QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1996
ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 6
1.500 ΔΡΧ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

ΠΙΝΑΚΟΘΗΚΗ Ω

Δεξιά και αριστερά (1909) του Winslow Homer

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΠΡΑΓΜΑ ΠΟΥ ΠΡΟΣΕΧΕΙ ΚΑΝΕΙΣ ΒΛΕΠΟΝΤΑΣ αυτό τον πίνακα είναι οι δύο πάπιες και η παράξενη στάση τους. Μόνο έπειτα από μια δεύτερη, προσεκτικότερη ματιά παρατηρεί στο φόντο την κόκκινη λάμψη, τη βάρκα, τον κυνηγό. Τότε γίνεται αντιληπτό το δράμα που εκτυλίσσεται, και η σκηνή γίνεται ανατριχιαστικά οδυνηρή.

Γιατί, όμως, «Δεξιά και αριστερά»; Το συνηθέστερο είναι να αναφέρουμε τις κατευθύνσεις με την αντίθετη σειρά (ίσως επειδή αυτή είναι και η κατεύθυνση προς την οποία γράφουμε: από τα αριστερά προς τα δεξιά). Ο Winslow Homer φαίνεται πως δίνει έμφαση στο γεγονός ότι παρατηρούμε τη σκηνή από την «άλλη» κατεύθυνση. Όπως πολύ συχνά χρειάζεται να πούμε «ο κύριος αριστερά από μένα» ή «η καρέκλα στα δεξιά σου», έτσι και ο Homer λέει: «Νά πώς φαίνεται από τη *δική τους* οπτική γωνία».

Οι φυσικοί πολύ συχνά μεταπηδούν μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναφοράς. Στο παρόν τεύχος, θα βρείτε πολλά άρθρα για να δοκιμάσετε την ικανότητά σας να μην τα χάνετε ζώντας σ' έναν κόσμο όπου «τα πάντα είναι σχετικά». Μπορείτε μάλιστα να ξεκινήσετε από το «Καλειδοσκόπιο», που είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένο στο θέμα της σχετικότητας.

QUANTUM

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 6

Εικονογράφηση: *Sergey Ivanov*

Σαν να μην έφτανε το ένα παράδοξο —ότι η καλύβα στηρίζεται στα πόδια μιας κότας—, συνέβη κι άλλο ένα. Αρχικά, η καλύβα που βλέπετε στο εξώφυλλο είχε τη συνηθισμένη κυβική δομή. Κατόπιν οι τοίχοι ζωντάνεψαν, και αποφάσισαν να μετατρέψουν την τρισδιάστατη καλύβα σε πολυδιάστατη.

Αρκετά άρθρα του παρόντος τεύχους είναι αφιερωμένα στον πολυδιάστατο κύβο και τις εφαρμογές του. Αρχίστε την περιήγησή σας από τη σελίδα 5, όπου θα πάρετε μια ιδέα για το τι ήταν αυτό που ενέπνευσε τον ευφάνταστο δημιουργό του εξωφύλλου μας.

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Ο ΚΟΣΜΟΣ
ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

Γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ κλασικής και κβαντικής μηχανικής

Ή μεταξύ του να διδάσκεις και να διδάσκεσαι

ΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΧΡΟΝΙΑ ΠΟΥ ΔΙΔΑΞΑ σε γυμνάσιο, το 1957, είχα έναν δεκατετράχρονο μαθητή με εξαιρετικές ικανότητες και επιδόσεις στα μαθήματα. Ένα από τα χόμπυ του, μάλιστα, ήταν να ασχολείται με ηλεκτρονικές κατασκευές. Κάποτε ήρθε προβληματισμένος, επειδή αδυνατούσε να κατανοήσει κάποια από τα μαθηματικά της ηλεκτρονικής. Δέχτηκα να τον βοηθήσω. Του έδωσα ένα καλό κολεγιακό εγχειρίδιο άλγεβρας και του ζήτησα να μελετήσει τα περισσότερα προβλήματα του βιβλίου. Το έκανε, και συχνά ερχόταν για να συζητήσουμε γι' αυτά. Κατόπιν του έδωσα ένα βιβλίο απειροστικού λογισμού και αναλυτικής γεωμετρίας, λέγοντάς του να κάνει το ίδιο. Και πάλι ακολούθησε την υπόδειξή μου! Μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα, είχε ετοιμάσει την πρώτη του εργασία προς δημοσίευση στα μαθηματικά (ένα γενικό θεώρημα για τα τριώνυμα), και στα δεκαπέντε του χρόνια εργαζόταν ήδη στο Midwest Research Institute ασχολούμενος με την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων της θωρακικής κοιλότητας —απώτερος σκοπός ήταν η βελτίωση της μεθόδου ερμηνείας των ηλεκτροκαρδιογραφημάτων.

Ο μαθητής μου ονομαζόταν Michael C. Mackey. Δεν άργησα να αντιληφθώ ότι το επίπεδό του ξεπερνούσε κατά πολύ αυτό του γυμνασίου· μιλήσαμε λοιπόν στους γονείς του, για να του επιτρέψουν να εγκαταλείψει το γυμνάσιο πριν από τον κανονικό χρόνο αποφοίτησης. Έτσι και έγινε· ο Mike σπούδασε ως προπτυχιακός φοιτητής στο Πανεπιστήμιο του Κάνσας και ολοκλήρωσε το διδακτορικό του με θέμα τη βιοφυσική στο Πανεπιστήμιο της Ουάσινγκτον στο Σηάττλ. Τώρα είναι καθηγητής βιοφυσικής στο Πανεπιστήμιο McGill και έχει πλούσιο συγγραφικό έργο. (Στη βιβλιοθήκη μου έχω δύο βιβλία του, το *Ion Transport through Biological Membranes* και το *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life* —μαζί με τον Leon Glass.) Ένα πολύ σημαντικό άρθρο του δημοσιεύτηκε τον Οκτώβριο του 1989 στο *Reviews of Modern Physics* και είχε τίτλο «Η δυναμική προέλευση της αυξανόμενης εντροπίας».

Θα προσπαθήσω να σας εξηγήσω γιατί μνημονεύω εδώ αυτό το άρθρο.

Αναζητώντας σχέσεις

Όταν άρχισα να σπουδάζω την κβαντική μηχανική, μου δημιουργούνταν συνεχώς απορίες τις οποίες ήταν μάλλον απίθανο να μου λύσουν οι καθηγητές μου. Ήθελα να *κατανοήσω* την κβαντική μηχανική, και είχα ήδη αποκτήσει κάποια στιβαρή κατάρτιση στη βασική φυσική μελετώντας τα κλασικά έργα για τη μηχανική (του Goldstein), την ηλεκτροδυναμική (του Jackson), τη θερμοδυναμική (του Callen) και τη στατιστική μηχανική (του Huang). Με προβλημάτιζε ιδιαίτερα ο εξής ισχυρισμός: «Είναι αρκετά σαφές ότι δεν υπάρχει κάποιος παραγωγικός συλλογισμός που να μας οδηγεί στην κυματική εξίσωση του Schrödinger. Όπως όλες οι εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής, έτσι και αυτή πρέπει να τεθεί ως αίτημα, και η μοναδική θεμελίωσή της έγκειται στην επιτυχία της σύγκρισης των προβλέψεών της με τα πειραματικά αποτελέσματα» (*Quantum Mechanics*, τόμ. I, Messiah, σελ. 61). Οι καθηγητές μου δυσφορούσαν όταν έθετα ερωτήματα σχετικά με τις θεμελιώδεις, υποκείμενες παραδοχές της κβαντικής μηχανικής. Προπάντων τους ενδιέφεραν οι εφαρμογές της σε μια τεράστια ποικιλία προβλημάτων, όπου αποδεικνυόταν απόλυτα επιτυχής. Όπως και όλοι οι άλλοι φοιτητές, λοιπόν, παρακολούθησα συστηματικά αυτές τις εφαρμογές στη φυσική στερεάς κατάστασης, στην ατομική και την πυρηνική φυσική. Επίσης, διαπίστωσα την τεράστια χρησιμότητα της κβαντικής μηχανικής στην ερμηνεία της χημείας.

Αρκετά χρόνια αργότερα, επανήλθα στη μελέτη των υποκείμενων υποθέσεων της κβαντικής μηχανικής —δεν ήμουν πια φοιτητής, αλλά αυτά τα θεμελιώδη ερωτήματα κέντρισαν και πάλι το ενδιαφέρον μου. Δυστυχώς, η μαθηματική μου γνώση και δεξιότητα δεν βρίσκονταν πλέον στη μεγαλύτερη ακμή τους, και μου ήταν αρκετά δύσκολο να μελετήσω τις λεπτομέρειες των ποικίλων μαθηματικών αποδείξεων. Αρχικά, λοιπόν, ενδιαφέρθηκα για το σχετικά απλό ζήτημα της σταθεράς του Planck. Η κλασική προσέγγιση της ακτινοβολίας του μελανού σώματος οδηγεί σε μια «καταστροφικά» εσφαλμένη κατανομή (πρόκειται για τη λεγόμενη υπεριώδη καταστροφή). Ο Planck κατόρθωσε να συναγάγει τη σωστή κατανομή θέτοντας ως αίτημα ότι η ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στη μάζα και την ακτινοβολία δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί συνεχώς, όπως απαιτεί η κλασική θεωρία, αλλά ασυνεχώς, μέσω κβάντων ενέργειας $h\nu$, όπου h είναι μια εμπειρικά προσδιοριζόμενη σταθερά (σήμερα την ονομάζουμε σταθερά του Planck). Τι ήταν όμως αυτή η σταθερά h, και από πού προερχόταν; Θα μπορούσε άραγε να συναχθεί μέσω άλλων θεωρήσεων; Ή μήπως ήταν κάποιου είδους παγκόσμια σταθερά, όπως η σταθερά G του νόμου της παγκόσμιας έλξης;

Με μεγάλη ικανοποίηση διαπίστωσα ότι ο Shinichiro Tomonaga (ο οποίος το 1965 τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ φυσικής, μαζί με τον Richard Feynman και τον Julian Schwinger, για το έργο τους στην κβαντική ηλεκτροδυναμική) έθετε και απαντούσε στο βιβλίο του για την κβαντική μηχανική κάποια από τα ερωτήματα που με απασχολούσαν. Ιδιαίτερα με γοήτευε το κλασικό φαινόμενο του *αδιαβατικού αναλλοίωτου*· ο Tomonaga, με μια επεξεργασμένη και γενική απόδειξη, τεκμηρίωσε το γεγονός ότι η ενέργεια E είναι ανάλογη της συχνότητας ν, και ότι το πηλίκο E/ν ισούται με την αδιαβατική σταθερά. Ιδού ένα παράδειγμα: αν περάσετε το νήμα ενός απλού εκκρεμούς σε μια τροχαλία και τη στρέψετε πολύ αργά, μειώνοντας το μήκος του αιωρούμενου εκκρεμούς, η συχνότητά του αυξάνεται, καθώς επίσης και το πλάτος ταλάντωσής του, και συνεπώς η ενέργειά του (αφού η ενέργεια είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους ταλάντωσης). Εντούτοις, το πηλίκο της ενέργειας προς τη συχνότητα αυτού του εκκρεμούς παραμένει σταθερό. Η τιμή της σταθεράς δεν προκύπτει από την παραγώγιση, αφού πρόκειται για μια σταθερά ολοκλήρωσης. Αυτό το αδιαβατικό αναλλοίωτο, εφόσον οι μεταβολές συντελούνται απείρως αργά, είναι πάντοτε σωστό (αδιαβατική υπόθεση του Ehrenfest), αλλά, αν η μεταβολή είναι ξαφνική ή πραγματοποιηθεί γρήγορα, παρατηρείται ασυνεχής μετάβαση, και η νέα κατάσταση διαφέρει από την αρχική κατά $h\nu$.

Ο άλλος τομέας, στον οποίο βρήκα μια καλύτερη σύνδεση μεταξύ κβαντικής και κλασικής μηχανικής, ήταν η θεωρία των Hamilton-Jacobi. Αυτή η θεωρία μπορεί να καταστήσει εξαιρετικά ευκολότερη την επίλυση ορισμένων περίπλοκων προβλημάτων της μηχανικής, υπάρχει όμως μια αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο να καθίσταται εύκολη μια λύση και στην πολυπλοκότητα των μαθηματικών που απαιτούνται για να επιτευχθεί αυτή η απλή λύση. Η κεντρική ιδέα της θεωρίας των Hamilton-Jacobi είναι να βρεθεί ένας μετασχηματισμός της θέσης και της ορμής (των έξι συντεταγμένων στο χώρο των φάσεων) από μια χρονική στιγμή t στην αρχική *στιγμή* $t = 0$. Αν εφαρμόσετε αυτή τη θεωρία με έναν συγκεκριμένο τρόπο, θα διαπιστώσετε ότι μπορούν να υπάρχουν μέτωπα κύματος της κύριας συνάρτησης $S(q, P, t)$ που διαδίδονται στο χώρο των φάσεων σχεδόν όπως ένα υδάτινο κύμα κινείται στην επιφάνεια του νερού. Αυτά τα μέτωπα κύματος αποτελούν μαθηματικές περιγραφές του υπό εξέταση μηχανικού σωματιδίου. Μέσω μαθηματικών παραγωγίσεων, χωρίς καμία αναφορά στις αρχές της κβαντικής μηχανικής αυτή η ανάλυση οδηγεί, στην εξίσωση $(\nabla W)^2 = 2m(E - V)$, όπου το W ορίζεται από την $S = W - Et$. Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω εξίσωση στην οπτική, μπορούμε να δείξουμε ότι η ενέργεια E και η συχνότητα ν πρέπει να είναι ανάλογες μεταξύ τους, κάτι που οδηγεί κατευθείαν στην κυματική εξίσωση του Schrödinger, με τη διαφορά ότι η σταθερά h δεν προσδιορίζεται.

Η γεφύρωση αυτού του χάσματος με ικανοποίησε εξαιρετικά, αφού διαπίστωσα ότι υπάρχει ευθεία σύνδεση της κλασικής με την κβαντική φυσική, και η σταθερά h, την οποία ο Planck προσδιόρισε εμπειρικά, έγινε για μένα τόσο εύλογη όσο και η σταθερά G, την οποία ο Cavendish υπολόγισε πειραματικά, παρότι ο Νεύτων δεν την ανέφερε ρητά στη διατύπωση του νόμου της παγκόσμιας έλξης.

Δεν έπαψαν όμως να με απασχολούν η προέλευση της σταθεράς h και τα θεμέλια της κβαντικής συμπεριφοράς. Δεν είναι δυνατόν, άραγε, να οδηγηθούμε στην κβαντική μηχανική μέσω κάποιου είδους λογικής παραγωγής και όχι χρησιμοποιώντας υποθέσεις με έναν αξιωματικό τρόπο;

Γιά να δούμε τι λέει ο πρώην μαθητής μου, ο Mike Mackey.

Ο μαθητής που γίνεται δάσκαλος

Συνάντησα τον Mike πριν από αρκετά χρόνια, και του εξέφρασα την περιέργειά μου όσον αφορά τις υποκείμενες ιδέες της κβαντικής μηχανικής. Συζητήσαμε για τη θεωρία των κρυμμένων μεταβλητών και για την παράξενη σχέση με τη θερμοδυναμική στο αδιαβατικό αναλλοίωτο. Του εξήγησα ότι ανησυχούσα πως οι μαθηματικές μου ικανότητες ήταν ανεπαρκείς και οι γνώσεις μου ξεπερασμένες, για τη μελέτη ενός τέτοιου ζητήματος. Γνωρίζοντας την αξιοθαύμαστη μαθηματική του ικανότητα, τον παρακάλεσα θερμά να εξετάσει εκείνος θεωρητικά ορισμένα από αυτά τα θέματα. Το άρθρο που ανέφερα παραπάνω ήταν ο καρπός των προσπαθειών του.

Στην εργασία του, ο Mike ασχολήθηκε με το θεμελιώδες ερώτημα, γιατί η εντροπία ενός συστήματος να προσεγγίζει μια μέγιστη τιμή, αφού όλοι οι νόμοι της φυσικής διατυπώνονται για αντιστρεπτά δυναμικά συστήματα; Ο Mike υποστηρίζει ότι «οι γνωστοί μας φυσικοί νόμοι μπορεί να μη βρίσκονται στα θεμέλια της θερμοδυναμικής συμπεριφοράς την οποία παρατηρούμε καθημερινά». Επιπλέον επισημαίνει πως είτε «οι φυσικοί νόμοι είναι εσφαλμένοι και ακόμη δεν έχουν ανακαλυφθεί καταλληλότερες διατυπώσεις με όρους μη αντιστρεπτών ημιδυναμικών συστημάτων» είτε «άλλα φαινόμενα ίσως αποκρύπτουν τη λειτουργία αυτών των αντιστρεπτών συστημάτων, με αποτέλεσμα τα τελευταία να φαίνονται στον παρατηρητή μη αντιστρεπτά».

Το δίδαγμα που αποκόμισα εγώ από αυτή την εργασία ήταν το εξής: *αν* ο Δεύτερος Νόμος της θερμοδυναμικής είναι σωστός και καθολικός, *τότε* πρέπει να υπάρχουν «κρυμμένες μεταβλητές» που απαιτούν νέους φυσικούς νόμους, ή πρέπει να υπάρχουν άλλα φαινόμενα, τα οποία δεν μας είναι οικεία ή οι μηχανισμοί τους μας είναι άγνωστοι. Και στις δύο περιπτώσεις, αυτά τα συμπεράσματα παρέχουν συναρπαστικές προοπτικές στους ικανούς νέους επιστήμονες, ώστε να δημιουργήσουν νέα γνώση ως θεωρητικοί ή να επιτύχουν νέες ανακαλύψεις ως πειραματιστές.

Δεν κρύβω την αμηχανία και την έκπληξη που ένιωσα διαπιστώνοντας ότι αδυνατούσα να παρακολουθήσω τα πολύπλοκα μαθηματικά της εργασίας του Mike. Από την άλλη, όμως, με χαροποιούσε το γεγονός ότι εκείνος ο παράξενος νεαρός που είχα γνωρίσει κάποτε διέθετε πλέον αξιοθαύμαστη γνώση και μπορούσε να δημιουργήσει μια τόσο όμορφη εργασία. Αυτό είναι οπωσδήποτε ένα από τα πολυτιμότερα βραβεία που προσφέρει η διδασκαλία.

—Bill G. Aldridge

Ο ***Bill Aldridge*** *είναι διευθυντής της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και εκδότης του αμερικανικού* Quantum.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Bill G. Aldridge, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης **Timothy Weber**
Υπεύθυνος εικονογράφησης **Sergey Ivanov**
Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων **Edward Lozansky**

Σύμβουλοι σύνταξης
Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας
Yuli Danilov, Ερευνητής Α΄ Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή
Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT
Linda Rosen, Διοικητικός διευθυντής, NCTM
George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα
Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής
Αλέκος Μάμαλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Στέλιος Ζαχαρίου** - μαθηματικός, **Γιώργος Κατσιλιέρης** - φυσικός, **Μιχάλης Λάμπρου** - μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης** - μαθηματικός, **Στέλιος Τσεκούρας** - φυσικός, **Γιώργος Κυριακόπουλος** και **Αλέκος Μάμαλης** - φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια **Γιώργος Κυριακόπουλος**
Τυποτεχνική επιμέλεια **Ηρακλής Ντούσης**
Υπεύθυνη λογιστηρίου **Μαρία Μάμαλη**

Ιδρυτικός διευθυντής σύνταξης και Ειδικός συνεργάτης:
Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Επιστημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α΄ βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση **Δ. Τεμπονέρα**
Φιλμ, μοντάζ **Γ. Κεραμάς**
Εκτύπωση **Ν. Πουλόπουλος**
Βιβλιοδεσία **Θ. Αρχοντουλάκης**

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιώτες, 14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.

Ο πολυδιάστατος κύβος

Μια σύντομη περιήγηση στις πολλές διαστάσεις

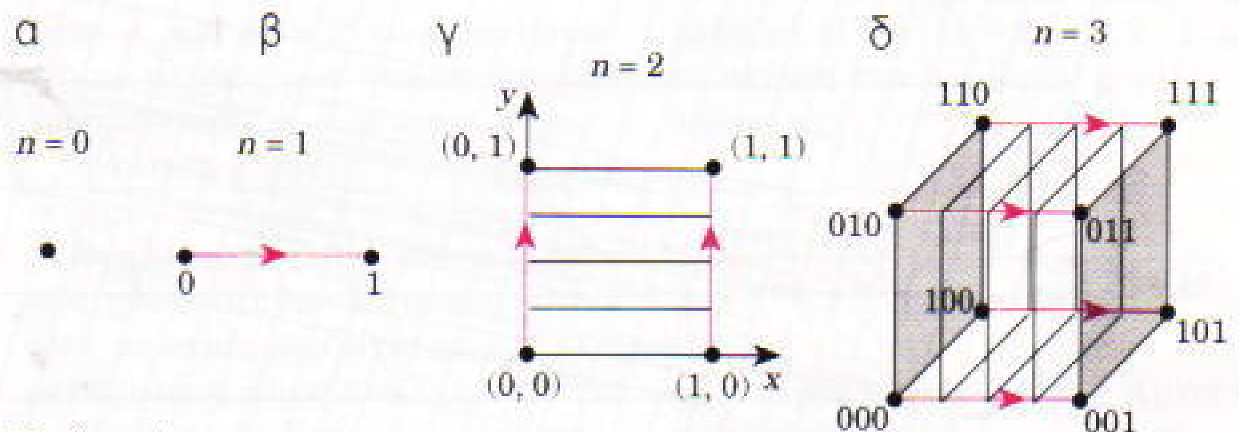
Vladimir Dubrovsky

Φέτος συμπληρώνονται 400 χρόνια από τη γέννηση του σπουδαίου γάλλου μαθηματικού και φιλοσόφου Καρτέσιου. Ένα από τα μεγαλύτερα μαθηματικά του επιτεύγματα, που το μοιράζεται με τον Pierre Fermat, είναι η θεμελίωση της αναλυτικής γεωμετρίας. Με την ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας, οι μαθηματικοί οδηγήθηκαν στην έννοια του πολυδιάστατου χώρου, που σύντομα έγινε ίσως η δημοφιλέστερη στο ευρύ κοινό μαθηματική αφαίρεση, χωρίς όμως να αποφευχθούν διάφορες μυστικιστικές και πνευματιστικές παρερμηνείες. Αποφασίσαμε να τιμήσουμε αυτή την επέτειο με μια σειρά άρθρων για το απλούστερο πολυδιάστατο αντικείμενο —τον κύβο— και τις εφαρμογές του. Αν και όλα τα άρθρα είναι, κατ' αρχήν, αυτόνομα, είναι ίσως προτιμότερο να αρχίσετε με αυτό εδώ, στο οποίο κατασκευάζουμε τον n-διάστατο κύβο εξαρχής, και προσπαθούμε να εξερευνήσουμε τη γεωμετρική του δομή.

Βήμα προς βήμα

Θα κατανοήσουμε ευκολότερα τον πολυδιάστατο κύβο αν τον «αναπτύξουμε» αρχίζοντας με τον απλούστερο από όλους τους κύβους, το σημείο (το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως κύβο μηδενικής διάστασης), και προσθέτουμε μία διάσταση κάθε φορά, καθώς θα προχωρούμε σταδιακά.

Ας πάρουμε ένα σημείο (Σχήμα 1α) και ας το μετακινήσουμε κατά

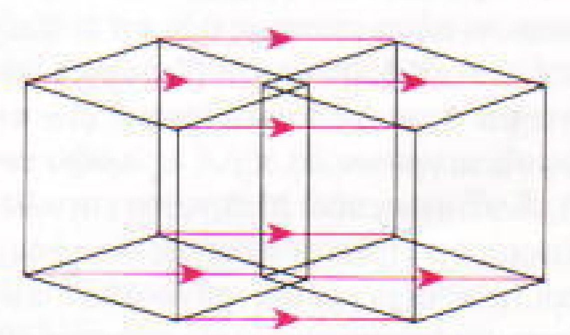


Σχήμα 1

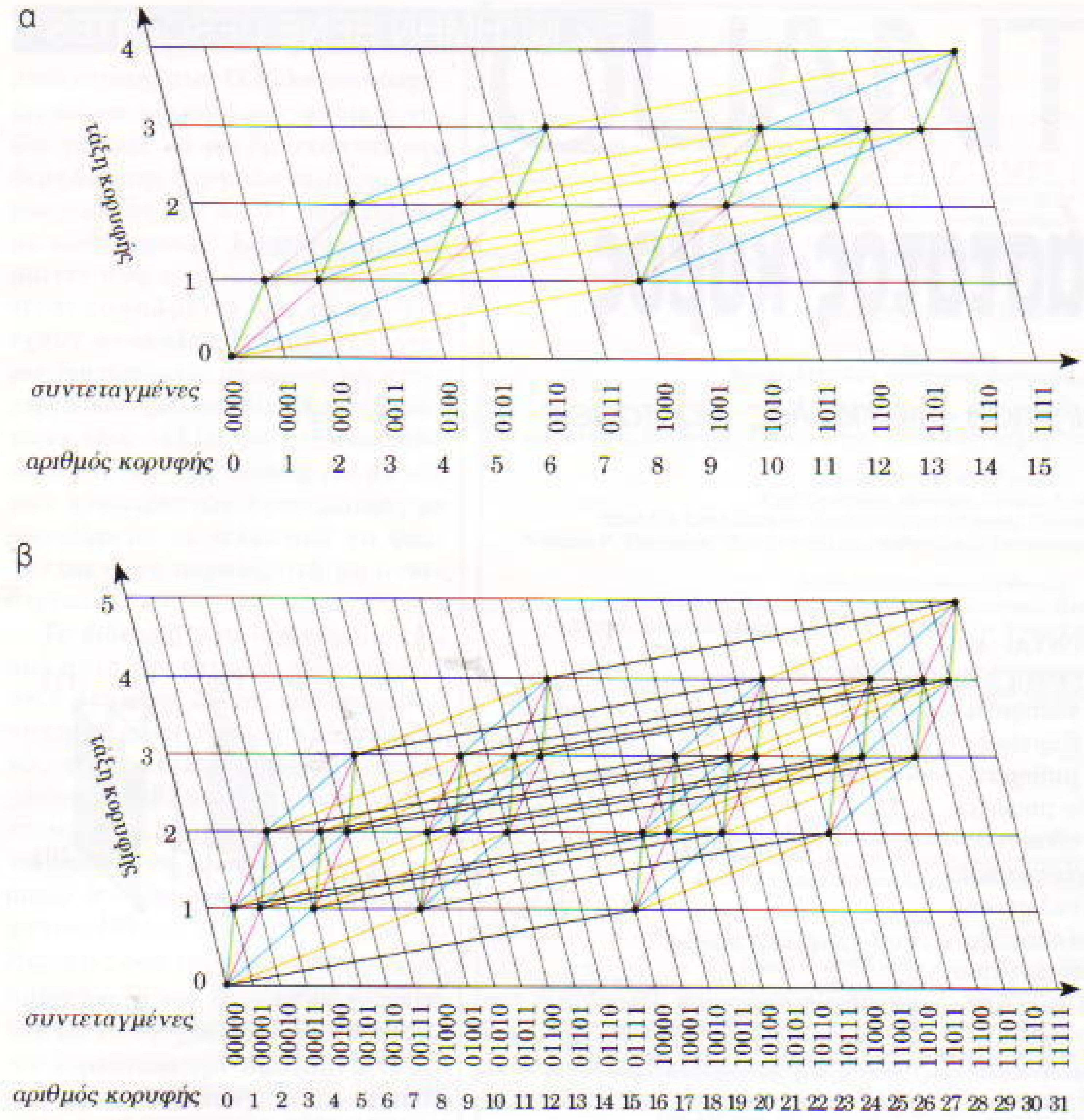
μοναδιαία απόσταση. Προκύπτει ένα ευθύγραμμο τμήμα, ή ένας μονοδιάστατος κύβος (Σχήμα 1β). Μπορούμε να τον φανταζόμαστε ως το διάστημα $0 \leq x \leq 1$ του άξονα των x. Ας μετατοπίσουμε τώρα το τμήμα κάθετα προς τον εαυτό του κατά μοναδιαία απόσταση (Σχήμα 1γ). Προκύπτει ένα τετράγωνο —ο δισδιάστατος κύβος. Για να τον περιγράψουμε, χρειαζόμαστε δύο συντεταγμένες, x και y: Στο πλαίσιο του Σχήματος 1γ, ο κύβος δίνεται από το ζεύγος των ανισοτήτων $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Αν μετατοπίσουμε το τετράγωνο κάθετα προς το επίπεδό του κατά μοναδιαία απόσταση (Σχήμα 1δ), θα πάρουμε τον τρισδιάστατο κύβο $\{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Ας κάνουμε τώρα το επόμενο βήμα: θα θεωρήσουμε το σχήμα που διαγράφεται όταν μετακινούμε τον τρισδιάστατο κύβο μας κατά μοναδιαία απόσταση. Η σχεδίαση αυτού του σχήματος στο επίπεδο δεν αποτελεί πρόβλημα —δείτε το Σχήμα 2. Το *πραγματικά* δύσκολο είναι να φανταστούμε τον κύβο να μετακινείται «κάθετα προς τον εαυτό του». Μερικοί άνθρωποι ισχυρίζονται ότι έχουν αναπτύξει την ικανότητα να βλέπουν αυτή την τέταρτη διάσταση. Όσοι δεν έχουν φτάσει σ' αυτό το βαθμό τελειότητας μπορούν, σε πρώτο στάδιο, να αρκεστούν στη δύναμη της αναλογίας, στη σταδιακή κατασκευή μέσω μετακίνησης και, φυσικά, στον τυπικό αλγεβρικό ορισμό. Ο συνδυασμός όλων αυτών είναι επαρκής για να εξερευνήσουμε ακόμη και ένα τέτοιο απόκοσμο αντικείμενο όπως ο τετραδιάστατος κύβος, καθώς και κύβους ακόμη μεγαλύτερης διάστασης.

Επομένως, μετατοπίζοντας έναν συνηθισμένο κύβο παίρνουμε τον



Σχήμα 2



Σχήμα 3

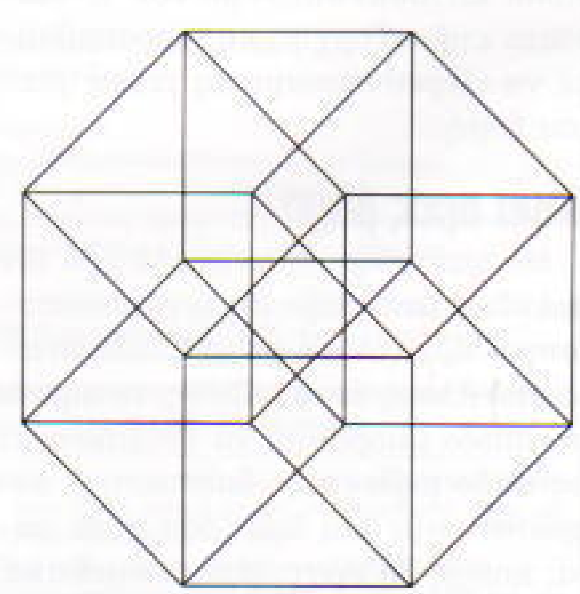
τετραδιάστατο κύβο. Θεωρήθηκε τόσο σημαντικός, ώστε του δόθηκε η ειδική ονομασία «υπερκύβος». Ο τετραδιάστατος κύβος δημιουργεί τον κύβο πέντε διαστάσεων, και ούτω καθεξής.

Με όρους συντεταγμένων, το n-οστό βήμα της κατασκευής ισοδυναμεί με την προσθήκη στις $n-1$ προηγούμενες συντεταγμένες μιας νέας, n-οστής συντεταγμένης, που κυμαίνεται από το 0 έως το 1. Έτσι, ο υπερκύβος ορίζεται ως το σύνολο τετράδων αριθμών (x, y, z, u) που ικανοποιούν τις ανισότητες $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$. Παρόμοιο σύστημα διπλών ανισοτήτων για τις συντεταγμένες $x_1, x_2, ..., x_n$ ορίζει τον n-διάστατο κύβο. Μολονότι —αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς— αυτός ο ορισμός περιγράφει μόνο έναν συγκεκριμένο (μοναδιαίο) κύβο σε κάθε δεδομένο σύστημα συντεταγμένων, η γενικότητα δεν βλάπτεται, διότι για κάθε κύβο μπορούμε πάντα να διαλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο να ικανοποιούνται οι ίδιες ανισότητες. (Μπορείτε να εξηγήσετε πώς;)

Μια κατάλληλη «μετατόπιση» στο επίπεδο μας οδηγεί σε μια εικόνα του n-διάστατου κύβου. Σχεδιάζουμε ένα τμήμα ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων (ας πούμε, το πράσινο στα Σχήματα 3α ή 3β) και στη συνέχεια σχεδιάζουμε ένα ακόμη τμήμα από το ίδιο σημείο (ας πούμε το κόκκινο). Έπειτα, μεταφέρουμε το πρώτο τμήμα κατά μήκος του δεύτερου, ώστε να προκύψει ένα παραλληλόγραμμο (το οποίο αντιπροσωπεύει μια τετράγωνη έδρα του ευρισκόμενου στο χώρο κύβου μας). Κατόπιν, μεταφέρουμε το παραλληλόγραμμο κατά μήκος ενός τρίτου τμήματος (ας πούμε, του μπλε), οπότε προκύπτει η εικόνα ενός συνηθισμένου κύβου, κ.ο.κ. Αυτή η δουλειά είναι εύκολη, και μάλιστα ευχάριστη, διότι παίρνοντας διαφορετικά κατευθυντήρια τμήματα μπορούμε να δημιουργήσουμε ποικίλους σχηματισμούς (συγκρίνετε τα Σχήματα 3α και 3β και τη συμμετρική εικόνα του υπερκύβου στο Σχήμα 4). Είναι ενδιαφέρον ότι ανεξάρτητα από τον τρόπο επιλογής των κατευθυντήριων τμημάτων (εκτός από την περίπτωση κατά την οποία ανήκουν στην ίδια ευθεία) παράγεται ένα σχέδιο που είναι μια *πραγματικά δυνατή* παράλληλη προβολή του n-διάστατου κύβου στο επίπεδο. Μεταφέρει σωστά την αμοιβαία διευθέτηση κορυφών και ακμών, και δείχνει ποιες ακμές είναι παράλληλες μεταξύ τους. Ωστόσο, τα σχέδια του Σχήματος 3 έχουν μερικές επιπλέον ιδιότητες, και κατασκευάστηκαν με τη χρήση ενός ειδικού κανόνα. Ας τα εξετάσουμε λεπτομερέστερα.

Σχεδίαση και απαρίθμηση

Από τους προηγούμενους ορισμούς γίνεται φανερό ότι οι συντεταγμένες $(a_1, a_2, ..., a_n)$ μιας κορυφής A του n-



Σχήμα 4

διάστατου κύβου είναι μηδενικά και μονάδες. Υπολογίζουμε δύο αριθμούς: τον $x(A) = a_1 2^n + a_2 2^{n-1} + ... + a_n 2^0$ (δηλαδή, τον αριθμό με δυαδική αναπαράσταση $a_1 a_2 ... a_n$) και τον $y(A) = a_1 + a_2 + ... + a_n$ (το πλήθος των μοναδιαίων συντεταγμένων, που ονομάζεται *τάξη* της κορυφής A). Θεωρούμε ένα τυχαίο, όχι αναγκαστικά ορθογώνιο, σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, και για κάθε κορυφή A σχεδιάζουμε το σημείο με συντεταγμένες $(x(A), y(A))$. Όλα αυτά τα σημεία είναι κόμβοι του ακέραιου πλέγματος (ως προς επιλεγμένες συντεταγμένες). Συνδέουμε τώρα με ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθε ζεύγος σημείων A και B με συντεταγμένες x που διαφέρουν κατά δύναμη του 2 ($|x(A) - x(B)| = 2^k$). Αφήνω τους αναγνώστες να επαληθεύσουν ότι το διάγραμμα που προκύπτει είναι πράγματι σχέδιο του n-διάστατου κύβου. Μπορούμε να σχεδιάσουμε αυτό τον κύβο σταδιακά αρχίζοντας από το τμήμα που συνδέει την αρχή με το σημείο $(1, 2^0)$ και μετακινώντας αυτό το τμήμα κατά τη διεύθυνση του τμήματος που συνδέει την αρχή με το $(1, 2^1)$, έπειτα κατά τη διεύθυνση αυτού που συνδέει την αρχή με το $(1, 2^2)$, το $(1, 2^3)$, κ.ο.κ. Η τελική μετατόπιση γίνεται κατά μήκος του τμήματος που συνδέει την αρχή με το $(1, 2^{n-1})$. Ένα περίεργο χαρακτηριστικό αυτού του σχεδίου είναι ότι όλες οι κορυφές ανήκουν στις ακέραιες ευθείες $x = k$, $k = 0, 1, ..., 2^n - 1$, μία κορυφή σε κάθε ευθεία. «Οριζόντια» ανήκουν στις $n + 1$ ευθείες $y = 0, 1, ..., n$, καθεμία από τις οποίες περιέχει όλες τις κορυφές ίδιας τάξης. Επομένως, αυτός ο τρόπος σχεδιασμού μάς εξυπηρετεί όποτε χρησιμοποιούμε την έννοια της τάξης, και τέτοιες περιπτώσεις προκύπτουν συνεχώς στα προβλήματα του n-διάστατου κύβου που εξετάζουμε σ' αυτό το τεύχος. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα όπου τα σχέδια αυτά θα μας βοηθήσουν στην απαρίθμηση των στοιχείων (κορυφών, ακμών, εδρών) του n-διάστατου κύβου.

Πρώτα απ' όλα, βλέπουμε ότι το πλήθος των κορυφών K_n ισούται με 2^n, διότι μπορούμε να τις αριθμήσουμε χρησιμοποιώντας τους αριθμούς από το 0 έως το $2^n - 1$, όπως στο Σχήμα 3. Διαφορετικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε βήμα της κατασκευής διπλασιάζει το πλήθος των κορυφών των κύβων μας: στις κορυφές του αρχικού κύβου προσθέτουμε τις κορυφές του μετατοπισμένου αντιγράφου. Μπορούμε επίσης να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται το πλήθος των ακμών A_n σε κάθε βήμα. Στις ακμές του αρχικού κύβου προσθέτουμε τις ακμές των μετακινούμενων αντιγράφων και τις ακμές που σχηματίζονται από τις κορυφές κατά τη μετακίνηση του κύβου. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε με τον τύπο

$$A_{n+1} = 2A_n + K_n, \qquad (1)$$

όπου A_n και $K_n = 2^n$ είναι, αντίστοιχα, το πλήθος των ακμών και των κορυφών ενός n-διάστατου κύβου.

Άσκηση 1. Βρείτε έναν τύπο που εκφράζει το A_n ως συνάρτηση του n.

Εναλλακτικά, ας φανταστούμε πως χρωματίζουμε με το ίδιο χρώμα όλες τις ακμές που είναι παράλληλες μεταξύ τους, όπως στο Σχήμα 3 (για $n = 4$ και $n = 5$). Υπάρχουν τόσα χρώματα όσες είναι οι ακμές που ξεκινούν από την αρχή, διότι όλες αυτές οι ακμές είναι χρωματισμένες διαφορετικά. Ταυτόχρονα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ακμές *οποιουδήποτε* χρώματος διαγράφονται από τις κορυφές ενός κύβου μικρότερης (κατά 1) διάστασης, διότι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι κατευθυντήριες ακμές στην κατασκευή μας. Μπορείτε τώρα να βρείτε μέσα σε δέκα δευτερόλεπτα πόσες είναι συνολικά οι ακμές;

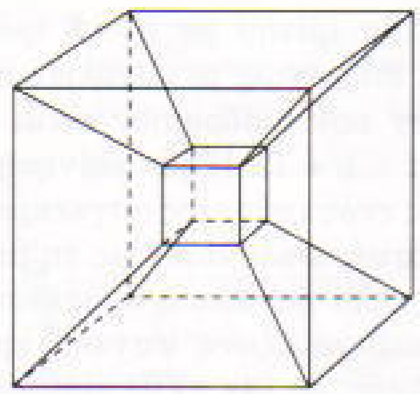
Αυτός ο χρωματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για να υπολογιστεί το πλήθος των κορυφών δεδομένης τάξης k. Αν ξεκινήσουμε από την αρχή, μπορούμε να φτάσουμε σε οποιαδήποτε από αυτές ακολουθώντας μια διαδρομή αποτελούμενη από k ακμές. Όλες οι ακμές που διασχίζουμε κατά τη διαδρομή μας έχουν διαφορετικό χρώμα, διότι σε κάθε βήμα της κατασκευής ο «κινούμενος» κύβος ακολουθεί νέα κατεύθυνση. Το χρώμα του πρώτου τμήματος μπορούμε να το επιλέξουμε με n τρόπους, του δεύτερου με $n - 1$ τρόπους (έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει ένα χρώμα), του τρίτου με $n - 2$ τρόπους, κ.ο.κ. Επομένως, το συνολικό πλήθος αυτών των διαδρομών είναι $n(n - 1)...(n - k + 1)$. Η μετακίνηση κατά μήκος ενός τμήματος συγκεκριμένου χρώματος ισοδυναμεί με τη μετακίνηση κατά μοναδιαία απόσταση στον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων —δηλαδή, με την αντικατάσταση της αντίστοιχης μηδενικής συντεταγμένης με τη μονάδα. Συνεπώς, οι συντεταγμένες του άκρου μιας διαδρομής εξαρτώνται μόνο από το σύνολο των χρωμάτων των τμημάτων της και όχι από τη σειρά τους. Έτσι, το πλήθος των διαδρομών που οδηγούν από την αρχή στην ίδια κορυφή τάξης k ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων των k χρωμάτων τους —δηλαδή, με $k! = k \cdot (k - 1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, και το πλήθος των κορυφών k τάξης ισούται με

$$\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

που συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$. Αυτοί οι αριθμοί είναι οι πασίγνωστοι *διωνυμικοί συντελεστές*. (Αυτό δεν θα ξαφνιάσει τους αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με τη συνδυαστική χρήση αυτών των συντελεστών. Όταν απαριθμούμε τις κορυφές τάξης k, επιλέγουμε k από τις n συντεταγμένες να έχουν τιμή 1 και οι υπόλοιπες να έχουν τιμή 0.) Με την ευκαιρία, και αφού το συνολικό πλήθος των κορυφών είναι 2^n, παίρνουμε τη σχέση

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Ο μονοδιάστατος σκελετός που σχηματίζουν οι κορυφές και οι ακμές του n-διάστατου κύβου μάς δίνει μια χοντρική μόνο ιδέα της δομής του. Οι ακμές πρέπει να συνδεθούν με δισδιάστατες έδρες, αυτές πάλι με τρισδιάστατες έδρες, κ.ο.κ., έως τις έδρες $(n - 1)$ διαστάσεων που αποτελούν το σύνορό του. Κάθε έδρα είναι κύβος σε μια συγκεκριμένη διάσταση. Το Σχήμα 5, μία ακόμη εικόνα του υπερκύβου, μπορεί να μας βοηθήσει να καταλάβουμε τη διευθέτηση των τρισδιάστατων «υπερεδρών» του. Στην



Σχήμα 5

πραγματικότητα, αυτή η εικόνα είναι ένα δισδιάστατο σχέδιο ενός τρισδιάστατου σχηματισμού —της *κεντρικής* προβολής του υπερκύβου στον τρισδιάστατο χώρο. Η παρόμοια προβολή του συνηθισμένου κύβου στο επίπεδο παρουσιάζεται στο Σχήμα 6. Στο Σχήμα 5 μπορούμε επίσης να δούμε καθαρά τις 24 δισδιάστατες έδρες του υπερκύβου. Μπορείτε όμως να φανταστείτε το τετραδιάστατο *εσωτερικό* που φράσσεται από τους οκτώ κύβους (οι έξι από τους οποίους έχουν τη μορφή κόλουρης τετράπλευρης πυραμίδας) που εμφανίζονται σ' αυτό το σχήμα;

Κατά τη βήμα προς βήμα κατασκευή μας, οι έδρες k διαστάσεων του n-διάστατου κύβου είναι αυτές που ανήκουν στον $(n-1)$ διαστάσεων γεννήτορα κύβο και στο μετατοπιζόμενο αντίγραφό του και αυτές που διαγράφονται από τις $(k-1)$ διαστάσεων έδρες του καθώς μετακινείται. Προκύπτει έτσι ένας αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους $E_{n,k}$ των k-διάστατων εδρών, παρόμοιος με την εξίσωση (1).

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι $E_{n,k} = 2E_{n-1,k} + E_{n-1,k-1}$, για $0 \le k \le n-1$ με $E_{n,n} = 1$, $E_{n,0} = K_n = 2^n$. Να εκφράσετε το $E_{n,k}$ ως συνάρτηση των n και k.

Με όρους συντεταγμένων, μια έδρα k διαστάσεων αποτελείται από σημεία που έχουν σταθερές τις $n-k$ συντεταγμένες τους και ίσες με 1 ή 0, ενώ οι υπόλοιπες k συντεταγμένες κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1. Με βάση αυτή την περιγραφή μπορούμε να συναγάγουμε άμεσα τον τύπο για το $E_{n,k}$.

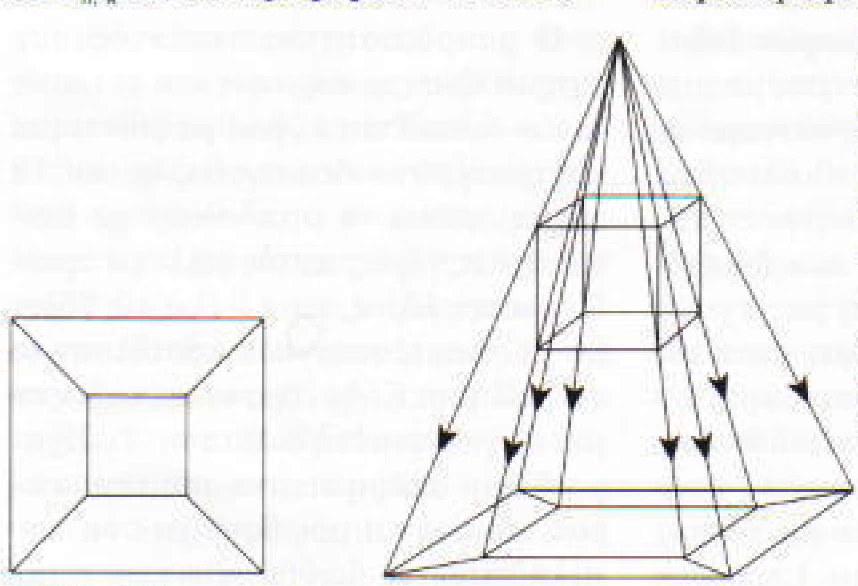
Αναπτύσσοντας την υπερδιαίσθησή μας

Θα ήταν πολύ δύσκολο να φανταστούμε έναν πολυδιάστατο κύβο χωρίς τη βοήθεια διαγραμμάτων όπως αυτών στα Σχήματα 3 και 5. Από την άλλη πλευρά, όμως, τέτοια διαγράμματα μπορεί να είναι παραπλανητικά. Για παράδειγμα, μπορείτε να δείτε στο Σχήμα 5 μια σφαίρα (υπερσφαίρα!) που διέρχεται από όλες τις κορυφές του υπερκύβου, ή τις σφαίρες που εφάπτονται με τις 32 ακμές ή τις 24 τετραγωνικές έδρες; Είναι ακόμη δυσκολότερο να διακρίνουμε την εγγεγραμμένη σφαίρα που εφάπτεται με τα κέντρα όλων των τρισδιάστατων εδρών, αφήνοντάς τες όλες στο εξωτερικό της. Είτε τις βλέπετε είτε όχι, αυτές οι σφαίρες υπάρχουν πραγματικά και μπορούμε να υπολογίσουμε τις ακτίνες τους χρησιμοποιώντας τον γνωστό ορισμό της (ευκλείδειας) απόστασης μεταξύ των σημείων $(x_1, x_2, ..., x_n)$ και $(y_1, y_2, ..., y_n)$, που δίνεται από τον τύπο

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}.$$

Ας υπολογίσουμε την ακτίνα της περιγεγραμμένης στον n-διάστατο κύβο σφαίρας. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι το μήκος ακμής του κύβου είναι 2, και τοποθετούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο του. Τότε, οι συντεταγμένες κάθε κορυφής είναι 1 ή −1, και η απόστασή της από το κέντρο ισούται με

$$\sqrt{1^2+...+1^2} = \sqrt{n}.$$



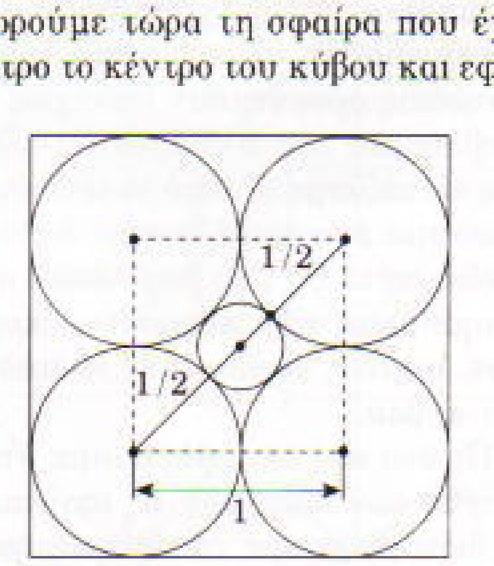
Σχήμα 6

Άρα, όλες οι κορυφές ανήκουν στη σφαίρα που δίνεται από την εξίσωση $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = n$. Για την εγγεγραμμένη σφαίρα, εξετάζουμε μια έδρα διάστασης $(n-1)$ —ας πούμε, αυτή που δίνεται από την εξίσωση $x_1 = 1$. Το κέντρο της —το σημείο $(1, 0, ..., 0)$— βρίσκεται σε μοναδιαία απόσταση από το κέντρο του κύβου, ενώ όλα τα άλλα της σημεία $(1, x_2, ..., x_n)$ απέχουν περισσότερο, διότι $\sqrt{1^2+x_2^2+...+x_n^2} > 1$. Συνεπώς αυτή η έδρα, και παρόμοια κάθε άλλη έδρα του κύβου, εφάπτεται της μοναδιαίας σφαίρας που έχει ως κέντρο της το κέντρο του κύβου —δηλαδή, αυτή η σφαίρα είναι εγγεγραμμένη στον κύβο.

Άσκηση 3. Βρείτε για όλα τα n και k τη διάμετρο της σφαίρας που εφάπτεται με όλες τις k-διάστατες έδρες του n-διάστατου μοναδιαίου κύβου.

Η ακτίνα της εγγεγραμμένης στον μοναδιαίο κύβο σφαίρας είναι η ίδια (1/2) για κάθε διάσταση. Από την άλλη πλευρά, αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο επιχείρημα σ' έναν κύβο με μοναδιαίο μήκος ακμής, βλέπουμε ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, $\sqrt{n}/2$, αυξάνεται απεριόριστα όσο αυξάνει η διάσταση n.

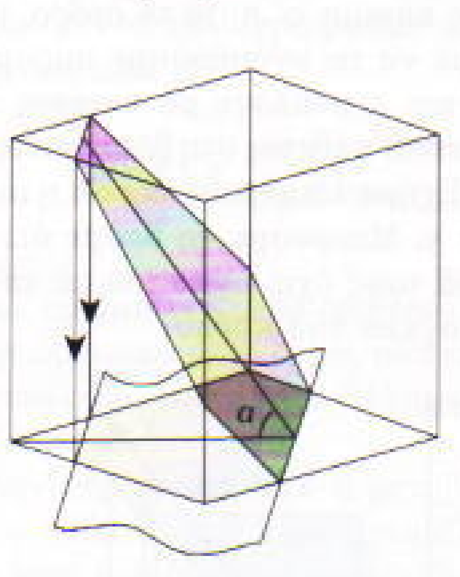
Θέλω να επισημάνω ένα παράδοξο γεγονός σχετικά με τον n-διάστατο κύβο και τις σφαίρες του. Ας πάρουμε έναν κύβο με μήκος ακμής 2. Σε καθεμιά από τις 2^n γωνίες του εγγράφουμε μια σφαίρα διαμέτρου 1 (δείτε το παράδειγμα των δύο διαστάσεων στο διάγραμμα του Σχήματος 7). Όταν δύο από αυτές τις σφαίρες είναι διαδοχικές κατά μήκος μιας ακμής, εφάπτονται, και επιπλέον τα κέντρα όλων τους σχηματίζουν έναν n-διάστατο κύβο με μήκος ακμής 1. Θεωρούμε τώρα τη σφαίρα που έχει κέντρο το κέντρο του κύβου και εφά-



Σχήμα 7

πτεται με όλες τις γωνιακές σφαίρες. Διαισθητικά συμπεραίνουμε ότι πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό του κύβου. Προσέξτε όμως: η διάμετρός της ισούται με την απόσταση μεταξύ δύο απέναντι γωνιακών σφαιρών μείον τις ακτίνες τους —δηλαδή, με $\sqrt{n} - 1$. Και αυτός ο αριθμός είναι μεγαλύτερος του 2 για $n \geq 10$. Επομένως, όταν το n είναι αρκετά μεγάλο, αυτή η σφαίρα εκτείνεται πέρα από τον κύβο!

Οι προσπάθειές μας να αποκτήσουμε εικόνα του πολυδιάστατου κύβου είναι παρόμοιες με αυτές που θα είχαν κάνει οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας,[1] ενός φανταστικού κόσμου δύο διαστάσεων, για να καταφέρουν να κατανοήσουν τη δομή του συνηθισμένου κύβου. Θα είχαν προσπαθήσει να σχεδιάσουν τις προβολές του στο επίπεδο, προσέγγιση όμοια με αυτή που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα. Θα δοκίμαζαν επίσης να κατασκευάσουν και να μελετήσουν κωνικές τομές του κύβου. Για να αποκτήσουν μια λεπτομερέστερη εικόνα, θα σχεδίαζαν ίσως μια σειρά «αξονικών τομογραφιών» του κύβου —δηλαδή, τομές με ένα επίπεδο που κινείται προς μια σταθερή κατεύθυνση, ας πούμε κάθετα προς την κύρια (τη μεγαλύτερη) διαγώνιο του κύβου. Μια τέτοια τομή φαίνεται στο Σχήμα 8. Αν οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας ήταν αρκετά έξυπνοι, θα μπορούσαν πιθανότατα να βρουν μια εύκολη μέθοδο σχεδιασμού των *προβολών* αυτών των τομών στη βάση του κύβου: αυτές προκύπτουν απλώς ως τομές της βάσης με μια λωρίδα που είναι κάθετη προς τη διαγώνιο και έχει πλάτος $w = \sqrt{2}/2$ —το μισό της διαγωνίου της βάσης. Εμείς μπορούμε να το δούμε αυτό άμεσα από το σχήμα. Οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας θα μπορούσαν να το συναγάγουν αλγεβρικά.

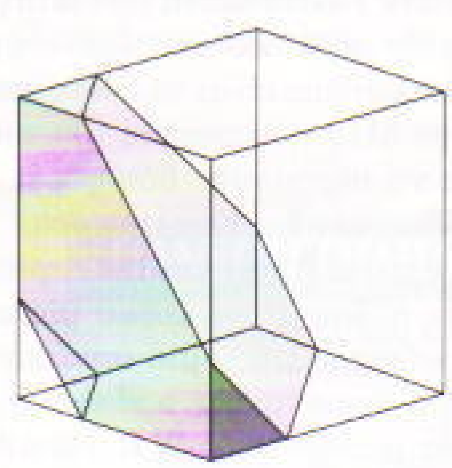


Σχήμα 8

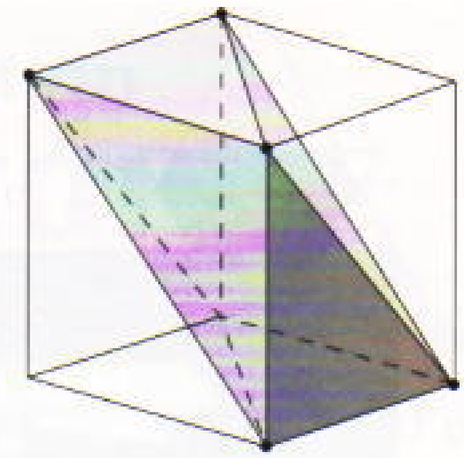
Πράγματι, η εξίσωση συντεταγμένων ενός επιπέδου κάθετου προς τη διαγώνιο του κύβου παίρνει τη μορφή $x + y + z = c$. Τα σημεία της τομής ικανοποιούν επιπλέον τις ανισότητες $0 \leq x, y, z \leq 1$. Η προβολή του σημείου (x, y, z) στη βάση —δηλαδή στο επίπεδο (x, y)— είναι απλώς το $(x, y, 0)$. Επομένως, στις συνεταγμένες (x, y), η προβολή αυτής της τομής δίνεται από τις ανισότητες $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ και $c - 1 \leq x + y \leq c$ (αφού $x + y = c - z$, όπου $0 \leq z \leq 1$). Οι δύο πρώτες διπλές ανισότητες ορίζουν τη βάση του κύβου, ενώ η τρίτη ορίζει τη λωρίδα.

Παρατηρήστε ότι το πλήθος των πλευρών ενός σχήματος δεν αλλάζει με αυτή την προβολή. Έτσι, οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας θα ανακάλυπταν ότι η κινούμενη τομή είναι ένα τρίγωνο (στην περίπτωση αυτή ισόπλευρο) που μεγαλώνει. Σε μια συγκεκριμένη στιγμή, οι γωνίες του αποκόπτονται και σταδιακά μετασχηματίζεται σε κανονικό εξάγωνο. Έπειτα, η όλη διαδικασία αντιστρέφεται.

Όπως οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας, μπορούμε να υποβάλουμε τον υπερκύβο σε τομογραφία, τέμνοντάς τον με ένα κινούμενο υπερεπίπεδο —δηλαδή, τον τρισδιάστατο χώρο— κάθετο προς τη διαγώνιό του. Οι τομές είναι συγκεκριμένα τρισδιάστατα πολύεδρα, και οι προβολές τους στη βάση του υπερκύβου είναι τα στερεά που προκύπτουν από την τομή της βάσης (η οποία είναι ένας συνηθισμένος κύβος) με το στρώμα που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο παράλληλα επίπεδα που είναι κάθετα στη διαγώνιο του κύβου της βάσης και απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το 1/3 της διαγωνίου (Σχήμα 9). Αυτό μπορείτε να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας συντεταγμένες, όπως ακριβώς κάναμε και προηγουμένως. Για να προκύψει ένα ακριβές αντίγραφο της τομής από την προβολή της, πρέπει να επεκτείνουμε την τελευταία, διπλασιάζοντάς την, σε κατεύθυνση κάθετη προς το στρώμα. Έτσι, η τομή ξεκινά ως σημείο, μετατρέπεται σ' ένα κανονικό τετράεδρο που μεγαλώνει, και σε μια συγκεκριμένη στιγμή οι γωνίες αποκόπτονται. Τα «ακρωτηριασμένα» τμήματα συνεχίζουν να μεγαλώνουν έως ότου οι τομές φτάσουν στα μέσα των ακμών του τετραέδρου. Εκείνη τη στιγμή, η τομή διέρχεται από το κέντρο του υπερκύβου και μετατρέπεται στιγμιαία σε κανονικό οκτάεδρο (δείτε το Σχήμα 10, όπου παρουσιάζεται σμικρυσμένο κατά το ήμισυ, σύμφωνα με την κατασκευή μας). Από αυτό το σημείο θα δούμε την ταινία να προβάλλεται αντίστροφα.



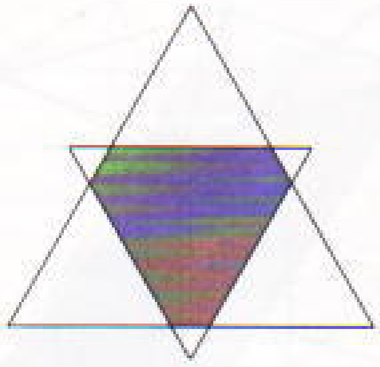
Σχήμα 9



Σχήμα 10

Μπορούμε να φανταστούμε με έναν διαφορετικό τρόπο τις «τομογραφίες» μας και να θεωρήσουμε τον (συνηθισμένο) κύβο ως την τομή των δύο τριέδρων γωνιών που σχηματίζουν οι τριάδες των εδρών δύο απέναντι κορυφών του. Κάθε στιγμή, η τομή του κινούμενου επιπέδου με αυτές τις γωνίες είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ η τομή του με τον κύβο είναι η τομή αυτών των δύο

1. *Flatland —A Romance of Many Dimensions*, του άγγλου λογίου, θεολόγου και συγγραφέα Edwin A. Abbott (1838-1926). (Στα ελληνικά: *Η Επιπεδοχώρα —Μυθιστορία πολλών διαστάσεων*, Εκδόσεις Επιλογή, Θεσσαλονίκη, 1988.)



Σχήμα 11

τριγώνων (Σχήμα 11), από τα οποία το ένα μεγαλώνει και το άλλο μικραίνει. Αφήνω για τους αναγνώστες την εξέταση των τομών του υπερκύβου από αυτή την οπτική γωνία. Η κύρια διαφορά έγκειται στο ότι τα τρίγωνα πρέπει να αντικατασταθούν από κανονικά τετράεδρα. Μπορεί επίσης να θελήσετε να σχεδιάσετε «τομογραφίες» του υπερκύβου σε διαφορετικές κατευθύνσεις ή να ερευνήσετε τα πολύγωνα που προκύπτουν όταν τέμνουμε τον υπερκύβο με ένα δισδιάστατο επίπεδο.

Είναι φανερό ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε τους προηγούμενους συλλογισμούς σε κύβους τυχαίας διάστασης n. Ειδικότερα, μπορούμε να σχεδιάσουμε το υπερεπίπεδο τομής έτσι ώστε να διέρχεται από όλες τις κορυφές δεδομένης τάξης k (ικανοποιούν όλες τη γραμμική εξίσωση $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$). Καταλήγουμε έτσι στο εξής περίεργο γεγονός:[2] η τομή του n-διάστατου κύβου με το υπερεπίπεδο που διέρχεται από τις κορυφές τάξης k «συμπίπτει» (έπειτα από συστολή της) με το στρώμα του $(n-1)$-διάστατου κύβου το οποίο περιέχεται μεταξύ των δύο τομών που διέρχονται από τις κορυφές τάξης $k-1$ και τάξης k. Συνεπώς, αν απαριθμήσουμε τις κορυφές όλων αυτών των τομών και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα, καταλήγουμε στον γνωστό τύπο των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

Εφαρμογές

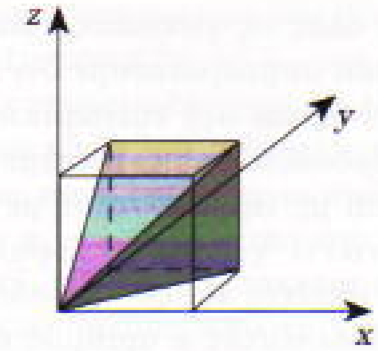
Δεν πρέπει να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι στην πρόσφατη, εντυπωσιακή κατάρριψη της εξηντάχρονης εικασίας του Borsuk (σχετικά με την οποία μπορείτε να διαβάσετε στο άρθρο του A. Skopenkov στο παρόν τεύχος) εμφανίζεται ο n-διάστατος κύβος. Η ίδια η διατύπωση του προβλήματος αφορά n-διάστατα σχήματα. Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της είναι ότι οι κορυφές του κύβου κατά την κατασκευή ταυτίζονται με τα υποσύνολα ενός πεπερασμένου συνόλου! Αυτός ο σύνδεσμος μεταξύ της γεωμετρίας και της συνδυαστικής αποδεικνύεται χρήσιμος και σε μερικά καθαρά συνδυαστικά προβλήματα.

Ανακαλύπτουμε μία ακόμη μετενσάρκωση του κύβου στη θεωρία πληροφορικής, στην οποία οι κορυφές του θεωρούνται σημεία του απλούστερου δυαδικού «χώρου κωδίκων». Εκεί, ο υπολογισμός μας του πλήθους των κορυφών μιας συγκεκριμένης τάξης χρησιμοποιείται για να εκτιμηθεί το μέγιστο δυνατό μέγεθος ενός κώδικα «διόρθωσης σφαλμάτων τάξης k».

Μερικές από τις εφαρμογές του πολυδιάστατου κύβου είναι πράγματι εντυπωσιακές. Στις «Σπαζοκεφαλιές Εγκιβωτισμού» (δείτε τα τεύχη Μαρτίου/Απριλίου και Μαΐου/Ιουνίου 1996) συναντήσατε την αξιοσημείωτη ακολουθία

121312141213121...

με την οποία επιλύεται ο διάσημος «Πύργος του Ανόι» και ένα πλήθος παρόμοιων σπαζοκεφαλιών. Αν ξεκινήσουμε από την αρχή και, διαβάζοντας ένα ένα τα ψηφία της ακολουθίας, κινηθούμε κατά μήκος των ακμών του n-διάστατου κύβου επιλέγοντας την ακμή που είναι παράλληλη με τον i-οστό άξονα συντεταγμένων κάθε φορά που το επόμενο ψηφίο της ακολουθίας είναι το i, θα επισκεφθούμε όλες τις κορυφές του κύβου χωρίς να περάσουμε δύο φορές από την ίδια ακμή. (Επαληθεύστε το!) Έτσι, έχουμε λύσει για την περίπτωση του n-διάστατου κύβου μία ακόμη σπαζοκεφαλιά —μια σπαζοκεφαλιά που δημιούργησε ο εξαίρετος ιρλανδός μαθηματικός W.R. Hamilton, για να παρουσιάσει μερικές από τις ανακαλύψεις του. Αυτή έχει ως εξής:

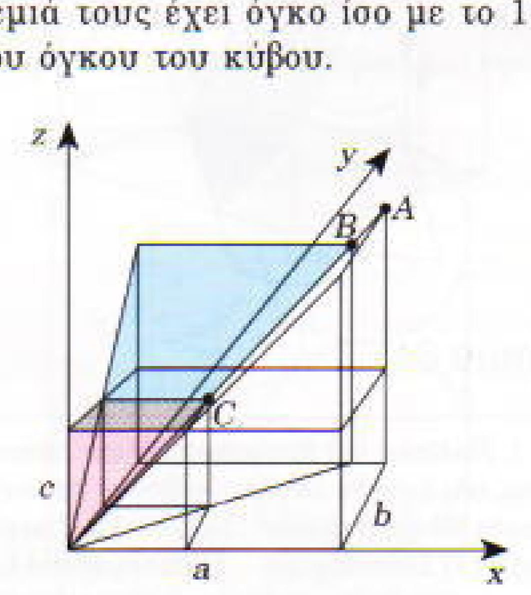


Σχήμα 12

επισκεφθείτε όλες τις κορυφές ενός δεδομένου πολυέδρου (στην αρχική διατύπωση δεν ήταν παρά δωδεκάεδρο) χωρίς να διασχίσετε καμιά ακμή του πάνω από μία φορά. Τέτοιες διαδρομές ονομάζονται *χαμιλτονιανοί περίπατοι*.

Τελειώνουμε με μια εφαρμογή του κύβου που δεν είναι συνδυαστική αλλά αλγεβρική. Θα αποδείξουμε την περίφημη ανισότητα του Cauchy για τους αριθμητικούς και τους γεωμετρικούς μέσους. Η απόδειξη θα γίνει μόνο για τρεις αριθμούς, ωστόσο ο τρόπος γενίκευσής της είναι προφανής.

Ας αρχίσουμε με ένα παλιό αλλά πάντα γοητευτικό πρόβλημα: *χωρίστε τον κύβο σε τρεις ίσες πυραμίδες*. Η λύση, όταν δεν τη γνωρίζετε, δεν βρίσκεται και τόσο εύκολα. Πρέπει να πάρουμε τις τρεις ισόπλευρες πυραμίδες που έχουν βάσεις τρεις έδρες του κύβου με κοινή κορυφή, και κοινή τους κορυφή την απέναντι κορυφή του κύβου. Αν τοποθετήσουμε τον κύβο στο σύστημα συντεταγμένων όπως κάναμε σ' αυτό το άρθρο, μπορούμε να τις ονομάσουμε πυραμίδες x, y και z, ανάλογα με το ποιος άξονας είναι κάθετος στη βάση καθεμιάς. Στο Σχήμα 12 παρουσιάζεται η πυραμίδα y. Μπορούμε να δούμε ότι καθεμιά τους έχει όγκο ίσο με το 1/3 του όγκου του κύβου.



Σχήμα 13

2. Το παρατήρησε ο μοσχοβίτης μαθηματικός D. Ryzhkov.

Η ανισότητα του Cauchy μάς λέει ότι για κάθε τριάδα θετικών αριθμών x, y, z ισχύει

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Ας πάρουμε, λοιπόν, τρεις θετικούς αριθμούς x, y, z. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \geq y \geq z$. Θέτουμε τότε $\sqrt[3]{x} = a$, $\sqrt[3]{y} = b$, $\sqrt[3]{z} = c$. Οι αριθμοί a, b, c είναι επίσης θετικοί, και $a \geq b \geq c$. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές a, b και c πάνω στους άξονες x, y, z, αντίστοιχα (Σχήμα 13).

Σχεδιάζουμε από την αρχή των αξόνων μια ακτίνα κατά μήκος της διαγωνίου του κύβου. Η ακτίνα θα συναντήσει πρώτα την έδρα $z = c$ του παραλληλεπιπέδου στο σημείο $C(c, c, c)$, μετά την έδρα $y = b$ στο σημείο $B(b, b, b)$ και μετά την έδρα $x = a$ στο σημείο $A(a, a, a)$. Θεωρήστε τους τρεις κύβους με διαγωνίους τα τμήματα που συνδέουν την αρχή με τα σημεία A, B και C. Πάρτε την πυραμίδα x στον πρώτο από αυτούς, την y στον δεύτερο και την z στον τρίτο (Σχήμα 13). Οι πυραμίδες αυτές καλύπτουν το παραλληλεπίπεδο, και οι όγκοι τους ισούνται με $a^3/3$, $b^3/3$ και $c^3/3$. Αφού ο όγκος του παραλληλεπιπέδου ισούται με abc, έχουμε $abc \leq (a^3 + b^3 + c^3)/3$.

Αν θέσουμε $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$, μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την ανισότητα ως

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

με τον αριθμητικό μέσο αριστερά και τον γεωμετρικό μέσο δεξιά, που είναι η ανισότητα την οποία θέλαμε να αποδείξουμε.

Στην περίπτωση των n μεταβλητών, ο n-διάστατος κύβος χωρίζεται σε n ίσες n-διάστατες πυραμίδες οι οποίες έχουν βάσεις τις $(n-1)$-διάστατες έδρες του που συντρέχουν σε μια κορυφή, ενώ ο αριθμός 3 αντικαθίσταται παντού με το n. ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Αντίσταση στον πολυδιάστατο κύβο

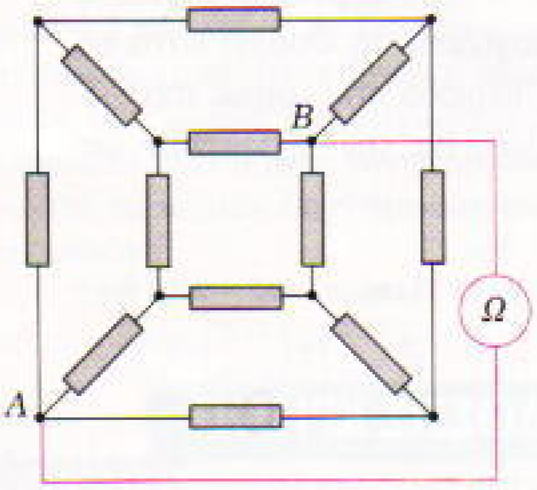
Η άσπρη σημαία είναι το σημάδι πως παραδίδεστε
και πως τα κάστρα πια για πάντα καταρρέουν.
—Νίκος Εγγονόπουλος

F. Nedemeyer και Y. Smorodinsky

ΕΝΑ ΔΗΜΟΦΙΛΕΣ ΖΗΤΗΜΑ ΣΤΙΣ μαθηματικές λέσχες της Μόσχας κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1940 ήταν το πρόβλημα της ολικής ηλεκτρικής αντίστασης ενός συρμάτινου κύβου. Δεν γνωρίζουμε ποιος το πρωτοσκέφτηκε ή το ανακάλυψε σε κάποιο παλιό βιβλίο. Προκάλεσε εξαιρετικό ενδιαφέρον, και σύντομα το γνώριζαν όλοι. Αργότερα έγινε ένα συνηθισμένο ζήτημα εξετάσεων, και κατέληξε να θεωρείται σχεδόν τετριμμένο.

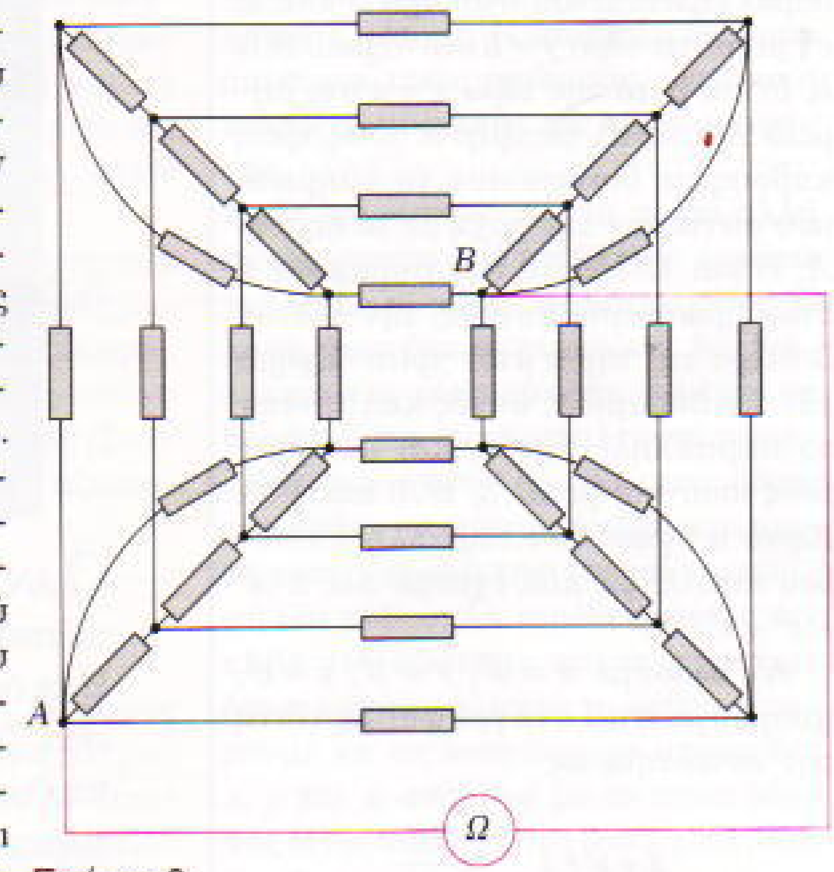
Μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής: υπολογίστε την αντίσταση R_3 μεταξύ των σημείων A και B του κυκλώματος του Σχήματος 1, αν όλες οι αντιστάσεις ισούνται με 1 Ω.[1]

Ο αναγνώστης μπορεί να αναρωτηθεί: «Ποιο είναι το ιδιαίτερο ενδιαφέρον αυτού του προβλήματος; Πρέπει να εκτελέσουμε έναν μάλλον επίπονο και βαρετό υπολογισμό χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Kirchhoff- ουσιαστικά πρόκειται για ένα ανιαρό πρόβλημα φυσικής».



Σχήμα 1

Αν ζητήσουμε, επομένως, από τον ίδιο αναγνώστη να υπολογίσει την ολική αντίσταση R_4 μεταξύ των κόμβων A και B του κυκλώματος του Σχήματος 2, πιθανότατα θα εξαγριωθεί —τι αλλόκοτη ιδέα το *να σκεφτούμε* και μόνο έναν τέτοιο κουραστικό υπολογισμό!



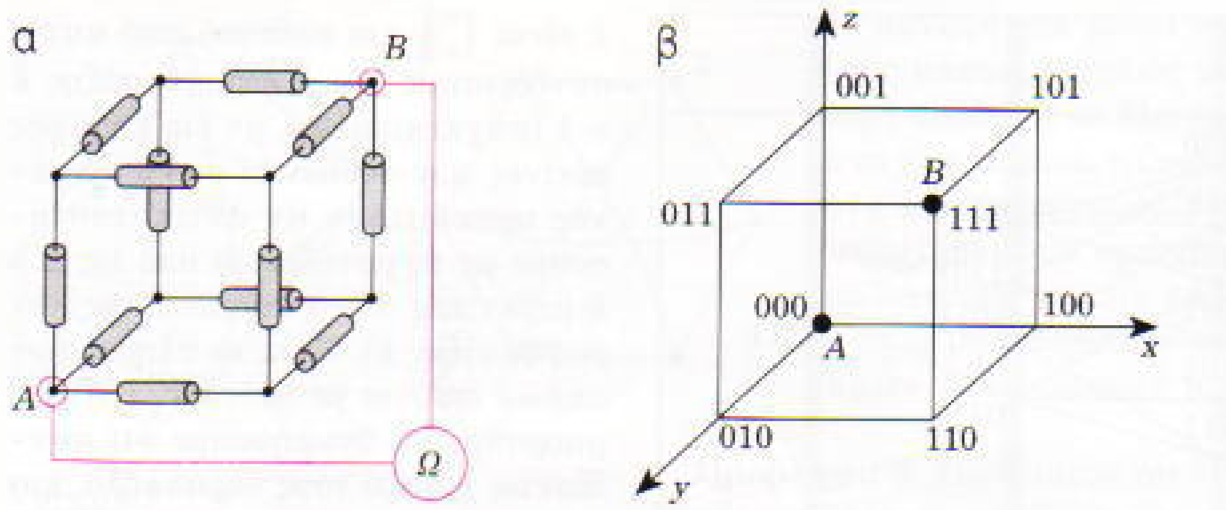
Σχήμα 2

Τα προβλήματα αυτά, όμως, κρύβουν όμορφες γεωμετρικές και αλγεβρικές σχέσεις (δεν είναι τυχαίο ότι το πρόβλημα συζητιόταν σε κύκλους μαθηματικών) που θα μας βοηθήσουν να τα επιλύσουμε χωρίς «βαρετούς υπολογισμούς», και οι οποίες θα μας οδηγήσουν σε μια απρόοπτη γενίκευση.

Στις τρεις και στις τέσσερις διαστάσεις

Ας ξεκινήσουμε με μια προφανή γεωμετρική παρατήρηση: το κύκλωμα του Σχήματος 1 είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα ενός συνηθισμένου κύβου, όπως αυτό εικονίζεται στο Σχήμα 3α. Ως μοντέλο του κύβου μας θεωρούμε τον τυπικό μοναδιαίο κύβο σ' ένα χώρο συντεταγμένων όπου οι κόμβοι A και B αντιπροσωπεύονται από τις κορυφές (0, 0, 0) και (1, 1, 1) του κύβου και κάθε ακμή του κύβου θεωρείται ως μια αντίσταση 1 Ω. Παρατηρήστε ότι όλες οι συντεταγμένες των κορυφών του κύβου (και μόνο αυτές) είναι 0 και 1. Ας ορίσουμε ως τάξη μιας κορυφής το άθροισμα των συντεταγμένων της. Τότε, αν εφαρμόσουμε κάποια τάση μεταξύ των

1. Δείτε και το άρθρο «Κυκλώματα και συμμετρία» στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1995 του ελληνικού *Quantum*.



Σχήμα 3

σημείων A και B, *οι κορυφές ίδιας τάξης θα έχουν το ίδιο δυναμικό* —θα είναι ισοδυναμικές· αυτό καθίσταται προφανές από τη συμμετρία του σχηματισμού. Επομένως, μπορούμε να βραχυκυκλώσουμε τις κορυφές αυτές χωρίς να μεταβάλουμε τη συνολική αντίσταση του κυκλώματος. Το κύκλωμα που προκύπτει αποτελείται απο τρεις ομάδες αντιστάσεων που συνδέονται σε σειρά· καθεμιά από τις εν λόγω ομάδες αποτελείται από αντιστάσεις που συνδέονται μεταξύ τους παράλληλα (βλ. το δεξιό τμήμα του Σχήματος 4). Επομένως, για την τελική απάντηση δεν χρειαζόμαστε ούτε μολύβι: η αντίσταση R_3 ισούται με 5/6 Ω.

Για να υπολογίσουμε την ολική αντίσταση του κυκλώματος του Σχήματος 2, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα ενός «τετραδιάστατου κύβου» (δείτε το άρθρο «Ο πολυδιάστατος κύβος» στο παρόν τεύχος). Αυτή η γεωμετρική παρατήρηση είναι λιγότερο προφανής. Πάντως, μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι είναι αληθής συγκρίνοντας το Σχήμα 2 με τις εικόνες του τετραδιάστατου κύβου στο εν λόγω άρθρο. Ο υπολογισμός της ολικής αντίστασης γίνεται όπως ακριβώς στην περίπτωση του συνηθισμένου κύβου —δείτε το Σχήμα 5. Εκμεταλλευόμαστε και πάλι το γεγονός ότι *οι κορυφές ίδιας τάξης είναι ισοδυναμικές*, και επομένως μπορούμε να τις βραχυκυκλώσουμε χωρίς να μεταβληθεί η ολική αντίσταση μεταξύ των A και B. Η απάντηση, λοιπόν, είναι $R_4 = 2/3$ Ω.

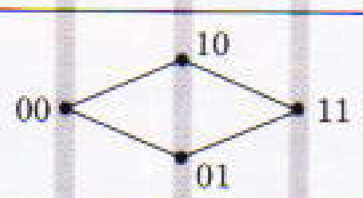
Ασκηση 1. Βρείτε την αντίσταση R_5 μεταξύ των διαγωνίως απέναντι κορυφών ενός πενταδιάστατου κύβου, αν η αντίσταση κάθε ακμής του είναι 1 Ω.

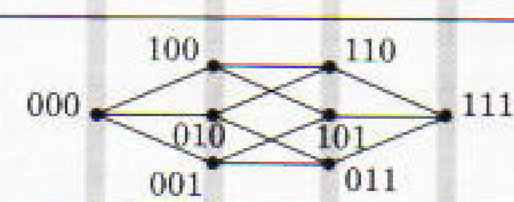
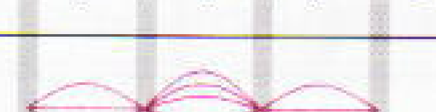
Αντίσταση του *n*-διάστατου κύβου

Είναι φυσικό να επιθυμούμε να γενικεύσουμε το πρόβλημά μας σε κύβους διάστασης n = 5, 6, 7, 8, κ.λπ. Αυτές οι περιπτώσεις θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για $n = 3$ και $n = 4$. (Με την ευκαιρία, πόση είναι η ολική αντίσταση στην περίπτωση $n = 2$;) Πάντως, δεν θα έχουμε το δικαίωμα να θεωρούμε τους εαυτούς μας μαθηματικούς αν δεν μπορέσουμε να υπολογίσουμε άμεσα, και για κάθε n, την ολική αντίσταση R_n μεταξύ δύο απέναντι κορυφών ενός κύβου n διαστάσεων (ο ορισμός του n-διάστατου κύβου δίνεται στο άρθρο που αναφέραμε προηγουμένως).

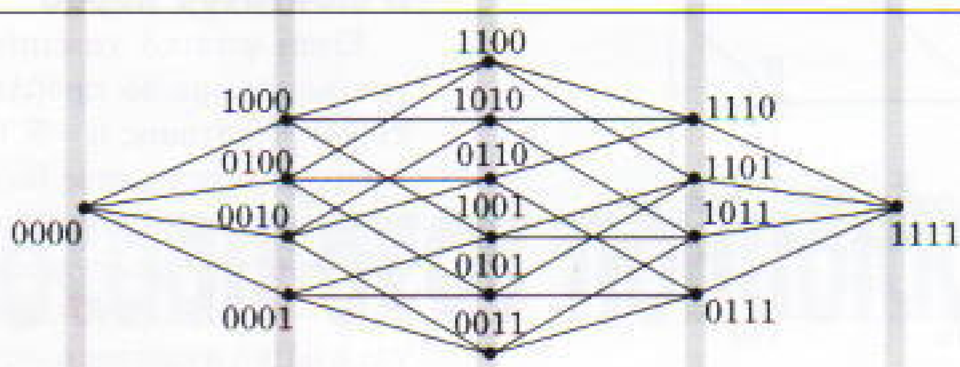
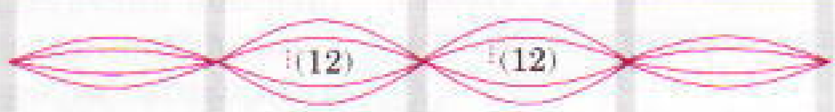
Ίσως αναρωτιέστε τι νόημα έχει το πρόβλημα από φυσική άποψη, μια και ο n-διάστατος κύβος, για $n > 3$, αποτελεί απλώς μια μαθηματική αφαίρεση —δεν υπάρχει «στην πραγματικότητα». Αποδεικνύεται όμως ότι έχει φυσικό νόημα! Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ένα απολύτως «πραγματικό» ερώτημα *φυσικής*. Παρότι ο ίδιος ο n-διάστατος κύβος, για $n > 3$, δεν μπορεί να ενταχθεί στον τρισδιάστατο χώρο μας, ο «δισδιάστατος σκελετός του», «το πλέγμα των ακμών του», εμπίπτει στο χώρο μας δίχως πρόβλημα. Στο Σχήμα 2 (ή στο Σχήμα 5) βλέπετε πώς γίνεται αυτό στην περίπτωση του τετραδιάστατου κύβου. Αλλά και η γενική περίπτωση δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα. Στην πραγματικότητα, είναι δυνατόν να αποδειχτεί ότι κάθε γράφημα (και όχι μόνο αυτό των ακμών του κύβου) μπορεί να ενταχθεί στον τρισδιάστατο χώρο έτσι ώστε να μην τέμνεται με τον εαυτό του. Αυτό είναι ένα μάλλον απλό μαθηματικό θεώρημα, και δεν θα ασχοληθούμε εδώ με την απόδειξή του.

Είναι ενδιαφέρον ότι το γράφημα των

τάξη	0		1		2	Σ
						
πλήθος κορυφών	1	+	2	+	1	= 4
πλήθος ακμών		2	+	2		= 4
κύκλωμα						
αντιστάσεις		1/2	+	1/2		= 1

τάξη	0		1		2		3	Σ
								
πλήθος κορυφών	1	+	3	+	3	+	1	= 8
πλήθος ακμών		3	+	6	+	3		= 12
κύκλωμα								
αντιστάσεις		1/3	+	1/6	+	1/3		= 5/6

Σχήμα 4

τάξη	0	1	2	3	4	Σ
						
πλήθος κορυφών	1 +	4 +	6 +	4 +	1	= 16
πλήθος ακμών	4 +	12 +	12 +	4		= 32
κύκλωμα						
αντιστάσεις	1/4 +	1/12 +	1/12 +	1/4		= 2/3

Σχήμα 5

ακμών του τρισδιάστατου κύβου μπορεί να ενταχθεί χωρίς να τέμνεται με τον εαυτό του όχι μόνο στο χώρο (όπου βρίσκεται εξ ορισμού) αλλά και στο επίπεδο (Σχήμα 1). Αυτό όμως είναι αδύνατον για τον τετραδιάστατο κύβο —και πολύ περισσότερο για τις μεγαλύτερες διαστάσεις. Αυτή είναι μια συνέπεια του γενικού θεωρήματος Kuratowski για τα επίπεδα γραφήματα (δείτε, για παράδειγμα, το άρθρο «Γραφήματα» στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1996 του ελληνικού *Quantum*).

Είναι φανερό ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την R_n με τον ίδιο ουσιαστικά τρόπο με τον οποίο υπολογίσαμε τις R_3 και R_4. Μπορείτε να παρακολουθήσετε την πορεία της απόδειξης στο Σχήμα 6. Η απάντηση είναι

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\binom{n}{k}}, \qquad (1)$$

όπου οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ είναι οι *διωνυμικοί συντελεστές* που δίνονται από τον τύπο

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

και εκφράζουν το πλήθος των κορυφών k τάξης του n-διάστατου κύβου.

Για να αποδείξουμε την εξίσωση (1), πρέπει και πάλι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι κορυφές της ίδιας τάξης είναι ισοδυναμικές. Έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στην απαρίθμηση όλων των ακμών που συνδέουν κορυφές δύο διαδοχικών τάξεων. Το πλήθος των κορυφών τάξης k είναι $\binom{n}{k}$, και καθεμιά από αυτές συνδέεται με $n-k$ κορυφές τάξης $k+1$ (συγκεκριμένα, με τις κορυφές εκείνες των οποίων οι συντεταγμένες προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε με τη μονάδα μία από τις $n-k$ μηδενικές συντεταγμένες της κορυφής τάξης k). Έτσι, το πλήθος των ακμών ισούται με $(n-k)\binom{n}{k}$. Αυτές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι συνδέονται μεταξύ τους παράλληλα, και η ολική τους αντίσταση είναι $1/[(n-k)\binom{n}{k}]$, γεγονός που μας οδηγεί στην εξίσωση (1).

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση (1) μπορεί να γραφτεί ως

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{k}}. \qquad (2)$$

Για τους περισσότερους αναγνώστες μας αυτή η άσκηση δεν πρέπει να παρουσιάσει σοβαρές δυσκολίες. Και στη συνέχεια, ιδού δύο όμορφοι τύποι για την R_n. Θα είναι εύκολο να συναγάγετε τον έναν από τον άλλο, αλλά αποτελεί πραγματική πρόκληση το να αποδείξετε ότι ο καθένας τους δίνει τη σωστή τιμή για την R_n.

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)2^n}. \qquad (3)$$

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε την αναδρομική σχέση

$$R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}R_{n-1}$$

και αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3)) και γεωμετρικά. Επαληθεύστε τους υπολογισμούς μας για τις μικρές τιμές του n χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση και την αρχική τιμή $R_1 = 1$.

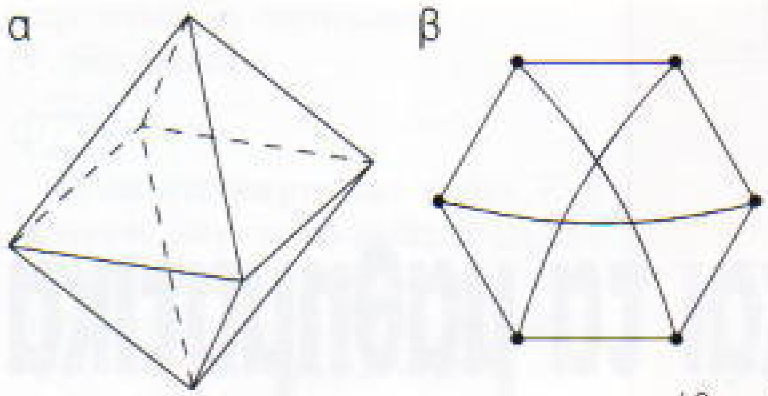
τάξη	0	1	2	...	$k-1$	k	...	$n-1$	n	
πλήθος κορυφών	1 +	n +	$\frac{n(n-1)}{2}$ +	... +		$\binom{n}{k}$ +	... +	n +	1	$= 2^n$
πλήθος ακμών		n	+ $n(n-1)$ +	...	+ $(n-k)\binom{n}{k}$ +		... +		n	= ;
αντιστάσεις		$\frac{1}{n}$	+ $\frac{1}{n(n-1)}$ +	...	+ $\frac{1}{n\binom{n-1}{k}}$ +		... +		$\frac{1}{n}$	= ;

Σχήμα 6

Επεκτάσεις

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την R_n μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα —για παράδειγμα, στο εξής.

Άσκηση 3. Βρείτε την ολική αντίσταση μεταξύ δύο *διαδοχικών* κορυφών ενός τρισδιάστατου συρμάτινου κύβου, αν η αντίσταση κάθε ακμής είναι 1 Ω.



Σχήμα 7

Αντί να αλλάζουμε τα σημεία σύνδεσης του ωμομέτρου, έχει περισσότερο ενδιαφέρον να αλλάξουμε τη μορφή του κυκλώματος. Ιδού ορισμένα παραδείγματα που μπορούν να υπολογιστούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Άσκηση 4. Υποθέτουμε ότι οι αντιστάσεις όλων των συρμάτων που σχηματίζουν τα επόμενα κυκλώματα είναι 1 Ω. Βρείτε την ολική αντίσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων (α) ενός m-γώνου, (β) ενός τετραέδρου, (γ) ενός κυκλώματος με m κόμβους που όλοι συνδέονται ανά δύο, (δ) ενός οκταέδρου (Σχήμα 7α), (ε) ενός εξαγώνου στο οποίο είναι συνδεδεμένες οι απέναντι κορυφές (Σχήμα 7β).

Και τώρα, σας έχουμε μια έκπληξη: όλοι οι τύποι των δύο τελευταίων ασκήσεων είναι ειδικές περιπτώσεις ενός γενικού τύπου. Πριν τον γράψουμε, μπορείτε να δοκιμάσετε να τον συναγάγετε μόνοι σας —σας κάνουμε απλώς μια μικρή υπόδειξη: σε όλα αυτά τα κυκλώματα, η ζητούμενη αντίσταση εκφράζεται συναρτήσει δύο αριθμών: του πλήθους m των κόμβων και του πλήθους s των ακμών που ξεκινούν από κάθε κόμβο.

Πρόβλημα 3. Υποθέτουμε ότι ένα κύκλωμα έχει m κόμβους και ότι κάθε κόμβος συνδέεται μέσω συρμάτων αντίστασης 1 Ω με s άλλους κόμβους. Υποθέτουμε επίσης ότι όλα τα σύρματα είναι «ισοδύναμα», με την έννοια ότι για οποιεσδήποτε δύο ακμές AB και CD μπορούμε να ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ κόμβων, έτσι ώστε οι κόμβοι A και B να αντιστοιχούν στους C και D και κάθε ζεύγος κόμβων θα είναι συνδεδεμένο αν και μόνο αν συνδέονται οι αντίστοιχοί τους κόμβοι. Τότε,[2] η αντίσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων ισούται με

$$R = \frac{2}{s}\left(1 - \frac{1}{m}\right). \qquad (4)$$

Αν εφαρμόσουμε αυτό τον τύπο στον πρωταγωνιστή της ιστορίας μας, τον n-διάστατο κύβο ($m = 2^n$, $s = n$), παίρνουμε την ολική αντίσταση μεταξύ των άκρων μιας ακμής

$$R = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Προσπαθήστε να επαληθεύσετε μόνοι σας το αποτέλεσμα. Είναι ενδιαφέρον ότι αυτός ο τύπος ισχύει και για κάθε άπειρο κύκλωμα.

Πρόβλημα 4. Αποδείξτε τον τύπο (4) για άπειρα τετραγωνικά ($s = 4$, $m = \infty$), τριγωνικά ($s = 6$, $m = \infty$) και εξαγωνικά πλέγματα ($s = 3$, $m = \infty$) του επιπέδου.

Ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον (αλλά δυστυχώς, καθόλου στοιχειώδες!) είναι το πρόβλημα του υπολογισμού της αντίστασης μεταξύ δύο *διαγωνίως* διαδοχικών κόμβων ενός άπειρου τετραγωνικού πλέγματος αντιστάσεων 1 Ω· παρότι δεν φαίνεται να υπάρχει καμία σύνδεση του προβλήματος με τον κύκλο, η απάντηση είναι $2/\pi$ Ω.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

2. Στο αρχικό άρθρο, που δημοσιεύτηκε πριν από λίγο καιρό στο ρωσικό *Kvant*, οι συγγραφείς παραλείπουν την απαίτηση για ισοδυναμία των ακμών. Χωρίς τη συνθήκη της ισοδυναμίας, όμως, ο τύπος δεν ισχύει: ακόμη και στο ίδιο κύκλωμα η αντίσταση μεταξύ των άκρων διαφορετικών ακμών μπορεί να είναι διαφορετική (θεωρήστε, για παράδειγμα, το κύκλωμα ενός συρμάτινου τριγωνικού πρίσματος). Παρότι δεν το επιβεβαιώσαμε, αυτή η επιπρόσθετη απαίτηση αρκεί, κατά πάσα πιθανότητα, για να αληθεύει η πρόταση.

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M76

Τριπλή δευτεροβάθμια. Είναι δυνατόν να βρεθούν τρία δευτεροβάθμια πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, τέτοια ώστε η εξίσωση $f(g(h(x))) = 0$ να έχει τις οκτώ ρίζες 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και 8; (S. Tokarev)

M77

Ο τρίτος κύκλος. Έστω A ένα από τα σημεία τομής δύο κύκλων του επιπέδου. Σχεδιάζουμε σε κάθε κύκλο μια διάμετρο παράλληλη προς την εφαπτόμενη στον άλλο κύκλο στο σημείο A. Αποδείξτε ότι τα άκρα των διαμέτρων ανήκουν σε έναν κύκλο. (S. Berlov)

M78

Αθροίσματα πολυωνυμικών μετατοπίσεων. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο $f(x)$ άρτιου βαθμού υπάρχει ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε το πολυώνυμο

$$F_k(x) = f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \ldots + f(x+k)$$

να μην έχει πραγματικές ρίζες.

(β) Αποδείξτε ότι, όταν ένα πολυώνυμο $f(x)$ είναι περιττού βαθμού, τότε για κάποιο συγκεκριμένο k το πολυώνυμο $F_k(x)$ που ορίσαμε προηγουμένως έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα. (S. Berlov, K. Kohas)

M79

Η πληρωμή του Σίσυφου. Ο Σίσυφος άρχισε μια νέα δουλειά: υπάρχουν τρεις σωροί με μεγάλες πέτρες που πρέπει να μετακινεί, μία πέτρα την κάθε φορά, από τον ένα σωρό στον άλλο. Ο Δίας τού δίνει για κάθε πέτρα που μεταφέρει ένα ποσό νομισμάτων ίσο με τη διαφορά μεταξύ του πλήθους των πετρών του σωρού στον οποίο προστίθεται η πέτρα και του σωρού απ' όπου αφαιρείται. (Η μετακινούμενη πέτρα δεν περιλαμβάνεται σ' αυτό τον υπολογισμό· έτσι, όταν ο Σίσυφος μεταφέρει μια πέτρα από ένα σωρό με a πέτρες σ' ένα σωρό με b πέτρες, παίρνει $b - a - 1$ νομίσματα.) Όταν η διαφορά είναι αρνητική, ο Σίσυφος επιστρέφει το αντίστοιχο ποσό στον Δία. (Αν δεν έχει χρήματα, ο μεγαλόθυμος Δίας τού επιτρέπει να μεταφέρει την πέτρα επί πιστώσει.) Κάποια στιγμή, όλες οι πέτρες βρίσκονται στους αρχικούς τους σωρούς. Ποιο είναι το μεγαλύτερο χρηματικό ποσό που θα μπορούσε να έχει συγκεντρώσει ο Σίσυφος μέχρι εκείνη τη στιγμή; (I. Izmestyev)

M80

Διαιρετότητα μερικών αθροισμάτων. Υπάρχει ακολουθία θετικών ακεραίων που περιέχει όλους τους θετικούς ακεραίους μία μόνο φορά, τέτοια ώστε το άθροισμα των πρώτων k όρων της να διαιρείται με το k για κάθε $k = 1, 2, 3, \ldots$; (A. Shapovalov)

Φυσική

Φ76

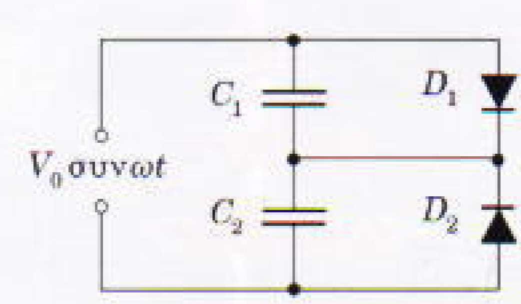
Ο γυμναστής στο τραμπολίνο. Ένας γυμναστής πέφτει από ύψος $H = 12$ m σ' ένα οριζόντιο ελαστικό τραμπολίνο και βυθίζεται μέσα του σε μήκος $h = 1$ m. Εκτιμήστε πόσο μεγαλύτερη από το βάρος του γυμναστή είναι η μέγιστη δύναμη που ασκεί το τραμπολίνο σ' αυτόν, αν θεωρήσετε ότι οι διαστάσεις του τραμπολίνο είναι πολύ μεγαλύτερες του h και ότι η μάζα του είναι αμελητέα. (A. Izergin, S. Manida, V. Saulit)

Φ77

Τριχοειδής σωλήνας. Ένας τριχοειδής σωλήνας σχήματος Π, με μήκος σκελών $\ell = 10$ cm και διαμέτρους $d_1 = 0{,}1$ mm και $d_2 = 0{,}2$ mm αντίστοιχα, βυθίζεται αργά, με τα δύο στόμιά του προς τα κάτω, σε δοχείο με νερό. Βρείτε τη θέση της στάθμης του νερού στο φαρδύ σκέλος, όταν στο στενό η στάθμη του νερού βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτή στο δοχείο. Αμελήστε τον όγκο του οριζόντιου τμήματος του σωλήνα. Θεωρήστε την ατμοσφαιρική πίεση σταθερή. Ο συντελεστής επιφανειακής τάσης είναι $\sigma = 0{,}07$ N/m. (B. Bukhovtsev)

Φ78

Κύκλωμα με διόδους. Το κύκλωμα του σχήματος αποτελείται από δύο πυκνωτές χωρητικοτήτων C_1 και C_2 ($C_2 > C_1$) και δύο ιδανικές διόδους D_1 και D_2, και τροφοδοτείται από γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης $V = V_0 συνωt$. Βρείτε στη μόνιμη κατάσταση πώς μεταβάλλεται με το χρόνο η τάση στις άκρες κάθε πυκνωτή,



και παραστήστε αυτές τις μεταβολές γραφικά. (Η ιδανική δίοδος έχει μηδενική αντίσταση όταν το ηλεκτρικό πεδίο που εφαρμόζεται έχει την αγώγιμη φορά, και άπειρη αντίσταση

στην αντίθετη περίπτωση.)
(V. Skorovarov)

Φ79

Μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό (δηλαδή το μέτρο του μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $B = kt$). Με ένα κομμάτι χαλκού πυκνότητας d, μάζας m και ειδικής αντίστασης ρ φτιάχνουμε ένα ομογενές σύρμα, το οποίο στη συνέχεια λυγίζουμε σχηματίζοντας έναν κλειστό βρόχο. Πόσο είναι το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να διαρρέει τον εν λόγω βρόχο, αν τον τοποθετήσουμε κάθετα μέσα στο μαγνητικό πεδίο;
(I. Slobodetsky)

Φ80

Φακός από δύο μισά. Ένας κυκλικός φακός διαμέτρου D αποτελείται από δύο ημικυκλικούς φακούς συγκολλημένους κατά διάμετρο. Οι εστιακές αποστάσεις των ημικυκλικών φακών είναι F και $2F$. Μια σημειακή πηγή φωτός τοποθετείται σε απόσταση a μπροστά από το φακό και επί του κύριου οπτικού του άξονα, και μια οθόνη σε απόσταση $2a$ πίσω από το φακό και κάθετα στον κύριο οπτικό του άξονα. Μελετήστε γραφικά πώς μεταβάλλεται η λαμπρότητα του ειδώλου κατά μήκος της οθόνης όταν η φωτεινή πηγή μετακινείται στον κύριο οπτικό άξονα του φακού.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65


To cherry blossoms row
S. Ivanov

Το πρόβλημα του Borsuk

*«Για τις ανθισμένες κερασιές κίνησα...
Μα το κουπί πάγωσε στο χέρι μου:
Ιτιές σκεπάζαν την ακτή.»*
—Basho[1]

Arkady Skopenkov

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

ΤΟ 1933 Ο ΠΟΛΩΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ Karol Borsuk απέδειξε το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε φραγμένο επίπεδο σχήμα μπορεί να χωριστεί σε τρία τμήματα μικρότερης διαμέτρου.*

(Διάμετρος ενός σχήματος είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων του.)

Επίσης, πρότεινε την ακόλουθη γενίκευση του αποτελέσματός του, η οποία υπήρξε για χρόνια ένα από τα συναρπαστικότερα προβλήματα της συνδυαστικής γεωμετρίας:

ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ BORSUK. *Κάθε φραγμένο n-διάστατο σχήμα μπορεί να διαιρεθεί σε $n + 1$ τμήματα μικρότερης διαμέτρου.*

Αυτό αληθεύει προφανώς για $n = 1$. Επίσης, μπορούμε εύκολα να βρούμε n-διάστατα σχήματα που είναι αδύνατον να διαιρεθούν σε n τμήματα μικρότερης διαμέτρου. Για $n = 3$, το απλούστερο παράδειγμα είναι το κανονικό τετράεδρο: η διάμετρός του ισούται με το μήκος της ακμής του και, ανεξάρτητα από το πώς θα χωριστεί σε τρία τμήματα, ένα από αυτά θα περιέχει δύο από τις τέσσερις κορυφές —δηλαδή, θα έχει την ίδια διάμετρο με ολόκληρο το στερεό. Το παράδειγμα αυτό γενικεύεται άμεσα σε οποιαδήποτε διάσταση: το αντίστοιχο n-διάστατο πολύεδρο με τις $n + 1$ ισαπέχουσες κορυφές ονομάζεται n-διάστατο άπλοκο.

Άσκηση 1. Γράψτε τις συντεταγμένες των κορυφών ενός τετραδιάστατου κανονικού άπλοκου.

Η εικασία του Borsuk αποδείχτηκε για τις τρεις διαστάσεις το 1955, από τον άγγλο μαθηματικό H.G. Eggleston.[2] Αργότερα η εικασία αποδείχτηκε για τη n-διάστατη σφαίρα και για τα κεντρικώς συμμετρικά κυρτά σώματα, και μετά για όλα τα λεία στερεά (αυτά που δεν περιέχουν «γωνίες»). Η πλήρης λύση έμοιαζε να απέχει μία μόλις ανάσα. Το 1993, όμως, δύο ισραηλινοί μαθηματικοί, ο D. Kahn και ο G. Kalai, ακολουθώντας μια ιδέα των Erdös, Larman και Boltyansky που αφορούσε τη χρήση συνδυαστικών επιχειρημάτων για την κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος, ανακάλυψαν ένα αντιπαράδειγμα στην εικασία του Borsuk! Απέδειξαν ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο κορυφών του n-διάστατου κύβου μπορεί να διασπαστεί σε τμήματα μικρότερης διαμέτρου μόνο όταν το πλήθος των τμημάτων αυξάνει με το n σε αναλογία ίση, κατά προσέγγιση, με $1{,}2^{\sqrt{n}}$. Όταν το n είναι αρκετά μεγάλο, το πλήθος αυτό είναι, φυσικά, μεγαλύτερο από το $n + 1$.

Έτσι, η υπόθεση απλώς κατέρρευσε! Τέτοιες καταστροφές, πάντως, δεν είναι και τόσο σπάνιες στα μαθηματικά.

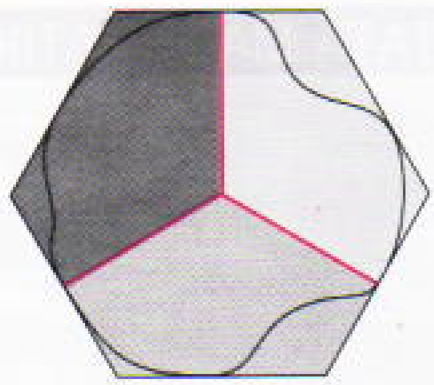
Η κατασκευή αυτού του αντιπαραδείγματος είναι ένα από τα ελάχιστα σημαντικά αποτελέσματα των σύγχρονων μαθηματικών που για να γίνουν κατανοητά, όχι βέβαια σε όλες τις λεπτομέρειές τους, δεν απαιτούν την παρακολούθηση ενός εξάμηνου ειδικού πανεπιστημιακού προγράμματος. Κύριος σκοπός του παρόντος άρθρου, λοιπόν, είναι η περιγραφή αυτής της αξιοσημείωτης εφαρμογής της συνδυαστικής στη γεωμετρία. Πριν ασχοληθούμε με αυτήν, όμως, θα ήθελα να κάνω ορισμένες παρεκβάσεις, που σκοπεύουν να ξεκαθαρίσουν τις ιδέες οι οποίες κρύβονται πίσω από την κατασκευή και να συλλάβουν το πνεύμα του προβλήματος.

Το πρόβλημα του Borsuk στο επίπεδο

Θα ξεκινήσω με μια περιγραφή της λύσης του προβλήματος στη δισδιάστατη περίπτωση. Πρακτικά δεν έχει σχέση με το αντιπαράδειγμα αυτό καθ' εαυτό, αλλά είναι από μόνη της χρήσιμη και επιδεικνύει το εύρος των ιδεών που συνδέονται με το πρόβλημα.

1. Ιάπωνας ποιητής (1644-1694). (Σ.τ.μ.)

2. Μια απλοποιημένη μορφή αυτής της απόδειξης μπορείτε να βρείτε στο *Results and Problems in Combinatorial Geometry* των V. Boltyansky και I. Gohberg (Cambridge University Press, 1985).



Σχήμα 1

Παρατηρούμε ότι ένα κανονικό εξάγωνο είναι δυνατόν να χωριστεί σε τρία πεντάγωνα μικρότερης διαμέτρου (Σχήμα 1). Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε επίπεδο σχήμα Φ μπορεί να καλυφθεί από ένα εξάγωνο της ιδίας διαμέτρου d = διαμ.Φ —δηλαδή, με ένα εξάγωνο οι απέναντι πλευρές του οποίου έχουν απόσταση d. Η κατασκευή αυτού του εξαγώνου βασίζεται στην έννοια της συνέχειας.

Ας θεωρήσουμε μια σταθερή προσανατολισμένη ευθεία ℓ στο επίπεδο. Περιγράφουμε το δεδομένο σχήμα Φ με το (μικρότερο δυνατό) παραλληλόγραμμο $P_a = ABCD$ με $\angle BAD = 60^\circ$, και έτσι ώστε η γωνία μεταξύ της ℓ και της AB να ισούται με a (Σχήμα 2). Απομακρύνουμε τις απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου σε απόσταση d και το μετασχηματίζουμε σ' ένα ρόμβο R_a με το ίδιο κέντρο. Αποκόπτουμε τα μεγαλύτερα δυνατά ισόπλευρα τρίγωνα από τις δύο γωνίες 60° του ρόμβου έτσι ώστε το σχήμα Φ να καλύπτεται ακόμη από το εξάγωνο που απομένει, και συμβολίζουμε με $h_A(a)$ και $h_C(a)$ τα ύψη των δύο ισόπλευρων τριγώνων (όπως στο Σχήμα 2). Όταν η πλευρά AB εκτελέσει μια ημιστροφή, προκύπτουν το ίδιο παραλληλόγραμμο και ο ίδιος ρόμβος όπως αρχικά ($P_{a+180^\circ} = P_a$ και $R_{a+180^\circ} = R_a$), με τη διαφορά ότι τα A, C (και τα B, D) εναλλάσσουν τις θέσεις τους. Αυτό σημαίνει ότι $h_A(a + 180^\circ) - h_C(a + 180^\circ) = h_A(a) - h_C(a)$. Αφού η διαφορά $f(x) = h_A(a) - h_C(a)$ είναι συνεχής συνάρτηση του a, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής και να συμπεράνουμε ότι $h_A(a_0) = h_C(a_0)$ για κάποια συγκεκριμένη γωνία a_0, με $a \le a_0 \le a + 180^\circ$ (διότι είτε $f(a) = f(a + 180^\circ) = 0$ είτε τα $f(a)$ και $f(a + 180^\circ)$ έχουν διαφορετικά πρόσημα). Για τη γωνία $a + a_0$, η απόσταση ανάμεσα στις τομές με τις οποίες αποκόπτουμε τα τρίγωνα είναι μικρότερη ή ίση με d, οπότε μπορούμε να απομακρύνουμε τις τομές, αν χρειάζεται, ώστε η απόσταση να γίνει ακριβώς ίση με d και έτσι να προκύψει το ζητούμενο εξάγωνο.

Γεωμετρία του συνόλου των υποσυνόλων

Η κατασκευή των Kahn-Kalai βασίζεται στην εκτίμηση του πλήθους συγκεκριμένων υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου. Θα ξεκινήσουμε λοιπόν καθορίζοντας τη σύνδεση μεταξύ αυτών των υποσυνόλων και των κορυφών ενός πολυδιάστατου κύβου.

Ας αναπαραστήσουμε τα υποσύνολα του πεπερασμένου συνόλου $X = \{1, 2, ..., n\}$ ως σημεία του επιπέδου. Θα διευθετήσουμε αυτά τα σημεία σε $n + 1$ «ορόφους» —δηλαδή, σε οριζόντιες ευθείες αριθμημένες με 0, 1, ..., n από κάτω προς τα πάνω. Το κενό σύνολο $\varnothing$ θα τοποθετηθεί στο «ισόγειο» (μηδενικός όροφος), τα σύνολα με ένα στοιχείο, $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$ στον πρώτο, κ.ο.κ. Στον τελευταίο (n-οστό) όροφο, υπάρχει ένας μόνο «ένοικος»: ολόκληρο το σύνολο X. Το πλήθος των σημείων στον k-οστό όροφο ισούται με

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}.$$

(Δείτε το άρθρο «Ο πολυδιάστατος κύβος» στο παρόν τεύχος.)

Συνδέουμε με μια ευθεία κάθε ζεύγος σημείων του διαγράμματός μας που αντιστοιχεί σε σύνολα τα οποία διαφέρουν κατά ένα στοιχείο —τα σημεία αυτά θα βρίσκονται πάντα σε γειτονικούς ορόφους. Το Σχήμα 3 παρουσιάζει τα γραφήματα που προκύπτουν για $n = 0, 1, 2, 3$.

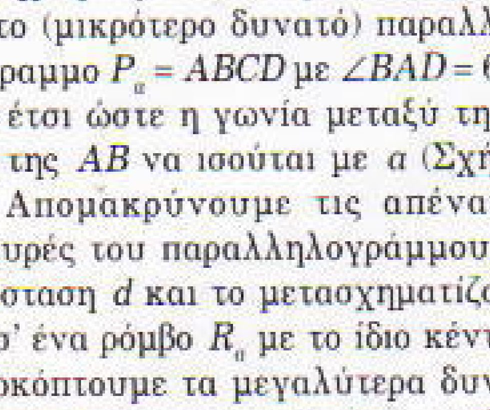
Άσκηση 2. Σχεδιάστε το γράφημα για $n = 4$.

Τι προκύπτει λοιπόν; Ναι, είναι n-διάστατοι κύβοι —ακριβέστερα, τα γραφήματα των κορυφών και των ακμών τους. Αυτό είναι φανερό για μικρές τιμές του n. Για τις περιπτώσεις $n \ge 4$, μπορείτε να ανατρέξετε στο άρθρο που προαναφέραμε, όπου θα βρείτε μια λεπτομερή παρουσίαση αυτών των περίπλοκων αντικειμένων. Πάντως, η «απέριττη» εκδοχή του κύβου —αυτή που περιλαμβάνει μόνο τις κορυφές— είναι απόλυτα επαρκής για τους σκοπούς μας. Στην πραγματικότητα, θα ασχοληθούμε μόνο με τις κορυφές του «κανονικού» μοναδιαίου κύβου —δηλαδή, με n-ψήφια σύνολα από μηδενικά και μονάδες.

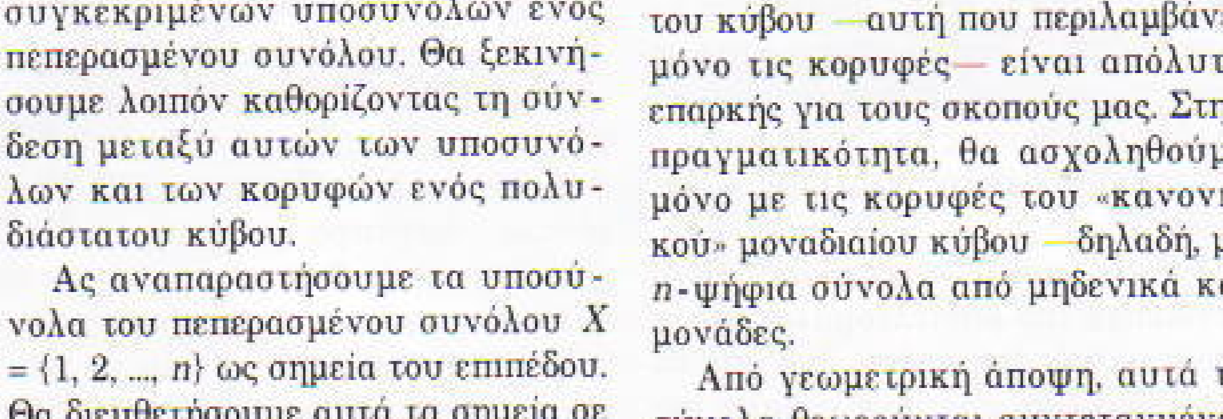
Από γεωμετρική άποψη, αυτά τα σύνολα θεωρούνται συντεταγμένες σημείων (των κορυφών του κύβου) του n-διάστατου χώρου. Η απόσταση μεταξύ δύο τέτοιων σημείων $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ και $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ ορίζεται από τον γνωστό τύπο

$$\sqrt{(a_1-\beta_1)^2 + (a_2-\beta_2)^2 + \ldots + (a_n-\beta_n)^2}.$$

Στόχος μας είναι να επιλέξουμε ένα υποσύνολο από αυτά τα σημεία το



Σχήμα 2



Σχήμα 3

οποίο δεν θα είναι δυνατόν να διαμεριστεί σε $n+1$ τμήματα με διάμετρο μικρότερη από αυτήν ολόκληρου του υποσυνόλου. Θα ήταν πιο βολικό να αναφερόμαστε σε τετράγωνα αποστάσεων και όχι στις ίδιες τις αποστάσεις (αυτό δεν αλλάζει το πρόβλημα). Ωστόσο, για τα εν λόγω σημεία (με τα a_i και β_i ίσα με 0 ή 1), $(a_i - \beta_i)^2 = |a_i - \beta_i|$, και επομένως μπορούμε να μετράμε τις αποστάσεις με τον τύπο $|a_1 - \beta_1| + |a_2 - \beta_2| + \dots + |a_n - \beta_n|$, που ορίζει τη λεγόμενη *απόσταση Hamming*. Η απόσταση αυτή μπορεί να περιγραφεί ως το πλήθος των «διαφορών» μεταξύ των a και β —δηλαδή, το πλήθος των ψηφίων της μιας από τις δύο ακολουθίες που είναι διαφορετικά από τα αντίστοιχα ψηφία της άλλης.

Από συνδυαστική άποψη, κάθε σημείο $(a_1, \dots, a_n)$ μπορεί να συνδεθεί με το υποσύνολο A του X που αποτελείται από όλους εκείνους τους αριθμούς i για τους οποίους έχουμε $a_i = 1$. Παρατηρήστε ότι με όρους υποσυνόλων η απόσταση Hamming ισούται με το πλήθος των σημείων που ανήκουν στο ένα ακριβώς από τα δύο υποσύνολα. Το σύνολο όλων αυτών των σημείων ονομάζεται *συμμετρική διαφορά* των υποσυνόλων.

Ας δούμε πώς ενεργεί

Για να συνηθίσουμε αυτή την αντιστοιχία, ας λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα.

Καλύτεροι με τον δικό τους τρόπο. Όλοι όσοι διαγωνίστηκαν σε μια μαθηματική ολυμπιάδα κέρδισαν ένα ειδικό προσωπικό βραβείο, επειδή ήταν αδύνατον να συγκριθούν οι επιδόσεις τους: κανένας δεν έλυσε όλα τα προβλήματα που είχε λύσει κάποιος άλλος. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος διαγωνιζομένων, αν το συνολικό πλήθος των προβλημάτων είναι n;

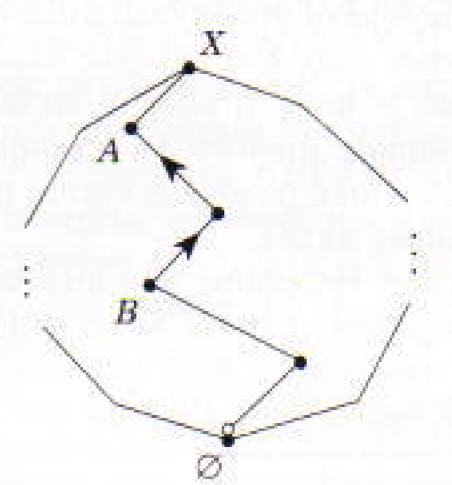
Κάθε διαγωνιζόμενος χαρακτηρίζεται από το πλήθος των προβλημάτων που έλυσε. Κανένα από αυτά τα σύνολα δεν περιέχεται σε κάποιο άλλο. Αν ονομάσουμε *μη συγκρίσιμη* μια τέτοια συλλογή συνόλων, το πρόβλημά μας μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής: «βρείτε το μεγαλύτερο μέγεθος μιας μη συγκρίσιμης οικογένειας υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων».

Παρατηρούμε ότι όλα τα υποσύνολα k στοιχείων του συνόλου $X = \{1, 2, \dots, n\}$ (δηλαδή, «τα σημεία του k-οστού ορόφου») σχηματίζουν μια μη συγκρίσιμη οικογένεια. Το μέγεθος αυτής της οικογένειας είναι $\binom{n}{k}$.

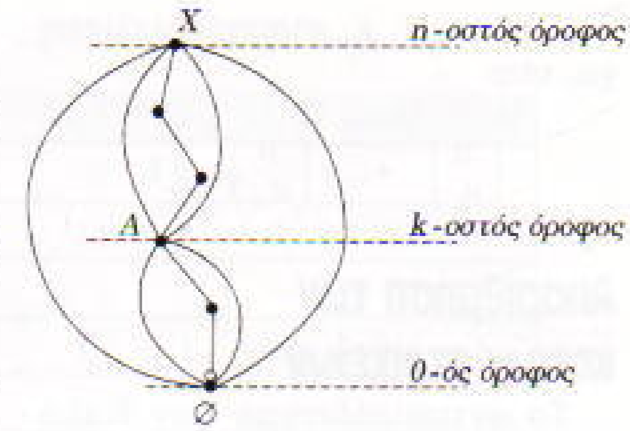
Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι το $\binom{n}{k}$ παίρνει τη μέγιστή του τιμή για $k = [n/2]$, όπου με $[a]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του a.

Επομένως, υπάρχει μια μη συγκρίσιμη οικογένεια αποτελούμενη από $\binom{n}{[n/2]}$ υποσύνολα. Θα αποδείξουμε ότι αυτό το πλήθος δεν μπορεί να αυξηθεί. Ας χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση των συνόλων ως κορυφών του n-διάστατου κύβου. Ένα υποσύνολο A περιέχει το υποσύνολο B αν είναι δυνατόν να καταλήξουμε από το B στο A προσθέτοντας σταδιακά ένα πλήθος στοιχείων. Αυτός ο βαθμιαίος μετασχηματισμός του B στο A αντιστοιχεί σε μια διαδρομή του γραφήματός μας η οποία αποτελείται από μια συνεχή σειρά ακμών που κατευθύνονται προς τα πάνω και συνδέουν το B με το A. Θα ονομάζουμε αλυσίδα κάθε τέτοια διαδρομή από τη χαμηλότερη κορυφή $\varnothing$ έως την υψηλότερη X (Σχήμα 4). Επομένως, $B \subset A$ αν και μόνο αν τα αντίστοιχα σημεία (που ταυτίζουμε με τα υποσύνολα) ανήκουν σε μια αλυσίδα στην οποία το B βρίσκεται χαμηλότερα από το A. Έπεται ότι μια αλυσίδα διέρχεται το πολύ από ένα σημείο μιας μη συγκρίσιμης οικογένειας, γεγονός που μας οδηγεί στην επόμενη σχέση:

(μέγεθος οποιασδήποτε μη συγκρίσιμης οικογένειας) $\le$ *(συνολικό πλήθος αλυσίδων)* $\div$ *(ελάχιστο πλήθος αλυσίδων που διέρχονται από ένα σημείο).*



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Ας υπολογίσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του δεξιού μέλους. Κάθε αλυσίδα $\varnothing \subset \{i_1\} \subset \{i_1, i_2\} \subset \dots \subset \{i_1, \dots, i_n\} = X$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τη σειρά με την οποία θα συμπεριλάβουμε τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$, κατά την κίνησή μας από το $\varnothing$ στο X —δηλαδή, από τις μεταθέσεις $(i_1, \dots, i_n)$ του συνόλου X. Είναι γνωστό ότι το πλήθος αυτών των μεταθέσεων είναι $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, και αυτός είναι ο αριθμητής μας. Ας θεωρήσουμε τώρα τις αλυσίδες που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A του k-*οστού* ορόφου. Το σημείο A χωρίζει καθεμία από αυτές σε ένα άνω και σε ένα κάτω τμήμα (Σχήμα 5). Αφού το A έχει k στοιχεία, τα υποσύνολά του σχηματίζουν έναν k-διάστατο κύβο, ο οποίος περιέχει το κάτω τμήμα όλων των αλυσίδων που διέρχονται από το A. Επομένως, το πλήθος των κάτω τμημάτων ισούται με $k!$. Παρόμοια, κάθε σύνολο που περιέχει το A προκύπτει από το A με την προσθήκη ενός υποσυνόλου της συνολοδιαφοράς $X \backslash A$. Αφού τα υποσύνολα του $(n-k)$ στοιχείων συνόλου $X \backslash A$ σχηματίζουν έναν $(n-k)$-διάστατο κύβο, το πλήθος των άνω τμημάτων των αλυσίδων που διέρχονται από το A ισούται με $(n-k)!$, και το συνολικό πλήθος αυτών των αλυσίδων είναι $k!(n-k)!$. Το πλήθος αυτό γίνεται ελάχιστο για $k = [n/2]$ (συγκρίνετε με την Άσκηση 3). Συνεπώς, το μέγεθος μιας μη συγκρίσιμης οικογένειας είναι το πολύ

$$\frac{n!}{[n/2]!(n-[n/2])!} = \binom{n}{[n/2]},$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι, αν τα υποσύνολα $A_1, \dots, A_m$ ενός συνόλου n στοιχείων σχηματίζουν μια μη συγκρίσιμη οικογένεια και αποτελούνται από $a_1, ..., a_m$ στοιχεία, αντίστοιχα, τότε

$$\binom{n}{a_1}^{-1} + ... + \binom{n}{a_m}^{-1} \le 1.$$

Απαρίθμηση των κοινών στοιχείων

Το αντιπαράδειγμα των Kahn-Kalai είναι μια εξαιρετικά πολύπλοκη «πολυώροφη» δομή που περιέχει σύνολα, σύνολα συνόλων και ακόμη σύνολα από σύνολα συνόλων. Έτσι, προσπάθησα να επινοήσω μερικά προβλήματα στα οποία κάποιες από τις βασικές ιδέες εμφανίζονται με περισσότερο απτή, αν όχι κοινότοπη μορφή. Είναι φυσικό, λοιπόν, το ότι μερικές διατυπώσεις είναι μάλλον παράδοξες (είναι τεχνητά προβλήματα), αλλά ελπίζω πως θα σας βοηθήσουν να κατανοήσετε τα βασικά σημεία της κατασκευής που θα ακολουθήσει. Παρεμπιπτόντως, το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε κατά την προετοιμασία της ρωσικής ομάδας πριν από τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Η δωδεκάδα του ζαχαροπλάστη. Μια οικοδέσποινα μπορεί να φτιάξει k διαφορετικά είδη κέικ. Κάποτε προσκάλεσε 66 άτομα σε μια μεγάλη δεξίωση, στην οποία κάθε ομάδα 36 ατόμων έφαγε από ένα κέικ. Αποδείχτηκε ότι δεν υπήρξαν δύο ομάδες που να έφαγαν το ίδιο είδος κέικ και να περιλαμβάνουν 18 ακριβώς κοινά άτομα. Αποδείξτε ότι η ζαχαροπλαστική ικανότητα της οικοδέσποινας είναι αρκετή για να καλέσει σε δείπνο 12 άτομα και να προσφέρει σε κάθε ομάδα 6 προσκεκλημένων από ένα κέικ έτσι ώστε να μην υπάρχουν ομάδες που θα πάρουν το ίδιο είδος κέικ και θα έχουν 3 ακριβώς κοινά άτομα.

Λύση. Διαιρούμε τους 66 καλεσμένους της δεξίωσης σε 11 ομάδες $G_1, ..., G_{11}$, των 6 ατόμων. Αριθμούμε τους 12 καλεσμένους στο δείπνο με 0, 1, 2, ..., 11. Προσφέρουμε σε κάθε ομάδα $\{i_1, i_2, ..., i_6\}$ (όπου $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_6 \le 11$) ένα κέικ του ίδιου είδους με αυτό που έφαγε στη δεξίωση η ομάδα $G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_6}$ όταν $i_1 \ne 0$, ή ίδιο με αυτό που έφαγε η ομάδα $\overline{G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_6}}$ (δηλαδή, οι καλεσμένοι που δεν περιλαμβάνονται[3] στο σύνολο $G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_6}$) αν $i_1 = 0$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι με αυτή την κατανομή των κέικ ικανοποιείται η συνθήκη για το δείπνο. (Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι δύο ομάδες $\{i_1, i_2, ..., i_6\}$ και $\{j_1, j_2, ..., j_6\}$ με $i_1 \ne 0$ και $j_1 \ne 0$ έχουν τρία άτομα κοινά —ας πούμε τα a, b, c—, τότε οι αντίστοιχες ομάδες στη δεξίωση $G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_6}$ και $G_{j_1} \cup G_{j_2} \cup ... \cup G_{j_6}$ θα είχαν 18 άτομα κοινά —την ένωση $G_a \cup G_b \cup G_c$—, αντίθετα προς την υπόθεση του προβλήματος.)

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι η πρόταση του προβλήματος παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς 66, 36, 18 και 12, 6, 3 με τους $(4n-1)k$, $2nk$, nk και $4n$, $2n$, n, αντίστοιχα.

Η λύση που δώσαμε προηγουμένως βρέθηκε από τα μέλη της ολυμπιακής ομάδας. Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό στην πραγματικότητα προέκυψε ως συνέπεια του επόμενου προβλήματος, το οποίο θα ρίξει κάποιο φως στην πηγή των μάλλον ασυνήθιστων αριθμητικών τιμών που εμφανίζονται και στα δύο.

Προεξέχουσες ακμές. Θεωρούμε ένα σύνολο 12 σημείων και ενώνουμε ανά δύο τα σημεία του με ακμές. Θα λέμε ότι μια ακμή *προεξέχει* από ένα δεδομένο υποσύνολο αυτών των σημείων όταν ένα ακριβώς άκρο της ανήκει σ' αυτό. Αποδείξτε ότι δύο οποιαδήποτε υποσύνολα έξι σημείων έχουν τουλάχιστον 18 κοινές προεξέχουσες ακμές.

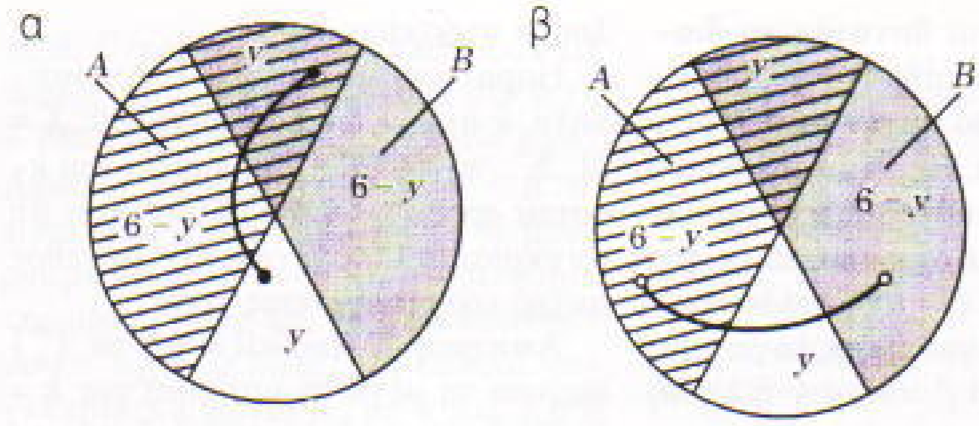
Λύση. Θεωρούμε δύο υποσύνολα έξι σημείων, A και B. Έστω y το πλήθος των κοινών τους σημείων. Μια ακμή προεξέχει και από τα δύο υποσύνολα αν και μόνο αν είτε το ένα από τα άκρα της ανήκει και στα δύο υποσύνολα (δηλαδή, στο $A \cap B$) ενώ το άλλο δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο (δηλαδή, βρίσκεται στο $\overline{A} \cap \overline{B}$), είτε το ένα άκρο ανήκει στο A αλλά όχι στο B (βρίσκεται στο $A \cap \overline{B}$) ενώ το άλλο ανήκει στο B αλλά όχι στο A (βρίσκεται στο $\overline{A} \cap B$). Το πλήθος των ακμών του πρώτου είδους είναι y^2 (Σχήμα 6α), ενώ το πλήθος των ακμών του δεύτερου είδους είναι $(6-y)^2$ (Σχήμα 6β). Συνεπώς, το πλήθος των ακμών που προεξέχουν και από τα δύο υποσύνολα είναι

$$y^2 + (6-y)^2 \ge \frac{\left(y + (6-y)\right)^2}{2} = 18$$

(διότι, όπως ίσως θέλετε να επιβεβαιώσετε μόνοι σας, $a^2 + b^2 \ge (a+b)^2/2$). Παρατηρήστε ότι η τιμή 18 λαμβάνεται μόνο όταν $y = 3$· επομένως, όταν το πλήθος των ακμών που προεξέχουν ταυτόχρονα από δύο σύνολα έξι σημείων δεν είναι 18, τότε το πλήθος των κοινών σημείων αυτών των συνόλων δεν είναι 3. Παρατηρήστε επίσης ότι το πλήθος όλων των ακμών που συνδέουν 12 σημεία είναι $\binom{12}{2} = 66$ και ότι το πλήθος των ακμών που προεξέχουν από ένα σύνολο έξι σημείων είναι $6 \cdot 6 = 36$. Συγκρίνετε τώρα αυτούς τους αριθμούς με τους αριθμούς στο πρόβλημα της «δωδεκάδας του ζαχαροπλάστη»!

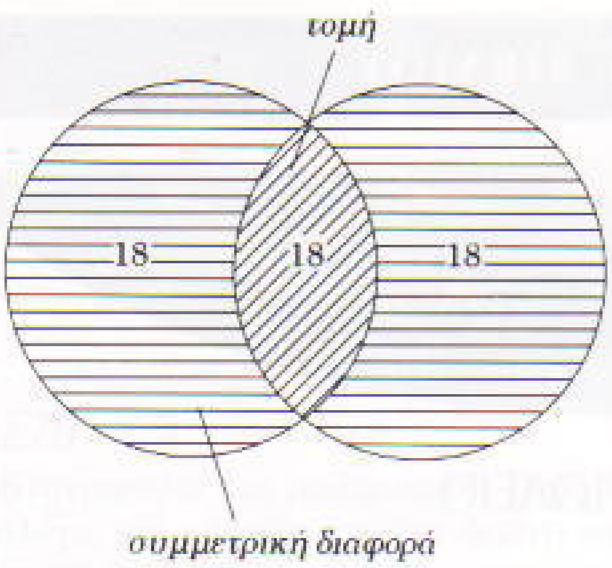
Άσκηση 6. Λύστε το πρόβλημα της «δωδεκάδας του ζαχαροπλάστη» χρησιμοποιώντας το πρόβλημα των «ακμών που προεξέχουν».

Η σημασία όλων αυτών των συνδυαστικών ασκήσεων για την εικασία του Borsuk γίνεται φανερή αν εισαγάγουμε την απόσταση Hamming μεταξύ συνόλων ακμών. Αν περιοριστούμε, όπως προηγουμένως, στα σύνολα ακμών με 36 στοιχεία

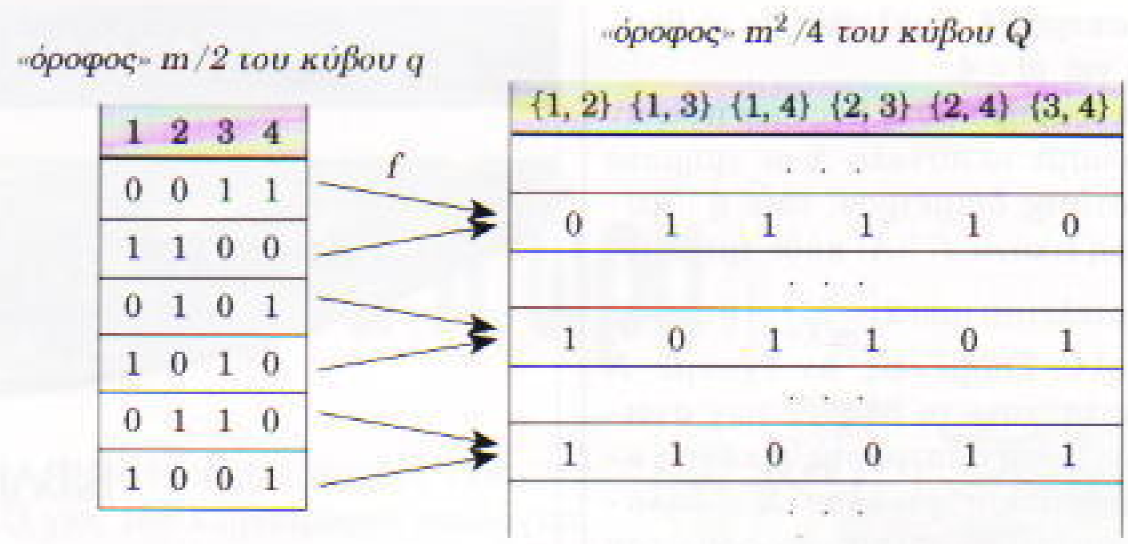


Σχήμα 6

3. Ο συμβολισμός $\overline{A}$ σημαίνει το συμπλήρωμα του συνόλου A.



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Οι 0 - 1 ακολουθίες στα αριστερά αντιπροσωπεύουν όλα τα υποσύνολα των (m/2) στοιχείων του συνόλου {1, 2, ..., m} (για m = 4): για παράδειγμα, η 0011 συμβολίζει το {3, 4}. Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να θεωρήσουμε αυτές τις ακολουθίες ως τις συντεταγμένες των κορυφών του m-διάστατου κύβου που βρίσκονται στον (m/2)-οστό όροφό του. Η σημασία των ψηφίων δεξιά είναι όμοια, με τη διαφορά ότι εδώ το σύνολο αποτελείται από από m(m − 1)/2 —και όχι m— στοιχεία, τα ζεύγη {1, 2}, {1, 3}, ..., {m − 1, m}. Τα βέλη συνδέουν κάθε υποσύνολο στα αριστερά με το σύνολο των ζευγών που «προεξέχουν» απ' αυτό το σύνολο.

που προεξέχουν από υποσύνολα 6 σημείων ενός συνόλου 12 σημείων, τότε η διάμετρος Hamming αυτής της οικογένειας συνόλων είναι 36 (δύο τέτοια σύνολα έχουν τουλάχιστον 18 κοινά στοιχεία, επομένως η συμμετρική διαφορά τους αποτελείται το πολύ από (36 − 18) + (36 −18) = 36 στοιχεία —Σχήμα 7). Επιπλέον, διαθέτουμε μια περιγραφή των συνόλων που έχουν τη μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους: είναι αυτά που δημιουργούνται από σύνολα έξι σημείων με τρία ακριβώς κοινά σημεία. Αυτή είναι η κατασκευή (για την περίπτωση της διάστασης $n = 66$) που κατέρριψε την εικασία του Borsuk. Στη συνέχεια θα την περιγράψουμε περισσότερο τυπικά και γενικά.

Η κατασκευή

Για κάθε άρτιο m θεωρούμε ένα σύνολο S, m στοιχείων (αυτά που προηγουμένως ονομάσαμε «σημεία»), και το σύνολο όλων των υποσυνόλων του, το οποίο θεωρούμε ως έναν κύβο q, διάστασης m. Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο P όλων των ζευγών στοιχείων του S (το P αποτελείται από $m(m-1)/2$ στοιχεία —προηγουμένως τα ονομάσαμε ακμές) και το σύνολο όλων των υποσυνόλων του P, που το θεωρούμε ως έναν κύβο Q, διάστασης $m(m-1)/2$. Θεωρούμε τη μεγαλύτερη «μη συγκρίσιμη οικογένεια υποσυνόλων» του S —δηλαδή, τα σημεία του $(m/2)$-οστού ορόφου του q. Το ζητούμενο σύνολο X είναι η εικόνα αυτής της οικογένειας μέσω μιας συγκεκριμένης απεικόνισης f του q στον Q. Ακριβέστερα, για κάθε υποσύνολο A του S (σημείο του q) ορίζουμε το $f(A)$ ως το υποσύνολο του P (σημείο του Q) που αποτελείται από όλα τα ζεύγη τα οποία περιέχουν ένα ακριβώς στοιχείο του A. (Επομένως, σύμφωνα με την ορολογία των προηγούμενων παραγράφων, $f(A)$ είναι το σύνολο των ζευγών που «προεξέχουν» από το A.) Η απεικόνιση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι το σύνολο X βρίσκεται στον $(m^2/4)$-οστό όροφο του κύβου Q.

Ας βρούμε τη διάμετρο του X συναρτήσει της απόστασης Hamming. Για λόγους ποικιλίας, θα το κάνουμε λίγο διαφορετικά απ' ό,τι προηγουμένως. Όπως είδαμε, η απόσταση Hamming ανάμεσα στα υποσύνολα $f(A)$ και $f(B)$ του συνόλου ζευγών P ισούται με το πλήθος των ζευγών στη συμμετρική διαφορά των $f(A)$ και $f(B)$, η οποία περιλαμβάνει (1) τα ζεύγη που ανήκουν στο $f(A)$ αλλά όχι στο $f(B)$ και (2) τα ζεύγη που ανήκουν στο $f(B)$ αλλά όχι στο $f(A)$. Ένα ζεύγος ανήκει στο $f(A)$ αν ακριβώς ένα από τα στοιχεία του ανήκει στο A. Δεν ανήκει στο $f(B)$ όταν και τα δύο στοιχεία του ανήκουν στο B ή όταν κανένα από τα στοιχεία του δεν ανήκει στο B. Με άλλα λόγια, είτε το ένα στοιχείο αυτού του ζεύγους ανήκει και στο A και στο B ενώ το άλλο ανήκει στο B αλλά όχι στο A (το πλήθος αυτών των στοιχείων ισούται με $y(m/2-y)$, όπου y είναι το μέγεθος της τομής $A \cap B$), είτε το ένα στοιχείο ανήκει στο A αλλά όχι στο B και το άλλο δεν ανήκει ούτε στο A ούτε στο B (το πλήθος αυτών των στοιχείων είναι $(m/2-y)y$). Επομένως, το πλήθος των ζευγών τύπου (1) είναι $2y(m/2-y)$. Το πλήθος των ζευγών του τύπου (2) είναι φανερά το ίδιο, συνεπώς η απόσταση μεταξύ των $f(A)$ και $f(B)$ είναι $4y(m/2-y)$. Η τιμή αυτή γίνεται μέγιστη όταν $y = m/4$, και το μέγιστο ισούται με $m^2/4$. Άρα, αν χωρίσουμε το X σε τμήματα μικρότερης διαμέτρου, τότε *το πλήθος των κοινών σημείων των A και B για δύο σημεία $f(A)$ και $f(B)$ που ανήκουν στο ίδιο τμήμα δεν ισούται με $m/4$.*

Ο από μηχανής θεός

Όλες οι κατασκευές μας είχαν στόχο να ταιριάξουν με τις συνθήκες του επόμενου θεωρήματος, που αποδείχτηκε αρκετά νωρίτερα από τους Frankl και Wilson, και το οποίο βρήκε απρόσμενη εφαρμογή στο πρόβλημα του Borsuk.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω F μια οικογένεια διαφορετικών υποσυνόλων με $m/2$ στοιχεία ενός συνόλου m στοιχείων κανένα από τα οποία δεν έχει $m/4$ ακριβώς κοινά στοιχεία με κάποιο από τα υπόλοιπα. Αν $m = 4p^a$, όπου p είναι πρώτος μεγαλύτερος του 2 και a μη αρνητικός ακέραιος, τότε το πλήθος των υποσυνόλων του F είναι το πολύ $2\binom{m-1}{m/4-1}$.*

Άσκηση 8. Επαληθεύστε το θεώρημα για $m = 4$.

Το θεώρημα αυτό μας λέει πως, αν χωρίσουμε το σύνολο X σε τμήματα μικρότερης διαμέτρου, τότε η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(A)$ κάθε τμήματος A αποτελείται από $2\binom{m-1}{m/4-1}$ στοιχεία το πολύ. Επομένως, αν έχουμε N τμήματα, τότε το πλήθος των στοιχείων της αντίστροφης εικόνας ολόκληρου του συνόλου X —δηλαδή, του $(m/2)$-οστού «ορόφου» του κύβου q— είναι το πολύ $2\binom{m-1}{m/4-1}$. Αυτός ο αριθμός, όμως, ισούται με $\binom{m}{m/2}$, και έτσι

$$N \geq \frac{\binom{m}{m/2}}{2\binom{m-1}{m/4-1}}.$$

Απομένει να εκτιμήσουμε την τιμή στο δεξιό μέλος. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση του γνωστού ασυμπτωτικού τύπου του Stirling για το $n!$, ο οποίος μας λέει ότι, αν το n είναι αρκετά μεγάλο, το $n!$ είναι κατά προσέγγιση ίσο με $\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι για κατάλληλα μεγάλο m ισχύει

$$N > \frac{m(m-1)}{2} + 1.$$

Επομένως, η κατασκευή μας προσφέρει ένα αντιπαράδειγμα για την εικασία του Borsuk όταν το m είναι ένας κατάλληλα μεγάλος αριθμός της μορφής $4p^a$.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Nikolay Dolbilin, από τον οποίο πληροφορήθηκα για τη λύση του προβλήματος του Borsuk· τους μαθητές της Σχολής Kolmogorov καθώς και του Σχολείου 57 της Μόσχας, οι οποίοι πληροφορήθηκαν τη λύση από εμένα· τέλος, τον αξιαγάπητο Vladimir Dubrovsky, για τα πολύτιμα σχόλια και τις υποδείξεις του γι' αυτό το άρθρο. ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Για να περνά η ώρα

Σ76

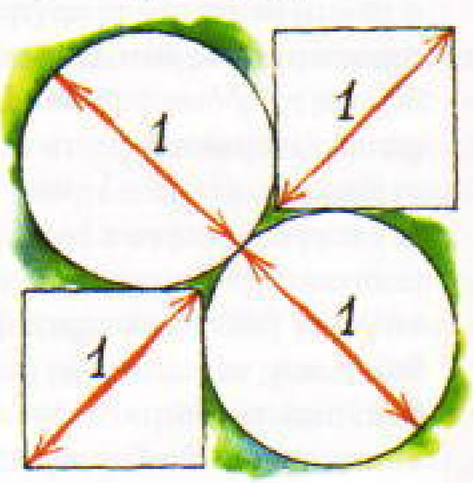
Κτηνοτροφία και μαθηματικά. Ένας κτηνοτρόφος έχει ένα μοσχάρι, ένα άλογο, μία κατσίκα και ένα δεμάτι σανό. Ο γιος του κτηνοτρόφου υπολόγισε ότι το σανό αρκεί για να τραφούν για ένα μήνα το άλογο και η κατσίκα, για τα 3/4 του μήνα η κατσίκα και το μοσχάρι, ή για το 1/3 του μήνα το μοσχάρι και το άλογο. Ο πατέρας είπε στο γιο του ότι μάλλον δεν τα πήγαινε και τόσο καλά στα μαθηματικά. Είναι βάσιμη η σαρκαστική παρατήρηση του πατέρα; (G. Kukin)

Σ77

Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός μικρού σπιτιού. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο *ABE* στην πάνω πλευρά ενός τετραγώνου *ABCD*. Βρείτε την ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία *C*, *D* και *E*, αν το μήκος της πλευράς του τετραγώνου ισούται με *a*. (A. Savin)

Σ78

Ξεχωρίστε την κηροζίνη. Έχετε δύο μεγάλα, αδιαφανή δοχεία. Το ένα περιέχει κηροζίνη, ενώ το δεύτερο περιέχει κηροζίνη και νερό. Μπορείτε να βρείτε το περιεχόμενο των δοχείων χρησιμοποιώντας ένα δυναμόμετρο και ένα νήμα της στάθμης;



Σ79

Τετράγωνα και κύκλοι. Βρείτε έξι σημεία του επιπέδου τέτοια ώστε οποιαδήποτε πέντε από αυτά να καλύπτονται από δύο τετράγωνα με μήκος διαγωνίου 1, να είναι όμως αδύνατον να καλυφθούν και τα έξι με δύο κύκλους διαμέτρου 1. (V. Proizvolov)

Σ80

Ανησυχίες γραφειοκρατών. Εκατό ανώτεροι κυβερνητικοί υπάλληλοι προσκλήθηκαν στο ετήσιο συνέδριό τους, στο Υπουργείο Εσωτερικών. Κάθισαν όλοι σε μια ορθογώνια αίθουσα με δέκα σειρές καθισμάτων, από δέκα καθίσματα η καθεμία. Η εναρκτήρια ομιλία καθυστέρησε· έτσι, αποφάσισαν να συγκρίνουν τους μισθούς τους. Για να θεωρηθεί «υψηλόμισθος» ένας υπάλληλος, έπρεπε να υπάρχει το πολύ ένα άτομο αριστερά, δεξιά, μπροστά, πίσω ή διαγώνια με ίσες ή μεγαλύτερες αποδοχές. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός υπαλλήλων που μπορούν να θεωρήσουν τους εαυτούς τους «υψηλόμισθους»; (A. Shapovalov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

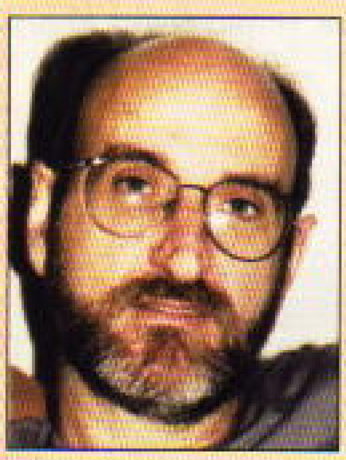
Η δύναμη της λογικής

Ο Αλέξανδρος Κεχρής μιλά στο ελληνικό Quantum

Στη σειρά των συνεντεύξεων τις οποίες παραχώρησαν στο Quantum σημαντικοί έλληνες και ξένοι επιστήμονες προστίθεται τώρα άλλη μία. Έχουμε τη χαρά να φιλοξενούμε στις σελίδες μας την άκρως ενδιαφέρουσα συζήτηση που είχε το φετινό καλοκαίρι ο Γιώργος Ευαγγελόπουλος με τον διαπρεπή καθηγητή της μαθηματικής λογικής στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Καλιφόρνιας Αλέξανδρο Κεχρή.

Ερ.: *Ξεκινώντας τη συζήτησή μου μ' έναν μαθηματικό που ασχολείται με τη λογική δεν μπορώ παρά να αναφερθώ στον Kurt Gödel και την περίφημη εργασία του «Περί των τυπικά αναποκρίσιμων προτάσεων των Principia Mathematica και των συναφών συστημάτων», που δημοσιεύτηκε το 1931. Θα ήθελα να μας πείτε ποια ακριβώς είναι τα περιεχόμενα των θεωρημάτων «της μη πληρότητας» και «της μη συμβιβαστότητας» του Gödel, και εν συνεχεία να μας εξηγήσετε γιατί αυτά ανέτρεψαν το «φορμαλιστικό πρόγραμμα» του Hilbert για τα θεμέλια των μαθηματικών.*

Απ.: Όπως σωστά τονίσατε, υπάρχουν δύο θεωρήματα του Gödel, τα αποκαλούμενα «πρώτο θεώρημα» και «δεύτερο θεώρημα του Gödel». Το πρώτο, το θεώρημα της μη πληρότητας, λέει ότι σ' ένα δεδομένο σύστημα αξιωμάτων το οποίο περιέχει τουλάχιστον ένα μικρό μέρος της αριθμητικής υπάρχουν πάντοτε κάποια προβλήματα τα οποία τίθενται μέσα στο πλαίσιο του, αλλά δεν επιλύονται εντός αυτού. Το δεύτερο θεώρημα λέει ότι για ένα οποιοδήποτε σύστημα αξιωμάτων το οποίο ικανοποιεί πάλι ορισμένες απλές βασικές συνθήκες δεν είναι δυνατόν να αποδείξει κανένας μέσα σ' αυτό το ίδιο το σύστημα το συμβιβαστό του. Λοιπόν, αυτά τα δύο θεωρήματα ανέτρεψαν το βασικό πρόγραμμα του Hilbert για τη θεμελίωση των μαθηματικών. Το πώς έγινε αυτό το εξηγώ ευθύς αμέσως. Ο Hilbert φαντάστηκε ότι θα θεμελιώσει τα μαθηματικά ως εξής: Κάποιος δημιουργεί-επιλέγει ένα σύστημα αξιωμάτων στο οποίο περιγράφει ορισμένες βασικές μαθηματικές δομές, π.χ. αριθμοθεωρία, ανάλυση κ.λπ., ή ακόμη και ευρύτερες, πιο γενικές, όπως η συνολοθεωρία. Αυτό το σύστημα αξιωμάτων στηρίζεται σε ορισμένες βασικές αρχές, με τις οποίες διά της συνηθισμένης λογικής μεθόδου αποδεικνύει κανείς θεωρήματα. Τότε, το πρώτο βασικό χαρακτηριστικό του συστήματος αυτού θα ήταν ότι οποιαδήποτε αληθής πρόταση γι' αυτό τον κλάδο των μαθηματικών, π.χ. την αριθμοθεωρία, θα μπορούσε να αποδειχτεί μέσα από τα αξιώματά του. Αυτό είναι η πρώτη θεμελιώδης αρχή του προγράμματος του Hilbert, η αξίωση πληρότητας των αξιωμάτων, σύμφωνα με το οποίο οτιδήποτε είναι αληθές για τον συγκεκριμένο κλάδο των μαθηματικών προκύπτει, συνάγεται βάσει αυστηρής μαθηματικής αξιωματικής μεθόδου, από τις βασικές του έννοιες-αρχές. Το δεύτερο χαρακτηριστικό του αξιωματικού συστήματος του Hilbert έγκειται στο ότι ακόμη και όταν δεν αφορά π.χ. φυσικούς αριθμούς, αλλά εντελώς αφηρημένες και πολύπλοκες μαθηματικές έννοιες, όπως οι έννοιες της συνολοθεωρίας, και πάλι το σύστημα δεν παύει να είναι καθαρά φορμαλιστικό, έχει δηλαδή μια πεπερασμένη συνδυαστική δομή. Εκείνο που ήλπιζε ο Hilbert ήταν ότι θα μπορούσε να αποδείξει με καθαρά πεπερασμένες συνδυαστικές μεθόδους ότι το σύστημα αυτό ήταν συμβιβαστό, ότι δεν εμφάνιζε αντιφάσεις και αντινομίες. Μ' αυτό τον τρόπο νόμιζε ότι θα μπορούσε να απαντήσει στις επικρίσεις



Ο Αλέξανδρος Κεχρής γεννήθηκε στην Αθήνα το 1946. Σπούδασε μηχανολόγος-ηλεκτρολόγος στο Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, απ' όπου πήρε το δίπλωμά του το 1969. Έκανε μεταπτυχιακές σπουδές στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Λος Άντζελες (UCLA) και πήρε το Ph.D. στα μαθηματικά το 1972. Ήταν C.L.E. Moore Instructor στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασσαχουσέττης (MIT) στο διάστημα 1972-1974, και από το 1974 διδάσκει στο Τμήμα Μαθηματικών του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Καλιφόρνιας (Caltech). Εξελέγη τακτικός καθηγητής το 1981, ενώ από το 1994 είναι πρόεδρος του Τμήματος. Το 1987 ανακηρύχθηκε Επίτιμος Διδάκτωρ του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εντοπίζονται στη μαθηματική λογική και τη συνολοθεωρία, καθώς και στην εφαρμογή και τη συσχέτιση αυτού του κλάδου με τη μαθηματική ανάλυση και άλλους κλάδους των μαθηματικών. Έχει δημοσιεύσει περίπου 80 ερευνητικές εργασίες και τρία βιβλία: *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness* (Cambridge University Press, 1989), μαζί με τον Alain Louveau, *Classical Descriptive Set Theory* (Springer Verlag, 1995), *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions* (Cambridge University Press, 1996), μαζί με τον Howard Becker.

πολλών μαθηματικών της εποχής για την εκ μέρους του χρησιμοποίηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, εν αντιθέσει με τις κατασκευαστικές, ας τις ονομάσουμε έτσι, πεπερασμένες ιδέες που χρησιμοποιούσαν για τη θεμελίωση των μαθηματικών τον 19ο αιώνα. Έτσι, το πρόγραμμα του Hilbert για τη θεμελίωση των μαθηματικών πήρε την ακόλουθη μορφή: Δημιουργούμε αξιωματικά συστήματα, τα οποία στηρίζονται σε διατύπωση των αξιωμάτων τους σε αυστηρές φορμαλιστικές γλώσσες, διατυπώνουμε αυστηρούς κανόνες συλλογισμού, με τους οποίους από τα αξιώματα προχωρούμε στα θεωρήματα, αποδεικνύουμε την πληρότητα των αξιωμάτων, και μετά, με καθαρά συνδυαστικούς, πεπερασμένους, κατασκευαστικούς τρόπους, αποδεικνύουμε το συμβιβαστό του αξιωματικού συστήματος. Εδώ έχουμε τη δεύτερη θεμελιώδη αρχή του προγράμματος του Hilbert, την αξίωση της κατασκευαστικής απόδειξης της συμβιβαστότητας του αξιωματικού συστήματος. Ο Gödel με το πρώτο του θεώρημα απέδειξε τη μη πληρότητα τέτοιων αξιωματικών συστημάτων και με το δεύτερο τη μη κατασκευαστική απόδειξη της συμβιβαστότητάς τους. Διότι, εάν υποθέσουμε, όπως ήλπιζε ο Hilbert, ότι κάποιος έπαιρνε ένα αξιωματικό σύστημα, π.χ. για την αριθμοθεωρία —που είναι και το πρώτο πεδίο το οποίο αναπτύσσει κάποιος— και έβρισκε μια κατασκευαστική, πεπερασμένη, συνδυαστική απόδειξη ότι η θεωρία αυτή είναι συμβιβαστή, αυτή η απόδειξη θα μπορούσε να μεταφραστεί μέσα στο ίδιο το σύστημα· επομένως, θα κατέληγε στην απόδειξη της συμβιβαστότητας του συστήματος, η οποία θα ήταν «φτιαγμένη» μέσα στο ίδιο το σύστημα, πράγμα που το δεύτερο θεώρημα του Gödel απορρίπτει, αφού, σύμφωνα με αυτό, δεν μπορούμε σ' ένα δεδομένο σύστημα να αποδείξουμε τη συμβιβαστότητά του, χρησιμοποιώντας μεθόδους μέσα στο ίδιο το σύστημα. Επομένως, και οι δύο βασικές, θεμελιώδεις αρχές του προγράμματος του Hilbert αποδεικνύονται μη ισχύουσες, λόγω της αποδείξεως των θεωρημάτων του Gödel.

Ερ.: *Ποια είναι η σημερινή εικόνα όσον αφορά την προσπάθεια θεμελιώσεως των μαθηματικών, όταν ως συνέπεια των θεωρημάτων του Gödel εμφανίζονται μη επιλύσιμα προβλήματα, π.χ. η υπόθεση του συνεχούς;*

Απ.: Επιχειρώντας μια απλοποιημένη, κατά κάποιον τρόπο, περιγραφή, η θεμελίωση των μαθηματικών εμφανίζεται σήμερα ως εξής: Κατ' αρχήν, όλες οι γνωστές μαθηματικές έννοιες «εμφυτεύονται» σ' έναν συνολοθεωρητικό κόσμο, εξηγούνται δηλαδή με βάση την έννοια της θεωρίας των συνόλων. Η μαθηματικοποίηση ενός κλάδου ουσιαστικά σημαίνει «μετάφραση» του, ή στήριξή του με βάση συνολοθεωρητικές έννοιες. Π.χ. όσον αφορά τη θεωρία των πιθανοτήτων, η οποία θεμελιώθηκε γύρω στο 1930 από τον Kolmogorov, μπορούμε να δούμε ότι αυτή στηρίζεται στη θεωρία του μέτρου, η οποία, με τη σειρά της, «ενσωματώνεται» στη συνολοθεωρία. Μέχρι τότε μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι υπήρχαν διάφορες έννοιες πιθανοτήτων για τις οποίες δεν ήταν σαφές το πώς ενσωματώνονταν στη συνολοθεωρία. Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι από την εποχή που ο Cantor διατύπωσε τη συνολοθεωρία, η μια μετά την άλλη οι διάφορες μαθηματικές έννοιες οι οποίες πιο πριν υπήρχαν σε κάποιο διαισθητικό επίπεδο-στάδιο σιγά σιγά ενσωματώθηκαν και θεμελιώθηκαν στη θεωρία των συνόλων. Άρα, η νέα θεμελίωση των μαθηματικών έγκειται στην αξιωματική τους θεμελίωση στη θεωρία συνόλων, η οποία γίνεται ως εξής: Υπάρχει η κλασική θεμελίωση, δηλαδή το αξιωματικό σύστημα ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice), η οποία αποτελείται από τα αξιώματα της θεωρίας Zermelo-Fraenkel και το αξίωμα της επιλογής. Επί τη βάσει αυτών των αξιωμάτων μπορεί κάποιος να αναπτύξει όλες τις συνολοθεωρητικές έννοιες και εν συνεχεία όλες τις μαθηματικές έννοιες, ούτως ώστε σ' αυτό το πλαίσιο να συμπεριλάβει όλα τα σύγχρονα μαθηματικά. Ωστόσο, και για το συζητούμενο αξιωματικό σύστημα —το οποίο αποτελεί το καθολικό πλαίσιο, εντός του οποίου δεν θεμελιώνεται μόνον η συνολοθεωρία, αλλά όλα τα σύγχρονα μαθηματικά— δεν μπορεί παρά να ισχύει το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μαθηματικά προβλήματα τα οποία είναι αδύνατον να λυθούν με τις κλασικές μεθόδους των μαθηματικών, δηλαδή εκείνες που περιλαμβάνονται στο αξιωματικό σύστημα ZFC. Επίσης, σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα του Gödel, δεν είναι δυνατόν να αποδείξουμε με οποιαδήποτε συνηθισμένη σήμερα μέθοδο, όχι μόνο με κατασκευαστική, το συμβιβαστό των αξιωμάτων του προαναφερθέντος συστήματος.

Έτσι όμως προκύπτει το εξής πολύ ενδιαφέρον ερώτημα: πώς είμαστε πεπεισμένοι, πώς γνωρίζουμε ότι τα χρησιμοποιούμενα σήμερα μαθηματικά είναι, κατά κάποιον τρόπο, συμβιβαστά; Ας μη συζητήσουμε όμως σε βάθος αυτό το θέμα· αρκούμαι μόνο στο να επισημάνω το γεγονός ότι τα αξιώματα του συστήματος ZFC αφορούν ορισμένες βασικές διαισθήσεις μας· δηλαδή υπάρχει κάποιος κόσμος διαισθητικής αντίληψης πίσω από αυτά τα αξιώματα, τα οποία εκφράζουν μερικές βασικές αρχές του. Έτσι, έχουμε αρκετή εμπιστοσύνη στο προαναφερθέν αξιωματικό σύστημα, και εκεί στηρίζουμε την πίστη μας για το συμβιβαστό των αξιωμάτων του και κατά προέκταση για το ότι τα σημερινά μαθηματικά στην καθολικότητά τους είναι συμβιβαστά.

Επανερχόμενος στη συζήτηση για τις συνέπειες του πρώτου θεωρήματος του Gödel όσον αφορά την πληρότητα του αξιωματικού συστήματος ZFC, θα ήθελα να πω ότι ναι μεν ο Gödel αποδεικνύει ότι μπορεί να υπάρχουν μαθηματικές προτάσεις των οποίων ούτε το αληθές ούτε το ψευδές αποδεικνύεται στο πλαίσιο ενός δεδομένου αξιωματικού συστήματος, και εν προκειμένω του ZFC (και μάλιστα δίνει και συγκεκριμένα παραδείγματα, τα οποία έχουν τη μορφή μάλλον ερωτημάτων της λογικής), όμως το κρίσιμο ερώτημα είναι αν υπάρχουν κλασικά προβλήματα των μαθηματικών, δηλαδή προβλήματα που έχουν εμφανιστεί στους διάφορους κλάδους τους, τα οποία εμπίπτουν στην κατηγορία αυτή, δηλαδή είναι αναποκρίσιμα. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι θετική, και ως πρώτο συνταρακτικό παράδειγμα αυτού του είδους των προβλημάτων αναφέρω την «υπόθεση του συνεχούς». Το εν λόγω πρόβλημα έχει ιστορία πάνω από 100 χρόνια. Το πρωτοδιατύπωσε ο Cantor, ο οποίος αρχικά νόμισε εσφαλμένα ότι το είχε επιλύσει, για να το συμπεριλάβει στη συνέχεια ο Hilbert στον περίφημο κατάλογο των 23 άλυτων έως τότε προβλημάτων που πρότεινε το 1900 στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών των Παρισίων.

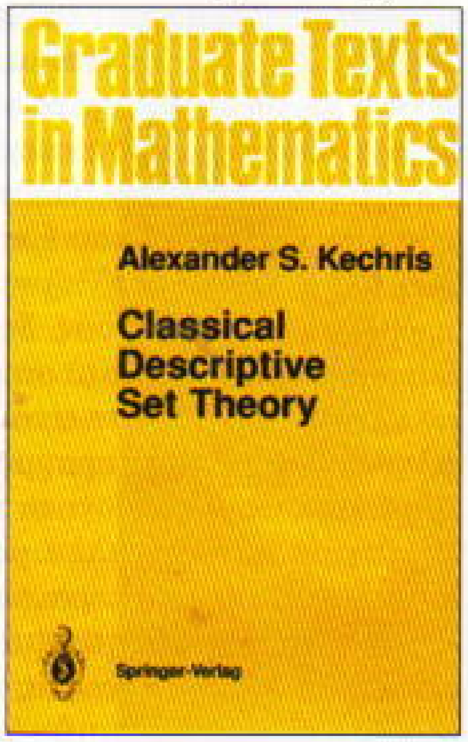
Ερ.: *Τι είναι ακριβώς η υπόθεση του συνεχούς, και ποια η σημασία της περίφημης απόδειξης του Paul Cohen τόσο όσον αφορά αυτήν, όσο και για τα μαθηματικά εν γένει;*

Απ.: Όπως γνωρίζετε, ο Cantor επινόησε τη θεωρία των πληθαρίθμων. Εισήγαγε τη θεωρία πληθαρίθμων άπειρων συνόλων στα μαθηματικά και έθεσε το βασικό ερώτημα: ποιοι είναι οι δυνατοί πληθάριθμοι υποσυνόλων της ευθείας των πραγματικών αριθμών; Το πρώτο και σημαντικότερο αποτέλεσμα που παρήγαγε ο Cantor ήταν ότι ο πληθάριθμος της ευθείας των πραγματικών, δηλαδή ο αριθμός των στοιχείων της, είναι μεγαλύτερος από αυτόν των φυσικών αριθμών. Με άλλα λόγια, ο Cantor διατύπωσε τη θεωρία πληθαρίθμων και απέδειξε ότι τα άπειρα σύνολα δεν είναι ίδια, αλλά διαφοροποιούνται ανάλογα με τον αριθμό των στοιχείων τους. Πιο συγκεκριμένα, πρώτα απέδειξε ότι υπάρχουν διάφορα σύνολα, όπως οι φυσικοί αριθμοί, οι ρητοί αριθμοί, οι αλγεβρικοί αριθμοί, οι οποίοι έχουν τον ίδιο πληθάριθμο με τους φυσικούς αριθμούς, πράγμα που οπωσδήποτε αποτέλεσε κάποια έκπληξη, διότι κατ' αρχήν φαίνεται ότι υπάρχουν π.χ. πολύ περισσότεροι ρητοί αριθμοί απ' ό,τι φυσικοί. Εν πάση περιπτώσει, αρχικά απέδειξε ότι υπάρχει μια ένα-προς-ένα απεικόνιση των φυσικών αριθμών προς τους ρητούς, αλλά και τους αλγεβρικούς, και μετά έθεσε το ερώτημα αν έχουν τον ίδιο πληθάριθμο με τους φυσικούς αριθμούς και οι πραγματικοί αριθμοί. Το πρώτο του μεγάλο αποτέλεσμα στη συνολοθεωρία ήταν ότι αυτό δεν συμβαίνει, ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι πολύ περισσότεροι από τους φυσικούς αριθμούς, ότι δεν υπάρχει καμία ένα-προς-ένα απεικόνιση μεταξύ φυσικών αριθμών και πραγματικών αριθμών. Όπως ήταν ευνόητο, το επόμενο ερώτημα που απασχόλησε τον Cantor ήταν ποιοι είναι οι πληθάριθμοι των υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών. Εδώ κατ' αρχάς διακρίνουμε δύο κατηγορίες τέτοιων (άπειρων) συνόλων: Αφ' ενός μεν εκείνα τα σύνολα που έχουν ως στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τα οποία μπορούμε να φέρουμε σε ένα-προς-ένα απεικόνιση με τους φυσικούς (αυτοί λέγονται αριθμήσιμοι, και τα σύνολα τα οποία συγκροτούν ονομάζονται αριθμήσιμα σύνολα), και αφ' ετέρου τα σύνολα πραγματικών αριθμών, όπως π.χ. όλη η ευθεία των πραγματικών αριθμών ή ένα ανοικτό διάστημά της, τα οποία βρίσκονται σε ένα-προς-ένα απεικόνιση προς τους πραγματικούς αριθμούς. Με βάση τα ανωτέρω, ήταν φυσικό να διατυπώσει ο Cantor την εικασία ότι κάθε άπειρο σύνολο πραγματικών αριθμών είτε είναι ισοδύναμο, δηλαδή έχει τον ίδιο πληθάριθμο με τους φυσικούς αριθμούς, είτε έχει τον ίδιο πληθάριθμο με τους πραγματικούς αριθμούς. Αυτή είναι η εικασία της υπόθεσης του συνεχούς, σύμφωνα με την οποία κάθε σύνολο πραγματικών αριθμών είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμο είτε έχει τον ίδιο πληθάριθμο με τους πραγματικούς αριθμούς.

Ένας άλλος τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα είναι ο εξής: Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των πληθαρίθμων του Cantor, αν πάρουμε εκείνους που είναι πληθάριθμοι άπειρων συνόλων, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ένας μικρότερος δυνατός, που είναι ο πληθάριθμος των φυσικών αριθμών, στον οποίο ο Cantor έδωσε το συμβολισμό $\aleph_0$. Αυτός είναι ο μικρότερος πληθάριθμος άπειρου συνόλου. Ακολούθως απέδειξε, με βάση την ίδια θεωρία, ότι μετά τον πρώτο αυτό δυνατό άπειρο πληθάριθμο υπάρχει και ένας αμέσως μεγαλύτερος, στον οποίο έδωσε το όνομα $\aleph_1$. Αυτός είναι ο μικρότερος πληθάριθμος ενός μη αριθμήσιμου συνόλου. Και μετά υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος από αυτόν, τον οποίο συμβόλισε με $\aleph_2$, κ.λπ. Λοιπόν, η εικασία του συνεχούς διατυπώνεται διαφορετικά ως εξής: ο πληθάριθμος του συνεχούς, δηλαδή της ευθείας των πραγματικών αριθμών, είναι ακριβώς ο πρώτος μη αριθμήσιμος πληθάριθμος, δηλαδή το $\aleph_1$. Και επειδή ο Cantor, χρησιμοποιώντας την έννοια του δυναμοσυνόλου, συμβολίζει τον πληθάριθμο των πραγματικών αριθμών με $2^{\aleph_0}$, η υπόθεση του συνεχούς παίρνει τη μορφή της εξίσωσης: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Δηλαδή ο πληθάριθμος του συνεχούς είναι ο πρώτος μη αριθμήσιμος πληθάριθμος, ο οποίος είναι ο $\aleph_1$. Εκείνο που αποδείχτηκε, αφ' ενός μεν από τον Gödel, το 1937 περίπου, και αφ' ετέρου από το Cohen, το 1963, είναι ότι η ανωτέρω υπόθεση είναι αναποκρίσιμη στη συνολοθεωρία των Zermelo-Fraenkel-Choice με το αξίωμα της επιλογής ούτε μπορεί κάποιος να αποδείξει την υπόθεση του συνεχούς ούτε μπορεί όμως και να την απορρίψει. Πιο συγκεκριμένα, ο Gödel απέδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι συμβιβαστή με τα αξιώματα της κλασικής συνολοθεωρίας ZFC, δηλαδή ότι μπορούμε να την προσθέσουμε σ' αυτά τα αξιώματα, χωρίς να προκύπτει αντίφαση, ενώ ο Cohen, με το θεώρημα που απέδειξε το 1963, συμπλήρωσε την εργασία του Gödel, αποδεικνύοντας ότι δεν μπορούμε να αποδείξουμε την υπόθεση του συνεχούς, δηλαδή ότι μπορούμε να προσθέσουμε συμβιβαστά στα αξιώματα την άρνησή της.

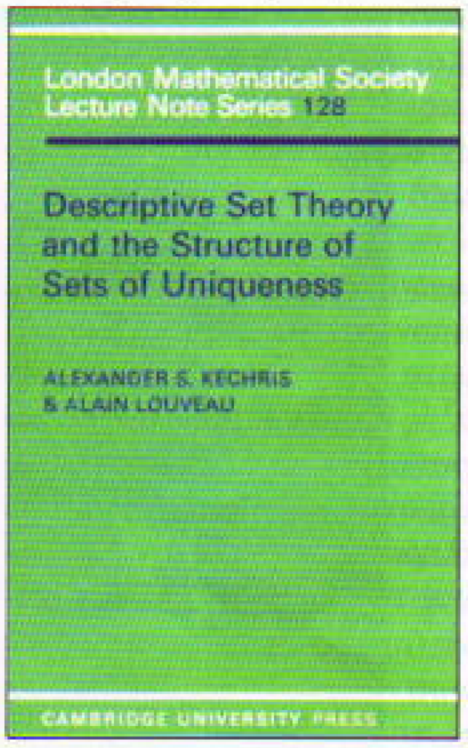
Ερ.: *Επιτρέψτε μου να σας διακόψω σ' αυτό το σημείο και να σας παρακαλέσω να μας εξηγήσετε, με απλά λόγια, τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν οι Gödel και Cohen στις αποδείξεις των προαναφερθέντων θεωρημάτων τους. Επίσης, ποιων περαιτέρω εφαρμογών έτυχε η μέθοδος εξαναγκασμού (forcing) που ακολούθησε ο Cohen;*

Απ.: Και τα δύο θεωρήματα αποδεικνύονται με μεθόδους που, τουλάχιστον από λογικής απόψεως, είναι αντίστοιχες με τις μεθόδους τις οποίες χρησιμοποιούμε προκειμένου με βάση την ευκλείδεια γεωμετρία να επιτύχουμε τη θεμελίωση μη ευκλείδειων γεωμετριών. Δηλαδή ξεκινάμε από ένα μοντέλο, αυτό της κλασικής συνολοθεωρίας, και με βάση αυτό δημιουργούμε δύο νέα διαφορετικά μοντέλα, ένα στο οποίο ισχύει η υπόθεση του συνεχούς και ένα στο οποίο δεν ισχύει, όπως ακριβώς, όσον αφορά τη γεωμετρία, ξεκινάμε από ένα μοντέλο της ευκλείδειας γεωμετρίας και δημιουργούμε με βάση αυτό μοντέλα μη ευκλείδειων γεωμετριών. Επομένως, στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται το σχετικά συμβιβαστό.



Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος του Gödel μοιάζει κάπως με τον τρόπο που κάποιος αποδεικνύει την ύπαρξη μοντέλου της μη ευκλείδειας γεωμετρίας επί τη βάσει ενός δεδομένου μοντέλου της ευκλείδειας γεωμετρίας, διότι, όπως για τη θεμελίωση μη ευκλείδειων γεωμετριών αλλάζουν οι έννοιες π.χ. του σημείου, της γραμμής κ.λπ. της ευκλείδειας γεωμετρίας, έτσι και ο Gödel πήρε ένα μοντέλο της κλασικής συνολοθεωρίας ZFC και μέσα σ' αυτό δημιούργησε ένα μοντέλο της ίδιας θεωρίας, στο οποίο ίσχυε η υπόθεση του συνεχούς. Για να καταλάβουν οι αναγνώστες του *Quantum*, πρέπει να πούμε ότι η κλασική συνολοθεωρία στηρίζεται στις ακόλουθες δύο βασικές μη ορίσιμες έννοιες (ανάλογες εκείνων της γραμμής, του σημείου κ.λπ. για τη γεωμετρία): την έννοια του συνόλου και την έννοια του «ανήκειν», που δηλώνει μια βασική σχέση μεταξύ συνόλων, ήτοι ότι το ένα σύνολο είναι στοιχείο ενός άλλου συνόλου. Αυτό που έκανε ο Gödel ήταν ότι πήρε έναν κόσμο συνόλων τα οποία ικανοποιούν τα αξιώματα ZFC και τροποποίησε την έννοια του συνόλου. Ακριβέστερα, όπως στη γεωμετρία, αν, αντί για τα σημεία ενός επιπέδου, πάρουμε τα σημεία ενός ανοικτού δίσκου, «κατασκευάζουμε» μια υπερβολική γεωμετρία, έτσι και ο Gödel πήρε μια υποκλάση των προαναφερθέντων συνόλων, άφησε την έννοια του «ανήκειν» την ίδια και απέδειξε ότι αυτή η νέα κλάση υποσυνόλων, εφοδιασμένη με απαράλλακτη την έννοια του «ανήκειν», ικανοποιεί όλα τα αξιώματα της συνολοθεωρίας ZFC, και επιπλέον την υπόθεση του συνεχούς. Η εν λόγω μέθοδος λέγεται μέθοδος των εσωτερικών μοντέλων, διότι το νέο μοντέλο που δημιουργείται είναι μια εσωτερική υποκλάση του αρχικού μοντέλου.

Η μέθοδος του Cohen είναι αντίθετη από αυτήν του Gödel, και είναι η εξής: Ξεκινά κάποιος από ένα μοντέλο στο οποίο προσθέτει ορισμένα νέα «αντικείμενα» (τα αποκαλούμενα αντικείμενα-γεννήτορες ή σύνολα-γεννήτορες), και «κατασκευάζει» έτσι ένα διευρυμένο μοντέλο, για το οποίο αποδεικνύει ότι ισχύουν όλα τα κλασικά αξιώματα, πλην όμως η υπόθεση του συνεχούς δεν είναι σωστή, είναι λανθασμένη· δηλαδή, αποδεικνύει ότι μπορούμε να προσθέσουμε συμβιβαστά στα αξιώματα την άρνηση της εν λόγω εικασίας. Η μέθοδος αυτή, η μέθοδος του εξαναγκασμού, είναι αρκετά τεχνική, και γι' αυτό δεν θα επιχειρήσω να την εξηγήσω αναλυτικά τώρα.



Εκείνο που αξίζει να πω, και με το οποίο απαντώ στο δεύτερο σκέλος του ερωτήματός σας, που αφορούσε τη σημασία της μεθόδου του εξαναγκασμού για την έρευνα στα μαθηματικά, είναι ότι η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται και σ' ένα πλήθος άλλα προβλήματα της συνολοθεωρίας, της άλγεβρας, της τοπολογίας, της ανάλυσης κ.λπ. τα οποία έχει αποδειχτεί ότι δεν επιλύονται επί τη βάσει των κλασικών μαθηματικών. Π.χ. ένα σημαντικό πρόβλημα ήταν αν το ίδιο το αξίωμα της επιλογής μπορεί να αποδειχτεί επί τη βάσει των υπόλοιπων αξιωμάτων. Αποδεικνύεται, λοιπόν, με το συνδυασμό των μεθόδων του Cohen και του Gödel, ότι το αξίωμα της επιλογής είναι αναποκρίσιμο, δηλαδή ούτε αποδεικνύεται ότι είναι σωστό ούτε ότι είναι λανθασμένο, με βάση τα άλλα αξιώματα. Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου του Cohen αφορά ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην ανάλυση. Πρόκειται για το γνωστό πρόβλημα του Kaplansky στη θεωρία αλγεβρών τελεστών, σύμφωνα με την υπόθεση του οποίου ορισμένοι ομοιομορφισμοί μεταξύ αλγεβρών είναι αυτομάτως συνεχείς. Αποδείχτηκε ότι το εν λόγω πρόβλημα είναι αναποκρίσιμο, όπως αποδείχτηκε αναποκρίσιμο και το πρόβλημα του Whitehead στη θεωρία των αβελιανών ομάδων. Υπάρχουν και πολλά άλλα τέτοια παραδείγματα. Συμπερασματικά, η μέθοδος του Cohen χρησιμοποιείται κυρίως για να αποδεικνύεται ότι ορισμένα μαθηματικά προβλήματα είναι αναποκρίσιμα επί τη βάσει των κλασικών αξιωμάτων, δηλαδή αποτελούν παραδείγματα που καλύπτονται από το πρώτο θεώρημα του Gödel. Ένα άλλο στοιχείο, που είναι πολύ ενδιαφέρον και αναπάντεχο, είναι ότι η μέθοδος του Cohen που επινοήθηκε για να αποδεικνύεται λογικά ότι κάποιο πρόβλημα είναι αναποκρίσιμο σ' ένα ορισμένο αξιωματικό σύστημα, χρησιμοποιείται σήμερα και μ' έναν άλλο τρόπο, ήτοι σαν αποδεικτική μέθοδος νέων θεωρημάτων εντός του πλαισίου της κλασικής συνολοθεωρίας!

Ερ.: *Πώς όμως αντιμετωπίζει η σύγχρονη συνολοθεωρία το ζήτημα των αναποκρίσιμων προβλημάτων, π.χ. της υπόθεσης του συνεχούς, κ.ά.;*

Απ.: Το ερώτημά σας είναι πολύ ενδιαφέρον. Υπάρχει μια κατηγορία μαθηματικών η οποία ασχολούμενη είτε με τη θεμελίωση των μαθηματικών, είτε με την έρευνα σε διάφορους κλάδους τους, π.χ. άλγεβρα, τοπολογία κ.λπ., θεωρεί ότι τελικά καταλήγουμε να μελετάμε διαφορετικά μοντέλα μαθηματικών. Έτσι, σ' ένα μοντέλο είναι δυνατόν η υπόθεση του συνεχούς να αληθεύει, ενώ σ' ένα άλλο όχι, σ' ένα ορισμένο σύστημα αξιωμάτων η υπόθεση του Whitehead να ισχύει, ενώ σ' ένα άλλο να αποδεικνύεται εσφαλμένη. Πρόκειται για μια κάπως φορμαλιστική άποψη, σύμφωνα με την οποία μελετάμε απλώς ορισμένα αξιώματα και τα συμπεράσματά τους, και δεν ενδιαφερόμαστε να καταλήξουμε σε ένα ομοιογενές σύστημα ενοποιημένων αξιωμάτων για το σύνολο των μαθηματικών. Προσωπικά δεν συμμερίζομαι αυτή την άποψη.

Σύμφωνα με την άλλη άποψη, ορισμένα προβλήματα είναι αναποκρίσιμα, δεν επιλύονται στα κλασικά συστήματα, διότι τα βασικά αξιώματα της συνολοθεωρίας δεν είναι παρά μερικές μόνον απλές αλλά ελλιπείς αρχές για τον διαισθητικό κόσμο των συνόλων. Απλώς, το ότι διατυπώθηκαν αυτά τα αξιώματα, στην αρχή του αιώνα, από τον Zermelo και μετά συμπληρώθηκαν από τον Fraenkel, για να προκύψει κατ' αυτό τον τρόπο η ZFC, δεν σημαίνει ότι οι βασικές έννοιες-αρχές της εξαντλούν τις «διαισθητικές» ιδιότητες των συνόλων. Οι βασικές αυτές αρχές μάλλον εκφράζουν τις απλούστερες ιδιότητες των συνόλων, αλλά είναι καταπληκτικό το γεγονός ότι αυτή η τεράστια επιστήμη των μαθηματικών μπορεί να στηριχτεί σε τόσο μικρό αριθμό βασικών αρχών, που εκφράζονται με τα κλασικά αξιώματα. Το ότι οι εν λόγω αρχές δεν εκφράζουν όλες τις δυνατές ιδιότητες των συνόλων διαπιστώθηκε με το θεώρημα του Gödel. Το σημερινό πρόγραμμα για τη θεμελίωση των μαθηματικών σκοπεύει στο να βρεθούν περαιτέρω αρχές, να διατυπωθούν νέα αξιώματα, τα οποία προστιθέμενα στο κλασικό συνολοθεωρητικό σύστημα να επιτρέψουν το να απαντηθούν τα μέχρι σήμερα αναποκρίσιμα-ανεπίλυτα προβλήματα. Βέβαια, αυτή η διαδικασία δεν έχει τέλος, είναι αέναη, διότι, όποια και όσα νέα αξιώματα κι αν προσθέσουμε, πάντα θα υπάρχουν προβλήματα τα οποία δεν θα απαντώνται με βάση αυτά. Ένα από τα βασικά συμπεράσματα του θεωρήματος του Gödel είναι ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν κλειστό σύστημα! Λοιπόν, αυτό που μπορεί να ελπίζει κάποιος είναι η επίλυση των σημερινών προβλημάτων, μια και είναι αναπόφευκτη η εμφάνιση νέων αναποκρίσιμων προβλημάτων, διότι αυτή είναι η δυναμική εικόνα των μαθηματικών που δίνει το θεώρημα του Gödel.

Για να εξηγήσω την πρόοδο που συντελείται σήμερα όσον αφορά τη θεμελίωση των μαθηματικών, οφείλω να κάνω την ακόλουθη μικρή εισαγωγή. Τα βασικά προβλήματα της συνολοθεωρίας αφορούν τη δομή των πραγματικών αριθμών, των φυσικών αριθμών (αν τους θεωρήσουμε ως μέρος των πραγματικών) και των υποσυνόλων τους. Η εικασία π.χ. του συνεχούς αφορά τη δομή ενός τυχαίου γενικού συνόλου πραγματικών αριθμών, διότι πρόκειται για τον δυνατό του πληθάριθμο. Από την άλλη πλευρά, στα μαθηματικά, στην ανάλυση, την τοπολογία κ.λπ., δεν μελετάμε συνήθως τυχαία σύνολα πραγματικών αριθμών (ή και άλλων χώρων, π.χ. μιγαδικών, χώρων Banach κ.λπ.), αλλά σύνολα πραγματικών αριθμών τα οποία είναι απλά, δηλαδή διαστήματα, ανοικτά σύνολα που είναι ένωση διαστημάτων, κλειστά σύνολα που είναι τα συμπληρώματα των ανοικτών συνόλων, σύνολα Borel που συναντάμε στη θεωρία μέτρου και την πιθανοθεωρία κ.λπ. Με δυο λόγια, σύνολα που επιδέχονται ορισμού. Υπάρχει, λοιπόν, μια διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στα ορίσιμα και τα μη ορίσιμα ή γενικά σύνολα. Μπορούμε, κατά συνέπεια, να αναρωτηθούμε για την ισχύ ή μη της υπόθεσης του συνεχούς και άλλων παρεμφερών προβλημάτων εντός καθεμίας από τις δύο αυτές κατηγορίες συνόλων. Όσον αφορά τα ορίσιμα σύνολα, ήδη από την εποχή του Cantor είχαν δοθεί απαντήσεις σε μερικά από τα προβλήματα. Ο ίδιος ο Cantor έλυσε το πρόβλημα του συνεχούς, δηλαδή το πρόβλημα του πληθαρίθμου για τα κλειστά σύνολα. Απέδειξε ότι κάθε άπειρο κλειστό σύνολο είτε είναι αριθμήσιμο είτε έχει τον ίδιο πληθάριθμο με τους πραγματικούς αριθμούς. Επομένως, όταν κάποιος περιορίσει το πεδίο, δηλαδή δεν «εργαστεί» με τυχαία σύνολα, αλλά με ορίσιμα, εφόσον τα τελευταία δεν είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα, διαπιστώνει πως μερικά από τα συζητούμενα προβλήματα επιλύονται μέσα στην κλασική θεωρία, την ZFC. Εντούτοις, χάρη στο συνδυασμό των εργασιών των Gödel και Cohen αποδείχτηκε ότι διάφορα προβλήματα, όπως π.χ. η υπόθεση του συνεχούς, είναι αναποκρίσιμα, έστω κι αν περιορίσει κάποιος τη μελέτη τους στα ορίσιμα σύνολα. Συγκεκριμένα, εάν εξετάσει κάποιος τα απλούστερα ορίσιμα σύνολα, δηλαδή τα σύνολα Borel, τα οποία είναι η κλάση των συνόλων που δημιουργείται εάν από τα ανοικτά σύνολα πάρουμε αριθμήσιμες ενώσεις και συμπληρώματα —πρόκειται για τα βασικά σύνολα πάνω στα οποία στηρίζεται η θεωρία μέτρου—, μπορεί να αποδείξει ότι η υπόθεση του συνεχούς ισχύει, δηλαδή κάθε τέτοιο άπειρο σύνολο ή είναι αριθμήσιμο ή έχει τον ίδιο πληθάριθμο με την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Εάν όμως προχωρήσει κάποιος στη μελέτη λίγο πιο περίπλοκων ορίσιμων συνόλων από αυτά, στα λεγόμενα συμπληρώματα αναλυτικών συνόλων, τότε αδυνατεί να προσδιορίσει τον πληθάριθμό τους στα πλαίσια της κλασικής συνολοθεωρίας. Αυτή η διαπίστωση είναι σημαντική, διότι αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του πληθαρίθμου υπάρχει, όχι μόνον όσον αφορά τα τυχαία σύνολα —σ' αυτή την περίπτωση πρόκειται για ιδιαίτερα δύσκολο και περίπλοκο πρόβλημα—, αλλά και στα ορίσιμα σύνολα!

Η σημαντική εξέλιξη στη θεμελίωση των μαθηματικών που έγινε τα τελευταία χρόνια έγκειται στο ότι αναπτύχθηκαν νέες αρχές, με τη βοήθεια των οποίων έχουμε μια πλήρη και πετυχημένη θεωρία για τα ορίσιμα σύνολα, βάσει της οποίας επιλύονται το πρόβλημα του πληθαρίθμου και ένα πλήθος άλλα προβλήματα για τα προαναφερθέντα σύνολα. Από την άλλη μεριά, αυτή τη στιγμή δεν υπάρχει καμία συστηματική θεωρία για τη δομή των μη ορίσιμων συνόλων! Τίθεται βέβαια το ερώτημα πώς γνωρίζουμε, με ποια κριτήρια αξιολογήσαμε τις νέες αρχές, τα νέα αξιώματα που προσθέσαμε στην κλασική συνολοθεωρία, ώστε σήμερα να ισχυριζόμαστε ότι αυτά είναι κατάλληλα να μας επιλύσουν τα γνωστά προβλήματα, ότι δηλαδή μας οδήγησαν στη διατύπωση της σωστής θεωρίας. Το πρόβλημα είναι περίπλοκο και κατ' αρχήν δεν υπάρχει συγκεκριμένος κανόνας αξιολόγησης της επιλογής των αξιωμάτων, πέραν της μαθηματικής επεξεργασίας τόσο αυτών όσο και της δομής των συμπερασμάτων τους. Ούτε φυσικά υπάρχει αλγόριθμος από τον οποίο να προκύπτουν κάποια κριτήρια για την αποδοχή ή απόρριψη ενός συγκεκριμένου νέου αξιώματος. Για να εξελιχθεί η σημερινή θεωρία ορίσιμων συνόλων —που, επί τη ευκαιρία, τη λέμε περιγραφική συνολοθεωρία— και να αποκτήσει τη σημερινή της μορφή, απαιτήθηκε εργασία 25-30 ετών. Και τούτο διότι μετά τον Cohen, δηλαδή μετά το 1963, υπήρχαν δύο κύριες κατευθύνσεις, δύο διαφορετικοί προσανατολισμοί όσον αφορά την προσπάθεια ανεύρεσης αυτών των νέων αρχών, των νέων αξιωμάτων. Η μια ιδέα αφορούσε τα λεγόμενα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων. Σύμφωνα με αυτά, υπάρχουν σύνολα τα οποία έχουν πολύ μεγάλο, τεράστιο πληθάριθμο, δηλαδή πολύ μεγαλύτερο απ' ό,τι οι φυσικοί, οι πραγματικοί, τα σύνολα των πραγματικών, κ.λπ. Οι πληθάριθμοι αυτοί έχουν διάφορα ονόματα, π.χ. απρόσιτοι πληθάριθμοι, κ.λπ. Διαμορφώθηκε λοιπόν τεράστια θεωρία, στην οποία, παρότι εκκινεί κάποιος από την υπόθεση ότι υπάρχουν τόσο κολοσσιαία σύνολα, τα οποία δεν έχουν καμία σχέση με τα συνηθισμένα σύνολα που συναντάμε στα μαθηματικά, εν τέλει διαπιστώνει ότι η ύπαρξή τους έχει πολύ ενδιαφέρουσες συνέπειες για τη δομή πραγματικών και ιδιαίτερα ορίσιμων συνόλων. Π.χ. ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα, που αποδείχτηκε κατά το τέλος της δεκαετίας του 1960 από τον Solovay, ήταν ότι η υπόθεση της υπάρξεως τέτοιων μεγάλων συνόλων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλύσει το πρόβλημα του πληθαρίθμου για μια ορισμένη κλάση ορίσιμων συνόλων, τα οποία συγκροτούσαν την πρώτη βαθμίδα ανεπίλυτων προβλημάτων στην κλασική περιγραφική συνολοθεωρία. Αυτό το εκπληκτικό αποτέλεσμα έδειξε ότι η θεωρία των μεγάλων πληθαρίθμων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνει την κλασική θεωρία των ορίσιμων συνόλων και να επιλύσει τα προβλήματα που δεν ήταν επιλύσιμα στην κλασική συνολοθεωρία. Με βάση αυτή τη θεωρία παρήχθησαν περαιτέρω και άλλα αξιόλογα αποτελέσματα. Στη συνέχεια, επίσης στο τέλος της δεκαετίας του 1960, δημιουργήθηκε μια άλλη θεωρία, η οποία λέγεται υπόθεση της προσδιορισιμότητας. Αυτή αφορά τη θεωρία των άπειρων παιχνιδιών και είναι μια υπόθεση σχετική με τη δομή ορίσιμων συνόλων πραγματικών αριθμών. Αποδείχτηκε, λοιπόν, ότι, αν στα κλασικά αξιώματα προστεθεί η υπόθεση της προσδιορισιμότητας, δημιουργείται μια πλήρης, απολύτως ικανοποιητική και ενδιαφέρουσα θεωρία για τα ορίσιμα σύνολα, στην οποία επιλύονται τα προβλήματα των πληθαρίθμων κι όλα τα συναφή υπόλοιπα. Πρόκειται για ένα σημαντικό αποτέλεσμα, διότι δεν είναι καθόλου προφανές ότι μια απλή εικασία για άπειρα παιχνίδια έχει σχέση και μπορεί να επιλύσει προβλήματα, όπως αυτό του προσδιορισμού του πληθαρίθμου κ.λπ.

David Hilbert (1862-1943) — *Kurt Gödel (1906-1978)*

Προκύπτουν επομένως τα ακόλουθα ερωτήματα: 1) Ποια από τις δύο θεωρίες είναι ορθή; 2) Υπάρχει καμιά σχέση ανάμεσα στις δύο θεωρίες; Εκείνο που αποδείχτηκε, στα μέσα της δεκαετίας του 1980 από τους Martin, Steel και Woodin, είναι ότι οι δύο αυτές θεωρίες, οι οποίες δεν έχουν κατ' αρχήν καμία σχέση η μια με την άλλη, αποτελούν, κατά έναν εκπλήσσοντα τρόπο, δυϊκές μορφές της ίδιας θεωρίας! Όπως στην κβαντική μηχανική έχουμε το δυϊσμό σωματιδίου-κύματος, έτσι κι εδώ στην ουσία πρόκειται για μία θεωρία η οποία εμφανίζεται με δύο ισοδύναμες μορφές, αυτήν της θεωρίας των μεγάλων πληθαρίθμων και εκείνη της θεωρίας προσδιορισιμότητας. Έχουμε λοιπόν μια επέκταση της κλασικής συνολοθεωρίας με την προσθήκη αυτών των νέων αξιωμάτων σ' αυτήν —τα οποία μπορούμε να θεωρήσουμε είτε ως υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων είτε ως υποθέσεις προσδιορισιμότητας άπειρων παιχνιδιών— και τη δημιουργία κατ' αυτό τον τρόπο μιας νέας ενιαίας συνολοθεωρίας, η οποία επιλύει τα κλασικά προβλήματα όσον αφορά τα ορίσιμα σύνολα, δηλαδή τα κλασικά προβλήματα της περιγραφικής συνολοθεωρίας.

Το επόμενο πρόβλημα είναι να κατορθώσουμε να διατυπώσουμε την κατάλληλη θεωρία, προκειμένου να μελετήσουμε τα τυχαία, τα γενικά σύνολα των πραγματικών αριθμών, και συγκεκριμένα την υπόθεση του συνεχούς. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν διάφορες ιδέες, προτάσεις και θεωρίες, είμαστε ακόμη πολύ μακριά από το να αποφανθούμε προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθούμε για να βρούμε τη σωστή θεωρία, διότι δεν γνωρίζουμε ακόμη ποια μορφή πρέπει να πάρει αυτή, δηλαδή τι είδους νέες αρχές και αξιώματα χρειαζόμαστε για να επιλύσουμε το πρόβλημα της δομής των γενικών συνόλων.

Ερ.: *Ένα μεγάλο μέρος του ερευνητικού σας έργου* *έχει να κάνει με την εισαγωγή μεθόδων της περιγραφικής συνολοθεωρίας σε προβλήματα της ανάλυσης. Μπορείτε να μας εξηγήσετε περί τίνος πρόκειται;*

Απ.: Το μισό μέρος της ερευνητικής μου δραστηριότητας έχει αφιερωθεί στην ανάπτυξη της θεωρίας της προσδιορισιμότητας των άπειρων παιχνιδιών, δηλαδή στη μελέτη των συνεπειών αυτής της θεωρίας όσον αφορά τη δομή των ορίσιμων συνόλων —των ανοικτών συνόλων, των συνόλων Borel και των προβολικών συνόλων. Με άλλα λόγια, η έρευνά μου έχει να κάνει με την ανάπτυξη της περιγραφικής συνολοθεωρίας επί τη βάσει της αρχής της προσδιορισιμότητας και την επίλυση διαφόρων προβλημάτων με τη βοήθεια αυτής της θεωρίας. Επιτρέψτε μου, όμως, μια μικρή παρένθεση, προκειμένου να εξηγήσω λίγο πιο αναλυτικά τι θα πει περιγραφική συνολοθεωρία: πρόκειται για τη μελέτη ορίσιμων συνόλων στους πολωνικούς χώρους. Πολωνικοί χώροι είναι μετρικοί χώροι που είναι διαχωρίσιμοι και πλήρεις. Όλοι οι κλασικοί μαθηματικοί χώροι περιλαμβάνονται σ' αυτούς. Π.χ. η ευθεία των πραγματικών αριθμών, το μιγαδικό επίπεδο, οι ευκλείδειοι χώροι, οι (διαχωρίσιμοι) χώροι Banach, κ.λπ. Πρώτα ας δούμε τι θα πει ορίσιμο σύνολο και ας προβούμε σε μια ιεράρχηση τέτοιων συνόλων. Μεταβαίνοντας από τα απλούστερα προς τα πλέον περίπλοκα σύνολα, αναφέρω τα (τοπολογικά) ανοικτά σύνολα, τα κλειστά σύνολα, τα σύνολα Borel και τα προβολικά σύνολα, τα οποία «δημιουργούνται» αν πάρουμε όχι μόνον αριθμήσιμες ενώσεις και συμπληρώματα (που συγκροτούν τα σύνολα Borel), αλλά και προβολές ή συνεχείς απεικονίσεις. Φυσικά υπάρχουν και ακόμη πιο περίπλοκα ορίσιμα σύνολα. Στην περιγραφική συνολοθεωρία ταξινομούμε τα σύνολα σε βαθμίδες, ανάλογα με το βαθμό της πολυπλοκότητας των ορισμών τους, και κατόπιν μελετάμε τη δομή των συνόλων που ανήκουν σε κάθε βαθμίδα χωριστά. Π.χ. προσπαθούμε να βρούμε ποιος είναι ο πληθάριθμος αυτών των συνόλων, μελετάμε εάν αυτά είναι στην ευθεία μετρήσιμα κατά Lebesgue (καθότι υπάρχουν και σύνολα μη μετρήσιμα κατά Lebesgue, σύμφωνα με το κλασικό θεώρημα του Vitali), κ.λπ. Η βασική διαίσθηση είναι ότι, ενώ τα τυχαία σύνολα πραγματικών αριθμών είναι τρομερά περίπλοκα, και πολλές φορές «παθολογικά» (π.χ. μη μετρήσιμα), όταν περιοριζόμαστε στα ορίσιμα σύνολα (π.χ. ανοικτά, κλειστά, Borel), αυτά είναι κανονικά και μπορούμε να έχουμε μια ικανοποιητική θεωρία γι' αυτά. Στα πλαίσια της κλασικής συνολοθεωρίας δεν μπορούμε να απαντήσουμε ούτε στο ερώτημα αν όλα τα ορίσιμα σύνολα (π.χ. τα προβολικά) είναι μετρήσιμα ή όχι. Η θεωρία της προσδιορισιμότητας επιλύει το πρόβλημα, δηλαδή αποδεικνύει ότι τα ορίσιμα σύνολα είναι μετρήσιμα. Από τη νέα αυτή θεωρία συνάγεται, κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ότι η συζητούμενη βασική διαίσθηση είναι σωστή, ήτοι τα ορίσιμα σύνολα έχουν πράγματι κανονικότητα και μπορούμε να τα μελετήσουμε. Τα δέκα πρώτα χρόνια της προσωπικής μου έρευνας τα αφιέρωσα περισσότερο στην ανάπτυξη της θεωρίας των ορίσιμων συνόλων επί τη βάσει της ιδέας της προσδιορισιμότητας των άπειρων παιχνιδιών, αλλά τα τελευταία έτη, όταν αυτή η θεωρία είχε πλέον σχεδόν τελειοποιηθεί, άρχισα να ασχολούμαι με το πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε τις ιδέες και τεχνικές που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της ανωτέρω θεωρίας στη μελέτη κλασικών και μοντέρνων θεμάτων της ανάλυσης, τα οποία δεν είναι καθαρά συνολοθεωρητικά, δηλαδή δεν είναι καθόλου θέματα θεμελιώσεως! Με ενδιαφέρει ιδιαιτέρως η σύνδεση της συζητούμενης θεωρίας με τις εξελίξεις των μαθηματικών σε άλλους κλάδους, είτε άμεσα, με εφαρμογές, είτε έμμεσα, με τη δημιουργία νέων εννοιών και νέων διασυνδέσεων.

Ερ.: *Θα μπορούσατε να μας εξηγήσετε πιο αναλυτικά τι εννοείτε και πώς αυτό συνδέεται με τα τωρινά σας ερευνητικά ενδιαφέροντα;*

Απ.: Στο πλαίσιο της αναζήτησης συνδέσεων της περιγραφικής συνολοθεωρίας με άλλους κλάδους των μαθηματικών και εφαρμογής μεθόδων της, έχω στρέψει τα ερευνητικά μου ενδιαφέροντα σε θέματα που έχουν σχέση κυρίως με την κλασική ανάλυση —όπως η αρμονική ανάλυση ή η θεωρία ολοκληρώσεως και παραγωγίσεως—, αλλά και σε θέματα της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων. Το ενδιαφέρον στοιχείο αυτής της τελευταίας προσπάθειας είναι ότι αφορά τη μελέτη ενός νέου είδους χώρου. Εξηγώ αμέσως τι εννοώ! Πολλοί κλάδοι των μαθηματικών αφορούν πολωνικούς χώρους, στους οποίους υπάρχει μια πλούσια δομή τοπολογίας, θεωρίας μέτρου, κ.λπ., και οι οποίοι συνδέονται με διάφορους τρόπους. Υπάρχουν όμως και μαθηματικοί χώροι οι οποίοι εμφανίζονται ως χώροι-πηλίκα, που προκύπτουν δηλαδή από τη διαίρεση των πολωνικών χώρων με ορισμένες κλάσεις σχέσεων ισοδυναμίας. Ένα κλασικό παράδειγμα προέρχεται από τη θεωρία αναπαραστάσεων ομάδων, όπου οι χώροι των αναπαραστάσεων είναι χώροι-πηλίκα, διότι εκείνο που μελετάται είναι όχι οι ίδιες οι αναπαραστάσεις, αλλά οι κλάσεις ισοδυναμίας τους. Άλλο παράδειγμα, που αφορά τα δυναμικά συστήματα, προκύπτει όταν μελετάμε τη δομή των τροχιών της δράσης μιας ομάδας σ' ένα χώρο, οπότε διαπιστώνουμε ότι ο χώρος αυτός εμφανίζεται σαν χώρος-πηλίκο. Είναι ο χώρος στον οποίο δρα η ομάδα διαιρούμενος με μια ορισμένη σχέση ισοδυναμίας. Η τοπολογική και μετροθεωρητική δομή αυτών των χώρων-πηλίκων είναι τετριμμένη, οπότε δεν μπορούν να μελετηθούν με τις κλασικές μεθόδους. Πρόκειται για ένα φαινόμενο το οποίο έχει διαπιστωθεί, εδώ και αρκετά χρόνια, σε διάφορους κλάδους, όπως στη θεωρία αναπαραστάσεων και στη θεωρία αλγεβρών τελεστών, και γι' αυτό έχουν αναπτυχθεί νέες μέθοδοι, οι οποίες πολλές φορές στηρίζονται στα καλούμενα μη αντιμεταθετικά μαθηματικά. Για παράδειγμα, υπάρχει μη αντιμεταθετική γεωμετρία, μη αντιμεταθετική τοπολογία, κ.λπ. Πρόσφατα έχει γραφτεί ένα πολύ ενδιαφέρον και σημαντικό βιβλίο από τον Alain Connes, το *Non Commutative Geometry* (Μη αντιμεταθετική γεωμετρία). Καίτοι σε πολλά σημεία είναι αρκετά τεχνικό, άρα δύσκολο στην κατανόησή του από τον μη ειδικό, ένας σκοπός του βιβλίου είναι να καταδειχτεί ότι οι ιδέες των μη αντιμεταθετικών μαθηματικών χρησιμοποιούνται για να αντικαταστήσουν την κλασική τοπολογία, τη θεωρία μέτρου κ.λπ., ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε τη δομή των προαναφερθέντων «ιδιόμορφων» χώρων. Για τη μελέτη τους από συνολοθεωρητική άποψη —οι τοπολόγοι, οι γεωμέτρες κ.λπ. τους μελετούν με τις δικές τους μεθόδους και θέτουν τα δικά τους ερωτήματα— απαιτούνται νέες ιδέες και τεχνικές. Επιλέγοντας αυτή την προσέγγιση, ενδιαφέρον παρουσιάζει π.χ. το πρόβλημα των πληθαρίθμων αυτών των χώρων. Αν το δούμε μέσα από την κλασική θεωρία του Cantor, το πρόβλημα είναι τετριμμένο, διότι κατά κανόνα αυτοί οι πληθάριθμοι είναι ίδιοι με τον πληθάριθμο του συνεχούς. Για την περίπτωση π.χ. του χώρου τροχιών ενός μη τετριμμένου δυναμικού συστήματος, ο μόνος τρόπος για να βρούμε την ένα-προς-ένα απεικόνιση με τους πραγματικούς απαιτεί τη χρήση του αξιώματος της επιλογής. Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε ένα σύνολο το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε τροχιά, και «πάνω» σ' αυτή την επιλογή είναι εύκολο να αποδείξουμε στη συνέχεια ότι υπάρχει η ζητούμενη απεικόνιση προς τους πραγματικούς. Η εν λόγω ένα-προς-ένα απεικόνιση μεταξύ του χώρου τροχιών και του χώρου της ευθείας των πραγματικών δεν είναι κατασκευαστική, δεν είναι ορίσιμη. Δεν έχει π.χ. καμία μετρησιμότητα, άρα η συγκεκριμένη μέθοδος-έννοια δεν είναι η σωστή. Εκείνο που ζητάμε να βρούμε είναι μια απεικόνιση, η οποία να έχει καλές μαθηματικές ιδιότητες, δηλαδή που να είναι ορίσιμη. Δημιουργήθηκε έτσι μια θεωρία ορίσιμης πληθικότητας, βάσει της οποίας διακρίνουμε αυτούς τους χώρους μεταξύ τους. Πράγματι, όταν τους μελετήσουμε χρησιμοποιώντας την έννοια του ορίσιμου πληθαρίθμου, διαπιστώνουμε ότι έχουν διαφορετικό πληθάριθμο. Επομένως, αν πάρουμε ένα χώρο τροχιών και το δυναμικό σύστημα δεν είναι τετριμμένο, αποδεικνύεται ότι ο αριθμός των τροχιών, υπό την ορίσιμη έννοια, είναι μεγαλύτερος από τους πραγματικούς. Επομένως, μπορούμε να «εμφυτεύσουμε», κατά έναν ορίσιμο τρόπο, τους πραγματικούς στις τροχιές, αλλά όχι αντίθετα, διότι ο μόνος τρόπος για να βρούμε την ένα-προς-ένα απεικόνιση είναι η επιλογή ενός στοιχείου από κάθε τροχιά, πράγμα που δεν είναι δυνατόν να γίνει με ορίσιμο τρόπο. Το κλασικό παράδειγμα είναι εκείνο του Vitali. Εάν πάρουμε τη δράση των ρητών στους πραγματικούς, η σχέση της ισοδυναμίας είναι ακριβώς η ισοδυναμία του Vitali· δηλαδή αν πάρουμε ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας, έχουμε ένα μη μετρήσιμο σύνολο. Η θεωρία της ορίσιμης πληθικότητας εξηγεί αυτά τα φαινόμενα και επιτρέπει τη διάκριση μεταξύ ορίσιμων και μη ορίσιμων, ή, αλλιώς, «παθολογικών» απεικονίσεων. Ανάλογα προβλήματα εμφανίζονται στην εργοδική θεωρία, στη θεωρία ομάδων αλγεβρών τελεστών κ.λπ., όταν προσπαθούμε να τα μελετήσουμε, όχι συνολοθεωρητικά, αλλά από την πλευρά της τοπολογίας και της θεωρίας μέτρου. Το ερώτημα όμως παραμένει το ίδιο: Πώς μπορούμε να μελετήσουμε τους χώρους αυτού του είδους, τους οποίους μάλιστα ο Connes και άλλοι μαθηματικοί αποκαλούν «κβαντικούς χώρους»; Νά λοιπόν ποια είναι τα θέματα της τωρινής μου ερευνητικής δραστηριότητας.

Ερ.: *Θα ήθελα τώρα να θέσω ένα πιο γενικό ερώτημα, το οποίο έχει και επιστημολογικό ενδιαφέρον. Η λογική μέχρι το τέλος του προηγούμενου αιώνα αποτελούσε κλάδο της φιλοσοφίας. Στον 20ό αιώνα, η έντονη μαθηματικοποίησή της την απέκοψε από το σώμα της φιλοσοφίας και την έκανε κλάδο των μαθηματικών. Ορισμένοι μαθηματικοί, όπως π.χ. ο Paul Halmos, διατείνονται ότι τα συμπεράσματα της μαθηματικής λογικής, αν δεν τυγχάνουν εφαρμογής σε προβλήματα των άλλων κλάδων των μαθηματικών, είναι ήσσονος σημασίας για την πρόοδο της έρευνας στη μαθηματική επιστήμη. Από την άλλη όμως πλευρά, αξίζει να σημειωθεί ότι η μαθηματική λογική βρίσκει σήμερα άμεση εφαρμογή σε άλλες επιστήμες, όπως αυτές των ηλεκτρονικών υπολογιστών και της τεχνητής νοημοσύνης, της γλωσσολογίας, κ.λπ. Θα ήθελα να μου απαντήσετε στα εξής επιμέρους ερωτήματα: α) Ποιο είναι σήμερα το εύρος της μαθηματικής λογικής, σε ποιους επιμέρους κλάδους διακρίνεται; β) Ποια είναι η θέση της μέσα στο χώρο της μαθηματικής επιστήμης; γ) Ποια είναι η θέση της μέσα στην καθ' όλου επιστήμη, ποιες είναι οι γενικές εφαρμογές της μαθηματικής λογικής;*

Απ.: Κατ' αρχάς, η μαθηματική λογική είναι κλάδος των μαθηματικών, ή, μάλλον, ένα σύνολο κλάδων των μαθηματικών, αφού δεν αποτελεί απολύτως ενιαίο κλάδο, αλλά διακρίνεται κι αυτή σε αρκετά μεγάλους υποκλάδους. Ως κλάδος των μαθηματικών διαδραματίζει έναν ιδιάζοντα ρόλο, καθόσον μελετά τη δομή και τη θεμελίωσή τους. Αυτό συμβαίνει διότι και αυτή μεν ασχολείται, όπως οι άλλοι κλάδοι των μαθηματικών (π.χ. άλγεβρα, γεωμετρία κ.λπ.), με ορισμένη ομάδα μαθηματικών αντικειμένων, όμως οι μαθηματικές δομές τις οποίες μελετά αφορούν —ένα μέρος τους τουλάχιστον— τη μαθηματική επιστήμη στην καθολικότητά της, στη θεμελίωσή της, χαρακτηριστικό που δεν το έχουν οι άλλοι κλάδοι της. Επομένως, κατέχει ιδιάζουσα θέση μέσα στα μαθηματικά.

Η μαθηματική λογική συνήθως διακρίνεται στους εξής τέσσερις κλάδους: τη συνολοθεωρία, τη θεωρία μοντέλων, τη θεωρία αποδείξεων και τη θεωρία της υπολογισιμότητας. Η συνολοθεωρία ξεκίνησε με τον Cantor και αρχικά δεν εθεωρείτο τμήμα της μαθηματικής λογικής, πλην όμως σήμερα θεωρείται, και τούτο επειδή αφορά και τη θεμελίωση των μαθηματικών, όπως εξήγησα πριν. Η θεωρία μοντέλων μπορούμε να πούμε, κάπως γενικά, ότι αφορά τη σχέση που υφίσταται ανάμεσα στη γλώσσα —που είναι μια από τις βασικές έννοιες της λογικής— και τη σημασιολογία και στα μοντέλα της γλώσσας. Η θεωρία αποδείξεων αποτελεί, κατά κάποιον τρόπο, εξέλιξη της θεωρίας των μαθηματικών του Hilbert, δηλαδή αφορά τη μελέτη των αξιωματικών συστημάτων ως μαθηματικών αντικειμένων. Τέλος, η θεωρία της υπολογισιμότητας είναι ένας κλάδος που μεταξύ άλλων αποτελεί και το θεμέλιο της θεωρητικής πληροφορικής. Βεβαίως, όλοι οι προαναφερθέντες κλάδοι της μαθηματικής λογικής διαπλέκονται μεταξύ τους, δημιουργούν νέες επιμέρους ερευνητικές περιοχές, έχουν εφαρμογές κ.λπ. Με δυο λόγια, η εικόνα στο «εσωτερικό τοπίο» της μαθηματικής λογικής δεν είναι στατική! Τώρα, όσον αφορά τη θέση αυτού του κλάδου στη σύνολη μαθηματική επιστήμη, πρέπει να πω ότι εκείνα τα συμπεράσματά του τα οποία αφορούν τη δομή των μαθηματικών —π.χ. τα θεωρήματα του Gödel— είναι πολύ σημαντικά, διότι συμβάλλουν στον προσδιορισμό και την αποσαφήνιση της έννοιας και της μορφής της εν λόγω επιστήμης. Μερικές από τις βασικές έννοιες των μαθηματικών είναι αυτές των αξιωμάτων, της αξιωματικής μεθόδου, της αποδείξεως κ.λπ., και η μαθηματική λογική έχει συμβάλει τα μέγιστα στη βαθύτερη κατανόησή τους. Πέραν τούτου, όμως, η λογική έχει συμβάλει καταπληκτικά στη δημιουργία νέων εννοιών, όπως η έννοια της υπολογισιμότητας, η έννοια του τι είναι αλγοριθμικά δυνατό, η θεωρία του Turing, κ.λπ. Όλα αυτά τα επιτεύγματα έρχονται σαν συνέχεια τη «δουλειάς» του Gödel, τα θεωρήματα του οποίου είχαν μεγάλες συνέπειες για τα μαθηματικά. Οι προαναφερθείσες ιδέες-έννοιες εφαρμόζονται σήμερα σε πολλούς κλάδους αυτής της επιστήμης.

Ερ.: *Στο σημείο αυτό, μια και το αναφέρατε, θα ήθελα να σας θέσω μια εμβόλιμη στην απάντησή σας ερώτηση: Πώς και γιατί η εργασία του Turing αποτελεί συνέχεια εκείνης του Gödel;*

Απ.: Η εργασία του Turing αποτελεί, κατά κάποιον τρόπο, εξέλιξη της εργασίας του Gödel, στο μέτρο που η έννοια της υπολογισιμότητας, το τι δηλαδή σημαίνει μια συνάρτηση να υπολογίζεται, ήταν έμφυτη στην απόδειξη του θεωρήματος του Gödel, και μάλιστα με βάση αυτή δημιουργήθηκε αργότερα η θεωρία των αναδρομικών συναρτήσεων. Ο Turing, προτού διατυπώσει τη δική του θεωρία, μελέτησε και κατανόησε σε βάθος τη δουλειά του Gödel. Χρειάστηκε να περάσει κάποιος χρόνος μέχρι να δημιουργηθεί η αυστηρή έννοια της αναδρομικής συνάρτησης, της υπολογίσιμης συνάρτησης, αλλά η εφαρμογή της επέφερε σημαντικά αποτελέσματα σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Ένα τέτοιο επίτευγμα στον κλάδο της αριθμοθεωρίας αποτελεί το θεώρημα του Matiyasevich, με το οποίο επιλύθηκε αρνητικά το δέκατο πρόβλημα του Hilbert. Το ερώτημα σ' αυτό το πρόβλημα ήταν: Υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος, δεδομένης μιας διοφαντικής εξίσωσης, να μας λέει αν υπάρχει λύση της ή όχι; Παρότι όμως η έννοια του αλγορίθμου (ως πρακτική έννοια χρησιμοποιούμενη για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων) είναι γνωστή από την εποχή του Ευκλείδη, δεν είχε αναπτυχθεί μέχρι τότε κάποια γενική θεωρία αλγορίθμων. Η μεγάλη συμβολή της λογικής έγκειται στο ότι διατύπωσε μια αυστηρή έννοια αλγοριθμικά υπολογιζόμενης συνάρτησης και κατόπιν δημιούργησε την αντίστοιχη θεωρία, χάρη στην οποία επιλύθηκε όχι μόνο το προαναφερθέν πρόβλημα, αλλά και πολλά αντίστοιχα με αυτό προβλήματα διαφόρων κλάδων των μαθηματικών. Π.χ. στην τοπολογία υπάρχουν σημαντικά αποτελέσματα, σύμφωνα με τα οποία διάφορα προβλήματα ταξινόμησης πολλαπλοτήτων κ.λπ. δεν επιδέχονται αλγοριθμική λύση.

Ερ.: *Νομίζω ότι απαντήσατε πλήρως στο ερώτημά μου. Ας επανέλθουμε όμως στη συζήτησή μας για τη σχέση της μαθηματικής λογικής με τους λοιπούς κλάδους των μαθηματικών, αλλά και τις λοιπές επιστήμες.*

Απ.: Θα ήθελα να απαντήσω στην άποψη του Halmos και να πω ότι δεν νομίζω πως η σπουδαιότητα της λογικής κρίνεται από τις εφαρμογές της στην επίλυση προβλημάτων σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Ό-πως ήδη εξήγησα, η λογική, παρά τη στενή διασύνδεσή της με πολλούς άλλους κλάδους της επιστήμης μας, έχει την αυτοτέλεια και την ανεξαρτησία της, διότι ανέπτυξε τις δικές της έννοιες και τα δικά της προβλήματα. Ο βαθμός σπουδαιότητάς της προσδιορίζεται με τα ίδια κριτήρια με τα οποία προσδιορίζεται και η σημασία της άλγεβρας, της γεωμετρίας, της τοπολογίας, κ.λπ. Όσο για τις εφαρμογές της, νομίζω ότι ανέφερα ήδη πολλές. Προσθέτω και άλλες: Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει πολύ σημαντικές εργασίες, με τις οποίες εφαρμόζονται «βαθιές» μέθοδοι της θεωρίας μοντέλων στην επίλυση προβλημάτων σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών, κυρίως, όμως, της άλγεβρας και της αλγεβρικής γεωμετρίας σε συσχέτιση με την αριθμοθεωρία! Επίσης, η θεωρία μοντέλων έλυσε και το βασικό, ίσως και θεμελιώδες, πρόβλημα, σχετικά με το τι σημαίνει απειροστό, και συνέβαλε στη δημιουργία από τον Robinson του νέου κλάδου της μη πρότυπης ανάλυσης (Non-Standard Analysis). Είναι αλήθεια ότι, αν και η δυσκολία με το πρόβλημα του απειροστού «υπερνικήθηκε» κατά κάποιον τρόπο με τη θεωρία των ε, δ κ.λπ. του Cauchy, πάντα υπήρχε το ερώτημα για την έννοια του απειροστού και το ρόλο που αυτό παίζει στα μαθηματικά, ανεξάρτητα από το αν έχει άμεση εφαρμογή στη λύση ενός τεχνικού μαθηματικού προβλήματος. Η θεωρία μοντέλων, λοιπόν, απάντησε ικανοποιητικά σ' αυτό το ερώτημα και αποτέλεσε τη βάση για τη δημιουργία του προαναφερθέντος νέου κλάδου της ανάλυσης, στον οποίο σήμερα γίνεται πολλή έρευνα, διότι βοηθά στην επίλυση προβλημάτων που εμφανίζονται στη θεωρία πιθανοτήτων, στις διαφορικές εξισώσεις, αλλά και στη μαθηματική φυσική. Επίσης, όλο και περισσότερες έννοιες της μαθηματικής λογικής και κυρίως της περιγραφικής συνολοθεωρίας εφαρμόζονται σε άλλους κλάδους της ανάλυσης, όπως στην αρμονική ανάλυση, στη συναρτησιακή ανάλυση, στην εργοδική θεωρία κ.λπ.

Πολλοί συνάδελφοί μου κι εγώ ασχολούμαστε τελευταία με τη συσχέτιση εννοιών της λογικής με έννοιες, ιδέες και τεχνικές που αναπτύχθηκαν σε διάφορους κλάδους της ανάλυσης, εργοδικής θεωρίας κ.λπ. Τα επιτεύγματα της λογικής τυγχάνουν μεγάλης εφαρμογής και σε κλάδους εκτός των μαθηματικών, δηλαδή σε άλλες επιστήμες. Σωστά αναφερθήκατε στην εφαρμογή της στη θεωρία της πληροφορικής, αφού, ως γνωστόν, οι βασικοί μαθηματικοί κλάδοι που έχουν άμεση σχέση με αυτή τη θεωρία είναι η συνδυαστική, η αριθμοθεωρία και η λογική. Ένα μεγάλο μέρος της θεωρητικής πληροφορικής μπορεί να θεωρηθεί ως εφαρμοσμένη λογική, διότι σ' αυτήν ανακύπτουν πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα, όπως π.χ. της έννοιας των αλγορίθμων, της πολυπλοκότητάς τους, του τρόπου με τον οποίο συνδέεται η έννοια της ορισιμότητας μιας γλώσσας στη λογική με την πολυπλοκότητα, κ.λπ. Επίσης, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εφαρμογές της λογικής στη γλωσσολογία και τη φιλοσοφία.

Ερ.: *Ας αφήσουμε όμως τον τόσο ενδιαφέροντα χώρο της έρευνάς σας, προκειμένου να σας θέσω ένα ερώτημα με παιδαγωγικό ενδιαφέρον. Πιστεύετε ότι η μαθηματική λογική θα έπρεπε να διδάσκεται στα γυμνάσια και λύκεια; Πώς αξιολογείτε την προσπάθεια του συναδέλφου σας Raymond Smullyan, που έχει γράψει πολλά βιβλία με προβλήματα-σπαζοκεφαλιές λογικής, φιλοδοξώντας να παρουσιάσει, με μη τεχνικό τρόπο, δύσκολα θεωρήματα της μαθηματικής λογικής (όπως π.χ. αυτά του Gödel) σε νεαρούς μαθητές, αλλά και στο ευρύ κοινό;*

Απ.: Είναι οπωσδήποτε αξιέπαινη η δουλειά του Smullyan να εξηγήσει με τη βοήθεια παζλ ή προβλημάτων τη θεωρία του Gödel, και να την κάνει κατανοητή και ελκυστική σε νέους ανθρώπους, φοιτητές ή μαθηματικούς. Όσον αφορά το θέμα τη διδασκαλίας των μαθηματικών, πρόκειται για ένα ενδιαφέρον ζήτημα. Οπωσδήποτε κάποια στοιχεία λογικής ήδη διδάσκονται σε λύκεια στο εξωτερικό. Π.χ. διδάσκονται στοιχεία προτασιακού λογισμού, αλγεβρών Boole κ.λπ. Για το κατά πόσον όμως πρέπει κανείς να εισαγάγει και άλλες έννοιες λογικής, πιο προχωρημένες, στα λύκεια, δεν μπορώ να πω ότι έχω συγκεκριμένη άποψη. Δεν έχω σκεφτεί αυτό το πρόβλημα, καίτοι είναι πολύ ενδιαφέρον. Ήδη στην Αμερική έχουν αρχίσει να γίνονται διάφορες έρευνες πάνω σ' αυτό το ερώτημα από επιτροπές, μεταξύ άλλων, της Association for Symbolic Logic, αλλά αυτή τη στιγμή δεν θυμάμαι να έχουν διατυπωθεί κάποιες συγκεκριμένες προτάσεις για την εισαγωγή της διδασκαλίας της μαθηματικής λογικής σε γυμνάσια.

Πάντως μελετάται το θέμα και γίνεται μια προσπάθεια να κατανοηθεί σε ποιο στάδιο της εκπαίδευσης μπορούν να διδαχθούν για πρώτη φορά οι έννοιες της μαθηματικής λογικής, έτσι ώστε να καταστούν κατανοητές και χρήσιμες. Και τούτο διότι δεν πρέπει να διδαχθούν με τον τρόπο που γινόταν στην εποχή των λεγόμενων νέων μαθηματικών, όταν συμπεριλήφθηκαν στη διδακτέα μαθηματική ύλη διάφορες αφηρημένες έννοιες και από τη λογική και από τη συνολοθεωρία με εντελώς αποτυχημένο τρόπο. Μερικές έννοιες της λογικής είναι αρκετά βασικές και χρήσιμες, και πρέπει να εισαχθούν με τον σωστό τρόπο σε διάφορα στάδια της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό, στο γυμνάσιο και στο λύκειο, όμως αυτό πρέπει να γίνει με προσοχή, προκειμένου να αποφευχθούν τα λάθη του παρελθόντος.

Ερ.: *Σήμερα είναι γεγονός ότι οι μαθηματικοί διέρχονται επαγγελματική κρίση σε παγκόσμιο επίπεδο. Θα συμβουλεύατε λοιπόν κάποιον νέο να σπουδάσει μαθηματικά, και, αν ναι, γιατί;*

Απ.: Σήμερα τα μαθηματικά βρίσκονται σε εποχή μεγάλης άνθησης. Πρόκειται για μια χρυσή εποχή. Την τελευταία δεκαπενταετία γίνονται σημαντικές ανακαλύψεις, και με τρομερά γρήγορο ρυθμό. Ζούμε σε μια συναρπαστική από πλευράς μαθηματικών επιτευγμάτων εποχή, και πιστεύω πως αξίζει κάποιος να γνωρίσει τον κόσμο των μαθηματικών και να εργαστεί ερευνητικά πάνω σ' αυτόν.

Ένας νέος που έχει μεράκι και ταλέντο στα μαθηματικά, οφείλει να ακολουθήσει το δρόμο τους. Το επαγγελματικό σκέλος συνήθως το σκέφτεται δευτερευόντως· δεν εννοώ πάντως ότι πρέπει να το αγνοεί. Ωστόσο, και στο παρελθόν το να «δουλέψει» κανείς στα μαθηματικά απαιτούσε κάποιες θυσίες· δεν ήταν η βασιλική ατραπός προς το χρήμα!

Σας ευχαριστώ πολύ για την ωραία συζήτησή μας.

Η σχετικότη

Και στα μεγάλα πνε

«Η Γη κινείται συνεχώς, αλλά οι άνθρωποι δεν το γνωρίζουν. Όπως το πλήρωμα σ' ένα κλειστό καράβι, δεν το διαπιστώνουν.»
—*Κινεζικό αστρονομικό κείμενο,* 2ος αιώνας π.Χ.

I. Η Γη είναι το κέντρο του σύμπαντος.
II. Η Γη είναι ακίνητη.
III. Όλα τα ουράνια σώματα κινούνται γύρω από τη Γη.
—*Αξιώματα του Πτολεμαίου,* 2ος αιώνας μ.Χ.

«Απ' το λιμάνι ξανοιχτήκαμε στη θάλασσα. Η στεριά κι οι πόλεις ξεμάκραιναν και μίκραιναν.»
—*Βιργίλιος,* 1ος αιώνας π.Χ.

Όπως βλέπετε, η έννοια της σχετικότητας απασχόλησε πολλά από τα μεγάλα πνεύματα του παρελθόντος —κινέζους αστρονόμους, λατίνους ποιητές, φυσικούς επιστήμονες πολλών εθνοτήτων. Αποτελούσε προκλητικό πρόβλημα στους αρχαίους καιρούς, στα μεσαιωνικά χρόνια και στη σύγχρονη εποχή. Αυτή η έννοια συνδέεται τόσο με πολύ κοινά γήινα φαινόμενα όσο και με τη βασική δομή του σύμπαντος ως όλου. Προέκυψε κάποια στιγμή στις προσπάθειες να περιγραφούν οι απλούστερες μορφές της κίνησης, «ενσωματώθηκε» στα πλέον θεμελιώδη προβλήματα της σύγχρονης επιστήμης, και μας υποχρέωσε να αναθεωρήσουμε αρκετές έννοιες τις οποίες εκλαμβάναμε ως ακλόνητους ακρογωνιαίους λίθους της επιστήμης. Μπορεί κανείς να πει με βεβαιότητα ότι η σχετικότητα διαπερνά ολόκληρη την ιστορία της φυσικής. Και πρέπει να παραδεχτείτε ότι δεν υπάρχουν πολλές τέτοιες έννοιες.

Ας δούμε λοιπόν τώρα πόσο βαθιά έχει ριζώσει μέσα σας η έννοια της σχετικότητας.

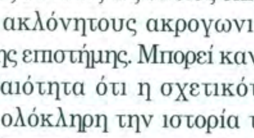
Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Τι ισχύει από τα δύο: η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, ή το αντίθετο;

2. Τι σχήμα έχει η τροχιά της Σελήνης;

3. Τι μορφή έχει η τροχιά ενός σημείου της έλικας ενός αεροπλάνου ως προς (α) τον πιλότο (β) το έδαφος;

4. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την τροχιά μιας σταγόνας βροχής στο παράθυρο ενός τρένου. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη φορά της κίνησης του τρένου;



5. Μια πέτρα που ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω επιβραδύνεται κατά το πρώτο μισό της κίνησής της και επιταχύνεται κατά το δεύτερο μισό. Αυτό σημαίνει ότι στο πρώτο μισό η επιτάχυνσή της είναι αρνητική ενώ στο δεύτερο θετική;

6. Καπνός εξέρχεται από τα φουγάρα δύο ατμομηχανών. Ο άνεμος μεταφέρει τον καπνό, και σχηματίζονται δύο στήλες καπνού. Υπάρχει περίπτωση αυτές οι στήλες να τέμνονται μεταξύ τους;

7. Πότε είναι δυνατόν ο πιλότος ενός μαχητικού αεροσκάφους να δει ένα βλήμα πυροβόλου να πετάει δίπλα του;

8. Μια κυλιόμενη σκάλα ανόδου κινείται με ταχύτητα 0,75 m/s. Με πόση ταχύτητα πρέπει να την κατεβαίνει κάποιος, για να έχει τόση ταχύτητα όση και αυτοί που μεταφέρονται από τη διπλανή κυλιόμενη σκάλα καθόδου;

9. Μια μπάλα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_0. Όταν φτάνει το ανώτερο σημείο της τροχιάς της, μια δεύτερη μπάλα εκτοξεύεται προς τα πάνω με την ίδια ταχύτητα. Ποια είναι η σχετική ταχύτητα των δύο σφαιρών;

10. Μπορούν σ' ένα σύστημα αναφοράς δύο σημεία *A* και *B* να κινούνται σε παράλληλες γραμμές, και σε τεμνόμενες γραμμές σε κάποιο άλλο;

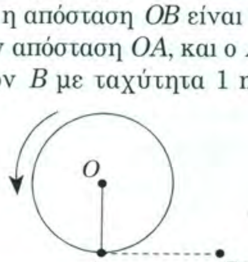
11. Ένα μικρό πλοιάριο και μια σχεδία πλέουν παράλληλα κατά μήκος ενός ποταμού. Σε ποια περίπτωση θα χρειαστεί να καταβάλλει λιγότερη προσπάθεια ο κωπηλάτης: αν παραμένει σταθερά 15 m μπροστά από το πλοιάριο ή 15 m πίσω του;

12. Γιατί τα αεροπλάνα σχεδόν πάντοτε απογειώνονται και προσγειώνονται αντίθετα στο ρεύμα του αέρα;

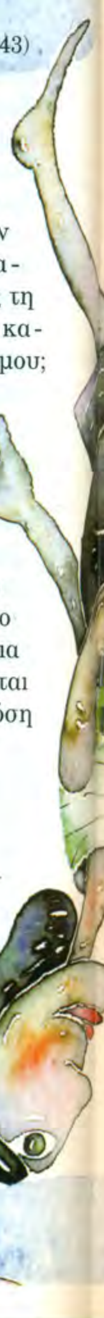
«Αν προσδίδαμε κάποια κίνηση στη Γη, αυτή η κίνηση θα έπρεπε να εκδηλώνεται και σε οτιδήποτε βρίσκεται έξω από τον πλανήτη, αλλά μόνο προς την αντίθετη κατεύθυνση...»
—*Νικόλαος Κοπέρνικος* (1473-1543)

13. Σε όλη τη διάρκεια ενός αεροπορικού αγώνα μετ' επιστροφής από τη Νέα Υόρκη μέχρι την Ουάσινγκτον, έπνεε άνεμος με κατεύθυνση από την πρώτη πόλη προς τη δεύτερη. Οι χρόνοι πτήσης θα είναι καλύτεροι ή χειρότεροι εξαιτίας του ανέμου;

14. Μια κυκλική οριζόντια πλατφόρμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ένας παρατηρητής *A* στέκεται πάνω στην πλατφόρμα και ένας άλλος, *B*, στο έδαφος. Τη στιγμή που φαίνεται στο σχήμα, η απόσταση *OB* είναι διπλάσια από την απόσταση *OA*, και ο *A* κινείται προς τον *B* με ταχύτητα 1 m/s. Πόση ταχύτητα έχει ο *B* ως προς τον *A*;



15. Ένα αγόρι στέκεται πάνω σε μια σιδηροδρομική πλατφόρμα που κινείται με ταχύτητα 30 m/s, και πυροβολεί με ένα αεροβόλο. Η ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή που φεύγει από την κάννη είναι επί-



γύρω μας

του παρελθόντος

«Πολλές φορές, καθισμένος στην καμπίνα μου, αναρωτήθηκα αν το πλοίο κινούνταν ή όχι. Συχνά πίστευα ότι το πλοίο κατευθυνόταν προς τα πίσω, ενώ στην πραγματικότητα κινούνταν προς τα εμπρός.»
—*Γαλιλαίος* (1564-1642)

«Δύο γεγονότα που είναι ταυτόχρονα όταν τα παρατηρούμε από ένα σύστημα αναφοράς δεν τα αντιλαμβανόμαστε ως ταυτόχρονα όταν τα παρατηρούμε από ένα άλλο σύστημα το οποίο κινείται ως προς το προηγούμενο.»
—*Άλμπερτ Αϊνστάιν* (1879-1955)

«Στην ουσία, ο απόλυτος χώρος δεν σχετίζεται με τίποτε εξωτερικό και είναι πάντοτε ο ίδιος και αμετάβλητος.»
—*Ισαάκ Νεύτων* (1642-1727)

σης 30 m/s. Θα έχει κινητική ενέργεια το βλήμα;

16. Ένα βαρίδι που κρέμεται από ένα μακρύ νήμα (εκκρεμές) έλκεται όχι μόνο από τη Γη αλλά και από τον Ήλιο. Άραγε θα αποκλίνει από την κατακόρυφο κατά λίγο προς την ανατολή το πρωί και προς τη δύση το βράδυ;

17. Όταν δύο κτένες των οποίων τα δόντια έχουν διαφορετικά κενά μεταξύ τους κινούνται παράλληλα η μια ως προς την άλλη, ένας παρατηρητής μπορεί να δει τη μετατόπιση σκοτεινών και φωτεινών λωρίδων ανάμεσα στα δόντια. Μπορούν οι λωρίδες αυτές να κινούνται με ταχύτητα μεγαλύτερη από εκείνη του φωτός;

18. Οι κβάζαρ είναι από τα πιο μακρινά αντικείμενα του εξώτερου Διαστήματος. Ένας από αυτούς απομακρύνεται από τη Γη με τη μισή ταχύτητα του φωτός, και ακτινοβολεί φως που μπορεί να ανιχνευτεί στη Γη. Τι ταχύτητα έχει αυτό το φως ως προς εμάς;

Μικροπειραματισμοί

Ενώ ταξιδεύετε με μια αμαξοστοιχία, κοιτάζετε το τρένο που έρχεται από την αντίθετη κατεύθυνση. Γιατί φαίνεται ότι η κίνησή σας επιβραδύνεται δραστικά από τη στιγμή που το τρένο χάνεται από δίπλα σας;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

...παρατηρώντας τα ουράνια σώματα, ο ίδιος ο Πτολεμαίος επισήμανε ότι η ημερήσια κίνησή τους μπορούσε να εξηγηθεί είτε μέσω της περιστροφής της Γης είτε μέσω της περιστροφής του σύμπαντος ως όλου.

...το κοπερνίκειο σύστημα υπήρξε ένα επαναστατικό βήμα όχι μόνο για τις αντιλήψεις της Εκκλησίας (η Γη και τα ανθρώπινα όντα δεν αποτελούσαν πια το κέντρο του σύμπαντος), αλλά επίσης και από την άποψη της μηχανικής —μέχρι τότε η σχετικότητα της κίνησης δεν είχε χρησιμοποιηθεί για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων.

...η κλασική αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου υπήρξε η απάντησή του στην κριτική των περιπατητικών (των οπαδών του Αριστοτέλη). Θεωρούσαν τη Γη ακίνητη, επειδή τα ιπτάμενα πουλιά δεν έμεναν πίσω ως προς αυτήν, το βεληνεκές των καταπελτών προς τη δύση δεν ήταν μεγαλύτερο απ' ό,τι προς την ανατολή, τα βαριά σώματα έπεφταν κατακόρυφα, κ.ο.κ.

...σ' έναν ανελκυστήρα που επιταχύνεται προς τα πάνω, μια οριζόντια φωτεινή δέσμη καμπυλώνεται παραβολικά σαν να επηρεάζεται μόνο από το βαρυτικό πεδίο. Αυτό αποτελεί ένα μόνο παράδειγμα των φαινομένων που προκάλεσαν αμφιβολίες όσον αφορά την παγκόσμια εφαρμοσιμότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας, και οδήγησαν στη δημιουργία της θεωρίας της σχετικότητας.

...σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, η γωνία των διαγωνίων ενός τετραγώνου το οποίο κινείται στη διεύθυνση μιας εκ των πλευρών του με ταχύτητα 270.000 km/s γίνεται 48° εξαιτίας της συστολής αυτής της πλευράς.

...ο Hendrik Lorentz, ο οποίος διατύπωσε τις εξισώσεις που αποτελούν τη βάση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, δεν θα μπορούσε ποτέ να συμφωνήσει με τη βασική έννοια του Αϊνστάιν για τον σχετικιστικό χαρακτήρα του ταυτόχρονου. Στο τέλος της ζωής του προσπάθησε να αποδείξει τη δυνατότητα ύπαρξης του απόλυτου χρόνου.

...ένα εντυπωσιακό παράδειγμα της επιβράδυνσης στη ροή του χρόνου είναι η διάσπαση των μιονίων που φτάνουν στη Γη από το εξώτερο Διάστημα. (Το μιόνιο είναι ένα σωματίδιο με αρνητικό φορτίο και μάζα 207 φορές εκείνη του ηλεκτρονίου.) Ο χρόνος ζωής τους στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου είναι αρκετές φορές μεγαλύτερος απ' ό,τι στο δικό τους σύστημα αναφοράς.

...οι Michelson και Morley χρησιμοποίησαν ένα οπτικό συμβολόμετρο στο περίφημο πείραμά τους. Αυτή η διάταξη ήταν τόσο ευαίσθητη, ώστε μπορούσε να ανιχνεύσει τη χρονική διαφορά σε φως που διατρέχει μόλις λίγα μέτρα (10^{-16} s). Θυμηθείτε ότι το πείραμα έγινε το 1881, οπότε δεν υπήρχαν ούτε ηλεκτρονικές διατάξεις ούτε ηλεκτρονικοί υπολογιστές.

—*A. Leonovich*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ
ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Εκρήξεις στον αέρα

«Παιδεία είναι η τέχνη να κάνεις τον άνθρωπο ηθικό.»
—Georg Hegel

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΕΧΕΙ ΠΡΟΟΡΙΣΜΟ ΝΑ διευρύνει τους πνευματικούς μας ορίζοντες ή να μας κάνει υποτακτικούς; Η γνώση μπορεί να αποτελεί εργαλείο για να συντηρεί το κατεστημένο ή για να μας ενσταλάζει κάποιες ειδικές αξίες;

Όταν μαθαίνουμε αριθμητική, υποθέτουμε ότι η πληροφορία είναι άνευ αξίας. Ποιο είναι το μήνυμα που αναδύεται στην εξίσωση $3 + 4 = 7$; Σε μερικά παιδικά βιβλία αυτό παρουσιάζεται με τρία και τέσσερα μήλα αντίστοιχα. Θα μπορούσε βεβαίως να εικονογραφείται με τρία και τέσσερα πολυβόλα. Αναδεικνύει αξίες ο τρόπος παρουσίασης;

Το ζήτημα αυτό είναι φανερό στα διδακτικά βιβλία της φυσικής. Αν ξεφυλλίσουμε όσα έχουμε στη βιβλιοθήκη μας, θα συναντήσουμε φέρ' ειπείν προβλήματα βολών σαν τα εξής:

Ένα σωστικό αεροπλάνο πετά σε σταθερό ύψος 1.200 m με ταχύτητα 430 km/h προς σταθερό σημείο που βρίσκεται ακριβώς πάνω από ένα ναυαγό. Πόση θα είναι η γωνία όρασης φ του πιλότου τη στιγμή που θα αφήσει σωστική λέμβο για να πέσει κοντά στο ναυαγό; (Halliday, Resnick, Walker, Fundamentals of Physics, *Wiley, 1993)*

Στην Ολυμπιάδα του 1968, στην Πόλη του Μεξικού, ο Μπομπ Μπήμον κατέρριψε το παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα εις μήκος πηδώντας 8,9 m/s. Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα εκτίναξής του ήταν 9,5 m/s, πόσο πλησίασε το μέγιστο δυνατό βεληνεκές; Μη λάβετε υπόψη σας την αντίσταση του αέρα, και θεωρήστε ότι η τιμή του g στην Πόλη του Μεξικού είναι 9,78 m/s^2. (Halliday, Resnick, Walker, Fundamentals of Physics, *Wiley, 1993)*

Χτυπώντας με το μπαστούνι μια μπάλα του γκολφ την εκτινάσσουμε με ταχύτητα 54,86 m/s και υπό γωνία 90° ως προς το έδαφος. Αμελώντας την επίδραση των ατμοσφαιρικών συνθηκών στην μπάλα, υπολογίστε το βεληνεκές της. (Hecht, Physics, *Brooks/Cole, 1994)*

Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω, στα παλιότερα βιβλία διαβάζουμε:

Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο ίπταται με σταθερή ταχύτητα 820 ml/hr σε ύψος 52.000 ft, και κατευθύνεται οριζόντια προς σταθερό σημείο που βρίσκεται υπεράνω του στόχου του. Πόση θα είναι η γωνία όρασης φ του πιλότου τη στιγμή που θα αφήσει τη βόμβα για να χτυπήσει το στόχο; (Halliday, Resnick, Physics, *Wiley, 1966)*

Το βλήμα εγκαταλείπει το στόμιο του ολμοβόλου με ταχύτητα 300 ft/s. Υπολογίστε τις δύο γωνίες βολής υπό τις οποίες το ολμοβόλο θα πετύχει το στόχο που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο και σε απόσταση 300 yd από αυτό. (Sears, Zemansky, College Physics, *Addison-Wesley, 1948)*

Η γωνία βολής ενός αντιαεροπορικού βλήματος είναι 70°, και η ταχύτητα εκτόξευσής του 2.700 ft/s. Σε πόσο χρόνο μετά την εκτόξευση πρέπει να ενεργοποιηθεί ο μηχανισμός πυροδότησης ώστε το βλήμα να εκραγεί σε ύψος 5.000 ft; Αμελήστε την αντίσταση του αέρα. (Sears, Zemansky, College Physics, *Addison-Wesley, 1948)*

Η λύση όλων αυτών των προβλημάτων είναι παρόμοια. Αναλύουμε την κίνηση του σώματος σε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις· μία οριζόντια και μία κατακόρυφη. Η οριζόντια κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα, και η κατακόρυφη υπό σταθερή επιτάχυνση. Όπως θα γνωρίζετε, το σύστημα εξισώσεων των εν

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


BOOM!
VILLA NOBEL
RIP
TNT
TOM BUNK

λόγω κινήσεων είναι:

$$s_x = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta \; t$$

$$s_y = \upsilon_0 \eta\mu\theta \; t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \eta\mu\theta - g t$$

Με τη βοήθεια αυτών των εξισώσεων μπορούμε να βρούμε, π.χ. στο πρόβλημα του σωστικού αεροπλάνου, ότι η οριζόντια απόσταση που καλύπτει η λέμβος, από τη στιγμή που αφήνεται να πέσει μέχρι να φτάσει στο ναυαγό, είναι $s_x = 1.860$ m. Επομένως, η γωνία όρασης του πιλότου θα είναι

$$\varphi = \tau o\xi\varepsilon\varphi \; \frac{s_x}{s_y} = 57{,}2°.$$

Το παιδαγωγικό/κοινωνικό μέρος του προβλήματος ομολογουμένως είναι δυσκολότερο από αυτό της φυσικής: η επιλογή της «ιστορίας» είναι η πιο κατάλληλη; Υπάρχει διαφορά αν μάθουμε να λύνουμε προβλήματα βολών μέσω των σπορ παρά μέσω των φονικών βλημάτων; Ποια είναι η δική σας άποψη;

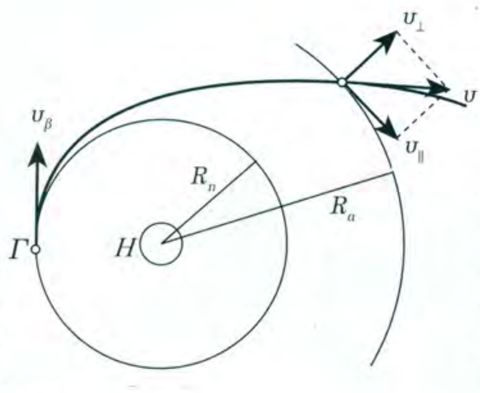
Το πρόβλημα αυτού του τεύχους είναι ένα δύσκολο πρόβλημα βολής: Στο τέλος μιας συναυλίας εκτοξεύονται πολλά πολύχρωμα και πολύμορφα πυροτεχνήματα. Ένα από αυτά εκρήγνυται ισοτροπικά (ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις) σε μεγάλο πλήθος μικρών θραυσμάτων. Κάποια στιγμή t_1, λοιπόν, φτάνει στο έδαφος το πρώτο θραύσμα, και κάποια επόμενη στιγμή t_2 φτάνει το τελευταίο θραύσμα. Αμελώντας την αντίσταση του αέρα, βρείτε ποια στιγμή η συχνότητα με την οποία τα θραύσματα φτάνουν στο έδαφος είναι μέγιστη.

Φανταστείτε τώρα τον εφιάλτη (της εκφώνησης, όχι της λύσης), αν το ίδιο πρόβλημα περιγραφόταν με εκρήξεις βλημάτων στον αέρα, καταστροφές πυραύλων στο Διάστημα, παρεμβολές επίγειων ραντάρ (και έντρομους μαθητές).

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum*.

Η άνοδος και η πτώση

Α. Για να διαφύγει το διαστημόπλοιο από την έλξη της Γης, πρέπει το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας να είναι ίσο ή μεγαλύτερο του μηδενός, δηλαδή



Σχήμα 1

$$\frac{1}{2} m_\delta \upsilon_\delta^2 - \frac{G m_\delta m_\gamma}{R_0} \geq 0$$

απ' όπου

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\varphi} = \sqrt{\frac{2Gm_\gamma}{R_0}}$$

(m_δ είναι η μάζα του διαστημοπλοίου, υ_δ η ταχύτητα εκτόξευσής του, m_γ η μάζα της Γης και R_0 η ακτίνα της).

Β. Η ταχύτητα διαφυγής του διαστημοπλοίου από το ηλιακό σύστημα προκύπτει με παρόμοιο τρόπο, και δίνεται από τον τύπο

$$\upsilon_\eta = \sqrt{\frac{2Gm_\eta}{R_\eta}},$$

όπου m_η είναι η μάζα του Ήλιου, R_η η απόσταση Γης-Ήλιου, και υ_η η ταχύτητα εκτόξευσης του διαστημοπλοίου στο σύστημα αναφοράς του Ήλιου. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο από το γεγονός ότι η βαρυτική έλξη τους παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου για να βρίσκεται η Γη σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο:

$$\frac{m_\gamma \upsilon_\gamma^2}{R_\eta} = \frac{G m_\gamma m_\eta}{R_\eta^2}$$

απ' όπου

$$\upsilon_\gamma = \sqrt{\frac{Gm_\eta}{R_\eta}}.$$

Άρα η ταχύτητα διαφυγής του διαστημοπλοίου από το ηλιακό σύστημα μπορεί να γραφεί ως $\upsilon_\eta = \upsilon_\gamma \sqrt{2}$. Επειδή το διαστημόπλοιο μπορεί να εκτοξευτεί στην κατεύθυνση της τροχιακής ταχύτητας της Γης, η ζητούμενη ταχύτητα θα είναι:

$$\upsilon'_\eta = \upsilon_\gamma (\sqrt{2} - 1) = 12{,}3 \text{ km/s},$$

όπου υ'_η είναι η ταχύτητα εκτόξευσης του διαστημοπλοίου στο σύστημα αναφοράς της Γης.

Γ. Έστω υ_β και υ'_β αντίστοιχα οι ταχύτητες εκτόξευσης του διαστημοπλοίου στο σύστημα αναφοράς του Ήλιου και της Γης. Ισχύει: $\upsilon_\beta = \upsilon'_\beta + \upsilon_\gamma$ (βλ. ερώτηση Β). Οι αρχές διατήρησης της στροφορμής και της μηχανικής ενέργειας για το διαστημόπλοιο δίνουν

$$m_\delta \upsilon_\beta R_\eta = m_\delta \upsilon_\parallel R_\alpha$$

και

$$\frac{m_\delta \upsilon_\beta^2}{2} - \frac{G m_\delta m_\eta}{R_\eta} =$$

$$\frac{m_\delta (\upsilon_\parallel^2 + \upsilon_\perp^2)}{2} - \frac{G m_\delta m_\eta}{R_\alpha}$$

(R_α είναι η απόσταση Άρη-Ήλιου, $\upsilon_\parallel$ η εφαπτομενική συνιστώσα της ζητούμενης ταχύτητας και $\upsilon_\perp$ η κάθετη συνιστώσα της), απ' όπου προκύπτει

$$\upsilon_\parallel = (\upsilon'_\beta + \upsilon_\gamma) r$$

και

$$\upsilon_\perp = \sqrt{(\upsilon'_\beta + \upsilon_\gamma)^2 (1 - r^2) - 2\upsilon_\gamma^2 (1 - r)}$$

με $r = R_\eta / R_\alpha$.

Δ. Στο σύστημα αναφοράς του Άρη, η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί το διαστημόπλοιο, στην κατεύθυνση της τροχιακής ταχύτητας του Άρη, για να εγκαταλείψει το ηλιακό σύστημα, είναι $\upsilon''_\delta = \upsilon_\alpha (\sqrt{2} - 1)$ (υ_α είναι η τροχιακή ταχύτητα του Άρη, η ταχύτητα με την οποία περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο). Ο ρόλος του Άρη έγκειται στο να μεταβάλει την ταχύτητα του διαστημοπλοίου ώστε αυτό να εγκαταλείψει το βαρυτικό πεδίο του με την παραπάνω ταχύτητα.

Στο σύστημα αναφοράς του Άρη, η μηχανική ενέργεια του διαστημοπλοίου διατηρείται σταθερή. Στο σύστημα αναφοράς του Ήλιου, όμως, αυτό δεν ισχύει· η είσοδος του διαστημοπλοίου στο βαρυτικό πεδίο του Άρη ισοδυναμεί με ελαστική κρούση του διαστημοπλοίου με τον πλανήτη. Στο σύστημα αναφοράς του Άρη, η ταχύτητα με την οποία το διαστημόπλοιο εισέρχεται στο βαρυτικό πεδίο του πλανήτη είναι ίση με την ταχύτητα που το εγκαταλείπει. Έτσι, οι συνιστώσες της παραπάνω ταχύτητας είναι $\upsilon''_{\perp} = \upsilon_{\perp}$ και $\upsilon''_{\parallel} = \upsilon_{\parallel} - \upsilon_{\alpha}$, οπότε

$$\upsilon'' = \sqrt{\upsilon''^{2}_{\parallel} + \upsilon''^{2}_{\perp}} = \sqrt{\upsilon^{2}_{\perp} + (\upsilon_{\parallel} - \upsilon_{\alpha})^{2}}.$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για τα $\upsilon_{\parallel}$ και $\upsilon_{\perp}$ από την ερώτηση Γ, μπορούμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ των υ'_{β} και υ''_{δ}:

$$\begin{aligned}(\upsilon'_{\beta} + \upsilon_{\gamma})^{2}(1 - r^{2}) - 2\upsilon^{2}_{\gamma}(1 - r) + \upsilon^{2}_{\alpha} \\ + (\upsilon'_{\beta} + \upsilon_{\gamma})^{2} r^{2} - 2\upsilon_{\alpha}(\upsilon'_{\beta} + \upsilon_{\gamma}) r \\ = \upsilon^{2}_{\alpha}(3 - 2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Η ταχύτητα περιφοράς του Άρη γύρω από τον Ήλιο είναι

$$\upsilon_{\alpha} = \sqrt{G m_{\alpha} R_{\alpha}} = \sqrt{r}\,\upsilon_{\gamma},$$

και η εξίσωση για τη υ'_{β} παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}(\upsilon'_{\beta} + \upsilon_{\gamma})^{2} - 2r\sqrt{r}\,\upsilon_{\gamma}(\upsilon'_{\beta} + \upsilon_{\gamma}) \\ + (2\sqrt{2}\,r - 2)\upsilon^{2}_{\gamma} = 0.\end{aligned}$$

Η αποδεκτή, από φυσική άποψη, λύση είναι

$$\begin{aligned}\upsilon'_{\beta} &= \upsilon_{\gamma}\left(r\sqrt{r} - 1 + \sqrt{r^{3} + 2 - 2\sqrt{2}\,r}\right) \\ &= 5{,}5\ \mathrm{km/s}.\end{aligned}$$

Εξομολογήσεις ενός λάτρη των ρολογιών

Οι κοσμικές συνέπειες ενός πάθους

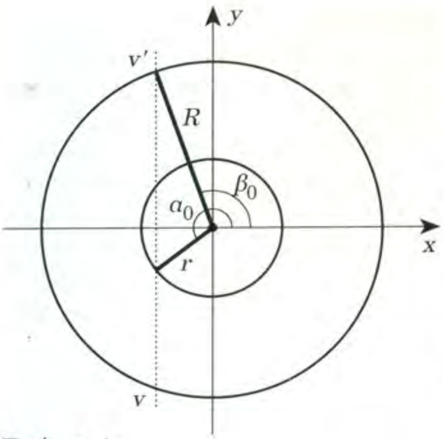
V.M. Babović

Πολλοί έχουν χόμπυ, και τα χόμπυ είναι πολλά και διαφορετικά. Δικό μου χόμπυ είναι τα ρολόγια. Για να γίνω σαφέστερος, λατρεύω οτιδήποτε μετράει το χρόνο. Οι φίλοι μου γνωρίζουν το πάθος μου, και εντούτοις αρκετοί απ' αυτούς εκπλήσσονται όταν βλέπουν τη συλλογή μου όποτε με επισκέπτονται στο διαμέρισμά μου. Έχω ρολόγια του χεριού, της τσέπης, του τοίχου, ξυπνητήρια, κούκους, χρονόμετρα, εργοστασιακά ρολόγια... όλων των μεγεθών και σχεδίων. Και, στα ράφια της βιβλιοθήκης μου, μπορείτε να βρείτε μια πλούσια συλλογή από κλεψύδρες.

Όπως γνωρίζετε, ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού είναι πάντοτε μακρύτερος από τον ωροδείκτη. Δεν κατανοώ ακριβώς την αιτία. Μερικές φορές πρέπει να γνωρίζουμε τι ώρα είναι περίπου. Δεν θα ήταν ωραίο νά 'χουμε, ας πούμε, ένα ρολόι τοίχου του οποίου ο μακρύτερος δείκτης να δείχνει τις ώρες; Θα βλέπαμε εύκολα ότι ακριβώς τώρα η ώρα είναι, ας πούμε, ανάμεσα στις 10 και 11 —κι αυτό θα μπορούσε νά 'ναι ό,τι χρειαζόμασταν όλο κι όλο.

Γι' αυτό, λοιπόν, παρήγγειλα ένα τέτοιο ρολόι. Ο ωρολογοποιός τα έχασε με την απαίτησή μου, αλλά, ως επαγγελματίας, μου παρέδωσε τη συσκευή εγκαίρως. Τοποθέτησα αυτό το ρολόι —του οποίου ο μακρύς δείκτης δείχνει ώρες και ο κοντός λεπτά— σε περίοπτη θέση στο δωμάτιό

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

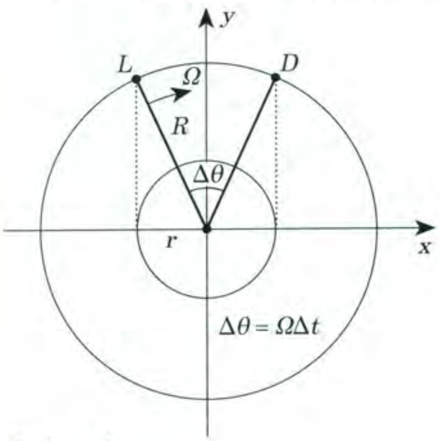


Σχήμα 1

μου. Το ονομάζω *ρολόι αντιστροφής*. Είναι όμορφο να το κοιτάς· η υπογάλαζη πλάκα του καλύπτεται από έναν παγκόσμιο χάρτη. Κατακόρυφες γραμμές δείχνουν τις ζώνες χρόνου της Γης —και αυτές οι γραμμές θα παίξουν βασικό ρόλο στην ιστορία που θα σας διηγηθώ.

Γρήγορα ανακάλυψα ότι το ρολόι αντιστροφής έχει κάμποσες ιδιαίτερες ιδιότητες, άγνωστες στον κόσμο των κανονικών ρολογιών. Μια μέρα, λοιπόν, διαπίστωσα ότι τα τα άκρα των δεικτών ακουμπούσαν την ίδια «κατακόρυφη» γραμμή (vv'—στο Σχήμα 1). Το γεγονός μού κίνησε την περιέργεια, και από τότε παρατηρούσα κάθε πότε μπορούσε να συμβαίνει αυτή η «κατακόρυφη» διευθέτηση.

Ανακάλυψα ότι, για ένα ρολόι του οποίου ο μικρός δείκτης (λεπτοδείκτης) έχει μήκος $r = 1$ cm και ο μεγάλος δείκτης (ωροδείκτης) μήκος $R = 5$ cm, αυτό μπορούσε να συμβαίνει μόνο μέσα σε χρονικό διάστημα $\Delta t \cong 46$ min γύρω από τις ώρες 12:00 και 6:00. Δεν χρειάζεται να ψάξετε έξω από αυτά τα δύο διαστήματα —η παραπάνω διευθέτηση των άκρων των δεικτών είναι αδύνατη. Το Σχήμα 2 δείχνει το γιατί. Η άκρη του ωροδείκτη πηγαίνει από τη θέση L στη θέση D σε χρόνο

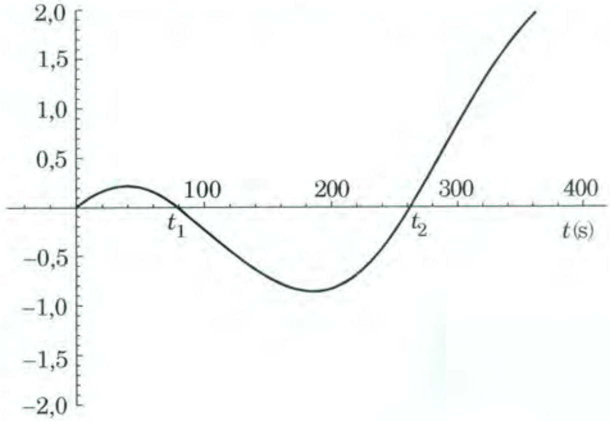


Σχήμα 2

$$\Delta t = \frac{1}{\Omega}\left(\pi - 2\text{τοξσυν}\frac{r}{R}\right), \qquad (1)$$

όπου $\Omega = 2\pi / T_\omega$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του ωροδείκτη, και T_ω η περίοδος περιστροφής του. Εφόσον $T_\omega = 12$ h, η εξίσωση (1) δίνει ως αποτέλεσμα 46 min.

Η επόμενη ανακάλυψή μου προέκυψε όταν διαπίστωσα ότι στον κύκλο του παραπάνω χρονικού διαστήματος Δt συνέβη μόνο μία «κατακόρυφη» σύμπτωση των δεικτών, ενώ συνέβησαν τρεις «κατακόρυφες» διευθετήσεις των άκρων τους. Αναζητούσα επίμονα το νόμο που διέπει όλα αυτά —θα μπορούσαμε, ας πούμε, να έχουμε έναν κύκλο που να περιέχει μόνο δύο «κατακόρυφες» διευθετήσεις; Και τότε, απρόσμενα, ανακάλυψα την υπέροχη αναλογία. Κατενθουσιασμένος, έτρεξα στον ωρολογοποιό και παρήγγειλα ένα δεύτερο ρολόι αντιστροφής, αλλά με τα παρακάτω χαρακτηριστικά: r = 1 cm, R = 9,6 cm, $T_\lambda = 365$ s, $T_\omega = 10.759$ s. (Παρακάτω θα σας πω γιατί διάλεξα αυτούς τους αριθμούς, και θα σας αποκαλύψω την αναλογία.) Ο ωρολογοποιός, λοιπόν, ικανοποίησε την παράξενη απαίτησή μου, και εγώ περήφανος κρέμασα το νέο ρολόι στο γραφείο μου. Αυτό το ιδιαίτερο ρολόι αντιστροφής το ονόμασα *Κοπέρνικο*.



Σχήμα 3

Τη στιγμή που ο Κοπέρνικος άρχισε να λειτουργεί, ο μικρός λεπτοδείκτης σχημάτιζε με τον άξονα x γωνία $a_0 = 200°$ (δείτε και πάλι το Σχήμα 1). Η άκρη του μακριού ωροδείκτη ήταν στην ίδια «κατακόρυφο» vv', επομένως:

$$\beta_0 = \text{τοξσυν}\left(\frac{r}{R}\text{συν}\,a_0\right) = 95{,}6°.$$

Η επόμενη συνάρτηση δείχνει τι συμβαίνει μετά απ' αυτό:

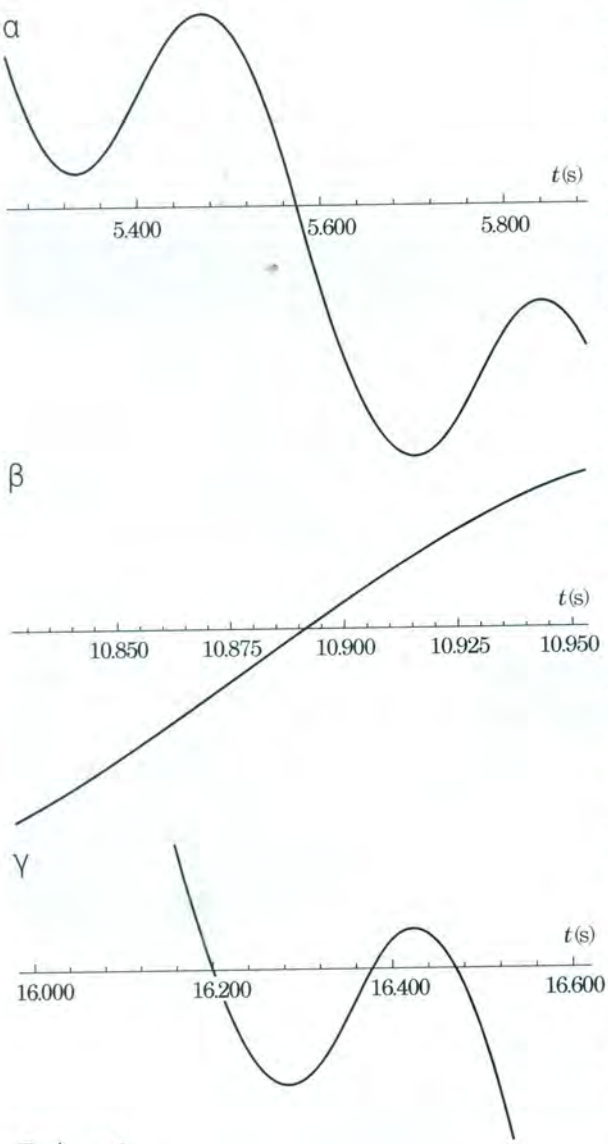
$$f = R\text{συν}(\beta_0 - \Omega t) - r\text{συν}(a_0 - \omega t). \quad (2)$$

Εδώ Ω και ω είναι οι γωνιακές ταχύτητες $2\pi / T_\omega$ και $2\pi / T_\lambda$, αντίστοιχα.

Ο όρος $R\text{συν}(\beta_0 - \Omega t)$ είναι η προβολή του ωροδείκτη στον άξονα x, και ο όρος $r\text{συν}(a_0 - \omega t)$ η προβολή του λεπτοδείκτη. Συνεπώς, η f εκφράζει τη διαφορά των δύο προβολών στον άξονα x. Έτσι, όποτε ισχύει $f = 0$, οι άκρες των δεικτών βρίσκονται στην ίδια «κατακόρυφο». Η πρώτη φορά που συμβαίνει αυτό είναι στην αρχική θέση, τη στιγμή $t_0 = 0$ s. Από το Σχήμα 3 βλέπουμε ότι οι επόμενες φορές συμβαίνουν τις στιγμές $t_1 = 75$ s και $t_2 = 262$ s, οπότε ο πρώτος αυτός κύκλος έχει τρεις «κατακόρυφες» διευθετήσεις, δηλαδή τρεις περιπτώσεις στις οποίες οι άκρες των δεικτών βρίσκονται στην ίδια «κατακόρυφο».

Περίπου τη στιγμή 5.500 s θα έχουμε ξανά $f = 0$ (Σχήμα 4α). Ο νέος κύκλος περιλαμβάνει μόνο αυτό το σημείο —όχι άλλα. Και πάλι πρέπει να περιμένουμε —αυτή τη φορά μέχρι τη στιγμή περίπου 10.900 s, οπότε αρχίζει ένας άλλος κύκλος, ξανά με μία μόνο «κατακόρυφη» διευθέτηση (Σχήμα 4β).

Τελικά, έπειτα από 16.000 s περίπου, αρχίζει ένας κύκλος που περιέχει τρεις «κατακόρυφες» διευθετήσεις, όπως ο πρώτος κύκλος (Σχήμα 4γ). Έτσι, το φαινόμενο εμφανίζει περιοδικότητα με περίοδο $T = T_\omega/2 \cong 5.380$ s. Η «λεπτή» υφή κάθε κύκλου καθορίζεται από τον δεύτερο όρο της εξίσωσης (2). Αν ο άξονας του χρόνου τέμνει την καμπύλη σε ένα ή



Σχήμα 4

τρία σημεία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες —δηλαδή από τις τιμές των a_0 και β_0. Υπάρχει ακόμη η δυνατότητα ο άξονας t να εφάπτεται σε ένα τοπικό ακρότατο.

Ήρθε, όμως, η στιγμή να σας αποκαλύψω το μυστικό του Κοπέρνικου —του ρολογιού, εννοώ. Φανταστείτε ότι το μήκος r αντιπροσωπεύει την απόσταση Γης-Ήλιου. Η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο σε κατά προσέγγιση κυκλική τροχιά ακτίνας περίπου 150 εκατομμυρίων km —δηλαδή, $r \cong 1$ AU (αστρονομικές μονάδες). Επίσης, θεωρήστε ότι R είναι η απόσταση Κρόνου-Ήλιου· αυτή, ως γνωστόν, κατά μέσον όρο είναι 9,6 AU —δηλαδή, $R = 9{,}6$ AU. Ας συμβολίσουμε T_λ = 365 ημέρες (ένα γήινο έτος) και T_ω = 10.759 ημέρες (ένα κρόνιο έτος —περίπου 29,5 γήινα έτη). Τότε το Σχήμα 1 μπορεί να χρησιμεύσει ως μοντέλο που δείχνει την αμοιβαία θέση των δυό πλανητών καθώς περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο. Εκτός από τους δορυφόρους του, ο Κρόνος διαθέτει και ένα όμορφο σύνολο δακτυλίων. Το επίπεδο της τροχιάς του Κρόνου γύρω από τον Ήλιο είναι περίπου το ίδιο με εκείνο της αντίστοιχης τροχιάς της Γης. Η κλίση, μάλιστα, του άξονα περιστροφής κάθε πλανήτη ως προς το επίπεδο της τροχιάς του πλανήτη γύρω από τον Ήλιο είναι πάντοτε σταθερή. Επομένως, το επίπεδο των δακτυλίων του Κρόνου διατηρεί τον προσανατολισμό του στο χώρο (εξαιτίας του νόμου διατήρησης της στροφορμής). Στο Σχήμα 1 το επίπεδο των δακτυλίων τέμνει το επίπεδο των τροχιών των πλανητών κατά τη γραμμή vv'. Αυτή η γραμμή πρέπει να είναι πάντοτε παράλληλη στον άξονα y —αδιάφορο προς τα πού κινείται ο Κρόνος (αυτό το εγγυάται το σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε).

Ιδωμένοι από τη Γη, μέσω τηλεσκοπίου, οι δακτύλιοι του Κρόνου φαίνονται σαν τεντωμένη έλλειψη. Όταν, μάλιστα, οι δύο πλανήτες βρεθούν στο ίδιο «κατακόρυφο» επίπεδο, συμβαίνει ένα σχετικά σπάνιο αστρονομικό γεγονός (συμβαίνει μόνο κάθε 15 χρόνια). Η Γη βρίσκεται ακριβώς πάνω στο επίπεδο των υπερβολικά στενών δακτυλίων του Κρόνου (έχουν διάμετρο περίπου 290.000 km και πιθανώς όχι περισσότερο από 1,5 km πάχος). Εμείς από εδώ βλέπουμε την «κόψη» του συστήματος των δακτυλίων, βλέπουμε τους δακτυλίους σε προφίλ· το ελλειπτικό σχήμα τους έχει εκφυλιστεί σε μια αμυδρή γραμμή. Και αν οι συνθήκες παρατήρησης είναι κακές, δεν βλέπουμε τίποτε απολύτως. Μπορεί κανείς να πει ότι ο «βασιλιάς των θεών» τριγυρνά στα ουράνια δώματά του ολόγυμνος! Και αυτό διαρκεί μερικούς μήνες.

Ο Κρόνος βρέθηκε σ' αυτή την κατάσταση αρκετά πρόσφατα. Σε ολόκληρη περίπου τη διάρκεια του 1995 οι δακτύλιοί του ήταν στραμμένοι προς εμάς, στη Γη, σε προφίλ. Και τη νύχτα από 21 προς 22 Μαΐου 1995 εξαφανίστηκαν εντελώς. Εκείνη ακριβώς τη νύχτα άρχισε ένας εννιάμηνος κύκλος τριών εξαφανίσεων, σε ποιοτική συμφωνία με το Σχήμα 3 και τις «κατακόρυφες» διευθετήσεις των άκρων των δεικτών του Κοπέρνικου. (Πρέπει μόνο να πούμε ότι κάθε δευτερόλεπτο στον οριζόντιο άξονα αντιπροσωπεύει μία ημέρα.) Μπορείτε να πληροφορηθείτε περισσότερα από ένα σχετικό άρθρο του περιοδικού *Sky and Telescope* (Μάιος 1996, σελ. 60).

Πρέπει να περιμένουμε άλλα 15 χρόνια για να διαπεράσει ξανά η Γη το επίπεδο των δακτυλίων του Κρόνου —και θα συμβεί μία μόνο εξαφάνιση (σύμφωνα με το Σχήμα 4α). Γύρω στα 2025 η Γη θα διαπεράσει και πάλι το επίπεδο των δακτυλίων —επίσης με μία μόνο εξαφάνιση (Σχήμα 4β). Ο εγγονός μου θα είναι σε θέση, 43 χρόνια από σήμερα, να παρατηρήσει τους δακτυλίους του Κρόνου όπως και εγώ τον περασμένο χρόνο: με τριπλή εξαφάνιση. Θα διαβάσει αυτό το άρθρο (ευχάριστα, ελπίζω) και θα κάνει τις αναγκαίες διορθώσεις στο Σχήμα 4γ.

Όλα αυτά τα γεγονότα προέκυψαν από τον Κοπέρνικο! Δεν είναι εντυπωσιακό; Ένα γιγάντιο αστρονομικό αντικείμενο έδωσε νόημα στο ρολόι μου. Ένα ακόμη παράδειγμα για το πώς γεννιέται μια θεωρία πολύ πριν από την καρποφόρα εφαρμογή της. Γι' αυτό, αγαπητέ αναγνώστη, μην εγκαταλείπεις ποτέ τις διανοητικές σου δημιουργίες, ακόμη κι αν αδυνατείς να διακρίνεις τη σύνδεσή τους με την πραγματικότητα...

Ο V.M. Babović *είναι καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο Svetozar Marković, στην Κραγκούγεβατς της Γιουγκοσλαβίας. Επίσης είναι σύμβουλος της Belerofont Society, μιας ομάδας σπουδαστών με ενδιαφέροντα στην αστρονομία.*

«... Θα ευχόμουν το *Quantum* να κυκλοφορούσε στην Αμερική όταν ήμουν φοιτητής· θα ήταν πολύ ευκολότερο για μένα να νιώσω την αίσθηση της πνευματικής πληρότητας ως φυσικός... Τώρα θα μπορούμε και εμείς να το διαβάζουμε και να το χαιρόμαστε...»
***Sheldon Glashow**, Νόμπελ φυσικής, Καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ*

«... Τρέφω μεγάλες ελπίδες ότι το *Quantum* θα ανοίξει δρόμους στην ευρύτητα, την ποικιλία, τη ζωηρότητα, τον πλούτο και το βάθος, τις συγκινήσεις των μαθηματικών και της φυσικής, που ίσως έχουν αποκοπεί από τη σχολική εμπειρία... Το *Quantum* δεν μοιάζει με τα άλλα επιστημονικά περιοδικά, αλλά είναι ένα από τα σημαντικότερα...»
***William Thurston**, Μετάλλιο Φιλντς, Καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Πρίνστον*

«... Οι αμερικανοί συνάδελφοί μας και εμείς συνεργαζόμαστε παραγωγικά ώστε, με την ταυτόχρονη έκδοση του *Quantum* στην αγγλική και τη ρωσική, τόσο οι σοβιετικοί όσο και οι αμερικανοί μαθητές και φοιτητές να εργάζονται με αντικείμενο την ίδια ύλη στον ίδιο χρόνο, αμιλλώμενοι ειρηνικά...»
***Yuri Ossipyan**, φυσικός, Πρόεδρος της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών*

«... Γεμάτο εξαιρετικά θέματα· υπέροχα άρθρα μαθηματικών και φυσικής για σπουδαστές λυκείων και πανεπιστημίων...»
Nature

«... Βλέπω με μεγάλη χαρά την προσπάθεια του *ελληνικού Quantum* να προωθήσει την εκπαίδευση και την επιστήμη στην πατρίδα μας...»
***Φώτης Καφάτος**, Γενικός διευθυντής του Ευρωπαϊκού Εργαστηρίου Μοριακής Βιολογίας Χαϊδελβέργη*

«... Εξαιρετική προσπάθεια, μοναδική θα έλεγα για την Ελλάδα... Το *Quantum* ίσως προσφέρει στον τόπο μας ό,τι δεν έχουν προσφέρει μέχρι τώρα "μεγαλόστομες μεταρρυθμίσεις", που ξεχνιούνται σε μια νύχτα...»
***Δημήτρης Νανόπουλος**, Καθηγητής Θεωρητικής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Τέξας*

«... Λαμπρό περιοδικό για την επιστήμη και τον φυσικό κόσμο... (Το ελληνικό περιοδικό) είναι κατά πολύ καλύτερο του αμερικανικού ομολόγου του.»
***Γιώργος Γραμματικάκης**, φυσικός, Πρύτανης του Πανεπιστημίου Κρήτης*

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΤΕ ΜΕ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΕΥΑΝΑΓΝΩΣΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

QUANTUM Δελτίο συνδρομής

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1996

Επιθυμώ να γίνω συνδρομητής του περιοδικού *Quantum* για 1 έτος (6 τεύχη).
Όνομα: ....
Διεύθυνση: ....Ταχ. κώδ.: ....
Συνοικία/Πόλη: ....Τηλέφ. επικοινωνίας: ....
Ηλικία: ....Ιδιότητα/Επάγγελμα: ....
Η συνδρομή μου να αρχίζει από το τεύχος: ....

Αξία συνδρομής 8.000 δρχ. για τους ιδιώτες
14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα, οργανισμούς
(Στις παραπάνω τιμές περιλαμβάνονται τα έξοδα αποστολής).

☐ Εσωκλείω επιταγή (σε διαταγή Εκδόσεις Κάτοπτρο)

☐ Χρεώστε την κάρτα μου: ☐ Diners ☐ Visa
Αριθμός κάρτας: ....Ημερ. λήξης: ....
Υπογραφή: ....

Ημερομηνία αποστολής του δελτίου συνδρομής: ....

Για να λάβετε το Quantum:

1. Συμπληρώστε το δελτίο συνδρομής (ή τα στοιχεία που περιλαμβάνει, σ' ένα λευκό χαρτί).
2. Κλείστε το δελτίο σ' ένα φάκελο (μαζί με ταχυδρομική ή τραπεζική επιταγή, εφ' όσον δεν πληρώσετε με πιστωτική κάρτα).
3. Ταχυδρομήστε το φάκελο στη διεύθυνση:
Περιοδικό Quantum
Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471-Αθήνα.

Οι κάτοχοι πιστωτικών καρτών μπορούν να γραφτούν συνδρομητές και τηλεφωνικά (01-3645098, 3643272) ή μέσω fax (01-3641864).

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΤΕ ΜΕ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΕΥΑΝΑΓΝΩΣΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

QUANTUM Δελτίο συνδρομής

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1996

Επιθυμώ να γίνω συνδρομητής του περιοδικού *Quantum* για 1 έτος (6 τεύχη).
Όνομα: ....
Διεύθυνση: ....Ταχ. κώδ.: ....
Συνοικία/Πόλη: ....Τηλέφ. επικοινωνίας: ....
Ηλικία: ....Ιδιότητα/Επάγγελμα: ....
Η συνδρομή μου να αρχίζει από το τεύχος: ....

Αξία συνδρομής 8.000 δρχ. για τους ιδιώτες
14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα, οργανισμούς
(Στις παραπάνω τιμές περιλαμβάνονται τα έξοδα αποστολής).

☐ Εσωκλείω επιταγή (σε διαταγή Εκδόσεις Κάτοπτρο)

☐ Χρεώστε την κάρτα μου: ☐ Diners ☐ Visa
Αριθμός κάρτας: ....Ημερ. λήξης: ....
Υπογραφή: ....

Ημερομηνία αποστολής του δελτίου συνδρομής: ....

ΒΙΒΛΙΟΓΩΝΙΑ

Μόνο για συνδρομητές

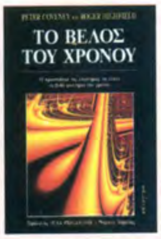
Προνόμιο έκπτωσης 30%

Το *Quantum* σάς βοηθάει να εμπλουτίσετε τη βιβλιοθήκη σας με λίγα χρήματα. Επιλέξτε τουλάχιστον δύο από τις διπλανές προσφορές και ταχυδρομήστε μας ή τηλεφωνήστε μας την παραγγελία σας. Θα παραλάβετε τα βιβλία ταχυδρομικά σε λιγότερο από 8 ημέρες. Τα έξοδα συσκευασίας και ταχυδρομικής αποστολής βαρύνουν εμάς, εσάς όμως επιβαρύνουν τα έξοδα αντικαταβολής (περίπου 700 δρχ. ανά δέμα) και το ΦΠΑ (4% επί της προσφερόμενης τιμής).*

Η προσφορά *δεν ισχύει*:
— για όσους δεν είναι συνδρομητές του *Quantum* (ακόμη κι αν είναι αναγνώστες του)
— για ιδρύματα, οργανισμούς και βιβλιοθήκες (ακόμη κι αν είναι συνδρομητές)
— αν η παραγγελία σας γίνει μετά τις 31 Δεκεμβρίου 1996
— αν η συνδρομή σας έχει ήδη λήξει.

Οι παρακάτω τίτλοι θα ανανεώνονται σε κάθε νέο τεύχος.

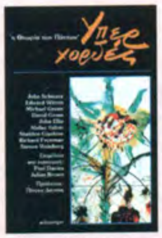
* Για τη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνονται δεκτές πιστωτικές κάρτες.



P. Coveney και R. Highfield
Το βέλος του χρόνου
Ένα ταξίδι στο χώρο της επιστήμης για να λυθεί το βαθύ μυστήριο του χρόνου
Σελ.: 538, 6.700 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 4.700 δρχ.

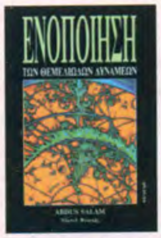
Paul Davies
Είμαστε μόνοι;
Φιλοσοφικές συνέπειες της ανακάλυψης εξωγήινης ζωής
Σελ.: 144, 3.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.300 δρχ.

Peter Atkins
Το περιοδικό βασίλειο
Ταξίδι στη χώρα των χημικών στοιχείων
Σελ.: 174, 4.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.800 δρχ.



P. Davies και J. Brown
Υπερχορδές,
Η Θεωρία των Πάντων
Σελ.: 266, 4.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.950 δρχ.

Stephen Hawking
Το χρονικό του Χρόνου
Από τη Μεγάλη Έκρηξη ώς τις μαύρες τρύπες
Σελ.: 280, 4.200 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.950 δρχ.



Abdus Salam
Ενοποίηση των θεμελιωδών δυνάμεων
Ένας νομπελίστας μιλά για το μεγαλύτερο όνειρο της φυσικής επιστήμης
Σελ.: 137, 3.700 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.600 δρχ.

Russell Stannard
Χίλια και ένα μυστήρια του σύμπαντος
Μια δροσερή εισαγωγή στα μυστικά της φυσικής για νεαρούς αναγνώστες
Σελ.: 160, 3.100 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.200 δρχ.

Jay Ingram
Η επιστήμη της καθημερινής ζωής
Η εξερεύνηση του κόσμου που μας περιβάλλει μέσα από τις θετικές επιστήμες
Σελ.: 170, 3.300 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.300 δρχ.

M. Dollinger - E. Rosenbaum
Ο καρκίνος
Διάγνωση και πρόληψη, θεραπεία και καθημερινή αντιμετώπιση
Σελ.: 750, 10.000 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 7.000 δρχ.

D. Julian και C. Marley
Η στεφανιαία νόσος
Έγκυρη, απλή και σαφής ενημέρωση για την πρόγνωση και την αντιμετώπιση της μάστιγας του καιρού μας
Σελ.: 168, 3.500 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.450 δρχ.

Herant Katchadourian
Στα πενήντα
Εξετάζοντας τα προβλήματα της μέσης ηλικίας
Σελ.: 220, 3.600 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 2.500 δρχ.

Moshé Flato
Η ισχύς των μαθηματικών
Σελ.: 108, 2.400 δρχ.
Τιμή για τους συνδρομητές: 1.700 δρχ.

Τρίγωνα σε πλέγματα

Και ένα πλήθος πληροφοριών από το αρχείο Math.Note της DEC

George Berzsenyi

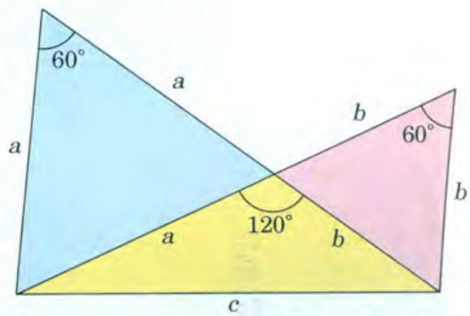
ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΔΩΔΕΚΑ ΧΡΟΝΙΑ ΕΙΧΑ στείλει ένα πρόβλημα στον φίλο μου Stanley Rabinowitz, ο οποίος δούλευε στην DEC (Digital Equipment Corporation). Εκείνη την εποχή ο Stan και οι συνάδελφοί του στην DEC διατηρούσαν ένα αρχείο, το Math.Note, μέσω του οποίου αντάλλασσαν ενδιαφέροντα προβλήματα και σκέψεις σχετικά με αυτά. Ο Stan μού έστειλε αργότερα ένα αντίγραφο αυτού του αρχείου, που είναι η πηγή πολλών πληροφοριών από αυτές που ακολουθούν. Ιδού το πρόβλημα που του είχα στείλει: «*Υπάρχουν τρία σημεία στο τρισδιάστατο πλέγμα σημείων (με ακέραιες συντεταγμένες) που να σχηματίζουν ένα τρίγωνο με ακέραιες πλευρές και μια γωνία 120°;*»

Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα αποδείχτηκε αρνητική, και προκαλώ τους αναγνώστες μου να επανανακαλύψουν την κομψή απόδειξη που επινόησαν οι συνάδελφοι του Stan. Πριν το προσπαθήσετε, μπορείτε να δοκιμάσετε να αντιμετωπίσετε τη δισδιάστατη εκδοχή του ίδιου προβλήματος, που είναι κάπως ευκολότερη.

Όταν ο Stan ανακοίνωσε το πρόβλημα στο Math.Note, επισήμανε ότι, αν $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 10)$, $C = (4, 1, 15)$, τότε το τρίγωνο ABC έχει μια γωνία 120° (στο C), αλλά καμία πλευρά με ακέραιο μήκος. Επομένως, μπορούμε επίσης να ρωτήσουμε: «*Υπάρχουν στο τρισδιάστατο πλέγμα τρίγωνα με γωνία 120° τέτοια ώστε μία ή δύο από τις πλευρές τους να έχουν ακέραιο μήκος;*»

Είναι ενδιαφέρον το ότι η απάντηση για το τετραδιάστατο πλέγμα είναι θετική, όπως για παράδειγμα στο τρίγωνο με κορυφές $A = (0, 0, 0, 0)$, $B = (10, 0, 0, 0)$, $C = (-3, 5, 1, 1)$, που έχει γωνία 120° στην αρχή των αξόνων. Πρέπει να επισημάνουμε ότι η γωνία που σχηματίζεται από δύο διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ δίνεται από τη σχέση $\text{συν}^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / |\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$, όπου $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Παραμένει το ερώτημα: «*Υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων τριγώνων στο τετραδιάστατο πλέγμα;*» Μπορούμε επιπλέον να ρωτήσουμε: «*Είναι δυνατόν να υλοποιήσουμε όλα τα μεταπυθαγόρεια*[1] *τρίγωνα στο τετραδιάστατο πλέγμα;*» Αν η απάντηση είναι αρνητική, μπορούμε να το πετύχουμε σε κάποιο χώρο ανώτερης διάστασης; Πιο συγκεκριμένα: «*Υπάρχει ελάχιστη τιμή του* d *τέτοια ώστε η απάντηση να είναι καταφατική για το* d*-διάστατο πλέγμα;*»

Πρέπει να θέσουμε τα ίδια ερωτήματα για τα προπυθαγόρεια[2] τρίγωνα. Αυτά μπορούμε να τα δημιουργήσουμε προσθέτωντας ισόπλευρα τρίγωνα στα μεταπυθαγόρεια· όπως βλέπετε στο σχήμα, αυτό επιτυγχάνεται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Οι συνάδελφοι του Stan στην DEC δεν εξέτασαν προπυθαγόρεια τρίγωνα, οπότε όλα τα προηγούμενα ερωτήματα παραμένουν ανοιχτά.



Πρέπει να αναφέρουμε ότι εκτός από τα πυθαγόρεια[3] τρίγωνα, μόνο τα μεταπυθαγόρεια και τα προπυθαγόρεια έχουν ακέραιες πλευρές και γωνία που μετριέται με ακέραιο πλήθος μοιρών —και έτσι εξηγείται το ιδιαίτερο ενδιαφέρον γι' αυτά.

Στείλτε τις απαντήσεις σας σ' εμένα, c/o *Quantum*, 1840 Wilson Boulevard, Arlington VA 22201-3000, USA. Είναι πιθανό να δημιουργήσουν περαιτέρω συζητήσεις.

1. Ονομάζουμε μεταπυθαγόρεια τα τρίγωνα με γωνία 120° και ακέραιες πλευρές. Για να δημιουργήσουμε όλα τα μεταπυθαγόρεια τρίγωνα με πλευρές a, b, c, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn - m^2, m^2 + n^2 - mn)$, όπου m και n θετικοί ακέραιοι με $n < m < 2n$.

2. Ονομάζουμε προπυθαγόρεια τα τρίγωνα με γωνία 60° και ακέραιες πλευρές.

3. Ονομάζουμε πυθαγόρεια τα τρίγωνα που έχουν ακέραιες πλευρές και μια γωνία 90°.

Το χλωμό φως της Σελήνης

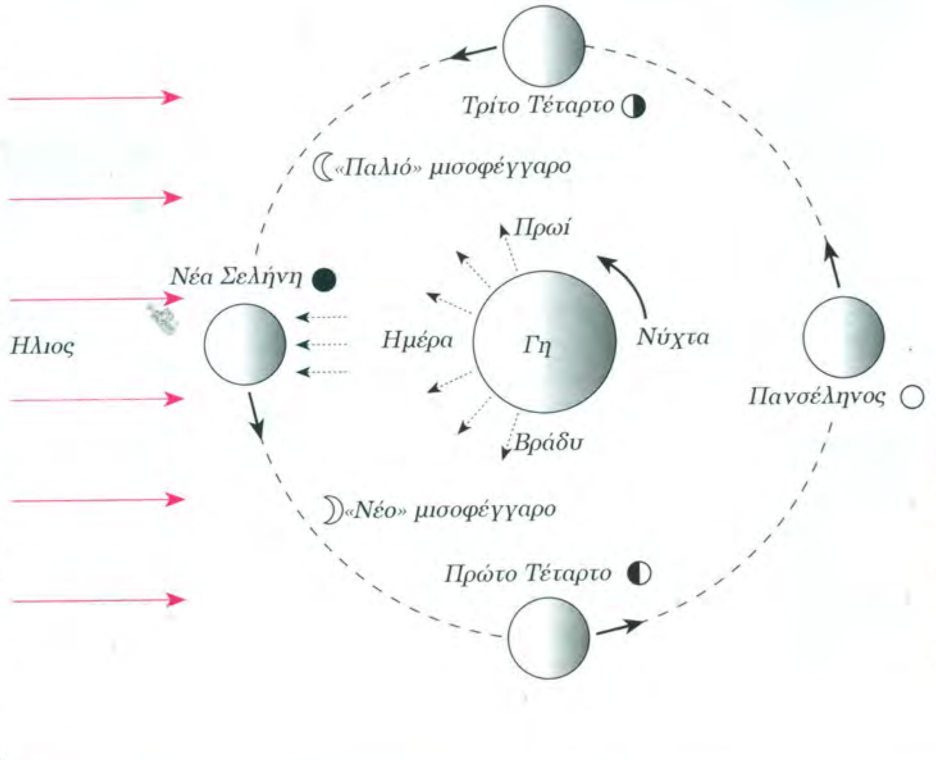
«Την ανεγνώρισα πάραυτα εις το φως της σελήνης, το μελιχρόν, το περιαργυρούν όλην την άπειρον οθόνην του γαληνιώντος πελάγους και κάμνον να χορεύουν φωσφορίζοντα τα κύματα.»
—Αλέξανδρος Παπαδιαμάντης

Alexey Byalko

Ο ΚΑΘΕΝΑΣ ΕΙΝΑΙ ΕΞΟΙΚΕΙΩΜΕνος με τη σεληνιακή ακτινοβολία —δηλαδή, με το ανακλώμενο ηλιακό φως από την επιφάνεια της Σελήνης. Μήπως όμως προσέξατε ποτέ το ασθενικό φως που προέρχεται από τη Νέα Σελήνη μια ξάστερη νύχτα; Αυτό το «τεφρώδες» φως μπορείτε να το δείτε με σιγουριά μονάχα για μία ή δύο νύχτες πριν ή μετά τη Νέα Σελήνη, όταν το μισοφέγγαρο —ο φωτεινός μηνίσκος— είναι πολύ στενό και η ακτινοβολία του δεν μας εμποδίζει να δούμε το ασθενικό φως από το υπόλοιπο τμήμα του σεληνιακού δίσκου. Υπ' αυτές τις συνθήκες, ολόκληρος ο δίσκος διακρίνεται ωχρός πάνω στο μαύρο υπόβαθρο του ουρανού. Τι προξενεί αυτή την ακτινοβολία;

Όπως γνωρίζετε, κάθε μήνα (για την ακρίβεια, κάθε 29,5 μέρες) οι σχετικές θέσεις του Ήλιου, της Γης και της Σελήνης επαναλαμβάνονται περίπου οι ίδιες. Το «περίπου» οφείλεται στο γεγονός ότι η τροχιά της Σελήνης έχει μια μικρή κλίση (μόλις 6°) σχετικά με το επίπεδο της γήινης τροχιάς —το επίπεδο της εκλειπτικής—, και στο ότι δεν είναι ακριβώς κυκλική. Εντούτοις, τα στοιχεία αυτά δεν είναι ιδιαιτέρως σημαντικά για το παρόν άρθρο.

Κοιτάξτε το παρακάτω σχήμα: ο Ήλιος φωτίζει τη Γη και τη Σελήνη, η οποία κινείται γύρω από τη Γη (η περιστροφή της Γης και η περιφορά της Σελήνης γίνονται κατά την ίδια φορά). Ο Ήλιος είναι πολύ μακριά —στο σχήμα δεν φαίνεται—, και οι ακτίνες του σημειώνονται ως παράλληλες γραμμές. Ένα ημισφαίριο της Γης και ένα της Σελήνης είναι συνεχώς φωτισμένα —και, φυσικά, στο σκοτεινό ημισφαίριο της Γης έχουμε νύχτα. Γνωρίζετε ότι η Σελήνη φαίνεται καλύτερα τη νύχτα, και, αν δεν υπάρχουν σύννεφα, η γήινη ατμόσφαιρα δεν επηρεάζει πρακτικά τις παρατηρήσεις μας. Κοιτάζοντας προσεκτικά το σχήμα, μπορείτε να αντιληφθείτε γιατί κάθε μήνα είναι διαφορετικό το τμήμα της Σελήνης που



Εικονογράφηση: Leonid Tishkov

βλέπουμε φωτισμένο από τη Γη, γιατί δηλαδή η Σελήνη παρουσιάζει τις γνωστές φάσεις: Νέα Σελήνη, Πρώτο Τέταρτο, Πανσέληνος, Τρίτο (ή Τελευταίο) Τέταρτο.

Με την ευκαιρία, ξέρετε πώς να αναγνωρίζετε αμέσως, κοιτάζοντας τη Σελήνη, αν είναι «αύξουσα» ή «φθίνουσα», αν το μισοφέγγαρο «γεμίζει» ή «αδειάζει»; Εμείς οι Ρώσοι έχουμε έναν μνημονικό κανόνα βασισμένο στο κυριλλικό αλφάβητο: το ένα μισοφέγγαρο μοιάζει με το γράμμα «с», που είναι το αρχικό της λέξης старый (παλιός), και, αν προσθέσουμε στο άλλο μισοφέγγαρο μια κατακόρυφη γραμμή, προκύπτει το γράμμα «р», που είναι το αρχικό της λέξης ранний (νέος). [Οι έλληνες αναγνώστες θα μπορούσαν να προσπαθήσουν να ανακαλύψουν τον δικό τους μνημονικό κανόνα. Μια πρόταση θα ήταν να ξαναθυμηθούμε το πολυτονικό: Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε «ἄγουρη» τη Νέα Σελήνη και «ὥριμη» την Παλιά. Η ψιλή στην πρώτη περίπτωση είναι στραμμένη προς τα αριστερά και η δασεία στη δεύτερη προς τα δεξιά, όπως η Νέα και η Παλιά Σελήνη, αντίστοιχα.] Ο φυσικός Lev Landau επινόησε έναν άλλο μνημονικό κανόνα: «αν αισθάνεστε ότι σας έχει γυρίσει την πλάτη της και θέλετε να τη χουφτώσετε, τότε είναι νέα». (Προφανώς ο Landau δεν ήταν αριστερόχειρας.)

Θυμηθείτε ότι αυτοί οι μνημονικοί κανόνες δεν είναι εφαρμόσιμοι παντού —έχουν επινοηθεί από τους κατοίκους του βόρειου ημισφαιρίου. Στην Αυστραλία, για παράδειγμα, οι μνημονικοί κανόνες θα έπρεπε να «δουλεύουν» ανάποδα (αν τα κατάφερνε κανείς να τους κάνει να «δουλεύουν»), και στις τροπικές χώρες θα έπρεπε να έχουν εντελώς διαφορετική μορφή (διότι εκεί τα «κέρατα» του μισοφέγγαρου δείχνουν πάνω και κάτω).

Ας επιστρέψουμε στο προηγούμενο σχήμα· απεικονίζει το σύστημα Γης-Σελήνης όπως φαίνεται από τον Βόρειο Πόλο (στην πραγματικότητα, από τον Πολικό Αστέρα). Πρέπει να το κοιτάξουμε σ' έναν καθρέφτη για να αντιληφθούμε πώς θα φαίνεται από τον Νότιο Πόλο (στην πραγματικότητα, από το Σταυρό του Νότου). Το σχήμα αυτό, λοιπόν, μας βοηθάει να καταλάβουμε ότι το ασθενικό φως της Σελήνης (το «τεφρώδες» της φως) οφείλεται στο εκ της Γης ανακλώμενο ηλιακό φως, το οποίο, αφού ανακλαστεί στην επιφάνεια της Σελήνης, επιστρέφει στη Γη. Αυτή η ακτινοβολία είναι έντονη στη φάση της Νέας Σελήνης, όταν η Σελήνη είναι σκοτεινή, και η γήινη σφαίρα, όπως φαίνεται από τη Σελήνη, φωτίζεται ολόκληρη από τον Ήλιο. Ας εκτιμήσουμε τώρα πόσο ασθενέστερο είναι το τεφρώδες φως από την «κανονική» ακτινοβολία της Σελήνης.

Για να προχωρήσουμε, πρέπει να γνωρίζουμε με ποιον τρόπο ανακλάται το φως από τη Γη και τη Σελήνη. Οι επιφάνειές τους διαχέουν μεν το προσπίπτον φως, αλλά όχι ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Έτσι, προκειμένου να υπολογίσουμε τη σχετική λαμπρότητα του σεληνιακού τεφρώδους φωτός ως προς το ανακλώμενο σ' ένα μηνίσκο της Σελήνης ηλιακό φως —ακτινοβολίες που τις παρατηρούμε ταυτόχρονα—, πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή του διαχεόμενου φωτός στις διάφορες κατευθύνσεις. Αυτό δεν είναι απλό πρόβλημα. Ωστόσο, μπορούμε να υπολογίσουμε μάλλον εύκολα τη σχετική λαμπρότητα για την Πανσέληνο, επειδή και στις δύο περιπτώσεις το φως διαχέεται με παρόμοιο τρόπο (κυρίως προς τα πίσω). Έτσι, αντί για τη λαμπρότητα, μπορούμε να συγκρίνουμε συνολικές ποσότητες φωτός.

Το κλάσμα του ηλιακού φωτός που ανακλά στο Διάστημα ένα ουράνιο σώμα ονομάζεται ανακλαστική ικανότητα (ή άλμπεντο) του σώματος. Η ανακλαστική ικανότητα της Γης οφείλεται κυρίως στην ατμόσφαιρά της, στα σύννεφα, που σκεπάζουν περίπου το μισό της γήινης επιφάνειας. Κατά μέσο όρο η ανακλαστική ικανότητα της Γης είναι περίπου $A_\gamma = 30\%$, αν και αυτή η τιμή αλλάζει ελαφρά, ανάλογα με το αν είναι μέρα ή νύχτα στον Ειρηνικό Ωκεανό (ο οποίος καταλαμβάνει περίπου ένα γήινο ημισφαίριο). Η Σελήνη, από την άλλη, δεν έχει ατμόσφαιρα, και το έδαφός της είναι μάλλον σκούρο, επομένως απορροφά το περισσότερο φως που προσπίπτει πάνω της. Κατά μέσο όρο η ανακλαστική ικανότητα της Σελήνης είναι περίπου $A_\sigma = 8\%$ (στη φάση της Πανσελήνου).

Η ισχύς του σεληνιακού φωτός που φτάνει στη Γη εξαρτάται από τις φάσεις της Σελήνης. Στην Πανσέληνο, φαίνεται από τη Γη ολόκληρο το ημισφαίριο που φωτίζεται από τον Ήλιο. Στο Πρώτο και Τρίτο Τέταρτο, φαίνεται μονάχα το μισό από το φωτιζόμενο ημισφαίριο. Στη Νέα Σελήνη, το Φεγγάρι φαίνεται σκοτεινό —διακρίνουμε μόνο το τεφρώδες του φως.

Η ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας στην απόσταση που βρίσκεται η Γη είναι $S_0 = 1.360\ \mathrm{W/m^2}$. Εφόσον η απόσταση Γης-Σελήνης είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση αυτών των δύο σωμάτων από τον Ήλιο, μπορούμε να δεχτούμε ότι οι εντάσεις της ηλιακής ακτινοβολίας στη Γη και στη Σελήνη είναι ίσες. Αν R_σ είναι η ακτίνα της Σελήνης, τότε η Σελήνη δέχεται φωτεινή ισχύ $S_0 \pi R_\sigma^2$, και η αντίστοιχη ισχύς που ανακλά θα είναι

$$P_\sigma = A_\sigma S_0 \pi R_\sigma^2 .$$

Ομοίως, η ολική ισχύς του ηλιακού φωτός που αντανακλά η Γη είναι

$$P_\gamma = A_\gamma S_0 \pi R_\gamma^2 .$$

Τώρα, ας θεωρήσουμε τη Γη ως σημειακή φωτεινή πηγή που ακτινοβολεί ομοιόμορφα στο Διάστημα το ανακλώμενο στο φωτιζόμενο ημισφαίριό της φως (υπάρχει μόνο μία μικρή ανακρίβεια σ' αυτό). Τότε, η ένταση αυτής της ακτινοβολίας στην περιοχή της Σελήνης είναι

$$S_1 = \frac{P_\gamma}{2\pi d^2},$$

όπου d είναι η απόσταση Γης-Σελήνης. Επομένως, η ολική ισχύς του σεληνιακού τεφρώδους φωτός είναι

$$P_{\sigma\gamma} = A_\sigma S_1 \pi R_\sigma^2 = \frac{A_\sigma A_\gamma S_0 \pi R_\gamma^2 R_\sigma^2}{2d^2}.$$

Συγκρίνοντας αυτή την τιμή με τη φωτεινή ισχύ που ανακλά η Σελήνη στη φάση της Πανσελήνου καταλήγουμε στον απλό τύπο:

$$\frac{P_{\sigma\gamma}}{P_{\sigma}} = A_{\gamma}\,\frac{R_{\gamma}^{2}}{2d^{2}} = \frac{1}{24.000}.$$

Εφόσον η γεωμετρία της ανάκλασης είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, η παραπάνω σχέση θα ισχύει και για τη σχετική λαμπρότητα: το τεφρώδες φως της Σελήνης είναι ασθενέστερο του ανακλώμενου σ' αυτήν ηλιακού φωτός κατά παράγοντα περίπου 24.000.

Τα μάτια μας είναι κατασκευασμένα με τέτοιον τρόπο, ώστε, αν λοξοκοιτάξουμε, μπορούμε να δούμε για λίγο τον εκτυφλωτικό Ήλιο. Μπορούμε επίσης να παρατηρούμε την ηλιόλουστη Σελήνη, της οποίας η φωτεινή ισχύς ($A_{\sigma}R_{\sigma}^{2}/2d^{2}$) είναι ασθενέστερη κατά παράγοντα 2.500.000. Και μπορούμε ακόμη να διακρίνουμε το τεφρώδες φως της Σελήνης, που είναι ασθενέστερο από το προηγούμενο κατά παράγοντα 24.000. Εντούτοις, ακόμη κι αυτό είναι πολύ μακριά από το όριο ευαισθησίας των ματιών μας!

Επομένως, γιατί βλέπουμε τόσο σπάνια, στη χάση και στη φέξη, το τεφρώδες φως της Σελήνης; Η γήινη ατμόσφαιρα, ως φωτεινό υπόβαθρο, μας εμποδίζει να διακρίνουμε καθαρά αυτό το φως. Αν το προσπαθήσουμε το πρωί ή νωρίς το βράδυ, το ατμοσφαιρικό απαύγασμα είναι αποτέλεσμα της διάχυσης του ηλιακού φωτός στα μεγάλα ύψη. Τα μεσάνυχτα ο ουρανός φωτίζεται εξαιτίας των φωτισμένων κατοικημένων περιοχών. Το μισοφέγγαρο έχει κι αυτό τη συνεισφορά του: κατά τη διάρκεια του Πρώτου ή του Τρίτου Τετάρτου είναι αρκετά μεγάλο, και το φως του «ξεπερνά» το χλωμό φως του σκοτεινού μέρους της Σελήνης —αυτού που δεν φωτίζεται από τον Ήλιο. Επομένως, το τεφρώδες φως της Σελήνης μπορεί να φαίνεται μόνο τις πολύ καθαρές νύχτες, και μόνο όταν ο φωτισμένος μηνίσκος είναι αρκετά λεπτός. ◘

Παιχνίδια με τα ονόματα των στοιχείων

Χημεία και πολιτική δεν συμβιβάζονται

Henry D. Schreiber

ΕΡΩΤΗΣΗ: «ΤΙ ΚΟΙΝΟ ΕΧΟΥΝ ΤΑ στοιχεία με ατομικούς αριθμούς 104 και 106;» Απάντηση: «Και τα δύο ονομάζονται ραδερφόρντιο!» Πώς είναι δυνατόν, όμως, να συμβαίνει αυτό; Δεν αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο ένα μοναδικό όνομα; Ακόμη μεγαλύτερη έκπληξη προκαλεί το γεγονός ότι μπορούμε να κάνουμε την ίδια ερώτηση για τα στοιχεία με ατομικούς αριθμούς 105 και 108, δεδομένου ότι και τα δύο ακούν στο όνομα χάνιο. Ο Πίνακας 1, όπου παρατίθενται τα ονόματα για τα στοιχεία 102 έως και 109, παρέχει την απάντηση σ' αυτό το εκ πρώτης όψεως παράδοξο. Τα συγκεκριμένα ονόματα για τα στοιχεία 104 έως και 108 εξαρτώνται από το ποιος ονοματοθετεί! Αλλά πώς περιέπεσε σε τέτοια αταξία η ονοματολογία αυτών των πρόσφατα ανακαλυφθέντων στοιχείων;

Οι «κανόνες» του παιχνιδιού

Στο Σχήμα 1 συνοψίζονται τα στοιχεία που είχαν ανακαλυφθεί έως το 1995, όπως αυτά παριστάνονται από τα σύμβολά τους. Καθώς τα χημικά στοιχεία αποτελούν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες όλων των χημικών ενώσεων, αυτή η διάταξη των στοιχείων αποτελεί κεντρική οργανωτική έννοια για την επιστήμη. Αυτό που καθιστά μοναδικό ένα στοιχείο είναι ότι διαθέτει μια συγκεκριμένη πολλαπλότητα χαρακτηριστικών, και ότι τα άτομά του είναι μεταξύ τους ακριβώς ίδια· συνεπώς, τα στοιχεία δεν μπορούν να διασπαστούν σε απλούστερα χημικά συστατικά. Για παράδειγμα, ο μόλυβδος αποτελείται από αδιαίρετα άτομα μολύβδου, ενώ ο άνθρακας αποτελείται αποκλειστικά από άτομα άνθρακα. Τα άτομα ενός στοιχείου διακρίνονται από τα άτομα ενός άλλου από το πλήθος πρωτονίων που διαθέτει το καθένα. Έτσι, το στοιχείο με ατομικό αριθμό 104 αποτελείται καθ' ολοκληρίαν από άτομα που το καθένα τους έχει ακριβώς 104 πρωτόνια. Εκ του γεγονότος της αύξησης του ατομικού αριθμού (αύξηση κατά 1 με κάθε επιπλέον πρωτόνιο), τα στοιχεία οργανώνονται συστηματικά σ' έναν περιοδικό πίνακα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

Κάθε σπουδαστής θα υπέθετε ότι

Πίνακας 1

Ατομικός αριθμός	Επιστήμων		IUPAC			Συμβιβαστική πρόταση
	Προτεινόμενο όνομα	Εθνικότητα	Μεταβατικό όνομα	Προσωρινό όνομα	Προσωρινό σύμβολο	
102	νομπέλιο τζολιότιο	Σουηδός Ρώσος	–	νομπέλιο	No	φλερόβιο
103	λωρέντσιο	Αμερικανός	–	λωρέντσιο	Lr	–
104	ραδερφόρντιο κουρτσατόβιο	Αμερικανός Ρώσος	αννιλκουόντιο	ντούμπνιο	Db	ντούμπνιο
105	χάνιο νηλσμπόριο	Αμερικανός Ρώσος	αννιλπέντιο	τζολιότιο	Jl	τζολιότιο
106	σημπόργκιο	Αμερικανός	αννιλέξιο	ραδερφόρντιο	Rf	σημπόργκιο
107	νηλσμπόριο	Γερμανός	αννιλσέπτιο	μπόριο	Bh	νηλσμπόριο
108	έσσιο	Γερμανός	αννιλόκτιο	χάνιο	Hn	χάνιο
109	μαϊτνέριο	Γερμανός	αννιλέννιο	μαϊτνέριο	Mt	μαϊτνέριο

Η συμβιβαστική πρόταση έγινε από αντιπροσώπους της IUPAC (Διεθνής Ένωση Βασικής και Εφαρμοσμένης Χημείας) από τις ΗΠΑ, τη Γερμανία και τη Ρωσία, το 1995.

Περίοδοι	1 IA	2 IIA	3 IIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8	9 ← VIIIB →	10	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 0
1	1 H 1,0079																	2 He 4,00260
2	3 Li 6,941	4 Be 9,01218											5 B 10,81	6 C 12,011	7 N 14,0067	8 O 15,9994	9 F 18,9984	10 Ne 20,179
3	11 Na 22,9898	12 Mg 24,305											13 Al 26,9815	14 Si 28,0855	15 P 30,9738	16 S 32,06	17 Cl 35,453	18 Ar 39,948
4	19 K 39,0983	20 Ca 40,08	21 Sc 44,9559	22 Ti 47,88	23 V 50,9415	24 Cr 51,996	25 Mn 54,9380	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,69	29 Cu 63,546	30 Zn 65,39	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,9216	34 Se 78,96	35 Br 79,904	36 Kr 83,80
5	37 Rb 85,4678	38 Sr 87,62	39 Y 88,9059	40 Zr 91,224	41 Nb 92,9064	42 Mo 95,94	43 Tc (98)	44 Ru 101,07	45 Rh 102,906	46 Pd 106,42	47 Ag 107,868	48 Cd 112,41	49 In 114,82	50 Sn 118,71	51 Sb 121,75	52 Te 127,60	53 I 126,905	54 Xe 131,29
6	55 Cs 132,905	56 Ba 137,33	71 Lu 174,967	72 Hf 178,49	73 Ta 180,948	74 W 183,85	75 Re 186,207	76 Os 190,2	77 Ir 192,22	78 Pt 195,08	79 Au 196,967	80 Hg 200,59	81 Tl 204,383	82 Pb 207,2	83 Bi 208,980	84 Po (209)	85 At (210)	86 Rn (222)
7	87 Fr (223)	88 Ra 226,025	103 Lr (262)	104 Unq (261)	105 Unp (262)	106 Unh (266)	107 Uns (262)	108 Uno (265)	109 Une (266)									

57 La 138,906	58 Ce 140,12	59 Pr 140,908	60 Nd 144,24	61 Pm (145)	62 Sm 150,36	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,925	66 Dy 162,50	67 Ho 164,930	68 Er 167,26	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04
89 Ac 227,028	90 Th 232,038	91 Pa 231,036	92 U 238,029	93 Np (237)	94 Pu (244)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (247)	98 Cf (251)	99 Es (252)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (259)

1 ← Αρίθμηση ομάδας κατά IUPAC
IA ← Παραδοσιακή αρίθμηση ομάδας

1 ← Ατομικός αριθμός
H ← Σύμβολο στοιχείου
1,0079 ← Σχετική ατομική μάζα —οι τιμές στις παρενθέσεις εκφράζουν τους μαζικούς αριθμούς των πλέον σταθερών γνωστών ισοτόπων

Σχήμα 1
Περιοδικός πίνακας των στοιχείων — 1995. (Από το Physical Chemistry *του John Winn, Νέα Υόρκη: Harper Collins, 1995.)*

η απονομή ονομάτων σ' αυτές τις θεμελιώδεις μονάδες, τα χημικά στοιχεία, είναι μια καθιερωμένη διαδικασία. Στην πραγματικότητα, εκείνος που ανακαλύπτει ένα νέο στοιχείο έχει, κατά παράδοση, την τιμή να προτείνει ένα όνομα γι' αυτό. Η μόνη πραγματική κατευθυντήρια γραμμή στη διαδικασία της ονοματοθεσίας είναι ότι το όνομα κάθε νέου μεταλλικού στοιχείου πρέπει να καταλήγει σε *-ιο*. Η IUPAC σ' αυτή την περίπτωση διατηρεί το δικαίωμα να επιλέξει ένα επίσημο και οριστικό όνομα γι' αυτό το στοιχείο προς χρήση από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα. Ωστόσο, από ιστορική άποψη η IUPAC επέλεγε ονόματα τα οποία δεν απέκλιναν σημαντικά από εκείνα που προτείνονταν από τους ερευνητές οι οποίοι είχαν ανακαλύψει τα εν λόγω στοιχεία. Ο «καβγάς» συνήθως ήταν να διαπιστωθεί ποιος ήταν ο πρώτος ανακαλύψας, εφόσον είχαν προβληθεί περισσότερες της μίας θεμιτές διεκδικήσεις για την πατρότητα της ανακάλυψης του δεδομένου στοιχείου.

Το παιχνίδι της ονοματοθεσίας των υπερφέρμιων στοιχείων

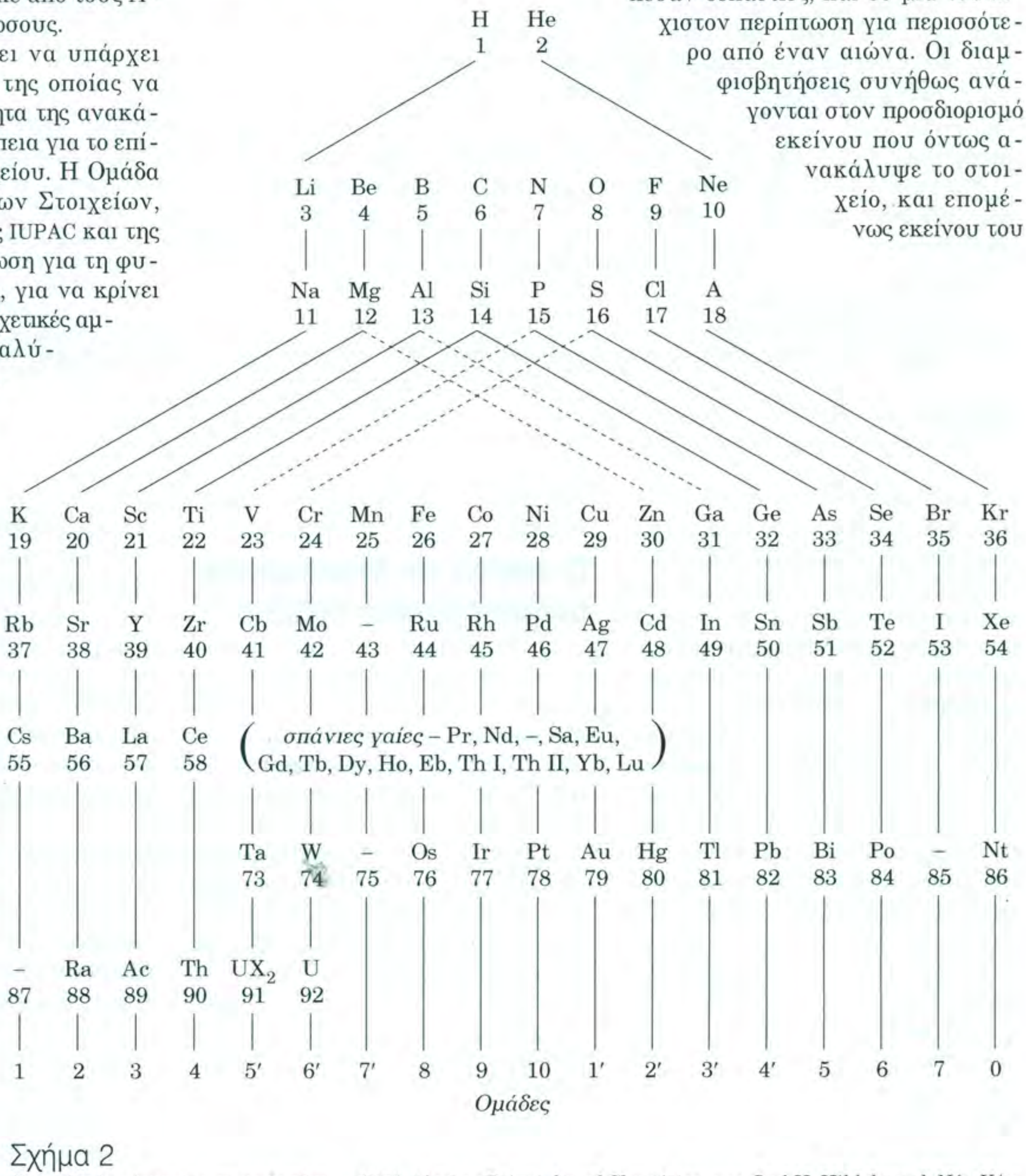
Τα υπερφέρμια στοιχεία —εκείνα με ατομικό αριθμό μεγαλύτερο του φερμίου (το στοιχείο 100)— έχουν όλα ανακαλυφθεί μέσα στα τελευταία 30 χρόνια. Αλλά η ανακάλυψη καθενός από αυτά συχνά στηριζόταν στην απομόνωση λίγων μόνο ατόμων ενός βραχύβιου ραδιενεργού ισοτόπου. Επιπλέον, μόνο λίγα εργαστήρια στον κόσμο μπορούν να παρασκευάσουν αυτά τα συνθετικά στοιχεία, και επομένως να επαναλάβουν τα πειράματα των άλλων. Για να παραγάγουμε ένα υπερφέρμιο στοιχείο, πρέπει να βομβαρδίζουμε συγκεκριμένα άτομα-στόχους με μια δέσμη άλλων ατόμων, έως ότου επέλθει η σύντηξή τους· π.χ., μόλις παρασκευάσαμε ένα άτομο του στοιχείου 112 βομβαρδίζοντας επί δύο εβδομάδες ένα δείγμα μολύβδου με υψηλής ενέργειας άτομα ψευδαργύρου.

Περισσότερα από τα δύο τρίτα των γνωστών ισοτόπων των στοιχείων 101 έως και 109 έχουν χρόνους ημιζωής μικρότερους από ένα λεπτό, και πολλοί βρίσκονται στην περιοχή του χιλιοστού του δευτερολέπτου. Έτσι, όχι μόνο μαστίζεται η ανακάλυψη αυτών των στοιχείων από τους πολύ χαμηλούς ρυθμούς παραγωγής, αλλά επιπλέον τα άτομά τους διασπώνται σε άτομα άλλων στοιχείων σε χρόνο δευτερολέπτων ή λεπτών το πολύ! Για πόσο χρόνο, λοιπόν, πρέπει να «υπάρχει» ένα σύνολο ατόμων προκειμένου αυτά να συνιστούν ένα νέο στοιχείο; Επιπλέον, συχνά οι ενδείξεις για την παρουσία των ατόμων ενός νέου στοιχείου είναι έμμεσες και στηρίζονται σε θεωρητικά σχήματα πυρηνικών διασπάσεων, και όχι σε κλασικούς χημικούς διαχωρισμούς. Η απομόνωση και η ταυτοποίηση ενός υπερφέρμιου στοιχείου είναι δύσκολη διαδικασία —για να μην αναφέρουμε τις διαμφισβητήσεις και τους ανταγωνισμούς που προκαλεί. Τι συμβαίνει εάν δύο ή περισσότερες ομάδες ερευνητών επιτύχουν (ή ισχυρίζονται ότι επέτυχαν) την ανακάλυψη ενός νέου στοιχείου, λίγο-πολύ ταυτόχρονα, και κάθε ομάδα προτείνει διαφορετικό όνομα για το στοιχείο; Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, περισσότερα του ενός ονόματα χρησιμοποιούνται στην τρέχουσα πρακτική για το ίδιο στοιχείο. Για παράδειγμα, το στοιχείο 104 είναι γνωστό ως ραδερφόρντιο ή κουρτσατόβιο, αναλόγως με το εάν χρησιμοποιείται το όνομα που προτάθηκε από τους Αμερικανούς ή τους Ρώσους.

Προφανώς θα πρέπει να υπάρχει μια διαδικασία μέσω της οποίας να κρίνεται η προτεραιότητα της ανακάλυψης, και κατά συνέπεια για το επίσημο όνομα του στοιχείου. Η Ομάδα Εργασίας Υπερφέρμιων Στοιχείων, μια κοινή επιτροπή της IUPAC και της IUPAP (αδελφή οργάνωση για τη φυσική) δρα ως δικαστής, για να κρίνει την προτεραιότητα σε σχετικές αμφισβητούμενες ανακαλύψεις. Μερικές φορές ο «δικαστής» παραδέχεται ότι η απονομή τίτλων για την ανακάλυψη θα μπορούσε κάλλιστα να είναι «κορόνα-γράμματα». Τότε η CNIC (η επιτροπή της IUPAC που ασχολείται με την ονοματολογία της ανόργανης χημείας) δρα περίπου ως ένορκος που εισηγείται ένα κατάλληλο όνομα στη διοικούσα επιτροπή της IUPAC, η οποία τελικά ορίζει το επίσημο όνομα. Ωστόσο, η CNIC επιλέγει το προτεινόμενο όνομα πρωταρχικά βάσει της επικρατούσας χρήσης, και της καταλληλότητας για χρήση, και δεν εκφέρει κρίση αναφορικά με τη προτεραιότητα ως προς την ανακάλυψη. Διατηρεί ακόμη και το δικαίωμα να καταλήξει σ' ένα όνομα διαφορετικό από εκείνο το οποίο πρότεινε ο ερευνητής που ανακάλυψε το στοιχείο. Η σύγχυση φουντώνει εάν προταθεί από την IUPAC για το στοιχείο ένα ακόμη, τρίτο όνομα. Επιστρέφοντας και πάλι στο στοιχείο 104, η IUPAC αγνόησε τα δύο ονόματα που προτάθηκαν από εκείνους που το ανακάλυψαν, και βρήκε ένα εντελώς νέο: ντούμπνιο. Το ραδερφόρντιο, το κουρτσατόβιο και το ντούμπνιο, μαζί με το αννιλκουόντιο (unnilquadium, ή Unq, το μεταβατικό όνομα της IUPAC: *un* = 1, *nil* = 0, *quad* = 4, και *-ium* = μέταλλο), όλα παίζουν στο σουιπστέικ του «παιχνιδιού της ονοματοθεσίας» του στοιχείου 104.

Τα παιχνίδια του παρελθόντος

Είναι άραγε σπάνια η σύγχυση γύρω από την ονοματολογία των στοιχείων, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 1 για τα υπερφέρμια στοιχεία; Προς γενική έκπληξη, στην πραγματικότητα είναι μάλλον συνηθισμένη! Παρόμοια παιχνίδια γύρω από την ονομασία κάποιου στοιχείου έχουν ξεσπάσει πολλές φορές στο παρελθόν, με αντιδικίες που διήρκεσαν δεκαετίες, και σε μία τουλάχιστον περίπτωση για περισσότερο από έναν αιώνα. Οι διαμφισβητήσεις συνήθως ανάγονται στον προσδιορισμό εκείνου που όντως ανακάλυψε το στοιχείο, και επομένως εκείνου του



Σχήμα 2
Περιοδικός πίνακας των στοιχείων —1920. (Από το Principles of Chemistry *του Joel H. Hildebrand, Νέα Υόρκη: MacMillan, 1920.)*

οποίου η πρόταση θα έπρεπε να έχει προτεραιότητα. Ωστόσο, και στο παρελθόν η χημική απομόνωση και ταυτοποίηση του στοιχείου ήταν συχνά αβέβαιη. Σήμερα, έχοντας στη διάθεσή μας πολλές δεκαετίες ανάπτυξης της χημικής γνώσης, μας είναι εύκολο να αποδίδουμε εκ των υστέρων την προτεραιότητα της ανακάλυψης. Αλλά είναι πολύ διαφορετικά όταν κανείς έχει εμπλακεί στη έξαψη της διαμάχης. Πολλοί πιστεύουν ότι τα χημικά στοιχεία είναι «όλα» προ πολλού γνωστά, και ότι μόνο τελευταία προστέθηκαν στο τέλος του περιοδικού πίνακα νέα στοιχεία —στοιχεία με υψηλούς ατομικούς αριθμούς, τα οποία παρασκευάζονται τεχνητά. Ωστόσο, δεν είναι «όλα» τα στοιχεία γνωστά εδώ και πολύ καιρό. Για παράδειγμα, συγκρίνετε δύο περιοδικούς πίνακες των στοιχείων, έναν του 1995 (Σχήμα 1) και τον άλλο του 1920 (Σχήμα 2). Αυτά τα 75 χρόνια αντιπροσωπεύουν τη διάρκεια ζωής μίας μόνο γενιάς.

Ο περιοδικός πίνακας του 1920 έχει πολλές αντιφάσεις, προφανείς σ' εμάς εκ των υστέρων. Πρώτον, υπάρχουν στοιχεία τα οποία δεν είχαν ακόμη ανακαλυφθεί και ονοματοθετηθεί. Το ουράνιο (στοιχείο 92) ήταν το βαρύτερο στοιχείο, και έτσι όλα τα άλλα με μεγαλύτερο ατομικό αριθμό ήταν ακόμη άγνωστα. Επιπλέον, τα στοιχεία 43 (τεχνήτιο), 61 (προμήθειο), 72 (άφνιο), 75 (ρήνιο), 85 (αστάτιο) και 87 (φράγκιο) δεν είχαν ακόμη απομονωθεί και αναγνωριστεί. Δεύτερον, υπάρχουν μερικές ασυνέπειες στα χημικά σύμβολα: A (αντί Ar) για το αργό, Sa (αντί Sm) για το σαμάριο, και UX_2 (αντί Pa) για το πρωτακτίνιο. Επιπλέον, μερικά από τα στοιχεία τα οποία είχαν εμπλακεί στο παιχνίδι της ονοματοθεσίας που παιζόταν στα 1920 είναι εμφανή: το σύμβολο του στοιχείου 41 ήταν τότε Cb για το κολόμβιο (αντί Nb για το νιόβιο), και του στοιχείου 86 ήταν Nt για το νιτόνιο (αντί για Rn για το ραδόνιο). Είναι επίσης εμφανές ότι στα 1920 μόλις αναπτυσσόταν ο σύγχρονος περιοδικός πίνακας —π.χ., υπάρχουν πάρα πολλά στοιχεία στη σειρά των σπάνιων γαιών, και δεν υπάρχει θέση για το άφνιο.

Ο κατάλογος του 1933 εξακολουθούσε να περιέχει το κολόμβιο ως στοιχείο 41, αν και το σύγχρονο όνομα για το στοιχείο 86 (ραδόνιο) είχε ήδη καθιερωθεί εκείνη την εποχή. Αλλά σ' εκείνο τον κατάλογο το στοιχείο 85 έφερε το όνομα αλαβαμίνιο και το στοιχείο 87 το όνομα βιρτζίνιο. Τότε, το ιλλίνιο και το μασούριο ήταν στοιχεία των οποίων η ανακάλυψη είχε προσφάτως ανακοινωθεί. Πιθανώς οι περισσότεροι δεν έχετε ξανακούσει γι' αυτά τα κακότυχα στοιχεία!

Πίνακας 2

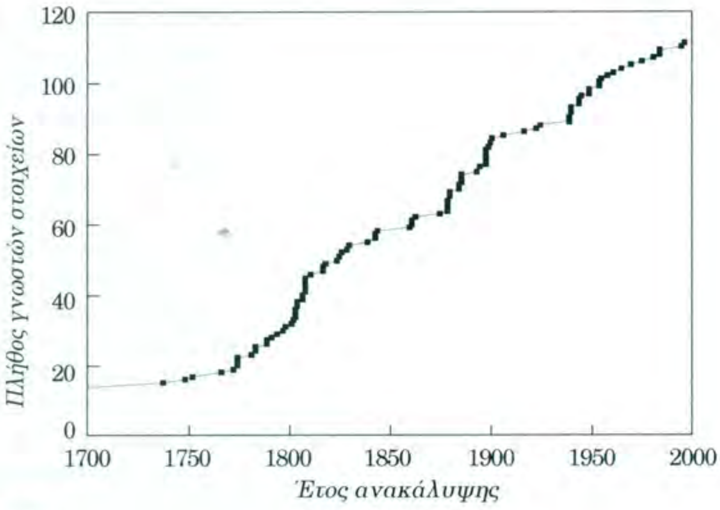
Ατομικός αριθμός	Επίσημο όνομα	Σύμβολο	Ανταγωνιστικό όνομα
4	βηρύλλιο	Be	γλυκίνιο (Γαλλία)
41	νιόβιο	Nb	κολόμβιο (ΗΠΑ)
43	τεχνήτιο	Tc	μασούριο
61	προμήθειο	Pm	ιλλίνιο, φλωρέντιο
71	λουτέτσιο	Lu	λουτέσιο (ΗΠΑ) κασσιόπιο (Γερμανία)
72	άφνιο	Hf	κέλτιο
74	βολφράμιο	W	τανγκστένιο (αγγλοσαξονικές και λατινογενείς γλώσσες)
85	αστάτιο	At	αλαβαμίνιο
87	φράγκιο	Fr	βιρτζίνιο
91	πρωτακτίνιο	Pa	πρωτοακτίνιο

Αποδοχή των νέων επίσημων ονομάτων χημικών στοιχείων γύρω στα 1950.

Πολλοί απ' αυτούς τούς παρατεταμένους αγώνες ονοματοθεσίας του κύριου τμήματος του περιοδικού πίνακα δεν κρίθηκαν παρά μόλις το 1949. Ο Πίνακας 2 περιέχει τις αποφάσεις της IUPAC εκείνης της εποχής —πάντοτε αποτελούσε δίλημμα για την IUPAC η επιλογή για ένα δεδομένο στοιχείο μεταξύ ονομάτων που βρίσκονταν ήδη σε κοινή χρήση. Στην πραγματικότητα, από τότε που ανακοινώθηκε η ανακάλυψη του «κολομβίου» στις αρχές του 19ου αιώνα, ο αγώνας μεταξύ νιοβίου και κολομβίου μαινόταν για περισσότερα από 100 χρόνια. Ήταν παιχνίδι εθνικιστικό —κολόμβιο ήταν το ευνοούμενο όνομα στις Ηνωμένες Πολιτείες (Κολομβία ήταν ένα από τα πρώιμα ονόματα της Αμερικής) και νιόβιο αλλού. Αλλά δεν ήταν πάντοτε οι Ηνωμένες Πολιτείες εναντίον όλου του υπόλοιπου κόσμου. Γλυκίνιο ήταν το ευνοούμενο όνομα για το στοιχείο 4 στη Γαλλία, και κασσιόπιο για το στοιχείο 71 στη Γερμανία. Κάθε κράτος (και οι γείτονές του) έτεινε να χρησιμοποιεί το όνομα που πρότεινε το φίλτατο τέκνο του το οποίο είχε ανακαλύψει το στοιχείο. Δεν είναι απροσδόκητο, λοιπόν, ότι για τα προηγούμενα 20 χρόνια το στοιχείο 104 απαντάται ως ραδερφόρντιο στα αμερικανικά και αγγλικά κείμενα και ως κουρτσατόβιο στα ρωσικά και σκανδιναβικά εγχειρίδια.

Ένα άλλο παράδειγμα του παιχνιδιού της ονοματοθεσίας κατά το παρελθόν αποτελεί η έρευνα για το αλκαλιμέταλλο που έλειπε —το στοιχείο 87, ή εκα-καίσιο—, και ήταν σε πλήρη εξέλιξη στις δεκαετίες του 1920 και 1930. Τα διάφορα ονόματα που προτάθηκαν από όσους θεώρησαν ότι είχαν απομονώσει το στοιχείο ήταν ρώσιο, αλκαλίνιο, βιρτζίνιο και μολδάβιο, πριν δικαιωθεί το 1949 οριστικά αυτός που πρότεινε το όνομα φράγκιο. Ο όχι και ιδιαίτερα διακριτικός εθνικισμός στα περισσότερα από αυτά τα ονόματα δηλώνει την πατρίδα των διεκδικούντων την πατρότητα της ανακάλυψης. Άραγε διαφέρει αυτό πολύ από τα τέσσερα εν χρήσει ονόματα για το στοιχείο 104;

Στο Σχήμα 3 φαίνεται η σταθερή πρόοδος στην ανακάλυψη των στοιχείων με την πάροδο του χρόνου. Μέχρι σήμερα έχουν ανακαλυφθεί τα στοιχεία με ατομικό αριθμό έως και 112. Τα μόνα νέα στοιχεία μπορούν να είναι εκείνα τα οποία θα προστεθούν στο τέλος του περιοδικού πίνακα. Η γραμμική παρέκταση του



Σχήμα 3

Σχήματος 3 θα οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι οι ερευνητές θα συνεχίσουν να παράγουν και να ανακαλύπτουν νέα στοιχεία. Υπάρχει άραγε κάποιο όριο στην πρόσθεση πρωτονίων ώστε να συντίθενται όλο και περισσότερα υπερφέρμια στοιχεία; Μερικοί επιστήμονες προβλέπουν ότι πράγματι θα ακολουθήσει στον περιοδικό πίνακα μια θάλασσα περισσότερο σταθερών ατόμων, ανάλογων του θαλλίου, του μολύβδου και του βισμουθίου. Επομένως, θα συνεχίσουν να βαφτίζουν στοιχεία, και πιθανώς θα συνεχίσουν να διαφωνούν για τον έγκυρο νονό!

Η μόδα στην ονοματοθεσία

Το πόσο εύστοχες είναι οι επιλογές των ονομάτων των νέων στοιχείων συχνά βασίζεται στην κρίση αυτού που έκανε την ανακάλυψη. Ωστόσο, στο πέρασμα των τελευταίων 300 ετών, έχουν σημειωθεί λεπτές αλλά δραματικές στροφές στην ονοματολογία των στοιχείων.

Ένας τρόπος για να δείξουμε παραστατικά αυτές τις αλλαγές είναι να ομαδοποιήσουμε τα ονόματα των στοιχείων σύμφωνα με μερικά σχήματα ταξινόμησης. Η πρώτη ομάδα περιέχει εκείνα τα στοιχεία των οποίων τα ονόματα κατασκευάστηκαν από λέξεις που περιγράφουν μια ειδική χημική ή φυσική ιδιότητα του στοιχείου ή από λέξεις που υποδηλώνουν έναν μοναδικό τρόπο ανακάλυψης. Τυπικά, οι ρίζες τέτοιων ονομάτων έχουν ελληνική ή λατινική βάση. Στα παραδείγματα περιλαμβάνεται το χλώριο από το ελληνικό *χλωρός*, που αντιστοιχεί σε χρώμα κιτρινοπράσινο —το χρώμα του αερίου· το λανθάνιο από το ελληνικό *λανθάνω*, το οποίο σημαίνει κρύβομαι ή διαφεύγω την προσοχή, καθώς «κρυβόταν» σ' ένα ορυκτό το οποίο είχε προηγουμένως χρησιμοποιηθεί για την απομόνωση του δημήτριου 30 χρόνια νωρίτερα· τέλος το ράδιο και το ραδόνιο από το λατινικό *radius* (ακτίνα), αφού και τα δύο είναι ραδιενεργά. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία τα οποία πήραν τα ονόματα ουράνιων σωμάτων ή μυθολογικών όντων. Για παράδειγμα, τα στοιχεία 93 και 94 ονομάζονται ποσειδώνιο και πλουτώνιο, από τους πλανήτες Ποσειδώνα και Πλούτωνα, αντιστοίχως. Ακριβώς όπως αυτά τα δύο στοιχεία είναι πέραν του ουρανίου (του στοιχείου 92, που πήρε το όνομα του πλανήτη Ουρανού) στον περιοδικό πίνακα, οι ομώνυμοί τους πλανήτες είναι πέραν του Ουρανού στο ηλιακό σύστημα. Από τη μυθολογία, το βανάδιο παίρνει το όνομα της Vanadis, της νορβηγικής θεότητας της ομορφιάς, για να δηλώσει τα όμορφα χρώματα που λαμβάνουν οι ενώσεις του βαναδίου. Μια τρίτη ομάδα έχει ονόματα που δηλώνουν χώρες ή τοποθεσίες —είτε τον τόπο της ανακάλυψης, είτε την πατρίδα αυτού που το ανακάλυψε, ή και την περιοχή προέλευσης του ορυκτού από το οποίο απομονώθηκε το στοιχείο. Το αμερίκιο, το καλιφόρνιο και το μπερκέλιο συνετέθησαν όλα σε εργαστήρια στο Μπέρκλεϋ της Καλιφόρνιας. Το έρβιο, το τέρβιο, το υττέρβιο και το ύττριο παίρνουν όλα το όνομά τους από την Ytterby, μια τοποθεσία κοντά στο Γκαίτεμποργκ με κοιτάσματα ορυκτών των σπάνιων γαιών από τα οποία εξήχθησαν τα στοιχεία αυτά. Μια τέταρτη ομάδα περιέχει στοιχεία που έλαβαν τα ονόματα προσωπικοτήτων, όπως το κιούριο από τη Marie και τον Pierre Curie, και το αϊνστάνιο από τον Άλμπερτ Αϊνστάιν.

Αρκετά στοιχεία είναι γνωστά από την αρχαιότητα. Ονόματα όπως άνθρακας, σίδηρος, μόλυβδος και κασσίτερος, μεταξύ άλλων, αντιπροσωπεύουν τέτοια υλικά. Από τα 20 στοιχεία που ανακαλύφθηκαν από το 1699 έως το 1802, το 75% είχαν κατασκευασμένα ονόματα, κυρίως προερχόμενα από λατινικές ή ελληνικές ρίζες που περιγράφουν κάποια μοναδική ιδιότητα του στοιχείου. Τα περισσότερα από τα απομένοντα στοιχεία αυτής της χρονικής περιόδου πήραν τα ονόματα ουράνιων σωμάτων ή μυθολογικών όντων. Το ίδιο ισχύει για τα 20 στοιχεία που απομονώθηκαν την περίοδο 1803-1829, ενώ από τα επόμενα 20 (1830-1886) περίπου τα μισά έχουν κατασκευασμένα ονόματα, τώρα όμως περίπου το 40% είχαν ονόματα που σήμαιναν χώρες ή τοποθεσίες. Η ίδια κατανομή διατηρήθηκε και για τα ονόματα των επόμενων κατά χρονολογική σειρά είκοσι στοιχείων. Στη διάρκεια αυτών των δύο πρώτων αιώνων της σύγχρονης χημείας εμφανίζεται μια λεπτή στροφή από τα κατασκευασμένα ονόματα με λατινικές ή ελληνικές ρίζες ή από τα ονόματα πλανητικής προέλευσης σε ονόματα που σημαίνουν χώρες και τοποθεσίες.

Ακόμη εκπληκτικότερο είναι ότι, από τα πρώτα 93 στοιχεία, μόνο δύο πήραν τα ονόματα προσώπων —αν και έμμεσα, από παραξενιά της μοίρας: στην πραγματικότητα, τα στοιχεία πήραν το όνομά τους από τα ορυκτά από τα οποία απομονώθηκαν. Ωστόσο, τα ορυκτά αυτά έτυχε με τη σειρά τους να έχουν πάρει το όνομά τους από κάποιο πρόσωπο. Έτσι, το γαδολίνιο οφείλει το όνομά του στον φινλανδό χημικό Gadolin· και ο Samarsky, ένας ρώσος υπεύθυνος ορυχείων, με την ονομασία του σαμαρίου προήχθη σε θέση που πιθανώς ποτέ ο ίδιος δεν είχε οραματιστεί.

Στην περίοδο κατά την οποία ανακαλύφθηκαν τα τελευταία 16 στοιχεία, από το 1944 έως σήμερα, περίπου το 75% των ονομάτων τους είναι προς τιμήν ενός συγκεκριμένου προσώπου. Τα περισσότερα από τα υπόλοιπα δηλώνουν μια συγκεκριμένη χώρα ή τοποθεσία. Αλλά τέτοια είναι η τάση και η μόδα πλέον στο παιχνίδι της ονοματοθεσίας των στοιχείων —για να τιμηθεί κάποια εξέχουσα προσωπικότητα, μια πόλη ή μια χώρα, χρησιμοποιείται το όνομά της.

Πώς επιτέλους να ονοματοθετούμε ένα υπερφέρμιο στοιχείο;

Όταν τελικά χρειαστεί να απονείμουμε ένα όνομα σε κάποιο τεχνητό στοιχείο πέραν του ουρανίου, είναι δύσκολο να επιχειρηματολογήσουμε εναντίον ονομάτων όπως κιούριο, αϊνστάνιο ή μεντελέβιο —προς τιμήν μεγάλων επιστημόνων, ανεξαρτήτως εθνικότητας. Ωστόσο, από τα ονόματα των υπερφέρμιων στοιχείων του Πίνακα 1, πολλές από τις προσωπικότητες που τιμώνται με τέτοια ονόματα δεν είναι άμεσα αναγνωρίσιμες από τον μέσο επιστήμονα. Για παράδειγμα, ένας αμερικανός επιστήμονας πιθανώς δεν έχει άμεση γνώση των προσώπων των οποίων το όνομα πήραν το κουρτσατόβιο ή το φλερόβιο· ομοίως, ένας ρώσος επιστήμονας δεν θα αναγνώριζε εύκολα τα πρόσωπα πίσω από το λωρέντσιο ή το σημπόργκιο. Επειδή η ανακάλυψη νέων στοιχείων στην εποχή μας στηρίζεται πλέον στην πυρηνική φυσική και χημεία, τα προτεινόμενα ονόματα για τα υπερφέρμια στοιχεία είναι κυρίως προς τιμήν αυτών που εργάστηκαν σ' αυτά τα πεδία. Οι Davy και Ramsay, οι οποίοι ανακάλυψαν συνολικά έντεκα στοιχεία τον 19ο αιώνα, δεν είχαν την τύχη τα ονόματά τους ν' απαθανατισθούν στο όνομα κάποιου στοιχείου. Δεν ήταν τέτοια η μόδα εκείνα τα χρόνια.

Τα ονόματα στοιχείων που κατασκευάζονται από λατινικές ή ελληνικές ρίζες και εκφράζουν κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα του στοιχείου δεν είναι βεβαίως εθνικιστικά, επομένως δεν θα ήταν τόσο ενοχλητικά και διαμφισβητούμενα μεταξύ ομάδων που διεκδικούν την προτεραιότητα στην ανακάλυψη. Αλλά τότε, πώς να ονομάσεις ένα στοιχείο του οποίου η πιο χαρακτηριστική ιδιότητα είναι ότι δεν υπάρχει για αρκετό χρόνο; Το όνομα μπρίβιο —το οποίο σχηματίζεται από τη λατινική λέξη *brevis* (βραχύς), που υποδηλώνει ότι το στοιχείο παρατηρείται μόνο για βραχύ χρονικό διάστημα— προτάθηκε αρχικά για το στοιχείο 91 (πρωτακτίνιο) από εκείνους που το ανακάλυψαν. Δυστυχώς δεν υπάρχουν πολλές κατάλληλες ελληνικές και λατινικές λέξεις για να υποδηλώσουν τα ραδιενεργά και βραχύβια υπερφέρμια στοιχεία, ειδικά αυτά που ανακαλύφθηκαν πρόσφατα.

Στο παιχνίδι της ονοματοθεσίας των στοιχείων, ίσως έχουμε καταλήξει να αποδίδουμε τιμή σε πρόσωπα μέσω αποκλεισμού. Έτσι, για τα υπερφέρμια στοιχεία είναι δύσκολο να επινοηθούν κατασκευασμένα ονόματα με νόημα: οι πλανήτες ώς τον Πλούτωνα έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί· η σημασία των μυθολογικών αναλογιών χάνεται όταν λίγα είναι γνωστά για το στοιχείο· και τα περισσότερα από τα σχετικά τοπωνύμια έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί υπέρ το δέον. Ως προς αυτό, οι τρεις κύριοι τόποι εργασίας στη σύνθεση υπερφέρμιων στοιχείων εμπλέκουν εργαστήρια που διευθύνονται από αμερικανούς, γερμανούς και ρώσους επιστήμονες. Το αμερίκιο, το καλιφόρνιο και το μπερκέλιο ήδη σηματοδοτούν την εργασία των Αμερικανών· το γερμάνιο χρησιμοποιήθηκε εδώ και πολλά χρόνια· και το ρουθήνιο (από τη λατινική ονομασία της Ρωσίας) έχει επίσης χρησιμοποιηθεί προγενέστερα ως όνομα στοιχείου.

Τι άλλο μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι αμερικανικές, γερμανικές και ρωσικές ομάδες για ονόματα στηριγμένα σε τοπωνύμια; Ακόμη και το όνομα έσσιο, το οποίο προτάθηκε από τους Γερμανούς που ανακάλυψαν το στοιχείο 108 για να τιμήσουν το κρατίδιο της Έσσης στη Γερμανία, θεωρήθηκε απαράδεκτο από την IUPAC στις πρόσφατες αποφάσεις της. Το σκεπτικό της ήταν ότι ένα τέτοιο όνομα δεν θα μπορούσε εύκολα να αναγνωριστεί ή να συσχετιστεί με τη Γερμανία. Αλλά τότε πόσοι επιστήμονες γνωρίζουν ότι το άφνιο και το λουτέτσιο πήραν το όνομά τους προς τιμήν της Κοπεγχάγης και του Παρισιού αντίστοιχα, από τις λατινικές τους ονομασίες; Πόσοι αμερικανοί επιστήμονες θα συνειδητοποιούσαν ότι το ντούμπνιο, το εναλλακτικό όνομα της IUPAC για το στοιχείο 104, τιμά την περιοχή της Ντούμπνα στη Ρωσία;

Η χρησιμοποίηση του μεταβατικού ονόματος της IUPAC αννιλκουόντιο για το στοιχείο 104 είναι επίσης απαράδεκτη για τους περισσότερους επιστήμονες. Λείπει απ' αυτό ο «χαρακτήρας» και το «άρωμα» των άλλων ονομάτων των στοιχείων. Πέραν τούτου, αποτελεί παράδοση γι' αυτούς που ανακαλύπτουν κάποιο στοιχείο να προτείνουν το όνομα! Έτσι, σε όσους ανακαλύπτουν στοιχεία έχουν απομείνει μόνο ονόματα προσώπων για να προτείνουν.

Τα επιχειρήματα γύρω από την ονοματοθεσία έχουν αποκτήσει περισσότερο πάθος, επειδή εκείνοι που κάνουν την ανακάλυψη διαλέγουν να τιμήσουν πρόσωπα τα οποία οι ίδιοι θαυμάζουν. Είναι εξάλλου πιο εύκολο να δώσεις μάχη ή να υπερασπιστείς την υπόθεση ενός προσώπου ή μιας χώρας παρά μιας χημικής ιδιότητας! Η ύψιστη τιμή, λοιπόν, που μπορεί να αποδοθεί σε κάποιο πρόσωπο είναι να δώσεις το όνομα του σ' ένα στοιχείο. Τα στοιχεία αποτελούν τμήμα των θεμελίων της σύγχρονης επιστήμης· ως εκ τούτου, θα βρίσκονται στο προσκήνιο για πάντα. Το όνομα αυτό θα εκφέρεται ισότιμα με εκείνα στοιχείων όπως ο άνθρακας, ο σίδηρος και το οξυγόνο. Οι κάτοχοι του βραβείου Νόμπελ μπορεί να ξεχαστούν ύστερα από μερικά χρόνια, ή έπειτα από μία γενιά. Έτσι, ενώ πάντοτε υπήρχε ένα ορισμένο επίπεδο σύγχυσης στο παιχνίδι των ονομάτων, το πάθος και η θέρμη που πλέον το συνοδεύουν έχουν φτάσει σε νέα ύψη με την περίπτωση των υπερφέρμιων στοιχείων.

Η πολιτική, ως συνήθως...

Υπάρχει έντονος εθνικός ανταγωνισμός κατά την ανακάλυψη ενός στοιχείου. Είναι πολύ εντυπωσιακότερο να είσαι εκείνος που το ανακάλυψε πρώτος παρά να είσαι ο δεύτερος, και απλά να επιβεβαιώνεις ότι πραγματικά κάποιος άλλος παρήγαγε το στοιχείο πριν από εσένα. Όταν κανείς άλλος δεν μπορεί να επαναλάβει τη διεκδικούμενη ανακάλυψη, ανακύπτουν προβλήματα στον καθορισμό εκείνου που πρέπει να γίνει αποδέκτης της αναγνώρισης για την ανακάλυψη. Συχνά περνούν χρόνια πριν εμφανιστούν οριστικές και αμερόληπτες κρίσεις. Η IUPAC, προς έπαινό της, προώθησε συμβιβαστικές επιλογές για την ονοματοθεσία των στοιχείων, με τις οποίες επιδίωκε να καταπραΰνει τον εθνικισμό, την αλαζονεία, το φθόνο και τις πολιτικές σκοπιμότητες.

Στην προσπάθειά της όμως να ευχαριστήσει με τις επιλογές της μερικούς από τους επιστήμονες για κάποιο χρονικό διάστημα, η IUPAC στην πραγματικότητα το μόνο που πέτυχε ήταν να αποξενώσει, να απογοητεύσει και να εξοργίσει τους περισσότερους. Τα μέλη της, όντας ξένα προς την κοινότητα των «βαρέων στοιχείων», δεν κατανόησαν τις ευαισθησίες των εμπλεκόμενων ομάδων. Ουσιαστικά αποστέρησαν τους συντελεστές της ανακάλυψης από την τιμή της ονοματοθεσίας. Μάλιστα, επιβάρυναν περαιτέρω την κατάσταση αλλάζοντας τους κανόνες του παιχνιδιού των ονομάτων για τα υπερφέρμια στοιχεία. Μέχρι το 1949, όταν η IUPAC πήρε αποφάσεις για τα ονόματα των στοιχείων που περιλαμβάνονται στον Πίνακα 2, επέλεγε το ένα ή το άλλο από τα προτεινόμενα ονόματα. Τώρα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, αναπτύσσει νέα ονόματα, όπως το ντούμπνιο, και επίσης μεταθέτει ονόματα από το ένα στοιχείο στο άλλο.

Για να πάρουμε μια γεύση, η αμερικανική επιστημονική κοινότητα έχει την πολύ ισχυρή πεποίθηση ότι το στοιχείο 106 θα έπρεπε να ονομάζεται σημπόργκιο, προς τιμήν του Glenn Seaborg, ενός πρωτοπόρου σ' αυτό το πεδίο, ο οποίος συμμετείχε στην ανακάλυψη δέκα στοιχείων. Κατά την ανακάλυψη του εν λόγω στοιχείου η αμερικανική ομάδα δεν είχε ανταγωνιστές. Ωστόσο, θα ήταν η πρώτη φορά που θα δινόταν σ' ένα στοιχείο το όνομα ενός επιστήμονα εν ζωή. Παρά το γεγονός ότι δεν υπήρχαν κανόνες που να επιβάλλουν το αντίθετο, η IUPAC αποφάσισε ότι δεν ήταν αρμόζον να αποδεχτεί αυτό το όνομα, με το σκεπτικό ότι, από ιστορική άποψη, ήταν πολύ νωρίς να εκτιμηθούν τα επιτεύγματα του Seaborg. Επέλεξε να «ανακυκλώσει» το ραδερφόρντιο —το όνομα που είχε προταθεί για το στοιχείο 104.

Η IUPAC, βεβαίως, επιδίωξε να διαλύσει γρήγορα όλη αυτή τη σύγχυση, που εντάθηκε τα τελευταία 30 χρόνια. Στην προσπάθειά της, όμως, δημιούργησε ακόμη μεγαλύτερη σύγχυση. Στο κάτω κάτω, χρειάστηκαν περισσότερα από 100 χρόνια για να ξεκαθαρίσει η διαμάχη νιοβίου-κολομβίου —άρα, υπήρχε χρόνος. Το 1994, η IUPAC επιχείρησε να επιβάλει στους πάντες την αποδοχή των αποφάσεών της για τα οριστικά ονόματα των στοιχείων 104 έως 109. Το 1995, με μια χωρίς προηγούμενο κίνηση, αναθεώρησε και υποβάθμισε τις προηγούμενες αποφάσεις της θεωρώντας τες και πάλι προσωρινές.

Ιδιαίτερα ενοχλητικό για την IUPAC είναι το γεγονός ότι ορισμένοι μπορούν να αμφισβητούν την αυθεντία της, και να αγνοούν ή να περιφρονούν τις αποφάσεις της. Για παράδειγμα, το 1949 η IUPAC καθόρισε ως επίσημο όνομα για το στοιχείο 74 το βολφράμιο (W) (βλ. Πίνακα 2). Πόσα επιστημονικά κείμενα όμως χρησιμοποιούν το βολφράμιο αντί του κοινά αποδεκτού τανγκστενίου; Ομοίως, η Αμερικανική Χημική Εταιρεία αποφάσισε το 1995 ότι θα υιοθετεί εκείνα τα ονόματα που θα προτείνονται από την επιτροπή της επί της ονοματολογίας (βασικά εκείνα τα ονόματα που προτείνονται από τους αμερικανούς και γερμανούς ερευνητές) προς χρήση στα περιοδικά και τους καταλόγους της. Έτσι, η IUPAC θα αντιμετωπίσει την κατάσταση να αγνοούνται τα ονόματα που δίνει στα υπερφέρμια στοιχεία από μια μεγάλη μερίδα επιστημόνων, εκτός αν συμπορευτεί με την Αμερικανική Χημική Εταιρεία.

Οι ερευνητές αισθάνονται υπερήφανοι να αναγνωρίζονται για τα επιτεύγματά τους, και θεωρούν πως έχουν το «δικαίωμα» να δίνουν ένα όνομα στις ανακαλύψεις τους. Τους είναι πραγματικά αδιανόητο κάποιοι άλλοι να αφαιρούν ή να μεταφέρουν αυτά τα ονόματα από το ένα στοιχείο στο άλλο χωρίς καν να συμβουλεύονται εκείνους που τα ανακάλυψαν. Μείνετε, λοιπόν, συντονισμένοι για τα επόμενα λίγα χρόνια, τα οποία οπωσδήποτε θα φέρουν πολύ περισσότερη σύγχυση, προσπάθειες για συμβιβασμούς, άγχος, και ανοιχτές αντιπαραθέσεις. Η παρούσα κατάσταση για τα υπερφέρμια στοιχεία μου φέρνει στο νου μια ιστορία κινουμένων σχεδίων που είδα πριν από λίγο καιρό. Ο ήρωας, ο Ζίγκυ, οδηγώντας προσπερνά ένα σήμα που τον πληροφορεί ότι αφήνει μια πόλη, και κατευθείαν μπροστά του βλέπει ένα άλλο σήμα, που αναφέρει το όνομα της επόμενης πόλης. Το πρώτο σήμα, λοιπόν, λέει «ΕΞΕΡΧΕΣΘΕ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ», και το δεύτερο «ΕΙΣΕΡΧΕΣΘΕ ΣΤΟ ΑΠΟΛΥΤΟ ΧΑΟΣ».

Ακριβώς όπως ο καλύτερος χρόνος να προτείνεις σε μια ποδοσφαιρική ομάδα τη βέλτιστη τακτική για το ματς της Κυριακής είναι το πρωινό της Δευτέρας (την επομένη του αγώνα), έτσι και ο καλύτερος τρόπος για να αποφανθείς για το τι είναι σωστό σ' αυτή τη νέα περίοδο του παιχνιδιού της ονοματοθεσίας των στοιχείων είναι να το κάνεις ύστερα από αρκετές δεκαετίες. Ίσως τριάντα χρόνια αργότερα, μια νέα γενιά επιστημόνων θα αντιμετωπίζει με σαρκασμό αυτή τη σύγχυση, ή ίσως θα είναι μια δυσνόητη υποσημείωση στη γενική ιστορία της χημείας —κατ' αναλογία με την τωρινή άποψή μας για τη αντιδικία νιοβίου-κολομβίου στο όχι και τόσο απόμακρο παρελθόν. Εξάλλου, ο Σαίξπηρ έγραψε:

...αυτό που αποκαλούμε ρόδο, με οποιοδήποτε άλλο όνομα θα ευώδιαζε το ίδιο γλυκά.

Το στοιχείο 104 έχει εκατόν τέσσερα πρωτόνια, και θα έχει πάντοτε τις ίδιες φυσικές και χημικές ιδιότητες, ανεξαρτήτως αν το αποκαλούμε ραδερφόρντιο, κουρτσατόβιο, ντούμπνιο, ή απλώς 104.

Ο **Henry D. Schreiber** *είναι καθηγητής χημείας στο Στρατιωτικό Ινστιτούτο της Βιρτζίνια, στο Λέξινγκτον. Η διεύθυνση του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου του είναι hs@vmi.edu.*

Το παράδοξο του δορυφόρου

Ή, πώς η αντίσταση του ατμοσφαιρικού αέρα επιταχύνει τους δορυφόρους

Y.G. Pavlenko

ΕΝΑΣ ΔΟΡΥΦΟΡΟΣ, ΚΑΘΩΣ ΚΙΝΕΙται στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, επιβραδύνεται από τον αέρα. Πριν αρχίσουμε να θέτουμε δορυφόρους σε τροχιά, συλλέγαμε δεδομένα για την ατμοσφαιρική πυκνότητα σε υψόμετρο μέχρι 200 km μέσω γεωφυσικών πυραύλων. Αργότερα, τέτοια δεδομένα μας παρείχε η ανάλυση της κίνησης των δορυφόρων.

Η αντίσταση που ασκείται σ' ένα δορυφόρο στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας οφείλεται στις συγκρούσεις του με τα μόρια του αέρα. Η κατεύθυνση αυτής της δύναμης είναι αντίθετη σ' εκείνη της ταχύτητας του δορυφόρου, και μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v}, \qquad (1)$$

όπου ο παράγοντας k είναι θετικός και γενικά εξαρτάται από την ταχύτητα. Όσο μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν της μετωπικής διατομής S ενός σώματος, και όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα ρ της ατμόσφαιρας, τόσο μεγαλύτερος είναι ο k.

Ας συγκρίνουμε τις επιταχύνσεις που προσδίδει στο δορυφόρο η αντίσταση του αέρα και η ελκτική δύναμη της Γης. Έστω ότι ο δορυφόρος έχει μάζας m = 100 kg, έχει σχήμα σφαιρικό με εμβαδόν μετωπικής επιφάνειας $S = 1\ \text{m}^2$, και κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα v = 8 km/s και σε ύψος h = 160 km —όπου η πυκνότητα της ατμόσφαιρας είναι περίπου $\rho = 10^{-9}\ \text{kg/m}^3$. Για μια καλή προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k = S\rho v$. Σ' αυτή την περίπτωση, η απόλυτη τιμή της επιτάχυνσης που οφείλεται στη δύναμη της αντίστασης είναι

$$a = \frac{kv}{m} \cong \frac{S\rho v^2}{m} \cong 6{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{m/s}^2.$$

Η ελκτική δύναμη

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

την οποία ασκεί η Γη στο δορυφόρο ($M = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg είναι η μάζα της Γης, R = 6.371 km είναι η μέση ακτίνα της Γης, και $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ είναι η βαρυτική σταθερά), του προσδίδει επιτάχυνση που κατευθύνεται προς το κέντρο της Γης και ισούται με

$$a_g = G\frac{M}{(R+h)^2} \cong 9{,}35\ \text{m/s}^2.$$

Βλέπουμε ότι η λεγόμενη επιτάχυνση «τροχοπέδησης» είναι περίπου το 1/15.000 της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Παρ' όλα αυτά, η επίδραση της ατμόσφαιρας σε ύψος περίπου 160 km είναι τόσο σημαντική, ώστε ο δορυφόρος, έπειτα από μία ή δύο περιφορές γύρω από τη Γη, αρχίζει να χάνει ύψος ραγδαία.

Ο πρώτος σοβιετικός δορυφόρος είχε σχήμα σφαίρας με διάμετρο 58 cm και μάζα 83,6 kg. Ο προωθητικός πύραυλος ήταν πολύ μεγαλύτερος. Θα περίμενε κανείς ότι ο πύραυλος, αφού έθετε το δορυφόρο σε τροχιά, θα έμενε πίσω από αυτόν (δεδομένου ότι ο πύραυλος είχε πολύ μεγαλύτερο S από το δορυφόρο, επομένως δεχόταν μεγαλύτερη αντίσταση). Ωστόσο, οι παρατηρήσεις έδειξαν ότι ο προωθητικός πύραυλος προπορευόταν του δορυφόρου κατά πολύ. Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε αυτό το παράδοξο.

Στην εποχή μας, οι κινήσεις των δορυφόρων μελετώνται και υπολογίζονται σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές, δεδομένου ότι η λύση των εξισώσεων του Νεύτωνα είναι δύσκολη όταν η αντίσταση του αέρα εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος. Ωστόσο, μπορούμε να επιλύσουμε το παραπάνω παράδοξο αναφερόμενοι στην ενέργεια του δορυφόρου. Εάν δεν υπήρχε αντίσταση του αέρα, η ολική μηχανική ενέργεια του δορυφόρου E θα παρέμενε σταθερή:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \text{σταθ.}, \qquad (2)$$

όπου $-GMm/r$ είναι η δυναμική ενέργεια του δορυφόρου σε απόσταση r από το κέντρο της Γης. Όταν όμως η αντίσταση είναι παρούσα, η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου δεν παραμένει σταθερή· εξαρτάται από το χρόνο: $E = E(t)$. Η μεταβολή ΔE της μηχανικής ενέργειας κατά μια μικρή μετατόπιση Δs ισούται με το έργο που παράγεται από την αντίσταση:

$$\Delta E = W = F\Delta s, \qquad (3)$$

όπου $\Delta s = v \cdot \Delta t$. Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση, καθώς και τη δύναμη από την εξίσωση (1), στην (3), λαμβάνουμε μια σχέση για το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας

Εικονογράφηση: Mariya Kokorina

του δορυφόρου:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -kv^2. \qquad (4)$$

Υποθέστε ότι ο δορυφόρος έχει τεθεί σε κυκλική τροχιά ακτίνας r. Εάν απουσιάζει η όποια αντίσταση του αέρα, η τροχιακή ταχύτητα του δορυφόρου μπορεί να βρεθεί από το γεγονός ότι η βαρυτική έλξη παίζει το ρόλο της απαραίτητης για κυκλική κίνηση κεντρομόλου δύναμης:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}. \qquad (5)$$

Η επίδραση της ατμόσφαιρας, όμως, οδηγεί στην παραμόρφωση της κυκλικής τροχιάς του δορυφόρου, μετασχηματίζοντάς τη σε ελικοειδή. Εάν μάλιστα η τροχιά δεν διαφέρει πολύ από κύκλο, τότε η σχέση μεταξύ της ταχύτητας $v(t)$ και της ακτίνας $r(t)$ εξακολουθεί να δίνεται κάθε χρονική στιγμή από την εξίσωση (5). Ωστόσο, τώρα η ταχύτητα και η «ακτίνα του κύκλου» είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5) στην εξίσωση (2), μπορούμε να γράψουμε τη δυναμική ενέργεια του δορυφόρου με τη μορφή

$$U = -G\frac{Mm}{r} = -mv^2.$$

Επομένως, η ολική μηχανική του ενέργεια (εξίσωση (1)) μπορεί να γραφτεί ως

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left(-mv^2\right) = -\frac{mv^2}{2}.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τη μεταβολή ΔE της ολικής μηχανικής ενέργειας του δορυφόρου που συντελείται κατά μικρή αύξηση Δv της ταχύτητάς του:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{-m(v+\Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) \\ &= \frac{-2mv\Delta v}{2} - \frac{m\Delta v^2}{2} \qquad (6) \\ &\cong -mv\Delta v, \end{aligned}$$

όπου έχουμε αμελήσει τον όρο $(\Delta v)^2$, επειδή το Δv είναι πολύ μικρό. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (6) με το μικρό χρονικό διάστημα Δt στο οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα, λαμβάνουμε

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -mv\frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (7)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (4) και (7), βρίσκουμε μια έκφραση για τη μεταβολή στην ταχύτητα του δορυφόρου μας:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{k}{m}v. \qquad (8)$$

Και αυτή μας πληροφορεί ότι η ταχύτητα του δορυφόρου αυξάνει με το χρόνο! Όσο μάλιστα μεγαλύτερο είναι το πηλίκο k/m τόσο ταχύτερα αυξάνει η ταχύτητα. Η τιμή του k/m για τον προωθητικό πύραυλο είναι μεγαλύτερη από εκείνη του δορυφόρου, επομένως η ταχύτητα του πυραύλου αυξάνει ταχύτερα. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ο πύραυλος προσπερνά το δορυφόρο αφού τον θέσει σε τροχιά.

Από τις σχέσεις που εξετάσαμε, μπορούμε να συναγάγουμε ένα συμπέρασμα σχετικά με το πώς η ατμόσφαιρα τροποποιεί την ενέργεια ενός δορυφόρου που βρίσκεται σε τροχιά: Η αντίσταση έχει ως αποτέλεσμα ο δορυφόρος να αρχίζει να πέφτει. Η ταχύτητά του και, κατά συνέπεια, η κινητική του ενέργεια αυξάνουν όσο πλησιάζει τη Γη· η δυναμική του ενέργεια όμως μειώνεται (προσέξτε ότι είναι και παραμένει αρνητική). Από την εξίσωση (4), ή την (7), βλέπουμε ότι η ολική μηχανική του ενέργεια μειώνεται επίσης. Επομένως, η ελάττωση της δυναμικής του ενέργειας συντελείται ταχύτερα από την αύξηση της κινητικής του.

Είναι εντυπωσιακό ότι, λόγω της αλληλεπίδρασής τους με την ατμόσφαιρα, οι δορυφόροι κατά την κάθοδό τους επιταχύνονται —παρά το γεγονός ότι δεν διαθέτουν κινητήρες. Και κατά την είσοδό τους στα πυκνά στρώματα της ατμόσφαιρας αναφλέγονται, όπως ακριβώς τα μετέωρα. Και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο στις μέρες μας οι άνθρωποι έχουν περισσότερες ευκαιρίες να κάνουν μια ευχή όταν «ένα αστέρι» πέφτει. ◘

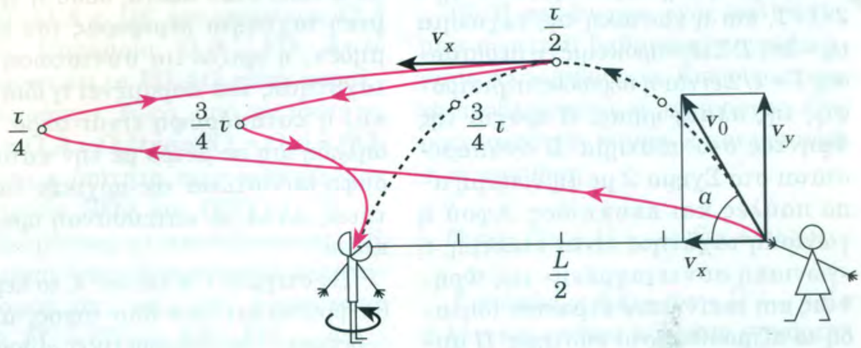
Η κινηματική του λούνα παρκ

Το δυναμικό παιχνίδι των ιπτάμενων κερασιών

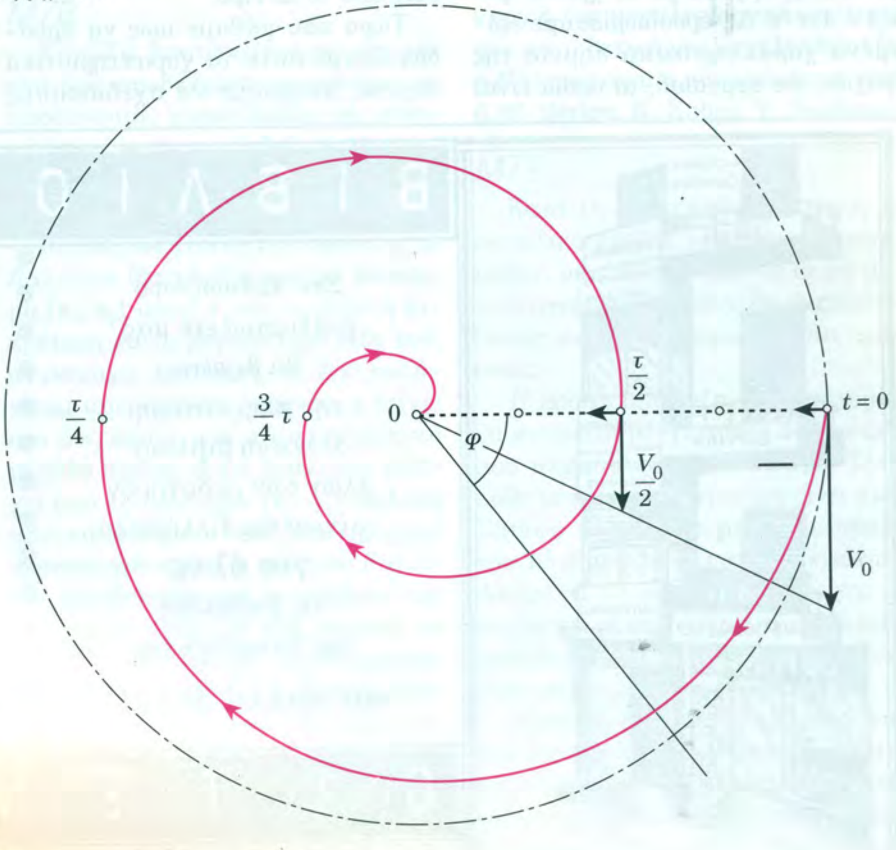
Albert Stasenko

ΟΤΑΝ Ο ΠΙΤΖΙΟΥΣ[1] ΗΤΑΝ ΜΙΚΡΟΣ, του άρεσε να επινοεί νέα παιχνίδια. Κάποτε ζήτησε από τη φίλη του τη Φρήντα να του πετάει κεράσια και να τα «πιάνει» με το στόμα του. Η απόσταση μεταξύ τους ήταν L, η αρχική ταχύτητα κάθε κερασιού v_0 και η γωνία εκτόξευσής του α —όλα τα δεδομένα που θα βρίσκατε σ' ένα πρόβλημα βολών ενός σχολικού βιβλίου φυσικής. Ο Πίτζιους, όμως, στεκόταν στο κέντρο μιας περιστρεφόμενης πλατφόρμας (σαν αυτές που βλέπουμε στα αλογάκια του λούνα παρκ). Ας εξετάσουμε την τροχιά ενός ιπτάμενου κερασιού σε δύο συστήματα αναφοράς: το ένα συνδέεται με το έδαφος, όπου στέκεται η Φρήντα (το σύστημα E, ή σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου), και το άλλο με την πλατφόρμα (το σύστημα Π, ή περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς). Επειδή ο Πίτζιους και η Φρήντα δεν είχαν όρεξη να γράφουν τεράστιους και βαρετούς μαθηματικούς τύπους, προτίμησαν να σχεδιάσουν κατευθείαν την τροχιά.

Κατ' αρχάς, ας προσδιορίσουμε ακριβέστερα τα αρχικά δεδομένα. Ας πούμε ότι η γωνία α είναι 60° και ότι οι τιμές των L, v_0 και ω_0 (η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας) είναι τέτοιες ώστε η πλατφόρμα να εκτελεί δύο πλήρεις περιστροφές στο χρόνο τ



Σχήμα 1



Σχήμα 2

1. Ποιος είναι αυτός ο Πίτζιους, και γιατί εμφανίζεται στις σελίδες του *Quantum*; (Δείτε και τη Σπαζοκεφαλιά 63 στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1996.) Θα σας πληροφορήσουμε μόλις μάθουμε περισσότερα γι' αυτόν από τους ρώσους συναδέλφους.

που απαιτείται για να φτάσει το κεράσι στο στόμα του Πίτζιους.

Στο σύστημα E, η τροχιά του κερασιού στο κατακόρυφο επίπεδο είναι παραβολική (όπως φαίνεται από τα πλάγια)· στο οριζόντιο επίπεδο, είναι ευθεία (δείτε τις διακεκομμένες γραμμές στα Σχήματα 1 και 2). Όταν εκτοξεύεται ένα κεράσι ($t = 0$), η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι $v_x = v_0 \text{συν} \alpha$, και η κατακόρυφη $v_y = v_0 \text{ημ} \alpha$. (Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπόψη.)

Στο σύστημα Π, ο Πίτζιους είναι ακίνητος αλλά η Φρήντα περιφέρεται γύρω του με φορά αντίθετη εκείνης της περιστροφής της πλατφόρμας. Η γραμμική ταχύτητά της είναι $V_0 = 2\pi L/T$, και η γωνιακή της ταχύτητα $\omega_0 = 2\pi/T$. Στην προκειμένη περίπτωση, $T = \tau/2$ είναι η περίοδος περιστροφής της πλατφόρμας. Η τροχιά της Φρήντας στο σύστημα Π αναπαριστάται στο Σχήμα 2 με τη γραμμή από παύλες και κουκκίδες. Αφού η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, η «γωνιακή συντεταγμένη» της Φρήντας και εκείνη του κερασιού (δηλαδή το αζιμούθιο) στο σύστημα Π αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο: $\varphi = \omega_0 t = 4\pi t/\tau$. Ας προσδιορίσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά σημεία της τροχιάς του κερασιού, τα οποία είναι αρκετά εύκολο να βρεθούν. Για παράδειγμα, είναι σαφές ότι τη στιγμή $t = T = \tau/2$ το κεράσι θα βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του, σε απόσταση $L/2$ από τον άξονα περιστροφής. Σ' αυτό το σημείο, η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του (που είναι σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της πτήσης του) είναι $v_x = v_0 \text{συν} \alpha$, η κατακόρυφη συνιστώσα είναι μηδέν, και η γραμμική ταχύτητα της περιφοράς είναι $V_0/2$ (αφού οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων μιας στερεής πλατφόρμας είναι ανάλογες με την απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής). Σε χρόνο $\tau = 2T$ (δύο πλήρεις περιστροφές), το κεράσι θα φτάσει στον άξονα, όπου η γραμμική ταχύτητα περιφοράς του είναι μηδέν, η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του παραμένει η ίδια (v_x) και η κατακόρυφη είναι τώρα $-v_y$, δηλαδή ίση σε μέτρο με την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας, αλλά με κατεύθυνση προς τα κάτω.

Τις στιγμές $\tau/4$ και $3\tau/4$, το κεράσι θα βρίσκεται στο ίδιο ύψος, αλλά —βέβαια— σε διαφορετικές αποστάσεις από το κέντρο.

Τώρα που μάθαμε πώς να προσδιορίζουμε αυτά τα χαρακτηριστικά σημεία, μπορούμε να σχεδιάσουμε ολόκληρη την τροχιά, ή —γιατί όχι;— να προγραμματίσουμε τον υπολογιστή μας να το κάνει. Αναμφίβολα, ο υπολογιστής θα μπορέσει να μας δείξει κάθε προβολή της τροχιάς. Ο συγγραφέας του άρθρου και ο υπεύθυνος εικονογράφησης δεν χρησιμοποίησαν κάποιο πρόγραμμα μαθηματικών γραφικών για να σχεδιάσουν τις κόκκινες γραμμές στα Σχήματα 1 και 2, γι' αυτό θα πρέπει να τις θεωρήσετε προσεγγιστικές.

Προσέξτε ότι στο σύστημα E το βάρος είναι η μόνη δύναμη που επηρεάζει το κεράσι (όπως θα θυμάστε, αγνοήσαμε την αντίσταση του αέρα). Εντούτοις, στο σύστημα Π η τροχιά είναι μάλλον περίπλοκη, και έτσι ο Πίτζιους οδηγήθηκε στη σκέψη ότι, εκτός από τη βαρύτητα, στο ιπτάμενο κεράσι ασκούνται και κάποιες επιπλέον δυνάμεις. Ο μάγος Οζ, ο γέρος δάσκαλός του, του είχε μιλήσει για κάποιες μυστηριώδεις δυνάμεις που ονομάζονται «αδρανειακές».

Τι θα γίνει όμως αν ο Πίτζιους αρχίσει να «επιστρέφει» τα κουκούτσια στη Φρήντα, με την ίδια αρχική ταχύτητα v_0 και υπό την ίδια γωνία εκτόξευσης α; Μπορείτε σίγουρα να σχεδιάσετε τις τροχιές τους και στα δύο συστήματα αναφοράς;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M76

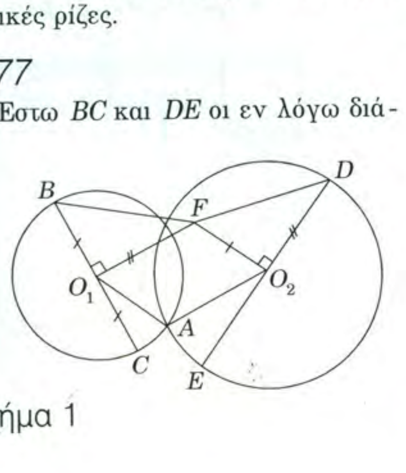
Η απάντηση είναι αρνητική. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι οι οκτώ αριθμοί 1, 2, ..., 8 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(g(h(x))) = 0$. Για κάθε δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $p(x)$, η εξίσωση $p(x_1) = p(x_2)$ αληθεύει αν και μόνο αν $x_1 + x_2 = 2a$, όπου $x = a$ είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = p(x)$. Οι αριθμοί $h(1)$, $h(2)$, ..., $h(8)$ είναι ρίζες ενός τεταρτοβάθμιου πολυωνύμου, επομένως το πολύ τέσσερις από αυτούς μπορεί να είναι διαφορετικοί. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, αυτό είναι δυνατόν μόνο αν $h(1) = h(8)$, $h(2) = h(7)$, $h(3) = h(6)$, $h(4) = h(5)$ (πρέπει να σχηματίσουμε τέσσερα ζεύγη i, j έτσι ώστε το $i + j$ να είναι ίδιο για όλα τα ζεύγη). Αφού η κορυφή της παραβολής $y = h(x)$ βρίσκεται στο $x = 4{,}5$, οι τιμές $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$ σχηματίζουν μια μονότονη ακολουθία.

Αν χρησιμοποιήσουμε ένα παρόμοιο επιχείρημα για την $f(x)$ και τις ρίζες της, $g(h(1))$, $g(h(2))$, $g(h(3))$ και $g(h(4))$, βρίσκουμε ότι $h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$.

Η αντικατάσταση $h(x) = Ax^2 + Bx + C$ σ' αυτή την εξίσωση μας δίνει $17A = 13A$, ή $A = 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατον, επειδή τότε η αρχική εξίσωση θα ήταν το πολύ τετάρτου βαθμού, και συνεπώς δεν θα είχε οκτώ διαφορετικές ρίζες.

M77

Έστω BC και DE οι εν λόγω διάμετροι (Σχήμα 1), και O_1, O_2 τα κέντρα των δεδομένων κύκλων. Φέρνουμε τις μεσοκαθέτους των διαμέτρων, και συμβολίζουμε με F το σημείο τομής τους. Θα αποδείξουμε ότι το F ισαπέχει από τα άκρα των διαμέτρων, στοιχείο που θα αποτελεί λύση του προβλήματος.



Σχήμα 1

Αφού η O_1A είναι κάθετη στη εφαπτόμενη του κύκλου O_1 στο A, έχουμε ότι $O_1A \perp DE$, και επομένως $O_1A \parallel FO_2$. Παρόμοια, $O_2A \parallel FO_1$. Αυτό σημαίνει ότι το FO_1AO_2 είναι παραλληλόγραμμο. Τώρα, από τις ισότητες $FO_1 = O_2A = O_2D$ και $BO_1 = O_1A = FO_2$, έπεται η ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων BFO_1 και DFO_2.

Επομένως, οι υποτείνουσες FB, FD είναι ίσες. Απομένει να παρατηρήσουμε ότι, από την κατασκευή τους, $FC = FB$ και $FE = FD$.

M78

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και στα δύο προβλήματα μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, πως ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $f(x)$ είναι θετικός.

(α) Με βάση αυτή την υπόθεση, το $f(x)$ είναι θετικό έξω από το διάστημα $[x_1, x_2]$, όπου x_1 και x_2 είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ρίζα του, αντίστοιχα. Επιπλέον, το $f(x)$ αυξάνεται απεριόριστα όταν το x τείνει στο $\pm\infty$, οπότε, για κάποιον αρκετά μεγάλο αριθμό d και όταν το x απέχει από το διάστημα $[x_1, x_2]$ (δηλαδή από κάθε σημείο του διαστήματος) περισσότερο από d, η τιμή του $f(x)$ είναι μεγαλύτερη από το απόλυτο της ελάχιστης τιμής M που παίρνει το $f(x)$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο ℓ τέτοιον ώστε η απόσταση μεταξύ των διαστημάτων $[x_1 - \ell, x_2 - \ell]$ και $[x_1, x_2]$ να είναι μεγαλύτερη του d —δηλαδή, $x_2 - \ell < x_1 - d$. Τότε, $f(x) + f(x + \ell) > 0$ για κάθε x, διότι, όταν ένας από τους όρους του αθροίσματος είναι αρνητικός, ο άλλος είναι μεγαλύτερος από το $|M|$. Έπεται ότι

$$(f(x) + f(x + \ell)) + (f(x + 1) + f(x + \ell + 1)) + \ldots + (f(x + \ell - 1) + f(x + 2\ell - 1)) = f(x) + f(x + 1) + \ldots + f(x + 2\ell - 1) > 0$$

για κάθε x, και μπορούμε να πάρουμε $k = 2\ell - 1$.

(β) Η παράγωγος ενός πολυωνύμου περιττού βαθμού είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού. Επομένως, από το πρόβλημα (α), η παράγωγος $f'(x)$ ικανοποιεί για κάποιο k και για κάθε x τη συνθήκη

$$f'(x) + f'(x + 1) + \ldots + f'(x + k) > 0.$$

Συνεπώς, η $f(x) + f(x + 1) + \ldots + f(x + k)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Επιπλέον, αφού η $f(x)$ είναι αρνητική για μεγάλες αρνητικές τιμές του x και θετική για μεγάλες θετικές, η $F(x)$ παίρνει μία μόνο φορά την τιμή 0. (S. Berlov, K. Kohas, V. Senderov)

M79

Κατά τη συγκεκριμένη στιγμή, το συνολικό κέρδος του Σίσυφου είναι μηδέν, ανεξάρτητα από τη σειρά μετακίνησης των πετρών· θα το αποδείξουμε με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Η πρώτη απόδειξη. Για συντομία, θα ονομάζουμε *γείτονες* δύο πέτρες που ανήκουν στον ίδιο σωρό. Τότε, κάθε μετακινούμενη πέτρα δίνει στον Σίσυφο κέρδος ίσο με τη μεταβολή του πλήθους των ζευγών γειτόνων. Απομένει να παρατηρήσουμε ότι τη συγκεκριμένη στιγμή η συνολική μεταβολή στο πλήθος των ζευγών των γειτόνων είναι μηδέν.

Η δεύτερη απόδειξη χρησιμοποιεί την έννοια της *αναλλοίωτης* (δείτε σχετικά στους «Παιχνιδότοπους» των τευχών Μαρτίου/Απριλίου και Μαΐου/Ιουνίου του 1995). Εδώ, η τιμή που δεν αλλάζει όταν μετακινούνται οι πέτρες είναι η $A = ab + bc + ca + S$, όπου a, b, c είναι τα πλήθη των πετρών στους τρεις σωρούς και S το κέρδος του Σίσυφου. Πράγματι, όταν μεταφέρεται μια πέτρα από το σωρό με τις a πέτρες στο σωρό με τις b πέτρες, η τιμή του A γίνεται ίση με $A' = (a-1)(b+1) + (b+1)c + c(a-1) + S' = A + a - b - 1 + S' - S = A$, διότι $S' - S = b - (a-1)$, όπου S' είναι η νέα τιμή του κέρδους του. Αφού η τελική τιμή $ab + bc + ca$ είναι η ίδια με την αρχική, το τελικό κέρδος του Σίσυφου θα είναι είναι ίσο με το αρχικό —δηλαδή, μηδέν.

Θα μπορούσαμε επίσης να έχουμε χρησιμοποιήσει μια διαφορετική αναλλοίωτη —συγκεκριμένα την $B = a^2 + b^2 + c^2 - 2S$.

Η τρίτη απόδειξη. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η αντιστροφή της σειράς δύο κινήσεων διατηρεί τη συνολική μεταβολή του S. Επίσης, αν ονομάσουμε X, Y, Z τους σωρούς, έχουμε ότι η συνολική μεταβολή μετά τις δύο κινήσεις $X \to Y$, $Y \to X$, ή μετά τις τρεις κινήσεις $X \to Y$, $Y \to Z$, $Z \to X$, είναι μηδέν. Αφού όλες οι πέτρες επιστρέφουν στους αρχικούς τους σωρούς, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των κινήσεων έτσι ώστε να σχηματίσουν ζεύγη και τριάδες της προηγούμενης μορφής, οπότε και θα αποδώσουν στον Σίσυφο μηδενικό κέρδος.

(I. Izmestyev, D. Kuznetsov, I. Rubanov)

M80

Η απάντηση είναι καταφατική. Η ακολουθία a_i μπορεί να οριστεί αναδρομικά. Έστω $a_1 = 1$. Αν έχουν οριστεί ήδη οι όροι $a_1, \ldots, a_{n-1}$, θεωρούμε τους αριθμητικούς μέσους

$$p_k = \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k), \text{ με } 1 \le k \le n-1,$$

και θέτουμε

$$a_n = \begin{cases} p_{n-1}, & \text{αν } p_{n-1} \ne a_k, \ 1 \le k \le n-1 \\ p_{n-1} + n, & \text{αν } p_{n-1} = a_s \text{ για ορισμένο } s, \ 1 \le s \le n-1. \end{cases}$$

Τότε έχουμε ότι το $p_n = [(n-1)p_{n-1} + a_n]/n$ στην πρώτη περίπτωση (δηλαδή όταν $a_n = p_{n-1}$) ισούται με p_{n-1}, ενώ στη δεύτερη (όταν $a_n = p_{n-1} + n$) ισούται με $p_{n-1} + 1$. Έπεται ότι

(1) $a_1 + \ldots + a_n = np_n$ διαιρείται με το n για κάθε n·

(2) κάθε θετικός ακέραιος m εμφανίζεται στην ακολουθία $\{a_i\}$: πράγματι, αυτό αληθεύει για την ακολουθία των μέσων $\{p_i\}$, διότι $0 \le p_{i+1} - p_i \le 1$, ενώ $p_{i+2} - p_i \ge 1$ για κάθε i. Αν λοιπόν $m = p_n$, τότε, εξ ορισμού, είτε το m ισούται με a_{n+1} είτε με κάποιον από τους αριθμούς a_i, όπου $1 \le i \le n$·

(3) οι αριθμοί a_n είναι όλοι διαφορετικοί, διότι για κάθε n και ℓ, $n > \ell \ge 1$, είτε $a_n = p_{n-1} \ne a_\ell$ είτε $a_n = p_{n-1} + n > p_{\ell-1} + \ell \ge a_\ell$.

(O. Lyashko, A. Shapovalov)

Φυσική

Φ76

Εφόσον η παραμόρφωση του τραμπολίνο είναι πολύ μικρότερη των διαστάσεών του, η δύναμη που ασκεί στο γυμναστή θα περιγράφεται από το νόμο του Hooke: $F = kx$ (k είναι η ελαστική σταθερά του τραμπολίνο). Προφανώς $x_{max} = h$, οπότε η μέγιστη δύναμη που ασκεί το τραμπολίνο στο γυμναστή θα είναι

$$F_{max} = kx_{max} = kh.$$

Για να εκτιμήσουμε το λόγο F_{max}/mg, πρέπει να βρούμε το k. Θεωρώντας το τραμπολίνο απολύτως ελαστικό και αμελώντας την αντίσταση του αέρα στην πτώση του γυμναστή, μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: η βαρυτική δυναμική ενέργεια του γυμναστή μετατρέπεται σε ελαστική δυναμική ενέργεια του τραμπολίνο, δηλαδή

$$mg(h+H) = \frac{kh^2}{2}.$$

(Προφανώς τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης του τραμπολίνο η ταχύτητα του γυμναστή είναι μηδενική.) Απ' αυτή την εξίσωση προκύπτει

$$k = \frac{2mg(h+H)}{h^2}.$$

Επομένως,

$$\frac{F_{max}}{mg} = \frac{kh}{mg} = 2\left(1 + \frac{H}{h}\right) = 26.$$

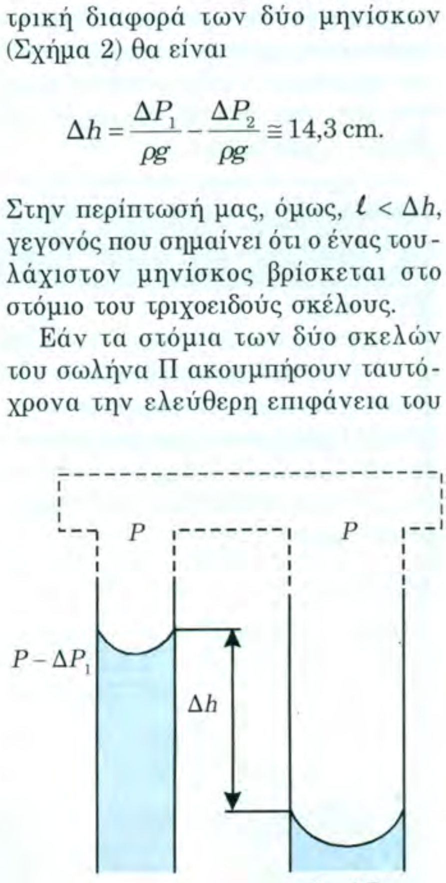
Φ77

Η πίεση του νερού κάτω από την καμπυλωμένη διαχωριστική επιφάνειά του με τον αέρα διαφέρει απ' αυτή του αέρα πάνω από τη διαχωριστική επιφάνεια κατά $\Delta P = 2\sigma/r$, όπου r είναι η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας. Στην περίπτωση μάλιστα που το νερό διαβρέχει πλήρως το σωλήνα, μπορούμε να θεωρήσουμε τους μηνίσκους και στα δύο σκέλη του σφαιρικούς, με ακτίνες καμπυλότητας $r_1 = d_1/2$ και $r_2 = d_2/2$. Έτσι, εφόσον κάποιος μηνίσκος δεν βρίσκεται στο στόμιο του αντίστοιχου τριχοειδούς σκέλους, η πίεση του αέρα πάνω από τη διαχωριστική επιφάνεια στο στενό σκέλος θα είναι μεγαλύτερη της πίεσης του νερού κάτω από την επιφάνεια κατά $\Delta P_1 = 4\sigma/d_1 = 2.800\ \text{N/m}^2$, και αντίστοιχα στο φαρδύ σκέλος κατά $\Delta P_2 = 4\sigma/d_2 = 14.000\ \text{N/m}^2$. Επομένως, η υψομετρική διαφορά των δύο μηνίσκων (Σχήμα 2) θα είναι

$$\Delta h = \frac{\Delta P_1}{\rho g} - \frac{\Delta P_2}{\rho g} \cong 14{,}3\ \text{cm}.$$

Στην περίπτωσή μας, όμως, $\ell < \Delta h$, γεγονός που σημαίνει ότι ο ένας τουλάχιστον μηνίσκος βρίσκεται στο στόμιο του τριχοειδούς σκέλους.

Εάν τα στόμια των δύο σκελών του σωλήνα Π ακουμπήσουν ταυτόχρονα την ελεύθερη επιφάνεια του



Σχήμα 2

νερού, η άνοδος της στάθμης του νερού στο στενό σκέλος θα επιφέρει αύξηση της πίεσης του αέρα μέσα στο σωλήνα, οπότε από το φαρδύ στόμιο θα εξέρχονται φυσαλίδες αέρα.

Έτσι, το νερό θα ανυψωθεί ώς την κορυφή του στενού σωλήνα για να σχηματίσει ένα μηνίσκο ακτίνας $R_1 > r_1$. Επομένως, ολόκληρος ο σωλήνας μήκους ℓ θα βυθιστεί στο νερό.

Στο στόμιο του φαρδιού σκέλους ο μηνίσκος μπορεί να έχει ακτίνα $R_2 \ge r_2$. Όταν $R_2 = r_2$, η πίεση του αέρα μέσα στον βυθισμένο σωλήνα είναι μέγιστη, και ίση με

$$P_{max} = P_{ατμ} = \rho g \ell + 2\sigma / r_2.$$

Φυσαλίδες αέρα θα συνεχίσουν να εξέρχονται έως ότου η ποσότητα του αέρα να μειωθεί τόσο ώστε η πίεσή του να γίνει ίση ή ελαφρώς μικρότερη της P_{max}. Τότε στο στόμιο του φαρδιού σκέλους του —δηλαδή σε βάθος ℓ— θα σχηματιστεί ένας μηνίσκος ακτίνας $R_2 \ge r_2$.

Αν τα στόμια του σωλήνα δεν ακουμπήσουν ταυτόχρονα την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, θα σχηματιστούν λιγότερες, ή και καθόλου, φυσαλίδες. Σ' αυτή την περίπτωση βέβαια η απάντηση θα είναι διαφορετική.

Φ78

Ας υποθέσουμε ότι το κύκλωμα συνδέεται με τη γεννήτρια τη στιγμή $t = 0$. Ο πυκνωτής C_2 σε ελάχιστο χρονικό διάστημα θα φορτιστεί μέσω της διόδου D_1 σε τάση ίση με το πλάτος V_0 της εναλλασσόμενης τάσης της γεννήτριας, και θα αποκτήσει φορτίο

$$Q_0 = V_0 C_2.$$

Στα χρονικά διαστήματα που ακολουθούν οι δίοδοι D_1 και D_2 θα παραμένουν κλειστές (δεν θα διαρρέονται, δηλαδή, από ρεύμα), επειδή το δυναμικό στις καθόδους τους θα είναι συνεχώς υψηλότερο απ' αυτό στις ανόδους τους (ισοδύναμα, θα εμφανίζουν άπειρη αντίσταση). Επομένως, το κύκλωμά μας θα λειτουργεί πλέον σαν να του έχουν αφαιρεθεί οι δίοδοι.

Το φορτίο Q_0 διατηρείται, και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα των δύο κατά σειρά συνδεδεμένων πυκνωτών είναι

$$I = I_0 \eta\mu\omega t = \left(V_0 \omega \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \eta\mu\omega t,$$

όπου I_0 το πλάτος του ρεύματος. Το εναλλασσόμενο ρεύμα παράγει στους οπλισμούς των πυκνωτών τις εναλλασσόμενες τάσεις

$$V_{C1\sim} = \frac{I_0}{\omega C_1} \sigma\upsilon\nu\omega t = V_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \sigma\upsilon\nu\omega t$$

και

$$V_{C2\sim} = \frac{I_0}{\omega C_2} \sigma\upsilon\nu\omega t = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \sigma\upsilon\nu\omega t.$$

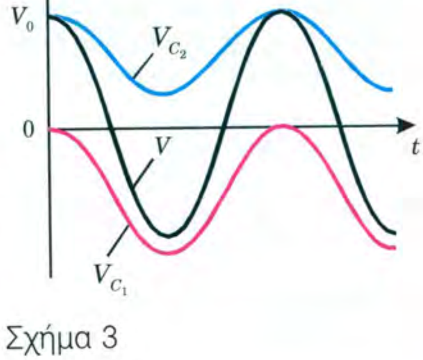
Εκτός όμως από την εναλλασσόμενη τάση στους οπλισμούς κάθε πυκνωτή υπάρχει και μια συνεχής τάση, που οφείλεται στο γεγονός της αρχικής φόρτισης του πυκνωτή C_2 στην τάση V_0. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεχή τάση μέσω της διατήρησης του φορτίου:

$$C_2 V_0 = C_1 V + C_2 V.$$

Απ' αυτή προκύπτει

$$V = \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2}.$$

Επομένως, οι τάσεις στους οπλισμούς



Σχήμα 3

των πυκνωτών θα είναι

$$V_{C1} = V_{C1\sim} - V = V_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \sigma\upsilon\nu\omega t - \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2},$$

$$V_{C2} = V_{C2\sim} + V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \sigma\upsilon\nu\omega t + \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2}.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω τάσεων συναρτήσει του χρόνου, στην περίπτωση που $C_2 = 2C_1$, φαίνονται στο Σχήμα 3.

Αν το κύκλωμα συνδεθεί με τη γεννήτρια κάποια στιγμή $t \neq 0$, θα φτάσει στη μόνιμη κατάσταση έπειτα από ορισμένο χρόνο, όταν η δίοδος D_1 καταστεί αγώγιμη και ο πυκνωτής C_2 φορτιστεί στην τάση V_0.

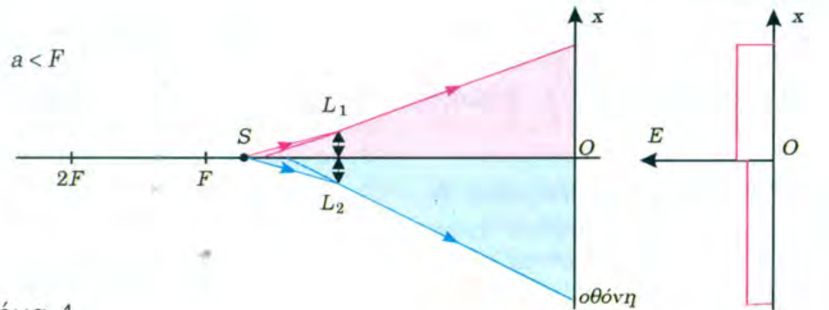
Φ79

Καθώς το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται, στο βρόχο επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη E. Έτσι, το επαγωγικό ρεύμα που τον διαρρέει ισούται με $I = E/R$, όπου R είναι η ωμική του αντίσταση. Ισχύει $R = \rho\ell/s$, όπου ℓ είναι το μήκος του σύρματος και s το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του. Προφανώς, $m = d\ell s$. Έτσι, $s = m/\ell d$, και $R = \rho d\ell^2/m$ (δηλαδή, η αντίσταση του σύρματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του μήκους του).

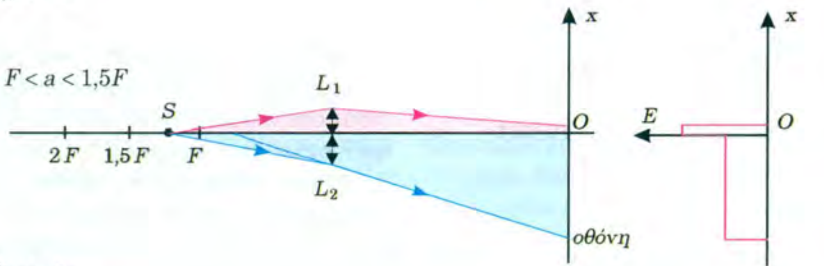
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο βρόχο ισούται με

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} S = kS,$$

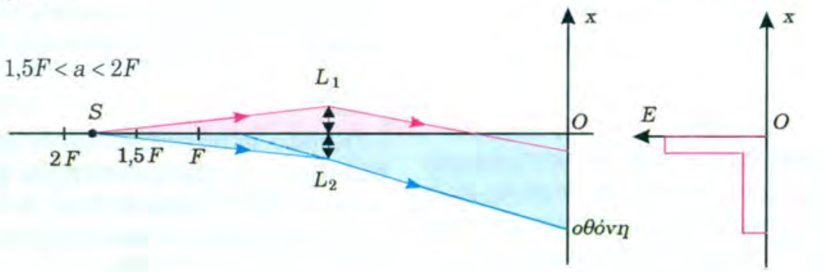
όπου S είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει ο βρόχος. Διαπιστώνουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το S, τόσο υψηλότερη γίνεται η E. Το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει ένας βρόχος σταθερού μήκους, όμως, είναι μέγιστο όταν αυτός έχει σχήμα κύκλου· αυτό σημαίνει ότι η Ε γίνεται μέγιστη όταν ο βρόχος είναι κυκλικός. Ας υποθέσουμε ότι r είναι η ακτίνα του. Τότε $S = \pi r^2$, και $E = k\pi r^2$. Επιπλέον, $\ell = 2\pi r$, και $R = 4\pi^2 \rho r^2 d/m$. Έτσι, κατα-



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

λήγουμε στο ότι το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να διαρρέει το βρόχο είναι

$$I = \frac{E}{R} = \frac{km}{4\pi \rho d}.$$

Φ80

Ο κυκλικός φακός αποτελεί οπτικό σύστημα που συνίσταται από δύο ημικυκλικούς φακούς, τον L_1 (εστιακής απόστασης F) και τον L_2 (εστιακής απόστασης $2F$). Εξ ορισμού, η λαμπρότητα του ειδώλου εξαρτάται από τη φωτεινή ροή που προσπίπτει στην οθόνη και από το εμβαδόν της φωτεινής κηλίδας που σχηματίζεται πάνω της. Για δεδομένη θέση της φωτεινής πηγής, καθένας από τους φακούς L_1 και L_2 θα σχηματίζει τη δική του φωτεινή κηλίδα, εξαιτίας του γεγονότος ότι έχουν διαφορετικές εστιακές αποστάσεις. Ωστόσο, οι φωτεινές ροές που διαπερνούν τους δύο ημικυκλικούς φακούς είναι ίσες, επειδή τα εμβαδά τους είναι ίσα· συνεπώς και οι στερεές γωνίες εντός των οποίων μεταβιβάζονται οι φωτεινές ροές είναι ίσες. Έτσι, μπορούμε να συνάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τις λαμπρότητες των ειδώλων συγκρίνοντας ευθέως τα εμβαδά τους επί της οθόνης. Είναι προφανές πως, όταν αλλάζει η θέση της φωτεινής πηγής επί του κύριου άξονα, μετατοπίζεται και η θέση του ειδώλου· επομένως αλλάζει το εμβαδόν της φωτεινής κηλίδας, άρα και η λαμπρότητα του ειδώλου επί της οθόνης.

Ο τύπος των φακών μας δίνει τις αποστάσεις b_1 και b_2 των δύο ειδώλων από το κέντρο του φακού:

$$b_1 = \frac{Fa}{a-F}$$

και

$$b_2 = \frac{2Fa}{a-2F}.$$

Ας εξετάσουμε τις διάφορες περιπτώσεις όσον αφορά τη θέση της φωτεινής πηγής. Αν $a < F$, οι b_1 και b_2 είναι αρνητικές —και τα δύο είδωλα είναι φανταστικά. Οι ακτίνες έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 4· διαπιστώνετε ότι δεν τέμνονται, και ότι καθένας από τους φακούς L_1 και L_2 σχηματίζει το δικό του είδωλο επί της οθόνης με διαφορετική λαμπρότητα. (Επειδή στη γεωμετρική οπτική περιοριζόμαστε σε λεπτές δέσμες που σχηματίζουν μικρές γωνίες με τον κύριο άξονα, θεωρούμε το φωτισμό των κηλίδων επί της οθόνης ομογενή.) Το διάγραμμα στο δεξιό μέρος του σχήματος δείχνει πώς μεταβάλλεται η λαμπρότητα σε συνάρτηση με την απόσταση x από τον οπτικό άξονα.

Αν $F < a < 2F$, το είδωλο του L_1 είναι πραγματικό ($b_1 > 0$) και του L_2 φανταστικό ($b_2 < 0$). Η λαμπρότητα εξαρτάται και από το αν η b_1 είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη $2a$. Αυτό αντιστοιχεί στις επιμέρους περιπτώσεις $F < a < 1,5F$ και $1,5F < a < 2F$. Η πορεία των ακτίνων και τα διαγράμματα της λαμπρότητας φαίνονται στα Σχήματα 5 και 6 αντίστοιχα.

Τέλος, αν $a > 2F$, τα είδωλα είναι και τα δύο πραγματικά. Επιπλέον $b_1 < 2a$, αλλά η b_2 μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την $2a$. Αν $2F < a < 3F$, τότε $b_2 > 2a$· η πορεία των ακτίνων και το διάγραμμα της λαμπρότητας είναι ίδια μ' αυτά του Σχήματος 6. Αν $a > 3F$, τότε $b_2 < 2a$· η πορεία των ακτίνων και το διάγραμμα της λαμπρότητας είναι ίδια μ' αυτά του Σχήματος 5.

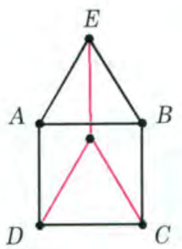
Σπαζοκεφαλιές

Σ76

Η παρατήρηση του πατέρα είναι σωστή. Ας συμβολίσουμε με μ, a και κ την ποσότητα σανού που καταναλώνουν σε ένα μήνα το μοσχάρι, το άλογο και η κατσίκα, αντίστοιχα. Τότε, σύμφωνα με ό,τι είπε ο γιος, $a + \kappa = 1$, $3(\kappa + \mu)/4 = 1$ και $(\mu + a)/3 = 1$ ή $a + \kappa = 1$, $\kappa + \mu = 4/3$, $\mu + a = 3$. Αν προσθέσουμε τις δύο πρώτες ισότητες και από το άθροισμα αφαιρέσουμε την τρίτη, παίρνουμε $2\kappa = -2/3$, που είναι φυσικά αδύνατον.

Σ77

Η απάντηση είναι a, γεγονός που



Σχήμα 7

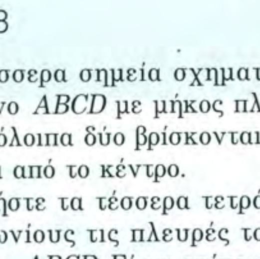
γίνεται προφανές αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο προς τα κάτω κατά απόσταση a (Σχήμα 7).

Σ78

Δένουμε το νήμα της στάθμης στο δυναμόμετρο και βυθίζουμε αργά το βαρίδι σε κάθε δοχείο. Στην καθαρή κηροζίνη η ένδειξη του δυναμόμετρου δεν μεταβάλλεται καθώς το βαρίδι κατέρχεται. Αντίθετα, στο άλλο δοχείο η ένδειξη μεταβάλλεται απότομα μόλις το βαρίδι περάσει τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών (το νερό είναι πυκνότερο από την κηροζίνη, συνεπώς η άνωση αυξάνεται απότομα όταν το βαρίδι περνά από το ένα υγρό στο άλλο).

Σ79

Μια διευθέτηση σημείων όπως η ζητούμενη παρουσιάζεται στο Σχήμα



Σχήμα 8

8. Τα τέσσερα σημεία σχηματίζουν τετράγωνο $ABCD$ με μήκος πλευράς 1· τα υπόλοιπα δύο βρίσκονται κάτω και δεξιά από το κέντρο.

Θεωρήστε τα τέσσερα τετράγωνα με διαγωνίους τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$. Είναι επίπονο, αλλά όχι δύσκολο, να διαπιστώσετε ότι οποιαδήποτε πέντε από τα έξι σημεία μας καλύπτονται από δύο τετράγωνα αυτού του μεγέθους. Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν δύο μόνο τρόποι κάλυψης των τεσσάρων σημείων A, B, C, D με δύο κύκλους διαμέτρου 1: πρέπει να πάρουμε είτε τους κύκλους με διαμέτρους τις AB και CD είτε τους κύκλους με διαμέτρους τις AD και BC. Και στις δύο περιπτώσεις, το ένα από τα κεντρικά σημεία μένει ακάλυπτο.

Σ80

Χωρίζουμε την αίθουσα σε 25 τετράγωνα, το καθένα από τα οποία περιέχει 2×2 καθίσματα, όπως στο Σχήμα 9. Όλοι οι υπάλληλοι σε καθένα από αυτά τα τετράγωνα είναι γείτονες, άρα το πολύ δύο από αυτούς μπορούν να θεωρηθούν υψηλόμισθοι. Επομένως, μπορούμε να έχουμε το πολύ πενήντα τέτοια ευτυχή άτομα. Στο σχήμα βλέπετε μια κατανομή μισθών (σε κάποιο τυχαίο νόμισμα) που επιτρέπει σε πενήντα υπαλλήλους να θεωρούνται υψηλόμισθοι.

2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
11	1	11	1	11	1	11	1	11	1

Σχήμα 9

Καλειδοσκόπιο

1. Το σύστημα αναφοράς επιλέγεται με κριτήριο την πρακτικότητά του.

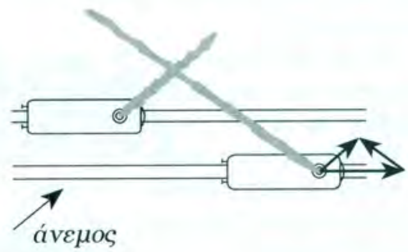
2. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε αν δεν επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς.

3. (α) κύκλος (β) ελικοειδής γραμμή.

4. Αν οι σταγόνες πέφτουν κατακόρυφα ως προς τη Γη, το τρένο κινείται προς τα δεξιά. Αν η βροχή πέφτει υπό γωνία (ως προς τη Γη), είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις σχετικές ταχύτητες των σταγόνων και του τρένου. Το τρένο μπορεί και να μην κινείται καθόλου.

5. Το πρόσημο της επιτάχυνσης εξαρτάται από την επιλογή του κατακόρυφου άξονα συντεταγμένων, και δεν αλλάζει κατά την κίνηση της πέτρας.

6. Ναι, αν τουλάχιστον μία από τις δύο πηγές καπνού κινείται (Σχήμα 10).



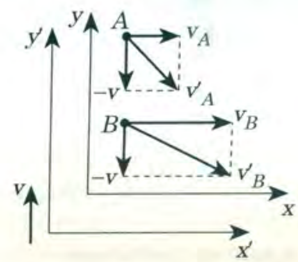
Σχήμα 10

7. Είναι δυνατόν σε υπερηχητικές ταχύτητες, αν τόσο το αεροπλάνο όσο και το βλήμα κινούνται στην ίδια κατεύθυνση (σ' αυτή την περίπτωση, η σχετική τους ταχύτητα θα είναι σχεδόν μηδέν).

8. 1,5 m/s.

9. $\mathbf{v}_{\text{σχετ.}} = \mathbf{v}_0$.

10. Ναι (Σχήμα 11). Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς, τα σημεία A και B έχουν ταχύτητες $\mathbf{v}_A$ και $\mathbf{v}_B$ αντίστοιχα, ενώ στο κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}$ σύστημα οι ταχύτητές τους



Σχήμα 11

είναι $\mathbf{v}'_A$ και $\mathbf{v}'_B$. Εφόσον τα διανύσματα $\mathbf{v}'_A$ και $\mathbf{v}'_B$ δεν είναι παράλληλα, οι γραμμές που αντιπροσωπεύουν τις τροχιές των σημείων A και B στο σύστημα $x'y'$ θα τέμνονται.

11. Και στις δύο περιπτώσεις ο κωπηλάτης θα παράγει το ίδιο έργο.

12. Όσο μεγαλύτερη είναι η σχετική ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς τον αέρα, τόσο μεγαλύτερη είναι η δυναμική άνωση που δέχεται. Έτσι, η απογείωση ή η προσγείωση αντίθετα στο ρεύμα του αέρα είναι ασφαλέστερη και πιο οικονομική απ' ό,τι κατά την ίδια φορά με αυτόν.

13. Ο άνεμος αυξάνει την ταχύτητα του αεροπλάνου στο πρώτο μισό της διαδρομής και την ελαττώνει κατά το ίδιο ποσό στο δεύτερο μισό. Αυτό σημαίνει ότι ο άνεμος βοηθάει

το αεροπλάνο για λιγότερο χρόνο απ' όσο το εμποδίζει. Άρα, ο χρόνος πτήσης θα είναι μεγαλύτερος εξαιτίας του ανέμου.

14. Για τον παρατηρητή A τα αντικείμενα του περιβάλλοντος περιστρέφονται με ίση γωνιακή ταχύτητα με εκείνη της πλατφόρμας, αλλά σε αντίθετη φορά. Εφόσον, λοιπόν, ο B βρίσκεται σε διπλάσια απόσταση από το O απ' όση ο A, η γραμμική του ταχύτητα θα είναι 2 m/s.

15. Η κινητική ενέργεια ενός σώματος εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Για παράδειγμα, αν το παιδί πυροβολήσει προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτή στην οποία κινείται το τρένο, η κινητική ενέργεια της σφαίρας ως προς το έδαφος θα είναι μηδέν.

16. Ο Ήλιος επιταχύνει εξίσου τη Γη και το εκκρεμές. Εφόσον η σχετική τους επιτάχυνση είναι μηδέν, το εκκρεμές δεν αποκλίνει από την τοπική κατακόρυφο.

17. Οι κινούμενες λωρίδες δεν είναι υλικά σώματα· επομένως, η θεωρία της σχετικότητας δεν θέτει όρια στην ταχύτητα της κίνησής τους.

18. Η ταχύτητα του παρατηρούμενου φωτός είναι πάντοτε 300.000 km/s. Εντούτοις, το χρώμα του φωτός που φτάνει σ' εμάς διαφέρει από εκείνο που εκπέμπει ο κβάζαρ.

Μικροπειραματισμοί

Η σχετική ταχύτητα του τρένου ως προς εσάς είναι μεγαλύτερη από τη δική σας ταχύτητα ως προς το έδαφος.

Αντίσταση

1. 8/15.

2. Αντικαθιστούμε $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$ στην εξίσωση (1). Αυτή τη σχέση μπορούμε να τη συναγάγουμε, για παράδειγμα, από τον τύπο $\binom{n}{k} = n!/[k!(n-k)!]$.

3. 7/12.

4. (α) $(m-1)/m$, (β) 1/2, (γ) $2/m$, (δ) 5/12, (ε) 5/9.

Ο πολυδιάστατος κύβος

1. $n2^{n-1}$.

2. Η γενική εξίσωση αποδεικνύεται όπως ακριβώς η ειδική περίπτωση της εξίσωσης (1). Η απάντηση είναι $E_{n,k} = \binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$.

3. $\sqrt{n-k}$.

Το πρόβλημα του Borsuk

1. Η ευκολότερη λύση είναι να θεωρήσουμε τα πέντε σημεία (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), ..., (0, 0, 0, 0, 1) στο χώρο των πέντε διαστάσεων: αυτά είναι οι κορυφές ενός τετραδιάστατου άπλοκου που είναι εμφυτευμένο σ' αυτό το χώρο. Στον τετραδιάστατο χώρο μπορείτε να θεωρήσετε τα σημεία (0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0) και (1/2, 1/2, 1/4, $\sqrt{5}/2$).

2. Θεωρήστε το γράφημα του Σχήματος 5 του άρθρου του παρόντος τεύχους «Αντίσταση στον πολυδιάστατο κύβο» και στρέψτε το κατακόρυφα.

3. Από τον τύπο για το $\binom{n}{k}$ έπεται

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} - 1.$$

Επομένως, το $\binom{n}{k}$, ως συνάρτηση του k, αυξάνει για $k < (n-1)/2$ και φθίνει για $k > (n-1)/2$.

4. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια με εκείνη του προβλήματος «καλύτεροι με τον δικό τους τρόπο», αλλά η εκτίμηση είναι ακριβέστερη.

5. Αντικαταστήστε απλώς στη λύση τούς αντίστοιχους αριθμούς της εκφώνησης.

6. Αντιστοιχίζουμε τα 12 σημεία του προβλήματος των «ακμών που προεξέχουν» με τους καλεσμένους στο δείπνο, και τις 66 ακμές με τους καλεσμένους της δεξίωσης. Δώστε σε κάθε ομάδα A 6 καλεσμένων στο δείπνο ένα κέικ του ίδιου είδους με αυτό που δόθηκε στην ομάδα $f(A)$ των 36 καλεσμένων της δεξίωσης οι αντίστοιχες ακμές της οποίας είναι αυτές ακριβώς που προεξέχουν από το σύνολο των σημείων που αντιστοιχούν στο A. Τότε, η ζητούμενη ιδιότητα προκύπτει άμεσα.

7. Υπάρχουν $m/2$ στοιχεία σε καθένα από τα εν λόγω υποσύνολα A και ίσο πλήθος έξω από αυτά. Επομένως, το πλήθος των ζευγών με ένα ακριβώς στοιχείο στο A είναι $(m/2)^2$.

9. Έχουμε

$$\frac{\binom{m}{m/2}}{2\binom{m-1}{m/4-1}} = \frac{m!(m/4-1)!(3m/4)!}{2\left((m/2)!\right)^2(m-1)!}$$

$$= 2\frac{(m/4)!(3m/4)!}{\left((m/2)!\right)^2}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Stirling στην τελευταία παράσταση, μετά την απλοποίηση διαφόρων όρων, βρίσκουμε ότι για κατάλληλα μεγάλα m ισούται κατά προσέγγιση με

$$2\frac{\sqrt{3}/4\cdot 2^m\cdot 3^{3m/4}}{1/2\cdot 4^{m/4}\cdot 4^{3m/4}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 3^{3m/4}}{2^m}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{27}{16}\right)^{m/4} > \frac{m(m-1)}{2} + 1.$$

Σκακιστικές σπαζοκεφαλιές και πραγματικό σκάκι

Οι δύο κόσμοι μερικές φορές συναντιούνται!

Yevgeny Gik

Ο ΤΙΤΛΟΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΑΡΘΡΟΥ μπορεί να σας φαίνεται παράξενος. Τα σκακιστικά προβλήματα και σπαζοκεφαλιές είναι ένα ξεχωριστό είδος παιχνιδιού, που δεν έχει καμία σχέση με το πραγματικό σκάκι· έτσι δεν είναι; Λοιπόν, τα πράγματα δεν είναι πάντοτε τόσο ξεκάθαρα...

Κάποτε ο Sam Loyd, διάσημος δημιουργός σκακιστικών προβλημάτων και «μετρ των ψυχαγωγικών μαθηματικών» δήλωσε ότι είχε ανακαλύψει έναν τρόπο να κάνει ματ στον αντίπαλο βασιλιά, όταν βρίσκεται μόνος του στο κέντρο της σκακιέρας, με δύο πύργους και έναν ίππο, και χωρίς την υποστήριξη του δικού του βασιλιά. Οι φίλοι του σκακιού αναστατώθηκαν, αλλά, όταν ο Loyd παρουσίασε τη λύση του, διασκέδασαν με την ψυχή τους:

Υποθέτω ότι πιστεύετε πως ένα τέτοιο ματ είναι δυνατό μόνο σε μια σπαζοκεφαλιά. Ιδού όμως ένα γεγονός που συνέβη πραγματικά σ' ένα τουρνουά σκακιού στην Ντουσάνμπε (την πρωτεύουσα του Τατζικιστάν) όπως το περιγράφει ο γκραντμάστερ O. Sabitov. Σ' έναν από τους τελικούς αγώνες, προέκυψε η εξής θέση:

Τα λευκά, που αντιμετώπιζαν σοβαρό πρόβλημα χρόνου, έφεραν τον πύργο στο f2. Τα μαύρα, βλέποντας ότι έπειτα από την κίνηση 1. Πύργος: f2-e2 θα ήταν αδύνατον να υπερασπίσουν το βασιλιά τους χωρίς να χάσουν τον πύργο τους (1. ... Βασιλιάς: e4-f5, 2. Πύργος: d8-f8 Βασιλιάς: f5-e6, 3. Πύργος: f8-e8), τοποθέτησαν τον πύργο στο c3, για να προστατεύσουν το βασιλιά τους από το ρουά. Και όντως ακολούθησε ρουά, αλλά από διαφορετικό τετράγωνο: 1. Πύργος: f2-f4. Σε πλήρη σύγχυση τα μαύρα δεν πρόσεξαν τη δραματική αλλαγή στη θέση και απάντησαν ακαριαία με την κίνηση που είχαν προετοιμάσει 1. ... Πύργος: c3-e3! Η σημαία δίπλα στο ρολόι των λευκών ήταν έτοιμη να πέσει, οπότε ξεχνώντας την απειλή που έδωσαν στην προηγούμενη κίνηση, επιτέθηκαν στον αντίπαλο βασιλιά από την αντίθετη πλευρά με 2. Πύργος: d8-d4!!, δημιουργώντας μια μοναδική θέση χωρίς προηγούμενο σε ολόκληρη τη σκακιστική ιστορία.

Ιδού ένα ακόμη όμορφο πρόβλημα:

Ματ σε μία κίνηση

Για ματ σε μία κίνηση, ο λευκός ίππος πρέπει να... αναπηδήσει! (Σε τελική ανάλυση *είναι* άλογο!) Έπειτα από αυτό τον «ελιγμό», τα τετράγωνα g8 και h7 παραμένουν υπό τον έλεγχό του (διότι δεν εγκαταλείπει το τετράγωνο f6, απλώς σηκώνεται πάνω από αυτό). Εν τω μεταξύ, ο λευκός αξιωματικός στο c3 πετυχαίνει το ματ.

Αυτή η φανταστική ιδέα μπορεί να οδηγήσει σε απολύτως πραγματοποιήσιμους συνειρμούς. Ο γκραντμάστερ E. Gufeld, αναλύοντας μια παρτίδα του με τον A. Gipslis, κατέληξε στην εξής θέση:

Κατ' αρχάς ο Gufeld εκτίμησε ότι τα λευκά, με τα οποία έπαιζε, χάνουν: έχουν την αριθμητική υπεροχή, αλλά ο αξιωματικός δέχεται επίθεση και δεν μπορεί να υποχωρήσει χωρίς να αφήσει απροστάτευτη την πρώτη γραμμή (Βασίλισσα: e3-c1). Θυμήθηκε, όμως, το τέχνασμα με τον ίππο που αναπηδά, και ανακάλυψε την εξής αξιοσημείωτη διέξοδο: 1. Πύργος: b7-e7! Βασίλισσα: e3 × e7, 2. Αξιωματικός: e1-c3! Συγκρίνετε αυτή τη θέση με τη σπαζοκεφαλιά, και θα διαπιστώσετε ότι η διαφορά τους είναι ελάχιστη. Ο ίππος είναι έτοιμος να πηδήξει στον αέρα, και τα μαύρα δεν μπορούν να εμποδίσουν την απώλεια της βασίλισσάς τους (έπειτα από την 3. Ίππος: f6-d5) ή το ματ (3. Ίππος: f6-g4 Βασιλιάς: h8-g8, 4. Ίππος: g4-h6).

Πρόβλημα. Ο ίππος βρίσκεται στο a1. Μπορεί να διασχίσει ολόκληρη τη σκακιέρα, χωρίς να περάσει από το ίδιο τετράγωνο δύο φορές, και να καταλήξει στο τετράγωνο h8;

Με κάθε κίνηση του ίππου αλλάζει το χρώμα του τετραγώνου που καταλαμβάνει. Το αρχικό τετράγωνο είναι μαύρο, επομένως μετά την 63η κίνηση ο ίππος βρίσκεται σε άσπρο τετράγωνο. Το h8, όμως, είναι μαύρο, επομένως το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Υπάρχουν πολλές σπαζοκεφαλιές αυτού του είδους. Συνδέονται με το πραγματικό παιχνίδι; Ναι, και μερικές φορές εντελώς άμεσα.

Θεωρήστε τη θέση:

Λευκά: Βασιλιάς h8, Ίππος b2, Στρατιώτης h7.

Μαύρα: Βασιλιάς f7.

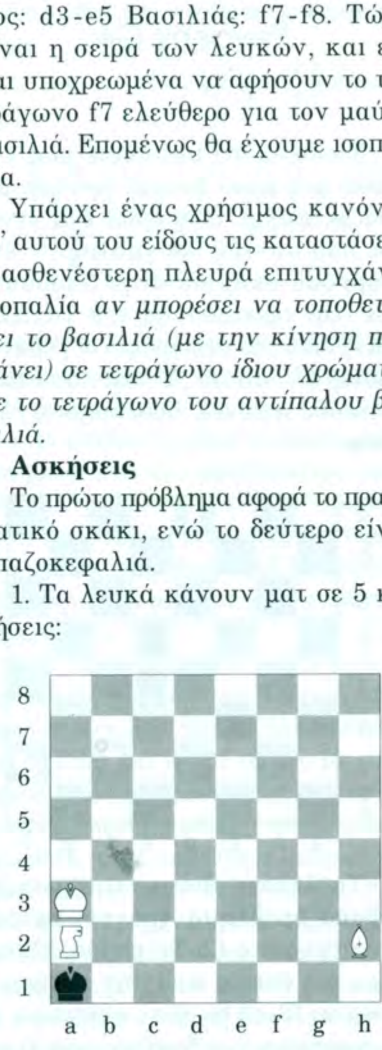
Ποιες είναι οι προοπτικές εδώ; Για να κερδίσουν τα λευκά, πρέπει να απελευθερώσουν το βασιλιά τους. Αν παίξουν πρώτα, μπορεί να το επιτύχουν. 1. Ίππος: b2-d3 Βασιλιάς: f7-f8, 2. Ίππος: d3-e5 κ.ο.κ. Αλλά αν είναι η σειρά των μαύρων, ο λευκός βασιλιάς δεν μπορεί να ξεφύγει από τη γωνία: 1. ... Βασιλιάς: f7-f8, 2. Ίππος: b2-d3 Βασιλιάς: f8-f7, 3. Ίππος: d3-e5 Βασιλιάς: f7-f8. Τώρα είναι η σειρά των λευκών, και είναι υποχρεωμένα να αφήσουν το τετράγωνο f7 ελεύθερο για τον μαύρο βασιλιά. Επομένως θα έχουμε ισοπαλία.

Υπάρχει ένας χρήσιμος κανόνας γι' αυτού του είδους τις καταστάσεις: η ασθενέστερη πλευρά επιτυγχάνει ισοπαλία *αν μπορέσει να τοποθετήσει το βασιλιά (με την κίνηση που κάνει) σε τετράγωνο ίδιου χρώματος με το τετράγωνο του αντίπαλου βασιλιά.*

Ασκήσεις

Το πρώτο πρόβλημα αφορά το πραγματικό σκάκι, ενώ το δεύτερο είναι σπαζοκεφαλιά.

1. Τα λευκά κάνουν ματ σε 5 κινήσεις:



2. Στη σκακιέρα υπάρχουν μόνο οι δύο βασιλιάδες: ο λευκός στο a6, ο μαύρος στο a8. Πού πρέπει να τοποθετηθεί η λευκή βασίλισσα ώστε να *μην μπορεί* να κάνει ματ σε μία κίνηση;