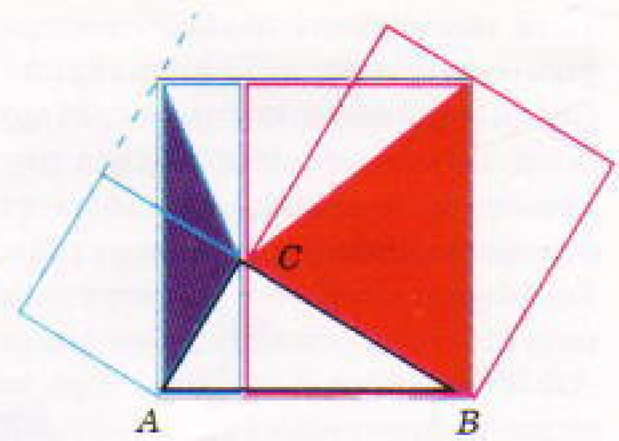
4. Τα Σχήματα 12-15 παρουσιάζουν άλλες τέσσερις αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος. Συμπληρώστε αυτές τις αποδείξεις.



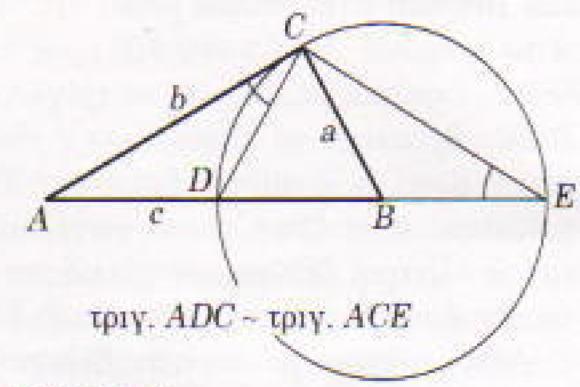
Σχήμα 12



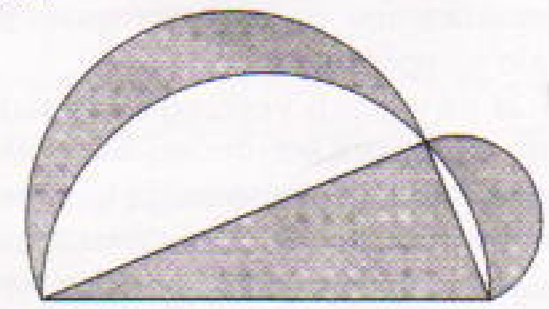
Σχήμα 13



Σχήμα 14



Σχήμα 15



Σχήμα 16

5. *Μηνίσκοι του Ιπποκράτη*. Κατασκευάζουμε τρία ημικύκλια στις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου, όπως στο Σχήμα 16. Αποδείξτε ότι το συνολικό εμβαδόν των δύο σκιασμένων μηνίσκων ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου.

6. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε το ύψος από την κορυφή της ορθής γωνίας χωρίζοντάς το σε δύο τρίγωνα (Σχήμα 7). Οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων στα δύο μικρά τρίγωνα είναι r_1 και r_2. Βρείτε την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του μεγάλου τριγώνου.

7. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο, a και b είναι οι κάθετες πλευρές, c η υποτείνουσα και h το ύψος που άγεται προς την υποτείνουσα. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο με πλευρές $a + b$, h, και $c + h$ είναι επίσης ορθογώνιο.

Στα βήματα του Foucault

Ένα απλό πείραμα που επιδεικνύει τη δράση της δύναμης Coriolis

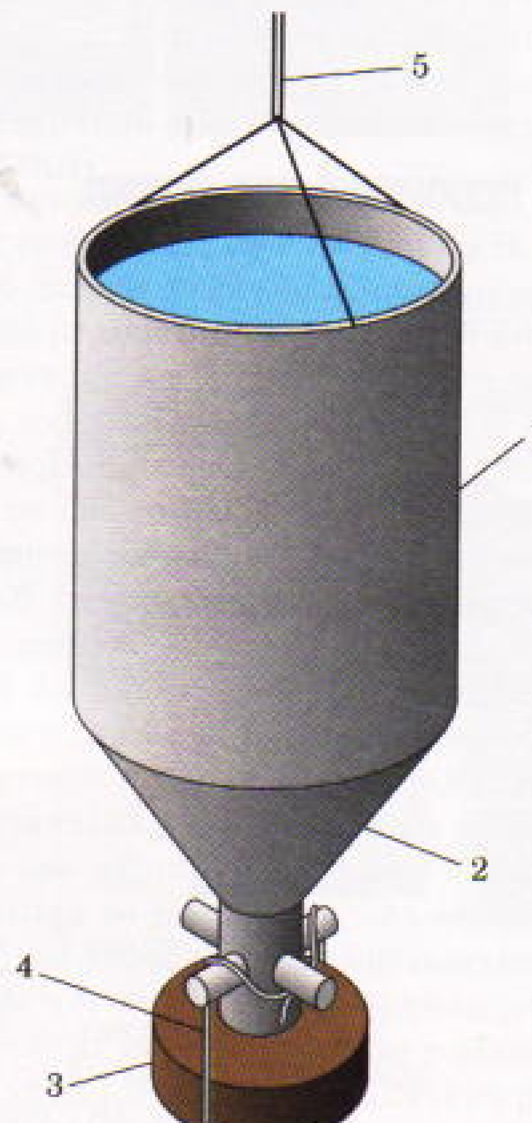
M. Emelyanov, A. Zharkov, V. Zagainov και V. Matochkin

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΠΟΥ ΑΠΕΔΕΙξε ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της έγινε το1851 από τον Jean-Bernard-Léon Foucault. Το παρόν άρθρο περιγράφει ένα απλό πείραμα, που επίσης δείχνει, πέραν πάσης αμφιβολίας, την περιστροφή της Γης.

Φανταστείτε ένα μεγάλο κυλινδρικό δοχείο στον ανοιχτό πυθμένα του οποίου έχουμε προσκολλήσει ένα χωνί (Σχήμα 1). Γεμίζουμε το δοχείο με νερό και το αναρτούμε από την οροφή με μακρύ σκοινί. Αρχικά το στόμιο του χωνιού είναι κλειστό, και το δοχείο ηρεμεί ως προς τη Γη. Τι θα συμβεί όταν ανοίξουμε το χωνί; Για να απλοποιήσουμε την κατάσταση, ας φανταστούμε ότι το πείραμα διεξάγεται στον Βόρειο Πόλο.

Θεωρήστε το επίπεδο που διέρχεται από τη «γραμμή σύνδεσης» χωνιού-δοχείου. Το νερό που από αυτό το επίπεδο κινείται προς την έξοδο έχει κατακόρυφη αλλά και οριζόντια ταχύτητα. Ας συμβολίσουμε με $\mathbf{v}_0$ την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του νερού ως προς το δοχείο. Η $\mathbf{v}_0$ εξαρτάται από το ύψος της υπερκείμενης στήλης νερού και από την απόσταση από τον άξονα του δοχείου.

Η παρουσία μη μηδενικής οριζόντιας ταχύτητας $\mathbf{v}_0$ προκαλεί την εμφάνιση δύναμης Coriolis. Το Σχήμα 2 δείχνει ότι η Γη περιστρέφεται με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, όπως επίσης την ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ και τη δύναμη Coriolis $\mathbf{F}_C$ που δρα σε ορισμένο στρώμα του νερού. Η εν λόγω δύναμη επηρεάζει κάθε στοιχείο μάζας νερού, και παράγει



Σχήμα 1

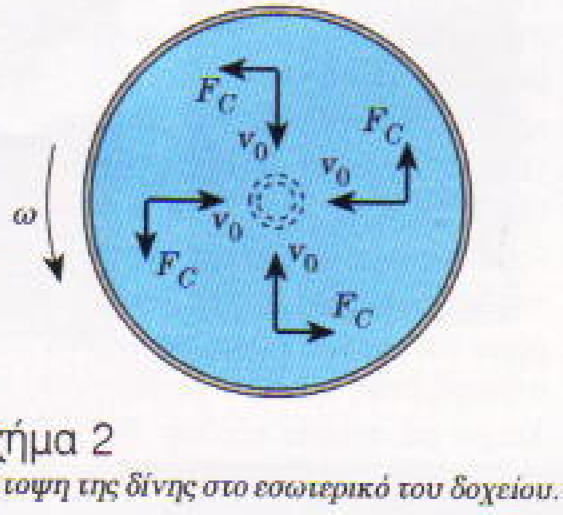
Πειραματική διάταξη: (1) κυλινδρικό δοχείο· (2) χωνί· (3) μαλακό ελαστικό με σκληρή βάση· (4) σπάγκος· (5) χορδή ρακέτας τένις.

μια ροπή ως προς τον άξονα του κυλίνδρου. Με τη σειρά της η ροπή εξαναγκάζει το νερό να περιστρέφεται. Εφόσον υπάρχει τριβή μεταξύ του νερού και των τοιχωμάτων του δοχείου, το δοχείο θα στρέφεται επίσης, και η φορά της περιστροφής του θα συμπίπτει με εκείνη της Γης.

Όσο το νερό εκρέει από το στόμιο του χωνιού, η ταχύτητα v_0 συνεχώς ελαττώνεται, όπως εξάλλου και η δύναμη Coriolis (εφόσον $F_C \sim v_0$). Πώς άραγε επηρεάζει η μεταβαλλόμενη δύναμη $\mathbf{F}_C$ την κίνηση του νερού; Η γωνιακή επιτάχυνση που προκαλείται από τη συγκεκριμένη δύναμη ελαττώνεται, αλλά η γωνιακή ταχύτητα του νερού αυξάνεται, αν και με ρυθμό που συνεχώς επιβραδύνεται.

Η περιστροφή του δοχείου προκαλεί στρέψη του σκοινιού που το συγκρατεί. Λόγω της στρέψης αναπτύσσεται ροπή επαναφοράς, η οποία αυξάνει με τη γωνία στρέψης. Εφόσον η δύναμη Coriolis (που προκαλεί την περιστροφή του νερού στο δοχείο) ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου, θα φτάσει μια στιγμή που η ροπή εξαιτίας της δύναμης Coriolis θα εξισορροπείται από την αύξουσα ροπή εξαιτίας της στρέψης του σκοινιού. Κατόπιν η τελευταία θα γίνει μεγαλύτερη της πρώτης. Ως εκ τούτου, η γωνιακή ταχύτητα του δοχείου θα ελαττώνεται, αν και ο κύλινδρος θα εξακολουθεί να περιστρέφεται κατά την ίδια φορά (αυτή της Γης).

Κάποια στιγμή το δοχείο θα σταματήσει και, λόγω της δράσης της ροπής του σκοινιού, θα αρχίσει να πε-



Σχήμα 2

Κάτοψη της δίνης στο εσωτερικό του δοχείου.

ριστρέφεται κατά την αντίθετη φορά. Στη συνέχεια η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου αυξάνεται και, όσο το σκοινί ξεστρίβεται, η ροπή επαναφοράς ελαττώνεται. Η ροπή εξαιτίας της δύναμης Coriolis (η οποία μειώνεται όπως προηγουμένως) αντιδρά στην περιστροφή του δοχείου και μειώνει την επιτάχυνσή του. Κάποια ορισμένη στιγμή η μειούμενη ροπή του σκοινιού γίνεται μικρότερη από τη ροπή της δύναμης Coriolis, και η γωνιακή ταχύτητα αρχίζει να ελαττώνεται. Κατόπιν ο κύκλος επαναλαμβάνεται.

Στο πείραμά μας χρησιμοποιήσαμε κυλινδρικό δοχείο διαμέτρου 25 cm και ύψους 30 cm (Σχήμα 1). Το χωνί που συνδέσαμε στον πυθμένα του δοχείου είχε λαιμό με διάμετρο στομίου εξόδου 8 mm. Γύρω από το λαιμό του χωνιού περάσαμε μεταλλικό κολάρο (κυλινδρική θήκη) με τέσσερις συμμετρικά τοποθετημένες βίδες. Χρησιμοποιώντας σπάγκο που τυλίγαμε γύρω από κάθε ζεύγος αντικριστών βιδών, μπορούσαμε να συγκρατήσουμε σφιχτά ένα κομμάτι μαλακού ελαστικού με σκληρή βάση στο στόμιο του χωνιού, ώστε να μην επιτρέπουμε την εκροή του νερού πριν από την έναρξη του πειράματος.

Αναρτήσαμε το δοχείο από την οροφή με χορδή ρακέτας του τένις (μήκους περίπου 2,5 m). Γεμίσαμε το δοχείο με νερό σχεδόν ως τα χείλη, και αφού «στήσαμε» το σύστημα, κάψαμε τον κόμπο στο σπάγκο. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρήσαμε το ίδιο φαινόμενο: καθώς το νερό έτρεχε από το χωνί, το δοχείο περιστρεφόταν πρώτα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, μετά αντίθετα.

Μπορείτε να εκτελέσετε το ίδιο πείραμα με γυάλινο χωνί κρεμασμένο από δύο κομμάτια πετονιάς ψαρέματος. Αποδεικνύεται ότι η γωνία στρέψης του συστήματος εξαρτάται σημαντικά από τη διάμετρο του λαιμού του χωνιού. Από τη μια, όσο μικρότερος είναι ο λαιμός τόσο ισχυρότερες είναι οι επιδράσεις της δύναμης Coriolis. Από την άλλη, ο ρόλος του ιξώδους αυξάνεται όσο μικρότερη είναι η διάμετρος του λαιμού. Καταφέραμε να παρατηρήσουμε ικανή περιστροφή ενός τέτοιου χωνιού που είχε λαιμό με στόμιο εξόδου διαμέτρου 5 mm, και περιείχε 1 λίτρο νερού. ◙

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 33*

Η αναζήτηση της ομορφιάς στα μοντέλα μας αποτελούσε πάντα μια κατευθυντήρια δύναμη, και μερικές φορές, όπως με τη σχετικότητα του Αϊνστάιν, φαίνεται πως στάθηκε το μοναδικό κίνητρο. Σήμερα πολλοί απογοητεύονται στην έρευνά τους για τη διαισθητική ομορφιά στις κβαντικές όψεις της σύγχρονης φυσικής. Αντίθετα από τη σχετικότητα, η ομορφιά της κβαντικής θεωρίας διαφεύγει ακόμη της πηγαίας ανθρώπινης εκτίμησης. Ίσως με την πάροδο του χρόνου να αποκτήσουμε γούστο, όμως κάτι τέτοιο πρέπει να ξεκινήσει με προσαρμογή των προσδοκιών μας —προς τα μοντέλα αντί τις «θεωρίες». Η φυσική δεν προσφέρει εφησυχαστικές και οριστικές απαντήσεις.

Η προσωπική σας φυσική

Η φυσική δεν έχει μείνει αδρανής. Υπάρχουν πολλά για να μάθετε. Να μάθετε σημαίνει να κάνετε τη δική σας φυσική· πρόκειται για μια ενεργό διαδικασία που απλώς ξεκινά με το άκουσμα και το διάβασμα. Πρέπει συχνά να ανατρέχετε στα δύο αυτά στοιχεία, αλλά η ουσιώδης μάθηση έρχεται μόνο μέσω στοχασμού. Καθένας οφείλει να κατασκευάσει τα δικά του μοντέλα και τη δική του φιλοσοφία γύρω από το τι είναι η φυσική. Και τα δύο θα αναπτύσσονται και θα εξελίσσονται —η κατασκευή ποτέ δεν ολοκληρώνεται. Τα όσα αναφέρω εδώ υπόκεινται σε κριτική από επιστήμονες, φιλοσόφους, φοιτητές, ακόμη και από εμένα τον ίδιο, καθώς η εκτίμησή μου για τη φυσική συνεχίζει να ωριμάζει. Τούτες οι λέξεις πρέπει να θεωρηθεί ότι απλώς παρέχουν ένα ερέθισμα για συζήτηση και στοχασμό. Προσπάθησα να σας εκφράσω την τρέχουσα φιλοσοφία μου. Με τα χρόνια θα χτίσετε την προσωπική σας εκδοχή. Περισσότερο και από την εκτίμηση μιας συμφωνίας ή ενός πίνακα ζωγραφικής, η κατανόηση της φυσικής αποτελεί μοναδική και προσωπική συνάντηση μιας συνείδησης με την πραγματικότητα.

Ο ***Robert J. Sciamanda*** είναι συνεργάτης καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Εντίμπορο στην Πενσυλβάνια. Η ηλεκτρονική διεύθυνσή του είναι: sciamanda@edinboro.edu.

Η φύση του φωτός

«Οι αόρατες επιδράσεις της βαρύτητας και των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων παραμένουν μαγικές· περιγράψιμες μεν, αλλά παρά ταύτα αδυσώπητες, μη ανθρώπινες, αλλότριες, μαγικές.»

—B.K. Ridley

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΤΟ ΦΩΣ ΠΑΙΖΕΙ ΤΟΣΟ ΚΑΘΟΡΙΣΤΙΚΌ ρόλο στη ζωή μας, που σχεδόν αδυνατούμε να φανταστούμε ένα σύμπαν χωρίς φως. Το σύνολο σχεδόν των πληροφοριών που λαμβάνουμε απ' το χώρο πέρα από το ηλιακό μας σύστημα καταφθάνουν σ' εμάς με τη μορφή του φωτός. Οι παρατηρήσεις των ουράνιων σωμάτων και οι προσπάθειες για την ανεύρεση κανονικοτήτων στις κινήσεις τους οδήγησαν σε συναρπαστικές προόδους στην επιστήμη και στη σύγχρονη επιστημονική μέθοδο. Οι μελέτες για το φως και το χρώμα προκάλεσαν επανάσταση στη ζωγραφική και στις υπόλοιπες καλές τέχνες. Η εφεύρεση του ηλεκτρικού φωτισμού μάς επέτρεψε να εργαζόμαστε και να μελετάμε στη διάρκεια της νύχτας. Πιο πρόσφατα, η εφεύρεση των λέιζερ είχε βαθύτατες συνέπειες στις δυνατότητές μας να κατανοήσουμε τον κόσμο γύρω μας και να επιτύχουμε μεγάλες τεχνολογικές προόδους σε τομείς όπως η χειρουργική, η κοπή, η συγκόλληση, η τοπογραφία, οι επικοινωνίες, οι τέχνες, η διαφήμιση και η βιομηχανία.

Τι είναι όμως το φως; Πώς περιγράφουμε τη συμπεριφορά του; Έχουμε δύο βασικά μοντέλα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή του φωτός —σωματιδιακή συμπεριφορά και κυματική συμπεριφορά. Η διαμάχη γύρω από τον καλύτερο τρόπο περιγραφής του φωτός διαρκεί αιώνες. Ο Νεύτων πίστευε ότι το φως αποτελούνταν από μικροσκοπικά σωματίδια που ταξίδευαν πολύ γρήγορα. Χρησιμοποίησε αυτή την ιδέα για να διατυπώσει την πρόβλεψη ότι το φως θα διαδιδόταν ταχύτερα σε διαφανή υλικά, όπως το νερό και το γυαλί, παρά στον αέρα. Τον καιρό που η ταχύτητα του φωτός στο νερό μετρήθηκε από τον Jean Foucault, το 1862, και βρέθηκε μικρότερη απ' ό,τι στον αέρα, το σωματιδιακό μοντέλο για το φως είχε ήδη περιπέσει σε ανυποληψία. Το 1801 ο Thomas Young είχε επιδείξει τη συμβολή του φωτός, ένα αποκλειστικά κυματικό φαινόμενο, και το κυματικό μοντέλο θα κυριαρχούσε τον επόμενο αιώνα.

Όπως συζητήσαμε και στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου του 1995, ο Αϊνστάιν επανεισήγαγε τον σωματιδιακό χαρακτήρα του φωτός το 1905, για να εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Ο Αϊνστάιν διατύπωσε την άποψη ότι το φως μπορεί να συμπεριφέρεται σαν σωματίδιο (γνωστό ως φωτόνιο), που έχει ενέργεια $E = h\nu$, όπου $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s είναι η σταθερά του Planck και ν η συχνότητα του φωτός.

Συμπληρωματική επιβεβαίωση στις παραπάνω επαναστατικές ιδέες προσέφερε ο Arthur Holly Compton, γιος ενός πρεσβυτεριανού πάστορα. Ο μεγαλύτερος αδελφός και φίλος του Karl ήταν ο άνθρωπος που κίνησε το ενδιαφέρον του Compton για τις ακτίνες X. Ήταν γνωστό ότι οι ακτίνες X αποτελούν μια άλλη μορφή ακτινοβολίας, παρόμοια με το ορατό φως, τα ραδιοκύματα, την υπέρυθρη και την υπεριώδη ακτινοβολία. Επομένως, το αίνιγμα του φωτός συνέπιπτε κατ' ουσία με το αίνιγμα των ακτίνων X.

Οι έρευνες του Compton ξεκίνησαν με τη μελέτη της γωνιακής κατανομής των ακτινών X από κρυστάλλους, επιβράβευση των οποίων αποτέλεσε η απονομή του διδακτορικού τίτλου από το Πανεπιστήμιο του Πρίνστον το 1916. Στη διάρκεια των ερευνών του ο Compton έμαθε για τη σκέδαση Bragg, και είχε την ευκαιρία να μετρήσει με μεγάλη ακρίβεια το μήκος κύματος των ακτίνων X. Ανακάλυψε ότι τα μήκη κύματος του μέρους των ακτίνων X που σκεδάζονταν από την ύλη γίνονταν μεγαλύτερα.

Αφού απέρριψε τις κλασικές εξηγήσεις για τις συγκεκριμένες παρατηρήσεις, ο Compton συνδύασε τις ιδέες του Αϊνστάιν για τα φωτόνια

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


RADIOLOGY
PRIVATE
TOMAS BUNK

και τη σχετικότητα, και οδηγήθηκε σε μια απλή εξήγηση για τις παρατηρήσεις του. Υπέθεσε ότι οι ακτίνες X αποτελούνταν από φωτόνια με ενέργεια $E = h\nu$ και ορμή $p = E/c$. Όταν ένα φωτόνιο συγκρούεται με ένα ηλεκτρόνιο, μέρος της ενέργειας και της ορμής του πρώτου μεταφέρεται στο δεύτερο, με αποτέλεσμα να μειώνεται η ενέργεια του φωτονίου, και κατά συνέπεια να αυξάνεται το μήκος κύματός του. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\lambda\nu = c$ για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπου λ είναι το μήκος κύματος και c η ταχύτητα του φωτός, ο Compton κατάφερε να υπολογίσει ότι

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \text{συν}\theta), \qquad (1)$$

όπου λ' είναι το μήκος κύματος του σκεδασθέντος φωτονίου, θ η γωνία σκέδασής του, και m η μάζα του ηλεκτρονίου. Ο Compton επιβεβαίωσε πειραματικά το συγκεκριμένο φαινόμενο, το οποίο είναι σήμερα γνωστό ως φαινόμενο Compton. Παρουσιάζει ενδιαφέρον το γεγονός ότι ο Compton ήταν εκείνος που πρότεινε το όνομα «φωτόνιο» για το φως όταν δρα ως σωματίδιο. Ο Compton μοιράστηκε το βραβείο Νόμπελ του 1927 με τον Charles Wilson, τον εφευρέτη του ομώνυμου θαλάμου παρατήρησης σωματιδίων.

Αργότερα ο Compton μελέτησε τις κοσμικές ακτίνες και βοήθησε να αποδειχτεί ότι είναι φορτισμένα σωματίδια και όχι ηλεκτρομαγνητικά κύματα υψηλής ενέργειας. Αφού εργάστηκε στο Πρόγραμμα Μανχάτταν κατά τη διάρκεια το Β' Παγκοσμίου Πολέμου, διετέλεσε πρύτανης του Πανεπιστημίου Washington, στο Σαιντ Λούις. Οι αδελφοί του έγιναν πρόεδροι του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Μασσαχουσέττης και του Πολιτειακού Πανεπιστημίου της Ουάσινγκτον.

Παρεμπιπτόντως, ποια ήταν η έκβαση της διαμάχης γύρω από τη φύση του φωτός; Σήμερα πιστεύουμε ότι το φως παρουσιάζει τόσο σωματιδιακό όσο και κυματικό χαρακτήρα ανάλογα με το είδος της μέτρησης που κάνουμε. Τούτη η συμπεριφορά είναι γνωστή ως κυματοσωματιδιακός δυϊσμός, και αποτελεί ιδιότητα όλων των σωματιδίων στο υποατομικό επίπεδο, συμπεριλαμβανομένων των ηλεκτρονίων και των πρωτονίων.

Ένα από τα προβλήματα που τέθηκαν στην ημιτελική εξέταση για την επιλογή της Ολυμπιακής Ομάδας Φυσικής των ΗΠΑ για το 1996 ήταν ένας μη σχετικιστικός υπολογισμός του φαινομένου Compton σε μία διάσταση, που θα αποτελέσει και τη βάση για το πρόβλημα αυτού του μήνα.

Α. Θεωρήστε τη μονοδιάστατη σύγκρουση ενός φωτονίου μ' ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία. Υποθέστε ότι η ενέργεια του φωτονίου είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας mc^2 του ηλεκτρονίου, και ότι το φωτόνιο μετά την κρούση κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση (ανακρούει) με συχνότητα ν'. Γράψτε τις εξισώσεις για τη διατήρηση της ενέργειας και της γραμμικής ορμής.

Β. Αμελώντας προσθετικούς όρους της τάξης υ^2/c^2, δείξτε ότι

$$h^2\nu\nu' = \left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)\left(\frac{1}{2}mc^2\right), \qquad (2)$$

όπου με υ συμβολίζεται η ταχύτητα του ηλεκτρονίου μετά τη σύγκρουση.

Γ. Δείξτε ότι η εξίσωση (2) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc},$$

σε συμφωνία με την έκφραση (1) για το φαινόμενο Compton ($\theta = 2\pi$). Παρατηρήστε ότι η μεταβολή του μήκους κύματος δεν εξαρτάται από το αρχικό μήκος κύματος.

Η ποσότητα h/mc είναι γνωστή ως μήκος κύματος Compton και έχει την τιμή $2{,}43 \cdot 10^{-12}$ m = 2,43 pm. Επομένως, έχουμε μια πολύ μικρή μεταβολή του μήκους κύματος, η οποία δύσκολα μπορεί να μετρηθεί, εκτός αν το λ είναι επίσης μικρό. (Ο Compton χρησιμοποιούσε ακτίνες X μήκους κύματος 71,1 pm.)

Δ. Πόση είναι η ενέργεια των εν λόγω ακτίνων X; Μπορούμε να χειριστούμε τα ηλεκτρόνια μέσα στην ύλη σαν να ήταν ελεύθερα; Ικανοποιεί η ενέργεια ανάκρουσης τις προϋποθέσεις για μη σχετικιστική αντιμετώπιση;

Ε. Αν επιθυμείτε να εργαστείτε περισσότερο πάνω στο συγκεκριμένο φαινόμενο, προσπαθήστε να εξαγάγετε το αποτέλεσμα στις δύο διαστάσεις, όπως δίνεται από την εξίσωση (1). Έστω φ η γωνία του ηλεκτρονίου μετά την κρούση. Γράψτε τις εξισώσεις διατήρησης για την ενέργεια και τις δύο συνιστώσες της ορμής. Χρησιμοποιήστε αυτές τις εξισώσεις για να απαλείψετε τα φ και υ. Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι η σύγκρουση είναι μη σχετικιστική, ώστε να αμελήσετε μικρούς προσθετικούς όρους. (Τα περισσότερα διδακτικά βιβλία σύγχρονης φυσικής δίνουν τον σχετικιστικό υπολογισμό.)

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum*.

Κινούμενη ύλη

Α. Υπάρχουν τρία μέρη σ' αυτό το πρόβλημα: η κάθοδος του Ταρζάν, η κρούση του με την Τζέιν και η άνοδος της συσσωμάτωσης Ταρζάν-Τζέιν. Από το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τον Ταρζάν (μάζας M) —ο οποίος ξεκινά την αιώρησή του από ύψος h_0— μπορούμε να βρούμε την ταχύτητά του στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του:

$$Mgh_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2,$$

ή

$$v_0^2 = 2gh_0. \qquad (1)$$

Η κρούση του Ταρζάν με την Τζέιν (μάζας m) είναι τελείως ανελαστική, οπότε από το νόμο διατήρησης της ορμής για το σύστημα Ταρζάν-Τζέιν προκύπτει η ταχύτητα v' της συσσωμάτωσης μετά την κρούση:

$$Mv_0 = (M + m)v',$$

ή

$$v' = \frac{Mv_0}{M + m},$$

ή μέσω της (1),

$$v'^2 = 2gh_0\frac{M^2}{(M + m)^2}. \qquad (2)$$

Από το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h στο οποίο ανέρχεται η συσσωμάτωση Ταρζάν-Τζέιν:

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = (M+m)gh \qquad (3)$$

ή

$$h = \frac{M^2}{(M+m)^2}h_0 = 4{,}44 \text{ m}.$$

Δυστυχώς για το διάσημο ζευγάρι, δεν καταφέρνει να φτάσει στο ύψος που προσδοκούσε.

Β. Από το νόμο διατήρησης της ορμής για το σύστημα σφαίρας-στόχου έχουμε

$$mv_0 = (m+M)v',$$

όπου m η μάζα και v_0 η αρχική ταχύτητα της σφαίρας, M η μάζα του στόχου και v' η ταχύτητα της συσσωμάτωσης. Έτσι,

$$v'^2 = \frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2. \qquad (4)$$

Αν συμβολίσουμε με L το μήκος του νήματος, με s την οριζόντια μετατόπιση του στόχου, με θ τη γωνία εκτροπής του εκκρεμούς και με h την ανύψωση της συσσωμάτωσης, τότε προφανώς ισχύει

$$\text{ημ}\theta = s/L, \text{ ή } \theta = 3{,}44°,$$

και

$$h = L - L\,\text{συν}\theta = 0{,}009 \text{ m}.$$

Από το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη συσσωμάτωση έχουμε

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = (M+m)gh$$

οπότε μέσω της (4) προκύπτει

$$v_0^2 = 2gh\frac{(M+m)^2}{m^2} \qquad (5)$$

ή

$$v_0 = 420 \text{ m/s}.$$

Γ. Αν το ελατήριο σταθεράς k συμπιέζεται κατά d, από το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα ελατηρίου-μπάλας μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα εκτόξευσης της μπάλας:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

ή

$$v_0^2 = \frac{kd^2}{m}. \qquad (6)$$

Επειδή ισχύει ό,τι και στο ερώτημα Β, εξισώνοντας τις (5) και (6) και λύνοντας ως προς h, παίρνουμε:

$$h = \frac{kd^2}{2g}\frac{m}{(m+M)^2}.$$

Προκειμένου να βρούμε τις σχετικές μάζες της μπάλας και του στόχου ώστε το h να γίνεται μέγιστο, πρέπει να σχηματίσουμε την παράγωγο του h ως προς m, να τη θέσουμε ίση με μηδέν, και να λύσουμε ως προς m συναρτήσει του M. Έτσι,

$$0 = \frac{dh}{dm} = \frac{M-m}{(M+m)^3},$$

οπότε $m = M$.

Δ. Το ερώτημα μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη: την κρούση μεταξύ μπάλας και ράβδου, και την εκτροπή της συσσωμάτωσης. Από το νόμο διατήρησης της στροφορμής (ως προς το σημείο εξάρτησης της ράβδου —που προφανώς είναι το πάνω άκρο της) για το σύστημα μπάλας-ράβδου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω της συσσωμάτωσης αμέσως μετά την κρούση ως συνάρτηση της ταχύτητας εκτόξευσης v_0 της μπάλας (και την οποία έχουμε εκφράσει στο ερώτημα Γ):

$$mv_0L = \Theta'\omega,$$

όπου m είναι η μάζα της μπάλας, L το μήκος της ράβδου και Θ' η ροπή αδράνειας του συστήματος μπάλα-ράβδος ως προς το σημείο εξάρτησης της ράβδου. Δεδομένου ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο εξάρτησής της είναι $\Theta = \frac{1}{3}ML^2$ μπορούμε να υπολογίσουμε το Θ':

$$\Theta' = \Theta + mL^2 = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2.$$

Έτσι,

$$\omega = \frac{mv_0}{\left(\frac{1}{3}M+m\right)L}.$$

Κατά τη διαδικασία εκτροπής, η περιστροφική κινητική ενέργεια της συσσωμάτωσης μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια λόγω θέσης. Η μπάλα ανυψώνεται κατά $L - L\,\text{συν}\theta$, και το κέντρο μάζας της ράβδου κατά

$$\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\text{συν}\theta,$$

όπου θ η ζητούμενη γωνία. Έτσι,

$$\frac{1}{2}\Theta'\omega^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)gL(1 - \text{συν}\theta).$$

Αντικαθιστώντας σ' αυτήν τα Θ' και ω από τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε:

$$1 - \text{συν}\theta = \frac{3m^2v_0^2}{(M+2m)(M+3m)gL}.$$

Επειδή η εξίσωση (6) ισχύει και στο παρόν ερώτημα, η παραπάνω εξίσωση μας δίνει:

$$\theta = \text{συν}^{-1}\left(1 - \frac{3kd^2m}{gL(M+2m)(M+3m)}\right).$$

Ε. Από την εξίσωση (6) φαίνεται ότι η ταχύτητα εκτόξευσης v_0 του βώλου είναι ανάλογη της συμπίεσης d του ελατηρίου. Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του βώλου κατά την πτήση του παραμένει σταθερή, και ίση με v_0, οπότε η απόσταση x κατά την οποία μετατοπίζεται συνολικά ο βώλος οριζόντια είναι ανάλογος του χρόνου πτήσης, ο οποίος και στις δύο προσπάθειες «σκοποβολής» είναι ίδιος —ίσος με το χρόνο ελεύθερης πτώσης του βώλου από το τραπέζι μέχρι το πάτωμα. Άρα, η συνολική οριζόντια μετατόπιση του βώλου σε κάθε βολή του είναι ανάλογη της συμπίεσης του ελατηρίου. Αν x_1 και d_1 είναι τα αντίστοιχα μεγέθη στην πρώτη προσπάθεια και x_2 και d_2 στη δεύτερη, τότε θα ισχύει

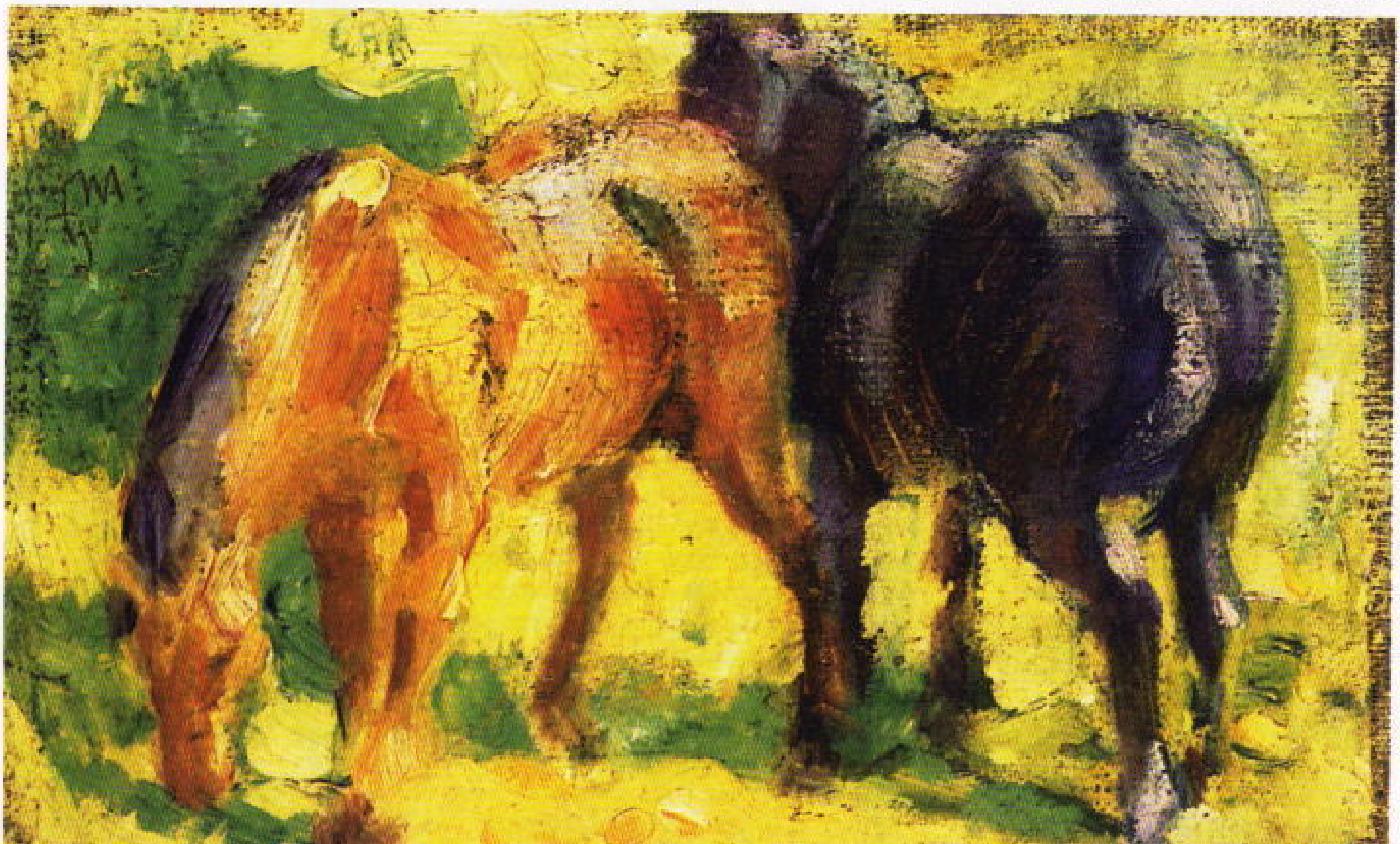
$$d_2 = d_1\frac{x_2}{x_1} = 1{,}11 \text{ cm}.$$

Ρυθμοί διατροφής και αλγόριθμοι

Δεν είναι παράλογο να θέλεις να κερδίζεις

Δρ. Χμ

ΟΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ ΙΔΕΑ ΓΙΑ τις σκέψεις των αλόγων. Μας βλέπουν να ξεκουραζόμαστε ήρεμα σ' ένα λιβάδι, ικανοποιημένα, αδιάφορα για τις ανησυχίες του κόσμου, και υποθέτουν πως τίποτε δεν μας απασχολεί. Δυστυχώς, όμως, κάνουν λάθος. Σκεφτόμαστε πολλά προβλήματα —όπως, π.χ. το επόμενο γεύμα μας. Επιτρέψτε μου να ξεκαθαρίσω από την αρχή ότι λατρεύω το φαγητό. Χμ, δοκιμάστε αν θέλετε να καλπάσετε για ώρες με άδειο στομάχι. Όντας άλογο που απαιτεί τα δικαιώματά του, έχω κάνει μερικούς ιππολογισμούς γύρω από το συγκεκριμένο ζήτημα. Το αφεντικό μου, ο κύριος Πωλ, έχει αρχίσει τελευταία ένα περίεργο παιχνίδι. Όταν πηγαίνουμε στο στάβλο, βρίσκουμε μια σειρά από οκτώ κουβάδες, με διαφορετικές ποσότητες τροφής. (Πιστεύουμε ότι τους γεμίζει στην τύχη.) Σε κάθε δύο άλογα αντιστοιχεί μία σειρά κουβάδων, και είμαστε υποχρεωμένα να ακολουθήσουμε τις εξής οδηγίες: *Κάθε κουβάς είναι αριθμημένος με το πλήθος από σέσουλες τροφής που περιέχει. Κάθε φορά, το ένα άλογο διαλέγει έναν από τους δύο κουβάδες που βρίσκονται στις άκρες της σειράς, τρώει το περιεχόμενο, και τον απομακρύνει. Συνεχίζουν έτσι εναλλάξ (περιμένοντας ο καθένας τον άλλο να φάει και να απομακρύνει τον κουβά) μέχρι να τελειώσει η τροφή.* Κάποιοι από τους περιστασιακούς συντρόφους μου κρατούν μια ιπποτική στάση στο ζήτημα. Ανεξάρτητα από το ποιος φτάνει πρώτος, ρίχνουν κορόνα-γράμματα για να αποφασίσουν από ποια άκρη της σειράς θα ξεκινήσουν. Είναι εύκολο να τους κερδίσω —διαλέγω απλώς την άκρη με τον κουβά που έχει



τη μεγαλύτερη αρίθμηση. (Ονομάζω αυτή την τακτική αλγόριθμο του λαίμαργου.) Συνήθως αποδίδει, αλλά αρκετά συχνά είναι τυχεροί και με κερδίζουν οι άλλοι. Για παράδειγμα, τις προάλλες ο κύριος Πωλ έβαλε εμένα και την Μπέσυ να διαλέξουμε από μια σειρά που είχε τους κουβάδες {1, 2, 3, 2, 4, 2, 15, 6}. Πήγα πρώτος και πήρα τον 6 αφήνοντας τους {1, 2, 3, 2, 4, 2, 15}. Η Μπέσυ διάλεξε τον 15, και ήταν πλέον φανερό ότι δεν θα μπορούσα να την ξεπεράσω. Εκείνη την ημέρα έμεινα λίγο πειναςμένος. Μπορεί η πείνα να αναδεικνύει την καλύτερη πλευρά του εαυτού μας, αλλά προτιμώ να εξασφαλιστώ ότι δεν πρόκειται να μου ξανασυμβεί. Θέλω να είμαι σίγουρος ότι, σε κάθε περίπτωση, θα παίρνω ίσο μερίδιο ή μεγαλύτερο! Σκέφτομαι, με άλλα λόγια, πως κάθε φορά που ο κύριος Πωλ τοποθετεί μπροστά μας μια σειρά με άρτιο πλήθος κουβάδων γεμάτους με τυχαίες ποσότητες τροφής και διαλέγω πρώτος, πρέπει να τελειώνω έχοντας πάρει τουλάχιστον τη μισή τροφή. Σας προκαλώ λοιπόν να αντιμετωπίσετε το πρόβλημα «Ίδια ή Περισσότερη Ποσότητα Όμορφου Σανού» (ή ΙΠΠΟΣ όπως το ονομάζουμε εδώ στο στάβλο): γράψτε στον ιππολογιστή σας ένα πρόγραμμα που θα γεμίζει p δοχεία (το p είναι άρτιο) με τυχαίες ποσότητες τροφής (ακέραιοι μεταξύ του 1 και του s) και, αρχίζοντας πρώτοι, να κερδίζετε πάντοτε οποιοδήποτε άλογο —ή και άνθρωπο (που νομίζουν ότι είναι πιο έξυπνοι!) Ο ιππολογιστής μου χρησιμοποιεί το εξαιρετικά προηγμένο λογισμικό Mathematica™. Προτιμώ το Mathematica διότι μου δίνει τη δυνατότητα να εξετάζω ένα μεγάλο πλήθος ιππολογιστικών αλγορίθμων με μια πολύ υψηλού επιπέδου γλώσσα που μοιάζει με μαθηματική παράσταση. Βλέπετε το Mathematica είναι μια συναρτησιακή γλώσσα, όπου όλα τα προγράμματα είναι μαθηματικές παραστάσεις. Είναι επίσης εύκολο να το μάθει ένας αρχάριος που δεν έχει ασχοληθεί ποτέ με προγραμματισμό. Μπορείτε όμως να χρησιμοποιήσετε, αν το προτιμάτε, Pascal, C/C++ ή BASIC. Δεν σκοπεύω πάντως να επικεντρωθώ στη γλώσσα, αλλά στον αλγόριθμο.

Εικονογράφηση: Franz Marc

Αν χρησιμοποιείτε άλλη γλώσσα, μπορείτε να υλοποιήσετε τον αλγόριθμό μου ακολουθώντας τη δική της σύνταξη. Ιδού μια περιγραφή των ιππολογισμών μου. Πρώτα όρισα μια συνάρτηση που επιλέγει p τυχαίους αριθμούς από το 1 έως το s. Αυτό το πέτυχα ορίζοντας μια συνάρτηση `feed[p,s]` η οποία παράγει έναν πίνακα τυχαίων ακεραίων που βρίσκονται μεταξύ του 1 και του s:

```
feed[p_,s_]:=
Table[Random[Integer,{1,s}],{p}]
```

Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση feed με τιμές $p = 8$ και $s = 25$, και βάζουμε σε μια σειρά τα αποτελέσματά της.

```
p=8; s=25;
row=feed[p,s]
{18,19,1,11,25,12,22,14}
```

Η Μπέσυ και εγώ ξεκινάμε χωρίς να έχουμε τίποτε, και αυτό εκφράζεται με κενές λίστες που αντιστοιχίζονται ως εξής:

```
Bessie={};
DrHm={};
```

Όταν χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του λαίμαργου, τότε, αν το πρώτο δοχείο της σειράς περιέχει την ίδια ή μεγαλύτερη ποσότητα τροφής από το τελευταίο (συνάρτηση Last), προσθέτουμε (συνάρτηση Append) αυτό το δοχείο στον κατάλογο της τροφής μου και το βγάζουμε (συνάρτηση Drop) από τη σειρά. Αλλιώς επιλέγω το Last, το κάνουμε Append στον κατάλογο τροφής μου και το βγάζουμε με Drop από τη σειρά. Ας υποθέσουμε ότι ξεκινώ πρώτος και ότι επαναλαμβάνουμε (συνάρτηση Do) τη διαδικασία $p/2$ φορές, οπότε εξαντλείται η τροφή. Για να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα, τα τυπώνουμε (συνάρηση Print). Ιδού ο κώδικας του Mathematica που μεταφράζει όσα είπα με ιδιαίτερα ακριβή και ξεκάθαρο τρόπο. Τα σχόλια όπως «τότε» και «αλλιώς» δεν απαιτούνται από το πρόγραμμα και έχουν προστεθεί για να διευκολύνουν την ανάγνωσή του.

```
row
Do[If[First[row]>=Last[row],
    («τότε»)
    AppendTo[DrHm,First[row]];
    row=Drop[row,1],
    («αλλιώς»)
  AppendTo[DrHm,Last[row]]; row=
  Drop[row,1]];
  Print[«O Δρ.Χμ τρώει από το δο-
  χείο»,Last[DrHm], «αφήνοντας τα»,
  row];
  If[First[row]>=Last[row],
    («τότε»)
    AppendTo[Bessie,First[row]];
    row=Drop[row,1],
    («αλλιώς»)
  AppendTo[Bessie,Last[row]]; row=
  Drop[row,1]];
  Print[«Η Μπέσυ τρώει από το δο-
  χείο»,Last[Bessie],«αφήνοντας τα»,
  row], {p/2}];
```

Το αποτέλεσμα που θα πάρετε αν εκτελέσετε αυτό το πρόγραμμα είναι το εξής:

```
{18, 19, 1, 11, 25, 12, 22, 14}
Ο ΔρΧμ τρώει από το δοχείο 18
αφήνοντας τα {19, 1, 11, 25, 12,
22, 14}
Η Μπέσυ τρώει από το δοχείο 19
αφήνοντας τα {1, 11, 25, 12, 22,
14}
Ο ΔρΧμ τρώει από το δοχείο 14
αφήνοντας τα {1, 11, 25, 12, 22}
Η Μπέσυ τρώει από το δοχείο 22
αφήνοντας τα {1, 11, 25, 12}
Ο ΔρΧμ τρώει από το δοχείο 12
αφήνοντας τα {1, 11, 25}
Η Μπέσυ τρώει από το δοχείο 25
αφήνοντας τα {1, 11}
Ο ΔρΧμ τρώει από το δοχείο 11
αφήνοντας τα {1}
Η Μπέσυ τρώει από το δοχείο 1
αφήνοντας τα {}
```

Ήρθε η ώρα να προσθέσουμε την τροφή. Αυτό το κάνουμε εφαρμόζοντας (πράξη Apply) την πρόσθεση (συνάρτηση Plus) στις επιλογές μας:

```
DrHmTotal=Apply[Plus,DrHm];
BessieTotal=Apply[Plus,Bessie];
Print[DrHm, « = οι επιλογές του
ΔρΧμ που μας δίνουν σύνολο»,
DrHmTotal]
Print[Bessie, « = οι επιλογές της
Μπέσυ που μας δίνουν σύνολο»,
BessieTotal]

{18, 14, 12, 11} = οι επιλογές του
ΔρΧμ που μας δίνουν σύνολο 55
```

(19, 22, 25, 1) = οι επιλογές της Μπέσυ που μας δίνουν σύνολο 67

Δεν είναι δυνατόν! Πάλι έφαγα λιγότερο! Μπορείτε να με βοηθήσετε να αποφύγω αυτή την κακοτυχία; Δεν μου αρέσει να πεινάω. Ανακαλύψτε έναν αλγόριθμο που θα κερδίζει κάθε φορά.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 1α. Βρείτε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο που θα μπορώ να χρησιμοποιήσω για να κερδίζω κάθε φορά την Μπέσυ. Το πρόγραμμά σας πρέπει να εκτελείται σε λίγα δευτερόλεπτα, και να κερδίζει γρήγορα ακόμη και όταν τα δοχεία είναι 100. Να θυμάστε ότι έχω το πλεονέκτημα να ξεκινώ πρώτος.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 1β. Κάντε μερικούς ιππολογισμούς για να εκτιμήσετε τις πιθανότητες που έχω να κερδίσω την Μπέσυ όταν χρησιμοποιούμε και οι δύο τον αλγόριθμο του λαίμαργου. (Οι ισοπαλίες θεωρούνται δική μου νίκη.)

Μπορείτε να μου στείλετε τις απαντήσεις σας με το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Θα υπάρχει μια σελίδα με τους καλύτερους ιππολογισμούς στο http://usaco.uwp.edu/cowculations. Με την ευκαιρία, αν σας αρέσει πολύ ο προγραμματισμός, ρίξτε μια ματιά στην Ολυμπιάδα Υπολογιστών των ΗΠΑ στο http://usaco.uwp.edu. Αν θα σας ενδιέφερε να κάνετε τους ιπ-πολογισμούς σας με το Mathematica και δεν διαθέτετε αντίγραφό του, εξετάστε την προσφορά της Wolfram Research για σπουδαστές στο http://www.wolfram.com/mathematica/info/students.html. Η έκδοση για σπουδαστές δεν έχει καμία διαφορά από την κανονική έκδοση —εκτός φυσικά από την τιμή (περίπου 109$). *Σημείωση*: Το παραπάνω πρόβλημα εμφανίστηκε αρχικά (χωρίς άλογα βέβαια) στη Διεθνή Ολυμπιάδα Πληροφορικής που έγινε στο Βεσπρέμ της Ουγγαρίας από τις 25 Ιουλίου έως την 1 Αυγούστου του 1996. Η σελίδα για τη ΔΟΠ '96 βρίσκεται στο http://frey.inf.bme.hu/contests/ioi96. ◼

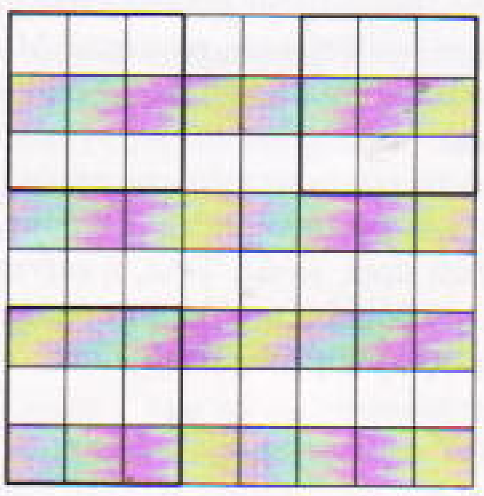
Ο **Δρ. Χμ** *σπούδασε με ιπποτροφία στους Στάβλους του Πανεπιστημίου του Ουισκόνσιν, όπου σήμερα εργάζεται ως καθηγητής της επιστήμης των υπολογιστών.*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M81

Και στις δύο περιπτώσεις η απάντηση είναι αρνητική. Για να το διαπιστώσετε, χρωματίστε οριζόντια τη σκακιέρα: μαύρη την πρώτη γραμμή, άσπρη τη δεύτερη, ξανά μαύρη την τρίτη, κ.ο.κ. (Σχήμα 1). Είναι φανερό ότι ένα πούλι μετά το άλμα του καταλήγει σε τετράγωνο ιδίου χρώματος, επομένως το 3×3 τετράγωνο έπειτα από τη μετακίνησή του πρέπει να καλύπτει το ίδιο πλήθος —ας πούμε μαύρων— τετραγώνων. Το πλήθος αυτών των τετραγώνων, όμως, ισούται με έξι στο κάτω τετράγωνο ενώ σε καθένα από τα δύο πάνω ισούται με τρία.



Σχήμα 1

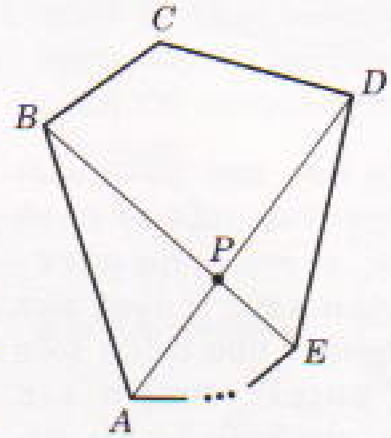
M82

Αν μπορούσαμε να σχηματίσουμε περισσότερα από $n/2$ περιγεγραμμένα σε κύκλο τετράπλευρα, δύο τουλάχιστον από αυτά θα ήταν διαδοχικά —δηλαδή, θα είχαν δύο κοινές πλευρές. Ας τα συμβολίσουμε $ABCD$ και $BCDE$ (Σχήμα 2). Αν περιέχουν εγγεγραμμένους κύκλους, τότε, στο καθένα, τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του θα είναι μεταξύ τους ίσα:

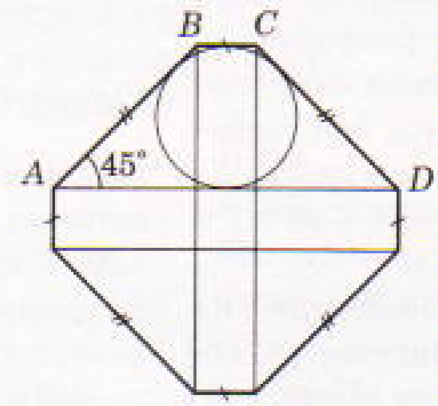
$$AB + CD = BC + AD,$$

$$BC + DE = CD + BE.$$

Έπεται ότι



Σχήμα 2



Σχήμα 3

$$AB + DE = AD + BE.$$

Το δεδομένο n-γωνο είναι κυρτό, επομένως οι διαγώνιοι AD και BE τέμνονται σ' ένα σημείο P. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$AD + BE = AP + BP + PD + PE$$

$$> AB + DE,$$

γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την προηγούμενη ισότητα.

Για να κατασκευάσουμε το ζητούμενο οκτάγωνο, θεωρούμε ένα περιγεγραμμένο σε κύκλο ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ στο οποίο οι γωνίες της βάσης είναι 45°, και προσθέτοντας ίσα τραπέζια σχηματίζουμε ένα συμμετρικό οκτάγωνο, όπως στο Σχήμα 3. Με μια παρόμοια κατασκευή μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα n-γωνο όπου ορίζονται $n/2$ περιγεγραμμένα τετράπλευρα.

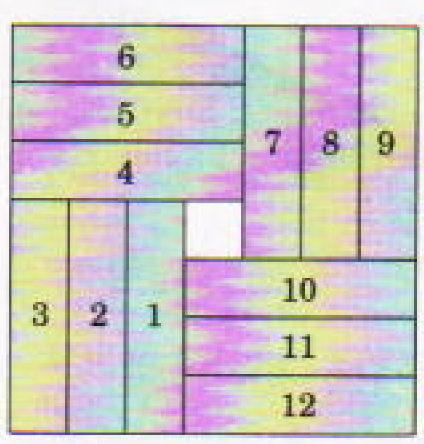
M83

(α) Η απάντηση είναι 12. Στο Σχήμα 4 βλέπουμε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε 12 μη επικαλυπτόμενα πλοία του δεδομένου σχήματος σ' ένα 7×7 τετράγωνο, οπότε λιγότερες από 12 βολές είναι πιθανό να αφήσουν κάποιο πλοίο ανέπαφο, και συνεπώς δεν επαρκούν. Στο Σχήμα 5 βλέπουμε ότι 12 βολές είναι πάντα αρκετές.

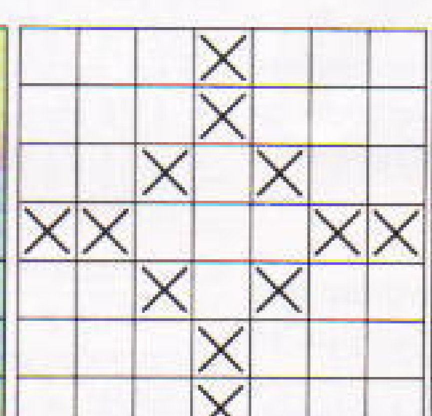
(β) Η απάντηση είναι 20. Στο Σχήμα 6 βλέπουμε πώς μπορούμε να σημειώσουμε είκοσι τετράγωνα σ' ένα 7×7 πλέγμα έτσι ώστε να μην υπάρχουν τέσσερα μη σημειωμένα τετράγωνα που θα σχηματίζουν ενιαίο «τετράμινο». Από την άλλη πλευρά, σ' ένα 7×7 πλέγμα μπορούμε να τοποθετήσουμε τέσσερα μη επικαλυπτόμενα ορθογώνια 3×4 (Σχήμα 4). Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει άμεσα ότι το ελάχιστο πλήθος βολών που απαιτούνται για να χτυπηθεί ένα πλοίο που έχει σχήμα τετράμινο και κρύβεται σε κάποιο από αυτά τα ορθογώνια ισούται με πέντε. Έτσι, στην περίπτωση ολόκληρου του πλέγματος, το συνολικό πλήθος βολών που εξασφαλίζει τον εντοπισμό ενός τέτοιου πλοίου είναι τουλάχιστον $4 \cdot 5 = 20$.

M84

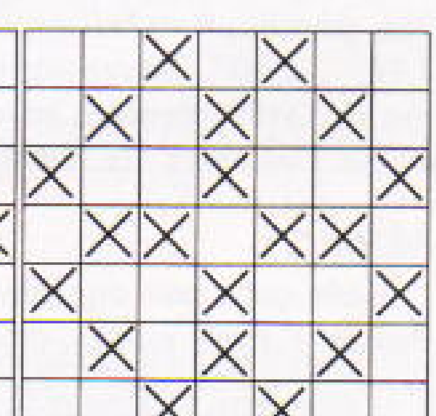
Συμβολίζουμε τους αριθμούς Fibonacci με f_n:



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}. \qquad (1)$$

Θα χρειαστούμε την επόμενη απλή εκτίμηση του λόγου $r_n = f_{n+1}/f_n$ δύο γειτονικών όρων της ακολουθίας Fibonacci. Ο λόγος αυτός, που αρχικά έχει τιμή $f_3/f_2 = 3/2$, ισούται τουλάχιστον με $3/2 = 1{,}5$ και δεν είναι μεγαλύτερος του $5/3 = 1{,}66... < 1{,}7$. Στην εκτίμηση αυτή μπορούμε να καταλήξουμε βασιζόμενοι στο γνωστό γεγονός ότι ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών Fibonacci προσεγγίζει τη «χρυσή τομή» $\tau = (1+\sqrt{5})/2 \cong 1{,}618$.[1]

Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα αυτές τις ανισότητες με τελεία επαγωγή. Από την εξίσωση (1) έχουμε

$$r_n = f_{n+1}/f_n = 1 + f_{n-1}/f_n = 1 + 1/r_{n-1}.$$

Επομένως, αν

$$3/2 \le r_{n-1} \le 5/3 \qquad (2)$$

—δηλαδή, αν $2/3 \ge 1/r_{n-1} \ge 3/5$—, τότε το r_n έχει άνω φράγμα το $1 + 2/3 = 5/3$ και κάτω φράγμα το $1 + 3/5 = 8/5 > 3/2$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι η εξίσωση (2) αληθεύει για $n = 3$, επομένως ισχύει για κάθε $n \ge 3$.

Έστω τώρα f_k ο ελάχιστος m-ψήφιος αριθμός Fibonacci, όπου $m \ge 2$. Τότε $f_k \ge 10^{m-1}$, $f_{k+1} \ge 1{,}5f_k$, και, επιπλέον,

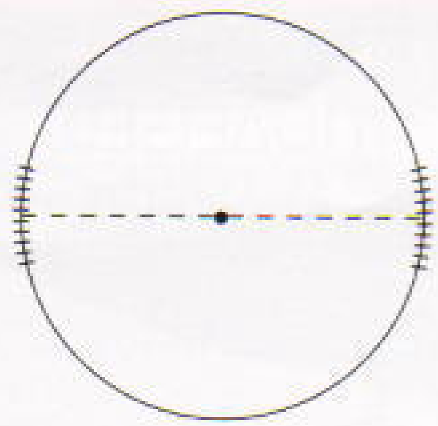
$$f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \ge 2{,}5f_k,$$
$$f_{k+3} \ge (2{,}5 + 1{,}5)f_k = 4f_k,$$
$$f_{k+4} \ge (4 + 2{,}5)f_k = 6{,}5f_k,$$

οπότε $f_{k+5} \ge 10{,}5f_k > 10^m$, έτσι το f_{k+5} έχει τουλάχιστον $m + 1$ ψηφία. Άρα, υπάρχουν το πολύ πέντε m-ψήφιοι αριθμοί Fibonacci.

Από την άλλη πλευρά, $f_{k-1} < 10^{m-1}$, $f_k < 1{,}7\, f_{k-1}$ και, ακολουθώντας όμοια επιχειρηματολογία με προηγουμένως, μπορούμε να δείξουμε ότι $f_{k+3} < 7{,}1f_{k-1} < 10^m$. Συνεπώς, υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις m-ψήφιοι αριθμοί Fibonacci. (N. Vasilyev)

M85

Κάθε φορά που σημειώνουμε τρία σημεία σ' έναν κύκλο, μπορούμε να



Σχήμα 7

επιλέξουμε τα δύο από αυτά έτσι ώστε να ορίζουν ένα τόξο το πολύ 120°. Επομένως, αν ενώσουμε με ευθύγραμμο τμήμα κάθε ζεύγος των δεδομένων σημείων που ορίζει τόξο το πολύ 120° καταλήγουμε σ' ένα γράφημα όπου *από κάθε τριάδα σημείων τα δύο τουλάχιστον συνδέονται μεταξύ τους*. Αυτή η ιδιότητα αρκεί για να αποδείξουμε την πρόταση του προβλήματος —δηλαδή να αποδείξουμε ότι το γράφημα που κατασκευάσαμε έχει τουλάχιστον 100 ακμές.

Έστω A_1 η κορυφή του γραφήματός μας από την οποία ξεκινά το μικρότερο πλήθος ακμών. Συμβολίζουμε με A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_k τις ακμές αυτές. Καθένα από τα k σημεία A_i, με $i = 1, 2, ..., k$, είναι άκρο τουλάχιστον $k - 1$ ακμών, επομένως το συνολικό πλήθος των ακμών που το ένα ή και τα δύο άκρα τους βρίσκονται μεταξύ αυτών των σημείων είναι τουλάχιστον $k(k - 1)/2$ (διαιρούμε με το 2 διότι κάθε τμήμα απαριθμείται δύο φορές, αφού έχει δύο άκρα). Όλα τα υπόλοιπα $21 - k$ σημεία πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους με ακμή. Πραγματικά, αν δεν συνδέονται μεταξύ τους δύο από αυτά τα σημεία, ας πούμε τα B και C, τότε δεν θα υπάρχει καμία ακμή μεταξύ των σημείων A_1, B και C, και αυτό έρχεται σε αντίφαση με την ιδιότητα του γραφήματος που αποδείξαμε προηγουμένως. Έτσι, έχουμε τουλάχιστον $(21 - k)(20 - k)/2$ επιπλέον ακμές. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των ακμών είναι τουλάχιστον

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(21-k)(20-k)}{2}$$
$$= k^2 - 21k + 210 \ge 100$$

(για ακέραιο k). Η ελάχιστη τιμή προκύπτει για $k = 10$ και $k = 11$. Αυτή η εκτίμηση δεν μπορεί να βελτιωθεί, όπως μας δείχνει και η διευθέτηση των σημείων στο Σχήμα 7, όπου τα δέκα σημεία είναι συγκεντρωμένα κοντά σ' ένα σημείο του κύκλου και τα έντεκα βρίσκονται κοντά στο αντιδιαμετρικό του.

Στη γενική περίπτωση των n σημείων του κύκλου πρέπει να αντικαταστήσουμε τον αριθμό 100 με το $n(n - 2)/4$, όταν το n είναι άρτιο, και με το $(n - 1)^2/4$, όταν το n είναι περιττό. Η απόδειξη παραμένει ίδια.
(V. Dubrovsky, A. Sidorenko)

Φυσική

Φ81

Η μόνη δύναμη που επιταχύνει το νήμα οφείλεται στο βάρος του.

Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε μικρό τμήμα του νήματος, με μήκος $\Delta\ell$, που βρίσκεται σε επαφή με τη σφαιρική επιφάνεια (Σχήμα 8). Ας ονομάσουμε φ τη γωνία μεταξύ της κατακορύφου και της ακτίνας της σφαίρας που άγεται προς το $\Delta\ell$. Τότε, η συνιστώσα του βάρους τού $\Delta\ell$ που εφάπτεται στη σφαιρική επιφάνεια είναι

$$\Delta F = \Delta mg\,ημ\varphi = \frac{M}{\ell}\Delta\ell g\,ημ\varphi,$$

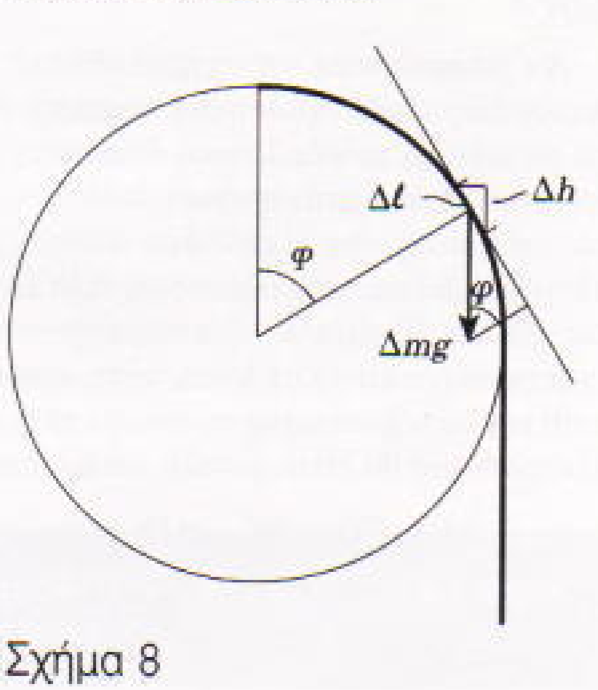
όπου M είναι η μάζα του νήματος. Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$\Delta\ell\ ημ\varphi = \Delta h,$$

όπου Δh είναι η υψομετρική διαφορά των άκρων του $\Delta\ell$. Έτσι,

$$\Delta F = \frac{M}{\ell} g\Delta h.$$

Επομένως, η ολική δύναμη που επιταχύνει το νήμα είναι



Σχήμα 8

1. Δείτε το άρθρο «Η χρυσή τομή στο μπέιζμπολ» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1996 του *Quantum*.

$$F=\sum_{i=1}^{N}\Delta F_i=\frac{M}{\ell}g\sum_{i=1}^{N}\Delta h_i=\frac{M}{\ell}gH,$$

όπου $H=(\ell-2\pi R/4)+R$ όταν $\ell \geq 2\pi R/4$. Άρα,

$$\gamma=\frac{F}{m}=g\left[1-\frac{R}{\ell}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right].$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\ell\to\infty$, τότε $\gamma\to g$. Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου το μήκος του νήματος ισούται, ας πούμε, με το ένα τέταρτο της περιμέτρου της σφαίρας, τότε $\gamma=2g/\pi$.

Φ82

Στο αγώγιμο επίπεδο αναπτύσσονται εξ επαγωγής φορτία που έλκουν τη σημειακή μάζα. Το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο με το να μην υπήρχε το αγώγιμο επίπεδο αλλά μια σημειακή μάζα που φέρει φορτίο $-Q$ και βρίσκεται στη συμμετρική θέση της πρώτης ως προς το επίπεδο (Σχήμα 9).

Η ελκτική δύναμη μεταξύ των δύο φορτίων θα περιγράφεται από το νόμο του Coulomb:

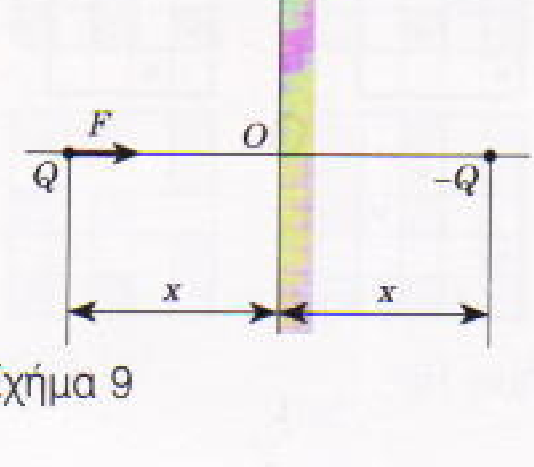
$$F=\frac{kQ^2}{(2x)^2}=\frac{kQ^2}{4x^2}.$$

Ωστόσο, από το να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον ζητούμενο χρόνο μέσω αυτής της εξίσωσης είναι ευκολότερο να αντιμετωπίσουμε ένα περισσότερο οικείο πρόβλημα. Ας φανταστούμε ότι στη σημειακή μάζα ασκείται η ίδια δύναμη, αλλά προκύπτει από τη βαρυτική έλξη μιας μάζας M τοποθετημένης στο σημείο O του επιπέδου. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$F=\frac{GmM}{x^2}=\frac{kQ^2}{4x^2},$$

και να υπολογίσουμε την κατάλληλη τιμή της μάζας:

$$M=\frac{Fx^2}{Gm}=\frac{kQ^2}{4mG}.$$



Σχήμα 9

Έτσι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ερώτημα μέσω του τρίτου νόμου του Kepler.

Κατ' αρχάς, ας κάνουμε έναν εισαγωγικό υπολογισμό. Ας υπολογίσουμε την περίοδο T_0 της σημειακής μάζας m αν εκτελούσε ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας L γύρω από τη μάζα M. Προς τούτο θεωρούμε ότι η προηγούμενη βαρυτική έλξη παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης:

$$G\frac{mM}{L^2}=m\frac{4\pi^2}{T_0^2}L,$$

και βρίσκουμε

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{L^3}{GM}}.$$

Η τροχιά, λοιπόν, της σημειακής μάζας μέχρι το επίπεδο μπορεί να θεωρηθεί ως μια πολύ επιμηκυσμένη έλλειψη, με μεγάλο ημιάξονα $a=L/2$ και μικρό $b \ll a$. Μπορούμε να βρούμε την περίοδο κίνησης της μάζας m σ' αυτή την έλλειψη από τον τρίτο νόμο του Kepler (συγκρίνοντας με την περίοδο T_0 της ομαλής κυκλικής κίνησης):

$$T=T_0\left(\frac{L/2}{L}\right)^{3/2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}T_0.$$

Είναι φανερό πως ο ζητούμενος χρόνος ισούται με το μισό της παραπάνω περιόδου περιφοράς:

$$t=\frac{T}{2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}T_0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{L}{Q}\sqrt{\frac{Lm}{k}}.$$

Φ83

Στην αρχική κατάσταση μπορούμε να αμελήσουμε τόσο την πίεση των υδρατμών όσο και τον όγκο της ποσότητας νερού. Επομένως, το χώρο της χύτρας (όγκου V) καταλάμβανε αρχικά αέρας υπό πίεση $P_0=1$ atm και θερμοκρασία $T_0=293$ K. Στην τελική κατάσταση η πίεση $3P_0$ προέρχεται από την πίεση του αέρα και την πίεση των υδρατμών. Αν συμβολίσουμε με ρ, v και M την πυκνότητα, τον αρχικό όγκο και τη μοριακή μάζα του νερού, αντίστοιχα ($\rho=10^3$ kg/m^3, $M=18$ g/mole), τότε οι πιέσεις του αέρα (P_a) και των υδρατμών (P_v) στην τελική κατάσταση θα δίνονται από τις σχέσεις

$$P_a=\frac{P_0T}{T_0}\quad\text{και}\quad P_v=\frac{\rho vRT}{MV}.$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση,

$$P_a+P_v=3P_0.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\frac{v}{V}=\frac{P_0M(3-T/T_0)}{\rho RT}\cong 10^{-3}.$$

Φ84

Θερμότητα εκπέμπεται και από τις δύο όψεις της μεταλλικής πλάκας. Η συνολικά ακτινοβολούμενη ισχύς είναι

$$P=a(T_1-T_0)+a(T_2-T_0),$$

όπου a μια σταθερά αναλογίας. Ίση ισχύ προσλαμβάνει η πλάκα από τον Ήλιο.

Αν το πάχος της πλάκας ήταν διπλάσιο, θα ίσχυε

$$P'=a(T_3-T_0)+a(T_4-T_0).$$

Σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας η θερμότητα διαδίδεται από τη φωτιζόμενη προς τη μη φωτιζόμενη όψη κατά τρόπο ώστε η θερμική ροή να είναι ίδια σε κάθε διατομή της πλάκας, και μάλιστα ίση με την ισχύ που μεταφέρεται στον αέρα από τη μη φωτιζόμενη όψη· δηλαδή

$$a(T_2-T_0)=k\frac{T_1-T_2}{d},$$

όπου k μια σταθερά αναλογίας και d το πάχος της πλάκας. Για τη διπλάσιου πάχους πλάκα θα ίσχυε

$$a(T_4-T_0)=k\frac{T_3-T_4}{2d}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι

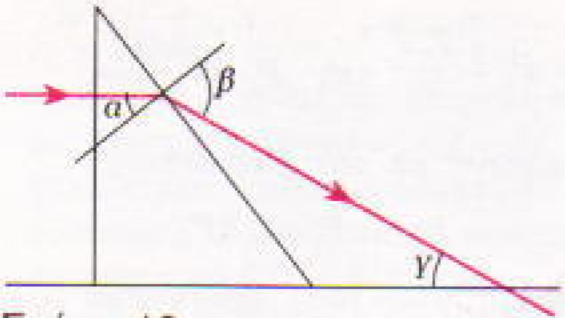
$$T_3=T_0+\frac{(T_1+T_2-2T_0)(2T_1-T_2-T_0)}{2(T_1-T_0)}$$

και

$$T_4=T_0+\frac{(T_2-T_0)(T_1+T_2-2T_0)}{2(T_1-T_0)}.$$

Φ85

Ας σημειώσουμε τη διαδρομή των ακτίνων (Σχήμα 10). Από το νόμο της διάθλασης μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία διάθλασης β:



Σχήμα 10

$$\frac{\eta\mu a}{\eta\mu \beta} = \frac{1}{n},$$

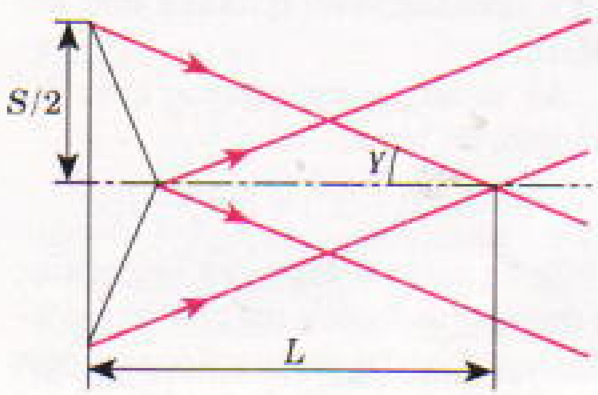
ή $\eta\mu\beta = n\eta\mu a$.

Επειδή οι γωνίες είναι πολύ μικρές, μπορούμε να γράψουμε

$$\beta \cong na.$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει

$$\gamma = \beta - a \cong (n-1)a.$$



Σχήμα 11

Μπορούμε να παρατηρούμε κροσσούς συμβολής μέσα στην περιοχή που ορίζεται από τις αλληλεπικαλυπτόμενες δέσμες (Σχήμα 11). Η ζητούμενη απόσταση L θα είναι

$$L = \frac{S/2}{\varepsilon\varphi\gamma} \cong \frac{S}{2\gamma} \cong \frac{S}{2(n-1)a} \cong 50 \text{ m}.$$

Σπαζοκεφαλιές

Σ81

Δείτε το Σχήμα 12.

Σ82

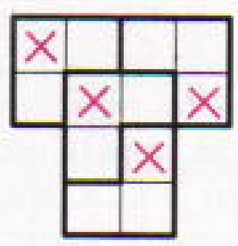
Είναι δυνατόν. Για παράδειγμα, θεωρήστε τα 18 ζεύγη βαρών που «ισαπέχουν από τα άκρα»: 1 + 101, 2 + 100, ..., 18 + 84· και τα 32 παρόμοια ζεύγη που σχηματίζονται από τα υπόλοιπα 64 βάρη: 20 + 83, 21 + 82, 22 + 81, ..., 51 + 52. Αν πάρουμε οποιαδήποτε εννέα ζεύγη από το πρώτο σύνολο και δεκαέξι ζεύγη από το δεύτερο, προκύπτει ο ζητούμενος διαχωρισμός.

Σ83

Όταν πέφτετε στην άμμο, χρειάζεται μεγαλύτερος χρόνος για να μηδενιστεί η ταχύτητά σας· επομένως, η δύναμη που δέχεστε είναι μικρότερη.

Σ84

Δείτε το Σχήμα 13 .



Σχήμα 13

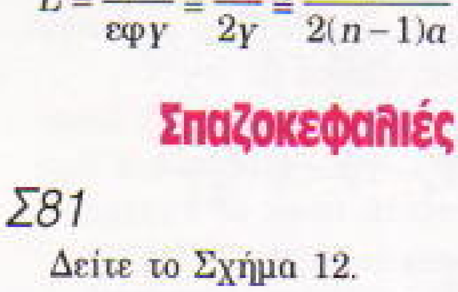
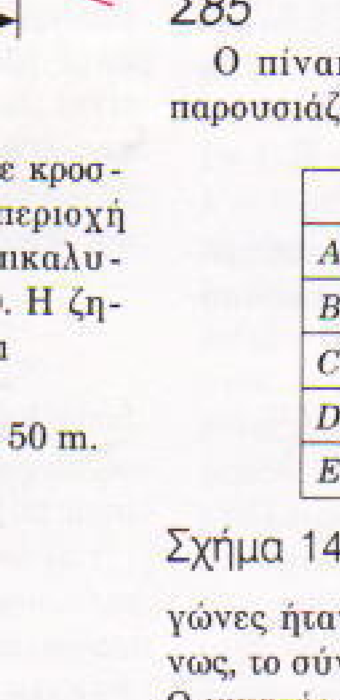
Σ85

Ο πίνακας των αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στο Σχήμα 14. Οι α-

	A	B	C	D	E
A		0	1	1	1
B	1		1/2	1/2	1/2
C	0	1/2		1	1/2
D	0	1/2	0		1
E	0	1/2	1/2	0	

Σχήμα 14

γώνες ήταν προφανώς δέκα· επομένως, το σύνολο των βαθμών είναι 10. Ο νικητής, ο παίκτης A, έχασε τουλάχιστον έναν αγώνα, οπότε έχει το πολύ 3 βαθμούς. Δεν είναι όμως δυνατόν να έχει λιγότερους από 3, διότι τότε το άθροισμα των βαθμών όλων των παικτών θα ήταν το πολύ 2,5 + 2 + 1,5 + 1 + 0,5 = 7,5 < 10. Άρα, ο A έχασε έναν αγώνα και κέρδισε τους υπόλοιπους. Αφού ο B δεν ηττήθηκε, ο A έχασε στον αγώνα με τον B και κέρδισε τους άλλους παίκτες. Παρατηρήστε ότι 3 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1 = 10. Έπεται ότι οι βαθμολογίες των B, C, D και E ήταν 2,5, 2, 1,5 και 1, αντίστοιχα. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν ο B είχε, εκτός από τη νίκη, τρεις ισοπαλίες —με όλους τους παίκτες εκτός του A. Αν αφαιρέσουμε από τα αποτελέσματα των C, D και E τις ισοπαλίες με τον B, βρίσκουμε ότι η βαθμολογία που συγκέντρωσαν στους μεταξύ τους αγώνες ήταν 1,5, 1 και 0,5, αντίστοιχα. Είναι φανερό πως αυτό συμβαίνει μόνο με τα αποτελέσματα του πίνακα.

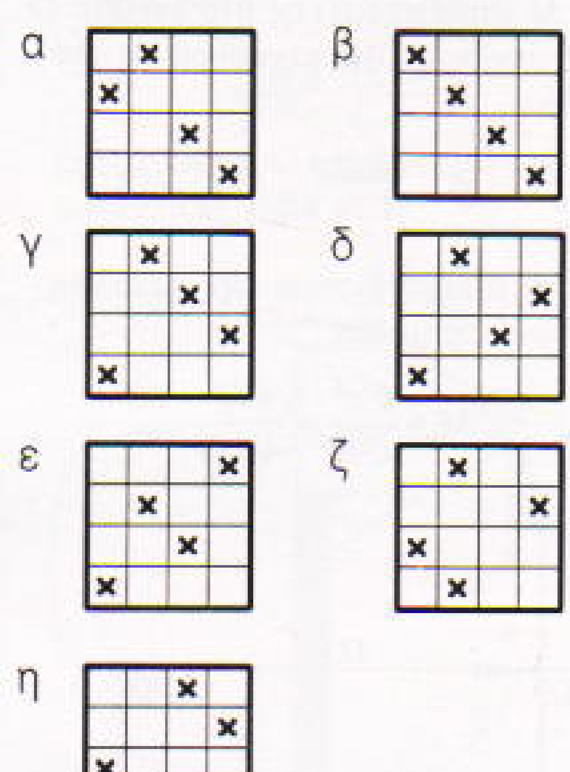



Σχήμα 12

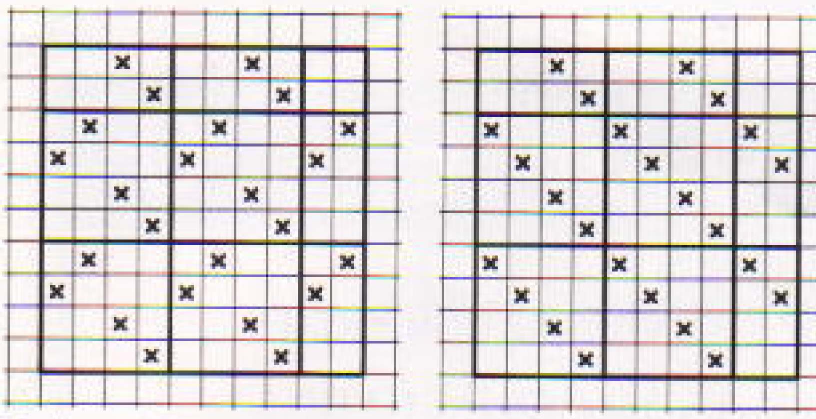
Παιχνιδότοπος

1.(α) Στα Σχήματα 15α-15η παρουσιάζονται οι επτά δυνατές στρατηγικές. (β) Αν μετατοπίσουμε τα διαστάσεων 4 × 4 τετράγωνα των επτά στρατηγικών του μέρους (α) προς τα πάνω και δεξιά κατά τέσσερα τετράγωνα, καταλήγουμε σ' ένα πλήθος στρατηγικών για το 10 × 10 πλέγμα. Ωστόσο, δύο μόνο από αυτές (χωρίς να περιλαμβάνουμε τους κατοπτρισμούς και τις περιστροφές) είναι βέλτιστες. Αποτελούνται από 24 βολές (Σχήμα 16 —συγκρίνετέ το με τα Σχήματα 15α και 15β). Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν να αποδείξουν ότι όλες οι βέλτιστες στρατηγικές για ένα τυχαίο $n \times n$ πλέγμα προκύπτουν από τη μετατόπιση κάποιας βέλτιστης στρατηγικής 4 × 4.

2. Λόγω των κανόνων του παιχνιδιού, δύο πλοία πρέπει να απέχουν

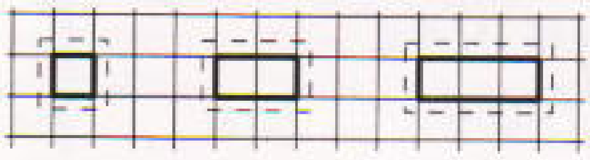


Σχήμα 15



Σχήμα 16

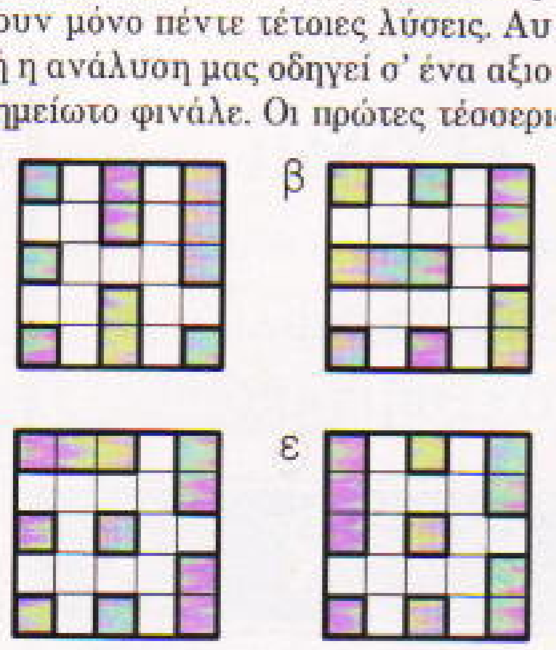
τουλάχιστον ένα τετράγωνο. Περιβάλλουμε κάθε πλοίο με ένα πλαίσιο πλάτους μισού τετραγώνου (Σχήμα 17). Θα ονομάσουμε το ορθογώνιο που προκύπτει *διογκωμένο πλοίο*. Ο υπολογισμός του συνολικού εμβαδού των επτά διογκωμένων πλοίων που

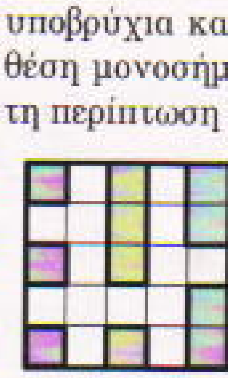


Σχήμα 17

πρόκειται να βυθίσουμε είναι εύκολος —είναι 36 μοναδιαία τετράγωνα. Από την άλλη πλευρά, το εμβαδόν του διογκωμένου πλέγματος είναι επίσης 36 τετράγωνα. Επομένως, τα διογκωμένα πλοία καλύπτουν το διογκωμένο πλέγμα χωρίς κενά και επικαλύψεις. Ειδικότερα, έπεται ότι και τα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα καταλαμβάνονται από πλοία (διαφορετικά, το ένα τέταρτο του τετραγώνου σε κάποια από τις γωνίες του πλέγματος θα παρέμενε ακάλυπτο). Είναι εύκολο τώρα να παραθέσουμε όλες τις ουσιαστικά διαφορετικές (ως προς στροφές και κατοπτρισμούς) δυνατές διευθετήσεις των πλοίων. Όπως βλέπετε στο Σχήμα 18 υπάρχουν μόνο πέντε τέτοιες λύσεις. Αυτή η ανάλυση μας οδηγεί σ' ένα αξιοσημείωτο φινάλε. Οι πρώτες τέσσερις

α β γ





δ ε

Σχήμα 18

βολές γίνονται στις γωνίες του διαστάσεων 5 × 5 τμήματος του πλέγματος που εξακολουθεί να μας ενδιαφέρει. Όπως γνωρίζουμε, και οι τέσσερις βολές θα βρουν το στόχο τους. Αν κάποια από τις βολές πετύχει υποβρύχιο, θα το καταστρέψει ολοκληρωτικά, και ο αντίπαλος θα πρέπει να μας ενημερώσει για το γεγονός. Ανάλογα με το πλήθος αυτών των βολών, θα καταλήξουμε είτε στη θέση του Σχήματος 18α (τρία βυθισμένα πλοία), είτε στις 18β ή 18γ (δύο πλοία), είτε στις 18δ ή 18ε (ένα πλοίο). Στην πραγματικότητα, η πρώτη περίπτωση —μετά τη διαγραφή των βυθισμένων υποβρυχίων— θα περιλαμβάνει δύο θέσεις: αυτή του σχήματος και τη συμμετρική της ως προς την κύρια διαγώνιο. Για να τις ξεχωρίσουμε, χτυπάμε στα τετράγωνα a3 και c1 και βρίσκουμε ποιο από αυτά τα δύο τετράγωνα περιέχει το υποβρύχιο. Έτσι προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη θέση, και μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη «μάχη» χωρίς σφάλμα. Στη δεύτερη περίπτωση, αφού τοποθετήσουμε το πλέγμα έτσι ώστε τα δύο κατεστραμμένα υποβρύχια να βρίσκονται στην αριστερή του πλευρά, πρέπει να διαλέξουμε μεταξύ του Σχήματος 18β, του κατοπτρικού του ως προς την οριζόντια διάμεσο του πλέγματος, και του Σχήματος 18γ. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε ρίχνοντας βολές στα τετράγωνα a3, c1, και c5. Με αυτό τον τρόπο θα μάθουμε ποια είναι τα δύο που περιέχουν υποβρύχια και θα προσδιορίσουμε τη θέση μονοσήμαντα. Τέλος, στην τρίτη περίπτωση έχουμε τέσσερις δυνατές θέσεις (υποθέτωντας ότι το μοναδικό γωνιακό υποβρύχιο βρίσκεται στην κάτω αριστερή γωνία): αυτές των Σχημάτων 18δ και 18ε και των κατοπτρικών τους ως προς την κύρια διαγώνιο. Χτυπάμε στα a3 και c1. Αν καταστρέψουμε ένα μόνο υποβρύχιο, προσδιορίζουμε τη θέση μονοσήμαντα ως αυτή του Σχήματος 18ε ή την κατοπτρική της, ανάλογα με τη θέση του υποβρυχίου. Αν και τα δύο τετράγωνα είναι υποβρύχια (Σχήμα 18δ), συνεχίζουμε με διερευνητικές βολές στα τετράγωνα b5 και e2, για να καθορίσουμε ποιο από τα δύο πλοία —της πάνω αριστερά και της κάτω δεξιά γωνίας— είναι το καταδρομικό. Τώρα πλέον —δηλαδή, έπειτα από οκτώ το πολύ βολές— έχουμε όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε. Αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι μερικές θέσεις στο παιχνίδι της ναυμαχίας απαιτούν υψηλό βαθμό επιδεξιότητας και αυτοσυγκράτησης. ◙

Αίσιον τέλος

Όλοι ανησυχήσαμε από την ανεξήγητη καθυστέρηση της επίδοσης του προηγούμενου τεύχους του *Quantum* στους συνδρομητές του, δεδομένου ότι είχε ταχυδρομηθεί μία ημέρα πριν από την ημερομηνία κυκλοφορίας του για να φτάσει έγκαιρα στους παραλήπτες του. Είκοσι μέρες αργότερα, και έπειτα από τις έντονες διαμαρτυρίες μας, λάβαμε την παρακάτω επιστολή από την Περιφερειακή Διεύθυνση των Ελληνικών Ταχυδρομείων:

«Σε απάντηση της από 18-11-96 επιστολής παραπόνων σας, σχετικά με την τύχη των τευχών του περιοδικού Quantum, *που κατατέθηκαν στο Ταχυδρομικό Γραφείο Αθήνας 14 στις 31-10-96 από την εταιρεία σας, σας γνωρίζουμε ότι, ύστερα από έρευνα που διενεργήθηκε από στέλεχος της Διευθυνσής μας διαπιστώθηκε ότι τα εν λόγω αντικείμενα αντί να προωθηθούν στο Τμήμα Ταξινόμησης Εντύπων του Κέντρου Διαλογής Αθηνών, προωθήθηκαν εκ παραδρομής στον Τομέα Αποθηκών της Υπηρεσίας μας.*

Στη συνέχεια, στις 21-11-96, διαβιβάστηκαν στο Κέντρο Διαλογής Αθηνών και προωθήθηκαν στον προορισμό τους με την αλληλογραφία Α' προτεραιότητας και με ιδιαίτερη σημείωση για την άμεση επίδοσή τους στους παραλήπτες τους. Επίσης σας γνωρίζουμε ότι έγιναν οι δέουσες συστάσεις προς όλους τους εμπλεκόμενους στην ανωτέρω ανωμαλία για περισσότερη προσοχή κατά την εκτέλεση των καθηκόντων τους.

Τέλος σας εκφράζουμε τη λύπη της Υπηρεσίας μας για το ατυχές αυτό συμβάν διαβεβαιώνοντάς σας, παράλληλα, ότι καταβάλλεται κάθε δυνατή προσπάθεια για την καλύτερη εξυπηρέτηση των πελατών του Οργανισμού μας.

—Ο Διευθυντής».

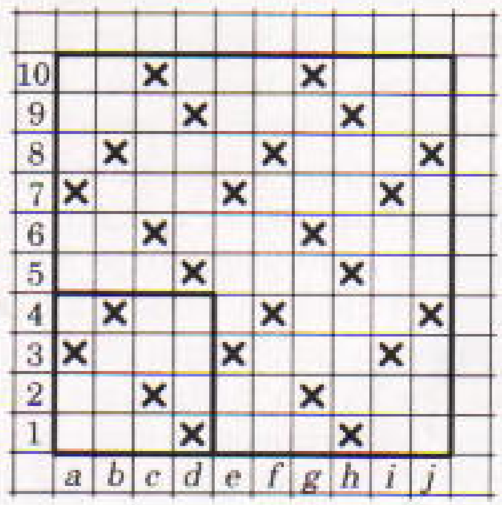
Το παιχνίδι της ναυμαχίας

Κατακτήστε τη ναυτική υπεροχή σε μια χάρτινη θάλασσα

Yevgeny Gik

ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΟ ΝΑ ΦΑΝΤΑΣΤΟΥΜΕ ότι υπάρχει άνθρωπος που δεν έχει παίξει το πασίγνωστο παιχνίδι της ναυμαχίας. Σε μια από τις παραλλαγές του, κάθε παίκτης σχεδιάζει σε τετραγωνισμένο χαρτί δύο πλέγματα διαστάσεων 10 × 10. Το ένα απεικονίζει το «χάρτη» της περιοχής του ωκεανού όπου είναι ανεπτυγμένος ο «στόλος» σας, ενώ το δεύτερο σας βοηθά να ανακαλύψετε τις θέσεις του αντιπάλου σας. Ο κάθε στόλος αποτελείται από 10 πλοία: ένα θωρηκτό μεγέθους 4 × 1, δύο καταδρομικά 3 × 1, τρία αντιτορπιλικά 2 × 1 και τέσσερα υποβρύχια 1 × 1. Τα πλοία είναι δυνατόν να καταλαμβάνουν οποιοδήποτε τετράγωνο του πλέγματος, απαγορεύεται όμως να εφάπτονται μεταξύ τους —ούτε καν στις γωνίες τους.

Μόλις καταλάβουν οι στόλοι τις αρχικές τους θέσεις, αρχίζει η μάχη. Εναλλάξ, οι αντίπαλοι «πυροβολούν» τα σκάφη του αντιπάλου —δηλαδή, ανακοινώνουν κάποιο από τα τετράγωνα του πλέγματος: a3, b7, j9, και ούτω καθεξής (οι γραμμές συμβολίζονται με τους αριθμούς από το 1 εως το 10 και οι στήλες με τα γράμματα από το a έως το j, παρόμοια με το σκάκι —δείτε το Σχήμα 1). Ο αντίπαλος έπειτα από κάθε βολή σας σας ενημερώνει αν χτυπήσατε κάποιο πλοίο του (αν υπήρχε πλοίο στο τετράγωνο που ονομάσατε), αν το βυθίσατε (αν ήταν το τελευταίο ανέπαφο τετράγωνο ενός πλοίου, τα υπόλοιπα τετράγωνα του οποίου είχατε χτυπήσει προηγουμένως) ή αν αστοχήσατε (αν το τετράγωνο ήταν κενό). Στις δύο πρώτες περιπτώσεις μπορείτε να ρίξετε μία ακόμη βολή, και ούτω καθεξής, μέχρι να αστοχήσετε. Μετά είναι σειρά του αντιπάλου σας. Νικητής είναι ο παίκτης που βυθίζει πρώτος και τα δέκα εχθρικά σκάφη.



Σχήμα 1

Μια βολή συμβολίζεται συνήθως με τελεία. Όταν η βολή χτυπά πλοίο η τελεία μετατρέπεται σε Χ (ενώ σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο γύρω από ένα βυθισμένο σκάφος). Όπως είναι φυσικό, οι παίκτες βάζουν αυτόματα τελείες στα τετράγωνα που, σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού, είναι κενά —δηλαδή στα τετράγωνα που βρίσκονται διαγώνια στο τετράγωνο μιας επιτυχημένης βολής, ή στα γειτονικά τετράγωνα ενός βυθισμένου πλοίου. Δεν χρειάζεται να εξηγήσουμε ότι οι παίκτες μπορούν να τροποποιήσουν την παραδοσιακή μορφή και το μέγεθος του πλέγματος όπως και το σχήμα ή το πλήθος των πλοίων —για παράδειγμα, οι σκακιστές μπορεί να προτιμήσουν ένα 8 × 8 πλέγμα.

Είναι σίγουρο ότι, ώς ένα βαθμό, η επιτυχία στη ναυμαχία στηρίζεται καθαρά στην τύχη. Μπορείτε να ρίχνετε τυχαία βολές στον «ωκεανό» και να καταστρέψετε το στόλο του αντιπάλου σας χωρίς να αστοχήσετε ούτε μία φορά. Δεν είναι όμως πολύ λογικό να βασιστούμε μόνο στην τύχη. Από την άλλη πλευρά, αν γνωρίζετε ότι ο αντίπαλός σας συνηθίζει να τοποθετεί το στόλο του στο κέντρο του πλέγματος (ή στις άκρες), οι πιθανότητες να νικήσετε αυξάνονται.

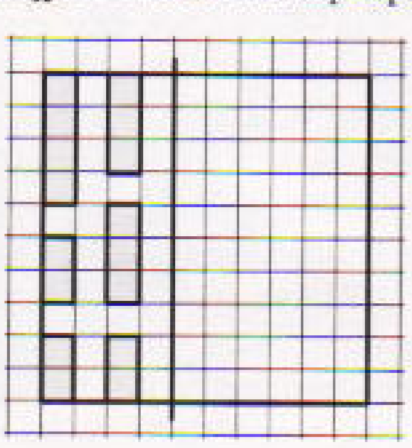
Όταν μιλάμε για «επιδεξιότητα» στο παιχνίδι της ναυμαχίας, ανακύπτουν δύο προβλήματα: (1) Πώς πρέπει να πυροβολούμε ώστε να αυξάνεται η πιθανότητα να πετύχουμε ένα εχθρικό πλοίο; (2) Πώς πρέπει να τοποθετήσουμε τα πλοία μας ώστε να είναι δυσκολότερο να βυθιστούν από τον αντίπαλό μας;

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να χτυπήσουμε το εχθρικό θωρηκτό. Αν στοχεύσουμε διαδοχικά τα τετράγωνα της πρώτης σειράς (από τα αριστερά προς τα δεξιά), μετά της δεύτερης, και ούτω καθεξής, υπάρχει το ενδεχόμενο να χτυπήσουμε το θωρηκτό μόνο με την 97η βολή (αν το σκάφος καταλαμβάνει τα τετράγωνα από το g10 έως το j10). Αν όμως χτυπήσουμε μόνο τα τετράγωνα που σημειώνονται στο Σχήμα 1, θα πετύχουμε σίγουρα το θωρηκτό σε 24 το πολύ προσπάθειες.

Έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε μια γενικότερη περίπτωση. Ας υποθέσουμε ότι ένα πλοίο μεγέθους k × 1 κρύβεται σ' ένα $n \times n$ πλέγμα. Ονομάζουμε *στρατηγική* μια ακολουθία βολών που εξασφαλίζει ότι θα πετύχουμε αυτό το πλοίο. Η στρατηγική με το ελάχιστο δυνατό πλήθος βολών ονομάζεται *βέλτιστη*. Μια από τις βέλτιστες στρατηγικές για τον εντοπισμό ενός θωρηκτού 4 × 1 σ' ένα 4 × 4 πλέγμα παρουσιάζεται στην κάτω αριστερή γωνία του Σχήματος 1 (α-αποτελείται από τέσσερις βολές). Οι βέλτιστες στρατηγικές για το πλέγμα $n \times n$ προκύπτουν με τη μετατόπιση αυτής της στρατηγικής τέσσερα τετράγωνα προς τα πάνω και προς τα δεξιά. Συγκεκριμένα, η στρατηγική του σχήματος είναι η βέλτιστη για το 10×10 πλέγμα. Είναι φανερό ότι, για να χτυπήσουμε ένα σκάφος $k \times 1$ σ' ένα $n \times n$ πλέγμα, οι βολές μας πρέπει να απέχουν k τετράγωνα και προς τις δύο διευθύνσεις. Αυτό σημαίνει ότι κάθε γραμμή (και κάθε στήλη) πρέπει να περιέχει περίπου n/k βολές της βέλτιστης στατηγικής. Επομένως, το συνολικό πλήθος των βολών είναι κατά προσέγγιση n^2/k —για το θωρηκτό, το πλήθος αυτό είναι $n^2/4$.

Πρόβλημα 1. (α) Ποιο είναι το πλήθος των βέλτιστων στρατηγικών για να χτυπήσουμε ένα θωρηκτό 4×1 σ' ένα 4×4 πλέγμα; (β) Σ' ένα 10×10 πλέγμα; (Οι στρατηγικές που είναι κατοπτρικές ή προκύπτουν η μια από την άλλη με στροφή του πλέγματος θεωρούνται ίδιες.)[1]

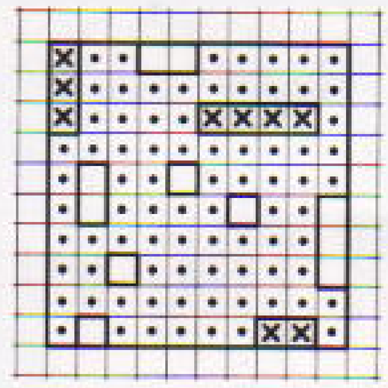
Νά πώς ενεργούν οι πεπειραμένοι παίκτες. Πρώτα, χρησιμοποιώντας κάποια στρατηγική όμοια με αυτήν του Σχήματος 1, εντοπίζουν το εχθρικό θωρηκτό. Όταν το καταστρέψουν, αρχίζουν να αναζητούν τα καταδρομικά. Τώρα, εκτελούν τις βολές αφήνοντας τρία τετράγωνα αντί για τέσσερα. Μετά τη βύθιση των καταδρομικών, ασχολούνται με τα αντιτορπιλικά. Όταν μείνουν μόνο τα υποβρύχια, ελέγχουν τα ανεξερεύνητα τετράγωνα πυροβολώντας στην τύχη. Βέβαια, τα μικρότερα σκάφη μπορεί να έχουν εντοπιστεί νωρίτερα, κατά



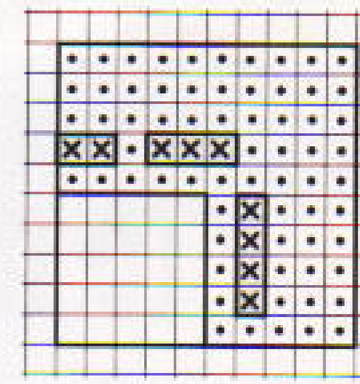
Σχήμα 2

1. Τα προβλήματα 1 και 2 τα επινόησε ο V. Chvanov. Δείτε επίσης το πρόβλημα *M83* του παρόντος τεύχους, όπου θα βρείτε μία ακόμη ερώτηση σχετικά με τις βέλτιστες στρατηγικές στη ναυμαχία, και το *M64* στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1996.

α



β



Σχήμα 3

την καταδίωξη των μεγαλύτερων.

Επομένως, ο δυσκολότερος στόχος είναι η βύθιση των υποβρυχίων. Ουσιαστικά δεν υπάρχει στρατηγική για τον εντοπισμό τους. Επομένως, όταν αναπτύσσουν το στόλο τους οι παίκτες, πρέπει να τοποθετούν όσο το δυνατόν πυκνότερα τα μεγαλύτερα πλοία τους, ώστε ο αντίπαλος να είναι υποχρεωμένος να αναζητήσει τα υποβρύχια στον μεγαλύτερο δυνατό χώρο. Από αυτή την άποψη, η πλεονεκτικότερη τοποθέτηση παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Ακόμη κι αν ο αντίπαλος καταστρέψει και τα έξι μεγάλα πλοία (στα αριστερά της κατακόρυφης διαχωριστικής γραμμής), πρέπει να αναζητήσει τα υποβρύχια στη μέγιστη δυνατή περιοχή (τα 60 τετράγωνα δεξιά από τη διαχωριστική γραμμή).

Φυσικά, η τύχη παίζει ουσιαστικό ρόλο στο παιχνίδι της ναυμαχίας, και είναι δύσκολο να αποφύγουμε τις ατυχίες. Οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις είναι εκείνες όπου μία και μοναδική αποτυχία είναι μοιραία για ολόκληρο το παιχνίδι. Ας δούμε ένα φινάλε αυτού του είδους.

Παρουσιάζεται στο Σχήμα 3. Σ' αυτό το σημείο του παιχνιδιού και οι δύο στόλοι —ο δικός μας (Σχήμα 3α) και του αντιπάλου (Σχήμα 3β) —έχουν υποστεί τις ίδιες απώλειες. Η παράταξή μας είναι ήδη γνωστή στον εχθρό, και ο στόλος μας αντιμετωπίζει τον κίνδυνο μιας συνεχόμενης ακολουθίας χτυπημάτων που θα τον καταστρέψουν ολοσχερώς μόλις έρθει η σειρά του αντιπάλου. Ευτυχώς, είναι η σειρά μας, και η έκβαση του παιχνιδιού βρίσκεται στα χέρια μας. Σ' αυτό τον «υπέρ πάντων αγώνα» πρέπει να καταστρέψουμε, το ένα μετά το άλλο, και τα επτά εχθρικά πλοία που βρίσκονται συγκεντρωμένα στο τετράγωνο a1-e1-e5-a5. Ο συνδυασμός που προσφέρει τη νίκη σ' αυτή την αδυσώπητη μάχη προκύπτει από το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι ένα καταδρομικό, δύο αντιτορπιλικά και τέσσερα υποβρύχια σ' ένα 5×5 πλέγμα είναι δυνατόν να βυθιστούν χωρίς καμία άστοχη βολή, με όποιο τρόπο κι αν έχουν παραταχθεί.

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της ναυμαχίας.[2] Για παράδειγμα, η κίνηση μπορεί να μην αποτελείται από μία μόνο βολή αλλά από ένα πλήθος βολών —οι αντίπαλες πλευρές ανταλλάσσουν ομοβροντίες. Σ' αυτή την παραλλαγή του παιχνιδιού οι παίκτες ενημερώνουν τον αντίπαλό τους για το γενικό αποτέλεσμα της κίνησής του χωρίς να προσδιορίζουν ποιο πλοίο χτυπήθηκε και σε ποιο τετράγωνο. Οι υπόλοιποι κανόνες είναι ίδιοι. Κάθε κίνηση δίνει στους παίκτες κάποιες πληροφορίες για την παράταξη του αντίπαλου στόλου, τις οποίες πρέπει να χρησιμοποιήσουν ώστε να καταλήξουν στο βέλτιστο επόμενο βήμα. Σε μια άλλη παραλλαγή του παιχνιδιού, ο παίκτης έχει τη δυνατότητα να πυροβολήσει ταυτόχρονα τόσες φορές όσα είναι και τα αβύθιστα πλοία του (η πρώτη κίνηση αποτελείται από 10 ταυτόχρονες βολές). Και εδώ, οι παίκτες δίνουν γενικές μόνο πληροφορίες για τις απώλειές τους: το πλήθος των πετυχημένων βολών, των άστοχων, και των βυθισμένων πλοίων. Όταν όλα τα πλοία ενός παίκτη καταλήξουν στον σκοτεινό βυθό, χάνει το δικαίωμα να πυροβολεί (έχει μηδενικές βολές) και συνεπώς χάνει και το παιχνίδι. ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

2. Σε μια από αυτές το παιχνίδι αντιμετωπίζεται σαν σπαζοκεφαλιά (ένα «παιχνίδι του ενός παίκτη»). Παράδειγμα τέτοιας σπαζοκεφαλιάς μπορείτε να βρείτε στο άρθρο «Το παγκόσμιο πρωτάθλημα σπαζοκεφαλιών» στο τεύχος Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1996 του *Quantum*.