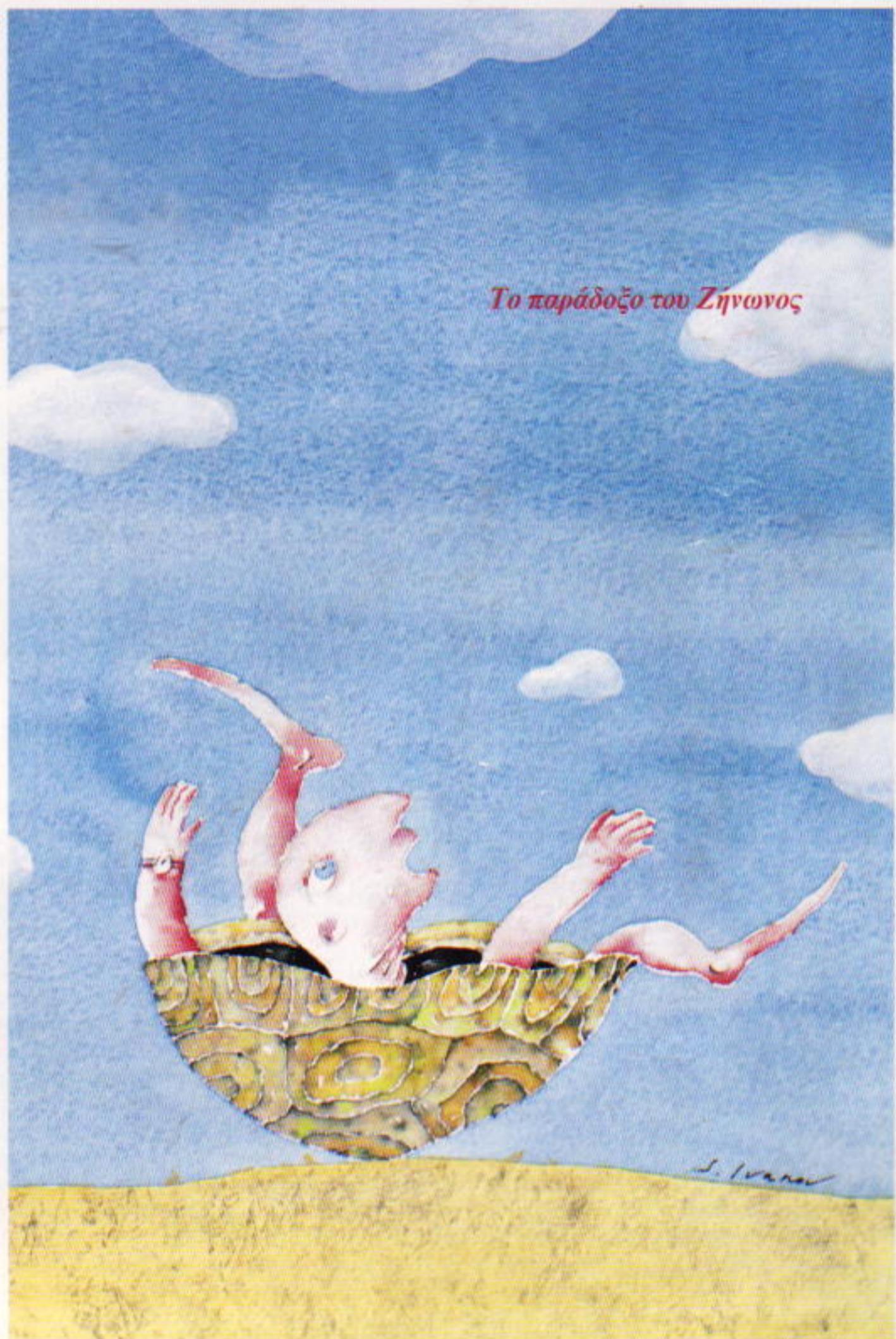


QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1995
ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 5
1.400 ΔΡΧ.



- Θεωρία χορδών: Συνέντευξη με τον Michael Green
- Η κινηματική του μπάσκετ
- Συστήματα αρίθμησης
- Κυκλώματα και συμμετρία
- Το θεώρημα του Ναπολέοντα
- Οι γίγαντες της αστρονομίας
- Μη-κανονικά κανονικά πολύγωνα
- Η φυσική του μπόουλιγκ



Δωρεά της κυρίας John W. Simpson © 1995, Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσινγκτον

Σαπουνόφουσκες (1733/1734), του Jean Simeon Chardin

Ο βιολόγος Edward O. Wilson, εξιστορώντας ένα γεγονός της παιδικής του ηλικίας που ήταν σημαντικό για τη διαμόρφωση της προσωπικότητάς του — όταν ήταν επτά ετών είδε για μια στιγμή ένα υποθαλάσσιο «τέρας» —, γράφει:

Όταν ένα παιδί πλησιάζει στην άκρη της άγνωστης θάλασσας, το μυαλό του είναι προετοιμασμένο για το θαύμα. Μοιάζει με έναν πρωτόγονο ενήλικο που έζησε πριν από πολύ καιρό, έναν πρώιμο Homo που γεμάτος περιέργεια φτάνει στην όχθη της λίμνης Μαλάβι, λόγου χάρη, ή στον πορθμό της Μοζαμβίκης. Το παιδί είναι έτοιμο να εξερευνήσει και να μάθει, δεν μπορεί όμως να πει πολλά για να περιγράψει τα συναισθήματα που το εμπνέουν. Έχει μπροστά του μια γοητευτική εικόνα η οποία θα λειτουργεί στη συνέχεια της ζωής του ως θέλγητρο και θα μεταδίδει μια ισχυρή ενέργεια κατευθύνοντας την ανάπτυξη της εμπειρίας και της γνώσης.

Στη συνέχεια ο Wilson παραθέτει ένα απόσπασμα από το βιβλίο *The Sense of Wonder* (Η αισθηση του θαύματος) της Rachel Carson: «Αν τα γεγονότα είναι οι οπόροι που αργότερα θα παραγάγουν τη γνώση και τη οοφία, τότε τα συναισθήματα και οι εντυπώσεις των αισθήσεων είναι το γόνιμο έδαφος στο οποίο πρέπει να αναπτυχθούν αυτοί οι σπόροι». Ένας φίλος του Jean Simeon Chardin έγραψε ότι

κάποτε ένας ζωγράφος έκανε μια εντυπωσιακή επίδειξη της μεθόδου που χρησιμοποιούσε για να καθαρίζει και να τελειοποιεί τα χρώματά του. Ο Chardin, δυσφορώντας με όλη αυτή την επιπόλαιη φλυαρία, διέκοψε το ζωγράφο λέγοντάς του: «Και ποιος οας είπε ότι ο καλλιτέχνης ζωγραφίζει με χρώματα;» Ο ζωγράφος τότε τον ρώτησε έκπληκτος: «Μα, με τί άλλο;» «Ο καλλιτέχνης χρησιμοποιεί χρώματα», απάντησε ο Chardin, «αλλά ζωγραφίζει με συναισθήματα».

Μπορεί να χρησιμοποιούμε ηλεκτρονικά μικροσκόπια, επιταχυντιές οωματίδιων και υπερυπολογιστές, αλλά στην πραγματικότητα υπηρετούμε την επιστήμη με τα αισθήματα. Όπως τα παιδιά, παρακολουθούμε γοητευμένοι τις φυσαλίδες, και από αυτή την ευχάριστη κατάπληξη και αμηχανία μας αρχίζουν να διατυπώνονται τα ερωτήματα: Από πού προέρχονται τα χρώματα της ίριδας που κυματίζουν πάνω τους; Πόσο μεγάλη μπορεί να γίνει μια φυσαλίδα; Γιατί τελικά θα οπάσει κάποια στιγμή; Δεν μπορούμε παρά να αναρωτηθούμε πόσες επιστημονικές σταδιοδρομίες άρχισαν με τις σαπουνόφουσκες. Ο Alexander Mitrofanov παρακολουθούσε απορημένος τις φυσαλίδες που σχηματίζονται στις λακκούβες του βρόχινου νερού, και όταν μεγάλωσε, έγραψε ένα άρθρο γι' αυτές (θα το βρείτε στη σελίδα 4).

QUANTUM

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1995

ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 5



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Στο παράδοξο του Ζήνωνος, τα πράγματα είναι πολύ δύσκολα για τον Αχιλλέα, τον ανδρειότατο των Αχαιών: αν σε έναν αγώνα δρόμου ο ήρωας αφήσει μια χελώνα να ξεκινήσει πρώτη, δεν θα μπορέσει ποτέ να την ξεπεράσει. Γιατί; Διότι όποτε φτάνει στο σημείο όπου βρισκόταν η χελώνα, εκείνη στο μεταξύ θα έχει προωθηθεί. Ο Αχιλλέας, κάνοντας μια τέτοια παραχώρηση στον βραδυκίνητο αντίπαλό του, γίνεται ο ίδιος χελώνα που, γυρισμένη ανάποδα, παρακολουθεί με θλίψη τα σύννεφα να παιρνούν και να χάνονται, ενώ μένει αβοήθητη στη θέση της.

Δεν υποψιάζεται ότι το πρόβλημα βρίσκεται μόνο μέσα στο μυαλό του, και ότι έχει στο χέρι του το κλειδί της σωτηρίας του. Αν όμως διαβάσει μαζί σας, στη σελίδα 30, την αναθεώρηση αυτού του παραδόξου, όλα θα πάνε ρολόι.

ΑΡΘΡΑ

- 4 Δυνάμεις μεταξύ μορίων
Φυσαλίδες σε λακκούβες
Alexander Mitrofanov
- 8 Περισσότερες μαθηματικές κορδέλες
Κόμβοι, δεσμοί, και τα πολυώνυμά τους
Alexey Sosinsky
- 30 Το παράδοξο του Ζήνωνος
Δείξε μου το για να το πιστέψω!
Gordon Moyer
- 48 Μη δεκαδικές αναπαραστάσεις
Συστήματα αρίθμησης
Isaak Yaglom

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κβάντων
- 16 Στο μαυροπίνακα I
Αλματα και καλαθίες
- 21 Σπαζοκεφαλίες
- 22 Συνέντευξη
Ο Michael Green μιλά στο ελληνικό Quantum
- 28 Πώς λύνεται;
- 33 Στο μαυροπίνακα II
Κυκλώματα και συμμετρία
- 36 Μαθηματικές αναζητήσεις
Και πάλι το θεώρημα του Ναπολέοντα
- 40 Καθειδοσκόπιο
Ψυχαγωγικά μαθηματικά
- 45 Μαθηματικά απρόοπτα
Ο δρ. Matrix και τα θαύματα του 8
- 54 Στα πεδία της φυσικής
Πρωτάθλημα μπόουλινγκ
- 57 Στο εργαστήριο
Θόλοι και υπόγεια ρεύματα
- 45 Αναδρομές
Οι γίγαντες
- 65 Στο μαυροπίνακα III
Μη-κανονικά κανονικά πολύγωνα
- 70 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις
- 78 Παιχνιδότοπος
Μια γιορτή έξυπνων ανθρώπων

Η πρόκληση της σκέψης

Πολυμαθίη νόον έχειν ου διδάσκει

ΌΛΟΙ ΘΕΩΡΟΥΝ ΑΥΤΟΝΟΗΤΟ ΟΤΙ ένας από τους σημαντικότερους στόχους του σχολείου είναι να μάθει τους μαθητές να σκέφτονται. Η διδασκαλία των μαθηματικών και των λοιπών θετικών επιστημών, πέρα από την ανάγκη μετάδοσης συγκεκριμένων γνώσεων, οφείλει να υπηρετεί κι αυτό το σκοπό, αφού μπορεί αποδειγμένα να βελτιώσει τις διανοητικές επιδόσεις των μαθητών.

«Οι φύσει λογιστικοί έχουν φυσική εξυπνάδα για όλα σχεδόν τα μαθήματα, ενώ ακόμη και τα δυσκίνητα μαλά, αν εκπαιδευτούν και γυμναστούν στην επιστήμη αυτή, έστω κι αν δεν ωφεληθούν τίποτε άλλο, πάντως θα παρουσιάσουν πρόοδο και θα αποκτήσουν μεγαλύτερη οξυδέρκεια από εκείνη που είχαν», παρατηρεί ο Πλάτων.¹

Έχουμε όμως άραγε όλοι το ίδιο κατά νου, όταν μιλάμε για «σκέψη»: Ασφαλώς υπάρχουν πολλές ιδιότητες της σκέψης που όλοι τις αναγνωρίζουν ως τέτοιες, υπάρχει όμως και αρκετή ούγχυση εννοιών, κυρίως σε πρακτικό επίπεδο. Μονολότι η διαδικασία μάθησης των γνώσεων δεν είναι ξένη προς την ικανότητα σκέψης, δεν ταυτίζεται με αυτήν. «Πολυμαθίη νόον έχειν ου διδάσκει», επομένων ο Ηράκλειτος,² δηλαδή: η πολυμάθεια δεν καλλιεργεί την εξυπνάδα.

Τι θα απαντούσαμε λοιπόν στο ερώτημα αν «το σχολείο διδάσκει τους μαθητές να σκέφτονται»; Αν κάποιος υπερασπίζομενος το σημερινό σχολείο απαριθμούσε τους γνωστικούς τομείς

που διδάσκονται, όχι μόνο δεν θα δικαιωνει την άποψή του, αλλά, αντίθετα, θα συνηγορούσε υπέρ του αντιθέτου. Ενώ κανένας σοβαρός άνθρωπος δεν πιστεύει ότι μπορούμε σ'ένα συγκεκριμένο χρόνο να ολοκληρώσουμε οποιοδήποτε πρόγραμμα σχεδιάζουμε, στον τομέα της εκπαίδευσης φαίνεται πως χάνουμε το μέτρο και πολεμάμε να στοιβάξουμε σ'ένα μπασούλο ολόκληρο νοικοκυριό. Δεν είναι εφικτό και ο στόχος της προαγωγής της σκέψης να υπηρετηθεί αποτελεσματικά και η ύλη ολόκληρη να καλυφθεί. Οποιος έχει διαβάσει στον οδηγό του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου τους στόχους της διδασκαλίας ενός μαθήματος και τις ενότητες που πρέπει να διδάχθουν σε 100, ας πούμε, διδακτικές ώρες, καταλαβαίνει πολύ καλά τι εννοώ.

Εξάλλου έχει αναγνωριστεί επίσημα η αδυναμία του σχολείου σ' αυτή την υποχρέωσή του· γι' αυτό είχε πολυουζητηθεί το θέμα της ανάπτυξης «κριτικής ικανότητας» και εισήχθη στη μέση εκπαίδευσης τρόπον τινά σαν πρώτες βοήθειες η έννοια των «ερωτήσεων κρίσεως», οι οποίες έπρεπε να περιέχονται σε κάποια αναλογία στους διαγωνισμούς του γυμνασίου, με αποτέλεσμα να γίνονται συσκέψεις επί συσκέψεων ώστε να ερμηνευτεί ο νόμος και να αποσαφηνιστεί τι είναι και οι δεν είναι ερώτηση κρίσεως, να αρχίσουν να κυκλοφορούν στην αγορά «λυσάρια» με απαντήσεις σε ερωτήσεις κρίσεως και άλλα τέτοια.

Το θέμα γίνεται επίκαιρο όταν κάποιο θέμα των Γενικών Εξετάσεων ξεφεύγει από τα συνήθη μέτρα και χρειάζεται για να απαντηθεί κάτι περισσότερο από καλή μνήμη των κανόνων και των τεχνικών. Στις φετινές Γενικές Εξετάσεις τέθηκαν πράγματι και θέματα που απαιτούσαν αυτενέρ-

γεια, αλλά η επιλογή τέτοιων θεμάτων στις Γενικές Εξετάσεις έχει τελείως αποσπασματικό χαρακτήρα.

Είναι ξεκάθαρο ότι η αναμενόμενη μορφή αξιολόγησης καθοδηγεί τις προσπάθειες του αξιολογούμενου. Αν οι εξετάσεις απαιτούν μνήμη και μόνο μνήμη, όπως για παράδειγμα γίνεται με την ιστορία, ο υποψήφιος θα πέσει με τα μούτρα στην «παπαγαλία»· αν εξετάζεται η ικανότητα στις πράξεις, πρέπει να προπονηθεί σ' αυτές, κ.ο.κ. Τέλος, αν οι κανόνες του παιχνιδιού αλλάζουν τυχαία από χρόνο σε χρόνο, όπως δυστυχώς γίνεται εν πολλοίστα μαθηματικά και τη φυσική, προσπαθεί να παιξει σε διάφορα ταμπλό με λίγο απ' όλα. Ο φροντιστής άγχεται να μάθει όσο γίνεται νωρίτερα τα μέλη της επιτροπής, μελετάει τις πολιτικές συγκυρίες για να μαντέψει το επίπεδο ή τη μορφή των θεμάτων, μήπως «πάσει» κανένα και γίνει «ήρωας», και ο απόφοιτος παιζει ΛΟΤΤΟ: «Σε ποιο μάθημα θα πέσουν δύσκολα εφέτος, το κραιάμε ή δεν το κρατάμε το 15 στη φυσική κ.λπ.».

Την ώρα που γράφεται τούτο το άρθρο αναμένεται να ανακοινωθούν οι σκέψεις της πολιτείας για ένα νέο σύστημα εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Από όσα έχουν ακουστεί μέχρι συγμής, η κατεύθυνση θα είναι το πλάτερα των εξεταζόμενων γνώσεων, που σύμφωνα με όσα ανέπτυξα δεν οδηγεί στη βελτίωση του επιπέδου σκέψης των υποψηφίων.

Αυτό που λείπει δεν είναι το πλάτος, αλλά το βάθος. «Αν ένας μαθητής δεν μπόρεσε να γνωρίσει μερικά ιδιαίτερα γεωμετρικά ζητήματα, δεν ζημιώθηκε πολύ, ίσως στην κατοπινή ζωή του να κάνει μικρή χρήση αυτών των ζητημάτων. Αν όμως δεν μπόρεσε να γνωρίσει τις γεωμετρικές αποδείξεις, τότε έχασε τα καλύτερα και απλούστε-

1. Πλάτωνος Πολιτεία, 526BC.

2. Το απόσπασμα το πήρα από το βιβλίο Ο Ηράκλειτος και η φιλοσοφία, του Κ. Αξελού, Εκδόσεις Εξάντας, αν και τη συνολική θέση την έχω δανειστεί από το βιβλίο Τεχνοκρατικά και ανθρώπινα ιδεώδη στο συσταλούμ, του Έβαλντ Ιλέγκοφ, Εκδόσεις Οδυσσέας.

ρα παραδείγματα αληθινής απόδειξης, κι ακόμη την καλύτερη ευκαιρία να αποκτήσει την έννοια του αυστηρού συλλογισμού. Χωρίς αυτή την έννοια στέρειται ένα αληθινό μέτρο για να κρίνει την κάθε είδους απόδειξη που προβάλλεται σ' αυτόν στη σύγχρονη ζωή», γράφει ο G. Polya.

Μέσα στη διδακτική αίθουσα, λοιπόν, επιβάλλεται να δώσουμε ζωή σ' εκείνα τα θέματα που προάγουν τη σκέψη, τη φαντασία, την κρίση, την ικανότητα ανακάλυψης, αντίθετα προς την πολυμέρεια. Επιβάλλεται να δώσουμε στους μαθητές μας προκλήσεις, να τους δώσουμε ευκαιρίες να δοκιμάσουν τη συγκίνηση της ανακάλυψης, του «αχά», να τους οδηγήσουμε στην αναμέτρηση με προβλήματα συναρπαστικά, ρεαλιστικά, επινοημένα από τους ίδιους, να τους εμπνεύσουμε την ερευνητική διάθεση, τη δημιουργική αμφιβολία, την τάση για γενικευση αλλά και για τον έλεγχό της, να τους οδηγήσουμε στη γοητεία της πραγματικής δημιουργίας.

Αεροβατώ; Γνωρίζω πόσο μακριά ακούγονται όλα αυτά σε όποιον έχει την εμπειρία μιας σύγχρονης τάξης, πιοτέρω όμως πως δεν είναι ακατόρθωτα. Πολλοί μαθητές μου, συνδρομητές του *Quantum*, με «ζαλίζουν» ευχάριστα για να με ρωτήσουν κάτι ή να προτείνουν κάποια λύση στα προβλήματα του νέου τεύχους: τα παιδιά αγαπούν τις σπαζοκεφαλιές, δοκιμάζουν τις δυνάμεις τους σε διάφορες προκλήσεις. Ίσως όχι όλα, είναι όμως κρίμα να στερήσουμε αυτό που αξίζουν απ' όσους το αξίζουν για χάρη των μετρίων, των φυγόπονων, των οκνηρών και των παραπομένων.

Εκτός από το «τι», σημαντικό ρόλο παίζει και το «πώς» της διδασκαλίας. Αν ο ίδιος ο δάσκαλος δεν ξέρει να σκέφτεται, είναι αδύνατο να διδάξει τους άλλους. Πέρα από τις γνώσεις, όμως, υπάρχει το μεράκι, που δεν είναι τόσο σπάνιο όσο νομίζουν ή διαδιδουν μερικοί. Έχω γνωρίσει πολλούς συναδέλφους που φλέγονται μέσα στη σχολική αίθουσα· αν τους δινόταν η ευκαιρία, με σωστότερα αναλυτικά προγράμματα, βιβλία και κίνητρα —και για τους ίδιους αλλά και για τους μαθητές—, θα μπορούσαν να θαυματουργήσουν.

Στέλιος Μαρίνης —μαθηματικός

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ενωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπαρξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντε (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή των Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Vladimir Dubrovsky, Επικουρός Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης
Timothy Weber
Υπεύθυνος εικονογράφησης
Sergey Ivanov
Σύμβουλος επι διεθνών θεμάτων
Edward Lozansky

Σύμβουλοι Σύνταξης
Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας
Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Κvant

Συμβολευτική Επιτροπή
Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκπαίδευτος Υπάλληλος, AAPT
James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM
George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ινιούα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη
Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα
Carol-ann Tripp, Καθηγήτρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πρόβιντενς, Ρόουντ Αϊλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Αλέκος Μάραλης
Διευθυντής
Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.:
Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός, Φάνης Γραμμένος -φυσικός,
Μιχάλης Λάμπρου -μαθηματικός, Κώστας Σκανδάλης -μαθηματικός,
Γιώργος Κυριακόπουλος και Αλέκος Μάραλης -φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια
Παντελής Μπουκάλας
Τυπογραφικές διορθώσεις
Π. Τασιόπουλος
Επιμέλεια έκδοσης
Γ. Νιτάνος
Υπεύθυνη λογοτεχνία
Μαρία Μάραλη

Επιστημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επικουρός Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ιδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επικουρός Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, αελιδοποίηση
Κάτιοπτρο
Φίλμ, μοντάζ
Γ. Κεραμάς
Εκτύπωση
Τετραχρωμία
Βιβλιοθεσία
Θ. Αρχοντιουλάκης

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από την Εκδόσεις Κάτιοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Α. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Α. Μάραλης.
Διαφημίσεις και κεντρική διόθετη: Εκδόσεις Κάτιοπτρο,
Ιστιόπατρο 10 και Δαφνονήσιλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Απαγορεύεται η αναπληρωματική η μετάδοση με οποιοδή-
πο μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την
εγγραφή σέβει την εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.
Ετηρια συνδρομή: 7.500 δρχ. για ιδιώτες, 12.000 δρχ. για
βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τεύχων στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.

Φυσαλίδες σε λακκούβες

Για το σχήμα, το μέγεθος και τη μακροζωία των παράξενων επισκεπτών της βροχής

Alexander Mitrofanov

ΣΙΓΟΥΡΑ ΕΧΕΤΕ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙ αυτές τις ζωηρές φυσαλίδες. Σχηματίζονται πάνω στην επιφάνεια νερόλακκων και μικρών λιμνών κατά τη διάρκεια μιας μπόρας, όταν το νερό μοιάζει να βράζει από τις μεγάλες σταγόνες που πέφτουν πάνω του. Ορισμένες φορές μπορείτε να δείτε αυτές τις φυσαλίδες ακόμη και μετά το σταμάτημα της βροχής, όταν συνεχίζουν να πέφτουν σταγόνες από τα κλαδιά των δέντρων. Οι φυσαλίδες έιναι θαυμαστά σταθερές —μπορείτε όχι μόνο να τις φωτογραφίσετε, αλλά και να τις παρατηρήσετε ενόσω επιπλέουν στην επιφάνεια του νερού. Ο χρόνος ζωής μιας φυσαλίδας κυμαίνεται παντού μεταξύ δευτερολέπτων και δεκάδων δευτερολέπτων· αργά ή γρήγορα σπάζουν.

Στην εμφάνισή τους, όλες οι φυσαλίδες είναι ίδιες. Το κέλυφος της καθημιάς μοιάζει με ημισφαίριο, με ένα καλά ορισμένο χείλος κοντά στη βάση του. Κάθε φυσαλίδα είναι σαν ένας διαφανής, στρογγυλός σκούφος με ένα σκοτεινό, μικρού πλάτους γείσο. Ας ρίξουμε μια ματιά στο τι είναι αυτός ο «σκούφος» και πώς είναι φτιαγμένο το γείσο του.

Όπως πιθανώς γνωρίζετε, τα μόρια στην επιφάνεια ενός υγρού έχουν ορισμένη δυναμική ενέργεια, γνωστή ως ενέργεια λόγω επιφανειακής τάσης. Η τιμή της ενέργειας αυτής είναι ανάλογη με το εμβαδόν της επιφάνειας —ο παράγων αναλογίας ονομάζεται συντελεστής επιφανειακής τάσης και είναι διαφορετικός

για διαφορετικά υγρά. Σε κάθε σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας αντιστοιχεί η ελάχιστη ενέργεια. Για τις φυσαλίδες μας, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να είναι ελάχιστο το εμβαδόν τους. Μια σαπουνόφουσκα στον ελεύθερο χώρο λαμβάνει σφαιρικό σχήμα, επειδή για δεδομένο όγκο (δηλαδή τον όγκο του αέρα εντός της φυσαλίδας) η σφαιρική επιφάνεια έχει το ελάχιστο εμβαδόν· ο ρόλος της βαρύτητας είναι αμελητέος στην περίπτωση της φυσαλίδας, επειδή αυτή είναι πολύ ελαφριά. Εάν παραμορφώσουμε τη φυσαλίδα ελαφρά (έστω, φυσώντας πάνω της), θα επανακτήσει το σφαιρικό σχήμα της μόλις πάψει να υφίσταται η δύναμη παραμόρφωσης.

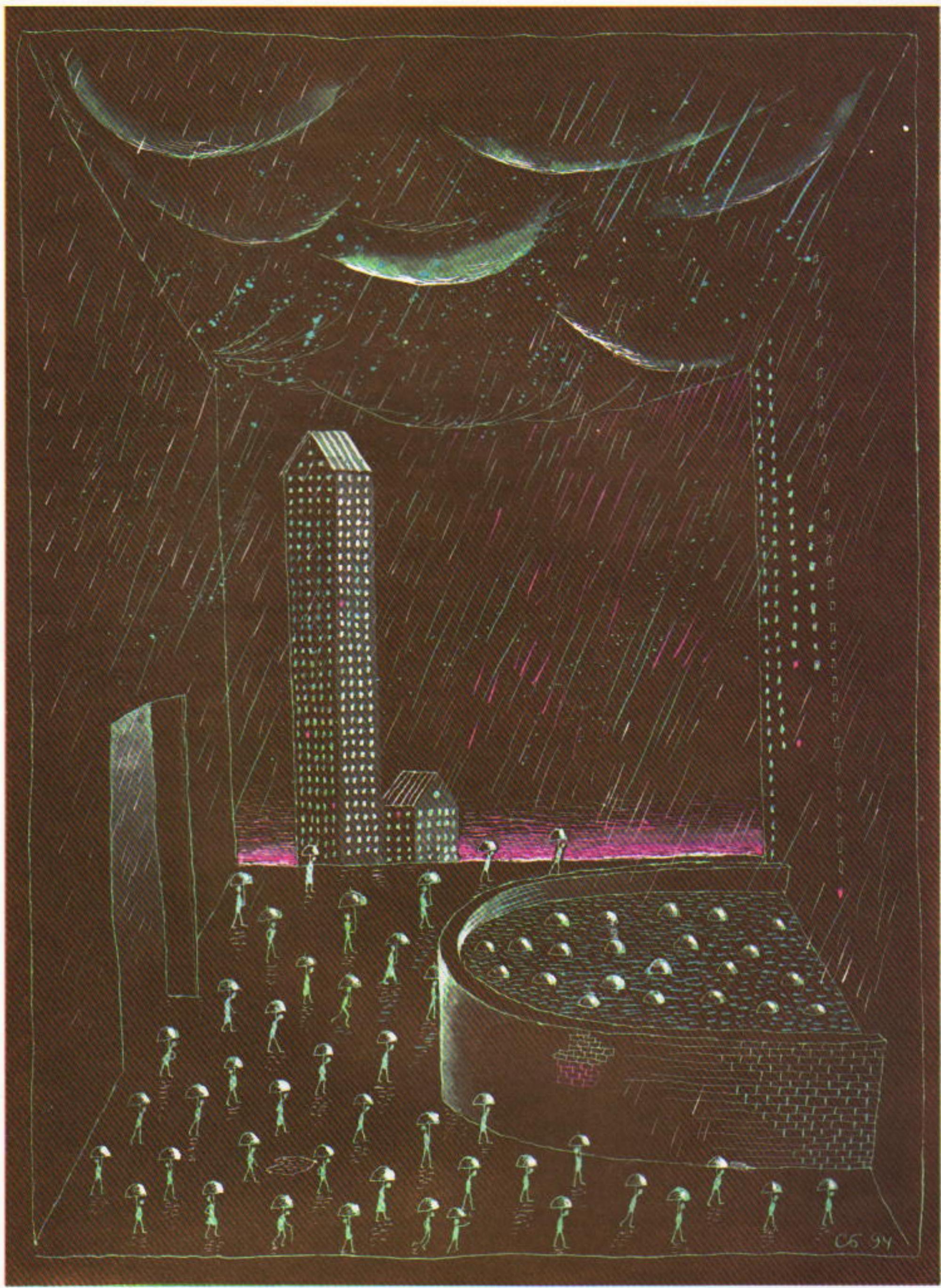
Εντούτοις, το σχήμα των φυσαλίδων που σχηματίζονται στην επιφάνεια του νερού είναι διαφορετικό: μια μεγάλη φυσαλίδα μοιάζει με ημισφαίριο και όχι με σφαίρα. Το κέλυφός της είναι κυρτό λόγω της επιπλέον πίεσης Δρ του αέρα στο εσωτερικό της. Αφού η τιμή της Δρ είναι σταθερή εντός της φυσαλίδας (συνθήκη ισορροπίας), ο «σκούφος» της είναι ομοιόμορφα καμπυλωμένος —με άλλα λόγια, το τοίχωμά της που έρχεται σε επαφή με τον αέρα έχει την ίδια καμπυλότητα και σχηματίζει μέρος μιας σφαίρας. Τι ποσοστό αυτής της σφαίρας, όμως, βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του νερού;

Ας υποθέσουμε ότι η βάση μιας φυσαλίδας (δηλαδή ο «πυθμένας» της, που δεν είναι παρά η επιφάνεια

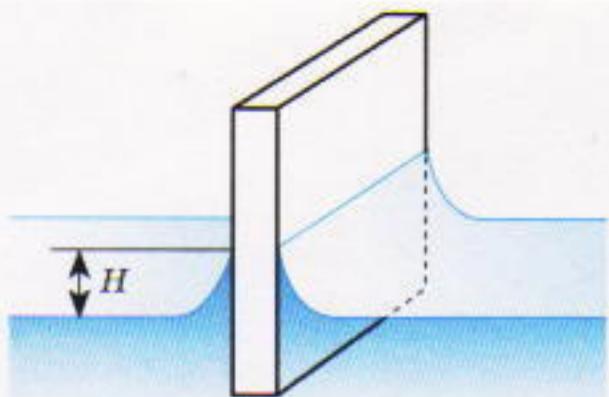
της λιμνούλας) είναι επίπεδη. Φυσικά, αυτή η παραδοχή δεν ισχύει πάντοτε, αλλά όσο μεγαλύτερη είναι η φυσαλίδα τόσο πιο κοντά στην αλήθεια βρίσκεται η παραδοχή (θα επανέλθουμε σε αυτό παρακάτω). Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι, για δεδομένο όγκο αέρα, μια τέτοια φυσαλίδα λαμβάνει τη μορφή ημισφαιρίου (στην περίπτωση αυτή, το ημισφαίριο έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας).

Ας στραφούμε τώρα στο γείσο που περικλείει το «σκούφο» της υδάτινης φυσαλλίδας. Περί τίνος πρόκειται; Ασφαλώς δεν είναι πολύ δύσκολο να μαντέψετε.

Ίσως θυμάστε ότι το νερό ανέρχεται στο εσωτερικό ενός λεπτού τριχοειδούς σωλήνα, εφόσον τα τοιχώματά του διαβρέχονται απ' αυτό. Το γεγονός είναι «ευεργετικό» από ενεργειακή άποψη. Όσο μικρότερη είναι η ακτίνα του τριχοειδούς σωλήνα τόσο υψηλότερα βρίσκεται το επίπεδο του υγρού στο εσωτερικό του. Λόγω των ίδιων τριχοειδικών δυνάμεων, το νερό ανέρχεται ελαφρά στην επιφάνεια ενός σώματος οποιουδήποτε σχήματος (για παράδειγμα, μιας επίπεδης κατακόρυφης πλάκας), με την προϋπόθεση ότι η επιφάνειά του διαβρέχεται απ' το νερό. Βυθίστε στο νερό μια βρεγμένη σανίδα ή ένα καθαρό κομμάτι τζάμι, έτσι ώστε να εξέχουν από το νερό. Εάν ο φωτισμός είναι επαρκής, μπορείτε να δείτε το στενό χείλος νερού που δημιουργείται εξαιτίας της τριχοειδικής δράσης



05 94



Σχήμα 1

στην επιφάνεια επαφής του αντικειμένου με το νερό (βλ. Σχήμα 1). Αυτό είναι εντελώς όμοιο με το γείσο της φυσαλίδας: το δημιουργεί η τριχοειδική δράση στο τοίχωμα της φυσαλίδας.

Όσοι ενδιαφέρονται για υπολογισμούς και φυσικές εκτιμήσεις πρέπει να παρακολουθήσουν αμέσως τώρα τη λεπτομερέστερη εξέταση του προβλήματος της τριχοειδικής δράσης σε έναν λειό, κατακόρυφο τοίχο, ο οποίος έχει διαβραχεί επιμελώς.

Ας εκτιμήσουμε ποια θα είναι η μέγιστη ανύψωση H του επιπέδου του νερού στο τοίχωμα της πλάκας και ας βρούμε την εξάρτηση του H από το συντελεστή επιφανειακής τάσης σ . Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη διαστατική ανάλυση.

Η ισορροπία του τμήματος του υγρού που έχει ανυψωθεί εξαιτίας τριχοειδικής δράσης καθορίζεται από

την επιφανειακή τάση και τη βαρύτητα. Επομένως το H μπορεί να εξαρτάται μόνο από το σ , την πυκνότητα ρ του υγρού, και την επιτάχυνση g της βαρύτητας. Θα αναζητήσουμε μια συνάρτηση $H = f(\sigma, \rho, g)$ της μορφής

$$H = \text{σταθ} \cdot \sigma^\ell \cdot g^m \cdot \rho^n.$$

(Βεβαίως, τα φυσικά μεγέθη που υποισέρχονται στην περιγραφή ενός φαινομένου δεν συνδέονται πάντοτε μεταξύ τους μέσω σχέσεων όπως η προηγούμενη, όπου είναι υψωμένα σε κάποια δύναμη, αλλά αυτό συμβαίνει αρκετά συχνά). Για να έχουμε τον μαθηματικό τύπο της εξάρτησης του H από τα σ , g και ρ , χρειάζεται να προσδιορίσουμε τις τιμές των ℓ , m , και n .

Είναι σαφές ότι το αριστερό και το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Ας γράψουμε τις διαστάσεις των μεταβλητών στην εξίσωση αυτή:

$$[H] = L, [\sigma] = MT^{-2}, \\ [g] = LT^{-2}, [\rho] = ML^{-3},$$

όπου τα L , M και T εκφράζουν το μήκος, τη μάζα και το χρόνο.

Η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$L = (MT^{-2})^\ell (LT^{-2})^m (ML^{-3})^n.$$

Από εδώ λαμβάνουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τις άγνω-

στες παραμέτρους ℓ , m , και n :

$$\ell + n = 0, \ell + m = 0, m - 3n = 1.$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση:

$$\ell = 1/2, m = -1/2, n = -1/2.$$

Άρα,

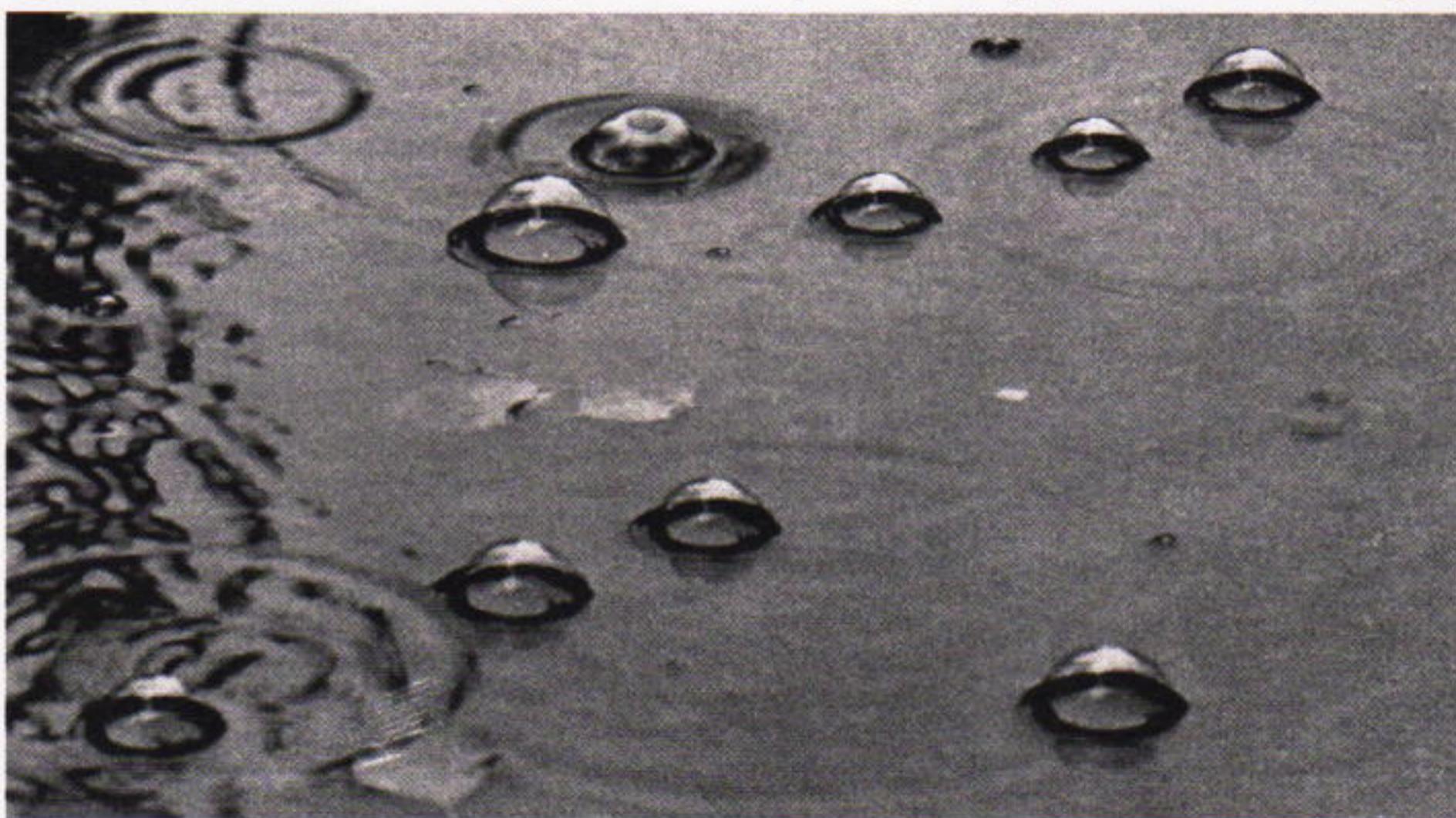
$$H = \text{σταθ} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}},$$

$$\eta \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Στον τύπο αυτό δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η άγνωστη σταθερά μέσω διαστατικής ανάλυσης. Ωστόσο, σε τύπους φυσικής που προκύπτουν από υπολογισμούς, οι αριθμητικοί συντελεστές είναι συνήθως κοντά στη μονάδα —σε κάθε περίπτωση, δεν επηρεάζουν την τάξη μεγέθους του αποτελέσματος. Η ακριβής τιμή του H διαφέρει από την προσεγγιστική τιμή μας κατά $\sqrt{2}$:

$$H = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}.$$

Τώρα είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε πόσο ψηλά ανέρχεται το νερό σ' ένα διαβρεγμένο κατακόρυφο τοίχωμα. Εισάγοντας τις αριθμητικές τιμές $\sigma \approx 73 \cdot 10^{-3} \text{ Nt/m}$, $\rho \approx 10^3 \text{ kgr/m}^3$, έχουμε $H \approx 4 \text{ mm}$. Το νερό στη βάση



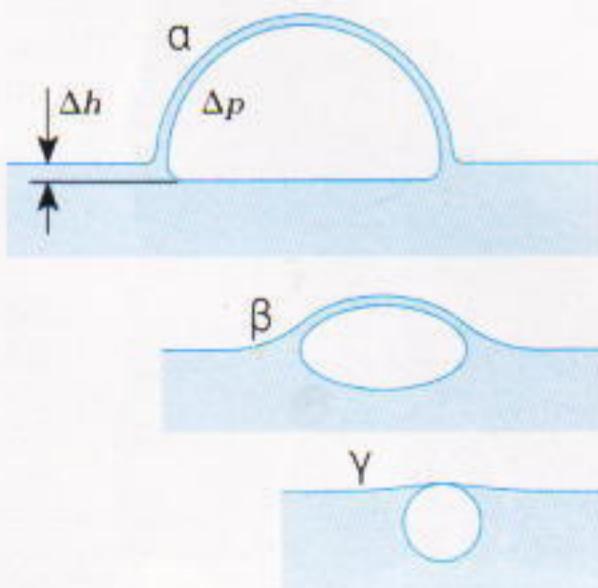
της σφαιρικής επιφάνειας μιας φυσαλίδας ανέρχεται περίου στο ίδιο ύψος. Εδώ, η καμπυλωμένη υδάτινη επιφάνεια μοιάζει με ένα σκοτεινό γείσο, υπό συγκεκριμένες συνθήκες φωτισμού. Το πλάτος του γείσου είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το H για όλες τις μεγάλες φυσαλίδες — δηλαδή μερικά χιλιοστά.

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα έχει παρατηρήσει ότι οι φυσαλίδες στη φωτογραφία δεν είναι ακριβώς ημισφαίρια — φαίνεται σαν να έχουν βυθιστεί ελαφρά — και τα εσωτερικά και εξωτερικά γείσα διαφέρουν (είναι δύσκολο να δείτε μια τέτοια διαφορά όταν παρατηρείτε τις φυσαλίδες που σχηματίζονται ενόσω βρέχει). Γιατί συμβαίνει αυτό; Και πάλι, η πίεση του αέρα παίζει καθοριστικό ρόλο: κάτω από το κέλυφος είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στο εξωτερικό της φυσαλίδας. Άρα το επίπεδο του νερού βρίσκεται χαμηλότερα κάτω από τη φυσαλίδα (στο κέντρο της βάσης της) παρά στο εξωτερικό της.

Ας εκτιμήσουμε πόσο έχει βυθιστεί στο νερό μια φυσαλίδα ως προς την ελεύθερη επιφάνεια του νερού της λιμνούλας. Η επιπλέον πίεση του αέρα στο εσωτερικό μιας φυσαλίδας ιούται με $\Delta p = 4\sigma/R$. Στο περιβάλλον νερό, αυτή η επιπλέον πίεση (επιπρόσθετη στην ατμοσφαιρική πίεση) δημιουργείται σε κάποιο βάθος Δh κάτω από την επιφάνεια. Προφανώς, η τιμή Δh ιούται με το «βύθισμα» της φυσαλίδας (Σχήμα 2a). Από την ισότητα $4\sigma/R = \rho g \cdot \Delta h$ λαμβάνουμε

$$\Delta h = \frac{4\sigma}{\rho g R}.$$

Για τις φυσαλίδες της φωτογρα-



Σχήμα 2

φίας, το Δh είναι περίου από 1 έως 3 mm. Άρα, μια μεγάλη φυσαλίδα μοιάζει με ημισφαίριο ελαφρά βυθισμένο στο νερό και περιβάλλεται από καμπύλα εσωτερικά και εξωτερικά άκρα. Ως «μεγάλη» εννοούμε τη φυσαλίδα που ικανοποιεί την έκφραση $R \gg H \approx \sqrt{\sigma/\rho g}$.

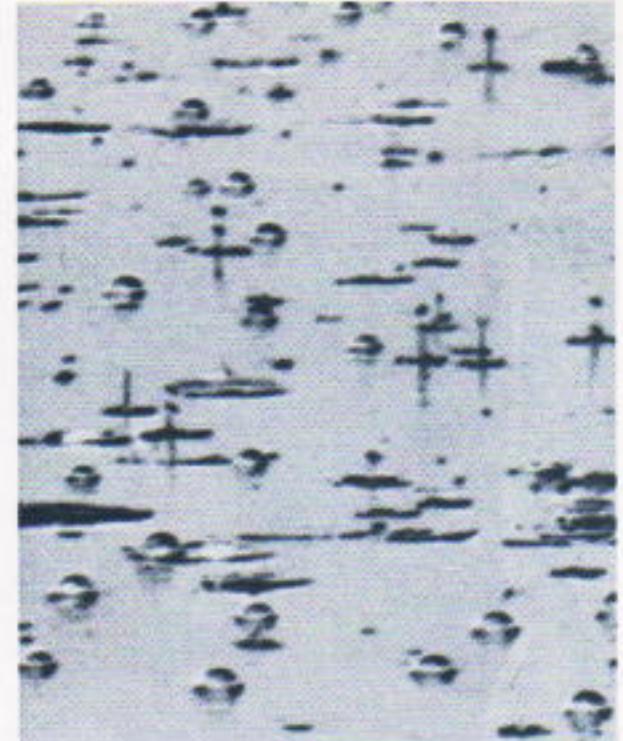
Και πώς θα μοιάζει μια μικρότερη φυσαλίδα; Προσπαθήστε να εξετάσετε αυτό το ερώτημα μόνοι σας — δεν είναι απλό. Θα αναφέρω απλώς εδώ ότι αν «παρασκευάσουμε» μια πολύ μικρή φυσαλίδα (με ακτίνα περίου 1 mm ή μικρότερη), δεν θα ανέλθει καθόλου στην επιφάνεια — θα παραμένει βυθισμένη κοντά στην επιφάνεια, σαν να έχει κολλήσει εκεί. Οι μικρές φυσαλίδες είναι σφαιρικές. Το Σχήμα 2 δείχνει πώς φαίνονται οι διαφορετικές φυσαλίδες: (a) μια μεγάλη φυσαλίδα, που ικανοποιεί τη σχέση $R \gg \sqrt{\sigma/\rho g}$, (b) μια μετρίου μεγέθους, που ικανοποιεί την $R \approx \sqrt{\sigma/\rho g}$, και (c) μια μικρή (σφαιρική) που ικανοποιεί την $R \ll \sqrt{\sigma/\rho g}$.

Σκεφτείτε γιατί το σχήμα μιας φυσαλίδας εξαρτάται από το μέγεθός της — όσο πο μεγάλη είναι τόσο περισσότερο μοιάζει με ημισφαίριο. Και γιατί όταν βρέχει εμφανίζονται βασικά μεγάλες και μετρίου μεγέθους φυσαλίδες;

Ας προχωρήσουμε σε ένα τελικό πρόβλημα, σχετικά με τη σταθερότητα μιας υδάτινης φυσαλίδας. Χρειάζεται να καταλάβουμε γιατί οι φυσαλίδες απολαμβάνουν τόσο μακρόχρονη ζωή μόνον εφόσον συνεχίζει να βρέχει ή ο ουρανός είναι συννεφιασμένος.

Κάποιοι θα πουν ότι αυτό συμβαίνει επειδή όταν βρέχει υπάρχουν τόσο πολλές φυσαλίδες ώστε να φαίνεται πως ζουν επί μακρόν. Υπάρχει ένα ψήγμα αλήθειας σε αυτό τον ισχυρισμό. Όμως αν παρατηρήσετε μια μεμονωμένη φυσαλίδα, θα δείτε ότι το πρόβλημα δεν είναι και τόσο «τραβηγμένο». Πράγματι, σε βροχέρ ή συννεφιασμένο καιρό, οι φυσαλίδες ζουν πολύ περισσότερο απ' ό,τι σε μια ξηρή, ηλιόλουστη ημέρα. (Ζουν τόσο λίγο σε ξηρό κλίμα ώστε κανείς να μην τις προσέχει ιδιαίτερα).

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί λόγοι για την καταστροφή μιας φυσαλίδας. Το κέλυφος της μπορεί να



Με την εφεύρεση της φωτογραφίας, ιδιαίτερα της φωτογραφίας υψηλών ταχυτήων, αποκαλύφθηκαν πολλές λεπτομέρειες των γεγονότων που εκτυλίσσονται διαν μια σταγόνα βροχής χτυπά στην επιφάνεια του νερού. Μια μεγάλη σταγόνα πέφτει πάνω στην απολύτως ήρεμη επιφάνεια νερού... σχηματίζεται ένας βαθύς κρατήρας... ο κρατήρας καταρρέει... και υπάρχει πλέον μια ήρεμη φυσαλίδα, με «φυλακισμένο» αέρα στο εσωτερικό της, η οποία επιπλέει στην επιφάνεια του νερού. (Στις αρχές του αιώνα μας, ένας από τους πρώτους που κατέγραψαν τέτοιες θαυμαστές μεταμορφώσεις σε φωτογραφική πλάκα ήταν ο A. Worthington, καθηγητής φυσικής στο Βασιλικό Κολέγιο Ναυπηγών Μηχανικών, στο Νιέβονπορτ της Αγγλίας.) Οι μικρότερες σταγόνες είναι καταδικασμένες σε άλλη μοίρα. Και αυτές σχηματίζουν «δόντια» στην επιφάνεια του νερού, αλλά οι οδοντώσεις δεν είναι πολύ βαθιές και δεν καταρρέουν. Ορισμένες φορές, ενδέχεται να παρατηρήσουν υδάτινες «ακίδες» — μικρά, λεπτά, κατακόρυφα σιντριβάνια που αναδύονται από το κέντρο της οδόντωσης. Οι υδάτινες ακίδες φαίνονται ιδιαίτερα εντυπωτικές κατά τη διάρκεια μιας δυνατής υγραπτινής βροχής, διαν μια αστραπή φωτίσει το χώρο.

οπάσει από μια ριπή ανέμου, μπορεί να διατρηθεί από μια μεγάλη σταγόνα βροχής, κ.ο.κ. Επίσης, το κέλυφος μπορεί να εξατμιστεί ή να γίνει πολύ λεπτό και ανομοιόμορφο λόγω νερού που ρέει πάνω στα τοιχώματά της. Από την άλλη, η παρουσία στο νερό των λεγόμενων επιφανειακώς ενεργών ουσιών (για παράδειγμα, το σαπούνι), μπορεί να επιμηκύνει το χρόνο ζωής των φυσαλίδων κατά έναν παράγοντα δεκάδων ή εκατοντάδων. (Σκεφτείτε τον αφρό που έχειτε δει σε ένα ποτάμι, ο οποίος είναι αξιοσημείωτα ανθεκτικός).

Η συνέχεια στη σελ. 14



Κόμβοι, δεσμοί, και τα πολυώνυμά τους

Μια τοπολογική προσέγγιση ενός περίπλοκου θέματος

Alexey Sosinsky

ΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΠΡΩΤΟΕΜΦΑΝΙΣΤΗΚΑΝ την προϊστορική εποχή, μαζί με τις πρώτες κλωστές και τα σχοινιά. Ισως μάλιστα προηγούνται αυτών των ανθρώπινων χειροτεχνημάτων —σε τελική ανάλυση, τα κλαδιά των αμπελιών αναρριχώνται με τη βοήθεια κόμβων. Οι τεχνικές κατασκευής κόμβων είναι πολύ παλιές. Οι κόμβοι ήταν απαραίτητοι στους πρώτους ναυτικούς, τους υφαντές και τους οικοδόμους. Όμως, μόνο σχετικά πρόσφατα άρχισαν και οι επιστήμονες να τους μελετούν —στο τέλος του προηγούμενου αιώνα.¹ Φαίνεται ότι το αυστηρό πλαίσιο της παραδοσιακής γεωμετρίας ήταν υπερβολικά περιοριστικό γι' αυτά τα λεπτά και εύπλαστα αντικείμενα. Η πρόοδος στη θεωρία των κόμβων έγινε δυνατή μόνον με την ανάπτυξη της τοπολογίας —του επιστημονικού κλάδου που ενδιαφέρεται για τις βαθύτερες ιδιότητες των σχημάτων και της θέσης τους. Εκεί η θεωρία των κόμβων βρήκε την ταπεινή αλλά αξιοπρεπή θέση της. Ταπεινή στην αρχή τουλάχιστον.

Τελευταία η θεωρία των κόμβων έπαιψε να είναι απλώς ένα διασκεδαστικό θέμα για λίγους ειδικούς. Μετατράπηκε απρόσμενα σε μια από τις δημοφιλέστερες μαθηματικές δραστηριότητες, ενώ στο χορό μπήκαν

και οι φυσικοί (τόσο οι «κλασικοί» όσο και οι «κβαντικοί») αλλά και οι γενετιστές.

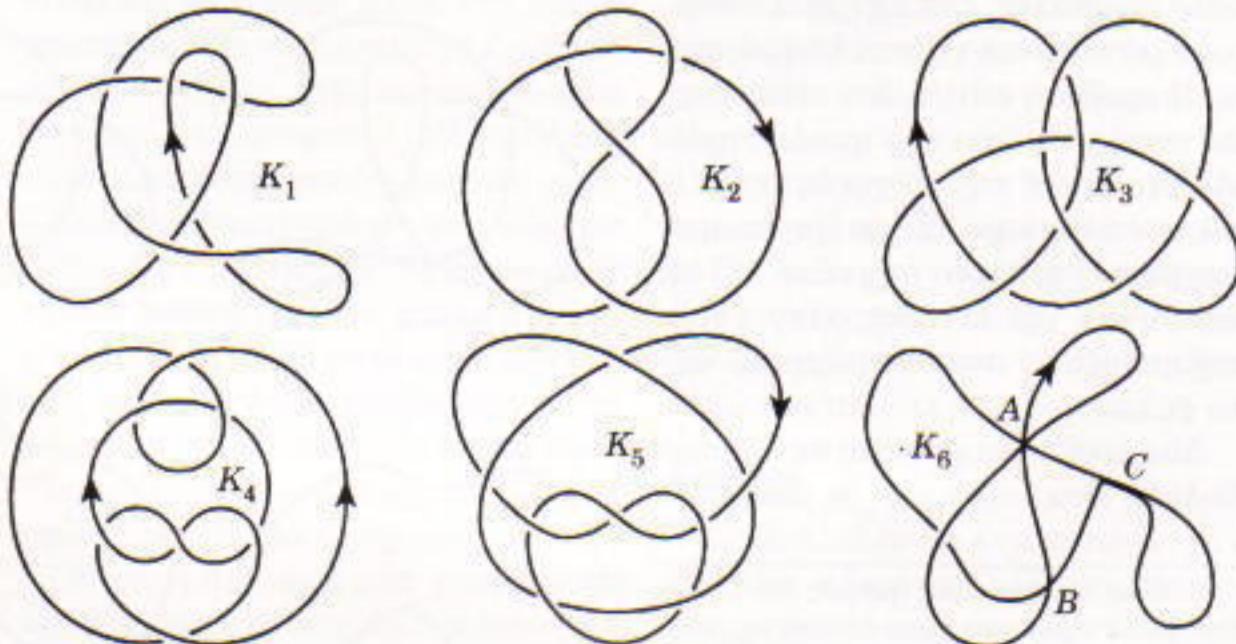
Θα μιλήσουμε όμως αργότερα γι' αυτά. Πρώτα, ας δούμε τους κόμβους από την άποψη του μαθηματικού, και ας κάνουμε την πιο φυσιολογική ερώτηση...

Μπορεί να λυθεί ένας κόμβος;

Για παράδειγμα, μπορούμε να λύσουμε τους κόμβους του Σχήματος 1; Μια γρήγορη ματιά στον κόμβο K_1 σίγουρα αρκεί για να δείτε ότι μπορεί εύκολα να μεταβληθεί σε κύκλο. Δύσκολα όμως θα βρείτε πώς είναι δυνατόν να λυθούν οι κόμβοι K_2 , K_3 , K_4 και K_5 . Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι ο κόμβος K_2 δεν ξετυλίγε-

ται χωρίς να τον κόψουμε. Όσο για τον κόμβο K_6 , είναι απλώς παγίδα: δεν είναι δυνατόν να διαπιστώσετε με βάση το σχήμα τη διευθέτηση του κόμβου στο χώρο.

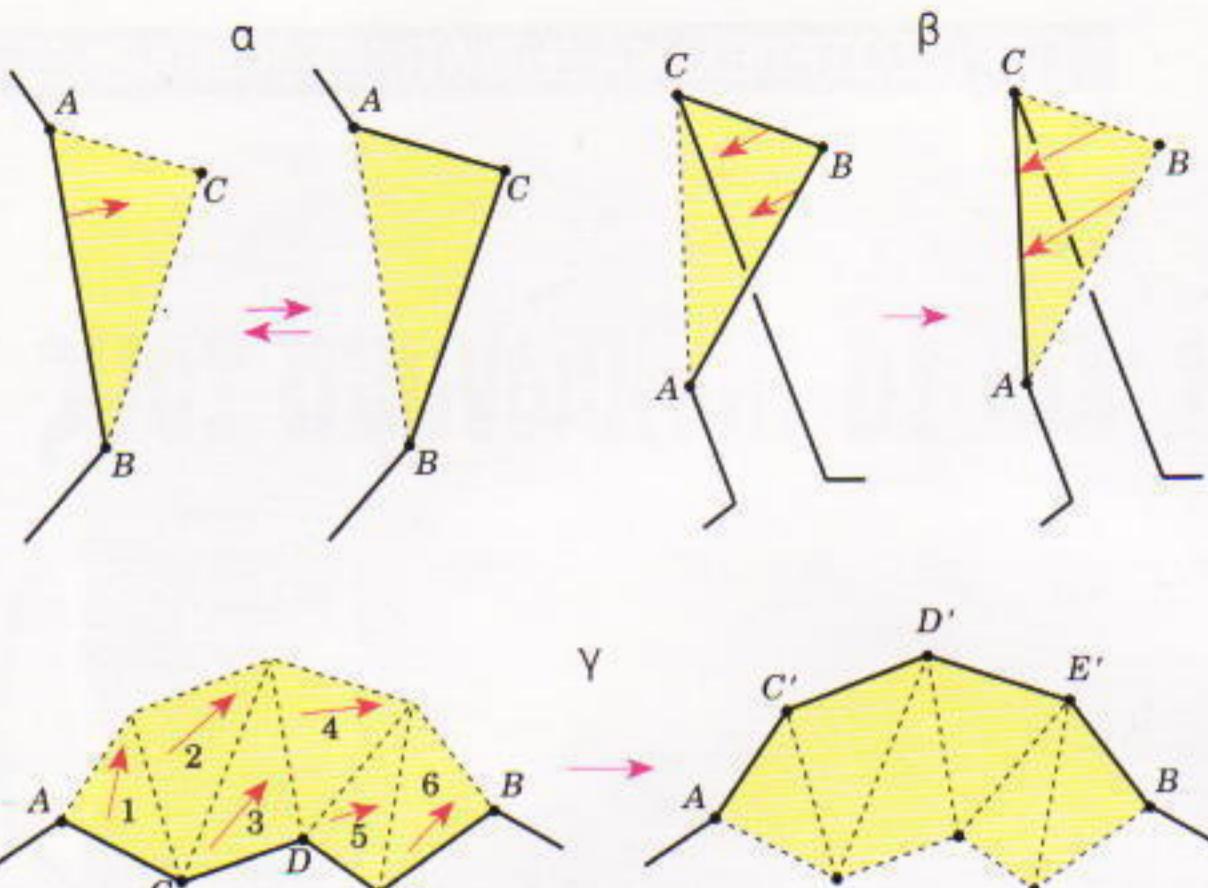
Για να περάσουμε από την απλή συζήτηση για τους κόμβους σε μια σοβαρή μαθηματική αντιμετώπιση χρειαζόμαστε ακριβείς ορισμούς. Αρχίζουμε με τον ορισμό του κόμβου. Κόμβος είναι μια κλειστή πολυγωνική διαδρομή στο χώρο η οποία δεν τέμνεται με τον εαυτό της και είναι συνεκτική (αποτελείται από ένα ενιαίο κομμάτι) και προσανατολισμένη (τη διασχίζουμε κατά μία συγκεκριμένη διεύθυνση). Οι κόμβοι απεικονίζονται στο επίπεδο με έναν ειδικό τρόπο —μέσω διαγραμμάτων.



Σχήμα 1

Παραδείγματα διαγραμμάτων κόμβων: K_1 —ένας τετριμμένος κόμβος (δηλαδή ένας κόμβος που μπορεί να μετατραπεί σε απλό βρόχο), K_2 —ο κόμβος «οκτάρι», K_3 —ο επιπεδοποιημένος κόμβος δ_1 , K_4 —, K_5 —ο επιπεδοποιημένος κόμβος δ_{11} , K_6 —μια μη επιφερεπή απεικόνιση κόμβου (δεν είναι διάγραμμα).

1. Θα σας φανεί χρήσιμο να διαβάσετε το εισαγωγικό άρθρο του ίδιου συγγραφέα στο τεύχος Μαρτίου / Απρίλιος 1995 του *Quantum*. Πάντως, το παρόν άρθρο μπορεί να γίνει κατανοητό και από μόνο του.



Σχήμα 2

Στοιχειώδεις κίνησεις και ισοδυναμία κόμβων: (α) αντικατάσταση του τμήματος AB με την τεθλασμένη ευθεία ABC (και αντιστρόφως) υπό την προϋπόθεση ότι το τρίγωνο ABC δεν έχει κοινά σημεία με τον κόμβο (εκτός φυσικά του τμήματος AB), (β) απομάκρυνση ενός βρόχου μέσω μιας στοιχειώδους κίνησης, (γ) ολισθηση του τμήματος $ACDEB$ ενός κόμβου στη νέα θέση $AC'D'E'B$ μέσω μιας ακολουθίας εξι στοιχειωδών κίνησεων.

Ένα διάγραμμα αρχίζει ως προβολή του κόμβου σε ένα επίπεδο. Κατά την προβολή μπορεί να εμφανιστούν σημεία όπου ο κόμβος τέμνεται με τον εαυτό του. Τα σημεία αυτά καταγράφονται ως απομονωμένα διπλά σημεία (η τομή δύο μόνο τμημάτων) με ένα κενό διάστημα που υποδηλώνει το κατώτερο τμήμα του κόμβου. Επίσης, σχεδιάζεται συχνά ένα πολυγωνικό διάγραμμα, για καλύτερη εμφάνιση, σαν να αποτελείται από λείες καμπύλες. Στο Σχήμα 1 υπάρχουν μόνο πέντε γνήσια διαγράμματα. Η προβολή του K_1 δεν είναι κόμβος επειδή περιέχει ένα τριπλό σημείο (A), ένα διπλό σημείο χωρίς κενό (B) και ένα ολόκληρο τμήμα (μη απομονωμένων) διπλών σημείων (C). Η διεύθυνση της κίνησης στον κόμβο παρουσιάζεται στα διαγράμματα μέσω βελών.

Δύο κόμβοι θεωρούνται ισοδύναμοι (δηλαδή ίδιοι) όταν ο ένας μπορεί να

2. Ένας αυστηρότερος ορισμός δύο κόμβων είναι ισοδύναμοι όταν είναι δυνατό να μεταβούμε από τον ένα στον άλλο μέσω μιας πεπερασμένης σειράς στοιχειωδών κίνησεων (αντικαθιστώντας τμήματα της πρώτης πολυγωνικής διαδρομής, το ένα μετά το άλλο, με τεθλασμένες διαδρομές δύο τμημάτων και αντιστρόφως—δείτε το Σχήμα 2).

Καταφέρατε να μαντέψετε ποιος είναι; Σωστά! Ο άλλος τετριμένος κόμβος είναι ο K_4 . Όμως, ένας άνθρωπος με συνηθισμένη τρισδιάστατη αντίληψη δεν μπορεί να ανακαλύψει γρήγορα μια μέθοδο για να λυθεί αυτός ο κόμβος: απαιτείται αρκετή εργασία με χαρτί, μολύβι και γομολάστιχα (ή κιμωλία και μαυροπίνακα).

Άσκηση 1. Σχεδιάστε τη διαδικασία για το ξετύλιγμα του κόμβου K_4 .

Τώρα πλέον οι επόμενες ερωτήσεις θα φανούν απολύτως φυσιολογικές.

1. **Το πρόβλημα του ξετυλίγματος.** Βρείτε έναν αλγόριθμο που θα καθορίζει αν ένας τυχαίος κόμβος είναι τετριμένος, βάσει ενός διαγράμματός του.

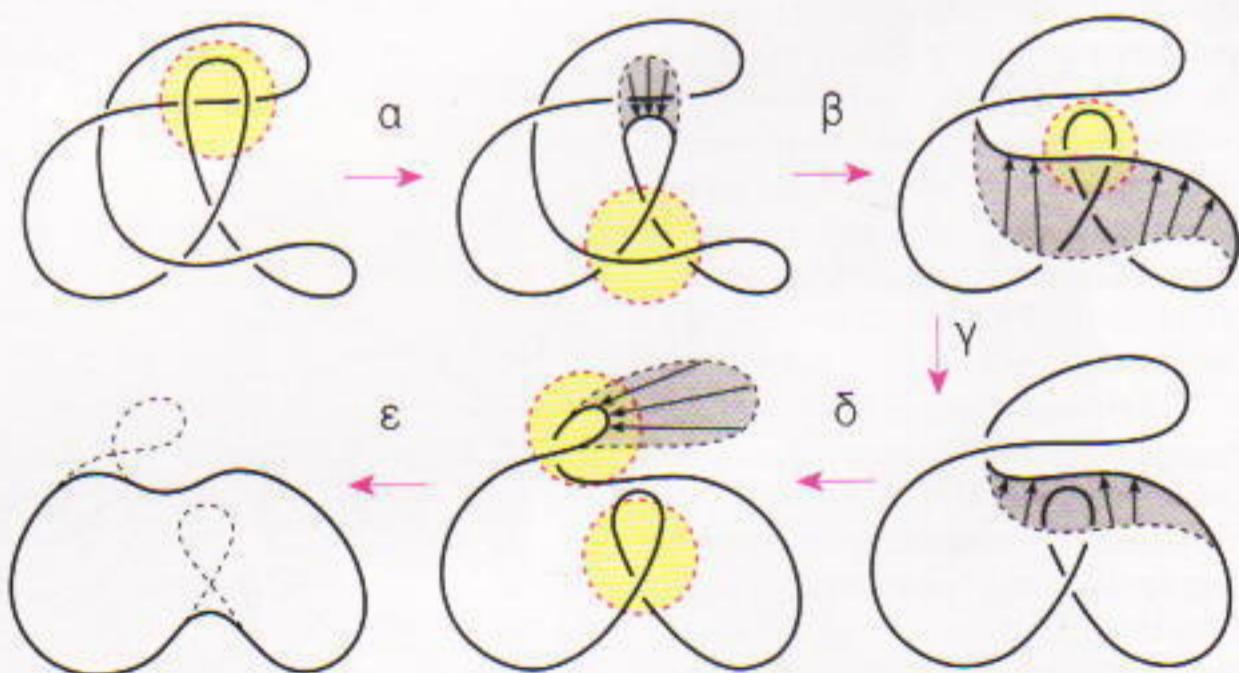
Η ερώτηση αποτελεί ειδική περίπτωση μιας ακόμη γενικότερης.

2. **Το πρόβλημα της σύγκρισης.** Βρείτε έναν αλγόριθμο που θα καθορίζει αν δύο δεδομένα διαγράμματα απεικονίζουν ισοδύναμους κόμβους. (Το πρόβλημα του ξετυλίγματος είναι το πρόβλημα της σύγκρισης ενός κόμβου με τον τετριμένο κόμβο).

Πώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα; Υπάρχει ένα διαθέσιμο εργαλείο...

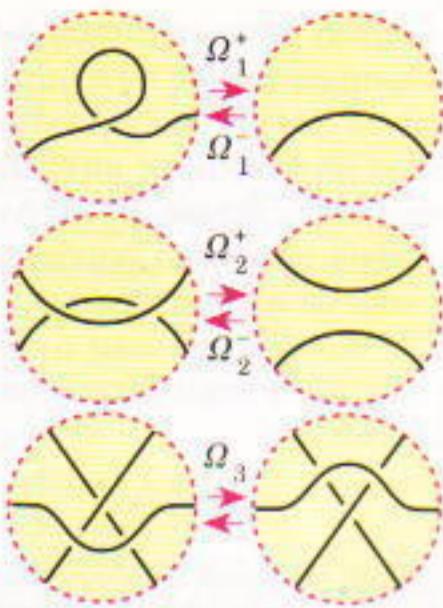
Οι κινήσεις Reidemeister

Ας αναλύσουμε το πώς λύσαμε το πρόβλημα του ξετυλίγματος του κόμβου K_1 . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, κατά τη διαδικασία του ξετυλίγματος, η μορφή του κόμβου αλλά-



Σχήμα 3

Ξετύλιγμα του κόμβου K_1 : (α) ολισθηση μιας καμπής του κόμβου πάνω από μια άλλη καμπή, (β) μεταφορά ενός τμήματος της διαδρομής πέρα από ένα διπλό σημείο, (γ) ολισθηση άλλης μιας καμπής, (δ) σμίκρυνση ενός βρόχου, (ε) ξετύλιγμα δύο μικρών βρόχων.



Σχήμα 4

Κινήσεις Reidemeister: Ω_1^+ —ξετύλιγμα (και τύλιγμα) ενός βρόχου, Ω_2^+ —ολισθηση της καρπής ενός κόμβου πάνω από μια άλλη, και αντιστρόφως, Ω_3 —μεταφορά τμήματος του κόμβου πάνω από ένα διπλό σημείο. Οι κινήσεις με θετικό πρόσημο μειώνουν το πλήθος των διπλών σημείων και επομένως απλοποιούν το διάγραμμα ενός κόμβου, ενώ οι κινήσεις με αρνητικό πρόσημο το αυξάνουν. Τέλος, η κινήση Ω_3 το αφήνει αμετάβλητο.

Ζει ουσιαστικά μόνο όταν υπάρχει αλλαγή στο πλήθος ή τη διευθέτηση των διπλών σημείων. Ενα διπλό σημείο μπορεί να εξαφανιστεί όταν ξεδιπλωθεί ένας μικρός βρόχος (Σχήμα 3ε), όταν εξαφανίζεται ένα ζεύγος διπλών σημείων μετά την ολοισθηση ενός τμήματος του σχοινιού πάνω από ένα άλλο τμήμα του (Σχήμα 3α), και τέλος, όταν ένα ζεύγος διπλών σημείων συρθεί πάνω από ένα τρίτο διπλό σημείο (Σχήμα 3β). Στο Σχήμα 3, οι καταστάσεις που επικρατούσαν πριν από αυτές τις πράξεις φαίνονται μέσα στους κίτρινους κύκλους. Και οι τρεις αυτοί τύποι κινήσεων επαναλαμβάνονται ξεχωριστά στο Σχήμα 4. Ονομάζονται κινήσεις Reidemeister, προς τιμήν του γερμανού μαθηματικού Kurt Reidemeister που τις εισήγαγε στη δεκαετία του 1920 και απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Δύο κόμβοι είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν τα διαγράμματά τους μετατρέπονται το ένα στο άλλο μέσω πεπερασμένου πλήθους κινήσεων $\Omega_1^+, \Omega_2^+, \Omega_3$.

Με το θεώρημά του ο Reidemeister ανάγει το δύσκολο τρισδιάστατο πρόβλημα της ισοδυναμίας των κόμβων στο απλούστερο πρόβλημα της μετατροπής ενός διαγράμματος κόμβου σε ένα άλλο, χρησιμοποιώντας

τις τρεις δεδομένες κινήσεις $\Omega_1^+, \Omega_2^+, \Omega_3$ (Σχήμα 4). Δεν πρόκειται να παρουσιάσω εδώ την αποδειξη αυτού του θεωρήματος —δεν θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

2. Ξετυλίξτε τον κόμβο K , χρησιμοποιώντας μόνον τις κινήσεις Ω_1^+ και Ω_2^+ .

3. Δείξτε ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις κινήσεις Ω_1^+ και Ω_2^+ στον κόμβο K .

Η επιτυχία μας σε αυτές τις δύο ασκήσεις μάς δημιουργεί την ελπίδα ότι το πρόβλημα του ξετυλίγματος είναι επιλύσιμο. Χρησιμοποιώντας, για όσο διάστημα είναι δυνατόν, τις κινήσεις Reidemeister Ω_1^+ και Ω_2^+ που μειώνουν το πλήθος των διπλών σημείων, μπορούμε να απλοποιήσουμε το διάγραμμα σταδιακά μέχρι να ξετυλίχτει ο κόμβος. Αν καταλήξουμε σε μια κατάσταση όπου θα είναι αδύνατο να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις κινήσεις, θα συμπεράνουμε ότι ο κόμβος δεν μπορεί να ξετυλίχτει.

Δυστυχώς, αυτή η ιδέα είναι παραπλανητική...

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις κινήσεις Ω_1^+ και Ω_2^+ στον (τετριμένο!) κόμβο K_4 .

Φτάσαμε σε αδιέξοδο. Για να ξετυλίξουμε έναν κόμβο πρέπει ίσως να αυξήσουμε το πλήθος των διπλών του σημείων και μόνο έπειτα από αυτό να είναι δυνατή η απλοποίηση του διάγραμματος του. Πρέπει να επιομάνουμε ότι το πρόβλημα δεν είναι ότι αγνοούμε πόσα νέα διπλά σημεία πρέπει να προστεθούν —είναι ότι δεν έχουμε την παραμικρή ιδέα κάποιου αλγόριθμου. Γιατί; Ανεξάρτητα από πόσες συστηματικές προσπάθειες ξετυλίγματος του κόμβου μέσω των κινήσεων Reidemeister έχουν αποτύχει, δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι αυτό είναι αδύνατο —δηλαδή, ότι ο κόμβος δεν είναι τετριμένος. Η αποτυχία μας μπορεί να οφείλεται στο ανεπαρκές πλήθος πρόσθετων διπλών σημείων.

Έτοιμη, η απλοϊκή μας γεωμετρική προσέγγιση αποδείχτηκε τελείως ανεπτυχής. Μέχρι σιγμής δεν διαθέτουμε απόδειξη του μη τετριμένου ούτε καν για έναν κόμβο! Ισως είναι δυνατόν να ξετυλίχτουν όλοι οι κόμβοι... Όπως και νά 'χει, χρειαζόμαστε

μερικές νέες ιδέες.

Ένας αναγνώστης που θα είχε λάβει μέρος σε μαθηματικές Ολυμπιάδες θα πρότεινε αμέσως μια πολλά υποσχόμενη γραμμή έρευνας...

Αναλλοίωτες

Χρειάζεται να βρούμε μια αναλλοίωτη που θα εμποδίζει το ξετύλιγμα. Τι σημαίνει αυτό; Κάθε διάγραμμα κόμβου πρέπει να ζευγαρώθει με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο —μια αναλλοίωτη— έτοιμη ώστε οι αναλλοίωτες διαγραμμάτων ισοδύναμων κόμβων να είναι ίδιες.³ Τότε, δύο κόμβοι με διαφορετικές αναλλοίωτες δεν θα μπορεί να είναι ισοδύναμοι. Όταν η αναλλοίωτη ενός κόμβου είναι διαφορετική από την αναλλοίωτη του τετριμένου, τότε ο δεδομένος κόμβος δεν είναι τετριμένος. Μπορούμε να πούμε ότι η αναλλοίωτη «εμποδίζει» το ξετύλιγμα του κόμβου. Οπωσδήποτε, μπορεί να προσφέρει μια απόδειξη του μη τετριμένου ενός δεδομένου κόμβου.

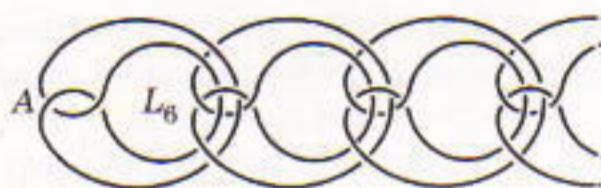
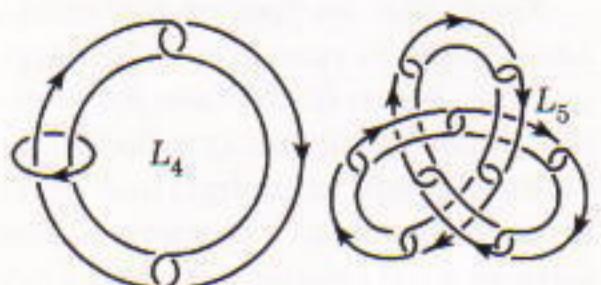
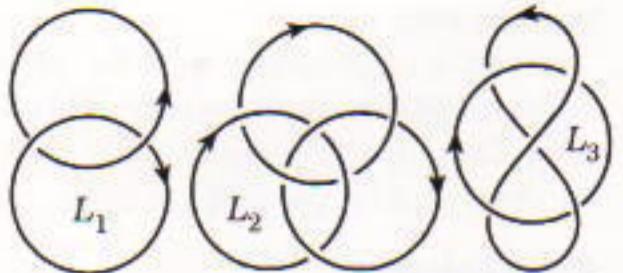
Έτοιμη, αν οι αναλλοίωτες δύο κόμβων είναι διαφορετικές, και οι κόμβοι είναι διαφορετικοί. Αν αληθεύει και το αντίστροφο (αν η ισότητα των αναλλοίωτων συνεπάγεται την ισοδυναμία των κόμβων), λέμε ότι η αναλλοίωτη είναι πλήρης. Το πρόβλημα της σύγκρισης των κόμβων είναι εξαιρετικά πολύπλοκο και δεν γνωρίζουμε κάποια απλή πλήρη αναλλοίωτη γι' αυτό. Παρ' όλα αυτά, θα θέλαμε να έχουμε μια αρκετά καλούσλεμένη αναλλοίωτη —δηλαδή μια αναλλοίωτη που θα μπορεί να ξεχωρίζει πολλά είδη κόμβων, αν όχι όλα.

Πώς μπορούμε να βρούμε μια τέτοια αναλλοίωτη; Είμαστε υποχρεωμένοι να διευρύνουμε την κατηγορία των αντικειμένων που μελετούμε: δεν θα εξετάσουμε μόνο κόμβους αλλά και πιο γενικές δομές...

Δεσμοί

Ο δεσμός είναι ένα πεπερασμένο σύνολο κλειστών, ξένων μεταξύ τους, προσανατολισμένων πολυγωνικών διαδρομών στο χώρο (Σχήμα

3. Στον Παγκοσμίου του τευχών Μαρτίου / Απριλίου και Μαΐου / Ιουνίου 1995 μπορείτε να διαβάσετε για τη χρήση των αναλλοίωτων στην επίλυση σπαζοκεφαλιών.

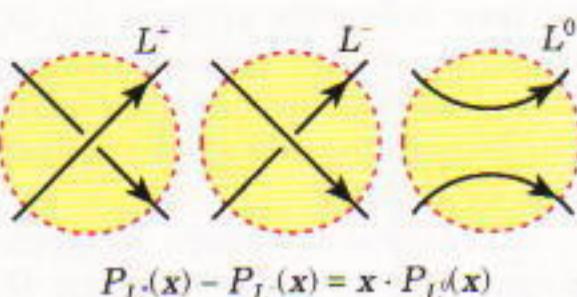


Σχήμα 5

Παραδείγματα δεσμών: L_1 —ο απλούστερος δεξιόστροφος δεσμός δύο βρόχων, L_2 —οι δακτύλιοι Borromean, L_3 —το διάτρητο «οκτάρι», L_4 —ένας δεσμός ισοδύναμος με τους δακτύλιους Borromean (επαληθεύστε το!), L_5 —μια αλυσίδα που σχηματίζει έναν κόμβο τριφύλλι, L_6 —μια ασταθής αλυσίδα (διαλύεται όταν ανταλλάξουμε την μπρος με την πίσω καμπύλη στο σημείο A).

5). Ο κόμβος είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση δεσμού (ένα σύνολο που αποτελείται από μία μόνο διαδρομή). Η ισοδυναμία των δεσμών ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και των κόμβων.

Η παρουσία όχι μόνο μίας αλλά πολλών πολυγωνικών διαδρομών δημιουργεί εντελώς νέα φαινόμενα σύνδεσης. Για παράδειγμα, δύο βρόχοι (τετριμένοι κόμβοι) συνδυάζονται σε ένα ζευγάρι που είναι αδύνατο να διαχωριστεί (L_1). Οι δακτύλιοι Borromean (L_2) έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον: τρεις κύκλοι, ανά δύο ασύνδετοι, που είναι όμως αδύνατο να τους ξεχωρίσουμε. Συνδέονται μικρούς βρόχους, έναν έναν, μπορούμε να κατασκευάσουμε επιμήκεις αλυσίδες, ακόμη και κόμβους (L_5) αυτών. Διασκεδαστική είναι και μια αλυσίδα κάποιων φαινομενικά απλών βρόχων (L_6): αν κόψουμε το πιο αριστερό διπλό σημείο αντικατασταθεί με το αντίθετο), λύνεται ολόκληρη η αλυσίδα. Αυτό το φαινόμενο μοιάζει με το ξήλωμα ενός νάιλον



Σχήμα 6

Η σχέση του κουβαριού (αξίωμα (3)) για το πολυώνυμο Conway.

καλούνται ή ενός μάλλινου πουλόβερ.

Άσκηση 5. Πώς συνδέονται μεταξύ τους οι πάνω και οι κάτω κλωστές σε μια ραπτομηχανή; Προσπαθήστε να σχεδιάσετε αυτό το δεσμό.

Φτάνουν όμως τα γεωμετρικά παιχνίδια με δεσμούς. Ας προχωρήσουμε αμέσως στην κατασκευή της αναλλοίωτης που χρειαζόμαστε. Έχει πάρει το όνομά της από τον άγγλο μαθηματικό John Horton Conway...

Το πολυώνυμο Conway

Στην επιστημονική βιβλιογραφία το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται συχνότερα πολυώνυμο Alexander-Conway. Ο James W. Alexander, ένας εξαιρετικός αμερικανός τοπολόγος, επινόησε το πολυώνυμό του πριν από τον Conway, το 1933 (το πολυώνυμο του Conway διαφέρει από του Alexander κατά μία απλή αλλαγή της μεταβλητής). Όμως, η —απολαυστικά όμορφη— κατασκευή του Alexander δεν είναι καθόλου στοιχειώδης. Και φυσικά, η συμβολή του Conway δεν έγκειται στην απλή αλλαγή της μεταβλητής —ανακάλυψε μια ολοκληρωτικά στοιχειώδη αξιωματική κατασκευή του πολυώνυμου. Αυτή την κατασκευή θα την παρουσιάσω στη συνέχεια χρησιμοποιώντας στην ονομασία της μόνο το όνομα του Conway, ενός από τους λαμπρότερους και πιο πολύπλευρους μαθηματικούς αυτού του αιώνα. Είναι δημιουργός του «Παιχνιδιού της ζωής», των υπερπραγματικών αριθμών, διαφόρων «σποραδικών τεράτων» (είναι κάποια συγκεκριμένα σημαντικά παραδείγματα ομάδων), και πολλών άλλων έξυπνων κατασκευών.⁴

4. Στα επόμενα τεύχη του ελληνικού *Quantum* θα δημοσιευθούν άρθρα που έχει γράψει ο ίδιος ο Conway ειδικά για τους αναγνώστες του *Quantum*. (Σ.τ.ε.)

Ο Conway θέτει ως αίτημα ότι κάθε διάγραμμα L ενός κόμβου ή ενός δεσμού συνδέεται με ένα πολυώνυμο του x με ακέραιους συντελεστές που συμβολίζεται ως $P_L(x)$. Αυτή η αντιστοιχία πρέπει να ικανοποιεί τα τρία επόμενα αξιώματα:

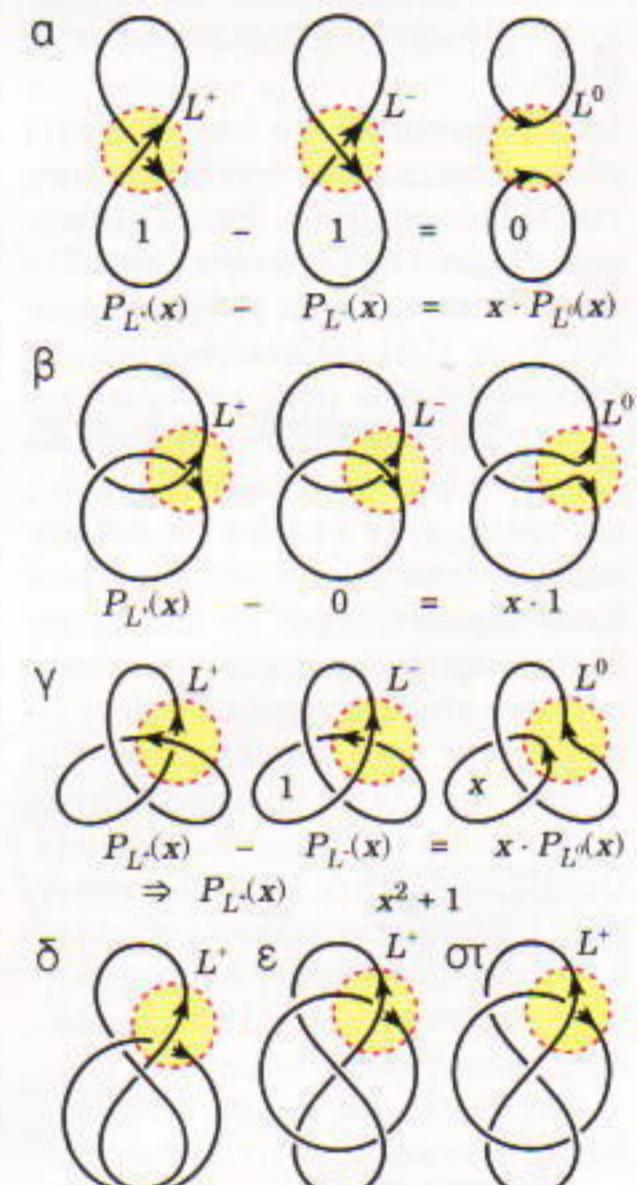
1. Τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν στα ισοδύναμα διαγράμματα L και L' είναι ίσα:

$$P_L(x) = P_{L'}(x).$$

2. Ένας τετριμένος κόμβος αντιστοιχεί στο μηδενικού βαθμού πολυώνυμο που ισούται με 1:

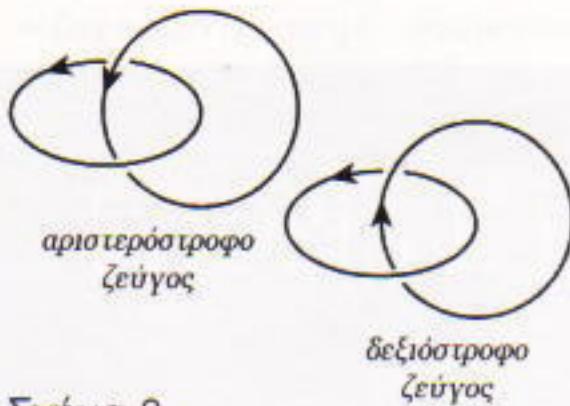
$$P_0(x) = 1.$$

3. (Η σχέση του κουβαριού.) Τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν στους τρεις δεσμούς L^+ , L^- και L^0 οι οποίοι συμπίπτουν μεταξύ τους παντού εκτός από την περιοχή ενός μικρού



Σχήμα 7

Τα πολυώνυμα Conway για (a) ένα ζεύγος ασύνδετων βρόχων L^0 ($P_{L^0}(x) = 0$), (b) το αριστερόστροφο (Σχήμα 8) ζεύγος συνδεδεμένων βρόχων L^+ , (c) το τριφύλλι L^+ ($P_{L^+}(x) = x$), (d) ο κόμβος «οκτάρι» L^+ , (e) ο δεσμός «διάτρητο οκτάρι», (στ) η άλλη τροποποιηση του δεσμού «διάτρητο οκτάρι».



Σχήμα 8

Οι απλούστεροι αριστερόστροφοι και δεξιόστροφοι δεσμοί δύο βρόχων.

κύκλου (όπου έχουν τη μορφή που βλέπετε στο Σχήμα 6), συνδέονται με την εξίσωση

$$P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x) = x \cdot P_{L^0}(x).$$

Το γιατί υπάρχει το πολυώνυμο $P_L(x)$ για οποιοδήποτε διάγραμμα L και γιατί προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα αξιώματα είναι ερωτήματα που δεν θα τα εξετάσουμε σε τούτο το σημείο. Ας μάθουμε να υπολογίζουμε τα πολυώνυμα Conway με βάση τα παραπάνω αξιώματα.

Στο Σχήμα 7α βλέπουμε πώς βρίσκουμε το πολυώνυμο Conway για ένα ζεύγος ασύνδετων βρόχων. Αρχίζουμε με το διάγραμμα L^+ ενός τετριμμένου κόμβου με ένα διπλό σημείο. Βάσει των αξιωμάτων (1) και (2), $P_{L^+}(x) = 1$. Η αντικατάσταση του διπλού σημείου με το αντίθετό του και η απομάκρυνση του (σύμφωνα με τη σχέση του κουβαριού (3)) οδηγεί σε ένα διάγραμμα τετριμμένου κόμβου, το L^- , και ένα ζεύγος ασύνδετων βρόχων, το L^0 . Εφαρμόζοντας το αξίωμα (3), παίρνουμε

$$P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x) = x \cdot P_{L^0}(x)$$

—δηλαδή, $1 - 1 = x \cdot P_{L^0}(x)$. Επειδή ότι $P_{L^0}(x) = 0$, δηλαδή, το πολυώνυμο Conway ενός ζεύγους ασύνδετων βρόχων ισούται με μηδέν.

Ας υπολογίσουμε τώρα το πολυώνυμο Conway για ένα ζεύγος συνδεδεμένων βρόχων. Παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού έχουμε θεωρήσει προσανατολισμένες διαδρομές, υπάρχουν δύο είδη τέτοιων ζευγών: δεξιόστροφα ζεύγη και αριστερόστροφα. Για να καταλάβετε σε τι διαφέρουν, πρέπει να κρατήσετε τους βρόχους σταθερά στο μυαλό σας και να ονομάσετε τον έναν από τους δύο «πρώτο» και τον άλλον «δεύτερο».

Όταν ο δεύτερος βρόχος διαπερνά

το επίπεδο του πρώτου κατά την κατεύθυνση που ορίζει ο κανόνας «δεξιού χεριού» (που είναι η κατεύθυνση του δεξιού αντίχειρά σας όταν τα υπόλοιπα δάκτυλα του δεξιού χεριού καμπυλώνονται κατά την κατεύθυνση του πρώτου βρόχου), τότε αυτό το ζεύγος είναι δεξιόστροφο. Στην αντίθετη περίπτωση είναι αριστερόστροφο (Σχήμα 8).

Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι ένας δεξιόστροφος (αριστερόστροφος) δεσμός παραμένει δεξιόστροφος (αριστερόστροφος) αν αλλάξουμε την αριθμηση των βρόχων, αλλά γίνεται αριστερόστροφος (δεξιόστροφος) αν αντιστρέψουμε την κατεύθυνση ενός βρόχου. Στο Σχήμα 7β, το L^+ είναι ένα αριστερόστροφο ζεύγος συνδεδεμένων βρόχων. Αν εφαρμόσουμε τη σχέση του κουβαριού στο δεξιό του διπλό σημείο παίρνουμε, διαδοχικά, το διάγραμμα L^- (ισοδύναμο με ένα ασύνδετο ζεύγος) και έναν τετριμμένο κόμβο L^0 (με ένα διπλό σημείο). Βάσει του αξιώματος (1) και του προηγούμενου υπολογισμού μας, $P_{L^+}(x) = 0$. Τότε, από τα αξιώματα (1) και (2), $P_{L^0}(x) = 1$.

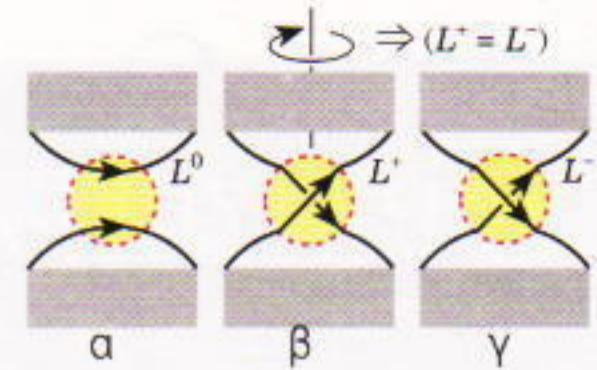
Με αντικατάσταση στο αξιώμα (3) βρίσκουμε τώρα ότι $P_{L^-}(x) = x$ — με άλλα λόγια, το πολυώνυμο Conway του απλούστερου αριστερόστροφου δεσμού δύο βρόχων ισούται με x . Στην περίπτωση του δεξιόστροφου δεσμού το πολυώνυμο ισούται με $-x$. Αυτό το διαπιστώνουμε αν αντιστρέψουμε τα βέλη στους πάνω βρόχους του Σχήματος 7β. Οι δεσμοί L^+ και L^- αλλάζουν τότε ρόλους στη σχέση του κουβαριού (και, επιπλέον, αλλάζει το σχήμα του τετριμμένου κόμβου L^0).

Στο Σχήμα 7γ παρουσιάζεται ο υπολογισμός του πολυωνύμου Conway για τον κόμβο τριφύλλι. Παρατηρήστε ότι η εφαρμογή της σχέσης του κουβαριού δημιουργεί εδώ έναν δεσμό (L^0) — ο κόμβος μετατρέπεται σε αριστερόστροφο ζεύγος συνδεδεμένων βρόχων. Γι' αυτό το λόγο αναγκαστήκαμε να θεωρήσουμε δεσμούς και όχι απλώς κόμβους.

Ασκήσεις

6. Χρησιμοποιώντας το Σχήμα 7β, υπολογίστε το πολυώνυμο Conway για τον κόμβο «οκτάρι».

7. Υπολογίστε το πολυώνυμο Conway για τις αριστερόστροφες και τις



Σχήμα 9

Μια απόδειξη του θεωρήματος των ασύνδετων δεσμών (όταν περιστρέφεται το πάνω πλαίσιο κατά 360°, ο δεσμός L^+ μετατρέπεται στον L^-).

δεξιόστροφες τροποποιήσεις του δεσμού «διάτρητο οκτάρι» που παρουσιάζονται στα Σχήματα 7ε και 7στ. (Υπενθύμιση: μην ξεχνάτε να ξεχωρίζετε τους απλούστερους δεξιόστροφους και αριστερόστροφους δεσμούς.)

Για να συνεχίσουμε τους υπολογισμούς μας, χρειαζόμαστε μια συγκεκριμένη γενική ιδιότητα των πολυωνύμων Conway...

Το πολυώνυμο ενός ασύνδετου δεσμού

Λέμε ότι ένας δεσμός είναι ασύνδετος αν αποτελείται από δύο τμήματα που δεν συνδέονται μεταξύ τους.

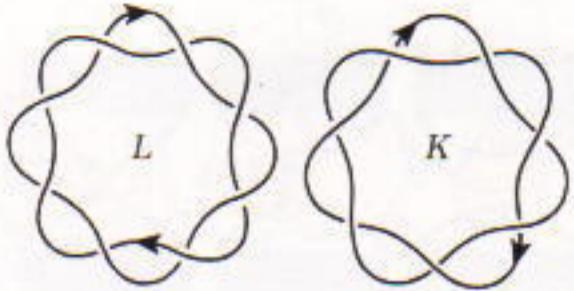
ΘΕΩΡΗΜΑ. Το πολυώνυμο Conway ενός ασύνδετου δεσμού ισούται με το μηδέν.

Για να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, ας φανταστούμε ότι περικλείουμε τα δύο τμήματα του δεδομένου ασύνδετου δεσμού L^0 σε δύο ξεχωριστά πλαίσια που τα τοποθετούμε τότε ώστε το ένα κοντά στο άλλο. Τραβάμε ένα μικρό κομμάτι της κλωστής από κάθε πλαίσιο και τοποθετούμε το ένα κομμάτι δίπλα στο άλλο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9α. Εφαρμόζοντας τη σχέση του κουβαριού, παίρνουμε δύο νέους δεσμούς L^+ και L^- (Σχήματα 9β, 9γ). Τότε,

$$P_{L^0}(x) = P_{L^+}(x).$$

Πραγματικά, αν περιστρέψουμε δεξιόστροφα κατά 360° το πάνω πλαίσιο γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του, το L^+ μετατρέπεται στο L^- , οπότε η προηγούμενη ισότητα έπειτα από το αξίωμα (1). Τότε, βάσει της σχέσης του κουβαριού,

$$P_{L^0}(x) = x^{-1}(P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x)) = 0,$$



Σχήμα 10

Ένας σπειρογειδής δεσμός και ένας σπειροειδής κόμβος (μπορούμε να τους θεωρήσουμε συστραμμένες σπείρες).

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ασκήσεις

8. Επαληθεύστε ότι το πολυώνυμο Conway των δακτυλίων Borromean ισούται με x^4 .

9. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Conway για το δεσμό και τον κόμβο του Σχήματος 10.

10. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Conway δεν είναι πλήρης αναλλοιώτη —δηλαδή, βρείτε δύο διαφορετικούς κόμβους με το ίδιο πολυώνυμο Conway. Υπόδειξη: το απλούστερο παράδειγμα είναι το τριφύλλι και το κατοπτρικό του είδωλο. Για να αποδείξουμε ότι δεν είναι ισοδύναμα, μπορούμε να τροποποιήσουμε το πολυώνυμο Conway και να λάβουμε το πολυώνυμο Jones, το οποίο ορίζεται με τον ίδιο τρόπο, με μοναδική διαφορά στη σχέση του κουβαριού που λαμβάνει τη μορφή

$$3'. \frac{1}{\sqrt{x}} P_{L'} - \sqrt{x} P_L = \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} P_{L''}.$$

Συνοψίζοντας

Από αυτούς τους λίγους υπολογισμούς μπορείτε να διαπιστώσετε ότι το πολυώνυμο Conway είναι ένα θαυμάσιο εργαλείο που μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε κόμβους και δεσμούς και να διαπιστώσουμε ότι δεν είναι τετριμένοι. Υπολογίζο-

ντας, για παράδειγμα, τα πολυώνυμα για το τριφύλλι, το «οκτάρι» και τους δακτυλίους Borromean (και βλέποντας ότι η τιμή τους δεν είναι 0 ή 1), έχουμε μια αυστηρή απόδειξη ότι δεν μπορούμε να τους ξετυλίξουμε. Ή, βρίσκοντας την τιμή των αντίστοιχων πολυωνύμων, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι οι δεσμοί των Σχημάτων 7e και 7t δεν είναι ισοδύναμοι —κάτι που τελικά δεν είναι και τόσο φανερό.

Φυσικά, όλες αυτές οι αποδείξεις έχουν νόημα μόνο από τη συγμή που έχει εξασφαλιστεί η ύπαρξη και το μονοσήμαντο του πολυώνυμου Conway για κάθε κόμβο και δεσμό. Με τη διατύπωση και μόνο των αξιωμάτων δεν εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει πραγματικά κάποιο αντικείμενο που τα ικανοποιεί (τι θα συμβεί αν περιέχουν εσωτερικές αντιφάσεις;) Πώς θα επιτύχουμε μια τέτοια εξασφάλιση; Μόνο με την απόδειξη της ύπαρξης και του μονοσήμαντου του πολυώνυμου Conway. Όμως, η στοιχειώδης απόδειξη που γνωρίζω είναι εξαιρετικά περιπλοκή και δεν θα την παρουσιάσω εδώ.

Τι ακολουθεί;

Ελπίζω ότι σας άρεσαν οι διάφανες και κομψές κατασκευές που περιγράφαμε. Αξίζει να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχουν πολλά ενεργά αναπτυσσόμενα πεδία στα σύγχρονα μαθηματικά τις θεμελιώδεις αρχές των οποίων μπορούμε να εξηγήσουμε σε μαθητές του λυκείου. Κατά κανόνα, τα σύγχρονα μαθηματικά στηρίζονται σε έναν ευρύτατο κορμό γνώσεων που εκτείνεται πολύ πέρα από την εμβέλεια του προγράμματος του λυκείου (και ακόμη και των πρώτων πανεπιστημιακών ετών). Το τμήμα της θεωρίας των κόμβων που

παρουσιάσα, όμως, είναι σχεδόν στοιχειώδες, παρότι σχετικά καινούργιο (το πολυώνυμο Conway, για παράδειγμα, επινοήθηκε κατά τη δεκαετία του 1970). Πάντως, όσα προσπάθησα να περιγράψω σε τούτο το άρθρο, παρά την ομορφιά τους, δεν αρκούν για να εξηγήσουν το αυξανόμενο ενδιαφέρον για τη θεωρία των κόμβων που ανέφερα στην αρχή.

Η αιτία βρίσκεται αλλού. Πρώτον, στη βαθιά σύνδεση μεταξύ των πολυωνύμων των κόμβων, της στατιστικής φυσικής (συγκεκριμένα, του λεγόμενου μοντέλου Potts για τον πάγο) και της κβαντικής φυσικής (τις λεγόμενες κβαντικές ομάδες), η οποία ανακαλύφθηκε από τον άγγλο μαθηματικό Vaughan F.R. Jones. Δεύτερον, οι κόμβοι έχουν εμφανιστεί στη μοριακή βιολογία (οι κόμβοι στην διπλή έλικα του DNA). Και ο τρίτος παράγοντας προόδου στη θεωρία των κόμβων ήταν η επίλυση των θεμελιώδων προβλημάτων της (της σύγκρισης και του ξετυλίγματος) που βασίστηκε στη λαμπρή γεωμετρική εργασία των γερμανών μαθηματικών W. Haken και H. Waldhausen.

Στις μέρες μας μπορείτε να βρείτε στη μαθηματική βιβλιογραφία περιγραφές των αλγορίθμων για τη σύγκριση και το ξετυλίγμα των κόμβων. Όμως, οι αλγόριθμοι αυτοί είναι ακόμη εξαιρετικά πολύπλοκοι για να υλοποιηθούν μέσω υπολογιστή. Επίσης, ο ρώσος μαθηματικός Sergey Matveev έχει επινοήσει μια πλήρη αναλλοιώτη για τους κόμβους. Ο πρακτικός της υπολογισμός όμως ξεπερνά τις δυνατότητες των σύγχρονων υπολογιστών. Η έρευνα σε αυτή την περιοχή συνεχίζεται. ◻

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 7

Ένα άλλο ενδιαφέρον οιμείο σε αυτή την ιστορία είναι η εξάτμιση του υγρού από τα τοιχώματα της φυσαλίδας. Υπάρχει μια ρίση στη ρωσική γλώσσα: «Φυσαλίδες στις λακκούβες, η βροχή θα συνεχιστεί». Αυτό συμβαίνει επειδή η σχετική υγρασία πλησιάζει το 100% όταν βρέχει δυνατά, ή όταν επικείται μια δυνατή μπόρα ή

μόλις έχει σταματήσει. Στις περιπτώσεις αυτές, η εξάτμιση από τα τοιχώματα της φυσαλίδας είναι αμελητέα. Αυτός ακριβώς ο παράγων επιμηκύνει τη ζωή των μεγάλων φυσαλίδων, οι οποίες είναι τόσο πολλές σε μια δυνατή καλοκαιρινή νεροποντή. Όταν η υγρασία είναι λιγότερη, το νερό εξατμίζεται γρήγορα. Στον ξηρό αέρα, το λεπτό υδάτινο τοιχόματα μιας φυσαλίδας εξαφανίζεται πρακτικά αμέ-

σως. Εάν διαθέτετε ένα υγρόμετρο, μπορείτε να κάνετε τις δικές σας ποσοτικές εκτιμήσεις. Χύστε απλώς λίγο νερό σ' ένα πιατάκι του καφέ και σημειώστε πόσο γρήγορα εξατμίζεται. Το αποτέλεσμα συσχετίζεται με την ένδειξη του υγρομέτρου, που πρέπει να το τοποθετήσετε λίγο μακρύτερα από το πιατάκι ώστε να μην επηρεάζεται άμεσα από το εξατμιζόμενο νερό. ◻

Άθιματα και καθαθίες

Κινηματική στο γήπεδο του μπάσκετ

Roman Vinokur



ΣΥΝΕΒΗ ΣΤΑ ΤΕΛΗ του προγούμενου αιώνα, στο Σπρίνγκφιλντ της Μασσαχουσέττης. Στους φοιτητές του τοπικού κολεγίου άρεσε να παίζουν μπέιμπολ και ράγκμπ, όμως ο ασχημός καιρός τούς ανάγκαζε συχνά να μεταφέρουν το μάθημα της γυμναστικής στο κλειστό γυμναστήριο. Για να κάνει πιο ευχάριστα τα μαθήματα στον περιορισμένο χώρο του γυμναστηρίου, ο γυμναστής Τζέιμς Νέισμιθ εφηύρε ένα νέο παιχνίδι που για τη διεξαγωγή του δεν χρειαζόταν μεγάλη επφάνση. Ο σκοπός του παιχνιδιού ήταν η ρίψη της μπάλας μέσα σ' ένα καλάθι. Το 1891, τη χρονιά που γεννήθηκε το



παιχνίδι, το «καλάθι» δεν ήταν παρά ένα πραγματικό καλάθι ροδάκινων. Αν και οι κανόνες έχουν αλλάξει αρκετά από τότε και το καλάθι έχει εξελιχθεί σε μια αφαίρεση της προηγούμενης μορφής του, η βασική προσπάθεια στην καλαθοσφαίριση παραμένει η ίδια: πρέπει να βάλεις την μπάλα στο καλάθι.

Αλλά εκτός από αυτό καθεαυτό το παιχνίδι του μπάσκετμπολ, μια άλλη μορφή αγωνίσματος έγινε δημοφιλής στις ΗΠΑ: οι αγώνες βολών. Το 1977, ο Τεντ Μάρτιν πέτυχε 2.036 καλαθιές σε 10άριθμες ελεύθερες βολές. Ένα χρόνο αργότερα, ο Φρεντ Νιούμαν πέτυχε 88 συνεχείς καλαθιές με κλειστά μάτια! Όπως και νά 'χει, τα σουτ —μέσα απ' τη ρακέτα ή έξω απ' αυτήν, από το έδαφος ή έπειτα από άλμα—, μαζί με τα δυνατά καρφώ-

ματα και τις ακροβατικές ντρίμπλες, είναι στοιχεία που χαρακτηρίζουν το αθλημα, και το καθιστούν μαγευτικό.

Εάν θα θέλατε να γίνετε κι εσείς καλός σουτέρ, προφανώς θα είχε σημασία το έμφυτο ταλέντο σας. Άλλα θα έπρεπε να ασκηθείτε και στην τεχνική της βολής. Για παράδειγμα, ο αείμνηστος Νιράζεν Πέτροβίτς πήγαινε στο γυμναστήριο κάθε πρωί και έριχνε 500 βολές από διάφορες θέσεις μέσα στο γήπεδο. Η εξάσκηση τελειοποιεί, όπως λένε, αλλά και η γνώση της θεωρίας δεν βλάπτει. Έτσι, λοιπόν, εμείς απ' την πλευρά μας δεν έχουμε άλλο από το να προτείνουμε μια καλή προπόνηση στη φυσική των βολών, σ' αυτό το θεαματικό και δημοφιλές αθλημα.

Οι κύριες φάσεις στην κίνηση της μπάλας, όταν αυτή βάλλεται με το

ένα χέρι, φαίνονται στην παραπάνω εικόνα. Χρειάζεται να υπολογίσουμε την καλύτερη γωνία βολής θ , η οποία οδηγεί στο ακριβέστερο σουτ.

Το στεφάνι βρίσκεται σε ύψος $H = 3,05$ m (ή 10 πόδια —το ίδιο ύψος στο οποίο ο Νέοσμιθ κάρφωσε το καλάθι ροδάκινων στο Σπρίνγκφιλντ) πάνω από το έδαφος. Η εσωτερική διάμετρος του στεφανιού είναι $D = 0,45$ m και η διάμετρος της μπάλας περίπου το ήμισυ του D . Υποθέστε ότι η μπάλα εισέρχεται στο καλάθι υπό γωνία φ ως προς την οριζόντια διεύθυνση, και ότι η τροχιά του κέντρου της μπάλας βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο του στεφανιού.

Η συνθήκη υπό την οποία η μπάλα περνά μέσα απ' το στεφάνι χωρίς να το αγγίξει, μπορεί να γραφεί ως

$$|\Delta L| \leq \ell = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{1}{2\pi\mu\varphi} \right), \quad (1)$$

όπου ΔL είναι η απόσταση του κέντρου O της μπάλας από το κέντρο A του στεφανιού. Η συνθήκη αυτή έχει νόημα εάν $\varphi > 30^\circ$. Εάν $\varphi < 30^\circ$, η μπάλα θα χτυπήσει οπωσδήποτε στο χείλος του στεφανιού και —αυτό συμβαίνει συχνά (ιδιαίτερα όταν η ταχύτητα της μπάλας είναι αρκετά μεγάλη τη στιγμή που χτυπά στο χείλος)— θα ανακλαστεί αφήνοντας το δίχτυ... ανέγγιχτο. Εάν αυξήσουμε τη γωνία φ , αυξάνουμε τις πιθανότητές μας να «πετύχουμε» καλάθι, καθώς αυξάνει και το ℓ . Άρα, εάν $\varphi = 40^\circ$, τότε $\ell \approx 0,05$ m· αν $\varphi = 60^\circ$, τότε $\ell \approx 0,095$ m—σχεδόν διπλάσιο του προηγούμενου· αν $\varphi = 90^\circ$, το ℓ παίρνει τη μέγιστη τιμή του, 0,112 m.

Είναι φανερό ότι η γωνία φ αυξάνει όσο μεγαλύτερη γίνεται η γωνία βολής θ . Αν προσπαθήσετε όμως να σουτάρετε υπό μία όντως μεγάλη γωνία ($\theta \geq 70^\circ$), είναι μάλλον δύσκολο να σημειώσετε καλάθι —εννοώ, εφόσον απέχετε κάποια απόσταση από το καλάθι. Ορισμένες φορές είναι δύσκολο και να φτάσει η μπάλα ώς το στεφάνι —απαιτείται να καταβάλετε μεγάλη προσπάθεια. Όταν οι παίκτες του μπάσκετ σουτάρουν υπό μεγάλες γωνίες, δεν το κάνουν επειδή έτσι τους αρέσει —αναγκάζονται λόγω των μακριών χεριών των αντίπαλων παίκτων.

Ωστόσο, για να απλοποιήσουμε τα πράγματα, μπορούμε να αγνοήσουμε τέτοια εμπόδια στις βολές της καλαθοσφαίρισης. Συνήθως αυτό συμβαίνει όταν ένας παίκτης βρίσκεται μακριά από το καλάθι και, κατά συνέπεια, μακριά από τους αμυντικούς παίκτες. Ας αγνοήσουμε επίσης την αντίσταση του αέρα σε αυτό το στάδιο της ανάλυσής μας, παρότι η επίδρασή του (αντίθετα με την επίδραση των αντίπαλων παίκτων) αυξάνει με την απόσταση από το καλάθι.

Εστια ότι η μπάλα εγκαταλείπει το χέρι του παίκτη τη στιγμή t_0 , όταν το κέντρο της βρίσκεται στο σημείο B . Η μπάλα θα φτάσει στο κέντρο του στεφανιού (σημείο A) τη στιγμή t . Η αρχική ταχύτητά της είναι V , και η απόσταση του καλαθιού από το σημείο βολής (η προβολή του ευθύγραμμου τμήματος BA στο οριζόντιο επίπεδο) ισούται με L . Εδώ εξετάζουμε ένα «καθαρό» σουτ —δηλαδή μια βολή που δεν ανακλάται πάνω στο ταμπλό. Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση υλικού σημείου, το οποίο έχει βληθεί υπό γωνία θ ως προς την οριζόντια διεύθυνση:

$$L = (V \sin \theta) t,$$

$$h = L \varepsilon \varphi = (V \eta \mu \theta) t - gt^2/2.$$

Το $g = 9,81$ m/sec² είναι η επιάχυνση της βαρύτητας, θ είναι η ζητούμενη γωνία υπό την οποία η μπάλα εγκαταλείπει το χέρι του παίκτη και h είναι το ύψος του κέντρου του στεφανιού ως προς το αρχικό σημείο της τροχιάς της μπάλας (B).

Η γωνία φ υπό την οποία η μπάλα εισέρχεται στο στεφάνι, προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$\varepsilon \varphi \varphi = \frac{|V_{yA}|}{V_{xA}} = \frac{|V \eta \mu \theta - gt|}{V \sin \theta},$$

όπου V_{xA} και V_{yA} είναι αντίστοιχα η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας στο σημείο A . Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις κίνησης (απαλείφοντας τον άγνωστο t) στη μορφή

$$L = \frac{V^2 \eta \mu (2\theta - a)}{g} \frac{\eta \mu a}{\sin a}, \quad (2)$$

$$\varphi = \text{τοξεφ}(εφθ - 2 \varepsilon \varphi). \quad (3)$$

Ας αναλύσουμε τις εξισώσεις αυτές ώστε να καταλήξουμε σε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Από την εξίσωση (2) έπειτα πως ένας παίχτης που απέχει δεδομένη απόσταση από την μπάσκετ μπορεί να επιτύχει ένα καλό σουτ με την ελάχιστη ταχύτητα —και, κατά συνέπεια, με την ελάχιστη κατανάλωση ενέργειας— όταν $2\theta - a = 90^\circ$. Άρα η βέλτιστη γωνία βολής είναι

$$\theta = \theta_{\text{βέλτ.}} = 45^\circ + \frac{a}{2}. \quad (4)$$

Η γωνία $a = \text{τοξεφ}(h/L)$ φαίνεται στην εικόνα και εξαρτάται από το ύψος του παίκτη και, αν ο παίκτης πηδά τη στιγμή που σουτάρει, από το ύψος του άλματος. Επίσης, η γωνία a εξαρτάται από το L . Στην περίπτωση μακρινού σουτ ($h \ll L$), η γωνία αυτή είναι πολύ μικρή και, σύμφωνα με την εξίσωση (4), η βέλτιστη γωνία βολής ισούται περίπου με 45° (ή ισως κατά λίγες μοίρες μεγαλύτερη).

Ας ελέγξουμε αυτό το συμπέρασμα, υποθέτοντας ότι η μπάλα βρίσκεται σε ένα ύψος 2 m στην αρχική φάση της βολής (που είναι η συνήθης περίπτωση εφόσον δεν είστε γίγαντες και σουτάρετε χωρίς να πηδάτε). Τότε $h = 3,05 - 2,0 = 1,05$ m. Λαμβάνοντας ως απόσταση $L = 6$ m, προκύπτει $a = \text{τοξεφ}(1,05/6) \approx 10^\circ$ —δηλαδή (βλ. εξίσωση (4)), $\theta_{\text{βέλτ.}} = 45^\circ + 5^\circ = 50^\circ$. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην εξίσωση (2), υπολογίζουμε ότι η αρχική ταχύτητα της μπάλας θα έπρεπε (στην περίπτωση μας) να ισούται με 8,37 m/sec. Σας φαίνεται μεγάλη η τιμή αυτή; Εάν είστε ικανοί να τρέχετε τόσο γρήγορα, θα τρέχατε την κούρσα των 100 μέτρων σε 11,9 δευτερόλεπτα —όχι άσχημα για τον μέσο αθλητή, αλλά πολύ κάτω από το παγκόσμιο ρεκόρ. Πάντως, αντίθετα προς τα αγωνίσματα στίβου, στο μπάσκετ μπορείται να απαραιτηθείς οι μεγάλες ταχύτητες: όσο μεγαλύτερη γίνεται η αρχική ταχύτητα της μπάλας τόσο μεγαλύτερη ταχύτητα θα έχει αυτή όταν μπαίνει στο καλάθι και τόσο πιθανότερο είναι να ανακλαστεί αν αγγίξει το χείλος του στεφανιού.

Είναι ενδιαφέρον πως όταν η γωνία βολής είναι η βέλτιστη, η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης της μπάλας εί-

ναι ελάχιστη. Πρόκειται για μια ωραία ανακάλυψη. Άλλα η έννοια της βέλτιστης γωνίας έχει το πλεονέκτημα ότι μας οδηγεί σε ένα εκπληκτικό φαινόμενο: το μήκος του σουτ σχεδόν δεν εξαρτάται από μικρές αποκλίσεις της γωνίας βολής από τη βέλτιστη τιμή! Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο επειδή δυστυχώς (ή ευτυχώς) δεν είμαστε ρομπότ — διαπράττουμε σφάλματα, και όχι μόνον κατά τη διάρκεια αγώνων μπάσκετ.

Ας εξετάσουμε ένα σουτ με γωνία βολής θ (όχι κατ' ανάγκη βέλτιστη) και με αρχική ταχύτητα V , η οποία περνά την μπάλα ακριβώς από το κέντρο του στεφανιού. Εάν το σουτ γινόταν υπό γωνία $\theta + \Delta\theta$, όπου η $\Delta\theta$ εκφράζει μια μικρή απόκλιση, το κέντρο της μπάλας θα διαπεράσει το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τα χείλη του στεφανιού όχι στο κέντρο του στεφανιού, αλλά σε κάποιο άλλο σημείο. Ετσι, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BA , θα ισούται με $L + \Delta L$, όπου το ΔL είναι μικρό. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2) (βλ. Παράρτημα, μέρος 1), παίρνουμε

$$\Delta L = 2L \cdot$$

$$\frac{\Delta\theta \cdot \sin(2\theta - a) - (\Delta\theta)^2 \csc(2\theta - a)}{\csc(2\theta - a) - \csc a}. \quad (5)$$

(Εδώ το $\Delta\theta$ είναι εκφρασμένο σε ακτίνια).

Από την εξίσωση (5) έπειται ότι το σφάλμα που οφείλεται στη «γωνιακή» απόκλιση είναι ανάλογο του μήκους του σουτ. Αυτό δεν μας εκπλήσσει· αλλά εδώ υπάρχει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Αν αγνοήσουμε τον όρο της εξίσωσης (5) ο οποίος περιλαμβάνει την πολύ μικρή τιμή $(\Delta\theta)^2$, τότε, αν $\theta = \theta_{\text{bel,t}}$, καταλήγουμε σε ένα παράδοξο (με πρώτη ματιά): $\Delta L = 0$. Είναι πράγματι καταπληκτικό: αν σουτάρετε υπό γωνία $\theta_{\text{bel,t}}$, αποκλείεται να αποτύχετε — με την προϋπόθεση ότι εκτιμάτε σωστά την αρχική ταχύτητα. Όμως αν δεν αγνοήσουμε οποιοδήποτε τμήμα της εξίσωσης (5), λαμβάνουμε

$$\Delta L = -\frac{2L(\Delta\theta)^2}{1 - \csc a}. \quad (6)$$

Επομένως, το ΔL εξαρτάται από την απόκλιση $\Delta\theta$, αν και σε ασήμαντο βαθμό. Αρα, το κύριο πρόβλημα



Σχήμα 1

είναι να περιορίσουμε την απόκλιση $\Delta\theta$. Τι ποοοστό απόκλισης είναι αποδεκτό; Ας το εκτιμήσουμε για την ειδική περίπτωση όπου $a = 0^\circ$, $L = 6$ m. Από την εξίσωση (4) έπειται ότι η βέλτιστη γωνία είναι 45° . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3), παίρνουμε επίσημης $\varphi = 45^\circ$. Αντικαθιστώντας τα αναγκαία δεδομένα στις εξισώσεις (1) και (6) παίρνουμε τελικά, $|\Delta\theta| \leq 4.2^\circ$.

Είναι δυνατόν κάτι τέτοιο; Η εμπειρία λέει ότι είναι, αλλά ας το ελέγξουμε. Δεν θα χρειαστούμε καν μπάλα του μπάσκετ.

Σχεδιάστε δύο σημεία B και A πάνω σε ένα φύλλο χαρτιού. Ακουμπήστε τη μύτη ενός στιλό διαρκείας στο σημείο B και, διατηρώντας το βλέμμα σας πάνω στο σημείο A , σχεδιάστε γρήγορα μια γραμμή που να συνδέει αυτά τα σημεία. Η προκύπτουσα γραμμή 1 (Σχήμα 1) ασφαλώς δεν είναι μια ιδανική ευθεία, και ίσως να μη διέρχεται καν από το σημείο A . Τώρα πάρτε έναν χάρακα και σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα BA και BC , τα οποία συμπίπτουν προσεγγιστικά με τη γραμμή 1 στην αρχή τους. Μετρήστε τη γωνία ABC μ'ένα μοιρογνωμόνιο. Πιθανότατα δεν θα είναι μεγαλύτερη από 3° ως 4° . Με λίγη εξάσκηση μπορείτε να έχετε ακόμη καλύτερα αποτέλεσματα.

Παρότι το μικρό αυτό πείραμα δεν έχει άμεση σχέση με την καλαθοσφαιριση, ωστόσο χαρακτηρίζει την ακριβεία της κίνησης του χεριού σας σε μια οπτικά καθορισμένη διεύθυνση. Δεν είναι το ίδιο σαν να σουτάρετε με μια μπάλα του μπάσκετ, είναι πάντως ενθαρρυντικό.

Ας επανέλθουμε στις σχέσεις μας και ας βρούμε τη γωνία φ υπό την οποία η μπάλα εισέρχεται στο καλάθι, εάν ριφθεί υπό τη βέλτιστη γωνία $\theta = \theta_{\text{bel,t}} = 45^\circ + a/2$. Έπειτα από ορισμένους απλούς τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς (βλ. Παράρτημα, μέρος 2), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2) και (4), παίρνουμε

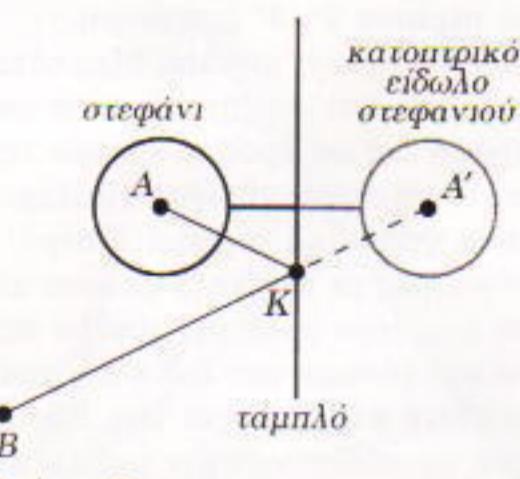
$$\varphi(\theta_{\text{bel,t}}) = 45^\circ - \frac{a}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι για $a > 30^\circ$, ένα σουτ υπό τη βέλτιστη γωνία δεν θα είναι ακριβές, επειδή στην περίπτωση αυτή $\varphi < 30^\circ$, και η μπάλα δεν θα καταφέρει να περάσει «καθαρά» μέσα από το στεφάνι. Ακόμη και αν $a = 20^\circ$ (δηλαδή $\varphi = 35^\circ$), δεν υπάρχει μεγάλη πιθανότητα επιτυχίας, αφού το φ θα είναι σχετικά μικρό (βλ. εξισώση (1)).

Παρόμοιες καταστάσεις (που χαρακτηρίζονται από μεγάλη γωνία a) προκύπτουν όταν κάποιος σουτάρει από μικρή απόσταση (όχι μεγαλύτερη από 2 m). Τι θα πρέπει να κάνουμε τότε; Αφού είναι ευκολότερο να σημειώσουμε καλάθι από κοντά, δεν είναι τόσο σημαντικό να πετύχουμε τη βέλτιστη γωνία. Μπορούμε να σουτάρουμε υπό μεγαλύτερες γωνίες. Και μπορούμε να βελτιώσουμε τις συνθήκες βολής πηδώντας: όχι μόνο μεταθέτουμε το κέντρο της μπάλας πλησιέστερα προς το επίπεδο του στεφανιού (οπότε, μικραίνει η γωνία a), αλλά σηκωνόμαστε και ψηλότερα από τους αντιπάλους.

Ένας άλλος τρόπος για να μειώσουμε τη γωνία σε κοντινές βολές είναι να αυξήσουμε τεχνητά το μήκος του σουτ. Αυτό επιτυγχάνεται με αναπήδηση της μπάλας στο ταμπλό. Στο Σχήμα 2 μπορείτε να δείτε την προβολή της τροχιάς της μπάλας πάνω στο οριζόντιο επίπεδο (για μια πλήρως ελαστική κρούση). Η μπάλα ρίχνεται προς το κατοπτρικό είδωλο του στεφανιού ως προς το ταμπλό. Είναι σαφές ότι $|BA| < |BA'|$. Φυσικά η διαφορά μεταξύ $|BA|$ και $|BA'|$ είναι τόσο μικρότερη όσο μεγαλύτερο είναι το $|BA|$. Άρα τα σουτ με ταμπλό είναι χρήσιμα μόνον από μάλλον κοντινές αποστάσεις.

Σε όλους τους υπολογισμούς μας



Σχήμα 2

αγνοήσαμε την αντίσταση του αέρα. Όλοι, όμως, γνωρίζουμε πόσο σημαντικός είναι αυτός ο παράγοντας σε πολλά φυσικά φαινόμενα. Για παράδειγμα, η σφαίρα ενός τουφεκιού θα διήνυε δεκαπλάσια απόσταση εάν δεν υπήρχε η ατμόσφαιρα. Η αντίσταση του αέρα εξαρτάται από το σχήμα του κινούμενου σώματος (σκεφτείτε τα αεροδυναμικά σχήματα των αεροπλάνων και των αγωνιστικών αυτοκινήτων), από τη μέγιστη διατομή κάθετα προς τη διεύθυνση κίνησης (γι' αυτό ένας μοτοσικλετιστής σκύβει μπροστά όταν τρέχει σε αγώνες), και ιδιαίτερα από την ταχύτητα του σώματος. Πιθανότατα έχετε προσέξει ότι ο αέρας αλλάζει την τροχιά της μπάλας του τένις, της μπάλας του ποδοσφαίρου, κ.ο.κ. Η μπάλα του μπάσκετ επηρεάζεται από τον αέρα σε μικρότερο βαθμό, κυρίως επειδή η κίνησή της είναι πολύ πιο αργή. Μια μπάλα αποκτά μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα όταν τη χτυπήσουμε με μια ρακέτα ή την κλωτσήσουμε, παρά όταν τη σπρώξουμε με τα δάκτυλα. Οι μπάλες του τένις κινούνται με ταχύτητες έως 30 m/sec, ενώ μια μπάλα του μπάσκετ συνήθως δεν κινείται ταχύτερα από 10 m/sec.

Για να συμπεριλάβουμε την αντίσταση του αέρα στα σουτ της καλαθοσφαιρίσης θα χρειαζόταν να προσφύγουμε σε διαφορικές εξισώσεις. Ας δούμε απλώς ορισμένα αποτελέσματα μιας τέτοιας ανάλυσης. Παρότι η αντίσταση του αέρα μειώνει την απόσταση που διανύει μια μπάλα, η επίδρασή του στη βέλτιστη γωνία βολής είναι στην πραγματικότητα επουσιώδης. Για παράδειγμα, η βέλτιστη γωνία που υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (4) για ένα σουτ από απόσταση 6-7 m, είναι μόνο κατά περίου 2°-3° μικρότερη.

Η κίνηση της μπάλας εξαρτάται επίσης, και κατ' αρχήν, από την περιστροφή της ως προς το κέντρο της. Σε αυτό το στριφογύρισμα εμπλέκονται τα γειτονικά στρώματα αέρα ο συνδυασμός με την κατά μέτωπο κίνηση του αέρα προς την μπάλα παράγει μια δύναμη που δρα στην μπάλα κάθετα στην τροχιά της. Επειδή συχνά προσδίδουμε στην μπάλα μικρή ανάστροφη περιστροφή γύρω από

οριζόντιο άξονα, η εν λόγω δύναμη έχει ελαφρά «ανυψωτική δράση». Εν πάση περιπτώσει, ο ρόλος της περιστροφής μιας μπάλας είναι πολύ πιο ενισχυμένος στο τένις, το μπέιζμπολ, το γκολφ και άλλα αθλήματα, στα οποία μπάλες μικρότερης μάζας ωθούνται σε πολύ μεγαλύτερες ταχύτητες απ' ό,τι στο μπάσκετπολ.

Ελπίζω ότι τούτο το άρθρο σας έπεισε πως δεν είναι τόσο δύσκολο να συνδυάσετε τη δουλειά με τη διασκέδαση, την επιστήμη με τα σπόρους και τη μελέτη με τα παιχνίδια.

Παράρτημα

1. Η μεταβολή στο μήκος του σουτ, στην κατάσταση που αναφέρεται στο άρθρο, είναι

$$\Delta L = L' - L$$

$$\begin{aligned} &= \frac{V^2 \eta \mu (2\theta' - a) - \eta \mu a}{g \sin a} \\ &\quad - \frac{V^2 \eta \mu (2\theta - a) - \eta \mu a}{g \sin a} \\ &= L \frac{\eta \mu (2\theta' - a) - \eta \mu (2\theta - a)}{\eta \mu (2\theta - a) - \eta \mu a}. \end{aligned}$$

Μετασχηματίζοντας τη διαφορά των ημιτόνων στον αριθμητή της τελευταίας έκφρασης, παίρνουμε

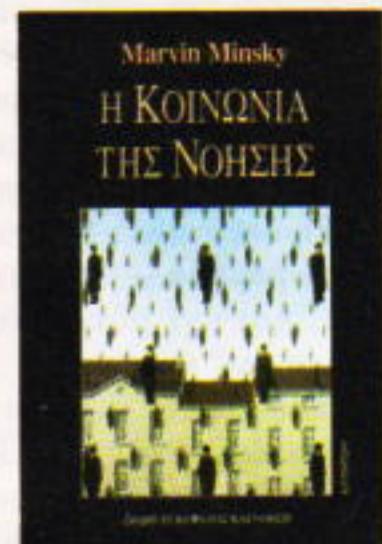
$$\begin{aligned} &\eta \mu (2\theta' - a) - \eta \mu (2\theta - a) \\ &= 2 \sin(2\theta + \Delta\theta - a) \eta \mu (\Delta\theta) \\ &= 2 [\sin(2\theta - a) \sin(\Delta\theta) \\ &\quad - \cos(2\theta - a) \cos(\Delta\theta)] \eta \mu (\Delta\theta). \end{aligned}$$

Εάν εκφράσουμε τη $\Delta\theta$ σε ακτίνια, τότε ισχύουν οι προσεγγιστικές εξισώσεις $\sin(\Delta\theta) \approx 1$ και $\cos(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$ (αφού $\Delta\theta \ll 1$). Χρησιμοποιώντας τες στους τύπους που προέκυψαν παραπάνω, μπορούμε να λάβουμε την εξίσωση (5).

2. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3) το $\theta = \theta_{\text{bel}}$ = $45^\circ + a/2$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_{\text{bel}}) &= \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\theta_{\text{bel}}) - \sin(a/2)}{\cos(\theta_{\text{bel}}) - \cos(a/2)} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{1 + \cos(a/2)}{1 - \cos(a/2)} - \frac{4 \cos(a/2)}{1 - \cos^2(a/2)} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos(a/2)}{1 + \cos(a/2)} \right) = 45^\circ - \frac{a}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



Marvin Minsky

Η ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΝΟΗΣΗΣ

Ο Marvin Minsky, ένας από τους «πατέρες» της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και συνιδρυτής του Εργαστηρίου Τεχνητής Νοημοσύνης στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασσαχουσέτης, δίνει μια επαναστατική απάντηση για το πώς λειτουργεί η νόηση. Το βιβλίο του μοιάζει μ' ένα διανοητικό παζλ: κάθε σελίδα του είναι και ένα κομμάτι του παιχνιδιού. Στο τέλος του αναδύεται σαν μωσαϊκό ιδεών μια ενοποιημένη θεωρία της νόησης.

• «Ένα κολάζ διαφορετικών ιδεών που αφήνει άναυδο τον αναγνώστη: το βιβλίο είναι γεμάτο ευφυΐα και εύστοχους αφορισμούς.»

—Douglas Hofstadter,
συγγραφέας του βιβλίου
Gödel, Escher, Bach

• «270 καταπληκτικά, πρωτότυπα κείμενα...»

—Isaac Asimov

Σελ.: 584, 14 × 21 εκ., Α/Μ, 7.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: 3643272, 3645098,
fax: 3641864

Για να περνά η ώρα

Σ41

Το πρόβλημα του 1995. Πόσοι αριθμοί καταλήγουν στα τέσσερα ψηφία 1995 και γίνονται ακέραιο πλήθος φορές μικρότεροι όταν σβήσουμε αυτά τα ψηφία τους; (V. Dubrovsky)



Σ42

Σ42

Αριθμητικοί ρόμβοι. Φυσικοί αριθμοί είναι ομαδοποιημένοι σε ρόμβους με τον τρόπο που βλέπετε στο σχήμα. Τα αθροίσματα των αριθμών στους ρόμβους ικανοποιούν έναν συγκεκριμένο κανόνα. Μαντέψτε τον κανόνα και αποδείξτε την εικασία σας. (V. Proizvolov)



Σ43

Η πυκνότητα της πέτρας. Πώς μπορούμε να μετρήσουμε την πυκνότητα μιας πέτρας χωρίς να μετρήσουμε τον όγκο της; (Αρχιμήδης)



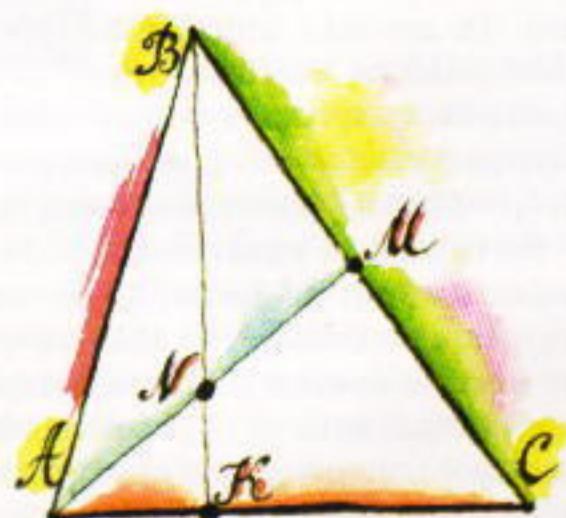
Σ44

Σχήματα με σπίρτα. Εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο κανονικά πεντάγωνα με δέκα σπίρτα. Δεν είναι όμως εξίσου εύκολο να τοποθετήσουμε αυτά τα δέκα σπίρτα έτσι ώστε να σχηματίσουμε ένα κανονικό πεντάγωνο και πέντε κανονικά τρίγωνα. Προσπαθήστε! Και τι λέτε για δύο κανονικά πεντάγωνα και πέντε ισοσκελή τρίγωνα; (A. Abbasov, V. Dubrovsky)



Σ45

Διέλευση από το μέσο μιας διαμέσου. Η ευθεία BK διχοτομεί τη διάμεσο AM ενός τριγώνου ABC . Σε ποιο λόγο διαιρεί την πλευρά AC ; (V. Chichin)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 70

Μοντέρνες συγχορδίες

O Michael Green μιλά στο ελληνικό Quantum

Ο Michael Green, ένας από τους θεμελιωτές της θεωρίας χορδών, της περισσότερο συζητημένης θεωρίας στη σύγχρονη φυσική, επισκέφθηκε λίγες μέρες πριν από το Πάσχα την Κρήτη και το Πανεπιστήμιό της, προσκεκλημένος του συναδέλφου και συνεργάτη του καθηγητή Θ. Τομαρά. Μια υπέροχη διάλεξή του για τις τελευταίες εξελίξεις στη θεωρία χορδών αποτέλεσε την αφορμή για τη συνέντευξη που ευγενέστατα δέχτηκε να παραχωρήσει στον Γιώργο Ευαγγελόπουλο.

Ερ.: Καθηγητά Green, θα μπορούσατε να μας πείτε πώς και πώς προκύπτουν οι θεωρίες χορδών, καθώς επίσης ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά τους;

Απ.: Μεταξύ των στοιχειώδων οωματιδίων αναπτύσσονται η ηλεκτρομαγνητική, η ισχυρή πυρηνική και η ασθενής πυρηνική δύναμη. Αυτές είναι τρεις από τις θεμελιώδεις δυνάμεις. Η τέταρτη δύναμη, η ασθενέστερη όλων, είναι η βαρυτική. Αν αγνοήσουμε τη βαρύτητα, ακριβώς επειδή είναι ιδιαίτερα ασθενής, διαθέτουμε μια αρκετά ικανοποιητική κατανόηση των άλλων δυνάμεων. Στην πραγματικότητα, η κατανόησή μας σχετίζεται με ένα συγκεκριμένο καθιερωμένο μοντέλο, το οποίο αποτελεί συνδυασμό των θεωριών της ισχυρής πυρηνικής δύναμης και της ηλεκτροφενόύς δύναμης. Είναι συναπαστικό το γεγονός ότι διαθέτουμε αυτή την κατανόηση, διότι πριν από 25 χρόνια ουδείς θα περίμενε ότι θα την αποκτούσαμε. Ωστόσο, ας μην ξεχνάμε ότι μιλάμε για μοντέλο και όχι για θεωρία, διότι δεν πρόκειται για πλήρη κατανόηση. Το μοντέλο συμφωνεί πολύ καλά με τα δεδομένα, χρειάζεται όμως να εισαχθούν σ' αυτό πολλές άγνωστες παράμετροι, όπως οι μάζες, τα φορτία των οωματιδίων, κ.ο.κ. Αν γίνει αυτό, παίρνουμε όμορφες προβλέψεις.

Θα θέλαμε να κατανοήσουμε όλα τα διαφορετικά είδη οωματιδίων και δυνάμεων, αρχίζοντας από μια θεμελιώδη αρχή. Ωστόσο, υπάρχει ένα άλλο σοβαρό θεωρητικό πρόβλημα το οποίο κατατρύχει την κβαντομηχανική ήδη αφότου θεμελιώθηκε, κατά τις αρχές του 20ού αιώνα. Αυτό το τρομερό πρόβλημα ανακύπτει όταν προσπαθεί κανείς να συνδύσει την κβαντομηχανική με τη γενική σχετικότητα.



Ο Michael Green συναντήθηκε με τους Edward Witten, John Schwarz και David Gross το περίφημο «κουαρτέτο εγχόρδων», όπως χαρακτηριστήκα τους αποκαλούν εχθροί και φίλοι της σύγχρονης θεωρίας χορδών. Μαζί με τον John Schwarz του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Καλιφόρνιας προσπάθησαν το 1979 να «κατασκευάσουν» μια υπερουμμετρική θεωρία των (κλειστών) χορδών και το 1982 απέδειξαν ότι αυτή δεν περιέχει απειρισμούς. Χάρη στην εργασία τους η θεωρία των υπερχορδών κέρδισε για πρώτη φορά την εξέχουσα θέση που κατέχει σήμερα στα ενδιαφέροντα των θεωρητικών φυσικών. Διδάξει για πολλά χρόνια θεωρητική φυσική στο Queen Mary College του Λονδίνου, ενώ σήμερα είναι καθηγητής στο περίφημο «Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Θεωρητικής Φυσικής» (D.A.M.T.P.) στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ. Έγραψε πολλά άρθρα σε επιστημονικά περιοδικά, και από κοινού με τους J.H. Schwarz και Ed. Witten συνέγραψε το κλασικό δίτομο έργο *Superstring Theory*, Cambridge University Press, 1987.

Πρόκειται ίσως για το θεμελιωδότερο πρόβλημα της φυσικής του 20ού αιώνα: η όμορφη θεωρία του Αϊνστάιν για τη βαρύτητα, η γενική σχετικότητα, η οποία λειτουργεί άριστα σε μακροσκοπική κλίμακα, παρουσιάζει προβλήματα όταν προσπαθεί κανείς να τη συνδυάσει με την κβαντική θεωρία, η οποία υποτίθεται ότι εξηγεί τα φαινόμενα σε μικροσκοπική κλίμακα. Συνεπώς, η περιγραφή της γενικής σχετικότητας σε μικροσκοπικό επίπεδο, η λεγόμενη κβαντική βαρύτητα, παρουσιάζει πλήρη ακαταστασία, είναι σκέτη καταστροφή.

Μπορείτε να καταλάβετε γιατί συμβαίνει αυτό, αν εφαρμόσετε την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, η οποία συνοψίζει ένα μεγάλο μέρος της κβαντικής θεωρίας. Ουσιαστικά, η αρχή της απροσδιοριστίας μάς λέει ότι, αν επιχειρήσουμε να πραγματοποιήσουμε μια μέτρηση σε πάρα πολύ μικρή κλίμακα αποστάσεων, θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει τεράστια απροσδιοριστία στην ορμή, και ως εκ τούτου στην ενέργεια οποιουδήποτε πράγματος αναζητούμε. Όσο πιο μικρή είναι η κλίμακα, τόσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση της ενέργειας —ακόμη και στο κενό! Δηλαδή, η καταστροφή έρχεται όταν προχωρούμε σε εξαιρετικά μικρές κλίμακες. Φανταστείτε ότι μετράτε αποστάσεις με μήκος 10^{-35} m. (Αυτή η εξαιρετικά μικρή κλίμακα ονομάζεται «κλίμακα Planck».) Σε τούτη την κλίμακα, η διακύμανση στην ενέργεια είναι τόσο μεγάλη ώστε, σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας, θα πρέπει να εμφανίζεται μια μικρή μαύρη τρύπα.

Επομένως, μιλάμε για διακυμάνσεις οι οποίες «εμφανίζονται και εξαφανίζονται» και για κενό χώρο ο οποίος δεν

είναι πραγματικά άδειος, αλλά γεράτος μικρές μαύρες τρύπες που «εμφανίζονται και εξαφανίζονται». Στο εσωτερικό μιας μαύρης τρύπας, αλλάζει όλο το νόημα του χώρου και του χρόνου. Άρα, κάθε προσπάθεια να αναπτύξουμε μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας προϋποθέτει μια πλήρη αλλαγή της κατανόησής μας για το χώρο και το χρόνο της φύσης σ' αυτές τις απίστευτα μικρές αποστάσεις.

Υπάρχει προφανώς μια κρίση στη θεωρία, εάν θέλει κανείς να επιτύχει πραγματικά μια εξήγηση σε θεμελιώδες επίπεδο. Πρέπει λοιπόν να ανακαλύψει μια θεωρία η οποία θα ενοποιεί όχι μόνο τις δυνάμεις και τα σωματίδια, αλλά επίσης το χώρο και το χρόνο. Η θεωρία χορδών φιλοδοξεί να λύσει δύο προβλήματα: το ένα είναι αισθητικό, και αφορά την ενοποίηση της θεωρίας όλων των δυνάμεων με τη χρησιμοποίηση όσο το δυνατόν λιγότερων παραμέτρων. Το άλλο αφορά την προσπάθειά μας να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα της κβαντικής βαρύτητας.

Προτού πω οιδήποτε για τη θεωρία χορδών, πρέπει να επωμάνω ότι αποτελεί μια θεωρία που ακόμη δεν έχει κατανοθεί επαρκώς, τουλάχιστον στο βαθύτερο επίπεδό της. Εντούτοις, απ' όσα έχουμε δει ώς τώρα, η εν λόγω θεωρία είναι πολύ ελπιδοφόρα, και έχει σημειωθεί εξαιρετική πρόοδος. Μάλιστα, υπήρξαν ορισμένες ιδιαιτερά ενδιαφέρουσες εξελίξεις ακόμη και κατά τους τελευταίους μήνες. Όπως γνωρίζετε, η κβαντική ηλεκτροδυναμική περιγράφει τα ηλεκτρόνια που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους ανταλλάσσοντας φωτόνια· σ' αυτή τη θεωρία, τα φωτόνια, τα ηλεκτρόνια, και όλα τα άλλα σωματίδια, αν υπάρχουν, περιγράφονται ως οημεία χωρίς δομή. Η διαφορά με τη θεωρία χορδών έγκειται στο ότι, σύμφωνα με τη δεύτερη, δεχόμαστε πως τα θεμελιώδη σωματίδια είναι εκτεταμένα αντικείμενα, σαν χορδές. Τόσο απλή σίναι, λοιπόν, η βασική αλλαγή!

Ο λόγος για τον οποίο χρειάστηκε τόσος χρόνος για να αναπτυχθεί η θεωρία είναι ότι, αν και η ιδέα είναι πολύ απλή, ολόκληρη η έννοια της χορδής, ως εκτεταμένου αντικειμένου, εφαρμόζεται δύσκολα στο πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Αϊνστάιν. Σύμφωνα με την ειδική σχετικότητα, είναι δύσκολο να περιγράψουμε εκτεταμένα αντικείμενα, διότι κάθε σημείο που χωρίζεται από ένα άλλο σημείο, κατά κάποια έννοια είναι χωρισμένο όχι μόνο στο χώρο αλλά και στο χρόνο. Έτσι, η σχετικιστική περιγραφή της κίνησης ενός εκτεταμένου αντικειμένου δεν είναι τετριμένη υπόθεση από μαθηματική σκοπιά. Χρειάστηκε λοιπόν πάρα πολύς χρόνος για να αναπτυχθεί η συγκεκριμένη ιδέα, και στην πραγματικότητα η θεωρία χορδών παρέχει την πρώτη πλήρη κατανόηση, ακόμη και στο πλαίσιο της κλασικής θεωρίας, της δυναμικής των σχετικιστικών χορδών. Ισως είναι η πρώτη φορά που κατανοούμε

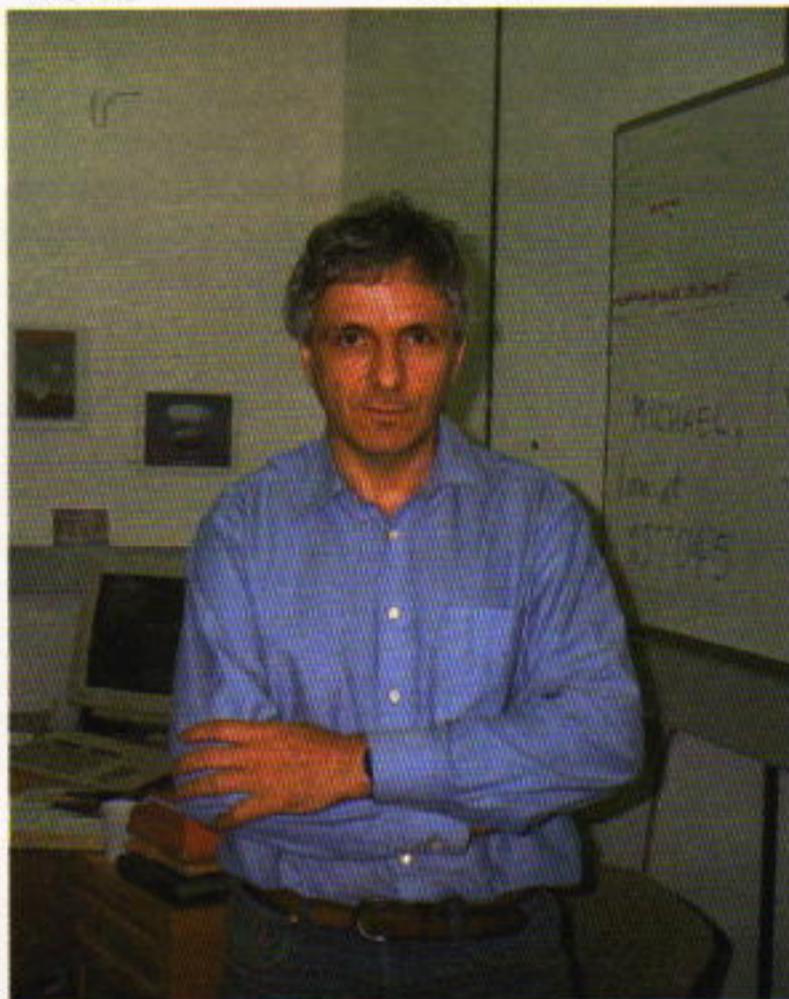
πλήρως την κλασική δυναμική οποιουδήποτε εκτειαμένου αντικειμένου στο πλαίσιο της ειδικής σχετικότητας.

Το σημαντικό είναι ότι μια χορδή μπορεί να ταλαντώνεται, ενώ ένα σημείο δεν μπορεί! Έτσι, η χορδή μπορεί να βρίσκεται σε μια κατάσταση από έναν άπειρο αριθμό δυνατών διαφορετικών καταστάσεων, που η καθεμιά τους είναι ένας τρόπος ταλάντωσης. Έχει τρόπους ταλάντωσης με συγκεκριμένες συχνότητες, παρόμοιους με τις αρμονικές της χορδής του βιολιού. Κάθε συχνότητα προέρχεται από διαφορετική κατάσταση του συστήματος. Κάθε τρόπος, αν προτιμάτε, εμφανίζεται με διαφορετική ενέργεια. Σύμφωνα με τον διάσημο τύπο του Αϊνστάιν, μια κατάσταση με συγκεκριμένη ενέργεια είναι κατάσταση με συγκεκριμένη μάζα. Έτσι, μια χορδή που ταλαντώνεται με όλους αυτούς τους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να αναπαριστά αυτό που φυσιολογικά θα θεωρούσαμε ως καταστάσεις σωματιδίων με διαφορετικές και συγκεκριμένες μάζες, και μάλιστα με άπειρο αριθμό μαζών, διότι η χορδή μπορεί να ταλαντώνεται με άπειρους τρόπους! Αυτή είναι η θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα σε μια θεωρία χορδών και μια συμβατική θεωρία.

Ερ.: Ποια είναι κατά τη γνώμη σας τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των θεωριών χορδών, σε αντιδιαστολή προς τις θεωρίες σημειακών σωματιδίων;

Απ.: Το θεμελιώδες χαρακτηριστικό μιας χορδής είναι ότι έχει όλες τις διεγερμένες βαθμίδες ενέργειας, διαθέτει όμως επίσης συγκεκριμένο αριθμό «άμαζων» καταστάσεων. Το ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι οι άμαζες καταστάσεις που διαθέτει η χορδή είναι ακριβώς τα είδη των σωματιδιακών καταστάσεων που θα ανέμενε να δει κανείς σε μια ενδιαφέρουσα θεωρία της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι οι συνεπείς θεωρίες χορδών, οι οποίες είναι ορισμένες θεωρίες υπερχορδών, διαθέτουν ακριβώς —σχεδόν ως διά μαγείας— τις ίδιες άμαζες ή μικρής μάζας καταστάσεις. Θα συνεχίσω να χρησιμοποιώ τον όρο «άμαζες», εννοώντας ότι έχουν μικρή μάζα σε σχέση με την κλίμακα μάζας της θεωρίας.

Όπως σας είπα, στη θεωρία υπάρχουν απειρως πολλές καταστάσεις μάζας, αλλά αυτές οι μάζες είναι τεράστιες. Οι μάζες στις οποίες αναφερόμαστε βρίσκονται στην κλίμακα Planck (δηλαδή της τάξης των 10^{19} μαζών πρωτονίου). Έτσι, η χορδή έχει αυτές τις πάρα πολύ βαριές καταστάσεις ταλάντωσης, ή, για να το πούμε διαφορετικά, η τάση της χορδής είναι τεράστια. Γι' αυτό το λόγο καθιστάται πολύ δύσκολη η διέγερση καταστάσεων με μάζα. Μια άλλη όψη αυτού του χαρακτηριστικού είναι ότι η χορδή, αν και παρουσιάζει διακυμάνσεις, είναι εξαιρετικά μικρή —έχει μέγεθος Planck. Έτσι, αυτό που θα δούμε πειραματικά είναι



στην πραγματικότητα οι άμαζοι ή ουσιαστικά άμαζοι τρόποι ταλαντωσης της χορδής. Η μαγεία έγκειται στο ότι, αν πάρουμε μια χορδή και εφαρμόσουμε σ' αυτήν τους νόμους της κβαντομηχανικής, ανακαλύπτουμε καταστάσεις που αντιστοιχούν σε αμελητέα μάζα, οι οποίες, τουλάχιστον στη θεωρία υπερχορδών, είναι σχεδόν ακριβώς ότι χρειαζόμαστε. Δηλαδή, υπάρχουν σωματίδια με σπιν 1/2, βαθμωτά σωματίδια (που θα μπορούσαν να είναι σωματίδια Higgs, για παράδειγμα), και το πιο μαγικό από όλα είναι ότι υπάρχει επίσης ένα σωματίδιο με σπιν 2, που είναι το βαρυτόνιο. (Το βαρυτόνιο είναι το σωματίδιο που σχετίζεται με τη δύναμη της βαρύτητας, όπως ακριβώς το φωτόνιο σχετίζεται με τη δύναμη του ηλεκτρομαγνητισμού.) Το βαρυτόνιο εμφανίζεται στη θεωρία χορδών, φαίνεται μάλιστα πως είναι αναπόφευκτο. Δεν γνωρίζουμε καμιά θεωρία χορδών που να μην περιλαμβάνει το εν λόγω σωματίδιο, και, αφού βρίσκουμε το βαρυτόνιο, ξέρουμε ότι η θεωρία περιγράφει τη βαρύτητα.

Έτσι, απροσδόκητα, χωρίς καν να το επιζητούμε, απλώς μελετώντας την κβαντομηχανική ενός εκτεταμένου αντικειμένου, της χορδής, ανακαλύψαμε ότι έχουμε σωματίδια με τα οποία συνδέουμε τη μεταφορά των δυνάμεων, όπως το βαρυτόνιο, το φωτόνιο και τα σωματίδια Yang-Mills! Και κατά συνέπεια, όταν μελετούμε προσεκτικότερα τη θεωρία, ανακαλύπτουμε ότι οι χορδές αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις που είναι απολύτως όμοιες με τη βαρύτητα και τις δυνάμεις Yang-Mills σε χαμηλές ενέργειες. Και όλες αυτές εμφανίζονται συγκεντρωμένες σε ένα αντικείμενο, τη χορδή, η οποία, καθώς ταλαντώνεται με διαφορετικούς τρόπους, αντιπροσωπεύει όλα αυτά τα διαφορετικά σωματίδια σε ένα αντικείμενο.

Όπως ήδη σας είπα, η θεωρία χορδών περιέχει τη βαρύτητα, όχι όμως με τον τρόπο που την περιέγραψε ο Αϊνστάιν. Τη θεωρία του Αϊνστάιν τη βρίσκουμε μόνο ως προσέγγιση σε χαμηλές ενέργειες. Δηλαδή, η θεωρία του Αϊνστάιν προκύπτει όταν εξετάζουμε κλίμακες ενέργειών αρκετά χαμηλότερων από την κλίμακα Planck, ή κλίμακες αποστάσεων πολύ μεγαλύτερων από το μέγεθος Planck. Σ' αυτές τις κλίμακες δεν βλέπουμε τη χορδή: αυτή φαίνεται σαν σωματίδιο. Όταν λοιπόν προσεγγίζουμε το μέγεθος της χορδής στην κλίμακα Planck, αρχίζουμε να βλέπουμε διαφορές της θεωρίας χορδών από τη θεωρία του Αϊνστάιν. Άλλα όπως ήδη εποίημανα, αυτή είναι η κλίμακα στην οποία ανακύπτουν στη θεωρία του Αϊνστάιν όλα τα προβλήματα που σχετίζονται με την κβαντική θεωρία. Η χορδή τα αποφεύγει ακριβώς επειδή στην κλίμακα Planck διεγείρονται οι τρόποι της χορδής με μάζα. Οι τρόποι αυτοί συνιστούν μια τεράστια διαφορά της θεωρίας, και φαίνεται ότι θεραπεύουν το πρόβλημα που είχε η θεωρία του Αϊνστάιν. Όχι βέβαια απόλυτα, αλλά σίγουρα σε μεγαλύτερο βαθμό από οποιαδήποτε προσπάθεια έγινε στο παρελθόν. Συμπληρώνω ότι στο μέλλον θα βρούμε τον σωστό τρόπο διατύπωσης της θεωρίας χορδών. Άλλα στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε.

Ερ.: Ποιες ποτεύετε πως είναι οι σημαντικότερες αδιαναμίες των θεωριών χορδών σήμερα;

Απ.: Η βασικότερη κριτική που διατυπώθηκε για τη θεωρία χορδών ήταν ότι, ενώ λεγόταν πως είναι εξαιρετικά αυστηρή, από την άλλη οι ειδικοί υποστήριζαν ότι υπάρχουν

εκατομμύρια διαφορετικές θεωρίες. Νομίζω ότι αυτή η κριτική είναι απόστευτα άδικη. Στην περίπτωση των εξισώσεων του Αϊνστάιν, ουδείς άσκησε κριτική επειδή έχουν πάρα πολλές λύσεις. Υπάρχει μόνο ένα σύνολο εξισώσεων του Αϊνστάιν. Και πρόκειται για πολύ όμορφες εξισώσεις: είναι πραγματικά εντυπωσιακό το ότι πιστεύουμε πως «δουλεύουν», μολονότι η λύση που περιγράφει την εξέλιξη του σύμπαντος είναι μία και συγκεκριμένη. Στη θεωρία χορδών οι θεμελιώδεις εξισώσεις επίσης είναι ουσιαστικά μοναδικές, και οι εξισώσεις του Αϊνστάιν αποτελούν ένα τμήμα της. Ωστόσο, στη θεωρία χορδών κάθε διαφορετική λύση αντιστοιχεί σε διαφορετικό φάσμα στοιχειωδών σωματιδίων και σε διαφορετικό σύνολο δυνάμεων. Γι' αυτό δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό το να έχουμε εκατομμύρια διαφορετικές λύσεις, καθεμιά από τις οποίες φαίνεται σαν μια διαφορετική θεωρία στοχειωδών σωματιδίων.

Φυσικά, αν μπορούσαμε να βρούμε μια λύση η οποία θα «δουλεύε» κατά προσέγγιση, θα ήμασταν ιδιαίτερα ικανοποιημένοι. Αυτό ακριβώς προσπαθούν ακόμη να επιτύχουν πολλοί ειδικοί. Πρέπει να προβάλουμε το επιχείρημα ότι η θεωρία χορδών είναι ουσιαστικά μοναδική, και μάλιστα οι εξελίξεις των τελευταίων τριών μηνών υποδεικνύουν ότι πιθανώς είναι εντελώς μοναδική. Ωστόσο, ουδείς γνωρίζει ισως υπερβάλλουμε! Από τις θεωρίες που διαθέτουμε τώρα, φαίνεται πως υπάρχει μόνο μία πραγματικά ανεξάρτητη, ενώ όλες οι άλλες φαίνεται ότι κατά κάποιο τρόπο σχετίζονται μεταξύ τους.

Ωστόσο, το βασικό πρόβλημα στη θεωρία χορδών είναι ο τρόπος με τον οποίο διατυπώθηκε: με όρους μιας διαδικασίας προσέγγισης, κάτι ανάλογο με αυτό που γίνεται στη θεωρία πεδίου. Στη θεωρία πεδίου υπάρχει μια διαδικασία προσέγγισης που ονομάζεται «θεωρία διαταραχών». Πρωτόπορος της ήταν φυσικά ο Feynman, αλλά υπήρξαν και πολλοί άλλοι που ασχολήθηκαν με αυτήν. Ήταν σαφές εξαρχής πως, όταν αναφερόμαστε σε μια χορδή που κινείται μέσα στο χωρόχρονο, τη θεωρούμε ως ένα ανάλογο του σωματιδίου. Η εικόνα των σωματιδίων που κινούνται και διασπώνται για να σχηματίσουν περισσότερα σωματιδία εισήχθη από τον Feynman, με τα διαγράμματα Feynman. Όταν εξετάζουμε την ηλεκτροδυναμική για παράδειγμα, η οποία είναι μια θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που αλληλεπιδρά με τα ηλεκτρόνια, κ.ο.κ., τότε, στα διαγράμματα Feynman εξετάζουμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ως αποτελούμενη από σωματίδια, τα φωτόνια. Τα διαγράμματα αναπαριστούν τον τρόπο με τον οποίο αλληλεπιδρούν αυτά τα σωματιδία με τα ηλεκτρόνια. Εντούτοις, αυτή είναι μία μόνο προσέγγιση στην πραγματική θεωρία!

Οι εικόνες λοιπόν στις οποίες αναφερόμαστε όταν μιλάμε για χορδές που κινούνται και αλληλεπιδρούν, αναπαριστούν, κατά κάποια έννοια, το ίδιο είδος προσέγγισης στη θεωρία χορδών. Η τεράστια διαφορά είναι ότι στην ηλεκτροδυναμική είχαμε πρώτα την κλασική ηλεκτροδυναμική, τη θεωρία του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό, και κατόπιν πραγματοποιήσαμε την προσέγγιση και βρήκαμε τα διαγράμματα Feynman. Επίσης, γνωρίζουμε κατ' αρχήν πώς να προχωρήσουμε πέρα από την προσέγγιση, και μερικές φορές μπορεί να μη θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε καν την προσέγγιση, αλλά να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστές.

Για κάθε θεωρία, προσέγγιση σημαίνει ότι την προσέγγιζουμε με μια κλασική θεωρία μαζί με μικρές διακυμάνσεις. Αυτή η μέθοδος είναι αποτελεσματική στον ηλεκτρομαγνητισμό, αλλά αποδεικνύεται ότι αποτελεί καταστροφική προσέγγιση στην κβαντική χρωμοδυναμική, διότι σ' αυτήν η κλασική θεωρία περιγράφει τα ελεύθερα κουάρκ, και στην πραγματική θεωρία τα κουάρκ δεν είναι τα σωματίδια που βλέπουμε. Βλέπουμε τα μεσόνια, όχι όμως τα κουάρκ, και συνεπώς η προσέγγιση των διαγραμμάτων Feynman δεν λειτουργεί καθόλου καλά στην κβαντική χρωμοδυναμική. Δεν γνωρίζουμε πώς να λύσουμε τις εξισώσεις της κβαντικής χρωμοδυναμικής, μπορούμε όμως να τις εισαγάγουμε σε έναν υπολογιστή. Οι ειδικοί πραγματοποιούν προσομοιώσεις και αποκτούν κάποια ιδέα για το πώς λειτουργεί η θεωρία. Για να εισαχθούν οι εξισώσεις στον υπολογιστή, όμως, πρέπει πρώτα να έχει διατυπωθεί η θεωρία.

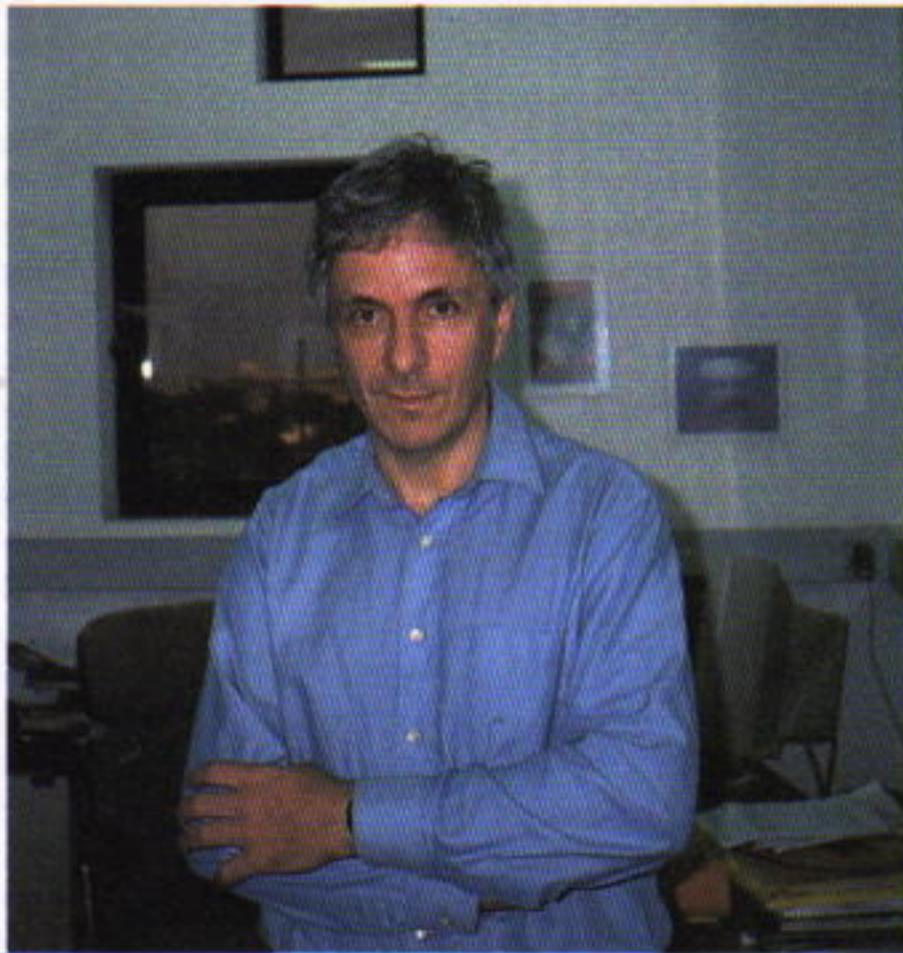
Στη θεωρία χορδών οημείωθηκαν ορισμένες ενδιαφέρουσες εξελίξεις κατά τον τελευταίο χρόνο, οι οποίες υποδεικνύουν ότι υπάρχει πλέον μια λύση: η υπερσυμμετρική κβαντική χρωμοδυναμική λύνεται! Αυτό ήταν το πο συναρπαστικό επίτευγμα των Witten και Seiberg, πριν από μερικούς μήνες. Λύθηκε, με την έννοια ότι οι δύο επιστήμονες απέδειξαν αναλυτικά ότι έχουμε περιορισμό των κουάρκ. Εννοώ ότι όλα λειτουργούν, όπως ακριβώς θα ανέμενε κανείς, με απαραίτητη προϋπόθεση την υπερσυμμετρία. Δεν πρόκειται λοιπόν για την κβαντική χρωμοδυναμική που θέλουμε. Αποτελεί ένα μοντέλο, είναι μια τετραδιάστατη θεωρία πεδίου. Όσο γνωρίζω, είναι η πρώτη φορά που προβάλλονται συγκεκριμένα αποτελέσματα σε μια ενδιαφέρουσα τετραδιάστατη θεωρία πεδίου. Οι ιδέες της κβαντικής χρωμοδυναμικής λειτουργούν, επομένως ουδείς αμφισβητεί ότι η κβαντική χρωμοδυναμική είναι καλή θεωρία. Είναι αλήθεια όμως ότι πιστεύουμε πως δεν έχουμε λύσει τις εξισώσεις. Στη θεωρία χορδών δεν θα εισαγάγουμε τα δεδομένα σε έναν υπολογιστή, για παράδειγμα, διότι δεν γνωρίζουμε πώς να διατυπώσουμε τη θεωρία. Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι υπάρχει μια προσέγγιση σε κάτι, η οποία μας δίνει διαγράμματα σκέδασης των χορδών παρόμοια με τα διαγράμματα Feynman. Αυτά έχουν μαγικές ιδιότητες, διότι, σε κάθε θεωρία που περιλαμβάνει τη βαρύτητα, τα εν λόγω διαγράμματα φυσιολογικά δίνουν απαντήσεις με απειρισμούς, κάτι που δεν συμβαίνει στη θεωρία χορδών.

Ωστόσο, η εν λόγω σειρά της προσέγγισης στη θεωρία της βαρύτητας δεν είναι αυτό ακριβώς που θα επιθυμούσε κάποιος, διότι αντιπροσωπεύει μια επέκταση της θεωρίας γύρω από ένα συγκεκριμένο υπόβαθρο, μια κλασική γεωμετρία

του χωρόχρονου. Για κάποιον εξαιρετικά θεμελιώδη λόγο, ο χωρόχρονος στην κβαντική βαρύτητα παρουσιάζει έντονες διακυμάνσεις. Δεν αναμένουμε να βρούμε μια συγκεκριμένη, «κυρίαρχη» γεωμετρία, η οποία θα ήταν η γεωμετρία του ούμπαντος. Στις μικρές κλίμακες αναμένουμε μόνο διακυμάνσεις. Έτσι, αυτή η ανάπτυξη σε σειρά διαταραχών, αυτή η διαδικασία προσέγγισης, δεν είναι ο εμβριθέστερος τρόπος μελέτης της θεωρίας. Σε κάθε θεωρία βαρύτητας, αν έχουμε μόνο την ημικλασική προσέγγιση, όπως τα διαγράμματα Feynman, θα μας διαφέύγει η βαθύτερη δομή της θεωρίας.

Ερ.: Τι θα είχατε να μας πείτε για την τρέχουσα κατάσταση των σχέσεων της θεωρίας χορδών με το πείραμα και τη φαινομενολογία των στοιχειώδων σωματιδίων;

Απ.: Ορισμένοι επιστήμονες, όπως ο Glashow, που επιχείρησαν την ενοποίηση, αντιμετώπισαν με σκεπτικισμό οτιδήποτε αφορά τη ενοποίηση σε αυτές τις κλίμακες. Ο Glashow δεν ήταν αντίθετος με την καθαυτό θεωρία χορδών. Ήταν επιφυλακτικός απέναντι σε οτιδήποτε αφορά τη φυσική σε κλίμακες που δεν μπορούμε να τις επιτύχουμε με τους επιταχυντές στο εγγύς μέλλον. Εντούτοις, η ιδέα της μεγάλης ενοποίησης αναδύθηκε εκ νέου τα τελευταία δύο-τρία χρόνια. Επιπλέον, είναι πολύ ενδιαφέρον, και από «κοινωνιολογική» άποψη, ότι ορισμένοι πειραματιστές, οι οποίοι είναι πάντοτε οι μεγαλύτεροι σκεπτικιστές, ξαφνικά έγιναν απίστευτα αισιόδοξοι, διότι πιστεύφαν πως ανακάλυψαν ενδείξεις για την υπερσυμμετρία. Για να το πιστέψουν αυτό, όμως, έπρεπε να πραγματοποιήσουν μια παρέκταση των δεδομένων στην κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης. Μόνο υπό αυτή την έννοια προκύπτουν δεδομένα που φανερώνουν την ύπαρξη συμμετρίας. Η παρέκταση όμως πραγματοποιείται πολύ δύσκολα, διότι η κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης, στην οποία γίνονται ίσες, η ισχυρή και η ηλεκτρασθενής δύναμη βρίσκεται πολύ κοντά στην κλίμακα Planck, όπου η βαρύτητα είναι οπωδήποτε σημαντική. Ευτυχώς, είναι μερικές τάξεις μεγέθους χαμηλότερη: είναι περίπου εκατό φορές χαμηλότερη σε ενέργεια. Όταν όμως φτάνουμε σε αυτές τις κλίμακες, καμία μεγάλη ενοποιημένη θεωρία δεν λειτουργεί ικανοποιητικά, εκτός αν δανειστούμε ορισμένες ιδέες από τη θεωρία χορδών. Τα τρία τελευταία χρόνια, λοιπόν, και ακόμη περισσότερο τον τελευταίο χρόνο, όποτε πηγαίνω σε κάποιο συνέδριο, ακούω τους πειραματιστές να συζητούν με ορισμένους φαινομενολόγους, που και αυτοί ήταν επιφυλακτικοί παλαιότερα, και να εξηγούν πώς έστρεψαν την προσοχή τους σε μια φαινομενολογία εμπνευσμένη από τις χορδές. Δημιουργήθηκε ολόκληρο ρεύμα μελέτης της φαι-



πικιστές, ξαφνικά έγιναν απίστευτα αισιόδοξοι, διότι πιστεύφαν πως ανακάλυψαν ενδείξεις για την υπερσυμμετρία. Για να το πιστέψουν αυτό, όμως, έπρεπε να πραγματοποιήσουν μια παρέκταση των δεδομένων στην κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης. Μόνο υπό αυτή την έννοια προκύπτουν δεδομένα που φανερώνουν την ύπαρξη συμμετρίας. Η παρέκταση όμως πραγματοποιείται πολύ δύσκολα, διότι η κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης, στην οποία γίνονται ίσες, η ισχυρή και η ηλεκτρασθενής δύναμη βρίσκεται πολύ κοντά στην κλίμακα Planck, όπου η βαρύτητα είναι οπωδήποτε σημαντική. Ευτυχώς, είναι μερικές τάξεις μεγέθους χαμηλότερη: είναι περίπου εκατό φορές χαμηλότερη σε ενέργεια. Όταν όμως φτάνουμε σε αυτές τις κλίμακες, καμία μεγάλη ενοποιημένη θεωρία δεν λειτουργεί ικανοποιητικά, εκτός αν δανειστούμε ορισμένες ιδέες από τη θεωρία χορδών. Τα τρία τελευταία χρόνια, λοιπόν, και ακόμη περισσότερο τον τελευταίο χρόνο, όποτε πηγαίνω σε κάποιο συνέδριο, ακούω τους πειραματιστές να συζητούν με ορισμένους φαινομενολόγους, που και αυτοί ήταν επιφυλακτικοί παλαιότερα, και να εξηγούν πώς έστρεψαν την προσοχή τους σε μια φαινομενολογία εμπνευσμένη από τις χορδές. Δημιουργήθηκε ολόκληρο ρεύμα μελέτης της φαι-

νομενολογίας της θεωρίας χορδών, κυρίως επειδή, όσο σκεπτικιστής κι αν είναι κανείς, στην πραγματικότητα αυτό είναι το μόνο που μπορεί να κάνει. Και ο λόγος για τον οποίο επιβιώνει αυτή η ιδέα είναι ότι ουδείς διαθέτει κάτι καλύτερο για να την αντικαταστήσει. Όλα αυτά όμως είναι η θετική όψη του πράγματος. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι η όλη εργασία έγινε στο πλαίσιο της θεωρίας διαταραχών, και υπάρχουν ορισμένα ερωτήματα στα οποία γνωρίζουμε ότι δεν θα απαντήσουμε ποτέ, εκτός αν κατανοήσουμε βαθύτερα τα πράγματα.

Ερ.: Πρέπει να αναμένουμε κάποια δραστική αλλαγή στη θεώρησή μας για τη θεμελιώδη έννοια του χωρόχρονου μέσα από τη θεωρία χορδών;

Απ.: Η προσέγγιση της χορδής ως ενός αντικειμένου που κινείται στον σταθερό, αδρανή χωρόχρονο χάνει ολόκληρη την έννοια της κβαντικής βαρύτητας, η οποία σχετίζεται με τη δυναμική του χωρόχρονου σε πολύ μικρές κλίμακες. Ανακύπτει λοιπόν το ερώτημα: τι αντικαθιστά τη λεια δομή του χωρόχρονου; Γνωρίζουμε ότι σε κάθε θεωρία κβαντικής βαρύτητας, ο χώρος και ο χρόνος πρέπει να είναι κατά κάποια έννοια διακριτοί. Υπάρχει μια απόσταση που είναι η μικρότερη δυνατή, η απόσταση Planck, η οποία αντιπροσωπεύει κάποιου είδους εσωτερική κλίμακα της φυσικής, όπου πρέπει να συμβεί κάτι δραματικά νέο. Η θεωρία χορδών οφείλει να μας λέει κάτι γι' αυτό, διότι είναι μια θεωρία της βαρύτητας και της κβαντομηχανικής.

Στην εικόνα του σημειακού σωματιδίου, υπάρχει η περίφημη αρχή της αντιστοιχίας της κβαντομηχανικής, σύμφωνα με την οποία ένα σημειακό σωματίδιο μοιάζει ταυτόχρονα με κύμα: έχουμε ένα δυϊσμό κυμάτων και σωματιδίων. Ωστόσο, βαθύτερη είναι η θεώρηση με αναφορά σε πεδία και όχι σε σημειακά σωματίδια. Στη θεωρία χορδών η θεώρηση γίνεται με αναφορά αποκλειστικά σε σημειακά σωματίδια. Τώρα πλέον, τα σωματίδια έγιναν χορδές. Θα θέλαμε όμως να έχουμε κάτι ανάλογο με το πεδίο. Δεν γνωρίζουμε πώς να διατυπώσουμε αυτή την ιδέα, διότι πρέπει να βρίσκεται στο βάθος της θεωρίας. Η γενική σχετικότητα είναι ένα μικροσκοπικό τμήμα αυτής της ιδέας. Ένα από τα προβλήματα είναι ότι, αφού ο χωρόχρονος πρέπει να προκύψει από τη θεωρία, αυτή οφείλει να περιγράφει όχι μόνο δυνάμεις και σωματίδια, αλλά και το χώρο και το χρόνο.

Είναι δύσκολο λοιπόν να φανταστούμε ποια είναι η θεωρία. Συγκεκριμένα, η φυσική σε ολόκληρη την ιστορία της, ασχολείται με σωματίδια και δυνάμεις που κινούνται σε ένα αδρανές υπόβαθρο, το χωρόχρονο. Υπάρχουν σήματα που κινούνται από σημείο σε σημείο, και η φυσική ενδιαφέρεται για την κίνηση της ενέργειας. Στην κβαντική βαρύτητα ή έννοια της απόστασης μεταξύ δύο σημείων πρέπει να αναδυθεί από τη θεωρία ως συγκεκριμένη ιδιότητα μιας λύσης στην κβαντική βαρύτητα, και όχι ως ιδιότητα εξαρχής εισαγόμενη. Αν όμως δεν σας επιφέρεται να αρχίσετε με την έννοια της απόστασης, όποια κι αν είναι η θεωρία με την οποία ξεκινάτε, η τελική θεωρία θα διαφέρει πάρα πολύ από τη σημερινή θεώρηση των περισσότερων ανθρώπων για τη φυσική. Γι' αυτό το λόγο είναι τόσο δύσκολο να διατυπωθεί η θεωρία χορδών: διότι η διατύπωσή της θα μας εμπλέξει στην αφαίρεση απ' ό,τι γνωρίζουμε προς κάτι εξαιρετικά νέο. Ωστόσο, τα τελευταία δύο-τρία χρόνια, οι εποικήμονες ανα-

κάλυψαν ορισμένα «θαύματα», με ευφυείς ανιχνευτικές εργασίες, μολονότι γνωρίζουμε μόνο τις προσεγγίσεις της θεωρίας. Η προσέγγιση μας δίνει στοιχεία που αποτελούν βαθιές συμμετρίες στη θεωρία. Ανάμεσα ο' αυτές τις συμμετρίες, η στοιχειωδέστερη που μπορούμε να περιγράψουμε είναι η πρόταση ότι φαίνεται πως υπάρχει μια ελάχιστη απόσταση. Έτσι, μολονότι περιγράφω τη χορδή ως αντικείμενο ταλαντούμενο σε δεδομένο χώρο, αποδεικνύεται ότι ο χώρος στον οποίο κινείται πρέπει να έχει μια ελάχιστη απόσταση. Η ελάχιστη απόσταση είναι μια από τις πολύ βαθιές συμμετρίες της θεωρίας, οι οποίες αποτελούν μεγάλες γενικεύσεις των συμμετριών που εμφανίζονται στις εξισώσεις του Αϊνστάιν. Το γεγονός είναι ιδιαίτερα ευχάριστο, διότι σημαίνει πως στη θεμελιώδη αναδιατύπωση της θεωρίας θα υπάρχει τεράστια ποσότητα συμμετρίας, η οποία με τη σειρά της θα σημαίνει ότι τα πράγματα είναι πολύ απλά. Αυτό αναμένουμε.

Ερ.: Γνωρίζουμε ότι τα μαθηματικά των θεωριών χορδών είναι ιδιαίτερα σημαντικά και αυτά καθεαυτά αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης. Θα θέλατε να μας πείτε λίγα λόγια για την τρέχουσα κατάσταση στον τομέα αυτό;

Απ.: Οι μαθηματικοί οφείλουν να μάθουν αυτό που μέχρι τώρα αρνούνται πεισματικά να μάθουν, ότι δηλαδή ο Witten μοιράστηκε το μετάλλιο Φιλντς με τους Jones και Drinfeld όχι κατά τύχη προφανώς, αλλά λόγω της τότε δουλειάς του στη θεωρία κόμβων, η οποία είχε ουσιαστικό κίνητρο την εκδοχή του Feynman για τη διατύπωση της θεωρητικής φυσικής. Όταν ο Feynman πρωτοεισήγαγε τη συναρτησιακή ολοκλήρωση στα μαθηματικά, οι μαθηματικοί δεν καταλάβαιναν λέξη. Ο Donaldson, ακολουθώντας τον Attiyah και άλλους μαθηματικούς, χρησιμοποίησε τη θεωρία Yang-Mills από τη φυσική ως εργαλείο στα μαθηματικά, και συγκεκριμένα στην τετραδιάστατη διαφορική τοπολογία. Αυτό που έκανε ο Witten πέντε ή έξι χρόνια πριν με τη θεωρία κόμβων ήταν να γενικεύσει τα αποτελέσματα του Donaldson, εισάγοντας συναρτησιακές μεθόδους. Η συναρτησιακή ολοκλήρωση είναι το «ψωμοτύρι» όσων ασχολούνται με τη σωματιδιακή φυσική. Πρόκειται για τη διατύπωση της κβαντομηχανικής από τον Feynman με όρους ολοκληρωμάτων διαδρομών. Άλλα οι μαθηματικοί τη μισούν, διότι δεν είναι καλά ορισμένη, τα πάντα εμφανίζονται ως άπειρα και πρέπει να τα κανονικοποιήσουμε κατά κάποιον τρόπο, χρησιμοποιώντας «μαγικά» τεχνάσματα. Οι εν λόγω τεχνικές υπάρχουν εδώ και 45 χρόνια περίπου και, ασφαλώς, έχουν μελετηθεί από κάποιους μαθηματικούς, αλλά ουδέποτε μπήκαν στο κυρίως ρεύμα των μαθηματικών. Στη δεκαετία του 1970, λόγω της δουλειάς του Kenneth Wilson πάνω στην ομάδα επανακανονικοποίησης, έγιναν εν μέρει περισσότερο αποδεκτές. Τώρα, με την εργασία Seiberg-Witten, ανέκυψε κάτι καινούργιο.

Αρχικά, ο Seiberg, βασισμένος στη φυσική των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των κουάρκ και στην υπερσυμμετρία, έκανε κάποιους υπολογισμούς στην κβαντική θεωρία πεδίου και βρήκε μια θεμελιώδη δυαδική συμμετρία. Για να κατανοήσουν οι μαθηματικοί αυτή τη δυαδική συμμετρία, πρέπει να κατανοήσουν την κβαντική εκδοχή του προβλήματος που έλυσε ο Witten πριν από πέντε χρόνια. Ο Wit-

ten επαναδιατύπωσε τα αναλλοίωτα του Donaldson μ' έναν τρόπο που προφανώς είναι σωστός. Η επαναδιατύπωση έγινε με όρους του χώρου λύσεων των μονοπόλων Dirac και είναι ουσιαστικά κάτι τόσο απλό, που θα μπορούσε να το είχε κάνει και ο Dirac πενήντα χρόνια πριν. Η απόδειξη του Witten δεν θα χαρακτηρίζοταν «απόδειξη» από τους μαθηματικούς, αλλά θα μπορούσε να τους ωθήσει να δουν τι στο καλό λένε ο Witten και οι άλλοι φυσικοί τόσα χρόνια σχετικά με την κβαντική συναρτησιακή ολοκλήρωση.

Οι βαθιές συμμετρίες που συνδέουν μεταξύ τους τις διάφορες θεωρίες χορδών σχετίζονται με τις συμμετρίες Seiberg-Witten. Αναμφισβήτητα η μεγαλύτερη επιτυχία της θεωρίας χορδών είναι η σχέση μεταξύ καθαρών μαθηματικών και στατιστικής μηχανικής. Υπάρχουν πάρα πολλά πράγματα για τα οποία δεν έχω μιλήσει, οφείλω πάντως να σημειώσω πως οι διαφορετικές λύσεις της θεωρίας χορδών βρίσκονται σε αντιστοιχία ένα προς ένα με τη δισδιάστατη στατιστική μηχανική. Οταν θέλουμε να κατακευάσουμε διάφορες θεωρίες χορδών που να συμφωνούν με τα δεδομένα, άλλο δεν κάνουμε από το να κατακευάζουμε διάφορες δισδιάστατες θεωρίες στατιστικής μηχανικής. Οι δύο διαστάσεις είναι σημαντικές, διότι δύο είναι οι διαστάσεις της κοσμικής επιφάνειας μιας χορδής που κινείται στο χωρόχρονο. Οι δισδιάστατες θεωρίες στατιστικής μηχανικής στις οποίες αναφέρομαι καλούνται σύμμορφες θεωρίες πεδίου και οι μαθηματικοί τις λαμβάνουν πολύ σοβαρά υπόψη. Υπάρχουν λοιπόν πολύ βαθιές και ενδιαφέρουσες διασυνδέσεις με τα μαθηματικά.

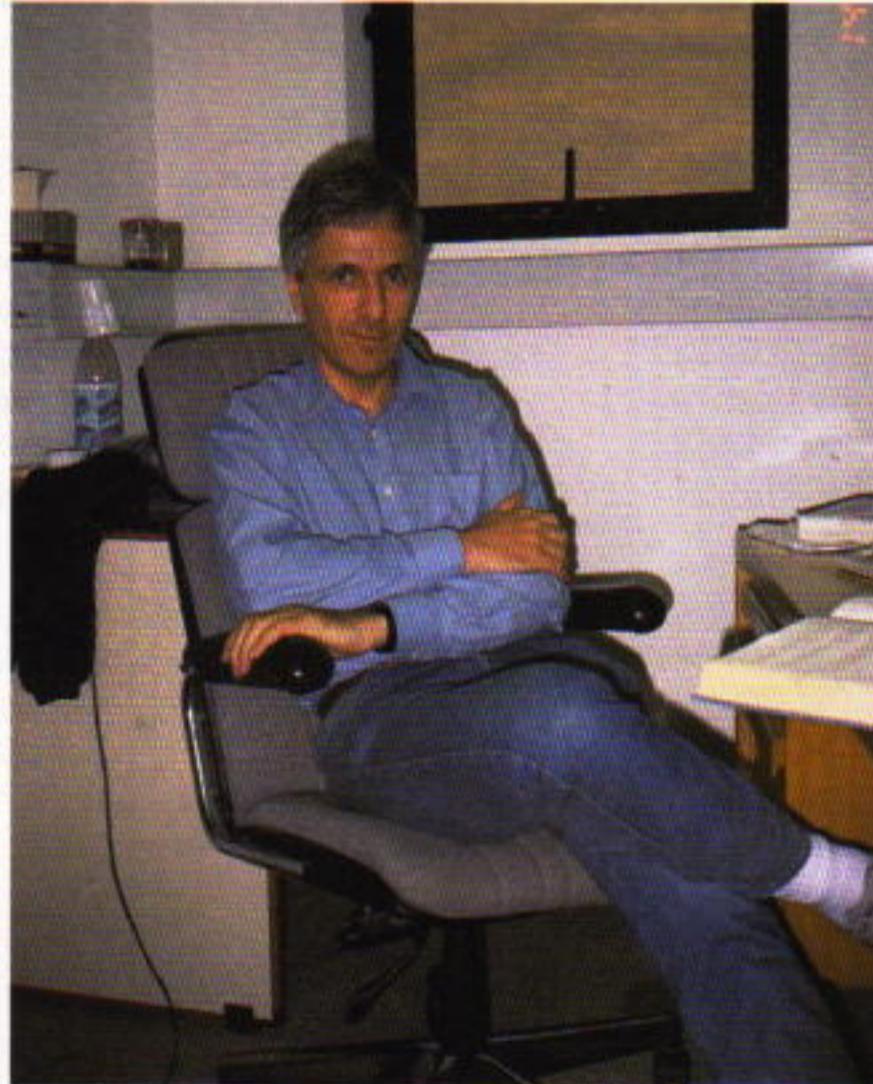
Ερ.: Πιστεύετε ότι τελικά η θεωρία χορδών θα αποδειχθεί σωστή; Πώς βλέπετε το μέλλον της;

Απ.: Οπωσδήποτε πιστεύω ότι θα αποδειχθεί πως είναι σωστή. Όσο περισσότερο εργάζομαι σ' αυτό το θέμα, τόσο περισσότερο πείθομαι για την ορθότητα της θεωρίας. Υπάρχουν βέβαια ορισμένα προβλήματα, και είναι γεγονός πως η βαθύτερη δομή της θεωρίας δεν έχει κατανοηθεί. Πιστεύω πάντως ότι στο τέλος, όταν θα κατανοήσουμε αυτό από το οποίο αναδύονται οι χορδές με κάποια προσεγγιστική έννοια, η μελλοντική θεωρία δεν θα μοιάζει καθόλου με τη θεωρία χορδών όπως τη γνωρίζουμε τώρα. Μια θεωρία, για να είναι θεωρία της φυσικής, πρέπει να κάνει προβλέψεις. Βέβαια, μια θεωρία μπορεί να γίνει δεκτή ως αληθής, ακόμη κι αν στηρίζεται σε λίγες πραγματικές πειραματικές πληροφορίες. Ένα πολύ καλό παράδειγμα είναι η κβαντική χρωμοδυναμική. Το προφανές χαρακτηριστικό των θεωριών χορδών, προς το παρόν, είναι η κομψότητά τους, και όχι οι πειραματικές προβλέψεις.

Δεν θέλω να μειώσω τη σημασία της φαινομενολογίας, αλλά, ώστε τώρα, ουδείς χρειάστηκε να πειστεί απ' ότι εξηγείται με φυσικό τρόπο. Ωστόσο, υπάρχει ένα δεδομένο στο σύμπαν το οποίο είναι απόλυτο μυστήριο. Δυστυχώς, πρόκειται για ένα μόνο αριθμό, την κοσμολογική σταθερά. Στις μονάδες με τις οποίες την εκφράζουμε κανονικά, η τιμή της είναι σχεδόν μηδενική (περίπου 10^{-120}). Βέβαια, η εν λόγω σταθερά είναι πολύ σημαντική από κοσμολογική άποψη. Προσδιορίζει ποια θα ήταν η συνεισφορά στην καμπυλότητα του σύμπαντος η οποία δεν οφείλεται στην παρουσία της ύλης. Ο Αινοτάτιν, φυσικά, εισήγαγε μια μη μηδενική τιμή της κοσμολογικής σταθεράς στις αρχικές εξισώσεις του, αλλά αργότερα αποδέχτηκε ότι αυτό ήταν το μεγαλύτερο λάθος του. Πάντως η κοσμολογική σταθερά επιτρέπεται στη θεωρία του, και δεν υπάρχει λόγος να μη συμπεριληφθεί σ' αυτήν. Στη θεωρία χορδών γνωρίζουμε ότι ιούται με μηδέν, στην προσέγγιση των διαταραχών. Αυτό όμως ισχύει μόνο σε αυτήν την προσέγγιση, και, απλοϊκά, θα ανέμενε κανείς ότι, πέρα από αυτήν, η κοσμολογική σταθερά ίσως δεν εξαφανίζεται. Δεν υπάρχει άλλωστε λόγος να εξαφανίζεται. Εντούτοις, δεν γνωρίζουμε πώς να προχωρήσουμε πέρα από αυτή την προσέγγιση!

Ουδείς λοιπόν γνωρίζει τι προβλέπει η θεωρία χορδών για την κοσμολογική σταθερά. Συνεπώς, πρέπει να γίνει μια δραματική πρόβλεψη. Δεν γνωρίζω αν η πρόβλεψη ενός αριθμού θα ανάγκαζε τους επιστήμονες να πιστέψουν τη θεωρία. Οπως ήδη εποίημανα, νομίζω ότι το σημαντικότερο που πρέπει να γίνει είναι μια κομψή επαναδιατύπωση της θεωρίας, ώστε να καταστεί σαφές γιατί είναι τόσο ακαταμάχητη ως θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Με άλλα λόγια, πώς υπάρχει ο κβαντικός χωρόχρονος, και την ίδια στιγμή, πώς αναδύεται ο κλασικός χωρόχρονος, κατά κάποια προσεγγιστική έννοια, ώστε να προκύψει ένα σύμπαν με μέγεθος ίσο, κατά προσέγγιση, με το μέγεθος του δικού μας σύμπαντος.

Ελπίζω φυσικά ότι η θεωρία χορδών θα κάνει και άλλες προβλέψεις —δεν γνωρίζουμε ακόμη ποιες είναι αυτές. Μπορεί να υπάρχουν και άλλοι αριθμοί στην κοσμολογία, εκτός από την κοσμολογική σταθερά, για τους οποίους η θεωρία έχει κάτι να πει. Μια άλλη σημαντική περιοχή της κοσμολογίας είναι το πρόβλημα του υπολογισμού της οκτωτετρής ύλης του σύμπαντος. Ίσως λοιπόν, η θεωρία χορδών μπορεί να μας παράσχει κάποια στοιχεία για τις κοσμολογικές κλίμακες. Είναι βέβαιο ότι έχει κάτι να πει για τις αρχικές στιγμές του σύμπαντος, περίπου τη στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης.



Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M41

Καλοκαιρινές διακοπές. Η Μαίρη θα περάσει και τις 90 μέρες των διακοπών της στην εξοχή. Είναι εξαιρετικά οργανωμένη και έχει αποφασίσει να ακολουθήσει αυστηρά το εξής πρόγραμμα: κάθε δύο μέρες θα πηγαίνει για μπάνιο στη λίμνη, κάθε τρεις μέρες θα πλένει και θα καθαρίζει και κάθε πέντε μέρες θα λύνει μαθηματικά προβλήματα. (Την πρώτη μέρα η Μαίρη προσπάθησε να κάνει και τα ψάρια και κουράστηκε υπερβολικά.) Πόσες από τις 90 μέρες θα είναι ευχάριστες —δηλαδή, θα έχει μόνο να κολυμπήσει; Και πόσες θα είναι οι βαρετές ημέρες —δηλαδή, αυτές χωρίς καμία προσχεδιασμένη δραστηριότητα;

(N. Vasilev)

M42

Μηδενικό κυκλικό άθροισμα γινομένων. Ο καθένας από τους αριθμούς x_1, x_2, \dots, x_n ισούται με 1 ή με -1. Αποδείξτε ότι η ισότητα $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0$ ισχύει μόνο όταν το n διαιρείται με το 4.

(A. Leontovich)

M43

Παραγοντικό σύστημα αριθμησης. (α) Αποδείξτε ότι κάθε ακέραιος $a > 0$ μπορεί να παρασταθεί μονοσήμαντα με τη μορφή

$$a = a_n n! + a_{n-1} (n-1)! + \dots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!,$$

όπου οι συντελεστές a_k , $k = 1, \dots, n$ είναι ακέραιοι, $0 \leq a_k \leq k$, $a_n > 0$.

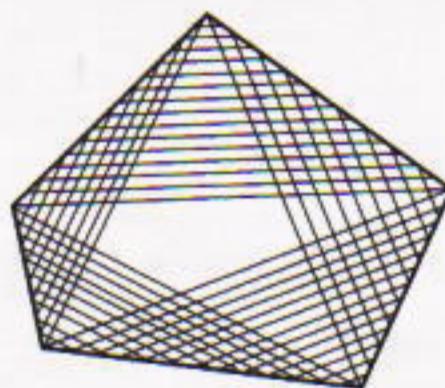
(β) Αποδείξτε ότι κάθε ρητός b , $0 \leq b < 1$, μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα με τη μορφή

$$b = \frac{b_2}{2!} + \frac{b_3}{3!} + \dots + \frac{b_n}{n!},$$

όπου $0 \leq b_k < k$ για $2 \leq k \leq n$, $b_n > 0$.

M44

Τρίγωνα σε ένα πεντάγωνο. Κάθε διαγώνιος σε ένα κυρτό πεντάγωνο ορίζει ένα τρίγωνο (Σχήμα 1). Αποδείξτε ότι το άθροισμα των εμβαδών αυτών



Σχήμα 1

των τριγώνων είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του πενταγώνου.

(N. Vasilev)

M45

Εξαγωγή ριζών των επαναλήψεων μιας συνάρτησης. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η n -οστή επανάληψη $f(f(\dots f(x) \dots))$ (η f εφαρμοσμένη n φορές) ισούται με (α) $2x + 1$ για κάθε x , (β) $1 + x + 2\sqrt{2}$ για κάθε $x \geq 0$, (γ) $x/(x+1)$ για $x \geq 0$.

(O. Izhboldin, K. Kohas)

Φυσική

Φ41

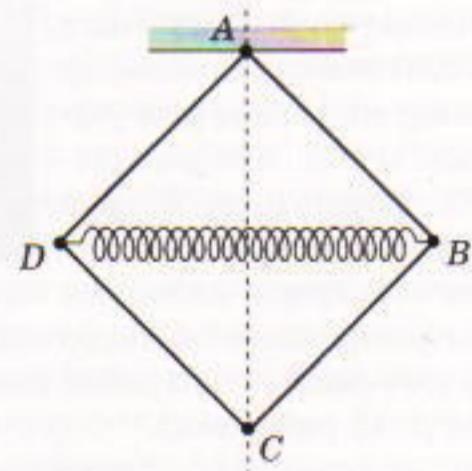
Η αλεπού και ο λαγός. Μια αλεπού καταδιώκει έναν λαγό κινούμενη συνεχώς καταπάνω του. Ο λαγός όμως τυχαίνει να είναι αλλήθωρος, με αποτέλεσμα να μην κινείται πάνω στη νοητή ευθεία γραμμή που τον συνδέει με την αλεπού αλλά έτσι ώστε κάθε στιγμή η ταχύτητά του να σχηματίζει γωνία 60° με την εν λόγω ευθεία. Η αρχική απόσταση μεταξύ της αλεπούς και του λαγού είναι L , και τα μέτρα

των ταχυτήτων τους v . Πόσο χρόνο θα χρειαστεί η αλεπού για να πάσει το λαγό, και σε πόση απόσταση από το σημείο εκκίνησής της; Πόση θα είναι αυτή η απόσταση αν υποθέσουμε ότι ο λαγός αλληθωρίζει ακόμη περισσότερο, ώστε η παραπάνω γωνία να είναι κάθε στιγμή 90° ; Ή, τέλος, αν υποθέσουμε ότι ο λαγός φορούσε διορθωτικά γυαλιά ώστε κάθε στιγμή η εν λόγω γωνία να είναι μόνο 40° ;

(O. Shpyrko)

Φ42

Ταλάντωση ενός παραληπογράμμου. Η κατασκευή που φαίνεται στο Σχήμα 2 αποτελείται από τέσσερις αφαρείς στερεές ράβδους μήκους ℓ και από ένα



Σχήμα 2

αφαρές ελατήριο μήκους 2ℓ . Χάρη στις αρθρώσεις των ράβδων οι γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ράβδοι μπορούν να μεταβάλλονται ελεύθερα. Στις αρθρώσεις των ράβδων συνδέονται τέσσερις μικρές όμοιες σφαίρες συγκεκριμένης μάζας. Το σύστημα στρεώνεται από ένα σταθερό σημείο A (Σχήμα 2) και, καθώς κρέμεται ελεύθερα, οι τέσσερις ράβδοι σχηματίζουν τετράγωνο. Υπολογίστε την περίοδο ταλάντωσης του συστήματος αν μετακινήσουμε ελαφρά την άρθρωση C κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα.

(S. Krotov)

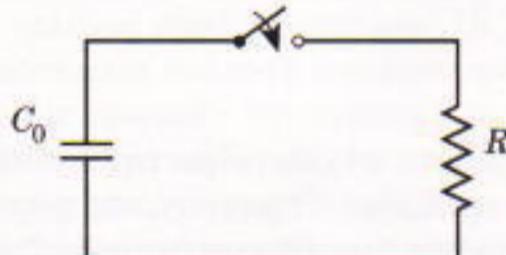
Φ43

Θερμική μηχανή. Μία θερμική μηχανή χρησιμοποιεί ιδανικό μονοατομικό αέριο και λειτουργεί σύμφωνα με έναν κύκλο που συνίσταται από δύο ισόχωρες και δύο ισοβαρείς μεταβολές. Υπολογίστε τη μέγιστη απόδοση αυτού του κύκλου.

(Y. Krementsova)

Φ44

Μεταβλητός πυκνωτής. Ένας μεταβλητός πυκνωτής αρχικής χωρητικότητας C_0 φορτίζεται σε τάση V και συνδέεται με αντίσταση R (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

Πώς πρέπει να μεταβάλλεται η χωρητικότητα του πυκνωτή ώστε το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα να παραμένει σταθερό; Πόση ισχύ πρέπει να προσφέρει στο παραπάνω σύστημα εξωτερική δύναμη για να μεταβάλει τη χωρητικότητα;

(P. Zubkov)

Φ45

Οπικά όργανα. Ενώ πειραματίζοταν με ένα μικροσκόπιο, μια αναγνώστρια του *Quantum* διαπίστωσε ότι έβλεπε με ευκίνεια το είδωλο ενός αντικειμένου και με τα δύο μάτια της, αν το τοποθετούσε σε απόσταση $d = 6,5$ mm από τον αντικειμενικό φακό. Η απόσταση μεταξύ αντικειμενικού και προσοφθάλμιου φακού του μικροσκοπίου είναι $L = 100$ mm, η εστιακή απόσταση του αντικειμενικού φακού $f_1 = 6$ mm και η αντίστοιχη του προσοφθάλμιου $f_2 = 26$ mm. Τι είδους ανωμαλία παρουσιάζει η άραση της αναγνώστριας και ποια είναι η ισχύς των διορθωτικών φακών που φορά;

(A. Yudin)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 70

ΔΥΟ ΚΛΑΣΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Σελ.: 160, 14 × 21 εκ., 3.500 δρχ.

WERNER
HEISENBERG



ΣΥΝΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΕ ΤΟΝ
ΑΪΝΣΤΑΪΝ

Σε εννέα δοκίμια και κείμενα διαλέξεων που συνέγραψε κατά τα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Werner Heisenberg — οποίος τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ φυσικής το 1932 για το έργο του στην ατομική θεωρητική φυσική — προσφέρει μια τολμηρή αποτίμηση της επιστημονικής μεθόδου στον 20ό αιώνα, και συσχετίζει τη φιλοσοφική της επίδραση στη σύγχρονη κοινωνία και την επιστήμη με τα επί μέρους στοιχεία της

μοριακής βιολογίας, της αστροφυσικής και των συναφών επιστημονικών κλάδων. Ο Heisenberg πραγματεύεται αυτά τα θέματα με φιλοσοφικούς όρους της πιο μεγάλης εμβέλειας, διευκρινίζοντάς τα με χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Σελ.: 170, 14 × 21 εκ., 3.500 δρχ.

JACQUES
HADAMARD



Η ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ
ΤΗΣ ΕΠΙΝΟΗΣΗΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πώς γεννιέται μια αφηρημένη ιδέα; Πώς σχετίζεται το ασυνείδητο με την ανακάλυψη; Ποιος είναι ο ρόλος της ενδροστησης και των νοητικών εικόνων στην ανάπτυξη των ιδεών; Γιατί πολλοί οριζικέλευθοι διανοητές δεν κατάφεραν να αντιληφθούν προφανείς και σπουδαίες συνέπειες του ίδιου τους του έργου; Σε τόντο το κλασικό βιβλίο, που γοητεύει όχι μόνο τον μαθηματικό, αλλά και τον φυσικό, τον ψυχολόγο και όλους όσους ενδιαφέρονται για τη γένεση και την ανάπτυξη των ιδεών, ο σπουδαίος μαθηματικός Jacques Hadamard πραγματεύεται διεξοδικά και εμπεριστατωμένα αυτά και πολλά άλλα ερωτήματα, ρίχνοντας άπλετο φως στις μεθόδους της μαθηματικής επινόησης και της σκέψης εν γένει.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Κότοπτρο

Δείξε μού το για να το πιστέψω!

Ωρολογιακή απόδειξη της σύγκλισης μιας άπειρης σειράς

Gordon Moyer

ΙΘΑΝΟΝ ΜΕΡΙΚΟΙ ΑΠΟ ΜΑΣ ΦΤΑΝΟΥΝ ΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ έτΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ χωρίς να γνωρίσουν τα ονόματα του Νεύτωνος, του Leibniz και, παραδόξως, του Ζήνωνος του Ελεάτη. Αν τα πρώτα δύο είναι τα ονόματα των μεγάλων θεμελιωτών αυτού του κλάδου, το τελευταίο είναι οπωδήποτε το όνομα του μεγάλου συνιδρυτή του. Ο αρχαίος έλληνας φιλόσοφος, που προηγείται των ανώτερων μαθηματικών του λάχιστον κατά δύο χιλιετίες, επιμένει, επιχειρηματολογώντας έξυπνα, ότι η ολοκλήρωση είναι τελείως αδύνατη.

Στο διασημότερο παράδοξο του ο Ζήνων βεβαιώνει ότι ακόμη και ο ταχύτερος έλληνας πολεμιστής δεν θα καταφέρει να νικήσει ούτε μια χελώνα σε αγώνα ταχύτητας, αφού για να το πετύχει θα χρειαστεί, τελικά, την άθροιση μιας άπειρης σειράς διαστημάτων. Δυστυχώς, το πρωτότυπο κείμενο του παραδόξου δεν σώζεται, αλλά ο Αριστοτέλης, σε ένα κεφάλαιο των *Φυσικών*,¹ αναφέρει τον ήρωα Αχιλλέα ως τον έναν από τους δύο δρομείς. Ένας πολύ κατοπινός σχολιαστής του Ζήνωνος μας λέει ότι ο αντίπαλος του Αχιλλέα ήταν μια χλώνα.²

Σύμφωνα με το μύθο, ο λαμπρός νεαρός ήρωας, μεγαλόφρων όσο και

γοργοπόδαρος («ωκύπους»), δίνει στην αργοκίνητη ανταγωνιστριά του ένα προβάδισμα. Ο Αχιλλέας φτάνει με ευκολία στο σημείο εκκίνησης της αντιπάλου του, αλλά εν τω μεταξύ η έρπουσα ανταγωνιστριά έχει προχωρήσει. Ο Αχιλλέας, σαν αστραπή, κινείται προς τη νέα θέση της χελώνας, αλλά όταν τη φτάνει, το ζώο έχει προχωρήσει και πάλι πιο μπροστά. Και έτσι συνεχίζεται ο αγώνας, με τον ήρωα μας να κερδίζει συνεχώς έδαφος και να ανακαλύπτει κάθε φορά ότι ο ταπεινός του ανταγωνιστής έχει εν τω μεταξύ βρεθεί πιο μπροστά. Εξοργισμένος ο Αχιλλέας εγκαταλείπει τον αγώνα. Δεν καταφέρνει ποτέ να φτάσει τη χελώνα!

Ο κοινός νους, φυσικά, υπαγορεύει ότι άλλος θα είναι ο νικητής. Και, υπό το φως της θεωρίας των ορίων, οι περισσότεροι καθηγητές απειροστικού λογισμού μπορούν πολύ εύκολα να δείξουν στους μαθητές τους τα οφάλματα του συλλογισμού του Ζήνωνος. Όπως όμως, επιομαίνει ο ιστορικός G. J. Whitrow, οι καθηγητές του απειροστικού λογισμού δεν έχουν πείσει τους πάντες. Ο φιλόσοφος και μαθηματικός Bertrand Russell, για παράδειγμα, υποστήριξε πως υπάρχουν φυσικές περιπλοκές, θεμελιώδη προβλήματα που αφορούν τη δομή του χώρου και του χρόνου στα οποία στόχευε ο Ζήνων, και τα οποία δεν επιλύθηκαν από τη θεωρία των ορίων. Ο Russell πιστεύει πως ένας τρόπος να αποφύγουμε το παράδοξο είναι να υποθέ-

σουμε ότι, αντίθετα με την ευθεία των αριθμών, ο πραγματικός χώρος και χρόνος συντίθενται όχι από αδιάστατα σημεία ή στιγμές αλλά από διακριτά τμήματα που δεν υποδιαιρούνται επ' άπειρον.

Μια τέτοια θεωρία μπορεί να επιλύει το παράδοξο, αλλά θέτει το πρόβλημα αν νομιμοποιείται η χρήση του απειροστικού λογισμού στη μελέτη των κινούμενων σωμάτων. Και άλλοι έχουν προσφέρει παρόμοια «κβαντικά» επιχειρήματα, και για πολλούς επιστήμονες της λογικής, το παράδοξο του Αχιλλέα εξακολουθεί να ισχύει. Ένα αίνιγμα λοιπόν που, ενώ για τον φιλόσοφο Charles Sanders Peirce δεν είναι τίποτε άλλο από «μια μικρή ανόητη παγίδα που δεν παρουσιάζει δυσκολίες για έναν νου εκπαιδευμένο στα μαθηματικά», παραμένει για άλλους διανοούμενους όπως ακριβώς το είδε ο Russel: «απιστεύτα λεπτό και βαθύ».

Ανακαλύπτοντας πως η επίλυση του παραδόξου του Ζήνωνος δεν είναι ιδιαίτερα απλή διαδικασία, ένας φοιτητής μπορεί να αισθανθεί να κλονίζεται η εμπιστοσύνη του στα όρια και τις άπειρες σειρές, ή τουλάχιστον στη δυνατότητα εφαρμογής τους στην περίπτωση του Αχιλλέα.³

3. Κατά τον H.G. Zeuthen, ιστορικό των αρχαίων μαθηματικών, ο Ζήνων ήταν πιθανόν εξοικειωμένος με την εύρεση του αθροισματος μιας άπειρης γεωμετρικής σειράς. Ο Zeuthen υποστηρίζει ότι ο Ζήνων μπορεί να προβληματίζοταν για το αν έχουμε το δικαίωμα να χρησιμοποιούμε άπειρες σειρές

1. Αριστοτέλους, *Τα Φυσικά*.

2. Ο Σιμπλίκιος από την Κιλικία, νεοπλατωνικός φιλόσοφος, έγραψε για το παράδοξο του Ζήνωνος κατά τον 6ο μ.Χ αιώνα, χίλια χρόνια μετά τον Ζήνωνα.

Φυσικά, το αν ο χώρος ή ο χρόνος, ή ο «χωρόχρονος», αποτελούν στην πραγματικότητα ένα συνεχές και αν, επομένως, είναι πραγματικά ολοκληρώσιμοι, είναι ένα θέμα που δεν χρειάζεται να απασχολεί κάποιον που παρακολουθεί Απειροστικό I. Όμως, πέρα από τις αντιρρήσεις του Russel, υπάρχουν και άλλες «μικρές παγίδες» στον Ζήνωνα που ενδέχεται να προκαλέσουν σύγχυση και αποπροσανατολισμό σε έναν αρχάριο.

Θα μπορούσαμε να περιμένουμε ακόμη και από έναν επικό ήρωα, για να μην πούμε μια χελώνα, να διασχίσει μια τελείως ευθεία διαδρομή με τελείως ομαλή ταχύτητα; Οι πιο προσεκτικοί ανάμεσά μας είναι γνωστό ότι εφιστούν την προσοχή σε τέτοια σφάλματα. Και τι γίνεται με την αρχική επιτάχυνση; Ο Αχιλλέας και η τετράποδη ανταγωνιστριά του αποκτούν στιγμιαία τις ταχύτητές τους; Ταυτόχρονα; Αυτοί οι περισσότερο γήινοι, φυσικοί προβληματισμοί περιπλέκουν περισσότερο τις προσπάθειες να περιγραφεί ο αγώνας του Ζήνωνος αυστηρά μέσω γεωμετρικών σειρών. Αναμφίβολα, μπορούμε να παρακάμψουμε τέτοια προβλήματα θεωρώντας ότι οι ανταγωνιστές εκτελούν ιδανικές κινήσεις, πόση αμφιβολία όμως δημιουργούν ήδη αυτά τα ζητήματα! Αφού σε πολλούς από μας οι άπειρες σειρές φαίνονται ήδη «εξωπραγματικές», είναι προτιμότερο να παρουσιαστεί το θέμα μέσω ενός παραδείγματος πολύ πο εύλογου, που δεν προκαλεί τόσες αμφισβήτησεις όσο το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας.

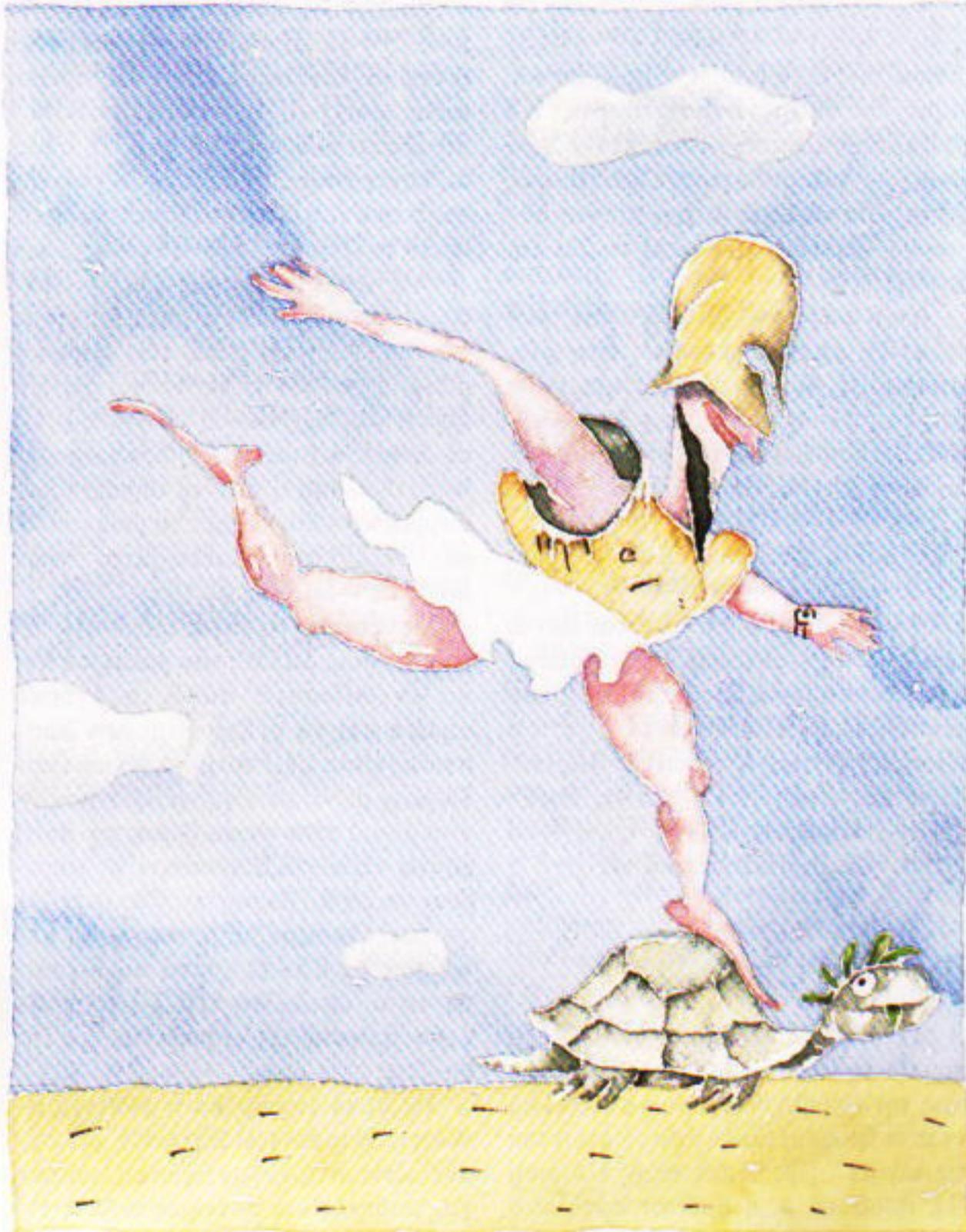
Τέτοιο παράδειγμα μας προσφέρει ένα συνηθισμένο μηχανικό ρολόι. Και εδώ έχουμε έναν αγώνα ταχύτητας όπως του Ζήνωνος, αλλά αντί της χελώνας και του ομηρικού ήρωα έχουμε δύο πολύ πειστικότερες φιγούρες: τους δείκτες του ρολογιού. Αναμφισβήτητα, ο μεγάλος, λεπτότερος δείκτης ξεπερνά τον μικρό, συ-

μπληρώνοντας έναν κύκλο γύρω από το δίσκο του ρολογιού σε μία ακριβώς ώρα. Από την άλλη πλευρά, ο «μικρός δείκτης» χρειάζεται δωδεκαπλάσιο διάστημα για να συμπληρώσει μια περιστροφή — δώδεκα ώρες ακριβώς. Ο ωροδείκτης κινείται μόλις με το $1/12$ της ταχύτητας του λεπτοδείκτη, και έτσι ο τελευταίος τον ξεπερνά καθαρά μπροστά στα μάτια μας.

Μπορούμε να δούμε πραγματικά πού και πότε ξεπερνά ο ταχύτερος δείκτης των βραδύτερο. Το σημείο όπου συναντώνται οι δύο δείκτες καθορίζει το όριο μιας συγκλίνουσας σειράς. Εξαρχής, έχουμε μια διαισθητική εικόνα της πραγματικής θέσης ενός ορίου στο χώρο και το χρόνο. Αν για παράδειγμα η ώρα είναι μία, είναι φανερό ότι ο λεπτοδείκτης θα προλάβει το σύντροφό του λίγο μετά

από τη μία και πέντε. Τότε, καθώς ο ένας δείκτης πλησιάζει σταδιακά τον άλλον, η έννοια της «σύγκλισης σε ένα όριο» γίνεται απιά αληθινή.

Η αλήθεια της θεωρίας των ορίων αποκαλύπτεται καθώς κυλά ο χρόνος. Στη μία ακριβώς, ο ωροδείκτης έχει ένα «προβάδισμα» 30° από τον ταχύτερο λεπτοδείκτη. Ο τελευταίος, ξεκινώντας από τις 12, καλύπτει αυτή την απόσταση σε πέντε λεπτά, αλλά ο ωροδείκτης στο ενδιάμεσο διάστημα έχει προχωρήσει λίγο περισσότερο. Πόσο; Αφού κινείται με το $1/12$ της ταχύτητας του λεπτοδείκτη, θα προχωρήσει κατά το $1/12$ των 30° , δηλαδή $2\frac{1}{2}^\circ$. Ο λεπτοδείκτης καλύπτει αυτή την απόσταση πολύ σύντομα, σε λιγότερο από μισό λεπτό. Μέσα σε αυτό το σύντομο διάστημα ο βραδύτερος σύντροφός του θα έχει, φυσικά, κινηθεί ξανά. Όμως, με λίγη



στην επίλυση ενός προβλήματος που αφορά πραγματική φυσική απόσταση: αν ο κόσμος συντίθεται από αδιάρετα υλικά σωματίδια, τότε μια φυσική απόσταση που διανύεται σε έναν αγώνα ταχύτητας δεν μπορεί στην πραγματικότητα να διασπαστεί σε άπειρο πλήθος σημείων αντίστοιχων προς τα μαθηματικά σημεία μιας άπειρης σειράς.

σκέψη καταλαβαίνουμε ότι πεντέμιοι λεπτά μετά τη μία, αυτός ο αγώνας «Αχιλλέα και χελώνας» θα έχει καταλήξει σε ισοπαλία.

Ο δίσκος του ρολογιού είναι ένα τέλειο, αν και φυσικώς πραγματικό, ανάλογο του θρυλικού αγώνα ταχύτητας του Ζήνωνος, εφοδιασμένο με δρομείς που κινούνται με ακρίβεια σε ένα κατάλληλα αριθμημένο μονοπάτι. Οι δείκτες του ρολογιού μάς δίνουν το έρεισμα για να πιστέψουμε ότι μια συνεχώς φθίνουσα γεωμετρική σειρά συγκλίνει πραγματικά σε ένα όριο. Βλέποντας ότι αυτό το όριο υπάρχει πραγματικά —σε ένα σημείο λίγο μετά τη 1:05, για παράδειγμα— αποκτούμε εμπιστοσύνη στον λεγόμενο τύπο «άπειρου αθροίσματος» για το οριακό άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς:

$$s = \frac{a}{1-r} \quad (1)$$

(όπου $r < 1$), ο οποίος επιβεβαιώνει, όπως θα δούμε παρακάτω, ότι θα βρούμε ένα σημείο σύγκλισης των δεικτών του ρολογιού λίγες μοίρες πέρα από το σημείο των πέντε λεπτών —δηλαδή, λίγο μετά τη μία και πέντε.

Αν ο μεγάλος μας αγώνας των δεικτών αρχίζει ακριβώς στη μία, μπορούμε να παραστήσουμε κάθε απόσταση που καλύπτει ο λεπτοδεικτης πλησιάζοντας τον ωροδείκτη με τη συνεχώς φθίνουσα σειρά

$$30^\circ + \frac{5^\circ}{2} + \frac{5^\circ}{24} + \frac{5^\circ}{288} + \dots, \quad (2)$$

όπου ο πρώτος όρος ισούται με το προβάδισμα του ωροδείκτη. Καθένα από τα επόμενα προβαδίσματα του ωροδείκτη είναι πάντοτε το $1/12$ του προηγούμενου. Αυτό είναι λογικό, αφού κινείται με το $1/12$ της ταχύτητας του άλλου δεικτή. Όλα αυτά γράφονται πολιτικά ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{30^\circ}{12^n}. \quad (3)$$

Μετρώντας δεξιόστροφα από το σημείο της ώρας 12, βρίσκουμε αμέσως την ακριβή θέση όπου συναντώνται οι δρομείς μας αντικαθιστώντας τις κατάλληλες τιμές στην εξίσωση (1), όπου το a , ο πρώτος όρος του

αθροίσματός μας, αντιπροσωπεύει το αρχικό προβάδισμα του ωροδείκτη, και το r , ο κοινός λόγος των σειρών μας, είναι ο λόγος της ταχύτητας του ωροδείκτη προς την ταχύτητα του βραδύτερου συντρόφου του:

$$s = \frac{30^\circ}{1 - \frac{1}{12}} = 32\frac{8}{11}^\circ. \quad (4)$$

Ξεκινώντας από τις 12, ο λεπτοδεικτης θα κινηθεί έως τις $32\frac{8}{11}^\circ$ πριν συμπέσει ακριβώς με τον ωροδείκτη. Πόσο χρόνο αντιπροσωπεύει αυτό το μήκος τόξου; Αφού ο λεπτοδεικτης κινείται κατά 360° σε 60 λεπτά, καλύπτει 1° κάθε $\frac{1}{6}$ του λεπτού. Άρα, για να καλύψει $32\frac{8}{11}^\circ$ χρειάζεται ακριβώς $5\frac{5}{11}^\circ$ λεπτά ή 5 λεπτά και $27\frac{3}{11}$ δευτερόλεπτα. Αυτά είναι προφανώς τα χωρικά και χρονικά όρια στα οποία συγκλίνει ο ταχύτερος δείκτης όταν «προλαβαίνει» τον βραδύτερο.

Υπάρχουν, φυσικά, και άλλα σημεία στο ρόλο όπου ο λεπτοδεικτης ξεπερνά τον ωροδείκτη. Σε πρώτη ματιά φαίνεται ότι υπάρχουν δώδεκα τέτοια διαφορετικά σημεία, αλλά λίγος πειραματισμός μάς δείχνει ότι στην πραγματικότητα είναι ένδεκα. Αυτό το «ωρολογιακό» γεγονός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιβεβαιώσουμε το όριο που βρήκαμε στην εξίσωση (4) μέσω των άπειρων σειρών: εφόσον ο λεπτοδεικτης ξεπερνά των ωροδείκτη 11 φορές κατά τη διάρκεια μιας πλήρους περιφοράς του τελευταίου, τότε τα σημεία όπου συμβαίνει αυτό πρέπει να βρίσκονται σε διαδοχικά διαστήματα των $360^\circ/11$ —δηλαδή, $32\frac{8}{11}^\circ$.

Μπορούμε να περιστρέψουμε με το χέρι τους δείκτες του ρολογιού για να εντοπίσουμε αυτά τα ένδεκα σημεία και να μετρήσουμε την απόστασή τους με ένα μοιρογνωμόνιο. Παρότι μόνο με ένα ακριβό μοιρογνωμόνιο που φέρει βερνίερο μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με ακρίβεια τις $32\frac{8}{11}^\circ$ μοίρες της εξίσωσης (4), αν εκτελέσουμε με προσοχή τις μετρήσεις με συνηθισμένο μοιρογνωμόνιο τα αποτελέσματα θα πλησιάζουν αρκετά τις «προβλέψεις» της θεωρίας των άπειρων σειρών.

Με αυτό τον τρόπο ο μυθικός αγώνας δρόμου του Ζήνωνος γίνεται μια αξιόπιστη εργαστηριακή άσκηση για μαθητές και φοιτητές που αρχί-

ζουν να μαθαίνουν απειροστικό λογισμό. Προσφέρει μια απτή αισθηση της θέσης ενός ορίου στο χώρο και το χρόνο. Επιπλέον, η αναλογία του ρολογιού μάς δείχνει ότι υπάρχουν σοβαροί λόγοι να εμπιστευόμαστε τον τύπο του αθροίσματος της γεωμετρικής σειράς (εξίσωση (1)) —συμφωνεί ακριβώς με τη διαίρεση των 360° με το 11, και μας προσφέρει έναν εμπειρικό έλεγχο της μαθηματικής θεωρίας που θα ήταν αδύνατος με οποιοδήποτε ζευγάρι δρομέων που ακολουθούν ευθεία πορεία. □

Ο **Gordon Moyer** είναι συγγραφέας που ζει στην Ουάσινγκτον, και αρθρογράφει στο *Scientific American* και άλλα έντυπα.

ΤΟ QUANTUM ΤΩΡΑ



ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΕΡΙΠΤΕΡΑ

— Θα το βρίσκετε την Ιη κάθε μονού μήνα στην Αθήνα, τη Θεσσαλονίκη, και τις μεγαλύτερες επαρχιακές πόλεις της Ελλάδας. —

Τα παλαιότερα τεύχη, όπως και το τρέχον, μπορείτε να τα βρίσκετε στα βιβλιοπωλεία, ή στα γραφεία των Εκδόσεων Κάτοπτρο.

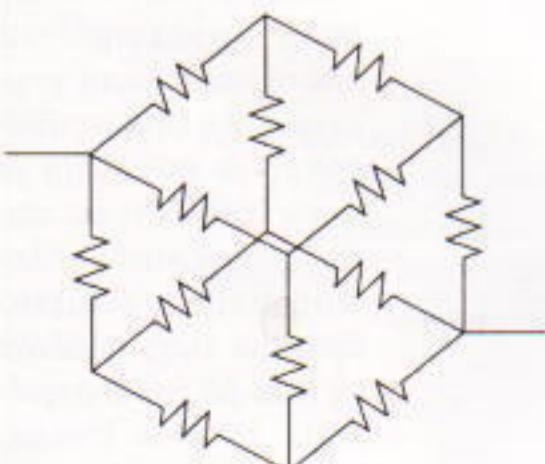
Κυκλώματα και συμμετρία

Αναζητώντας μερικές φορές τη συμμετρία γλιτώνετε από την άλγεβρα

Gary Haardeng-Pedersen

HΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ ιδιαιτέρως χρήσιμη στη μελέτη πολλών φυσικών συστημάτων. Πολλοί θεμελιώδεις νόμοι της φυσικής κατά τη μαθηματική διατύπωσή τους εμφανίζονται συμμετρικοί —λόγου χάρη ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα ή ο νόμος του Coulomb. Άλλοι φυσικοί νόμοι έχουν σαφώς προκύψει από την απαίτηση συμμετρίας. Για παράδειγμα, οι νόμοι της σχετικότητας —τόσο η σχετικότητα του Γαλιλαίου όσο και η ειδική σχετικότητα του Αϊνστάιν— στηρίζονται στη συμμετρία της παρατηρήσιμης φυσικής από διαφορετικούς παρατηρητές.

Στη συνέχεια του άρθρου θα ασχοληθούμε με τα συμμετρικά κυκλώματα αντιστάσεων. Ένα κλασικό παράδειγμα σύνδεσης αντιστάσεων —δύσκολα αναλύεται με τις συνήθεις τεχνικές που διδασκόμαστε στο κεφάλαιο του ηλεκτρισμού της λυκειακής ύλης— είναι το «κύκλωμα



Σχήμα 1

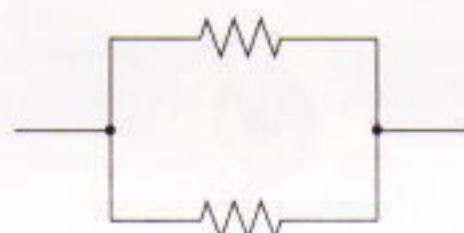
του κύβου»: δώδεκα σύρματα, το καθένα αντίστασης R , συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να αποτελούν τις ακμές ενός κύβου (Σχήμα 1). Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να ρωτάμε πόση είναι η ολική (ή ισοδύναμη) αντίσταση του συρμάτινου κύβου στην περίπτωση που τον συνδέσουμε με πηγή σε δύο διαγωνίως απέναντι κορυφές του (βλ. Σχήμα 1).

Για μια γρήγορη αναδρομή, ας θεωρήσουμε το σύστημα που αποτελείται από δύο ίσες αντιστάσεις R , συνδεδεμένες μεταξύ τους παράλληλα το ηλεκτρικό ρεύμα I που εισέρχεται στο σύστημα, είναι ίδιο με το ρεύμα που εξέρχεται απ' αυτό (Σχήμα 2). Εξαιτίας της συμμετρίας είναι προφανές ότι πρέπει το μισό ρεύμα να διαρρέει τη μια αντίσταση και το υπόλοιπο μισό την άλλη επομένως η τάση στα άκρα του συστήματος θα είναι

$$V = \frac{I}{2} \cdot R$$

και, συνεπώς, η ολική του αντίσταση

$$R_{\text{al}} = \frac{V}{I} = R / 2.$$



Σχήμα 2

Ας θεωρήσουμε επίσης το σύστημα που αποτελείται από δύο ίσες αντιστάσεις R , συνδεδεμένες σε σειρά το ρεύμα που διαρρέει τη μια αντίσταση διαρρέει και την άλλη (Σχήμα 3). Εξαιτίας της συμμετρίας, η πτώση τάσης V στο σύστημα πρέπει να είναι διπλάσια της πτώσης τάσης σε καθεμία αντίσταση, δηλαδή

$$V = 2IR,$$

και, συνεπώς, η ολική αντίσταση του συστήματος θα ισούται με

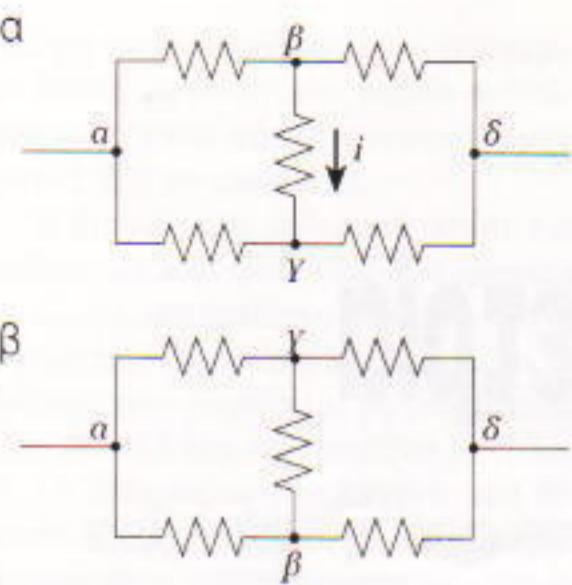
$$R_{\text{al}} = \frac{V}{I} = 2R.$$

Μια σχετικά γνωστή άσκηση συνδεσμολογίας αντιστάσεων είναι αυτή στην οποία πέντε σύρματα, το καθένα αντίστασης R , συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να σχηματίζουν το συμμετρικό κύκλωμα του Σχήματος 4. Είναι φανερό ότι ουδεμία αντίσταση συνδέεται σε σειρά ή παράλληλα με οποιαδήποτε άλλη, και επομένως η αναζήτηση της ολικής αντίστασης του εν λόγω κυκλώματος αποδεικνύεται, σε πρώτη ματιά, δύσκολη.

Κλειδί της λύσης είναι η συμμετρία. Ας ονομάσουμε a , b , y , δ τους κόμβους του κυκλώματος, και ας υποθέσουμε ότι η φορά του ρεύματος i που διαρρέει την αντίσταση μεταξύ των κόμβων β και y είναι από το β



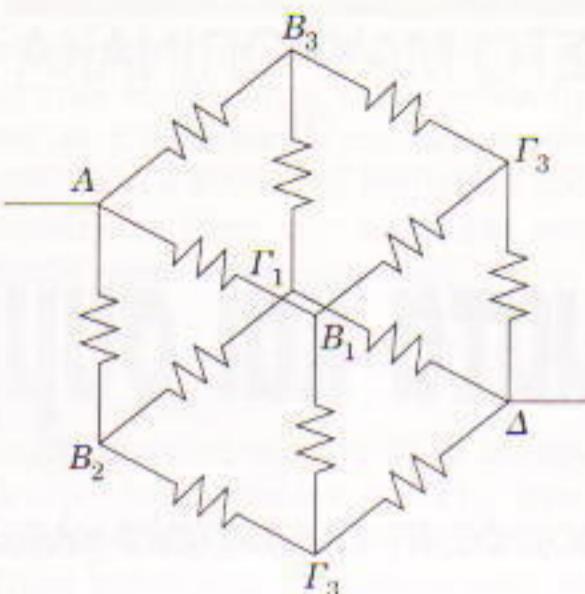
Σχήμα 3



Σχήμα 4

προς το γ . Ας ξανασχεδιάσουμε, όμως, το κύκλωμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4β· η μόνη διαφορά βρίσκεται στο ότι έχουμε αντιμεταθέσει τους πάνω και τους κάτω κλάδους —συνεπώς το ίδιο έχει συμβεί και με τους κόμβους β και γ . Σ' αυτό το τροποποιημένο κύκλωμα το ρεύμα θα ρέει από το γ προς το β , λόγω της ισοδυναμίας μεταξύ του αρχικού και του τροποποιημένου κυκλώματος. Εντούτοις, το ρεύμα πρέπει να ρέει και από το β προς το γ , λόγω της αρχικής υπόθεσης. Η μόνη δυνατή λύση για να ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες είναι i να ισούται με μηδέν.

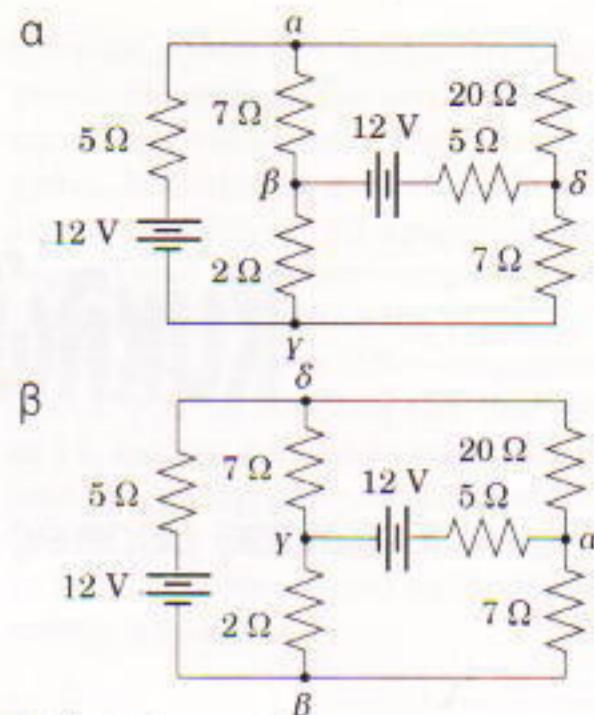
Εφόσον διαπιστώνουμε ότι ο κλάδος $\beta\gamma$ δεν διαρρέεται από ρεύμα, μπορούμε να απομακρύνουμε την αντίσταση μεταξύ των β και γ , χωρίς το κύκλωμά μας να επηρεαστεί σε ουδήποτε. Αυτό σημαίνει ότι ο πάνω κλάδος $\alpha\delta$ αποτελείται από δύο ίσες αντίστασεις συνδεδεμένες σε σειρά, και η ισοδύναμη αντίστασή του ισούται με $2R$: το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τον κάτω κλάδο $\alpha\delta$. Τέλος, οι ισοδύναμες αντίστασεις των δύο κλάδων $\alpha\delta$ συνδέονται μεταξύ τους παράλληλα, οπότε η ολική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με $(2R)/2 = R$. Τώρα πλέον είναι φανερό ότι όποια κι αν είναι η τιμή της αντίστασης μεταξύ των κόμβων β και γ , ο κλάδος $\beta\gamma$ δεν θα διαρρέεται από ρεύμα όποιες και αν



Σχήμα 5

είναι οι τιμές των αντίστασεων $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma}$ και $R_{\beta\delta} = R_{\gamma\delta}$ (όπου $R_{\alpha\beta}$ είναι η αντίσταση μεταξύ των κόμβων α και β , κ.λπ.).

Ας επανέλθουμε όμως στο αρχικό πρόβλημα του Σχήματος 1. Στο Σχήμα 5 φαίνονται τα γράμματα με τα οποία συμβολίζουμε τις κορυφές του κύβου. Είναι φανερό ότι το ρεύμα I που φιάνει στον κόμβο A είναι ίδιο με αυτό που φεύγει από τον κόμβο Δ . Εξαιτίας της συμμετρίας, το I στον κόμβο A θα διασπάται σε τρία ίσα μέρη, το καθένα $I/3$, τα οποία θα διαρρέουν τους κλάδους AB_1 , AB_2 και AB_3 αντίστοιχα. Εξαιτίας και πάλι της συμμετρίας, το ρεύμα $I/3$ στον κόμβο B_1 θα διασπάται σε δύο ίσα μέρη, το καθένα $I/6$, τα οποία θα διαρρέουν τους κλάδους $B_1\Gamma_2$ και $B_1\Gamma_3$ αντίστοιχα. (Το ίδιο συμβαίνει και στους κόμβους B_2 και B_3 .) Στον



Σχήμα 6

κόμβο Γ_3 θα συγκλίνουν τα ρεύματα που διαρρέουν τους κλάδους $B_2\Gamma_3$ ($I/6$) και $B_3\Gamma_3$ ($I/6$), οπότε τον κλάδο $\Gamma_3\Delta$ θα τον διαρρέει ρεύμα $I/6 + I/6 = I/3$. (Το ίδιο συμβαίνει και στους κλάδους $\Gamma_1\Delta$ και $\Gamma_2\Delta$.) Επλέγοντας, λοιπόν, οποιαδήποτε διαδρομή από τον κόμβο A ως τον κόμβο Δ , βρίσκουμε ότι η πιώση τάσης στο σύστημα είναι

$$V = \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R = \frac{5}{6}IR,$$

Επομένως, η ολική αντίσταση του κυκλώματος του κύβου είναι

$$R_{\text{ol}} = \frac{V}{I} = \frac{5}{6}R.$$

Ας προχωρήσουμε τώρα στο κύκλωμα του Σχήματος 6α. Σ' αυτό υπάρχουν τέσσερις κόμβοι, οι α , β , γ και δ , και περιλαμβάνει δύο όμοιες μπαταρίες των 12 V, δύο όμοιες αντίστασεις των 5 Ω και δύο όμοιες αντίστασεις των 7 Ω, δηλαδή χαρακτηρίζεται από αξιοπρόσεκτη συμμετρία. Ας ξανασχεδιάσουμε το κύκλωμα με την ελπίδα ότι θα καταφέρουμε να το απλοποιήσουμε: αντιμεταθέτουμε τους κλάδους $\alpha\gamma$ και $\beta\delta$ (που περιέχουν τις δύο μπαταρίες), και τοποθετούμε αναλόγως τα υπόλοιπα



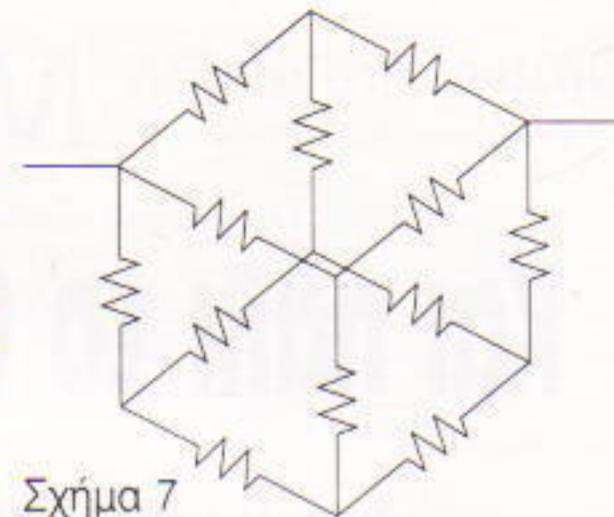
στοιχεία του κυκλώματος (βλ. Σχήμα 6β).

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι το τροποποιημένο κύκλωμα δεν είναι απλούστερο από το αρχικό· αλλά δεν είναι και πιο σύνθετο. Απλώς είναι το ίδιο. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν δύο σημαντικές διαφορές. Ας ονομάσουμε i_1 το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο $\beta\gamma$ στο αρχικό κύκλωμα, και ας υποθέσουμε ότι έχει φορά «από πάνω προς τα κάτω», από το β προς το γ . Στο τροποποιημένο κύκλωμα, που είναι ίδιο με το αρχικό, το ρεύμα πρέπει ομοίως να έχει φορά «από πάνω προς τα κάτω», από το γ προς το β . Η μόνη δυνατή λύση για να ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες είναι το i_1 να ισούται με μηδέν. Με ανάλογο συλλογισμό συμπεραίνουμε πως ούτε ο κλάδος $\alpha\delta$ διαρρέεται από ρεύμα. Μπορούμε επομένως να απομακρύ-

νουμε τις αντιστάσεις των 2Ω και 20Ω , χωρίς να αλλοιωθεί το κύκλωμά μας. Έτοι, ρεύμα θα ρέει μόνο στους κλάδους $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$, $\beta\delta$ και $\delta\gamma$, και μάλιστα βρίσκουμε εύκολα ότι το ρεύμα αυτό ισούται με 1 A. Το επιχείρημα της συμμετρίας που χρησιμοποιήσαμε στηρίζεται στην ισότητα των τάσεων των μπαταριών, και την ισότητα μία προς μία των αντιστάσεων που διαρρέονται από ρεύμα. Οι τιμές των άλλων δύο αντιστάσεων αποδειχθήκαν αδιάφορες.

Έπειτα από όλα τούτα αντιλαμβάνεστε ότι είναι χρήσιμο να αναζητούμε τη συμμετρία στα διάφορα φυσικά συστήματα· είναι βέβαιο ότι θα περιοριστεί κατά πολύ η άλγεβρα που θα απαιτείται για τη μελέτη της συμπεριφοράς του.

Για το τέλος άφησα μια παραλλαγή του πρώτου προβλήματος: πόση θα



Σχήμα 7

είναι η ολική αντίσταση του συρμάτινου κύβου αν συνδέσουμε την πηγή σε δύο διαγωνίως αντίθετες κορυφές του, που ανήκουν όμως στην ίδια έδρα (Σχήμα 7);

Ο **Gary Haardeng-Pedersen** είναι αναπληρωτής καθηγητής φυσικής στο Κολέγιο Wilfred Grenfell, στο Κόρνερ Μπρουκ του Νιουφάουνλαντ του Καναδά.

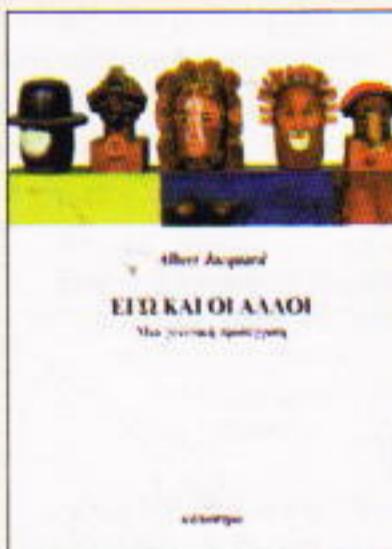
ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ

Albert Jacquard

ΕΓΩ ΚΑΙ ΟΙ ΆΛΛΟΙ

Μια γενετική προσέγγιση

Σελ.: 146, 2.500 δρχ.



Σ' αυτό το βιβλίο ο γάλλος βιολόγος και διανοητής Jacquard εξετάζει την τεκνοποίηση, τη μοναδικότητα του ατόμου, τον κίνδυνο των ρατσισμού, τα άχρηστα τεστ νοημοσύνης και τις ανερμάτιστες προσπάθειες ταξινόμησης των ανθρώπων, δείχνοντας πόσο ανόητο είναι να αναζητεί κανείς «ανώτερα» και «κατώτερα» άτομα.

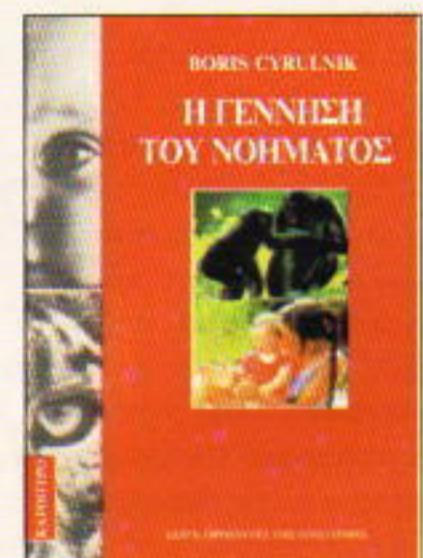
Boris Cyrulnik

Η ΓΕΝΝΗΣΗ

ΤΟΥ ΝΟΗΜΑΤΟΣ

Από το ζώο στον άνθρωπο

Σελ.: 131, 2.200 δρχ.



Το βιβλίο αποτελεί μια ευσύνοπτη και απλή εισαγωγή στο νέο επιστημονικό πεδίο, την ανθρώπινη ηθολογία. Ο Cyrulnik, νευρολόγος, ψυχίατρος, ψυχαναλυτής και πρωτοπόρος ερευνητής στο νέο πεδίο ερμηνεύει την συμπεριφορά του ανθρώπου, συμπεριλαμβανομένης της γλώσσας, της ευφυΐας και της κοινωνικότητάς του, με τρόπο πρωτότυπο και ελκυστικό.

Εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ισαύρων 10 και Δαφνομηλη, 114 71 Αθήνα Τηλ.: 3643272, 3645098, Fax: 3645098

Και πάλι το Θεώρημα του Ναπολέοντα

«Το τελευταίο πράγμα που θέλουμε από σας, Στρατηγέ, είναι
ένα μάθημα γεωμετρίας!» —Pierre-Simon Laplace

George Berzsenyi

ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ακολουθούν, το τρίγωνο ABC είναι τυχαίο και τα σημεία A' , B' και C' είναι τέτοια ώστε οι γωνίες που έχουν σημειωθεί με τον ίδιο τρόπο να είναι ίσες μεταξύ τους.

Το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο σχήμα. Πρέπει όμως να επισημάνουμε ότι στα δύο σχήματα ζητούμε την ισότητα διαφορετικών ζευγών γωνιών. Στην απλούστερη μορφή του, αυτό το θεώρημα

—που αποδίδεται στον Να-
πο-

λέο-
ντα
Βονα-
πάρτη—
υποστηρί-
ζει πως όταν
κάθε σημειω-
μένη γωνία εί-
ναι 60° και όταν
τα A^* , B^* και C^* εί-
ναι τα κέντρα εξωτε-
ρικών ισόπλευρων τρί-
γώνων, τότε το τρίγωνο
 $A^*B^*C^*$ είναι επίσης ισόπλευρο.

Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες για την ιστορία και τις διάφορες επεκτάσεις, τα αντίστροφα καθώς και άλλες πλευρές του θεωρήματος του Ναπολέοντα διαβάζοντας το πρόσφατο άρθρο του John E. Wetzel στο *American Mathematical Monthly* (τόμ. 99, αρ. 4, σελ. 339-51) και τις παραπο-

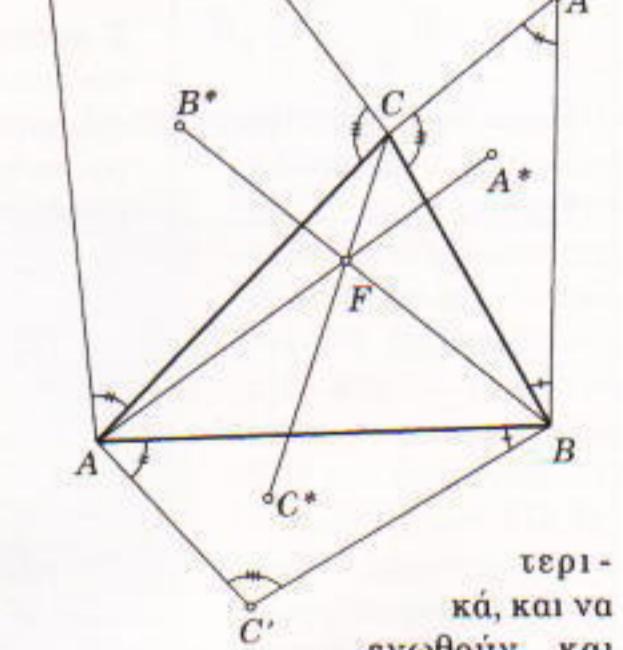
μές που παρατίθενται εκεί.

Το ενδιαφέρον μου για το θεώρημα του Ναπολέοντα αναθερμάνθηκε εξαιτίας δύο μηνυμάτων που εμφανίστηκαν σε μια από τις ομάδες ενημέρωσης σε γεωμετρικά θέματα του Internet (geometry.pre-college.net ή geometry.puzzles) και τα οποία μου επισήμανε ο φίλος μου και πρώην συνάδελφος Bradley Brock. Το ένα από τα μηνύματα (του Michael de Villiers από τη Νότια Αφρική) σχολίαζε γενικεύσεις των διευθετήσεων που παρουσιάζονται στα σχήματα, ενώ το άλλο (του John Conway από το Πανεπιστήμιο του Πρίνστον) υποστήριζε πως όταν τα εξωτερικά τρίγωνα είναι όμοια με κάποιο σταθερό τρίγωνο T (δηλαδή, αντί να είναι ισόπλευρα, έχουν τη μορφή του T) και αν αντικαταστήσουμε τη λέξη «κέντρο» με οποιοδήποτε σταθερό σημείο P του T και τις εικόνες του —ας πούμε, A^* , B^* και C^* — ως προς το

μετασχηματισμό ομοιότητας, τότε αυτές οι τρεις εικόνες σχηματίζουν ένα τρίγωνο όμοιο με το T . O Conway υποθέτει ότι στις γενικές περιπτώσεις που απεικονίζονται στα δύο σχήματα, οι ευθείες AA^* , BB^* , CC^*

συντρέχουν επίσης σε ένα σημείο F , και ότι από το F , όταν είναι εσωτερικό του τριγώνου ABC , οι τρεις πλευρές του ABC φαίνονται υπό τις ίδιες γωνίες που φαίνονται οι πλευρές του T από το σημείο P .

Η πρόκληση προς τους αναγνώστες μου είναι να επαληθεύσουν τους προηγούμενους ισχυρισμούς, να τους επεκτείνουν κατασκευάζοντας τα όμοια με το T τρίγωνα εσω-



τερικά, και να ενωθούν και αυτοί με το Geometry Forum του Internet (<http://forum.swarthmore.edu>) και άλλες ηλεκτρονικές πλατφόρμες. Πρέπει να επωφεληθείτε από τις μοναδικές ευκαιρίες να παρακολουθήσετε τους διαλογισμούς του Conway και άλλων εξαιρετικών μαθηματικών και να μάθετε να ακολουθείτε τα βήματά τους. □

Ψυχαγωγικά μαθηματικά

Αντίδοτα για τις τελευταίες τεμπέλικες μέρες του καλοκαιριού

ΔΟΥ ΜΙΑ ΣΥΛΛΟΓΗ ΨΥΧΑΓΩΓΙΚΩΝ προβλημάτων, καθώς και πέντε παιχνίδια για τα οποία υπάρχουν νικηφόρες σφρατηγικές για τον έναν από τους παικτες. Διασκεδάστε λύνοντας τα προβλήματα και βρίσκοντας τη νικητήρια μέθοδο!

Προβλήματα

1. Δέκα νομίσματα σχηματίζουν ένα τρίγωνο όπως φαίνεται δεξιά στην εικόνα. Ποιο είναι το μικρότερο πλήθος νομίσματων που πρέπει να απομακρύνουμε έτσι ώστε τα κέντρα των νομίσματων που απομένουν να μη σχηματίζουν ούτε ένα ισόπλευρο τρίγωνο;
2. Βρείτε τέοσερις ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμά τους και το γινόμενό τους να είναι περιπτό.
3. Ένα ρολόι δείχνει 8:20. Ποια γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του;

4. Απαριθμήστε τα δάκτυλα του αριστερού σας χεριού με την εξής σειρά: ο αντίχειρας θα είναι το 1, ο δείκτης το 2, ο μέσος το 3, ο παράμεσος το 4, ο μικρός το 5. Έπειτα συνεχίστε αντιστροφα: ο παράμεσος είναι το 6, ο μέσος το 7, ο δείκτης το 8, ο αντίχειρας το 9. Συνεχίστε πάλι αντιστροφα: ο δείκτης είναι το 10, κ.ο.κ. Ποιο δάκτυλο θα αριθμήσετε με το 1.995;

5. Υπάρχουν τρίγωνα στα οποία τα μέσα των υψών ανήκουν στην ίδια ευθεία;

6. Καιγονταν επτά κεριά και έ-



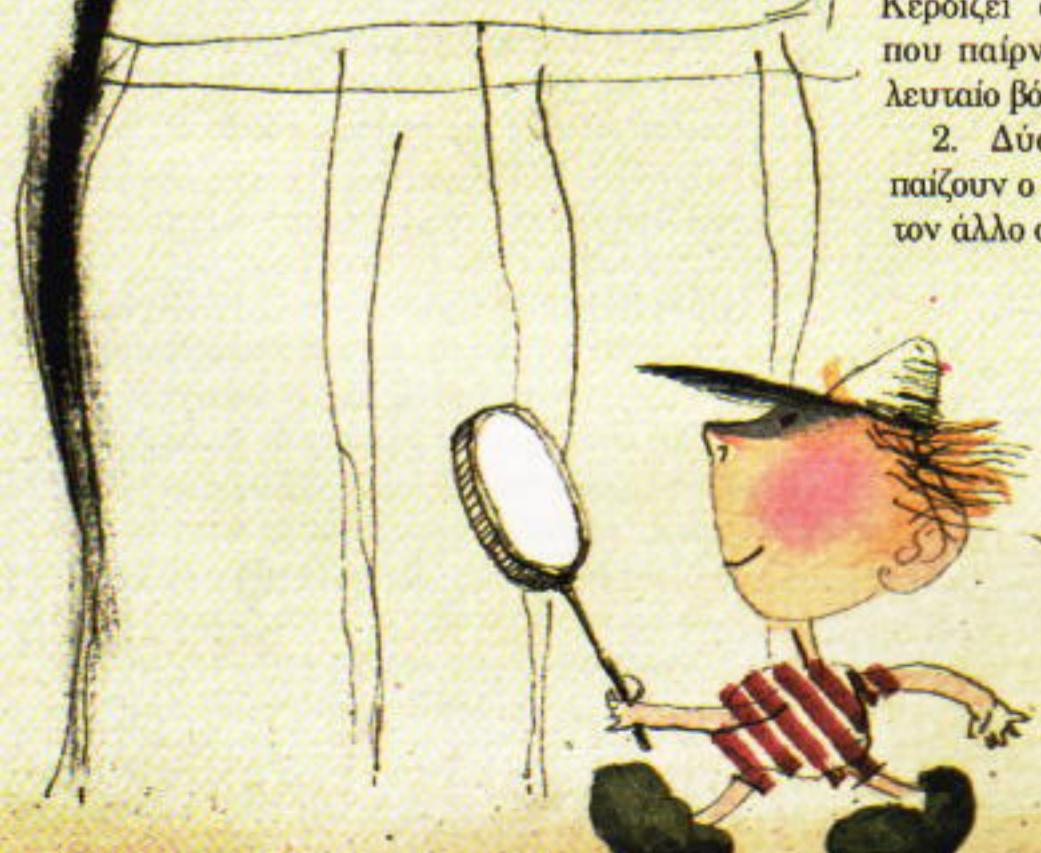
οβρισαν τι τρία. Πόσα απέμειναν;

7. Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 17, 35 και 18. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

8. Βρείτε το γινόμενό όλων των περιπτών αριθμών από το 1 έως το 99.

9. Η Σάλυ βγήκε από το δάσος μαζί με το σκύλο της το Ρεξ και ξεκίνησε να επιστρέψει στο σπίτι της. Την ίδια στιγμή ο αδελφός της, ο Χάρυ, ξεκίνησε από το σπίτι για να πάει μια βόλτα στο δάσος. Ο Ρεξ άρχισε να τρέχει για το σπίτι, αλλά

όταν συνάντησε τον Χάρυ, άλλαξε αμέσως κατεύθυνση, έτρεξε προς τη Σάλυ και μόλις τη συνάντησε άλλαξε ξανά κατεύθυνση και έτρεξε προς τον Χάρυ. Συνέχισε να τρέχει μπρος-πίσω ως τη στιγμή που ο Χάρυ συνάντησε τη Σάλυ. Πόση απόσταση κάλυψε ο Ρεξ, αν η Σάλυ περπατούσε με τα χότητα 3



km/h, ο Χάρυ περπατούσε λίγο ταχύτερα, με 5 km/h, ενώ ο Ρεξ έτρεχε με 8 km/h; Η απόσταση ανάμεσα στο δάσος και το σπίτι είναι 4 km.

10. Δύο διαστημόπλοια κινούνται το ένα προς την κατεύθυνση του άλλου. Οι ταχύτητές τους είναι 15.000 km/h και 21.000 km/h αντίστοιχα, και οι θέσεις απογείωσής τους απέχουν 1.995 km. Ποια θα είναι η απόσταση μεταξύ των διαστημόπλοιων ένα λεπτό πριν από τη συνάντησή τους;

11. Ποιος αριθμός διαιρείται ακριβώς απ' όλους τους αριθμούς;

12. Οι τίτλοι τριών διάστημαν περιπετιωδών μυθιστορημάτων περιέχουν τους αριθμούς 2, 20 και 20.000. Γνωρίζετε ποια είναι;

13. Η βάση ενός ιοσκελούς τριγώνου είναι διπλάσια του ύψους του. Βρείτε τις γωνίες του.

14. Βλέπουμε μια γωνία 1° μέσω ενός φακού μεγεθυνούς $4 \times$. Πόσο μεγάλη θα φαίνεται η γωνία;

Παιχνίδια

1. Δύο παικτές απομακρύνουν, ο ένας μετά τον άλλο, βόλους από δύο σωρούς —ο ένας σωρός έχει 13 βόλους και ο δεύτερος 10. Ο κάθε παικτής μπορεί να διαλέξει μια από δύο δυνατότητες (α) να πάρει όσους βόλους θέλει από έναν από τους σωρούς ή (β) να πάρει το ίδιο πλήθος βόλων και από τους δύο σωρούς. Κερδίζει ο παικτής που παίρνει τον τελευταίο βόλο.

2. Δύο παικτές παίζουν ο ένας μετά τον άλλο αφαιρώ-

ντας έναν, δύο ή τρεις βόλους από έναν σωρό 25 βόλων. Κερδίζει ο παικτής που έχει στο τέλος άριθμος βόλων.

3. Δύο παικτες έχουν μπροστά τους δύο σωρούς με καραμέλες —9 καραμέλες σε κάθε σωρό. Κίνηση στο παιχνίδι θεωρείται η μετακίνηση μιας καραμέλας από τον ένα σωρό στον άλλο και το φάγωμα δύο καραμελών από οποιονδήποτε σωρό. Οι παικτες παίζουν ο ένας μετά τον άλλο μετακινώντας και τρώγοντας καραμέλες. Χάνει ο παικτής που δεν μπορεί να κάνει κίνηση.

4. Ο ένας παικτής βάζει ένα άσπρο πόνι σε ένα τετράγωνο της σκακιέρας και ο άλλος βάζει ένα μαύρο πόνι σε οποιοδήποτε άλλο τετράγωνο. Σημ συνέχεια μετακινούν τα πόνια τους, ο ένας μετά τον άλλο, σε γειτονικό τετράγωνο κάθε φορά (οριζόντια ή κάθετα). Κερδίζει ο παικτής που καταφέρνει να φέρει το πόνι του πάνω στο πόνι του αντιπάλου του.

5. Σε ένα γωνιακό τετράγωνο μιας σκακιέρας είναι τοποθετημένο ένα πόνι ίππου. Δύο παικτές σημειώνουν εναλλάξ τετράγωνα στη σκακιέρα (ας πούμε, με κιμωλία) —ένα τετράγωνο κάθε φορά— έτσι ώστε ο ίππος να μπορεί να φτάσει σε οποιοδήποτε τετράγωνο δεν έχει σημειωθεί χωρίς να πέφτει σε σημειωμένο τετράγωνο. Χάνει ο παικτής που δεν μπορεί να κάνει κίνηση.

A. Savin

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ



Ο δρ. Matrix και τα θαύματα του 8

Ένα χειρόγραφο που ανακαλύφθηκε σε κάποιο συρτάρι

Martin Gardner

ΗΜΕΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΗ Η ΑΦΗΓΗΣΗ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ βασίζεται σε ένα χειρόγραφο που ανακάλυψε ο αρχισυντάκτης του περιοδικού τακτοποιώντας τα αρχεία του. Φέρει ημερομηνία 28 Ιουλίου 1988. Για τον αρχισυντάκτη —σοβιετικός πρόσφυγας εκείνο το καλοκαίρι του '88— το *Quantum* δεν ήταν παρά μια ανάμνηση, και έτοι δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο πώς βρέθηκε το χειρόγραφο σε εκείνο το συρτάρι. Το προσφέρουμε στους αναγνώστες μας σαν μια απρόπτη νότα με το τέλος του καλοκαιριού.

Ο ΚΑΛΟΣ ΜΟΥ ΦΙΛΟΣ δρ. Irving Joshua Matrix, ο μεγαλύτερος αριθμολόγος του κόσμου, δεν δολοφονήθηκε το 1980 από πράκτορα της KGB, όπως είχα κάποτε αναφέρει. Όπως αποκαλύπτω στο βιβλίο μου *From Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, χαίρει άκρας υγείας και ζει στην Καζαμπλάνκα.

Είχα την ευκαιρία να συναντήσω τον δρ. Matrix σε ένα πρόσφατο συνέδριο για τη θεωρία υπερχορδών. Ο εορτασμός της εκατονταετηρίδας της Αμερικανικής Μαθηματικής Ένωσης (AME) θα αρχίσει στις 8 Αυγούστου αυτού του έτους. Η ημερομηνία αυτή μπορεί να γραφεί ως 8/8/88, ένας σχηματισμός ψηφίων που ήμουν βέβαιος ότι θα ενδιέφερε το φίλο μου. Μόλις του ζήτησα να σχολιάσει τους αριθμούς 8, 88 και 888, χαμογέλασε ελαφρά, ένωσε τα ακροδάκτυλά του και άρχισε να μιλά επί μια σχεδόν ώρα. Ακολουθούν μερικές από τις παρατηρήσεις του, που κατάφερα να τις καταγράψω όσην ώρα μιλούσε.

Το οκτώ, άρχισε, είναι ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα ψηφία. Από την πλευρά της καθαρής αριθμητικής, είναι ο δεύτερος κύβος, ο έκτος αριθμός Fibonacci, το άθροισμα των πρώτων τριών ψηφίων του π., κ.ο.κ., —όλα αυτά όμως τα θεώρησε αδιάφορα και τετριμένα γεγονότα. Στον εξωτερικό κόσμο, το 8 αποκτά μεγαλύτερη λάμψη με τις νότες της οκτάβας, τα πλοκάμια του χταποδιού, τον οκτακύλινδρο κινητήρα, τα όγδοα των μετοχών, τον κόμβο «οκτάρι», τη φιγούρα του οκταριού των σκιέρ, το οκτάωρο, την οκταπλή οδό του βουδισμού και τα παλιά ισπανικά νομίσματα «οκτάρια».

Περνώντας στην ειδικότητά του, την αλλόκοτη αριθμολογία, ο δρ. Matrix χαρακτήρισε το 8 ως το κυκλικότερο και το μεγαλύτερο ψηφίο. Είναι το κυκλικότερο, μου είπε, επειδή αποτελείται από δύο κύκλους, ενώ όλα τα υπόλοιπα κυκλικά ψηφία —0, 6, 9, και μερικές φορές το 4— έχουν



μόνο έναν κύκλο. Είναι το μεγαλύτερο επειδή αν στραφεί κατά ένα τέταρτο του κύκλου, γίνεται άπειρο.

Ανάλογα με το πώς το χωρίζετε, οριζόντια ή κατακόρυφα, το μισό του 8 είναι 0 ή 3. Ο δρ. Matrix μού ανέφερε πως ο φίλος του Gerald J. Cox παρατήρησε ότι τα τρία τέταρτα του 8 είναι 9 ή 6, ανάλογα με το ποια τόξα του απομακρύνουμε —αλλά αφού το 6 είναι πραγματικά τα τρία τέταρτα του 8, το γεγονός δεν έχει αριθμολογική αξία. Γραμμένο ως ρωμαϊκό ψηφίο το VIII είναι το μισό του XIII, ή τουλάχιστον το πάνω μισό του, ενώ δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αν γράψουμε τα ονόματα των αριθμών και τα βάλουμε σε αλφαριθμητική σειρά, το 8 είναι όγδοο. Και φυσικά, προσέθεσε,

στην αγγλική γλώσσα το οκτώ (eight) ακούγεται ως ο αόριστος του τρώγω (ate). Σε αυτό το σημείο ο δρ. Matrix ξαπλώσε αναπαυτικά στην πολυθρόνα του, και ενώ τα καταπράσινα μάτια του άστραφταν, απήγγειλε το επόμενο απόσπασμα από το *Finnegans Wake*, του James Joyce, το οποίο, όπως είπε, στη 2η γραμμή της σελίδας 142 της έκδοσης Viking, γράφει: "And who eight the last of goosebellies...".

Μόλις ζήτηρα από τον δρ. Matrix κάποια αριθμητικά προβλήματα που αφορούν το 8, μου έθεσε αμέσως επτά ερωτήσεις που αφορούν την εισαγωγή των σημείων της πρόσθετης και της αφαιρεστης στην αύξουσα ακολουθία 123456789 ή στη φθίνουσα ακολουθία 987654321, έτσι ώστε να προκύπτουν τα αθροίσματα 8, 88 και 888. Ξεκίνησε με το 88, τα δύο τελευταία ψηφία του έτους 1988. Υπάρχουν, με βεβαιωση, έξι τρόποι για να εισαχθούν τα σημεία συν ή πλην στην αύξουσα ακολουθία έτσι ώστε να επιτύχουμε άθροισμα 88. Ιδού ένας:

$$1 - 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 78 + 9 = 88.$$

Είναι δυνατόν να επιτύχουμε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τέσσερα μόνο σημεία; Ναι, αυτό είναι το ελάχιστο πλήθος σημείων, και η λύση είναι μοναδική. Μπορείτε να τη βρείτε χωρίς να χρησιμοποιήσετε πρόγραμμα υπολογιστή;

Η φθίνουσα ακολουθία έχει δεκαέξι λύσεις, αλλά μία μόνο με πέντε σημεία. Μπορείτε να την ανακαλύψετε;

Αν επιτρέψουμε την παρουσία ενός αρνητικού προσήμου στην αρχή της ακολουθίας, εξακολούθησε ο δρ. Matrix, είναι δυνατές και άλλες λύσεις. Με το αρνητικό πρόσημο στην αρχή της αύξουσας ακολουθίας έχουμε ένδεκα τρόπους σχηματισμού του αθροίσματος 88, αλλά για κάθε δυνατό πλήθος σημείων έχουμε περισσότερες από μία λύσεις. Άλλα αν έχουμε αρνητικό πρόσημο στην αρχή της φθίνουσας ακολουθίας, υπάρχει μία μόνο λύση. Υπόδειξη: χρησιμοποιεί οκτώ πρόσημα (απαριθμώντας και το αρνητικό πρόσημο της αρχής).

Αν το επιθυμητό αποτέλεσμα είναι το 888, δεν υπάρχει λύση για την αύξουσα ακολουθία — είτε χρησιμοποιήσουμε αρνητικό πρόσημο στην αρχή είτε όχι. Στην περίπτωση της φθίνουσας ακολουθίας έχουμε τρεις δυνατότητες να επιτύχουμε το 888 όταν χρησιμοποιούμε σημεία μόνο στο εσωτερικό της ακολουθίας, και μία όταν έχουμε αρνητικό πρόσημο στην αρχή. Υπόδειξη: χρησιμοποιεί πέντε πρόσημα συνολικά.

Σχετικά, τώρα, με το άθροισμα 8. Χωρίς το αρνητικό πρόσημο μπροστά, είπε ο δρ. Matrix, υπάρχουν οκτώ λύσεις για την αύξουσα ακολουθία, καμιά τους όμως δεν είναι μοναδική για δεδομένο πλήθος σημείων. Με το αρνητικό πρόσημο στην αρχή υπάρχουν δέκα λύσεις — αλλά μία μόνο χρησιμοποιεί πέντε πρόσημα. Μπορείτε να τη βρείτε;

Υπάρχουν τρεις τρόποι να βρούμε το 8 χρησιμοποιώντας τη φθίνουσα ακολουθία χωρίς αρνητικό πρόσημο μπροστά. Με επτά πρόσημα η λύση είναι μοναδική — είναι το μέγιστο πλήθος προσήμων. Με το αρνητικό πρόσημο στην αρχή η φθίνουσα ακολουθία δίνει έξι λύσεις. Το μικρότερο δυνατό πλήθος προσήμων είναι πέντε. Η λύση είναι μοναδική, αλλά ανακαλύπτεται δύσκολα.

Ο δρ. Matrix σχεδίασε στο σημειωματάριό μου έναν πί-

Σειρά: ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Jean Jacques

ΤΟ ΜΟΡΙΟ ΣΤΟΝ ΚΑΘΡΕΦΤΗ

Σελ.: 157, 2.400 δρχ.

Gilles Cohen-Tannoudji

ΟΙ ΠΑΓΚΟΣΜΙΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Σελ.: 137, 2.200 δρχ.

Victor Weisskopf

Η ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΗ

Σελ.: 120, 2.200 δρχ.

Moshe Flato

Η ΙΣΧΥΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σελ.: 108, 2.200 δρχ.

Claude Kordon

Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΚΥΤΤΑΡΩΝ

Σελ.: 119, 2.200 δρχ.

Boris Cyrulnik

Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΗΜΑΤΟΣ

Σελ.: 131, 2.200 δρχ.

Francois Gros

Ο ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΓΟΝΙΔΙΩΝ

Σελ.: 130, 2.200 δρχ.

«Πρέπει όλοι να μελετήσουμε αυτές τις ουσιώδεις πληροφορίες, για να κατανοήσουμε την τόσο πλούσια σε αντιθέσεις, απορίες και προσδοκίες εποχή μας.»

Le Figaro

«Ο ανήσυχος σύγχρονος άνθρωπος, όποια και αν είναι η μόρφωσή του, θα μπορέσει να καταλάβει, χάρη στα βιβλία αυτής της σειράς, τις νέες δυνατότητες της επιστήμης και τα προβλήματα που αυτές θέτουν στην κοινωνία.»

Albert Jacquard

Εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ

a	<table border="1"><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr></table>	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	β	<table border="1"><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr></table>	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	γ	<table border="1"><tr><td>?</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	?																							
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
8	8	8																																																																											
?																																																																													
1	7	7	6	1	0	0	0																																																																						

Σχήμα 1

νακα 3×6 . Στην αρχή έγραψε έξι οκτάρια στα τετράγωνα του πίνακα και σχημάτισε το άθροισμα 1776, τη γνωστότερη ημερομηνία της ιστορίας των ΗΠΑ. Προσέθεσε πέντε επιπλέον οκτάρια και αύξησε το άθροισμα σε 1888 (το έτος ίδρυσης της ΑΜΕ). Έπειτα έσβησε όλα τα 8 και με ρώτησε: «Μπορείς να τοποθετήσεις οκτάρια στα τετράγωνα (Σχήμα 1) έτσι ώστε το άθροισμα να είναι ακριβώς 1.000;»

«Ιδού ένα μικρό και κομψό πρόβλημα», συνέχισε ο δρ. Matrix. «Αφορά την τοποθέτηση του 8 σε ένα μαγικό τετράγωνο 3×3 . Σχεδίασε στο σημειωματάριό μου (Σχήμα 2α) το αρχαίο κινέζικο μαγικό τετράγωνο, το λο σου, και μου επέστησε την προσοχή στο 8 της κάτω αριστερής γωνίας. Δίπλα σχεδίασε έναν κενό πίνακα 3×3 και έγραψε το 8 στο μεσαίο τετράγωνο της πάνω γραμμής (Σχήμα 2β). Το πρόβλημα: τοποθετήστε εννέα ακέραιους αριθμούς, όλους διαφορετικούς μεταξύ τους, στα κενά τετράγωνα έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα μαγικό τετράγωνο με τη σταθερά 15 του λο σου — δηλαδή, το άθροισμα κάθε γραμμής, κάθε στήλης και των δύο κύριων διαγωνίων να είναι 15. Η λύση είναι μοναδική.

a	<table border="1"><tr><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>8</td></tr></table>	2	7	6	9	5	1	4	3	8	β	<table border="1"><tr><td>?</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	?								
2	7	6																			
9	5	1																			
4	3	8																			
?																					

Σχήμα 2

«Νομίζεις ότι η εκατονταετηρίδα της ΑΜΕ είναι μια ειδική περίπτωση» με ρώτησε ο δρ. Matrix.

«Φυσικά», απάντησα.

«Αν έχεις την έκδοση του King James της Καινής Διαθήκης», συνέχισε, «μπορείς να ψάξεις στο όγδοο βιβλίο, το όγδοο κεφάλαιο, την όγδοη παράγραφο, και την όγδοη λέξη. Πρόσεξε επίσης ότι η λέξη έχει οκτώ γράμματα».

Πριν φύγει ο δρ. Matrix μου ζήτησε να διαιτέσω το 987654321 με το 123456789. Εβγαλα το κομπουτεράκι μου και πληκτρολόγησα τους αριθμούς. Το πηλίκον με άφησε άναυδο!

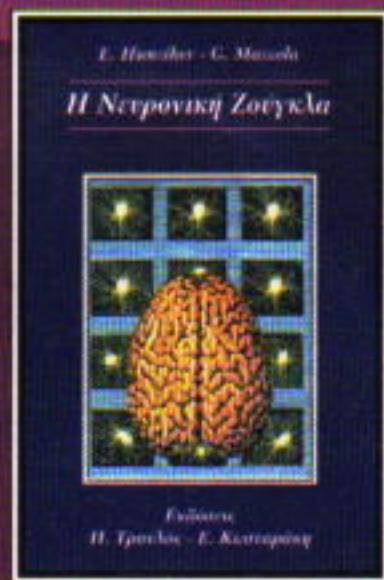
O Martin Gardner ήταν επί 25 χρόνια ο συγγραφέας της στήλης «Μαθηματικά παιχνίδια» στο *Scientific American*. Στο *Magic Numbers of Dr. Matrix*, ένα από τα πολλά βιβλία του, περιέχονται όλες οι συνεντεύξεις που έχει δώσει ο περιβόητος αριθμολόγος στον Gardner πριν από τον υποτιθέμενο θάνατο του σε μια μονομαχία κοντά στην Κωνσταντινούπολη.

Νέες Κυκλοφορίες



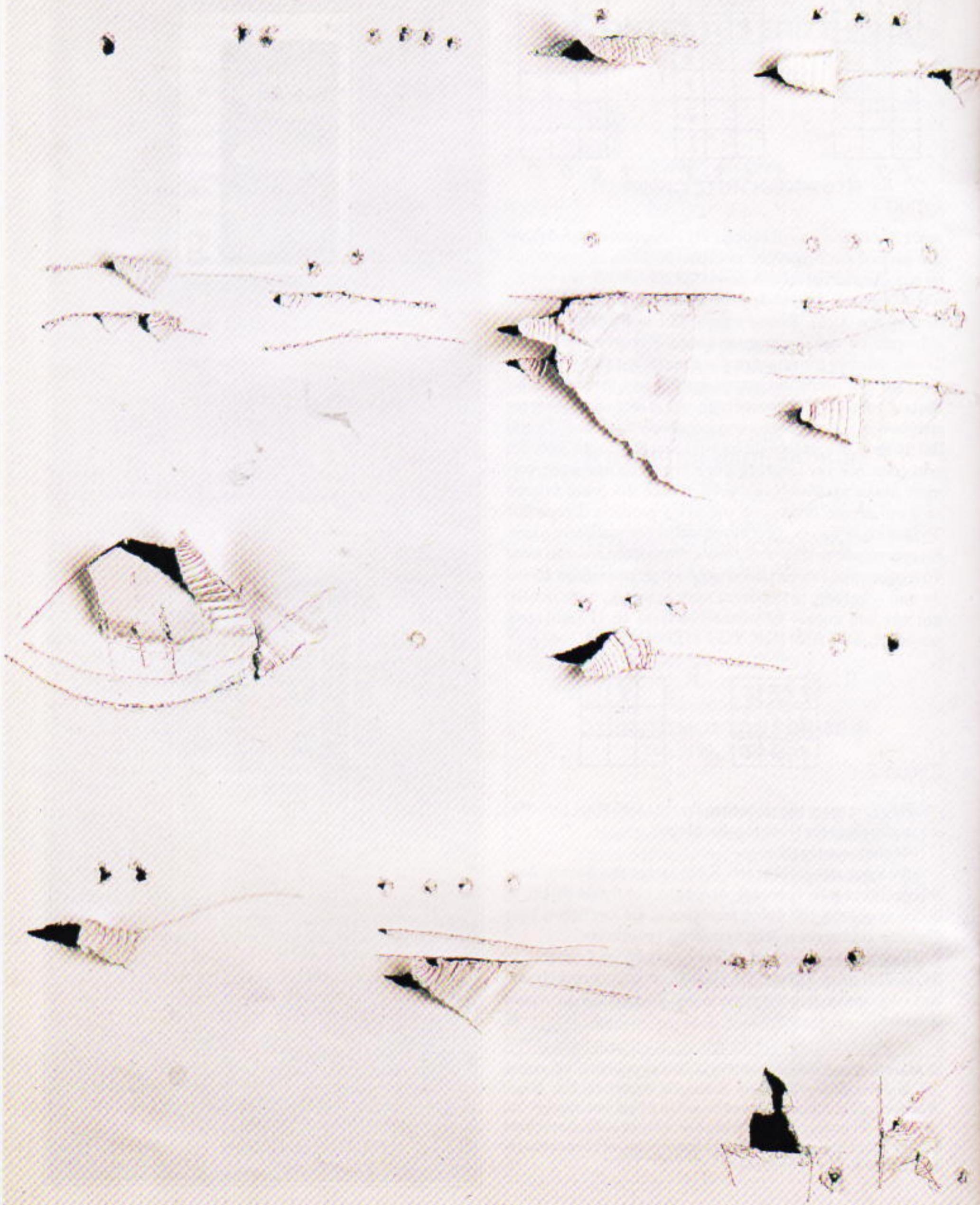
- Ποιος είναι ο προφητός των αστράφων γένων και των αέραντων; Μήπως το σύμαιο δημιουργήθηκε από μια σύμπτωση;
- Ποιο είναι το νόημα της "ανθρωπικής αρχής";
- Πώς σχετίζεται το αρχιγόνο Σύμπαν με τον σημερινό Κοσμό;
- Μήπως πρόκειται απλά για δύο συμπλωτισμούς της φύσης;

Ο συγγραφέας μάς οδηγεί ανάμεσα στις μυστηριώδεις συρτασιές οι οποίες κρέφονται πιο από τη δομή και τις υποτάσεις του σύμπαντος πολλούς στοιχείων, καπαγράφοντας όλα τα θαυματουργά "αντιγράμμα" της φύσης που επεργάζονται στο σύμπαν να αναπτύξει τις αισκές πλέον δομές των ατόμων, των αστέρων, των γαλαξίων και της ίδιας της Γης. O Davies γνωρίζει μια διαγήγ ανάλυση — απλή και καπανοργή — με τόχο το γερέ αναγνωστικό κοντό.



- Ήτας λεπτογραμμέος ο σχιζοφρένεις ρομανός;
- Τι είδους αποφάσισες παίρνει ένας καταθλιπτικός Πρεθυπογρός;
- Το βιβλίο περιγράφει την πολυπλοκότητα των λεπτογραμμών των εγκεφαλών. Αναλύεται η δράση των αισθήσεων, η κατάσταση της σχιζοφρένειας, της κατάθλιψης, η τύπος Αλτσχάιμερ, η νόσος Παρκίνσον.... Επισής ερμηνεύεται η δραστηριότητα διαφόρων καλλιτεχνών (Vincent van Gogh, August Strindberg, Τσαΐκόφσκι) και διεθνών προσωπικοτήτων που έπαιχαν από τέσσερις αιώνες. Αναλύονται τα πλέον πρόσφατα πειράματα στη λεπτογραμμή των νευρώνων καθώς και οι έρευνες για το ρόλο των γνησιούρων φαρμάκων στον κανονικό ρυθμό και στις νοσήρες καπαπάσεις του εγκεφαλού.

Εκδόσεις Η. Τραυλός - Ε. Κωσταράκη
Καλλιθροίου 54α Τηλ.: 3814410 Αθήνα



Συστήματα αρίθμησης

Ας δανειστούμε τις αριθμομηχανές των Μάγια, των Ρωμαίων και των Βαβυλωνίων

Isaak Yaglom

ΓΙΑ ΝΑ ΠΑΡΑΣΤΗΣΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΕΝ-
νέα πρώτους φυσικούς αριθμούς
χρησιμοποιούμε τα ειδικά σύμ-
βολα

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Η αντιστοίχιση, όμως, ενός συμβόλου σε κάθε αριθμό που χρησιμοποιούμε θα ήταν άβολη. Ακόμη και αν εκτελούσαμε πράξεις μόνο με τους πρώτους χίλιους αριθμούς, θα ήμασταν υποχρεωμένοι να απομνημονεύσουμε χίλια ειδικά σύμβολα. Δεν είναι παράξενο λοιπόν το ότι οι άνθρωποι εδώ και πολλά χρόνια επιλέγουν κάποιο σύνολο «βασικών» αριθμών και χρησιμοποιούν ειδικά σύμβολα μόνο γι' αυτούς. Ας πάρουμε για παράδειγμα το ρωμαϊκό σύστημα αριθμησης — στηρίζεται στους βασικούς αριθμούς

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1.000,

που συμβολίζονται, αντίστοιχα, με τα γράμματα του λατινικού αλφαριθμητικού συστήματος: I, V, X, L, C, D, και M.

Μερικά από αυτά τα σύμβολα προέρχονται από τις εικόνες που αναπαριστούσαν κάποτε αυτούς τους αριθμούς (το ρωμαϊκό ψηφίο I μοιάζει με ένα σηκωμένο δάκτυλο, το V μοιάζει με μια ανοιχτή παλάμη, το X μοιάζει με δύο τέτοιες στυλιζαρισμένες απεικονίσεις παλάμης τοποθετημένες η μία κατοπτρικά της άλλης) και μερικά από το πρώτο γράμμα της αντίστοιχης λατινικής λέξης (centum σημαίνει εκατό, *demimille* σημαίνει πεντακόσια, *mille* σημαίνει χίλια).

Χρειαζόμαστε τον ρωμαϊκό συμβολισμό μόνο ως παράδειγμα, και έτοι θα χρησιμοποιήσουμε την παλαιότερη, απλοποιημένη εκδοχή του, όπου ο αριθμός «τέσσερα» γραφόταν IIII αντί για IV, το «τετρακόσια» CCCC αντί για CD, κ.ο.κ. Στο παλιό ρωμαϊκό σύστημα ο αριθμός 3.477 γραφόταν ως

MMMCCCCCLXXVII
 $= 3 \cdot 1.000 + 4 \cdot 100 + 50 + 2 \cdot 10 + 5 + 2.$

Τον ίδιο κανόνα αναπαράστασης αριθμών χρησιμοποιεί και ένας ταμίας που συναλλάσσεται με χαρτονομίσματα που έχουν αξία 100 ρούβλια, 25 ρούβλια, 10 ρούβλια, 5 ρούβλια, 3 ρούβλια και 1 ρούβλι. Για τον ταμία οι βασικοί αριθμοί είναι οι

100, 50, 25, 10, 5, 3, 1.

Για να πληρώσει, ας πούμε, 499 ρούβλια, δίνει πρώτα όσα περισσότερα χαρτονομίσματα των 100 είναι δυνατόν, χωρίς να ξεπέρασει το απαιτούμενο ποσόν:

499 = 4 · 100 + 99.

Στη συνέχεια δίνει όσα περισσότερα χαρτονομίσματα των 50 είναι δυνατόν, χωρίς να ξεπέρασει το ποσόν που απομένει να πληρώσει (99 ρούβλια):

499 = 4 · 100 + 1 · 50 + 49,

κ.ο.κ. Μερικές φορές το υπόλοιπο μπορεί να είναι μικρότερο από τον επόμενο βασικό αριθμό. Στο παράδειγμά μας, αυτό θα συμβεί όταν ο ταμίας δώσει δύο χαρτονομίσματα

των 10 ρουβλιών:

499 = 4 · 100 + 1 · 50 + 1 · 25 + 2 · 10 + 4.

Ο επόμενος βασικός αριθμός είναι το 5, αλλά αφού $4 < 5$, δεν χρειάζονται χαρτονομίσματα των 5 ρουβλιών. Όμως, για λόγους συνέπειας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι δόθηκαν μηδέν χαρτονομίσματα των 5 ρουβλιών και να συμπεριλάβουμε τον όρο 0 · 5 στο άθροισμά μας. Τότε, όλη η διαδικασία της πληρωμής μπορεί να γραφεί ως

499 = 4 · 100 + 1 · 50 + 1 · 25 +
 $2 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1.$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να γενικεύσουμε αυτές τις σκέψεις, θεωρώντας ως βασικούς αριθμούς (ακολουθία βάσης) μια τυχαία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

$$q_0 = 1 < q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots \quad (1)$$

Ας δούμε πώς μπορεί να γραφεί ένας τυχαίος αριθμός N στο σύστημα αριθμησης με ακολουθία βάσης αυτή που δίνεται στην (1).

Βρίσκουμε τον μεγαλύτερο βασικό αριθμό q_n που δεν ξεπερνά το N και διαιρούμε το N με το q_n , οπότε προκύπτει πηλίκον a_n και υπόλοιπο r_{n-1} :

$$N = a_n q_n + r_{n-1},$$

όπου $0 \leq r_{n-1} < q_n$.

Διαιρούμε τώρα το πρώτο υπόλοιπο r_{n-1} με τον επόμενο βασικό αριθμό q_{n-1} :

$$r_{n-1} = a_{n-1} q_{n-1} + r_{n-2},$$

όπου $0 \leq r_{n-2} < q_{n-1}$, ή

$$N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + r_{n-2}$$

(δεν εξαιρούμε την περίπτωση $r_{n-1} = 0$ —τότε όλα τα επόμενα πηλίκα και υπόλοιπα είναι μηδέν). Διαιρούμε τώρα το νέο υπόλοιπο r_{n-2} με το q_{n-2} , και παίρνουμε

$$r_{n-2} = a_{n-2} q_{n-2} + r_{n-3},$$

όπου $0 \leq r_{n-3} < q_{n-2}$, ή

$$N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + a_{n-2} q_{n-2} + r_{n-3},$$

και ούτω καθεξής.

Τελικά, διαιρώντας το προτελευταίο υπόλοιπο r_1 με το q_1 , παίρνουμε

$$N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + r_0,$$

όπου $0 \leq r_0 < q_1$. (Αφού $q_0 = 1$, είναι περιττό να διαιρέσουμε το τελευταίο υπόλοιπο r_0 με το q_0 —είναι προφανές ότι $r_0 = a_0 q_0 = a_0$.)

Ένας ταμίας θα μπορούσε να γράψει αυτές τις διαδοχικές διαιρέσεις σε μια μεγάλη στήλη, όπως στο επόμενο παράδειγμα όπου χρησιμοποιούμε την περίπτωση των 499 ρουβλιών που συναντήσαμε προηγουμένως:

$$499 \div 100 = 4$$

$$\underline{400}$$

$$99 \div 50 = 1$$

$$\underline{50}$$

$$49 \div 25 = 1$$

$$\underline{25}$$

$$24 \div 10 = 2$$

$$\underline{20}$$

$$4 \div 5 = 0$$

$$\underline{0}$$

$$4 \div 3 = 1$$

$$\underline{3}$$

$$1 \div 1 = 1$$

$$\underline{1}$$

$$0$$

(Εδώ τα πηλίκα q_n, q_{n-1}, \dots είναι τυπωμένα με κόκκινο χρώμα ενώ οι αριθμοί N και τα υπόλοιπα r_{n-1}, r_{n-2}, \dots μπλε.)

Θεσιακά συστήματα αρίθμησης

Μαντεύω ότι θα έχετε πλέον καταλάβει ότι η ακολουθία βάσης

$$q_0 = 1, q_1 = 10, q_2 = 10^2, \dots, q_n = 10^n, \dots$$

δημιουργεί το συνηθισμένο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Όμως, αντί να γράφουμε $4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7$, γράφουμε απλώς 403.017.

Ένας αφηρημένος ή ένας εξαιρετικά προσεκτικός ταμίας θα μπορούσε να ετοιμάσει μια κατάσταση εξόδων για να καταγράφει τις πληρωμές, όπου θα καταχωρίσει σε ξεχωριστές στήλες το πλήθος των χαρτονομισμάτων κάθε αξίας. Σε μια τέτοια κατάσταση εξόδων η πληρωμή των 499 ρουβλιών θα είχε καταχωρηθεί ως εξής:

	100	50	25	10	5	3	1
499	4	1	1	2	0	1	1

Μπορούμε να πούμε ότι στο «σύστημα αρίθμησης του ταμία» ο αριθμός 499 γράφεται ως 4112011.

Τα αριθμητικά συστήματα τα πάρομοια με αυτά που εξετάσαμε στα δύο τελευταία παραδείγματα (δηλαδή το δεκαδικό σύστημα και το σύστημα του ταμία) ονομάζονται θεσιακά (θα εξηγήσουμε τη σημασία αυτού του όρου αργότερα). Αντί να καταπονούμαστε με την πολύπλοκη παράσταση $N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + a_0$ στο θεσιακό σύστημα αρίθμησης που έχει ακολουθία βάσης την (1), είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε έναν συμπαγέστερο συμβολισμό που αποτελείται από $n+1$ «ψηφία»: $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ (προσέξτε τα εισαγωγικά που περικλείουν τη σειρά των μεταβλητών). Εδώ υποθέτουμε φυσικά ότι τα «ψηφία» a_k παράγονται με τη μέθοδο (αλγόριθμο) που περιγράψαμε προηγουμένως.

Από αυτή την περιγραφή έπειτα ότι κάθε φυσικός αριθμός N έχει μία μοναδική αναπαράσταση ως προς κάθε δεδομένη ακολουθία βάσης. Επιπλέον, αφού το «πρώτο ψηφίο» a_n είναι το πηλίκον της διαιρέσης του N με το q_n , όπου $N < q_{n+1}$ (διότι διαφορετικά θα είχαμε αρχίσει διαιρώντας το N με το q_{n+1} αντί του q_n), έχουμε ότι $a_n < q_{n+1}/q_n$. Επομένως, αν A είναι ο (μοναδικός) ακέραιος που ικανοποιεί την $A - 1 < q_{n+1}/q_n \leq A$ τότε το ψηφίο a_n είναι το πολύ $A - 1$, δηλαδή μπορεί να πάρει A τιμές: $a_n = 0, 1, \dots, A - 1$. (Για το πρώτο ψηφίο πρέπει να εξαιρέσουμε και την τιμή $a_n =$

0.) Παρομοίως, το ψηφίο a_n προκύπτει από τη διαδικασία της διαιρέσης του πρώτου υπόλοιπου r_{n-1} με το q_n . Όμως, αφού $r_{n-1} < q_n$ ισχύει η ανισότητα $a_{n-1} < q_n/q_{n-1}$. Ο συλλογισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί και για όλα τα άλλα ψηφία. Ιδιαίτερα, το τελευταίο ψηφίο a_0 —αφού συμπίπτει με το τελευταίο υπόλοιπο r_0 που προκύπτει μετά τη διαιρέση με το q_1 — μπορεί να πάρει q_1 τιμές: $a_0 = 0, 1, 2, \dots, q_1 - 1$.

Χρειάστηκε χρόνος για να συλλάβουν οι άνθρωποι την ιδέα του θεσιακού συστήματος αρίθμησης. Ένα από τα εμπόδια στην πορεία γι' αυτή την ανακάλυψη ήταν η απουσία του μηδενός και, φυσικά, ενός συμβόλου γι' αυτό. Σύμβολο για το μηδέν χρησιμοποιούν για πρώτη φορά οι Βαβυλώνιοι στο εξηκονταδικό τους (δηλαδή με βάση το 60) σύστημα αρίθμησης. Στα βαβυλωνιακά κείμενα, τα γραμμένα με τους παράξενους χαρακτήρες της σφηνοειδούς γραφής (Σχήμα 1), οι αριθμοί από το 1 έως το 59 συμβολίζονται σύμφωνα με το δεκαδικό σύστημα. Το κύριο όμως σύστημα

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 & \Pi &= 2 & \Upsilon &= 3 & \times &= 7 \\ \Delta &= 10 & \Lambda &= 20 & \Omega &= 30 & \text{---} & \end{aligned}$$

Σχήμα 1

αρίθμησης των βαβυλωνιακών μαθηματικών ήταν εξηκονταδικό —με ακολουθία βάσης $1, 60, 60^2, \dots, 60^n, \dots$. Οι μαθηματικοί που χρησιμοποιούσαν τη σφηνοειδή γραφή εμπνεύστηκαν την ιδέα ενός ειδικού χαρακτήρα για το μηδέν μάλλον αργά (σίγουρα όμως όχι αργότερα από τον 3ο π.Χ. αιώνα). Ο χαρακτήρας αυτός παρουσιάζεται Σχήμα 2 στο Σχήμα 2.



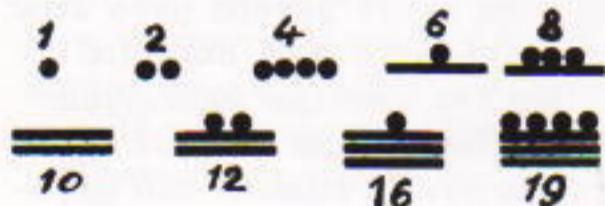
Έπειτα από αυτές τις εξηγήσεις πρέπει να μπορείτε να διαβάσετε την παράσταση του Σχήματος 3.

Πραγματικά, συμβολίζει τον αριθμό $12 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60 + 32 = 2.593.292$. Το σύστημα αρίθμησης στον αρχαίο πολιτισμό των Μάγια μοιάζει πολύ με το βαβυλωνιακό. Η δημιουργία αυτού του συστήματος



Σχήμα 3

ανάγεται στον 10 μ.Χ. αιώνα. Και ενώ το σύστημα των Βαβυλωνίων συνδύαζε τα χαρακτηριστικά του δεκαδικού και του εξηκονταδικού συστήματος, των Μάγια συνδύαζε τις βάσεις 5 και 20. Για να γράψουν τους πρώτους 19 αριθμούς χρησιμοποιούσαν γραμμές, που υποδήλωναν πεντάδες, και στιγμές, που υποδήλωναν μονάδες (Σχήμα 4).



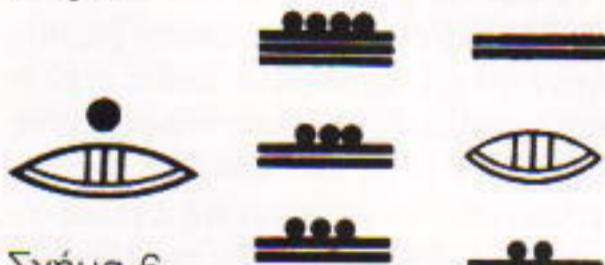
Σχήμα 4

Τον κύριο όμως ρόλο έπαιζε ένα «παραμορφωμένο» σύστημα με βάση το 20. Τα «ψηφία» γράφονταν το ένα κάτω από το άλλο, με το σημαντικότερο ψηφίο στην κορυφή και το λιγότερο σημαντικό ψηφίο κάτω. Η παραμόρφωση ήταν η εξής: ο τρίτος βασικός αριθμός (μετά το 1 και το 20) ήταν το $18 \cdot 20 = 360$ (αντί του $20^2 = 400$) και τον ακολουθούσαν οι $18 \cdot 20^2$, $18 \cdot 20^3$, $18 \cdot 20^4$. Υπήρχε επίσης ένας ειδικός χαρακτήρας για το μηδέν, που έμοιαζε με μισόκλειστο μάτι



Σχήμα 5

(Σχήμα 5). Το Σχήμα 6 παρουσιάζει μερικά παραδείγματα αριθμών των Μάγια.



Σχήμα 6

Οι απεικονιζόμενοι αριθμοί είναι οι $1 \cdot 20 + 0 = 20$, $19 \cdot 360 + 13 \cdot 20 + 13 = 7.113$, $10 \cdot 360 + 7 = 3.607$.

Η κύρια διαφορά των συστημάτων αριθμησης των Βαβυλωνίων και των Μάγια, από τη μια πλευρά, και των Ρωμαίων, από την άλλη, βρίσκεται στη θεσιακή αρχή των δύο πρώτων: ενώ οι Ρωμαίοι καταλάβαιναν πά-

ντοτε το γράμμα I ως μονάδα και το γράμμα V ως πέντε, ανεξάρτητα από τη θέση που κατείχαν, στους Βαβυλώνιους και τους Μάγια η αξία ενός ψηφίου εξαρτώνταν κατά κύριο λόγο από τη θέση του. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ονομάζονται *θεσιακοί* οι αριθμητικοί συμβολισμοί αυτού του είδους, στους οποίους περιλαμβάνεται και το δικό μας δεκαδικό σύστημα (το οποίο δημιουργήθηκε στην Ινδία κατά τον 8ο και 9ο αιώνα ή λιγότερα).

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας το «πλήρες σύστημα του ταμία» (που στηρίζεται στους βασικούς αριθμούς 10.000, 5.000, 2.500, 1.000, 500, 300, 100, 50, 20, 15, 10, 5, 3, 2 και 1, οι οποίοι εκφράζουν σε καπίκια την αξία όλων των χαρτονομισμάτων και νομισμάτων που ήταν σε χρήση στη Σοβιετική Ένωση πριν από 10-15 χρόνια) γράψτε το ποσό 233 ρουβλίων και 87 καπικιών.¹ Γράψτε την πράξη που μετατρέπει 23.387 καπίκια στο σύστημα του ταμία χρησιμοποιώντας συνεχή διαίρεση (δείτε το τέλος του πρώτου μέρους του άρθρου).

2. Αναγνωρίστε τον γραμμένο με το βαβυλωνιακό σύστημα αριθμό του Σχήματος 7.



Σχήμα 7

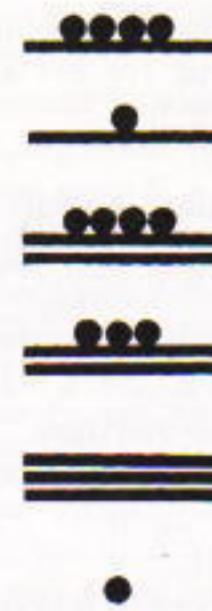
3. Αναγνωρίστε τον αριθμό του Σχήματος 8 ο οποίος είναι γραμμένος με το σύστημα των Μάγια (ο μεγαλύτερος αριθμός που έχει ανακαλυφθεί στα κείμενα των Μάγια).

Αριθμητικά συστήματα ως προς δεδομένη βάση

Έτοιμοι ονομάζουμε τα συστήματα αριθμησης ως προς την ακολουθία βάσης

$$\begin{aligned} q_0 &= d^0 = 1, \\ q_1 &= d^1 = d, \\ q_2 &= d^2, q_3 = d^3, q_4 = d^4, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

όπου d οποιοσδήποτε ακέραιος μεγαλύτερος από το ένα. Ο αριθμός d ονομάζεται βάση αυτού του συστήματος



Σχήμα 8

αριθμησης. Τέτοια συστήματα είναι το οικείο δεκαδικό σύστημα με βάση $d = 10$, το βαβυλωνιακό εξηκονταδικό σύστημα ($d = 60$) και το δυαδικό σύστημα ($d = 2$) που χρησιμοποιείται ευρύτατα στους υπολογιστές. Το σύστημα με τιχαία βάση d ονομάζεται d -αδικό σύστημα.

Οπως και προηγουμένως, όταν χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ σε ένα d -αδικό σύστημα εννοούμε ότι $N = a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \dots + a_2 d^2 + a_1 d^1 + a_0$. Προφανώς, οποιοδήποτε από τα ψηφία a_k σε αυτό το συμβολισμό μπορεί να πάρει τις d τιμές 0, 1, 2, ..., $d - 1$. Ιδιαίτερα, όταν $d = 10$, —δηλαδή, όταν η ακολουθία βάσης είναι $q_0 = 1$, $q_1 = 10$, $q_2 = 100$, ... — καταλήγουμε στο συνηθισμένο δεκαδικό σύστημα (που απαριθμεί με μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, κ.ο.κ.). Σε αυτό το σύστημα, κανένα ψηφίο δεν ξεπερνά ποτέ το 9.

Το απλούστερο d -αδικό σύστημα είναι το δυαδικό σύστημα αριθμησης με ακολουθία βάσης την $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 4$, $q_3 = 8$, $q_4 = 16$, Σε αυτό το σύστημα υπάρχουν δύο μόνο ψηφία, το 0 και το 1. Στη συνέχεια έχουμε έναν κατάλογο με τη δυαδική αναπάρασταση των πρώτων 15 φυσικών αριθμών (όπως ίσως θυμάστε, ο δεκτης συμβολίζει τη βάση του αριθμού):

$$\begin{array}{lll} 1_{10} = 1_2 & 6_{10} = 110_2 & 11_{10} = 1011_2 \\ 2_{10} = 10_2 & 7_{10} = 111_2 & 12_{10} = 1100_2 \\ 3_{10} = 11_2 & 8_{10} = 1000_2 & 13_{10} = 1101_2 \\ 4_{10} = 100_2 & 9_{10} = 1001_2 & 14_{10} = 1110_2 \\ 5_{10} = 101_2 & 10_{10} = 1010_2 & 15_{10} = 1111_2 \end{array}$$

Σε αυτό το σύστημα οι υπολογισμοί είναι μάλλον εκτενείς αλλά εξαιρετικά απλοί. Αν χρησιμοποιούσαμε παντού το δυαδικό σύστημα, οι μαθητές θα ήταν υποχρεωμένοι να απομημονεύσουν μόνο τον εξής «πίνακα πολλαπλασιασμού»:

$$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$$

¹ Ένα ρουβλί ισούται με 100 καπίκια.

(και έναν «πίνακα πρόσθεσης» που ανάγεται στην ισότητα $1 + 1 = 10$, επειδή 10_2 ισούται με 2_{10} !).

Ασκήσεις

4. Γράψτε τον δεκαδικό αριθμό $N = 123.456$ (α) στο επιαδικό σύστημα αριθμησης, (β) στο δωδεκαδικό σύστημα, στο οποίο χρησιμοποιούνται τα δώδεκα ψηφία: $0, 1, 2, \dots, 9, X = 10, Y = 11$, (γ) στο δυαδικό σύστημα.

5. Ποια είναι η δεκαδική αναπαράσταση των δυαδικών αριθμών $P = 100100, Q = 101010101$;

6. Γράψτε τους πίνακες πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης για το τριαδικό σύστημα αριθμησης.

Αριθμητικά συστήματα με άπλετες βάσεις

Τα συστήματα αριθμησης των οποίων οι ακολουθίες βάσης δεν είναι γεωμετρικές πρόοδοι $1, d, d^2, d^3, \dots$ δεν έχουν πολλές εφαρμογές. Μερικές φορές όμως αποδεικνύονται χρήσιμα στην επίλυση συγκεκριμένων μαθηματικών προβλημάτων.

Ας εξετάσουμε μερικά παραδείγματα τέτοιων συστημάτων.

I. *Το σύστημα των Μάγια.* Όπως ήδη γνωρίζετε, η ακολουθία βάσης του συστήματος αριθμησης των Μάγια είχε τη μορφή $q_0 = 1, q_1 = 20, q_2 = 18 \cdot q_1 = 18 \cdot 20, q_3 = 20 \cdot q_2 = 18 \cdot 20^2, q_4 = 20 \cdot q_3 = 18 \cdot 20^3, \dots$

Το σύστημα αυτό είναι όμοιο απ' όλες τις απόψεις με το 20-αδικό, με μία μόνο διαφορά: στην αναπαράσταση με τον τρόπο των Μάγια ενός τυχαίου αριθμού $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ (που εδώ γράφουμε οριζόντια αντί του γνήσιου κατακόρυφου τρόπου των Μάγια), το δεύτερο ψηφίο (από τα δεξιά) παίρνει 18 τιμές —

$$0 \leq a_1 < q_2/q_1 = 18,$$

ενώ όλα τα άλλα ψηφία παίρνουν τις 20 τιμές $0, 1, 2, \dots, 19$.

Ιδού πώς έχει η κατάσταση σε οποιοδήποτε σύστημα αριθμησης στο οποίο η ακολουθία βάσης έχει την ιδιότητα το q_{n+1} να διαιρείται ακριβώς με το q_n για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, q_1 = d_0, q_2 = d_1 q_1 = d_1 d_0, \\ q_3 &= d_2 q_2, q_4 = d_3 q_3, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

όπου $d_0, d_1, d_2, d_3, \dots$ είναι οποιοδήποτε ακέραιοι μεγαλύτεροι της μονά-

δας — μπορεί να είναι ίδιοι ή διαφορετικοί. Σε αυτό το σύστημα αριθμησης, στην παράσταση

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

το πρώτο ψηφίο από τα δεξιά, a_0 , παίρνει τις d_0 τιμές $0, 1, 2, \dots, d_0 - 1$. Το επόμενο ψηφίο, a_1 , παίρνει τις d_1 τιμές $0, 1, 2, \dots, d_1 - 1$, ενώ το επόμενο ψηφίο, a_2 , παίρνει τις τιμές από το 0 έως το $d_2 - 1$, κ.ο.κ.

Επιπλέον, όπως ακριβώς σε κάθε d -αδικό σύστημα αριθμησης (που έχουμε όταν $d_0 = d_1 = d_2 = \dots = d$), και στο σύστημα αριθμησης με ακολουθία βάσης της μορφής (3) κάθε παράσταση $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ με μη αρνητικούς ακεραίους a_0, a_1, \dots, a_n μικρότερους από d_0, d_1, \dots, d_n , αντίστοιχα, έχει νόημα. Πράγματι, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η μετατροπή του αριθμού $N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + a_0$, στο δικό μας σύστημα αριθμησης μέσω της μεθόδου της «συνεχούς διαιρεσης»,² θα μας δώσει διαδοχικά τα ψηφία $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$.

Όμως, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα ενός απλού «συστήματος αριθμησης», μια τέτοια ομαλή κατάσταση των πραγμάτων δεν είναι ο γενικός κανόνας.

II. *Σύστημα άρτιων αριθμών.* Ας πάρουμε ως ακολουθία βάσης τον αριθμό $q_0 = 1$ και όλους τους άρτιους αριθμούς: $q_1 = 2, q_2 = 4, q_3 = 6, q_4 = 8, \dots$

Τότε, $q_1/q_0 = 2$, και

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{2(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 2$$

για κάθε $n > 1$.

Έτσι, σε αυτό το σύστημα αριθμησης έχουμε, όπως και στο δυαδικό, δύο μόνο ψηφία — το 0 και το 1. Καταλήγουμε επομένως στις ακόλουθες αναπαραστάσεις αριθμών (όπου οι αριθμοί που γράφονται στο «άρτιο» σύστημα αριθμησης είναι τυπωμένοι έντονα):

$$\begin{aligned} 2 &= 10, 3 = 11, 4 = 100, \\ 5 &= 101, 6 = 1000, 7 = 1001, \\ 8 &= 10000, 9 = 10001, \end{aligned}$$

2. Ενα ενδιαφέρον παράδειγμα συστήματος αριθμησης αυτού του τύπου εξετάζεται στη μαθηματική πρόκληση M43 αυτού του τεύχους.

κ.ο.κ. Γενικότερα, όλοι οι αριθμοί παριστάνονται είτε ως μια μονάδα ακολουθούμενη από μηδενικά (αν είναι άρτιοι) είτε ως δύο μονάδες που διαχωρίζονται από μια σειρά μηδενικών (οι περιττοί).

Επομένως, στο άρτιο σύστημα αριθμησης κάθε αριθμός γράφεται με τη μορφή $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, όπου το κάθε ψηφίο $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 ή 1. Η συντριπτική όμως πλειονότητα των ακολουθιών που αποτελούνται από 0 και 1 δεν εκφράζει κάποιον αριθμό στο «άρτιο» σύστημα αριθμησης επειδή ακολουθίες «με νόημα» είναι αυτές που έχουν μονάδα μόνο στην αρχή και, καμία φορά, στο τέλος.

Και ένα τελευταίο παράδειγμα.

III. *Το σύστημα του πωλητή.* Το τυπικό σύνολο σταθμών που χρησιμοποιείται στις ζυγαριές περιλαμβάνει συνήθως 12 βάρη: ένα των 10 gr, δύο των 20 gr, ένα των 50 gr, ένα των 100 gr, δύο των 200 gr, ένα των 500 gr, ένα του 1 kgr, δύο των 2 kgr, και ένα των 5 kgr.³ Ένας πωλητής χρησιμοποιεί αυτά τα βάρη για να ζυγίσει οποιοδήποτε πολλαπλάσιο των 10 gr με τον ίδιο σχεδόν τρόπο που ο ταμίας χρησιμοποιεί τα χαρτονομίσματα. Για να ζυγίσει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο — ας πούμε, ένα κομμάτι κρέας — βάζει στη ζυγαριά το μεγαλύτερο ζύγι που δεν είναι βαρύτερο από το κρέας, προσθέτει έπειτα το βαρύτερο από τα υπόλοιπα, κ.ο.κ. Για παράδειγμα, αν το κρέας έχει βάρος 3.460 gr, θα χρησιμοποιηθούν τα εξής βάρη: ένα των 2 kgr, ένα του 1 kgr, δύο των 200 gr, ένα των 50 gr, και ένα των 10 gr.

Αυτό το σύστημα μέτρησης βάρους ήταν μέχρι πρόσφατα πολύ οικείο στους πωλητές και τους πελάτες τους σε πολλά μέρη του κόσμου. Για να γενικευθεί σε μαθηματική αναπαράσταση αριθμών (βαρών), προσθέτουμε τρία μικρότερα βάρη (1 gr, 2 gr, και 5 gr) και παίρνουμε ένα σύστημα αριθμησης με ακολουθία βάσης

$$1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1.000, 2.000, 5.000,$$

όπου το βάρος των 3.460 gr γράφεται

3. Ας μην αρχίσουν τις φωνές οι φυσικοί που επιμένουν ότι τα «γραμμάρια» μετρούν μόνο μάζα και όχι βάρος!

ται ως 11020101000.

Σε αυτό το σύστημα τα ψηφία στην αναπαράσταση $N = "a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0"$ ενός τυχαίου αριθμού N μπορούν να πάρουν τις εξής τιμές: το τελευταίο ψηφίο a_0 μπορεί να ισούται με 0 ή 1 (αφού $q_1 = 2$). Το επόμενο ψηφίο, a_1 , παίρνει τις τιμές 0, 1, 2 (αφού $2 < q_2/q_1 < 3$), ενώ το τρίτο ψηφίο από το τέλος, το a_2 , μπορεί να είναι 0 ή 1 (αφού $q_3/q_2 = 2$). Το a_3 είναι επίσης 0 ή 1, αλλά το a_4 μπορεί να πάρει τις τρεις τιμές 0, 1, ή 2 (αφού $2 < q_5/q_4 < 3$). Γενικότερα, στο «σύστημα αριθμησης του πωλητή» τα ψηφία $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots, a_{3k+1}$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0, 1, ή 2, ενώ όλα τα άλλα μπορούν να ισούνται μόνο με 0 ή 1. (Γι' αυτό το λόγο ο πωλητής που χρησιμοποιεί το σύνολο των βαρών που περιγράφαμε προηγουμένως τα καταφέρνει με ένα μόνο βάρος του 1 kgr και με ένα των 5 kgr αλλά χρειάζεται δύο βάρη των 2 kgr.)

Ασκήσεις

7. Γράψτε τους αριθμούς X, Y, Z με τη δεκαδική τους αναπαράσταση αν (α) $X = 1000000001$ στην άρτια αναπαράσταση, (β) $Y = 121121$ στο σύστημα του πωλητή, (γ) $Z = 20120$ στο σύστημα του πωλητή.

8. Περιγράψτε όλες τις δυνατές ακολουθίες ψηφίων $"a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0"$ που μπορούν να αναγνωριστούν ως συγκεκριμένοι αριθμοί γραμμένοι με το σύστημα του πωλητή.

9. Σε ένα αριθμητικό σύστημα με ακολουθία βάσης την (1) δύο αριθμοί αναπαριστάνονται ως $N = 10211004$ και $M = 10210437$. Μπορείτε να βρείτε ποιος είναι μεγαλύτερος;

10. Το σύστημα με τα βάρη που περιγράφαμε είναι πολύ βολικό από το δεκαδικό σύστημα για να κάνουμε ζυγίσεις, αλλά δεν είναι και το οικονομικότερο από την άποψη του πλήθους των χρησιμοποιούμενων βαρών. Αυτό θα το διαπιστώσετε λύνοντας τα επόμενα προβλήματα. (α) Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος των βαρών που απαιτούνται για να ζυγίσετε οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό κιλών από το 1 έως το 30, όταν επιτρέπεται να τοποθετήσετε τα βάρη στον έναν μόνο δίσκο της ζυγαριάς; (Μπορείτε να διαλέξετε όποια βάρη επιθυμείτε.) (β) Απαντήστε το ίδιο ερώτημα, υποθέτοντας ότι μπορείτε να τοποθετεί-

τε βάρη και στους δύο δίσκους. (γ) Απαντήστε στα ίδια ερωτήματα (με βάση και τις δύο υποθέσεις (α) και (β)) όταν πρέπει να ζυγίσετε οποιοδήποτε ακέραιο βάρος γραμμαρίων μεταξύ του 1 και του 1.000.

11. Αποδείξτε ότι στο τριαδικό σύστημα (που έχει την ακολουθία βάσης (2) με $d = 3$) κάθε αριθμός N μπορεί να παρασταθεί ως $A - B$, όπου όλα τα ψηφία των τριαδικών αναπαραστάσεων των A, B και $A + B$ είναι μόνο μηδέν και ένα. Αποδείξτε ότι αυτή η αναπαράσταση είναι πάντοτε μοναδική. Για παράδειγμα, $2 = 2 = 10 - 1, 7 = 21 = 101 - 10, 28 = 1001 = 1001 - 0$ (οι έντονοι αριθμοί είναι τριαδικοί).⁴

12. Αποδείξτε ότι η συνθήκη «το q_{n+1} διαιρείται από το q_n για όλα τα $n = 0, 1, 2, \dots$ » είναι αναγκαία για να έχει νόημα η παράσταση $N = "a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0"$ (όπου $a_0 < q_1/q_0, a_1 < q_2/q_1, \dots, a_n < q_{n+1}/q_n$) στο αριθμητικό σύστημα με ακολουθία βάσης της μορφής (1).

13. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί της ακολουθίας βάσης q_0, q_1, q_2, \dots , ώστε η αναπαράσταση οποιουδήποτε αριθμού να αποτελείται μόνο από 0 ή 1; Ποιες πρόοθετες απαιτήσεις πρέπει να θέσουμε για τη βάση ώστε να εξαλείψουμε κάθε αναπαράσταση που περιέχει δύο διαδοχικά 1;

14. Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται ως $q_0 = 1, q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 8, q_5 = 13, \dots, q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \dots$. Αποδείξτε ότι το «σύστημα αριθμησης Fibonacci» ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του προηγούμενου συστήματος. Βρείτε τα επόμενα αθροίσματα που είναι γραμμένα στο σύστημα αριθμησης Fibonacci:

$$(α) \underbrace{100\dots00}_k + \underbrace{100\dots00}_\ell,$$

$$(β) \underbrace{10101\dots01}_{2m+1} + 1,$$

$$(γ) \underbrace{10101\dots01}_{2m+1} + \underbrace{100\dots00}_{2m+1}.$$

15. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε

4. Αυτό είναι το μορφοπομένο τριαδικό σύστημα, που είχε χρησιμοποιηθεί σε μερικούς υπολογιστές.

όλους τους φυσικούς αριθμούς σε δύο αύξουσες ακολουθίες a_1, a_2, a_3, \dots και b_1, b_2, b_3, \dots ώστε $b_k - a_k = k$ για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$;

Έπειτα από λίγη σκέψη καταλάβετε φυσικά πώς θα επλέξετε αυτές τις ακολουθίες (αυτό μπορεί να γίνει μονοσήμαντα — δείτε το Σχήμα 9). Δεν είναι εύκολο όμως να βρούμε τον κανόνα δημιουργίας των ζευγών (a_k, b_k) . Πώς μπορούμε, για παράδειγμα, να ξέρουμε ποια από τις δύο ακολουθίες —η a_k ή η b_k — περιέχει το 100, ποιος είναι ο αντίστοιχος αριθμός k και ποιος αριθμός είναι το ζευγάρι του 100, χωρίς να γράψουμε όλα τα προηγούμενα a_k και b_k ;

Αποδεικνύεται ότι αυτός ο κανόνας μπορεί να διατυπωθεί αν αντί της δεκαδικής αναπαράστασης του αριθμού χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Fibonacci. Προσπαθήστε να βρείτε και να αποδείξετε αυτό τον κανόνα.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ,
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 70**

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

To Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 6 τεύχη. Αυτά, για όσο χρόνο θα οπάρχουν διαθέσιμα αντίτοπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους. To Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης φροντίστε να μη χάσετε κανέρα τεύχος του.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ QUANTUM

*Ισαύρω 10 και Δαφνομήδη, 114 71 - Αθήνα
Τηλ.: 3643272, 3645098. Fax: 3641864*

a_1	1
b_1	2
a_2	3
a_3	4
b_2	5
a_4	6
b_3	7
a_5	8
a_6	9
b_4	10
a_7	11
a_8	12
b_5	13
a_9	14
b_6	15
.	.
.	.

Πρωτάθλημα μπόουλινγκ

«Μάλιστα κάποτε, σαν σφαίρα σε άνισο έδαφος,
το παρατράβηξα και κύλησα ...»

—Ουίλλιαμ Σαιξηρ, Κοριολανός (μετάφραση Βασίλη Ρώτα)

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

AN KAI O NEYTWN DEN GNOPRIZE TO μπόουλινγκ, οι νόμοι του μπορούν θαυμάσια να αναλύσουν αυτό το σπορ. Η κρούση της μπάλας με τις κορύνες (και οι κρούσεις των κορυνών μεταξύ τους) πρέπει να υπακούουν στους νόμους διατήρησης. Αν αγνοήσουμε την τριβή της μπάλας και των κορυνών με το δάπεδο κατά τη διάρκεια της κρούσης, η ορμή στις οριζόντιες διευθύνσεις πρέπει να διατηρείται. Καθώς οι κορύνες εκτοξεύονται στον αέρα, πρέπει να διατηρούνται η ορμή, η στροφορμή και η μηχανική τους ενέργεια. Εππλέον, η τροχιά του κέντρου μάζας κάθε κορύνης πρέπει να είναι παραβολική, όπως και κάθε σώματος που βάλλεται μέσα στο γήινο βαρυτικό πεδίο.

Σε τούτο το άρθρο θα ασχοληθούμε με την αλληλεπίδραση της μπάλας και του δαπέδου του διαδρόμου. Όσοι έχετε πάιξει μπόουλινγκ, κεραυνοβόλώντας τις κορύνες με «κατευθίαν» ή «φαλτσαριστές» μπαλιές, θα γνωρίζετε τη σημασία αυτής της αλληλεπίδρασης. Θά χετε διαπιστώσει ότι στις «φαλτσαριστές» μπαλιές προσδίδετε με τα δάχτυλά σας ιδιοπεριστροφή («σπιν») στην μπάλα · άν είστε δεξιόχειρας, η μπάλα αρχίζει ευθύγραμμη πορεία στο δεξιό μέρος

του διαδρόμου και βαθμηδόν αλλάζει πορεία προς τα αριστερά. Έτσι μπορείτε να χτυπήσετε τις κορύνες 6-9-10 στην πίσω δεξιά γωνία, όχι όμως την κεντρική κορύνη 1, χάνοντας έτσι την ευκαιρία για ένα «στράικ», την ευκαιρία δηλαδή να ανατρέψετε όλες μαζί τις κορύνες. Ή μπορείτε να στείλετε την μπάλα να χτυπήσει το «θύλακα» μεταξύ των κορυνών 1 και 3, αυξάνοντας έτσι τις πιθανότητές σας για «στράικ».

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας με την απλούστερη περίπτωση, μια «κατευθίαν» μπαλιά. Υποθέτουμε ότι η μπάλα έχει ακτίνα r και μάζα m , και ότι την εκινάσσουμε οριζόντια με αρχική ταχύτητα u_0 , χωρίς καμιά αρχική στροφορμή, και από αμελητέο ύψος απ' την επιφάνεια του δαπέδου. Η μπάλα αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο, χωρίς καθόλου να κυλιεται πάνω σ' αυτό· χάνει όμως συνεχώς ταχύτητα και η τριβή ολισθήσεως την υποχρεώνει να στρέφεται γύρω από το κέντρο της όλο και πιο γρήγορα· από ένα σημείο και μετά η μπάλα πάνει να ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο και συνεχίζει την κίνησή της προς τις κορύνες κυλιόμενη πάνω σ' αυτό. Ζητούμε να βρούμε το σημείο απ' το οποίο και μετά η μπάλα μόνο κυλίεται.

Επειδή στον κατακόρυφο άξονα η μπάλα δεν επιταχύνεται, το βάρος της θα ισούται κατά μέτρο με την κάθετη δύναμη που ασκεί το δάπεδο στην μπάλα. Επομένως η συνολική

δύναμη που ασκείται στην μπάλα είναι η τριβή ολισθήσεως, η οποία δίνεται από τον τύπο $T_{\varphi} = nm g$ —όπου n ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνος θα ισχύει

$$T_{\varphi} = m \gamma = -nm g,$$

απ' όπου προκύπτει η επιτάχυνση της μπάλας:

$$\gamma = -ng.$$

Επιπλέον, η τριβή ολισθήσεως αναπτύσσει ροπή ως προς το κέντρο της μπάλας, η οποία δίνεται από τον τύπο $M = T_{\varphi} r$. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση θα ισχύει

$$M = \Theta a = T_{\varphi} r = nmgr,$$

όπου $\Theta = 2/5 mr^2$ είναι η ροπή αδράνειας της μπάλας. Από τη σχέση αυτή προκύπτει η γωνιακή επιτάχυνση a της μπάλας:

$$a = \frac{5ng}{2r}.$$

Από τις εξισώσεις της μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης έχουμε

$$u = u_0 + \gamma t = u_0 - nmgt$$

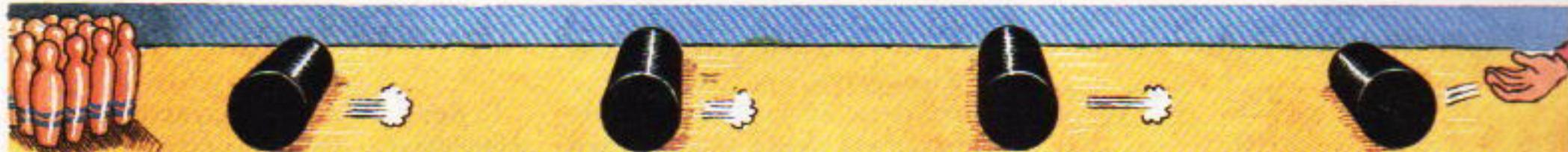
και

$$\omega = \omega_0 + at = \frac{5ngt}{2r}.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη για κύλιση χωρίς ολισθηση, $u = \omega r$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον ακριβή

* Οι δέκα κορύνες του μπόουλινγκ έχουν την εξής τριγωνική διευθέτηση:





χρόνο στον οποίο συμβαίνει αυτό:

$$t = \frac{2u_0}{7ng}.$$

Η μάλα τη στιγμή κατά την οποία αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχει ταχύτητα $5u_0/7$ και έχει διανύσει στο διάδρομο απόσταση

$$d = \frac{12u_0^2}{49ng}.$$

Επιπλέον, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι ώς το σημείο αυτό η μάλα χάνει τα $2/7$ της αρχικής κινητικής της ενέργειας. Είναι σημαντικό όμως να σημειώσουμε ότι η εν λόγω απώλεια δεν ισούται με $T_{\varphi} d$. Πώς δικαιολογείτε κάτι τέτοιο;

Σειρά τώρα της «φαλτσαριστής» μπαλιάς. Η μάλα έχει μια αρχική ιδιοπεριστροφή, δεν εκτελεί όμως καμιά πλευρική μεταφορική κίνηση. Άλλα αντί για την μάλα ας χρησιμοποιήσουμε έναν κύλινδρο ώστε να απλοποιήσουμε λίγο το πρόβλημά μας, όπως ακριβώς κρίναμε πως έπρεπε να πράξουμε δίνοντας το ίδιο πρόβλημα στις ημιτελικές εξετάσεις για την επιλογή της αμερικανικής ολυμπιακής ομάδας φυσικής του 1995. Έτσι, αν ο κύλινδρος είναι αρκετά μακρύς, το «παιχνίδι» μας γίνεται αρκετά απλούστερο!

Ας υποθέσουμε ότι ένας συμπαγής και ομογενής κύλινδρος μάζας m έχει αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από τον άξονά του, ο οποίος είναι οριζόντιος. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι τινάζουμε τον κύλινδρο στο δάπεδο από αμελητέο ύψος.

A. Ποια χρονική στιγμή ο κύλινδρος θα πάψει να ολισθαίνει και μόνο θα κυλίεται;

B. Πόση θα είναι η ταχύτητα του κυλίνδρου εκείνη τη στιγμή;

G. Σε πόση απόσταση από το σημείο εκτίναξης του κυλίνδρου θα συμβεί αυτό;

D. Υπολογίστε το κλάσμα της αρχικής περιστροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου που χάνεται.

E. Δείξτε ότι η εν λόγω απώλεια μπορεί να εξηγηθεί μέσω του θεωρήματος έργου-μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Ελπίζουμε ότι η προηγούμενη ανάλυση, μαζί με την προσπάθειά σας να λύσετε το πρόβλημα, θα βελ-

τιώσουν τις ικανότητές σας στο σπορ του μπόουλινγκ.

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum έως τις 10 Οκτωβρίου 1995. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

Σχηματισμός νεφών

A. Επειδή το ρεύμα αέρα κινείται «αδιαβατικά», θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$PV^\gamma = \text{σταθ.},$$

$$\frac{PV}{T} = \text{σταθ.}$$

Συνδυάζοντάς τες, παίρνουμε

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Επομένως,

$$T_1 = 279,4 \text{ K} = 6,4^\circ\text{C}.$$

B. Η διαφορά πίεσης μεταξύ των σταθμών M_0 και M_1 ισούται με το βάρος στήλης αέρα που εκτείνεται από τον M_0 ως τον M_1 . Ας φανταστούμε λοιπόν μια κυλινδρική στήλη αέρα ύψους h_1 και εμβαδού βάσεως S . Τότε,

$$-P_1 S + P_0 S = mg,$$

όπου m είναι η μάζα της στήλης αέρα. Εφόσον η πυκνότητα του αέρα μειώνεται γραμμικά με το ύψος, η μάζα του θα ισούται με

$$m = Sh_1 \frac{\rho_0 + \rho_1}{2},$$

όπου με ρ συμβολίζουμε την πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα. Την πυκνότητα ρ μπορούμε να την υπολογίσουμε από την καταστατική εξισώση:

$$\frac{P_0}{\rho_0 T_0} = \frac{P_1}{\rho_1 T_1},$$

$$\rho_1 = 1,054 \text{ kg/m}^3.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις και λύνοντας ως προς h_1 , παίρνουμε:

$$h_1 = \frac{P_0 - P_1}{g \left(\frac{\rho_0 + \rho_1}{2} \right)},$$

$$h_1 = 14,08 \text{ m.}$$

G. Και στον M_2 ο αέρας κινείται «αδιαβατικά», αλλά εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι υπάρχει μια επιπλέον μεταβολή της θερμοκρασίας εξαιτίας της συμπύκνωσης των υδρατμών:

$$T_2 = T_1 + \Delta T,$$

όπου T_1 είναι η θερμοκρασία εξαιτίας της αδιαβατικής διαδικασίας. Από αυτήν προκύπτει

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$T_1 = 264,8 \text{ K.}$$

Οσο για τη ΔT , γνωρίζουμε ότι η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης του νερού ισούται με

$$Q = mL = C_p \Delta T,$$

$$(2,45 \text{ gr})(2,500 \text{ kJoule/kg}) \\ = (1,000 \text{ Joule/kg} \cdot \text{K}) \Delta T, \\ \Delta T = 6,1 \text{ K, και } T_2 = 264,8 \text{ K} \\ + 6,1 \text{ K} = 270,9 \text{ K.}$$

D. Το νερό που κατακρημνίζεται από το ρεύμα αέρα ανά τετραγωνικό μέτρο και ανά δευτερόλεπτο είναι

$$(2,000 \text{ kg/m}^2)(2,45 \text{ gr/kg}) \\ (10^{-3} \text{ kggr/gr})(1/1,500 \text{ sec}) \\ = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ kggr} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}, \\ (3,3 \cdot 10^{-3} \text{ kggr} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}) \\ (3 \text{ hr})(3,600 \text{ sec/hr}) \\ = 35,3 \text{ kggr/m}^2.$$

Επειδή 1 kggr/m^2 αντιστοιχεί σε 1 mm ύψος στήλης νερού, το ύψος της στήλης νερού που κατακρημνίζεται από το ρεύμα αέρα είναι 35,3 mm.

E. Ο αέρας που κατέρχεται προς το σταθμό M_3 το πιθανότερο είναι πως θα κινείται «αδιαβατικά». Έτσι,

$$T_3 = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$T_3 = 300,0 \text{ K} = 26,9^\circ\text{C}.$$

Αν δεν υπήρχε συμπύκνωση και κατακρήμνιση νερού απ' τον αέρα, η T_3 θα ήταν ίση με την T_0 . Εξαιτίας της βροχόπτωσης, όμως, ο αέρας στον M_3 έχει χαμηλότερη θερμοκρασία και μικρότερη υγρασία απ' ό,τι στον M_0 . ◻

Θόλοι και υπόγεια ρεύματα

Φυσική σε μια κουταλιά νερό

Ivan Vorobyov

ΕΑΝ ΣΑΣ ΡΩΤΗΣΟΥΝ ΠΟΤΕ, «ΑΝΟΙγοντας τη βρύση, ποιο είδος ρεύματος νερού γεμίζει γρηγορότερα ένα κουτάλι: ασθενές ή ισχυρό;» — προσέξτε! Η ερώτηση είναι πονηρή. Σε ένα ισχυρό ρεύμα νερού το κουτάλι παραμένει ουσιαστικά άδειο, ενώ ένα ασθενές ρεύμα γεμίζει το κουτάλι τελείως — και μάλιστα «περισσότερο από τελείως!» Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή.

Ρεύματα ασθενή και ισχυρά

Μπορείτε να κάνετε το ακόλουθο πείραμα και να δείτε μόνοι σας ότι το ασθενές ρεύμα έχει αποτέλεσμα να γεμίσει το κουτάλι και να σχηματίσει μια σχεδόν οριζόντια υδάτινη επιφάνεια, η οποία καμπυλώνεται στο χείλος, απ' όπου το νερό ρέει κατά μήκος της εξωτερικής επιφάνειας του κουταλιού, και στο μέσον του πάτου του κουταλιού σχηματίζει ξανά ένα κατακόρυφο ρεύμα (Σχήμα 1). Αυτό το τελευταίο ρεύμα νερού δεν είναι

ιδιαίτερα ευσταθές — εξαρτάται ευαίσθητα από το πού το αρχικό ρεύμα συναντά την επιφάνεια του νερού στο κουτάλι, καθώς και από την κλίση του κουταλιού και την καθαρότητά του. Συχνά σχηματίζονται περισσότερα ρεύματα, τα οποία γρήγορα διαλύονται σε σταγονίδια.

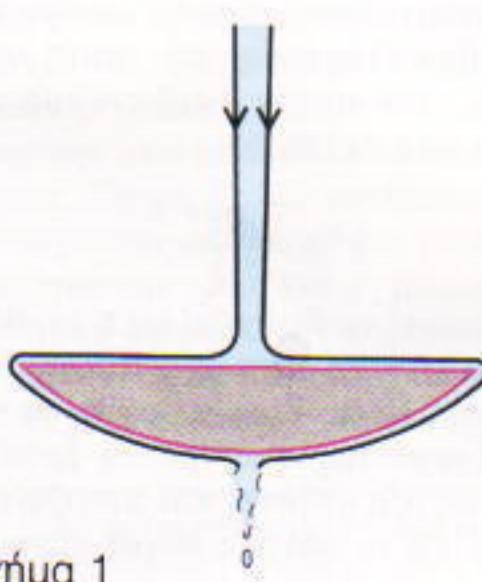
Από την άλλη, ένα ισχυρό ρεύμα νερού απλώνεται από το σημείο του κουταλιού όπου προσκρούει σε όλη την κοιλη επιφάνεια σαν λεπτό στρώμα, και το νερό εκτινάσσεται από τα άκρα του κουταλιού σχηματίζοντας έναν πλατύ θόλο πλαισιωμένο στο κάτω μέρος του από λεπτά ρεύματα νερού και σταγόνες (Σχήμα 2). Είναι αρκετά σαφές γιατί το νερό σχηματίζει ένα λεπτό στρώμα καθώς χτυπά με δύναμη το κουτάλι: έχει αρκετή ενέργεια ώστε να μπορεί να ανέρχεται ως το χείλος του κουταλιού με μη μηδενική ταχύτητα. Κατόπιν, στην πορεία της ελεύθερης πτώσης τους, τα μικρά ρεύματα ενώνονται και σχηματίζουν μια λεπτή καμπύλη επιφάνεια.

Θεωρήστε ως ανεξάρτητες τις τροχιές διαφορετικών τμημάτων του νερού, καθεμιά από τις οποίες είναι παραβολική — δηλαδή, τα σωματίδια του νερού κινούνται υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας. Τότε είναι εύκολο να προσδιοριστεί η οριζόντια ταχύτητα u στην κορυφή του υδάτινου θόλου (Σχήμα 3). Στο χρονικό διάστημα t που τα σωματίδια ταξιδεύουν από την κορυφή του κουταλιού προς την κορυφή του θόλου, η οριζόντια μετατόπιση είναι $x = ut$ και η κατακόρυφη $y = gt^2/2$. Έχοντας μετρήσει τα x και y , μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την ταχύτητα:

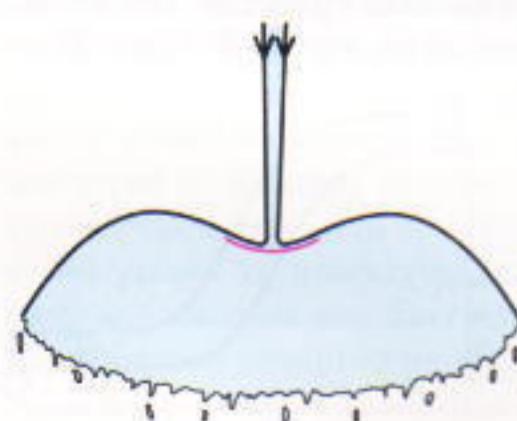
$$u = x \sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Οι τιμές που πρόκειψαν για ένα σύνολο χαρακτηριστικών μετρήσεων ήταν $x = 10$ cm, $y = 4,5$ cm και $u \approx 1$ m/sec.

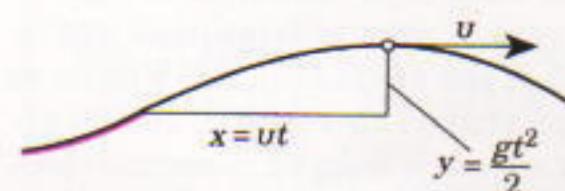
Για να αποσαφηνίσουμε κατά πόσον οι απώλειες ενέργειας κατά την πρόσκρουση και λόγω της τριβής μεταξύ ρεύματος και κουταλιού είναι σημαντικές για τη συλλογιστική μας, πρέπει να συγκρίνουμε την ταχύτητα u με την ταχύτητα u του αρχικού ρεύματος νερού στο ίδιο ύψος, στη θέση του άπηγα της παραβολής. Με-



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

τρώντας το χρόνο που απαιτείται για να γεμίσει ένα ποτήρι (όγκου 200 ml), λαμβάνουμε την παροχή του ρεύματος νερού $P = \pi r^2 u$, όπου r είναι η ακτίνα του ρεύματος. Έτσι,

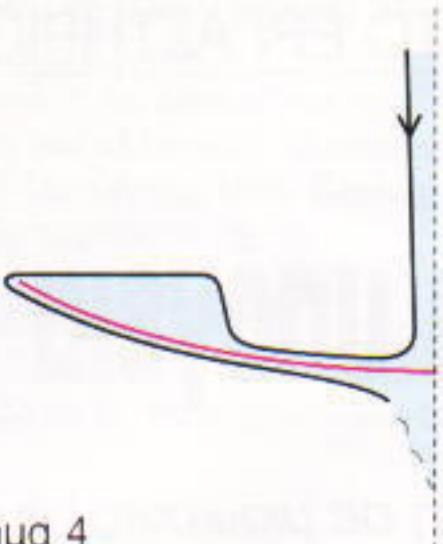
$$u = \frac{P}{\pi r^2},$$

Έτσι βρίσκουμε ότι $u \approx 1,4 \text{ m/sec}$. Οι ταχύτητες δεν είναι ίσες, αλλά δεν διαφέρουν και πολύ. Άρα, για το σκοπό των αδρών εκτιμήσεών μας, μπορούμε να αγνοήσουμε τις απώλειες ενέργειας λόγω της αρχικής πρόσκρουσης και της τριβής του νερού με την επιφάνεια του κουταλιού.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο ασθενές ρεύμα νερού. Παραδόξως, στην περίπτωση αυτή η ενέργεια του πιπτοντος νερού είναι επίσης περισσότερο από αρκετή ώστε το νερό να εκτιναχτεί από το κουτάλι, αλλά κάτι τέτοιο δεν ουμβαίνει. Τι είναι αυτό λοιπόν που επιβραδύνει σχεδόν τελείως το νερό, εφόσον οι απώλειες λόγω πρόσκρουσης και τριβής δεν είναι υπεύθυνες; Έχουμε κάθε λόγο να μελετήσουμε προσεκτικά τη μετάβαση από την ήσυχη ροή πάνω από το χείλος στο καμπύλο στρώμα που σκεπάζει την επιφάνεια της κάτω όψης του κουταλιού.

Φρενάροντας στο τείχος

Η εμπειρία έχει δείξει ότι, ακόμη και αν κάποιος ανοίξει προσεκτικά τη βρύση, η εκτίναξη του νερού είναι απρόβλεπτη. Έτσι, είναι ενδεδειγμένο, απ' τη στιγμή που θα ανοίξετε τη βρύση, να μην την ξαναγγίξετε για να παραγάγετε ένα λιγότερο ισχυρό ρεύμα, αλλά αντ' αυτού να χαμηλώσετε αργά το κουτάλι προς το νεροχύτη. Είναι ενδιαφέρον το ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται έντονα από τις προϋπάρχουσες συνθήκες. Εάν καταφέρετε να ρυθμίσετε τη ροή σας ώστε να έχετε την εκτίναξη του νερού από τα χείλη του κουταλιού και ακολούθως ανυψώσετε το κουτάλι κατά λίγα εκατοστά, το νερό θα συνεχίσει να τινάζεται πέρα από το χείλος του κουταλιού. Άλλα μόλις το νερό γεμίσει το κουτάλι, δεν θα είστε πλέον σε θέση να αποκαταστήσετε το θόλο απλώς και μόνο χαμηλώντας το κουτάλι στην αρχική του



Σχήμα 4

Θέση — πρέπει να το χαμηλώσετε ακόμη περισσότερο.

Εάν το κουτάλι είναι περισσότερο επιπέδο και αν είστε προσεκτικός, μπορείτε να παρατηρήσετε ένα ενδιαφέρον φαινόμενο: το πίπτον ρεύμα δημιουργεί μια κοιλότητα στο νερό του κουταλιού, που σχεδόν «ακουμπά» την επιφάνεια του κουταλιού. Αυτή η κοιλότητα καταλήγει σε ένα απότομο τείχος νερού. Το νερό πίσω από το τείχος ηρεμεί, και εκεί η επιφάνειά του βρίσκεται λιγάκι ψηλότερα από το χείλος του κουταλιού (Σχήμα 4). Το ρεύμα προφανώς είναι αρκετά ισχυρό ώστε κοντά στο σημείο όπου συναντά το κουτάλι να διώχνει το νερό, δεν είναι όμως αρκούντως ισχυρό ώστε να «αδειάσει» εντελώς το κουτάλι.

Η μετάβαση από το λεπτό στρώμα νερού της ταχείας ροής στο σχεδόν στάσιμο νερό πίσω από το απότομο τείχος, μπορεί να παρατηρηθεί ευκολότερα όταν η εξεταζόμενη επιφάνεια είναι απλούστερη από την επιφάνεια ενός κουταλιού. Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε ένα καθρεφτάκι του μακιγιάζ με χείλος μικρού ύψους που το δημιουργεί περιμετρικά το πλαίσιό του. Στην περίπτωση αυτή, η ακτίνα της υδάτινης κοιλότητας —δηλαδή η περιοχή ταχείας ροής— μεταβάλλεται ομαλά με την ένταση του ρεύματος νερού. Το ύψος H του

υδάτινου τείχους σχεδόν συμπίπτει με εκείνο του χείλους και είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος h του λεπτού στρώματος του ταχέως ρέοντος νερού, μπροστά από το τείχος (Σχήμα 5). Η ταχύτητα u του ταχέως ρεύματος νερού ελαττώνεται στη στενή περιοχή της απότομης ανόδου (εκεί μπορείτε να διακρίνετε στροβιλισμούς του νερού).

Ας θεωρήσουμε την ποσότητα νερού που οροθετείται από τις κατακόρυφες έδρες $H\ell$ και $h\ell$, και ας εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνος. Νέρο μάζας $\rho u h\ell$ (όπου ρ η πυκνότητα του νερού) εισέρχεται σε αυτό το στοιχείο όγκου ανά μονάδα χρόνου, και σε κάποια απόσταση πίσω από το τείχος η ταχύτητα του νερού πέφτει σχεδόν στο μηδέν. Άρα, κάποια δύναμη μειώνει την ορμή κατά $\rho u^2 h\ell$ κάθε δευτερόλεπτο. Ποια είναι αυτή η δύναμη;

Αποδεικνύεται ότι πρόκειται γι' αυτήν που αναπτύσσει η πίεση του σχεδόν στάσιμου νερού. (Η τριβή ως προς τον πυθμένα αγνοείται λόγω του μικρού οριζόντιου μήκους της περιοχής όπου εκτυλίσσεται το φαινόμενο που μελετάμε. Οι δυνάμεις εξαρτίας των στροβίλων είναι εσωτερικές και δεν επηρεάζουν τη συνολική ορμή. Επουσιώδεις είναι επίσης οι δυνάμεις της επιφανειακής τάσης.)

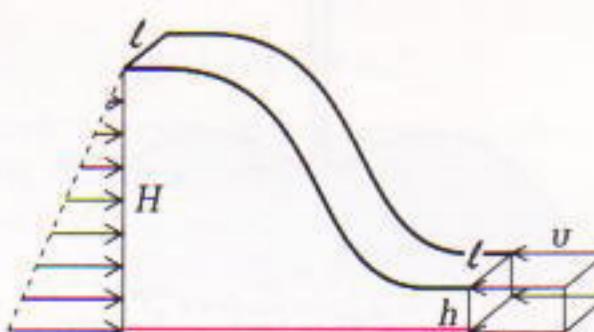
Η πίεση σε βάθος H είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική κατά $\rho g H$, αλλά για να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια $H\ell$ πρέπει να λάβουμε τη μέση υδροστατική πίεση. Έτσι,

$$F = \frac{\rho g H}{2} H\ell = \frac{\rho g H^2 \ell}{2}.$$

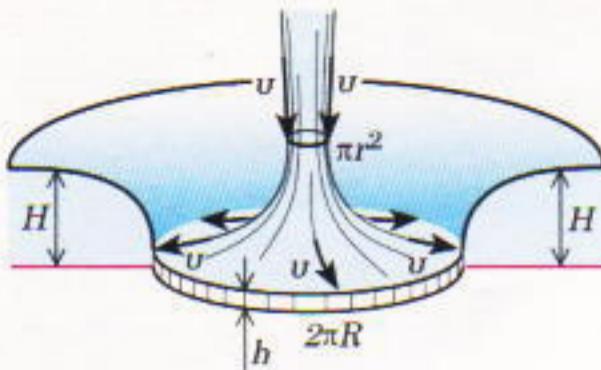
Αυτή μπορούμε να πούμε πως είναι η δύναμη πέδησης, η οποία ισούται με το ρυθμό ελάττωσης της ορμής του νερού. Από αυτήν λαμβάνουμε τη σημαντική σχέση

$$u^2 h = \frac{g H^2}{2},$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως η συνθήκη για τη θέση όπου σχηματίζεται το υδάτινο τείχος. Έτσι, τι συμβαίνει αν ανοίξουμε περισσότερο τη βρύση; Τότε το $u^2 h$ αυξάνει και υπερβαίνει το $g H^2 / 2$, το υδάτινο τείχος υποχωρεί υπό την πίεση του ταχέως ρέοντος



Σχήμα 5



Σχήμα 6

νερού και το «σκαλοπάτι» αρχίζει να κινείται στην κατεύθυνση της ροής. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του «σκαλοπατιού» χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνος και το νόμο διατήρησης της μάζας. Εάν, ωστόσο, η πίεση του υδάτινου τείχους είναι μεγαλύτερη της πίεσης του εισερχόμενου νερού ($gH^2/2 > u^2h$), το σκαλοπάτι θα κινηθεί «ενάντια» στη ροή, και η περιοχή του σχεδόν στάσιμου νερού θα διευρυνθεί (κατά τον ίδιο τρόπο, για παράδειγμα, η παλιρροϊκή ανύψωση των θαλάσσιων υδάτων «φράσσει» την εκβολή ενός ποταμού και παράγει ένα απότομο παλιρροϊκό κύμα, το οποίο κινείται αντίθετα προς τη ροή του ποταμού).*

Η ακτίνα του θόρου

Στις δικές μας πειραματικές συνθήκες, δεν είναι εύκολο να επαληθευθεί η σχέση

$$u^2h = \frac{gH^2}{2}$$

—το πάχος h είναι πολύ μικρό και είναι δύσκολο να μετρηθεί η ταχύτητα u . Ας διαλέξουμε λοιπόν έναν άλλο τρόπο. Ας προσπαθήσουμε να μετρήσουμε όσο το δυνατόν ακριβέστερα τη διάμετρο $2r$ του ρεύματος, στο στενότερο σημείο του (το «λαιμότου») —δηλαδή σε ύψος περίπου H από την οριζόντια επιφάνεια, και επίσης την ακτίνα R του κυκλικού τείχους (Σχήμα 6). Θα υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του νερού δεν επηρεάζεται από την τριβή και τη μικρή υψομετρική διαφορά των σημείων όπου συμβαίνει η ομαλή υπερχείλιση.

Η ίδια ποσότητα νερού διέρχεται

από το λαιμό όπως και από το κυλινδρικό σύνορο του τείχους, που έχει ύψος h και περίμετρο $2\pi R$. Συνεπώς,

$$\Pi = \pi r^2 u = 2\pi Rhu,$$

απ' όπου λαμβάνουμε την ταχύτητα:

$$u = \frac{\Pi}{\pi r^2}$$

και το πάχος του λεπτού στρώματος νερού:

$$h = \frac{r^2}{2R}.$$

Η αντικατάσταση αυτών των τιμών στη σχέση $u^2h = gH^2/2$ μάς δίνει την ακτίνα του λεπτού στρώματος νερού ως το τείχος:

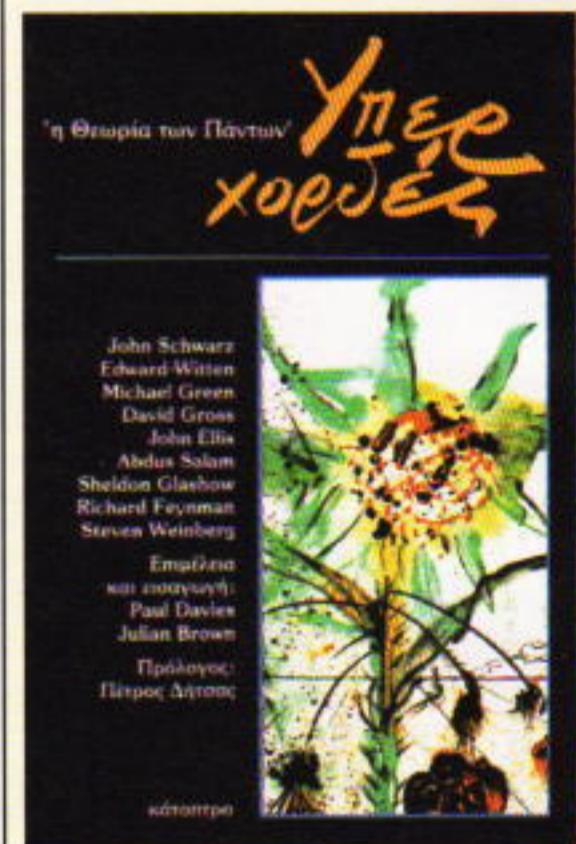
$$R = \frac{1}{g} \left(\frac{\Pi}{\pi r H} \right)^2.$$

Από τις μετρήσεις τιμές $\Pi = 52$ ml/sec, $r = 3,5$ mm, και $H = 6$ mm, υπολόγισα για το R την τιμή των 9 cm, ενώ η απευθείας μέτρηση του R έδωσε 6 cm. Ο υπολογισμός μου έπεσε έξω κατά 50%. Υποπτεύομαι ότι αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι επιτρέψαμε η ταχύτητα του νερού να θεωρείται σταθερή καθώς διανύει το μάλλον μεγάλο μήκος του λεπτού στρώματος. Δεχόμενοι ελάττωση στην ταχύτητα κατά 40%, λαμβάνουμε μια αποδεκτή αριθμητική συμφωνία. Ελπίζω τα δικά σας πειράματα να επιβεβαιώσουν αυτό το συμπέρασμα.

Ανεξάρτητα, όμως, από το πόσο ενδιαφέροντα σίναι τα φαινόμενα στο κουτάλι, και πόσο διδακτικό είναι να αναδιφούμε τα λεπτά σημεία του σχήματος της επιφάνειας και της επιδρασής του στη ροή του νερού, ακόμη πιο ενδιαφέροντα σίναι ορισμένα «συγγενή» φαινόμενα που βρίσκονται πολύ πέραν του χείλους του κουταλιού. Θα σας δώσω μόνο ένα παράδειγμα. Σε μικρά αλλά χειμαρρώδη ορεινά ποτάμια η τραχύτητα της κοίτης μπορεί να εξαναγκάσει τη ροή του νερού σε διακοπή, οπότε τα νερά να συσσωρευτούν. Ένα τέτοιο τείχος νερού μπορεί να αποδειχθεί επικίνδυνο για κάποιον που διανύει αυτό το τμήμα του ποταμού με καγιάκ ή σχεδία, λόγω της απότομης κλίσης των υδάτων και της ξαφνικής μεταβολής στην ταχύτητα του ρεύματος. ◻

* Βλ. τις ερωτήσεις 4.54 και 4.55 στο βιβλίο *To πανηγύρι της φυσικής*, του Jearl Walker, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1985. (Σ.τ.ε.)

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



P. Davies και J. Brown

Υπερχορδές Η «Θεωρία των Πάντων»

Στο βιβλίο αυτό ο Davies παρουσιάζει στον γενικό αναγνώστη την πιο μοντέρνα θεωρία της σύγχρονης φυσικής: την πλήρη ενοποιημένη θεωρία όλων των δυνάμεων της φύσης. Στη συνέχεια μαζί με τον Brown παρουσιάζουν τις συνεντεύξεις που πήραν για το BBC από τους φυσικούς: John Schwarz, Edward Witten, Michael Green, David Gross, John Ellis, Abdus Salam, Sheldon Glashow, Richard Feynman, Steven Weinberg. Επιπλέον και επομένως: Paul Davies, Julian Brown. Πρόλογος: Πέτρος Δίττος. Κάτοπτρο.

Σελ.: 266, 4.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Ισταύρων 10 και Δαφνομήλη,
11471 Αθήνα
τηλ.: 3643272, 3645098
fax: 3641864

Οι γίγαντες

«Ο γίγαντας είναι σαν το λόφο που υψώνεται στο μέσο μιας πεδιάδας.»

—Κοσμά Προυτκώφ

Vladimir Belonuchkin

ΟΛΟΙ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ Ο ΙΣΑΑΚ Νεύτων υπήρξε μια από τις μεγαλύτερες ιδιοφυΐες στην ιστορία της επιστήμης. Και ήταν αυτός που διαφώνησε απερίφραστα με τον «σεβαστό» Κοσμά Προυτκώφ.¹ «Εάν είδα πο μακριά απ' ό,τι άλλοι», έγραψε ο Νεύτων, «οφείλεται στο ότι στάθηκα πάνω στους ώμους γιγάντων». Ποιοι ήταν αυτοί οι γίγαντες; Ο Κέπλερ, ασφαλώς, και ο Γαλιλαίος και ο Κοπέρνικος. Όμως ποιοι άλλοι —ποιοι είναι οι γίγαντες που έζησαν πριν από αυτούς;

Ο πρώτος επιστήμονας του οποίου γνωρίζουμε το όνομα, ο Θαλής ο Μιλήσιος (βος π.Χ. αιώνας), συνεισέφερε σημαντικά στην αστρονομία. Σύμφωνα με το μύθο, ο Θαλής προέβλεψε την έκλειψη Ήλιου της 28ης Μαΐου του 584 π.Χ. Ωστόσο, υπάρχουν λόγοι να υποθέτουμε ότι ο Θαλής χρησιμοποίησε τη μέθοδο που ανέπτυξαν οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι. Η βαβυλωνιακή μέθοδος ήταν καθαρά εμπειρική: παρατηρήσεις πολλών ετών καθιστούσαν δυνατή την ανακάλυψη κάποιας κανονικότητας στα επαναλαμβανόμενα ουράνια φαινόμενα.

Το πρώτο «θεωρητικό» αξίωμα, που σημάδεψε την απαρχή μιας επιστημονικής περιγραφής του σύμπαντος, ήταν πιθανώς η αντίληψη πως η Γη είναι σφαιρική. Υπήρχαν δύο δόγματα, τα οποία αποτελούσαν τη βάση

των πρώτων αστρονομικών συστημάτων που περιέγραφαν το σύμπαν: η φαινομενική ακινησία της Γης και η ομαλή κυκλική κίνηση του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών γύρω από τη Γη. Το ότι το δεύτερο δόγμα ήταν εσφαλμένο το γνώριζαν ακόμη και οι αρχαίοι αστρονόμοι, ωστόσο το δόγμα αυτό επέζησε για δύο χιλιετίες —ώς την εποχή του Κέπλερ.

Ακόμη κι αν φαίνεται ότι ένα ουράνιο σώμα δεν κινείται ομαλά κατά μήκος μιας μη κυκλικής τροχιάς, εντούτοις κινείται ομαλά ως προς ένα σημείο, το οποίο με τη σειρά του περιφέρεται ομαλά γύρω από ένα άλλο κέντρο, κ.ο.κ., έως ότου τελικά μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα σημείο που περιφέρεται ομαλά γύρω από τη Γη. Πρώτος ο αρχαίος έλληνας αστρονόμος Εύδοξος, τον 4ο π.Χ. αιώνα, κατασκεύασε ένα πλήρες μοντέλο βασισμένο σε αυτή τη συλλογιστική. Το θεωρητικό του σχήμα συνίστατο σε 27 κύκλους (σφαίρες) και εξηγούσε την κίνηση του Ήλιου, της Σελήνης και των πέντε γνωστών πλανητών με αρκετά εντυπωσιακή ακρίβεια για εκείνη την εποχή.

Με την πάροδο του χρόνου η ακρίβεια των παρατηρήσεων βελτιώθηκε, και τούτο οδήγησε αναγκαστικά στην αποδοχή της ύπαρξης ολονέν περισσότερων σφαιρών. Ο Κάλλιπος, μαθητής του Ευδόξου, χρειάστηκε 33 σφαίρες. Ο Αριστοτέλης τις έφτασε στις 56. Αυτό το σύστημα κύκλων και σφαιρών —που βελτιώθηκε από τη σκληρή εργασία πολλών αστρονό-

μων (με πρώτον ανάμεσά τους τον Ίππαρχο), τελειοποιήθηκε από τον Πτολεμαίο (έλαβε άλλωστε το όνομά του), και καθιερώθηκε από την αυθεντία του Αριστοτέλη —ήταν το μόνο αποδεκτό θεωρητικό σχήμα του σύμπαντος ακόμη και για έναν τόσο μεγάλο επαναστάτη στο χώρο της επιστήμης όπως ο Κοπέρνικος, ο οποίος «απλώς» μετέθεσε το κέντρο του σύμπαντος από τη Γη στον Ήλιο άπαξ διά παντός. Μόνον ο Κέπλερ κατόρθωσε τελικά να απορρίψει την ιδέα περί της ομαλής κυκλικής κίνησης των πλανητών.

Όπως πιθανώς γνωρίζετε, ο Κέπλερ μπήκε στον πειρασμό να απορρίψει το παλαιό αξιώμα λόγω μιας απόκλισης κατά οκτώ πρώτα λεπτά τόξου από την προβλεπόμενη θέση του Άρη. Ο Τύχο Μπράχε, τις παρατηρήσεις του οποίου χρησιμοποίησε ο Κέπλερ, είχε επιτύχει τέτοια ακρίβεια στις μετρήσεις του ώστε αυτά τα οκτώ λεπτά να μην είναι δυνατόν να αποδοθούν σε παρατηρησιακό σφάλμα. Για να λέμε την αλήθεια, ενάμιση αιώνα πριν από τον Μπράχε, ο μεγάλος μουσουλμάνος αστρονόμος Ουλούγη μπέης πέτυχε την ίδια —και ακόμη μεγαλύτερη— ακρίβεια. Όμως η Σαμαρκάνδη βρίσκεται μακριά από την Ευρώπη, και επιπλέον ο Ουλούγη μπέης έπεισε θύμα του ίδιου του θρησκεύματός του: οι φρουροί της παράδοσης του Ισλάμ προσπάθησαν να σφήσουν την ανάμνηση αυτού του αιρετικού, παρότι ήταν ο κυβερνήτης ενός μεγάλου κεντροασιατικού κράτους.

1. Ρώσος συγγραφέας του 19ου αιώνα (ουσιαστικά, το ψευδώνυμο τριών συγγραφέων) οι αφορισμοί του οποίου παραμένουν αξιομνημόνευτοι παρότι όχι ιδιαίτερα οξυδερκείς.



Η ακρίβεια που πέτυχε ο Εύδοξος ήταν περίπου $0,5^\circ$. Ο Τύχο Μπράχε κατάφερε ακρίβεια περίπου $2'$, ενώ η ακρίβεια του Ουλούγ για μέρη ήταν της τάξης του $1'$. Με την εφεύρεση του τηλεσκοπίου, η ακρίβεια των μετρήσεων βελτιώθηκε σημαντικά. Σημαίνει άραγε αυτό ότι τα αποτέλεσμα των αστρονομικών ερευνών κατά την Αρχαιότητα και τον Μεσαίωνα δεν έχουν πλέον καμία σημασία για μας; Φυσικά όχι. «Παρά το οιδηρόδρομο, φυλάξτε και το κάρο σας», συμβουλεύει ο μοναδικός Κοσμά Προυτκώφ. Οι παρατηρήσεις των αρχαίων εποτημόνων —Ελλήνων, Αιγυπτίων, Βαβυλωνίων, Κινέζων, Ίνκας— συμβάλλουν στην καθιέρωση των μακροπρόθεσμων κανονικότήτων στην κίνηση της Γης, των πλανητών και των «απλανών» αστέρων. Νά ένα παράδειγμα.

Πρόβλημα 1. Το μεγαλύτερο κατοπτρικό τηλεσκόπιο του κόσμου (στην πρώην Σοβιετική Ένωση) διαθέτει κύριο κατοπτρο διαμέτρου $D = 6$ m. Για πόσο χρονικό διάστημα πρέπει να παρατηρούμε ένα άστρο με το τηλεσκόπιο αυτό ώστε να βρούμε την ταχύτητά του με ακρίβεια μεγαλύτερη από αυτήν του Ευδόξου; Και για πόσο ώστε η ακρίβειά μας να είναι μεγαλύτερη από αυτήν του Τύχο Μπράχε και του Ουλούγ για μέρη;

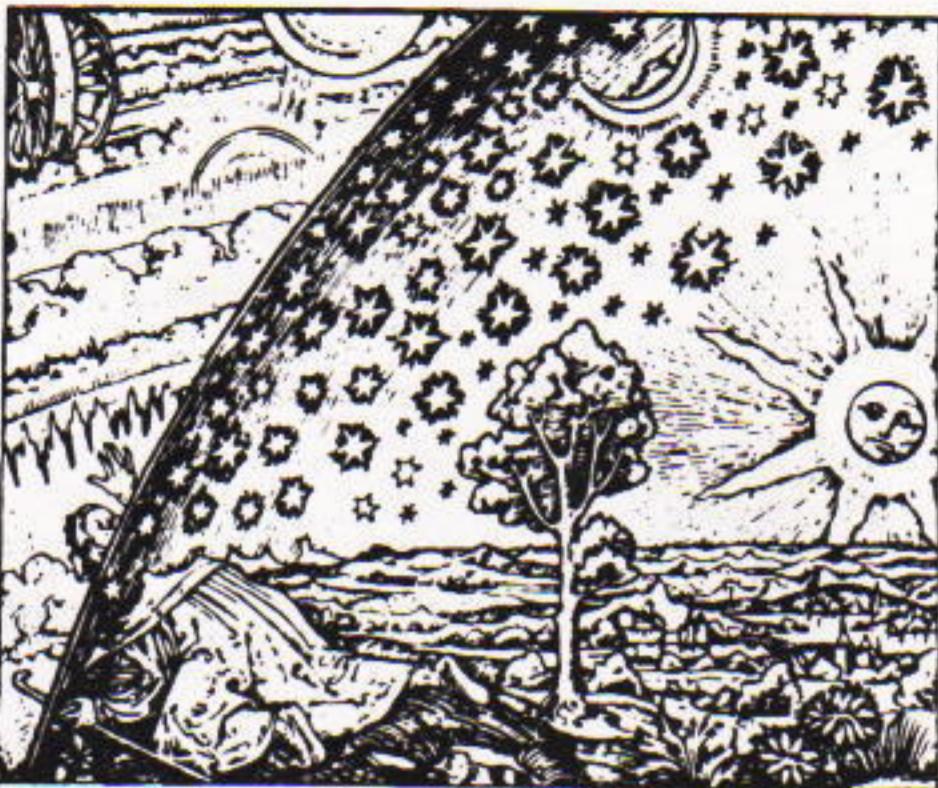


Απόδειξη περί της σφαιρικότητας της Γης (από ένα εγχειρίδιο κατασκευής ηλιακών ρολογιών, 1531). Γράφει: «Αυτό το σχέδιο δείχνει ότι η Γη είναι σφραγγισμένη». Και παρακάτω: «Εάν η Γη ήταν τετράγωνη, τριγωνική ή εξαγωνική, θα βλέπαμε μια σκιά με το αντίστοιχο σχήμα κατά τη διάρκεια μιας έκλειψης Σελήνης».

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός άστρου πρέπει να προσδιορίσουμε τη θέση του τουλάχιστον δύο φορές. Η ακρίβεια της τηλεσκοπικής μέτρησης των συντεταγμένων των ουρανίων σωμάτων εξαρτάται από τη διακριτική ικανότητα του τηλεσκοπίου, η οποία περιορίζεται θεμελιωδώς από φαινόμενα περιθλασης. Η ελάχιστη γωνία που μπορεί να μετρηθεί με κύριο κάτοπτρο διαμέτρου D είναι περίπου λ/D , όπου λ είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που χρησιμοποιείται στις παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, το μήκος κύματος του κίτρινου φωτός είναι $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7}$ m, που σημαίνει ότι η μέγιστη ακρίβεια μέτρησης για το σοβιετικό τηλεσκόπιο είναι περίπου 10^{-7} rad. Αφήνω τους υπόλοιπους υπολογισμούς σε σας (μπορείτε να ελέγχετε τις απαντήσεις σας στη σελίδα 70).

Ήδη από τον 3ο αιώνα π.Χ. άρχισε ο αγώνας εναντίον του δόγματος σύμφωνα με τον οποίο η Γη θεωρείται αξιωματικά ακίνητη. Ο πρώτος αστρονόμος που έδωσε μάχη στο μέτωπο αυτό ήταν ο Αρισταρχος ο Σάμιος. Παρότι ακόμη και ο Πυθαγόρας και ο Ηράκλειτος θεωρούσαν τον Ήλιο ως το κέντρο του σύμπαντος, ο Αρισταρχος υπήρξε ο πρώτος που προσπάθησε να αποδείξει τη βασιμότητα αυτής της αντίληψης. Συγκρινούντας τα σχετικά μεγέθη του Ήλιου και της Γης (τα οποία είχε υπολογίσει ο ίδιος), κατέληξε στο συμπέρασμα ότι εφόσον ο Ήλιος ήταν κατά πολύ μεγαλύτερος από τη Γη, θα έπρεπε να αποτελεί το κέντρο γύρω από το οποίο περιφέρονταν οι πλανήτες, συμπεριλαμβανομένης της Γης. Και αυτά συνέβησαν εκατοντάδες χρόνια πριν από τον Κοπέρνικο!

Ας προσπαθήσουμε να ακολουθήσουμε τους υπολογισμούς του Αρί-



«Ο σκεπτικιστής, ή Προκυνητής στην άκρη της Γης»—Ξυλογραφία του 19ου αιώνα από τον Camille Flammarion.

σταρχου στο επόμενο παράδειγμα.

Πρόβλημα 2. Ο Ήλιος βρίσκεται πολύ μακρύτερα από τη Γη απ' ό,τι η Σελήνη. Τα γωνιακά μεγέθη του Ήλιου και της Σελήνης είναι πρακτικά ίσα, πράγμα που σημαίνει ότι η σκιά της Σελήνης πάνω στη Γη είναι ένα σημείο. Η σκιά της Γης στην τροχιά της Σελήνης είναι περίπου διπλάσια της διαμέτρου της Σελήνης (η ακριβής τιμή είναι 2,67). Πόσο μεγαλύτερη από τη Σελήνη είναι η Γη; Υπολογίστε το λόγο των μεγεθών χρησιμοποιώντας σημερινά δεδομένα.

Για να προσδιορίσει το μέγεθος του Ήλιου, ο Αρισταρχος μέτρησε τη γωνία μεταξύ Ήλιου και Σελήνης κατά το πρώτο και τελευταίο τέταρτο της Σελήνης —δηλαδή, όταν η Σελήνη είναι φωτισμένη ακριβώς κατά το ήμισυ. Όμως στο σημείο αυτό διέπραξε ένα σοβαρό λάθος: σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του, η γωνία αυτή διέφερε από μια ορθή κατά 3° , ενώ το σωστό αποτέλεσμα είναι $8,6'$. Γενικά είναι δύσκολο να μετρηθεί η τιμή αυτή, εν μέρει λόγω του «χλορού» χαρακτήρα του φωτός που έρχεται από τη Σελήνη: η Σελήνη αντανακλά το ηλιακό φως που διαχέει η Γη προς το μέρος της. Γι' αυτό ο Αρισταρχος κατέληξε σε ένα αποτέλεσμα τόσο διαφορετικό από τη λύση του επόμενου προβλήματος.

Πρόβλημα 3. Προσδιορίστε το λόγο των διαμέτρων Ήλιου και Σελήνης χρησιμοποιώντας δεδομένα του

Θαλής ο Μιλήσιος (ήκμασε περί το 580 π.Χ.) — Έλληνας φιλόσοφος, θεμελιωτής της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας. Σ' αυτόν αποδίδεται η επινόηση της απόδειξης στα μαθηματικά. Ήταν ο πρώτος που είπε ότι η Σελήνη λαμβάνει το φως από τον Ήλιο. Απέδωσε την αρχή όλων των πραγμάτων σε μία και μόνο υλική ουσία, το ύδωρ.

Πυθαγόρας ο Σάριος (580-500 π.Χ. περίπου) — Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος. Δημιουργός είναι αστρονομικό σύστημα θέτοντας μια κεντρική εστία πυρός ως «εστία του παντός», γύρω από την οποία περιφέρονται τα ουράνια σώματα, συμπεριλαμβανομένων του Ήλιου, της Γης και της Αντίχθωνος, η οποία περιλαμβάνει το μη ορατό μέρος της Γης. Λέγεται ότι εφηύρε την «αρμονία των οφαερών» και ότι αναγνώρισε πως ο Αυγερινός και ο Αποσπερίτης είναι ουσιαστικά ένα και το αυτό αντικείμενο (η Αφροδίτη).

Ηράκλειτος ο Εφέσιος (540-480 π.Χ. περίπου) — Έλληνας φυσικός φιλόσοφος που άσκησε μεγάλη επίδραση στην εποιτημονική σκέψη της εποχής του. Πιστεύει πως η μεταβολή είναι η μόνη βεβαιότητα για το σύμπαν, και το πυρ η θεμελιώδης αρχή του. Θεωρούσε ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν μια παγκόσμια ψυχή. Λόγω των απαισόδοξων απόψεων του περί ζωής ήταν γνωστός ως «κλαυσίνος».

Εύδοξος ο Κνίδιος (400-350 π.Χ. περίπου) — Έλληνας αστρονόμος και μαθηματικός. Θεώρησε την κίνηση των πλανητών ως συνδυασμό από 27 ομόκεντρες οφαίρες που εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη.

Κάλλιπος ο Κυζικηνός (ήκμασε τον 4ο π.Χ. αιώνα) — Έλληνας αστρονόμος, μαθητής του Ευδόξου. Διόρθωσε και βελτίωσε τη θεωρία του μέντορά του για τις ομόκεντρες οφαίρες ώστε να εξηγείται η κίνηση του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών.

Αριστοτέλης ο Σταγειρίτης (384-322 π.Χ.) — Έλληνας φιλόσοφος και εποιήμαν. Τα έργα του καλύπτουν όλους τους κλάδους της αρχαίας γνώσης. Στην αστρονομία, τα ενδιαφέροντά του επικεντρώνονταν κυρίως στη δομή του σύμπαντος. Επίσης παρατήρησε κάποια ουράνια φαινόμενα, κομήτες και διάττοντες αστέρες.

Αρισταρχος ο Σάριος (ήκμασε περί το 270 π.Χ.) — Έλληνας αστρονόμος. Πρώτος αυτός υποστήριξε ότι η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, ο οποίος, όπως ισχυρίστηκε, ήταν ακίνητος και τοποθετημένος στο κέντρο της οφαίρας των απλανών αστέρων.

Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (276-194 π.Χ. περίπου) — Έλληνας εποιήμαν, που εργάστηκε σε πολλούς γνωστικούς τομείς. Στα μαθηματικά, για παράδειγμα, εφηύρε έναν τρόπο εύρεσης των πρώτων αριθμών. Όσο γνωρίζουμε, είναι ο πρώτος που μετρήσε την περίμετρο της Γης. Επινόησε ένα ημερολόγιο που συμπεριλαμβάνει τα διοεκτικά έτη και προσπάθησε να κατατάξει χρονολογικά τα πνευματικά και πολιτικά γεγονότα από την πτώση της Τροιας και μετά.

Ιππαρχος ο εκ Βιθυνίας (ήκμασε από το 146 ως το 127 π.Χ.) — Μέγιστος έλληνας αστρονόμος, ένας από τους ιδρυτές της αστρονομίας. Προσδιόρισε την απόσταση της Σελήνης, υπολόγισε τη διάρκεια του έτους και συνέταξε έναν κατάλογο με 850 αστέρα, τα οποία υποδιαιρέσει σε έξι κατηγορίες σύμφωνα προς τη φωτεινότητά τους.

Ποσειδώνιος ο εξ Απαρείας (περίπου 135-51 π.Χ.) — Έλληνας φιλόσοφος. Τα εποιημονικά του έργα καλύπτουν όλα τα πέδια της γνώσης και προοέδωσαν στην αρχαία φυσική φιλοσοφία

την τελική της μορφή. Απέδωσε τις παλιρροιες στη συνδυασμένη δράση Ήλιου και Σελήνης και αναγνώρισε τη σύνδεση μεταξύ των παλιρροιών και των φάσεων της Σελήνης.

Πτολεμαίος Κλαύδιος (ήκμασε τον 2ο μ.Χ. αιώνα) — Έλληνας αστρονόμος, δημιουργός του γεωκεντρικού συστήματος του σύμπαντος. Ανέπτυξε μια μαθηματική θεωρία περί της κίνησης των πλανητών γύρω από την ακίνητη Γη, γεγονός που του επέτρεψε να υπολογίσει τις μελλοντικές θέσεις των πλανητών στον ουρανό.

Ρογήρος Βάκων (περίπου 1220-1292) — Φραγκισκανός φιλόσοφος και φυσιοδίφης. Έγραψε περί οπτικής, αστρονομίας, γεωγραφίας, μαθηματικών και χημειας.

Ουλούγ μπέης (1394-1449) — Κεντροασιάτης πολιτικός, επι-

στήμων και διαφωτιστής. Κατασκεύασε ένα από τα σημαντικότερα αστεροσκοπεία του Μεσαίωνα. Συνέταξε έναν πρωτότυπο κατάλογο με τις θέσεις 1.018 απλανών αστέρων, προσδιορισμένες με ασυντίθιστη ακρίβεια.

Νικόλαος Κουζάνος (1401-1464) — Γερμανός κληρικός και φυσικός φιλόσοφος. Ένας από τους πρόδρομους της κοπερνίκειας κοινολογίας και της πειραματικής φυσικής εποιτήμης. Πρότεινε ότι η Γη ίσως περιστρέφεται ως προς τον άξονά της, και ότι παρατηρήσεις στον Ήλιο θα έβλεπαν τη Γη να περιφέρεται γύρω από αυτούς.

Νικόλαος Κοπέρνικος (1473-1543) — Πολωνός αστρονόμος, δημιουργός του ηλιοκεντρικού συστήματος του σύμπαντος. Προκάλεσε επανάσταση στην εποιτήμη απορρίπτοντας το δόγμα της κεντρικής θέσης της Γης, η οποία ήταν αποδεκτή επί αιώνες. Εξήγησε τη φαινομένη κίνηση των ουρανίων σωμάτων μέσω της περιστροφής της Γης ως προς τον άξονά της, και την περιφορά των πλανητών, συμπεριλαμβανομένης της Γης, γύρω από τον Ήλιο.

Τύχο Μπράχε (1546-1601) — Δανός αστρονόμος, μεταρρυθμιστής της πρακτικής αστρονομίας. Για περισσότερα από είκοσι χρόνια διεξήγε αστρονομικές παρατηρήσεις στο Ουράνιμπεργκ, στο μεγάλο αστεροσκοπείο που είχε κατασκευάσει. Οι παρατηρήσεις έγιναν με τη μεγαλύτερη δυνατή για την εποχή του, ακρίβεια. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του, ο Κέπλερ διετύπωσε τους νόμους της κίνησης των πλανητών.

Φραγκίσκος Βάκων (1561-1626) — Αγγλος φιλόσοφος και πολιτικός, πρόδρομος της αγγλικής υλιστικής σχολής της φιλοσοφίας. Διετύπωσε γενικές αρχές περί της πειραματικής έρευνας.

Γαλιλαίος (1564-1642) — Ιταλός εποιήμαν, ιδρυτής της σύγχρονης φυσικής και της τηλεσκοπικής αστρονομίας. Η εποιημονική του δραστηριότητα συνέβαλε καίρια στο θρίαμβο του ηλιοκεντρικού συστήματος του σύμπαντος.

Γιοχάννες Κέπλερ (1571-1630) — Γερμανός εποιήμαν, ένας από τους ιδρυτές της σύγχρονης αστρονομίας. Ανακάλυψε τους νόμους κίνησης των πλανητών, και πάνω σ' αυτή τη θεωρητική βάση συνέταξε τους πλανητικούς πίνακες.

Τζιοβάννι Ντομένικο Κασσινί (1625-1712) — Ιταλός αστρονόμος. Έγινε ο πρώτος διευθυντής του αστεροσκοπείου των Παρισίων το 1671. Ανακάλυψε την περιστροφή του Δία και του Αρη, δύο από τα φεγγάρια του Κρόνου, και μια οκταεική περιοχή ανάμεσα στους δακτυλίους του, η οποία φέρει το όνομά του.

Ολαφ Ραιμερ (1644-1710) — Δανός αστρονόμος. Προσδιόρισε την ταχύτητα του φωτός παρατηρώντας τις εκλείψεις των φεγγαριών του Δία.

Αρισταρχου. Ποιο θα είναι το απότελεσμα αν χρησιμοποιηθούν σημερινά δεδομένα; (Υπόδειξη: ο Αρισταρχος θεώρησε τη γωνία μεταξύ των γραμμών που συνδέουν τη Γη με τη Σελήνη και τη Σελήνη με τον Ήλιο ακριβώς ίση με μια ορθή γωνία).

Τα σχετικά μεγέθη της Γης και του Ήλιου που βρήκε ο Αρισταρχος δεν αμφισβητήθηκαν για περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια. Όχι πριν από τα μέσα του 17ου αιώνα ο Τζιοβάννι Ντομένικο Κασσινί, ιδρυτής του αστεροσκοπείου των Παρισίων, διεξήγαγε ακριβείς μετρήσεις της απόστασης μεταξύ Γης και Ήλιου, «αυξάνοντας» έτσι το μέγεθος του Ήλιου.

Οσον αφορά τη Γη, η περιμετρός της είχε μετρηθεί με ικανοποιητική ακριβεία από τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο πολύ πιο πριν —τον 3ο π.Χ. αιώνα (θυμάστε την «κρησάρα» του Ερατοσθένη, που τη χρησιμοποίησε για να λάβει τους πρώτους αριθμούς;) Ο Ερατοσθένης γνώριζε ότι μία φορά το χρόνο στη Συήνη (το σημερινό Ασσουάν), τα αντικείμενα δεν ρίχνουν σκιά. Ταξίδεψε στη Συήνη και το επιβεβαίωσε. Συνειδητοποίησε λοιπόν ότι κατά τη διάρκεια του θερινού ηλιοστασίου, ο Ήλιος στη Συήνη βρίσκοταν στο ζενίθ. Στην Αλεξάνδρεια, όπου ζούσε ο Ερατοσθένης, ο Ήλιος στο θερινό ηλιοστάσιο υπολειπόταν του ζενίθ κατά το 1/50 της περιμέτρου της Γης. Η απόσταση μεταξύ Αλεξάνδρειας και Συήνης είναι περίπου 5.000 στάδια, και οι δύο πόλεις βρίσκονται ουσιαστικά πάνω στον ίδιο μεσημβρινό. Ήταν ένα απλό πρόβλημα για τον Ερατοσθένη και νομίζω ότι μπορείτε να το λύσετε κι εσείς.

Πρόβλημα 4. Βρείτε την περίμετρο της Γης χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα.

Μια λύση σε στάδια μπορεί να βρεθεί αμέσως: 250.000. Πόση είναι όμως σε χιλιόμετρα; Όσοι θέλουν να κολακέψουν τον Ερατοσθένη, ας διαλέξουν την τιμή των 157 m για το στάδιο. Αυτό συνεπάγεται «αστρονομική» ακριβεία —σφάλμα μικρότερο από 2%— στις μετρήσεις του αρχαίου έλληνα αστρονόμου. Ωστόσο πρέπει να προσεχτούν δύο σημεία. Πρώτον, η Συήνη δεν βρίσκεται ακριβώς πάνω

στον τροπικό του Καρκίνου· δεύτερον, είναι παράξενο ότι ενάμιση αιώνα αργότερα, ο Ποσειδώνιος ο εξ Απαρείας μέτρησε τη διάμετρο της Γης με ακόμη μεγαλύτερο σφάλμα: τη βρήκε 240.000 στάδια —δηλαδή, το σφάλμα τριπλασιάστηκε μέσα σε ενάμιση αιώνα. Η πιθανότερη τιμή για το στάδιο φαίνεται να είναι περίπου 190 m.

Ας επιστρέψουμε στον Αρισταρχο. Πρώτος αυτός πρότεινε την ιδέα του ηλιοκεντρικού συστήματος, αλλά απέτυχε να ανατρέψει τις ενδείξεις υπέρ του ισχύοντος δόγματος. Έτσι, για άλλες δύο χιλιάδες χρόνια η Γη παρέμεινε ακινητοποιημένη στη θέση της. Ωστόσο, καθώς ο χρόνος περνούσε, η ακρίβεια των μετρήσεων αυξανόταν και γινόταν ολονέν δυσκολότερο να συμβιβαστεί η πλανητική κίνηση με το θεωρητικό σχήμα του Πτολεμαίου.

Σε αυτή τη μεγάλη ιστορία που απέληξε στην απόρριψη του γεωκεντρικού συστήματος του σύμπαντος αξίζει να μνημονευτεί η ιδιαίτερη περίπτωση ενός καρδινάλιου της Καθολικής Εκκλησίας, του Νικολάου Κουζάνου. Τα επιχειρήματά του ήταν απολύτως θεολογικά: εφόσον ο παντοδύναμος Κύριος είναι πανταχού παρών, πρέπει να ισαπέχει από κάθε σημείο του σύμπαντος, έτσι ώστε να μπορεί να διεκδικεί το ρόλο του κέντρου του. Δεν πρέπει όμως να σκεφτείτε ότι τα προσόντα αυτού του λογίου είναι δυνατόν να συμπυκνωθούν σε αυτή μόνο την πρόταση.

Ο Ρογήρος Βάκων τον 13ο αιώνα, ο Νικόλαος Κουζάνος τον 15ο αιώνα και ο Φραγκίσκος Βάκων στις αρχές του 17ου αιώνα, έθεσαν τα θεμέλια της σύγχρονης επιστημονικής μεθόδου, η κεντρική ιδέα της οποίας μπορεί να εκφραστεί με τη ρήση: «το πείραμα είναι το κριτήριο της αλήθειας». Ορισμένοι ενδέχεται να ρωτήσουν: αυτό δεν είναι κάπως πενιχρό —μια θέση μέσα σε τέσσερις αιώνες; Όμως πρέπει να θυμηθούμε ότι για περισσότερο από χιλια χρόνια το κριτήριο της αλήθειας ήταν η συμφωνία με την Αγία Γραφή και τον Αριστοτέλη. Πράγματι, ώς τον 17ο αιώνα, ο καθένας μπορούσε να πέσει εύκολα στα νύχια της Ιεράς Εξέτασης απλώς και μόνο επειδή μετρούσε το πλήθος

των ποδιών μιας αράχνης. Ο Αριστοτέλης διαβεβαίωνε ότι η αράχνη έχει έξι πόδια, αλλά αν προσπαθούσατε να τα μετρήσετε ο ίδιος, σίγουρα θα τα βρίσκατε οκτώ (με την προϋπόθεση πως η αράχνη δεν ήταν ανάπηρη) —και η πράξη αυτή αποτελούσε μεγάλη αμαρτία. Αυτός που κατόρθωσε να δώσει τη χαριστική βολή στο γεωκεντρικό σύστημα ήταν ο Νικόλαος Κοπέρνικος.

Στις αρχές του 17ου αιώνα, ο Ολλανδός Χανς Λίππερσεϋ κατασκεύασε ένα τηλεσκόπιο, επιβεβαιώνοντας μια πρόβλεψη που είχε κάμει ο Ρογήρος Βάκων πολύ νωρίτερα, και τα νέα διαδόθηκαν αστραπαία. Δύο χρόνια αργότερα, στις 7 Ιανουαρίου του 1610, ο Γαλιλαίος έστρεψε το δικό του βελτιωμένο μοντέλο προς τον Δία και ανακάλυψε ότι αυτός ο τεράστιος πλανήτης διέθετε τέσσερα φεγγάρια. Σήμερα τα τέσσερα μεγαλύτερα εξακολουθούν να ονομάζονται γαλιλαϊκοί δορυφόροι του Δία. Το 1670, ο Κασσινί είχε βρει μια ρεαλιστική τιμή για την ακτίνα της τροχιάς της Γης. Πέντε χρόνια αργότερα, ο Όλαφ Ραίμερ υλοποίησε το όνειρο του Γαλιλαίου και μέτρησε την ταχύτητα του φωτός, χρησιμοποιώντας τα φεγγάρια του Δία και τους υπολογισμούς του Κασσινί. Ας λύσουμε το ίδιο πρόβλημα, αν και με κάπως διαφορετικό τρόπο.

Πρόβλημα 5. Η περιόδος μεταξύ δύο διαδοχικών εκλείψεων του δορυφόρου του Δία ίώ μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια ενός έτους από την ελάχιστη τιμή των 42 h 28 min 21 sec στη μέγιστη των 42 h 28 min 51 sec. Βρείτε την ταχύτητα του φωτός.

Εφόσον η τροχιά του Δία είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την τροχιά της Γης, και η ταχύτητα του Δία είναι κατά πολύ μικρότερη από την ταχύτητα της Γης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στη διάρκεια ενός έτους οι σχετικές θέσεις αυτών των πλανητών δεν μεταβάλλονται σημαντικά. Οι φαινόμενες μεταβολές στην περίοδο περιστροφής της Ιούς συνδέονται μόνο με τη μεταβολή στη διεύθυνση της ταχύτητας της Γης. Το μέτρο αυτής της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με 29,8 km/sec. ◻

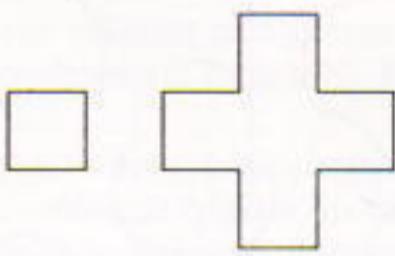
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 70**

Mη-κανονικά κανονικά πολύγωνα

Ένα πρόβλημα αφιερωμένο στο λεξικό Webster

Eric D. Carlson και Sheldon L. Glashow

BΡΗΚΑΤΕ ΠΟΤΕ ΚΑΠΟΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ πρόβλημα σε λεξικό; Εμείς ναι. Σύμφωνα με το *American Heritage Dictionary*, ένα κανονικό πολύγωνο είναι «πολύγωνο που έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες». Αλήθεια; Θεωρήστε τα δύο πολύγωνα του Σχήματος 1. Και στα δύο οι πλευρές έχουν ίδιο μήκος, ενώ οι γωνίες στις κορυφές τους είναι ορθές. Σύμφωνα με το λεξικό, και τα δύο είναι κανονικά πολύγωνα.



Σχήμα 1

Τα πολύγωνα όπως το τετράγωνο, στα οποία είναι ίσες όλες οι εσωτερικές γωνίες, είναι πραγματικά κανονικά, ενώ τα παρόμοια με τον ελβετικό σταυρό, στα οποία κάποιες εσωτερικές γωνίες είναι συμπληρωματικές, θα τα ονομάζουμε μη-κανονικά κανονικά πολύγωνα (ΜΚΠ). Τα κανονικά πολύγωνα δεν παρουσιάζουν εκπλήξεις. Αν εξαιρέσουμε το μέγεθος και τον προσανατολισμό, υπάρχει μόνο ένα τέτοιο πολύγωνο για κάθε $N > 2$. Τα ΜΚΠ που μας αποκάλυψε το λεξικό είναι πολύ πολύ ενδιαφέροντα.

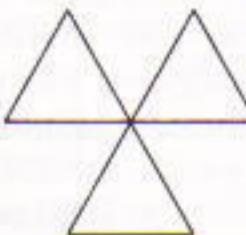
Καταρχάς πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τι είναι και τι δεν είναι ΜΚΠ. Είναι λογικό να απαιτήσουμε να τέ-



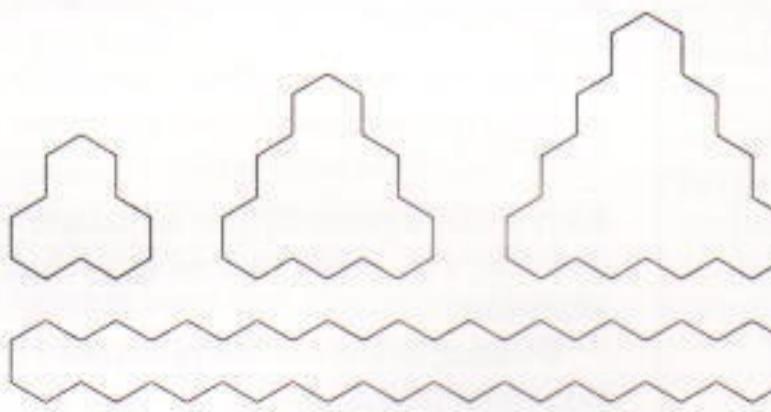
Σχήμα 2

μνονται οι πλευρές τους μόνο στις κορυφές και όλες οι κορυφές τους να είναι διαφορετικές. Έτσι, τα πολύγωνα του Σχήματος 2 αποκλείονται. Το πεντάκτινο άστρο έχει τεμνόμενες πλευρές και το 9-πλευρο σύμβολο της ραδιενέργειας έχει μερικές κορυφές που συμπίπτουν στο κέντρο του. Και πραγματικά, δεν υπάρχει ΜΚΠ με λιγότερες από 10 πλευρές.

Το μικρότερο ΜΚΠ είναι το 10-πλευρο πολύγωνο του Σχήματος 3



Σχήμα 3



Σχήμα 4

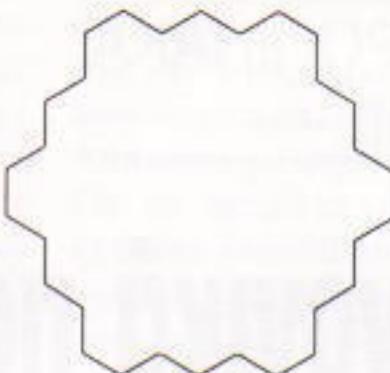
(που είναι μοναδικό). Κατασκευάζεται από ένα κανονικό εξάγωνο στο οποίο προσθέτουμε δύο τεθλασμένα τμήματα —ένα στο πάνω και ένα στο κάτω μέρος του. Αφού έχουμε προσθέσει δύο τεθλασμένα τμήματα και κάθε τμήμα έχει δύο πλευρές, το συνολικό πλήθος των πλευρών είναι $6 + 4 = 10$. Μπορούμε να προσθέσουμε τεθλασμένα τμήματα και να κατασκευάσουμε μεγαλύτερα ΜΚΠ με $6 + 4n$ πλευρές, όπου n είναι οποιοδήποτε πλήθος θετικός ακέραιος. Στο Σχήμα 4 βλέπετε ένα ΜΚΠ με $46 = 6 + 4 \cdot 10$ πλευρές που έχει δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο. Το τέχνασμα αποδίδει επειδή το 2 διαιρεί το 6. Μπορούμε να προσθέσουμε οποιοδήποτε πλήθος ζευγών τεθλασμένων τμημάτων σε ένα συμμετρικό σχήμα χωρίς να καταστρέψουμε το κάλυμμα του εξαγώνου. Φυσικά, και το 3 διαιρεί το 6. Έτσι, μπορούμε αντί για ζεύγη να προσθέσουμε τριάδες τεθλασμένων τμημάτων στο εξάγωνο και να κατασκευάσουμε νέα ΜΚΠ. Στο Σχήμα 4 βλέπουμε και μερικά $(6 + 6n)$ -πλευρα ΜΚΠ (για $n = 1, 2$ και 3).

Μπορούμε να συνδυάσουμε αυτές τις μεθόδους για να κατασκευάσουμε ΜΚΠ με $6 + 4n + 6m$ πλευρές. Στο Σχήμα 5α υπάρχει ένα 30-πλευρο ΜΚΠ που έχει δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο για $n = 3$ και $m = 2$. Και βεβαίως, το 1 και το 6 διαιρούν επίσης

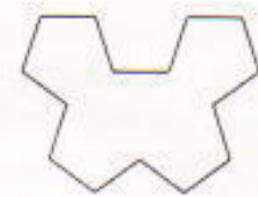


Σχήμα 5

το 6. Η μονάδα δεν είναι χρήσιμος διαιρέτης; δεν μπορείτε να προσθέσετε συμμετρικά ένα μοναδικό τεθλασμένο τμήμα σε ένα εξάγωνο. Μπορείτε όμως να προσθέσετε 6 και να κατασκευάσετε ΜΚΠ με $6 + 12n$ πλευρές. Στο Σχήμα 5β βλέπετε το



σουμε τριάδες τεθλασμένων τμημάτων για να πάρουμε ΜΚΠ με $15 + 6n$ πλευρές. Αφού το 5 διαιρεί το 15, μπορούμε να προσθέσουμε πεντάδες τεθλασμένων



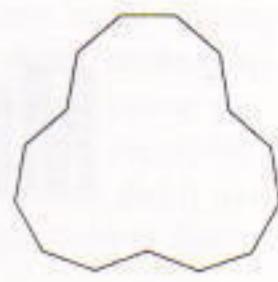
Σχήμα 6

30-πλευρο ΜΚΠ που κατασκευάστηκε με αυτή τη μέθοδο με $n = 2$.

Μέχρι τώρα κατασκευάσαμε όλα τα ΜΚΠ προσθέτοντας πλευρές σε ένα κανονικό εξάγωνο. Έχουμε δει τον τρόπο κατασκευής ΜΚΠ με άριθμο πλήθος πλευρών μεγαλύτερο ή ίσο του 10. Τι ισχύει για τα ΜΚΠ με περιττό πλήθος πλευρών; Η τεχνική που χρησιμοποιήσαμε με το εξάγωνο μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μεγαλύτερο κανονικό πολύγωνο — ας πούμε, με 15 πλευρές. Αφού το 3 διαιρεί το 15, μπορούμε να προσθέ-

τμημάτων για να πάρουμε ΜΚΠ με $15 + 10n$ πλευρές. Στο Σχήμα 6 βλέπετε τα ΜΚΠ 21 και 25 πλευρών που έχουν κατασκευαστεί με 15 + 6 και 15 + 10 πλευρές, αντίστοιχα.

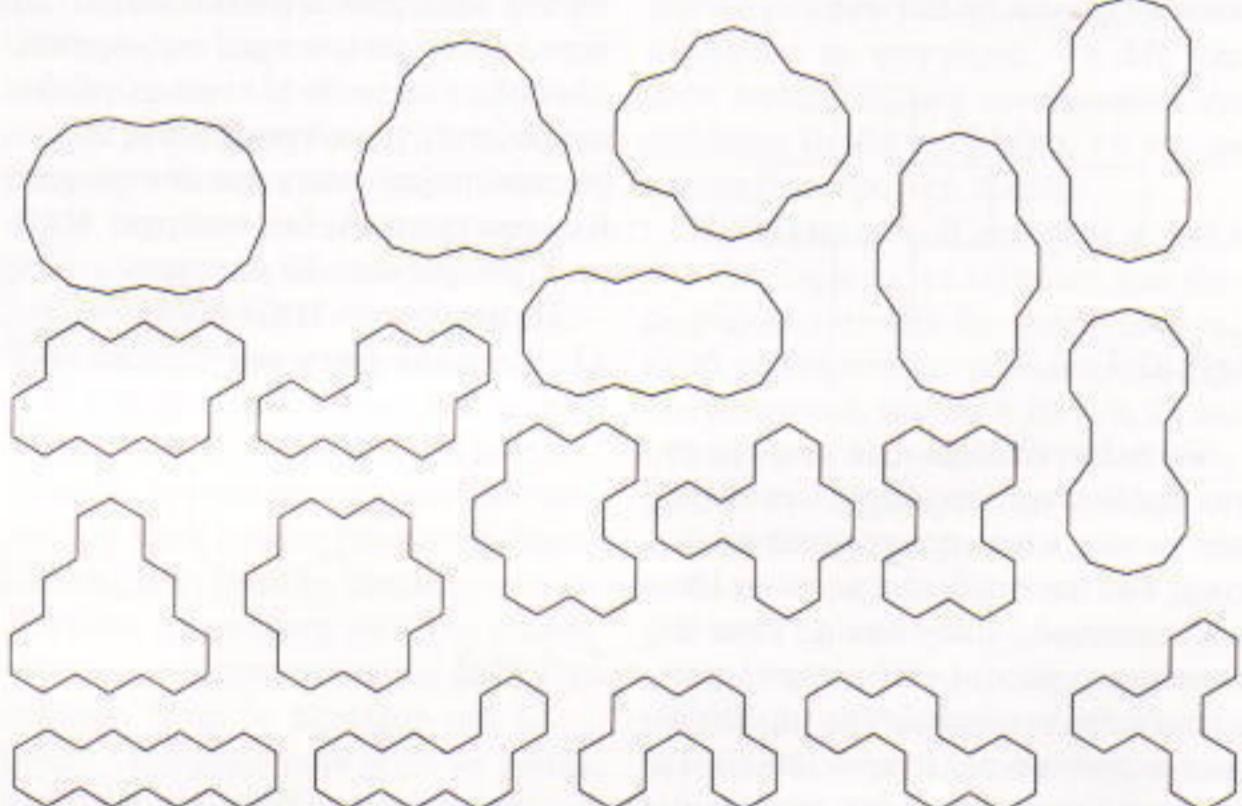
Όπως και με το εξάγωνο, μπορούμε να συνδυάσουμε τις δύο μεθόδους για να κατασκευάσουμε ΜΚΠ με $15 + 6n + 10m$ πλευρές. Στο Σχήμα 7 βλέπετε ένα 31-πλευρο ΜΚΠ που έχει δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο για $n = m = 1$. Είναι το μικρότερο ΜΚΠ που το πλήθος των πλευρών του είναι πρώτος αριθμός. Μπορούμε να έχουμε δύο παρα-



Σχήμα 8

να κατασκευάσουμε ΜΚΠ με $5 + 10n$ πλευρές. Από αυτά τα αρχικά σημεία, με $n = 1$, προκύπτουν δύο διαφορετικά ΜΚΠ με 15 πλευρές. Παρουσιάζονται στο Σχήμα 8 μαζί με το τρίτο 15-πλευρο ΜΚΠ.

Για ποιες τιμές του N υπάρχουν ΜΚΠ; Έχουμε ήδη ασχοληθεί με τις άρτιες τιμές του N . Ξεκινώντας με ένα κανονικό 15-γωνο και επεκτεινόντας το όπως περιγράψαμε, επιτυχάνουμε όλους τους ακέραιους της μορφής $15 + 6n + 10m$. Σε αυτούς περιλαμβάνονται τα 21, 25 και 27, όπως και όλοι οι περιπτοί ακέραιοι οι μεγαλύτεροι του 30. Αφού έχουμε

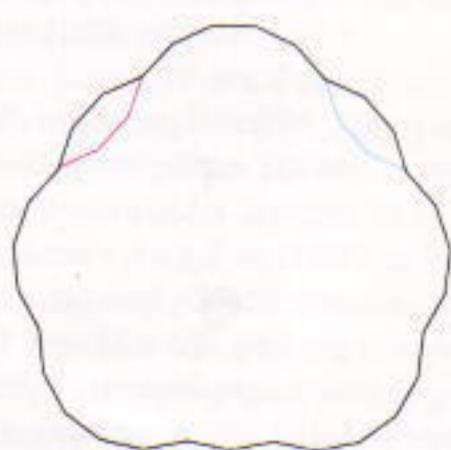


Σχήμα 9

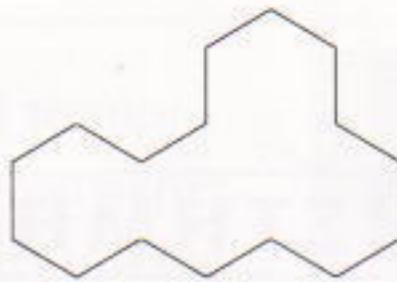
λαγές στη σχεδίασή του αντικαθιστώντας ένα ή δύο από τα έγχρωμα μέρη του.

Φυσικά, δεν είναι υποχρεωτικό να ξεκινήσουμε από ένα 15-πλευρο κανονικό πολύγωνο. Αν αρχίσουμε από ένα κανονικό πεντάγωνο, μπορούμε

ήδη κατασκευάσει τρία διαφορετικά 15-πλευρα ΜΚΠ, απομένουν 15 μόνο τιμές του N χωρίς αντίστοιχα ΜΚΠ: οι πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του 30 και όλοι οι ακέραιοι μικρότεροι από 10. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κανένα τέτοιο ΜΚΠ.



Σχήμα 7



Σχήμα 10

Πόσα ΜΚΠ υπάρχουν για κάθε N ? Η ερώτηση είναι δύσκολη. Το μικρότερο ΜΚΠ με 10 πλευρές είναι μοναδικό. Για $N = 12$, υπάρχουν τρία διαφορετικά ΜΚΠ. Τα δύο από αυτά έχουν ήδη εμφανιστεί στο άρθρο. Μπορείτε να βρείτε το τρίτο; Για τα μεγαλύτερα N το πλήθος των ΜΚΠ αυξάνεται ραγδαία. Πιστεύουμε ότι υπάρχουν 19 διαφορετικά ΜΚΠ με $N = 18$. Απεικονίζονται στο Σχήμα 9. (Τέσσερα από αυτά είναι διαφορετικά από τα ουμμετρικά τους. Αν απαριθμηθούν και αυτά, υπάρχουν είκοσι τρία 18-πλευρα ΜΚΠ.) Αυτή είναι η πρώτη περίπτωση όπου το πλήθος των ΜΚΠ υπερβαίνει το πλήθος των πλευρών.

Τα μικρότερα ΜΚΠ έχουν κάποιο επίπεδο περιστροφικής συμμετρίας. Τα μεγαλύτερα, όπως δύο από τα 18-πλευρα και ένα από τα 31-πλευρα ΜΚΠ, είναι τελείως ασύμμετρα. Το ελάχιστο τελείως ασύμμετρο ΜΚΠ παρουσιάζεται στο Σχήμα 10. Έχει 16 πλευρές.

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα υποθέσαμε ύμεσα ότι τα ΜΚΠ είναι επίπεδα σχήματα. Τι συμβαίνει όταν καταργήσουμε αυτό τον περιορισμό και επιτρέψουμε το σχεδιασμό των σχημάτων στις τρεις διαστάσεις; Η πρόσθετη διάσταση επιτρέπει να κατασκευάσουμε ΜΚΠ με οποιοδήποτε πλήθος πλευρών, με την εξαίρεση των τιμών $N = 1, 2, 3, 4$ και 5 . Βασικά, η ελευθερία που προσφέρει ο επιπλέον χώρος είναι τόσο μεγάλη ώστε για μεγάλο N είναι πολύ εύκολο να κατασκευάσουμε ένα ΜΚΠ. Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει ένα ΜΚΠ με λιγότερες από 4 πλευρές, αλλά η απουσία ενός 5-πλευρου ΜΚΠ είναι αξιοπρόσεκτη.

Θα αντιμετωπίσουμε μια δυσκολότερη και πολύ ενδιαφέρουσα σπαζοκεφαλιά αν απαιτήσουμε την ικανοποίηση ενός αυστηρότερου κριτήριου από τα τριοδιάστατα ΜΚΠ. Ας υποθέ-

σουμε ότι εκτός από τις γωνίες μεταξύ των διαδοχικών πλευρών είναι ίσες και οι γωνίες μεταξύ των επόμενων - μετά - τις - διαδοχικές πλευρών. Τι εννοούμε με τη γωνία μεταξύ των «επόμενων - μετά - τις - διαδοχικές» πλευρών; Η γωνία θ μεταξύ δύο διανυσμάτων **a** και **b** δίνεται από τη σχέση

$$\sin \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Οιαν τα συνημίτονα των γωνιών μεταξύ των «επόμενων - μετά - τις - διαδοχικές» πλευρών είναι ίσα, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν ΜΚΠ για κάθε άρτιο N εκτός από το 2. Δεν γνωρίζουμε καθόλου αν υπάρχουν για οποιαδήποτε περιπτή τιμή του N . Αν απαιτήσουμε επιπλέον να είναι ίσες και οι γωνίες μεταξύ των «επόμενων - μετά - τις - επόμενες - μετά - τις - διαδοχικές» πλευρές, τότε εξακολουθούν να υπάρχουν όλα τα άρτια ΜΚΠ, ενώ δεν υπάρχει κανένα περιττό ΜΚΠ.

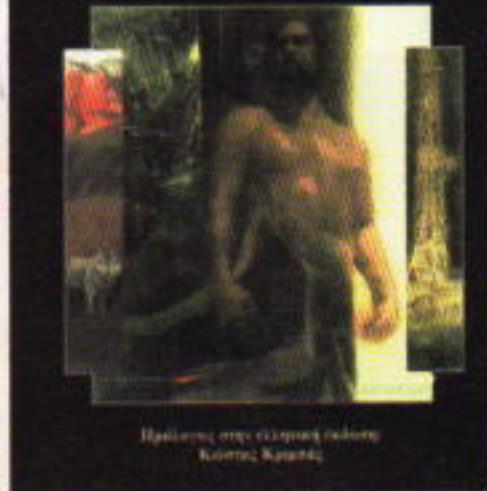
Υπάρχει για σας πλήθος άλιτα προβλήματα σχετικά με τα ΜΚΠ. Σε ό,τι αφορά τα επίπεδα ΜΚΠ, πώς αυξάνεται το πλήθος των διαφορετικών ειδών για τα μεγάλα N ; Μπορείτε να αποδείξετε ότι το 31 είναι η μεγαλύτερη τιμή του N για την οποία το πλήθος των διαφορετικών ΜΚΠ είναι μικρότερο του N ? Υπάρχει συστηματική μέθοδος για την ανακάλυψη όλων των ΜΚΠ? Στις τρεις διαστάσεις, όταν οι γωνίες μεταξύ των «επόμενων - μετά - τις - διαδοχικές» πλευρών είναι ίσες, υπάρχουν περιττά ΜΚΠ; Αξίζει επίσης να μελετηθούν τα μηκανονικά κανονικά πολύγωνα σε χώρους περισσότερων διαστάσεων, αλλά το μόνο που έχουμε επιτύχει μέχρι στιγμής είναι η ανακάλυψη ενός 5-πλευρου ΜΚΠ στις τέσσερις διαστάσεις. ◻

O Eric D. Carlson είναι αναπληρωτής καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ, ειδικευμένος στη θεωρία σωματιδίων και στη οωματιδιακή αστροφυσική. **O Sheldon L. Glashow** είναι καθηγητής φυσικής στην έδρα Higgins στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ, ιδρυτικό μέλος της σύνταξης του Quantum, και έχει τιμηθεί με το βραβείο Νόμπελ φυσικής.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ

Richard Dawkins

Ο ΤΥΦΛΟΣ ΟΡΟΛΟΓΟΠΟΙΟΣ



Richard Dawkins

Ο ΤΥΦΛΟΣ ΟΡΟΛΟΓΟΠΟΙΟΣ

• «Ένα θαυμάσιο βιβλίο... Εξηγεί όλες τις όψεις της εξέλιξης με διαύγεια, και απαντά σε κάθε επιχείρημα των οπισθοδρομικών οπαδών του δημιουργισμού.»

Isaac Asimov

• «Ισως το περισσότερο ενδιαφέρον βιβλίο για την εξέλιξη από την εποχή του Δαρβίνου.»

John Gribbin

• «Μια διαυγής και πλήρης επιχειρημάτων παρουσίαση της νεοδαρβινικής θεωρίας της εξέλιξης...»

The Times Education Supplement

Το πιο πρόσφατο βιβλίο του Dawkins. Γράφτηκε έντεκα χρόνια μετά το Εγωιστικό γονίδιο, και έχει τιμηθεί με το βραβείο Faraday της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου (1990). Έχει γυριστεί σε τηλεοπτικό φιλμ από το BBC, και κέρδισε το βραβείο καλύτερης επιστημονικής ταινίας (1987). Έχει μεταφραστεί σε είκοσι πέντε γλώσσες, και είναι παγκόσμιο μπεστ-σέλερ.

Σελ.: 514, 6.500 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Εκδόσεις ΣΤΑΧΥ • ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

ΕΥΤΥΧΗΣ ΜΠΙΤΣΑΚΗΣ

Το Αειθαλές Δέντρο Της Γνώσεως



ΕΠΙΣΤΗΜΗ 1

Ευτύχης Μπιτζάκης

Το Αειθαλές Δέντρο Της Γνώσεως

Υπό έκδοση στην ίδια σειρά

- **B. Γκέκας:** Κοσμική τάξη και χάος
- **M. Blanc:** Οι κληρονόμοι του Δαρβίνου
- **P. Lévêque:** Ζώα, Θεοί και Άνθρωποι

Ποια θα ήταν σήμερα η νομιμότητα μιας θεωρίας της Γνώσης και μιας θεωρίας του Είναι, οι οποίες θα προέκυπταν από τη φιλοσοφική καταξίωση, δηλαδή τη γενίκευση και την υπέρβαση των δεδομένων των επιστημών; Μια τέτοια απόπειρα δε θα σήμαινε επιστροφή στην «προκριτική φιλοσοφία» και αναβίωση της Μεταφυσικής;

Εναντίον των κυρίαρχων σημερινών ρευμάτων και σε αρμονία με τη μεγάλη παράδοση της Φιλοσοφίας, το βιβλίο επιχειρεί να θεμελιώσει τη νομιμότητα μιας ιστορικά καθορισμένης κοσμοθεωρίας, η οποία θα προκύπτει από την κριτική ανάλυση και την καταξίωση των δεδομένων των επιστημών. Για το σκοπό αυτό επιχειρεί πρώτα να αναδείξει συγκεκριμένα, στο επίπεδο των εννοιών και των κατηγοριών, την ενότητα (η οποία συνυπάρχει με την καταστατική διαφορά) των επιστημών με τη φιλοσοφία. Στη συνέχεια επιχειρεί να θεμελιώσει τη νομιμότητα ενός σύγχρονου επιστημονικού ρεαλισμού. Ακολουθεί μια απόπειρα κριτικής ανασκευής του σύγχρονου φυσικού ιδεαλισμού.

Το υπόλοιπο βιβλίο συνιστά μια απόπειρα νομιμοποίησης και σκιαγραφίας των κύριων χαρακτηριστικών μιας σύγχρονης θεωρίας του Είναι, υλιστικής και διαλεκτικής. Ειδικά επιχειρείται να θεμελιώθει η νομιμότητα της Διαλεκτικής της Φύσης και να διατυπωθούν οι βασικές θέσεις για ένα σύγχρονο ορθολογισμό.

Εκδόσεις
ΣΤΑΧΥ

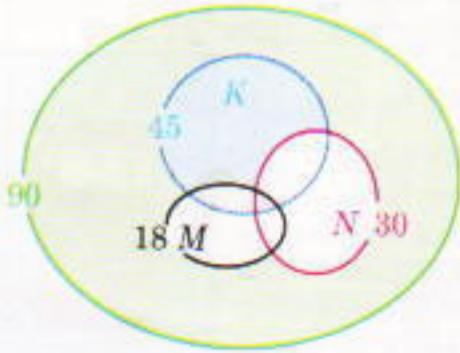
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M41

Η απάντηση και στις δύο ερωτήσεις είναι 24.

Έστω K, N, M τα σύνολα των ημέρων «κολύμβησης», «νοικοκυριού» και «μαθηματικών», και έστω κ, ν, μ τα συμπληρώματα αυτών των συνόλων (κ είναι το σύνολο των ημερών που η Μαίρη δεν πηγαίνει για κολύμπι, κ.ο.κ.). Συμβολίζοντας την τομή των συνόλων A και B ως AB (παλαιόντας χάριν συντομίας το σύμβολο \cap), μπορούμε να γράψουμε τα σύνολα που θέλουμε να απαριθμήσουμε ως $E = K\mu N\nu$ (ευχάριστες ημέρες) και $B = \kappa\nu\mu$ (βαρετές ημέρες). Στο Σχήμα 1 το σύνολο E είναι χρωματισμένο μπλε και το B πράσινο. Ο μπλε, ο κόκκινος και ο μαύρος κύκλος απεικονίζουν, αντίστοιχα, τα σύνολα K, N και M , και ολόκληρος ο μεγάλος κύκλος είναι το σύνολο των 90 ημερών. Από το οχήμα καταλαβαίνουμε ότι το πλήθος των στοιχείων που αντίστοιχουν σε καθεμία από τις οκτώ περιοχές που ορίζονται από αυτούς του κύκλους μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του πλήθους των στοιχείων των συνόλων K, N και M , των τομών τους ανά δύο και της τριπλής τομής τους. Για παράδειγμα, για να βρούμε το $|E| = |K\mu N\nu|$ (όπου με $|X|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου X), πρέπει να αφαιρέσουμε από το $|K|$ το πλήθος των ημερών που η Μαίρη σχεδιάζει να κολυμπήσει και να κάνει και κάτι



Σχήμα 1

επιπλέον. Επομένως, θα αφαιρέσουμε τα $|KN|$ και $|KM|$. Τότε όμως αφαιρούμε το $|KNM|$ δύο φορές, και πρέπει να το προσθέσουμε ξανά:

$$|E| = |K| - |KN| - |KM| + |KNM|. \quad (1)$$

(Στην πραγματικότητα, αυτό αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος εγκλεισμού-αποκλεισμού που εξετάσαμε στο άρθρο «Το σχολικό λεωφορείο και οι λακκούβες» στο τεύχος Μαρτίου / Απριλίου 1995.)

Αριθμούμε όλες τις ημέρες 1, 2, 3, ..., 90. Τότε οι ημέρες του K είναι οι 1, 3, ..., $1 + 2k$, ..., 89. Το $N = \{1, 4, 7, \dots, 1 + 3k, \dots, 88\}$ και $M = \{1, 6, \dots, 1 + 5k, \dots, 86\}$. Τα σύνολα αυτά είναι δυνατόν να περιγραφούν ως τα σύνολα των αριθμών που δίνουν υπόλοιπο 1 διαιρούμενο με 2, 3 και 5 αντίστοιχα. Αφού το 90 διαιρείται απ' όλους αυτούς τους αριθμούς, έχουμε

$$|K| = 90/2 = 45,$$

$$|N| = 90/3 = 30,$$

$$|M| = 90/5 = 18.$$

Όλες οι τομές περιγράφονται παρόμοια: καθεμία αποτελείται από τους αριθμούς $1 + Nk$, $k = 0, 1, \dots, [89/N]$, όπου N είναι είτε $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 5 = 15$, $2 \cdot 5 = 10$, ή $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ για τις τομές KN, NM, MK, KNM , αντίστοιχα (αφού οι 2, 3, και 5 είναι πρώτοι μεταξύ τους). Όπως και πριν, έχουμε

$$|KN| = 90/6 = 15,$$

$$|NM| = 6,$$

$$|MK| = 9,$$

$$|KNM| = 3.$$

Επομένως, βάσει του τύπου (1),

$$|E| = 45 - 15 - 9 + 3 = 24.$$

Το $|B|$ μπορεί να βρεθεί με άμεση εφαρμογή του θεωρήματος εγκλεισμού-αποκλεισμού για την τριπλή ένωση $K \cup N \cup M$ (χρησιμοποιώντας

τον τύπο $|κυμ| = 90 - |K \cup N \cup M|$). Μπορούμε όμως να γλιτώσουμε κάποια δουλειά παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} |K \cup N \cup M| &= |K|(N \cup M)| + |N \cup M| \\ &= |K\mu| + |N| + |M| - |NM| \\ &= 24 + 30 + 18 - 6 = 66, \end{aligned}$$

οπότε $|B| = 90 - 66 = 24$.

(L. Limanov, V. Dubrovsky)

M42

Επειδή το άθροισμα $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$ ισούται με 0, αποτελείται από ίσο πλήθος θετικών και αρνητικών μονάδων· άρα το πλήθος n των όρων του είναι άρτιο. Το γινόμενο αυτών των όρων ισούται με

$$(x_1x_2)(x_2x_3) \dots (x_{n-1}x_n)(x_nx_1) = (x_1x_2 \dots x_n)^2 > 0.$$

Επομένως, το πλήθος των αρνητικών όρων (που ισούται με $n/2$) είναι επιστρητικός άρτιος. Άρα, το n διαιρείται με το 4.

M43

Θα αποδείξουμε με τέλεια επαγωγή μια ελαφρώς τροποποιημένη πρόταση που είναι φανερά ισοδύναμη με την πρόταση του προβλήματος: κάθε μη αρνητικός ακέραιος $a < (p+1)!$ μπορεί να παρασταθεί μονοσήμαντα ως

$$a = a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + \dots + a_1 \cdot 1!,$$

όπου $0 \leq a_k \leq k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ (εδώ επιτρέπουμε να είναι το a_n μηδέν αλλά κρατάμε το n σταθερό).

Η περίπτωση $n = 1$ είναι προφανής. Ας αποδείξουμε την πρόταση για $a < (p+1)!$ υποθέτοντας ότι είναι αληθής για όλους τους αριθμούς τους μικρότερους από $n!$. Αν διαιρέσουμε το a με το $n!$ παίρνουμε $a = a_n \cdot n! + r_n$, όπου $0 \leq a_n \leq n$ (διότι $(n+1)n! = (n+1)!$ > a) και $0 \leq r_n < n!$. Βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, $r_n = a_{n-1} \cdot (n-1)! + \dots + a_1 \cdot 1!$ με $0 \leq a_k \leq k$, επομένως ο αριθμός a μπορεί να παρασταθεί με τον ζητούμενο τρόπο. Για να αποδείξουμε το μονοσήμαντο, παρατηρούμε ότι το

πλήθος των ακολουθιών $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ των συντελεστών στις παραστάσεις μας είναι $(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 1 = (n+1)!$. Καθένα από αυτά τα σύνολα έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να αντιστοιχεί σε έναν από τους $(n+1)!$ μη αρνητικούς ακέραιους που είναι μικρότεροι του $(n+1)!$. Αυτή η αντιστοιχία λειτουργεί αμφίδρομα, αφού ο τύπος (1) δημιουργεί έναν αριθμό από κάθε δεδομένο σύνολο $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$. Επομένως κάθε σύνολο αντιστοιχεί σε έναν ακέραιο και η αντιστοιχία είναι ένα προς ένα.

Χρησιμοποιώντας την ορολογία του άρθρου «Συστήματα αριθμητικής» αυτού του τεύχους, μπορούμε να πούμε ότι ο τύπος (1) μάς δίνει την αναπαράσταση ενός αριθμού a με βάση το «παραγοντικό» σύστημα αριθμητικής (με ακολουθία βάσης $1, 2!, 3!, 4!, \dots$). Μπορούμε να γενικεύσουμε σε κάθε ακολουθία βάσης της μορφής $q_1 = 1, q_2 = d_2 q_1, q_3 = d_3 q_2, \dots, q_n = d_n q_{n-1}$, όπου $d_k > 1, k = 2, \dots, n$. Δηλαδή, κάθε μη αρνητικός ακέραιος a , $a < q_n$, παριστάνεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$a = a_{n-1} q_{n-1} + a_{n-2} q_{n-2} + \dots + a_2 q_2 + a_1, \quad (2)$$

όπου $0 \leq a_k < d_{k+1}, k = 1, \dots, n-1$. Η απόδειξη είναι η ίδια με την προηγούμενη με μια μικρή αλλαγή — αντικαθιστούμε το $k!$ με το q_k και το k με το d_k . (Δείτε επίσης την άσκηση 12 στο «Συστήματα αριθμητικής» και τη λύση της.)

(β) Όπως και στο μέρος (α), αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε κλάσμα $b = p/q, 0 \leq b < 1$, ο παρονομαστής p του οποίου είναι διαιρέτης του $n!$, έχει τη μονοσήμαντη παράσταση

$$b = \frac{b_2}{2!} + \frac{b_3}{3!} + \dots + \frac{b_n}{n!},$$

όπου $0 \leq b_k < k, 2 \leq k \leq n$ (επιτρέπουμε την περίπτωση $b_0 = 0$).

Πολλαπλασιάζουμε αυτή την ισότητα με $n!$. Παίρνει τη μορφή

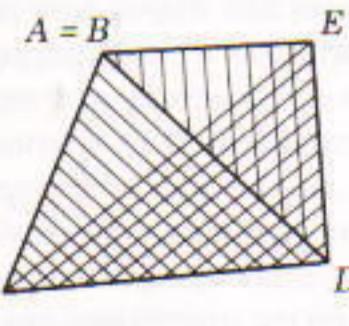
$$a = pn!/q = b_2 q_{n-1} + b_3 q_{n-2} + \dots + b_{n-1} q_2 + b_n q_1,$$

όπου το a είναι ακέραιος μικρότερος του $n!$ και $q_1 = 1, q_2 = d_2 q_1 = n, q_3 = d_3 q_2 = (n-1)n, \dots, q_{n-1} = d_{n-1} q_{n-2} = 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1)n$, (δηλαδή, $d_k = n - k + 2$ για $k = 2, \dots, n-1$). Αντικαθιστώντας τους

συντελεστές b_2, b_3, \dots, b_n σε αυτό τον τύπο με τα $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$, αντίστοιχα, καταλήγουμε στην αναπαράσταση (2), την οποία εξετάσαμε στο τέλος της προηγούμενης λύσης, που υπάρχει και είναι μοναδική για $0 \leq a_k < d_{k+1} = n - k + 1$, που είναι ισοδύναμο με $0 \leq b_{n-k+1} < n - k + 1 (k = 1, 2, \dots, n-1)$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. (V. Dubrovsky)

M44

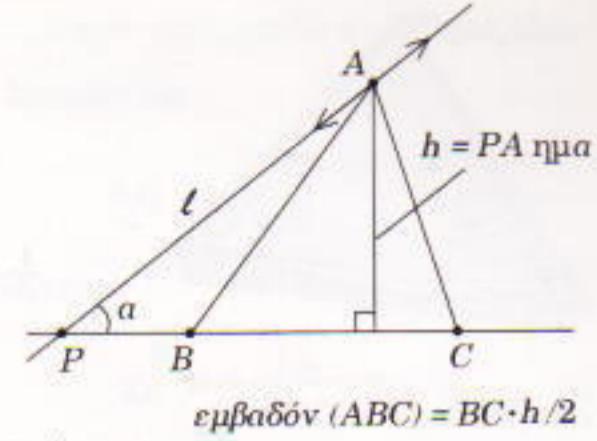
Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση ενός εκφυλισμένου πενταγώνου οι δύο κορυφές του οποίου συμπίπτουν. Σε αυτή την περίπτωση η πρόταση είναι προφανής — δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2

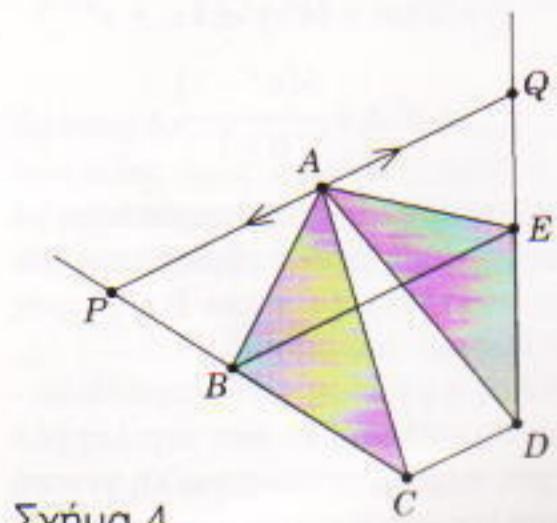
Η αναγωγή βασίζεται σε ένα από αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο γεγονός που μπορεί να διατυπωθεί με συντομία (αν και όχι απολύτως ορθά) ως εξής: το εμβαδόν ενός τριγώνου αλλάζει γραμμικά όταν μία από τις κορυφές του μετακινείται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής ενώ οι άλλες δύο παραμένουν σταθερές. Για να δώσουμε μια αυστηρότερη διατύπωση, θα δημιουργήσουμε συντεταγμένες για τη δεδομένη ευθεία ℓ επιλέγοντας αυθαίρετα την αρχή και τη θετική κατεύθυνση. Τότε το εμβαδόν ενός τριγώνου ABC η κορυφή A του οποίου ανήκει στην ευθεία ℓ είναι γραμμική συνάρτηση της συντεταγμένης x_A όσο η A παραμένει από την ίδια μεριά της σταθερής βάσης BC .

Πραγματικά, αν η ℓ είναι παράλληλη της BC , το εμβαδόν παραμένει σταθερό. Αν η ℓ τέμνει την προέκταση της BC στο P (Σχήμα 3), τότε το εμβαδόν του τριγώνου ABC ισούται με $BC \cdot (PA \text{ ήμ} \angle BPA)/2$, που είναι σταθερό πολλαπλάσιο του PA , και $PA = x_A - x_p$ στη μία μεριά της BC και $x_p - x_A$ στην άλλη. Επομένως, το εμβαδόν εξαρτάται γραμμικά από το x_A (σε κάθε μεριά της BC).

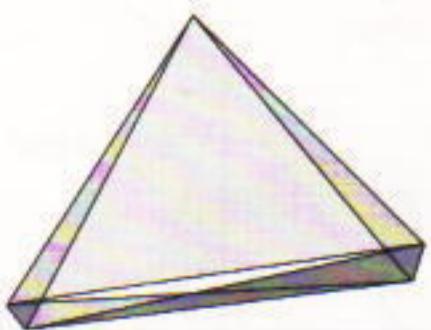


Σχήμα 3

Ας σχεδιάσουμε τώρα μια ευθεία ℓ παράλληλη προς τη BE που διέρχεται από την κορυφή A του δεδομένου πενταγώνου $ABCDE$ (Σχήμα 4). Έστω P και Q τα σημεία όπου η ℓ τέμνει τις προέκτασης των CB και DE . Όταν η A κινείται κατά μήκος του τμήματος PQ , το εμβαδόν του τριγώνου ABE — και επομένως και του πενταγώνου — παραμένει σταθερό. Τα εμβαδά των τριγώνων ABC και ADE μεταβάλλονται γραμμικά, ενώ τα τρίγωνα BCD και CDE δεν επηρεάζονται. Επομένως, το συνολικό εμβαδόν αυτών των πέντε τριγώνων μεταβάλλεται γραμμικά (ως άθροισμα γραμμικών συναρτήσεων). Άρα, αυτό το εμβαδόν κατά την κίνηση του A στο PQ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του σε ένα από τα άκρα του τμήματος — ας πούμε στο P . Έτσι, αν αντικαθιστήσουμε το A με το P παίρνουμε ένα κυρτό «πεντάγωνο» $PBCDE$ που έχει το ίδιο εμβαδόν με το $ABCDE$, το συνολικό όμως εμβαδόν των πέντε τριγώνων που ορίζουν οι διαγώνιοι του είναι μικρότερο. (Σε αυτό το «πεντάγωνο», το τρίγωνο ABC εκφυλίζεται στο τμήμα PC .) Επειτα, εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα για την κορυφή B του νέου πενταγώνου. Έτσι προκύπτει ένα πεντάγωνο το οποίο στην πραγματικότητα συμπίνεται με το προηγούμενο.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

πτει με το τετράπλευρο $PCDE$, όπου έχουμε μετρήσει μία από τις κορυφές P ή C δύο φορές. Όπως αναφέραμε στην αρχή της λύσης, η πρώτη που θέλουμε να αποδείξουμε αληθεύει γι' αυτό το πεντάγωνο. Έπειται ότι ισχύει και για το αρχικό πεντάγωνο (αφού αυτό έχει το ίδιο εμβαδόν ενώ το άθροισμα των εμβαδών των πέντε τριγώνων είναι μεγαλύτερο).

Είναι προφανές ότι το συνολικό εμβαδόν S των πέντε τριγώνων μας δεν είναι ποτέ μεγαλύτερο από το διπλάσιο του εμβαδού του πενταγώνου (δείτε το σχήμα που συνοδεύει την εκφώνηση του προβλήματος). Στο Σχήμα 5 βλέπουμε ότι και τα δύο φράγματα στην εκτίμηση $a < S < 2a$ είναι ακριβή.

(N. Vasiliev, V. Dubrovsky)

M45

(a) Η απάντηση είναι $f(x) = 2^{1/n}x + 2^{1/n} - 1$. Είναι φυσικό να αναζητήσουμε μια λύση με τη μορφή γραμμικής συνάρτησης $f(x) = ax + b$. Η δεύτερη επανάληψη αυτής της συνάρτησης είναι η

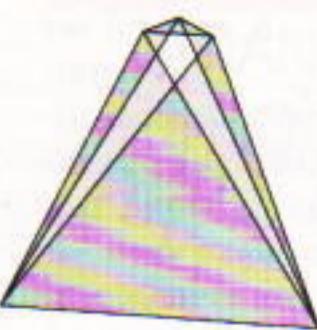
$$f^{(2)}(x) = f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + b + ab.$$

Μπορούμε να βρούμε (και να αποδειξουμε με επαγωγή) ότι η n -οστή επανάληψη $f^{(n)}$ εκφράζεται από:

$$f^{(n)}(x) = a^n(x) + b(1 + a + \dots + a^{n-1}) = a^n x + \frac{b(a^n - 1)}{a - 1}.$$

Εξισώνοντας αυτή την παράσταση με τη συνάρτηση $2x + 1$, βρίσκουμε για τους συντελεστές a και b τις τιμές που δώσαμε παραπάνω.

Αυτή η μέθοδος των «απροσδιόριστων συντελεστών» που περιλαμβάνει μια τυχερή εικασία για τη γενική μορφή της συνάρτησης και την εύρε-

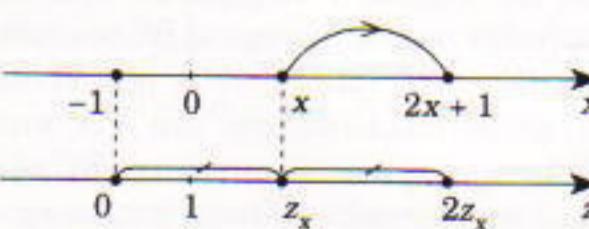


ση ειδικών συντελεστών μπορεί να εφαρμοστεί και στα μέρη (β) και (γ) της άσκησης. Υπάρχει, όμως, και μια άλλη, περισσότερο άμεση προσέγγιση που μας επιτρέπει να γράψουμε κατευθείαν την άγνωστη n -οστή «επανάληπτική ρίζα». Θα την παρουσιάσουμε πρώτα με τη βοήθεια του απλούστερου προβλήματος του μέρους (a).

Η δεδομένη συνάρτηση $y = g(x) = 2x + 1$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια απεικόνιση του άξονα των αριθμών στον εαυτό του η οποία μεταφέρει το x στο $2x + 1$. Αφού αυτή η απεικόνιση διπλασιάζει όλες τις αποστάσεις ($|g(x') - g(x)| = 2|x' - x|$), πρέπει να είναι μια ομοιοθεσία με λόγο 2 και ένα κέντρο που μπορεί να βρεθεί ως το σταθερό της σημείο από την εξίσωση $2x + 1 = x$ (απ' όπου προκύπτει $x = -1$). Πράγματι, ας μετατοπίσουμε την αρχή του άξονα στο κέντρο $x = -1$ (Σχήμα 6). Τότε η νέα συντεταγμένη z_x (ως προς τη νέα αρχή) οποιουδήποτε σημείου x ισούται με $x + 1$, ενώ για την εικόνα $y = 2x + 1$ του σημείου x μέσω της απεικόνισής μας έχουμε

$$z_y = y + 1 = 2(x + 1) = 2z_x.$$

Επομένως, στο νέο σύστημα συντεταγμένων, η απεικόνισή μας είναι στην πραγματικότητα ομοιοθεσία με λόγο 2 και κέντρο την αρχή του άξονα: $z \rightarrow 2z$. Η « n -οστή ρίζα» μιας ομοιοθεσίας με λόγο $k > 0$, είναι η ομοιοθεσία με λόγο $k^{1/n}$ ως προς το ίδιο κέντρο. Στην περίπτωσή μας, παίρνουμε την απεικόνιση $z \rightarrow 2^{1/n}z$ (ως προς τις νέες συντεταγμένες). Επιστρέφοντας στις αρχικές συντεταγμένες λαμβάνουμε $x + 1 \rightarrow 2^{1/n}(x + 1) = y + 1$, ή $y = f(x) = 2^{1/n}x + 2^{1/n} - 1$.



Σχήμα 6

Αυτή η δεύτερη λύση μπορεί να μοιάζει υπερβολικά εξεζητημένη για ένα τόσο απλό πρόβλημα, αλλά χωρίς όλες τις υποδείξεις και τις εξηγήσεις είναι συντομότερη από την πρώτη, επιδεικνύει τον πυρήνα του προβλήματος (την εξαγωγή της « n -οστής ρίζας» μιας ομοιοθεσίας), και μας επιτρέπει να λύσουμε τα μέρη (β) και (γ) σε λίγες γραμμές.

(β) Η δεδομένη συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως $y = (1 + \sqrt{x})^2$ ή $\sqrt{y} = \sqrt{x} + 1$. Επομένως, αν εισαγάγουμε μια νέα «συντεταγμένη» —ή καλύτερα, νέα «παράμετρο»— στο θετικό ημιάξονα μέσω του τύπου $z_x = \sqrt{x}$, μπορούμε να γράψουμε την απεικόνιση του ημιάξονα που ορίζει η συνάρτηση μας με απλή μορφή: $z \rightarrow z + 1$ (βάσει της νέας παραμέτρου) —το σημείο με παράμετρο z μεταφέρεται στο σημείο με παράμετρο $z + 1$. Φτιάχνουμε την απεικόνιση σε n ταυτόσημα βήματα: σε κάθε βήμα μπορούμε απλώς να αυξάνουμε την παράμετρο κατά $1/n$: $z \rightarrow z + 1/n$. Στις αρχικές συντεταγμένες η ζητούμενη συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζεται ως $\sqrt{y} = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x} + 1/n$, ή $f(x) = (\sqrt{x} + 1/n)^2$.

(γ) Εδώ έχουμε $y = x/(x + 1) = [(x + 1)/x]^{-1} = (1 + x^{-1})^{-1}$, ή $y^{-1} = 1 + x^{-1}$. Μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη λύση αντικαθιστώντας το \sqrt{x} με το x^{-1} . Άρα δεν χρειάζεται να κάνουμε υπολογισμούς για να γράψουμε την απάντηση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{nx}{x + n}.$$

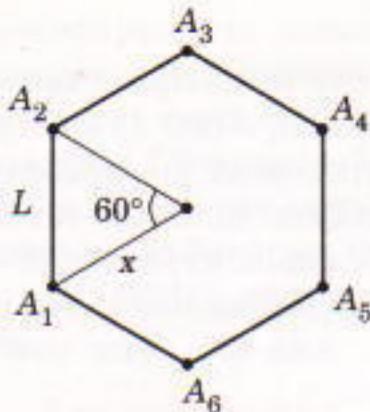
(V. Dubrovsky)

ΦΥΣΙΚΗ

Φ41

Το πιο εύκολο μέρος του προβλήματος είναι να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα t που χρειάζεται η αλεπού για να πάσει το λαγό. Αρκεί να προβάλουμε τις ταχύτητες στην ευθεία που συνδέει τα δύο ζώα. Η σχετική ταχύτητα της αλεπούς ως προς το λαγό κατά μήκος αυτής της γραμμής είναι

$$v_{\alpha x} = v(1 - \text{συνφ}),$$



Σχήμα 7

οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι

$$t = \frac{L}{u_{ox}} = \frac{L}{u(1 - \sin\varphi)}.$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και για τις τρεις περιπτώσεις ($\varphi = 60^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, $\varphi = 40^\circ$).

Για να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου όπου η αλεπού συλλαμβάνει το λαγό από την αρχική θέση της αλεπούς, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα κανονικό εξάγωνο με μήκος πλευράς L (Σχήμα 7). Υποθέστε ότι το σημείο A_1 κινείται προς το σημείο A_2 (όπως η αλεπού κινείται προς το λαγό), ότι το A_2 κινείται προς το A_3 , κ.ο.κ. Προφανώς το εν λόγω εξάγωνο θα περιστρέφεται και θα συρρικνώνεται, οπότε το σημείο στο οποίο θα συναντηθούν τα ζώα θα συμπίπτει με το κέντρο του. Στην περίπτωση $\varphi = 90^\circ$, αντί του εξαγώνου πρέπει να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο, ενώ στην περίπτωση $\varphi = 40^\circ$ ένα κανονικό εννεάγωνο. Σε όλες τις περιπτώσεις η ζητούμενη απόσταση x θα δίνεται από τον τύπο

$$x = \frac{L}{2\eta u \frac{\varphi}{2}}.$$

Φ42

Θεωρούμε ένα δισορθογώνιο σύστημα αξόνων xy με αρχή το σημείο A , όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Μπορούμε να γράψουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (στους άξονες x και y) για τις μάζες C και B :

$$m y_{Cx} = mg - 2T_2 \text{συνα}, \quad (1)$$

$$m y_{Bx} = mg - T_1 \text{συνα} + T_2 \text{συνα}, \quad (2)$$

$$m y_{By} = F_{el} - T_1 \eta u - T_2 \eta u, \quad (3)$$

όπου $F_{el} = k(2\ell - 2\ell \eta u) = k \cdot 2\ell(1 - \eta u)$ είναι η δύναμη του ελατηρίου. Από τις παραπάνω εξισώσεις εύκολα

προκύπτει

$$\begin{aligned} m y_{Cx} + m y_{Bx} - m y_{By} &= \frac{\sigma u n a}{\eta u} \\ &= 2mg - F_{el} \frac{\sigma u n a}{\eta u}. \end{aligned} \quad (4)$$

(Αυτή η εξισώση ισχύει για κάθε τιμή της γωνίας a). Ας επεξεργαστούμε λίγο το αριστερό μέλος της (4). Προσέξτε ότι οι μεταβολές Δx_B και Δx_C των συντεταγμένων των B και C συνδέονται με τη σχέση

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} \Delta x_C$$

(με άλλα λόγια, αυτή η εξισώση εκφράζει τη σχέση μεταξύ των μετατοπίσεων των μαζών B και C από τη θέση ισορροπίας). Οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των μαζών B και C συνδέονται με ανάλογες σχέσεις. Έτσι,

$$y_{Bx} = \frac{1}{2} y_{Cx}.$$

Αν οι απομάκρυνσεις από τη θέση ισορροπίας είναι μικρές (δηλαδή αν $\Delta a \ll a_0 = 45^\circ$), οι μεταβολές των συντεταγμένων των μαζών μπορούν να βρεθούν είτε μέσω απειροστικού λογισμού είτε με τη χρήση κάποιων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Για παράδειγμα,

$$y_B = \ell \eta u$$

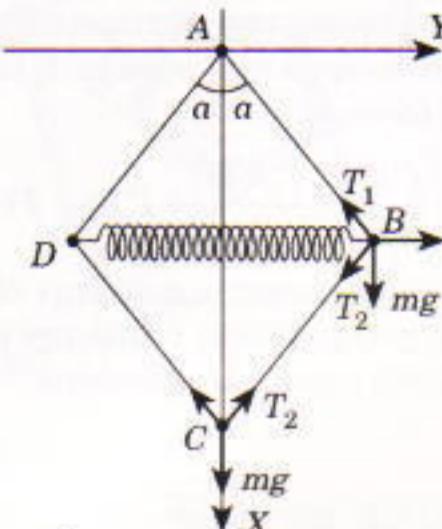
και

$$\begin{aligned} \Delta y_B &= \ell(\eta u(a + \Delta a) - \eta u a) \\ &= \ell(\eta u a \sin \Delta a + \sigma u n a \eta u \Delta a - \eta u a) \\ &\equiv \ell(\eta u a + (\sigma u n a) \Delta a - \eta u a) \\ &= \ell(\sigma u n a) \Delta a \equiv \ell(\sigma u n a_0) \Delta a. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$x_C = 2\ell \sigma u n a$$

και



Σχήμα 8

$$\Delta x_C = -2\ell(\eta u) \Delta a \equiv -2\ell(\eta u_0) \Delta a.$$

Επομένως,

$$\Delta y_B \equiv -\frac{\Delta x_C}{2\sigma u n a_0} = -\frac{\Delta x_C}{2}.$$

Έτσι,

$$y_{By} \equiv -\frac{Y_{Cx}}{2\sigma u n a_0} = -\frac{Y_{Cx}}{2}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν πως αν οι ταλαντώσεις έχουν μικρό πλάτος, το αριστερό μέλος της εξισώσης (4) μπορεί να γραφεί ως

$$m y_{Cx} + \frac{1}{2} m y_{Cx} + \frac{1}{2} m y_{Cx} = 2m y_{Cx}.$$

Και τώρα ας επεξεργαστούμε το δεξιό μέλος της (4).

Στη θέση ισορροπίας, με $y_{C0} = 0$, η εν λόγω εξισώση γίνεται

$$\begin{aligned} 2mg &= F_{el0} \frac{\sigma u n a_0}{\eta u} \\ &= 2k\ell(1 - \eta u_0), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει

$$2mg = 2k\ell \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad (5)$$

Μπορούμε να γράψουμε το δεξιό μέλος της (4) ως εξής:

$$\begin{aligned} F_{el0} \frac{\sigma u n a_0}{\eta u_0} - F_{el} \frac{\sigma u n a}{\eta u} &= 2k\ell(1 - \eta u_0) \frac{\sigma u n a_0}{\eta u_0} \\ &= 2k\ell \left(1 - \eta u\right) \frac{\sigma u n a_0}{\eta u_0} \\ &\quad - 2k\ell \left(1 - \eta u\right) \frac{\sigma u n a}{\eta u} \\ &= 2k\ell \left(\frac{\sigma u n a_0}{\eta u_0} - \frac{\sigma u n a}{\eta u}\right) \\ &\quad + 2k\ell \left(\sigma u n a - \sigma u n a_0\right). \end{aligned}$$

Εφόσον $\Delta x_C = 2\ell(\sigma u n a - \sigma u n a_0)$, ο τελευταίος όρος ισούται ακριβώς με $k\Delta x_C$. Αν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι μικρή, θα ισχύει

$$\Delta \left(\frac{\sigma u n a}{\eta u}\right) = \frac{\sigma u n a}{\eta u} - \frac{\sigma u n a_0}{\eta u_0} \equiv \frac{-\Delta a}{\eta u^2 a_0}$$

και

$$\Delta x_C \equiv -2\ell(\eta u_0) \Delta a.$$

Οπότε,

$$\frac{\sigma_{\text{una}}}{\eta \mu a_0} - \frac{\sigma_{\text{una}}}{\eta \mu a} \equiv \frac{\Delta a}{\eta \mu^2 a_0} \equiv \frac{-\Delta x_C}{2 \ell \eta \mu^3 a_0},$$

και το δεύτερο μέλος της (4) μπορεί να γραφεί

$$2mg - F_{\text{el}} \frac{\sigma_{\text{una}}}{\eta \mu a}$$

$$\equiv -k \cdot \Delta x_C \left(\frac{1}{\eta \mu^3 a_0} - 1 \right)$$

$$= -k \cdot \Delta x_C (2\sqrt{2} - 1).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{m}{k} = \frac{\ell}{g} \left(1 - \eta \mu a_0 \right) = \frac{\ell}{g} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)$$

(βλ. εξίσωση (5)), έχουμε την τελική μορφή της εξίσωσης ταλάντωσης για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας:

$$Y_{\text{ex}} = - \frac{g(2\sqrt{2} - 1)}{\ell(2 - \sqrt{2})} \Delta x.$$

Επομένως η περίοδος της ταλάντωσης θα ισούται με

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell(2 - \sqrt{2})}{g(2\sqrt{2} - 1)}}.$$

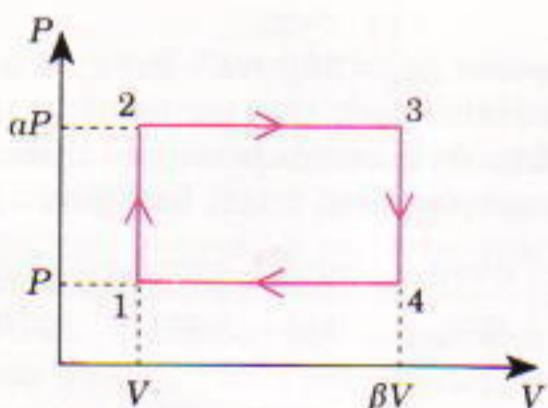
Φ43

Το αέριο (n moles) απορροφά θερμότητα Q κατά τις μεταβολές 1-2 και 2-3 του κύκλου (Σχήμα 9) εύκολα μπορείτε να υπολογίσετε ότι

$$Q = \frac{3}{2} nR(T_3 - T_1) + aP(\beta - 1)V$$

$$= \left[\frac{3}{2}(a\beta - 1) + a(\beta - 1) \right] PV.$$

Το μηχανικό έργο που παράγει το αέριο κατά τη διάρκεια του κύκλου



Σχήμα 9

1-2-3-4-1 είναι

$$W = (a - 1)(\beta - 1)PV.$$

Επομένως, η απόδοση της θερμικής μηχανής θα ισούται με

$$n = \frac{W}{Q} = \frac{(a - 1)(\beta - 1)}{\frac{3}{2}(a\beta - 1) + a(\beta - 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{a\beta} + \frac{1}{a\beta}}{\frac{5}{2} - \frac{1}{\beta} - \frac{3}{2a\beta}}.$$

Μπορείτε να διαπιστώσετε ότι η απόδοση αυξάνει όσο μεγαλώνουν τα a και β , και ότι για πολύ μεγάλες πυμές τους η απόδοση πλησιάζει την τιμή $\eta = 2/5 = 0,4 = 40\%$.

Φ44

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα από την τάση στα άκρα της αντίστασης, η οποία δεν είναι παρά η τάση του πυκνωτή: $I = V/R$. Εφόσον το ρεύμα πρέπει να παραμένει σταθερό, σταθερή θα παραμένει και η τάση του πυκνωτή δηλαδή

$$\frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 - \Delta q}{C},$$

όπου q_0 είναι το αρχικό φορτίο του πυκνωτή, $\Delta q = It = Vt/R$ το φορτίο που διαρρέει το κύκλωμα σε χρόνο t , και C η χωρητικότητα του πυκνωτή τη στιγμή t . Συνεπώς,

$$C = C_0 \left(1 - \frac{\Delta q}{q_0} \right) = C_0 \left(1 - \frac{t}{RC_0} \right).$$

Για να βρούμε την ισχύ P της εξωτερικής δύναμης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας: ακριβέστερα, η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος ισούται με το έργο που παράγει η εξωτερική δύναμη:

$$\left(\frac{CV^2}{2} - \frac{C_0 V^2}{2} \right) + I^2 R t = Pt.$$

Αντικαθιστώντας σ' αυτή την εξίσωση τη χωρητικότητα C από την προηγούμενη σχέση, λαμβάνουμε:

$$P = \frac{V^2}{2R},$$

Φ45

Αν ένα αντικείμενο τοποθετείται σε απόσταση d ($d > f_1$) από τον αντικειμενικό φακό μικροσκοπίου, τότε σχηματίζεται πίσω από τον αντικειμενικό, και σε απόσταση d' απ' αυτόν, πραγματικό είδωλο του αντικειμένου. Από τον τύπο των φακών έχουμε:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f_1},$$

απ' όπου προκύπτει

$$d' = \frac{df_1}{d - f_1} = 78 \text{ mm}.$$

Το παραπάνω είδωλο παίζει ρόλο πραγματικού αντικειμένου για τον προσοφθάλμιο φακό του μικροσκοπίου απέχει από αυτόν απόσταση $d_1 = L - d' = 22 \text{ mm} (< f_2)$. Ο προσοφθάλμιος φακός θα σχηματίσει φανταστικό είδωλο του αντικειμένου σε απόσταση

$$d'_1 = \frac{d_1 f_2}{f_2 - d_1} = 143 \text{ mm}.$$

Αυτό είναι το είδωλο που μπορεί να βλέπει κάποιος στο συγκεκριμένο μικροσκόπιο, επομένως η d'_1 εκφράζει τη βέλτιστη απόσταση ευκρινούς όρασης (υποθέτουμε ότι το μάτι βρίσκεται πολύ κοντά στον προσοφθάλμιο φακό του μικροσκοπίου).

Η αναγνώστριά μας φοράει διορθωτικούς φακούς, και θα μπορεί να διακρίνει με ευκρίνεια αντικείμενα σε απόσταση $d_0 = 25 \text{ cm}$ από τα μάτια της — πρόκειται για την ελάχιστη απόσταση άνετης όρασης ενός φυσιολογικού οφθαλμού. (Υποθέτουμε ότι οι διορθωτικοί φακοί βρίσκονται πολύ κοντά στα μάτια.) Οι διορθωτικοί φακοί, λοιπόν, πρέπει να παράγουν φανταστικά είδωλα των αντικειμένων σε απόσταση d'_1 από τα μάτια. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{d'_1} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f_0} = D,$$

όπου f_0 είναι η εστιακή απόσταση των διορθωτικών φακών και D η ισχύς τους (μετριέται σε διοπτρίες αν η εστιακή απόσταση μετριέται σε μέτρα). Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$D \equiv 3 \text{ διοπτρίες}.$$

Συμπεραίνουμε ως εκ τούτου ότι η αναγνώστρια του *Quantum* είναι πρεσβύωψ και φορά διορθωτικούς φακούς ισχύος 3 διοπτριών. Νά, λοιπόν, πώς εκτός από τον οφθαλμιατρό της μπορεί να τη βοηθήσει και ένας φυσικός, ή μάλλον ένα περιοδικό φυσικής!

Σπαζοκεφαλιές

Σ41

Οποιοσδήποτε από τους ζητούμενους αριθμούς μπορεί να γραφεί ως $A \cdot 10^4 + 1995$. Είναι προφανές ότι θα διαιρείται ακριβώς από το A αν και μόνο αν το A είναι διαιρέτης του 1995. Αφού $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, κάθε διαιρέτης του 1995 είναι γινόμενο κάποιων από αυτούς τους τέσσερις πρώτους παράγοντές του (ο καθένας χρησιμοποιείται το πολύ μία φορά). Άρα το πλήθος των διαιρετών ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με τέσσερα στοιχεία (όπου περιλαμβάνεται και το κενό σύνολο, που αντιστοιχεί στο διαιρέτη 1). Επομένως η απάντηση είναι $2^4 = 16$. Για να το θέσουμε κάπως διαφορετικά, οι διαιρέτες σχηματίζονται αν επιλέξουμε ή όχι τον παράγοντα 3, αν επιλέξουμε ή όχι τον παράγοντα 5, κ.ο.κ., και αν πολλαπλασιάσουμε έπειτα τους επιλεγμένους παράγοντες. Το πλήθος των επιλογών είναι $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Σ42

Το άθροισμα στον n -οστό ρόμβο είναι n^3 . Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε ότι για κάθε k , όπου $1 \leq k \leq n$, η k -οστή γραμμή (από την κορυφή) στον n -οστό ρόμβο αποτελείται από τους k το πλήθος αριθμούς k , ενώ η k γραμμή (από τη βάση) αποτελείται από τους k το πλήθος αριθμούς $2n - k$, επομένως το άθροισμα των αριθμών σε αυτές τις δύο σειρές είναι $k(k + 2n - k) = 2nk$. Αθροίζοντας αυτούς τους αριθμούς για $1 \leq k \leq n - 1$ και προσθέτοντας το άθροισμα της μεσαίας (n -οστής) γραμμής, που είναι n^2 , παίρνουμε

$$2n[1 + 2 + \dots + (n - 1)] + n^2$$

$$= 2n \cdot \frac{n(n - 1)}{2} + n^2$$

$$= n^3 - n^2 + n^2 \\ = n^3.$$

(V. Dubrovsky)

Σ43

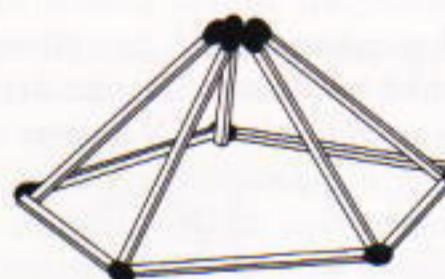
Ιδού μία από τις δυνατές λύσεις. Παίρνουμε ένα δοχείο με νερό, το γεμίζουμε έως το χείλος του και το ζυγίζουμε. Έπειτα βάζουμε την πέτρα στο δοχείο (μια ποσότητα νερού θα χυθεί) και το ζυγίζουμε και πάλι. Στη συνέχεια αφαιρούμε την πέτρα και ζυγίζουμε το δοχείο για τρίτη φορά. Εστω W_1 , W_2 και W_3 τα αποτελέσματα των τριών ζυγίσεων, ρ_n και ρ_v οι πυκνότητες της πέτρας και του νερού, και έστω V ο όγκος της πέτρας. Τότε $W_1 = W_3 + \rho_v Vg$, και $W_2 = W_3 + \rho_n Vg$. Άρα

$$\frac{\rho_n}{\rho_v} = \frac{W_2 - W_3}{W_1 - W_3}.$$

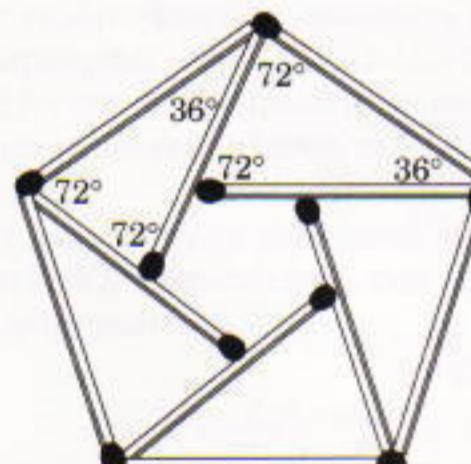
(V. Dubrovsky)

Σ44

Ο πρώτος ζητούμενος σχηματισμός μπορεί να δημιουργηθεί αν «περάσουμε στο χώρο» και κατασκευάσουμε μια κανονική πενταγωνική πυραμίδα (Σχήμα 10). Ο δεύτερος παρουσιάζεται στο Σχήμα 11.



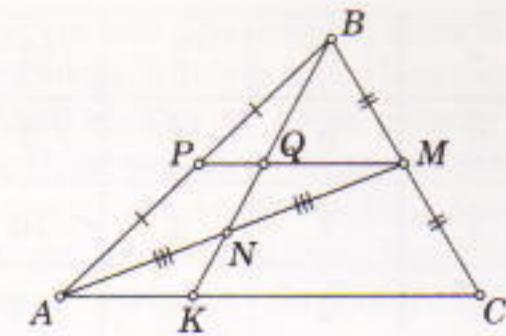
Σχήμα 10



Σχήμα 11

Σ45

Έστω P το μέσον της AB (Σχήμα 12). Τότε οι MP και BN είναι διάμε-



Σχήμα 12

σοι του τριγώνου ABM , και επομένως το σημείο τομής τους Q διαιρεί την PM σε λόγο $PQ/QM = 1/2$. Όμως, η PM ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABC , άρα είναι παράλληλη προς την AC . Επομένως, τα τρίγωνα BPQ και BMQ είναι όμοια με τα τρίγωνα BAK και BCK , αντίστοιχα, με ίδιο λόγο ομοιότητας $BQ/BK = 1/2$. Συμπεραίνουμε τώρα ότι $AK/KC = PQ/QM = 1/2$, που είναι η απάντηση στο πρόβλημα.

Μπορούμε να αποφύγουμε την αναφορά στην ιδιότητα των διαμέσων παρατηρώντας ότι τα τρίγωνα AKN και MNQ είναι ίσα (έχουν ίσες τις πλευρές AN και NM και τις προσκείμενες γωνίες), και επομένως $QM = AK = 2PQ$ (η PQ ενώνει τα μέσα των πλευρών στο τρίγωνο ABK). Κατόπιν συνεχίζουμε όπως προηγουμένως. Παρεμπιπτόντως, αυτό το συλλογισμό μπορούμε να τον αναπτύξουμε εύκολα σε απόδειξη της ιδιότητας των διαμέσων (στο τρίγωνο ABM), προσθέτοντας έτσι μία ακόμη απόδειξη στη συλλογή που παρουσιάστηκε στο άρθρο «Οι διάμεσοι» στο Καλειδοσκόπο του τεύχους Ιανουαρίου / Φεβρουαρίου 1995.

Συστήματα αρίθμησης

1. 201011011100010.
2. $[(24 \cdot 60 + 2) \cdot 60 + 32] \cdot 60 + 42 = 5.193.162$.
3. $[(9 \cdot 20 + 6) \cdot 20 + 14] \cdot 20 + 13 \cdot 18 + 15 \cdot 20 + 1 = 26.889.781$.
4. (α) 1022634, (β) 5Y540, (γ) 1111000100100000.
5. $P = 2^5 + 2^2 = 32 + 4 = 36$, $Q = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 341$ — ή $Q = [(4 + 1) \cdot 4 + 1] \cdot 4 + 1 = 341$.
6. Δείτε τους πίνακες στην επόμενη σελίδα.
7. (α) $X = 18 + 1 = 19$, (β) Τα ψηφία του Y δεν μπορούν να προκύψουν στο σύστημα του πωλητή (δείτε την

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

απάντηση της άσκησης 8), (γ) $Z = 2 \cdot 20 + 5 + 2 \cdot 2 = 49$.

8. Οι ζητούμενες ακολουθίες $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ μπορούν να περιγραφούν ως αυτές στις οποίες τα ψηφία a_{3k+1} , $k = 0, 1, 2, \dots$ παίρνουν οποιοδήποτε από τις τιμές 0, 1, 2 ενώ όλα τα άλλα ψηφία είναι είτε 0 είτε 1, και επιπλέον το ψηφίο 2 δεν ακολουθείται ποτέ από το ψηφίο 1. Επιβεβαιώστε μόνοι σας ότι αυτές οι συνθήκες είναι αναγκαίες και ικανές ώστε να ισχύουν οι ανισότητες $q_{k+1} > r_k = a_k q_k + a_{k-1} q_{k-1} + \dots + a_0$ για κάθε $k > 0$.

9. Προφανώς $N > M$ (αυτό έπειται άμεσα από τους ορισμούς).

10. Ας θεωρήσουμε τη γενική περίπτωση. Υποθέτουμε ότι έχουμε η βάρη τα οποία είναι δυνατόν να τοποθετηθούν μόνο σε ένα δίσκο. Αφού κάθε σύνολο n στοιχείων έχει 2^n υποσύνολα (του κενού συνόλου συμπεριλαμβανομένου), τα βάρη αυτά μπορούν να συνδυαστούν με 2^n τρόπους δίνοντας το πολύ $2^n - 1$ διαφορετικά μη μηδενικά συνολικά βάρη. Από την άλλη πλευρά, επιλέγοντας ως τιμή των βαρών τις δυνάμεις του δύο $-1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ μπορούμε να σχηματίσουμε οποιοδήποτε βάρος W μεταξύ του 1 και του $2^n - 1$ σχηματίζοντας τη δυαδική αναπαράσταση του W και διαλέγοντας τα βάρη των οποίων η τιμή εμφανίζεται σε αυτή την αναπαράσταση.

Όταν μπορούμε να τοποθετήσουμε τα βάρη και στους δύο δίσκους έχουμε τρεις δυνατότητες για καθένα από αυτά: να μπει στον αριστερό δίσκο, να μπει στον δεξιό δίσκο, ή να μη χρησιμοποιηθεί καθόλου. Αυτό

ισοδυναμεί με 3^n δυνατότητες για τα π βάρη, και επομένως με αυτό τον τρόπο είναι δυνατόν να μετρηθούν το πολύ $(3^n - 1)/2$ (θετικά) βάρη (κάθε βάρος μπορούμε να το σχηματίσουμε είτε στον αριστερό είτε στον δεξιό δίσκο). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύνολο των n δυνάμεων του $3 - 1, 3, 9, \dots, 3^{n-1}$ και να σχηματίσουμε οποιοδήποτε βάρος μεταξύ του 1 και του $(3^n - 1)/2$ μέσω της ισορροπημένης τριαδικής αναπαράστασης του επιθυμητού βάρους (δείτε την απάντηση της άσκησης 11). Τώρα μπορούμε να βρούμε τις αντίστοιχες: (α) 5 (αφού $2^4 - 1 < 30 < 2^5 - 1$, (β) 4 (αφού $(3^3 - 1)/2 < 30 < (3^4 - 1)/2$, (γ) 10 και 7.

11. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με τέλεια επαγωγή. Δεν είναι δύσκολο να γράψουμε τις ζητούμενες αναπαραστάσεις για τους αριθμούς 1, 2 και 3, επί παραδείγματι. Ας υποθέσουμε ότι για $N > 3$, όλοι οι αριθμοί οι μικρότεροι του N είναι δυνατόν να γραφούν με τον ζητούμενο τρόπο. Τότε, έστω $A = «a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0»$ και έστω $A_1 = «a_n a_{n-1} \dots a_1»$. Μπορούμε τότε να γράψουμε το A ως $«A_1 a_0»$ και να ορίσουμε τα B και B_1 με παρόμοιο τρόπο. Αν το N διαιρείται με το 3, τότε $N/3 < N$, επομένως το $N/3$ μπορεί να γραφεί ως $A_1 - B_1$ για κάποιες σειρές A_1, B_1 ψηφίων 0 και 1. Δεν είναι τότε δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $N = «A_1 0» - «B_1 0»$. Αν το N αφήνει υπόλοιπο 1 διαιρούμενο με το 3, τότε αναπαριστούμε το $(N - 1)/3$ ως $A_1 - B_1$. Τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε το N ως $«A_1 1» - «B_1 0»$. Παρομοίως, αν το N αφήνει υπόλοιπο 2, τότε μπορούμε να γράψουμε το $(N + 1)/3$ ως $A_1 - B_1$. Τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε το N ως $«A_1 0» - «B_1 1»$. Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγική απόδειξη.

12. Έστω b_k ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι γνήσια μικρότερος του q_{k+1}/q_k , $0 \leq k \leq n$. Θεωρήστε τον αριθμό

$$B = «b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0».$$

Αφού έχει $n + 1$ ψηφία, $B \leq q_{n+1} - 1$. Από την άλλη πλευρά,

$$B = b_0 + b_1 q_1 + b_2 q_2 + \dots + b_n q_n$$

$$\geq q_1 - 1 + \left(\frac{q_2}{q_1} - 1 \right) q_1 + \left(\frac{q_3}{q_2} - 1 \right) q_2$$

$$\begin{aligned} &+ \dots + \left(\frac{q_{n+1}}{q_n} - 1 \right) q_n \\ &= q_1 - 1 + q_2 - q_1 + q_3 - q_2 \\ &\quad + \dots + q_{n+1} - q_n \\ &= q_{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $B = q_{n+1} - 1$, πράγμα που είναι δυνατό μόνο όταν $b_k = q_{k+1}/q_k - 1$ δηλαδή, όταν το q_{k+1} διαιρείται από το q_k .

$$13. 2q_n \geq q_{n+1}, q_{n+1} + q_n \leq q_{n+1}.$$

14. Η απόδειξη ότι οι αριθμοί Fibonacci ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος 13 μπορεί να γίνει, για παράδειγμα, με τέλεια επαγωγή.

$$(a) \underbrace{10 \dots 0}_{k-\ell} \underbrace{10 \dots 0}_{\ell}, \text{ av } k - \ell \geq 2,$$

$$\underbrace{10 \dots 0}_{k+1}, \text{ av } k - \ell = 1,$$

$$\underbrace{10010 \dots 0}_{k-2}, \text{ av } k = \ell \geq 3,$$

$$10 + 10 = 101,$$

$$1 + 1 = 10.$$

$$(b) \underbrace{100 \dots 0}_{2m+2}.$$

$$(γ) \underbrace{1010 \dots 10}_{2m+2}.$$

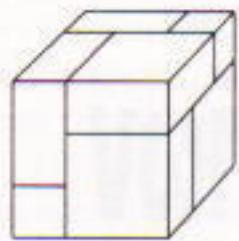
15. Αν γράψουμε την ακολουθία των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας το σύστημα αρίθμησης Fibonacci, παρατηρούμε ότι (a_k) είναι η ακολουθία των αριθμών που τελειώνουν (σε αυτό το σύστημα αρίθμησης) σε άριτο πλήθος 0 ή σε 1 (κανένα 0), ενώ η (b_k) είναι η ακολουθία των αριθμών που τελειώνουν σε περιττό πλήθος 0. Εππλέον, το b_k προκύπτει αν προστεθεί ένα 0 στο τέλος του a_k . Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την αυστηρή απόδειξη αυτής της παρατήρησης.

Αφού ο αριθμός 100 είναι ο 1000010100 στο σύστημα Fibonacci, ανήκει στην ακολουθία a_k . Το αντίστοιχο b_k είναι το 10000101000 = 144 + 13 + 15 = 162, επομένως $k = 62$ — δηλαδή, $100 = a_{62}$.

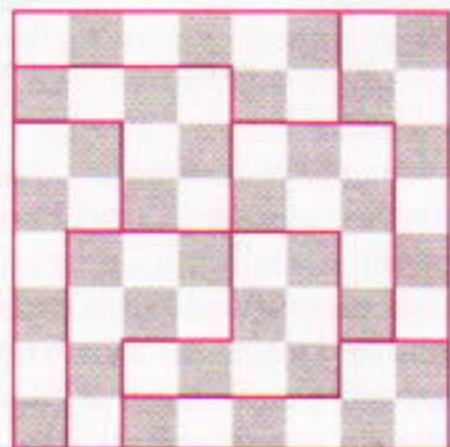
Παιχνιδότοπος

Η λύση του προβλήματος του πακεταρίσματος παρουσιάζεται στο

Σχήμα 13. Στο Σχήμα 14 παρουσιάζεται η λύση του προβλήματος της σκακιέρας.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

Οι γίγαντες

1. Για να έχουμε ακρίβεια μεγαλύτερη του Ευδόξου πρέπει να το παρατηρούμε επί 5 ημέρες· μεγαλύτερη του Τύχο Μπράχε, επί 25 ημέρες· μεγαλύτερη του Ουλούγ μπέη, επί 70 ημέρες (περισσότερο από 2 μή-

νες). Και μάλιστα, αυτές οι τιμές είναι μικρές, δεδομένου ότι θεωρήσαμε σχεδόν ιδανική τη διακριτική ικανότητα του τηλεσκοπίου. Οι οπικές συσκευές θεωρούνται «τέλειες» αν μπορούν να διακρίνουν αντικείμενα που η γωνιακή τους απόσταση είναι διπλάσια της διακριτικής τους ικανότητας.

2. Ο Αρίσταρχος υπολόγισε ότι η Γη είναι τριπλάσια σε μέγεθος από τη Σελήνη. Η σύγχρονη τιμή είναι 3,67.

3. Υπολογίζοντας με βάση τα δεδομένα του Αρίσταρχου βρίσκουμε πως ο λόγος των μεγεθών του Ήλιου και της Σελήνης είναι 19:1. Με βάση τα σημερινά δεδομένα ο λόγος είναι 400. Σύμφωνα με τον Αρίσταρχο, η διάμετρος του Ήλιου είναι τουλάχιστον 6 φορές μεγαλύτερη από τη διάμετρο της Γης, γεγονός που σημαίνει ότι ο όγκος του Ήλιου είναι 250 φορές μεγαλύτερος από τον όγκο της Γης. Φαντάζει παράξενο πώς ένας τέτοιος «γίγας» μπορεί να περιφέρεται γύρω απ' τη «μικροκαμωμένη» Γη.

4. Σύμφωνα με τα δεδομένα του Ερατοσθένη, η περίμετρος της Γης είναι 47.500 km. Σύμφωνα με τον Ποσειδώνιο, 45.600 km. Με τα σημερινά δεδομένα υπολογίζεται 40.000 km. Αν θεωρήσουμε πως το στάδιο είναι 157 m, τότε η περίμετρος της

Γης για τον Ερατοσθένη προκύπτει 39.250 m, και για τον Ποσειδώνιο 37.680 m. Την εν λόγω μείωση της ακρίβειας μπορούμε να την κατανοήσουμε αν αντιληφθούμε ότι ο Ερατοσθένης μετρούσε το ύψος του Ήλιου, που το γωνιακό του μέγεθος είναι 0.5° , ενώ ο Ποσειδώνιος μετρούσε το ύψος ενός αστρου (Κάνωπος).

5. Καθώς η Γη κινείται πλησιάζοντας τον Διά, δέχεται λίγο νωρίτερα την πληροφορία για την επικείμενη έκλειψη της Ιούς. Αυτή η χρονική διαφορά είναι $v_r \frac{t_0}{c}$, όπου v_r είναι η ταχύτητα της Γης, t_0 η περιόδος περιφοράς της Ιούς γύρω από τον Ήλιο, και c η ταχύτητα του φωτός. Αντίθετα, όταν η Γη απομακρύνεται από τον Διά, το σήμα καθυστερεί κατά το ίδιο ποσόν. Έτσι,

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

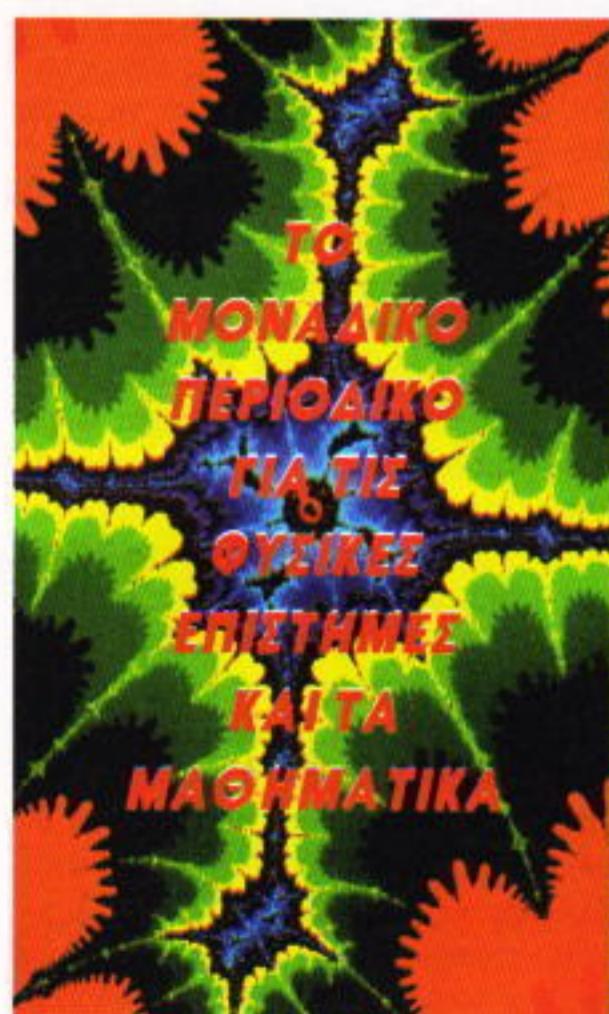
και

$$t_2 - t_1 = v_r \frac{t_2 - t_1}{c}.$$

Από αυτό λαμβάνουμε

$$c = v_r \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} = 30,4 \cdot 10^5 \text{ km/sec.}$$

Σφάλμα της τάξης του 1% είναι αποδεκτό, λόγω της δεδομένης ακρίβειας με την οποία μετρήσαμε τη διαφορά χρόνου μεταξύ των εκλείψεων.



QUANTUM

Ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα.

Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa).
Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη· η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

Περιοδικό Quantum, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα.
Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

Μια γιορτή έξυπνων ανθρώπων

Ανταπόκριση από το 14ο Διεθνές Πανηγύρι Σπαζοκεφαλιών

Anatoly Kalinin

TΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ ΤΟΥ 1994 ΒΡΕΘΗΚΑ στο 14ο Διεθνές Πανηγύρι Σπαζοκεφαλιών (ΔΠΣ)¹ παρέα, για δεύτερη φορά στη ζωή μου, με τους «έξυπνότερους ανθρώπους του κόσμου» —όπως τουλάχιστον τους χαρακτηρίζουν οι οικογένειές τους και οι φίλοι τους. Αυτή η λέσχη φίλων και συλλεκτών μηχανικών σπαζοκεφαλιών δημιουργήθηκε το 1978 από τον αμερικανό μηχανικό Jerry Slocum, τα βιβλία του οποίου για τις σπαζοκεφαλιές των έχουν κάνει διάσημο σε όλο τον κόσμο. Μετά τις πρώτες επτά συναντήσεις τους στις ΗΠΑ, τα μέλη της λέσχης, που είχε γίνει πλέον διεθνής, άρχισαν να εναλλάσσουν τον τόπο διεξαγωγής της ετήσιας συνάντησής τους μεταξύ των ΗΠΑ, της Ευρώπης και της Ιαπωνίας.

Στις 19 Αυγούστου του 1994, οι φίλοι των σπαζοκεφαλιών συγκεντρώθηκαν στο ξενοδοχείο Χίλτον του Σηάτλ, στην πολιτεία της Ουάσινγκτον. Την οργάνωση και τη φροντίδα της συνάντησης την είχε αναλάβει ο δρ. Gary Foshee. Οι εκπλήξεις και οι σπαζοκεφαλιές άρχιζαν αμέσως με την είσοδο στη μεγάλη αίθουσα δεξιώσεων του ξενοδοχείου. Η αξιαγάπητη Chelle Foshee προσέφερε σε κάθε προσκεκλημένο μια κάρτα με τυπωμένο έναν αναγραμματισμό του ονόματός του. Η δική μου έγραφε “a lion ain’t lanky” (ένα λιο-

ντάρι δεν είναι ξερακιανό). Μια και στην πραγματικότητα είμαι μάλλον ξερακιανός, μετάφρασα αυτήν τη φράση στα ρωσικά «ο Anatoly Kalinin δεν είναι λιοντάρι». Υπήρχε όμως και ένας ακόμη λόγος που δεν θα μπορούσα να θεωρήσω τον εαυτό μου λιοντάρι στη συνάντηση των σπαζοκεφαλιών. Πριν από ένα χρόνο, στο 13ο ΔΠΣ, ο λονδρέζος David Singmaster μού προσέφερε την «Πολύ δυσάρεστη» σφαιρική σπαζοκεφαλιά. Μια μπάλα με διάμετρο έξι περίπου εκατοστά, χωρισμένη με ακρίβεια σε επτά κομμάτια, από τα οποία το ένα ήταν βγαλμένο από τη θέση του και μου δόθηκε ξεχωριστά. Έπρεπε να αποσυναρμολογήσω την μπάλα, να βάλω το κεντρικό τμήμα της στη θέση του και να τη σχηματίσω ξανά. Πολεμάω με αυτή τη σπαζοκεφαλιά εδώ και ένα χρόνο, χωρίς όμως επιτυχία.

Για να πληρώσω με το ίδιο νόμισμα τον David έπρεπε να επινοήσω μια δική μου σπαζοκεφαλιά, την οποία έφερα μαζί μου στο Σηάτλ. Άλλωστε, είμαι δραστήριο μέλος του κόσμου των σπαζοκεφαλιών εδώ και 25 χρόνια. Έχω γράψει πλήθος άρθρα σχετικά με το θέμα, και η συλλογή μου παραμένει η μεγαλύτερη μέσα στα όρια της πρώην Σοβιετικής Ένωσης. Ονόμασα το παιχνίδι μου «Η δεκάποδη σπαζοκεφαλιά». Είναι ένας μεταλλικός κύβος που χωρίζεται αρκετά εύκολα σε δέκα κομμάτια. Το δύσκολο είναι να ξαναβάλεις τα κομμάτια στη θέση τους —δεν είναι

δυνατόν να γίνει συναρμολογώντας τα ένα ένα. Πρέπει να τοποθετηθούν στις κατάλληλες θέσεις στο χώρο και κατόπιν να μετακινηθούν όλα μαζί. Για να γίνει όμως αυτό χρειάζονται μάλλον περισσότερα από δύο χέρια! Νομίζω λοιπόν ότι ο καθηγητής Singmaster θα έχει κάτι για να βασανίσει αρκετά το μυαλό του.

Η παράδοση της ανταλλαγής σπαζοκεφαλιών μεταξύ των καλεσμένων είναι ίσως το περισσότερο ενδιαφέρον μέρος των Διεθνών Πανηγυριών. Ο καθένας φέρνει μαζί του $N - 1$ όμοιες σπαζοκεφαλιές, όπου N είναι το πλήθος των διαγωνιζομένων, και τις προσφέρει στους υπόλοιπους, ενώ λαμβάνει ίδιο πλήθος σπαζοκεφαλιών απ' όλα τα μέρη του κόσμου.

Το παιχνίδι είναι παλαιότερο από το βιβλίο. Αυτό το απλό γεγονός, που κατά τη γνώμη μου δεν χρειάζεται απόδειξη, μου αποκάλυψε μια νέα του πλευρά στο Σηάτλ. Ο Jerry Slocum μάς εξέπληξε όλους με τα δώρα του —ακριβή αντίγραφα μιας σπαζοκεφαλιάς με ηλικία μεγαλύτερη του ενός αιώνα (αφού υπάρχει ένα βιβλίο του 1893 που αναφέρεται σε αυτήν). Αυτή η σπαζοκεφαλιά έχει τη μορφή ενός παλιού κανονιού οπλισμένου με μια σφαιρική οβίδα. Πρέπει να βγάλεις την οβίδα από την κάννη του όπλου χωρίς να χρησιμοποιήσεις οποιοδήποτε εργαλείο. Βλέποντας τους άλλους να αγωνίζονται μάταια με αυτό το πρόβλημα, αναρωτιέσαι αν πραγματικά ο μέσος άνθρωπος έγινε

1. Μπορείτε να διαβάσετε για το προηγούμενο ΔΠΣ στο τεύχος του Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1994 του Quantum.

εξυπνότερος στα τελευταία εκατό χρόνια.

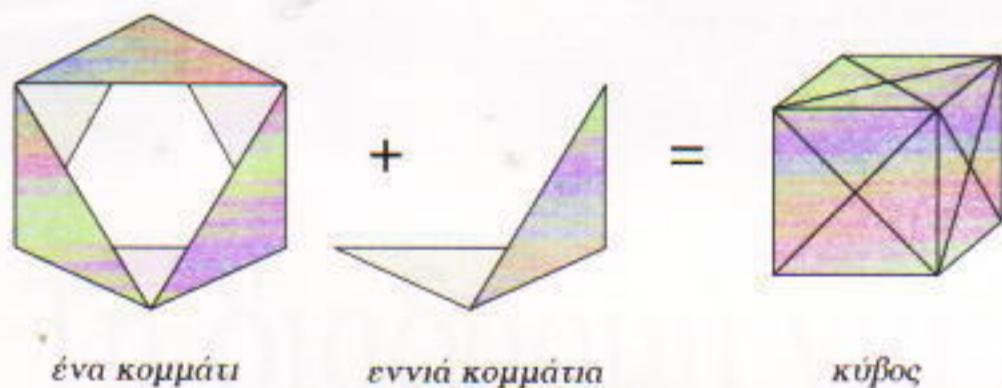
Στο άλλο άκρο του απέραντου σύμπαντος των διανοητικών παιχνιδιών —ένα σύμπαν άγνωστο για τους περισσότερους μας (και δυστυχώς και για τα παιδιά μας)— είναι το Λέβιτρον, ένα παιχνίδι που το είδα επίσης για πρώτη φορά στο Σηάτλ. Το Λέβιτρον είναι ένα ξύλινο κουτί χωρίς κουμπιά, λυχνίες, καλώδια ή οποιαδήποτε άλλη ένδειξη περιπλοκής εσωτερικής κατασκευής. Παίρνετε μια απλή παιδική σβούρα (βαρύτερη όμως από το συνηθισμένο) και τη γυρνάτε στην πάνω πλευρά του κουτιού. Αφού περιστραφεί για λίγα δευτερόλεπτα, η σβούρα απογειώνεται ξαφνικά και αιωρείται πάνω από το κουτί, εξακολουθώντας να περιστρέφεται για περισσότερο από ένα λεπτό. Μια φαντασιακή και μυστη-

ριώδης επίδειξη που οι ειδικοί τη θεωρούσαν αδύνατη πριν από λίγα χρόνια!

Στο Σηάτλ μού δώρισαν αρκετές σπαζοκεφαλιές που με την πρώτη ματιά μοιάζουν εξίσου αδύνατες όπως και το Λέβιτρον. Τέτοια ήταν η σπαζοκεφαλιά που επινόησε ο Gary Foshee, ο γεναιόδωρος οικοδεσπότης του ΔΠΣ του 1994 —η «Προβληματική δεκάρα». Σε αυτήν τη σπαζοκεφαλιά, ένα λουκέτο κατασκευασμένο από ένα μάνταλο και ένα παξιμάδι σάς εμποδίζει να μετακινήσετε ένα νόμιομα. Αν οχεδιάσετε την κατασκευή και τη δείξετε σε έναν καθηγητή τεχνικών, το πιθανότερο είναι ότι θα πάρετε τη χαμηλότερη βαθμολογία: ο καθηγητής θα σας πει αμέσως ότι εξαιτίας σοβαρών σφαλμάτων είναι αδύνατον να συναρμολογήσετε ή να αποσυναρμολογήσετε την

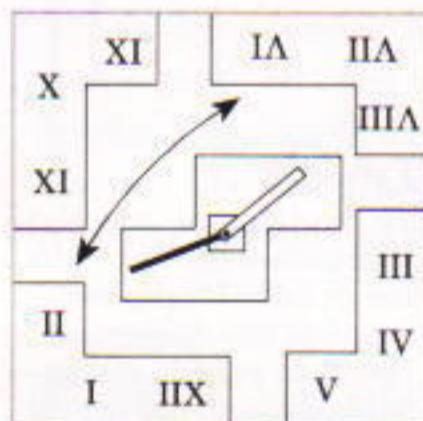
κατασκευή. Και όμως, ο μηχανισμός του Gary Foshee βρίσκεται πάνω στο γραφείο μου και μπορώ να τον διαλύσω σε κομμάτια και να τον ξανακατασκευάσω.

Μετά το ταξίδι μου στο Σηάτλ, η συλλογή μου αυξήθηκε κατά εκατό και περισσότερες σπαζοκεφαλιές. Η επλογή ορισμένων γι' αυτό το άρθρο δεν ήταν εύκολη. Προσπάθησα να διαλέξω κάποιες που θα έδιναν έστω και την ελάχιστη ιδέα της ποικιλίας των μηχανικών σπαζοκεφαλιών. Επιπλέον, είναι σχετικά εύκολο να κατασκευάσετε μόνοι σας τις σπαζοκεφαλιές που βλέπετε στα οχήματα. Ελπίζω ότι θα βοηθήσουν τους αναγνώστες του Quantum να εισέλθουν στον κόσμο αυτών των έξυπνων και αινιγματικών αντικειμένων —δεν θα το μετανιώσετε! ◻



Σχήμα 1

Η δεκάποδη σπαζοκεφαλιά, του Anatoly Kalinin (Ρωσία). Τα κομμάτια αυτής της σπαζοκεφαλιάς έχουν κατασκευαστεί από άδεια κουτιά σόδας. Το κλειστό κομμάτι στα αριστερά είναι μια κατάλληλα λυγισμένη «ταυτία» που έχει κοπεί από κουτί της σόδας.

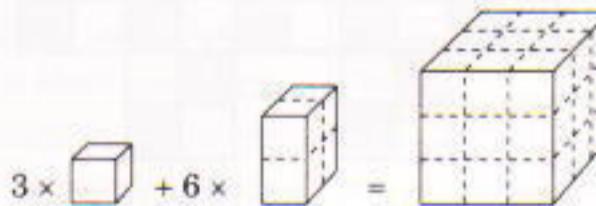


Σχήμα 2

Μια σπαζοκεφαλιά μετακίνησης τμημάτων, του Jean-Claude Constantin (Γερμανία). Μετακινώντας και περιστρέφοντας και τα πέντε κινητά τμήματα (περιλαμβανομένου και αυτού με τους δείκτες του ρολογιού), προσπαθήστε να αποκαταστήσετε τη σωστή σειρά των ενδείξεων των ωρών. Δεν επιτρέπεται να σηκώσετε τα κομμάτια.

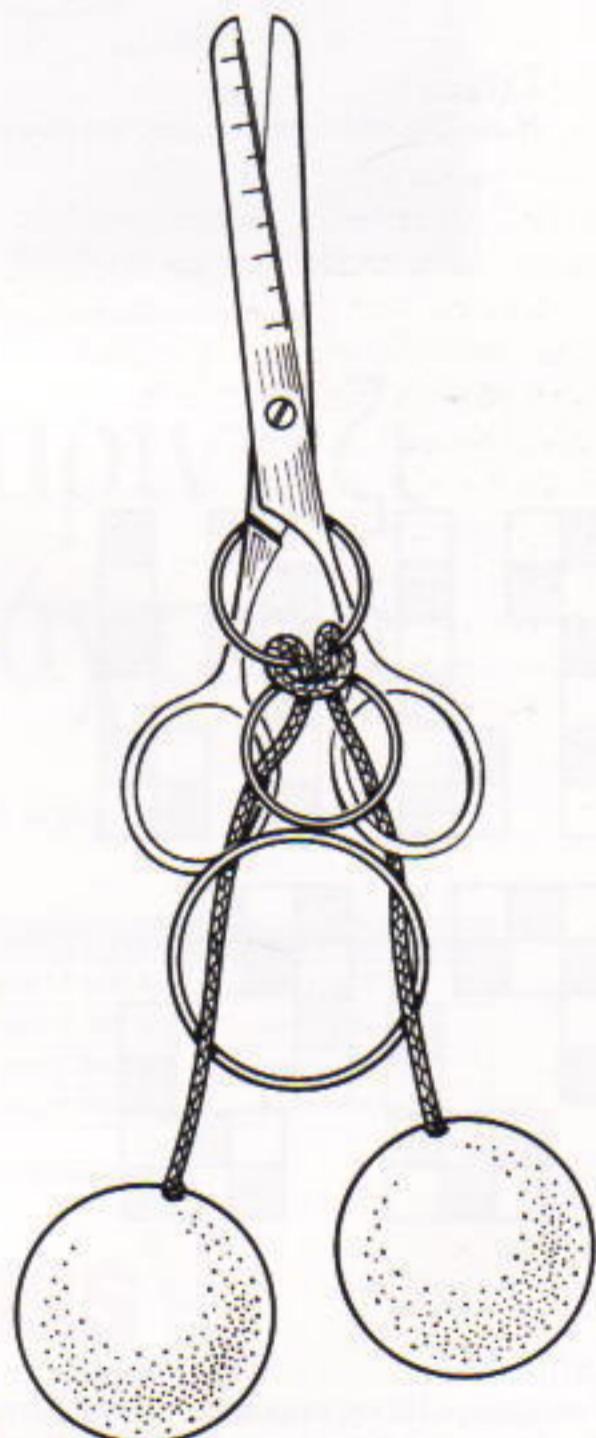
Σχήμα 3

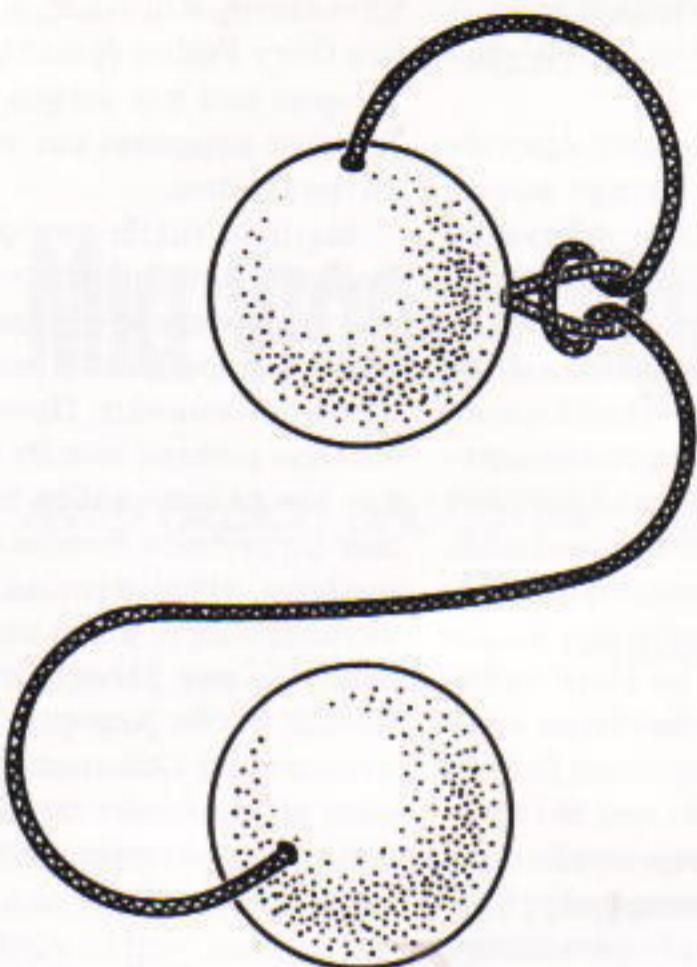
Η σπαζοκεφαλιά του πακεταρίσματος από τον O.C. Judd (ΗΠΑ). Η ευκολότερη σπαζοκεφαλιά του ΔΠΣ του 1994. Πρέπει να κατασκευάσετε έναν κύβο διαστάσεων $3 \times 3 \times 3$ χρησιμοποιώντας τρεις μοναδιαίους κύβους και έξι κομμάτια διαστάσεων $2 \times 2 \times 1$. Προσπαθήστε να το λύσετε με το μυαλό σας. (Η απάντηση στη σελ. 70.)



Σχήμα 4

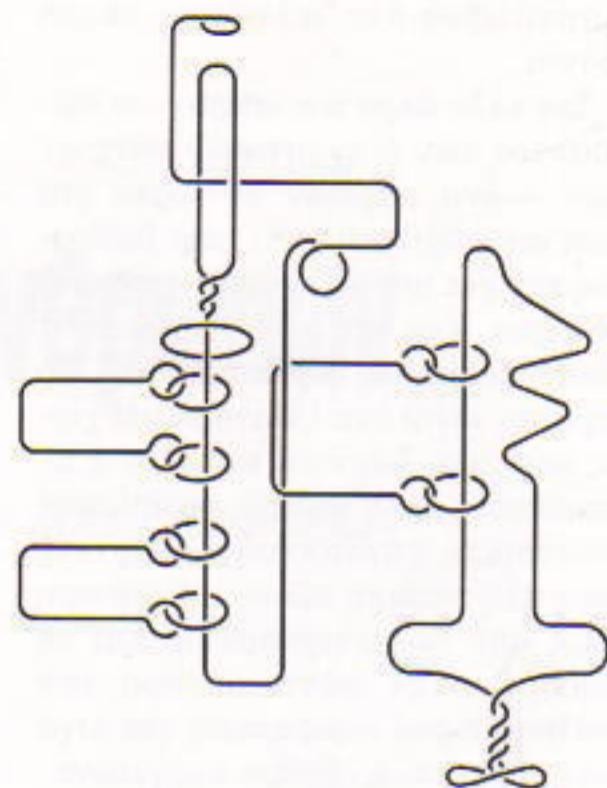
Η σπαζοκεφαλιά του φαλιδιού, του W.G.H. Strijbos (Ολλανδία). Αφαιρέστε τους δακτυλίους 1, 2, 3.





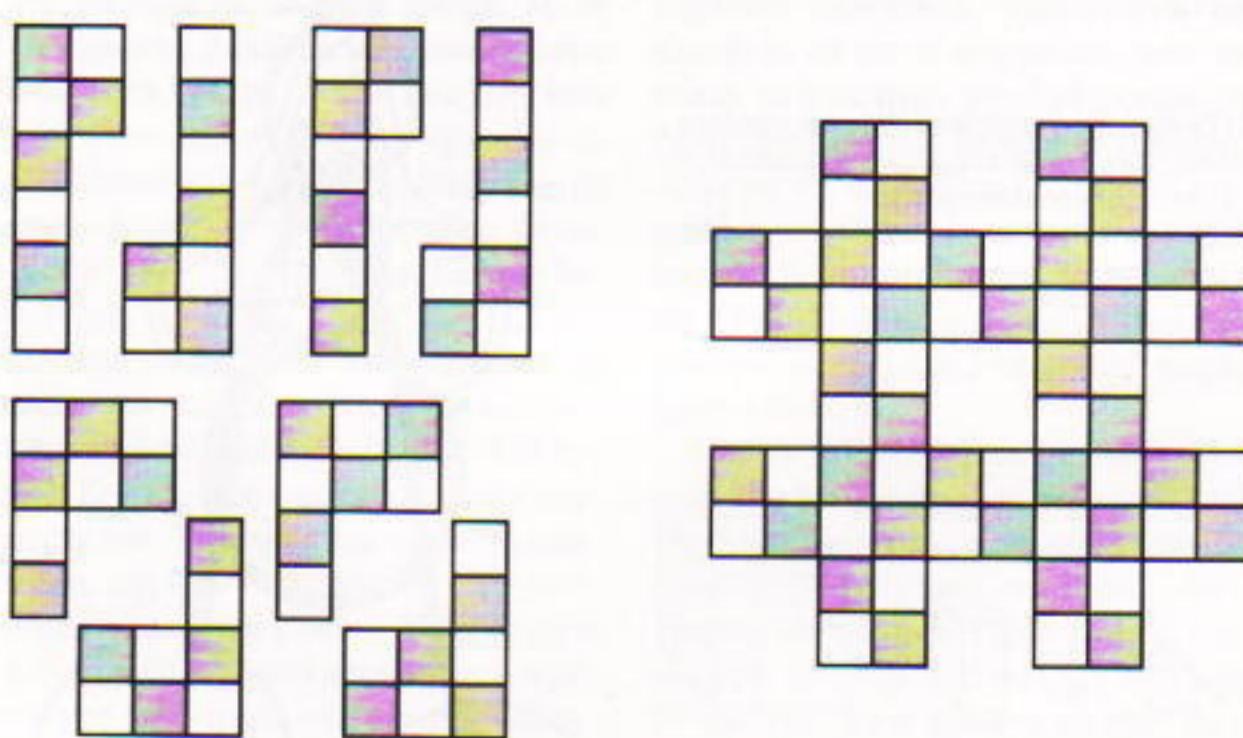
Σχήμα 5

Η σπαζοκεφαλιά του κόμβου, του Howard R. Swift (ΗΠΑ). Λύστε τον κόμβο.



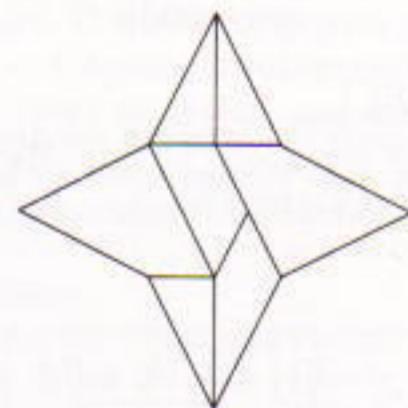
Σχήμα 6

Το μπρελόκ, του Richard I. Hess (ΗΠΑ). Απελευθερώστε τον κρίκο και το κλειδί.



Σχήμα 7

Η σπαζοκεφαλιά της σκακιέρας, του Les Barton (ΗΠΑ). Ο Les Barton έχει κάνει ίσως τις πολοκληρωμένες έρευνες για σπαζοκεφαλιές της σκακιέρας. Ο ίδιος λέει πως αρχικά φαίνονται εύκολες, αλλά μετά τις πρώτες κινήσεις γίνεται αντιληπτό πόσο δύσκολες είναι. Γι' αυτό, πριν προσπαθήσετε να συναρμολογήσετε μια πλήρη σκακιέρα απ' τα οκτώ κομμάτια στο αριστερό μέρος του σχήματος, προσπαθήστε να συναρμολογήσετε την ελλιπή σκακιέρα στο δεξιό μέρος του σχήματος. (Η απάντηση στη σελ. 70.)



Σχήμα 8

Το αντάλλαγμα, του Nob Yoshigahara (Ιαπωνία). Μια από τις δυσκολότερες σπαζοκεφαλιές των ημερών μας. Πρέπει να φτιάξετε ένα παραλληλόγραμμο από τα επτά κομμάτια του. Και εφόσον καταφέρετε να σχηματίσετε απ' αυτά 14 διαφορετικά κυρτά πολύγωνα, μπορείτε να θεωρείτε τον εαυτό σας μετρ των σπαζοκεφαλιών.