

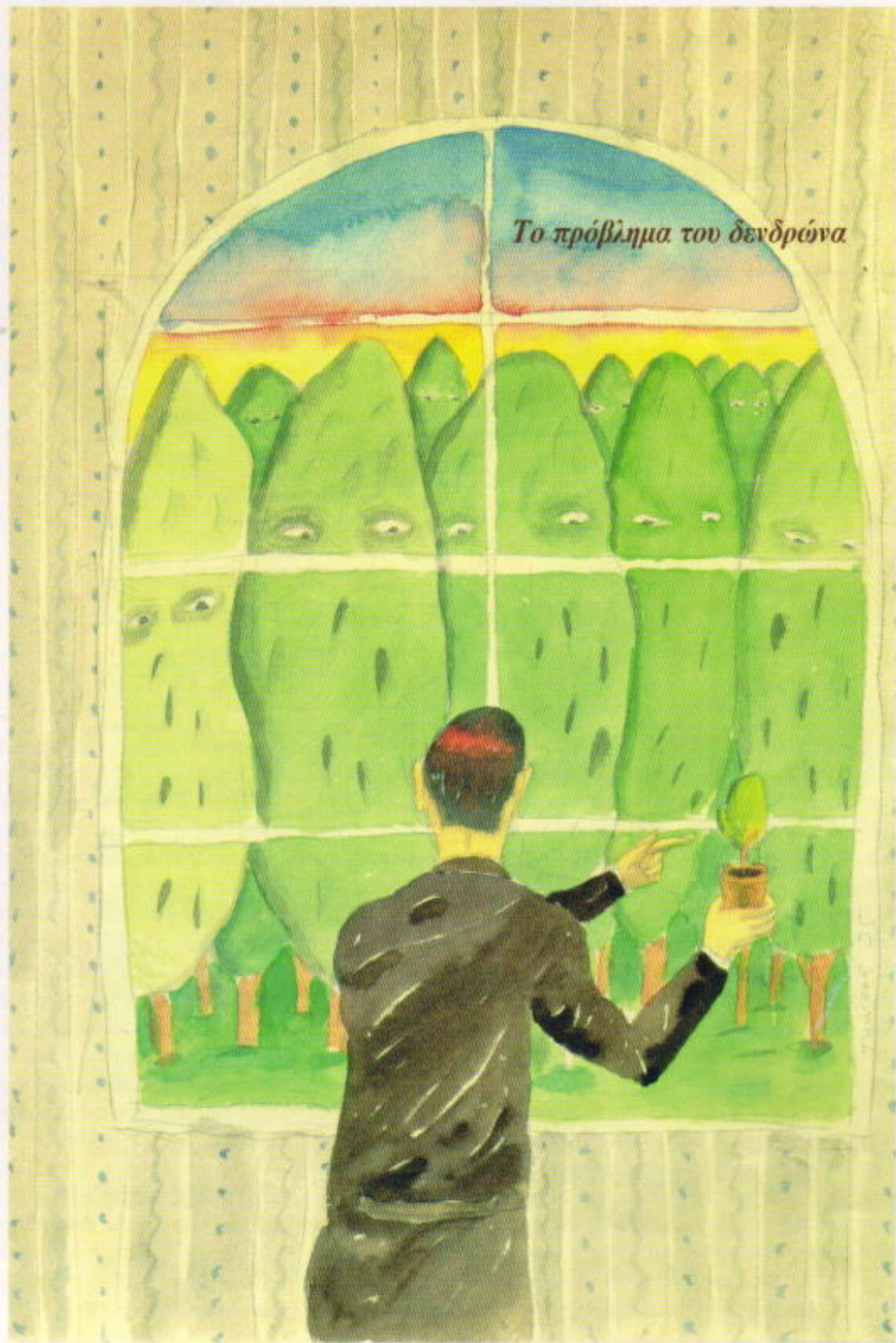
# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 2

1.400 ΔΡΧ.



- *Τι είναι τα μαθηματικά;*
- *Περίπατος στην κόψη των ριζών*
- *Περί ρωμαϊκών αριθμών*
- *Γεωμετρικές πιθανότητες*
- *Ηλεκτρική αγωγμότητα στον ιδράργυρο*
- *Ο μύθος της κεδωνοκλδούς καμπύλης*
- *Γιατί πρέπει να ανάβουμε το τζάκι;*
- *Η διακρίνουσα εν δράσῃ*



*Ο Έρως μαθαίνει το λιοντάρι να τραγουδάει (οπίσθια όψη) (1444)*  
του Antonio Pisanello

Υ ΣΤΕΡΑ ΑΠΟ 500 ΧΡΟΝΙΑ, ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΣΧΕΔΟΝ ΝΑ ΑΦΟΥ-  
γκραστούμε τα γέλια ικανοποίησης που ακούστηκαν  
όταν ο Antonio Pisanello παρουσίασε το αναρνηστικό  
μετάλλιο για το γάμο του Λιονέλλο ντ' Εστε με τη Μα-  
ρία της Αραγωνίας. Στην εμπρόθια όψη του μεταλλίου  
υπάρχει το πορτρέτο του «μικρού λιονταριού», του Λιο-  
νέλλο —μιας σημαντικής φυσιογνωμίας. Γυρίζοντας το  
μετάλλιο από την άλλη πλευρά, βλέπουμε αυτό που ει-  
κονίζεται παραπάνω. «Η μουσική έχει το χάρισμα να  
γαληνεύει τα πιο άγρια στήθη», όπως έγραψε ο Congreve,  
και όταν δάοκαλος της μουσικής είναι ο ίδιος ο Έρως,  
μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι το ερωτικό συναισθήμα  
θα κυριαρχήσει.

Μολονότι ο Pisanello φιλοτέχνησε και νωπογραφίες,  
η φήμη την οποία απέκτησε στην εποχή του οφειλόταν  
κυρίως στα μετάλλιά του. Προφανώς διδάχτηκε την τέ-  
χνη του μελετώντας τα πορτρέτα των αρχαίων ελληνι-  
κών και ρωμαϊκών νομισμάτων —ουσιαστικά δεν υπή-  
χαν πρόσωφατοι πρόδρομοι του σ' αυτό τον τομέα.

Η θέση του Pisanello στην ιστορία της τέχνης εξασφα-  
λίζεται εν μέρει από τα σχέδιά του. Σύμφωνα με την

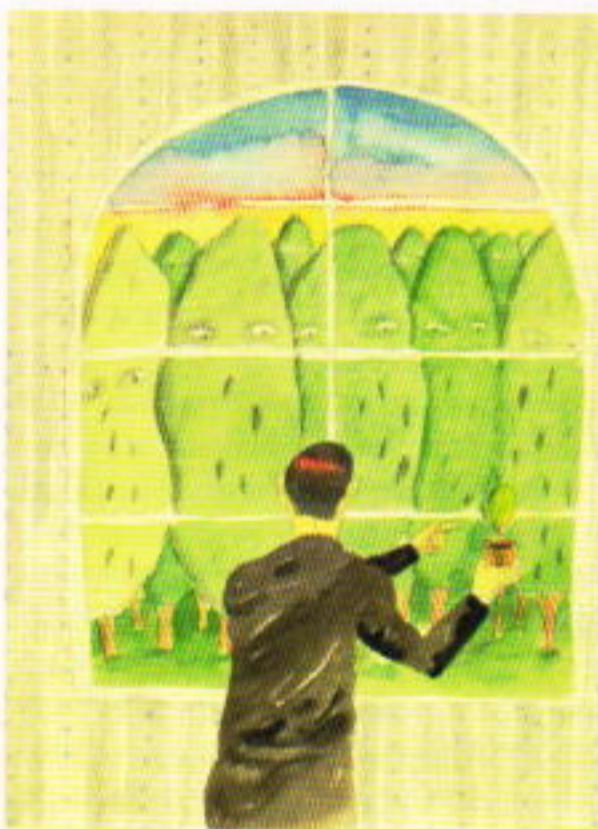
*Εγκυκλοπαίδεια Britannica*, «πρόκειται για τη μοναδι-  
κή περίπτωση κατά την οποία τα σχέδια ενός εργαστη-  
ρίου του 15ου αιώνα διατηρήθηκαν ουσιαστικά ανέπα-  
φα». Εκτός από το γεγονός ότι μας δίνουν μια ιδέα για  
τις τεχνικές σχεδιασμού εκείνης της περιόδου, τα σχέ-  
δια του Pisanello αποκαλύπτουν το τεράστιο εύρος των  
ενδιαφερόντων του και την εκπληκτική παρατηρητικό-  
τητά του. Ήταν ένας από τους πρώτους καλλιτέχνες του  
15ου αιώνα που προτίμησαν να ζωγραφίσουν πρωτότυ-  
πα θέματα παρά να αντιγράψουν τα έργα άλλων, σύμ-  
φωνα με τη μεσαιωνική πρακτική.

Οι παρατηρητικοί ίσως έχουν προοέξει τη χρονολογία  
του μεταλλίου. Μήπως πρέπει να επιπλήξουμε τον Pisane-  
llo επειδή δεν ακολούθησε τον σωστό τρόπο γραφής  
των ρωμαϊκών αριθμών; Στο τεύχος Σεπτεμβρίου / Ο-  
κτωβρίου 1995 ο Isaak Yaglom ανέλυσε το ρωμαϊ-  
κό σύστημα αριθμησης. Στο παρόν τεύχος, ο Steven  
Schwartzman μάς ρίχνει μέσα ο' έναν κυκεώνα που πε-  
ριλαμβάνει —ποτέψτε το— τους ρωμαϊκούς αριθμούς.  
Διαβάστε το άρθρο της σελίδας 6, για δείτε πώς απονέ-  
μεται η δικαιοούνη.

# QUANTUM

ΜΑΡΤΙΟΣ / ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση: Leonid Tishkov

Προφανώς αγαζητούσε ένα δωμάτιο με θέα. Άραγε θα μπορούσε ποτέ να φανταστεί ότι και η θέα θα «έβλεπε» τον ίδιο; Μάλλον όχι, αλλά θα προσπαθήσει να εκμεταλλευτεί την κατάσταση όσο το δυνατόν καλύτερα.

«Θέλετε άλλο ένα;», ρωτάει τους «φυλλοβόλους» φίλους τους. «Ένα μικρούλι;» Προφανώς φτάνει στα άκρα. Αλλά ποιο μπορεί να είναι το όριο; Ας πούμε ότι κάποιος αγαπάει τόσο τη θέα όσο και τα δέντρα, και θέλει να βλέπει από το παράθυρό του το δενδρώνα, αλλά να έχει και θέα μέσα από αυτόν. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος δέντρων που μπορεί να φυτέψει σε δεδομένη έκταση;

Αυτό το ερώτημα τίθεται στο άρθρο της σελίδας 18, που έχει τίτλο «Το πρόβλημα του δενδρώνα».

## ΑΡΘΡΑ

6 Συστήματα αριθμησης

**Ποιος φοβάται τους ρωμαϊκούς αριθμούς:**

Steven Schwartzman

12 Φυσική και σωματικά χαρακτηριστικά

**Ένας περίπατος στην κόψη του ξίφους**

V. Meshcheryakov

18 Μέγιστα και ελάχιστα

**Το πρόβλημα του δενδρώνα**

Vladimir Jancović

22 Ηλεκτρική αγωγιμότητα

**Ο άνεμος στον υδράργυρο**

Ivan Vorobyov

22 Πιθανότητες στο επίπεδο

**Η συμμετρία της τύχης**

Nikolay Vasiliyev

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

2 Ο κόσμος των κβάντων

**16 Πώς λύνεται;**

**17 Σπαζοκεφαλιές**

**26 Μαθηματικά απρόσπτα**

Η μαγεία του  $3 \times 3$

**36 Καλλιδοσκόπιο**

Υγρά και αέρια σε κίνηση

**38 Ανάδραση**

Ο μύθος της κωδωνοειδούς καμπύλης

**40 Στα πεδία της φυσικής**

Πεδία εστιασμού

**44 Στο μαυροπίνακα I**

Η διακρίνουσα σε δράσει

**47 Στο εργαστήριο**

Παιχνίδια με το μπαλάκι του ψαρέματος

**49 Μαθηματικές αναζητήσεις**

Μη κανονικά συνεχή κλάσματα

**50 Απόψεις**

Τι είναι τα μαθηματικά;

**57 Στο μαυροπίνακα II**

Γιατί πρέπει να ανάβουμε το τζάκι;

**58 Απαντήσεις, Υποδειξίες και Λύσεις**

**68 Παιχνιδότοπος**

Σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού

# UFO: «σκληρή» και «χαλαρή» πραγματικότητα

—«Αλήθεια τι απέγινε το μωρό;»

—«Μεταμορφώθηκε σε γουρούνι», αποκριθηκε η Αλίκη.  
—«Το περίμενα», είπε η γάτα και εξαφανιστηκε ξανά.

Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων, Lewis Carroll

**B**ΑΣΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ επιστημών, των επιστημών που μελετούν τη «σκληρή» πραγματικότητα, είναι ότι για φαινόμενα στα οποία μπορεί να δοθεί φυσική ερμηνεία δεν απαιτείται επικληση απίθανων θεωριών. Η συντριπτική πλειονότητα των μαρτυριών UFO (άνω του 95%) ανήκει στο χώρο της «σκληρής» πραγματικότητας, και η ερμηνεία τους δεν αφήνει περιθώρια μυστηρίου. Τα παραδείγματα που ακολουθούν καλύπτουν τις περισσότερες μαρτυρίες UFO, όπως εύκολα θα διαπιστώσει ο αναγνώστης:

Μεμονωμένα φωτεινά αντικείμενα σημειακών διαστάσεων που παρατηρούνται τις απογευματινές ή νυχτερινές ώρες και συνήθως εκλαμβάνονται ως UFO είναι οι πλανήτες Δίας, Κρόνος και κυρίως η Αφροδίτη, μετεωρίτες, αεροπλάνα σε μεγάλο ύψος, τεχνητοί δορυφόροι και ανθρώπινα διαστημικά οχήματα, μετεωρολογικά αερόστατα, στρατιωτικοί φωτεινοί στόχοι που μετεωρίζονται (φωτεινές σφαίρες που πέφτουν πολύ αργά με αλεξίπτωτο, πρακτικά ακίνητες για τον παρατηρητή, διότι η λάμψη τους διαρκεί για πολύ μικρό χρονικό διάστημα —περίπτωση πολλών μαρτυριών UFO στους ουρανούς της Γερμανίας το 1990) ή ακόμη προβλείς αυτοκινήτων, φάρων ή συναφών φωτεινών πηγών (π.χ. φώτα ντισκοτέκ που ανακλώνται σε σύννεφα

ή ομίχλη). Η παρατηρούμενη συνήθως μεταβλητότητα της φωτεινής τους έντασης οφείλεται είτε στην κίνηση της ίδιας της φωτεινής πηγής (περιστροφή φάρου, κίνηση πίσω από δέντρα) είτε στη στιγματική απόκρυψη από σύννεφα.

Φωτεινά αντικείμενα μικρών διαστάσεων που εμφανίζονται να εκτελούν νοήμονες ελιγμούς στον νυχτερινό ουρανό είναι συνήθως μαχητικά αεροπλάνα σε ασκήσεις ή δοκιμές οι οποίες κρατούνται μυστικές (περίπτωση πάμπολλων μαρτυριών UFO στους ουρανούς της Ευρώπης και κυρίως του Βελγίου το 1989 και 1990, οι οποίες οφείλονται στις δοκιμαστικές πτήσεις των νέας τεχνολογίας υπερελαφρών αεροπλάνων τύπου Δέλτα).

Εξάλλου, πολλές φορές φωτεινές σφαίρες μικρών ή μεγάλων διαστάσεων που είτε μετεωρίζονται είτε εκτελούν πεπλεγμένες κινήσεις (ζιγκ-ζαγκ) και συνήθως εκλαμβάνονται ως UFO δεν είναι παρά εκφάνσεις ατμοσφαιρικού πλάσματος (σφαιρικοί κεραυνοί), όπως στην περίπτωση της Μίννεσοτα το 1979 (ΣΕ 1). Στην ίδια κατηγορία ατμοσφαιρικών φαινομένων ανήκουν και οι τρισδιάστατες φωτεινές εκφάνσεις που επανειλημμένα αναφέρονται από πλότους κατά την πτήση τους πάνω από σύννεφα καταγίδας και οφείλονται σε ηλεκτρικές εκκενώ-

σεις της ανώτερης ατμόσφαιρας (πλαομοειδή). Σε πρόσφατη (1993) βιντεοσκόπηση τέτοιων φαινομένων, ορισμένες καταγραφές δημιουργούν την εντύπωση εκλάμψεων προερχομένων από μορφές όπως αγγέλους, οχήματα, τέρατα κ.λπ. Φωτεινά φαινόμενα στην ατμόσφαιρα μπορούν να προέλθουν και από τεκτονικές τάσεις που αναπτύσσονται στο εσωτερικό των πετρωμάτων του γήινου φλοιού (πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο). Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, αναπτύσσονται ηλεκτρικά πεδία τα οποία ανάλογα με την ισχύ του φαινομένου μπορούν να προκαλέσουν διαταραχές στα ηλεκτρικά συστήματα των αυτοκινήτων που βρίσκονται κοντά, όπως συνέβη στο Λέβελλαντ του Τέξας το 1957 και στο φράγμα του Λοχ Ραινβεν, στη Μαΐρυλαντ το 1958 (ΣΕ II), αλλά και παραισθήσεις οι οποίες ανθρώπινο εγκέφαλο, όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά.

Περισσότερο πεπλεγμένοι φωτεινοί σχηματισμοί μπορούν να ερμηνευτούν κατά περίπτωση, όπως π.χ. UFO σχήματος «πούρου» με φωτεινά φινιοτρίνια (μαρτυρία δύο αμερικανών πιλότων το 1948) ή UFO από φωτεινές πηγές που υπερίπτανται διατηρώντας το σχηματισμό τους, όπως στο Λάμποκ του Τέξας το 1951 (ΝΦ). Η πρώτη περίπτωση πιθανότατα οφείλεται σε κατακερματισμό μετεωρίτη ή κομήτη κατά την είσοδό

του στην ατμόσφαιρα (ο ανθρώπινος εγκέφαλος δημιουργεί το περίγραμμα του «πούρου» μέσα στο οποίο «τοποθετεί» τις παρατηρούμενες πηγές), ενώ η δεύτερη σε ανάκλαση προβολέων αυτοκινήτων ή φώτων δρόμων σε σύννεφα ή ανάκλαση φωτός σε σμήνη πτηνών που πετούν χαμηλά σε συγκεκριμένες γεωμετρικές διατάξεις.

Στο φως της ημέρας ιπτάμενα μηχανικά αντικείμενα που εκλαμβάνονται ως UFO είναι συνήθως κοινά αεροπλάνα, μεγάλα ερευνητικά και μετεωρολογικά αερόστατα, αερόπλοια τύπου Zeppelin που εκτελούν διαφημιστικές πτήσεις, θραύσματα γήινων διαστημικών οχημάτων που επανακάμπτουν στην ατμόσφαιρα, και φυσικά ασυνήθεις πειραματικές συσκευές στο στάδιο της δοκιμασίας τους, που λόγω της φύσης τους κρατούνται μυστικές. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρώτο κύμα μαρτυριών UFO, που έπληξε τις ΗΠΑ μετά το 1947, συνέπεσε με μυστικές δοκιμαστικές πτήσεις αεροσκαφών της Αμερικανικής Αεροπορίας, όπως του V-173 (Flying Flapjack) και του AV-7055 (Flying Disk), που ήταν στην πραγματικότητα ιπτάμενοι δίσκοι. Το τελευταίο μάλιστα αεροσκάφος βασίστηκε σε γερμανικά σχέδια που έπεισαν στα χέρια των Αμερικανών μετά την κατάρρευση της Γερμανίας το 1945. Οι επίμονες μαρτυρίες για εμφάνιση ιπτάμενων δίσκων στους αμερικανικούς ουρανούς μετά το 1947 ανησύχησαν τους ιθύνοντες των ΗΠΑ, οι οποίοι υποψιάστηκαν ότι αυτά τα αντικείμενα ήταν αντιστοιχα, πιο προηγμένα ρωσικά σκάφη που όπως υπέθεοαν, τα κατασκεύασαν οι Ρώσοι με τη βοήθεια γερμανών επιοτημόνων. Για το λόγο αυτό, η Αμερικανική Αεροπορία συνέστησε από το 1947 και μετά σειρά επιτροπών ειδημόνων (προγράμματα Sign του 1947, Grudge του 1949 και Blue Book από το 1952 και μετά) με σκοπό την καταγραφή και αξιολόγηση των μαρτυριών UFO, θεώρησε δε το θέμα λήξαν μόλις το 1969 (έκθεση Condon). Σε πτώση μιας μυστικής ανιχνευτικής συσκευής καταγραφής της ατμοσφαιρικής ραδιενέργειας με στόχο τον εντοπισμό των πυρηνικών δοκιμών της τότε Σοβιετικής Ένωσης

(πρόγραμμα Mogul) οφείλεται και ο υποτιθέμενος ιπτάμενος δίσκος πού συνετρίβη στο Ρόσγουελ του Νιού Μέξικο στις 2 Ιουλίου 1947, όπως κατόπιν πιέσων αναγκάστηκε να αποκαλύψει η Αμερικανική Αεροπορία μόλις τον Σεπτέμβριο του 1994, χωρίς να διευκρινίσει αν υπήρξαν και ανθρώπινα θύματα. Το Νιού Μέξικο χρησιμοποιείται ως πεδίο δοκιμών ποικίλων άκρως απόρρητων ιπτάμενων συσκευών των ΗΠΑ, και δεν αποκλείεται το UFO που είδε στο Σοκόρρο το 1964 ο αστυνομικός Zamora (ΣΕ III) να οφειλόταν σε δοκιμή πρόδρομης συσκευής κάθετης απογείωσης και προσγείωσης (VTOL). Σε αναγνωριστικό αερόστατο Skyhook του Αμερικανικού Ναυτικού οφείλεται πιθανότατα και το UFO που οδήγησε στο θάνατο τον ομηναγό Mantell το 1948 (ΦΔ) ο οποίος ανεβαίνοντας σε ανεπίτρεπτο ύψος λιποθύμησε λόγω έλλειψης οξυγόνου, χάνοντας έτοι τον έλεγχο του αεροσκάφους. Η αρχική πάντως ανακοίνωση της Αεροπορίας ανέφερε ότι η έλλειψη οξυγόνου προκάλεσε φαντασίωσης στον πιλότο, ο οποίος συνετρίβη κυνηγώντας την Αφροδίτη.

Επίσης στο φως της ημέρας εκλαμβάνονται μερικές φορές ως UFO συνήθη ή ασυνήθη μετεωρολογικά φαινόμενα όπως ανεμοστρόβιλοι, φακοειδή νέφη (περίπτωση ιπτάμενων δίσκων που φωτογραφήθηκαν στη Βραζιλία κατά τα μέσα της δεκαετίας του 1950) και είδωλα του Ήλιου κατά τη δύση του, όταν οι ακτίνες του ανακλώνται σε παγοκρυστάλλους της ατμόσφαιρας (η συνηθέστερη οφθαλμαπάτη των πιλότων που βλέπουν UFO κατά την πτήση τους). Σε ψευδή είδωλα οφείλονται και πολλά UFO που εμφανίζονται σε φωτογραφίες (είδωλα του φακού της φωτογραφικής μηχανής ή είδωλα από την ανάκλαση φωτιστικών δωματίου στο τζάμι μέσα από το οποίο λαμβάνεται η φωτογραφία —μια από τις συνηθέστερες περιπτώσεις φωτογραφικής απάτης, μαζί με τη φωτογράφηση καπέλων και άλλων δισκοειδών ουνήθως αντικειμένων που ρίπτονται για να φωτογραφηθούν ως UFO).

Σε φάρσες (από κακόγουστο χιούμορ, σύμπλεγμα κατωτερότητας ή ψυχικά προβλήματα αυτού που τις

προκαλεί) αλλά και σε απάτες για ιδιοτελείς σκοπούς (προβολή και προσδοκία αδρής αμοιβής από τα MME και τους εκδοτικούς οίκους για εξασφάλιση συνεντεύξεων και έκδοση βιβλίων) οφείλεται ένας αριθμός περιπτώσεων UFO, όπως π.χ. οι περιπτώσεις «απαγωγών» από εξωγήινους στην Πασκαγκούλα της Πολιτείας του Μισισιπί το 1973 και στον Εθνικό Δρυμό Σίτγκρηβς στην Αριζόνα των ΗΠΑ το 1975. Στην ενθάρρυνση και διάδοσή τους έχει συμβάλει και η αδιστακιη δημοσιογραφία ορισμένων εκπροσώπων των MME, που προκηρύσσουν βραβεία π.χ. για την καλύτερη μαρτυρία UFO της χρονιάς (λαϊκή εφημερίδα *National Enquirer* στις ΗΠΑ) ή πληρώνουν φαρσέρ για να κατασκευάσουν κύκλους σε αγρούς, τους οποίους κατόπιν φωτογραφίζουν παρουσιάζοντάς τους σαν ίχνη προογείωσης UFO, ή αποκρύπτουν στοιχεία, όπως π.χ. την άρνηση των «απαχθέντων» να υποβληθούν σε τεστ αληθείας, που καταδεικνύουν την απάτη. Σαν αντίβαρο, κάποιοι έντιμοι, ευσυνείδητοι και κατατοπσμένοι δημοσιογράφοι έχουν συμβάλει σημαντικά στην αποκάλυψη τέτοιων περιπτώσεων. Η «σκληρή» πραγματικότητα, όμως, είναι πάντοτε αντιδημοσιογραφική και ουδέποτε συγκινεί το ευρύ κοινό. Εξάλλου, οικονομικά συμφέροντα όχι μόνο ατόμων αλλά και ολόκληρων πόλεων ή περιοχών ευνοούν τη συντήρηση ή την ανακίνηση σχετικών θεμάτων. Στο Ρόσγουελ, για παράδειγμα, λειτουργεί το «Διεθνές Μουσείο των UFO», και από το 1992 που άνοιξε τις πόρτες του μέχρι σήμερα οι «ουφαντικοί» εποκέπτες του έχουν υπερβεί κατά πολύ τις 100.000.

Εδώ τελειώνουν, λοιπόν, όσα έχει να πει η εποτήμη για τα UFO; Κάθε άλλο. Το φαινόμενο των UFO έχει ακόμη πολλές διαστάσεις. Μια ολόκληρη κατηγορία, που αποτελεί την κατεξοχήν σύγχρονη μετάπλαση του φαινομένου, δεν έχει ακόμη θιγεί. Είναι η κατηγορία των Στενών Επαφών τέταρτου τύπου (ΣΕ IV) ή «απαγωγών» από εξωγήινους που γίνονται αντιληπτές από τους απαχθέντες μόνο κάτω από την επίδραση ύπνωσης (υπνωτισμού), κατηγορία την οποία εγκατίσαν με την «εμπειρία»

τους οι Betty και Barney Hill από το Πόρτομουθ του Νιού Χάμσαϊρ. Το βράδυ της 19ης Σεπτεμβρίου 1961, κατά την επιστροφή τους από διακοπές στους καταράκτες του Νιαγάρα, και ενώ ταξίδευαν σ' έναν έρημο αυτοκινητόδρομο, είδαν ένα φωτεινό UFO να τους πλησιάζει. Σταμάτησαν πανικόβλητοι, και όταν το UFO απομακρύνθηκε συνέχισαν έντρομοι το ταξίδι της επιστροφής. Έφτασαν στο σπίτι τους με ανεξήγητη καθυστέρηση δύο ωρών. Το συνταρακτικό γεγονός τούς ανάγκασε τελικά να επισκεφθούν έναν διακεκριμένο ψυχίατρο της Βοστώνης (Ben Simson), ο οποίος, για να εκμαιεύσει λεπτομέρειες σχετικά με την τραυματική εμπειρία τους, τους υπέβαλε σε ύπνωση κατά την οποία και οι δύο τους, ανεξάρτητα —φαινομενικά τουλάχιστον— ο ένας από τον άλλον, διηγήθηκαν την ίδια ιστορία. Η απόλεια των δύο «χαμένων ωρών» από τη μνήμη τους οφειλόταν στην προσγείωση του UFO, την αρπαγή τους από εξωγήινα όντα και την υποβολή τους σε ταπεινωτικές ιατρικής φύσεως εξετάσεις. Η ιστορία τους έγινε ευρύτατα γνωστή το 1966, όταν δημοσιεύτηκε στο αμερικανικό περιοδικό *Look*. Λίγο αργότερα εκδόθηκε βιβλίο ειδικά για την περίπτωσή τους, ενώ το 1976 το αμερικανικό κοινό απέκτησε και τηλεοπτική αισθηση της περιγραφής τους έπειτα από συνεχείς προβολές κινηματογραφικής ταινίας που γυρίστηκε γι' αυτόν ακριβώς το λόγο. Αμέσως μετά άρχισαν να εμφανίζονται σε ολόκληρο τον κόσμο και ιδιαίτερα στις ΗΠΑ περιπτώσεις ανθρώπων που έχοντας εμπειρίες «χαμένου χρόνου» στη ζωή τους και προσφεύγοντας σε ψυχιάτρους για να αντιληφθούν τι τους συνέβη, ανέφεραν κάτω από συνθήκες ύπνωσης, πώς απήχθησαν από εξωγήινους, πώς αναγκάστηκαν να συνευρεθούν σεξουαλικά (ή να παράσχουν σπέρμα ή ωάρια) με σκοπό τη δημιουργία υβριδικού πληθυσμού από γήινους και εξωγήινους και πώς οι εξωγήινοι ανησυχούν για την επερχόμενη καταστροφή της Γης από τα οφάλματα των ανθρώπων. Τι σημαίνουν όλα αυτά;

Πρώτον, τέτοιου είδους πρωτογενείς τραυματικές εμπειρίες μπορεί να

οφείλονται σε παραιθήσεις που προκαλούνται από μορφές επιληψίας, όπως π.χ. της TLE (temporal-lobe epilepsy, κροταφική επιληψία), προερχόμενες από φυσικές δυσλειτουργίες του εγκεφάλου που είναι δύσκολο να διαγνωσθούν, λόγω της σποραδικής, αιφνίδιας και φευγαλέας φύσης τους. Ειδικά οι πάσχοντες από TLE είναι επιρρεπείς σε αισθήματα αιφνίδιου και ανεξήγητου πανικού (νιώθουν «παρουσίες» που τους απειλούν), σε ιδιόρρυθμες φιλοσοφικές και κοσμολογικές ανησυχίες, σε οπτασίες μυστικιστικής φύσεως, και μερικές φορές αναφέρονται σε φαντασικά ταξίδια που ποτέ δεν υπήρξαν στην πραγματικότητα.

Δεύτερον, οι περιγραφές των τραυματικών εμπειριών τους σε κατάσταση ύπνωσης (υπνωτισμού) ενέχουν τον κίνδυνο να οφείλονται σε φαντασιώσεις και μυθοπλασίες του ανθρώπινου εγκεφάλου. Αυτές μπορεί να προκληθούν είτε λόγω υποβολής από τον υπνωτιστή (ιδιαίτερα στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο τελευταίος πιστεύει στην ύπαρξη UFO) είτε σε πληροφορίες που ουσιωρεύονται στον ανθρώπινο εγκέφαλο —εκούσια ή ακούσια— από σχετικές συζητήσεις, αναγνώματα, τηλεοπτικές εκπομπές κ.λπ., τις οποίες χρησιμοποιεί για να επενδύσει μια φαντασική περιπέτεια με ήρωα τον εαυτό του. Η «κρυπτομνησία» είναι χαρακτηριστικό φαινόμενο που εκδηλώνεται κατά τη διάρκεια της ύπνωσης, όπου η αναδρομή στο παρελθόν φέρνει στο φως περιπέτειες που ο υπνωτισμένος υποτίθεται ότι έζησε σε «προηγούμενες ζωές», κάτι που έχει παλαιότερα κατά κόρον χρησιμοποιηθεί από παραψυχολογικούς κύκλους σαν «απόδειξη» των μετεμψυχώσεων ή μετενσαρκώσεων του ανθρώπου.

Τέλος δεν πρέπει να παραβλέψουμε τον παράγοντα του υποσυνείδητου μιμητισμού, δεδομένου ότι οι εμπειρίες απαγωγών από εξωγήινους έλαβαν επιδημικές διαστάσεις στις ΗΠΑ μετά την τηλεοπτική διάχυση της περίπτωσης του ζεύγους Hill, που αποτελεί το «ιστορικό» τους «πρότυπο».

Σε αντίθεση με όλες αυτές τις εντάσεις που εκφράζουν την «κατεστημένη» επιστημονική άποψη, ο

ψυχίατρος John Mack, καθηγητής του Πανεπιστημίου του Χάρβαρντ, ο οποίος από το 1990 και μετά έχει ασχοληθεί με σωρεία τέτοιων περιπτώσεων (άνω των 80), πιστεύει ότι οι «εμπειρίες των απαχθέντων» είναι πραγματικές. Τι σημαίνει, όμως, πραγματικές εμπειρίες όταν απουσιάζουν οι φυσικές αποδείξεις; Μήπως υπάρχουν διαφορετικά ειδη πραγματικότητας; Μήπως πέρα από τη «σκληρή» πραγματικότητα των φυσικών γεγονότων υπάρχει και μια «χαλαρή» πραγματικότητα του ανθρώπινου εγκεφάλου, της οποίας τη βαρύτητα αγνοούμε ή δεν μπορούμε να αξιολογήσουμε;

Βέβαιο είναι ότι το «φαινόμενο των UFO» φέρει ένα σημαντικό μήνυμα, που δεν έχει διαφύγει από τους σοβαρούς ερευνητές του: οι οποίοι ανθρώποι υποβόσκει μια συλλογική «θρησκευτική» αισθηση ότι παρακολουθείται από ανώτερα όντα που παρεμβαίνουν θετικά ή αρνητικά αλλάζοντας την πορεία της ζωής του, και ότι αυτά τα όντα καθιστούν κατά καιρούς αισθητή την παρουσία τους υπό μορφή «αποδεκτή» και «κατανοητή» στο πολιτισμικό-τεχνολογικό-κοινωνικό πλαίσιο της εκάστοτε εποχής. Τα πνεύματα, τα φαντάσματα, οι νεράιδες, τα θρησκευτικά οράματα, το κύμα των αεροπλοίων του 1896-1897 (που έπληξε τις ΗΠΑ πολλά χρόνια πριν τα κατασκευάσσει ο άνθρωπος) και τα συνεχή κύματα των UFO δεν είναι παρά ένα συνεχές μεταπλασσόμενων παραψυχολογικών ή παραφυσικών φαινομένων που με διαφορετικές μορφές την κάθε εποχή συνοδεύουν υπόγεια (και προκαλούν;) την ανθρώπινη λογική.

Τι είναι λοιπόν τα UFO, εκείνα δηλαδή από τα UFO που αδυνατούμε να ερμηνεύσουμε; Φαινόμενα μιας φυσικής πραγματικότητας τα οποία η έλλειψη «σκληρών» αποδείξεων μας κάνει να αρνούμαστε; Η φαινόμενα που συλλαμβάνονται στον ανθρώπινο εγκέφαλο όπως τα όνειρα και οι παραισθήσεις, δηλαδή φαινόμενα μιας «χαλαρής» πραγματικότητας με πραγματικά είδωλα και φαντασικά αντικείμενα; Η μήπως είναι «παράθυρα» μιας «ξένης» πραγματικότητας, της οποίας η δυναμική και το νόημα

—εάν υπάρχουν— μας διαφεύγουν; Οι κι αν είναι, πρέπει τελικά να διευκρινιστούν μέσα από το χώρο της επιστήμης. Ο επιστημονικός κόσμος οφείλει να παύσει να αγνοεί το «φαινόμενο» ή έστω το «σύνδρομο των UFO», αλλά μέσα από την αυστηρή παρατήρηση, τη ουσιηματική καταγραφή της «ακατέργαστης» πληροφορίας και την κριτική έρευνα φαινομένων που συνεχώς μεταλλάσσονται, όπως αυτό των UFO, να κατορθώσει τελικά να ορθετήσει ή, αν χρειαστεί, να επαναπροσδιορίσει την έννοια της πραγματικότητας. Διαφορετικά, κινδυνεύουμε να διολισθήσουμε στο κοινωνικά επικίνδυνο σημείο σύγχυσης που τόσο επιγραμματικά εκφράζει ο ποιητής:

«Μια και δεν μπορώ πα να οκεφτώ την πραγματικότητα σαν πραγματικότητα, ποιος είναι ο λόγος να οκεφτομαί τα όνειρα σαν όνειρα;»

**Χριστος Δ. Γουδης**

Το πρώτο μέρος του κειμένου δημοσιεύτηκε στο προηγούμενο τεύχος του Quantum με τον τίτλο «UFO: εξωγήινοι επισκέπτες».



Ο **Χριστος Δ. Γουδης** είναι καθηγητής Αστροφυσικής στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Για περισσότερες πληροφορίες γύρω από το θέμα των UFO ή κατάθεση σχετικών μαρτυριών μπορείτε να απευθυνθείτε σ' αυτόν στη διεύθυνση

Εργαστήριο Αστρονομίας,  
Τμήμα Φυσικής,  
Πανεπιστήμιο Πατρών,  
265 00 Πάτρα (Pio)

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ενωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,  
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης:  
**Bill G. Aldridge**, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπότελλων Έκδοτης:  
**Sergey Krotov**, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης:  
**Yuri Ossipyan**, Προέδρος, Γραφείο Kvant.  
**Sheldon Lee Glashow**, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική). Πανεπιστήμιο του Χάρβαρτ  
**William P. Thurston**, Μετόλλιο Φιλοντες (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μιέρκλεϋ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική:  
**Larry D. Kirkpatrick**, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μονιάνας  
**Albert L. Stasenko**, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Σύνταξης στα Μαθηματικά:  
**Mark E. Saul**, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή των Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη  
**Vladimir Dubrovsky**, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχιουνιάκτης:  
**Timothy Weber**                  Υπεύθυνος εικονογράφησης:  
**Sergey Ivanov**                  Σύμβουλος επι διεθνών θεράπονων:  
**Edward Lozansky**

Σύμβουλοι Σύνταξης:  
**Alexander Buzdin**, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας  
**Yuli Danilov**, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov  
**Larissa Panyushkina**, Αρχιουνιάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική Επιτροπή:  
**Bernard V. Khouri**, Λανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT  
**James D. Gates**, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM  
**George Berzsenyi**, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιτάνια  
**Arthur Eisenkraft**, Τρίτιμο Θετικών Επιστημών, Λίκελ Fox Lane, Νέα Υόρκη  
**Karen Johnston**, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας  
**Margaret J. Kenney**, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέττη  
**Thomas D. Rossing**, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις  
**Alexander Soifer**, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Καλοράντο, Κολοφάνιο Σπρινγκς  
**Barbara I. Stott**, Καθηγητής Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίφερντελ, Λοιπόνα  
**Carol-ann Tripp**, Καθηγητής Φυσικής, Ημερομία Σχολή της Περιφέρειας Προβίντεν, Ρόουντ Άιλοντ

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης / Διευθυντής:  
**Αλέκος Μαραλής**

Μεταφραστή και Επιστημονική επιμέλεια:  
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: **Στέλιος Ζαχαρίου**-μαθηματικός, **Ηρακλής Ντούστης**,  
**Πολίνα Αγαπάκη**-φυσικός, **Μιχάλης Λάμπρου**-μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης**-μαθηματικός,  
**Γιάννης Βακαλόπουλος**-φυσικός, και **Αλέκος Μαραλής**-φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια:  
**Γ. Κυριακόπουλος**                  Τυπογραφικές διαρθρώσεις:  
**Π. Τασιόπουλος**                  Επιμέλεια έκδοσης:  
**Γ. Ντάρας**                  Υπεύθυνη λογοτροφία:  
**M. Μαραλή**

Ειδικός συνεργάτης:  
**Τιμόριος Ευαγγελόπουλος**

Επιστημονικοί σύμβουλοι:  
**Μιχάλης Λάμπρου**, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης  
**Κώστας Σκανδάλης**, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης  
**Στέφανος Τραχανάς**, φυσικός, Ειδικός Επαττημάν Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας Θεοδοσίης Χριστιουδούλακης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοχειοθετική, αελιδοποίηση:  
**Κ. Κατοπτρό**                  Φίλμ, μοντάζ:  
**Γ. Κεραράς**                  Εκτυπωση:  
**Τ. Τετραχρωμία**                  Βιβλιοθεσία:  
**Θ. Αρχοντιουλάκης**

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κατοπτρό  
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μαραλής

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681  
Copyright © για την ελληνική γλώσση: Αλ. Μαραλής  
Διαφημιστικές και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κατοπτρό,  
Ιστιτύου 10 και Δοφνομάλη, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Απαγόρευτη η αναπαραγωγή της μετάδοση με οποιοδή-

ποτε μέσον άλλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την  
έγγραψη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθιτη περιοδικός στο βιβλιοπωλείο: 1.400 δρχ.  
Ετήσια συνδρομή 7.500 δρχ., για ιδιώτες, 12.000 δρχ., για  
βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τεύχων στο βιβλιοπωλείο: 1.400 δρχ.

# Ποιος φοβάται τους ρωμαϊκούς αριθμούς;

Και ποιος γνωρίζει να τους γράψει σωστά; (Ποιο είναι το «σωστό» εν τέλει;)

Steven Schwartzman

**H**AUSTIN AMERICAN-STATES-MAN, η καθημερινή εφημερίδα της πρωτεύουσας του Τέξας, φιλοξενούσε μερικές φορές την εβδομάδα τη στήλη της Ellie Rucker. Σ' αυτήν δημοσιεύονταν συνήθως επιστολές αναγνωστών που ζητούσαν πληροφορίες για κάποιο δυσεύρετο προϊόν ή υπηρεσία, για το πώς θα μπορούσαν να ανακυκλώσουν κάποια αντικείμενα, και για άλλα παρόμοια ζητήματα. Ωστόσο, στις 13 Μαρτίου 1990 εμφανίστηκε μια διαφορετική επιστολή. Ανέφερε ότι 24.000 κάτοικοι του Σαν Μάρκος, μιας πόλης που βρίσκεται 50 χιλιόμετρα βόρεια του Όστιν, προβληματίζονταν για το πώς θα γράψουν τη χρονολογία 1990 με ρωμαϊκούς αριθμούς. Κατά πάσα πιθανότητα η χρονολογία έπρεπε να οκαλιστεί σε κάποιο κτίριο ή μνημείο, και οι καλοί δημότες του Σαν Μάρκος ήθελαν να είναι σίγουροι ότι θα γραφτεί σωστά.

Η απάντηση που ακολουθούσε αμέσως μετά την επιστολή υποστήριζε ότι ο συντομότερος τρόπος γραφής του 1990 είναι MCMXC, αλλά και ότι η χρονολογία μπορούσε επίσης να γραφτεί ως MDCDLXXXX ή ακόμη και MCDCXC (sic — βλ. παρακάτω). Η στήλη κατέληγε με την υποσημείωση ότι οι απαντήσεις αυτές είχαν δοθεί από ερευνητές της Βιβλιοθήκης Perry-Castañeda, της κύριας βιβλιοθήκης του Πανεπιστημίου του Τέξας στο Όστιν.

Η αρχική επιστολή και οι τρεις



απαντήσεις πυροδότησαν έναν καταγιομό απαντητικών επιστολών εντελώς δυσανάλογο με τη φαινομενική απλότητα της ερώτησης. Αυτές οι επιστολές αποκάλυψαν ότι στις μέρες μας πολλοί άνθρωποι έχουν ελάχιστες γνώσεις για τον πραγματικό τρόπο γραφής των ρωμαϊκών αριθμών κατά την αρχαιότητα. Αποκάλυψαν επίσης ότι πολλοί άνθρωποι υποστηρίζουν με πάθος αντι-

κρουόμενες συχνά απόψεις σχετικά με το πώς γράφονται ή πώς «θα έπρεπε» να γράφονται σήμερα οι ρωμαϊκοί αριθμοί.

Απ' ό,τι φαίνεται, η γνώμη της πλειοψηφίας είναι ότι η συντομία δεν αποτελεί μόνο περπτουσία της σοφίας, αλλά και των ρωμαϊκών αριθμών. Ιδού ορισμένα αποσπάσματα από επιστολές που εκφράζουν αυτή την άποψη και δημοσιεύτηκαν στην

επόμενη στήλη της Ellie Rucker, στις 26 Μαρτίου:

Σωστός τρόπος είναι ο συντομότερος τρόπος, τελεία και παύλα. Αυτό έμαθα όταν σπουδαζα λατινικά. Ο συντομότερος τρόπος είναι MXM. Το είδα στην εκπομπή του Charles Karalt (*sic*) πριν από τρεις εβδομάδες.

\* \* \* \*

Στόχος του ρωμαϊκού συστήματος αριθμησης ήταν να έχουμε το μικρότερο πλήθος αριθμών, δηλαδή MXM.

\* \* \* \*

Ellie, πρέπει να ανακαλέσετε όσα γράψατε στη στήλη σας για τους ρωμαϊκούς αριθμούς. Ο συντομότερος τρόπος γραφής του 1990 είναι MXM· δεν έχουμε ποτέ τέσσερα X στη σειρά.

Άλλοι είχαν την πεποίθηση ότι καλύτερος τρόπος είναι αυτός με το μεγαλύτερο πλήθος συμβόλων. Δύο επιστολογράφοι δέχονται και τις δύο δυνατότητες, και ένας από αυτούς διορθώνει το φανερό τυπογραφικό λάθος της εφημερίδας:

Ellie, είμαι καθηγητής λατινικών. Οι Ρωμαίοι θα έλεγαν ότι η μακρύτερη γραφή του 1990 είναι η καλύτερη. Τις περισσότερες φορές, όμως, ακολουθούμε τον ευκολότερο δρόμο. Το σωστό είναι MXM.

\* \* \* \*

Η συντομότερη γραφή θα ήταν MXM, και η μακρύτερη MDCCCCLXXX. Το MCDCXC, απ' όσο γνωρίζω, ισούται με 1590 (μάλλον εννοούσατε MDCDXC).

Σε κάποια από τις επιστολές έχουμε μια διαφορετική προσέγγιση:

Με φοβίζει (επειδή είμαι Ευρωπαίος) το πόσο ελληνής είναι η πληροφόρηση των ανθρώπων εδώ για πράγματα που τα παιδιά στην Ευρώπη μαθαίνουν από το δημοτικό. Υπάρχει μόνο ένας τρόπος γραφής του 1990 με ρωμαϊκούς αριθμούς —ο πρώτος που αναφέρετε: MCMXC. Όχι επειδή είναι ο συντομότερος, αλλά διότι στο ρωμαϊκό σύστημα αριθμησης υπάρχει όση λογική υπάρχει και στο αραβικό... Το 9 δεν γράφεται ποτέ VIIIΙΙ ή IIIIIIII, αλλά πάντα IX.

Ακολουθούσαν ολόκληρες παράγραφοι εξηγήσεων.

Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι η δημοφιλέστερη άποψη —σύμφωνα με την οποία ο καλύτερος τρόπος γραφής των ρωμαϊκών αριθμών είναι ο συντομότερος— όχι μόνο συγκρούεται με άλλες απόψεις, αλλά δεν είναι καν συνεπής με τον εαυτό της. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι κανείς από

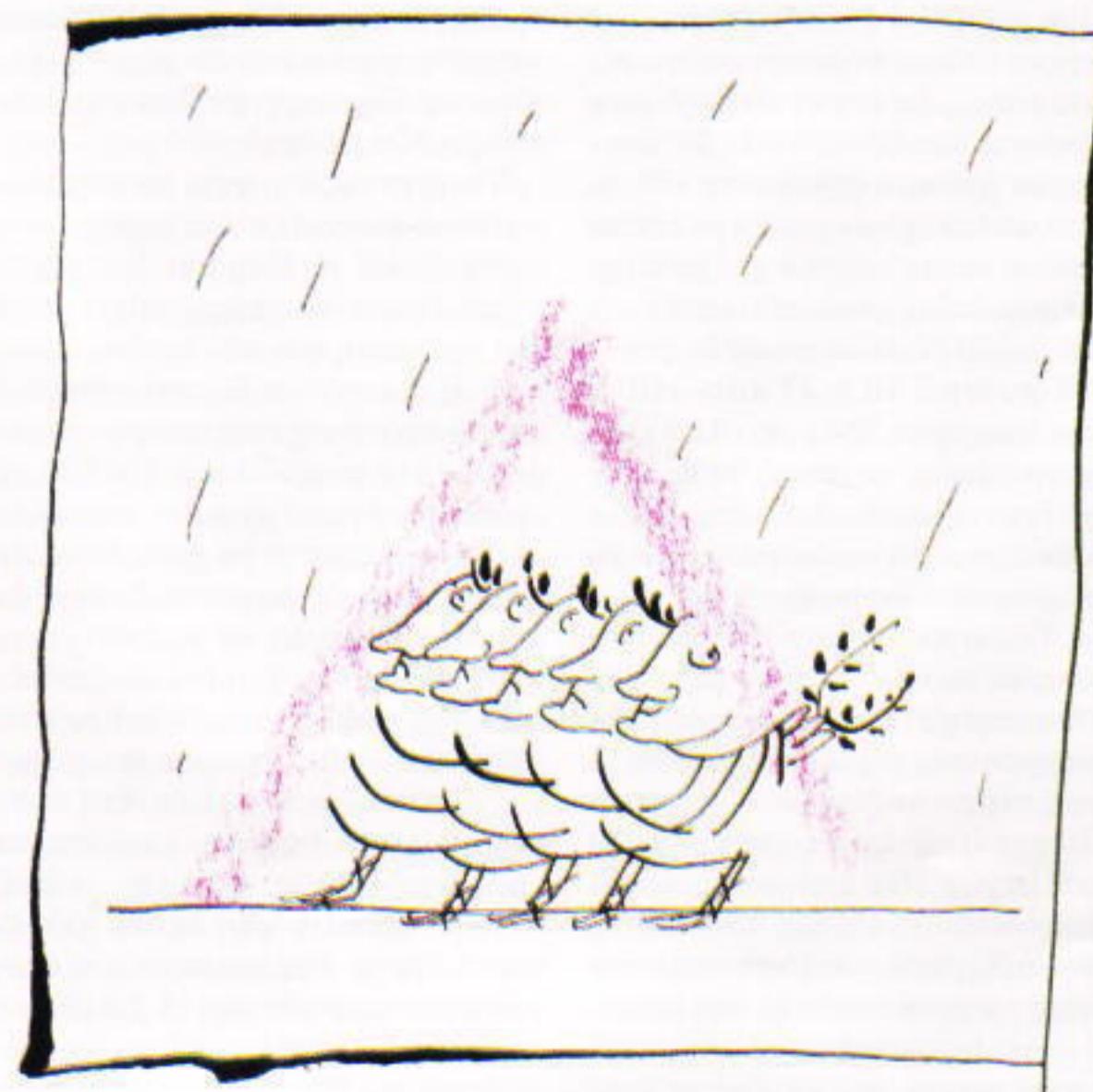
τους υποστηρικτές της δεν θα έγραφε ΙΙΙ για το 8 ή ΗΧC για το 80, παρότι τα ΙΙΙ και ΗΧC είναι, χωρίς αμφιβολία, συντομότερα από τα καθολικώς αποδεκτά σήμερα VIII και LXXX. Ανάλογα ασυνεπής είναι η αντίθετη άποψη: είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι θα υποστήριζε κανείς πως ο καλύτερος τρόπος να γράψουμε το 100 είναι μια σειρά από εκατό I. Πιθανώς αυτό που υποστήριζαν οι οπαδοί της μακρύτερης γραφής είναι ότι από τις τρεις απαντήσεις της Ellie Rucker καλύτερη ήταν η πο μεγάλη.

Οι υπερασπιστές και των δύο αντιμαχόμενων απόψεων μάλλον θα εκπλήσσονταν αν μάθαιναν ότι οι αρχαίοι Ρωμαίοι ήταν ασυνεπείς στον τρόπο με τον οποίο έγραφαν τους αριθμούς τους. Μερικές φορές όντως έγραφαν ΙΙΙ για το 8 και ΗΧC για το 18. Για να παραστήσουν το 9 ήταν εξίσου πιθανόν να χρησιμοποιήσουν το VIIIΙΙ όσο και το ΙΙΙ. Συνήθως έγραφαν το 4 ως ΙΙΙ (με την ευκαιρία, αυτή ήταν μια πρακτική την οποία συνέχιοαν να εφαρμόζουν οι κατασκευαστές ρολογιών κατά την Αναγέννηση, και χρησιμοποιείται

ακόμη από αρκετούς σύγχρονους κατασκευαστές).

## Η ανάπτυξη των ρωμαϊκών αριθμών

Με δεδομένη τη σύγχυση που επικρατεί στο μιαλό πολλών ανθρώπων, ας δούμε πώς αναπτύχθηκαν οι ρωμαϊκοί αριθμοί κατά την αρχαιότητα και πώς τυποποιήθηκε βαθμαία το σύστημα. Οπως και σε τόσα άλλα είδη γραφής σε ολόκληρο τον κόσμο, η βασική μονάδα αντιπροσωπεύοταν από μια μοναδική γραμμή. Στους Ρωμαίους, αντίθετα με τους Κινέζους, αυτή η γραμμή ήταν κάθετη. Για να παραστήσουν δύο μονάδες οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν δύο γραμμές, για τις τρεις μονάδες τρεις γραμμές και για τις τέσσερις μονάδες τέσσερις γραμμές. Αυτές οι κάθετες γραμμές μπορούσαν εύκολα να χαραχτούν στο χώμα ή να σκαλιστούν σε ξύλα ή πέτρες. Στις μέρες μας, οι άνθρωποι που κρατούν κάποιο λογαριασμό συχνά περνούν από τις τέσσερις στις πέντε μονάδες γράφοντας την πέμπτη γραμμή διαγώνια πάνω στις υπόλοιπες. Ιστορικοί όπως οι



Menninger και Ifrah υποθέτουν ότι οι Ρωμαίοι ακολουθούσαν μια παρόμοια πρακτική, και συμβόλιζαν ένα ούνολο από δέκα μονάδες με δύο διαγώνια διασταυρούμενες γραμμές: X. Από το μισό μέρος αυτού του συμβόλου δημιουργήθηκε ο ρωμαϊκός αριθμός για το 5. Με βάση τα ιστορικά στοιχεία, οι αρχαίοι κάτοικοι της Ιταλίας άλλοτε χρησιμοποιούσαν το κάτω μισό του X για να παραστήσουν το 5, και άλλοτε το πάνω μισό τελικά επικράτησε η δεύτερη μέθοδος, και δημιουργήθηκε το γνωστό μας V. Είναι επίσης πιθανό το σύμβολο V να αντιπροσώπευε αρχικά τον αντίχειρα και το δείκινη ενός όρθιου χεριού.

Ο Karl Menninger έχει την άποψη ότι οι Ρωμαίοι, που όπως και άλλα ινδοευρωπαϊκά φύλα είχαν σαφή γνώση των λίγων πρώτων δυνάμεων του 10, παριστούσαν αρχικά τον αριθμό 100 με μια διπλά διασταυρωμένη κάθετη γραμμή: X. Το πάνω μισό αυτού του συμβόλου, V, πρέπει να κατέληξε να συμβολίζει το 50. Με δεδομένη τη συχνή ασυνέπεια (μερικοί θα τη χαρακτηρίζαν δημιουργικότητα) των μεθόδων τις οποίες εφαρμόζουν οι πολιτισμοί για τη γραφή των συμβόλων, το σύμβολο για το 50 εμφανίζεται σε αρχαίες επιγραφές ως ⊥ και ⊥, τα οποία εξελίχθηκαν τελικά στο συνηθισμένο L. Το υποτιθέμενο αρχικό σύμβολο του 100, το X, αντικαταστάθηκε αργότερα από το C, που είναι το αρχικό γράμμα της λατινικής λέξης *centum* (εκατό).

Το πρώτο ρωμαϊκό σύμβολο για το 1.000 φαίνεται ότι ήταν κάτι σαν το Φ, και ίσως ήταν πράγματι το ελληνικό γράμμα φ, το οποίο αντιπροσώπευε έναν ήχο που δεν υπήρχε στα λατινικά, και συνεπώς μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως μη φωνητικό σύμβολο. Όποια κι αν ήταν η προέλευσή του, αυτό το πρώτο σύμβολο για το 1.000 κατέληξε να γράφεται με πολλούς τρόπους, μερικοί από τους οποίους ελάχιστα θύμιζαν τον αρχικό. Ο George Ifrah έχει παρουσιάσει 24 παραλλαγές. Μία από αυτές, το ①, χρησιμοποιούνταν ήδη από τον 3ο αιώνα π.Χ., όπως αποδεικνύεται από λίθινες επιγραφές αυτής της περιόδου. Εύκολα διακρίνουμε ότι το δεξιό μισό αυτού του συμβόλου ίσως

οδήγησε στη χρήση του D για την αναπαράσταση του 500. Στα αρχαία λατινικά, αντί του D εμφανίζεται το Θ επομένως, το αρχικό σύμβολο του 1.000 μπορεί να ήταν κάτι σαν Φ.

Αρκετές από τις παραλλαγές των συμβόλων του 1.000 παρουσιάζουν ένα είδος «χαλαρά τοπολογικής» ομοιότητας. Ανάμεσά τους συναντάμε τα Φ, Θ, C, L, και C. Το βασικό σχήμα είναι αυτό μιας κάθετης ευθείας που πλαισιώνεται από δύο συμμετρικές γραμμές οι οποίες «απομακρύνονται» από την κεντρική ευθεία. Οι Ρωμαίοι επεξέτειναν αυτό το σχήμα προσθέτοντας ένα «στρώμα» για κάθε ανώτερη δύναμη του δέκα. Σε μια πινακίδα που ανακαλύφθηκε στα γρείπια της Πομπηίας, η οποία καταστράφηκε από την έκρηξη του Βεζούβιου το 79 μ.Χ., ο αριθμός 10.000 παρισταται με το σύμβολο m̄. Παρόμοια, οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν περιστασιακά το σύμβολο m̄ για το 100.000. Μια επιγραφή στη λεγόμενη Σιήλη των Εμβόλων, που ανεγέρθηκε στη Ρώμη για να τιμηθεί η νίκη σε μια ναυμαχία εναντίον της Καρχηδόνας το 260 π.Χ., εμφανίζει μια παραλλαγή αυτού του συμβόλου τριάντα τέσσερις φορές στη σειρά. Στην προκειμένη περίπτωση, οι εξωτερικές γραμμές προεκτείνονται μέχρι το κέντρο και δημιουργούν ένα σύμβολο που μοιάζει με αυτό: m̄.

Το γεγονός ότι αυτό το σύμβολο επαναλαμβάνεται τόσες φορές, υποδηλώνει ότι οι Ρωμαίοι δεν είχαν σύμβολο για το εκατομμύριο. Από την επέκταση του πολλαπλασιαστικού σχήματος του δεκαπλασιασμού με την πρόσθεση ενός ακόμη «στρώματος» στο σύμβολο του 100.000 θα πρόκειται ένα σύμβολο με τόσο πολλές γραμμές, ώστε θα ήταν δύσκολη η γρήγορη κατανόησή του. Επίσης, θα μπορούσε εύκολα να υπάρξει σύγχυση παρόμοιων συμβόλων με διαφορετικό πλήθος γραμμών. Και κάτι περιοσότερο στα λατινικά δεν υπήρχε λέξη που να σημαίνει «ένα εκατομμύριο». Οι Ρωμαίοι, όταν έπρεπε να αναφερθούν σ' αυτό τον αριθμό, έλεγαν «δέκα φορές εκατό χιλιάδες». \* Για τα δύο εκατομμύρια έλεγαν «είκοσι φορές εκατό χιλιάδες», και ούτω καθεξής.

Αφού το 100.000 έγινε για τους

Ρωμαίους το εφαλτήριο για όλους τους μεγαλύτερους αριθμούς, επινόησαν ένα απλοποιημένο σύμβολο για την παράστασή του. Η νέα μορφή μπορεί να προήλθε από το προξέρχον εξωτερικό στρώμα του συμβόλου m̄, ή μπορεί να ήταν μια νέα επινόηση. Σε κάθε περίπτωση, όποτε έμπαινε γύρω από κάποιον ρωμαϊκό αριθμό ένα ορθογώνιο χωρίς βάση, η τιμή του αριθμού πολλαπλασιάζεται επί 100.000. Για παράδειγμα, το M σήμαινε 200.000, το N οήμαινε 1.000.000 και το C 10.000.000.

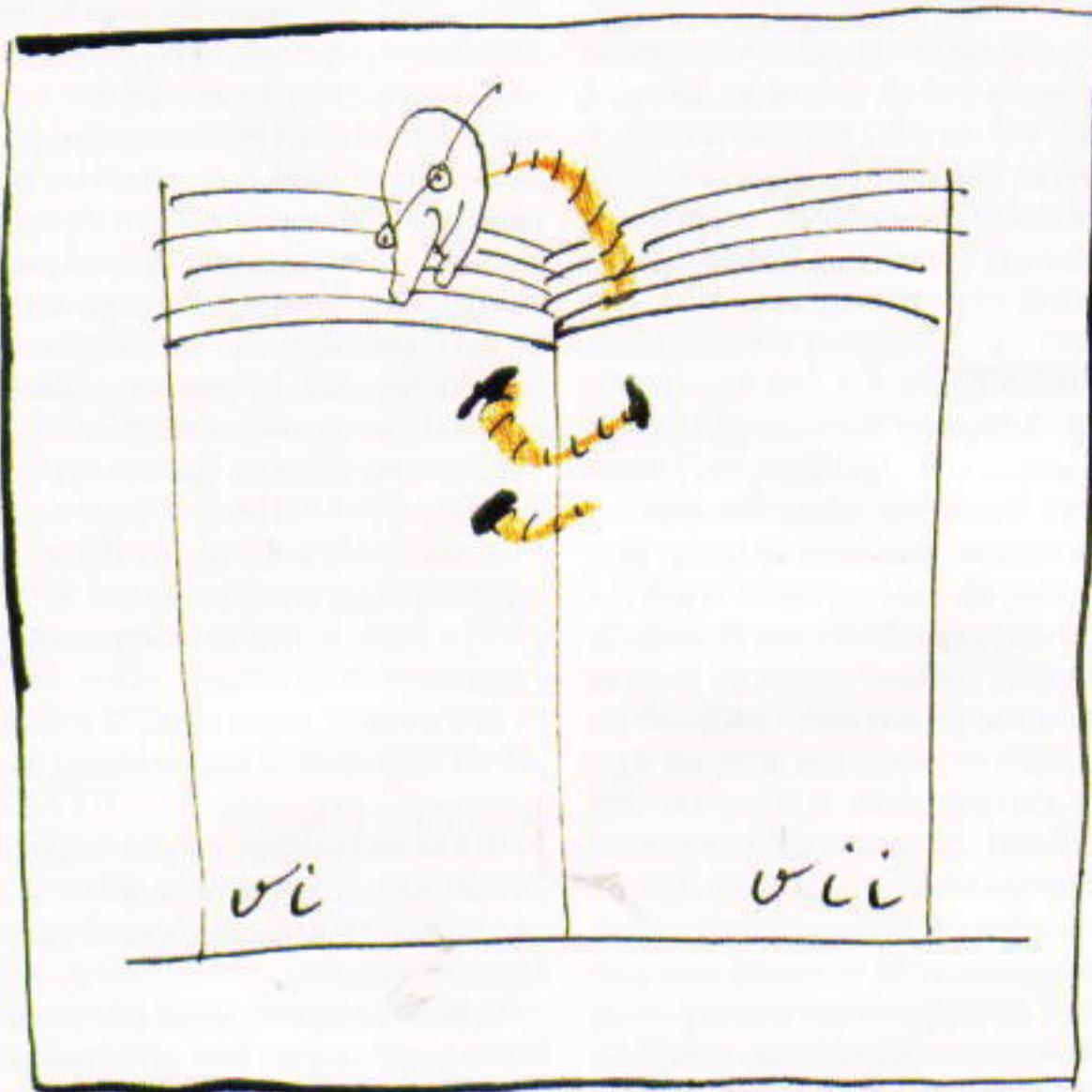
Ο Menninger αναφέρει ότι οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν οχεδόν πάντοτε το Φ ή μια από τις παραλλαγές του για να παραστήσουν το 1.000. Σε σπάνιες περιπτώσεις, ίσως έγραφαν ΗΜ για να συμβολίσουν το 2.000, όπου M ήταν το πρώτο γράμμα της λατινικής λέξης *mille* (χίλια). Μόνο κατά τον Μεσαίωνα άρχισε η αντικατάσταση των παλαιότερων συμβόλων του 1.000 από το γνωστό μας σήμερα M, και η διαδικασία δεν ολοκληρώθηκε παρά πολλά χρόνια αργότερα. Όταν ο Καρτέσιος εξέδωσε τον περιφημό Λόγο περί της μεθόδου, το 1637 στο Λέυντεν, η ημερομηνία, όπως γράφτηκε στην πρώτη σελίδα, ήταν CCCCXXXVII.

Κατά τον Μεσαίωνα και την Αναγέννηση επιβίωσε επίσης η πρακτική των Ρωμαίων να χαράσουν μια γραμμή πάνω από έναν αριθμό ή πάνω από ένα τμήμα του για να υποδηλώσουν ότι πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί 1.000. Για παράδειγμα, το ΗΙΧΧΧΙΙ παριστά τον αριθμό 6.039. (Η εν λόγω γραμμή ονομάζοταν στα μεσαιωνικά λατινικά *titulus*, και από αυτήν προέρχονται οι λέξεις *title* και η δική μας λέξη *tίτλος*,\*\*) που σημαίνει «επικεφαλίδα».

Άλλες φορές πάλι, οι Ρωμαίοι, καθώς και οι συγγραφείς κατά τον Μεσαίωνα και την Αναγέννηση, δεν τοποθετούσαν τη γραμμή πάνω από ένα ή περισσότερα γράμματα για να συμβολίσουν πολλαπλασιασμό με το

\* Ανάλογη ήταν και η ελληνική πρακτική. Η εισιμολογία του «εκατομμυρίου» είναι «εκατό φορές δέκα χιλιάδες». (Σεπ.συμ.)

\*\* Μια από τις αρχαιότερες εμφανίσεις της λέξης «τίτλος» στα ελληνικά, που προέρχεται από τα λατινικά, είναι στο κατά Ιωάννην Ευαγγέλιο, θ. 20. (Σεπ.συμ.)



1.000 αλλά για να υποδηλώσουν ότι αυτοί οι χαρακτήρες έπρεπε να διαβαστούν ως αριθμοί και όχι ως λέξεις. Άλλωστε, το I μπορεί να είναι ο αριθμός 1 ή το γράμμα I. Το V μπορεί να είναι είτε το 5 είτε το γράμμα V, και ούτω καθεξής. Επίσης, πολλοί συγγραφείς δεν φρόντιζαν ιδιαίτερα να αφήνουν (ή δεν άφηναν καθόλου) μεγάλα διαστήματα ανάμεσα στις λέξεις. Από αυτή τη γραμμή, που διέκρινε τους αριθμούς από τα γράμματα, προήλθε η σχετικά προσφατη συνήθειά μας να προσθέτουμε μια συνοδευτική υπογράμμιση, και έτοι σήμερα γράφουμε συχνά π.χ. τον αριθμό 15 ως XV. Καθώς όλο και περισσότεροι άνθρωποι μάθαιναν να γράφουν κατά τον Μεσαίωνα και την Αναγέννηση, εμφανίστηκε μια ολοένα εντονότερη τάση γραφής των ρωμαϊκών αριθμών με πεζούς χαρακτήρες αντί των κεφαλαίων τα οποία χρησιμοποιούσαν αποκλειστικά οι Ρωμαίοι. Η εκδοτική βιομηχανία εξακολουθεί να τηρεί συχνά αυτή την παράδοση και να αριθμεί τις σελίδες της εισαγωγής ενός βιβλίου με πεζούς ρωμαϊκούς χαρακτήρες.

## Διάφορες ερμηνείες

Το σύστημα των ρωμαϊκών αριθμών είχε κάποτε τους φυσικούς του φορείς, τους ανθρώπους της Ρώμης και της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας. Το αριθμητικό σύστημα, όμως, δεν ρυθμίζόταν από κάποιο είδος κυβερνητικής αρχής, όπως άλλωστε ούτε και η ίδια η λατινική γλώσσα. Μετά τη διάλυση της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας, ο φυσικός φορέας των ρωμαϊκών αριθμών εξαφανιστήκε. Οπως ακριβώς υπήρχαν αντικρουόμενοι τρόποι γραφής των αριθμών από τους αρχαίους Ρωμαίους, υπήρχαν και αντιτιθέμενοι τρόποι γραφής των ρωμαϊκών αριθμών κατά τον Μεσαίωνα, την Αναγέννηση, τον Διαφωτισμό, τον 19ο αιώνα, και ακόμη και σήμερα.

Ένα παράδειγμα αυτής της έλλειψης ομοιομορφίας βρίσκουμε στο *The New University Arithmetic* (Νέα πανεπιστημιακή αριθμητική) που γράφηκε από τον Charles Davies και εκδόθηκε το 1858 στη Νέα Υόρκη. Στον πίνακα των ρωμαϊκών αριθμών, στη σελίδα 15, οι αριθμοί 4 και 9 γράφονται IV και IX, οι 40 και 90 γράφονται XL και XC, αλλά οι 400 και 900 γρά-

φονται CCCC και DCCCC. Αυτή η ασυμμετρία αντανακλά την αντίστοιχη ασυνέπεια των ίδιων των αρχαίων Ρωμαίων, που έγραφαν συχνά CCCC και DCCCC αντί για CD και CM.

Ακόμη και σήμερα εμφανίζονται σε εκπαιδευτικά βιβλία προτάσεις που, παρότι δεν είναι υποχρεωτικά λαθεμένες, διατυπώνονται με τέτοιον τρόπο ώστε να αφήνουν στους μαθητές εσφαλμένες εντυπώσεις. Για παράδειγμα, στο *Mathematical Ideas* των Miller και Heeren βρίσκουμε την πρόταση «το 9 γράφοταν IX (10 μείον 1), αντί για VIII (5 συν 4)». Το συμπέρασμα που υπονοείται στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι οι Ρωμαίοι έγραφαν πάντοτε IX για το 9, ενώ στην πραγματικότητα ήταν εξίσου σύνηθες να γράφουν VIII. Η επόμενη πρόταση στο ίδιο βιβλίο είναι λίγο καλύτερη: «Χρησιμοποιούσαν συχνά την ίδια μέθοδο για να γράφουν το 4 ως IV, αντί για III». Πάντως, θα ήταν ακριβέστερο να αντικαταστήσουμε τη λέξη «συχνά» με το «μερικές φορές».

Οι Miller και Heeren συνεχίζουν αναφέροντας ότι «οι Ρωμαίοι εξοικονομούσαν χώρο χρησιμοποιώντας την αφαιρεση». Ενώ είναι βέβαιο ότι η αφαιρετική αρχή επιτρέπει την εξοικονόμηση χώρου, πολλοί αναγνώστες δίνουν στην εν λόγω πρόταση την ερμηνεία ότι οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν την αφαιρετική αρχή με σκοπό να κερδίσουν χώρο. Αν ενδιέφερε πραγματικά κάτι τέτοιο τους Ρωμαίους, δεν θα έγραφαν τόσο συχνά αριθμούς όπως VIII για το 9, XIII για το 14, XXXX για το 40 και LXXXV για το 95 —παραδείγματα που έχουν βρεθεί σε αρχαίες επιγραφές. Επιπλέον, οι Ρωμαίοι δεν έγραφαν ποτέ έναν αριθμό όπως το 95 ως VC, που θα ήταν πολύ συντομότερο από το χρησιμοποιούμενο LXXXV. (Από εδώ και στο εξής, οι εσφαλμένες μορφές και εκείνες για τις οποίες δεν υπάρχουν μαρτυρίες θα γράφονται με έντονους χαρακτήρες.)

Μια εύλογη ερμηνεία για την υιοθέτηση της αφαιρετικής αρχής είναι η φυσική τάση να ποσοτικοποιούμε κάτι αναφερόμενοι στο πλησιέστερο «ορόσημο». Για παράδειγμα, είναι πιθανότερο να πούμε ότι η ώρα είναι «εννέα παρά πέντε» από το να πού-

με ότι είναι «οκτώ και πενήντα πέντε» (αν και αυτή η συνήθεια μπορεί να αλλάξει με την επικράτηση των ψηφιακών ρολογιών). Η εγκυκλοπαίδεια *Britannica* (στην έκδοση του 1910), από την άλλη πλευρά, αναφέρεται στην περιορισμένη ικανότητα του ανθρώπινου εγκέφαλου να συλλαμβάνει άμεσα το πλήθος των αντικειμένων μιας ομάδας.

Έχει υποστηριχτεί ότι μπορούμε να δούμε ταυτόχρονα έως έξι αντικείμενα. Άλλα αυτό φαίνεται ότι ισχύει για λίγους μόνο ανθρώπους, και μάλιστα όταν τα αντικείμενα εμφανίζονται με μια συγκεκριμένη γεωμετρική διευθέτηση. Το όριο για τους περισσότερους εντλίκους, κάτω από ιδανικές συνθήκες, είναι περίπου τέσσερα. Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες είναι μικρότερο. Έτσι, το III, ο παλιός ρωμαϊκός συμβολισμός για το τέσσερα, δύσκολα διακρίνεται από το III, και ίσως ήταν αυτός ο κύριος λόγος της αντικατάστασής του από το IV.

Οποια κι αν ήταν η προέλευση της αφαιρετικής αρχής, οι Ρωμαίοι τη χρησιμοποιούσαν περιστασιακά. Η λατινική λέξη για το είκοσι είναι *viginti*. Κατά την ακμή του ρωμαϊκού πολιτισμού οι λέξεις για το 18 και το 19 ήταν *duodeviginti* (σε κατά λέξη μετάφραση: «δύο από είκοσι») και *undeviginti* («ένα από είκοσι»), μολο-

νότι σε άλλες περιόδους της ιστορίας τους οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν το *octodecim* για το 18 και το *novemdecim* για το 19. Πάντως, αν και η λατινική λέξη για το 10 ήταν *decem*, οι Ρωμαίοι δεν έγραφαν ποτέ ***duodecem*** για το 8 ή ***undecem*** για το 9.

## Τυποποίηση

Με δεδομένη την επιφαλή θέση των ρωμαϊκών αριθμών στις ΗΠΑ σήμερα, προτείνω να ακολουθήσουμε το παράδειγμα της εκδοτικής βιομηχανίας. Οι εκδότες έχουν υιοθετήσει το σύστημα Διεθνούς Προτύπου Αριθμητικής Βιβλίων (ISBN), με βάση το οποίο κάθε βιβλίο που εκδίδεται σε οποιοδήποτε μέρος του κόσμου έχει έναν και μοναδικό αριθμό. Με την ίδια λογική, προτείνω να χρησιμοποιήσουμε την ονομασία Διεθνές Πρότυπο Ρωμαϊκής Αριθμητικής (ISRN), για να προσδιορίσουμε το σύστημα που μάθαιναν οι Αμερικανοί στο σχολείο, και το οποίο οι Ευρωπαίοι, σύμφωνα με τον επιστολογράφο που αναφέραμε παραπάνω, εξακολουθούν να μαθαίνουν και σήμερα. Σ' ένα τέτοιο σύστημα, κάθε αριθμός (ιουλάχιστον μέχρι το ένα εκατομμύριο) θα μπο-

ρεί πάντοτε να γραφτεί ως ένας και μοναδικός ρωμαϊκός αριθμός. Αν και πολλοί από οις έχουν μάθει τους κανόνες του ISRN μέσω παραδειγμάτων, η διατύπωση των κανόνων δεν είναι και τόσο εύκολη. Πριν συνεχίσετε την ανάγνωση του άρθρου μπορείτε να δοκιμάσετε να γράψετε ένα σύνολο κανόνων που θα επιτρέπουν όλες τις αποδεκτές μορφές αλλά θα αποκλείουν τις ανεπιθύμητες.

Ιδού ένα σύνολο προτεινόμενων κανόνων:

- Οι αποδεκτοί χαρακτήρες, σε αύξουσα τάξη, είναι I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 και M = 1.000.

- Κανένας χαρακτήρας δεν μπορεί να εμφανιστεί περισσότερες από τρεις φορές στη σειρά.

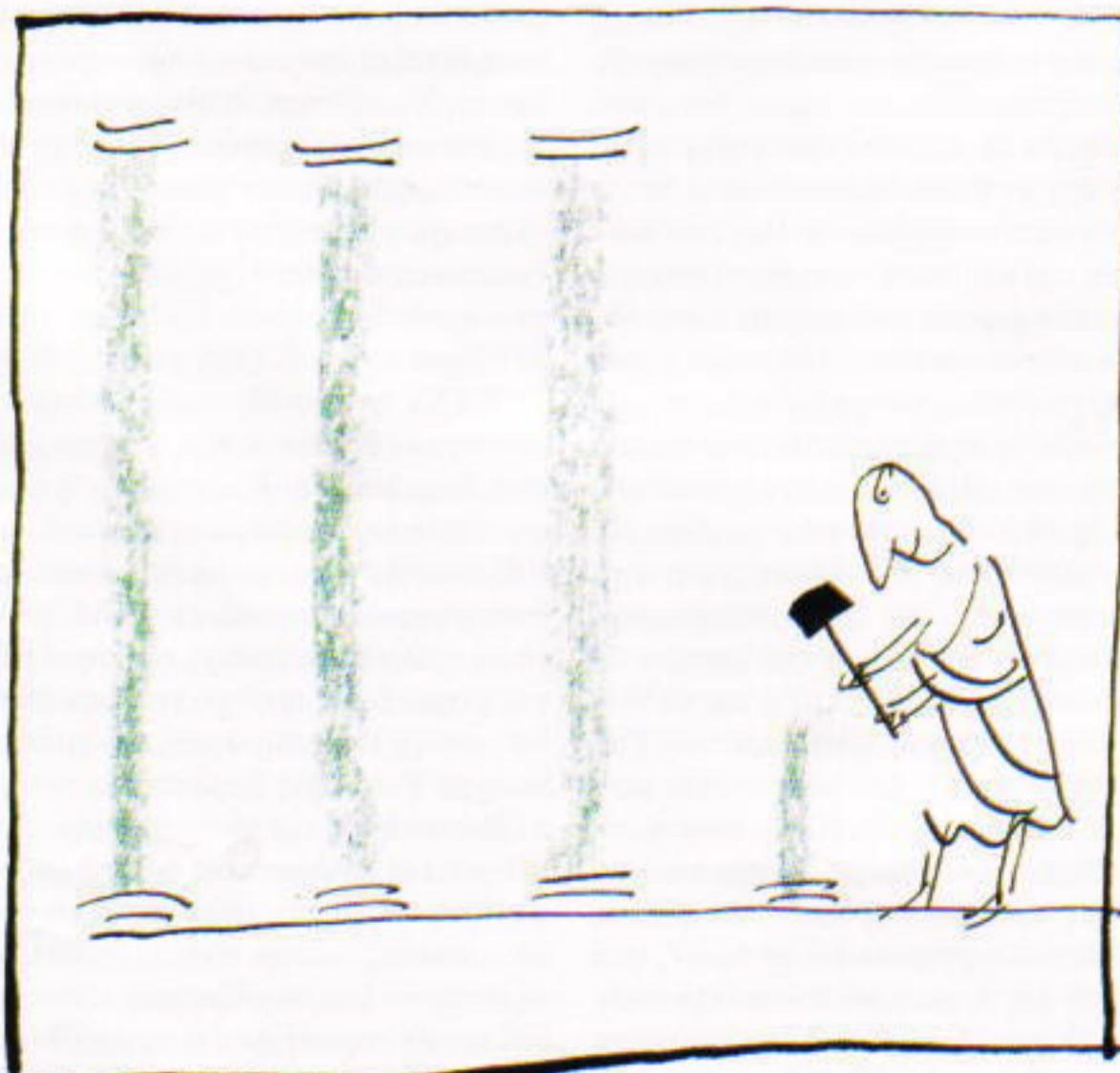
- Γενικά, οι χαρακτήρες εμφανίζονται σε μια μονότονα φθίνουσα ακολουθία. Οι αξίες των χαρακτήρων προστίθενται.

- Κατ' εξαίρεση, ένας και μοναδικός χαρακτήρας που αντιπροσωπεύει μια δύναμη του 10 μπορεί να εμφανιστεί αμέσως πριν από έναν μη επαναλαμβανόμενο χαρακτήρα του οποίου η αξία δεν είναι μεγαλύτερη από την αμέσως μεγαλύτερη δύναμη του 10, και ο' αυτή την περίπτωση η αξία του ζεύγους βρίσκεται αν αφαιρέσουμε την αξία του μικρότερου χαρακτήρα από την αξία του μεγαλύτερου. (Με άλλα λόγια, το I μπορεί να εμφανιστεί αμέσως πριν από το V ή το X, το X μπορεί να εμφανιστεί αμέσως πριν από το L ή το C, το C μπορεί να εμφανιστεί αμέσως πριν από το D ή το M.)

- Ένας ενδιάμεσος χαρακτήρας (V, L, D) δεν μπορεί να επαναληφθεί δύο χαρακτήρες παρακάτω. (Με άλλα λόγια, το 9 γράφεται IX και όχι VII, το 90 γράφεται XC και όχι LX, και το 900 γράφεται CM και όχι DCD.)

- Μπορούμε να τοποθετήσουμε μια γραμμή πάνω από έναν σωστό χαρακτήρα ή μια ομάδα χαρακτήρων, αρχίζοντας από την αριστερή άκρη του αριθμού. Η αξία του χαρακτήρα που καλύπτεται από τη γραμμή πολλαπλασιάζεται επί 1.000.

Στην πράξη, είναι ευκολότερο να μάθουμε το σύστημα μέσω παραδειγμάτων. Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει όλα τα στοιχεία που χρειά-



Ζονται για να γράψουμε όλους τους ρωμαϊκούς αριθμούς έως το 3.999. Αφού το ISBN χρησιμοποιείται συνήθως μόνο για αριθμητικούς σελίδων και χρονολογίες, το 3.999 είναι σίγουρα αρκετό για τις δύο επόμενες χιλιετίες. Για αριθμούς από το 4.000 και πάνω, είναι απαραίτητη η χρήση της υπεργράμμισης. Αν κάποιος θέλει να γράψει έναν αριθμό όπως το 2.937 με ρωμαϊκά ψηφία πρέπει να ξαναγράψει τον αριθμό χρησιμοποιώντας θεσιακό συμβολισμό:  $2 \times 1.000 + 9 \times 100 + 3 \times 10 + 7$ . Από τον πίνακα επιλέγουμε το ισοδύναμο κάθε όρου αρχίζοντας από τα αριστερά: MM + CM + XXX + VII. Κατόπιν ενώνουμε αυτές τις αξίες για να σχηματίσουμε τον τελικό ρωμαϊκό αριθμό: MMCM-XXXVII.

Προσέξτε την παράλληλη δομή του πίνακα. Σε κάθε γραμμή, όλες οι καταχωρήσεις έχουν το ίδιο πλήθος χαρακτήρων. Όταν μετακινούμαστε προς τα αριστερά, από μια στήλη στην επόμενη της, κάθε χαρακτήρας αντικαθίσταται από τον χαρακτήρα που έχει δεκαπλάσια αξία, και οι νέοι χαρακτήρες μένουν στην ίδια σειρά με αυτούς τους οποίους ανικαθιστούν.

## Συμπέρασμα

Η αρχή ότι οισωστός ρωμαϊκός αριθμός είναι ο συντομότερος δεν είναι ορθή, ούτε από ιστορική άποψη ούτε με βάση το συμβολισμό του ISBN. Οι περισσότεροι Αμερικανοί πιστεύουν ότι ο συντομότερος τρόπος αναπαρά-

στασης ενός αριθμού με ρωμαϊκά ψηφία είναι και ο καλύτερος ή ο μόνος σωστός, αλλά δεν έχουν δίκιο: για κάθε παράδειγμα ενός αριθμού όπως ο IX, που είναι συντομότερος από τον μη συμβατό με το ISBN αντίστοιχό του VIII, υπάρχει ένα παράδειγμα αριθμού όπως ο VIII, που είναι μεγαλύτερος από τον μη συμβατό με το ISBN αντίστοιχό του IX (τον οποίο όπως είδαμε, χρησιμοποιούσαν οι Ρωμαίοι μερικές φορές).

Ένα σύστημα παρόμοιο με το ISBN αποτελούσε κάποτε μέρος της ύλης στα δημόσια οχολεία των ΗΠΑ (θυμάρια ότι το έχω διδαχτεί στο δημοτικό, τη δεκαετία του 1950) αλλά, με βάση τη διδακτική μου εμπειρία των τελευταίων 25 ετών, μπορώ να βεβαιώσω ότι οι περισσότεροι απόφοιτοι των λυκείων σήμερα δεν το γνωρίζουν. Οι επιστολές που παραθέσαμε στην αρχή του άρθρου και το γεγονός ότι το θέμα των ρωμαϊκών αριθμών αντιμετωπίζεται από τα βιβλία αριθμητικής ως προαιρετικό αποτελούν μια πρόσθετη επιβεβαίωση του γεγονότος ότι το σύστημα δεν είναι πια τόσο γνωστό όσο παλιότερα. Οι μαθητές πρέπει να μαθαίνουν τους ρωμαϊκούς αριθμούς στη στοιχειώδη εκπαίδευση και να επαναλαμβάνουν το θέμα περιοδικά στη δευτεροβάθμια.

Τέλος, η εντυπωσιακή πραγματικότητα είναι ότι, αν και προτάθηκαν τόσοι διαφορετικοί τρόποι γραφής του 1990 με «ρωμαϊκούς» αριθμούς

από τους αναγνώστες της Ellie Rucker, οι αρχαίοι Ρωμαίοι δεν θα μπορούσαν πιθανότατα να αποκρυπτογραφήσουν ούτε έναν από αυτούς! ☐

**O Steven Schwartzman** διδάσκει μαθηματικά στο Austin Community College και είναι συγγραφέας του βιβλίου *The Words of Mathematics*, που έχει εκδοθεί από την Αμερικανική Μαθηματική Ένωση (MAA).

αριθμός	χιλιάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες
1	M	C	X	I
2	MM	CC	XX	II
3	MMM	CCC	XXX	III
4		CD	XL	IV
5		D	L	V
6		DC	LX	VI
7		DCC	LXX	VII
8		DCCC	LXXX	VIII
9		CM	XC	IX

## ΙΟΙ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ

**AIDS: γεγονότα, έρευνες και προβληματισμοί**

**Luc Montagnier**

Διευθυντής ερευνών στο CNRS



Luc Montagnier

**ΙΟΙ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ**

ΕΙΔΟΦΟΥΣ ΕΙΔΟΦΟΥΣ  
ΕΙΔΟΦΟΥΣ ΕΙΔΟΦΟΥΣ

Στην πρωτοπορία της έρευνας κατά του ιού του AIDS βρίσκεται ο Luc Montagnier, ένας από τους σημαντικότερους ιολόγους του κόσμου. Είναι ο επιστήμονας που, μαζί με την ομάδα του στο Ινστιτούτο Παστέρ, ανακάλυψε το 1983 τον ιό ο οποίος έχει προκαλέσει πραγματική πανδημία.

Σε τόπο το εξαιρετικά ενδιαφέρον βιβλίο, ο συγγραφέας του αναφέρεται στην ερευνητική εργασία που τον οδήγησε στην ανακάλυψή του και περιγράφει τη διαμάχη του με τον αμερικανό επιστήμονα R. Gallo· δίνει μια ευσύνοπτη, περιεκτική, αλλά επίσης πλήρη και διαφωτιστική παρουσίαση των γνώσεων που διαθέτουμε όσον αφορά τον ιό και την προέλευσή του, τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η ασθένεια, τις δυνατότητες θεραπείας και ανακάλυψης εμβολίου, και τη γεωγραφική εξάπλωση του AIDS. Ακόμη, ο συγγραφέας αναπτίσσει τις απόψεις του για τις ευθύνες των πολιτικών και εκθέτει τις σκέψεις του για τις επιπτώσεις της επιδημίας του AIDS στα δημόσια συστήματα υγείας και σε ολόκληρη την κοινωνία.

Πρόκειται για ένα βιβλίο πλούσιο σε πολύτιμες πληροφορίες, γραμμένο από έναν επιστήμονα και ερευνητή που μάχεται σε έναν από τους δραματικότερους πολέμους των αιώνα μας.

Σελ.: 376, 5.000 δρχ.

**Εκδόσεις κάτοπτρο**

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΕΥΡΩΠΑΪΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ**

# Ένας περίπατος στην κόψη του ξίφους

Η αρχαία σοφία συναντά τη σύγχρονη επιστήμη

V. Meshcheryakov

**Κ**ΑΠΟΤΕ Η ΔΗΜΟΦΙΛΗΣ ΡΩΣΙΚΗ εφημερίδα *Moskovsky Komso-molets* δημοσίευσε ένα ενδιαφέρον άρθρο του Alexander Pogonchenkov με τίτλο «Κυβίστηση στην κόψη ενός ξίφους». Αφηγούνταν την ιστορία ενός εξηντάχρονου σοφού με σώμα αθλητή, και της εικοσάχρονης συζύγου του. Αυτός ο άνδρας ήταν έμπειρος γνώστης των πολεμικών τεχνών και πραγματοποίησε μια καταπληκτική επίδειξη για το δημοσιογράφο. Ορίστε ένα απόσπασμα: «Στέκεται πάνω στη λεπίδα και, κρατώντας το χέρι της νεαρής βοηθού του, αρχίζει να περπατά κατά μήκος του ξίφους. Ένα βήμα... κι άλλο ένα... κι άλλο ένα... Τώρα στρίβει... κάνει ένα βήμα πίσω... και πηδάει! Θα περίμενε κανείς να δει αίρα να εκτινάσσεται από τα πέλματα των ποδιών του. Όμως τίποτε τέτοιο...».<sup>1</sup>

Τι συμβαίνει εδώ; Η απάντηση δεν είναι απλή και τετριμένη. Μπορούμε να κάνουμε κάποιους αρχικούς υπολογισμούς της επιφάνειας επαφής, της πίεσης, του πλήθους των ατόμων στήριξης. Μπορούμε όμως να ελπίζουμε ότι θα προεγγίσουμε με πεζούς αριθμούς μια τόσο εξαισια αρμονία; Εσείς θα το κρίνετε.

Θα προσπαθήσουμε πρώτα να εξετάσουμε τη φυσική πλευρά αυτού του μοναδικού πειράματος ακολουθώντας μια μάλλον απλοϊκή προσέγ-

γιοτ. Μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν  $S_0$  του πέλματος ενός ανθρώπου (οχεδιάζοντας, για παράδειγμα, το περιγραμμά του σε τετραγωνιομένο χαρτί) βρίσκουμε ότι  $S_0 \sim 10^{-2} \text{ m}^2$ . Αν η μάζα του ανθρώπου είναι  $M \sim 10^2 \text{ kg}$ , τότε η εξωτερική δύναμη που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια του πέλματός του έχει μέτρο  $F = Mg \equiv 10^3 \text{ N}$ . Έτοι, η πίεση πάνω σ' αυτήν είναι

$$P_0 = \frac{F}{S_0} \sim 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm.} \quad (1)$$

Όταν κάποιος στέκεται πάνω στη λεπίδα ενός ξίφους, η ίδια δύναμη ασκείται σε μια πολύ μικρότερη επιφάνεια επαφής. Για να εκτιμήσουμε το εμβαδόν της, αρκεί να θυμηθούμε ότι κατά τη λείανση μετάλλων το ύψος των επιφανειακών ανωμαλιών μπορεί να μειωθεί σε κλάσματα του μικρομέτρου ( $10^{-6} \text{ m}$ ). Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το ακόνισμα του ξίφους καταλήγει σε κόψη πλάτους  $b \sim 10^{-7} \text{ m}$ . Θεωρώντας ότι το μήκος του πέλματος του ανθρώπου είναι περίπου  $a \sim 10^{-1} \text{ m}$ , η επιφάνεια του πέλματος που βρίσκεται σε επαφή με την κόψη θα είναι:  $S_1 \sim 10^{-8} \text{ m}^2$ . Συνεπώς, η πίεση σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$P_1 = \frac{F}{S_1} \sim 10^{16} \text{ atm.} \quad (2)$$

Η τάξη μεγέθους αυτής της τιμής βρίσκεται στην περιοχή των πέσεων που συναντώνται, για παράδειγμα, στον πυρήνα της Γης, σε βάθος πολ-

λών χιλιομέτρων από την επιφάνειά της. Το αποτέλεσμα μας αφήνει άφωνους! Μπορεί ένας άνθρωπος να στέκεται πάνω σε μια λεπίδα κοφτερή όσο αυτή ενός ξυραφιού, χωρίς να τραυματίζει τον μυϊκό ιστό των πέλμάτων του; Ή πρόκειται απλώς για κάποιο κόλπο; Μήπως ο ιοορροποτής έχει στερεώσει στα πέλματά του λεπτές, πολύ ανθεκτικές σόλες, ή μήπως πάλι πρόκειται για κάποιο είδος μαζικής ύπνωσης;

Ας επιχειρήσουμε τώρα μια άλλη προσέγγιση. Γνωρίζουμε ότι το ανθρώπινο σώμα αποτελείται από άτομα. Είναι λογικό, λοιπόν, να αναρωτηθούμε: πάνω σε πόσα άτομα στηρίζεται το ανθρώπινο σώμα; Για να απαντήσουμε ο' αυτό το ερώτημα, ας υπολογίσουμε πρώτα το πλήθος των ατόμων στις επιφάνειες επαφής  $S_0$  και  $S_1$ .

Ο χαρακτηριστικός όγκος ενός ατόμου σε καταστάσεις συμπυκνωμένης ύλης είναι περίπου ίσος με  $\Omega = 10^{-29} \text{ m}^3$ . Έτοι, κάθε άτομο που βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια ενός αντικειμένου καταλαμβάνει στοιχειώδες εμβαδόν ίσο με  $s = \Omega^{2/3} \sim 10^{-20} \text{ m}^2$ . Συνεπώς, το πλήθος των ατόμων σε μια επιφάνεια εμβαδού  $S_0$ , που αντιστοιχεί στην επιφάνεια του ανθρώπινου πέλματος, ισούται με:

$$n_0 = \frac{S_0}{s} \sim 10^{18}, \quad (3)$$

ενώ το αντιστοιχό πλήθος των ατόμων σε επιφάνεια εμβαδού  $S_1$ , που αντιστοιχεί στην επιφάνεια επαφής

1. Χρειάζεται να ους το πούμε; Μη δοκιμάστε να κάνετε κάμι τέτοιο στο σπίτι!



με τη λεπίδα, είναι πολύ μικρότερο:

$$n_1 = \frac{S_1}{s} \sim 10^{12}. \quad (4)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το «πέρασμα» από το έδαφος στην κόψη ενός ξίφους ιοδυναμεί με την αντικατάσταση  $10^{18}$  ατόμων στήριξης με μόνο  $10^{12}$  άτομα. Το συμπέρασμα δεν φανεται ιδιαίτερα εντυπωσιακό. Είναι δύοκολο να φανταστεί κανείς τη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο αριθμών. Ωστόσο, αντιπροσωπεύουν πραγματικά το πλήθος των ατόμων στήριξης αυτοί οι αριθμοί  $n_0$  και  $n_1$ . Οι εκτιμήσεις (3) και (4) αντιστοιχούν σε ολόκληρη την επιφάνεια του πέλματος. Για να το υπογραμμίσω τούτο, σας θυμίζω πως ζήτησα να σχεδιάσετε το περίγραμμα του πέλματος πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί (με το δυσμενές ενδεχόμενο να εκνευρίσω τον ενημερωμένο αναγνώστη). Τι μας εγγυάται, όμως, ότι όλα τα άτομα του πέλματος είναι άτομα στήριξης;

Οι εκτιμήσεις (3) και (4) δεν μας λένε πόσο μπορεί να μειωθεί ο αριθμός  $n_1$ . Με άλλα λόγια, ποιες είναι οι κρίσιμες τιμές του πλήθους των ατόμων  $n_1$  (και, αντίστοιχα, του πλάτους  $b$  της κόψης) πέρα από τις οποίες είναι αδύνατον για ένα άτομο να περιπατήσει πάνω σ' ένα ξίφος;

Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα, ας ακολουθήσουμε μια θεώρηση που προτάθηκε από τον άγγλο φυσικό E. Tomlinson το 1929. Η ουσία αυτής της προσέγγισης έγκειται στο γεγονός ότι η επαφή μεταξύ δύο σωμάτων πραγματοποιείται από ένα περιορισμένο πλήθος ατόμων, που εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη εξωτερική τάση. Ο Tomlinson ονομάσεις αυτά τα άτομα «καρυάτιδες», από τους ελληνικούς κίονες που ήταν λαξευμένοι σε μορφή γυναικας. Το πλήθος των καρυατίδων είναι το κύριο χαρακτηριστικό της επαφής μεταξύ στερεών σωμάτων, και θα πρέπει να το υπολογίσουμε και να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με τους αριθμούς  $n_0$  και  $n_1$ . Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, το ακόλουθο φυσικό μοντέλο.

Φανταστείτε πως ένα στερεό σώμα με τυχαίες επιφανειακές μικροανωμαλίες στήριζεται στατικά σε μια τε-

λείως ανελαστική επιφάνεια, με τέτοιον τρόπο ώστε το σώμα να «ακουμπά» σ' αυτήν με ένα από τα προεξέχοντα «μαλακά» αιτομά του. Η εφαρμογή μιας μικρής δύναμης  $F$  με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια στήριξης μπορεί να προκαλέσει ελαστική παραμόρφωση της επιφανειακής προεξοχής που περιέχει το άτομο-καρυάτιδα. Όταν αυτή η δύναμη υπερβεί μια ορισμένη κρίσιμη τιμή  $f$  (που εξαρτάται από το είδος των διατομικών δεσμών), το άτομο πραγματοποιεί μια μετάβαση διάχυσης. Με άλλα λόγια, αυτό το άτομο θα «σπρωχτεί» από την εξωτερική (πρώτη) στιβάδα ατόμων της επιφανειας του σώματος προς εσώτερες στιβάδες. Η καταστροφή της συνέχειας της πρώτης στιβάδας αιτόμων, και των επόμενων στιβάδων, θα πραγματοποιείται έως ότου το πλήθος των καρυατίδων γίνει ίσο με

$$n = \frac{F}{f}. \quad (5)$$

Η κρίσιμη δύναμη  $f$  δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή της ενέργειας  $E$  που απαιτείται για να μετακινηθεί το άτομο διηρημένης με την απόσταση μεταξύ των ατόμων:

$$f = \frac{E}{\Omega^{1/3}}. \quad (6)$$

Η  $E$  είναι επίσης γνωστή ως ενέργεια διάχυσης. Για μια χονδρική εκτίμηση της  $E$ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισούται με την ηλεκτροστατική ενέργεια ενός και μόνου ατόμου:

$$E \sim \frac{ke^2}{r} \sim \frac{ke^2}{\Omega^{1/3}}.$$

Μια χαρακτηριστική τιμή για τα μέταλλα είναι  $E = 10^{-18}$  J. Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει μια εξίσωση για να υπολογίσουμε το πλήθος των καρυατίδων:

$$n = \frac{F\Omega^{1/3}}{E}. \quad (7)$$

Είναι πολύ σημαντικό ότι το  $n$  δεν εξαρτάται από το εμβαδόν της επιφανειας επαφής. Και τούτο συμφωνεί με τη συλλογιστική του Tomlinson, που έχει επιβεβαιωθεί με την πειραματική επαλήθευση της γραμμικής εξάρτησης της δύναμης τριβής από

την εξωτερική κάθετη δύναμη κατά την ολίσθηση ενός στερεού σώματος πάνω σ' ένα άλλο ( $F_w = \mu N$ ).

Η εξίσωση (7) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την πραγματική επιφάνεια επαφής  $S_r$ , που θα πρέπει να είναι ίση το γινόμενο του πλήθους των καρυατίδων  $n$  επί το στοιχειώδες εμβαδόν  $s$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (7) παίρνουμε:

$$S_r = ns = \frac{F\Omega}{E}. \quad (8)$$

Προφανώς, η  $S_r$  (όπως ακριβώς και το  $n$ ) εξαρτάται μόνο από τις ατομικές ιδιότητες του σώματος που υφίσταται την παραμόρφωση καθώς βρίσκεται πάνω στη στερεή ανελαστική επιφάνεια και από την εξωτερική δύναμη.

Τώρα ήρθε η στιγμή να ανεβεί ο ίδιος ο συγγραφέας στη λεπίδα του ξίφους —τρόπος του λέγειν—, για να κάνει τους ποοστικούς υπολογισμούς και να εξαγάγει ποιοτικά συμπεράσματα από αυτούς. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (7) και τις χαρακτηριστικές τιμές για τον ατομικό όγκο  $\Omega$ , την εξωτερική δύναμη  $F$  και την ενέργεια  $E$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε το πλήθος των καρυατίδων:

$$n \sim 10^{11}. \quad (9)$$

Έτοιμος, το βάρος του ανθρώπου εξισορροπείται από τη δύναμη που οφείλεται στην επαφή των  $10^{11}$  καρυατίδων. Το πλήθος αυτών δεν εξαρτάται ούτε από το οχήμα, ούτε από το εμβαδόν της επιφανειας στήριξης, ούτε από το μέρος του ανθρώπινου σώματος που αγγίζει το έδαφος. Η τιμή του  $n$  είναι επάλληλη μεγέθους μικρότερη από το πλήθος των ατόμων που περιέχονται στο πέλμα ενός ανθρώπου:

$$\frac{n_0}{n} \sim 10^7. \quad (10)$$

Με άλλα λόγια, η εκτίμηση (10) εκφράζει ότι σε κάθε  $10^7$  άτομα της επιφανειας του πέλματος μόνο 1 «λειτουργεί» ως καρυάτιδα. Ίσως όμως το πιο ενδιαφέρον συμπέρασμα που προκύπτει από αυτήν είναι πως το πλήθος των καρυατίδων δεν καθιερώνεται μονομιάς, αλλά σταδιακά, καθώς οι επιφανειακές στιβάδες του δέρματος καταστρέφονται λόγω της

επαναδιάταξης των ατόμων τους. Φανταστείτε ότι πέζετε το δάχτυλό σας πάνω σ' ένα τραπέζι με δύναμη μέτρου 1 N. Η κρίσιμη τιμή της δύναμης που απαιτείται για να αποσπάσει ένα ατόμο της επιφάνειας του δαχτύλου από τα γειτονικά του άτομα είναι  $f = 10^{-8}$  N, και προκύπτει από τον τύπο (6) και τις τιμές που έχουμε θεωρήσει για τις ποσότητες  $E$  και  $\Omega$ . Προφανώς, αυτή η δύναμη του 1 N καταστρέφει τους δεομούς μεταξύ των ατόμων, και τελικά οδηγεί στην καθιέρωση ενός πλήθους ισορροπίας από καρυάτιδες. Αυτό το πλήθος, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι  $\sim 10^{-8}$ .

Συγκρίνοντας το  $n$  (εκτίμηση (9)) με το  $n_1$ , το πλήθος των ατόμων που υπάρχουν στην επιφάνεια στήριξης πάνω στη λεπίδα του ξίφους, μπορούμε να πούμε ότι η κόψη έχει μεγαλύτερο πλάτος από αυτό μιας κόψης που υποθέτουμε πως σχηματίζεται από πυκνή διάταξη του πλήθους ισορροπίας (όπως προκύπτει από την (9)). Το μειωμένο πλάτος αυτής της κόψης μπορούμε να το υπολογίσουμε από τον τύπο  $b_r = S_r/a$ , χωρίς να παραβιάσουμε τη συνθήκη της εκτίμησης (9). Χρησιμοποιώντας τον τύπο (8) παίρνουμε:

$$b_r = \frac{F\Omega}{Ea} - 10^{-7} \text{ έως } 10^{-8} \text{ m. (11)}$$

Από αυτούς τους υπολογισμούς προκύπτει ότι η στατική ισορροπία ενός ανθρώπου πάνω στη λεπίδα ενός ξίφους χωρίς καταστροφή του μυϊκού ιστού είναι εφικτή αν το πλάτος της κόψης είναι μεγαλύτερο από  $10^{-8}$  m. Σ' αυτή την περίπτωση, η μετάβαση από το πάτωμα στην κόψη του ξίφους ισοδυναμεί με την αντικατάσταση ενός πλήθους καρυάτιδων χαοτικά κατανεμημένων στο επίπεδο με το ίδιο πλήθος καρυάτιδων πυκνά διατεταγμένων και ευθυγραμμισμένων, έτοι ώστε το πλήθος των ατόμων εγκάρσια της κόψης να είναι  $n_r = b_r/\Omega^{1/3} \sim 10^2$  και το πλήθος των ατόμων κατά μήκος της να είναι  $n_1 = a/\Omega^{1/3} \sim 10^9$ . Το γινόμενο  $n_r \cdot n_1 = n \sim 10^{11}$  αντιστοιχεί στην εκτίμηση (9).

Ελπίζω να σας άρεσε αυτή η απλή, πεζή εξήγηση ενός αρχαίου μυστηρίου. Παρ' όλα αυτά, πολύς κόσμος,

εμού συμπεριλαμβανομένου, θεωρεί την αρμονία των εξισώσεων ως ένα είδος μαγείας... Είναι όμως κρίμα που το τελευταίο μας συμπέρασμα δεν βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με ό,τι ακριβώς συμβαίνει στη φύση. Στην πραγματικότητα, η θερμική κίνηση των ατόμων διαβρώνει τις επίπεδες περιοχές ενός κρυστάλλου, οδηγώντας στο σχηματισμό μονοατομικών σκαλοπατιών και καθιστώντας αδύνατο το τρόχισμα μιας λεπίδας μέχρι τη λήψη μιας διατεταγμένης, πολυεδρικής γραμμής εύρους μερικών εκατοντάδων διατομικών αποστάσεων. Προφανώς, η φυσική διαπλάτυνση  $b_r$  λειτουργεί ενθαρρυντικά για το περίφημο πείραμα της κυβιστησης στην ακονιομένη κόψη του ξίφους.

## Ορισμένες συμπερασματικές παρατηρήσεις

1. Ο συγγραφέας δεν έχει υπόψη του άμεσες πειραματικές μετρήσεις που ενδέχεται να επιβεβαιώσουν ή να διαψεύσουν τους παραπάνω υπολογισμούς. Η μέθοδος της ατομικής μικροσκοπίας, που είναι η πιο συναφής με το πρόβλημα που εξετάσαμε και στηρίζεται στην ελεγχόμενη επαφή μιας στερεάς επιφάνειας με μια μονοατομική ακίδα, δεν μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη δυναμική του σχηματισμού πολυατομικών επαφών.

2. Πρέπει να παραδεχτώ ότι όι υπολογισμοί που παρουσιάστηκαν εδώ είναι προσεγγιστικοί. (Ένας ακόμη λόγος για να ανισταθείτε στον πειρασμό να επιχειρήσετε αυτό τον άθλο!) Πρώτον, βασίζονται στις ιδιότητες ενός «μέσου» στοιχείου του περιοδικού πίνακα του Μεντελέγιεφ, και δεν λαμβάνουν υπόψη τους τη στοιχειώδη δομή του ανθρώπινου δέρματος. Δεύτερον, εξαιτίας σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, οι τιμές που λαμβάνονται όταν υψώνουμε τον ατομικό όγκο  $\Omega$  στις δυνάμεις  $1/3$  ή  $2/3$  μπορεί να διαφέρουν από την πραγματική υμή κατά μία τάξη μεγέθους. Εξαιτίας των συνθηκών που περιγράφονται στο ομήριο 1, είναι ανώφελο να προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την ακρίβεια των εκτιμήσεων.

3. Δεν θα έπρεπε να ουμπεράνει κανείς από αυτό το άρθρο ότι ένας ανθρώπος θα μπορούσε να στηρίξει με ασφάλεια οποιοδήποτε μέρος του σώματός του στη λεπίδα ενός ξίφους. Διαφορετικά μέρη του δέρματος και του υποκείμενου μυϊκού ιστού διαφέρουν ως προς την ελαστικότητα και την αντοχή τους, και αυτός είναι ένας παράγοντας που δεν λάβαμε υπόψη μας. Ίσως το δέρμα στο πέλμα του ποδιού να παρουσιάζει κάποια πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλους ιστούς σ' αυτό το επικίνδυνο πείραμα που πραγματοποιείται στα όρια των ανθρώπινων ικανοτήτων.

4. Οι μεταβολές στις κρυσταλλικές έδρες που εξαρτώνται από τη θερμοκρασία είλκυσαν το ενδιαφέρον αυθεντιών όπως του Paul Ehrenfest και του Lev Landau, όμως περιγράφηκαν ποσοτικά μόνο κατά τα τελευταία δέκα χρόνια. Ίσως κάποιος ειδικός διαβάσει αυτό το άρθρο και το εμπλουτίσει με μια ανάλυση αυτού του φαινομένου.

5. Το πρόβλημα της καταστροφής των μυϊκών ιστών υπό τη δράση εξωτερικών δυνάμεων είναι πολύ πιο περιπλοκό απ' όσο υποδεικνύει η παρουσίασή του σ' αυτό το κείμενο. Προφανώς, σχετίζεται με τη μετάβαση από τη στατική τριβή στην τριβή ολισθησης, ένα αίνιγμα που η μοντέρνα φυσική άρχισε να προσεγγίζει πολύ πρόσφατα. ◻

## ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

*To Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μαΐο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 12 τεύχη. Αυτά, για δύο χρόνια θα υπάρχουν διαθέσιμα απότοπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους. To Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χαστετε κανένα τεύχος του.*

## ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ QUANTUM

*Ιστορικό 10 και Δαφνομήδη, 114 71 - Αθήνα  
Τηλ: 3643272, 3645098. Fax: 3641864*

# Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

## Μαθηματικά

### M56

Υπολογισμός του μκδ. Οι θετικοί ακέραιοι  $a$  και  $b$  είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός  $(a+1)/b + (b+1)/a$  να είναι επίσης ακέραιος. Αποδείξτε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $a$  και  $b$  δεν υπερβαίνει το  $\sqrt{a+b}$ .

(A. Golovanov, E. Malinnikova)

### M57

Η αποκάλυψη ενός τελείου τετραγώνου. Τρεις ακέραιοι  $a$ ,  $b$  και  $c$  έχουν άθροισμα μηδέν. Αποδείξτε ότι ο αριθμός  $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$  είναι τετράγωνο ενός ακέραιου.

(S. Fomin, L. Kurlyandchik)

### M58

Παιζοντας με ένα μόνο πόνι. Τοποθετούμε ένα πόνι της ντάμας στο γωνιακό τετράγωνο μιας  $n \times n$  σκακιέρας. Τότε αρχίζουν να παιζουν δύο παικτες με τη σειρά, μετακινώντας το πόνι κατά ένα τετράγωνο οριζόντια ή κάθετα, χωρίς όμως να μπορούν να το τοποθετήσουν σε τετράγωνο που έχουν χρησιμοποιήσει προηγουμένως. Ο παικτης που δεν μπορεί να κάνει κίνηση ικανοποιώντας αυτό τον περιορισμό χάνει. (a) Αποδείξτε πως όταν το  $n$  είναι άρτιο κερδίζει ο παικτης που παιζει πρώτος, ενώ όταν το  $n$  είναι περιττό μπορεί πάντα να κερδίζει ο δεύτερος. (β) Ποιος κερδίζει όταν το πόνι τοποθετείται αρχικά σ' ένα τετράγωνο που βρίσκεται δίπλα σε μια από τις πλευρές του γωνιακού;

(N. Netsvetayev)

### M59

Διπλή εγγραφή. Ένα  $n$ -γωνο εμβαδού  $E$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $R$ . Θεωρούμε ένα σημείο σε καθεμία από τις πλευρές του. Αποδείξτε ότι η περίμετρος  $P$  του  $n$ -γώνου την οποία σχηματίζουν αυτά τα σημεία είναι τουλάχιστον  $2E/R$ .

(V. Dubrovsky)

## M60

Ισοσκελή και μονόχρωμα. Χρωματίζουμε κόκκινες  $K$  κορυφές ενός κανονικού  $(6n+1)$ -γώνου και μπλε όλες τις υπόλοιπες. Αποδείξτε ότι το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που έχουν κορυφές ίδιου χρώματος εξαρτάται μόνο από το πλήθος  $R$  και όχι από τη διευθετηριά των χρωμάτων. (D. Tamarkin)

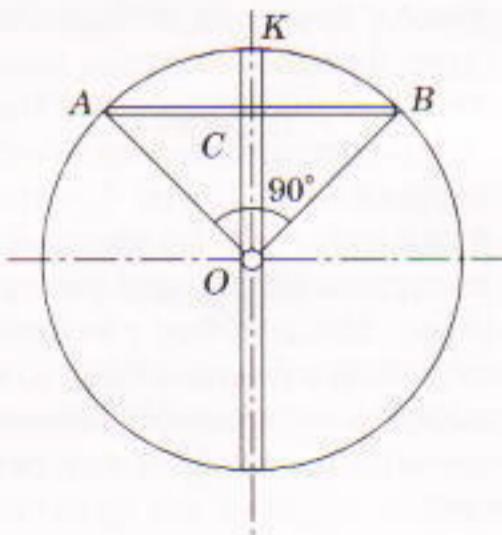
## Φυσική

### Φ56

Σώμα στο τραπέζι. Τα πόδια ενός τετράγωνου τραπεζιού σπάζουν όταν τοποθετούμε στο κέντρο του σώμα μάζας  $m$ . Βρείτε το σύνολο των σημείων της επιφάνειας του τραπεζιού στα οποία θα μπορούμε να τοποθετούμε σώμα μάζας  $m/2$  χωρίς να σπάζουν τα πόδια του τραπεζιού. (O. Batishchev)

### Φ57

Μετρό στη Σελήνη. Μια ευθύγραμμη υπόγεια σίραγγα συνδέει τα σημεία  $A$  και  $B$  της επιφάνειας της Σελήνης, η γωνιώδης απόσταση των οποίων είναι  $90^\circ$ . Η σίραγγα είναι γεμάτη με αέρα σε θερμοκρασία  $0^\circ\text{C}$ . Η πίεσή του στη μέση ακριβώς της σίραγγας είναι  $P_c = 10^5 \text{ N/m}^2$ . Υπολογίστε την πίεση του αέρα στα στόμια της σίραγγας, ακριβώς στην επιφάνεια της Σελήνης. Θεωρήστε ότι η Σελήνη είναι ομοιογενής οφαίρει διαμέτρου  $D = 3.480 \text{ km}$ , και ότι η αρμή της επ-



ιάχυνσης  $g_M$  που προκαλείται από τη βαρύτητα στην επιφάνειά της είναι το ένα έκτο της αντίστοιχης τιμής στην επιφάνεια της Γης. (A. Stasenko)

### Φ58

Πάγος και νερό. Ένας κατακόρυφος σωλήνας είναι γεμάτος με νερό μέχρι ύψους  $H = 20 \text{ m}$  σε θερμοκρασία  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ . Κατά πόσο μεταβάλλεται το ύψος του περιεχομένου του σωλήνα αν η θερμοκρασία μειωθεί σε  $\theta_1 = -0,01^\circ\text{C}$ ? Η λανθάνουσα θερμότητα τήξεως του πάγου είναι  $L = 335 \text{ J/g}$ , και η πυκνότητα του πάγου  $\rho_p = 0,92 \text{ g/cm}^3$ . (Θεωρήστε γνωστό ότι μεταβολή της εξωτερικής πίεσης κατά  $\Delta P$  επιφέρει μεταβολή της θερμοκρασίας τήξεως του πάγου κατά  $\Delta T$  έτοι ώστε να ισχύει η σχέση  $\Delta T/T = (1/\rho_v - 1/\rho_p)\Delta P/L$ , όπου  $T$  είναι η θερμοκρασία του μείγματος πάγου-νερού και  $\rho_v$  η πυκνότητα του νερού.) (W. Ovchinkin)

### Φ59

Ένα ζευγάρι πλάκες. Δύο μεγάλες τετράγωνες μη αγώγιμες πλάκες (καθεμία εμβαδού  $S$ ) τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ τους και σε μικρή απόσταση  $d$ . Στις επιφάνειές τους κατανέμονται ομοιόμορφα φορτία  $+Q$  και  $-Q$  αντίστοιχα. Βρείτε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ του κέντρου και της κορυφής μιας πλάκας. (O. Savchenko)

### Φ60

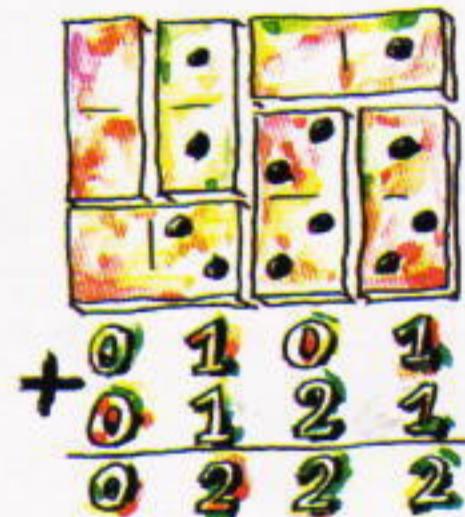
Περιστρεφόμενος υδράργυρος. Ένα κυλινδρικό δοχείο γεμάτο υδράργυρο περιστρέφεται γύρω από τον κεντρικό κατακόρυφο άξονά του με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Έτσι, η ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου σχηματίζει ένα παραβολικό κάτοπτρο. Υπολογίστε την εστιακή απόσταση του εν λόγω κατόπτρου. Η πυκνότητα του υδραργύρου είναι  $\rho$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ .

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 58**

# Για να περνά η ώρα

Σ56

Δίποδα, τρίποδα και τετράποδα. Σε ένα δωμάτιο υπάρχουν μερικά σκαμνιά με τρία πόδια και κάποιες πολυθρόνες με τέσσερα. Όταν σε κάθε σκαμνί και σε κάθε πολυθρόνα κάθεται ένας άνθρωπος, το συνολικό πλήθος των ποδιών στο δωμάτιο είναι 39. Πόσα σκαμνιά και πόσες πολυθρόνες υπάρχουν;



Σ57

Σ57

Αριθμητική με ντόμινο. Έχουμε ένα ορθογώνιο  $4 \times 3$  που αποτελείται από 6 πλακίδια του ντόμινο, τα οποία είναι έτοι τοποθετημένα ώστε οι τελείες τους να αποτελούν ένα σωστό παράδειγμα πρόσθεσης (στο παράδειγμα του σχήματος  $101 + 121 = 222$ ). Προσπαθήστε να βρείτε ένα παρόμοιο ορθογώνιο αποτελούμενο από 6 ντόμινο (πιθανώς διαφορετικά από αυτά του σχήματος), έτοι ώστε το άθροισμα —δηλαδή, ο αριθμός της τελευταίας γραμμής— να είναι ο ελάχιστος. (Tran Quang Dat, Βιετνάμ)



Σ58

Σκιώδη προβλήματα. Όλοι γνωρίζουμε ότι οι σκιές που δημιουργεί ο Ήλιος αλλάζουν κατά τη διάρκεια της ημέρας —το μήκος τους φτάνει στο μέγιστο το ηλιοβασίλεμα και την ανατολή, και γίνεται ελάχιστο το μεσημέρι. Υπάρχει κάποιο μέρος στη Γη όπου οι σκιές έχουν το ίδιο μήκος συνεχώς;



Σ60

Τραπέζια και πετσέτες. Ένα καφενείο έχει στρογγυλά και τετράγωνα τραπέζια. Τα όμοιου σχήματος τραπέζια έχουν ίδιο μέγεθος. Κάθε στρογγυλό τραπέζι καλύπτεται τελείως από τέσσερις τετράγωνες πετσέτες ίδιου μεγέθους, και κάθε τετράγωνο τραπέζι καλύπτεται τελείως από τέσσερις όμοιες στρογγυλές πετσέτες. Αποδειξτε ότι η διάμετρος μιας στρογγυλής πετσέτας είναι μεγαλύτερη από ή ίση με το μισό της διαγωνίου των τετράγωνων τραπεζιών και ότι το μήκος της πλευράς μιας τετράγωνης πετσέτας είναι μεγαλύτερο ή ίσο της ακτίνας των στρογγυλών τραπεζιών. (V. Proizvolov)

Σ59

Νομιοματικά προβλήματα. Τα ρωσικά μπρούτζινα κέρματα των 1, 2, 3 και 5 καπικιών (ανύπαρκτα στις μέρες μας λόγω του πληθωρισμού) ζύγιζαν τόσα γραμμάρια όση ήταν και η ονομαστική τους αξία. Γνωρίζουμε ότι ένα από τέσσερα διαφορετικά κέρματα είναι κάλπικο —έχει διαφορετικό βάρος από ένα κανονικό κέρμα. Πώς μπορούμε να το ξεχωρίσουμε χρησιμοποιώντας μόνο μια ζυγαριά χωρίς σταθμά; (G. Tartakovsky)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 58



Depelote  
tract. 1T  
H02610,  
Co. 2  
Cham

Painted 95

# Το πρόβλημα του δενδρώνα

Πώς να φυτέψετε περισσότερα δέντρα και να μη χάσετε τη θέα

Vladimir Jancović

**M**ΙΑ ΦΟΡΑ ΚΙ ΕΝΑΝ ΚΑΙΡΟ ΖΟΥΣΕ ένας κηπουρός που αγαπούσε τα μαθηματικά και τον έλεγαν Μάρτιν. Μια μέρα ο Μάρτιν φύτεψε ένα δενδρώνα γύρω από το μικρό (αμελητέων διαστάσεων!) σπίτι του. Ακολουθώντας τη φυσική του κλίση, το σχεδίασε με μεγάλη ακρίβεια: όρισε ένα πλέγμα μοναδιαίων τετραγώνων με το σπίτι του σ' έναν από τους κόμβους του και φύτεψε τα δέντρα σε όλους τους άλλους κόμβους οι οποίοι βρίσκονταν μέσα σ' έναν κύκλο που είχε κέντρο το σπίτι. Τα δέντρα τα διάλεξε με μεγάλη προσοχή: ήταν όλα του ίδιου είδους, μεγέθους και ηλικίας, και έτοι αναπτύσσονταν με τον ίδιο ρυθμό. Στην αρχή ο Μάρτιν μπορούσε να κοιτάζει έξω από το παράθυρό του και να απολαμβάνει μια απεριόριστη πρακτικά θέα του γαλήνιου τοπίου που απλωνόταν πέρα από το δενδρώνα του. Όσο περνούσε ο καιρός, όμως, τα δέντρα γίνονταν όλο και πιο χοντρά, μέχρι τη μέρα που ο Μάρτιν διαπιστώσε ότι ο δενδρώνας του είχε κρύψει εντελώς τη θέα. Το ερώτημα, λοιπόν, είναι το εξής: με δεδομένη την ακτίνα  $R$  ( $R > 1$ ) του δενδρώνα, ποια είναι η μεγαλύτερη ακτίνα  $r$  των δέντρων<sup>1</sup> που επιτρέπει στον Μάρτιν να εξακολουθεί να βλέπει κάπι πέρα από το δενδρώνα; Πρέπει να εξηγήσουμε εδώ ότι μια οπτική ακτίνα εμποδίζεται από ένα δέντρο μόνο

όταν το τέμνει. Έτσι, οι «τελευταίες» ανεμπόδιστες ακτίνες θα εφάπτονται στις πλευρές δύο τουλάχιστον δέντρων (μέγιστης ακτίνας  $r$ ). Ένα επιπλέον ερώτημα είναι ο προοδιορισμός της διεύθυνσης αυτών των τελευταίων ανεμπόδιστων ακτίνων.

Αυτό το πρόβλημα έχει εμφανιστεί σε πλήθος βιβλίων —δείτε, για παράδειγμα, το Γεωμετρικές ανισότητες και προβλήματα με μέγιστα και ελάχιστα των D. Shklarsky, N. Chentsov και I. Yaglom (Μόσχα, 1970, στα ρωσικά), *Mathematical Gems I* του R.A. Honsberger (Αμερικανική Μαθηματική Ένωση, Ουάσινγκτον, 1973) ή το *Προβλήματα επιπεδομετρίας*, μέρος 2ο, του V.V. Prasolov (Μόσχα, 1991, στα ρωσικά). Δίνουν, όμως, μερική μόνο απάντηση στο πρώτο από τα ερωτήματα που διατυπώσαμε παραπάνω. Πρέπει να αποδειξετε πως όταν η ακτίνα  $R$  είναι, ας πούμε, 50, τότε τα δέντρα με ακτίνα  $1/50$  (ή γενικότερα,  $1/R$ , για τυχαίο  $R$ ) εμποδίζουν τη θέα, ενώ δέντρα με μικρότερη ακτίνα δεν την εμποδίζουν.

Στη συνέχεια σας παρουσιάζω την πλήρη λύση του προβλήματος του δενδρώνα στη γενική του μορφή.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το «πλέγμα του δενδρώνα» είναι το πλέγμα των ακέραιων σημείων (δηλαδή των σημείων με ακέραιες ουντεταγμένες) στο σύντημα ουντεταγμένων με αρχή  $O$  το σπίτι του κηπουρού. Από τα ακέραια σημεία που βρίσκονται έξω από το δενδρώνα επλέγουμε αυτά που είναι πλη-

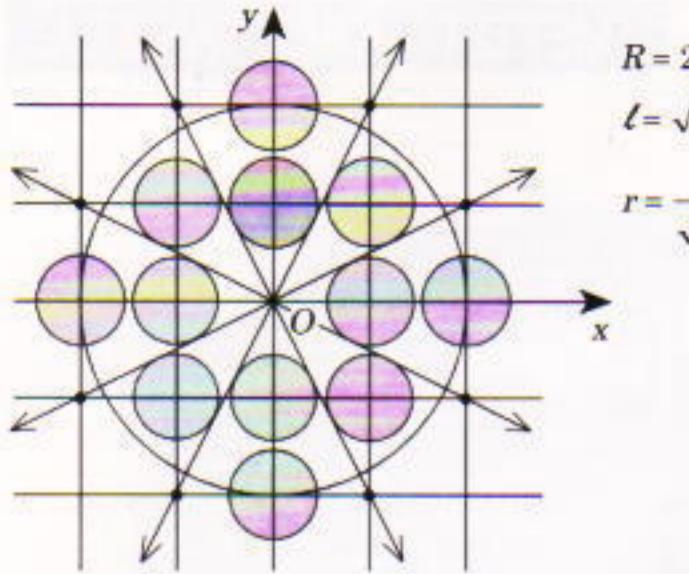
σιέστερα στην αρχή και οι ουντεταγμένες τους είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί. Έστω  $\ell$  η απόσταση μεταξύ του κέντρου και εγός από αυτά τα σημεία. Ισχυριζόμαστε ότι η μεγαλύτερη ακτίνα δέντρου που επιτρέπει στον κηπουρό να βλέπει μέσα από το δενδρώνα είναι  $1/\ell$  και ότι οι τελευταίες ακτίνες που δεν εμποδίζονται είναι αυτές που κατευθύνονται από την αρχή προς τα επιλεγμένα σημεία.

Πιο αυστηρά, αν  $\ell^2$  είναι ο μικρότερος αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του  $R^2$  και μπορεί να παρασταθεί ως το άθροισμα των τετραγώνων δύο σχετικά πρώτων ακέραιων, τότε θα δείξουμε ότι:

1. Για κάθε  $r > 1/\ell$ , οποιαδήποτε ακτίνα από την αρχή  $O$  τέμνει έναν κύκλο ακτίνας  $r$  με κέντρο ένα ακέραιο σημείο που ανήκει στον κύκλο με ακτίνα  $R$  και κέντρο το  $O$ .
2. Για  $r = 1/\ell$ , οι μοναδικές ακτίνες που δεν τέμνουν αυτούς τους κύκλους είναι αυτές που τέμνουν τον κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\ell$  σε σημεία με ουντεταγμένες σχετικά πρώτους ακέραιους (Σχήμα 1).

Για παράδειγμα, αν  $R = 50$ , τότε  $R^2 = 2500 < 2501 = 50^2 + 1^2$ , επομένως  $\ell = \sqrt{2501}$ . Μπορεί να αποδειχτεί ότι υπάρχουν δύο ακριβώς αναπαραστάσεις του 2501 ως αθροίσματος τετραγώνων δύο σχετικά πρώτων θετικών ακέραιων:  $2501 = 50^2 + 1^2 = 49^2 + 10^2$ . Έτσι, ένας δενδρώνας ακτίνας 50 εμποδίζει τελείως τη θέα για κάθε  $r > 1/\sqrt{2501}$ , ενώ για  $r = 1/\sqrt{2501}$

1. Υποθέτουμε ότι τα δέντρα είναι κατακόρυφοι κύλινδροι της ίδιας ακτίνας.



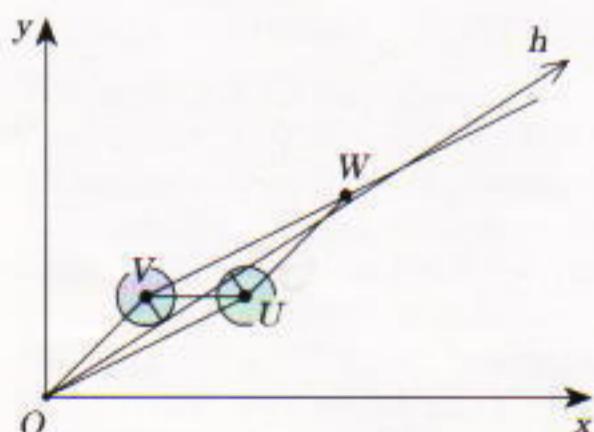
Σχήμα 1

υπάρχουν δεκαέξι ακριβώς διευθύνσεις στις οποίες η περιοχή πέρα από το δενδρώνα είναι ορατή —διέρχονται από τα σημεία  $(\pm 50, \pm 1), (\pm 1, \pm 50), (\pm 49, \pm 10), (\pm 10, \pm 49)$  (όπου τα πρόσημα επλέγονται ανεξάρτητα).

**Απόδειξη.** Θεωρούμε μια τυχαία ακτίνα  $h$  που ξεκινά από την αρχή  $O$ . Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου συντεταγμένων. Θέλουμε να προσδιορίσουμε για ποιες τιμές του  $r$  θα εμποδίζεται η ακτίνα από κάποιο δέντρο.

Όταν η ακτίνα διέρχεται από το κέντρο ενός δέντρου, τότε εμποδίζεται από αυτό για κάθε  $r > 0$ . Έτσι, στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η ακτίνα δεν διέρχεται από ακέραια σημεία του δενδρώνα.

Μπορούμε να αγνοήσουμε τα δέντρα που βρίσκονται έξω από το πρώτο τεταρτημόριο, διότι προτύρ γίνουν τόσο μεγάλα ώστε να φτάσουν σ' αυτό ( $r = 1$ ), θα έχουν ήδη ακουμπήσει στα γειτονικά τους ( $r = 1/2$ ), θα εμποδίζουν να περάσει οποιαδήποτε ακτίνα και θα πάψουν να αναπτύσσονται.



Σχήμα 2

Ας διαλέξουμε τώρα σε κάθε πλευρά της ακτίνας  $h$  το σημείο του δενδρώνα που βρίσκεται πλησιέστερα στην  $h$ . Συμβολίζουμε τα δύο σημεία με  $U$  και  $V$  (Σχήμα 2). Είναι φανερό ότι η ακτίνα μας εμποδίζεται αν και μόνο αν τη σταματά ένα από τα δέντρα στα  $U$  και  $V$ . Παρατηρούμε ότι, με εξαίρεση τις κορυφές του, δεν υπάρχουν ακέραια σημεία στο εσωτερικό ή στην περίμετρο του τριγώνου  $OUV$ , διότι διαφορετικά το  $U$  ή το  $V$  (ή και τα δύο) δεν θα ήταν το πλησιέστερο προς την ακτίνα  $h$ . (Θυμηθείτε ότι έχουμε υποθέσει πως η ακτίνα  $h$  δεν περνά από ακέραια σημεία στο εσωτερικό του δενδρώνα.) Αυτό είναι το κρίσιμο σημείο της απόδειξης: θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε τις αποστάσεις των  $U$  και  $V$  από την  $h$ .

Θα μας χρειαστεί μία επιπλέον κατασκευή. Ας συμπληρώσουμε το παραλληλόγραμμο  $OUWV$  (Σχήμα 2). Η τέταρτη κορυφή του,  $W$ , είναι επίσης ακέραιο σημείο (όπως τα  $O$ ,  $U$  και  $V$ ), αφού οι συντεταγμένες του είναι το άθροισμα των αντίστοιχων συντεταγμένων των  $U$  και  $V$ .

Από την ιδιότητα του τριγώνου  $OUV$  που αναφέραμε προηγουμένως έπονται τα εξής τρία γεγονότα:

1. Το παραλληλόγραμμο  $OUWV$  έχει εμβαδόν 1.
2. Το σημείο  $W$  βρίσκεται έξω από το δενδρώνα.
3. Οι συντεταγμένες του  $W$  είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί.

#### Απόδειξη του 1:

Πραγματικά, το εμβαδόν του  $OUWV$  είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου  $OUV$ . Είναι γνωστό, όμως, ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου με ακέραιες κορυφές και χωρίς άλλα ακέραια σημεία στο εσωτερικό του ή την περίμετρό του ισούται με  $1/2$ . (Αυτό είναι το βασικό λήμμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεώρηματος του Pick για το εμβαδόν ενός τυχαίου πολυγώνου με ακέραιες κορυφές —δείτε, για παράδειγμα, τις «Αποκαλυπτικές πλακοστρώσεις» στο τεύχος Σεπτεμβρίου /

Οκτωβρίου 1994 του ελληνικού *Quantum*.)<sup>2</sup>

#### Απόδειξη του 2:

Ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα  $h$  τέμνει την πλευρά  $UW$  του παραλληλόγραμμου (και όχι την  $VW$ ). Τότε το  $W$  βρίσκεται πλησιέστερα στην  $h$  από το  $V$ , επειδή το  $W$  βρίσκεται μεταξύ του  $V$  και του σημείου τομής των  $h$  και  $VW$ . (Μπορείτε επιπλέον να δείξετε ότι η απόσταση του  $W$  από την  $h$  ισούται με τη διαφορά των αποστάσεων των  $V$  και  $U$  από την  $h$ .) Αυτό σημαίνει, λόγω της επιλογής του  $V$ , ότι το  $W$  δεν ανήκει στο δενδρώνα. Τούτο το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει ακόμη κι αν η ακτίνα  $h$  διέρχεται από το  $W$ , αφού αυτή δεν έχει ακέραια σημεία μέσα στο δενδρώνα.

#### Απόδειξη του 3:

Έστω  $d$  ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των συντεταγμένων  $a$  και  $b$  του  $W$ . Τότε το σημείο  $(a/d, b/d)$  είναι ακέραιο σημείο της  $OW$ . Αν  $d \geq 2$ , τότε το σημείο αυτό θα βρισκόταν στο τρίγωνο  $OUV$ , πράγμα που, όπως γνωρίζουμε, είναι αδύνατον. Επομένως,  $d = 1$ , και τελειώσαμε.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να ολοκληρώσουμε τη λύση του προβλήματος του δενδρώνα.

Συμβολίζουμε με  $w$  το μήκος της πλευράς  $OW$  του τριγώνου  $OUW$ . Αφού το εμβαδόν αυτού του τριγώνου ισούται με  $1/2$  (γεγονός 1), το ύψος που φέρουμε από την κορυφή  $U$  —δηλαδή, η απόσταση του  $U$  από την  $OW$ — ισούται με  $(2 \cdot 1/2)/w = 1/w$ . Η απόσταση του  $V$  από την  $OW$  είναι, φυσικά, η ίδια. Λόγω, όμως, των γεγονότων 2 και 3 και του ορισμού του  $\ell$ , έχουμε  $w \geq \ell$ . Άρα, για κάθε  $r \geq 1/\ell$ , και τα δύο δέντρα στα σημεία  $U$  και  $V$  εμποδίζουν την ακτίνα  $OW$  και, συνεπώς, κάθε ακτίνα που περιέχεται στη γωνία  $UOV$  —και ειδικότερα την ακτίνα μας  $h$ . Οπότε, για κάθε  $r > 1/\ell$  η θέα από την αρχή εμποδίζεται τελείως.

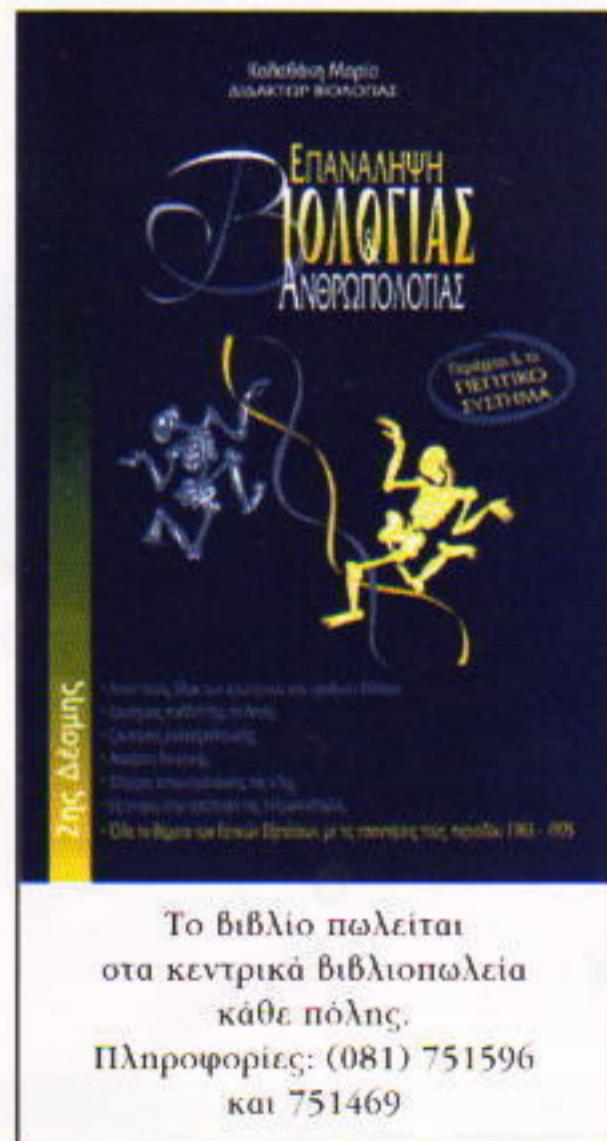
Και όχι μόνο αυτό. Το ίδιο επιχείρημα μας δείχνει ότι η ακτίνα  $h$  θα εμποδίστει ακόμη και για  $r = 1/\ell$ , αν δεν συμπίπτει με την  $OW$ . Αν μάλι-

2. Πάντως, το θεώρημα του Pick μπορεί να αποδειχτεί χωρίς αυτό το λήμμα. Τότε, το λήμμα καταλήγει να είναι μια απλή ειδική περιπτωση του θεώρηματος.

στα  $w > \ell$ , θα εμποδιστεί ακόμη και όταν συμπίπτει. Επομένως, απορένει να εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία η  $h$  διέρχεται από ένα σημείο  $L$  με θετικές σχετικά πρώτες ακέραιες συντεταγμένες ( $a, b$ ) σε απόσταση  $OL = \ell$  από την αρχή.

Θεωρούμε ένα τυχαίο ακέραιο σημείο  $M(x, y)$  του πρώτου τεταρτημορίου. Δεν ανήκει στο εσωτερικό του τμήματος  $OL$ , διότι σ' αυτή την περίπτωση θα είχαμε  $y/x = b/a$  ή  $ay = bx$  και, αφού οι  $a$  και  $b$  είναι σχετικά πρώτοι, τα  $x$  και  $y$  θα διαιρούνταν από τα  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα. Επομένως,  $x \geq a$ ,  $y \geq b$  και  $OM \geq OL$ . Αν τώρα  $N$  είναι το ακέραιο σημείο του τριγώνου  $OLM$  που βρίσκεται πλησιέστερα στην  $OL$ , τότε —με βάση το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως για το τρίγωνο  $OUV$ — το εμβαδόν του τριγώνου  $OLN$  ισούται με  $1/2$ . Συνεπώς, το εμβαδόν του  $OLM$  είναι μεγαλύτερο ή ίσο του  $1/2$  και η απόσταση του  $M$  από την  $OL$  είναι μεγαλύτερη ή ίση του  $1/\ell$ .

Έπειτα ότι ένα δέντρο με ακτίνα  $r \leq 1/\ell$  δεν μπορεί να εμποδίσει την ακτίνα  $OL$ , γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασής μας. ◻



# ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Ο ΕΓΚΕΦΑΛΟΣ

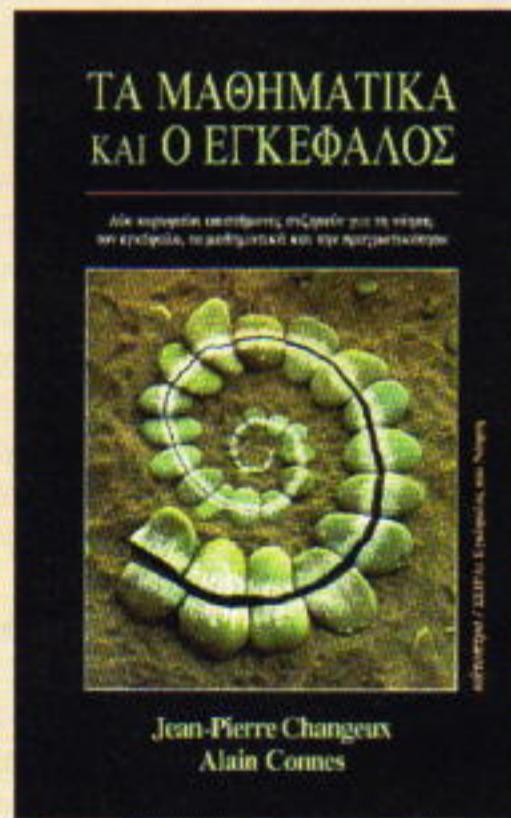
*Δύο κορυφαίοι επιστήμονες συζητούν για τη νόηση, τον εγκέφαλο,  
τα μαθηματικά και την πραγματικότητα*

**Jean-Pierre Changeux**

πρωτοπόρος νευροβιολόγος

**Alain Connes**

μαθηματικός, μετάλλιο Fields



Πώς συλλαμβάνει ο εγκέφαλος τη φυσική πραγματικότητα και πώς σχετίζεται αυτή με τα μαθηματικά; Είναι τα μαθηματικά αντικείμενα ανεξάρτητα από τον εγκέφαλο και την ανθρώπινη εμπειρία ή αποτελούν απλώς προϊόν της εγκεφαλικής λειτουργίας; Πώς οργανώνεται η υλική βάση της μαθηματικής σκέψης και ποια είναι η σχέση του δαρβινισμού και της φυσικής επιλογής με τα μαθηματικά αντικείμενα; Γιατί τα μαθηματικά χρησιμεύουν στη βιολογία και πού οφείλεται η εκπληκτική αποτελεσματικότητά τους; Θα μπορούσε να δημιουργηθεί κάποτε μια μηχανική διάνοια, μια αυθεντική τεχνητή νοημοσύνη; Είναι δυνατόν να θεμελιωθεί η ηθική σε αρχές εξίσου παγκόσμιες και καθολικές όσο εκείνες στις οποίες θεμελιώνονται τα μαθηματικά;

Σελ.: 272, Εικ.: 32, 4.400 δρχ.

Εκδόσεις κάτοπτρο

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ**

# Ο άνεμος στον υδράργυρο

Εξηγώντας την «παράδοξη» ροή ιόντων σε ορισμένα αμαλγάματα

Ivan Vorobyov

**Α**ΠΟΤΑ ΤΕΛΗ ΤΟΥ 19ΟΥ ΑΙΩΝΑ ΕΧΟΥΝ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΙ πολλά πειράματα για να μελετηθεί η αγωγιμότητα των υγρών μετάλλων. Υπό κανονικές συνθήκες σχεδόν ποτέ δεν συναντάμε μεταλλα σε υγρή φάση, πολλά όμως από αυτά μπορούν να έχουν αναμειχθεί με υδράργυρο σχηματίζοντας υγρά διαλύματα, ή «αμαλγάματα». Όσον αφορά την αγωγιμότητα των υγρών μετάλλων, το ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, εκτός από τα ηλεκτρόνια, στο ηλεκτρικό ρεύμα ουνεισφέρουν και τα ιόντα. Και όπου υπάρχει μετακίνηση ιόντων, υπάρχει και μεταφορά μάζας.

Ας προσπαθήσουμε να αντιληφθούμε ποιοτικά τι θα συμβεί αν σ' ένα γυάλινο δοχείο που περιέχει καθαρό υδράργυρο βυθίσουμε τους ακροδέκτες μιας πηγής τάσης. Γνωρίζουμε ότι ο υδράργυρος είναι μείγμα ηλεκτρόνιων και θετικών ιόντων. Εκ πρώτης όψεως, όλα είναι ξεκάθαρα: υπό τη δράση του ηλεκτρικού πεδίου, τα ηλεκτρόνια θα μετακινούνται από τον αρνητικό προς τον θετικό πόλο (ηλεκτρόδιο), ενώ τα (θετικά) ιόντα υδραργύρου θα κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση —προς τον αρνητικό πόλο. Ωστόσο, ενώ τα ηλεκτρόνια μπορούν να διαρρέουν το ηλεκτρικό κύκλωμα καθ' όλο το μήκος του, τα πράγματα μοιάζουν διαφορετικά για τα ιόντα: φτάνοντας στο αρνητικό ηλεκτρόδιο, φαίνεται ότι προσκολλώνται εκεί, αυξάνοντας τη συγκέντρωση του υδραργύρου σ' αυτό το σημείο.

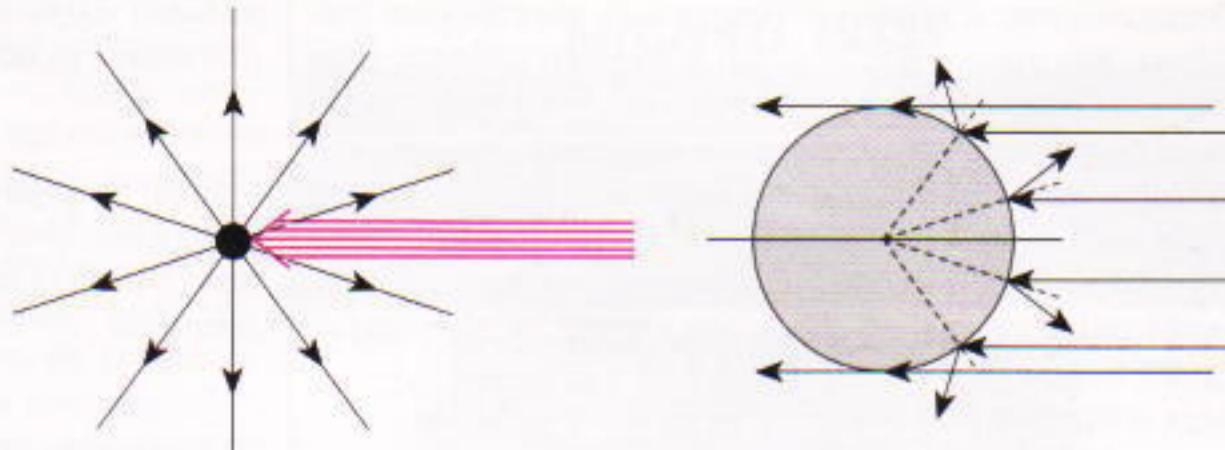
Στην πραγματικότητα, όμως, τίποτε τέτοιο δεν συμβαίνει! Πειράματα έδειξαν ότι η συγκέντρωση του καθαρού υδραργύρου στο δοχείο μένει πρακτικά η ίδια, και πως, αν υπάρχει κάποια ελαφρά αύξηση σ' αυτήν, δεν εμφανίζεται στο αρνητικό ηλεκτρόδιο αλλά στο θετικό. Σε ορισμένα αμαλγάματα τα ιόντα κινούνται όπως πρέπει —δηλαδή, κατά τη φορά που ορίζει το ηλεκτρικό πεδίο. Σε άλλα, όμως, τα ιόντα των μετάλλων «ανοίγουν δρόμο» προς την αντίθετη κατεύθυνση —αντίθετα από αυτή που ορίζει το πεδίο! Είναι καταπληκτικό: τα ιόντα κινούνται με φορά αντίθετη από τη φορά της ηλεκτρικής δύναμης που δέχονται από το πεδίο.

Τι προκαλεί αυτή την «αλλόκοτη» συμπεριφορά των



ιόντων; Είναι αλήθεια ότι μέχρι στιγμής έχουμε παραλείψει κάτι οημαντικό: τον σταθερό βομβαρδισμό των ιόντων από τα ηλεκτρόνια. Ας προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το αποτέλεσμα των αροιβαίων κρούσεων των ηλεκτρονίων και των ιόντων κατά την κίνησή τους παρουσία του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου.

Για να συλλάβουμε νοερά τι συμβαίνει, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε ιόν ως μια βαριά ελαστική μπάλα που συγκρούεται με ένα ρεύμα ελαφρύτερων σωματιδίων —δηλαδή, των ηλεκτρονίων (η μάζα ενός ιόντος είναι μερικές χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από τη μάζα ενός ηλεκτρονίου). Έστω ότι το ρεύμα των σωματιδίων έχει μέση ταχύτητα **u** πριν από την κρούση, και αντίστοιχη μη μηδενική ορμή. Μετά την κρούση τα σωματιδία σκεδάζονται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις (Σχήμα 1). Αυτό



Σχήμα 1

σημαίνει ότι ακριβώς μετά την κρούση όλες οι κατευθύνσεις κίνησης των σωματιδίων είναι εξίσου πιθανές, και επομένως η συνισταμένη ορμή τους είναι μηδενική. Εφόσον δε η ορμή του ρεύματος των σωματιδίων μεταβάλλεται εξαιτίας των συγκρούσεων με τις βαριές ελαστικές μπάλες, οι τελευταίες θα ασκούν δύναμη πάνω στα σωματιδία.

Έστω **u**, λοιπόν, η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο ρεύμα, και **mu** η μέση ορμή κάθε ηλεκτρονίου. Έστω ακόμη **t** ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων ενός ηλεκτρονίου με ιόντα, τον οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ίσο με το χρόνο που απαιτείται για να μηδενιστεί η ορμή του. Έτοι, η μέση δύναμη που ασκείται σ' ένα ηλεκτρόνιο κατά την κρούση του με ένα ιόν ισούται με

$$\mathbf{f} = -\frac{mu}{t}.$$

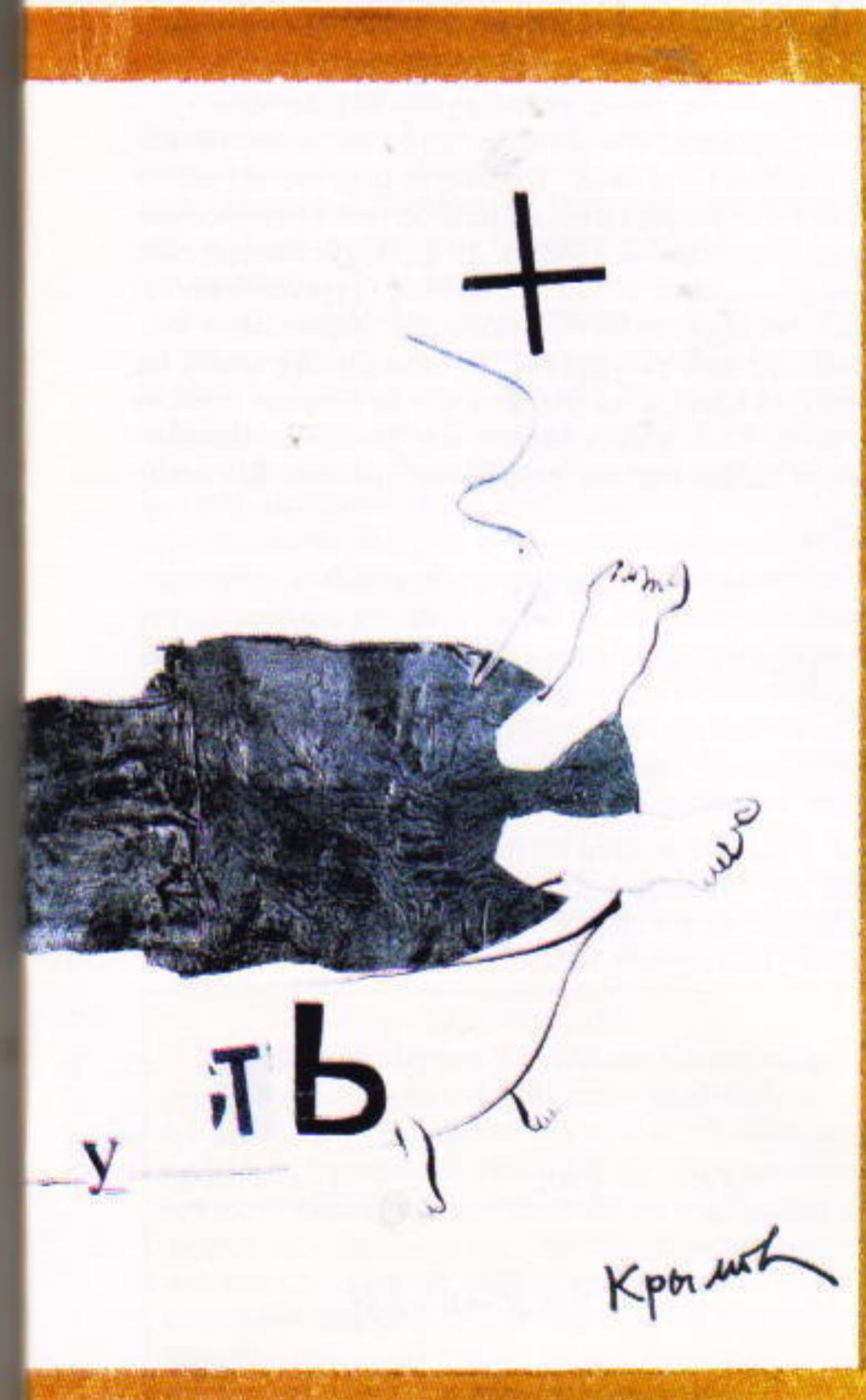
Η απώλεια της ορμής των ηλεκτρονίων που οφείλεται στις κρούσεις με τα ιόντα, θεωρούμενη συνολικά, περιγράφεται από τη μέση δύναμη πέδησης **f**. Αυτή η δύναμη δεν είναι απαραίτητο να δρα σε κάθε συγκεκριμένο ηλεκτρόνιο, αλλά εκφράζει τη μέση δύναμη που είναι υπεύθυνη για την κίνηση του ρεύματος ως συνόλου.

Είναι αλήθεια ότι, εκτός από την προσανατολισμένη κίνηση με μέση ταχύτητα **u**, τα ηλεκτρόνια συμμετέχουν επίσης σε μια χαοτική θερμική κίνηση. Ωστόσο, αυτό δεν μεταβάλλει την τιμή της δύναμης πέδησης. Κατά τη θερμική κίνηση, η συνολική ορμή ενός μεγάλου πλήθους ηλεκτρονίων ισούται πάντα με μηδέν· επομένως, η μεταβολή της συνολικής ορμής των ηλεκτρονίων οχετίζεται μόνο με την απώλεια ορμής στην προσανατολισμένη τους κίνηση.

Όταν υπάρχει ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο **E**, τα «σκεδασμένα» ηλεκτρόνια ισθούνται από αυτό προς μια καθορισμένη κατεύθυνση, και αποκτούν κάποια ορμή. Αυτή η ορμή χάνεται με την επόμενη κρούση, αναπληρώνεται από το ηλεκτρικό πεδίο, κ.ο.κ. Έτοι, μπορεί κανείς να πει ότι εδραιώνεται μια σταθερή μέση ταχύτητα για το ρεύμα των ηλεκτρονίων. Με άλλα λόγια, η συνισταμένη δύναμη που δρα στο ρεύμα των ηλεκτρονίων ισούται με μηδέν. Για ένα μοναδικό ηλεκτρόνιο, αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$eE + f = 0.$$

Πράγματι, αν η δύναμη **eE** του πεδίου υπερβεί τη δύ-



ναμη πέδησης  $f$ , η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων αυξάνει, και ομοίως αυξάνει και η δύναμη πέδησης (που είναι ευθέως ανάλογη της ταχύτητας), έως ότου η συνισταμένη δύναμη να μηδενιστεί και πάλι. Αν, από την άλλη, η ταχύτητα γίνει συμπτωματικά τόσο μεγάλη και η δύναμη πέδησης  $f$  υπερβεί την ελκτική δύναμη  $eE$ , το τεύμα θα επιβραδυνθεί έως ότου η δύναμη  $f$  εξισωθεί κατά μέτρο με την  $eE$ . Έτοι, για κίνηση με εδραιωμένη μέση ταχύτητα (όταν η συνισταμένη δύναμη ισούται με μηδέν), η δύναμη πέδησης ενός ιόντος υπολογισμένη ανά ηλεκτρόνιο είναι

$$\mathbf{f} = -e\mathbf{E} \quad (1) \quad \text{Σχήμα 2}$$

(βλ. Σχήμα 2).

Γιατί, όμως, δεν λαμβάνουμε υπόψη μας τις κρούσεις μεταξύ των ηλεκτρονίων; Διότι δεν επηρεάζουν τη μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων. Πραγματικά, θεωρήστε τη σύγκρουση μεταξύ δύο ηλεκτρονίων. Εστω ότι οι ταχύτητές τους πριν από και μετά την κρούση είναι αντίστοιχα  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$ , και  $\mathbf{v}'_1$  και  $\mathbf{v}'_2$ . Από το νόμο διατήρησης της ορμής έχουμε

$$m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2,$$

απ' όπου προκύπτει

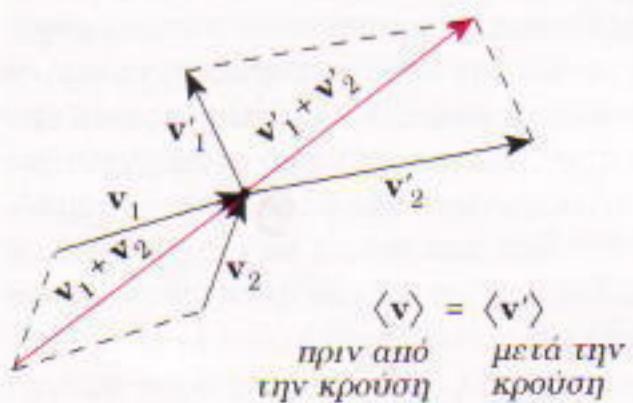
$$\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} = \frac{\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2}{2}$$

—δηλαδή, η μέση ταχύτητα πριν από την κρούση ισούται με τη μέση ταχύτητα ύστερα από αυτήν (Σχήμα 3).

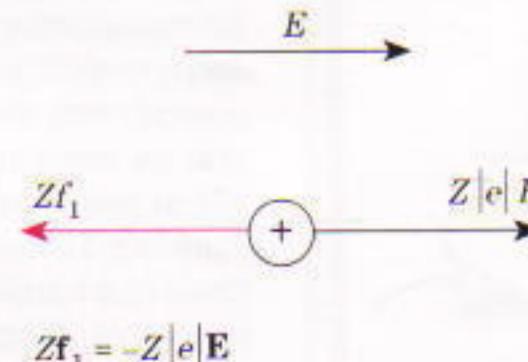
Και ποιες δυνάμεις ασκούνται στα ιόντα; Ας θεωρήσουμε ένα καθαρό μέταλλο του οποίου τα ιόντα είναι όλα ομοια, και κάθε άτομο «συνεισφέρει»  $Z$  ηλεκτρόνια αγωγιμότητας. Το ηλεκτρικό πεδίο επιδρά πάνω σε κάθε ιόν με μια δύναμη  $Z|e|\mathbf{E}$ , όπου  $Z|e|$  είναι το φορτίο του ιόντος (παίρνουμε την απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου, επειδή το ιόν έχει θετικό φορτίο). Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, κατά μέσον όρο κάθε ηλεκτρόνιο ασκεί μια δύναμη

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}.$$

Αν το πλήθος των ιόντων είναι  $N$ , τότε σε κάθε ιόν ασκείται από κάθε ηλεκτρόνιο δύναμη  $\mathbf{f}_1/N$ . Έτοι, η δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα ιόν από όλα τα ηλεκτρόνια (συ-



Σχήμα 3



Σχήμα 4

νολικού πλήθους  $ZN$ ) είναι ίση με  $Zf_1$ . Παρ' όλα αυτά, η συνισταμένη δύναμη,

$$\mathbf{F} = Z|e|\mathbf{E} + Zf_1,$$

ισούται με μηδέν (Σχήμα 4)! Για να πειστείτε επ' αυτού, αντικαταστήστε την τιμή της δύναμης  $f_1$  από την εξισώση (1), μια και αυτή διαφέρει από την  $f$  μόνο ως προς το πρόσημο:

$$\mathbf{F} = Z|e|\mathbf{E} + Ze\mathbf{E} = 0.$$

Έτοι, οι δυνάμεις τις οποίες ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στα ιόντα ενός καθαρού μετάλλου εξουδετερώνονται από τις δυνάμεις του «ανέμου των ηλεκτρονίων» (ο οποίος οφείλεται στα κινούμενα ηλεκτρόνια). Το γεγονός ότι η συνισταμένη δύναμη ισούται με μηδέν σημαίνει είτε κατάσταση ηρεμίας είτε ομαλής κίνησης. Παρ' όλα αυτά, η ροή ενός ρευστού μέσα σ' ένα δοχείο συνεπάγεται εσωτερική τριβή (που σε τελική ανάλυση προκαλείται από την αλληλεπίδραση με τα τοιχώματα του δοχείου), και αυτή η τριβή διασφαλίζει την κατάσταση ηρεμίας του ρευστού ως προς το δοχείο όταν όλες οι άλλες δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό αλληλοεξουδετερώνονται.

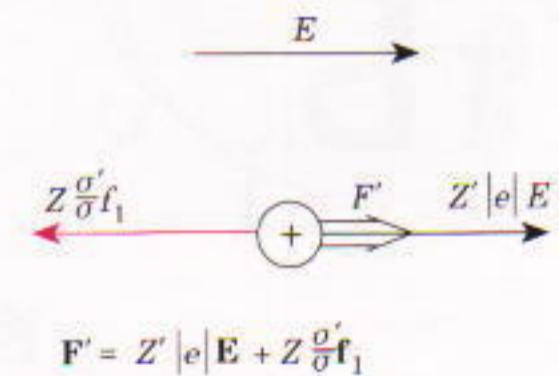
Τι συμβαίνει, όμως, αν υπάρχουν κάποια «ξένα» ιόντα (προσμείξεις) στο μέταλλο; Έστω ότι το φορτίο του ξένου ιόντος είναι  $|e|Z'$ . Εφόσον το μέγεθος των συγκρούσεων του με τα ηλεκτρόνια αλλάζει. Αν η ενεργός διατομή ενός ξένου ιόντος είναι  $\sigma'$  και εκείνη ενός «γηγενούς» ιόντος είναι  $\sigma$ , το ξένο ιόν θα υφίσταται  $\sigma/\sigma'$  περισσούτερες συγκρούσεις από το γηγενές. Η δύναμη την οποία θα ασκούν τα ηλεκτρόνια στο ξένο ιόν θα διαφέρει κατά το ίδιο ποσό. Έτοι, η συνισταμένη των δυνάμεων του ηλεκτρικού πεδίου και του ανέμου των ηλεκτρονίων ισούται με

$$\mathbf{F}' = Z'|e|\mathbf{E} + Z \frac{\sigma'}{\sigma} \mathbf{f}_1$$

(βλ. Σχήμα 5). Ανικαθιστώντας το  $-|e|\mathbf{E}$  στην  $\mathbf{f}_1$  παίρνουμε

$$\mathbf{F}' = |e| \left( Z' - Z \frac{\sigma'}{\sigma} \right) \mathbf{E}.$$

Αν  $Z' > Z(\sigma'/\sigma)$ , τα ξένα ιόντα θα κινηθούν κατά τη φορά αυτής της δύναμης —η ταχύτητά τους θα έχει τη φορά του πεδίου. Αν  $Z' < Z(\sigma'/\sigma)$ , τα ιόντα θα κινηθούν με φορά αντίθετη εκείνης του πεδίου.



Σχήμα 5

Πώς μπορούμε λοιπόν να ερμηνεύσουμε το γεγονός ότι σε καθαρό υδράργυρο τα ιόντα κινούνται προς την κατεύθυνση του ανέμου των ηλεκτρονίων; Μόλις αποδείξαμε ότι τα ιόντα καθαρού μετάλλου πρέπει να είναι ακίνητα! Ιδού η παγίδα: υποθέσαμε ότι όλα τα ιόντα του είναι πανομοιότυπα, όμως αυτό δεν είναι ακριβές. Παρότι τα περισσότερα ιόντα του βρίσκονται όντως στην ίδια «κανονική» ενεργειακή κατάσταση, οριομένα έχουν πάντοτε μεγαλύτερη ενέργεια. Αυτά είναι τα λεγόμενα «ενεργοποιημένα» ιόντα. Η πιθανότητα κρούσης ηλεκτρονίου-ιόντος αυξάνει ανάλογα με την ενέργεια των ιόντων. Έτσι, τα ενεργοποιημένα ιόντα μπορούν να θεωρηθούν «ξένα» —έχουν το ίδιο φορτίο με ένα κανονικό ιόν, όμως έχουν μεγαλύτερη ενεργό διατομή. Αυτά τα ιόντα θα «παρασύρονται» από τον άνεμο ηλεκτρονίων και θα μεταφέρονται στον θετικό πόλο της πηγής τάσης.

Αυτό το φαινόμενο βρίσκεται στη βάση του διαχωρισμού των ισοτόπων υδραργύρου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Τα ιόντα διαφορετικών ισοτόπων έχουν πρακτικά το ίδιο φορτίο και την ίδια ενεργό διατομή, εξαιτίας όμως της μικρότερης μάζας τους τα ενεργοποιημένα ιόντα των ελαφρών ισοτόπων μεταφέρονται από τον άνεμο ηλεκτρονίων ταχύτερα απ' ό,τι τα ενεργοποιημένα ιόντα των βαρέων ισοτόπων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα αυξημένη συγκέντρωση των ελαφρών ισοτόπων γύρω από το θετικό ηλεκτρόδιο —δηλαδή, αν εξεταστεί υδράργυρος από την περιοχή του θετικού ηλεκτροδίου, θα βρεθεί ότι είναι εμπλουτισμένος με ελαφρά ισότοπα.

Αυτή η «παράδοξη» μετακίνηση ιόντων σε αμαλγάματα παρατηρήθηκε για πρώτη φορά το 1907. Εκείνη την περίοδο πρωτοπαρουσιάστηκε στη φυσική η έννοια της αμοιβαίας τριβής μεταξύ ιόντων και ηλεκτρονίων. Παρόλα αυτά, μεταγενέστερες θεωρίες, που επέζησαν μέχρι το 1959, αποτέλεσαν στην πραγματικότητα οπισθοδρόμηση —σύμφωνα με αυτές, οι κινήσεις ιόντων και ηλεκτρονίων ήταν ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό μπορεί εν μέρει να αποδοθεί στο γεγονός ότι τα πειραματικά δεδομένα δεν ήταν πειστικά. Το 1953 ανακαλύφθηκε ο διαχωρισμός των ισοτόπων υδραργύρου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Την ανακάλυψη αυτή ακολούθησαν έρευνες σχετικά με την ηλεκτρική μεταφορά ιόντων. Οι πρώτες θεωρητικές εργασίες που εξηγούν τον φυσικό μηχανισμό του ανέμου ηλεκτρονίων εμφανίστηκαν στις αρχές του 1959.

Έκτοτε, πολλά σημαντικά και ενδιαφέροντα φαινόμενα συνδέθηκαν με τον άνεμο ηλεκτρονίων, τόσο σε υγρά και στερεά μέταλλα όσο και σε ηλιαγωγούς.

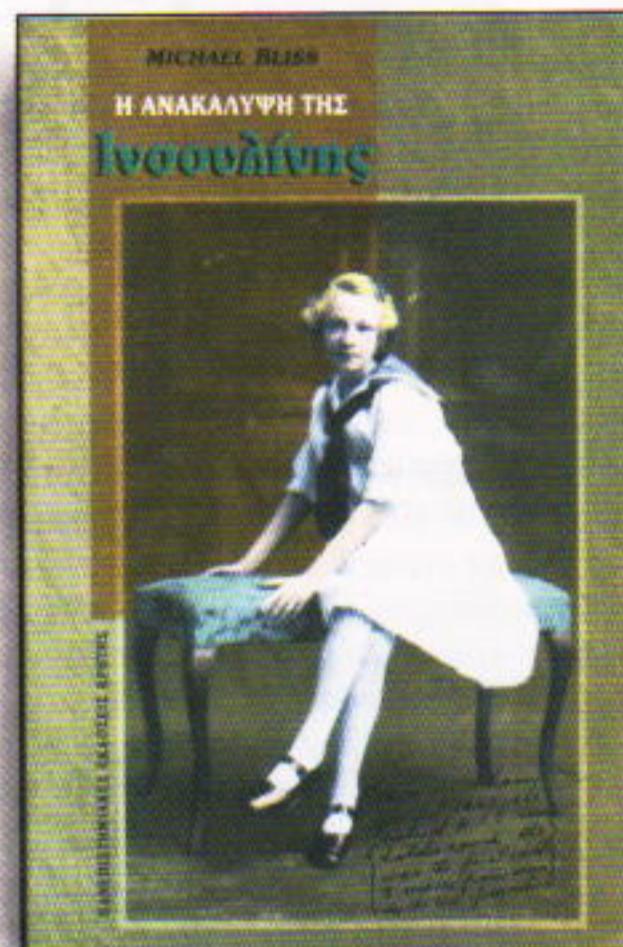
#### ΔΙΟΡΘΩΣΗ

Στη συνέντευξη του Κορνήλιου Καστοριάδη, στο προηγούμενο τεύχος του ελληνικού *Quantum*, σελ. 34, δεύτερη οικλη, έκτη αράδα από το τέλος, η πρόταση «σε κάθε προχιλμπερτιανό διάστημα, το μέτρο του αθροισματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των διανυσμάτων» πρέπει να αντικατασταθεί από την πρόταση: «σε κάθε προχιλμπερτιανό χώρο, το τετράγωνο του μέτρου του αθροισματος δύο ορθογωνίων διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των διανυσμάτων».

MICHAEL BLISS

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΗΣ

## Ινσουλίνης



**ΛΙΓΑ ΒΡΑΒΕΙΑ ΝΟΜΠΕΛ ΑΞΙΖΑΝ ΤΟΣΟ** όσο αυτό με το οποίο τιμήθηκαν το 1923 οι Καναδοί ερευνητές που ανακάλυψαν την ινσουλίνη έναν χρόνο πριν, σώζοντας εκατομμύρια ανθρώπινες ζωές και προσφέροντας έμπνευση σ' όλη τη μετέπειτα ιατρική έρευνα. Άλλα λίγα, επίσης, βραβεία Νομπελ ξεσήκωσαν τέτοιο σάλο και τόσες αντιδικίες. Πώς όμως ευτύχησαν οι ερευνητές του Τορόντο εκεί όπου απέτυχαν, αν και τόσο πολύ πλησίασαν, άλλοι πιο διάσημοι και πιο έμπειροι; Ποια υποδοχή επεφύλαξαν γιατροί και ασθενείς στη νέα ανακάλυψη; Κυρίως, όμως, ποιος πραγματικά ανακάλυψε την ινσουλίνη; Γιατί ξέσπασαν τόσο έντονες διαμάχες στην ερευνητική ομάδα του Πανεπιστημίου του Τορόντο αλλά και στον ιατρικό κόσμο της εποχής; Έχοντας στη διάθεσή του αρχειακό υλικό, εργαστηριακά τετράδια και συνεντεύξεις από επιζήσαντες εκείνης της εποχής, ο ιστορικός Michael Bliss συνθέτει μια συναρπαστική αφήγηση ενός από τα σημαντικότερα «επεισόδια» στην ιστορία των ιατρικών ανακαλύψεων.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ**

ΑΘΗΝΑ: Μάνης 5, Τ.Κ. 106 81 Τηλ. 3618372, Fax: 3301583

# Η μαγεία του $3 \times 3$

Η ερώτηση των 100\$: μπορείτε να κατασκευάσετε ένα μαγικό τετράγωνο με τέλεια τετράγωνα;

Martin Gardner

**T**Ο ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΟ ΙΣΩΣ ΑΠΟ ΤΑ ΣΥΝ-  
διαστικά προβλήματα που αφο-  
ρούν αριθμούς είναι αυτό που  
ζητά την τοποθέτηση των πρώ-  
των εννέα φυσικών αριθμών σ' έναν  
 $3 \times 3$  πίνακα έτσι ώστε όλες οι γραμ-  
μές, οι στήλες και οι διαγώνιοι να  
έχουν το ίδιο άθροισμα. Αποδεικνύε-  
ται ότι, όταν δεν θεωρούμε διαφορε-  
τικές τις λύσεις που προκύπτουν από  
περιστροφές ή συμμετρίες, υπάρχει  
μία και μοναδική λύση:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Υπάρχει ο θρύλος ότι τον 23ο αιώ-  
να π.Χ. ο μυθικός βασιλιάς Γιου είδε  
αυτό το σχήμα να διαμορφώνεται από  
κηλίδες πάνω στο καβούκι μιας ιερής  
χελώνας στον ποταμό Λο. Πολλοί  
σύγχρονοι ερευνητές αμφιβάλλουν  
αν το μαγικό τετράγωνο, το *λο σου*  
όπως ονομάζεται συνήθως στην  
Κίνα, είναι τόσο παλιό. Πιστεύουν  
ότι δεν είναι παλαιότερο του 19ου  
μ.Χ.\* Όποια κι αν είναι η αλήθεια, το  
όνομα σημαίνει γραφή του ποταμού  
Λο. Οι Κινέζοι το είχαν ταυτίσει με  
τον οικείο τους κύκλο φωτός και

\* Ο πρώτος που έγραψε πραγματεία για  
μαγικά τετράγωνα είναι ο βυζαντινός λόγιος  
Μανουήλ Μοσχόπουλος (1265-1315). Το χει-  
ρόγραφό του έχει εκδοθεί το 1886 από τον Tan-  
nery, και περιλαμβάνει περιγραφή κατασκευής  
 $n \times n$  τετραγώνων για  $n = 2m + 1$  και  $n = 4m$ .  
(Σεπ.συμ.).

σκότους, το γιν και το γιανγκ. Τα  
τέσσερα άρτια ψηφία (που απεικονί-  
ζονται σκιασμένα στο παραπάνω  
σχήμα) θεωρούνται ταυτόσημα με το  
σκοτεινό γιν, και ο ελληνικός σταυ-  
ρός που σχηματίζουν τα πέντε περιτ-  
τά ψηφία αντιστοιχεί στο φωτεινό  
γιανγκ. Για πολλούς αιώνες το *λο σου*  
χρησιμοποιήθηκε ως φυλαχτό σε  
κουμήματα και άλλα αντικείμενα.

Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι  
το σχήμα είναι μοναδικό; Ο απλού-  
στερος τρόπος που γνωρίζω, αρχίζει  
με την παρατήρηση ότι το άθροισμα  
των εννέα ψηφίων είναι 45. Αφού οι  
τρεις γραμμές (ή στήλες) έχουν το  
ίδιο άθροισμα, αυτό πρέπει να είναι  
ισο με το ένα τρίτο του 45, δηλαδή 15.  
Στη συνέχεια καταγράφουμε τις  
οκτώ δυνατές τριάδες ψηφίων που  
δίνουν άθροισμα 15:

$$\begin{aligned} & 9 + 5 + 1 \\ & 9 + 4 + 2 \\ & 8 + 6 + 1 \\ & 8 + 5 + 2 \\ & 8 + 4 + 3 \\ & 7 + 6 + 2 \\ & 7 + 5 + 3 \\ & 6 + 5 + 4 \end{aligned}$$

Το ψηφίο του κεντρικού τετραγώνου  
ανήκει σε τέσσερις γραμμές. Το 5 εί-  
ναι το μοναδικό ψηφίο που εμφανί-  
ζεται σε τέσσερις από τις τριάδες,  
επομένως το 5 πρέπει να τοποθετη-  
θεί στο κέντρο. Το ψηφίο 9 ανήκει σε  
δύο μόνο τριάδες, επομένως πρέπει  
να τοποθετηθεί σε ένα από τα μεσαία  
κελιά μιας πλευράς, και το ψηφίο στο  
άλλο άκρο αυτής της γραμμής πρέ-

πει φυσικά να είναι το 1. Τα ψηφία 3  
και 7 ανήκουν επίσης σε δύο μόνο  
τριάδες. Λόγω της συμμετρίας, δεν  
έχει σημασία το πώς θα τοποθετη-  
θούν στα άλλα δύο μη γωνιακά τε-  
τράγωνα. Έτσι έχουμε:

	9	
7	5	3
	1	

Τώρα πλέον, για να ολοκληρωθεί το  
μαγικό τετράγωνο, τα άρτια ψηφία  
μπορούν να τοποθετηθούν με έναν  
μόνο τρόπο στις κενές θέσεις.

Υπάρχουν διάφοροι μνημονικοί  
κανόνες που μας επιτρέπουν να σχη-  
ματίσουμε το *λο σου* χωρίς να απο-  
μνημονεύσουμε όλο το σχήμα. Για  
μένα ο ευκολότερος είναι να τοποθε-  
τήσουμε τα άρτια ψηφία στις γωνίες  
σε αύξουσα σειρά, από αριστερά προς  
τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω.  
Τα περιττά ψηφία, τοποθετημένα επί-  
σης στη σειρά, αρχίζονται από το 9 και  
προχωρώντας προς τα πίσω, οχηματί-  
ζουν την τεθλασμένη γραμμή του  
επόμενου σχήματος:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Παρατηρήστε ότι τα 1, 2, 3 και 7, 8, 9

οχηματίζουν δύο ισοσκελή τρίγωνα, ενώ τα 4, 5, 6 ανήκουν σε μια κύρια διαγώνιο.

O R. Holmes, στο *The Mathematical Gazette* (Δεκέμβριος 1970, σελ. 376), επισήμανε μια εντυπωσιακή ιδιότητα του λο σου. Θεωρούμε κάθε γραμμή στήλη και διαγώνιο (συμπεριλαμβανομένων των τεσσάρων «διακεκομένων» διαγωνίων) ως τριψήφιους αριθμούς που τους διαβάζουμε και κανονικά και αντίστροφα. Ισχύουν τότε οι επόμενες ταυτότητες:

*οριζόντια*

$$(294 + 753 + 618)^2 = (492 + 357 + 816)^2$$

*κάθετα*

$$(276 + 951 + 438)^2 = (672 + 159 + 834)^2$$

*διαγώνια*

$$(654 + 132 + 879)^2 = (456 + 231 + 978)^2$$

$$(852 + 174 + 639)^2 = (258 + 471 + 936)^2$$

Οι ταυτότητες μένουν ανεπηρέαστες αν διαγράψουμε τα μεσαία ψηφία των αριθμών, ή και οποιοδήποτε ζεύγος άλλων αντίστοιχων ψηφίων.

Φανταστείτε ότι οχηματίζουμε μια οπείρα με το λο σου—δηλαδή, φανταστείτε ότι τυλίγουμε το τετράγωνο κατακόρυφα και οριζόντια ενώνοντας τις απέναντι πλευρές. Εντυπωσιαστηκα όταν πριν από πολλά χρόνια ανακάλυψα ότι, αν προσθέσουμε τα τέσσερα ψηφία σε καθένα από τα  $2 \times 2$  τετράγωνα που οχηματίζονται, τα αθροίσματα είναι οι εννέα διαδοχικοί αριθμοί από το 16 έως το 24.

Φυσικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρο πλήθος μαγικών τετραγώνων  $3 \times 3$  με άλλους αριθμούς, όχι υποχρεωτικά μόνο διαδοχικούς φυσικούς, αλλά και πραγματικούς αριθμούς. Για να αποφύγουμε τα τετριμένα παραδείγματα, υποθέτουμε ότι οι αριθμοί είναι όλοι διαφορετικοί ανά δύο. Για να είναι μαγικό το τετράγωνο, όμως, οι εννέα αριθμοί πρέπει να χωρίζονται σε τρεις τριάδες, τα οποία είναι των οποίων ανήκουν σε αριθμητική πρόοδο (δηλαδή, διαφέρουν κατά μία σταθερά). Επιπλέον, οι μικρότεροι αριθμοί αυτών των τριάδων πρέπει επίσης να οχηματίζουν αριθμητική πρόοδο —αν και όχι κατ' ανάγκη με την ίδια διαφορά που έχουν οι τριάδες. Μπορούμε να εκφράσουμε αυτούς τους κανόνες αλ-

γεβρικά, ως εξής:

$a + x$	$a + 2y + 2x$	$a + y$
$a + 2y$	$a + y + x$	$a + 2x$
$a + y + 2x$	$a$	$a + 2y + x$

Παρατηρήστε ότι κάθε γραμμή τριών κελιών έχει άθροισμα  $3a + 3y + 3x$ , ή  $3(a + y + x)$ , γεγονός που αποδεικνύει ότι η μαγική σταθερά είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι ο κεντρικός αριθμός ισούται με το ένα τρίτο της σταθεράς.

Έχοντας στο μυαλό μας την αλγεβρική δομή του τετραγώνου, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συναρπατική ποικιλία μαγικών τετραγώνων

βασιζόμενοι σε δεδομένους περιορισμούς. Το πλαίσιο της επόμενης σελίδας παρουσιάζει παραδείγματα τέτοιων τετραγώνων. Το καθένα από αυτά είναι το απλούστερο τετράγωνο που ικανοποιεί τους περιορισμούς, όπου ως «απλούστερο» ορίζουμε το τετράγωνο με τη μικρότερη μαγική σταθερά. Καταλαβαίνετε για ποιο λόγο δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αριθμό 2 σε μαγικά τετράγωνα με πρώτους αριθμούς;

To 1987 προσέφερα 100\$ σε όποιον θα ανακάλυπτε ένα μαγικό τετράγωνο  $3 \times 3$  που θα αποτελούνταν από διαδοχικούς πρώτους αριθμούς. Το βραβείο κέρδισε ο Harry Nelson από τα Εργαστήρια Lawrence Livermore, ο οποίος δημιούργησε το απλούστερό τέτοιο τετράγωνο χρησιμοποιώ-



Kodak Cine Automatic. *Time* / 1959  
Camera, \$125 for regular,  
wide-angle, telephoto lenses; \$124.50,  
Single-lens model, \$92.50.

## New! Kodak Cine—the automatic way to take and show your movies best

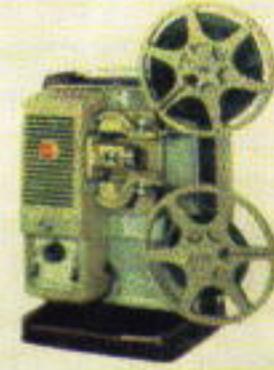
### NEW MOVIE CAMERAS SET THEMSELVES AUTOMATICALLY!

You'll get clear, beautiful movies every time with the new, sleek Kodak Cine Automatic Camera. It's the easiest—the easiest way to capture all the excitement, color, and action! Built-in electric eye automatically adjusts lens aperture for correct exposure. Built-in filter permits use of indoor Kodachrome Film室外。 Telescopic viewfinder adapts to individual eyesight, warning when there is too little light, showing when filter is in position.

For more information, contact Kodak, 343 Madison Avenue, New York, N.Y. 10017, or your local Kodak dealer.

### NEW MOVIE PROJECTORS THREW THEMSELVES AUTOMATICALLY!

The new automatic Kodak Cine Showtime Projector is the only projector that threads itself *all the way*—right through the lens�. New high-lumen lamp gives greatest screen brilliance in Kodak history. 400-foot reel capacity for full half-hour shows. Controls for forward, still, reverse action, and rewind on a single illuminated panel. Permanently lubricated. \$137.50. De luxe model with variable-speed control, AC-DC operation, and multi-spool, \$167.50.



Automatic Kodak Cine Showtime Projector, \$137.50.

EASTMAN KODAK COMPANY, Rochester 4, N.Y.

**Kodak**  
EXCELSIOR

ντας έναν υπολογιστή Cray:

1.480.028.201	1.480.028.129	1.480.028.183
1.480.028.153	1.480.028.171	1.480.028.189
1.480.028.159	1.480.028.213	1.480.028.141

Ο Martin LaBar, στο *The College Mathematics Journal* (Ιανουάριος 1984, σελ. 69), έθεσε το πρόβλημα της ύπαρξης ενός μαγικού τετραγώνου  $3 \times 3$  αποτελούμενου από τέλεια τετράγωνα. Ούτε τέτοιο τετράγωνο δεν έχει βρεθεί, αλλά ούτε απόδειξη του αδυνάτου της ύπαρξης του. Ο Nelson πιστεύει ότι υπάρχει, αλλά οι σημερινοί υπερυπολογιστές δεν έχουν τη δυνατότητα να το βρουν σε λογικό χρονικό διάστημα.

Προσφέρω, λοιπόν, 100\$ στο πρώτο άτομο που θα κατασκευάσει ένα τέτοιο τετράγωνο. Αν υπάρχει, οι αριθμοί του είναι οπωδήποτε εξωφρενικά μεγάλοι. Ο Richard Guy με πληροφόρησε ότι ο John Robertson έχει αποδείξει πως αυτή η προσπάθεια ισοδυναμεί με την εύρεση μιας ελλειπτικής καμπύλης με τρία ρητά σημεία των οποίων οι χρονικές σηματιζούν αριθμητική πρόοδο.

Ο Henry Ernest Dudeney, στο *Amusements in Mathematics* (σελ. 124-25) και στο άρθρο του για τα μαγικά τετράγωνα στην Εγκυκλοπαίδεια *Britannica* ορίζει μαγικά τετράγωνα με βάση την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαιρεση, και δίνει παραδείγματα τετραγώνων  $3 \times 3$  για κάθε είδος. Υπάρχουν επίσης αντιμαγικά τετράγωνα, με την ιδιότητα να μην έχουν ούτε δύο αθροισματα γραμμών ίσα. Οταν πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις, προκύπτει μια ποικιλία ενδιαφερόντων αντιμαγικών συνδυαστικών προβλημάτων. Αυτές οι παραλλαγές, όμως, θα αποτελέσουν το θέμα ενός άλλου άρθρου.

$c = 27$

15	1	11
5	9	13
7	17	3

περιπτοί  
ακέραιοι

$c = 30$

16	2	12
6	10	14
8	18	4

άριοι ακέραιοι  
χωρίς το μηδέν

$c = 24$

14	0	10
4	8	12
6	16	2

άριοι ακέραιοι  
με το μηδέν

$c = 111$

67	1	43
13	37	61
31	73	7

πρώτοι αριθμοί  
με το 1

$c = 177$

71	89	17
5	59	113
101	29	47

πρώτοι αριθμοί  
χωρίς το 1

$c = 3177$

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

πρώτοι σε  
αριθμητική  
πρόοδο

$c = 354$

121	114	119
116	118	120
117	122	115

διαδοχικοί  
σύνθετοι

$c = 54$

27	6	21
12	18	24
15	30	9

σύνθετοι σε  
αριθμητική  
πρόοδο

$c = 636$

222	101	313
303	212	121
111	323	202

όλοι οι αριθμοί και  
η σταθερά είναι  
παλινδρομικοί

Μαγικά τετράγωνα, τρία έπι τρία, ειδικού τύπου με τη μικρότερη σταθερά ( $c$ ). Το παλινδρομικό τετράγωνο κατασκευάστηκε από τον Rudolph Ondrejka από το Λίνγουντ του Νιου Τζέρσεϊ.

Το πιο εκπληκτικό  $3 \times 3$  μαγικό τετράγωνο που έχει ανακαλυφθεί είναι οπωδήποτε αυτό που κατασκεύασε ο Lee Sallows, ένας βρετανός ηλεκτρολόγος μηχανικός που εργάζεται στο Πανεπιστήμιο του Νάιρεχ στην Ολλανδία:

5	22	18
28	15	2
12	8	25

Είναι δύοκολο να μανιέψει την εκπληκτική του ιδιότητα (θα σας χρειαστεί και κάποια γνώση της αγγλικής γλώσσας). Για κάθε κελί, μετράμε το πλήθος των γραμμάτων της αγγλικής ονομασίας του αριθμού τον οποίο περιέχει και τοποθετούμε το κάθε πλήθος στο αντίστοιχο κελί ενός άλλου  $3 \times 3$  πίνακα. Για παράδειγμα, το 5 ("five" στα αγγλικά) έχει τέσσερα γράμματα, οπότε στην πάνω αριστερή γωνία του πίνακα τοποθετούμε το 4. Ιδού το τελικό αποτέλεσμα:

Η συνέχεια στη σελ. 72

# Η συμμετρία της τύχης

*Mια εισαγωγή στις γεωμετρικές πιθανότητες*

Nikolay Vasilyev

**T**A ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ πιθανοτήτων είναι αυτά που αναφέρονται σε τυχαία πειράματα στα οποία έχουμε πεπερασμένο πλήθος ισοπίθανων ενδεχομένων. Η υπόθεση του ισοπίθανου σε τέτοια πειράματα βασίζεται συνήθως στην εαωτερική τους συμμετρία. Σ' αυτό το άρθρο θα ασχοληθούμε με ένα άλλο είδος προβλημάτων, στα οποία επίσης μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες στηριζόμενοι σε συμμετρίες, αλλά έχουμε άπειρο πλήθος στοιχειώδων ενδεχομένων, τα οποία θα αντιπροσωπεύονται από σημεία σ' ένα επίπεδο συντεταγμένων.

Ιδού δύο παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων.

**To πρόβλημα της συνάντησης.** Δύο φίλοι έχουν συμφωνήσει να βρεθούν στην Κόκκινη Πλατεία κάποια στιγμή στο διάστημα μεταξύ 5.00 μ.μ. και 6.00 μ.μ. Ο καθένας τους φτάνει κάποια τυχαία στιγμή, περιμένει για 20 λεπτά, και αν δεν έρθει ο άλλος, φεύγει. Ποια είναι η πιθανότητα να συναντηθούν;

**To πρόβλημα του οξυγώνιου τριγώνου.** Επιλέγουμε τυχαία τρία σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι οξυγώνιο το τρίγωνο που έχει κορυφές τα τρία σημεία;

Ας ξεκινήσουμε, όμως, με απλούστερα, «πεπερασμένα» παραδείγματα, που θα μας βοηθήσουν να παρουσιάσουμε (ή να εισαγάγουμε) μερικές θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων.

## Ρίχνοντας ένα ζάρι

Η καλύτερη μέθοδος εξοικείωσης με τις πιθανότητες είναι το παιχνίδι με ζάρια.

Αφού ο κύβος είναι γεωμετρικά συμμετρικός, μπορούμε φυσιολογικά να υποθέσουμε ότι και οι έξι έδρες του έχουν την ίδια πιθανότητα να έρθουν από την πάνω μεριά (υποθέτουμε, βέβαια, ότι το ζάρι μας είναι «τίμιο»). Έτσι, η πιθανότητα να φέρουμε, ας πούμε, 6 είναι  $1/6$ . Η πιθανότητα να φέρουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3 είναι  $4/6 = 2/3$ , ενώ η πιθανότητα να φέρουμε περιττό αριθμό είναι  $1/2$ . (Τα αντίστοιχα γεγονότα —σύνολα «ευνοϊκών ενδεχομένων»— συμβολίζονται με κόκκινο χρώμα στις γραμμές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ , αντίστοιχα, του Σχήματος 1.)

Αν δεν έχουμε ζάρι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μολύβι με έξι έδρες, πάνω στις οποίες γράφουμε τους αριθμούς 1 έως 6. Και εύκολα μπορούμε να φανταστούμε ένα μολύβι με οποιοδήποτε πλήθος  $n$  εδρών.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συσκευή η οποία, αφού τεθεί σε λειτουργία, μπορεί να καταλήξει σε  $n$  ισοπίθανα αποτελέσματα. Τότε, εξ ορισμού, η πιθανότητα καθενός αποτελέσματος είναι  $1/n$ , ενώ η πιθανότητα ενός ενδεχομένου  $A$  που απαρτίζεται από  $k$  αποτελέσματα ισούται με  $k/n$ .

Φυσικά, όταν το  $n = 6$ , είναι εύκολο να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα και να απαριθμήσουμε τα απαιτούμενα ενδεχόμενα. Όταν, όμως, το

π είναι μεγάλο, είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε κάποιους κανόνες για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες.

Ας συμβολίσουμε με  $p(A)$  την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ . Γενικά, ενδεχόμενο είναι απλώς ένα υποσύνολο του συνόλου  $S$  όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ( $p(S) = 1$ , φυσικά). Όταν ρίχνουμε το ζάρι μια μόνο φορά, το  $S$  αποτελείται από τα έξι στοιχεία  $1, 2, \dots, 6$ . Οι απλούστερες σχέσεις μεταξύ των πιθανοτήτων προκύπτουν από σχέσεις μεταξύ συνόλων —ή, για να είμαστε ακριβέστεροι— μεταξύ του πλήθους των στοιχείων τους.

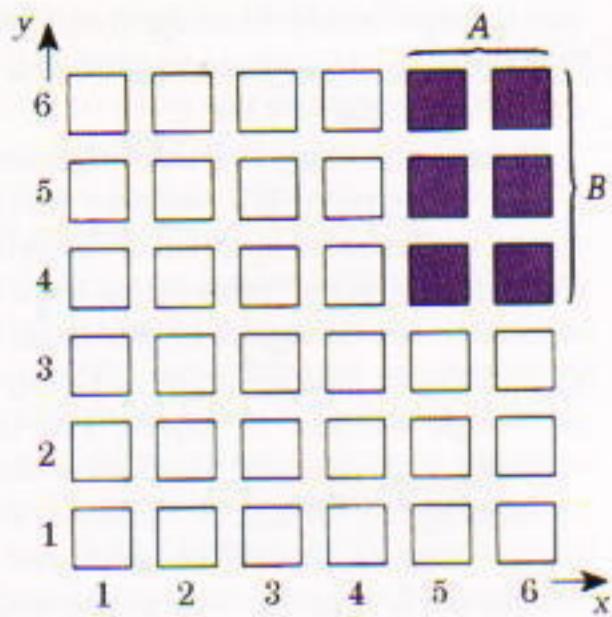
Η πιθανότητα του ενδεχομένου  $\bar{A}$  —του συμπληρώματος του  $A$  (που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του  $S$  τα οποία δεν ανήκουν στο  $A$ )— ισούται με

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A). \quad (1)$$

Αν, για παράδειγμα, το  $A$  είναι το ενδεχόμενο «ο αριθμός που ήρθε στο

	•	•	•	•	•	•
$\alpha$						
$\beta$						
$\gamma$						
$\delta$	1	2	3	4	5	6
Σχήμα 1						





Σχήμα 2

Ζάρι διαιρείται με το 3<sup>o</sup> —δηλαδή, τα στοιχεία του είναι το 3 και το 6—, τότε το  $\bar{A}$  αποτελείται από τους αριθμούς που δεν διαιρούνται με το 3. Έτοι,  $p(A) = 1/3$  και  $p(\bar{A}) = 4/6 = 1 - 1/3 = 2/3$  (στο Σχήμα 1δ, τα αποτέλεσμα που απαρτίζουν το  $A$  είναι κόκκινα, ενώ με μπλε χρώμα συμβολίζουμε το  $\bar{A}$ ).

Η ένωση  $A \cup B$  των  $A$  και  $B$  είναι το ενδεχόμενο που συνιστάται στην εμφάνιση ενός από τα δύο ενδεχόμενα: το ενδεχόμενο  $A$  ή το ενδεχόμενο  $B$ . Αν τα δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα —δηλαδή, αν τα ούνολα  $A$  και  $B$  είναι ξένα—, τότε ισχύει προφανώς ο εξής κανόνας πρόσθεσης:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B). \quad (2)$$

Αν τα δύο ενδεχόμενα είναι συμβίβαστα —δηλαδή, όταν η τομή τους δεν είναι κενή—, τότε

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB). \quad (3)$$

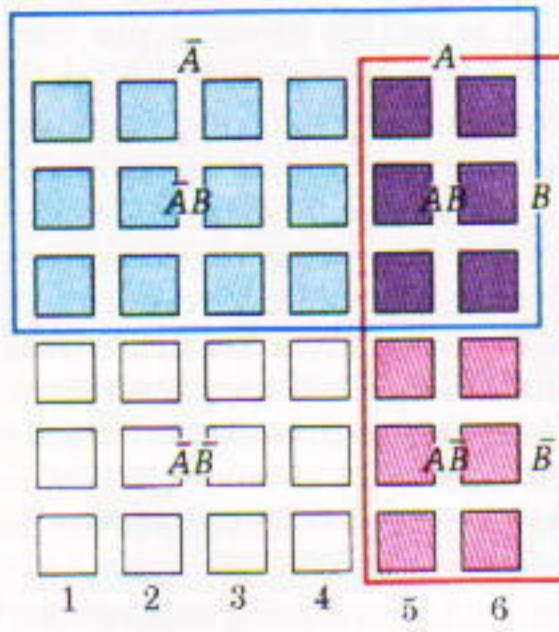
(Η τομή των  $A$  και  $B$  —το ενδεχόμενο που συνιστάται στην εμφάνιση και του  $A$  και του  $B$ — στη θεωρία των πιθανοτήτων συμβολίζεται απλώς με  $AB$ .)

## Επανειλημμένες δοκιμές

Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δύο φορές ή ότι ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο ζάρια. Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε δύο ανεξάρτητες δοκιμές.

**Πρόβλημα 1.** Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει την πρώτη φορά αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 5 και τη δεύτερη μεγαλύτερος ή ίσος του 4;

Το ούνολο  $S$  αποτελείται σ' αυτή την περιπτώση από ζεύγη  $(x, y)$ , όπου  $x, y$  αριθμοί από το 1 έως το 6. Το  $x$



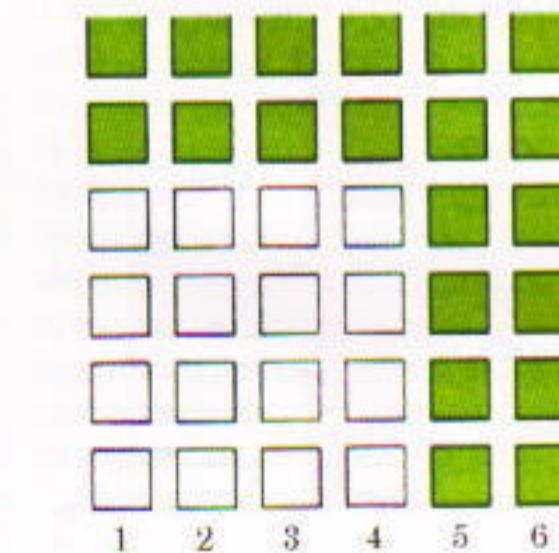
Σχήμα 3

είναι ο αριθμός που φέρνουμε με το πρώτο ζάρι, ενώ για αριθμός του δεύτερου. Τα ζεύγη  $(x, y)$  είναι όλα ισοπίθανα και υπάρχουν ουνολικά  $6 \cdot 6 = 36$  τέτοια ζεύγη. Θα μας διευκολύνει να τα παραστήσουμε ως έναν  $6 \times 6$  τετραγωνικό πίνακα. Ένα μοναδιαίο κελί αυτού του πίνακα με συντεταγμένες  $x$  και  $y$  αντιπροσωπεύει το ζεύγος  $(x, y)$  (Σχήμα 2). Πρέπει να βρούμε τα κελιά που ικανοποιούν τη συνθήκη  $x \geq 5$  και  $y \geq 4$ . Αυτά οχηματίζουν ένα ορθογώνιο με διαστάσεις  $2 \times 3$  κελιά. Επομένως, 6 από τα κελιά είναι «ευνοϊκά», και η πιθανότητα είναι

$$6/36 = 1/6.$$

Γενικά, όταν ένα γεγονός  $A$  καθορίζεται από το αποτέλεσμα της πρώτης δοκιμής, ενώ το  $B$  από αυτό της δεύτερης (δηλαδή, αν  $A$  είναι κάποιο ούνολο στηλών και  $B$  κάποιο ούνολο γραμμών του πίνακα μας), τότε η πιθανότητα της ταυτόχρονης εμφάνισης των  $A$  και  $B$  βρίσκεται μέσω του κανόνα πολλαπλασιασμού

$$p(AB) = p(A)p(B). \quad (4)$$



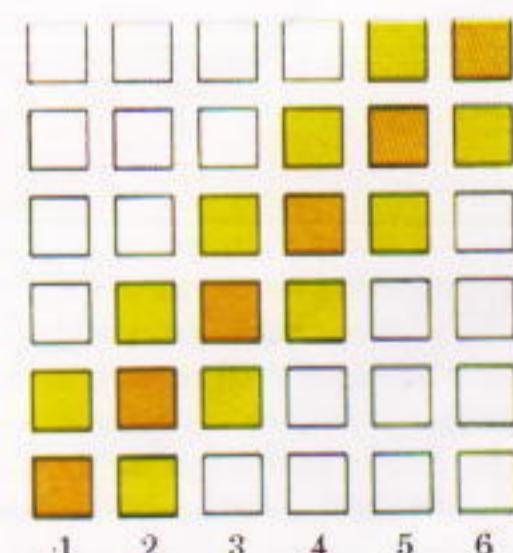
Σχήμα 4

Όπως βλέπουμε από το Σχήμα 3, αυτή η ιδότητα σημαίνει ότι ο λόγος των πιθανοτήτων των ενδεχόμενων  $B$  και  $\bar{B}$  παραμένει ο ίδιος ανεξάρτητα από το αν συμβαίνει ή όχι το ενδεχόμενο  $A$ . Αυτό ακριβώς εννοούμε με την ανεξάρτητησα στις πιθανότητες: ο κανόνας πολλαπλασιασμού θωρείται ο ορισμός της ανεξάρτησης δύο ενδεχόμενων  $A$  και  $B$  που δεν συνδέονται αναγκαστικά με επανειλημμένες δοκιμές. Αυτός ο τύπος εφαρμόζεται επίσης στην περίπτωση που τα ανεξάρτητα γεγονότα είναι περιοσύτερα από δύο. Για παράδειγμα, η πιθανότητα να φέρουμε ένα 5 ή ένα 6 και τις τρεις φορές που ρίχνουμε ένα ζάρι είναι  $(1/3)^3 = 1/27$ .

Φυσικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα πολλαπλασιασμού μόνο όταν το ενδεχόμενο του οποίου την πιθανότητα αναζητούμε μπορεί να εκφραστεί ως η τομή δύο ανεξάρτητων γεγονότων. Ας θεωρήσουμε δύο κάπως πιο περίπλοκα παραδείγματα που βασίζονται στο ίδιο ούνολο αποτέλεσμάτων (το ούνολο των ζευγών  $(x, y)$ ,  $1 \leq x, y \leq 6$ ).

**Πρόβλημα 2.** Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 5 τουλάχιστον μία φορά;

Τα αντίστοιχα ζεύγη είναι χρωματισμένα πράσινα στο Σχήμα 4, επομένως η απάντηση είναι  $20/36 = 5/9$ . Μπορούμε επίσης να αναπαραστήσουμε το συγκεκριμένο ενδεχόμενο ως την ένωση  $A_1 \cup A_2$ , όπου  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) είναι «το αποτέλεσμα της  $i$ -οστής ζαριάς είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5». Τότε, σύμφωνα με τον κανόνα πρόσθεσης (3) και λόγω της ανεξάρτησης των  $A_1$  και  $A_2$  έχουμε



Σχήμα 5

$$\begin{aligned} p(A_1 \cup A_2) &= p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 A_2) \\ &= 1/3 + 1/3 - 1/3 \cdot 1/3 \\ &= 5/9. \end{aligned}$$

Μια εναλλακτική λύση είναι να θεωρήσουμε τη συμπληρωματική πιθανότητα  $\bar{p}$ , να φέρουμε το πολύ 4 και την πρώτη και τη δεύτερη φορά. Με αυτό τον τρόπο έχουμε την τομή δύο ανεξάρτητων ενδεχομένων και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα πολλαπλασιασμού για την  $\bar{p}$ . Έτσι, η πιθανότητα που χρειαζόμαστε ισούται με

$$1 - \bar{p} = 1 - (2/3)^2 = 1 - 4/9 = 5/9.$$

**Πρόβλημα 3.** Ρίχνουμε δύο φορές ένα ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα να διαφέρουν οι δύο αριθμοί το πολύ κατά 1;

Τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν παρουσιάζονται χρωματισμένα στο Σχήμα 5 —είναι τα 6 κελιά της διαγωνίου  $x = y$  και οι δύο παράλληλες γραμμές δίπλα της, που αποτελούνται από 5 κελιά. Επομένως, η απάντηση είναι  $16/36 = 4/9$ .

### Τυχαίοι αριθμοί και σημεία: ομοιόμορφη κατανομή

Ας εξετάσουμε τώρα τυχαία σημεία σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα, έναν κύκλο, ένα τετράγωνο... Πώς ορίζονται οι πιθανότητες σ' αυτή την περίπτωση; Ποια «ενδεχόμενα» μπορούμε να θεωρήσουμε;

Ας κυλήσουμε ένα στρογγυλό (κυλινδρικό) μολύβι σ' ένα τραπέζι. Φανταστείτε ότι η επιφάνειά του είναι κίτρινη, αλλά μία λωρίδα (ή περισσότερες) συνολικού πλάτους  $a$  είναι χρωματισμένη κόκκινη (Σχήμα 6). Ποια είναι η πιθανότητα να στα-

θεί το μολύβι πάνω σε μία από τις κόκκινες λωρίδες του; (Εδώ το  $a$  είναι ένα τόξο ή μία γωνία που μετράμε, για παράδειγμα, σε ακτίνια.)

Ας υποθέσουμε ότι το μολύβι δεν είναι στρογγυλό, αλλά ότι έχει μεγάλο πλήθος πλευρών, έστω  $n$ , από τις οποίες οι  $k$  είναι κόκκινες. Τότε, η πιθανότητα που ζητάμε ισούται με  $k/n$ . Στην περίπτωση του στρογγυλού μολυβιού το σύνολο  $S$  των αποτελεσμάτων είναι ένας κύκλος και η πιθανότητα καθενός συγκεκριμένου αποτελέσματος —η πιθανότητα να σταματήσει σε μία συγκεκριμένη ευθεία— είναι μηδέν. Η πιθανότητα, όμως, να σταματήσει σε μία από τις κόκκινες γραμμές πρέπει φυσιολογικά να ισούται με το λόγο  $a/360^\circ$ .

Παρόμοια, όταν λέμε ότι επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα (ή σ' έναν κύκλο) μήκους  $L$ , εννοούμε ότι η πιθανότητα να ανήκει το σημείο που επιλέγουμε σε τυχαίο τμήμα (ή τόξο) μήκους  $d$  είναι  $d/L$ . Μπορούμε να εκφράσουμε το ίδιο πράγμα διαφορετικά λέγοντας ότι τα σημεία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο ευθύγραμμο τμήμα (ή στο τόξο). Σύμφωνα με τον κανόνα πρόσθεσης, όταν έχουμε ένα πλήθος ξένων μεταξύ τους τμημάτων συνολικού μήκους  $d$ , η πιθανότητα να ανήκει το σημείο μας σε κάποιο από αυτά είναι επίσης  $d/L$ . Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, έναν τυχαίο αριθμό στο διάστημα  $[0, 1]$ . Η πιθανότητα να είναι πρώτος αριθμός το πρώτο ψηφίο μετά την υποδιαστολή —δηλαδή να είναι 2, 3, 5 ή 7— ισούται με  $4/10 = 2/5$  (στο Σχήμα 7 τα σημεία που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη είναι χρωματισμένα κόκκι-

να: τα σημεία του διαστήματος  $[0,5, 0,6]$  έχουν αμέσως μετά την υποδιαστολή το ψηφίο 5, κ.ο.κ.).

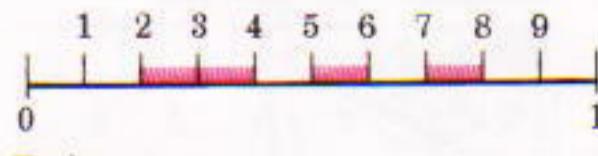
Η επιλογή ενός τυχαίου σημείου σ' ένα τετράγωνο ή σε κάποιο άλλο σχήμα εμβαδού  $A$  ορίζεται ανάλογα: υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να ανήκει ένα τέτοιο σημείο σε μία περιοχή εμβαδού  $a/A$  ισούται με  $a/A$ . Επομένων με ότι και το μήκος και το εμβαδόν ικανοποιούν τους κανόνες πρόσθεσης (1), (2) και (3) (φυσικά, το 1 στον τύπο (1) πρέπει να αντικατασταθεί με  $L$  ή με  $A$  —το μέτρο του ευθύγραμμου τμήματος ή του επίπεδου σχήματος). Ο κλάδος της θεωρίας πιθανοτήτων που μελετά προβλήματα σχετικά με την επιλογή τυχαίων σημείων ονομάζεται θεωρία γεωμετρικών πιθανοτήτων.

Μέσω των τυχαίων σημείων μπορούμε να δώσουμε μια όμορφη γεωμετρική ερμηνεία της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων. Ας θεωρήσουμε δύο τυχαίους αριθμούς  $x$  και  $y$  που επιλέγονται ανεξάρτητα από το διάστημα  $[0, 1]$ . Αυτούς μπορούμε να τους θεωρήσουμε ως ένα τυχαίο σημείο  $(x, y)$  του μοναδιαίου τετραγώνου  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Η πιθανότητα να ανήκει το  $x$  σ' ένα διάστημα μήκους  $a$  και το  $y$  σ' ένα διάστημα μήκους  $b$  ισούται, βάσει του κανόνα πολλαπλασιασμού, με το γινόμενο  $ab$ , το οποίο δεν είναι παρά το εμβαδόν της τομής των δύο λωρίδων που αντιπροσωπεύουν αυτά τα ενδεχόμενα (ένα ορθογώνιο  $a \times b$  με πλευρές παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων). Με άλλα λόγια, ισούται με την πιθανότητα να ανήκει το σημείο  $(x, y)$  σ' αυτό το ορθογώνιο.

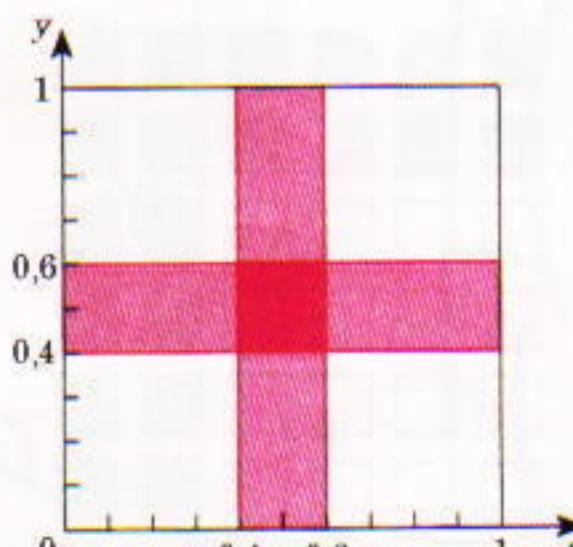
Για παράδειγμα, η πιθανότητα να



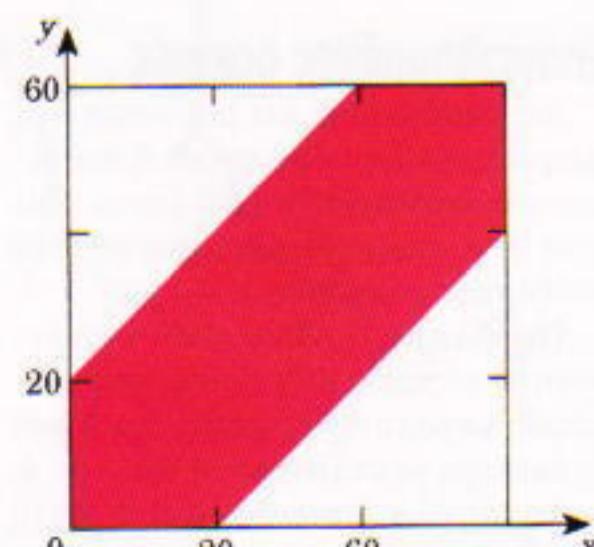
Σχήμα 6



Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9

απέχει ένας τυχαίος αριθμός του διαστήματος  $[0, 1]$  το πολύ  $0,1$  μονάδες από το μέσο του διαστήματος ισούται με  $0,2$  (τα ζητούμενα σημεία καλύπτουν το διάστημα από το  $0,4$  έως το  $0,6$ ). Αν  $x$  και  $y$  είναι δύο τυχαίοι αριθμοί του διαστήματος  $[0, 1]$ , η πιθανότητα να απέχουν και οι δύο το πολύ  $0,1$  μονάδες από το σημείο  $0,5$  ισούται με  $0,2^2 = 0,04$ , ενώ η πιθανότητα να ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη του λάχιστον ο ένας από τους δύο είναι  $0,36$  (Σχήμα 8). Μπορούμε να υπολογίσουμε την τελευταία πιθανότητα προσθέτοντας τα εμβαδά των ορθογωνίων που απαρτίζουν το «σταυρό» του Σχήματος 8 μέσω του τύπου (3) ή του τύπου (4):  $0,2 + 0,2 - 0,2^2 = 0,4 - 0,04 = 0,36$ . Διαφορετικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συμπληρώματα: μέσω της έκφρασης  $1 - (1 - 0,2)^2$  (συγκρίνετε με το πρόβλημα 2).

## Το πρόβλημα της συνάντησης

Μπορούμε τώρα να λύσουμε το «πρόβλημα της συνάντησης» που διατυπώσαμε στην αρχή του άρθρου. Ας το αναλύσουμε ως εξής.

Ας υποθέσουμε ότι καθένας από τους δύο φίλους επιλέγει και φτάνει στην Κόκκινη Πλατεία μια τυχαία χρονική στιγμή του διαστήματος  $[0, 60]$  (μέσα στα 60 λεπτά της συμφωνημένης ώρας) και ότι περιμένει τον άλλον επί 20 λεπτά (αν δεν έχει ήδη φτάσει). Θα καταφέρουν να συναντηθούν μόνο αν η διαφορά μεταξύ των στιγμών  $x$  και  $y$  των αφίξεών τους είναι μικρότερη ή ίση του 20.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων αυτού του «πειράματος» μπορεί να παρασταθεί ως ένα τετράγωνο  $0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60$ . Τότε, το σύνολο των ευνοϊκών αποτελεσμάτων  $|x - y| \leq 20$  είναι το μέρος εκείνο του τετραγώνου που φράσεται από τις παράλληλες προς τη διαγώνιο  $x = y$  ευθείες  $y - x = 20$  και  $y - x = -20$  (Σχήμα 9 — συγκρίνετε με το πρόβλημα 3). Το εμβαδόν αυτού του συνόλου ισούται με  $60^2 - 40^2$  (τα δύο άσπρα τρίγωνα συναποτελούν ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους 40), επομένως η ζητούμενη πιθανότητα — που ισούται με το λόγο αυτού του εμβαδού προς το συνολικό εμβαδόν του τετραγώνου — είναι

$$1 - \left( \frac{40}{60} \right)^2 = 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{5}{9}.$$

Ας λύσουμε άλλο ένα πρόβλημα που αφορά ένα τυχαίο σημείο  $(x, y)$ .

**Πρόβλημα 4.** Βρείτε την πιθανότητα  $p = p(a)$  να είναι το άθροισμα  $x + y$  δύο ανεξάρτητων, τυχαίων αριθμών μεγαλύτερο από τον δεδομένο αριθμό  $a$ .

Η εξίσωση  $x + y = a$  ορίζει μια ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο  $x + y = 1$  του τετραγώνου μας. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το τμήμα εκείνο του τετραγώνου που βρίσκεται πάνω από αυτή την ευθεία. Όταν  $a \geq 1$  το τμήμα είναι τρίγωνο, όταν  $a < 1$  είναι πεντάγωνο, και είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το εμβαδόν του συμπληρώματός του. Σχεδιάστε το αντίστοιχο σχήμα και επαληθεύστε ότι

$$p(a) = \begin{cases} \frac{(2-a)^2}{2} & \text{για } a \geq 1, \\ 1 - \frac{a^2}{2} & \text{για } a \leq 1. \end{cases}$$

## Εφαρμογή συμμετριών: σημεία κύκλου

Παρατηρήστε ότι στο τελευταίο πρόβλημα, όταν  $a = 1$ , η απάντηση είναι  $p(1) = 1/2$  (τα αντίστοιχα σημεία του τετραγώνου βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο). Αυτό θα μπορούσαμε να το μαντέψουμε χωρίς να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε σχήμα: όταν τα  $x$  και  $y$  είναι τυχαίοι αριθμοί του διαστήματος  $[0, 1]$ , η συνθήκη  $x + y \leq 1$  μπορεί να γραφτεί ως  $x \leq 1 - y$  και να θεωρήσουμε ότι έχει το νόημα «το  $x$  είναι πλησιέστερα στο 0 από όσο το  $y$  στο 1». Η συμπληρωματική της συνθήκη προκύπτει αν εναλλάξουμε τα σημεία  $x$  και  $y$  και τα άκρα 0 και 1 του διαστήματος, ή αν θεωρήσουμε το συμμετρικό του τμήματος ως προς το μέσον του. Αυτές οι δύο πράξεις δεν αλλάζουν την πιθανότητα του ενδεχομένου που εξετάζουμε, και επομένως οι πιθανότητες του ενδεχομένου και του συμπληρωματικού του είναι ίσες.

Ιδού ένα ακόμη πρόβλημα αυτού του είδους.

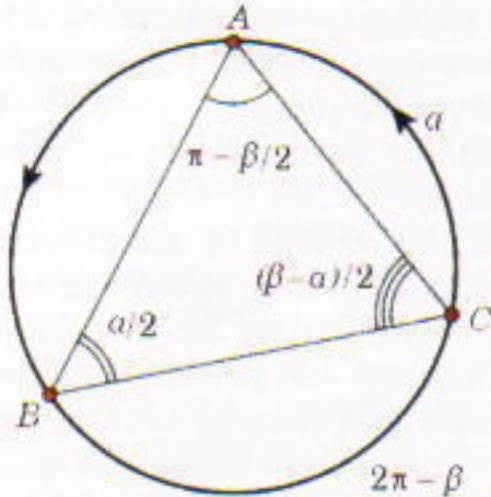
**Πρόβλημα 5.** Επλέγουμε τυχαία

τρεις αριθμούς από το διάστημα  $[0, 1]$ . Ποια είναι η πιθανότητα (α) να είναι ο τελευταίος αριθμός που επιλέγουμε μεγαλύτερος απ' όλους· (β) να επλέξουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά;

Θα μπορούσαμε να παραστήσουμε τις τριάδες  $(x, y, z)$  των επιλεγόμενων αριθμών ως συντεταγμένες ενός σημείου του μοναδιαίου κύβου και να υπολογίσουμε τους όγκους των τμημάτων του κύβου που ορίζονται από τις κατάλληλες ανισότητες:  $x \leq z, y \leq z$  στο (α), και  $x \leq y \leq z$  στο (β). Αυτό, όμως, δεν είναι απαραίτητο: είναι αρκετά σαφές ότι και οι έξι δυνατές διατάξεις των αριθμών μας  $-x < y < z, x < z < y, y < x < z, y < z < x, z < x < y, z < y < x$  είναι ισοπίθανες, και επομένως η καθεμία έχει πιθανότητα  $1/6$ . Επομένως, η απάντηση για το (β) είναι  $1/6$  και για το (α) είναι  $1/3$ .

## Το πρόβλημα του οξυγώνιου τριγώνου

Ας επιστρέψουμε στο δεύτερο πρόβλημα που διατυπώσαμε στην αρχή του άρθρου. Είναι φανερό ότι κάθε περιστροφή του κύκλου διατηρεί τις πιθανότητες όλων των ενδεχομένων (το σύνολο των τριάδων σημείων του κύκλου) και τη συνθήκη το τρίγωνο να είναι οξυγώνιο. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε σταθερό το ένα από τα τρία σημεία  $A, B, C$ , ας πούμε το  $C$ , και να επλέξουμε τυχαία τα άλλα δύο. Οι θέσεις τους δίνονται από τα μέτρα των δεξιόστροφων τόξων  $CA = a$  και  $CB = \beta$  (Σχήμα 10 — προσέξτε ότι το  $\beta$  είναι το μεγαλύτερο από τα τόξα  $CB$ ). Αν μετράμε τα τόξα σε ακτίνια, ένα ζεύγος  $(a, \beta)$  είναι σημείο του τετραγώνου  $0 < a < 2\pi, 0 < \beta < 2\pi$ . Από το θεώρημα των εγγεγραμμένων γωνιών έχουμε ότι οι γωνίες του τριγώνου  $ABC$  είναι ίσες με  $\pi - \beta/2, a/2, (\beta - a)/2$  (στην περίπτωση που  $\beta > a$ , ενώ αν  $a > \beta$ , η κατάσταση είναι παρόμοια — απλώς εναλλάσσουμε το  $a$  με το  $\beta$  και το  $A$  με το  $B$ ). Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε ότι το ζεύγος των αριθμών  $(a, \beta)$  προσδιορίζει ένα σημείο μέσα στο τετράγωνο  $0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi$ . Αν  $a < \beta$ , το σημείο αυτό περιγράφεται στην κόκκινη περιοχή του



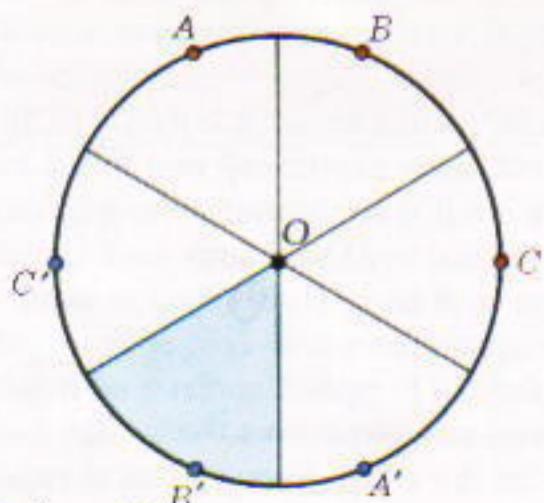
Σχήμα 10

Σχήματος 11. Αν και οι τρεις γωνίες  $A, B, C$  είναι μικρότερες του  $\pi/2$ , θα έχουμε  $\beta > \pi$ ,  $a < \pi$  και  $\beta - a < \pi$ . Αυτές οι ανισότητες προσδιορίζουν την μπλε περιοχή του Σχήματος 12. Η περίπτωση  $a > \beta$  μας δίνει μια περιοχή συμμετρική αυτής ως προς τη διαγώνιο  $a = \beta$  του τετραγώνου. Επομένως, η ζητούμενη πθανότητα είναι  $1/4$ .

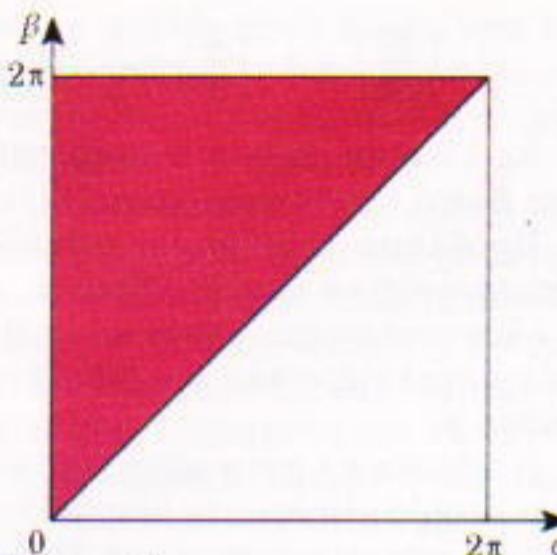
Υπάρχει και μια άλλη, εντυπωσιακά κομψή λύση αυτού του προβλήματος, που μας επιφέρει να λύσουμε και το ανάλογο πρόβλημα για  $n$  σημεία (δείτε την Λασκητή 9 στη συνέχεια). Με ενημέρωσαν γι' αυτή ο φυσικός V. Fok και ο μαθηματικός Y. Chekanov.

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίζουμε τη συμπληρωματική πθανότητα να είναι τα τρία σημεία του κύκλου κορυφές ενός αμβλυγώνιου τριγώνου.

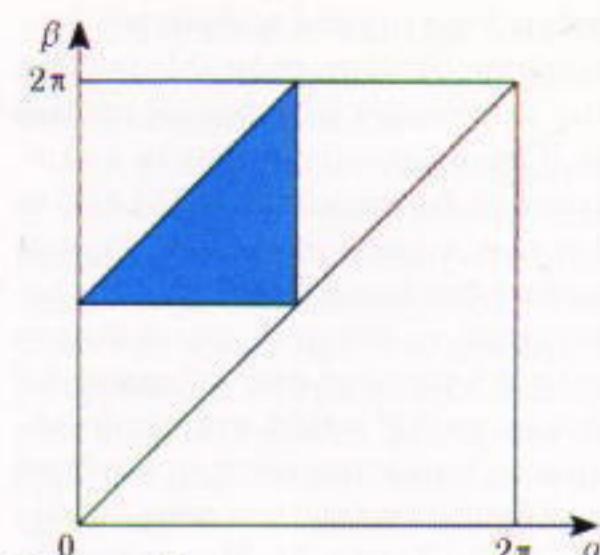
Για κάθε σημείο  $M$  του κύκλου θεωρούμε το αντιδιαμετρικό του  $M'$  και το ημικύκλιο του οποίου το τόξο διχοτομείται από το  $M'$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο  $D$  αυτού του ημικυκλίου η γωνία  $DOM$  είναι αμβλεία. Μια τρίada  $A, B, C$  είναι «αμβλεία» αν και μόνο αν δεν είναι κενή η τομή των ημικυκλίων που αντιστοιχούν στα σημεία  $A, B, C$  (ο μπλε τομέας στο Σχήμα 13). Πράγματι, αν



Σχήμα 13



Σχήμα 11



Σχήμα 12

άρθρο μας, όμως, εξετάζοντας δύο προβλήματα που η απάντησή τους δίνεται συναρτήσει του αριθμού  $\pi$ . Το πρώτο είναι εύκολο.

**Πρόβλημα 6.** «Ρίχνουμε» στην τύχη ένα σημείο πάνω σ' ένα μεγάλο φύλλο χαρτιού, στο οποίο είναι σχεδιασμένο ένα πλέγμα μοναδιαίων τετραγώνων. Ποια είναι η πθανότητα να καταλήξει σε απόσταση μικρότερη του  $1/2$  από το κέντρο ενός τετραγώνου;

Αρκεί να θεωρήσουμε ένα μόνο τετράγωνο. Τα σημεία που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη του  $1/2$  από το κέντρο του σχηματίζουν κύκλο εμβαδού  $\pi/4$ . Και αυτή είναι η απάντησή μας: η ζητούμενη πθανότητα (ο λόγος του εμβαδού του κύκλου προς το εμβαδόν του τετραγώνου) είναι  $\pi/4$ .

**Πρόβλημα 7** (Η βελόνα του Buffon). Ένα επίπεδο είναι χωρισμένο σε λωρίδες που ορίζονται από ευθείες που απέχουν η μια απ' την άλλη κατά 1. Ρίχνουμε τυχαία μια βελόνα (ευθύγραμμο τμήμα) μήκους 1 στο επίπεδο. Ποια είναι η πθανότητα να τέμνει η βελόνα μία από τις ευθείες;

Το πρόβλημα έχει μια εκπληκτική απάντηση:  $2/\pi$ . Αυτό το αποτέλεσμα προκάλεσε έναν καταγισμό πειραμάτων που είχαν οκοπό να εξακριβώθει αν η θεωρία συμφωνεί με την πραγματικότητα. Μπορούμε να το λύσουμε και για τη γενικότερη περίπτωση, κατά την οποία η απόσταση μεταξύ των ευθειών είναι  $h$  και το μήκος της βελόνας είναι  $\ell$ . Υποθέτουμε  $\ell \leq h$ . Συμβολίζουμε με  $a$  την απόσταση του κέντρου της βελόνας από την πλησιέστερη ευθεία ( $0 \leq a \leq h/2$ ) και με  $\varphi$  τη γωνία μεταξύ της βελόνας και της ευθείας ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ). Τότε, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 14, η βελόνα τέ-

## Ο αριθμός $\pi$ στις γεωμετρικές πιθανότητες

Στα προβλήματα με πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων, οι πιθανότητες είναι κλάσματα, συνήθως μικρών ακεραίων. Το ίδιο ισχύει και σε πολλά προβλήματα των γεωμετρικών πιθανοτήτων. Θα ολοκληρώσουμε το

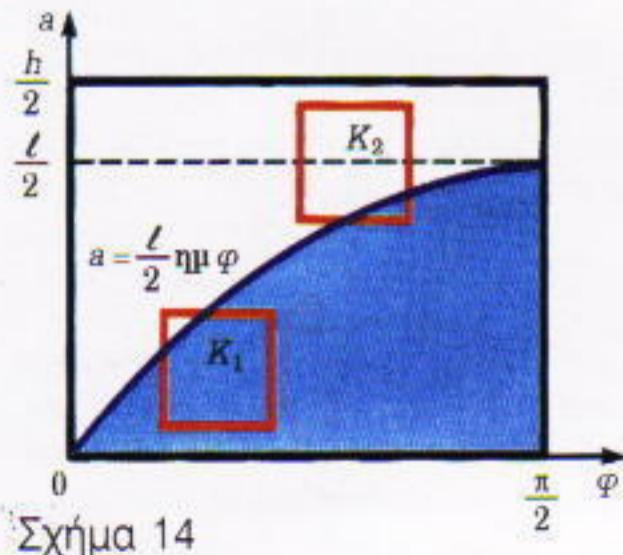
μνει μια ευθεία αν και μόνο αν

$$a \leq \frac{\ell}{2} \text{ ημφ.}$$

Οποιοδήποτε δυνατό ενδεχόμενο του πειράματός μας περιγράφεται από ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες ( $a, \varphi$ ) που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου το οποίο σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες  $a = h/2$  και  $\varphi = \pi/2$  (Σχήμα 14). Τα σημεία του ορθογωνίου που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη  $a = (\ell/2) \text{ημφ}$  αντιπροσωπεύουν τις τομές, ενώ όσα είναι πάνω από την ευθεία αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα εκείνων των πειραμάτων όπου η βελόνα δεν τέμνεται με κάποια ευθεία.

Το πρόβλημα τώρα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο του ορθογωνίου  $\{0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq a \leq h/2\}$ . Ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται κάτω από την ημιτονοειδή καμπύλη  $a = (\ell/2) \text{ημφ}$ ;

Εδώ, ο όρος «τυχαία» έχει το νόημα ότι απαιτούμε να είναι ισοδύναμες όλες οι δυνατές θέσεις της βελόνας. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να ορίσουμε με ακρίβεια αυτό τον όρο. Ο απλούστερος είναι να απαιτήσουμε ότι η πιθανότητα να ανήκει ένα σημείο σ' ένα τετράγωνο  $\{\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, a_1 \leq a \leq a_2\}$  ( $\varphi_2 - \varphi_1 = a_2 - a_1 = d$ ) δεδομένης πλευράς δεν εξαρτάται από τη θέση του τετραγώνου μέσα στο ορθογώνιο (αν και προφανώς εξαρτάται από το μήκος  $d$  της πλευράς του). Για παράδειγμα, οι πιθανότητες να βρεθεί ένα σημείο στα τετράγωνα  $K_1$  και  $K_2$  (Σχήμα 14) είναι ίσες. Εύκολα, λοιπόν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι πιθανότητα να ανήκει το σημείο σε οποιοδήποτε σχήμα μέσα στο εσωτερικό του ορθογωνίου είναι ανάλογη με το εμβαδόν του σχήμα-



Σχήμα 14

τος, και επομένως ισούται με το λόγο αυτού του εμβαδού προς το εμβαδόν ολόκληρου του ορθογωνίου.

Στην περίπτωσή μας, το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που σχηματίζεται από την ημιτονοειδή καμπύλη ισούται με

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\ell}{2} \eta \mu \varphi d\varphi \\ &= \frac{\ell}{2} \left[ \left( -\sin \frac{\pi}{2} \right) - \left( -\sin 0 \right) \right] \\ &= \frac{\ell}{2}. \end{aligned}$$

Αφού το εμβαδόν  $S$  του ορθογωνίου ισούται με  $\pi h/4$ , καταλήγουμε στην πιθανότητα

$$p = S_1/S = 2\ell/\pi h$$

απ' όπου, για  $h = \ell = 1$ , προκύπτει η απάντησή μας.

Τελειώνουμε με μια σειρά ασκήσεων, παρόμοιων με τα προβλήματα που εξετάσαμε στο άρθρο.

### Ασκήσεις

1. Ρίχνουμε δύο φορές ένα ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε (α) δύο αριθμούς με άθροισμα τουλάχιστον 10· (β) δύο αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος διαιρείται με τον δεύτερο;

2. Ένας επιβάτης φτάνει στη στάση του λεωφορείου μια τυχαία χρονική στιγμή. Ο επιβάτης μπορεί να εξυπηρετηθεί από τα λεωφορεία δύο διαφορετικών γραμμών. Το διάστημα μεταξύ των αφίξεων των λεωφορείων της πρώτης γραμμής και της δεύτερης γραμμής είναι 10 λεπτά και 15 λεπτά αντίστοιχα. Βρείτε την πιθανότητα  $p = p(t)$  να περιμένει τουλάχιστον  $t$  λεπτά. (Υποθέτουμε ότι ο προγραμματισμός των δρομολογίων της κάθε γραμμής είναι ανεξάρτητος από αυτόν της άλλης.)

3. Χωρίζουμε σε τρία ίσα μέρη ένα ευθύγραμμο τμήμα. «Ρίχνουμε» στην τύχη τρία σημεία πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταλήξουν σε τρία διαφορετικά μέρη του τμήματος;

4. Επιλέγουμε στην τύχη τέσσερα σημεία  $A, B, C, D$  ενός κύκλου. Ποια είναι η πιθανότητα να τέμνονται τα ευθύγραμμα τμήματα  $AC$  και  $BD$ ;

5. Το παράδοξο του Bertrand. (α)

Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο πάνω σε μια δεδομένη διάμετρο ενός δεδομένου κύκλου. Ποια είναι η πιθανότητα η χορδή που διέρχεται από αυτό το σημείο και είναι κάθετη προς τη διάμετρο να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα; (β) Επιλέγουμε τυχαία δύο σημεία σ' έναν κύκλο. Ποια είναι η πιθανότητα η χορδή που τα ενώνει να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα; (γ) Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό ενός κύκλου και μια χορδή που διχοτομείται από αυτό. Ποια είναι η πιθανότητα αυτή η χορδή να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα; ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αυτές οι τρεις ερωτήσεις είναι παραλλαγές του εξής προβλήματος: ποια είναι η πιθανότητα η χορδή η οποία ορίζεται από μια τυχαία ευθεία που τέμνει έναν κύκλο να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου; Επιλέγοντας την ευθεία με τρεις διαφορετικούς τρόπους, οδηγούμαστε σε τρεις διαφορετικές απαντήσεις! (δ) Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα για χορδές με μήκος μεγαλύτερο από  $r\sqrt{3}$ , όπου  $r$  είναι η ακτίνα του κύκλου.

6. Επιλέγουμε τυχαία τις κορυφές ενός τριγώνου σ' έναν δεδομένο κύκλο. Βρείτε την πιθανότητα να είναι (α) μια από τις γωνίες μεγαλύτερη από  $30^\circ$ , (β) όλες οι γωνίες μεγαλύτερες από  $30^\circ$ , (γ) όλες οι γωνίες μικρότερες από  $120^\circ$ .

7. Σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα επιλέγουμε τυχαία δύο σημεία. Ποια είναι η πιθανότητα να κατασκευάζεται τρίγωνο από τα τρία μέρη στα οποία χωρίζουν το τμήμα αυτά τα σημεία;

8. Ένα πλέγμα γραμμών χωρίζει το επίπεδο (α) σε τετράγωνα, (β) σε ιούπλευρα τρίγωνα με μήκος πλευράς 1. Ποια είναι η πιθανότητα να καλυφθεί ένας κόμβος του πλέγματος από ένα νόμισμα διαμέτρου 1 που ρίχνουμε στο επίπεδο;

9. (α) Εστω ένα κυρτό  $n$ -γωνο του οποίου οι κορυφές είναι η τυχαία σημεία ενός κύκλου. Ποια είναι η πιθανότητα το πολύγωνο να περιέχει το κέντρο του κύκλου; (β) Αποδείξτε ότι η πιθανότητα να ανήκουν η τυχαία σημεία μιας σφαίρας στο ίδιο ημισφαίριο (στην ίδια μεριά ενός επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας) είναι  $(n^2 - n + 2)/2^n$ . ■

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 58

# Υγρά και αέρας

«Οποιοσδήποτε θα συμφωνήσει χωρίς δυσκολία όπι η θερμότητα δεν είναι ενάντια στη θέληση της Αθηνάς, δεν είναι

**ΡΩΤΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΥΓΡώΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ** ή την κίνηση διαφόρων στρεών σωμάτων μέσα σε ρευστά (πρωτίστια στο νερό και στον αέρα) μελετώνται στο πλαίσιο ειδικών αρχών —της υδροδυναμικής και της αεροδυναμικής. Είναι λογικό να διδασκόμαστε στο σχολείο και τους δύο κλάδους στον ίδιο κύκλο μαθημάτων (κάτω από τον τίτλο «μηχανική των ρευστών»), διότι έχουν κοινά χαρακτηριστικά.

Ο Bernoulli διακήρυξε μια αλήθεια της φύσης: ότι αυτή η επιστήμη δεν είναι απλή ή τετριμμένη. Όσο για τη χρησιμότερά της, ποιος θα την αμφισβητήσει; Από τους αρχαίους χρόνους, οι άνθρωποι καταπάστηκαν με τα προβλήματα της ροής του νερού σε αυλάκια και αγωγούς· κατασκεύασαν μύλους που κινούνται με τον αέρα και το νερό· στους νεώτερους χρόνους ενδιαφέρθηκαν για προβλήματα που σχετίζονται με ταξίδια πάνω και κάτω από το νερό, μέσα στην και πέρα από την ατμόσφαιρα.

Με την πάροδο του χρόνου, οι πρακτικές ανάγκες δημιούργησαν μεγαλύτερες απαιτήσεις στη θεωρία, προκειμένου να βρεθούν οι νόμοι που «ρυθμίζουν» την κίνηση των ρευστών. Ανάμεσα σ' αυτούς που στρατολογήθηκαν για να λύσουν τα περίπλοκα προβλήματα της ρευστομηχανικής ήταν μερικά λαμπρά ονόματα: Neuton, Euler, Thomson, Maxwell, Prandtl, Zhukovsky, Charnygin. Οι νόμοι της κίνησης των ρευστών διατυπώθηκαν περισσότερο από 250 χρόνια πριν, από τον Daniel Bernoulli, στην περίφημη Υδροδυναμική του (και αργότερα πήραν το ονομά του), και χρησιμοποιούνται

ακόμη στις σύγχρονες εφαρμογές.

Προσπαθήστε μόνοι σας να εφαρμόσετε τους νόμους της κίνησης των ρευστών στα ακόλουθα προβλήματα.

## Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Μπορούμε να ελέγξουμε την πτήση ενός αερόστατου θερμού αέρα χρησιμοποιώντας πανιά και πηδάλιο;

2. Ένα ελικόπτερο, σταματημένο αρχικά στο έδαφος, απογειώνεται και αιωρείται σε μικρό ύψος. Σε ποια από τις δύο περιπτώσεις η δύναμη την οποία ασκεί στο έδαφος είναι μεγαλύτερη;

3. Πώς καταφέρνει να πετάει ένας χαρταετός; Γιατί χρειάζεται την ουρά;

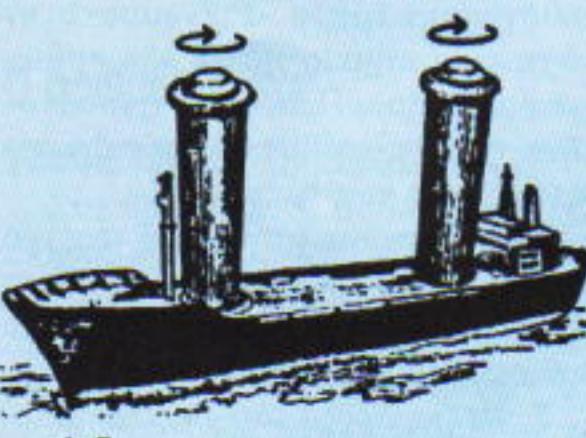
4. Τι θα ουμβεί αν φυσήξουμε ανάμεσα σε δύο αναμμένα κεριά που είναι τοποθετημένα πλάι πλάι;

5. Γιατί υπάρχουν αεραγωγοί στις στέγες των σπιτιών;

6. Γιατί είναι επικίνδυνο να στέκεστε κοντά στην άκρη του κρηπιδώματος ενός σιδηροδρομικού σταθμού όταν περνάει το τρένο με μεγάλη ταχύτητα;

7. Αν περιστρέφετε έναν αυλακωτό σωλήνα (όπως τον εύκαμπτο σωλήνα της ηλεκτρικής σκούπας) πάνω από το κεφάλι σας, αυτός παράγει έναν μουσικό ήχο. Γιατί;

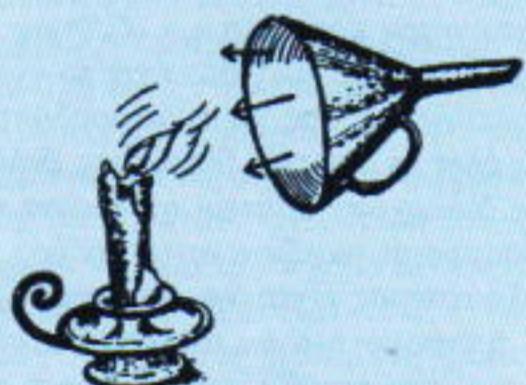
8. Σε τι χρησιμεύουν οι βαρείς σφόνδυλοι που συνδέονται με τους



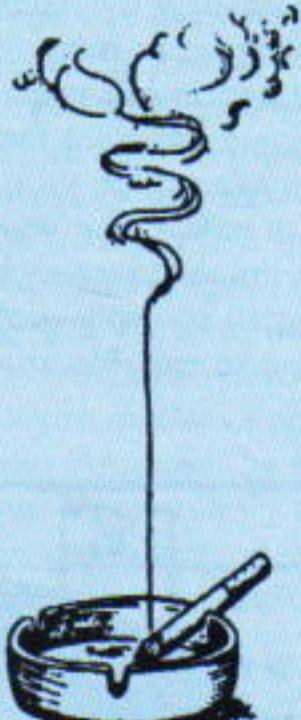
ταχύτατα περιστρεφόμενους άξονες των ανεμόμυλων;

9. Με ποιον τρόπο οι περιστρεφόμενοι κατακόρυφοι κύλινδροι του πλοίου που φαίνεται στο σχήμα καταφέρνουν να μετακινούν το πλοίο;

10. Γιατί τα αλεξίπτωτα έχουν μια τρύπα στη μέση της «ομπρέλας» τους;



11. Αν φυσήξουμε τη φλόγα ενός κεριού μέσα από το λαιμό ενός χωνιού, η φλόγα θα κλίνει προς το χωνί. Γιατί;



12. Γιατί ο καπνός ενός τσιγάρου που είναι ακουμπισμένο σ' ένα τσάκι αρχικά ανυψώνεται ομοιόμορφα και κατόπιν με στροβιλισμούς;

13. Γιατί το ρεύμα νερού που ρέει

# ΕΙΔΑ ΣΕ ΚÍΝΗΣΗ

«...ορία των δυνάμεων και των κινήσεων στα ρευστά, εφόσον  
ούτε άχρηστη ούτε επιπόλαιη.» — Daniel Bernoulli

ομοιόμορφα από το στόμιο μιας βρύσης γίνεται λεπτότερο όσο απομακρύνεται προς τα κάτω;

### Μικροπειραματισμοί

Κολλήστε την άκρη ενός κομματιού κλωστής σ' ένα μπαλάκι του πινγκ πονγκ. Κρεμάστε το μπαλάκι κοντά σε μια ανοιχτή βρύση αφήνοντάς το να ακουμπάει το ρεύμα του νερού. Προσπαθήστε στη συνέχεια να απομακρύνετε το μπαλάκι από το ρεύμα του νερού. Γιατί φαίνεται το μπαλάκι να κολλάει στο νερό;

### Είναι ενδιαφέρον ότι ...

...η δύναμη την οποία ασκεί ένα ρεύμα νερού σ' ένα εμπόδιο που συναντά στο δρόμο του αυξάνει απότομα με την ταχύτητα ροής. Έτσι, σχηματίζονται τα φαράγγια, οι κοίτες των ποταμών και οι κοιλάδες· γι' αυτό το λόγο, επίσης, διαβρώνονται οι όχθες των ποταμών και οι ακτές της θάλασσας. Η πελώρια κλίμακα της δράσης αυτών των δυνάμεων φαίνεται από το ποσό της λάσπης η οποία μεταφέρεται στη θάλασσα, που ανέρχεται σε εκατοντάδες χιλιάδες τόνους ανά έτος.

...τα έμβια όντα υπακούουν στους νόμους της υδροδυναμικής. Για παράδειγμα, τα πουλιά που πετούν σε σχηματισμούς V εξοικονομούν δύναμεις κατά τις αποδημίες σε μακρινούς τόπους. Έχει υπολογιστεί ότι τα ψάρια που κολυμπούν σε παρόμοιους σχήματος ομάδες αυξάνουν την αντοχή τους περισσότερο από 100%.

...το πλεονέκτημα της χρησιμοποίησης του αέρα για τις μεταφορές επισημαίνεται από ένα αρχαίο κινέζικο ρητό: «Χίλιοι κωπηλάτες και δέκα χιλιάδες σταλίκια δεν αξίζουν όσο ένα πανί».

...ο διαπρεπής ολλανδός επιστήμονας και μηχανικός Simon Stevin, γνωστός ως ένας από τους πατέρες της υδροστατικής, κατόρθωσε να κατασκευάσει ένα αυτοκίνητο που για να κινείται χρησιμοποιούσε πανιά. Το επονομαζόμενο «Θαύμα της Χάγης» ανέπτυσσε αξιόλογη ταχύτητα και μπορούσε να μεταφέρει είκοσι επβάτες. Όπως ακριβώς και ένα ιστιοφόρο πλοίο, μπορούσε να στρίψει και να κινήθει κόντρα στον άνεμο.

ιστούς των κεραιών και στους πύργους γεώτρησης των πετρελαιοπηγών.

...ο πίδακας νερού ενός υδραυλικού εκσκαφέα που χρησιμοποιείται στα μεταλλεία εκτινάσσεται με τόσο τρομακτική ταχύτητα, που μοιάζει με βολή πυροβόλου· ανατινάζει το έδαφος και σχηματίζει τεράστια σύννεφα χώματος και νερού στον αέρα.

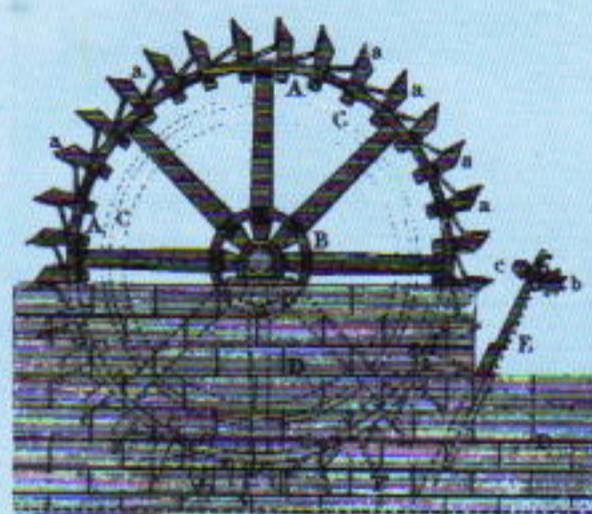
...δημιουργώντας περιοχές με συμπεσμένο ή αραιωμένο αέρα σ' ένα σωλήνα μπορούμε να μεταφέρουμε φορτία κατά μήκος του. Αυτό το φαινόμενο οδήγησε στην εφεύρεση του «πνευματικού» ταχυδρομείου κατά τις αρχές του 20ού αιώνα. Η ίδια αρχή χρησιμοποιήθηκε και στο σιδηρόδρομο πεπεσμένου αέρα που λειτούργησε στη Νέα Υόρκη του 1870.

...οι τουρμπίνες είναι ένα παραδειγμα της πιο αποτελεσματικής εφαρμογής της συμπίεσης ενός υγρού ή αερίου. Στις μέρες μας, όλοι οι σταθμοί παραγωγής ενέργειας χρησιμοποιούν αεροτουρμπίνες ή τουρμπίνες με νερό· ο στροβιλοκινητήρας είναι η κινητήρια δύναμη της αεροναυπηγίκης.

...έχει υπολογιστεί ότι τα υπερηφανά αεροπλάνα είναι οικονομικότερα για μεγάλες πτήσεις. Η ταχύτητα τέτοιων αεροπλάνων φτάνει τα 12.000 km/h περίπου σε ύψος πτήσης 36-50 km. Εξαιτίας των διαφορετικών συνθηκών πτήσης και προσγείωσης, τα εν λόγω αεροπλάνα πρέπει να έχουν ειδικό σχήμα —τα φτερά τους πρέπει να έχουν μεταβλητή γεωμετρία.

L. Leonovich

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 58



...οι άνθρωποι χρησιμοποιούν από παλιά τα πλεονεκτήματα της κινήσης των περιστρεφόμενων σωμάτων στον αέρα —για παράδειγμα, το πέταγμα του μπούμερανγκ. Ωστόσο, μόνο πρόσφατα αξιοποιήθηκαν από τους αθλητές. Το αποτέλεσμα ήταν να βελτιωθούν οι επιδόσεις στη δισκοβολία, και οι ποδοσφαιριστές να δίνουν φάλτσο στην μπάλα για να διαγράψει μια μακριά καμπύλη τροχιά.

...καθώς ένα ρεύμα αέρα περνά γύρω από ένα σώμα, αναπτύσσονται στρόβιλοι. Οι στρόβιλοι αυτοί μπορεί να υποχρεώσουν το σώμα σε ταλάντωση, τόσο μεγάλου πλάτους, ώστε το σώμα να καταστραφεί. Αυτό συμβαίνει στις κρεμαστές γέφυρες, στους

# Ο μύθος της κωδωνοειδούς καμπύλης

*Οι μαθητές είναι ικανότεροι απ' όσο πιστεύουμε*

Paul Horwitz

**O**LUC ΜΑΘΑΙΝΕΙ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ σχετικότητας του Αϊνστάιν. Χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή, αυτός και οι συμμαθητές του στο Λύκειο της Βοστώνης έχουν οργανώσει «νοητικά πειράματα» τα οποία προσομοιώνουν αντικείμενα που η ταχύτητά τους πλησιάζει αυτήν του φωτός. Τα παρατηρούν σ' ένα σύστημα αναφοράς και προσπαθούν να φανταστούν πώς θα φαίνονταν σε κάποιο άλλο — για παράδειγμα, από το παράθυρο ενός κινούμενου τρένου.

Μερικοί ισχυρίζονται ότι η ανθρώπινη νοημοσύνη καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το DNA. Υποστηρίζουν ότι οι τιμές του IQ αποτελούν δείκτες μη μεταλλάξιμης γενετικής κληρονομιάς. Η εκπαίδευση, ουμπραιάνουν, δεν παίζει κανένα ρόλο. Ο Luc και οι φίλοι του αποδεικνύουν χωρίς τυμπανοκρουσίες ότι κάνουν λάθος.

Τους παρατηρώ εδώ και αρκετούς μήνες στα πλαίσια ενός προγράμματος της National Science Foundation (Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών των ΗΠΑ) που αποσκοπεί στη μελέτη της χρήσης των υπολογιστών στη διδασκαλία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών. Τον περισσότερο καιρό δουλεύουν σε μικρές ομάδες χωρίς να δίνουν σημασία στους δασκάλους κι εμένα. Δημιουργούν εικόνες στο μυαλό τους, προσπαθούν να τις μεταδώσουν με ζωηρές χειρονομίες κι έπειτα χρησιμοποιούν τον υπολογιστή για να τις μετασχηματί-

Για χάρη των νεώτερων αναγνωστών μας, πρέπει να εξηγήσουμε τον τίτλο. Η «κωδωνοειδής καμπύλη» αποτελεί αναφορά στο αμφιλεγόμενο βιβλίο *The bell curve* των Herrnstein και Murray (1994), και είναι μια άλλη ονομασία της λεγόμενης «κανονικής κατανομής». Η κωδωνοειδής καμπύλη ήταν κάποτε ένα ιδιαίτερα διαδεδομένο μέσο αξιολόγησης της απόδοσης των μαθητών. Οι δάσκαλοι που βαθμολογούσαν «βάσει της καμπύλης» έδιναν απαραιτήτως στην πλειοψηφία των μαθητών μια μέση βαθμολογία, και σε ελάχιστους μαθητές άριστους ή κακούς βαθμούς. Στην πραγματικότητα η κωδωνοειδής καμπύλη καταδίκαζε ένα ποοοσιό του πληθυσμού σε «αποτυχία».

σουν σε ζωντανές, αλληλοδραστικές επιδείξεις. Αρκετά συχνά μοιάζει σαν να σπάνε κάποιο αόρατο νοητικό φράγμα και να φτάνουν εξαντλημένοι στην άλλη πλευρά, κρατώντας σφιχτά στα χέρια μια νέα ιδέα. Το χαμόγελό τους αυτές τις στιγμές σου ελαφρώνει την καρδιά. Αυτά τα παιδιά των υποβαθμιομένων κέντρων των πόλεων δεν χαμογελούν συχνά στο σχολείο.

Παρακολουθώντας εισαγωγικά μαθήματα φυσικής, τούτοι οι μαθητές —όλοι τους, εκτός από έναν, μαύροι ή αιτινής καταγωγής— έχουν προχωρήσει σταθερά από απλά, καθημερινά προβλήματα στο περιβόλητης δυσκολίας «παράδοξο των διδύμων», σύμφωνα με το οποίο, αν κάποιος αρχίσει να ταξιδεύει με ταχύτητα που προσεγγίζει αυτήν του φωτός, θα

επιστρέψει νεώτερος από τον δίδυμο αδελφό του. Έχουν ακολουθήσει την ίδια διαδρομή, έχουν συναντήσει τις ίδιες απογοητεύσεις και έχουν ξεπέρασει τα ίδια εμπόδια με κάθε άλλο σπουδαστή που έχω παρακολουθήσει —και έχουν προοδεύσει με τον ίδιο περίου ρυθμό. Εντούτοις, σχεδόν όλα τα μέλη της τάξης παρουσιάζουν σοβαρές ελλείψεις στην εκπαίδευσή τους, ειδικά στα μαθηματικά. Οι γνώσεις τους για το δεκαδικό σύστημα είναι αποσπασματικές και συγκεχυμένες. Αριθμοί μεγαλύτεροι από το ένα εκατομμύριο τους προκαλούν εύκολα σύγχυση, και συναντούν τις μεγαλύτερες δυσκολίες στη δημιουργία ή την κατανόηση απλών διαγραμμάτων. Δεν αποτελεί έκπληξη το ότι αποδίδουν τόσο άσχημα στις εξετάσεις που χρησιμοποιεί η κοινωνία για να τους αξιολογήσει.

Χρόνια εγκατάλειψης έχουν εκθέσει αυτούς τους μαθητές σε σοβαρούς κινδύνους, αλλά η σύγχρονη τεχνολογία, σε συνδυασμό με μια νέα προσέγγιση της μάθησης, έχουν φέρει αξιόλογα αποτελέσματα.

Ο υπολογιστής, αντί να τους διδάσκει γεγονότα, αλλάζει κυριολεκτικά τον τρόπο σκέψης τους. Τους προσφέρει ένα ευέλικτο οπτικό μέσο με το οποίο μπορούν να κατασκευάσουν υποθετικά σενάρια, να προβληματίστούν πάνω σ' αυτά και να τα τροποποιήσουν, ώστε να απαντήσουν σε εναλλακτικές υποθέσεις. Ελευθερώνει την ικανότητά τους να σκέφτονται χωρίς να χρειάζεται να κάνουν

υπολογισμούς, να κατασκευάζουν χωρίς να χρειάζεται να περιγράψουν, να σχεδιάζουν χωρίς να πρέπει να διατυπώσουν. Ανταμείβει την «εξουπάδα του δρόμου» και όχι τις «γνώσεις των βιβλίων».

Είναι βολικό να πιστεύουμε ότι κάτι τόσο σύνθετο και πολυδιάστατό όσο η νοητική ικανότητα μπορεί να αναχθεί σ' ένα τακτοποιημένο σύνολο αριθμών. Ταιριάζει με την εθνική μας εμμονή σε ποοστικοποιήσιμα στατιστικά μεγέθη, ενώ παράλληλα συγχωρεί την αδυναμία μας να εκπαιδεύουμε ένα τεράστιο και αυξανόμενο τμήμα της νεολαίας μας. Δικαιολογεί τη δημιουργία φίλτρων με τη μορφή «αντικειμενικών εξετάσεων» που στέρουν την ελπίδα από τους γιους και τις κόρες των φτωχών. Ίσως, όμως, η σημαντικότερη λειτουργία αυτής της άποψης είναι ότι έτσι αποφεύγουμε αυτό που διαφορετικά θα γινόταν αβάσταχτη υποψία: ότι, αφού έχουμε καταλήξει να μην πιστεύουμε ότι όλοι οι άνθρωποι γεννιούνται ίσοι, θέτουμε σε κίνδυνο αυτά καθ' εαυτά τα θεμέλια της δημοκρατίας μας.

Πριν από λίγες μέρες ρώτησα τον Luc, που πρόσφατα έμαθε ότι η χαμηλή του βαθμολογία στις εξετάσεις SAT ίσως έχει εκμηδενίσει τις προοπτικές του για ανώτερες σπουδές, για ποιους λόγους του άρεσε το μάθημα της Σχετικότητας. Σκέφτηκε για λίγο, και ύστερα με κοίταξε χαρογελώντας ντροπαλά. «Μου αρέσει επειδή κάνουμε πράγματα που σχεδόν δεν μπορούν να κάνουν ούτε οι φοιτητές.»

«Κι αυτό πώς σε κάνει να αισθάνεσαι;», τον ρώτησα.

«Με κάνει να αισθάνομαι έξυπνος.»

Η αυτοπεποίθηση και η αυτοεκτίμηση που κέρδισε ο Luc από την επιτυχία του σ' αυτό το μάθημα μπορεί να μην αποδειχτούν επαρκείς για να υπερβεί τα τρομερά εμπόδια που θα ουνανιήσει στην προσπάθειά του να γίνει ένας παραγωγικός πολίτης σε μια οικονομία βασισμένη στη γνώση.

Είναι όμως μια αρχή.

O Paul Horwitz είναι επιστημονικός διευθυντής στο τμήμα εκπαιδευτικών τεχνολογιών της Bolt Beranek and Newman Inc., στο Καϊμπριτζ της Μασσαχουσέττης.

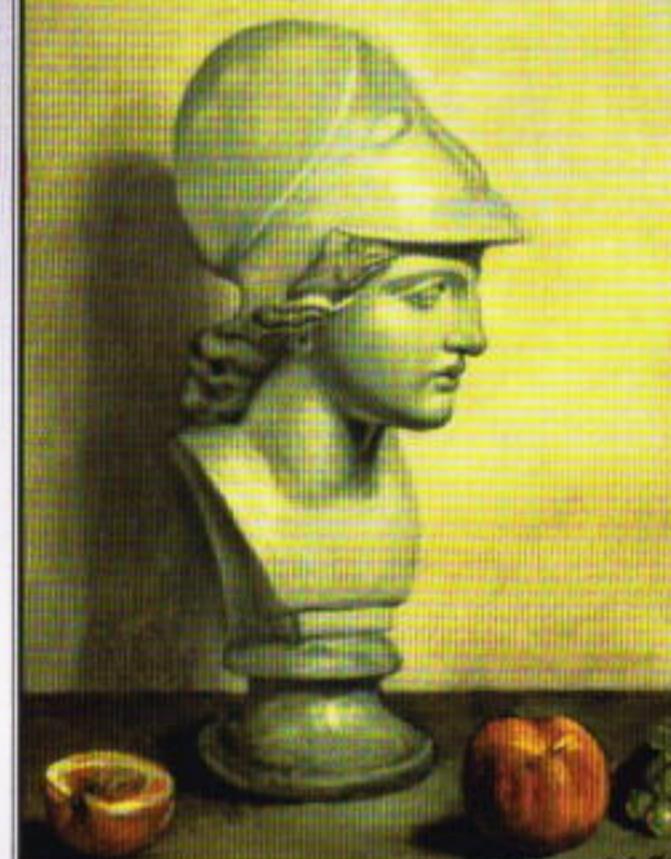
Μετά από το «Τι είναι η ζωή?»

κυκλοφορεί σε ελληνική έκδοση αλλού είναι εξαιρετικό έργο του Erwin Schrödinger (βραβείο Νόμπελ φυσικής, 1933)

Erwin Schrödinger

## Η ΦΥΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ

Ο Κόσμος και η Φύση



Το Φεβρουάριο του 1948, ο Erwin Schrödinger έδωσε τέλεση σε δημόσιες διαλέξεις στο Πανεπιστημιακό Καθεγοριο του Δαστίλινον με τίτλο «Η φύση και οι Έλληνες». Το περιεχόμενο αφορούσε τη σχέση της επιστήμης με την αρχαία ελληνική φιλοσοφία, τη διερεύνηση των μεγαλεπόντων βήματος που αντελέστηκε στην ιστορία των ιδεών εκείνη την εποχή, την αποκαλούμενη εποχή της «γεννησης της επιστήμης» –ένα θέρμα εντυπωσιακό για διαχρονικό.

Στο έργο του «Η Φύση και οι Έλληνες» ο Schrödinger ανιχνεύει χρονολογικά τα δύο βασικά αδιέξοδα της παραγόντης σκέψης: τη ριακή διχοτομία μεταξύ θρησκευτικού και επιστημονικού λόγου, και την κρίση αυτογνωσίας που προκύπτει από την επαφή με τη Φύση.

Μελετώντας τους προσεκτικότερους διανομέτες, ο απόχος του Schrödinger δεν είναι απλώς διδακτικός για ιστορικός. Πάνω απ' όλα πικεύει να φεύγει το παράδοξο της παραγράφης επιστήμης, η οποία πικεύει ότι προσεγγίζει την ολοκλήρωσή της στο περισσότερο καπνού το ανέγκιο της πραγματος.

Εκδόσεις Η. Τραπέζη - Ε. Κασταράκη

Καλλιθεαίον 54α Τηλ.: 5814410 Φαξ: 3614780

# Πεδία εστιασμού

«Μας αρέσει ν' ατενίζουμε τα σύνορα που δεν επιθυμούμε να περάσουμε»

—Samuel Johnson

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

**O**ΣΑ ΙΣΧΥΟΥΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΥΝΑΜΗ Lorentz είναι εκπληκτικά. Όταν μιλάμε για δυνάμεις, συνήθως φανταζόμαστε ένα σώμα να σπρώχνει ή να τραβά ένα άλλο. Μάλιστα θεωρείται αυτονόητο πως το τράβηγμα ή το σπρώξιμο γίνεται στη διεύθυνση που συνδέει τα δύο σώματα. Άλλα τούτο δεν ισχύει στην περίπτωση της δύναμης Lorentz. Ένα σωματίδιο που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο δέχεται από αυτό δύναμη σε διεύθυνση που είναι κάθετη τόσο στην ταχύτητα του σωματιδίου όσο και στο μαγνητικό πεδίο. Εάν το σωματίδιο κινείται παράλληλα στο πεδίο, τότε δεν δέχεται δύναμη απ' αυτό. Αν το σωματίδιο παραμένει ακίνητο μέσα στο πεδίο, πάλι δεν δέχεται δύναμη. Τέλος, αν το σωματίδιο δεν είναι φορτισμένο, και πάλι δεν δέχεται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο. Μπορούμε να εκφράσουμε μαθηματικά τη δύναμη Lorentz μέσω του τύπου  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , όπου  $\mathbf{F}$  είναι η δύναμη,  $q$  το φορτίο του σωματιδίου,  $\mathbf{v}$  η ταχύτητά του, και  $\mathbf{B}$  το μαγνητικό πεδίο. Στον τύπο εμφανίζεται το εξωτερικό γινόμενο του  $\mathbf{v}$  με το  $\mathbf{B}$ , το οποίο απλά σημαίνει ότι το διάνυσμα της δύναμης είναι κάθετο τόσο στο διάνυσμα της ταχύτητας όσο και στο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου.

Η πιο σημαντική εφαρμογή της παραπάνω μαγνητικής δύναμης είναι στον έλεγχο δεσμών φορτισμένων σωματιδίων. Στο κύκλο, το μαγνητικό πεδίο υποχρεώνει τα σωματίδια να εκτελούν κυκλική τροχιά.

Για το μέτρο της δύναμης Lorentz μπορούμε να γράψουμε  $qvB = mv^2/R$ . Μετά την απλοποίηση προκύπτει η σχέση που συνδέει την ορμή του σωματιδίου με το φορτίο του, το μαγνητικό πεδίο και την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς:

$$mv = qBR.$$

Είναι αλήθεια ότι τα σωματίδια μέσα στο κύκλο, όπως και οι ους άλλους επταχυντές, κινούνται με εξαιρετικά υψηλές ταχύτητες, γι' αυτό πρέπει στη θέση της ορμής του σωματιδίου να χρησιμοποιούμε τη σχετικιστική ορμή του  $mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

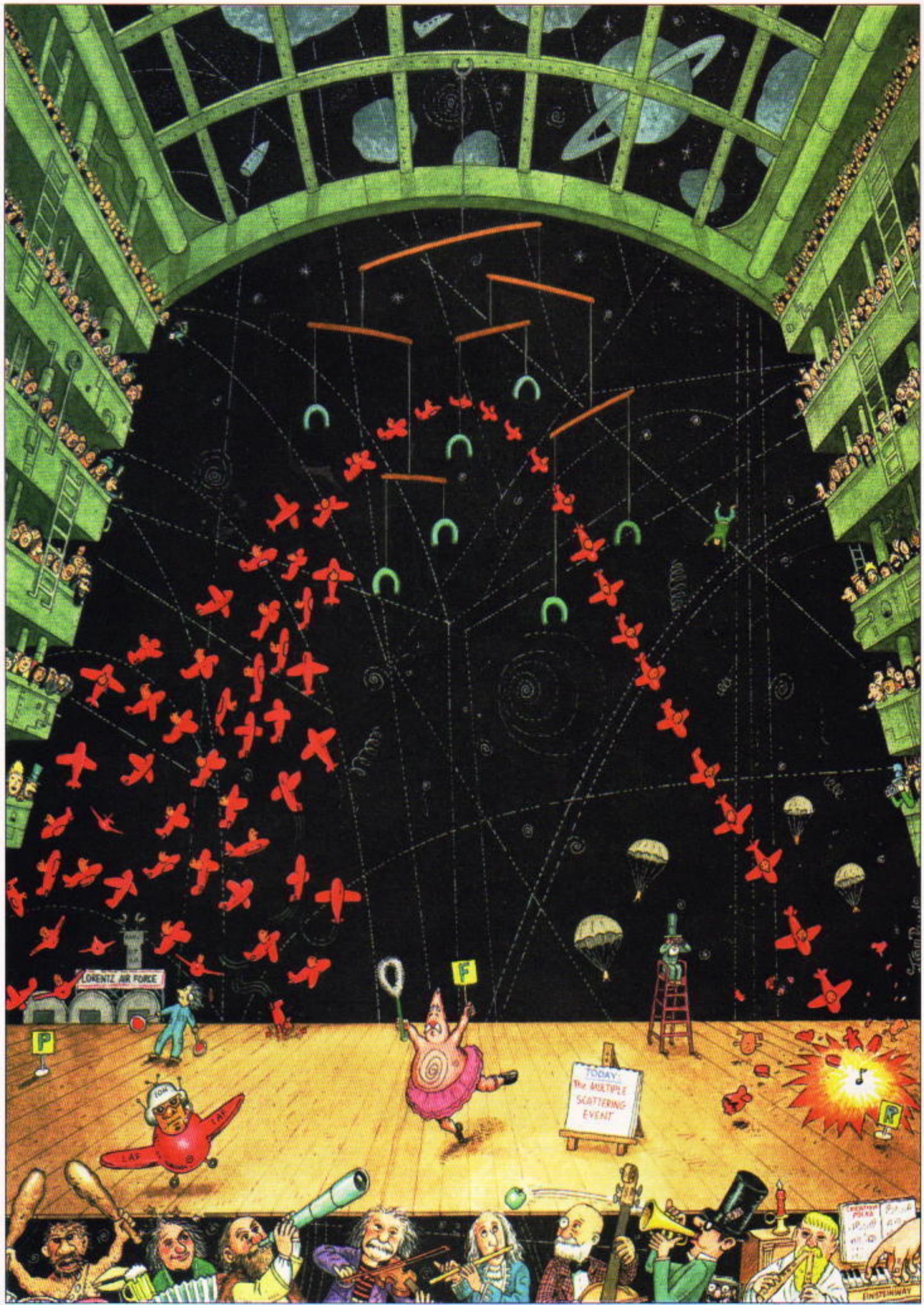
Στο Σχήμα 1 απεικονίζονται οι τροχιές διαφόρων σωματιδίων όπως καταγράφονται σ' ένα θάλαμο φυσαλίδων. Το ηλεκτρόνιο είναι το μόνο σωματίδιο που μπορεί να διαγράψει έναν πλήρη κύκλο μέσα σε θάλαμο φυσαλίδων. Τα πρωτόνια, τα πόνια και τα μεσόνια, εξαιτίας της μεγάλης ορμής τους αλλά και του περιορισμένου μεγέθους του θαλάμου, διαγράφουν απλώς κυκλικά τόξα. Εντοπίζοντας τη διαδρομή κίνησης ενός ηλεκτρονίου, μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική ορμή του αλλά και να διαπιστώσουμε

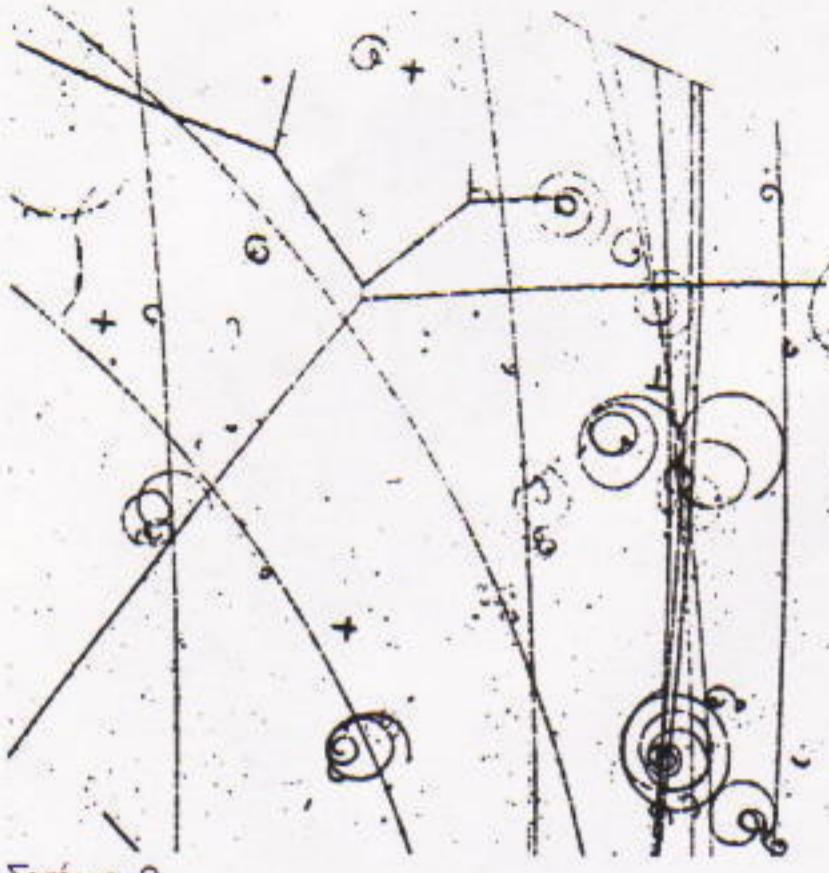
ότι έχει απώλειες ορμής (εξ αυτού και η σπειροειδής τροχιά) λόγω της αλληλεπιδρασής του με το υπέρθερμο υγρό υδρογόνο του θαλάμου. Από το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο διαγράφει κυκλική τροχιά με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε και τη φορά του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Με παρόμοιες αναλύσεις μπορούμε να υπολογίζουμε τις ορμές και άλλων σωματιδίων, αλλά και να ανακαλύπτουμε νέα σωματίδια καθώς αλληλεπιδρούν με ίδη γνωστά. Ένα παράδειγμα πολλαπλών ανακλά-



Σχήμα 1





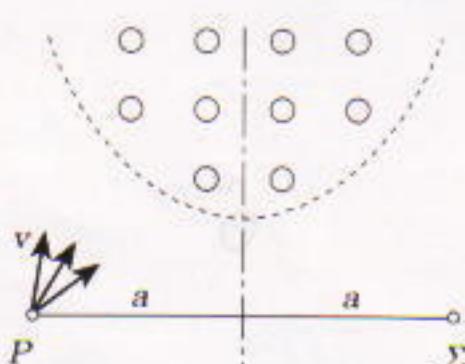
Σχήμα 2

σεων, που μπορούμε να αναλύουμε, φαίνεται στο Σχήμα 2.

Το πρόβλημα αυτού του μήνα πρέπει από την 8η Διεθνή Ολυμπάδα Φυσικής, την οποία φιλοξένησε το 1975 η Ανατολική Γερμανία. Μας ζητάει να βρούμε ένα μαγνητικό πεδίο που να μπορεί να εστιάζει φορτισμένα οωματίδια.

Όμοια ιόντα μάζας  $m$ , φορτίου  $q$  και ταχύτητας  $v$  εκτοξεύονται από σημείο  $P$  προς διάφορες κατευθύνσεις (Σχήμα 3). Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B$ , κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, εστιάζει τα ιόντα σ' ένα σημείο  $\Sigma$  που βρίσκεται σε απόσταση  $PS = 2a$  από το  $P$ . Οι τροχιές των ιόντων είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα που αποτελεί μεσοκάθετο στο  $PS$ . Βρείτε τα σύνορα του μαγνητικού πεδίου.

Στείλτε μας λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum έως τις 10 Απριλίου 1996. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.



Σχήμα 3

## Πρωτάθλημα μπόουλινγκ

Α. Όπως και στην περίπτωση της μπάλας του μπόουλινγκ, η συνολική δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο είναι η τριβή ολισθήσεως  $T_{\varphi} = nmg$ . Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ιοχύει

$$T_{\varphi} = my = nmg,$$

οπότε η γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι

$$y = ng.$$

Επιπλέον, η τριβή ολισθήσεως αναπτύσσει ροπή  $M = T_{\varphi}r$  ως προς τον κεντρικό άξονα του κυλίνδρου, οπότε σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση ιοχύει

$$M = \Theta a = -T_{\varphi}r = -rnmg,$$

με  $\Theta = mr^2/2$ . Βρίσκουμε, λοιπόν, ότι η γωνιακή επιτάχυνση είναι

$$a = -\frac{2ng}{r}.$$

Από τις εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης

$$u = u_0 + yt = ngt$$

και

$$\omega = \omega_0 = at = \omega_0 - \frac{2ngt}{r},$$

και τη συνθήκη για κύλιση χωρίς ολίσθηση,  $u = \omega r$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τον ζητούμενο χρόνο:

$$ngt = r\omega_0 - 2ngt,$$

$$t = \frac{r\omega_0}{3ng}.$$

Β. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ταχύτητας

$$u = ngt = \frac{1}{3}r\omega_0,$$

βρίσκουμε την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που παύει να ολισθαίνει και μόνο κυλίσται.

Γ. Την απόσταση στην οποία συμβαίνει αυτό μπορούμε να την υπολογίσουμε με διάφορους τρόπους. Έτσι, π.χ.,

$$d = yt^2/2 = \frac{r^2\omega_0^2}{18ng}.$$

Δ. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι μόνο περιστροφική:

$$KE_a = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = \frac{1}{4}mr^2\omega_0^2.$$

Η τελική είναι μεταφορική και περιστροφική:

$$KE_t = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

με  $u = r\omega$ . Έτσι,

$$KE_t = \frac{3}{4}mr^2\omega^2 = \frac{1}{12}mr^2\omega_0^2,$$

οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι

$$\Delta KE = -\frac{1}{6}mr^2\omega_0^2.$$

Το ζητούμενο κλάσμα ισούται με 2/3.

Ε. Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-μεταβολής της κινητικής ενέργειας, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου ισούται με το έργο που παράγει η τριβή. Άλλα για να υπολογίσουμε αυτό το έργο, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας μόνο την απόσταση στην οποία ολίσθησε ο κύλινδρος και όχι τη γραμμική απόσταση που διένυσε. Προς τούτο, ας υπολογίσουμε τη συνολική γωνία που διαγράφει ο κύλινδρος έως ότου πάψει να ολισθαίνει:

$$\theta = \omega_{\text{μέση}} t = \frac{2}{3}\omega_0 t = \frac{2r\omega_0^2}{9ng}.$$

Εάν ο κύλινδρος δεν ολίσθαινε, αυτή η γωνία θα αντιστοιχούσε σε γραμμική απόσταση  $r\theta$ . Η απόσταση στην οποία ολίσθησε ο κύλινδρος είναι ακριβώς η διαφορά μεταξύ της συγκεκριμένης απόστασης ( $r\theta$ ) και της πραγματικής γραμμικής απόστασης που διένυσε ( $d$ ):

$$d_{\text{ολισ.}} = \left( \frac{2}{9} - \frac{1}{18} \right) \frac{r^2\omega_0^2}{ng} = \frac{r^2\omega_0^2}{6ng}.$$

Επομένως, το έργο που παράγει η τριβή ισούται με

$$W = -T_{\varphi} d_{\text{ολισ.}} = -\frac{1}{6}mr^2\omega_0^2,$$

το οποίο είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας, που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. ◻

# Η διακρίνουσα εν δράσει

Ένα βασικό εργαλείο για τη στοιχειώδη άλγεβρα

Andrey Yegorov

**Π**ΟΛΛΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ που θα δείτε στη συνέχεια μπορούν να φέρουν σε πλήρη αμηχανία κάποιον ακατάρτιστο οπουδαστή.<sup>1</sup> Ωστόσο, είναι δυνατόν να λυθούν με τη χρησιμοποίηση ορισμένων εντυπωσιακά απλών ιδεών. Θα προσπαθήσω να δείξω το μεγάλο πλήθος πληροφοριών που μπορούμε να αποσπάσουμε από τις πασίγνωστες συνθήκες ύπαρξης πραγματικών λύσεων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και ανισώσεων. (Σ' αυτό το άρθρο δεν θα θεωρήσουμε μιγαδικές λύσεις.)

## Εξισώσεις και συστήματα

Η κύρια ιδέα που κρύβεται πίσω από τη μέθοδο την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

**Πρόβλημα 1.** Λύστε την εξίσωση

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

**Λύση.** Μπορεί να είστε αρκετά τυχεροί ώστε να σκεφτείτε να γράψετε αυτή την εξίσωση με τη μορφή

$$(x + y - 1)^2 + (2x - y)^2 = 0.$$

Τότε, εξισώνοντας και τους δύο όρους του αριστερού μέλους με το 0, θα πάρετε ένα απλό γραμμικό σύστημα:

1. Και αυτός ακριβώς ήταν ο οκοπός των δημιουργών τους. Τα περισσότερα από τα προβλήματα αυτού του άρθρου προέρχονται από τις εισαγωγικές εξετάσεις σε διάφορα πανεπιστήμια και σχολεία της Μόσχας. Οι αναγνώστες μας μπορούν έτσι να πάρουν μια ιδέα για το τι καλούνται να αντιμετωπίζουν οι ρώσοι μαθητές!

μα απ' όπου προκύπτει αμέσως η απάντηση. Δεν είναι όμως εύκολο να σκεφτούμε αυτό το μετασχηματισμό.

Ας δοκιμάσουμε, λοιπόν, μια διαφορετική προσέγγιση. Ας θεωρήσουμε τη δεδομένη εξίσωση ως δευτεροβάθμια εξίσωση του  $x$  με συντελεστές που εξαρτώνται από το  $y$ :

$$5x^2 - 2(y + 1)x + 2y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Για να έχει πραγματικές λύσεις αυτή η εξίσωση, πρέπει να είναι μη αρνητική η διακρίνουσα της  $\Delta$ . Ας την υπολογίσουμε —ή, καλύτερα, ας υπολογίσουμε την  $\Delta/4$ , που είναι ευκολότερο στην προκειμένη περίπτωση:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= (y + 1)^2 - 5(2y^2 - 2y + 1) \\ &= -9y^2 + 12y - 4 \\ &= -(3y - 2)^2. \end{aligned}$$

Έπειτα άμεσα ότι  $y = 2/3$  (διαφορετικά,  $\Delta < 0$ ). Τότε,

$$x = -\frac{-2(y+1)}{5} = \frac{1}{3}.$$

Επομένως, η απάντηση είναι  $(1/3, 2/3)$ .

Και τώρα, ένα πρόβλημα με σύστημα δύο εξισώσεων.

**Πρόβλημα 2.** Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

**Λύση.** Είναι δύσκολο να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα με τις συνηθισμένες μεθόδους. Ας κάνουμε, λοιπόν, ό,τι και προηγουμένως: ας

λύσουμε την πρώτη από τις εξισώσεις ως προς  $x$ . Η διακρίνουσά της ισούται με

$$\Delta = -4(y - 3)^2.$$

Άρα, πραγματική λύση υπάρχει μόνο όταν  $y = 3$ . Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, βρίσκουμε  $x = 2$ . Το μόνο που μένει πλέον είναι να επαληθεύσουμε ότι  $(2, 3)$  ικανοποιεί και τη δεύτερη εξίσωση.

Στο επόμενο πρόβλημα, οι άγνωστοι είναι περισσότεροι από τις εξισώσεις.

**Πρόβλημα 3.** Λύστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

**Λύση.** Με τη βοήθεια της πρώτης εξίσωσης εκφράζουμε το  $x$  συναρτήσει των  $y$  και  $z$ , αντικαθιστούμε στη δεύτερη, και έπειτα από τις πράξεις παιρνούμε:

$$y^2 + (z - \sqrt{3})y + z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0.$$

Έχουμε καταλήξει σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς  $y$  με συντελεστές που εξαρτώνται από το  $z$ . Υπολογίζουμε τη διακρίνουσά της:

$$\Delta = -3z^2 + 2\sqrt{3}z - 1 = -(\sqrt{3}z - 1)^2.$$

Έπειτα ότι  $z = 1/\sqrt{3}$ . Με λίγες πράξεις ακόμη μπορούμε να βρούμε επίσης ότι  $x = y = 1/\sqrt{3}$ . Αυτό το γεγονός, όμως, είναι φανερό λόγω της συμμετρίας του προβλήματος και του μονοσήμαντου της τιμής του  $z$ .

**Πρόβλημα 4.** Λύστε την εξίσωση

$$\operatorname{συν}x + \operatorname{συν}y - \operatorname{συν}(x+y) = 3/2.$$

Χρησιμοποιώντας τους πολύ γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους για τα  $\operatorname{συν}a + \operatorname{συν}b$  και  $\operatorname{συν}2a$ , καταλήγουμε στην επόμενη μορφή της εξίσωσης:

$$4\operatorname{συν}\frac{x+y}{2} \operatorname{συν}\frac{x-y}{2} - 4\operatorname{συν}^2\frac{x+y}{2} - 1 = 0,$$

ή

$$4t^2 - 4\left(\operatorname{συν}\frac{x-y}{2}\right)t + 1 = 0,$$

όπου  $t = \operatorname{συν}[(x+y)/2]$ . Από τη συνθήκη επλυσιμότητας προκύπτει

$$\frac{\Delta}{4} = 4\left(\operatorname{συν}^2\frac{x-y}{2} - 1\right) \geq 0,$$

και επομένως

$$\operatorname{συν}^2\frac{x-y}{2} = 1.$$

Τώρα το πρόβλημα ανάγεται σε δύο συστήματα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \operatorname{συν}\frac{x-y}{2} = 1, \\ \operatorname{συν}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \operatorname{συν}\frac{x-y}{2} = -1, \\ \operatorname{συν}\frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

από όπου οδηγούμαστε γρήγορα στις επόμενες σειρές λύσεων  $(x, y)$ :

$$(\pm\pi/3 + 2(k+n)\pi, \pm\pi/3 + 2(k-n)\pi),$$

και

$$(\pm 2\pi/3 + \pi + 2(k+n)\pi, \pm 2\pi/3 - \pi + 2(k-n)\pi),$$

όπου  $k, n$  τυχαίοι ακέραιοι.

**Πρόβλημα 5.** Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $a$  υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πραγματικών αριθμών  $(x, y)$  που ικανοποιεί την εξίσωση

$$ax^2 + (3a+2)y^2 + 4axy - 2ax + (4-6a)y + 2 = 0;$$

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι για  $a = 0$  η εξίσωση γίνεται

$$2y^2 + 4y + 2 = 0,$$

που έχει τη μοναδική λύση  $y = -1$ . Επομένως, σε αυτή την περίπτωση κάθε ζεύγος  $(x, -1)$  είναι λύση, οπότε η τιμή  $a = 0$  δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος.

Για  $a \neq 0$ , η δεδομένη εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς  $x$ :

$$ax^2 + 2a(2y-1)x + (3a+2)y^2 + (4-6a)y + 2 = 0.$$

Γι' αυτή την εξίσωση, είναι

$$\frac{\Delta}{4} = a(a-2)(y+1)^2.$$

Αν τώρα  $a(a-2) \geq 0$ , τότε η εξίσωση ως προς  $x$  θα έχει τουλάχιστον μία λύση, για κάθε  $y$ . Άρα, αν τη θεωρήσουμε εξίσωση ως προς  $x$  και  $y$ , έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν, όμως,  $a(a-2) < 0$ , τότε η μοναδική δυνατή τιμή του  $y$  είναι η  $y = -1$  και η μοναδική αντίστοιχη τιμή του  $x$  είναι  $x = 3$ . Έτοιμη, η απάντηση είναι  $0 < a < 2$ .

**Ανισότητες**

Θυμηθείτε ότι η ανισότητα

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

(όπου  $a > 0$ ) αληθεύει για κάθε  $x$  αν και μόνο αν

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0,$$

ενώ η ανισότητα

$$ax^2 + bx + c < 0$$

έχει λύση (για  $a > 0$ ) αν και μόνο αν η αντίστοιχη εξίσωση  $ax^2 + bx + c = 0$  έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες —δηλαδή, όταν  $\Delta > 0$ .

Η λύση του επόμενου προβλήματος, που είναι αρκετά γνωστό, μας προσφέρει ένα καλό παράδειγμα εφαρμογής αυτών των ιδιοτήτων των δευτεροβάθμιων ανισοτήτων.

**Πρόβλημα 6.** Αποδείξτε την ανισότητα

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

όπου  $a, b, c$  τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

**Λύση.** Ξαναγράφουμε τη δεδομένη σχέση ως δευτεροβάθμια ανισότητα ως προς  $a$ :

$$a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc \geq 0.$$

Η διακρίνουσα της  $\Delta$  ισούται με  $-3(b-c)^2$ . Αφού δεν είναι ποτέ θετική, η ανισότητα ισχύει για κάθε  $a, b, c$ . Εππλέον, παρατηρούμε ότι  $\Delta = 0$  μόνο όταν  $b = c$ , επομένως η ισότητα ισχύει μόνο όταν  $a = b = c$ .

Το επόμενο πρόβλημα είναι παρόμοιο, αλλά λίγο δυσκολότερο.

**Πρόβλημα 7.** Αποδείξτε την ανισότητα

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc},$$

όπου  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ .

**Λύση.** Αντικαθιστούμε το  $\sqrt{a}$  με  $t$ :

$$6t^2 - (5\sqrt{b} + 7\sqrt{c})t + 4b + 5c - 3\sqrt{bc} \geq 0.$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου του  $t$  στο αριστερό μέλος:

$$(5\sqrt{b} + 7\sqrt{c})^2 - 24(4b + 5c - 3\sqrt{bc})$$

$$= -71(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \leq 0.$$

Αυτό μας δείχνει ότι η δεδομένη ανισότητα ισχύει και ότι μετατρέπεται σε ανισότητα μόνο όταν  $a = b = c$ .

**Πρόβλημα 8.** Για ποιες τιμές του  $a$  η ανισότητα

$$-1 < \frac{ax^2 + x + 2}{x^2 + 1} < 3$$

ισχύει για κάθε  $x$ ;

**Λύση.** Η δεδομένη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} ax^2 + x + 2 < 3x^2 + 3, \\ ax^2 + x + 2 > -x^2 - 1. \end{cases}$$

Η πρώτη, που γράφεται  $(a-3)x^2 + x - 1 < 0$ , ισχύει για κάθε  $x$  όταν  $a-3 < 0$  και ταυτόχρονα η διακρίνουσα  $\Delta = 1 + 4(a-3) = 4a - 11$  είναι αρνητική —δηλαδή, όταν

$$\begin{cases} a < 3, \\ a < \frac{11}{4}, \end{cases}$$

ή, όταν  $a < 11/4$ . Παρόμοια, από τη δεύτερη ανισότητα παίρνουμε  $a > -1/3$ , και επομένως, σε συνδυασμό με το πρώτο αποτέλεσμα, έχουμε:  $-1/3 < a < 11/4$ .

**Πρόβλημα 9.** Βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες η ανισότητα

$$|3\eta x^2 + 2\alpha x + \beta| \leq 3$$

ισχύει για κάθε  $x$ .

**Λύση.** Πριν εφαρμόσουμε τη μέθοδο μας πρέπει να μετασχηματίσουμε κατάλληλα την ανισότητα.

Αν  $\operatorname{συν}x = 0$ , παίρνει τη μορφή  $|a + 3| \leq 3$ . Επομένως, οι κατάλληλες τιμές του  $a$  περιορίζονται στο διάστημα  $-6 \leq a \leq 0$ .

Αν  $\operatorname{συν}x \neq 0$ , διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με  $\operatorname{συν}^2x$  και κάνουμε την ανικατάσταση  $\operatorname{εφ}x = t$ . Αφού  $1/\operatorname{συν}^2x = 1 + \operatorname{εφ}^2x$ , προκύπτει

$$|(a+3)t^2 + 2at + a + 1| \leq 3(1 + t^2).$$

Αυτή η ανισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε  $t$ . Είναι ισοδύναμη με το ζεύγος των ανισοτήτων

$$\begin{aligned} -3 - 3t^2 &\leq (a+3)t^2 + 2at + a + 1 \\ &\leq 3 + 3t^2. \end{aligned}$$

Αυτές προφανώς είναι αληθείς για κάθε  $t$  αν  $a = 0$ . Τέλος, όπως και προηγουμένως, όταν  $a \neq 0$  πρέπει να γράψουμε και να επιλύσουμε ως προς  $a$  τις συνθήκες που είναι απαραίτητο να ισχύουν ώστε να είναι αρνητικές ή μηδενικές οι αντιστοιχες διακρίνουσες. Η απάντηση είναι  $-12/5 \leq a \leq 0$ .

## Πεδία τιμών συναρτήσεων: μέγιστα και ελάχιστα

Εξ ορισμού, ένας αριθμός  $a$  ανήκει στο πεδίο τιμών μιας συναρτήσεως  $f(x)$  αν και μόνο αν έχει λύση η εξίσωση  $f(x) = a$ . Όταν αυτή η εξίσωση ανάγεται σε δευτεροβάθμια, η μέθοδός μας μπορεί να αποδειχτεί απλούστερη και πιο εύχρηστη από την ανάλυση της συναρτήσεως με τις μεθόδους του απειροστικού λογισμού.

**Πρόβλημα 10.** Βρείτε το πεδίο τιμών της

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

**Λύση.** Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το επόμενο ερώτημα: για ποιες τιμές του  $a$  έχει λύση η εξίσωση  $x/(x-1)^2 = a$ , ή, ισοδύναμα,  $ax^2 - (2a+1)x + a = 0$ ;

Αν  $a = 0$ , υπάρχει λύση ( $x = 0$ ). Για  $a \neq 0$  έχουμε μια δευτεροβάθμια ανισότητα, και το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση της ανισότητας  $\Delta = 4a + 1 \geq 0$ . Η απάντηση εδώ είναι  $[-1/4, \infty)$ .

Ας εξετάσουμε τώρα μερικά πρό-

βλήματα που είναι κάπως δυσκολότερα.

**Πρόβλημα 11.** Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$y = x(x+1)(x+2)(x+3).$$

**Λύση.** Αφού

$$y = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2),$$

ας κάνουμε την αντικατάσταση  $t = x^2 + 3x$ . Τότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή  $y = t(t+2)$ . Εφαρμόζοντας και πάλι τη μέθοδό μας, βρίσκουμε ότι η εξίσωση  $t(t+2) = a$  έχει λύση για  $a \geq -1$  και ότι το αριστερό της μέλος παίρνει την ελάχιστη της τιμή  $a = -1$  για  $t = -1$ . Απομένει να επαληθεύσουμε ότι η εξίσωση  $x^2 + 3x = -1$  έχει λύση. Έτσι, η απάντηση είναι  $-1$ .

**Πρόβλημα 12.** Βρείτε τη μέγιστη τιμή του  $z$  έτοι ώστε να ισχύει για κάποια  $x$  και  $y$  η επόμενη ισότητα:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

**Λύση.** Ας θεωρήσουμε την εν λόγω εξίσωση ως εξίσωση ως προς  $x$ . Η διακρίνουσά της πρέπει να είναι μη αρνητική:

$$\Delta = (y+z)^2 - 16y^2 - 8yz - 8z^2 + 32 \geq 0, \quad (1)$$

$$15y^2 + 6yz + 7z^2 - 32 \leq 0.$$

Αυτή μπορούμε να τη θεωρήσουμε δευτεροβάθμια ανισότητα ως προς  $y$  που έχει λύση αν και μόνο αν  $9z^2 - 105z^2 + 15 \cdot 32 \geq 0$  — δηλαδή, όταν  $z^2 \leq 5$ . Επομένως, το  $z$  δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το  $\sqrt{5}$ . Αν  $z = \sqrt{5}$ , αποδεικνύεται ότι η ανισότητα (1) (ως προς  $y$ ) έχει μία και μοναδική λύση ( $y = -1/\sqrt{5}$ ) και ότι γι' αυτές τις τιμές των  $y$  και  $z$  η αρχική εξίσωση έχει λύση (επίσης μοναδική) ως προς  $x$ . Επομένως, η απάντηση είναι  $z = \sqrt{5}$ .

Το επόμενο πρόβλημα ανάγεται

στο προηγούμενο, αν και επιφανειακά μοιάζει διαφορετικό.

**Πρόβλημα 13.** Οι αριθμοί  $x, y, z$  ικανοποιούν τη συνθήκη  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ . Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης  $2x + y - z$ ;

Υπόδειξη. Θέτουμε  $t = 2x + y - z$  και κάνουμε την αντικατάσταση  $z = 2x + y - t$  στη συνθήκη του προβλήματος. Θα πάρουμε ένα πρόβλημα που διαφέρει από το πρόβλημα 12 μόνο ως προς τους αριθμητικούς συντελεστές. Αφήνουμε στον αναγνώστη την ολοκλήρωση των υπολογισμών. Η απάντηση είναι  $t_{\max} = \sqrt{11}$ .

Και τώρα είναι καιρός να προσπαθήσετε να αξιοποιήσετε μόνοι σας τη «δύναμη της διακρίνουσας».

### Ασκήσεις

1. Επιλύστε την εξίσωση και το σύστημα εξισώσεων που ακολουθούν:

$$(a) 5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0.$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$$

$$2. \text{ Αποδείξτε την ανισότητα } x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0.$$

3. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{3x^2 + 11x + 12}.$$

4. Για ποιες τιμές του  $a$  ισχύει η ανισότητα

$$\frac{x-2}{ax^2 - 2x + a - 2} < 1$$

για κάθε  $x$ ;

5. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $x + 5y$  αν  $x > 0, y > 0$  και  $x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0$ . ◻

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 58**

**QUANTUM**  
**ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΚΟ  
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ  
ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ  
ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

### Ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα.

Μπορείτε να πληρώσετε και με κάρτα Diners ή Visa. Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη: η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

Περιοδικό Quantum, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα.  
Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

# Παιχνίδια με το μπαλάκι του Ψαρέματος

Πέντε πειράματα με ένα κούφιο πλαστικό μπαλάκι

Pavel Kanayev

**Σ**ΤΑ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΙΔΩΝ ΑΛΙΕίας υπάρχει ένα απλό αντικείμενο που χρησιμεύει στο ψάρεμα. Είναι ένα κούφιο πλαστικό μπαλάκι με δύο πιαστράκια για το δέσιμο της πετονιάς και μια μικρή τρύπα με ελαφρώς προεξέχοντα χείλη (Σχήμα 1). Μ' αυτό μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μερικά ενδιαφέροντα πειράματα φυσικής. Προτού ξεκινήσουμε, όμως, πρέπει να μάθετε να γεμίζετε γρήγορα το μπαλάκι με νερό (ή κάποιο άλλο υγρό). Αυτό μπορείτε να το κάνετε με μια σύριγγα (χωρίς βελόνα) ή με ένα σταγονόμετρο.



Σχήμα 1

**Πείραμα 1.** Διαλύστε μερικούς κρυστάλλους υπερμαγγανικού καλίου σε μια μικρή ποσότητα ζεστού νερού, ώστε να σχηματιστεί ένα διάλυμα με βαθύ πορφυρό χρώμα. Γεμίστε το μπαλάκι με αυτό το διάλυμα, κρεμάστε το σε μια κλωστή και βυθίστε το στο ζεστό νερό σε θερμοκρασία δωματίου. (Για να σταθεροποιήσετε το μπαλάκι, δέστε ένα μικρό βαρίδι —κι αυτό μπορείτε να το βρείτε στα καταστήματα αλιείας— στο κάτω πιαστράκι του.)

Ένα χρωματιστό ρεύμα αρχίζει αρμέσως να ανέρχεται από την τρύπα —με διάμετρο ίση με εκείνη της τρύπας (Σχήμα 2). Το ρεύμα τελικά φτάνει στην «οροφή» (δηλαδή στο επιφανειακό στρώμα του νερού) και μετά διασπάται σε μικρότερα ρεύματα με

φορά προς τα κάτω. Αυτό συνεχίζεται λίγη ώρα.

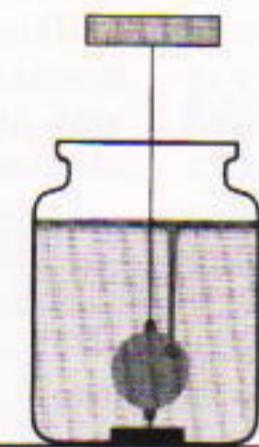
Τώρα ας τροποποιήσουμε κάπως το πείραμα. Ετοιμάστε το διάλυμα του υπερμαγγανικού καλίου σε θερμοκρασία δωματίου, και βυθίστε το μπαλάκι σε νερό της ίδιας θερμοκρασίας: το χρωματιστό ρεύμα δεν θα εμφανιστεί.

Σε μια τρίτη παραλλαγή, προσθέστε μερικές σταγόνες αιθυλικής αλκοόλης στο διάλυμα, και επαναλάβετε το πείραμα. Το χρωματιστό ρεύμα θα εμφανιστεί πάλι όπως προηγουμένως και θα διατηρηθεί για πολλή ώρα.

Γιατί το χρωματιστό ρεύμα δημιουργείται στην πρώτη και στην τρίτη περίπτωση αλλά όχι και στη δεύτερη;

Στο πρώτο και στο τρίτο πείραμα οι πυκνότητες αφ' ενός του ζεστού νερού και αφ' ετέρου του μείγματος νερού-αλκοόλης είναι μικρότερες από την πυκνότητα του νερού σε θερμοκρασία δωματίου, οπότε εμφανίζεται η δύναμη της άνωσης. Στο δεύτερο πείραμα οι πυκνότητες του νερού μέσα στο και έξω από το μπαλάκι είναι ίδιες, κι έτσι δεν υπάρχει άνωση.

**Πείραμα 2.** Γεριστε το μπαλάκι με νερό, ώς τα χείλη της τρύπας. Μετά, χρησιμοποιώντας ένα σταγονόμετρο, αφαιρέστε λίγο νερό και προσθέστε ίση ποσότητα αιθυλικής



Σχήμα 2

αλκοόλης. Στο τέλος σφραγίστε την τρύπα με πλαστελίνη.

Σε 20 λεπτά περίου μια φυσαλίδα αέρα (στο μέγεθος ενός μπιζελιού) θα εμφανιστεί μέσα στην μπάλα, στο πάνω μέρος. Αν αλλάξουμε την αιθυλική αλκοόλη με βορικό ή οξικό οξύ, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

Αν, όμως, αντί γι' αυτά χρησιμοποιήσουμε γλυκερίνη, δεν εμφανίζεται φυσαλίδα.

*Πώς εξηγείται αυτό το φαινόμενο;*

Η κινητική θεωρία λέει ότι μεταξύ των μορίων υπάρχουν κενά. Όταν το νερό αναμειγνύεται με την αλκοόλη, ο όγκος του μείγματος που προκύπτει είναι μικρότερος από το άθροισμα των όγκων του νερού και της αλκοόλης: έτσι εμφανίζεται στο μείγμα η φυσαλίδα. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται όταν το νερό αναμειγνύεται με βορικό ή οξικό οξύ, αλλά ο συνολικός όγκος δεν μειώνεται όταν το νερό αναμειγνύεται με γλυκερίνη.

**Πείραμα 3.** Πάρτε το μπαλάκι, ακουμπήστε τα χείλη της τρύπας στην επιφάνεια του νερού, και ανασηκώστε το. Το άνοιγμα της τρύπας καλύπτεται με μια λεπτή μεμβράνη (υμένιο), αλλά σε 30-40 δευτερόλεπτα η μεμβράνη σπάζει· ακούγεται ένα «ποπ», και στο χείλος εμφανίζεται μια σταγόνα νερού.

Επαναλάβετε το πείραμα, αλλά

ιούτη τη φορά τρυπήστε με μια βελόνα τη μεμβράνη στο μέσο της πριν σπάσει, και κρατήστε τη βελόνα εκεί. Τώρα η μεμβράνη παραμένει ακέραιη για όσο χρόνο θέλετε.

Γιατί η μεμβράνη είναι τόσο βραχύβια στην πρώτη περίπτωση και τόσο σταθερή στη δεύτερη;

Η υδάτινη μεμβράνη που σχηματίζεται στο άνοιγμα είναι παχύτερη κοντά στα χείλη της τρύπας παρά στο κέντρο, επειδή το νερό «επιθυμεί» να βρέξει τα χείλη. Αν, λοιπόν, το επιπέδο της μεμβράνης δεν είναι τελείως οριζόντιο (πράγμα πολύ πιθανό), το νερό ακολουθεί την κλίση και μετακινείται προς τις παρυφές της μεμβράνης, με αποτέλεσμα η μεμβράνη να γίνεται ακόμη λεπτότερη στο κέντρο της. Έτοι, σε κάποιο σημείο του η μεμβράνη σπάζει, και το νερό σχηματίζει τη σταγόνα.

Η μεγάλη διάρκεια ζωής της μεμ-

βράνης στη δεύτερη περίπτωση οφείλεται στο γεγονός ότι η βελόνα διαβρέχεται, και αυτό προκαλεί τη μετακίνηση του νερού από τα χείλη προς το σημείο όπου η βελόνα είναι σε επαφή με το νερό. Έτοι, η μεμβράνη γίνεται παχύτερη και πιο ανθεκτική στο κέντρο της.

**Πείραμα 4.** Γεριστε δύο γυάλινα βάζα του μισού λίτρου μέχρι τα χείλη με νερό σε θερμοκρασία δωματίου. Με ένα σταγονόμετρο προσθέστε στο ένα από τα δύο λίγες σταγόνες σαμπουάν αραιωμένο με νερό (σε ανalogia 1 : 4).

Γεριστε το μπαλάκι με καθαρό νερό και βυθίστε το προσεκτικά στο βάζο με το διάλυμα του σαμπουάν. Το μπαλάκι κινείται αμέσως προς τον πυθμένα.

Πλύντε το μπαλάκι και βυθίστε το προσεκτικά στο βάζο με το καθαρό νερό. Ακόμη και όταν είναι σχεδόν εξ ολοκλήρου βυθισμένο στο νερό, το

μπαλάκι δεν κινείται προς τον πυθμένα, παρότι το βάρος του είναι κατά τι μεγαλύτερο από την άνωση.

Γιατί το μπαλάκι που είναι γεμάτο με νερό βυθίζεται στο ένα βάζο αλλά όχι και στο άλλο; Θα βυθιστεί το μπαλάκι σ' ένα αραιό διάλυμα ζάχαρης;

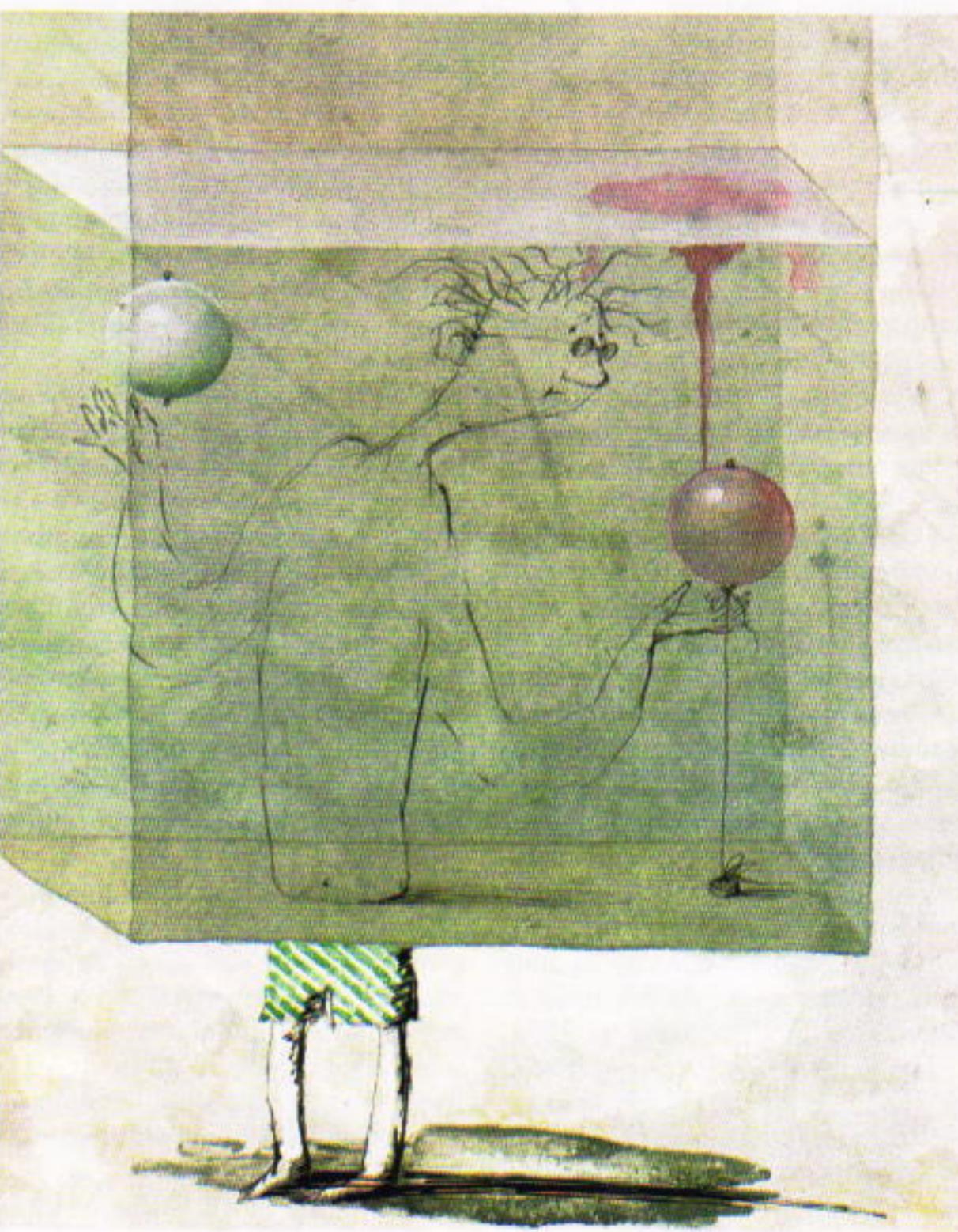
Το αποτέλεσμα εξαρτάται από την επιφανειακή τάση του υγρού και από το αν το συγκεκριμένο υγρό διαβρέχει την επιφάνεια της μπάλας. Ο συντελεστής επιφανειακής τάσης του καθαρού νερού είναι σχεδόν διπλάσιος από εκείνον του διαλύματος του σαμπουάν. Είναι επίσης σημαντικό το ότι το πλαστικό δεν διαβρέχεται πολύ από το νερό. Γι αυτό και το μπαλάκι δεν βυθίζεται στο καθαρό νερό.

Η ζάχαρη αυξάνει την επιφανειακή τάση του νερού, κι έτοι το μπαλάκι δεν θα βυθιστεί ούτε στο διάλυμα της ζάχαρης.

**Πείραμα 5.** Πάρτε ένα σύρμα με διάμετρο 2-3 χιλιοστά και μήκος 1 περίπου μέτρο. Αφού λιμάρετε τη μια άκρη του σύρματος, λυγίστε το σε ορθή γωνία και στερεώστε το μέσα στο πιαστράκι που βρίσκεται πιο κοντά στην τρύπα. Μετά βυθίστε το μπαλάκι αργά μέσα σ' ένα δοχείο γεμάτο με νερό, και στη συνέχεια ανεβάστε το (πάλι αργά!) μέχρι την επιφάνεια. Θα δείτε φυσαλίδες αέρα να εξέρχονται από την τρύπα καθώς το μπαλάκι ανεβαίνει. Όσο βαθύτερα βυθίζετε το μπαλάκι, τόσο περισσότερες φυσαλίδες εξέρχονται κατά την άνοδο.

Γιατί σχηματίζονται αυτές οι φυσαλίδες και γιατί διαφεύγουν καθώς το μπαλάκι ανεβαίνει προς την επιφάνεια;

Όταν το μπαλάκι κατεβαίνει, ο αέρας που υπήρχε μέσα του συμπέζεται, και εισέρχεται στο μπαλάκι νερό. Καθώς το μπαλάκι ανέρχεται, η εξωτερική πίεση ελαττώνεται, ο αέρας στο μπαλάκι διαστέλλεται και σχηματίζονται φυσαλίδες στα χείλη της τρύπας. Οι φυσαλίδες μεγαλώνουν σχηματίζοντας ένα «δακτύλιο» στα χείλη της τρύπας: έτοι, μειώνεται συνεχώς το άνοιγμά της. Καθώς συμβαίνει αυτό, η άνωση που ασκείται στο μπαλάκι αυξάνεται, ενώ η επιφανειακή τάση που περιορίζει κάθε φυσαλίδα ελαττώνεται. Όταν αυτές οι δυνάμεις γίνονται ίσες, η φυσαλίδα διαφεύγει.



# Mn kavovíká συνεχή κλάσματα

Άλλη μια άπειρη διαδικασία που αξιζει την προσοχή μας

George Berzsenyi

**P**ΡΙΝ ΑΠΟ ΜΕΡΙΚΑ ΧΡΟΝΙΑ, ΟΤΑΝ μου ζητήθηκε να εγκαινιάσω τη στήλη προβλημάτων στο *Math Horizons*, θεώρησα λογικό να απευθυνθώ σε πολλούς από τους ανθρώπους που ήταν γνωστό ότι ασχολούνται με προβλήματα, και έτσι δημοσίευσα μια «έκκληση για προβλήματα». Μερικές από τις απαντήσεις ήταν εξαιρετικές και μου προσέφεραν άφθονα «πολεμοφόδια» για τα δύο χρόνια κατά τα οποία διηγήθην την εν λόγω στήλη. Έχω ακόμη λίγα κοσμήματα εκείνης της συλλογῆς στη διάθεσή μου, και οκοπεύω να μοιραστώ μερικά από αυτά με τους αναγνώστες της τιτλινής μου στήλης.

Τα τρία προβλήματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια μου τα έχει στείλει ένας συνταξιούχος καθηγητής, ο Edwin O. Buchman, από το Φούλλερτον της Καλιφόρνιας. Είναι δικές του δημιουργίες και δεν έχουν δημοσιευτεί άλλη φορά. Όπως επισημαίνει στο γράμμα του, θα

$$3 + \cfrac{3 + \cfrac{3 + \cdots}{1 + \cdots}}{3 + \cfrac{3 + \cfrac{3 + \cdots}{1 + \cdots}}{1 + \cfrac{3 + \cdots}{1 + \cdots}}}$$

είναι ίσως εξαιρετικά δύσκολο στους αναγνώστες μου να αποδείξουν ότι έχουν πραγματικά πιμή (με την έννοια ότι οι ακολουθίες που σχηματίζονται όταν αποτέλεσμα θέτουμε διαδοχικά τις παραστάσεις προς τα δεξιά συγκλίνουν σ' ένα όριο), αλλά θα έχει ενδιαφέρον να προσπαθήσουν να προσδιορίσουν την πιμή του καθενός, θεωρώντας δεδομένο ότι οι πιμές υπάρχουν. Σας συμβουλεύω επίσης να προσπαθήσετε να δημιουργήσετε τα δικά σας μη κανονικά συνεχή κλάσματα και να στείλετε τις δικές σας προκλήσεις για πιθανή δημοσίευση σ' αυτή τη στήλη. Παρεμπιπόντως, οι απαντήσεις σας φτιά προβλήματα είναι  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{12}$  —αλλά όχι και' ανάγκη μ' αυτή τη σειρά.

Είμαι αληθινά ευγνώμων στον καθηγητή Buchman για τη συμβολή του και την υπόσχεσή του να μοιραστεί με τους αναγνώστες μου περισσότερα από τα ίσοο αουνήθιστα μη κανονικά συνεχή κλά-

$$2 + \cfrac{2 + \cdots}{6 + \cdots} \\ 2 + \cfrac{6 + \cdots}{11 + \cdots} \\ 2 + \cfrac{4 + \cdots}{11 + \cdots} \\ 6 + \cfrac{2 + \cdots}{6 + \cdots} \\ 6 + \cfrac{4 + \cdots}{11 + \cdots} \\ 2 + \cfrac{2 + \cdots}{6 + \cdots} \\ 11 + \cfrac{2 + \cdots}{6 + \cdots} \\ 6 + \cfrac{11 + \cdots}{4 + \cdots} \\ 6 + \cfrac{4 + \cdots}{11 + \cdots} \\ 4 + \cfrac{2 + \cdots}{6 + \cdots} \\ 4 + \cfrac{4 + \cdots}{11 + \cdots}$$

της στοιχειώδους θεωρίας αριθμών — τα περιοσότερα αφιερώνουν ένα τουλάχι- στον κεφάλαιο σ' αυτό το θέμα.

Ανάδραση

Θέλω να ευχαριστήσω τον φίλο μου καθηγητή Murray Klamkin για τις πληροφορίες του σχετικά με περαιτέρω αναφορές στην περιοχή προβλημάτων την οποία παρουσιάσα στη σήλη του τεύχους Ιουνουαριου /Φεβρουαριου 1996 του *Quantum*. Σ' αυτές περιλαμβάνεται ένα άρθρο των V. Faber και J. Mycielski (*American Mathematical Monthly*, 1986, σελ. 796-801), ένα σημείωμα εκδόση γραμμένο από τον Murray αναφορικά με ένα πρόβλημα του Richard Bellman (Problem 63-9\*, στο *SIAM Reviews*, 1963, σελ. 274), μια απάντηση του W. Franck σ' αυτό το πρόβλημα (*SIAM Reviews*, 1965, σελ. 503-12), και οι παραπομπές τούτων των άρθρων. Επιπλέον επωημαίνει ότι υπάρχουν μερικές σχετικές δημοσιεύσεις του Anatole Beck.

Οοον αφορά τα προβλήματα της συήλης του τεύχους Ιουλίου / Αυγούστου 1995, ο συνάδελφος John Rickert κατόρθωσε να σημειώσει μερικά βήματα προόδου. Απέδειξε ότι το  $G(5, k)$  είναι παράγοντας του  $3125k^4 + 625k^2 + 1$  και ότι το  $G(7, k)$  είναι παράγοντας του  $823543k^6 + 6000099k^4 + 12005k^2 + 1$ . Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι  $G(5, 1) = 341$ ,  $G(5, 2) = 52501$ ,  $G(5, 3) = 258751$ ,  $G(5, 4) = 810001$  και  $G(5, 5) = 1968751$ . Αυτά μας προσφέρουν θαυμάσια παραδείγματα του «Ισχυρού νόμου των μικρών αριθμών του Guy», αφού, για παράδειγμα,  $\mu\delta(n^5 + 5, (n + 1)^5 + 5) = 1$  για  $n = 1, 2, 3, \dots, 533359$ , ενώ  $\mu\delta(533360^5 + 5, 533361^5 + 5) = 1968751$ . ◉

# Τι είναι τα μαθηματικά;

Ανθρωπιστική επιστήμη, φυσική επιστήμη ή τέχνη;

W.T. Tutte

**E**ΛΠΙΖΩ ΝΑ ΒΡΗΚΑ ΑΡΚΕΤΑ ΕΛΚΥΣΤΙΚΟ ΤΙΤΛΟ για τη οημερινή διάλεξη. Είμαι σίγουρος ότι ενδιαφέρεστε να μάθετε τι είναι τα μαθηματικά, και ομολογώ ότι κι εγώ ο ίδιος αναζητώ την απάντηση! Είναι φυσικό κάποιος που κοντεύει να πάρει σύνταξη να αναφωτείται τι έχει καταφέρει σε όλη την ακαδημαϊκή του ζωή, για τι πράγμα πληρωνόταν από την πολιτεία, ποιες συνέπειες θα έχει η δουλειά του σ' εκείνους που τυχαίνει να τον διαδέχονται.

Ας αφήσουμε κατά μέρος το ότι μαθηματικός είναι κάποιος καλός στις προσθέσεις. Στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών κανείς δεν είναι καλός στις προσθέσεις!

Αυτό που ισχύει είναι ότι στα μαθηματικά σου δίνονται κάποιες πληροφορίες από τις οποίες συνάγεις συμπεράσματα. Αυτή η διαδικασία παραγωγής συμπεράσμάτων έχει δρατοποιηθεί από τον Conan Doyle στις ιστορίες του Σέρλοκ Χολμς. Συμπτωματικά, σ' εκείνες τις ιστορίες κάποιο πρόσωπο περιγράφεται ως μαθηματικός, αλλά ποτέ δεν αφήνεται να φανεί όντι δρα ως τέτοιος. Όταν ήμουν νέος,

Ο καθηγητής W.T. Tutte, του Τμήματος Συνδυαστικής και Βελτιστοποίησης του Πανεπιστημίου του Γουότερλου, στον Καναδά, έδωσε αυτή τη διάλεξη τον Οκτώβριο του 1990. Εντασσόταν σε μια σειρά πανεπιστημιακών διαλέξεων που οργάνωσε το διοικητικό ουμβούλιο των καθηγητών, ώστε να παρουσιαστούν οι σκέψεις των γηραιότερων και διακεκριμένων μελών του Πανεπιστημίου σε όσους ήθελαν να τις ακούσουν. Τη διάλεξη απέδωσε στα ελληνικά ο επικουρός καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών Τάκης Σπύρου.

διάβαζα αχόρταγα αυτές τις ιστορίες. Αργότερα, ακούγοντας τα πρώτα μου μαθήματα γεωμετρίας, ένιωσα έκπληξη και χαρά που βρήκα ένα αντικείμενο το οποίο είχε αναπτυχθεί βάσει των ίδιων παραγωγικών αρχών.

Εκείνο τον καιρό διάβαζα ότι τα σχολικά προγράμματα προσέφεραν δύο βασικές κατευθύνοσις: τις φυσικές επιστήμες από τη μια και τις ανθρωπιστικές από την άλλη. Δεν αντιλαμβανόμουν, όμως, πού έμπαιναν τα μαθηματικά σ' αυτή την ταξινόμηση. Ανήκαν στις ανθρωπιστικές επιστήμες; Κάτι τέτοιο δεν ακουγόταν άσχημο. Η μελέτη των έργων του Ευκλείδη αποτελούσε για πολλούς αιώνες μέρος των κλασικών σπουδών. Ο Πλάτων έχαιρε μεγάλης εκτίμησης στις ανθρωπιστικές επιστήμες, και συνέδεε τα μαθηματικά με το αγαθό. Δεν ήταν αυτός που έλεγε «ο Θεός αεί γεωμετρεῖ»; Υπήρχε η παράδοση ότι τα μαθηματικά ασχολούνται με αλήθειες αιώνιες, όντα που θα πρέπει να είναι αληθινά σε όλους τους δυνατούς κόσμους. Τα μαθηματικά δεν αποτελούσαν μέρος της επικοινωνίας του ανθρώπου με το αιώνιο; Τι περισσότερο μπορούσε να αξιώσει κανείς από την ποίηση, την τέχνη ή τη φιλοσοφία; Άρα, όντως ανήκαν στις ανθρωπιστικές επιστήμες.

ΩΣΤΟΣΟ, Η ΑΠΟΦΗ ΑΥΤΗ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ έπαψε να κυριαρχεί μετά τη δεκαετία του 1930 στις άλλες ανθρωπιστικές επιστήμες δεν υπήρχε πλέον ο σεβασμός για τα μαθηματικά που φαίνεται πως απαιτούσε η εν λόγω άποψη. Εξάλλου, δεν ήταν και η άποψη που έβρισκε σύμφωνους τους μαθηματικούς. Λυτοί οδηγούνταν σε άλλες

απόψεις, που συμφωνούσαν περισσότερο με το πνεύμα της εποχής και μπορούσαν να γίνουν ευκολότερα αποδεκτές; τα μαθηματικά ήταν ένα σύμπαν κατασκευασμένο από τον άνθρωπο. Ήταν ένα παιχνίδι, όπως το σκάκι, που παιζόταν με προσυμφωνημένους κανόνες. Ήταν μια σειρά ταυτολογιών, μια ακολουθία όλο και περισσότερο πολύπλοκων τρόπων να πεις ότι «τα γουρούνια είναι γουρούνια».

Στη βρόμικη δεκαετία του 1930 υπήρχε κι ένας άλλος, αποτρεπτικός λόγος να τοποθετεί κανείς τα μαθηματικά ανάμεσα στις ανθρωπιστικές επιστήμες: οι εκπρόσωποι των ανθρωπιστικών επιστημών που είχαν τη δυνατότητα να εκφράζουν δημόσια τη γνώμη τους ουνήθιζαν να καλλιεργούν περιφρονητική στάση έναντι των φυσικών επιστημών. Οι φυσικοί επιστήμονες καταγγέλλονταν μονότονα ως ειδικοί με παρωπίδες, κατά το ήμισυ άνθρωποι και κατά το ήμισυ βάρβαροι. Έτοι, αν επιθυμούσες να είσαι αποδεκτός από τους «διανοουμένους» της εποχής, ήταν καλύτερα να επλέξεις έναν κλάδο που να χαρακτηρίζεται ανθρωπιστικός. Όσο για τα μαθηματικά, κάτι τέτοιο φαινόταν όλο και πιο απίθανο. Οι φυσικές επιστήμες εύρισκαν όλο και περισσότερες εφαρμογές των μαθηματικών και οι ανθρωπιστικές όλο και λιγότερες. Τα μαθηματικά έμεναν στη μέση του δρόμου.

Εκείνο το οποίο μου τόνιζαν με συγκαταβατική ευγένεια τις περισσότερες φορές οι φίλοι μου των ανθρωπιστικών επιστημών ήταν ότι στα μαθηματικά υπήρχε μια μοιραία ατέλεια, που αφορούσε την αρχή ότι «το όλον είναι το άθροισμα των μερών του». Αυτή η επί-

κριση, που ακούγεται ακόμη και σήμερα, δεν ανταποκρίνεται στην αλήθεια. Πρώτα απ' όλα, δεν ξέρω κανένα μαθηματικό εγχειρίδιο στο οποίο να διατυπώνεται αυτή η αρχή. Επιπλέον, αυτή η σειρά λέξεων, μέσα στην φεύγουκη γενικότητά της και την ολοκληρωτική απουσία περιεχομένου, δεν είναι κάτι που χρησιμοποιεί ποτέ ένας μαθηματικός. Αντιμετωπίζοντας τον θα μπορούσαμε μέσα στην αμηχανία μας να αναφωνήσουμε: «Ποιο όλον; Πώς ορίζεις τα μέρη του; Και τι στην οργή εννοείς με το άθροισμα;» Επιτρέψτε μου εδώ να εποτήσω την προσοχή σας σ' ένα βασικό χαρακτηριστικό δύον ασχολούνται με τα μαθηματικά: τους αρέσουν οι ξεκάθαροι ορισμοί και οι ξεκάθαρες προτάσεις. Αυτό είναι που έχουν κοινό με τους φυσικούς εποτήσουντες.

**ΕΙΝΑΙ ΛΟΙΠΟΝ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΕΠΟΤΗΜΟΝΙΗ;** Αν ναι, τότε οφείλουν να στηρίζονται σε κάποιου είδους παρατηρήσεις. Η αστρονομία παρατηρεί τ' αστέρια, η βιολογία τα ζώα και τα φυτά. Άλλα τι παρατηρούν τα μαθηματικά. Θα δοκιμάσω να δώσω μια απάντηση με ένα απλό παράδειγμα. Όταν άρχισα την έρευνά μου στα μαθηματικά παρατήρησα τα «τέλεια ορθογώνια». Σας δείχνω δύο από αυτά τα αντικείμενα στα Σχήματα 1 και 2: καθένα ορθογώνιο είναι χωρισμένο σε τετράγωνα. Αυτό το καθιστά «τετραγωνισμένο ορθογώνιο». Σε κάθε περίπτωση, όλα τα τετράγωνα είναι διαφορετικών μεγεθών. Αυτό το καθιστά «τέλειο ορθογώνιο». (Οι αριθμοί εκφράζουν τα μήκη των πλευρών σε αυθαίρετες μονάδες). Ένα ορθογώνιο λέμε ότι είναι 9ης τά-

ξεως, αν περιέχει εννέα «δομικά» τετράγωνα. Υπάρχουν κατάλογοι τελείων ορθογωνίων 10ης, 11ης, 12ης και ανώτερης τάξης.

Αν δοθεί ένας τέτοιος κατάλογος, μπορούμε να κάνουμε παρατηρήσεις και να ψάξουμε για κανονικότητες. Για παράδειγμα, το ορθογώνιο του Σχήματος 1 έχει μήκη πλευρών 32 και 33, και ημιπερίμετρο  $32 + 33 = 65$ , ενώ εκείνο του Σχήματος 2 έχει μήκη πλευρών 61 και 69 κι ημιπερίμετρο  $61 + 69 = 130$ . Η δεύτερη ημιπερίμετρος είναι ακριβώς δύο φορές η πρώτη. Η έρευνά μου συνιστάται, εν μέρει, στην παρατήρηση τέτοιων συμπτώσεων και στην κατασκευή θεωρητικών εξηγήσεων για κάποιες από αυτές.

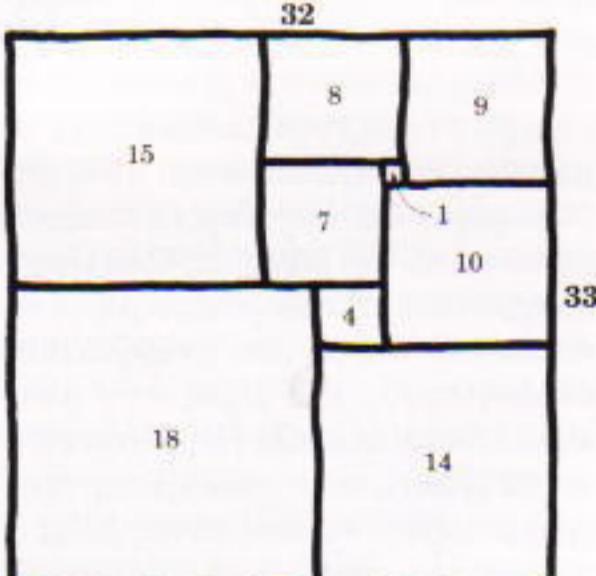
Εδώ νομίζω ότι έχουμε μια εφαρμογή της εποτημονικής μεθόδου. Άλλα υπάρχουν παρεκκλίσεις από αυτό. Στα μαθηματικά επιτυγχάνουμε όταν έχουμε στερεώσει τις θεωρίες μας με λογικές δομές, σταθερές και πέρα από κάθε αμφισβήτηση, που τις λέμε «αποδείξεις». Άλλα οι φυσικές εποτήμες πρέπει να προχωρούν χωρίς τη βεβαιότητα αυτού του είδους. Υποθέτω ότι η διαφορά έγκειται στο γεγονός πως οι φυσικοί εποτήμονες έχουν να κάνουν με μια συνεχή ροή νέων πληροφοριών. Από την άλλη, ο' ένα μαθηματικό πρόβλημα αρχίζουμε με μια σταθερή και πεπερασμένη ποσότητα πληροφοριών και παράγουμε τα θεωρήματά μας αποκλειστικά από αυτές. Ο μαθηματικός μοιάζει με τον σκακιστή που παίζει ένα συμβατικό παιχνίδι και μπορεί μερικές φορές να δηλώσει με πλήρη βεβαιότητα «ματ σε τρεις κινήσεις». Ενώ ο φυσικός εποτήμονας μοιάζει με τον παικτή που συνεχώς παρενοχλείται από εντολές που τον υποχρεώνουν σε επιπρόσθιες κανόνες, ή ακόμη επεκτάσεις της σκακιέρας με την τοποθέτηση καινούργιων κομματών σ' αυτήν.

**ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΙ ΆΛΛΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ.** Οι μελετητές των τελείων ορθογωνίων μπορούν να αποδείξουν ότι δεν υπάρχει κανένα τέτοιο ορθογώνιο τάξης μικρότερης από την 9η, ότι υπάρχουν ακριβώς δύο 9ης τάξης, έξι 10ης τάξης, κ.ο.κ., σε μια ακολουθία που επεκτείνεται πέρα από την 20η τάξη. Γνωρίζουν ακόμη ότι αυτό μπορεί να βρεθεί με καθαρή σκέψη, χωρίς να χρησιμοποιηθεί τίποτε περισσότερο από τους

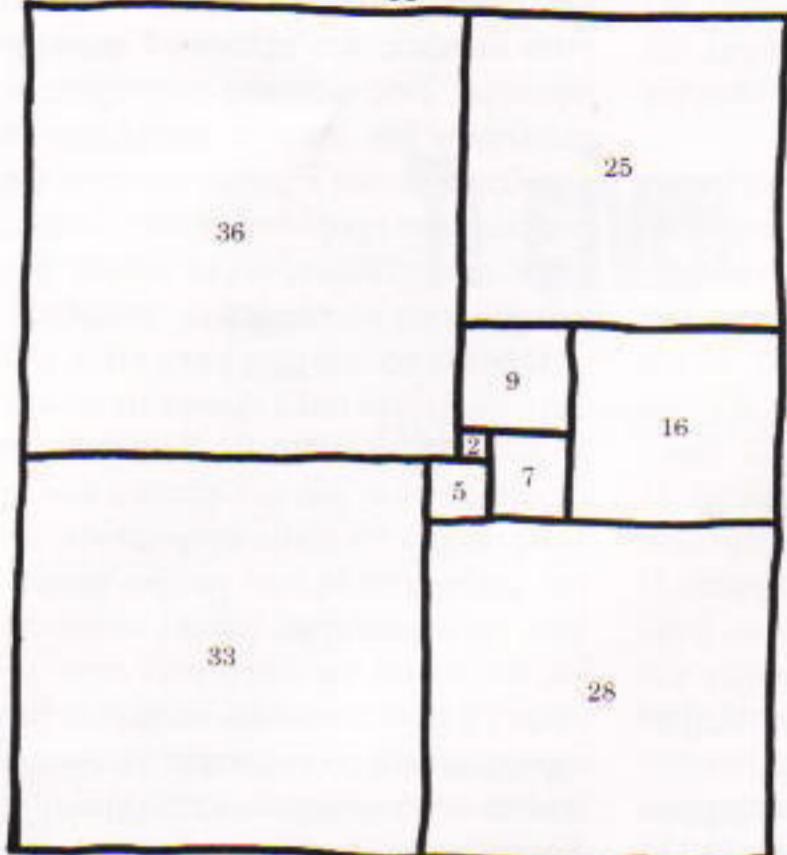
κανόνες της αριθμητικής, και αποτελεί αυτό ακριβώς που πρέπει να παρατηρήσουμε. Στις φυσικές εποτήμες ο πωδήποτε δεν υπάρχει τίποτε που να μοιάζει με αυτό! Έχουμε ακούσει για θεωρίες που προβλέπουν την ύπαρξη νέων σωματιδίων, αλλά αυτές δεν αναφέρονται ως αποδείξεις ύπαρξης.

Ωφείλω να υπογραμμίσω ότι οι μαθηματικοί είναι πολύ προσεκτικοί ώστε να μη διατυπώνουν τις θεωρίες τους ως αποφάνσεις για τον φυσικό κόσμο. Τους αρέσει να είναι αφηρημένοι. Ένας μαθηματικός που γράφει γεωμετρία, για παράδειγμα, μπορεί να σας πει ότι προτίθεται να αναφερθεί σε αντικείμενα που ονομάζει «σημεία» και «γραμμές», αλλά θα αρνηθεί να σας πει τι είναι αυτά τα σημεία και οι γραμμές. Αντί γι' αυτό θα παρουσιάσει μια σειρά από προτάσεις που ονομάζονται «αξιώματα», και θα επιτρέπει στον εαυτό του το χειρισμό αυτών και μόνο. Αν, όμως, τον ρωτήσετε κατά πόσον είναι αληθείς αυτές οι προτάσεις, θα σας κοιτάξει αμήχανα, χωρίς να καταλαβαίνει τι ακριβώς εννοείτε. Μπορεί να κατασκευάσει αποδείξεις από τα αξιώματα αυτά, σύμφωνα με τους κανόνες της λογικής, και να τις παραθέσει σε μια κατάλληλη σειρά θεωρημάτων. Η θεωρία του μπορεί να επαινεθεί για την ομορφιά και την κομψότητά της, και ο ίδιος ελπίζει ότι μπορεί να επιβεβαιωθεί ως λογικά βάσιμη. Ωστόσο, η θεωρία από μόνη της δεν δίνει πληροφορίες για τον φυσικό κόσμο, κι αυτό εξάλλου δεν είναι καθόλου μέσα στις προθέσεις του. Αργότερα θα περάσουν οι φυσικοί να δανειστούν κάποια από τα θεωρήματά του για τους δικούς τους μυστήριους σκοπούς. Ο μαθηματικός, αδελφή ψυχή, θα προσπαθήσει να τους προμηθεύσει τα είδη των θεωρημάτων που φαίνεται ότι επιθυμούν· αλλά το ιι θα κάνουν με αυτά είναι υπόθεση δική τους, όχι δική του.

Αναφέρομαι, λοιπόν, σ' ένα άλλο χαρακτηριστικό των μαθηματικών: είναι αφηρημένα. Αυτή η αφαιρετικότητα μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις. Ο πολύς κόσμος ακούει ότι ο μαθηματικός ερευνά τον τετραδιάστατο χώρο και νομίζει ότι έχει ανακαλύψει κάποια υπερφυσική προέκταση του κόσμου στον οποίο ζούμε. Δεν είναι έτοι. Το μόνο που σημαίνει αυτό είναι ότι έχει να αντιμετωπίσει κάποια προβλή-



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ματα στα οποια υπάρχουν τέσσερις μεταβλητές. Ο χώρος του είναι αφηρημένος. Κάθε δυνατό σύνολο τιμών τεσσάρων μεταβλητών ονομάζεται «σημείο», και τα σημεία λέγεται ότι συνθέτουν το «χώρο». Ο χώρος είναι το σακούλι των δυνατών απαντήσεων, από το οποίο ελπίζει να ανασύρει τις σωστές.

Κάποια μέρα, μπορεί να έρθει κάποιος φυσικός και να πει: «Ξέρεις, αν μου επιτρέψεις να ταυτίσω τα σημεία σου με ό,τι ονομάζω γεγονότα, τις γραμμές σου με τις τροχιές του φωτός, και το χώρο με το χωρόχρονο, μπορώ να φτιάξω ένα θαυμάσιο μοντέλο για τον φυσικό κόσμο». Ο μαθηματικός μπορεί να απαντήσει: «Συγχαρητήρια, αλλά μη με καθιστάς υπεύθυνο για τις ταυτίσεις σου».

ΥΣΤΕΡΑ ΑΠΟ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ, μπορεί κάποιος να έχει την αντίρρηση ότι τα τετράγωνισμένα ορθογώνια είναι φυσικά αντικείμενα, που έχουν σχεδιαστεί σε πραγματικό χαρτί με πραγματικό μολύβι. Άλλα οι μαθηματικοί είναι έτοιμοι να εξηγήσουν ότι αυτό το χαρτί και το μολύβι είναι μόνο για να βοηθούν τη σκέψη, παραχωρήσεις στη θνητή και υλική φύση. Τα αληθινά τετράγωνισμένα ορθογώνια είναι αφαιρέσεις, που εύκολα κωδικοποιούνται ως σειρές αριθμών και, κατ' αρχήν, μπορούν να

μελετηθούν απλά ως τέτοιες σειρές.

Αν έπειτα από όλα αυτά ρωτήσετε «είναι τα μαθηματικά φυσική επιστήμη», το μόνο που μπορώ να απαντήσω είναι «και ναι και όχι». Δεν μπορεί να αρνηθεί κανείς ότι τα μαθηματικά ια πάνε καλά με τη φυσική. Πολλές φυσικές θεωρίες είναι στη μορφή τους μαθηματικές. Είναι πράγματα μαθηματικές θεωρίες συν αυθαιρετές ταυτίσεις των μαθηματικών και των φυσικών τους εννοιών. Το γιατί τέτοιες θεωρίες είναι τόσο επιτυχημένες όσο είναι, αποτελεί ένα φιλοσοφικό μυστήριο. Κάποιοι ιοχυρίζονται πως στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κανένα μυστήριο: οι μαθηματικοί έχουν διεισδύσει τόσο πολύ στο χώρο της φυσικής, που έχουν επιβάλει τις δικές τους συνήθειες στον τρόπο σκέψης. Προσωπικά δεν πιστεύω πως γι' αυτό το λόγο είναι τόσο επιτυχημένες οι θεωρίες. Είμαι πεπειομένος ότι πολλές από τις αποτυχίες μου στη μαθηματική έρευνα οφείλονται στην προσπάθειά μου να επιβάλω τα δικά μου πρότυπα στο δύστροπο αντικείμενο. Στις επιτυχίες μου, πάλι, είχα την εντύπωση ότι έβρισκα το πρότυπο που προϋπήρχε σ' αυτό, και ήταν κάτι που με εξέπληττε, κάτι που ξεπερνούσε τις δυνατότητες της εφευρετικότητάς μου.

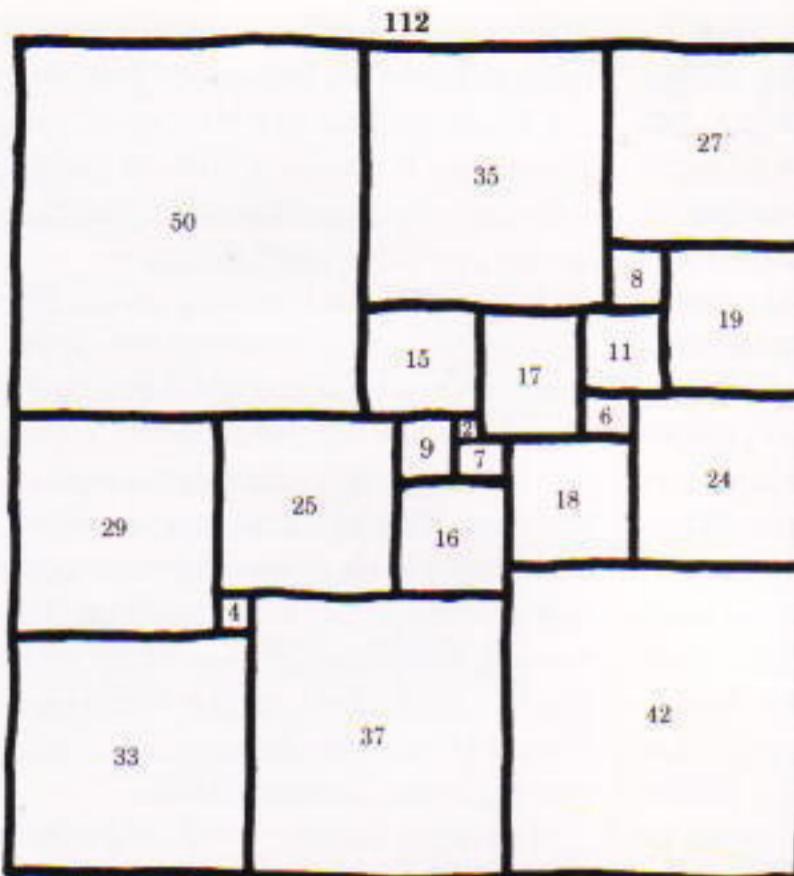
Η παλιά άποψη για τα μαθηματικά, ότι μελετούν αιώνιες αλήθειες, φαίνεται ότι δίνει μια απλοϊκή εξήγηση: ο μαθηματικός κόσμος χρησιμεύει για τον Θεό ως υπόδειγμα κατά τη διάρκεια των ημερών της Δημιουργίας. Τα μαθηματικά είναι μια εκ των προτέρων δημιουργία ή το ίδιο αιώνια με Αυτόν. Στο άλλο άκρο, μπορούμε να βρούμε μια εξήγηση στην άποψη που διατύπωσε ο E.T. Bell: τα μαθηματικά είναι η μηχανή που εντατικά παράγει ταυτολογίες. Σε πο μοντέρνα διατύπωση, τα μαθηματικά είναι επεξεργαστής πληροφοριών. Η φυσική συλλέγει τις πληροφορίες προς επεξεργασία. Τα μαθηματικά τις επεξεργάζονται. Φυσικά οι δύο χώροι αλληλοπροσαρμόζονται.

Ωστόσο, δεν αισθάνομαι ότι αυτή η επιχειρηματολογία μάς απαλλάσσει από το μυστήριο. Φαίνεται παράξενο το πώς η εν λόγω επεξεργασία οδηγεί σε τόσο εντυπωσιακές και καθολικές θεωρίες όπως ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα ή οι εξισώσεις της ηλεκτροδυναμικής του Maxwell.

**ΚΑΠΟΙΟΙ ΛΕΝΕ ΟΤΙ Η ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ έχει αλλάξει τα τελευταία χρόνια.** Κοιτάξτε το Σχήμα 3: δείχνει ένα τέλειο τετράγωνο, και όχι απλώς τέλειο ορθογώνιο. Είναι ένα τετράγωνο χωρισμένο σε άνισα τετράγωνα. Το κύριο αντικείμενο της αρχικής εργασίας μου στα τέλεια ορθογώνια ήταν να βρω ένα τέλειο τετράγωνο. Οι συνεργάτες μου κι εγώ είχαμε ανακάλυψει κάποιο που ήταν τάξης μεγαλύτερης της 38ης. Άλλα το πρώτο που δημοσιεύτηκε είχε βρεθεί από κάποιον άλλο μαθηματικό, τον R.P. Sprague. Δημοσιεύτηκε στο *Mathematische Zeitschrift* του 1939, και ήταν 55ης τάξης. Όλα εκείνα τα τέλεια τετράγωνα προέκυπταν από σχεδιασμούς και υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι. Στέκομαι λοιπόν μπροστά σας ως ένα απομεινάρι της «Προκομπουτερικής Εποχής»!

Το τέλειο τετράγωνο του Σχήματος 3 είναι μια πολύ ειδική περίπτωση. Οφείλεται στον A.J.W. Duijvestijn του Αιντχοφεν, ο οποίος βέβαιωνε ότι έχει την κατώτερη δυνατή τάξη —21η—, και επιπλέον ότι πρόκειται για το μόνο τέλειο τετράγωνο 21ης τάξης. Αυτοί οι ιοχυρισμοί έχουν επιβεβαιωθεί από τα αποτελέσματα της έρευνας με ηλεκτρονικό υπολογιστή. Ο υπολογιστής έχει ελέγξει και απορρίψει χιλιάδες και χιλιάδες τετράγωνα, ώσπου στο τέλος βρήκε ένα το οποίο πέρασε τη δοκιμασία.

Αξίζει ακόμη να σημειώσουμε ότι σήμερα γνωρίζουμε μαθηματικές αποδείξεις που αποτελούνται κατά μεγάλο μέρος από σγκώδεις εκτυπώσεις υπολογιστή. Οχι βέβαια εξ ολοκλήρου: πραγματικά, το σοβαρότερο μέρος αποτελείται ακόμη από ανθρώπινους συλλογισμούς. Στο μέρος αυτό ανακαλύπτονται οι υπολογισμοί που πρέπει να γίνουν, και ο υπολογιστής προγραμματίζεται να τους κάνει. Άλλα οι πράξεις του υπολογιστή είναι συνήθως μακροσκελείς για να αποτελέ-



Σχήμα 3

σουν αντικείμενο πλήρους ελέγχου.

Αυτό είναι πραγματικά κάτι το καινούργιο, αλλά οι γνώμες ως προς τη φιλοσοφική του σημασία ποικίλλουν. Μερικοί φιλόσοφοι πιστεύουν ότι η βεβαιότητα στα μαθηματικά έχει εξαλειφθεί. Οι υπολογιστές μπορεί να κάνουν λάθη, κι αν η εκτύπωση είναι πολυσέλιδη, ο μαθηματικός δεν μπορεί να ελπίζει ότι θα τα εντοπίσει όλα. Οι περισσότεροι μαθηματικοί απορρίπτουν αυτή την άποψη και επισημαίνουν ότι και οι ίδιοι μπορεί επίσης να κάνουν λάθη, ιδιαίτερα όταν ελέγχουν μεγάλες αποδείξεις. Επομένως, η δυσκολία να ελεγχθεί μια μεγάλη απόδειξη δεν έχει αλλάξει ουσιαστικά.

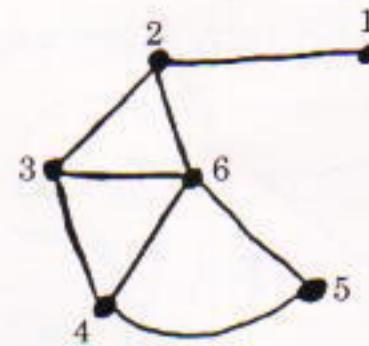
Η μαθηματική βεβαιότητα είναι ένα ιδανικό που δύοκολα επιτυγχάνεται στην πράξη. Δεν είπα ότι η μαθηματική απόδειξη εδραιώνει μια πρόταση πέρα από κάθε λογική αμφισβήτηση. Άλλα πόσο έλεγχο πρέπει να κάνεις ώστε να είσαι βέβαιος ότι το επιχείρημα που έχεις μπροστά σου αποτελεί πραγματικά απόδειξη; Μερικές φορές μια απόδειξη είναι μικρή σαφής, και είναι γνωστή και μελετημένη περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια πριν. Τότε ουσιαστικά δεν υπάρχει αμφιβολία. Από την άλλη μεριά, μια απόδειξη μπορεί να είναι πρόσφατη, έκτασης τριακοσίων σελίδων και δύοκολο να παρακολουθηθεί. Τότε κατά πάσα πιθανότητα δεν θα υπάρχει ει-

δικός στον κλάδο έτοιμος να έρθει και να ισχυριστεί με βεβαιότητα ότι η απόδειξη είναι σωστή.

**ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΕΚΑΕΤΙΑ του 1930, όταν εξηγούσα την εργασία μου για τα τέλεια τετράγωνα, συχνά με ρωτούσαν: «Σε τι χρησιμεύουν όλα αυτά;» Δεν νομίζω ότι μπορούσα να δώσω μια ικανοποιητική απάντηση. Σήμερα νομίζω ότι οι άνθρωποι είναι περισσότερο έτοιμοι να παραδεχτούν ότι ο κόσμος των μαθηματικών**

έχει πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις με την πρακτική ζωή, αλληλεπιδράσεις τα ίχνη των οποίων μερικές φορές αναγνωρίζονται εκ των υστέρων, και οι οποίες τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο να προβλεφθούν.

Ας δώσουμε ένα άλλο παράδειγμα μαθηματικού προβλήματος. Το Σχήμα 4 δείχνει αυτό που ονομάζουμε «γράφημα», ή αλλιώς «δίκτυο». Ας το συμβολίσουμε με  $G$ . Τις κουκκίδες τις ονομάζουμε «κορυφές» και τις γραμμές «ακμές». Για τους φοιτητές ηλεκτρολογίας, οι κουκκίδες είναι γνωστές με το όνομα «ακροδέκτες» και οι γραμμές με το όνομα «αγωγοί». Για άλλους οι κουκκίδες ίσως να είναι «πόλεις» και οι γραμμές «δρόμοι». Στα μαθηματικά εγχειρίδια προσπαθούμε

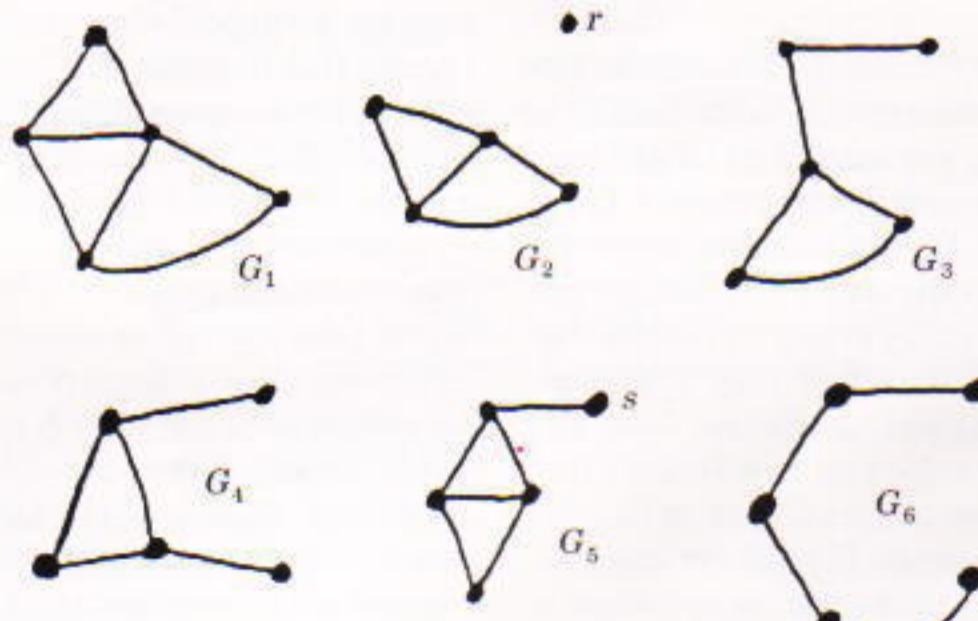


Σχήμα 4

να παρουσιάζουμε τα πράγματα με αφηρημένο τρόπο, αποφεύγομε να διευκρινίζουμε τι εκφράζουν οι κορυφές και τι οι ακμές, αλλά περιγράφουμε λεπτομερώς πώς θεωρούμε ότι συνδέονται μεταξύ τους: κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές.

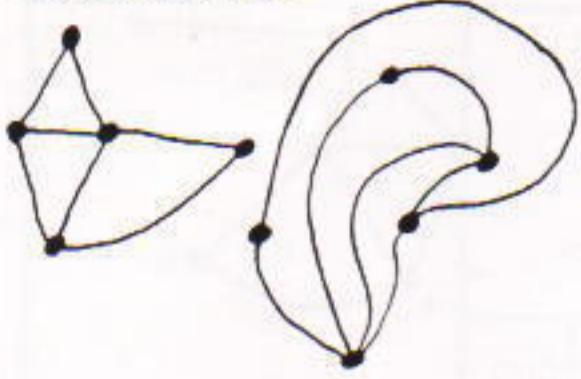
Ας υποθέσουμε τώρα ότι οβήνουμε την κορυφή με αριθμό 1 και την ακμή που καταλήγει σ' αυτήν. Αυτό μας δίνει το γράφημα  $G_1$ , το οποίο είναι φυσικό να το ονομάσουμε «τμήμα» του  $G$ . Όμοιως μπορούμε να οβήσουμε την κορυφή 2 και να πάρουμε το τμήμα  $G_2$ , κ.ο.κ. Στο Σχήμα 5 σας δείχνω τα έξι γραφήματα που δημιουργούνται με αυτό τον τρόπο.

Ας διατυπώσουμε μια σπαζοκεφαλία. Μας δίνονται τα σχέδια των  $G_1$ , έως  $G_6$ , και μας ζητείται να «ανακατασκευάσουμε» το  $G$ . Δεν μας δίνεται η πληροφορία ποιες κορυφές και ακμές του ενός σχήματος αντιστοιχούν σ' εκείνες του άλλου. Επιτρέπεται μάλιστα στο δημιουργό της σπαζοκεφαλιάς να παραμορφώσει τόσο πολύ τα σχέδιά του, ώστε να μας δώσει όσο το δυνατόν λιγότερες ενδείξεις. Για παράδειγμα, μπορεί να σχεδιάσει το  $G_1$  με τους δύο διαφο-



Σχήμα 5

### Δύο σχέδια του $G_1$



Σχήμα 6

ρετικούς τρόπους που φαίνονται στο Σχήμα 6. Σε κάθε περίπτωση, βεβαίως, δεν πρέπει να «σπάσει» μια ακμή, ή να την αποσπάσει από τις κορυφές της.

Η συγκεκριμένη σπαζοκεφαλιά δεν είναι πολύ δύσκολη. Θα μπορούσαμε να την αντιμετωπίσουμε ως εξής: Στο  $G_2$ , που παράγεται από το  $G$  με την αφαίρεση της κορυφής 2, υπάρχει μία απομονωμένη κορυφή  $r$ . Αυτή στο  $G$  μπορεί να συνδεθεί με την κορυφή 2, αλλά όχι με άλλη κορυφή. Παρατηρώντας το  $G_1$ , διαπιστώνουμε ότι κάθε κορυφή του γραφήματος συνδέεται με δύο τουλάχιστον άλλες κορυφές. Άρα καμία κορυφή του  $G_1$  δεν είναι η  $r$ , και επομένως η  $r$  πρέπει να είναι η κορυφή 1. Γνωρίζουμε τώρα ότι η  $r$  πρέπει να εμφανίζεται στο  $G_1$ . Πρέπει να είναι η κορυφή  $s$  του γραφήματος, αφού κάθε άλλη κορυφή του  $G_1$  συνδέεται με τουλάχιστον δύο άλλες. Άλλα δεν χρειάζεται να ολοκληρώσουμε τώρα τη λύση. Αρκεί να πω ότι μπορούμε να συνεχίσουμε, αναγνωρίζοντας τις κορυφές μεταξύ των τμημάτων, μέχρις ότου μπορέσουμε να επικαλύψουμε αρκετά τμήματα ώστε να σχηματίσουμε το  $G$ .

ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΑΜΕ ΝΑ ΦΤΙΑΞΟΥΜΕ ΜΙΑ τέτοια σπαζοκεφαλιά για κάποιο άλλο γράφημα, για κάποιο άλλο σύστημα κορυφών που συνδέονται ανά ζεύγη με ακμές. Σε όλες τις περιπτώσεις που έχουμε αντιμετωπίσει, η σπαζοκεφαλιά είναι καλή με την έννοια ότι έχει μόνο μια απάντηση. Παρ' όλα αυτά, παραμένει μια αμφιβολία. Ίσως κάποια μέρα βρούμε δύο διαφορετικά γραφήματα που να δίνουν το ίδιο σύνολο τμημάτων. Σ' αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να ορίσουμε το αρχικό γράφημα από τα τμήματά του. Θα μπορούμε να πούμε ότι το αρχικό

γράφημα είναι «μη ανακατασκευάσιμο». Θα μπορούμε να σχηματίσουμε το σύνολο των τμημάτων του, και οι συνέχεια να σχηματίσουμε μ' αυτά ένα τελείως διαφορετικό γράφημα.

Πώς αντιμετωπίζεται τούτη η κατάσταση; Αν ήμασταν φυσικοί επιστήμονες θα διατυπώναμε ένα νόμο: όλα τα γραφήματα είναι ανακατασκευάσιμα. Θα το ισχυρίζομασταν με βεβαιότητα, ακόμη κι αν συνεχίζαμε τον έλεγχο με νέα παραδείγματα. Αφού ταιριάζει με όλες τις μέχρι σήμερα παραπρήσεις μας, τι παραπάνω θα μπορούσαμε να κάνουμε; Ως μαθηματικοί, όμως, διατυπώνουμε την ίδια πρόταση και την ονομάζουμε εικασία. Στο δικό μας βασίλειο θεωρούμε ότι τέτοιες προτάσεις πρέπει να συνοδεύονται με αποδείξεις, και ντρεπόμαστε αν δεν διαθέτουμε καμία. «Αλλά αν μπορέσουμε να σκάψουμε λίγο βαθύτερα», λέμε στον εαυτό μας, «ίσως βρούμε μια απόδειξη».

Η απόδειξη αυτή πρέπει να είναι έξω από τα συνηθισμένα, και αξιζεί να την αναζητήσουμε. Σημειώνω ότι δεν μιλάμε για την ανοικία πως το όλον είναι το άθροισμα των μερών του. Σ' αυτή την ειδική περίπτωση, απλά δεν γνωρίζουμε αν το όλον ορίζεται από τα μέρη του. Η εικασία της ανακατασκευασιμότητας είναι ένα από τα πογνωστά άλυτα προβλήματα της θεωρίας γραφημάτων.

ΑΛΛΑ ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΟΛΟΥΣ ΕΚΕΙΝΟΥΣ που ισχυρίζονται ότι τα μαθηματικά ανήκουν στις καλές τέχνες; Ένας μαθηματικός, λένε, μοιάζει μ' έναν ζωγράφο ή έναν γλύπτη. Η πρώτη του ύλη δεν είναι το χρώμα, ο καμβάς, το μάρμαρο ή ο μπρούντζος, αλλά η άλλη λογική. Πολλά μπορεί να πει κανείς γι' αυτή την άποψη, και ήδη υπάρχουν διαφορές. Φαίνεται παράξενο σ' έναν μαθηματικό ότι στο χώρο της τέχνης είναι αδύνατον να αξιολογήσεις ένα έργο αν δεν αναγνωρίσεις τον καλλιτέχνη. Όλοι έχουμε ακούσει ιστορίες αυτού του είδους. Ένας πίνακας, αν και ανήκει στον ζωγράφο Α του 16ου αιώνα, ανακαλύπτεται ότι οιην πραγματικότητα είναι έργο του ζωγράφου Β του 20ού αιώνα. Η καλλιτεχνική σημασία και η οικονομική αξία του πίνακα αμέσως εξανεμίζονται. Αντίθετα, τον μαθηματικό, εφόσον δεν είναι

ιστορικός των μαθηματικών, δεν τον απασχολεί αν το θεώρημα είναι γνήσιο δημιούργημα του Νεύτωνα ή του Riemann, ή απλώς κάποιου μαθητή τους. Δεν χρειάζεται αυτή την πληροφορία για να το αξιολογήσει.

Είναι αλήθεια ότι υπάρχει πλήθος προβλημάτων πατρότητας στα μαθηματικά. Οι ιστορικοί μάς πληροφορούν ότι η λύση του Cardano για την κυβική εξίσωση στην πραγματικότητα οφείλεται στον Tartaglia, ότι τα λεγόμενα κυκλώματα Hamilton αποτελούσαν αρχικά σύλληψη του Kirkman. Εντούτοις, το ενδιαφέρον μας γι' αυτές τις έννοιες παραμένει το ίδιο έτσι κι αλλιώς. Το θεώρημα είναι που έχει σημασία, όχι ποιος το ανακάλυψε.

Τι είναι, λοιπόν, τα μαθηματικά; Φαίνεται ότι έχουμε τρεις επιλογές. Τα μαθηματικά είναι η ανθρωποστική επιστήμη που υπνεί την αιώνια λογική. Είναι η φυσική επιστήμη που μελετά το φαινόμενο το οποίο ονομάζεται λογική. Είναι η τέχνη που πλάθει δομές αιθέριας ομορφιάς από την πρώτη ύλη που ονομάζεται λογική. Είναι όλα αυτά και άλλα. Πάνω απ' όλα, όμως, μπορώ να σας βεβαιώσω ότι τα μαθηματικά είναι ευχαρίστηη.

Ελπίζω να μην αντιμετωπίσετε το ζήτημα τόσο φιλοσοφικά ώστε να αρχίσετε να με ρωτάτε οι είναι η λογική. Αυτό θα μπορούσε να είναι το θέμα μιας άλλης διάλεξης —την οποία, ελπίζω, θα έδινε κάποιος άλλος.

ΑΡΧΙΣΑ ΔΙΕΡΩΤΩΜΕΝΟΣ ΤΙ ΕΚΑΝΑ ΣΕ όλη την ακαδημαϊκή μου ζωή. Ίσως κατάφερα να σας δώσω μια ιδέα γι' αυτό. Αναρωτήθηκα γιατί η πολιτεία με πλήρωνε για όλα αυτά. Πιθανόν εξαιτίας εκείνης της σύνδεσης με τον πραγματικό κόσμο μέσω της φυσικής, για την οποία έχω ήδη δώσει δύο εξηγήσεις όχι και τόσο πειστικές. Όσον αφορά την επίδραση της δουλειάς μου στους μαθηματικούς μου επιγόνους, το μόνο που μπορώ να ελπίσω είναι να έχω κινήσει το ενδιαφέρον τους τόσο ώστε να συνεχίσουν. Χαιρόμαι που το λέω: από κάποιες όψεις της δουλειάς μου, αυτό έχει ήδη επτευχθεί. Η διαδικασία της αποχώρησής μου στη συνταξη γίνεται έτσι πο εύκολη, και μου επιτρέπει να ξαναγυρίσω στην κατάσταση του ερασιτέχνη με καθαρή συνείδηση. ◻

# Γιατί πρέπει να ανάβουμε το τζάκι;

«Μπροστά στο τζάκι σου είσαι βασιλιάς,  
όπως είναι ο μονάρχης στο θρόνο του.»

—Miguel de Cervantes

Victor Lange

**Υ**ΠΟΘΕΣΤΕ ΟΤΙ ΘΕΤΟΥΜΕ Σ' ΕΝΑΝ έιδικό στη μελέτη και εγκατάσταση κεντρικών θερμάνσεων και σε κάποιον που δεν έχει εμπειρία σ' αυτό τον τομέα το ίδιο ερώτημα: «Γιατί το χειμώνα ανάβουμε στα σπίτια μας το καλοριφέρ;» Η απάντηση του έιδικού ισως είναι η ακόλουθη: «Για να αυξήσουμε την εσωτερική ενέργεια του αέρα μέσα στο σπίτι». Από την άλλη, ο μη ειδικός θα πει: «Γιατί έτσι το εσωτερικό του σπιτιού γίνεται πιο ζεστό». Και βέβαια, η απάντηση του δεύτερου είναι ακριβέστερη.

Ίσως φαίνεται απίθανο εκ πρώτης όψεως, αλλά η εσωτερική ενέργεια του αέρα στο σπίτι παραμένει η ίδια μετά το άναμμα της φωτιάς.

Υποθέστε ότι το καταχειμώνο πηγαίνετε στο εξοχικό σας, στην καρδιά του δάσους. Η θερμοκρασία στο σπίτι είναι περίπου  $0^{\circ}\text{C}$ , και αποφασίζετε να ανάψετε την ξυλόσομπα για να ζεσταθείτε. Η θερμοκρασία του χώρου δεν αργεί να φτάσει τους  $20^{\circ}\text{C}$ , όπως διαπιστώνετε από το θερμόμετρο τοίχου. Ας υπολογίσουμε, λοιπόν, τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αέρα μέσα στο δωμάτιο.

Για συνθήκες που προσεγγίζουν τις κανονικές (δηλαδή θερμοκρασία κοντά στους  $0^{\circ}\text{C}$  και πίεση 1 atm —περίπου  $10^5 \text{ N/m}^2$ ), μπορούμε να δεχτούμε ότι ο αέρας συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο· έτσι, η εσωτερική του ενέργεια  $U$  είναι ανάλογη της μάζας του  $m$  και της απόλυτης



θερμοκρασίας του  $T$ :

$$U = amT,$$

όπου  $a$  είναι ένας συντελεστής αναλογίας, σταθερός για κάθε ουγκεκριμένο αέριο.

Καθώς το δωμάτιο ζεσταίνεται, ο αέρας γίνεται θερμότερος, διαστέλλεται, και ένα μέρος του διαφεύγει από τις χαραμάδες στις πόρτες και τα παράθυρα, ακόμη και από τους πόρους και τις ρωγμές των τοίχων· έτσι, η μάζα του αέρα μέσα στο δωμάτιο αλλάζει. Ο όγκος του δωματίου, όμως, παραμένει σταθερός. Σταθερή παραμένει και η πίεση του αέρα, και ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αέρα στην παραπάνω διαδικασία μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 \\ &= am_2 T_2 - am_1 T_1 \\ &= a(m_2 T_2 - m_1 T_1). \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια, όμως, της καταστατικής εξισώσης των ιδανικών αερίων

$$PV = \frac{m}{m_{\text{mole}}} RT,$$

και δεδομένου ότι η πίεση και ο όγκος του αέρα δεν μεταβάλλονται, όπως προαναφέραμε, προκύπτει

$$m_2 T_2 = m_1 T_1 = \frac{PVm_{\text{mole}}}{R} = \text{σταθ.}$$

Άρα, στην πραγματικότητα η ε-

Η συνέχεια στη σελ. 67 ↵

## Μαθηματικά

M56

Έστω  $d$  ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $a$  και  $b$ . Αφού ο αριθμός

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$$

είναι ακέραιος και το  $ab$  διαιρείται με  $d^2$ , ο αριθμητής  $a^2 + b^2 + a + b$  διαιρείται με το  $d^2$ . Άλλα το  $a^2 + b^2$  διαιρείται επίσης από το  $d^2$ . Επομένως, το  $a + b$  διαιρείται με  $d^2$ , και έτοι  $\sqrt{a+b} \geq d$ .

M57

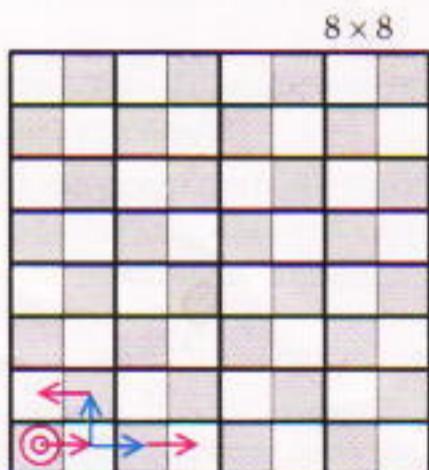
Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη  $a + b + c = 0$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 \\ &\quad + c^2(a+b)^2 \\ &= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a+b+c) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - a^4 - b^4 - c^4, \end{aligned}$$

όπου  $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$ .

M58

(α) Για κάθε άρτιο  $n$  μπορούμε να διαιρέσουμε τη  $n \times n$  σκακιέρα σε  $n^2/2$  «ντόμινο» δύο τετραγώνων (Σχήμα 1). Η νικηφόρος στρατηγική για τον πρώτο παίκτη συνιστάται στη μετακίνηση του πονιού στο δεύτερο τετράγωνο του ντόμινο όπου είναι τοποθετημένο. Αυτό μπορεί να το κάνει από την πρώτη του ήδη κίνηση. Τότε το δεύτερο



Σχήμα 1

ρος παίκτης είναι αναγκασμένος να μετακινηθεί σε ένα άλλο ντόμινο, και έτοι ο πρώτος παίκτης θα έχει ξανά τη δυνατότητα να φέρει το πιόνι στο δεύτερο τετράγωνο του δεύτερου ντόμινο, γεγονός που θα αναγκάσει τον δεύτερο παίκτη να «ανοίξει» ένα τρίτο ντόμινο, κ.ο.κ. Άρα, ο πρώτος παίκτης μπορεί πάντα να απαντήσει στις κινήσεις του δεύτερου, οπότε κερδίζει.

Αν το  $n$  είναι περιττό, μπορούμε να καλύψουμε με ντόμινο όλη τη σκακιέρα εκτός από το αρχικό γωνιακό τετράγωνο (Σχήμα 2). Μετά την πρώτη κίνηση του πρώτου παίκτη, ο δεύτερος μπορεί να ξεχάσει τελείως το αρχικό τετράγωνο, να εφαρμόσει στην —καλυμμένη με ντόμινο— «ακρωτηριασμένη» σκακιέρα τη στρατηγική που περιγράφαμε προηγουμένως και, συνεπώς, να κερδίσει.

(β) Αν το παιχνίδι ξεκινάει από ένα τετράγωνο δίπλα στο γωνιακό, ο πρώτος παίκτης μπορεί πάντα να εξασφαλίσει τη νίκη.

Αν το  $n$  είναι άρτιο, η στρατηγική παραμένει η ίδια ακριβώς όπως στην περίπτωση (α). Αν το  $n$  είναι περιττό, παρατηρούμε ότι ο δεύτερος παίκτης δεν μπορεί να πάει ποτέ στο γωνιακό τετράγωνο, επειδή αυτό έχει «λαθεμένο» χρώμα. (Αν το αρχικό τετράγωνο είναι άσπρο, ο πρώτος παίκτης πηγαίνει πάντα σε μαύρο τετράγωνο, και ο δεύτερος σε άσπρο, ενώ το



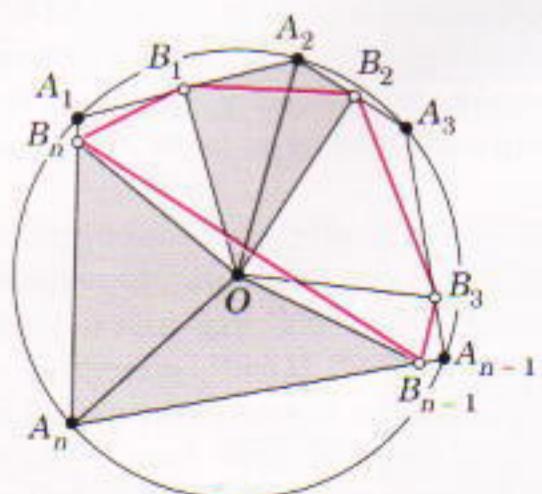
Σχήμα 2

γωνιακό είναι μαύρο.) Επομένως, ο πρώτος παίκτης μπορεί απλώς να εφαρμόσει τη νικηφόρο στρατηγική που χρησιμοποιήσαμε στην «ακρωτηριασμένη» σκακιέρα του μέρους (α) για τα περιττά  $n$ .

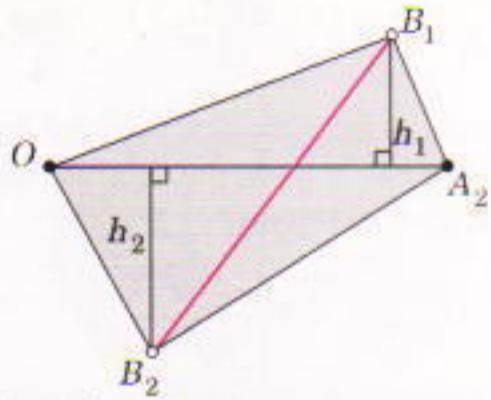
Αφήνουμε για τους αναγνώστες τη διερεύνηση του παιχνιδιού στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η αρχική θέση του πονιού είναι τυχαία.

M59

Έστω  $A_1A_2\dots A_n$  το μεγαλύτερο πολύγωνο και έστω  $B_1B_2\dots B_n$  το πολύγωνο που είναι εγγεγραμμένο στο  $A_1A_2\dots A_n$  (όπου το  $B_1$  ανήκει στην πλευρά  $A_1A_2$ , το  $B_2$  στην  $A_2A_3, \dots$ ). Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το κέντρο  $O$  του περιγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγαλύτερου πολυγώνου (Σχήμα 3). Τότε τα τμήματα  $OA_1, OB_1, OA_2, OB_2, \dots, OA_n, OB_n$  διαιρούν αυτό το πολύγωνο στα τρίγωνα  $OA_1B_1, OB_1A_2, \dots, OB_nA_1$ , το συνολικό εμβαδόν των οποίων ισούται με το εμβαδόν  $E$  του  $A_1A_2\dots A_n$ . Ας θεωρήσουμε το ζεύγος των τριγώνων  $OB_1A_2$  και  $OA_2B_2$  (Σχήμα 4). Βρίσκονται προς διαφορετικές μεριές της κοινής τους πλευράς  $OA_2$ , και εύκολα διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των υψών τους,  $h_1$  και  $h_2$ , που φέρουμε πάνω στην  $OA_2$ , είναι το πολύ ίσο με  $B_1B_2$ . Έτσι, καταλήγουμε στην εξής εκτίμηση για το άθροισμα των



Σχήμα 3



Σχήμα 4

εμβαδών τους:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}OA_2 \cdot h_1 + \frac{1}{2}OA_2 \cdot h_2 &\leq \frac{1}{2}OA_2 \cdot B_1B_2 \\ &= \frac{1}{2}R \cdot B_1B_2. \end{aligned}$$

Παρόμοιες εκτιμήσεις ισχύουν για κάθε ζεύγος αυτών των τριγώνων με κοινή πλευρά  $OA_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Επομένως, έχουμε

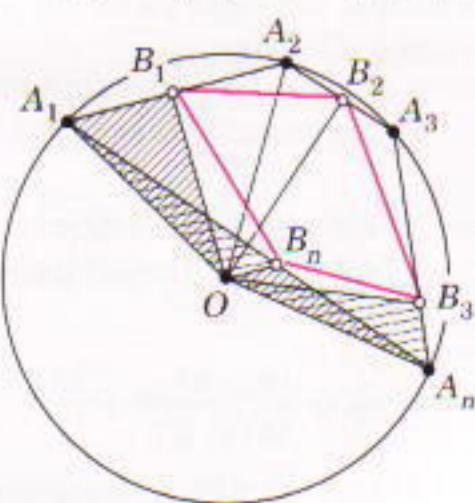
$$E = [\text{εμβαδόν}(OB_1A_2) + \text{εμβαδόν}(OA_2B_2)] + \dots + [\text{εμβαδόν}(OB_nA_1) + \text{εμβαδόν}(OA_1B_1)]$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}R \cdot B_1B_2 + \dots + \frac{1}{2}R \cdot B_nB_1 \\ &= \frac{1}{2}R(B_1B_2 + \dots + B_nB_1) \\ &= \frac{1}{2}R(P). \end{aligned}$$

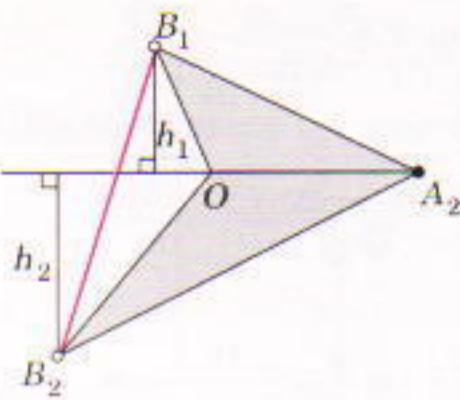
ή

$$P \geq \frac{2E}{R}.$$

Είναι επίσης δυνατόν το κέντρο  $O$  να βρίσκεται έξω από το πολύγωνο  $A_1A_2\dots A_n$ . Σ' αυτή την περίπτωση, μια από τις πλευρές του —ας πούμε η  $A_nA_1$ — χωρίζει τις υπόλοιπες πλευρές από το σημείο  $O$  (Σχήμα 5), το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων  $OA_1B_1$ ,  $OB_2A_2$ , ...,  $OB_{n-1}A_n$  μας



Σχήμα 5



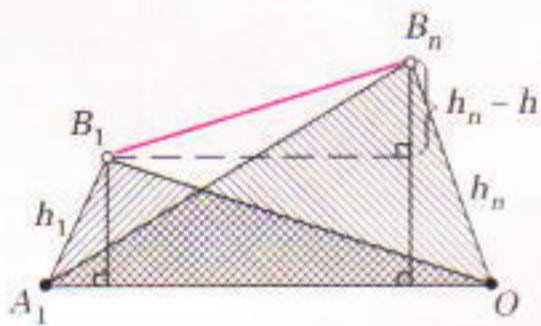
δίνει το εμβαδόν του πολυγώνου  $OA_1A_2\dots A_n$ , και πρέπει να αφαιρέσουμε τα εμβαδά των τριγώνων  $OA_nB_1$  και  $OB_nA_1$  (που μαζί μάς δίνουν το εμβαδόν  $OA_1B_1$ ) από αυτό το άθροισμα, για να βρούμε το εμβαδόν  $E$  του  $A_1A_2\dots A_n$ . Εδώ χρειαζόμαστε μια μικρή τροποποίηση της προηγούμενης απόδειξης. Παρατηρούμε πως όταν δύο τρίγωνα έχουν κοινή βάση —ας πούμε τα  $OA_1B_1$  και  $OA_nB_1$ — και βρίσκονται από την ίδια μεριά αυτής της βάσης, τότε η απόλυτη τιμή της διαφοράς των υψών τους  $h_1$  και  $h_n$  είναι το πολύ ίση με  $B_1B_n$  (δείτε το Σχήμα 6). Έτοι, τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} &\text{εμβαδόν}(OA_1B_1) - \text{εμβαδόν}(OB_nA_1) \\ &= \frac{1}{2}OA_1(h_1 - h_n) \\ &= \frac{1}{2}R|h_1 - h_n| \\ &\leq \frac{1}{2}R \cdot B_1B_n, \end{aligned}$$

και, παρόμοια,

$$\begin{aligned} &\text{εμβαδόν}(OB_{n-1}A_n) - \text{εμβαδόν}(OA_nB_n) \\ &\leq \frac{1}{2}R \cdot B_{n-1}B_n. \end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε τις δύο ανισότητες στις προσεγγίσεις του εμβαδού των ζευγών των τριγώνων  $OA_1B_1$  και  $OB_2A_2$ , ...,  $OB_{n-2}A_{n-1}$  και  $OA_{n-1}B_{n-1}$  που βρήκαμε προηγουμένως, θα πάρουμε το εμβαδόν  $E$  στο αριστερό μέλος και  $\frac{1}{2}R \cdot P$  στο δεξιό, ολοκληρώνοντας έτοι την απόδειξη.



Σχήμα 6

Από την απόδειξη έπειται πως, όταν ένα πολύγωνο  $A_1A_2\dots A_n$  περιέχει το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου, η ανισότητά μας  $P \leq 2E/R$  γίνεται ισότητα αν και μόνο αν οι πλευρές του  $B_1B_2\dots B_n$  είναι κάθετες στις ακτίνες  $OA_k$  ( $B_1B_2 \perp OA_2, \dots, B_nB_1 \perp OA_1$ ). Ένα τέτοιο πολύγωνο  $B_1B_2\dots B_n$  μπορεί να μην υπάρχει (όπως στην περίπτωση του Σχήματος 5), αλλά, όταν υπάρχει, έχει τη μικρότερη δυνατή περίμετρο  $2E/R$ .

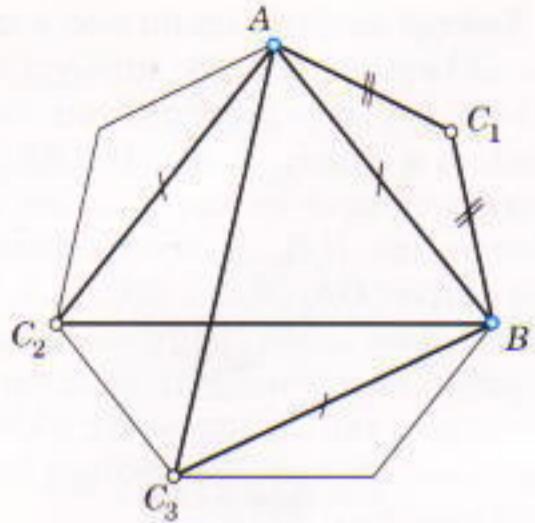
Συγκεκριμένα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτή την παρατήρηση για να αποδείξετε ότι ένα τρίγωνο  $B_1B_2B_3$  εγγεγραμμένο σε οξυγώνιο τρίγωνο  $A_1A_2A_3$  έχει τη μικρότερη δυνατή περίμετρο αν και μόνο αν οι κορυφές του είναι τα ίχνη των υψών του  $A_1A_2A_3$ .

## M60

Για συντομία, θα ονομάζουμε τμήμα κάθε πλευρά ή διαγώνιο του δεδομένου  $(6n+1)$ -γώνου. Επίσης, αφού όλα τα τρίγωνα που θεωρούμε είναι ισοσκελή με πλευρές τέτοια «τμήματα», θα τα ονομάζουμε απλώς «τρίγωνα».

Συμβολίζουμε με  $N_{\mu\mu}$ ,  $N_{\mu\kappa}$  και  $N_{\kappa\kappa}$  το πλήθος των τμημάτων που έχουν δύο μπλε άκρα, ένα μπλε και ένα κόκκινο, και δύο κόκκινα, αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι  $N_{\mu\mu} = M(M-1)/2$ ,  $N_{\mu\kappa} = MK$  και  $N_{\kappa\kappa} = K(K-1)/2$ , όπου  $M = (6n+1) - K$  είναι το πλήθος των μπλε σημείων. Παρατηρήστε ότι αυτά τα πλήθη δεν εξαρτώνται από τη διευθέτηση των χρωμάτων. Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε συναρτήσει αυτών το πλήθος των μονόχρωμων τριγώνων (των τριγώνων με κορυφές ίδιου χρώματος).

Συμβολίζουμε με  $T_3$ ,  $T_2$ ,  $T_1$ ,  $T_0$  το πλήθος των τριγώνων με 3, 2, 1 και 0 μπλε κορυφές, αντίστοιχα. Τότε, το πλήθος που ζητούμε είναι  $T_3 + T_0$ . Κάθε τμήμα είναι πλευρά τριών ακριβώς (ισοσκελών) τριγώνων (δείτε το Σχήμα 7). (Αυτό ισχύει μόνο όταν το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου είναι περιττό και δεν διαιρείται με το 3 — δηλαδή, όταν έχει τη μορφή  $6n+1$  ή  $6n+5$ . Επομένως, αν απαριθμήσουμε το πλήθος των πλευρών με δύο μπλε άκρα σε όλα τα τρίγωνα, θα απαριθμήσουμε κάθε «από μπλε σε μπλε» τμήμα τρεις φορές,



Σχήμα 7

πράγμα που μας δίνει  $3N_{\mu\mu}$ . Από την άλλη, ένα τρίγωνο με τρεις μπλε κορυφές έχει τρεις τέτοιες πλευρές, ένα τρίγωνο με δύο μπλε κορυφές έχει μία, ενώ τα άλλα τρίγωνα δεν έχουν καμία. Έτσι, το ίδιο πλήθος μπορεί να γραφτεί ως  $3T_3 + T_2$ . Επομένως,

$$3N_{\mu\mu} = 3T_3 + T_2.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δεξιούμε ότι

$$3N_{\mu\kappa} = 2T_2 + 2T_1$$

και

$$3N_{\kappa\kappa} = T_1 + 3T_0.$$

Προσθέτοντας την πρώτη με την τρίτη ισότητα και αφαιρώντας τη δεύτερη, αφού τη διαιρέσουμε με το 2, παίρνουμε τη ζητούμενη παράσταση:

$$3(N_{\mu\mu} + N_{\kappa\kappa} - N_{\mu\kappa}/2) = 3(T_3 + T_0),$$

ή

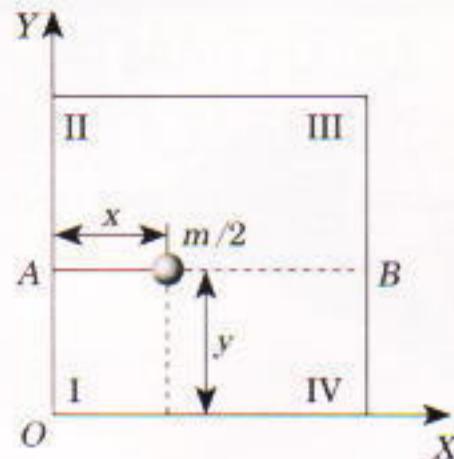
$$T_3 + T_0 = (N_{\mu\mu} + N_{\kappa\kappa} - N_{\mu\kappa}/2),$$

και ολοκληρώνουμε την απόδειξη.

## Φυσική

### Φ56

Όπως φαίνεται από την εκφώνηση, για να μην σπάζει κάποιο πόδι του τραπεζιού, πρέπει «το βάρος που σηκώνει» (μπορούμε να λέμε, η δύναμη που ασκείται πάνω του) να μην ξεπερνά την τιμή  $mg/4$ . Ας υπολογίσουμε, λοιπόν, πόσο είναι το μέτρο  $f_1$  της δύναμης που ασκείται στο πόδι I (Σχήμα 8) όταν το σώμα μάζας  $m/2$  τοποθετείται στο σημείο  $(x, y)$  της επιφάνειας (θεωρούμε το σημείο I ως αρχή του δισορθογώνιου συστήματος αξόνων).



Σχήμα 8

Ας ονομάσουμε  $f_2, f_3, f_4$  τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στα πόδια II, III και IV, αντίστοιχα. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στα I και II έχει μέτρο  $f_{12} = f_1 + f_2$  και σημείο εφαρμογής A (0, y). Ομοίως, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στα πόδια III και IV έχει μέτρο  $f_{34} = f_3 + f_4$  και σημείο εφαρμογής B (l, y) (όπου l είναι το μήκος της πλευράς του τραπεζιού).

Για τη συνισταμένη και των τεσσάρων δυνάμεων ισχύει:

$$f_{12} + f_{34} = mg/2,$$

και

$$f_{12}x = f_{34}(l - x),$$

από όπου προκύπτει:

$$f_1 + f_2 = f_{12} = \frac{mg}{2} \frac{l - x}{l}. \quad (1)$$

Βεβαίως ισχύει και

$$f_1y = f_2(l - y),$$

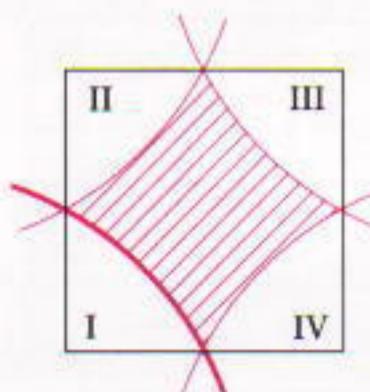
από όπου προκύπτει:

$$f_1 = f_2 \frac{l - y}{y}. \quad (2)$$

Ο συνδυασμός των (1) και (2) δίνει:

$$f_1 = \frac{mg}{2} \frac{(l - x)(l - y)}{l^2}.$$

Έτσι, για να μη οπάσει το πόδι I πρέπει:



Σχήμα 9

$$f_1 = \frac{mg}{2} \frac{(l - x)(l - y)}{l^2} < \frac{mg}{4},$$

δηλαδή η μάζα  $m/2$  μπορεί να τοποθετηθεί στα σημεία που χαρακτηρίζονται από τη σχέση

$$y > l \left( 1 - \frac{\ell}{2(\ell - x)} \right).$$

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y(x) = l \left( 1 - \frac{\ell}{2(\ell - x)} \right)$$

εκφράζει η παχιά κόκκινη γραμμή στο Σχήμα 9. Είναι φανερό ότι για λόγους συμμετρίας το σύνολο των «ασφαλών» σημείων είναι το γραμμοσκιασμένο καμπυλόγραμμο «τετράγωνο» στο Σχήμα 9.

### Φ57

Η πίεση  $P_C$  του αέρα στη μέση της σήραγγας ισούται με την πίεση στον πυθμένα ενός πηγαδιού που διέρχεται από το C κατά τη διεύθυνση της ακτίνας, ο οποίος απέχει από το κέντρο της Σελήνης απόσταση  $a/\sqrt{2}$  (όπου  $a = D/2$  είναι η ακτίνα της Σελήνης). Αυτό που πρέπει να βρούμε, λοιπόν, είναι το πώς μεταβάλλεται η πίεση σε σχέση με το βάθος του πηγαδιού.

Ας θεωρήσουμε ότι μια μικρή αέρια στήλη ύψους Δy τοποθετείται σε απόσταση y από το κέντρο της Σελήνης. Η συνθήκη ισορροπίας γι' αυτήν δίνει

$$\rho g \Delta y = -\Delta P,$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του αέρα,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας σ' αυτό το σημείο, και  $\Delta P$  η διαφορά πίεσης στα ύψη  $(y + \Delta y)$  και  $y$ .

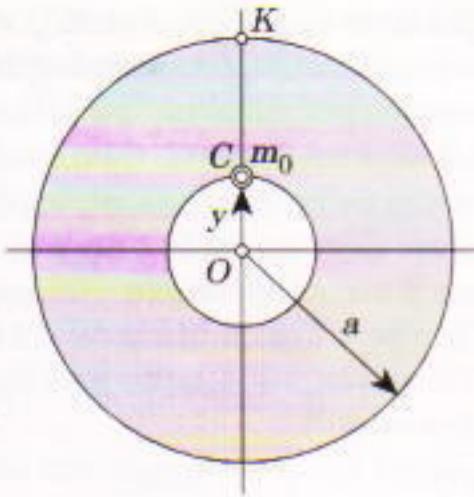
Μπορούμε να εκφράσουμε την πυκνότητα του αέρα μέσω της καταστατικής εξίσωσης

$$PV = \frac{m}{m_{mole}} RT,$$

όπου  $m$  είναι η μάζα του αέρα και  $m_{mole} = 14,5$  g η γραμμομοριακή μάζα του. Έτσι,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_{mole}}{RT} P,$$

όπου  $P$  είναι η πίεση του αέρα στο συγκεκριμένο βάθος.



Σχήμα 10

Επιπλέον, μπορούμε να εκφράσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας στο εσωτερικό της Σελήνης σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο της. Προς τούτο ας φανταστούμε ένα σφαιρικό τμήμα της Σελήνης ακτίνας  $y$  ( $y < a$ ) (Σχήμα 10). Αν υποθέσουμε πως τοποθετούμε μια δοκιμαστική μάζα  $m_0$  στην επιφάνεια του εν λόγω σφαιρικού τμήματος, αυτή θα υφίσταται συνολικά βαρυτική έλξη μόνο από το σφαιρικό τμήμα (η συνισταμένη βαρυτική έλξη του σκιασμένου τμήματος του Σχήματος 10 στη δοκιμαστική μάζα είναι μηδενική). Επομένως, η επιτάχυνση  $g$  της βαρύτητας στο σημείο  $C$  (που απέχει απόσταση  $y$  από το κέντρο της Σελήνης) δίνεται από τον τύπο

$$G \frac{m_0 m_y}{y^2} = m_0 g,$$

ενώ στο σημείο  $K$  από τον

$$G \frac{m_0 M}{a^2} = m_0 g_M,$$

όπου  $m_y$  και  $M$  είναι οι μάζες του σφαιρικού τμήματος και της Σελήνης, αντίστοιχα. Διαιρώντας αυτούς τους δύο τύπους κατά μέλη, παίρνουμε

$$g = g_M \frac{y}{a}.$$

Αντικαθιστώντας τα  $\rho$  και  $g$  στην πρώτη εξίσωση, παίρνουμε:

$$\frac{m_{\text{mole}} P}{RT} \frac{g_M y}{a} \Delta y = -\Delta P,$$

ή

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{m_{\text{mole}} g_M}{RTa} y \Delta y.$$

Για απειροστά μικρές μεταβολές η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{m_{\text{mole}} g_M}{RTa} y dy.$$

Ολοκληρώνοντάς την παίρνουμε:

$$\int_{P_C}^{P_K} \frac{dP}{P} = - \int_{y_C}^y -\frac{m_{\text{mole}} g_M}{RTa} y dy,$$

ή

$$\ln P_K - \ln P_C = -\frac{m_{\text{mole}} g_M}{RTa} \left( \frac{a^2}{2} - \frac{y^2}{4} \right),$$

ή

$$\ln \frac{P_C}{P_K} = \frac{m_{\text{mole}} g_M a}{4RT} \equiv 9,1,$$

ή

$$\frac{P_C}{P_K} \equiv 9.000.$$

Επομένως, η πίεση στα στόμια της σήραγγας είναι μικρότερη από ότι στο μέσο της κατά παράγοντα 9.000:

$$P_A = P_B = P_K \equiv P_C / 9.000 \equiv 11 \text{ N/m}^2.$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι θεωρητικά είναι δυνατόν να υπάρχουν κοιλότητες γεμάτες αέριο στο εσωτερικό της Σελήνης.

### Φ58

Ας υπολογίσουμε σε πόση επιπλέον πίεση  $\Delta P$  αντιστοιχεί η μεταβολή της θερμοκρασίας τήξεως του πάγου κατά  $\Delta \theta = \theta_1 - \theta_0$ :

$$\Delta P = \frac{L(\theta_1 - \theta_0) \rho_v \rho_n}{T_0 (\rho_n - \rho_v)} = 1.41 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Η πίεση αυτή αντιστοιχεί σε μια στήλη πάγου ύψους

$$H_n = \Delta P / \rho_n g = 15,64 \text{ m.}$$

Η στήλη πάγου προφανώς θα βρίσκεται πάνω από τη στήλη του νερού (και θα επιπλέει στο νερό). Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος  $H_v$  της στήλης νερού από τη συνθήκη διατήρησης της συνολικής μάζας νερού-πάγου:

$$\rho_v H = \rho_n H_n + \rho_v H_v,$$

από όπου

$$H_v = H - \frac{\rho_n}{\rho_v} H_n = 5,61 \text{ m.}$$

Επομένως, η μεταβολή στο ύψος του περιεχομένου του οωλήνα είναι

$$\Delta H = H_n + H_v - H = 1.25 \text{ m.}$$

### Φ59

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο μεταξύ των κέντρων των πλακών (ακριβέστερα, σε ολόκληρο το χώρο μεταξύ των πλακών αλλά όχι στην κοντά στις άκρες τους) δίνεται από τον γνωστό τύπο

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}.$$

Επομένως, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των κέντρων των πλακών είναι

$$\Delta V_0 = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}.$$

Η τιμή της κάθετης ουνιστώσας της έντασης του πεδίου στην κορυφή της πλάκας ισούται με το  $1/4$  της τιμής της έντασης στο κέντρο της πλάκας. Αυτό μπορείτε να το δείξετε εύκολα, προσθέτοντας τρία επιπλέον όμοια φορτισμένα ζευγάρια πλακών στον υπάρχοντα «πυκνωτή», έτσι ώστε η ουγκεκριμένη κορυφή να αποτελέσει το κέντρο του οπλισμού του νέου, μεγάλου «πυκνωτή». Επομένως, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των απέναντι κορυφών των πλακών είναι

$$\frac{1}{4} \Delta V_0 = \frac{Qd}{4\epsilon_0 S}.$$

Τώρα ας επιλέξουμε την εξής κλειστή διαδρομή: από το κέντρο της μιας πλάκας στην κορυφή της, από αυτή στην απέναντι κορυφή της δεύτερης πλάκας, από αυτή στο κέντρο της δεύτερης πλάκας, και από αυτό στο κέντρο της πρώτης. Σ' αυτή τη διαδρομή εμφανίζεται δύο φορές η διαφορά δυναμικού μεταξύ κέντρου και κορυφής πλάκας (δεν υπάρχει πρόβλημα, όμως, μια και το φορτίο της δεύτερης πλάκας έχει μεν αντίθετο πρόσημο από ότι το φορτίο της πρώτης αλλά οι κατευθύνσεις καταγραφής αυτών των τμημάτων είναι αντίθετες). Το ολικό έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο σ' αυτή τη διαδρομή είναι μηδέν:

$$2\Delta V - \Delta V_0 + \frac{1}{4} \Delta V_0 = 0,$$

οπότε

$$\Delta V = \frac{3}{8} \Delta V_0 = \frac{3Qd}{8\epsilon_0 S}.$$

## Φ60

Η ελεύθερη επιφάνεια υγρού μέσα σ' ένα περιστρεφόμενο δοχείο αποκτά το σχήμα παραβολοειδούς εκ περιστροφής. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα μικρό στοιχείο υγρού μάζας  $m$  που βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από τον άξονα περιστροφής (Σχήμα 11). Οι δυνάμεις που ασκούνται στο στοιχείο είναι το βάρος του  $mg$  και η κάθετη δύναμη  $N$  από τα άλλα μέρη του υγρού, δεδομένου ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι μια επιφάνεια σταθερής πίεσης.

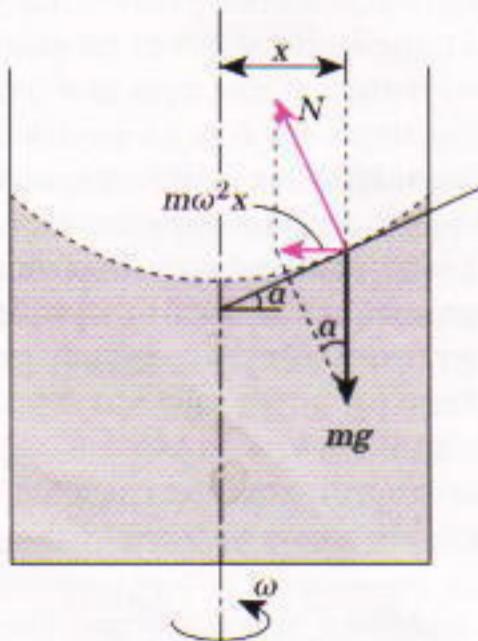
Η συνισταμένη δύναμη που αναγκάζει το εν λόγω στοιχείο να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση είναι οριζόντια, κάθετη στον άξονα περιστροφής, και έχει μέτρο ίσο με  $m\omega^2 x$ . Εύκολα προκύπτει (Σχήμα 11) ότι

$$\text{εφα} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad (1)$$

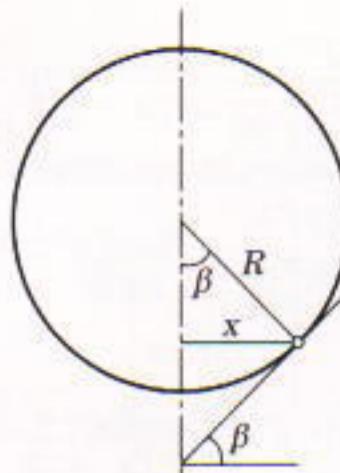
όπου  $a$  είναι η γωνία κλίσης της ευθείας που εφάπτεται της επιφάνειας του υγρού στο συγκεκριμένο σημείο. Σημειώστε ότι η εξίσωση (1) εκφράζει ακριβώς ότι η επιφάνεια του περιστρεφόμενου υγρού είναι παραβολοειδές.

Τώρα ας θεωρήσουμε μια σφαίρα ακτίνας  $R$ , και ας υπολογίσουμε τη γωνία κλίσης  $\beta$  της ευθείας που εφάπτεται της επιφάνειας της σφαίρας σ' ένα σημείο το οποίο απέχει απόσταση  $x$  από την κατακόρυφη διάμετρο της. Από το Σχήμα 12 προκύπτει

$$\eta\beta = \frac{x}{R}. \quad (2)$$



Σχήμα 11



Σχήμα 12

Η εξίσωση (2), βεβαίως, περιγράφει μια διαφορετική επιφάνεια απ' αυτή που περιγράφει η (1), ωστόσο, αν αναφερόμαστε σε σημεία τα οποία βρίσκονται κοντά στον άξονα, οπότε οι αντίστοιχες γωνίες κλίσης είναι πολύ μικρές, ισχύει

$$\text{εφα} \approx a \approx \frac{\omega^2 x}{g}, \text{ και } \eta\beta \approx \beta \approx \frac{x}{R}.$$

Από τις σχέσεις αυτές διαποτώνουμε ότι την καλύτερη προσέγγιση της ελεύθερης επιφάνειας ενός περιστρεφόμενου υγρού αποτελεί μια σφαίρα ακτίνας  $R = g/\omega^2$ . Επομένως, η εστιακή απόσταση μιας τέτοιας επιφάνειας (κοίλο κάτοπτρο) θα ισχύει με

$$f = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}.$$

## Σπαζοκεφαλιές

### Σ56

Είναι σύκολο να μαντέψουμε τη μοναδική λύση. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την εξής μαθηματική επιχειρηματολογία: αν  $s$  και  $c$  είναι, αντίστοιχα, το πλήθος των σκαμνιών και των πολυθρονών, τότε για το συνολικό πλήθος ποδιών στο δωμάτιο ισχύει η εξίσωση  $5s + 6c = 39$ , της οποίας ζητάμε ακέραιες θετικές λύσεις. Από την εξίσωση διαποτώνουμε άμεσα ότι το  $s$  είναι περιττό, διαρείται με το 3 και ικανοποιεί την

		• •	•
		• •	•
		• •	•
•			• •

Σχήμα 13

ανισότητα  $5s \leq 39$  — δηλαδή,  $s \leq 7$ . Αυτές οι συνθήκες προσδιορίζουν μονοσήμαντα την τιμή του  $s$ , που είναι 3. Επειτα ότι  $c = 4$ . (Μια εναλλακτική μέθοδος είναι να συναγάγετε από την εξίσωση ότι το  $c$  αφήνει υπόλοιπο 4 όταν διαιρείται με το 5, επειδή  $5s + 6c \equiv 4 \pmod{5}$  και  $39 \equiv 4 \pmod{5}$ ). Επομένως,  $c = 4$ , αφού  $6c \leq 39$ .) (V. Dubrovsky)

### Σ57

Το ελάχιστο δυνατό άθροισμα είναι 102. Τρεις διαφορετικές διατάξεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 13 (μπορούμε επίσης να εναλλάξουμε τις δύο πάνω σειρές σε καθεμία από αυτές). Μια άμεση έρευνα με δοκιμές θα δείξει ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις.

### Σ58

Στον Βόρειο και στον Νότιο Πόλο ο Ήλιος βρίσκεται στο ίδιο ύψος όλη την ημέρα (με εξαίρεση τις αντίστοιχες «πολικές νύχτες», οπότε δεν φαίνεται καθόλου). Έτσι, η σκιά κάθε αντικειμένου στους πόλους «στρέφεται» γύρω από το ίδιο σημείο κατά τη διάρκεια της ημέρας, και το μήκος της παραμένει αμετάβλητο.

### Σ59

Βάζουμε τα κέρματα αξίας 1 και 2 καπικιών στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς, και το κέρμα των 3 στον δεξιό. Αν ισορροπήσει η ζυγαριά, κάλπικο είναι το κέρμα των 5 καπικιών. Αν όχι, τοποθετούμε τα κέρματα των 2 και 3 καπικιών στον αριστερό δίσκο, και το κέρμα των 5 καπικιών στον δεξιό. Αν ισορροπήσουν, το κέρμα αξίας 1 καπικιού είναι κάλπικο. Διαφορετικά, τα κέρματα αξίας 1 και 5 καπικιών είναι γνήσια, και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο ζυγίσεων. Αν είναι ίδια (αν ο αριστερός δίσκος είναι βαρύτερος ή ελαφρύτερος και τις δύο

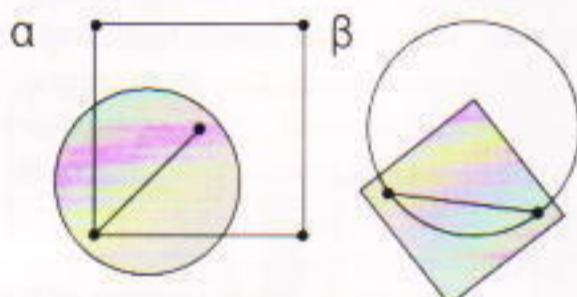
		• •	• •
		• •	•
		• •	•
•			• •

φορές), τότε κάλπικο είναι το κέρμα των 2 καπικιών, επειδή παρέμεινε στον ίδιο δίσκο. Διαφορετικά αποτέλεσμα (αν ο αριστερός δίσκος είναι βαρύτερος τη μια φορά και ελαφρύτερος την άλλη) φανερώνουν ότι κάλπικο είναι το κέρμα των 3 καπικιών.

## Σ60

Για την περίπτωση του τετράγωνου τραπεζιού και των στρογγυλών πετσετών θεωρούμε το κέντρο και τις τέσσερις κορυφές του τραπεζιού (Σχήμα 14α). Δύο τουλάχιστον από αυτά τα πέντε σημεία πρέπει να καλύπτονται από την ίδια στρογγυλή πετσέτα. Επομένως, η διάμετρος της πετσέτας δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την απόσταση μεταξύ αυτών των δύο σημείων, απόσταση που είναι ελάχιστη —και ίση με το μισό της διαγώνιου του τραπεζιού— στην περίπτωση του κέντρου και μιας κορυφής του τραπεζιού.

Όταν τέσσερις τετράγωνες πετσέτες καλύπτουν ένα στρογγυλό τραπέζι, καλύπτουν την περιφέρειά του, και επομένως μία τουλάχιστον από αυτές καλύπτει ένα τόξο ίσο με το ένα τέταρτο της περιφέρειας (Σχήμα 14β). Η απόσταση μεταξύ των άκρων αυτού του τόξου είναι  $R\sqrt{2}$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα του τραπεζιού, και η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ σημείων της πετσέτας είναι ίση με τη διαγώνιο της —δηλαδή ίση με  $a\sqrt{2}$ , όπου  $a$  είναι το μήκος της πλευράς της πετσέτας. Επομένως,  $a \geq R$ .



Σχήμα 14

## Παιχνιδότοπος

1. Η αναδρομική εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως  $t_n + 1 = 2(t_{n-1} + 1)$ , από όπου έπειται ότι  $t_n + 1 = 2^{n-1}(t_1 + 1) = 2^n$ .

Σε κάθε νέο στάδιο, κατά τη διαδικασία της «δυαδικής κλίμακας», κάθε σύμβολο της «λέξης» που έχει παραχθεί έως εκείνη τη στιγμή περι-

στοιχίζεται από δύο νέα σύμβολα. Επομένως, το πλήθος των προστιθέμενων συμβόλων διπλασιάζεται κάθε φορά. Αφού ξεκινάμε με ένα σύμβολο, το συνολικό τους πλήθος έπειτα από  $n$  βήματα είναι  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$ .

2. Ο κανόνας είναι πολύ απλός: οι δίσκοι που οι αριθμοί τους έχουν την ίδια ισοτιμία με το  $n$  μετακινούνται πάντα δεξιόστροφα. Οι υπόλοιποι μετακινούνται αριστερόστροφα. Αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης του άρθρου για την  $T_n$ .

3. Η πρώτη αδρανής ράβδος είναι η  $B$ , όταν το  $n$  είναι άρτιο, και η  $C$ , όταν είναι περιττό. Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση του άρθρου για την  $T_n$  και τελεία επαγωγή.

4. Έστω  $k_n k_{n-1} \dots k_1$  το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού  $k$ ,  $0 \leq k \leq 2^n - 1$  (αν  $k < 2^{n-1}$ , συμπληρώνουμε όσα από τα  $n$  ψηφία λείπουν με μηδενικά στα αριστερά), και έστω  $p_n p_{n-1} \dots p_1$  ο κωδικός της θέσης που δημιουργείται από την  $k$ -οστή κίνηση των δίσκων μας (ή η αρχική θέση, όταν  $k = 0$ ). Είναι καλύτερο να αντικαταστήσουμε τις ονομασίες  $A, B, C$  των ράβδων σ' αυτό τον κωδικό με τους αριθμούς 0, 1, 2 αντίστοιχα. Θα συμβολίζουμε την ακολουθία των αριθμών που προκύπτει κατ' αυτό τον τρόπο με  $q_n q_{n-1} \dots q_1$ . Θα αποδείξουμε ότι οι δύο ακολουθίες συνδέονται με την επόμενη σχέση:

$$k_n = q_n, \\ k_{i+1} - k_i \equiv (-1)^{n-i}(q_{i+1} - q_i) \pmod{3} \quad \text{για } i = 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

(θυμηθείτε ότι ο συμβολισμός  $a \equiv b \pmod{3}$  σημαίνει ότι  $a - b$  διαιρείται με 3. Αυτή η σχέση μάς προσφέρει έναν πολύ απλό κανόνα εύρεσης του  $k$  από τον κωδικό  $q_n q_{n-1} \dots q_1$  μας δεδομένης θέσης: διαβάζουμε τον κωδικό από τα αριστερά προς τα δεξιά και γράφουμε τη δυαδική αναπάρασταση του  $k$  με την ίδια σειρά, αρχίζοντας με  $k_n = q_n$  και αλλάζοντας το τελευταίο ψηφίο  $k_{i+1}$  που έχουμε γράψει (από 0 σε 1, από 1 σε 0) αν και μόνο αν υπάρχει αλλαγή στην ίδια θέση του κωδικού ( $q_i \neq q_{i+1}$ ). Δηλαδή, αν  $q_i = q_{i+1}$ , γράφουμε  $k_i = k_{i+1}$ . Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε ένα παραδειγμα για  $n = 5$ :

$i$	5	4	3	2	1
$q_i$	1	2	0	1	1
$q_i - q_{i+1}$		$\neq$	$\neq$	$\neq$	$=$
$k_i$	1	0	1	0	0

Δεδομένη θέση: ο δίσκος 3 στηράβδο  $A$ , οι δίσκοι 5, 2, 1 στηράβδο  $B$ , ο δίσκος 4 στη  $C$   
Πλήθος κινήσεων:  $k = 2^4 + 2^2 = 20$

Εποι, το πλήθος των αλλαγών συμβόλων στην ακολουθία  $A p_n \dots p_1$ , ή, ισοδύναμα,  $0 q_n \dots q_1$  είναι ίσο με το αντίστοιχο πλήθος στην  $0 k_n \dots k_1$ . Η πρώτη και κάθε περιττή αλλαγή στην  $0 q_n \dots q_1$  μεταβάλλει το 0 σε 1. Όλες οι άρτιες μεταβάλλουν το 1 σε 0. Επομένως, αν το πλήθος των αλλαγών είναι άρτιο, τότε  $k_1 = 0$  και το  $k$  είναι άρτιο· διαφορετικά,  $k_1 = 1$ , και το  $k$  είναι περιττό. Αυτή είναι η απάντηση για το δεύτερο μέρος του προβλήματος.

Η σχέση (1) μπορεί να αποδειχτεί με τελεία επαγωγή. Για  $n = 1$  είναι προφανής ( $k_1 = q_1$ ). Υποθέτουμε ότι είναι αληθής για τη σπαζοκεφαλία των  $n - 1$  δίσκων ( $n \geq 2$ ). Η σχέση  $T_n = \bar{T}_{n-1} n \bar{T}_{n-1}$  (δείτε το άρθρο) μας δείχνει ότι για  $k < 2n - 1$  η διευθέτηση έπειτα από  $k$  κινήσεις των πάνω  $n - 1$  δίσκων στη σπαζοκεφαλία των  $n$  δίσκων μπορεί να προκύψει από τη διευθέτηση που έχουν οι δίσκοι της σπαζοκεφαλίας με  $n - 1$  δίσκους ύστερα από το ίδιο πλήθος κινήσεων, απλώς με εναλλαγή των ονομασιών των ράβδων  $B$  και  $C$ . Με άλλα λόγια, οι κωδικοί αυτών των δύο διευθετήσεων  $-q_{n-1} \dots q_1$  και  $q'_{n-1} \dots q'_1$ , αντίστοιχα— προκύπτουν ο ένας από τον άλλο αν αλλάζουμε τα 1 με 2 και αντιστρόφως (τα μηδέν μένουν όπως έχουν). Αφού  $1 \equiv -2 \pmod{3}$ , μπορούμε να γράψουμε  $q_i \equiv -q'_i \pmod{3}$  για κάθε  $i \leq n - 1$ . Ο  $n$ -οστός δίσκος κινείται μόνο κατά το  $2^{n-1}$ -οστό βήμα, επομένως  $q_n = 0$ . Επίσης,  $k_n = 0$  για  $k < 2^{n-1}$ , άρα  $k_n = q_n$ . Τότε, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε για  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ ,

$$k_{i+1} - k_i \equiv (-1)^{n-i}(q'_{i+1} - q'_i) \\ \equiv -(-1)^{n-i+1}(-q_{i+1} + q_i) \\ \equiv (-1)^{n-i+1}(q_{i+1} - q_i) \pmod{3},$$

και για  $i = n - 1$ , έχουμε

$$k_n - k_{n-1} = -k'_{n-1} = -q'_{n-1} = q_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+(n-1)}(q_n - q_{n-1}).$$

Αν το πλήθος των κινήσεων είναι  $2^{n-1}$  ή μεγαλύτερο, το γράφουμε ως  $2^{n-1} + k$ ,  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Τότε, η δυαδική του αναπαράσταση θα είναι  $1k_{n-1}...k_1$ , και ο κωδικός της αντίστοιχης θέσης είναι  $1(q_{n-1} + 2)(q_{n-2} + 2)...(q_1 + 2)$ , όπου  $0k_{n-1}...k_1$  είναι το δυαδικό ανάπτυγμα του  $k$ , και  $0q_{n-1}...q_1$  είναι ο κωδικός θέσης έπειτα από  $k$  κινήσεις (επιβεβαιώστε το χρησιμοποιώντας την  $\bar{T}_{n-1}$  π  $\bar{T}_{n-1}$ ). Τώρα είναι εύκολο να διαποτώσουμε ότι η σχέση (1) είναι αληθής βάσει του πρώτου μέρους της απόδειξης.

5. Συμβολίζουμε με  $t'_m$  το ελάχιστο πλήθος των κινήσεων που απαιτούνται για τη μεταφορά των  $m$  πάνω κομματιών από την εγκοπή  $A$  στη  $B$  χωρίς να τοποθετήσουμε το κομμάτι  $k$  στην εγκοπή  $C$ . Για  $m \leq k$ , ο παλιός αλγόριθμός μας είναι αρκετός, και  $t'_m = t_m = 2^m - 1$ . Για  $m > k$ , πρέπει να τροποποιήσουμε το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στο άρθρο: για να μετακινήσουμε  $m$  κομμάτια στο  $B$  πρέπει πρώτα να μεταφέρουμε τα  $m - 1$  πάνω κομμάτια στο  $B$  (όχι στο  $C$  όπως προηγουμένως!), έπειτα να μεταφέρουμε το  $m$  κομμάτι στο  $C$ , να επιστρέψουμε τα  $m - 1$  κομμάτια στο  $A$ , να μεταφέρουμε το  $m$  κομμάτι στο  $B$  και να επιστρέψουμε ξανά τα  $m - 1$  κομμάτια στο  $B$ . Έτοι,  $t'_m = 3t'_{m-1} + 2$ , όταν  $m > k$ . Έπειται ότι

$$t'_n + 1 = 3(t'_{n-1} + 1)$$

$$= 3^2(t'_{n-2} + 1)$$

$$= \dots$$

$$\vdots$$

$$= 3^{n-k}(t'_k + 1)$$

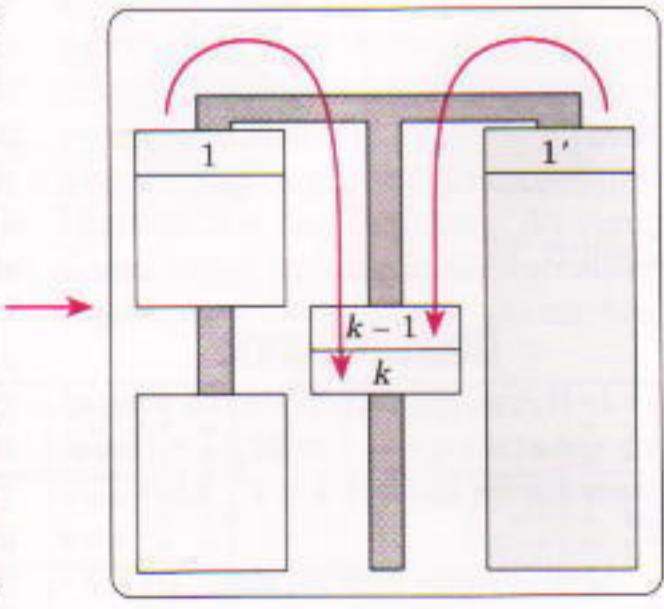
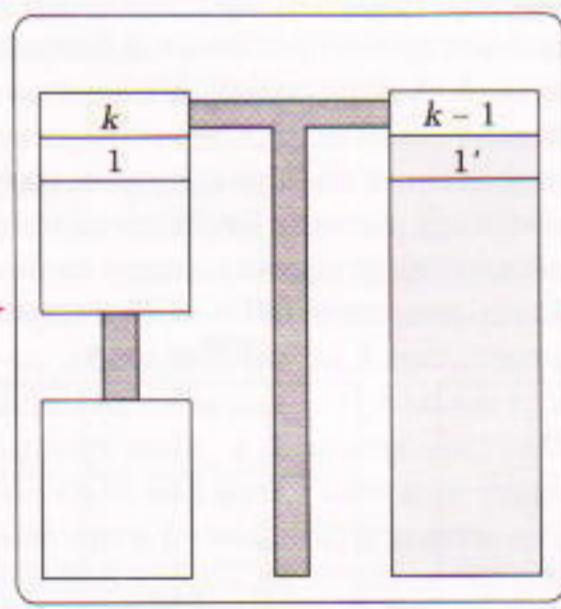
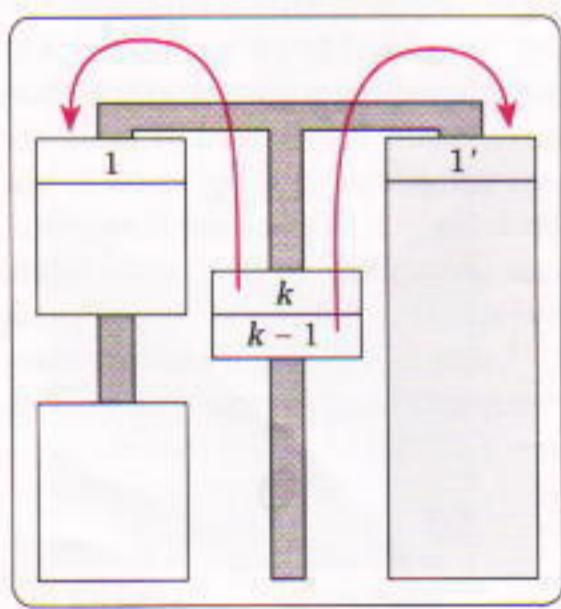
$$= 3^{n-k} \cdot 2^k,$$

$$t'_n = 3^{n-k} \cdot 2^k - 1.$$

6. Θα χρησιμοποιήσουμε τελεία επαγωγή. Η περίπτωση  $n = 1$  είναι τετριμμένη. Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάθε πλήθος δίσκων μικρότερο του  $n$  ( $n > 1$ ) και ας θεωρήσουμε μια τυχαία αρχική διευθέτηση των  $n$  δίσκων. Ας υποθέσουμε ότι ο  $n$ -οστός δίσκος ξεκινά από τη ράβδο  $A$  και ότι πρέπει να μεταφερθεί (μαζί με όλους τους άλλους δίσκους) στη ράβδο  $B$ . Επλέγουμε, στην αρχική θέση, όλους τους δίσκους της  $A$  που βρίσκονται πάνω από το δίσκο  $n$  και όλους τους δίσκους της  $B$ . Εστω  $m$  ο αριθμός του μεγαλύτερου από αυτούς. Αν υπάρχουν μεγαλύτεροι δίσκοι στη  $C$ , βρίσκουμε τον μεγαλύτερο από αυτούς και προσθέτουμε όλους τους δίσκους που βρίσκονται πάνω του σ' αυτούς που επιλέξαμε προηγουμένως· διαφορετικά, επλέγουμε όλους τους δίσκους της  $C$ . Συνολικά δεν πρόκειται να επιλέξουμε περισσότερους από  $m \leq n - 1$  δίσκους, ο μεγαλύτερος από τους οποίους ( $m$ ) βρίσκεται στη ράβδο  $B$ , ενώ οι κορυφαίοι από τους μη επιλεγμένους δίσκους της  $A$  και της  $C$  θα είναι μεγαλύτεροι από τον  $m$ . Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, μπορούμε να τους συγκεντρώσουμε στη ράβδο  $C$  το πολύ σε  $2^n - 1$  κινήσεις. Η ράβδος  $B$  είναι τώρα ελεύθερη και ο δίσκος  $n$  (στην  $A$ ) δεν έχει άλλους δίσκους πάνω του, οπότε

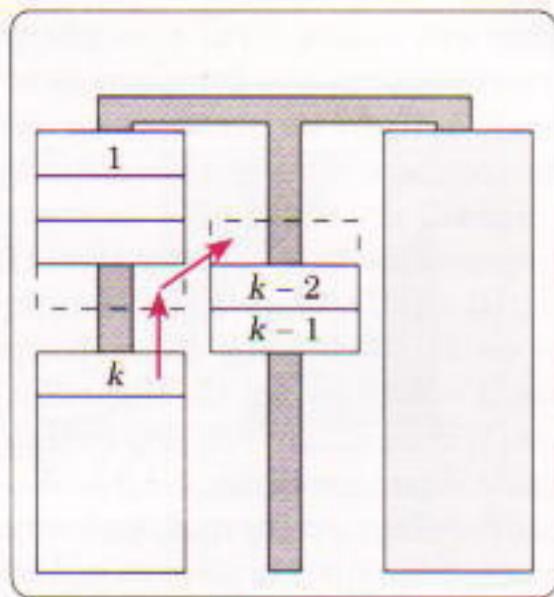
μπορούμε να τον μεταφέρουμε στη  $B$  (μία κίνηση). Αφού ο δίσκος  $n - 1$  βρίσκεται στην  $A$  ή στη  $C$ , μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε την υπόθεσή μας στους  $n - 1$  δίσκους αυτών των ράβδων και να τους μεταφέρουμε στη  $B$  το πολύ σε  $2^{n-1} - 1$  κινήσεις. Έτοιμοι λογικά, την περίπτωση κατά την οποία πρέπει να συγκεντρώσουμε τους δίσκους στη ράβδο  $A$ . Αν ο δίσκος  $n$  βρίσκεται αρχικά στη βάση αυτής της ράβδου, τότε μπορούμε, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, να συγκεντρώσουμε πάνω του τους υπόλοιπους  $n - 1$  δίσκους το πολύ σε  $2^{n-1} + 2^{n-3} - 1 < 2^n - 1$  κινήσεις.

Διαφορετικά, επλέγουμε τους δίσκους της ράβδου  $A$  που βρίσκονται πάνω από το δίσκο  $n$  και όλους τους δίσκους των ράβδων  $B$  και  $C$ . Αυτοί είναι το πολύ  $n - 2$  και, λόγω της υπόθεσης, μπορούν να μεταφερθούν σε μια από τις  $B$  ή  $C$  σε  $2^{n-2} - 1$  κινήσεις το πολύ. Τότε, η άλλη από αυτές τις δύο ράβδους θα είναι κενή, και μεταφέρουμε σ' αυτή τον  $n$ -οστό δίσκο. Το πρώτο μέρος της πρότασης (το οποίο αποδείξαμε για  $n$  δίσκους προηγουμένως) μας δίνει τώρα τη δυνατότητα να συγκεντρώσουμε και τους  $n$  δίσκους στην  $A$  το πολύ σε  $2^n - 1$  κινήσεις (διότι ο  $n$ -οστός δίσκος δεν βρίσκεται στην  $A$ ). Το συνολικό πλήθος κινήσεων δεν υπερβαίνει τις  $2^{n-2} - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^{n-2} - 1$  κινήσεις. Μια θέση για την οποία επαληθύεται αυτή η εκτίμηση προκύπτει



Πράξη Ε

Σχήμα 15



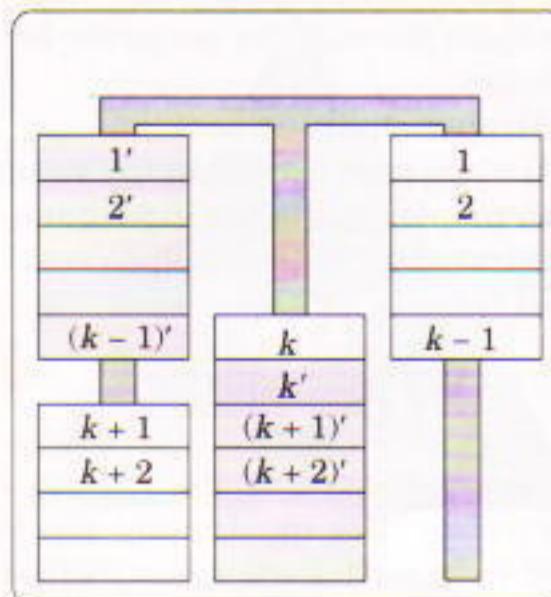
Σχήμα 16

από τον κανονικά διαιτεταγμένο πύργο στη ράβδο  $A$  με την εναλλαγή των δύο κατώτερων δίσκων  $n$  και  $n - 1$ . Επαληθεύστε ότι δεν μπορούμε να ξαναφέρουμε στην κανονική τους θέση αυτούς τους δίσκους σε λιγότερες από  $2^n + 2^{n-2} - 1$  κινήσεις.

7. Θεωρούμε το αριστερό κομμάτι του  $k$ -οστού επιπέδου. Κατά τη μεταφορά του προς την τελική του θέση πρέπει να περάσει πάνω από το  $(k - 1)$ -οστό κομμάτι. Μια απλή ανάλυση μας δείχνει ότι αυτή η εναλλαγή μπορεί να γίνει (για  $k \geq 3$ ) μόνο στο χώρο του μηδενικού επιπέδου και της κεντρικής στήλης (και με τα υπόλοιπα κομμάτια στην αριστερή και στη δεξιά στήλη) όπως φαίνεται στο Σχήμα 15. Η πράξη της εναλλαγής θέσης απαιτεί τέσσερις κινήσεις, και θα την ονομάζουμε  $E$ . Εφόσον έπειτα από αυτή την εναλλαγή παίρνουμε την τελική θέση της πράξης  $D_k$ , η  $L_k$  πρέπει αναγκαστικά να αρχίζει με αυτήν. Το υπόλοιπο μέρος της  $L_k$  μεταφέρει τα  $k - 2$  κορυφαία αριστερά κομμάτια στην κεντρική στήλη, και θα το συμβολίζουμε με  $L_{k-2}$ .

8. Σ' αυτή την περίπτωση, το επιχείρημα της προηγούμενης λύσης μας δείχνει ότι η  $S_k$  πρέπει να αρχίζει με την  $D_k$ . Υστερα από τη διεκπεραίωση της  $D_k$ , πρέπει να φέρουμε το κομμάτι  $k - 1$  πίσω στην αριστερή στήλη, και αυτό επιτυγχάνεται με την αντίστροφη της  $S_{k-1}$ . Επομένως,  $S_k = D_k S_{k-1}^{-1}$  και  $s_k = d_k + s_{k-1}$ .

Τότε, όπως εξηγήσαμε στο άρθρο, για να ελευθερωθεί ο δρόμος για το κομμάτι  $k$ , πρέπει να απομακρύνουμε όλα τα κομμάτια που βρίσκονται πάνω από αυτό. Συγκεκριμένα, το



Θέση  $B_k$

Σχήμα 17

κομμάτι  $k - 1$  πρέπει να μεταφερθεί στο  $(k - 1)$ -οστό επίπεδο της κεντρικής στήλης. Εφαρμόζοντας για μία ακόμη φορά το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως για την  $L_k$ , βλέπουμε ότι η  $D_k$  πρέπει να αρχίζει με την  $D_{k-1}$ . Αφού ολοκληρωθεί η  $D_{k-1}$  (Σχήμα 16), πρέπει να φέρουμε το κομμάτι  $k$  στην κεντρική στήλη και να «ισ περάσουμε» από τα κομμάτια  $k - 2$  και  $k - 1$  — δηλαδή, να το εναλλάξουμε με καθένα από αυτά. Για να προετοιμάσουμε την πρώτη εναλλαγή, πρέπει να φέρουμε το κομμάτι  $k$  (μόνο του) πάνω από το κομμάτι  $k - 2$  (αυτό γίνεται μέσω της  $S_{k-2}$ ). Κατόπιν τα εναλλάσσουμε ( $E$ ), επιστρέφουμε το κομμάτι  $k - 2$  στην αριστερή στήλη ( $S_{k-2}^{-1}$ ) και εναλλάσσουμε τα κομμάτια  $k$  και  $k - 1$  ( $E$ ). Επομένως,  $D_k = D_{k-1} S_{k-2} E S_{k-2}^{-1} E$ , από όπου έχουμε τη δεύτερη εξίσωση του προβλήματος, αφού η  $E$  απαιτεί τέσσερις κινήσεις.

9. Τα κομμάτια σε κάθε επίπεδο εναλλάσσονται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Μπορούμε να μετακινήσουμε το αριστερό κομμάτι  $k$  στην κεντρική στήλη μέσω της πράξης  $S_k$ , να φέρουμε τον δεξιό του γείτονα στην κορυφή μέσω μιας «συμμετρικής» πράξης, και έπειτα να μεταφέρουμε το δεξιό κομμάτι στην αριστερή στήλη με την  $S_k^{-1}$  και τελικά να μεταφέρουμε το αριστερό κομμάτι δεξιά με τη «συμμετρική εικόνα» της  $S_k^{-1}$ . Αυτό θα απαιτήσει  $4s_k$  κινήσεις και  $4(s_1 + s_2 + \dots + s_{10})$  κινήσεις για ολόκληρη τη σπαζοκεφαλιά.

Μια συνιομότερη λύση είναι η εξής: Πρώτα μεταφέρουμε ολόκληρη

τη δεξιά στήλη στο κέντρο ( $\ell_{10} + 1$  κινήσεις). Υστερα περνάμε από τη σειρά των «βασικών θέσεων»  $B_k$  που παρουσιάζονται στο Σχήμα 17 με τον εξής τρόπο. Έπειτα από τη μετακίνηση της δεξιάς στήλης, η θέση  $B_2$  προκύπτει σε τέσσερις κινήσεις. Για να περάσουμε από τη  $B_k$  στη  $B_{k+1}$ ,  $k \geq 2$ , μετακινούμε το κομμάτι  $k$  στον προορισμό του στα δεξιά ( $s_k$  κινήσεις), μετακινούμε το κομμάτι  $k + 1$  από τα αριστερά στο κέντρο πάνω στο  $k'$  (το κομμάτι από το  $k$ -οστό επίπεδο της δεξιάς στήλης —αυτό απαιτεί  $sk$  επιπλέον κινήσεις), εναλλάσσουμε τα κομμάτια  $k + 1$  και  $k'$  (τέσσερις κινήσεις) και μεταφέρουμε το  $k'$  στα αριστερά ( $s_k$  κινήσεις). Το συνολικό πλήθος κινήσεων γι' αυτή τη μετακίνηση είναι  $3s_k + 4$ . Το τελευταίο βήμα —από τη  $B_{10}$  στην τελική θέση— απαιτεί  $2t_{10}$  κινήσεις, και η συνολική αναδιάταξη γίνεται σε  $\ell_{10} + 3(t_2 + \dots + t_9) + 2t_{10} + 37 = 33213$  κινήσεις. Μπορούμε να βελτιώσουμε λίγο τη σειρά των εναλλαγών στα δύο κορυφαία επίπεδα και να γλιτώσουμε έξι κινήσεις.

## Καθειδοσκόπιο

1. Όχι, διότι το αερόστατο κινείται με την ίδια ταχύτητα που κινείται και ο άνεμος.

2. Και οι δύο περιπτώσεις οι δυνάμεις είναι ίδιες. Όταν το ελικόπτερο αιωρείται, ασκεί στον αέρα δύναμη ίση με το βάρος του, και ο αέρας απλώς μεταφέρει αυτή τη δύναμη στο έδαφος.

3. Το ρεύμα του αέρα διαχωρίζεται από το σώμα του χαρταετού κατά τέτοιον τρόπο ώστε η πίεση στην κάτω επιφάνειά του να είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην πάνω επιφάνειά του· έτοι αναπτύσσεται πάνω του η ανυψωτική δύναμη. Η ουρά προσδίδει ευστάθεια στο χαρταετό και βοηθάει στη διατήρηση της απαραίητης κλίσης του.

4. Οι φλόγες θα συγκλίνουν, διότι η πίεση του ρεύματος αέρα την οποία δημιουργούμε ανάμεσά τους είναι μικρότερη από αυτήν του περιβάλλοντος αέρα.

5. Για να εξιώνονται οι πίεσεις πάνω και κάτω από τη στέγη. Σκεφτείτε κάτι ανάλογο: το κρουστικό κύμα μιας έκρηξης εκτινάσσει τις

σανίδες ενός φράχτη, αλλά αφήνει τους πασσάλους ανέπαφους.

6. Ο αέρας που μεταφέρεται από το ταχύτατα κινούμενο τρένο δημιουργεί υποπίεση, και έτσι αναπτύσσεται δύναμη που ωθεί το άτομο προς το τρένο.

7. Η πίεση του αέρα στο κινούμενο άκρο του σωλήνα είναι μικρότερη απ' ό,τι στο λίγο-πολύ ακίνητο άκρο του (αυτό που κρατάτε πάνω από το κεφάλι σας). Τούτη η διαφορά πίεσης προκαλεί τη ροή του αέρα στο εσωτερικό του σωλήνα, και αυτός, λόγω των κυματοειδών τοιχωμάτων, ταλαντώνεται παράγοντας ήχο.

8. Ο σφόνδυλος ρυθμίζει τη συχνότητα περιστροφής του ανεμόμυλου, αποκλείοντας τις απότομες μεταβολές εξαιτίας των ριπών του ανέμου.

9. Με κατάλληλη περιστροφή των κυλίνδρων, η ταχύτητα του αέρα θα είναι μικρότερη στις οπίσθιες επιφάνεις των κυλίνδρων από ό,τι στις εμπρόσθιες. Κατά συνέπεια, η άσκηση μεγαλύτερης πίεσης του αέρα στις οπίσθιες επιφάνειες των κυλίνδρων παρά στις εμπρόσθιες θα έχει ως αποτέλεσμα συνισταμένη δύναμη προς τα εμπρός (φαινόμενο Magnus).

10. Η τρύπα στο κέντρο του αλεξίπτωτου αφήνει να περνά ένα μέρος του εισερχόμενου αέρα. Έτσι αποτέλεσται ο σχηματισμός στροβίλων στα άκρα του αλεξίπτωτου, που θα το έκαναν να ταλαντώνεται μπροστινό.

11. Οι στρόβιλοι που δημιουργούνται στο μεγάλο άνοιγμα του χωνιού σχηματίζουν στο κέντρο του μια περιοχή υποπίεσης, με αποτέλεσμα η φλόγα του κεριού να κλίνει προς το χωνί.

12. Αρχικά ο θερμός καπνός του τιγάρου ανυψώνεται αργά και σχηματίζει στρωτή (όχι τυρβώδη) ροή. Κατόπιν η άνωση επιταχύνει τη ροή, δημιουργούνται στρόβιλοι, και τελικά η ροή τρέπεται σε τυρβώδη.

13. Επειδή η ροή του νερού είναι συνεχής, ο όγκος νερού που περνά ανά μονάδα χρόνου κατά μήκος του ρεύματος είναι σταθερός. Έτσι, η ταχύτητα του νερού, καθώς αυτό πέφτει, γίνεται μεγαλύτερη, και η

εγκάρσια διατομή του ρεύματος λεπτότερη.

### Μικροπειραματισμοί

Η πίεση μέσα στη στήλη του νερού είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση· έτσι ο αέρας σπρώχνει το μπαλάκι προς τη στήλη νερού.

### Στο μαυροπίνακα I

1. (a)  $(-1, 1)$ , (b)  $(4, 4, -4)$ . Υπόδειξη: για κάθε σταθερό  $z$  οι αριθμοί  $x$  και  $y$  είναι ρίζες της εξίσωσης  $t^2 - (4 - z)t + (16 + z^2)/2 = 0$ , η διακρίνουσα της οποίας ισούται με  $-(z+4)^2$ . Μπορούμε επίσης να απαλείψουμε το  $z$  και να παραγοντοποιήσουμε την δευτεροβάθμια ως προς  $x$  και  $y$  εξίσωση που προκύπτει.

2. Υπόδειξη: Η διακρίνουσα του αριστερού μέλους, θεωρούμενου ως συνάρτηση του  $x$ , ισούται με  $-(8y + 1)^2$ .

3. Απάντηση:  $y_{\min} = 7/23$ . Υπόδειξη: μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή θεωρώντας την ως τον μικρότερο αριθμό  $y$  για τον οποίο η εξίσωση  $(3y - 2)x^2 + (11y - 9)x + 12y - 11 = 0$  έχει λύση ως προς  $x$ .

4. Απάντηση:  $a \in (-\infty, -3/2) \cup (1 + \sqrt{2}, \infty)$ . Υπόδειξη: Ουσιαστικά, το πρόβλημα λύνεται όπως το Πρόβλημα 8 του άρθρου. Προσέξτε, όμως, το πρόσημο του παρονομαστή και την περίπτωση που μηδενίζεται!

5. Απάντηση:  $7\sqrt{3}$ . Υπόδειξη: έστω  $t = x + 5y$ . Τότε, αν κάνουμε την αντικατάσταση  $x = t - 5y$ , καταλήγουμε στο πρόβλημα της εύρεσης του μικρότερου θετικού  $t$  για τον οποίο έχει λύση μια συγκεκριμένη δευτεροβάθμια ανισότητα ως προς  $y$ . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με τρόπο παρόμοιο με εκείνον που χρησιμοποιήσαμε για τη λύση του Προβλήματος 13. Υπότερα πρέπει να εξασφαλίσετε το ότι τουλάχιστον μία από τις λύσεις  $y$  που αντιστοιχούν σ' αυτό το  $t$  είναι θετική, όπως και το  $x = t - 5y$ .

### Συμμετρία

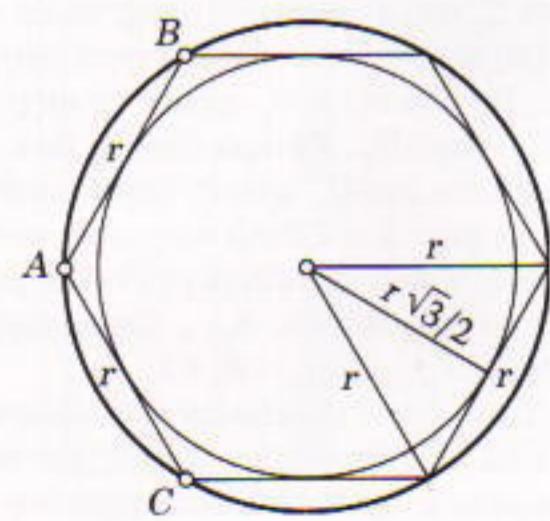
1. (a)  $1/6$ . Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι  $(6, 6), (6, 5), (5, 6), (5, 5), (6, 4), (4, 6)$ . (b)  $5/12$ . Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι  $(6, 3), (6, 2), (4, 2)$  και  $(n, n), (n, 1)$  για κάθε  $n = 1, 2, \dots, 6$ .

2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι στιγμές που μπορεί να φτάσει ο επ-

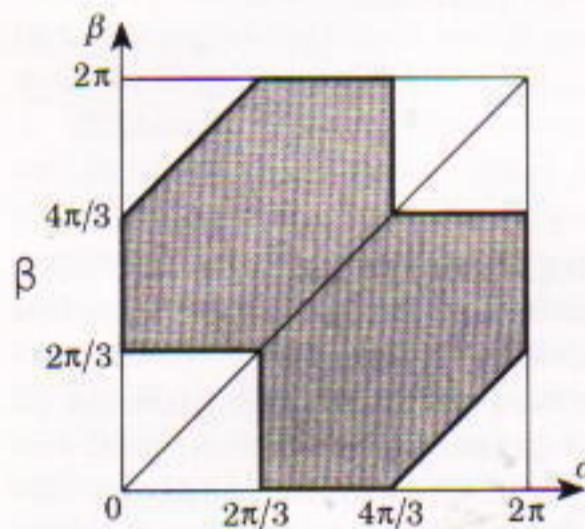
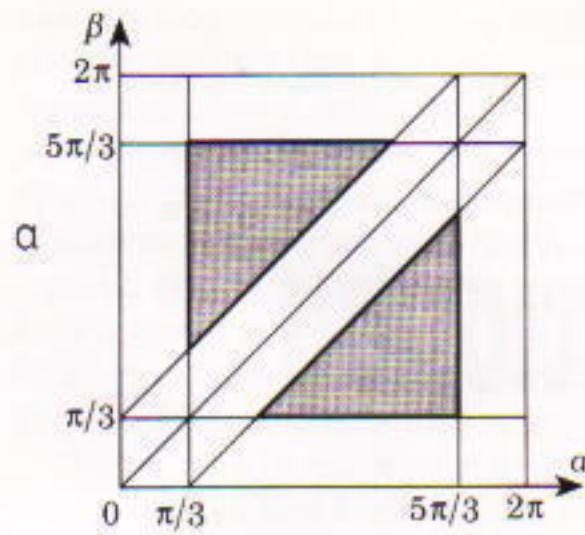
βάτης στη στάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα μεταξύ των αφίξεων των λεωφορείων των δύο γραμμών. Τότε η πιθανότητα να περιμένει τουλάχιστον  $t$  λεπτά το λεωφορείο της μιας γραμμής είναι  $(10 - t)/10 = 1 - t/10$  αν  $t \leq 10$ , και μηδέν αν  $t > 10$ . Για την άλλη γραμμή είναι  $1 - t/15$  αν  $t \leq 15$ . Μας ενδιαφέρει η τομή αυτών των δύο ενδεχομένων. Αφού υποθέτουμε ότι τα δρομολόγια είναι ανεξάρτητα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα πολλαπλασιασμού που μας δίνει την απάντηση  $(1 - t/10)(1 - t/15)$  αν  $t \leq 10$ , και 0 αν  $t > 10$ .

3. Αριθμούμε τα τρία μέρη του τρήματος με τους αριθμούς 1, 2, 3. Τότε κάθε αποτέλεσμα του πειράματός μας μπορεί να παρασταθεί ως μια τριάδα  $(k, \ell, m)$  όπου  $k, \ell, m$  είναι οι αριθμοί του μέρους που καταλήγει το πρώτο, το δεύτερο και το τρίτο σημείο, αντίστοιχα. Υπάρχουν  $3^3 = 27$  δυνατά αποτελέσματα, που είναι όλα ισοπίθανα. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι αυτά όπου οι τρεις αριθμοί είναι διαφορετικοί, και αφού υπάρχουν 6 μεταθέσεις των αριθμών 1, 2, 3, η απάντηση είναι  $6/27 = 2/9$ .

4. Μπορούμε να επιλέξουμε σε δύο στάδια τα σημεία  $A, B, C, D$ : πρώτα επιλέγουμε τέσσερα σημεία του κύκλου και κατόπιν τα αριθμούμε τυχαία. Μετά την επιλογή του σημείου που θα ονομάσουμε  $A$ , έχουμε τρεις ισοπίθανες δυνατότητες ονομασίας ενός σημείου ως  $C$ , από τις οποίες μόνο με τη μία (το σημείο που είναι απέναντι από το  $A$ ) προκύπτουν τεμνόμενες χορδές. Επομένως, η απάντηση είναι  $1/3$ .



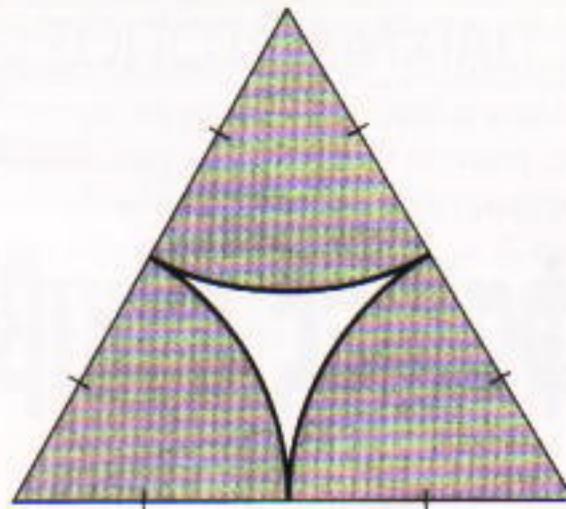
Σχήμα 18



Σχήμα 19

5. Η χορδή ενός κύκλου ακτίνας  $r$  είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα αν και μόνο αν το κέντρο της βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από  $(\sqrt{3}/2)r$  από το κέντρο του κύκλου (Σχήμα 18). Στο ερώτημα (a) το τυχαίο σημείο πρέπει να βρίσκεται στο αντίστοιχο μέρος της διαμέτρου, στο (γ) πρέπει να ανήκει στον κύκλο ακτίνας  $(\sqrt{3}/2)r$ . Επομένως, στο (a) η απάντηση είναι  $(\sqrt{3}/2)$  και στο (γ) είναι  $\pi[(\sqrt{3}/2)r]^2/\pi r^2 = 3/4$ . Στο ερώτημα (β) το ένα σημείο μπορεί να θεωρηθεί σταθερό (το σημείο  $A$  στο Σχήμα 18). Έτσι, μένουν τα υπόλοιπα  $5/6$  της περιφέρειας για το άλλο σημείο (το μεγαλύτερο από τα τόξα  $BC$ ), και η απάντηση είναι  $5/6$ . Οι απαντήσεις για το ερώτημα (δ) είναι  $1/2, 1/3$  και  $1/4$  αντίστοιχα.

6. Η πθανότητα είναι 1. Κάθε τριγώνο έχει μια γωνία μεγαλύτερη από  $30^\circ$  — διαφορετικά, το άθροισμα των γωνιών του θα ήταν μικρότερο από  $180^\circ$ . Μπορούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα (β) και (γ) με τη βοήθεια της πρώτης μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε στο πρόβλημα του οξυγώνιου τριγώνου. Στο Σχήμα 19 βλέπουμε τα σύνολα των σημείων  $(\alpha, \beta)$  του τετραγώνου  $0 < \alpha < 2\pi, 0 <$



Σχήμα 20

$\beta < 2\pi$ , που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Οι απαντήσεις είναι: (β)  $1/4$  (Σχήμα 19a), (γ)  $2/3$  (Σχήμα 19b).

7. Η απάντηση είναι  $1/4$ . Το πρόβλημα αυτό είναι απλώς μια διαφορετική μορφή του προβλήματος του οξυγώνιου τριγώνου. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το τρίγωνο έχει μήκος  $2\pi$ . Τότε τα μήκη των τριών μερών του μπορούν να θεωρηθούν τα μέτρα  $a, b, c$  των τριών τόξων που ορίζονται σ' έναν κύκλο από τρία τυχαία σημεία. Οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε να είναι οξυγώνιο το σχηματιζόμενο τρίγωνο είναι  $a < \pi, b < \pi, c < \pi$ . Αφού, όμως,  $a + b + c = 2\pi$ , οι ανισότητες αυτές γράφονται  $2a < 2\pi = a + b + c$  ή  $a < b + c$  και, παρόμοια,  $b < a + c$ ,  $c < a + b$ , που είναι ακριβώς οι τριγωνικές ανισότητες για τα μέρη του αρχικού ευθύγραμμου τρίγωνου.

8. (a)  $\pi/4$ , (β)  $\pi/2\sqrt{3}$ . Το νόμισμα καλύπτει έναν κόμβο μόνο όταν η απόσταση μεταξύ του κέντρου του και του κόμβου είναι το πολύ  $1/2$  (όσο η ακτίνα του νομίσματος). Έτσι, το ερώτημα (a) αποδεικνύεται ισοδύναμο με το Πρόβλημα 6 του άρθρου, ενώ στο (β) η ζητούμενη πιθανότητα είναι το πηλικό του εμβαδού των τριών σκιασμένων τομέων του Σχήματος 20 προς το εμβαδόν του τριγώνου.

9. Και τα δύο προβλήματα λύνονται με τη βοήθεια της τεχνικής που χρησιμοποιήσαμε στη δεύτερη λύση του προβλήματος του οξυγώνιου τριγώνου. Η απάντηση στο ερώτημα (a) είναι  $1 - n/2^{n-1}$  (υπάρχουν  $2^n$  τρόποι επιλογής ενός άκρου μιας από τις  $n$  διαμέτρους και με  $2n$  από αυτούς τους τρόπους — όσο είναι το

πλήθος των τομέων που σχηματίζονται από τη διαμέτρους — προκύπτουν τα  $n$ -γώνα που δεν περιέχουν το κέντρο του κύκλου). Ο αριθμητής  $n^2 - n + 2$  στην απάντηση του δεύτερου ερωτήματος είναι το πλήθος των τμημάτων («τομέων») στα οποία διαιρείται μία σφαίρα από η μέγιστους κύκλους που ανά τρεις δεν έχουν κοινό σημείο. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί με τελεία επαγγεγή: αν σχεδιάσουμε έναν επιπλέον μέγιστο κύκλο όταν έχουμε ήδη σχεδιάσει άλλους  $k$ , ο νέος χωρίζεται από τους «παλιούς» σε  $2k$  τόξα. Καθένα από αυτά τα τόξα χωρίζει τα «παλιά» τμήματα της σφαίρας στα δύο, οπότε προστίθενται  $2k$  τμήματα. Έτσι, με  $n$  κύκλους το πλήθος των τμημάτων είναι  $2 + (2 + 4 + \dots + 2(n-1)) = n^2 - n + 2$ .

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 50

σωτερική ενέργεια του αέρα στο δωμάτιο δεν αλλάζει, πράγμα που σημαίνει ότι η διασκορπιζόμενη θερμότητα διαφεύγει στο εξωτερικό περιβάλλον.

Επομένως, για ποιο λόγο χρειάζεται να θερμαίνουμε τα σπίτια μας; Λοιπόν, μολονότι το σώμα μας δεν είναι ευαίσθητο στην ολική εσωτερική ενέργεια του αέρα, είναι πολύ ευαίσθητο στη θερμοκρασία, δηλαδή τη μέση ενέργεια ανά μόριο αέρα.

Το 1938, ο γερμανός αστροφυσικός R. Emden παρατίθησε ότι τα σπίτια μας πρέπει να θερμαίνονται για τον ίδιο λόγο που η ζωή πάνω στη Γη είναι αδύνατη αν δεν υπάρχει σταθερή εισροή ηλιακής θερμότητας. Και αυτό δεν έχει να κάνει με το ποσό της προσπίπουσας ενέργειας, που επενεκπέμπεται (ώς και το ελάχιστο τμήμα της) στο περιβάλλον, ακριβώς όπως και η μάζα του ανθρώπου δεν αλλάζει, αν και δεν πάγει να τρέφεται. Χρειαζόμαστε συγκεκριμένο εύρος θερμοκρασιών στο περιβάλλον μας για να παραμένουμε ζωντανοί, και γι' αυτό το λόγο, είτε γνωρίζουμε είτε όχι τη σχετική εξίσωση, ανάβουμε τα καλοριφέρ και τα τζάκια μας.

# Σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού

Μέρος I: Πύργοι της ανατολής

Vladimir Dubrovsky

**ΣΩΣ ΕΧΕΤΕ ΔΕΙ Η ΕΧΕΤΕ ΑΚΟΥΣΕΙ για τις ματριόσκες —ένα από τα δημοφιλέστερα ρωσικά είδη λαϊκής τέχνης. Είναι μια οικογένεια από ξύλινες κούκλες με ολοένα και μικρότερο μέγεθος, βαμμένες με έντονα χρώματα και με σχήμα που μοιάζει με του αχλαδιού. Είναι όλες κούφιες (εκτός από τη μικρότερη), κορμένες στη μέση, και καθεμιά περιέχει την αμέσως μικρότερη (Σχήμα 1). (Στις μέρες μας είναι συχνά καρικαιούρες ιστορικών προσωπικοτήτων ή πολιτικών αρχηγών.) Οι σπαζοκεφαλιές τις οποίες θα αναφέρουμε σε ιούτο το άρθρο είναι κατά κάποιον τρόπο παρόμοιες με αυτό το παιχνίδι «συσκευασίας»: η καθεμιά εμπεριέχει μια σειρά από παρόμοιες σπαζοκεφαλιές, και δεν μπορούμε να τη λύσουμε αν δεν λύσουμε όλες τις «μικρότερες» σπαζοκεφαλιές, όπως ακριβώς δεν μπορούμε να βγάλουμε την τελευταία κούκλα-«μωρό» αν δεν ανοίξουμε πρώτα, με τη σειρά, όλες**

τις «μητέρες» της. Δεν είναι παράξενο που αυτές οι σπαζοκεφαλιές χρησιμοποιούνται συχνά για να επιδειχτεί η δύναμη της μαθηματικής επαγωγής και των αναδρομικών εξισώσεων. Σ' αυτό το άρθρο θα ασχοληθούμε με τη δημοφιλέστερη ίσως από τις εν λόγω σπαζοκεφαλιές και κάποιες λιγότερο γνωστές παραλλαγές της. Έτοι θα οδηγηθούμε στο δεύτερο μέρος του άρθρου (στο επόμενο τεύχος), όπου θα αποκαλύψουμε μια απρόοπτη και με ευρύτατες συνέπειες ούνδεοη μεταξύ αυτών των σπαζοκεφαλιών και ενός ιδιαίτερου είδους πανέμορφων μαθηματικών τεράτων, που είναι ήδη γνωστά στους αναγνώστες του *Quantum* —τις δρακόντειες καμπύλες (τεύχος Νοεμ./Δεκ. 1995).

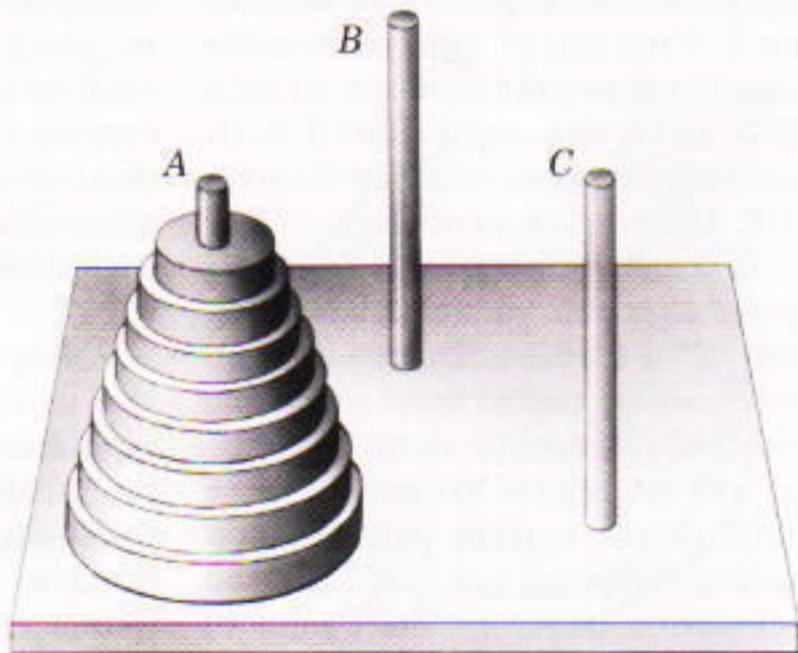
## Ο πύργος του Ανόι

Αυτή η σπαζοκεφαλιά, που επινοήθηκε το 1883 από τον γάλλο μαθηματικό E. Lucas, παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Έχουμε έναν κωνικό πύργο απότελουμένο από δίσκους τους οποίους πρέπει να μετακινήσουμε από τη στήλη A στη στήλη B χρησιμοποιώ-

ντας τη βοηθητική στήλη C. Στην προσπάθειά μας περιοριζόμαστε από δύο κανόνες: (1) μπορούμε να μετακινούμε έναν μόνο δίσκο κάθε φορά, και (2) δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα δίσκο πάνω σε κάποιον μικρότερο. Συνήθως απαιτείται να βρούμε τη συντομότερη λύση και να υπολογίσουμε το πλήθος των κινήσεων που απαιτούνται (όπου «κίνηση» θεωρείται η απλή μετακίνηση ενός δίσκου). Οι δύο κανόνες που αναφέραμε ονομάζονται συχνά «κανόνες του Βράχμα», διότι υπάρχει ο θρύλος ότι οι βραχμάνοι στην Μπενάρες έπαιζαν αυτό το παιχνίδι με έναν πύργο 64 δίσκων. Αυτή η ιστορία συνοδεύει σχεδόν πάντοτε την περιγραφή της σπαζοκεφαλιάς σε αναριθμητα βιβλία ψυχαγωγικών μαθηματικών (δείτε για παράδειγμα το *Mathematical Recreations and Essays* των W.W. Rouse Ball και H.S.M. Coxeter). Δεν θα μιλήσω για το θρύλο,



Σχήμα 1



Σχήμα 2

αλλά θα παρουσιάσω τη λύση, επειδή είναι το απλούστερο και σαφέστερο παράδειγμα του τι πρέπει να κάνουμε με σπαζοκεφαλιές αυτού του είδους. (Φυσικά, αν δεν έχετε αντιμετωπίσει ξανά αυτό το πρόβλημα, είναι προτιμότερο να προσπαθήσετε πρώτα να το λύσετε μόνοι σας. Μπορείτε αντί για δίσκους να χρησιμοποιήσετε τραπουλόχαρτα διαφορετικής αξίας.)

Συμβολίζουμε με  $k$  την κίνηση που μεταφέρει τον  $k$ -οστό δίσκο (οε σειρά μεγέθους) στην επόμενη (προς τα δεξιά) ράβδο (από το  $A$  στο  $B$ , από το  $B$  στο  $C$  ή από το  $C$  στο  $A$ ), και με  $\bar{k}$  την κίνηση του ίδιου δίσκου προς την αντίθετη κατεύθυνση. Έστω  $T_n$  η μικρότερη σειρά κινήσεων που μεταφέρει έναν πύργο  $n$  δίσκων στην επόμενη προς τα δεξιά ράβδο. Η αντιστροφή πράξη, που τη συμβολίζουμε με  $\bar{T}_n$ , επιτυγχάνεται αν ακολουθήσουμε την  $T_n$  από τέλος και αντιστρέψουμε όλες τις απλές κινήσεις που την αποτελούν (αντικαθιστώντας την  $k$  με την  $\bar{k}$ , και αντιστρόφως). Θέλουμε να βρούμε την  $T_n$ . Για τις μικρές τιμές του  $n$  αυτό γίνεται άμεσα.  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = \bar{1}2\bar{1}$ . Επειτα από λίγη σκέψη, διαποτώνουμε ότι  $T_3 = \bar{1}2131\bar{2}1$ . Ίσως έχετε ήδη μανιέψει τον γενικό τύπο. Οι μαντείες, όμως, δεν είναι απαραίτητες, διότι μπορούμε να συναγάγουμε τον τύπο με την εξής απλή επιχειρηματολογία:

Αρχίζουμε με έναν πύργο  $n$  δίσκων στη στήλη  $A$  και θεωρούμε την πρώτη φορά που μετακινείται ο  $n$ -οστός δίσκος. Είναι φανερό ότι πριν μπορέσουμε να το κάνουμε αυτό πρέπει πρώτα να μετακινήσουμε τους προηγούμενους  $n - 1$  δίσκους από τη στήλη  $A$  και να τους μεταφέρουμε σε μια άλλη στήλη, αφήνοντας κενή την τρίτη, για να υποδεχτεί τον  $n$ -οστό δίσκο. Αφού μας ενδιαφέρει η συντομότερη ακολουθία κινήσεων, ελεύθερη στήλη πρέπει να είναι η  $B$ . Επομένως, η όλη διαδικασία αρχίζει με τη μεταφορά του αποτελούμενου από  $n - 1$  δίσκους υπο-πύργου από



Σχήμα 3

τη ράβδο  $A$  στη  $C$  (που επιτυγχάνεται με τη διαδικασία  $\bar{T}_{n-1}$ ). συνεχίζεται με τη μετακίνηση του  $n$ -οστού δίσκου από την  $A$  στη  $B$  (κίνηση  $n$ ), και ολοκληρώνεται με τη μεταφορά του υπο-πύργου  $n - 1$  από το  $C$  στο  $B$ , πάνω στο δίσκο  $n$  (και πάλι η διαδικασία  $\bar{T}_{n-1}$ ). Συνοψίζοντας, έχουμε τη σχέση

$$T_n = \bar{T}_{n-1} n \bar{T}_{n-1},$$

με  $T_1 = 1$ . Η σχέση αυτή συμφωνεί με τους τύπους για τα  $T_1$ ,  $T_2$  και  $T_3$  που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Ας την εφαρμόσουμε μία ακόμη φορά:

$$T_4 = \bar{T}_3 4 \bar{T}_3 = \bar{1}213\bar{1}2\bar{1}4\bar{1}213\bar{1}2\bar{1}.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτός ο τύπος, όπως και ο γενικός τύπος για την  $T_n$ , «αναπτύσσεται από τα αριστερά προς τα δεξιά» ενώνοντας διαδοχικά δύο αντιειφαρμένα αντίγραφα του προηγούμενου τύπου, παρεμβάλλοντας ενδιάμεσα μια κίνηση του αντιστοιχου δίσκου. Αντιστροφα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι συμπληρώνεται από τα μέσα (Σχήμα 3) με μια διαδικασία παρόμοια με αυτή της βαθμονόμησης ενός δυαδικού χάρακα χωρίζοντας στη μέση τα διαδοχικά του διαστήματα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από αυτές τις δύο ερμηνείες για να υπολογίσουμε το πλήθος  $t_n$  των κινήσεων της  $T_n$ .

**Πρόβλημα 1.** Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία «συνέννωσης» για να αποδείξετε ότι

$$t_n = 2t_{n-1} + 1,$$

και από αυτή την αναδρομική εξίσωση να συναγάγετε ότι  $t_n = 2^n - 1$ . Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία της «δυαδικής κλίμακας» για να αποδείξετε άμεσα ότι  $t_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ .

Ας δούμε μία ακόμη φορά τις δυαδικές κλίμακες του Σχήματος 3. Ας θεωρήσουμε ως μοναδιαίο μήκος το διάστημα που προκύπτει μετά τον  $n$



οστό υποδιπλασιασμό. Σ' αυτή την περίπτωση, η μεγαλύτερη υποδιαιρέση της κλίμακας θα μετρά μήκος  $2^{n-1}$  από το ένα άκρο του τρίματος. Οι δεύτερες σε μέγεθος υποδιαιρέσεις θα μετρούν τα μήκη  $2^{n-2}$  και  $2^{n-1} + 2^{n-2}$  —με άλλα λόγια, πολλαπλάσια του  $2^{n-2}$  που δεν είναι πολλαπλάσια του  $2^{n-1}$ . Κατόπιν, σημειώνουμε τα πολλαπλάσια του  $2^{n-3}$  που δεν είναι πολλαπλάσια του  $2^{n-2}$ , κ.ο.κ. Οι πολλαπλές υποδιαιρέσεις σημειώνουν περιττούς αριθμούς. Με όρους του αλγορίθμου μας για την επίλυση του πύργου του Ανόι, αυτό σημαίνει ότι αν ένας αριθμός  $k$  διαιρείται από το  $2^{m-1}$  αλλά όχι από το  $2^m$  (ή, ισοδύναμα, η δυαδική του αναπαράσταση λήγει σε  $m - 1$  μηδενικά), τότε κατά το  $k$ -οστό βήμα μετακινούμε τον  $m$ -οστό δίσκο.

**Πρόβλημα 2.** Πώς εξαρτάται η κατεύθυνση της κίνησης από το μέγεθος  $n$  του πύργου;

Απαριθμώντας διαρκώς τις κινήσεις θα γνωρίζετε πάντα ποιος δίσκος πρέπει να μετακινηθεί στην επόμενη κίνηση, και προς τα πού. Στην πραγματικότητα αρκεί να γνωρίζουμε αν η επόμενη κίνηση είναι περιττή ή άρτια, ή να γνωρίζουμε το δίσκο που μετακινήσαμε τελευταίο. Οι περιττές κινήσεις (και μόνο οι περιττές) γίνονται με τον μικρότερο δίσκο και πάντα προς την ίδια κατεύθυνση (λύστε το Πρόβλημα 2 και θα καταλάβετε γιατί). Οι άρτιες κινήσεις καθορίζονται μονοσήμαντα από τους κανόνες του Βράχμα —ο μικρότερος δίσκος πηγαίνει στον μεγαλύτερο.

Ένας άλλος απλός κανόνας που μας δίνει τη σωστή σειρά αναδιάταξης των δίσκων προτάθηκε από τον Misha Fyodorov, έναν μαθητή λυκείου από την πόλη Τσερνογκολόφκα, κοντά στη Μόσχα. Σε κάθε κίνηση «υπεισέρχονται» οι δύο από τις τρεις ράβδους, ενώ η τρίτη μένει «αδρανής». Ο Misha παρατήρησε ότι η αδρανής ράβδος κινείται πάντα προς την ίδια κατεύθυνση. Για παράδειγμα, αν η πρώτη αδρανής ράβδος είναι η  $B$ , η επόμενη είναι η  $C$ , μετά η  $A$ , η  $B$ , ...

**Πρόβλημα 3.** Αποδείξτε ότι η αδρανής ράβδος κινείται πάντα προς

την ίδια κατεύθυνση. Για δεδομένο  $n$ , ποια είναι η πρώτη αδρανής ράβδος;

Συνδυάζοντας όλους αυτούς τους κανόνες μπορούμε να καθορίσουμε την επόμενη κίνηση με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε κάτι για τις προηγούμενες κινήσεις. Τι γίνεται, όμως, όταν έχουμε χάσει την αριθμηση των κινήσεων ή αν ξεχάσουμε ποια ήταν η τελευταία κίνηση; Μπορούμε να τα καταφέρουμε γνωρίζοντας μόνο την τωρινή θέση των δίσκων; Το Πρόβλημα 4, στη συνέχεια, προσφέρει την απάντηση σ' αυτό το ερώτημα.

Συμβολίζουμε με  $p_i$  τη ράβδο που καταλαμβάνει ο  $i$ -οστός δίσκος (οπότε  $p_1 = A$ ,  $B$  ή  $C$ ). Κάθε θέση της σπαζοκεφαλιάς δίνεται από τη «λέξη»  $p_n p_{n-1} \dots p_1$ . (Παρατηρήστε ότι υπάρχουν  $3^n$  δυνατές λέξεις αυτού του τύπου, αλλά, αν μετακινήσουμε τον πύργο από τη μια ράβδο στην άλλη με τον συντομότερο τρόπο, θα εμφανιστούν μόνο οι  $2^n$  από αυτές —η αρχική λέξη και τα αποτελέσματα των  $2^n - 1$  κινήσεων.)

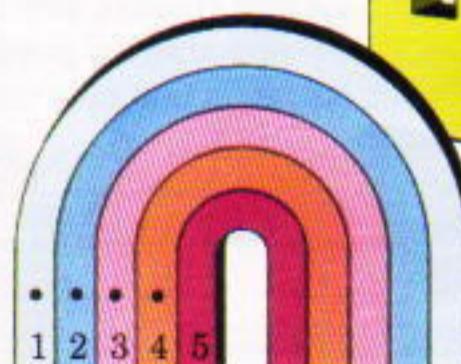
**Πρόβλημα 4.** Υποθέτουμε ότι έπειτα από  $k$  κινήσεις έχει προκύψει η θέση  $p_n p_{n-1} \dots p_1$ . Βρείτε έναν κανόνα για τον υπολογισμό του  $k$  από τον κωδικό  $p_n p_{n-1} \dots p_1$ , και αντιστρόφως. (Υπόδειξη: Θα σας βοηθήσει η χρήση της δυαδικής αναπαράστασης του  $k$ .) Δείξτε ότι το  $k$  έχει την ίδια ισοτιμία με το πλήθος των αλλαγών γραμμάτων στην ακολουθία γραμμάτων  $A p_n p_{n-1} \dots p_1$ .

Στην πράξη, ο πύργος του Ανόι μπορεί να δημιουργηθεί με πολλές μορφές. Στο Σχήμα 4 βλέπετε μια παραλλαγή την οποία θα μπορούσατε να βρείτε στα καταστήματα παιχνιδιών της Μόσχας πριν από λίγα χρόνια. Διαφέρει από την αρχική μόνο ως προς το σχεδιασμό: στη θέση των διαφορετικού μεγέθους δίσκων και των ράβδων έχουμε αριθμημένα τετράγωνα που μετακινούνται σ' ένα πλαίσιο με τρεις συνδεόμενες σχισμές. Μια άλλη παραλλαγή (Σχήμα 5) είναι πολύ έξυπνη. Παρουσιάστηκε από τον δημιουργό της, τον ιάπωνα Youshiyuki Kotani, στο 14ο Διεθνές Πανηγύρι Σπαζοκεφαλιών (Σηάττλ, 1994 — δείτε τον Παιχνιδότοπο του τεύχους Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1995 του



Σχήμα 4

Quantum). Εδώ οι δίσκοι έχουν αντικατασταθεί από κομμάτια σχήματος  $U$ , διαφορετικού μεγέθους, που τοποθετούνται σε τρεις εγκοπές ενός ειδικού πλαισίου. Η σειρά μεγέθους είναι αντεστραμμένη: το μικρότερο « $U$ » αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο δίσκο, κ.ο.κ. Ο δημιουργός της, για να υπογραμμίσει τις διαφορές αυτές, έχει αντικαταστήσει το «ο» του «Hanoi» με « $U$ », και ονομάζει την κατασκευή του «Σπαζοκεφαλιά του HanUi». Αυτός ο σχεδιασμός μάς αναγκάζει αυτόματα να ακολουθήσουμε τον δεύτερο κανόνα του Βράχμα, αφού είναι αδύνατον να τοποθετήσουμε ένα αντεστραμμένο  $U$  πάνω σ' ένα μεγαλύτερό του. Ένα επιπλέον ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτής της παραλλαγής είναι οι μικρές τρύπες που υπάρχουν στα  $U$ . Αν τοποθετήσουμε μια λεπτή ράβδο σε μια από αυτές, το αντίστοιχο κομμάτι δεν είναι δυνατόν να τοποθετηθεί στην εγκοπή  $C$ . Αυτό είναι ιοδύναμο με το να απαγορεύεται η τοποθέτηση ενός συγκεκριμένου δίσκου του πύργου του Ανόι στη ράβδο  $C$ . Τούτος ο επιπρόσθιος περιορισμός αλλάζει τη λύση, όπως είναι φυοικό.



Σχήμα 5

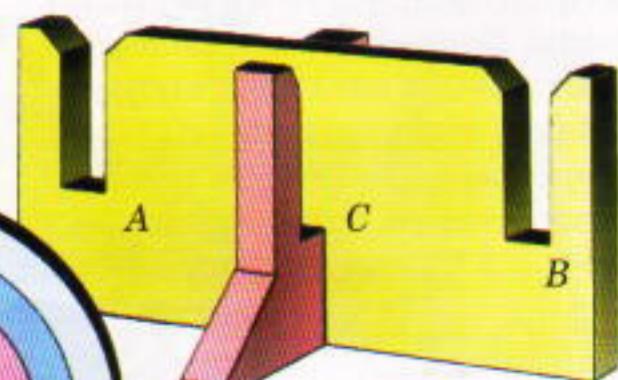
**Πρόβλημα 5.** Αποδείξτε πως όταν τοποθετήσουμε τη ράβδο στο  $k$ -οστό κομμάτι του HanUi και το πλήθος των  $U$  κομματιών είναι  $n$ , η συντομότερη λύση αποτελείται από  $2^k \cdot 3^{n-k} - 1$  κινήσεις.

Μια άλλη μέθοδος τροποποίησης της σπαζοκεφαλιάς είναι η αλλαγή της αρχικής διευθέτησης των δίσκων. Αποδεικνύεται ότι ακόμη και όταν τοποθετηθούν αρχικά και στις τρεις ράβδους με οποιαδήποτε σειρά, το πρόβλημα παραμένει επλύσιμο.

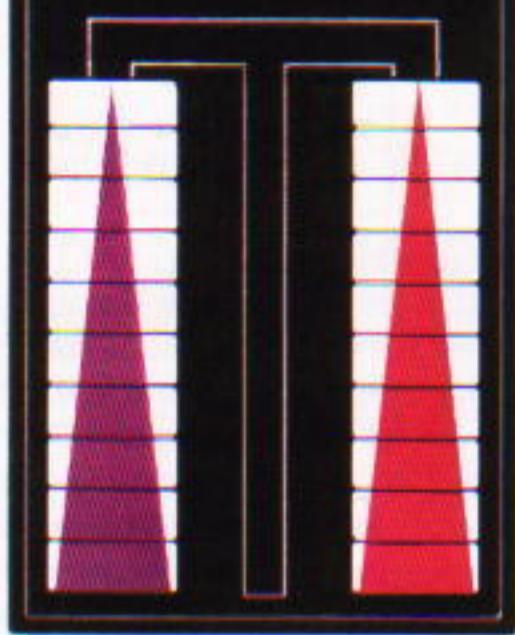
**Πρόβλημα 6.** Αποδείξτε ότι το πλήθος των κινήσεων που απαιτούνται για να συγκεντρώσουμε  $n$  δίσκους σε μια δεδομένη ράβδο ακολουθώντας τους «κανόνες του Βράχμα» είναι το πολύ  $2^{n-1}$ , ανεξάρτητα από τη ράβδο του πρώτου δίσκου και ανεξάρτητα από την αρχική τοποθέτηση των δίσκων. Μοναδική εξαίρεση είναι η περίπτωση κατά την οποία ο μεγαλύτερος ( $n$ -οστός) δίσκος βρίσκεται αρχικά στη ράβδο που πρέπει να καταλήξουν οι δίσκοι και υπάρχει ένας τουλάχιστον δίσκος κάτω από αυτόν. Σ' αυτή την περίπτωση, απαιτούνται το πολύ  $2^n + 2^{n-2} - 1$  κινήσεις, και αυτός ο αριθμός δεν μπορεί να μειωθεί (για  $n > 1$ ).

### Panex

Στις αρχές της δεκαετίας του 1980, η ιαπωνική Magic Company κατασκεύασε μια σπαζοκεφαλιά που έμοιαζε με τον Πύργο του Ανόι (ή μάλλον με τη ρωσική παραλλαγή του Σχήματος 4) και μπορεί να αναλυθεί με παρόμοιο τρόπο, αν και η λύση της είναι πολύ πιο δύσκολη. Έχει το μυστηριώδες όνομα Panex (δεν έχω την παραμικρή ιδέα για το τι μπορεί να



## PANEX



Σχήμα 6

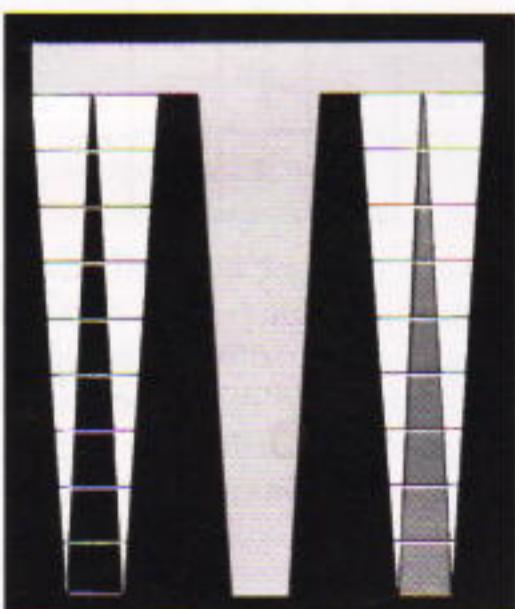
σημαίνει αυτό στα ιαπωνικά). Στο Σχήμα 6 βλέπετε πώς φαίνεται εξωτερικά, ενώ το Σχήμα 7 παρουσιάζει την πιθανή εσωτερική της κατασκευή (συγκρίνετε με το Σχήμα 4!). Ο σκοπός εδώ είναι να εναλλαχθούν η αριστερή με τη δεξιά στήλη (διατηρώντας φυσικά τη σειρά των κομματιών στις στήλες). Το κεντρικό αυλάκι χρησιμοποιείται ως «διάδρομος ταξινόμησης». Δεν υπάρχουν άλλοι κανόνες σχετικά με τη μετακίνηση των κομματιών, επειδή η κατασκευή από μόνη της είναι μάλλον περιοριστική: είναι αδύνατον να τοποθετηθεί ένα κομμάτι χαμηλότερα από το αρχικό του επίπεδο, ακόμη κι αν δεν υπάρχουν άλλα κομμάτια από κάτω. Για παράδειγμα, κάθε κορυφαίο κομμάτι μπορεί να μπει μόνο σε έξι θέσεις: στο οριζόντιο αυλάκι σύνδεσης πάνω

από οποιαδήποτε από τις τρεις στήλες (αυτές μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως τρεις διαφορετικές θέσεις και να τις ονομάζουμε «μηδενικό επίπεδο») ή στο αρχικό του επίπεδο (το πρώτο επίπεδο) σε κάποια από τις τρεις στήλες. Επομένως, αυτά τα δύο κομμάτια, όταν δεν βρίσκονται στην ίδια στήλη, μπλοκάρουν τις δύο από τις τρεις στήλες! Εξαιτίας του τόσο στενού χώρου ελιγμών, η σπαζοκεφαλιά φαίνεται άλυτη εκ πρώτης όψεως —και αυτή την εντύπωση πρέπει πάντα να δίνει μια καλή σπαζοκεφαλιά. Λύση υπάρχει, βέβαια, αν και η επίτευξή της στην πράξη μπορεί να απαιτεί περισσότερο χρόνο απ' όσο είστε πρόθυμοι να διαθέσετε. Οι J. Slocum και J. Botermans, στο βιβλίο τους *Puzzles Old and New*, αναφέρουν ότι οι μαθηματικοί των Εργαστηρίων Bell έχουν εκτιμήσει πως το ελάχιστο πλήθος κινήσεων που απαιτούνται για την εναλλαγή των στηλών στο Panex είναι  $27564 \leq N \leq 31537$ . (Η δική μου λύση είναι κατά 1700 περίπου κινήσεις μεγαλύτερη.) Επιπλέον, από τη στιγμή που θα ανακαλύψετε έναν αλγόριθμο και θα επιβεβαιώσετε την ορθότητα του για πέντε ή έξι επίπεδα του παιχνιδιού, θα πείτε κατά πάσα πιθανότητα «και τα λοιπά», και θα το αφήσετε κατά μέρος. Αυτό είναι μια αρνητική πλευρά που χαρακτηρίζει όλες τις σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού.

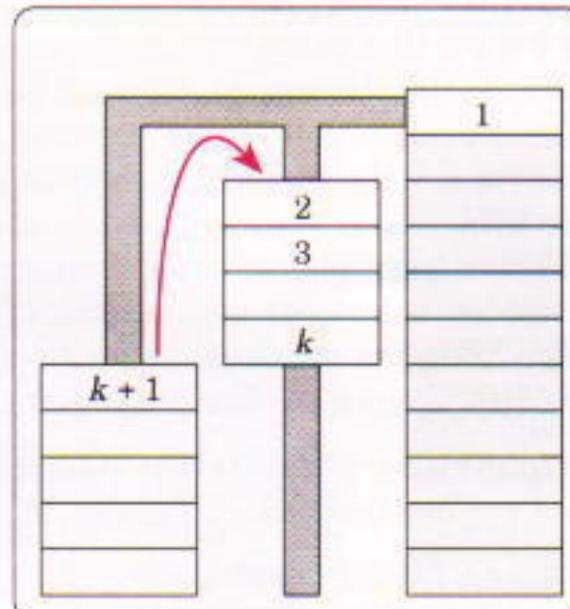
Ενώ η λύση για τα  $k$  επίπεδα του Πύργου του Ανόι ανάγεται σχεδόν αυτόματα στη λύση για τα  $k - 1$  επίπεδα, στο Panex παρόμοιες συνδρομικές σχέσεις είναι πολύ λιγότερο φανερές και πολύ πιο περιπλοκες.

Και όχι μόνο αυτό —για τα κομμάτια ενός επιπέδου δεν έχει καμία σημασία το χρώμα των κομματιών που υπάρχουν από πάνω, και έτοι οι ανταλλαγές σ' αυτό το επίπεδο δεν συνδέονται άμεσα με τις ανταλλαγές στα ανώτερα επίπεδα. Οι αναδρομές εμφανίζονται σε συγκεκριμένες βοηθητικές —αλλά και απαραίτητες— διαδικασίες, τις οποίες πρέπει υποχρεωτικά να μάθετε να χρησιμοποιείτε προκειμένου να λύσετε τη σπαζοκεφαλιά. Στη συνέχεια θα αναφέρω μόνο αυτές τις διαδικασίες και θα παρουσιάσω τις αναδρομικές σχέσεις μεταξύ τους, αφήνοντας την υπόλοιπη δουλειά για τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται.

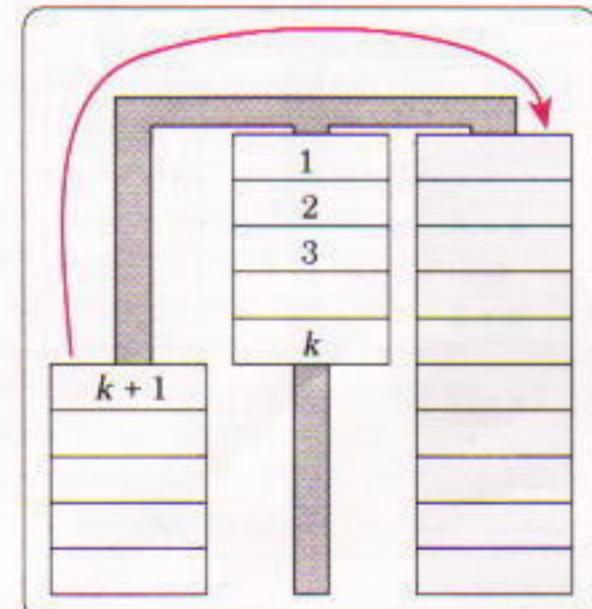
Παρατηρήστε ότι κάθε κομμάτι πρέπει κάποια στιγμή να φύγει από τη στήλη του και να μείνει σε μία από τις δύο άλλες, για μερικές τουλάχιστον κινήσεις. Μπορεί κάποια στιγμή να επιστρέψει, για να ξαναφύγει και πάλι αργότερα. Είναι πιθανόν επίσης να επαναλάβει ορισμένες φορές τέτοια παλινδρομικά ταξίδια. Αν όμως θεωρήσουμε την πρώτη στιγμή που ουμβαίνει αυτό για τα δύο κομμάτια του  $(k + 1)$ -οστού επιπέδου, λόγου χάρη (μετρώντας από το επίπεδο 0), θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν μόνο δύο δυνατές διευθετήσεις των υπόλοιπων κομματιών εκείνη τη στιγμή. Στο Σχήμα 8 παρουσιάζονται οι διευθετήσεις, α και β, που αντιστοιχούν στο αριστερό κομμάτι (οι αριθμοί των κομματιών αναφέρονται στο αρχικό τους επίπεδο). Ας επικεντρωθούμε την προοχή μας στη διευθέτηση α —οδηγεί ο' έναν κάπως συντομότερο αλγόριθμο. Είναι φανε-

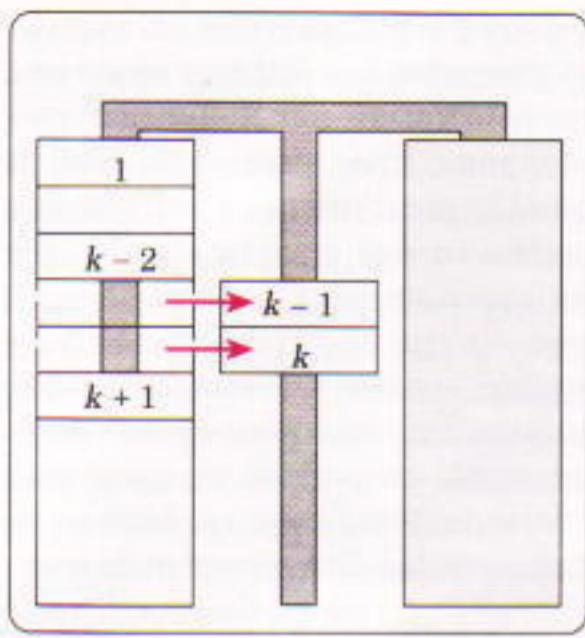


Σχήμα 7



Σχήμα 8





Πράξη  $D_k$

Σχήμα 9

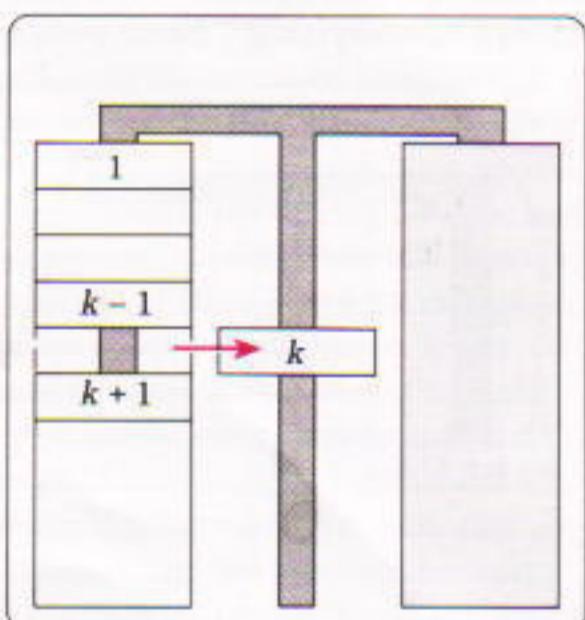
ρό λίγο-πολύ (και θα το θεωρήσουμε δεδομένο) ότι η συντομότερη ακολουθία κινήσεων,  $L_k$ , που δημιουργεί αυτή τη διευθέτηση, αφήνει ανέπαφη τη δεξιά στήλη.

**Πρόβλημα 7.** Αποδείξτε πώς όταν  $k \geq 3$ , η πράξη  $L_k$  μπορεί να παρασταθεί ως  $D_k L_{k-2}$ , όπου  $D_k$  είναι η συντομότερη πράξη που μετακινεί τα δυο κομμάτια  $k$  και  $k-1$  με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 9.

Με αυτό το πρόβλημα καταλήγουμε οιην επόμενη εξίσωση για το πλήθος των κινήσεων  $\ell_k$  και  $d_k$  των  $L_k$  και  $D_k$ :

$$\ell_k = d_k + \ell_{k-2}, \text{ με } k \geq 3. \quad (1)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε άμεσα ότι  $\ell_1 = 1$ ,  $\ell_2 = 2$ ,  $d_2 = 3$  (φυσικά, το  $d_1$  δεν ορίζεται). Κάνοντας δοκιμές βρίσκουμε ότι  $d_3 = 8$ , οπότε  $\ell_3 = d_3 +$



Πράξη  $S_k$

Σχήμα 10

$\ell_1 = 9$ . Περιοσότερες τιμές των  $d_k$  (και  $\ell_k$ ) μπορούμε να βρούμε χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις μεταξύ της  $D_k$  και μιας άλλης βοηθητικής πράξης, της  $S_k$ , η οποία μετακινεί ένα κομμάτι του  $k$ -οστού επιπέδου από την αριστερή στην κεντρική στήλη ξεκινώντας από την αρχική διευθέτηση (δείτε το Σχήμα 10). Είναι ουμανικό να παρατηρήσουμε ότι αυτή η πράξη είναι αποτελεσματική ακόμη και όταν το  $k$ -οστό επιπέδο της κεντρικής στήλης είναι αρχικά κατειλημμένο (ας πούμε, από το αντιστοιχό δεξιό κομμάτι). Σ' αυτή την περίπτωση, θα φέρει το κομμάτι από τον αριστερό  $k$ -οστό χώρο στον κεντρικό  $(k-1)$ -οστό χώρο. Δεν θα έχει αποτέλεσμα, όμως, αν ο τελευταίος χώρος είναι κατειλημμένος, επειδή τότε δεν θα υπάρχει ελεύθερη διόδος για το μεταφερόμενο κομμάτι. Η ίδια παρατήρηση ισχύει για την πράξη  $D_k$ .

**Πρόβλημα 8.** Έστω  $s_k$  το πλήθος κινήσεων της  $S_k$ . Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned} s_k &= d_k + s_{k-1}, \\ d_{k+1} &= d_k + 2s_{k-1} + 8, \\ k &\geq 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Για τα μικρά  $k$  μπορούμε να βρούμε τις τιμές του  $s_k$  άμεσα: προφανώς  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 3$ . Για  $k = 3$ , μια μικρή αλλαγή στη σειρά των κινήσεων μειώνει κατά 1 την τιμή  $d_3 + s_2 = 11$  στην οποία δίνει η εξίσωσή μας, οπότε  $s_3 = 10$ . Παρόμοια,  $d_4 = 21$ , που είναι πάλι κατά 1 μικρότερη από την τιμή που δίνει η εξίσωσή μας.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις εξισώσεις (2) μπορούμε να υπολογίσουμε σταδιακά όλες τις τιμές των  $s_k$  και  $d_k$  για  $4 \leq k \leq 10$ , και κατόπιν, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1), τις τιμές  $\ell_k$ . Οι υπολογισμοί μου δίνουν τις εξής τιμές για  $k = 10$ :  $s_{10} = 6891$ ,  $d_{10} = 4039$ ,  $\ell_{10} = 4874$ .

Μπορούμε τώρα να συνδυάσουμε τις πράξεις που παρουσιάσαμε σε μια πλήρη λύση της οπαζοκεφαλιάς Panex, στην αρχική της διατύπωση.

**Πρόβλημα 9.** Δώστε την πλήρη λύση της οπαζοκεφαλιάς Panex. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 58

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 28

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Δεν πρόκειται απλώς για άλλο ένα ακόμη μαγικό τετράγωνο —οι αριθμοί του, επιπλέον, είναι διαδοχικοί! Ο Sallows ονομάζει το πρώτο τετράγωνο λιοσσού (το λι προκύπτει από το όνομά του, Lee) και το δεύτερο το αποκαλεί αλφαμαγικό του σύντροφο. Στο άρθρο του "Alphamagic Squares", που δημοσιεύτηκε σε δύο μέρη στο Abacus (τόμ. 4, 1986, σελ. 28-45, και 1987, σελ. 20-29, 43), καταγράφει τις έρευνές του για τα αλφαμαγικά τετράγωνα, τις οποίες πραγματοποίησε με τη βοήθεια υπολογιστή, για περισσότερες από είκοσι γλώσσες.

Και τώρα, τρεις σπαζοκεφαλιές που μπορεί να σας απασχολήσουν μέχρι τη δημοσίευση των απαντήσεων στο επόμενο τεύχος.

1. Κατασκευάστε ένα  $3 \times 3$  μαγικό τετράγωνο με εννέα διαδοχικούς θετικούς ακεραίους που έχει για μαγική σταθερά το 666 —τον διαβόλιο αριθμό του θηρίου στην Αποκάλυψη του Ιωάννη.

2. Τοποθετήστε τον αριθμό 1 σ' ένα γωνιακό κελί ενός  $3 \times 3$  πίνακα, και κατόπιν συμπληρώστε τα υπόλοιπα κελιά με διαδοχικούς μη αρνητικούς ακεραίους έτσι ώστε να οχηματιστεί ένα μαγικό τετράγωνο.

3. Τοποθετήστε εννέα τραπουλόχαρτα ως εξής:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Όλες οι γραμμές και οι στήλες καθώς και η μία διαγώνιος έχουν άθροισμα 6, αλλά η άλλη διαγώνιος έχει άθροισμα 3. Αλλάξτε τη θέση τριών φύλλων έτσι ώστε το τετράγωνο να γίνει εξολοκλήρου μαγικό. ◻

Ο Martin Gardner ασκεί τη μαγεία του στο Χέντεροονβιλ της Βόρειας Καρολίνας, και συνεχίζει να γράφει ασταμάτητα.



## ΣΕΙΡΑ: ΑΥΘΕΝΤΙΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



John Barrow

Πανεπιστήμιο του Σάσσεξ

### Η ΑΠΑΡΧΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ

Περιήγηση στη μοντέρνα κosmology

Ο διακεκριμένος αστρονόμος περιγράφει πώς οι ερευνητές μελετώντας την πρόσιμη ιστορία του σύμπαντος και τη δομή του όπως παρατηρείται σήμερα, πέτυχαν μια πληρέστερη κατανόηση των οντοτήτων που το αποτελούν — από τα στοιχειώδη σεματίδια ως τα μητάλα γαλαξιακά σήμηνη. Εξηγεί τι σημαίνει ότι ο χρόνος έχει μία αρχή. Γιατί οι επιστήμονες υποψάζονται ότι υπάρχουν κι άλλες διαστάσεις στο σύμπαν. Τι είναι οι κosmikές σήραγγες. Τι λέει η φυσική για τη «δημιουργία από το τίποτε». Γιατί η ίδια η ήπαρξη μας συνδέεται με την αρχή και τη δομή του σύμπαντος, με τρόπους που δεν υποψιαζόμαστε. Ο συγγραφέας, που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή έρευνας των παραπάνω θεμάτων, μας προσφέρει τις πιο σύγχρονες απόψεις της μοντέρνας κosmology.

Σελ.: 176, Εικ.: A/M, 14x21 εκ., 3.500 δρχ.

Richard Dawkins

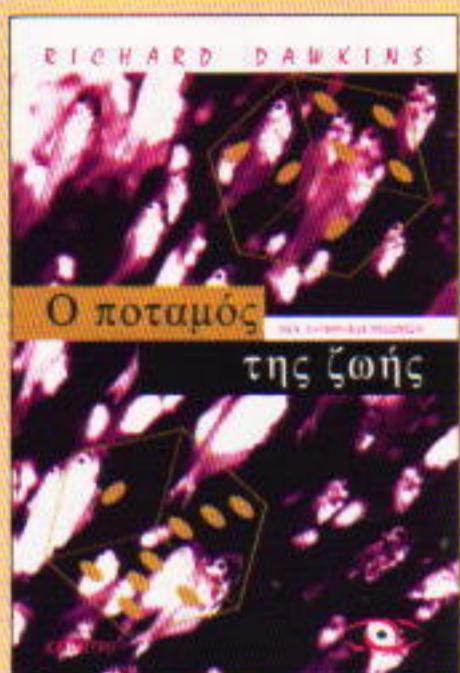
Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

### Ο ΠΟΤΑΜΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ

Μια δαρβινική προσέγγιση

Ο διακεκριμένος βιολόγος, γράφοντας με χαρακτηριστική ενέργεια, επιχειρεί να λίστε το μαστήριο της προέλευσης της ζωής. Αναλύει τη θεωρία της Αφρικανής Εύας, περιγράφει και αποσαφηνίζει πολύπλοκα φαινόμενα του έμβιου κόσμου, προσπαθεί να απαντήσει σε καίρια ερετήματα, όπως: Ποιος ήταν ο πιο πρόσφατος κοινός πρόγονος όλων των ανθρώπων; Πώς εξελίσσονται οι πολύπλοκοι μηχανισμοί των έμβιων οντων; Γιατί κληρονομούμε γονίδια που προκαλούν θανατηφόρες ασθέτεις; Ποια είναι η κατεύθυνση της εξέλιξης; Περιγράφει τις πριωτότελες των εκπαιδυμόνων να ερμηνεύουν τη ζωή και επισημαίνει πόσο συχνά μας παραπλανούνται με μέθοι για την προέλευση μας, και μας προσφέρει ένα συναρπαστικό και προκλητικό κτίμενο, το οποίο αποτελεί υπόδειγμα επιστημονικού συλλογισμού.

Σελ.: 208, Εικ.: A/M, 14x21 εκ., 4.000 δρχ.



ΚΟΡΥΦΑΙΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΑΠΟ ΕΝΑ ΜΕΓΑΛΟ ΦΑΣΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΤΟΜΕΩΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΥΡΥ ΚΟΙΝΟ, ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΜΙΑ ΣΕΙΡΑ ΜΙΚΡΩΝ ΚΑΙ ΕΛΚΥΣΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ, ΤΟ ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΟΥΣ, ΤΙΣ ΙΔΕΕΣ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ, ΤΙΣ ΠΡΟΠΤΙΚΕΣ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΤΟΛΗ ΤΟΥ 21ΟΥ ΑΙΩΝΑ. Η ΣΕΙΡΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ ΣΧΕΔΟΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΣΕ 55 ΧΩΡΕΣ ΤΟΥ ΠΛΑΝΗΤΗ ΜΑΣ: ΑΠΟ ΤΙΣ ΧΩΡΕΣ ΤΗΣ ΕΥΡΩΠΑΪΚΗΣ ΕΝΩΣΗΣ, ΤΟΝ ΚΑΝΑΔΑ, ΤΗΝ ΙΑΠΩΝΙΑ ΜΕΧΡΙ ΤΗ ΒΡΑΖΙΛΙΑ, ΤΗΝ ΚΙΝΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΥΣΤΡΑΛΙΑ.

• «ΑΝΤΙΛΑΜΒΑΝΟΜΑΙ ΑΥΤΗ ΤΗ ΣΕΙΡΑ ΣΑΝ ΜΙΑ ΣΠΟΡΑ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΟ ΤΟΝ ΠΛΑΝΗΤΗ ΜΑΣ. Η ΣΥΓΚΟΜΙΔΗ ΘΑ ΕΙΝΑΙ Η ΕΠΟΜΕΝΗ ΓΕΝΙΑ ΔΙΑΝΟΗΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΩΝ.»

—DANIEL DENNETT

## ΕΚΔΟΣΕΙΣ Κάτοπτρο

