

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 5

1.500 ΔΡΧ.

Άπειρη κάθοδος



- Το μυστήριο της Αφροδίτης
- Γυμνάσματα μαθηματικής λογικής
- Η φύση του μαγνητισμού στο Διάστημα
- Παράγογοι σε αλγεβρικά προβλήματα
- Καθώς το νερό εξατμίζεται
- Εξωτικό σκάκι
- Περί δρακόντειων καμπούλων
- Η μεγαλειώδης ώσμωση



Συλλογή Chester Dale © 1996 Διεθνή Συμβούλιο, Εισαγγελικό Πινακοθέατρο Ουάσινγκτον.

Το κορίτσι με το στεφάνι (1885), του Auguste Renoir

ΛΟΓΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ·ΤΟ ΚΟΡΙΤΣΙ ΜΕ ΤΟ στεφάνι· στην Πινακοθήκη του Quantum είναι πολύ απλός: το στεφάνι. Είναι ένα γοητευτικά απλό αντικείμενο. Μπορείς να το κυλήσεις — αυτό είναι προφανές. Μπορείς να «κάνεις σκοινάκι» μ' αυτό, πράγμα που δεν είναι και τόσο προφανές. Μπορείς να το περιστρέψεις, έτοι που να μοιάζει σαν ημιδιαφανής σφαίρα. Το κοριτσάκι, όμως, θα χρειαστεί μερικά χρόνια ακόμη για να καταλάβει ότι, για παράδειγμα, το κέντρο μάζας του στεφανιού δεν βρίσκεται κατά μήκος του σώματός του, του ίδιου του στεφανιού — είναι ακριβώς στο κέντρο του, στο κενό, εκεί όπου δεν υπάρχει καθόλου στεφάνι!

Όταν έρθει η ώρα να μελετήσει φυσική, θα κατανοήσει τον τύπο της «ροπής αδράνειας» ενός λεπτού στεφανιού, ο οποίος αναφέρεται στη σελίδα 8. Θα κατανοήσει επίσης για ποιο λόγο το στεφάνι επιστρέφει προς το μέρος της όταν το υνάζει μπροστά και ταυτόχρονα το υποχρεώνει να περιστρέφεται «προς τα πίσω». (Πόσες φορές δεν το δοκίμασε αυτό, πετώντας το ολοένα και πιο μακριά, για να δει μέχρι πού μπορεί να το στείλει χωρίς αυτό να πάψει να επιστρέφει υπάκουα;) Παρότι ο πίνακας του Renoir δεν μας δίνει κανένα ενδεικτικό στοιχείο, πρέπει ωστόσο να ουμεράνουμε ότι, μια μέρα, το κοριτσάκι αυτό θα μπορεί να διαβάσει ολόκληρο το άρθρο της σελίδας 6.

QUANTUM

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 5



Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

Καμία φορά, όταν ανοίγουμε έναν βαθύ λάκκο στη Βόρεια Αμερική, αποτελευτάστε λέγοντας πως «θα βγούμε στην Κίνα». Ε, λοιπόν, αν αφήσετε τον εαυτό σας να συρθεί μέσα στο εξωφυλλό μας, θα βγείτε στην άλλη πλευρά, στη σελίδα 12. Αυτό δεν θα είναι μια «άπειρη κάθοδος» — μια πολύ χρήσιμη τεχνική στα μαθηματικά, η προέλευση της οποίας μπορεί να αναχθεί στους αρχαίους Έλληνες. Άλλα και δεν θα θέλατε να είναι — ή μηπως όχι;

ΑΡΘΡΑ

- 6 Η ορμή της επιστήμης
Το μυστήριο της Αφροδίτης**
Vladimir Surdin
- 12 Μαθηματική εργαλειοθήκη
Άπειρη κάθοδος**
Lev Kurlyandchik και Grigory Rozenblume
- 18 Εκπλήξεις κλιμάκων
Η ισχύς του Ήλιου και έσεις**
V. Lange και T. Lange
- 22 Μαθηματική λογική
Κρυφές πληροφορίες**
S. Artyomov, Y. Gimatov και V. Fyodorov
- 29 Κοσμικό φορτίο
Η φύση του μαγνητισμού στο Διάστημα**
Alexander Ruzmaykin

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**
Ta μαθηματικά και η αρμονία των φυσικών φαινομένων
- 11 Σπαζοκεφαλιές**
- 21 Πώς λύνεται;**
- 26 Μαθηματικές αναζητήσεις**
Η οικογενειακή ομοιότητα
- 27 Στο μαυροπίνακα I**
Καθώς το νερό εξατμίζεται...
- 36 Καθειδοσκόπιο**
Η «καλύτερη» απάντηση
- 38 Με λίγη φαντασία**
Εξωτικό οκάκι
- 40 Στο μαυροπίνακα II**
Παράγωγοι και ρίζες εξισώσεων
- 49 Κβαντικά χαμόγελα**
Ένας ζυθοποιός και δύο γιατροί
- 50 Ανάδραση**
Ο πανταχού παρών δράκος
- 54 Στο εργαστήριο**
Η μεγαλειώδης ώσμωση
- 56 Στα πεδία φυσικής**
Μπόινγκ, μπόινγκ, μπόινγκ...
- 60 Αλληλογραφία**
- 62 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 70 Παιχνιδότοπος**
Το Παγκόσμιο Πρωτάθλημα Σπαζοκεφαλιών

Τα μαθηματικά και η μυστική αρμονία των φυσικών φαινομένων

HΙΣΤΟΡΙΑ ΠΟΥ ΣΑΣ ΚΑΛΩ ΝΑ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΟΥΜΕ αρχίζει με τον Πυθαγόρα και τη σχολή του· τη σχολή που βασική της αρχή ήταν «το παν αριθμός». Η διαπιστώση ότι τα κύρια αρμονικά διαστήματα αντιστοιχούν σε απλές αριθμητικές αναλογίες οδήγησε τους πυθαγορείους να ανακαλύψουν, με άλματα αξεπέραστης τόλμης, ότι στη ρίζα των φαινομένων του φυσικού κόσμου βρίσκεται η αρμονία των μαθηματικών εννοιών, η «μουσική των σφαιρών» όπως την ονόμασαν, αρμονία ουράνια, που δεν είναι αισθητή αλλά νοητή.

Η σχολή των πυθαγορείων έφερε επανάσταση στην ανθρώπινη σκέψη. Η μαθηματική απόδειξη ήταν ο νέος τρόπος διαλογισμού που αναπτύχθηκε στην εν λόγω σχολή. Άλλωστε, η ανακάλυψη από τους πυθαγορείους της ύπαρξης ασύμμετρων μεγεθών, δηλαδή μεγεθών των οποίων η μεταξύ τους σχέση δεν είναι η σχέση μεταξύ δύο ακέραιων αριθμών, αποτελεί σταθμό στην εξέλιξη της ανθρώπινης διανόησης. Η ανακάλυψη αυτή οδήγησε αργότερα τον Εύδοξο, φίλο και μαθητή του Πλάτωνα, στη διατύπωση της γενικής θεωρίας των συνεχών μεγεθών, θεωρίας που αποτελεί ακόμη και σήμερα, έπειτα από τόσο διεισδυτική μελέτη του φυσικού κόσμου, σταθερή αφετηρία κάθε προσπάθειας περιγραφής της φυσικής πραγματικότητας. Η ανθρωπότητα χρειάστηκε είκοσι δύο αιώνες για να αποκτήσει τη νοητική ωριμότητα προκειμένου να αφομοιώσει τη θεω-

ρία του Εύδοξου, αφού τούτο έγινε μόλις στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, όταν ο Dedekind την έφερε στο προσκήνιο.

Ο χώρος είναι θεμελιώδης φυσική οντότητα, και η ευκλείδεια γεωμετρία είναι η θεωρία του χώρου, πρότυπο μαθηματικής δομής και ταυτόχρονα αρχέγονη φυσική θεωρία. Η θεωρία των Πέντε Κανονικών Στερεών, ένα από τα ωφαίοτερα μέρη της ευκλείδειας γεωμετρίας, αποδίδεται στον Θεαίτητο, φίλο και μαθητή του Πλάτωνα. Σε αντίθεση με την περίπτωση των δύο διαστάσεων, όπου έχουμε κανονικά πολύγωνα με οποιοδήποτε πλήθος πλευρών, εδώ, στις τρεις διαστάσεις, υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά πολύέδρα, γεγονός που προξένησε μεγάλη εντύπωση στον Πλάτωνα, ο οποίος του έδωσε κοσμική σημασία. Στον *Tίμαιο*, ο Πλάτων εξετάζοντας τη δομή της ύλης ανέπτυξε την ατομική θεωρία του Δημόκριτου συνδέοντάς τη με τη θεωρία των Κανονικών Στερεών. Σύμφωνα με τη θεωρία του Πλάτωνα, το άτομο καθενός από τα στοιχεία της ύλης αντιστοιχεί σε ένα από τα κανονικά στερεά. Η θεωρία των Κανονικών Στερεών ήταν η πρώτη μαθηματική θεωρία συμμετρίας, και η θεωρία του Πλάτωνα η πρώτη φυσική θεωρία που αποδίδει πρωταρχικό ρόλο στη συμμετρία. Η εξέλιξη της επιστήμης κατέδειξε τη γονιμότητα αυτών των ιδεών. Ο Αρχιμήδης γενίκευσε την έννοια του κανονικού πολυέδρου εισάγοντας αυτήν του ημικανονικού πολυέδρου, και απέ-

δειξε ότι υπάρχουν δεκατρία ημικανονικά στερεά.

Στους νεώτερους χρόνους οικοδημήθηκε η γενική μαθηματική θεωρία της συμμετρίας, η θεωρία ομάδων, η οποία παίζει πρωταρχικό ρόλο στη σύγχρονη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων της ύλης. Οι βασικές ιδιότητες της ύλης, σύμφωνα με τις σύγχρονες απόψεις, συνθέτουν μια γραμμική πολλαπλότητα. Εισάγοντας εσωτερικό γινόμενο, έχουμε χώρο ισόμορφο προς τον ευκλείδειο. Οι οικογένειες των στοιχειωδών σωματιδίων αντιστοιχούν σε πολύεδρα στον εν λόγω χώρο, που απεικονίζουν τις μη αναγώγιμες αναπαστάσεις της ομάδας συμμετρίας, και το κάθε σωματίδιο σε μια οικογένεια αποτελεί κορυφή του αντιστοιχου πολυέδρου. Στην περίπτωση κατά την οποία δεχόμαστε ότι είναι τρεις οι βασικές υλικές ιδιότητες, τότε ο υλικός χώρος είναι τριοδιάστατος και οι οικογένειες των στοιχειωδών σωματιδίων οχηματίζουν ακριβώς τα δεκατρία ημικανονικά στερεά του Αρχιμήδη. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν την υπερβατική υπόσταση των μαθηματικών, αφού η μαθηματική θεωρία που προέκυψε από τη μελέτη του χώρου υπερβαίνει αυτά τα πλαίσια και περιγράφει την ύλη.

Το έργο του Αρχιμήδη αποτελεί πρότυπο και για τα μαθηματικά και για τη φυσική, είτε αφορά τη διατύπωση νέων θεμελιωδών αρχών είτε την ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης προβλημάτων, καθώς ως σύνολο προυσιάζει έναν μοναδικό συνδυασμό

πρωτοτυπίας και πληρότητας. Ο Αρχιμήδης θεωρείται ο ιδρυτής της μαθηματικής ανάλυσης καθώς και της στατικής, που αποτελεί το πρώτο μέρος της κλασικής μηχανικής. Και όχι μόνο ανακάλυψε τις βασικές αρχές της στατικής και της υδροστατικής, αλλά κατόρθωσε να λύσει και δυσκολότατα προβλήματα, όπως εκείνο του προσδιορισμού των θέσεων ευσταθούς ισοφροπίας στερεού, παραβολειδούς εκ περιστροφής, που επιπλέει σ' ένα υγρό. Εδώ θα ήθελα να αναφερθώ περισσότερο σε μια λιγότερο γνωστή εργασία του, τα *Κατοπτρικά*: η εργασία χάθηκε, όμως το μέρος που μας ενδιαφέρει διασώθηκε στο έργο του Ήρωνα του Αλεξανδρέα. Στο μέρος αυτό αναπτύσσονται οι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής που αφορούν την ανάκλαση του φωτός. Ορίζεται δηλαδή ότι οι ακτίνες, οι τροχιές του φωτός, είναι ευθύγραμμες, ότι η εισερχόμενη ακτίνα στο σημείο ανάκλασης, πάνω σε μια αυθαίρετη καμπύλη κατοπτρική επιφάνεια, η κάθετος στην επιφάνεια στο σημείο αυτό, και η εξερχόμενη ακτίνα, ανήκουν και οι τρεις σε ένα και το αυτό επίπεδο, και τέλος ότι οι γωνίες οι οποίες οχηματίζουν οι ακτίνες αυτές με την κάθετο είναι ίσες.

Η ανακάλυψη αυτών των νόμων είναι βεβαίως ένα εξαιρετικό επιτευγμα· ο Αρχιμήδης όμως δεν περιορίστηκε σ' αυτό, αλλά διατύπωσε την εξής αρχή ως ερμηνεία των νόμων: εάν θεωρήσουμε δύο σημεία εκτός της κατοπτρικής επιφάνειας, το ένα ως σημείο εκπομπής του φωτός και το άλλο ως σημείο λήψης, τότε η τροχιά την οποία ακολουθεί το φως είναι η ελάχιστη καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία και πληροί τη συνθήκη ότι τουλάχιστον ένα σημείο της ανήκει στην κατοπτρική επιφάνεια. Η αρχή αυτή αποδείχτηκε εξαιρετικά γόνιμη στη μετέπειτα εξέλιξη της επιστήμης. Μετά τη διατύπωση από τον Νεύτωνα των νόμων της κίνησης της κλασικής μηχανικής, ο Lagrange διαπίστωσε ότι οι εν λόγω νόμοι προκύπτουν από μια ανάπτυξη της αρχής του Αρχιμήδη που ονομάστηκε «αρχή ελάχιστης δράσης». Περαιτέρω ανάπτυξη έδειξε ότι και οι νόμοι του Maxwell, που διέπουν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, και

γενικώς όλοι οι γνωστοί θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι προκύπτουν από την αρχή της ελάχιστης δράσης, και σήμερα η αρχή αυτή αποτελεί θεμελιώδη ενωτική αρχή της θεωρητικής φυσικής.

Η κλασική μηχανική, όσον αφορά τη δυναμική, θεμελιώθηκε από τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα. Ο Νεύτων επιπλέον προήγαγε το έργο του Αρχιμήδη στη μαθηματική ανάλυση με την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, και διατύπωσε την πρώτη θεωρία της βαρύτητας, το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Και όχι μόνο διατύπωσε νέες θεωρίες, αλλά και έλυσε δυσκολότατα προβλήματα, όπως αυτό του προσδιορισμού της πλάτυνσης της γήινης οφαίρας που οφείλεται στην περιστροφή της, και το πρόβλημα του υπολογισμού της μεταπτωτικής κίνησης του άξονα της Γης, που οφείλεται στην επίδραση των παλιρροϊκών βαρυτικών δυνάμεων του Ήλιου και της Σελήνης. Και αφού έλυσε ο ίδιος το πρόβλημα της κίνησης δύο σωμάτων υπό την επίδραση της αριθμαίας έλξης τους, έθεσε στις επερχόμενες γενεές το αντίστοιχο πρόβλημα των τριών ή περισσότερων σωμάτων, το οποίο μέχρι σήμερα παραμένει άλυτο. Πέραν όμως των επιμέρους, η σημαντικότερη συμβολή του Νεύτωνα στην πρόοδο της επιστήμης είναι η ανακάλυψη ότι οι νόμοι της φύσης έχουν τη μορφή τοπικών διαφορικών συνθηκών και επιτρέπουν τον προσδιορισμό της καθολικής εξέλιξης από τα αρχικά δεδομένα. Η ανακάλυψη αυτή καθιέρωσε τον εξέχοντα ρόλο των διαφορικών εξισώσεων. Εδώ θα ήθελα να αναφερθώ σ' ένα θεώρημα του Νεύτωνα και να επισημάνω τη σύνδεσή του με τα προηγούμενα και τα επόμενα, διότι μας δείχνει ότι η εμβάθυνση αποκαλύπτει την υπερβασική μαθηματική αλήθεια.

Ο Kepler, αφού αφιέρωσε όχι ευκαταφρόνητο χρόνο σκυμμένος πάνω στον απέραντο πλούτο των παρατηρήσεων που του κληροδότησε ο προκάτοχός του, ο αστρονόμος Tycho Brahe, παρατηρήσεων που είχαν απαιτήσει επίπονες προσπάθειες μιας ολόκληρης ζωής, μόχθησε να βάλει τάξη στο χάος, και ανακάλυψε τέλος, με τη βοήθεια των Κωνικών του A-

πολλώνιου του Περγαίου, τον ακόλουθο νόμο που διέπει την κίνηση κάθε πλανήτη γύρω από τον Ήλιο: κατά την κίνηση του πλανήτη, η ακτίνα που ενώνει τον πλανήτη με τον Ήλιο διαγράφει ίσες επιφάνειες σε ίσους χρόνους. Ο Νεύτων, ωστόσο, εμβαθύνοντας στη φύση των πραγμάτων, με την καθαρή σκέψη και μόνο, απέδειξε στο έργο του *Principia* το εξής θεώρημα: εάν ένα σώμα βρίσκεται υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από ένα κέντρο, οποιαδήποτε κι αν είναι αυτή (η έλξη από τον Ήλιο, οτινα περίπτωση που ενδιέφερε τον Kepler), τότε η τροχιά του σώματος ανήκει σ' ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της δύναμης, και η κίνηση στο επίπεδο αυτό είναι τέτοια ώστε η ακτίνα που ενώνει το σώμα με το κέντρο να διαγράφει ίσες επιφάνειες σε ίσους χρόνους. Αυτά συνοψίζονται στη διατήρηση ενός ανυσματικού μεγέθους που λέγεται «στροφορμή». Και τούτο δεν ήταν το τέλος της πορείας. Όπως ανέφερα προηγουμένως, οι νόμοι του Νεύτωνα πηγάζουν από την αρχή της ελάχιστης δράσης. Στις αρχές του 20ού αιώνα διατυπώθηκε από τη Noether το εξής θεμελιώδες θεώρημα: Στο πλαίσιο της γενικής αρχής της ελάχιστης δράσης, σε κάθε συνεχή ομάδα μετασχηματισμών που αφήνει τη δράση αναλλοίωτη αντιστοιχεί ένα μέγεθος που διατηρείται. Εάν αναφερθούμε στην ομάδα στροφών του ευκλείδειου χώρου, το αντίστοιχο μέγεθος είναι η στροφορμή· εάν αναφερθούμε στην ομάδα των χρονικών μεταθέσεων, το αντίστοιχο μέγεθος είναι η ενέργεια.

Η κλασική μηχανική του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα, μολονότι έδωσε τεράστια ώθηση στην επιστήμη, είχε την εξής ατέλεια: ενώ ο χώρος και ο χρόνος ξεχωριστά περιγράφονταν άρτια από την τρισδιάστατη και μονοδιάστατη ευκλείδεια γεωμετρία αντιστοιχα, εκλαμβάνονταν ωστόσο ως εντελώς ανεξάρτητες φυσικές έννοιες, και η σύνθεσή τους, ο χωρόχρονος, το σύνολο των συμβάντων, θεωρούνταν απλώς ως το γινόμενο του χώρου με το χρόνο, με το κάθε συμβάν να αντιστοιχεί σε κάποιο ορισμένο σημείο του χώρου και σε κάποια ορισμένη χρονική

στιγμή, όπως π.χ. μια δεδομένη θερμοδυναμική κατάσταση αντιστοιχεί σε μια ορισμένη θερμοκρασία και σε μια ορισμένη πίεση, δύο εντελώς ανεξάρτητες φυσικές έννοιες. Το ότι όμως ο χώρος και ο χρόνος δεν μπορεί να είναι εντελώς ανεξάρτητες έννοιες φαίνεται από το γεγονός ότι, εάν θεωρήσουμε δύο παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο, τότε δύο γεγονότα που συντελούνται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου ως προς τον έναν παρατηρητή, συντελούνται σε διαφορετικά σημεία του χώρου ως προς τον άλλο. Εφόσον, όμως, δύο παρατηρητές των οποίων η σχετική κίνηση είναι ομοιόμορφη συνιστούν φυσικώς ισοδύναμα συστήματα αναφοράς, όπως πρώτος παρατήρησε ο Γαλιλαίος, συνάγεται ότι ο χώρος δεν μπορεί να είναι απόλυτος και ο χωρόχρονος δεν μπορεί να είναι απλώς το γινόμενο του χώρου με το χρόνο. Από την άλλη μεριά, ο χρόνος στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής φαίνεται πράγματι απόλυτος, αφού δύο παρατηρητές, ανεξάρτητα από τη σχετική τους κίνηση, συμφωνούν ως προς τα συμβάντα που θεωρούν ταυτόχρονα, μολονότι πρόκειται για συμβάντα που ενδέχεται να συντελούνται σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Ο χωρόχρονος της κλασικής μηχανικής, λοιπόν, είναι μια παράφωνη σύνθεση που απέχει πολύ από την τελειότητα της υπερβατικής μαθηματικής αλήθειας.

Οι δυσκολίες πολλαπλασιάστηκαν με τη μετάβαση από το χώρο της μηχανικής στο χώρο των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Ο Maxwell, συμπληρώνοντας με αμιγώς θεωρητική σκέψη τους νόμους που απέρρεαν από το πείραμα, κατόρθωσε να διατυπώσει ένα γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα και να δείξει ότι το φως δεν είναι παρά ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Οι εξισώσεις του Maxwell, όμως, περιέχουν μια σταθερά που αντιστοιχεί στην ταχύτητα διάδοσης του φωτός, και αυτό ακριβώς γέννησε πλήθος ερωτημάτων και δυσκολιών στη σκέψη της εποχής, με επίκεντρο το ερώτημα σε ποιο σύστημα αναφοράς η

ταχύτητα του φωτός ισούται με τη δεδομένη σταθερά. Αναγκάστηκαν λοιπόν να υιοθετήσουν την υπόθεση ότι το φως διαδίδεται σε κάποιο μέσο, αν και ήταν σαφές ότι το φως διαδίδεται στο κενό, και η σταθερά των εξισώσεων του Maxwell είναι η ταχύτητα ως προς αυτό το μέσο. Το υποθετικό μέσο, που το ονόμασαν «αιθέρα», έπρεπε να είναι λεπτότατο, αφού δεν εμπίπτει καθόλου στην αντίληψή μας, και ταυτοχρόνως υπερβολικά οκληρό, ώστε να δικαιολογεί την τεράστια ταχύτητα διάδοσης. Η σκέψη όμως δεν έμεινε για πολύ ο' αυτές τις απλοϊκές ιδέες, διότι οδηγούσαν σε συμπεράσματα τα οποία αντέκρουσε το πείραμα.

Έμεινε τότε λογικά μία μόνο διέξοδος: να δεχτούμε την ταχύτητα του φωτός ως παγκόσμια σταθερά, ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς, ως ανυπέρβλητο όριο, στο ρόλο άπειρης ταχύτητας. Ήταν όμως εξαιρετικά δύσκολο για το μυαλό του ανθρώπου, που δεν ήταν εξοικειωμένο με την αφαίρεση, να ακολουθήσει αυτή την οδό, διότι οδηγούσε στην κατάρριψη του απόλυτου χρόνου. Δηλαδή, δύο συμβάντα που συντελούνται σε διαφορετικά σημεία του χώρου και είναι ταυτόχρονα για έναν παρατηρητή, δεν είναι πλέον ταυτόχρονα για έναν άλλο, που κινείται σε σχέση με τον πρώτο. Μόνο η μεγαλοφυΐα του Poincaré κατόρθωσε να συλλάβει και να ακολουθήσει την οδό της αλήθειας. Το ταξίδι της σκέψης που ξεκίνησε ο Poincaré το ουνέχισε ο Αϊνστάιν και το ολοκλήρωσε ο Minkowski με την ανακάλυψη της γεωμετρίας του χωρόχρονου ως τετραδιάστατης γραμμικής πολλαπλότητας με τετράγωνο στοιχείου μήκους τόξου όπου το τετράγωνο του διαφορικού του χρόνου συμβάλλει αρνητικά. Η ευθεία γραμμή που ενώνει δύο σημεία του χωρόχρονου, και αντιστοιχεί στην ιστορική πορεία παρατηρητή σε ομοιόμορφη κίνηση μεταξύ δύο συμβάντων, είναι η μέγιστη καμπύλη με άκρα τα σημεία αυτά, δηλαδή η ιστορική πορεία παρατηρητή με μη ομοιόμορφη κίνηση μεταξύ των ίδιων δύο συμβάντων έχει μικρότερη διάρκεια.

Η γεωμετρία που ανακάλυψε ο Minkowski έχει τελειότητα ισάξια της

ευκλείδειας γεωμετρίας, και όσο πάραδοξα κι αν φάνηκαν τα συμπεράσματά της στην κοινή αντίληψη, αποδείχτηκαν έκτοτε περίτραπα από το πείραμα. Ο χώρος και ο χρόνος υποβιβάστηκαν σε συμβατικές μόνο έννοιες, όπως ακριβώς είναι το μήκος και το πλάτος σ' ένα επίπεδο, και μόνο ο χωρόχρονος, το ίδιο το επίπεδο, έμεινε ως απόλυτη πραγματικότητα. Έτσι έφυγαν οι παρωπίδες από τα μάτια μας και μπορέσαμε να δούμε την αρμονική συμμετρία της φύσης.

Μιού αιώνα πριν από την ανακάλυψη της γεωμετρίας του χωρόχρονου, ο Riemann είχε επεκτείνει την ευκλείδεια γεωμετρία προς μια άλλη κατεύθυνση. Ο Gauss, δάσκαλος του Riemann, είχε προηγουμένως μελετήσει την εσωτερική γεωμετρία των καμπύλων επιφανειών στον ευκλείδειο χώρο. Η εσωτερική γεωμετρία περιέχει τις ιδιότητες εκείνες μιας επιφάνειας που μπορούν να οριστούν ανεξάρτητα από τον περιβάλλοντα χώρο, όπως η θεωρία των γεωδαισικών, των ελάχιστων καμπυλών επί της επιφάνειας με δοθέντα άκρα. Ο Riemann, θεωρώντας μια επιφάνεια με την εσωτερική της γεωμετρία ως αυθύπαρκτο δισδιάστατο καμπύλο χώρο, γενίκευσε την όλη θεωρία σε οποιοδήποτε πλήθος διαστάσεων, εισάγοντας την έννοια του πολυδιάστατου καμπύλου χώρου. Η ευκλείδεια γεωμετρία περιέχεται ως ειδική περίπτωση στη γεωμετρία του Riemann, ως η περίπτωση κατά την οποία η καμπυλότητα είναι παντού μηδέν. Η καμπυλότητα ενός χώρου Riemann εκδηλώνεται στη σχέση γειτονικών γεωδαισιακών, που διαφέρει από εκείνη μεταξύ γειτονικών ευθειών στον ευκλείδειο χώρο.

Ο Αϊνστάιν, μετά τη συμβολή του Minkowski, ουγκέντρωσε τις προσπάθειές του στο να επινοήσει θεωρία για τη βαρύτητα, πέραν της νευτώνειας, η οποία να είναι συμβατή με την ενότητα του χωρόχρονου, που μόλις είχε αποκαλυφθεί. Η σκέψη του επέμεινε στο ότι δεν μπορεί να είναι τυχαίο ότι η μάζα ορίζει ταυτόχρονα και την αδράνεια ενός σώματος και την έλξη του προς τα άλλα. Το γεγονός αυτό, στο πλαίσιο της νευτώνειας θεωρίας, έχει ως επακόλουθο όλες οι δοκιμαστικές μάζες να

έχουν την ίδια επιτάχυνση σ' ένα πεδίο βαρύτητας, όπως πρώτος είχε διαπιστώσει ο Γαλιλαίος. Ο Αϊνστάιν αντιλήφθηκε τότε ότι, ως προς ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση σ' ένα πεδίο βαρύτητας, αυτό σημαίνει ότι η ίδια η δύναμη της βαρύτητας απαλείφεται, και το μόνο που παραμένει είναι το διαφορικό της, η παλιρροϊκή δύναμη που προξενεί απόκλιση των τροχιών γειτονικών δοκιμαστικών μαζών. Τούτο του θύμισε την απόκλιση των γειτονικών γεωδαισιακών στη γεωμετρία του Riemann, κάτι που αποτελεί εκδήλωση της καμπυλότητας. Εποι ο Αϊνστάιν, γενικεύοντας τη γεωμετρία του χωρόχρονου του Minkowski, κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τον οποίο ο Riemann γενικεύει την ευκλείσια γεωμετρία του χώρου, οδηγήθηκε στην έννοια του καμπύλου χωρόχρονου και στην ανακάλυψη ότι η βαρύτητα δεν είναι παρά η καμπυλότητα του χωρόχρονου. Και στο πλαίσιο πάντα της αρχής της ελάχιστης δράσης, εξήγαγε το νόμο που συνδέει την καμπυλότητα του χωρόχρονου με την πυκνότητα ενέργειας της ύλης, νόμο που έχει τη μορφή μη γραμμικού αυστημάτος μερικών διαφορικών εξισώσεων, των εξισώσεων Αϊνστάιν, και ενσωματώνει και το νόμο της βαρύτητας και τους νόμους κίνησης της ύλης. Η θεωρία αυτή, η γενική θεωρία της σχετικότητας, είναι ιως η πιο μεγαλειώδης μαθηματική συμφωνία της φύσης που ο άνθρωπος αξιώθηκε μέχρι σήμερα να συλλάβει, αφού περιέχει ολόκληρη σειρά από ουράνιες αρμονίες που του είχαν προηγουμένως αποκαλυφθεί.

Δημήτρης Χριστοδούλου

Ο Δημήτρης Χριστοδούλου είναι τακτικός καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Πρίνστον. Ερευνητικά εργάζεται σε αυστηρώς μαθηματικά προβλήματα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Στις 23 Ιουνίου 1996 ανακηρύχθηκε επίτιμος διδάκτορας του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών. Το παραπάνω κείμενο αποτελεί την ομιλία του κατά την τελετή ανακήρυξης. Το ελληνικό Quantum ευχαριστεί τον καθηγητή Χριστοδούλου για τη συγκατάθεσή του να δημοσιευτεί η εμπνευσμένη ομιλία του στις σελίδες του.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ενισχυμένης Θετικών Εποπτηρίου (NSTA) των ΗΠΑ

και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Εποπτηρίου.

με τη συμπράξη της Αμερικανικής Ενισχυμένης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)

και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης:

Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεποπτέλλων Έκδοτης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Συνταξης:

Yuri Ossipyan, Προεδρος, Γραφείο Κvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο της Χαρζόρντ

William P. Thurston, Μεταλλίο Φίλντες (Μαθηματικό), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντής Συνταξης στη Φυσική:

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνης

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντής Συνταξης στα Μαθηματικά:

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή των Μπρονξών, Νέα Υόρκη

Vladimir Dubrovsky, Επικουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιουνιόκτος:

Timothy Weber

Υπεύθυνος εικονογραφησης:

Sergey Ivanov

Σύμβουλος επι διεθνών θεμάτων:

Edward Lozansky

Σύμβουλος Συνταξης:

Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Yuli Danilov, Ερευνητής Λ' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Larissa Panyushkina, Αρχιουνιόκτης, Γραφείο Κvant

Συμβούλευτική Επιφύλη:

Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT

Linda Rosen, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Εποπτηρίου, Λίκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολγκού της Βοστονής, Μποστονόπολη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγητής Μαθηματικών, Λίκειο του Ρίβερτιέλ, Λονδίνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Parrish, Φλόριντα

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης Διευθυντής:

Αλέκος Μαραλής

Μετάφραση και Εποπτηρίκη επεργεία:

Σ' αυτό το τεύχος συνεργόπικου οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός, Γιώργος Μπαρουζης -
Μαριανθή Πετράκη -φυσικός, Μιχάλης Λαμπρου -μαθηματικός, Κώστης Σκανδάλης -μαθηματικός,
Παναγιώτης Τασιόπουλος, Γιώργος Κυριακοπούλος και Αλέκος Μαραλής -φυσικός

Γλωσσική επεργεία:

G. Κυριακοπούλος

Τυπογραφική διορθώση:

Π. Τασιόπουλος

Τυπωματική επεργεία:

Πρ. Νιούσης

Ειδικός συνεργάτης:

Γιώργος Ευαγγελοπούλος

Υπεύθυνη λογοτύπου:

Μαρία Μαραλή

Εποπτηρικοί σύμβουλοι:

Μιχάλης Λαμπρου, Λαναπλάττης Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επικουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Εποπτηρίου Α' Βαθμίδας, Ιερουρα Τεχνολογίας και Ερευνας

Θεοδοσίης Χριστοδούλακης, Επικουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση:

Δ. Τερπονέρα

Φωτ., μονταζ.

Γ. Κεραμας

Εκτυπωση

Τετραχωρία

Βαθμοβούλευση

Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδοσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Α. Μαραλής

Quantum, διετονιο περιοδικό, ISSN: 1106-2681.

Copyright © για την ελληνική έκδοση: Α. Μαραλής,

Διαφημιστική και κεντρική διοίκηση: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Ιουνίου 10 και Δοφνομήλη, 114 71 Αθηνα.

τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.

Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρεοπαγίου (Πανεπιστήμιο 49),

105 64 Αθηνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απογραφείται η ημιανατολική μετάβοση με αποιοδη-

ποτε μεσον ήλιου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την

έγγραφη αδεια του τεύχους.

Τιμή καθημερινής σύμφωνα με την έκδοση: 1.500 δρχ.

Ετησια συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιωτικ, 14.000 δρχ. για

βιβλιοθήκης, ιδρυματ και οργ

Το μυστήριο της Αφροδίτης

Καθώς προτού νυκτώσῃ, μέσα εις τον κυανόχροον αιθέρα,
μόνος φαίνεται λάμπων γλυκύς ο αστέρας της Αφροδίτης

—Ανδρέας Κάλβος, «Εις Σάμον»

Vladimir Surdin

ΟΤΑΝ Ο ΤΙΤΛΟΣ ΕΝΟΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΥ άρθρου που απευθύνεται στο ευρύ κοινό περιλαμβάνει τη λέξη «μυστήριο», μπαίνει κανείς στον πειρασμό να γυρίσει στην τελευταία του σελίδα και να διαβάσει την απάντηση. Στην προκειμένη περίπτωση, όμως, μην κάνετε τον κόπο — το συγκεκριμένο αστρονομικό παράδοξο δεν έχει διαλευκανθεί ακόμη. Σκοπός αυτού του άρθρου είναι να σας πληροφορήσει οχεικά με το εν λόγω πρόβλημα — μπορεί εσείς να είστε εκείνος που θα κατορθώσει να το επιλύσει.

Το αίμυγμα της περιστροφής της

Γνωρίζουμε ότι η Αφροδίτη μοιάζει με τον πλανήτη μας ως προς τη μάζα και το μέγεθος. Ωστόσο, βρίσκεται κάπως πλησιέστερα στον Ήλιο και εκτελεί μία πλήρη περιφορά γύρω του σε 224,7 ημέρες (σε ολόκληρο το άρθρο, η λέξη «ημέρες» θα σημαίνει «γήινες ημέρες»). Άλλα δύον αφορά την περιστροφή της Αφροδίτης γύρω από τον άξονά της, οι αστρονόμοι δεν γνώριζαν τίποτε για πολύ καιρό, διότι οι λεπτομέρειες της επιφάνειας του πλανήτη δεν είναι ορατές μέσα από την πυκνή ατμόσφαιρά του. Μόνο με τη βοήθεια του ραντάρ κατέστη δυνατόν να διακρίνουμε τι υπάρχει κάτω από τα στρώματα νεφών του πλανήτη και να διαπιστώσουμε ότι κινείται γύρω από τον πολικό άξονά του με πολύ μικρή ταχύτητα και με

φορά αντίθετη από εκείνη της τροχιακής περιφοράς του, εκτελώντας μια πλήρη στροφή γύρω από τον εαυτό του σε 243 ημέρες. Από αυτή την άποψη, η Αφροδίτη διαφέρει εντυπωσιακά από τους συγγενικούς της πλανήτες (τη Γη και τον Άρη), στους οποίους η ημερήσια περιστροφή έχει την ίδια φορά με την τροχιακή περιφορά, και βέβαια η περίοδος περιστροφής είναι πολύ μικρότερη (μία ημέρα, κατά προσέγγιση).

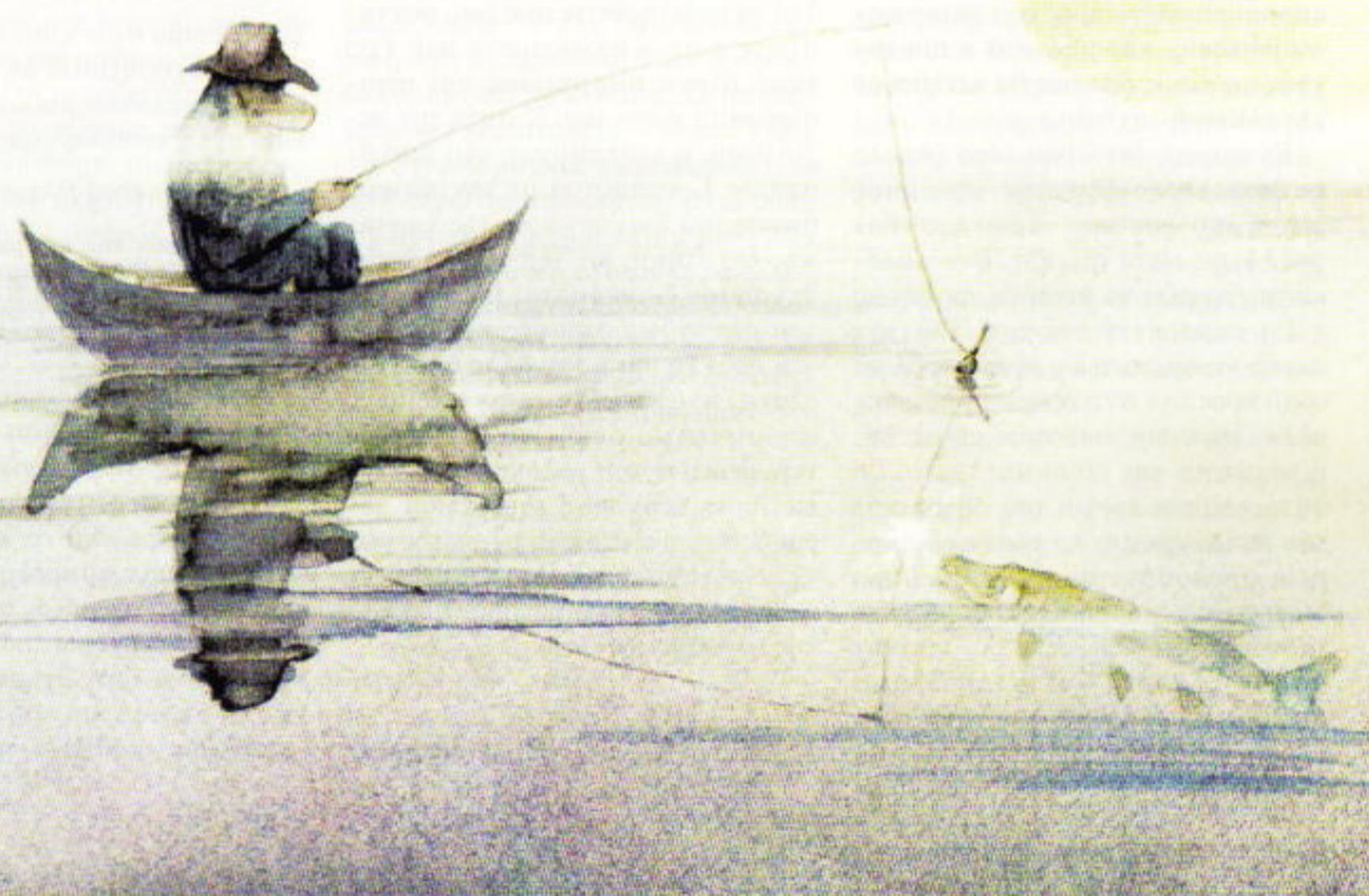
Η Αφροδίτη, όμως, μας επιφύλασσε άλλη μια έκπληξη. Καθώς οι αστρονόμοι παρατηρούσαν την κίνηση των νεφών στην ατμόσφαιρά της, είδαν ότι τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας κινούνταν ανεξάρτητα, ξεχωριστά από τον πλανήτη, με την ίδια φορά αλλά με πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα — συμπλήρωναν μία στροφή σε τέσσερις μόλις ημέρες. Έχετε κατά νου ότι η ατμόσφαιρα της Αφροδίτης είναι σημαντικά βαρύτερη και πυκνότερη από τη γήινη. Όπως ήταν φυσιολογικό, μερικοί επιστήμονες μπήκαν στον πειρασμό να εξηγήσουν την παράδοξη περιστροφή της Αφροδίτης μέσω της αλληλεπίδρασης του πλανήτη με τη μεγάλης μάζας ατμόσφαιρά του.

Για παράδειγμα, ένα χειρόγραφο που απεστάλη κάποτε σ' ένα περιοδικό είχε τον τίτλο: «Η ατμόσφαιρα της Αφροδίτης είναι μια γιγάντια θερμική μηχανή». Οι ουντάκιες της εργασίας υποστήριζαν ότι η ατμό-

σφαιρα της Αφροδίτης, απορροφώντας τη θερμότητα του Ήλιου, θα μπορούσε να επηρεάσει την περιστροφή του πλανήτη. Για να αποδείξουν τον ισχυρισμό τους, έκαναν την ακόλουθη εκύμηση. Η ισχύς της ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει στην ατμόσφαιρα της Αφροδίτης είναι περίπου 10^{17} W. Εποι, ο πλανήτης προσέλαβε ενέργεια 10^{34} J κατά την εξέλιξή του (που διέρκεσε δισκατομμύρια χρόνια). Αν η Αφροδίτη περιστρεφόταν όπως η Γη (δηλαδή με περίοδο 24 ωρών), η περιστροφική κινητική ενέργεια της θα ήταν περίπου 10^{29} J. Προφανώς η ατμόσφαιρα της Αφροδίτης έχει προσλάβει αρκετή ηλιακή ενέργεια ώστε να διακόψει πολλές φορές την περιστροφή του πλανήτη και να τον θέσει πάλι σε περιστροφή με την αντίθετη φορά. Οι ουντάκιες του χειρογράφου ήταν μάλλον πεπεισμένοι ότι αυτή η εκτίμηση αποδείκνυε την υπόθεσή τους. Εσείς συμφωνείτε;

Οι τρεις «στυλοβάτες της μηχανικής»

Πώς επαληθεύει κανείς μια νέα ιδέα; Αν είναι φυσικός, κατ' αρχάς οκέφιεται τους νόμους διατήρησης. Στο πρόβλημα της περιστροφής της Αφροδίτης, ο νόμος διατήρησης της ενέργειας οπωσδήποτε δεν παραβιάζεται. Ποιες άλλες ποσότητες πρέπει να διατηρούνται; Δύο: η γραμμική



ορμή (ή απλώς ορμή) και η στροφορμή. Ολόκληρη η κλασική μηχανική στηρίζεται σ' αυτούς τους τρεις «στυλοβάτες». Αφού εξετάζουμε την περιστροφή της Αφροδίτης, οσφώς ενδιαφέρομαστε ιδιαίτερα για τη στροφορμή.

Η ιδιότητα ενός σώματος να διατηρεί την περιστροφή του ή να τη μεταδίδει σε άλλα αντικείμενα χαρακτηρίζεται από τη στροφορμή του. Η στροφορμή και η γραμμική ορμή έχουν πολλά κοινά γνωρίσματα.

Γενικά οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τη γραμμική ορμή, η οποία τους παλιούς καιρούς ήταν γνωστή ως «ποσότητα κίνησης». Πρόκειται για ένα διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος και ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητά του:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1)$$

Η συνολική γραμμική ορμή ενός συστήματος σωμάτων, ενός συνόλου σωμάτων που αλληλεπιδρούν, διαιτηρείται σταθερή. Ένα από τα πολλά παραδείγματα αποτελεί η βουτιά από μια βάρκα. Όταν πηδάτε προς μια κατεύθυνση, η βάρκα κινείται προς την αντίθετη. Την ιοχύ του νόμου μπορείτε να την παρατηρήσετε εύκολα και σ' ένα παγοδρόμιο: φορέστε μαζί με έναν φίλο σας τα παγοπέδιλά σας, σταθείτε δίπλα δίπλα πάνω στον πάγο, και οπρώξτε ο ένας τον άλλο· θα απομακρυνθείτε προς αντίθετες κατεύθυνσεις, και μάλιστα ο πιο ισχνός από τους δυο σας θα κινηθεί με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Εντούτοις, δεν είναι τόσο εύκολο να παρατηρήσουμε την εφαρμογή αυτού του φυσικού νόμου στο έδαφος. Αιτία είναι η τριβή. Ένα αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται, εντούτοις η Γη παραμένει ακίνητη. Για την ακρίβεια, όμως, η Γη προσλαμβάνει ορμή προς την αντίθετη κατεύθυνση, αλλά, λόγω της τεράστιας μάζας της, η ταχύτητά της είναι αμελητέα. Γι' αυτό, όταν οι τροχοί του αυτοκινήτου «σπρώχνουν» το οδόστρωμα, εμείς αμελούμε τον εν λόγω νόμο διατήρησης: η ορμή ανάκρουσης μεταφέρεται στο έδαφος, αλλά η κίνηση του πλανήτη δεν μεταβάλλεται αισθητά· στην πραγματικότητα, η Γη παραμένει ένα βολικό σύστημα ανα-

φοράς. Αν γνωρίζουμε την ιοχύ του κινητήρα και τη μάζα του αυτοκινήτου, είναι εύκολο να υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται για να επιταχυνθεί μέχρι μια συγκεκριμένη ταχύτητα. Προς τούτο χρησιμοποιούμε μόνο το νόμο διατήρησης της ενέργειας και αγνοούμε το νόμο διατήρησης της ορμής.

Από αυτή την άποψη, επομένως, το εξώτερο Διάστημα μοιάζει μάλλον με παγοδρόμιο: σ' αυτό το χώρο, δεν πρέπει να αγνοούμε την ορμή! Ιδού ένα παράδειγμα: αν ο πυρηνικός κινητήρας ενός διαστημοπλοίου μάζας m αναπτύσσει ιοχύ W , ποια θα είναι η επιτάχυνση του διαστημοπλοίου; Είναι εντυπωσιακό ότι αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί αν δεν γνωρίζουμε τη μάζα και την ταχύτητα της ουσίας που εκβάλλεται από τον κινητήρα. Το ζήτημα είναι ότι η ιοχύς του κινητήρα δεν δαπανάται μόνο στην ώθηση του πυραύλου προς τα εμπρός, αλλά, επίσης, στην επιτάχυνση της εκβαλλόμενης ουσίας (πλάσματος, πθανόν) προς την αντίθετη κατεύθυνση. Σ' αυτή τη διαδικασία, τόσο ο πύραυλος όσο και η εκβαλλόμενη ουσία έχουν ίσες (κατά μέτρο) ορμές! Στο εξώτερο Διάστημα, η διατήρηση της ορμής είναι άκρως σοβαρό θέμα.

Εξίσου σημαντικός είναι ο νόμος διατήρησης της στροφορμής \mathbf{L} , η οποία επίσης είναι διανυσματικό μέγεθος. Για να αντιληφθείτε πώς δρα, φανταστείτε κάποιο ανικείμενο που έχει έναν άξονα συμμετρίας και περιστρέφεται γύρω του. Σ' αυτή την περίπτωση, η κατεύθυνση του διανυσμάτος \mathbf{L} συμπίπτει με την κατεύθυνση του διανυσμάτος της γραμμικής ταχύτητας ω — δηλαδή, η διεύθυνση του διανυσμάτος \mathbf{L} είναι αυτή του άξονα περιστροφής και η φορά του προς τη μία ή την άλλη άκρη του άξονα, ανάλογα αν το αντικείμενο περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή με την αντίθετη (κανόνας του δεξιού χεριού). Θυμηθείτε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας (μετρούμενο σε rad/sec) συνδέεται με την περίοδο T της περιστροφής μέσω της σχέσης

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Για ένα περιστρεφόμενο σώμα, η

γραμμική ταχύτητα παίζει τον ίδιο ρόλο που διαδραματίζει το γραμμικό αντίστοιχό της, η γραμμική ταχύτητα, για ένα αντικείμενο που κινείται σε ευθεία γραμμή. Στην εξίσωση (1), η γραμμική ορμή συνδέεται με τη γραμμική ταχύτητα μέσω της αδράνειας του σώματος — δηλαδή, μέσω της μάζας του. Η στροφορμή και η γραμμική ταχύτητα σχετίζονται με παρόμοιο τρόπο, αλλά σ' αυτή την περίπτωση το μέγεθος της (γραμμικής) αδράνειας είναι η «ροπή αδράνειας» Θ :

$$\mathbf{L} = \Theta \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

Για ένα υλικό σημείο μάζας m , η ροπή αδράνειας υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$\Theta = mR^2,$$

όπου R είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής. Παρεμπιπόντως, η στροφορμή σ' αυτή την περίπτωση μπορεί να γραφτεί και με έναν άλλον τρόπο:

$$L = mR^2 \frac{2\pi}{T} = mR \frac{2\pi R}{T} = mRv, \quad (3)$$

όπου v είναι η γραμμική ταχύτητα της κυκλικής κίνησης. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι το άθροισμα των ροπών αδράνειας όλων των σωματιδίων που το συναποτελούν:

$$\Theta = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2.$$

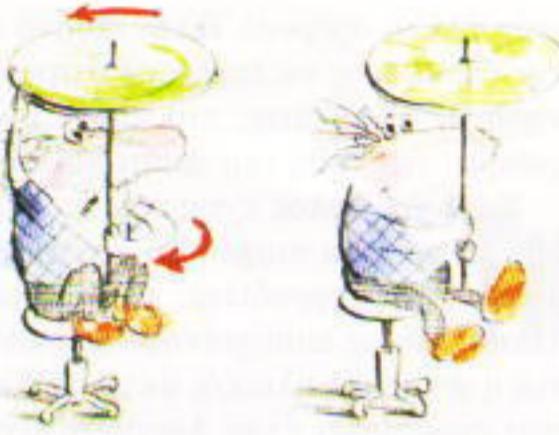
Το άθροισμα στον τύπο αυτόν μπορεί να μετασχηματιστεί σε ολοκλήρωμα των στοιχειωδών μαζών στον συνολικό όγκο του σώματος:

$$\Theta = \int R^2 dm.$$

Στον πίνακα της επόμενης σελίδας παρατίθενται τύποι για τις ροπές αδράνειας ορισμένων σωμάτων απλού σχήματος.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου εφαρμόζεται ο νόμος διατήρησης της στροφορμής.

Πρώτη περίπτωση. Καθίστε σ' ένα περιστρεφόμενο κάθισμα και κρατήστε σαν ομπρέλα έναν τροχό αρκετά μεγάλης μάζας που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του (Σχήμα 1). Προφανώς, η στροφορμή του συστήματος «άνθρωπος-κάθισμα-τροχός» είναι



Σχήμα 1



Σχήμα 3

μηδενική. Τώρα προσπαθήστε να γυρίσετε τον τροχό. Αν κάνετε κάτι τέτοιο, θα αρχίσετε να περιστρέφεστε (μαζί με το κάθισμα) με αντίθετη φορά: η στροφορμή του τροχού αντισταθμίζεται από την αντίθετη στροφορμή του συστήματος «άνθρωπος-κάθισμα». Η συνολική στροφορμή παραμένει μηδενική.

Δεύτερη περιπτωση. Μια χορεύ-
τρια του καλλιτεχνικού πατινάζ πε-
ριστρέφεται πάνω στον πάγο με τα
χέρια της απλωμένα. Κατόπιν μα-
ζεύει απότομα τα χέρια της στο σή-
θος, οπότε αρχίζει να περιστρέφεται
πολύ ταχύτερα (Σχήμα 2). Προφα-
νώς, όταν έφερε τα χέρια της πλησιέ-
στερα στον άξονα περιστροφής μειώ-
σε τη ροπή αδράνειας του σώματός
της, με συνέπεια να αυξηθεί η γωνια-
κή ταχύτητά της ($\omega = L / \Theta$).

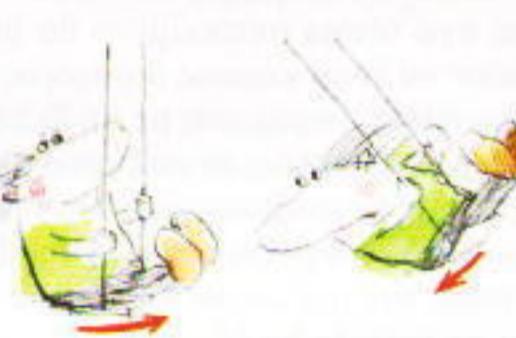
Εντούτοις, η καθημερινή εμπειρία δείχνει ότι, όσον αφορά τα σώματα πάνω στο έδαφος, ο νόμος διατήρησης της στροφορμής είναι εξίσου «ασήμαντος» όσο και ο νόμος της γραμμικής ορμής. Για παράδειγμα, ας τροποποιήσουμε το πείραμα με το περιστρεφόμενο κάθισμα: αυτή τη φορά περιστρέψτε τον τροχό γύρω από τον οριζόντιο άξονα — δηλαδή τον κάθετο στον κατακόρυφο άξονα του καθίσματος (Σχήμα 3). Στην προκειμένη περίπτωση, το κάθισμα δεν περιστρέφεται! Πού πήγε η στροφορμή;



Σχήμα 2

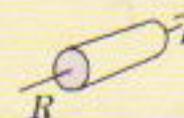
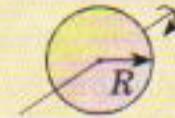
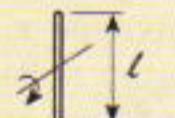


Σχήμα 4



Σχήμα 2

Πίνακας

λεπτός δακτύλιος		mR^2
στερεός κύλινδρος		$\frac{1}{2}mR^2$
δίσκος		$\frac{1}{2}mR^2$
οφαίρα		$\frac{2}{5}mR^2$
λεπτή ράβδος		$\frac{1}{12}m\ell^2$

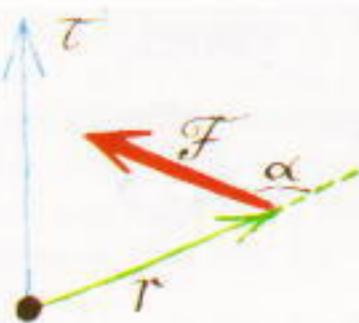
δύο έλικες που περιστρέφονται με αντίθετες φορές είτε μία έλικα που περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο και τοποθετείται στην ουρά, σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής της κύριας έλικας. Υπάρχουν, βέβαια, και άλλα τέτοια παραδείγματα στην «επίγεια» μηχανική.

Από την άλλη πλευρά, όμως, όταν καταπινόμαστε με προβλήματα του εξώτερου Διαστήματος, δεν μπορούμε να αποφεύγουμε τους νόμους διατήρησης της οικοφορμής και της γραμμικής ορμής. Αν θέλετε να στρίψετε ένα διαστημόπλοιο, πρέπει να θέσετε σε λειτουργία τους πυραύλους πλοήγησης (ο' αυτή την περίπτωση, την ορμή ανάκρουσης απάγουν τα αναφλεγόμενα καύσιμα) ή να σταματήσετε τους γυροσκοπικούς τροχούς αδράνειας, τους μεγάλης μάζας σφονδύλους που περιστρέφονται με φορά αντίθετη από εκείνη προς την οποία πρόκειται να στρίψει το διαστημόπλοιο.

Για να μεταβάλουμε την ορμή ενός σώματος, πρέπει να του ασκήσουμε δύναμη **F**: για να μεταβάλουμε, όμως, τη στροφορμή του, πρέπει να του ασκήσουμε μια ροπή στρέψης (τη ροπή της δύναμης):

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (4)$$

όπου r είναι η επιβατική ακτίνα από το σημείο περιστροφής ως το σημείο



Σχήμα 5

εφαρμογής της δύναμης¹. Εδώ έχουμε εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, επομένως λαμβάνουμε υπόψη τις διαφορετικές πιθανές κατευθύνσεις των διανυσμάτων \mathbf{r} και \mathbf{F} .

Για όσους δεν είναι εξοικειωμένοι με τα εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων, σημειώνουμε ότι το διάνυσμα της ροπής τ έχει διεύθυνση κάθετη τόσο στο διάνυσμα \mathbf{r} όσο και στο \mathbf{F} , και η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το μέτρο της δίνεται από τον τύπο

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \text{ ημά},$$

όπου a είναι η γωνία μεταξύ των \mathbf{r} και \mathbf{F} (Σχήμα 5). Η ποσότητα $d = r$ ημά ονομάζεται μοχλοβραχίονας της \mathbf{F} .

Όταν η ροπή στρέψης ασκείται σ' ένα σώμα για χρονικό διάστημα Δt , η στροφορμή του σώματος μεταβάλλεται κατά $\Delta \mathbf{L}$:

$$\Delta \mathbf{L} = \Delta \mathbf{r} \Delta t.$$

Επιπλέον, δεν πρέπει να ξεχνούμε ότι ένα περιστρεφόμενο σώμα περικλείει κινητική ενέργεια E . Αφού $\mathbf{v} = \omega R$, η τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$E_k = \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Παρατηρήστε ότι σ' αυτό τον τύπο της περιστροφικής κινητικής ενέργειας η ροπή της αδράνειας παίζει το ρόλο της μάζας στη μεταφορική κίνηση.

1. Προσέξτε ότι ο γενικός οριομός της στροφορμής ενός υλικού σημείου μοιάζει πολύ με τον οριομό της ροπής στην εξίσωση (4): $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, όπου \mathbf{r} είναι η επιβατική ακτίνα του σημείου. Στην ειδική περίπτωση υλικού σημείου που κινείται κυκλικά, παίρνουμε τον τύπο (3). Η στροφορμή ενός συστήματος υλικών σημείων είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ορμών, και για ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του καταλήγει στον τύπο (2). Γενικά, οι \mathbf{L} και ω δεν είναι παράλληλες, όμως τα σώματα που εξετάζονται εδώ (η ατμόσφαιρα ενός πλανήτη) έχουν υψηλό βαθμό συμμετρίας. Για τα αντικείμενα με σφαιρική συμμετρία, οι \mathbf{L} και ω είναι πάντα παράλληλες.

Αναζητώντας απάντηση

Τι έχουμε να πούμε όμως για το αίνιγμα με το οποίο ξεκινήσαμε το άρθρο; Τι θα μπορούσε να αλλάξει τόσο δραστικά την περιστροφή της Αφροδίτης (αν δεχτούμε πως, όταν γεννήθηκε, ήταν ένας «κανονικός» πλανήτης που περιστρεφόταν όπως η Γη ή ο Άρης); Χωρίς αμφιβολία, η ατμόσφαιρα ενός πλανήτη μπορεί να μετασχηματίζει την ενέργεια που προσλαμβάνει από τον Ήλιο σε μηχανικό έργο. Η ηλιακή ενέργεια επάγει κατακόρυφα και οριζόντια ρεύματα αέρα, που κινούν τα σύννεφα και τις θίνες της άμμου, ωθούν τα ιστιοφόρα πάνω στο νερό και περιστρέφουν τους ανεμόμυλους. Θεωρώντας όμως τον πλανήτη ως σύστημα αποτελούμενο από έναν στερεό κορμό και μια ατμόσφαιρα, πρέπει να έχουμε κατά νου τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής: ο πλανήτης και η ατμόσφαιρά του μπορούν να ανταλλάσσουν στροφορμή, αλλά είναι αδύνατον να μεταβάλουν τη συνολική ποσότητά της.

Οσο μεγάλη κι αν είναι η ατμόσφαιρα της Αφροδίτης, η μάζα της είναι ιοη μόνο με το $1/20.000$ της μάζας ολόκληρου του πλανήτη, και η αντίστοιχη ροπή αδράνειας είναι το $1/10.000$ της ροπής αδράνειας του πλανήτη. Έτσι, αν η Αφροδίτη περιστρέφοταν αρχικά με περίοδο 24 ώρων και κατόπιν πρακτικά σταμάτησε μεταδίδοντας όλη τη στροφορμή της στην ατμόσφαιρά της, η ατμόσφαιρα θα έπρεπε να κινείται γύρω από τον πλανήτη με περίοδο 24 ώρες / $10.000 = 8,6$ δευτερόλεπτα. Τόσο τεράστια ταχύτητα, όμως, είναι υπεραρκετή για να διαφύγει η ατμόσφαιρα τη βαρύτητα της Αφροδίτης και να απομακρυνθεί στο εξώτερο Διάστημα!

Συνεπώς, πρέπει να αναζητήσουμε κάποια εξωτερικά αντικείμενα με τα οποία η Αφροδίτη θα μπορούσε να ανταλλάξει στροφορμή. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο αντικείμενο θα μπορούσε να είναι κάποιος δορυφόρος της Αφροδίτης, παρόμοιος με τη Σελήνη. (Παρεμπιπόντως, οι παλιρροιες που προκαλούνται από τη Σελήνη επιβραδύνουν την περιστροφή της Γης, η οποία στο μέλλον θα είναι πολύ αργή, με περίοδο δεκάδων ημερών· αυτό όμως θα μπορούσε να είναι το θέμα

ενός άλλου άρθρου). Είναι πιθανό ενας δορυφόρος να επέδρασε στην κίνηση της Αφροδίτης, και κατόπιν να χάθηκε στα βάθη του Διαστήματος.

Υπάρχει άλλος ένας παράγοντας που μπορεί να επηρεάζει την περιστροφή της Αφροδίτης: το φως του Ήλιου. Οπως επισημάναμε παραπάνω, η ισχύς της ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει στην Αφροδίτη είναι $W = 10^{17} \text{ W}$. Έτσι, η δύναμη του φωτός που ωθεί το δίσκο του πλανήτη είναι $F = W/c = 3 \cdot 10^8 \text{ N}$. Αν η ανακλαστικότητα του δίσκου είναι ίδια σε όλη την έκτασή του, τότε (λόγω συμμετρίας) δεν θα υπάρχει ροπή στρέψης. Εντούτοις, αν υπάρχει μόνιμη ασυμμετρία της ατμόσφαιρας της Αφροδίτης μεταξύ «φωτεινού» και «σκοτεινού» ημισφαιρίου, η προσπίπτουσα ροή φωτονίων θα προσέδιδε στροφορμή στον πλανήτη.

Στην απλούστερη περίπτωση, αν το ένα ημισφαίριο ήταν μαύρο και το άλλο λευκό (απορροφώντας και ανακλώντας πλήρως το φως, αντίστοιχα), η πίεση του φωτός θα μπορούσε να περιστρέψει τον πλανήτη ώστε να αποκτήσει περίοδο λίγων ημερών. Ή, αντίστροφα, θα μπορούσε να διακόψει την περιστροφή του πλανήτη, αν είχε περίοδο λίγων ημερών. Βέβαια, η πραγματική ασυμμετρία της ατμόσφαιρας της Αφροδίτης δεν είναι τόσο δραστική, δεν παύει όμως να υφίσταται: το «φωτεινό» και το «σκοτεινό» ημισφαίριο διαφέρουν κάπως ως προς το υψόμετρο στο οποίο βρίσκονται κάποια στρώματα της ατμόσφαιρας και ως προς την ανακλαστική ικανότητά τους. Απ' ότι φαίνεται, αυτό συμβαίνει διότι η ατμόσφαιρα θερμαίνεται την ημέρα και ψύχεται τη νύχτα.

Με τη βοήθεια των απλών τύπων που περιγράφαμε σε τούτο το άρθρο μπορείτε να επινοήσετε διάφορα πιθανά σενάρια όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκε η περιστροφή της Αφροδίτης. Μην ξεχάσετε τα σωματίδια του ηλιακού ανέμου που βομβαρδίζουν τον πλανήτη —ίσως ακόμη και αυτά να μπορούν να τροποποιήσουν την περιστροφή του. Πάντως, σε καθένα από τα σενάρια σας, η συνολική στροφορμή όλων των αλληλεπιδρώντων μερών πρέπει να διατηρείται σταθερή με απόλυτη αυτηρότητα!

Για να περνά η ώρα

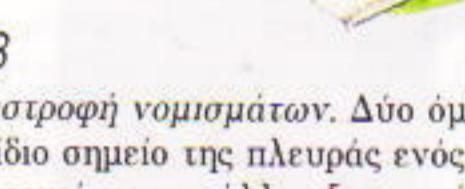
Σ71

Αναδιάταξη νομισμάτων. Δέκα νομίσματα σχηματίζουν ένα ιοδόπλευρο τρίγωνο που «δείχνει» προς τα κάτω. Μετακινήστε τρία νομίσματα έτοι μόντε το τρίγωνο να «δείχνει» προς τα πάνω. (A. Khalamaizer)



Σ72

Μια ακατάστατη βιβλιοθήκη. Υπήρχε ένας οωρός βιβλίων πάνω σ' ένα τραπέζι. Τράβηξα προσεκτικά ένα βιβλίο από τη μέση του σωρού, και παρατίθησα ότι τα βιβλία που υπήρχαν από πάνω του μετακινήθηκαν μαζί του, ενώ όσα βρίσκονταν από κάτω του έμειναν στη θέση τους. Γιατί; (A. Savin)



Σ73

Περιστροφή νομισμάτων. Δύο όμοια νομίσματα εφάπιονται στο ίδιο σημείο της πλευράς ενός ορθογωνίου — το ένα εσωτερικά και το άλλο εξωτερικά. Κυλάμε τα δύο νομίσματα κατά μήκος της περιμέτρου του ορθογωνίου μέχρι να επιστρέψουν στην αρχική τους θέση. Το πλάτος του ορθογωνίου είναι διπλάσιο της περιμέτρου των νομισμάτων, ενώ το μήκος του είναι διπλάσιο του πλάτους του. Πόσες φορές θα περιστραφεί κάθε νόμισμα;



Σ74

Οικογενειακό σκάκι. Δύο από τα μέλη μιας οικογένειας που οργάνωσε ένα τουρνουά σκακιού ήταν δίδυμοι. Οι παίκτες ήταν η μητέρα, ο αδελφός της, η κόρη της και ο γιος της. Γνωρίζουμε ότι ο νικητής είχε την ίδια ηλικία με τον «ηττημένο» (τον παίκτη που ήταν τελευταίος στην τελική κατάταξη) και αντίθετο φύλο από τον δίδυμο του ηττημένου. Ποιος κέρδισε το τουρνουά; (A. Savin)



Σ74

Οικογενειακό σκάκι. Δύο από τα μέλη μιας οικογένειας που οργάνωσε ένα τουρνουά σκακιού ήταν δίδυμοι. Οι παίκτες ήταν η μητέρα, ο αδελφός της, η κόρη της και ο γιος της. Γνωρίζουμε ότι ο νικητής είχε την ίδια ηλικία με τον «ηττημένο» (τον παίκτη που ήταν τελευταίος στην τελική κατάταξη) και αντίθετο φύλο από τον δίδυμο του ηττημένου. Ποιος κέρδισε το τουρνουά; (A. Savin)

Σ75

Αναποδογύρισμα νομισμάτων. Τοποθετούμε επιά νομίσματα κυκλικά με την κεφαλή προς τα πάνω. Επιτρέπεται να αναποδογυρίσουμε πέντε διαδοχικά νομίσματα. Είναι δυνατόν να καταφέρουμε, εφαρμόζοντας αυτή την πράξη επαναληπτικά, να αναποδογυρίσουμε και τα επιά νομίσματα ώστε να δείχνουν όλα γράμματα;



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Άπειρη κάθοδος

Μια μέθοδος για να φτάσουμε στη ρίζα πολλών προβλημάτων

Lev Kurlyandchik και Grigory Rozenblume

ΠΟΙΟΣ ΑΡΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΙΝΑΙ ο «αρχαιότερος»; Αναμφίβολα, το $\sqrt{2}$. Δεν γνωρίζουμε με ακριβεία ποιος ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι είναι άρρητος, πάντως συγκαταλέγεται μεταξύ των πυθαγορείων και ενδεχομένως ήταν ο Ίππαος. Δεν είμαστε βέβαιοι για το επιχείρημά του, αλλά ένα αρχαίο σχόλιο στο κείμενο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είναι έναυσμα για την παρακάτω απόδειξη.

Η πρώτη απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός. Από γεωμετρική απόψη, αυτό σημαίνει ότι το μήκος c της διαγωνίου ενός τετραγώνου είναι σύμμετρο με το μήκος a της πλευράς του — δηλαδή, ότι υπάρχουν ακέραιοι m, n και ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους d , έτσι ώστε $c = dm, a = dn$. Θεωρούμε $m - 1$ ισαπέχοντα σημεία στη διαγώνιο AC και $n - 1$ ισαπέχοντα σημεία στην πλευρά DC ενός τετρα-

γώνου $ABCD$ (Σχήμα 1). Θεωρούμε το τμήμα $AK = AD$ πάνω στη διαγώνιο και το τμήμα $DE = KC$ στην πλευρά DC . Τα άκρα τους K και E θα συμπίπτουν με κάποια από τα σημεία που θεωρήσαμε προηγουμένως. Ας αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ACD και KEC είναι όμοια μεταξύ τους. Αφού έχουν κοινή την γωνία C , αρκεί να δείξουμε ότι $KC/EC = CD/AC$.

Παρατηρούμε ότι $KC = c - a$ και $EC = a - (c - a) = 2a - c$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $c/a = \sqrt{2}$, έχουμε

$$\frac{KC^2}{EC^2} = \frac{c^2 + a^2 - 2ac}{c^2 + 4a^2 - 4ac} = \frac{3a^2 - 2ac}{6a^2 - 4ac} = \frac{1}{2} = \frac{CD^2}{AC^2}.$$

Έτσι, το τρίγωνο KEC , όπως και το DAC , είναι ένα ιοοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, και μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη κατασκευή στις πλευρές του CE και CK . Θεωρώντας ένα σημείο K_1 της CE τέτοιο ώστε $EK_1 = KC$, και ένα σημείο E_1 της CK τέτοιο ώστε $KE_1 = CK_1$. Αυτά τα σημεία θα είναι και πάλι σημεία διαιρεσης, το τρίγωνο K_1CE_1 θα είναι και πάλι ιοοσκελές ορθογώνιο, και η κατασκευή μας μπορεί να επαναληφθεί για μία ακόμη φορά αν δημιουργήσουμε ένα ακόμη όμοιο τρίγωνο K_2CE_2 . Αυτή η διαδικασία είναι δυνατόν να συνεχιστεί επ' απειρον. Τα δημιουργούμενα τρίγωνα K_iCE_i είναι όλοι και μικρότερα, ενώ τα σημεία K_i ,

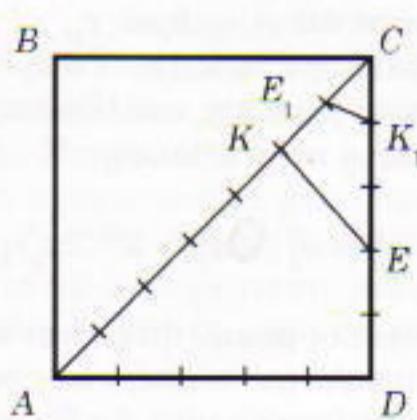
E_i συμπίπτουν πάντοτε με κάποια σημεία της αρχικής διαιρεσης. Το πλήθος αυτών των σημείων, όμως, είναι πεπερασμένο, ενώ το πλήθος των τριγώνων K_iCE_i είναι άπειρο! Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Οι αιώνες πέρασαν. Και επινοήθηκε μια αλγεβρική — και ίσως απλούστερη — απόδειξη, την οποία παραθέτει ο Αριστοτέλης στα *Αναλυτικά Πρότερα*. Η ακόλουθη είναι παραλλαγή της.

Η δεύτερη απόδειξη

Η απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος ισοδυναμεί με την απόδειξη ότι η εξίσωση $x^2 = 2y^2$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τέτοιες λύσεις και ότι $x = m, y = n$ είναι μια από αυτές.

Από την εξίσωση έπειτα ότι m είναι άρτιος, και επομένως μπορούμε να γράψουμε $m = 2m_1$, για κάποιο ακέραιο m_1 . Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση, παίρνουμε $n^2 = 2m_1^2$ — δηλαδή, η $x = n, y = m_1$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης. Παρατηρούμε ότι αυτή η δεύτερη λύση είναι «μικρότερη» από την πρώτη: $n < m, m_1 < n$. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα και να βρούμε μια τρίτη λύση $x = m_1, y = n_1$ (όπου $2n_1 = n$), η οποία είναι ακόμη «μικρότερη» από τη δεύτερη: $m_1 < n, n_1 < m_1$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε σε λύσεις της εξίσωσης που μειώνονται συνεχώς. Ωστόσο,



Σχήμα 1

βρίσκουμε και πάλι μπροστά μας μια αντίφαση! Όλοι οι αριθμοί m, n, m_1, n_1, \dots είναι θετικοί ακέραιοι και φθίνουν γνήσια — $m > n > m_1 > n_1 > \dots$. Εντούτοις, είναι αδύνατον να υπάρξει άπειρη φθίνουσα ακολουθία θετικών ακέραιων. Επομένως, η αρχική μας υπόθεση είναι εσφαλμένη και ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Οι δύο αποδείξεις ακολουθούν συστατικά το ίδιο οχήμα. Υποθέτοντας ότι το πρόβλημα έχει λύση κατακευάζουμε μια ουγκεκριμένη άπειρη διαδικασία η οποία, από τη φύση της, πρέπει να τερματιστεί σ' ένα ουγκεκριμένο σημείο. Αυτή η μέθοδος απόδειξης ονομάζεται μέθοδος της άπειρης καθόδου.¹

Συχνά, χρησιμοποιείται μια απλούστερη μορφή αυτής της μεθόδου. Υποθέτουμε ότι έχουμε ήδη φτάσει στο φυσιολογικό σημείο τερματισμού της διαδικασίας και επιβεβαιώνουμε ότι «είναι αδύνατον να σταματήσουμε» σ' αυτό.

Η τρίτη απόδειξη

Έστω $x = m, y = n$, η λύση της εξισώσης $x^2 = 2y^2$ με το ελάχιστο δυνατό x . Ο αριθμός m πρέπει να είναι άρτιος, επομένως μπορούμε να γράψουμε $m = 2m_1$, και η $x = n, y = m_1$ είναι επίσης λύση. Ωστόσο, $m > n$, και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή της λύσης (m, n) ως «ελάχιστης».

Αυτή η παραλλαγή της απόδειξης αποκαλύπτει ότι η μέθοδος της καθόδου συνδέεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Και οι δύο βασίζονται στο γεγονός ότι κάθε μη κενό σύνολο θετικών ακέραιων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.² Η μέθοδος της καθόδου είναι εξαιρετικά χρήσιμη στις απόδειξεις θεωρημάτων που βεβαιώνουν ότι κάποια κατάσταση είναι αδύνατη.

Ας εξετάσουμε τώρα μερικά παρα-

1. Η μέθοδος αυτή ανακαλύφθηκε από τους αρχαίους Έλληνες. Έχουμε βάσιμους λόγους να πιστεύουμε ότι ήταν η μέθοδος την οποία προσπάθησε να εφαρμόσει ο Fermat στο Μεγάλο Θεώρημά του.

2. Μια άλλη μέθοδος, που συνδέεται ακόμη στενότερα με την άπειρη κάθοδο, περιγράφηκε και οχολιάστηκε σε προηγούμενο τεύχος του *Quantum*: είναι η μέθοδος των μονομεταβλητών (δείτε το άρθρο «Φως στην άκρη του τούνελ» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1994).

δείγματα που προβάλλουν την ποικιλία των εφαρμογών της άπειρης καθόδου.

ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ένα από τα πεδία στα οποία εφαρμόζεται συχνότερα η εν λόγω μέθοδος είναι η εύρεση ακέραιων λύσεων εξισώσεων, των λεγόμενων διοφαντικών.

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι η εξισώση

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$$

δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν λύσεις. Έστω $x = m, y = n, z = p, t = r$ η λύση με το ελάχιστο δυνατό x . Από την εξισώση έπειτα ότι ο r είναι άρτιος: έστω λοιπόν $r = 2r_1$. Αν ανικαταστήσουμε στην εξισώση και διαιρέσουμε με 2, παίρνουμε

$$4m^4 + 2n^4 + p^4 = 8r_1^4.$$

Τώρα βλέπουμε ότι ο p είναι άρτιος, οπότε έστω $p = 2p_1$. Τότε,

$$2m^4 + n^4 + 8p_1^4 = 4r_1^4.$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: $n = 2n_1$,

$$m^4 + 8n_1^4 + 4p_1^4 = 2r_1^4.$$

Τότε, $m = 2m_1$,

$$8m_1^4 + 4n_1^4 + 2p_1^4 = r_1^4,$$

και έχουμε καταλήξει σε μια λύση, $x = m_1, y = n_1, z = p_1, t = r_1$, με μικρότερο x : $m_1 < m$! Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την αρχική επιλογή μας της «ελάχιστης» λύσης.

Το επόμενο πρόβλημα είναι λίγο δυσκολότερο.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι η εξισώση

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$$

δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

Λύση. Έστω x, y, z, u μια λύση της εξισώσης μας. Αφού το αριστερό μέλος, $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$, είναι άρτιος αριθμός, το πλήθος των περιττών αριθμών μεταξύ των x, y, z, u πρέπει να

είναι άρτιο — δηλαδή, τέσσερις, δύο, η μηδέν. Αν είναι όλοι περιττοί, το αριστερό μέλος της εξισώσης θα διαιρείται με το 4, ενώ το δεξιό όχι. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\{x, y, z, u\}$ περιέχει δύο μόνο περιττούς αριθμούς. Η ταυτότητα $(2k+1)^2 + (2n+1)^2 = 4(k^2 + n^2 + k + n) + 2$ μας δείχνει ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο περιττών αριθμών αφήνει υπόλοιπο 2 όταν διαιρείται με το 4. Στο αριστερό μέλος της εξισώσης προσθέτουμε δύο τετράγωνα περιττών και δύο τετράγωνα αρτιών (που είναι πολλαπλασία του 4), επομένως το υπόλοιπο της διαιρεούσης αυτού του μέλους με το 4 εξακολουθεί να είναι 2. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό μέλος της εξισώσης μας δεν είναι πολλαπλασίο του 4, ενώ το δεξιό μέλος είναι. Άρα, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο ακριβώς περιττοί μεταξύ των x, y, z και u . Όλοι οι αριθμοί, λοιπόν, είναι άρτιοι: $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1, u = 2u_1$. Ανικαθιστούμε αυτές τις τιμές στην εξισώση και διαιρούμε με το 4:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1.$$

Βλέπουμε και πάλι ότι οι αριθμοί δεν μπορεί να είναι όλοι περιττοί (διαφορετικά, το αριστερό μέλος δεν θα διαιρούνταν με το 8). Επισης, δεν είναι δυνατόν να είναι οι δύο ακριβώς περιττοί, διότι σ' αυτή την περίπτωση το αριστερό μέλος δεν θα διαιρούνταν ούτε καν με το 4. Και πάλι, λοιπόν, είναι όλοι άρτιοι: $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2, u_1 = 2u_2$. Έπειτα από μία ακόμη αντικατάσταση και απλοποίηση προκύπτει

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ίδια επιχειρηματολογία όπως προηγουμένως, θα βρούμε ότι οι αριθμοί x_2, y_2, z_2, u_2 είναι όλοι άρτιοι, κ.ο.κ. Ύστερα από το k -οστό βήμα της ακολουθίας καταλήγουμε στην εξισώση

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + u_k^2 = 2^{2k+1}x_ky_kz_ku_k,$$

όπου όλες οι μεταβλητές είναι άρτιοι ακέραιοι. Αυτοί οι ακέραιοι προκύπτουν αν διαιρέσουμε διαδοχικά με το 2 τους αριθμούς της αρχικής λύσης. Συνεπώς, οι αριθμοί $x/2^k, y/2^k$,

$z/2^k$, $u/2^k$ είναι ακέραιοι για κάθε $k \geq 0$. Και τόύτο, φυσικά, είναι αδύνατον.

Η επόμενη εξίσωση έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αλλά μπορούμε να τη διερευνήσουμε με την ίδια μέθοδο.

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλες τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Λύση: Μπορούμε εύκολα να μαντέψουμε μια λύση της δεδομένης εξίσωσης: $x_1 = 3$, $y_1 = 2$. Από την ταυτότητα

$$(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2,$$

έπειτα ότι, αν x, y είναι μια λύση της εξίσωσης, τότε το ζεύγος $3x + 4y$, $2x + 3y$ είναι επίσης λύση. Ετσι, καταλήγουμε σε μια άπειρη ακολουθία λύσεων:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17, \\ y_2 &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12, \\ x_3 &= 99, y_3 = 70, \end{aligned}$$

κ.ο.κ. Ας αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί που να ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

Θεωρούμε μια λύση x, y . Τότε, η $3x - 4y$, $3y - 2x$ είναι επίσης λύση (αυτό προκύπτει από την προηγούμενη ταυτότητα αν αλλάξουμε το πρόσημο του y). Παρατηρούμε ότι $9x^2 - 16y^2 > 9x^2 - 18y^2 = 9$, οπότε $9x^2 - 16y^2 > 0$ — πράγμα που σημαίνει ότι $3x > 4y$. Παρόμοια, για $y > 2$ έχουμε $4x^2 - 8y^2 = 4 < y^2$, επομένως $4x^2 < 9y^2$ και $2x < 3y$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η λύση x, y (με $y > 2$) μετασχηματίζεται από τους τύπους μας σε μια άλλη θετική ακέραια λύση $x^{(1)}, y^{(1)}$. Επιπλέον, από τις προφανείς ανισότητες $y^2 < 1 + 2y^2 = x^2 < 4y^2$, ή $y < x < 2y$, έπειτα ότι $x^{(1)} < x$, $y^{(1)} < y$ (αφήνουμε τον αναγνώστη να επαληθεύσει την τελευταία πρόταση). Μπορούμε τώρα, εφόσον $y^{(1)} > 2$, να σχηματίσουμε μια τρίτη λύση $x^{(2)}, y^{(2)}$, κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον — δηλαδή, σε κάποιο βήμα θα φτάσουμε σε μια λύση $x^{(n)}, y^{(n)}$ με $y^{(n)} \leq 2$. Αφού $y^{(n)} \neq 1$ (διότι, διαφορετικά, $(x^{(n)})^2 = 1 + (y^{(n)})^2 = 3$), πρέπει να έχουμε $y^{(n)} = 2$. Τότε, $x^{(n)} = 3$, άρα το ζεύγος x, y

ανήκει στην αρχική μας ακολουθία λύσεων.

Συνδυαστικά προβλήματα

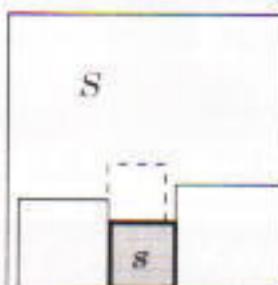
Πρόβλημα 4. Έχουμε $2p + 1$ βάρη, όλες οι μάζες των οποίων είναι ίσες με ακέραιο πλήθος γραμμαρίων. Οποιαδήποτε $2p$ από αυτά τα βάρη μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες ίσου πλήθους (από p βάρη η καθεμία) και ίσης συνολικής μάζας. Αποδείξτε ότι όλα τα βάρη έχουν ίσες μάζες.

Λύση. Η συνολική μάζα οποιωνδήποτε $2p$ βαρών είναι άριθμος αριθμός γραμμαρίων, οπότε οι μάζες είναι είτε όλες άρτιες είτε όλες περιττές (ανάλογα με το αν η συνολική μάζα των $2p + 1$ βαρών είναι άρτια ή περιττή). Αφαιρούμε από κάθε μάζα τη μάζα του μικρότερου βάρους (ή βαρών, αν είναι περιοσότερα). Τώρα, μερικά από τα βάρη θα έχουν μηδενική μάζα, ενώ μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το νέο σύστημα βαρών ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Αφού μερικές από τις νέες μάζες είναι μηδενικές, θα είναι όλες άρτιες. Αν τις υποδιπλασιάσουμε, θα πάρουμε ένα σύστημα βαρών που ικανοποιεί τη συνθήκη μας. Στο νέο σύστημα εξακολουθούν να υπάρχουν μηδενικές μάζες, επομένως όλες οι νέες μάζες είναι άρτιες, και μπορούμε και πάλι να τις υποδιπλασιάσουμε. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον, πράγμα που είναι δυνατόν μόνο αν όλες οι μάζες είναι μηδενικές. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι οι αρχικές μάζες ήταν ίσες μεταξύ τους.

Ας εξετάσουμε τώρα ένα πρόβλημα συνδυαστικής γεωμετρίας.

Πρόβλημα 5. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε έναν κύβο σε μερικούς διαφορετικούς κύβους; (Οι κύβοι θεωρούνται διαφορετικοί αν τα μήκη των ακμών τους είναι διαφορετικά.)

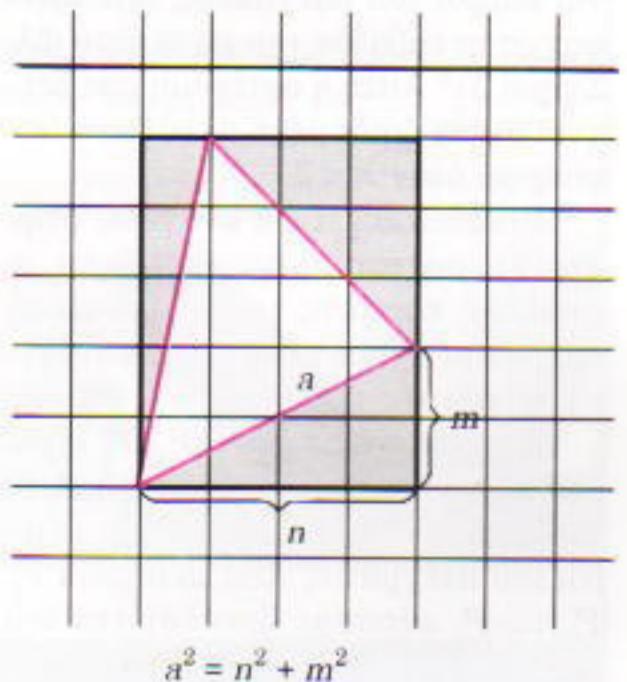
Λύση. Ξεκινάμε παρατηρώντας



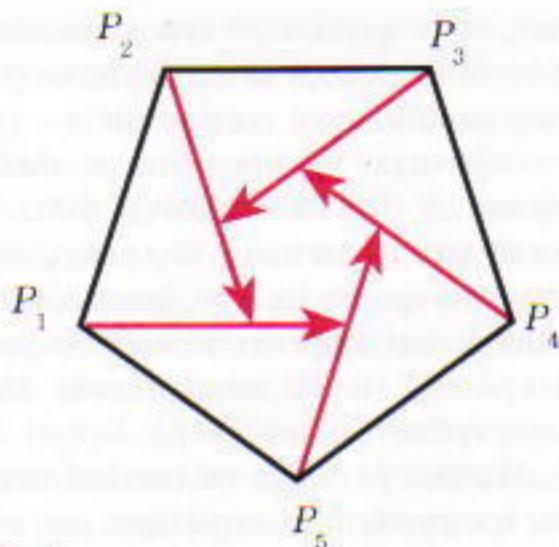
Σχήμα 2

πώς, όταν χωρίζουμε ένα τετράγωνο S σε διαφορετικά τετράγωνα, το μικρότερο από αυτά —ας πούμε, s — είναι αδύνατον να συνορεύει με πλευρά του S . Τούτο συμβαίνει διότι ο αυτή την περίπτωση το τετράγωνο που συνορεύει με την «εσωτερική» πλευρά του s πρέπει να είναι ακόμη μικρότερο (αφού περιορίζεται από τους «γείτονες» του s —βλ. Σχήμα 2).

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι η απάντηση στο ερώτημά μας είναι αρνητική. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταφέρει να χωρίσουμε έναν κύβο Q σε διαφορετικούς κύβους Q . Ας θεωρήσουμε μια έδρα του κύβου Q —ας πούμε, τη βάση S . Οι κύβοι Q που στηρίζονται στη βάση ορίζουν μια διαμέριση του S σε διαφορετικά τετράγωνα. Εστω S_1 το μικρότερο από αυτά, και Q_1 ο αντίστοιχος κύβος. Αφού το S_1 δεν συνορεύει με πλευρά του S , περιβάλλεται από μεγαλύτερα τετράγωνα. Οι αντίστοιχοι κύβοι σχηματίζουν ένα «πηγάδι», στον πυθμένα του οποίου βρίσκεται ο κύβος Q_1 . Επομένως, οι κύβοι που συνορεύουν με την πάνω βάση S'_1 του Q_1 ορίζουν μια διαμέριση σε διαφορετικά τετράγωνα της S'_1 . Το μικρότερο από αυτά, S_2 , ανήκει εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του S'_1 , οπότε ο αντίστοιχος κύβος Q_2 είναι μικρότερος του Q_1 και βρίσκεται στον πυθμένα του επόμενου «πηγαδιού». Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί ώστε να προκύψει ένας άπειρος «πύργος» από μια φθίνουσα ακολουθία κύβων, πράγμα που είναι αδύνατον.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι ένα παρόμοιο επιχείρημα θα μπορούσε να εφαρμοστεί στη διαμέριο της τετράγωνου σε μικρότερα τετράγωνα. Στην πραγματικότητα, όμως, δεν είναι δυνατόν. Γιατί;

Ολοκληρώνουμε με ένα πρόβλημα που έχει ήδη εμφανιστεί στο *Quantum*, σε διαφορετικές περιστάσεις (και έχει αντιμετωπιστεί με διαφορετικές μεθόδους).

Πρόβλημα 6. Αποδείξτε ότι για $n \neq 4$, είναι αδύνατον να σχεδιάσουμε ένα κανονικό n -γωνο σ' ένα τετραγωνικό πλέγμα έτσι ώστε οι κορυφές του να συμπίπτουν με τους κόμβους του πλέγματος.

Λύση. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση ενός κανονικού (ισόπλευρου) τριγώνου ($n = 3$). Αν το μήκος της πλευράς του είναι a , τότε το εμβαδόν του είναι $a^2\sqrt{3}$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι το a^2 είναι ακέραιος (Σχήμα 3), επομένως το $a^2\sqrt{3}$ είναι άρρητος. Από την άλλη πλευρά, αν οι κορυφές ενός τριγώνου είναι κόμβοι του πλέγματος, τότε προφανώς το εμβαδόν του είναι ρητό (βλ. Σχήμα 3).³ Αυτή η αντίφαση μας δειχνεί ότι το ζητούμενο πολύγωνο δεν υπάρχει όταν $n = 3$.

Η περίπτωση $n = 6$ ανάγεται στην περίπτωση του τριγώνου, διότι οι εναλλάξ κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου σχηματίζουν ένα κανονικό τρίγωνο.

Ας υποθέσουμε ότι $P_1P_2\dots P_n$ είναι ένα κανονικό πολύγωνο ($n \neq 3, 4, 6$) του οποίου οι κορυφές P_i είναι κόμβοι του πλέγματος. Από τα σημεία P_1, P_2, \dots, P_n φέρουμε διανύσματα ίσα προς τα $P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_nP_1$, αντίστοι-

3. Αυτό αληθεύει για κάθε πολυγωνό στο πλέγμα.

χα (Σχήμα 4). Τα άκρα αυτών των διανύσματων θα συμπίπτουν με κόμβους του πλέγματος και θα σχηματίζουν ένα κανονικό πολύγωνο στο εσωτερικό του αρχικού (γιατί). Μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία με το νέο πολύγωνο και να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο επ' απειρον. Ωστόσο, το τετράγωνο της πλευράς οποιουδήποτε n -γώνου σ' αυτή την ακολουθία είναι ακέραιος αριθμός, και η διαδικασία μας το μειώνει σε κάθε βήμα!

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι οι άνισες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής 36° είναι μεταξύ τους ασύμμετρες.

2. Αποδείξτε ότι είναι αδύνατον να παραστήσουμε τον αριθμό 7 ως άθροισμα τετραγώνων τριών ρητών αριθμών.

3. Προσδιορίστε τις ακέραιες λύσεις των εξιοώσεων: (a) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$, (b) $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.

4. Αποδείξτε ότι οι επόμενες εξιοώσεις δεν έχουν μη μηδενικές ακέραιες λύσεις: (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$, (b) $x^4 + y^4 = z^4$. (Υπόδειξη για το (b): οι x^2, y^2, z^2 , αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα. Χρησιμοποιήστε τους γνωστούς τύπους γι' αυτές τις τριάδες.⁴)

5. Γράφουμε σ' έναν κύκλο θετικούς ακέραιους a_1, a_2, \dots, a_n ($n > 2$), οι οποίοι είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε ταυτόχρονα κάθε αριθμό με τον αριθμητικό μέσο του ίδιου και του προς τα δεξιά γείτονά του. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αρκετές φορές. Αποδείξτε ότι έπειτα από κατάλληλο πλήθος επαναλήψεων κάποιοι από τους αριθμούς του σύνολου θα είναι κλασματικοί (δηλαδή, μη ακέραιοι ρητοί αριθμοί).

6. Δίνεται ένα σημείο στο εσωτερικό ενός κυρτού πολυέδρου. Αποδείξτε ότι η ορθογώνια προβολή του σε κάποια από τις έδρες ανήκει στο εσωτερικό αυτής της έδρας. Ισχύει το ίδιο για ένα μη κυρτό πολύέδρο. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

4. Μπορείτε να τους βρείτε, για παράδειγμα, στο άρθρο «Αριθμητική στοιχειαγωνισμένο χαρτί» στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1995 του *Quantum*.

Lewis Epstein

ΕΙΚΟΝΕΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Τόμ. 1: Ειδική Θεωρία
Τόμ. 2: Γενική Θεωρία

Εικόνες της Σχετικότητας



1. Ειδική Θεωρία

LEWIS EPSTEIN

• «Το κόσμημα των βιβλίων της Σχετικότητας»
—New Scientist

• «Το καλύτερο βιβλίο Σχετικότητας που έχω διαβάσει»
—Astronomy Magazine

• «Βιβλίο μοναδικό, γοητευτικό, εκπληκτικό. Αμφιβάλλω αν ο Αϊσντάιν φανταζόταν τη θεωρία του διατυπωμένη με τόση σαφήνεια και απλότητα»
—Galois-Guiton

• «Ο Epstein στο βιβλίο του διεγείρει την περιέργεια τόσο των αμύητων όσο και των ειδικών»
—Choice

Σελ. κάθε τόμου 120, 3.700 δρχ. κάθε τόμος

κάτοπτρο

Εκδόσεις: Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη,
114 71 Αθήνα

Τηλ.: (01) 3643272, 3645098,

Fax: (01) 3641864

Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου

(Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα

Τηλ.: (01) 3247785

Η ισχύς του Ήλιου και εσείς

Η, γιατί οι σκνίπες είναι ψυχρόαιμες

V. Lange και T. Lange

ΗΡΟΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΗΛΙΟ είναι τεράστια. Γεωφυσικές μετρήσεις έχουν δείξει ότι ακόμη και στην απόσταση των 150.000.000 km από τον Ήλιο, κάθε τετραγωνικό μέτρο στην ανώτερη ατμόσφαιρα της Γης προσανατολισμένο κάθετα στις ακτίνες του Ήλιου δέχεται 1,4 kJ ηλιακής ακτινοβολίας ανά δευτερόλεπτο. Αυτή η τιμή είναι γνωστή ως ηλιακή σταθερά $I = 1.4 \text{ kJ}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) = 1.4 \text{ kW/m}^2$, και καθιστά δυνατό τον υπολογισμό της συνολικής ισχύος P_1 της ηλιακής ακτινοβολίας. Για να υπολογίσουμε τη συνολική ισχύ των ακτίνων του Ήλιου, το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε την ηλιακή σταθερά με το εμβαδόν της περιγεγραμμένης γύρω από τον Ήλιο σφαίρας ακτίνας $R = 150.000.000 \text{ km}$:

$$P_1 = I \cdot 4\pi R^2 \equiv 4 \cdot 10^{26} \text{ W.}$$

Ασφαλώς το επίπεδο της ισχύος ενός ανθρώπινου όντος είναι πολύ πιο μικρό. Η μέση ισχύς P_2 που παράγεται από έναν άνθρωπο μπορεί να εκτιμηθεί με αρκετή ακρίβεια από την ενέργεια η οποία περιέχεται στην τροφή που καταναλώνει σε μία μέρα. Είναι γνωστό ότι ένας άνθρωπος που δεν καταγίνεται με κομαστική σωματική εργασία πρέπει να καταναλώνει καθημερινά μέσω τροφών ενέργεια περίπου ίση με 12 MJ. Σχεδόν όλη αυτή η ενέργεια δαπανάται για τη διατήρηση της θερμοκρασίας του σώματος και τελικά διασκορπίζεται στο περιβάλλον. Μόνο ένα πολύ

μικρό μέρος αυτών των 12 MJ ενέργειας μετατρέπεται σε μηχανικό έργο. Αν διαιρέσουμε τα 12 MJ με τη χρονική διάρκεια μιας μέρας (86.400 s), προκύπτει

$$P_2 \equiv 140 \text{ W.}$$

Επομένως, ως γεννήτρια ενέργειας, ο Ήλιος είναι περίπου $3 \cdot 10^{24}$ φορές πιο ισχυρός απ' όσο ένα ανθρώπινο ον. Ε, λοιπόν, τόσο πιο αναπόντεχο είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει αν συγκρίνουμε την ειδική τους ισχύ — δηλαδή την ισχύ ανά μονάδα μάζας. Η μάζα M του Ήλιου είναι περίπου $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, και ας θεωρήσουμε ότι η μάζα ενός μέσου ανθρώπου είναι 80 kg. Με βάση αυτά τα δεδομένα, έχουμε

$$P_1/M = 2 \cdot 10^{-4} \text{ W/kg.}$$

$$P_2/m = 1.75 \text{ W/kg.}$$

Δηλαδή, η ειδική ισχύς ενός ανθρώπινου όντος είναι περίπου 10.000 φορές μεγαλύτερη από αυτή του Ήλιου!

Εκ πρώτης όψεως, αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται αδιανόητο. Κι όμως είναι αληθινό.

Πώς μπορεί να εξηγηθεί αυτό το «παράδοξο»; Πώς είναι δυνατόν ο Ήλιος —ένας γιγάντιος θερμοπυρηνικός αντιδραστήρας— να χάνει στο «διαγωνισμό» ισχύος από ένα ανθρώπινο ον, που αντλεί την ενέργειά του από χημικές αντιδράσεις —οι οποίες είναι κατά πολὺ «ασθενέστερες» των πυρηνικών;

Δεν είναι δύσκολο να δώσουμε μια απάντηση σ' αυτό το ερώτημα αν υποθέσουμε ότι η παραγωγή θερμικής ενέργειας είναι λίγο-πολύ ομοιόμορφα κατανεμημένη τόσο στο ανθρώπινο σώμα όσο και στον Ήλιο. Ως εκ τούτου, η ισχύς που παράγουν είναι ευθέως ανάλογη με τον όγκο του σώματος —με άλλα λόγια, με την τρίτη δύναμη του γραμμικού μεγέθους. Εντούτοις, η ακτινοβολούμενη ισχύς είναι ανάλογη με το εμβαδόν της επιφάνειας —δηλαδή με το τετράγωνο του γραμμικού μεγέθους. Εισι, όσο μεγαλύτερο είναι το σώμα τόσο ασθενέστερος είναι ο ρυθμός εκπομπής ενέργειας που είναι απαραίτητος για να διατηρήσει το σώμα μια συγκεκριμένη θερμοκρασία.

Ο όγκος του Ήλιου είναι περίπου 10^{27} m^3 . το εμβαδόν της επιφάνειας του είναι της τάξης του 10^{18} m^2 . Οι αντίστοιχες ανθρώπινες παράμετροι είναι 10^{-1} m^3 και 1 m^2 . Έτοι, ο λόγος του ηλιακού προς τον ανθρώπινο όγκο είναι περίπου 10^{28} , και ο λόγος της ηλιακής προς την ανθρώπινη επιφάνεια είναι της τάξης του 10^{18} . Με άλλα λόγια, το εμβαδόν της επιφάνειας μιας μονάδας όγκου του Ήλιου αντιστοιχεί σε εκατό τρισεκατομμυριοστά του εμβαδού της επιφάνειας μιας μονάδας όγκου ενός ανθρώπινου όντος. Δεν είναι λοιπόν εκπληκτικό το γεγονός ότι, παρόλο που ο «μεταβολισμός» του Ήλιου γίνεται με ρυθμό μόλις 0.2 mW ανά χιλιόγραμμο, η θερμοκρασία της επιφά-



И как бензин
струек подают

Tsernikov 95

«Και ὅπος πάντα, νικᾷ ο ἀνθρώπος»

νειάς του φτάνει τους 6.000 βαθμούς.

Θα ερμηνεύσουμε τη σχέση μεταξύ μεγέθους, παραγωγής ενέργειας και θερμοκρασίας του σώματος με κάποια παραδείγματα από τη ζωή των ζώων.

Η θερμοκρασία του σώματος στα θηλαστικά δεν ποικίλλει σχεδόν καθόλου. Συγκεκριμένα, η θερμοκρασία του σώματος ενός γιγάντιου ελέφαντα και ενός μικροσκοπικού ποντικού είναι κατά προσέγγιση η ίδια.¹ Ωστόσο, ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας στο σώμα του ελέφαντα είναι το 1/30 του αντίστοιχου ρυθμού στον ποντικό. Αν ο ρυθμός για τον ελέφαντα ήταν ο ίδιος με εκείνον για τον ποντικό, η ενέργεια που θα παραγόταν δεν θα είχε αρκετό χρόνο να διαφύγει από το σώμα του ελέφαντα ώστε να διατηρήσει την κανονική θερμοκρασία του. Το καλμένο το ζώο θα «ψηνόταν» μέσα στο ίδιο του το δέρμα.

Τα μικρότερα θηλαστικά πρέπει να παράγουν περισσότερη ενέργεια ανά μονάδα μάζας ώστε να αντισταθμίζουν τις απώλειες θερμότητας και να διατηρούν τη θερμοκρασία του σώματος τους στο αναγκαίο για την κανονική τους δραστηριότητα επίπεδο. Έτσι, μικρότερα έμβια πλάσματα πρέπει να τρώνε περισσότερο φαγητό (ανά μονάδα μάζας, και πάλι). Ο Κοντορεβυθούλης, το μικροσκοπικό αγοράκι του παραμυθιού, πρέπει να είναι ένας τρομακτικά αδηφάγος μπόμπιρας —εφόσον οι αναλογίες του είναι αντίστοιχες με αυτές ενός φυσιολογικού ανθρώπου, θα χρειάζεται 20 φορές περισσότερη τροφή για κάθε χιλιόγραμμο της μάζας του.

Το μικρότερο θηλαστικό της Γης, ο νάνος ποντικός, η μάζα του οποίου είναι 1,5 g, καταναλώνει καθημερινά τροφή μάζας διπλάσιας από τη δική του. Αν το πλάσμα αυτό μείνει χωρίς τροφή έστω για λίγες ώρες, θα πεθάνει. Άλλο παράδειγμα είναι το κολιμπρί (με μάζα μόλις 2 g). Ουσια-

στικά, όση ώρα είναι ξύπνιο ασχολείται με την ανεύρεση και την κατανάλωση τροφής. Ο μόνος τρόπος με τον οποίο αυτά τα πουλιά μπορούν να αντέξουν χωρίς τροφή κατά τη διάρκεια της νύχτας είναι να μειώνουν δραστικά τη θερμοκρασία του σώματός τους.

Πολύ εύκολα μπορεί να αποδειχτεί ότι τα πολύ μικρά πλάσματα —λόγου χάρη, οι σκνίπες— δεν μπορεί να είναι θερμόαιμα. Χάριν απλουστεύσεως, θα θεωρήσουμε τη σκνίπα ως κύλινδρο διαμέτρου $d = 0,5$ mm και μήκους $\ell = 4$ mm. Έτσι, το εμβαδόν S της επιφάνειάς της και ο όγκος της V θα είναι:

$$S = 2 \frac{\pi d^2}{4} + \pi d \ell \approx 10^{-5} \text{ m}^2,$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \ell \approx 10^{-9} \text{ m}^3.$$

Ας εκτιμήσουμε την ιοχύ την οποία «παράγει» μια σκνίπα.

Ένα σώμα θερμοκρασίας T μεταβιβάζει στο περιβάλλον του θερμοκρασίας T_0 ($T_0 < T$) θερμική ισχύ

$$P = a S \cdot \Delta T.$$

Αν αυτή η θερμότητα μεταβιβάζεται δι' ακτινοβολίας, και η διαφορά θερμοκρασίας $\Delta T = T - T_0$ είναι μικρή σε σύγκριση με την T , ο συντελεστής a είναι ανάλογος της T^3 . Εξαρτώμενο από την ανακλαστικότητα του σώματος, το a είναι περίπου $2-5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot {}^\circ\text{C})$ σε θερμοκρασία δωματίου. Υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία της σκνίπας είναι 30°C ($T = 303 \text{ K}$) και πως το $a = 4 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot {}^\circ\text{C})$, βρίσκουμε πως όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι 17°C ($T_0 = 290 \text{ K}$) η σκνίπα ακτινοβολεί θερμική ισχύ

$$P \approx 10^{-3} \text{ W}.$$

Θεωρώντας ότι η πυκνότητα του σώματος της σκνίπας είναι ίση με εκείνη του νερού, βρίσκουμε τη μάζα της σκνίπας: $m \approx 10^{-6} \text{ kg}$. Επομένως, η ειδική ισχύς μιας σκνίπας πρέπει να είναι $10^{-3} \text{ W}/10^{-6} \text{ kg} = 10^3 \text{ W/kg}$, δηλαδή 600 φορές μεγαλύτερη από αυτήν ενός ανθρώπου και 6 εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη από εκείνη του Ήλιου.

Αν ένα ανθρώπινο ον καταναλώνει περίπου 1 kg τροφή την ημέρα

—δηλαδή το ένα ογδοηκοστό της μάζας του—, η ποσότητα τροφής που καταναλώνει καθημερινά μια σκνίπα υπερβαίνει τη μάζα της κατά πάραγοντα $600/80 = 7,5$. (Στην πραγματικότητα, οι εκτιμήσεις μας είναι κάπως μικρές, διότι δεν έχουμε λάβει υπόψη τις απώλειες θερμότητας διά μεταφοράς.) Συχνά, η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι πολύ μικρότερη από 17°C στους δε 7°C (οι σκνίπες συνεχίζουν να είναι αρκετά δραστηριες κάτω από τέτοιες συνθήκες), οι απώλειες ενέργειας είναι σχεδόν διπλάσιες. Επομένως η σκνίπα θα έπρεπε να καταναλώνει σε τέτοιες συνθήκες τροφή μάζας 15 φορές μεγαλύτερης από τη δική της! Προφανώς, δεν μπορεί να διατηρήσει τη θερμοκρασία του σώματός της σταθερή (δηλαδή, δεν μπορεί να είναι θερμόαιμη).

Εξετάζοντας τις σχέσεις μεταξύ του σωματικού μεγέθους και της έντασης της ανταλλαγής θερμότητας με το περιβάλλον, μπορούμε να αντιτησούμε σε ένα άλλο ενδιαφέρον ερώτημα: γιατί ένα λεπτό σύρμα μπορεί να λιώσει στη φλόγα ενός σπιρτού, ενώ ένα χοντρό σύρμα είναι δύσκολο να πυρακτωθεί ακόμη και στη φλόγα μιας εστίας γκαζιού;

Η ροή ενέργειας την οποία δέχεται το σύρμα από τη φλόγα είναι ευθέως ανάλογη με το εμβαδόν $S = 2\pi R\ell$ της επιφάνειάς του (όπου R η ακτίνα του σύρματος και ℓ το μήκος του τιμήματος που θερμαίνεται). Παράλληλα, ο ρυθμός της ροής θερμότητας κατά μήκος του άξονα του σύρματος προς τα ψυχρά άκρα του (δηλαδή αυτά που δεν θερμαίνονται) είναι ευθέως ανάλογος με το εμβαδόν $S = \pi R^2$ της σγκάριας τομής του σύρματος. Όταν οι ακτίνες των δύο συρμάτων διαφέρουν κατά παράγοντα 10, και όλες οι άλλες συνθήκες είναι όμοιες, το χοντρό σύρμα θα δέχεται 10 φορές περισσότερη θερμότητα ανά μονάδα χρόνου απ' ότι το λεπτό καλώδιο, αλλά θα χάνει 100 φορές περισσότερη θερμότητα. Είναι προφανές ότι σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας, όταν οι εισερχόμενες και εξερχόμενες ροές θερμότητας είναι ίδιες, η θερμοκρασία του χοντρού σύρματος θα είναι σημαντικά μικρότερη.

1. Άλλες φυσιολογικές σταθερές στα θηλαστικά αναλύονται στο άρθρο του Anatoly Mineyev «Από το ποντικό στον ελέφαντα», στο τεύχος Μαΐου /Ιουνίου 1996 του Quantum.

Διαβάστε ακόμη το άρθρο του A. Zherdev «Νάνοι και γιγαντες» στο τεύχος Ιουλίου /Αυγούστου 1994.

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M71

Ανακατασκευή πολυέδρου. Ο Ανδρέας έκοψε ένα χάρτινο κυριό πολύεδρο κατά μήκος των ακμών του και ταχυδόμησε τις έδρες του στη Λάουρα. Η Λάουρα τις κόλλησε ξανά μαζί σχηματίζοντας ένα κυρτό πολύεδρο. Είναι δυνατόν να διαφέρουν τα δύο πολύεδρα; (N. Vasiliev)

M72

Ακολουθίες τετραγώνων. (a) Υπάρχει άπειρη ακολουθία τέλειων τετραγώνων τέτοια ώστε κάθε όρος της (αρχίζοντας από τον τρίτο) να ισούται με το άθροισμα των δύο προηγουμένων του; (b) Υπάρχει άπειρη ακολουθία τέλειων τετραγώνων τέτοια ώστε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε γειτονικών όρων της να είναι τέλειο τετράγωνο; (O. Kryzhanovsky)

M73

Εναλλασσόμενο άθροισμα διανυσμάτων. Σχεδιάζουμε από το σημείο O του επιπέδου άριτο πλήθος μοναδιών διανυσμάτων και τα χρωματίζουμε εναλλάξ κόκκινα και μπλε. Έστω \mathbf{r} το άθροισμα των κόκκινων διανυσμάτων και \mathbf{b} το άθροισμα των μπλε. Αποδείξτε ότι $|\mathbf{r} - \mathbf{b}| \leq 2$. (E. Shustin)

M74

Ασυνήθιστες κατασκευές. Έχετε στη διάθεσή σας έναν κανόνα με δύο μόνο ενδείξεις. Μπορείτε με αυτόν — όπως και με έναν συνηθισμένο κανόνα — να φέρετε ευθείες γραμμές και να σημειώνετε ευθύγραμμα τμήματα ίσα με την απόσταση μεταξύ των δύο ενδείξεων. Δεν επιτρέπεται καμία άλλη κατασκευή. Κατασκευάστε με αυτό το όργανο (a) μια ορθή γωνία και (β) μια ευθεία κάθετη προς δεδομένη ευθεία. (V. Gutenmacher)

M75

Εξίσωση περιοδικότητας. Μια συνάρτηση f ικανοποιεί για κάθε πραγματικό x την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι περιοδική. (E. Turkevich)

Φυσική

Φ71

Στο έδαφος του Άρη. Όταν ο Άρης βρίσκεται σε αντίθεση απέχει από τη Γη απόσταση $\ell = 5,56 \cdot 10^{10}$ m, και η γωνιακή του διάμετρος είναι $\alpha = 25,1^\circ$. Υπολογίστε την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη αν η μέγιστη γωνιακή απόσταση ανάμεσα στο κέντρο του Άρη και το δορυφόρο του Φόβου είναι $\beta = 34,5^\circ$, ενώ η περίοδος της περιφοράς του Φόβου (γύρω από τον πλανήτη) είναι $T = 2,76 \cdot 10^4$ s.

Φ72

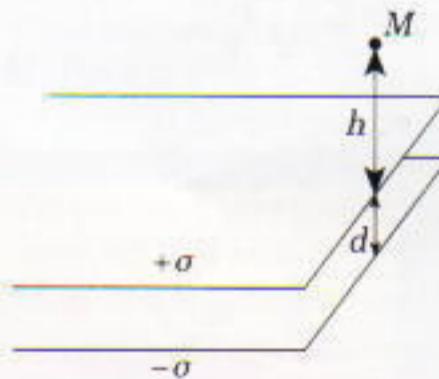
Σταγόνα στο σύννεφο. Μέσω παρατηρήσεων του τρόπου με τον οποίο μια σταγόνα βροχής πέφτει μέσα σ' ένα σύννεφο — η διάμετρός της αυξάνεται χάρη στην απορρόφηση μικροσκοπικών σταγονιδίων που συναντά στο δρόμο της — αποδείχτηκε ότι οι σταγόνες εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Βρείτε αυτή την επιτάχυνση πιώσης, υποθέτοντας ότι το αρχικό μέγεθος της σταγόνας είναι μικρό. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. (A. Stasenko)

Φ73

Ουράνιο και υδρογόνο. Πλήρως κενό δοχείο όγκου $V = 1$ lt περιέχει 1 g υδρίδιου του ουρανίου (UH_3). Όταν το υδρίδιο θερμαίνεται σε θερμοκρασία $400^\circ C$, αποουντίθεται πλήρως και παράγει ουράνιο (ατομικής μάζας $A = 238$) και υδρογόνο. Υπολογίστε την πίεση του υδρογόνου μέσα στο δοχείο σ' αυτή τη θερμοκρασία.

Φ74

Δύο φορτισμένες πλάκες. Δύο μακριές, φαρδιές πλάκες είναι φορτισμένες ομοιόμορφα. Οι πυκνότητες φορτίου είναι $+σ$ (της επάνω πλάκας) και $-σ$ (της κάτω πλάκας). Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο M , το οποίο βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το χείλος της επάνω πλάκας και στον κατακόρυφο άξονα που ανήκει στο επίπεδο συμμετρίας της (δείτε το σχήμα). Η απόσταση d ανάμεσα στις πλάκες είναι μικρή σε σύγκριση με το ύψος h . (A. Semyonov)



Φ75

Ακτίνα φωτός στο ενυδρείο. Ένα ενυδρείο με λεπτές έδρες, κυβικού σχήματος και όγκου $V = 8$ lt είναι γεμάτο μέχρι τη μέση με νερό. Ρίχνεται μέσα σ' αυτό αλάτι, έτσι ώστε ο δεικτής διάθλασης του διαλύματος στον πυθμένα να είναι $n_0 = 1,35$. Ο δεικτής διάθλασης μειώνεται με το ύψος h σύμφωνα με το νόμο $n = n_0 - ah^2$, όπου $a = 1 \text{ m}^{-2}$. Μια παράλληλη δέσμη φωτός πέφτει σε μια έδρα του δοχείου, κάθετα προς την επιφάνειά της. Σε πόση απόσταση από το ενυδρείο πρέπει να τοποθετήσουμε ένα πέτασμα ώστε να επιτύχουμε τη φωτεινότερη δυνατή λωρίδα φωτός πάνω του; (A. Olkhovetz)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62



Κρυφές πληροφορίες

Η, πώς δύο μυστικά μάς δίνουν μια βεβαιότητα

S. Artyomov, Y. Gimatov και V. Fyodorov

Ο Α ΘΕΛΑΜΕ ΝΑ ΣΑΣ ΜΙΛΗΣΟΥ - με για ένα πρόβλημα που η λύση του απαιτεί ιδιαίτερα πολύ - πλοκή λογική.

Ένας μαθηματικός M είπε στους μαθηματικούς P και S : «Έχω σκεφτεί δύο φυσικούς αριθμούς. Και οι δύο είναι μεγαλύτεροι από τη μονάδα, ενώ το άθροισμά τους είναι μικρότερο του εκατό. Θα αποκαλύψω τώρα στον P , κρυφά από την S , το γινόμενο αυτών των αριθμών. Και μετά θα πω στην S , κρυφά από τον P , το άθροισμά τους». Έτσι έγινε, και στη συνέχεια ο M ζήτησε από τους συναδέλφους του να μαντέψουν τους αριθμούς. Τότε, ο P και η S έκαναν την επόμενη συζήτηση (οι δηλώσεις του P συμβολίζονται με το γράμμα p και της S με το γράμμα s):

«Απ' ότι φαίνεται, δεν μπορώ να πω ποιοι είναι οι αριθμοί». (p_1)

«Ηξερα από πριν ότι δεν θα μπορούσες». (σ_1)

«Αφού είναι έτσι, τους γνωρίζω!». (p_2)

«Τότε τους γνωρίζω κι εγώ!». (σ_2)

Προσπαθήστε τώρα να μαντέψετε εσείς τους αριθμούς!

1. Είναι πράγματι δυνατόν;

Έκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι είναι αδύνατον να λυθεί το πρόβλημα: πώς μπορούμε να μαντέψουμε τους αριθμούς όταν δεν έχει δοθεί καμία πληροφορία γι' αυτούς;

Ας δοκιμάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω ότι ο M σκέ-

φτηκε τους αριθμούς 7 και 42. Επομένως, οι αριθμοί που ανέφερε στον P και την S ήταν 294 και 49, αντίστοιχα. Τι θα συμβεί λοιπόν; Ο P δεν μπορεί να μαντέψει τους αριθμούς —καθόλου περιέργο, αφού γνωρίζει μόνο το γινόμενό τους. Η μάλλον, όχι μόνο το γινόμενο. Γνωρίζει επίσης ότι είναι φυσικοί αριθμοί, μεγαλύτεροι από το 1, και ότι το άθροισμά τους είναι μικρότερο από το 100. Σε πι βοηθούν όλα αυτά;

Συμβολίζουμε τους άγνωστους αριθμούς με k_0 και ℓ_0 και υποθέτουμε, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, ότι $k_0 \leq \ell_0$. Συμβολίζουμε το γινόμενο $k_0 \cdot \ell_0$ με p_0 και το άθροισμα $k_0 + \ell_0$ με s_0 .

Μπορούμε τώρα να πούμε πως ο P πληροφορήθηκε ότι $p_0 = 294$. Τότε, οι πιθανές τιμές του k_0 είναι 2, 3, 6, 7 και 14. Το ℓ_0 σ' αυτή την περίπτωση είναι, αντίστοιχα, 147, 98, 49, 42, ή 21. Οι δύο πρώτες τιμές του k_0 δεν μας ικανοποιούν, διότι το άθροισμα γίνεται πολύ μεγάλο: $s_0 > 100$. Μενούν ακόμη τρεις πιθανότητες, οπότε πραγματικά ο P δεν μπορεί να μαντέψει τους αριθμούς.

Ας συνεχίσουμε. Η μαθηματικός S ισχυρίζεται πως γνωρίζει προκαταβολικά ότι ο P αδυνατούσε να μαντέψει τους αριθμούς. Πώς μπορούσε να το γνωρίζει αυτό; Πρέπει να είχε ελέγξει όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις του αριθμού της s_0 ως άθροισμας δύο επιτρεπτών αριθμών:

$$49 = 2 + 47 = 3 + 46 = \dots = 24 + 25.$$

Ο R μπορεί να σκέψηται ένα οποιο-

δήποτε από αυτά τα ζεύγη αριθμών. Είπε στον P ένα από τα γινόμενα p — $(49 - p)$, και η S υποστηρίζει ότι ο P , όποιο και αν ήταν το γινόμενο που του είπε, δεν θα μπορούσε να ανακαλύψει τους αριθμούς.

Τι θα συνέβαινε, όμως, αν για κάποιο p και οι δύο αριθμοί, p και $49 - p$, είναι πρώτοι; Αν, για παράδειγμα, ο M είχε σκεφτεί το 2 και το 47, θα έδινε στον P το αριθμό 94, και ο τελευταίος θα μπορούσε εύκολα να μαντέψει τους μυστικούς αριθμούς.

Έτσι, αν ο M είχε σκεφτεί το 7 και το 42, τότε η S , μαθαίνοντας το άθροισμα $s_0 = 49$, δεν θα είχε δικαίωμα να κάνει τη δήλωση (σ_1) . Αυτό σημαίνει ότι ο M δεν σκέψηται τους αριθμούς 7 και 42.

Επομένως, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να πούμε κάτι για τους άγνωστους αριθμούς.

Και τώρα που διασκεδάσαμε τις αρχικές μας αμφιβολίες, ας δούμε πώς μπορούμε να προχωρήσουμε. Μία μέθοδος επίλυσης είναι ίδη φανερή: μπορούμε απλώς να ακολουθήσουμε το δρόμο της πλήρους απαριθμησης —της δοκιμής και του λάθους— και να ελέγξουμε όλα τα ζεύγη που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$2 \leq k_0 \leq \ell_0 \leq 97, \quad (1)$$

$$4 \leq k_0 + \ell_0 \leq 99, \quad (2)$$

για να δούμε ποια από αυτά «επιβιώνουν» από το διάλογο $(p_1) - (\sigma_2)$.

Αφού το πλήθος των δυνατοτήτων είναι σε κάθε περίπτωση πεπερασμένο, θα μπορούσαμε πραγματικά να

συνεχίσουμε με αυτό τον άτεχνο τρόπο, και κάποια στιγμή να βρούμε την απάντηση. Αλλά κάιι τέτοιο δεν θα ήταν βαρετό; Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να περιορίσουμε την έρευνα.

Πρώτα απ' όλα, αντί των τιμών των k_0 , ℓ_0 , θα ερευνήσουμε τις τιμές του s_0 , αφού υπάρχουν περιοούτερα από 2.000 δυνατά ζεύγη (k_0 , ℓ_0), ενώ οι δυνατότητες για το s_0 είναι λιγότερες από εκατό. Πάντως, ακόμη και σ' αυτή την περίπτωση, η άμεση έρευνα είναι μακρά και επίπονη.

2. Η εικασία των Goldbach-Euler

Τι πληροφορίες μπορούμε να εξαγάγουμε από τις (π_1) και (σ_1) ? Ποιο είναι το νόημα αυτών των προτάσεων; Η πρώτη πρόταση, η (π_1) , μας λέει προφανώς ότι

το p_0 δεν παραγοντοποιείται μονοσήμαντα σε γινόμενο δύο αριθμών που ικανοποιούν τις ανισότητες (1) και (2). (π_1')

Η δεύτερη πρόταση σημαίνει ότι με όποιον τρόπο κι αν αναλύσουμε τους αριθμούς s_0 σε άθροισμα δύο αριθμών που ικανοποιούν την ανισότητα (1), το γινόμενο των προσθετών θα έχει την ιδιότητα (π_1) . (σ_1')

Η πρώτη συνθήκη εξαίρει μερικά γινόμενα· η δεύτερη αποκλείει ορισμένα αθροίσματα.

Ειδικά, από την (σ_1') έπειτα ότι είναι αδύνατον να παρασταθεί το s_0 ως άθροισμα δύο πρώτων. (Διαφορετικά, το γινόμενο αυτών των πρώτων έχει μία και μοναδική παραγοντοποίηση σε δύο παράγοντες που ικανοποιούν τις ανισότητες (1) και (2), και επομένως δεν ικανοποιεί την (π_1') .)

Κάθε άρτιος αριθμός, όμως, που ικανοποιεί την ανισότητα (2) παριστάται ως άθροισμα δύο πρώτων (αυτό μπορούμε να το πιστοποιήσουμε άμεσα για όλους τους αριθμούς 4, 6, 8, ..., 98). Αρα, το s_0 είναι περιττό. Επιπλέον, το $s_0 - 2$ είναι σύνθετος αριθμός — διαφορετικά το $s_0 = 2 + (s_0 - 2)$ είναι μία παράσταση του s_0 ως αθροίσματος δύο πρώτων. Αν απορρίψουμε τους αριθμούς που δεν ικανοποιούν αυτές τις δύο συνθήκες, καταλήγουμε σε 24 δυνατές τιμές του s_0 .

Το γεγονός που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο — ότι όλοι οι άρτιοι αριθμοί από το 4 έως το 98 μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα δύο πρώτων — συνδέεται με ένα συναρπαστικό μαθηματικό πρόβλημα. Το 1742, ένα μέλος της Ακαδημίας Εποιημών της Αγίας Πετρούπολης, ο Christian Goldbach (Γερμανός που προσέφερε τις υπηρεσίες του στο ρωσικό κράτος) έστειλε μια επιστολή στον Leonard Euler στην οποία διατύπωνε την εικασία ότι κάθε περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 5 μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τριών πρώτων. Ο Euler στην απάντησή του πρότεινε την εικασία ότι κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων. (Δεν είναι δύσκολο να συναγάγουμε την εικασία του Goldbach από την υπόθεση του Euler — δοκιμάστε το μόνοι σας!)

Και οι δύο εικασίες, για δύο σχεδόν αιώνες, φαινόταν αδύνατον να αποδειχτούν, παρότι είχαν επαληθευτεί με άμεση έρευνα για όλους τους αριθμούς έως το 9.000.000.

Το 1930, ο σπουδαίος ρώσος μαθηματικός L.G. Shnirelman οπέδειξε ότι υπάρχει ένας αριθμός k τέτοιος ώστε κάθε ακέραιος $n > 1$ να παριστάται ως άθροισμα k το πολύ πρώτων αριθμών. Στην απόδειξη του Shnirelman, ο αριθμός k ήταν μάλλον μεγάλος· αργότερα αποδείχτηκε ότι το θεώρημα αληθεύει για $k = 20$.

Το 1934, ένας άλλος διάσημος ρώσος μαθηματικός, ο I.M. Vinogradov, απέδειξε ότι κάθε αριθμός $n > n_0$, για κάποιο συγκεκριμένο n_0 , γράφεται ως άθροισμα τριών πρώτων. Σήμερα, στην εποχή των υπολογιστών, θα φαινόταν λογική η υπόθεση ότι μπορούμε να στηριχτούμε στη «μηχανή» για να ελέγξουμε όλους τους υπόλοιπους αριθμούς (από το 7 έως το n_0). Ωστόσο, η σταθερά n_0 του Vinogradov είναι τόσο μεγάλη ($n_0 > 2^{26}$), ώστε η επαλήθευση υπερβαίνει ακόμη τις δυνατότητες των υπολογιστών.¹

Οσον αφορά την εικασία του Euler, δεν έχει ακόμη επιευχθεί κάποια

1. Αυτή η εκτίμηση μπορεί να μην αληθεύει πλέον σήμερα (το άρθρο δημοσιεύτηκε αρχικά στο *Kvant* το 1977).

σημαντική πρόοδος προς την κατεύθυνση της απόδειξής της.

3. Δεύτερος γύρος

Μπορούμε να μειώσουμε κι άλλο το πλήθος των υποψηφίων για το s_0 : μπορούμε να συμπεράνουμε από την (σ_1') ότι

$$s_0 < 55. \quad (3)$$

Για να δούμε γιατί ισχύει αυτό, ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, $s_0 \geq 55$. Τότε, το s_0 δεν ικανοποιεί τη (σ_1') : μπορούμε να το αναλύσουμε στο άθροισμα δύο όρων που ικανοποιούν την ανισότητα (1), το γινόμενο των οποίων δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (π_1') . Η ανάλυση είναι η $s_0 = 53 + (s_0 - 53)$. Πραγματικά, το γινόμενο $53 \cdot (s_0 - 53)$ παραγοντοποιείται μόνο με έναν τρόπο σε γινόμενο δύο παραγόντων που το άθροισμά τους δεν υπερβαίνει το 100, διότι ο ένας από τους δύο έχει αναγκαστικά τη μορφή $53d$ — αφού το 53 είναι πρώτος —, και είναι μεγαλύτερος από το 100 αν $d > 1$. Άρα, $d = 1$, και η παραγοντοποίηση είναι μοναδική. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την ιδιότητα (σ_1') του s_0 !

Μετά την απόδειξη της ανισότητας (3), το πλήθος των δυνατών τιμών του s_0 μειώνεται σε έντεκα:

$$\begin{aligned} & 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, \\ & 41, 47, 51, 53. \end{aligned} \quad (4)$$

Ας προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε ποιοι από αυτούς τους αριθμούς συμφωνούν με τη συνθήκη (σ_1') χωρίς άμεση έρευνα. Έστω s ένας από τους αριθμούς (4). Το s είναι περιττό, συνεπώς όταν δύο αριθμοί αθροιζόμενοι μας δίνουν το s , ο ένας τους είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε $s = 2a + m$. Αν το s δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (σ_1') , τότε για κάποιο συγκεκριμένο a υπάρχει μία και μοναδική παραγοντοποίηση του γινομένου $2am$.

Αυτό το a δεν μπορεί να ισούται με τη μονάδα, διότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο παραγοντοποίησης του $2m$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $a = 1$. Τότε, ο αριθμός m είναι σύνθετος, οπότε μπορούμε να γράψουμε $m = uv$, όπου $u > 2$ και $v > 2$, ενώ και οι

δύο παραγοντοποιήσεις

$$2m = 2u \cdot v = 2 \cdot uv$$

μας ικανοποιούν:

$$2 + uv = 2 + m = s \leq 100$$

και

$$2u + v = 2 + uv - (u - 1)(v - 2) \\ < 2 + uv \leq 100.$$

Επειταί ότι $a \geq 2$.

Τώρα, είτε $a = m$ είτε $a \neq m$, και μπορούμε να εξετάσουμε τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά. Αν $a \neq m$, τότε η $p = 2a \cdot m$ και η $p = 2m \cdot a$ είναι δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις. Αφού $2a + m = s < 100$ και η παραγοντοποιηση του p είναι μοναδική, πρέπει να έχουμε $2m + a \geq 100$. Ταυτόχρονα, από την $s = 2a + m < 53$, έπειται ότι $m \leq 53 - 2a$, και επομένως $2m + a \leq 106 - 3a$. Συνεπώς, $100 \leq 2m + a \leq 106 - 3a$, άρα $a \leq 2$. Σ' αυτή την περίπτωση, λοιπόν, έχουμε $a = 2$, $2m + a = 100$ και $m = 49$, οπότε οδηγούμαστε στη μοναδική «ύποπτη» τιμή $s = 53$ και στην ανάλυσή της $53 = 4 + 49$.

Στην περίπτωση $a = m$, ο αριθμός $s = 3a$ διαιρείται με το 3. Δύο μόνο από τους αριθμούς (4) είναι πολλαπλάσια του 3: το 27 και το 51. Οι «ύποπτες» αναλύσεις τους είναι $27 = 18 + 9$ και $51 = 34 + 17$.

Ο αριθμός 51 δεν ικανοποιεί την (σ_1') — πράγματι, το γινόμενο $17 \cdot 34$ παραγοντοποιείται μόνο με έναν τρόπο σε δύο παράγοντες με άθροισμα μικρότερο του 100, και επομένως μπορούμε να το εξαιρέσουμε από τη λίστα των «υποψήφιων για το s_0 ».

Οι αριθμοί 27 και 53 εξακολουθούν να είναι στη λίστα: ικανοποιούν την (σ_1') , διότι για το 27 έχουμε $9 \cdot 18 = 2 \cdot 81$ και $2 + 81 < 100$, και για το 53 έχουμε $4 \cdot 49 = 7 \cdot 28$ και $7 + 28 < 100$.

Επομένως, απομένουν δέκα «υποψήφιοι»: 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47 και 53. Όλοι τους ικανοποιούν την (σ_1') .

4. «Τότε τους γνωρίζω κι εγώ»

Τέλος, ας χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις (π_2) και (σ_2) . Θα μπορούσαμε να τις ερμηνεύσουμε όπως τις δύο πρηγούμενες. Υπάρχει όμως ένας συντομότερος τρόπος.

Από την (σ_2) και την ανισότητα (3)

συμπεραίνουμε ότι

$$s_0 < 33. \quad (5)$$

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν αληθεύει. Τότε, $s_0 \geq 33$, και η μαθηματικός Σ , αναλύοντας το s_0 σε άθροισμα δύο όρων με κάθε δυνατό τρόπο, θα εύρισκε τις εξής παραλλαγές: $s_0 = (s_0 - 31) + 31 = (s_0 - 29) + 29$. Η πορεία των σκέψεων της θα ήταν τότε η εξής: αν είχε δοθεί στον P το γινόμενο $(s_0 - 31) \cdot 31$, τότε, αν χρησιμοποιούσε την εκτίμηση (3) και το γεγονός ότι το 31 είναι πρώτος, θα είχε καταλάβει ότι το $(s_0 - 31) \cdot 31$ έχει μία μόνο παραγοντοποιηση τέτοια ώστε το άθροισμα των δύο όρων της να ικανοποιεί την ανισότητα (3). Τότε, ο P θα μάντευε τους άγνωστους αριθμούς. Το ίδιο επιχείρημα, όμως, εφαρμόζεται και στο γινόμενο $(s_0 - 29) \cdot 29$.

Επομένως, στην περίπτωση $s_0 \geq 33$, η μαθηματικός Σ δεν θα μπορούσε να προσδιορίσει ακριβώς τα k_0 , ℓ_0 ακόμη και μετά τη δήλωση (π_2) του P , αντίθετα απ' ότι συνέβη στην ιστορία μας.

Άρα, η ανισότητα (5) είναι πραγματικά αληθής, και έτσι απομένουν μόνο πέντε αριθμοί: 11, 17, 23, 27, 29.

Επιπλέον, αν $p_0 = 2^n \cdot p$, όπου p περιττός πρώτος και $n > 1$, τότε ο P μπορεί να προσδιορίσει με βεβαιότητα τους μυστικούς αριθμούς, διότι υπάρχει μόνο ένα περιττό άθροισμα της μορφής $2^{n-1} + 2^t p$ — ουγκεκριμένα, το $2^n + p$. Εποι, αν το s_0 έχει δύο αναπαραστάσεις της μορφής $2^n + p$, τότε η Σ δεν μπορεί να βρει την απάντηση και να κάνει τη δήλωση (σ_2) . Αυτή η παρατήρηση εξαιρεί τρεις ακόμη αριθμούς, τους $11 = 4 + 7 = 8 + 3$, 23 και 27 , και αφήνει μόνο δύο υποψήφιους στη λίστα: το 17 και το 29.

5. Τότε τους γνωρίζουμε κι εμείς!

Στην περίπτωση του αριθμού $s_0 = 29$, το τελευταίο επιχείρημα δεν ισχύει, διότι υπάρχει μόνο μία αναπαράσταση της μορφής $2^n + p$ με p περιττό πρώτο ($29 = 16 + 13$). Μπορούμε, όμως, να το χρησιμοποιήσουμε ελαφρά τροποποιημένο για την ανάλυση: $29 = 4 + 25$. Στην περίπτωση $p_0 = 4 \cdot 25$ έχουμε μόνο ένα ακόμη δυνατό περιττό άθροισμα εκτός από το 29, το $25 = 20 + 5$ (προφανώς $4 \cdot 25 = 5 \cdot$

20), αλλά τότε το $25 - 2$ είναι πρώτος, ενώ το $s_0 - 2$ πρέπει να είναι σύνθετος. Έτοι, σ' αυτή την περίπτωση είναι και πάλι αδύνατον να μαντέψει η Σ τους αριθμούς, ουνεπώς η λίστα των υποψηφίων περιορίζεται σε έναν αριθμό, τον 17 — δηλαδή, είτε $s_0 = 17$ είτε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Λοιπόν, ποιο γινόμενο p_0 δόθηκε στον P αν $s_0 = 17$; Ας ερευνήσουμε όλες τις δυνατές αναλύσεις του s_0 σε άθροισμα δύο όρων:

$$17 = 2 + 15 = 3 + 14 = \dots = 8 + 9.$$

Για καθένα από τα αντίστοιχα γινόμενα, εκτός από το $4 \cdot 13$, ο P θα ήταν αδύνατον να μαντέψει την απάντηση και να κάνει τη δήλωση (π_2) . Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ανάλυσης $17 = 2 + 15$, έχουμε $p_0 = 2 \cdot 15 = 30 = 5 \cdot 6$, αλλά και το 17 και το $11 = 5 + 6$ ικανοποιούν την ιδιότητα (σ_1') .

Επομένως, η μοναδική δυνατή τιμή του p_0 είναι $4 \cdot 13 = 52$. Με αυτή την τιμή, ο μαθηματικός P έχει τη δυνατότητα να μαντέψει τους αριθμούς, διότι απ' όλες τις δυνατές αναλύσεις του 52 σε δύο παράγοντες μόνο μία, η $52 = 4 \cdot 13$, δίνει περιττό άθροισμα παραγόντων. Συνεπώς, $s_0 = 17$, $p_0 = 52$, και οι αριθμοί που σκέφτηκε ο μαθηματικός M ήταν το 4 και το 13.

Προβλήματα

1. Είναι δυνατόν να παραστήσουμε κάθε περιττό αριθμό μεγαλύτερο του 3 ως άθροισμα της μορφής $2^n + p$, όπου p πρώτος; Αν όχι, δώστε το μικρότερο δυνατό αντιπαράδειγμα.

2. Ας υποθέσουμε ότι η ιστορία μας τροποποιείται ως εξής. Μέχρι την πρόταση (σ_1) παραμένει ίδια, αλλά μετά συνεχίζεται με τις επόμενες προτάσεις:

«Και γνωρίζα εκ των προτέρων ότι αυτό το ήξερες από πριν». (π_2)

«Δεν γνωρίζω ποιοι είναι οι αριθμοί». (σ_2)

«Τότε τους γνωρίζω εγώ». (π_3)

Βρείτε τους ζητούμενους αριθμούς.

(B. Kukushkin) ◻

Ανακαλύψτε την οικογενειακή ομοιότητα

Μια προσπάθεια ταξινόμησης των προβλημάτων αναπαράστασης ακεραιών

George Berzsenyi

KΑΘΩΣ ΣΚΕΦΤΟΜΟΥΝ ΠΙΘΑΝΑ θέματα αυτής της στήλης, έλαβα μέσω του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου ένα μήνυμα από τον φίλο μου δρ. Harold Reiter, με το οποίο μου ζητούσε μερικά προβλήματα που θα ταίριαζαν στο πλαίσιο ενός άρθρου για το *Mathematics and Informatics Quarterly*, μια θαυμάσια διεθνή έκδοση την οποία μπορείτε να βρείτε μέσω του γράφοντος. Ο Harold είναι πρόεδρος της επιτροπής που έχει την ευθύνη για τις εξετάσεις μαθηματικών στα αμερικανικά λύκεια. Πριν δημοσιεύσει το άρθρο, οχεδιάζει να το παρουσιάσει σ' ένα συνέδριο με θέμα την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που πρόκειται να διεξαχθεί από τις 13 έως τις 17 Αυγούστου του 1996 στο Πανεπιστήμιο του Γουώτερλου. Ο χρόνος διεξαγωγής του συνέδριου επιτρέπει στους αναγνώστες μου να μοιραστούν τις σκέψεις τους με τον Harold είτε ηλεφωνικά (704-5474561) είτε με φαξ (704-5106415) είτε μέσω του Internet (hreiter@email.uncc.edu).

Στο εν λόγω άρθρο ο Harold επιθυμεί να ταξινομήσει τα προβλήματα που προκύπτουν όταν θεωρούμε ένα σταθερό σύνολο G γεννητόρων και μια διαδικασία P που παράγει ακέραιους αριθμούς από τα στοιχεία του G . Κάθε επιλογή των G και P δημιουργεί ένα σύνολο R αποτελεσμά-

των, και πολλά προβλήματα διαγνωνισμών αφορούν διάφορα χαρακτηριστικά του R , όπως τον μικρότερο θετικό ακέραιο που περιέχεται (ή δεν περιέχεται) στο R , το μέγιστο στοιχείο του R , το n -οστό μέλος του R (για κάποιον θετικό ακέραιο n), ή το πλήθος των στοιχείων του R . Σε άλλα πάλι προβλήματα, ενδιαφερόμαστε για το πλήθος των διαφορετικών τρόπων παραγωγής των στοιχείων του R . Μπορούμε επίσης να χωρίσουμε τα προβλήματα σε κατηγορίες ανάλογα με τη μεθοδολογία που εφαρμόζεται περισσότερο κατά τη λύση τους, ανάλογα με την πληθικότητα των G και R , καθώς και ανάλογα με τη δυοκολία των ζητημάτων που προκύπτουν. Στη ουνέχεια θα θέσουμε μερικά προβλήματα τα οποία ταιριάζουν με το σχήμα που προτείνει ο Harold, ενώ ζητούμε από τους αναγνώστες να του στείλουν παρόμοια προβλήματα (συνοδευόμενα από παραπομπές και λύσεις).

Πόσοι αριθμοί μπορούν να παρασταθούν ως άθροισμα τεσσάρων διαφορετικών μελών του συνόλου {17, 21, 25, 29, 33, 37, 41}?

Βρείτε τον 100ο θετικό ακέραιο που μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 3.

Χρησιμοποιήστε ακριβώς δύο φορές καθένα από τα εννέα ψηφία 1, 2, 3, ..., 9 για να σχηματίσετε διαφορε-

τικούς πρώτους αριθμούς με το ελάχιστο δυνατό άθροισμα.

Αν προσθέσουμε ζεύγη διαφορετικών στοιχείων του S προκύπτουν οι εξής δέκα αριθμοί: 1967, 1972, 1973, 1974, 1975, 1980, 1983, 1984, 1989, 1991. Ποια είναι τα στοιχεία του S ;

Η διατύπωση προβλημάτων είναι μια δραστηριότητα συμπληρωματική της επίλυσής τους, και τη συνιστώθερμά στους αναγνώστες μου.

Ανάδραση

Σε προηγούμενη στήλη μου είχα υποσχεθεί να σας δώσω περισσότερες αναφορές σχετικά με τα προβλήματα κατασκευής τριγώνων που εξετάσαμε στις στήλες των τευχών Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου και Νοεμβρίου / Δεκεμβρίου 1994. Η πρώτη είναι το άρθρο του Roy Meyers που δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του («Update on William Wernick's Triangle constructions with three located points», *Mathematics Magazine* 69.1 (1996) σελ. 46-49). Η δεύτερη είναι το βιβλίο που μου είχε συστήσει ο ίδιος, το *Die Konstruktion von Dreiecken*. Εχει γραφτεί από τον Kurt Herterich και εκδόθηκε στη Γερμανία από τον οίκο Ernst Klett Verlag. Ο Roy μού είχε γράψει επίσης για δύο σχετικά άρθρα που έχουν δημοσιευτεί στη Γερμανία. Θα σας μιλήσω γι' αυτά μόλις βρω αντίγραφά τους. □

Καθώς το νερό εξατμίζεται...

Ας σκεφτούμε πώς, γιατί, και πόσο γρήγορα...

Mikhail Anfimov και Alexey Chernoutsan

ΕΧΕΤΕ ΠΡΟΣΕΞΕΙ ΠΟΤΕ ΠΩΣ ΕΞΑΤΜΙΖΕΤΑΙ το νερό από ένα δοχείο; Βάλτε νερό σε μια μικρή λεκάνη ή σ' ένα ποτήρι και παρατηρήστε πώς κατεβαίνει η στάθμη του κατά τη διάρκεια της ημέρας. Εφόσον η διαδικασία αυτή είναι μάλλον αργή, έχουμε άφθονο χρόνο να σκεφτούμε και να κάνουμε τους υπολογισμούς μας. Ειδικότερα, ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το ρυθμό εξάτμισης και κατόπιν να τον συγκρίνουμε με τις παρατηρήσεις μας.¹

Ποιος είναι ο μηχανισμός της εξάτμισης; Θυμηθείτε ότι για να μετατραπεί μια ποσότητα νερού σταθερής θερμοκρασίας σε ατμό ίδιας θερμοκρασίας, πρέπει να προσδώσουμε στο νερό συγκεκριμένη ποσότητα θερμικής ενέργειας, η οποία ονομάζεται λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης. Για παράδειγμα, σε θερμοκρασία δωματίου $T = 290$ K, η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης του νερού είναι $2,46 \text{ kJ/g}$. Εφόσον υπάρχουν $\frac{1}{18} N_A$ μόρια σε 1 g νερού ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mole}^{-1}$ είναι ο αριθμός Avogadro), για να μετακινηθεί ένα μόριο από την υγρή στην αέρια φάση απαιτείται ενέργεια $E_1 = 7,35 \cdot 10^{-20} \text{ J}$. Σε υπολογισμούς σε ατομικό επίπεδο η ενέργεια εκφράζεται συνήθως σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV). Ένα ηλεκτρονιοβόλτ ισούται με $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, επομένως $E_1 = 0,46 \text{ eV}$.

Προς τι λοιπόν καταναλώνεται αυτή η ενέργεια; Η απάντηση είναι

ολοφάνερη: για να υπερνικηθεί η ελκτική δύναμη που ασκείται από το υγρό στο μόριο, και αυτό να μπορέσει να διαφύγει. Κάθε μόριο αλληλεπιδρά με τα γειτονικά του. Η μοριακή αλληλεπιδρασης με μικρές αποστάσεις ($r < r_0 - 10^{-8} \text{ cm}$) έχει τη μορφή άπωσης αλλά σε μεγαλύτερες αποστάσεις ($r > r_0$) έλξης. Στο εσωτερικό ενός υγρού, λοιπόν, κάθε μόριο περιβάλλεται απ' όλες τις πλευρές από άλλα όμοια μόρια, συνεπώς η (μέση) δύναμη που δέχεται απ' αυτά είναι μηδενική. Ωστόσο, τούτο δεν ισχύει για ένα μόριο στην επιφάνεια του υγρού που προσπαθεί να διαφύγει στον αέρα. Αυτό το μόριο έλκεται από πλήθος μορίων μονόπλευρα και η συνισταμένη δύναμη που δέχεται κατευθύνεται προς το εσωτερικό του υγρού. Έτσι, για να υπερνικήσει κάθε ελκτική δύναμη και τελικά να διαφύγει από το ύγρο, το μόριο πρέπει να έχει υψηλή κινητική ενέργεια. Απλώς συγκρίνετε: η μέση κινητική μεταφορική ενέργεια ενός μορίου νερού είναι $\frac{3}{2} kT$, όπου $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ η σταθερά του Boltzmann — δηλαδή $0,038 \text{ eV}$ σε $T = 290 \text{ K}$, η οποία είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερη από την ενέργεια E_1 που απαιτείται για να «δραπετεύσει» από την υγρή φάση ένα μόριο νερού. Επομένως, μόνο λίγα μόρια μπορούν να διαφύγουν από την επιφάνεια του υγρού: τα μόρια που συμβαίνει να βρίσκονται κοντά της και έχουν ενέργεια κατά μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από τη μέση ενέργεια τους λόγω της θερμικής τους κίνησης.

Μπορούμε να δούμε τώρα τη λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης από διαφορετική οπτική γωνία. Προφανώς η θερμότητα που καταναλώνεται δεν μεταφέρεται άμεσα στα μόρια τα οποία διαφεύγουν από την επιφάνεια του υγρού. Αυτά τα μόρια αποκτούν την ενέργεια που τους λείπει με στοχαστικό τρόπο από τα γειτονικά τους μόρια. Εντούτοις, εφόσον μόνο τα πιο «ενεργητικά» μόρια έχουν τη δυνατότητα να διαφεύγουν, στην υγρή φάση θα απομένει κατά μέσο όρο λιγότερη ενέργεια για κάθε μόριο. Αν το υγρό δεν αντιστάθμιζε την απώλεια ενέργειας προσλαμβανοντας μια ορισμένη ποσότητα θερμότητας από το περιβάλλον του, η θερμοκρασία του θα έπεφτε. Άρα, για να διατηρήσει τη θερμοκρασία του σταθερή, το υγρό πρέπει να απορροφήσει ποσότητα θερμότητας ίση με τη θερμότητα εξαέρωσης.

Σ' αυτό το σημείο, πολλοί σπουδατές πέφτουν στην ίδια παγίδα: «Εφόσον τα μόρια που διαφεύγουν έχουν υψηλές ενέργειες, ο ατμός πρέπει να είναι πιο ζεστός απ' ό,τι το υγρό». Φυσικά, αυτό δεν ιοχύει. Ένα μόριο έχει υψηλή ενέργεια μόνο κατά την πρώτη στιγμή της έναρξης της «ελεύθερης» πτήσης του. Καθώς υπερνικά τις ελκτικές δυνάμεις, το μόριο χάνει μεγάλο μέρος της ενέργειάς του, κι έτοι η μέση ενέργεια των «νεοφερμένων» στην επιφάνεια μορίων είναι ίση με εκείνη του ατμού, εφόσον η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή.

«Πολύ ωραία όλα αυτά», ίσως σκε-

1. Δείτε επίσης την πρόκληση Φ63 στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1996.

φτεί κανείς, «αλλά ακόμη δεν έχουμε κάνει ούτε το πρώτο βήμα για να εκτιμήσουμε το ρυθμό εξάτμισης του νερού. Όχι μόνο αυτό, αλλά είναι προφανές ότι αν οκοπεύσουμε σε μια λογική εκτίμηση, χρειαζόμαστε πολύ πιο οαφή, ποσοτική κατανόηση της "δομής" του υγρού και του τρόπου με τον οποίο κινούνται τα μόρια του». Ωστόσο, μπορούμε να κάνουμε όλους τους αναγκαίους υπολογισμούς. Ας δούμε πώς.

Αποδεικνύεται ότι το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να τοποθετήσουμε νοερά το ποτήρι με το νερό μέσα σ' ένα κλειστό δοχείο. Σε λίγο, το δοχείο γεμίζει με κορεσμένους υδρατμούς, και η διαδικασία εξάτμισης σταματάει. Για να μιλήσουμε με ακρίβεια (και αυτό είναι το θέμα!), η εξάτμιση πλέον συνεχίζεται όπως και πριν, αλλά το πλήθος των μορίων που διαφεύγουν από την επιφάνεια του νερού ισούται με το πλήθος των μορίων που επανεισδύουν σ' αυτό. Η εν λόγω κατάσταση ονομάζεται «δυναμική ιορροπία» μεταξύ του υγρού και του αερίου. Μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε το ρυθμό εξάτμισης έμμεσα, επικεντρώνοντας την προσοχή μας όχι στο υγρό αλλά στον κορεσμένο ατμό του. Αυτό το τέχνασμα αξιοποιεί το γεγονός ότι ο ατμός είναι κάτι πολύ απλούστερο απ' ό,τι το υγρό. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να έχουμε μια αρκετά καλή εκτίμηση εάν θεωρήσουμε τον κορεσμένο ατμό ιδανικό αέριο.

Χάριν απλουστεύσεως, θα κάνουμε μερικές πρόσθετες υποθέσεις. Ειδικότερα, ας θεωρήσουμε ότι όλα τα μόρια έχουν την ίδια ταχύτητα v και πως κινούνται μόνο προς έξι επιτρέπτες κατευθύνοσις — δηλαδή, παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμέ-

νων (ο ένας από τους άξονες είναι ο κατακόρυφος). Κάθε δευτερόλεπτο, το ένα στα έξι μόρια που περιέχονται στον κύλινδρο ύψους v (βλ. Σχήμα 1) προσκρούει σε ένα τμήμα εμβαδού S της επιφάνειας του υγρού:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6} nvS,$$

όπου n είναι η συγκέντρωση των μορίων (ένας ακριβής υπολογισμός οδηγεί σε συντελεστή $1/4$ αντί του $1/6$). Για να εκτιμήσουμε την ταχύτητα v χρησιμοποιούμε τον τύπο της μέσης τετραγωνικής ταχύτητας $v_{rms} = \sqrt{3kT/m}$ (όπου m είναι η μάζα ενός μορίου). Η συγκέντρωση n των κορεσμένων ατμών μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της τάσης τους $P_{\text{κ.α.}}$ μέσω της εξίσωσης των ιδανικών αερίων $P_{\text{κ.α.}} = nkT$. Τότε για τη μάζα των κορεσμένων υδρατμών που πέφτουν πάνω στο τμήμα εμβαδού S της επιφάνειας του νερού — επομένως και για τη μάζα του νερού που εξατμίζεται —, παίρνουμε

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{6} mn v_{rms} S = \frac{1}{2} P_{\text{κ.α.}} S \left(\frac{M}{3RT} \right)^{1/2},$$

όπου M η γραμμομοριακή μάζα του νερού και R η παγκόσμια στάθερά των αερίων. Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα σ' αυτή την εξίσωση (η $P_{\text{κ.α.}}$ σε 17°C ισούται με $0.02 \cdot 10^5 \text{ Nt/m}^2$), βρίσκουμε ότι κάθε δευτερόλεπτο 0.16 g νερού αφήνουν τους κορεσμένους υδρατμούς και καταλήγουν σε ένα τμήμα της επιφάνειας εμβαδού 1 cm^2 . Αν αυτός ήταν πράγματι και ο ρυθμός εξάτμισης, η στάθμη του νερού θα κατέβαινε κατά 1 cm κάθε 6 δευτερόλεπτα!

Προφανώς το παραπάνω αποτέλεσμα απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Υποστήκαμε διδακτική ήττα, και πρέπει να βρούμε το λόγο για τον οποίο συνέβη αυτό.

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξετάσουμε είναι το ίδιο το πείραμα. Η εξάτμιση, όπως συμβαίνει στην πραγματικότητα, επιβραδύνεται σημαντικά επειδή ο αέρας μέσα στο δωμάτιο δεν είναι εντελώς ξηρός αλλά ως ένα βαθμό υγρός. Υγρασία της τάξης του $60\%-80\%$ θα μπορούσε από μόνη της να επιβραδύνει την εξάτμιση, αλλά μόνο κατά παράγοντα $3\text{-}4$.

Ωστόσο, αν δεν υπάρχει ρεύμα αέρα πάνω από την επιφάνεια του υγρού (για παράδειγμα, αυτό που παράγει ένας ανεμιστήρας), η υγρασία ακριβώς στην επιφάνεια θα μπορούσε να προσεγγίζει το 100% , πράγμα που σημαίνει πως η εξάτμιση θα επιβραδύνοταν δραστικά. Από την άλλη πλευρά, η παραπάνω εκτίμηση μας για το ρυθμό εξάτμισης αφορά την ιδανική περίπτωση κατά την οποία κανένα μόριο δεν επιστρέφει στην επιφάνεια του νερού.

Παρ' όλα αυτά, αποδεικνύεται ότι η εκτίμηση μας δεν ανταποκρίνεται ούτε στην ιδανική περίπτωση. Εχουμε πέσει έξω κατά παράγοντα 30 , αλλά τώρα η αιτία έγκειται στον ίδιο τον υπολογισμό. Μόνο το $3\%-4\%$ των μορίων που προσκρούουν στην επιφάνεια του υγρού εισδύουν σ' αυτό και χάνονται στα βάθη του. Τα περισσότερα από τα μόρια αναπηδούν στην επιφάνεια και απομακρύνονται.

Ας συνοψίσουμε. Αν ένα απόλυτα ξηρό ρεύμα αέρα ουνέλεγε όλα τα μόρια που διαφεύγουν από την επιφάνεια του νερού, η στάθμη του νερού στο ποτήρι θα κατέβαινε κατά 1 cm όχι σε 6 δευτερόλεπτα αλλά σε 3 λεπτά. Και πάλι συντομότερα απ' όσο θα περιμένατε, έτσι δεν είναι; ◻

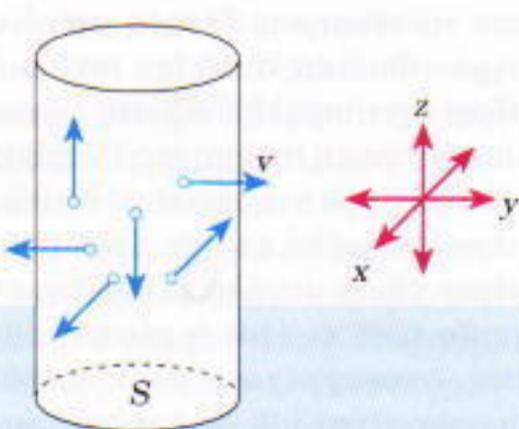
ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

To Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 15 τεύχη. Αυτά, για όσο χρόνο θα οπάρχουν διαθέσιμα αντίτοπά τους, μπορείτε να τα προμπθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο των περιοδικών, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

To Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΚΛΑΝΤΙΥΜ

*Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πατεριστηρίου 49), 105 64 Αθήνα
Τηλ.: 3247785*



Σχήμα 1

Η φύση του μαγνητισμού στο Διάστημα

Κατανοώντας τη χαοτική προέλευση του «ρευστομαγνητικού δυναμό»

Alexander Ruzmaykin

ΤΟ ΓΗΝΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΧΕΙ ανακαλυφθεί εδώ και πολλά χρόνια. Τα μαγνητικά πεδία άλλων πλανητών, αστρών και γαλαξιών ανακαλύφθηκαν στον αιώνα μας — μερικά από αυτά, μάλιστα, αρκετά πρόσφατα. Γνωρίζουμε πλέον ότι μαγνητικά πεδία 10^{12} έως 10^{14} φορές ισχυρότερα από αυτό της Γης σχηματίζονται στους πάλοσαρ. Τα κοσμικά μαγνητικά πεδία είναι θεμελιώδως διαφορετικά από εκείνα των μόνιμων μαγνητών (που αποτελούνται από χάλυβα ή ορισμένα κράματα). Όπως και τα πεδία στους ηλεκτρομαγνήτες, τα κοσμικά μαγνητικά πεδία παράγονται από ρεύματα που ρέουν σε κάποιο ηλεκτρικά αγώγιμο μέσο. Ωστόσο, οι κοσμικοί ηλεκτρομαγνήτες, κατά κανόνα, δεν τροφοδοτούνται από μια εξωτερική πηγή ρεύματος, αλλά λειτουργούν ως αυτοδιεγειρόμενο δυναμό (ηλεκτρομαγνητική γεννήτρια). Σ' αυτό το δυναμό το ρόλο του επαγώγιμου των παιζει το κινούμενο μέσο. Τούτο το άρθρο αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στα κοσμικά δυναμό ως πηγή μαγνητικών πεδίων μεγάλης κλίμακας στο εξώτερο Διάστημα.

Μαγνητικά πεδία στη φύση

Στα σχολικά βιβλία μαθαίνουμε ότι τα μαγνητικά πεδία δημιουργούνται από ηλεκτρικά ρεύματα. Ωστόσο, από ιστορική άποψη, οι άνθρωποι εξοικειώθηκαν με τα μαγνητικά πεδία μέσω των μόνιμων μαγνητών. Θυμηθείτε πόσο ευδιάκριτες γίνονται

οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές από τα ρινίσματα του σιδήρου. Οι γραμμές αυτές είναι πάντοτε κλειστές. Θυμηθείτε ότι η βελόνα μιας πυξίδας προσανατολίζεται σε διεύθυνση εφαπτόμενη των μαγνητικών δυναμικών γραμμών — εύκολα μπορείτε να το διαπιστώσετε. Μάλιστα, μέσω αυτού ακριβώς του φαινομένου ανακαλύφθηκε το γήινο μαγνητικό πεδίο.

Με τη βοήθεια των σύγχρονων διαστημοπλοίων, εξοπλισμένων με συσκευές περισσότερο ευαισθητες από την πυξίδα, ανακαλύφθηκαν τα μαγνητικά πεδία των άλλων πλανητών: του Εφρήμη, του Άρη, του Δία και του Κρόνου. Για παράδειγμα, το μαγνητικό πεδίο του Άρη ανιχνεύτηκε για πρώτη φορά από μαγνητόμετρα στον σοβιετικό διαστημικό σταθμό Αρης-3. Στον ισημερινό του πλανήτη αυτού, το μαγνητικό πεδίο είναι $6 \cdot 10^{-8} T$. Ο Δίας, όπως αποδείχτηκε, έχει το ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο ($4 \cdot 10^{-4} T$ στον ισημερινό του — κατά προσέγγιση 10 φορές η υψή του γήινου πεδίου).

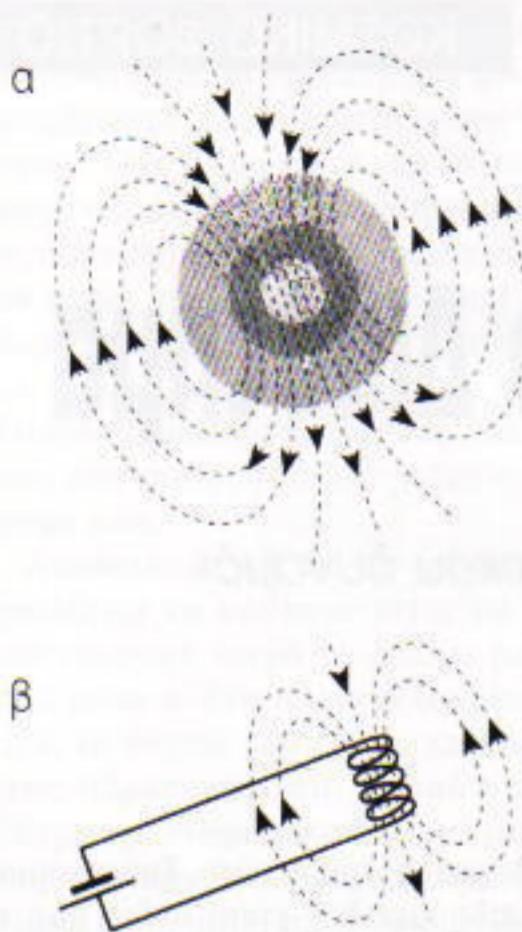
Στις αρχές του αιώνα μας ανακαλύφθηκε το μαγνητικό πεδίο του Ήλιου. Ο Ήλιος δεν είναι παρά ένα ουνηθισμένο μέλος της αστρικής κοινότητας. Όπως ήταν φυσικό, ανακαλύψαμε τα μαγνητικά πεδία και άλλων φωτεινών ουράνιων οώματων. Ορισμένα αστρα έχουν πεδία που είναι δεκάδες χιλιάδες φορές ισχυρότερα από αυτό του Ήλιου.

Μαγνητικό πεδίο υπάρχει επίσης

στον μεσοαστρικό χώρο. Τούτο, όμως, οπωσδήποτε δεν είναι πεδίο που το δημιουργούν τα άστρα. Το μαγνητικό πεδίο ενός άστρου ελαττώνεται με την απόσταση τόσο δραστικά (εν γένει είναι αντιστρόφως ανάλογο του κύβου της απόστασης), που, ουνήθως, δεν φτάνει ούτε στους εγγύτερους γείτονές του. Ωστόσο, υπάρχει το μαγνητικό πεδίο του Γαλαξία μας, που εκτείνεται σε τεράστιες αποστάσεις, ξεπερνώντας κατά πολὺ το διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών αστρών. Αυτό το πεδίο είναι αρκετά ασθενές — περίπου $10^{-10} T$.

Η ανακάλυψη του διαστημικού μαγνητισμού δημιούργησε το ερώτημα γιατί να υπάρχει. Τα στερεά σώματα στο Διάστημα είναι λίγα, και έτσι οι φυσικές διαδικασίες ουμβαινουν σε υγρά ή αέρια μέσα, που αποτελούνται από ηλεκτρόνια, θετικά φοριομένα ιόντα και ουδέτερα άτομα και μόρια. Το γήινο μαγνητικό πεδίο (Σχήμα 1α) δημιουργείται από την κίνηση του υλικού (τηγμένου σιδήρου με προσμείξεις άνθρακα, θείου και πυριτίου) του υγρού φλοιού του εσωτερικού της Γης (πρόκειται για ένα οφαιρικό στρώμα που εκτείνεται μεταξύ 0,19 και 0,55 της ακτίνας της Γης). Σε άστρα αερίων (όπως είναι ο Ήλιος μας), το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται στον εξωτερικό (μερικώς ιονισμένο) φλοιό, ο οποίος έχει πάχος περίπου το 1/10 της ακτίνας του άστρου.

Επομένως, τα κοσμικά μαγνητικά πεδία παράγονται από ρεύματα που



Σχήμα 1

Συγκριση μαγνητικών πεδίων. Το γήινο μαγνητικό πεδίο (α) ροιάζει με αυτό ενός μονιμού μαγνήτη. Ωστόσο, η φύση των πεδίων αυτών είναι διαφορετική. Ο μαγνητισμός ενός μονιμού μαγνήτη εξηγείται με πολύπλοκες κβαντικομηχανικές ιδιότητες των οματιδίων του σιερεού σώματος. Το γήινο μαγνητικό πεδίο, από την άλλη πλευρά, δημιουργείται από ηλεκτρικά ρεύματα που ρέουν στο εσωτερικό του υγρού πυρήνα. Από την άποψη αυτή, το μαγνητικό πεδίο της Γης είναι παρόμοιο με αυτό ενός ηλεκτρομαγνήτη (β).

ρέουν μέσα σε ηλεκτρικά αγώγιμα μέσα. Με παρόμοιο τρόπο δημιουργείται το μαγνητικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνήτη (Σχήμα 1β). Ωστόσο, για να διατηρηθεί το ρεύμα σ' έναν ηλεκτρομαγνήτη, χρειάζεται να υπάρχει μια εξωτερική πηγή ενέργειας. Εντούτοις, «μπαταρίες» που να παράγουν ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις μέσω χημικών ή θερμικών φαινομένων είναι συνήθως ασθενείς ή απούσες στο Διάστημα. Η κύρια πηγή μαγνητικών πεδίων στο Διάστημα είναι η κίνηση του ίδιου του αγώγιμου μέσου.

Τα κοσμικά μαγνητικά πεδία δεν είναι σταθερά. Για παράδειγμα, το μεγάλης κλίμακας πεδίο του Ήλιου αλλάζει πολικότητα σχεδόν περιοδικά, κάθε 11 χρόνια. Η διαδικασία αυτή είναι συνδεδεμένη με τον κύκλο της ηλιακής δραστηριότητας, που εκδηλώνεται με τις σκοτεινές ηλιακές κηλίδες, το ηλιακό στέμμα, τις

ηλιακές εκλάμψεις, και άλλα συναφή φαινόμενα. Τα τελευταία χρόνια, τέτοιοι κύκλοι δραστηριότητας παρατηρήθηκαν σε πολλά άλλα αστέρα. Το μαγνητικό πεδίο της Γης αποδείχτηκε επίσης ότι είναι μεταβλητό: οι πέρασμα μεγάλων χρονικών περιόδων —ανά 200.000 χρόνια περίου— αλλάζει την κατεύθυνσή του κατά 180°: ο βόρειος μαγνητικός πόλος γίνεται νότιος, και αντίστροφα.

Γιατί το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται μέσα στο αγώγιμο μέσο

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα φορτίο εξαφανίζεται όταν το φορτίο αυτό εξουδετερώνεται από ένα άλλο, ετερόνυμο φορτίο. Στο πλάσμα, το οποίο αποτελείται από ίσες ποσότητες θετικών και αρνητικών κινούμενων φορτίων, κάθε επιπλέον φορτίο —θετικό ή αρνητικό— που θα παρουσιαστεί αυθαίρετα σε κάποια περιοχή, σύντομα θα εξουδετερωθεί. Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του πλάσματος τόσο μικρότερος είναι ο χρόνος εξαφάνισης του ηλεκτρικού πεδίου. Το μαγνητικό πεδίο στο πλάσμα, ωστόσο, δημιουργείται εξαιτίας της κίνησης των ηλεκτρικών φορτίων, δηλαδή εξαιτίας ηλεκτρικών ρευμάτων. Προφανώς, το πεδίο αυτό θα μεταβάλλεται ανάλογα με το ηλεκτρικό ρεύμα.

Ας εξετάσουμε κατ' αρχάς πώς μεταβάλλεται το ρεύμα σ' ένα ουνηθιούμενο μεταλλικό σύρμα. Θεωρήστε μία περιέλιξη ακτίνας r κατασκευασμένη από σύρμα το οποίο έχει εμβαδόν εγκάρσιας διατομής πr^2 και ειδική αντίσταση ρ . Ας υποθέσουμε ότι η περιέλιξη ουνδέεται με μπαταρία ως εκ τούτου, η περιέλιξη θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I και γύρω της θα δημιουργείται μαγνητικό πεδίο B . Το πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο της περιέλιξης και το μέτρο του στο κέντρο της ισούται με $B_{\text{max}} = \mu_0 I / 2r$, όπου $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Η μαγνητική ενέργεια αυτού του ουσιώματος υπολογίζεται ότι δίνεται από τον τύπο

$$W_{\mu} \cong \frac{B_{\text{max}}^2}{2\mu_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

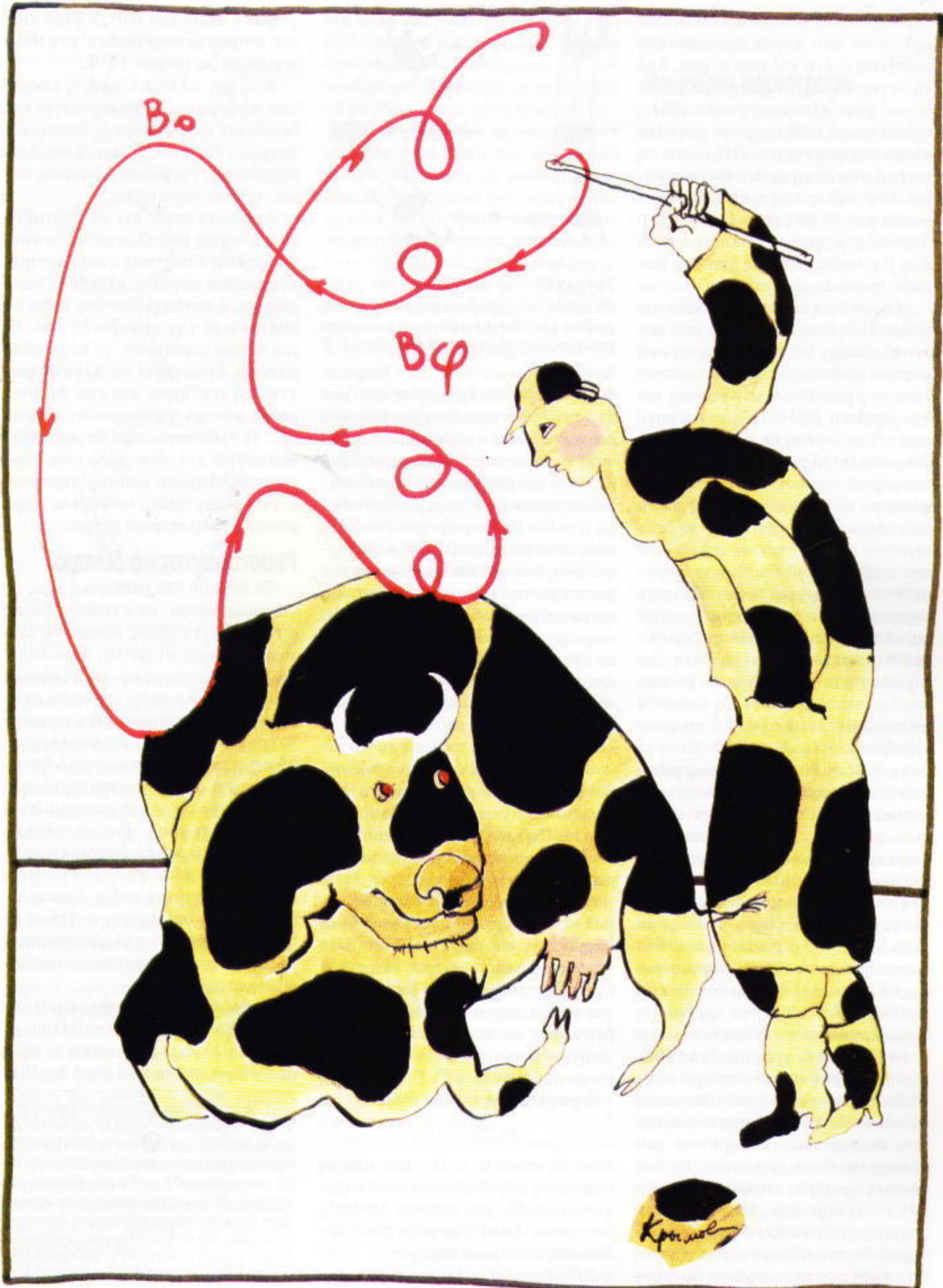
Στη συνέχεια, ας απομακρύνουμε την πηγή του ρεύματος, και ας συνδέσουμε μεταξύ τους τα άκρα της περιέλιξης. Εκ πρώτης όψεως, θα θεωρούσαμε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα θα διακοπεί αμέσως λόγω της μη μηδενικής αντίστασης R του αγωγού. Σιγη στην πραγματικότητα, ωστόσο, το ρεύμα δεν θα διακοπεί έτσι ξαφνικά. Ο ρυθμός ελάττισης του καθορίζεται από το ρυθμό απώλειας θερμικής ενέργειας $P = I^2 R$. Το ρεύμα τροφοδοτείται από τη μαγνητική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη γύρω από την περιέλιξη. (Σημειώστε ότι η μαγνητική ενέργεια είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια των φορέων του ρεύματος —των ηλεκτρονίων.) Η ενέργεια αυτή θα καταναλωθεί σε χρονικό διάστημα

$$t \cong \frac{W_{\mu}}{P} \sim 10^{-6} \sigma \ell^2,$$

όπου $\sigma = 1/\rho$ είναι η αγωγιμότητα του υλικού της περιέλιξης.

Ας κάνουμε μια εκτίμηση του χρόνου απόσβεσης t για χάλκινο σύρμα με ακτίνα εγκάρσιας διατομής $\ell = 1 \text{ cm}$. Η αγωγιμότητα του χαλκού είναι περίου $6 \cdot 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Οι τιμές αυτές, λοιπόν, δίνουν χρόνο t μικρότερο από 0,01 s.

Ας έρθουμε τώρα στην περίπτωση του πλάσματος στο εξώτερο Διάστημα. Συνήθως η αγωγιμότητα του πλάσματος είναι ίδια με αυτήν ασθενών αγώγιμων μετάλλων, αλλά οι όγκοι που καταλαμβάνουν τα ρεύματα σ' αυτό είναι τεράστιοι. Στην προκειμένη περίπτωση, λοιπόν, ο χαρακτηριστικός χρόνος για να αλλάξει το πεδίο γίνεται πολύ μεγάλος. Για παράδειγμα, η αγωγιμότητα του πλάσματος στην ανώτερη στιβάδα του Ήλιου είναι περίου $10^6 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ (ο υδράργυρος, το κράμα νικελίου-χρωμίου και το βισμούθιο έχουν κατά προσέγγιση την ίδια αγωγιμότητα σε θερμοκρασία δωματίου). Η ακτίνα του Ήλιου είναι περίου $7 \cdot 10^8 \text{ m}$. Έτσι, ο χρόνος απόσβεσης του μαγνητικού πεδίου που παράγεται από ρεύματα στο εσωτερικό μιας στιβάδας της οποίας η ακτίνα είναι το ένα δέκατο της ακτίνας του Ήλιου είναι 10^{15} s , ή 100 εκατομμύρια χρόνια! Βέβαια, αυτή είναι απλώς μια προσέγγιση. Παρ' όλα αυτά, συγκρι-

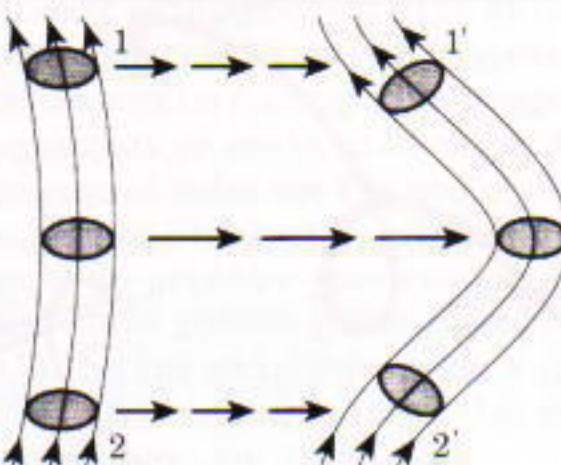


Kronosol

νετέ την με τα κλάσματα του δευτερολέπτου που χαρακτηρίζουν την απόσβεση σ' ένα χάλκινο σύρμα. Από τη σύγκριση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι ουνήθεις ηλεκτρικές αντιστάσεις έχουν μικρή επίδραση στα μεγάλης κλίμακας μαγνητικά πεδία, από τη στιγμή που αυτά έχουν δημιουργηθεί. Τότε, όμως, πώς εξηγείται το γεγονός ότι το μαγνητικό πεδίο του Ήλιου, φέρει ειπείν, αλλάζει έπειτα από μια πολύ σύντομη χρονική περίοδο (μόνο 11 χρόνια);

Η απάντηση είναι ότι το μέσον κινείται. Η κίνηση ενός μέσου που φέρει ελεύθερα θετικά και αρνητικά φορτία ισοδυναμεί με την κίνηση ενός αγωγού. Όπως αναφέρεται και στα σχολικά βιβλία, σ' έναν αγωγό που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη, και, αν ο αγωγός αποτελεί μέρος κλειστού κυκλώματος, θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Αυτό το δευτερεύον ρεύμα δημιουργεί το δικό του μαγνητικό πεδίο, το οποίο προστίθεται στο αρχικό πεδίο. Αξίζει να σημειωθεί ότι σ' ένα ιδανικά αγώγιμο πλάσμα (δηλαδή, πλάσμα του οποίου η αντισταση είναι μηδέν) η ολική μαγνητική ροή $\Phi = BS$ θα παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια αυτών των μεταβολών (S είναι το εμβαδόν του κυκλώματος). Έτσι, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από τον κινούμενο αγωγό μοιάζει να μετακινείται μαζί του. Ένα τέτοιο πεδίο μέσα στο πλάσμα λέγεται «παγωμένο». Θα μπορούσε κανείς να περιγράψει τη συμπεριφορά του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του κινούμενου αγώγιμου μέσου σαν μια κλωστή που ρίχνεται μέσα σ' ένα ρυάκι: η κλωστή όχι μόνο μεταφέρεται, αλλά και τεντώνεται εάν τα σωματίδια του υδάτινου ρεύματος απομακρύνονται το ένα από το άλλο.

Οι δυναμικές γραμμές ενός «παγωμένου» μαγνητικού πεδίου ακολουθούν την κίνηση του πλάσματος ως όλου. Ωστόσο, οι σχετικές κινήσεις διαφορετικών τμημάτων του πλάσματος παραμορφώνουν τις δυναμικές γραμμές, τις καμπυλώνουν και τις τεντώνουν. Μία δυναμική γραμμή που συνδέει δύο γειτονικά σωματίδια του πλάσματος θα τα συνδέει κάθε στιγμή — δηλαδή θα ακο-



Σχήμα 2

Μεταβολή στο μαγνητικό πεδίο όταν τα σωματίδια του ιδανικά αγώγιμου πλάσματος μετατοπίζονται από τη θέση 1-2 στη θέση 1'-2'. Λουθεί τη μετατόπιση των σωματιδίων (Σχήμα 2). Το πλήθος των μαγνητικών δυναμικών γραμμών που διέρχονται από οποιαδήποτε επιφάνεια η οποία περιβάλλεται από μια κλειστή γραμμή κινούμενων σωματιδίων του υγρού παραμένει σταθερό (για $r = 0$). Το μαγνητικό πεδίο B μπορεί να αυξηθεί εξαιτίας παραμορφώσεων που φέρνουν κοντύτερα περιοχές με την ίδια φορά πεδίου, και αντιστρόφως, μπορεί να ελαττωθεί όταν έρχονται κοντύτερα περιοχές με αντίθετη φορά. Πράγματι, όπως προκύπτει από την ισότητα $B = \Phi/S$, για σταθερό Φ , το B μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το S .

Ο απλούστερος τρόπος να ενισχύουμε το «παγωμένο» μαγνητικό πεδίο είναι να περισφίξουμε (να συμπιέσουμε) ένα στρώμα του πλάσματος (δηλαδή, να ελαττώσουμε το S). Η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται ως η απλούστερη εξήγηση για τα τεράστια μαγνητικά πεδία των πάλσαρ. Ένας πάλσαρ είναι ένας συμπαγής αστέρας νετρονίων ακτίνας $r \approx 10$ km. Εάν υποθέσουμε ότι ο αστέρας νετρονίων έχει σχηματιστεί από τη συμπίεση ενός κοινού αστρου ακτίνας $r_0 \equiv 10^6$ km, βρίσκουμε ότι στη διάρκεια της συμπίεσης η ακτίνα του ελαττώνεται κατά παράγοντα 10^5 . Η διατήρηση του μαγνητικού πεδίου δίνει

$$\pi r_0^2 B_0 = \pi r^2 B,$$

όπου B_0 είναι το πεδίο πριν από τη συμπίεση και B το προκύπτον μαγνητικό πεδίο του πάλσαρ. Με αυτό τον τρόπο, λοιπόν, το μαγνητικό πεδίο ενισχύεται κατά παράγοντα $(r_0/r)^2 = 10^{10}$. Έτσι, το μάλλον «μέτριο» μα-

γνητικό πεδίο του 0,01 T ενός κονού αστρου μετατρέπεται σ' ένα πολύ ισχυρό πεδίο μέτρου 10^8 T.

Από την άλλη πλευρά, η κίνηση του πλάσματος παραμορφώνει και διαπλέκει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Και όπως είδαμε, η απώλεια θερμότητας, για μικρής κλίμακας περίοδο, γίνεται σημαντική.

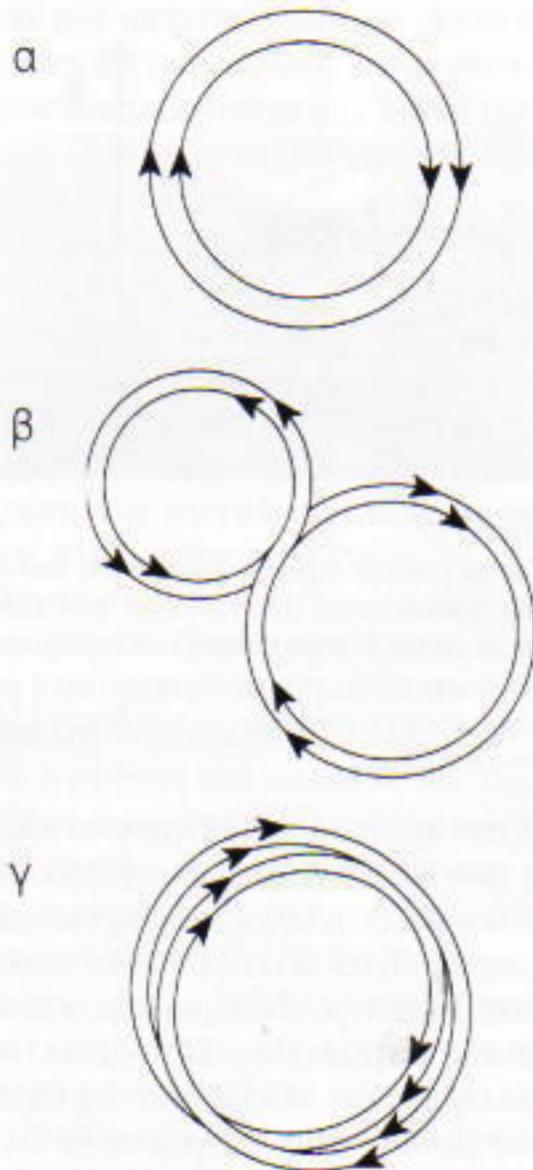
Αποδεικνύεται ότι σε ορισμένα είδη κίνησης του πλάσματος το φαινόμενο της ενισχυσης ενός μαγνητικού πεδίου μεγάλης κλίμακας υπερισχύει, ή τουλάχιστον δεν είναι ασθενότερο της απόσβεσης του. Σε μια τέτοια περιπτώση, το κινούμενο πλάσμα λειτουργεί ως ηλεκτρομαγνητική γεννήτρια, και έτοι θα μπορούσε φυσικά να ονομαστεί «δυναμό». Η λειτουργία του δυναμό επιδεικνύεται συνήθως μέσω ενός συρμάτινου πλαισίου που περιστρέφεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα.

Ρευστομαγνητικό δυναμό

Το δυναμό στο εσωτερικό ενός αγώγιμου μέσου, σε αντίθεση με τις ουνήθεις γεννήτριες, πρέπει να λειτουργεί χωρίς σύρματα, περιελίξεις και, το πιο σημαντικό, χωρίς εξωτερικό μαγνητικό πεδίο (το οποίο αποτελεί προαπαιτούμενο για ένα κοινό δυναμό¹). Λόγω του ότι αποκλειστική πηγή ενέργειας στο φυσικό δυναμό είναι η ρευστοδυναμική κίνηση του πλάσματος, αυτό επονομάζεται «ρευστοδυναμικό». Για να τεθεί σε λειτουργία η ρευστοδυναμική γεννήτρια, απαιτείται μόνο ένα ασθενές αρχικό μαγνητικό πεδίο. Τέτοια ασθενή πεδία οφείλονται συνήθως σε διαφόρων ειδών αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φορτισμένων σωματιδίων του πλάσματος.

Η ιδέα να ερμηνευτούν τα μαγνητικά πεδία της Γης και του Ήλιου με βάση τη ρευστομαγνητική κίνηση προτάθηκε για πρώτη φορά το 1919

1. Σε μια μεγάλης κλίμακας σύγχρονη γεννήτρια, το ρεύμα, που παράγει μαγνητικό πεδίο, προέρχεται από την ίδια τη γεννήτρια. Στο σημείο αυτό υπάρχει μεγάλη ομοιότητα μεταξύ των φυσικών δυναμάτων και εκείνων του εμπορίου. Ωστόσο, η διευθέτηση μων περιελίξεων και ο συνολικός σχεδιασμός είναι αποτέλεσμα της ανθρώπινης εφευρετικότητας. Μπορεί η φύση να επιτύχει το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς μονωτικά υλικά; Ιδού η απορία!



Σχήμα 3
Διπλασιασμός του κορδονιού που παριστά τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

από τον πολύ γνωστό άγγλο φυσικό J. Larmor. Είναι δυνατόν, όμως, να υπάρξει ένα τέτοιο αυτεπαγόμενο ρευστομαγνητικό δυναμό, δηλαδή ένα δυναμό που θα «λειτουργεί» χωρίς εξωτερική πηγή τάσης; Η καταφατική απάντηση σ' αυτό το ερώτημα απεικονίζεται με τον καλύτερο τρόπο στο ακόλουθο παραστατικό παράδειγμα.

Ας πάρουμε ένα κυκλικό ελαστικό κορδόνι που συνισταται από ξεχωριστά ελαστικά νήματα (Σχήμα 3α). Ας υποθέσουμε ότι τα ελαστικά νήματα παριστούν μαγνητικές δυναμικές γραμμές της ίδιας φοράς (προσδιορίζεται με βέλη). Συστρέφουμε τώρα το κορδόνι έτοις ώστε να σχηματίσουμε με αυτό τον αριθμό οκτώ (Σχήμα 3β): τοποθετούμε τον ένα δακτύλιο του οκτώ πάνω στον άλλο και τεντώνουμε το «διπλό» κορδόνι ώστε να το επαναφέρουμε στο αρχικό του μέγεθος (Σχήμα 3γ). Παρατηρήστε ότι όλα τα βέλη δείχνουν την ίδια φορά. Κατ' αυτό τον τρόπο, το πλήθος των μαγνητικών δυναμικών γραμμών που διαπερνούν οποιαδήποτε εγκάρ-

σια τομή του «νέου» κορδονιού έχει διπλασιαστεί. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του διπλώματος και του τεντώματος, μπορούμε σε κάθε βήμα να διπλασιάσουμε το πλήθος των μαγνητικών γραμμών που διαπερνούν μια εγκάρσια τομή του ελαστικού κορδονιού, μέχρι να φτάσουμε το όριο ελαστικότητας του υλικού. Σημειώστε ότι στο «μονό» κορδόνι μπορεί κανείς, ξεκινώντας από οποιοδήποτε σημείο του, να επιστρέψει σ' αυτό διαγράφοντας μόνο ένα γύρο. Ωστόσο, στο «διπλό» κορδόνι θα χρειαστούν αντίστοιχα δύο γύροι. Επομένως, το «νέο» κορδόνι δεν είναι απολύτως ισοδύναμο με το αρχικό. Για να αποφύγουμε αυτή την περιπλοκή, μπορούμε σε κάθε βήμα να κόβουμε το κορδόνι στην «ένωση» του οκτώ, να ενώνουμε τα ελεύθερα άκρα των δακτυλίων, και στη συνέχεια να τοποθετούμε τους δακτύλιους όλους μαζί, τον ένα πάνω στον άλλο.

Υπό τις συνθήκες που απαντώνται στη φύση, η διαδικασία του διπλασιασμού επιτελείται από τις κινήσεις του μέσου εντός του οποίου βρίσκεται «παγωμένο» το ασθενές αρχικό μαγνητικό πεδίο. Δεν είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς κινήσεις αυτού του είδους — για παράδειγμα, επαναλαμβανόμενες περιστροφές γύρω από κάθετους μεταξύ τους άξονες, ακολουθούμενες από τεντώματα.

Η εξάλειψη της μη ισοδυναμίας του «διπλού» κορδονιού ως προς το αρχικό μπορεί να επιτευχθεί από την ηλεκτρική αντίσταση: οι απώλειες θερμότητας οδηγούν σε ομαλοποίηση και σε απομάκρυνση των μαγνητικών δυναμικών γραμμών εκεί όπου η καρπύλωση είναι μεγαλύτερη. Η ηλεκτρική αντίσταση αποτρέπει επίσης να γίνει η εγκάρσια τομή του ελαστικού κορδονιού, με τα επαναλαμβανόμενα τεντώματα που περιλαμβάνει η διαδικασία διπλασιασμού, αυθαίρετα μικρή. Η αντίσταση θα διατηρήσει τη διάμετρο του κορδονιού σχεδόν σταθερή.

Το παράδειγμα του δυναμό που περιγράφαμε είναι απλό και εύκολο να το κατανοήσουμε. Άλλα έτοις γίνεται και στη φύση: Αν ναι, η κινηση του αγώγιμου μέσου πρέπει να είναι οργανωμένη με έναν συγκεκριμένο τρόπο. Ας δούμε τι είδους

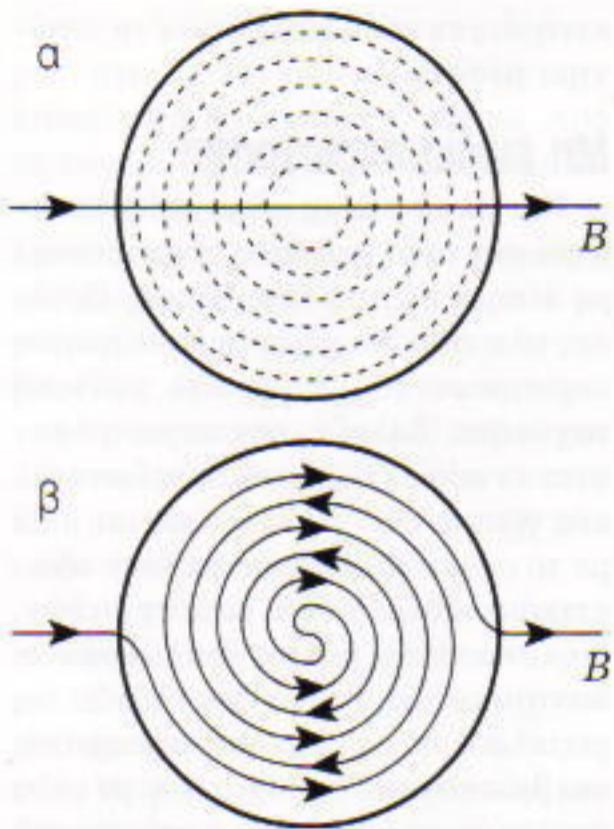
κινήσεις εκτελεί στο χώρο ένα αγώγιμο μέσο.

Μη ενιαία περιστροφή

Για όλους τους πλανήτες, τα άστρα και τους γαλαξίες, η απλούστερη κίνηση είναι η περιστροφή. Ωστόσο, εάν όλα τα μέρη ενός σώματος περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα (δηλαδή, εάν περιστρέφονται ενιαία), οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές θα περιστρέφονται μαζί με το σώμα και θα παραμένουν πρακτικά σταθερές. Για να λυγιστούν, να τεντωθούν και να διπλωθούν οι δυναμικές γραμμές, χρειάζεται τα γειτονικά σωματίδια του πλάνητας να βρίσκονται σε σχετική μεταξύ τους κίνηση — δηλαδή, η περιστροφή δεν πρέπει να είναι ενιαία. Τα στερεά σώματα, βεβαίως, εκτελούν μόνο ενιαία κυκλική κίνηση — διαφορετικά θα καταστρέφονταν. Τα υγρά και τα αέρια σώματα, όμως, μπορούν να περιστρέφονται μη ενιαία. Παρατηρήσεις του Ήλιου έχουν δείξει ότι τα τμήματα του ισημερινού του εκτελούν μια πλήρη περιστροφή αρκετές ημέρες νωρίτερα απ' ότι οι πολικές περιοχές του. Έμεσα δεδομένα δείχνουν ότι οι αθέατες εσωτερικές περιοχές του Ήλιου περιστρέφονται ακόμη ταχύτερα. Ο αέριος δίοξος του Γαλαξία μας επίσης δεν περιστρέφεται ενιαία: σε δεδομένο χρόνο, οι εσώτερες περιοχές εκτελούν περισσότερες στροφές από τις εξωτερικές.

Για να απεικονίσουμε σαφέστερα αυτή τη μη ενιαία περιστροφή, ας φανταστούμε τους ομόκεντρους κύκλους ενός καρουζέλ (Σχήμα 4). Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι που βρίσκονται κοντάτερα στο κέντρο περιστρέφονται πιο γρήγορα απ' ότι οι εξωτερικοί κύκλοι. Ας θεωρήσουμε ότι αρκετά παιδιά κάθονται σε διάφορους κύκλους, έτοις ώστε να βρίσκονται παρατεταγμένα πάνω στη διάμετρο του μεγαλύτερου κύκλου. Τα παιδιά υποχρεώνονται να κρατιούνται από ένα ελαστικό σκοινί, στερεωμένο στις άκρες της διαμέτρου το σκοινί αυτό παριστά μια μαγνητική δυναμική γραμμή.

Και τώρα, ας ξεκινήσουμε το καρουζέλ. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι έπειτα από αρκετές στροφές, το



Σχήμα 4

Μια οριζόντια μαγνητική δυναμική γραμμή μετατρέπεται σε σπείρα ύστερα από κάποιον αριθμό στροφών ενός σώματος που δεν περιστρέφεται ενταία.

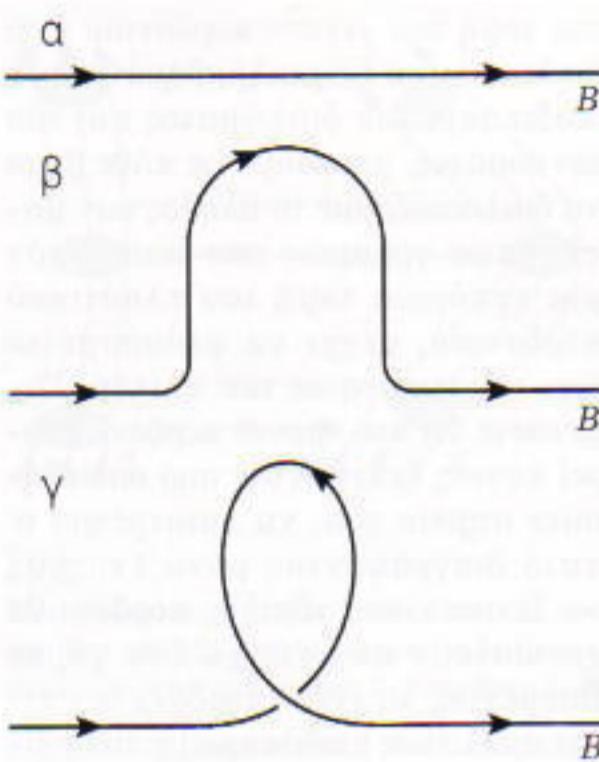
ελαστικό οκοινί (η μαγνητική δυναμική γραμμή) θα έχει καμπυλωθεί σε σπείρα (Σχήμα 4β). Ενώ αρχικά εκτεινόταν κατά μήκος της διαμέτρου, στη συνέχεια μετατοπίστηκε πλησιέστερα προς την περιφέρεια. Κατ' αυτό τον τρόπο, η μη ενταία περιστροφή μετέτρεψε ένα ακτινικό μαγνητικό πεδίο σ' ένα σχεδόν εφαπτομενικό (αζιμουθιακό) πεδίο.

Σημειώστε ότι η περιστροφή σχηματίζει ζεύγη κύκλων με μαγνητικά πεδία αντίθετης φοράς. Έτσι, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ανακύπτει ένα πρόβλημα: πώς θα διατηρήσουμε το αρχικό ακτινικό πεδίο σταθερό; Θα βοηθούσε ενδεχομένως κάποιος άλλος τύπος κίνησης; Μπορεί κανείς να φτιάξει κάτι σαν το σχήμα του αριθμού οκτώ;

ΕΠΙΚΟΤΠΤΑ

Το μέσο στο εξώτερο Διάστημα χαρακτηρίζεται από χαοτική, ακανόνιστη, τυρβώδη, θα μπορούσε να πει κανείς, κίνηση. Τέτοιου είδους κίνηση μπορούμε να παρατηρήσουμε σε ρυάκια νερού, τυφώνες, δίνες και πάμπολλες άλλες περιπτώσεις. Είναι επίσης χαρακτηριστικό του περιβάλλοντος αέρα. Εξαιτίας αυτής της χαοτικής κίνησης, διαδίδεται το άρωμα ή ο καπνός.

Χάρη στη χαοτική, ακανόνιστη

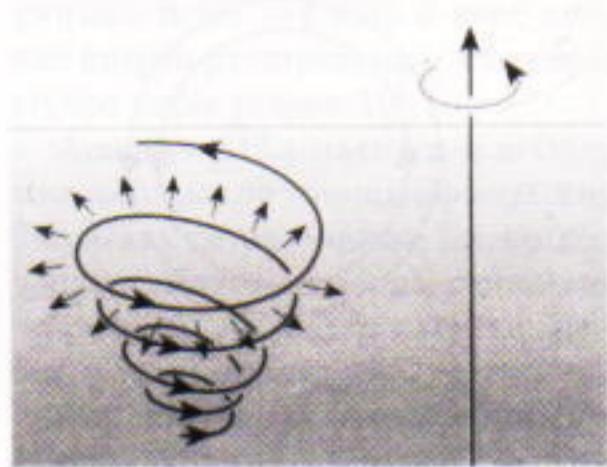


Σχήμα 5

Σπειροειδής κίνηση ενός αγώγιμου μέσου που επεκτείνεται (τεντώνει) μια μαγνητική δυναμική γραμμή (α), τη μετατρέπει σε βρόχο (β), και ακολούθως στρέφει αυτό το βρόχο (γ). Έτσι δημιουργείται ένα ρεύμα παράλληλο προς το μαγνητικό πεδίο.

φύση τους, οι τυρβώδεις κινήσεις του αγώγιμου μέσου, δηλαδή του πλάσματος, συνήθως εμπλέκουν σχετικά γρήγορα οποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο και το κατακερματίζουν. Ωτόσο, υπό τις συνθήκες που επικρατούν στο Διάστημα, η τύρβη έχει έναν οριομένο «κανονικό» χαρακτήρα.

Αντί για την πραγματική τυρβώδη ροή, ας φανταστούμε ένα σύνολο από μεμονωμένους σπειροειδείς στρόβιλους, που συνδυάζουν μεταφορική και περιστροφική κίνηση γύρω από τους άξονές τους. Έτσι ότι ορισμένοι έχουν τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και οι υπόλοιποι την αντίθετη. Η σπειροειδής κίνηση του στρόβιλου είναι ικανή να ανασηκώσει τη μαγνητική δυναμική γραμμή έτσι ώστε να μοιάζει με το ελληνικό γράμμα ωμέγα (Σχήμα 5) και στη συνέχεια να τη στρέψει. Ωτόσο, οι στρόβιλοι με τις δύο παραπάνω αντίθετες φορές —δεξιόστροφοι και αριστερόστροφοι— παράγουν βρόχους με αντίθετα μαγνητικά πεδία. Εγείρεται, λοιπόν, το ερώτημα ποιο θα είναι το αποτέλεσμα ενός μεγάλου πλήθους στρόβιλων των οποίων η φορά περιστροφής ποικίλλει, δηλαδή μιας πραγματικά τυρβώδους ροής.



Σχήμα 6

Περιστρεφόμενο στρώμα πλάσματος του οποίου η πυκνότητα ελαττώνεται από κάτω προς τα πάνω. Η περιστροφή του στρώματος ως όλου προσδίδει επιπρόσθετη γωνιακή ταχύτητα σ' έναν ανερχόμενο και διαστέλλομένο στρόβιλο.

Στην ομογενή κατάσταση, το πλήθος των δεξιόστροφων στρόβιλων είναι ίσο με το πλήθος των αριστερόστροφων. Ένα τέτοιο σύνολο στρόβιλων έχει την ιδιότητα της κατοπτρικής συμμετρίας. Πράγματι, αν παρατηρήσουμε το είδωλο ενός στρόβιλου μέσα σ' έναν καθρέφτη, θα διαπιστώσουμε ότι, εφόσον ο στρόβιλος είναι δεξιόστροφος, το είδωλό του εμφανίζεται αριστερόστροφο, και αντιστρόφως. Ωτόσο, δεδομένου ότι το πλήθος και των δύο ειδών στρόβιλων είναι το ίδιο, η εικόνα παραμένει βασικά αμετάβλητη ως προς αυτή την ιδιότητα.

Ας θυμηθούμε όμως ότι στο εξώτερο Διάστημα τα σώματα περιστρέφονται. Φανταστείτε την ακόλουθη κατάσταση: ένα στρώμα υγρού στρέφεται ως όλον γύρω από άξονα που το διαπερνά· η πυκνότητα του υγρού είναι μεγαλύτερη στον πυθμένα από οτι κοντά στην επιφάνειά του. Στο στρώμα αυτό υπάρχουν στρόβιλοι (τόσο δεξιόστροφοι όσο και αριστερόστροφοι). Πώς θα συμπεριφερθούν;

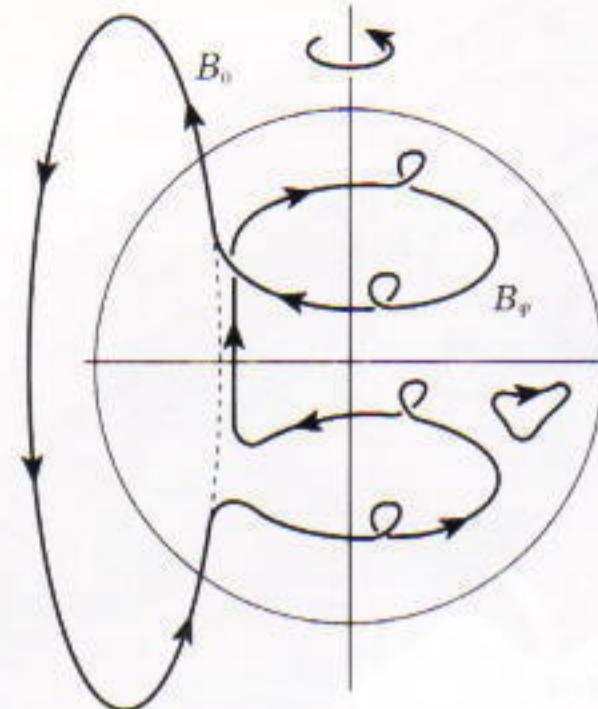
Κάθε στρόβιλος στρέφεται «από μόνος του», και επιπλέον μπορεί να αναδυθεί ή να βυθιστεί στο εσωτερικό του στρώματος. Κάθε ανερχόμενος στρόβιλος θα διαστέλλεται, όπως μια φυσαλίδα που ανερχόμενη συναντά αραιότερο μέσο. Αυτή η πλευρική διαστολή (Σχήμα 6) θα αποκλίνει από την αμιγώς ακτινική λόγω της περιστροφής του στρώματος ως όλου (με παρόμοιο τρόπο, ένας άνθρωπος ο οποίος περπατάει πάνω σ' ένα περιστρεφόμενο πλατό αποκλίνει

από μια ακτινική πορεία). Αυτό σημαίνει ότι ο στρόβιλος «αποκτά» επιπρόσθετη περιστροφή, οφειλόμενη στην περιστροφική κίνηση του στρώματος ως όλου.

Προφανώς, η επίδραση της συνολικής περιστροφής του στρώματος είναι ίδια για όλους τους ανερχόμενους στρόβιλους — δεξιόστροφους και αριστερόστροφους. Οι κατερχόμενοι στρόβιλοι συμπέζονται, αλλά η επίδραση της συνολικής περιστροφής του στρώματος σ' αυτούς θα είναι ίδια με εκείνη στους ανερχόμενους στρόβιλους. Συμπερασματικά, σ' ένα μη ομοιόμορφο στρώμα, το αποτέλεσμα της περιστροφής του ως όλου είναι η αύξηση του πλήθους των στρόβιλων που έχουν φορά περιστροφής ίδια με τη φορά περιστροφής του στρώματος (του πλάσματος). Άλλα είναι πλέον φανερό ότι πλάσμα με πλήθος, έστω, δεξιόστροφων στρόβιλων μεγαλύτερο από εκείνο των αριστερόστροφων έχει απολέσει την ιδιότητα της κατοπτρικής συμμετρίας.

Η τύρβη που περιγράφαμε αναφέρεται με τον όρο «σπειροειδής». Ανεξάρτητα από τη χαοτική φύση της, έχει, κατά μέσον όρο, μια συγκεκριμένη επιπρόσθετη περιστροφή. Η ελικότητα είναι αυτό το στοιχείο οργάνωσης που χαρακτηρίζει την τύρβη σε περιστρεφόμενα ουράνια σώματα χωρίς ομοιόμορφη πυκνότητα, όπως στους πλανήτες, τα άστρα και τους γαλαξίες.

Σε ουράνια σώματα, η σπειροειδής τύρβη δρα από κοινού με τη μη ενιαία περιστροφή. Όπως είδαμε προηγουμένως (Σχήμα 4), η μη ενιαία περιστροφή μετασχηματίζει ένα ακτινικό πεδίο σε πεδίο σχεδόν αζιμουθιακό — ή, για να είμαστε πιο ακριβείς, σε πεδίο κατά μήκος μιας σπείρας. Η σπειροειδής τύρβη ανυψώνει πολλούς βρόχους μέσα στο αζιμουθιακό πεδίο, και στη συνέχεια τους στρέφει σε διαφορετικές κατεύθυνσεις (Σχήμα 7). Ωστόσο, καθώς κυριαρχούν στρόβιλοι ορισμένου προσανατολισμού, η επιπρόσθεση των βρόχων θα δώσει ως αποτέλεσμα ένα κοινό ακτινικό πεδίο με συγκεκριμένη κατεύθυνση. Εάν το νέο ακτινικό πεδίο έχει την ίδια φορά με το αρχικό, το μαγνητικό πεδίο απλώς γίνεται 1-



Σχήμα 7

Το συνδυασμένο αποτέλεσμα της μη ενιαίας περιστροφής και της σπειροειδούς κίνησης στο μαγνητικό πεδίο. Η περιστροφή του αρχικού πεδίου (B_0) περιελίσσει το αζιμουθιακό πεδίο (B_p). Η σπειροειδής κίνηση αναστρέφει βρόχους από αυτό το πεδίο στη συνέχεια οι βρόχοι αυτοί αποκόπτονται, στρίβουν, τεντώνονται και συγχωνεύονται για να παραγάγουν ένα νέο πεδίο, που έχει κατεύθυνση παράλληλη ή αντιπαράλληλη στο αρχικό πεδίο B_0 .

σχυρότερο. Εάν το νέο πεδίο έχει φορά αντίθετη του αρχικού, είναι δυνατή η αριστερόστροφή του πεδίου. Και με αυτό τον τρόπο είναι δυνατόν να εξηγήσουμε τις περιοδικές αλλαγές στη φορά του μαγνητικού πεδίου του Ήλιου και άλλων αστρών. Σημειώστε ότι στην περίπτωση του σχήματος του αριθμού οκτώ καταλήξαμε σ' ένα δυναμό με συνεχή ενίσχυση του πεδίου — αλλά χωρίς αντιστροφές.

Μην ξεχνάτε ότι το ρευστομαγνητικό δυναμό λειτουργεί διαπλέκοντας έντονα με τυρβώδη τρόπο και καταστρέφοντας τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Κατ' αυτό τον τρόπο, η ενίσχυση και η εξασθένηση του πεδίου λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα με τη συνεχή γένεση νέων και το θάνατο παλαιών μαγνητικών γραμμών.

Το ρευστομαγνητικό δυναμό, λοιπόν, χρησιμοποιείται ευρέως για να περιγραφούν τα μαγνητικά πεδία των αστρών, των πλανητών και των γαλαξιών. Ακριβέστερα, ένα τέτοιο δυναμό φαίνεται να αποτελεί τον κύριο «κινητήρα» της επαναλαμβανόμενης ηλιακής δραστηριότητας. ◻

Steven Weinberg

Νόμπελ Φυσικής

ΟΝΕΙΡΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Η αναζήτηση των θεμελιωδών νόμων της φύσης

ΟΝΕΙΡΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ



Steven Weinberg
Νόμπελ Φυσικής

Σελ.: 350, 5.800 δρχ.

Σ' αυτό το βιβλίο, ο Steven Weinberg αναλύει τις σπουραντικότερες όψεις της σύγχρονης φυσικής (από την ειδική και τη γενική θεωρία της σχετικότητας ως την κβαντική μηχανική και τη θεωρία χορδών) και αναπτύσσει τις απόψεις του για τον αναγωγισμό, την οροφιά των επιστηροντικών θεωριών, το ζάππα της υπαρξης του Θεού, τις προοπτικές της φυσικής και τη σχέση της φιλοσοφίας με την επιστήμη. Ο διαπρεπής φυσικός οραρατίζεται τη διαμόρφωση μιας τελικής θεωρίας, εξετάζει την επίδραση που θα έχει η ανακάλυψη της στο ανθρώπινο πνεύμα και μοιράζεται με τον αναγνώστη τις αγωνίες και τις ελπίδες του για τη διατύπωσή της.

• «Ενα από τα καλύτερα αναγνώριστα που μπορώ να προτείνω...»

—Scientific American

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ποια είναι η «καλή»

«Ευτυχισμένος που έκανε

Boris

TΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΑΠΟ τα προβλήματα που ακολουθούν επιλύονται με τυποποιημένες μεθόδους. Ωστόσο, υπάρχουν επίσης σύντομες και, τουλάχιστον κατά τη γνώμη μας, ωραιότερες λύσεις, που στηρίζονται σε μερικά έξυπνα και χρήσιμα τεχνάσματα. Όλες αυτές οι «πονηρές» λύσεις, με εξαιρεση τις δύο τελευταίες, είναι εντελώς στοιχειώδεις. Ελπίζουμε ότι θα διασκεδάσετε ανακαλύπτοντάς τες.

1. Ένας άνθρωπος περπατά πάνω σε μια γέφυρα *AB*. Όταν έχει πλέον καλύψει τα $\frac{3}{8}$ του μήκους της ακούει την κόρνα ενός αυτοκινήτου που πλησιάζει στη γέφυρα με ταχύτητα 60 km/h . Αν τρέξει προς τα πίσω θα συναντηθεί με το αυτοκίνητο ακριβώς στο σημείο *A*, ενώ αν τρέξει προς τα εμπρός το αυτοκίνητο θα τον προλάβει ακριβώς στο σημείο *B*. Με πόση ταχύτητα τρέχει ο άνθρωπος;

2. Ένας κολυμβητής και μια μπάλα αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο *A* ενός ποταμού. Η μπάλα μετακινείται ακολουθώντας το ρεύμα, ενώ ο κολυμβητής αντίθετα προς αυτό. Δέκα λεπτά αργότερα, ο κολυμβητής αντιστρέφει την κατεύθυνση της κίνησής του και προλαβαίνει την μπάλα σε απόσταση 1 km από το *A*. Ο κολυμβητής κατέβαλε την ίδια προσπάθεια κατά μήκος όλης αυτής της διαδρομής. Βρείτε την ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού.

3. Ένα μπουκάλι περιέχει διάλυμα αλατιού.

Ρίχνουμε μέρος του διαλύματος — το $1/n$, για την ακρίβεια — σ' έναν δοκιμαστικό σωλήνα. Αφήνουμε να εξατμιστεί υγρό από τον σωλήνα έως ότου διπλασιαστεί το ποσοστό του αλατιού στο διάλυμα. Αδειάζουμε το διάλυμα από το σωλήνα πίσω στο δοχείο. Ως εκ τούτου, το ποσοστό του αλατιού στο διάλυμα αυξάνεται κατά r . Πόσο είναι τελικά το ποσοστό του αλατιού στο διάλυμα;

4. Μια συγκεκριμένη ποσότητα εργασίας μπορεί να εκτελεστεί από 27 όμοιες μηχανές σε 35 ώρες. Ξεκινούν ταυτόχρονα, αλλά έπειτα από 11 ώρες ένα νέο πλήθος όμοιων μηχανών αρχίζει να βοηθά στην εκτέλεση της εργασίας, και έτοι αυτό ολοκληρώνεται 6 ώρες νωρίτερα απ' ότι αναμενόταν. Πόσες μηχανές προστέθηκαν;

5. Κόβουμε δύο κομμάτια ίσης μάζας από δύο φύλλα κραμάτων χαλκού ίστης μάζας αλλά διαφορετικής συγκέντρωσης χαλκού. Από το κάθε κομμάτι και από το υπόλοιπο φύλλο του άλλου κράματος φτιάχνουμε δύο νέα κράματα. Αποδεικνύεται ότι οι συγκεντρώ-



τερη» απάντηση;

το ταξίδι του Οδυσσέα.»

—Γιώργος Σεφέρης

demsky



σεις χαλκού
στα νέα κράμα-
τα είναι ίσες. Σε
ποια αναλογία είχαν
χωριστεί τα αρχικά φύλλα;

6. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο E στην πλευρά BC ενός τετραγώνου $ABCD$. Η διχοτόμος της γωνίας DAE τέμνει την πλευρά CD στο σημείο F . Βρείτε το άθροισμα $DF + BE$ όταν $AE = a$.

7. (a) Αποδείξτε ότι είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο $A_1B_1C_1$ με πλευρές ίσες με τις διαμέσους ενός δεδομένου τριγώνου ABC . (β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $A_2B_2C_2$ που κατασκευάζεται με τις διαμέσους του τριγώνου $A_1B_1C_1$ (που περιγράφαμε στο μέρος (α)) είναι όμοιο με το τρίγωνο ABC . (γ) Βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων $A_2B_2C_2$ και ABC .

8. Εστω K το μέσο της διαμέσου AM ενός τριγώνου ABC και έστω ότι η ευθεία BK τέμνει την AC στο L . Βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου

$LKMC$, αν το εμβαδόν του ABC είναι 1.

9. Φέρουμε το ύψος CD προς την υποτείνουσα AB ενός ορθογωνίου τριγώνου ABC . Οι περίμετροι των τριγώνων ACD και BCD ισούνται, αντίστοιχα, με P_1 και P_2 . Βρείτε την περίμετρο P του ABC .
10. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n \text{ ρίζες}} + \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{m \text{ ρίζες}} < 5.$$

11. Απλοποιήστε την παράσταση

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)},$$

όπου, a, b, c είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί.

12. Επλύστε την ακόλουθη εξίσωση ως προς x : $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

13. Εστω a, β, γ οι τιμές των γωνιών ενός τυχαίου τριγώνου ABC . Αποδείξτε τις επόμενες ανισότητες:

- (α) $\sin a + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3/2$,
(β) $\sin 2a + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \geq -3/2$.

14. Απλοποιήστε την εξής παράσταση:
 $\eta \mu^3 a \sin 3a + \sin^3 a \eta \mu 3a$. □

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

ΕΞΩΤΙΚΟ ΣΚΑΚΙ

Εισάγοντας νέες παραμέτρους, μπορούμε να δώσουμε νέα μορφή στο πανάρχαιο παιχνίδι

Yevgeny Gik

TΟ «ΕΞΩΤΙΚΟ ΣΚΑΚΙ» (ΔΗΛΑΔΗ, ΤΟ γνωστό μας σκάκι εμπλουτισμένο με έναν-δύο επιπλέον κανόνες) μπορεί να πάρει πολλές μορφές. Εδώ θα δούμε τρεις μάλλον σπάνιες αλλά εξαιρετικά έξυπνες παραλλαγές.

Κίρκη

Αυτή η εξαιρετικά πρωτότυπη παραλλαγή διαφέρει από το κανονικό σκάκι στο εξής σημείο: όταν αιχμαλωτίζεται ένα εχθρικό κομμάτι, δεν αποσύρεται από τη σκακιέρα, αλλά επιστρέφει στη θέση που καταλαμβάνει όταν αρχίζει η παρτίδα. Ακριβέστερα, οι πύργοι και οι ίπποι επιστρέφουν στο τετράγωνο που έχει το ίδιο χρώμα με εκείνο στο οποίο αιχμαλωτίστηκαν, και τα πιόνια επιστρέφουν στο σημείο εκκίνησης της στήλης στην οποία αιχμαλωτίστηκαν. Αν όμως το σημείο επιστροφής του κομματιού είναι κατειλημμένο, το

κομμάτι πρέπει να αποσυρθεί από τη σκακιέρα, όπως και στο κανονικό σκάκι.

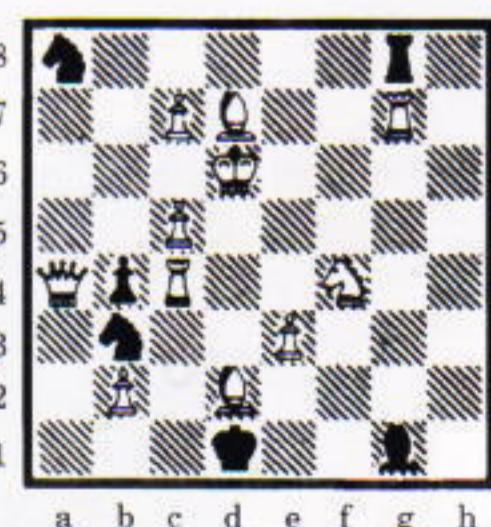
Εκ πρώτης όψεως, θα νόμιζε κανείς ότι τα λευκά μπορούν να κάνουν ματ σε μία κίνηση, και μάλιστα με δύο διαφορετικούς τρόπους: 1. Βασίλισσα: $a4 \times b3$, ή 1. Αξιωματικός: $d7-g4$. Άλλα τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά.

1. Βασίλισσα: $a4 \times b3$ (ο μαύρος ίππος φεύγει από τη σκακιέρα, διότι το $g8$ είναι κατειλημμένο από τον μαύρο πύργο). Ματ; Η άμυνα 1. ... Βασιλιάς: $d1 \times d2$ είναι ανεφάρμοστη, διότι ο αιχμαλωτισμένος αξιωματικός επιστρέφει στο $c1$, και έτσι ο μαύρος βασιλιάς θα απειλείται, ενώ είναι και η σειρά των λευκών να παίξουν. Άλλα τα μαύρα έχουν μια άλλη, πολύ έξυπνη άμυνα: 1. ... Ίππος: $a8 \times c7$, και ο λευκός στρατιώτης που εμφανίζεται στο $c2$ κλείνει τη διαγώνιο $a4-d1$. Φαίνεται όμως ότι τα λευκά θα πετύχουν και πάλι το σκοπό τους: 2. Στρατιώτης: $c2-c3$, ματ. Ωστόσο, τα μαύρα παίζουν 2. ... Στρατιώτης: $b4 \times c3$, και ένας λευκός στρατιώτης εμφανίζεται και πάλι στο $c2$.

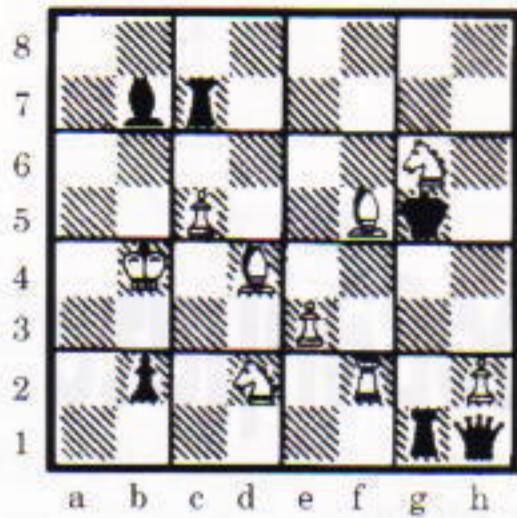
1. Η κίνηση 1. Αξιωματικός: $d7-g4$, επίσης δεν φέρνει αποτέλεσμα. Αυτή η κίνηση μπορεί να αποκρουστεί με την 1. ... Αξιωματικός: $g1 \times e3$: ο λευκός στρατιώτης επιστρέφει στο $e2$, άρα δεν υπάρχει ματ σε μία κίνηση. Δεν υπάρχει ματ ούτε έπειτα από δύο κινήσεις, διότι ο λευκός στρατιώτης στο $e2$ δεν μπορεί να κινηθεί καν.

Η ζητούμενη κίνηση είναι η 1.

Στρατιώτης: $c7-c8$ -Πύργος!, και διαγράφεται η απειλή η λευκή βασίλισσα να αιχμαλωτίσει εν συνεχεία τον μαύρο ίππο στο $b3$. Τα μαύρα απαντούν με 1. ... Πύργος: $g8 \times c8$, οπότε ο λευκός πύργος εμφανίζεται στο $h1$. Η κίνηση των λευκών 2. Βασίλισσα: $a4 \times b3$ αποκρούεται από τα μαύρα με την 2. ... Πύργος: $c8 \times c5$, οπότε εμφανίζεται και πάλι ένας λευκός στρατιώτης στο $c2$. Τώρα, όμως, τα λευκά μπορούν να πετύχουν το ματ με την κίνηση 3. Αξιωματικός: $d7-g4$, «βάζοντας στο χορό» τον πύργο στο $h1$: ο μαύρος αξιωματικός ακινητοποιείται, και η απάντηση 3. ... Αξιωματικός: $g1 \times e3$ δεν μπορεί να γίνει. Δεν μπορούν τα μαύρα να σωθούν με τις κινήσεις 1. ... Αξιωματικός: $g1 \times e3$, 2. Βασίλισσα: $a4 \times b3$ Αξιωματικός: $e3 \times c5$; Σ' αυτή την περίπτωση θα αποβεί μοιραία η κίνηση 3. Πύργος: $g7-g1$: τα μαύρα δεν μπορούν να αιχμαλωτίσουν τον λευκό πύργο στο $g1$ με τον αξιωματικό ή με τον πύργο τους, διότι ο λευκός πύργος θα εμφανιστεί στο $a1$, δίνοντας ρουά στον μαύρο βασιλιά, ενώ είναι η σειρά των λευκών να παίξουν. Ακόμη, το άνοιγμα 1. Πύργος: $g7 \times g1$ δεν θα έχει αποτέλεσμα, διότι ο μαύρος αξιωματικός επιστρέφει στο $f8$ και ο λευκός βασιλιάς δέχεται ρουά. Τέλος, η κίνηση 1. Στρατιώτης: $c7-c8$ -Βασίλισσα (ή Ίππος) δεν έχει αποτέλεσμα εξαιτίας της 1. ... Πύργος: $g8 \times c8$, ενώ η κίνηση 1. Στρατιώτης: $c7-c8$ -Αξιωματικός είναι αδιέξοδη λόγω της 1. ... Αξιωματικός: $g1 \times e3$.



N. Macleod, 1978
Mat σε 2 κινήσεις (Κίρκη)



E. Wisserman, 1955
Ματ σε 2 κινήσεις (καφασωτό)

Καφασωτό

Σ' αυτή την ενδιαφέρουσα μορφή εξωτικού σκακιού, η σκακιέρα χωρίζεται σε δεκαέξι τμήματα με τέσσερα τετράγωνα το καθένα. Οι κανόνες είναι απλοί: τα κομμάτια δεν μπορούν ούτε να κινηθούν ούτε να αιχμαλωτίσουν εχθρικά κομμάτια μέσα στο τμήμα στο οποίο βρίσκονται. Μπορούν να ενεργήσουν μόνο αν κινηθούν σε άλλο τμήμα.

Στο εικονιζόμενο παράδειγμα, ο μαύρος βασιλιάς δεν μπορεί να κινηθεί στο h5 ή στο h6, διότι αυτά τα τετράγωνα βρίσκονται στο ίδιο τμήμα, ενώ ο μαύρος στρατιώτης στο b2 μπορεί να μετατραπεί σε άλλο κομμάτι μόνο αν αιχμαλωτίσει ένα εχθρικό κομμάτι στο c1 (στο διπλανό τμήμα)!

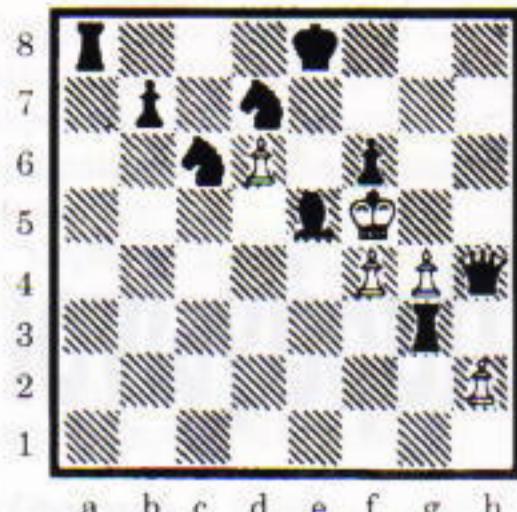
1. Αξιωματικός: f5-d7, και απειλεί την κίνηση 2. Αξιωματικός: d4-f6, στην οποία δεν υπάρχει άμυνα! Αν τα μαύρα απαντήσουν με 1. ... Αξιωματικός: b7-f3, η κίνηση 2. Ιππος: d2-e4 είναι μοιραία: ο μαύρος αξιωματικός στο f3 βρίσκεται στο ίδιο τμήμα με τον λευκό ιππο, και δεν μπορεί να τον αιχμαλωτίσει. Στην απάντηση των μαύρων 1. ... Βασίλισσα: h1-e4, που ακινητοποιεί τον αξιωματικό στο d4, τα λευκά απαντούν με 2. Ιππος: d2-f3 (η μαύρη βασίλισσα προστατεύει τον λευκό ιππο από τον μαύρο αξιωματικό στο b7 —αδιανόητο στο κανονικό σκάκι).

Άλλες παραλλαγές: 1. ... Πύργος: c7-e6, 2. Πύργος: f2-g2!, ή 1. ... Βασίλισσα: h1-f3 (ή e6), 2. Στρατιώτης: h2-h4, ή 1. ... Πύργος: g1-g4, 2. Πύργος: f2-f5. Στο κανονικό σκάκι ο ιππος στο g6 θα ήταν ανυπεράσπιτος, ενώ στο καφασωτό είναι άτρωτος.

Παραλλαγή της Φρανκφούρτης

Σ' αυτή τη μορφή εξωτικού σκακιού, το κομμάτι που αιχμαλωτίζει μετατρέπεται στο κομμάτι που αιχμαλωτίζεται (χωρίς να αλλάζει χρώμα).

Όπως ξέρετε, στα συνεργατικά προβλήματα τα μαύρα κινούνται πρώτα και βοηθούν τα λευκά να πετύχουν ματ. 1. Μεγάλο ροκέ! Στρατιώτης: f4 × e5 (τώρα το e5 καταλαμβάνεται από τον λευκό αξιωματικό). 2. Ιππος: c6-



N. Bakke, 1986
**Συνεργατικό ματ σε 2 κινήσεις
(παραλλαγή της Φρανκφούρτης)**

e7 Στρατιώτης: d6 × e7! Το ματ πετυχαίνει ο νέος ιππος στο e7.

Περιέργως, αυτό το πρόβλημα έχει ένα ενδιαφέρον «δίδυμο». Αν ο μαύρος πύργος αντί του a8 βρισκόταν στο h8, το ροκέ μάς οδηγεί και πάλι σε μια λύση: 1. Μικρό ροκέ! Στρατιώτης: h2 × g3 (ο στρατιώτης μετατρέπεται σε λευκό πύργο) 2. Βασίλισσα: h4-h5 Στρατιώτης: g4 × h5 (ο στρατιώτης μετατρέπεται σε λευκή βασίλισσα), και ο μαύρος βασιλιάς δέχεται ματ. Είναι διασκεδαστικό το γεγονός ότι τα λευκά πίνια σ' αυτή την παραλλαγή μετατρέπονται σε διάφορα κομμάτια αν και βρίσκονται μακριά από την τελευταία σειρά, όπου συμβαίνουν συνήθως αυτές οι μετατροπές.



QUANTUM

Ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα.

Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa). Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη· η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

Γίνετε και εσείς παράγοντας στην Quant-ική εξίσωση.
Μια συνδρομή σήμερα
θα φέρει ένα καλύτερο φυσικομαθηματικό αύριο.

κάτοπτρο

Εκδόσεις: Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα

Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακέιου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα

Τηλ.: (01) 3247785

Παράγωγοι σε αλγεβρικά προβλήματα

Ανακαλύπτοντας έμμεσα το πλήθος των ρίζων

Alexander Zvonkin

ΠΡΟΣΠΑΘΗΣΤΕ ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ στην εξής ερώτηση: «Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση

$$(1/16)^x = \log_{1/16} x;$$

Δεν είναι δυνατόν να βρούμε ρητή έκφραση της λύσης αυτής της εξίσωσης, αλλά μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις στα δύο μέλη της. Αν δοκιμάστε να τα σχεδιάσετε, τα γραφήματά σας θα είναι πιθανότατα παρόμοια με αυτά του Σχήματος 1. Με βάση αυτό το σχήμα, είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μόνο μία ρίζα, x_1 , και ότι γι' αυτήν ισχύει $(1/16)^{x_1} = x_1 = \log_{1/16} x_1$. Ας πάρουμε όμως $x = 1/2$: $(1/16)^{1/2} = \sqrt{1/16} = 1/4$, και $\log_{1/16}(1/2) = (1/4)$ $\log_{1/2}(1/2) = 1/4$. Βλέπουμε επιπλέον ότι για τη ρίζα $x = 1/2$ η κοινή τιμή των συναρτήσεών μας δεν ισούται με x , κάτι που σημαίνει ότι η εξίσωση μας έχει μία ακόμη λύση. Και τούτο διότι τα γραφήματα είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$, επομένως τα κοινά τους σημεία που δεν ανήκουν σ' αυτή την ευθεία σχηματίζουν συμμετρικά ζεύγη — εκτός από το $(1/2, 1/4)$, και το $(1/4, 1/2)$ ανήκει στα δύο γραφήματα (επαληθεύστε ότι το $x = 1/4$ είναι επίσης λύση!).

Συνεπώς, υπάρχουν τουλάχιστον τρεις ρίζες. Πόσες ακόμη υπάρχουν; Για να απαντήσουμε σ' αυτή την ερώτηση, και για να καταλάβουμε πώς προκύπτουν οι τρεις ρίζες, πρέπει να εξετάσουμε προσεκτικότερα τις συναρτήσεις μας. Αυτό θα το κάνουμε αργότερα, αλλά ας δούμε τώρα μερικά απλούστερα αλγεβρικά προβλήματα στη λύση των οποίων υπεισέρχεται ο απειροστικός λογισμός — και ειδικότερα, η παραγώγιο.

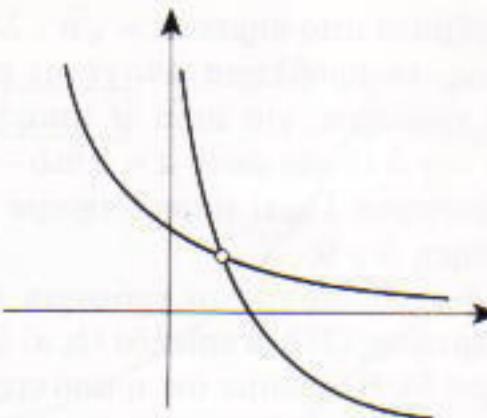
Παράδειγμα 1. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a . Προσδιορίστε το

πλήθος των τιμών του x που είναι ρίζες της ακόλουθης εξίσωσης:

$$x^3 - 3x = a. \quad (1)$$

Υπάρχει ένας γενικός τύπος για την επίλυση μιας κυβικής εξίσωσης, παρόμοιος με τον πασίγνωστο τύπο



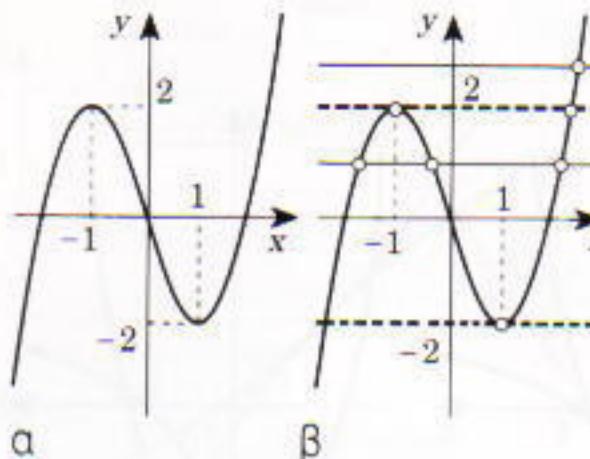


Σχήμα 1

επιλυσης της δευτεροβάθμιας εξισώσης, αλλά πολύ πο περίπλοκος.¹ Ωστόσο, δεν χρειαζόμαστε τις ίδιες τις ρίζες, αλλά μόνο το πλήθος τους. Είναι δυνατόν να το βρούμε χωρίς να λύσουμε την εξισώση;

Ας σχεδιάσουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x$. Είναι περιττή συνάρτηση ($f(-x) = -f(x)$) που παίρνει τρεις φορές την τιμή 0 (για $x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$). Η παράγωγός της $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ έχει δύο ρίζες, $x = \pm 1$, είναι θετική για $x < -1$ και $x > 1$, ενώ είναι αρνητική για $-1 < x < 1$. Συνέπως, η συνάρτηση είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$, έχει (τοπικό) μέγιστο στο $x = -1$, είναι φθίνουσα από $x = -1$ έως $x = 1$, λαμβάνει την ελάχιστη της τιμή στο $x = 1$, και είναι ξανά αύξουσα στο $[1, \infty)$. Οι τιμές της στα ακρότατα είναι $f(-1) = 2$ και $f(1) = -2$. Τελικά, καταλήγουμε στο γράφημα του Σχήματος 2α. Το πλήθος των ρίζων της εξισώσης μας ισούται απλώς με το πλήθος των τομών αυτού του γραφήματος με την οριζόντια ευθεία $y = a$ (στο Σχήμα 2β έχουμε σχεδιάσει τέτοιες ευθείες για διάφορες τιμές του a). Επομένως, μπορούμε να «διαβάσουμε» άμεσα την απά-

1. Δείτε τα άρθρα «Η μεγάλη τέχνη», στο πάροχο Ιουλίου / Αυγούστου 1995 του *Quantum*, και «Οι εκπλήξεις της τριτοβάθμιας», στο πάροχο Ιουλίου / Αυγούστου 1996.



Σχήμα 2

ντηση στο γράφημα: η εξισώση (1) έχει μόνο μία ρίζα για $a < -2$ και $a > 2$ (ή $|a| > 2$), τρεις ρίζες για $|a| < 2$, και δύο ρίζες για $|a| = 2$ (οι οριζόντιες διακεκομένες γραμμές στο σχήμα).

Μια αυστηρότερη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος βασίζεται σε μια θεμελιώδη ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων, το θεωρήμα της μέσης τιμής (σύμφωνα με το οποίο μια ουνεχής συνάρτηση που λαμβάνει τιμή μικρότερη του a σε κάποιο σημείο x_1 και τιμή μεγαλύτερη του a σε κάποιο σημείο x_2 , λαμβάνει αναγκαστικά την τιμή a σε κάποιο σημείο x μεταξύ των x_1 και x_2), καθώς και στην προφανή παρατήρηση ότι μια μονότονη συνάρτηση λαμβάνει κάθε τιμή μόνο μια φορά. Συγκεκριμένα, η συνάρτησή μας έχει τρία διαστήματα μονοτονίας: $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, και $[1, \infty)$, και επομένως τρεις το πολύ ρίζες — μία το πολύ σε κάθε διάστημα. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $a \leq 2$ δεν έχει ρίζα στο πρώτο διάστημα (διότι σ' αυτό η συνάρτηση f λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες και μικρότερες από κάθε τέτοιο a), ενώ έχει μία ρίζα στο δεύτερο διάστημα για κάθε $a \in [-2, 2]$ (επειδή $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$), και μία ρίζα στο τρίτο διάστημα για $a \geq 2$. Αν συνδυάσουμε αυτές τις προτάσεις, παίρνουμε την απάντηση. Παρατηρήστε στο

Σχήμα 2β τον ειδικό ρόλο των κόκκινων γραμμών που εφάπτονται στα ακραία σημεία του γραφήματος — επισημαίνουν τις αλλαγές στο πλήθος των ρίζων.

Παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στις ασκήσεις που ακολουθούν. Κατά κανόνα είναι εύκολη η εφαρμογή τους, και έτσι την αφήνουμε στον αναγνώστη.

Ασκηση 1. Βρείτε το πλήθος των ρίζων των εξισώσεων (a) $3x^5 - 50x^3 + 135x = a$, (β) $x^2 e^x = a$.

Παράδειγμα 2. Πόσες ρίζες έχει η εξισώση

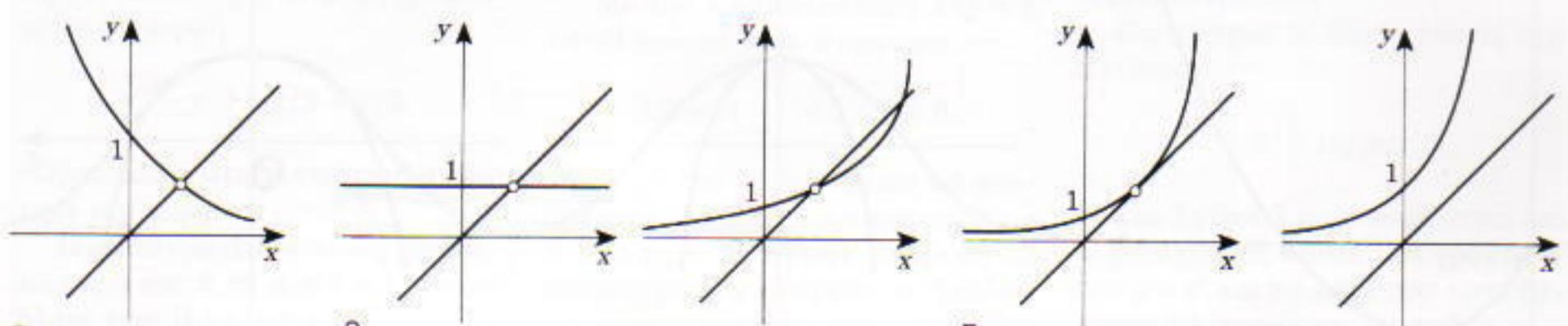
$$a^x = x; \quad (2)$$

Αν σχεδιάσουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = a^x$ και $y = x$ για διάφορα a που κυμαίνονται από το μηδέν έως το άπειρο, θα πάρουμε πέντε ουσιαστικά διαφορετικές περιπτώσεις — αυτές του Σχήματος 3. Τώρα η απάντηση είναι ορατή «διάγυμνού οφθαλμού». Στην πραγματικότητα, το μόνο που απομένει είναι να βρούμε την τιμή $a = a_0$ που αντιστοιχεί στο Σχήμα 3δ — δηλαδή στην περίπτωση που η ευθεία $y = x$ εφαπτεται στην καμπύλη.

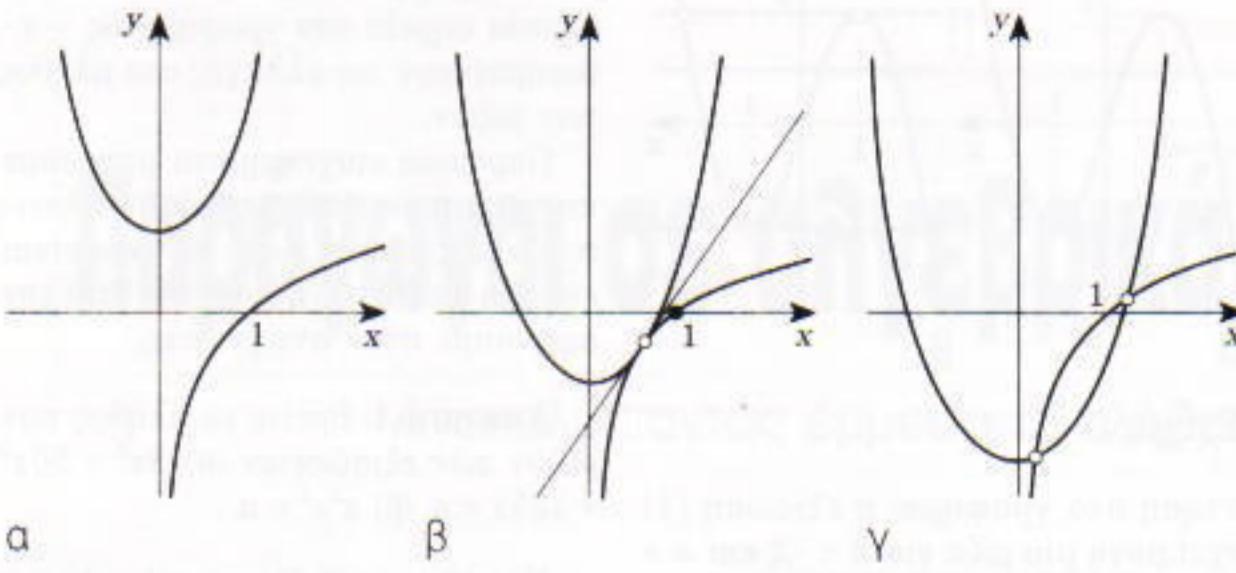
Εστω x_0 η συντεταγμένη x του σημείου επαφής. Αφού σ' αυτό το σημείο συμπίπτουν και οι τιμές των συναρτήσεων $y = a_0^x$, $y = x$, και οι κλίσεις τους, μπορούμε να γράψουμε τις επόμενες δύο εξισώσεις:

$$\begin{cases} a_0^{x_0} = x_0, \\ x_0^{x_0} 1 \ln a_0 = 1 \end{cases}$$

(διότι $(a^x)' = a^x \ln a$). Αν αντικαταστήσουμε το $a_0^{x_0}$ με x_0 στη δεύτερη εξισώση, έχουμε $x_0 = 1 / \ln a_0$. Με αντικατάσταση στη δεύτερη εξισώση, και



Σχήμα 3



Σχήμα 4

παίρνοντας το λογάριθμο, λαμβάνουμε

$$\frac{\ln a_0}{\ln a_0} = \ln \frac{1}{\ln a_0} = -\ln \ln a_0,$$

ή $\ln \ln a_0 = -1$. Επειτα ότι $\ln a_0 = 1/e$, δηλαδή

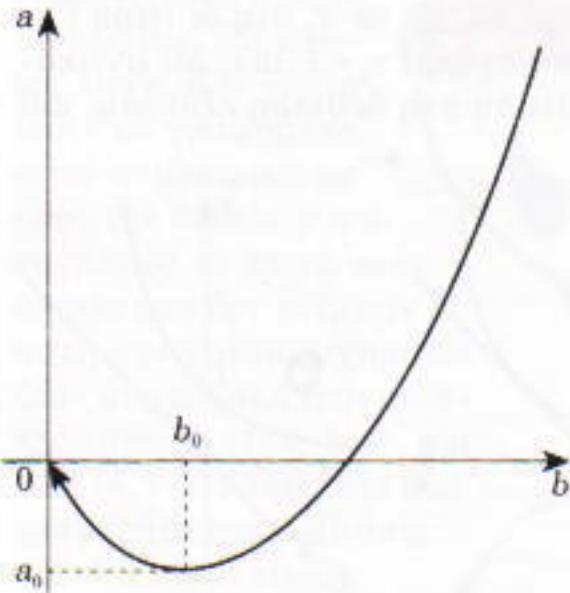
$$a_0 = e^{1/e}.$$

Άρα, όταν $0 < a \leq 1$ ή $a = e^{1/e}$, η εξίσωση (2) έχει μία ρίζα, όταν $1 < a < e^{1/e}$ έχει δύο ρίζες, ενώ, όταν $a > e^{1/e}$, δεν έχει καμία ρίζα.

Ασκηση 2. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x/\ln x = a$.

Παράδειγμα 3. Για ποιες τιμές του a υπάρχει θετικό b τέτοιο ώστε η εξίσωση

$$x^2 + a = 2b \ln x$$



Σχήμα 5

να έχει μία και μοναδική λύση;

Ας ξεκινήσουμε και πάλι με μια γραφική παράσταση. Στο Σχήμα 4 βλέπετε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις σχετικών θέσεων των γραφημάτων της $f(x) = x^2 + a$ και της $g(x) = 2b \ln x$ (για $b > 0$). Είναι φανερό ότι τα γραφήματα έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο μόνο στην περίπτωση κατά την οποία εφάπτονται (Σχήμα 4β). Αν εξισώσουμε τις τιμές των συναρτήσεων και των παραγώγων τους, $f'(x) = 2x$ και $g'(x) = 2b/x$, στο σημείο επαφής x , παίρνουμε

$$\begin{cases} x^2 + a = 2b \ln x, \\ 2x = 2b/x. \end{cases}$$

Αφού το x είναι θετικό (διότι, διαφορετικά, η $\ln x$ δεν ορίζεται), από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x = \sqrt{b}$, και επομένως

$$a = b \ln b - b. \quad (3)$$

Αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία και ικανή για να εφάπτονται τα δύο

γραφήματα (στο σημείο $x = \sqrt{b}$). Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στο εξής ερώτημα: για ποια a υπάρχει τιμή του b τέτοια ώστε $a = b \ln b - b$;

Ερώτηση: Γιατί παραλείψαμε τη συνθήκη $b > 0$;

Ας σχεδιάσουμε το γράφημα της συνάρτησης (3) στο επίπεδο (b, a) (βλ. Σχήμα 5). Βλέπουμε ότι η απάντηση έχει τη μορφή $a \geq a_0$, όπου a_0 είναι η ελάχιστη τιμή $\phi(b_0)$ της συνάρτησης $\phi(b) = b \ln b - b$ — τιμή που βρίσκουμε από την εξίσωση $\phi'(b_0) = 0$. Αφού $\phi'(b) = \ln b$, $b_0 = 1$ και $a_0 = \phi(b_0) = -1$.

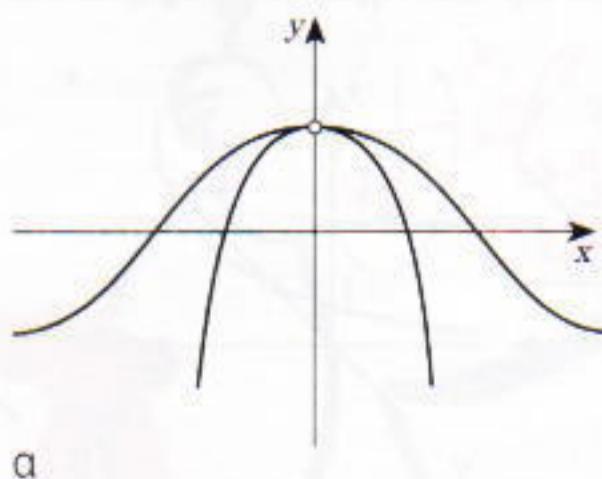
Ερώτηση: Η εξίσωση (3) έχει δύο ρίζες για $-1 < a < 0$. Τι σημαίνει αυτό για τα γραφήματα του Σχήματος 4;

Ως τώρα ασχοληθήκαμε μόνο με την απαριθμηση των ριζών σε εξίσωσεις. Μερικές φορές, όμως, η γνώση του πλήθους των ριζών μάς βοηθά στην επίλυση της εξίσωσης. Για παράδειγμα, αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση έχει μόνο μία ρίζα, μπορείτε να προσπαθήσετε να μανιέψετε απλώς την τιμή της.

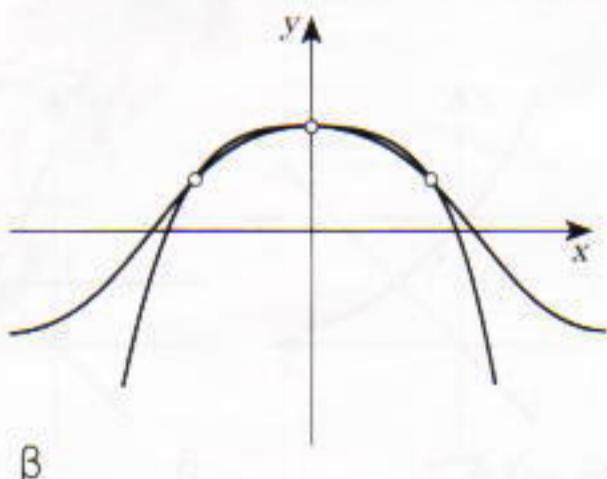
Παράδειγμα 4. Λύστε την εξίσωση συν $x = 1 - x^2/2$.

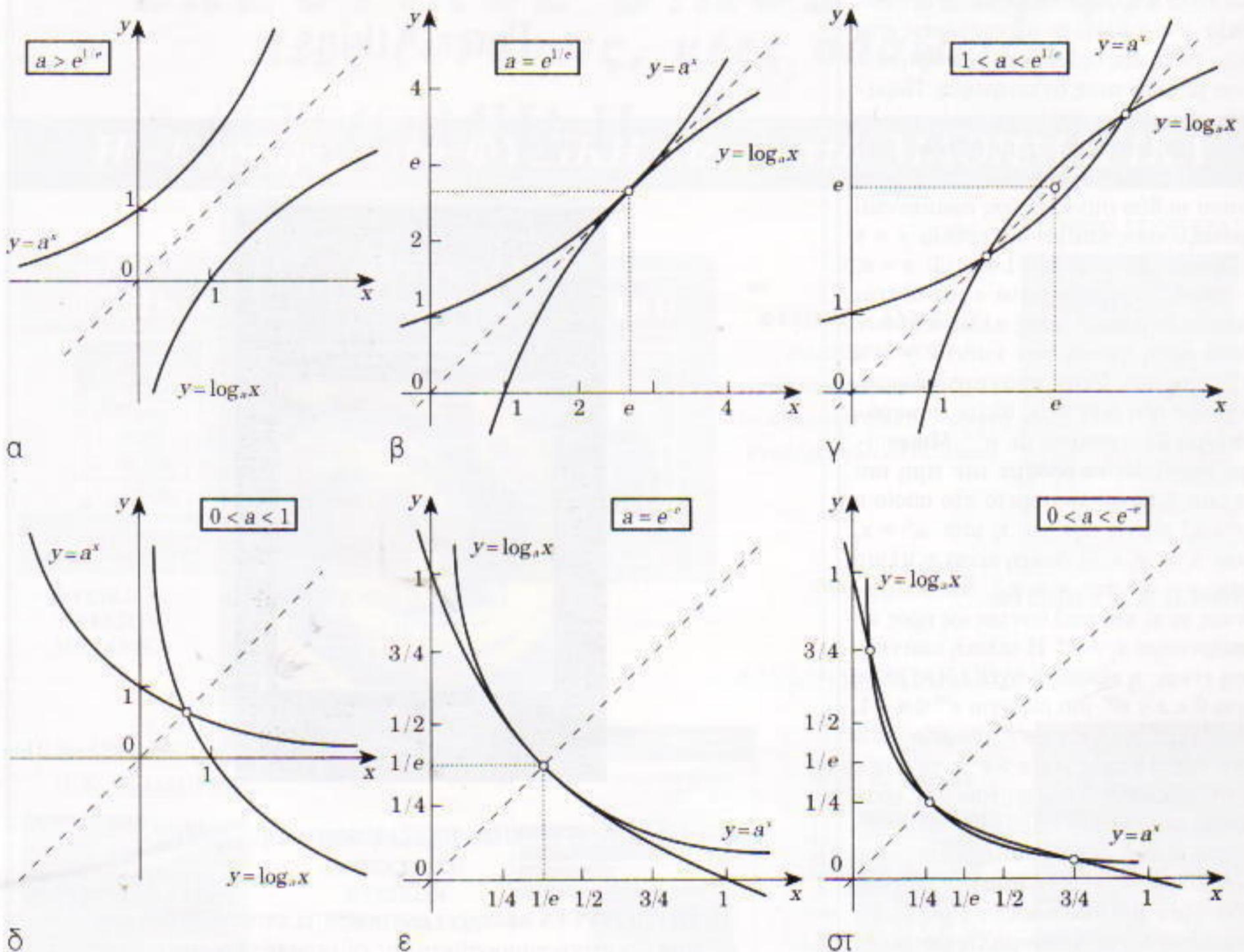
Μπορούμε να μανιέψουμε πολύ εύκολα μία ρίζα αυτής της εξίσωσης: $x = 0$. Υπάρχουν άλλες ρίζες; Δείτε το Σχήμα 6. Τα γραφήματα των συναρτήσεων συν x και $1 - x^2/2$ πλησιάζουν τόσο πολύ μεταξύ τους κοντά στο σημείο $x = 0$, ώστε είναι αδύνατον να διαπιστώσουμε χωρίς ειδική εξέταση ποιο από τα δύο σχήματα — α ή β — είναι το σωστό. Ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε πως $\text{συν } x > 1 - x^2/2$ για κάθε $x \neq 0$ (οπότε σωστό είναι το Σχήμα β , και η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \text{συν } x - 1 + x^2/2$. Αυτή είναι μια άρτια συνάρτηση ($f(-x) = f(x)$), και επο-



Σχήμα 6





Σχήμα 7

μένως μπορούμε να περιοριστούμε στις θετικές μόνο τιμές του x . Αφού $f(0) = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \infty)$ ή ότι η παράγωγος $f'(x)$ είναι θετική για $x > 0$. Ωστόσο, $f'(x) = -\eta x + x$, άρα από τη γνωστή ανισότητα $\eta x < x$, με $x > 0$, έπειτα ότι $f'(x) > 0$.

Το επόμενο παράδειγμα αφορά μια γενικευση της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου: $(x + y)/2 \geq \sqrt{xy}$, με $x > 0, y > 0$. Αν τη γράψουμε με τη μορφή

$$x^{1/2} \cdot y^{1/2} \leq x/2 + y/2,$$

οδηγούμαστε στη γενικότερη ανισότητα του παραδείγματος 5.

Παράδειγμα 5. Για όλους τους θετικούς a και b , με $a + b = 1$, και για όλους τους θετικούς x και y ,

$$x^a y^b \leq ax + by.$$

με την ισότητα να ισχύει αν $x = y$.

Κατ' αρχάς ξαναγράφουμε την ανισότητα αντικαθιστώντας το b με $1 - a$, μεταφέροντας όλους τους όρους στο ίδιο μέλος και διαιρώντας με $y > 0$:

$$a \cdot \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y} \right)^a + 1 - a \geq 0.$$

Με την αντικατάσταση $x/y = t$, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$f(t) = at - t^a + 1 - a \geq 0,$$

μόνο μια φορά —στο σημείο $t = 1$ αυτό εξηγεί και την περίπτωση της ακριβούς ισότητας.)

Άσκηση 3. Λύστε τις ακόλουθες εξισώσεις: (α) $\ln x = x - 1$, (β) $\eta x = x - (1/16)x^3$.

Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στο πρόβλημα που τέθηκε στην αρχή του άρθρου. Θα εξετάσουμε μια γενικότερη ερώτηση.

Παράδειγμα 6. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση

$$a^x = \log_a x;$$

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζονται και οι έξι σχετικές θέσεις των γραφημάτων $y = a^x$ και $y = \log_a x$ που είναι δυνατόν να εμφανιστούν καθώς το a μεταβάλλεται από το άπειρο έως το μηδέν. Παρατηρήστε ότι τα γραφήμα-

τα είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ διότι οι συναρτήσεις στα δύο μέλη της δεδομένης εξίσωσης είναι μεταξύ τους αντίστροφες. Παρατηρούμε ότι οι κρίσιμες τιμές του a , στις οποίες αλλάζει το πλήθος των ρίζων, είναι: (1) $a = a_0$ — το σημείο όπου οι δύο συναρτήσεις εφάπτονται μεταξύ τους και με την ευθεία $y = x$ (Σχήμα 7β) —, (2) $a = 1$ και (3) $a = a_1$ — όπου τα γραφήματα εφάπτονται και πάλι μεταξύ τους αλλά τέμνουν υπό ορθή γωνία την ευθεία $y = x$ (Σχήμα 7ε). Στην πραγματικότητα, έχουμε ήδη βρει το a_0 (δείτε το παράδειγμα 2) — ισούται με $e^{1/e}$. Μπορούμε παρόμοια να βρούμε την τιμή του a_1 ; αν x_1 είναι το σημείο στο οποίο η $y = a_1^x$ τέμνει την $y = x$, τότε $a_1^{x_1} = x_1$ και $x_1 \ln a_1 = -1$ (αυτή είναι η κλίση της $y = a_1^x$ στο $x = x_1$). Απαλείφοντας το x_1 και επιλύοντας ως προς a_1 , παίρνουμε $a_1 = e^{-e}$. Η τελική απάντηση είναι: η εξίσωση έχει τρεις ρίζες για $0 < a < e^{1/e}$, μία ρίζα για $e^{-e} \leq a < 1$, δύο ρίζες για $1 < a < e^{1/e}$, μία ρίζα για $a = e^{1/e}$, και καμία για $a > e^{1/e}$.

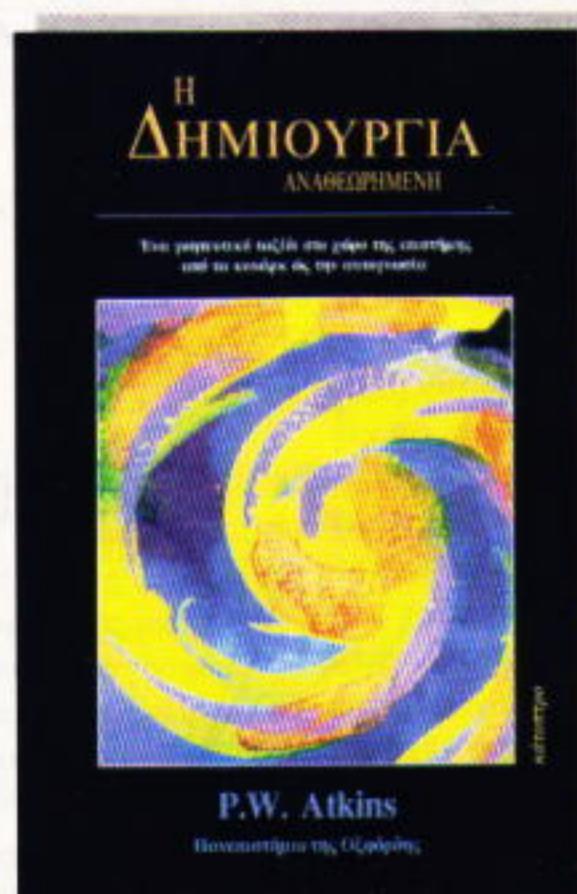
(*Σημείωση:* Αυτή η μέσω των γραφημάτων λύση, παρότι είναι απόλυτα σωστή, μοιάζει υπερβολικά συνεπυγμένη — και απατηλά απλή. Θα ήταν μια πολύ καλή άσκηση να προσπαθήσετε να συμπληρώσετε όλες τις λεπτομέρειες που παραλείπονται.)

Άσκησεις

4. Βρείτε το πλήθος των λύσεων των (α) $3x^4 + 4x^3 - 36x^2 = a$, (β) $e^x = ax$.
5. Λύστε την $(x-1)e^{x-1} + x^2 - 3x + 2 = 0$.
6. Επιλύστε τις ακόλουθες εξισώσεις δύο μεταβλητών: (α) $1/x + 2\sqrt{x} = 3y(1 - \ln y)$, (β) $\ln x/x = e^{xy}$, (γ) $4^x + 1 = 2^{x+1} \eta y$.
7. Για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, σχεδιάστε το σύνολο των σημείων (p, q) στο επιπέδο συντεταγμένων (p, q) για τα οποία οι επόμενες εξισώσεις έχουν n ακριβώς ρίζες: (α) $x^3 = 3px + q$, (β) $p^x = x^q$ ($x > 0$).
8. Προσδιορίστε ποιος από τους αριθμούς e^e και π^e είναι μεγαλύτερος χωρίς να τους υπολογίσετε.

Peter Atkins

Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ



Έκδοση αναθεωρημένη και επηρεζημένη

Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ αποτελεί μια αυστηρά επιστημονική και συνάμα ποιητική παρουσίαση της σύγχρονης ερμηνείας της φύσης από την πλευρά των φυσικών επιστημών. Μας αποκαλύπτει ότι πίσω από την εμφανή πολυπλοκότητα της ύπαρξης κρύβεται μια εκπληκτικά απλή βασική δομή. Μας εξηγεί πώς αυτή η απλή δομή έχει εκδηλώσεις τόσο πλούσιες όσο ο άνθρωπος και το σύμπαν, η συνείδηση και η ελεύθερη βούληση, και μας δείχνει πώς η δημιουργία όλων αυτών ερμηνεύεται χωρίς την ανάγκη να επικαλεστούμε την ιδέα ενός Υπέρτατου Οντος σε καμία από τις πολυάριθμες εκδηλώσεις του.

Το μόνο που χρειάζεται ο αναγνώστης είναι ένα αίσθημα περιπέτειας για να ξεκινήσει αυτό το νοητικό ταξίδι προς την ανακάλυψη της έσχατης φύσης του σύμπαντος και του τρόπου με τον οποίο δημιουργήθηκε.

- «Ένα αστραφτερό, συγκλονιστικό κείμενο για ένα θέμα μέγιστης σημασίας...»
The Times Literary Supplement

κάτοπτρο

Έκδοσεις: Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα

Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα

Τηλ.: (01) 3247785

Ένας ζυθοποιός και δύο γιατροί

Πώς κατέληξαν στο νόμο διατήρησης της ενέργειας

Gennady Myakishev



EΙΝΑΙ ΤΟΣΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΟΣΟ ΚΑΙ ενδιαφέρον να μάθετε με ποιον τρόπο σημειώθηκε μια κεφαλαιώδους σημασίας πρόοδος οιη φυσική: η ανακάλυψη του νόμου διατήρησης της ενέργειας.

Ο James Prescott Joule (1818-1889) ήταν ιδιοκτήτης ενός ζυθοποιείου. Το ενδιαφέρον του γι' αυτό το πρόβλημα κεντρίστηκε για πρώτη φορά όταν είδε τον ηλεκτρικό κινητήρα, που είχε ανακαλυφθεί πρόσφατα. Ο Joule ήταν αρκετά πρακτικός άνθρωπος, και δεν ήταν περίεργο που δελεάστηκε από την ιδέα να δημιουργήσει μια αιώνια και ανεξάντλητη πηγή ενέργειας —ένα αεικίνητο. Ο Joule κατασκεύασε μια μπαταρία όπως αυτή που είχε επινοήσει o Volta, και τη χρησιμοποίησε για να τροφοδοτήσει έναν απλό ηλεκτρικό κινητήρα δικής του σχεδίασης. Παρ' όλα αυτά, απέτυχε να παραγάγει κάτι από το τίποτε: ο φευδάργυρος στη μπαταρία καταναλώθηκε, και ήταν αρκετά ακριβός για να τον αναπληρώσει. Αργότερα ο Joule απέδειξε, προς ικανοποίησή του, πως σε κάθε περίπτωση ήταν οικονομικότερο να τρέφει άλογα από το να αναπληρώνει τον

φευδάργυρο οτις μπαταρίες. Έτσι, πίστευε πως οι ηλεκτρικοί κινητήρες δεν θα αντικαθιστούσαν ποτέ τα άλογα στη βιομηχανία.

Αυτή η εμπειρία του τον ώθησε να διερευνήσει τις σχέσεις μεταξύ της θερμότητας και όλων των υπόλοιπων μορφών ενέργειας, και αποφάσισε να ανακαλύψει αν υπάρχει κάποια ακριβής ποσοτική σχέση που να ουδέτει τη θερμότητα με τη μηχανική ενέργεια [βλ. G. Lipson, *Great Experiments in Physics* (Μεγάλα πειράματα στη φυσική)]. Η ποσότητα της μεταφερόμενης θερμικής ενέργειας αποδείχτηκε πως ήταν ισοδύναμη με το παραγόμενο μηχανικό έργο, και με αυτό τον τρόπο καθιερώθηκε η τιμή του μηχανικού ισοδυνάμου της θερμότητας: 4,187 J/cal. Ο ίδιος ο Joule υπολόγισε την τιμή 4,155 J/cal. Η εκατό ετών εμπειρία οτον εκουγχρονισμό τεχνικών μέτρησης βελτίωσε το αποτέλεσμα του Joule κατά λιγότερο από 1%.

Ο Julius Robert von Mayer (1814-1878) είχε σπουδάσει γιατρός. Ζώντας στις ιροπικές χώρες (στην Ιάβα) ως γιατρός ενός πλοίου, περιποιούνταν ναυτικούς με πνευμονικές νόσους σύμφωνα με την επικρατούσα μέθοδο της εποχής —αφαιμάσσοντας τους ασθενείς από μια φλέβα του χεριού. Παρατήρησε ότι το αἷμα από αυτές τις φλέβες ήταν πολύ πιο ανοιχτόχρωμο από το αἷμα των ναυτικών που ταξίδευαν σε βόρεια κλίμα-

τα. Μπορούσε ακόμη και να εκληφθεί ως αριθμητικό αίμα! Υπήρχε μια προφανής σχέση μεταξύ της θερμοκρασιακής διαφοράς ανάμεσα

στο ανθρώπινο σώμα και το περιβάλλον του από τη μια, και του βαθμού οξειδωσης του αίματος από την άλλη. Ο Mayer κατέληξε στο συμπέρασμα ότι σ' έναν ζωντανό οργανισμό υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της κατανάλωσης τροφής και της παραγωγής θερμότητας.

Ο Herman Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) αποφοίτησε από μια οιρανιωτική ιατρική σχολή. Ήταν ο πρώτος που συνήγαγε τη μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης της ενέργειας επί τη βάσει της νευτώνειας μηχανικής. Αναλύοντας τα περισσότερα από τα φυσικά φαινόμενα που ήταν γνωστά στην εποχή του, ο Helmholtz απέδειξε την καθολικότητα του νόμου διατήρησης της ενέργειας.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι όλες οι διεργασίες που συντελούνται στους ζωντανούς οργανισμούς υπάκουουν επίσης ο' αυτό το νόμο.

Δεν είναι αξιοσημείωτο ότι αυτοί που ανακάλυψαν το νόμο διατήρησης της ενέργειας δεν είχαν σπουδάσει φυσική:



Ο πανταχού παρών δράκος

Η τουλάχιστον, ο επίμονος!

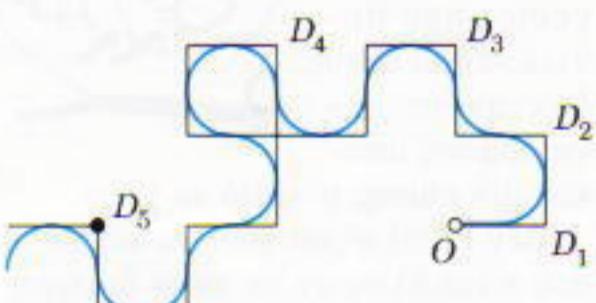
Vladimir Dubrovsky

ΣΕ ΤΟΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΘΑ ΑΠΟΔΕΙΞΟΥΜΕ τη σημαντικότερη ίσως ιδιότητα των δρακόντειων καμπυλών. Αυτή η ιδιότητα είχε αναφερθεί στο εξαιρετικό άρθρο «Δρακόντειες καμπύλες», των Vasilyev και Gutenmacher, που είναι αφιερωμένο σ' αυτά τα πανέμορφα πλάσματα και δημοσιεύτηκε στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1995 του *Quantum*.

Παρότι θα επαναλάβω όλους τους απαραίτητους ορισμούς, θα ήταν καλό να διαβάσει ο αναγνώστης εκείνο το άρθρο, καθώς και τις «Σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1996, για να κατανοήσει καλύτερα και βαθύτερα το ζήτημα.

Ένας από τους ορισμούς των δρακόντειων καμπυλών τις περιγράφει ως εξής:

Φέρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα OD_1 (Σχήμα 1). Το στρέφουμε κατά 90° γύρω από το άκρο D_1 . Κατόπιν, στρέφουμε την αποτελούμενη από δύο ευθύγραμμα τμήματα πολυγωνική γραμμή OD_1D_2 κατά 90° γύρω από το άκρο D_2 (την εικόνα του O μετά την πρώτη περιστροφή). Στη συνέχεια, στρέφουμε την προκύπτουσα

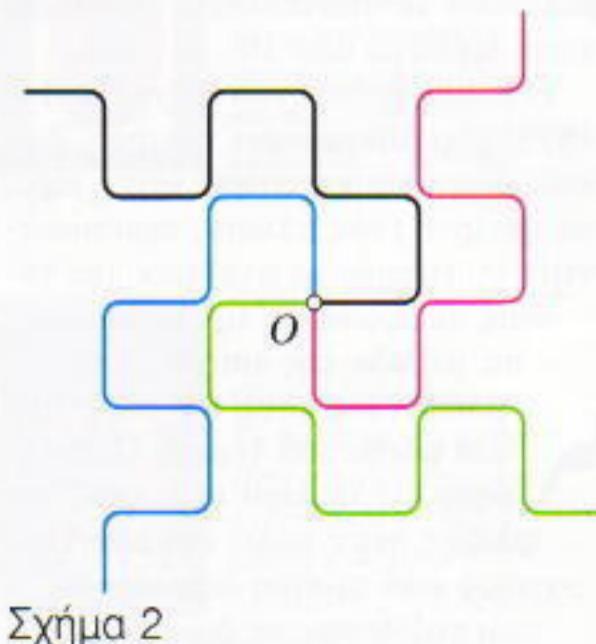


Σχήμα 1

πολυγωνική γραμμή $OD_1D_2D_3$ γύρω από το D_3 , κ.ο.κ. Έπειτα από n περιστροφές παίρνουμε μια πολυγωνική γραμμή $O...D_n$, αποτελούμενη από 2^n τμήματα, που σχηματίζει ορθές γωνίες σε όλες τις εσωτερικές της κορυφές. Αυτό το πολύγωνο ονομάζεται δρακόντειο σχέδιο (τάξης n).

Στο Σχήμα 1 βλέπετε την ειδική περίπτωση ενός δρακόντειου σχεδίου που δημιουργήθηκε από στροφές ίδιας φοράς (δεξιόστροφες) ονομάζεται κύριο δρακόντειο σχέδιο. Ένα δρακόντειο σχέδιο ανώτερης τάξης είναι επέκταση των αντιστοιχων κατώτερης τάξης, οπότε μπορούμε να φανταστούμε ότι επεκτείνονται επ' άπειρον, θεωρώντας έτσι άπειρα δρακόντεια σχέδια. Μερικές φορές είναι βολικό να στρογγυλέψουμε τις γωνίες ενός σχεδίου (η μπλε καμπύλη στο σχήμα). Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας «λείανσης» ονομάζεται δρακόντεια καμπύλη.

Ας φανταστούμε ότι φέρουμε τέσ-



Σχήμα 2

σερα κάθετα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο O (Σχήμα 2) και τα χρησιμοποιούμε ως αρχή του αντιστοιχου άπειρου κύριου δρακόντειου σχεδίου. Οι ακμές και οι κορυφές αυτών των σχεδίων συμπίπτουν με τις ακμές και τους κόμβους ενός άπειρου πλέγματος μοναδιαίων τετραγώνων. Σύμφωνα με το θεώρημα που πρόκειται να αποδείξουμε, τα τέσσερα κύρια δρακόντεια σχέδια που περιγράφαμε διέρχονται από όλες τις ακμές του πλέγματος, μία φορά από κάθε ακμή.

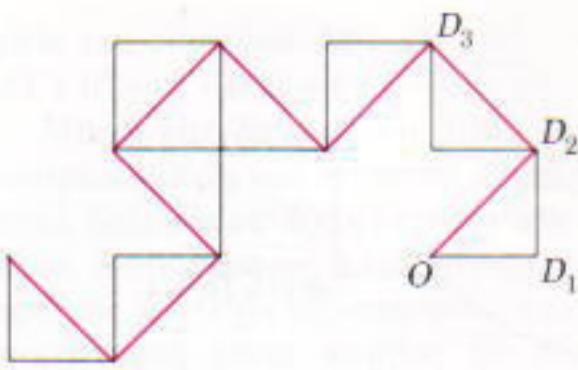
Το θεώρημα αυτό ανακαλύφθηκε από τους Chandler Davis και Donald Knuth (η ακριβής αναφορά μπορεί να βρεθεί στις «Δρακόντειες καμπύλες»), και οι συλλογισμοί που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ακολουθούν με κάποιες τροποποιήσεις τα βήματα της αρχικής απόδειξης.

...μία φορά από κάθε ακμή

Πρώτα, θα αποδείξουμε ότι ένα δρακόντειο σχέδιο, είτε είναι «κύριο» είτε όχι, δεν διέρχεται ποτέ δύο φορές από την ίδια ακμή του πλέγματος (αν και μπορεί να σχηματίσει ένα βρόχο και να επανέλθει στον ίδιο κόμβο).

Αυτό μπορεί να αποδειχτεί με τη βοήθεια απλών γεωμετρικών συλλογισμών.

Αν συγκρίνουμε το πλήθος των βημάτων και προς τις τέσσερις δυνατές κατευθύνσεις, διαπιστώνουμε εύκολα ότι το μήκος οποιουδήποτε βρόχου σ' ένα δρακόντειο σχέδιο είναι πολλαπλάσιο του τέσσερα, και συνεπώς το πρώτο και το τελευταίο

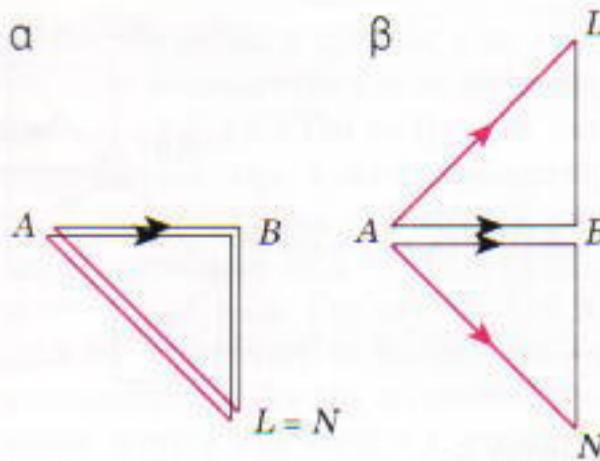


Σχήμα 3

τμήμα ενός τέτοιου βρόχου είναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους (δείτε τη λύση της ασκησης 7 στις «Δρακόντειες καμπύλες»). Συνεπώς, ένα δρακόντειο σχέδιο δεν μπορεί να διατρέξει το ίδιο τμήμα AB προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις, διότι το αρχικό τμήμα ενός βρόχου της μορφής $AB..BA$ δεν είναι κάθετο με το τελευταίο, αλλά συμπίπτει με αυτό.

Μια άλλη συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι ότι ένα δρακόντειο σχέδιο που διέρχεται δύο φορές από το ίδιο σημείο A «το αφήνει» ακολουθώντας και στις δύο περιπτώσεις την ίδια διεύθυνση — με την ίδια ή αντίθετη φορά — (διότι το τμήμα CA της διαδρομής $AB..CAD$ πρέπει να είναι κάθετο και προς τις δύο «κατευθύνσεις εξόδου» AB και AD). Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι είναι αδύνατον να διατρέξουμε δύο φορές το ίδιο τμήμα προς την ίδια κατεύθυνση.

Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι αυτό είναι δυνατόν, και ας επλέξουμε το μικρότερης τάξης δρακόντειο σχέδιο που διατρέχει δύο φορές κάποιο τμήμα (έστω το AB) — και επομένως περιλαμβάνει ένα κομμάτι της μορφής $KABL..MABN$. Παρατηρούμε ότι η διαδρομή που συνδέει διαδοχικά όλες τις άρτιες κορυφές οποιουδήποτε δρακόντειου σχέδιου είναι επίσης δρακόντειο σχέδιο (με τάξη κατά 1 μικρότερη — βλ. Σχήμα 3), διότι το σχεδιάζουμε με βάση τον ίδιο κανόνα «στροφής ενός τετάρτου» ξεκινώντας από το τμήμα OD_2 αντί του OD_1 . Το πλήθος των ακμών στο βρόχο $ABL..MA$ είναι άριτο, οπότε στο «σύντομο» (κόκκινο) σχέδιο ανήκουν είτε τα τμήματα AL και AN είτε τα KB και MB . Ας θεωρήσουμε την πρώτη περίπτωση. Λόγω της κατασκευής μας, υπάρχουν δύο δυνατότητες: $AL = AN$ (Σχήμα 4α) είτε $AL \perp AN$ (Σχήμα 4β). Η πρώτη από αυτές έρχεται σε αντίφαση με τον τρόπο επιλογής του



Σχήμα 4

αρχικού σχεδίου (το συντομότερο σχέδιο έχει ακμές που συμπίπτουν και είναι μικρότερης τάξης). Αν πάλι ισχύει η δεύτερη, τότε το σύντομο σχέδιο πρέπει να αφήνει το σημείο A ακολουθώντας τις κάθετες μεταξύ τους διεύθυνσεις AL και AN , γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την προηγουμένη παρατήρηση. Στην περίπτωση κατά την οποία η σύντομη διαδρομή περιέχει τις ακμές KB και MB , η επιχειρηματολογία μας είναι ουσιαστικά ίδια (και οι δύο περιπτώσεις $KB = MB$ και $KB \perp MB$ οδηγούν σε αντίφαση).

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ότι δύο κύρια δρακόντεια σχέδια που αρχίζουν από το O σχηματίζοντας μεταξύ τους ορθή γωνία δεν έχουν κοινά τμήματα. Πραγματικά, μπορούμε να θεωρήσουμε τα n τάξης κομμάτια αυτών των σχεδίων ως δύο κλάδους ενός δρακόντειου σχέδιου τάξης $n+1$ (όχι απαραίτητα «κύριου»). Γνωρίζουμε, όμως, ότι αυτό δεν μπορεί να διέρχεται δύο φορές από το ίδιο τμήμα.

Απομένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις δύο κύριων δρακόντειων σχεδίων που ξεκινούν προς αντίθετες κατευθύνσεις (ας πούμε προς τα πάνω και προς τα κάτω). Αν τα αντικαταστήσουμε με τις αντιστοιχείς δρακόντειες καμπύλες, οι οποίες εξ ορισμού διέρχονται από τους κόμβους του πλέγματος, τότε το γεγονός ότι τα σχέδια έχουν ένα κοινό τμήμα αντανακλάται στο γεγονός ότι οι καμπύλες τέμνονται, και ουνεπώς σχηματίζουν βρόχο. Σ' αυτή την περίπτωση, οι δύο δρακόντειες καμπύλες που αντιστοιχούν στα άλλα δύο σχέδια σχηματίζουν επίσης βρόχο (ο οποίος προκύπτει από στροφή του πρώτου κατά 90°). Είναι φανερό ότι οι δύο βρόχοι έχουν τουλάχι-

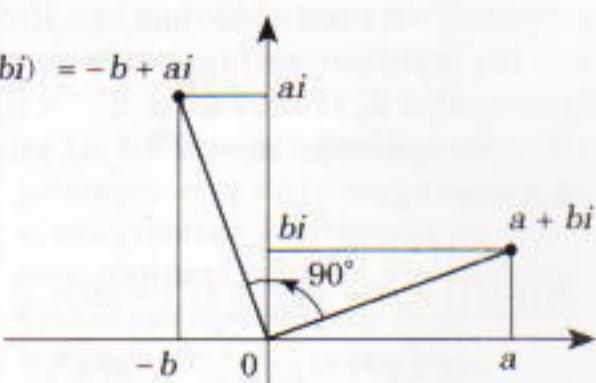
στον ένα ακόμη κοινό σημείο εκτός από την αρχή. Αυτό σημαίνει ότι δύο δρακόντεια σχέδια που σχηματίζουν στην αρχή τους ορθή γωνία έχουν ένα κοινό τμήμα, πράγμα που αποδειξάμε ότι είναι αδύνατον.

Επομένως, τα τέσσερα δρακόντεια σχέδια δεν αλληλεπικαλύπτονται (και έτσι λύσαμε τις ασκήσεις 8 και 9 του άρθρου «Δρακόντειες καμπύλες»).

Δρακόντειες καμπύλες και μιγαδικοί αριθμοί

Η απόδειξη της ιδιότητας «πλήρωσης του πλέγματος» που ακολουθεί στηρίζεται σε μια εξαιρετικά εύλογη ιδέα. Σε γενικές γραμμές, θα υπολογίσουμε απλώς τις συντεταγμένες των κόμβων ενός δρακόντειου σχέδιου και θα χρησιμοποιήσουμε αυτό τον τύπο για να δείξουμε ότι κάθε σημείο του πλέγματος είτε ανήκει σε δύο τουλάχιστον (από τα τέσσερα) δρακόντεια σχέδια είτε εμφανίζεται δύο φορές στο ίδιο. Ένα δρακόντειο σχέδιο φτάνει σ' έναν κόμβο του πλέγματος ακολουθώντας μια ακμή και φεύγει από αυτόν ακολουθώντας μια άλλη (κάθετη), ενώ κανένα από τα τέσσερα σχέδια δεν διέρχεται δύο φορές από την ίδια ακμή. Συνεπώς, καθημιά από τις τέσσερις ακμές που ξεκινούν από έναν κόμβο ανήκει σε ένα από τα σχέδια — άρα και όλες οι ακμές.

Στην πραγματικότητα, δεν θα χρησιμοποιήσουμε γνήσιες συντεταγμένες για να αναπαραστήσουμε τα σημεία του πλέγματος, αλλά μιγαδικούς αριθμούς. Αυτό είναι περισσότερο βολικό, επειδή με την ορολογία των μιγαδικών αριθμών η στροφή κατά 90° (το κύριο εργαλείο κατασκευής δρακόντειων σχέδιων) δεν είναι παρά ο πολλαπλασιασμός με τη φανταστική μονάδα i (Σχήμα 5). Ει-



Σχήμα 5

Πολλαπλασιασμός επί τη φανταστική μονάδα i που στρέφει κατά 90° γύρω από την αρχή το σημείο (μιγαδικό αριθμό) $a + bi$.

δικά, αν πολλαπλασιάσουμε με i , -1 ή $-i$ τον τύπο του «κατευθυνόμενου προς τα ανατολικά» σχεδίου (το πρώτο τμήμα του οποίου συνδέει την αρχή με το σημείο $(0, 1)$ — δηλαδή τον μιγαδικό αριθμό $1 + 0i$) παίρνουμε, αντίστοιχα, τον τύπο του «κατευθυνόμενου προς τα βόρεια», «προς τα δυτικά» και «προς τα νότια» σχεδίου.

Έτσι, συμβολίζουμε με $d(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, τον n -οστό κόμβο του προς τα ανατολικά κατευθυνόμενου σχεδίου (και τον αντίστοιχο μιγαδικό αριθμό). Θεωρούμε τα «σημεία καμπής» $d(0) = 0$, $d(1) = 1$, $d(2) = 1 + i$, κ.ο.κ. (το Σχήμα 6 μας δείχνει ότι $d(2^k) = D_{k+1}$). Το σημείο $d(2^{k+1})$ προκύπτει με στροφή της αρχής κατά 90° προς τα δεξιά γύρω από το $d(2^k)$. Έπειτα ότι

$$\begin{aligned} d(2^{k+1}) &= d(2^k) + i(d(2^k) - 0) \\ &= (1+i)d(2^k) \\ &= (1+i)^2d(2^{k-1}) \\ &= \dots = (1+i)^kd(2) \\ &= (1+i)^{k+1}. \end{aligned}$$

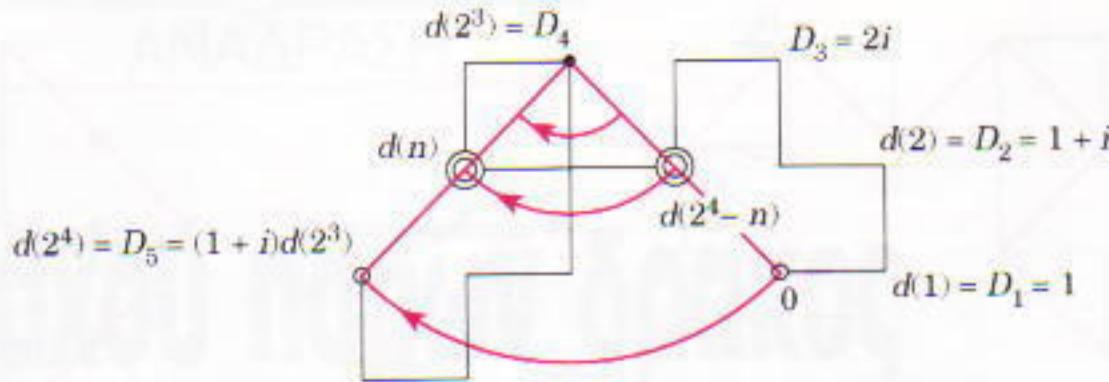
Ας θεωρήσουμε τώρα έναν αριθμό n που δεν είναι δύναμη του δύο. Έστω ότι $2^{k_1-1} < n < 2^{k_1}$. Το σημείο $d(n)$ βρίσκεται σε $n_1 = 2^{k_1} - n$ ακμές μακριά από το $d(2^{k_1})$ επομένως, από την κατασκευή του, αυτό προκύπτει με στροφή του σημείου $d(n_1)$ (που βρίσκεται σε απόσταση n_1 ακμές από την αρχή) κατά 90° προς τα δεξιά γύρω από το σημείο $d(2^{k_1-1})$. Αλγεβρικά, αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} d(n) &= d(2^{k_1}) - (d(2^{k_1}) - d(n)) \\ &= d(2^{k_1}) - id(n_1) \\ &= (1+i)^{k_1} - id(n_1). \end{aligned}$$

Αν το n_1 δεν είναι δύναμη του δύο, μπορούμε να επαναλάβουμε τον ίδιο συλλογισμό για το n_1 , να βρούμε έναν αριθμό k_2 τέτοιον ώστε $2^{k_2-1} < n_1 < 2^{k_2}$, να ορίσουμε $n_2 = 2^{k_2} - n_1$, και να γράψουμε

$$\begin{aligned} d(n) &= (1+i)^{k_1} - i((1+i)^{k_1} - id(n_2)) \\ &= (1+i)^{k_1} - i(1+i)^{k_2} - d(n_2). \end{aligned}$$

Αν συνεχίσουμε έτσι έως ότου καταλήξουμε σε κάποιο $n_m = 2^{k_m}$, θα πάρουμε τον τύπο



Σχήμα 6

$$\begin{aligned} d(n) &= (1+i)^{k_1} - i(1+i)^{k_2} \\ &\quad - (1+i)^{k_3} + i(1+i)^{k_4} \\ &\quad + \dots + (-i)^{m-1}(1+i)^{k_m}, \quad (1) \end{aligned}$$

όπου $k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0$. Έτσι, παίρνουμε την αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού ως αθροισματος δυνάμεων ενός σταθερού αριθμού πολλαπλασιασμένων με συγκεκριμένους συντελεστές. Αυτό μοιάζει με την αναπαράσταση ενός ακεραίου ως προς μια δεδομένη βάση — εδώ, όμως, η «βάση» είναι ο μιγαδικός αριθμός $1 + i$. Επίσης, ο' αυτή την περίπτωση οι μη μηδενικοί συντελεστές επαναλαμβάνονται κυκλικά με περιόδο τέσσερα: ο καθένας τους (με εξαίρεση τον πρώτο) ισούται με τον προηγούμενο πολλαπλασιασμένο επί $-i$. Τέτοιες αναπαραστάσεις μιγαδικών αριθμών ονομάζονται περιστροφικές (ο όρος επινοήθηκε από τους Davis και Knuth).

Από την κατασκευή είναι φανερό ότι το ανώτατης τάξης «ψηφίο» της περιστροφικής αναπαράστασης ενός κόμβου του κατευθυνόμενου προς τα ανατολικά σχεδίου είναι πάντοτε το 1. Τα ανάλογα ψηφία για τα κατευθυνόμενα προς βορρά, δύση και νότο σχέδια είναι, αντίστοιχα, i , -1 , και $-i$.

Ας δούμε πάλι τους αριθμούς k_1, k_2, \dots, k_m των μη μηδενικών «ψηφίων» της περιστροφικής αναπαράστασης του $d(n)$. Εξ οριού έχουμε

$$\begin{aligned} n &= 2^{k_1} - n_1 = 2^{k_1} - (2^{k_2} - n_2) \\ &= 2^{k_1} - 2^{k_2} + 2^{k_3} \\ &\quad - \dots + (-1)^{m-1}2^{k_m}. \quad (2) \end{aligned}$$

Αυτή η αναπαράσταση μπορεί να θυμίζει κάτι στους αναγνώστες του Quantum: εμφανίστηκε όταν μελε-

τούσαμε τη σπαζοκεφαλία των «κινέζικων δακτυλίων» (δείτε τις «Σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού — μέρος 2» στο τεύχος Μαΐου /Ιουνίου 1996), και εκεί την ονομάσαμε «αναδιπλούμενη δυαδική αναπαράσταση» (και πάλι, πρόκειται για όρο των Davis και Knuth). Στο άρθρο είχαμε αναφερθεί οτι την ενδιαφέρουσα σύνδεση μεταξύ αυτής και των παρόμοιων σπαζοκεφαλιών, από τη μια πλευρά, και των δρακόντειων καμπυλών, από την άλλη — σύνδεση που τώρα πλέον είναι φανερή. Επιτρέψτε μου πάντως να σας παραπέμψω σ' εκείνο το άρθρο για επιπρόσθετες λεπτομέρειες σχετικά με αυτή τη σύνδεση και τις αναδιπλούμενες αναπαραστάσεις. Αυτό που έχει πραγματική σημασία για μας τώρα είναι το γεγονός ότι υπάρχουν δύο ακριβώς αναδιπλούμενες αναπαραστάσεις ενός θετικού ακεραίου — η μια με άριτο και η άλλη με περιττό πλήθος μη μηδενικών ψηφίων (δείτε το πρόβλημα 3 στις «Σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού»).

Ακριβέστερα, η μια από αυτές τις αναπαραστάσεις έχει m μη μηδενικά ψηφία με αριθμούς $k_1 > k_2 > \dots > k_{m-1} > k_m$, όπου $k_{m-1} > k_m + 1$. Η άλλη αναπαράσταση έχει $m+1$ μη μηδενικά ψηφία με αριθμούς $k_1 > k_2 > \dots > k_{m-1} > k_m + 1 > k_m$. Οι $m-1$ πρώτοι όροι δύο τέτοιων αναπαραστάσεων είναι ίδιοι. Ο τελευταίος όρος στην πρώτη αναπαράσταση είναι το $(-1)^{m-1}2^{k_m}$, ενώ στη δεύτερη είναι το $(-1)^{m-1}2^{k_m+1} - (-1)^{m-1}2^{k_m} = (-1)^{m-1}(2^{k_m+1} - 2^{k_m})$, που αριθμητικά είναι το ίδιο. Για παράδειγμα, $19 = 32 - 16 + 4 - 1 = 2^5 - 2^4 + 2^2 - 2^0 = 2^5 - 2^4 + 2^2 - 2^1 + 2^0$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η αναπαράσταση του $d(n)$ είναι του πρώτου τύπου (με $k_{m-1} > k_m + 1$). Ωστόσο, από την «αδελφή της» αναπαράσταση προκύπτει το ίδιο οπ-

μείο του επιπέδου, διότι $(1+i)^{k+1} - i(1+i)^k = (1+i)^k(1+i-i) = (1+i)^k$.

Μπορούμε λοιπόν, να υπολογίσουμε τη θέση του n -ούτου κόμβου ενός δεδομένου δρακόντειου σχέδιου. Αντιστρόφως, κάθε μιγαδικός αριθμός που έχει περιστροφική αναπαράσταση είναι κόμβος σε ένα από τα τέσσερα δρακόντεια σχέδια: το ανώτατης τάξης ψηφίο του μας δείχνει σε ποιο από τα τέσσερα σχέδια ανήκει, και οι αριθμοί k_1, \dots, k_m , δίνουν, μέσω του τύπου (2), την απόσταση του από την αρχή, κατά μήκος της δρακόντειας διαδρομής.

Περιστροφικές αναπαραστάσεις

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι κάθε μιγαδικός ακέραιος έχει περιστρεφόμενη αναπαράσταση. Στην πραγματικότητα, θα αποδείξουμε ένα ελαφρώς ισχυρότερο γεγονός: κάθε μιγαδικός ακέραιος $z = a + bi$ έχει τέσσερις περιστροφικές αναπαραστάσεις με τα κατώτατης τάξης ψηφία ίσα με 1, i , -1 και $-i$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} 1 &= -i(1+i)^2 - (1+i) + i \\ &= -i(1+i)^2 - 1 = (1+i) - i. \end{aligned} \quad (3)$$

Αυτές οι τέσσερις αναπαραστάσεις θα ονομαστούν 1 - i , i - 1 , (-1) - i , και $(-i)$ -αναπαράσταση, αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τέλεια επαγγή ως προς το $|z|^2 = a^2 + b^2$. Για $|z|^2 = 1$, η πρόταση είναι αληθής λόγω των εξισώσεων (3) (οι αναπαραστάσεις για τα i , -1 , και $-i$ προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις αναπαραστάσεις του 1 με αυτούς τους αριθμούς). Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάθε u τέτοιο ώστε $|u|^2 < N$. Θεωρούμε ένα z με $|z|^2 = N$. Αν το $z = a + bi$ διαιρείται με το $1+i$ — δηλαδή, αν $z = (1+i)u$, όπου ο μιγαδικός ακέραιος — τότε $|u|^2 < N$ (ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει το γεγονός ότι $|u|^2 = |z|^2/2$). Άρα, ο αριθμός u έχει και τις τέσσερις περιστροφικές αναπαραστάσεις. Αν τις πολλαπλασιάσουμε με $1+i$ προκύπτουν οι αναπαραστάσεις του z .

Άσκηση. Αποδείξτε ότι ένας μιγαδικός ακέραιος $a + bi$ διαιρείται με το $1+i$ αν και μόνο αν οι αριθμοί a και b έχουν ίδια ισοτιμία.

Από αυτή την άσκηση έπειται ότι,

αν δεν διαιρείται ο αριθμός z με το $1+i$, τότε διαιρούνται και οι τέσσερις αριθμοί $z \pm 1$, $z \pm i$. Για να βρούμε, για παράδειγμα, την 1-αναπαράσταση του z , παίρνουμε τον αριθμό $z-1$, και τον διαιρούμε με το $1+i$. Τότε έχουμε $z-1 = (1+i)u$. Για το δεδομένο z , $|u| < |z|$, επομένως το u έχει μια i -αναπαράσταση. Αν την αντικαταστήσουμε στην ζ -ητούμενη αναπαράσταση του z . Σ' αυτή την περίπτωση, με την επιλογή της i -αναπαράστασης του u εξασφαλίζουμε τη σωστή εναλλαγή των μη μηδενικών ψηφίων στην αναπαράσταση του z . Προσπαθήστε να βρείτε πώς πρέπει να τροποποιηθεί η απόδειξη ώστε να πάρουμε τις άλλες τρεις αναπαραστάσεις του z .

Πλήρωση του πλέγματος

Το τελευταίο μέρος της απόδειξης είναι πολύ σύντομο.

Θεωρούμε έναν τυχαίο μιγαδικό ακέραιο z ($z \neq 0$) και τις 1- και i -αναπαραστάσεις του. Η καθεμία από αυτές μας δείχνει ότι το αντίστοιχο δρακόντειο σχέδιο συναντά κάποια στιγμή το σημείο z .

Αν τα ανώτατης τάξης ψηφία των δύο αναπαραστάσεων είναι διαφορετικά, τότε τα δύο σχέδια είναι διαφορετικά. Αν τα ψηφία είναι ίδια (για παράδειγμα, και τα δύο ίσα με 1), τότε από το z διέρχεται δύο φορές το ίδιο (κατευθυνόμενο προς τα ανατολικά) σχέδιο, αλλά σε δύο διαφορετικές στιγμές. Πράγματι, το πλήθος των μη μηδενικών ψηφίων στη μια από αυτές τις περιστροφικές αναπαραστάσεις πρέπει να είναι της ίδιας ισοτιμίας με το αντίστοιχο πλήθος στην άλλη (διότι το χαμηλότερης τάξης ψηφίο, $(-i)^{m-1}$, στη μια περίπτωση ισούται με 1 και στην άλλη με -1). Επομένως, οι δύο αντίστοιχες αναδιπλωμένες δυαδικές αναπαραστάσεις των στιγμών n κατά τις οποίες $d(n) = z$ δίνουν διαφορετικές τιμές του n . (Θυμηθείτε ότι η μια από τις δύο δυνατές αναδιπλωμένες αναπαραστάσεις ενός ακέραιου έχει πάντοτε περιττό πλήθος μη μηδενικών ψηφίων και η άλλη άρτιο.)

Οπως εξηγήσαμε προηγουμένως, αυτό σημαίνει ότι κάθε ακμή του πλέγματος ανήκει σε ένα από τα τέσσερα δρακόντεια σχέδια.

Gerald M. Edelman

Νόμπελ Ιατρικής

ΑΙΘΕΡΑΣ ΘΕΪΚΟΣ, ΛΑΜΠΕΡΗ ΦΩΤΙΑ

Η μεγάλη επιστημονική φιλοσοφική σύνθεση του νευρωνικού δαρβινισμού

ΑΙΘΕΡΑΣ ΘΕΪΚΟΣ,
ΛΑΜΠΕΡΗ ΦΩΤΙΑ



Gerald M. Edelman
Νόμπελ Ιατρικής

Σελ.: 440, Μεγ.: 14 x 21 εκ., 6.500 δρχ.

Σε τούτο το βιβλίο, ένας από τους πιο διακεκριμένους επιστήμονες του εγκεφάλου, ο νομπελίστας Gerald Edelman, μας προσφέρει την ευκαιρία να γνωρίσουμε τις λειτουργίες του πολυπλοκότερου υλικού αντικειμένου στο σύμπαν, του ανθρώπινου εγκεφάλου. Μας ξεναγεί σ' ένα μαγευτικό ταξίδι πραγματεύμενος τις μπχανές Turing, το πρόγραμμα του Δαρβίνου, τη γενετική, την κβαντική φυσική, τη φύση της αντίληψης, τη γλώσσας και της ατομικότητας. Προς αυτή, τη μεγαλύτερη επιστημονική πρόκληση, το βιβλίο του Edelman ανοίγει νέους δρόμους.

• «Το βιβλίο αυτό διαλευκαίνει το μυστήριο ενός αρχαίου γρίφου, και ο αναγνώστης αισθάνεται με δέος πως συμμετέχει στη μεγαλειώδη βιολογική προσπάθεια να συνδεθεί η νόσος με τον εγκέφαλο.»

—UMBERTO ECO,
Πανεπιστήμιο της Μπολόνια

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Η μεγαλειώδης ώσμωση

Μια ισχυρή δύναμη —είναι όμως και μια μηχανή αέναης κίνησης;

Norayr Paravyan

ΕΕΩΡΗΣΤΕ ΕΝΑ ΔΙΑΛΥΜΑ ΝΑ ΔΙΑ-
χωρίζεται από έναν καθαρό δια-
λύτη με ένα ημιπερατό διάφραγ-
μα· αυτό επιτρέπει στα μικρά
μόρια του διαλύτη να διέρχονται μέ-
σω των πόρων του, αλλά εμποδίζει τα
μεγαλύτερα μόρια της διαλυμένης
ουσίας να το διαπερνούν. Χάρη στη
φυσική τάση των συγκεντρώσεων να
καταστούν ίσες σε όλο τον όγκο, ου-
ντελείται μονομερής μοριακή διάχυ-
ση. Αυτή η αυθόρυμη κίνηση του
διαλύτη προς το διάλυμα μέσω της
ημιπερατής μεμβράνης ονομάζεται
ώσμωση. Συνήθως λέγεται ότι ο δια-
λύτης διεισδύει στο διάλυμα υπό την
επίδραση της ωσμωτικής πίεσης. Με
άλλα λόγια, η ωσμωτική πίεση λει-
τουργεί ως ένα ποσοτι-
κό χαρακτηριστικό του
φαινομένου της ώσμω-
σης.

Η ωσμωτική πίεση
μπορεί να μετρηθεί —
ιούται με την πρόσθε-
τη πίεση που απαιτεί-
ται από την πλευρά του
διαλύματος για να στα-
ματήσει η ώσμωση. Έχει
αποδειχτεί τόσο πειρα-
ματικά όσο και θεωρη-
τικά (μοριακή θεωρία
των διαλυμάτων) ότι η
ωσμωτική πίεση είναι
ανάλογη με τη συγκέ-
ντρωση του διαλύματος
και την (απόλυτη) θερ-
μοκρασία του. Θα ήταν
ενδιαφέρον να επαλη-
θεύσουμε αυτή τη σχέ-
ση — αλλά πώς; Για τα
πειράματά μας χρειαζό-

μαστε μια ειδική ουσιευή —ένα ω-
σμώμετρο, το οποίο πιθανώς δεν υ-
πάρχει στο εργαστήριο φυσικής του
οχολείου σας.

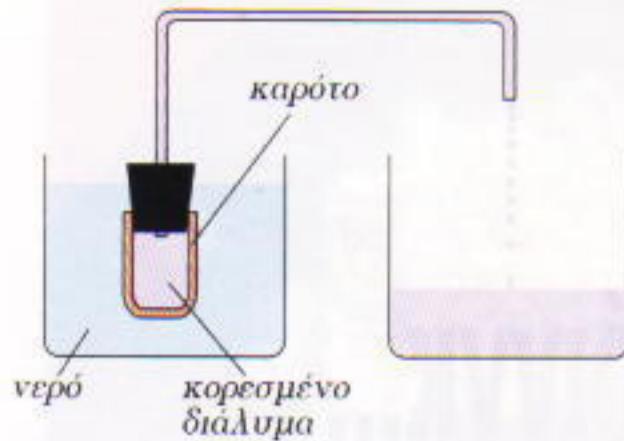
Λας μη χάνετε το θάρρος σας· μπο-
ρείτε να φτιάξετε το δικό σας ωσμώ-
μετρό. Πάρτε ένα καρότο, μήκους 10-
12 cm και διαμέτρου 3-4 cm. Πλύντε
το και καθαρίστε το προσεκτικά ώ-
στε να γίνει λείο, και κατόπιν κόψ-
τε τις άκρες του. Χρησιμοποιώντας
έναν λεπτό σουγιά, αφαιρέστε την
κεντρική περιοχή του καρότου. Το
πάχος του τοιχώματος του «δοχείου»
που θα φτιάξετε με αυτό τον τρόπο
πρέπει να είναι 3 έως 8 mm. Αντί για
το καρότο μπορείτε να χρησιμοποιή-
στε οτιδήποτε παρόμοιο: ένα πα-
τιζόμενο μήλο, ένα πατιζόμενο
μπανάνα, ένα γογγύλι, ένα γουλί,

ντζάρι, ένα γαρνίρι, ένα πατάτα —ό,τι απ' αυτά έχετε πρόχει-
ρο. Δανειστείτε τώρα ένα λαστιχένιο
πώμα από το εργαστήριο της χημεί-
ας, που να ταιριάζει στο οτόμιο του
φυτικού «δοχείου» σας —ένα πώμα
τρύπιο στο κέντρο που να περνά απ'
αυτό ένα λεπτό γυάλινο σωληνάκι
(όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμε-
νης σελίδας). Το ωσμώμετρό σας εί-
ναι έτοιμο, και μπορούμε να προχω-
ρήσουμε στα πειράματά μας.

Γεμίστε το δοχείο (μέχρι τα χείλη
του) με ένα κορεσμένο διάλυμα ο-
ποιασδήποτε υδροδιαλυτής ουσίας
—π.χ. επιτραπέζιου αλατιού ή ζάχα-
ρης— και κλείστε το ερμητικά με το
πώμα. Φροντίστε να μην εγκλωβί-
στούν φυσαλίδες αέρα

κάτω από το πώμα, ει-
δάλλως αυτός ο αέρας
θα προβάλει σθεναρή
«αντίσταση» στην ώ-
σμωση. Τοποθετήστε το
φυτικό «δοχείο» μέσα
σ' ένα ποτήρι γεμάτο με
νερό της βρύσης. Αντί
να κρατάτε το δοχείο
με το χέρι σας, στερεώ-
στε το με ένα οφιγκτή-
ρα από το πώμα σε μια
βάση στήριξης που θα
δανειστείτε από το ερ-
γαστήριο χημείας. Βε-
βαιωθείτε ότι η στάθμη
του νερού στο ποτήρι
είναι υψηλότερη απ'
ό,τι εκείνη στο φυτικό
«δοχείο». Επίσης τοπο-
θετήστε ένα δεύτερο
ποτήρι στο άλλο άκρο
του γυάλινου σωλήνα.





Λίγα λεπτά αργότερα, η ωμωτική πίεση θα αναγκάσει το διάλυμα αλατιού ή ζάχαρης να περάσει μέσα στον γυάλινο οωλήνα και να χύνεται αργά στο άδειο ποτήρι. Σε 30-40 λεπτά περίπου, η στάθμη του νερού στο πρώτο ποτήρι θα έχει κατεβεί σημαντικά. Πόση ώρα θα ουνεχιστεί αυτή η διαδικασία; Εκ πρώτης όψεως, δεν υπάρχουν περιορισμοί — μπορούμε συνέχεια να προσθέτουμε νερό στο πρώτο ποτήρι. Αλλά μόνο εκ πρώτης όψεως.

Στην πραγματικότητα, παρότι το πείραμα μπορεί να ουνεχίζεται για πολύ, αναγκαστικά θα σταματήσει. Αυτό συμβαίνει επειδή το νερό διαπερνά το ημιπερατό διάφραγμα (το τοίχωμα του φυτικού «δοχείου») του ωμώμετρου μας, πράγμα που ουνέπαγεται συνεχή ελάττωση της συγκέντρωσης της διαλυμένης ουσίας στο διάλυμα. Επιπλέον, η εν λόγω συγκέντρωση ελαττώνεται επειδή ένα μέρος του διαλύματος φεύγει από το ωμώμετρο μέσω του γυάλινου οωλήνα. Έτσι, στο σύστημα εισέρχεται καθαρό νερό, και εξέρχεται το διάλυμα. Όταν οι συγκεντρώσεις των διαλυμένων ουσιών από τις δύο πλευρές του ημιπερατού διαφράγματος γίνονται ίσες, το υγρό παύει να χύνεται στο δεύτερο ποτήρι, και το πείραμα φτάνει στο τέλος του.

Πρέπει να επισημάνω ότι το παραπάνω πείραμα με αυτό τον ιδιαίτερο εξοπλισμό μπορεί να διαρκέσει αρκετά μεγάλο διάστημα (δύο ή τρεις ώρες) — αν βέβαια έχετε την υπομονή να προσθέτετε νερό στο ποτήρι του ωμώμετρου. Ωστόσο, η διαδικασία κάποια στιγμή θα σταματήσει υποχρεωτικά. Αλίμονο, δεν μπορεί να κατασκευαστεί αεικίνητο με βάση την ωμωτική πίεση (ή οποιοδήποτε άλλο αεικίνητο, όπως εσείς γνωρίζετε πολύ καλά).

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ



ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΚΑΤΟΠΤΡΟ & ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ**



Στο κέντρο της Αθήνας, στη Στοά Αρσακείου, δημιουργήθηκε ένα ευχάριστο, καθαρά πνευματικό περιβάλλον, όπου δεκάδες εκδότες παρουσιάζουν τα βιβλία τους. Εκεί, οι Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης και οι Εκδόσεις Κάτοπτρο, δύο εκδοτικοί οίκοι με σημαντική προσφορά στο χώρο του επιστημονικού βιβλίου, άνοιξαν από κοινού ένα βιβλιοπωλείο στο οποίο μπορείτε να βρείτε το σύνολο της εκδοτικής τους παραγωγής. Περιμένουμε το αναγνωστικό κοινό να μας επισκεφθεί για να γνωρίσει τα βιβλία μας και να ενημερωθεί για τις νέες μας εκδόσεις.

**Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα
Τηλ.: 3247785**

Μπόινγκ, μπόινγκ, μπόινγκ...

«Η φύση αποτελεί αέναο συνδυασμό και επανάληψη πολύ λίγων νόμων. Συνεχώς τραγουδάει τον ίδιο παλιό σκοπό σε αμέτρητες παραλλαγές.»

—Ralph Waldo Emerson

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

AΝ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΑΤΕ ΤΟΥΣ Ολυμπιακούς Αγώνες που διεξήχθησαν στην Ατλάντα φέτος το καλοκαίρι, ισως σκεφτήκατε για άλλη μία φορά την πολλαπλή χρησιμότητα της φυσικής. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της παραβολικής κίνησης για να αναλύσουμε τις πολλές και διαφορετικές τροχιές που παρατηρούμε στα αγωνίσματα στίβου: σφαιροβολία, δισκοβολία, σφυροβολία, ακόντιο, άλμα εις ύψος, άλμα εις μήκος, άλμα τριπλούν και άλμα επί κοντώ. Βέβαια, οι αθλητές δεν χρειάζεται να κατανοούν όλη τη φυσική που οχετίζεται με το άθλημά τους, όμως εμείς αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Οι προπονητές μελετούν τις αρχές της φυσικής στις οποίες βασίζονται τα αθλήματα, και ειδικευμένοι φυσικοί αναλύουν τις κινήσεις για να βελτιώσουν τις επιδόσεις των αθλητών. Για να απλουστεύσουμε τα μαθηματικά της παραβολικής κίνησης, δεχόμαστε εξαρχής ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα, κάτι που οπωσδήποτε δεν ισχύει στην περίπτωση του ακόντιου και της δισκοβολίας. Με δεδομένη αυτή την παραδοχή, είμαστε τυχεροί που οι κινήσεις στην οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση μπορούν να μελετηθούν ξεχωριστά η μία από την άλλη. Η οριζόντια

κίνηση είναι ευθύγραμμη και ομαλή, διότι δεν ασκείται στο σώμα καμία οριζόντια δύναμη· οπότε,

x = x_0 + v_{0x} t.

Η κατακόρυφη κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επταχυνόμενη, εξαιτίας του βάρους του σώματος· έτοι,

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Γνωρίζοντας την ταχύτητα εκτόξευσης v_0 και τη γωνία εκτόξευσης θ , και θεωρώντας ότι η αρχή του συστήματος συνιεταγμένων βρίσκεται στο σημείο εκτόξευσης, έτοι ώστε $x_0 = y_0 = 0$, οι παραπάνω εξισώσεις ανάγονται στις

$$x = v_0 \sin \theta t,$$

$$y = (v_0 \cos \theta - \frac{1}{2} g t) t.$$

Για να υπολογίσουμε το βεληνεκές x και τη χρονική διάρκεια της πτήσης t , θέτουμε $y = 0$, και λύνουμε το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων. Έτοι,

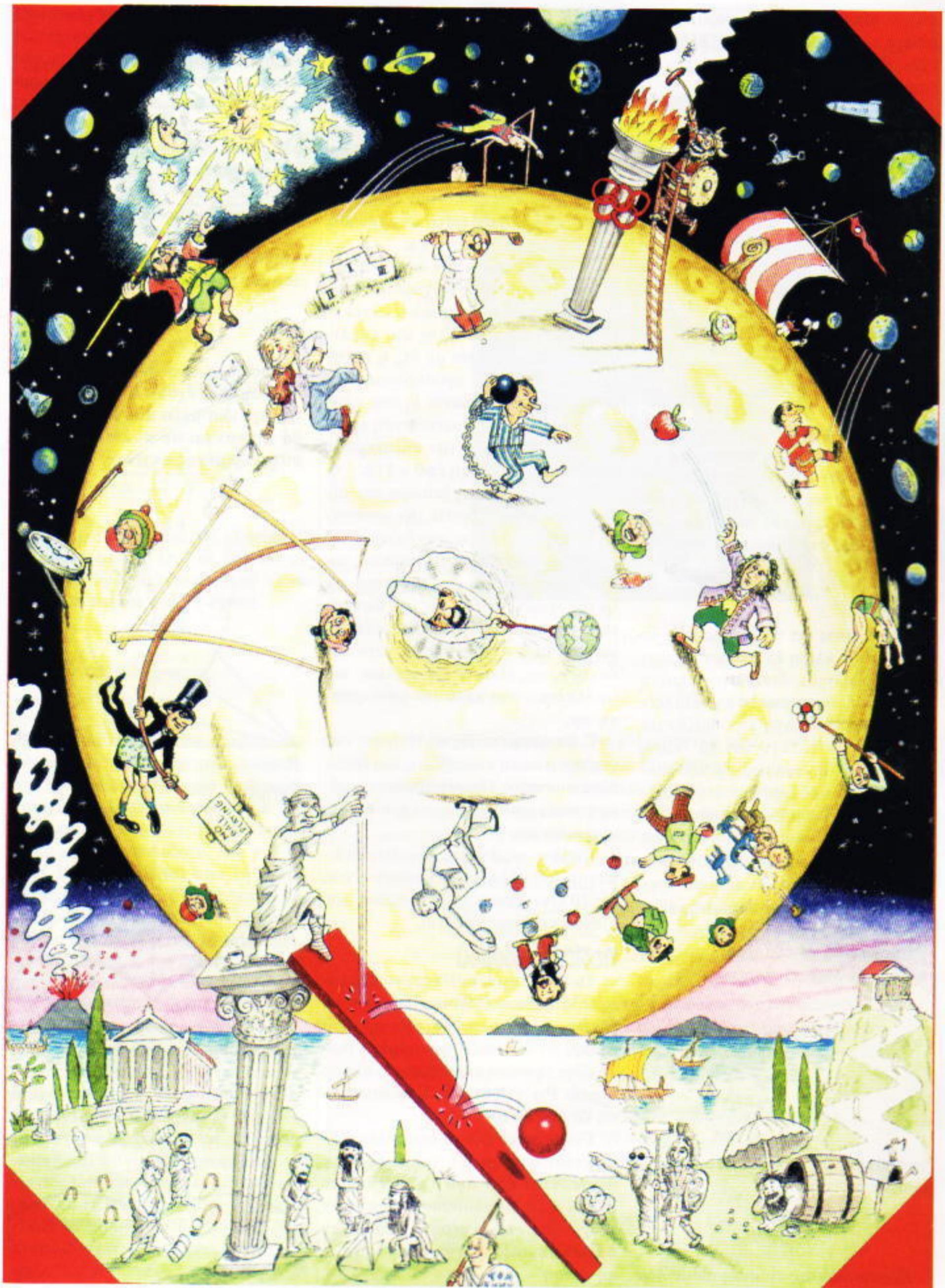
$$t = \frac{2v_0 \cos \theta}{g},$$

$$x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g}.$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις μπορούν να χρησιμεύσουν ως μια πρώτη ανάλυση του άλματος εις μήκος. Επειδή το μέγιστο βεληνεκές προκύπτει για $\theta = 45^\circ$, είναι φανερό ότι ο άλτης πρέπει να εγκαταλείψει το έδαφος υπό γωνία 45° (με την παραδοχή, βέβαια, ότι η v_0 παραμένει ίδια ανεξάρτητα από τη γωνία θ).

Η ανάλυση της σφαιροβολίας είναι δυσκολότερη, διότι το σημείο απ' όπου εκτοξεύεται η σφαίρα βρίσκεται υψηλότερα από το σημείο όπου προσγειώνεται. Σε εισαγωγικά μαθήματα συνήθως μελετούμε την απλούστερη περίπτωση, κατά την οποία η σφαίρα εκτοξεύεται οριζόντια.

Ένα, λοιπόν, από τα προβλήματα που τέθηκαν κατά τις εξετάσεις για την επλογή των μελών της φετινής Ολυμπιακής Ομάδας Φυσικής των ΗΠΑ αποτελεί ενδιαφέρον παράδειγμα αυτού του τελευταίου τύπου προβλήματος παραβολικής κίνησης. Μια μπάλα αφήνεται να πέσει κατακόρυφα, διανύει απόσταση h και χτυπάει σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης 45° . Η μπάλα αναπηδά, έπειτα από μια τελείως ελαστική κρουσή. Αυτό σημαίνει ότι η συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας που είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο παραμένει η ίδια, ενώ η κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο συνιστώσα



απλώς αποκτά αντίθετη φορά. Έτσι, ύστερα από την πρώτη αναπήδηση σε πόση απόσταση επί του κεκλιμένου επιπέδου ξαναπέφτει η μπάλα;

Όσον αφορά το μέρος της κίνησης που αποτελεί ελεύθερη πτώση, η δεύτερη εξίσωσή μας γίνεται

$$-h = -\frac{1}{2}gt^2,$$

και ουνεπώς ο χρόνος t_0 που απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στο κεκλιμένο επίπεδο είναι:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ή την κινηματική εξίσωση $v = -gt$ για να υπολογίσουμε την ταχύτητα v_0 της μπάλας κατά την πρόσκρουσή της στο κεκλιμένο επίπεδο:

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Το γεγονός ότι θεωρούμε πως το επίπεδο έχει κλίση 45° καθιστά εύκολο το πρόβλημα, διότι στην πρώτη αναπήδηση της η μπάλα εγκαταλείπει το επίπεδο κατά την οριζόντια διεύθυνση. Η επιλογή των 45° (και η τοποθέτηση της νέας αρχής του συστήματος ουνιτεαγμένων στο σημείο της πρώτης αναπήδησης) οδηγεί επίσης σε απλές ουνιτεαγμένες για το σημείο της δεύτερης αναπήδησης ($L_1/\sqrt{2}, -L_1/\sqrt{2}$), όπου L_1 είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων αναπήδησης.

Επομένως, οι εξισώσεις μας για την παραβολική κίνηση γίνονται:

$$\frac{L_1}{\sqrt{2}} = v_0 t_1,$$

$$\frac{-L_1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}gt_1^2.$$

Επλύνοντας ως προς L_1 , καταλήγουμε στην απάντηση:

$$L_1 = 4\sqrt{2}h.$$

Προσπαθώντας να σκεφτούμε ένα

αρκετά προκλητικό πρόβλημα για τους αναγνώστες μας, «πειραματιστήκαμε» με την αλλαγή της γωνίας του κεκλιμένου επιπέδου, αλλά τα πράγματα απλώς περιπλέκονταν χωρίς να προκύπτει κάτι ιδιαίτερα ουσιώδες. Ωστόσο, εξετάζοντας τη δεύτερη αναπήδηση, διαπιστώσαμε κάτι πολύ ενδιαφέρον, που μας άθησε να ερευνήσουμε την τρίτη αναπήδηση, κατόπιν την τέταρτη, κ.ο.κ.

Α. Ολοκληρώστε την ανάλυση της πρώτης αναπήδησης δείχνοντας ότι ο χρόνος πτήσης t_1 της μπάλας μέχρι τη δεύτερη πρόσκρουσή της στο κεκλιμένο επίπεδο ισούται με $2t_0$, η ταχύτητα της δεύτερης πρόσκρουσής της είναι $\sqrt{5}v_0$, και η γωνία θ_1 που οχηματίζεται από την κατεύθυνση κίνησης της μπάλας και την κατακόρυφο δίνεται από τη σχέση $\epsilon\theta = 1/2$.

Β. Όσον αφορά τη δεύτερη και την τρίτη αναπήδηση, βρείτε την απόσταση μεταξύ τους (ως συνάρτηση της L_1), το χρόνο πτήσης της μπάλας (ως συνάρτηση του t_1), την ταχύτητα της τρίτης πρόσκρουσής της (ως συνάρτηση της v_0), και την εφαπτομένη της γωνίας που οχηματίζεται από την κατεύθυνση κίνησης της μπάλας και την κατακόρυφο κατά την πρόσκρουσή της.

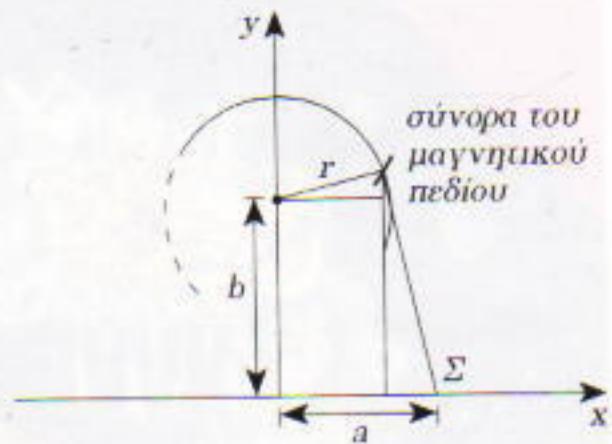
Γ. Γενικεύστε τις απαντήσεις σας για την n -οστή αναπήδηση, και βρείτε τους φυσικούς λόγους για τους οποίους υπάρχουν οι παρατηρούμενοι σχηματισμοί.

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum έως τις 10 Οκτωβρίου 1996. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

Πεδία Εστιασμού

Το πρόβλημα του τεύχους Μαρτίου/Απριλίου 1996 σας ζητούσε να βρείτε τα σύνορα του μαγνητικού πεδίου που εστιάζει φορτισμένα σωματίδια τα οποία εκτοξεύονται από το σημείο P σ' ένα σημείο Σ , σε απόσταση 2a από το P .

Γνωρίζουμε ότι τα σωματίδια κινούνται σε ευθείες γραμμές όταν βρίσκονται έξω από το μαγνητικό πεδίο, ενώ ακολουθούν κυκλικές τροχιές όταν είναι μέσα ο αυτό. Οι εν λόγω κυκλικές τροχιές ορίζονται από τη σχέση

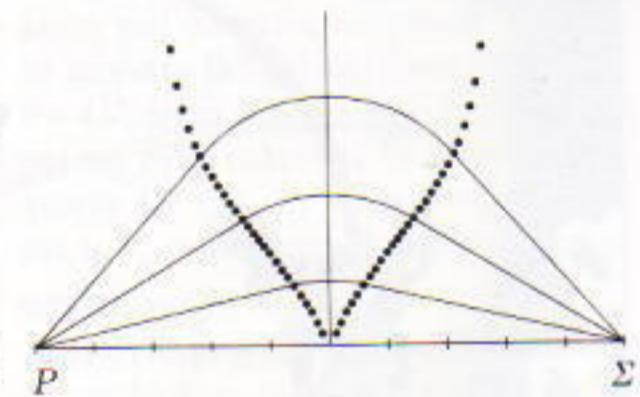


Σχήμα 1

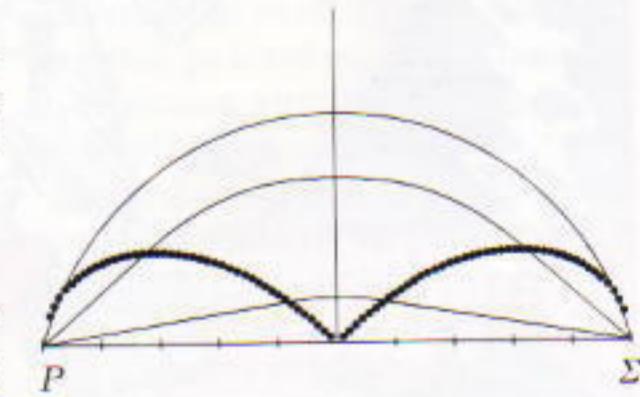
$$qvB = \frac{mv^2}{R}.$$

Εφόσον όλα τα σωματίδια αυτού του προβλήματος έχουν την ίδια ταχύτητα, την ίδια μάζα και το ίδιο φορτίο, θα κινούνται σε κυκλικές τροχιές ουγκεκριμένης ακτίνας:

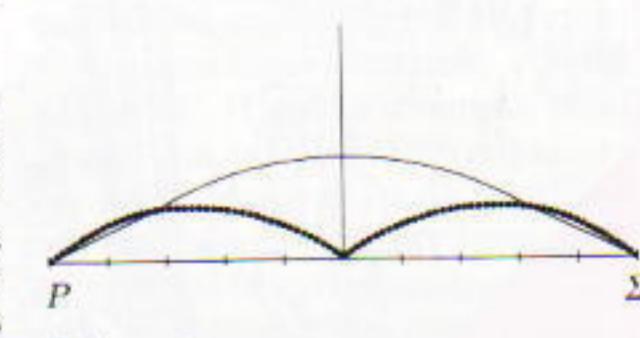
$$r = \frac{mv}{qB}.$$



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Εγκαταλείπονται το μαγνητικό πεδίο, τα σωματίδια θα κινούνται κατά μήκος της εφαπτομένης στο σημείο όπου εγκαταλείπουν το μαγνητικό πεδίο. Η λύση του προβλήματος συνιστάται στην εύρεση μιας συνοριακής γραμμής, όπου όλοι οι κύκλοι ακτίνας r έχουν εφαπτομένες που συναντιούνται στο σημείο S . Τα κέντρα των κύκλων ακτίνας r βρίσκονται στον άξονα των y .

Στο Σχήμα 1 βλέπουμε τη «γεωμετρία» της λύσης. Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων προκύπτει ότι

$$\frac{y-b}{x} = \frac{a-x}{y}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις εξισώσεις, με απαλοιφή του $(y - b)$, βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος σημείων δίνεται από τη σχέση

$$y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε το γράφημα αυτής της συνάρτησης χρησιμοποιώντας μία αριθμομηχανή ή ένα λογιστικό φύλλο και ένα πρόγραμμα γραφικών. Είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y .

Η λύση εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ της ακτίνας r του κύκλου και της απόστασης a . Αν $r < a$, τα σύνορα του πεδίου εκτείνονται στο άπειρο, και όλα τα ιόντα που εισέρχονται στο πεδίο μπορούν να εστιάζονται στο S . Στο Σχήμα 2 βλέπουμε την περίπτωση κατά την οποία $a = 5/3r$. Αν $r = a$, τα σύνορα έχουν καθορισμένες θέσεις, και, ομοίως, τα ιόντα που εισέρχονται στο πεδίο μπορούν να εστιάζονται στο S (Σχήμα 3). Αν $r > a$, τα σύνορα αρχίζουν να «πλαταίνουν» και συνεπώς περιορίζουν τις γωνίες υπό τις οποίες τα ιόντα μπορούν να εκτοξευτούν από το σημείο P και να φτάσουν στο σημείο S . Δείτε στο Σχήμα 4 την περίπτωση κατά την οποία $a = 5/8r$.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

ΕΙΜΑΣΤΕ MONOI;

Φιλοσοφικές συνέπειες
της ανακάλυψης εξωγήινης ζωής

Paul Davies

κάτοπτρο

Paul Davies: ΕΙΜΑΣΤΕ MONOI;
Φιλοσοφικές συνέπειες της ανακάλυψης εξωγήινης ζωής
Σελ. 130, 2.800 δρχ.

Η ζωή δημιουργήθηκε από μία μοναδική πηγή ή αναδύθηκε ανεξάρτητα σε πολλά σημεία; Είναι θάμα, τυχαίο συμβάν ή αναπόφευκτη συνέπεια των νόμων της βιολογίας και της φυσικής; Υπάρχει άραγε έμφυτος στη φύση των πραγμάτων κάποιος σκοπός, μια γενική τάση από το απλό στο πολύπλοκο, από τα μικρόβια στη νόηση; Και τι θα μπορούσε να μας πει για τους εαυτούς μας και τη θέση μας στο σύμπαν η ύπαρξη εξωγήινων όντων με συνείδηση και νοημοσύνη; Για πολλές γενιές, παρόμοια θέματα κατατάσσονταν στους τομείς της θεολογίας και της επιστημονικής φαντασίας: ο

Davies στο παρόν βιβλίο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται κάτω από το φως της επιστημονικής λογικής και της πειραματικής έρευνας. Εξετάζει τις παραδοχές που υπεισέρχονται σ' αυτή την έρευνα και παρουσιάζει τις τρομακτικές συνέπειες που θα είχε στην επιστήμη, στη θρησκεία και στην κοσμοαντίληψή μας η ανακάλυψη ότι στο σύμπαν δεν είμαστε μόνοι.

O Paul Davies είναι καθηγητής φιλοσοφίας της φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Αδελαΐδας, στην Αυστραλία.

κάτοπτρο

Έκδόσεις: Ισαύρεων 10 και Λαφονούλη, 114 71 Αθήνα.

τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864

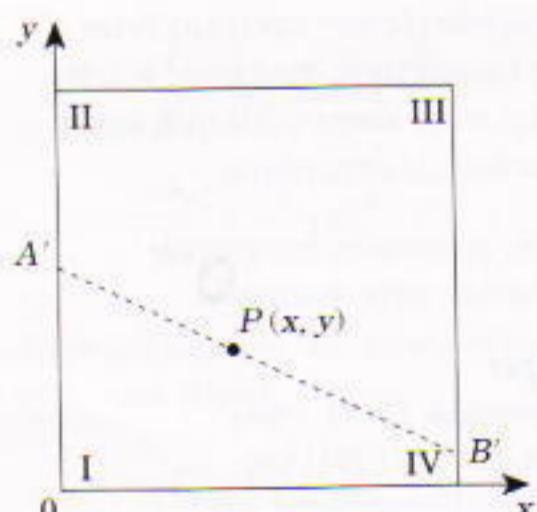
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49),

105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785

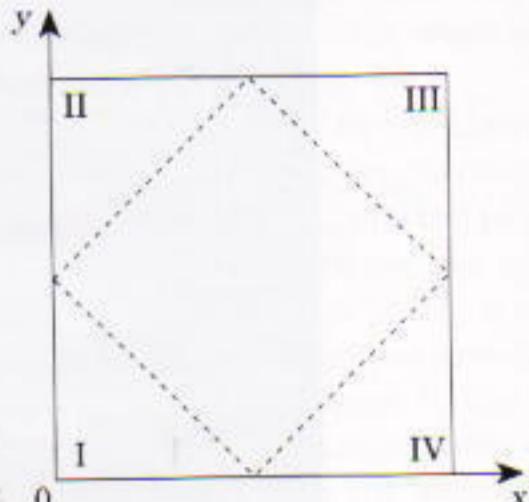
Πλεονάζον πόδι

Αρκετοί αναγνώστες έγραψαν στο αμερικανικό *Quantum* για να προβάλουν τις αντιρρήσεις τους σχετικά με την πρόκληση *Φ66* του τεύχους Μαρτίου / Απριλίου 1996. Ένας επιστολογράφος, ο John J. Spokas, καθηγητής φυσικής στο Benedictine College στο Λάιλ του Ιλλινόις, μας έστειλε μια λεπτομερή κριτική της λύσης, την οποία βρήκε «παράλογη και αυθαίρετη». Ο καθηγητής Spokas γράφει:

«Στον παρακάτω σχολιασμό θα ακολουθήσω την ίδια συμβολογραφία με εκείνη της δημοσιευμένης λύσης. Λόγω της προφανούς συμμετρίας, θεωρούμε ότι η μάζα $m/2$ τοποθετείται κοντά στο πόδι I. Ο προβληματισμός όσον αφορά τη λύση που δημοσιεύτηκε σχετίζεται με τη θεώρηση ότι η δύναμη f_{12} εφαρμόζεται στο σημείο A και η f_{34} στο σημείο B. Έτσι, κατά την επλογή των σημείων A και B γίνεται μια αδικαιολόγητη παραδοχή αναφορικά με τις σχετικές τιμές των f_1, f_2 , και των f_3, f_4 . Ο λόγος για τον οποίο αμφισβητείται το να εφαρμόζονται στα A και B οι ουγκεκριμένες δυνάμεις f_{12} και f_{34} φαίνεται στο Σχήμα 1. Το σημείο $P(x, y)$ εκφράζει τη θέση της μάζας $m/2$. Γιατί οι f_{12} και f_{34} να μην εφαρμόζονται στα σημεία A' και B'? Στην πραγματικότητα, η πολύλογη θέση του B' συμπίπτει με το πόδι IV.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η δυσκολία προκύπτει από την απροσδιοριστική της προβλήματος. Ακόμη κι αν η μάζα $m/2$ τοποθετείται στο κέντρο του τραπεζιού, δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί πώς το φορτίο κατανέμεται ανάμεσα στα τέσσερα πόδια. Υπάρχει μάλιστα ένα πλεονάζον πόδι! Περιορίζοντας τη μάζα $m/2$ στην περιοχή που ορίζεται από τους άξονες x και y και από την ευθεία $x + y = \ell$, το πόδι III δεν είναι απαραίτητο για τη μηχανική ευστάθεια.

Σημειώνω εδώ μια εναλλακτική λύση. Περιορίζοντας τη μάζα $m/2$ στην περιοχή που περιγράφεται παραπάνω, και αναγνωρίζοντας ότι το πόδι III δεν είναι απαραίτητο, το απαλείφουμε — δηλαδή, η f_3 καθιστάται ίση με μηδέν. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τη μάζα $m/2$ που δίνει $f_1 = mg/4$ είναι η ευθεία $x + y = \ell/2$. Έτσι, η πλήρης περιοχή του τραπεζιού όπου η μάζα $m/2$ μπορεί να τοποθετηθεί χωρίς να πέζεται τόσο κάποιο από τα πόδια ώστε να σπάσει περιγράφεται στο Σχήμα 2 από τη διακεκομένη γραμμή.

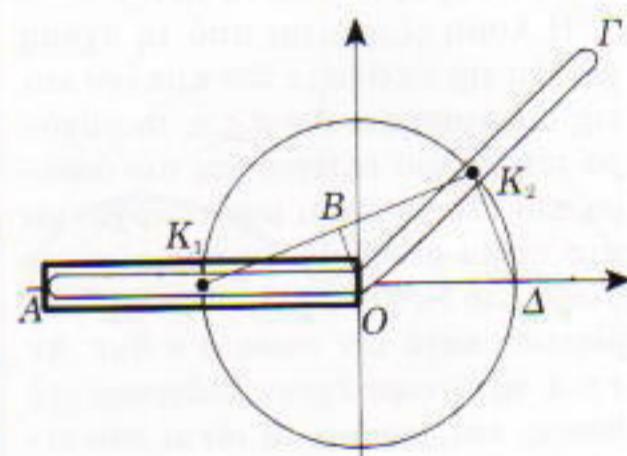
Το γεγονός ότι χρησιμοποιώντας τρία μόνο πόδια είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε τη μάζα $m/2$ πλησιέστερα σ' ένα πόδι απ' όσο επιτρέπει η δημοσιευμένη λύση, η οποία χρησιμοποιεί και τα τέσσερα πόδια, μοιά-

ζει παράξενο. Προφανώς η παρουσία του πλεονάζοντος ποδιού έχει αποτέλεσμα να πέζεται περισσότερο το πόδι που βρίσκεται πιο κοντά στη μάζα $m/2$. Αυτό προκύπτει απ' τον αυθαιρέτο και παράλογο τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίστηκε η απροσδιοριστική: φορτίο μεταφέρθηκε από τα πόδια II και IV στο πόδι III, που είναι πολύ μακριά από το πόδι I, και αυτό είναι κάτιο το οποίο ουνεπάγεται μεγαλύτερη καταπόνιση του ποδιού I.

Οι δυσκολίες που περιγράφονται εδώ θα είχαν αποφευχθεί αν το πρόβλημα αφορούσε ένα τραπέζι με σχήμα ισόπλευρου τριγώνου, τα πόδια του οποίου θα βρίσκονταν στις γωνίες του».

Το φίδι

Ο αναγνώστης μας Σταύρος Σαϊνίδης, πολιτικός μηχανικός στη Θεσσαλονίκη, μας στέλνει μια εκτενή επιστολή όπου μας παρουσιάζει λύσεις σε προβλήματα που έχουν τεθεί σε διάφορες στήλες τευχών του 1996. Εκτός αυτών μας προσφέρει μια ευκολότερη λύση για την πρόκληση *Φ61* του τεύχους Μαΐου / Ιουνίου



Σχήμα 3

1996. Μας γράφει, λοιπόν:

«Το φίδι είναι το AOG (Σχήμα 3). Τα κέντρα των ημιμαζών του είναι τα K_1 και K_2 . Προφανώς το κέντρο μάζας του φιδιού είναι το B , μέσον του K_1K_2 . Η ΔK_2K_1 είναι προφανώς ορθή, με συνέπεια και η OBK_1 να εί-

ναι επίσης ορθή. Έτοιμος γεωμετρικός τόπος των κέντρων μάζας του φιδιού είναι κύκλος με διάμετρο K_1O .

Παιζόντας μπόουλινγκ

Αγαπητό Quantum,

Στο τεύχος Μαρτίου / Απριλίου 1996, στη στήλη «Στα πεδία της φυσικής», σελίδα 42, στην απάντηση Ε, υπάρχει λάθος διατύπωση.

Γράφει: «η απόσταση στην οποία ολισθησε ο κύλινδρος είναι η

$$d_{\text{ολισθ}} = \frac{r^2 \omega_0^2}{6ng}.$$

Όμως η απόσταση κατά την οποία ολισθησε ο κύλινδρος είναι

$$d = \frac{r^2 \omega_0^2}{18ng}.$$

Από το θεώρημα έργου-ενέργειας για τη μεταφορά του κέντρου μάζας, έχουμε

$$\frac{1}{2}mu^2 = T_{\varphi} \cdot d,$$

με $u = 1/3r\omega_0$ την ταχύτητα του κέντρου μάζας τη σιγμή που σταματά η ολισθηση και αρχίζει καθαρή (μόνον) κύλιση. Η ολισθηση συμβαίνει για διάστημα d .

Από το θεώρημα έργου ενέργειας για την περιοτροφή περί το κέντρο μάζας, έχουμε

$$\frac{1}{2}\Theta_{\kappa\mu}\omega^2 - \frac{1}{2}\Theta_{\kappa\mu}\omega_0^2 = -T_{\varphi}r\theta.$$

με $\theta = \frac{2r\omega_0^2}{9ng}$ τη γωνία κατά την οποία έχει περιοτραφεί ο κύλινδρος περί το κέντρο μάζας του έως να σταματήσει η ολισθηση, $\omega = 1/3\omega_0$ η γωνιακή ταχύτητα αυτή τη σιγμή, και $\Theta_{\kappa\mu}$ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς το κέντρο μάζας του.

Από το θεώρημα έργου-ενέργειας και για μεταφορά (ολισθηση κατά d) και για περιοτροφή (κατά θ), έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}\Theta_{\kappa\mu}\omega^2 \right) - \frac{1}{2}\Theta_{\kappa\mu}\omega_0^2 =$$

$$T_{\varphi}d - T_{\varphi}r\theta.$$

Η ολισθηση συμβαίνει για διάστη-

μα d . Συγχρόνως συμβαίνει περιστροφή κατά γωνία θ . Η T_{φ} παράγει έργο μεταφοράς $T_{\varphi} \cdot d$ και έργο περιστροφής (έργο ροπής) $-T_{\varphi}r\theta$. Είναι σαν να έχω καθαρή (μόνον) ολισθηση κατά $d - r\theta = d_{\text{ολισθ}}$. Αυτό είναι ορθότερο να ονομασθεί $d_{\text{ολισθ}}$, δηλαδή ενεργό διάστημα. Άλλα δεν έχω μόνον ολισθηση. Έχω ολισθηση κατά d μαζί με περιοτροφή.

Nikos Ellinakis,
Zografou, Athina

Με κανόνα και διαβίτη

Ο κύριος A.N. Μπένος, από τη Δάφνη, Αθήνα, μας γράφει:

«Ως τακτικός αναγνώστης της ελληνικής έκδοσης του Quantum, και προκειμένου να είναι πληρέστερη η πληροφόρηση των ελλήνων αναγνωστών σε ό,τι αφορά το άρθρο «Πρόγραμμα κατασκευών» του Alexander Kirillov στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1996, θα παρακαλούσα να δημοσιευτεί σε προσεχές τεύχος η παρακάτω ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, την οποία εγώ γνωρίζω, και η οποία πιστεύω ότι θα είναι χρήσιμη σε κάθε ενδιαφερόμενο για το θέμα αναγνώστη:

1. Ανδρεαδάκη Σ., *Θεωρία Galois*, Συμμετρία, Αθήνα 1992.
2. Fraleigh J., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, 1967, σελ. 393.
3. Rotman J., *Galois Theory*, Springer Verlag, 1940, σελ. 91.

Με την ευκαιρία θα ήθελα από εδώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον εκδοτικό οίκο «Αιθρά» που μου επέτρεψε να ουμπουλευτώ τη βιβλιοθήκη του.»

Η διπλή σβούρα

Αξιότιμοι κύριοι,

Κατ' αρχάς επιθυμώ να σας συγχαρώ για το πραγματικά μοναδικό για την Ελλάδα εποιημονικό περιοδικό σας Quantum.

Στη συνέχεια θα ήθελα να σας επισημάνω ένα λάθος, το οποίο, κατά τη δική μου άποψη, υπάρχει στο άρθρο «Ανεβαίνοντας την κατηφοριά» του Alexander Mitrofanov και που δημοσιεύεται στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1996, σελ. 48:

Η συνθήκη της ανοδικής κίνησης της σβούρας δεν είναι η

$$h < H,$$

διότι η μετατόπιση του κέντρου βάρους της σβούρας δεν είναι

$$h - H,$$

αλλά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4,

$$h - H \text{ συνα.}$$

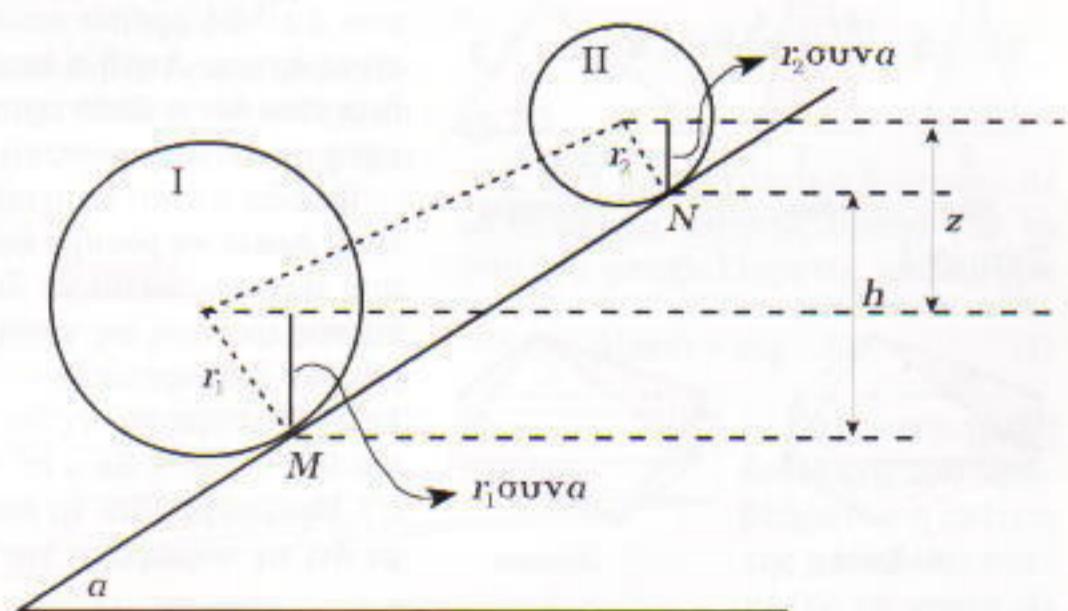
Επομένως, η ζητούμενη συνθήκη είναι:

$$h < H \text{ συνα.}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει και η τελική οχέση μεταξύ των γωνιών: $\epsilon_{\text{φα}} < \epsilon_{\text{β}} \epsilon_{\text{γ}}$.

Μετά την ίδια,
Κωνσταντίνος Κορόζης,
Βασιλικό Χαλκίδος

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= H \\ z = h - (r_1 - r_2) &\text{ συνα} \\ z = h - H &\text{ συνα} \end{aligned}$$



Σχήμα 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

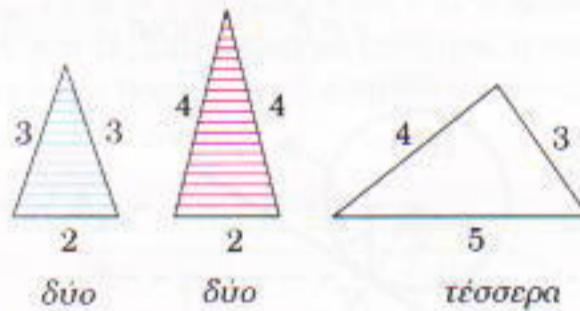
Μαθηματικά

M71

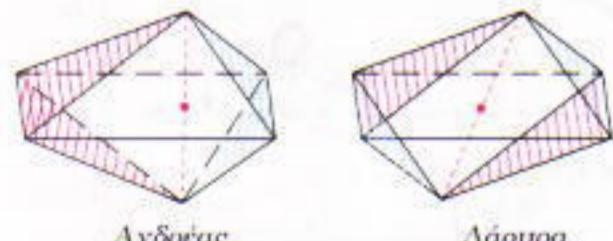
Ναι, είναι δυνατόν. Στο Σχήμα 1 υπάρχει το παράδειγμα ενός συνόλου εδρών που δίνουν δύο διαφορετικά πολύεδρα. Κάθε πολύεδρο αποτελείται από δύο ίσες, μη κανονικές τετράπλευρες πυραμίδες τις οποίες ενώνουμε στις βάσεις τους. Οι βάσεις είναι ορθογώνια, και στη μία περιπτωση οι πυραμίδες είναι συμμετρικές ως προς την κοινή βάση (Σχήμα 2a) ενώ στην άλλη είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο της βάσης (Σχήμα 2b).

Προσπαθήστε να βρείτε ένα παράδειγμα με μικρότερο ή ακόμη και με το ελάχιστο δυνατό πλήθος εδρών. Είναι απαραίτητο να είναι ίσοι οι ογκοί των δύο πολυέδρων;

Παρατηρήστε πως, όταν οι ακμές του πολυέδρου είναι όλες διαφορετικού μήκους ή όταν απλώς τις ονομάζουμε διαφορετικά στις προσκείμενες πλευρές (έτοις ώστε να κρατήσουμε σταθερή τη σειρά με την οποία ενώνονται οι έδρες), η Λάουρα θα καταλήξει στο ίδιο πολύεδρο όπως ο Ανδρέας. Αυτό το γεγονός απέχει πολύ από το να είναι προφανές. Η γενική περίπτωση είναι γνωστή ως θεώρημα



Σχήμα 1



Σχήμα 2

του Cauchy για τα κυρτά πολύεδρα.
(N. Vasilyev)

M72

(a) Η απάντηση είναι αρνητική. Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε δύο διαδοχικοί όροι αυτής της ακολουθίας είναι σχετικά πρώτοι. (Αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους, d , είναι μεγαλύτερος από το 1, τότε ο επόμενος όρος — το άθροισμά τους — και ο προηγούμενος — η διαφορά τους — θα διαιρούνται επίσης με το d , και μπορούμε να επεκτείνουμε αυτό το επιχείρημα σε ολόκληρη την ακολουθία. Επομένως, όλοι οι όροι της ακολουθίας μπορούν να διαιρεθούν με το d . Πρέπει να αναφέρουμε επίσης ότι σ' αυτή την περίπτωση το d είναι αναγκαστικά τέλειο τετράγωνο.)

Αν τώρα $a^2 + b^2 = c^2$ και οι a, b, c είναι σχετικά πρώτοι, τότε ο c είναι περιττός και ένας από τους a, b είναι άρτιος. (Αν οι a, b είναι και οι δύο περιττοί, τότε το άθροισμα των τετραγώνων τους έχει τη μορφή $(2n+1)^2 + (2m+1)^2$, επομένως είναι άρτιο αλλά δεν διαιρείται με το 4, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.) Από τη μία πλευρά, όλοι οι όροι της ακολουθίας μετά τον τρίτο πρέπει να είναι περιττοί από την άλλη, μερικοί από αυτούς πρέπει οπωσδήποτε να είναι άρτιοι. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει ότι η απάντηση στην ερώτησή μας είναι αρνητική.

(β) Εδώ η απάντηση είναι καταφατική. Αρκεί να βρούμε έναν αριθμό a που θα παριστάται με δύο διαφορετικούς τρόπους ως γινόμενο δύο αριθμών διαφορετικής ισοτιμίας. Δηλαδή, θέλουμε να ισχύει $a = bc = mn$, και $0 < b^2 - c^2 < 2a < m^2 - n^2 = k(b^2 - c^2)$. Μπορούμε τότε να επαληθεύσουμε ότι τα τετράγωνα της ακολουθίας

$$x = b^2 - c^2,$$

$$y = 2a, kx, ky, k^2x, k^2y, \dots$$

ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Για παράδειγμα, $x^2 + y^2 = (b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2 = (b^2 + c^2)^2$, ή $(kx)^2 + y^2 = k^2(b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$.

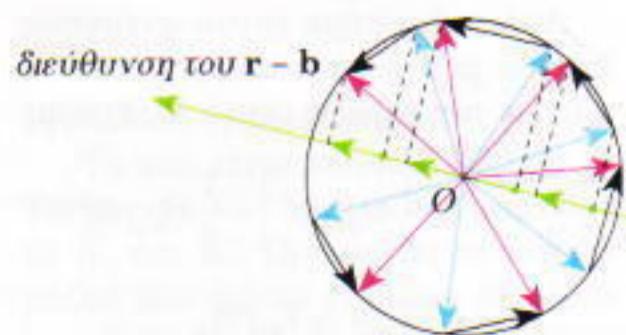
Ο μικρότερος αριθμός με τις δύο απαιτούμενες παραγοντοποιήσεις είναι ο έξι: $6 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$. Ισχύουν επίσης οι επιπρόσθετες συνθήκες: $3^2 - 2^2 = 5 < 12 < 36 - 1 = 7 \cdot (3^2 - 2^2)$. Από αυτό τον αριθμό προκύπτει η ακολουθία $5, 12, 35, 84, 245, \dots$, τα τετράγωνα της οποίας ικανοποιούν τη δεδομένη συνθήκη.

M73

Ας παραστήσουμε τη διαφορά $\mathbf{r} - \mathbf{b}$ ως το άθροισμα των «μαύρων» διανυσμάτων (Σχήμα 3), καθένα από τα οποία είναι η διαφορά μεταξύ ενός κόκκινου και του επόμενου (προς τα δεξιά) μπλε διανύσματος. Τα μαύρα διανύσματα ορίζουν ξένα μεταξύ τους τόξα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο που έχει κέντρο O .

Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{b}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα (διαφορετικά, δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτε). Φέρουμε τη διάμετρο του κύκλου που είναι παράλληλη προς το \mathbf{d} . Η προβολή του \mathbf{d} σ' αυτή τη διάμετρο είναι το ίδιο το \mathbf{d} . Αφού η προβολή του άθροισματος των διανυσμάτων ισούται με το άθροισμα των προβολών τους, το \mathbf{d} ισούται με το άθροισμα των προβολών των μαύρων διανυσμάτων.

Θεωρούμε όλα τα μαύρα διανύσματα των οποίων οι προβολές έχουν



Σχήμα 3

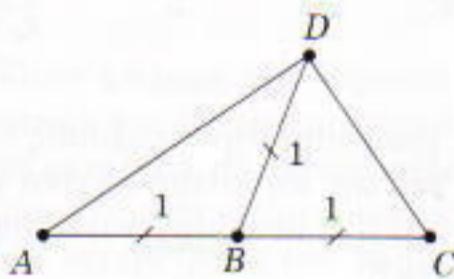
φορά ίδια με εκείνη του \mathbf{d} . Είναι φανερό ότι το άθροισμα των μήκών των προβολών τους ισούται τουλάχιστον με $|\mathbf{d}|$ (αφού το \mathbf{d} είναι το άθροισμα αυτών των διανυσμάτων καθώς και όσων έχουν την αντίθετη φορά). Από την άλλη πλευρά, οι προβολές τους (ή, ακριβέστερα, οι προβολές των αντίστοιχων χορδών) είναι ξένα τμήματα της διαμέτρου, και επομένως το συνολικό τους μήκος είναι το πολύ 2. Άρα, $|\mathbf{d}| = |\mathbf{r} - \mathbf{b}| \leq 2$.

Για το σύνολο που αποτελείται από δύο αντιθέτα μοναδιαία διανύσματα, $|\mathbf{r} - \mathbf{b}| = 2$, επομένως η εκτιμησή μας είναι ακριβής.

M74

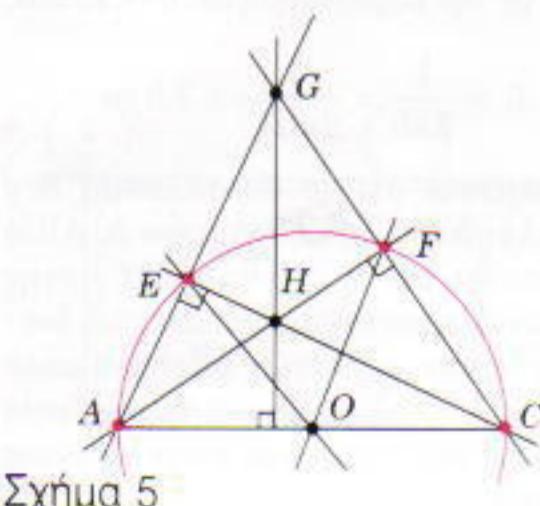
Ας υποθέσουμε για διευκόλυνσή μας ότι το δεδομένο τμήμα έχει μοναδιαίο μήκος.

(α) Για την πρώτη κατασκευή, φέρουμε μια ευθεία (Σχήμα 4), θεωρούμε τρία σημεία A, B, C σ' αυτήν τέτοια ώστε $AB = BC = 1$, και φέρουμε μια άλλη ευθεία, που διέρχεται από το σημείο B , στην οποία θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $BD = 1$. Τότε, $\angle ADC = 90^\circ$, διότι είναι γωνία εγγεγραμμένη στον κύκλο ACD που βαίνει στη διάμετρο AC .



Σχήμα 4

(β) Παρόμοια, μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο ορθές γωνίες, AEC και AFC , που βαίνουν στην ίδια διάμετρο AC , με τα σημεία A και C να ανήκουν στη δεδομένη ευθεία (Σχήμα 5). Εστιώ G και H τα σημεία το-



Σχήμα 5

μής των AE και CF , AF και CE , αντίστοιχα. Τότε, τα AF και CE είναι ύψη του τριγώνου AGC (καθώς και τα AE , CF είναι ύψη του τριγώνου AHC !), επομένως το GH είναι το τρίτο ύψος και των δύο τριγώνων, διότι τα ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Η θεωρία των κατασκευών με βάση τον κανόνα και το μοναδιαίο μήκος εξετάζεται στο περίφημο βιβλίο του David Hilbert *Grundlagen der Geometrie* (Τα θεμέλια της γεωμετρίας) σε συνδυασμό με την ανάλυση των γεωμετρικών αξιωμάτων. Αυτά τα εργαλεία αρκούν για την εκτέλεση πολλών κατασκευών. Συγκεκριμένα, μπορούμε να σχεδιάσουμε παράλληλες, να κατασκευάσουμε μια γωνία ίση με δεδομένη γωνία και δεδομένης πλευράς, κ.ο.κ. Εντούτοις, μερικές κατασκευές που είναι δυνατές με κανόνα και διαβήτη δεν μπορούν να επιτευχθούν με τον κανόνα και το μοναδιαίο μήκος.

M75

Αν χρησιμοποιήσουμε τη δεδομένη εξίσωση, βρίσκουμε για κάθε x τις σχέσεις

$$\begin{aligned} f(x+2) + f(x) &= \sqrt{2} f(x+1) \\ &= \sqrt{2} [\sqrt{2} f(x) - f(x-1)] \\ &= 2f(x) - \sqrt{2} f(x-1) \end{aligned}$$

— δηλαδή,

$$f(x+2) = f(x) - \sqrt{2} f(x-1).$$

Επειταί ότι

$$\begin{aligned} f(x+4) &= f(x+2) - \sqrt{2} f(x+1) \\ &= f(x) - \sqrt{2}[f(x+1) + f(x-1)] \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

και επομένως

$$f(x+8) = -f(x+4) = f(x).$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 8. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι η $f(x) = \eta\mu(\pi x/4)$.

Φυσική

Φ71



Σχήμα 6

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και το νόμο της παγκόσμιας έλξης, η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του Αρη δίνεται από τον τύπο

$$g_A = G \frac{M}{R_A^2},$$

όπου G είναι η βαρυτική σταθερά, M η μάζα του Αρη, και R_A η ακτίνα του. Η ακτίνα του Αρη μπορεί να βρεθεί άμεσα από τα δεδομένα του προβλήματος (Σχήμα 6):

$$R_A = \ell \operatorname{εφ} \frac{a}{2} \equiv \ell \frac{a}{2}$$

(εφόσον η a είναι μικρή, $\operatorname{εφ}(a/2) \approx a/2$).

Για να βρούμε τη μάζα του Αρη, ας δούμε την κίνηση του δορυφόρου του, του Φόβου. Για λόγους απλούστευσης, ας υποθέσουμε ότι η τροχιά του δορυφόρου είναι κυκλική, με ακτίνα $R = \ell \operatorname{εφ} \beta \approx \ell \beta$ (βλ. Σχήμα 6). Η κεντρομόλος επιτάχυνση $a = \omega^2 R = (2\pi/T)^2 R$ του δορυφόρου προκύπτει από τη δύναμη της βαρύτητας $F = G(mM/R^2)$ (m είναι η μάζα του Φόβου). Δηλαδή, $a = F/m$, ή $(2\pi/T)^2 R = G(M/R^2)$, από όπου παίρνουμε

$$GM = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R^3 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 (4\beta)^3.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} g_A &= G \frac{M}{R_A^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{(4\beta)^3}{(\ell a/2)^2} \\ &= \frac{16\pi^2}{T^2} \left(\frac{\beta}{a} \right)^2 4\beta. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα στον τύπο και λαμβάνοντας υπόψη ότι $1'' = 3.14/(180 \cdot 60 \cdot 60) \text{ rad} \equiv 4.9 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$, βρίσκουμε

$$g_A = 3.64 \text{ m/s}^2.$$

Φ72

Σ' ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt το θεώρημα ώθησης-ορμής για τη σταγόνα μεταβαλλόμενης μάζας δίνει

$$\Delta(mv) = mg \cdot \Delta t. \quad (1)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, η αύξηση της μάζας της σταγόνας σε χρόνο Δt είναι

$$\Delta m = \rho v_{\mu} S \cdot \Delta t, \quad (2)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του νερού, v_{μ} η μέση ταχύτητα της σταγόνας κατά τη διάρκεια του Δt , $S = 4\pi r^2$ ιο εμβαδόν της επιφάνειας της σταγόνας, και a ένας αδιάστατος συντελεστής αναλογίας. Όσον αφορά το αριστερό μέλος, εφόσον $m = 4/3\pi r^3 \rho$, προκύπτει

$$\Delta m = 4\pi r^2 \rho \cdot \Delta r \\ = S \rho \cdot \Delta r.$$

Αν στο χρόνο Δt η σταγόνα κατά την πτώση της διανύει απόσταση Δy , τότε $\Delta t = \Delta y / v_{\mu}$. Αν εισαγάγουμε τις εκφράσεις των Δm και Δt στην εξίσωση (2), προκύπτει

$$\Delta r = a \cdot \Delta y - \Delta y.$$

Εφόσον η σταγόνα πέφτει σε σταθερή επιτάχυνση y , τότε $y = gt^2/2 - t^2$. Επομένως, $r \sim t^2$ και $m \sim r^3 \sim t^6$. Αν λάβουμε υπόψη αυτές τις σχέσεις, από την εξίσωση (1) παίρνουμε

$$\Delta(t^6 y t) = t^6 g \cdot \Delta t.$$

(Επειδή η μάζα υπάρχει και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1), ο συντελεστής αναλογίας απαλείφεται). Από το αριστερό μέλος προκύπτει

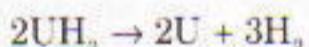
$$\Delta(gt^5) = 7gt^6 \cdot \Delta t,$$

οπότε και

$$y = \frac{g}{7} t^7.$$

Φ73

Προφανώς λαμβάνει χώρα η αντίδραση



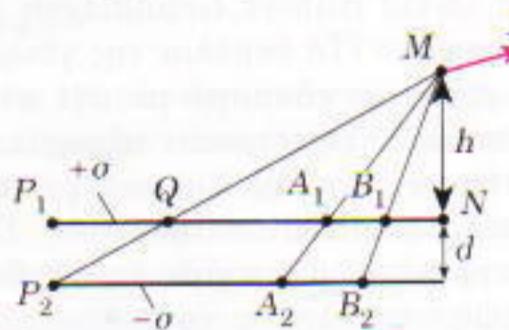
δηλαδή, 482 g (2 mole) υδριδίου του ουρανίου αποδίδουν 476 g (2 mole) ουρανίου και 6 g (3 mole) υδρογόνου. Αντίστοιχα, 1 g ουρανίου θα αποδίδει $m = 6/482$ g υδρογόνου. Υποθέτοντας ότι το υδρογόνο ουμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο, μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεσή του υπό τις δεδομένες συνθήκες ($T = 673$ K, $V = 10^{-3}$ m³) μέσω της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων:

$$P = \frac{m \cdot RT}{\mu \cdot V} \equiv 3,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

όπου $\mu = 2$ g η γραμμομοριακή μάζα του υδρογόνου.

Φ74

Ας οχεδιάσουμε την εγκάρσια διατομή του ουσιώματος κατά μήκος του επιπέδου συμμετρίας του, που περνά από το δεδομένο σημείο M (Σχήμα 7 — οι φορτισμένες πλάκες εκτείνονται απεριόριστα εκατέρωθεν του επιπέδου της σελίδας). Σύρουμε δύο ευθείες γραμμές MA_1A_2 και MB_1B_2 κοντά τη μία στην άλλη. Σημειώστε



Σχήμα 7

ότι η πολύ στενή λωρίδα πλάτους A_1B_1 είναι ισοδύναμη με ένα φορτισμένο νήμα του οποίου η γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda_1 = \sigma \cdot A_1B_1$ βρίσκεται σε απόσταση $r_1 \equiv A_1M$ από το σημείο M . Το ηλεκτρικό πεδίο ΔE_1 που δημιουργείται από αυτό το νήμα στο σημείο M κατευθύνεται κατά μήκος της A_1M και έχει μέτρο

$$\Delta E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{\sigma \cdot A_1 B_1}{2\pi\epsilon_0 \cdot A_1 M},$$

όπου ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού.

Η αντίστοιχη λωρίδα στην κάτω πλάκα δημιουργεί παρόμοιο πεδίο:

$$\Delta E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{-\sigma \cdot A_2 B_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot A_2 M}.$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων MA_1B_1 και MA_2B_2 προκύπτει $\Delta E_2 = -\Delta E_1$ — δηλαδή τα πεδία που παράγονται από τις λωρίδες A_1B_1 και A_2B_2 εξουδετερώνονται πλήρως. Επομένως, θα υπάρχει μόνο μία πηγή ηλεκτρικού πεδίου — η λωρίδα P_1Q της επάνω πλάκας. Εφόσον το συνολικό μήκος των πλακών είναι μεγάλο ($P_1N \gg h$), το ηλεκτρικό πεδίο που οχηματίζεται από τη λωρίδα P_1Q έχει οχεδόν οριζόντια διεύθυνση (και φορά προς τα δεξιά). Καθώς τα τρίγωνα MQN και P_1QP_2 είναι όμοια, $P_1Q/QN = d/h \ll 1$ — δηλαδή το μήκος της λωρίδας P_1Q είναι μικρό σε σύγκριση με την απόσταση της λωρίδας από σημείο M . Επομένως, η λωρίδα αυτή

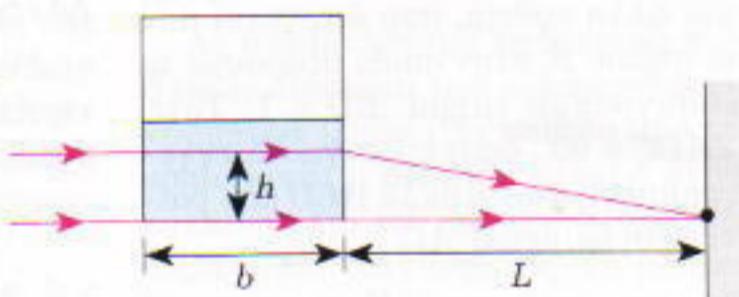
μπορεί να αντικατασταθεί και πάλι από φορτισμένο νήμα γραμμικής πυκνότητας φορτίου $\lambda = \sigma \cdot P_1Q$ που βρίσκεται σε απόσταση $r \equiv QM \equiv QN$ από το σημείο M .

Συνεπώς, η κατεύθυνση του ζητούμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι οχεδόν οριζόντια και προς τα δεξιά, και το μέτρο του ισούται κατά προσέγγιση με

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \equiv \frac{-\sigma \cdot (P_1Q)}{2\pi\epsilon_0 \cdot (QN)} = \frac{\sigma d}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

Φ75

Για να επιτύχουμε τη φωτεινότερη λωρίδα φωτός πάνω στο πέτασμα, πρέπει να το τοποθετήσουμε στη θέση όπου οι απαιτούμενοι χρόνοι για να διατρέξουν οι ακτίνες διαφορετικές διαδρομές και να φτάσουν στο πέτασμα να είναι ίσοι. Υποθέτοντας ότι οι διαδρομές των ακτίνων μέσα στο ενυδρείο είναι παράλληλες, μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη εξίσωση για την κατώτερη ακτίνα και για την ακτίνα που διέρχεται σε ύψος h (Σχήμα 8):



Σχήμα 8

με να γράψουμε την ακόλουθη εξίσωση για την κατώτερη ακτίνα και για την ακτίνα που διέρχεται σε ύψος h (Σχήμα 8):

$$\frac{b}{c/n_0} + \frac{L}{c} = \frac{b}{c/(n_0 - ah^2)} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c},$$

όπου $b = \sqrt{V}$ είναι το πλάτος του ενυδρείου, L η απόσταση ως το πέτασμα, και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Από αυτή προκύπτει εύκολα (και με την παρατήρηση ότι $h \ll L$) πως

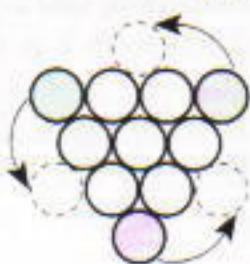
$$L = \frac{1}{2ab} = \frac{1}{2a\sqrt{V}} \equiv 2,5 \text{ m.}$$

Σημειώστε ότι το αποτέλεσμα δεν περιλαμβάνει την παράμετρο h . Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη μέγιστης φωτεινότητας ισχύει για όλες τις διαδρομές των φωτεινών ακτίνων μέσα από το νερό. Επομένως, το ενυδρείο έχει τις ιδιότητες ενός συγκλίνοντος φακού.

Σπαζοκεφαλιές

Σ71

Δείτε το ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 9

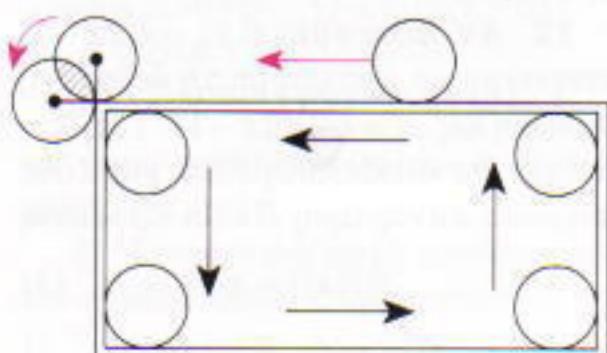
Σ72

Η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη με την κάθετη δύναμη στην τριβόμενη επιφάνεια. Θεωρήστε το βιβλίο που βρίσκεται κάτω ακριβώς από αυτό που τραβώ. Η τριβή μεταξύ αυτού του βιβλίου και του βιβλίου που βρίσκεται από κάτω του είναι μεγαλύτερη από την τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα σ' αυτό και στο βιβλίο που μετακινούμε κατά ποσότητα ανάλογη προς το βάρος ενός βιβλίου. Και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το κάτω βιβλίο μένει ακίνητο. Τα βιβλία που βρίσκονται χαμηλότερα παραμένουν ακόμη πιο σταθερά στη θέση τους.

Σ73

Όταν κυλάμε ένα νόμιομα σε απόσταση ίση με την περιμετρό του, αυτό εκτελεί 1 πλήρη περιστροφή. Η περιμετρός του ορθογωνίου ισούται με 12 περιμέτρους του νομίσματος. Επομένως, το εξωτερικό νόμιομα καθώς κινείται κατά μήκος των πλευρών του ορθογωνίου εκτελεί 12 περιστροφές. Επιπλέον, σε κάθε κορυφή του ορθογωνίου εκτελεί ένα πρόσθετο τέταρτο στροφής (Σχήμα 10). Άρα, το συνολικό πλήθος περιστροφών του εξωτερικού νομίσματος είναι 13.

Το εσωτερικό νόμισμα διανύει α-



Σχήμα 10

πόσταση $12c - 8r$, όπου c είναι η περιμετρός του και $r = c/2\pi$ η ακτίνα του. Άρα, εκτελεί $12 - 4/\pi \approx 10,7$ περιστροφές.

Σ74

Τα δυνατά ζεύγη διδύμων είναι η μητέρα και ο αδελφός ή η κόρη και ο γιος, επομένως οι διδύμοι είναι αντίθετου φύλου. Συνεπώς, ο νικητής και ο ηττημένος είναι του ίδιου φύλου. Δεν είναι δυνατόν να είναι η μητέρα και η κόρη, διότι πρέπει να έχουν την ίδια ηλικία —άρα είναι ο γιος και ο αδελφός. Ο νικητής δεν μπορεί να είναι ο γιος, επειδή ο αυτή την περίπτωση ο διδύμος του αδελφού —δηλαδή, η μητέρα— θα είχε την ίδια ηλικία με το γιο της.

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία μόνο δυνατότητα που δεν οδηγεί σε αντιφάσεις: νικητής του τουρνουά ήταν ο αδελφός.

Σ75

Θα παρουσιάσουμε μια λύση που μπορεί να μην είναι η συντομότερη, αλλά μας δείχνει ότι είναι δυνατόν να αναποδογυρίσουμε οποιοδήποτε προκαθορισμένο σύνολο νομιομάτων. Αριθμούμε κατά σειρά τα νομίσματα 1, 2, 3, ..., 7. Αντιστρέφουμε τα νομίσματα 12345, μετά τα 45671 και τέλος τα 67123. Όλα τα νομίσματα, εκτός από το 1, θα έχουν αναποδογυριστεί δύο φορές, ενώ το νόμιομα 1 τρεις. Λατό ισοδυναμεί με την αντιστροφή μόνο του νομίσματος 1. Παρόμοια μπορούμε να αναποδογυρίσουμε οποιοδήποτε νόμισμα, επομένως και κάθε ούνολο νομισμάτων. (V. Dubrovsky)

Καλειδοσκόπιο

1. Στη δεύτερη περίπτωση ο άνθρωπος θα διανύει απόσταση μεγαλύτερη κατά $5/8 - 3/8 = 1/4$ του μήκους της γέφυρας απ' όσο στην πρώτη περίπτωση. Η αντίστοιχη διαφορά για το αυτοκίνητο είναι ακριβώς ίση με το μήκος της γέφυρας. Επειτα ότι η ταχύτητα του αυθώρου είναι το $1/4$ της ταχύτητας του αυτοκινήτου —δηλαδή, 15 km/h .

2. Το μέτρο της ταχύτητας του κολυμβητή ως προς την μπάλα είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση προς την οποία κινείται ο κολυμ-

βητής. Επομένως, το δευτέρο μέρος του «ταξιδιού» του διήρκεσε 10 λεπτά, και ολόκληρο το ταξίδι 20 λεπτά. Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος η μπάλα διήνυσε 1 km. Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας της ως προς την ακτή —δηλαδή η ταχύτητα του ρεύματος — είναι 1 km ανά 20 λεπτά, ή 3 χιλιόμετρα ανά ώρα.

3. Συμβολίζουμε με q το ζητούμενο ποσοστό του αλατιού στο διάλυμα μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας. Το αρχικό ποσοστό του ήταν $q - p$, και αυξήθηκε κατά παράγοντα $q/(q-p)$. Αφού η μάζα του αλατιού παραμένει ίδια, αυτός ο παράγοντας ισούται με το λόγο των μάζων του διαλύματος πριν από και μετά την εξάτμιση. Με παρόμοιο συλλογισμό, λοιπόν, βρίσκουμε ότι, αφού η μάζα του διαλύματος στον δοκιμαστικό σωλήνα μειώθηκε κατά το η μηνού, η μείωση της συνολικής μάζας ισούται με το $1/(2n)$ της αρχικής της τιμής —δηλαδή, η συνολική μάζα μεταβλήθηκε κατά παράγοντα $1 - 1/(2n) = (2n - 1)/(2n)$. Έτσι, προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{q}{q-p} = \frac{2n}{2n-1},$$

η

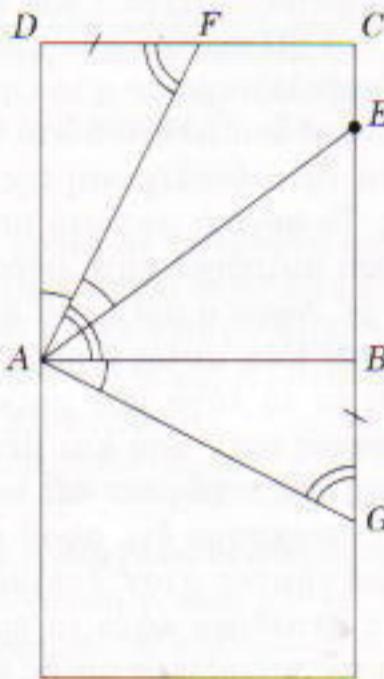
$$\frac{1}{1-\frac{p}{q}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2n}},$$

απ' όπου εύκολα παίρνουμε $q = 2np$.

4. Έστω n το άγνωστο πλήθος των πρόσθετων μηχανών. Δούλεψαν επί $35 - 6 - 11 = 18$ ώρες και απέδωσαν τόση εργασία όση θα απέδιδαν οι πρώτες 27 μηχανές στη διάρκεια των 6 ωρών που εξοικονομήθηκαν. Επομένως, έχουμε $18n = 27 \cdot 6$, οπότε $n = 9$.

5. Έστω a και b η μάζα χαλκού που περιέχεται στα δύο τμήματα στα οποία χωρίζουμε το πρώτο φύλλο κράματος. Οι αντίστοιχες μάζες για τα τμήματα στα οποία χωρίζουμε το δεύτερο φύλλο είναι ka και kb , όπου k ο λόγος των συγκεντρώσεων του χαλκού στα δύο κράματα. Επειτα από τη δεύτερη ανάμιξη, η μάζα του χαλκού είναι $a + kb$ στο πρώτο κράμα και $b + ka$ στο δεύτερο. Επομένως, $a + kb = b + ka$ ή $(1 - k)(a - b) = 0$. Από τη ουνθήκη του προβλήματος, $k \neq 1$, οπότε $a = b$ —δηλαδή, τα φύλλα χωριστήκαν στη μέση.

6. Η απάντηση είναι $DF + BE = a$. Για να αποδείξουμε αυτή την ανισότητα, στρέφουμε το τετράγωνο γύρω από το A κατά 90° έτσι ώστε η πλευρά AD να συμπέσει με την AB (Σχήμα 11). Έστω G η εικόνα του F μέσω της οπισθής. Έχουμε $DF = GB$ και



Σχήμα 11

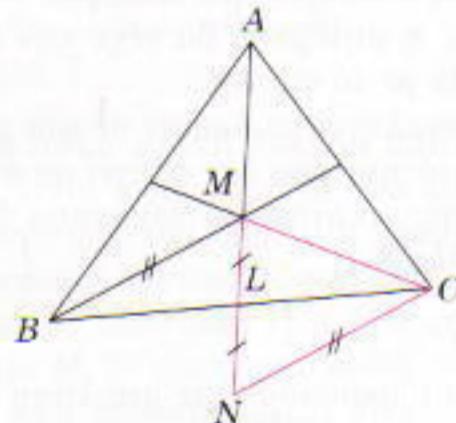
$DF + BE = GB + BE = GE$. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $GE = AE$. Αφού το τρίγωνο ABG είναι ισο με το τρίγωνο ADF , έχουμε $\angle AGE = \angle AFD = \angle FAB$ (η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $AB \parallel CD$). Επιπλέον, $\angle FAB = \angle FAE + \angle EAB = \angle FAD + \angle EAB = \angle GAB + \angle EAB = \angle GAE$. Άρα, $\angle AGE = \angle GAE$, το τρίγωνο AGE είναι ισοσκελές, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

7. (a) Η απόδειξη γίνεται φανερή από το Σχήμα 12, όπου L είναι το μέσο της BC , M το σημείο τομής των διαμέσων και $LM = MN$. Είναι πασίγνωστη η ιδιότητα του M να διαιρεί τις διαμέσους του τριγώνου σε λόγο $2:1$ (αρχίζοντας από τις κορυφές του τριγώνου). Επομένως, $MN = 2ML = AM$. Επίσης, $CN = BM$ (τα τμήματα αυτά είναι συμμετρικά ως προς το σημείο L). Άρα, το μήκος κάθε πλευράς του τριγώνου CMN ισούται με τα $2/3$ της αντίστοιχης διαμέσου του τριγώνου ABC , και συνεπώς μια ομοιοθεσία με λόγο $3/2$ μεταφέρει το τρίγωνο CMN σ' αυτό που θέλουμε να κατασκευάσουμε.

(β) Στο Σχήμα 12, η διάμεσος CL του τριγώνου CMN είναι ίση με το μισό της πλευράς CB του αρχικού τριγώνου ABC , συνεπώς, βάσει της προηγούμενης ομοιοθεσίας, το μήκος

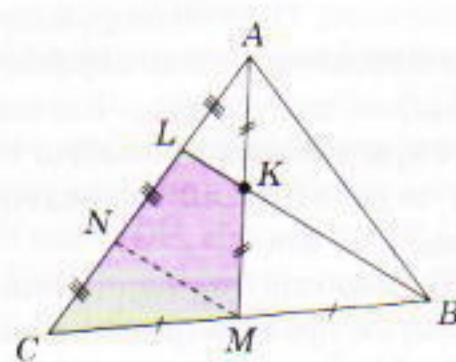
της αντίστοιχης διαμέσου του τριγώνου $A_1B_1C_1$ είναι ίσο με $3/4 BC$. Είναι φανερό ότι παρόμοιες σχέσεις ισχύουν για τις άλλες δύο διαμέσους, πράγμα που σημαίνει ότι το τρίγωνο $A_2B_2C_2$ είναι ίσο με το ABC , με λόγο ομοιότητας $3/4$.

(γ) Από την τελευταία παρατήρηση προκύπτει αμέσως η απάντηση: ο ζητούμενος λόγος είναι $(3/4)^2 = 9/16$. (Διαφορετικά, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να προκύψει από το γεγονός ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $A_1B_1C_1$ και ABC ισούται με $3/4$ — κάτι που εύκολα διαπιστώνουμε με τη βοήθεια του Σχήματος 12.)



Σχήμα 12

8. Ας βρούμε πρώτα το λόγο $CL:LA$. Φέρουμε τη $MN \parallel BL$ (Σχήμα 13). Τότε $CN = NL$ (αφού $CM = MB$) και $NL = LA$ (αφού $MK = KA$). Επομένως, $CL = 2LA$. Συγκρίνουμε τώρα τα εμβαδά διαφόρων τριγώνων. Η βάση MB του τριγώνου AMB έχει το μισό μήκος της βάσης AB του τριγώνου ABC , ενώ τα τρίγωνα αυτά έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή A , οπότε $\text{εμβαδόν}(ABM) = 1/2 \text{εμβαδόν}(ABC) = 1/2$. Παρόμοια, $\text{εμβαδόν}(MKB) = 1/2 \text{εμβαδόν}(ABM) = 1/4$. Αφού η βάση LC του τριγώνου BLC ισούται με τα $2/3$ της βάσης AC του τριγώνου ABC και τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή B , $\text{εμβαδόν}(BLC) = 2/3 \text{εμβαδόν}(ABC) = 2/3$. Τέλος, $\text{εμβαδόν}(CMKL) = \text{εμβαδόν}$



Σχήμα 13

$(BLC) - \text{εμβαδόν}(BMK) = 2/3 - 1/4 = 5/12$.

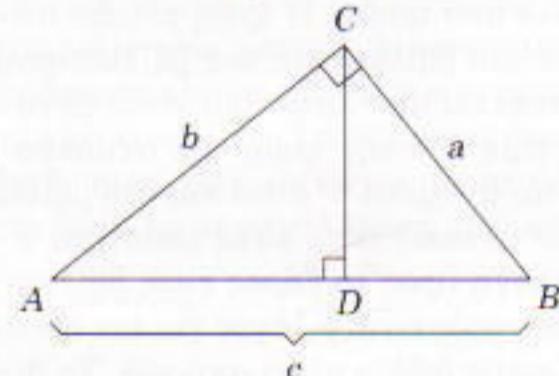
9. Τα τρίγωνα ABC , ACD και BCD είναι όμοια μεταξύ τους και, με βάση τους συμβολισμούς του Σχήματος 14, έχουμε

$$\frac{P_1}{P} = \frac{b}{c}, \quad \frac{P_2}{P} = \frac{a}{c},$$

επομένως

$$\left(\frac{P_1}{P}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{P}\right)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Επειτα ότι $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$.



Σχήμα 14

10. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{6} < 2$ και $\sqrt{6} < 3$. Αν αντικαταστήσουμε και στους δύο όρους του δεδομένου αθροισματος τις πιο εσωτερικές ρίζες με το 2 και το 3, αντίστοιχα, θα αυξήσουμε το άθροισμα, το οποίο, όμως, θα γίνει ακριβώς ίσο με 5.

11. Αν θεωρήσουμε τη δεδομένη παράσταση ως συνάρτηση του x , βλέπουμε ότι είναι πολυώνυμο δευτέρου το πολύ βαθμού. Το συμβολίζουμε με $P(x)$, και διαπιστώνουμε εύκολα ότι $P(a) = P(b) = P(c) = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $P(x) - 1$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες (το πρόβλημα ορίζει ότι τα a, b, c είναι διαφορετικά μεταξύ τους). Αυτό όμως είναι δυνατόν μόνο όταν $P(x) - 1 = 0$ για κάθε x , ή $P(x) \equiv 1$.

12. Αν θέσουμε $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$, μπορούμε να γράψουμε τη δεδομένη εξίσωση ως $x = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1}$, ή $x = f(f(x))$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε αύξουσα συνάρτηση $f(x)$ οι εξισώσεις

$$f(f(x)) = x \quad (1)$$

και

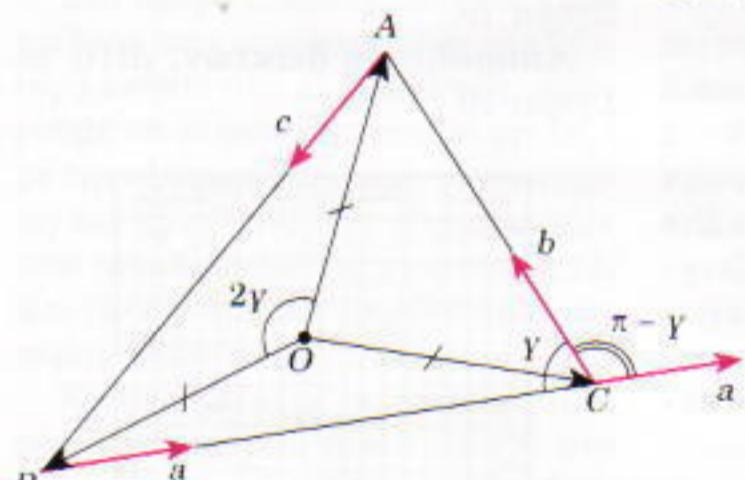
$$f(x) = x \quad (2)$$

είναι ισοδύναμες. Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε λύση της $f(x) = x$ είναι σίγουρα λύση της $f(f(x)) = x$. Αντιστροφά, έστω x_0 μια λύση της εξισώσης (1). Αν $f(x_0) > x_0$, τότε $f(f(x_0)) > f(x_0)$ (αφού η f είναι αύξουσα), και έτσι $f(f(x_0)) > x_0$, αντίθετα με την υπόθεσή μας. Παρόμοια, αν $f(x_0) < x_0$, έπειτα ότι $f(f(x_0)) < x_0$. Επομένως, το x_0 πρέπει να είναι λύση της εξισώσης (2).

Αρα, η δεδομένη εξισώση ανάγεται στην εξισώση $x = f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$, ή $x^3 - 2x + 1 = 0$, την οποία μπορούμε να λύσουμε με παραγονιοποίηση: $x^3 - 2x + 1 = (x^3 - x) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. Έχει τρεις ρίζες: 1 και $(-1 \pm \sqrt{5})/2$.

13. Μια σύντομη λύση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιεί το γεωμετρικό γινόμενο των διανυσμάτων.

(α) Συμβολίζουμε με $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ τα μοναδιαία διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση με τα διανύσματα \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} , και \overrightarrow{AB} , αντίστοιχα. Η γωνία μεταξύ των \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι $\pi - \gamma$ (Σχήμα 15). Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε τις υπόλοιπες γωνίες μεταξύ αυτών των διανυσμάτων.



Σχήμα 15

Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 \\ &\quad + 2(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{c}\mathbf{a}) \\ &= 3 + 2[\sin(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \alpha) \\ &\quad + \sin(\pi - \beta)] \\ &= 3 - 2[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma], \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει αμέσως η ζητούμενη εκτίμηση.

(β) Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται σχεδόν όπως η προηγούμενη, με τη διαφορά ότι τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ πρέπει να αντικατασταθούν με τα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, και \overrightarrow{OC} (Σχήμα 15), όπου O

είναι κέντρο του περιγεγραμμένου στο δεδομένο τρίγωνο κύκλου ($|OA| = |OB| = |OC|$ είναι η ακτίνα του, ενώ, αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οι γωνίες μεταξύ αυτών των διανυσμάτων είναι $2\alpha, 2\beta$, και 2γ). Αν, για παράδειγμα, η γωνία α είναι αριθμεία, τότε η γωνία μεταξύ των \overrightarrow{OB} και \overrightarrow{OC} ισούται με $2\pi - 2\alpha$, αλλά το συνημίτονό της είναι και πάλι ίσο με 2α .

14. Συμβολίζουμε τη δεδομένη παράσταση με $f(a)$. Τότε, παραγωγίζοντας έχουμε

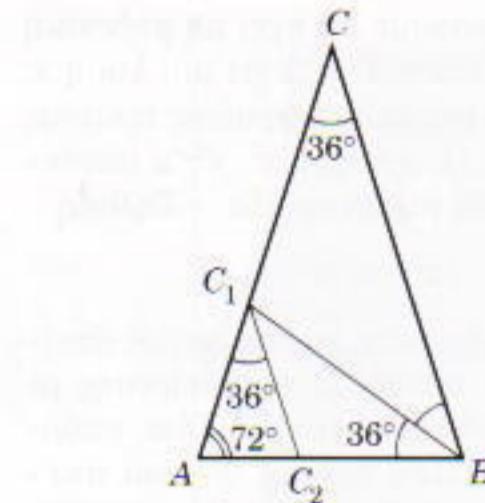
$$\begin{aligned} f'(a) &= (3 \eta \mu^2 a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ &\quad - 3 \eta \mu^3 a \cdot \eta \mu \beta a) \\ &\quad + (3 \sin\beta a \cdot \sin\alpha \cdot \eta \mu \beta a \\ &\quad - 3 \sin^2 a \cdot \eta \mu a \cdot \eta \mu \beta a) \\ &= 3(\eta \mu^2 a + \sin\beta a) \\ &\quad \cdot (\sin\alpha \cdot \sin\beta a - \eta \mu a \cdot \eta \mu \beta a) \\ &= 3 \sin 4a. \end{aligned}$$

Επομένως, $f(a) = \frac{3}{4} \eta \mu 4a + \text{σταθερά}$. Αφού $f(0) = 0$, η σταθερά είναι μηδέν, οπότε $f(a) = \frac{3}{4} \eta \mu 4a$.

Άπειρη κάθοδος

1. Μπορούμε να δώσουμε μια απόδειξη ανάλογη με την πρώτη απόδειξη (στο άρθρο) ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι αρρητος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τμήμα d τέτοιο ώστε τα \overrightarrow{AC} και \overrightarrow{BC} να είναι ακέραια πολλαπλάσιά του. Θα κατασκευάσουμε ένα μικρότερο τρίγωνο, όμοιο με το αρχικό, και θα δείξουμε ότι οι πλευρές του είναι επίσης ακέραια πολλαπλάσια του d . Έτσι, όμως, οδηγούμαστε σε άπειρη κάθοδο, με την οποία θα καταλήξουμε σ' ένα τρίγωνο με πλευρές μικρότερες του d , κάτι που αποτελεί αντίφαση.

Για να κατασκευάσουμε το μικρότερο τρίγωνο διχοτομούμε τη γωνία B (που είναι $72^\circ = 2 \times 36^\circ$) και θεωρούμε το σημείο τομής της διχοτόμου με την \overrightarrow{AC} , έστω C_1 (Σχήμα 16). Κατόπιν, φέρουμε την ευθεία C_1C_2 παράλληλη προς την \overrightarrow{BC} . Έχουμε ωραία $CC_1 = C_1B = AB$ (αυτό επειδή η γωνία της κορυφής ισούται με 36°), επομένως, αν διαιρέσουμε την περιμετρο του $\triangle ABC$ σε τμήματα μήκους d , τότε το C_1 θα είναι ένα από τα σημεία διαιρεσης. Επίσης, έχουμε ότι $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$, οπότε το C_2 είναι επίσης ένα από αυτά τα σημεία διαιρεσης.



Σχήμα 16

Συνεπώς, μπορούμε να μετρήσουμε τις πλευρές του τριγώνου AC_1C_2 με τμήματα μήκους d και να ξεκινήσουμε την άπειρη κάθοδο.

2. Η ύπαρξη της ζητούμενης αναπάραστασης ισοδυναμεί με την επιλογή της εξισώσης $x^2 + y^2 + z^2 = 7t^2$. Μια ανάλυση των υπολοίπων ύστερα από διαιρεση με το 8 μας δείχνει ότι όλοι οι αριθμοί x, y, z, t είναι άριθμοι. Επομένως, μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξισώσης με το 4 και να εφαρμόσουμε ξανά το ίδιο επιχείρημα, πραγματοποιώντας μια άπειρη κάθοδο.

3. Και οι δύο εξισώσεις έχουν τη μοναδική λύση $(0, 0, 0)$. Στο μέρος (α) χρησιμοποιούμε τη διαιρετότητα με το 3 για να δείξουμε ότι κάθε λύση (x, y, z) μπορεί να παρασταθεί ως $(3x_1, 3y_1, 3z_1)$, όπου (x_1, y_1, z_1) είναι μια άλλη, «μικρότερη» λύση. Στη συνέχεια, «κατερχόμαστε στο άπειρο». Στο μέρος (β) εξετάζουμε τα υπόλοιπα των $x, y, z \pmod{13}$. Οι ακέραιοι κύβοι, διαιρούμενοι με το 13, αφήνουν μόνο τα υπόλοιπα $0, 1, 5, 8 \equiv -5$ και $12 \equiv -1$. Έπειτα ότι οποιοιδήποτε αριθμοί x, y, z ικανοποιούν την εξισώση διαιρούνται με το 13, και αυτό μας επιτρέπει την άπειρη κάθοδο.

4. (α) Η εξισώση μπορεί να λυθεί όπως το πρόβλημα 2 του άρθρου (ή απλώς να αναχθεί σ' αυτό). (β) Αυτό το πρόβλημα είναι στην πραγματικότητα ειδική περίπτωση του Μεγάλου Θεωρήματος του Fermat — είναι η μοναδική περίπτωση που έχει στοιχειώδη απόδειξη, την οποία μάλιστα ανακάλυψε ο ίδιος ο Fermat. Παράκατω περιγράφουμε την απόδειξη, που χρησιμοποιεί την άπειρη κάθοδο.

Θεωρούμε τη γενικότερη εξισώση

$$x^4 + y^4 = u^2. \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι έχει μη μηδενική ακέραια λύση. Τότε, έχει μια λύση x , y , u , από θετικούς ακέραιους πρώτους ανά δύο. Οι αριθμοί x^2 , y^2 , u αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα — δηλαδή

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = u^2.$$

Ένας από τους x , y είναι άρτιος (θεωρήστε τα υπόλοιπα της διαιρεσης με το 4). Εστω ότι είναι ο x . Τότε, υπάρχουν οχετικά πρώτοι θετικοί ακέραιοι m και n , διαφορετικής ισοτιμίας, τέτοιοι ώστε

$$x^2 = 2mn, \quad y^2 = m^2 - n^2, \quad u = m^2 + n^2. \quad (2)$$

Μέσω της δεύτερης από αυτές τις εξισώσεις έπειται ότι τα n , y , m αποτελούν επίσης πυθαγόρεια τριάδα. Αυτοί οι τρεις αριθμοί είναι ανά δύο οχετικά πρώτοι, και, αφού το y είναι περιττό, το n είναι άρτιο. Επομένως, μπορούμε να τους γράψουμε ως

$$n = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad m = a^2 + b^2,$$

όπου a , b είναι σχετικά πρώτοι. Η πρώτη από τις εξισώσεις (2) μας δίνει $x^2 = 4tab$, όπου το t είναι οχετικά πρώτο με το ab (αφού $ab = n/2$). Επομένως, και οι τρεις αριθμοί m , a , b είναι τέλεια τετράγωνα:

$$a = x_1^2, \quad b = y_1^2, \quad m = u_1^2.$$

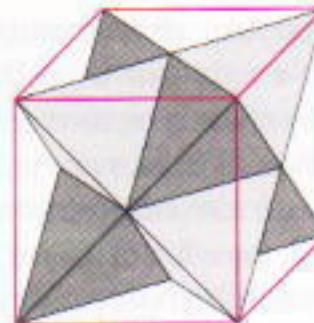
Αυτό, όμως, σημαίνει ότι τα x_1 , y_1 , u_1 , είναι λύση της εξισώσης (1), με τα x_1 και y_1 οχετικά πρώτους αριθμούς:

$$x_1^4 + y_1^4 = a^2 + b^2 = m = u_1^2.$$

Απομένει να παρατηρήσουμε ότι αυτή η λύση είναι «μικρότερη» της αρχικής, με την έννοια ότι $u_1 < u$, διότι

$$u_1 \leq u_1^2 = m < m^2 + n^2 = u.$$

5. Στην αρχική κατάσταση υπάρχει μόνο ένας μέγιστος ο οποίος θα μειωθεί στο πρώτο βήμα. Προσοχή, όμως: μπορεί τώρα να εμφανιστούν σε άλλα σημεία του κύκλου περισσότεροι από ένας (ίσοι μεταξύ τους) μέγιστοι. Αποδεικνύεται ότι, αν το πλήθος των μεγίστων είναι περισσότερο από 1, τότε σε κάθε επόμενο βήμα το πλήθος αυτό θα μειωθεί, και άρα θα ξαναγίνει ένας ο μέγιστος (αποδείξτε αυτό τον ισχυρισμό: το μόνο που θα χρειαστεί να αποδείξετε είναι ότι αποκλείεται ξαφνικά να γίνουν όλα τα στοιχεία μέγιστα, ίσα μεταξύ τους, οπότε θα παραμείνουν χωρίς μεταβο-



Σχήμα 17

λή οε όλα τα επόμενα βήματα).

Για να συνοψίσουμε, η τιμή του μεγιστού μειώνεται σταδιακά (αφού σε ορισμένα βήματα μείνει, ενδεχομένως, σταθερή). Τελικά, λοιπόν, θα γίνει αριθμός μικρότερος του 1, και άρα κλασματικός.

6. Φέρουμε την κάθετη από το δεδομένο σημείο P προς το επίπεδο F_1 μιας τυχαίας έδρας του πολυέδρου. Αν περνάει έξω από αυτή την έδρα, θα διέρχεται από μια άλλη (και μόνο μία). Το επίπεδο αυτής της έδρας, έστω F_2 , βρίσκεται πιο κοντά στο P απ' ό,τι το F_1 . Φέρουμε την κάθετη από το P στο επίπεδο F_2 , θεωρούμε την έδρα που τέμνει, και συνεχίζουμε τη διαδικασία. Αν αυτές οι κάθετες δεν διέρχονται ποτέ από μια έδρα, θα πάρουμε μια άπειρη ακολουθία έδρων που είναι όλες διαφορετικές, αφού οι αποστάσεις των επιπέδων τους F_1 , F_2 , ... από το P μειώνονται συνεχώς. Υπάρχει όμως μόνο πεπερασμένο πλήθος έδρων.

Στην περιπτώση των μη κυρτών πολυέδρων η πρόταση δεν ισχύει. Στο Σχήμα 17 βλέπετε ένα αντιπαράδειγμα (τη *stella octangula* — το οκτάγωνο απότερι — του Kepler). Εδώ μπορούμε να πάρουμε το σημείο στο κέντρο του κύβου.

Παιχνιδότοπος

Φότα μέσα στη νύχτα. Η απάντηση παρουσιάζεται στο Σχήμα 18. Τα παράθυρα κάθε ορόφου του κτι-



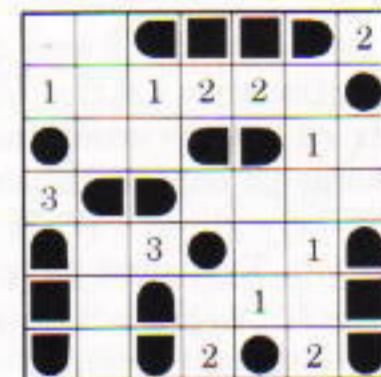
Σχήμα 18

7	1	0	5	1	4	7	1	9
3	9	6	1	5	0	6	1	0
4	0	2	2	1	5	4	6	4
0	2	3	6	0	6	8	0	1

Σχήμα 19

↓	↑	↓	↑	↓	↑
3	3	6	2	3	2
5	4	3	2	4	2
5	2	2	0	3	2
2	2	3	0	2	2
4	3	5	3	6	2

Σχήμα 20

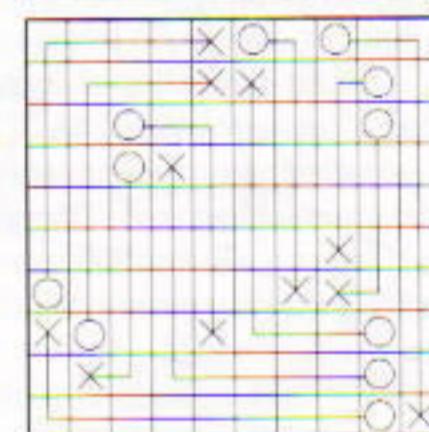


Σχήμα 21

ρίου πρέπει να διαβαστούν ως ένα γράμμα του αλφαριθμού Μορς! Ένα μοναδικό φωτισμένο παράθυρο είναι μία τελεία, και δύο διαδοχικά φωτισμένα παράθυρα συμβολίζουν μία παύλα. Τα γράμματα, από την κορυφή προς τα κάτω, σχηματίζουν το όνομα *Thomas Alva Edison*.

Αριθμητικά πεντόμινα. Δείτε το Σχήμα 19.

Απαρίθμητη δεικτών. Δείτε το Σχήμα 20.



Σχήμα 22

A	S	B	C	U	H	R	T	E
U	R	H	E	T	B	S	A	C
E	C	T	A	R	S	B	H	U
T	A	S	B	E	U	C	R	H
B	U	C	H	A	R	E	S	T
H	E	R	S	C	T	U	B	A
S	B	U	T	H	C	A	E	R
C	H	E	R	S	A	T	U	B
R	T	A	U	B	E	H	C	S

Σχήμα 23

Ναυραχία. Δείτε το Σχήμα 21.

Από το Χ στο Ο. Δείτε το Σχήμα 22.

Σύνθετο λατινικό τετράγωνο.

Δείτε το Σχήμα 23. Η κρυμμένη «έκπληξη» είναι Bucharest (Βουκουρέστι).

Κρυφές πληροφορίες

1. Είναι δυνατόν να αποδειχτεί χωρίς εξαντλητική έρευνα ότι υπάρχουν περιττοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 3 που δεν μπορούν να παραστθούν με τη ζητούμενη μορφή, αλλά η απόδειξη δεν είναι στοιχειώδης. Από την άλλη πλευρά, μια εξαντλητική έρευνα μας δείχνει ότι ο ελάχιστος μη αναπαραστάσιμος αριθμός είναι το 149.

2. Αφού οι προτάσεις (π_1), (σ_1) είναι ίδιες και στους δύο διαλόγους, οι συλλογισμοί των τριών πρώτων μερών του άρθρου εξακολουθούν να ισχύουν. Επομένως, το s_0 ανήκει στο σύνολο

$$C = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53\},$$

και όλοι αυτοί οι αριθμοί ικανοποιούν τη (σ_1'). Η πρόταση (π_2) σημαίνει ότι για κάθε παραγοντοποίηση του p_0 σε γινόμενο δύο ακεραίων που ικανοποιούν τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε ότι το άθροισμα των παραγόντων ικανοποιεί τη (σ_1'). (π_2')

Στο άρθρο αποδείχτηκε ότι κάθε αριθμός που ικανοποιεί την ιδιότητα (σ_1') ανήκει στο C . Επομένως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (π_2) με την εξής: για κάθε παραγοντοποίηση του p_0 σε γινόμενο δύο ακεραίων που ικανοποιούν τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε ότι το άθροισμα των παραγόντων ανήκει στο C . (π_2'')

Ερευνούμε όλες τις αναπαραστάσεις των αριθμών που ανήκουν στο C ως άθροισμα δύο όρων: $s = k + \ell$ (με $2 \leq k \leq \ell$) και ελέγχουμε αν τα γινόμενα $k\ell$ ικανοποιούν την (π_2''). Αυτή η έρευνα μπορεί να μειωθεί κατά το μισό περίπου αν αποδείξουμε προηγουμένως ότι το p_0 δεν διαιρείται με το 4.

Αυτή η έρευνα θα μας δείξει ότι μόνο τέσσερις αριθμοί του C αναντίσται στη μορφή $s = k + \ell$ έτοις ώστε το $k\ell$ να ικανοποιεί την (π_2''):

$$23 = 6 + 17,$$

$$35 = 13 + 22$$

$$37 = 3 + 34 = 11 + 26 = 14 + 23,$$

$$53 = 2 + 51 = 7 + 46.$$

Αφού η Σ δεν μπόρεσε να μανιέ-

ψει τους αριθμούς k_0 και ℓ_0 ακόμη και μετά τη δήλωση (π_2), $s_0 \neq 23$ και $s_0 \neq 35$. Επομένως, βάσει της (σ_2), $s_0 = 37$ ή $s_0 = 53$. Αφού το κατάλαβε αυτό, ο P κατάφερε να προσδιορίσει τα k_0 και ℓ_0 . Συνεπώς, $p_0 = 11 \cdot 26 = 286$, διότι διαφορετικά στον P θα είχε δοθεί ο αριθμός $p_0 = 102 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 51$ ή ο $p_0 = 322 = 14 \cdot 23 = 7 \cdot 46$, και δεν θα μπορούσε να επιλέξει μεταξύ των $37 = 3 + 34 = 14 + 23$ και $53 = 2 + 51 = 7 + 46$.

Τελικά, έχουμε $s_0 = 37$, $p_0 = 286$, $k_0 = 11$, $\ell_0 = 26$.

Παράγωγοι

1. (a) **Τιμή του a** **Πλήθος ριζών**

$a > 216$	1
$a = 216$	2
$216 > a > 88$	3
$a = 88$	4
$a < 88$	5

(b) **Τιμή του a** **Πλήθος ριζών**

$a < 0$	0
$a = 0$	1
$0 < a < 4e^{-2}$	3
$a = 4e^{-2}$	2
$a > 4e^{-2}$	1

2. **Τιμή του a** **Πλήθος ριζών**

$a < 0$	1
$0 \leq a < e$	0
$a = e$	1
$e < a$	2

3. (a) $x = 1$ ($\ln x < x - 1$ για κάθε $x \neq 1$, $x > 0$), (b) $x = 0$ ($\eta \mu x > x - x^3/6$ για κάθε $x \neq 0$).

4. (a) **Τιμή του a** **Πλήθος ριζών**

$a < -189$	0
$a = -189$	1
$-189 < a < -64$	2
$a = -64$	3
$-64 < a < 0$	4
$a = 0$	3
$0 < a$	2

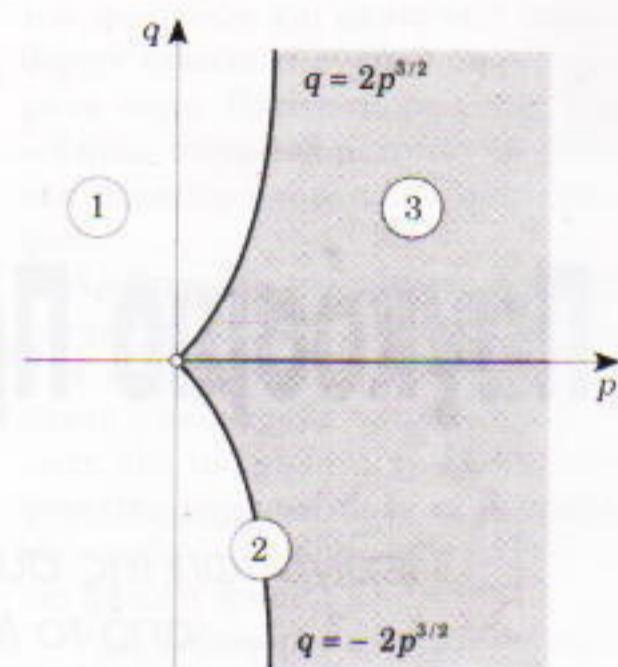
(b) **Τιμή του a** **Πλήθος ριζών**

$a < 0$	1
$0 \leq a < e$	0
$a = e$	1
$e < a$	2

(Παρατηρήστε ότι αυτό το πρόβλημα ανάγεται στην Ασκηση 2, αν αντικαταστήσουμε το x με $\ln x$.)

5. $x = 1$ (το $x = 1$ είναι το σημείο ελαχιστου για το αριστερό μέλος της εξίσωσης — εξετάστε την παράγωγο).

6. (a) $(x, y) = (1, 1)$, (b) $(x, y) = (e, \pi + 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (γ) $(x, y) = (0, \pi/2 + 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. (Στις εξισώσεις (a) και (b) η ελάχιστη τιμή της



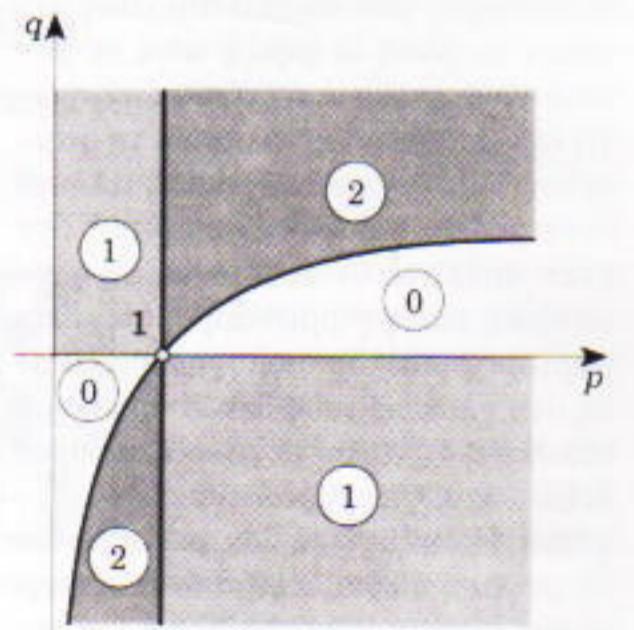
Σχήμα 24

συνάρτησης στο ένα μέλος της εξίσωσης ισούται με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο άλλο μέλος. Το ίδιο ισχύει για την εξίσωση (γ) αφού διαιρέσουμε διά 2^x.)

7. (a) Δείτε το Σχήμα 24: για τα σημεία (p, q) της γκρίζας περιοχής, η εξίσωση έχει τρεις ρίζες: η λευκή περιοχή που περιλαμβάνει την αρχή $(0, 0)$, αντιστοιχεί σε μία ρίζα, και οι καμπύλες $q = \pm 2p^{3/2}$, $p > 0$ αντιστοιχούν σε δύο ρίζες.

(b) Δείτε το Σχήμα 25: η λευκή περιοχή σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ρίζες. Η ανοιχτή γκρίζα περιοχή, μία ρίζα, και η οκούρα γκρίζα, δύο (για $p \leq 0$ η εξίσωση δεν ορίζεται). Στα σύνορα $q = e \ln p$ και $p = 1$ υπάρχει μία ρίζα. Στην ευθεία $q = 0$ δεν υπάρχουν ρίζες, αλλά στο σημείο $(p, q) = (1, 0)$ υπάρχει άπειρο πλήθος ριζών.

8. $e^x > \pi^x$. (Υπόδειξη: η $e^x > \pi^x$ είναι ιοδύναμη με την $(\ln \pi)/\pi < 1/e$, αλλά $1/e$ είναι η μέγιστη τιμή της $(\ln x)/x$).



Σχήμα 25

Παγκόσμιο Πρωτάθλημα Σπαζοκεφαλιών

Περιγραφή της συνάντησης του 1995 στη Roumania, προβλήματα από το Μπρνο (1993) και το Μπρασόβ (1995)

Vladimir Dubrovsky

ΛΕΝ ΘΑ ΉΤΑΝ ΠΑΡΑΤΟΛΜΟ ΝΑ υποστηρίξω ότι οι «Σπαζοκεφαλιές» είναι μια από τις δημοφιλέστερες στήλες του *Quantum*. Πιθανότατα, λοιπόν, οι αναγνώστες μας θα ενδιαφέρονται για το γεγονός ότι υπάρχει ένας ετήσιος διεθνής διαγωνισμός με προβλήματα αυτού του είδους. Ο εν λόγω διαγωνισμός έχει σχετικά μικρή ιστορία. Χρονολογείται από το 1984, όταν διάφοροι δημιουργοί σπαζοκεφαλιών από χώρες της ανατολικής Ευρώπης συναντήθηκαν στην Πολωνία για τον πρώτο Διεθνή Μαραθώνιο Σταυρολέξου, μετεξέλιξη ενός παρόμοιου πολωνικού διαγωνισμού. Ήταν ένας εικοσιτετράωρος, χωρίς διακοπή διαγωνισμός μεταξύ ομάδων με στόχο τη δημιουργία της μεγαλύτερης σπαζοκεφαλιάς με μορφή σταυρολέξου (η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων γινόταν με βάση το μήκος τους σε μέτρα). Καθιερώθηκε η ετήσια διεξαγωγή του μαραθωνίου, αλλά με τη συμμετοχή νέων χωρών έγινε αντιληπτό ότι αυτό το είδος διαγωνισμού δεν ήταν απόλυτα αντικειμενικό: η φιλανδική και η γερμανική ομάδα διαμαρτυρήθηκαν δικαιολογημένα επειδή στη γλώσσα τους δεν είναι εξίσου εύκολη η σύνθεση μεγάλων σταυρολέξων όσο, για παράδειγμα, στα αγγλικά. Η διεξαγωγή του μαραθωνίου σε μεγάλη διεθνή κλίμακα δεν ήταν πλέον δυνατή —οργανώθηκε για τελευταία φορά το 1990 στην Κροατία.

Χάρη στον Will Shortz, αργηγό της

αμερικανικής ομάδας και συντάκτη εκείνη την εποχή του περιοδικού *Games* (και σήμερα συντάκτη της στήλης των σπαζοκεφαλιών στους *Times* της Νέας Υόρκης), η ιδέα ενός διεθνούς διαγωνισμού σπαζοκεφαλιών ζωντάνεψε ξανά παιρνόντας πλέον τη μορφή του Παγκόσμιου Πρωταθλήματος Σπαζοκεφαλιών (ΠΠΣ). Με την υποστήριξη του εκδότη του *Games* και των Εκδόσεων *Times*, o Shortz οργάνωσε το 1992 στη Νέα Υόρκη το πρώτο ΠΠΣ. Χρησιμοποιήθηκε ως υπόδειγμα για τα επόμενα πρωταθλήματα —του Μπρνο (Δημοκρατία της Τσεχίας) το 1993, της Κολωνίας (Γερμανία) το 1994 και του Μπρασόβ (Ρουμανία) το 1995.

Η δομή του πρωταθλήματος δεν έχει σταθεροποιηθεί ως τώρα. Το χρονοδιάγραμμα του διαγωνισμού, ο έλεγχος των λύσεων και της βαθμολογίας, η επιλογή (και η δημιουργία) των σπαζοκεφαλιών που δίνονται για επίλυση εξαρτώνται κάθε φορά από τους οργανωτές, οπότε η εκδήλωση χρωματίζεται από τις ιδιαίτερες προτιμήσεις τους —κάτι που δεν ικανοποιεί πάντοιες όλο τον κόσμο. Για παράδειγμα, κατά την επιλογή των προβλημάτων, οι οργανωτές του τελευταίου ΠΠΣ αποφάσισαν να δώσουν περισσότερη έμφαση στα σταυρολέξα, διότι θεωρησαν ότι αποτελούν το δημοφιλέστερο είδος σπαζοκεφαλιάς (πράγμα που αναμφισβήτητα αληθεύει για τη δυτική Ευρώπη και τη βόρεια Αμερική, αλλά δεν

είμαι βέβαιος ότι ισχύει για τον υπόλοιπο κόσμο). Έτσι, μερικές σπαζοκεφαλιές απαιτούσαν γνώση της αγγλικής (ή της ντόπιας) ορθογραφίας μερικών κύριων ή γεωγραφικών ονομάτων, κάτι που οίγουρα αποτελούσε μειονέκτημα ακόμη και για διαγωνιζόμενους που χρησιμοποιούν το λατινικό αλφάριθμο αλλά μεταγράφουν φωνητικά τα ονόματα, για να μην αναφέρουμε τους Ρώσους ή τους Ιάπωνες. Αυτά και άλλα προβλήματα ουζητήθηκαν στο Διεθνές Συμβούλιο Σπαζοκεφαλιών, που συνεδρίαζε όσο οι διαγωνιζόμενοι πάσχιζαν να λύσουν τα προβλήματα. Υπήρξε γενική συμφωνία ότι πρέπει να αποφευχθούν στο μέλλον τέτοιες παραβιάσεις των αρχών της γλωσσικής και πολιτιομητικής ουδετερότητας. (Ως χώρα διεξαγωγής του ΠΠΣ ορίστηκε γι' αυτή τη χρονιά η Ολλανδία, ενώ το βο ΠΠΣ θα το φιλοξενήσει η Κροατία το 1997.)

Τι κάνει λοιπόν κανείς στο Παγκόσμιο Πρωτάθλημα Σπαζοκεφαλιών; Όσον αφορά τη μορφή, ο διαγωνισμός μοιάζει με τις μαθηματικές ολυμπιάδες. Όλοι οι διαγωνιζόμενοι λύνουν τα ίδια προβλήματα. Για παράδειγμα, στο Μπρασόβ υπήρχαν τέσσερις περιόδοι διάρκειας δύο έως τριών ωρών, σε καθεμία από τις οποίες έπρεπε να λυθούν 16 σπαζοκεφαλιές. Η διαφορά είναι ότι στο ΠΠΣ υπάρχουν ειδικοί γύροι ομάδων, στη διάρκεια των οποίων τα μέλη μιας ομάδας μπορούν να δουλέψουν πά-

νω στην ίδια σπαζοκεφαλιά ή να μοιραστούν ένα σύνολο σπαζοκεφαλιών ανάλογα με τις προτιμήσεις τους και τις ικανότητές τους — στη συνολική βαθμολογία της ομάδας υπολογίζεται μόνο το καλύτερο ατομικό αποτέλεσμα για κάθε σπαζοκεφαλιά. Όσο για τις ίδιες τις σπαζοκεφαλιές, είναι δύσκολο ακόμη και να κατονομάσουμε τα είδη των προκλήσεων που έχουν παρουσιαστεί στα τέσσερα πρωταθλήματα από το 1992, αν και υπάρχει μια αχανής και ηγορία σπαζοκεφαλιών — οι μηχανικές, ή σπαζοκεφαλιές χειρισμού — που, με ελάχιστες εξαιρέσεις, απουσιάζει από το ΠΠΣ. Ο λόγος είναι ίσως η δυσκολία εφοδιασμού με ικανές ποσότητες τέτοιων σπαζοκεφαλιών. Από την άλλη πλευρά, στους διαγωνισμούς έχουν εμφανιστεί όλων των ειδών οι έντυπες σπαζοκεφαλιές. Υπάρχουν ερω-

τήσεις γενικών γνώσεων όπου πρέπει, για παράδειγμα, να μαντέψεις μια χώρα από τη σημαία της ή τον εθνικό της ύμνο· υπάρχουν διάφορες οπικές σπαζοκεφαλιές, όπου πρέπει να εντοπίσεις τις διαφορές μεταξύ δύο όμοιων εικόνων, να ανασυνθέσεις μια γελοιογραφία από τα ανάκατα κομμάτια της ή να ανακαλύψεις μια κρυμμένη εικόνα· λαβύρινθοι, πλακοστρώσεις και σπαζοκεφαλιές σταυρολέξων. Προπάντων, όμως, συναντούμε μια απίστευτη ποικιλία από σπαζοκεφαλιές μαθηματικών και λογικής.

Επιτρέψτε μου τώρα να σας παρουσιάσω μερικές από τις προκλήσεις του Παγκόσμιου Πρωταθλήματος Σπαζοκεφαλιών. Οι δύο πρώτες πρέρχονται από το 2ο ΠΠΣ του Μπρνο (και οι δύο είναι δημιουργίες του Zdenek Chromy).

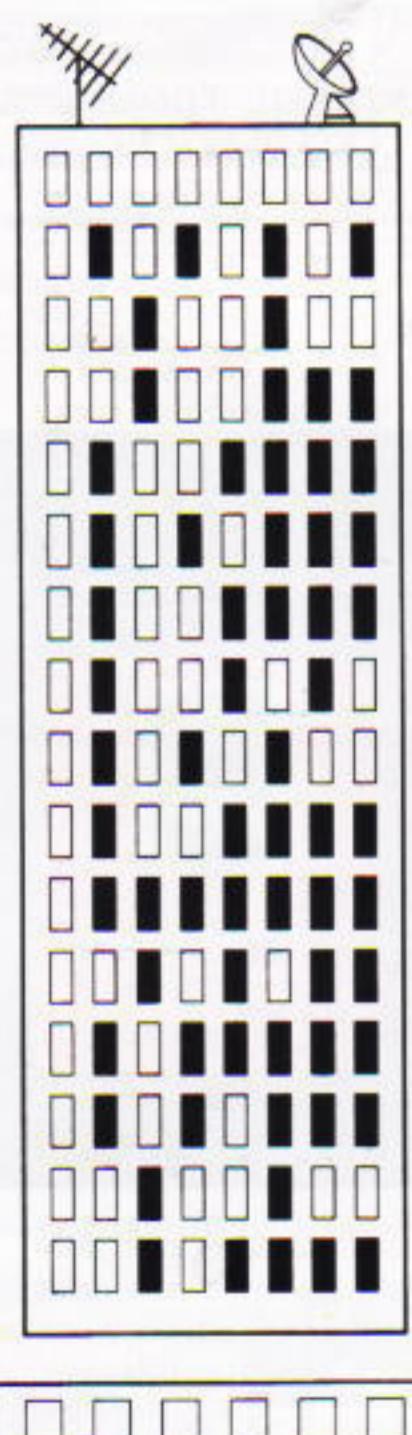
Φώτα μέσα στη νύχτα. Στο Σχήμα 1 βλέπετε ένα δεκαεξαόροφο κτίριο με μερικά φωτισμένα και μερικά σκοτεινά παράθυρα. Ο σχηματισμός

των φωτεινών και σκοτεινών παρθύρων υπακούει σ' έναν συγκεκριμένο νόμο. Βρείτε ποιος είναι, και «οβήστε» σύμφωνα με αυτόν τα φώτα στα παράθυρα του τελευταίου ορόφου.

Αριθμητικά πεντόμινα. Χωρίστε το αριθμητικό πλέγμα του Σχήματος 2 σε τμήματα που αποτελούνται από πέντε συνδεόμενα τετράγωνα έτοιμα ώστε όλα τα τμήματα να έχουν διαφορετική μορφή, ενώ τα αθροίσματα των αριθμών που περιέχουν να είναι ίσα μεταξύ τους.

Έχει ενδιαφέρον ότι η βαθμολογία για το πρώτο πρόβλημα ήταν αρχικά μικρότερη από εκείνη του δεύτερου (15 και 20 βαθμοί, αντίστοιχα), ενώ τελικά αποδείχτηκε ότι το πρώτο ήταν το δυσκολότερο πρόβλημα του διαγωνισμού — μόνο δύο κατάφεραν να το λύσουν. Μοιάζει με σπαζοκεφαλιά λογικής φύσης, αλλά δεν είναι! (Θεωρήστε ότι αυτό είναι μια υπόδειξη.) Εγώ πάντως θα αδυνατούσα να τη λύσω. (Αυτή είναι άλλη μία υπόδειξη.) Τέτοιες σπαζοκεφαλιές — που μπορούμε να τις ονομάσουμε απρόπτες — είναι πραγματικά κοσμήματα και, όπως είναι φυσιολογικό, δεν τις συναντούμε συχνά στα ΠΠΣ. Αντίθετα, η δεύτερη είναι, θεωρητικά, τετριμένη: σε τελευταία ανάλυση, το συνολικό πλήθος των δυνατών διαμερίσεων του δεδομένου πλέγματος είναι πεπερασμένο, και, αν έχετε αρκετό χρόνο, μπορείτε απλώς να δοκιμάσετε όλες τις δυνατότητες (θα ήταν καλύτερο να γράψετε ένα πρόγραμμα υπολογιστή που θα κάνει αυτή τη δουλειά για σας). Το πρόβλημα είναι ότι, τουλάχιστον στο ΠΠΣ, δεν έχετε αρκετό χρόνο στη διάθεσή σας. Πάντως, σ' αυτά τα είδη σπαζοκεφαλιών μπορείτε συνήθως να ανακαλύψετε την άκρη του νήματος χωρίς να χρειαστεί η εξέταση πολλών περιπτώσεων.

Τέτοιες συνδυαστικές σπαζοκεφαλιές είναι εξαιρετικά δημοφιλείς στην Ιαπωνία: πολλές έχουν επινοηθεί εκεί, και στις μέρες μας γίνονται ολοένα δημοφιλέστερες σε ολόκληρο τον κόσμο.



Σχήμα 1

7	1	0	5	1	4	7	1	9
3	9	6	1	5	0	6	1	0
4	0	2	2	1	5	4	6	4
0	2	3	6	0	6	8	0	1
3	8	1	5	2	3	5	3	3

Σχήμα 2

3	3	6	2	3
5	4	3	2	4
5	2	2	0	3
2	2	3	0	2
4	3	5	3	6

Σχήμα 3

				2
1	1	2	2	
3				1
	3		1	
		1		
		2	2	

Σχήμα 4

4	3	4	1	4
1	1	4	0	3
5	2	4	5	5
3	3	5	3	6
2	2	5	1	3

Παράδειγμα

1	3	3	1	3
2	1	4	0	3
5	2	4	5	5
3	3	5	3	6
2	2	5	1	3

Παράδειγμα

	X	O	O	
	X	X		O
O				O
	O	X		
			X	
O			X	X
X	O	X		O
X				O
			O	X

Σχήμα 5

A		C	H		E
	H			S	
C	T	R	B	H	
T		B	U		H
	C			F	
H		S	T		A
B	U	H	A	E	
	E			T	
R		U	E		S

Σχήμα 6

Περίπου το ένα τέταρτο των οπαζοκεφαλιών του 4ου ΠΠΣ βασιστικής οιαπωνικές συνταγές. Αυτό υποτίθεται ότι θα εξιορροπούσε τα γλωσσικά προβλήματα της ιαπωνικής ομάδας (κάτι που δεν επιτεύχθηκε). Πάντως, είναι πραγματικά κομψές και όμορφες, και θα ήθελα να γνωρίσουν μερικές οι αναγνώστες του Quantum.

Απαρίθμηση δεικτών (Σχήμα 3). Σχεδιάστε στα είκοσι κενά τετράγωνα που βρίσκονται στις πλευρές του μεγάλου τετραγώνου βέλη παράλληλα προς κάποια πλευρά ή διαγώνιο του τετραγώνου, έτοις ώστε κάθε αριθμός του πλέγματος να ισούται με το πλήθος των βελών που δείχνουν προς αυτόν (όπως στο παράδειγμα).

Ναυμαχία (Σχήμα 4). Τοποθετήστε το συνηθισμένο σύνολο «πλοίων» του παιχνιδιού της ναυμαχίας (όπως αυτά που φαίνονται στο Σχήμα) στο 7×7 τετράγωνο πλέγμα, έτοις ώστε (1) δύο τετράγωνα που καλύπτονται από πλοία να μην έχουν κοινή πλευρά (αν και μπορεί να έχουν κοινή κο-

ρυφή), (2) καθένας από τους αριθμούς που δίνονται στο πλέγμα να ισούται με το πλήθος των γειτονικών κατειλημμένων τετραγώνων.

Από το Χ στο Ο (Σχήμα 5). Σχεδιάστε διαδρομές από κάθε Χ σε ένα από τα Ο, αποτελούμενες από δύο κάθετα μεταξύ τους τμήματα που είναι παράλληλα προς τις γραμμές του πλέγματος, έτοις ώστε κάθε τετράγωνο του πλέγματος να ανήκει σε μία μόνο διαδρομή.

Σύνθετο λατινικό τετράγωνο (Σχήμα 6). Γράψτε ένα από τα γράμματα A, B, C, E, H, R, S, T, U σε κάθε κενό τετράγωνο του δεδομένου πλέγματος έτοις ώστε κάθε γραμμή, στήλη, και όλα τα 3×3 τετράγωνα που παρουσιάζονται με αδρές γραμμές να περιέχουν κάθε γράμμα μία μόνο φορά. Το τετράγωνο που προκύπτει περιέχει μια λέξη «έκπληξη», εννέα γραμμάτων, την οποία πρέπει επίσης να αναγνωρίσετε. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 62

Καρκίνος: «μαγειρέψτε» την άμυνά σας

Υπάρχουν ενδείξεις ότι ο καρκίνος σχετίζεται στενά με τη διατροφή.

Μερικές τροφές μπορεί να ευνοήσουν την ανάπτυξη καρκίνου, ενώ άλλες μπορεί να σας προστατεύουν από αυτόν.

Οι τροφές που συμβάλλουν στη μείωση του κινδύνου προσβολής από καρκίνο του λάρυγγα και του οισοφάγου περιέχουν μεγάλες ποσότητες καροτίνης, μιας μορφής της βιταμίνης A που βρίσκεται στα ροδάκινα, τα μπρόκολα, τα σπανάκι, τις γλυκοπατάτες, τα καρότα, τις κολοκύθες, τις ντομάτες, τα εσπεριδοειδή και τα λαχανικά.

Οι τροφές που μπορούν να μειώσουν τον κινδυνο προσβολής από καρκίνο του γαστρεντερικού σωλήνα και της αναπνευστικής οδού είναι τα λάχανα, τα μπρόκολα, τα γογγύλια και τα κουνουπίδια.

Τα φρούτα, τα λαχανικά και τα δημητριακά ολικής άλεσης συμβάλλουν στη μείωση του κινδύνου προσβολής από καρκίνο του παχέος εντέρου.

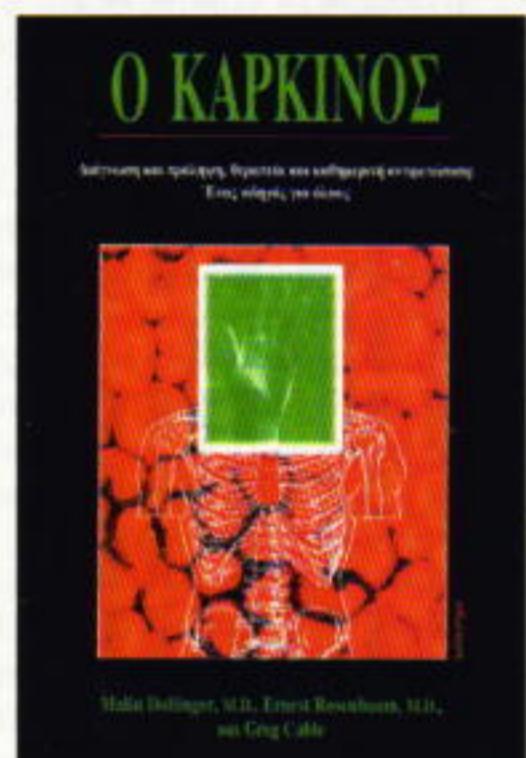
Με μέτρο πρέπει να καταναλώνονται όσες τροφές έχουν πολλά λιπαρά, τα αλιπαστά, τα προϊόντα που περιέχουν νιτρώδη άλατα, όπως το ζαμπόν και τα λουκάνικα· επίσης με σύνεση πρέπει να γίνεται και η κατανάλωση αλκοόλ.

Μεγάλη σημασία, τέλος, έχει το φυσιολογικό βάρος.

Η ελάττωση του βάρους μπορεί να μειώσει δραστικά τον κινδυνο προσβολής από καρκίνο.

Τώρα, περισσότερο από ποτέ άλλοτε, γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τον καρκίνο.

Κανείς όμως δεν μπορεί να τον αντιμετωπίσει μόνος του. Γι' αυτό φροντίστε να ενημερώνεστε έγκαιρα και σωστά.



Σελ. 700, 10.000 δρχ.

- «Η μετάφραση και έκδοση του βιβλίου στα ελληνικά αποτελεί τεράστια ουμβλή στην υγεία του ελληνικού λαού.»

Δημοσθένης Σκάρλος, Γενικό Ογκολογικό Νοσοκομείο «Άγιοι Ανάργυροι»