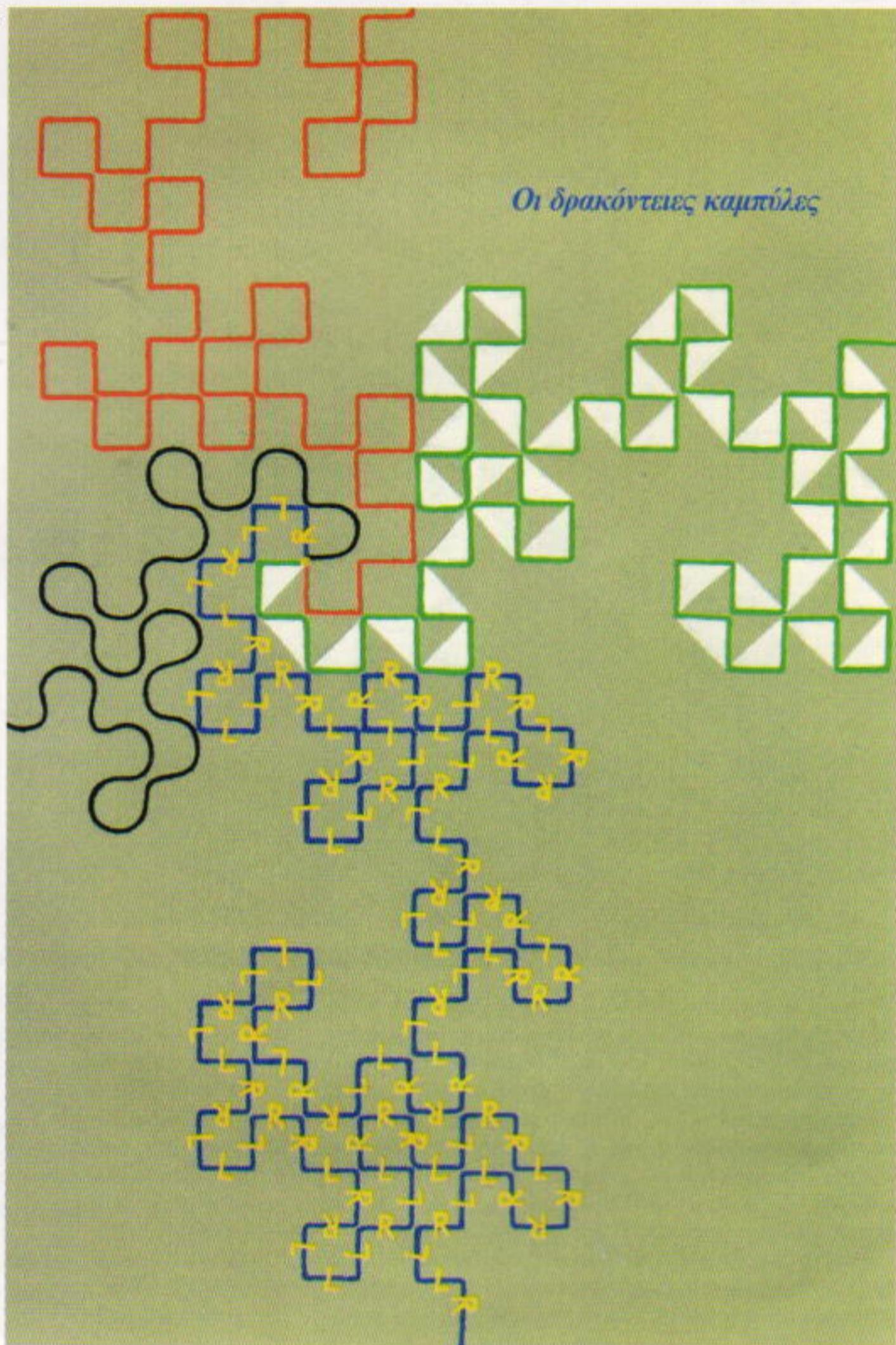


# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1995  
ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 6  
1.400 ΔΡΧ.





*Fanny/Zωγραφική με τα δάχτυλα* (1985), του Chuck Close

Όταν βλέπει κανείς αυτό το έργο στην τυπωμένη σελίδα, εντείνεται η ψευδαισθησή του ότι πρόκειται για φωτογραφία. Αν όμως το βλέπατε στην πινακοθήκη, θα ήταν δύσκολο να παραπλανηθείτε και να θεωρήσετε αυτό τον μεγάλο καμβά —έχει ύψος μεγαλύτερο από δυόμισι μέτρα— ως φωτογραφικό στυγμότυπο. Άλλα και πάλι, αν τον κοιτούσατε από μακριά, θα έμοιαζε με φωτογραφία. Γιατί; Κατ' αρχάς, στον πίνακα ο καλλιτέχνης μιμείται τον κόκκο που εμφανίζουν μερικές ασπρόμαυρες φωτογραφίες. Η τεχνική του Close είναι να τοποθετεί την μπογιά με τα δάχτυλά του, αγγίζοντας πολύ ελαφρά τον πίνακα. Επίσης, η εστίαση σε ορισμένα τμήματα του θέματος του δεν είναι καλή, κάτι που σπάνια βλέπουμε σε έναν

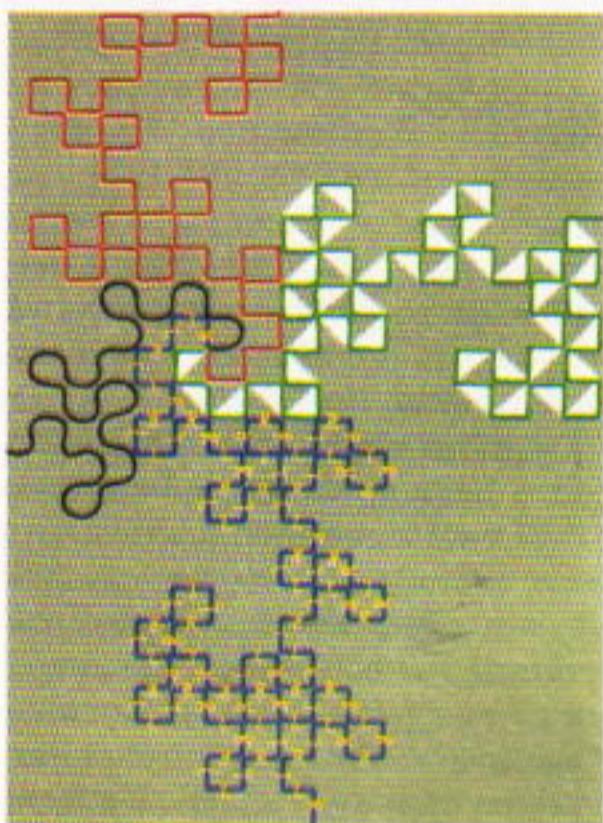
πίνακα. Είναι οαφές ότι ο καλλιτέχνης χρησιμοποιήσε μια φωτογραφία του θέματός του όταν το ζωγράφιζε, και ισως ήθελε να δημιουργήσει μια φωτογραφική ψευδαισθηση. Άλλα, εππλέον, επέλεξε να επιστρώσει τον καμβά με μπογιά χρησιμοποιώντας γυμνά τα χέρια του, και να μην το εμποτευτεί σε μια βιομηχανική διαδικασία χημικής εμβάπτισης. Μερικοί θεωρούν ότι το πορτρέτο της Fanny, της πεθεράς του ζωγράφου, είναι επιθετικά μη κολακευτικό. Άλλοι ποτεύουν ακριβώς το αντίθετο.

Ο Mark Biermann, στο άρθρο της σελίδας 28, ερευνά το «βάθος πεδίου» —έναν παράγοντα που επηρεάζει την ευκίνεια των φωτογραφιών.

# QUANTUM

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1995

ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 6



Εικονογράφηση: Vera Khlebnikova

Υπάρχουν περιοσότεροι από έναν τρόποι να σκιοείς τη γάτα, όπως λένε. Το ίδιο ισχύει και για τα «δρακόντεια σχέδια», όπως δείχνει και η ζωγράφος μας. Ενώ φαίνεται ότι προκύπτουν από μια κοινή αρχή (αν και στην πραγματικότητα είναι αμφίβολο ποιο «γέννησε» το άλλο), η απλή αφηρημένη, «παραδοσιακή» εκδοχή δείχνει προς το «βορρά», προς το λογότυπό μας. Μια άλλη, εξεζητημένη εκδοχή, που μοιάζει με φτερωτή ανεμόμυλου ή με παπιγιόν, περιπλανιέται προς τα δεξιά. Ένα μάλλον βραδυκίνητο δρακόντειο σχήμα πορεύεται στο κάτω μέρος της εικόνας, μουρμουρίζοντας «αριστερά, αριστερά, δεξιά, αριστερά...», σαν να προσπαθεί να θυμηθεί το δρόμο τής επιτροφής. Προς τα αριστερά εξέχει, όλο κομψότητα και αυτοπεποίθηση, η δρακόντεια καμπύλη. Μπορεί πολλοί από εμάς να έχουν περάσει ένα ολόκληρο απόγευμα αναζητώντας σχήματα στα σύννεφα, αλλά οι μαθηματικοί φαίνεται ότι τα βλέπουν παντού. Στη σελίδα 10 θα βρείτε μια ειοαγωγή σ' αυτά τα περίεργα σχέδια και στα μαθηματικά που κρύβονται πίσω τους.

## ΑΡΘΡΑ

- 10 Για τα 25α γενέθλια του *Kvant*  
Δρακόντειες καμπύλες**  
*Nikolay Vasilyev και Viktor Gutenmacher*
- 17 Προβλήματα Fermi  
Γίγιν και εξωγήινη νοημοσύνη**  
*John Adam*
- 22 Φυσική πλάσματος  
Η τέταρτη κατάσταση της ύλης**  
*Alexander Kingsep*
- 28 Φυσική και χόμπι  
Η τέχνη της φωτογραφίας**  
*Mark Biemann*

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων**  
*Φωτόνια και φωτοηλεκτρικό φαινόμενο*
- 5 Κβαντικά χαμόγελα**  
*Eίναι θέμα αρχής*
- 9 Σπαζοκεφαλίες**
- 35 Πώς λύνεται;**
- 39 Μαθηματικές αναζητήσεις**  
*Ζευγάρια με διαφορετικό άθροισμα*
- 40 Καλειδοσκόπιο**  
*Περί παραμορφώσεων*
- 43 Με πίγη φαντασία**  
*Tι είναι το «βάρος» τέλος πάντων;*
- 46 Στα πεδία της φυσικής**
- 50 Στο μαυροπίνακα**  
*Περί δευτεροβαθμίων*
- 53 Στο εργαστήριο**  
*Μερικά αποκαλυπτικά ίχνη*
- 56 Γεγονότα**  
*Η 26η Διεθνής Ολυμπάδα Φυσικής*
- 60 Το *Quantum* διαβάζει**
- 64 Αλληλογραφία**
- 66 Απαντήσεις, Υποδείξεις και λύσεις**
- 76 Παιχνιδότοπος**  
*Νικηφόρες στρατηγικές*

# Ζωή και πιθανότητες

Πόσο θα υπάρχει ακόμη το ανθρώπινο είδος;

**Ι**Ν ΑΠΟ ΔΙΑΚΟΣΙΑ ΧΡΟΝΙΑ ΣΧΕΔΟΝ, ο αιδεοιμότατος Thomas Robert Malthus δημοσίευσε το περίφημο «Δοκίμιο για τη θεωρία του πληθυσμού και τις επιδράσεις του στη μελλοντική βελτίωση της κοινωνίας». Η εκτίμηση του Malthus για την κατάσταση του ανθρώπου ήταν ζοφερή. Ξεκίνησε θέτοντας δύο γενικούς νόμους. Πρώτον, είπε, ο πληθυσμός τείνει πάντοτε να αυξάνεται γεωμετρικά, δηλαδή η ετήσια αύξηση είναι ένα οριομένο κλάσμα του πληθυσμού. Δεύτερον, η ποσότητα των διαθέσιμων τροφίμων αυξάνεται αριθμητικά, δηλαδή τα τρόφιμα αυξάνονται κάθε χρόνο κατά μια καθορισμένη ποσότητα, ανεξάρτητα από τον πληθυσμό. Συνεπώς, είναι μαθηματικά βέβαιο ότι η γεωμετρική αύξηση του πληθυσμού θα υπερβεί την αριθμητική αύξηση των τροφίμων. Ο Malthus συνήγαγε από τους δύο νόμους του την πρόβλεψη ότι, τελικά, η αύξηση του πληθυσμού θα είναι δυνατόν να τεθεί υπό έλεγχο μόνο μέσω λιμών, πολέμων και ασθενειών. Τα λιγότερο τυχερά μέλη του είδους μας θα ζουν πάντοτε μέσα στη φτώχεια, στα όρια της λιμοκτονίας.

Ο Malthus ήταν άγγλος κληρικός, και ένας από τους πατέρες της επιστήμης των οικονομικών. Όσον αφορά την Αγγλία, οι προβλέψεις του αποδείχτηκαν εσφαλμένες. Μετά τη δημοσίευση του δοκιμίου του, ο πληθυσμός της Αγγλίας αυξήθηκε ταχέως, όμως η παροχή τροφίμων και άλλων αγαθών αυξήθηκε ταχύτερα. Μένει να δούμε αν οι προβλέψεις του θα αποδειχτούν αληθείς για το σύνολο της ανθρωπότητας. Το αδύνατο

σημείο της επιχειρηματολογίας του έγκειται στην έλλειψη διάκρισης ανάμεσα σε ένα απλό μαθηματικό μοντέλο και στον πολύπλοκο πραγματικό κόσμο.

Διακόσια χρόνια αργότερα, ο φίλος μου Richard Gott γράφει ένα άλλο ζοφερό δοκίμιο. Δημοσιεύτηκε τον Μάιο του 1993 στο *Nature*, με τίτλο «Επιπτώσεις της κοπερνίκειας αρχής στις μελλοντικές μας προοπτικές». Ο Richard Gott είναι ένας διάσημος αστρονόμος ο οποίος, όπως και εγώ, ενδιαφέρεται για θέματα που αφορούν την ύπαρξη και το πεπρωμένο της ζωής στο σύμπαν. Με τον όρο «κοπερνίκεια αρχή» εννοεί την αρχή ότι τα ανθρώπινα όντα δεν κατέχουν ιδιαίτερη θέση μέσα στο σύμπαν. Η αρχή πήρε το όνομα του αστρονόμου που πρώτος έθεσε τον Ήλιο και όχι τη Γη στο κέντρο του ήλιακου συστήματος. Αφότου η αιρετική θεωρία του Κοπέρνικου έγινε ορθόδοξη, μάθαμε σταδιακά ότι ζούμε σε έναν συνηθισμένο πλανήτη που κινείται γύρω από ένα συνηθισμένο άστρο το οποίο βρίσκεται σε μια απόμερη περιοχή ενός συνηθισμένου γαλαξία. Η θέση μας δεν είναι, με κανέναν τρόπο, ιδιαίτερη ή κεντρική. Η κοπερνίκεια αρχή, σύμφωνα με τον Richard Gott, υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει τίποτε το εξαιρετικό σε ό,τι αφορά τη θέση μας είτε στο χώρο είτε στο χρόνο.

Για να εφαρμόσει την κοπερνίκεια αρχή στην ανθρώπινη κατάσταση στο χρόνο, ο Gott βασίζεται στη μαθηματική έννοια της «εκ των προτέρων πιθανότητας». Η εκ των προτέρων πιθανότητα ενός γεγονότος είναι η πιθανότητα που θα υπολογίζαμε ότι

υπάρχει να συμβεί το εν λόγω γεγονός εφόσον αγνοούμε παντελώς κάθε ειδική περίσταση ή αιτία που μπορεί να το επηρεάσει. Η κοπερνίκεια αρχή υποστηρίζει ότι ο τόπος στον οποίο ζούμε, και ο χρόνος κατά τον οποίο ζούμε, δεν θα πρέπει να έχουν μικρή εκ των προτέρων πιθανότητα. Για παράδειγμα, μια κεντρική θέση έχει πολύ μικρότερη εκ των προτέρων πιθανότητα από μια μη κεντρική θέση στο Γαλαξία. Κατά συνέπεια, η κοπερνίκεια αρχή λέει ότι θα πρέπει να ζούμε σε μια μη κεντρική θέση, όπως όντως συμβαίνει. Αν η κοπερνίκεια αρχή εφαρμοστεί στη θέση μας στο χρόνο, τότε ο Richard Gott και εγώ δεν πρέπει να ζούμε ούτε κοντά στην αρχή ούτε κοντά στο τέλος της ιστορίας του ανθρώπου είδους. Πρέπει να ζούμε κάπου στο μέσο της διαδρομής της ανθρωπινής ιστορίας. Αφού γνωρίζουμε ότι το είδος μας πρωτευμφανίστηκε περίου διακόσιες χιλιάδες χρόνια πριν, το γεγονός ότι ζούμε σε έναν μη ιδιαίτερο χρόνο υποδηλώνει ότι η μελλοντική διάρκεια του είδους μας θα πρέπει να είναι επίσης της τάξης των διακοσίων χιλιάδων ετών. Αυτό είναι ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα σε σύγκριση με τη μελλοντική διάρκεια ζωής της Γης ή του Ήλιου ή του Γαλαξία. Νά γιατί χαρακτηρίζω την εκτίμηση του Richard Gott ζοφερή. Εκτιμά ότι τα ανθρώπινα όντα δεν είναι εδώ για να μείνουν, ότι μάλλον θα έχουμε εξαφανιστεί σε μερικά εκατομμύρια χρόνια το πολύ, και πιθανότατα δεν πρόκειται να επιβιώσουμε τόσο ώστε να αποκήσουμε στο Διάστημα και να εξα-

πλωθούμε στον υπόλοιπο Γαλαξία.

Η επιχειρηματολογία του Gott έχει το ίδιο αδύνατο σημείο με εκείνη του Malthus. Και οι δύο χρησιμοποιούν ένα αφηρημένο μαθηματικό μοντέλο για να περιγράψουν τον πραγματικό κόσμο. Όταν ο Gott εφαρμόζει την κοπερνίκεια αρχή στην πραγματική κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε, υποθέτει ότι οι εκ των προτέρων πιθανότητες είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των πραγματικών πιθανοτήτων. Η αλήθεια είναι ότι δεν αγνοούμε παντελώς τις ιδιαίτερες συνθήκες που περιβάλλουν την ύπαρξή μας. Συνεπώς, οι εκ των προτέρων πιθανότητες μπορεί να οδηγήσουν σε ελλιπείς εκτιμήσεις για το τι είναι πιθανό ή απίθανο να ουμβεί στην πραγματικότητα.

Αφού διάβασα το δοκίμιο του Richard και το συλλογίστηκα για λίγο, του έγραψα την ακόλουθη επιστολή. Σ' αυτήν εξηγώ τους λόγους για τους οποίους διαφωνώ με τα συμπεράσματά του, παρότι βρίσκω την επιχειρηματολογία του σημαντική και διαφωτιστική.

«Άγαπητέ Richard,

Ευχαριστώ που μου αποστείλατε το απολαυστικά ζοφερό σας δοκίμιο για τις επιπτώσεις της κοπερνίκειας αρχής. Η λογική των επιχειρημάτων σας είναι ανεπίληπτη. Θαυμάζω τον τρόπο με τον οποίο συνάγετε μια τόσο πλούσια συγκομιδή συμπεράσμάτων από μια τόσο απλή και φανομενικά εύλογη υπόθεση. Όπως λέτε, η υπόθεσή σας είναι ελεγκτή και, ως εκ τούτου, αποτελεί μια νόμιμη επιστημονική υπόθεση. Ο σεβάσμιος προκάτοχός σας Thomas Robert Malthus συνήγαγε με όμοιο τρόπο φοβερές και τρομερές συνέπειες από μια επίσης ελεγκτή υπόθεση. Κατά την άποψή μου, και για τις δύο αυτές περιπτώσεις, η υπόθεση παραείναι απλή για να είναι αληθινή. Ωστόσο, και στις δύο περιπτώσεις, η μελέτη των συνεπειών της υπόθεσης είναι χρήσιμη, αφού λειτουργούν ως σήμα κινδύνου προς ένα απερισκεπτό είδος.

«Θυμάμαι όταν ήμουν παιδί, τη δεκαετία του 1930, τότε που η Βρετανία κυριαρχούσε ακόμη στη θά-

λασσα, με προβλημάτιζε το παράδοξο της απιθανότητας της προσωπικής μου κατάστασης. Γεννήθηκα και μεγάλωσα στους κόλπους της άρχουσας τάξης μιας άρχουσας αυτοκρατορίας, πράγμα που σήμαινε ότι ανήκα στο προνομιούχο ένα δέκατο του ενός εκατοστού του παγκόσμιου πληθυσμού. Η πιθανότητα να φανώ τόσο τυχερός ήταν μόλις μία στις χιλιες. Πώς μπορούσα να εξηγήσω την τύχη μου; Ποτέ δεν βρήκα μία ικανοποιητική εξήγηση. Η ιδέα ότι πρέπει να είχα ίση εκ των προτέρων πιθανότητα να γεννηθώ σε οποιοδήποτε μέρος του κόσμου ερχόταν σε αντίθεση με το γεγονός ότι είχα γεννηθεί στην ανώτερη τάξη της Αγγλίας. Σ' αυτή την περίπτωση, φαίνεται ότι η ιδέα των ίσων εκ των προτέρων πιθανοτήτων δεν λειτούργησε.

»Νομίζω ότι το παράδοξο της γεννησής μου προκύπτει επίσης και στην υπόθεση του δοκίμιου σας. Η ιδέα της ίσης εκ των προτέρων πιθανότητας έχει νόημα μόνο όταν έχουμε παντελή άγνοια των ιδιαίτερων παραγόντων που μπορεί να επηρεάσουν τις πιθανότητες. Αν τυχαίνει να γνωρίζουμε ότι ένα συγκεκριμένο απίθανο γεγονός έχει όντως συμβεί, τότε οι πιθανότητες όλων των γεγονότων που οχετίζονται με αυτό είναι δυνατό να μεταβληθούν δραστικά.

»Επιτρέψτε μου να παραθέσω ένα τεχνητό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ανακαλύπτουμε δύο πλανήτες που κατοικούνται από ξένους πολιτισμούς σε μακρινούς τόπους του Διαστήματος. Στέλνουμε πρεσβεία για να έρθουμε σε επαφή και να δημιουργήσουμε μια ανθρώπινη αποκοινωνία σε έναν από τους δύο πλανήτες. Επειδή θεωρούμε ιδιαίτερα δαπανηρή την αποστολή πρεσβείας και στους δύο, επιλέγουμε τον πλανήτη που θα επισκεφθούμε παίζοντας κορόναγράμματα. Τυχαίνει, λοιπόν, οι κάτοικοι του πλανήτη A να είναι δράκοντες οι οποίοι καταβροχθίζουν αμέσως όλους τους ανθρώπους επισκέπτες, ενώ οι κάτοικοι του πλανήτη B είναι καλοκάγαθοι ζωολόγοι οι οποίοι βάζουν τους επισκέπτες σε έναν ζωολογικό κήπο, ενθαρρύνουν την αναπαραγώγη τους και τους προστατεύουν από κάθε πιθανή βλάβη για ένα δισεκατομμύριο χρόνια.

Αυτά τα στοιχεία οχετικά με τους εξωγήινους είναι άγνωστα σ' εμάς τη στιγμή που επιλέγουμε ποιον πλανήτη θα επισκεφθούμε. Τώρα, σύμφωνα με την κοπερνίκεια υπόθεσή σας, η πιθανότητα να παρατείνουμε τη ζωή του είδους μας επισκεπτόμενοι τον πλανήτη B είναι απειρώς μικρότερη από την πιθανότητα να επισκεφθούμε τον πλανήτη A και να εξαφανιστούμε μέσα σε λίγα εκατομμύρια χρόνια με τις συνήθεις αντιξότητες της ζωής στον πλανήτη Γη. Γνωρίζουμε όμως, ότι σ' αυτή την περίπτωση οι πιθανότητες του A και του B είναι ίσες. Με αυτό το παράδειγμα θέλω να δείξω ότι η γνώση ενός και μόνο απίθανου στοιχείου, στην προκειμένη περίπτωση η ύπαρξη του πλανήτη B και των καλοκάγαθων κατοίκων του, καθιοτά απολύτως εσφαλμένο τον κοπερνίκειο υπολογισμό των εκ των προτέρων πιθανοτήτων της διάρκειας της ζωής.

»Για να επιστρέψουμε τώρα από αυτό το τεχνητό παράδειγμα στην πραγματική μας κατάσταση, νομίζω ότι η κοπερνίκεια υπόθεση έχει ήδη νοθευτεί από τη γνώση μας για ένα απίθανο γεγονός, το γεγονός ότι τυχαίνει να ζούμε τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή —μέσα σε λίγες εκαντοντάδες χρόνια— που κατέστη τεχνικά δυνατό η ζωή να αφήσει πίσω την πλανήτη και να εξαπλωθεί στο σύμπαν. Το ερώτημα αν το ανθρώπινο είδος εκμεταλλεύεται αυτή τη δυνατότητα ή όχι είναι άσχετο με το ζήτημά μας. Το θέμα είναι ότι η εν λόγω δυνατότητα υπάρχει τώρα, ενώ δεν υπήρχε κατά τα προηγούμενα τέσσερα δισεκατομμύρια χρόνια. Γεννηθήκαμε, όπως φαίνεται, σε μια τυχερή στιγμή, είτε εκμεταλλευόμαστε αυτό το πλεονέκτημα είτε όχι. Η γνώση αυτού του απίθανου γεγονότος αλλάζει όλες τις εκ των προτέρων πιθανότητες, αφού η δυνατότητα διασποράς της ζωής έξω από τα όρια ενός πλανήτη αλλάζει τους κανόνες του παιχνιδιού που πρέπει να παίξει η ίδια η ζωή.

»Μια άλλη, ανεξάρτητη νόθευση της κοπερνίκειας υπόθεσης προκύπτει από το γεγονός ότι τυχαίνει να ζούμε στην εποχή της εμφάνισης της γενετικής μηχανικής. Στο παρελθόν, όπως παρατήρησε ο Δαρβίνος, η πλειο-

νότητα των πλασμάτων δεν άφηνε επιζώντες απογόνους, διότι τα είδη δεν διασταυρώνονταν. Η εξαφάνιση των ειδών σήμαινε και την εξαφάνιση των απογόνων. Στο μέλλον, οι κανόνες του παιχνιδιού μπορεί να είναι διαφορετικοί. Η γενετική μηχανική μπορεί να καταστήσει ασαφή και να «διαβρώσει» τα όρια μεταξύ των ειδών, σε τέτοιο βαθμό ώστε η έννοια της εξαφάνισης του είδους να μην έχει πα ακριβές νόημα. Οι κοπερνίκεις υποθέσεις οχετικά με τη μακροβιότητα των ειδών και των απογόνων δεν θα έχουν πα καμιά αξία.

«Ολοκληρώνοντας, επιτρέψτε μου να πω ότι δεν αμφισβητώ τη λογική των επιχειρημάτων σας, αλλά μόνο το πόσο ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα οι υποθέσεις σας. Αν η κοπερνίκεια υπόθεση είναι αληθής, τότε όντως θα προκύψουν οι ουνέπειες τις οποίες συνάγετε. Χαίρομαι που διατυπώσατε τις ουνέπειες με έναν τόσο σαφή και ευθύ τρόπο. Ανησυχώ μόνο μήπως το κοινό οδηγήθει στην πεποίθηση ότι η υπόθεσή σας είναι ένα ασφαλές δεδομένο. Από το παράδειγμα του προκατόχου σας Malthus διαπιστώνουμε ότι εδώ ελλοχεύει ο πραγματικός κίνδυνος. Η άκριτη αποδοχή των προβλέψεων του Malthus λειτούργησε ως ανασταλτικός παράγοντας της κοινωνικής πρόοδου στην Αγγλία επί μία εκατονταετία. Είμαι βέβαιος ότι δεν θα επιτρέψετε μια παρόμοια άκριτη αποδοχή των συμπερασμάτων σας να γίνει ανασταλτικός παράγοντας της πρόοδου σήμερα.»

Αυτό το γράμμα δεν θα είναι ασφαλώς η τελευταία λέξη στη συζήτησή μου με τον Richard. Περιμένω με ανυπομονησία την απάντησή του.

*Freeman Dyson*

Ο Freeman Dyson είναι καθηγητής φυσικής στο Ινστιτούτο Ανωτέρων Σπουδών του Πρίντον από το 1953. Αρέσκεται στο να ποικίλει τις επιστημονικές του δραστηριότητες με επιδρομές στα πεδία της μηχανικής, της πολιτικής, του ελέγχου των όπλων, της ιστορίας και της λογοτεχνίας. Στα ελληνικά κυκλοφορεί το βιβλίο του *Oι προελεύσεις της ζωής*, από τις Εκδόσεις Τροχαλία.

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ενωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,  
με τη συμπραξή της Αμερικανικής Ενωσης Καθηγητών Φυσικής (AAFT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης  
Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεποτέλλων Έκδοτης  
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντικές Συνταξής  
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ Φυσικής, Πανεπιστήμιο της Χαρβάρντ  
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλίππης Μαθηματικά, Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μινέρκλεϋ

### Διευθυντικές Συνταξής στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μονάσας  
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

### Διευθυντικές Συνταξής στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Συμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνεξια, Νέα Υόρκη  
Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης  
Timothy Weber

Υπεύθυνος επικονομάρφησης  
Sergey Ivanov

Σύμβουλος επι διεθνών θεμάτων  
Edward Lozansky

### Συμβουλευτική Επιροπή

Bernard V. Khouri, Ανώνυμος Εκτελεστικός Υπόλληλος, AAPT  
James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιάνο  
Arthur Eisenkraft, Τρίτρια Θετικών Επιστημών, Λοκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας  
Margaret J. Kenney, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέττη

Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ηλλήνων  
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Καλοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς  
Barbara I. Stott, Καθηγητής Μαθηματικών, Λοκειο του Ρίβερντειλ, Λουιζιάνα  
Carol-ann Tripp, Καθηγητής Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πρόβιντενς, Ρόουντ Αϊλαντ

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Έκδοτης  
Αλέκος Μάραλης

Διευθυντής  
Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Μετάφραση και Εποπτημονική επιμέλεια  
Σ' αυτό το ιερόχρονο συνεργάστηκαν οι κ.κ.

Στελίος Ζαχαρίου - μαθηματικός, Πάντινα Λαζαράκη - φυσικός, Φάνης Γραμμίνος - φυσικός,  
Μιχάλης Λάμπρου - μαθηματικός, Κώστας Σκανδάλης - μαθηματικός, Κώστης Ανδρικόπουλος - φυσικός,  
Γιώργος Μπαρουζής, Γιώργος Κυριακόπουλος και Αλέκος Μάραλης - φυσικός

Πλοσιοτητής επιμέλεια  
Παντελής Μπουκάλας

Τυπογραφικές διαρθρώσεις  
Π. Τασιόπουλος

Επιμέλεια εκδοσης  
Γ. Ντρανός

Υπεύθυνη δογματική  
Μαρία Μάραλη

### Εποπτημονικοί συμβουλοί

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Εποπτημών Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Ερευνών Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοχειοθεσία, στελιδοποίηση  
Κάτιοπτρο

Φίλμ. μοντάζ  
Γ. Κεραμάς

Εκτυπωση  
Τετραχρωμία

Βιβλιοδεσία  
Θ. Αρχοντούλακης

Το Quantum εκδίδεται από την Εκδοτική οίκο Springer και στην Ελλάδα από την Εκδοτική Κατοπρό  
Υπεύθυνος για την ελληνική εκδοση σύμφωνα με το νόμο: Α. Μάραλης

Quantum, διμήνιο περιοδικό, ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Α. Μάραλης;  
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κατοπρό,  
Ιστιτούριο 10 και Διαφνομήλι, 114 71 Αθηνα,  
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Απαγορεύεται η αναδημοσίευση της μετάδοσης με όποιοδή-

ποτε μέσον άλλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την  
εγγραφή αδειας του εκδότη.  
Τιμή καθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.  
Ετήσιο ουντοριό: 7.500 δρχ., για ιδιώτες, 12.000 δρχ., για  
βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιόν τεύχουν στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.

# Είναι Θέμα αρχής

Ένα μεθοδολογικό εγχειρίδιο σε μία πράξη

D.V. Fomin

**ΣΚΗΝΗ ΕΙΝΑΙ ΣΚΟΤΕΙΝΗ.** ΜΙΑ απαλή μελωδία ακούγεται. Τα φώτα ανάβουν. Βρισκόμαστε στο σαλόνι του σπιτιού της οδού Μπέικερ 221B. Ο Σέρλοκ Χολμς είναι καθισμένος στην κουνιστή πολυθρόνα και διαβάζει την απογευματινή εφημερίδα του. Μπαίνει ο Γουάτσον.

**Χολμς.** Καλησπέρα, αγαπητέ μου φίλε. Βλέπω ότι αποφάσισες να ασχοληθείς με τη γεωμετρία για λίγο.

**Γουάτσον.** Μα πώς το κατάλαβες;

**Χολμς.** Η χτεσινή *Daily Joke*, με το διαγωνισμό γεωμετρίας, προεξέχει από την τοέπη σου. Και, απ' ό,τι βλέπω, έχεις σπαταλήσει άφθονο μελάνι για να λύσεις ένα τουλάχιστον από τα προβλήματα.

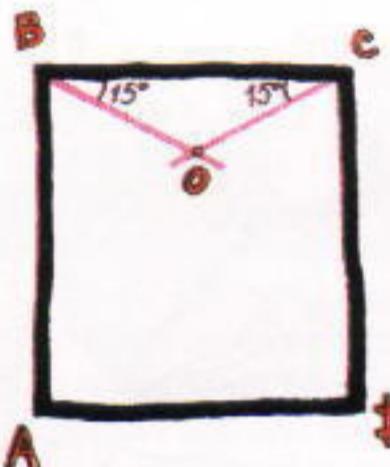
**Γουάτσον.** Και πώς ξέρεις ότι δεν έλυσα κανένα; Για να σου πω την αλήθεια, βέβαια, έχεις απόλυτο δίκιο...

(Ο Γουάτσον κάθεται.)

**Χολμς.** Σε παρακαλώ, μην προσβληθείς, αγαπητέ μου Γουάτσον. Παρεμπιπτόντως, πρέπει να σου πω ότι όλα αυτά τα προβλήματα μπορούν να λυθούν ουσιαστικά με τον ίδιο τρόπο — αν, βέβαια, βρούμε τη σωστή προσέγγιση. Για να είμαι ειλικρινής δεν έχω δει ακόμη τα προβλήματα του διαγωνισμού, αλλά... Λοιπόν, ας τους ρίξουμε μια ματιά.

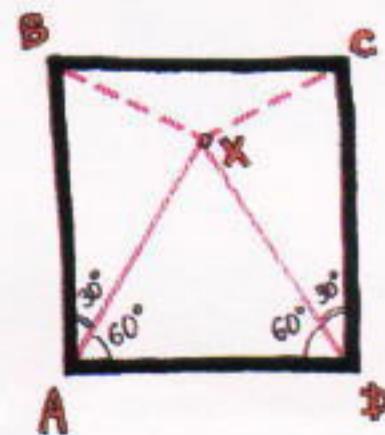
**Πρόβλημα 1.** Δίνεται ένα σημείο *O* στο εσωτερικό ενός τετραγώνου *ABCD*. Οι γωνίες *OCB* και *OBC* είναι και οι δύο  $15^\circ$ . Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο *OAD* είναι ισόπλευρο.

**Γουάτσον** (απλώνοντας απελπισμένος τα χέρια του). Η δυοκολία



αυτού του προβλήματος μου θυμίζει την υπόθεση της απαγωγής του σάχη. Τη θυμάσαι, Χολμς;

**Χολμς.** Μα τι είναι αυτά που λες, αγαπητέ μου φίλε; Θα σου δώσω αμέσως τη λύση. Σε αυτή την περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή «άρχισε απ' το τέλος». Πιστεύω ότι θα καταλάβεις από τη λύση ποια ακριβώς είναι αυτή η αρχή. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο *X* τέτοιο ώστε το τρίγωνο *XAD* να είναι ισόπλευρο.



**Γουάτσον.** Μα υπάρχουν δύο τέτοια σημεία.

**Χολμς.** Φυσικά. Εμείς όμως θα διαλέξουμε εκείνο που βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο. Και τώρα θα

βρούμε τις γωνίες *XBC* και *XCB*. Εσύ, Γουάτσον, που είσαι καλός στη γεωμετρία, μπορείς να με βοηθήσεις. Λοιπόν, βρήκες πόσες μοίρες είναι αυτές οι γωνίες;

**Γουάτσον.** Μια στιγμή... Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τρίγωνα *BAX* και *CDX* είναι ισοσκελή. Α! Οι γωνίες είναι  $15^\circ$ . Χμμ! Και τι κάνουμε τώρα;

**Χολμς.** Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία *O* και *X* συμπίπτουν. Στοιχειώδες, αγαπητέ μου Γουάτσον.

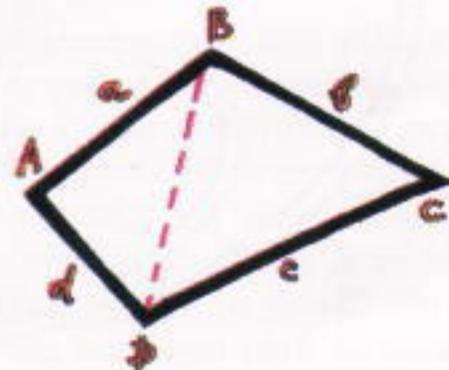
**Γουάτσον.** Θαυμάσια! Άλλα... αυτή η παράξενη αρχή σου δεν θα μας βοηθήσει με το δεύτερο πρόβλημα.

**Χολμς.** Τότε θα χρησιμοποιήσουμε κάποια άλλη αρχή. Γιά να δούμε, λοιπόν.

**Πρόβλημα 2.** Οι πλευρές ενός κυρτού τετραπλεύρου *ABCD* είναι *a*, *b*, *c* και *d*. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του *ABCD* είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\frac{1}{4}(a+b)(c+d).$$

Ναι, αυτό το πρόβλημα ανήκει σε εντελώς διαφορετική κατηγορία... Ανισότητα. Ξέρεις, Γουάτσον, μου θυμίζει το γρίφο του καθηγητή Μοριάρτη.





**Γουάτσον** (αφηρημένα). Μμμ, δύσκολη υπόθεση... Πρέπει να παραδεχτούμε, πάντως, ότι ο καθηγητής Μοριάρτι ήταν λαμπρός μαθηματικός. Άλλα ας επανέλθουμε στο πρόβλημά μας, Χολμς.

**Χολμς.** Το έλυσα ήδη, αγαπητέ μου Γουάτσον. Πρώτα διώχνουμε τις παρενθέσεις:

$$\frac{1}{4}(a+b)(c+d) =$$

$$\frac{1}{4}(ad+bc)+\frac{1}{4}(ac+bd).$$

Μην ξεχνάς ποτέ την αρχή «της απλής λύσης», Γουάτσον: να δοκιμάζεις πρώτα τις πιο απλές και φυσικές λύσεις για ένα πρόβλημα.

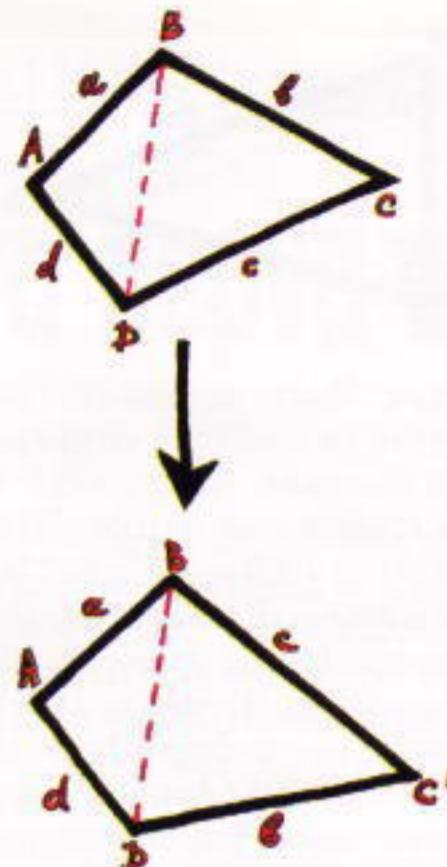
**Γουάτσον.** Χμμ... Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το άθροισμα  $ad + bc$  είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο του εμβαδού του τετραπλεύρου: το  $ad$  είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου  $ABD$ , και το  $bc$  είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου  $BCD$ . Τελειώσαμε μ' αυτό. Τι θα κάνουμε όμως με το άθροισμα  $ac + bd$ ;

**Χολμς.** Εδώ θα μας βοηθήσει η αρχή «της αναλογίας». Το μόνο που πρέπει να κάνουμε, αγαπητέ μου φίλε, είναι να σκεφτούμε με συνέπεια και λογική. Αυτό είναι απαραίτητο όχι μόνο στην εγκληματολογία αλλά και στα μαθηματικά. Σε τι οφείλεται η επιτυχία σου στην αξιολόγηση του πρώτου αθροίσματος; Σε βοήθησε το γεγονός ότι οι πλευρές  $a$  και  $d$  είναι προσκείμενες, όπως είναι και οι πλευρές  $b$  και  $c$ . Σωστά; Επομένως, πρέπει να προσπαθήσεις να κάνεις προσκείμενες και τις πλευρές  $a$  και  $c$ .

**Γουάτσον.** Και τι θα γίνει με τις  $b$  και  $d$ ;

**Χολμς.** Γιά σκέψου, Γουάτσον: αν η  $a$  βρεθεί δίπλα στη  $c$ , τότε φυσικά και η  $b$  θα βρεθεί δίπλα στην  $d$ . Να αποφεύγεις πάντοτε τις περιττές συνθήκες! Ας επανέλθουμε στο πρόβλημά μας: τι θα κάνουμε με το τετραπλεύρο ώστε το εμβαδόν του να παραμείνει το ίδιο, και ταυτόχρονα η πλευρά  $a$  να βρεθεί δίπλα στη  $c$ ;... Τι συμβαίνει, φίλε μου;... Δεν έχεις μαζί σου το νυστέρι σου;

**Γουάτσον** (κοιτάζοντας τον χωρίς να καταλαβαίνει). Οχι, δεν το έχω. Άλλα γιατί χρειάζεσαι το...;



(Κοιτάζει το διάγραμμα και ξαφνικά καταλαβαίνει.) Ιδιοφυές! Απλούστατα, πρέπει να κόψουμε το τετράπλευρο  $ABCD$  κατά τη διαγώνιο  $BD$  και... και να γυρίσουμε «ανάποδα» το ένα κομμάτι του. Τότε, αν επαναλάβουμε τους προηγούμενους συλλογισμούς, θα δούμε ότι το άθροισμα  $ac + bd$  είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο εμβαδόν του τετραπλεύρου. Αν συνδυάσουμε αυτή την ανισότητα με την προηγούμενη, θα αποδείξουμε το ζητούμενο. Υπέροχα!

**Χολμς.** Πρόσεξε ότι χρησιμοποιήσαμε και τη «δυναμική αρχή», όταν αλλάξαμε τα δεδομένα για να λύσουμε το πρόβλημα. Πρόκειται για μια πολύ σημαντική αρχή που λέει: άλλαξε οτιδήποτε θέλεις ν' αλλάξεις σε ένα πρόβλημα (τη διατύπωσή του, τα δεδομένα, ακόμη και τις προτάσεις που πρέπει να αποδείξεις), αρκεί η λύση στο νέο πρόβλημα να σου δίνει λύση για το παλιό. Ειδικά αυτό σημαίνει ότι δεν πρέπει να βλέπουμε τα δεδομένα ενός προβλήματος σαν κάτι το πάγιο και αμετάβλητο. Για παράδειγμα, αν θέλεις να συλλάβεις έναν εγκληματία, δεν πρέπει να ξεχνάς ότι είναι κι αυτός άνθρωπος και πως μπορεί να κινείται ελεύθερα στον «τόπο των ενεργειών» σου.

**Γουάτσον.** Δεν κατάλαβα τι ακριβώς εννοείς...

**Χολμς.** Ας δούμε το τρίτο πρόβλημα, Γουάτσον.

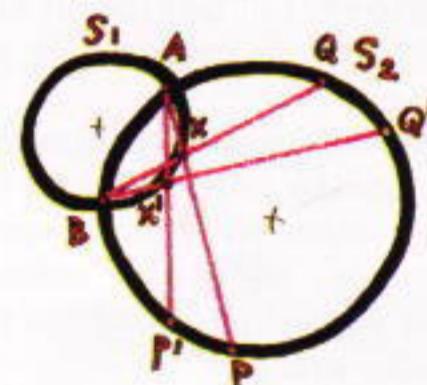
**Γουάτσον.** Σε εκλιπαρώ, Χολμς: θέλω να μου λες το κάθε βήμα στο

συλλογισμό σου και όχι μόνο τη λύση. (Σηκώνεται και πλησιάζει στην πολυθρόνα του Χολμς.)

**Χολμς.** Θα προσπαθήσω, φίλε μου, θα προσπαθήσω. Έχουμε λοιπόν...

Πρόβλημα 3. Δίνονται δύο κύκλοι  $S_1$  και  $S_2$  που τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $B$  υπό ορθές γωνίες. Το σημείο  $X$  βρίσκεται πάνω στον πρώτο κύκλο αλλά στο εσωτερικό του δεύτερου κύκλου. Οι ημιευθείες  $AX$  και  $BX$  τέμνουν τον κύκλο  $S_2$  στα σημεία  $P$  και  $Q$ . Να αποδειχθεί ότι το ευθύγραμμό τμήμα  $PQ$  αποτελεί διάμετρο του κύκλου  $S_2$ .

**Γουάτσον.** Πρώτα πρώτα, δεν έχω καταλάβει τη διατύπωση του προβλήματος. Τι σημαίνει ότι «οι κύκλοι τέμνονται υπό ορθές γωνίες»; Ακούγεται ανόητο.



**Χολμς.** Καθόλου, Γουάτσον. Απλώς σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων στα σημεία τομής είναι μεταξύ τους κάθετες. Και τώρα, ας δούμε πώς λειτουργεί εδώ η «δυναμική αρχή». Ας μετακινήσουμε το σημείο  $X$  πάνω στο τόξο  $AB$  του κύκλου  $S_1$ . Ας πούμε ότι γίνεται το σημείο  $X'$ , και ότι οι ημιευθείες  $AX'$  και  $BX'$  τέμνουν τον κύκλο  $S_2$  στα σημεία  $P'$  και  $Q'$ . Νά, κοίτα, θα σου κάνω το σχήμα εδώ.

Προφανώς, οι γωνίες  $X'AX$  και  $X'BX$  είναι ίσες. Γι' αυτό και τα τόξα  $PP'$  και  $QQ'$  είναι επίσης ίσα. Αυτό όμως σημαίνει ότι το τόξο  $P'Q'$  είναι ίσο με το τόξο  $PQ$ .

**Γουάτσον** (διακόπτοντας). Μα, Χολμς, πώς σου ήρθε να αποδείξεις αυτή την ισότητα;

**Χολμς.** Αγαπητέ μου φίλε, σκέψου το και μόνος σου: αν το ευθύγραμμό τμήμα  $PQ$  είναι διάμετρος για οποιαδήποτε θέση του σημείου  $X$  πάνω στο τόξο  $AB$ , τότε, όπως κι αν μετακινήσουμε το σημείο  $X$ , το μέτρο του τόξου  $PQ$  δεν θα μεταβληθεί. Αν αληθεύει αυτό που ζητά να αποδεί-

ξουμε το πρόβλημα, τότε προφανώς πρέπει να ισχύει και τούτο. Πρόκειται πάλι για την αρχή «άρχισε απ' το τέλος».

Και τώρα, Γουάτσον, ας μετακινήσουμε το σημείο  $X$  έτσι ώστε να συμπέσει με το σημείο  $B$ . Τι θα γίνει τότε; Σε αυτή την περίπτωση, το μέτρο του τόξου  $PQ$  θα είναι ακριβώς  $180^\circ$ .

**Γουάτσον.** Μα γιατί; Δεν καταλαβαίνω. Α, μάλιστα... Επειδή οι κύκλοι τέμνονται υπό ορθή γωνία. Παρεμπιπτόντως, Χολμς, εδώ έχουμε άλλη μια αρχή: μην ξεχνάς ότι πρέπει να χρησιμοποιήσεις όλα τα δεδομένα του προβλήματος! Πώς να την ονομάσουμε;

**Χολμς** (σχετικά αδιάφορος). Εγώ τη λέω αρχή «πληρότητας της λύσης».

**Γουάτσον.** Γιά φαντάσου! Εσύ, φίλε μου, έχεις μια αρχή σε κάθε ουσιότητα!

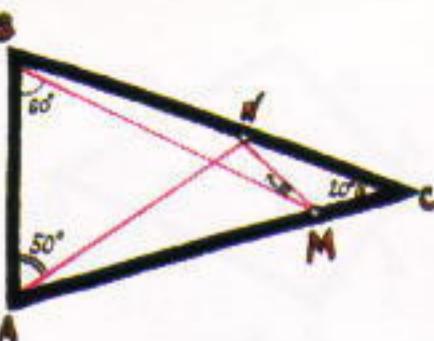
**Χολμς.** Οχι, αγαπητέ μου, τις έχω όλες στο μυαλό μου. Πρέπει να οου επισημάνω όμως ότι μερικές φορές η αρχή αυτή δεν ισχύει στην καθημερινή ζωή. Μπορεί με την πρώτη ματιά μερικά στοιχεία να φαίνονται ύποπτα ή και ενοχοποιητικά, αλλά στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι πρέκειται για συμπτώσεις ή για πλαστά στοιχεία που έχουν τοποθετηθεί σκόπιμα από τον πραγματικό ένοχο. Θυμάσαι την υπόθεση του μπρούντζινου στέμματος;... Τέλος πάντων, ας δούμε το τελευταίο πρόβλημα.

**Πρόβλημα 4.** Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$ , στο οποίο η γωνία της κορυφής  $C$  είναι  $20^\circ$ . Πάνω στις πλευρές  $AC$  και  $BC$  παίρνουμε τα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα, έτσι ώστε η γωνία  $NAB$  να είναι  $50^\circ$  και η γωνία  $MBA$  να είναι  $60^\circ$ . Να αποδειχθεί ότι η γωνία  $NMB$  είναι  $30^\circ$ .

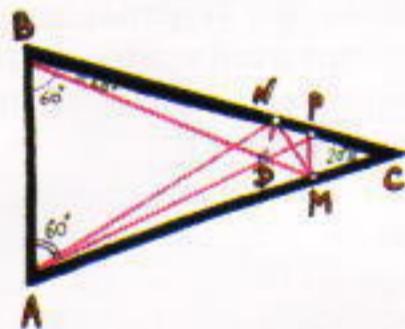
**Γουάτσον.** Προσπάθησα να υπολογίσω τη γωνία με τριγωνομετρία...

**Χολμς.** Αγαπητέ μου φίλε, δεν νομίζω πως χρειαζόμαστε την τριγωνομετρία γι' αυτό το πρόβλημα! Θα μπορούσες να διαβάσεις για λίγο την εφημερίδα σου μέχρι να σκεφτώ το πρόβλημα;

Στα επόμενα πέντε-έξι λεπτά, ο Γουάτσον διαβάζει την εφημερίδα ενώ ο Χολμς μελετά με προσοχή το σχήμα. Ακούγεται απαλή μουσική.



**Χολμς.** Μάλιστα. Λοιπόν, Γουάτσον, αυτό το πρόβλημα είναι πραγματικά δύσκολο. Ας πάρουμε ένα σημείο  $P$  πάνω στην πλευρά  $BC$  έτσι ώστε η γωνία  $PAB$  να είναι  $60^\circ$ . Προφανώς η ευθεία  $PM$  είναι παράλληλη προς την  $AB$ , και το τρίγωνο  $PDM$  είναι ισόπλευρο. (Ονομάζω  $D$  το σημείο τομής των ευθύγραμμων τμημάτων  $PA$  και  $BM$ .) Αφού το τρίγωνο  $BNA$  είναι ισοσκελές, τα ευθύγραμμα τμήματα  $BN$ ,  $BA$  και  $BD$  είναι ίσα μεταξύ τους και οι γωνίες  $BND$  και  $BDN$  είναι και οι δύο  $80^\circ$ . Από αυτό συμπεραίνουμε εύκολα ότι η γωνία  $NDP$  είναι  $40^\circ$ . Επομένως, το τρίγωνο  $NDP$  είναι ισοσκελές, οπότε η  $MN$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $BMP$ . Άρα, η γωνία  $NMB$  είναι το μισό της γωνίας  $DMP$ , δηλαδή είναι  $30^\circ$ . Αυτό ήταν, Γουάτσον.



**Γουάτσον** (κατάπληκτος). Μα... πώς είναι δυνατόν; Πώς σκέψιμες μια τόσο έξυπνη λύση;

**Χολμς.** Αγαπητέ μου Γουάτσον, θα μπορούσα βεβαίως να σου πω ότι βρήκα τη λύση εφαρμόζοντας δέκα διαφορετικές και ιδιοφυείς αρχές... Βλέπω μειδιά... Είναι αλήθεια ότι ορισμένες αρχές είναι πολύ χρήσιμες. Για παράδειγμα, θα σου αναφέρω τη σημαντική αρχή «του στόχου»: να θυμάσαι πάντα ποιος είναι ο στόχος, ο οκοπός σου, και τι σου χρειάζεται για να φτάσεις σ' αυτόν. Και, φυσικά, χρειάζονται πάντα και κάποια άλλα βήματα εδώ κι εκεί. Το ζήτημα όμως, φίλε μου, είναι ότι για να λύσεις ένα πρόβλημα δεν αρκούν μερικοί τυποποιημένοι κανόνες σκέψης. Χρειάζονται και κάποια άλλα πράγματα, όπως η πείρα και η διαισθηση.

Νομίζεις ότι είναι όλα τόσο απλά; Οτι πού έχουμε να κάνουμε είναι να απομνημονεύσουμε κάμποσες «αρχές» και να μάθουμε πώς να τις χρησιμοποιούμε τη μία μετά την άλλη; Ευτυχώς, η ανθρώπινη λογική έχει απειρων μεγαλύτερες δυνατότητες... Αν και δεν πρέπει, βεβαίως, να παραγγωρίσουμε το γεγονός ότι αυτές οι αρχές, που ουσιαστικά δεν είναι τίποτε άλλο από «κλισέ σκέψης», είναι πάντα χρήσιμες. Δεν πρέπει να αγνοούμε τίποτα το ορθολογικό, Γουάτσον!

**Γουάτσον** (ανακάθεται σχεδόν αποκαμωμένος στην πολυθρόνα του και ξαναπάμρεν την εφημερίδα). Μμμ... Άκου τι γράφει εδώ, Χολμς: «Χθες βράδυ, άγγωστοι κακοποιοί διέρρηξαν τα γραφεία της εφημερίδας *Daily Joke*, άνοιξαν το χρηματοκιβώτιο του εκδότη και έκλεψαν το βραβείο του ετήσιου διαγωνισμού γεωμετρίας, μια ταινία του Möbius μεγάλου μεγέθους, κατασκευασμένη εξ ολοκλήρου από χρυσό, η αξία της οποίας υπολογίζεται σε...» Και τα λοιπά, και τα λοιπά, τίποτα ενδιαφέρον... Α, μάλιστα... «Ο επιθεωρητής Ρόμπινσον δήλωσε ότι η αστυνομία δεν διαθέτει κανένα στοιχείο που θα μπορούσε να την οδηγήσει στην ανεύρεση των διαρρηκτών. Ο εκδότης της *Daily Joke* δήλωσε σιους δημοσιογράφους ότι η εφημερίδα, για να αυξήσει τον αριθμό των ουνδρομητών, θα ανακονώσει έναν νέο, ειδικό διαγωνισμό προβλημάτων σε επόμενο τεύχος...»

Αγαπητέ μου Χολμς, ύστερα από σα ακούσα σήμερα, πρέπει οπωδή ποτέ να πάσεις αυτούς τους κακοποιούς —είναι θέμα αρχής!

Με τις παραπάνω λέξεις τα φώτα χαμηλώνουν και ακούγονται οι τελευταίες νότες της ίδιας απαλής μελωδίας.

Δίνουμε παρακάτω τα προβλήματα του ειδικού διαγωνισμού της εφημερίδας. Πρέπει να έχετε υπόψη σας ότι κάθε πρόβλημα έχει το δικό του μικρό τέχνασμα, το οποίο θα το βρείτε πιο εύκολα αν χρησιμοποιήσετε τις αρχές που περιέγραψε ο μεγάλος ντετέκτιβ.

Η συνέχεια στη σελ. 65 ⇔

# Για να περνά η ώρα

Σ46

Ποιος κερδίζει; Η Winnie-the-Pooh και ο Rabbit πήραν μια σακούλα με 101 καραμέλες για να παιξουν ένα μαθηματικό παιχνίδι. Ο καθένας τους παίρνει με τη σειρά από 1 έως 10 καραμέλες από τη σακούλα. Όταν αδειάσει η σακούλα μετρούν τις καραμέλες τους: Η Winnie-the-Pooh κερδίζει όταν οι δύο αριθμοί είναι πρώτοι προς αλλήλους, διαφορετικά κερδίζει ο Rabbit. Ποιος από τους δύο έχει εξασφαλισμένη τη νίκη και με ποιον τρόπο, όταν παιζει πρώτη η Winnie; (K. Kohas)



Σ48

Πάνω ή κάτω; Πετάμε μια μπάλα του πνυκ πονγκ προς τα πάνω στον αέρα. Θα χρειαστεί περισσότερη ώρα για να ανέβει ή για να κατέβει; (A. Savin)



Σ50

Σκάκι μέχρι τελικής πτώσεως. Η Αμαλία και ο Νίκος έπαιξαν το ίδιο πλήθος αγώνων σε ένα σκακιοτικό τουρνουά, αρρώστησαν και εγκατέλειψαν. Όλοι οι άλλοι παίκτες έπαιξαν μεταξύ τους όπως προβλεπόταν από τους κανονισμούς. Το συνολικό πλήθος των παρτίδων που διεξήχθησαν ήταν 23. Ήγινε αγώνας μεταξύ της Αμαλίας και του Νίκου; (V. Bliznyekov, μαθητής Α' λυκείου)



Σ47

Μια μεγάλη εκτύπωση. Με έναν υπολογιστή τυπώσαμε δύο αριθμούς: τον  $2^{1995}$  και τον  $5^{1995}$ . Πόσα ψηφία τυπώθηκαν συνολικά; (V. Pushnya, μαθητής Α' λυκείου)



Σ49

Ο τετραγωνισμός του κύβου. Έχετε ένα κυβικό χαρτόκουτο χωρίς το καπάκι του (ο πυθμένας του και οι πλευρές του είναι τετράγωνα με μοναδιαίο εμβαδόν). Κόψτε το σε τρία μέρη που θα μπορείτε να τα συναρμολογήσετε ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο με εμβαδόν 5. (V. Proizvolov)





# Δρακόντειες καμπύλες

Μη φοβάστε, είναι τόσο ακίνδυνες όσο και όμορφες

Nikolay Vasilyev και Victor Gutenmacher

**H**ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ άρθρου γίνεται με αφορμή την 25η επέτειο της έκδοσης του *Kvant*, του ρωσόφωνου αδελφού περιοδικού του *Quantum*, που εορτάστηκε αυτόν το χρόνο. Ψάχναμε σε αρκετά από τα πρώτα τεύχη του *Kvant* και διαλέξαμε ειούτιο το άρθρο (πρωτοδημοσιεύτηκε στο δεύτερο τεύχος του, τον Φεβρουάριο του 1970) για αρκετούς λόγους. Πρώτον, αν και τα χρόνια που ακολούθησαν οι δρακόντειες κάμπύλες περιγράφηκαν και σχολιάστηκαν κατ' επανάληψη στη βιβλιογραφία, δεν έχασαν τίποτα από την ομορφιά τους, και μάλιστα απέκτησαν ακόμη μεγαλύτερη μαθηματική σπουδαιότητα λόγω της ανάπτυξης της θεωρίας των φράκταλ και άλλων μαθηματικών πεδίων. Επίσης, αυτό το άρθρο αποτελεί το πρώτο δείγμα της διεθνούς συνεργασίας στο *Kvant* μέσω της οποίας αναπτύχθηκε το *Quantum* που κρατάτε αυτή τη σιγμή στα χέρια σας: έχει βασιστεί στο άρθρο «Αναπαραστάσεις αριθμών και δρακόντειες καμπύλες» των καναδών μαθηματικών Chandler Davis και Donald Knuth, που είχε δημοσιευτεί τον ίδιο χρόνο στο *Journal of Recreational Mathematics* (τόμ. 3). (Δείτε επίσης τα άρθρα του Martin Gardner στα τεύχη Μαρτίου, Απριλίου και Ιουλίου του 1967 στο *Scientific American* και τις σχετικές αναφορές στο βιβλίο του *Mathematical Magic Show*.)

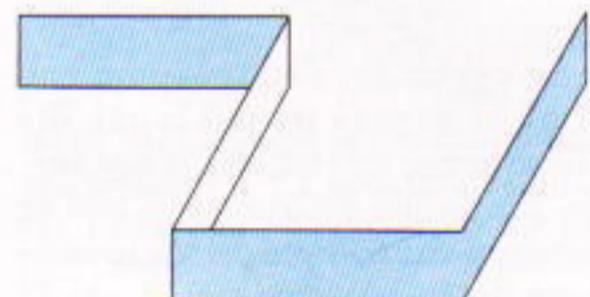
Αλλά η κυριότερη πιθανώς αιτία που οδηγήθηκαμε στην επλογή μας

ήταν ο τρόπος με τον οποίο έχουν επεξεργαστεί το αρχικό υλικό οι συγγραφείς —τρόπος που μας φαίνεται ως επιτομή του ύφους του *Kvant*, αφού έχει όλα τα γνωρίσματα που τον διαφοροποιούν από πολλούς άλλους τρόπους. Οι συγγραφείς παραλείπουν οριομένες ενδιαφέρουσες αποδείξεις που είναι υπερβολικά εξεζητημένες και περίπλοκες για ένα περιοδικό ευρείας κυκλοφορίας, αλλά εξακολουθούν να προσφέρουν άφθονα ερεθίσματα για σκέψη: ιδέες για αποδείξεις που πρέπει να ολοκληρωθούν, υποδείξεις για λεπτομερή επεξεργασία και ένα πλήθος όμορφων προβλημάτων (μπορούμε να προσθέσουμε ένα επιπλέον: προσπαθήστε να αναπαραγάγετε τα δρακόντεια σχέδια χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή σας, όπως κάναμε και εμείς προετοιμάζοντας τα σχήματα του άρθρου).

Ανακαλύψτε, λοιπόν, και απολαύστε τη μαγευτική ομορφιά των μαθηματικών δράκων!

## Τι είναι η δρακόντεια καμπύλη;

Πάρτε μια μακριά χάρτινη ταινία, διπλώστε τη στη μέση μια φορά και διπλώστε την και πάλι στη μέση. Στηρίξτε τη διπλωμένη ταινία όρθια στη μια πλευρά της και ξεδιπλώστε τη σχηματίζοντας ορθές γωνίες σε κάθε τοάκιομά της (Σχήμα 1). Αν την κοιτάξετε από πάνω, θα δείτε κάτι όπως τα διαγράμματα στα Σχήματα

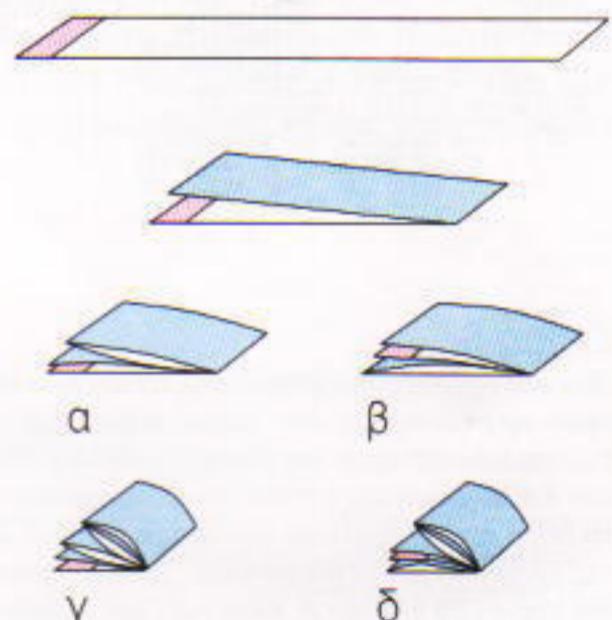


Σχήμα 1

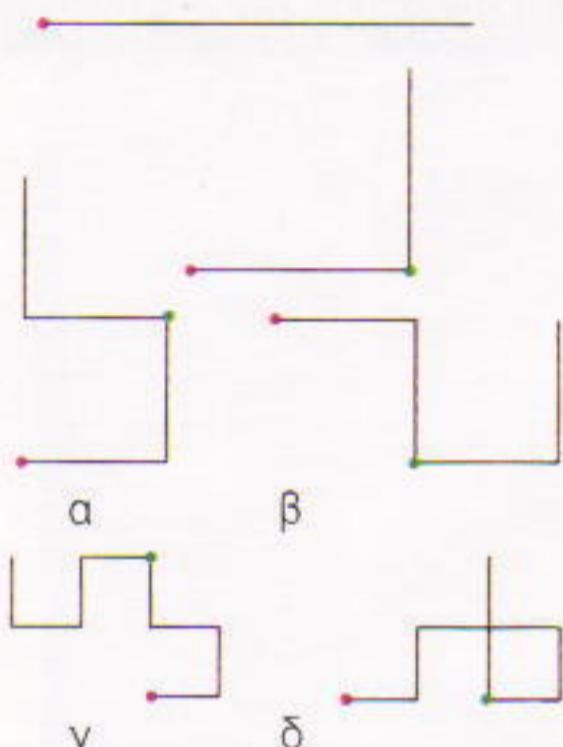
3α και 3β (που αντιστοιχούν στα διπλώματα των Σχημάτων 2α και 2β).

Επειτα από τρία διπλώματα μπορούμε να πάρουμε τελείως διαφορετικά διαγράμματα (Σχήμα 3γ, 3δ), ανάλογα με τον τρόπο που διπλώνουμε την ταινία. Στο Σχήμα 4 βλέπουμε ένα από τα διαγράμματα που προκύπτουν αν διπλώσουμε την ταινία πέντε φορές.

Είναι πρακτικά αδύνατο να διπλώσουμε την ταινία περισσότερες από επτά φορές —μετά το όγδοο διπλωμα θα υπάρχουν ήδη  $2^8 = 256$

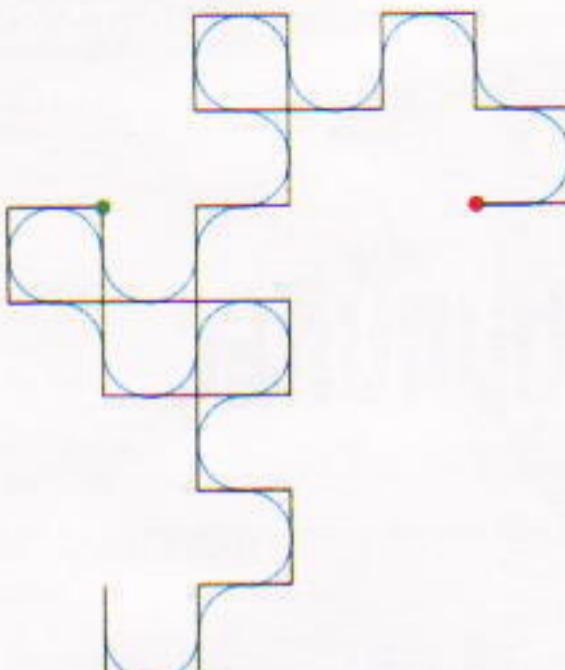


Σχήμα 2



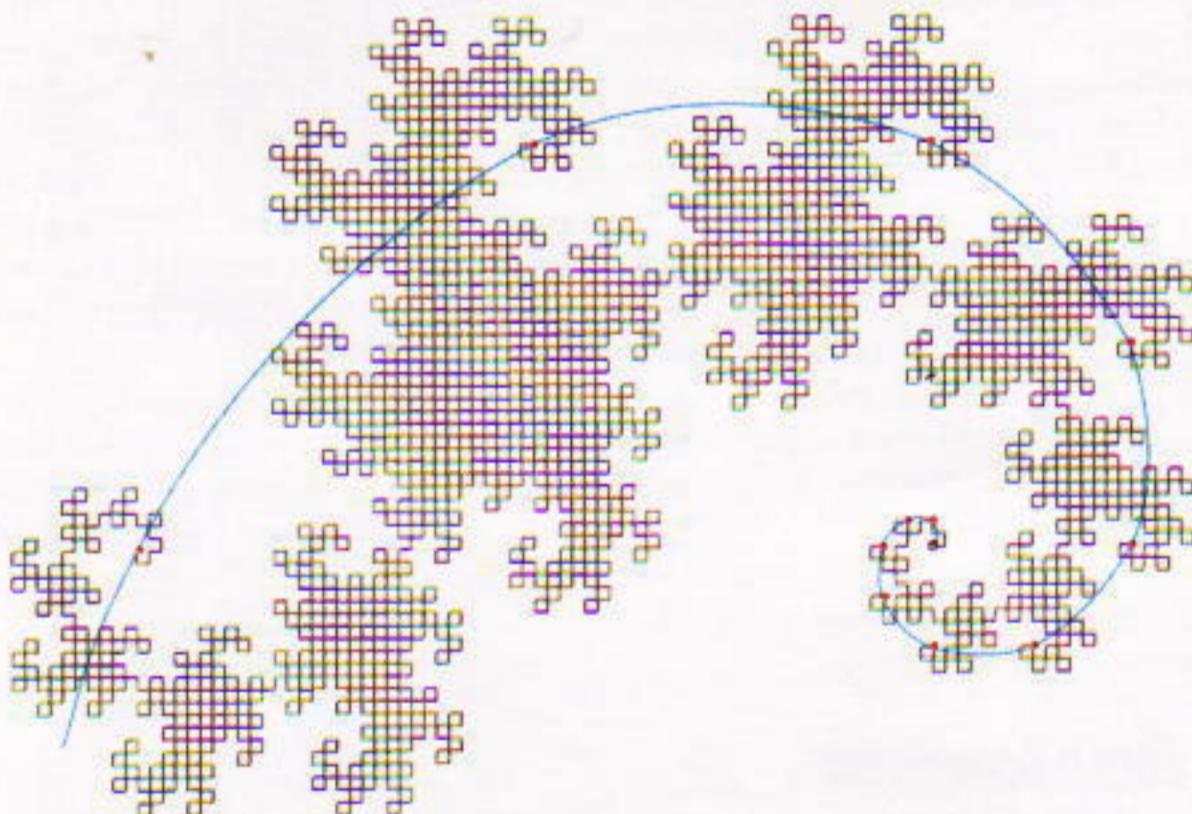
Σχήμα 3

στρώματα! Σύντομα όμως θα μάθουμε να σχεδιάζουμε διαγράμματα που θα αντιστοιχούν σε πολλαπλά διπλώματα της ταινίας, χωρίς την ταινία. Στο Σχήμα 5 βλέπετε ένα από τα διαγράμματα που μπορεί να προκύψουν αν διπλώσουμε την ταινία 12 φορές. Αποτελείται από  $2^{12} = 4.096$  τμήματα.



Σχήμα 4

Αν τοακίσουμε την ταινία περισσότερες από τρεις φορές, τότε ξετυλίγοντάς την, μερικές από τις γωνίες της θα εφάπτονται αναγκαστικά μεταξύ τους (Σχήμα 3δ και Σχήμα 4). Εξαιτίας των πολυπληθών επαφών αυτού του είδους, τα μεγάλα διαγράμματα έχουν περιοχές που μοιάζουν με πλέγμα παρά με μια επιμήκη ορθογώνια στρεφόμενη διαδρομή.



Σχήμα 5

Μια πολυγωνική διαδρομή όπως αυτή (που ονομάζεται κύριο δρακόντειο σχέδιο) προκύπτει όταν, αφιζόντας με ένα τμήμα, περιστρέφουμε πάντα το μέρος του σχεδίου που έχει ήδη κατασκευαστεί προς την ίδια κατεύθυνση (εδώ δεξιότροφα). Αυτό αντιστοιχεί με τη μέθοδο του διπλώματος της ταινίας στα δύο, που παρουσιάζεται στα Σχήματα 2α και 2γ: πάντα «από τα δεξιά προς τ' αριστερά και προς τα πάνω». Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται η αρχή του σχεδίου (32 τμήματα) εδώ έχουμε 4.096. Αν συνεχίσουμε την κατασκευή, η διαδρομή θα καμπύλωθει γύρω από την αρχή, κάνοντας μια πλήρη περιστροφή έπειτα από 8 «διπλασιασμούς». Τα κόκκινα σημεία αντηκουν σε μια λογαριθμική σπειροειδή καμπύλη (δείτε το Καλειδοσκόπιο στο τεύχος Μαΐου / Ιουνίου 1995 του Quantum).

Για να γίνει ορατή αυτή η διαδρομή, μπορούμε να οτρογγυλέψουμε τις γωνίες της (όπως στην μπλε καμπύλη του Σχήματος 4). Η εικόνα στη σελίδα 10 παρουσιάζει καμπύλες που έχουν παραχθεί με αυτόν τον τρόπο.

Μια τέτοια ακριβώς εικόνα ενέπνευσε στον αμερικανό φυσικό John E. Heighway την ονομασία «δρακόντειες καμπύλες». Οποιοδήποτε έχει δει ένα δράκο μπορεί να επιβεβαιώσει ότι αυτά τα πλάσματα έχουν αυτήν ακριβώς τη μορφή. Τα αποτελούμενα από ευθύγραμμα τμήματα διαγράμματα που παράγουν τις δρακόντειες καμπύλες ονομάζονται «δρακόντεια σχέδια».

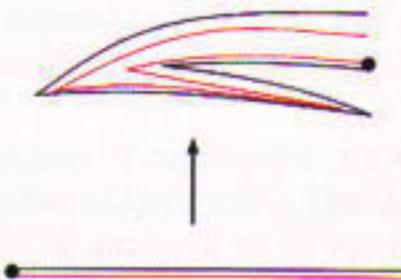
## Κατασκευάζοντας μεγάλα δρακόντεια σχέδια

Οταν ένα δρακόντειο σχέδιο δημιουργείται με το δίπλωμα μιας ταινίας χαρτιού  $n$  φορές, λέμε ότι είναι τάξης  $n$ . Ας ερευνήσουμε τη δομή των δρακόντειων σχεδίων και ας μάθουμε πώς να τα σχεδιάζουμε για αρκετά μεγάλες τιμές του  $n$ .

**Η πρώτη μέθοδος.** Ένα δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n$  αποτελείται από  $2^n$  τμήματα και επομένως  $2^n - 1$  καμπές. Αφού το πλήθος των καμπών είναι περιττό, το μέσον ενός δρακόντειου σχεδίου θα βρίσκεται σε μια από τις κορυφές του. Στα Σχήματα 3 και 4 τα μέσα είναι οημειωμένα με πράσινους κύκλους. Παρατηρήστε ότι διαιρούν τα αντιστοιχα σχέδια σε δύο ίσα τμήματα που προκύπτουν το ένα από το άλλο, μέσω περιστροφής  $90^\circ$ . Και αυτό αποδεικνύεται γενικός κανόνας.

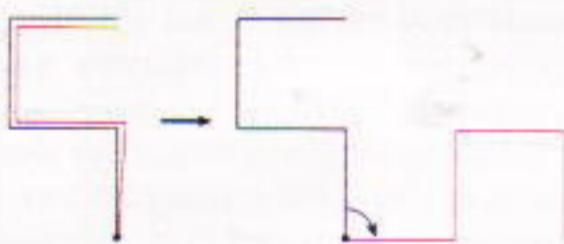
**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.** Αν προεκτείνουμε ένα δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n$  με άκρο Ο κατά το ίδιο σχέδιο περιστραμμένο  $90^\circ$  γύρω από το Ο, προκύπτει ένα δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n + 1$ . Αντιστροφα, οποιοδήποτε δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n + 1$  προκύπτει με αυτόν τον τρόπο από ένα σχέδιο τάξης  $n$ .

Αυτό γίνεται φανερό αν αναλύσουμε την κατασκευή μας. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να διπλώσουμε την ταινία  $n + 1$  φορές. Την τοακίζουμε μία φορά. Τα δύο μισά της συμπίπτουν, και στη συνέχεια θα διπλωθούν με τον ίδιο ακριβώς τρό-



Σχήμα 6

πο (Σχήμα 6). Ανοίγουμε τώρα τις τελευταίες  $n$  καμπές σε γωνίες  $90^\circ$ . Προκύπτουν έτσι δύο ταυτόσημα δρακόντεια σχέδια τάξης  $n$  κολλημένα μεταξύ τους (Σχήμα 7). Απομένει να τα απομακρύνουμε κατά  $90^\circ$  —θα πάρουμε ένα δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n + 1$ . Αυτές οι παρατηρήσεις μπορούν να μεταφραστούν σε μια αυτηρότερη απόδειξη και των δύο πράσεων, πράγμα που το αφήνουμε στον αναγνώστη.

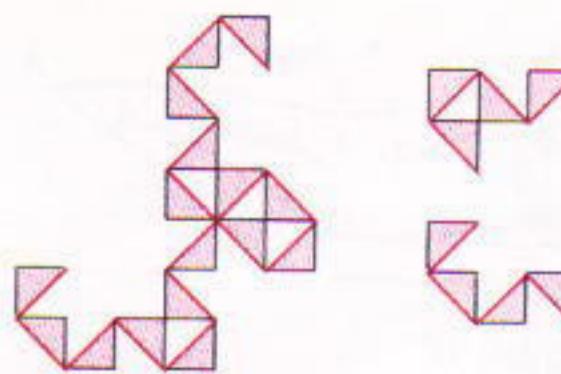


Σχήμα 7

Ας δούμε τώρα πώς θα κατασκευάσουμε δρακόντεια σχέδια χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα. Εφόσον αυτά αναπτύσσονται κατά μήκος των γραμμών ενός τετραγωνικού πλέγματος, θα διευκολυνθούμε αν χρησιμοποιήσουμε τετραγωνισμένο χαρτί.

Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε δρακόντειο σχέδιο —για παράδειγμα, ένα μόνο ευθύγραμμο τμήμα. Θα θεωρήσουμε ως αρχή του το ένα από τα άκρα του και ως τέλος του το άλλο. Το προεκτείνουμε κατά το ίδιο σχέδιο περιστραμμένο  $90^\circ$  γύρω από το τέλος του (επιλέγουμε όποια κατεύθυνση περιστροφής θέλουμε). Το νέο σχέδιο μπορεί να επεκταθεί πέρα από το τέλος του με τον ίδιο τρόπο. Η διαδικασία συνεχίζεται όσο θέλουμε και όσο είναι δυνατόν. Η κατασκευή μπορεί να γίνει αυτόμata και γρήγορα αν έχετε χαρτί iχνογραφίας ή, καλύτερα, ελαφρά διαφανές τετραγωνισμένο χαρτί.<sup>1</sup>

Φυσικά, οι δρακόντειες καμπύλες μπορεί να σχεδιαστούν με τον ίδιο



Σχήμα 8

ακριβώς τρόπο, με τη μόνη διαφορά ότι πρέπει να στρογγυλεύουμε τις μεσαίες καμπές.

Όλες οι δρακόντειες καμπύλες έχουν μια αξιοσημείωτη ιδιότητα: δεν τέμνουν ποτέ τον εαυτό τους. Ισοδύναμα, τα δρακόντεια σχέδια δεν διασχίζουν ποτέ το ίδιο τμήμα δύο φορές. Έτσι, παρότι ένα δρακόντειο σχέδιο μπορεί να διέρχεται δύο φορές από το ίδιο σημείο (από έναν κόμβο του πλέγματος), δεν περνάει ποτέ από το ίδιο σημείο περισσότερες από δύο φορές. Δεν είναι φανερό το πώς μπορούμε να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα βάσει του θεώρηματος 1 —αντίθετα, όσο περισσότερο επιμήκη και περιπλοκα σχέδια ή καμπύλες κατασκευάζετε τόσο εντυπωσιακότερος είναι ο τρόπος που ταιριάζουν μεταξύ τους τα καμπυλώματα και τα κυρτώματα. Αυτή η ιδιότητα αποδεικνύεται ευκολότερα αν χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο θεώρημα για το «διπλασιασμό» των δρακόντειων σχεδίων —το οποίο, παρεμπιπτόντως, μας προσφέρει μια διαφορετική μέθοδο κατασκευής «μεγάλων» σχεδίων.

**Η δεύτερη μέθοδος.** Στο Σχήμα 8 έχουμε συνδέσει εναλλασσόμενες κορυφές της μαύρης διαδρομής με κόκκινα ευθύγραμμα τμήματα. Βλέπουμε ότι τα κόκκινα τμήματα συνθέτουν ένα δρακόντειο σχέδιο. Αυτό αποδεικνύεται επίσης γενικός κανόνας.

Για να τον διατυπώσουμε με ακρίβεια, παρατηρούμε ότι κάθε κόκκινο τμήμα είναι υποτείνουσα ενός ιοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου οι κάθετες πλευρές του οποίου αποτελούν μέρος του αρχικού σχεδίου (τα τρίγωνα αυτά είναι σκιασμένα στο Σχήμα 8). Καθένα από αυτά τα τρίγωνα προκύπτει από περιστροφή των γειτονικών του τριγώνων κατά  $90^\circ$

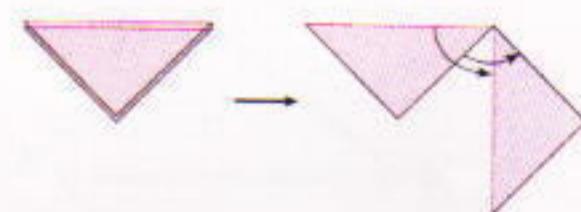


Σχήμα 9

γύρω από την κοινή τους κορυφή. Με άλλα λόγια, κινούμενοι κατά μήκος της κόκκινης διαδρομής θα συναντήσουμε αυτά τα τρίγωνα εναλλάξ δεξιά και αριστερά της διαδρομής.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.** Κατασκευάζουμε ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσες τα τμήματα ενός δρακόντειου σχεδίου τάξης  $n$ , έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε γειτονικά τρίγωνα να προκύπτουν το ένα από το άλλο με περιστροφή  $90^\circ$  γύρω από την κοινή τους κορυφή. Τότε οι κάθετες πλευρές όλων αυτών των τριγώνων αποτελούν ένα δρακόντειο σχέδιο  $n + 1$  τάξης. Αντίστροφα, κάθε δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n + 1$  προκύπτει με αυτόν τον τρόπο από ένα σχέδιο  $n$  τάξης.

Πράγματι, ας εξετάσουμε το τελευταίο δίπλωμα της ταινίας. Κοιτάξτε το Σχήμα 9. Θέλουμε να διπλώσουμε την ταινία  $n + 1$  φορές. Ας την τσακίσουμε πρώτα  $n$  φορές και ας την παρατηρήσουμε από την άκρη της (την κόκκινη γραμμή στο Σχήμα 9). Επειτα την τσακίζουμε άλλη μία φορά και ανοίγουμε το τελευταίο δίπλωμα κατά  $90^\circ$  (η μαύρη γραμμή στο Σχήμα 9).<sup>2</sup> Τώρα, μεταξύ των σημείων  $A$  και  $B$  η ταινία ακολουθεί τη διαδρομή κατά μήκος των κάθετων πλευρών του ιοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου  $ABC$  αντί της υποτείνουσας. Για να πάρουμε μια απλή καμπή ανοίγουμε κατά  $90^\circ$  τις καμπές στα σημεία  $A$  και  $B$  (Σχήμα 10). Τώρα οι κάθετες των ορθογώνιων τριγώνων συνθέτουν ένα δρακόντειο



Σχήμα 10

2. Η μαύρη μας γραμμή είναι  $\sqrt{2}$  φορές μεγαλύτερη από την κόκκινη, αλλά αυτό δεν περιαρέι, διότι μας ενδιαφέρει η μορφή της γραμμής και όχι το μεγεθός της.

1. Μια πιο σύγχρονη μέθοδος θα ήταν η χρήση υπολογιστή με γραφικά προγράμματα.

σχέδιο τάξης  $n + 1$  και οι υποτείνουσές τους ένα σχέδιο  $n$  τάξης.

Αυτές οι παρατηρήσεις μετατρέπονται αμέσως σε ακριβή απόδειξη και των δύο προτάσεων. Μπορείτε να δοκιμάσετε μια διαφορετική προσέγγιση και να συναγάγετε το Θεώρημα 2 από το Θεώρημα 1.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2 συμπεραίνουμε ότι από κάθε δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n$  προκύπτουν δύο σχέδια τάξης  $n + 1$ , επειδή μπορούμε να κατασκευάσουμε το τρίγωνο του πρώτου τμήματος προς οποιαδήποτε από τις πλευρές του.

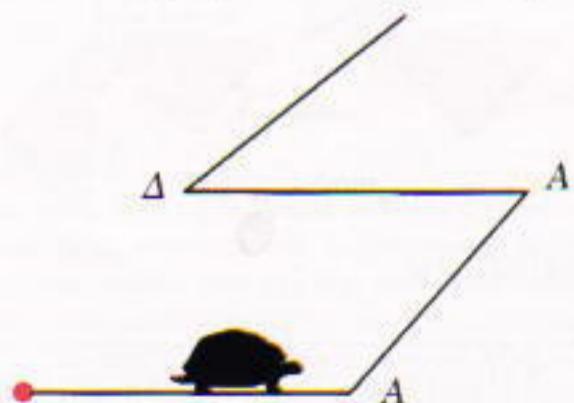
Παρατηρήστε πώς όταν μεταβαίνουμε στο δρακόντειο σχέδιο της επόμενης τάξης μέσω του Θεώρηματος 1, η συνολική διαδρομή διπλασιάζεται, ενώ το μήκος κάθε τμήματος παραμένει σταθερό. Όταν χρησιμοποιούμε για το «διπλασιασμό» το Θεώρημα 2, το μήκος της διαδρομής αυξάνεται κατά παράγοντα ίσο με  $\sqrt{2}$ , ενώ κάθε τμήμα μειώνεται κατά παράγοντα ίσο με  $1/\sqrt{2}$ .

Εξακριθείτε τώρα στην κατασκευή δρακόντειων σχεδίων χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.

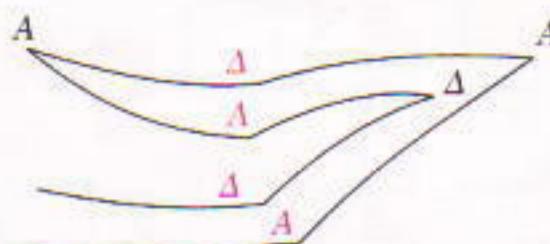
## Λέξεις

Η ιδιότητα που περιγράφαμε στο Θεώρημα 2 μπορεί να εξηγηθεί πολύ απλά αν παρατηρήσουμε τα δρακόντεια σχέδια (ή, αν προτιμάτε, τους τρόπους διπλώματος ενός χαρτιού) από μια κάπως διαφορετική άποψη.

Ας φανταστούμε μια χελώνα που περπατά κατά μήκος ενός δρακόντειου σχεδίου (Σχήμα 11). Κάθε φορά που φτάνει σε μια καμπή, είναι υποχρεωμένη να στρίψει  $90^\circ$  προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά. Από την οπτική γωνία της χελώνας, η διαδρομή της καθορίζεται από την ακολουθία των στροφών. Για παράδειγμα,



Σχήμα 11



Σχήμα 12

οτι οχέδιο του Σχήματος 3α (με αρχή το κόκκινο σημείο) αντιστοιχεί η ακολουθία αριστερά, αριστερά, δεξιά. Συμβολίζοντας τις στροφές με τα αρχικά τους, παίρνουμε τη «λέξη» ΑΑΔ που ορίζει τη συγκεκριμένη ακολουθία. (Σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και της λογικής, «λέξη» είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία γραμμάτων.) Επομένως, μπορούμε να καταγράψουμε συμβολικά οποιοδήποτε δρακόντειο σχέδιο χρησιμοποιώντας μια ακολουθία των γραμμάτων Α και Δ. Παρατηρήστε ότι ένα σχέδιο τάξης  $n$  (δηλαδή, ένα που δημιουργείται από  $n$  διπλώματα του χαρτιού) αντιστοιχεί σε λέξη με  $2^n - 1$  γράμματα.

Το Σχήμα 3γ προκύπτει από το Σχήμα 3β αν διπλώσουμε την ταινία μία ακόμη φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά (Σχήματα 3α, 3γ, και 12). Τότε όμως εμφανίζεται μια νέα καμπή σε κάθε τμήμα της ταινίας. Και μάλιστα, από το Σχήμα 12 γίνεται φανερό ότι οι νέες καμπές έχουν εναλλασσόμενες κατευθύνσεις. Επομένως έχουμε

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{A} \quad \text{Δ} \\ \text{A} \quad \text{Δ} \quad \text{A} \quad \text{Δ} \end{array} \rightarrow \text{ΑΑΔΑΑΔΔ}$$

δηλαδή τη λέξη που κωδικοποιεί το Σχήμα 3γ. Ένα ακόμη δίπλωμα προς τα αριστερά θα μας δώσει το σχέδιο που κωδικοποιείται από τη λέξη

$$\begin{array}{c} \text{ΑΑΔΑΑΔΔ} \\ \rightarrow \text{ΑΑΔΑΑΔΔΑΑΔΔΑΔΔ} \\ \text{ΑΔΑΔΑΔΔΔ} \end{array}$$

Κατασκευάστε αυτό το σχέδιο. Ονομάζεται κύριο δρακόντειο σχέδιο τάξης 4. Αν θέλετε, μπορείτε να στρογγυλέψετε τις καμπές του όπως προτείνει ο Heighway.

Αν επαναλάβετε αυτή τη διαδικασία με την τελευταία λέξη (αρχιζόντας την ακολουθία των εναλλασσόμενων γραμμάτων με το Α), θα πάρετε μια λέξη 31 γραμμάτων — τον

κωδικό του κύριου δρακόντειου σχέδιου τάξης 5 που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.

Φυσικά, μπορούμε ν' αρχίσουμε τις ακολουθίες των εναλλασσόμενων γραμμάτων με το Δ — έτσι, θα οδηγήθουμε απλώς σε άλλα σχέδια.

Δεν είναι δύοκολο να διαπιστώσουμε ότι αυτή η μέθοδος παραγωγής μιας «δρακόντειας λέξης» τάξης  $n + 1$  από μια λέξη τάξης  $n$  αντιστοιχεί ακριβώς στη δεύτερη μέθοδο διπλασισμού που περιγράφει το θεώρημα 2 (τα εμβόλιμα γράμματα αντιστοιχούν στα προστιθέμενα τρίγωνα). Γενικά, ολόκληρη η «θεωρία των δρακόντειων σχεδίων» μπορεί να αναπτυχθεί αλγεβρικά και όχι γεωμετρικά, αν χρησιμοποιηθούν πράξεις πάνω σε λέξεις που αποτελούνται από τα δύο γράμματα  $A$  και  $\Delta$  — τους κωδικούς των δρακόντειων σχεδίων — και όχι περιστροφές, κατασκευές τριγώνων, και τα παρόμοια.<sup>3</sup>

Μπορείτε να συνεχίσετε στην ίδια πορεία και να μάθετε ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες των «δρακόντειων λέξεων» και των δρακόντειων σχεδίων λύνοντας τις επόμενες ασκήσεις.

## Ασκήσεις

Ορισμένες από τις ασκήσεις που ακολουθούν είναι απλές, άλλες όμως συνεπάγονται σημαντικές έρευνες. Δίνουμε πλήρεις λύσεις σε μερικές, και μόνο υποδείξεις για τις άλλες.

1. Ας υποθέσουμε ότι έπειτα από 30 διπλώματα η απόσταση ανάμεσα σε δύο γειτονικά τσακίσματα της ταινίας μας έχει γίνει 1 cm. Ποιο ήταν το μήκος της ταινίας αρχικά; Ήταν μεγαλύτερο ή μικρότερο από την απόσταση Γης-Σελήνης;

2. Πώς θα μεταβληθεί το δρακόντειο σχέδιο αν στρίξουμε την ταινία στην άλλη της άκρη; Πώς αλλάζει η αντιστοιχη λέξη;

3. Δώστε ένα παράδειγμα λέξης αποτελούμενης από  $A$  και  $\Delta$  που δεν ορίζει δρακόντειο σχέδιο.

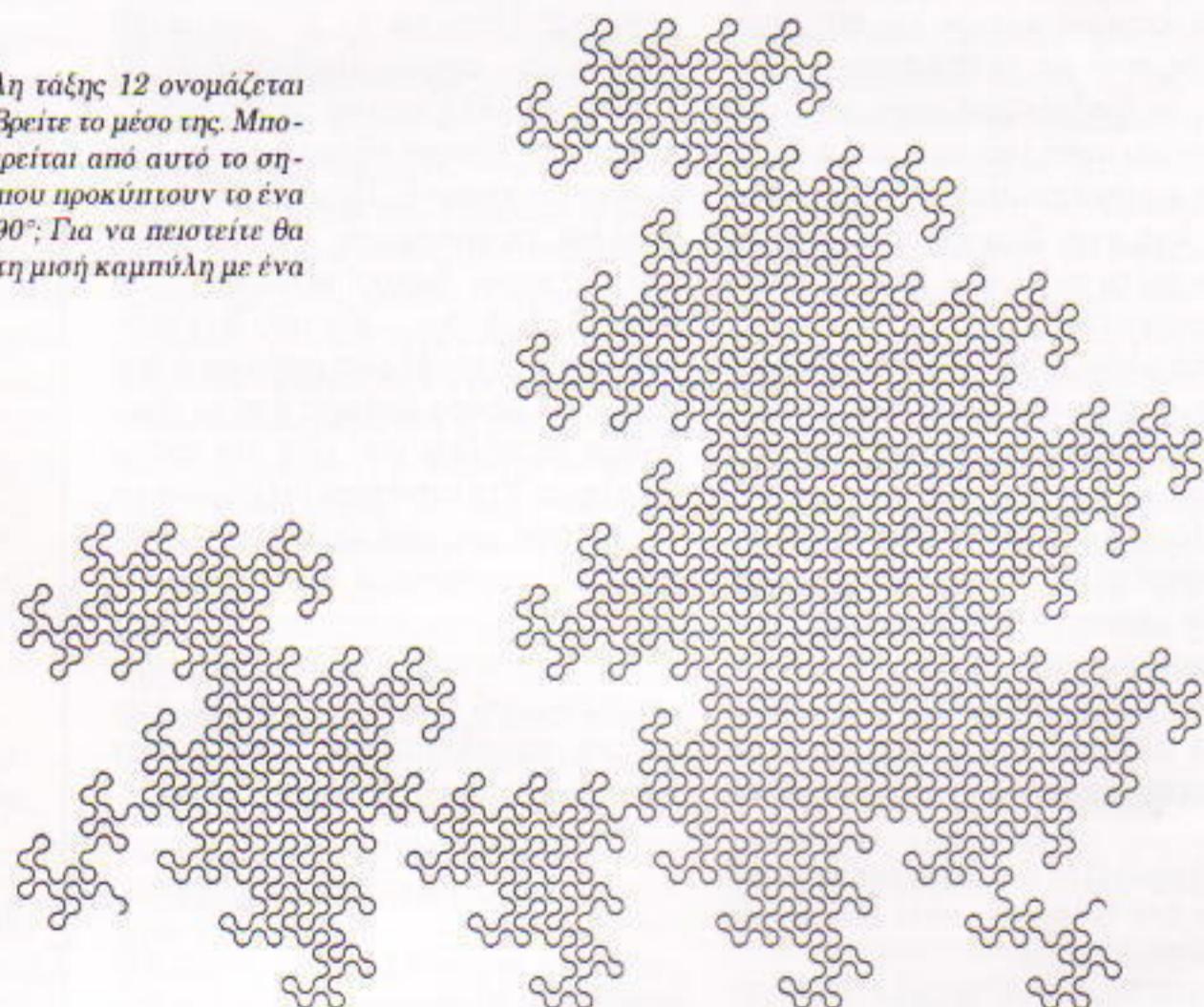
4. Ας υποθέσουμε ότι μια χελώνα περπάτησε κατά μήκος ενός δρακόντειου σχεδίου και ότι διάβασε μια λέξη αποτελούμενη από τα γράμματα  $A$  και  $\Delta$ . Ποια λέξη θα διαβάσει αν

3. Η αλγεβρική μέθοδος χρησιμοποιήθηκε από τους Davis και Knuth.



Αυτές οι καμπύλες προκύπτουν αν ξεκινήσουμε με ένα τρίγωνο, έπειτα από 12 «διπλασιασμούς». Οι περιστροφές είναι εναλλάξ δεξιόστροφές και αριστερόστροφές. Οι καμπές της μεγαλύτερης καμπύλης είναι πάντα  $90^\circ$ . Καλύπτει ένα ιοσοκελές ορθογώνιο τρίγωνο με ένα ομοιόμορφο σχέδιο. Η δεύτερη καμπύλη δημιουργείται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, με τη διαφορά ότι οι ορθές γωνίες περιστροφής έχουν αντικατασταθεί από γωνίες  $95^\circ$ . Αυτό έχει αποτέλεσμα να γίνει εντυπωσιακά ορατή η δομή της καμπύλης.

Αυτή η δρακόντειος καμπύλη τάξης 12 ονομάζεται «Μαμά, μπαμπάς και μωρό». Βρείτε το μέσο της. Μπορείτε να διανοηθείτε ότι διαιρείται από αυτό το σημείο σε δύο ταυτόσημα μισά που προκύπτουν το ένα από το άλλο με περιστροφή  $90^\circ$ ? Για να πειστείτε ότι πρέπει ίσως να χρωματίσετε τη μισή καμπύλη με ένα μολύβι.



κινηθεί κατά μήκος του ίδιου σχεδίου προς την αντίθετη κατεύθυνση; Αν η λέξη της αρχικής καμπύλης είναι  $w$ , ουμβολίζουμε τη νέα λέξη με  $\bar{w}$ . Π.χ.  $w = AA\Delta$ , τότε  $\bar{w} = A\Delta\Delta$ .

5. Οταν  $u$  και  $w$  είναι δρακόντεις λέξεις, θα συμβολίζουμε με  $wu$  τη λέξη που προκύπτει όταν γράψουμε τη  $u$  αμέσως μετά την  $w$ . (Για παράδειγμα, αν  $w = AA\Delta$  και  $u = \Delta A$ , τότε  $wu = AA\Delta\Delta A$ .) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για το  $\bar{w}$  που δώσαμε στο πρόβλημα 4, αποδείξτε ότι (α) για κάθε  $w$  και  $u$ ,  $\bar{wu} = \bar{u}\bar{w}$ . (β) Αν  $w_{n+1}$  είναι η λέξη που αντιστοιχεί σε ένα δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n + 1$ , τότε  $w_{n+1} = w_n x \bar{w}_n$ , όπου  $w_n$  είναι η κωδική λέξη για ένα συγκεκριμένο  $n$ -τάξιο δρακόντειο σχέδιο και  $x$  είναι μια λέξη ενός γράμματος. (γ) Αν  $w$  είναι η κωδική λέξη για ένα δρακόντειο σχέδιο, τότε η  $\bar{w}$  διαφέρει από την  $w$  μόνο στο μεσαίο γράμμα. (δ) Η κωδική λέξη για ένα δρακόντειο σχέδιο τάξης  $n$  καθορίζεται μονοσήμαντα από την ακολουθία των  $n$  γραμμάτων στις θέσεις  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$  αυτής της λέξης.

6. Τα θεωρήματα 1 και 2 μας επιτρέπουν να δημιουργήσουμε δύο δρακόντεια σχέδια τάξης  $n + 1$  από ένα σχέδιο τάξης  $n$ : με το θεώρημα 1 μπορούμε να διαλέξουμε το ένα από τα δύο άκρα ως κέντρο της  $90^\circ$  περιστροφής, ενώ με το θεώρημα 2 μπορούμε να διαλέξουμε προς ποια από τις δύο πλευρές του πρώτου τμήματος θα κατασκευάσουμε το τρίγωνο. Είναι και στις δύο περιπτώσεις τα σχέδια τάξης  $n + 1$  ίδια ή είναι, γενικά, διαφορετικά;

7. Εστω ότι η χελώνα μας ξεκινάει από το σημείο  $A$  κινούμενη με σταθερή ταχύτητα στην κατεύθυνση της  $AB$  και κάνοντας μια στροφή  $90^\circ$  κάθε  $15$  λεπτά. Αποδείξτε ότι μπορεί να επιστρέψει στο  $A$  μόνο έπειτα από πάροδο ακέραιου πλήθους ωρών και μόνο κινούμενη κάθετα προς την  $AB$ .

Οι επόμενες ασκήσεις είναι πραγματικά πλήρεις μελέτες και δίνονται στον αναγνώστη ως ανοικτά προβλήματα.

8. Αποδείξτε ότι ένα δρακόντειο σχέδιο δεν διέρχεται ποτέ δύο φορές από το ίδιο τμήμα.

9. Θεωρήστε ένα δρακόντειο σχέδιο και περιστρέψτε το γύρω από το

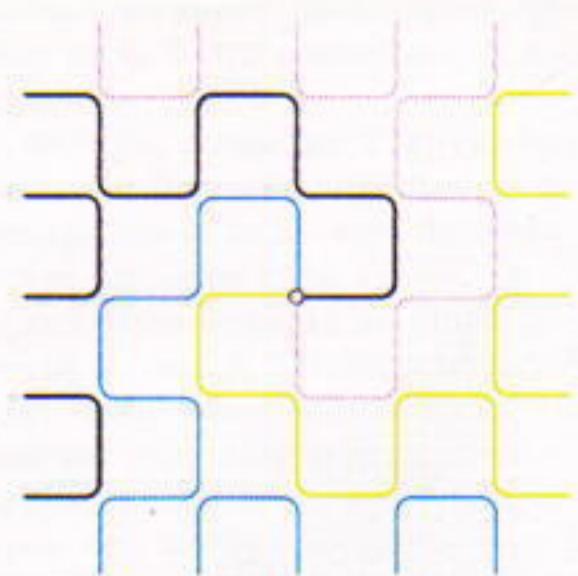
άκρο του Ο κατά  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  και  $270^\circ$ . Αποδειξτε ότι κανένα ζεύγος από τα τέσσερα σχέδια που προκύπτουν δεν έχει κοινά τμήματα.

10. Θεωρήστε το σύνολο όλων των πολυγωνικών διαδρομών που αποτελούνται από  $2^n$  ίσα τμήματα και έχουν την επόμενη ιδιότητα: όταν χωρίσουμε οποιαδήποτε από αυτές σε  $2^k$  μέρη, αποτελούμενα από  $2^{n-k}$  το καθένα, τότε οποιοδήποτε από αυτά τα τμήματα προκύπτει με περιστροφή του γειτονικού του κατά  $90^\circ$  γύρω από το κοινό τους άκρο για κάθε  $k$ ,  $2 \leq k \leq n$ . Αποδείξτε ότι αυτό το σύνολο συμπίπτει με το σύνολο των δρακόντειων σχεδίων τάξης  $n$ .

11. Ας κατασκευάσουμε το κύριο δρακόντειο σχέδιο σε ένα σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε οι πρώτες τρεις κορυφές να είναι τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ . Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1, μπορούμε να επεκτείνουμε αυτό το σχέδιο όσες φορές θέλουμε, παίρνοντας διαδοχικά σχέδια τάξης  $1, 2, 3, \dots$ . Φανταστείτε ότι τα σχεδιάζουμε όλα — δηλαδή, κατασκευάζουμε ένα άπειρο δρακόντειο σχέδιο (το κύριο δρακόντειο σχέδιο τάξεως  $\infty$ ). Τα πρώτα του  $2^n$  τμήματα σχηματίζουν το  $n$ -οστής τάξης σχέδιο. Αποδείξτε ότι: (α) το άκρο  $\tau_0$  του  $n$ -οστής τάξης σχεδίου έχει συντεταγμένες  $(2^{n-2} \sin(\pi\pi/4), 2^{n-2} \eta\mu(\pi\pi/4))$  (τα κόκκινα σημεία στο Σχήμα 5), (β) η κωδική λέξη αυτού του σχεδίου μπορεί να γραφεί εύκολα βάσει του επόμενου κανόνα. Πρώτα γράφουμε εναλλάξ τα γράμματα  $A$  και  $\Delta$  αφήνοντας κενά διαστήματα ανάμεσά τους:  $A \underline{\Delta} A \underline{\Delta} \dots$ . Έπειτα, δείχνουμε με ένα δάχτυλο του αριστερού μας χεριού το πρώτο γράμμα και το γράφουμε με το δεξιό μας χέρι στο πρώτο διάστημα. Στη συνέχεια δείχνουμε με το αριστερό μας χέρι το δεύτερο γράμμα και το γράφουμε με το δεξιό μας χέρι στο δεύτερο διάστημα, δείχνουμε με το αριστερό χέρι το τρίτο γράμμα, κ.ο.κ., για όλα τα γράμματα, χωρίς να παραλείπουμε δοσα έχουμε γράψει στα προηγούμενα βήματα:

АААААААААААААААААА

(γ) Αν δημιουργήσουμε όπως στο πρόβλημα 10 τέσσερα κύρια δρακόντεια σχέδια, τότε από κάθε τμήμα



### Σχήμα 13

ιου ακέραιου τετραγωνικού πλέγματος θα διέρχεται ακριβώς ένα από αυτά (Σχήμα 13). Αυτό το δύσκολο θεώρημα το απέδειξε για πρώτη φορά ο Donald Knuth. Η απόδειξη βασίζεται στην έξυπνη αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών  $n + mi$ , όπου  $n, m$  ακέραιοι, σε ένα ειδικό «σύστημα αριθμησης» του οποίου η βάση αποτελείται από τους αριθμούς  $1+i, 1-i, -1+i$ , και  $-1-i$ . Αυτό το σύστημα αριθμησης είναι από μια συγκεκριμένη άποψη παρόμοιο με το «ισορροπημένο τριαδικό σύστημα» που περιγράφαμε στο «Συστήματα αριθμησης» (άσκηση 11) στο προηγούμενο τεύχος του *Quantum*. █

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

**ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ  
ΤΕΥΧΗ**

*To Quantum* εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 10 τεύχη. Αυτά, για δύο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αυτίτοτά τους, μπορείτε να τα προμηθευθείτε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία του περιοδικού, ή με απικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή των τρέχοντος τεύχων. *To Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

ПЕРИОДИКО QUANTUM

Ισάρων 10 και Δαφτηράδη, 114 71 - Αθηνα  
Τηλ.: 3643272, 3645098. Fax: 3641864

# Γήινη και εξωγήινη νοημοσύνη

«Είναι χαρακτηριστικό του εκπαιδευμένου πνεύματος το ότι μένει ικανοποιημένο με το βαθμό ακρίβειας που επιτρέπει η φύση του ζητήματος, και δεν αναζητεί την απόλυτη ακρίβεια εκεί όπου είναι δυνατή μόνο η προσέγγιση της αλήθειας.» —Αριστοτέλης

John A. Adam



**M**ΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΗΝ ΕΧΟΥΜΕ ΤΗΝ ευρυμάθεια του Αριστοτέλη ή την ευφυΐα του Enrico Fermi, μπορούμε όμως να μάθουμε να χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις συλλογισμούς για να επιτύχουμε «προσεγγιστικά ορθές εκτιμήσεις» σε προβλήματα (τα οποία στη συνέχεια θα τα ονομάζουμε «προβλήματα Fermi») ακολουθώντας τη μέθοδο που αποδιδεται σ' αυτό τον μεγάλο φυσικό.

Πριν από αρκετά χρόνια δημοσιεύτηκε στο *Quantum* ένα σύντομο άρθρο του David Halliday (Μάιος 1990). Ο τίτλος του ήταν “Ballpark Estimates” (Προσεγγιστικά ορθές εκτιμήσεις). Εκεί ο Halliday, βασιζόμενος σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, έδειχνε πώς μπορούμε να βρού-

με απαντήσεις για την τάξη μεγέθους αναλύοντας τα διάφορα προβλήματα στα συστατικά τους μέρη και κάνοντας τις κατάλληλες εκτιμήσεις, στηριζόμενοι στον κοινό νου. Το πρόβλημα ζητούσε να εκτιμήσουμε το πλήθος των «μορίων ελαστικού» που χάνονται από το λάστιχο ενός αυτοκινήτου σε κάθε περιστροφή του τροχού. Θα εξετάσουμε μια μικρή παραλλαγή του στη συνέχεια, αυτό όμως που βρίσκω ιδιαίτερα απολαυστικό στο άρθρο του Halliday είναι ο διάλογος που αναπτύσσει με βάση τις ερωτήσεις ενός τυπικού αναγνώστη. Βεβαίως, για την ανάγνωση του σημερινού άρθρου δεν είναι προαπαιτούμενο το άρθρο του Halliday (αφού σας κατάφερα να διαβάσετε μέχρι εδώ, δεν σκοπεύω να σας αφήσω να το σγκαταλείψετε στη συνέχεια).

Φυσικά, οι ιδέες που διατυπώνονται και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σε τέτοια προβλήματα Fermi επεκτείνονται πολύ πέρα από τη φυσική και φτάνουν έως το πεδίο των καθημερινών δραστηριοτήτων (αν και δύοκολα θα χαρακτηρίζαμε καθημερινή δραστηριότητα το γέμισμα της Γης με άμμο). Ήταν απόλαυση το διάβασμα και η χρήση δύο εξαιρετικών πηγών πληροφοριών για το θέμα, του *Innumeracy* (Αναριθ-

μητισμός) του John Allen Paulos και του *Consider a Spherical Cow* (Θεωρήστε μια σφαιρική αγελάδα) του John Harte. Αν έχετε ήδη διαβάσει αυτά τα βιβλία θα αναγνωρίσετε μερικά από τα προβλήματα του άρθρου. Σε σύντομο διάστημα θα αποκτήσετε την άνεση να θέτετε και να δίνετε προσεγγιστικές απαντήσεις σε δικά σας προβλήματα Fermi. Το βιβλίο του Paulos θα είναι για πολλούς αποκαλυπτικό: ουγκεκριμένα, αναδεικνύει την ισχύ που έχει ο συνδυασμός των εύλογων υποθέσεων με τους απλούς υπολογισμούς. Το βιβλίο του Harte αποτελεί μια καλή εισαγωγή στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων (ειδικά για την επίλυση περιβαλλοντικών προβλημάτων) που χρησιμοποιεί λίγο ή και καθόλου απειροστικό λογισμό. Και αφού αναφερόμαστε σε ενδιαφέροντα βιβλία, το *The Universe Down to Earth*<sup>1</sup> του Neil de Grasse Tyson περιέχει μερικά κεφάλαια (το 1 και το 3) που σχετίζονται με το παρόν άρθρο.

Στη συνέχεια του άρθρου στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται γράμματα για την αναπά-

1. Ο αγγλικός τίτλος αποτελεί λογοπαίγνιο: το «Down to Earth» σημαίνει «μέχρι κάτω στη Γη» αλλά και μεταφορικά «με φυσικό και απλό ρόπο» (Σ. εποτ. συμβ.)



σταση τυπικών διαστάσεων ή άλλων ποσοτήτων. Αυτό θα σας επιτρέψει να κάνετε τις δικές σας εκτιμήσεις, αν και πρέπει να αντισταθείτε στον πειρασμό να αντικαταστήσετε απλώς τους αριθμούς στον τύπο χωρίς να παρακολουθήσετε τον προηγούμενο συλλογισμό. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα έχουμε διαφορές στα τυπικά μεγέθη των αντικειμένων (για παράδειγμα, των κόκκων της άμμου). Άλλα σχεδόν εξίσου βέβαιο είναι ότι όλοι θα επιλέξουν τις τυπικές διαστάσεις (για το συγκεκριμένο παράδειγμα) στην περιοχή των  $10^{-1}$  mm  $\leq d \leq 2$  mm, οπότε πιθανώς δεν θα υπάρχει σημαντική διαφορά στις διαφορές απαντήσεις για την τάξη μεγέθους. Πρέπει να γίνει κατανοητό πως όποτε εμφανίζονται πηλίκα διαστασιακών ποσοτήτων, μπορεί να είναι αναγκαία η μετατροπή των μονάδων, ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε όμοιες ποσότητες. Για λόγους πληρότητας δίνονται πραγματικές αριθμητικές εκτιμήσεις — μερικές από τις τιμές ισως σας εκπλήξουν.

Αναμφίβολα θα τεθεί το ερώτημα: και λοιπόν, τι σημασία έχει αν γνωρίζουμε πώς να εκτιμήσουμε το πλήθος των κόκκων της άμμου που θα γέμιζαν το παλάτι του Μπάκιγχαρ, της βασίλισσας της Αγγλίας; (Άλλα ας μη μας μπαίνουν ψύλλοι στ' αυτιά.) Εκτός από τον κίνδυνο φυλάκισης αν προσπαθήσουμε να επιβεβαιώσουμε πρακτικά μια τέτοια εκτίμηση, είναι ενθαρρυντικό να γνωρίζουμε ότι είναι δυνατός ένας εύκολος υπολογισμός για ένα πρόβλημα «του πραγματικού κόσμου» με βάση μια μικρή ποσότητα ευδιάκρι-

των πληροφοριών. Αυτό όχι μόνο μας εξοικονομεί σεβαστά χρηματικά ποσά και ώρες χρήσης υπολογιστών σε κάποιες περιπτώσεις, αλλά αυξάνει και την εκτίμησή μας για την ισχύ της αριθμητικής. Έχω δει έξυπνους, μορφωμένους ανθρώπους να μένουν έκθαμβοι όταν συνειδητοποιούν επιτέλους τη διαφορά μεταξύ των  $10^6$  s (11,5 μέρες) και των  $10^9$  s (32 χρόνια). Μερικές φορές χρειάζονται τα κατάλληλα κίνητρα για να κατανοήσουμε τους αριθμούς (ή τις έννοιες!).

Στα απλούστερα προβλήματα εκτίμησης συγκαταλέγονται όσα προκύπτουν από συγκρίσεις μηκών, εμβαδών και όγκων. Έτσι, αν  $D$  είναι η τυπική γραμμική διάσταση ενός δεδομένου αντικειμένου (για παράδειγμα, μιας αιθουσας διδασκαλίας) και  $d < D$  η τυπική διάσταση ενός μικρότερου αντικειμένου (για παράδειγμα, ενός σπόρου ποπκορν), τότε  $N = D^3/d^3$  είναι κατά προσέγγιση το πλήθος των μικρότερων αντικειμένων που μπορούν να γεμίσουν το μεγαλύτερο. Έτοιμοι, επιλέγοντας κατάλληλα τα  $D$  και  $d$  μπορούμε να καταλήξουμε σε εκτιμήσεις για τα επόμενα ερωτήματα.

1. Πόσες μπάλες του γκολφ χρειάζονται για να γεμίσουμε μια βαλίτσα;

2. Πόσους σπόρους ποπ κορν χρειάζομαστε για να γεμίσουμε ένα δωμάτιο;

3. Πόσες μπάλες ποδοσφαίρου χρειάζομαστε για να γεμίσουμε ένα σπίτι συνηθισμένου μεγέθους;

4. Πόσα κύτταρα περιέχει το ανθρώπινο σώμα;

5. Πόσοι κόκκοι άμμου χρειάζονται για να γεμίσουμε τη Γη;<sup>2</sup>

Σχετικά είναι τα προβλήματα που αφορούν μέτρηση όγκου υγρών:

6. Ποιος είναι ο όγκος του ανθρώπινου αίματος σε όλον τον κόσμο;

7. Πόσα δοχεία του ενός λίτρου απαιτούνται για να αδειάσουμε τη λίμνη του Λοχ Νες (και να αποκαλύψουμε έτσι το τέρας);

Μερικές φορές, αντικείμενα της καθημερινής μας ζωής αναπαριστάνονται φυσιολογικά ως κύβοι (μερι-

2. Ένα τέτοιο πρόβλημα είχε εξετάσει ο Δρ. Χιμιστής στο έργο του «Ψαμμίτης», το οποίο μας παρέχει και ενδιαφέρουσες ιστορικές πληροφορίες. (Σ. εποπ. ουμβ.)

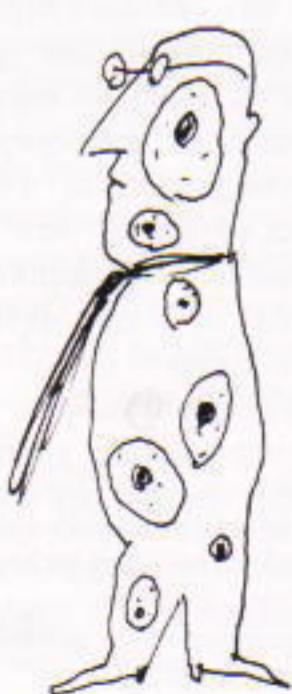
κές φορές όχι και τόσο φυσιολογικά). Έτσι, όταν ζητάμε το πλήθος των αντικειμένων με τυπική γραμμική διάσταση  $d$  που απαιτούνται για να γεμίσει ένας χώρος με τυπικές γραμμικές διαστάσεις  $a, b, c$ , τότε ο κατάλληλος τύπος είναι  $N = abc/d^3$ . Αρα στο Πρόβλημα 1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $a = 50$  cm,  $b = 60$  cm,  $c = 20$  cm και  $d = 4$  cm, αντίστοιχα, και επομένως  $N \approx 10^3$ . Στο Πρόβλημα 2 υποθέτουμε ότι  $a = 3$  m,  $b = 5$  m,  $c = 7$  m (μέγεθος οχολικής αιθουσας) και  $d = 1$  cm. Τότε  $N = 105 \cdot 10^6 \approx 10^8$ . Για το Πρόβλημα 3 παίρνουμε  $D = 9$  m και  $d = 30$  cm, οπότε προκύπτει  $N \approx 10^4$ . Στο Πρόβλημα 4 η απάντηση είναι  $10^{14}$ , ενώ στο πρόβλημα 6 η τιμή είναι μικρότερη από  $1/50$  km<sup>3</sup> (θα εξετάσουμε και τα δύο αυτά προβλήματα στη συνέχεια). Στο πρόβλημα 5, οι τιμές  $D \approx 10^4$  km και  $d = 1$  mm μας δίνουν  $N = (10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10)^3 = 10^{30}$ . Μια κυβική Γη, θα αναρωτηθείτε. Μην ανησυχείτε, αυτό το σημείο θα το ξεπεράσουμε χωρίς πρόβλημα (δείτε το σχόλιο στο πρόβλημα 14 παρακάτω). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι 1 m<sup>3</sup> υγρού (νερό, σούπα, αίμα, κ.λπ.) ιοδυναμεί με  $10^3$  lt, καταλήγουμε ότι χρειάζονται  $N \approx 10^{12}$  κουβάδες για να αδειάσουμε τη λίμνη Λοχ Νες, που έχει όγκο περίπου 6 km<sup>3</sup> (Πρόβλημα 7). Και αφού συζητάμε για λίτρα, ιδού το Πρόβλημα 8.

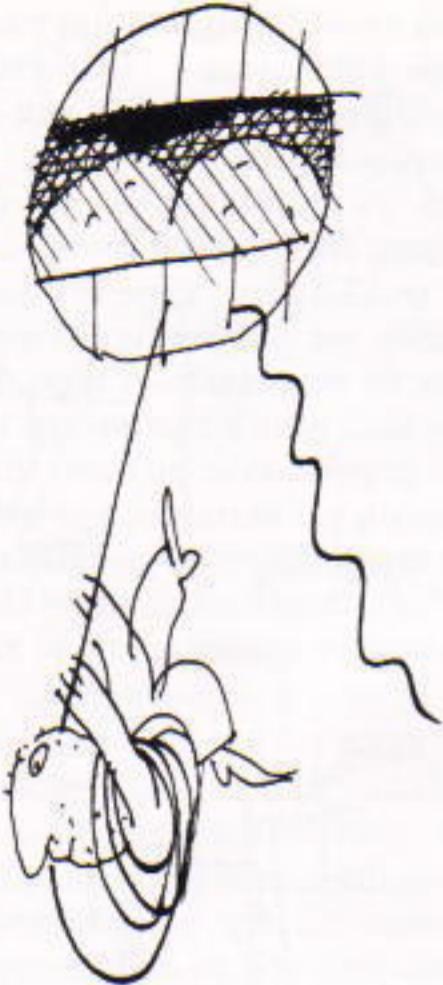
8. Χρησιμοποιούμε ένα λίτρο μπογιάς για να βάψουμε κάποιο κτίριο εμβαδού  $A$ . Τι πάχος έχει το στρώμα της μπογιάς;

Είναι φανερό πως όλαν μετράμε το  $A$  σε τετραγωνικά μέτρα, τότε το πάχος  $d = A/10$  cm. Για το «κυβικό οπίτι» του προβλήματος 3 (που τώρα, όπως θα θυμάστε, είναι γεμάτο μπάλες ποδοσφαίρου),  $A = 6 \cdot 9^2 \approx 5 \cdot 10^2$  m<sup>2</sup>, έτσι  $d = 2 \cdot 10^{-4}$  cm.

Όπως είναι αναμενόμενο, ερωτήσεις πολυπλοκότερης φύσης απαιτούν για τις εκτιμήσεις μας τύπους με περισσότερους όρους. Έτοιμοι έχουμε τα επόμενα προβλήματα.

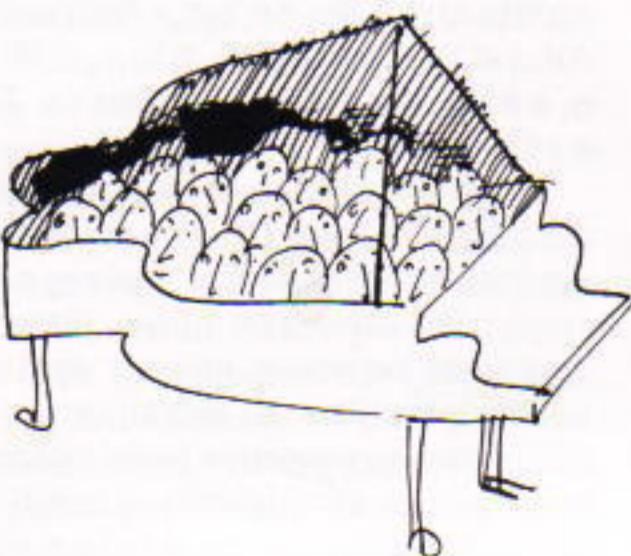
9. Πόσο οδοντικό νήμα χρειάζεται ένας κατάδικος για να δραπετεύσει από τη φυλακή; Σε πρόσφατο άρθρο κάποιας εφημερίδας παρουσιάστηκε η ιστορία ενός φυλακισμένου σε σωφρονιστικό ίδρυμα της Δυτικής Βιρτζίνια που δραπέτευσε ανεβαίνοντας





οτον εξωτερικό τοίχο της φυλακής με ένα σχοινί που το κατασκεύασε από οδοντικό νήμα. Εκτιμούμε ότι το σχοινί είχε το πάχος του καλωδίου του τηλεφώνου, ενώ ο τοίχος της φυλακής είχε ύψος 5,5 m. Αν θεωρήσουμε ότι η διάμετρος του τηλεφωνικού καλωδίου είναι 4 mm και του οδοντικού νήματος 1/2 mm, τότε το πλήθος των κλωστών οδοντικού νήματος που περιέχονται στην εγκάρσια τομή του καλωδίου είναι  $(4 + 1/2)^2 \approx 60$ , και αν κάθε κουτί περιέχει, όπως συνήθως, 50 m νήματος, τότε το πλήθος των απαιτούμενων κουτιών είναι  $N \approx (6 \cdot 60) / 50 \approx 7$ .

**10. Δώστε μια εκτίμηση του πλήθους των ανθρώπων που κουρδίζουν πάνα σε μια συγκεκριμένη πόλη ή περιοχή.** Ας θεωρήσουμε έναν συνολικό πληθυσμό  $N$  στην περιοχή και



έναν μέσο όρο  $p$  πάνων ανά οικογένεια (γενικά  $p < 1$ ). Ας υποθέσουμε ότι τα πάνα κουρδίζονται κατά μέσο όρο  $b$  φορές το χρόνο (γενικά περιμένουμε ότι  $0 \leq b < 2$ ), επομένως το πλήθος πάνων που κουρδίζεται κάθε χρόνο είναι περίπου  $Npb/p$ , όπου  $p_1$  είναι το μέσο μέγεθος ενός νοικοκυριού. Αν ο κάθε κουρδιστής ασχολείται με  $n_2$  πάνα την ημέρα (γενικά,  $0 < n_2 < 4$ ), κουρδίζει  $250n_2$  πάνα τον χρόνο (αν υποθέσουμε 250 εργάσιμες ημέρες). Επομένως, το πλήθος των κουρδιστών πάνου σε μια περιοχή (πόλη, χωριό, χώρα) είναι περίπου  $Npb/250n_1n_2$ . Ας χρησιμοποιήσουμε κάποιους αριθμούς. Αν, για την πόλη της Νέας Υόρκης, έχουμε, ας πούμε,  $N \approx 10^7$ ,  $n_1 = 5$ ,  $b = 0,5$ ,  $p = 0,2$ ,  $n_2 = 2$ , τότε  $P \approx (10^7 \cdot 10^{-1}) / (250 \cdot 10) \approx 4 \cdot 10^2$  — δηλαδή, τάξη μεγέθους μεταξύ του  $10^2$  και του  $10^3$ .

**11. Εκτιμήστε το πλήθος των παπουτσιών σε μια πόλη ή μια περιοχή.** Αν ένας παπουτσής χρειάζεται κατά μέσο όρο  $t$  ώρες για μία επιδιόρ-



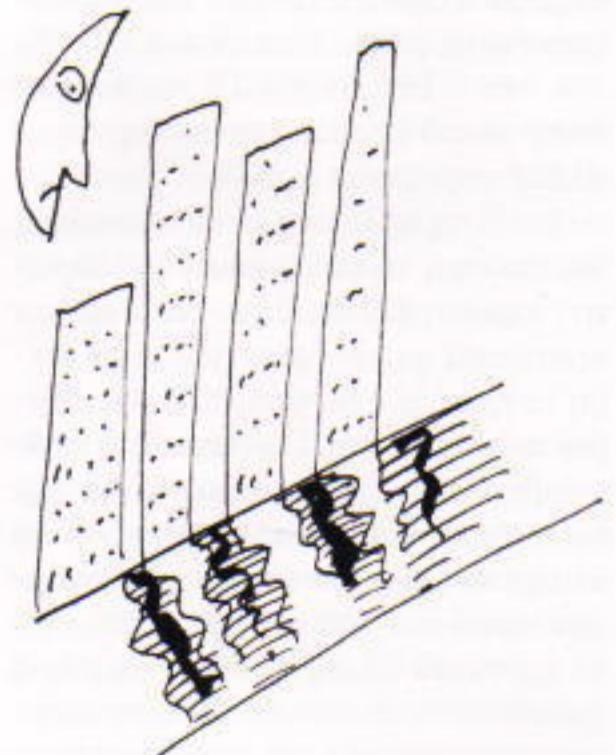
θωση, και αν ο μέσος όρος των εργάσιμων ωρών κάθε μέρα είναι  $T$ , τότε το μέσο πλήθος των επιδιορθώσεων σε μια μέρα είναι  $T/t$ . Είναι προφανές ότι μερικά παπούτσια αξίζει να τα επιδιορθώσουμε ενώ άλλα όχι. Αν υποθέσουμε ότι το «μέσο ζευγάρι παπουτσιών» επιδιορθώνεται κατά μέσο όρο κάθε  $n$  χρόνια, καταλήγουμε σε ρυθμό  $1/n$  επιδιορθώσεων ανά έτος. Σε ένα χρόνο 250 εργάσιμων ημερών, ο παπουτσής μας μπορεί να κάνει κατά μέσο όρο  $250T/t$  επιδιορθώσεις, και σε πληθυσμό  $N$  ατόμων επισκευάζονται  $N/t$  ζευγάρια παπουτσιών κάθε χρόνο. Έτσι οδηγούμαστε στην εκτίμηση  $Nt/250pt$  για το πλήθος των παπουτσήδων στην

περιοχή. Επομένως, αν θεωρήσουμε αυτή τη φορά ότι η περιοχή μας είναι ολόκληρες οι Ηνωμένες Πολιτείες (γινόμαστε λίγο φιλόδοξοι τώρα, αλλά αυτή την ερώτηση μου την υποβάλλουν συνεχώς), τότε  $N \approx 2,5 \cdot 10^8$ ,  $t \approx 1/2$ ,  $T \approx 10$ ,  $n \approx 2$ , και επομένως το πλήθος των επιδιορθωτών υποδημάτων θα είναι  $Y = (2,5 \cdot 10^8 \cdot 1/2) / (250 \cdot 2 \cdot 10) \approx 10^4$ .

**12. Εκτιμήστε την ταχύτητα με την οποία μεγαλώνουν τα μαλλιά του ανθρώπου (κατά μέσο όρο) σε χιλιόμετρα ανά ώρα.** Αν κόβουμε τα μαλλιά κάθε  $n$  μήνες (συνήθως  $n \leq 2$ ) και το μέσο μήκος των μαλλιών που κόβονται είναι  $x$  cm, τότε η μέση αύξηση του μήκους των μαλλιών είναι  $(x/n) / (30 \cdot 24 \cdot 100)$  m/h. Αν  $n = 2$  και  $x = 1,5$ , τότε η αύξηση είναι περίπου  $10^{-8}$  km/h.

Ας επανέλθουμε τώρα στο αιματηρό πρόβλημα (το υπ' αριθμόν 6).

**6. Ποιος είναι ο όγκος του ανθρώπινου αιματος σε όλον τον κόσμο;** Για έναν πληθυσμό  $5 \cdot 10^9$  ατόμων, και θεωρώντας μια μέση ποσότητα 4 λίτρων αιματος για κάθε ανθρώπο, καταλήγουμε σε όγκο  $V \approx 5 \cdot 10^9 \cdot 4 \text{ lt} = 2 \cdot 10^{10} \text{ lt} = 2 \cdot 10^7 \text{ m}^3$ . Αυτή η ποσό-



**3. Για την Ελλάδα (με πληθυσμό  $N = 10^7$ ), η ίδια εκτίμηση δίνει  $Y = (10^7 \cdot 1/2) / (250 \cdot 2 \cdot 10) \approx 10^3$ . Σύρφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας εργατικού δυναμικού της ΕΣΥΕ, το πλήθος των αυτοαπασχολούμενων υποδηματοποιών (δηλαδή, κυρίως ισαγκάρηδων) είναι 2.670. Όσον αφορά το πρόβλημα 10, σύμφωνα με την ίδια έρευνα το πλήθος των κατασκευαστών και των χορδιστών οργάνων (μαζί) είναι 180, αριθμός που βρίσκεται επίσης σε συμφωνία με την εκτίμηση μας. (Σ.τ.μ.)**

τητα, όπως επισημαίνει ο Paulos, χωρά σε έναν κύβο με μήκος ακμής  $(2 \cdot 10^7)^{1/3} \approx 275$  m. Θέτοντας τα πράγματα λίγο πιο ωρά, και αφού το Σέντραλ Πάρκ έχει έκταση περίπου 3,5 km<sup>2</sup>, όλο αυτό το αίμα θα κάλυπτε το Σέντραλ Πάρκ φτάνοντας σε βάθος περίπου 6 μέτρων!

13. *Εκτιμήστε το πλήθος των τσιγάρων που καπνίζονται ειησίως στις ΗΠΑ.* Έστω  $f$  το ποσοστό των καπνι-



στών στον συνολικό πληθυσμό και  $n$  το μέσο πλήθος τσιγάρων που καπνίζουν κάθε μέρα. Τότε  $N = 2,5 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot fn \approx 10^{11}$ , αν  $f \approx 10^{-1}$  (που είναι πολύ μικρό ποσοστό σε σύγκριση με άλλες χώρες) και  $n \approx 10$ .

14. *Το πρόβλημα του αστεροειδούς.* Με αφορμή τη σύγκρουση του (πρώην) κομήτη Shoemaker-Levy με την εξωτερική ατμόσφαιρα του Δια, επέθη το ερώτημα: θα μπορούσε να συμβεί αυτό και στη Γη; Ίσως έχει ήδη συμβεί — υπάρχει η θεωρία για την εξαφάνιση των δεινοσαύρων (όχι αυτή του Gary Larson)<sup>4</sup> σύμφωνα με την οποία μια τέτοια σύγκρουση έγινε πριν από 65 περίπου εκατομμύρια χρόνια — σε αυτή την περίπτωση με έναν αστεροειδή. Η σκόνη από τη σύγκρουση και ακάθιστε τελικά στην επιφάνεια της Γης, αφού πρώτα λειτούργησε ως αποτελεσματικότατο φίλτρο στην ηλιακή ακτινοβολία, καταστρέφοντας έτοι χλωρίδα και πα-

4. Ο Gary Larson είναι οκτωογράφος. Η θαυμάσια γελοιογραφία του δείχνει μια παρέα αγριοπών δεινοσαύρων που καπνίζουν, ενώ η λεζάντα γράφει: «Η πραγματική αιτία της εξαφάνισης των δεινοσαύρων».

νίδα. Σύμφωνα με μια υπόθεση, το 20% της μάζας του αστεροειδούς επικάλυψε ομοιόμορφα την (μάλλον αφιλόξενη πα) επιφάνεια της Γης — περίπου 0,02 gr/cm<sup>2</sup>. Ερώτηση: πόσο μεγάλος ήταν ο αστεροειδής; (Όπως εξελίσσεται το άρθρο, πιθανόν περιμένατε την ερώτηση «ποιο είναι το όνομα του οδηγού του λεωφορείου;». Μην ανησυχείτε όμως, θα φτάσουμε και ο' αυτό αργότερα.) Λοιπόν, είναι φανερό ότι αν  $R$  είναι η ακτίνα της Γης σε cm, η μάζα του αστεροειδούς είναι περίπου  $4\pi R^2 \cdot 0,02 \cdot 5$ . Θα πρέπει να εξισώσουμε αυτή την ποσότητα με το γινόμενο της πυκνότητας επί τον όγκο ενός κύβου με μήκος ακμής  $L$  (αυτή είναι η απλούστερη γεωμετρία που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε: ο όγκος της μεγαλύτερης σφαίρας που γεγράφεται σε έναν κύβο ακμής  $L$  διαφέρει από τον όγκο του κύβου κατά παράγοντα ίσο με  $\pi/6 \approx 1/2$ , και έτσι η εκτίμησή μας για την τάξη μεγέθους δεν επηρεάζεται). Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε μια τυπική για πέτρωμα πυκνότητα ιοη με 2 g/cm<sup>3</sup>, οπότε  $2L^3 \approx 0,4\pi R^2$ , απ' όπου έχουμε  $L \approx (0,2\pi R^2)^{1/3}$ . Αφού  $R = 6,4 \cdot 10^8$  cm,  $L \approx 6 \cdot 10^5$  cm, ή 6 km (δηλαδή, τάξη μεγέθους 10 km). Αυτή είναι μια λογική τιμή για έναν αστεροειδή (αν και οι δεινόσαυροι μπορεί να έχουν αντιρρήσεις).

15. *Το πάχος ενός στρώματος λαδιού.* Πιθανότατα, σε κανέναν δεν αρέσει να παίρνει το φάρμακό του. Λέγεται ότι ο Βενιαμίν Φραγκλίνος παρατίθησε πως όταν χύθηκε σε μια λίμνη 0,1 cm<sup>3</sup> λαδιού (ήταν άραγε μουρουνέλαιο;) εξαπλώθηκε σε μια περιοχή εμβαδού 40 m<sup>2</sup>. Αν  $d$  είναι το πάχος του στρώματος σε μέτρα, τότε  $40d = 10^{-7}$ , επομένως  $d = 25 \cdot 10^{-10}$  m, ή 25 Angstrom. Έχει ενδιαφέρον ότι αυτό αντιστοιχεί σε ένα «μονομοριακό» στρώμα 10-12 ατόμων (όπου το

μόριο αποτελείται από μια αλυσίδα άτομο-κενό-άτομο-...) που είναι περίπου η σωστή τιμή για ένα μόριο «ελαφρού» ελαίου.

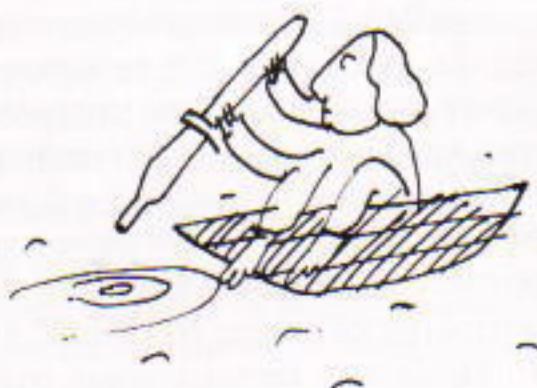
16. *Το πλήθος των φύλλων ενός δέντρου.* Αν  $r$  είναι η τυπική ακτίνα του φυλλώματος ενός δέντρου, το εμβαδόν της επιφάνειας του φυλλώματος θα είναι  $4\pi r^2$ . Αν τώρα  $d$  είναι (στις ίδιες μονάδες μέτρησης) το τυπικό μέγεθος ενός φύλλου, τότε μια εκτίμηση για το πλήθος των φύλλων που περιλαμβάνει το φύλλωμα είναι  $4\pi r^2/d^2$ . Οπωσδήποτε τα φύλλα δεν καλύπτουν ομοιόμορφα την επιφά-



νεια του φυλλώματος, αλλά αυτό εξισορροπείται από το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά φύλλα στα κλαδιά, στο εσωτερικό του φυλλώματος. Σε ένα μικρό δέντρο (για παράδειγμα, ένα κωνοφόρο 15-20 ετών) το φύλλωμα έχει ακτίνα  $r \approx 1,5$  m και το  $d \approx 3$  cm, επομένως  $N \approx 3 \cdot 10^4$  — δηλαδή, γενικά μια τάξη μεγέθους  $10^4$  με  $10^5$ , αν συμπεριλάβουμε και μεγαλύτερα δέντρα.

17. *Εβδομαδιαίες εισπράξεις σε ένα κατάστημα.* Αν υπάρχουν  $n_1$  ταρεία που εξυπηρετούν  $n_2$  πελάτες κατά μέσο όρο την ώρα, αν η μέση απόδειξη πελάτη είναι  $x$  δραχμές και αν το κατάστημα είναι ανοικτό  $n_3$  ώρες την ημέρα, τότε μια μέση εβδομαδιαία εισπράξη είναι  $R \approx 6n_1 n_2 n_3 x$  δραχμές. Αν, για παράδειγμα,  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 20$ ,  $n_3 = 8$  και  $x = 2.000$ , βρίοκουμε ότι  $R \approx 10^7$  δραχμές.

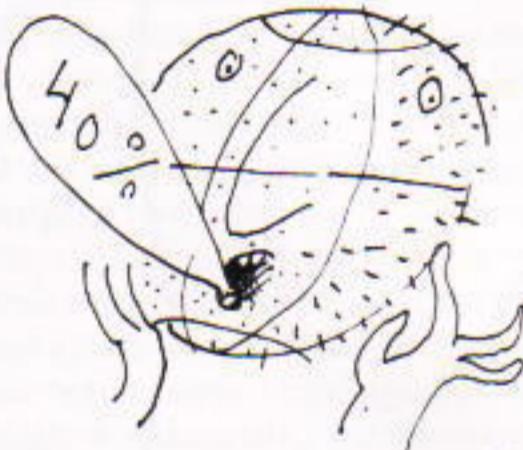
18. *Ημερήσιο ποσοστό θανάτων σε μια πόλη ή περιοχή.* Όταν σε μια πόλη ή περιοχή πληθυσμού  $n_1$  ο μέσος αριθμός θανάτων την ημέρα (όπως προκύπτει, ας πούμε, από την οτήλη των κοινωνικών στην τοπική εφημερίδα) είναι  $n_2$ , μπορούμε βάσει απλής αναλογίας να εκτιμήσουμε το ημερήσιο ποσοστό θανάτων σε ολόκληρη τη





χώρα (με πληθυσμό  $N$ ). Έτοι,  $d \equiv Np_2/p_1$ . Είναι φανερό ότι η εγκυρότητα αυτής της απλοϊκής ανάλυσης είναι περιορισμένη. Η θνησιμότητα από χώρα σε χώρα διαφέρει σημαντικά. Οπως και νά 'χει, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση «κατώτερου φράγματος» για τη θνησιμότητα σε μια ολόκληρη χώρα. Έτοι, αν, για παράδειγμα,  $p_1 \equiv 10^6$ ,  $p_2 \equiv 30$ , τότε ο αριθμός των θανάτων ημερησίως σε όλες τις ΗΠΑ, όπου  $N \equiv 2,5 \cdot 10^8$ , είναι  $d \equiv 7.500$ .

19. Το πλήθος των φύλλων της χλόης σε όλη τη Γη. Αν το 40% της Γης καλύπτεται από ξηρά, τότε ένα ποσοστό  $f_1$  αυτής της ξηράς καλύπτεται από χλόη. Αν το μέσο πλήθος φύλλων χλόης ανά τετραγωνικό εκ-



τοστό είναι  $n$ , τότε  $N \equiv (0,4)4\pi R^2 f_1 n$ . Έτοι, αν  $R = 6,4 \cdot 10^8$  cm,  $f_1 \equiv 10^{-2}$  ή  $10^{-1}$  (αυτό είναι δύσκολο να το εκτιμήσουμε χωρίς λίγη έρευνα) και  $n \equiv 20$ , τότε  $N \equiv 10^{16}$  ή  $10^{17}$ .

Ας επιστρέψουμε τώρα σε μια παραλλαγή του προβλήματος των ελαστικών του αυτοκινήτου.

20. Ποιο είναι το μέσο βάθος φθοράς του πέλματος ενός λάστιχου αυτοκινήτου ανά περιστροφή; Εδώ η απάντηση μπορεί να βρεθεί μέσω απλής αναλογίας: το βάθος  $d$  που ζη-

τάμε βρίσκεται ως προς το πάχος του τυπικού πέλματος (ενός καινούργιου λάστιχου) στην ίδια αναλογία με την περίμετρο  $2\pi R$  του λάστιχου ως προς τον μέσο αναμενόμενο αριθμό χιλιομέτρων για το λάστιχο. Έτοι,  $d \equiv 2\pi R t / L$ , απ' όπου για  $R = 30$  cm,  $L = 80.000$  km,  $t = 5$  mm αντιστοιχεί φθορά βάθους  $d \equiv 10^{-7}$  mm.

21. Παγκόσμιο Γουνιτοκ. Αν προσφέρουμε σε κάθε άνθρωπο στη Γη αρκετό χώρο ώστε να κάθεται στο έδαφος χωρίς να ακουμπά κάποιον άλλον, εκτιμήστε το μήκος της πλευράς τού τετραγώνου που θα χωρούσε όλους τους ανθρώπους του πλανήτη καθισμένους με αυτόν τον τρόπο. Αν παραχωρήσουμε σε κάθε άνθρωπο ένα τετράγωνο πλευράς  $1/2$  m, τότε το μήκος της πλευράς τού μεγάλου τετραγώνου είναι  $L \equiv (5 \cdot 10^9)^{1/2} \cdot 1/2 \cdot 10^{-3}$  km  $\equiv 35$  km.

22. Επιφάνεια και όγκος του ανθρώπινου σώματος. Για να εκτιμήσουμε αυτές τις ποσότητες χοντρικά



αλλά γρήγορα, θεωρούμε έναν κύλινδρο με ακτίνα  $r$  και ύψος  $h$ : αν  $r \equiv 15$  cm και  $h \equiv 180$  cm, τότε  $V = \pi r^2 h \equiv 0,1$  m<sup>3</sup>, και  $S = 2\pi r h \equiv 2$  m<sup>2</sup>. Τώρα είμαστε σε θέση να επανέλθουμε στο Πρόβλημα 4.

4. Εκτιμήστε το πλήθος των κυττάρων του ανθρώπινου σώματος. Αν υποθέσουμε ότι η μέση διάμετρος ενός κυττάρου είναι 10 μ, ή  $10^{-5}$  m, και εφόσον από το πρόβλημα 22 έχουμε  $V = 10^{-1}$  m<sup>3</sup>, παίρνουμε  $N = 10^1 / (10^{-5})^3 \equiv 10^{14}$  κύτταρα.

23. Ο μέσος ρυθμός ανάπτυξης ενός παιδιού από τη γέννησή του έως τα δεκαοκτώ. Κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος η «ταχύτητα» ανάπτυξης ισούται κατά προσέγγιση με  $(h_{18} - h_0) / 18 \equiv 0,0015 / 18$  km / έτος  $\equiv 10^{-5}$  m/h — δηλαδή,

τάξη μεγέθους ίδια περίου με την ταχύτητα αύξησης των μαλλιών! Θα μπορούσαμε ίσως να χαρακτηρίσουμε τα παιδιά ως υπεραναπτυσσόμενα ή υποαναπτυσσόμενα ανάλογα με το αν μεγαλώνουν ταχύτερα ή όχι από τα μαλλιά τους!

Τα υπόλοιπα προβλήματα εκτίμησης αφορούν την έρευνα SETI για εξωγήινη νοημούνη και τις διαστρικές πτήσεις. Ο αστρονόμος Frank Drake έχει κάνει την προεργασία διατυπώνοντας τον περίφημο τύπο του Drake, που δίνει το πλήθος  $N$  των τεχνολογικά αναπτυγμένων πολιτισμών που υπάρχουν στο Γαλαξία μας. Εδώ ο όρος «τεχνολογικά αναπτυγμένος» μπορεί να θεωρηθεί ότι αφορά πολιτισμούς που έχουν τις ίδιες τουλάχιστον τεχνολογικές ικανότητες που έχουμε στη Γη. Έτοι, αν  $N$  είναι το μέσο πλήθος των άστρων του Γαλαξία,  $f_p$  είναι το κλάσμα των άστρων που συνοδεύονται από πλανητικό σύστημα,  $n$  είναι το μέσο πλήθος των πλανητών που διαθέτουν το κατάλληλο περιβάλλον για ζωή ανά πλανητικό σύστημα,  $f_c$  το κλάσμα των πλανητών όπου πραγματικά αναπτύσσεται ζωή,  $f_e$  το κλάσμα αυτών των  $f_c$  πλανητών όπου αναπτύσσονται νοήμονες οργανισμοί,  $f_l$  το κλάσμα αυτών των νοημόνων ειδών που αναπτύσσουν πολιτισμό ο οποίος μπορεί να επικοινωνεί, και αν  $f_L$  είναι η μέση διάρκεια αυτών των πολιτισμών ως ποσοστό της ηλικίας του Γαλαξία, τότε

$$N \equiv N_a f_p n f_c f_e f_l$$

Από τις επτά ποσότητες στο δεξιό μέλλος αυτής της παράστασης, η πρώτη είναι αστρονομικής φύσεως και είναι γνωστό ότι ισούται περίου με  $4 \cdot 10^{11}$ . Οι επόμενοι δύο αριθμοί είναι βάσιμες αστρονομικές εικασίες. Οι επόμενοι δύο ( $f_c$  και  $f_e$ ) είναι βιολογικής φύσεως, και εδώ στηρίζομαστε σε εξαιρετικά σαθρά θεμέλια, επειδή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο (εμάς!). Οι δύο τελευταίοι αριθμοί έχουν κοινωνιολογικό χαρακτήρα, και από αυτή την άποψη ο υπολογισμός τους είναι καθαρή μαντεία. Έτοι, οι αριθμοί που επιλέγει κάποιος είναι ενδεικτικοί

Η συνέχεια στη σελ. 34

Q



# Η τέταρτη κατάσταση της Ήλιος

Ούτε στερεή ούτε υγρή ούτε αέρια

Alexander Kingsep

**ΠΙΤΡΕΨΤΕ ΜΟΥ ΝΑ ΣΑΣ ΑΠΕΥΘΥΝΩ μια άμεση και σαφή ερώτηση: ποια είναι η πιο συνηθισμένη κατάσταση της ύλης στο σύμπαν; Η στερεή θα πείτε. Λάθος! Η υγρή μήπως; Όχι, αλλά έχετε μία ακόμη ευκαιρία. Ε, τότε σίγουρα θα είναι η αέρια. Λυπάμαι, χάσατε! Η πιο τυπική κατάσταση της ύλης σε ολόκληρο το σύμπαν είναι το πλάσμα· ο' αυτή τη φάση βρίσκεται το μεγαλύτερο μέρος της δημιουργίας. Αυτή η πληροφορία μάλλον σας γεννά αμφιβολίες, αφού και εσείς, όπως και όλα τα όντα γύρω σας, είναι δημιουργήματα από στερεά και υγρά υλικά.**

Παλαιότερα το πλάσμα οριζόταν ουνήθως ως ιονισμένο αέριο. Στην πραγματικότητα αυτό δεν είναι απολύτως σωστό —ή, για να είμαστε πιο ακριβείς, είναι τόσο σωστό όσο και οι επόμενοι ορισμοί: «τα υγρά είναι τηγμένα στερεά», ή «τα αέρια είναι υγρά που έχουν εξατμισθεί». Οι ιδιότητες του πλάσματος (τουλάχιστον του τυπικού πλάσματος) διαφέρουν ουσιαστικά από τις ιδιότητες των αερίων. Γι' αυτό οι φυσικοί θεωρούν το πλάσμα ως την τέταρτη κατάσταση της ύλης, η οποία μάλιστα κατέχει την υψηλότερη θέση στην κλίμακα θερμοκρασιών.

Καθημερινά αντικρίζετε αντικείμενα πλάσματος —τον Ήλιο, τα αστέρα. Συχνά βλέπετε φωτεινές πηγές πλάσματος —φώτα από νέον. Όλοι μας είμαστε εξοικειωμένοι με το βραχύβιο φαινόμενο πλάσματος, την αστραπή. Και όλοι γνωρίζουμε για τις

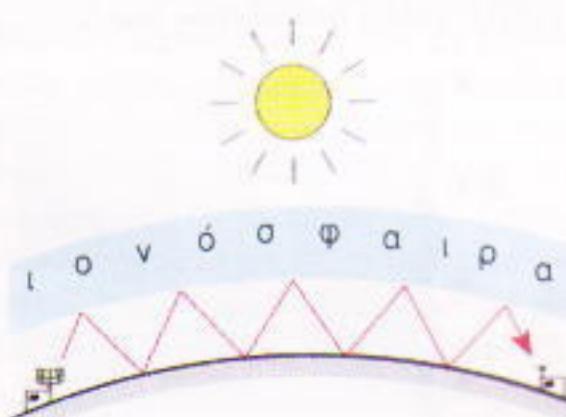
εκπομπές βραχέων ραδιοφωνικών κυμάτων. Τα εν λόγω κύματα χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες μεγάλων αποστάσεων, καταφέρνουν δε να διανύουν τις αποστάσεις αυτές χάρη στο λεγόμενο κάτοπτρο πλάσματος που παρέχει η ιονόσφαιρα —ο' αυτήν ανακλώνται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που εκπέμπουν οι ραδιοφωνικοί σταθμοί βραχέων (Σχήμα 1). Δεν είναι παράξενο λοιπόν που ένα τόσο ευρύ φάσμα αντικειμένων και φαινομένων έχει αποσπάσει την προσοχή και το ενδιαφέρον της κοινότητας των φυσικών. Άμεσο αποτέλεσμα της πρόσδοση στη φυσική του πλάσματος είναι η εφεύρεση πολλών συσκευών και οργάνων. Το κύριο πρόβλημα όμως που εμπνέει συνεχώς την πρόσδοση αυτό το πεδίο είναι η ελεγχόμενη πυρηνική ούντηξη, η οποία, όπως πρεσβεύουν πολλοί, θα αποτελέσει την πηγή ενέργειας του μέλλοντος. Εάν λυθεί

το πρόβλημα αυτό, η ανθρωπότητα θα διαθέτει μια ενεργειακή πηγή το ίδιο αποτελεσματική με τους τωρινούς αντιδραστήρες σχάσης αλλά σημαντικά λιγότερο επικίνδυνη. Μια τέτοια ενεργειακή πηγή θα είναι σχεδόν ανεξάντλητη και οικολογικά καθαρή. Στις μέρες μας οι περισσότεροι φυσικοί του πλάσματος απασχολούνται σε τέτοια προχωρημένα προγράμματα σύντηξης.

Σε τούτο το άρθρο θα γνωρίσουμε οριομένες μόνο πλευρές του πλάσματος —θα ασχοληθούμε κυρίως με τις πιο βασικές ιδιότητές του.

## Το πλάσμα ως συνεχές μέσον

Με την πρώτη ματιά, το πλάσμα θα έπρεπε να είναι πιο «αεριώδες» από ένα αέριο. Πράγματι, η θέση του στην κλίμακα θερμοκρασιών βρίσκεται υψηλότερα από τη θέση των αερίων. Ας πάρουμε ως παράδειγμα το πλάσμα υδρογόνου. Για να μετατρέψουμε το ουδέτερο άτομο υδρογόνου στο ζευγάρι  $H^+ + e^-$ , χρειαζόμαστε ενέργεια  $\varepsilon_{ion} = 13,6 \text{ eV} \equiv 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ . (Το κατώφλι διαχωρισμού είναι πολύ χαμηλότερο, κι έτσι δεν το λαμβάνουμε υπόψη.) Τέτοιος ιονισμός μπορεί να συμβεί με πολλούς τρόπους, αλλά για να διατηρηθεί ένα νέφος υδρογόνου σε αυτή την κατάσταση, η θερμοκρασία πρέπει να είναι τουλάχιστον  $T_{min} \equiv \varepsilon_{ion}/k$  (όπου  $k$  η σταθερά του Boltzmann που ιούται με  $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 1 \text{ eV}/11.600 \text{ K}$ ). Στην πραγματικότητα η θερμοκρασία μπορεί να είναι λίγο χαμηλότερη,



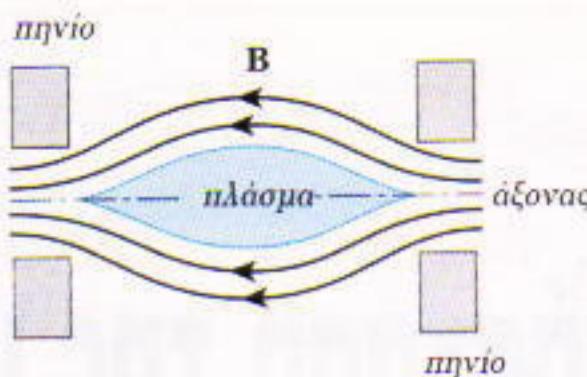
Σχήμα 1

Δύο φυσικά αντικείμενα πλάσματος και μια σχηματική απόδοση της ραδιοεκπομπής σε μεγαλες αποστάσεις.

αλλά δεν παύει να είναι της τάξης μερικών eV.<sup>1</sup> Αυτή η θερμοκρασία βρίσκεται κοντά στην επιφανειακή θερμοκρασία των αστρων (είναι αστείο, αλλά ένα τέτοιο πλάσμα ονομάζεται «ψυχρό»!). Το πλάσμα σύντηξης είναι οημαντικά θερμότερο (θερμοκρασίες της τάξης των  $10^8$  K) το πλάσμα στις λάμπες νέον είναι αρκετά ψυχρότερο, κι έτσι είναι μερικώς ιονιομένο. Αυτό είναι ένα επιχείρημα υπέρ της άποψης ότι το πλάσμα είναι «πιο αεριώδες από ένα αέριο».

Όλα τα αέρια, ακόμη και οι ατμοί των μετάλλων, είναι πάντοτε κακοί αγωγοί. Αυτή η κατάσταση, όμως, αλλάζει δραστικά σε περίπτωση ιονισμού. Το πλάσμα μπορεί να είναι πολύ καλός αγωγός, όπως για παράδειγμα ο χαλκός ή το ασήμι στη στρεβή κατάσταση, κι αυτό εξαρτάται από ορισμένες παραμέτρους (κυρίως τη θερμοκρασία και την πυκνότητα των σωματιδίων). Ως εκ τούτου, η μακροσκοπική δυναμική του γίνεται πολύπλοκη από τη στιγμή που οι μηχανικές του ιδιότητες συνδέονται στενά με τις ηλεκτροδυναμικές του ιδιότητες. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί το κύριο χαρακτηριστικό του πλάσματος —ότι η ηλεκτροδυναμική παίζει εξαιρετικά σημαντικό ρόλο σε οποιοδήποτε πρόβλημα σχετίζεται με το πλάσμα και σε οποιοδήποτε φαινόμενο πλάσματος συναντάμε. Ειδικότερα, η ροή πλάσματος παράγει ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ενώ η κίνηση και η ισορροπία του καθορίζονται από τα πεδία που δρουν πάνω του.

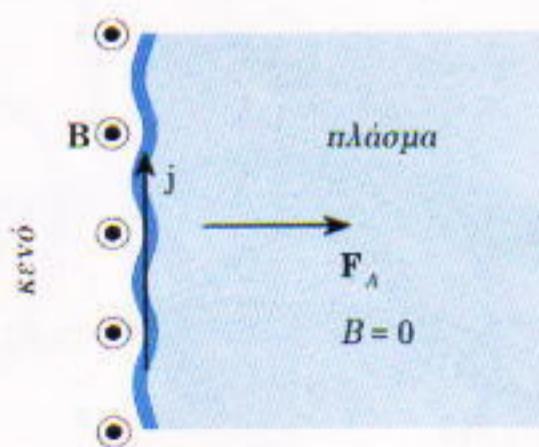
Η τελευταία ιδιότητα αποδεικνύεται πολύ χρήσιμη για τη συγκράτηση του πλάσματος. Το πολύ θερμό πλάσμα, όπως το πλάσμα σύντηξης, δεν είναι δυνατόν να τοποθετηθεί σε δοχείο, όπου θα βρίσκεται σε επαφή με τα τοιχώματά του. Τέτοια επαφή θα προκαλούσε και πολύ γρήγορες ενεργειακές απώλειες και πολύ γρήγορη επανασύνδεση των σωματιδίων του πλάσματος (π.χ.  $H^+ + e^- \rightarrow H$ ). Έτσι, εάν θέλουμε να περιορίσουμε το πλάσμα σε ορισμένο χώρο, πρέπει να το «παγιδεύσουμε» με κάποιον



Σχήμα 2  
Μαγνητική φιάλη.

άλλο τρόπο. Και αυτό ακριβώς που χρειαζόμαστε είναι ένα κατάλληλα σχεδιασμένο ισχυρό μαγνητικό πεδίο. Στο σχήμα 2 φαίνεται η απλή αρχή στην οποία στηρίζεται η μαγνητική φιάλη (που λέγεται και παγίδα κατόπτρου ή παγίδα Budker).

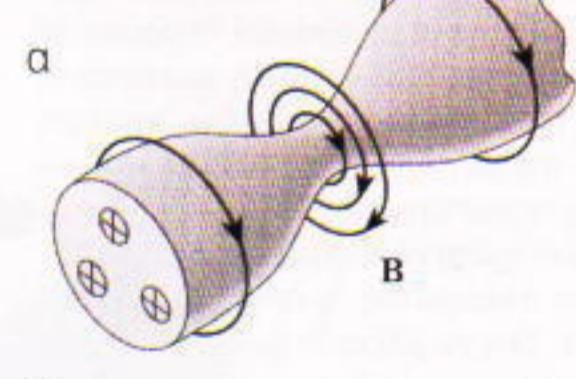
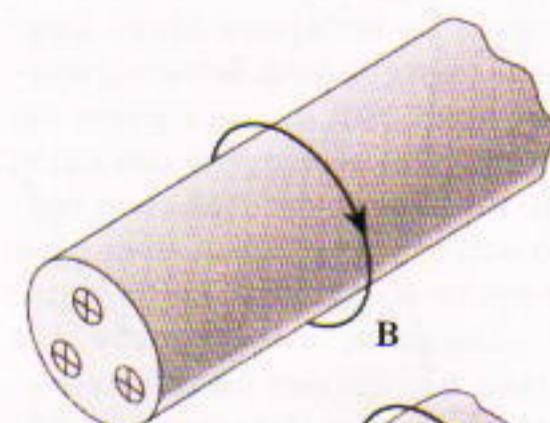
Για να κατανοήσουμε τον φυσικό μηχανισμό του μαγνητικού περιορισμού, και ουγκεκριμένα την αρχή του μαγνητικού κατόπτρου, πρέπει να αναφερθούμε στο Σχήμα 3. Όπως ήδη αναφέραμε, το τυπικό πλάσμα είναι καλός αγωγός. Αυτό σημαίνει ότι ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο συναντά δυσκολία στο να διαπεράσει το χώρο που καταλαμβάνει το πλάσμα. Οι ερευνητές στο πεδίο της υπεραγωγιμότητας γνωρίζουν πολύ καλά αυτό το φαινόμενο, που ονομάζεται φαινόμενο Meissner. Το πλάσμα βεβαίως είναι πολύ καλός αγωγός, αλλά όχι τέλειος: έτσι, μια τέτοια διείσδυση δεν είναι εντελώς απαγορευμένη. Το ζήτημα έγκειται στο ότι απαιτείται πολὺς χρόνος, συγκρινόμενος με τις τυπικές χρονικές κλίμακες της δυναμικής του πλάσματος. Εάν λοιπόν το μαγνητικό πεδίο δεν διαπερνά το πλάσμα, πρέπει να απωθείται απ' αυτό μέσω ενός λεπτού επιφανειακού στρώματος επαγόμενου ρεύματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $j$



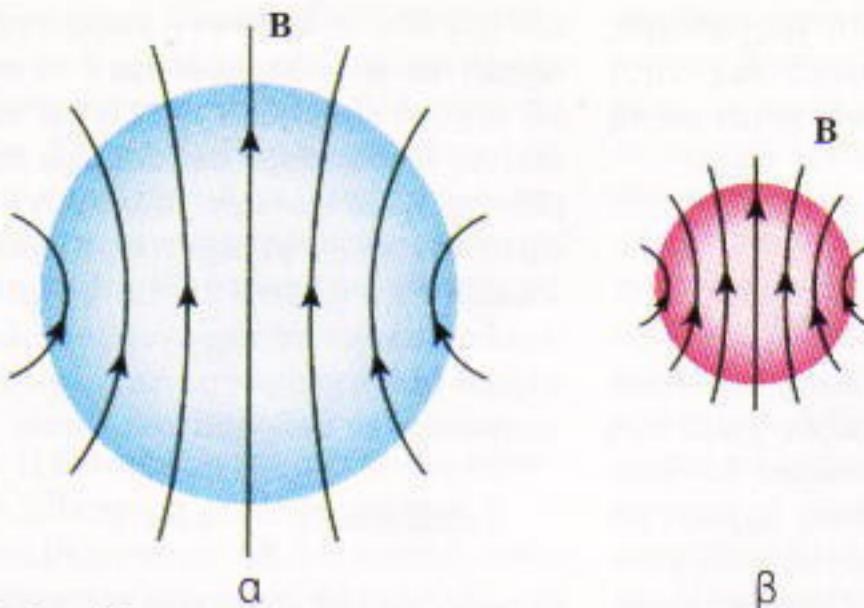
Σχήμα 3  
Μαγνητικός περιορισμός.

και το γεγονός ότι ένα τέτοιο στρώμα υπάρχει, είναι άμεση απόρροια της ηλεκτροδυναμικής του Maxwell. Η δύναμη που αναπτύσσεται, ανά μονάδα επιφανείας σύμφωνα με το νόμο του Ampere, είναι  $jB$  και δρα κάθετα στην επιφάνεια του πλάσματος, από έξω προς τα μέσα. Επομένως ασκείται πίεση στην επιφάνεια του πλάσματος, και αυτή ακριβώς προκαλεί τη μαγνητική παγίδευση.

Ένα άλλο ανάλογο παράδειγμα, ίσως το πιο απλό και ευκολοπαρατηρήσιμο, είναι το λεγόμενο φαινόμενο συστολής (Σχήμα 4a). Φανταστείτε μια κυλινδρική στήλη πλάσματος που διαρρέεται από ρεύμα κατά μήκος του άξονά της (στην προκειμένη περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει εάν το ρεύμα βρίσκεται στην επιφάνεια του πλάσματος ή κατανέμεται σε όλο τον κύλινδρο). Είναι γνωστό ότι παράλληλοι αγωγοί που διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα έλκονται μεταξύ τους. Αυτό αποτελεί βασικό στοιχείο της ηλεκτροδυναμικής. Έτσι, στην περίπτωση μας ο ρευματοφόρος κύλινδρος πλάσματος πρέπει να συσφίγγεται περιμετρικά κατά μήκος της ακτίνας του. Από την άλλη πλευρά, η γνωστή πίεση λόγω θερμικής κίνησης του πλάσματος αντιστέκεται σε αυτή την περίσφιξη. Η ισορροπία που επιτυγχάνεται καθορίζει την ακτίνα της κυλινδρικής στήλης, την



Σχήμα 4  
Φαινόμενο συστολής: (a) σταθερό, (b) ασταθές.



Σχήμα 5

Το φαινόμενο «παγώματος» του μαγνητικού πεδίου (α) στην αρχική φάση του άστρου, (β) στην τελική φάση του (αστέρας νετρονίων).

πίεση λόγω θερμικής κίνησης και το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο στο χώρο του πλάσματος, και ερμηνεύει αυτό που ονομάζουμε συστολή. Με την ευκαιρία, εάν σ' αυτή τη στήλη δώσουμε τη μορφή δακτυλίου —ώστε να εξαλειφθούν οι αστάθειες εξαιτίας των άκρων της— και την τοποθετήσουμε μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός δακτυλιοειδούς αγώγιμου θαλάμου, τότε έχουμε τη διάταξη tokamak,<sup>2</sup> που αποτελεί προς το παρόν τον αποτελεσματικότερο τύπο παγίδας πλάσματος.

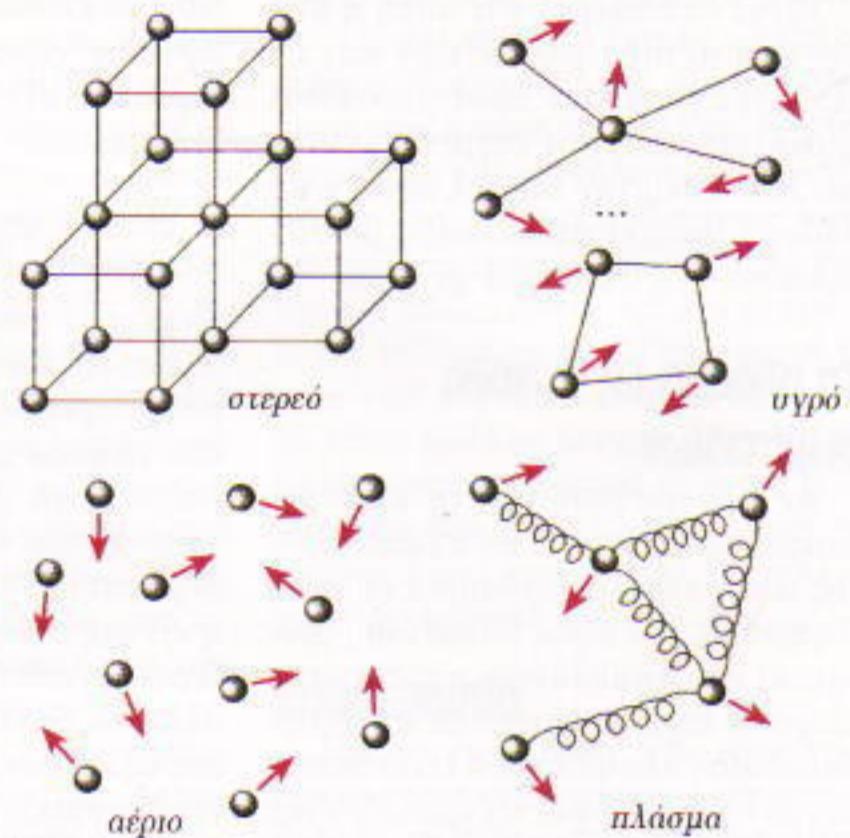
Το φαινόμενο ουστολής είναι επίσης χρήσιμο για να καταδείξουμε μια άλλη θεμελιώδη ιδιότητα του θερμού πλάσματος: μια ιδιότητα που εξοργίζει τους φυσικούς. Μιλάω για την αστάθεια του πλάσματος που ευθύνεται για την πρώην αποτυχία μιας ιδέας ή ενός πολλά υποσχόμενου προγράμματος. Η αστάθεια αυτή, που παρουσιάζεται απλά στο Σχήμα 4β, ουνήθως ονομάζεται «αστάθεια στένωσης» ή «λαιμός». Ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα της κυλινδρικής στήλης πλάσματος έχει γίνει σε κάποιο σημείο της μικρότερη από τον μέσο όρο. Μια τέτοια διαταραχή δεν μεταβάλλει την πίεση λόγω θερμικής κίνησης του πλάσματος (θεωρώντας βέβαια ότι η εν λόγω συστολή γίνεται σε αρκετά μεγάλο μήκος). Από την άλλη πλευρά, το μαγνητικό πεδίο διατάρασσεται σημαντικά στη συγκεκριμένη περιοχή της επιφάνειας του πλάσματος, και τούτο διότι το ολικό

ρεύμα που διαρρέει τη στήλη διατηρείται, ενώ το μαγνητικό του πεδίο ελαττώνε-

ται με την απόσταση:  $B \propto jr^{-1}$  (όπως συμβαίνει σε κάθε ευθύγραμμο αγωγό). Έτσι η προς το εσωτερικό της στήλης περιοφίγγουσα ηλεκτρομαγνητική δύναμη αυξάνεται ενώ η πίεση που ασκεί προς τα έξω το πλάσμα παραμένει σχεδόν σταθερή, με αποτέλεσμα να καταστρέφεται η προϋπάρχουσα ιορροπία.

Αντί της στένωσης, μπορούμε να φανταζόμαστε ένα εξόγκωμα, με παρόμοιες συνέπειες. Το εξόγκωμα θα διαστέλλεται και η ιορροπία θα καταστρέφεται. Επι δεκαετίες οι φυσικοί αγωνιστήκαν για να αντιμετωπίσουν αυτές τις αστάθειες του πλάσματος, προσπαθώντας να πετύχουν την ελεγχόμενη σύντηξη. Μερικές αστάθειες είναι δυνατόν να εξαλειφθούν με κατάλληλη διευθέτηση της πειραματικής διάταξης και με ρύθμιση των παραμέτρων του πλάσματος. Κάποιες άλλες ελέγχονται με εξωτερικά πεδία, ενώ ορισμένες επιβραδύνονται κατά τη διάρκεια του πειράματος. Ωστόσο, οι αστάθειες του πλάσματος είναι αυτές που ουσιαστικά διαμορφώνουν το σκηνικό στο απότερο Διάστημα και πρέπει να μελετηθούν για να κατανοήσουμε πολλά από τα αστροφυσικά προβλήματα.

Θα ήθελα να επομένω και μια άλλη συνέπεια της αλληλεπίδρασης της ηλεκτροδυναμικής και της μηχανικής του πλάσματος: το φαινόμενο του «παγώματος» ενός μαγνητικού



Σχήμα 6

Οι τέσσερις καταστάσεις της ύλης.

πεδίου». Οπως προαναφέραμε, η γρήγορη διείσδυση του μαγνητικού πεδίου στο πλάσμα είναι δύσκολη, ωστόσο μπορεί να συμβεί ως αποτέλεσμα μιας μάλλον αργής εξέλιξης. Επειτα από αυτό, όμως, εάν εδραιωθεί κάποιο είδος γρήγορης δυναμικής, η διείσδυση του μαγνητικού πεδίου ξαναγίνεται δύσκολη. (Ισως έχετε παρακολουθήσει την επίδειξη ενός δημοφιλούς πειράματος φυσικής κατά το οποίο ένα ασημένιο ή χάλκινο νόμιομα πέφτει ανάμεσα στους πόλους ενός ισχυρού μαγνήτη: η ταχύτητα πιώσης του είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με την ταχύτητα ελεύθερης πτώσης.) Η γρήγορη μηχανική κίνηση του πλάσματος, λοιπόν, όπως π.χ. η συμπίεση ενός «νέφους» πλάσματος, προκαλεί τη «συγκόλληση» του μαγνητικού πεδίου με το πλάσμα. Ένα πολύ καλό παράδειγμα για τα παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα 5, το οποίο εξηγεί τα πολύ ισχυρά μαγνητικά πεδία των αστέρων νετρονίων. Πράγματι, ένας αστέρας νετρονίων (Σχήμα 5β) προκύπτει από τη βαρυτική κατάρρευση ενός άστρου (Σχήμα 5α), η οποία επέρχεται αρκετά γρήγορα ώστε να διατηρήσει «παγώμένο» μέσα του το μαγνητικό πεδίο. Το αποτέλεσμα αυτής της κατάρρευσης είναι η μεγάλη αύξηση της πυκνότητας των δυναμικών γραμμών, συνεπώς και του μαγνητικού πεδίου.

<sup>2</sup> Ρωσικό αρκτικόλεξο από το «δακτυλιοειδής μαγνητικός θάλαμος». (Σ.τ.μ.)

Είναι ενδιαφέρον ότι αυτή η συχέτιση μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων είναι χαρακτηριστική στα τηγμένα μέταλλα. Από αυτή την άποψη, λοιπόν, το πλάσμα μοιάζει περισσότερο με συμπυκνωμένη ύλη παρά με αέριο.

## Το πλάσμα ως σύνορο σωματιδίων

Ας προσπαθήσουμε να συγκρινουμε τις διαφορετικές καταστάσεις της ύλης στο μικροσκοπικό επίπεδο (Σχήμα 6). Η στερεή κατάσταση βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο στην κλίμακα θερμοκρασιών. Σε αυτή την κατάσταση όλα τα άτομα είναι διαταγμένα στο χώρο, σχηματίζοντας πλέγμα. Οι θέσεις ισορροπίας τους είναι καθορισμένες και οι κινήσεις τους ουσιαστικά περιορισμένες: οι μόνες κινήσεις που επιτρέπονται είναι θερμικές ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από τις θέσεις ισορροπίας. Στην υγρή κατάσταση τα σωματίδια έχουν μεγαλύτερη ελευθερία κινησης — πρόκειται ακριβώς για την κίνηση Brown. Παρ' όλα αυτά, τα σωματίδια σ' αυτή την κατάσταση δεν είναι απολύτως ελεύθερα. Τα γειτονικά σωματίδια αλληλεπιδρούν, και η αλληλεπίδρασή τους επηρεάζει τη συνολική κίνηση των σωματιδίων. Η επόμενη κατάσταση στην κλίμακα θερμοκρασιών είναι η αέρια, που τη χαρακτηρίζει ο μέγιστος βαθμός ελευθερίας κίνησης των σωματιδίων (ατόμων ή μορίων, ανάλογα με το είδος του αερίου). Αυτά τα σωματίδια είναι σχεδόν απολύτως ελεύθερα να μετακινούνται στο χώρο. Ο μοναδικός περιορισμός εμφανίζεται όταν συγκρούονται, αφού οι διαμοριακές δυνάμεις μειώνονται από το μέτρο με την απόσταση:

$$F_{ij} \propto r_{ij}^{-2}$$

(η προσέγγιση Lennard-Jones της δύναμης Van der Waals). Όσο αραιότερο είναι το αέριο τόσο οπανιότερες είναι οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων, και τόσο μικρότερη η επίδραση που ασκεί το ένα σωματίδιο στο άλλο.

Και όσον αφορά το πλάσμα; Κατά κανόνα, το θερμό πλάσμα είναι αραιότερο από τα αέρια και τα σωματί-

διά του κινούνται πολύ γρηγορότερα, αφού η χαρακτηριστική ταχύτητα θερμικής κίνησης αυξάνεται με τη θερμοκρασία

$$V_{T_a} = \left( \frac{kT}{m_a} \right)^{1/2},$$

όπου  $a : i$  (ιόν),  $e$  (ηλεκτρόνιο). Επιπλέον, επειδή η μάζα του ηλεκτρονίου είναι περίπου 2.000 φορές μικρότερη από τη μάζα του μικρότερου δυνατού ατόμου, τα ηλεκτρόνια κινούνται γρηγορότερα από τα ιόντα κατά έναν παράγοντα  $(2.000)^{1/2}$ . Παρ' όλα αυτά, η κίνηση τους δεν γίνεται «πο ελεύθερα» αντιθέτως, εδώ παίζουν ρόλο οι αλληλεπιδράσεις μεγάλης απόστασης και αλλάζουν ριζικά ολόκληρη τη μικροδυναμική. Αυτό συμβαίνει επειδή οι δυνάμεις Coulomb μεταξύ των σωματιδίων δεν ελαττώνονται πολύ γρήγορα με την απόσταση:

$$F_{ij} \propto r_{ij}^{-2}.$$

Αυτή η αργή ελάττωση είναι αρκετή για να αλλάξει τελείως τις μηχανικές αλληλεπιδράσεις, δημιουργώντας μεγάλα σύνολα σωματιδίων, παρ' όλη τη θερμική κίνηση. Αν και οι συγκρόσεις Coulomb παραμένουν ουσιαστικές, η συλλογική συμπεριφορά κυριαρχεί στο θερμό, αραιό πλάσμα, όπως ακριβώς και στα στερεά. Από αυτή την άποψη, λοιπόν, το πλάσμα μοιάζει περισσότερο με συμπυκνωμένη ύλη παρά με αέριο.

Μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του πλάσματος είναι η λεγόμενη ημιουδετερότητά του. Παρότι το πλάσμα αποτελείται από φορτισμένα σωματίδια, το ίδιο ως σύνολο δεν έχει καθόλου φορτίο. Αυτό βέβαια είναι αναμενόμενο, αφού όλα τα ηλεκτρόδια και τα ιόντα παράγονται από τον ιονισμό των ουδετερών ατόμων — αρα το ολικό φορτίο θα είναι μηδέν. Εκτός αυτού, όμως, η ουδετερότητα του πλάσματος διατηρείται με μεγάλη ακριβεία διότι απαιτείται μεγάλη διαφορά δυναμικού για να διαχωρίστούν τα φορτία.

Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε έναν κύβο πλάσματος με όγκο  $V = 1 \text{ cm}^3$  και με συγκέντρωση σωματιδίων  $n = n_e = n_i = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  (μια τυπική τιμή για εργαστηριακό πλάσμα). Εάν θέλουμε να διαταράξουμε έστω και λίγο (ας πούμε κατά 1%) την ισορρο-

πία φορτίου σ' αυτό τον μικρό όγκο, πρέπει να του εφαρμόσουμε ένα πολύ ισχυρό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει περίσσεια ηλεκτρονίων (ή ιόντων) ο αυτό τον κύβο με σχετική συγκέντρωση  $\delta n \equiv 0,01n = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ . Για να υπολογίσουμε το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Gauss

$$\int EdS \equiv ES = \frac{q}{\epsilon_0} = \delta n \cdot V \cdot \frac{e}{\epsilon_0}.$$

Θεωρώντας την επιφάνεια του κύβου  $S = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , καθώς και  $V \equiv 10^{-6} \text{ m}^3$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ , βρίσκουμε εύκολα ότι  $E \equiv 3 \cdot 10^7 \text{ V/m}$ .

Μπορούμε, εάν θέλουμε, να τροποποιήσουμε το πρόβλημα. Θα κριτήσουμε την  $\int n_e dV = \int n_i dV$ , αλλά θα παραβιάσουμε την τοπική ισότητα. Εάν κοντά στη μία άκρη του κύβου είναι  $n_e - n_i \equiv 10^{-2} n_{e,i}$  και στην απέναντι άκρη του  $n_e - n_i \equiv -10^{-2} n_{e,i}$ , βρίσκουμε, λύνοντας την εξίσωση, ότι το ηλεκτρικό πεδίο  $E$  σε ολόκληρο τον όγκο είναι πάλι της τάξης των  $10^7 \text{ V/m}$ . Στο πρώτο παράδειγμα, ένα τέτοιο τεράστιο πεδίο προκαλεί απωστική πίεση που επιφέρει τη διάλυση του πλάσματος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η δυνατή έλξη εξισώνει τις πυκνότητες ηλεκτρονίων και ιόντων μέσα στο κύβο. Για να διατηρήσουμε την αρχική διατάραξη της ουδετερότητας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο έντασης  $10^7 \text{ V/m}$ . Εάν πάλι το εξωτερικό πεδίο δεν είναι τόσο ισχυρό, τότε για τις διαταράξεις φορτίου (ως συνόλου) μέσα στον όγκο πρέπει να ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\delta n}{n} \equiv \frac{|n_e - n_i|}{n_{e,i}} << 10^{-2}.$$

Εποι, η ημιουδετερότητα αποτελείται όχι μόνο από την καθαρή ουδετερότητα αλλά και από την τοπική σχέση

$$n_e = n_i = n,$$

ή

$$n_e = Zn_i, Z \neq 1,$$

όπου  $Z$  είναι ο ατομικός αριθμός. Παρ' όλα αυτά, οι ταλαντώσεις φορτίων επιτρέπονται (και πράγματι γίνονται) κοντά στη θέση ισορροπίας των φορτίων. Ας φανταστούμε ένα στρώμα

πλάσματος πάχους  $\ell$  και ας υποθέσουμε ότι όλα τα ηλεκτρόνια έχουν λίγο μετατοποτεί σε σχέση με τα ιόντα (Σχήμα 7). Εάν η μετατόπιση είναι  $x$  (με  $x \ll \ell$ ), το φορτίο ανά μονάδα επιφανείας στις λεπτές περιοχές στα άκρα του στρώματος ισούται με

$$\frac{dQ}{dS} = nex.$$

Η διάταξη μας θυμίζει έναν επίπεδο πυκνωτή, και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον όγκο του πλάσματος:

$$E = \frac{V}{\ell}, \quad V = \frac{Q}{C},$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\ell} \Rightarrow E = \frac{nex}{\epsilon_0}.$$

Μπορούμε επίσης να λάβουμε υπόψη μας ότι  $m_e/m_i \ll 1$ . Αυτός ο λόγος ισούται περίπου με  $1/1.840$  για το υδρογόνο, γεγονός που μας επιτρέπει να αγνοήσουμε την κίνηση των ιόντων. Η κίνηση των ηλεκτρονίων μπορεί να περιγραφεί από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -eE = -\frac{ne^2 x}{\epsilon_0},$$

όπου  $m \equiv m_e$ , και έχουμε λάβει υπόψη το αρνητικό πρόσημο του φορτίου του ηλεκτρονίου. Διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω σχέση εκφράζει την εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \omega = \omega_p = \left( \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}.$$

Αυτή είναι η πο χαρακτηριστική συλλογική κίνηση για ένα πλάσμα, και ονομάζεται ταλάντωση Langmuir ή απλώς ταλάντωση πλάσματος.

Οποιαδήποτε αυθόρμητη ή επιβαλλόμενη διατάραξη της ημιουδετερότητας οδηγεί σε τέτοιες ταλαντώσεις. Από την άλλη, αρκετές ενδιαφέρου-

σες και οημαντικές ιδιότητες του πλάσματος βασίζονται σε αυτό το φαινόμενο, το οποίο παρέχει τη δυνατότητα της μη γραμμικής διαγνωστικής του πλάσματος. Δύο κύματα Langmuir μπορούν να συγχωνευθούν σε ένα εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με σταθερή συχνότητα πολύ κοντά στη  $2\omega_p$ . Ένα τέτοιο κύμα είναι ανιχνεύσιμο. Από τη στιγμή που μπορούμε να μετρήσουμε τη συχνότητα  $\omega \equiv 2\omega_p = (4ne^2/\epsilon_0 m)^{1/2}$  μελετώντας την ακτινοβολία, μας δίνεται μια από τις λίγες ευκαιρίες να μετρήσουμε τη συγκέντρωση του πλάσματος στο απότερο Διάστημα, και ειδικότερα του διαγαλαξιακού πλάσματος.

Η συλλογιστική που περιγράφαμε παραπάνω και ο μετέπειτα υπολογισμός δείχνουν ότι μερικές διαταράξεις της ημιουδετερότητας είναι ακόμη πιθανές. Άλλα πρέπει να είναι μικρές σε σύγκριση με τη μονάδα (ή, με άλλα λόγια, το  $\Delta t$  πρέπει να είναι πολύ μικρότερο του  $r_{De}$ ). Επίσης, η χαρακτηριστική χρονική τους κλίμακα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από

$$\Delta t \leq \omega_p^{-1}.$$

Καιά τη διάρκεια αυτού του χρόνου, το ταχύτερο σωματίδιο του πλάσματος, το ηλεκτρόνιο, δεν μπορεί να διανύσει απόσταση μεγαλύτερη από  $v_{Te}\Delta t$ . Κατά συνέπεια, αυτή η απόσταση μπορεί να θεωρηθεί ως το ανώτατο όριο της ακτίνας αλληλεπίδρασης:

$$\Delta x = v_{Te}\Delta t \leq \frac{v_{Te}}{\omega_p} \equiv r_{De} = \left( \frac{\epsilon_0 k T}{ne^2} \right)^{1/2}.$$

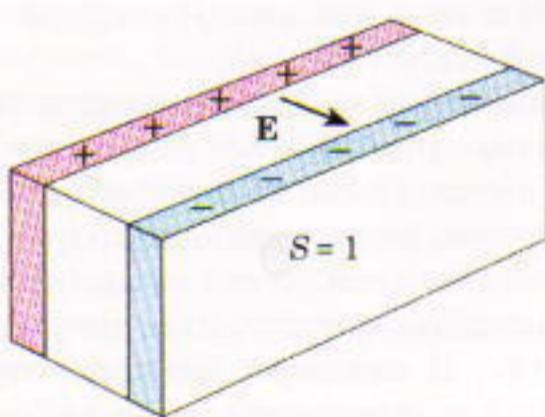
Το μέγεθος  $r_{De}$  είναι η ακτίνα Debye, ή απόσταση θωράκισης Debye. Λόγω αυτού του χωρισμού φορτίων, το πεδίο δρα αποτελεσματικά μόνο σε αποστάσεις μικρότερες του  $r_{De}$ . Με άλλα λόγια, η απόσταση Debye είναι το μέγιστο μήκος των ελατηρίων του Σχήματος 6. Και τώρα είμαστε έτοιμοι να εισαγάγουμε ένα αποτελεσματικό κριτήριο για την κυριαρχία των συλλογικών ιδιοτήτων του πλάσματος. Εάν ο αριθμός των φορτισμένων σωματιδίων μέσα στη σφαίρα Debye είναι αρκετά μεγάλος ( $nr_{De}^3 \equiv (\epsilon_0 k T)^{3/2} e^3 n^{-1/2} \gg 1$ ), τότε κυριαρχούν οι συλλογικές αλληλεπιδράσεις. Σε αντίθετη περίπτωση, έχουμε κάτι σαν αέριο με τροποποιημένες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων. Από

αυτή την εξίσωση, εύκολα βλέπει κανείς ότι οι συλλογικές αλληλεπιδράσεις κυριαρχούν όλο και περισσότερο καθώς το πλάσμα γίνεται θερμότερο και αραιότερο. Για παράδειγμα, το στέμμα πλάσματος ενός σφαιριδίου που φωτίζεται από ένα ισχυρό λέιζερ είναι πολύ πυκνό ( $n \equiv 10^{27} \text{ m}^{-3}$ ) αλλά εξαιρετικά θερμό ( $T \equiv 10^7 - 10^8 \text{ K}$ ). Μεσοαστρικά πλάσματα είναι μάλλον ψυχρά ( $T \equiv 10^4 \text{ K}$ ) αλλά εξαιρετικά αραιά ( $n \equiv 10^6 \text{ m}^{-3}$ ). Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι  $nr_{De}^3 \gg 1$  και κυριαρχούν οι συλλογικές αλληλεπιδράσεις.

## Συμπέρασμα

Πρέπει να αποφύγουμε τους κινδύνους που ενυπάρχουν στην υπερβολικά εκλαϊκευτική ερμηνεία της φυσικής του πλάσματος. Στην πραγματικότητα είναι μάλλον περίπλοκη και γεμάτη γεγονότα, λεπτομέρειες και δυνατότητες όταν εξετάζεται από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Ας δοκιμάσουμε να φτιάξουμε ένα φανταστικό σενάριο για τη δυναμική του πλάσματος σε μια μαγνητική φιάλη.

Φανταστείτε μια μαγνητική φιάλη όμοια με αυτή του Σχήματος 2. Αφού εγκαταστήσαμε το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, εκχέουμε στη φιάλη πλάσμα με έναν εκτοξευτήρα πλάσματος· ή, κατά μια άλλη πρόσγγιση, γεμίζουμε τη φιάλη με αέριο και ύστερα ελέγχουμε τον ιονισμό του μέσω μιας ισχυρής ηλεκτρικής εκκένωσης. Το επόμενο βήμα είναι να θερμάνουμε το πλάσμα, επειδή το χρειαζόμαστε πολύ θερμό ( $T \equiv 10^8 \text{ K}$ ). Για να το επιτύχουμε, μπορούμε να υποβάλουμε το νέφος πλάσματος σε ακτινοβόληση με ισχυρή δέσμη ραδιοκυμάτων ή ισχυρή δέσμη ουδέτερων σωματιδίων, ή ακόμη με δέσμη φορτισμένων σωματιδίων (αυτό είναι λίγο δυσκολότερο εξαιτίας του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου). Είναι επίσης εύκολο να χρησιμοποιήσουμε πολύ ισχυρή ηλεκτρική εκκένωση. Το επόμενο πρόβλημα είναι πώς θα κρατήσουμε το θερμό πλάσμα στη φιάλη για όσο χρόνο χρειαστεί. Με άλλα λόγια, πώς θα διατηρήσουμε και το πλάσμα και τη θερμική του ενέργεια. Σε αυτό το σάδιο εισέρχονται



Σχήμα 7

Η συνέχεια στη σελ. 65 ↪

# Η τέχνη της φωτογραφίας

«Είναι πάντοτε πλεονεκτικότερη η αντικατάσταση ενός ασαφούς ειδώλου από μια καλά εστιασμένη εικόνα; Συχνά δεν είναι η ασάφεια όπι ακριβώς χρειάζεται κανείς;» —Ludwig Wittgenstein, Φιλοσοφικές έρευνες

Mark L. Biermann

**T**Ο ΟΤΙ ΒΛΕΠΕΙΣ ΚΑΤΙ, ΣΗΜΑΙΝΕΙ πάντα ότι το ποιεύεις; Ή, μήπως το γεγονός ότι το βλέπεις σημαίνει απαραίτητα και πως το κατανοείς; Τελευταία, η γνησιότητα των εικόνων έχει τεθεί υπό αμφισβήτηση εξαιτίας των τεχνικών ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας. Σε ταινίες όπως ο *Anatéllas* του ήλιος, που βασιστήκε στο ομώνυμο μυθιστόρημα, η επιδεξιότητα των ειδικών στο χειρισμό των εικόνων με ηλεκτρονικούς υπολογιστές είχε καθοριστική σημασία για τη στήριξη της πλοκής. Το περιοδικό *Time* χρησιμοποίησε τεχνικές επεξεργασίας εικόνας για να δημιουργήσει τη φωτογραφία του εξωφύλλου του, μεταμορφώνοντας τον Μπιλ Κλίντον σε Τζίμμυ Κάρτερ.

Παρ' όλα αυτά, «το μαγείρεμα» των εικόνων ώστε να μεταφέρουν συγκε-

κριμένες πληροφορίες και εντυπώσεις δεν είναι πρόσφατη ανακάλυψη. Επιδεκαετίες φωτορεπόρτερ και καλλιέρχες φωτογράφοι χρησιμοποιούν φωτογραφικές μηχανές και φίλμ για να δημιουργούν ειδικά εφέ και διφορούμενες εικόνες. Ενώ η ψηφιακή επεξεργασία εικόνας στηρίζεται σε τεχνικές λήψεις της εικόνας και σε υπερσύγχρονους υπολογιστές, οι φωτογράφοι μπορούν να δημιουργήσουν εκπληκτικές εικόνες χρησιμοποιώντας τα βασικά χαρακτηριστικά των φωτογραφικών μηχανών και παρεμφερών συστημάτων απεικόνισης. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό είναι το βάθος πεδίου. Στο Σχήμα 1, φωτογράφιο ακαθημερινά αντικείμενα ελέγχοντας παράλληλα το βάθος πεδίου, ώστε να δημιουργήσω μια μάλλον ασυνήθιστη φωτογραφία. Μελετώντας την έννοια του βάθους πεδίου, μπορούμε να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται μια τέτοια φωτογραφία.

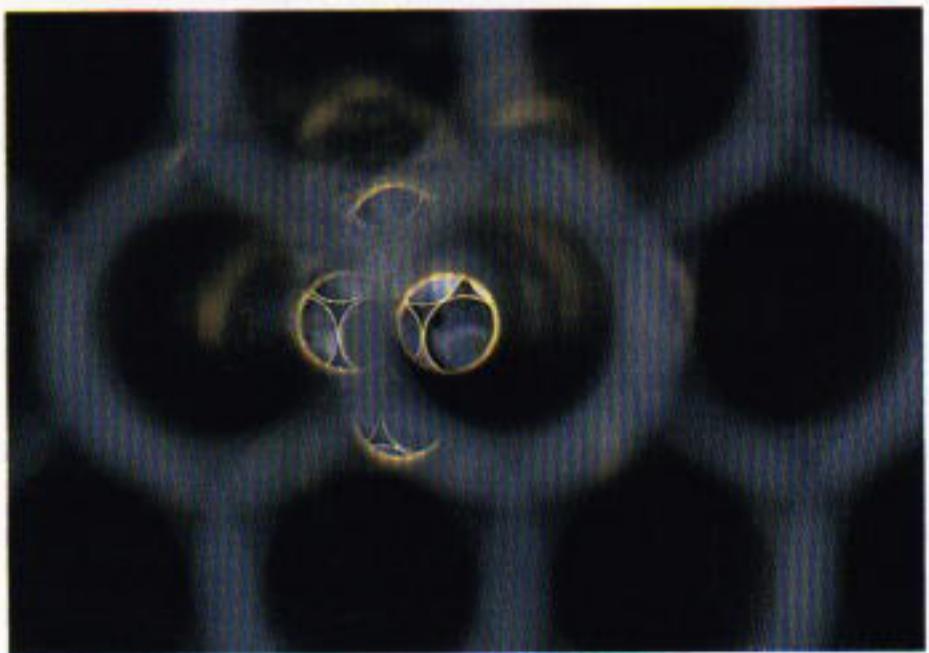
Στη συνέχεια του άρθρου, και σε όλη την έκτασή του, θα χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα ενός τυπικού συστήματος απεικόνισης μια απλή φωτογραφική μηχανή, όπως

μια μονοοπτική ρεφλέξ. Ωστόσο, τα συμπεράσματα αυτής της μελέτης μπορούν να εφαρμοστούν εξίσου καλά και σε άλλα συστήματα απεικόνισης, όπως σε τηλεοπτικές κάμερες ή βιντεοκάμερες.

## Βάθος πεδίου

Κατά τη λήψη μιας φωτογραφίας, η φωτογραφική μηχανή εστιάζεται σε ορισμένη απόσταση, πάνω σε ένα μοναδικό αντικείμενο. Εντούτοις, κοιτάζοντας τη φωτογραφία διαπιστώνουμε ότι απεικονίζονται ευκρινώς όλα τα αντικείμενα που βρίσκονται μέσα σε ορισμένη περιοχή αποστάσεων από τη μηχανή. Για παράδειγμα, μια μηχανή που εστιάζεται σε ένα αντικείμενο που απέχει 4 m απ' αυτήν, απεικονίζει με ευκρίνεια και όσα αντικείμενα απέχουν από 3 έως 6 m. Η περιοχή των αποστάσεων από τη φωτογραφική μηχανή για την οποία τα αντικείμενα εμφανίζονται στη φωτογραφία καλά εστιασμένα ονομάζεται βάθος πεδίου. Στο παραπάνω παράδειγμα, το βάθος πεδίου είναι 3 m, εκτεινόμενο από 3 έως 6 m από τη μηχανή.

Γιατί όμως τα αντικείμενα μέσα σε μια περιοχή αποστάσεων από τη μηχανή απεικονίζονται ευκρινώς στη φωτογραφία, παρότι η φωτογραφική μηχανή εστιάζεται σε ένα αντικείμενο που απέχει ορισμένη απόσταση απ' αυτήν; Η απάντηση βρίσκεται στο τελικό σύστημα απεικόνισης για τις περισσότερες φωτογραφίες, το ανθρώπινο μάτι. Το μάτι, όπως όλα τα συστή-



Σχήμα 1

ματα απεικόνισης, υπόκειται σε περιορισμούς ως προς το μέγεθος της λεπτομέρειας που μπορεί να ανιχνεύσει. Το εν λόγω φαινόμενο σχετίζεται με τη λεγόμενη διακριτική ικανότητα: δύο μικρότερη είναι η λεπτομέρεια που μπορεί να διακρίνει ένα σύστημα απεικόνισης τόσο μεγαλύτερη είναι η διακριτική ικανότητά του. Παρότι το μάτι είναι εντυπωσιακό ως προς τις λεπτομέρειες που μπορεί να δει, κάποια πράγματα είναι υπερβολικά μικρά ώστε να μπορεί να τα απεικονίζει αποτελεσματικά. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε μικροσκόπια, μεγεθυντικούς φακούς και άλλα παρόμοια όργανα, ώστε να διακρίνουμε λεπτομέρειες μικρότερες από εκείνες που επιτρέπει η διακριτική ικανότητά του.

Αλλά ποια σχέση έχουν όλα αυτά με το βάθος πεδίου; Κανένα σύστημα απεικόνισης, είτε πρόκειται για φωτογραφική μηχανή είτε για συσκευή προβολής, δεν μπορεί να παραγάγει τέλειο είδωλο. Αυτό οφείλεται στη θεμελιώδη κυματική φύση του φωτός και συχνά σε σχεδιαστικούς περιορισμούς του συστήματος. Λόγω της αδυναμίας παραγωγής τέλειου είδωλου, κάθε σημείο ενός αντικειμένου δεν απεικονίζεται ποτέ ως σημείο πάνω στο φίλμ μιας μηχανής. Το είδωλό του είναι μια μικρή κηλίδα, που συχνά αναφέρεται ως κύκλος ή δίσκος σύγχυσης. Έτσι, ακόμη και αντικείμενα πάνω στα οποία έχουμε εστίαση με μεγάλη ακρίβεια δεν απεικονίζονται τέλεια. Πάρολα αυτά, μια καλής ποιότητας φωτογραφική μηχανή δημιουργεί κύκλους σύγχυσης πολύ μικρούς για να τους διακρίνει το ανθρώπινο μάτι, και γι' αυτό στις καλές φωτογραφίες αντιλαμβανόμαστε τα αντικείμενα ευκρινή και καλά εστιασμένα. Χρησιμοποιώντας έναν μεγεθυντικό φακό ή ένα μικροσκόπιο, μπορούμε να δούμε τους κύκλους σύγχυσης σε κάθε φωτογραφία. Επιπλέον, εάν η φωτογραφική μηχανή ή και το φίλμ παρουσιάζουν κάποια ελατιώματα, οι κύκλοι σύγχυσης γίνονται αντιληπτοί και με γυμνό μάτι. Η έκφραση «η φωτογραφία παρουσιάζει κόκκο» υποδηλώνει αυτή τη συγκεκριμένη υποβάθμιση της φωτογραφικής ποιότητας.

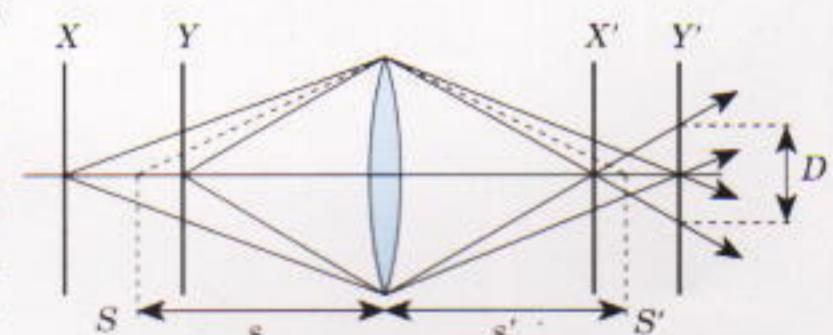
Το βάθος πεδίου μπορεί να ερμηνευθεί με βάση τους κύκλους σύγχυσης. Η φωτογραφική μηχανή παράγει

το είδωλο ενός αντικειμένου πάνω στο οποίο έχει εστιαστεί προσεκτικά οι κύκλοι σύγχυσης ο' αυτό το είδωλο, όμως, είναι πολύ μικρότεροι απ' ό,τι μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο μάτι. Εάν το αντικείμενο αρχίσει να πληριάζει ή να απομακρύνεται από τη μηχανή, το είδωλό του πάνω στο φίλμ θα γίνεται όλο και περισσότερο ασαφές — δηλαδή, οι αντιστοιχοί κύκλοι σύγχυσης θα γίνονται συνεχώς μεγαλύτεροι. Τελικά, οι κύκλοι σύγχυσης θα καταλήξουν να γίνουν τόσο μεγάλοι που θα είναι αντιληπτοί με γυμνό μάτι, και η εικόνα στη φωτογραφία θα φαίνεται θολή. Εντούτοις, υπάρχει πάντα μια περιοχή αποστάσεων μπροστά και πίσω από το επιπέδο βέλτιστης εστίασης στην οποία οι κύκλοι σύγχυσης στο είδωλο είναι πολύ μικροί για να γίνουν αντιληπτοί από το ανθρώπινο μάτι. Έτσι, η φωτογραφία που προκύπτει, δείχνει να είναι καλά εστιασμένη για όλη αυτή την περιοχή αποστάσεων, η βάθος πεδίου. Οι μηχανικοί σχεδιαστές και κατασκευής οπικών διατάξεων ορίζουν το βάθος πεδίου ως την περιοχή των αποστάσεων από τη φωτογραφική μηχανή για την οποία οι κύκλοι σύγχυσης στα προκύπτοντα είδωλα είναι μικρότεροι από εκείνους που μπορεί να διακρίνει το ανθρώπινο μάτι.

Το βάθος πεδίου σχετίζεται στενά με μια ακόμη ποσότητα, το βάθος εστίασης. Παρότι στη συνέχεια δεν θα επιμεινούμε στο βάθος εστίασης, αξιζει τον κόπο να δώσουμε τον οριομό του ώστε να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση. Το βάθος πεδίου αναφέρεται στην περιοχή αποστάσεων μπροστά από το φακό της φωτογραφικής μηχανής, η στο χώρο του αντικειμένου. Αντίστοχα, υπάρχει και ο χώρος πίσω από το φακό, ο χώρος του είδωλου, όπου μπορούμε να τοποθετούμε το φίλμ και να λαμβάνουμε το ευκρινές είδωλο. Το Σχήμα 2 αναπαριστά την εγκάρσια ιομή ενός συστήματος απεικόνισης. Η οριζόντια γραμμή στο κέντρο του σχεδίου αντιπροσωπεύει τον άξονα συμμετρίας του συστήματος του οφαίρικού φακού, και ονομάζεται οπικός άξονας. Με  $s$  ονομειώνεται η απόσταση του αντικειμένου από

το φακό, και με  $s'$  η απόσταση του ειδώλου του απ' αυτόν. Τυπικά, σε μια φωτογραφική μηχανή το φίλμ τοποθετείται στην απόσταση  $s'$ . Ας συμβολίσουμε τη διάμετρο του κύκλου σύγχυσης που μπορεί να γίνει αντιληπτός από το μάτι με  $D$ . Τα αντικείμενα στις θέσεις  $X$  και  $Y$  στο χώρο του αντικειμένου βρίσκονται μέσα στα όρια του βάθους πεδίου. Για να το διαποτώσουμε μπορούμε να παρακολουθήσουμε την πορεία των φωτεινών ακτίνων που εκπορεύονται από τα εν λόγω σημεία. Οι ακτίνες που ξεκινούν από το  $X$ , μετά τη διόδο τους μέσα από το φακό, συγκλίνουν και εστιάζονται στο  $X'$ : οι ίδιες ακτίνες στη συνέχεια αποκλίνουν, έτσι ώστε φτάνοντας στο  $Y'$  να καλύπτουν έναν κύκλο σύγχυσης διαμέτρου  $D$ . Παρά ταύτα, ο κύκλος σύγχυσης που σχηματίζεται πάνω στο φίλμ, σε απόσταση  $s'$  από το φακό, από το φως που προέρχεται από το  $X$ , έχει διάμετρο μικρότερη του  $D$ . Συνεπώς, το αντικείμενο στο  $X$  εμφανίζεται ευκρινές στη φωτογραφία, επειδή βρίσκεται μέσα στα όρια του βάθους πεδίου. Ο ίδιος συλλογισμός ισχύει και για τις φωτεινές ακτίνες που ξεκινούν από το  $Y$ , με τη μόνη διαφορά ότι αυτές εστιάζονται πίσω από το φίλμ και ο δίσκος σύγχυσης σχηματίζεται κατά τη σύγκλισή τους.

Το βάθος εστίασης είναι η περιοχή αποστάσεων κατά μήκος του οπτικού άξονα για την οποία το φως που «απεικονίζεται» στην απόσταση  $s'$  σχηματίζει δίσκο σύγχυσης με διάμετρο μικρότερη του  $D$ . Πρόκειται για την περιοχή εκατέρωθεν του επιπέδου του είδωλου, που αντιστοιχεί στο βάθος πεδίου του χώρου του αντικειμένου. Σημειώστε ότι στο Σχήμα 2, τα  $X'$  και  $Y'$  δεν ορίζουν το βάθος εστίασης αλλά βρίσκονται μέσα στα όρια του.



Σχήμα 2

Εγκάρσια ιομή ενός συστήματος απεικόνισης διαμέσου του άξονα συμμετρίας του. Τα αντικείμενα στις θέσεις  $X$ ,  $Y$  και  $S$  δινούν είδωλα στα  $X'$ ,  $Y'$  και  $S'$  αντίστοιχα.

Πριν αναφερθούμε εκτενέστερα στο βάθος πεδίου, πρέπει να ορίσουμε δύο ακόμη χαρακτηριστικά των φακών, την εστιακή απόσταση και το άνοιγμα φακού ή, όπως έχει επικρατήσει να λέγεται, το διάφραγμα. Η εστιακή απόσταση ενός φακού είναι η απόσταση σ' οποία σχηματίζεται το είδωλο ενός αντικειμένου που βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από το φακό. Το σημείο στο οποίο συγκλίνει και εστιάζεται το φως ονομάζεται εστιά του φακού. Μικρότερη εστιακή απόσταση σημαίνει ότι το φως εστιάζεται σε οημέριο πιο κοντά στο φακό — πρόκειται δηλαδή για έναν πιο ισχυρό φακό. Όταν λέμε ότι το αντικείμενο βρίσκεται σε άπειρη απόσταση, σημαίνει ότι οι ακτίνες που προσπίπουν στο φακό είναι παράλληλες με τον οπικό του άξονα. Στην πράξη, θεωρούμε έως «άπειρη» την απόσταση που είναι 10 πλάσια ως 100 πλάσια της εστιακής απόστασης.

Το διάφραγμα ενός φακού λειτουργεί όπως η ίριδα του ματιού, μεταβάλλοντας τη διάμετρό του και ελέγχοντας έτσι την ποσότητα του φωτός που περνάει από το φακό και φτάνει στο φίλμ. Επομένως, τα μεγάλα διαφράγματα επιτρέπουν φωτογράφιση σε αμυδρό φως. Το διάφραγμα ενός φωτογραφικού φακού περιγράφεται συνήθως σε σχέση με μια ποσότητα που ονομάζεται αριθμητικό άνοιγμα, ή συχνότερα με τον λεγόμενο αριθμό  $f$  (που οι φωτογράφοι συχνά τον αναφέρουν ως στοπ) για την ακρίβεια, ο αριθμός  $f$  παρέχει το βαθμό μεταβολής του δια-

φράγματος και είναι αντιστρόφως ανάλογος του μεγέθους του διαφράγματος του φακού. Για φως που έρχεται από το «άπειρο», ο αριθμός  $f$  ορίζεται ως ο λόγος της εστιακής απόστασης του φακού προς τη διάμετρό του. Συνεπώς, για έναν φακό ορισμένης εστιακής απόστασης, όσο μικρότερος είναι ο αριθμός του  $f$  τόσο μεγαλύτερη είναι η επφάνειά του. Τέλος, για έναν φακό ορισμένης εστιακής απόστασης και για φως που προέρχεται κοντύτερα από το «άπειρο», ο αριθμός του  $f$  είναι τυπικά λίγο μεγαλύτερος, επιτρέποντας να διέλθει λιγότερο φως από το σύστημα. Αυτό το γεγονός, πάντως, έχει μικρή σημασία, και πολύ συχνά αγνοείται.

## Απ' την πλευρά του φωτογράφου

Οι έμπειροι φωτογράφοι γνωρίζουν ότι το βάθος πεδίου εξαρτάται πρωταρχικά από τρεις παραμέτρους ενός συστήματος απεικόνισης: την εστιακή απόσταση του φακού, τον αριθμό  $f$  του φακού και την απόσταση του αντικειμένου από το φακό (έχει σημειωθεί ως  $s$  στο Σχήμα 2). Ενώ πολλά στοιχεία ενός συστήματος απεικόνισης μπορούν να παιζουν κάποιο ρόλο στον προσδιορισμό του βάθους πεδίου, μόνο τα τρία παραπάνω είναι αναγκαίο να ληφθούν υπόψη στις περισσότερες περιπτώσεις.

Το βάθος πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογο της εστιακής απόστασης του φακού της φωτογραφικής μηχανής.

Εάν διατηρήσουμε σταθερό τον αριθμό  $f$  του φακού αλλά και την απόσταση του αντικειμένου από το φακό, μπορούμε να διαπιστώσουμε την επιδραση της εστιακής απόστασης στο βάθος πεδίου. Οι δύο φωτογραφίες στο Σχήμα 3 απεικονίζουν αυτήν ακριβώς την εξάρτηση. Και στις δύο περιπτώσεις, η απόσταση του αντικειμένου — της κάρτας με το γράμμα «M» τυπωμένο πάνω της — από τη μηχανή είναι σταθερή, στα 5 περίπου μέτρα, και ο αριθμός  $f$  του φακού είναι 8 (αυτό συνήθως γράφεται πάνω στο φακό ως  $f/8$ ). Οι κάρτες με τα γράμματα «N» και «F» βρίσκονται 1 μέτρο μπροστά και πίσω, αντίστοιχα, από αυτήν με το «M». Η φωτογραφία του Σχήματος 3α τραβήχτηκε με φακό εστιακής απόστασης 50 mm, ενώ η εστιακή απόσταση του φακού που χρησιμοποιήθηκε για τη φωτογραφία του Σχήματος 3β ήταν 135 mm. Είναι φανερό ότι το βάθος πεδίου μειώθηκε με την αύξηση της εστιακής απόστασης. Η φωτογραφία που τραβήχτηκε με το φακό των 50 mm απεικονίζει βάθος πεδίου δέκα περίπου μέτρων, ενώ αυτή με το φακό των 135 mm ενάμιση περίπου μέτρου. Συμπέρασμα: για τη μεγιστοποίηση του βάθους πεδίου, ελαχιστοποιήστε την εστιακή απόσταση του φακού που χρησιμοποιείτε.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τι συμβαίνει αν διατηρήσουμε σταθερή την εστιακή απόσταση και μεταβάλουμε την απόσταση του αντικειμένου από το φακό. Για την φωτογραφία του

α



β



**Σχήμα 3**

Το βάθος πεδίου ως συνάρτηση της εστιακής απόστασης του φακού. Οι φωτογραφίες τραβήχτηκαν με φακούς εστιακής απόστασης (α) 50 mm και (β) 135 mm.



**Σχήμα 4**

Το βάθος πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης του αντικειμένου από το φακό. Στην εικόνα (a) ο φακός έχει εστιαστεί σε ένα σημείο περίπου 0,5 m μακριά από το φακό. Στην εικόνα (b) ο φακός έχει εστιαστεί σε περίπου 4 m.

Σχήματος 4α, ένας φωτογραφικός φακός εστιακής απόστασης 55 mm εστιάστηκε σε ένα σημείο που απέχει περίπου 0,5 μέτρα απ' αυτόν. Το βάθος πεδίου περιορίζεται σε μερικά εκατόμετρα. Στο Σχήμα 4β, η απόσταση φακού-αντικειμένου είναι μερικά μέτρα. Ενώ τώρα οι αριθμοί πάνω στη μετροταινία είναι πολύ μικροί για να διαβαστούν, όχι μόνο είναι ευκρινής η μετροταινία, αλλά το βάθος πεδίου είναι της τάξης μερικών μέτρων. Συμπέρασμα: για τη μεγιστοποίηση του βάθους πεδίου, μεγιστοποιήστε την απόσταση από το προς φωτογράφιση αντικείμενο.

Τέλος, θα διατρέψουμε την εστιακή απόσταση και την απόσταση φακού-αντικειμένου σταθερές και θα μεταβά-

λουμε τον αριθμό  $f$  του φακού. Και οι δύο φωτογραφίες στο Σχήμα 5 τραβήχτηκαν με φακό εστιακής απόστασης 50 mm και η απόσταση φακού-αντικειμένου παρέμεινε περίπου 2,5 μέτρα (το αντικείμενο ήταν πάλι η κάρτα με το γράμμα «M»). Η φωτογραφία του Σχήματος 5α τραβήχτηκε με φακό αριθμού  $f$  100 με  $f/2,8$ , ενώ αυτή του 5β με  $f/22$ . Γνωρίζοντας ήδη ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός  $f$  του φακού τόσο μικρότερο είναι το διάφραγμά του, είναι φανερό ότι το μικρότερο διάφραγμα οδηγεί σε μεγαλύτερο βάθος πεδίου. Η φωτογραφία για την οποία χρησιμοποιήθηκε ο  $f/22$  έχει βάθος πεδίου περίπου τέσσερα μέτρα, ενώ η φωτογραφία με τον  $f/2,8$  έχει βάθος πεδίου μικρότερο του ενός μέτρου. Συμπέρα-

σμα: για τη μεγιστοποίηση του βάθους πεδίου μεγιστοποιήστε τον αριθμό  $f$  του φακού, ή, ισοδύναμα, ελαχιστοποιήστε το διάφραγμα.

### Απ' την πλευρά του μηχανικού σχεδίασης και κατασκευής οπτικών διατάξεων

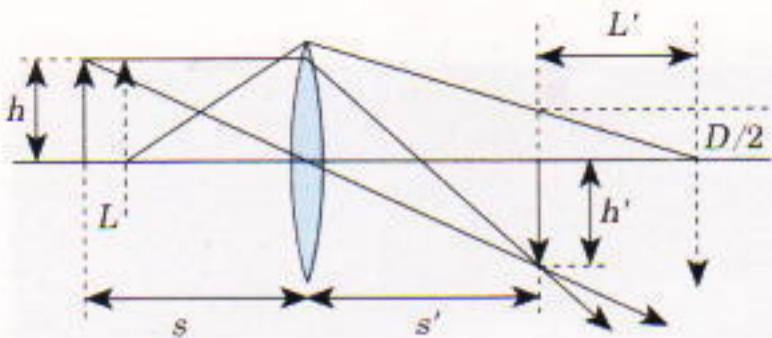
Έχοντας ήδη προσδιορίσει τις παραμέτρους που μπορούμε να μεταβάλλουμε για να ελέγχουμε το βάθος πεδίου, θα ήταν χρήσιμο να κατανοήσουμε γιατί αυτές οι παράμετροι ενός συστήματος απεικόνισης επηρεάζουν με τέτοιον τρόπο το βάθος πεδίου.

Ένας μηχανικός σχεδίασης και κατασκευής οπτικών διατάξεων ερμηνεύει την εξάρτηση του βάθους πεδίου



**Σχήμα 5**

Το βάθος πεδίου ως συνάρτηση του διαφράγματος του φακού ( $f$ ) και του αριθμού  $f$ . Οι αριθμοί  $f$  που χρησιμοποιήθηκαν στις δύο φωτογραφίες ήταν (a)  $f/2,8$  και (b)  $f/22$ .



Σχήμα 6

Εγκάριοι ιωμήνος συστήματος απεικόνισης διαμέσου τού άξονα συμμετρίας του. Ο φακός σχηματίζει το είδωλο ύψους  $h'$  ενός αντικειμένου ύψους  $h$ . Αν το αντικείμενο μετακινηθεί κατά διάστημα  $L$  κατά μήκος του οπτικού άξονα, προκαλείται μετακίνηση του ειδώλου κατά  $L'$  κατά μήκος του ίδιου άξονα.

από την εστιακή απόσταση του φακού ως συνέπεια ενός μεγέθους που ονομάζεται διαμήκης μεγέθυνση. Ένα σύστημα απεικόνισης προκαλεί δύο είδη μεγέθυνσης στο είδωλο που παράγει. Η πιο γνωστή είναι η εγκάρσια (ή πλευρική) μεγέθυνση. Στην πραγματικότητα, είναι τόσο κοινή που όταν κάποιος αναφέρεται στη μεγέθυνση ενός συστήματος απεικόνισης είναι σχεδόν βέβαιο ότι αναφέρεται στην εγκάρσια μεγέθυνση δινεται από το λόγο του ύψους του ειδώλου προς το ύψος του αντικειμένου και είναι μεγαλύτερη της μονάδας κατ' απόλυτη τιμή εάν το είδωλο είναι μεγαλύτερο από το αντικείμενο. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 6, όπου  $h$  είναι το ύψος του αντικειμένου και  $h'$  το ύψος του ειδώλου του. Η εγκάρσια μεγέθυνση, λοιπόν, είναι  $M = h'/h$ . Χρησιμοποιώντας τα όμοια τρίγωνα του Σχήματος 6, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε ότι, κατ' απόλυτη τιμή,  $M = s'/s$ .

Η διαμήκης μεγέθυνση, που σχετίζεται στενά με την εγκάρσια, συσχετίζει αποστάσεις κατά μήκος του οπτικού άξονα στο χώρο του αντικειμένου με αποστάσεις κατά μήκος του οπτικού άξονα στο χώρο του ειδώλου. Για παράδειγμα, ένα αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση  $s$  μπροστά από το φακό, στο Σχήμα 6, και το είδωλό του σχηματίζεται σε απόσταση  $s'$  πίσω από το φακό. Υποθέστε ότι το αντικείμενο μετατοπίζεται κατά μικρό διάστημα  $L$  προς το φακό. Τότε, η διαμήκης μεγέθυνση  $M_L$  εκφράζει τη σχέση μεταξύ του  $L$  και της μετατόπισης  $L'$  της θέσης του ειδώλου:  $M_L = L'/L$ . Χρησιμοποιώντας λίγο ολοκληρωτικό λογισμό και άλγεβρα, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$M_L = \frac{s'^2}{s^2}. \quad (1)$$

Οι λεπτομέρειες για την απόδειξη αυτού του τύπου είναι απλές, αλλά πολλές: πάντως μπορείτε να τις βρείτε σε εισαγωγικά βιβλία οπτικής. Είναι ομαντικό να θυμάστε ότι το μέτρο της διαμήκους μεγέθυνσης ισούται με το τειχάργων της πλευρικής μεγέθυνσης.

Με τη βοήθεια του Σχήματος 6 μπορούμε να αντιληφθούμε τη σχέση μεταξύ του βάθους πεδίου και της διαμήκους μεγέθυνσης. Όπως και πριν, υποθέτουμε ότι το φίλμ βρίσκεται στο επίπεδο βέλτιστης εστίασης, σε απόσταση  $s'$  πίσω από το φακό. Το αντικείμενο που βρίσκεται μετατοπισμένο κατά  $L$  προς το φακό σε σχέση με την αρχική του θέση, θα δίνει είδωλο σε απόσταση  $L'$  πίσω από το φίλμ. Το φως που θα συγκλίνει στο μετατοπισμένο είδωλο θα σχηματίσει έναν κύκλο σύγχυσης στο επίπεδο του φίλμ. Όο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $L'$  τόσο μεγαλύτερος θα είναι και ο αντίστοιχος κύκλος σύγχυσης πάνω στο φίλμ, και τόσο πο εύκολα θα μπορεί να διακρίνει αυτή την κηλίδα το ανθρώπινο μάτι. Εφόσον μεγάλη τιμή της διαμήκους μεγέθυνσης συνεπάγεται μεγάλη μετατόπιση της θέσης του ειδώλου ( $L'$ ) για μικρή μετατόπιση της θέσης του αντικειμένου ( $L$ ), εξυπάκουεται ότι μεγάλη τιμή της  $M_L$  οδηγεί σε μικρό βάθος πεδίου. Δηλαδή, ακόμη και μικρή μετατόπιση της θέσης του αντικειμένου θα προκαλέσει έναν κύκλο σύγχυσης πάνω στο φίλμ που θα μπορεί να διακρίνεται με γυμνό μάτι.

Αλλά ποια είναι η σχέση της εστιακής απόστασης του φακού με όλα αυτά; Έχοντας αποδείξει τη σχέση μεταξύ του βάθους πεδίου και της διαμήκους μεγέθυνσης, πρέπει τώρα να συσχετίσουμε τη διαμήκη μεγέθυνση με την εστιακή απόσταση. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε ένα από τα απλούτερα συμπεράσματα της μελέτης των συστημάτων απεικόνισης. Στα πρώτα στάδια της σχεδίασης ή ανάλυσης ενός οπτικού συστήματος, οι σχεδιαστές και οι μηχανικοί συχνά υποθέτουν πως εί-

ναι τέλειο. Αυτή η παραδοχή τους επιτρέπει να μελετούν ορισμένα από τα σημαντικά χαρακτηριστικά του χωρίς να απορροφανατολίζονται από την πληθώρα των λεπτομερειών που θα αντιμετωπίσουν στην πορεία της εργασίας τους. Σ' αυτά τα πλαίσια, λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε την απλή σχέση

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_\varphi} \quad (2)$$

(όπου με  $f_\varphi$  συμβολίζουμε την εστιακή απόσταση του φακού), και η οποία αναφέρεται συχνά ως εξίσωση των λεπτών φακών. Από την εξίσωση (2) παίρνουμε εύκολα

$$\frac{s'}{s} = \frac{f_\varphi}{s - f_\varphi}, \quad (3)$$

που δίνει την εγκάρσια μεγέθυνση συναρτήσει της εστιακής απόστασης και της απόστασης φακού-αντικειμένου. Συνδυάζοντάς την με την εξίσωση (1), προκύπτει

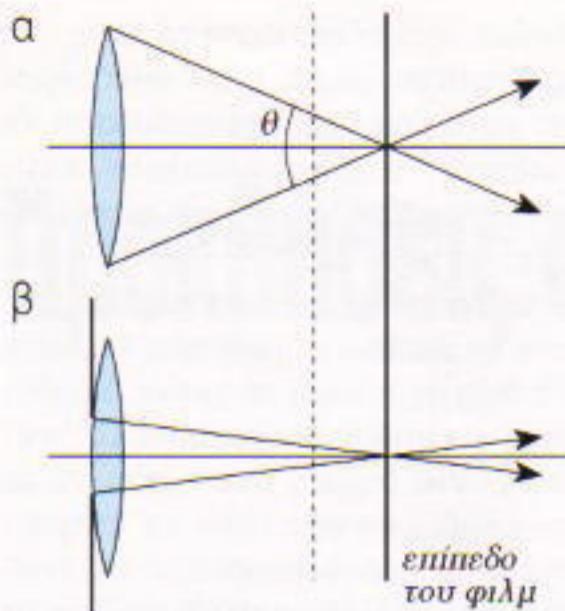
$$M_L = \frac{s'^2}{s^2} = \frac{f_\varphi^2}{(s - f_\varphi)^2}. \quad (4)$$

Αυτή η εξίσωση συσχετίζει ρητά τη διαμήκη μεγέθυνση με την εστιακή απόσταση του φακού. Μπορούμε μάλιστα να την απλουστεύσουμε περισσότερο αναγνωρίζοντας ότι στις περισσότερες περιπτώσεις  $s \gg f_\varphi$ , οπότε να αγνοήσουμε τον όρο  $f_\varphi$  στον παρονομαστή. Έτοιμοι

$$M_L = \frac{f_\varphi^2}{s^2}. \quad (5)$$

Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ καλή για τις περισσότερες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ένα αντικείμενο απέχει απόσταση  $s = 2,5$  m από φακό εστιακής απόστασης  $f_\varphi = 50$  mm, το σφάλμα που υπεισέρχεται λόγω της προσέγγισης είναι της τάξης του 2% μόνο.

Η σχέση μεταξύ της διαμήκους μεγέθυνσης και της εστιακής απόστασης είναι τώρα σαφής. Όταν αυξάνεται η εστιακή απόσταση του φακού αυξάνεται και η διαμήκης μεγέθυνση. Είδαμε όμως πως όταν αυξάνεται η διαμήκης μεγέθυνση, ελαττώνεται το βάθος πεδίου. Ετοιμοι ανακαλύπτουμε τη βάση των παραπρήσων του φωτογράφου: για τη μεγιστοποίηση του βάθους πεδίου πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η διαμήκης μεγέθυνση, και αυτό μπορεί να πραγμα-



**Σχήμα 7**

Το βάθος πεδίου ως συνάρτηση του σχετικού ανοίγματος του φακού. Η στερεά γωνία του κώνου φωτός, το οποίο συγκλίνει για να σχηματίσει το ειδώλο, ελέγχεται από την τιμή του διαφράγματος.

τοποιηθεί με την ελαχιστοποίηση της εστιακής απόστασης.

Μπορούμε επίσης να κατανοήσουμε την εξάρτηση του βάθους πεδίου από την απόσταση  $s$  αντικειμένου φακού με τη βοήθεια της διαμήκους μεγέθυνσης. Από την εξίσωση (5) βλέπουμε πως όταν αυξάνεται το  $s$ , η διαμήκης μεγέθυνση μειώνεται. Αυτό συμφωνεί με τις παρατηρήσεις του φωτογράφου. Για να μεγιστοποιηθεί το βάθος πεδίου πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η διαμήκης μεγέθυνση, και αυτό μπορεί να πραγγιματοποιηθεί με τη μεγιστοποίηση της απόστασης του αντικειμένου από τον φακό.

Για να κατανοήσουμε την επίδραση του αριθμού  $f$  —ή, αν θέλετε, του διαφράγματος του φακού της φωτογραφικής μηχανής— στο βάθος πεδίου, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σειρά των εξισώσεων από (1) έως (5), διότι η εξίσωση (2) αφορά μόνο τις θέσεις στοιχείων του συστήματος απεικόνισης κατά μήκος του οπτικού άξονα. Χαρακτηριστικά του συστήματος που είναι εκτός του οπτικού άξονα, όπως το διάφραγμα, δεν συμπεριλαμβάνονται στις παραδοχές που οδηγούν στην εξίσωση (2). Εντούτοις, η σχέση μεταξύ του βάθους πεδίου και του διαφράγματος περιγράφεται εύκολα με τη βοήθεια του κύκλου σύγχυσης. Στο Σχήμα 7a, φως που καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια του φακού εστιάζεται πάνω στο φίλμ. Σε τρεις διαστάσεις, αυτό σημαίνει ότι ένας κώνος φωτός, μεγάλης γωνίας  $\theta$ , συγκλίνει

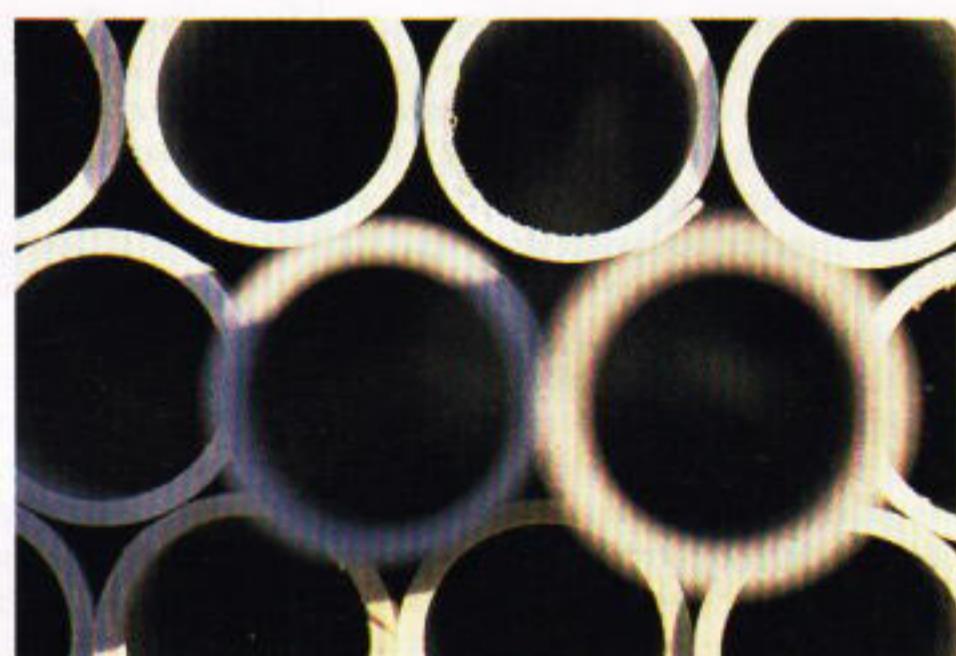
στο επίπεδο του φίλμ. Η εν λόγω κατάσταση διοχετεύει αφθονό φως σε ένα μοναδικό σημείο πάνω στο φίλμ. Αυτή η κατάσταση όμως οδηγεί επίσης σε έναν κώνο φωτός που αποκλίνει γρήγορα καθώς το είδωλο κινείται εμπρός ή πίσω από το επίπεδο βέλτιστης εστίασης. Η διάμετρος του κύκλου σύγχυσης, δηλαδή, αυξάνεται ραγδαία κατά μήκος του οπτικού άξονα. Το φως από αντικείμενα που πλησιάζουν ή απομακρύνονται ελαφρά απ' το φακό εστιάζεται υπό μια τόσο ευρεία γωνία ώστε οι κύκλοι σύγχυσης διακρίνονται με γυμνό μάτι. Το βάθος πεδίου μπορεί να αυξηθεί με τη μείωση του μεγέθους του κώνου φωτός. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μείωση του διαφράγματος του φακού αν διατηρηθούν σταθερές όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές. Το Σχήμα 7b δείχνει ότι για μικρό διάφραγμα το μέγεθος του κύκλου σύγχυσης αυξάνεται πολύ αργά κατά μήκος του οπτικού άξονα. Αυτό, βεβαίως, οδηγεί σε μεγάλο βάθος πεδίου. Έτοιμη, για να μεγιστοποιηθεί το βάθος πεδίου πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ο ρυθμός αύξησης του μεγέθους του κύκλου σύγχυσης. Και αυτό επιτυγχάνεται με ελαχιστοποίηση του διαφράγματος του φακού (ή μεγιστοποίηση του αριθμού  $f$ ), όπως θα πρότεινε και κάθε φωτογράφος.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ενώ η εστιακή απόσταση, η απόσταση αντι-



**Σχήμα 8**

Μικρό βάθος πεδίου. Τούτο έχει αποιέλεομα να απεικονίζεται ευκρινώς μόνο το λουλούδι.



**Σχήμα 9**

Αντικείμενα που βρίονται εκτός του επιπέδου βέλτιστης εστίασης. Οι δύο σωλήνες που εξέχουν μπροστά από τους άλλους φαίνονται θαμποί.

κειμένου-φακού και ο αριθμός  $f$  είναι οι πιο σημαντικοί παράγοντες στον προσδιορισμό του βάθους πεδίου, και άλλα χαρακτηριστικά ενός συστήματος απεικόνισης συνεισφέρουν σ' αυτό. Παραδείγματος χάρη, η ποιότητα σχεδίασης ενός φακού και η ακρίβεια με την οποία εκτελείται αυτή η σχεδίαση. Παρ' όλα αυτά, αυτές οι επιδράσεις «υψηλότερης τάξης» είναι δυνατόν να αγνοηθούν όταν εξετάζουμε φωτογραφικές μηχανές του εμπορίου και παρόμοια συστήματα.

## Χρησιμοποιώντας το βάθος πεδίου

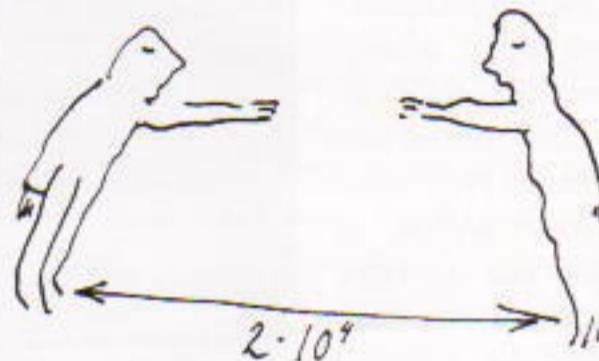
Οταν κάποιος καταλάβει όχι μόνο τι επηρεάζει το βάθος πεδίου αλλά και

γιατί, είναι βέβαιο ότι θα καταφέρει να δημιουργήσει καταπληκτικές φωτογραφίες. Η ικανότητα ελέγχου του βάθους πεδίου συνεπάγεται την ικανότητα δημιουργίας ποικίλων ειδικών εφέ. Προσωπικά, χρησιμοποιώντας το βάθος πεδίου κατάφερα να τραβήξω εξαιρετικές φωτογραφίες. Το Σχήμα 8 είναι ένα παράδειγμα χρήσης πολύ μικρού βάθους πεδίου ώστε να τονιστεί ένα αντικείμενο που καταλαμβάνει μικρό μέρος της φωτογραφίας. Όλη η χλόη και τα αγριόχορτα του φόντου συγχωνεύονται, και το καθαρά εστιασμένο λουλούδι μοιάζει να ξεπειάγεται από την εικόνα. Το Σχήμα 9 είναι η φωτογραφία της άκρης ενός σωρού πλαστικών σωλήνων διαμέτρου 3 ίντσών. Κατά τη μεταφορά των σωλήνων, δύο από αυτούς είχαν μετατοπιστεί και εξείχαν πέρα από το επίπεδο των άκρων των υπόλοιπων. Ο ένας εξείχε 20 περίπου εκατοστόμετρα και ο άλλος 60. Οι δύο σωλήνες φαίνονται θαμποί, καθώς τα άκρα τους εκτείνονται πέρα από το επίπεδο βέλτιστης εστίασης. Ας αναφερθούμε πάλι στο Σχήμα 1. Στηρίζεται στο εφέ που απεικονίζει το Σχήμα 9, αλλά είναι ορατός και ένας δεύτερος σωρός σωλήνων. Την φωτογραφία του Σχήματος 1 την τράβηξα ενώ βρισκόμουν σε απόσταση μισού περίπου μέτρου από την άκρη του πρώτου σωρού. Η φωτογραφική μηχανή ήταν εστιασμένη στα άκρα των σωλήνων του δεύτερου σωρού που φαίνονταν μέσα από τον πλησιέστερο σωλήνα του πρώτου σωρού. Οι καθαρά εστιασμένοι σωλήνες απειχαν περίπου 5 μέτρα από τη φωτογραφική μηχανή μου.

Είναι συναρπαστικό το γεγονός ότι το πολύπλοκο φαινόμενο του βάθους πεδίου μπορεί να περιγραφεί με σχετικά απλούς όρους και με τη χρησιμοποίηση βασικής θεωρίας και μαθηματικών. Έχοντας κατανοήσει το βάθος πεδίου μπορείτε πια να κοιτάζετε φωτογραφίες και άλλες εικόνες με κριτικό μάτι, γνωρίζοντας ότι τα ειδικά εφέ δεν περιορίζονται στις κινηματογραφικές ταινίες.

## ⇒ Συνέχεια από τη σελ 21

της φιλοσοφικής του θέσης. Είτε μας αρέσει είτε όχι, όλοι έχουμε προκαταλήψεις σχετικά με τη φύση του σύμπαντος στο οποίο κατοικούμε. Ας δούμε λοιπόν πού οδηγείται ο αισιό-



δοξος και πού ο απαισιόδοξος. Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $f_p \approx 0,2$  (θυμηθείτε ότι σχεδόν τα μισά άστρα του Γαλαξία θεωρούνται διπλά, τουλάχιστον, συστήματα) και  $n_e \approx 0,1$ . Για τους υπόλοιπους τέοσερις αριθμούς ο αισιόδοξος επλέγει αντιστοίχως 1,0, 1,0, 0,5, και  $10^6 / 10^{10} = 10^{-4}$ , απ' όπου προκύπτει  $N \approx 10^5$  με  $10^6$ . Από την άλλη πλευρά, ο απαισιόδοξος επλέγει για τους τελευταίους τέοσερις αριθμούς τις τιμές 0,1, 0,1, 0,1 και  $10^4 / 10^{10} = 10^{-6}$ , οπότε προκύπτει  $N \approx 10$ . Εσείς τι ποιεύετε;

Σε αυτό το σημείο, μια επίκαιρη παρατήρηση: είτε αφορά μια διαφωνία είτε ένα μαθηματικό μοντέλο είτε απλώς μια εικασία, ΕΝΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΕΧΕΙ ΤΟΣΗ ΛΞΙΑ ΟΣΗ ΚΑΙ Η ΑΣΘΕΝΕΣΤΕΡΗ ΥΠΟΘΕΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ.

24. Μέση απόσταση μεταξύ δύο πολιτισμών. Ο Γαλαξίας μας έχει το σχήμα ενός δίσκου διαμέτρου  $10^5$  ετών φωτός (ε.φ.) και «πάχους» περίπου  $10^4$  ε.φ. Τα άστρα είναι προφανώς περισσότερο συγκεντρωμένα στο γαλαξιακό κέντρο, αλλά μπορούμε να εκτιμήσουμε χοντρικά ένα άνω φράγμα της μέσης απόστασης μεταξύ δύο πολιτισμών διαιρώντας τον όγκο του Γαλαξία  $[\pi(10^5)^2 / 4] \cdot 10^4 \approx 10^{14}$  κυβικά ε.φ. με την τιμή που βρίσκεται ο αισιόδοξος,  $N \approx 10^6$ . (Υπενθυμίζουμε ότι  $1$  ε.φ.  $\approx 10^{13}$  km είναι η απόσταση που διανύει το φως σε ένα έτος.) Εξάγοντας την κυβική ρίζα του  $10^8$  παίρνουμε 500 ε.φ. περίπου. Από την άλλη πλευρά, αν  $N \approx 10$  (η εκτίμηση του αισιόδοξου), η απόσταση είναι  $2 \cdot 10^4$  ε.φ.

25. Πόσες επισκέψεις διαστημο-

πλοίων αναμένονται ανά έτος στη Γη; Υποθέτουμε ότι κάθε πολιτισμός έχει κατά μέσο όρο τη δυνατότητα να εκτοξεύει  $s$  διαστημόπλοια κάθε χρόνο. Αν  $N \approx 10^6$  —η ποι αισιόδοξη εκτίμησή μας— τότε (σε σταθερή κατάσταση) θα ταξιδεύουν και θα φτάνουν σε κάποιο σημείο του Γαλαξία  $10^6$  διαστημόπλοια το χρόνο. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν περίπου  $10^{11}$  ενδιαφέροντα ομεία που αξίζει να τα επισκεφθεί κανείς (όλα τα άστρα!). Τότε κάθε χρόνο μπορούμε να αναμένουμε  $10^6 s / 10^{11} = 10^{-5}$  s αφίξεις σε ένα δεδομένο «ενδιαφέρον σημείο». Ας δεχτούμε την υπόθεση ότι κάθε χρόνο γίνονται στη Γη ν τέτοιες επισκέψεις. Τότε ο μέσος όρος εκτοξεύσεων  $s$  ανά έτος θα είναι  $10^5$  v, ή ένα σύνολο  $10^{11}$  v εκτοξεύσεων σε όλο το Γαλαξία κάθε χρόνο. Αν  $v = 1$  έως  $10^3$ , έχουμε αντίστοιχα  $10^{11}$  έως  $10^{14}$  εκτοξεύσεις ανά έτος. Κάτι τέτοιο φαίνεται να έχει μάλλον μεγάλο κόστος, ειδικά αν προσπαθήσετε να υπολογίσετε το υλικό που απαιτείται για να κατασκευαστούν τέτοιες ποσότητες διαστημόπλοιων!

Α, ναι —κάτι ακόμα. Στο πρόβλημα 14 ρώτησα (ανάμεσα σ' άλλα) ποιο ήταν το όνομα του οδηγού του λεωφορείου. Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να είναι John. Γιατί; Αρκεί μια απλή εκτίμηση. Παίρνουμε ένα «τυπικό» δείγμα —τα 28 μέλη του μόνιμου διδακτικού προσωπικού στο Τμή-



μα Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου μου. Επτά από μας, έχουμε ως μικρό όνομα το John. Από αυτό το γεγονός καταλήγω στο αναπόφευκτο συμπέρασμα ότι ένα άτομο στα τέσσερα (ναι, περιλαμβάνοντας και τις γυναίκες) ονομάζεται John. Φυσικά, αυτό είναι μόνο μια εκτίμηση...

Ο John A. Adam διδάσκει μαθηματικά στο Old Dominion University στο Νόρφολκ της Βιρτζίνια. Στον ελεύθερο χρόνο του δεν οδηγεί λεωφορείο.

Ο Mark L. Biermann κατέλαβε πρόσφατα τη θέση του αναπληρωτή καθηγητή φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Μπουένα Βίστα στο Στορμ Λέικ της Αϊόβα.

# Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

## Μαθηματικά

M46

**Διαδοχική ευτυχία.** Θα αποκαλούμε ευτυχή έναν θετικό ακέραιο όταν μπορούμε να επιλέξουμε οριομένο πλήθος ψηφίων από το δεκαδικό του ανάπτυγμα έτσι ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το άθροισμα των υπόλοιπων ψηφίων. (a) Βρείτε τον μικρότερο ευτυχή αριθμό  $k$  που ακολουθείται από ευτυχή αριθμό. (β) Υπάρχουν τρεις διαδοχικοί ευτυχείς αριθμοί; (N. Zilberberg)

M47

**Συγκλίνουσες κάθετες.** Θεωρούμε ένα σημείο  $P$  τετραγώνου  $A_1A_2A_3A_4$  και το συνδέουμε με τις κορυφές του. Αποδείξτε ότι οι κάθετες που φέρουμε από τα  $A_1, A_2, A_3, A_4$  προς τις ευθείες  $PA_2, PA_3, PA_4, PA_1$  αντιστοιχα συγκλίνουν. (A. Vilenkin)

M48

**Ισαπέχουσες ρίζες.** Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές της τριτοβάθμιας εξίσωσης  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  ώστε οι τρεις ρίζες της να σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο; (M. Bezborknikov)

M49

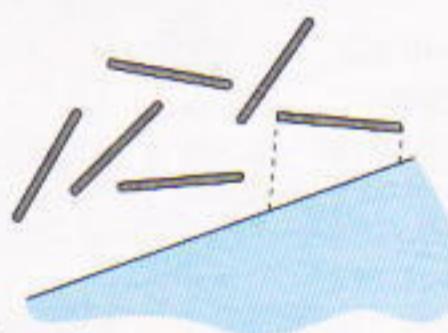
**Η εξαφάνιση των 2.** Γράφουμε σε έναν κύκλο  $n$  αριθμούς ίσους με 0, 1 ή 2. Οι αριθμοί υπόκεινται ταυτόχρονα στον εξής μετασχηματισμό: αντικαθιστούμε όλα τα 2 με 0 και έπειτα αυξάνουμε όλους τους αριθμούς που βρίσκονται δίπλα τους (προς τα δεξιά τους) κατά 1. Αρχικά έχουμε  $k \geq 1$  αριθμούς ίσους με 2. (α) Πόσοι τέτοιοι μετασχηματισμοί αρκούν ώστε να εξαφανίσουμε όλα τα 2; (β) Ας υπο-

θέσουμε επιπλέον ότι αρχικά δεν υπάρχουν μηδενικά. Αποδείξτε ότι στο τέλος θα υπάρχουν  $k$  μονάδες και  $n - k$  μηδενικά.

(N. Alexandru, Roumania)

M50

**Τα μαθηματικά της μεταφοράς της ξυλείας.** Στην ευθύγραμμη όχθη ενός ποταμού έχει απλωθεί ένα πλήθος κορμών δέντρων. Κάθε κορμός σχηματίζει με την όχθη του ποταμού γωνία μικρότερη των  $45^\circ$  (οι κορμοί είναι ευθύγραμμα τμήματα, ξένα μεταξύ τους). Αποδείξτε ότι μπορούμε να κυλήσουμε ανεμπόδιστα τουλάχιστον έναν από τους κορμούς ως το ποτάμι ακολουθώντας κατεύθυνση κάθετη προς τον κορμό (βλ. Σχήμα 1) χωρίς να χρειαστεί να αλλάξουμε αυτή την κατεύθυνση. (V. Il'yichev)

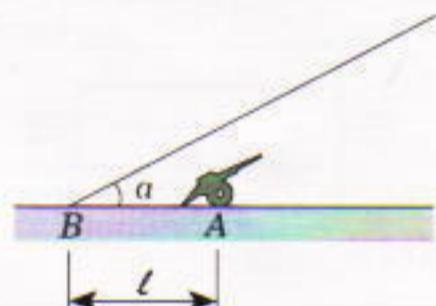


Σχήμα 1

## Φυσική

Φ 46

**Στα χαρακώματα.** Ενα αντιαεροπορικό πυροβόλο βρίσκεται σε ένα βαθύ καταφύγιο, το στέγαστρο του οποίου είναι κεκλιμένο και σχηματίζει με το οριζόντιο έδαφος γωνία  $\alpha$  (Σχήμα 2). Το πυροβόλο έχει τοποθετηθεί στη θέση  $A$  η οποία απέχει από τη βάση  $B$  του στέγαστρου απόσταση  $\ell$ . Η αρχική ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται το πυροβόλο κάθε βλήμα είναι  $v_0$ . Υποθέτοντας ότι η τροχιά των βλη-



Σχήμα 2

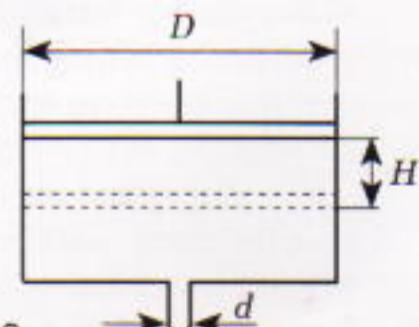
μάτων βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του σχήματος, υπολογίστε το μέγιστο βεληνεκές τους. (S. Krotov)

Φ47

**Ατομική μπαταρία.** Κάθε στοιχείο μιας ατομικής μπαταρίας είναι ένας πυκνωτής, ο ένας οπλισμός του οποίου καλύπτεται από ραδιενέργο υλικό που εκπέμπει ακτίνες άλφα, με ταχύτητα  $v_0 = 2,2 \cdot 10^6$  m/s. Βρείτε την ΗΕΔ κάθε τέτοιου στοιχείου, δεδομένου ότι το πηλίκο του φορτίου προς τη μάζα του σωματιδίου άλφα είναι  $k = 4,8 \cdot 10^7$  C/kg. (A. Grigorenko)

Φ48

Στη βάση ενός κυλινδρικού δοχείου που κλείνεται με επίπεδο έμβολο διαμέτρου  $D$  υπάρχει μια θηλή, μέσα στην οποία παραμένει μικρή ποσότητα νερού (Σχήμα 3). Η διάμετρος της



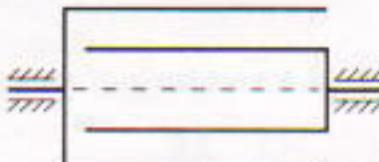
Σχήμα 3

θηλής είναι  $d = 2$  mm. Όταν το έμβολο κατεβαίνει κατά  $H = 10$  cm υπό σταθερή θερμοκρασία, η στάθμη του νερού στη θηλή ανέρχεται κατά  $h =$

1 mm. Υπολογίστε την τάση κορεμένων ατμών στη θερμοκρασία των 20°C. (V. Belonuchkin)

#### Φ49

*Κύλινδροι και μαγνητικά πεδία.* Δύο μακριοί και με λεπτά τοιχώματα κυλινδρικοί σωλήνες από μονωτικό υλικό έχουν τη δυνατότητα να περιστρέφονται ελεύθερα γύρω από έναν κοινό άξονα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Η ακτίνα του εξωτερικού σωλήνα είναι διπλάσια της ακτίνας



Σχήμα 4

του εσωτερικού, αλλά και οι δύο έχουν ίδια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Θέτουμε σε κίνηση τον εξωτερικό κύλινδρο ώστε να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Ποιο είναι το μέτρο και η φορά τής ταχύτητας με την οποία αναγκάζεται να περιστραφεί ο εσωτερικός κύλινδρος; (V. Mikhaylov)

#### Φ50

*Παράξενος φακός.* Ένας κύλινδρος ακτίνας  $R = 5$  cm αποτελείται από δύο γυάλινους ημικύλινδρους, καθένας από τους οποίους έχει συντελεστή διάθλασης  $n = 2$ . Οι επίπεδες επιφάνειες των ημικύλινδρων βρίσκονται σε απόλυτη επαφή. Χωρίς να αποχωρίσουμε τους δύο ημικύλιν-

δρους, τους περιστρέφουμε έτοι ώστε οι άξονές τους να γίνουν κάθετοι μεταξύ τους. Μια λεπτή κυλινδρική δέσμη φωτός κατευθύνεται προς την κυρτή επιφάνεια του ενός ημικυλίνδρου με διεύθυνση κάθετη προς την επίπεδη επιφάνειά του· διέρχεται από τον πρώτο ημικύλινδρο, προσπερνά το σημείο τομής των αξόνων των ημικύλινδρων και εξέρχεται από την κυρτή επιφάνεια του δεύτερου ημικύλινδρου. Τι μορφή (σχήμα) έχει η εξερχόμενη δέσμη; Κατά πόσο θα έχει αυξηθεί η εγκάρσια τομή της σε απόσταση  $L = 1$  m από το οπτικό σύστημα; (A. Zilberman)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

ΜΟΛΕΚΥΛΟΦΟΡΙΣΗ

**Russell Stannard**

## Ο Θείος Αλβέρτος και ο κόσμος των κβάντων

Πρόκειται για την πιο πρόσφατη — και πιο έλκυστική — περιπέτεια του διάσημου επιστήμονα, του Θείου Αλβέρτου. Μπείτε μαζί με την ανιψιά του, την Άλικη Νοητού, στη μυστηριώδη φυσαλίδα σκέψης του Θείου Αλβέρτου, και συνοδεύτε την στην απίστευτη περιπλάνησή της στον κόσμο των κβάντων. Πιείτε μαζί της το μαγικό ποτό που σε συρρικνώνει, και γνωρίστε από κοντά το μικροσκοπικό σύμπαν των κουάρκ και των ηλεκτρονίων. Βοηθήστε την Άλικη και τον Άσπρο Κούνελο να εξερευνήσουν τη θαυμαστή χώρα του φωτός και της ύλης, όπου τίποτε δεν είναι όπως φαίνεται. Ακόμη και σήμερα, οι επιστήμονες δεν μπορούν να εξηγήσουν τις ανακαλύψεις τους!

Ποιος θα λύσει, λοιπόν, τους κβαντικούς γρίφους; Μήπως εσείς; Καλού-κακού όμως προσέχετε τη Βασίλισσα Κόπτα, γιατί μπορεί να σας κόψει το κεφάλι μέχρι να πείτε κύμινο.

Σελ.: 144, 2.900 δρχ.

Εκδόσεις κάτοπτρο

Έκτος από την περιπλάνηση στον κόσμο των κβάντων, μπορείτε να εξερευνήσετε μαζί με τους ήρωες του Stannard και άλλα σιναρπαστικά φαινόμενα του κόσμου μας, μελετώντας τα βιβλία του:

**Ο ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΙ Ο ΧΩΡΟΣ ΤΟΥ ΘΕΙΟΥ ΑΛΒΕΡΤΟΥ,**  
όποιο θα γνωρίστε την ειδική θεωρία της σχετικότητας.  
**ΟΙ ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΚΑΙ Ο ΘΕΙΟΣ ΑΛΒΕΡΤΟΣ**  
με θέμα τη γενική θεωρία της σχετικότητας.  
**ΤΑ ΧΙΑΛΑ ΚΑΙ ΕΝΑ ΜΥΣΤΗΡΙΑΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ,**  
όπου θα ανακαλύψετε τη γοητεία της φύσης σε όλο της το πεγαλείο.

# Ζευγάρια με διαφορετικό άθροισμα

Ξανασυναντώντας ένα παλιό πρόβλημα

George Berzsenyi

**Σ**Ε ΤΟΥΤΟ ΤΟ ΤΕΥΧΟΣ ΘΑ ΗΘΕΛΑ ΝΑ ξαναθυμίσω ένα παλιό πρόβλημα που έθεσα (ως Πρόβλημα 547) στη στήλη μου “Competition Corner” τον Δεκέμβριο του 1980 στο περιοδικό *Mathematics Student* (έχει διακόψει πα την έκδοσή του). Εκείνη την εποχή αγνοούσα ότι είχε αντιμετωπιστεί ήδη μια απλούστερη παραλλαγή του προβλήματος στο *The Fibonacci Quarterly* και ότι ένα οχετικό πρόβλημα είχε τεθεί στη Βρετανική Μαθηματική Ολυμπίαδα του 1979. Αν γνώριζα αυτά τα πράγματα θα ήμουν λιγότερο φιλόδοξος στην αρχική μου διατύπωση:

Έστω  $N$  ένα σύνολο δώδεκα θετικών ακεραίων τέτοιων ώστε για διαφορετικά στοιχεία  $a, b, c, d$  του  $N$  να ισχύει  $a + b \neq c + d$ . Αποδείξτε ότι το μεγαλύτερο στοιχείο του  $N$  είναι μεγαλύτερο του 67.

Εκείνη την εποχή θεωρούσα ότι το 67 είναι ένα εύλογο κατώτερο φράγμα, αφού το καλύτερο  $N$  που μπορούσα να κατασκευάσω ήταν το  $\{1, 2, 3, 5, 8, 21, 29, 37, 46, 60, 71, 83\}$ . Δυστυχώς υπήρχε ένα σφάλμα στη λύση μου και έτοιμη ήταν να αντικαταστήσω το 67 με το 35 για να είναι πιο λογικό το πρόβλημα. Οδηγήθηκα στην επιλογή του 35 παρατηρώντας ότι υπάρχουν εξήντα έξι διαφορετικά άθροισματα, με το μικρότερο από αυτά να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του  $3 = 2 + 1$ , και επομένως οι τιμές τους κυμαίνονται —στην ιδιαίτερη περίπτωση— από το 3 έως το 68. Αφού το 68 πρέπει να είναι το άθροισμα των δύο μεγαλύτερων μελών του  $N$ , γίνεται αμέσως φανερό ότι το μέγιστο στοιχείο του  $N$  πρέπει να είναι τουλάχιστον 35, και αρκεί λίγη μόνο σκέψη για να δούμε ότι πρέπει να είναι

μεγαλύτερο του 35. Η πρώτη μου πρόκληση προς τους αναγνώστες είναι να αναπτύξουν την απαιτούμενη επιχειρηματολογία.

Εκείνη την εποχή είχα την τύχη να συμμετέχουν στο πρόγραμμά μου επτά από τους οκτώ νικητές της Μαθηματικής Ολυμπίαδας των ΗΠΑ του 1980, καθώς και πολλοί άλλοι εξαιρετικά ταλαντούχοι μαθητές. Οι περισσότεροι δεν αποδέχτηκαν το 35 ως την καλύτερη δυνατή απάντηση, ειδικά επειδή είχα πρωτοπαρουσιάσει το πρόβλημα με επιδιωκόμενη λύση το 67. Έτοιμοι ορισμένοι κατέληξαν σε διάφορες βελτιώσεις. Θα περιγράψω στη συνέχεια μερικές από αυτές για να ανοίξω την όρεξη των αναγνωστών μου για πιο φιλόδοξες προσπάθειες, και για να επομένω την ποικιλία των δυνατών προσεγγίσεων του προβλήματος.

Ένας μαθητής παρατήρησε ότι αν τα στοιχεία του  $N$  είναι  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{12}$ , τότε δύο μόνο το πολύ από τις διαφορές  $a_{12} - a_{11}, a_{11} - a_{10}, a_{10} - a_9, \dots, a_2 - a_1$  είναι ίδιες, και κατόπιν αυτού συμπέρανε ότι  $a_{12} > 37$ . Ένας άλλος μαθητής εξέτασε πιο προσεκτικά αυτές τις διαφορές και (εξετάζοντας αν το 1 εμφανίζεται μία, δύο φορές ή καθόλου ως διαφορά) κατάφερε να αποδείξει ότι η ιούτητα μεταξύ αυτών των διαφορών είναι ακόμη πιο περιορισμένη, και έτοιμος να ανέβασε το κατώτερο φράγμα στο 46. Πολλοί προχώρησαν περισσότερο, παρατηρώντας ότι τουλάχιστον 56 από τις διαφορές  $a - b$ , όπου  $a, b \in N$  πρέπει να είναι διαφορετικές. Για να το διαπιστώσετε αυτό παρατηρήστε ότι όταν  $a, b, c \in N$  για να έχουμε  $c - a = b - c$  πρέπει το  $c$  να μην είναι ούτε το μικρότερο ούτε το μεγαλύτερο στοιχείο του

$N$ , και επομένως από τις διαφορές μας το πολύ  $66 - 10$  μπορεί να είναι διαφορετικές. Η συλλογιστική τους οδηγεί στο  $a_{12} > 56$ .

Άλλοι μαθητές κατάφεραν να βρουν καλύτερα παραδείγματα του  $N$ , όπως το

$\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 30, 39, 53, 67, 82\}$

και το ακόμα καλύτερο

$\{1, 2, 3, 5, 12, 19, 36, 42, 48, 61, 69, 74\}$ ,

αλλά σίγουρα το χάσμα είναι ακόμη μεγάλο. Προκαλώ λοιπόν τους αναγνώστες μου να το μικρύνουν.

Δεν γνωρίζουμε την απάντηση ακόμη και για σύνολα με  $n < 12$  στοιχεία. Δυστυχώς, δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια αναδρομική σχέση, και έτοιμος δεν υπάρχει τρόπος να κατασκευάσουμε ένα σύνολο  $N$  με  $n + 1$  στοιχεία από ένα σύνολο  $N$  με  $n$  στοιχεία. Είναι αλήθεια πως όταν  $N$  είναι ένα τέτοιο σύνολο  $n$  στοιχείων, τότε το ίδιο ισχύει και για το σύνολο  $\{k + 1 - p \mid p \in N\}$ , αλλά αυτό το γεγονός δεν φαίνεται να μας βοηθά και πολύ, εκτός από το ότι ενδέχεται να μας υποδεικνύει πως τα μικρότερα στοιχεία του  $N$  δεν βρίσκονται υποχρεωτικά πο κοντά μεταξύ τους απ' όσο τα μεγαλύτερα.

Σε αυτό το σημείο ίως βοηθήσουν κάποια δεδομένα δημιουργημένα από υπολογιστή. Μπορούμε ακόμη να εξετάσουμε πρώτα τυχαίες επλογές στοιχείων του  $N$  και μετά να προχωρούμε στην αντικατάστασή τους. Είμαι απολύτως βέβαιος ότι έχει φτάσει η στιγμή να σημειωθεί πρόοδος σε αυτό το πρόβλημα. Προτέρη λοιπόν τους αναγνώστες μου να προσπαθήσουν να την επιτύχουν.

# Περί παραμόρφωσης

«Η δύναμη κάθε ελατηρίου είναι...

**Π**ΡΟΦΑΝΩΣ Ο ΝΟΟΚΕ ΜΙΛΟΥΣΕ ΓΙΑ ένα από τα πιο προφανή είδη παραμόρφωσης —την ελαστική παραμόρφωση. Αλλά από τα πρώτα βήματά μας στη σχολική φυσική ακούμε και για άλλα είδη παραμόρφωσης, εξίσου σημαντικά. Θυμηθείτε τα προβλήματα των ελαστικών και πλαστικών κρούσεων, της ισορροπίας σωμάτων, τις μεταβολές στο σχήμα και τον όγκο, τις μηχανικές ταλαντώσεις... και ο κατάλογος μπορεί να γίνει πολύ μεγάλος. Η κατανόηση των παραμορφώσεων σε σχέση με τις ιδιότητες των φυσικών σωμάτων έχει τόσο μεγάλο ενδιαφέρον για την εποπτήμη και την τεχνολογία ώστε μπορούμε να πούμε χωρίς καμία υπερβολή ότι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων αποτελεί ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα θέματα της σύγχρονης φυσικής.

Από την εποχή που διδασκόμασταν τη γυμνασιακή φυσική μάθαμε ότι τις παραμορφώσεις πρέπει να τις κατανοήσουμε σε πολλά διαφορετικά πεδία. Στη μηχανική και τη θερμοδυναμική από μακροσκοπική οποιαδήποτε σύγχρονης φυσικής και τις ατομικές αλληλεπιδράσεις, στη βάση της μοριακής κινητικής και όταν ερευνούμε τη φύση των ελαστικών δυνάμεων, με τη βοήθεια της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Αυτή η προσπάθεια κατανόησης θυμίζει πράγματα... καλειδοσκόπιο.

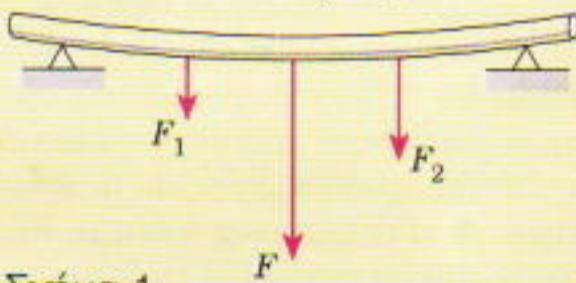
## Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Πότε τείνετε περισσότερο ένα οχοινί, όταν τραβάτε τις άκρες του σε αντίθετες κατευθύνσεις ή όταν με τα δύο χέρια σας τραβάτε τη μια άκρη του ενώ την άλλη την έχετε στερεώσει σε έναν τοίχο; Και στις δύο περιπτώσεις κάθε χέρι ασκεί την ίδια δύναμη;

2. Ένας βαρύς κύλινδρος εκτελεί

ελεύθερη πτώση. Ποιες δυνάμεις ασκούνται σε κάθε στρώμα του κυλίνδρου από τα γειτονικά του στρώματα;

3. Δύο δυνάμεις, οι  $F_1$  και  $F_2$ , ασκούνται στην οριζόντια δοκό που ισορροπεί στηριζόμενη σταθερά στις άκρες της (Σχήμα 1). Η δοκός θα «κάνει μεγαλύτερη κοιλιά» αν οι δύο δυνάμεις αντικατασταθούν απ' τη συνισταμένη τους  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ ;



Σχήμα 1

4. Δύο σύρματα, το ένα από σίδηρο και το άλλο από χαλκό, αναρτώνται από την οροφή ενός δωματίου και κρέμονται κατακόρυφα. Τα ελεύθερα άκρα τους τα συνδέουμε με οριζόντια αβαρή ράβδο, και στο μέσο της προσδένουμε μια μάζα. Η ράβδος θα συνεχίσει να είναι οριζόντια;

5. Δύο σύρματα είναι από το ίδιο υλικό, αλλά η διάμετρος της διατομής και το μήκος του πρώτου είναι διπλάσια από τα αντίστοιχα του δεύτερου. Τι σχέση έχουν οι σχετικές επιμήκυνσεις των δύο συρμάτων και τι οι απόλυτες, εάν τείνονται από ίσες δυνάμεις;

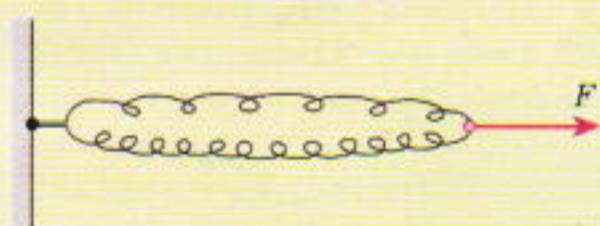
6. Γιατί τα δυναμόμετρα ελατηρίου έχουν «στοπ» που περιορίζουν την επιμήκυνση των ελατηρίων;

7. Γιατί το τεχνητό καλάμι ψαρέματος έχει μακρύ και εύκαμπτο άκρο;

8. Γιατί μια μικρή σφαίρα απλώς τρυπάει (σε δύο απέναντι οριζεία) ένα μαλακό πλαστικό ποτήρι γεμάτο νερό, ενώ αν είναι γυάλινο το θρυμματίζει;

9. Συνδέουμε τις άκρες δύο αβαρών ελατηρίων διαφορετικών μηκών όπως

φαίνεται στο Σχήμα 2. Τι μορφή θα έχει το διάγραμμα μεταβολής της τείνουσας δύναμης  $F$  σε συνάρτηση με τη μετάτοπο  $x$  του σημείου εφαρμογής της;



Σχήμα 2

10. Πώς μεταβάλλεται η περίοδος κατακόρυφης ταλάντωσης ενός σώματος που το έχουμε κρεμάσει από δύο πανόμοια ελατήρια όταν, ενώ ήταν συνδεδεμένα κατά σειρά, τα αντικαταστήσουμε με τα ίδια συνδεδεμένα μεταξύ τους παράλληλα;

11. Ένα σώμα  $A$  έχει εξαρτηθεί μέσω νήματος από την οροφή δωματίου. Ένα άλλο σώμα  $B$  εξαρτάται μέσω ελατηρίου από το  $A$ . Στη συνέχεια καιμε μέσα στο σπίτι το νήμα. Τα δύο σώματα θα πέφτουν με ίσες επιταχύνσεις;

12. Γιατί μια ράβδος χαλαζία μπορεί να υποστεί ιοχυρή ψύξη χωρίς να θρυμματιστεί;

13. Χρειάζεται μεγάλη προσπάθεια για να κόψετε με τα χέρια σας ένα κομμάτι σύρμα, αλλά μπορείτε σχετικά εύκολα να το σπάσετε αν είναι πυρακτωμένο. Γιατί;

14. Η εσωτερική ενέργεια ενός σώματος αλλάζει κατά την ελαστική του παραμόρφωση;

15. Ένα συμπεσμένο χαλύβδινο ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια. Τι γίνεται η ενέργεια αυτή όταν το ελατήριο διαλύεται βυθισμένο μέσα σε οξύ;

16. Ποιο από δύο αβαρή ελατήρια ιδιων διαστάσεων, το ένα από χαλκό και το άλλο από χάλυβα, περικλείει περισσότερη δυναμική ενέργεια όταν συ-

# ΙΟΡΦΩΣΕΩΝ

ανάλογη της επιμήκυνσής του...»

—Robert Hooke

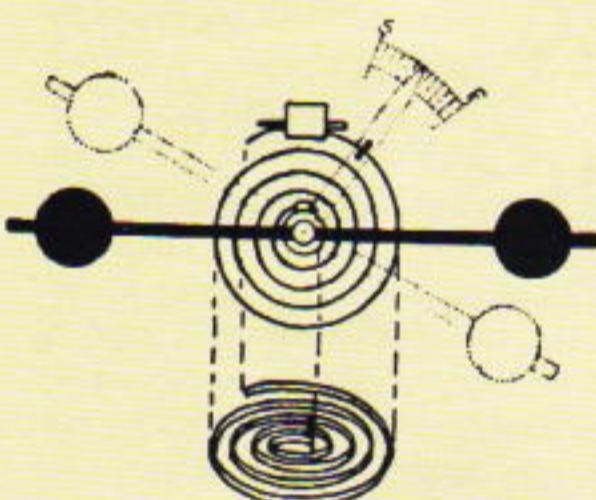
μπέζονται από ίσα φορτία;

### Μικροπειραματισμοί

Περάστε, τραβώντας ελαφρά, έναν λαστιχένιο σωλήνα μέσα σε ένα μεταλλικό δαχτυλίδι. Η διάμετρος του δαχτυλιδιού πρέπει να είναι τέτοια ώστε όταν σηκώσετε κατακόρυφο το σωλήνα το δαχτυλίδι να μη γλυστρά αλλά να μένει ακίνητο στη θέση του. Στη συνέχεια τεντώστε το σωλήνα. Τι θα συμβεί στο δαχτυλίδι, και γιατί;

### Είναι ενδιαφέρον ότι...

...τα επιστημονικά ενδιαφέροντα του Robert Hooke ήταν τόσο ευρέα ώστε συχνά δεν είχε το χρόνο να οδηγήσει την έρευνά του σε κάποιο συμπέρασμα.



Πρώιμη μορφή αντισταθμιστικού ελατηρίου ενός ρολογιού. Ένας ιστορικός με εποιήματα το χαρακτήρισε ως την πλέον «ενδιαφέρουσα βελτίωση που εφαρμόστηκε ποτέ στα φορητά ρολόγια», και μνημονεύεται ως παράδειγμα των φιλονικιών που προκάλεονταν οι μέθοδοι εργασίας του Hooke. Ο επίσκοπος Abbott Payson γράφει: «Την ανακάλυψη του αντισταθμιστικού ελατηρίου τη διεκδίκησαν οι Huygens, Hautefeuille και Hooke. Άλλα παρά το γεγονός ότι η εργασία του Hooke δεν ήταν γνωστή στην ηπειρωτική Ευρώπη και δεδομένης της μυστικότητας με την οποία περιέβαλε τα περιφέρα του, σχεδόν δεν υπάρχει αμφιβολία ότι του ανήκει η προτεραιότητα στην ανακάλυψη».

Αυτό στάθμικε αφορμή για δριμύτατες διαμάχες με αυθεντίες σαν τον Νεύτωνα, τον Huygens και άλλους όσουν αφορά την προτεραιότητα στις ανακαλύψεις. Εντούτοις, ο «νόμος του Hooke» είχε επιβεβαιωθεί τόσο ισχυρά από σειρά πειραμάτων του, ώστε η πατρότητά του επί του νόμου ουδέποτε αμφισβητήθηκε.

...στις αρχές του 18ου αιώνα στα ορυχεία συνέβαιναν πολύ συχνά ατυχήματα επειδή έσπαγαν οι αλυσίδες των αναβατήρων. Πολλοί μορφωμένοι, ανάμεσά τους και ο περίφημος Gottfried Wilhelm Leibniz, προσπάθησαν να βελτιώσουν τις μεταλλικές αλυσίδες, αλλά χωρίς επιτυχία. Την αντικατάσταση των αλυσίδων με συρματόσχοινα την επινόησε ένας σύμβουλος ορυχείων, ένας ασκούμενος δικηγόρος, ο W. Albert. Ετσι έγινε δυνατό να αξιοποιηθεί μια από τις πιο σπουδαίες ιδιότητες του σιδήρου —το υψηλό όριο θραύσης του.

...ο άγγλος φυσικός και μηχανικός Osborne Reynolds είναι ο πρώτος που εξήγησε γιατί όταν πατάμε στην υγρή άμμο της παραλίας το μέρος τής πατημασιάς μας στεγνώνει και αοπρίζει. Το 1885 έδειξε ότι ο όγκος που καταλαμβάνουν οι κόκκοι της άμμου αυξάνει από τη διατμητική παραμόρφωση την οποία προκαλεί το πόδι. Κατά συνέπεια, το επίπεδο της άμμου ανέρχεται απότομα πάνω από το επίπεδο του νερού, αφήνοντάς την πρόσκαιρα ξερή και άσπρη.

...εξήγηση για την πλαστική παραμόρφωση διατυπώθηκε μόλις τον 20ό αιώνα, όταν οι φυσικοί ανακάλυψαν τις «εξαρθρώσεις» —δηλαδή ατέλειες στο κρυσταλλικό πλέγμα του στερεού. Από σύγχρονη οποιαδήποτε, αυτό το είδος παραμόρφωσης είναι η «μετατόπιση

της αταξίας» μέσα στον κρύσταλλο.

...σήμερα έχουμε στη διάθεσή μας τα υπερελαστικά κράματα, που συμπεριφέρονται σαν το καουτσούκ και είναι ικανά να δεχτούν τεράστιες παραμορφώσεις —δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες απ' ό,τι τα συνήθη μέταλλα. Απ' την άλλη, πολλά είδη κραμάτων μπορούν να οδηγηθούν σε υπερελαστική κατάσταση όταν ρέουν υπό πολύ χαμηλή πίεση.

...είναι δυνατόν να συνδυάσουμε αντίθετες μηχανικές ιδιότητες σε σύνθετα υλικά που περιλαμβάνουν μια ελαφρώς εύκαμπτη βάση και ένα ινώδες γέμισμα από πολύ ισχυρό υλικό.

...μπορούμε να μετρήσουμε παραμορφώσεις μικρότερες κι απ' τη διάμετρο ενός ατόμου, αρκεί να είναι παραμορφώσεις λόγω ταλάντωσης οι οποίες μετασχηματίζονται εύκολα σε ηλεκτρικά σήματα. Με την ευκαιρία, το ανθρώπινο αυτί μπορεί να «μετρήσει» με τον ίδιο τρόπο τις παραμορφώσεις του τυμπάνου.

...οι παραμορφώσεις του χαλαζία και κάποιων άλλων διηλεκτρικών υλικών προκαλούν την εμφάνιση ηλεκτρικών φορτίων στις επιφάνειές τους. Άλλα και η πόλωση των διηλεκτρικών που φέρονται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο προκαλεί την παραμόρφωσή τους. Αυτά τα φαινόμενα είναι γνωστά ως ευθύ και αντίστροφο πεζοηλεκτρικό φαινόμενο.

...όταν ο μόλυβδος βομβαρδίζεται για μεγάλο χρονικό διάστημα με νετρόνια, γίνεται τόσο ελαστικός ώστε μια καμπάνα φτιαγμένη από αυτόν χτυπάει τόσο ηχητρά όσο οι καμπάνες που έχουν χυτευτεί από τον καλύτερο μπρούντζο. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

# Τι είναι το «βάρος» τέλος πάντων;

Συνεχίζεται η σύγχυση από την ασυνέπεια του ορισμού που δίνουν τα διδακτικά βιβλία φυσικής

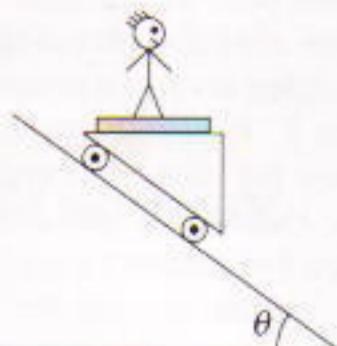
Albert A. Bartlett

**T**Ο ΑΡΘΡΟ «ΖΥΓΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑΝ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΗ», στη σελίδα 48 του τεύχους Μαΐου / Ιουνίου 1995 του *Quantum*, περιέχει ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον πρόβλημα. Το σχήμα του απεικονίζει έναν ανθρώπο που στέκεται πάνω σε μια ζυγαριά στερεωμένη οριζόντια σε ένα σκέιτμπορντ, το οποίο κινείται με φορά προς τα κάτω πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας  $\theta$ , όπως φαίνεται και παρακάτω στο Σχήμα 1. Το ερώτημα που τίθεται είναι: «Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς;»

Αυτό το πρόβλημα περιέχει δύο σοβαρές ατέλειες.

1. Ουδείς θα μπορούσε να στέκεται με το σώμα του στη στάση που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.
2. Η ερώτηση που αφορά την ένδειξη της ζυγαριάς δεν μπορεί να απαντηθεί χωρίς τις απαραίτητες πληροφορίες για τη μηχανική κατασκευή της ζυγαριάς.

Η μελέτη αυτών των ατελειών μάς βοηθά να αντιληφθούμε τις σημαντικές αντιφάσεις που προκύπτουν όταν χρησιμοποιούμε τον



Σχήμα 1

ουμβατικό ορισμό του «βάρους» των διδακτικών βιβλίων φυσικής και μας οδηγεί σε έναν κατά πολύ βελτιωμένο ορισμό του βάρους, όπως τον δίνει ο Διεθνής Οργανισμός Προτύπων (ISO).

## Ανάλυση του προβλήματος

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης είναι  $g_1$  (διάνυσμα). Σ' αυτό το σύστημα, το βάρος ενός σώματος μάζας  $m$  είναι  $\mathbf{B}_1 = mg_1$ . Θεωρήστε τώρα ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς που κινείται με επιτάχυνση  $\mathbf{a}_{21}$  (διάνυσμα) ως προς το πρώτο. Η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης στο δεύτερο σύστημα είναι ένα διάνυσμα  $\mathbf{g}_2$ , που δίνεται από τη διανυσματική εξίσωση

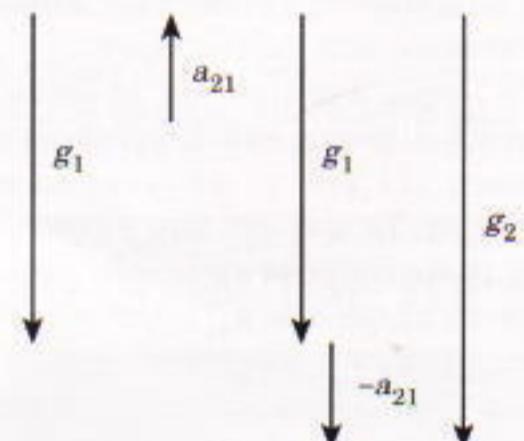
$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1 - \mathbf{a}_{21} \quad (1)$$

Το βάρος του ίδιου σώματος στο δεύτερο σύστημα αναφοράς θα είναι  $\mathbf{B}_2 = mg_2$ . Ένας παρατηρητής που ακινητεί στο πρώτο σύστημα αναφοράς θα θεωρεί ότι προς τα «επάνω» είναι η κατεύθυνση του  $-\mathbf{g}_1$ , και ένας παρατηρητής που ακινητεί στο δεύτερο σύστημα θα θεωρεί ότι προς τα «επάνω» είναι η κατεύθυνση του  $-\mathbf{g}_2$ .

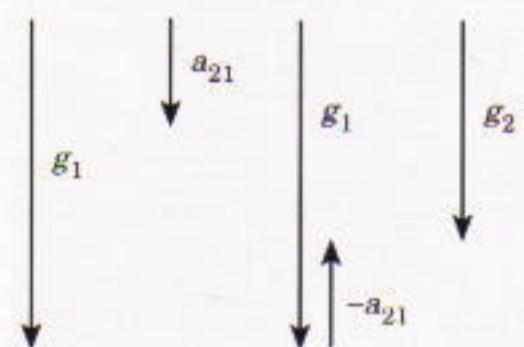
Τη χρησιμότητα της εξίσωσης (1) μπορείτε να τη διαπιστώσετε εφαρμόζοντάς τη στο γνωστό πρόβλημα ενός ανθρώπου που στέκεται πάνω σε μια ζυγαριά μπάνιου μέσα στο θάλαμο ενός ανελκυστήρα επιταχυνόμενου με φορά προς τα πάνω ή προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1 - \mathbf{a}_{21}$$

ο θάλαμος επιταχύνεται προς τα πάνω



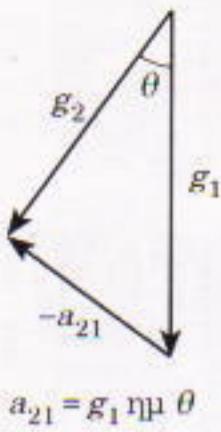
ο θάλαμος επιταχύνεται προς τα κάτω



Σχήμα 2

Σχήμα 2. Η ομορφιά της εξίσωσης (1) έγκειται στο ότι είναι διανυσματική εξίσωση και μπορείτε να την εφαρμόζετε σε περιπτώσεις όπου οι επιτάχυνσεις δεν είναι συγγραμμικές.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, το εργαστήριο ως το σύστημα αναφοράς 1, στο οποίο βλέπουμε το σκέιτμπορντ να επιταχύνεται κινούμενο στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\theta$ . Ας θεωρήσουμε επιπλέον σύστημα αναφοράς 2 αυτό ως προς το οποίο ακι-



Σχήμα 3

νητεί το σκέιτμπορντ. Σ' αυτή την περίπτωση, το  $\mathbf{g}_1$  είναι η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης (περίπου  $9,8 \text{ m/s}^2$ ) που έχουμε μετρήσει στο γραστήριο. Εάν αγνοήσουμε την τριβή καθώς και τη ροπή αδράνειας των τροχών του σκέιτμπορντ, το σκέιτμπορντ θα έχει επιτάχυνση  $\mathbf{a}_{21}$ , με διεύθυνση παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο, φορά «προς τα κάτω» και μέτρο  $g_1$  ημθ. Το διάνυσμα  $-\mathbf{a}_{21}$  θα έχει προφανώς κατεύθυνση αντίθετη απ' αυτήν της κίνησης του σκέιτμπορντ.

Το Σχήμα 3 απεικονίζει τη διανυματική άθροιση που περιγράφει η εξίσωση (1) για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Το τρίγωνο που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι ορθογώνιο, αφού το μέτρο της  $\mathbf{a}_{21}$  είναι  $g_1$  ημθ. Από το Σχήμα 3 μπορούμε να βρούμε ότι το μέτρο της  $\mathbf{g}_2$  είναι  $g_1$  συνθ, και η διεύθυνσή της κάθειται στο κεκλιμένο επίπεδο. Εάν βριοκόσασταν πάνω στο σκέιτμπορντ, θα μας βεβαιώνατε ότι το «προς τα κάτω» είναι η φορά του  $\mathbf{g}_2$ , και το «προς τα επάνω» η φορά του  $-\mathbf{g}_2$ . Για να σταθείτε φυσιολογικά, όρθιοι, με το κεφάλι «προς τα επάνω», πρέπει το σώμα σας να είναι κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο. Γι' αυτό οι δάσκαλοι του σκι επιμένουν να σας φωνάζουν να «σκύβετε μπροστά». Στο σύστημα αναφοράς της χιονισμένης πλαγιάς, η κατεύθυνση του «επάνω» είναι η κατεύθυνση των κορμών των πεύκων ή των ελάτων. Στο σύστημα αναφοράς του σκιέρ όμως (και, αντίστοιχα, του αναβάτη του σκέιτμπορντ), το «προς τα επάνω» δεν είναι παράλληλο προς τα πεύκα, αλλά κάθετο στην επιφάνεια της πλαγιάς.

Στο Σχήμα 1, το σώμα του αναβάτη απεικονίζεται «παράλληλο προς τα πεύκα», που σημαίνει ότι σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την κατεύθυνση «προς τα επάνω» του επιταχυνόμενου συστή-

ματος αναφοράς του. Εάν δοκιμάζατε να μείνετε σ' αυτή τη στάση, δεν θα τα καταφέρνατε· θα πέφτατε προς τα πίσω. Και αυτό φαίνεται να απεικονίζεται σωστά στο κάτω αριστερό μέρος της εικόνας του εξωφύλλου του τεύχους Μαΐου /Ιουνίου. Ο αναβάτης μοιάζει να πέφτει προς τα πίσω.

Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα της ένδειξης της ζυγαριάς, ας αποφύγουμε τη δυσκολία του «προς τα πού είναι το επάνω», αντικαθιστώντας τον αναβάτη με μια σημειακή μάζα  $m$  που βρίσκεται ακίνητη πάνω στη ζυγαριά. Πρέπει επιπλέον να θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ της μάζας  $m$  και της επιφάνειας της ζυγαριάς είναι της τάξης του 1, έτοι ώστε η  $m$  να μην ολισθαίνει πάνω στη ζυγαριά όταν αυτή επιταχύνεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Τώρα μπορούμε να ρωτήσουμε: «Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς;»

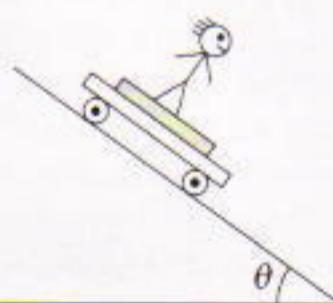
Για να μπορέσουμε να δώσουμε μια απάντηση, χρειαζόμαστε πληροφορίες για τη μηχανική κατασκευή και λειτουργία της ζυγαριάς. Συγκεκριμένα, η ένδειξη της ζυγαριάς αφορά το μέτρο της δύναμης που ασκείται στην επιφάνειά της ανεξάρτητα από τη διεύθυνση της δύναμης, ή αφορά μόνο εκείνη τη συνιστώσα της δύναμης που είναι κάθετη στην επιφάνειά της; Αν  $R_o$  είναι η ένδειξη της ζυγαριάς για τη συνολική δύναμη  $F_o$  που ασκείται πάνω της, τότε θα ισχύει

$$R_o = F_o = B_2 = mg_2 = mg_1 \text{ συνθ.}$$

Εάν η ζυγαριά μετράει μόνο τη συνιστώσα της συνολικής δύναμης που είναι κάθετη στην επιφάνειά της, η ένδειξη  $R_o$  θα είναι

$$R_o = F_o \text{ συνθ.} = mg_2 \text{ συνθ.} = mg_1 \text{ συν}^2 \theta.$$

Το Σχήμα 4 απεικονίζει τον τρόπο που στέκεται ένας αναβάτης σκέιτ-



Σχήμα 4

μπορντ το οποίο κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο με κατεύθυνση προς τα κάτω. Σ' αυτή την περίπτωση η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι  $R_o = mg_1$  συνθ.

## Προβλήματα στον ορισμό του βάρους

Η αντικατάσταση του παραδοσιακού ορισμού του βάρους από τον ορισμό του Διεθνούς Οργανισμού Προτύπων είναι πολύ αποδοτική ως προς τη οαφήνεια και τη συνέπεια που θα προκύψει. Σχεδόν σε ολόκληρο τον κόσμο, τα διδακτικά βιβλία φυσικής προκαλούν άσκοπη σύγχυση με τον συμβατικό ορισμό του βάρους που αναφέρουν, σύμφωνα με τον οποίο βάρος ενός σώματος είναι το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Τη σύγχυση αυτή θα σας την παρουσιάσω μέσω επτά βημάτων στην ανάπτυξη του βάρους και συναφών εννοιών, όπως συναντώνται διαδοχικά σε τυπικά εισαγωγικά βιβλία φυσικής.

1. Στην αρχή ξεκινούν περιγράφοντας μετρήσεις της επιτάχυνσης ελεύθερης πτώσης ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ) και ονομάζοντας αυτή την ποσότητα επιτάχυνση που οφείλεται στη βαρύτητα.

2. Στη συνέχεια, ορίζουν το βάρος μιας μάζας  $m$  ως το γινόμενο  $m$  επί  $\mathbf{g}$ , το οποίο και αποκαλούν δύναμη της βαρύτητας.

$$\mathbf{B} = mg$$

3. Όταν ένας άνθρωπος μάζας  $m$  οιέκεται πάνω σε μια ζυγαριά μέσα σε έναν ανελκυστήρα που ανεβαίνει ή κατεβαίνει με επιτάχυνση μέτρου  $a$ , η ένδειξη  $R$  της ζυγαριάς είναι

$$R = m(g \pm a).$$

4. Αυτό το μέγεθος είναι μια δύναμη που μοιάζει πολύ με το βάρος. Άλλα δεν ταιριάζει με τον ορισμό του βάρους όπως δίνεται στο προηγούμενο βήμα 2. Έτοιμοι οι συγγραφείς των σχετικών βιβλίων αναγκάζονται να δώσουν ένα νέο όνομα στην  $R$ . Γενικά την ονομάζουν «φαινόμενο βάρος» της μάζας  $m$ .

5. Φανταστείτε τώρα ότι κόβετε το συρματόσχοινο και ο ανελκυστήρας

εκτελεί ελεύθερη πτώση. Το φαινόμενο βάρος  $R$  μηδενίζεται. Εδώ βρίσκεται το πρώτο σημείο σύγχυσης. Για να είμαστε συνεπείς, θα έπρεπε να λέγαμε ότι όταν το φαινόμενο βάρος μηδενίζεται, η προκύπτουσα κατάσταση ονομάζεται «κατάσταση έλλειψης φαινόμενης βαρύτητας». Αντί γι' αυτό, τα βιβλία την ονομάζουν «κατάσταση έλλειψης βαρύτητας».

6. Τώρα η σύγχυση γίνεται σοβαρή. **Στα διδακτικά βιβλία αναφέρεται ότι ένας αστροναύτης σε τροχιά είναι αβαρής.** Όμως, σύμφωνα με τον ορισμό του βάρους που έχουν δώσει (μάζα επί επιτάχυνσης που οφείλεται στη βαρύτητα), ο αστροναύτης εξακολουθεί να έχει βάρος. Αυτό έχει οδηγήσει σε ζωηρές (και συνήθως άκαρπες) διαμάχες γύρω απ' το αν ένας αβαρής αστροναύτης σε τροχιά έχει βάρος ή όχι.

7. Και πάμε τώρα στην τελική σύγχυση. Το βάρος έχει εξαρχής οριστεί ως οφειλόμενο αποκλειστικά στη βαρύτητα, και το φαινόμενο βάρος έχει οριστεί ως οφειλόμενο στη βαρύτητα συν την επιτάχυνση ενός συστήματος αναφοράς. Όμως στο κεφάλαιο που μαθαίνουμε ότι το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου είναι πάνω στην περιοτρεφόμενη Γη, τα συγκεκριμένα βιβλία μάς λένε ότι η ένδειξη της ζυγαριάς στο εργαστήριο είναι το αποτέλεσμα της δράσης της βαρύτητας συν την κεντρομόλο επιτάχυνση που οφείλεται στην περιστροφή της Γης. Άρα, η ζυγαριά στο εργαστήριο δείχνει στην ουσία φαινόμενο βάρος.

Εδώ έχουμε την έσχατη σύγχυση. Στο βήμα 2 θεωρήσαμε ότι η ένδειξη της ζυγαριάς στο εργαστήριο είναι το βάρος. Στη συνέχεια θεωρήσαμε ότι το φαινόμενο βάρος είναι αρκετά διαφορετικό από το βάρος. Τώρα όμως, στο βήμα 7, ανακαλύπτουμε ότι αυτό που περιγράφαμε στο βήμα 2 ως βάρος είναι στην ουσία φαινόμενο βάρος! Τα διδακτικά βιβλία σπανίως επισημαίνουν αυτή την εξόφθαλμη εγγενή αντίφαση.

## Ο ορισμός του βάρους

Ο Διεθνής Οργανισμός Προτύπων μάς δίνει τον ορισμό του βάρους που χρειαζόμαστε για να εξαλείψουμε όλες αυτές τις ασυνέπειες: **Βάρος**

ενός σώματος σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς είναι η δύναμη η οποία, όταν εφαρμόζεται στο σώμα, του προσδίδει επιτάχυνση  $i$  με την τοπική επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης στο εν λόγω σύστημα αναφοράς. Η βασική απαίτηση αυτού του ορισμού είναι να εγκαταλείψουμε τη χρήση του όρου «επιτάχυνση που οφείλεται στη βαρύτητα» προκειμένου να περιγράψουμε την επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης που μετριέται στο εργαστήριο. Ουσιαστικά, μας ζητείται να ονομάζουμε την επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης «επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης» σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Αυτός ο ορισμός δεν αλλάζει τη γνωστή σχέση που χρησιμοποιούμε για να υπολογίζουμε το βάρος ενός αντικειμένου:

$$B = mg$$

Ας ακολουθήσουμε ξανά τα βήματα 1 έως 7 για να δούμε πώς αυτός ο ορισμός του βάρους εξαλείφει τις σοβαρές εσωτερικές ασυνέπειες που προκύπτουν απ' τη χρήση του ουμβατικού ορισμού. Όταν το σύστημα αναφοράς είναι η επιφάνεια της Γης, το μέτρο της επιτάχυνσης ελεύθερης πτώσης είναι περίπου  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  και όλα τα βάρη έχουν τις ουμβατικές αριθμητικές τιμές  $B = mg$ .

Στον επιταχυνόμενο ανελκυστήρα, το μέτρο της επιτάχυνσης ελεύθερης πτώσης είναι  $g \pm a$ , και η ένδειξη της ζυγαριάς μέσα στον ανελκυστήρα όταν πάνω της βρίσκεται μάζα  $m$  είναι  $m(g \pm a)$ . Η εν λόγω ένδειξη ονομάζεται βάρος της  $m$  στο σύστημα αναφοράς του επιταχυνόμενου ανελκυστήρα. Το μέτρο του βάρους στον επιταχυνόμενο ανελκυστήρα άλλαξε από αυτό του συστήματος αναφοράς του εργαστηρίου, τούτο όμως δεν προκαλεί κανένα πρόβλημα, δεδομένου ότι πάντα τονίζαμε στους μαθητές πως το βάρος δεν είναι μια εγγενής ή αναλλοίωτη ιδιότητα της μάζας  $m$ . Ο ασαφής όρος «φαινόμενο βάρος» δεν χρειάζεται πα! Όταν ο ανελκυστήρας που περιέχει τη μάζα  $m$  εκτελεί ελεύθερη πτώση, η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης ως προς τον ανελκυστήρα είναι μηδέν. Επομένως το βάρος της  $m$  στο σύστημα αναφοράς του ανελκυστήρα που πέφτει είναι μηδέν, και

παραμένει συνεπές να λέμε ότι η  $m$  είναι αβαρής.

Σε οχέον με το σύστημα αναφοράς ενός διαστημόπλοιου σε τροχιά γύρω από τη Γη, ένας αστροναύτης έχει μηδενική επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης· επομένως ο αστροναύτης είναι αβαρής. Τέλος, όταν αναφερόμαστε στην περιστρεφόμενη Γη, καμία σύγχυση δεν προκαλείται όταν λέμε ότι μέρος της επιτάχυνσης ελεύθερης πτώσης στο εργαστήριο οφείλεται στη βαρύτητα και μέρος της στην περιστροφή της Γης.

Άρα, ο ορισμός του βάρους σύμφωνα με το Διεθνή Οργανισμό Προτύπων προσδίδει εσωτερική συνέπεια στην ονοματολογία και τη χρήση μας, εξαλείφοντας τη σύγχυση που διαιωνίζεται στα διδακτικά βιβλία φυσικής, έχοντας βασανίσει γενεές γενεών σπουδαστές των φυσικών επιστημών. ◻

**O Albert A. Bartlett** είναι ομότιμος καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Κολοράντο.

## ΤΟ QUANTUM ΤΩΡΑ



## ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΕΡΙΠΤΕΡΑ

Θα το βρίσκετε την Ιη κάθε μονού μήνα στην Αθήνα, τη Θεσσαλονίκη, και τις μεγαλύτερες επαρχιακές πόλεις της Ελλάδας. Τα παλαιότερα τεύχη, όπως και το τρέχον, μπορείτε να τα βρίσκετε στα βιβλιοπωλεία, ή στα γραφεία των Εκδόσεων Κάτοπτρο.

# Φωτόνια και φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

«Φαίνεται πως η θεμελιώδης ιδέα της κβαντομηχανικής συνιστάται στο ότι είναι αδύνατο να περιγράψουμε ένα μεμονωμένο κβάντο ενέργειας δίχως να το συνδέσουμε με κάποια συχνότητα.» —Louis de Broglie

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

**E**ΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΑ ΠΛΟΥΣΙΟ χωρίο οι φιλοπράγμονες κάτοικοί του θα το είχαν εξερευνήσει πλήρως. Θα είχαν καταγράψει τις λεπτομέρειες κάθε γωνιάς του, θα γνώριζαν όλα τα μυστικά του, δεν θα το περιέβαλλε κανένα μυστήριο. Βέβαια, κάποιοι από τους κατοίκους του θα αντιλαμβάνονταν ότι αν «έβαζαν» το χωρίο τους «κάτω από ένα ποιο ισχυρό μικροσκόπιο», θα ανακάλυπταν ίσως μερικές λεπτομέρεις που τους διέφευγαν. Οι περισσότεροι όμως θα ένιωθαν ικανοποιημένοι απ' όσα γνώριζαν ήδη για τον τόπο τους.

Παρόμοια ήταν η κατάσταση στη φυσική στις αρχές του 20ού αιώνα. Οι μεγάλες συνθέσεις του Νεύτωνα και του Maxwell εξηγούσαν τα πάντα όσον αφορά τις δυνάμεις και την κίνηση, τον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό, την οπτική. Ο Albert Michelson, ο πρώτος αμερικανός φυσικός που τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ, είχε δηλώσει ότι η φυσική ολοκληρώθηκε και πως τα επόμενα χρόνια θα αφιερώνονταν στην αύξηση, όλο κι όλο, τις ακρίβειας των πειραμάτων. Ασφαλώς, υπήρχαν ένα-δύο προβλήματα που ίσως προβάλλονταν ως εμπόδια στον εν λόγω στόχο... Το ένα από αυτά ήταν το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο —η ικανότητα του φωτός να απελευθερώνει ηλεκτρόνια από την επιφάνεια των μετάλλων.

Οι Maxwell και Hertz προσέφεραν

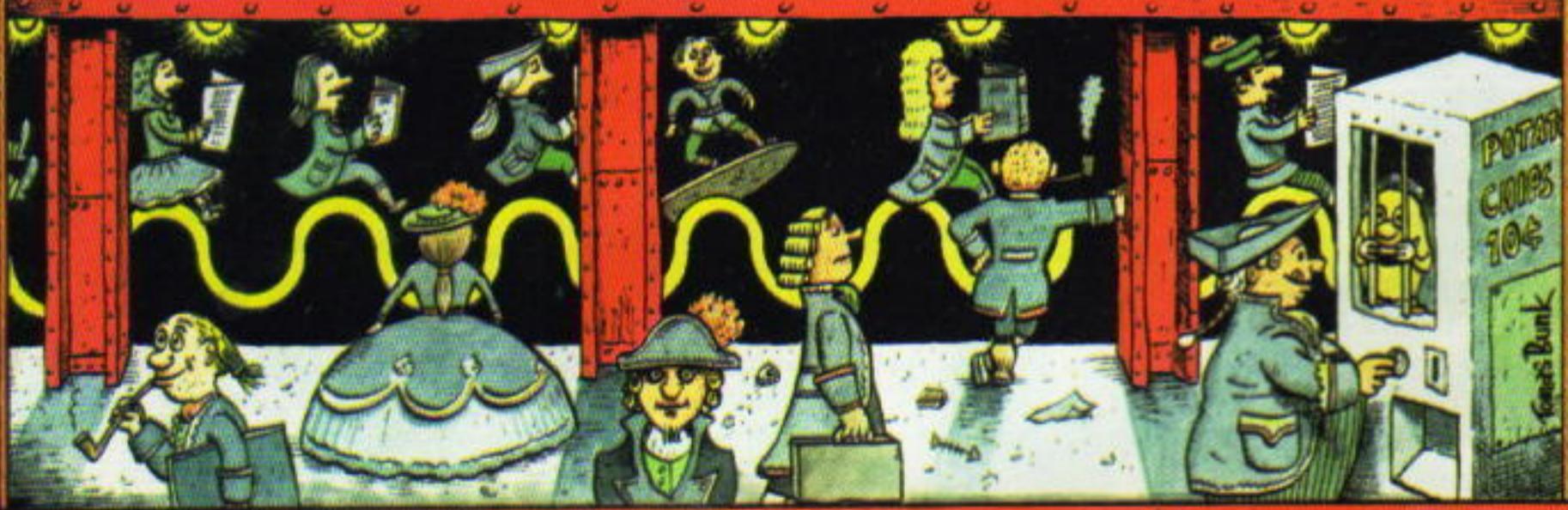
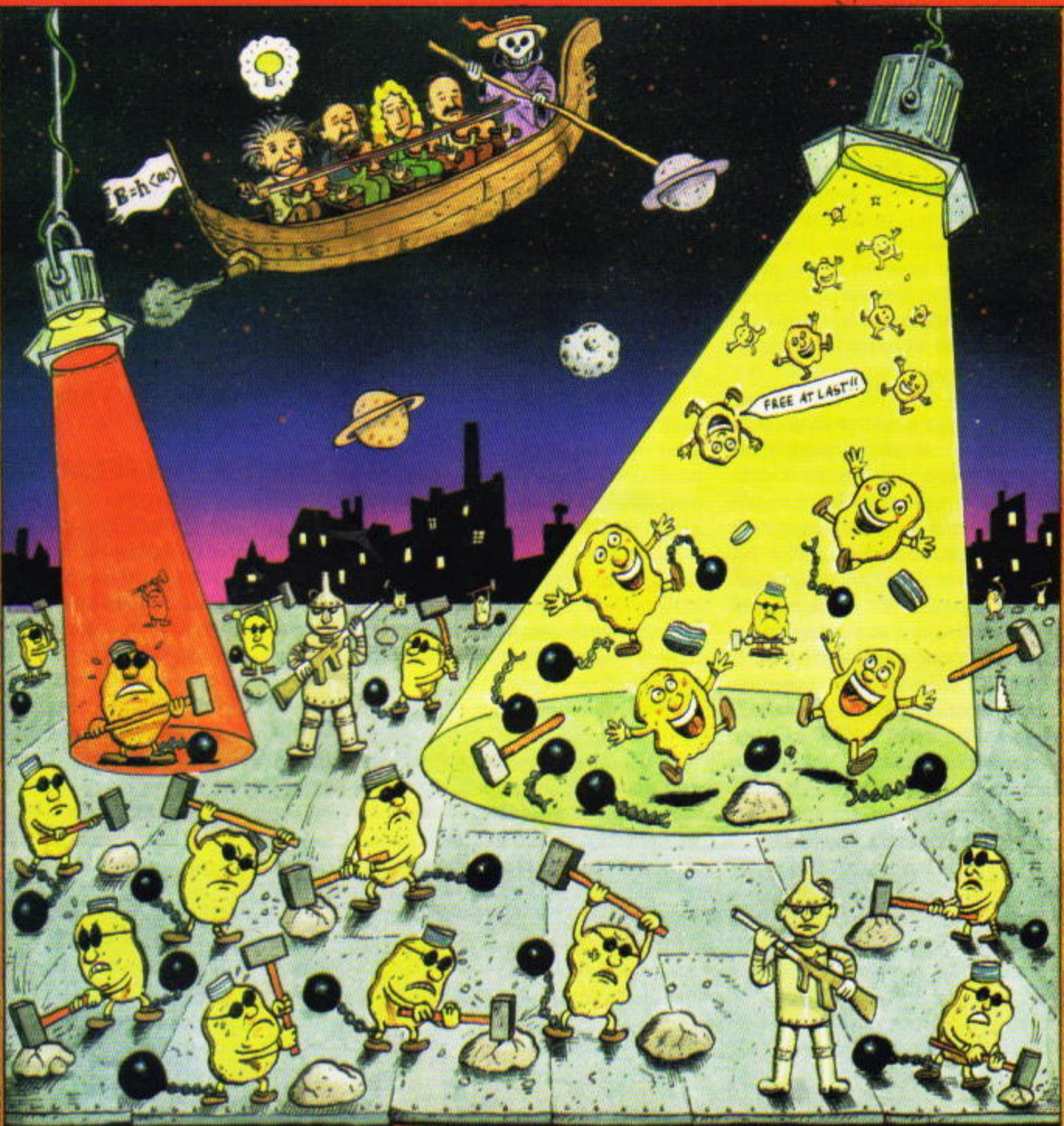
τις θεωρητικές και πειραματικές ενδείξεις που έπειθαν την επιστημονική κοινότητα ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Σχεδόν έναν αιώνα νωρίτερα, ο Thomas Young είχε καταδείξει ότι το φως είναι κυματικό φαινόμενο, και επιπλέον μετρήσεις το μήκος κύματός του. Εντούτοις, η κυματική θεωρία του φωτός αδυνατούσε να εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Αν το φως είναι πολύ αμυδρό, τότε θα έπρεπε να καταφέρνει να απελευθερώσει ένα ηλεκτρόνιο έπειτα από αρκετές ώρες. Δυστυχώς, η πρόβλεψη δεν επαληθεύεται: τα ηλεκτρόνια απελευθερώνονται σχεδόν στιγμαία. Αν το φως είναι πολύ έντονο, τότε θα έπρεπε να απελευθερώνει από την επιφάνεια του μετάλλου πολλά ηλεκτρόνια. Δυστυχώς, το έντονο ερυθρό φως δεν καταφέρνει να απελευθερώσει ούτε ένα ηλεκτρόνιο. Τέλος, όταν το φως καταφέρνει να απελευθερώνει ηλεκτρόνια, η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται από το μέταλλο δεν εξαρτάται από την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτός σε δεδομένο χρονικό διάστημα.

Την εξήγηση του φαινομένου διατύπωσε το 1905 ο νεαρός υπάλληλος ενός γραφείου ευρεσιτεχνιών, ο Άλμπερτ Αϊνστάιν. Εισηγήθηκε την άποψη ότι το φως συμπεριφέρεται σαν σωματίδιο (γνωστό ως φωτόνιο), και ότι κάθε φωτόνιο έχει ενέργεια που εξαρτάται από τη συχνότητά του.

Ακριβέστερα, ο Αϊνστάιν απέδωσε σε κάθε φωτόνιο μονοχρωματικού φωτός ενέργεια  $E = h\nu$ , όπου  $\nu$  είναι η συχνότητα του φωτός και  $h$  η σταθερά του Planck ( $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ).

Η ενέργεια με την οποία ένα ηλεκτρόνιο κρατείται δέσμοι στο εσωτερικό ενός μετάλλου ονομάζεται έργο εξαγωγής  $\phi$ . Με άλλα λόγια, το έργο εξαγωγής είναι το έργο το οποίο απαιτείται για να υπερνικήθουν οι δυνάμεις που συγκρατούν το ηλεκτρόνιο στο μέταλλο. Όταν λοιπόν ένα φωτόνιο προσκρούει σε ένα ηλεκτρόνιο στο εσωτερικό του μετάλλου, το ηλεκτρόνιο απορροφά όλη την ενέργεια του φωτονίου και το τελευταίο εξαφανίζεται. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου όταν εξέρχεται από το μέταλλο ισούται με τη διαφορά της ενέργειας του φωτονίου και του έργου εξαγωγής. (Ένα μέρος της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου χάνεται στη διαδρομή του προς την επιφάνεια του μετάλλου. Πράγματι, αν αυτή η απώλεια είναι μεγάλη, το ηλεκτρόνιο δεν θα μπορέσει να «δραπετεύσει» από την επιφάνεια του μετάλλου.)

Έτοιμοι, ας υποθέσουμε ότι το έργο εξαγωγής κάποιου μετάλλου είναι 3 eV. ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , οπότε  $h = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ .) Το φωτόνιο του ερυθρού φωτός (μήκους κύματος 620 nm) έχει ενέργεια 2 eV. Επειδή όλα τα φωτόνια του συγκεκριμένου φωτός έχουν ενέργεια 2 eV, κανένα από αυτά δεν



μπορεί να προσφέρει την ενέργεια των 3 eV και να απελευθερώσει ένα ηλεκτρόνιο. Είναι αδιάφορο πόσο έντονο είναι το φως, πόσα φωτόνια των 2 eV «βομβαρδίζουν» το μέταλλο —το ηλεκτρόνιο θα παραμείνει δέσμιο. Αν όμως φωτίσουμε το μέταλλο με υπεριώδες φως (μήκους κύματος 310 nm), τα ηλεκτρόνια θα μπορούν να δραπετεύουν. Πράγματι, τα εν λόγω φωτόνια έχουν ενέργεια 4 eV. Έτοι, η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων κατά την έξοδό τους από το μέταλλο θα είναι

$$K_{\max} = h\nu - \phi = 1 \text{ eV}.$$

Ένα χρήσιμο ανάλογο αποτελούν οι αυτόματοι πωλητές, τα μηχανήματα από τα οποία μπορείτε να αγοράσετε, ας πούμε, καραμέλες. Στο μηχάνημα ρίχνετε μόνο ένα κέρμα κάθε φορά —κέρμα των 10, 20, 50, ή 100 δραχμών. Ένα κουτί καραμέλες κοστίζει 50 δραχμές. Αν ρίξετε στο μηχάνημα ένα κέρμα των 10 δραχμών, το κέρμα θα σας επιστραφεί ή θα το χάσετε (θα πρόκειται για λαίμαργο πωλητή). Αν ρίξετε ένα κέρμα των 20 δραχμών, θα συμβεί το ίδιο. Αν όμως ρίξετε ένα κέρμα των 50 δραχμών, θα πάρετε ένα κουτί νόστιμες καραμέλες. Αν ρίξετε ένα κέρμα 100 δραχμών, το μηχάνημα θα σας δώσει ένα κουτί καραμέλες και τα ρέστα (50 δραχμές) δεν θα σας δώσει δύο κουτιά καραμέλες. Με ένα κέρμα μπορείτε να πάρετε ή ένα κουτί καραμέλες ή κανένα —αυτός είναι ο κανόνας.

Το έργο εξαγωγής του μετάλλου αντιστοιχεί στην τιμή που έχει το κουτί καραμέλες. Η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου αντιστοιχεί στην αξία του κέρματος το οποίο ρίχνετε στο μηχάνημα. Η κινητική ενέργεια του εξερχόμενου ηλεκτρονίου αντιστοιχεί στα ρέστα που πέρνετε. Στην περίπτωση ενός φωτονίου χαμηλής ενέργειας (αντίστοιχα ενός κέρματος των 10 ή 20 δραχμών), δεν έχουμε απελευθέρωση ηλεκτρονίου (το μηχάνημα δεν σας δίνει καραμέλες) —και αυτό άσχετα από το πόσα κέρματα των 10 ή 20 δραχμών θα ρίξετε στο μηχάνημα (άσχετα από το πόσο έντονο είναι το φως, από το πόσα φωτόνια χαμηλής ενέργειας θα προσέσουν στο μέταλλο). Στην περίπτωση κατά την οποία στην επιφά-

νεια του μετάλλου πέφτει ένα φωτόνιο υψηλής ενέργειας (ένα κέρμα των 50 ή 100 δραχμών) θα απελευθερώθει ένα μόνο ηλεκτρόνιο (μόνο ένα κουτί καραμέλες).

Η σωματιδιακή θεωρία του φωτός εξηγεί ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Από την άλλη, όμως, αδυνατεί να εξηγήσει την κυματική όψη του φωτός όπως περιγράφεται με σαφήνεια από τον Young, τον Maxwell και τους λοιπούς. Έτοι, μένουμε όλοι με την απορία: ποια είναι η αληθινή φύση του φωτός;

Στις δεκαετίες που ακολούθησαν, μπορέσαμε να κατανοήσουμε βαθύτερα τη φύση του φωτός: αποδείχτηκε ότι το φως συμπεριφέρεται σαν οωματίδιο, που ουγκρούεται ελαστικά με τα ηλεκτρόνια, και έχει ορμή  $p = h/\lambda = h\nu/c$ , όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος του φωτός και  $c$  η ταχύτητά του. Ο Arthur Compton, γι' αυτές τις πειραματικές μελέτες του, τις οποίες διεξήγαγε το 1922, τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ.

Έτοι, φτάσαμε στο πρόβλημα αυτού του μήνα.

A. Ποικίλες πηγές μονοχρωματικού φωτός, με διάφορα μήκη κύματος, φωτίζουν σε διαδοχικά πειράματα την επιφάνεια μεταλλικού λιθίου. Η μέγιστης κινητικής ενέργειες των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από αυτό μετρήθηκαν από τον R.A. Millikan, και καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Μήκος κύματος (nm)	Κινητική ενέργεια (eV)
433,0	0,55
404,7	0,73
365,0	1,09
312,5	1,67
253,5	2,57

Αποτυπώστε αυτά τα δεδομένα σε διάγραμμα, και υπολογίστε τη σταθερά του Planck και το έργο εξαγωγής του λιθίου.

B. Δείξτε ότι ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να απορροφήσει πλήρως ένα φωτόνιο. (Στα μέταλλα, τα γενονικά άτομα μπορούν να συμμετέχουν στην κρούση και έτοι να διατηρούνται ταυτόχρονα η ενέργεια και η ορμή.)

C. (a) Το ανθρώπινο μάτι είναι

ιόο ευαισθητό ώστε μπορεί να ανιχνεύει και ένα μόνο φωτόνιο. Αν η ίρις του ματιού έχει διάμετρο 0,5 cm, σε πόση απόσταση πρέπει να τοποθετήσουμε μια λυχνία φωτός ισχύος 50 W (μήκος κύματος 500 nm) έτσι ώστε στην ίριδα να φτάνει κατά μέσο όρο ένα ηλεκτρόνιο ανά δευτερόλεπτο; (b) Σε πόση απόσταση πρέπει να τοποθετήσουμε τη λυχνία ώστε η πυκνότητα των φωτονίων να είναι κατά μέσο όρο ένα φωτόνιο ανά κυβικό εκατοστόμετρο;

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum έως τις 10 Δεκεμβρίου 1995. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

## Ζυγίζοντας έναν αστροναύτη

Και τώρα η λύση του προβλήματος του τεύχους Μαΐου / Ιουνίου.

A. Η συνολική μάζα του συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι το άθροισμα της μάζας του καθίσματος  $m_s$  και της μάζας του αστροναύτη  $m_a$ . Έτσι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_s + m_a}{k}}$$

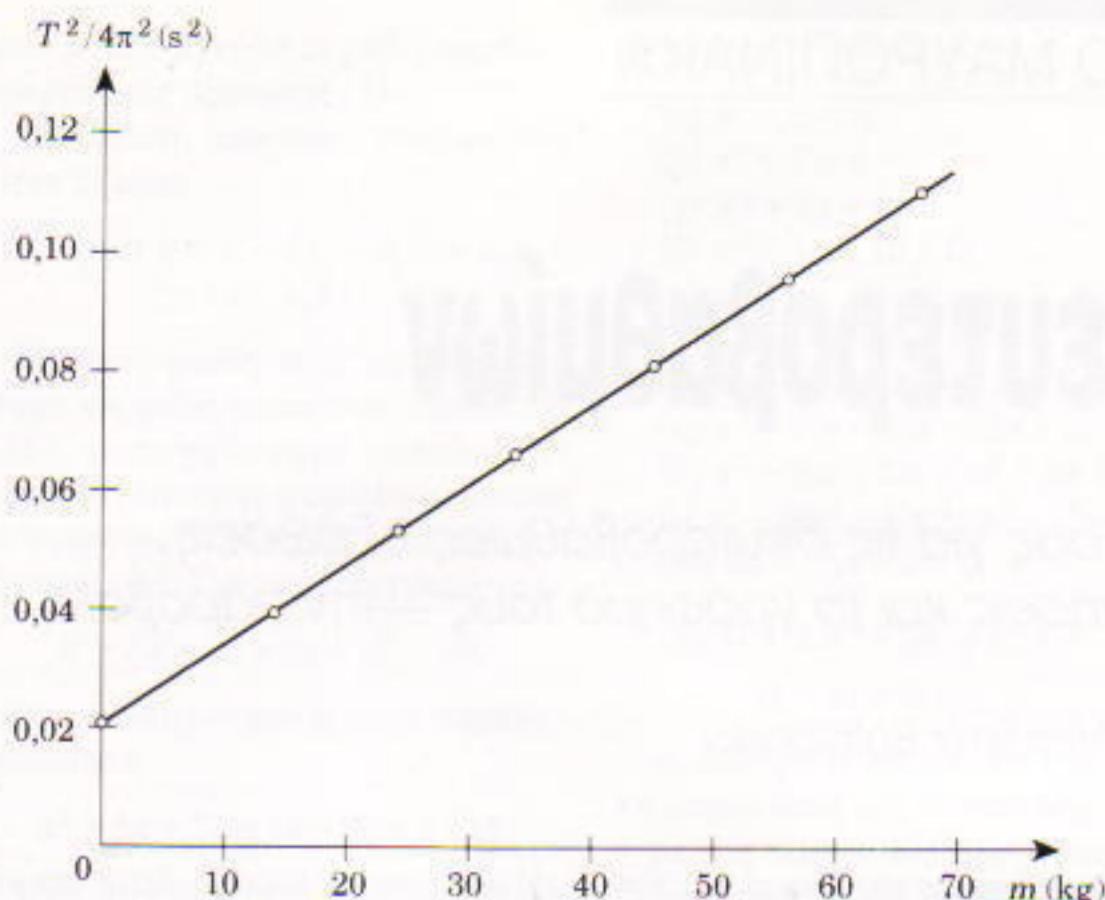
ή

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{\ell}{k} m_a + \frac{m_s}{k}.$$

Αυτή είναι ουνάρτηση της μορφής  $y = ax + b$ . Επομένως, μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση του  $T^2/4\pi^2$  σε ουνάρτηση με τη μάζα που χρησιμοποιείται για τη βαθμούμηρη της ουσιεύης BMMD. Αυτή είναι ευθεία γραμμή κλίσης  $1/k$  και τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο  $m_s/k$  (Σχήμα 1). Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε το  $k = 748 \text{ N/m}$  και την  $m_s = 15,4 \text{ kg}$ .

B. Με τις παραπάνω τιμές και τα δεδομένα σχετικά με τον Garriott βρίσκουμε ότι κατά τη διάρκεια των 58 ημερών έχασε μάζα 2,3 kg.

C. Ας υπολογίσουμε την επιτάχυνση με την οποία το σύστημα (σκέιτμπορντ-ζυγαριά-αναβάτης) κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη που κινεί το σύστημα κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι η  $m_a g$  ημθ επομένως, η εν λόγω επιτάχυνση είναι  $g \eta \mu \theta$ . Με αυτή την επιτάχυνση κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και ο αναβάτης.



Σχήμα 1

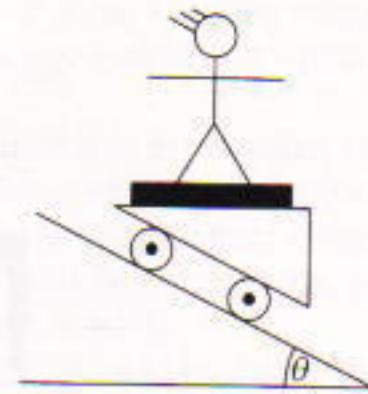
Υποθέτουμε ότι η ένδειξη της ζυγαριάς δεν είναι παρά η πυμή της δύναμης που ασκείται κάθετα στην επιφάνειά της. Έτσι, οι δυνάμεις που ασκούνται στον αναβάτη κατά την κατακόρυφη διεύθυνση είναι το βάρος του  $mg$  και η αντίδραση  $F_z$  της ζυγαριάς. Προφανώς, η ουνισταμένη αυτών των δυνάμεων θα ισούται με

το γινόμενο της μάζας του αναβάτη επί την κατακόρυφη ουνιστώσα της επιτάχυνσής του. Δηλαδή,

$$mg - F_z = (mg \sin \theta) - mg \sin \theta,$$

ή

$$\begin{aligned} F_z &= mg (1 - \sin^2 \theta) \\ &= mg \cos^2 \theta \\ &= (588 \text{ N}) \cos^2 \theta. \end{aligned}$$



Σχήμα 2

Αυτή είναι η λύση που δόθηκε στον προκαταρκτικό διαγωνισμό για την επιλογή της ολυμπιακής ομάδας φυσικής των ΗΠΑ του 1995, και αυτή είναι η λύση την οποία θα έδινε ο ποιοδήποτε διδακτικό εγχειρίδιο. Εντούτοις, υπάρχει ένα σοβαρό πρόβλημα: ο αναβάτης δεν θα μπορούσε να μείνει για πολύ στην κατακόρυφη θέση στην οποία τον βλέπετε στο Σχήμα 2. Την εν λόγω αδυναμία επισημαίνει ο δρ. Albert Bartlett, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Κολοράντο και τέως πρόεδρος της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT), στο άρθρο του «Τι είναι το "βάρος" τέλος πάντων», στη σελίδα 43. Πρέπει να το μελετήσουμε όλοι προσεκτικά. ◻

## Ο ΠΟΛΙΤΕΜΟΣ ΤΟΥ ΓΟΝΙΑΙΟΥ

**François Gros**  
Καθηγητής στο Collège de France

Η ποριακή βιολογία: κυριαρχούντα στην κοινωνικό-επιτροπή τη γενετική μηχανική περιβάλλοντας: η γονιδικούματη και η εξέγους η αναγεννηση των κληρονομικών συστηματικού φακέλωματος των Οξιτορεΐνων φαγόβακτρων των αρπαγών στον κολλεγιακό, περιοντικό μεταλλικού διάτροπου σρενυητικού διατάραχή της πολικότητας. Η συντριπτική για τη βιοτεχνική είναι λίγος κινδύνοςς σύνταγματος ο Σελ. 192, 2.400 δρ.

ιατρική και στη γεφυρία, μετατρέπεται σε ματαρέλα, είτε διατροφή και το αναπτυραγόνη γίνονται μητέρες στην ουσιώδη την εγκύρωντες την κίνηση του πληθυσμού...  
Μητέρες. Στο περίστατο αποφασίζεται ότι έχοντας προσβασατούστε στο τελερεπρογράμματος και από την παρελθομένη ιστορροτικότητα  
θιελώδης. Ποιες ελπίδες γεννά και «πολιτισμός» του γονιδίου»;  
Εκδόσεις κάτοπτρο

**ΜΟΛΙΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣ**

# Περί δευτεροβάθμιων

Βελτιώστε τις γνώσεις σας για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, τις δευτεροβάθμιες συναρτήσεις και το γράφημά τους —την παραβολή

Vladimir Boltyansky

**A**Σ ΞΕΚΙΝΗΣΟΥΜΕ ΥΠΕΝΘΥΜΙΖΟΝΤΑΣ τον τρόπο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξισώσης

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

με πραγματικούς συντελεστές  $p$  και  $q$ . Είναι και αυτή μια μορφή της δευτεροβάθμιας εξισώσης, αν και ίσως όχι αυτή στην οποία έχετε συνηθίσει. Αν ο συμβολισμός μας σας φαίνεται διαφορετικός και παράξενος, μπορείτε να επαναδιατυπώσετε τα αποτελέσματά μας χρησιμοποιώντας τον δικό σας. Θα διαπιστώσετε ότι όλα όσα γνωρίζετε παρουσιάζονται εδώ με μια ισοδύναμη μορφή, αν και μερικές φορές οι τύποι μας είναι πιο εύχρηστοι για τη συζήτησή μας. Πολλά από τα αποτελέσματά μας θα σας είναι ήδη γνωστά, οπωσδήποτε όμως μερικά θα είναι καινούργια. Η εξισώση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(p^2 - 4q) \quad (2)$$

(κάτι που το επαληθεύουμε μετά τις αναγωγές). Ο αριθμός  $\Delta = p^2 - 4q$  ονομάζεται διακρίνουσα της εξισώσης (1). Η εξισώση παίρνει τώρα τη μορφή

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\Delta, \quad (3)$$

και γίνεται φανερό πως όταν η  $\Delta$  είναι μη αρνητική, η εξισώση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{\Delta}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{\Delta}), \quad (4)$$

που είναι διαφορετικές αν  $\Delta > 0$ , ενώ συμπίπτουν αν  $\Delta = 0$ .

Εάν η  $\Delta$  είναι αρνητική, οι εξισώσεις (1) και (3) δεν έχουν πραγματικές ρίζες διότι για κάθε πραγματικό  $x$  το αριστερό τους μέλος δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξισώση (3) ως

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{-\Delta})^2 = 0, \quad (5)$$

όπου  $i$  είναι η φανταστική μονάδα —δηλαδή,  $i^2 = -1$ . Τώρα παραγοντοποιούμε το αριστερό μέλος και παίρνουμε

$$\left(x + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i\right)\left(x + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i\right) = 0,$$

απ' όπου έπειται ότι η εξισώση έχει δύο μιγαδικές λύσεις

$$x_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{-\Delta}i),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{-\Delta}i). \quad (6)$$

Αυτοί οι συλλογισμοί συνοψίζονται στο επόμενο θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.** Η δευτεροβάθμια εξισώση (1) με πραγματικούς συντελεστές  $p$  και  $q$  έχει δύο ρίζες που η μορφή τους εξαρτάται από την τιμή της διακρίνουσας  $\Delta = p^2 - 4q$ . Αν  $\Delta > 0$ , οι ρίζες είναι πραγματικές και διαφορετικές (δείτε την εξισώση (4)). Αν  $\Delta = 0$ , οι ρίζες είναι πραγματικές και συμπίπτουν, και αν  $\Delta < 0$ , οι ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί (με μη μηδενι-

κό φανταστικό μέρος —δείτε την εξισώση (6)).

Το επόμενο θεώρημα το απέδειξε ο διάσημος γάλλος μαθηματικός François Vieta (1540-1603), ένας από τους πρωτοπόρους στη χρήση των γραμμάτων για αριθμούς και στην εισαγωγή του σύγχρονου συστήματος αλγεβρικών συμβόλων.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2:** Οι ρίζες  $x_1$  και  $x_2$  της δευτεροβάθμιας εξισώσης (1) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q. \quad (7)$$

Αυτή η πρόταση μπορεί να αποδειχθεί με άμεσο υπολογισμό. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των πραγματικών ριζών (δηλαδή, όταν η  $\Delta$  είναι μη αρνητική) από τους τύπους (4) παίρνουμε

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{-\Delta}) + \frac{1}{2}(-p - \sqrt{-\Delta}) = -p,$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{4}(-p + \sqrt{-\Delta})(-p - \sqrt{-\Delta})$$

$$= \frac{1}{4}(p^2 - \Delta) = q.$$

Στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών (όταν  $\Delta < 0$ ) οι τύποι του Vieta (7) προκύπτουν παρόμοια από τις εξισώσεις (6).

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3.** Κάθε δευτεροβάθμιο τριώνυμο γράφεται ως γινόμενο γραμμικών παραγόντων

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

όπου  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (1).

Πράγματι, από τους τύπους του Vieta έχουμε

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2).$$

Μερικές φορές, αντί να υπολογίζουμε τις ρίζες μέσω των τύπων (4) ή (6), επιτυγχάνουμε εύκολα την παραγοντοποίηση συμπληρώνοντας το τετράγωνο (συγκρίνετε με την εξίσωση (2)). Για παράδειγμα,

$$x^2 + 8x - 33 = (x + 4)^2 - 49,$$

απ' όπου οδηγούμαστε στην παραγοντοποίηση

$$x^2 + 8x - 33 = (x - 3)(x + 11).$$

Και μια τελευταία παρατήρηση. Όταν το  $p$  είναι άρτιος, είναι συχνά ποι εύχρηστοι οι τύποι

$$\frac{1}{4}\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

και

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Και τώρα που έχουμε εξοικειωθεί πλήρως με όλα τα είδη των δευτεροβάθμιων εξίσωσεων, μπορούμε να προχωρήσουμε σε μερικά προβλήματα.

## Προβλήματα

1. Αποδείξτε ότι η διακρίνουσα  $\Delta$  της δευτεροβάθμιας  $x^2 + px + q = 0$  ισούται με  $(x_1 - x_2)^2$ , όπου  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι λύσεις αυτής της εξίσωσης.

2. Επιβεβαιώστε με απευθείας αντικατάσταση ότι οι αριθμοί που δινούνται από τους τύπους (4) είναι λύσεις της εξίσωσης (1) αν  $\Delta \geq 0$ . Κάντε το ίδιο με τους αριθμούς που προκύπτουν από τους τύπους (6) για την περίπτωση που  $\Delta < 0$ .

3. Επιλύστε τις επόμενες δευτερ-

βάθμιες εξίσωσεις:

- (α)  $x^2 - 5 = 0$ ,
- (β)  $x^2 + 7 = 0$ ,
- (γ)  $x^2 + 3x = 0$ ,
- (δ)  $x^2 - 7x + 12 = 0$ ,
- (ε)  $x^2 - x - 30 = 0$ ,
- (στ)  $x^2 + 4x + 5 = 0$ ,
- (ζ)  $x^2 + 10x + 25 = 0$ ,
- (η)  $x^2 + 2(a-1)x - (6a+3) = 0$ ,
- (θ)  $x^2 + 2(a+3)x + (a^2 + 2a + 9) = 0$ ,
- (ι)  $x^2 - 2(a^2 - 1)x + (a^4 - a^2 + 1) = 0$ ,
- (ια)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ,
- (ιβ)  $(1+a)x^2 + 2x\sqrt{a^2+1} - (1-a) = 0$ .

4. Αποδείξτε ότι αν  $\Delta > 0$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2 + px + q$  τέμνει τον άξονα των  $x$  σε δύο σημεία  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ , όπου  $x_1$ ,  $x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + px + q = 0$  (Σχήμα 1). Αν  $\Delta = 0$ , η γραφική παράσταση εφάπιεται στον άξονα  $x$  (Σχήμα 2). Τέλος, αν  $\Delta < 0$ , η γραφική παράσταση βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από τον άξονα  $x$  — δεν έχουν κοινά σημεία (Σχήμα 3).

5. Βρείτε τις δευτεροβάθμιες εξίσωσεις που έχουν τις επόμενες ρίζες:

- (α)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ ,
- (β)  $x_1 = x_2 = -4$ ,
- (γ)  $x_1 = 2 - 3i$ ,  $x_2 = 2 + 3i$ ,
- (δ)  $x_1 = a + bi$ ,  $x_2 = a - bi$ ,
- (ε)  $x_1 = 3 - 4i$ ,  $x_2 = 2 - 5i$ .

6. Αποδείξτε ότι για κάθε  $p$  και  $q$  το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} y + z = -p, \\ yz = q \end{cases}$$

έχει δύο λύσεις:  $y = x_1$ ,  $z = x_2$ , και  $y = x_2$ ,  $z = x_1$  (πραγματικές ή μιγαδικές, διαφορετικές ή συμπίπτουσες), όπου  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $x^2 + px + q = 0$ .

7. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας συνάρτη-

σης  $y = x^2 + px + q$  είναι συμμετρική ως προς την ευθεία  $x = -p/2$  (Σχήμα 4).

8. Αποδείξτε ότι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $x^2 + px + q = 0$  (με  $p$ ,  $q$ , πραγματικούς) είναι πραγματικές και θετικές αν και μόνο αν  $\Delta > 0$ ,  $p < 0$ ,  $q > 0$ .

9. Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $x^2 + px + q = 0$  (με  $p$ ,  $q$ , πραγματικούς) να είναι πραγματικές, διάφορες του μηδενός και (α) ομόσημες (β) ετερόσημες.

10. Αποδείξτε ότι αν η μία ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $x^2 + px + q = 0$  (με  $p$ ,  $q$ , πραγματικούς) είναι πραγματική, τότε είναι και η άλλη.

11. Αποδείξτε ότι αν η μία ρίζα της δευτεροβάθμιας  $x^2 + px + q = 0$  (με  $p$ ,  $q$ , πραγματικούς) δεν είναι πραγματική — δηλαδή όταν είναι της μορφής  $a + bi$  με  $b \neq 0$ , τότε η άλλη είναι της μορφής  $a - bi$ , δηλαδή ούτε αυτή είναι πραγματική.

12. Βρείτε το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την ανισότητα  $x^2 + px + q < 0$  (με  $p$ ,  $q$ , πραγματικούς). (Η απάντηση εξαρτάται από τη  $\Delta$ !)

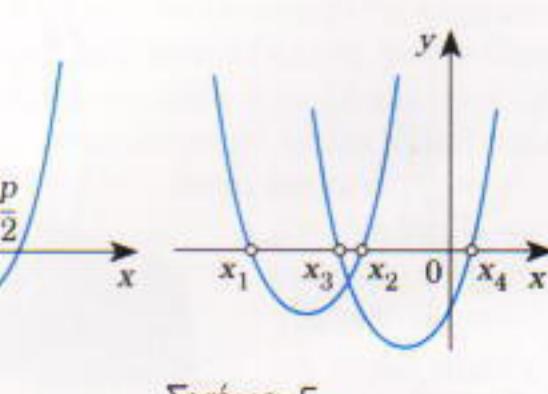
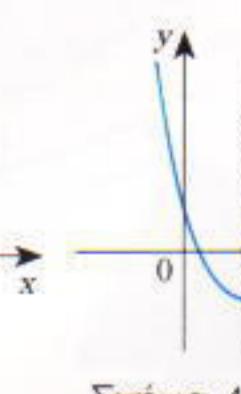
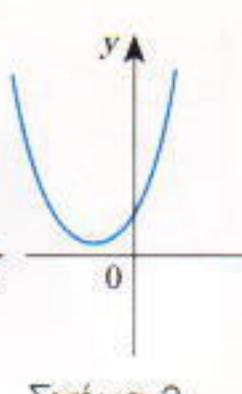
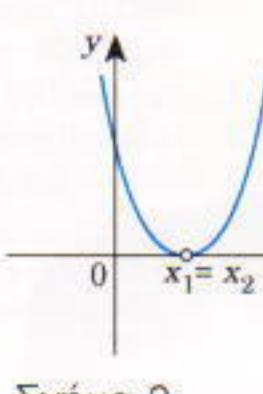
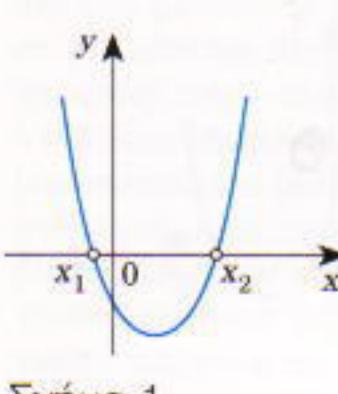
13. Επιλύστε τις επόμενες γνήσιες ανισότητες δευτέρου βαθμού (και κατασκευάστε διαγράμματα):

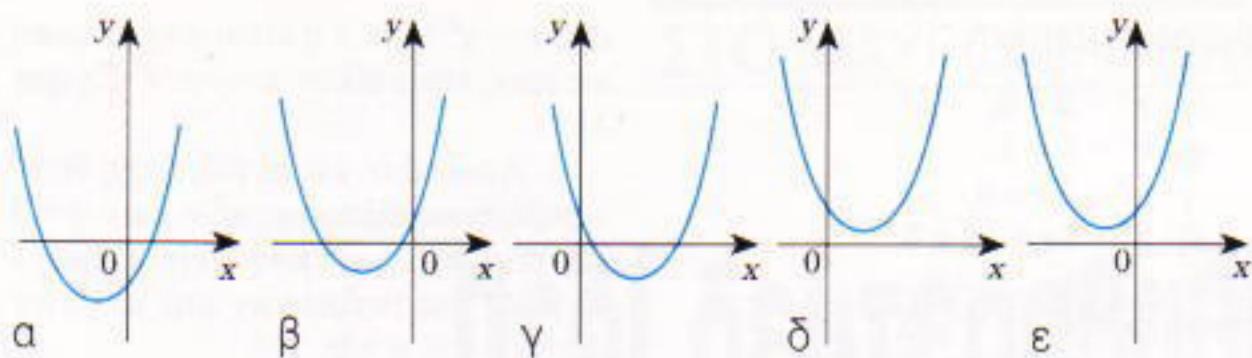
- (α)  $x^2 - 5x + 6 < 0$ ,
- (β)  $x^2 - 10x + 25 > 0$ ,
- (γ)  $x^2 - x - 12 > 0$ ,
- (δ)  $x^2 - 12x + 38 > 0$ .

14. Επιλύστε τις επόμενες ανισότητες δευτέρου βαθμού:

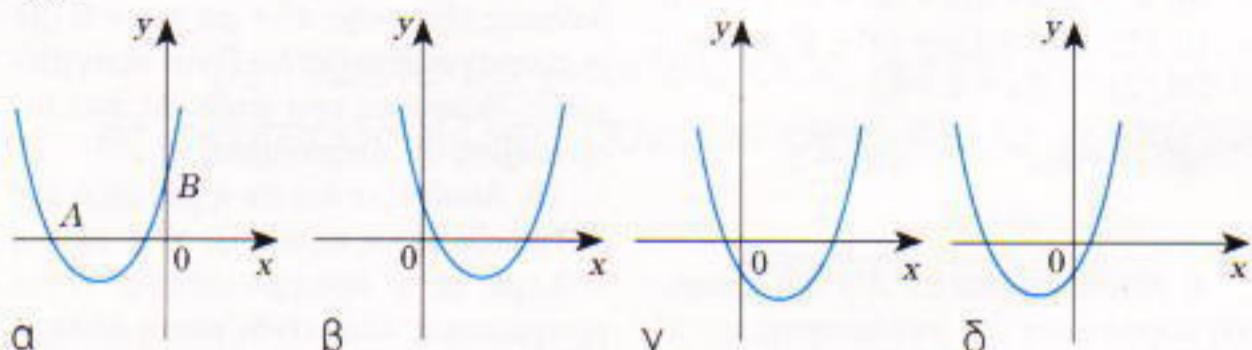
- (α)  $x^2 - 3x - 18 \leq 0$ ,
- (β)  $x^2 - 8x + 16 \leq 0$ ,
- (γ)  $x^2 + 6x + 5 \geq 0$ ,
- (δ)  $x^2 - 14x + 50 \leq 0$ .

15. Αποδείξτε ότι αν οι ρίζες και των δύο δευτεροβάθμιων εξίσωσεων





Σχήμα 6



Σχήμα 7

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0$$

$$x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

είναι πραγματικές και ανήκουν στο διάστημα  $[a, b]$ , τότε, για κάθε  $k > 0$ , αν οι ρίζες της εξισώσης

$$x^2 + p_1x + q_1 + k(x^2 + p_2x + q_2) = 0, \quad (8)$$

είναι πραγματικές, θα ανήκουν στο ίδιο διάστημα.

16. Αποδείξτε ότι αν οι ρίζες  $x_1, x_2$  της εξισώσης  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$  και οι ρίζες  $x_3, x_4$  της εξισώσης  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  είναι όλες πραγματικές και εναλλασσόμενες —δηλαδή  $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ —, τότε για κάθε  $k > 0$  οι ρίζες της εξισώσης (8) του προβλήματος 15 είναι πραγματικές και η μία από αυτές

ανήκει στο διάστημα  $[x_1, x_3]$  ενώ η άλλη στο  $[x_2, x_4]$ .

17. Με τα δεδομένα του προβλήματος 16, αποδείξτε ότι για κάθε αρνητικό  $k \neq -1$  οι ρίζες της εξισώσης (8) είναι πραγματικές, η μία από αυτές ανήκει στο διάστημα  $[x_3, x_2]$  και η άλλη βρίσκεται έξω από το  $[x_1, x_4]$ .

18. Για ποιες τιμές του  $a$  η εξισώση  $x^2 + ax + 6 = 0$  έχει ακέραιες ρίζες;

19. Για ποιες τιμές του  $a$  η εξισώση  $(x - 10)(x - a) + 1 = 0$  έχει ακέραιες ρίζες;

20. Ποια είναι τα πρόσημα των αριθμών  $p$  και  $q$  όταν η γραφική παράσταση της  $y = x^2 + px + q$  έχει τη μορφή του Σχήματος 6;

21. Εστω  $x_1$  και  $x_2$  οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξισώσης  $x^2 + px + q = 0$ . Βρείτε τα  $p$  και  $q$  γνωρίζοντας ότι  $x_1 + 1$  και  $x_2 + 1$  είναι οι ρίζες της εξισώσης  $x^2 - p^2x + pq = 0$ .

22. Δίδονται τα σημεία  $A$  και  $B$  στους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα (διαφορετικά και τα δύο από την αρχή των αξόνων). Αποδείξτε ότι υπάρχει μία και μόνο μία συνάρτηση  $y = x^2 + px + q$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα  $A$  και  $B$  (Σχήμα 7).

σταση διέρχεται από τα  $A$  και  $B$  (Σχήμα 7).

23. Για ποιες πραγματικές τιμές του  $a$  η συνάρτηση  $y = x^2 + 2ax + 1$  είναι θετική για κάθε πραγματικό  $x$ ;

24. Οι εξισώσεις  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$  και  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  έχουν πραγματικούς συντελεστές τέτοιους ώστε  $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$ . Αποδείξτε ότι τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις έχει πραγματικές ρίζες.

25. Θεωρήστε ένα πολυώνυμο  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  με πραγματικούς συντελεστές  $a > 0, b, c$ . Αποδείξτε ότι είναι αληθής μία από τις επόμενες προτάσεις:

(α)  $f(x, y) = a(x - m_1y)(x - m_2y)$ , όπου  $m_1 \neq m_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί (ονομάζουμε το  $f$  υπερβολικό πολυώνυμο).

(β)  $f(x, y) = a(x - my)^2$ , όπου  $m$  είναι πραγματικός (παραβολικό πολυώνυμο).

(γ)  $f(x, y) > 0$  για κάθε πραγματικό  $x, y$  εκτός των  $x = y = 0$  (ελλειπτικό πολυώνυμο).

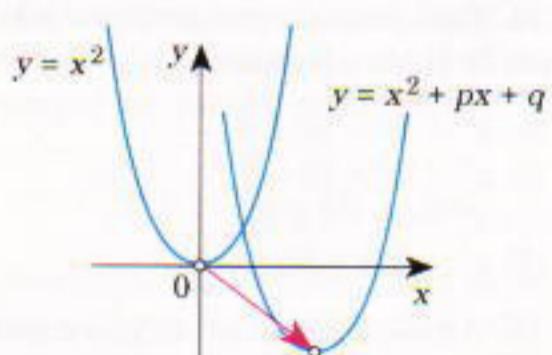
26. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση του τριώνυμου  $y = x^2 + px + q$  προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $y = x^2$  κατά το διάνυμο  $\mathbf{a} = (-p/2, \Delta/4)$ .

27. Αποδείξτε ότι το σύστημα των εξισώσεων

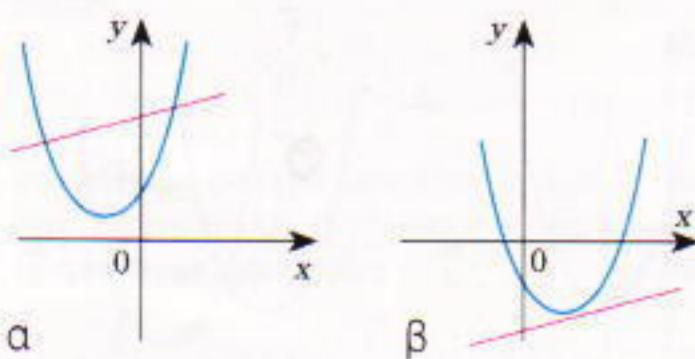
$$\begin{cases} y = x^2 + px + q, \\ y = ax + b \end{cases}$$

έχει το πολύ δύο λύσεις για κάθε πραγματικό  $a, b$  (Σχήμα 9).

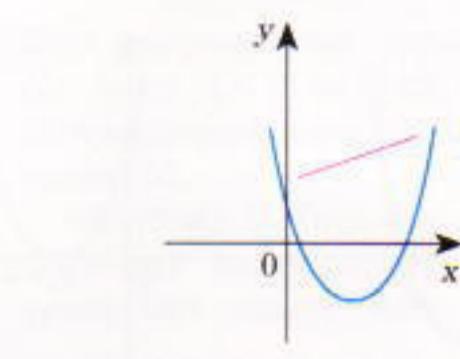
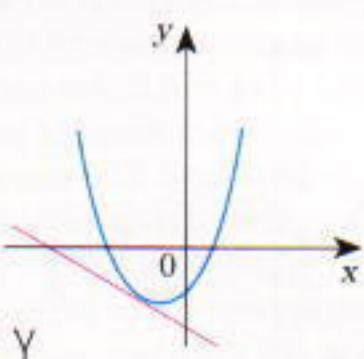
28. Αποδείξτε ότι το εωτερικό της παραβολής  $y = x^2 + px + q$  —δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων  $(x, y)$  για τα οποία  $y > x^2 + px + q$ — είναι κυρτό (γεγονός που σημαίνει ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία αυτού του συνόλου βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο σύνολο —βλ. Σχήμα 10).



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

# Μερικά αποκαθηπτικά ίχνη

Δύο απλά πειράματα με εναλλασσόμενο ρεύμα

N. Paravyan

**Ό**ΛΟΙ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ρεύμα εναλλάσσει περιοδικά τη φορά και το πλάτος του. Θέλετε να δείτε με τα ίδια σας τα μάτια ότι όντως αλλάζει φορά; Κάπι τέτοιο όχι μόνο είναι δυνατό αλλά, τελικά, και αρκετά εύκολο να το καταφέρετε.

## Βλέποντας τις εναλλαγές του ρεύματος

Κατασκευάστε τη διάταξη που απεικονίζεται σχηματικά στο Σχήμα 1. Χρησιμοποιώντας απλές πινέζες στερεώστε ένα φύλλο αλουμινόχαρτου σε μία ξύλινη σανίδα ή ένα κομμάτι κοντραπλακέ. Συγκολλήστε (με κασσιτεροκόλληση) ένα μονωμένο σύρμα χαλκού σε μία από τις πινέζες. Χρησιμοποιώντας πλαστικά ή ξύλινα μανταλάκια στερεώστε ένα παρόμοιο σύρμα στο μεταλλικό στέλεχος ενός σουβλιού. Συνδέστε και τα δύο σύρματα με τους ακροδέκτες του δευτερεύοντος

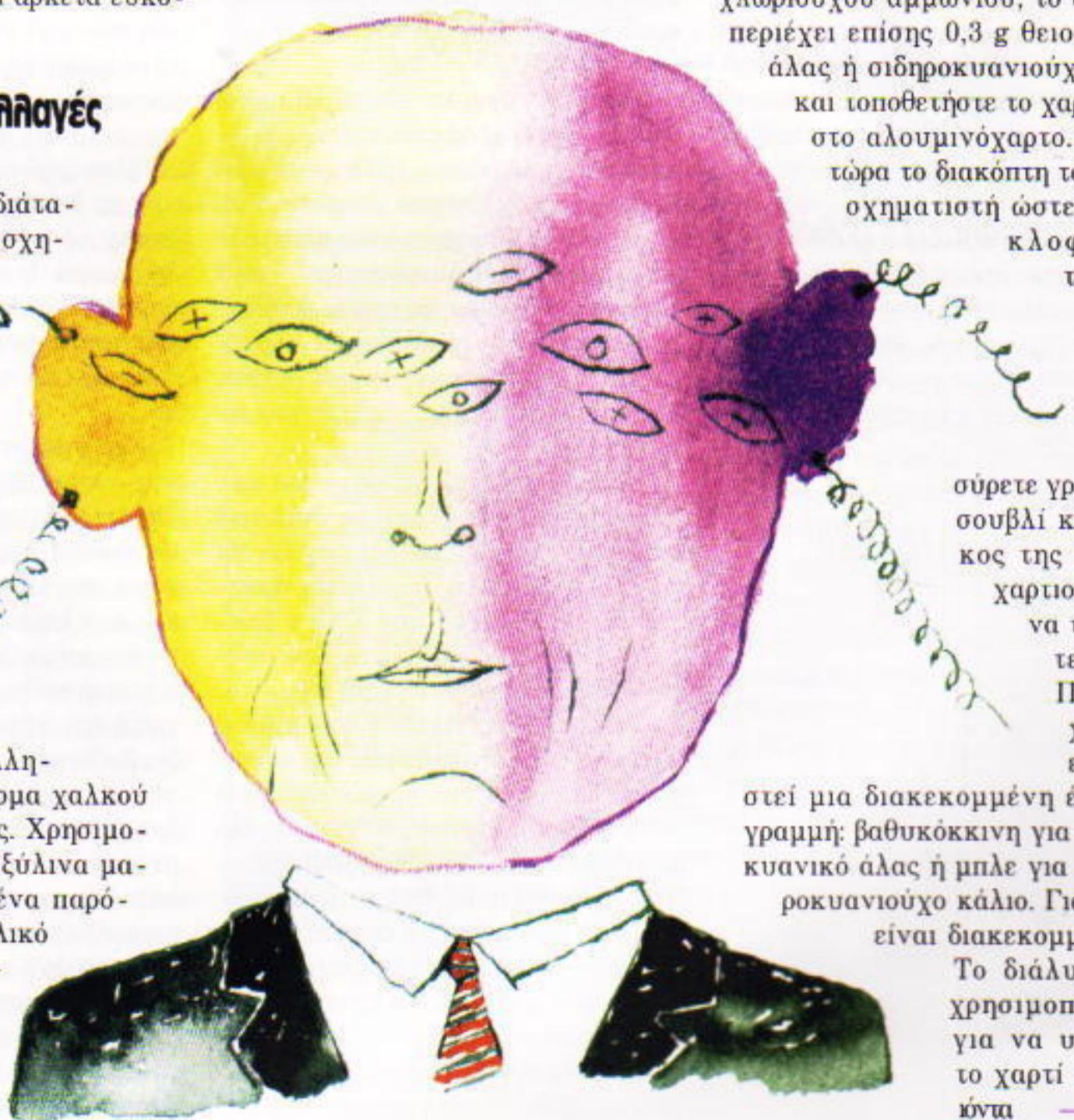
πηνίου ενός μετασχηματιστή-υποβιβαστή τάσης (από 220 V σε 6-10 V). Μη διανοηθείτε καν να ουνδέσετε απευθείας τη συσκευή σε κάποια πρίζα —θα προκαλέσετε βραχυκύ-

κλωμα, και οι μπελάδες που θα αντιμετωπίσετε δεν θα είναι λίγοι.

Πάρτε μια λωρίδα διηθητικού χαρτιού (αν δεν είναι εύκολο να το βρείτε, χρησιμοποιήστε μια λωρίδα εφημερίδας), υγράνετε με διάλυμα 10% χλωριούχου αμμωνίου, το οποίο να περιέχει επίσης 0,3 g θειοκυανικό άλας ή σιδηροκυανιούχο κάλιο, και ιοποθετήστε το χαρτί πάνω στο αλουμινόχαρτο. Ανοίξτε τώρα το διακόπτη του μετασχηματιστή ώστε να κυκλοφορήσει το εναλλασσόμενο ρεύμα, και

σύρετε γρήγορα το σουβλί κατά μήκος της λωρίδας χαρτιού (χωρίς να το πέζετε πολύ). Πάνω στο χαρτί θα εμφανιστεί μια διακεκομμένη έγχρωμη γραμμή βαθυκόκκινη για το θειοκυανικό άλας ή μπλε για το σιδηροκυανιούχο κάλιο. Γιατί όμως είναι διακεκομμένη;

Το διάλυμα που χρησιμοποιήθηκε για να υγρανθεί το χαρτί περιέχει κόντα —κυρίως

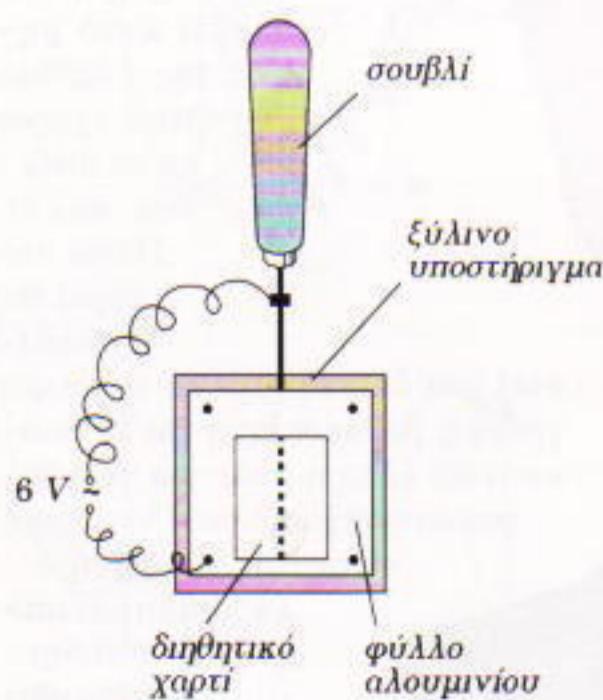


$\text{NH}_4^+$  και  $\text{Cl}^-$ . Όταν ανοίγετε το διακόπτη για την κυκλοφορία του ρεύματος, το σουβλί για την πρώτη ημιπερίοδο γίνεται άνοδος, με αποτέλεσμα να μετακινούνται προς το μέρος του και να εκφορτίζονται πάνω του ιόντα χλωρίου:  $2\text{Cl}^- - 2e^- \rightarrow \text{Cl}_2$ . Το χλώριο αντιδρά άμεσα με το αιδηρό και παράγει τριχλωριούχο σίδηρο:  $2\text{Fe} + 3\text{Cl}_2 \rightarrow 2\text{FeCl}_3$ . Με τη σειρά του, ο τριχλωριούχος σίδηρος αντιδρά με το θειοκυανικό άλας ή το σιδηροκυανιούχο κάλιο και οχηματίζει την ουσία με το βαθυκόκκινο ή μπλε χρώμα.

Για τη δεύτερη ημιπερίοδο, όταν το ρεύμα έχει την αντίθετη φορά, άνοδος γίνεται το αλουμινόχαρτο, πάνω στο οποίο παράγεται άχρωμο τριχλωριούχο αργιλίο:  $2\text{Al} + 3\text{Cl}_2 \rightarrow 2\text{AlCl}_3$ . Αυτό δεν παράγει έγχρωμες ουσίες αντιδρώντας με τα ιόντα του διαλύματος. Έτοι, θα υπάρχει ένα «κενό» στη γραμμή μας. Στη συνέχεια, η φορά του ρεύματος αλλάζει και το σιδηρένιο σουβλί γίνεται πάλι άνοδος, δημιουργώντας ένα έγχρωμο τμήμα στο χαρτί, κ.ο.κ. Αυτές είναι οι διαδικασίες που «σχεδιάζουν» τη διακεκομμένη γραμμή με κανονική εναλλαγή παυλών και κενών.

### Ένα ηλεκτρολυτικό ρολόι

Υπάρχουν πολλά και διάφορα «ρόλογια» φτιαγμένα από την ίδια τη φύση — γεωλογικά, βιολογικά και χημικά. Μπορείτε όμως κι εσείς να κατασκευάσετε ένα ηλεκτρολυτικό ρολόι. Ιδού πώς:

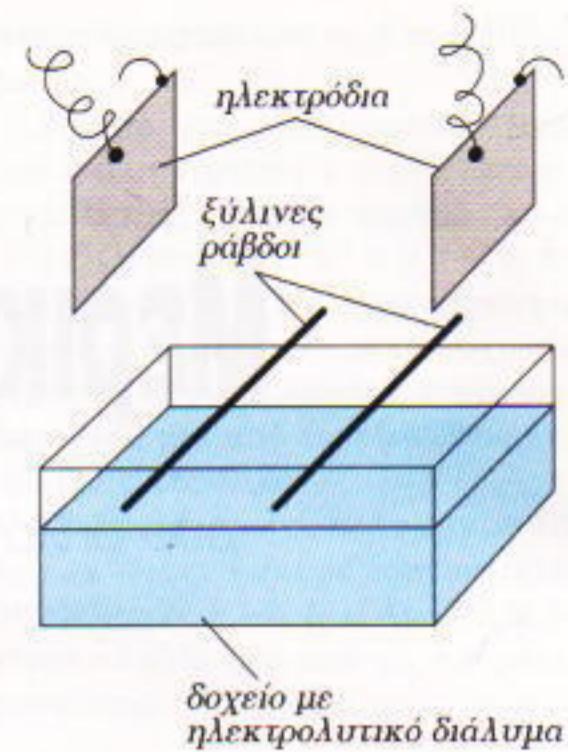


Σχήμα 1

Πάρτε ένα μικρό γυάλινο δοχείο — μια ορθογώνιας βάσης κιουβέτα είναι το καταλληλότερο (Σχήμα 2). Γεμίστε το μέχρι τα 2/3 του ύψους της με ένα κορεομένο διάλυμα επιτραπέζιου αλατιού. Κόψτε δύο ηλεκτρόδια από μια μεταλλική κονσέρβα (όχι όμως αλουμινένια κονσέρβα!), έτοι ώστε να έχουν σχεδόν το ίδιο ύψος με το δοχείο. Συγκολλήστε (με καστεροκόλληση) από ένα μονωμένο σύρμα χαλκού σε κάθε ηλεκτρόδιο. Στερεώστε (με κολλητική ταινία) κάθε ηλεκτρόδιο σε μια ξύλινη ράβδο, ώστε να είναι βυθισμένο μέσα στο διάλυμα. Συνδέστε την άκρη του ενός σύρματος με τον ακροδέκτη του δευτερεύοντος πηνίου ενός μετασχηματιστή-υποβιβαστή τάσης. Εν συνεχείᾳ συνδέστε την άκρη του άλλου σύρματος με τον ακροδέκτη ενός αμπερόμετρου εναλλασσόμενου ρεύματος, βαθμονομημένου έως τα 5 Α. Τέλος συνδέστε, με ένα νέο κομμάτι σύρμα, τον δεύτερο ακροδέκτη του αμπερόμετρου με τον ελεύθερο ακροδέκτη του δευτερεύοντος του μετασχηματιστή.

Η διάταξή μας, λοιπόν, περιλαμβάνει μία πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος, ένα δοχείο με ηλεκτρολυτικό διάλυμα χλωριούχου νατρίου, δύο ηλεκτρόδια βυθισμένα στον ηλεκτρολύτη και ένα αμπερόμετρο — όλα τους συνδεδεμένα σε σειρά. Ανοίξτε το διακόπτη και παρατηρήστε προσεκτικά τι συμβαίνει μέσα στο δοχείο. Να σημειώνετε τις ενδείξεις του αμπερόμετρου.

Θα διαπιστώσετε ότι το ρεύμα αυξάνεται σταδιακά και το διάλυμα γύρω από τα ηλεκτρόδια αρχίζει να βράζει — πράγματι, παράγεται αρκετός ατμός. Υστερά από λίγο ο βρασμός γίνεται πολύ έντονος, το ρεύμα φτάνει στη μέγιστη τιμή του — και ξαφνικά πέφτει σχεδόν στο μηδέν. Την ίδια στιγμή σταματάει και ο βρασμός. Τότε το ρεύμα αρχίζει και πάλι να αυξάνεται, ο βρασμός γίνεται όλο και πιο έντονος και οιροβιλώδης — και η διαδικασία σταματάει πάλι. Αυτό θα συνεχίσει να συμβαίνει μέχρις ότου κλείσετε το διακόπτη. Επομένως δεν μπορείτε να αρνηθείτε ότι η συσκευή μας είναι ένα πραγματικό ηλεκτρολυτικό ρολόι. Πώς μπορούμε όμως να εξηγήσουμε τον πε-



Σχήμα 2

ριοδικό βρασμό και την ταυτόχρονη περιοδική αλλαγή στο ηλεκτρικό ρεύμα;

Το διάλυμα χλωριούχου νατρίου παρουσιάζει μεγάλη ηλεκτρική αντίσταση, και έτοι υερμαίνεται όταν διαρρέεται από ρεύμα. Η θερμοκρασία του αυξάνει τόσο πολύ ώστε ο ηλεκτρολύτης βράζει. Επειδή το πλήθος των φυσαλίδων αερίου αυξάνεται, μετά την πάροδο κάποιου χρόνου τα ηλεκτρόδια πρακτικά μονώνονται από το διάλυμα (ο ατμός είναι διηλεκτρικό υλικό). Στη συνέχεια το κύκλωμα διακόπτεται, ο βρασμός σταματά — και τα ηλεκτρόδια επανέρχονται σε επαφή με το διάλυμα. Και πάλι απ' την αρχή, ξανά και ξανά...

Και γιατί αυξάνονται οι ενδείξεις του αμπερόμετρου; Η θέρμανση του διαλύματος προκαλεί μείωση της αντίστασής του, και σύμφωνα με το νόμο του Οhm το ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα αυξάνει.

Ας επανέλθουμε στο πείραμα. Κλείστε το διακόπτη του μετασχηματιστή και αφήστε ένα μόνο ηλεκτρόδιο βυθισμένο στο δοχείο, απομακρύνοντας το άλλο. Συνδέστε ένα πολύ λεπτό γυμνό σύρμα χαλκού (διαμέτρου 0,5 mm, ή λιγότερο) στον ακροδέκτη του μετασχηματιστή, αντικαθιστώντας το ηλεκτρόδιο που απομακρύνατε. Τυλίξτε το σύρμα με μονωτική ταινία, και, κρατώντας το από την ταινία, θέστε σε λειτουργία το μετασχηματιστή. Αγγίξτε την επιφάνεια του ηλεκτρολύτη με το ελεύ-

θερό άκρο του σύρματος και βυθίστε το σταδιακά σε βάθος ενός περίπου εκατοστού.

Αυτό που συμβαίνει στον ηλεκτρολύτη δεν είναι απλώς ο βρασμός — προστίθεται το ερυθροπυρωμένο άκρο του σύρματος που φωτοβολεί, οι θεαματικές ριπές κίτρινης φλόγας και ένας περιοδικός οξύς κρότος. Και αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε να τα εξηγήσουμε εύκολα.

Πρώτον, το σύρμα ερυθροπυρώνεται λόγω της μικρής διαμέτρου του. Παρ' όλα αυτά, η περιοδικότητα της θέρμανσης δεν μπορεί να γίνει αντιληπτή με γυμνό μάτι διότι οι διακοπές του ρεύματος είναι πολύ ταχείες. Δεύτερον, στο σύστημά μας, που αποτελείται από ένα πολύ μεγάλο και ένα πολύ μικρό ηλεκτρόδιο, πραγματοποιείται ανόρθωση του ρεύματος (μονόδρομη αγωγιμότητα) και, λόγω αυτού, λαμβάνει χώρα ηλεκτρόλυση του διαλύματος αλατιού. Κατά την εν λόγω διεργασία παράγεται υδρογόνο στο μικρό ηλεκτρόδιο (το σύρμα), το οποίο στη συνέχεια αναμειγνύεται με πολύ μικρά σταγονίδια διαλύματος χλωριούχου νατρίου και εκρήγνυται παράγοντας μια κίτρινη φλόγα και έναν ξερό κρότο. Επιπλέον, σε υψηλές θερμοκρασίες ο υδρατμός διασπάται στην επιφάνεια του ερυθροπυρωμένου σύρματος:  $2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$ . Το προκύπτον μείγμα υδρογόνου και οξυγόνου εποιης φεγγοβολά — ή, μάλλον, εκρήγνυται με ηχηρό τρόπο.

Θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε κάποιο από τα παραπάνω φαινόμενα εάν αντί για εναλλασσόμενο ρεύμα χρησιμοποιούσαμε συνεχές; Χρησιμοποιώντας έναν ανορθωτή για την τάση εξόδου των 6-10V, μπορείτε να δημιουργήσετε όλα τα παραπάνω φαινόμενα, και ακόμη θεαματικότερα, διότι λαμβάνει χώρα μια επιπρόσθετη διαδικασία παράλληλα με αυτές που ήδη περιγράψαμε — η ηλεκτρόλυση του υδατικού διαλύματος χλωριούχου νατρίου.

Μια τελική παρατήρηση. Εάν δεν έχετε αμπερόμετρο εναλλασσόμενου ρεύματος, δεν πειράζει. Στη θέση του μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έναν λαμπτήρα πυρακτώσεως των 5-10V και 5-10W. Τα αποτελέσματα δεν θα είναι λιγότερο θεαματικά. ◉

## ΙΟΙ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ

AIDS: γεγονότα, έρευνες και προβληματισμοί

Luc Montagnier

Διευθυντής ερευνών στο CNRS



«Τον καιρό της ειρήνης, οι γιοι θάβουν τους πατέρες τους· τον καιρό του πολέμου, οι πατέρες θάβουν τους γιους τους», έγραφε ο Ηρόδοτος. Είναι αλήθεια ότι διεξάγεται ένας πραγματικός πόλεμος από τότε που εμφανίστηκε το AIDS, το 1981, αυτή η ασθένεια που καταστρέφει το ανοσοποιητικό σύστημα. Στην πρωτοπορία της έρευνας βρίσκεται ο Luc Montagnier, ένας από τους σημαντικότερους ιολόγους του κόσμου. Είναι ο επιστήμονας που, μαζί με την ομάδα του στο Ινστιτούτο Παστέρ, ανακάλυψε το 1983 τον ίο ο οποίος έχει προκαλέσει πραγματική πανδημία. Σε τόύτο το εξαιρετικά ενδιαφέρον βιβλίο, ο συγγραφέας του αναφέρεται στην ερευνητική εργασία που τον οδήγησε στην ανακάλυψή του και περιγράφει τη διαμάχη του με τον αμερικανό επιστήμονα R. Gallo· δίνει μια ευσύνοπτη, περιεκτική, αλλά επίσης πλήρη και διαφωτιστική παρουσίαση των γνώσεων που διαθέτουμε όσον αφορά τον ίο και την προέλευσή του, τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η ασθένεια, τις δυνατότητες θεραπείας και ανακάλυψης εμβολίου, και τη γεωγραφική εξάπλωση του AIDS. Ακόμη, ο συγγραφέας αναπτύσσει τις απόψεις των γνωστών ευθύνες των πολιτικών και εκθέτει τις σκέψεις του για τις επιπτώσεις της επιδημίας του AIDS στα δημόσια συστήματα υγείας και σε ολόκληρη την κοινωνία.

Πρόκειται για ένα βιβλίο πλούσιο σε πολύτιμες πληροφορίες, γραμμένο από έναν επιστήμονα και ερευνητή που μάγεται σε έναν από τους δραματικότερους πολέμους του αιώνα μας.

Σελ.: 376, 5.000 δρ.

Εκδόσεις κάτοπτρο

ΜΟΔΙΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

# Η 26η Διεθνής Ολυμπιάδα Φυσικής

Παύλος Ιωάννου

**H** 26η ΔΙΕΘΝΗΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ για μαθητές λυκείου έλαβε χώρα στο διάστημα 5-12 Ιουλίου 1995 στην Καμπέρα της Αυστραλίας με τη συμμετοχή 51 χωρών από όλες τις ηπείρους.

Η ελληνική αποστολή απαρτίζόταν από τους μαθητές Ιωάννη Κοτσαρπασάκη, Πέτρο Χριστόπουλο, Διονύση Σκαμνάκη, Εμμανουήλ Ροβίλο και Αναστάσιο Παπαγιαβή, οι οποίοι ήταν οι νικητές του Πανελλήνιου Διαγωνισμού Φυσικής, που διοργανώνει κάθε χρόνο η Ένωση Ελλήνων Φυσικών.

Νικήτρια ομάδα στην 26η Ολυμπιάδα αναδείχτηκε η ομάδα της Κίνας, οι αντιπρόσωποι της οποίας κατέκτησαν τον μεγαλύτερο αριθμό χρυσών μεταλλίων. Σημαντική διάκριση έλαβε και ο έλληνας μαθητής Πέτρος Χριστόπουλος.

Παρακάτω παρατίθενται τα θέματα της Ολυμπιάδας μαζί με τις λύσεις τους.

## Θεωρητικός κύκλος

### Πρόβλημα 1

Βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό και μέτρηση της αστρικής μάζας.

(a) Ένα φωτόνιο συχνότητας  $f$  ισοδυναμεί με μάζα αδράνειας  $m$  που υπολογίζεται από την ενέργειά του. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η βαρυτική του μάζα είναι ίση με την αδρανειακή. Σύμφωνα με αυτά, ένα φωτόνιο που εκπέμπεται από την επιφάνεια ενός αστρου θα χάνει ενέργεια όταν διαφεύγει από το πεδίο βαρύτητας του αστρου. Να δείξετε ότι η μεταβολή της συχνότητας  $\Delta f$  του φωτονίου όταν θα διαφύγει από την επιφάνεια του αστρου στο άπειρο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\Delta f}{f} \equiv -\frac{GM}{Rc^2} \quad \text{για } \Delta f \ll f,$$

όπου

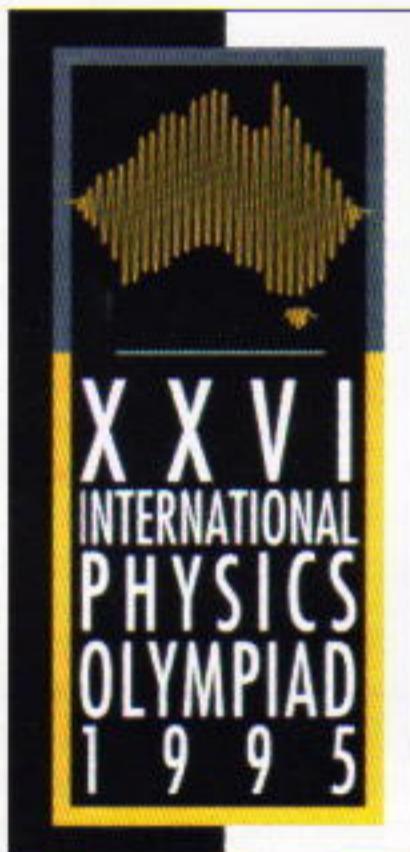
$G$  είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης,

$R$  η ακτίνα του αστρου,

$c$  η ταχύτητα του φωτός,

$M$  η μάζα του αστρου.

Έτσι, η μετατόπιση των γραμμών του φάσματος η οποία παρατηρείται πολύ μακριά από το αστρο που το εκ-



πέμπει μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση του λόγου  $M/R$ . Η γνώση του  $R$  θα επιτρέψει τον υπολογισμό της μάζας του αστρου.

(β) Ένα μη επανδρωμένο διαστημόπλοιο εκτοξεύεται για ένα πείραμα μέτρησης της μάζας  $M$  και της ακτίνας  $R$  ενός αστρου του γαλαξία μας. Καθώς το διαστημόπλοιο προσγγίζει ένα οφαιρικό στόχο-άστρο κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του στόχου, εκπέμπονται φωτόνια από ιόντα  $He^+$  που βρίσκονται στην επιφάνεια του αστρου-στόχου και τα οποία προκαλούν συντονισμένη διέγερση μιας δέσμης ιόντων  $He^+$  μέσα σ' ένα θάλαμο του διαστημόπλοιου. Συντονισμένη απορρόφηση ουμβαίνει μόνο εάν τα ιόντα  $He^+$  έχουν ταχύτητα προς το αστρο που να επιτρέπει ακριβώς τη μετατόπιση του φάσματος προς το ερυθρό. Η ταχύτητα  $v = \beta \cdot c$  των ιόντων του  $He^+$  μέσα στο διαστημόπλοιο

στη συντονισμένη απορρόφηση μετριέται ως συνάρτηση της απόστασης του διαστημόπλοιου από το κοντινότερο σημείο της επιφάνειας του αστρου. Τα πειραματικά δεδομένα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Χρησιμοποιώντας πλήρως τα δεδομένα αυτά, να σχεδιάσετε την κατάλληλη γραφική παράσταση και να προσδιορίσετε από αυτήν τη μάζα  $M$  και την ακτίνα  $R$  του αστρου. Στην απάντηση δεν χρειάζεται να λάβετε υπόψη σας τα σφάλματα.

### Πίνακας δεδομένων

Παράμετρος ταχύτητας	Απόσταση από την επιφάνεια του αστρου
$\beta = \gamma/c (10^{-3})$	$d (10^8 \text{ m})$
3.352	38.90
3.279	19.98
3.195	13.32
3.077	8.99
2.955	6.67

(γ) Για τον υπολογισμό του  $R$  και της  $M$  σ' ένα τέτοιο πείραμα είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε τη διόρθωση στη συχνότητα που οφείλεται στην ανάκρουση του ατόμου το οποίο εκπέμπει το φωτόνιο. Στους υπολογισμούς δεν λαμβάνεται υπόψη το αποτέλεσμα της θερμικής κίνησης εφόσον αυτή διαπλατύνει τις γραμμές χωρίς να μετατοπίζει το μέγιστο της κατανομής.

i. Έστω  $\Delta E$  η διαφορά ενέργειας μεταξύ δύο ενεργειακών σταθμών με το άτομο σε ηρεμία, οτην κάθε περίπτωση. Υποθέτουμε ότι το άτομο (πρώτη κατάσταση) διασπάται σε ηρεμία δίνοντας ένα φωτόνιο και ένα ανακρούον άτομο (δεύτερη κατάσταση). Γράψτε τη σχετικιστική εξίσωση για την ενέργεια  $hf$  ενός εκπεμπόμενου φωτονίου ως συνάρτηση της  $\Delta E$  και της αρχικής μάζας ηρεμίας  $m_0$  του άτομου.

ii. Υπολογίστε αριθμητικά τη σχετική μετατόπιση της συχνότητας  $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{ανακρ.}}$  για την περίπτωση των ιόντων  $\text{He}^+$ .

Ο αριθμός που θα βρείτε πρέπει να είναι πολύ μικρότερος από τη μετατόπιση που βρήκατε στο μέρος (β).

Δινονται:

η ταχύτητα του φωτός:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.

η ενέργεια πρεμίας του  $\text{He}^+$ :  $m_e c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV}$ .

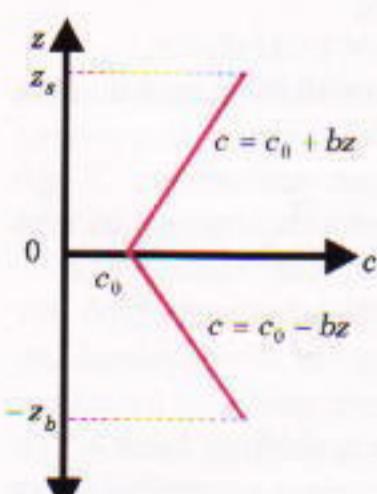
η ενέργεια της στάθμης  $n$  του ατόμου:  $E_n = -\frac{13,6 Z^2}{n^2}$  eV, και η σταθερά παγκόσμιας έλξης:  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2}$ .

## Проблема 2

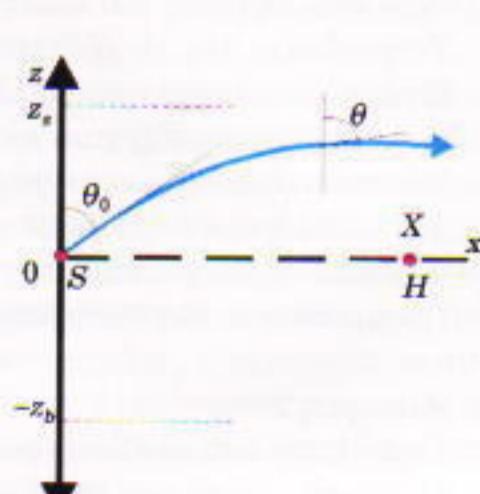
*Διάδοση του ήχου.*

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον ωκεανό μεταβάλλεται με το βάθος, τη θερμοκρασία και την αλμυρότητα (πυκνότητα). Το Σχήμα 1a δείχνει τη μεταβολή της ταχύτητας  $c$  του ήχου σε συνάρτηση με το βάθος  $z$ . Η ελάχιστη ταχύτητα είναι  $c_0$  στο μέσο της απόστασης επιφάνειας-βυθού του ωκεανού. Θέτουμε  $z = 0$  όταν η ταχύτητα του ήχου έχει την ελάχιστη τιμή,  $z = z_s$  στην επιφάνεια και  $z = -z_b$  στο βυθό. Για την περίπτωση πάνω από το  $z = 0$  δίνεται ότι  $c = c_0 + bz$  και για κάτω από το  $z = 0$  δίνεται ότι  $c = c_0 - bz$ .

Για κάθε περίπτωση ισχύει ότι  $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$ , όπου  $b$  είναι η απόλυτη τιμή της κλίσης της ταχύτητας σε ουνάρτηση με το βάθος. Θεωρείται ότι το  $b$  είναι σταθερό.



### Sχήμα 1g



Σχόλιο 1B

Το Σχήμα 1β δείχνει σύστημα αξόνων  $z$ - $x$ , όπου  $z$  είναι το βάθος του ωκεανού και  $x$  είναι η οριζόντια απόσταση. Σε όλα τα σημεία του συστήματος  $z$ - $x$  η ταχύτητα του ήχου, σε σχέση με το βάθος, είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 1α.

Στη θέση  $z = 0$  και  $x = 0$  τοποθετείται ηχητική πηγή  $S$  υπό αρχική γωνία  $\theta_0$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1β. Λόγω της μεταβολής της ταχύτητας του ήχου με το βάθος  $z$  η ακτίνα θα διαθλάται, γεγονός που οδηγεί στην αλλαγή της γωνίας  $\theta$  κατά μήκος της τροχιάς της ακτίνας. Έτοι, για μεταβολή του  $z$  μεταβάλλεται η αντίστοιχη γωνία της εκπεμπόμενης ακτίνας, με αποτέλεσμα τη μεταβολή της ταχύτητας.

a) Να δείξετε ότι η τροχιά της ακτίνας σε διάγραμμα  $z-x$  είναι κυκλικό τόξο με ακύρινα  $R$  όπου :

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \text{ via } 0 \leq \theta_0 < \pi/2$$

β) Να βρείτε μια σχέση που να δίνει τη μικρότερη τιμή της γωνίας  $\theta_0$ , σε συνάρτηση με το  $z_s$ ,  $c_0$  και  $b$ , για ακτίνα που εκπέμπεται από την πηγή και κατευθύνεται προς τα πάνω χωρίς να ανακλάται από την επιφάνεια της θάλασσας.

γ) Το Σχήμα 1β δείχνει τη θέση ενός δέκτη  $H$  που είναι τοποθετημένος στη θέση  $z = 0$ ,  $x = X$ . Να βρείτε μια σχέση σε συνάρτηση με το  $b$ ,  $X$ ,  $c_0$  που να δίνει τις πιθανές τιμές της γωνίας  $\theta_0$  ώστε η ακτίνα που ξεκινά από την πληγή  $S$  να φτάνει στο δέκτη  $H$ . Υποθέστε ότι τα  $z$ , και  $z_b$  είναι αρκετά μεγάλα ώστε να αποφεύγεται η ανάκλαση στην επιφάνεια ή στο βυθό της θάλασσας.

δ) Υπολογίστε τις τέσσερις μικρότερες τιμές της γωνίας  $\theta_0$  για διαθλώμενες ακτίνες από το  $S$  και οι οποίες να φτάνουν στο  $H$ , για

$$\begin{aligned}X &= 10.000 \text{ m} \\c_0 &= 1.500 \text{ m/s} \\b &= 0.02000 \text{ s}\end{aligned}$$

ε) Να βρείτε μια σχέση για το χρόνο που χρειάζεται ο ήχος για να πάει από το  $S$  στο  $H$  ακολουθώντας την τροχιά που συνδέεται με τη μικρότερη από τις τιμές της γωνίας  $\theta_0$  που βρέθηκαν στο μέρος (γ). Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει από το  $S$  στο  $H$  για τις ουνθήκες του μέρους (δ). Η ακόλουθη σχέση μπορεί να είναι βοηθητική:

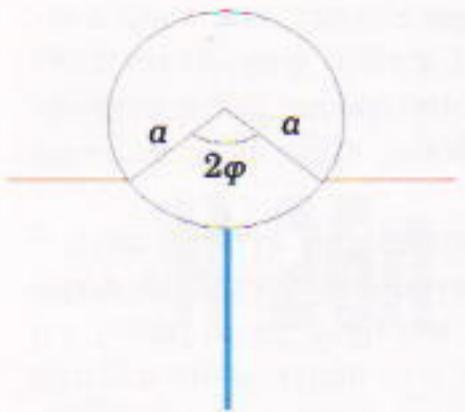
$$\int \frac{dx}{mu x} = \ln \exp\left(\frac{x}{2}\right).$$

Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται για την ακτίνα που πάει απευθείας από το *S* στο *H* κατά μήκος της  $z = 0$ . Ποια από τις δύο ακτίνες θα φτάσει πρώτη, εκείνη για την οποία  $\theta_0 = \pi/2$  ή η ακτίνα με τη μικρότερη από τις τιμές της  $\theta_0$ , όπως υπολογιστηκε στο μέρος (δ):

### Проблема З

### *Κυλινδρική σπιναδούρα*

α) Μια σημαδούρα αποτελείται από έναν ομογενή στερεό κύλινδρο ακτίνας βάσης  $a$ , μήκους  $\ell$ , κατασκευασμένο από ελαφρύ υλικό πυκνότητας  $d$ , και μια ομογενή ράβδο στερεωμένη στο εξωτερικό μέρος του κυλίνδρου.



κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου και στο μέσο του μήκους  $\ell$ . Η μάζα της ράβδου είναι ίση με τη μάζα του κυλίνδρου, το μήκος της είναι ίσο με τη διάμετρο του κυλίνδρου και η πυκνότητα της μεγαλύτερη από την πυκνότητα του θαλασσινού νερού.

Η σημαδούρα επιπλέει στο νερό που έχει πυκνότητα  $\rho$ . Στη θέση ισορροπίας βρείτε μια σχέση που να συνδέει τη γωνία  $\phi$  με το λόγο  $d/r$ . Ο όγκος της ράβδου θεωρείται αμελητέος.

β) Εξαιτίας κάποιας διαταραχής, η σημαδούρα ωθείται κατακόρυφα, κατά ένα μικρό διάστημα  $z$ . Έτσι ξεκίνα να μια ταλάντωση, πάνω κάτω, γύρω από τη θέση ισορροπίας. Υπολογίστε τη συχνότητα αυτής της ταλάντωσης σε σχέση με την ακτίνα  $a$ , την επιτάχυνση  $g$  και τη γωνία  $\phi$ , όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Να λάβετε υπόψη σας ότι η επίδραση της κίνησης του νερού στη δυναμική της σημαδούρας είναι τέτοια ώστε να αυξάνεται η μάζα της κατά το ένα τρίτο. Υποθέστε ότι η γωνία  $\phi$  δεν είναι μικρή.

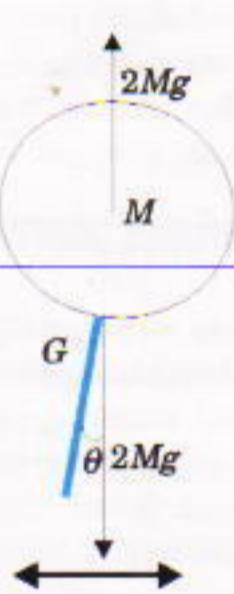
γ) Αν κατά προσέγγιση ο κύλινδρος στρέφεται γύρω από τον οριζόντιο κεντρικό άξονά του, προσδιορίστε τη συχνότητα της στροφικής ταλάντωσης σε σχέση με το  $g$  και την ακτίνα  $a$ . Αγνοήστε σε αυτή την περίπτωση την τριβή με το νερό. Η γωνία απόκλισης  $\theta$  θεωρείται πολύ μικρή.

δ) Η σημαδούρα περιέχει ευαίσθητα όργανα μέτρησης της επιτάχυνσης, τα οποία μπορούν να μετρήσουν τη γραμμική κατακόρυφη κίνηση και τη στροφι-

κή κίνηση, και μπορούν να στείλουν τις πληροφορίες με ασύρματο στην ακτή. Σε σχετικά ήρεμα νερά έχει αναφερθεί ότι η περίοδος της γραμμικής κατακόρυφης κίνησης είναι περίπου 1 s και της στροφικής 1,5 s. Από αυτή την πληροφορία να δείξετε ότι η γωνία  $\phi$  είναι περίπου  $90^\circ$ , και από αυτό να υπολογίσετε την ακτίνα  $a$  της σημαδούρας και την ολική της μάζα, δεδομένου ότι το μήκος  $\ell$  του κυλίνδρου ισούται με  $a$ .

Δίνονται:

$$\rho \cong 1.000 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ και } g \cong 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου και στο μέσο του μήκους  $\ell$ . Η μάζα της ράβδου είναι ίση με τη μάζα του κυλίνδρου, το μήκος της είναι ίσο με τη διάμετρο του κυλίνδρου και η πυκνότητα της μεγαλύτερη από την πυκνότητα του θαλασσινού νερού.

Η σημαδούρα επιπλέει στο νερό που έχει πυκνότητα  $\rho$ . Στη θέση ισορροπίας βρείτε μια σχέση που να συνδέει τη γωνία  $\phi$  με το λόγο  $d/r$ . Ο όγκος της ράβδου θεωρείται αμελητέος.

## Πειραματικός κύκλος

### Ασκηση 1

Ορική ταχύτητα σε παχύρευστο υγρό.

Όταν ένα αντικείμενο πέφτει μέσα σε ένα υγρό, από τά τελικά μια σταθερή ταχύτητα, η οποία λέγεται ορική ταχύτητα. Σκοπός αυτού του πειράματος είναι να μετρήσει τις ορικές ταχύτητες αντικειμένων που πέφτουν μέσα σε γλυκερίνη.

Σε σφαίρα ακτίνας  $r$ , που κινείται με ταχύτητα  $v$  μέσα σε ένα παχύρρευστο υγρό, ασκείται δύναμη η οποία δίνεται από τον τύπο  $F = 6\pi r v \eta$ . Το  $\eta$  είναι ένα χαρακτηριστικό του υγρού που λέγεται συντελεστής ιξώδους. Στο πείραμα θα μετρήσουμε την ορική ταχύτητα μεταλλικών κυλίνδρων (οι κύλινδροι κατασκευάζονται πιο εύκολα απ' ό,τι οι σφαίρες). Η διάμετρος κάθε κυλίνδρου είναι ίση με το μήκος του και θα υποθέσουμε ότι η δύναμη ιξώδους σε έναν τέτοιο κύλινδρο είναι ίδια με τη δύναμη ιξώδους σε μια σφαίρα με την ίδια διάμετρο,  $2r$ .

$$F_{\text{κυλ}} = 6\pi r v \eta, \quad (1)$$

όπου  $\kappa = 1$  και  $m = 1$  για μια σφαίρα.

**Προκαταρκτικά:** Υπολογισμός της ορικής ταχύτητας.

Εάν  $\rho$  η πυκνότητα του κυλίνδρου και  $\rho'$  είναι η πυκνότητα του υγρού, δείξτε ότι η ορική ταχύτητα  $v_T$  δίνεται από τον τύπο:

$$v_T = cr^{3-m}(\rho - \rho'), \quad (2)$$

όπου  $c$  είναι κάποια σταθερά, και υπολογίστε έναν τύπο για το  $c$ .

### Πειραματικά

Χρησιμοποιήστε τον εξοπλισμό που οας δίνεται για να υπολογίσετε την τιμή του εκθέτη  $m$  και την τιμή της πυκνότητας της γλυκερίνης.

### Συσκευές πειραματικής διάταξης και υλικά

Βαθμολογημένος κυλινδρικός σωλήνας των 1.000 ml γεράτιος γλυκερίνη.

Δοχείο με γλυκερίνη για το γέμισμα του βαθμολογημένου κυλίνδρου.

Ηλεκτρικό χρονόμετρο.

Κανόνας.

Τοιμπίδα για την ελευθέρωση των μεταλλικών κυλίνδρων πάνω από την επιφάνεια του υγρού.

Κατάλληλο μικρό κόκκινο για να αφαιρούνται οι κύλινδροι από τη βάση του σωλήνα.

Τοιμπίδα για το κράτημα των κυλίνδρων.

Κύλινδροι αλουμινίου διαμέτρων 10,00 mm, 8,00 mm, 5,00 mm, 4,00 mm. Έξι από κάθε διάμετρο.

Έξι κύλινδροι τιτανίου διαμέτρου 4,00 mm.

Έξι κύλινδροι ανοξείδωτου χάλυβα διαμέτρου 4,00 mm.

Έξι κύλινδροι χαλκού διαμέτρου 4,00 mm.

Γραμμικό και λογαριθμικό χαρτί μιλιμετρέ.

### Ασκηση 2

Περίθλαση και σκέδαση φωτεινής δέσμης laser.

Ο οκοπός αυτού του πειράματος είναι να επιδείξει και να προσδιορίσει ποσοτικά σε κάποιο βαθμό την ανάκλαση, την περίθλαση και τη σκέδαση του φωτός, με τη χρή-

ση ορατής ακτινοβολίας από μια πηγή (διόδο laser). Ένας μεταλλικός κανόνας χρησιμοποιείται ως φράγμα περιθλασης. Ένα διαφανές πλαστικό δοχείο, που περιέχει νερό ή γάλα διαλυμένο σε νερό, χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των φαινομένων ανάκλασης και σκέδασης.

### Μέρος 1

Τοποθετήστε τον μεταλλικό κανόνα μήκους 150 mm σε τέτοια γωνία ώστε την προσπίπτουσα δέσμη laser ώστε η δέσμη να φωτίζει μερικές χαραγές σ' αυτόν. Παρατηρήστε τον αριθμό των φωτεινών κροσσών που προκαλούνται από το φαινόμενο της περιθλασης και σχηματίζονται στη λευκή οθόνη.

Μετρήστε την απόσταση μεταξύ δύο συμμετρικών κροσσών, βρείτε την απόσταση του ενός από αυτούς από τον μηδενικό, και δώστε την τάξη του, όταν η οθόνη βρίσκεται σε απόσταση 1,4 m από τον κανόνα. Σχεδιάστε τη γραφική διάταξη της πειραματικής διαδικασίας.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$N\lambda = h\{\eta\mu[a] \pm \eta\mu[\beta]\},$$

όπου  $N$  είναι η τάξη του κροσσού,  $\lambda$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας,  $h$  η απόσταση μεταξύ των σχισμών του φράγματος,  $\beta$  η γωνία περιθλασης και  $a$  η γωνία πρόσπτωσης, και με τις πληροφορίες που παίρνουμε από τις μετρήσεις, υπολογίστε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας laser και το πειραματικό οφάλμα στον υπολογισμό αυτόν.

### Μέρος 2

Τοποθετήστε το άδειο διαφανές πλαστικό δοχείο που έχετε στο διάστημα μεταξύ του laser και της λευκής οθόνης, περίπου σε κάθετη θέση ώστε προς τη δέσμη laser.

i. Παρατηρήστε την ελάττωση στην ένταση της δέσμης που βγαίνει από το δοχείο και υπολογίστε την επί τοις εκατό τιμή αυτής της ελάττωσης. Μερικοί δίσκοι με γνωστή επί τοις εκατό ελάττωση της έντασης βρίσκονται μπροστά σας για να βοηθήσουν αυτό τον υπολογισμό. Θυμηθείτε ότι το ανθρώπινο μάτι αντιδρά λογαριθμικά στην ένταση του φωτός. Αυτή η ελάττωση της έντασης προκαλείται πρωταρχικά από τις απώλειες λόγω ανάκλασης της δέσμης στα τοίχωματα του δοχείου, που σε αυτή την περίπτωση είναι τέοσερα. Ο συντελεστής ανάκλασης  $R$  για κάθετη πρόσπτωση σε κάθε τοίχωμα ο οποίος είναι ο λόγος της έντασης της ανακλώμενης προς την ένταση της προσπίπτουσας δίνεται από τη σχέση

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2,$$

όπου  $n_1$  και  $n_2$  οι δείκτες διάθλασης πριν από και μετά το τοίχωμα αντίστοιχα. Ο αντίστοιχος συντελεστής διάδοσης  $T$ , αν υποθέσουμε ότι έχουμε μηδενική απορρόφηση από το δοχείο, δίνεται από τη σχέση  $T = 1 - R$ .

ii. Υποθέτοντας ότι ο δείκτης διάθλασης του υλικού του δοχείου είναι 1,59 και αγνοώντας το φαινόμενο της πολλαπλής ανάκλασης και συμβολής, υπολογίστε το συντελεστή διάδοσης της δέσμης όταν περνά μέσα από το άδειο δοχείο. Συγκρίνετε αυτό το αποτέλεσμα με την εκτίμηση που κάνατε στο (i).

### Μέρος 3

Χωρίς να μετακινήσετε το πλαστικό δοχείο, επαναλά-

βετε τις παρατηρήσεις και τους υπολογισμούς του Μέρους 2, προσθέτοντας 50 ml νερό στο πλαστικό δοχείο. Να λάβετε υπόψη ότι ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι 1,33.

### Μέρος 4

i. Προσθέστε 0,5 ml (12 σταγόνες) γάλα (το υλικό που προκαλεί τη σκέδαση) στα 50 ml νερού που περιέχονται στο πλαστικό δοχείο και ανακατέψτε καλά. Μετρήστε με δύο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τη ουνολική γωνία υπό την οποία σκεδάζεται η δέσμη laser, και τη διάμετρο του φωτεινού σχήματος που φαίνεται στην πλευρά του δοχείου από την οποία βγαίνει η δέσμη, σημειώνοντας ότι αυτές οι ποσότητες σχετίζονται μεταξύ τους. Επίσης, υπολογίστε την ελάττωση της έντασης της δέσμης που οφείλεται στη διέλευση μέσα από το διάλυμα, όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις.

ii. Προσθέστε ακόμη 0,5 ml γάλα στο δοχείο και επαναλάβετε τις μετρήσεις που ζητούνται στο (i).

iii. Επαναλάβετε τη διαδικασία του (ii) μέχρι η δέσμη να έχει ένταση πολύ μικρή ή μηδενική δηλαδή να μη βγαίνει καθόλου φως από την απέναντι πλευρά του δοχείου.

iv. Προσδιορίστε τη σχέση μεταξύ της γωνίας σκέδασης και της συγκέντρωσης του γάλακτος στο δοχείο.

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα και τη σχέση:

$$I = I_0 e^{-\mu z} = T_{val} \cdot I_0,$$

όπου

$I_0$  είναι η αρχική ένταση της δέσμης,  
 $I$  η ένταση της εξερχόμενης δέσμης,  
 $z$  το εσωτερικό μήκος του δοχείου,  
 $\mu$  ο συντελεστής εξασθένησης, που ισούται με το γινόμενο μιας σταθεράς επί τη συγκέντρωση του υλικού που προκαλεί τη σκέδαση, και  
 $T_{val}$  ο συντελεστής διάδοσης για το γάλα,

για να επιτύχετε τον υπολογισμό του συντελεστή εξασθένησης  $\mu$  που προκαλεί τη σκέδαση για υλικό συγκέντρωσης 10%.

### Συσκευές

Πηγή laser.

Μεταλλικός κανόνας.

Πλαστικό δοχείο που περιέχει νερό και γάλα.

Μέτρο.

Λευκή χάρτινη οθόνη.

Αποκλίνων φακός.

Συγκλίνων φακός

Μοιρογνωμόνιο.

Φίλτρα.

Δοχείο και σταγονόμετρο.

Αναδευτήρας.

Γραμμικό και ημιλογαριθμικό χαρτί μιλιμετρέ.

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

Ο Παύλος Ιωάννου είναι επίκουρος καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Τα σχήματα του άρθρου κατασκεύασε ο φοιτητής του φυσικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών Γιάννης Καϊσάνος.

# TO QUANTUM ΔΙΑΒΑΖΕΙ

## Η αγωνία του δασκάλου

Robert H. March, *ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΠΟΙΗΤΕΣ*  
(αγγλικός τίτλος: *Physics for Poets*, 1970, 1978, 1992)  
Μετάφραση: Κωνσταντίνα Μεργιά  
Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα 1995

του Ανδρέα Ι. Κασσέτα

Ο τίτλος ερεθιστικός, μοιράζει υποσχέσεις. Κάτι που απευθύνεται σε ποιητές θα μπορούσε τουλάχιστον εσένα, τον «τυχόντα» αναγνώστη, να σε ταξιδέψει. Γιατί η ποίηση δεν είναι μόνον εκείνη που καταγράφεται με λέξεις στα έργα των μεγάλων δημιουργών· είναι και εκείνη που υπάρχει διάχυτη μέσα στον ιστό της καθημερινότητας, η άλλη εκείνη ποίηση που, σαν καταφέρουμε να την αφουγκραστούμε, νιώθουμε να αναφλέγεται η λανθάνουσα επιθυμία μας για υπερβάσεις και η ανάγκη μας να διασχίσουμε τα σύνορα της συμβατικότητας, φτερούγιζοντας προς άλλες περιοχές. Αυτή η ποίηση-δυνατότητα ενυπάρχει σε όλους μας. Είναι λοιπόν φυσικό, εσύ, ο τυχόν αναγνώστης, αντικρίζοντας ένα βιβλίο με τον τίτλο *Φυσική για ποιητές*, να ελπίζεις σε πτήσεις και σε καταδύσεις, και εν πάσῃ περιπτώσει σε διαδρομές «όχι οριζόντιες».

Ας το πούμε όμως εξαρχής και με το όνομά του. Ο Robert March δεν μπορεί να σε ταξιδέψει. Έχει την ικανότητα να διανθίζει τα γραπτά του με μη τετριμμένες φράσεις, αλλά τα εγχειρήματά του εξαντλούνται σε οριζόντιες περιηγήσεις, χωρίς η γραφή του να γίνεται αυτό που θα λέγαμε ποιητική.

Το «κρίνω» εμπεριέχει το «συγκρίνω», το «διακρίνω» αλλά και το «επικρίνω», εφόσον χρειαστεί. Ειδικά δε το «συγκρίνω» απαιτεί από εμένα τον συγκρίνοντα συγκεκριμένες αναφορές, έχει ανάγκη από ομοιειδείς μονάδες μετρήσεως. Και μονάδες μετρήσεως υπάρχουν. Υπάρχει ο Charles Coulston Gillispie, υπάρχει ο Hubert Reeves, υπάρχει ο Arthur Koestler. Υπάρχει, οπωδήποτε, και ο Γιώργος Γρηγοριάκης. Σε σχέση, λοιπόν, με αυτούς, ο Robert March είναι, κατά τη γνώμη μου, ένας όχι ιδιαίτερα χαριοματικός συγγραφέας.

Είμαστε, ίσως, αυστηροί. Είναι όμως αναπόφευκτο να τον κρίνουμε έτσι, εφόσον χρησιμοποιεί τόσο απροκάλυπτα την ιδέα του τίτλου σαν στοιχείο εντυπωσιασμού, μοιράζοντας υποσχέσεις για τις οποίες ξέρει καλά ότι δεν πρόκειται να πραγματοποιηθούν. Και εξυπακούεται ότι σε καμιά περίπτωση δεν αποσκοπεί στο «να αναδειξει την ποίηση που βρίσκεται κρυμμένη μέσα στη φυσική», όπως τουλάχιστον ισχυρίζεται ο επιμελητής στο οπισθόφυλλο της ελληνικής έκδοσης.

Παρ' όλα αυτά, το βιβλίο του March παρουσιάζει ενδιαφέρον. Το *Φυσική για ποιητές* δεν είναι «Φυσική για ποιητές», είναι «Φυσική για τον κοινό νου». Ένα βιβλίο

με αρκετές δόσεις πρωτοτυπίας, αλλά κυρίως με αρκετή «δύναμη να διδάξει». Γιατί αυτό, κυρίως, θέλει να κάνει. Ο March θέλει να διδάξει φυσική, και αυτό ακριβώς κάνει. Ο αναγνώστης δεν είναι γι' αυτόν ένας ποιητής· είναι ένας κοινός «διδασκόμενος», και η αγωνία του March-συγγραφέα είναι η αγωνία ενός δασκάλου, το εάν, δηλαδή, μπόρεσε να δώσει στον αναγνώστη-μαθητή να καταλάβει. Το «να γίνει κατανοητός» είναι το μεγάλο στοίχημα που έχει βάλει με τον εαυτό του. Και δεν το κρύβει. Μιλάει για conventional physics courses, επιμένει στο understanding. Και βέβαια δεν αποφεύγει τελικά τον πειρασμό να μας βάλει και ασκήσεις. Η αγωνία του δασκάλου διαφαίνεται και μέσα από τη γραφή του. Δεν έχει το χιούμορ του Hewitt ούτε τη λογοτεχνική στόφα του Reeves, έχει ωστόσο τις ικανότητες ενός αρκετά καλού δασκάλου. Και για τη διδακτική του πρακτική θα μπορούσε να έχει κανείς τις επιμέρους αντιρρήσεις του· οριομένες, λόγου χάριν, έννοιες — όπως το έργο μιας δύναμης — τις παρουσιάζει ετοιμοπαράδοτες χωρίς καμία αναφορά στις διαδικασίες οικοδόμησής τους.

Αντικρίζοντας όμως το εγχείρημα συνολικά πρέπει να παραδεχτούμε ότι «τα καταφέρνει». Χρησιμοποιώντας φράσεις όπως «η μαγική σκούπα», «ο πρίγκιπας έχει μια τρελή ιδέα», «το στημόνι και το υφάδι», μας ξεναγεί στο «πάρκο» της φυσικής από τον Γαλιλαίο ως τον Φαραντέυ και από τον Αλβέρτο Αϊνστάιν ως την κβαντική χρωμοδυναμική. Η ξενάγησή του είναι «οριζόντια». Οταν επιχειρεί να φιλοσοφήσει, οι επιδόσεις του είναι μέτριες. Στο «Ντετερμινισμός ή χάος», λόγου χάριν, γράφει για πράγματα ειπωμένα πλέον από αρκετούς. Η υπόθεση του Laplace, ο ρόλος της νευτώνειας φυσικής και η πρόκληση τυφώνα από το φτερούγισμα μιας πεταλούδας είναι πράγματα που τα έχουμε ξανακούσει πολλές φορές. Και δεν θα είχαμε, ίσως, αντιρρηση να ξαναδιαβάσουμε γι' αυτά από έναν συγγραφέα που θα διέθετε το ταλέντο να μας τα παρουσιάσει μ' έναν δικό του ξεχωριστό τρόπο. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει εδώ.

Πέρα απ' όλα αυτά, ο Robert March καταφέρνει να μας δώσει ένα βιβλίο που μπορεί να μη μοιάζει με τον τίτλο του, ανήκει, ωστόσο, στα «βιβλία που διαβάζονται»· ένα βιβλίο που αποσαφηνίζει σημασίες, πληροφορεί και, παρά την «οριζόντια» περιήγηση που σου προοφέρει, σου ανοιγεί την όρεξη ώστε να προχωρήσεις μόνος σου σε κάποιες παραπέρα εμβαθύνσεις.

Η ελληνική μετάφραση, στο σύνολό της, αξιοπρεπής και με εμφανή τα ίχνη του «προσπαθώ», παρουσιάζει ωστόσο αδυναμίες σε αρκετά σημεία.

Παρακολουθούμε, κατά την τελευταία δεκαετία, μια πληθώρα εκδόσεων με μεταφράσεις βιβλίων που επιδιώκουν να μυήσουν στα μυστικά της επιστήμης ένα όσον γίνεται ευρύτερο κοινό. Πίσω από τις περισσότερές τους μπορεί κανείς να διακρίνει ανθρώπους που σίγουρα μόχθησαν. Σε αρκετές ωστόσο περιπτώσεις η ποσότητα μό-

χθου δεν καθόρισε θετικά το τελικό αποτέλεσμα. Τέτοιου είδους προσπάθειες απαιτούν κάτι περισσότερο από το «να κοπιάσεις». Απαιτούν —ή μάλλον προαπαιτούν— από το μεταφραστή (και τον επιμελητή) να γνωρίζει σε βάθος το αντικείμενο της επιστήμης και να κινείται με άνεση στα μονοπάτια της ξένης —συνήθως αγγλικής— γλώσσας. Υπάρχει ωστόσο και ένα τρίτο προαπαιτούμενο το οποίο συχνά παραβλέπεται: η ευχέρεια στην ελληνική γλώσσα και η αξιοποίηση των εκφραστικών δυνατοτήτων της.

Οι μεταφραστικές αδυναμίες του *Φυσική για ποιητές* σχετίζονται με αυτές ακριβώς τις προϋποθέσεις. Τα πράματα, λόγου χάριν, δυσκολεύουν όταν, γράφοντας ελληνικά, προσπαθούμε να στεγάσουμε λόγιες διατυπώσεις μέσα σε δομές δημοτικής που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί ποτέ από την καθομιλουμένη. Ένα καλό παράδειγμα είναι η χρήση ενός δημοτικίζοντος παρατατικού ρήματα λόγιας προέλευσης. Η χρήση αυτή, στη συγκεκριμένη μετάφραση, οδηγεί σε διατυπώσεις του τύπου «θεωρούνταν» (σελ. 19), «απαιτούνταν» (σελ. 20) ή, ακόμη χειρότερα, «το φως κινούνταν» (!) (σελ. 91) οι οποίες, κατά τη γνώμη μου, τραυματίζουν τη γλωσσική μουσικότητα του κειμένου. Πρόκειται για κακές επιλογές και όχι για αταλάντευτη συνέπεια του μεταφραστή σε δομές δημοτικής, δεδομένου ότι σε άλλες περιπτώσεις επιλέγονται λόγιες διατυπώσεις όπως, για παράδειγμα, το «προσέφερε» της σελίδας 19.

Όταν ο αναγνώστης αντιμετωπίζει διατυπώσεις όπως το «πρότειναν ότι οι κινήσεις» (σελ. 191), υποψιάζεται ότι με αυτόν τον παράξενο τρόπο έχει αποδοθεί το αγγλικό *suggested that the motions*, ενδεχομένως ενοχλείται γνωρίζοντας ότι το ρήμα «προτείνω» στη γλώσσα μας συντάσσεται με «να» και όχι με «ότι», αλλά είναι βέβαιος ότι κατανοεί το σημανόμενο.

Όταν, όμως, διαβάζει για μια «μπάλα που πέφτει στο νερό» (σελ. 30) είναι φυσικό να φέρει στο μυαλό του μια μπάλα που κινείται στον αέρα πέφτοντας προς την επιφάνεια του νερού και όχι μια μπάλα που βρίσκεται μέσα στο νερό και βυθίζεται, όπως ακριβώς λέγει ο συγγραφέας. Στην καθημερινή μας γλώσσα, στην οποία και βασίζεται ολόκληρο το μεταφραστικό εγχείρημα, «πέφτω στο νερό» σημαίνει «πέφτω στο νερό», «είμαι», δηλαδή, «έξω από το νερό και τώρα βουτάω».

Η φράση *the planets wander* δεν σημαίνει, βέβαια, ότι οι πλανήτες περιστρέφονται, όπως υποστηρίζει η μετάφραση στη σελίδα 56. Το *wander* θα μπορούσε εδώ να έχει αποδοθεί με το «περιπλανώνται», είτε πιο ποιητικά με το «αλητεύουν» ή και με το «σεργιανίζουν», οπωδήποτε όμως όχι με το «περιστρέφονται». Η επιλογή αυτή δημιουργεί εξάλλου και λανθασμένη αναπαράσταση στον επιμένοντα να κατανοήσει αναγνώστη-διδασκόμενο.

Το *The many faces of energy* που υπάρχει στο πρωτότυπο σημαίνει «Τα πολλά πρόσωπα της ενέργειας» και όχι «Τα πολλαπλά πρόσωπα της ενέργειας», φράση που χρησιμοποιεί ο μεταφραστής στη σελίδα 74, την οποία εμείς τουλάχιστον αδυνατούμε να κατανοήσουμε αλλά και πιστεύουμε ότι προκαλεί νοητική ούγχυση στον αναγνώστη.

Σε προηγούμενο κριτικό σημείωμά μας στο *Quantum* (Μάιος/Ιούνιος 1994), είχαμε επισημάνει ότι η απόδοση στη γλώσσα μας του αγγλικού όρου *direction* πρέπει να είναι το ουσιαστικό «κατεύθυνση». Το διαφορετικό σημασιακό περιεχόμενο του αγγλικού *direction* από το γαλλικό *direction* έχει ήδη προκαλέσει —και εξακολουθεί να προκαλεί— συγχύσεις κατά τη διδασκαλία της φυσικής στη θεσμοθετημένη εκπαίδευση, δοθέντος ότι αρκετές από τις «παλαιότερες» σημασίες της ελληνικής επιστημονικής ορολογίας κατάγονται παραδοσιακά από τη γαλλική. Ο μεταφραστής φαίνεται να το αγνοεί αυτό και επιμένει να αποδίδει το αγγλικό *direction* του March με το ουσιαστικό «διεύθυνση», σαν να επρόκειτο για τον αντίστοιχο γαλλικό όρο. Το αποτέλεσμα είναι να διοκολεύεται ο αναγνώστης μέχρις ότου αντιληφθεί ότι η «διεύθυνση» του κειμένου εμπεριέχει και τη σημασία «της φοράς», αλλά και η ίδια η μετάφραση να παγιδεύεται σε διατυπώσεις του τύπου «αντίθετες διευθύνσεις» (σελ. 41), οι οποίες είναι κενές νοήματος: διότι, ως γνωστόν, «αντίθετες διευθύνσεις» δεν υπάρχουν, όπως δεν υπάρχουν και «δρόμοι διπλής διευθύνσεως».

Τα δύο μεγάλα έργα του Γαλιλαίου είναι το *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (Φλωρεντία 1832) και το *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nove scienze* (Λέουντεν 1838). Για τον τίτλο του πρώτου (*Dialogo*) χρησιμοποιούμε —όπως είναι φυσικό— τη δική μας λέξη «Διάλογος». Για το *Discorsi* του άλλου έργου θα μπορούσαμε ίσως να χρησιμοποιούμε τον όρο «Κουβέντες». Έχει ωστόσο επικρατήσει και για το *Discorsi* ο όρος «Διάλογοι». Υπέρ αυτής της επιλογής συνηγορεί και η ενοχλητικά λαϊκή καταγωγή της λέξης «Κουβέντες» αλλά και το γεγονός ότι στη μοναδική μετάφραση που υπάρχει στην αγγλική γλώσσα (Henry Crew και Alfonso de Salvi, Νέα Υόρκη 1914) χρησιμοποιήθηκε η λέξη *Dialogues*. Υστερα απ' όλα αυτά θεωρούμε αδόκιμο το να αποδίδεται το έργο του Γαλιλαίου με το *Πραγματείες και μαθηματικές αποδείξεις των δύο νέων επιστημών* (σελ. 17). Και η ένσταση δεν εξαντλείται μόνο στο «Πραγματείες», αλλά και στη χρήση της γενικής, η οποία οδηγεί στο απολύτως αδόκιμο «Πραγματείες και αποδείξεις δύο επιστημών».

Στη σελίδα 49 το *Paradigm* αποδίδεται με τη λέξη «Πρότυπο». Διαφωνούμε. Το *Paradigm* είναι επιστημολογικός όρος τον οποίο «έπλασε» ο Thomas S. Kuhn —αντλώντας, προφανώς, από την τεράστια δεξαμενή της ελληνικής γλώσσας— για να τον χρησιμοποιήσει στο περιφήμο έργο του *H δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*. Σε μετάφραση ενός αποσπάσματος από το έργο αυτό —η οποία δημοσιεύτηκε στο τεύχος 16 του περιοδικού *Δευκαλίων* το 1977—, ο Αρης Κουτούγκος υιοθέτησε —για το *Paradigm*— τη λέξη «Υπόδειγμα». Μερικά χρόνια αργότερα, στην πρώτη και μοναδική μετάφραση ολόκληρου του έργου (Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα, Θεσσαλονίκη 1981), οι Γ. Γεωργακόπουλος και Β. Κάλφας απέδωσαν τον όρο με τη λέξη «Παράδειγμα». Σε εκτενές μάλιστα εισαγωγικό σημείωμα ο Βασίλης Κάλφας αισθανόμενος, ίσως, την ανάγκη να το δικαιολογήσει, υποστηρίζει πως «όταν ένας ελληνικής καταγωγής όρος επιστρέ-

φει στην ελληνική ορολογία πρέπει να διατηρείται, διότι διαφορετικά, αντί να λύνουμε, προσθέτουμε προβλήματα απόδοσης και σύγχυσης». Ανεξάρτητα από το εάν αποδεχόμαστε ή δεν αποδεχόμαστε την άποψή του, πρέπει ωστόσο να μας απασχολήσει κάποτε.

Το *mechanical interpretation* αποδίδεται, στη σελίδα 95, ως «μηχανική ερμηνεία». Και εδώ θα διαφωνήσουμε. Θα ουμφωνήσουμε με μεταφραστές όπως ο Ευτύχης Μπιτοάκης, ο Βασίλης Κάλφας και η Ιωάννα Χατζηνικολή, οι οποίοι αποδίδουν το *mechanical* με το επίθετο «μηχανιστικός».

Ο όρος *speed* άλλοτε αποδίδεται ως «μέτρο ταχύτητας» (σελ. 25) και άλλοτε ως «ταχύτητα» (σελ. 25, 41). Η επιλογή αυτή έχει και τις ουνέπειές της. Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν γίνεται κατανοητό τι ακριβώς συμβαίνει ενώ σε μια συγκεκριμένη περίπτωση (σελ. 79) η διατύπωση «δύο αντικείμενα μετά την κρούση έχουν την ίδια σχετική ταχύτητα που είχαν πριν από αυτήν» οδηγεί τον αναγνώστη σε επιστημονικώς λανθασμένο συμπέρασμα, για το οποίο δεν ευθύνεται ο Robert March.

Έχουν περάσει είκοσι, περίπου, χρόνια αφότου ο συμβολισμός 1 kgr για τη μονάδα μάζας έχει πάψει να υπάρχει και έχει αντικατασταθεί με τον 1 kg. Ο μεταφραστής, αλλά και ο επιμελητής, όχι μόνο δείχνουν να το αγνοούν αλλά και «διορθώνουν» τον March, ο οποίος από τη δεύτερη

τερη ήδη έκδοση (1978), και φυσικά και στην τρίτη (1992), αναφέρει σωστά τη μονάδα ως 1 kg.

Και κάτι για το οποίο ευθύνεται ο συγγραφέας. Όταν διδάσκουμε φυσική είναι αυτονόητο ότι οφείλουμε να οεβόρμαστε τη σημειολογία. Η ισότητα λοιπόν  $3 \times 8 = 24$   $\text{kg} \cdot \text{m/s}$  δεν ισχύει  $3 \times 8$  είναι ίσο με 24, και όχι με 24  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ . Και φαίνεται πως το σφάλμα δεν είναι τυχαίο διότι στην ίδια σελίδα (σ. 28 στο πρωτότυπο) επανέρχεται γράφοντας ότι  $-4/2 = -2 \text{ m/s}$ . Όσο για τον επιμελητή, εκείνο που φροντίζει να κάνει είναι να αλλάξει το kg με kgr και να παρουσιάσει  $3 \times 8 = 24 \text{ kgr} \cdot \text{m/s}$ .

Το σημαντικότερο, όμως, κατά την άποψή μου, μειονέκτημα —της κατά τα άλλα φροντισμένης αυτής έκδοσης— είναι η εξαφάνιση του Index, βάσει κάποιου σκεπτικού το οποίο αδυνατούμε να συλλάβουμε. Το «Ευρετήριο όρων και ονομάτων» υπάρχει ως κάτι το προφανές και στις τρεις εκδόσεις του βιβλίου του March, αλλά και σε κάθε έκδοση βιβλίου αυτής της κατηγορίας η οποία θέλει να σέβεται τον εαυτό της.

Κλείνοντας τούτο το σύντομο κριτικό σημείωμα επανέρχομαι στην εκτίμησή μου για το σύνολο του εγχειρήματος και το χαρακτηριζόμενο αξιοπρεπές. Η τελική μου εκτίμηση επηρεάζεται βέβαια και από την αισθητικά εξαιρετική παρουσίαση του βιβλίου, βασίζεται όμως, κυρίως, στην αναγνώριση των τεράστιων δυσκολιών που αντιμετωπίζει μια τέτοιου είδους προσπάθεια.

## Κείμενο υψηλής ποιότητας

Peter Medawar, *ΤΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ*  
(αγγλικός τίτλος: *The Limits of Science*)

Μετάφραση: Αθ. Τσουκαλαδάκης  
Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1992

του Γιώργου Ευαγγελόπουλου

Είναι ευτύχημα το ότι μεταφράστηκε και στα ελληνικά κάποιο βιβλίο του Peter Medawar, και μάλιστα ένα από τα καλύτερά του. Αυτή η φράση θα μπορούσε να είναι η καταληκτική της παρουσίασης του εδώ. Επιθυμώ όμως να κεντρίσω ευθύς εξαρχής το ενδιαφέρον τού αναγνώστη, γι' αυτό σπεύδω να προσθέσω ότι κάθε φορά που δημοσιεύονται κείμενα αυτής της ποιότητας, όχι μόνον ο επιστήμονας, αλλά και κάθε σκεπτόμενος άνθρωπος έχει δικαίωμα να χαίρεται!

Ποιος είναι όμως ο συγγραφέας;

Ο Peter Medawar γεννήθηκε στο Río της Βραζιλίας το 1915. Σπούδασε ζωολογία στην Οξφόρδη, όπου παρακολούθησε και μαθήματα φιλοσοφίας. Διετέλεσε ενεργό μέλος της ομάδας θεωρητικής μελέτης της βιολογίας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Το 1960 αποήθηκε από κοινού με τον σερ F.M. Burnet το βραβείο Nόμπελ ιατρικής για την ανακάλυψη της επίκτητης ανοσοβιολογικής ανοχής στις μεταμοσχεύσεις ιστών. Αργότερα διηγήθηκε το Εθνικό Ινστιτούτο Ιατρικής Έρευνας της Βρετανίας. Πέθανε το 1987 από εγκεφαλικό επεισόδιο.

Το βιβλίο του Medawar απαρτίζεται από τρία δοκίμια.

Στο πρώτο, που έχει τον τίτλο «Ένα δοκίμιο για την επιστήμη» και διαιρείται σε διάφορες μικρές ενότητες, ο συγγραφέας υιοθετεί το αφοριστικό ύφος του Francis Bacon και του William Whewell. Ο Medawar αναφέρεται καταρχάς στην προέλευση της λέξεως *science* και ακολούθως διακρίνει την αλήθεια σε «πνευματική ή θρησκευτική», σε «ποιητική» (η οποία κατά τον Sir Philip Sidney δεν «συμβαδίζει» με την αλήθεια του ιστορικού ή του επιστήμονα) και σε «επιστημονική»· όσον αφορά την τελευταία τονίζει ότι «για την επιστήμη καμία απόδειξη και κανένα συμπέρασμα δεν χαρακτηρίζονται από απόλυτη βεβαιότητα και σιγουριά, ώστε να μην επιδέχονται καμία απολύτως κριτική». Ο Medawar απορρίπτει την άποψη ότι η επιστήμη με την εξειδίκευσή της είναι εξαιρετικά δυσνόητη για τον μέσο άνθρωπο και πρεσβεύει ότι η επιστημονική σταδιοδρομία δεν απαιτεί σπάνιες, μοναδικές ή αξιορετικές ικανότητες, αλλά είναι προστή σχεδόν σε όλους (μοναδική αξιάρεος αποτελούν οι μαθηματικοί, που θεωρούνται σπάνια και ιδιαίτερα άτομα, επειδή διαθέτουν ένα φυσικό χάρισμα που ξεπερνά τις επιδόσεις, πιθανόν και την αντίληψη πολλών απλών ανθρώπων). Δεν υπάρχει επίσης κανένας λόγος, ώστε να πιστέψουμε ότι οι άνδρες υπερτερούν των γυναικών σε ικανότητες για παραγωγή επιστημονικού έργου.

Ακολούθως, ο συγγραφέας εξετάζει τις σχέσεις επιστήμης και κουλτούρας και απορρίπτει την κατηγορία ότι η επιστήμη συντελεί τόσο στην υποβάθμιση της ποιότητας της ζωής μας όσο και στην καταστροφή του περιβάλλοντος. Υποστηρίζει ότι δυστυχώς ο βασικός «κοινωνικός» ρόλος της επιστήμης είναι να λειτουργεί σαν

«αποδιοπομπαίος τράγος» για σφάλματα και αβλεψίες των πολιτικών. Ο Medawar επικρίνει την αντιεπιστημονική στάση των πολιτικών, αλλά και μερικών διανοουμένων, και υποδεικνύει με παραδείγματα τις αρνητικές συνέπειες του φαινομένου στην οργάνωση της κοινωνικής μας ζωής. Ιδιαίτερη σημασία έχει η επιστήμανσή του ότι η «επαγγελματική μέθοδος» δεν είναι «η μέθοδος των επιστημονικών ανακαλύψεων» (ούτε υπάρχει τέτοια!) και τούτο διότι, σύμφωνα με το νόμο της διατήρησης των πληροφοριών, «μια γενικευση δεν μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερες πληροφορίες από το άθροισμα των πληροφοριών που υπάρχουν στα παραδείγματά της». Υποστηρίζει την ανάγκη χρησιμοποίησης πειραματοζώων στην ιατρική έρευνα, υπογραμμίζει τη σπουδαιότητα του έργου που επιτελεί η Βασιλική Εταιρεία και κλείνει το δοκίμιο με μια αναφορά στο οκοπό της επιστήμης, που «είναι να κάνει τον κόσμο καλύτερο».

Το δεύτερο δοκίμιο του βιβλίου φέρει τον τίτλο «Μπορεί να προσχεδιαστεί η επιστημονική ανακάλυψη;», και παρότι είναι αρκετά μικρό σε έκταση, δεν στερείται ενδιαφέροντος, καθώς καταλήγει σε σημαντικές επισημάνσεις. Ο συγγραφέας παραθέτει τρία περιστατικά ανακαλύψεων από την ιστορία της ιατρικής επιστήμης, για να αποδείξει ότι αποκλείεται να προσχεδιάστηκαν ή να υπήρξαν το συνειδητό αποτέλεσμα κάποιας πρόθεσης. Μας αποκαλύπτει ότι η τύχη παίζει ρόλο στις επιστημονικές ανακαλύψεις και επομένως η ιδέα του προσχεδιασμού τους δεν ουμβιβάζεται με τον τρόπο που πραγματοποιούν τις ανακαλύψεις τους οι επιστήμονες. Άλλωστε, η πίστη στην ύπαρξη επιστημονικής μεθόδου, η οποία είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη μεταξύ των πολιτικών και των ανώτατων διοικητικών υπαλλήλων, στηρίζεται σε μια παρανόηση που υφίσταται από πολύ παλιά, από την εποχή που ο John Stuart Mill έγραψε το *Ένα σύστημα λογικής* και ο Karl Pearson το *Γραμματική της επιστήμης*. Η επιστημονική μέθοδος είναι ανύπαρκτη, διότι οι επιστήμονες χρησιμοποιούν όχι μία αλλά πολλές και διάφορες «διερευνητικές» στρατηγικές. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Popper, κάθε αναγνώριση της αλήθειας έρχεται ύστερα από μια φανταστική «υπόθεση», μια «ευτυχή εικασία» κατά τον William Whewell, την οποία εν συνέχεια ο επιστήμονας ελέγχει μέσω της παρατήρησης ή του πειράματος, ώστε να διαπιστώσει αν αντιστοιχεί στην πραγματικότητα. Ο Medawar, για να χαρακτηρίσει τον υποθετικό συλλογισμό, τη δημιουργική πράξη του νου που βρίσκεται πίσω από κάθε σημαντική πρόοδο στη γνώση μας για τη φύση, υιοθετεί την ελληνική λέξη ποίηση με το περιεχόμενο που της προσδίδει ο Shelley στο έργο του *Hυπεράσπιση της ποίησης* (1821): κατά τον Shelley, «η ποίηση συμπεριλαμβάνει όλες τις επιστήμες» και κατά συνέπεια η επιστημονική δημιουργικότητα (εφευρετικότητα) εμφανίζει αναλογίες και συσχετίζεται με εκείνην που αφορά τις καλές τέχνες και τη λογοτεχνία.

Στο τελευταίο δοκίμιο, «Τα όρια της επιστήμης», απόπου και ο τίτλος του βιβλίου, ο συγγραφέας θέτει το κεφαλαιώδες ζήτημα των «ορίων» της επιστήμης και προσπαθεί να τα «ανιχνεύσει», εξετάζοντας αν η επιστήμη

μπορεί να απαντήσει στα εξής ερωτήματα: «Πώς άρχισαν όλα;», «Γιατί υπάρχουμε;», «Ποιος είναι ο σκοπός της ζωής», κ.λπ.

Αυτά τα, κατά τον Karl Popper, «έσχατα ερωτήματα» οι λογικοθετικοί, στις αρχές του αιώνα, στην προσπάθειά τους να επιστημονικοποιήσουν τη φιλοσοφία και να δημιουργήσουν ένα αποκαθαρμένο σώμα φιλοσοφικών ερωτημάτων, τα χαρακτήρισαν «ψευδοερωτήματα». Οπως όμως σωστά τονίζει ο Δ. Αναπολιτάνος στο άρθρο του «Ορθολογικότητα στη φιλοσοφία και στις επιστήμες: παραλλαγές, συγκρίσεις, θέσεις» (*Θεωρία και Κοινωνία*, τχ. 5), «η υπαρξιακή αγωνία, η αγωνία θανάτου δεν εξορκίζεται με την αναγόρευσή της σε ψευδοαγωνία, ούτε εξαφανίζεται η αφόρητη γοητεία που ασκούν τα οριακά για τη γνώση προβλήματα στον υποψιασμένο νου με την αποπομπή τους και την άρνηση διατύπωσής τους στα πλαίσια μιας γλώσσας που δεν έχει φιαχτεί για να τα φιλοξενεί». Στο πρώτο μέρος του δοκιμίου, ο Medawar μέσα από συστηματική λογική ανάλυση και διαυγή παραδείγματα, προβάλλει τον ισχυρισμό ότι δεν υφίσταται εγγενής περιορισμός στην πρόοδο της επιστημονικής γνώσης, ούτε «γνωστικός» (οφειλόμενος στην κατανόηση και επίγνωση των προβλημάτων) ούτε «λογικός» (οφειλόμενος στη φύση της λογικής συλλογιστικής). Με άλλα λόγια, ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει όριο στη δύναμη της επιστήμης να απαντά σε ερωτήματα στα οποία «μπορεί» να απαντήσει, δηλαδή σε ερωτήματα που ως εκ της «κατασκευής» της είναι έτοιμη να «υποδεχθεί». Στη συνέχεια διατυπώνει την άποψη ότι η επιστήμη δεν μπορεί να προσφέρει απαντήσεις στα «έσχατα ερωτήματα», για τον απλούστατο λόγο ότι κάτι τέτοιο βρίσκεται έξω από τις «δυνατότητές» της. Η επιστήμη δεν είναι «προριμένη» να απαντά σε τέτοιου είδους ερωτήματα, διότι οι εν λόγω απαντήσεις δεν μπορεί να έχουν εμπειρικό χαρακτήρα. Αν δεχτούμε ότι έχουν νόημα απαντήσεις που είναι «υπερβατικές», δηλαδή έχουν περιεχόμενο που δεν τίθεται υπό εμπειρικό έλεγχο, τότε αυτές πρέπει να αναζητηθούν στη σφαίρα του μύθου, της μεταφυσικής, της θρησκείας και της φαντασικής λογοτεχνίας!

Δύο λόγια τώρα για τη μετάφραση του βιβλίου. Ο μεταφραστής έκανε καλή δουλειά, αν και δεν ευτύχησε πάντοτε στην απόδοση των όρων. Πρέπει δε να επισημάνουμε το εξής λάθος: από την υποσημείωση της σελίδας 102 προκύπτει ότι ο άγγλος φιλόσοφος Ayer ζει. Ο Ayer όμως πέθανε το 1989, και το 1992, έτος της ελληνικής έκδοσης του εν λόγω βιβλίου του Medawar, κυκλοφόρησε από το Cambridge University Press ο τόμος «A.J. Ayer, *Memorial Essays*, ed. A. Phillips Griffiths».

Τελειώνοντας, θά θέλα να τονίσω ότι η έκδοση τέτοιων κειμένων συνιστά προσφορά στην επιστήμη και τον πολιτισμό μιας χώρας, ειδικά σε μια εποχή σαν την τωρινή, όπου δεν είναι λίγοι οι επιτίθειοι που μέσα από τα γραπτά τους ή τον προφορικό τους λόγο «καλλιεργούν την ασάφεια, προσποιούμενοι την εμβρίθεια», με αποτέλεσμα να κυριαρχεί η «αβάσταχτη ελαφρότητα» του προχειρού ή ακόμη και άνευ περιεχομένου λόγου.

## Μεγιστοποιώντας το μέγιστο

Κύριοι,

Για το πρόβλημα των «Μαθηματικών αναζητήσεων» του τεύχους Ιουλίου / Αυγούστου 1995, έχω να προτείνω την παρακάτω γενική κατά τη γνώμη μου λύση. Να βρεθεί δηλαδή ο μεγαλύτερος από τους μέγιστους κοινούς διαιρέτες των  $n^m + k$  και  $(n+1)^m + k$ , όταν το  $n$  διατρέχει το σύνολο των ακεραίων θετικών: Ο οποιοσδήποτε κοινός παράγοντας μεταξύ των δύο, θα είναι και παράγοντας της διαφοράς τους, δηλαδή της  $(n+1)^m - n^m$ , στην οποία και θα τους αναζητήσουμε. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις: α) το  $m$  άρτιο και β) το  $m$  περιττό.

α)  $m = 2\lambda$ , οπότε  $[(n+1)^{2\lambda} - n^{2\lambda}]^2 = [(n+1)^2 - n^2] \cdot [(n+1)^{2\lambda-2} - n^{2\lambda-2}]$ . Αν το  $\lambda$  είναι περιττό, τότε ο δεύτερος παράγοντας αναλύεται στο:  $(2n+1)[(n+1)^{2\lambda-1} - (n+1)^{2\lambda-2}n + \dots + n^{2\lambda-1}]$ . Αν όχι, προχωράμε με τον ίδιο τρόπο, οπότε τελικώς θα προκύψει πάλι ο παράγοντας  $(2n+1)$ . Αν τώρα αυτός ο παράγοντας διαιρεί τον  $n^m + k$ , επειδή διαιρεί και τη διαφορά, θα διαιρεί και τον  $(n+1)^m + k$ . Πολλαπλασιάζω επί 2<sup>m</sup>, οπότε έχω:

$$2^m n^m + 2^m k = 2^m n^m - 1 + (2^m k + 1). \quad (1)$$

Ο πρώτος προσθετέος του δεύτερου μέλους της (1) καταλήγει να περιέχει τον όρο  $(2n+1)$  και, κατά συνέπεια, αρκεί ο όποιος παράγοντας του  $(2n+1)$  να διαιρεί το  $(2^m k + 1)$ , ή, προκειμένου για το μέγιστο, να είναι ίσο με το  $(2^m k + 1)$ . Το  $n$  βρίσκεται αν εξισώσουμε το  $(2n+1)$  με το  $(2^m k + 1)$ , δηλαδή  $n = 2^{m-1}k$ .

Στα παραδείγματα του περιοδικού, για το  $n^2 + k$  ( $n+1)^2 + k$ , ο παράγοντας είναι  $2^2 k + 1 = 4k + 1$ ; για το  $n^4 + k$  ( $n+1)^4 + k$ , ο παράγοντας είναι  $2^4 + 1 = 17$ .

β) Αν το  $m$  είναι περιττό, τότε το δεύτερο μέλος της (1) τροποποιείται ως εξής:

$$2^m n^m + 1 + (2^m k - 1). \quad (2)$$

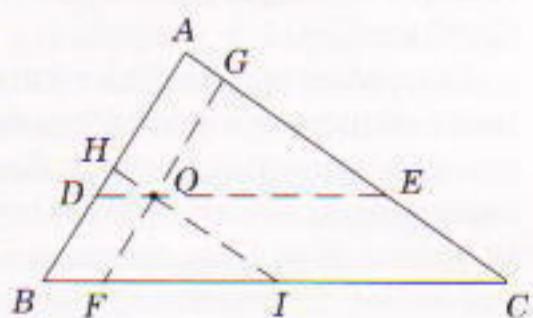
Στα παραδείγματα του περιοδικού, για το  $(n+1)^3 + k$  ( $n+1)^5 + k$ , ο παράγοντας είναι  $2^3 - 1 = 7$ ; για το  $(n+1)^5 + k$  ( $n+1)^6 + k$ , ο παράγοντας είναι  $2^5 - 1 = 31$ .

Εγώ προσωπικά δεν έχω πρόγραμμα μαθηματικών στον υπολογιστή μου και έτσι αναγκάστηκα να επιδιώξω τη λύση του προβλήματος με άλλον τρόπο. Είναι γνωστό εξάλλου από την αρχαιότητα ότι «πενία τέχνας κατεργάζεται».

Με την ευκαιρία αυτή, μερικά από τα προβλήματα του τεύχους έχουν και κάποιες άλλες λύσεις:

α) Πρόβλημα M38 (Σχήμα 1).

Αν  $x$  είναι το ζητούμενο μήκος, τότε:



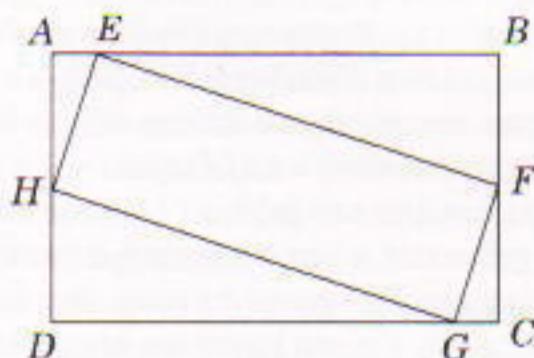
Σχήμα 1

Τα  $AHOG$ ,  $DOFB$ ,  $OECI$  είναι προφανώς παραλληλόγραμμα.

$OG = c/b(b-x)$ ,  $OF = c/a(a-x)$ , από τα όμοια με το  $ABC$  τρίγωνα  $GOE$  και  $OFL$ .

$OG + OF = x$ , και αν αντικαταστήσουμε προκύπτει  $x = c/(1/a + 1/b + 1/c)$ .

β) Πρόβλημα M39 (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Από τα όμοια τρίγωνα  $EBF$ ,  $FGC$  προκύπτει:  $EF/FG = EB/FC = BF/GC = (EB + BF)/(FC + GC)$ .

Αν αντικαταστήσουμε τον αριθμητή του τελευταίου κλάσματος με κάτι μικρότερο, αντί δηλαδή του  $BF$  βάλλουμε  $AE$ , και τον παρονομαστή με κάτι μεγαλύτερο, δηλαδή αντί του  $GC$  το  $BF$ , τότε το τελευταίο κλάσμα γίνεται:  $(EB + AE)/(FC + FB) = AB/BC$ , που σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι μικρότερο από το  $EF/FG$ .

Με φιλικούς χαιρετισμούς,

Σταύρος Σαΐνιδης, πολιτικός μηχανικός,  
Καλαμαριά

## Το άγνωστο αέριο

Αγαπητοί κύριοι,

Ξεκινώντας την πρώτη μου επικοινωνία μαζί σας, εκφράζω τις θερμότερες ευχές για τη συνέχιση αυτής της πολύ αξιόλογης και πρωτοπόρας προσπάθειας. Η έκδοση στην Ελλάδα ενός περιοδικού όπως το *Quantum* αποτελεί χωρίς αμφιβολία σημαντικό επίτευγμα στο χώρο των θετικών επιστημών.

Θα ήθελα να κάνω ορισμένα σχόλια και να προτείνω μια διαφορετική λύση της άσκησης Φ38, τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1995.

Όπως είναι γνωστό, ένα αέριο μπορεί να θερμαίνεται υπό σταθερή πίεση, οπότε αυξάνεται ο όγκος του, ή μπορεί να θερμαίνεται υπό σταθερό όγκο, οπότε αυξάνεται η πίεση του. Όπως όμως βρίσκεται, η θερμότητα που χρειάζεται για να αυξηθεί η θερμοκρασία 1 gr ενός αερίου κατά 1°C, δεν είναι ίδια στις δύο περιπτώσεις. Εξαστίας αυτού στα αέρια υπάρχουν δύο ειδικές θερμότητες:

Ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση ( $C_p$ ):

$$C_p = \frac{Q(\text{cal})}{m(\text{gr}) \cdot (\theta_2 - \theta_1)(\text{grad})} = \frac{958,4 / 4,2(\text{cal})}{1.000(\text{gr}) \cdot 1(\text{grad})}$$

$$\eta \quad C_p = 0,23 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}}.$$

Ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο ( $C_v$ ):

$$C_v = \frac{Q(\text{cal})}{m(\text{gr}) \cdot (\theta_2 - \theta_1)(\text{grad})} = \frac{704,6 / 4,2(\text{cal})}{1.000(\text{gr}) \cdot 1(\text{grad})}$$

$$\eta \quad C_v = 0,17 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}}.$$

Όπως ήταν αναμενόμενο,  $C_p > C_v$ . Ο λόγος  $C_p/C_v$  θα είναι  $\gamma = 1,35$ .

Από κατάλληλο πίνακα (Κ.Δ. Αλεξόπουλου-Δ.Ι. Μαρίνου, *Φυσική*, τόμ. 1), βλέπουμε ότι η τιμή αυτή του γ βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές του οξυγόνου ( $\gamma = 1,40$ ), του διοξειδίου του άνθρακα ( $\gamma = 1,30$ ) και της αμμονίας ( $\gamma = 1,31$ ). Ακολουθούν με μικρότερες τιμές άλλα αέρια με μεγαλύτερο μοριακό βάρος (π.χ. όζον).

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το άγνωστο αέριο θα αποτελείται από οξυγόνο με κάποια πρόσμειξη βαρύτερου αερίου.

**Φιλικά,**

Διβανές Κωνσταντίνος, φυσικός,  
Ιωάννινα

## Ενδιαφέρουσες λύσεις

Επιστολές με λύσεις για το πρόβλημα της στήλης «Στα πεδία της φυσικής» έστειλαν οι εξής αναγνώστες:

Γιάννης Αργύρης (Αθήνα), Μανίνης Νίκος (Βόλος), Γεροστάθος Αντώνης (Αθήνα), Καρράς Παναγιώτης (Π. Φάληρο), Στρίντζη Δάφνη (Πεύκη), Παπαπέτρου Βασίλης, Γριβόπουλος Κώστας (Μεσολόγγι), Δούνης Κων/νος (Ναύπακτος), Ελισσαίος Σιαύρου, Χορτής Σπύρος (Λευκάδα), Σαρόγλου Χρήστος (Γρεβενά), Χειλαρης Παναγιώτης (Πειραιάς), Μυραίος-Παύλος (Θεσ/κη), Αδαμόπουλος Ιωάννης (Αθήνα), Σπανός Νίκος (Αθήνα), Πιτάκης Αθανάσιος (Χανιά), Δέδες Χρήστος (Λουτράκι), Πάλλης Δημήτρης (Χαλάνδρι), Στεφανάκης Ζαχαρίας (Ικαρία), Δ.Ι. Γερογιώργης (Θεσ/κη), Ανδρεόπουλος Κώστας (Αθήνα), Ζαχαρης Θανάσης (Αθήνα), Παπαδάκης Γιάννης (Καβάλα) και Λαμπροπούλου Ζωή (Σέρρες).

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 8

1. Να αποδειχτεί ότι είναι αδύνατο να σχεδιαστεί ένα άστρο με πέντε κορυφές έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $IJ$ ,  $JA$  (βλ. το σχήμα) να είναι ίσα με 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 και 19 μονάδες μήκους αντίστοιχα.



2. Δίνεται μια ορθή γωνία με κορυφή  $O$ , ένα σημείο  $B$  στο εσωτερικό της γωνίας και σημεία  $A$  και  $C$  πάνω στις πλευρές της γωνίας. Να αποδειχθεί ότι η περίμετρος του τριγώνου  $ABC$  είναι μεγαλύτερη ή ίση από το διπλάσιο του ευθύγραμμου τμήματος  $OB$ .

3. Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο  $ABCD$ , τέτοιο ώστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AD$  να είναι ίσο με το άθροισμα των μήκών των ευθύγραμμων τμημάτων  $AB$  και  $CD$ . Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών  $B$  και  $C$  βρίσκεται πάνω στην πλευρά  $AD$ .

4. Ένας κλέφτης που έχει χάσει σε αιγάλη μερικά και τα δύο του χέρια θέλει να κλέψει ένα νόμισμα από το τραπέζι ενός αργυραμοιβού, ωθώντας το νόμισμα με τη μύτη του έτσι ώστε να το ρίξει κάτω από το τραπέζι, χωρίς να έρθει σε επαφή με κανένα άλλο νόμισμα. Θα τα καταφέρει; Τα νομίσματα είναι στρογγυλά, έχουν (ισως) διαφορετικά μεγέθη, και δεν ακουμπούν μεταξύ τους.

5. Ένα τετράγωνο τεμαχίζεται σε μερικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Για κάθε ορθογώνιο, μπορεί να υπολογιστεί ο λόγος της μικρότερης προς τη μεγαλύτερη πλευρά του. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα αυτών των λόγων είναι γνήσια μεγαλύτερο από 1. ◻

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 66

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 27

πολλά είδη αστάθειας που χαρακτηρίζουν το πλάσμα έως την οριστική του διάλυση. Βεβαίως έχω υπερπλουστεύσει αυτό το σενάριο —στην πραγματικότητα, όλα τα παραπάνω γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Εάν πάρουμε το πλάσμα του Διαστήματος ως ένα άλλο παράδειγμα, θα δούμε ότι δεν μπορούμε να προσθέσουμε κανένα τεχνητό στοιχείο σε αυτό το σενάριο, και τούτο διότι όλα τα γεγονότα και οι διαδικασίες συμβαίνουν από μόνα τους. Αυτό το γεγονός, βέβαια, δεν απλουστεύει τη μη γραμμική δυναμική του πλάσματος. Και στο πλάσμα του εργαστηρίου και στο πλάσμα του Διαστήματος, ισχύουν όλα τα βασικά στοιχεία αυτού του συνοπτικού σεναρίου: ταλαντώσεις και συλλογικές κινήσεις; αταξία στη μακροφυσική συνοδευμένη με επιπρόσθετη τάξη στη μικροφυσική χάσης προερχόμενο από τη δομή και δομή βασισμένη στο χάση. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά είναι τυπικά και για την κίνηση των σωματιδίων αλλά και για τη δυναμική του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Είσι αποδεικνύεται ότι στη φυσική του πλάσματος όλα είναι μάλλον πολύπλοκα και δύσκολα να ερευνώνται. Άλλα εάν δεν ήταν έτσι η κατάσταση, με τι θα ασχολούνταν οι καημένοι οι φυσικοί; Να έφαχναν για άλλη δουλειά; Η μήπως για κάποιο άλλο πρόβλημα; Με την ευκαιρία, αυτή είναι μία από τις λίγες περιοχές της φυσικής που ασχολούνται με θεμελιακές διαδικασίες και παραμένουν κλασικές —με την έννοια ότι δεν είναι κβαντομηχανικές. (Στην πραγματικότητα, οι μοναδικές ίσως περιοχές έρευνας της φυσικής που παραμένουν κλασικές είναι η φυσική πλάσματος και ένα αρκετά μεγάλο τμήμα της αστροφυσικής.) Το μεγάλο πλεονέκτημα της φυσικής πλάσματος απορρέει από το γεγονός ότι είναι μία ιδιαιτέρως οπτική διαδικασία. Άλλιμον, όμως, αυτό το χαρακτηριστικό —το τόσο ελκυστικό στη φυσική του 19ου αιώνα— έχει χαθεί τελείως στη μοντέρνα φυσική.

Επομένως, εάν θέλετε σύγχρονη και οπτική εποπτήμη, εξοικειωθείτε με τη φυσική του πλάσματος! ◻

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

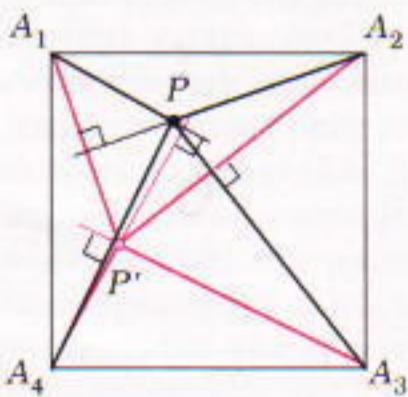
M46

(α) Η απάντηση είναι  $a = 549$ . Το άθροισμα των ψηφίων ενός ευτυχούς αριθμού είναι πάντοτε άρτιο. Επομένως, αν οι αριθμοί  $a$  και  $a + 1$  είναι ευτυχείς, τότε ο  $a$  καταλήγει στο 9, διότι διαφορετικά το άθροισμα των ψηφίων τους θα διέφερε κατά 1 και επομένως θα ήταν διαφορετικής ισοτιμίας. Ο αριθμός  $a$  δεν μπορεί να έχει δύο μόνο ψηφία, επειδή  $99 + 1 = 100$  δεν είναι ευτυχής. Αν ο  $a$  έχει τρία ψηφία,  $a = \underline{xy}9$  (η γραμμή συμβολίζει δεκαδική αναπαράσταση), τότε  $y < 9$  και  $a + 1 = x(y + 1)\underline{0}$ . Επομένως  $x + y = 9$ ,  $x = y + 1$ . Άρα,  $x = 5$ ,  $y = 4$ . (Αυτή δεν είναι μόνο η μικρότερη τριψήφια λύση, αλλά είναι και η μοναδική.)

(β) Η απάντηση είναι αρνητική επειδή, όπως προκύπτει από την προηγούμενη συζήτηση, από τους τρεις διαδοχικούς ευτυχείς αριθμούς  $a$ ,  $a + 1$ ,  $a + 2$ , οι δύο —και ουγκεκριμένα οι  $a$ , και  $a + 1$ — πρέπει να λήγουν σε 9, πράγμα που είναι αδύνατον.

M47

Περιστρέφουμε το τετράγωνο (Σχήμα 1) γύρω από το κέντρο του κατά  $90^\circ$  οπότε το  $A_1$  μεταφέρεται στο  $A_4$ , το  $A_2$  στο  $A_1$ , κ.ο.κ. Τότε οι ευθείες  $PA_1$ ,  $PA_2$ ,  $PA_3$ ,  $PA_4$  μεταφέρονται στις αντιστοιχες κάθετες (η  $PA_1$ , αφού περιστρέφεται κατά  $90^\circ$ , γίνεται η κάθετη από το



Σχήμα 1

$A_4$  προς την  $PA_1$ , κ.ο.κ.). Επομένως, οι τέσσερις κάθετες τέμνονται στο  $P'$ , την εικόνα του  $P$  μέσω αυτής της περιστροφής.

M48

Η ζητούμενη σχέση είναι  $c = ab/3 - 2a^3/27$ . ή, ισοδύναμα, ο αριθμός  $-a/3$  πρέπει να είναι ρίζα της εξισώσης.

Πράγματι, αν  $x_1, x_2, x_3$  είναι οι τρεις ρίζες της εξίσωσης, μπορούμε να γράψουμε

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο γινόμενο του δεξιού μέλους και εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δύο πολυωνύμων, παίρνουμε

$$-(X_1 + X_2 + X_3) = a.$$

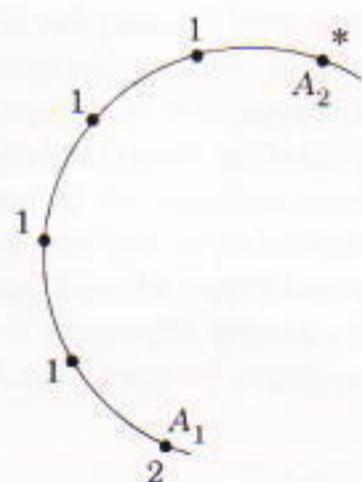
Αλλά αφού οι τρεις ρίζες σχηματίζουν αριθμητική πρόσδο,  $x_1 + x_3 = 2x_2$ , επομένως  $x_2 = -a/3$ .

Προσπαθήστε να βρείτε παρόμοιες συνθήκες για την τεταρτοβάθμια εξισώση.

M49

Η απάντηση στο μέρος (α) είναι  $n - k + 1$ . Θα το εξετάσουμε μαζί με το (β).

Ξέχωρίζουμε τις «σειρές» των δεδομένων αριθμών που αρχίζουν από 2 και περιλαμβάνουν όλα τα διαδοχικά 1 που ακολουθούν αμέσως έπειτα από αυτό (δεξιόστροφα). Όταν τα 1 που περιλαμβάνονται σε μια σειρά είναι *m*,



## Σχήμα 2

$\alpha$	$A_1$	$A_2$				
	2	*				
	0	1				
$\beta$	$A_1$	$A_2$				
	2	1	*			
	$\emptyset$	2	0			
	$\emptyset$	0	1			
$\gamma$	$A_1$	$A_2$				
	2	1	1	1	1	*
	$\emptyset$	2	1	1	1	0
	$\emptyset$	0	2	1	1	0
	$\emptyset$	0	0	2	1	0
	$\emptyset$	0	0	0	2	0
	$\emptyset$	0	0	0	0	1

### **Σχήμα 3**

$m \geq 0$ , (δείτε το Σχήμα 2 όπου ο αριθμός που ακολουθεί ύστερα από αυτά τα 1, ο οποίος είναι 2 ή 0, σημειώνεται με έναν αστερίσκο), τότε έπειτα από  $m + 1$  βήματα η σειρά θα έχει 0 αντί για 1. Ο αριθμός με τον αστερίσκο που την ακολουθεί θα γίνει 1. Τα Σχήματα 3-3γ παρουσιάζουν την εξέλιξη μιας σειράς για  $m = 0, 1, 4$ , αντίστοιχα (το σύμβολο  $\emptyset$  υποδηλώνει 0 ή 1). Κάθε σειρά εξελίσσεται με παρόμοιο τρόπο. Επομένως, όταν υπάρχουν στην αρχή  $k$  το πλήθος 2 και αν η μεγαλύτερη σειρά περιέχει  $m \leq n - k$  το πλήθος 1, τότε ύστερα από  $m + 1$  βήματα δεν θα υπάρχει κανένα 2. Εππλέον, αν οι  $n - k$  διαφορετικοί από το 2 αριθμοί στην αρχική διάταξη είναι όλοι 1, τότε θα αντικατασταθούν από 0 έπειτα από το πολύ  $n - k + 1$  βήματα, ενώ τα  $k$  το πλήθος 2 θα μετατραπούν σε 1. (N. Vasilyev)

M50

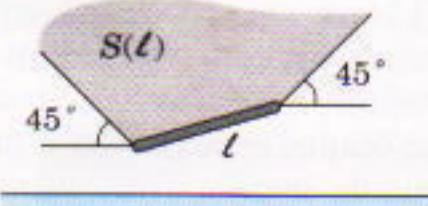
Διαλέγουμε έναν τυχαίο κορμό  $\ell_1$ ,  
και προσπαθούμε να τον κυλήσουμε  
προς το ποτάμι. Ας υποθέσουμε ότι  
εμποδίζεται από έναν άλλο κορμό, τον  
 $\ell_2$ . Προσπαθούμε τώρα να κυλήσουμε

τον  $\ell_2$ . Αν και αυτός εμποδιστεί από κάποιον άλλο, ονομάζουμε τον τελευταίο κορμό  $\ell_3$ . Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, δημιουργούμε μία ακολουθία κορμών  $\ell_1, \ell_2, \dots$  στην οποία κάθε κορμός εμποδίζεται από τον επόμενό του. Εφόσον το πλήθος των κορμών είναι πεπερασμένο, η ακολουθία είτε θα τερματίζεται σε συγκεκριμένο κορμό  $\ell_n$  —οπότε μπορούμε να κυλήσουμε ανεμπόδιστα τον  $\ell_n$  στο ποτάμι— είτε θα κλείνει δημιουργώντας βρόχο —δηλαδή κάποιος κορμός θα εμφανίζεται για δεύτερη φορά. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η δεύτερη περίπτωση δεν εμφανίζεται ποτέ.

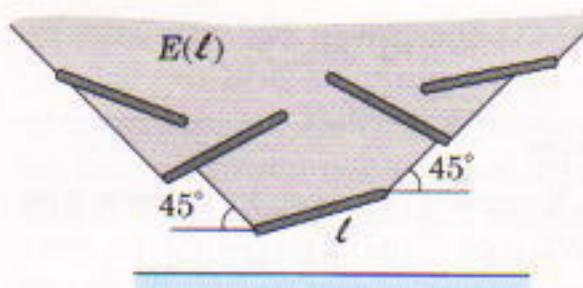
Για να επιτύχουμε το στόχο μας θα κατασκευάσουμε για κάθε κορμό  $\ell$  μια περιοχή  $E(\ell)$  της όχθης τέτοια ώστε  $E(\ell_1) \subset E(\ell_2)$  (και  $E(\ell_1) \neq E(\ell_2)$ ) όταν ο κορμός  $\ell_2$  εμποδίζει τον κορμό  $\ell_1$ . Έτσι, από την προηγούμενη ακολουθία κορμών  $\ell_1, \ell_2, \dots$  θα πάρουμε μια «γνήσια αύξουσα» ακολουθία περιοχών  $E(\ell_1) \subset E(\ell_2) \subset \dots$ , πράγμα που σημαίνει ότι κανείς κορμός δεν μπορεί να επανεμφανιστεί στην ακολουθία μας.

Ας φανταστούμε την όχθη ως το άνω ημιεπίπεδο φραγμένο από μια οριζόντια ευθεία  $b$  και τους κορμούς ως ευθύγραμμα τμήματα. Θεωρούμε τη σκιά  $S(\ell)$  κάθε κορμού —δηλαδή, το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω από το ευθύγραμμό τμήμα  $\ell$  και δύο ακτίνες που σχηματίζουν γωνία  $45^\circ$  με την  $b$ : σχεδιάζουμε τη μία ακτίνα από το δεξιό άκρο του  $\ell$  προς τα δεξιά (και πάνω) και την άλλη από το αριστερό άκρο (Σχήμα 4). (Στη σκιά ανήκουν και τα σημεία του  $\ell$  και των δύο ακτίνων.) Μπορούμε να δούμε ότι οι κορμοί που δεν έχουν κοινά σημεία με την  $S(\ell)$  δεν εμποδίζονται από τον  $\ell$  κατά την κύλισή τους προς το ποτάμι.

Ορίζουμε τώρα την επεκταμένη σκιά  $E(\ell)$  του  $\ell$ . Ξεκινάμε από οποιοδήποτε σημείο του  $\ell$  και μετακινούμαστε προς τα δεξιά κατά μήκος του  $\ell$  και κατά μήκος της δεξιάς πλευράς της  $S(\ell)$  έως ότου συναντήσουμε τον πρώ-



Σχήμα 4



Σχήμα 5

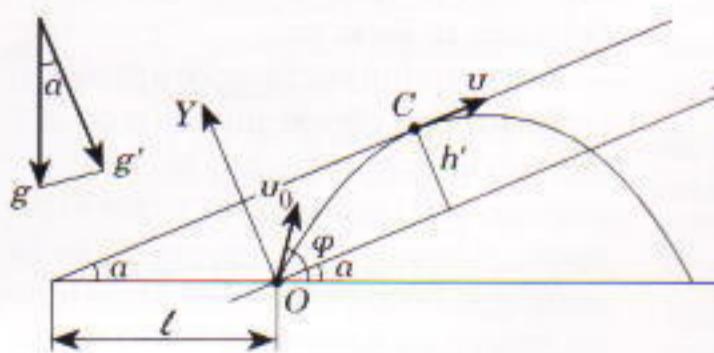
το κορμό  $\ell_1$  που τέμνει αυτή την πλευρά. Τότε συνεχίζουμε την κίνησή μας κατά μήκος του συνόρου της  $S(\ell_1)$  ώς τον επόμενο κορμό  $\ell_2$  (που τέμνει τη δεξιά πλευρά της  $S(\ell_1)$ ), κ.ο.κ. Η διαδρομή που διασχίζουμε με αυτόν τον τρόπο είναι μέρος του συνόρου της  $E(\ell)$ . Το υπόλοιπο σύνορο το διασχίζουμε με παρόμοιο τρόπο, ξεκινώντας από το ίδιο σημείο και κινούμενοι προς τα αριστερά. Το σύνολο  $E(\ell)$  αποτελείται από όλα τα σημεία της διαδρομής που έχουμε διασχίσει και όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω από αυτήν (Σχήμα 5). Λόγω της κατασκευής μας, κάθε κορμός  $\ell'$  είτε δεν έχει κοινά σημεία με την  $E(\ell)$  είτε ανήκει εξ ολοκλήρου στην  $E(\ell)$ . Στην πρώτη περίπτωση ο  $\ell'$  δεν έχει κοινά σημεία ούτε με την  $S(\ell)$  και επομένως ο  $\ell$  δεν εμποδίζει την πορεία του  $\ell'$  προς το ποτάμι. Στη δεύτερη περίπτωση η επεκταμένη σκιά  $E(\ell')$  του  $\ell'$  βρίσκεται μέσα στην  $E(\ell)$  (ακόμη κι αν τα σύνορα των  $E(\ell)$  και  $E(\ell')$  έχουν ένα κοινό σημείο  $A$ , τα ανιόντα τμήματα αυτών των συνόρων, ξεκινώντας από το  $A$ , θα συμπίπουν).

Επομένως, όταν ο  $\ell$  εμποδίζει τον  $\ell'$ , τότε  $E(\ell') \subset E(\ell)$ , γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

## ΦΥΣΙΚή

### Φ46

Απ' όλες τις δυνατές τροχιές ενός βλήματος ας επλέξουμε αυτήν που εφάπτεται στο στέγαστρο. Ας μελετήσουμε επιπλέον την κίνηση του βλήματος στο σύστημα αναφοράς του



Σχήμα 6

οποίου οι άξονες  $OX$  και  $OY$  κατευθύνονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Η συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας κατά τη διεύθυνση του  $OX$  είναι  $u_{0x} = u_0 \cos(\varphi - \alpha)$ , και κατά τη διεύθυνση του  $OY$   $u_{0y} = u_0 \sin(\varphi - \alpha)$ , όπου  $\varphi$  είναι η γωνία υπό την οποία βάλλεται το βλήμα ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

Το σημείο επαφής  $C$  της τροχιάς με το στέγαστρο προσδιορίζει το μέγιστο ύψος  $h'$  πάγω από τον άξονα  $OX$  στο οποίο μπορεί να βρεθεί το βλήμα, και όπως φαίνεται από το σχήμα ισούται με  $\ell$  ημα. Σ' αυτό το σημείο η τιμή της  $u_{0y}$  θα ισούται με μηδέν και επιπλέον θα ισχύει

$$h' = \frac{u_{0y}^2}{2g'},$$

όπου  $g' = g$  συναίνει η συνιστώσα της επιτάχυνσης βαρύτητας κατά τη διεύθυνση του άξονα  $OY$ . Έτσι,

$$u_{0y}^2 = 2gh',$$

ή αλλιώς

$$u_0^2 \cdot \eta\mu^2(\varphi - \alpha) = 2(g \text{ συνα})(\ell \text{ ημα}).$$

Αυτό ειδικότερα σημαίνει ότι αν ισχεί μια επιπρόσθετη σχέση, η

$$u_0^2 < 2g\ell \text{ ημα} \cdot \text{συνα} = g\ell \eta\mu 2a,$$

δεν θα υπήρχε τροχιά που να εφάπτεται στο στέγαστρο. Σ' αυτή την περίπτωση το μέγιστο βεληνεκές αντιστοιχεί στην γωνία βολής  $\varphi = 45^\circ$ , και μάλιστα ισούται με  $L_{max} = u_0^2/g$ .

Αν, όμως, η σχέση που ισχεί ήταν η

$$u_0^2 \geq g\ell \eta\mu 2a,$$

τότε προκειμένου το βλήμα μόλις να ακουμπήσει το στέγαστρο πρέπει να εκτοξευθεί υπό γωνία

$$\varphi_{ep} = a + \text{τοξη} \eta\mu \frac{\sqrt{g\ell \eta\mu 2a}}{u_0}.$$

Αν

$$\frac{u_0^2}{u_0^2 + 2g\ell} \leq \eta\mu 2a$$

(πράγμα που σημαίνει ότι  $\varphi_{ep} \geq 45^\circ$  —αποδείξτε το!), η αρχική γωνία βολής που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο βεληνεκές είναι πάλι  $\varphi_{ep} = 45^\circ$  και το  $L_{max} = u_0^2/g$ . Αν αντιθέτως

$$\frac{u_0^2}{u_0^2 + 2g\ell} > \eta\mu 2a$$

(πράγμα που σημαίνει ότι  $\varphi_{rp} < 45^\circ$ ), τότε

$$\varphi_{\text{wp}} = \varphi_{rp}$$

$$= a + \text{τοξημ} \frac{\sqrt{g\ell} \eta \mu 2a}{U_0},$$

και

$$L_{\max} = \frac{U_0^2}{g} \eta \mu 2 \varphi_{\text{wp}}$$

$$= \frac{U_0^2}{g} \eta \mu 2 \left( a + \text{τοξημ} \frac{\sqrt{g\ell} \eta \mu 2a}{U_0} \right).$$

#### Φ47

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη μιας ηλεκτρικής πηγής ισούται με το έργο που πρέπει να παράγει μια εξωτερική δύναμη για να μετακινήσει ένα μοναδιαίο φορτίο από τον ένα πόλο της μέχρι τον άλλο. Η ΗΕΔ είναι μέγιστη όταν το σωματίδιο άλφα σχεδόν δεν καταφέρνει να φτάσει στον απέναντι οπλισμό του πυκνωτή εξαίτιας της ηλεκτροστατικής άπωσης — με άλλα λόγια, όταν η κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων σωματιδίων είναι ίση με τη δυναμική τους ενέργεια στον απέναντι οπλισμό. Επομένως

$$\mathcal{E} = \frac{mv_0^2}{2q} = \frac{v_0^2}{2k} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ V} = 500 \text{ kV}.$$

#### Φ48

Εφόσον υπήρχε νερό μέσα στη θηλή, ο χώρος του δοχείου ήταν κορεομένος από ατμούς. Όταν το έμβολο κατεβαίνει, η τάση των ατμών δεν αλλάζει, συνεπώς οι ατμοί που υπήρχαν στον όγκο

$$V = \frac{\pi D^2}{4H}$$

κατά τον οποίο μειώθηκε ο χώρος τού δοχείου λόγω της μετακίνησης του εμβόλου μετατράπηκαν σε νερό. Η μάζα των ατμών που υγροποιήθηκαν αυξάνοντας την ποσότητα του νερού μέσα στη θηλή είναι

$$m = \frac{\rho \pi d^2}{4h},$$

όπου  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  η πυκνότητα του νερού. Από την καταστατική εξισωση βρίσκουμε

$$P = \frac{m}{m_{\text{mole}}} \frac{RT}{V} = \rho \left( \frac{d}{D} \right)^2 \frac{H}{h} \frac{RT}{m_{\text{mole}}}$$

$$= 2,16 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2.$$

#### Φ49

Ένας φορτισμένος κύλινδρος από μονωτικό (διηλεκτρικό) υλικό ο οποίος περιστρέφεται μοιάζει με μακρύ οωληνοειδές μεγάλου πλήθους οπερών που εκτείνονται καθ' όλο το μήκος του  $\ell$ . Το ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο διαρρέει τις «σπείρες» του κυλινδρού μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με το ουνολικό φορτίο που υπάρχει στην επιφάνειά του:

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi R\ell}{2\pi/\omega} = \sigma R\ell\omega.$$

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός τέτοιου κυλινδρου είναι ομογενές και το μέτρο του είναι ανάλογο του μέτρου του ηλεκτρικού ρεύματος:

$$B = aI = a\sigma R\ell\omega,$$

όπου  $a$  είναι μια σταθερά αναλογίας.

Καθώς ο εξωτερικός κύλινδρος επιταχύνεται για να αποκτήσει τη σταθερή γωνιακή του ταχύτητα  $\omega$ , το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του μεταβάλλεται δημιουργώντας μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο δρα στα φορτία του εσωτερικού κυλινδρου και τον υποχρεώνει να περιστρέφεται. Ο εσωτερικός κύλινδρος αποκτά γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1$  τέτοια ώστε το ουνολικό μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του να είναι μηδέν (μια και αυτός ο κύλινδρος αναπτύσσει στο εσωτερικό του το δικό του μαγνητικό πεδίο).

Έτσι έχουμε

$$a\sigma R\ell\omega + a\sigma R\ell\omega_1 = 0,$$

από όπου προκύπτει

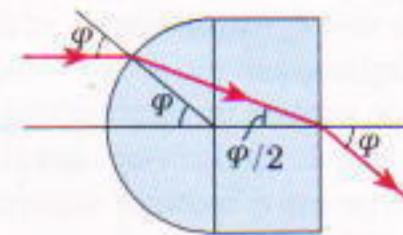
$$\omega_1 = -\frac{R}{r}\omega = -2\omega.$$

Επομένως, ο εσωτερικός κύλινδρος περιστρέφεται με διπλάσια ταχύτητα απ' ό,τι ο εξωτερικός, και με φορά αντίθετη από τη φορά του.

Στα παραπάνω θεωρήσαμε ότι η επίδραση του γήινου μαγνητικού πεδίου είναι αμελητέα, και πως ο εσωτερικός κύλινδρος είναι πολύ ελαφρύς. Μπορείτε να λύσετε πάλι το πρόβλημα θεωρώντας τώρα ότι θέτουμε πρώτο σε κίνηση τον εσωτερικό κύλινδρο;

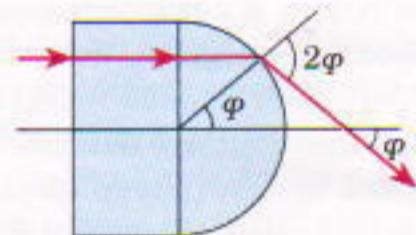
#### Φ50

Θα ήταν βολικό να μελετήσουμε τη διάθλαση σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα. Στα δύο ακόλουθα σχήματα οι γωνίες είναι μεγάλες, έτοι ώστε η αναπαράσταση να είναι ευκρινέστερη, στη μελέτη μας όμως είναι μικρές, και μπορούμε να αντικαθιστούμε τα ημιτονά τους με τις ίδιες τις γωνίες.



#### Σχήμα 7

Έτσι, η γωνία διάθλασης της φωτεινής ακτίνας του Σχήματος 7 η οποία εισέρχεται στον πρώτο ημικύλινδρο είναι η μισή της γωνίας πρόσπτωσης  $\varphi$ . Στη συνέχεια, η ακτίνα αυτή τέμνει τον κύριο οπτικό άξονα στην επιφάνεια που διαχωρίζει τον αέρα από το γυαλί. Η φωτεινή ακτίνα εξέρχεται υπό γωνία  $\varphi$  προς τον οπτικό άξονα, και σε απόσταση  $L$  από το σύστημα θα έχει αποκλίνει απ' αυτόν κατά  $\varphi L$ .



#### Σχήμα 8

Η ακτίνα του Σχήματος 8 η οποία προοπίπτει στον πρώτο ημικύλινδρο δεν υφίσταται διάθλαση, εξέρχεται όμως από τον δεύτερο ημικύλινδρο υπό γωνία  $\varphi$  προς τον κύριο οπτικό άξονα. Η απόκλισή της από αυτόν σε απόσταση  $L$  από το σύστημα θα είναι πάλι  $\varphi L$  (αν υποθέσουμε, βέβαια, ότι  $L \gg R$ ).

Επομένως, η λεπτή κυλινδρική δέσμη συγκλίνει σε ένα (σχεδόν) σημείο κοντά στο σύστημα των δύο φακών, και στη συνέχεια καθίσταται μια συνηθισμένη αποκλίνουσα (κωνική) δέσμη. Ο λόγος του εμβαδού της εγκάρσιας τομής της φωτεινής δέσμης προς το αντίστοιχο εμβαδόν της αποκλίνουσας δέσμης σε απόσταση  $L$  από το σύστημα θα είναι

$$S_1/S_2 = R^2/L^2 = 1/400.$$

## Σπαζοκεφαλιές

### Σ46

Όταν δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 101, τότε είναι πρώτοι προς αλλήλους, διότι αν είχαν κοινό διαιρέτη, αυτός θα διαιρούσε το 101. Το 101 όμως είναι πρώτος αριθμός, επομένως ο μοναδικός διαιρέτης που είναι μικρότερος από τον εαυτό του είναι το 1. Ο κανόνας του παιχνιδιού θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής: «Παιξε στα κουτουρού, και η Winnie κερδίζει».

### Σ47

Αν το  $2^{1.995}$  αποτελείται από  $n$  ψηφία και το  $5^{1.995}$  από  $m$  ψηφία, τότε  $10^{n-1} < 2^{1.995} < 10^n$  και  $10^{m-1} < 5^{1.995} < 10^m$ . Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αυτές τις ανισότητες παίρνουμε

$$10^{n+m-2} < 10^{1.995} < 10^{n+m}.$$

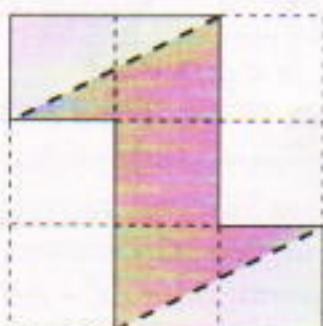
Επειδή ότι  $n+m-2 < 1.995 < n+m$  ή  $1.995 = n+m-1$ . Επομένως, το συνολικό πλήθος των ψηφίων των δεδομένων αριθμών είναι 1.996.

### Σ48

Η μπάλα καιά την πυξη της αντιμετωπίζει την αντίσταση του αέρα και έτοιχαν συνεχώς ενέργεια. Επομένως, η συνολική ενέργεια που έχει η μπάλα σε συγκεκριμένο ύψος κατά την άνοδό της είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια που έχει στο ίδιο ύψος κατά την κάθοδό της. Εφόσον η δυναμική ενέργεια είναι η ίδια και στις δύο θέσεις, η κινητική ενέργεια της μπάλας, επομένως και η ταχύτητά της, θα είναι μεγαλύτερη όταν ανεβαίνει παρά όταν κατεβαίνει. Άρα, ο χρόνος της καθόδου θα είναι μεγαλύτερος από το χρόνο της ανόδου.

### Σ49

Μπορούμε να κόψουμε το κιβώτιο κατά μήκος τεσσάρων ακρών του και



Σχήμα 9

να σχηματίσουμε τη φιγούρα «Ζ» που βλέπετε στο Σχήμα 9. Αυτή η φιγούρα μετατρέπεται στο επιθυμητό τετράγωνο, αν την κόψουμε κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών. Υπάρχουν επίσης και άλλες λύσεις.

### Σ50

Το συνολικό πλήθος αγώνων σε ένα τουρνουά, όπου κάθε παίκτης αγωνίζεται με όλους τους υπόλοιπους, είναι  $T_n = n(n-1)/2$ . Αν υπάρχουν  $k$  αγωνιζόμενοι εκτός από την Αμαλία και τον Νίκο, μπορούμε να γράψουμε  $T_k < 23 < T_{k+2}$ . Αφού  $T_6 = 15$ ,  $T_7 = 21$ ,  $T_8 = 28$ ,  $T_9 = 36$ , το  $k$  είναι δυνατόν να πάρει δύο τιμές:  $k = 6$  και  $k = 7$ . Και στις δύο περιπτώσεις το πλήθος των παρτίδων που δεν παίχτηκαν ( $28 - 23$  ή  $36 - 23$ ) είναι περιττό. Αυτό σημαίνει ότι η Αμαλία και ο Νίκος δεν έπαιξαν μεταξύ τους —διαφορετικά, το πλήθος των παιχνιδιών που δεν θα είχαν παιξει θα ήταν άριτο (αφού ο καθένας τους δεν παιζει το ίδιο πλήθος αγώνων).

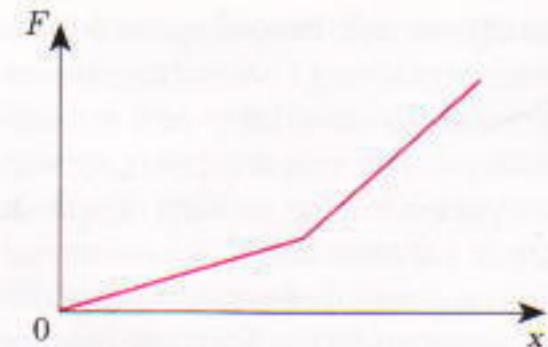
## Καθειδοσκόπιο

- Στη δεύτερη περίπτωση.
- Δεν ασκείται καμιά δύναμη.
- Ναι, διότι η παραμόρφωση μιας δοκού εξαρτάται από το πώς εφαρμόζονται οι δυνάμεις.
- Όχι. Οι επιμήκυνσεις των δύο συρμάτων δεν θα είναι ίσες διότι ο σίδηρος και ο χαλκός δεν έχουν ίσα μέτρα ελαστικότητας Young.
- Η σχετική (ή κλασματική ή και ανηγμένη) επιμήκυνση του πρώτου σύρματος είναι 4 φορές μικρότερη της αντίστοιχης του δεύτερου. Η απόλυτη επιμήκυνση του πρώτου σύρματος είναι 2 φορές μικρότερη της αντίστοιχης του δεύτερου.

6. Προκειμένου η επιμήκυνση των ελατηρίων να μην ξεπέρασει τα όρια ελαστικότητάς τους.

- Για να μειώνεται η δύναμη του σπαρταρίσματος του φαριού όταν πάνεται στο αγκίστρι.

8. Όταν η σφαίρα διαπεράσει το τοίχωμα του πλαστικού ποτηριού, αυτό παραμορφώνεται, αυξάνοντας σε όγκο κατά ποσόν ίσο με τον όγκο της σφαίρας. Για ένα γυάλινο πο-



Σχήμα 10

τήρι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, και σπάζει κάτω από τη δύναμη της πίεσης του νερού.

9. Βλ. Σχήμα 10.

10. Η περίοδος μειώνεται στο μισό.

11. Ενόσω το ελατήριο είναι τεντωμένο, το σώμα *A* πέφτει με επιτάχυνση μεγαλύτερη της επιτάχυνσης της ελεύθερης πτώσης, και το σώμα *B* με επιτάχυνση μικρότερη της επιτάχυνσης της ελεύθερης πτώσης.

12. Ο χαλαζίας έχει πολύ μικρό συντελεστή γραμμικής διαστολής. Αυτό σημαίνει ότι, παρά τις μεγάλες μεταβολές της θερμοκρασίας της ράβδου, το μήκος της σχεδόν δεν αλλάζει, επομένως η ράβδος δεν παραμορφώνεται σημαντικά.

13. Όταν πυρακτώνεται το σύρμα, η μέση απόσταση των ατόμων του αυξάνει και οι μεταξύ τους ελκτικές δυνάμεις ελαττώνονται.

14. Ναι, αυξάνει.

15. Μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του διαλύματος.

16. Το χάλκινο ελατήριο.

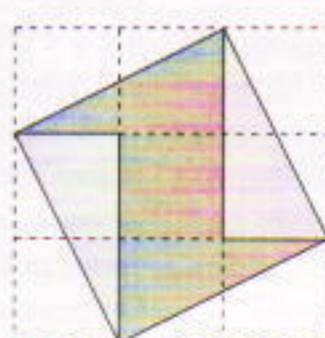
## Μικροπειραματισμοί

Θα πέσει ελεύθερα, διότι κατά το τέντωμα η διάμετρος του σωλήνα θα μικρύνει.

## Παιχνιδότοπος

1. Ο πρώτος παίκτης κερδίζει αν βάλει το πρώτο νόμισμα στο κέντρο του τραπεζιού και συνεχίσει τοποθετώντας κάθε επόμενο νόμισμα ουμμετρικά (ως προς το κέντρο) με το τελευταίο νόμισμα του αντιπάλου του. Αυτό είναι πάντα δυνατόν επειδή η θέση έπειτα από κάθε κίνηση του πρώτου παίκτη έχει κενή τη ουμμετρική της ως προς το κέντρο.

2. Η στρατηγική που περιγράφεται στο τέλος του άρθρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση οποιουδήποτε περιττού *m*, με την εξής μόνο διαφορά: ο αριθμός τέσσερα πρέπει να αντικατασταθεί από το *m*, και τα



διαστήματα που θεωρήσαμε στο άρθρο πρέπει αντίστοιχα να αντικατασταθούν από τα  $(m+1)k - m \leq s \leq (m+1)k$ . Έπειτα ότι ο πρώτος παίκτης κερδίζει για κάθε  $N$  με τις εξής εξαιρέσεις: όταν  $N \equiv 0 \pmod{2m+2}$ ,<sup>1</sup> οπότε κερδίζει ο παίκτης  $A$ ; όταν  $N \equiv 1 \pmod{2m+2}$ , οπότε κερδίζει ο δεύτερος παίκτης; και όταν  $N \equiv (m+1) \pmod{2m+2}$ , οπότε κερδίζει ο παίκτης  $B$ . Ο νικητής, όποιος και να είναι — ο πρώτος παίκτης, ο δεύτερος, ο  $A$  ή ο  $B$  — ακολουθεί από την πρώτη του κίνηση τη νικηφόρο στρατηγική εκτός από τις περιπτώσεις που  $N \equiv 2, 3, \dots, m \pmod{2m+2}$ , οπότε η πρώτη κίνηση του παίκτη που κερδίζει (του πρώτου) είναι άρπα.

Η νικηφόρος στρατηγική για τα άρτια  $m$  είναι παρόμοια. Όλες οι τιμές του  $N$  διαιρούνται σε διαστήματα της μορφής  $(m+2)k+1 \leq N \leq (m+2)(k+1)$ . Αν  $N = (m+2)k + \zeta$ , όπου  $2 \leq \zeta \leq (m+1)$ , ο πρώτος παίκτης ξεκινά με μια άρτια κίνηση που αφήνει απόθεμα ίσο με  $(m+2)k$  ή  $(m+2)k+1$ . Αν  $N = (m+2)(k+1)$ , ο πρώτος παίκτης ξεκινά παίρνοντας ένα βόλο, και στην επόμενη κίνηση παίρνει περιττό πλήθος βόλων, ώστε ν' αφήσει απόθεμα ίδιου μεγέθους με το προηγούμενο. Ακολουθώντας αυτόν τον κανόνα, ο πρώτος παίκτης θα συγκεντρώνει κάθε φορά άρτιο πλήθος βόλων (και θα κερδίζει υποχρεωτικά) εκτός από τις περιπτώσεις που  $N \equiv 1 \pmod{(m+2)}$ . Σε αυτές τις ειδικές περιπτώσεις ο δεύτερος παίκτης έχει τη δυνατότητα να εφαρμόσει την εν λόγω τακτική ανέξαρτητα από την αρχική κίνηση του πρώτου. Επομένως εδώ κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.

Προσπαθήστε να επεκτείνετε αυτή την ανάλυση και στο παιχνίδι όπου ο παικτης *A* κερδίζει όταν συγκεντρώσει περιττό πλήθος βόλων, ενώ ο *B* κερδίζει όταν υποχρεώσει τον *A* να συγκεντρώσει άρπιο πλήθος βόλων. Τα αποτελέσματα θα είναι παρόμοια αλλά όχι ίδια.

## Δρακόντειες και πύλες

1. Το μήκος της τανιάς ήταν μικρότερο:  $2^{30} \text{ cm} = 1.024^3 \text{ cm} \equiv 10.700 \text{ km}$ , ενώ η απόσταση της Γης από τη Σελήνη είναι 384.000 km.

1. Ο συμβολισμός  $x = y \text{ mod } z$  σημαίνει ότι  $x - y$  διαιρείται ακορίδως με το  $z$ .

2. Το δρακόντειο σχέδιο μετατρέπεται στο κατοπινικό του. Στην κωδική λέξη τα γράμματα *A* αντικαθίστανται με *D*, και αντιστρόφως. Επομένως, αν πάρουμε μια δρακόντεια λέξη και αλλάξουμε όλα τα *A* με *D* και όλα τα *D* με *A*, η νέα λέξη θα περιγράφει μια όμοια δρακόντεια καμπύλη. Δηλαδή, οι δύο καμπύλες θα έχουν την ίδια μορφή, ανεξάρτητα από το μέγεθός τους ή τη θέση τους.

3. Ένα εύκολο παράδειγμα είναι η **AAAAA**, αφού μια «δρακόντεια λέξη» πρέπει να έχει  $2^{n-1}$  γράμματα, όπου  $n$  ακέραιος. Αλλά ακόμη και αυτό δεν αρκεί. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι δεν υπάρχει δρακόντεια καμπύλη τάξης 2 αντίστοιχη με τη λέξη **AAA**.

4. Αν *w* είναι η αρχική λέξη, τότε η δεύτερη είναι *ώ* (δείτε το πρόβλημα 5γ). Αυτό αληθεύει για κάθε διαδρομή — για τα δρακόντεια σχέδια ο μετασχηματισμός αυτός ισοδυναμεί απλώς με την αντικατάσταση του μεσαίου γράμματος *w* με το «αντίθετό» του.

5. (α) Με μερικά παραδείγματα γίνεται φανερό. (β) Αυτή είναι απλώς η επαναδιατύπωση του Θεωρήματος 1 στη γλώσσα των λέξεων. (γ) Αυτή αποτελεί επαναδιατύπωση του Θεωρήματος 2. Μπορούμε να γράψουμε αυτό το αποτέλεσμα αλγεβρικά:

$$\overline{wLw} = wRw$$

KAI

$$\overline{wRw} = wL\overline{w}.$$

Παρατηρήστε ότι μια λέξη πρέπει να ικανοποιεί την εν λόγω συνθήκη ώστε να μπορεί να είναι λέξη κάποιας δρα-κόντειας καμπύλης. (δ) Ένα παράδειγ-μα θα κάνει φανερή την πρόταση. Ας κατασκευάσουμε μια λέξη τάξης 4 με δεδομένα τέσσερα τυχαία γράμματα συνθέσεις 1, 2, 4 και 8:

$$\Delta A \Delta - A$$

Από το πρόβλημα 5β συμπεραίνουμε ότι τα γράμματα των θέσεων 7-15 πρέπει να είναι τα συμπληρώματα των γραμμάτων των θέσεων 1-7. Επομένως, μπορούμε ήδη να γράψουμε μερικά από αυτά:

$$\Delta A \Delta = A - A \Delta A.$$

Όμως από το πρόβλημα 5β γνωρίζου -

με και ότι τα γράμματα των θέσεων 1-7 σχηματίζουν επίσης δρακόντεια λέξη, άρα μπορούμε να γράψουμε και άλλα:

$$\Delta A \Delta \Delta A A \Delta A$$

Χρησιμοποιώντας ακόμη μία φορά το αποτέλεσμα του προβλήματος 5β, βλέπουμε ότι τα τρία πρώτα γράμματα πρέπει επίσης να σχηματίζουν δρακόντεια λέξη. Αυτό μας επιτρέπει να συμπληρώσουμε τα υπόλοιπα κενά:

ΔΑΑΔΔΔΑΑΔΑΑΑΔΔΑ.

**Στην πραγματικότητα, αυτή η κατασκευή γίνεται ευκολότερα αντίστροφα, αν θεωρήσουμε στην αρχή τα πρώτα τρία γράμματα, μετά τα πρώτα επτά, κ.ο.κ. Αφήνουμε τη σχετική προσπάθεια για τον αναγνώστη.**

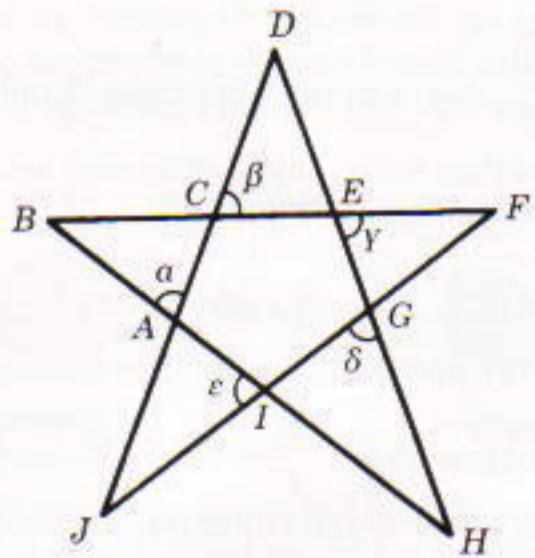
6. Γενικά, τα δύο θεωρήματα δίνουν διαφορετικά σχέδια. (Θεωρήστε, για παράδειγμα, το σχέδιο με την κωδική λέξη ΔΔΑΑΔΑΑΑΔΔΑΔΔΑΑ.)

7. Υποθέτουμε ότι η ευθεία  $AB$  είναι οριζόντια. Το πλήθος των τμημάτων της διαδρομής της χελώνας στα οποία περπάτησε προς τα δεξιά ισούται με το πλήθος των τμημάτων στα οποία περπάτησε προς τα αριστερά, επομένως το συνολικό τους πλήθος  $h$  είναι άρτιο. Ομοίως, το πλήθος των κάθετων τμημάτων της διαδρομής είναι και αυτό άρτιο. Όμως, τα οριζόντια και τα κάθετα τμήματα εναλλάσσονται, και αφού το συνολικό τους πλήθος  $h + v$  είναι άρτιο,  $h = v$ . Άρα, το  $h + v = 2h$  διαιρείται με το 4, ο συνολικός χρόνος είναι ακέραιο πλήθος ωρών και το τελευταίο τμήμα είναι κάθετο.

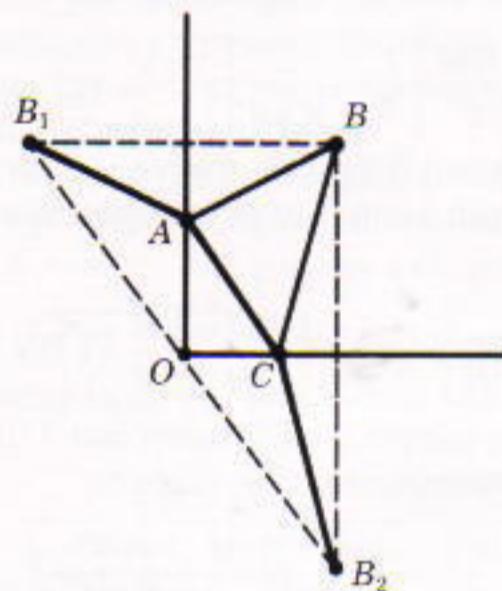
Είναι θέμα αρχής

1. Αφού η  $AB$  πρέπει να είναι μικρότερη από την  $BC$ , η γωνία  $BAC$  πρέπει να είναι μικρότερη από τη γωνία  $BCA$ , η οποία είναι ίση με τη γωνία  $DCE$ . Έτσι, με βάση τα σύμβολα του Σχήματος 11 μπορούμε να γράψουμε  $\alpha < \beta$ . Ομοίως καταλήγουμε στις ανισότητες  $\beta < \gamma < \delta < \varepsilon < \alpha$ , πράγμα που μας οδηγεί στην αντίφαση:  $\alpha < \alpha$ .

2. Τα συμμετρικά  $B_1$  και  $B_2$  του σημείου  $B$  ως προς τις πλευρές της δεδομένης γωνίας (Σχήμα 12) είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς την κορυφή Ο της γωνίας. Επομένως  $BA + AC + AB = B_1A + AC + AB_2 > B_1B_2 = 2B_1O = 2OB$  (αφού το μήκος μιας τεθλασμένης



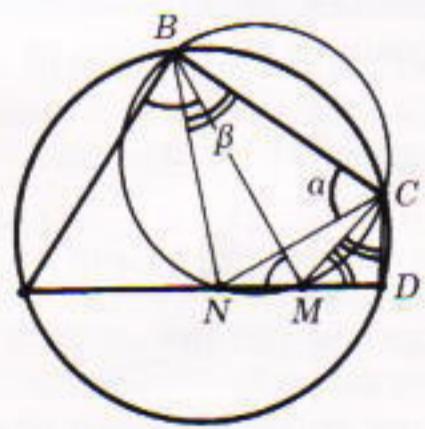
Σχήμα 11



Σχήμα 12

γραμμής είναι μεγαλύτερο από την απόσταση των άκρων της.

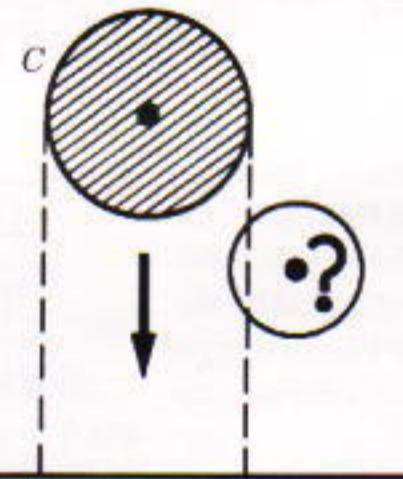
3. Θεωρούμε ένα οημείο  $M$  πάνω στην πλευρά  $AD$  τέτοιο ώστε  $AM = AB$  (και, επομένως,  $MD = CD$ —Σχήμα 13). Θεωρούμε επίσης το σημείο  $N$  στο οποίο τέμνονται η  $AD$  και ο περιγέγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $BCM$ . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι  $BN$  και  $CN$  είναι οι διχοτόμοι των γωνιών  $ABC$  και  $BCD$ . Αν η γωνία  $AMB = a$ , τότε η γωνία  $ABM = a$  (το τρίγωνο  $ABM$  είναι ισοσκελές), η γωνία  $BAD = 180^\circ - 2a$ , η γωνία  $BCD = 180^\circ -$  (γω-



Σχήμα 13

via  $BAD) = 2a$ . Επιπλέον, η γωνία  $BCN$  βαίνει στο ίδιο τόξο του κύκλου  $BCMN$  με τη γωνία  $BMN$ , και επομένως η γωνία αυτή είναι ίση με  $a = 1/2$  (γωνία  $BCD$ ). Κατά συνέπεια, η  $CN$  είναι η διχοτόμος της  $BCD$ . Παρομοίως, αν η γωνία  $CMD = \beta$ , η γωνία  $MDC = 180^\circ - 2\beta$ , η γωνία  $ABC = 2\beta$ , η γωνία  $NBC = 180^\circ -$  (γωνία  $NMC = \beta$ ), και επομένως η  $BN$  είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας.

4. Ναι, θα τα καταφέρει. Πρέπει να επλέξει εκείνο το νόμισμα που το κέντρο του απέχει τη μικρότερη απόσταση από το άκρο του τραπεζιού (θεωρούμε ότι το τραπέζι είναι ορθογώνιο), και να το μετακινήσει προς το άκρο ακολουθώντας τη συντομότερη δυνατή οδό (Σχήμα 14). Αν το νόμισμα συναντήσει κάποιο άλλο νόμισμα στο δρόμο του, τότε το κέντρο του δεύτερου νομίσματος θα βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο του τραπεζιού από το κέντρο του πρώτου νομίσματος, πράγμα που αντιβαίνει στο κριτήριο επλογής του πρώτου νομίσματος.



Σχήμα 14

5. Θα θεωρήσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου έχει μοναδιαίο μήκος. Τότε κάθε λόγος  $a/b$  είναι μεγαλύτερος από το γινόμενο  $ab$ , αφού  $b < 1$ . Επομένως, το άθροισμα όλων των λόγων είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των αντίστοιχων γινομένων, δηλαδή το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογώνιων. Άλλα το άθροισμα αυτό αντιπροσωπεύει το εμβαδόν του τετραγώνου, και επομένως είναι ίσο με 1.

## Ψυχαγωγικά μαθηματικά

(Δείτε το Καλειδοσκόπιο του προγούμενου τεύχους)

### Προβλήματα

1. Τέσσερα νομίσματα. Για παράδειγμα, το πιο πάνω νόμισμα, το κε-

ντρικό και τα δύο που βρίσκονται κάτω από το κεντρικό. Παρατηρήστε ότι από κάθε τριάδα νομίσμάτων που σχηματίζουν γωνία, πρέπει να αφαιρεθεί τουλάχιστον ένα νόμισμα και το ένα πρέπει να είναι οπωδήποτε κορυφή. Τότε όμως είναι απαραίτητο να μετακινηθεί επίσης και το κεντρικό νόμισμα.

2. Δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί. Αφού το γινόμενο είναι περιπτώ, έπειτα ότι όλοι οι αριθμοί είναι περιπτώι και το άθροισμα τεσσάρων περιπτών αριθμών είναι άριτο.

3.  $130^\circ$ .

4. Τον μέσο.

5. Ναι. Για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

6. Απέμειναν τρία κεριά. Τα υπόλοιπα κάηκαν τελείως.

7. Το εμβαδόν είναι 0, αφού  $35 = 17 + 18$ .

8. Εδώ το *Quantum* είχε σκοπό να μεταφέρει ένα δίδαγμα: Επειδή από το 3 έως το 99 υπάρχουν πολλοί πρώτοι αριθμοί (24 για την ακρίβεια), δεν υπάρχει σύντομος τρόπος να βρεθεί το ζητούμενο γινόμενο. Ο μόνος τρόπος είναι να γίνει ο πολλαπλασιασμός με τον επίπονο τρόπο που γνωρίζουμε (ή με ισχυρό υπολογιστή). Εννοείται ότι δεν είχαμε απαίτηση να κάνει ο αναγνώστης κάτι τέτοιο. Αντίθετα, θέλαμε να διαπιστώσει το άσκοπο της ερώτησης!

Πάντως, κάνοντας εκτιμήσεις όπως για τα προβλήματα Fermi του παρόντος τεύχους, μπορεί να αποδείξει κανείς ότι το ζητούμενο γινόμενο αποτελείται από 79 ψηφία. Επισης αποδεικνύεται, αλλά με κάποιον κόπο, ότι ο αριθμός μας αρχίζει με τα ψηφία 272539 (και έπονται άλλα 73 ψηφία). Ως εύκολη άσκηση, ας δείξει ο αναγνώστης ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι το 5.

9. Τέσσερα χιλιόμετρα.

10. Ξακόσια χιλιόμετρα.

11. Το ψηφίο 0.

12. Ιστορία δύο πόλεων (του Κάρολου Ντίκενς). Μετά είκοσι έτη (συνέχεια του *Οι τρεις σωματοφύλακες του Αλέξανδρου Δουμά*), Είκοσι χιλιάδες λεύγες υπό τη θάλασσα (του Ιουλίου Βερν).

13. Το τρίγωνο είναι ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο.

14. Η γωνία παραμένει ίση με  $1^\circ$ .

## Η 26η Ολυμπιάδα Φυσικής

### Πρόβλημα 1

(α) Ένα φωτόνιο έχει ενέργο μάζα αδράνειας  $m$ , όπου

$$mc^2 = hf, \quad \text{ή} \quad m = \frac{hf}{c^2}. \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι: βαρυτική μάζα = μάζα αδράνειας, και θεωρούμε ένα φωτόνιο ενέργειας  $hf$  και μάζας  $m$  που δίνεται από τη σχέση (1) το οποίο εκπέμπεται προς τα πάνω σε μια απόσταση  $r$  από το κέντρο του άστρου. Αυτό για να διαφύγει θα χάσει ενέργεια:

Αλλαγή στην ενέργεια φωτονίου = αλλαγή στη δυναμική ενέργεια.

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{\infty} - \left[ -\frac{GMm_i}{r} \right]$$

ή

$$hf_f = hf_i - \frac{GMm_i}{r}, \quad (i: \text{αρχική}, f: \text{τελική}).$$

Εφόσον η μεταβολή στην ενέργεια του φωτονίου είναι μικρή ( $\Delta f \ll f$ ), θα έχουμε

$$m_f \equiv m_i = \frac{hf_i}{c^2}. \quad \text{Έτοιμο: } hf_f \equiv hf_i - \frac{GM\left(\frac{hf_i}{c^2}\right)}{r},$$

$$\text{ή } hf_f \equiv hf_i \left[ 1 - \frac{GM}{rc^2} \right], \quad \text{ή } \frac{f_f}{f_i} \equiv \left( 1 - \frac{GM}{rc^2} \right). \quad \text{Άρα:}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_f - f_i}{f_i} \equiv -\frac{GM}{rc^2}. \quad (2)$$

Το μείον στη σχέση (2) δείχνει μετατόπιση προς το ερυθρό (μείωση της συχνότητας  $f$ , αύξηση του μήκους κύματος  $\lambda$ ). Τελικά για ένα φωτόνιο που εκπέμπεται από την επιφάνεια ενός άστρου ακτίνας  $R$ , έχουμε

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2}. \quad (3)$$

(β) Η αλλαγή στην ενέργεια του φωτονίου που ανυψώνεται από το  $r_i$  στο  $r_f$  είναι :

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{r_f} + \frac{GMm_i}{r_i} \equiv \frac{GM(hf_i)}{c^2} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right].$$

Με την υπόθεση ότι  $m_f \equiv m_i = \frac{hf_i}{c^2}$ , τελικά προκύπτει:

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right].$$

Στο περιγραφόμενο πείραμα για απόσταση  $d$  από την επιφάνεια άστρου ακτίνας  $R$ , η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right]. \quad (4)$$

Η συχνότητα του φωτονίου πρέπει να μετατοπιστεί, λόγω Doppler, προς τα πίσω, από το  $f_i$  στο  $f_f$ , ώστε να προκληθεί συντονισμένη διέγερση των ιόντων  $\text{He}^+$  στο διαστημόπλοιο:

$$\frac{f'}{f_i} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad (\text{οχεικιστική θεώρηση Doppler})$$

όπου  $f'$  είναι η συχνότητα όπως λαμβάνεται από τα ιόντα  $\text{He}^+$  μέσα στο διαστημόπλοιο. Έχουμε:

$$\frac{f_f}{f'} = (1-\beta)^{1/2} (1+\beta)^{-1/2} \approx 1-\beta, \quad \text{εφόσον } \beta \ll 1.$$

Χρησιμοποιώντας την κλασική θεώρηση του φαινομένου Doppler, έχουμε απευθείας:  $\frac{f_f}{f'} = 1-\beta$ . Εφόσον η  $f'$  πρέπει να είναι ίση με το  $f_i$  για συντονισμένη απόρροφη, έχουμε:  $\frac{f_f}{f_i} = 1-\beta$ . (5)

Τότε από τις σχέσεις (5) και (4) προκύπτει ότι

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right]. \quad (6)$$

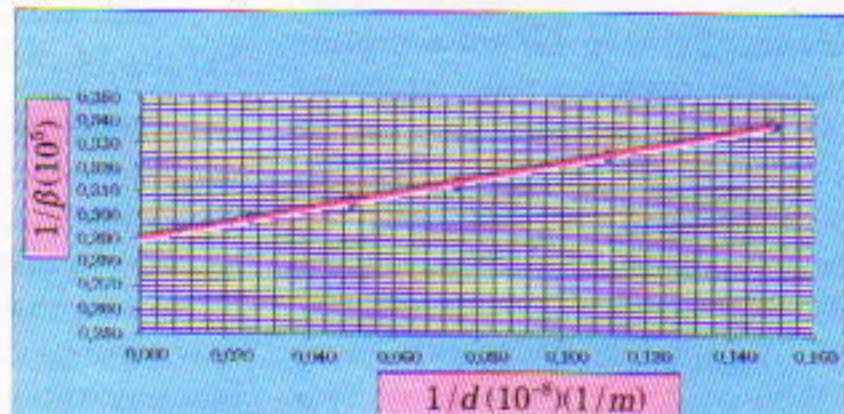
Με βάση τα πειραματικά δεδομένα, ψάχνουμε για μια αποτελεσματική γραφική λύση. Κάνοντας πράξεις στην (6) βρίσκουμε:

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{d}{(R+d)R} \right], \quad \text{ή } \frac{1}{\beta} = \left( \frac{Rc^2}{GM} \right) \cdot \left[ \frac{R}{d} + 1 \right]. \quad (7)$$

Θα σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση του  $1/\beta$  ως προς το  $1/d$ . Εύκολα προκύπτει ο εξής πίνακας

$d(10^6) \text{ m}$	$\beta(10^{-5})$	$1/d(10^{-6}) 1/\text{m}$	$1/\beta(10^5)$
38,90	3,352	0,026	0,298
19,98	3,279	0,050	0,305
13,32	3,195	0,075	0,313
8,99	3,077	0,111	0,325
6,67	2,955	0,150	0,338

Από αυτόν μπορούμε να σχεδιάσουμε την εξής γραφική παράσταση.



Η κλίση της ευθείας προκύπτει ότι είναι ίση με

$$\left( \frac{Rc^2}{GM} \right) R = aR = 3,2 \cdot 10^{12} \text{ m}. \quad (8)$$

Επίσης, η ευθεία τέμνει τον άξονα των  $1/\beta$  στο

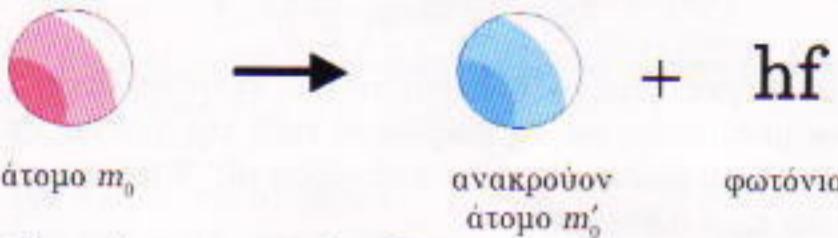
$$\left( \frac{Rc^2}{GM} \right) = a = 0,29105 \cdot 10^5, \quad (9)$$

ενώ αντίστοιχα η ευθεία μας τέμνει τον άξονα των  $1/d$  στο σημείο  $-1/R$ .

Οι ποσότητες  $M$  και  $R$  είναι δυνατόν να υπολογιστούν

από τις σχέσεις (8) και (9) και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης. Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα προκύπτει ότι  $R = 1,11 \cdot 10^8$  m και  $M = 5,2 \cdot 10^{30}$  kg,

(γ) (i)



Η ορμή του φωτονίου δίνεται από τη σχέση  $p = hf/c$ , και η ενέργεια του φωτονίου από την  $E = hf$ .

Η σχετικιστική σχέση μεταξύ της ορμής και της ενέργειας είναι  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ .

Από την ισοδυναμία μάζας-ενέργειας προκύπτει ότι η εσωτερική ενεργειακή μεταβολή του ατόμου ισοδυναμεί με την αλλαγή της ενέργειας της μάζας ηρεμίας, δηλαδή  $\Delta E = (m_0 - m'_0)c^2$ .

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου έχουμε για την ενέργεια πριν από την εκπομπή του φωτονίου ότι  $E = m_0 c^2$ , και για την ενέργεια μετά την εκπομπή  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0'^2 c^4} + hf$ . Εξισώνοντας αυτές τις δύο σχέσεις, λόγω της διατήρησης της ενέργειας, προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned} (m_0 c^2 - hf)^2 &= (hf)^2 + m_0'^2 c^4, \text{ ή} \\ (m_0 c^2)^2 - 2hfm_0 c^2 &= m_0'^2 c^4, \text{ ή} \\ hf(2m_0 c^2) &= (m_0^2 - m_0'^2)c^4 \\ &= (m_0 - m'_0)c^2(m_0 + m'_0)c^2 \\ &= \Delta E[2m_0 - (m_0 - m'_0)]c^2 \\ &= \Delta E[2m_0 c^2 - \Delta E], \text{ δηλαδή} \\ hf &= \Delta E \left[ 1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right]. \end{aligned}$$

(ii) Από το προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι για το εκπεμπόμενο φωτόνιο ισχύει η σχέση  $hf = \Delta E \left[ 1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right]$ , και επίσης  $\Delta E = hf_0$  για την περίπτωση ενέργειας μη μετάπτωσης. Έτοιμο προκύπτει ότι  $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta E}{2m_0 c^2}$ .

Για τη μετάπτωση του He<sup>+</sup> ( $n = 2 \rightarrow 1$ ) προκύπτει από τη θεωρία του Bohr ότι  $\Delta E = 40,8$  eV. Επίσης έχουμε ότι  $m_0 c^2 = 3,752 \cdot 10^{-14}$  eV. Τότε η μετατόπιση της συχνότητας ισούται με  $\frac{\Delta f}{f_0} \equiv 5,44 \cdot 10^{-9}$ . Αυτή η μεταβολή είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη μετατόπιση προς το ερυθρό λόγω της βαρύτητας, η οποία είναι της τάξης του  $10^{-5}$ , και μπορεί να αγνοηθεί σε παρόμοια πειράματα.

## Πρόβλημα 2

(α) Ο νόμος του Snell μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta_0} = \frac{c}{c_0}. \quad (1)$$

Θεωρούμε μια μικρή διαδρομή της ακτίνας  $ds$  και τη θεωρούμε τοπικά ως τόξο κύκλου ακτίνας  $R$ . Σημειώστε ότι το  $R$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ του  $-\infty$  και του  $\infty$ . Ας θεωρήσουμε τη συνιστώσα της ακτίνας η οποία αρχικά κατευθύνεται από το  $S$  προς τα πάνω.

Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\sin\theta \cdot d\theta = \frac{\eta\mu\theta_0}{c_0} dc.$$

Για την κατευθυνόμενη προς τα πάνω ακτίνα, έχουμε  $c = c_0 + bz$ , έτσι  $dc = bdz$  και επίσης

$$\frac{\eta\mu\theta_0}{c_0} bdz = \sin\theta d\theta, \text{ οπότε } dz = \frac{c_0}{\sin\theta_0 b} \frac{1}{d\theta} \sin\theta d\theta.$$

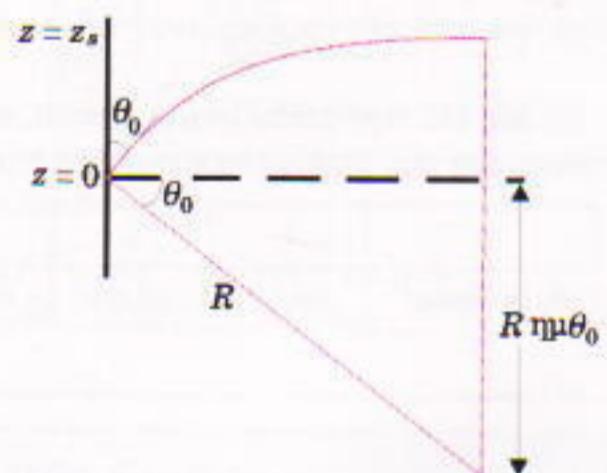
Επίοτες μπορούμε να γράψουμε (αν θεωρήσουμε το  $ds$  ευθύγραμμο τμήμα)  $dz = ds \tan\theta$ .

Έτοιμο,  $ds = \frac{c_0}{\eta\mu\theta_0} \frac{1}{b} d\theta.$

Αρα,  $\frac{ds}{d\theta} = R = \frac{c_0}{\eta\mu\theta_0} \frac{1}{b}.$

Αυτό το αποτέλεσμα έχει εφαρμογή αυστηρά για μικρού τμήματος τόξα  $ds$ . Σημειώστε όμως ότι από την εξισώση (1) προκύπτει πως ισχύει για όλα τα  $\theta$ , δηλαδή όλα τα σημεία κατά μήκος της ανοικτής τροχιάς, τα οποία σχηματίζουν τόξο κύκλου ακτίνας  $R$  μέχρις ότου η ακτίνα εισέλθει στην περιοχή  $z < 0$ .

(β)



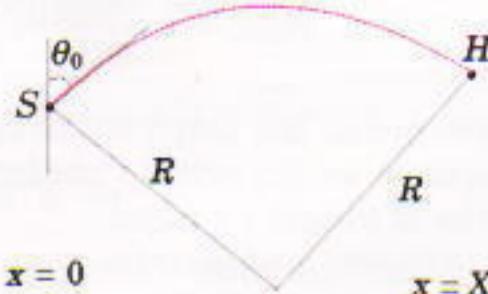
Εδώ έχουμε

$$z_s = R - R \eta\mu\theta_0 = R(1 - \eta\mu\theta_0) = \frac{c_0}{b\eta\mu\theta_0}(1 - \eta\mu\theta_0).$$

Από αυτό προκύπτει

$$\theta_0 = \eta\mu^{-1} \left[ \frac{c_0}{bz_s + c_0} \right].$$

(γ)



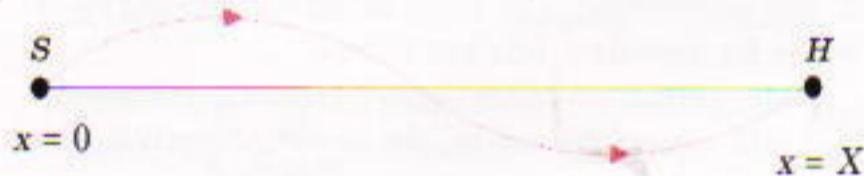
Έχουμε:

$$X = 2R \sin \theta_0 = \frac{2c_0}{b \eta \mu \theta_0} \sin \theta_0 = \frac{2c_0}{b} \operatorname{σφ} \theta_0.$$

Εποι,

$$\operatorname{σφ} \theta_0 = \frac{bX}{2c_0}.$$

Ποιες άλλες πιθανότητες υπάρχουν να φτάσει μία ακτίνα στο  $H$ ? Εδώ εικονίζεται μία:



Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$\frac{X}{2} = 2R \sin \theta_0 = \frac{2c_0}{b} \operatorname{σφ} \theta_0,$$

δηλαδή

$$\operatorname{σφ} \theta_0 = \frac{bX}{4c_0}.$$

Γενικά, για τιμές της  $\theta_0 < \pi/2$ , οι ακτίνες που εκπέμπονται από το  $S$  θα φτάσουν στο  $H$  για γωνίες εκκίνησης που δίνονται από τη σχέση

$$\theta_0 = \operatorname{σφ}^{-1} \left[ \frac{bX}{2nc_0} \right] = \operatorname{εφ}^{-1} \left[ \frac{2nc_0}{bX} \right],$$

όπου  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 

Παρατηρήστε πως όταν  $n = \infty$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ , όπως αναμένεται για την αξονική ακτίνα.

(δ) Με τις τιμές που αναφέρονται, οι τέσσερις μικρότερες τιμές της γωνίας εκκίνησης είναι:

$n$	1	2	3	4
$\theta_0$ (μοιρες)	86,19	88,09	88,73	89,04

(ε)

Ψάχνουμε:  $\int_1^3 dt = \int_1^3 \frac{ds}{c}.$ Πρώτα, δοκιμάζουμε:  $t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{c} = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{R d\theta}{c}.$ Χρησιμοποιώντας  $R = \frac{c}{b \eta \mu \theta}$ , παίρνουμε:  $t_{12} = \frac{1}{b} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\eta \mu \theta},$ έτοι ώτε:  $t_{12} = \frac{1}{b} \left[ \ln \operatorname{εφ} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_0}^{\pi/2} = -\frac{1}{b} \ln \operatorname{εφ} \left( \frac{\theta_0}{2} \right).$ Παρατηρώντας ότι  $t_{13} = 2t_{12}$ , έχουμε

$$t_{13} = -\frac{2}{b} \ln \operatorname{εφ} \left( \frac{\theta_0}{2} \right).$$

Για συγκεκριμένο  $b$ , η παραπάνω εξίσωση δίνει το χρόνο μετάβασης για τη μικρότερη τιμή της γωνίας εκκίνησης που βρίσκεται στην απάντηση (δ). Έτοι προκύπτει ότι  $t_{13} = 6,6546$  s.

Η αξονική ακτίνα θα έχει «ταξιδέψει» για διάστημα που δίνεται από τη σχέση  $t = X/c_0$ , και από τα δεδομένα θα έχουμε  $t_{13} = 6,6666$  s.

Η αξονική ακτίνα καθυστερεί περισσότερο απ' ότι δίνει το παράδειγμα για  $n = 1$ . Έτοι η  $n = 1$  ακτίνα θα φτάσει πρώτη.

### Πρόβλημα 3

(α) Η μάζα της επίπεδης ράβδου είναι ίση με τη μάζα του κυλίνδρου  $M$  η οποία είναι  $\pi a^2 \ell d$ . Έτοι, η συνολική μάζα του συστήματος είναι  $2M = 2\pi a^2 \ell d$ . Η μάζα του εκτοποιούμενου ύδατος είναι σίγουρα μικρότερη από  $\pi a^2 \ell \rho$  (όταν η σημαδούρα βρίσκεται στο όριο να βυθιστεί). Χρησιμοποιώντας την αρχή του Αρχιμήδη μπορούμε κατ' ελάχιστον να περιμένουμε ότι  $2\pi a^2 \ell d < \pi a^2 \ell \rho$  ή  $d < \rho/2$ .



Στην πραγματικότητα, με τη σχεδιασθείσα γωνία  $\varphi (< \pi)$  ο όγκος του εκτοποιούμενου ύδατος είναι

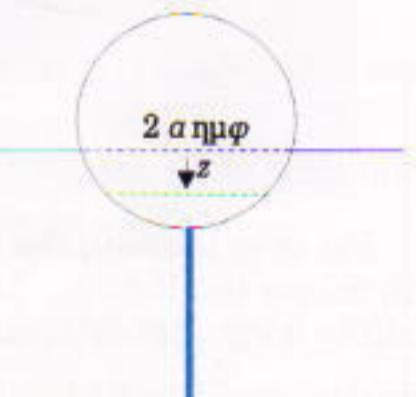
$$V = \ell a^2 \varphi - \ell a^2 \eta \mu \varphi \operatorname{συν} \varphi. \quad (1)$$

Λόγω της αρχής του Αρχιμήδη, η μάζα της σημαδούρας ισούται με τη μάζα του εκτοποιούμενου ύδατος. Έτοι,  $2\pi a^2 \ell d = \ell a^2 \rho [\varphi - \eta \mu \varphi \operatorname{συν} \varphi]$ , δηλαδή το  $\varphi$  προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\varphi - \operatorname{συν} \varphi \eta \mu \varphi = \frac{2d\pi}{\rho}. \quad (2)$$

(β) Εάν ο κύλινδρος πεστεί και μετατοπιστεί κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας κατά μια μικρή απόσταση  $z$ , η δύναμη που θα προσπαθήσει να επαναφέρει τη σημαδούρα είναι το βάρος του παραπάνω εκτοποιούμενου ύδατος, ή  $\rho 2ag \ell z \eta \mu \varphi$ , κατευθυνόμενη αντίθετα προς τη φορά  $z$ . Αυτό είναι χαρακτηριστικό απλής αρμονικής ταλάντωσης και έτοι η νευτώνεια εξίσωση κίνησης της σημαδούρας είναι (αν λάβουμε υπόψη και τον εππλέον παράγοντα  $1/3$ )

$$\frac{8}{3} M \ddot{z} = -2\rho g \ell z a \eta \mu \varphi, ή \ddot{z} + \frac{3\rho g \eta \mu \varphi}{4\pi da} z = 0. \quad (3)$$



Η παραπάνω εξίσωση είναι η συνήθης διαφορική εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή. Η λύση της είναι του τύπου  $z = \eta\mu(\omega_z t)$ , με γωνιακή συχνότητα

$$\omega_z = \sqrt{\frac{3\rho g \eta \mu \varphi}{4\pi da}} = \sqrt{\frac{3g \eta \mu \varphi}{2a(\varphi - \text{συν}\varphi \eta \mu \varphi)}}, \quad (4)$$

όπου καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση που βρήκαμε στο τέλος του μέρους (a).

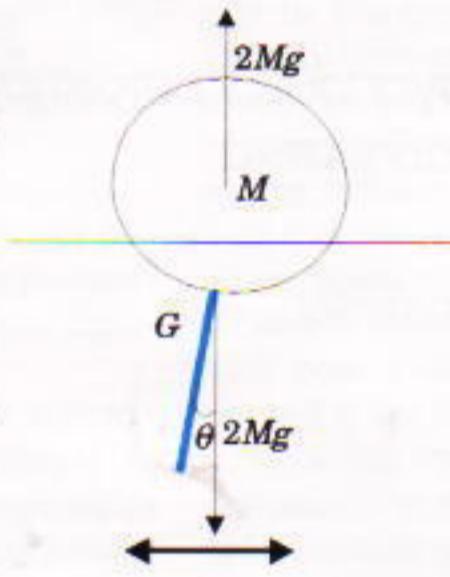
(γ) Χωρίς να αναφερόμαστε στη ροπή, εάν η σημαδούρα στρέφεται υπό κάποια γωνία  $\theta$  τότε το βάρος της να αντισταθμίζεται από την άνωση του νερού, ο όγκος του νερού που εκτοπίζεται είναι ο ίδιος με αυτόν στη θέση ισορροπίας. Έτσι, το κέντρο της άνωσης παραμένει στην ίδια απόσταση από το κέντρο του κυλίνδρου. Ως αποτέλεσμα μπορούμε να συναγάγουμε ότι το τόξο της άνωσης είναι ένα τόξο κύκλου που έχει το κέντρο του στο μέσο του κυλίνδρου. Με άλλα λόγια το μετάκεντρο  $M$  της οτροφικής κίνησης είναι ακριβώς στο κέντρο του κυλίνδρου.

Πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι το κέντρο μάζας  $G$  της σημαδούρας είναι στο σημείο όπου η ράβδος «αγγίζει» τον κύλινδρο, εφόσον οι μάζες του κυλίνδρου και της ράβδου είναι ίσες. Φυσικά στον κύλινδρο θα ασκηθεί ροπή όταν η ράβδος μετατοπιστεί από την κατακόρυφη θέση. Για να βρούμε την περίοδο της κίνησης, πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τη ροπή αδράνειας του στερεού κυλίνδρου γύρω από κεντρικό άξονα. Έτσι, εάν  $M$  η μάζα του κυλίνδρου:

$$I_0 = \frac{Ma^2}{2} \quad (\text{αφού } \int_0^a r^2 dm = \int_0^a r^2 \frac{2Mr}{a^2} dr).$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το μέσο της:

$$I_{\text{ράβδου}} = \int_{-a}^a \left( \frac{Mdx}{2a} \right) \cdot x^2 = \left[ \frac{Mx^3}{6a} \right]_a^a = \frac{Ma^2}{3}.$$



Τελικά χρησιμοποιούμε το θεώρημα Steiner για να βρούμε τη ροπή αδράνειας της σημαδούρας γύρω από το μετάκεντρο  $M$ :

$$I_M = \frac{Ma^2}{2} + \left[ \frac{Ma^2}{3} + M(2a)^2 \right] = \frac{29Ma^2}{6}. \quad (5)$$

Όταν η σημαδούρα ταλαντώνεται υπό γωνία  $\theta$  γύρω από την ισορροπία, η ροπή επαναφοράς είναι  $2Mga$  ημθ  $\equiv 2Mga\theta$  για μικρές γωνίες, η οποία αναπαριστά απλή αρμονική κίνηση. Έτσι, η νευτώνεια εξίσωση γι' αυτή την κίνηση είναι:

$$I_M \ddot{\theta} \equiv -2Mga\theta, \text{ ή } \ddot{\theta} + \frac{12g}{29a} \theta = 0. \quad (6)$$

Η λύση είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση,  $\theta \propto \eta\mu(\omega_\theta t)$ , με γωνιακή συχνότητα

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{12g}{29a}}. \quad (7)$$

(δ) Οι μετρήσεις του οργάνου μέτρησης της επιτάχυνσης δίνουν  $T_\theta/T_z \equiv 1,5$  ή  $(\omega_z/\omega_\theta)^2 \equiv 9/4 \equiv 2,25$ . Έτσι, από τις (4) και (7) προκύπτει

$$2,25 = \frac{\frac{3g \eta \mu \varphi}{2a(\varphi - \text{συν}\varphi \eta \mu \varphi)}}{\frac{12g}{29a}},$$

$$\varphi - \eta \mu \varphi \text{ συν}\varphi \equiv 1,61 \text{ ημφ.}$$

Εφόσον το 1,61 δεν απέχει πολύ από το 1,57, έχουμε δείξει ότι μια φυσικά αποδεκτή λύση είναι η  $\varphi \equiv \pi/2$ . Θέτοντας  $\varphi = \pi/2$  από δω και πέρα, για να απλοποιήσουμε την άλγεβρα, έχουμε  $\omega_z^2 = 3g/\pi a$  και  $4d/\rho = 1$  σε μια καλή προσέγγιση. Εφόσον η περίοδος της κατακόρυφης ταλάντωσης είναι 1 s,

$$1 = \left( \frac{2\pi}{\omega_z} \right)^2 = \frac{4\pi^3 a}{3g},$$

οπότε βρίσκεται η ακτίνα  $a = 9,8/1,33 \pi^3 = 0,237$  m.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα της σημαδούρας (σε μονάδες S.I.):

$$2M = 2\pi a^2 \ell d = 2\pi a^2 \cdot a \cdot \rho/4 = \pi a^3 \rho/2 \\ = \pi \cdot 500 \cdot (0,237)^3 \equiv 20,9 \text{ kg.}$$

**QUANTUM**  
**ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΚΟ**  
**ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ**  
**ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ**  
**ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ**  
**ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

## Ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα.

Μπορείτε να πληρώσετε και με κάρτα Diners ή Visa. Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη· η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

Περιοδικό Quantum, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα.

Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

# Νικηφόρες στρατηγικές

Ένας οδηγός για όσους αγαπούν τα στοιχήματα  
αλλά και τα μαθηματικά

Vladimir Dubrovsky

**Σ**ΤΟ ΚΑΛΕΙΔΟΣΚΟΠΙΟ ΤΟΥ ΠΡΟ-  
ηγούμενου τεύχους του *Quantum* περιγράψαμε πέντε μαθη-  
ματικά παιχνίδια. Τέτοιου εί-  
δους παιχνίδια μπορούμε απλώς να  
τα παιξουμε όπως και κάθε άλλο παι-  
χνίδι, αλλά συχνά έχει μεγαλύτερο  
ενδιαφέρον η μελέτη τους με σκοπό  
να ανακαλύψουμε μια νικηφόρο  
στρατηγική για τον έναν από τους  
παίκτες. Άν και συνήθως τα βρίσκου-  
με σε βιβλία ψυχαγωγικών μαθημα-  
τικών, η ανάλυση πολλών από αυτά  
είναι αρκετά δύσκολη και εμφανί-  
ζονται διαρκώς σε μαθηματικούς  
διαγωνισμούς. Πολλά έγιναν αντι-  
κείμενο σοβαρής έρευνας ενώ άλλα  
είναι ακόμη άλιτα. Παρά την ποικι-  
λιά των μαθηματικών παιχνιδιών, οι  
γενικές μέθοδοι προσέγγισής τους  
είναι λίγες. Θα χρησιμοποιήσουμε τα  
πέντε παιχνίδια του Καλειδοσκόπου  
για να επιδείξουμε μερικές από αυ-  
τές τις προοεγγισίες.

Όλα τα παιχνίδια παιζονται από  
δύο παίκτες οι οποίοι κάνουν εναλ-  
λάξ τις κινήσεις που επιτρέπουν οι  
κανόνες, μεταβάλλοντας έτσι την  
τρέχουσα κατάσταση (ή θέση) ενός  
συγκεκριμένου, ας πούμε, «αντικει-  
μένου». Κάθε παίκτης προσπαθεί να  
φέρει το αντικείμενο σε μια θέση που  
θεωρείται νικητήρια γι' αυτόν. Τα  
παιχνίδια μας έχουν πεπερασμένο  
πλήθος θέσεων, οπότε τελειώνουν  
αναγκαστικά έπειτα από πεπερασμέ-  
νο πλήθος κινήσεων,<sup>1</sup> και δεν επιτρέ-

πουν ισοπαλία. Με ένα τέτοιου ει-  
δους παιχνίδι έχουμε δύο μόνο λο-  
γικές δυνατότητες: είτε μπορεί να  
κερδίσει ο παίκτης που κάνει την  
πρώτη κίνηση (ο πρώτος παίκτης)  
ανεξάρτητα από το τι κάνει ο δεύτε-  
ρος παίκτης, είτε υπάρχει τρόπος να  
επιβάλει τη νίκη ο δεύτερος παίκτης.  
Το πρόβλημα επομένως είναι να κα-  
θορίσουμε ποιος κερδίζει και ποια εί-  
ναι η νικηφόρος στρατηγική.

**1ο παιχνίδι.**<sup>2</sup> Ο πρώτος παίκτης  
βάζει ένα άσπρο πόνι σε ένα τετρά-  
γωνο της σκακιέρας και ο δεύτερος  
βάζει ένα μαύρο πόνι σε οποιοδήπο-  
τε άλλο τετράγωνο. Στη συνέχεια  
μετακινούν τα πόνια τους οριζόντια  
ή κάθετα, κατά ένα τετράγωνο κάθε  
φορά. Για να κερδίσει ένας παίκτης  
πρέπει να βάλει το πόνι του πάνω  
στο πόνι του αντιπάλου του.

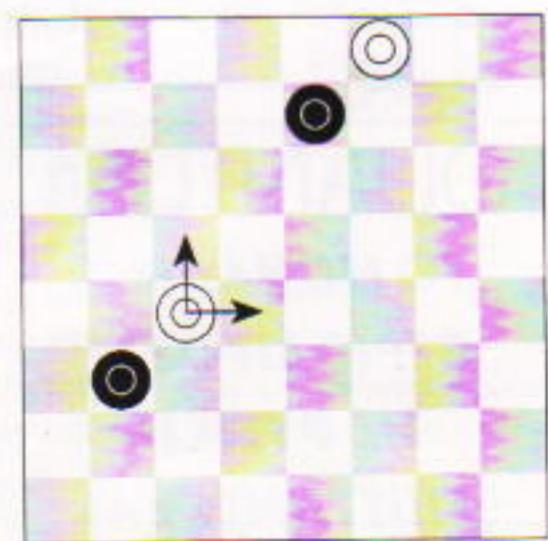
Αν οι παίκτες έχουν φιλήσουχη  
διάθεση, μπορούν να διασκεδάσουν  
μετακινώντας τα πόνια τους όση  
ώρα θέλουν. (Παρεμπιπόντως, αυτό  
είναι αδύνατο στα υπόλοιπα τέοσε-  
ρα παιχνίδια.) Διαφορετικά, κερδίζει  
πάντοτε ο δεύτερος παίκτης. Η στρα-  
τηγική είναι εξαιρετικά απλή: αρχι-  
κά, ο δεύτερος παίκτης τοποθετεί το  
μαύρο πόνι σε οποιοδήποτε από τα  
διαγώνια γειτονικά τετράγωνα του

1. Για το πρώτο από τα παιχνίδια που περι-  
γράφουμε, αυτό ισχύει με μια συγκεκριμένη  
προϋπόθεση.

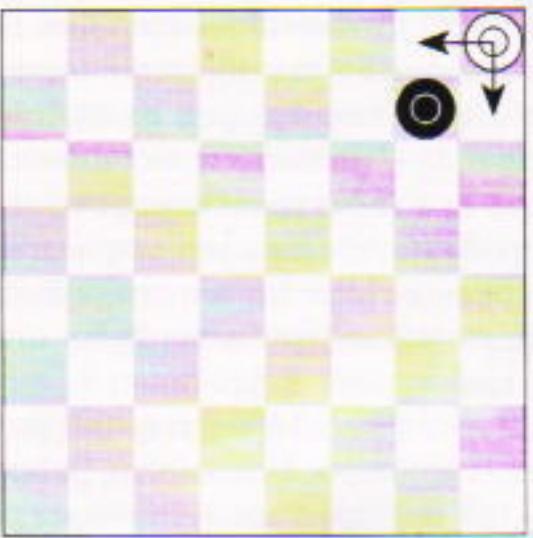
2. Η οειδά των παιχνιδιών εδώ είναι δια-  
φορετική από ό,τι οι Καλειδοσκόπο.

αρχικού τετραγώνου του πρώτου  
παίκτη (στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται  
δύο από τις δυνατές αρχικές θέσεις). Έπειτα, ο δεύτερος παίκτης επανα-  
λαμβάνει απλώς τις κινήσεις του  
πρώτου (μετακινεί το πόνι του προς  
την ίδια κατέύθυνση) έως ότου ο  
πρώτος παίκτης αναγκαστεί να φέ-  
ρει το άσπρο πόνι σε ένα τετράγωνο  
που βρίσκεται δίπλα στο τετράγωνο  
του μαύρου πονιού, οπότε —κατα-  
στροφή— το μαύρο πόνι πηδά πάνω  
στο άσπρο.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή η  
στρατηγική εξασφαλίζει πάντοτε τη  
νίκη. Αν το μαύρο πόνι τοποθετήθη-  
κε αρχικά, ας πούμε, «νοτιοδυτικά»  
του άσπρου, οι σχετικές τους θέσεις  
θα είναι οι ίδιες έπειτα από κάθε  
ανταλλαγή κινήσεων. Ετσι, ο παί-  
κτης 1 για να αποφύγει τη γρήγορη  
ήτια πρέπει να κινηθεί «βόρεια» ή



Σχήμα 1



Σχήμα 2

«ανατολικά», πράγμα που θα τον γιγιδεύσει αναπόφευκτα στη βορειοανατολική γωνία της σκακιέρας (Σχήμα 2).

Η ιδέα της επανάληψης των κινήσεων του αντιπάλου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ιδιόμορφο είδος συμμετρικής στρατηγικής. Αυτές οι στρατηγικές είναι χρήσιμες σε αρκετά παιχνίδια. Ιδού ένα κλασικό παράδειγμα τέτοιου παιχνιδιού.

**Ασκηση 1.** Δύο παίκτες τοποθετούν εναλλάξ κέρματα, όλα του ίδιου μεγέθους, σε ένα ορθογώνιο τραπέζι έως ότου δεν υπάρχει χώρος για άλλο κέρμα. Ο παίκτης που παίζει τελευταίος κερδίζει. Ποιος από τους παίκτες μπορεί να νικήσει σίγουρα;

**2ο παιχνίδι.** Αρχικά υπάρχουν δύο σωροί καραμέλες, από 9 καραμέλες ο καθένας. Δύο παίκτες, εναλλάξ, μετακινούν μία καραμέλα από τον έναν σωρό στον άλλο και τρώνε δύο καραμέλες από οποιονδήποτε σωρό. Χάνει όποιος δεν μπορεί να κάνει κίνηση.

Και αυτό το παιχνίδι αναλύεται εύκολα. Πρώτον, παρατηρούμε ότι κάθε κίνηση μειώνει το πλήθος  $N$  των καραμελών στους δύο σωρούς κατά δύο, επομένως το  $N$  είναι πάντοτε άρτιος. Τότε, είναι φανερό ότι όσο  $N \geq 4$  μπορεί πάντοτε να γίνει κίνηση. Στην περίπτωση που  $N = 2$ , υπάρχουν δύο δυνατότητες: (1) και οι δύο σωροί αποτελούνται από μία καραμέλα, (2) ο ένας σωρός έχει δύο καραμέλες, ο άλλος είναι άδειος. Επόμενη κίνηση μπορεί να γίνει μόνο στην περίπτωση (1), και αυτό θα είναι το τέλος του παιχνιδιού.

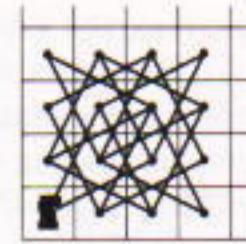
Ο αριθμός  $N$  θα γίνει αναγκαστικά ίσος με 2 έπειτα από οκτώ κινή-

σεις. Όμως, με κάθε κίνηση αλλάζει η ισοτιμία του αριθμού (δηλαδή από άρτιος γίνεται περιττός και αντίστροφα) των καραμελών σε κάθε σωρό (διότι μεταφέρεται μία καραμέλα στον άλλο σωρό). Έτσι, έπειτα από οκτώ κινήσεις οι ισοτιμίες είναι ίδιες με τις αρχικές —δηλαδή, και οι δύο αυτοί αριθμοί είναι περιττοί. Αυτό σημαίνει ότι αν  $N = 2$ , μόνο η πρώτη από τις δύο περιπτώσεις είναι δυνατή, και τότε επιτρέπεται μόνο μία ακόμη κίνηση —η ένατη. Επομένως, το παιχνίδι είναι, τρόπος του λέγειν, απάτη: διαρκεί πάντοτε εννέα κινήσεις και την τελευταία κίνηση την κάνει πάντα ο πρώτος παίκτης. Επομένως, ο πρώτος παίκτης κερδίζει κάθε φορά, ανεξάρτητα από το πώς θα παιχτεί η παρτίδα!

Προσέξτε την ιδέα της αναλλοίωτης ισοτιμίας που χρησιμοποιήσαμε. Παρεμπιπόντως, η νικηφόρος στρατηγική του προηγούμενου παιχνιδιού βασίζεται έμμεσα σε μια όμοια ιδέα: επλέγοντας στην αρχή ένα τετράγωνο ίδιου χρώματος με το τετράγωνο του πρώτου παίκτη, ο δεύτερος παίκτης εξασφαλίζει ότι τα δύο πόνια θα βρίσκονται σε τετράγωνα ίδιου χρώματος έπειτα από κάθε ανταλλαγή κινήσεων. Με αυτόν τον τρόπο είναι αδύνατο να κερδίσει ο πρώτος παίκτης, έστω και αν ο δεύτερος κάνει τυχαίες κινήσεις. Στο παιχνίδι με τις καραμέλες μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς  $a$  και  $b$  που μας δίνουν το πλήθος των καραμελών σε κάθε σωρό ως το τετράγωνο με συντεταγμένες  $(a, b)$  στο οποίο τέμνονται η  $a$  στήλη και η  $b$  γραμμή μιας μεγάλης σκακιέρας. Τότε, το χρώμα αυτού του τετραγώνου δεν αλλάζει ποτέ κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, και επομένως δεν μπορούμε να φτάσουμε στα τετράγωνα  $(2, 0)$  και  $(0, 2)$  ξεκινώντας από το τετράγωνο  $(9, 9)$  —διότι το τελευταίο έχει διαφορετικό χρώμα από τα δύο πρώτα.

Το επόμενο παιχνίδι είναι επίσης, κατά μια έννοια, «απατηλό».

**3ο παιχνίδι.** Το πόνι ενός ίππου τοποθετείται σε ένα γωνιακό τετράγωνο της σκακιέρας. Δύο παίκτες σημειώνουν εναλλάξ τετράγωνα στη σκακιέρα έτοις ώστε ο ίππος —κινούμενος σύμφωνα με τους συνηθισμέ-



Σχήμα 3

νους κανόνες στο σκάκι — να φτάνει σε οποιοδήποτε τετράγωνο δεν έχει σημάδι, χωρίς να συναντά κατά τη διαδρομή του σημειωμένα τετράγωνα. Ο παίκτης που δεν μπορεί να σημειώσει τέτοιο τετράγωνο χάνει.

Αυτό είναι ένα παράδειγμα παιχνιδιού που μπορεί να αναλυθεί με τη χρήση γραφημάτων. Ενώνουμε με μια ευθεία τα κέντρα κάθε ζεύγους τετραγώνων που απέχουν μεταξύ τους κατά μία κίνηση του ίππου. Έτσι δημιουργίζεται ένα σύνολο 64 σημείων (τα κέντρα), μερικά από τα οποία συνδέονται με ευθείες (ακμές). Τέτοια αντικείμενα ονομάζονται γραφήματα (ένα τρίγμα του γραφήματος μας παρουσιάζεται στο Σχήμα 3). Αρχικά, το γράφημά μας είναι συνεκτικό: μπορούμε να φτάσουμε σε οποιαδήποτε κορυφή του ξεκινώντας από τη γωνία του ίππου και ακολουθώντας τις ακμές —επομένως δύο οποιεδήποτε κορυφές συνδέονται με μια διαδρομή που αποτελείται από ακμές. Μια κίνηση του παιχνιδιού ισοδυναμεί με το οβήσιμο μιας κορυφής και των ακμών που ξεκινούν από αυτήν. Η κορυφή πρέπει να επλέγει έτσι ώστε να διατηρείται η συνεκτικότητα του γραφήματος. Πότε είναι δυνατόν κάτι τέτοιο; Η απάντηση είναι πολύ σύντομη: πάντοτε!

Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα. Και ιδού μια απόδειξη:

Ορίζουμε ως απόσταση μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος το ελάχιστο πλήθος ακμών μιας διαδρομής που τις συνδέει (αυτός ο αριθμός είναι καλά ορισμένος σε οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα). Θεωρούμε μια σταθερή κορυφή  $K$  (στην περίπτωση μας είναι φυσικό να επιλέξουμε την κορυφή που αντιστοιχεί στη θέση του ίππου) και βρίσκουμε την κορυφή  $A$  που απέχει περισσότερο απ' αυτήν (αν υπάρχουν πολλές, διαλέγουμε μία στην τύχη). Αυτή την κορυφή μπορούμε να τη σβήσουμε. Πραγμα-

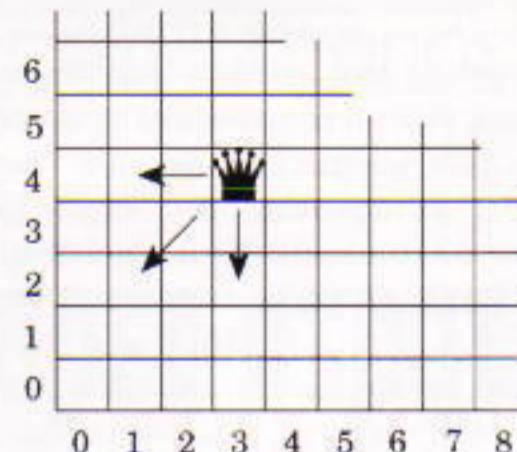
τικά, αν σβήνοντας την κορυφή  $A$  και τις ακμές που ξεκινούν από αυτήν απομονώνεται κάποια κορυφή  $V$  από την κορυφή  $K$ , τότε όλες οι διαδρομές που συνέδεαν, πριν σβήσουμε το  $A$ , την  $K$  με την  $V$  περιείχαν υποχρεωτικά το  $A$ . Αυτό όμως σημαίνει ότι το  $V$  απέχει περισσότερο από το  $K$  απ' ό,τι το  $A$ , γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με τον τρόπο επλογής του  $A$ .

Επομένως, και αυτό το παιχνίδι, όπως και το προηγούμενο, διαρκεί πάντοτε σταθερό αριθμό κινήσεων —συγκεκριμένα 63— και τελειώνει πάντοτε με νίκη του πρώτου παίκτη, ανεξάρτητα από τις κινήσεις που γίνονται —εφόσον είναι όλες σωστές. Πάντως, ως παιχνίδι μόνο, μπορεί να έχει κάποιο ενδιαφέρον: όταν ο χρόνος για την κίνηση είναι περιορισμένος, μπορεί να είναι δύσκολο να βρεθεί η σωστή κίνηση σε κάποιο στάδιο του παιχνιδιού.

Τα δύο τελευταία παιχνίδια είναι πραγματικά ενδιαφέροντα μαθηματικά παιχνίδια. Πίσω από το πρώτο κρύβεται αρκετή εξαιρετικά ενδιαφέρουσα θεωρία, την οποία απλώς θα θίξω. Και τα δύο είναι δυνατόν να αναλυθούν μέσω μιας άλλης ευρύτατα χρησιμοποιούμενης μεθόδου —της αντίστροφης ανάλυσης, που ξεκινά από το τέλος του παιχνιδιού.

**4ο πρόβλημα.** Δύο παίκτες παίρνουν, ο ένας μετά τον άλλο, βόλους από δύο σωρούς. Επιτρέπεται να πάρουν όσους βόλους θέλουν από τον έναν σωρό ή να πάρουν ίσο πλήθος βόλων και από τους δύο σωρούς.

Κερδίζει ο παίκτης που παίρνει τον τελευταίο βόλο. (Στο Καλειδοσκόπο το αρχικό πλήθος



Σχήμα 4

βόλων στους δύο σωρούς ήταν 13 και 10.)

Το παιχνίδι αυτό το περιέγραψε το 1907 ο ολλανδός μαθηματικός W. A. Wythoff και το όνομά του αναφέρεται συχνά όταν γίνεται η μελέτη του. Ο Wythoff όμως δεν γνώριζε ότι είναι ένα αρχαίο λαϊκό παιχνίδι της Κίνας, το *τσιανγκσίτζε* (μάζεμα βόλων). Το άρθρο του Wythoff είναι το πρώτο μιας μεγάλης σειράς εργασιών αφιερωμένων στη θεωρία του συγκεκριμένου παιχνιδιού, που αποδείχτηκε εξαιρετικά πλούσια.

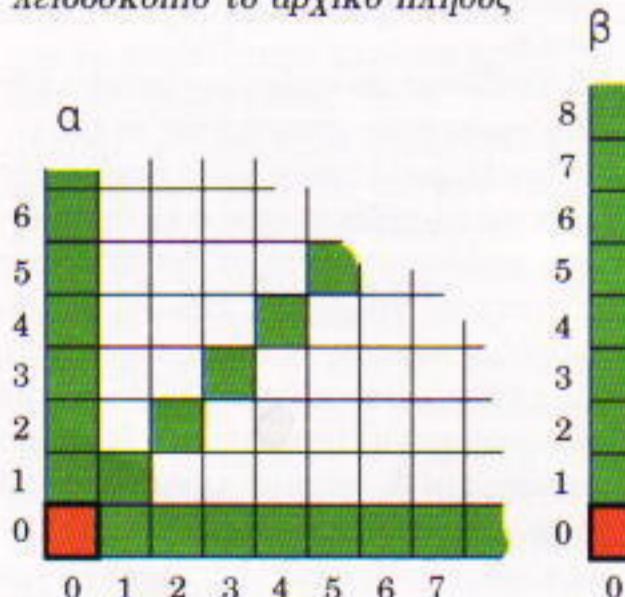
Κάθε κατάσταση σε αυτό το παιχνίδι περιγράφεται μέσω ενός ζεύγους μη αρνητικών ακεραίων  $(n, m)$  —το πλήθος των βόλων στον «πρώτο» και στον «δεύτερο» σωρό, αντίστοιχα. Φυσικά, από πρακτική άποψη, δεν υπάρχει καμιά διαφορά μεταξύ των καταστάσεων  $(n, m)$  και  $(m, n)$ , αλλά για τη γραφική αναπαράσταση που θα δώσουμε είναι χρήσιμο να τις ξεχωρίζουμε. Η αναπαράσταση αυτή είναι τελείως φυσική: κάθε ζεύ-

γος  $(n, m)$  συνδέεται ως συνήθως με ένα τετράγωνο του «θετικού τετραπτημορίου» μιας άπειρης σκακιέρας (Σχήμα 4). Φανταστείτε ότι τοποθετούμε ένα πιόνι βασιλίσσας στο τετράγωνο  $(n, m)$  που αντιστοιχεί στην τρέχουσα κατάσταση του παιχνιδιού. Αν αφαιρεθούν ορισμένοι βόλοι από τον πρώτο σωρό, η βασιλίσσα θα μετακινηθεί ίδιο πλήθος τετραγώνων προς τ' αριστερά. Η αφαίρεση βόλων από τον δεύτερο σωρό ισοδυναμεί με κίνηση της βασιλίσσας προς τα κάτω, ενώ η αφαίρεση ίδιου πλήθος βόλων από τους σωρούς οδηγεί τη βασιλίσσα να κινηθεί διαγώνια, προς τα αριστερά και κάτω, κατά ίδιο πλήθος τετραγώνων. Κερδίζει ο παίκτης που καταφέρνει να τοποθετήσει πρώτος τη βασιλίσσα στο γωνιακό τετράγωνο  $(0, 0)$ .

Αφού μια βασιλίσσα που κινείται σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες καταλήγει υποχρεωτικά στη γωνία, όλα τα τετράγωνα κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες: ασφαλή τετράγωνα, από τα οποία όταν ξεκινάει ο πρώτος παίκτης εξασφαλίζει τη νίκη, και επικίνδυνα τετράγωνα, τα οποία προσφέρουν τη νίκη στον δεύτερο.

Τώρα, αρχίζοντας από το τέλος —δηλαδή, το τελικό τετράγωνο  $(0, 0)$ — θα σαρώσουμε τη σκακιέρα χρωματίζοντας κόκκινες τις επικίνδυνες θέσεις και πράσινες τις ασφαλείς. Το τετράγωνο  $(0, 0)$  είναι φυσικά επικίνδυνο (στην πραγματικότητα, δεν είναι απλώς επικίνδυνο —είναι

Σχήμα 5



καταστροφικό: όταν το φτάνει ο αντίπαλός σας, χάνετε). Τότε, κάθε τετράγωνο που βρίσκεται οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια, προς τα δεξιά ή προς τα πάνω από το επικίνδυνο τετράγωνο, είναι ασφαλές, διότι ξεκινώντας από ένα τέτοιο τετράγωνο μπορείτε να βάλετε τον αντίπαλό σας σε επικίνδυνη θέση με μια κίνηση. Εφαρμόζοντας αυτόν τον κανόνα για το τετράγωνο  $(0, 0)$  καταλήγουμε στο χρωματισμό του Σχήματος 5α. Χρησιμοποιούμε τώρα έναν δεύτερο κανόνα: χρωματίζουμε κόκκινο ένα τετράγωνο όταν η γραμμή η στήλη και η διαγώνιος που διέρχονται από αυτό έχουν χρωματισμένο πράσινο όλο το τμήμα τους που βρίσκεται προς τα αριστερά και προς τα κάτω του τετραγώνου (κάθε κίνηση από τέτοια τετράγωνα παράγει μια νικηφόρο θέση για τον αντίπαλο). Έτοιμοι χρωματίζουμε κόκκινα τα τετράγωνα  $(2, 1)$  και  $(1, 2)$  και πράσινα όλα τα τετράγωνα από τα οποία φτάνουμε με μια κίνηση στα νέα επικίνδυνα τετράγωνα (βάσει του πρώτου κανόνα —βλ. Σχήμα 5β). Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο φτάνουμε, αργά ή γρήγορα, όσο μακριά θέλουμε. Στο Σχήμα 5γ βλέπουμε το χρωματισμό ενός ορθογωνίου  $13 \times 10$  που καλύπτει τη συγκεκριμένη αρχική μας κατάσταση  $(13, 10)$ . Στην πραγματικότητα, το χρώμα αυτού του τετραγώνου γίνεται φανερό στο τέταρτο βήμα της διαδικασίας, όταν χρωματίζουμε κόκκινο το τετράγωνο  $(7, 4) = (13 - 6, 10 - 6)$ . Έτοιμοι βλέπουμε ότι το  $(13, 10)$  είναι ένα πράσινο, ασφαλές τετράγωνο —δηλαδή, ο πρώτος παίκτης κερδίζει το παιχνίδι. Η στρατηγική είναι να κάνει κινήσεις που οδηγούν σε «κόκκινα τετράγωνα» —επικίνδυνες καταστάσεις. Βάσει της κατασκευής μας, αυτό είναι πάντα δυνατό. Για παράδειγμα, στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να κάνει την πρώτη κίνηση με τρεις διαφορετικούς τρόπους: αφαιρώντας 7 βόλους από το σωρό με τους 13 βόλους, 2 από τον άλλο, ή 6 βόλους και από τους δύο σωρούς.

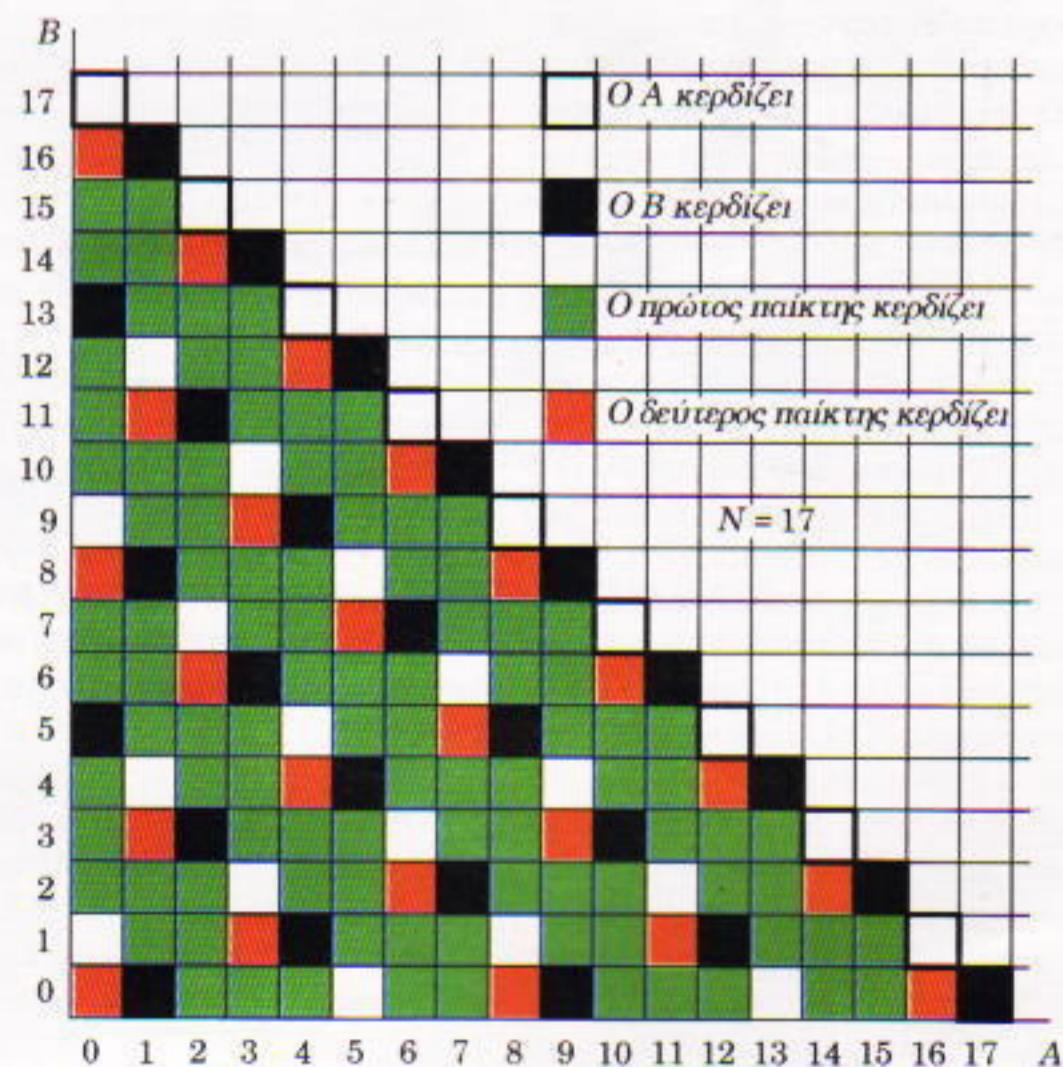
Το μαθηματικώς ενδιαφέρον στοιχείο αυτού του παιχνιδιού είναι η ακολουθία των «επικίνδυνων ζεύγων»  $(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), \dots$  (λόγω της συμμετρίας, αρκεί να

γράψουμε τα ζεύγη  $(n, m)$  με  $n \leq m$ ). Το  $k$ -οστό ζεύγος  $(a_k, b_k)$  αυτής της ακολουθίας δίνεται από την εξής απρόσμενη σχέση:  $a_k = \lfloor k\phi \rfloor$ ,  $b_k = a_k + k$ , όπου  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  είναι η περίφημη «χρυσή τομή». Μια άλλη περιγραφή αυτής της ακολουθίας μπορεί να γίνει με όρους του «συστήματος αριθμητικής Fibonacci», που παρουσιάζεται στην άσκηση 14 του άρθρου «Συστήματα αριθμητικής» του I. M. Yaglom στο προηγούμενο τεύχος του *Quantum*: οι αριθμοί  $a_n$  είναι όλοι οι αριθμοί που η αναπαράστασή τους στο σύστημα Fibonacci λήγει σε άρτιο πλήθος μηδενικών, ενώ τα  $b_n$  προκύπτουν από τα  $a_n$  αν προστεθεί ένα μηδενικό στο τέλος της αναπαράστασης Fibonacci του  $a_n$ . (Δείτε επίσης την άσκηση 15 στο ίδιο άρθρο, όπου οι αριθμοί  $a_n, b_n$  εξετάζονται από διαφορετική οπτική γωνία.) Μπορούμε να γράψουμε εύκολα όλα τα ζεύγη  $(a_n, b_n)$  χρησιμοποιώντας την εξής ιδιότητα: όταν το ζεύγος  $(a, b)$  είναι επικίνδυνο, τότε είναι επικίνδυνα τα ζεύγη  $(b - 1, a + b - 1)$  και  $(b + 1, a + b + 2)$ . Αφήνω ως (όχι εύκολη!) άσκηση την απόδειξη αυτών των αξιοσημείωτων ιδιοτήτων.

**5ο παιχνίδι.** Υπάρχει ένας σωρός

βόλων, από τον οποίο κάθε παίκτης μπορεί να πάρει έναν, δύο ή τρεις βόλους σε μία κίνηση. Κερδίζει ο παίκτης που καταλήγει με άρτιο πλήθος βόλων. Το αρχικό πλήθος των βόλων είναι  $N = 25$ .

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο και γι' αυτό το παιχνίδι σε ένα τετραγωνικό πλέγμα, και να το μελετήσουμε με «αντίστροφη ανάλυση». Πάντως, αντιθέτα από το παιχνίδι του Wythoff, εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη το πλήθος των βόλων που συλλέγει κάθε παίκτης. Έτσι, είναι βολικό να δώσουμε ονόματα στους δύο παίκτες —ας πούμε,  $A$  και  $B$ — και να συμβολίσουμε με  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα, το πλήθος των βόλων που έχουν συγκεντρώσει μέχρι μια δεδομένη χρονική στιγμή. Αυτοί οι αριθμοί θα είναι η (τρέχουσα) βαθμολογία του  $A$  και του  $B$ . Φυσικά, το πλήθος των βόλων που έχουν απομίνει στο σωρό σε δεδομένη χρονική στιγμή είναι  $s = N - (a + b)$ , όπου  $N$  είναι το συνολικό πλήθος των βόλων. Θα ονομάζουμε το  $s$  (τρέχον) απόθεμα. Κάθε τρέχουσα θέση περιγράφεται πλήρως από το αντίστοιχο ζεύγος ακεραιών  $(a, b)$  και θα αντιπροσωπεύεται από το τετράγωνο  $(a,$



Σχήμα 6

$b$ ) του πλέγματος (Σχήμα 6). Το παιχνίδι αρχίζει από το τετράγωνο  $(0, 0)$ , συνεχίζεται με κινήσεις ενός, δύο ή τριών τετραγώνων (ο  $A$  κινείται προς τα δεξιά, ο  $B$  προς τα πάνω), και τελειώνει σε οποιοδήποτε από τα καταληκτικά τετράγωνα  $(a, b)$  με  $a + b = N$ . Τα καταληκτικά τετράγωνα σχηματίζουν τη διαγώνιο «ευθεία» που συνδέει τα τετράγωνα  $(0, N)$  και  $(N, 0)$ .

Παρατηρήστε ότι πρέπει να προνήσουμε για τέσσερα αντί για δύο (όπως στην περίπτωση του παιχνιδιού του Wythoff) είδη καταστάσεων. Πραγματικά, μια θέση  $(a, b)$  όπου οι βαθμολογίες  $a$  και  $b$  έχουν διαφορετική ισοτιμία είναι άνιση για τους παίκτες, διότι ο ένας από αυτούς πρέπει να προσθέσει άρτιο πλήθος βόλων σε όσους έχει ήδη και ο άλλος περιττό. Μια τέτοια κατάσταση μπορεί να είναι ευνοϊκή για τον  $A$ , ας πούμε, ανεξάρτητα από το ποιος έχει σειρά να παίξει. Επομένως πρέπει να θεωρήσουμε συνολικά τέσσερις λογικές πιθανότητες; μια θέση μπορεί να είναι νικητήρια για τον πρώτο παίκτη (δηλαδή, αυτός που παίζει πρώτος, ο  $A$  ή ο  $B$ , εξασφαλίζει τη νίκη), για τον δεύτερο παίκτη, για τον παίκτη  $A$  (ανεξάρτητα από το ποιος παίζει πρώτος) ή για τον παίκτη  $B$ . Θα χρωματίσουμε τα τετράγωνα πράσινα, κόκκινα, άσπρα ή μαύρα, αντίστοιχα.

Έτσι αρχίζουμε να χρωματίζουμε από το τέλος —δηλαδή, την καταληκτική ευθεία. Τα καταληκτικά τετράγωνα  $(a, b)$  με άρτιο  $a$  ( $(0, N), (2, N - 2), \dots$ ) έχουν παραμένει άσπρα· τα υπόλοιπα είναι χρωματισμένα μαύρα. Ο σκοπός, τώρα, του  $A$  μπορούμε να πούμε ότι είναι «να φτάσει σε άσπρο καταληκτικό τετράγωνο», ενώ ο  $B$  στοχεύει σε μαύρο καταληκτικό τετράγωνο.

Είναι ενδιαφέρον ότι αυτός ο κανόνας για τον καθορισμό του νικητή μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που το  $N$  είναι άρτιο και ο αρχικός κανόνας δεν έχει νόημα. Με άλλα λόγια, όταν δύο παίκτες εφαρμόζουν τους κανόνες αυτού του παιχνιδιού σε έναν αρχικό σωρό με άρτιο πλήθος βόλων, τότε οι τελικές βαθμολογίες των δύο παικτών έχουν την ίδια ισοτιμία. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε διαφορετικά τον νικητή —λέγο-

ντας, για παράδειγμα, ότι ο  $A$  κερδίζει όταν και οι δύο παίκτες έχουν άρτιο πλήθος βόλων στο τέλος, ενώ ο  $B$  κερδίζει όταν έχουν περιττό. Στην πραγματικότητα, και αυτός ο κανόνας και ο αρχικός μπορεί να θεωρηθούν περιπτώσεις του ίδιου γενικού κανόνα, αν πούμε ότι ο νικητής του παιχνιδιού είναι ο  $A$  όταν η τελική του βαθμολογία είναι άρτια, και ο  $B$  όταν η τελική βαθμολογία του  $A$  είναι περιττή. Σε αυτή την περίπτωση διαπιστώνουμε εύκολα ότι η ανάλυσή μας ιοχύει και όταν το  $N$  είναι άρτιο.

Αφήνω για τους αναγνώστες τη διεύρυνση του χρωματισμού —πρώτα στην «προτελευταία» διαγώνιο, και κατόπιν χαμηλότερα. Το σχέδιο που προκύπτει για  $N = 17$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 6. Επαληθεύστε το, και επιβεβαιώστε ότι για  $N = 25$  το τετράγωνο  $(0, 0)$  είναι επίσης κόκκινο —δηλαδή, στο παιχνίδι μας ο πρώτος παίκτης χάνει. Η στρατηγική του  $A$  είναι: μετακίνηση πάντοτε σε κόκκινο ή άσπρο τετράγωνο. Ο παίκτης  $B$  πρέπει να πηγαίνει πάντοτε σε κόκκινα ή μαύρα.

Στην πραγματικότητα, ο χρωματισμός γίνεται γρήγορα μάλλον βαρετός —θα παρατηρήσετε ότι το σχέδιο επαναλαμβάνεται (αυτό είναι φανερό στο Σχήμα 6), πράγμα που κάνει τη δουλειά σας τελείως μηχανική. Ίως θελήσετε λοιπόν να συναγάγετε έναν γενικό κανόνα για τον κατευθείαν χρωματισμό οποιουδήποτε τετραγώνου, ώστε να μην υπάρχει ανάγκη να κατασκευάζετε όλη τη διαδρομή έως αυτό. Για παράδειγμα, δύο τετράγωνα που ανήκουν στην ίδια οριζόντια ή κάθετη γραμμή και απέχουν οκτώ τετράγωνα (τα  $(a, b)$  και  $(a + 8, b)$  ή τα  $(a, b)$  και  $(a, b + 8)$ ) ή δύο τετράγωνα μιας διαγωνίου παράλληλης με την καταληκτική που απέχουν δύο τετράγωνα (( $a, b$ ) και  $(a + 2, b - 2)$ ) έχουν πάντα το ίδιο χρώμα.

Όλες αυτές οι κανονικότητες στο χρωματισμό συγχωνεύονται στην επόμενη παρατήρηση.

Όταν το παιχνίδι αρχίζει με αρχικό απόθεμα  $N$ , όπου  $4k - 3 \leq N \leq 4k$ , τότε ο πρώτος παίκτης μπορεί να πετύχει βαθμολογία ίδιας ισοτιμίας με το  $k$ . Για να το καταφέρει αυτό, ο

πρώτος παίκτης πρέπει να κάνει παντοτε περιττές κινήσεις (να πάρνει έναν ή τρεις βόλους) και να αφήνει ένα σωρό με πλήθος βόλων που διαιρείται με το  $4$  ή είναι κατά ένα βόλο μεγαλύτερο.

Με άλλα λόγια, ο πρώτος παίκτης πρέπει να πάρει ένα βόλο όταν  $N = 4k - 3$  ή  $N = 4k - 2$  και τρεις όταν  $N = 4k - 1$  ή  $N = 4k$ . Έτσι μένει ένα απόθεμα από  $4(k - 1)$  ή  $4(k - 1) + 1$  βόλους και, επομένως, με οποιαδήποτε απάντηση του δεύτερου παίκτη το απόθεμα θα περιέχεται στο διάστημα  $[4(k - 1) - 3, 4(k - 1)]$ . Τώρα το παιχνίδι ξεκινά πάλι από την αρχή, στην ίδια κατάσταση όπως προηγουμένως, με  $N = s$ , και ο πρώτος παίκτης έχει πάλι την πρώτη κίνηση. Επειτα από μια ακόμη ανταλλαγή κινήσεων το  $s$  θα ανήκει στο επόμενο διάστημα αυτής της μορφής, δηλαδή το  $[4(k - 2) - 3, 4(k - 2)]$ , κ.ο.κ. Άρα θα έχουμε ακριβώς  $k$  ανταλλαγές κινήσεων κατά τις οποίες ο πρώτος παίκτης θα συγκεντρώσει βαθμολογία ίση με το άθροισμα  $k$  περιττών αριθμών —ένας αριθμός ίδιας ισοιμίας με το  $k$ .

Το αρχικό μας απόθεμα  $N = 25$  μπορεί να γραφεί ως  $4 \cdot 6 + 1$ , και έτσι μετά την πρώτη κίνηση το απόθεμα  $s$  θα ανήκει στο διάστημα  $4 \cdot 6 - 3 \leq s \leq 4 \cdot 6$ . Αυτό σημαίνει ότι ο δεύτερος παίκτης μπορεί να εφαρμόσει τη στρατηγική που περιγράψαμε προηγουμένως για να πετύχει άρτια βαθμολογία (αφού το  $6$  είναι άρτιος) και να κερδίσει. Το ίδιο ουμέρασμα 1-σχύει για κάθε  $N$  της μορφής  $8\ell + 1 = 4 \cdot (2\ell) + 1$ . Όταν  $N = 8\ell$ , νικητής είναι ο παίκτης  $A$  (ο κανόνας για τον ορισμό του νικητή στην περίπτωση που το  $N$  είναι άρτιο δόθηκε παραπάνω) και όταν  $N = 8\ell + 4$ , νικητής είναι ο  $B$ . Για όλες τις άλλες τιμές του  $N$ , νικητής είναι ο πρώτος παίκτης.

**Άσκηση 2.** Κατατάξτε τις τιμές του  $N$  σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτού του παιχνιδιού όταν οι παίκτες μπορούν να πάρουν έως και  $m$  βόλους, όπου  $1 \leq m \leq N$ . Υπόδειξη: εξετάστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις άρτιων και περιττών  $m$ . ◻