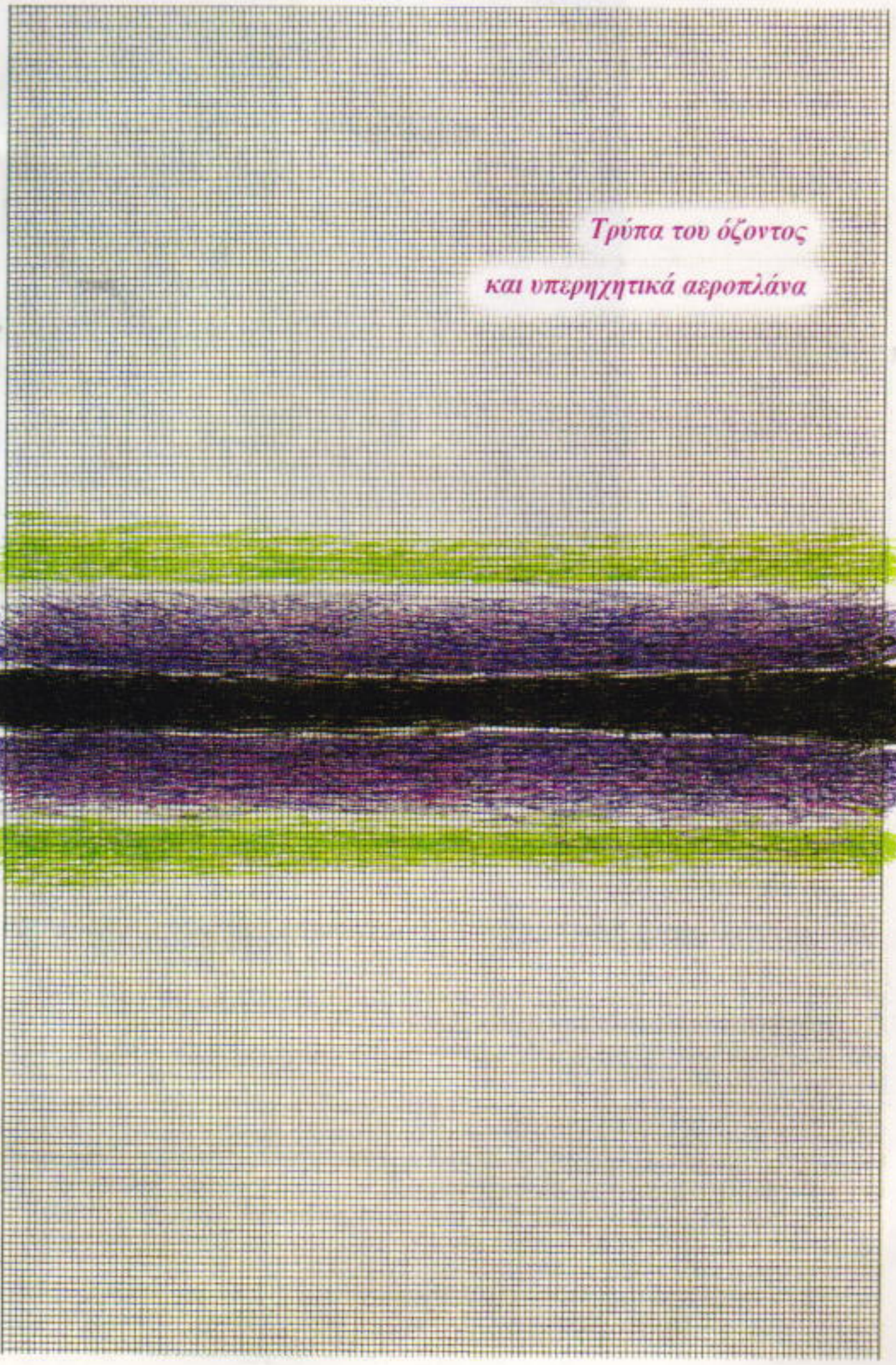
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1995
ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 4
1.400 ΔΡΧ.



Τρύπα του όζοντος

και υπερηχητικά αεροπλάνα

- *Μαγνητικά μονόπολα: υπάρχουν;*
- *Το πέταλο του Smale*
- *Cardano, Tartaglia, del Ferro και Ferrari*
- *Ο στρόβος του Thompson*
- *Ανακατανομή του πλούτου: μια διαδικασία διάχυσης*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Συλλογή H. Kress © 1995 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη των ΗΠΑ, Ουάσινγκτον

Η αγία Απολλωνία καταστρέφει ένα παγανιστικό είδωλο (περίπου 1450), του Antonio Vivarini

ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΕΡΓΟ ΤΟ ΓΕΓΟΝΟΣ ΟΤΙ ΖΩΓΡΑΦΙΖΟΝΤΑΣ ΣΤΑ ΜΕΣΑ του 15ου αιώνα, ο Antonio Vivarini εικονίζει την καταστροφή ενός αρχαίου έργου τέχνης. Η μετάβαση στην Αναγέννηση βρισκόταν υπό εξέλιξη εκείνη την εποχή, και θα περίμενε κανείς να δει τη μεγαλύτερη ανεκτικότητα εκείνης της περιόδου να αντανακλάται εδώ. Η Αναγέννηση δεν έδειξε ανοχή απλώς στον ελληνικό και τον ρωμαϊκό πολιτισμό, τον εναγκαλίστηκε. Πώς να εξηγήσουμε αυτή την άκαιρη βιαιοπραγία;

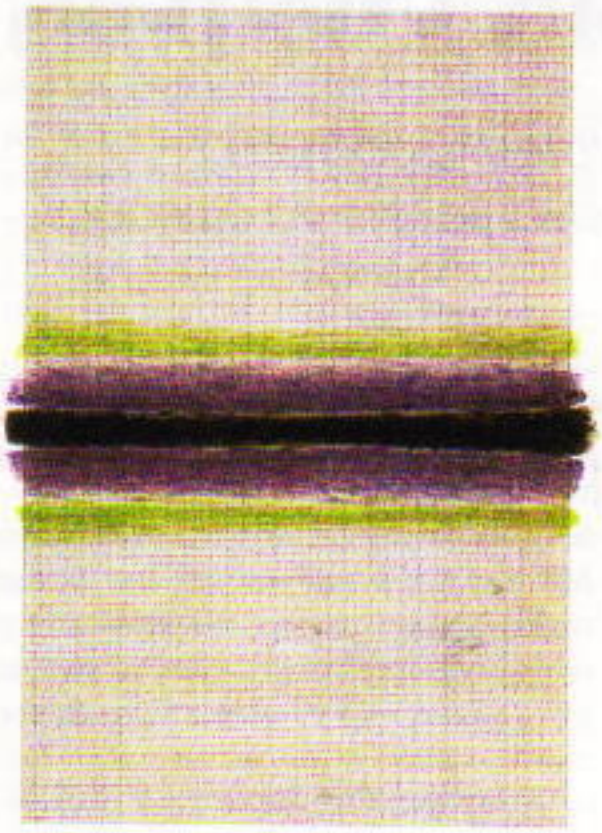
Ίσως τα κίνητρα του Vivarini (ή, πιθανότερα, του πάτρωνά του) είναι πιο λεπτά. Σε τελευταία ανάλυση, ο Vivarini μας δείχνει το άγαλμα, άθικτο, σαν να λέει: «Εκείνη την εποχή, όταν ζούσε η αγία Απολλωνία, είχαμε λόγους να φοβόμαστε τις ιδέες που αναπαριστούσε αυτό το αντικείμενο, αλλά όχι πια. Τώρα που η πίστη μας έχει πλέον εδραιωθεί, μπορούμε να εκτιμήσουμε την ομορφιά του γλυπτού, όπως και την ομορφιά της πράξης της αγίας Απολλωνίας». Άραγε διέφυγε της προσοχής του Vivarini και του πάτρωνά του η ειρωνεία του γεγονότος ότι το όνομα της αγίας είναι παράγωγο του ονόματος ενός από τους μεγαλύτερους θεούς του αρχαιοελληνικού πανθέου; Ή η ειρωνεία ότι αυτό του οποίου η αναπαράσταση καταστρέφεται είναι κάτι που όλοι, και η αγία, και ο Vivarini, και ο πάτρωνάς του συμφωνούν πως ούτε καν υπάρχει;

Τα ανύπαρκτα πράγματα έχουν σαφώς πολύ μεγάλη ισχύ. Χωρίς να αποδίδουμε αγιότητα στους συγγραφείς μας, επιστούμε την προσοχή σας στο άρθρο της σελίδας 16, όπου ο John Wilie διερευνά τα (ανύπαρκτα;) μαγνητικά μονόπολα.

QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1995

ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 4



Εικονογράφηση: Yury Vashchenko

Η λεγόμενη «τρύπα του όζοντος» πάνω από την Ανταρκτική αποτελεί αντικείμενο ερευνών και συζητήσεων αφότου παρατηρήθηκε για πρώτη φορά, στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Γεννήθηκαν λοιπόν φόβοι ότι τα επίπεδα του όζοντος θα μπορούσε να μειωθούν και σε άλλες περιοχές της ατμόσφαιρας, θέτοντας σε κίνδυνο τις μορφές ζωής που υπάρχουν στον πλανήτη μας, δεδομένου ότι το όζον απορροφά την επιβλαβή υπεριώδη ακτινοβολία του Ήλιου.

Ένα ερώτημα στο οποίο δεν έχει δοθεί ακόμη απάντηση είναι αν μια νέα γενιά υπερηχητικών αεροσκαφών που πετούν σε μεγάλα ύψη θα καταστρέψει το στρώμα του όζοντος. Τα αέρια εξαγωγής των αεροσκαφών περιέχουν διάφορα οξείδια του αζώτου (NOx), τα οποία *αυξάνουν* το επίπεδο του όζοντος στην τροπόσφαιρα αλλά πιθανόν να το *μειώνουν* στη στρατόσφαιρα. Στο άρθρο της σελίδας 26, ο Albert Stasenko διερευνά τις επιπτώσεις που θα μπορούσε να έχουν οι εν λόγω χημικές ενώσεις στο ατμοσφαιρικό όζον.

ΑΡΘΡΑ

8 Συμβολική δυναμική

Το πέταλο του Smale

Yuly Ilyashenko και Anna Kotova

16 Ειδικές υποθέσεις

Μαγνητικό μονοπώλιο

John Wylie

26 Φυσική της στρατόσφαιρας

Υπερηχητικά και γλυκοκολοκύθες

Albert Stasenko

52 Λογιστικά φύλλα εναντίον απειροστικού λογισμού

Ο Jesse James και η θερμική αγωγιμότητα

Kurt Kreith

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

2 **Ο κόσμος των κβάντων**

4 **Κβαντικά χαμόγελα**

Φυσικοί και μουσική

5 **Αναδρομές Ι**

Τα στοιχειώδη σωματίδια

36 **Πώς λύνεται;**

39 **Σπαζοκεφαλιές**

40 **Καλειδοσκόπιο**

Τι γνωρίζετε από αστρονομία;

42 **Αλληλογραφία**

45 **Αναδρομές ΙΙ**

Η μεγάλη τέχνη

60 **Το *Quantum* διαβάζει**

63 **Μαθηματικές αναζητήσεις**

Μεγιστοποιώντας το μέγιστο

64 **Στα πεδία της φυσικής**

Το εκκρεμές που στάζει

68 **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**

76 **Παιχνιδότοπος**

Με το κεφάλι κάτω

Τον Θεό και τη διατήρηση της ενέργειας

Έτσι συχνά όταν μιλώ για τον Ήλιο μπερδεύεται στη γλώσσα μου
ένα μεγάλο τριαντάφυλλο κατακόκκινο. Αλλά δεν μου είναι βολετό να σωπάσω.
—Οδυσσέας Ελύτης

Το ερώτημα είναι αιχμηρό και πανάρχαιο: «Υπάρχει άραγε στο Σύμπαν μια τάξη και μια αρμονία—ανεξάρτητη από την ανθρώπινη σκέψη— την οποία σε κάποιες στιγμές καταφέρνουμε και συλλαμβάνουμε; Ή, μήπως, τη δική μας εσωτερική ανάγκη για τάξη και αρμονία την προβάλλουμε στο "έξω Σύμπαν" και βλέπουμε εκεί τις εσωτερικές εικόνες μας;» Με ποιον είμαστε; Με την παρέα του Παρμενίδη και του Πλάτωνα ή με τους άλλους;

Το εσωτερικό μας σύμπαν και οι ουρανοί

κάποιοι φίλοι μας τις νύχτες
που τους λεν αλήτες
και μας βλέπουν και μας γνέφουν
απ' τους ουρανούς
Μάνος Ελευθερίου

Αυτά, πάντως, που βλέπουμε στον ουρανό φαίνεται πως είναι εσωτερικές εικόνες μας. Οι μακρινοί μας προπάτορες διέκριναν στον ουρανό αρκούδες· ήταν, βλέπεις, κυνηγοί. Το κυνήγι ήταν γι' αυτούς επιβίωση· υπήρχε μέσα τους· προσδιόριζε ακόμα και το βλέμμα της σκέψης τους. Σήκωναν λοιπόν το κεφάλι προς το νυχτερινό στερέωμα κι έβλεπαν λιοντάρια, φίδια, κυνηγόσκυλα, ταύρους, αιγόκερους και βέβαια δύο άρκιους· μία μεγάλη και μία μικρή.

Ο Νίκος Γκάτσος, κάτοικος Παραδείσου εδώ και κάμποσο καιρό, κοιτάζοντας το Γαλαξία έβλεπε ένα ουράνιο φωτεινό ποτάμι, ενώ για τους Βουσμάνους Κουνγκ —που ζουν στην έρημο Καλαχάρι της Αφρικής— ο «ίδιος» αυτός Γαλαξίας δεν είναι ποτάμι, αλλά κάτι πολύ χρήσιμο· είναι η σπονδυλική στήλη της νύχτας, υπάρχει για να τη στηρίζει. Στη δική τους κοινωνική λογική το καθετί υπάρχει για να χρησιμεύει κάπου και «αυτό» προσδιορίζει το «τι βλέπουν», διαμορφώνει το βλέμμα της σκέψης τους. Στην άλλη άκρη του κόσμου οι Ερυθρόδερμοι, πάνω στον νυχτερινό θόλο της Βόρειας Αμερικής, κοιτάζοντας τον «ίδιο» Γαλαξία, βλέπουν το δρόμο των ψυχών.

Ο Γιοχάννες Κέπλερ καταδύθηκε πολύ περισσότερο. Αντικρίζοντας τον νυχτερινό ουρανό —μέσα από την πίστη του σε μια παγκόσμια αρμονία— έφθανε σε σημείο ν' «ακούει» μουσική. Η κίνηση των πλανητών ήταν γι' αυτόν μια ραψωδία. Και η σκέψη του, εμποτισμένη από τη σχετική πεποίθηση, κατάφερε, ύστερα από πολύχρονο μόχθο, να διακρίνει το πρώτο από τα μυστικά: Σε κάθε περιφορά του γύρω από τον πατέρα Ήλιο ο κάθε πλανήτης παρουσίαζε ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο στις τιμές της γωνιακής του ταχύτητας. Ο λόγος των δύο τιμών για τον Κρόνο ήταν ακριβώς 4 : 5. Αυτό, για τον Κέπλερ, ήταν μια «τρίτη μεγάλη», το αντίστοιχο για τον Δία μια «τρίτη μικρή», ενώ ο Άρης έστελνε μια «πέμπτη».

Το αυτί της σκέψης του άκουγε τους γίγαντες πλανήτες σαν δύο βαρύτονους, τον Άρη σε ρόλο τενόρου, τη Γη κοντράλτο όπως και την Αφροδίτη, ενώ σοπράνο ήταν ο Ερμής. Μουσική των ουρανών την οποία συλλαμβάνει με την «κεραία» του ο άνθρωπος ή επινόηση μιας αρμονίας γεννημένη από εσωτερικές ανάγκες του;

Αυτά που βλέπουμε στον ουρανό, πάντως, φαίνεται ότι είναι εσωτερικές εικόνες μας. Λένε μάλιστα μερικοί ότι και ο Θεός που «βλέπουμε» εκεί πάνω ο «εν τοις ουρανοίς» είναι κι αυτός μια εσωτερική εικόνα μας.

Πράγματα αθάνατα

Αθανασία,
ήρθαν καιροί που σε πιστέψαμε βαθιά.
Κάθε γενιά δική της θέλει να γενείς.
Νίκος Γκάτσος

Μήπως όμως και η διατήρηση της ενέργειας είναι κι αυτή μια εσωτερική εικόνα μας; Μέσα σ' ένα Σύμπαν αδιάκοπων αλλαγών, όπου φαίνεται ότι «τα πάντα ρει», η ανθρώπινη Σκέψη δεν παύει να αναζητεί ποσότητες αναλλοίωτες μέσα στο κύλημα του χρόνου. Ο Richard Feynman —κάτοικος Παραδείσου τώρα πλέον κι αυτός, γείτονας πιθανόν του Νίκου Γκάτσου— υποστήριζε ότι πρόκειται για μια τάση του ανθρώπου να πιστεύει ότι πίσω από την πολυμορφία και την πολυπλοκότητα υπάρχει κάτι άφθαρτο και να το αναζητά.

Η νοησιακή αυτή τάση σχετίζεται, σε μια πρώτη «ανάγνωση», με την ανθρώπινη ανάγκη για σταθερότητα,

ανάγκη που ευδοκιμεί τόσο μέσα στα συνειδησιακά υπόγεια του μεμονωμένου ανθρώπινου πλάσματος όσο και στις περιοχές του κοινωνικώς ζην. Η τάση όμως αυτή σχετίζεται και με το ποθούμενο «Αθανασία». Τρία κουάρκ από την ανάσα του Γεωργίου Καραϊσκάκη, σφιχταγκαλιασμένα και εγκλωβισμένα μέσα στο ίδιο, πάντα, πρωτόνιο, πρέπει να βρίσκονται —τη στιγμή αυτή που γράφω— μέσα στο κλειστό μου δωμάτιο. Δύο δίδυμα «πάνω» κι ένα «κάτω» αξεχώριστα εδώ και δεκαπέντε δισεκατομμύρια χρόνια, σχεδόν από τότε που υπάρχει χρόνος. Ποσότητες αθανασίας που τις έχουμε επινοήσει και οι οποίες, σύμφωνα με τη σκέψη μας, επιμένουν να κυκλοφορούν στο Σύμπαν.

Στους μεγάλους, πάλι, νόμους διατήρησης, η ορμή, η στροφορμή, το ηλεκτρικό φορτίο και η μάζα-ενέργεια συνιστούν ποσότητες που παραμένουν αθάνατες, καθώς τα συμβαίνοντα, μέσα από έναν τρομακτικής ποικιλίας καταιγισμό εκδηλώσεων, «γράφουν την ιστορία τους». Έτσι τουλάχιστον ισχυρίζονται οι φυσικοί του δικού μας αιώνα. Και είναι εύλογο να πηγαίνει το μυαλό μας στον Παρμενίδη ο οποίος δίδασκε ότι πίσω από τη Φαινομενική Χίμαιρα βρίσκεται μια Αλήθεια αδιαίρετη, αναλλοίωτη, τέλεια και στατική. Γιατί αν η αθανασία των πρωτονίων κατάγεται από τον Δημόκριτο και η έννοια της ενέργειας και του αδιάκοπου γίγνεσθαι αποτελεί κληρονομιά της φιλοσοφίας του Ηράκλειτου, η λογική που διέπει τους μεγάλους νόμους διατήρησης έλκει την καταγωγή της από τη σκέψη του Παρμενίδη. Πρέπει, δηλαδή, κάποτε να αναγνωρίσουμε ότι και τα δύο ρεύματα των προσωκρατικών άφησαν ίχνη πάνω στο σώμα της σύγχρονης φιλοσοφίας, άρα και σ' εκείνο της θυγατέρας-φυσικής. Θα μπορούσε τελικά να υποθέσει κανείς ότι εάν το ανθρώπινο είδος ξανάρχιζε «να παίζει το έργο» από την αρχή, δύο πράγματα θα επινοούσε και πάλι· τον Θεό και τη διατήρηση της ενέργειας. Το ποθούμενο «Αθανασία» θα οδηγούσε τη σκέψη του και στα δύο αυτά «οροπέδια».

Ανδρέας Ι. Κασσέτας

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη συμπαράξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντες Σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης: **Timothy Weber**
Υπεύθυνος εικονογράφησης: **Sergey Ivanov**
Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων: **Edward Lozansky**

Σύμβουλοι Σύνταξης
Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας
Yuli Danilov, Ερευνητής Α΄ Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική Επιτροπή
Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT
James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM
George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη
Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντέιλ, Λουιζιάνα
Carol-ann Tripp, Καθηγήτρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πρόβιντενς, Ρόουντ Άιλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης: **Αλέκος Μάμαλης**
Διευθυντής: **Γιώργος Ευαγγελόπουλος**

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.:
Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός, **Μαριάνθη Πετράκη** -φυσικός, **Κωνσταντίνα Μεργιά** -φυσικός, **Μιχάλης Λάμπρου** -μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης** -μαθηματικός, **Γιώργος Μπαρουξής**, **Θεοφάνης Γραμμένος** -φυσικός και **Αλέκος Μάμαλης** -φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια: **Παντελής Μπουκάλας**
Τυπογραφικές διορθώσεις: **Π. Τασιόπουλος**
Επιμέλεια έκδοσης: **Γ. Νιράνος**
Υπεύθυνη λογιστηρίου: **Μαρία Μάμαλη**

Επιστημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α΄ Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση: **Κάτοπτρο**
Φιλμ, μοντάζ: **Γ. Κεραμάς**
Εκτύπωση, βιβλιοδεσία: **Τσακίρης ΑΒΕΕ**

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, δημηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μαμαλης.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 7.500 δρχ. για ιδιώτες, 12.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.

Φυσικοί και Μουσική

Η ανθρώπινη πλευρά φημισμένων επιστημόνων

Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν (1879-1955) έπαιζε βιολί, και του άρεσε ιδιαίτερα να τον συνοδεύει ο μεγάλος πιανίστας Artur Schnabel. Μια μέρα ο Αϊνστάιν έπαιξε λάθος μια νότα —σε τελική ανάλυση, ήταν φυσικός, και όχι επαγγελματίας μουσικός! Άρχισαν πάλι από την αρχή, αλλά ο Αϊνστάιν έκανε πάλι λάθος στην ίδια νότα. Ο Schnabel έχασε την ψυχραιμία του. «Λάθος, Άλμπερτ, λάθος! Άκου πώς το παίζω εγώ: ένα, δύο, τρία... Μα είναι δυνατόν να μην ξέρεις να μετράς;»

Ο Robert Bunsen (1811-1899) έκανε πολλές εφευρέσεις, ανάμεσα στις οποίες ήταν το ηλεκτρικό στοιχείο άνθρακα-ψευδαργύρου και το θερμιδόμετρο πάγου, αλλά έπαιξε δευτερεύοντα ρόλο στην ανάπτυξη της πασίγνωστης λυχνίας που φέρει το όνομά του. Κάποτε πήγε σε μια συναυλία, και στη διάρκεια της παράστασης του ήρθε μια ιδέα. Στο διάλειμμα γύρισε και ρώτησε τον διπλανό του: «Πείτε μου, σας παρακαλώ, όλα τα βιολιά στη σκηνή παίζουν το ίδιο πράγμα;» Εκείνος του απάντησε ότι, πραγματικά, όλα τα βιολιά παίζουν τις ίδιες νότες. Ο Bunsen κούνησε το κεφάλι του. «Χμμ», μουρμούρισε, «αυτό δεν είναι καθόλου οικονομικό. Θα έπρεπε να βάλουν στη θέση τους ένα μεγάλο βιολί που να το παίζει μόνο ένας μουσικός!»

Ο Max Planck (1858-1947), ο συντηρητικός επιστήμονας που έφερε την επανάσταση στη φυσική με τις εργασίες του στην κβαντική θεωρία και τη σχετικότητα, έτρεφε μεγάλη αγάπη για τη μουσική στα νιάτα του, τόσο ώστε να σκέφτεται σοβαρά να γίνει επαγγελματίας μουσικός. Ο Planck είχε τόσο καλό «αυτί», ώστε, όπως έλεγε στους φίλους του, δεν μπορούσε να απολαύσει ποτέ τις συναυλίες στις οποίες πήγαινε γιατί πάντα άκουγε και το παραμικρό λάθος που έκαναν οι μουσικοί. Πέρασαν πολλά χρόνια μέχρι να χάσει —προς μεγάλη του ευχαρίστηση— αυτή την «υπερευαισθησία».

Αντίθετα, ο Ernest Rutherford (1871-1937), ο μεγάλος πυρηνικός φυσικός, δεν είχε καθόλου καλό «αυτί», είχε όμως πολύ δυνατή φωνή. Το ρεπερτόριό του περιλάμβανε μόνο δύο τραγούδια, από τα οποία οι βοηθοί του καταλάβαιναν πάντα σε τι διάθεση βρισκόταν. Αν ο Rutherford περπατούσε στο διάδρομο βροντοφωνάζοντας το «Εμπρός χριστιανοί στρατιώτες» (το οποίο καταλάβαινες μόνο από τα λόγια και όχι από τη μελωδία), όλα πήγαιναν καλά. Αν τραγουδούσε ένα πένθιμο εμβατήριο, οι συνεργάτες του άρχιζαν να προετοιμάζονται για το χειρότερο: ο Rutherford ήταν στις κακές του!

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Τα στοιχειώδη σωματίδια

Ψαρεύοντας για το σωματίδιο Higgs, παραμονεύοντας για το έκτο κουάρκ

Sheldon Lee Glashow

Η μάζα, το σπιν και τα αντισωματίδια

Από την κβαντική μηχανική και τη σχετικότητα γνωρίζουμε ότι κάθε σωματίδιο χαρακτηρίζεται από μη αρνητική μάζα και από μη αρνητικό, ακέραιο ή ημιακέραιο σπιν, και ότι για κάθε σωματίδιο υπάρχει ένα αντισωματίδιο με ίση μάζα και σπιν αλλά με αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο. Τα σωματίδια μη μηδενικής μάζας κινούνται με ταχύτητες μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός και μπορούν να παραμένουν ακίνητα, σε αντίθεση με τα σωματίδια μηδενικής μάζας (όπως τα φωτόνια και τα βαρυτόνια), τα οποία κινούνται με την ταχύτητα του φωτός ως προς όλους τους παρατηρητές. Το σπιν είναι το μέτρο της εσωτερικής στροφορμής του σωματιδίου. Ένα σωματίδιο με μη μηδενική μάζα και σπιν s μπορεί να βρίσκεται σε οποιαδήποτε από $2s + 1$ διαφορετικές κβαντικές καταστάσεις σπιν.

Το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου, γνωστό ως ποζιτρόνιο, παρατηρήθηκε για πρώτη φορά το 1932 στην κοσμική ακτινοβολία. Το αντιπρωτόνιο παρήχθη και ανιχνεύθηκε για πρώτη φορά στο Μπέβατρον του Μπέρκλεϋ το 1955. Το φωτόνιο έχει ως αντισωματίδιο τον εαυτό του. Τα σωματίδια και τα αντισωματίδια εξαϋλώνονται όταν έρθουν σε επαφή. Όλη η γήινη ύλη (καθώς και το μεγαλύτερο μέρος της ουράνιας) αποτελείται από σωματίδια και όχι από αντισω-

Εικονογράφηση: Nishan Akgulian

ματίδια. Διαφορετικά δεν θα βρισκόμασταν εδώ να σας λέμε αυτή την ιστορία.

Φερμιόνια και μποζόνια

Τα σωματίδια που έχουν ημιακέραιο σπιν (όπως το ηλεκτρόνιο —σπιν 1/2) ικανοποιούν τη στατιστική Fermi-Dirac, γεγονός που σημαίνει ότι δύο σωματίδια αυτής της κατηγορίας δεν είναι δυνατόν να βρεθούν στην ίδια κβαντική κατάσταση την ίδια χρονική στιγμή (απαγορευτική αρχή του Pauli). Τα εν λόγω σωματίδια ονομάζονται φερμιόνια.

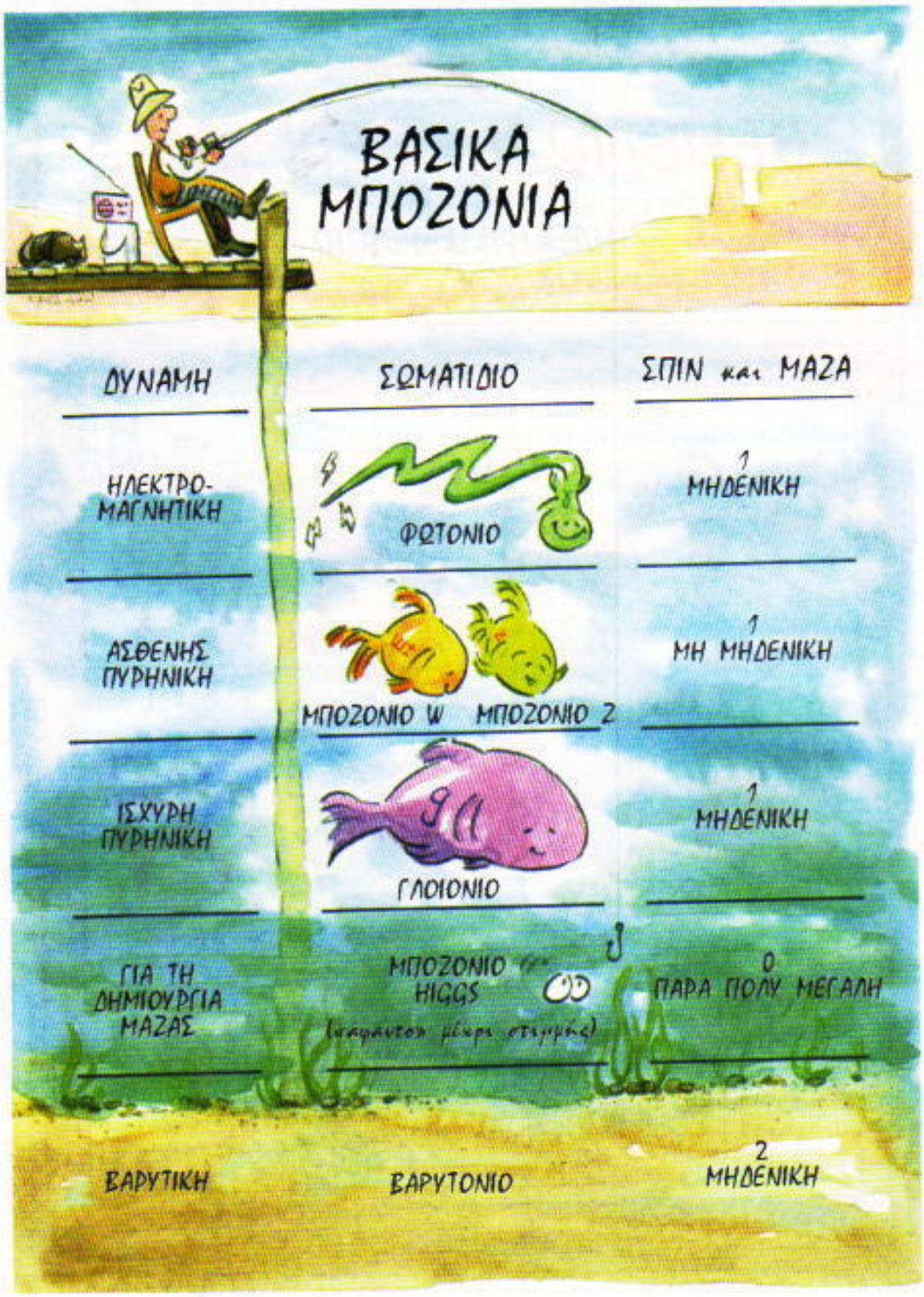
Σωματίδια με ακέραιο σπιν (όπως το φωτόνιο) ικανοποιούν τη στατιστική Bose-Einstein, και ονομάζονται μποζόνια. Πολλά από αυτά τα σωματίδια μπορούν (και κατά μία έννοια «προτιμούν») να συσσωρεύονται στην ίδια κβαντική κατάσταση, και σ' αυτήν ακριβώς την αρχή στηρίζεται η λειτουργία των λέιζερ.

Στοιχειώδη φερμιόνια —κουάρκ και λεπτόνια

Ο κατάλογος των στοιχειωδών σωματιδίων που διαθέτουμε περιλαμβάνει δώδεκα σωματίδια με σπιν 1/2: έξι κουάρκ και έξι λεπτόνια. Τα κουάρκ, που επινοήθηκαν από τους M. Gell-Mann και G. Zweig το 1963, είναι τα εξής: το «πάνω» (up), το «χαριτωμένο» (charmed), η «κορυφή» (top), που έχουν ηλεκτρικό φορτίο $^2/_3$ e, και το «κάτω» (down), το «παράδοξο» (strange) και ο «πυθμένας» (bottom), που έχουν φορτίο $-^1/_3$ e. Ένα μοναδικό κουάρκ δεν μπορεί να απομονωθεί από το *αδρόνιο* του οποίου αποτελεί μέρος. Για το λόγο αυτό, τα κουάρκ δεν μπορούν να θεωρηθούν «αυτόνομα» σωματίδια.

Η λέξη λεπτόνιο προέρχεται από την ελληνική λέξη *λεπτός*, που σημαίνει «μικρός» ή «αδύνατος». Την επινόησε ο L. Rosenfeld το 1948 για να χαρακτηρίσει οποιοδήποτε φερμιόνιο με μικρή μάζα, όπως το ηλεκτρόνιο και το νετρίνο. Σήμερα τα λεπτόνια περιλαμβάνουν τα έξι γνωστά φερμιόνια που δεν αλληλεπιδρούν μέσω της ισχυρής πυρηνικής δύναμης.

Τα τρία από αυτά έχουν ηλεκτρικό φορτίο: το ηλεκτρόνιο, το μιόνιο (περίπου 200 φορές βαρύτερο του ηλεκτρονίου) και το τ-λεπτόνιο (περίπου 17 φορές βαρύτερο του μιονίου). Σε καθένα από αυτά αντιστοιχεί και από ένα νετρίνο, οπότε έχουμε συνολικά έξι λεπτόνια. Τα νετρίνα έχουν πολύ μικρή μάζα, και πιθανόν να μην έχουν και καθόλου. Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι δεν υπάρχουν πάνω από τρία είδη νετρίνων. Αυτό μας υποδεικνύει ότι ο κατάλογός μας με τα στοιχειώδη φερμόνια είναι ολοκληρωμένος. Εάν αυτό αληθεύει ή όχι θα το δούμε στο μέλλον!



Βασικά μποζόνια

Τα σωματίδια αυτά είναι οι «μεσολαβητές» των δυνάμεων μεταξύ των στοιχειωδών φερμιονίων. Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη είναι το αποτέλεσμα της ανταλλαγής φωτονίων ανάμεσα σε φορτισμένα σωματίδια. Η ισχυρή πυρηνική δύναμη προέρχεται από την ανταλλαγή γλοιονίων (έχουν μηδενική μάζα) μεταξύ των κουάρκ. Η ασθενής πυρηνική δύναμη προέρχεται από την ανταλλαγή W ή Z μποζονίων (έχουν μη μηδενική μάζα) μεταξύ δύο οποιωνδήποτε στοιχειωδών φερμιονίων. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η βαρυτική δύναμη οφείλεται στην ανταλλαγή βαρυτονίων (με μηδενική μάζα). Τα γλοιόνια, καθώς και τα κουάρκ, είναι «περιορισμένα»: δεν μπορούν να

παρατηρηθούν ως μεμονωμένα σωματίδια. Τα (φορτισμένα) W και τα (ουδέτερα) Z μποζόνια ανακαλύφθηκαν στο Ευρωπαϊκό Κέντρο Πυρηνικών Ερευνών (CERN), έξω από τη Γενεύη, το 1983. Το τελευταίο στον κατάλογό μας από τα βασικά μποζόνια, το μποζόνιο Higgs, είναι ένα «άπαστο» και ακόμη υποθετικό σωματίδιο, μέσω του οποίου αποκτούν μάζα όλα τα σωματίδια. Ελπίζαμε πως θα «έκανε την εμφάνισή του» στον υπό κατασκευή Υπεραγώγιμο Υπερεπιταχυντή (SSC), στο Τέξας. Δυστυχώς, η ιστορία αυτή είναι πλέον παρελθόν...

Αδρόνια

Το 1962 ο σοβιετικός φυσικός L. Okun χρησιμοποίησε την ελληνική λέξη αδρός, που σημαίνει «χοντρός, ογκώδης», για να χαρακτηρίσει τα στοιχειώδη σωματίδια τα οποία αλληλεπιδρούν μέσω της ισχυρής πυρηνικής δύναμης, όπως το πρωτόνιο (όχι όμως το ηλεκτρόνιο). Σήμερα, ονομάζουμε αδρόνιο οποιοδήποτε σωματίδιο αποτελείται από κουάρκ. Τρία κουάρκ μαζί σχηματίζουν ένα *βαρυόνιο*. Ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ σχηματίζουν ένα *μεσόνιο*. Και τρία αντικουάρκ σχηματίζουν ένα *αντιβαρυόνιο*. Αυτοί είναι οι μόνοι γνωστοί τρόποι με τους οποίους τα κουάρκ συνδυάζονται μεταξύ τους για να σχηματίσουν αδρόνια. Επειδή τα βαρυόνια και τα αντιβαρυόνια σχηματίζονται από περιττό αριθμό φερμιονίων, είναι και αυτά φερμόνια. Τα μεσόνια είναι μποζόνια.

Νουκλεόνια

Με τον όρο αυτό, που χρησιμοποιείται από το 1941, αναφερόμαστε στα πρωτόνια και τα νετρόνια. Ένας ατομικός πυρήνας με μαζικό αριθμό Z περιέχει A νουκλεόνια, από τα οποία Z το πλήθος είναι τα πρωτόνια. Πυρήνες με το ίδιο Z αλλά διαφορετικό A καλούνται ισότοποι. Τα νουκλεόνια είναι φερμιόνια. Είναι τα πιο ελαφρά βαρυόνια, αποτελούμενα αποκλειστικά από «πάνω» και «κάτω» κουάρκ: δύο «πάνω» και ένα «κάτω» σχηματίζουν ένα πρωτόνιο, ενώ δύο «κάτω» και ένα «πάνω» σχηματίζουν ένα νετρόνιο. Περίπου το 99,98% κατά βάρος όλης της συνήθους ύλης αποτελείται από νουκλεόνια. Το υπόλοιπο είναι ηλεκτρόνια.

Πιόνια και μιόνια

Στη δεκαετία του 1930 ο Hideki Yukawa διατύπωσε την υπόθεση ότι η ισχυρή πυρηνική δύναμη είναι αποτέλεσμα της ανταλλαγής υποθετικών στοιχειωδών σωματιδίων μεταξύ νουκλεονίων. Απέδωσε στα σωματίδια αυτά την ονομασία μεσοτρόνια (που σύντομα έγινε μεσόνια) επειδή η μάζα τους έπρεπε να βρίσκεται κάπου ανάμεσα στη μάζα των ηλεκτρονίων και στη μάζα των νουκλεονίων. Σωματίδια με τέτοιες μάζες παρατηρήθηκαν το 1938, αποδείχτηκε όμως ότι ήταν μιόνια. Τα «σωματίδια Yukawa» ανακαλύφθηκαν τελικά το 1947. Τόσο τα πιόνια όσο και τα μιόνια πρωτοπαρατηρήθηκαν στην κοσμική ακτινοβολία. Έκτοτε ανακαλύφθηκαν πολλά άλλα είδη μεσονίων. Τα «μεσόνια Yukawa» έγιναν γνωστά ως *π*-μεσόνια, και τελικά μετονομάστηκαν σε πιόνια. Δεν είναι στοιχειώδη: όπως όλα τα μεσόνια, το καθένα αποτελείται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ.

Το κουάρκ «κορυφή»

Η θεωρία απαιτεί την ύπαρξη αυτού του κουάρκ (του *τελευταίου από τα κουάρκ*!) το βάρος του οποίου δεν πρέπει να υπερβαίνει το βάρος των 200 πρωτονίων. Οι πειραματικοί φυσικοί του Fermilab, στο Σικάγο, ανακοίνωσαν πρόσφατα ότι ήδη εντόπισαν σε πειράματα το εν λόγω κουάρκ. Το βάρος του υπολογίστηκε 60 περίπου φορές μεγαλύτερο από το βάρος του πρωτονίου.

Νετρίνα

Νετρίνα που παρήχθησαν σε πυρηνικούς αντιδραστήρες πρωτοπαρατηρήθηκαν το 1953. Έκτοτε οι φυσικοί έχουν παρατηρήσει νετρίνα που προέρχονται από επιταχυντές σωματιδίων, από την κοσμική ακτινοβολία, από το πυρηνικό καμίνι του Ήλιου και από την πρόσφατη (1987) «κοντινή» μας υπερκαινοφανή έκρηξη (έλαβε χώρα μόλις 160.000 έτη φωτός μακριά!). Μερικοί επιστήμονες πιστεύουν ότι τα νετρίνα έχουν μάζα και ότι τη μυστηριώδη «σκοτεινή» ύλη του σύμπαντος την αποτελούν νετρίνα, που είναι απομεινάρια της Μεγάλης Έκρηξης. ■

ΤΟ *QUANTUM*
ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΕΡΙΠΤΕΡΑ

— Θα το βρίσκετε την 1η κάθε μονού μήνα στην Αθήνα, τη Θεσσαλονίκη, και τις μεγαλύτερες επαρχιακές πόλεις της Ελλάδας. —
Το τρέχον τεύχος, καθώς και τα παλαιότερα τεύχη, θα μπορείτε να τα βρίσκετε στα βιβλιοπωλεία και τα γραφεία των Εκδόσεων Κάτοπτρο.

π
f
π'1

Το πέταλο του Smale

Μια μαθηματική κατασκευή που άφησε έντονα ίχνη

Yuly Ilyashenko και Anna Kotova

Ο ΑΜΕΡΙΚΑΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ Stephen Smale, που πριν από τριάντα χρόνια (1966) τιμήθηκε με το μετάλλιο Fields, προσέφερε στον κόσμο το «πεταλό» του, που προκάλεσε αίσθηση στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Και όμως, αυτή η κατασκευή είναι αρκετά απλή ώστε να παρουσιαστεί μέσα στο πλαίσιο της ύλης των μαθηματικών του λυκείου.

Συμβολική δυναμική

Ξεκινάμε από ένα πρόβλημα που μας εισάγει στη συμβολική δυναμική, και το οποίο είχε παρουσιαστεί στην 56η Μαθηματική Ολυμπιάδα της Μόσχας:

Για δύο τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a και b θεωρούμε την ακολουθία

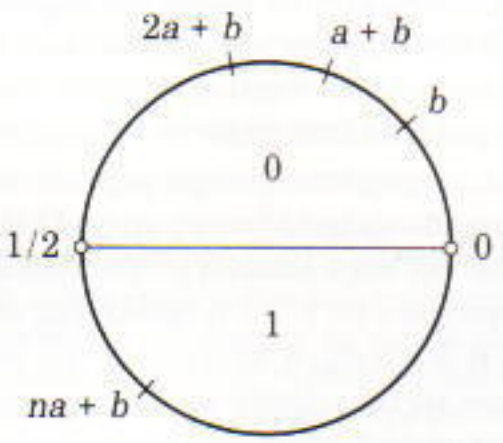
$$p_n = [2\{an + b\}], \text{ με } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(όπου $\{x\}$ και $[x]$ συμβολίζουν, αντίστοιχα, το κλασματικό και το ακέραιο μέρος ενός αριθμού x).[1] Κάθε σύνολο διαδοχικών όρων αυτής της ακολουθίας θα ονομάζεται *λέξη*. Αληθεύει ότι κάθε διατεταγμένο σύνολο που αποτελείται από k μηδενικά και μονάδες είναι λέξη της ακολουθίας p_n για κάποιους αριθμούς a και b όταν (α) $k = 4$, (β) $k = 5$;

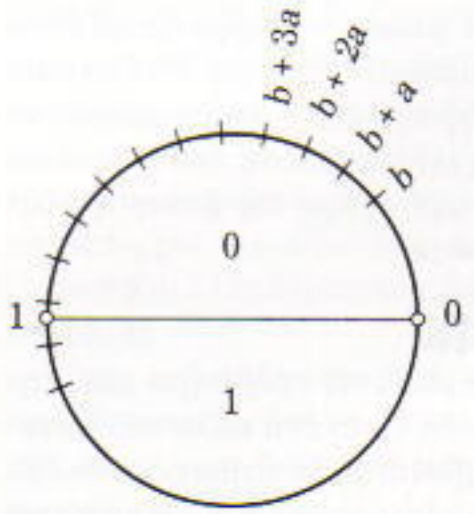
Δηλαδή, σχηματίζουμε την αριθμητική πρόοδο $na + b$, και κατόπιν παίρνουμε το κλασματικό μέρος κάθε όρου. Διπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος, και στη συνέχεια σχηματίζουμε μια νέα ακολουθία λαμβάνοντας το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος κάθε διπλασιασμού. Αν πειραματιστούμε με διάφορες τιμές των a και b βλέπουμε ότι η ακολουθία p_n αποτελείται από 0 και 1. Πραγματικά, το κλασματικό μέρος μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 1)$, επομένως το ακέραιο μέρος του διπλάσιου του κλασματικού είναι είτε 0 είτε 1.

Αυτό το πρόβλημα έχει μια κομψή γεωμετρική ερμηνεία. Θεωρήστε έναν κύκλο που η περιφέρειά του έχει μήκος 1, και ο οποίος εφάπτεται της ευθείας των αριθμών στην αρχή της. Ας φανταστούμε τώρα ότι τυλίγονται και τα δύο ημίσεα του άξονα γύρω από τον κύκλο. Τότε το σημείο x του άξονα θα συμπέσει με το σημείο του κύκλου που προέρχεται από την περιστροφή της αρχής κατά γωνία $360°\{x\}$ γύρω από το κέντρο του κύκλου. Είναι προφανές ότι όλα τα σημεία του άξονα που διαφέρουν κατά έναν ακέραιο συμπίπτουν με το ίδιο σημείο του κύκλου, διότι οι αντίστοιχες περιστροφές διαφέρουν κατά ακέραιο πλήθος ολόκληρων στροφών, και επομένως είναι ουσιαστικά οι ίδιες. Άρα, τα σημεία x και $\{x\}$ αντιπροσωπεύονται από το ίδιο σημείο του κύκλου. Τώρα το πρόβλημα σχετικά με την ακολουθία p_n αποδεικνύεται ότι είναι ένα πρόβλημα που σχετίζεται με τη *συμβολική δυναμική* των περιστροφών ενός κύκλου. Τι εννοούμε με αυτό;

Θεωρούμε τα σημεία του κύκλου που αντιστοιχούν στα b, $a + b$, $2a + b$, ... (δείτε το Σχήμα 1). Όπως ήδη επισημάναμε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αντιπροσωπεύουν την ακολουθία $\{na + b\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Βλέπουμε επίσης ότι τα σημεία αυτά προκύπτουν από το πρώτο, το b, μέσω διαδοχικών περιστροφών κατά γωνία a (εδώ, όπως και στη συνέχεια, όλες οι γωνίες εκφράζονται ως κλάσματα μιας πλήρους στροφής). Όταν το σημείο $na + b$ ανήκει στο άνω ημικύκλιο —από το σημείο 0 (συμπεριλαμβανόμενο) έως



Σχήμα 1



Σχήμα 2

1. Πιο τυπικά, το $[x]$ ορίζεται ως ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x, ενώ το $\{x\}$ ορίζεται ως $x - [x]$.

Εικονογράφηση: Mariya Konstantinova

το σημείο 1/2 (εξαιρούμενο)— η αντίστοιχη τιμή του p_n είναι 0. Για τα σημεία του κάτω ημικυκλίου, $p_n = 1$.

Μπορούμε τώρα να εξηγήσουμε τη φράση «συμβολική δυναμική». Η *δυναμική* αναφέρεται στην κίνηση ενός σημείου γύρω από έναν κύκλο σε επαναλαμβανόμενες περιστροφές. Η *συμβολική* αναφέρεται στο χαρακτήρα της πληροφορίας για τη θέση του σημείου: μας ενδιαφέρει μόνο σε ποιο ημικύκλιο ανήκει το σημείο και όχι η ακριβής θέση του. Η συμβολική δυναμική μάς επιτρέπει να λύσουμε εύκολα το πρόβλημα.

Αν υπάρχουν πολλά διαδοχικά μηδενικά στην ακολουθία μας, η γωνία της περιστροφής, ή καλύτερα το κλασματικό της μέρος, είναι μικρή διότι το κινούμενο σημείο μας παραμένει στο πάνω ημικύκλιο για αρκετά μεγάλο πλήθος διαδοχικών περιστροφών κατά γωνία a. Όταν τελικά φτάσει στο κάτω ημικύκλιο, πρέπει να παραμείνει σ' αυτό για αρκετό χρόνο επίσης (αφού η a είναι μικρή —δείτε το Σχήμα 2). Επομένως, μια ακολουθία στην οποία εμφανίζεται ένα μοναδικό 1 ανάμεσα σε μια μεγάλη σειρά από 0 δεν μπορεί να είναι λέξη της p_n.

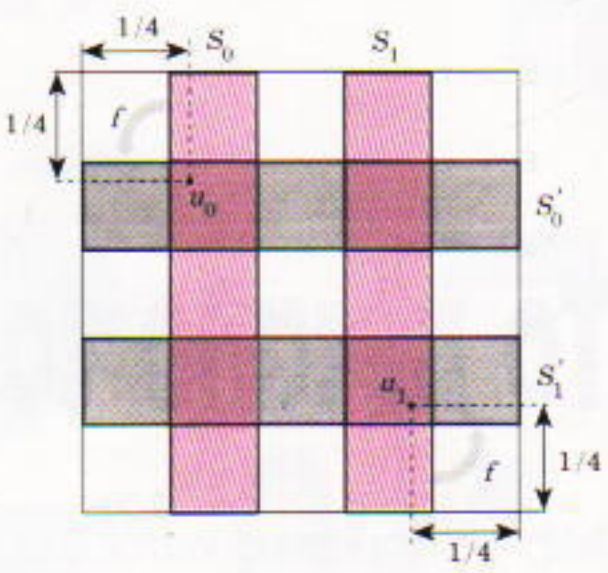
Ειδικότερα, μπορούμε να δείξουμε ότι για $k = 5$ είναι αδύνατο να εμφανιστεί η λέξη 00010. Πραγματικά, το γεγονός ότι υπάρχουν τρία διαδοχικά μηδέν στην p_n σημαίνει ότι $|a| < 1/4$ της πλήρους στροφής. Ταυτόχρονα, το τμήμα 010 μάς δείχνει ότι το σημείο κάνει ένα άλμα από το πάνω ημικύκλιο στο κάτω, και κατόπιν επιστρέφει ξανά στο πάνω. Αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν $|a| > 1/4$ της πλήρους στροφής. Αυτή η αντίφαση μας δείχνει ότι για $k = 5$ η απάντηση είναι αρνητική. Στην περίπτωση $k = 4$ μπορεί να εμφανιστεί στην p_n οποιαδήποτε από τις 16 δυνατές τετραψήφιες λέξεις (αυτό μπορεί να αποδειχτεί με άμεση έρευνα, κάτι που το αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη).

Λεξιλόγιο

Το παραπάνω πρόβλημα από την Ολυμπιάδα είναι ένα καλό παράδειγμα «συμβολικής δυναμικής». Θα θέλαμε να εξετάσουμε και γενικότερες περιπτώσεις. Για να το κάνουμε αυτό, θα μας διευκολύνει η εισαγωγή ορισμένων γενικών εννοιών. Ας θεωρήσουμε μια απεικόνιση κάποιας περιοχής —υποθέτουμε ότι ανήκει στο επίπεδο, αν και αυτός ο περιορισμός δεν είναι υποχρεωτικός— σε μια άλλη (επίπεδη) περιοχή. Η πρώτη περιοχή (στην οποία ορίζεται η απεικόνιση) ονομάζεται *χώρος των φάσεων* της απεικόνισης. Οι απεικονίσεις που προκύπτουν από διαδοχικές εφαρμογές της αρχικής απεικόνισης ονομάζονται *επαναλήψεις* της. Ακριβέστερα, αυτές είναι *θετικές* επαναλήψεις ενώ οι επαναλήψεις της αντίστροφης απεικόνισης είναι *αρνητικές* (σε σχέση με την αρχική απεικόνιση). Οι επαναλήψεις ορίζονται σε μια περιοχή που, γενικά, είναι υποσύνολο του χώρου των φάσεων. Στο άρθρο θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f^n(x)$ για την n-οστή επανάληψη της απεικόνισης f. (Για $n > 0$, είναι η f εφαρμοζόμενη n φορές, για $n < 0$, είναι η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} εφαρμοζόμενη $|n|$ φορές, και για $n = 0$, είναι η ταυτοτική απεικόνιση.)

Ορίζουμε ως *τροχιά του σημείου x κάτω από την απεικόνιση f* το σύνολο των εικόνων του x μέσω όλων των επαναλήψεων f^n της f ($n \in \mathbf{Z}$). Το σύνολο αυτό ορίζεται μόνο για τα σημεία x που ανήκουν στην τομή των πεδίων ορισμού όλων των επαναλήψεων, και θετικών και αρνητικών.

Ας φανταστούμε τώρα ότι χωρίζουμε το χώρο φάσεων σε δύο μέρη, S_0 και S_1. Σε κάθε σημείο που έχει καλά ορισμένη τροχιά αντιστοιχίζουμε τη «μοίρα» του. Δηλαδή, θεωρούμε μια ακολουθία a_n αποτελούμενη από 0 και 1, που ορίζεται από τον εξής κανόνα: $a_n = 0$ όταν το σημείο $f^n(x)$ ανήκει στο S_0, και $a_n = 1$ όταν το σημείο $f^n(x)$ ανήκει στο S_1. Συμβολίζουμε αυτή την ακολουθία με $\omega(x)$ και την ονομάζουμε *μοίρα του σημείου x*. Εκτός από την «πλήρη μοίρα» (ή απλώς «μοίρα») που προκύπτει όταν το n μεταβάλλεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$, θα χρησιμοποιήσουμε μερικές φορές και τα «τμήματά» της: τη μελλοντική και την παρελθούσα μοίρα, που αντιστοιχούν σε $n \geq 0$ η πρώτη και σε $n < 0$ η δεύτερη, ή πεπερασμένες μοίρες που αντιστοιχούν σε διάφορα πεπερασμένα διαστήματα αριθμών $n_1 \leq n \leq n_2$.



Σχήμα 3

Τη συμβολική δυναμική την ενδιαφέρει μόνο αυτή η πληροφορία σχετικά με τις τροχιές —δεν ασχολείται με την ακριβή θέση του σημείου $f^n(x)$· ζητά να μάθει μόνο σε ποιο τμήμα του χώρου των φάσεων ανήκει. Μελετά φυσικές ερωτήσεις παρόμοιες με αυτές που συζητήσαμε στο πρόβλημα της Ολυμπιάδας: είναι δυνατόν κάποια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία από 0 και 1 να πραγματοποιηθεί ως μοίρα ενός συγκεκριμένου σημείου; Αν ναι, πόσα σημεία έχουν τη δεδομένη μοίρα; Επιλύοντας το πρώτο πρόβλημα είδαμε ότι μερικές ακολουθίες δεν είναι δυνατόν να αποτελέσουν μοίρα των σημείων. Το δεύτερο ζήτημα, σχετικά με το σύνολο των σημείων με δεδομένη μοίρα, δεν εξετάστηκε σ' αυτή την περίπτωση και είναι ένα πολύ χρήσιμο πρόβλημα που το αφήνουμε στον αναγνώστη.

Η απεικόνιση πέταλο

Σε τούτο το σημείο μπορούμε ν' αρχίσουμε να μιλάμε για το πέταλο του Smale. Πρέπει να δηλώσουμε εξαρχής ότι αυτή η απεικόνιση δεν μοιάζει καθόλου με πέταλο. Θα εξηγήσουμε την προέλευση του ονόματος στο τέλος του άρθρου.

Θεωρούμε ένα μοναδιαίο τετράγωνο. Το χωρίζουμε σε πέντε ίσες κατακόρυφες λωρίδες και, παρομοίως, σε πέντε ίσες οριζόντιες (Σχήμα 3). Από τις κατακόρυφες λωρίδες αφήνουμε μόνο τη δεύτερη και την τέταρτη και ονομάζουμε την αριστερή S_0 και τη δεξιά S_1. Παρομοίως, συμβολίζουμε με S_0' και S_1' τη δεύτερη και την τέταρτη (από την πάνω κορυφή) οριζόντια λωρίδα αντίστοιχα.

Ας θεωρήσουμε τώρα την απεικόνιση που συστέλλει το ορθογώνιο S_0 κατακόρυφα κατά έναν παράγοντα 1/5, το τεντώνει οριζόντια στο πενταπλάσιο και εναποθέτει ό,τι προκύπτει πάνω στο ορθογώνιο S_0'. Με λίγη σκέψη βλέπουμε ότι το σημείο που βρίσκεται προς την πάνω αριστερή γωνία του αρχικού μοναδιαίου τετραγώνου και απέχει 1/4 από την αριστερή και την πάνω πλευρά, μένει άθικτο με αυτή την απεικόνιση. Επομένως, αυτό είναι το σημείο ως προς το οποίο εκτελείται η κατακόρυφη συστολή και η οριζόντια ομοιοθεσία.

Με αυτό τον τρόπο ενεργεί η απεικόνισή μας στο ορθογώνιο S_0. Το πεδίο ορισμού της, όμως, αποτελείται από δύο ορθογώνια —S_0 και S_1. Επί του S_1 ορίζεται τελείως όμοια, με τη διαφορά ότι η πάνω αριστερή γωνία του μεγάλου τετραγώνου πρέπει να αντικατασταθεί από την κάτω δεξιά. Η απεικόνιση συστέλλει πέντε φορές το ορθογώνιο S_1 κατακόρυφα, το τεντώνει πέντε φορές οριζόντια και το εναποθέτει πάνω στο ορθογώνιο S_1'. Το σημείο του αρχικού τετραγώνου που απέχει 1/4 από την κάτω και από τη δεξιά πλευρά παραμένει σταθερό (Σχήμα 3).

Επομένως, η απεικόνιση πέταλο είναι η απεικόνιση του Σχήματος 3. Ο χώρος των φάσεών της είναι η ένωση των ορθογωνίων S_0 και S_1. Το πεδίο τιμών της είναι η ένωση των S_0' και S_1'.

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των σημείων για τα οποία ορίζονται πλήρεις τροχιές μέσω αυτής της απεικόνισης είναι πολύ λιγότερο περιεκτικό απ' ό,τι ο χώρος των φάσεων. Για να το περιγράψουμε, θα χρειαστούμε την κατασκευή του *τέλειου συνόλου Cantor*, που ονομάζεται επίσης ασυνεχές του Cantor ή απλώς σύνολο Cantor.

Το τέλειο σύνολο Cantor

Ο ορισμός του συνόλου Cantor που θα δώσουμε δεν είναι ακριβώς ίδιος με τον συνηθισμένο. Θεωρούμε το διάστημα [0, 1]. Το διαιρούμε σε πέντε ίσα μέρη, αφήνουμε το δεύτερο και το τέταρτο διάστημα, και σβήνουμε τα άλλα τρία. Στη συνέχεια, εκτελούμε την ίδια πράξη στα δύο εναπομείναντα διαστήματα: τα διαιρούμε σε πέντε μέρη, διαγράφουμε τα ακραία και το μεσαίο διάστημα, κ.ο.κ.[2]

Τα διαστήματα που απομένουν μετά το πρώτο βήμα, τα [1/5, 2/5] και [3/5, 4/5] θα τα ονομάζουμε διαστήματα πρώτης τάξης. Επαγωγικά, τα διαστήματα n-οστής τάξης είναι τα αντίστοιχα τμήματα των διαστημάτων της $(n-1)$-οστής τάξης. Θα συμβολίζουμε με W_n την ένωση όλων των διαστημάτων τάξης n.

Ορίζουμε ως *τέλειο σύνολο Cantor*, C, την τομή όλων των συνόλων W_n, με $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Είναι κενή αυτή η τομή; Αν όχι, πόσα σημεία περιέχει;

Αποδεικνύεται ότι το *σύνολο C περιέχει το ίδιο ακριβώς πλήθος σημείων με ολόκληρο το διάστημα* [0, 1].

Για να αποδείξουμε αυτή την αξιοσημείωτη πρόταση, ας γράψουμε όλους τους αριθμούς από το 0 έως το 1 στο πενταδικό σύστημα αρίθμησης (δηλαδή, στο σύστημα αρίθμησης με βάση το 5 αντί στο συνηθισμένο δεκαδικό) και ας θεωρήσουμε τα διαστήματα πρώτης τάξης:

$$[1/5,\ 2/5] = [0{,}1,\ 0{,}2],$$
$$[3/5,\ 4/5] = [0{,}3,\ 0{,}4]$$

(τα κλάσματα στη δεξιά πλευρά είναι *πενταδικοί αριθμοί* —δηλαδή, η παράσταση $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ συμβολίζει τον αριθμό $a_1/5 + a_2/25 + a_3/125 + \ldots$, όπου $0 \le a_i \le 4$). Βλέπουμε ότι οι αριθμοί που ανήκουν σ' αυτά τα διαστήματα μπορούν να περιγραφούν ως οι αριθμοί που το πρώτο τους ψηφίο μετά την (πενταδική) υποδιαστολή είναι 1 είτε 3. (Τα δεξιά άκρα των τμημάτων μας μοιάζουν να αποτελούν εξαιρέσεις. Μπορούμε, όμως, να τα γράψουμε ως περιοδικά κλάσματα, $0{,}2 = 0{,}1444\ldots$ και $0{,}4 = 0{,}3444\ldots$, ή απλώς να τα αγνοήσουμε —ούτως ή άλλως, θα αφαιρεθούν στο επόμενο βήμα.) Τι θα συμβεί όταν τα διαστήματα πρώτης τάξης διαιρεθούν σε διαστήματα δεύτερης τάξης; Από το καθένα τους θα απομείνουν δύο μικρότερα διαστήματα μήκους 1/125:

$$[1/5 + 1/25,\ 1/5 + 2/25],$$
$$[1/5 + 3/25,\ 1/5 + 4/25],$$
$$[3/5 + 1/25,\ 3/5 + 2/25],$$
$$[3/5 + 3/25,\ 3/5 + 4/25].$$

Με πενταδική γραφή, οι αριθμοί που ανήκουν σ' αυτά τα διαστήματα γράφονται ως 0,11..., 0,13..., 0,31..., 0,33..., αντίστοιχα, και επομένως το δεύτερο ψηφίο τους μετά την υποδιαστολή είναι επίσης 1 ή 3.

Όπως είναι φανερό, αυτό συνεχίζεται για πάντα: τα πρώτα n πενταδικά ψηφία οποιουδήποτε αριθμού του συνόλου W_n είναι μόνο 1 ή 3. (Μπορείτε να αποδείξετε αυτή την πρόταση χρησιμοποιώντας αυστηρά τέλεια επαγωγή.)

Επομένως, κάθε σημείο του συνόλου Cantor που ορίσαμε μπορεί να γραφεί ως άπειρο πενταδικό κλάσμα, όλα τα ψηφία του οποίου είναι ένα ή τρία.

Αντίστροφα, κάθε τέτοιο κλάσμα αντιπροσωπεύει ένα σημείο του συνόλου C. Πραγματικά, αν το πρώτο ψηφίο μετά την υποδιαστολή ενός πενταδικού κλάσματος είναι 1, το αντίστοιχο σημείο ανήκει στο αριστερό διάστημα πρώτης τάξης, ενώ αν είναι 3, το σημείο βρίσκεται στο δεξιό διάστημα. Αφού το δεύτερο ψηφίο είναι 1 ή 3, το σημείο ανήκει σε ένα από τα διαστήματα τάξης 2. Τέλος, μπορούμε να αποδείξουμε, μέσω τέλειας επαγωγής, ότι αυτό το σημείο ανήκει στο W_n για κάθε n —επομένως, ανήκει στην τομή όλων των συνόλων W_n, δηλαδή στο σύνολο C.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε όλα τα 1 στα κλάσματά μας με το 0 και όλα τα 3 με το 1, θα πάρουμε όλα τα δυνατά άπειρα κλάσματα που αποτελούνται από 0 και 1. Αυτά όμως είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι *δυαδικές* αναπαραστάσεις όλων των αριθμών από το 0 έως το 1! Με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου Cantor και ολόκληρου του διαστήματος [0, 1].

Είναι ενδιαφέρουσα άσκηση να επαληθεύσουμε ότι το συνολικό μήκος όλων των διαστημάτων που αφαιρούνται από το [0, 1] κατά την κατασκευή του συνόλου Cantor ι-

2. Η κλασική κατασκευή διαιρεί το διάστημα σε τρία μέρη, διαγράφει το κεντρικό, υποβάλλει τα δύο τμήματα που απομένουν στην ίδια διαδικασία, και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο επ' άπειρον. Μπορούμε να βεβαιωθούμε εύκολα πως η κατασκευή των «δύο πέμπτων» είναι ισοδύναμη με την κατασκευή των «δύο τρίτων».

σούται με 1. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε κατασκευάσει ένα υποσύνολο C του μοναδιαίου διαστήματος που περιέχει το ίδιο πλήθος σημείων με ολόκληρο το διάστημα αλλά δεν καταλαμβάνει καθόλου χώρο σ' αυτό!

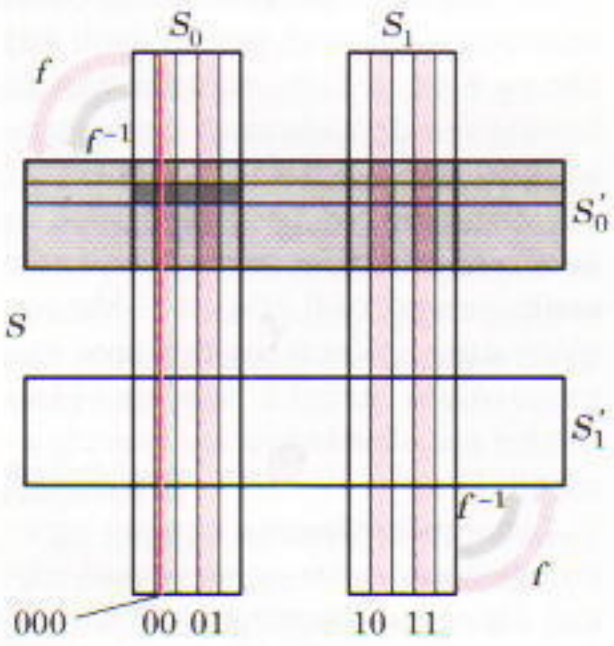
Συμβολική δυναμική της απεικόνισης πέταλο

Πριν ασχοληθούμε με τα σημεία που έχουν μια προδιαγεγραμμένη *άπειρη* μοίρα στην απεικόνιση πέταλο, ας εξετάσουμε μια απλούστερη ερώτηση: ποιο είναι το σύνολο των σημείων με δεδομένη πεπερασμένη μοίρα;

Για παράδειγμα, έστω $a_0 = 0$ ή $a_0 = 1$. Ποιο είναι το αντίστοιχο σύνολο σημείων στο χώρο φάσεων; Μπορούμε να συναγάγουμε την απάντηση άμεσα από τον ορισμό. Το γεγονός ότι $a_0 = 0$ σημαίνει, εξ ορισμού, ότι η εικόνα του x μέσω της μηδενικής δύναμης της f ανήκει στο S_0. Όμως, f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση: $f^0(x) = x$, και επομένως η συνθήκη $a_0 = 0$ σημαίνει ότι το σημείο x ανήκει στο S_0. Και, φυσικά, $a_0 = 1$ αντιστοιχεί στο S_1.

Ας εξετάσουμε τώρα το ίδιο πρόβλημα για μια πεπερασμένη μοίρα μήκους 2. Ποιο είναι το σύνολο των σημείων με δεδομένη τιμή του ζεύγους a_0a_1 (που μπορεί να είναι 00, 01, 10, ή 11);

Δείτε το Σχήμα 4. Τα σημεία 00 είναι αυτά που βρίσκονται στο S_0 μαζί με τις πρώτες εικόνες τους. Αυτό σημαίνει ότι η εικόνα ενός τέτοιου σημείου ανήκει στο δεύτερο από τα πέντε ίσα τετράγωνα στα οποία διαιρείται το ορθογώνιο S_0'. Ποια είναι τα σύνολα (αντίστροφες εικόνες) απ' όπου προκύπτουν αυτά τα τετράγωνα μέσω της απεικόνισης f; Η απάντηση είναι φανερή: πρέπει να χωρίσουμε το ορθογώνιο S_0 σε πέντε ίσα κατακόρυφα ορθογώνια. Η απεικόνιση f μεταφέρει το k-οστό (από τα αριστερά) ορθογώνιο στο k-οστό από τα αριστερά τετράγωνο του S_0'. Άρα, το σύνολο των σημείων με μέλλουσα μοίρα 00 είναι η δεύτερη από τα αριστερά κατακόρυφη λωρίδα του S_0. Παρομοίως, τα σημεία της τέταρτης από τα αριστερά λωρίδας του S_0 τα περιμένει η μοίρα 01. Τα σύνολα των σημείων με μέλλουσα μοίρα 10 και 11 είναι, αντίστοιχα, η δεύτερη και η τέταρτη από τις πέντε κατακόρυφες λωρίδες του S_1.



Σχήμα 4

Τώρα είναι εύκολο να σχεδιάσουμε το σύνολο των σημείων που η μέλλουσα μοίρα τους αρχίζει από τρία δεδομένα σύμβολα $a_0a_1a_2$. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το σύνολο των σημείων με μέλλουσα μοίρα 000. Βρίσκονται όλα στη λωρίδα με μέλλουσα μοίρα 00. Η απεικόνιση f μεταφέρει αυτή τη λωρίδα σε ένα στενό ορθογώνιο ύψους 1/25 και μήκους 1. Τα σημεία όμως που αναζητούμε θέλουμε να έχουν τη μοίρα 000. Αυτό σημαίνει ότι οι εικόνες τους μέσω της δεύτερης επαναληπτικής f^2 πρέπει να ανήκουν όχι μόνο στο στενό ορθογώνιο αλλά και στο S_0. Η τομή του S_0 με αυτό το ορθογώνιο είναι ένα $1/5 \times 1/25$ ορθογώνιο, το σκουρότερο στο Σχήμα 4, και είναι η εικόνα του συνόλου με μοίρα 000 μέσω της f^3. Επομένως, αυτό το σύνολο είναι η κατακόρυφη στενή λωρίδα πλάτους 1/125 —η δεύτερη από τις πέντε λωρίδες στις οποίες χωρίζεται η λωρίδα 00.

Αυτοί οι συλλογισμοί μπορεί να συνεχιστούν επ' άπειρον, και οδηγούμαστε στο επόμενο λήμμα. Στη διατύπωσή του χρησιμοποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων που η αρχή του είναι η κάτω αριστερή γωνία του αρχικού μοναδιαίου τετραγώνου. Εκφράζουμε αυτές τις συντεταγμένες στο πενταδικό σύστημα αρίθμησης.

ΛΗΜΜΑ 1. *Το σύνολο των σημείων με δεδομένη άπειρη μέλλουσα μοίρα $\omega^+ = a_0a_1...a_n...$ είναι ένα κατακόρυφο διάστημα αποτελούμενο από σημεία που οι συντεταγμένες τους x είναι ίσες με $a(\omega^+) = 0,a_0a_1...a_n...$, όπου $a_n = 1$ αν $a_n = 0$ και $a_n = 3$ αν $a_n = 1$, ενώ οι συντεταγμένες y κυμαίνονται από το 0 έως το 1.*

Για να το αποδείξουμε επισημαίνουμε ότι, όπως δείξαμε προηγουμένως, όλα τα σημεία με δεδομένη μοίρα μήκους n έχουν τις συντεταγμένες x σε ένα σταθερό διάστημα n-οστής τάξης —ένα από αυτά που εμφανίζονται στην κατασκευή του συνόλου Cantor. Οι αναγνώστες μπορούν να προσπαθήσουν, για άσκηση, να δώσουν μια αυστηρή απόδειξη του λήμματος.

Και τώρα φτάνουμε στο κύριο αποτέλεσμα της έρευνάς μας.

ΘΕΩΡΗΜΑ: *Κάθε ακολουθία ω από μηδενικά και μονάδες, άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις, μπορεί να πραγματοποιηθεί ως μοίρα ενός και μόνον ενός σημείου. Το σύνολο όλων των σημείων που έχουν μια καλά ορισμένη άπειρη μοίρα αποτελείται από τα σημεία που οι συντεταγμένες τους x ανήκουν στο σύνολο Cantor μιας οριζόντιας πλευράς του τετραγώνου και οι συντεταγμένες y στο σύνολο Cantor μιας κάθετης πλευράς.*

Απόδειξη. Η δεδομένη ακολουθία $\omega = ...a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2...$ μπορεί να παρασταθεί ως συνδυασμός δύο υπακολουθιών —μιας άπειρης προς τα δεξιά και μιας άπειρης προς τα αριστερά: $\omega^+ = a_0a_1a_2...$ και $\omega^- = ...a_{-3}a_{-2}a_{-1}$. Χρειαζόμαστε ακόμη ένα λήμμα για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Το Λήμμα 2 μεταφέρει το συμπέρασμα του Λήμματος 1 στις ακολουθίες που είναι άπειρες προς τα αριστερά, και αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

ΛΗΜΜΑ 2. *Το σύνολο των σημείων με δεδομένο άπειρο παρελθόν $\omega^- = ...a_{-n}...a_{-1}$ είναι ένα οριζόντιο διάστημα αποτελούμενο από σημεία που οι συντεταγμένες τους y είναι όλες ίσες με $b(\omega^-) = 0,\beta_{-1}\beta_{-2}...$, όπου $\beta_{-n} = 1$ αν $a_{-n} = 0$ και $\beta_{-n} = 3$ αν $a_{-n} = 1$, ενώ οι συντεταγμένες x κυμαίνονται από το 0 έως το 1.*

Έτσι, έχουμε βρει το σύνολο όλων των σημείων με μέλλουσα μοίρα ω^+ (είναι ένα κατακόρυφο διάστημα) και με παρελθούσα μοίρα ω^- (είναι ένα οριζόντιο διάστημα). Ποιο είναι επο-

μένως το σύνολο των σημείων με μοίρα ω; Είναι σαφές ότι πρόκειται για το σημείο τομής αυτών των δύο διαστημάτων! Αυτό το σημείο υπάρχει πάντοτε και είναι μοναδικό.

Επομένως το θεώρημα αποδείχτηκε, και μπορούμε να συλλέξουμε τους καρπούς των προσπαθειών μας.

Πορίσματα

Ας εξετάσουμε αρχικά τα σημεία με την απλούστερη μοίρα —τα σταθερά σημεία που βλέπουμε στο Σχήμα 3. Το πάνω αριστερό, το u_0, παραμένει στη θέση του στο S_0 σε όλο το παρελθόν και σε όλο το μέλλον. Η μοίρα του αποτελείται μόνο από 0. Ομοίως, η μοίρα του κάτω δεξιού σταθερού σημείου u_1 αποτελείται μόνο από 1.

Εκτός από τα σταθερά σημεία, υπάρχει και ένα άλλο είδος σημείων που έχουν ενδιαφέρον —τα περιοδικά. Πρόκειται για τα σημεία που επανέρχονται στη θέση τους έπειτα από ένα σταθερό πλήθος επαναλήψεων της απεικόνισης f. Πόσα είναι αυτά τα σημεία;

Μια απρόσμενη και αξιοσημείωτη ιδιότητα της f είναι ότι το πλήθος αυτών των σημείων είναι άπειρο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. *Η απεικόνιση f έχει άπειρο πλήθος περιοδικών σημείων.*

Απόδειξη. Ένα περιοδικό σημείο έχει περιοδική μοίρα —δηλαδή, μια περιοδική ακολουθία 0 και 1. Και μάλιστα, το θεώρημα μας επιτρέπει να αποδείξουμε την αντίστροφη πρόταση: όταν η μοίρα ενός σημείου είναι περιοδική, τότε το σημείο είναι περιοδικό.

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι για κάποιον θετικό ακέραιο p η μοίρα ενός σημείου x ικανοποιεί την ιδιότητα

$$a_{n+p} = a_n$$

για κάθε $n \in \mathbf{Z}$ —δηλαδή, είναι περιοδική με περίοδο p. Τότε το σημείο x επιστρέφει στη θέση του σε p το πολύ επαναλήψεις της απεικόνισης f, διότι τα σημεία x και $f^p(x)$ έχουν την ίδια μοίρα, και επομένως συμπίπτουν λόγω της μοναδικότητας του σημείου με δεδομένη μοίρα. Απομένει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος περιοδικών σημείων, αφού υπάρχει άπειρο πλήθος περιοδικών ακολουθιών από 0 και 1, και ότι καθεμία ορίζει ένα περιοδικό σημείο.

Στην πορεία της εξέλιξής του μέσω των επαναλήψεων της απεικόνισης f ένα περιοδικό σημείο x κάνει «άλματα» μεταξύ ενός πεπερασμένου πλήθους θέσεων —και συγκεκριμένα, των θέσεων x, $f(x)$, ..., $f^p(x)$, όπου p είναι η περίοδός του. Ένας άλλος τύπος τροχιάς είναι αυτή που προσεγγίζει ένα συγκεκριμένο οριακό σημείο καθώς το $n \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα σημεία μιας τέτοιας τροχιάς βρίσκονται, για αρκετά μεγάλα n, στο εσωτερικό μιας περιοχής του οριακού σημείου, ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι αυτή. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το οριακό σημείο u πρέπει αναγκαστικά να είναι ένα σταθερό σημείο της απεικόνισης f. Πραγματικά, αν τα σημεία $f^n(x)$ τείνουν στο σημείο u όταν το $n \to \infty$, τότε το σημείο $f^{n+1}(x)$ τείνει στο $f(u)$, επειδή, από τον ορισμό της f, η απόσταση μεταξύ των $f^{n+1}(x)$ και $f(u)$ είναι το πολύ πενταπλάσια της απόστασης μεταξύ των $f^n(x)$ και u, επομένως τείνει επίσης στο μηδέν. Γεωμετρικά, όμως, οι ακολουθίες $f^n(x)$ και $f^{n+1}(x)$ είναι ίδιες (διαφέρουν μόνο στην αρίθμησή τους)· επομένως τείνουν στο ίδιο σημείο, και $f(u) = u$. Τους ίδιους συλλογισμούς μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε και στη μελέτη της οριακής συμπεριφοράς μιας τροχιάς όταν $n \to -\infty$.

Συνδυάζοντας τις οριακές ιδιότητες του παρελθόντος και του μέλλοντος μιας τροχιάς καταλήγουμε στους επόμενους ορισμούς: μια τροχιά ονομάζεται *ομοκλινική* όταν τα σημεία της τείνουν στο ίδιο σταθερό σημείο και όταν το $n \to \infty$ και όταν $n \to -\infty$. Εάν τείνει σε διαφορετικό σταθερό σημείο στο άπειρο παρελθόν απ' ό,τι στο άπειρο μέλλον, η τροχιά ονομάζεται *ετεροκλινική*.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. *Η απεικόνιση f έχει άπειρο πλήθος ομοκλινικών και ετεροκλινικών τροχιών.*

Για να αποδείξουμε αυτό το πόρισμα θεωρούμε ένα σημείο του οποίου η μοίρα από ένα μελλοντικό χρονικό σημείο και μετά, όπως και από ένα χρονικό σημείο στο παρελθόν και προηγουμένως, αποτελείται από ατελεύτητη σειρά μηδενικών. Υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων σημείων, και επομένως άπειρο πλήθος τροχιών. Θα αποδείξουμε ότι όλες αυτές οι τροχιές είναι ομοκλινικές, με όριο το σταθερό σημείο u_0 του S_0.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι τα «μελλοντικά μηδενικά» εμφανίζονται τη χρονική στιγμή n: $a_n = a_{n+1} = \ldots = 0$. Τότε η άπειρη μέλλουσα μοίρα του $f^k(x)$, με $k \geq n$ είναι η ίδια με του u_0 (για το u_0, η μοίρα αποτελείται μόνο από μηδενικά). Λόγω του Λήμματος 1, τα $f^k(x)$ και u_0 έχουν την ίδια συντεταγμένη x. Επομένως, το $f^k(x)$ για $k \geq n$ παραμένει πάντοτε στο ίδιο κατακόρυφο διάστημα της S_0, και λόγω του ορισμού της f η απόστασή του από το u_0 μειώνεται πέντε φορές με κάθε εφαρμογή της f. Αυτό σημαίνει ότι το $f^k(x)$ τείνει στο u_0 όταν το $n \to \infty$. Ο ίδιος συλλογισμός εφαρμόζεται και για το παρελθόν, με τη διαφορά ότι το κατακόρυφο διάστημα που διέρχεται από το u_0 πρέπει να αντικατασταθεί με το οριζόντιο.

Αντικαθιστώντας τα 0 με 1, θα πάρουμε ομοκλινικές τροχιές που τείνουν στο δεύτερο σταθερό σημείο u_1 (στην S_1). Και αν αντικαταστήσουμε τα 0 με 1 μόνο στο μέλλον ή μόνο στο παρελθόν, θα πάρουμε ετεροκλινικές τροχιές.

Παρατηρήστε ότι η περιγραφή των ομοκλινικών και των ετεροκλινικών τροχιών που χρησιμοποιήσαμε εδώ είναι πλήρης —δηλαδή, η μοίρα όλων αυτών των τροχιών περιέχει μια ατελεύτητη σειρά από 0 και/ή 1 και στα δύο άκρα της.

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την προηγούμενη.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. *Για οποιαδήποτε σημεία x και y υπάρχει ένα σημείο που η τροχιά του στο μέλλον τείνει στην τροχιά του x, ενώ στο παρελθόν τείνει στην τροχιά του y.*

Προσπαθήστε να αποδείξετε μόνοι σας αυτό το γεγονός. Το αποτέλεσμα που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε (και το οποίο στην πραγματικότητα χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Πορίσματος 2) εμφανίζεται στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος: *κάθε ακολουθία από 0 και 1 που αποτελείται από το «παρελθόν» ήμισυ ω^- και το «μέλλον» ήμισυ ω^+ αποτελεί τη μοίρα ενός σημείου με συντεταγμένες $(a(\omega^+), b(\omega^-))$, όπου τα a και b ορίζονται όπως στα Λήμματα 1 και 2.*

Ολοκληρώνουμε με μία ακόμη ιδιότητα των περιοδικών τροχιών, την απόδειξη της οποίας αφήνουμε επίσης ως άσκηση.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4. *Για κάθε περίοδο p, υπάρχει πεπερασμένο μόνο πλήθος περιοδικών σημείων.*

Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι κάθε περιοδικό σημείο με δεδομένη περίοδο έχει μια περιοχή στην οποία δεν υπάρχουν άλλα σημεία με την ίδια περίοδο. Μια άλλη ενδιαφέρουσα ερώτηση που μπορούμε να θέσουμε στο ίδιο πλαίσιο είναι πόσες περιοδικές τροχιές υπάρχουν με δεδομένη ελάχιστη περίοδο *p*.

Γιατί λοιπόν προκάλεσε τέτοια αίσθηση το παράδειγμα που μελετήσαμε; Γιατί μετέβαλε τη μαθηματική σκέψη σε ό,τι αφορά τη δυναμική;

Laplace και Smale: ντετερμινισμός και χάος

Πριν από δύο περίπου αιώνες, ο Pierre Simon Laplace, στην πραγματεία του *Φιλοσοφικό Δοκίμιο περί των Πιθανοτήτων*, έγραφε: «Ένα έλλογο ον, το οποίο γνωρίζει ανά πάσα στιγμή όλες τις δυνάμεις που κινούν τη φύση και τις σχετικές θέσεις όλων των ουσιών που τη συνιστούν, θα μπορούσε —αν ο νους του ήταν αρκετά ευρύς ώστε να αναλύει όλα αυτά τα δεδομένα— να συμπεριλάβει σε έναν τύπο την κίνηση των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος μαζί με την κίνηση των μικρότερων ατόμων. Τίποτε δεν θα ήταν αβέβαιο γι' αυτό —θα μπορούσε με μια ματιά να διακρίνει και το μέλλον και το παρελθόν».

Αυτά τα λόγια περιέχουν μια μεγάλη φιλοσοφική ανακάλυψη: όλες οι εξελικτικές διαδικασίες στο σύμπαν περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις —πιθανόν σε έναν χώρο φάσεων πολύ μεγάλης διάστασης.

Αυτή η ιδέα βασίζεται σε ένα μαθηματικό γεγονός που δεν ήταν ακόμη γνωστό στη μαθηματική πρωτοπορία εκείνης της εποχής —το θεώρημα για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο της λύσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Το θεώρημα αυτό το απέδειξε αργότερα ο Augustine Louis Cauchy.

Για μια μεγάλη περίοδο φαινόταν ότι η φιλοσοφία που βασιζόταν σ' αυτό το θεώρημα περιέγραφε κατάλληλα την πραγματικότητα που μας περιβάλλει. Το πέταλο του Smale μάς προσφέρει τη βάση για μια τελείως διαφορετική θεώρηση.

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε μια διαδικασία που περιγράφεται από την απεικόνιση *f*: παρακολουθούμε την εξέλιξη των σημείων μέσω των επαναληπτικών αυτής της απεικόνισης. Όπως και προηγουμένως, αντί της πραγματικής τροχιάς ενός σημείου, μας ενδιαφέρει η μοίρα του. Ας υποθέσουμε ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμά μας δύο φορές για το ίδιο σημείο: και στις δύο περιπτώσεις επιλέγουμε ένα σημείο με τις ίδιες συντεταγμένες και παρατηρούμε πού μεταφέρεται από την απεικόνισή μας και τις επαναλήψεις της.

Το πρόβλημα είναι ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε τις συντεταγμένες με πλήρη ακρίβεια. Αν καθοριστούν οι συντεταγμένες από τον πειραματιστή, τότε τα σημεία που θα επιλεγούν στις δύο δοκιμές δεν θα συμπίπτουν με ακρίβεια —θα διαφέρουν έστω και λίγο μεταξύ τους. Και, όπως γνωρίζουμε, όσο μικρότερη είναι η διαφορά, για τόσο μεγαλύτερο διάστημα θα συμπίπτει η μοίρα των σημείων. Όμως, αναγκαστικά, θα έρθει η στιγμή που η μοίρα τους θα διαφοροποιηθεί.

Φανταστείτε ότι έχουμε εκτελέσει το πρώτο πείραμα και ότι έχουμε καταγράψει την άπειρη μοίρα του πρώτου σημείου. Επίσης, ας φανταστούμε ένα ακόμη πείραμα που εκτελείται ταυτόχρονα: κάποιος ρίχνει ένα νόμισμα και γράφει 0 όταν έρχεται κορώνα και 1 όταν έρχεται γράμματα. Προκύπτει έτσι μία ακόμη άπειρη ακολουθία από 0 και 1. Στη συνέχεια, συγχωνεύουμε τις δύο ακολουθίες: γράφουμε την πρώτη από το $-\infty$ έως μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή —ας πούμε, $n = 1.000$— και από τη στιγμή αυτή και μετά γράφουμε τη δεύτερη ακολουθία. Βάσει του θεωρήματος για την πραγματοποίηση μιας τυχαίας μοίρας, υπάρχει ένα σημείο που η μοίρα του συμπίπτει με τη νέα ακολουθία. Αυτό το σημείο απέχει το πολύ $5^{-1.000}$ από το πρώτο (έχουν ίδιες συντεταγμένες *y* επειδή έχουν το ίδιο παρελθόν και οι συντεταγμένες *x* έχουν ίδια τα πρώτα 1.000 πενταδικά ψηφία). Επομένως, από την πλευρά οποιουδήποτε πειραματιστή είναι αξεχώριστα. Η μοίρα τους, όμως, από μια συγκεκριμένη στιγμή και μετά, είναι διαφορετική, και η διαφορά τους έχει τυχαία φύση.

Το ίδιο φαινόμενο παρουσιάζεται και στις περισσότερο πολύπλοκες διαδικασίες που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Ονομάζεται *πειραματική μη αναπαραγωγιμότητα*. Μπορούμε να εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα, αναπαράγοντας τις αρχικές του συνθήκες με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, και με την πάροδο του χρόνου να παρατηρήσουμε τελείως ανόμοια αποτελέσματα.

Την τελευταία δεκαετία, η έρευνα της χαοτικής συμπεριφοράς των ντετερμινιστικών συστημάτων προσελκύει το πλέον έντονο ενδιαφέρον. Σε πολλά πραγματικά συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, ο ντετερμινισμός καταλήγει μια καθαρά θεωρητική ιδιότητα. Στην πράξη, οι αναπόφευκτες αποκλίσεις οδηγούν τα φαινομενικά ταυτόσημα πειράματα σε χαοτικώς διαφορετικά αποτελέσματα.

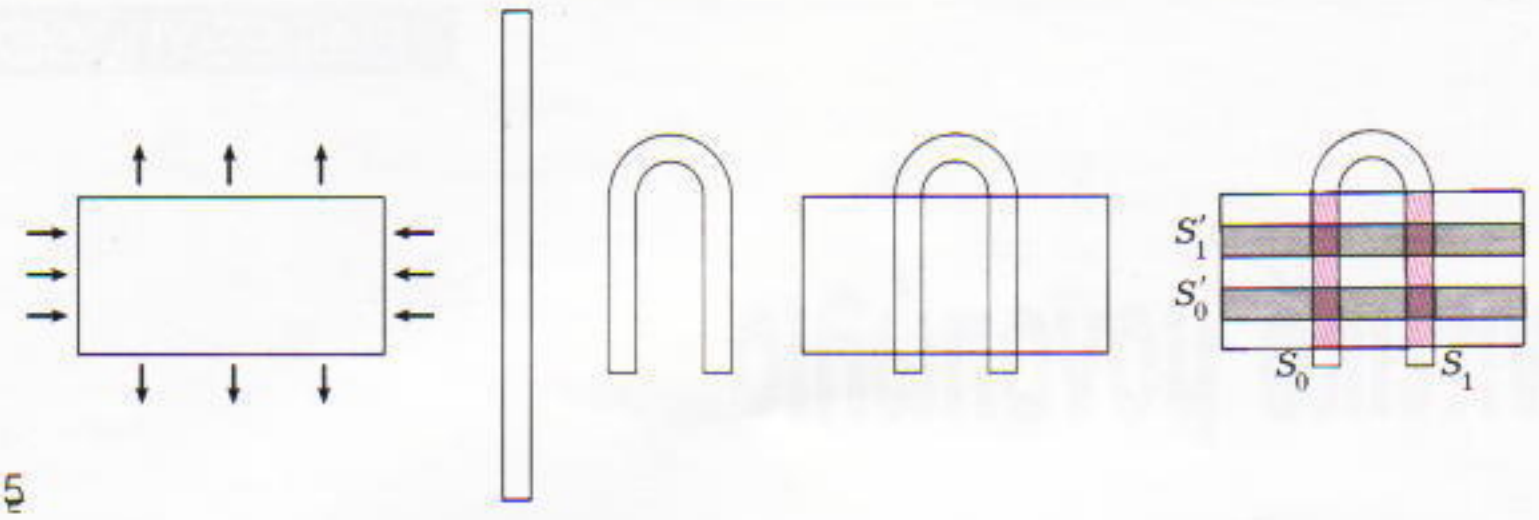
Ας επιστρέψουμε όμως στην αξιοσημείωτη απεικόνισή μας. Δεν εξηγήσαμε ακόμη τι γυρεύει το πέταλο στην ονομασία της.

Το πέταλο του Smale

Η αρχική απεικόνιση που εξέτασε ο Smale είχε κατασκευαστεί ως εξής: Θεωρούμε ένα ορθογώνιο (Σχήμα 5), το συμπιέζουμε οριζόντια και το τεντώνουμε κατακόρυφα, έτσι ώστε να προκύψει ένα ψηλό και στενό ορθογώνιο. Στη συνέχεια το λυγίζουμε σχηματίζοντας ένα πέταλο, και το επιθέτουμε πάνω στο αρχικό ορθογώνιο, με τον τρόπο που βλέπετε στο σχήμα.

Αυτή η σύνθεση δύο απεικονίσεων είναι αυτό ακριβώς που ονομάστηκε αρχικά απεικόνιση πέταλο. Εκ πρώτης όψεως, δεν έχει σχεδόν τίποτε το κοινό με την απεικόνιση που εξετάσαμε προηγουμένως. Μολαταύτα, αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της νέας απεικόνισης θα διαπιστώσουμε εύκολα την ομοιότητα.

Θεωρήστε την τομή του πεδίου

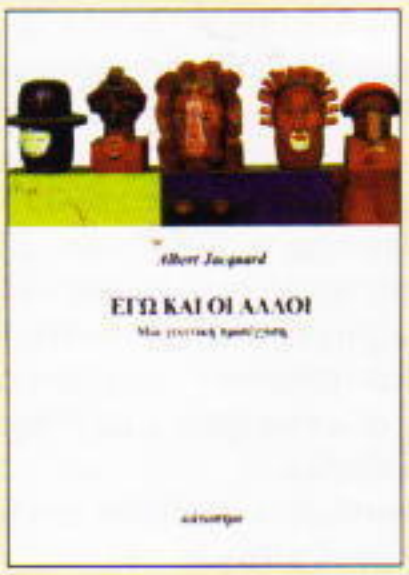


Σχήμα 5

ορισμού και του πεδίου τιμών της απεικόνισης πέταλο: αποτελείται από τα δύο κόκκινα ορθογώνια S_0 και S_1 του Σχήματος 5. Ας υποθέσουμε ότι η αντίστροφη απεικόνιση είναι γραμμική επί του S_0 και S_1 (δηλαδή, ότι ανάγεται σε ομοιόμορφες ομοιοθεσίες παράλληλες προς τις πλευρές αυτών των ορθογωνίων —ο Smale συμπεριέλαβε αυτή τη συνθήκη στην κατασκευή του). Τότε η πλήρης αντίστροφη εικόνα S_0' της S_0 είναι ένα επίμηκες ορθογώνιο κοντά στη βάση του αρχικού ορθογωνίου. Παρομοίως, από το S_1 παίρνουμε ένα επίμηκες ορθογώνιο S_1' κοντά στην πάνω πλευρά του αρχικού ορθογωνίου. Η απεικόνιση μεταφέρει το S_0' στο S_0 και το S_1' στο S_1. Και αυτό μας θυμίζει τη δική μας απεικόνιση f, παρότι δεν είναι η ίδια.

Ένα χρήσιμο πρόβλημα είναι να διατυπώσετε και να αποδείξετε το ανάλογο με το δικό μας κύριο θεώρημα γι' αυτή την (τμηματικά) γραμμική απεικόνιση. ■

ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ



Albert Jacquard

ΕΓΩ ΚΑΙ ΟΙ ΑΛΛΟΙ

Μια γενετική προσέγγιση

Σελ.: 146, 2.300 δρχ.

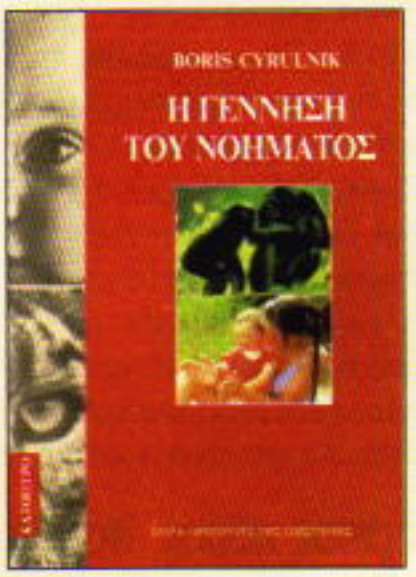
Σ' αυτό το βιβλίο ο γάλλος βιολόγος και διανοητής Jacquard εξετάζει την τεκνοποίηση, τη μοναδικότητα του ατόμου, τον κίνδυνο του ρατσισμού, τα άχρηστα τεστ νοημοσύνης και τις ανερμάτιστες προσπάθειες ταξινόμησης των ανθρώπων, δείχνοντας πόσο ανόητο είναι να αναζητεί κανείς «ανώτερα» και «κατώτερα» άτομα.

Boris Cyrulnik

Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΗΜΑΤΟΣ

Από το ζώο στον άνθρωπο

Σελ.: 131, 2.200 δρχ.



Το βιβλίο αποτελεί μια ευσύνοπτη και απλή εισαγωγή στο νέο επιστημονικό πεδίο, την ανθρώπινη ηθολογία. Ο Cyrulnik, νευρολόγος, ψυχίατρος, ψυχαναλυτής και πρωτοπόρος ερευνητής στο νέο πεδίο ερμηνεύει την συμπεριφορά του ανθρώπου, συμπεριλαμβανομένης της γλώσσας, της ευφυΐας και της κοινωνικότητάς του, με τρόπο πρωτότυπο και ελκυστικό.

Εκδόσεις *ΚΑΤΟΠΤΡΟ*

Ισαύρων 10 και Δαφνομηλη, 114 71 Αθήνα Τηλ.: 3643272, 3645098, Fax: 3645098

Μαγνητικό μονοπώλιο

Μια μονογραφία για κάτι που μπορεί να μην υπάρχει

John Wylie

ΤΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟ όταν γράφεις ένα άρθρο για το *Quantum* είναι το ότι αναλώνεις χρόνο διερευνώντας κάτι τετριμμένο στο όνομα της επιστήμης και της εκπαίδευσης. Το άρθρο αυτό αντιπροσωπεύει μια μελέτη μου για το θέμα των μαγνητικών μονοπόλων. Ως φυσικός, δεν έχω την αίσθηση ότι τα μονόπολα είναι ιδιαιτέρως τετριμμένα. Η σύζυγός μου Χόλυ, όμως, ταλαντούχα καλλιτέχνις, αναρωτιέται γιατί πρέπει να δαπανώ τόσο πολύ χρόνο ερευνώντας και γράφοντας για μικρά αόρατα αντικείμενα, τα οποία μπορεί και να μην υπάρχουν. Φυσικά, αυτός ακριβώς είναι ο λόγος που βρίσκω τα μαγνητικά μονόπολα τόσο ελκυστικά —δεν υπάρχουν. Δεν μπορώ να εξηγήσω γιατί δεν υπάρχουν, αλλά θα μπορούσα να σας πω λίγα πράγματα σχετικά με το πώς θα συμπεριφέρονταν αν υπήρχαν. Αυτό είναι ένα από τα στοιχεία που κάνουν τόσο διασκεδαστικό το να είσαι φυσικός —το να φαντάζεσαι πράγματα που θα μπορούσαν να υπάρχουν. Ούτως ή άλλως, αν μπορέσω να μεταδώσω σε σας το ενδιαφέρον μου για τα μονόπολα, τότε ίσως και η σύζυγός μου θα μάθει να με κατανοεί περισσότερο.

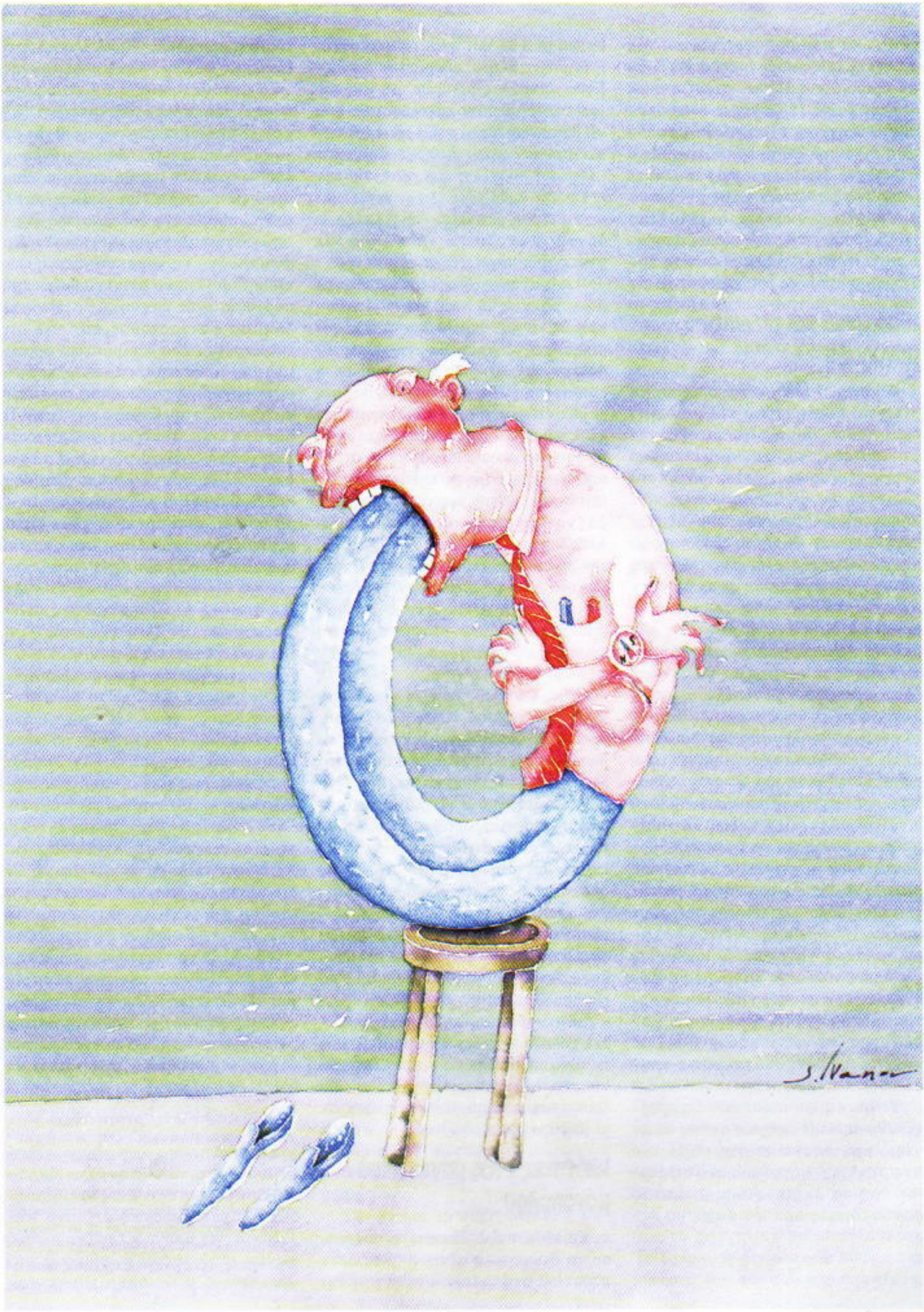
Βόρειος πόλος, Νότιος πόλος

Πριν μπούμε στο θέμα των μαγνητικών μονοπόλων, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην πραγματικότητα γνωρίζετε αρκετά για τους πόλους εν γένει. Οι πρώτοι πόλοι για τους οποίους μάθατε ποτέ ήταν πιθανώς οι γεωγραφικοί πόλοι της Γης —ο Βόρειος και ο Νότιος πόλος, όπως ονομάζονται. Οι επόμενοι για τους οποίους μάθατε ήταν ο μαγνητικός βόρειος και νότιος πόλος. Για πρώτη φορά τους παρατήρησε το 1269 ο Petrus Peregrinus de Maricourt, ένας γάλλος μηχανικός του στρατού, ο οποίος πρόσεξε ότι οι δυναμικές γραμμές γύρω από ένα κομμάτι μαγνητίτη φαίνονταν να προέρχονται από δύο ξεχωριστές θέσεις. Το πιο απλό παράδειγμα γι' αυτό στις μέρες μας είναι τα βαμμένα άκρα της μαγνητικής βελόνας σε μια πυξίδα. Συνήθως, το άκρο της πυξίδας που δείχνει το Βορρά είναι βαμμένο κόκκινο, και ονομάζεται βόρειος μαγνητικός πόλος. Το άλλο άκρο της βελόνας, που είναι συχνά βαμμένο μπλε, ονομάζεται νότιος μαγνητικός πόλος.

Φυσικά, γνωρίζετε ότι όσον αφορά το μαγνητισμό, οι βόρειοι πόλοι έλκονται από τους νότιους, και έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κοντά στον Βόρειο γεωγραφικό πόλο της Γης (εκεί όπου ζουν οι πολικές αρκούδες) βρίσκεται ένας νότιος μαγνητικός πόλος, και ότι κοντά στον Νότιο γεωγραφικό πόλο της Γης (εκεί όπου ζουν οι πιγκουίνοι) βρίσκεται ένας βόρειος μαγνητικός πόλος. Στην πραγματικότητα, αυτά τα δύο ξεχωριστά είδη πόλων δεν συμπίπτουν. Ο νότιος μαγνητικός πόλος κείται λίγο νοτιότερα του Βόρειου γεωγραφικού πόλου· έτσι, εδώ όπου βρίσκομαι, στο Τορόντο του Καναδά, η πυξίδα μου στην πραγματικότητα δείχνει περίπου 10° δυτικά του πραγματικού Βορρά. Το γεγονός ότι οι γεωγραφικοί και μαγνητικοί πόλοι της Γης δεν συμπίπτουν οδηγεί από μόνο του σε μια ενδιαφέρουσα μελέτη. Προκύπτει, λοιπόν, ότι οι μαγνητικοί πόλοι της Γης περιπλανιούνται στο χρόνο και ότι ένας καλός τοπογραφικός χάρτης θα σας πει μόνο πόσο μπορείτε να αναμένετε να μεταβάλλεται η θέση του βόρειου μαγνητικού πόλου με το πέρασμα των χρόνων. Επιπλέον, υπάρχουν γεωλογικές ενδείξεις ότι οι μαγνητικοί πόλοι της Γης έχουν αντιστραφεί στο παρελθόν, και ότι αυτές οι αντιστροφές συνέβησαν σχετικά ξαφνικά.

Αλλά αυτό που αληθεύει πάντοτε για τους μαγνητικούς πόλους, είτε της Γης είτε της βελόνας μιας πυξίδας είτε οποιουδήποτε μαγνήτη ή μαγνητικής συσκευής, είναι ότι εμφανίζονται οπωσδήποτε σε ζεύγη βόρειου-νότιου. Τα ζεύγη αυτά ονομάζονται μαγνητικά δίπολα. Ένα μαγνητικό μονόπολο θα ήταν ένας απομονωμένος, ασύζευκτος βόρειος ή νότιος πόλος. Υπάρχουν αρκετά καλοί λόγοι να σκεφτεί κανείς ότι ένα τέτοιο «τέρας» θα έπρεπε να υπάρχει, και οι περισσότεροι από αυτούς τους λόγους σχετίζονται με τη συμμετρία της φύσης. Μπορείτε ν' ακούσετε έναν φυσικό να λέει ότι οι εξισώσεις του Maxwell που διέπουν τον ηλεκτρομαγνητισμό γίνονται απολύτως συμμετρικές εάν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα. Αυτό, από μόνο του,

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



δεν είναι κακός λόγος για να πιστεύει κανείς στα μονόπολα. Θα δούμε όμως ότι ο Dirac, εργαζόμενος θεωρητικά το 1931, βρήκε έναν τρόπο να εξηγήσει ένα από τα μεγάλα μυστήρια της φυσικής, και το θέμα παρέμεινε στο να υπάρχει τουλάχιστον ένα μονόπολο κάπου στο σύμπαν. Θα διερευνήσουμε αυτό το θέμα και θα δούμε πώς οι φυσικοί αναζητούν μονόπολα. Αλλά πρώτα ας καλύψουμε κάποιες βασικές γνώσεις.

Ηλεκτρικά και μαγνητικά μονόπολα

Ας πάμε πίσω σε κάποια βασικά στοιχεία ηλεκτρισμού και μαγνητισμού για να θυμηθούμε ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα ηλεκτρικό φορτίο εξαιτίας ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι $F = qE$. Ένα ηλεκτρικό «δίπολο» αποτελείται από δύο χωριστά φορτία $+q$ και $-q$. Θα μπορούσαμε να είμαστε ιδιαιτέρως τυποκρατικοί και να ονομάζουμε κάθε φορτίο «ηλεκτρικό πόλο» —έναν θετικό και έναν αρνητικό. Η ένταση ηλεκτρικού πόλου θα μπορούσε να οριστεί ως $q = F/E$. Ένας τέτοιος πόλος θα ονομαζόταν ηλεκτρικό μονόπολο.

Αν κάναμε το ίδιο και για το μαγνητισμό, θα λέγαμε ότι δύο ίσοι αλλά αντίθετου σημείου μαγνητικοί πόλοι έντασης πόλου $q^* = F/B$ αποτελούν ένα μαγνητικό δίπολο. Εδώ B είναι το μαγνητικό πεδίο. Ένα μαγνητικό μονόπολο θα ήταν ένας μεμονωμένος μαγνητικός πόλος, βόρειος ή νότιος, με μαγνητικό φορτίο, ή ένταση πόλου, q^*. Εφόσον ξέρουμε να διερευνούμε προβλήματα που περιλαμβάνουν ηλεκτρικά μονόπολα, ξέρουμε και πώς να κάνουμε υπολογισμούς που αναφέρονται σε μαγνητικά μονόπολα. Μπορούμε, για παράδειγμα, να γράψουμε ποιο πρέπει να είναι το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε ένα απομονωμένο μονόπολο!

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο q είναι ακτινικό, και υπακούει στο νόμο του αντίστροφου τετραγώνου. Το μέτρο του πεδίου σε απόσταση r από το φορτίο δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

όπου $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{Cb^2/Nt \cdot m^2}$ είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Κατά συνέπεια, το μέτρο του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται σε ένα σημειακό μονόπολο πρέπει να δίνεται από τον τύπο

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^*}{r^2},$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Nt/A^2}$ είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

Ίσως αναρωτιέστε πώς γνωρίζαμε ότι η μαγνητική σταθερά ισούται ακριβώς με $\mu_0/4\pi$. Θα σας πω χωρίς απόδειξη ή εξήγηση (θα μάθετε περισσότερα γι' αυτό το θέμα καθώς η εκπαίδευσή σας στη φυσική θα συνεχίζεται) ότι η ρίζα του λόγου της ηλεκτρικής σταθεράς $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0$ προς τη μαγνητική σταθερά $k_m = \mu_0/4\pi$ πρέπει να ισούται με την ταχύτητα c του φωτός. (Στην πραγματικότητα, η μαγνητική σταθερά σε μονάδες S.I. ορίζεται μέσω της επιλογής μας για την ηλεκτρική σταθερά και την ταχύτητα του φωτός —δεν έχει από μόνη της μια πειραματικά καθορισμένη τιμή). Από αυτό προκύπτει η εκπληκτική σχέση

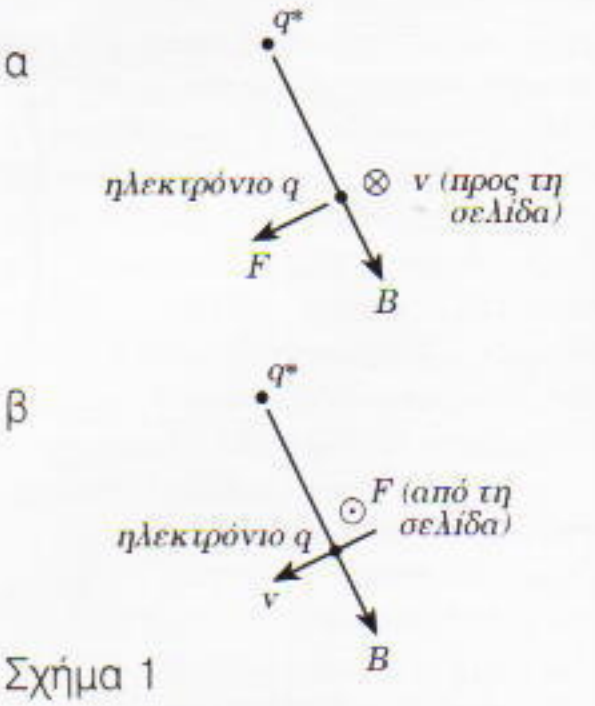
$$\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = c,$$

που συνενώνει τον ηλεκτρισμό, το μαγνητισμό και το φως ως μέρη της ίδιας φυσικής. Γνωρίζετε ήδη, για παράδειγμα, ότι το φως (ή, γενικότερα, η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) αποτελείται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Για τους σκοπούς της μελέτης μας, αυτό σημαίνει ότι διαθέτουμε μια καλή εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε ένα μαγνητικό μονόπολο, και με την οποία μπορούμε να εργαστούμε.

Δυστυχώς, και ίσως αυτό προκαλεί κατάπληξη, δεν έχει ποτέ βρεθεί κανένα μεμονωμένο μαγνητικό μονόπολο, αλλά αυτό δεν μας εμποδίζει να αναρωτιόμαστε ποιες θα ήταν οι ιδιότητές του.

Ιδιότητες ενός μαγνητικού μονοπόλου

Το 1904, ο J.J. Thompson μελέτησε τη θεωρητική κίνηση ενός ηλεκτρονίου στη γειτονιά ενός μαγνητικού μονοπόλου. Φυσικά, ήθελε να ξέρει πώς θα αναγνώριζε ένα μαγνητικό μονόπολο εάν ήταν ποτέ τόσο τυχερός ώστε να το συναντήσει. Έχουμε την εμπειρία να ελέγχουμε την παρουσία ηλεκτρικών μονοπόλων (φορτίων), και θα σας υπενθυμίσω με ποιον τρόπο γίνεται αυτό. Εκτοξεύουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο προς το ηλεκτρικό μονόπολο και αναζητούμε τη χαρακτηριστική εκτροπή του.[1] Για να ανιχνεύσουμε την παρουσία ενός μαγνητικού μονοπόλου, θα φανταστούμε και εδώ ότι εκτοξεύουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο προς το μονόπολο, αλλά πρέπει να κατανοήσουμε τι είδους εκτροπή αναζητούμε στην περίπτωση αυτή. Η δύναμη που ασκείται από ένα ηλεκτρικό φορτίο σε ένα άλλο έχει ακτινική διεύθυνση· η δύναμη που ασκείται από ένα μαγνητικό μονόπολο σε ένα κινούμενο φορτίο είναι περισσότερο περίπλοκη και απαιτεί προσεκτική εξήγηση.



Σχήμα 1

Στο Σχήμα 1α περιγράφεται η διάταξη του φανταστικού πειράματός μας. Το δοκιμαστικό φορτίο, με μάζα m και φορτίο q, έχει αρχική ταχύτητα v κινούμενο προς το σταθερό και στάσιμο μαγνητικό μονόπολο, με

1. Παρότι δεν το έχω αναφέρει μέχρι τώρα, μπορούμε επίσης να σκεφτούμε ότι το βαρυτικό πεδίο παράγεται από ένα βαρυτικό μονόπολο (που συνήθως το ονομάζουμε μάζα). Και στην περίπτωση αυτή ανιχνεύουμε την παρουσία ενός τέτοιου πόλου μέσω της εκτροπής μιας κινούμενης δοκιμαστικής μάζας. Σε αντίθεση με τους πόλους στον ηλεκτρομαγνητισμό, στη βαρύτητα δεν υπάρχει αρνητικός πόλος και, επομένως, δεν υπάρχει απωστική βαρυτική δύναμη.

ένταση πόλου q^*. Μπορούμε να θέσουμε στο πείραμά μας μια μεταβλητή b που δηλώνει το σφάλμα σκόπευσης, και που είναι η απόσταση μεταξύ δύο ευθειών, παράλληλων στην ταχύτητα του σωματιδίου, από τις οποίες η μία διέρχεται από το μονόπολο και η άλλη από το φορτίο. Το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι η δύναμη στο κινούμενο φορτίο λόγω του μαγνητικού πεδίου —και αυτή, βέβαια, είναι η πολύ γνωστή δύναμη Lorentz

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}.$$

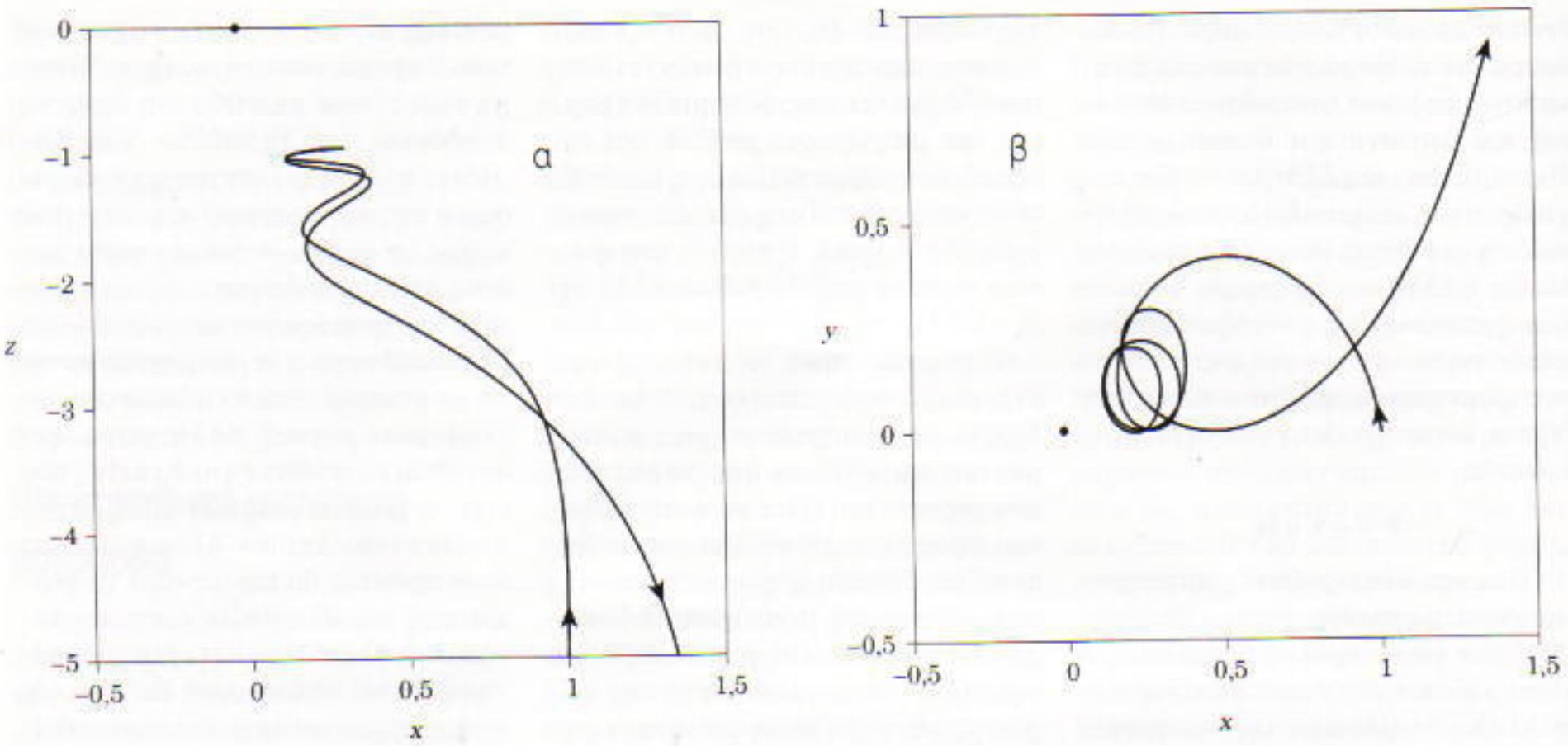
Ένα αμέσως προφανές συμπέρασμα που μπορούμε να εξαγάγουμε είναι ότι αν το σφάλμα σκόπευσης b είναι μηδέν, η ταχύτητα θα είναι παράλληλη σε μία από τις δυναμικές γραμμές του ακτινικού πεδίου του μονοπόλου και δεν θα ασκείται δύναμη στο φορτίο, το οποίο τελικά θα συγκρουστεί με το μονόπολο. Αυτό το σενάριο είναι εξαιρετικά απίθανο, και έτσι θα σκιαγραφήσουμε την κίνηση του δοκιμαστικού φορτίου για μη μηδενικά σφάλματα σκόπευσης. Το φορτίο μας βρίσκεται να διαπερνά τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Αν το μαγνητικό πεδίο ήταν ομογενές, το φορτίο απλώς θα κινούνταν σε μια ελικοειδή τροχιά γύρω από τις δυναμικές γραμμές. Στην ειδική περίπτωση που η ταχύτητα του φορτίου σχηματίζει ορθή γωνία με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, το φορτίο θα κινείται σε κυκλική τροχιά. Οι μαθητές του λυκείου μελετούν τις παραπάνω περιπτώσεις και μαθαίνουν επίσης να υπολογίζουν την ακτίνα της κυκλικής (ή ελικοειδούς) κίνησης του φορτίου. Η περίπτωση που μελετάμε, ωστόσο, είναι διαφορετική για δύο πολύ σημαντικούς λόγους. Το πεδίο δεν είναι ομογενές —είναι αποκλίνον. Έτσι το φορτίο βρίσκεται να εισέρχεται σε περιοχές όλο και ισχυρότερου μαγνητικού πεδίου.

Μπορούμε να κατανοήσουμε την τροχιά του φορτίου αν μελετήσουμε τη συμπεριφορά του σε δύο στάδια. Στο Σχήμα 1 συνοψίζονται τα δύο βασικά χαρακτηριστικά της κίνησης του φορτίου. Κάθε στιγμή, μπορεί κανείς να φανταστεί ότι αναλύει την ταχύτητα του φορτίου σε δύο συνιστώσες: την ακτινική συνιστώσα, παράλληλη προς τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, και την εφαπτομενική συνιστώσα, η οποία θα είναι πάντοτε κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Αρχικά, η κίνηση του φορτίου είναι σε μεγάλο βαθμό, αλλά όχι εξ ολοκλήρου, ακτινική, μια και έχει κατευθυνθεί προς το μονόπολο με ένα μικρό σφάλμα σκόπευσης. Στο Σχήμα 1α, η αρχική, μικρή, εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας του φορτίου φαίνεται να κατευθύνεται «προς τη σελίδα». Στο φορτίο δεν ασκείται δύναμη λόγω της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας. Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο λόγω της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας θα έχει, όπως φαίνεται, εφαπτομενική διεύθυνση (δοκιμάστε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να το επιβεβαιώσετε).

Το πρώτο γενικό χαρακτηριστικό της κίνησης του δοκιμαστικού φορτίου μας είναι τώρα εμφανές. Καθώς πλησιάζει το μονόπολο, αλλάζει τη μεταφορική κίνησή του σε κυκλική. Γνωρίζουμε λοιπόν ότι θα λάβει χώρα μετατροπή κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς σε κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, επειδή το μαγνητικό πεδίο είναι συντηρητικό. Επειδή η δύναμη στο κινούμενο φορτίο παραμένει πάντοτε κάθετη στην ταχύτητά του, είναι φανερό ότι η δύναμη δεν μπορεί να μεταβάλει το μέτρο της ταχύτητας του φορτίου αλλά μόνο τη διεύθυνσή της. Το φορτίο που αρχικά κατευθυνόταν προς το μονόπολο θα επιβραδύνει την απ' ευθείας προσέγγισή του προς αυτό καθώς θα «αποκτά κυκλική κίνηση». Όσο μάλιστα το φορτίο πλησιάζει το μονόπολο, οπότε το μαγνητικό πεδίο γίνεται συνεχώς ισχυρότερο, το εν λόγω φαινόμενο καθίσταται όλο και πιο έντονο, ώσπου το φορτίο να φτάσει να εκτελεί μόνο κυκλική κίνηση και να μην πλησιάζει πια το μονόπολο. Παρότι το φορτίο είχε αρχικά μεγάλη ακτινική ταχύτητα, τελικά θα εκτελεί καθαρά εφαπτομενική κίνηση.

Στο σχήμα 1β σημειώνεται η δύναμη η οποία ασκείται στο φορτίο που κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο του μονοπόλου εξαιτίας της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητάς του. Στην περίπτωση αυτή, η δύναμη έχει τέτοια κατεύθυνση ώστε να αναδύεται «από τη σελίδα». Εδώ βρίσκεται το δεύτερο γενικό χαρακτηριστικό της κίνησης του φορτίου μας: καθώς το φορτίο «αποκτά» περιστροφική κίνηση, αυξάνεται η άπωση μεταξύ του φορτίου και του μονοπόλου, με αποτέλεσμα η περιστροφική κίνηση να μετατρέπεται εκ νέου στην αρχική μεταφορική αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη που είχε αρχικά το σωματίδιο. Συγκεντρώνοντας λοιπόν όλες αυτές τις παρατηρήσεις, θα περιμέναμε το φορτίο μας να πλησιάζει προς το μονόπολο αλλά να αρχίζει ελικοειδή κίνηση κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής, και ταυτόχρονα να απωθείται καθώς εκτελεί την κίνηση αυτή. Σε κάποιο σημείο, η κίνηση του φορτίου θα είναι μόνο κυκλική και, καθώς αυτό εξακολουθεί να απωθείται, θα αρχίσει να εκτελεί ελικοειδή κίνηση απομακρυνόμενο από το μονόπολο, κατά μήκος της ίδιας δυναμικής γραμμής. Τελικά, θα περιμέναμε το φορτίο να εκτοξευθεί πίσω σ' εμάς με την ίδια ταχύτητα που του δώσαμε αρχικά. Η κίνηση αυτή είναι αποκλειστικό χαρακτηριστικό ενός καθαρά ακτινικού πεδίου, όπως αυτό που δημιουργεί το μονόπολο. Κάθε ισχυρά αποκλίνον μαγνητικό πεδίο ανακλά ένα κινούμενο φορτίο με τον τρόπο αυτό.

Η κίνηση του φορτίου στις τρεις διαστάσεις φαίνεται στα διαγράμματα του Σχήματος 2. Η αρχική ταχύτητα του φορτίου ήταν στη διεύθυνση του άξονα z και η αρχική θέση του φορτίου στο σημείο $x = 1$, $y = -5$ σε σχέση με το μονόπολο, το οποίο είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων. Οι μεταβλητές που σχεδιάστηκαν είναι αδιάστατες ποσότητες που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κίνηση του φορτίου. Το Σχήμα 2α αναπαριστά μια κάτοψη της κίνησης του φορτίου στο επίπεδο x, z. Παρατηρήστε πώς το φορτίο μετατρέπει τη μεταφορική κίνησή του σε περιστροφική, στην αρχή αργά και στη συνέχεια όλο και ταχύτερα, καθώς το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται. Το Σχήμα 2β δείχνει μια άποψη της κίνησης του φορτίου στο επίπεδο x,



Σχήμα 2

Σχεδιασμός, με τη βοήθεια υπολογιστή, της τροχιάς ενός ηλεκτρικού φορτίου κοντά σε ένα μαγνητικό μονόπολο.

y. Το φορτίο έρχεται αρχικά προς εμάς («βγαίνοντας» από τη σελίδα) και φτάνει στο σημείο όπου η κίνησή του είναι καθαρά κυκλική. Οι απωστικές δυνάμεις τότε το στέλνουν πίσω, στην κατεύθυνση $-z$, μετατρέποντας εκ νέου την κυκλική κίνηση σε μεταφορική. Η ελικοειδής κίνηση του φορτίου κατά μήκος μιας ακτινικής δυναμικής γραμμής φαίνεται καθαρά και στις δύο εικονιζόμενες απόψεις.[2]

Το πρόβλημα με το ερώτημα που έθεσε ο Thomson το 1904 είναι ότι υποθέτει πως θα μπορούσαμε με κάποιον τρόπο να εκτοξεύσουμε ηλεκτρόνια προς ένα στάσιμο μονόπολο. Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος μας παρέχει σίγουρα βαθύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων των μονοπόλων, αλλά είναι πολύ πιο πιθανό ένα μονόπολο να περάσει δίπλα μας σαν σφαίρα παρά να συναντήσουμε κάπου εδώ γύρω ένα μονόπολο που απλώς μένει ακίνητο. Η θεώρησή μας για την ανίχνευση μονοπόλων πρέπει να γίνει λιγότερο απλοϊκή, αλλά πρώτα είναι χρήσιμο να αντιληφθούμε ότι υπάρχουν πολλά στη φύση τα οποία μπορούμε να τα κατανοήσουμε καλύτερα μέσω της φυσικής των μονοπόλων.

Μαγνητικά μονόπολα στη φύση

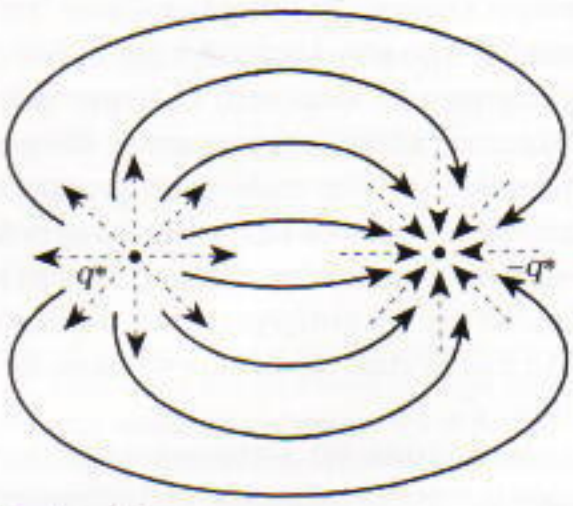
Ο τίτλος αυτής της ενότητας είναι λίγο παραπλανητικός, αφού δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα (ή τουλάχιστον ουδέποτε παρατηρήθηκε κανένα). Ωστόσο, η εν λόγω μελέτη θα μας επιτρέψει να κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση. Ας διερευνήσουμε, λοιπόν, πρώτα το πεδίο που παράγεται από ένα μαγνητικό δίπολο. Στο Σχήμα 3 έχουμε ένα μαγνητικό δίπολο και θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του πεδίου σε απόσταση x από το μέσον του διπόλου και σε ευθεία κατά μήκος του άξονα του διπόλου. Έχουν σχεδιαστεί οι κλασικές δυναμικές γραμμές του πεδίου που παράγει το δίπολο (σκεφτείτε τη Γη ή μια απλή μαγνητική ράβδο). Το πεδίο υπολογίζεται με υπέρθεση των πεδίων των επιμέρους μονοπόλων:

$$B(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^*}{r_1^2}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^*}{r_2^2},$$

όπου $r_1 = x - \ell/2$ και $r_2 = x + \ell/2$. Σε μεγάλη απόσταση από το δίπολο, ($x >> \ell$), η παραπάνω έκφραση απλοποιείται σε

$$B(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{x^3},$$

όπου $m = q^*\ell$ είναι η μαγνητική διπολική ροπή. Αυτή είναι η σωστή έκφραση για το μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα του διπόλου (η οποία συνήθως δεν υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο). Ίσως βρείτε ενδιαφέρον να γράψετε την έκφραση για



Σχήμα 3

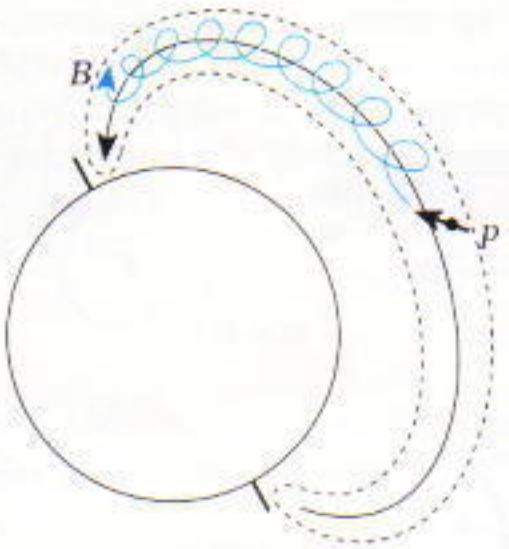
Μαγνητικό πεδίο ενός διπόλου (συνεχείς γραμμές), το οποίο προκύπτει ως υπέρθεση των δύο ακτινικών πεδίων που περιβάλλουν κάθε πόλο (διακεκομμένες γραμμές).

2. Η ιδέα για την κατασκευή αυτών των σχεδίων με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή δεν μπορεί να αποδοθεί εξ ολοκλήρου σε μένα. Το 1988 έδωσα μια ομιλία με θέμα τα μονόπολα στον κύκλο προετοιμασίας της καναδικής ομάδας διεθνών Ολυμπιάδων φυσικής. Ένα μέλος της ομάδας, ο David Hogg, μου έστειλε μερικά παρόμοια σχέδια που τα κατασκεύασε χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικό υπολογιστή, στο εργαστήριο υπολογιστών φυσικής, κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους σπουδών του στο MIT. Χαίρομαι πάντα όταν ένας πρώην μαθητής μου γίνεται δάσκαλος μου.

το μαγνητικό πεδίο σε μεγάλη απόσταση από το δίπολο αλλά κατά μήκος ευθείας κάθετης στον άξονα του διπόλου. Το πεδίο αυτό είναι επίσης της μορφής $1/x^3$, και έτσι μπορούμε να ισχυριζόμαστε ότι το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε ένα μαγνητικό δίπολο μεταβάλλεται, σε μεγάλη απόσταση από το δίπολο, σύμφωνα με το νόμο του αντίστροφου κύβου.

Το βασικότερο απ' όλα τούτα είναι ότι το πεδίο που οφείλεται σε ένα μαγνητικό δίπολο είναι η υπέρθεση δύο ακτινικών μονοπολικών πεδίων. Ο παραπάνω υπολογισμός είναι απλώς ένας τρόπος για να το επιβεβαιώσουμε. Θυμηθείτε ότι η απόσταση μεταξύ των πόλων ενός διπόλου είναι ℓ. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι εξετάζουμε το διπολικό πεδίο σε απόσταση $r << \ell$ από έναν από τους πόλους. Ουσιαστικά θα βλέπαμε μόνο το μονοπολικό ακτινικό πεδίο και έτσι, ενώ δεν υπάρχουν μονόπολα στη φύση, η συμπεριφορά ενός φορτισμένου σωματιδίου κοντά σε έναν από τους πόλους, μέσα σε ένα διπολικό πεδίο (ή γενικότερα σε οποιοδήποτε πολυπολικό πεδίο) είναι ουσιαστικά αυτή που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Για να βρούμε ένα καλό παράδειγμα αυτού του γεγονότος, ας επισκεφθούμε τις ζώνες ακτινοβολίας Van Allen.

Τον Μάιο του 1958, ο αμερικανός φυσικός J.A. Van Allen ανακοίνωσε ότι η Γη περιβάλλεται από μια πυκνή ζώνη σωματιδίων υψηλής ενέργειας. Η ανακοίνωση βασιζόταν στις μετρήσεις ενός απαριθμητή Geiger που ο Van Allen τον είχε τοποθετήσει στον πύραυλο ο οποίος εκτόξευσε τον πρώτο δορυφόρο των ΗΠΑ, τον Explorer I. Μελέτες που ακολούθησαν έδειξαν ότι υπάρχουν δύο ζώνες: μία εσωτερική σε απόσταση δύο γήινων ακτίνων από το κέντρο της Γης και μία εξωτερική μεταξύ δύο και οκτώ γήινων ακτίνων. Τα σωματίδια είναι σε μεγάλο βαθμό πρωτόνια προερχόμενα από την κοσμική ακτινοβολία υψηλής ενέργειας που προσκρούουν στη γήινη ατμόσφαιρα. Η πυκνότητα της ατμόσφαιρας στα χαμηλότερα υψόμετρα των ζωνών (μεταξύ 400 και 1.000 km από την επιφάνεια της θάλασσας) είναι τόσο μικρή ώστε τα πρωτόνια μπορούν να ταξιδεύουν



Σχήμα 4

εκατοντάδες γήινες ακτίνες μεταξύ των διαδοχικών συγκρούσεών τους με τα μόρια της ατμόσφαιρας. Τα πρωτόνια στην εσωτερική ζώνη μπορούν να έχουν ενέργειες που φτάνουν τα $3{,}0 \cdot 10^7$ eV, και η πυκνότητα είναι τέτοια ώστε μέχρι και 20.000 σωματίδια μπορούν να διαπεράσουν μια επιφάνεια εμβαδού 1 cm^2 κάθε δευτερόλεπτο. Εκτιμάται ότι για να επιτευχθούν αυτές οι τιμές, τα πρωτόνια πρέπει να παραμένουν παγιδευμένα στη ζώνη για δέκα περίπου χρόνια κατά μέσο όρο! Τι θα μπορούσε να εξηγήσει τους λόγους αυτής της παγίδευσης φορτισμένων σωματιδίων υψηλής ενέργειας;

Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται το γήινο μαγνητικό πεδίο και η εσωτερική ζώνη Van Allen. Φαίνεται επιπλέον η τροχιά ενός πρωτονίου που εισέρχεται στη ζώνη. Όπως προαναφέραμε, το πρωτόνιο θα ελικώνεται κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής προς τον έναν μαγνητικό πόλο, και τελικά θα ανακλάται προς τα πίσω κατά μήκος της ίδιας δυναμικής γραμμής. Στη συνέχεια ελικώνεται προς τον άλλο πόλο με παρόμοιο τρόπο, και έτσι θα μπορούσε να παραμείνει παγιδευμένο για χρόνια.

Είναι καιρός να επανέλθουμε στο κύριο αντικείμενο του άρθρου μας και να διερευνήσουμε τη φυσική των μονοπόλων. Σας υποσχέθηκα ότι θα εξερευνήσουμε ένα μεγάλο μυστήριο της φυσικής —ξεκινάμε λοιπόν!

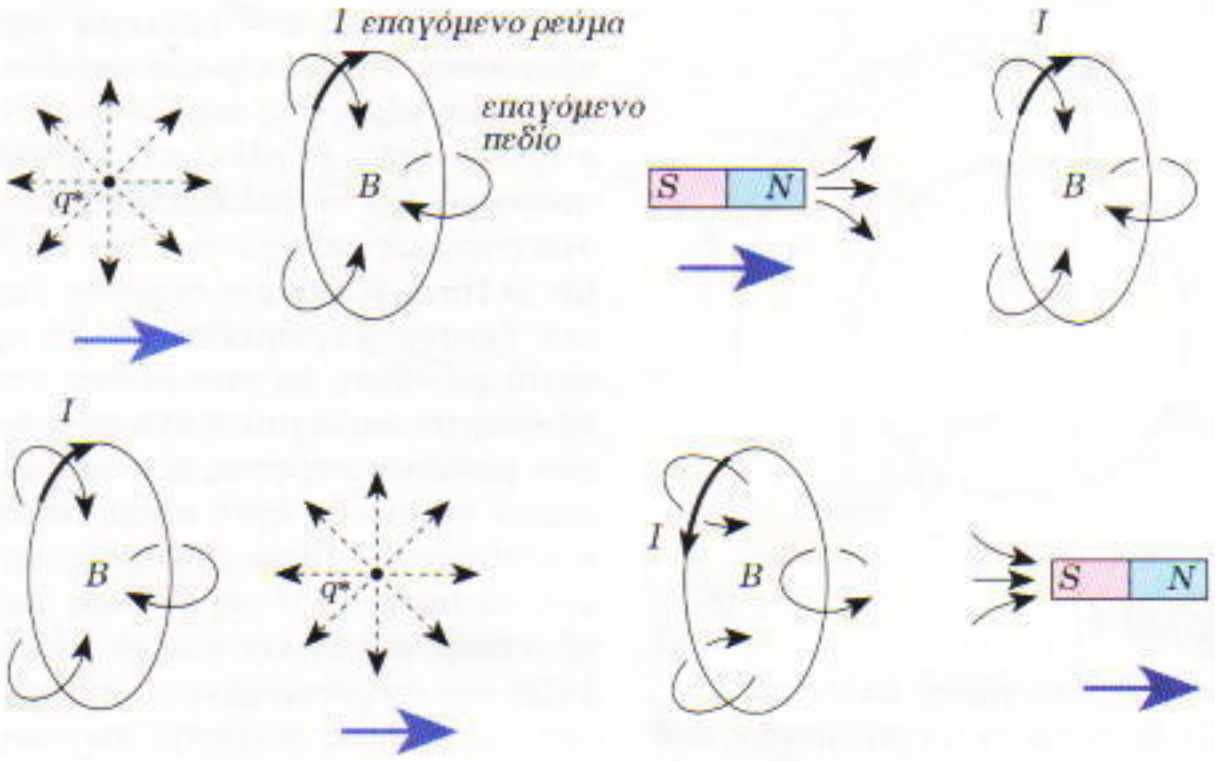
Μονόπολα Dirac

Το 1931 ο Paul Dirac χρησιμοποίησε κβαντική μηχανική για να μελετήσει τις ιδιότητες ενός μαγνητικού μονοπόλου, και βρήκε μια πιθανή απάντηση στο ερώτημα της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου. Μέχρι τις μέρες μας παραμένει μυστήριο το γιατί το ηλεκτρικό φορτίο υπάρχει μόνο σε πολλαπλάσια του στοιχειώδους φορτίου $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Ο Dirac βρήκε μια έκφραση για την ένταση μαγνητικού πόλου, η οποία φαινόταν να υποδηλώνει ότι αν υπάρχει τουλάχιστον ένα μαγνητικό μονόπολο στη φύση, τότε το ηλεκτρικό φορτίο θα ήταν απαραίτητα κβαντωμένο. Ο Dirac χρησιμοποίησε αρκετά προχωρημένες έννοιες της κβαντικής μηχανικής για να καταλήξει στο συγκεκριμένο συμπέρασμα· εμείς, όμως, μπορούμε να αποφύγουμε τα ανώτερα μαθηματικά και να μπούμε στην καρδιά του θέματος χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη κατανόηση της υπεραγωγιμότητας.

Ένας υπεραγωγός επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος χωρίς καμία απολύτως αντίσταση. Πολλά μέταλλα καθίστανται υπεραγώγιμα όταν η θερμοκρασία τους πέσει κάτω από μια πολύ χαμηλή τιμή (συχνά συγκρίσιμη με τη θερμοκρασία του υγρού ηλίου). Πρόσφατα έχει υπάρξει ιδιαίτερα μεγάλο ενδιαφέρον στο ερευνητικό πεδίο της υπεραγωγιμότητας σε υψηλές κρίσιμες θερμοκρασίες T_c, και έχουν συντεθεί μερικές ειδικές ενώσεις οι οποίες εμφανίζουν υπεραγώγιμη συμπεριφορά σε υψηλές τιμές της T_c —στην περιοχή $T_c \cong 100$ K. Αν θέλετε φανταστείτε ένα βρόχο από υπεραγώγιμο σύρμα. Κάποια ηλεκτρεγερτική δύναμη $\mathcal{E}$ που επάγεται στο σύρμα για οσοδήποτε μικρό χρονικό διάστημα θα προκαλέσει τη ροή ενός μόνιμου ρεύματος, εφόσον δεν υπάρχει αντίσταση που να το αποσβένει. Αυτό ακριβώς το ρεύμα μπορούμε να το δημιουργήσουμε διοχετεύοντας μαγνητική ροή διαμέσου του βρόχου. (Η μαγνητική ροή είναι το γινόμενο του μαγνητικού πεδίου που διέρχεται από τον ρευματοφόρο βρόχο επί την επιφάνεια που περικλείει ο βρόχος.) Σύμφωνα με το νόμο του Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

όπου $d\Phi$ είναι η μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου του συρμά-



Σχήμα 5

Σχήμα 6

τινου βρόχου. Το αρνητικό πρόσημο στο νόμο του Faraday ερμηνεύεται από τον κανόνα του Lentz, σύμφωνα με τον οποίο το επαγόμενο ρεύμα έχει τέτοια φορά ώστε να αντιτίθεται στην μεταβολή που το προκάλεσε.

Φανταστείτε επίσης ότι ένα μονόπολο με ένταση πόλου q^* (όπως στο Σχήμα 5) κατευθύνεται προς τον υπεραγώγιμο βρόχο. Τότε θα επαγόταν ένα αρχικό ρεύμα I που θα παρήγαγε διαμέσου του βρόχου ένα μαγνητικό πεδίο B, το οποίο με τη σειρά του θα είχε κατεύθυνση αντίθετη αυτής του πεδίου που οφείλεται στο μονόπολο (και το οποίο πλησιάζοντας προκάλεσε το φαινόμενο της επαγωγής). Όταν το μονόπολο θα έχει τελικά διέλθει από το βρόχο, το επαγόμενο ρεύμα θα συνεχίσει να ρέει στην ίδια κατεύθυνση, έτσι ώστε να παράγει ένα μαγνητικό πεδίο το οποίο θα αντικαθιστά το ελαττούμενο πεδίο του μονοπόλου. Επομένως, καθώς ένα μονόπολο διαπερνά το βρόχο, ηλεκτρικό ρεύμα θα διαρρέει το βρόχο προς μία μόνο κατεύθυνση.

Η κατάσταση αυτή είναι πολύ διαφορετική από εκείνη στην οποία το βρόχο τον διαπερνά ένα μαγνητικό δίπολο (Σχήμα 6). Σ' αυτή την περίπτωση, το ρεύμα που επάγεται καθώς το μαγνητικό δίπολο πλησιάζει το βρόχο έχει την ίδια φορά με αυτό της περίπτωσης του μονοπόλου, αλλά το ρεύμα που επάγεται καθώς ο βρόχος απομακρύνεται έχει αντίθετη φορά.

Το ρεύμα που επάγεται σε έναν υπεραγώγιμο βρόχο από ένα διερχόμενο μονόπολο θα παραμείνει για μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου απομακρυνθεί το μονόπολο. Αυτό το χαρακτηριστικό γεγονός θα επέτρεπε σε κάποιον να ανιχνεύσει τη διέλευση ενός μαγνητικού μονοπόλου.

Με βάση αυτή την παρατήρηση έχουν σχεδιαστεί πολλά πειράματα. Ένα πρόβλημα που ανακύπτει είναι η κατασκευή ενός αρκετά μεγάλου υπεραγώγιμου ανιχνευτή ο οποίος να μπορεί να θωρακιστεί απέναντι σε εξωτερικές μεταβολές του περιβάλλοντος μαγνητικού πεδίου. Στις 14 Φεβρουαρίου 1982 (ημέρα του Αγίου Βαλεντίνου), ο φυσικός Blas Cabrera, εργαζόμενος σε ένα πείραμα στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ, κατέγραψε το σήμα ενός μόνο ισχυρού υποψήφιου γεγονότος, το οποίο έδινε ακριβώς τη σωστή χαρακτηριστική συμπεριφορά για το επαγόμενο ρεύμα. Ο Cabrera χρησιμοποίησε έναν υπεραγώγιμο βρόχο τεσσάρων σπειρών, με εμβαδόν επιφάνειας 20 cm^2. Όπως αναφέρθηκε, το «γεγονός του Βαλεντίνου» έχει αβεβαιότητα μόλις ± 5%. Μολονότι ο Cabrera δεν μπορούσε να αποδώσει το γεγονός σε αίτιο άλλο από τη διέλευση ενός μονοπόλου, δεν αποτελεί γενικά αποδεκτή απόδειξη ότι υπάρχουν μονόπολα, αφού δεν καταγράφηκαν άλλα σημαντικά γεγονότα στο πείραμα αυτό.

Το 1983 μια ομάδα στο Πανεπιστήμιο του Μπέρκλεϋ έστησε μια πειραματική διάταξη η οποία επιχείρησε να συνδυάσει τα σήματα από ένα πλήθος υπεραγώγιμων βρόχων, καθένας από τους οποίους είχε εμβαδόν επιφάνειας της τάξης του 1 m^2. Δεν παρατηρήθηκε κανένα γεγονός που να σχετίζεται με μονόπολα. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή υπόσχεται πολλά επειδή είναι πολύ ευαίσθητη και ανεξάρτητη από τη μάζα και την ταχύτητα του διερχόμενου μονοπόλου.

Ο νόμος του Faraday θα απαιτούσε να αναπτυχθεί στο βρόχο ένα ρεύμα που θα παρήγαγε ροή ίση κατά μέτρο και αντίθετου σημείου ως προς την ολική ροή που παράγει το μονόπολο διερχόμενο από το βρόχο. Αφού διέλθει ολόκληρο το μονόπολο, η ολική ροή που αυτό παράγει πρέπει να εξισορροπηθεί από τη ροή που παράγει το ρεύμα του βρόχου. Είναι εύκολο να υπολογίσουμε την ολική ροή αν φανταστούμε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r γύρω από το μονόπολο. Έτσι,

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^*}{r^2}\cdot 4\pi r^2$$

$$= \mu_0 q^*.$$

Ο προσεκτικός σπουδαστής φυσικής είναι πιθανό να έχει αντίρρηση στο σημείο αυτό. Γιατί υπολογίζω εδώ την ολική ροή του μονοπόλου όταν, στις περισσότερες περιπτώσεις, στο φαινόμενο της επαγωγής συνεισφέρει μόνο η ροή που οφείλεται στη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου που είναι κάθετη στην επιφάνεια του ρευματοφόρου βρόχου; Η διαφορά εδώ έγκειται στο ότι δεν μεταβάλλουμε απλώς το μέτρο της ροής ή τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών σε σχέση με τον ρευματοφόρο βρόχο —στην πραγματικότητα περνάμε μία απομονωμένη πηγή δυναμικών γραμμών διαμέσου του βρόχου. (Για να δείτε με ποιο τρόπο προκαλεί τη διαφορά αυτό το γεγονός, φανταστείτε ότι αναλύουμε κάθε δυναμική γραμμή του πεδίου του μονοπόλου σε μία κάθετη συνιστώσα και μία παράλληλη [και με ακτινική διεύθυνση] προς την επιφάνεια του ρευματοφόρου βρόχου. Καθώς το μονόπολο πλησιάζει τον ρευματοφόρο βρόχο, το πλήθος των «κάθετων» δυναμικών γραμμών αυξάνεται, με αποτέλεσμα να επάγεται ηλεκτρο-

γερτική δύναμη στο βρόχο, σύμφωνα με το νόμο του Faraday. Ωστόσο, οι δυναμικές γραμμές που είναι παράλληλες στην επιφάνεια συνεισφέρουν και αυτές επιπλέον ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή. Για να το αντιληφθείτε καλύτερα, φανταστείτε ισοδύναμα την κίνηση του ρευματοφόρου βρόχου στο σύστημα αναφοράς του μονοπόλου. Καθώς το σύρμα διατέμνει τις «παράλληλες» δυναμικές γραμμές, στους ελεύθερους φορείς φορτίου θα ασκηθεί δύναμη Lorentz, γεγονός που θα προκαλέσει ρεύμα ίδιας φοράς με τη φορά του επαγόμενου ρεύματος λόγω των «κάθετων» δυναμικών γραμμών.)

Και τώρα ακολουθεί το πραγματικά καταπληκτικό μέρος του άρθρου. Το 1961 ανακαλύφθηκε πειραματικά ότι η μαγνητική ροή διαμέσου ενός υπεραγώγιμου ρευματοφόρου βρόχου είναι κβαντωμένη, δηλαδή μπορεί να πάρει μόνο τιμές που είναι πολλαπλάσια μιας πεπερασμένης ελάχιστης ροής. Θυμηθείτε ότι στην πειραματική μας διάταξη η διέλευση ενός μονοπόλου διαμέσου του υπεραγώγιμου βρόχου θα είχε αποτέλεσμα να κυκλοφορεί μόνιμο ρεύμα σ' αυτόν. Εφόσον η ροή διαμέσου του βρόχου εξαρτάται από το εν λόγω ρεύμα, το οποίο με τη σειρά του οφείλεται στην κυκλοφορία των φορέων φορτίου, αυτό σημαίνει ότι οι φορείς φορτίου μπορεί να βρίσκονται μόνο σε διακριτές ενεργειακές στάθμες. Αυτό μπορεί να σας ακούγεται αρκετά οικείο —ένα φορτίο κινούμενο σε κυκλική τροχιά βρίσκεται μόνο σε διακριτές ενεργειακές στάθμες. Το μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου δίνει ακριβώς αυτό το αποτέλεσμα. Ο Bohr επέμεινε ότι ένα ηλεκτρόνιο κινούμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$2\pi R = n\lambda = n\frac{h}{p},$$

όπου λ είναι το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου, και δίνεται από τη σχέση $\lambda = h/p$. Εδώ, $p = mv$ είναι η ορμή του ηλεκτρονίου και h η σταθερά του Planck.

Στην περίπτωσή μας, μπορούμε να θεωρούμε ως φορείς φορτίου ηλεκτρόνια, τα οποία κινούνται σε κυκλική τροχιά μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο B. Λόγω της δύναμης Lorentz κάθε ηλεκτρόνιο αποκτά κεντρομόλο επιτάχυνση, τέτοια ώστε να ισχύει

$$evB = m\frac{v^2}{R}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο εξισώσεις, παίρνουμε τη σχέση

$$B(\pi R^2) = n\frac{h}{2e}.$$

Η ροή διαμέσου του βρόχου είναι απλώς

$$\Phi = B(\pi R^2) = n\frac{h}{2e}.$$

Επομένως, η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από έναν ρευματοφόρο βρόχο είναι κβαντωμένη. Το κβάντο ροής είναι πολύ μικρό, με τιμή περίπου $2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{T \cdot m^2}$. Κανονικά, η κβάντωση αυτή δεν θα ήταν παρατηρήσιμη σε ένα μακροσκοπικό σύστημα —δηλαδή δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται κβαντομηχανικά όλα τα ηλεκτρόνια που κινούνται σε κυκλική τροχιά. Οι υπεραγωγοί ωστόσο είναι ένα σπάνιο είδος υλικών όπου η κβαντομηχανική συμπεριφορά γίνεται εμφανής σε μακροσκοπική κλίμακα. Αυτό ίσως έπρεπε να αποτελέσει το θέμα ενός άλλου άρθρου στο *Quantum*. Πάντως, σε διαδικασίες όπως αυτή της υπεραγωγιμότητας και της υπερρευστότητας (ροή υγρού χωρίς εσωτερική τριβή), υπάρχουν πράγματι μακροσκοπικής κλίμακας κβαντικές αλληλοσυσχετίσεις μεταξύ ηλεκτρονίων που είναι πολύ εμφανείς. Η διέλευση ενός μονοπόλου μέσα από έναν βρόχο θα είχε αποτέλεσμα να υπάρχει στο βρόχο μαγνητική ροή δύο κβάντων ροής. Είναι αξιοσημείωτο ότι με τη σύγχρονη τεχνολογία μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια ροή μικρή όσο ένα κβάντο ροής, και αυτό είναι δυνατό μόνο εφόσον αναπτυχθούν διατάξεις ημιαγωγών υπεραγώγιμης τεχνολογίας.

Ας συνδυάσουμε τα αποτελέσματά μας για την ολική μαγνητική ροή που πρέπει να εξισορροπηθεί από τον ρευματοφόρο βρόχο με τη συνθήκη κβάντωσης της ροής. Αμέσως καταλήγουμε στη σχέση

$$\mu_0 q^* e = n\frac{h}{2}.$$

Αυτή είναι η περίφημη συνθήκη κβάντωσης του Dirac για το μαγνητικό φορτίο ενός μονοπόλου. Εδώ είναι εκφρασμένη σε μονάδες του S.I. —κάτι που κανονικά δεν το κάνουμε για τα κβαντομηχανικά αποτελέσματα· γι' αυτό το λόγο μπορεί να μη φανεί αμέσως γνωστή σε όσους την έχουν ήδη δει εκφρασμένη σε άλλα συστήματα μονάδων. Ο Dirac κατέληξε πρώτος σ' αυτό το συμπέρασμα το 1931, και τα μονόπολα που περιγράφει η συνθήκη ονομάζονται έως σήμερα μονόπολα Dirac. Αυτό που μας λέει η συνθήκη είναι αληθινά αξιοσημείωτο. Εάν στο σύμπαν υπάρχει τουλάχιστον ένα μαγνητικό μονόπολο οποιουδήποτε μαγνητικού φορτίου q^*, τότε το ηλεκτρικό φορτίο πρέπει απαραιτήτως να είναι κβαντωμένο. Αποτελεί μεγάλο μυστήριο της φυσικής το γιατί το ηλεκτρικό φορτίο είναι πραγματικά κβαντωμένο. Δεν υπάρχει κανείς λόγος για να συμβαίνει κάτι τέτοιο. Απλώς συμβαίνει. Η ύπαρξη λοιπόν ενός μονοπόλου Dirac θα παρείχε το λόγο για την κβάντωση φορτίου, και στους φυσικούς αρέσει να γνωρίζουν τους λόγους των πραγμάτων.

Μπορούμε, αν θέλετε, να κάνουμε μια εκτίμηση της μάζας του μονοπόλου Dirac από τη συνθήκη κβάντωσης. Γνωρίζετε ότι ένα ηλεκτρόνιο έχει μάζα αλλά όχι μετρήσιμο μεγέθος. Θεωρείται ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι «περιορισμένη» στην ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του. Οι ενέργειες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου υπακούουν στις ακόλουθες σχέσεις

$$U_e \propto E^2,$$

$$U_m \propto \frac{B^2}{c^2},$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός και E και B το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Εφόσον τα πεδία ενός ηλεκτρονικού και ενός μονοπόλου είναι ανάλογα προς το ηλεκτρικό και το μαγνητικό φορτίο αντίστοιχα, μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση της μάζας m_m ενός μονοπόλου Dirac από τη σχέση

$$m_m = \frac{q^{*2}}{c^2 e^2} m_e.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη κβάντωσης, βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της μάζας ενός μονοπόλου Dirac· έτσι,

$$m_m \geq \frac{h^2 m_e}{4\mu_0^2 c^2 e^4} \geq 1.175 m_e.$$

Επομένως, ένα μονόπολο Dirac θα είχε μάζα της τάξης μεγέθους της μάζας του πρωτονίου. Είναι πιθανό ότι ένα μονόπολο Dirac θα μπορούσε να παραχθεί σε έναν σύγχρονο επιταχυντή σωματιδίων, αλλά δεν έχει αποδειχθεί πως αυτός ο τρόπος αναζήτησής του είναι ο αποτελεσματικότερος.

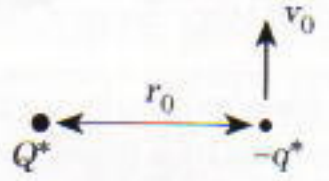
Το μεγάλο μαγνητικό φορτίο και η σχετικά μικρή μάζα ενός μονοπόλου Dirac σημαίνουν ότι είναι πιθανό ένα μονόπολο Dirac να επιταχυνθεί σε πολύ υψηλές ταχύτητες από γαλαξιακά μαγνητικά πεδία και να αλληλεπιδράσει ισχυρά με την ύλη. Ένα υψηλής ταχύτητας μονόπολο που θα προσέπιπτε σε ύλη θα έμοιαζε με μια μπάλα του μπόουλινγκ που εκτοξεύεται βιαια μέσα σε ένα κατάστημα με πορσελάνες. Γιατί, λοιπόν, οι επιστήμονες δεν βλέπουν τα μονόπολα; Προφανώς πρέπει να υπάρχουν πολύ λίγα «τριγύρω», αν υπάρχουν καθόλου.

Το πληθωριστικό μοντέλο του σύμπαντος θα μπορούσε να προσφέρει επ' αυτού μια εξήγηση. Έχει διατυπωθεί η άποψη ότι αν τα αρχέγονα μονόπολα παρήχθησαν σε ποσότητα από τη Μεγάλη Έκρηξη, η ταχεία διαστολή του σύμπαντος θα έχει μειώσει την πυκνότητα μονοπόλων κατά τρόπο που συμφωνεί με το άνω όριο της πυκνότητας που προβλέπεται με βάση τη μη παρατήρησή τους.

Η θεωρία του Dirac για τα μαγνητικά μονόπολα δεν είναι βέβαια η μόνη υπάρχουσα. Άλλες θεωρίες, από τις οποίες οι πιο αξιοσημείωτες είναι οι Μεγάλες Ενοποιημένες Θεωρίες (GUT, για συντομία), προβλέπουν επίσης την ύπαρξη μονοπόλων. Τα μονόπολα των Μεγάλων Ενοποιημένων Θεωριών έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες από ένα μονόπολο Dirac —η πιο αξιοσημείωτη διαφορά είναι ότι η μάζα τους θα μπορούσε να είναι 10^{16} φορές η μάζα ενός μονοπόλου Dirac. Αυτή η τεράστια μάζα σημαίνει ότι τα μονόπολα των Μεγάλων Ενοποιημένων Θεωριών θα μπορούσαν να έχουν παραχθεί μόνο κατά τη στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης. Αν έχει συμβεί αυτό, τότε είναι πολύ πιθανό να υπάρχει κάποιο υψηλότερο νόημα στην κβάντωση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού φορτίου. Στη φυσική, τα μυστήρια δημιουργούν μυστήρια.

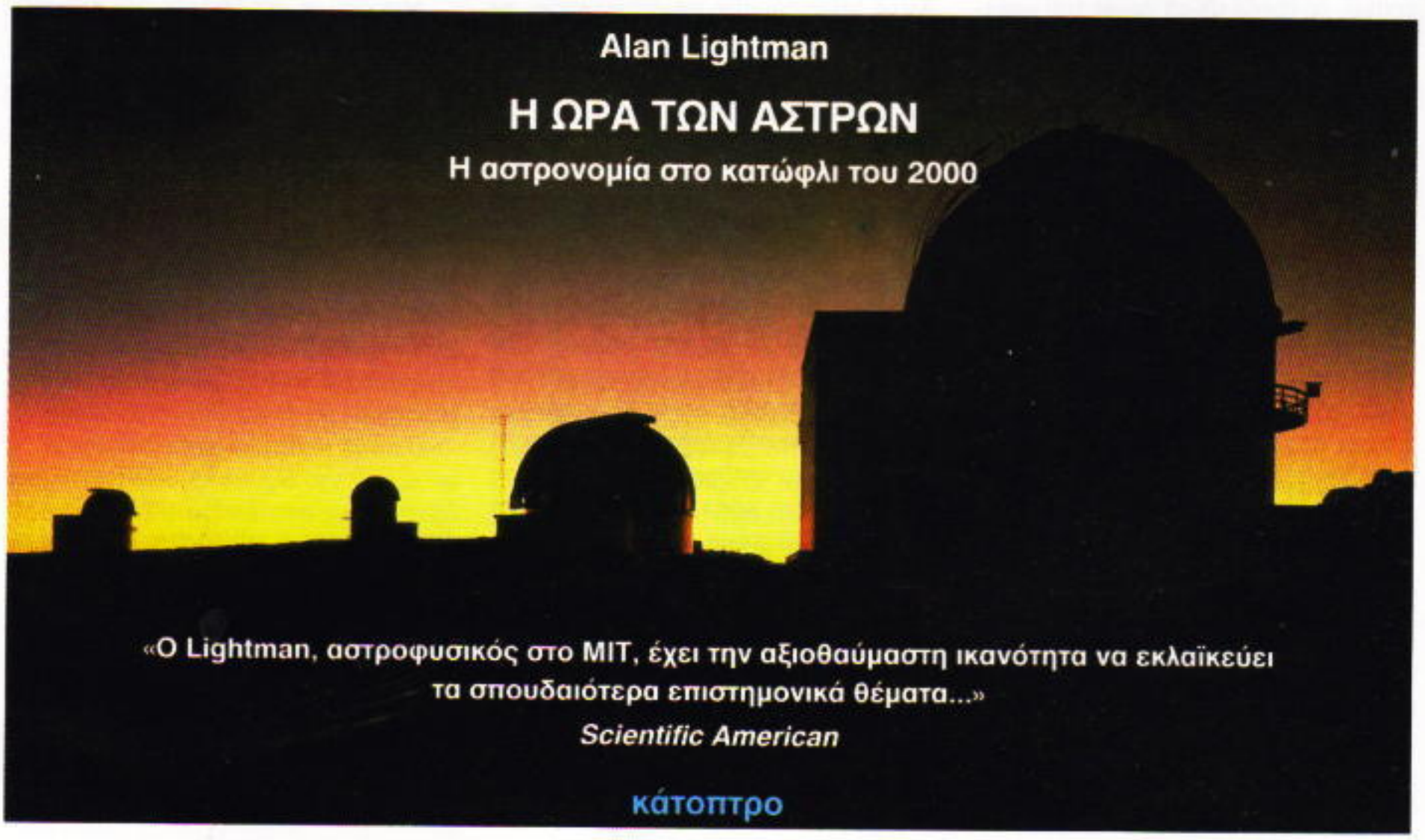
Ερώτηση

Μέχρι στιγμής, έχουμε θεωρήσει μόνο την κίνηση ενός ηλεκτρικού φορτίου παρουσία ενός μονοπόλου. Φανταστείτε τώρα πως ένα δοκιμαστικό μονόπολο με ένταση πόλου $-q^*$ και μάζα m κινείται με αρχική ταχύτητα v_0 και εισέρχεται στην περιοχή



Σχήμα 7

ενός ακίνητου και σταθερού μονοπόλου με ένταση πόλου $+Q^*$, όπως στο Σχήμα 7. Έστω ότι η αρχική απόσταση μεταξύ των δύο μονοπόλων είναι r_0. Περιγράψτε την κίνηση του δοκιμαστικού μονοπόλου. Υπάρχουν όρια που τίθενται στην κίνησή του από το μέτρο της αρχικής ταχύτητας; ■



Υπερηχητικά και γλυκοκολλοκύθες

Η τρύπα του όζοντος και τα αεροπλάνα του μέλλοντος

Albert Stasenko

Όπως γνωρίζετε, η ατμόσφαιρα που περιβάλλει τον πλανήτη μας αποτελείται κυρίως από άζωτο και οξυγόνο. Πιθανώς, όμως, δεν γνωρίζετε ότι περιέχει και τα λεγόμενα δευτερεύοντα αέρια, ο ρόλος των οποίων όμως μόνο δευτερεύων δεν είναι.

Ένα από τα πιο σημαντικά δευτερεύοντα αέρια είναι το όζον. Το χημικό του σύμβολο είναι O_3 (ενώ του οξυγόνου, O_2). Ίσως έχετε νιώσει το γαργαλητό στη μύτη σας ύστερα από μια καταιγίδα, ή σ' ένα δάσος με κωνοφόρα δέντρα, ή σ' ένα σπίτι όπου λειτουργεί γεννήτρια όζοντος. («Όζον» στα αρχαία ελληνικά σημαίνει «δύσοσμο».) Από ωφελιμιστική σκοπιά για τον άνθρωπο, ο πιο σπουδαίος ρόλος του όζοντος είναι ότι εμποδίζει τη βλαβερή υπεριώδη ακτινοβολία να φτάσει στην επιφάνεια της Γης. Όπως πιθανώς θυμάστε, το ορατό φως περιορίζεται στην περιοχή μηκών κύματος 0,35-0,7 μm, και ακόμη, η ενέργεια ενός κβάντου ακτινοβολίας (ενός φωτονίου) είναι ανάλογη με τη συχνότητα της ακτινοβολίας και αντιστρόφως ανάλογη με το μήκος κύματός της.

Όπως προκύπτει, το όζον παράγεται κυρίως από υπεριώδη ακτινοβολία, αλλά εκείνη που έχει μικρότερο μήκος κύματος (μικρότερο από 0,2 μm). Τα φωτόνια της εν λόγω ακτινοβολίας έχουν αρκετά μεγάλη ενέργεια και κατορθώνουν να διασπάσουν το σχετικά σταθερό μόριο του οξυγόνου στα δύο άτομα που το συνθέτουν. Στη συνέχεια τα δύο ελεύθερα άτομα οξυγόνου προσκολλώνται σε δύο άλλα μόρια οξυγόνου, και έτσι παράγονται δύο μόρια όζοντος. Αυτά τα νέα μόρια (O_3) είναι λιγότερο σταθερά από το μοριακό οξυγόνο (έχουν μικρότερη ενέργεια δεσμού), και γι' αυτό μπορούν να διασπαστούν από φωτόνια με λίγο μεγαλύτερο μήκος κύματος, που βρίσκεται όμως και πάλι στην υπεριώδη περιοχή του φάσματος (0,22-0,29 μm). Έτσι το οξυγόνο και το όζον, ενεργώντας από κοινού, απορροφούν σχεδόν όλη την υπεριώδη ακτινοβολία που προέρχεται από τον Ήλιο και αφήνουν να περάσει μόνο ένα μικρό ποσοστό της —το οποίο ωστόσο αρκεί για να σας προκαλέσει σοβαρό έγκαυμα αν δεν προσέξετε.

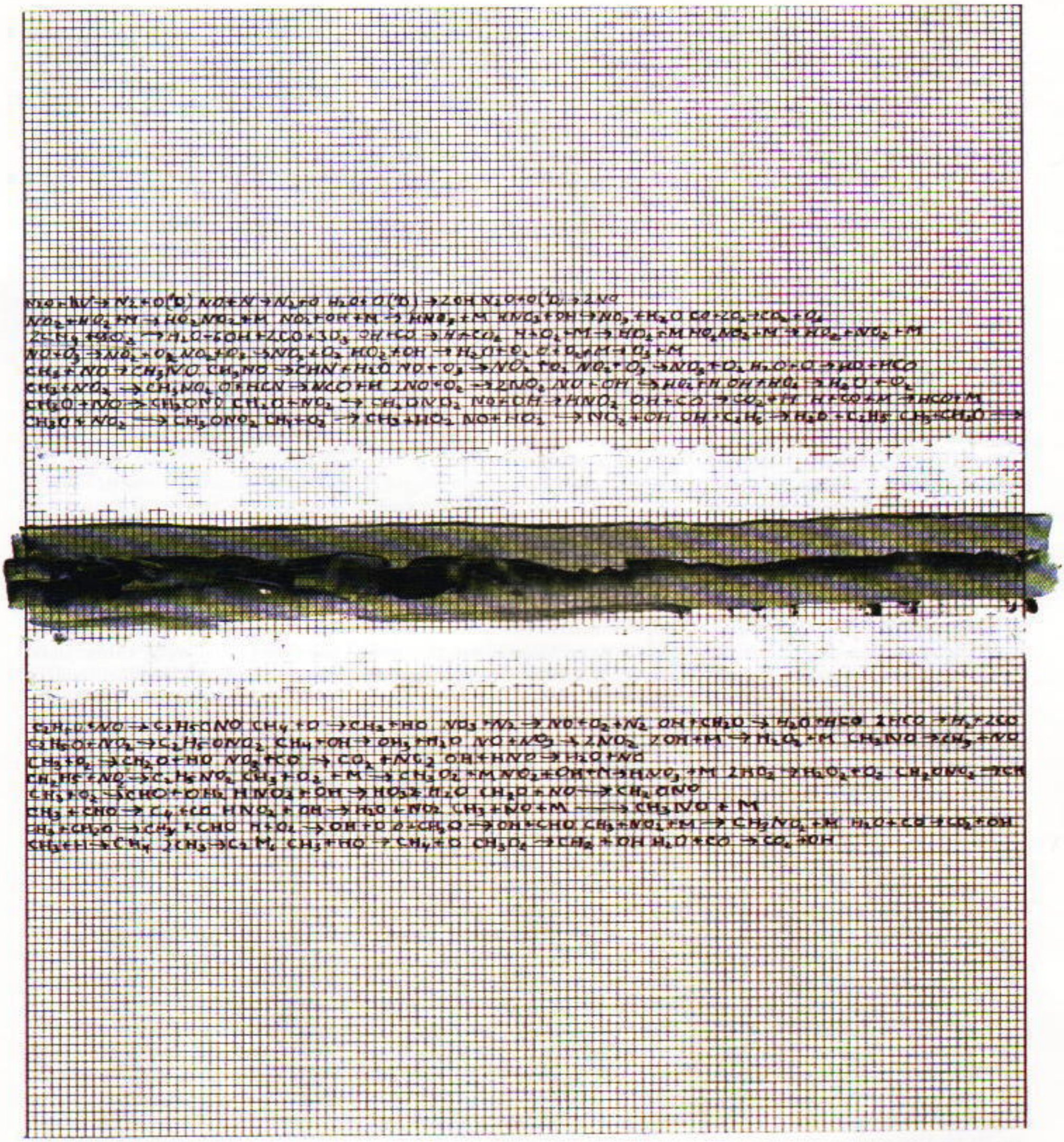
Μολονότι η φασματική περιοχή στην οποία «δρα» το όζον είναι στενή, το αντίστοιχο ποσόν της απορροφούμενης ενέργειας είναι τρεις φορές μεγαλύτερο από εκείνο όλου του υπόλοιπου φάσματος. Κι αν δεν υπήρχε το όζον, η υπεριώδης ακτινοβολία δεν θα αντιμετώπιζε κανένα εμπόδιο στο ταξίδι της προς την επιφάνεια της Γης. Είναι, λοιπόν, σαφές γιατί οφείλουμε τόση ευγνωμοσύνη στο όζον που υπάρχει στην ατμόσφαιρά μας: αποτελεί την κύρια «γραμμή αμύνης» μας κατά της υπεριώδους ακτινοβολίας, η οποία είναι ιδιαίτερα επιβλαβής για όλες τις μορφές ζωής πάνω στον πλανήτη μας.

Βεβαίως, σε τούτο το άρθρο απλούστευσα το μηχανισμό σχηματισμού του όζοντος. Διαφορετικές διαδικασίες σχηματισμού λαμβάνουν χώρα σε διαφορετικά ύψη, και πολλές ουσίες συμμετέχουν στη σύνθεση (και διάσπαση) του όζοντος. Στο Σχήμα 1 φαίνεται το σύστημα και άλλων αντιδράσεων στην ατμόσφαιρα που επίσης παράγουν όζον.

Πρόσφατα, επιστήμονες, και στη συνέχεια δημοσιογράφοι και όλοι οι οικολογικά ευαίσθητοι άνθρωποι, ανησύχησαν για την «τρύπα του όζοντος» πάνω από την Ανταρκτική. Συνήφθησαν λοιπόν διεθνείς συμφωνίες οι οποίες απαγορεύουν την παραγωγή χημικών παραγόντων που περιέχουν χλώριο, και οι οποίοι ευθύνονται για την καταστροφή του όζοντος —για παράδειγμα, το φρέον στα ψυγεία και τα μέσα προώθησης στα δοχεία αεροζόλ. Ωστόσο, στο Σχήμα 1 δεν φαίνεται το σύστημα αντιδράσεων που περιέχουν τέτοιες ουσίες, οι οποίες «κατατρώγουν» το όζον. Η εικόνα αυτή δεν έχει στόχο να εκφοβίσει, αλλά να δείξει το θέμα που θα εξετάσουμε στη συνέχεια. Για να καθησυχάσω τους αναγνώστες, θα πω ότι αυτό δεν είναι το πλήρες σύνολο των αντιδράσεων όπου παίζεται το δράμα της γένεσης και του θανάτου του όζοντος. Στη συζήτησή μας θα χρησιμοποιήσουμε μόνο ό,τι μας είναι πιο απαραίτητο.

Πρώτα απ' όλα, η ολική πυκνότητα της ατμόσφαιρας (ενός μείγματος από πολλά αέρια) ελαττώνεται μονοτονικά με το υψόμετρο. Αν η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας ήταν σταθε-

Εικονογράφηση: Yury Vashchenko



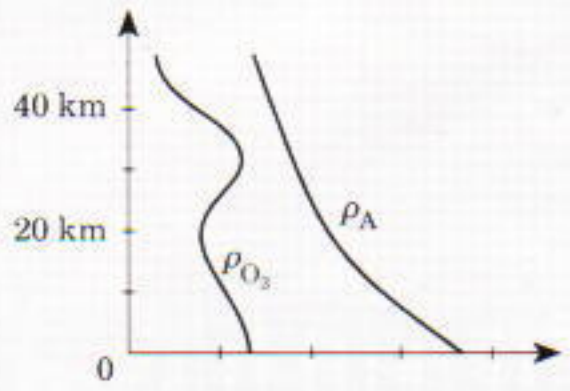
Σχήμα 1

ρή και ίση με T, η πίεση p και η πυκνότητα ρ ενός αερίου μοριακής μάζας M θα μεταβαλλόταν σε σχέση με το υψόμετρο y σύμφωνα με τη βαρομετρική εξίσωση του Boltzmann

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = e^{-Mgy/RT}. \qquad (1)$$

Ο δείκτης 0 αντιστοιχεί στην τιμή της πίεσης και της πυκνότητας στην επιφάνεια της θάλασσας.

Παρ' όλα αυτά, η πυκνότητα του όζοντος δεν μεταβάλλεται μονοτονικά και λαμβάνει μέγιστη τιμή σε υψόμετρο 20-30 km περίπου (Σχήμα 2), ανάλογα με τη γεωγραφική θέση, την εποχή και την ώρα της ημέρας. Βέβαια, το γεγονός ότι η μεταβολή της πυκνότητας του όζοντος δεν είναι μονοτονική δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου την εξάρτηση από το υψόμετρο της ολικής πυκνότητας του μείγματος των αερίων που συνιστούν την ατμόσφαιρα, αφού η πυ-

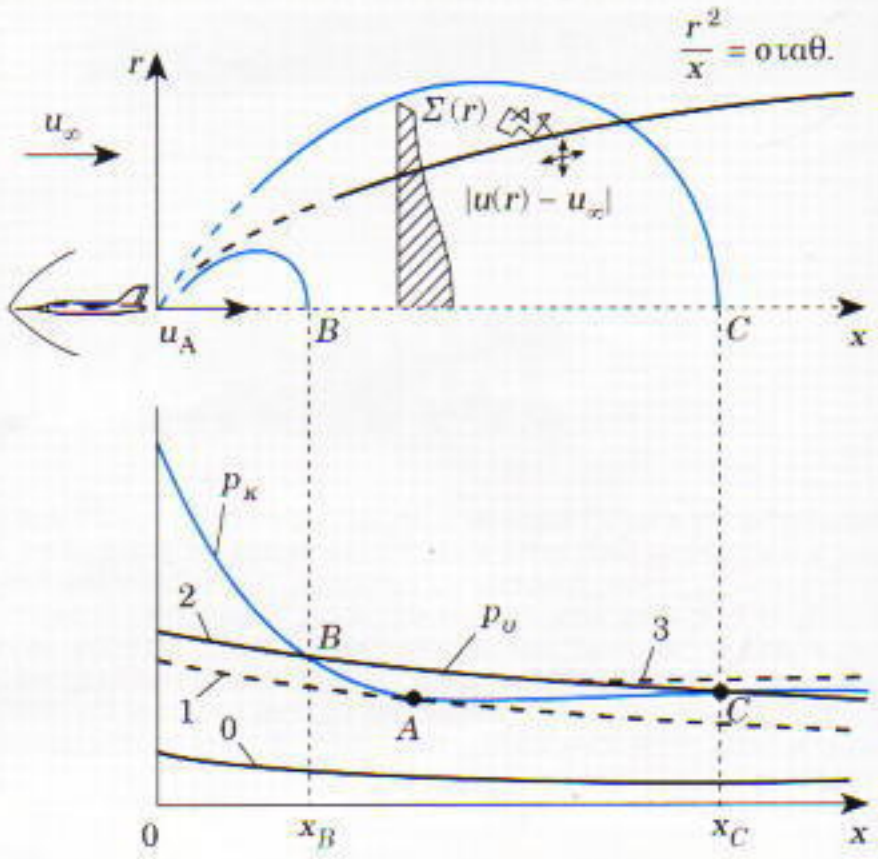


Σχήμα 2

κνότητα του όζοντος είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερη από την ολική πυκνότητα. Ωστόσο, σ' αυτά τα ύψη θα πετούν τα αεροπλάνα στο κοντινό μέλλον. Με μια πρώτη ματιά δεν αντιλαμβάνεστε το πρόβλημα. Μου έρχεται στο νου ένα παλιό αίνιγμα για τα πλεούμενα: «Σκίζουν, σκίζουν, κανέναν δεν πονάνε· όσο κι αν προχωράνε, αχνάρια δεν αφήνουν». Από οικολογική άποψη, όμως, αυτό το αίνιγμα δεν περιγράφει καθόλου την περίπτωση των αεροπλάνων της γραμμής.

Στη μέση του Σχήματος 1 παρουσιάζεται σχηματικά το αέριο εξαγωγής από τη μηχανή ενός αεροσκάφους, καθώς επίσης και οι χημικές αντιδράσεις που συμβαίνουν σ' αυτήν και γύρω από αυτήν. Επαναλαμβάνω ότι δεν παρουσιάζονται για να σας εκφοβίσουν: ακόμη κι εκείνοι που επιλύουν με υπολογιστές το ενλόγω σύστημα, δεν γνωρίζουν τα πάντα για τους συντελεστές στις αντιδράσεις αυτές. Μπορούμε λοιπόν απλώς να σκεφτόμαστε τη μεγάλη εικόνα. Το ζήτημα είναι ότι τα αεροπλάνα της γραμμής θα μεταφέρουν αυτή τη σωρεία των χημικών στην καρδιά του στρώματος του όζοντος —δηλαδή σε υψόμετρα όπου η συγκέντρωση του όζοντος είναι μέγιστη. Και μάλιστα αντιλαμβάνεστε ότι αυτή θα είναι η ειρηνική πολιτική αεροπορία. Θα τη χρησιμοποιούν επιχειρηματίες που θα κουβαλούν χαρτοφύλακες γεμάτους συμφωνίες και συμβόλαια, τουρίστες και συγγενείς που θα ταξιδεύουν σε άλλες ηπείρους και φοιτητές προγραμμάτων ανταλλαγής που θα πετούν σε διπλανές χώρες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, λοιπόν, αποκλείεται η απαγόρευση των πτήσεων —πρόκειται για την αεροπορία που θα χρησιμοποιούμε όλοι.

Για να είναι κερδοφόρος η εμπορική αεροπορία, οι αεροπορικές εταιρείες δεν χρειάζονται εκατοντάδες αεριωθούμενα αεροπλάνα. Συνολικά, τα αεροπλάνα αυτά θα καίνε 50-100 εκατομμύρια τόνους καυσίμων στην ατμόσφαιρα και θα παράγουν μεταξύ άλλων περίπου ένα εκατομμύριο τόνους οξειδίων του αζώτου: NO, NO_2, ... (Χάριν ευκολίας θα συμβολίσουμε το σύνολο των οξειδίων αυτών ως NO_x.) Ακούγεται εκπληκτικό, αλλά ακόμη και το άζωτο «καίγεται» (οξειδώνεται) στις περιοχές των μηχανών των αεριωθουμένων όπου αναπτύσσονται υψηλές θερμοκρασίες. Μερικές από τις ουσίες που εκβάλλουν οι αεριοπροωθητικές μηχανές καταστρέφουν το όζον, και την πρώτη θέση κατέχουν τα ίδια τα οξείδια του αζώτου (Σχήμα 1). Οι αντιδράσεις αυτές είναι άμεσα υπεύθυνες για τη μείωση του όζοντος. Ωστόσο, στο σχήμα φαίνεται ότι υπάρχουν και αντιδράσεις κατά τις οποίες παράγεται όζον —τόσο στην ίδια την αεριοπροωθητική μηχανή όσο και στην ατμόσφαιρα. Εφόσον η παραγωγή επιπλέον ποσοτήτων οξειδίων του αζώτου μπορεί να μετατοπίσει τη χημική ισορροπία και να μειώσει την ποσότητα του όζοντος στον αέρα, αποτελεί πρόκληση το να καταφέρουμε να ελαττώσουμε τη συγκέντρωση των NO_x με κάθε δυνατό μέσο. Αλλά πώς;



Σχήμα 3

Πρώτα απ' όλα χρειάζεται να εξετάσουμε το ίχνος που αφήνει πίσω του ένα αεριωθούμενο αεροπλάνο.

Μοναχικό στροβιλοπίδακα

Σε τι χρησιμεύουν τα αέρια εξαγωγής σε ένα αεριωθούμενο αεροπλάνο —το υψηλής ταχύτητας ρεύμα αέρα που εκβάλλει η μηχανή του; Επειδή τα αέρια εκτοξεύονται με ορμή, το αεροπλάνο κερδίζει ίση ορμή προς την αντίθετη κατεύθυνση. Επομένως, ο πίδακας των αερίων εξαγωγής προσδίδει στο αεροπλάνο τη λεγόμενη «προωστική δύναμη». Το αεριωθούμενο «καταπίνει» τον αέρα που εισέρχεται σ' αυτό, καταναλώνει κάποιο μέρος του (οξυγόνο) για να κάψει το καύσιμο (κατά κανόνα κηροζίνη) και στη συνέχεια εκβάλλει το θερμό μείγμα, δημιουργώντας την προωστική δύναμη που απαιτείται για την πτήση. Όταν η κηροζίνη ή οποιοσδήποτε άλλος υδρογονάνθρακας καίγεται παρουσία αζώτου, παράγεται ένα αέριο μείγμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Αν αντί για κηροζίνη καιγόταν υδρογόνο, δεν θα υπήρχαν ρίζες του άνθρακα στον πίδακα. Θα εμφανίζονταν όμως οξείδια του αζώτου σε ακόμη μεγαλύτερες ποσότητες.

Ας εξετάσουμε τώρα τη μηχανική του πίδακα των αερίων εξαγωγής. Συμβολίζουμε με u την ταχύτητα του πίδακα σε σχέση με το αεροπλάνο, με u_A την ταχύτητα εξόδου του πίδακα από τη μηχανή (ο δείκτης Α προέρχεται από τη γερμανική λέξη *Ausgang*, που σημαίνει «έξοδος»), και με u_∞ την ταχύτητα του πίδακα σε μεγάλη απόσταση από το αεροπλάνο (είναι ίση με την ταχύτητα του αέρα σε σχέση με το αεροπλάνο, ή απλώς με την ταχύτητα του αεροπλάνου). Αφού ο πίδακας εκτινάσσεται μέσα στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα $|u_A - u_\infty|$, αρχίζει να κινείται σε σχέση με

τον αέρα με μικρή και μονοτονικά μειούμενη ταχύτητα $|u - u_{\infty}| << u_A, u_{\infty}$. Κι ενώ συμβαίνει αυτό, τα αέρια στον πίδακα αναμειγνύονται συνεχώς με καινούργιες περιοχές της ατμόσφαιρας. Στο καινούργιο μείγμα αερίων, η συγκέντρωση των αρχικών αερίων θα ελαττώνεται ομαλά από τον άξονα του πίδακα προς την περιφέρεια (βλ. την καμπύλη $\Sigma(r)$ στο επάνω μέρος του Σχήματος 3).

Παρομοίως, η ταχύτητα $u(r) - u_{\infty}$ θα ελαττώνεται ακτινικά, έτσι ώστε τα στρώματα του ρεύματος που κινούνται σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα να «τρίβονται» το ένα στο άλλο. Επομένως τα απομακρυσμένα στρώματα θα επιβραδύνουν την κίνηση των πιο κοντινών. Ο αναγνώστης που είναι καλά μυημένος στη φυσική θα το έχει ήδη διατυπώσει αυτό ως εξής: «Η αξονική συνιστώσα της ορμής μεταφέρεται ακτινικά». Ένας τέτοιος αναγνώστης θα έχει σίγουρα εισαγάγει το συντελεστή ιξώδους (εσωτερικής τριβής) και το συντελεστή διάχυσης, για να περιγράψει τη μεταφορά μάζας, και τέλος το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, για τη μεταφορά θερμότητας. Καλή δουλειά! Το πιθανότερο όμως είναι ότι εσείς δεν είστε τόσο προχωρημένοι. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να περιγράψουμε απλούστερα αυτά τα φαινόμενα.

Η μεταφορά όλων των μεγεθών που μόλις αναφέρθηκαν, καθώς και η ακτινική κίνηση των σωματιδίων του πίδακα, περιγράφονται μέσω της στοχαστικής (τυχαίας) κίνησης. Από θεωρητική άποψη αυτό το είδος κίνησης εξηγείται λεπτομερώς στο βιβλίο *Textbook on Physics* του Richard P. Feynman. Εκεί θα βρείτε το περίφημο παράδειγμα του μεθυσμένου ναύτη ο οποίος επιλέγει τυχαία μία από τις τέσσερις διευθύνσεις σε κάθε διασταύρωση σε μια άγνωστη πόλη (μπρος ή πίσω, δεξιά ή αριστερά). Αλλά ας προχωρήσουμε στην ουσία του προβλήματος. Ένα σωματίδιο που βρίσκεται σε ορισμένο σημείο τη στιγμή που θα συγκρουστεί με ένα άλλο σωματίδιο (Σχήμα 3), θα κινηθεί στη συνέχεια προς οποιαδήποτε κατεύθυνση με ίση πιθανότητα. Αφού θα διανύσει μια χαρακτηριστική απόσταση ℓ, θα συγκρουστεί με κάποιο επόμενο σωματίδιο και θα μεταβάλει ξανά τυχαία την κατεύθυνσή του.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι, κατά μέσον όρο, σε κάθε βήμα το τετράγωνο της απόστασης αυξάνεται κατά ℓ^2. Θεωρήστε ένα σωματίδιο που έχει κάνει N βήματα και η θέση του οποίου περιγράφεται με το διάνυσμα της ακτίνας $\mathbf{r}_N$. Το σωματίδιο ήρθε στο σημείο αυτό από κάποιο άλλο σημείο $\mathbf{r}_{N-1} = \mathbf{r}_N - \ell$. Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι τα διανύσματα $\mathbf{r}_{N-1}$ και ℓ δεν είναι απαραιτήτως παράλληλα. Ας υψώσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο:

$$r_N^2 = \left(\mathbf{r}_{N-1} + \ell\right)^2 = r_{N-1}^2 + \ell^2 + 2\mathbf{r}_{N-1} \cdot \ell.$$

Η κίνηση του συγκεκριμένου σωματιδίου περιγράφεται με ακρίβεια, διότι πρόκειται για τη δική του ιστορία που αντιπροσωπεύεται από μια τεθλασμένη γραμμή. Επειδή όμως ενδιαφερόμαστε για τη μέση τιμή των συντεταγμένων ενός τεράστιου πλήθους σωματιδίων, αθροίζουμε τα τετράγωνα των μετατοπίσεων και διαιρούμε το άθροισμα με το πλήθος των σωματιδίων. Έτσι υπολογίζουμε μια μέση τιμή. Σ' αυτή τη διαδικασία παρατηρούμε ότι στον τελευταίο όρο οι μετατοπίσεις ℓ έχουν με ίση πιθανότητα ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά με το διάνυσμα $\mathbf{r}_{N-1}$. Οπότε, παίρνοντας τον μέσο όρο για ένα μεγάλο αριθμό σωματιδίων έχουμε

$$\left\langle r_N^2 \right\rangle = \left\langle r_{N-1}^2 \right\rangle + \ell^2 + 0.$$

Στη συνέχεια, ξεκινώντας με $N = 1$, μέσω της μαθηματικής επαγωγής καταλήγουμε στην επόμενη εξίσωση:

$$\left\langle r_N^2 \right\rangle = N\ell^2,$$

που σημαίνει ότι η μέση τιμή του τετραγώνου της μετατόπισης του σωματιδίου κατά τη διάρκεια τυχαίας κίνησης είναι ανάλογη του N (οπότε, η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου της μετατόπισης, $\sqrt{\left\langle r_N^2 \right\rangle}$, είναι ανάλογη του $\sqrt{N}$ και όχι του N, όπως θα ίσχυε για την ομαλή κίνηση).

Αν η ταχύτητα του σωματιδίου μεταξύ των συγκρούσεων είναι v, τότε ο απαραίτητος χρόνος για ένα βήμα είναι $\tau = \ell/v$· έτσι σε χρόνο t το σωματίδιο κάνει $N = t/\tau$ βήματα. Τελικά, αν συμβολίσουμε με r το r_N, παίρνουμε

$$\left\langle r^2 \right\rangle = t\ell v.$$

Το μέγεθος D, το οποίο είναι ανάλογο του ℓv, ονομάζεται συντελεστής διάχυσης. Το ακριβές αποτέλεσμα για την περίπτωση που εξετάζουμε είναι παρόμοιο:

$$\left\langle r^2 \right\rangle = 4Dt. \qquad (2)$$

Ας συμβολίσουμε με n τη συγκέντρωση ορισμένων σωματιδίων στο ρεύμα, για παράδειγμα σωματιδίων αιθάλης. Αν πολλαπλασιάσουμε τη συγκέντρωσή τους επί την ταχύτητά τους, παίρνουμε την πυκνότητα ροής των σωματιδίων αυτών στο σύστημα αναφοράς του αεροπλάνου: nu_{∞} (υποθέσαμε ότι η ταχύτητα του πίδακα σε σχέση με την ατμόσφαιρα είναι αμελητέα συγκρινόμενη με το u_{∞}). Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2) επί την πυκνότητα ροής των σωματιδίων και επί τον αριθμό π:

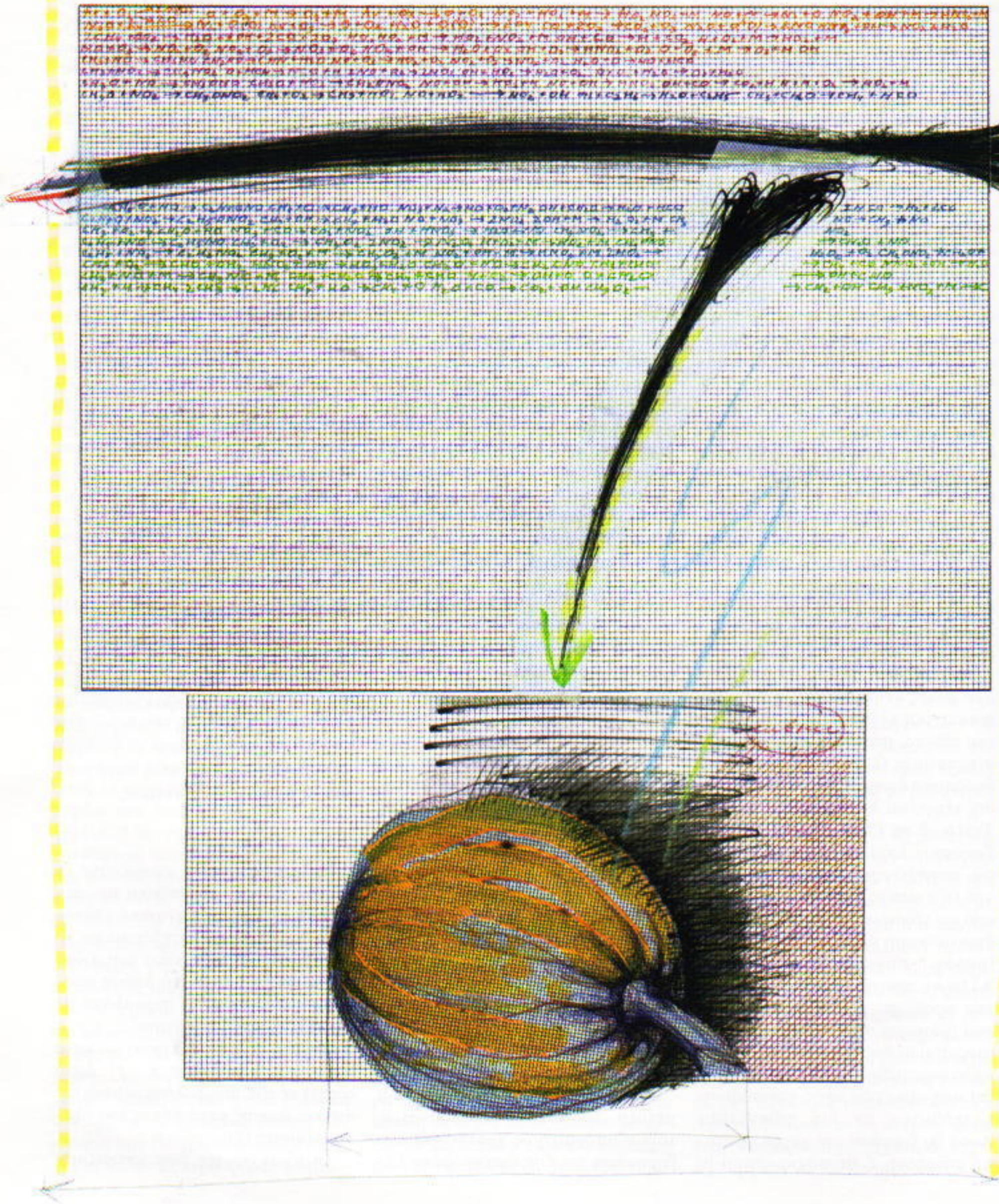
$$\pi\left\langle r^2 \right\rangle nu_{\infty} = 4\pi Du_{\infty} tn.$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης εκφράζει τη συνολική ροή όλων των σωματιδίων μέσω μιας κυκλικής επιφάνειας εμβαδού $\pi\left\langle r^2 \right\rangle$. Αν τα σωματίδια δεν προσκολλώνται το ένα στο άλλο ούτε διασπώνται —δηλαδή αν ο ολικός αριθμός των σωματιδίων δεν μεταβάλλεται— το αριστερό μέλος είναι σταθερό. Στο δεξιό μέλος παρατηρούμε το γινόμενο $u_{\infty} t = x$ —που είναι η απόσταση από το αεροπλάνο. Συνεπώς,

$$n \sim \frac{1}{x}. \qquad (3)$$

Επομένως, σχεδόν γνωρίζουμε το «μηχανισμό» για τον πίδακα των αερίων εξαγωγής στο δυναμικό σύστημα αναφοράς που συνδέεται με το αεροπλάνο. Τα σωματίδια του πίδακα διαχέονται ακτινικά καθώς απομακρύνονται από το αεροπλάνο με σχεδόν σταθερή ταχύτητα $u_{\infty} = x/t$. Έτσι κατά μέσον όρο κινούνται κατά μήκος των παραβολών $x \sim r^2$. Αυτό οδηγεί σε μια υπερβολική μείωση της συγκέντρωσης κατά μήκος του άξονα (εξίσωση (3)).

Οι αναγνώστες που γνωρίζουν



καλή φυσική θα αντιληφθούν γρήγορα πώς μεταβάλλεται η συγκέντρωση και στις δύο συντεταγμένες:

$$n(x,r) \sim \frac{1}{x/u_\infty} e^{-r^2/(4Dx/u_\infty)} . \quad (4)$$

(Θυμηθείτε ότι x/u_∞ είναι ο χρόνος t.)

Τόσο η ορμή όσο και η θερμότητα θα μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο:

$$\frac{n(x,r)}{n_A} = \Sigma(x,r) = \frac{T(x,r)-T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

$$\equiv \frac{u(x,r)-u_\infty}{u_A - u_\infty} . \quad (4')$$

Οι εξισώσεις (4) και (4′), ωστόσο, δεν θα μας είναι ιδιαιτέρως χρήσιμες στη συνέχεια. Μπορούν όμως να δώσουν την εξίσωση για τις γραμμές όπου όλες οι αδιάστατες παράμετροι στην εξίσωση (4′) παίρνουν σταθερές τιμές—για παράδειγμα, $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ κτλ. Δηλαδή τις γραμμές όπου ο ατμοσφαιρικός αέρας «αραιώνει» τη συγκέντρωση του ρεύματος στο ένα δέκατο, στο ένα εκατοστό, στο ένα χιλιοστό, κ.ο.κ., της αρχικής τιμής. Οι γραμμές αυτές έχουν το χαρακτηριστικό σχήμα που φαίνεται στο πάνω μέρος του Σχήματος 3.

Οι σταγόνες ακολουθούν

Ας βρούμε στη συνέχεια τις συνθήκες που οδηγούν στη συμπύκνωση των υδρατμών στο ρεύμα. Πρώτον, το ρεύμα πρέπει να ψυχθεί. Αυτό όμως δεν είναι αρκετό για να ξεκινήσει η συμπύκνωση. Για να σχηματιστούν κορεσμένοι ατμοί απαιτείται καθορισμένο ποσόν νερού —μόνο τότε θα εμφανιστεί η «δρόσος». Για να ακριβολογήσουμε, η πίεση των υδρατμών, p_v, σε κάποιο σημείο του ρεύματος δεν πρέπει να είναι μικρότερη από την πίεση των κορεσμένων ατμών, p_κ. Προηγουμένως είδαμε πώς μεταβάλλεται με τη θέση το p_v. Τι συμβαίνει όμως με το p_κ;

Ήρθε η στιγμή να θυμηθούμε την εξίσωση (1). Στον εκθέτη εμφανίζονται δύο ενέργειες: η δυναμική ενέργεια ενός μορίου (ή ενός mole M) σε υψόμετρο y από το επίπεδο της θάλασσας και η χαρακτηριστική θερμική του ενέργεια kT σε θερμοκρασία T (ή RT για ένα mole): $mgy/kT = Mgy/RT$. Αποδεικνύεται ότι ο τύπος αυτός αποτελεί μια ειδική περίπτωση του γενικότερου ισχυρισμού του Boltzmann: εάν ένα σύστημα που αποτελείται από τεράστιο αριθμό ταυτόσημων μορίων βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, και εάν είναι δυνατό να χαρακτηριστούν τα μόρια αυτά από ορισμένα ενεργειακά επίπεδα (έστω E_1 και E_2), η σχέση μεταξύ του πλήθους των μορίων στα επίπεδα αυτά περιγράφεται από τον τύπο

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}} .$$

Τι είναι όμως η εξαέρωση αν όχι μια διαδικασία «ανάσυρσης» ενός μορίου από ένα υγρό σε ένα αέριο; Ίσως έχετε γνωρίσει την έννοια της λανθάνουσας θερμότητας εξαέρωσης L —δηλαδή τη θερμική ενέργεια που απαιτείται για να «αποσπαστεί» ένα χιλιόγραμμο ατμών από την υγρή φάση (η αντίστοιχη τιμή για ένα mole είναι ML). Η ενέργεια αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο του βάθους του πηγαδιού δυναμικής ενέργειας όπου βρίσκονται τα άτομα του υγρού και από το οποίο πρέπει να «ανασυρθούν» για να σχηματίσουν το αέριο. Έτσι, σύμφωνα με την αρχή του Boltzmann, και σε αναλογία με την εξίσωση (1), μπορούμε να γράψουμε τη σχέση για τις πυκνότητες του κορεσμένου ατμού και του υγρού ως $\rho_\kappa/\rho^0 \sim e^{-L/RT}$, ή για την πίεση ως

$$p_\kappa = p^0 e^{-L/RT} . \quad (5)$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η εξάρτηση από τη θερμοκρασία (η εκθετική!) είναι πολύ πιο απότομη από την υπερβολική μείωση ($-1/x$) των παραμέτρων του πίδακα των αερίων εξαγωγής κατά μήκος του άξονά του (εξισώσεις (3) και (4)).

Ας σκιαγραφήσουμε τώρα τη μεταβολή της πίεσης των υδρατμών, p_v, και της πίεσης των κορεσμένων ατμών, p_κ, κατά μήκος του άξονα του πίδακα. Υπάρχουν διάφορες δυνατότητες, όπως φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 3. Για την καμπύλη 0, η ποσότητα των ατμών σε κάθε σημείο του ρεύματος είναι μικρότερη από την απαραίτητη για τον κορεσμό ποσότητα. Στην καμπύλη 1, η συνθήκη συμπύκνωσης πληρούται μόνο σε ένα σημείο, το A, και οι σταγόνες εξαερώνονται προτού αρχίσουν ν' αυξάνονται σε μέγεθος. Η καμπύλη 2 τέμνει την καμπύλη κορεσμού σε δύο σημεία, B και C, μεταξύ των οποίων η πίεση των ατμών είναι μεγαλύτερη από εκείνη που απαιτείται για τον κορεσμό, γεγονός που σημαίνει ότι στην περιοχή αυτή είναι δυνατός ο σχηματισμός σταγόνων. Αφού, όμως, οι σταγόνες αρχίσουν να αυξάνονται σε μέγεθος στο σημείο B, μπορεί να εξαφανιστούν μετά το σημείο C εάν η πίεση των υδρατμών στο ρεύμα γίνει μικρότερη από την πίεση κορεσμού, διότι διαχέονται μακριά από τον πίδακα στην «ξηρή» ατμόσφαιρα. Τέλος, στην καμπύλη 3 υπάρχει η απαραίτητη ποσότητα ατμού στην ίδια την ατμόσφαιρα, και ο ατμός αυτός βρίσκεται κοντά στον κορεσμό —$p_{v_\infty} \equiv p_\kappa T_\infty$— αλλά δεν συμπυκνώνεται, ίσως επειδή δεν υπάρχουν ξένα σωματίδια για να λειτουργήσουν ως «πυρήνες συμπύκνωσης», ή ίσως για κάποιον άλλο λόγο. Ο πίδακας όμως περιέχει τέτοια σωματίδια, και έτσι ο ατμός αρχίζει να συμπυκνώνεται γύρω από αυτά στο σημείο B, με αποτέλεσμα οι σταγόνες να μην εξαφανιστούν, και μάλιστα, αν $p_{v_\infty} > p_\kappa T_\infty$, ίσως να μεγαλώσουν «εις βάρος» των υδρατμών της ατμόσφαιρας.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου συμπυκνώθηκαν σε σταγόνες όλοι οι υδρατμοί που παρήχθησαν στη μηχανή του αεροσκάφους. Είναι γνωστό ότι από το ακροφύσιο εξαγωγής αποβάλλεται στον πίδακα ένας μεγάλος αριθμός σωματιδίων αιθάλης (άνθρακας που απομένει από ατελή καύση). Μετρήσεις δείχνουν ότι η πυκνότητά τους στο ακροφύσιο μεταβάλλεται από 10^{13} έως 10^{17} m^{-3}. Όταν υπάρχουν αυτά τα ξένα σωματίδια, ο ατμός συμπυκνώνεται γύρω τους και δεν περιμένει ώσπου να επιτευχθεί σημαντικός υπερκορεσμός (άρα και υπέρψυξη). Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο οι άνθρωποι ανάβουμε φωτιές για να καταπολεμήσουμε την παγωνιά στα περιβόλια και τους κήπους: ο ατμός συμπυκνώνεται γύρω από τα σωματίδια καπνού, και η θερμότητα που παράγεται κατά τη συμπύκνωση διαχέεται στον αέρα κι έτσι εμποδίζει το

σχηματισμό πάγου πάνω στα φυτά και την καταστροφή της καλλιέργειας.

Συνεπώς, κάθε σωματίδιο αιθάλης αποκτά τη «δική του μερίδα» υδρατμού. Από αυτήν μπορούμε να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό μέγεθος των υδροσταγονιδίων:

$$\frac{4}{3}\pi\rho^0 a^3 n_A = \rho_v^a,$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\rho_v^a}{4\pi n_A \rho^0}}. \qquad (6)$$

(Εδώ αγνοούμε τον όγκο του σωματιδίου της αιθάλης, θεωρώντας πολύ μικρό αυτό το κέντρο συμπύκνωσης.)

Ας κάνουμε τώρα μερικούς υπολογισμούς, διότι, όπως λέει μια παλιά παροιμία, «θεωρία δίχως υπολογισμούς είναι σούπα δίχως αλάτι». Υποθέστε ότι η ατμοσφαιρική πίεση και η πυκνότητα είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές στην επιφάνεια της θάλασσας (μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση (1)). Έστω ότι η θερμοκρασία στο ακροφύσιο εξαγωγής είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία τής γύρω ατμόσφαιρας· κατά συνέπεια, η πυκνότητα του πίδακα των αερίων εξαγωγής είναι το ένα τρίτο της πυκνότητας του περιβάλλοντος αέρα: $\rho_A = \rho_\infty/3 = \rho_0/30$ (εδώ υποθέσαμε ότι η πίεση στον πίδακα είναι ακριβώς ίση με την ατμοσφαιρική πίεση, περίπτωση στην οποία ο πίδακας δεν θα είναι ούτε συμπιεσμένος στον άξονά του ούτε απλωμένος μακριά απ' αυτόν —πρόκειται για τον λεγόμενο «κανονικό τρόπο»).

Βέβαια, οι υδρατμοί αποτελούν ένα μικρό ποσοστό του αέριου μείγματος στον πίδακα —ο πίδακας περιέχει επιπλέον ατμοσφαιρικό άζωτο (το οποίο δεν καίγεται), διοξείδιο του άνθρακα και άλλες χημικές ενώσεις (βλ. ξανά το Σχήμα 1). Έστω ότι η συγκέντρωση του ατμών είναι 5% = 1/20· τότε λαμβάνουμε $\rho_v^a = \rho_A/20 = \rho^0/600 \cong 2 \cdot 10^{-3}$ kgr/m^3. Η πυκνότητα των σωματιδίων της αιθάλης (των πυρήνων συμπύκνωσης) υποθέτουμε ότι είναι $n_A \sim 10^{13}$ m^{-3}. Το μέγεθος μιας σταγόνας μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (6):

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 2\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{13}\cdot 10^3}} \cong 0{,}4\ \mu\text{m}.$$

Αναμφίβολα θα έχετε δει τα λευκά ίχνη που αφήνουν τα αεροπλάνα που πετάνε σε μεγάλο ύψος —αποτελούνται από αυτά τα σταγονίδια, και μερικές φορές εκτείνονται σε απόσταση εκατοντάδων χιλιομέτρων. Αλλά τι σχέση έχουν όλα αυτά με το όζον;

Χημειορρόφηση των οξειδίων του αζώτου

Ιδού η σχέση τους με το όζον: τα σταγονίδια έχουν την ικανότητα να απορροφούν τα οξείδια του αζώτου, γεγονός που μετατρέπει το νερό των σταγόνων σε διάλυμα νιτρικού οξέος. Η διαδικασία με την οποία προσλαμβάνονται οι ουσίες ονομάζεται απορρόφηση, και όταν συνοδεύεται από χημική αντίδραση είναι γνωστή ως χημειορρόφηση. Τέτοιες διαδικασίες χρησιμοποιούνται, για παράδειγμα, σε χημικές εγκαταστάσεις όπου παράγεται νιτρικό οξύ.

Από πολλές απόψεις ένας πίδακας αερίων που περιέχει σταγόνες δεν μοιάζει καθόλου με τους πύργους που χρησιμοποιούνται στην παρασκευή του νιτρικού οξέος. Πρώτον, σε μια βιομηχανική εγκατάσταση το απόθεμα νερού δεν είναι περιορισμένο, οπότε η συνεχής ροή νερού απορροφά τα οξείδια του αζώτου. Δεύτερον, η πίεση των οξειδίων του αζώτου είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη στη βιομηχανική εγκατάσταση απ' ό,τι στον πίδακα, και αυτή η μεγαλύτερη πίεση αυξάνει το ρυθμό με τον οποίο διαλύονται τα οξείδια (πράγματι, η θερμοκρασία στη στρατόσφαιρα είναι μάλλον χαμηλή ($T_{\min} \cong 217$ K), και αυτό ενισχύει τη διάλυση). Μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση για τη μέγιστη συγκέντρωση του νιτρικού οξέος στις σταγόνες του πίδακα. Αφού η συγκέντρωση των οξειδίων του αζώτου σε αέρια κατάσταση στο ακροφύσιο εξαγωγής είναι περίπου το 1/100 της αντίστοιχης του νερού, η συγκέντρωση του νιτρικού οξέος δεν θα ξεπερνά το 1%. Και τρίτον, ο πίδακας των αερίων εξαγωγής περιέχει, εκτός από τα οξείδια του αζώτου, και άλλες ουσίες.

Συνεπώς, σε γενικές γραμμές όλες οι αντιδράσεις που αναπτύσσονται στην αέρια φάση (Σχήμα 1), μπορεί να συμβούν και στις σταγόνες του πίδακα (με διαφορετικές ταχύτητες, φυσικά). Τις αντιδράσεις αυτές πρέπει να τις λάβουμε υπόψη αν θέλουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα κατά πόσον η απορρόφηση των αερίων εξαγωγής ενός αεριωθουμένου από τις σταγόνες νερού αυξάνει ή ελαττώνει το ποσοστό του όζοντος στην ατμόσφαιρα.

Στην πραγματικότητα, οι σταγόνες αυτές μας έδωσαν την ελπίδα ότι τα βλαβερά αέρια εξαγωγής θα μπορούσε να κρυφτούν κάπου αλλού. Πού; Λοιπόν, οι σταγόνες θα μπορούσε να συγκρούονται η μια με την άλλη και να συγχωνεύονται σχηματίζοντας μεγαλύτερες σταγόνες, οι οποίες να παγώνουν. Θα αποκτούσαν σημαντικό βάρος και θα έπεφταν. Έτσι θα μετέφεραν τα οξείδια στα χαμηλότερα στρώματα της ατμόσφαιρας, όπου μετά την εξάτμιση των σταγόνων τα οξείδια θα επέστρεφαν στον αέρα. Αλλά, όπως γνωρίζουμε, στην πραγματικότητα η συσσώρευση των ενλόγω οξειδίων στις χαμηλότερες περιοχές της ατμόσφαιρας αυξάνει την ποσότητα του όζοντος —αυτό ακριβώς συμβαίνει με το περίφημο νέφος του Λονδίνου.

«Μα, γιά περιμένετε!» θα πει ο σκεπτόμενος αναγνώστης. «Δεν νομίζω πως είναι ξεκάθαρο ότι το λευκό ίχνος που σχηματίζει το αεροπλάνο, με όλες τις σταγόνες που περιέχει, ταξιδεύει πράγματι προς τα κάτω.» Πράγματι, δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο. Αλλά αυτό δεν αποδεικνύει ότι οι σταγόνες εξαφανίζονται —μπορούμε να υποθέσουμε ότι, καθώς οι σταγόνες μεγαλώνουν, το ίχνος γίνεται διαφανές. Θυμηθείτε ότι η ομίχλη, που αποτελείται από μικρές σταγόνες, είναι αδιαφανής, ενώ η βροχή, που περιέχει ακόμη περισσότερο νερό ανά μονάδα όγκου, μας επιτρέπει να βλέπουμε σε αρκετά μεγάλη απόσταση.

Για να υπολογίσουμε τη μέση ορατότητα κατά μήκος μιας δέσμης φωτός, ας περιγράψουμε τη δέσμη με μια κυλινδρική επιφάνεια η ακτίνα της οποίας είναι ίση με τη μέση ακτίνα a των σταγόνων. Μια σταγόνα εμποδίζει τη δέσμη αν το κέντρο της βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο. Ο αριθμός των κέντρων που βρίσκονται

ο' έναν κύλινδρο μήκους L είναι $N = n\pi a^2 L$, όπου n είναι η συγκέντρωση των σταγόνων και $\pi a^2 L$ ο όγκος του κυλίνδρου. Γι' αυτό η μέση ορατότητα είναι

$$\hat{\ell} = \frac{L}{N} = \frac{1}{\pi a^2 n} = \frac{1}{\pi a^2 \rho_v / m}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho^0}{\pi a^2 \rho_v} \cong a\frac{\rho^0}{\rho_v},$$

όπου ρ^0 είναι η πυκνότητα του νερού. Επομένως, όσο μεγαλύτερες είναι οι σταγόνες (όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα τους a) για ορισμένη πυκνότητα των υδρατμών ρ_v, τόσο πιο διαφανές είναι το σύννεφο.

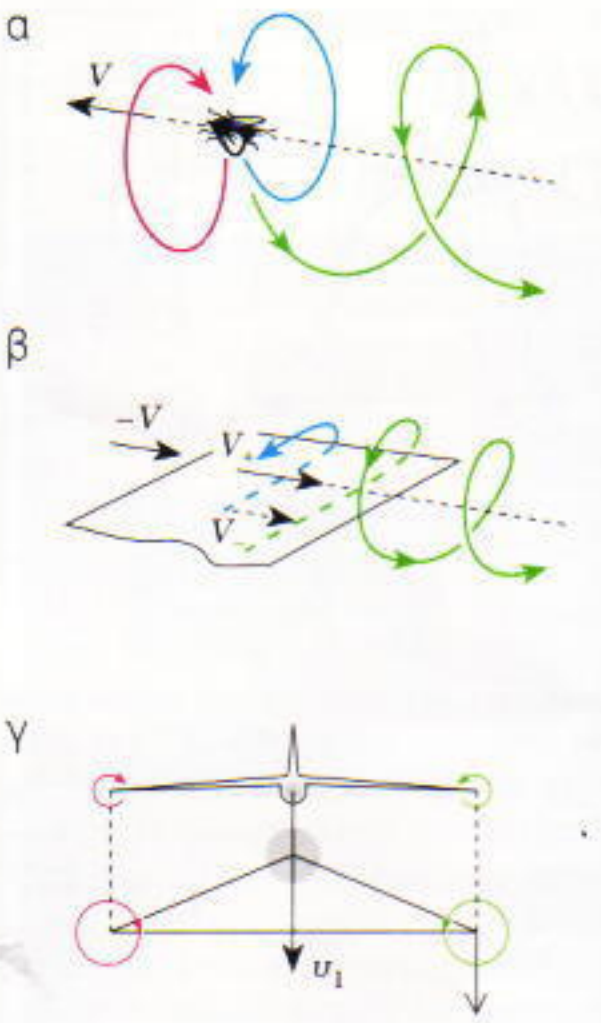
Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι ο πίδακας των αερίων που εκβάλλει ένα αεριωθούμενο δεν είναι ακριβώς στρογγυλός, ούτε και ο άξονάς του είναι ακριβώς οριζόντιος. Για να μελετήσουμε λεπτομερέστερα την πιθανή μελλοντική τύχη των σταγόνων που έχουν απορροφήσει οξείδια του αζώτου, χρειάζεται να κάνουμε κι άλλο ένα βήμα και να εξετάσουμε πώς μια ιπτάμενη μηχανή διαταράσσει την ατμόσφαιρα.

Ελεύθεροι στρόβιλοι και θερμά ρεύματα

Ας αρχίσουμε με μια μύγα. Ίσως έχετε αντιμετωπίσει το πρόβλημα στη λυκειακή σας ύλη. Ένα κλειστό κουτί με μια μύγα ακίνητη στη βάση του βρίσκεται πάνω σε μια ζυγαριά —αυτή θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε κατάσταση υπ' αριθμόν ένα. Κατάσταση υπ' αριθμόν δύο: η μύγα σηκώνεται και ακινητεί στο εσωτερικό του κουτιού χωρίς ν' αγγίζει τα τοιχώματά του. Είναι δυνατόν να διακρίνουμε τις δύο καταστάσεις κοιτάζοντας μόνο την ένδειξη της ζυγαριάς;

Η απάντηση είναι αρνητική —η ζυγαριά θα δείχνει το ίδιο βάρος και για τις δύο καταστάσεις. Καθώς η μύγα «κρατιέται» στον αέρα, παράγει μια ροή ορμής —δηλαδή, μια δύναμη με κατεύθυνση προς τα κάτω— που είναι ακριβώς ίση με το βάρος της μύγας.

Ωστόσο, καθώς η μύγα σπρώχνει αέριες μάζες προς τα κάτω, στη θέση τους πρέπει να επιστρέψει αέρας από



Σχήμα 4

επάνω. Ο αέρας λοιπόν αρχίζει να κυκλοφορεί μέσα στο κουτί, όπως ποιοτικά φαίνεται στο Σχήμα 4α με τις μπλε και κόκκινες γραμμές. Μοιάζει πάρα πολύ με τη ροή του αέρα γύρω από ένα αιωρούμενο ελικόπτερο.

Ας επιτρέψουμε τώρα στη μύγα (ή στο ελικόπτερο), η οποία πλέον δεν βρίσκεται μετέωρη αλλά κινείται προς τα εμπρός με σταθερή ταχύτητα V. Τότε, στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας της, ο αέρας εκδιώκεται προς τα πίσω με ταχύτητα $u_\infty = -V$. Επομένως, σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση της πτήσης της εμφανίζονται δύο στρόβιλοι με σχεδόν παράλληλους άξονες. (Για να μην παραφορτωθεί το Σχήμα 4α, σημειώνεται μόνο ο ένας στρόβιλος, ο οποίος βρίσκεται δεξιά σε σχέση με την κατεύθυνση πτήσης.)

Σ' ένα αεροπλάνο παράγεται σχεδόν η ίδια ροή αέρα με μια μύγα ή ένα ελικόπτερο, αλλά δεν συνδέεται η ανυψωτική λειτουργία με την προωστική: την ανυψωτική δύναμη τη δημιουργούν οι πτέρυγες και, σε αντίθεση με τη μύγα, την προωστική δύναμη τη δημιουργεί ένα σύστημα προώθησης (έλικα ή αεριοπροωθητική μηχανή) και όχι οι πτέρυγες.

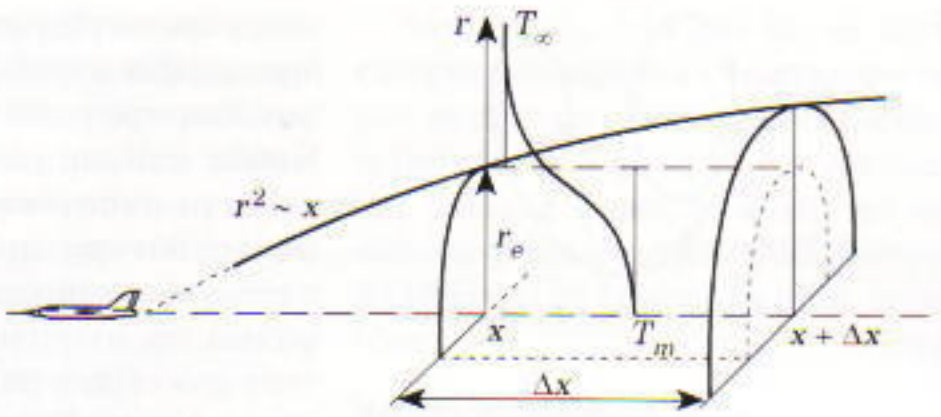
Στην περίπτωση του αεροπλάνου μπορούμε να εξηγήσουμε ποιοτικά τη δημιουργία στροβίλων στις άκρες των πτερύγων του με άλλον τρόπο. Καθώς ο αέρας ρέει γύρω από την πτέρυγα αναπτύσσοντας την ανυψωτική δύναμη, τη δυναμική άνωση, η πίεση που επικρατεί στην κάτω επιφάνεια της πτέρυγας είναι μεγαλύτερη από εκείνη που επικρατεί στην πάνω: $p_- > p_+$. Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli, η ταχύτητα του αέρα πάνω από την πτέρυγα είναι μεγαλύτερη εκείνης από κάτω της: $V_+ > V_-$ (Σχήμα 4β).

Έτσι, εξαιτίας της διαφοράς πίεσης, στο ακροπτερύγιο ο αέρας προσπαθεί να ανέβει προς τα πάνω. Αν θελήσουμε να σχεδιάσουμε την τροχιά ενός στοιχειώδους τμήματος αέρα, θα διαπιστώσουμε πως είναι ελικοειδής γύρω από το ακροπτερύγιο —πρόκειται για τον λεγόμενο στροβιλοσυρμό. Στο Σχήμα 4γ απεικονίζεται το πίσω μέρος ενός αεροπλάνου με δύο στροβιλοσυρμούς. Κατά συνέπεια, η εμφάνιση των δύο αυτών στροβίλων συνδέεται άμεσα με τη δημιουργία της ανυψωτικής δύναμης από μια κινούμενη πτέρυγα. (Η εν λόγω εξήγηση είναι κατάλληλη μόνο για υποηχητική ροή γύρω από μια πτέρυγα, αλλά είναι επαρκής για το σκοπό μας.)

Υπάρχει και άλλη μια δύναμη που ανυψώνει τον πίδακα: η άνωση, F_b. Ο πίδακας είναι πιο θερμός από το περιβάλλον του και μοιάζει με πηδαλιοχούμενο αερόστατο γεμισμένο με αέριο (αέρα) λίγο μικρότερης πυκνότητας (πράγματι, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση, $\rho \sim 1/T$ υπό σταθερή πίεση). Για να υπολογίσουμε την προς τα πάνω ταχύτητα εξαιτίας της άνωσης, χρησιμοποιούμε μια κατά βήματα κατανομή αντί για τη συνεχή κωδωνοειδή ακτινική κατανομή θερμοκρασίας και πυκνότητας στον πίδακα. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι η θερμοκρασία και η πίεση είναι σταθερές και ίσες με T_m και ρ_m στο εσωτερικό κυλίνδρου ορισμένης ακτίνας r_0 και ίσες με T_- και ρ_- στην αδιατάραχτη ατμόσφαιρα εκτός του κυλίνδρου (βλ. Σχήμα 5).

Φανταζόμαστε, λοιπόν, ότι ένα μέρος του πίδακα των αερίων εξαγωγής, μήκους Δx, περιβάλλεται από ένα κυλινδρικό περιτύλιγμα σελοφάν

με απομονωμένα τοιχώματα, και ότι το περιτύλιγμα αυτό (ένα είδος, ας πούμε, αερόστατου) ανυψώνεται στην ψυχρή ατμόσφαιρα με τη δύναμη της άνωσης



Σχήμα 5

$$\Delta F_b = (\rho_\infty - \rho_m) g \pi r_e^2 \Delta x.$$

Εδώ $\pi r_e^2 \Delta x$ είναι ο όγκος του τμήματος του πίδακα μήκους Δx, θεωρούμενου κατά προσέγγιση κυλινδρικού, αν και ξέρουμε ότι το πραγματικό ρεύμα των αερίων εξαγωγής εξαπλώνεται ελαφρώς. Αλλά $\rho_\infty = p_\infty M / RT_\infty$ και $\rho_m = p_\infty M / RT_m$, οπότε

$$\Delta F_b = \rho_\infty g \pi r_e^2 \Delta x \frac{T_m - T_\infty}{T_m}.$$

Επομένως, η άνωση είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ακτίνας της εγκάρσιας τομής του πίδακα των αερίων εξαγωγής και με τη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του πίδακα και της ατμόσφαιρας.

Ας θεωρήσουμε ότι η δύναμη αυτή προκαλεί κίνηση του πίδακα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v_\uparrow$. Τότε θα εμφανιστεί μια αντισταθμιστική οπισθέλκουσα δύναμη (μετωπική αντίσταση) που είναι ανάλογη (όπως υποθέτω ότι γνωρίζετε) της πυκνότητας του αέρα που ρέει γύρω από το αντικείμενο, του τετραγώνου της ταχύτητάς του και του εμβαδού της εγκάρσιας τομής $S_\perp = 2 r_e \Delta x$, που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\mathbf{v}_\uparrow$:

$$\Delta F_d = \rho_\infty v_\uparrow^2 S_\perp = \rho_\infty v_\uparrow^2 2 r_e \Delta x.$$

Αν θέσουμε $F_b = F_d$, και λάβουμε υπόψη μας ότι $T_m(x) - 1/x$ και ότι $r_e \sim \sqrt{x}$, παίρνουμε

$$v_\uparrow^2 \sim \frac{1}{r_e} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow v_\uparrow \sim x^{-1/4}.$$

Αν ο πίδακας των αερίων εξαγωγής «διαφεύγει» της επίδρασης των στροβίλων εξαιτίας της άνωσης, την περαιτέρω κίνησή του θα την καθορίσει βασικά η δύναμη της άνωσης. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε μαθηματικά ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_\uparrow}{u_\infty} \sim \frac{x^{-1/4}}{u_\infty},$$

και με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης παίρνουμε $y \sim x^{3/4}$. Ο άξονας του πίδακα που προκύπτει θα δείχνει σαν την καμπύλη με τη συνεχή γραμμή που φαίνεται στο Σχήμα 6.

Ήρθε η ώρα να κοιτάξουμε προς τα πίσω, όλη τη «φασαρία» που δημιούργησα σε τούτο το άρθρο (και να σας ζητήσω συγνώμη για ό,τι παρέλειψα έως τώρα).

Πρώτον, λοιπόν, η σπείρα του στροβίλου, όπως ο πίδακας της εξάτμισης, θα «διαχυθεί» στο περιβάλλον εξαιτίας της τριβής τού ενός στρώματος με το άλλο —περιστρέφονται με διαφορετικές γραμμικές ταχύτητες γύρω από τον άξονα. Αυτό σημαίνει ότι και ο στρόβιλος διαχέεται ακτινικά, οπότε η ακτινική εξάρτηση της ταχύτητάς του γίνεται πιο πολύπλοκη από την εξίσωση (2).

Δεύτερον, το πεδίο ταχυτήτων του στροβίλου θα επηρεάσει όχι μόνο τους άξονες του πίδακα αλλά και την περιφέρειά τους, διότι ένας πίδακας δεν είναι μια γραμμή —η εγκάρσια τομή του έχει κάποιο μέγεθος. Τα επιμέρους στοιχεία στον πίδακα των αερίων εξαγωγής «θα τα πάρει ο άνεμος» το καθένα με τον δικό του τρόπο, ανάλογα με τη θέση του ως προς τον άξονα.

Τρίτον, αφού επιβραδυνθεί ο πίδακας από την ατμόσφαιρα, μπορεί να αποσυντεθεί σε επιμέρους κομμάτια που θα κινηθούν προς τα πάνω ως ξεχωριστές συστάδες, και όχι ως κύλινδρος.

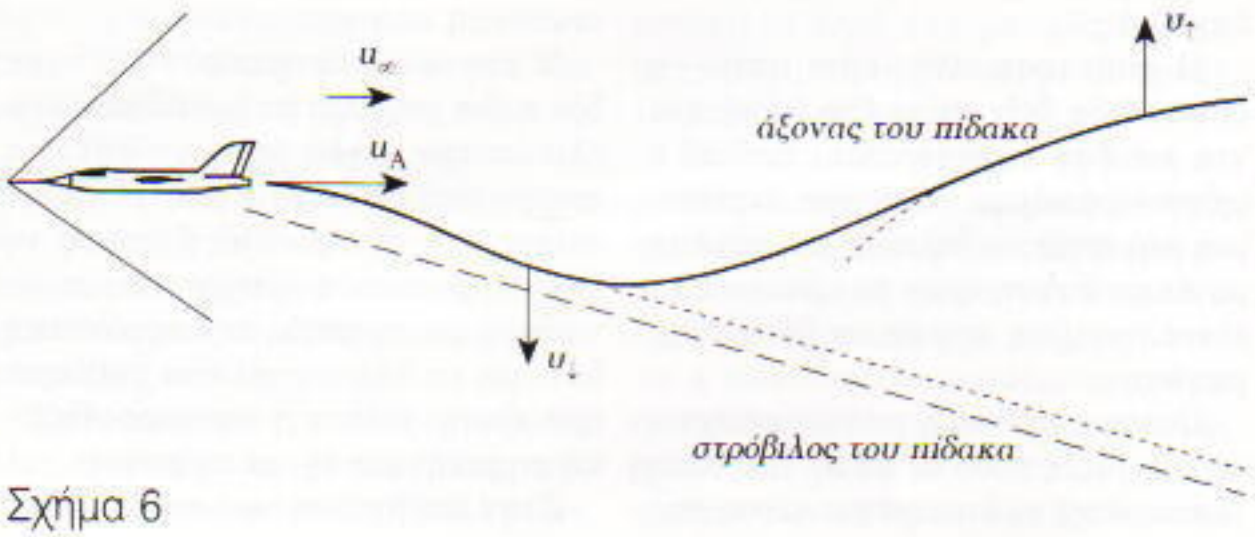
Παρέλειψα και πολλά άλλα πράγματα που πιθανώς επηρεάζουν την εξέλιξη μιας σταγόνας, τη δυνατότητα συγχώνευσης των σταγόνων και το ρυθμό συσσωμάτωσης ολόκληρου του ίχνους των σταγόνων μαζί με τα απορροφούμενα οξείδια του αζώτου.

Και ίσως κάποιοι από τους αναγνώστες μας μπορούν να μεταιρέψουν αυτές τις σκέψεις.

Συμπεράσματα

Λοιπόν, τα «στρατοσφαιρικά» αεροπλάνα του μέλλοντος θα είναι επιβλαβή για το όζον της ατμόσφαιρας; Ίσως ναι —μα σχεδόν ό,τι κάνει ο άνθρωπος είναι επιβλαβές με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, συμπεριλαμβανομένης της αναπνοής. Πραγματικά, όταν αναπνέουμε παράγουμε διοξείδιο του άνθρακα (και τα ζώα επίσης) —τα φυτά το απορροφούν και επιστρέφουν στην ατμόσφαιρα οξυγόνο, και αυτό αποτελεί μια διαδικασία ισορροπίας. Έτσι, προτού καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα, είναι σημαντικό να συγκρίνουμε την αναμενόμενη βλάβη με ό,τι φυσιολογικά συμβαίνει στη φύση.

Είναι γνωστό ότι μέχρι σήμερα οι ηφαιστειακές εκρήξεις έχουν απελευθερώσει στην ατμόσφαιρα μεγαλύτερη ποσότητα οξειδίων του αζώτου απ' ό,τι όλα τα αεροπλάνα του κόσμου. Ακόμη και στο μέλλον, όταν η συνεισφορά βλαβερών ουσιών από



Σχήμα 6

τις εμπορικές αεροπορικές γραμμές θα είναι συγκρίσιμη μ' εκείνη των φυσικών πηγών, θα είναι δύσκολο να καθορίσουμε με μεγέθη ποιος προκαλεί τη μόλυνση. Γι' αυτό, τόσο σήμερα όσο και στο μέλλον, το σημαντικό εργαλείο για να καθοριστεί η συνεισφορά της αεροπορίας στη διαδικασία αυτή θα είναι θεωρητικοί υπολογισμοί βασισμένοι σε φυσικά, χημικά και μαθηματικά μοντέλα του είδους που εξετάσαμε.

Επιπρόσθετες μελέτες ίσως αποδείξουν ότι το πρόβλημα του όζοντος δεν είναι τόσο τραγικό όσο το παρουσίασαν κάποιοι ευέξαπτοι δημοσιογράφοι που τρομοκρατήθηκαν από την «τρύπα του όζοντος» πάνω από την Ανταρκτική. Μερικοί επιστήμονες θεωρούν ότι δεν υπάρχει κανένα απολύτως πρόβλημα: η ηλιακή ακτινοβολία, λένε, απορροφάται από ολόκληρη την ατμόσφαιρα και όχι μόνο από το όζον. Και η λαϊκή σοφία τονίζει τη χρησιμότητα για τις καλλιέργειες ενός ασθενούς διαλύματος νιτρικού οξέος με τη φράση: «Αν πέσουν καταιγίδες την άνοιξη ή στις αρχές του καλοκαιριού η σοδειά θα είναι πολύ καλή». Γιατί; Λοιπόν, τα φυτά χρειάζονται άζωτο και, παρότι η ατμόσφαιρα αποτελείται κυρίως από άζωτο, δεν μπορούν να το πάρουν απευθείας από τον αέρα —πρέπει να συνδυαστεί και με άλλα στοιχεία. Εδώ είναι ο ρόλος των καταιγίδων. Κατά τις εκφορτίσεις των αστραπών, το άζωτο της ατμόσφαιρας σχηματίζει χημικές ενώσεις που διαλύονται στις σταγόνες της βροχής και μετατρέπονται σε αραιά διαλύματα νιτρικού οξέος. Το διάλυμα του νιτρικού οξέος αντιδρά με τα ορυκτά του εδάφους και ελευθερώνει ορισμένες ουσίες —φωσφόρο και κάλιο, μεταξύ άλλων. Τα στοιχεία αυτά είναι απαραίτητα για να αναπτυχθούν γρήγορα τα φυτά.

Συνεπώς, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε τη δυνατότητα να εμφανιστεί, την τρίτη μ.Χ. χιλιετία, μια καινούργια ρήση: «Αν ένα υπερηχητικό αεροπλάνο πετάξει την άνοιξη πάνω από τον κήπο σας, να περιμένετε μια μεγάλη γλυκοκολοκύθα το φθινόπωρο». ◙

ΔΥΟ ΚΛΑΣΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Σελ.: 160, 14 × 21 εκ., 3.000 δρχ.

Σε εννέα δοκίμια και κείμενα διαλέξεων που συνέγραψε κατά τα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Werner Heisenberg —ο οποίος τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ φυσικής το 1932 για το έργο του στην ατομική θεωρητική φυσική— προσφέρει μια τολμηρή αποτίμηση της επιστημονικής μεθόδου στον 20ό αιώνα, και συσχετίζει τη φιλοσοφική της επίδραση στη σύγχρονη κοινωνία και την επιστήμη με τα επί μέρους στοιχεία της μοριακής βιολογίας, της αστροφυσικής και των συναφών επιστημονικών κλάδων. Ο Heisenberg πραγματεύεται αυτά τα θέματα με φιλοσοφικούς όρους της πιο μεγάλης εμβέλειας, διευκρινίζοντάς τα με χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Σελ.: 160, 14 × 21 εκ., 3.000 δρχ.

Πώς γεννιέται μια αφηρημένη ιδέα; Πώς σχετίζεται το ασυνείδητο με την ανακάλυψη; Ποιος είναι ο ρόλος της ενόρασης και των νοητικών εικόνων στην ανάπτυξη των ιδεών; Γιατί πολλοί ρηξικέλευθοι διανοητές δεν κατάφεραν να αντιληφθούν προφανείς και σπουδαίες συνέπειες του ίδιου τους του έργου; Σε τούτο το κλασικό βιβλίο, που γοητεύει όχι μόνο τον μαθηματικό, αλλά και τον φυσικό, τον ψυχολόγο και όλους όσοι ενδιαφέρονται για τη γένεση και την ανάπτυξη των ιδεών, ο σπουδαίος μαθηματικός Jacques Hadamard πραγματεύεται διεξοδικά και εμπεριστατωμένα αυτά και πολλά άλλα ερωτήματα, ρίχνοντας άπλετο φως στις μεθόδους της μαθηματικής επινόησης και της σκέψης εν γένει.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ *κάτοπτρο*

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M36

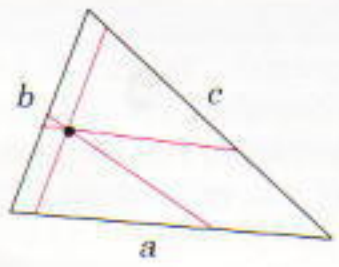
Ασυμβατότητα με πρώτους. Εκτελούμε την επόμενη πράξη πάνω σε έναν φυσικό αριθμό: Αποκόβουμε το τελευταίο του ψηφίο, το πολλαπλασιάζουμε επί 4 και στη συνέχεια προσθέτουμε το γινόμενο στον αριθμό που έχει απομείνει. (Για παράδειγμα, το 1.995 μετατρέπεται με αυτό τον τρόπο στο 219.) Εκτελούμε και πάλι την ίδια πράξη στο αποτέλεσμα που έχει προκύψει, κ.ο.κ. Αποδείξτε ότι αν η ακολουθία που προκύπτει περιέχει το 1.001, τότε δεν περιέχει κανέναν πρώτο αριθμό.
(B. Ginzburg)

M37

Παραγοντοποίηση μέσω αντικατάστασης. Αποδείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$, βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου, υπάρχει ένα πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε το $P(Q(x))$ να αναλύεται σε δύο παράγοντες (όλα τα πολυώνυμα έχουν ακέραιους συντελεστές).
(A. Kanel)

M38

Ίσα τμήματα. (α) Σχεδιάζουμε τρεις ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο εσωτερικό ενός τριγώνου και είναι παράλληλες με τις πλευρές του. Έστω ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία τομής των τριών ευθειών με τις πλευρές του τριγώνου έχουν ίσα μήκη (δείτε το Σχήμα 1, όπου τα τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα είναι χρωματισμένα κόκκινα). Αν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου είναι a, b και c, βρείτε το μήκος των τμημάτων. (β) Σχεδιάζουμε τέσσερα επίπεδα που διέρχονται από ένα σημείο εσωτερικό ενός τετραέδρου και είναι παράλληλα με τις έδρες του. Έστω ότι τα τμήματα του τετραέδρου που ορίζονται από τις τομές αυτών των επιπέδων με τις έδρες του έχουν ίσα εμβαδά. Αν τα εμβαδά των εδρών του τετραέδρου είναι a, b, c και d, βρείτε το εμβαδόν των τομών.
(A. Yagubiants και V. Dubrovsky)



Σχήμα 1

M39

Εκκεντρότητα ορθογωνίων. Ονομάζουμε *εκκεντρότητα* ενός ορθογωνίου το λόγο της μεγαλύτερης πλευράς του προς τη μικρότερη. Αποδείξτε πως όταν το ορθογώνιο B είναι εγγεγραμμένο στο ορθογώνιο A (έτσι ώστε κάθε κορυφή του B να ανήκει σε διαφορετική πλευρά του A), τότε η εκκεντρότητα του B είναι μεγαλύτερη ή ίση της εκκεντρότητας του A.
(N. Vasilyev)

M40

Πολύχρωμα τετράγωνα. Έχουμε μια σκακιέρα $n \times n$ διαστάσεων αποτελούμενη από n^2 μοναδιαία τετράγωνα, τα οποία είναι κόκκινα, άσπρα ή μπλε. Κάθε κόκκινο τετράγωνο συνορεύει με ένα άσπρο και με ένα μπλε (έχουν μία κοινή πλευρά). Κάθε άσπρο τετράγωνο συνορεύει με ένα κόκκινο και ένα μπλε, και κάθε μπλε συνορεύει με ένα άσπρο και με ένα κόκκινο. Αν k είναι το πλήθος των τετραγώνων με ένα δεδομένο χρώμα, αποδείξτε ότι (α) $k \le 2n^2/3$, (β) $k \ge n^2/11$. (F. Nazarov)

Φυσική

Φ36

Προσγείωση στα μαλακά. Ένα δοχείο περιέχει δύο υγρά που δεν αναμειγνύονται μεταξύ τους, με πυκνότητες ρ_1 και ρ_2. Τα υγρά σχηματίζουν στρώματα πάχους h_1 και h_2 αντίστοιχα. Ένα μικρό σώμα αφήνεται ελεύθερο ακριβώς πάνω στην επιφάνεια του πρώτου υγρού, και βυθίζεται με τέτοιον τρόπο ώστε πάνω του να ασκείται από το ρευστό μόνο η δύναμη της άνωσης. Το σώμα αγγίζει τον πυθμένα τη στιγμή ακριβώς που μηδενίζεται η ταχύτητά του. Ποια είναι η πυκνότητα του σώματος; (Τα δύο υγρά έχουν μηδενικό συντελεστή εσωτερικής τριβής.)
(M. Balashov)

Φ37

Στο Τρίγωνο των Βερμούδων. Χρησιμοποιώντας ένα ειδικό υψομετρικό όργανο-ραντάρ, οι αστροναύτες στον διαστημικό σταθμό Skylab βρήκαν ότι η επιφάνεια του νερού στο Τρίγωνο των Βερμούδων βρίσκεται κατά 25 m χαμηλότερα από τη φυσιολογική στάθμη του ωκεανού. Υποθέτοντας ότι αυτό το βαθούλωμα οφείλεται στο γεγονός ότι ακριβώς κάτω από τον πυθμένα του ωκεανού βρίσκεται μια σφαιρική κοιλότητα γεμάτη νερό, εκτιμήστε την ακτίνα της κοιλότητας. Το βάθος του ωκεανού στο σημείο αυτό είναι $h = 6$ km και η μέση πυκνότητα του βραχώδους υποστρώματος $\rho_\pi = 3 \cdot 10^3$ kgr/m^3.
(A. Stasenko)

Φ 38

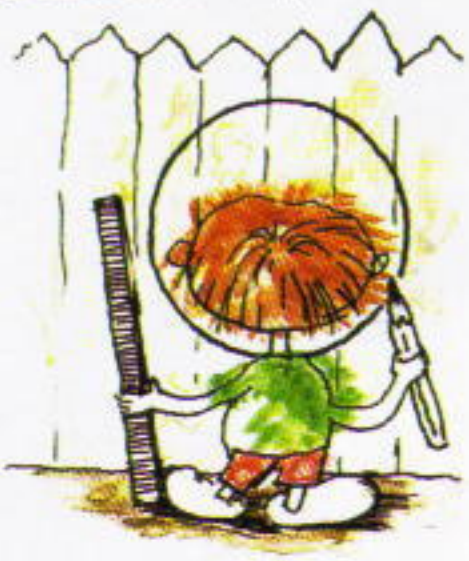
Ανακαλύψτε το αέριο. Ένα δοχείο περιέχει αέριο που η ταυτότητά του είναι άγνωστη. Για να ανέλθει η θερ-

Η συνέχεια στη σελ. 75 ⇨

Για να περνά η ώρα

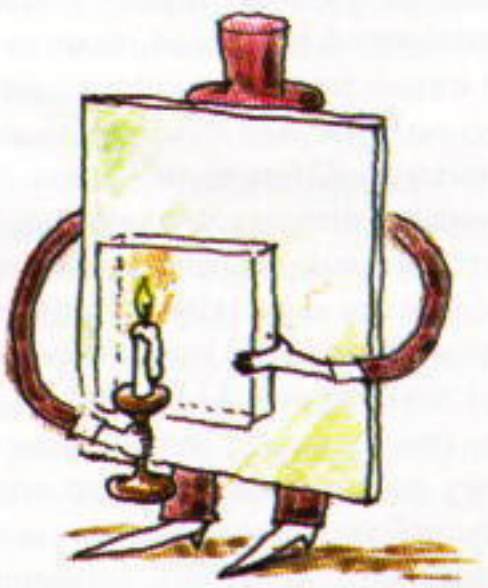
Σ36

Προβλήματα κυκλοφορίας στο ποτάμι. Μια σχεδία και μια βενζινάκατος ξεκινούν από το σημείο *A* της όχθης ενός ποταμού και κινούνται ακολουθώντας τη φορά του ρεύματος. Την ίδια στιγμή, μια δεύτερη βενζινάκατος, ίδια με την πρώτη, ξεκινά από το σημείο *B* της όχθης για να τις συναντήσει. Όταν η πρώτη βενζινάκατος φτάσει στο *B*, η σχεδία (που πλέει με την ταχύτητα του ρεύματος) θα βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο *A* ή στη δεύτερη βενζινάκατο; (G. Galperin)



Σ37

Ένας χρήσιμος χάρακας. Βρείτε το κέντρο ενός κύκλου που τον έχετε σχεδιάσει σ' ένα επίπεδο χρησιμοποιώντας μόνον έναν χάρακα με δύο παράλληλες πλευρές, το πλάτος του οποίου είναι μικρότερο από τη διάμετρο του κύκλου. (A. Demidov)

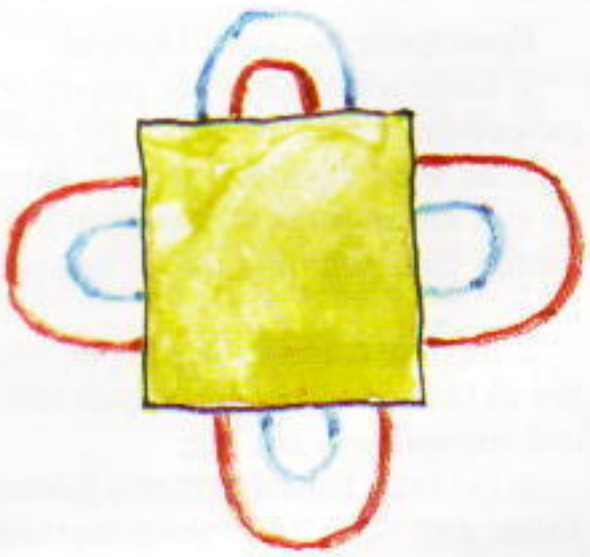


Σ38

Κερί μπροστά στον καθρέφτη. Βλέπουμε το είδωλο ενός κεριού μέσα σ' έναν επίπεδο καθρέφτη. Τι θα συμβεί στο είδωλο αν τοποθετήσουμε ένα φύλλο γυαλί ανάμεσα στον καθρέφτη και το κερί; (Ο προσανατολισμός του γυαλιού είναι ίδιος με του καθρέφτη.)

Σ39

Άγνωστο σύστημα αρίθμησης. Βρείτε τον αριθμό *n* έτσι ώστε η αλφαριθμητική εξίσωση KYOTO + KYOTO + KYOTO = TOKYO να έχει λύση στο σύστημα αρίθμησης με βάση *n*. (Όπως συνήθως, κάθε γράμμα στην εξίσωση συμβολίζει ένα ψηφίο του συστήματος, και τα διαφορετικά γράμματα συμβολίζουν διαφορετικά ψηφία.) (V. Dubrovsky και A. Shvetsov)



Σ40

Όραση με ακτίνες X. Σ' ένα επίπεδο, έχουν σχεδιαστεί τρεις κόκκινοι βρόχοι και τρεις μπλε, ξένοι μεταξύ τους. Ένα μέρος του σχήματος έχει καλυφθεί μ' ένα φύλλο χαρτιού έτσι ώστε να καλύπτεται εντελώς ο ένας βρόχος, ενώ οι υπόλοιποι παραμένουν εν μέρει ορατοί (δείτε το σχήμα). Τι χρώμα έχει ο καλυμμένος βρόχος; (V. Proizvolov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 68

Τι γνωρίζετε α

Η αστρονομία, γενικά, αποτελεί το μεγάλο πρόβλημ
ουράνιων κινήσεων που φαίνοντα

ΑΚΟΜΗ ΚΙ ΑΝ ΔΕΝ ΕΧΕΤΕ ΠΑΡΑΚΟλουθήσει μαθήματα αστρονομίας, οπωσδήποτε θα είχατε κάποτε την ευκαιρία να έρθετε σε επαφή με τα σπουδαία επιτεύγματά της. Ασφαλώς, μεγάλο μέρος του μαθήματος της φυσικής αφορά τη μηχανική, τμήμα της οποίας αποτελεί η ουράνια μηχανική. Εξάλλου, υπάρχει το μάθημα της φυσικής ιστορίας, της γεωγραφίας, της ιστορίας των αρχαίων και μέσων χρόνων... Θα είχατε λοιπόν αρκετές ευκαιρίες να πληροφορηθείτε κάποια πράγματα γι' αυτό το μεγάλο κλάδο της επιστήμης. Αναμφίβολα, το αντικείμενο αυτών των γνωστικών τομέων δεν έχει πολύ μεγάλη σχέση με τα αστρονομικά προβλήματα, με θέματα δηλαδή όπως η κίνηση των πλανητών, η παρατήρηση των άστρων, τα διαστημικά ταξίδια και οι εκλείψεις, η μηχανική και οι ιδιότητες άλλων κόσμων, πέρα από τον δικό μας. Αλλά αυτό μαρτυρεί και τους αρχαίους δεσμούς που ενώνουν τους ανθρώπους με το σύμπαν, και αποδεικνύει το ενδιαφέρον που πάντοτε προκαλεί στους ανθρώπους η ουράνια μηχανική.

Σήμερα θα λάβετε μέρος σε λίγες μόνο πράξεις της μεγαλειώδους παράστασης που δίνει καθημερινά η φύση στην ουράνια σκηνή.

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Κατά πόσα λεπτά της μοίρας περιστρέφεται η Γη κάθε λεπτό της ώρας;

2. Σε πόσο ύψος βρίσκεται ο Ήλιος αν ένα κατακόρυφο αντικείμενο σχηματίζει πίσω του σκιά ίση με το μήκος του;

3. Κατά τη διάρκεια της ημέρας, πότε δεν αλλάζει το ύψος των άστρων πάνω από τον ορίζοντα της Γης;

4. Για έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε έναν από τους γεωγραφικούς πόλους της Γης, ο Ήλιος παραμένει πάνω από τον ορίζοντα για μισό έτος, και κάτω από τον ορίζοντα για το άλλο μισό. Τι ισχύει για τη Σελήνη;

5. Γιατί η ορίζουσα της Αφροδίτης (δηλαδή η διαχωριστική γραμμή μεταξύ του φωτεινού και του σκοτεινού τμήματός της) μοιάζει με ελλειπτικό τόξο όταν την παρατηρούμε από τη Γη;

6. Είναι δυνατόν να δει κανείς το είδωλο του Ήλιου στο νερό ενός βαθιού πηγαδιού;

7. Όταν παρατηρείται από τη Γη, η Σελήνη χρειάζεται τουλάχιστον δύο λεπτά για να ανατείλει πλήρως, δηλαδή για να εμφανιστεί πάνω από τον ορίζοντα το ανώτερο και το κατώτερο χείλος του σεληνιακού δίσκου. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να ανατείλει πλήρως η Γη όταν την παρατηρεί κάποιος από τη Σελήνη;

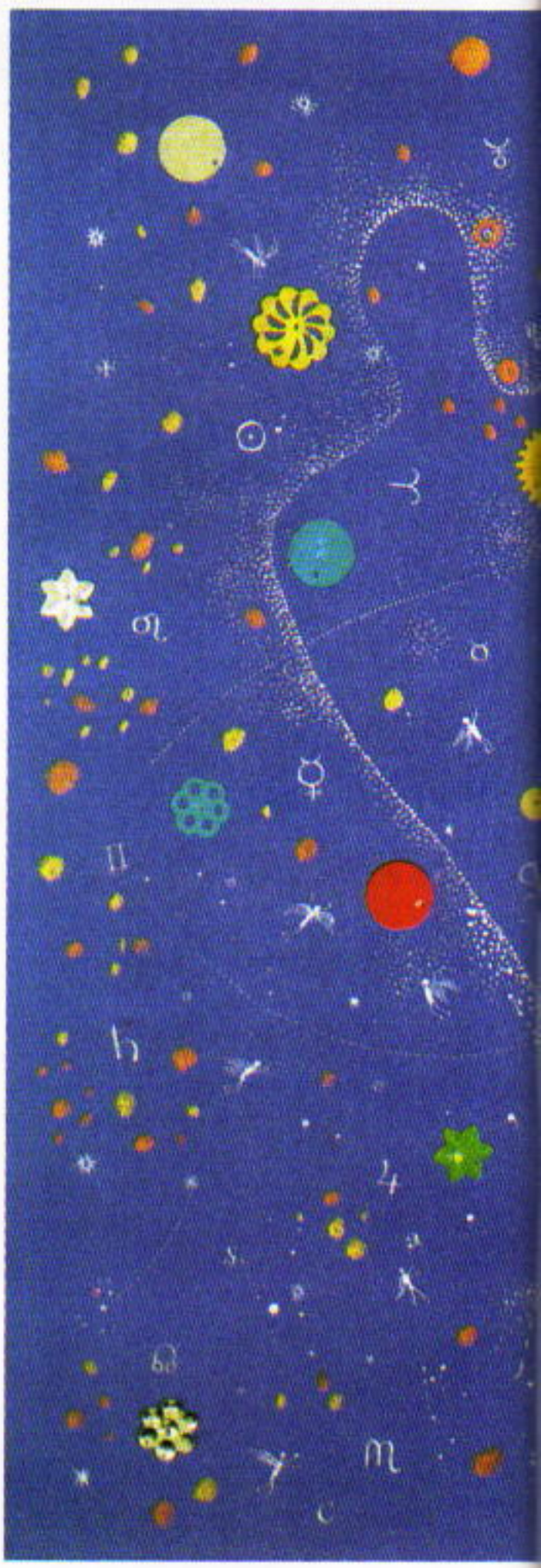
8. Τα σύννεφα στην Αφροδίτη είναι τόσο πυκνά ώστε τα άστρα δεν φαίνονται από την επιφάνειά της. Αν λοιπόν βρισκόσασταν πάνω στην Αφροδίτη, θα μπορούσατε να είστε βέβαιοι ότι ο πλανήτης στρέφεται γύρω από τον άξονά του;

9. Με τι μοιάζουν οι δακτύλιοι του Κρόνου για τους παρατηρητές που βρίσκονται στον ισημερινό και στους πόλους αυτού του πλανήτη;

10. Όταν στη Γη συμβαίνει ολική έκλειψη της Σελήνης, τι βλέπει ένας αστροναύτης που βρίσκεται πάνω στη Σελήνη;

11. Γιατί στο βόρειο ημισφαίριο οι ολικές εκλείψεις του Ήλιου συμβαίνουν συχνότερα το καλοκαίρι απ' ό,τι το χειμώνα;

12. Ένας άσπρος τοίχος που φωτίζεται από τον Ήλιο καθώς δύει μοιάζει φωτεινότερος από την επιφάνεια της Σελήνης όταν αυτή βρίσκεται στο ίδιο ύψος με τον Ήλιο πάνω από τον



Εικονογράφηση: Sergey Barkhin

ΟΣΚΟΠΙΟ

πό αστρονομία;

της μηχανικής, το οποίο συνίσταται στον καθορισμό των
μυθαίρετες. —Pierre Simon de Laplace

ορίζοντα. Μήπως αυτό σημαίνει ότι το έδαφος της Σελήνης αποτελείται από σκουρόχρωμους βράχους;

13. Ο Ήλιος φαίνεται από τη Σελήνη έτσι όπως φαίνεται και από τη Γη;

14. Θα άλλαζε η φαινόμενη θέση των άστρων αν η ατμόσφαιρα της Γης εξαφανιζόταν ξαφνικά;

15. Ποιες παρατηρήσεις αποδεικνύουν ότι οι κομήτες δεν ταξιδεύουν μέσα στη γήινη ατμόσφαιρα, όπως πίστευαν παλαιότερα;

16. Γιατί παρατηρούνται περισσότεροι μετεωρίτες από τα μεσάνυχτα ως την αυγή παρά από το απόγευμα ως τα μεσάνυχτα;

Μικροπειραματισμοί

Οι δίσκοι του Ήλιου και της Σελήνης φαίνονται μεγαλύτεροι κοντά στον ορίζοντα απ' ό,τι όταν βρίσκονται ψηλότερα στον ουρανό. Πώς μπορούμε να αποδείξουμε πειραματικά ότι αυτή η ασυμφωνία δεν είναι παρά φαινομενική;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

... η λεπτομερής μελέτη του ουρανού υποκινήθηκε από την αστρολογία. Για παράδειγμα, πριν από 2.500 περίπου χρόνια οι ασσύριοι ιερείς μπορούσαν να προβλέπουν τις ημερομηνίες των εκλείψεων.

... ο εφευρέτης του τηλεσκοπίου είναι άγνωστος. Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι το 1604 ένας Ολλανδός που εμπορευόταν ματογυάλια, ονόματι Janssen, «αντέγραψε» ένα τηλεσκόπιο που ανήκε σε κάποιον Ιταλό, το όνομα του οποίου παραμένει άγνωστο.

... τα τηλεσκόπια δεν παράγουν μεγεθυμένα είδωλα άστρων. Ένα τηλεσκόπιο συντελεί στην αύξηση της γωνιακής απόστασης μεταξύ των άστρων και της ποσότητας του φωτός που φτάνει στο μάτι από το μακρινό αντικείμενο. Γι' αυτό ακριβώς κατασκευάζονται γιγαντιαία τηλεσκόπια που οι ανακλαστήρες τους έχουν διάμετρο αρκετών μέτρων.

... το πρώτο εγχειρίδιο αστρονομίας εκδόθηκε το 1618: ήταν το βιβλίο του Kepler *Epitome astronomiae copernicanae* (Επιτομή της κοπερνίκειας αστρονομίας).

... ο περίφημος άγγλος αστρονόμος William Herschel πίστευε πολύ σοβαρά ότι ο Ήλιος κατοικείται. Θεωρούσε ότι η επιφάνειά του είναι αρκετά δροσερή ώστε να μπορεί να υπάρχει ζωή εκεί, και ότι μόνο τα σύννεφα που κινούνται από πάνω της είναι πολύ καυτά.

... αστρονομικές παρατηρήσεις έχουν παράσχει υποστήριξη σε μερικές από τις σπουδαιότερες θεωρίες της φυσικής. Για παράδειγμα, ο τρόπος με τον οποίο κυρτώνεται το φως μέσα στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, που παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια μιας έκλειψης Ηλίου, ή η απόκλιση της τροχιάς του Ερμή, η οποία ανακαλύφθηκε το 1845, δεν ήταν δυνατόν να εξηγηθούν από την κλασική φυσική, προσαρμόζονταν όμως με πολύ φυσικό τρόπο στο νέο εννοιολογικό πλαίσιο που παρείχε η γενική θεωρία της σχετικότητας.

Διαβάστε ακόμη στο Quantum

♋ «Τι κάνουν τα μικρά αστέρια», Μάιος/Ιούνιος 1994, σ. 24.

♌ «Μανιτάρια και αστρονομία ακτίνων Χ», Σεπτ./Οκτ. 1994, σ. 13.

♍ «Οπτική για ουρανοβάμονες», Νοέμ./Δεκ. 1994, σ. 20.

♎ «Όταν ένα σώμα συναντά ένα άλλο», Μάρτ./Απρ. 1995, σ. 18.

♓ «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες», Μάιος/Ιούνιος 1995, σ. 19.

A. Leonovich

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 68

Η πρωική εποχή

Αγαπητοί κύριοι,

Είναι πραγματικά εντυπωσιακή η ελληνική έκδοση του *Quantum* και δικαιώνει όσους πιστεύουν ότι το αποτέλεσμα της υψηλής ποιότητας δεν (πρέπει να) είναι προνόμιο της αλλοδαπής.

Η στήλη των συνεντεύξεων με πρωτοπόρους επιστήμονες δεν είναι απλώς ενημερωτική αλλά και διδακτική, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για συμπατριώτες μας. Εν τέλει, το να αγαπάς τη χώρα σου και από το πόστο σου να αγωνίζεσαι για το γενικό καλό, πρέπει να είναι η συνειδητή επιλογή των διακεκριμένων επιστημόνων της πατρίδας μας, έστω κι αν αυτό κοστίζει σε προσωπικά οφέλη, έστω κι αν προσκρούει στα (απαράδεκτα πολλές φορές) εμπόδια της νεοελληνικής πραγματικότητας.

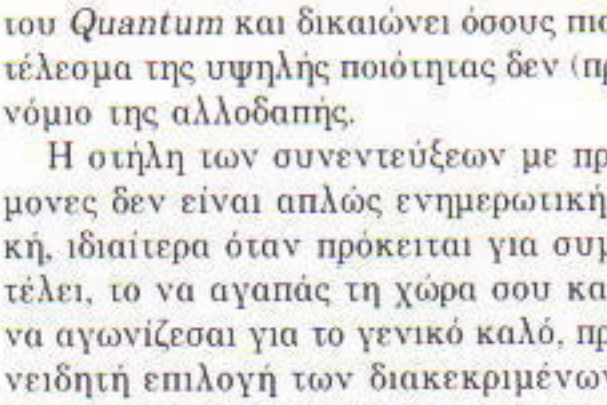
Η στήλη «Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά» μου θύμισε την (πρωική) εποχή των τελευταίων τάξεων του πρακτικού λυκείου (πριν από 25 χρόνια και βάλε...), τότε που οι συνεπαρμένοι από την ευκλείδεια γεωμετρία ανακαλύπταμε (ξανά, όπως διαπιστωνόταν εκ των υστέρων) τα δικά μας «επώνυμα» θεωρήματα. Αναφέρομαι συγκεκριμένα στην πρόταση M20 του V. Protasov, τεύχος Νοεμ./Δεκ. 1994, και σας υποδεικνύω τρεις διαφορετικές αποδείξεις. Από τη δεύτερη μάλιστα προκύπτει χαρακτηριστική ιδιότητα (καθετότητα) για την ευθεία που αναφέρεται στην παραπάνω πρόταση.

Βοηθητική πρόταση. Σε κάθε περιγράψιμο τετράπλευρο, οι ευθείες που συνδέουν τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου στις απέναντι πλευρές, διέρχονται δια του σημείου τομής των διαγωνίων του.

Η παραπάνω πρόταση, γνωστή και ως θεώρημα Newton, αποδεικνύεται στο βιβλίο *Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουιτών*, Εκδ. Α. Καραβία, σελ. 603.

Πρώτη λύση.

Βασίζεται στην ιδέα ότι αν οι προβολές τριών σημείων σε δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν τμήματα με ίσους λόγους, τότε τα σημεία αυτά ανήκουν στην ίδια ευθεία.



Σχήμα 1

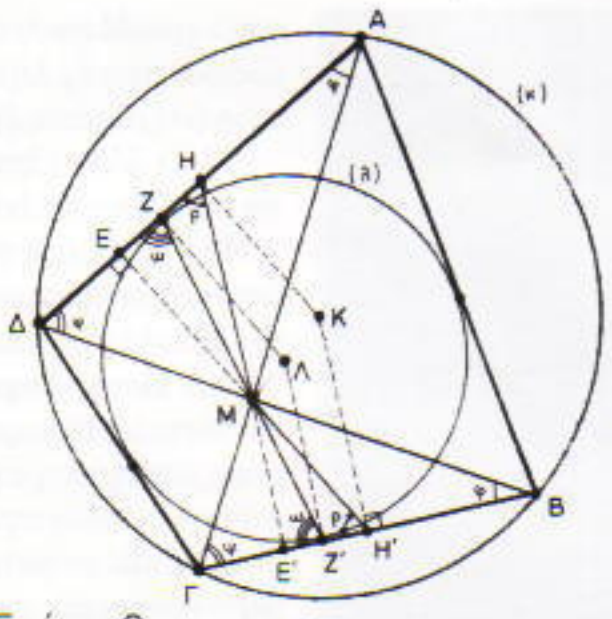
Πράγματι, στο Σχήμα 1 αν A, B, Γ και A', B', Γ' είναι αντιστοίχως οι προβολές των σημείων M, N, P επί των ευθειών (ε), (ε'), ισχύει η ισότητα

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}. \qquad (1)$$

Ας δεχτούμε ότι το P, π.χ., δεν ανήκει στην ευθεία MN. Ας είναι P', P'' αντιστοίχως τα σημεία στα οποία οι ευθείες ΓP, $\Gamma' P$ τέμνουν την MN. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, θα έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{MN}{NP'} \qquad (2), \qquad \frac{A'B'}{B'\Gamma'}=\frac{MN}{NP''} \qquad (3).$$

Από (1), (2), (3) $\Rightarrow NP' = NP'' \Rightarrow P' \equiv P''$.
Άρα το P είναι σημείο της ευθείας MN.



Σχήμα 2

Στο Σχήμα 2 το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (κ) και περιγεγραμμένο περί τον κύκλο (λ). Το M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων τους, και έστω E, Z, H, αντιστοίχως οι προβολές των M, Λ, K, επί της πλευράς $A\Delta$ και E', Z', H' οι προβολές των επί της πλευράς $B\Gamma$.

Τα σημεία Z, Z' είναι αντιστοίχως τα σημεία επαφής του κύκλου (λ) στις πλευρές $A\Delta$, $B\Gamma$, και άρα η ευθεία ZZ' διέρχεται διά του M (βλ. βοηθητική πρόταση).

Τέλος, φέρνουμε τις MH, MH'. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AM\Delta$, $BM\Gamma$. Έχουν δύο γωνίες ίσες ($\angle A\Delta M = \angle B\Gamma M = \angle\psi$ και $\angle\Delta AM = \angle\Gamma BM = \angle\varphi$, λόγω του εγγραψίμου $AB\Gamma\Delta$), και άρα είναι όμοια:

$$\frac{M\Delta}{M\Gamma}=\frac{A\Delta}{B\Gamma}=\frac{2(\Delta H)}{2(\Gamma H')}=\frac{\Delta H}{\Gamma H'} \qquad (1)$$

(διότι τα H, H' είναι αντιστοίχως μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$).

Από την ισότητα (1) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΔMH και $\Gamma MH'$ είναι όμοια, διότι έχουν μια γωνία ίση ($\angle H\Delta M = \angle H'\Gamma M = \angle\psi$), περιεχόμενη μεταξύ αναλόγων πλευρών.

Από την ομοιότητα των τριγώνων αυτών προκύπτει ότι $\angle\Delta HM = \angle\Gamma H'M$ (ως γωνίες απέναντι αναλόγων πλευρών). Επίσης, η ισότητα (1) γίνεται:

$$\frac{M\Delta}{M\Gamma}=\frac{\Delta H}{\Gamma H'}=\frac{MH}{MH'}. \qquad (2)$$

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔEM, $\Gamma E'M$. Έχουν μια οξεία γωνία ίση ($\angle E\Delta M = \angle E'\Gamma M = \angle\psi$), και άρα είναι όμοια:

$$\frac{M\Delta}{M\Gamma}=\frac{ME}{ME'}. \qquad (3)$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ZEM, $Z'E'M$ είναι επίσης όμοια,

διότι έχουν μία οξεία γωνία ίση ($\angle EZM = \angle E'Z'M = \angle\omega$), ως γωνίες της χορδής ZZ' και των εφαπτομένων στα άκρα της $A\Delta$, $B\Gamma$):

$$\frac{ME}{ME'} = \frac{EZ}{E'Z'}. \quad (4)$$

Από (3), (4) $\longrightarrow$

$$\frac{M\Delta}{M\Gamma} = \frac{ME}{ME'} = \frac{EZ}{E'Z'}. \quad (5)$$

Τέλος, συγκρίνουμε τα τρίγωνα ZMH, $Z'MH'$.

Έχουν δύο γωνίες ίσες ($\angle ZHM = \angle Z'H'M = \angle\rho$ και $\angle HZM = \angle H'Z'M = 180^\circ - \angle\omega$). Άρα είναι όμοια:

$$\frac{ZH}{Z'H'} = \frac{MH}{MH'}. \quad (6)$$

Από (2), (5), (6) $\longrightarrow$

$$\frac{EZ}{E'Z'} = \frac{ZH}{Z'H'} \Rightarrow \frac{EZ}{ZH} = \frac{E'Z'}{Z'H'}. \quad (7)$$

Από την ισότητα (7) προκύπτει ότι τα σημεία M, N, P, ανήκουν στην ίδια ευθεία, και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Δεύτερη λύση.

Βασίζεται στην ιδέα ότι για να είναι τρία σημεία συνευθειακά, αρκεί να αποδειχθεί ότι το ένα από αυτά ορίζει με τα άλλα δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία. Υπάρχει στο βιβλίο *Γεωμετρία* του Γ. Τσίντσιφα, τεύχ. 1, Εκδ. Σύγχρονου Βιβλιοπωλείου, Θεσσαλονίκη, σελ. 358.

Τρίτη λύση.

Βασίζεται στη θεωρία της αντιστροφής, και υπάρχει στη σελ. 208, τόμ. Ι, του βιβλίου *Γεωμετρία* των Χ. Τσαρούχη και Ν. Κίσκυρα.

Κώστας Βήττας, αρχιτέκτων,
Μαρούσι

Ελπιδοφόρο μέλλον

Είμαι μαθήτρια της δεύτερης τάξης του γενικού λυκείου με κατεύθυνση προς τις θετικές επιστήμες, και συγκεκριμένα τη φυσική. Τις προάλλες έτυχε να πληροφορηθώ μέσω του φροντιστηρίου μου την ύπαρξη του *Quantum*. Ξεφυλλίζοντας το τεύχος Νοεμ./Δεκ. 1994 κατάλαβα ότι πράγματι πρόκειται για ένα καθαρά επιστημονικό περιοδικό που εκτός από την εξειδίκευση που προσφέρει, παρέχει συγχρόνως τη δυνατότητα σε άτομα που δεν κατέχουν ακόμη τα ανώτερα μαθηματικά να εξοικειωθούν με έννοιες που ουδέποτε θα τις διδάσκονταν στο πλαίσιο της σχολικής διδασκαλίας (π.χ. τη μελέτη της πτήσης των αεροπλάνων). Πραγματικά, η φυσική είναι μια επιστήμη που άπτεται της καθημερινής μας ζωής, διέποντας κάθε φαινόμενό της. Ακριβώς εκεί έγκειται και η ομορφιά της. Εντούτοις, στα σχολεία διδάσκεται μια ξερή και συχνά ανούσια εφαρμογή τύπων, χωρίς να δίνεται έμφαση και τεκμηριωμένη εξήγηση του φαινομένου. Απόδειξη αυτού ότι οι περισσότεροι απόφοιτοι λυκείων είναι δυνατόν να γνωρίζουν άριστα το τυπολόγιο της εξεταστέας ύλης, αλλά είναι λίγοι αυτοί που θα γνώριζαν τα φαινόμενα σε βάθος ή θα μπορούσαν να αναγάγουν τις σχολικές σελίδες στην καθημερινή ζωή. Δυστυχώς, το πείραμα —που είναι απαραίτητο στην επιστήμη της φυσικής, όπως βέβαια και της χημείας— είναι σχεδόν ανύπαρκτο στα σχολεία.

Ακριβώς αυτός ήταν ο λόγος που χάρηκα ιδιαίτερα αντικρίζοντας το *Quantum*. Το περιοδικό σας εισάγει τη φυσική στην καθημερινή ζωή, την κάνει προσιτή και χειροπιαστή, χωρίς ταυτόχρονα να απλουστεύει τα φαινόμενα, χωρίς να δίνει εκλαϊκευμένες αποδείξεις. Αντίθετα, δίνει κίνητρα για μελέτη των φυσικών επιστημών. Καλό θα ήταν η προσπάθειά σας να αποτελέσει αφετηρία για μια πιο ολοκληρωμένη, ανθρώπινη διδασκαλία των θετικών επιστημών και πόλο έλξης για άτομα που πραγματικά ενδιαφέρονται.

Σοφία Ζεπάτου, μαθήτρια Β' λυκείου,
Αθήνα

Ας την ξανακοιτάξουμε

Στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου, σελ. 25, πρόβλημα Φ17, επισημαίνω ότι:

(α) Η εκφώνηση είναι ασαφής.

(β) Η οκέψη κατά τη λύση στην σελίδα 63 έχει σφάλμα.

Διευκρινίζω: Η εκφώνηση θα έπρεπε να είναι:

«Ένα γραμμομόριο ενός ιδανικού μονοατομικού αερίου περιορίζεται από βαρύ, θερμικά μονωμένο έμβολο μέσα σ' έναν θερμικά μονωμένο κατακόρυφο κύλινδρο, έχοντας θερμοκρασία T_0. Το έμβολο βρίσκεται σε μηχανική ισορροπία και το αέριο σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Πιέζουμε το έμβολο προς τα κάτω και συμπιέζουμε το αέριο, προσφέροντας έργο W στο έμβολο. Διατηρούμε το αέριο συμπιεσμένο, ασκώντας πίεση προς τα κάτω στο έμβολο. Ξανά το έμβολο βρίσκεται σε μηχανική ισορροπία και το αέριο σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Κατόπιν ελευθερώνουμε το έμβολο και έτσι αυτό έρχεται σε μια νέα θέση μηχανικής ισορροπίας ενώ το αέριο σε μια νέα κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Βρείτε τη θερμοκρασία T του αερίου στην τελική κατάσταση. Θεωρήστε ότι το έμβολο κινείται χωρίς τριβές με τα τοιχώματα του κυλίνδρου. Θεωρήστε επίσης αμελητέα την εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση στο έμβολο».

Κατά τη λύση δεν είναι καθόλου ανάγκη να θεωρήσουμε την όλη διαδικασία αντιστρεπτή, και σίγουρα δεν είναι ισοβαρής. Το μόνο σίγουρο: είναι αδιαβατική. Άσχετα αν η αρχική και τελική πίεση του αερίου είναι ίδιες, το αέριο δεν περνά απαραίτητα από σειρά καταστάσεων ισορροπίας. Αλλά ακόμα και αν περνά, σίγουρα η πίεσή του από την αρχική τιμή αλλάζει και κατόπιν επανέρχεται.

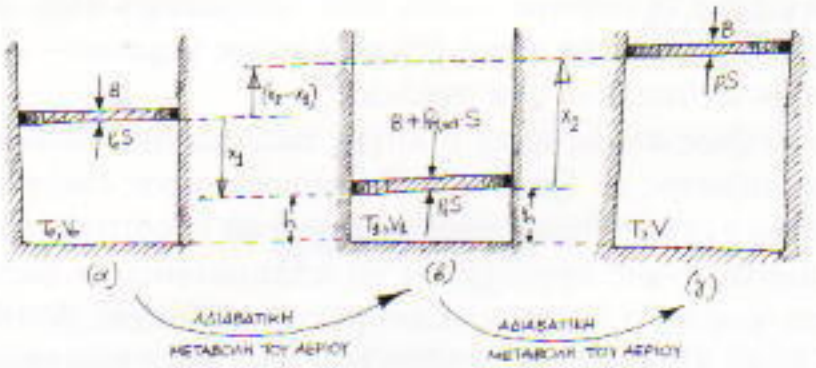
Λύση.

Έστω B το μέτρο του βάρους του εμβόλου και S το εμβαδόν της διατομής του.

Κατάσταση (α): Μηχανική ισορροπία εμβόλου: $B = P_0 \cdot S$, (1), και θερμοδυναμική ισορροπία αερίου: $P_0 V_0 = RT_0$, (2).

Κατάσταση (β): $P_{\varepsilon\xi,\,\alpha\beta}$ είναι η (από εμάς) εξωτερική πίεση στο έμβολο όταν η πίεση του αερίου είναι P_1 και το έμβολο βρίσκεται σε μηχανική ισορροπία.

Άρα, $B + P_{\varepsilon\xi,\,\alpha\beta} \cdot S = P_1 \cdot S$, (3).



Θερμοδυναμική ισορροπία αερίου: $P_1V_1 = RT_1$, (4).

Κατά τη μετάβαση από την κατάσταση (α) στην (β), στο έμβολο έχει γίνει έργο από μας, ίσο προς $W = \int_0^{x_1} P_{\varepsilon\xi}(x)\, S\, dx$, όπου $P_{\varepsilon\xi}(x)$ η συνάρτηση της (από μας) εξωτερικής πίεσης στο έμβολο, με αρχική τιμή μηδέν, και τελική τιμή $P_{\varepsilon\xi,\ \tau\varepsilon\lambda}$.

Κατάσταση (γ): Μηχανική ισορροπία εμβόλου: $B = P \cdot S$, (5), και θερμοδυναμική ισορροπία αερίου $\Rightarrow$ $P \cdot V = RT$, (6).

Από (1), (5): $P_0 = P$, (7). Δηλαδή η αρχική και τελική πίεση του αερίου είναι ίσες. Όμως από (1), (3): $P_0 \neq P_1$ και από (3), (5): $P_1 \neq P$. Άρα η πίεση του αερίου αλλάζει από P_0 σε $P_1 \neq P_0$, και κατόπιν επανέρχεται από P_1 σε $P = P_0$.

Άρα η διαδικασία δεν μπορεί να είναι ισοβαρής.

Το θεώρημα έργου-ενέργειας (ή θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας) για το έμβολο από τη θέση (α) έως τη θέση (γ) δίνει, εφ' όσον $\Delta E_{\kappa\iota\nu.\ \varepsilon\mu\beta.} = 0$:

$$0 = -B(x_2 - x_1) + W + W_{\alpha\varepsilon\rho}\,, \qquad (8).$$

Η συνολική διαδικασία (α)→(γ), όμως, είναι αδιαβατική, άρα $Q = 0$. Άρα ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής γράφεται

$$Q = 0 = W_{\alpha\varepsilon\rho} + \Delta U \;\Rightarrow\; W_{\alpha\varepsilon\rho} = -\Delta U \qquad (9)$$

όπου ΔU η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου από (α) σε (γ).

Η εξίσωση (8) $\xrightarrow{(9)}$: $0 = -B(x_2 - x_1) + W - \Delta U$, (10).

Η (10) $\longrightarrow$: $W = B(x_2 - x_1) + \Delta U$, (11). Από την εξίσωση (11) αρχίζει η λύση στο περιοδικό. Αλλά:

$B(x_2 - x_1) = B(x_2 - x_1 + h - h) = B[(x_2 + h) - (x_1 + h)] \Rightarrow$

$B(x_2 - x_1) = B(x_2 + h) - B(x_1 + h)$, (12), και:

$B(x_2 + h) = PS(x_2 + h) = pV \xrightarrow{(6)} B(x_2 + h) = RT$, (13),

και: $B(x_1 + h) = P_0S(x_1 + h) = p_0V_0 \xrightarrow{(2)} B(x_1 + h) = RT_0$, (14), άρα (12) $\xrightarrow{(13),(14)} B(x_2 - x_1) = RT - RT_0 \Rightarrow$

$B(x_2 - x_1) = R(T - T_0)$, (15). Επίσης είναι πάντα $\Delta U = nC_v\Delta T$, επομένως $\Delta U = \frac{3}{2}R(T - T_0)$, (16). Άρα,

$$(11) \xrightarrow{(15),(16)} W = R(T - T_0) + \frac{3}{2}R(T - T_0) \Rightarrow$$

$$W = \frac{5}{2}R(T - T_0) \Rightarrow \quad T = T_0 + \frac{2}{5}\frac{W}{R}.$$

Νίκος Ελληνάκης,
Γουδί

Κυνηγητό για επιβίωση

Κύριοι,

Στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1995, στο μαθηματικό πρόβλημα Μ28 (*Οι μαφιόζοι*), δίνετε την λύση ξεκινώντας από τους κυνηγημένους.

Μια άλλη λύση θα ήταν να ξεκινήσουμε από τους κυνηγούς, ως εξής: Παίρνουμε έναν τυχαίο μαφιόζο και τον απομονώνουμε από το θύμα του, δηλαδή τους τοποθετούμε σε ξεχωριστά στρατόπεδα.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, μέχρι να φτάσουμε στο σημείο το στρατόπεδο των κυνηγών να γεμίσει με τους μισούς. Αυτό θα συμβεί οπωσδήποτε, γιατί αλλιώς κάποιος δεν θα κυνηγάει. Στο στρατόπεδο των κυνηγημένων θα βρίσκονται από ένας μέχρι τους υπόλοιπους μισούς.

Στο στρατόπεδο των κυνηγών δεν κυνηγιούνται μεταξύ τους, γιατί τα θύματά τους βρίσκονται στο άλλο στρατόπεδο και έτσι έχουμε ήδη ένα άπειρο σύνολο μαφιόζων εν αγαστή συμπνοία. Στο στρατόπεδο αυτό θα βρίσκονται οι μισοί (αν ο καθένας κυνηγάει διαφορετικό άτομο), μέχρι το σύνολο πλην έναν (αν όλοι κυνηγάνε τον ίδιο). Στην περίπτωση που ο καθένας κυνηγάει διαφορετικό άτομο, στο στρατόπεδο των κυνηγημένων οι μισοί θα κυνηγάνε τους άλλους μισούς, δηλαδή το 1/4 το άλλο 1/4 τα οποία μπορούμε να απομονώσουμε σε ξεχωριστά στρατόπεδα (διαφορετικά και από το πρώτο) κ.ο.κ., και έτσι θα έχουμε μια απειρία άπειρων συνόλων με πληθυσμούς 1/2, 1/4, 1/8,... (που το άθροισμά τους είναι προφανώς ίσο με 1). Με άλλα λόγια, με όποιον τρόπο και αν κυνηγάνε (τους ίδιους ή διαφορετικούς), μπορούμε να τους χωρίσουμε σε κοινότητες ομονοούντων και να αποκαταστήσουμε την ειρήνη.

Ίσως όμως τα πράγματα να μην είναι τόσο απλά. Μπορεί π.χ. το κυνηγητό να είναι απαραίτητο στοιχείο για την επιβίωσή τους.

Σταύρος Σαΐνίδης, πολιτικός μηχανικός,
Καλαμαριά

Ρεύμα λύσεων

Εκτός από τις παραπάνω επιστολές, η Διεύθυνση του περιοδικού έλαβε επιστολές με λύσεις για το πρόβλημα της στήλης «Στα πεδία της φυσικής» του προηγούμενου τεύχους από τους παρακάτω αναγνώστες:

Φωτεινός Δημήτρης (Χαλκίδα), Κυρίτσης Κώστας (Θεσσαλονίκη), Σαπουντζής Κώστας (Πειραιάς), Ρόκας Ευάγγελος (Μενίδι), Σταυρής Νίκος (Ρόδος), Έξαρχος Παναγιώτης (Λάρισα), Μουστάκας Ιωάννης (Χίος), Στρίντζη Δάφνη (Πεύκη), Σταύρου Ελισσαίος (Αθήνα), Ανδρεόπουλος Κώστας (Χαϊδάρι), Παπαπέτρου Βασίλης και Γεροστάθης Αντώνης (Αθήνα).

Η στήλη της αλληλογραφίας
είναι δική σας.
Το Quantum περιμένει
τις απόψεις και τις λύσεις σας.

Η μεγάλη τέχνη

Η αμφιλεγόμενη προέλευση του «τύπου του Cardano»

Semyon Gindikin

ΤΟΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΕΙΝΑΙ ΑΦΙΕΡΩμένο στο μεγαλύτερο επίτευγμα των μαθηματικών του 16ου αιώνα: την ανακάλυψη των τύπων για την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων τρίτου και τέταρτου βαθμού. Τα γεγονότα που περιβάλλουν αυτή την ανακάλυψη έχουν ακόμη και σήμερα τη δύναμη να μας μαγεύουν, καθώς διαπλέκεται παράδοξα η μοίρα τεσσάρων λογίων —του del Ferro, του Tartaglia, του Cardano και του Ferrari. Ο τίτλος του άρθρου αναφέρεται στο έργο *Ars Magna* (Η μεγάλη τέχνη) του Cardano, το οποίο εκδόθηκε το 1545. Κατά τον Felix Klein, «αυτό το εξαιρετικά πολύτιμο έργο περιέχει σπέρματα σύγχρονης άλγεβρας που υπερβαίνουν τα όρια των παλαιών μαθηματικών».

Τον 16ο αιώνα αρχίζει η αναγέννηση των ευρωπαϊκών μαθηματικών μετά τη μεσαιωνική χειμερία νάρκη τους. Στην αρχή, οι ευρωπαίοι επιστήμονες προσπάθησαν να κατανοήσουν και να μελετήσουν όσα είχαν επιτύχει οι κλασικοί και οι ανατολικοί (Ινδοί και Άραβες) πρόδρομοί τους. Τα πρώτα επιτεύγματα των μαθηματικών του 16ου αιώνα ανήκαν στην άλγεβρα. (Αυτό οφείλεται στο ότι η άλγεβρα μόλις είχε αρχίσει να αναπτύσσεται, ενώ η γεωμετρία ήταν ήδη πλήρως ανεπτυγμένη επιστήμη.)

Η κατάσταση της άλγεβρας κατά το τέλος του 15ου αιώνα είχε συνοψιστεί σε ένα από τα πρώτα έντυπα μαθηματικά βιβλία, το *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalita*, που εκδόθηκε στη Βενετία το 1494. Η γλώσσα του βιβλίου ήταν τα ιταλικά, συγκαταλέγεται λοιπόν στα πρώτα επιστημονικά βιβλία που δεν γράφτηκαν στα λατινικά. Ο συγγραφέας του ήταν ο Luca Pacioli, μοναχός και φίλος του μεγάλου Λεονάρντο ντα Βίντσι. Στο τέλος του βιβλίου ο Pacioli γράφει: για την επίλυση των τριτοβάθμιων εξισώσεων «η τέχνη της άλγεβρας δεν μας έχει προσφέρει μέχρι τώρα κάποια μέθοδο, όπως δεν μας έχει δώσει μια μέθοδο για τον τετραγωνισμό του κύκλου». Αυτά τα λόγια ήταν κατά τα φαινόμενα μια δήλωση για το αδύνατο της εύρεσης ενός τύπου για την επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων.

Scipione del Ferro

Υπήρξε ένας άνθρωπος, όμως, που δεν αποθαρρύνθηκε από τη γνώμη του Pacioli. Ο Scipione del Ferro (1465-1526), καθηγητής μαθηματικών στην Μπολόνια, κατάφερε να βρει μια μέθοδο για τη λύση της εξίσωσης

$$x^3 + ax = b. \qquad (1)$$

Εφόσον εκείνη την εποχή δεν χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς, θα υποθέσουμε ότι οι συντελεστές στην εξίσωση (1) (και σε ολόκληρο το άρθρο) είναι θετικοί. Έτσι η εξίσωση (1) και η εξίσωση

$$x^3 = ax + b \qquad (2)$$

θεωρούνταν τελείως διαφορετικές εξισώσεις! Η λύση του del Ferro δεν έχει διασωθεί. Γνωστοποίησε τη μέθοδό του στο γαμπρό του και διάδοχό του στην καθηγητική έδρα Annibale della Nave και στο μαθητή του Antonio Maria Fior. Μετά το θάνατο του δασκάλου του, ο Fior αποφάσισε να εκμεταλλευτεί το μυστικό που του είχε εμπιστευτεί, ώστε να γίνει ακαταμάχητος στις αντιπαραθέσεις για την επίλυση προβλημάτων («επιστημονικές μονομαχίες») που συνηθίζονταν εκείνη την εποχή. Κατά το τέλος του 1534 προκάλεσε σε αντιπαράθεση έναν μαθηματικό από τη Βενετία, τον Niccolò Tartaglia.

Niccolò Tartaglia

Ο Tartaglia γεννήθηκε το 1499 στην Μπρέσια και ήταν γιος ενός φτωχού έφιππου ταχυδρομικού που ονομαζόταν Fontane. Όταν ήταν παιδί τραυματίστηκε στο λάρυγγα κατά την κατάληψη της πόλης του από τους Γάλλους, και έκτοτε μιλούσε με δυσκολία. Έτσι απέκτησε το προσωνύμιο «Tartaglia» (τραυλός). Από πολύ νωρίς, ο Niccolò αφέθηκε στη φροντίδα της μητέρας του. Ήταν τόσο φτωχοί, ώστε πήγε σχολείο μόνο για δύο εβδομάδες. Μέσα σε αυτό το διάστημα η τάξη του είχε φτάσει στη γραμματική μόλις μέχρι το γράμμα Κ. Ο Tartaglia αναγκάστηκε να εγκαταλείψει το σχολείο χωρίς καν να μάθει να γράφει το όνομά του. Συνέχισε, όμως, να μελετά μόνος του και έγινε «διδάσκαλος του άβακα» (ένα είδος δασκάλου της αριθμητικής σε

Το μοναδικό γνωστό πορτρέτο του Niccolò Tartaglia

μια ιδιωτική εμπορική σχολή). Μετά το 1534, ο Tartaglia έζησε στη Βενετία.

Ο Tartaglia ωθήθηκε στις επιστημονικές του μελέτες από την επαφή του με μηχανικούς και με αξιωματικούς του περίφημου πυροβολικού της Βενετίας. Το 1537 δημοσίευσε τη *Nuova Scientia* (Νέα επιστήμη), ένα βιβλίο αφιερωμένο σε προβλήματα μηχανικής. Το βιβλίο του έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της βλητικής. Το 1546 δημοσίευσε ένα ακόμη βιβλίο, το *Προβλήματα και διάφορες επινοήσεις*. Στο πρώτο του βιβλίο συντάσσεται με τον Αριστοτέλη και υποστηρίζει ότι ένα σώμα που βάλλεται υπό γωνία ακολουθεί στην αρχή μια κεκλιμμένη ευθεία, έπειτα ένα κυκλικό τόξο και, τέλος, πέφτει κατακόρυφα. Στο δεύτερο βιβλίο όμως δηλώνει ότι «η τροχιά δεν έχει τμήματα απολύτως ευθύγραμμα». Ο Tartaglia μετέφρασε Αρχιμήδη και Ευκλείδη στα ιταλικά, τα οποία αποκαλούσε «δημοτικά» (καθομιλούμενα), σε αντίθεση με τα λατινικά.

Όταν δέχτηκε την πρόκληση του Fior, ο Tartaglia φαντάστηκε ότι θα πετύχει μια εύκολη νίκη. Το ενδιαφέρον του δεν κεντρίστηκε ούτε όταν ανακάλυψε ότι και τα τριάντα προβλήματα του Fior αναφέρονταν στην εξίσωση (1) με διαφορετικά *a* και *b*. Ο Tartaglia υπέθεσε ότι ούτε ο ίδιος ο Fior μπορούσε να λύσει τα προβλήματά του: «Σκέφτηκα ότι κανένα τους δεν λυνόταν, διότι ο αδελφός Luca διαβεβαιώνει στην πραγματεία του ότι αυτό το είδος της εξίσωσης δεν είναι δυνατόν να λυθεί μέσω κάποιου γενικού τύπου».

Οι «μονομάχοι» όφειλαν να παρουσιάσουν τις λύσεις τους, μέσα σε πενήντα μέρες, σε έναν συμβολαιογράφο. Η προθεσμία είχε σχεδόν εξαντληθεί όταν ο Tartaglia άκουσε κάποιες φήμες ότι ο Fior γνώριζε τελικά μια μυστηριώδη μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης (1). Δεν του άρεσε λοιπόν καθόλου η προοπτική να κεράσει ένα γεύμα σε τριάντα φίλους του Fior —αφού αυτοί ήταν οι κανόνες της μάχης (το κέρασμα ενός φίλου για κάθε πρόβλημα που δεν έλυνε). Αποδύθηκε σε μια τιτάνια προσπάθεια και, οκτώ ημέρες πριν εκπνεύσει η προθεσμία (στις 4 Φεβρουαρίου του 1535), η τύχη τού χαμογέλασε: ανακάλυψε τη μέθοδο που χρειαζόταν. Με αυτό το όπλο, ο Tartaglia έλυσε όλα τα προβλήματα του αντιπάλου του σε δύο ώρες, ενώ ο Fior δεν έλυσε έγκαιρα ούτε ένα από τα προβλήματα του Tartaglia. (Παραδόξως, δεν κατάφερε να λύσει ακόμη και ένα που λυνόταν με τη μέθοδο του del Ferro.)

Λίγο αργότερα ο Tartaglia ανακάλυψε μια μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης (2). Η φήμη της «μονομαχίας» των Tartaglia-Fior και της νίκης του πρώτου διαδόθηκε ευρύτατα. Του ζητήθηκε να αποκαλύψει το μυστικό του, αλλά αρνήθηκε. Τότε, εμφανίστηκε κάποιος που κατάφερε να τον μεταπείσει —ο Gerolamo Cardano[1].

1. Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται ως Gerolamo Cardano, Geronimo Cardano και Jerome Cardan.

Gerolamo Cardano

Ο Cardano γεννήθηκε στην Παβία στις 24 Σεπτεμβρίου του 1501, από πατέρα δικηγόρο. Αφού αποφοίτησε από το πανεπιστήμιο, ο Gerolamo αποφάσισε να αφιερωθεί στην ιατρική. Ήταν νόθος, και γι' αυτό αναγκάστηκε για πολύ καιρό να ασκήσει το επάγγελμά του στην επαρχία. Μόνο τον Αύγουστο του 1539, και αφού οι κανονισμοί του άλλαξαν ειδικά γι' αυτό το σκοπό, η Ιατρική Σχολή του Μιλάνου δέχτηκε τον Cardano. Αργότερα, έφτασε να γίνει πρύτανης αυτής της Σχολής. Ο Cardano ήταν ένας από τους πιο ξακουστούς γιατρούς της εποχής του, υπολειπόμενος σε φήμη ίσως μόνο του φίλου του Βεσάλιου.

Στη δύση της ζωής του ο Cardano έγραψε μια αυτοβιογραφία, με τίτλο *Το Βιβλίο της ζωής μου*. Στις σελίδες του αναφέρει το μαθηματικό έργο του λίγες μόνο φορές, αλλά εκθέτει λεπτομερώς τις ιατρικές μελέτες του. Ο Cardano υποστηρίζει ότι περιέγραψε θεραπευτικές μεθόδους σχεδόν για πέντε χιλιάδες ασθένειες· ότι διέγνωσε σαράντα χιλιάδες ιατρικά προβλήματα· ότι οι θεραπευτικές υποδείξεις του ανέρχονταν στις διακόσιες χιλιάδες περίπου. Καλό θα ήταν, φυσικά, να αντιμετωπίσουμε αυτούς τους αριθμούς με μια υγιή δόση σκεπτικισμού. Οπωσδήποτε, η φήμη του ως γιατρού είναι αναμφισβήτητη. Ο ίδιος μάλιστα βεβαιώνει ότι απέτυχε μόνο τρεις φορές κατά την ιατρική του σταδιοδρομία.

Η ιατρική, όμως, δεν απορρόφησε όλη του την ενεργητικότητα. Τον ελεύθερο χρόνο του ασχολήθηκε με κάθε είδους διανοητική δραστηριότητα: με τη φιλοσοφία, την αστρολογία, τη φυσική, τη μηχανική, τα μαθηματικά.

Ο Cardano συνέθεσε ωροσκόπια ζωντανών και νεκρών (όπως του Ιησού, του Πετράρχη, του Dürer, του Βεσάλιου και του Λούθηρου). Ο Πάπας χρησιμοποίησε τον Cardano ως αστρολόγο. (Υπάρχει ο δυσάρεστος θρύλος ότι ο Cardano αυτοκτόνησε για να επιβεβαιώσει το ωροσκόπιό του.)

Το βιβλίο του Cardano *Η πολυπλοκότητα των πραγμάτων* μετα-

φράστηκε στα γαλλικά, και όλο τον 17ο αιώνα ήταν ένα δημοφιλές εγχειρίδιο στατικής και υδροστατικής. Όταν ο Γαλιλαίος παρατήρησε την ταλάντωση ενός φυσικού εκκρεμούς (ενός πολυελαίου σε έναν καθεδρικό ναό), ακολούθησε τη συμβουλή του Cardano και μέτρησε το χρόνο ταλάντωσης με το σφυγμό του. Ο Cardano έγραψε για το αδύνατο του αεικινήτου. Μερικές από τις παρατηρήσεις του μπορεί ουσιαστικά να ερμηνευθούν ως διατύπωση της εν λόγω αρχής. Ο Cardano προσδιόρισε πειραματικά το λόγο των πυκνοτήτων του αέρα και του νερού. Επινόησε για λογαριασμό της βασιλικής άμαξας το σύστημα σύζευξης των δύο αξόνων, που σήμερα ονομάζεται καρδάνειος σύνδεσμος (ή άξονας Cardano) και χρησιμοποιείται ευρύτατα στα αυτοκίνητα. (Για να είμαι δίκαιος, οφείλω να επισημάνω ότι η ιδέα ενός τέτοιου συνδέσμου ανάγεται στην αρχαιότητα. Επίσης, σε ένα σχέδιο του Λεονάρντο απεικονίζεται μια πυξίδα με έναν καρδάνειο σύνδεσμο.)

Το Μιλάνο το 1493 (ξυλογραφία)

Μερικά από τα έργα του Cardano είχαν την εμβέλεια εγκυκλοπαίδειας. Κατά την Αναγέννηση, οι εγκυκλοπαίδειες ήταν έργα ενός μόνο συγγραφέα. Έπρεπε να περάσουν εκατόν πενήντα χρόνια για να εμφανιστούν οι πρώτες εγκυλοπαίδειες ως προϊόντα συλλογικής προσπάθειας.

Ο Cardano συνέγραψε πλήθος βιβλία (μερικά εκδόθηκαν, άλλα παρέμειναν χειρόγραφα, και ορισμένα τα κατέστρεψε —δείτε σχετικά στο τελευταίο μέρος). Η περιγραφή τους και μόνο, αποτέλεσε το περιεχόμενο ενός βιβλίου, του *Περί των έργων μου*. Τα βιβλία του περί της φιλοσοφίας και της ηθικής ήταν δημοφιλή για πολλά χρόνια. Το βιβλίο του *Περί παρηγορίας* μεταφράστηκε στα αγγλικά και επηρέασε τον Σαίξπηρ. Μερικοί σχολιαστές του Σαίξπηρ διαβεβαιώνουν ότι ο Άμλετ απήγγειλε τον περίφημο μονόλογο «Να ζει κανείς ή να μη ζει...» κρατώντας αυτό το βιβλίο στα χέρια του.

Επί σαράντα χρόνια ο Cardano έπαιζε σκάκι («Δεν θα μπορέσω ποτέ να εκφράσω με λίγα λόγια την τεράστια ζημιά που προκάλεσε στην οικογενειακή μου ζωή, χωρίς να μου προσφέρει καμιά ανταμοιβή...»), και επί είκοσι πέντε χρόνια έπαιζε ζάρια («...αλλά τα ζάρια μου έφεραν ακόμη περισσότερα δεινά απ' ό,τι το σκάκι»). Κατά καιρούς εγκατέλειπε κάθε άλλη δραστηριότητα και αφοσιωνόταν στα τυχερά παιχνίδια. Υποπροϊόν αυτού του πάθους του ήταν το *Βιβλίο για το παιχνίδι των ζαριών* που το έγραψε το 1526 (τυπώθηκε το 1663). Σε αυτό το βιβλίο μελετά προβλήματα πιθανοτήτων και συνδυαστικής, προβαίνει δε και σε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την ψυχολογία των παικτών.

Cardano και Tartaglia

Το 1539 ο Cardano είχε πια τελειώσει το πρώτο του αποκλειστικά μαθηματικό έργο, την *Πρακτική της γενικής αριθμητικής*. Η επιδίωξή του ήταν να αντικαταστήσει τη *Summa* (Σύνοψη) του Pacioli. Όταν άκουσε για το μυστικό του Tartaglia, τον κατέλαβε η επιθυμία να εμπλουτίσει το βιβλίο του με αυτό.

Τον Ιανουάριο του 1539 ζήτησε από τον Tartaglia να του στείλει τον κανόνα για την επίλυση της εξίσωσης (1), είτε για να τον συμπεριλάβει στο βιβλίο του είτε υπό τον όρο να τον κρατήσει μυστικό. Ο Tartaglia αρνήθηκε: «Ζητώ τη συγγνώμη της Εξοχότητάς σας, αλλά όταν επιθυμήσω την δημοσίευση της ανακάλυψής μου, θα το κάνω στο δικό μου βιβλίο και όχι σε κάποιου άλλου». Στις 12 Φεβρουαρίου ο Cardano επανέλαβε το αίτημά του. Ο Tartaglia δεν υποχώρησε. Στις 13 Μαρτίου ο Cardano προσκάλεσε τον Tartaglia να τον επισκεφθεί στο Μιλάνο, και υποσχέθηκε να τον συστήσει στον κυβερνήτη της Λομβαρδίας. Φαίνεται ότι ο Tartaglia βρήκε ελκυστική αυτή την προοπτική και αποδέχτηκε την πρόσκληση. Η αποφασιστική συζήτηση έγινε στο σπίτι του Cardano, στις 25 Μαρτίου.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα απόσπασμα από τα πρακτικά της συζήτησης (θα πρέπει να έχουμε κατά νουν ότι τα κατέγραψε ο Tartaglia· ο Ferrari, μαθητής τού Cardano, υποστηρίζει ότι δεν ανταποκρίνονται με ακρίβεια στα γεγονότα):

Niccolò. Απέρριψα την πρότασή σας όχι μόνο εξαιτίας αυτού του κεφαλαίου και της ανακάλυψης που γίνεται σε αυτό, αλλά και λόγω των πραγμάτων που είναι δυνατόν να ανακαλυφθούν όταν τη γνωρίζουμε, διότι είναι το κλειδί που ανοίγει την πόρτα για να εξερευνηθούν αναρίθμητες περιοχές. Θα είχα καταφέρει εδώ και καιρό να βρω έναν γενικό κανόνα για πολλά άλλα προβλήματα, αν δεν ήμουν τόσο απασχολημένος με τη μετάφραση του Ευκλείδη στην καθομιλουμένη (έως τώρα

έχω φτάσει στο τέλος του 13ου βιβλίου*). Μόλις όμως ολοκληρώσω αυτό το έργο, σκοπεύω να εκδώσω ένα βιβλίο για την πρακτική εφαρμογή της νέας άλγεβρας ... Αν την αποκαλύψω σε κάποιον θεωρητικό (όπως την Εξοχότητά σας), θα μπορέσει εύκολα να χρησιμοποιήσει αυτή την εξήγηση και να γράψει άλλα κεφάλαια (διότι αυτή η εξήγηση εφαρμόζεται εύκολα σε άλλα προβλήματα), και να δημοσιεύσει τους καρπούς της ανακάλυψής μου με το δικό του όνομα. Αυτό όμως θα κατέστρεφε όλα μου τα σχέδια.

Σινιόρ Gerolamo. Ορκίζομαι στο Ιερό Ευαγγέλιο του Κυρίου, και όχι μόνο σας δίνω το λόγο μου ως τίμιος άνθρωπος να μη δημοσιεύσω ποτέ την ανακάλυψή σας, αλλά υπόσχομαι επίσης —και έχετε εγγύηση τη συνείδηση ενός αληθινού χριστιανού— να την κρυπτογραφήσω με τέτοιο τρόπο ώστε κανείς να μην μπορέσει να τη διαβάσει μετά το θάνατό μου. Αν είμαι άξιος της εμπιστοσύνης σας ας προχωρήσουμε, διαφορετικά, ας θεωρήσουμε ότι το θέμα έληξε.

Niccolò. Αν δεν πίστευα τον όρκο σας, θα άξιζε σίγουρα να θεωρηθώ άπιστος.

Έτσι λοιπόν ο Tartaglia επέτρεψε στον Cardano να τον μεταπείσει. Είναι δύσκολο να καταλάβουμε από την προηγούμενη σημείωση τι τον έκανε να αλλάξει γνώμη. Συγκινήθηκε πραγματικά τόσο πολύ από τους όρκους του Cardano; Αφού αποκάλυψε το μυστικό του, ο Tartaglia έφυγε αμέσως από το Μιλάνο —αρνήθηκε ακόμη και να συναντηθεί με τον κυβερνήτη, που ήταν ο αρχικός λόγος της επίσκεψής του. Τον είχε υπνωτίσει άραγε ο Cardano;

Όταν ο Tartaglia παρέλαβε στις 12 Μαΐου το φρεσκοτυπωμένο αντίγραφο της *Πρακτικής της γενικής αριθμητικής* χωρίς τη «συνταγή» του (η μέθοδος της λύσης ήταν γραμμένη με τη μορφή ενός λατινικού ποιήματος —εκείνη την εποχή δεν μπορούσαν να γράψουν τύπους), ησύχασε κάπως.

Ο Cardano πήρε από τον Tartaglia μια ολοκληρωμένη μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης (1) χωρίς κανένα στοιχείο απόδειξης. Κατέβαλε εξαιρετικές προσπάθειες για να επαληθεύσει και να επιβεβαιώσει τον κανόνα. Από τη δική μας οπτική γωνία είναι δύσκολο να καταλάβουμε ποιο ήταν το πρόβλημα: δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε απλώς τις ρίζες στην εξίσωση και να τις ελέγξουμε! Όμως, χωρίς καλά ανεπτυγμένο αλγεβρικό συμβολισμό, τα πράγματα που σήμερα γίνονται αυτόματα από κάθε μαθητή του λυκείου τότε μπορούσαν να τα προσεγγίσουν λίγοι μόνον εκλεκτοί. Αν δεν γνωρίσουμε τα πρωτότυπα κείμενα της εποχής, είναι αδύνατο να εκτιμήσουμε την έκταση της «οικονομίας» που προσφέρουν στην σκέψη μας οι αλγεβρικές τεχνικές. Ο αναγνώστης πρέπει πάντα να το θυμάται αυτό, για να μην παραπλανηθεί από τον φαινομενικά «τετριμμένο» χαρακτήρα των προβλημάτων που γεννούσαν τέτοια έντονα πάθη κατά τον 16ο αιώνα.

Ludovico Ferrari

Ο Cardano είχε έναν νεαρό βοηθό στο μαθηματικό του έργο, τον Ludovico Ferrari (1522-1565). Ο Cardano, σε έναν κατάλογο των δεκατεσσάρων μαθητών του, αναφέρει τον Ferrari ως έναν από τους τρεις πιο ξεχωριστούς.

Το 1543 ο Cardano και ο Ferrari επισκέφθηκαν την Μπολόνια, όπου ο della Nave τους επέτρεψε να διαβάσουν τα χειρόγραφα του μακαρίτη del Ferro. Εκεί διαπίστωσαν ότι ο del Ferro γνώριζε τον κανόνα του Tartaglia.

Προφανώς δεν γνώριζαν, όπως και οι σύγχρονοί τους, παρά ελάχιστα πράγματα για τον τύπο του del Ferro. Θα ήταν απίθανο να πολιορκούσε ο Cardano τόσο επίμονα τον Tartaglia αν ήξερε ότι θα μπορούσε να πάρει την ίδια πληροφορία από τον della Nave.

Σήμερα, σχεδόν όλοι οι ιστορικοί των μαθηματικών συμφωνούν ότι ο del Ferro επινόησε τον τύπο, ο Fior τον γνώριζε, και ο Tartaglia τον επανανακάλυψε γνωρίζοντας ότι ο Fior τον είχε στα χέρια του. Κανένα όμως από αυτά τα γεγονότα δεν έχει αποδειχτεί με βεβαιότητα.

Στο τέλος της ζωής του ο Tartaglia έγραψε: «Μπορώ να σας βεβαιώσω ότι το περιγραφόμενο θεώρημα δεν αποδείχτηκε ούτε από τον Ευκλείδη ούτε από κανέναν άλλο, εκτός από τον Gerolamo Cardano, στον οποίο το έδειξα εγώ. ... Το 1534 στη Βενετία βρήκα τον γενικό τύπο για την εξίσωση. ...»[2]

Είναι δύσκολο να βγάλουμε κάποια άκρη από αυτή την ιστορία.

Ως το 1545 ο Cardano είχε βρει τον τρόπο να λύνει όχι μόνο τις εξισώσεις (1) και (2) αλλά και την εξίσωση

$$x^3 + b = ax, \qquad (3)$$

όπως και μια «πλήρη» τριτοβάθμια εξίσωση, που περιέχει τον όρο x^2. Στο ίδιο χρονικό διάστημα ο Ferrari είχε επινοήσει μια μέθοδο επίλυσης τεταρτοβάθμιων εξισώσεων.

Ars Magna

Είτε επειδή ανακαλύφθηκαν τα χειρόγραφα του del Ferro είτε λόγω της ισχυρής πίεσης του Ferrari, ή, πιθανότερα, λόγω της απροθυμίας του να κρατήσει θαμμένα τα αποτελέσματα της πολύχρονης εργασίας του, ο Cardano αποφάσισε να περιλάβει όλα όσα γνώριζε για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις στο βιβλίο *Ars Magna, sive De Regulis Algebraicis* (Η μεγάλη τέχνη, ή περί των κανόνων της άλγεβρας), που εκδόθηκε στη Νυρεμβέργη το 1545.

Στην εισαγωγή του ο Cardano εκθέτει το ιστορικό του ζητήματος:

> Στην εποχή μας ο Scipione del Ferro ανακάλυψε έναν τύπο σύμφωνα με τον οποίο ο κύβος του αγνώστου σύν τον άγνωστο ισούται με τον αριθμό. Ήταν ένα πολύ όμορφο και αξιοσημείωτο έργο. Επειδή αυτή η τέχνη υπερβαίνει την ανθρώπινη επιδεξιότητα και την πνευματική διαύγεια ενός θνητού, πρέπει να τη θεωρήσουμε δώρο ουράνιας προέλευσης όπως και ένδειξη της δύναμης του πνεύματος. Η ανακάλυψη είναι τόσο υπέροχη ώστε πρέπει να περιμένουμε ότι αυτός που την πέτυχε θα κατορθώσει τα πάντα. Ο φίλος μας Niccolò Tartaglia από την Μπρέσια προκλήθηκε από έναν μαθητή τού del Ferro, τον Antonio Maria Fior. Για να μην ητηθεί έλυσε το ίδιο πρόβλημα, και μετά τις επανειλημμένες παρακλήσεις μου επί μεγάλο χρονικό διάστημα, μου έδωσε τη λύση. Είχα παραπλανηθεί από τα λόγια του Luca Pacioli, που υποστήριξε ότι δεν

---

* Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη που μετέφραζε ο Cardano, φυσικά, από 13 βιβλία. Την εποχή εκείνη όμως αποδίδονταν στον Ευκλείδη και άλλα δύο βιβλία, τα λεγόμενα 14ο και 15ο, τα οποία αργότερα αποδείχθηκε ότι είχαν γραφεί από τον Υψικλή και τον Ισίδωρο αντίστοιχα. (Σ.επιστ.συμβ.)

2. Μια άλλη πηγή αναφέρει την ημερομηνία 4 Φεβρουαρίου του 1535.

υπάρχει γενική λύση για τις εξισώσεις αυτού του είδους, και, παρότι κατείχα πολλές ανακαλύψεις που τις είχα κάνει ο ίδιος, δεν είχα ελπίδα να βρω αυτό που δεν αναζητούσα. Μόλις όμως έλαβα αυτό το κεφάλαιο και έφτασα στη λύση του, είδα ότι μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν πολλά περισσότερα: και, με μεγαλύτερη ήδη αυτοπεποίθηση στις ενέργειές μου, πέτυχα κατά την έρευνά μου και άλλες ανακαλύψεις, ορισμένες μόνος μου και ορισμένες μαζί με τον Ludovico Ferrari, τον πρώην μαθητή μου.

Η μέθοδος του Cardano για την επίλυση της εξίσωσης (1) μπορεί να παρουσιαστεί σε σύγχρονη μορφή ως εξής: Θα αναζητήσουμε μια λύση της εξίσωσης (1) με μορφή $x = \beta - a$. Τότε, $x + a = \beta$ και

$$x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = \beta^3. \quad (4)$$

Εφόσον $3x^2a + 3xa^2 = 3xa(x + a) = 3xa\beta$, η εξίσωση (4) μπορεί να γραφεί ως

$$x^3 + 3a\beta x = \beta^3 - a^3. \quad (5)$$

Ας προσπαθήσουμε να επιλέξουμε το ζεύγος (λ, μ), όταν γνωρίζουμε το ζεύγος (a, b), έτσι ώστε η εξίσωση (5) να συμπίπτει με την εξίσωση (1). Για να ισχύει αυτό, πρέπει το ζεύγος (λ, μ) να είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\begin{cases} 3\lambda\mu = a, \\ \mu^3 - \lambda^3 = b \end{cases}$$

ή του ισοδύναμου συστήματος

$$\begin{cases} \mu^3\left(-\lambda^3\right) = -\dfrac{a^3}{27}, \\ \mu^3 + \left(-\lambda^3\right) = b. \end{cases}$$

Λόγω της ιδιότητας των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, τα μ^3 και $-\lambda^3$ είναι ρίζες της βοηθητικής δευτεροβάθμιας $y^2 - by - a^3/27 = 0$. Αφού αναζητούμε *θετικές* ρίζες της εξίσωσης (1), $\mu > \lambda$. Τότε, βάσει του τύπου επίλυσης της δευτεροβάθμιας

$$\mu^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

και

$$-\lambda^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}.$$

Επομένως,

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Αν τα a και b είναι θετικά, τότε είναι θετικό και το x.

Αυτοί οι υπολογισμοί ακολουθούν ιδεατά μόνον την πορεία των σκέψεων του Cardano. Ο Cardano επιχειρηματολογεί με γεωμετρική γλώσσα: αν ένας κύβος με μήκος ακμής $\mu = \lambda + x$ χωριστεί μέσω επιπέδων παράλληλων στις έδρες του σε έναν κύβο με μήκος ακμής λ και σε έναν κύβο με μήκος ακμής x, τότε εκτός από τους δύο κύβους προκύπτουν επιπλέον και τρία ορθογώνια παραλληλεπίπεδα διαστάσεων $\lambda \times \lambda \times x$ και άλλα τρία διαστάσεων $\lambda \times x \times x$. Από τη σχέση μεταξύ των όγκων τους προκύπτει η εξίσωση (4). Για να μεταβούμε στην εξίσωση (5) ενώνουμε τα διαφορετικού είδους παραλληλεπίπεδα σε ζεύγη.

«Γνωρίζοντας ότι το τμήμα που μου έδωσε ο Tartaglia είχε ανακαλυφθεί μέσω γεωμετρικής απόδειξης», γράφει ο Cardano, «σκέφτηκα ότι αυτή είναι πραγματικά η βασιλική οδός που οδηγεί και σε όλα τα άλλα τμήματα.»

Η εξίσωση (2) μπορεί να λυθεί μέσω της αντικατάστασης $x = \mu + \lambda$, αλλά εδώ μπορεί να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση να έχει η αρχική εξίσωση τρεις πραγματικές ρίζες, και η βοηθητική δευτεροβάθμια να μην έχει πραγματικές ρίζες. Αυτή είναι η λεγόμενη *ανάγωγη περίπτωση*[3] που δημιούργησε πολλά προβλήματα στον Cardano (και πιθανόν στον Tartaglia).

Ο Cardano έλυσε την εξίσωση (3) με συλλογισμούς εξαιρετικά τολμηρούς για εκείνη την εποχή: μετέτρεψε την αρνητικότητα μιας ρίζας σε πλεονέκτημα. Κανένας πριν απ' αυτόν δεν χρησιμοποίησε τους αρνητικούς αριθμούς τόσο αποφασιστικά, αν και ακόμη και ο ίδιος ο Cardano απείχε πολύ από την ελεύθερη αντιμετώπισή τους: εξετάζει τις εξισώσεις (1) και (2) ξεχωριστά!

Ο Cardano έκανε επίσης μια πλήρη ανάλυση της γενικής τριτοβάθμιας εξίσωσης $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (και ο Tartaglia σίγουρα δεν είχε καμία σχέση με αυτό το πρόβλημα!). Με σύγχρονους όρους, η αντικατάσταση $x = y - a/3$ σε αυτή την εξίσωση απαλείφει τον όρο του x^2.

Ο Cardano εκτός από τους αρνητικούς (τους ονόμαζε «καθαρά ψευδείς») τόλμησε να θεωρήσει και τους μιγαδικούς (τους ονόμαζε «αληθινά σοφίσματα»). Παρατήρησε ότι αν τους χρησιμοποιήσουμε ακολουθώντας συγκεκριμένους φυσικούς κανόνες, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση χωρίς πραγματικές ρίζες έχει μιγαδικές ρίζες. Πιθανόν ο Cardano να κατέληξε στους μιγαδικούς αριθμούς μέσω της «ανάγωγης» περίπτωσης.

Στο *Ars Magna* αντανακλούσε επίσης και η προσωπική συμβολή του Ferrari —μια μέθοδος για την επίλυση των τεταρτοβάθμιων εξισώσεων.

Με σύγχρονους όρους, η μέθοδος του Ferrari για την εξίσωση

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (6)$$

(στην οποία ανάγεται εύκολα η πλήρης τεταρτοβάθμια εξίσωση)[4] συνίσταται στα επόμενα.

Εισάγουμε τη βοηθητική μεταβλητή t και ξαναγράφουμε την εξίσωση (6) στην ισοδύναμη μορφή

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right). \quad (7)$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε το t έτσι ώστε το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του x στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (7) να έχει δύο ίσες ρίζες —δηλαδή, η διακρίνουσά του να είναι μηδέν:

$$b^2 - 4 \cdot 2t \cdot \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0.$$

Έτσι καταλήγουμε σε μια βοηθητική τριτοβάθμια εξίσωση. Έστω t_0 οποιαδήποτε από τις ρίζες της —την οποία μπορούμε να βρούμε από τον τύπο

3. Σε επόμενο τεύχος του *Quantum* θα αναφερθούμε ειδικότερα σ' αυτή την περίπτωση.

4. Δείτε και το άρθρο «Όσα βάζετε τόσα παίρνετε» στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1995 του *Quantum*.

του Cardano. Τότε η εξίσωση (7) μπορεί να γραφεί ως

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t_0\right)^2=2t_0\left(x-\frac{b}{4t_0}\right)^2. \quad (8)$$

Αυτή η εξίσωση αναλύεται σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις απ' όπου προκύπτουν τέσσερις ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Έτσι η μέθοδος του Ferrari ανάγει την τεταρτοβάθμια εξίσωση σε μία τριτοβάθμια και δύο δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Η θέση του *Ars Magna* στην ιστορία των μαθηματικών δεν οφείλεται τόσο σε αυτά τα αποτελέσματα για τις τριτοβάθμιες και τις τεταρτοβάθμιες εξισώσεις όσο στο γεγονός ότι εδώ εμφανίζονται για πρώτη φορά συγκεκριμένες γενικές αλγεβρικές έννοιες (όπως η πολλαπλότητα μιας ρίζας) και προτάσεις (όπως, *αν η εξίσωση* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *έχει τρεις πραγματικές ρίζες, τότε το άθροισμά τους ισούται με* $-a$).

Ferrari και Tartaglia

Δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε την εντύπωση που έκανε στον Tartaglia το *Ars Magna* όταν εμφανίστηκε, το 1545. Στο τελευταίο μέρος του βιβλίου του *Προβλήματα και διάφορες επινοήσεις* (1546), ο Tartaglia δημοσίευσε την αλληλογραφία του με τον Cardano και τα πρακτικά της συνομιλίας τους. Επιτέθηκε στον Cardano με κατάρες και κατηγορίες. Ο Cardano δεν αντέδρασε στην επίθεση. Αντ' αυτού, απάντησε στον Tartaglia ο Ferrari στις 10 Φεβρουαρίου του 1547. Απέκρουσε τις κατηγορίες του Tartaglia, επισήμανε τα σφάλματα του βιβλίου του, και σε μια περίπτωση τον κατηγόρησε ότι ιδιοποιήθηκε ένα αποτέλεσμα που το είχε πετύχει κάποιος άλλος και ότι τον απατούσε η μνήμη του (προφανώς, η κατηγορία ήταν σοβαρή εκείνη την εποχή). Στο τέλος, προκαλούσε τον Tartaglia σε δημόσια αντιπαράθεση «στη γεωμετρία, στην αριθμητική ή στις επιστήμες που συνδέονται με αυτές, όπως η αστρολογία, η μουσική, η κοσμογραφία, η προοπτική, η αρχιτεκτονική, κ.ο.κ.».

Με την απάντησή του στις 19 Φεβρουαρίου, ο Tartaglia προσπάθησε να παρασύρει τον Cardano στη διαμάχη: «Έγραψα με τέτοιο παράφορο και προσβλητικό τρόπο για να αναγκάσω την Εξοχότητά του (όχι εσάς) να γράψει κάτι με το δικό του χέρι, διότι έχω παλιούς λογαριασμούς να τακτοποιήσω μαζί του».

Η φιλονικία σχετικά με τους όρους της αντιπαράθεσης συνεχίστηκε για πολύ. Ο Tartaglia άρχισε να κατανοεί ότι ο Cardano θα παρέμενε στο περιθώριο. Τότε βάλθηκε να επισημαίνει την εξάρτηση του Ferrari αποκαλώντας τον «δημιούργημα του Cardano» (όπως ονόμαζε τον εαυτό του ο Ferrari στην πρόκλησή του). Οι «Ερωτήσεις» που, όπως συνηθιζόταν, έστειλε ο Tartaglia απευθύνονταν και στους δύο: «Εσείς, Σινιόρ Gerolamo, και εσείς, Σινιόρ Ludovico...»

Ο Gerolamo Cardano σε ηλικία 46 ετών (ξυλογραφία)

Τελικά, ο Tartaglia συμφώνησε να αντιπαρατεθεί με τον Ferrari. Ο αγώνας τους έγινε στις Αυγούστου του 1548 στο Μιλάνο, παρουσία πολλών ευγενών, αλλά με τον Cardano απόντα. Έχουν σωθεί μόνο οι σύντομες σημειώσεις του Tartaglia για το γεγονός, και είναι σχεδόν αδύνατο να ανασκευάσουμε από αυτές την πραγματική εικόνα. Φαίνεται, όμως, ότι ο Tartaglia ηττήθηκε.

Πάντως, η μονομαχία τους δεν είχε καμιά σχέση με το πρόβλημα που προκάλεσε τη διαμάχη. Γενικά, μονομαχίες τέτοιου είδους, όπως και οι πραγματικές άλλωστε, μικρή σχέση είχαν με την αποκατάσταση της αλήθειας.

Η τελική σκηνή για τον κάθε πιθανό

Το 1556, ένα χρόνο πριν πεθάνει ο Tartaglia, άρχισε να δημοσιεύεται το έργο του *Γενική πραγματεία περί των αριθμών και της μετρήσεως*. Περιείχε αποτελέσματα πάνω στη συνδυαστική και στις πιθανότητες που είχε πετύχει ο Tartaglia κατά τη διάρκεια των χρόνων της διένεξής του με τον Cardano. Στην *Πραγματεία* αναφέρονται ελάχιστα πράγματα για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις. Τα τελευταία μέρη της *Πραγματείας* δημοσιεύτηκαν μετά τον θάνατο του συγγραφέα της.

Ο Ferrari απέκτησε μεγάλη φήμη μετά τη μονομαχία. Έδωσε δημόσιες διαλέξεις στη Ρώμη, διηύθυνε την υπηρεσία του κτηματολογίου στο Μιλάνο και ήταν ένας από τους παιδαγωγούς του γιου του βασιλιά. Δεν άφησε όμως άλλα ίχνη στην επιστήμη! Πέθανε το 1565 σε ηλικία 43 ετών.

Ο Cardano έζησε περισσότερο και από τους δύο. Η ζωή του όμως δεν ήταν εύκολη. Ένας από τους γιους του δηλητηρίασε από ζήλια τη γυναίκα του και καταδικάστηκε σε θάνατο. Ένας άλλος κατέληξε αλήτης και λήστεψε τον ίδιο του τον πατέρα. Το 1570 φυλακίστηκε ο ίδιος ο Cardano και δημεύτηκε η περιουσία του. (Ο λόγος της φυλάκισής του παραμένει άγνωστος. Γνωρίζουμε μόνο ότι κατέστρεψε 120 βιβλία του περιμένοντας να συλληφθεί.) Τελείωσε τις ημέρες του στη Ρώμη ζώντας ως «ιδιώτης» (δική του έκφραση), παίρνοντας μια μικρή σύνταξη από τον

Πάπα. Τα τελευταία του χρόνια τα αφιέρωσε στη συγγραφή του αυτοβιογραφικού *Το Βιβλίο της ζωής μου*. Το τελευταίο γεγονός που αναφέρει στο βιβλίο συνέβη στις 28 Απριλίου του 1576. Στις 21 Σεπτεμβρίου του 1576 ο Cardano πέθανε.

Στο τελευταίο του έργο ο Cardano αναφέρει τέσσερις φορές τον Tartaglia. Γράφει ότι ο Tartaglia προτίμησε να τον έχει «αντίπαλο και νικητή του, παρά φίλο και οφειλέτη λόγω των καλών του πράξεων». Σε άλλο σημείο συγκαταλέγει τον Tartaglia σε εκείνους τους κριτικούς του που «δεν μπορούσαν να ξεπεράσουν τα όρια του τυπικού». Όμως, στις τελευταίες σελίδες γράφει: «Ομολογώ ότι στα μαθηματικά δανείστηκα λίγα πράγματα, αν και ελάχιστα, από τον αδελφό Niccolò».

Προφανώς, τον έτυπτε η συνείδησή του!

Η διαμάχη των Cardano-Tartaglia έσβησε και ξεχάστηκε. Ο «τύπος των τριτοβάθμιων» συνδέθηκε με το *Ars Magna* και βαθμιαία κατέληξε να ονομάζεται τύπος του Cardano, παρότι για κάποιο χρονικό διάστημα αναφερόταν και το όνομα του del Ferro —άλλωστε, ο ίδιος ο Cardano είχε επισημάνει εμφατικά την πρωτεραιότητα του del Ferro. Πάντως, τέτοιες αδικίες στις ονοματοδοσίες δεν είναι σπάνιες στα μαθηματικά.

Οι ιστορικοί των μαθηματικών ασχολήθηκαν ξανά με τη διαμάχη αυτή στις αρχές του 19ου αιώνα, αφού επανανακάλυψαν την ύπαρξη της αδικημένης πλευράς, του Tartaglia, που μετά απ' όλα αυτά τα χρόνια είχε πρακτικά ξεχαστεί. Η υπόθεση προσείλκυσε και πάλι το ενδιαφέρον, και ερασιτέχνες όπως και ειδικοί ήταν έτοιμοι να πολεμήσουν για την τιμή του Tartaglia. Καθώς η ιστορία αναφέρθηκε αναρίθμητες φορές και πήρε μια θέση στη λαϊκή κουλτούρα, ο Cardano κατέληξε να παρουσιάζεται μερικές φορές σαν τυχοδιώκτης και απατεώνας που έκλεψε την ανακάλυψη του Tartaglia και την παρουσίασε σαν απολύτως δική του.

Στο τέλος του 19ου αιώνα ένα μέρος της συζήτησης πήρε τη μορφή της σοβαρής μελέτης στην ιστορία των μαθηματικών. Οι μαθηματικοί ενόησαν τον σημαντικό ρόλο που διαδραμάτισαν τα έργα του Cardano στα μαθηματικά του 16ου αιώνα. Για πολλούς έγινε φανερό αυτό που είχε πει ο Leibniz δύο αιώνες νωρίτερα: «Με όλα του τα ελαττώματα, ο Cardano ήταν ένας σπουδαίος άνθρωπος. Χωρίς αυτά θα ήταν τέλειος».

Ο μεγάλος ιστορικός των μαθηματικών Moritz Cantor (1829-1920) (που δεν πρέπει να τον συγχέετε με τον Georg Cantor, το δημιουργό της θεωρίας των συνόλων!) επανέλαβε την εικασία που είχε διατυπώσει ο Ferrari πολλά χρόνια νωρίτερα, ότι δηλαδή ο Tartaglia δεν επανανακάλυψε τον κανόνα του del Ferro αλλά τον βρήκε έτοιμο από άλλες πηγές.

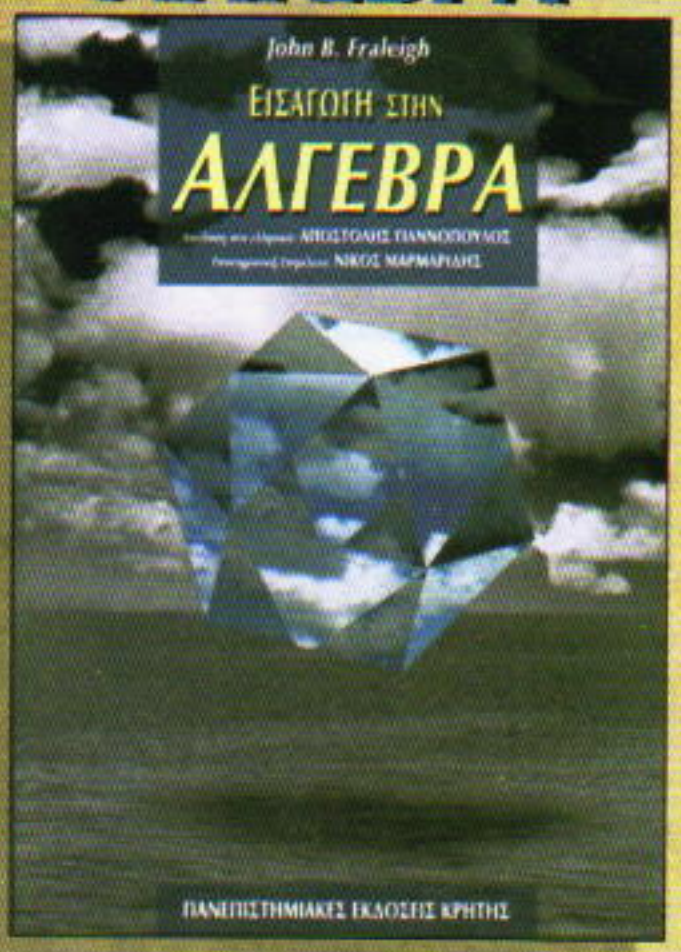
Μετά την πάροδο εκατόν πενήντα ετών, τα πάθη καταλάγιασαν, και έπειτα αναζωπυρώθηκαν ξανά. Αλλά είναι ίσως ένα από τα ερωτήματα στα οποία ακόμα και σήμερα δεν μπορούμε να απαντήσουμε με βεβαιότητα.

Και ο τύπος για την επίλυση των τριτοβάθμιων εξισώσεων θα ονομάζεται πάντα «τύπος του Cardano». ■

John B. Fraleigh

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ



Ενα απο τα δημοφιλεστερα σχετικά συγγράμματα της Αμερικανικής βιβλιογραφίας, η «Εισαγωγή στην Άλγεβρα» του J. Fraleigh κέρδισε επάξια τη φήμη της χάρις στην ικανότητα του συγγραφέα της να αναδεικνύει το ουσιώδες χωρίς να υπεραπλουστεύει, αλλά και χωρίς να καταφεύγει στην ξύλινη γλώσσα μιας άκαμπτης μαθηματικής αυστηρότητας που αποξηραίνει τη μαθηματική σκέψη αφαιρώντας της όλη τη ζωντάνια μιας πραγματικής αναζήτησης.

Με το απλό και γλαφυρό του ύφος, την πληθώρα των παραδειγμάτων του και τα σύντομα ιστορικά σημειώματα, το βιβλίο του J. Fraleigh καταφέρνει να διεγείρει το ενδιαφέρον του φοιτητή και να τον πάρει μαζί του ώς τις πιο δύσκολες κορυφές ενός από τα ωραιότερα δημιουργήματα του ανθρώπινου μυαλού. Ένα βιβλίο προορισμένο να αγαπηθεί από τους Έλληνες μαθηματικούς –φοιτητές ή πτυχιούχους– όπως αγαπήθηκε και από τους ξένους συναδέλφους τους. Μια αληθινά νέα προσθήκη στην ελληνική βιβλιογραφία.

Πανεπιστημιακες Εκδοσεις Κρητης
Ιδρυμα Τεχνολογιας και Ερευνας
Τ.Θ. 1527, 711 10 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ. 081-239791 Fax 210090
Μάνης 5 Αθήνα Τ.Κ. 10681 Τηλ. 3818372 Fax 3301583

HOT
SOLD

Ο Jesse James και η θερμική αγωγιμότητα

Θεωρώντας την ανακατανομή του πλούτου ως μια διαδικασία διάχυσης

Kurt Kreith

Ο ΘΡΥΛΟΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΤΟΝ JESSE James* σαν έναν Ρομπέν των δασών της Άγριας Δύσης. Σύμφωνα με μια μπαλάντα,

Ο Jesse James ήταν παλικάρι, και ξέκανε πολλούς.
Λήστεψε το τρένο απ' το Γκλεντέηλ μια φορά,
άρπαζε απ' τους πλούσιους, τά 'δινε στους φτωχούς.
Μυαλό ξυράφι, χέρι δυνατό, μα πάνω απ' όλα είχε καρδιά.

Αν ο Jesse είχε χρησιμοποιήσει το μυαλό του για να μελετά φυσική και όχι τα δρομολόγια των τρένων, ίσως εφάρμοζε διαφορετικά μέσα για να υλοποιήσει τους κοινωνικούς του στόχους. Ειδικότερα, θα είχε ίσως παρατηρήσει ότι το άπλωμα μιας χρωστικής ουσίας σ' ένα τρυβλίο petri, η διασπορά του καπνού στην ατμόσφαιρα και η ροή της θερμότητας σε μια ράβδο είναι φαινόμενα που αντιπροσωπεύουν «διαδικασίες διάχυσης» —διαδικασίες που έχουν ενδιαφέρουσα σχέση με το οικονομικό πρόγραμμα του Jesse.

Χρηματοοικονομική διάχυση

Για να δούμε πώς είναι δυνατόν να σχετίζονται τέτοιες φυσικές έννοιες με την περίπτωση του Jesse James, ας θεωρήσουμε οκτώ άτομα με διαφορετικές περιουσίες τοποθετημένα σε μια γραμμή (αργότερα θα εξετάσουμε και άλλες καταστάσεις). Θα συμβολίσω αυτά τα άτομα με τους ακέραιους 1, 2, ..., 8, και τις περιουσίες τους με $u(1)$, $u(2)$, ..., $u(8)$, αντίστοιχα. Η κατάσταση αυτή περιγράφεται στον πίνακα του Σχήματος 1.

άτομο	1	2	3	4	5	6	7	8
$u(x)$	$1	$30	$80	$110	$200	$80	$60	$40

Σχήμα 1

Μπορούμε να εφαρμόσουμε μια μέθοδο «κατανομής του πλούτου» ξεκινώντας από την καταγραφή των περιουσιακών διαφορών κάθε ατόμου και των δύο πλησιέστερων γειτόνων του. Για παράδειγμα, το άτομο 3, με περιουσία 80$, έχει 50$ περισσότερα από τον έναν γείτονά του και 30$ λιγότερα από τον άλλο. Το άτομο 5 (που πιθανότατα θα δυσαρεστηθεί από τις επόμενες εντολές) έχει 90$ περισσότερα από τον έναν γείτονα και 120$ περισσότερα από τον άλλο.

Έχοντας καταγράψει για κάθε άτομο αυτά τα ζεύγη διαφορών, ο Jesse θα μπορούσε (χρησιμοποιώντας και λίγη φιλική πίεση) να επιβάλει τον εξής κανόνα:

«Διατάζω να μεταφερθούν κεφάλαια από τον πλουσιότερο γείτονα στον φτωχότερο, ίσα με το 10% των διαφορών που καταγράφηκαν».

Για παράδειγμα:

Το άτομο 3 θα πάρει 3$ από το άτομο 4, αλλά ταυτόχρονα πρέπει να πληρώσει 5$ στο άτομο 2, πράγμα που οδηγεί σε καθαρή απώλεια 2$.

Το άτομο 5 θα δώσει 9$ στο άτομο 4 και 12$ στο άτομο 6, πράγμα που οδηγεί σε καθαρή απώλεια 21$.

Το άτομο 8, που έχει έναν μόνο γείτονα, θα πάρει 2$ από το άτομο 7.

Όταν ολοκληρωθούν όλες οι δοσοληψίες, προκύπτει μια νέα κοινωνική κατάσταση, που αντιπροσωπεύεται από τον κατάλογο εισοδημάτων του Σχήματος 2.

Με μια πρώτη ματιά βλέπουμε ότι αυτή η μέθοδος κατανομής του πλούτου έχει πολλές ατέλειες. Το άτομο 4, που ξεκίνησε με περιουσία 110$, έγινε πλουσιότερο, ενώ το άτομο 3, που ξεκίνησε με 80$, έχασε χρήματα.Το άτομο 7, που ξεκίνησε μόνο με 60$, έμεινε με την ίδια περιουσία. Τέλος, πρέπει να επισημάνουμε την ανάγκη «ειδικών κανόνων» για τα άτομα που βρίσκονται στα άκρα της γραμμής. Αυτά, εφόσον έχουν έναν μόνο γείτονα, εμπλέκονται σε μία μόνο μεταφορά κεφαλαίων.

Η αξία αυτού του συγκεκριμένου κανόνα γίνεται φανερή μόνο αν επαναλάβουμε αρκετές φορές την εφαρμογή του. Παρότι οι πολλές επαναλήψεις του είναι κουραστικές, η εκτέλεσή του μία ακόμη φορά θα σας βοηθήσει να ξεκαθαρίσετε αυτές τις

* Ο Jesse James (1847-1882) ήταν περιώνυμος ληστής από το Μιζούρι των ΗΠΑ. Έκανε πάμπολλες ληστείες σε τρένα και τράπεζες μέχρι που δολοφονήθηκε από έναν συναίτερό του. Η δράση του υμνήθηκε σε λαϊκά τραγούδια των ΗΠΑ και απαθανατίστηκε σε ταινίες γουέστερν. (Σ.τεπιστ.συμβ.)

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

άτομο	1	2	3	4	5	6	7	8
$u(x)$	\$147	\$48	\$78	\$116	\$179	\$90	\$60	\$42

Σχήμα 2

άτομο	1	2	3	4	5	6	7	8
περιουσία	\$137,10		\$78,80	\$118,50				

Σχήμα 3

ιδέες. Στο Σχήμα 3 έχω αρχίσει την καταχώρηση των αποτελεσμάτων της εφαρμογής του κανόνα του Jesse στον πίνακα του Σχήματος 2. (Συμπληρώστε εσείς τα κενά.)

Αναδιατύπωση του κανόνα του Jesse

Η έκφραση του βασικού μας κανόνα με συναρτησιακό συμβολισμό, θα μας βοηθήσει να αντιμετωπίσουμε την ανάγκη επανάληψης της διαδικασίας πολλές φορές :

το $u(1)$ γίνεται $u(1) + 0{,}1[u(2) - u(1)]$,
το $u(x)$ γίνεται $u(x) + 0{,}1[u(x-1) - u(x)] + 0{,}1[u(x+1) - u(x)]$
ή $u(x) + 0{,}1[u(x-1) - 2u(x) + u(x+1)]$ για $2 \le x \le 7$,
και το $u(8)$ γίνεται $u(8) + 0{,}1[u(7) - u(8)]$.

Χρησιμοποιώντας ένα λογιστικό φύλλο υπολογιστή (δείτε το άρθρο «Απειροστικός λογισμός —ναι ή όχι;» στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1995 του *Quantum*), μπορούμε να προγραμματίσουμε αυτούς τους κανόνες και να επιτύχουμε τα αποτελέσματα του Σχήματος 4 (όπου εμφανίζονται έξι επαναλήψεις). Πράγματι, με τη βοήθεια σύγχρονου λογισμικού όπως το Microsoft Excel, μπορούμε να επαναλάβουμε με ευκολία αυτούς τους κανόνες 40 φορές και κατόπιν να δημιουργήσουμε μια γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων (Σχήμα 5).

Η διαδικασία που περιγράψαμε ονομάζεται, στον φυσικό κόσμο, διάχυση. Εμφανίζεται σε ποικίλες περιπτώσεις, όπως η διάχυση τοξικών ουσιών σε μια λίμνη, η διάχυση της θερμότητας σε μια ράβδο, η διάχυση του καπνού στον αέρα. Ένα περισσότερο θεωρητικό παράδειγμα αφορά τη θέση ενός μικρού σωματιδίου που υπόκειται σε κίνηση Brown. Ενώ μπορεί να γνωρίζουμε ακριβώς από πού ξεκινά το σωματίδιο, με την πάροδο του χρόνου γνωρίζουμε μόνο την πιθανότητα να βρίσκεται κάπου. Αυτή η «διάχυση βεβαιότητας» είναι ένα ακόμη παράδειγμα της διαδικασίας που εξετάζουμε.

Για να κάνουμε περισσότερο συγκεκριμένη τη συζήτησή μας, θα την εστιάσουμε στη διάχυση της θερμότητας σε μια ράβδο (χωρίς να ξεχνάμε τη δυνατότητα ερμηνείας και άλλων φαινομένων).

Η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας

Η μέθοδος του Jesse για τη διάχυση του πλούτου στηρίζεται στην επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του κανόνα

το $u(x)$ γίνεται $u(x) + 0{,}1[u(x-1) - 2u(x) + u(x+1)]$ για $2 \le x \le 7$

(θα εξετάσουμε αργότερα τις τροποποιήσεις στα άκρα της γραμμής). Αν μετρήσουμε το χρόνο σε λεπτά (ή σε οποιαδήποτε άλλη χρονική μονάδα) και συμβολίσουμε την περιουσία του ατόμου x κατά τη χρονική στιγμή t με $u(x, t)$ ο προηγούμενος κανόνας μπορεί να γραφεί ως

$$u(x, t+1) = u(x, t) + 0{,}1[u(x-1, t) - 2u(x, t) + u(x+1, t)],$$

ή

$$u(x, t+1) - u(x, t) = 0{,}1[u(x-1, t) - 2u(x, t) + u(x+1, t)].$$

Όσοι έχουν μελετήσει απειροστικό λογισμό μπορούν να αναγνωρίσουν στην τελευταία την διατύπωση με τη μορφή πεπερασμένων διαφορών του κανόνα του Jesse της «εξίσωσης θερμικής αγωγιμότητας»

$$u_t = 0{,}1u_{xx}.$$

Δηλαδή, η $u(x, t+1) - u(x, t)$ αντιστοιχεί στη «μεταβολή της $u(x)$ στη μονάδα του χρόνου», ή u_t. Παρομοίως η

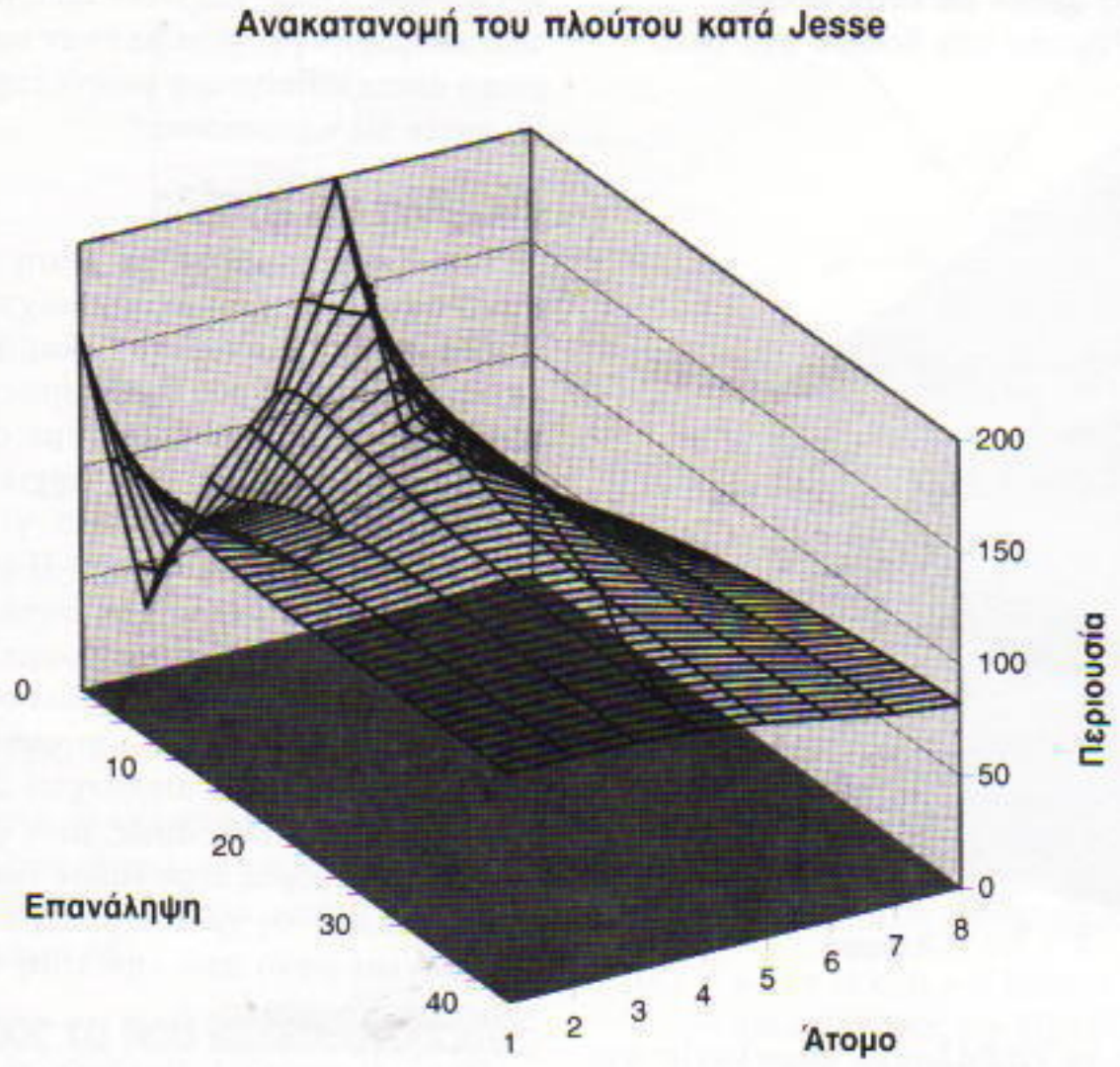
$$u(x-1, t) - 2u(x, t) + u(x+1, t)] = [u(x+1, t) - u(x, t)] - [u(x, t) - u(x-1, t)]$$

ονομάζεται «δεύτερη διαφορά του u ως προς x» και αντιστοιχεί στο u_{xx}. Πάντως, ο απειροστικός λογισμός δεν είναι απαραίτητος για να παρακολουθήσουμε τη συζήτηση που ακολουθεί. Αντίθετως, θα δείξω ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα λογιστικά φύλλα για να παραστήσουμε διακριτές εκδοχές της εξίσωσης θερμικής αγωγιμότητας και να επιτύχουμε θαυμάσιες προσεγγίσεις της λύσης της.

Ο κανόνας του Jesse βασίζεται σε μετακινήσεις χρηματικών ποσών μεταξύ ενός ατόμου και των πλησιέστερων γειτόνων του. Με τη φυσική ερμηνεία που δίνουμε, μια τέτοια ροή χρημάτων αντιστοιχεί στη «ροή θερμότητας». Γνωρίζουμε όλοι ότι ένα φλιτζάνι με ζεστό τσάι θα κρυώσει ταχύτερα μέσα στο ψυγείο παρά σε θερμοκρασία δωματίου —δηλαδή, ότι η ταχύτητα με την οποία ρέει η θερμότητα εξαρτάται από τη διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στο τσάι και το περιβάλλον. Ο συγκεκριμένος κανόνας μας —ότι η ροή των χρημάτων είναι ανάλογη με τις περιουσιακές διαφορές ανάμεσα στα άτομα και τους άμεσους γειτονές τους— αντι-

Επανάληψη	1	2	3	4	5	6	7	8
0	160,00	30,00	80,00	110,00	200,00	80,00	60,00	40,00
1	147,00	48,00	78,00	116,00	179,00	90,00	60,00	42,00
2	137,10	60,90	78,80	118,50	163,80	95,90	61,20	43,80
3	129,48	70,31	80,98	119,06	152,48	99,22	62,93	45,54
4	123,56	77,29	83,72	118,59	143,81	100,92	64,82	47,28
5	118,94	82,56	86,57	117,63	137,00	101,60	66,68	49,03
6	115,30	86,60	89,27	116,46	131,52	101,65	68,40	50,80

Σχήμα 4



Σχήμα 5

στοιχεί στο νόμο του Fourier: η ροή θερμότητας από κάποια δεδομένη θέση είναι ανάλογη με τη *βαθμίδα θερμοκρασίας* σ' αυτή τη θέση.

Το γεγονός ότι το χρήμα ρέει από τους πλουσιότερους στους φτωχότερους αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι η ροή θερμότητας είναι ανάλογη με τη βαθμίδα θερμοκρασίας πολλαπλασιασμένη επί μια *αρνητική* σταθερά. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των μερικών διαφορικών εξισώσεων, αυτό αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$\text{ροή} = -cu_x.$$

Ο κανόνας του Jesse είχε το χαρακτηριστικό να απαιτεί τη μεταφορά του 10% της εισοδηματικής διαφοράς μεταξύ των γειτονικών ατόμων σε κάθε μονάδα χρόνου. Αυτό αντιστοιχεί με το να θέσουμε $c = 0{,}1$ στην προηγούμενη εξίσωση. Με όρους ροής θερμότητας, το c αντιπροσωπεύει τη *θερμική αγωγιμότητα* του υλικού μέσα από το οποίο ρέει η θερμότητα. Όποιος έχει κρατήσει ένα ζεματιστό τηγάνι γνωρίζει ότι το c είναι εξαιρετικά μεγάλο για τα μέταλλα, ενώ είναι σημαντικά μικρότερο για τη λαβή του τηγανιού.

Αυτή η ερμηνεία εγείρει το ερώτημα αν ο Jesse θα μπορούσε να επιταχύνει την κατανομή του πλούτου αυξάνοντας το c από 0,1 σε 0,6, ή και περισσότερο. Σ' αυτό το σημείο εμφανίζονται κάποιες διαφορές μεταξύ του δικού μας διακριτού μοντέλου και της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης —διαφορές που ο αναγνώστης μπορεί να τις ανακαλύψει πειραματιζόμενος με το μοντέλο στο λογιστικό φύλλο που προαναφέραμε. Αποδεικνύεται ότι αν αυξήσουμε πάρα πολύ το c εμποδίζεται το κανονικό «μοίρασμα του πλούτου». Πραγματικά, αυτό το γεγονός συνδέεται στενά με τη *θεωρία του χάους*, αλλά αυτή είναι μια άλλη ιστορία. Εδώ ας αρκεστούμε να σημειώσουμε ότι αν ο Jesse είναι ανυπόμονος, πρέπει να αυξήσει τη *συχνότητα* μεταφοράς των χρημάτων αντί να αυξήσει υπέρμετρα το c. Για παράδειγμα, αντί να μεταφέρει το 60% των χρημάτων κάθε λεπτό, θα μπορούσε να ζητήσει τη μεταφορά του 1% των χρημάτων κάθε δευτερόλεπτο. Αυτό ακριβώς το ζήτημα διαφοροποιεί τις εξισώσεις διαφορών που εξετάζουμε από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται παραδοσιακά για να περιγράψουν τη διάχυση της θερμότητας.

Τα άκρα της γραμμής

Ενδιαφέροντα ζητήματα διαφορετικού είδους προκύπτουν στα άκρα της γραμμής. Εδώ τα άτομα 1 και 8 υπόκεινται στους ειδικούς κανόνες

$$u(1, t+1) = u(1, t) + 0{,}1[u(2, t) - u(1, t)]$$

και

$$u(8, t+1) = u(8, t) + 0{,}1[u(7, t) - u(8, t)],$$

αντίστοιχα. Στην περίπτωση της θερμικής ροής σε μια ράβδο, τέτοιοι ειδικοί κανόνες αντιστοιχούν σε ιδιαίτερες *συνοριακές συνθήκες* στα άκρα της ράβδου.

Επειδή δεν γίνεται μεταφορά χρημάτων προς τα αριστερά του ατόμου 1 και προς τα δεξιά του ατόμου 8, ο κανόνας του Jesse αντιστοιχεί σε μια ράβδο *μονωμένη* και στα δύο άκρα της. Μια συνέπεια αυτής της συνοριακής συνθήκης είναι ότι παραμένει σταθερό το συνολικό ποσόν των χρημάτων που κατέχουν τα άτομα της γραμμής.

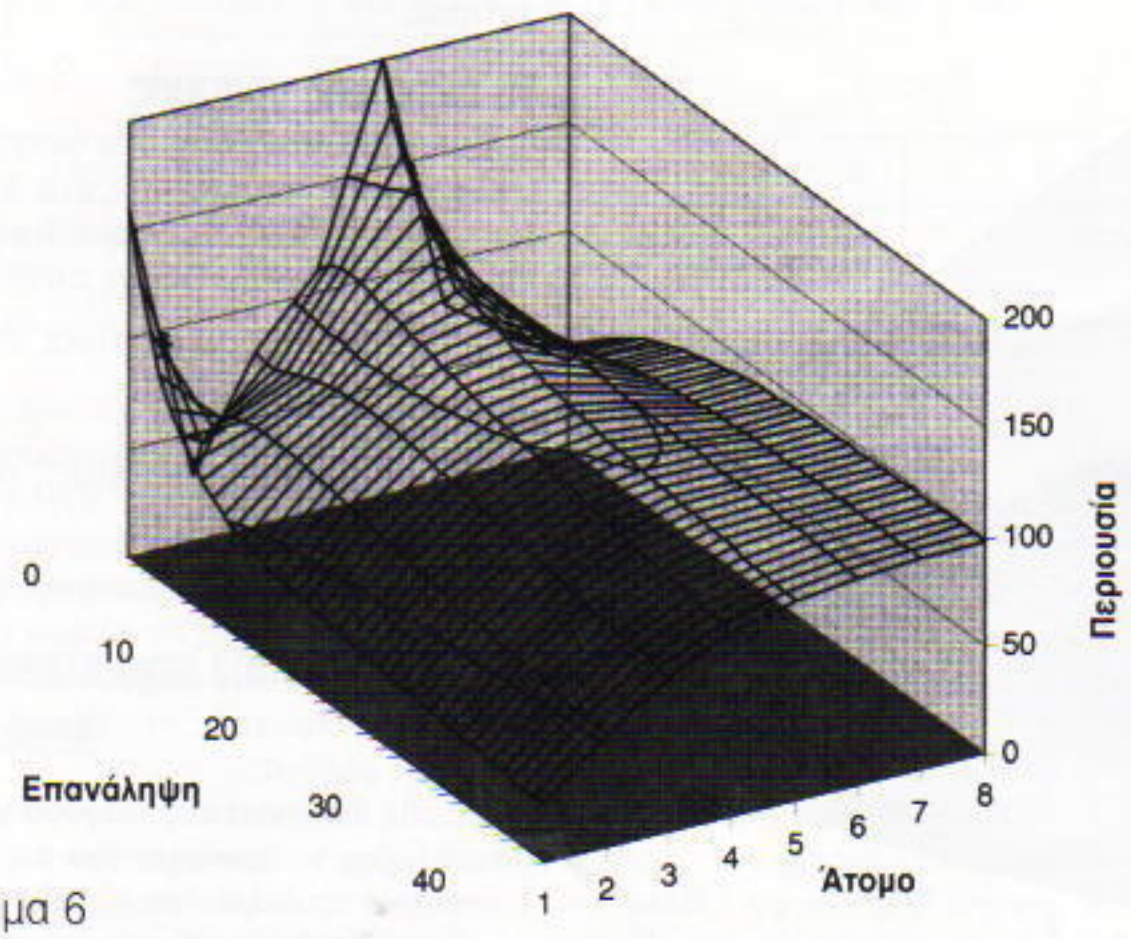
Για να μπορέσουμε να συμπεριλάβουμε και άλλες συνοριακές συνθήκες στη χρηματοοικονομική μας εκδοχή της εξίσωσης θερμικής αγωγιμότητας, είναι βολικό να εισαγάγουμε δύο φανταστικούς χαρακτήρες στα άκρα της γραμμής μας —δύο άτομα που τα αριθμούμε με 0 και 9. Το άτομο 0 βρίσκεται στα αριστερά του ατόμου 1 ενώ το άτομο 9 στα δεξιά του 8. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η περιουσία του ατόμου 0 είναι, σε όλες τις χρονικές στιγμές, ίδια με την περιουσία του ατόμου 1, και ότι για το άτομο 1 (που τώρα πλέον έχει δύο γείτονες) εφαρμόζεται ο ίδιος κανόνας που ισχύει για τα άτομα 2-7. Δηλαδή

$$u(0, t) = u(1, t) \qquad (1)$$

και $u(1, t+1) - u(1, t)$
$= 0{,}1[u(2, t) - 2u(1, t) + u(0, t)]$. (2)

Αυτή η κατάσταση (που μπορούμε άμεσα να την αναπαραστήσουμε σε ένα λογιστικό φύλλο) είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμη με τη συνοριακή συνθήκη της μόνωσης που εξετάσαμε προηγουμένως (για-

Η ανακατανομή του πλούτου κατά Jesse με έναν φοροεισπράκτορα στο ένα άκρο και έναν Ρομπέν των δασών στο άλλο



Σχήμα 6

τί;). Όμως, αυτή η συνοριακή συνθήκη αντιστοιχεί τώρα σε έναν ειδικό κανόνα που επιβάλεται στο *φανταστικό* άτομο 0 χωρίς να απαιτείται ειδικός κανόνας για το (λιγότερο φανταστικό) άτομο 1. Μπορείτε να θέσετε έναν ειδικό κανόνα για το φανταστικό άτομο 9 ώστε να επιτύχετε μια αντίστοιχη κατάσταση στο δεξιό άκρο της γραμμής;

Το πλεονέκτημα της εισαγωγής τέτοιων φανταστικών ατόμων είναι ότι μας επιτρέπει να αναπαραστήσουμε και άλλα είδη συνοριακών συνθηκών. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι αλλάζουμε τον κανόνα για το άτομο 0 από

$$u(0, t) = u(1, t) \text{ για κάθε } t$$

σε $\quad u(0, t) = 0$ για κάθε t,

ενώ για το άτομο 1 εξακολουθεί να ισχύει η εξίσωση (2). Το άτομο 0 παίζει τώρα το ρόλο ενός «φοροεισπράκτορα» ο οποίος σε κάθε μεταφορά κεφαλαίων παίρνει το 10% των εισοδημάτων του ατόμου 1. Και αυτοί οι κανόνες είναι δυνατό να αναπαραστα-θούν σε ένα λογιστικό φύλλο.

Σε αυτή την περίπτωση *δεν* διατηρείται σταθερό το συνολικό ποσόν των χρημάτων στη γραμμή. Αντίθετα, ο φοροεισπράκτορας απορροφά κεφάλαια κάθε φορά που το χρήμα αλλάζει χέρια. (Θα μπορούσαμε επίσης να επιβάλουμε φορολογία στα χρήματα που ανταλλάσσονται στο εσωτερικό της γραμμής. Μπορείτε να σκεφτείτε ένα φυσικό ανάλογο αυτής της κατάστασης στην περίπτωση της θερμικής ροής;)

Αφού βάλαμε τον φοροεισπράκτορα στο αριστερό άκρο της γραμμής, ας εξετάσουμε τώρα την τοποθέτηση ενός «Ρομπέν των δασών» στο δεξιό άκρο —δηλαδή, ενός ατόμου που θα δίνει ή θα παίρνει χρήματα από το άτομο 8 ανάλογα με το ποσόν των χρημάτων που έχει συγκεντρωθεί στο δεξιό άκρο της γραμμής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν θέσουμε $u(9, t) = 100$ για όλες τις τιμές του t, οπότε για το άτομο 8 θα ισχύει

$$u(8, t + 1) - u(8, t) = 0{,}1[u(7, t) - 2u(8, t) + 100].$$

Με όρους φυσικής, αυτοί οι κανόνες αντιστοιχούν σε μια ράβδο θερμικής αγωγιμότητας 0,1, το αριστερό άκρο της οποίας βρίσκεται σε παγωμένο νερό ενώ το δεξιό σε νερό που βράζει σε θερμοκρασία 100°C. Το γράφημα του Σχήματος 6 μας δείχνει το αποτέλεσμα που προκύπτει αν εφαρμοστούν 40 φορές οι κανόνες του Jesse με αυτές τις συνοριακές συνθήκες.

Παρατηρήστε ότι αυτή η μορφή διάχυσης δεν φαίνεται να οδηγεί στην οικονομική ισότητα που επιδιώκει ο Jesse. Όπως και στον πραγματικό κόσμο, η εγγύτητα με έναν εφοριακό αποτελεί σίγουρα μειονέκτημα σε αυτές τις καταστάσεις!

Κύπελλα και καπέλα

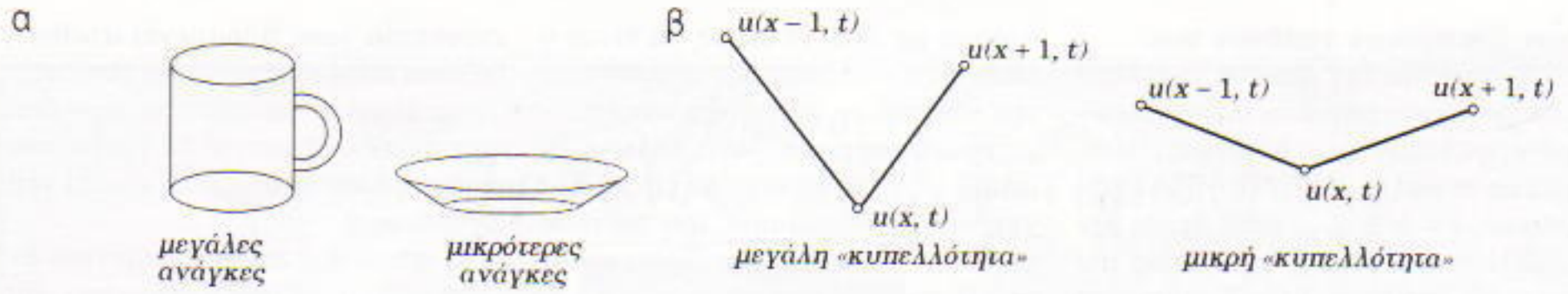
Τώρα που είμαστε σε θέση να συνδέσουμε τη χρηματική διάχυση με ένα φυσικό φαινόμενο —και συγκεκριμένα με τη ροή θερμότητας σε μια ράβδο—, ας επιστρέψουμε στο τελικό αποτέλεσμα του αρχικού οικονομικού μοντέλου: «Θα γίνω πλουσιότερος ή φτωχότερος;» Η μακροπρόθεσμη απάντηση σε αυτό το ερώτημα απαιτεί να γνωρίζουμε το αποτέλεσμα της εν λόγω διαδικασίας για μεγάλες τιμές του t, και αυτή η πρόβλεψη μπορεί να αποδειχτεί δύσκολη. Οι συνέπειες, όμως, μιας μοναδικής μεταφοράς κεφαλαίων για το άτομο x κατά τη χρονική στιγμή t εξαρτώνται μόνο από την τιμή της «δεύτερης διαφοράς»

$$D^2u(x, t) = u(x - 1, t) - 2u(x, t) + u(x + 1, t).$$

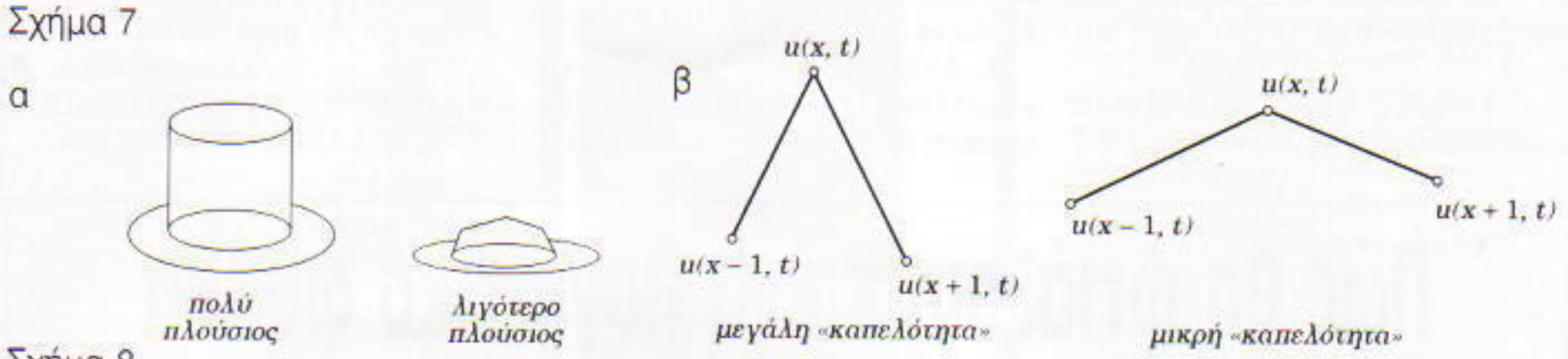
Αν είναι θετική η $D^2u(x, t)$, τότε η περιουσία του ατόμου x θα αυξηθεί όταν $t \to t + 1$. Αν η $D^2u(x, t)$ είναι αρνητική, τότε θα μειωθεί. Αν $D^2u(x, t) = 0$, θα παραμείνει σταθερή.

Αντιλαμβανόμενοι τη σημασία της ποσότητας $D^2u(x, t)$ για τη διαδικασία διάχυσης, θα αναφερόμαστε πλέον σε αυτήν ως «βαθμό κυπελλότητας της $u(x, t)$ τη χρονική στιγμή t». Αποδεικνύεται ότι αυτή η παράξενη ορολογία είναι κατάλληλη και για κοινωνικούς και για γεωμετρικούς λόγους. Δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε το κύπελλο ως σύμβολο των αναγκών, με το σχήμα του να αντιπροσωπεύει το μέγεθος των αναγκών (δείτε το Σχήμα 7α). Ταυτόχρονα, η γραφική παράσταση της $u(x, t)$ όταν η $D^2u(x, t)$ είναι θετική αντιστοιχεί σε μια κατανομή που είναι κοίλη προς τα άνω (δηλαδή, έχει σχήμα κυπέλλου) στο x (Σχήμα 7β).

Από την άλλη πλευρά, η αρνητική «κυπελλότητα» (θα μπορούσαμε κάλλιστα να την αποκαλούμε «καπελότητα») μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύμβολο του σχετικού πλούτου —με το σχήμα του καπέλου να αντιπροσωπεύει το μέγεθος του πλούτου (Σχήμα 8α). Επίσης, η αρνητική



Σχήμα 7



Σχήμα 8

$D^2u(x, t)$ αντιστοιχεί σε μια κατανομή που είναι κοίλη προς τα κάτω (δηλαδή, έχει σχήμα καπέλου) στο x (Σχήμα 8β).

Προς τα πού κατευθυνόμαστε;

Αν υποθέσουμε ότι η διαδικασία διάχυσης προσεγγίζει μια σταθερή κατάσταση, θα περιμένουμε να έχει κάποια «λύση ισορροπίας» —δηλαδή, μια με μηδενική «κυπελλότητα» και μηδενική «καπελότητα» για κάθε τιμή του x. Όπως μπορεί να μαντέψατε ήδη, λόγω της συνθήκης

$$u(x-1) - 2u(x) + u(x+1) = 0$$
$$\text{για } 1 \le x \le 8$$

το γράφημα της $u(x)$ πρέπει να αποτελείται από 10 σημεία $(0, u(0))$, $(1, u(1))$, ..., $(9, u(9))$ που θα ανήκουν όλα σε μια ευθεία του επιπέδου (x, u). Όπως και στην ευκλείδεια γεωμετρία, αυτή η ευθεία θα καθορίζεται από τα δύο ακραία σημεία $(0, u(0))$ και $(9, u(9))$. Στην περίπτωση της ροής θερμότητας, αυτό αντιστοιχεί στο γεγονός ότι «μία λύση της εξίσωσης θερμικής αγωγιμότητας καθορίζεται από δύο συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου».

Υπάρχουν όμως παραλλαγές αυτού του προβλήματος που οδηγούν σε διαφορετικά είδη λύσεων ισορροπίας. Για παράδειγμα, τα οκτώ άτομα μπορεί να υπακούουν στους κανόνες του Jesse αλλά ταυτόχρονα να λαμβάνουν κάποιο εισόδημα. Αν υποθέσουμε ότι $f(x)$ δηλώνει το εισόδημα του ατόμου x κατά τις χρονικές στιγμές $t = 1, 2, \ldots$ (εισόδημα που το λαμβάνει *μετά* την, ας πούμε, μηνιαία μεταφορά κεφαλαίων), βρίσκουμε ότι

$$u(x, t+1) = u(x, t) + 0{,}1[u(x, t-1) - 2u(x, t) + u(x, t+1)] + f(x),$$

που αντιστοιχεί στη μερική διαφορική εξίσωση $u_t = 0{,}1u_{xx} + f(x)$. Και σε αυτή την περίπτωση η λύση της σταθερής κατάστασης θα καθορίζεται από τα $u(0)$ και $u(9)$, αλλά γενικά *δεν* θα είναι γραμμική.

Μια άλλη δυνατότητα που έχει ο Jesse είναι να θέσει διαφορετικούς κανόνες μεταφοράς κεφαλαίου για κάθε άτομο. Αυτό αντιστοιχεί στη ροή θερμότητας μέσω μιας μη ομογενούς ράβδου η θερμική αγωγιμότητα της οποίας ποικίλλει αναλόγως του x, σύμφωνα με κάποια συνάρτηση $c(x)$. Εδώ οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση $u_t = (c(x)u_x)_x$ η λύση σταθερής κατάστασης της οποίας γενικά δεν είναι γραμμική.

Πάντως, μπορούμε να προγραμματίσουμε τέτοια προβλήματα σε ένα λογιστικό φύλλο για να καθορίσουμε τη φύση της λύσης ισορροπίας – όταν αυτή υπάρχει.

Ένα δισδιάστατο μοντέλο

Έχοντας κατά νου αυτές τις προοπτικές, μπορούμε να θεωρήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα του Jesse —της εξίσωσης δηλαδή του πλούτου. Όταν το πλήθος των ατόμων είναι μεγάλο, μπορούμε να το διευθετήσουμε σε ένα ορθογώνιο πλέγμα αντί σε ευθεία γραμμή. Σε αυτή την περίπτωση, η παρουσίαση της περιουσίας 24 ανθρώπων θα μας οδηγούσε σε ένα πλέγμα όπως εκείνο του Σχήματος 9.

Εδώ, ένας λογικός κανόνας θα ήταν να απαιτήσουμε από κάθε άτομο να συγκρίνει την περιουσία του με *τέσσερις* γείτονες —δηλαδή, με τα άτομα που βρίσκονται από πάνω, από κάτω, στα αριστερά και στα δεξιά. Μετά τη σύγκριση θα ακολουθήσει η μεταφορά του 10% κάθε διαφοράς από τον πλουσιότερο στον φτωχότερο.

Στο Σχήμα 9, το άτομο που έχει περιουσία 70$ θα δεχτεί συνολικά 11$ από τους δύο οριζόντιους γείτονες και 13$ από τους δύο κατακόρυφους. Η αναλογία μάς οδηγεί να θεωρήσουμε ότι μια τέτοια διαδικασία αντιστοιχεί σε δισδιάστατη ροή θερμότητας (για παράδειγμα, σε ένα λεπτό μεταλλικό φύλλο).

Προσκαλούμε τους αναγνώστες να διερευνήσουν αυτό το φαινόμενο μέσα από τα προβλήματα που ακολουθούν.

Προβλήματα

1. Δείξτε ότι στη μία διάσταση ένα άτομο με μηδενική κυπελλότητα είναι αυτό που η περιουσία του ισούται με τον *μέσο όρο* των περιουσιών

$50	$100	$80	$140	$120	$40
$90	$200	$160	$70	$90	$20
$40	$30	$130	$130	$130	$80
$50	$120	$200	$20	$50	$80

Σχήμα 9

των δύο άμεσων γειτόνων του.

2. Αντί για τον κανόνα του Jesse που βασίζει τη μονοδιάστατη μεταφορά κεφαλαίων στις διαφορές, θεωρούμε τον εξής: *Κατά τις χρονικές στιγμές $t = 1, 2, 3, \ldots$, κάθε άτομο μεταβιβάζει το 10% της περιουσίας του σε κάθε γειτονά του.* Συγκρίνετε αυτή τη μέθοδο με τον κανόνα του Jesse.

3. Αν σε έναν ορθογώνιο πίνακα συμβολίζουμε την περιουσία ενός ατόμου με $u(x, y)$, ποιος θα είναι ο «δείκτης κυπελλότητας» σύμφωνα με τον «λογικό κανόνα» που αναφέραμε προηγουμένως —ότι δηλαδή το άτομο που βρίσκεται στο (x, y) συγκρίνει την περιουσία του με τους τέσσερις γείτονες που βρίσκονται στις θέσεις $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$, $(x + 1, y)$, και $(x, y - 1)$;

4. Αντί να ορίσουμε «μηδενική κυπελλότητα» στους δισδιάστατους πίνακες, θα λέμε ότι τα άτομα που η περιουσία τους παραμένει σταθερή βρίσκονται «σε αρμονία με τους γείτονές τους» ή, απλούστερα, ότι είναι «αρμονικά». Μπορείτε να βρείτε ένα αρμονικό άτομο ανάμεσα στα 24 του Σχήματος 9;

5. Αποδείξτε ότι ένα αρμονικό άτομο είναι αυτό που η περιουσία του ισούται με τον μέσο όρο των περιουσιών των *τεσσάρων* γειτόνων του. ■

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 68

Πώς θα φτιάξουμε ένα λογιστικό φύλλο

(ΔΕΙΤΕ ΕΠΙΣΗΣ ΤΟ ΑΡΘΡΟ «ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ —ΝΑΙ Η ΟΧΙ;» ΣΤΟ ΤΕΥΧΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ/ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 1995)

ΓΙΑ ΝΑ ΕΦΑΡΜΟΣΟΥΜΕ ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ ΤΟΥ JESSE ΣΤΑ αρχικά οκτώ άτομα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα λογιστικό φύλλο με εννέα στήλες. Στην πρώτη στήλη θα παρακολουθούμε πόσες φορές έχουμε εφαρμόσει τον κανόνα του Jesse. Για να παρακολουθούμε τη μεταβολή στις περιουσίες των οκτώ ατόμων θα ονομάσουμε τις υπόλοιπες στήλες 1, 2, ..., 8 εισάγοντας τους αντίστοιχους αριθμούς στην πρώτη γραμμή. Κάτω ακριβώς από αυτούς τους αριθμούς καταχωρούμε την περιουσία κάθε ατόμου:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Iteration	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	160.00	30.00	80.00	110.00	200.00	80.00	60.00	40.00
3									
4									
5									

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την τρίτη γραμμή του λογιστικού φύλλου για να καταχωρήσουμε τους κανόνες:

το $u(1)$ γίνεται $u(1) + 0{,}1[u(2) - u(1)]$,
το $u(x)$ γίνεται $u(x) + 0{,}1[u(x - 1) - 2u(x) + u(x + 1)]$
για $2 \le x \le 7$,
και το $u(8)$ γίνεται $u(8) + 0{,}1[u(7) - u(8)]$.

Σημειώνουμε το γεγονός ότι πρόκειται να «προγραμματίσουμε» έναν κανόνα πληκτρολογώντας το σύμβολο της ισότητας πριν από τον κανόνα:

	A	B	C	D
1	Iteration	1	2	3
2	0	160	30	80
3	=A2+1	=B2+(C2-B2)/10	=C2+(B2-2*C2 + D2)/10	=D2+(C2-2*D2 + E2)/10
4				
5				

Επαναλαμβάνοντας αυτούς τους κανόνες στις επόμενες πέντε γραμμές παίρνουμε

	A	B	C	D
1	Iteration	1	2	3
2	0	160	30	80
3	=A2+1	=B2+(C2-B2)/10	=C2+(B2-2*C2 + D2)/10	=D2+(C2-2*D2 + E2)/10
4	=A3+1	=B3+(C3-B3)/10	=C3+(B3-2*C3 + D3)/10	=D3+(C3-2*D3 + E3)/10
5	=A4+1	=B4+(C4-B4)/10	=C4+(B4-2*C4 + D4)/10	=D4+(C4-2*D4 + E4)/10
6	=A5+1	=B5+(C5-B5)/10	=C5+(B5-2*C5 + D5)/10	=D5+(C5-2*D5 + E5)/10
7	=A6+1	=B6+(C6-B6)/10	=C6+(B6-2*C6 + D6)/10	=D6+(C6-2*D6 + E6)/10
8	=A7+1	=B7+(C7-B7)/10	=C7+(B7-2*C7 + D7)/10	=D7+(C7-2*D7 + E7)/10

οι τιμές του οποίου είναι

	A	B	C	D
1	Iteration	1	2	3
2	0	160.00	30.00	80.00
3	1	147.00	48.00	78.00
4	2	137.10	60.90	78.80
5	3	129.48	70.31	80.98
6	4	123.56	77.29	83.72
7	5	118.94	82.56	86.57
8	6	115.30	86.60	89.27

Τώρα, σύμφωνα με όσα συζητήσαμε στη σελίδα 55, ας εισαγάγουμε τον φανταστικό χαρακτήρα στο αριστερό άκρο της γραμμής (στο Excel για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε την εντολή "Insert"). Το πρόγραμμα για τη μονωμένη ράβδο γίνεται

	A	B	C	D	E
1	Iteration	0	1	2	3
2	0	=C2	160	30	80
3	=A2+1	=C3	=C2+(B2-2*C2 + D2)/10	=D2+(C2-2*D2 + E2)/10	=E2+(D2-2*E2 + F2)/10
4	=A3+1	=C4	=C3+(B3-2*C3 + D3)/10	=D3+(C3-2*D3 + E3)/10	=E3+(D3-2*E3 + F3)/10
5	=A4+1	=C5	=C4+(B4-2*C4 + D4)/10	=D4+(C4-2*D4 + E4)/10	=E4+(D4-2*E4 + F4)/10
6	=A5+1	=C6	=C5+(B5-2*C5 + D5)/10	=D5+(C5-2*D5 + E5)/10	=E5+(D5-2*E5 + F5)/10
7	=A6+1	=C7	=C6+(B6-2*C6 + D6)/10	=D6+(C6-2*D6 + E6)/10	=E6+(D6-2*E6 + F6)/10
8	=A7+1	=C8	=C7+(B7-2*C7 + D7)/10	=D7+(C7-2*D7 + E7)/10	=E7+(D7-2*E7 + F7)/10

Το λογιστικό φύλλο που περιλαμβάνει τον κανόνα του φοροειοπράκτορα είναι το εξής:

	A	B	C	D	E
1	Iteration	0	1	2	3
2	0	0	160	30	80
3	=A2+1	=B2	=C2+(B2-2*C2 + D2)/10	=D2+(C2-2*D2 + E2)/10	=E2+(D2-2*E2 + F2)/10
4	=A3+1	=B3	=C3+(B3-2*C3 + D3)/10	=D3+(C3-2*D3 + E3)/10	=E3+(D3-2*E3 + F3)/10
5	=A4+1	=B4	=C4+(B4-2*C4 + D4)/10	=D4+(C4-2*D4 + E4)/10	=E4+(D4-2*E4 + F4)/10
6	=A5+1	=B5	=C5+(B5-2*C5 + D5)/10	=D5+(C5-2*D5 + E5)/10	=E5+(D5-2*E5 + F5)/10
7	=A6+1	=B6	=C6+(B6-2*C6 + D6)/10	=D6+(C6-2*D6 + E6)/10	=E6+(D6-2*E6 + F6)/10
8	=A7+1	=B7	=C7+(B7-2*C7 + D7)/10	=D7+(C7-2*D7 + E7)/10	=E7+(D7-2*E7 + F7)/10

Η μετατροπή αυτών των λογιστικών φύλλων σε γραφήματα απαιτεί εξελιγμένο πρόγραμμα λογιστικού φύλλου και ισχυρό υπολογιστή. Συμβουλευτείτε το εγχειρίδιο αναφοράς του λογισμικού σας για να διαπιστώσετε αν και πώς μπορείτε να το πετύχετε. Καλή τύχη!

Σαφήνεια, ακριβολογία και εφαρμοσιμότητα

Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη
ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
σελ. 477, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα 1994

του Φάνη Γραμμένου

Τον 17ο αιώνα ο Ισαάκ Νεύτων ανακάλυψε τον τρόπο εξάρτησης φυσικών μεγεθών από τις σχετικές μεταβλητές και παραμέτρους: οι νόμοι της φύσης μπορούσε πλέον να εκφραστούν με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων. Στα χρόνια που ακολούθησαν η διαπίστωση αυτή βρήκε εφαρμογή σχεδόν σε όλους τους κλάδους των θετικών επιστημών. Παράλληλα αποσαφηνίστηκε ότι είναι αναγκαίο να χρησιμοποιούνται συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, επειδή στην πλειονότητά τους τα ζητούμενα μεγέθη εξαρτώνται από περισσότερες της μίας μεταβλητές: έτσι έκαναν την εμφάνισή τους οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή μερικές διαφορικές εξισώσεις, εφεξής ΜΔΕ). Οι πρώτες ΜΔΕ ανευρίσκονται στις εργασίες του Euler του 1734, ενώ το 1746 ο d'Alembert διατυπώνει τη ΜΔΕ που περιγράφει την κίνηση μιας παλλόμενης χορδής, για την περίπτωση ταλαντώσεων μικρού πλάτους. Η εποχή της πρόβλεψης των φυσικών διεργασιών έχει πλέον αρχίσει.

Η ποσοτικοποίηση των νόμων της φύσης επιτυγχάνεται μέσω της συγκρότησης ενός μαθηματικού προτύπου. Δεν θα υπεισέλθουμε εδώ στο κατά πόσον ένα μαθηματικό πρότυπο μπορεί να περιγράψει (και σε ποιο βαθμό) τη φυσική πραγματικότητα, αλλά θα δεχτούμε ότι η περιγραφή αυτή είναι ικανοποιητική στο πλαίσιο των δυνατοτήτων που διαθέτουμε. Το πρόβλημα συνίσταται κατ' αρχήν σε μια κατά το δυνατόν ακριβή διατύπωση της συμπεριφοράς του ζητούμενου μεγέθους σε συνάρτηση με τη μεταβολή των εξαρτημένων μεταβλητών και παραμέτρων και με τις ελάχιστες υποθέσεις. Τα ανωτέρω ανάγονται κατ' ουσίαν στην επίλυση μίας ή περισσότερων ΜΔΕ. Ωστόσο, υπάρχουν μόνο λίγες, μη τετριμμένες, ΜΔΕ που η λύση τους δίνεται σε κλειστή μορφή. Ετσι, συνήθως ικανοποιούμαστε με την απάντηση σε επιμέρους ερωτήματα, τα οποία ταξινομούνται αδρά σε τρεις κατηγορίες:

1) Ερωτήματα σχετικά με την ύπαρξη λύσης και το πλήθος των λύσεων.

2) Ερωτήματα σχετικά με την ποιοτική συμπεριφορά της λύσης.

3) Ερωτήματα σχετικά με την αριθμητική προσέγγιση του προβλήματος.

Στο βιβλίο των Δάσιου-Κυριάκη, η έμφαση δίνεται στις αναλυτικές τεχνικές επίλυσης ΜΔΕ δύο ή τριών μεταβλητών (χωρίς να αποφεύγεται, όπου αυτή είναι δυνατή, η γενίκευση σε περισσότερες μεταβλητές), υπό το πρίσμα της εφαρμογής τους σε προβλήματα της φυσικής και της τεχνολογίας, καθώς και στις δύο πρώτες από τις προαναφερθείσες κατηγορίες.

Μετά το πρώτο κεφάλαιο, όπου αναλύονται οι βασικές έννοιες του τομέα των ΜΔΕ, όπως είναι π.χ. το γενικό πρόβλημα Cauchy ή ο ορισμός του καλώς τοποθετημένου προβλήματος κατά Hadamard, ακολουθούν δύο κεφάλαια σχετικά με τις ΜΔΕ πρώτης και δευτέρας τάξης, αντίστοιχα. Στις σελίδες τους αναλύεται η έννοια των χαρακτηριστικών καμπυλών και η ομώνυμη μέθοδος επίλυσης. Και στα δύο κεφάλαια παρουσιάζεται η γενική φιλοσοφία που διέπει την κατασκευή μαθηματικών προτύπων φυσικών προβλημάτων, με παραδείγματα από διαφόρους τομείς της μαθηματικής φυσικής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, και στο πλαίσιο μιας μικρής εισαγωγής στις γενικευμένες συναρτήσεις, δίνεται (εν συντομία αλλά με αυστηρότητα) η «συνάρτηση» δ και οι ιδιότητές της. Δίνεται επίσης σύντομη αναφορά στη συνάρτηση Green, η οποία παρουσιάζεται εξαντλητικά στα επόμενα κεφάλαια.

Το πέμπτο και μεγαλύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στις ΜΔΕ ελλειπτικού τύπου και τα σχετικά προβλήματα συνοριακών τιμών, ενώ ως παράδειγμα μελετώνται διεξοδικά οι εξισώσεις Laplace, Poisson και Helmholtz. Εξετάζεται η γνωστότερη μέθοδος επίλυσης, του χωρισμού των μεταβλητών, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, καθώς και η ανάπτυξη σε ιδιοσυναρτήσεις, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, η σύμμορφη απεικόνιση και τα πολυπολικά (ή πλειονοπολικά) αναπτύγματα. Ακόμη, παρουσιάζονται (ίσως σε μια υπέρ το δέον συμπαγή μορφή) τα βασικότερα θεωρήματα και ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων. Αξίζει να αναφερθεί ότι παρουσιάζονται τρία εξαιρετικά χρήσιμα θέματα, τα οποία απουσιάζουν (για ανεξήγητους λόγους) από πολλά βιβλία της ελληνικής, συχνά δε και της διεθνούς βιβλιογραφίας: οι συνθήκες Robin, η μέθοδος των ειδώλων και οι (ορισμένοι) μετασχηματισμοί που διατηρούν την αρμονικότητα μιας συνάρτησης. Τα τρία αυτά θέματα συνιστούν, κατά τη γνώμη του γράφοντος, έναν από τους βασικούς λόγους για τους οποίους το βιβλίο επιτυγχάνει την πληρότητα.

Στο επόμενο κεφάλαιο μελετώνται οι ΜΔΕ παραβολικού τύπου. Εδώ ξεχωρίζει η πολύ σημαντική αρχή των ακροτάτων (διατύπωση και απόδειξη), ενώ αποδεικνύεται και η μοναδικότητα της λύσης προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της διάχυσης, η οποία εξετάζεται διεξοδικά ως το πλέον χαρακτηριστικό παράδειγμα ΜΔΕ παραβολικού τύπου. Το κεφάλαιο κλείνει με τη μέθοδο της ομοιότητας μέσω της οποίας γίνεται χρήση των (πιθανών) συμμετριών του προβλήματος, με απώτερο στόχο να μειωθεί ο αριθμός των μεταβλητών.

Το έβδομο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις ΜΔΕ υπερ-

βολικού τύπου, με πρότυπο την κυματική εξίσωση. Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της διάδοσης κυμάτων, μελετάται το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής (τόσο πεπερασμένου όσο και άπειρου μήκους), περιγράφεται η μέθοδος των σφαιρικών μέσων και τέλος εξετάζεται η αρχή του Duhamel για την επίλυση του μη ομογενούς προβλήματος αρχικών τιμών. Η σημαντικότατη μέθοδος της ενέργειας είναι το στοιχείο που διακρίνει την εξέταση των ΜΔΕ αυτού του τύπου, γνώρισμα που επίσης δεν ανευρίσκεται εύκολα στην υπόλοιπη βιβλιογραφία.

Το τελευταίο κεφάλαιο είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένο στη μέθοδο επίλυσης μέσω του χωρισμού των μεταβλητών, σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες αυτήν τη φορά. Εισάγεται η έννοια του μετρικού τανυστή και εξετάζεται η χωρισιμότητα των εξισώσεων Helmholtz και Laplace, ενώ περιγράφεται και η διαμορφωμένη χωρισιμότητα. Ο φοιτητής (αλλά και ο ερευνητής) θα εκτιμήσει ιδιαίτερα την παρουσίαση της μεθόδου για την επίλυση ενός ομογενούς γραμμικού προβλήματος, υπό μορφή συγκεκριμένων βημάτων.

Ακολουθούν πέντε παραρτήματα με στοιχεία από τη συναρτησιακή ανάλυση (κυρίως αναφορικά με τη χρησιμότητά της στη μελέτη των ΜΔΕ), τις σημαντικότερες ειδικές συναρτήσεις (Bessel και Legendre), τους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς (Fourier, Laplace, Hankel, Mellin και Hilbert), την έννοια της μη καλής τοποθέτησης και της ομαλοποίησης και τέλος, τη διαστατική ανάλυση.

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό στοιχείο του βιβλίου είναι η παράθεση λυμένων παραδειγμάτων και άλυτων ασκήσεων σε κάθε κεφάλαιο (ώστε να προλαμβάνεται η γνωστή, κυρίως σε φοιτητικούς κύκλους, απορία «και σε τι χρησιμεύουν όλα αυτά;»), όπως επίσης οι απαντήσεις (και υποδείξεις) σε μια σειρά από επιλεγμένες ασκήσεις. Οι συγγραφείς παραθέτουν ακόμη μια βασική βιβλιογραφία στην οποία κάθε αναφορά συνοδεύεται από χρήσιμα για τον αναγνώστη σχόλια, που αφορούν κυρίως τη δυσκολία κάθε προτεινόμενου βιβλίου. Ίσως ένα από τα «μειονεκτήματα» του βιβλίου να έγκειται στην αδυναμία ανεύρεσης (τουλάχιστον στην Αθήνα) της ειδικής (και πληρέστερης) βιβλιογραφικής έκδοσης των συγγραφέων «Ενδεικτική βιβλιογραφία στις ΜΔΕ και τα κλασικά εφαρμοσμένα μαθηματικά», η οποία δίνεται ως πρώτη αναφορά.

Οι διαφορικές εξισώσεις (τόσο οι συνήθεις όσο και οι μερικές) συγκροτούν το κατεξοχήν πεδίο συνεργασίας των μαθηματικών με τους φυσικούς και τους μηχανικούς. Ωστόσο, η συνεργασία αυτή κάποιες φορές δεν στέφεται από επιτυχία. Στην επιστημονική κοινότητα είναι γνωστές ρήσεις του είδους «οι μαθηματικοί σκέφτονται ενώ οι μηχανικοί υπολογίζουν». Οπωσδήποτε, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων δεν σημαίνει το ίδιο πράγμα για έναν μαθηματικό και για έναν μηχανικό ή φυσικό. Ενώ οι περισσότεροι μηχανικοί και φυσικοί ικανοποιούνται με *ad hoc* μεθόδους, οι μαθηματικοί αποδέχονται ένα αποτέλεσμα αν και εφόσον έχει αποδειχθεί αυστηρά κάθε βήμα που οδήγησε σε αυτό. Το βιβλίο των Δάσιου-Κυριάκη έρχεται να γεφυρώσει με τον πλέον επιτυχή τρόπο αυτή την απόσταση, καλύπτοντας ένα ουσιαστικό κενό στην ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία. Πιστεύω ότι πρόκειται για ένα από τα καλύτερα (από πλευράς πληρότητας και αυτόνομης μελέτης) ελληνικά βιβλία, το οποίο μάλιστα απευθύνεται εξίσου στον προπτυχιακό και τον μεταπτυχιακό φοιτητή των θετικών επιστημών. Οι αναγνώστες θα έχουν τη χαρά να διαπιστώσουν ότι οι συγγραφείς έχουν πετύχει συγχρόνως τρεις στόχους: τη σαφήνεια, την ακριβολογία και την εφαρμοσιμότητα.

Ο Μεσαίωνας της μαγείας

Richard Kieckhefer, *Η ΜΑΓΕΙΑ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΩΝΑ*
(αγγλικός τίτλος: *Magic in the Middle Ages*)
Μετάφραση: Σ. Πετρόχειλος
Εκδόσεις Π. Τραυλός–Ε. Κωσταράκη, Αθήνα 1994

του Μανόλη Καρτσωνάκη

Σ' αυτή τη μελέτη ο Kieckhefer, ο οποίος διδάσκει στο Πανεπιστήμιο Northwestern Ιστορία της μαγείας και της θρησκείας κατά τους αιώνες του Όψιμου Μεσαίωνα, εξετάζει το φαινόμενο της μαγείας (δηλαδή «το σημείο όπου αλληλεπιδρούν η θρησκεία με την επιστήμη», όπως αναφέρει [σελ.11]) στην ιστορική διαδρομή του από τα ελληνιστικά χρόνια ώς την αυγή της Αναγέννησης, αλλά και τις διάφορες μορφές που προσέλαβε σε όλη αυτή τη διαδρομή.

Στην αρχή του βιβλίου θέτει το διαχωρισμό μεταξύ «φυσικής» και «δαιμονικής» μαγείας. Όμως επειδή τα όρια μεταξύ αυτών των δύο ειδών είναι δυσδιάκριτα, αλλά και επειδή συχνά επικαλύπτονται, σε όλο το βιβλίο παρακολουθούμε εκφάνσεις τους στις διάφορες μαγικές εκδηλώσεις των μεσαιωνικών αιώνων. Συνοπτικά, ο Kieckhefer θεωρεί ότι η «δαιμονική μαγεία είναι μια διαστρέβλωση της θρησκείας· μια θρησκεία που αποστρέφεται το Θεό και επικαλείται τους δαίμονες για τη ρύθμιση των ανθρωπίνων υποθέσεων» (σελ. 23) ενώ «η φυσική μαγεία δεν διαφέρει από την επιστήμη· είναι ένας κλάδος της που ασχολείται με τις απόκρυφες δυνάμεις (σελ.23 και 29).

Ο συγγραφέας εξετάζει την ανάδυση του μύθου του μάγου (magus) τη ρωμαϊκή εποχή. Εκείνη την εποχή, εποχή μεταβατική χωρίς σταθερές φιλοσοφικές αρχές, εκδηλώθηκε μια αποστροφή των ανθρώπων σε κάθε ξένο και διαφορετικό και κυριάρχησε η υπερβολή και η μονομέρεια (συστατικά στοιχεία των μεταβατικών καταστάσεων). Οι άνθρωποι που χαρακτηρίζονταν «μάγοι» είχαν μεταναστεύσει στη λεκάνη της Μεσογείου από τις χώρες της Ανατολής και είχαν δημιουργήσει το μύθο ότι μπορούσαν να θεραπεύουν ανθρώπους και ότι ασχολούνταν με την αστρολογία. Είχε δημιουργηθεί λοιπόν ένα αρνητικό τοπίο μέσα στο οποίο οι δραστηριότητες αυτών των ανθρώπων χαρακτηρίστηκαν «μαγικές», δηλαδή «πα-

ράξενες, εξωτικές που προκαλούν φόβο, γεμάτες σκοτεινά υπονοούμενα» (σελ.25). Όσο περνούσε ο καιρός, η σημασία του όρου επεκτεινόταν για να καλύψει τις αλλόκοτες δραστηριότητες όχι μόνο των ξένων αλλά και των ντόπιων αποκρυφιστών.

Στην κοινωνία της Όψιμης Αρχαιότητας, λοιπόν, υπήρχαν και άνθρωποι που αναζητούσαν τη γνώση με αποκλίνοντα τρόπο. Και επειδή η κοινωνία αυτή βρισκόταν σε βαθιά κρίση, οι λαϊκές μάζες περίμεναν λύσεις πολλών καθημερινών προβλημάτων από τις υπηρεσίες των μάγων και αδιαφορούσαν για τα επιχειρήματα των στοχαστών (τα οποία συχνά ήταν αμήχανα).

Η πόλη όπου κυρίως αναπτύχθηκε η μαγεία και ο αποκρυφισμός ήταν η πολυεθνική και πολύβουη Αλεξάνδρεια, όπου ήδη υπήρχε μια εξαιρετική επιστημονική παράδοση από τα ελληνιστικά χρόνια. Εμφανίστηκαν κείμενα αλληγορικά και μυστικιστικά, τα οποία αποτέλεσαν τις βασικές πηγές γνώσης και μυημένων κύκλων της πόλης. Την ίδια περίοδο σημειώθηκε και μια παράλληλη ανάπτυξη του νεοπλατωνικού ρεύματος στη φιλοσοφία.

Σιγά σιγά δημιουργήθηκαν σημεία επαφής των δύο τάσεων και μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι η μαγεία από ένα σημείο και έπειτα αναπτύχθηκε στο γόνιμο έδαφος του νεοπλατωνισμού. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εξηγήσουμε και τη διαρκή αντίθεση των μάγων προς τον «επιστημονικό» Αριστοτέλη σε όλη την ιστορική διαδρομή του φαινομένου ώς την Αναγέννηση.

Σε αυτούς τους μεταιχμιακούς αιώνες, κατά τους οποίους ο χριστιανισμός αγωνιζόταν να επιβληθεί ως κυρίαρχη θρησκεία, κατηγορήθηκαν και οι χριστιανοί για άσκηση μαγείας, αφού οι παγανιστές τούς κατηγορούσαν ότι προσέδιδαν κύρος σ' έναν άνθρωπο που είχε θανατωθεί στο σταυρό (αρκετά ύποπτα και τα δύο εκείνο τον καιρό!) και ότι έκαναν τις θρησκευτικές τους τελετές μυστικά (κάτι το οποίο ήταν κατακριτέο και αντικοινωνικό για τους παγανιστές). Από την πλευρά τους οι χριστιανοί κατήγγειλλαν τη μαγεία ως έργο των δαιμόνων ενώ δεν υπεισέρχονταν καθόλου στον μυστικιστικό χαρακτήρα της, αφού και αυτοί δρούσαν με αντίστοιχο τρόπο. Χριστιανοί συγγραφείς, όπως ο Αυγουστίνος, ο Ιωάννης Χρυσόστομος και ο Ειρηναίος, απέκρουσαν τη μαγεία. Με την πάροδο των αιώνων και την εδραίωση του Χριστιανισμού, η Εκκλησία όχι μόνο εναντιώθηκε στη μαγεία αλλά θέσπισε και διατάγματα εναντίον της, στα οποία θεμελιώθηκαν οι καταδίκες των μάγων στον Μεσαίωνα. Πιστεύω ότι η ενδελεχής μελέτη αυτής της περιόδου μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη διαπλοκή της μαγείας με τη θρησκεία και την επιστήμη. Και ως προς αυτό, η συμβολή του βιβλίου του Kieckhefer είναι σημαντική.

Ο συγγραφέας μελετά τη διάχυση της μαγείας στα σκανδιναβικά Νορς (= έπη της μεσαιωνικής Σκανδιναβίας), στις ρουνικές επιγραφές και στην κελτική λογοτεχνία της Ιρλανδίας.

Αυτά τα προχριστιανικά κείμενα αποτελούν, κατά τον Kieckhefer, το «λυκόφως του παγανισμού». Κατόπιν, αφού εξετάζει τη μαγεία στην καθημερινή ζωή των μεσαιωνικών αιώνων στην Ευρώπη, περνά σε ένα πολύ σημαντικό θέμα για την εξέλιξη του φαινομένου: την σύζευξη της αραβικής παιδείας με τις απόκρυφες επιστήμες. Η αραβική παιδεία εισήχθη στη Δυτική Ευρώπη τον 12ο αιώνα, την ίδια εποχή που δημιουργούνται οι πρώτες σχολές (είτε πανεπιστήμια είτε εκκλησιαστικές). Έτσι η λατινική Δύση ήρθε σε επαφή με έναν τεράστιο πλούτο γνώσης ο οποίος εκπορευόταν από την Κλασική Αρχαιότητα και είχε προστατευθεί (ή και αναπτυχθεί) από τους Άραβες. Από τον 11ο αιώνα ξεκίνησαν οι πρώτες μεταφράσεις ελληνικών έργων από τα αραβικά, και αυτός ο μεταφραστικός κύκλος συνεχίστηκε και με αμιγώς αραβικά κείμενα. Έργα διαπρεπών Αράβων όπως του Ibn Sina (Αβικέννας) και του Ibn Rushd (Αβερρόης) έγιναν προσιτά στη Δύση, και μαζί τους η αραβική επιστήμη. Οι κορυφαίες επιτεύξεις της αραβικής επιστήμης σημειώθηκαν στην αλχημεία και την αστρολογία.

Αυτοί οι δύο κλάδοι της επιστήμης εκείνων των αιώνων είναι ενδεικτικοί του μεσαιωνικού κοσμοειδώλου για τον Άνθρωπο: σύμφωνα με αυτό το κοσμοείδωλο, ο Άνθρωπος είναι απολύτως υποταγμένος στη μοίρα του και στις φυσικές δυνάμεις. Συνεπώς, στα μάτια των μεσαιωνικών, ο μεν αλχημιστής φάνταζε σαν να προσπαθούσε να προκαθορίσει την πορεία των πραγμάτων και να βρει, επιτέλους, τη Φιλοσοφική Λίθο και το Ελιξίριο της Ζωής, ενώ η ενασχόληση με την αστρολογία δημιουργούσε την ψευδαίσθηση της γνώσης των μελλούμενων, μέσω της τιθάσευσης των ουράνιων κινήσεων στο χαρτί του αστρολόγου.

Αυτή η ερμηνευτική ικανότητα των δύο τομέων λειτούργησε σαγηνευτικά και για τους ηγετικούς κύκλους (βασιλείς κ.ά.) και για τις λαϊκές μάζες. Δεν ήταν λοιπόν δύσκολο να περιβληθούν οι λειτουργοί τους με το μύθο του «παράξενου», του «μαγικού», και να ταξινομούνται στην ευρύτερη κατηγορία των μάγων. Αυτό όπως αναφέρει και ο Kieckhefer, ήταν κάτι μάλλον επικίνδυνο, διότι την ίδια εποχή υπήρχαν και οι διάφορες «μάγισσες» (witches ή sorcerers), οι οποίες ακολουθούσαν προδιαγεγραμμένη πορεία προς την πυρά. Ο Kieckhefer εξηγεί με σαφήνεια την αγωνιώδη προσπάθεια των μεσαιωνικών αστρολόγων να αποσυνδέσουν τις προσεγγίσεις τους από τις αντίστοιχες των αρχαίων αστρολόγων (σελ. 191-201). Οι μεσαιωνικοί, αντικρούοντας τις χριστιανικές αιτιάσεις για τον περιορισμό της ανθρώπινης ελεύθερης βούλησης και της θεϊκής παντοδυναμίας μέσω των αστρολογικών προβλέψεων, έλεγαν ότι τα άστρα δεν αποτελούν τις αιτίες των γεγονότων αλλά απλώς τα σημάδια τους. Συνεπώς, η μελέτη των άστρων μπορούσε μόνο να προβλέψει γενικές τάσεις και όχι συγκεκριμένα γεγονότα.

Οι αστρολόγοι ωστόσο προέβαιναν σε μια θεμελιώδη παραδοχή: Υποστήριζαν πως υπάρχει άμεση σχέση ανάμεσα στο μακρόκοσμο του στερεώματος και στο μικρόκοσμο των ανθρώπινων σχέσεων. Αυτή η πεποίθησή τους όμως τους συνέδεσε με την άλλη επιστήμη που κατηγορούνταν για αποκρυφισμό: την αλχημεία. Πράγματι, οι

Η συνέχεια στη σελ. 67 ⇨

Μεγιστοποιώντας το μέγιστο

Quod differtur non aufertur

George Berzsenyi

Το λατινικό αποφθεγμα του υπότιτλου μπορεί να αποδοθεί ελεύθερα ως «Είναι δυνατό να αναβάλεις τη λύση των προβλημάτων αλλά είναι αδύνατο να απαλλαγείς από αυτά». Για να σας δείξω πόσο αληθεύει, θα εξετάσουμε μαζί μια περιοχή προβλημάτων που μου επισήμανε για πρώτη φορά ο F. David Hammer, με τον οποίο αλληλογραφούσα για θέματα των μαθηματικών σε όλη τη δεκαετία του 1980.

Σε ένα από τα γράμματά του, ο David μου ανέφερε το πρόβλημα της εύρεσης του μεγαλύτερου μέγιστου κοινού διαιρέτη των $n^3 + 1$ και $(n + 1)^3 + 1$, όταν το n διαιρέχει το σύνολο των θετικών ακεραίων. Έθεσα αυτό το πρόβλημα στην 3η Μαθηματική Ολυμπιάδα του Τέξας το 1981. Η πρώτη πρόκληση για τους αναγνώστες μου είναι *να αποδείξουν ότι η απάντηση είναι 7, και ότι αυτή προκύπτει για* $n \equiv 5 \pmod 7$. Ο David βρήκε επίσης ότι η αντίστοιχη απάντηση για τους $n^4 + 1$ και $(n + 1)^4 + 1$, είναι 17. Χρησιμοποίησα αυτό το αποτέλεσμα πρόσφατα ως πρόβλημα στο *Math Horizons*.[1]

Για εκθέτες μεγαλύτερους του 4 η κατάσταση γίνεται πιο πολύπλοκη, πολύ περισσότερο δε αν σε κάθε ακέραιη δύναμη προσθέσουμε έναν τυχαίο ακέραιο k αντί το 1. Όπως και νά' χει, με δεδομένη την ευρεία κυκλοφορία των ισχυρών αλγεβρικών συστημάτων των υπολογιστών,[2] είναι πιθανό ότι θα μπορέσουμε να φωτίσουμε τη σχέση των m και k με τον $G(m, k)$, τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των $n^m + k$ και $(n + 1)^m + k$, όταν το n διατρέχει το σύνολο των θετικών ακεραίων. Έπειτα από κάποια αρχική διερεύνηση που έκανε ο συνάδελφός μου Allen Broughton (χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Maple), ανακάλυψα μερικές απαντήσεις και πολύ περισσότερα ερωτήματα (χρησιμοποιώντας το Mathematica). Προκαλώ τους αναγνώστες μου να ξεπεράσουν τις ανακαλύψεις μας.

Αποδεικνύεται ότι $G(2, k) = 4k + 1$, όπως συνάγουμε άμεσα από την ταυτότητα

$$(2n + 3)(n^2 + k) + (-2n + 1)((n + 1)^2 + k) = 4k + 1.$$

Αυτό ήταν η βάση του Προβλήματος 13 στον μαθηματικό διαγωνισμό American Invitational Mathematics Examination του 1985. Δεν είναι γνωστή καμιά παρόμοια ταυτότητα για το $G(m, k)$, για $m > 2$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Ευκλείδη στα πολυώνυμα $n^m + 1$ και $(n + 1)^m + 1$, κατάφερα να καταλήξω σε παρόμοιες εκφράσεις για το $G(m, 1)$, για $3 \le m \le 7$, αλλά δεν προχώρησα περισσότερο. Έκανα επίσης κάποιες πινακοποιήσεις για τα $G(m, k)$, για $3 \le m, k \le 10$, αλλά δεν κατάφερα να ανιχνεύσω κάποια κανονικότητα. Ιδιαίτερα, θα είχε ενδιαφέρον να μάθουμε *για ποιες τιμές των* m *και* k *είναι* $G(m, k) = 1$;

Για ν' ανοίξουμε την όρεξή σας, παρουσιάζουμε στο επόμενο πλαίσιο τους τύπους για τα $G(3, 1)$, $G(4, 1)$, και $G(5, 1)$. Ίσως καταφέρετε να ανακαλύψετε παρόμοιους τύπους για άλλες τιμές των m και k και μερικούς σχηματισμούς ανάμεσά τους. ■

Ο σκοπός αυτής της στήλης είναι να στρέψει το ενδιαφέρον των αναγνωστών του *Quantum* σε ενδιαφέροντα προβλήματα που αξίζει να γενικευτούν και τα οποία ενδέχεται να οδηγήσουν σε ανεξάρτητη έρευνα και/ή σε επιστημονικά προγράμματα μαθηματικών. Ο συγγραφέας θα δεχτεί ευχαρίστως όσες απαντήσεις του στείλουν (είτε μέσω του αμερικανικού *Quantum* —NSTA, 1840 Wilson Boulevard, Arlington VA 22201-3000, USA, τηλ. (703) 2437100— είτε απευθείας) οι σπουδαστές που θα επιτύχουν να ρίξουν φως στα φαινόμενα που παρουσιάζονται εδώ, και τους οποίους θα βραβεύσει με πολύτιμα βιβλία ή/και συνδρομές.

$$(3n^2 - 6n + 5)((n + 1)^3 + 1) - (3n^2 + 3n - 4)(n^3 + 1) = 2 \cdot 7$$

$$(20n^3 - 10n^2 - 12n + 23)((n + 1)^4 + 1) - (20n^3 + 70n^2 + 68n - 5)(n^4 + 1) = 3 \cdot 17$$

$$(120n^4 - 85n^3 + 15n^2 - 30n + 91)((n + 1)^5 + 1) - (120n^4 + 515n^3 + 790n^2 + 395n - 159)(n^5 + 1) = 11 \cdot 31$$

1. Είναι περιοδικό που άρχισε να εκδίδεται πρόσφατα στις ΗΠΑ με ποικίλη ύλη στα στοιχειώδη μαθηματικά. (Σ.τ.επιστ.συμβ.)

2. Ο συγγραφέας εννοεί τα ισχυρά προγράμματα που κυκλοφορούν για συμβολικό λογισμό με υπολογιστές, όπως το MAXIMA, το MATHEMATICA, κ.λπ. (Σ.τ.επιστ.συμβ.)

Το εκκρεμές που στάζει

...ώστε ο χρόνος του ταξιδιού από τον ένα πόλο στον άλλο να είναι αποτέλεσμα μυστηριώδους συνωμοσίας των πιο άχρονων μέτρων, της μοναδικότητας του σημείου εξάρτησης, της δυαδικότητας μιας αφηρημένης διάστασης, της τριαδικής φύσης του αριθμού π, του μυστικού τετραγώνου της ρίζας, της τελειότητας του κύκλου.

*—Ουμπέρτο Έκο**

Arthur Eisenkraft, Larry D. Kirkpatrick

Η ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της φυσικής και της τεχνολογίας. Αναφέρεται ότι ο Γαλιλαίος έκανε μια σημαντική ανακάλυψη σχετικά με την κίνηση του εκκρεμούς ενώ παρακολουθούσε την αιώρηση ενός πολυελαίου κατά τη διάρκεια της θείας λειτουργίας. Ανακάλυψε, λοιπόν, ότι η περίοδος του απλού εκκρεμούς είναι (σχεδόν) ανεξάρτητη από το πλάτος της αιώρησης. Αυτό οδήγησε στη χρήση των εκκρεμών για τη μέτρηση χρονικών διαστημάτων, καθώς και στην ανάπτυξη ρολογιών ακριβείας.

Κάθε μάζα που κρέμεται από ένα σταθερό άξονα αποτελεί ένα εκκρεμές. Για παράδειγμα, ένας ουραγκοτάγκος που αιωρείται κρεμασμένος με το χέρι του από ένα κλαδί, ή το πόδι σας που ταλαντώνεται από το γοφό σας ενώ περπατάτε. Και τα δύο αυτά παραδείγματα είναι αρκετά περίπλοκα, διότι ως σώματα δεν είναι άκαμπτα και επιπλέον η μάζα τους είναι κατανεμημένη με πολύπλοκο τρόπο. Αλλά βεβαίως, ως σπουδαστές της φυσικής πρέπει να εξασκηθείτε στο να βλέπετε περίπλοκες καταστάσεις και να βρίσκετε τους τρόπους να τις απλοποιείτε. Ποιο φαντάζεστε ότι θα μπορούσε να είναι το απλούστερο εκκρεμές; Σίγουρα όχι ο πολυέλαιος που προσείλκυσε το ενδιαφέρον του Γαλιλαίου.

Το απλούστερο εκκρεμές πιθανόν θα ήταν μια συμπαγής μάζα δεμένη με ένα μακρύ, λεπτό και αβαρές νήμα. Οι φυσικοί ονομάζουν «απλό εκκρεμές» αυτή τη διάταξη. Αν αφήσουμε ένα απλό εκκρεμές να αιωρηθεί σε μικρές γωνίες, θα διαπιστώσουμε ότι η περίοδός του T (ο χρόνος για την ολοκλήρωση μιας πλήρους ταλάντωσης) δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\ell / g},$$

όπου ℓ είναι η απόσταση ανάμεσα στο σημείο ανάρτησης και στο κέντρο μάζας του σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η σχέση αυτή αποτελεί το αποτέλεσμα της λύσης πολλών άλλων προβλημάτων φυσικής, στα οποία τα αντικείμενα επαναλαμβάνουν την κίνησή τους ξανά και ξανά. Παρατηρήστε ότι η περίοδος δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος. Σας εκπλήσσει αυτό το γεγονός; Θα έπρεπε! Προτείνουμε λοιπόν να αφιερώσετε λίγο χρόνο για να αναρωτηθείτε σχετικά με το ότι η μάζα δεν παίζει κανένα ρόλο στην κίνηση του εκκρεμούς.

Στο πρόβλημα αυτού του μήνα θα μελετήσουμε την περίοδο ενός απλού εκκρεμούς που χάνει σταδιακά μάζα —γιατί όχι, ενός εκκρεμούς που στάζει. Το ανηρτημένο σώμα είναι ένα κυβικό δοχείο με αμελητέα μάζα και με ακμή $2a$. Αρχικά είναι γεμάτο με ένα υγρό μάζας M_0. Ο κύβος δένεται σε ένα πολύ λεπτό νήμα και σχηματίζει ένα απλό εκκρεμές μήκους L_0. Το υγρό ρέει από μια μικρή τρύπα στον πυθμένα του κύβου με σταθερό ρυθμό r. Την τυχαία χρονική στιγμή t το ύψος του υγρού στο δοχείο είναι d, και το μήκος L του εκκρεμούς μετριέται σε σχέση με το στιγμιαίο κέντρο μάζας.

Μέρος Α: Υπολογίστε την περίοδο σε συνάρτηση με το χρόνο, για μικρές γωνίες ταλάντωσης.

Μέρος Β: Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της μεταβολής της περιόδου σε συνάρτηση με το χρόνο, φροντίζοντας να ορίσετε επακριβώς τα ακραία σημεία της γραφικής παράστασης.

Μέρος Γ: Πώς διαμορφώνονται οι απαντήσεις σας αν το δοχείο έχει μάζα επίσης M_0 (ίση με την αρχική μάζα του υγρού) και το κέντρο μάζας του δοχείου συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο του;

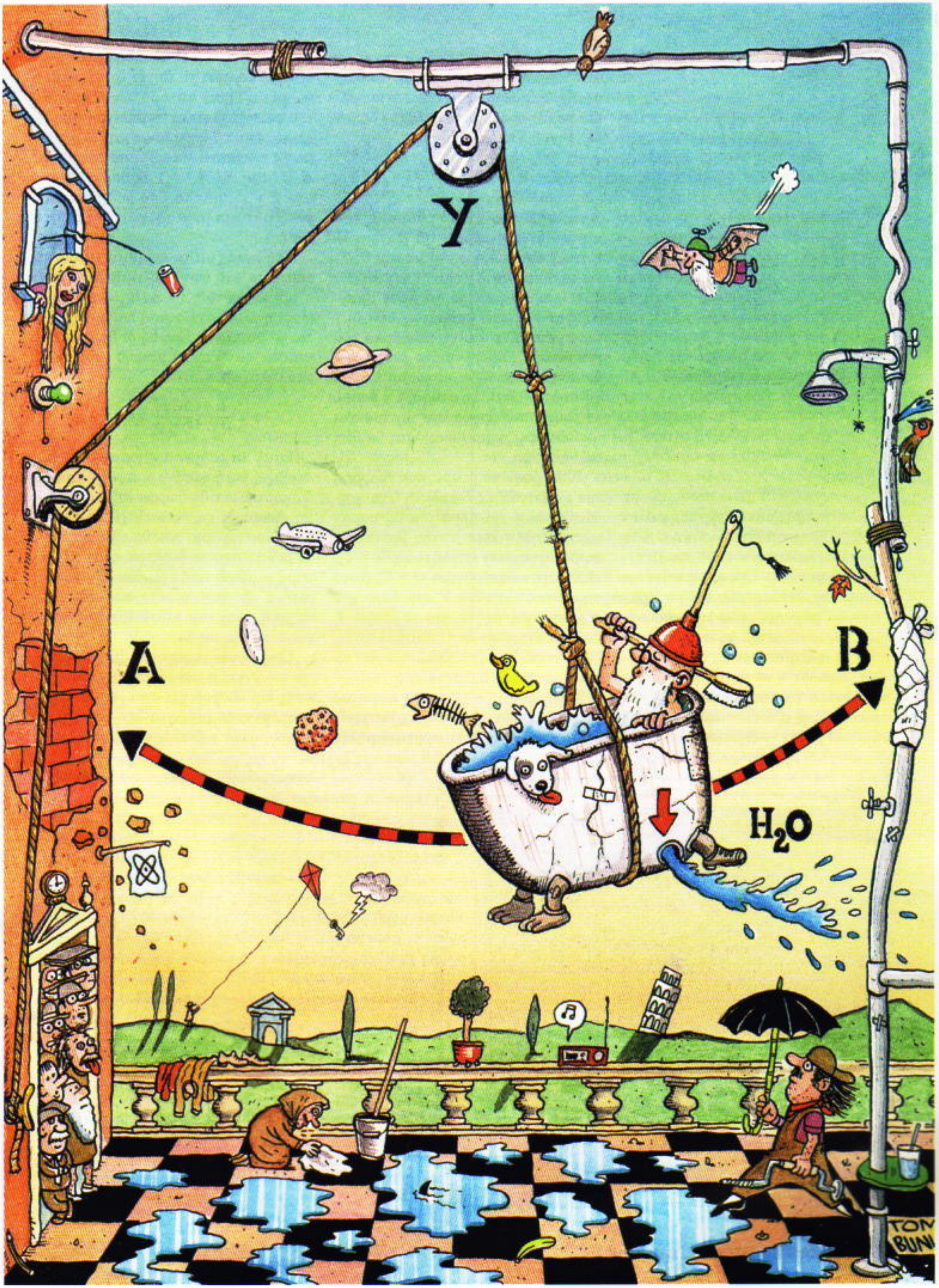
Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum* έως τις 10 Αυγούστου 1995. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

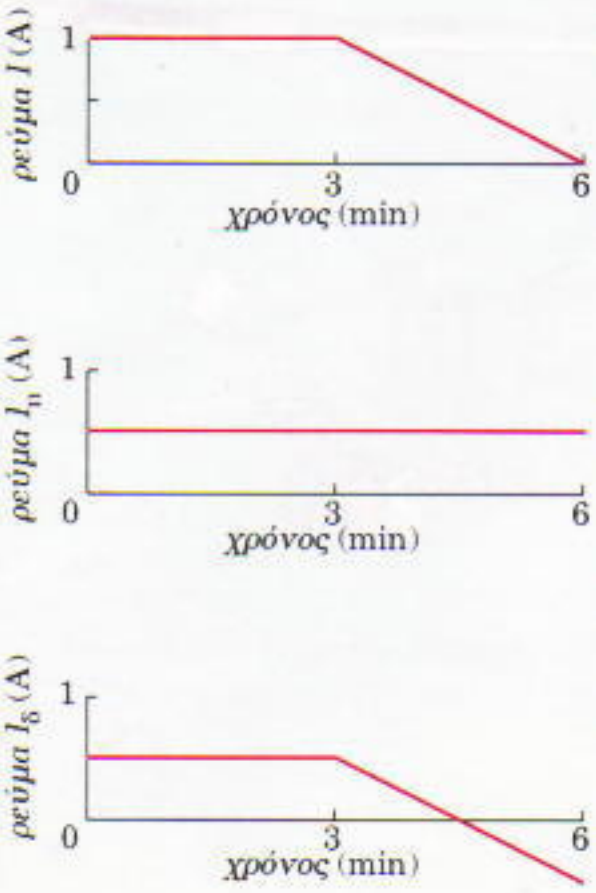
Υπεραγώγιμος μαγνήτης

Στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1995 ζητούσαμε από τους αναγνώστες μας να ασχοληθούν με ένα

Εικονογράφηση: Thomas Bunk

* Από το βιβλίο *Το εκκρεμές του Φουκώ*, μετάφρ. Έφη Καλλιφατίδη, Εκδόσεις Γνώση. (Σ.τ.μ.)


Y
A
B
H_2O



Σχήμα 1

από τα προβλήματα της 25ης Διεθνούς Ολυμπιάδας Φυσικής, που έγινε τον Ιούλιο του 1994 στο Πεκίνο, και το οποίο αναφερόταν στον έλεγχο της λειτουργίας ενός υπεραγώγιμου μαγνήτη μέσω ενός υπεραγώγιμου διακόπτη. Ας πάρουμε, όμως, τα πράγματα με τη σειρά.

Α. Εφόσον η αντίσταση του υπεραγώγιμου διακόπτη είναι μηδέν, η πτώση τάσης σ' αυτόν πρέπει επίσης να είναι μηδέν —δηλαδή, $V_δ = 0$. Εφόσον το υπεραγώγιμο πηνίο είναι συνδεδεμένο παράλληλα με το διακόπτη, η πτώση τάσης στο πηνίο πρέπει να είναι και αυτή μηδέν —δηλαδή, $V_π = 0$. Επομένως,

$$V_π = 0 = -L\frac{\Delta I_π}{\Delta t}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα $I_π$ του πηνίου δεν μεταβάλλεται (Σχήμα 1). Επειδή, όμως, σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff ισχύει $I = I_π + I_δ$, είναι φανερό ότι κάθε μεταβολή του ολικού ρεύματος I θα συνεπάγεται αντίστοιχη μεταβολή του ρεύματος $I_δ$. Επομένως το ρεύμα του διακόπτη θα μειώνεται γραμμικά έως την τιμή –0,5 Α. Τη στιγμή $t = 6$ min, το ρεύμα στο βρόχο του πηνίου και του υπεραγώγιμου διακόπτη θα ρέει δεξιόστροφα.

Β. Εφόσον το ρεύμα που διαρρέει τον υπεραγώγιμο διακόπτη είναι μηδέν, η τάση στα άκρα του θα παραμένει μηδέν είτε αυτός βρίσκεται στην κανονική κατάσταση ($r = r_κ$) είτε στην υπεραγώγιμη ($r = 0$). Αυτό σημαίνει ότι η τάση $V_π$ στα άκρα του πηνίου είναι μηδέν, και το ρεύμα $I_π$ που το διαρρέει δεν μεταβάλλεται. Επομένως, δεν μεταβάλλεται και το ολικό ρεύμα I (Σχήμα 2).

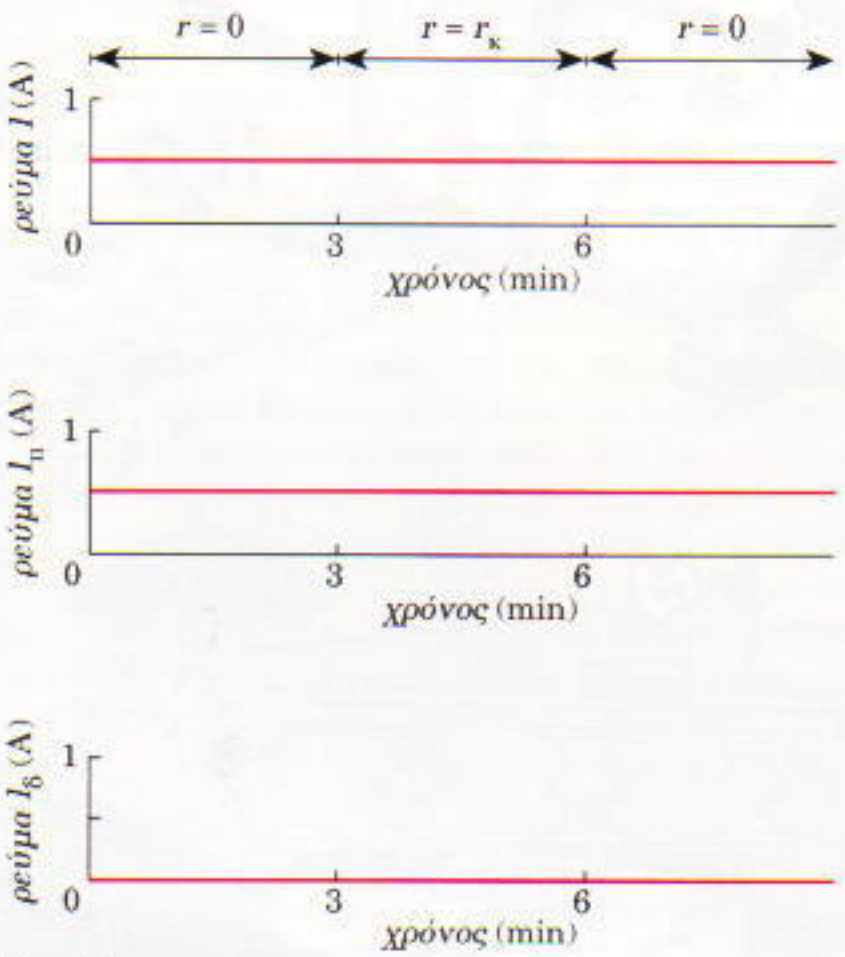
Γ. Τη στιγμή $t = 3$ min η αντίσταση του υπεραγώγιμου διακόπτη μεταπηδά ξαφνικά από την τιμή μηδέν στην τιμή $r_κ = 5\ Ω$. Επειδή το ρεύμα $I_π$ που διαρρέει το πηνίο δεν μπορεί να μεταβληθεί αυτομάτως εξαιτίας του φαινομένου της αυτεπαγωγής, το ολικό ρεύμα I (επομένως και το ρεύμα $I_δ$) πρέπει να «πέσει» από την τιμή E/R στην $E/(R + r_κ)$. Εφόσον μάλιστα $R = r_κ$, και τα δύο ρεύματα θα μειωθούν στο μισό της αρχικής τιμής τους.

Στη συνέχεια τα ρεύματα τείνουν εκθετικά στη σταθερή τιμή τους, με σταθερά χρόνου $τ = L/R_{ολ}$, όπου $R_{ολ}$ είναι η ολική αντίσταση που συνδέεται με το πηνίο. Επειδή οι δύο αντιστάσεις συνδέονται μεταξύ τους παράλληλα, προκύπτει

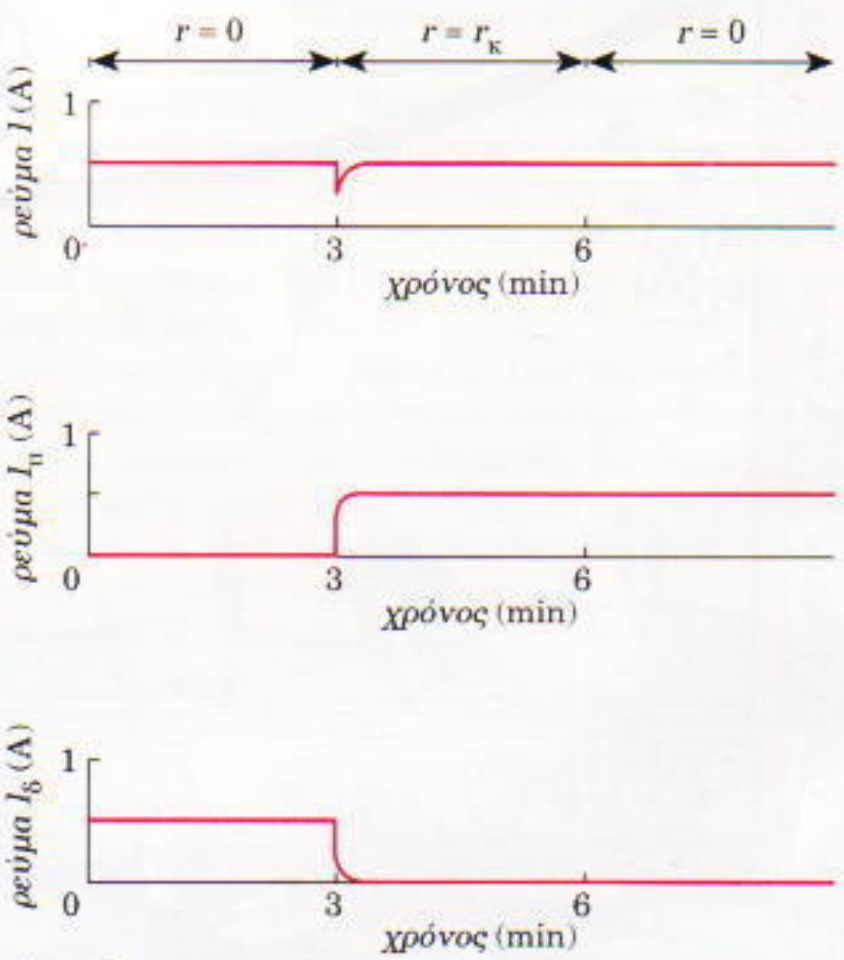
$$τ = \frac{L}{R_{ολ}} = \frac{10\ \text{H}}{2{,}5\ Ω} = 4\ \text{sec}.$$

Όταν τα ρεύματα αποκτήσουν τη σταθερή τιμή τους, ο υπεραγώγιμος διακόπτης δεν θα διαρρέεται από ρεύμα. Διαφορετικά, θα υπήρχε τάση στα άκρα του πηνίου, που θα σήμαινε ότι το ρεύμα που το διαρρέει κάθε άλλο παρά σταθερή τιμή έχει. Επομένως, το ρεύμα της γεννήτριας αποκτά την αρχική τιμή του και διέρχεται όλο μέσα από το πηνίο.

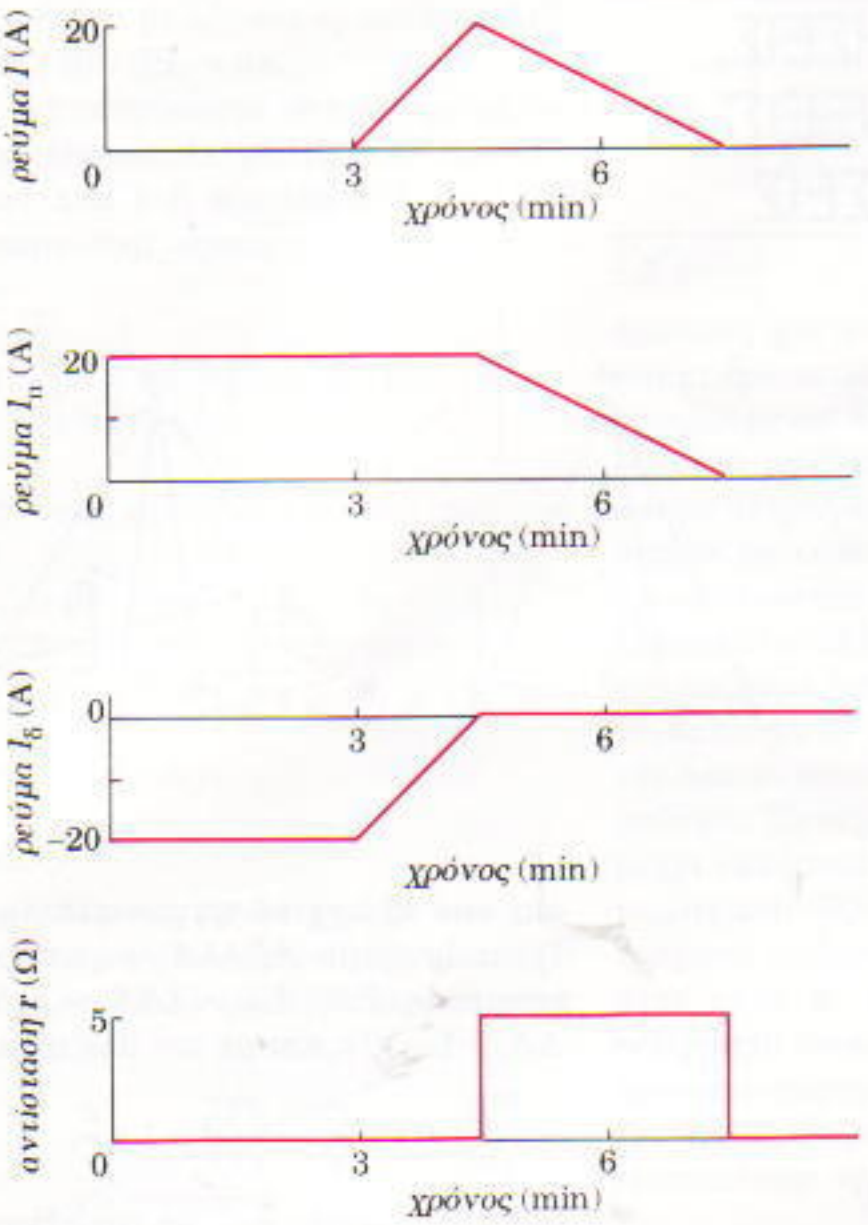
Όπως στην περίπτωση Β, τη στιγμή $t = 6$ min ο υπεραγώγιμος διακόπτης δεν διαρρέεται από ρεύμα και, επομένως, τα ρεύματα δεν μεταβάλλονται όταν ο διακόπτης επιστρέφει



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

στην υπεραγώγιμη κατάσταση ($r = 0$).

Δ. Ας θυμηθούμε ότι από $t = 0$ έως $t = 3$ min ισχύει $r = 0$, $I = 0$, $I_\pi = I_0 = 20$ A, $I_\delta = -I_0 = -20$ A, και, όπως σημειώναμε στη διευκρίνιση του προηγούμενου τεύχους, το ρεύμα που διαρρέει τον υπεραγώγιμο διακόπτη στην κανονική κατάσταση δεν πρέπει να υπερβεί την τιμή 0,5 A, διότι ο τελευταίος θα καταστραφεί.

Ως πρώτο βήμα κλείνουμε το διακόπτη K, οπότε το ολικό ρεύμα αυξάνει έως την τιμή 20 A. Εφόσον $r = 0$, το I_π δεν μπορεί να μεταβληθεί και το I_δ πρέπει να αυξηθεί κατά 20 A· με άλλα λόγια, το I_δ μεταβάλλει την τιμή του από τα −20 A στο μηδέν.

Δεδομένου ότι τώρα ο υπεραγώγιμος μαγνήτης δεν διαρρέεται από ρεύμα, μπορούμε, ως δεύτερο βήμα, να τον επαναφέρουμε στην κανονική του κατάσταση ($r = r_\kappa$). Έτσι μειώνουμε σταδιακά το ολικό ρεύμα I στο μηδέν ενώ διατηρούμε το $I_\delta < 0{,}5$ A —οπότε και $V_\delta < (0{,}5\ \text{A})(5\ \Omega) = 2{,}5$ A. Για το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο πρέπει να ισχύει

$$-\frac{\Delta I_\pi}{\Delta t} = \frac{V_\delta}{L} < \frac{2{,}5\ \text{V}}{10\ \text{H}} = 0{,}25\ \text{A/sec}.$$

Ως εκ τούτου, το εν λόγω ρεύμα θα μηδενιστεί το συντομότερο σε 80 sec. Στο Σχήμα 4 φαίνεται ότι ικανοποιείται η προηγούμενη συνθήκη, με $\Delta I/\Delta t \cong 0{,}1$ A/sec.

Ως τελευταίο βήμα, επαναφέρουμε τον υπεραγώγιμο διακόπτη στην υπεραγώγιμη κατάσταση και ανοίγουμε το διακόπτη K. ■

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 62*

αλχημιστές θεωρούσαν ότι υπάρχει άμεση σχέση ανάμεσα σε μέταλλα και σε ουράνια σώματα (λ.χ. του χρυσού με τον Ήλιο). Συνεπώς, υποστήριζαν ότι η παρατήρηση του Ουρανού μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη επιλογή εποχών για την επεξεργασία των μετάλλων.

Ο Kieckhefer αφιερώνει τα δύο τελευταία κεφάλαια του βιβλίου του στη μελέτη της νεκρομαντείας κατά τον όψιμο Μεσαίωνα. Μελετά την απαρχή του φαινομένου, τα της συνταγής που χρησιμοποιούνταν και τις τελετές που γίνονταν, καθώς και το πλέγμα των εκκλησιαστικών διώξεων που το συνόδευε. Αυτά τα κεφάλαια αποσαφηνίζουν ικανοποιητικά το φαινόμενο της μαγείας και οδηγούν το βιβλίο στη θεματική ολοκλήρωσή του. Αποκαλύπτουν επίσης εναργώς τη διολίσθηση της μεσαιωνικής κοινωνίας προς ολοκληρωτικές κατευθύνσεις, καθώς σιγά σιγά η Ιερά Εξέταση ανελάμβανε την εξουδετέρωση των «μάγων» και κυρίως των «μαγισσών», με την ανοχή των λαϊκών στρωμάτων, και αργότερα με συνοπτικές διαδικασίες. Έτσι, ο Kieckhefer αναδεικνύει και τον υφέρποντα μισογυνισμό που υπάρχει στο κυνήγι των μαγισσών κατά το Μεσαίωνα.

Στο τέλος αυτής της περιόδου είναι έκδηλη η αγωνιώδης προσπάθεια των θιασωτών των απόκρυφων επιστημών να διαχωρίσουν τη θέση τους από τους νεκρομάντες και τους υπόλοιπους υπόπτους για δαιμονολατρεία.

Συνοπτικά, ο Kieckhefer με το βιβλίο του κατορθώνει να δώσει ένα σαφές στίγμα του φαινομένου, να φωτίσει πολλές πλευρές του και να αφήσει τον αναγνώστη με αρκετά ερωτήματα που αναζητούν περαιτέρω μελέτη. Οι επιμέρους αδυναμίες —είτε μεταφραστικές (λ.χ. ο Γαληνός δεν είναι φυσικός! [σελ. 46] ενώ τα ουράνια σώματα δεν «περιστρέφονται» αλλά περιφέρονται στον ουρανό [σελ. 48]) είτε ολισθήματα του Kieckhefer (λ.χ. αναφέρει τον Πτολεμαίο ως «αιγύπτιο αστρονόμο»! [σελ. 48])— δεν αναιρούν τη θετική εικόνα της ελληνικής έκδοσης του βιβλίου. ■

QUANTUM

Ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής
και χαρίστε το *Quantum* στον εαυτό σας,
στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας,
στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα.

Μπορείτε να πληρώσετε και
με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa).
Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη·
η τιμή της συνδρομής χαμηλή.

Περιοδικό *Quantum*, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα.
Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

Μ36

Η πράξη μας μετατρέπει έναν αριθμό $x = 10a + b$ $(0 \le b < 10)$ στον $y = a + 4b$. Αφού λοιπόν $x = 10y - 39b$, οι αριθμοί x και y είτε θα διαιρούνται και οι δύο με το 13 είτε όχι (επειδή $39 = 3 \cdot 13$). Επομένως, αν η συγκεκριμένη ακολουθία περιέχει το $1.001 = 13 \cdot 77$, όλοι της οι όροι διαιρούνται με το 13. Ο μοναδικός πρώτος που διαιρείται με το 13 είναι το 13. Διαπιστώνουμε όμως αμέσως ότι το 13 είναι ένα σταθερό σημείο της πράξης μας ($1 + 4 \cdot 3 = 13$), και επομένως δεν μπορεί να προηγείται του 1.001. Από την άλλη πλευρά, είναι εύκολο να βρούμε όλους τους «απογόνους» του 1.001. Είναι οι $1.001 \to 104 \to 26 \to 26 \to \ldots$, οπότε διαπιστώνουμε ότι το 13 δεν βρίσκεται ανάμεσά τους.

Μ37

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, με $a_n > 0$ και $n \ge 2$. Θέτουμε $Q(x) = P(x) + x$. Τότε, για κάθε ακέραιο k μεταξύ του 1 και του n, $(Q(x))^k = (P(x) + x)^k = B_k(x)P(x) + x^k$, όπου $B_k(x)$ είναι ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο (μπορούμε να το γράψουμε αναλυτικά χρησιμοποιώντας τον τύπο του διωνύμου, αλλά δεν θα το χρειαστούμε καθόλου).

Έτσι,

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= (a_n B_n(x)P(x) + a_n x^n) + \\ &\quad (a_{n-1}B_{n-1}(x)P(x) + a_{n-1}x^{n-1}) \\ &\quad + \ldots + a_0 \\ &= R(x) \cdot P(x) + \\ &\quad (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) \\ &= (R(x) + 1)P(x), \end{aligned}$$

όπου το $R(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τουλάχιστον δευτέρου βαθμού, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Μ38

(α) Η απάντηση είναι $2/(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})$, ή, πιο συμμετρικά,

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

όπου r είναι το άγνωστο μήκος. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο που μπορούμε να την εφαρμόσουμε και στην τρισδιάστατη περίπτωση.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι *αν τρία ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές A, B και C ενός τριγώνου με τα σημεία A_1, B_1 και C_1 των απέναντι πλευρών τέμνονται στο σημείο P (Σχήμα 1α), ισχύει*

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} = 1. \qquad (1)$$

Έστω PP' και AA' τα ύψη των τριγώνων PBC και ABC, αντίστοιχα. Από τα όμοια τρίγωνα, A_1PP' και A_1AA', βλέπουμε ότι PA_1/AA_1 ισούται με PP'/AA'. Ο τελευταίος λόγος ισούται με το λόγο του εμβαδού του PBC προς το εμβαδόν του ABC (αφού τα τρίγωνα αυτά έχουν κοινή βάση).

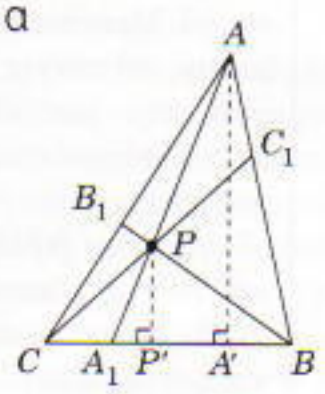
Για παρόμοιους λόγους, και χρησιμοποιώντας σύμβολα απολύτων τιμών για να δηλώσουμε τα εμβαδά, μπορούμε να γράψουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1) ως

$$\frac{|PBC|}{|ABC|} + \frac{|APC|}{|ABC|} + \frac{|ABP|}{|ABC|} = \frac{|ABC|}{|ABC|} = 1,$$

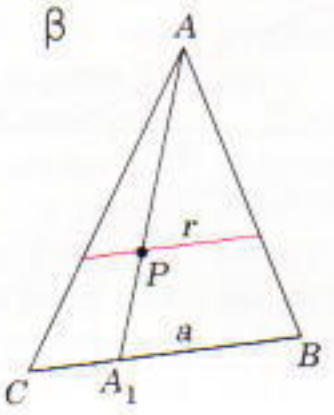
ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη.

Αν τώρα P είναι το σημείο του προβλήματός μας, από την ομοιότητα των τριγώνων που ορίζονται από τις ευθείες που διέρχονται από το P

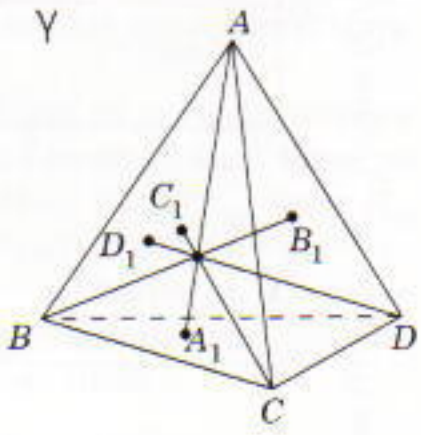
α



β



γ



Σχήμα 1

και από το αρχικό τρίγωνο (Σχήμα 1β) παίρνουμε $AP/AA_1 = r/a$, και επομένως $PA_1/AA_1 = (AA_1 - AP)/AA_1 = 1 - r/a$, και με τον ίδιο τρόπο

$$\frac{PB_1}{BB_1} = 1 - \frac{r}{b}, \quad \frac{PC_1}{CC_1} = 1 - \frac{r}{c}.$$

Οι σχέσεις αυτές μαζί με την εξίσωση (1) μας δίνουν την εξίσωση

$$3 - r\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$$

και τη σχέση για το r που δόθηκε προηγουμένως.

(β) Η λύση για την τρισδιάστατη περίπτωση είναι επανάληψη της προηγούμενης χωρίς καμία σχεδόν αλλαγή. Τέσσερα τμήματα σε ένα τετράεδρο που τέμνονται σε ένα σημείο P (Σχήμα 1γ) ικανοποιούν πάντοτε την

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PD_1}{DD_1} = 1. \quad (2)$$

Η μοναδική διαφορά στην απόδειξη είναι ότι πρέπει να αντικαταστήσουμε τα εμβαδά των τριγώνων με όγκους τετραέδρων (PA_1/AA_1 = όγκ.$(PBCD)$/όγκ.$(ABCD)$, κ.ο.κ.).

Τώρα, αν x είναι το άγνωστο εμβαδόν και A είναι η κορυφή που βρίσκεται απέναντι από την έδρα με εμβαδόν a, τότε $x/a = (AP/AA_1)^2$, διότι ο λόγος των εμβαδών όμοιων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, και διότι τα επίπεδα που θεωρούμε στο πρόβλημα ορίζουν στο αρχικό τετράεδρο όμοια

τετράεδρα με λόγους ομοιότητας AP/AA_1, BP/BB_1, κ.ο.κ.

Αν εκφράσουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2) συναρτήσει των λόγων x/a, x/b, x/c, και x/d, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$4-\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=1$$

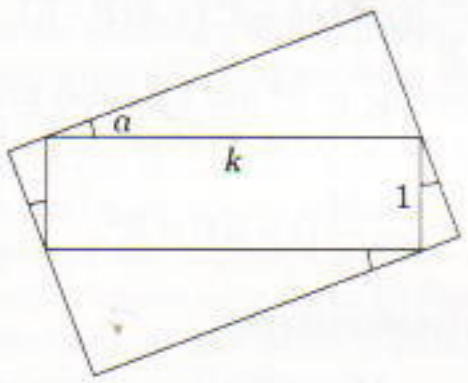
απ' όπου προκύπτει η απάντηση

$$x=\left(\frac{3}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

(V. Dubrovsky)

M39

Έστω a η γωνία μεταξύ των μεγαλύτερων πλευρών των A και B (Σχήμα 2). Εύκολα διαπιστώνουμε



Σχήμα 2

ότι $a \le \pi/4$. Έστω ότι οι πλευρές του ορθογωνίου B ισούνται με k και 1 (όπου $k > 1$), οπότε η εκκεντρότητα του B ισούται με k. Τότε οι πλευρές του A είναι ίσες με $k\,\text{συν}a + \text{ημ}a$ και $\text{συν}a + k\,\text{ημ}a$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη είναι μεγαλύτερη ή ίση με τη δεύτερη αφού $a \le \pi/4$, και επομένως $\text{συν}a \ge \text{ημ}a$.

Όμως $k^2\,\text{ημ}a \ge \text{ημ}a$ (αφού $k > 1$), οπότε

$$\frac{k\,\text{συν}a+\text{ημ}a}{\text{συν}a+k\,\text{ημ}a}\le k,$$

που σημαίνει ότι η εκκεντρότητα του A είναι μικρότερη ή ίση της εκκεντρότητας του B.

M40

Ας υποθέσουμε ότι K, A και M είναι, αντίστοιχα, το πλήθος των κόκκινων, των άσπρων και των μπλε τετραγώνων. Θα αποδείξουμε την

Σχήμα 3

πρόταση για το K, το πλήθος των κόκκινων τετραγώνων. Πρώτα παρατηρούμε ότι $K \le 3A$. Για να το αποδείξουμε αυτό παίρνουμε ένα τυχαίο άσπρο τετράγωνο και βάζουμε ένα σημάδι σε κάθε κόκκινο τετράγωνο που συνορεύει με αυτό. Παίρνουμε έπειτα ένα άλλο άσπρο τετράγωνο και βάζουμε σημάδι σε κάθε κόκκινο τετράγωνο που συνορεύει μαζί του και το οποίο δεν έχουμε ήδη σημαδέψει. Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να εξαντλήσουμε όλα τα άσπρα τετράγωνα. Εφόσον κάθε άσπρο τετράγωνο συνορεύει με ένα τουλάχιστον μπλε, σε κάθε βήμα της προηγούμενης διαδικασίας σημαδεύαμε το πολύ τρία κόκκινα τετράγωνα. Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$K \le 3A. \qquad (1)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $A \le 3M$ και $M \le 3K$.

Παίρνουμε τώρα ένα τυχαίο κόκκινο τετράγωνο x_1 και κατασκευάζουμε μια αλυσίδα τριών τετραγώνων, η οποία αποτελείται από ένα άσπρο τετράγωνο x_2 που συνορεύει με το τετράγωνο x_1 και από ένα μπλε τετράγωνο x_3 που συνορεύει με το τετράγωνο x_2. Όποτε έχουμε τη δυνατότητα, κατασκευάζουμε μια «γωνιακή αλυσίδα» (δείτε το Σχήμα 3). Παρατηρήστε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια «γωνιακή αλυσίδα» όποτε κάποιο από τα σημειωμένα με αστερίσκο τετράγωνα του Σχήματος 3 είναι μπλε.

Σε κάθε «ίσια αλυσίδα», βάζουμε σημάδι στο άσπρο τετράγωνο, και σε κάθε «γωνιακή αλυσίδα», βάζουμε σημάδι στο μπλε τετράγωνο. Για κάθε κόκκινο τετράγωνο κατασκευάζουμε μια αλυσίδα και σημαδεύουμε ένα τετράγωνο (οι αλυσίδες μπορεί να αλληλεπικαλύπτονται).

Τώρα, το πλήθος των σημαδεμένων άσπρων τετραγώνων ισούται με το πλήθος των ίσιων αλυσίδων. Επίσης, κάθε μπλε τετράγωνο που δεν ανήκει σε ίσια αλυσίδα δεν το σημαδεύουμε παραπάνω από τέσσερις φορές (δεν είναι δυνατόν να ανήκει σε περισσότερες από τέσσερις γωνιακές αλυσίδες). Έπεται ότι

$$K \le A + 4M. \qquad (2)$$

Παρομοίως, $A \le M + 4K$ και $M \le K + 4A$. Προσθέτοντας τις ανισότητες (1) και (2) βρίσκουμε ότι $2K \le 4(A + M)$ και τελικά, $n^2 = K + A + M \le 11K$, πράγμα που αποδεικνύει το μέρος (β).

Αφήνουμε για τον αναγνώστη την απόδειξη ότι αυτά τα φράγματα του K είναι τα καλύτερα δυνατά —δηλαδή ότι δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το 2/3 με μικρότερο αριθμό ή το 1/11 με μεγαλύτερο.

Φυσική

Φ 36

Είναι φανερό ότι το έργο που παράγει το βάρος του σώματος κατά τη διάρκεια της κίνησης καταναλώνεται από τις δυνάμεις που αντιστέκονται στην κίνηση, δηλαδή από τις ανώσεις των υγρών. Έτσι,

$$\rho Vg(h_1 + h_2) = \rho_1 gVh_1 + \rho_2 gVh_2,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του σώματος και V ο όγκος του, και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Από αυτή τη σχέση προκύπτει εύκολα

$$\rho=\frac{\rho_1 h_1+\rho_2 h_2}{h_1+h_2}.$$

Ωστόσο, μπορείτε να λύσετε το πρόβλημα με πολυπλοκότερο τρόπο: χρησιμοποιώντας εξισώσεις κινηματικής. Προσπαθήστε το, είναι εύκολο.

Φ37

Η επιφάνεια του ωκεανού είναι παντού κάθετη στη δύναμη της βαρύτητας, η οποία κατευθύνεται ακτινικά προς το κέντρο της Γης. Η ύπαρξη της κοιλότητας κάτω από τον πυθμένα του ωκεανού προκαλεί καμπύλωση στην επιφάνεια του νερού, καθώς η συνολική βαρυτική δύναμη που δρα στο νερό, τόσο λόγω της κοιλότητας όσο και λόγω της υπόλοιπης μάζας της Γης, δεν έχει —γενικά μιλώντας— διεύθυνση κατά την ακτίνα του πλανήτη.

Στη συλλογιστική που αναπτύσσουμε στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την αναλογία μεταξύ του ηλε-

κτροστατικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου Q και του βαρυτικού πεδίου μιας σημειακής μάζας M. (Θυμηθείτε ότι το βαρυτικό πεδίο μιας σφαίρας μάζας M είναι ισοδύναμο προς εκείνο μιας σημειακής μάζας M τοποθετημένης στο κέντρο της σφαίρας.)

Η δύναμη που ασκεί το φορτίο Q σε ένα δοκιμαστικό φορτίο q και η δύναμη με την οποία έλκει η μάζα M μια δοκιμαστική μάζα m δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$F_\eta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

και

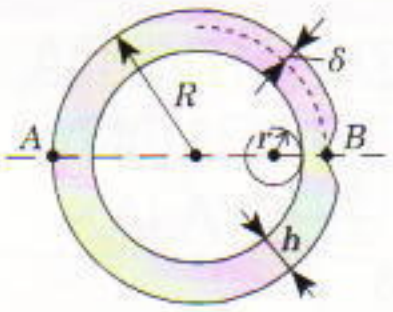
$$F_\beta = G\frac{Mm}{r^2},$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των Q και q (ή M και m). Οι τύποι αυτοί μοιάζουν αρκετά: $F_\eta \sim 1/r^2$ και $F_\beta \sim 1/r^2$, $F_\eta \sim q$ και $F_\beta \sim m$ —δηλαδή η εξάρτηση των δυνάμεων αυτών από την απόσταση είναι η ίδια, όπως επίσης και η εξάρτησή τους από το δοκιμαστικό φορτίο και τη δοκιμαστική μάζα. Μέσω της αναλογίας αυτής, εισάγουμε για το βαρυτικό πεδίο μιας σημειακής μάζας M το δυναμικό V_β: ισούται με το πηλίκον της δυναμικής ενέργειας μιας δοκιμαστικής μάζας m που βρίσκεται μέσα στο βαρυτικό πεδίο της μάζας M, προς τη μάζα m. Η έκφραση για το V_β είναι ανάλογη προς εκείνη για το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου Q, $V_\eta = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q/r)$:

$$V_\beta = -G\frac{M}{r}.$$

Το αρνητικό πρόσημο στον τύπο αυτό αντανακλά τη θεμελιώδη διαφορά μεταξύ των F_η και F_β: τα σώματα έλκονται πάντοτε μέσω των βαρυτικών δυνάμεων. Επειδή η δυναμική ενέργεια θεωρείται μηδενική στο άπειρο (δηλαδή, για πολύ μεγάλα r), λόγω της έλξης μέσα στο βαρυτικό πεδίο είναι παντού αρνητική.

Η δύναμη της βαρύτητας είναι παντού κάθετη στην επιφάνεια του νερού, άρα το έργο που παράγεται από αυτήν όταν ένα ωωματίδιο μετατοπίζεται πάνω στην επιφάνεια του νερού είναι μηδενικό, γεγονός που σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του ωωματιδίου είναι σταθερή σε κάθε



Σχήμα 4

σημείο της επιφάνειας. Επομένως, η επιφάνεια του ωκεανού (η οποία ουσιαστικά είναι η επιφάνεια της Γης) είναι ισοδυναμική επιφάνεια (ανάλογη προς μια ισοδυναμική επιφάνεια σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο).

Ας προσδιορίσουμε το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο σημείο A μακριά από την κοιλότητα (στην εκ διαμέτρου αντίθετη θέση) και στο σημείο B ακριβώς πάνω από την κοιλότητα (Σχήμα 4). Για το σημείο A, η διαταραχή του πεδίου που οφείλεται στην κοιλότητα μπορεί να αγνοηθεί, οπότε το δυναμικό είναι

$$V_A = -G\frac{M}{R},$$

όπου R είναι η ακτίνα της Γης και $M = (4/3)\pi R^3\rho_\pi$ η μάζα της. Για να βρούμε το δυναμικό στο σημείο B, εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας. Το Σχήμα 5 δείχνει την επαλληλία του βαρυτικού πεδίου της Γης και της κοιλότητας. Είναι εμφανές από το σχήμα ότι το δυναμικό στο σημείο B θα βρεθεί από τη σύνθεση του βαρυτικού πεδίου της Γης (χωρίς κοιλότητα) και εκείνου της σφαιρικής μάζας πυκνότητας $\rho_\upsilon - \rho_\pi$, δηλαδή της σημειακής μάζας $\mu = (4/3)\pi r^3(\rho_\upsilon - \rho_\pi)$, όπου r είναι η ακτίνα της κοιλότητας και ρ_υ η πυκνότητα του νερού. Άρα (βλ. Σχήμα 5),

$$V_B = -G\frac{M}{R-\delta} + \left(-G\frac{\mu}{r+h-\delta}\right).$$

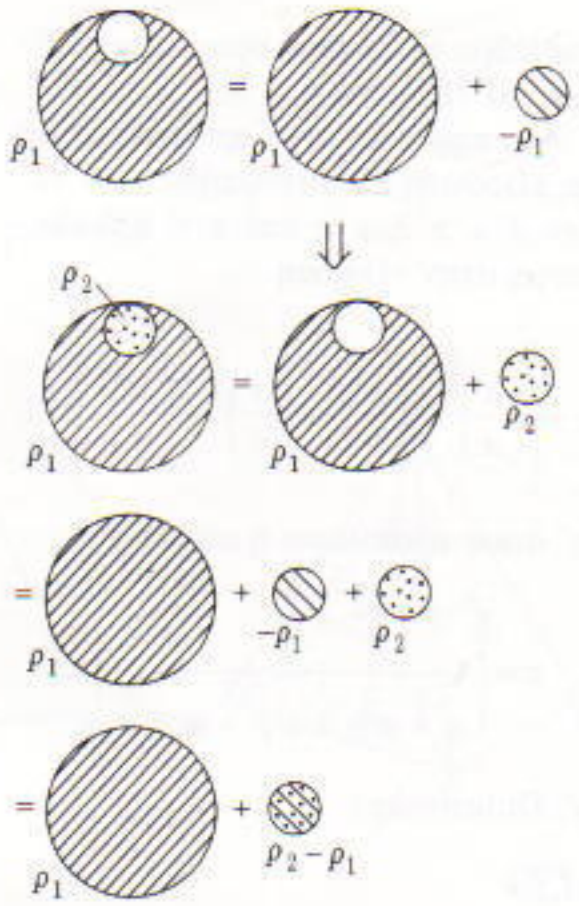
Επειδή η επιφάνεια του ωκεανού είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια, $V_A = V_B$, ή

$$\frac{M}{R} = \frac{M}{R-\delta} + \frac{\mu}{r+h-\delta}.$$

Η αναδιάταξη των όρων αυτής της εξίσωσης μας δίνει

$$-M\frac{\delta}{R(R-\delta)} = \frac{\mu}{r+h-\delta}.$$

Επομένως,



Σχήμα 5

$$-\frac{M}{\mu}\left[(r+h)\delta - \delta^2\right] = R(R-\delta).$$

Αγνοώντας το δ^2 στο αριστερό μέλος και το δ στο δεξιό, έχουμε

$$-\frac{M}{\mu}(r+h)\delta \equiv R^2,$$

ή, αντικαθιστώντας

$$-\frac{M}{\mu} = -\frac{R^3}{r^3}\frac{\rho_\pi}{\rho_\upsilon - \rho_\pi},$$

παίρνουμε

$$\frac{r+h}{r^3}\frac{R\delta\rho_\pi}{\rho_\pi - \rho_\upsilon} \equiv 1.$$

Συνεπώς,

$$\frac{r^3}{r+h} \equiv \frac{\rho_\pi}{\rho_\pi - \rho_\upsilon}R\delta$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 6{,}4\cdot 10^6\cdot 25\ \mathrm{m}^2$$

$$= 240\ \mathrm{km}^2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις αριθμητικές τιμές $R = 6{,}4\cdot 10^6$ m, $\rho_\pi = 3\cdot 10^3$ kgr/m^3, $\rho_\upsilon = 1\cdot 10^3$ kgr/m^3 και $\delta = 25$ m. Δεν πρόκειται να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς r, απλώς θα εκτιμήσουμε την τιμή του. Ενθυμούμενοι από την εκφώνηση του προβλήματος ότι $h = 6$ km, μπορούμε να λάβουμε μια πρώτη εκτίμηση παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα του 240 ≡

15,5 km. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στο αριστερό μέλος, λαμβάνουμε μια τιμή μικρότερη των 240 km^2. Επομένως, δοκιμάζουμε μεγαλύτερες τιμές ώσπου βρίσκουμε ότι το r είναι περίπου ίσο με 18 km.

Φ38

Όταν θερμαίνουμε ένα αέριο υπό σταθερό όγκο, η θερμότητα που του προσφέρουμε δαπανάται μόνο για την αύξηση της εσωτερικής ενέργειάς του, ενώ όταν το θερμαίνουμε υπό σταθερά πίεση, ένα μέρος της δαπανάται για την παραγωγή έργου από το αέριο. Ας γράψουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας και για τις δύο περιπτώσεις:

$$mc_v\Delta T = \Delta U, \qquad (1)$$

$$mc_p\Delta T = \Delta U + \Delta W, \qquad (2)$$

όπου c_p είναι η ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερή πίεση (δηλαδή, η ποσότητα ενέργειας που απαιτείται ώστε να ανέλθει η θερμοκρασία 1 kgr αερίου κατά 1°C, υπό σταθερή πίεση), c_v η ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο, ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας, ΔU η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου, και $\Delta W = P\Delta V$ το παραγόμενο έργο κατά τη διαστολή του αερίου (ΔV είναι η μεταβολή του όγκου και P η πίεση).

Επειδή ορισμένη αύξηση της θερμοκρασίας αερίου, είτε υπό σταθερά πίεση είτε υπό σταθερό όγκο, αντιστοιχεί στην ίδια αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του αερίου, μπορούμε να γράψουμε

$$c_p m\Delta T = c_v m\Delta T + P\Delta V.$$

Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ($PV = nRT$), μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα έργου που παρήχθη από το αέριο συναρτήσει της γραμμομοριακής μάζας του μ και της παγκόσμιας σταθεράς των αερίων R:

$$P\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο αυτό στην εξίσωση (1), παίρνουμε $c_p = c_v + R/\mu$, απ' όπου προκύπτει

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_v} \cong 32{,}7 \text{ kgr / kmole}.$$

Από το αποτέλεσμα αυτό συνάγουμε ότι το άγνωστο αέριο είναι οξυγόνο με μικρή πρόσμειξη ενός βαρύτερου αερίου.

Φ 39

Ο δακτύλιος δέχεται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο που τον επιβραδύνει. Ο απευθείας υπολογισμός της δεν αποτελεί εύκολο στόχο, ωστόσο μέσω ενεργειακών σχέσεων μπορούμε να προχωρήσουμε με κομψό τρόπο. Καθώς ο δακτύλιος κινείται μεταξύ των πόλων του μαγνήτη, πάνω του αναπτύσσεται ένα ποσόν θερμότητας (εξαιτίας του ρεύματος επαγωγής), ακριβώς ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του. Τούτο οφείλεται στο ότι η ενέργεια αλληλεπίδρασης του δακτυλίου με το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική τόσο πριν από την είσοδο του δακτυλίου στο πεδίο όσο και μετά την έξοδό του από αυτό. Οι υπολογισμοί μας απλουστεύονται ιδιαίτερα εάν η μεταβολή της ταχύτητας είναι μικρή. Θα δεχτούμε αυτή την υπόθεση, και θα δούμε παρακάτω κατά πόσο δικαιολογείται ή όχι. Θα δεχτούμε μία επιπλέον υπόθεση: ο δακτύλιος είναι μικρός σε σύγκριση με την έκταση του μαγνητικού πεδίου, οπότε αγνοούμε τα φαινόμενα που διαδραματίζονται κατά την είσοδο ή την έξοδο του δακτυλίου στο πεδίο.

Έτσι, το ρεύμα που επάγεται στο δακτύλιο είναι

$$I = \frac{\Delta\Phi/\Delta t}{R} = \frac{B_0 S v_0 / a}{R} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο δακτύλιος να διασχίσει το μαγνητικό πεδίο είναι

$$t = \frac{2a}{v_0}.$$

Η θερμότητα που αναπτύσσεται στο δακτύλιο ισούται με

$$Q = I^2 Rt = \frac{2B_0^2 S^2 v_0}{aR}.$$

Η μεταβολή της ταχύτητας μπορεί, λοιπόν, να βρεθεί από την εξίσωση

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{m(v_0 - \Delta v)^2}{2} \cong mv_0\Delta v = Q,$$

απ' όπου λαμβάνουμε

$$\Delta v = \frac{2B_0^2 S^2}{maR} = \frac{B_0^2\delta^2}{8d\rho a} =$$

$$= 0{,}25 \text{ m/sec} << v_0.$$

Φ 40

Ως προς σύστημα αναφοράς το κέντρο μάζας του πυρήνα που κινείται με ταχύτητα v ως προς τη Γη, τα θραύσματα εκτοξεύονται σε αντίθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις και με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες. Η κινητική ενέργεια των θραυσμάτων αυτών ισούται με τη διαφορά μεταξύ της εσωτερικής ενέργειας του πυρήνα και των εσωτερικών ενεργειών των θραυσμάτων. Εάν το μέτρο της ταχύτητας κάθε θραύσματος είναι v_1, τότε

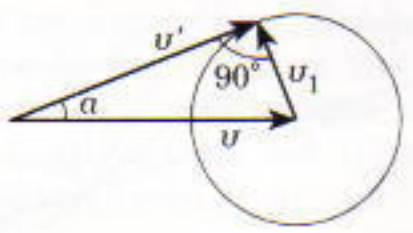
$$2\frac{mv_1^2}{2} = E_1 - 2E_2,$$

απ' όπου λαμβάνουμε την ταχύτητα κάθε θραύσματος:

$$v_1 = \sqrt{\frac{E_1 - 2E_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(E_1 - 2E_2)}{M}}.$$

Η ταχύτητα ενός θραύσματος ως προς σύστημα αναφοράς το εργαστήριο (που βρίσκεται συνδεδεμένο με τη Γη) ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{v}_1$. Η ταχύτητα $\mathbf{v}_1$ του θραύσματος ως προς το σύστημα αναφοράς του πυρήνα μπορεί να έχει οποιαδήποτε κατεύθυνση. Ωστόσο, το διάνυσμα $\mathbf{v}'$ της ταχύτητας του θραύσματος ως προς το σύστημα του εργαστηρίου σχηματίζει τη μέγιστη γωνία με το διάνυσμα $\mathbf{v}$ όταν το διάνυσμα $\mathbf{v}_1$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{v}'$ (Σχήμα 6). Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα $\mathbf{v}'$ της ταχύτητας του θραύσματος σχηματίζει γωνία a με το διάνυσμα $\mathbf{v}$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$\eta\mu a = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{2(E_1 - 2E_2)}{Mv^2}}.$$



Σχήμα 6

Σπαζοκεφαλιές

Σ36

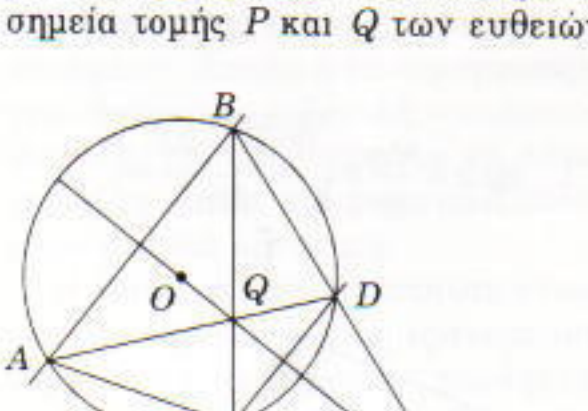
Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τον συνηθισμένο τρόπο, αν χρησιμοποιήσουμε εξισώσεις κινηματικής. Εδώ παρουσιάζουμε μια κομψότερη λύση.

Έστω C ένα σημείο προς την αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη της φοράς του ρεύματος, που απέχει από το A όσο το B ($CA = BA$). Φανταστείτε μια τρίτη βενζινάκατο που κινείται παράλληλα με την πρώτη: ξεκινά από το C με την ίδια ταχύτητα, προς την ίδια κατεύθυνση, και την ίδια στιγμή με την πρώτη βενζινάκατο. Εφόσον η τρίτη βενζινάκατος και η δεύτερη κινούνται με την ίδια σχετική ταχύτητα ως προς τη σχεδία (δηλαδή, ως προς το ρεύμα του νερού) και πλησιάζουν και οι δύο τη σχεδία, και εφόσον απέχουν αρχικά το ίδιο από τη σχεδία, θα απέχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απόσταση από τη σχεδία. Μόλις, λοιπόν, η πρώτη βενζινάκατος φτάνει στο B, η τρίτη θα έχει καλύψει ίση απόσταση και θα φτάνει στο A. Επομένως εκείνη τη στιγμή η σχεδία θα απέχει *εξίσου* από τη δεύτερη βενζινάκατο και από το σημείο A (δηλαδή, από τη φανταστική τρίτη βενζινάκατο).

(V. Dubrovsky)

Σ37

Χρησιμοποιούμε το χάρακα για να σχεδιάσουμε δύο παράλληλες χορδές AB και CD (Σχήμα 7). Βρίσκουμε τα σημεία τομής P και Q των ευθειών AC και BD και των ευθειών AD και BC, αντίστοιχα. Η PQ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Πραγματικά, η συμμετρία ως προς τη διάμετρο που είναι κάθετη στις AB και CD εναλλάσσει τα σημεία A και B και τα σημεία C και D, και επομένως και τις ευθείες AC και BD. Επομένως, αφήνει άθικτο το κοινό σημείο των AC και BD —δηλαδή, το P ανήκει στη διάμετρο (ή στην προέκτασή της). Το ίδιο ισχύει και για το Q, άρα η PQ είναι απλώς προέκταση αυτής της διαμέτρου.

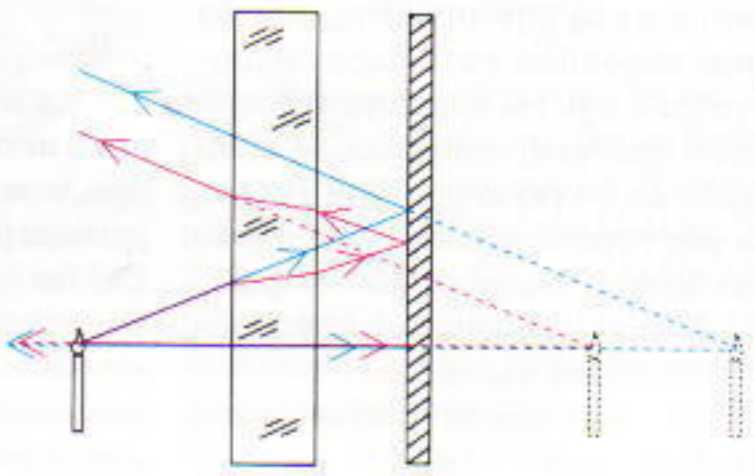


Σχήμα 7

Το άγνωστο κέντρο μπορεί να βρεθεί τώρα ως το σημείο τομής της PQ και οποιασδήποτε άλλης ευθείας που κατασκευάζεται με παρόμοιο τρόπο.

Σ38

Σχεδιάζοντας μερικές ακτίνες μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το είδωλο του κεριού θα μετακινηθεί πλησιέστερα στον καθρέφτη όταν τοποθετήσουμε το φύλλο γυαλιού ανάμεσα στο κερί και τον καθρέφτη (Σχήμα 8). Οι μπλε ακτίνες παρουσιάζουν τη διαδρομή των ακτίνων χωρίς το γυαλί, και οι κόκκινες τη διαδρομή τους με την παρουσία του.



Σχήμα 8

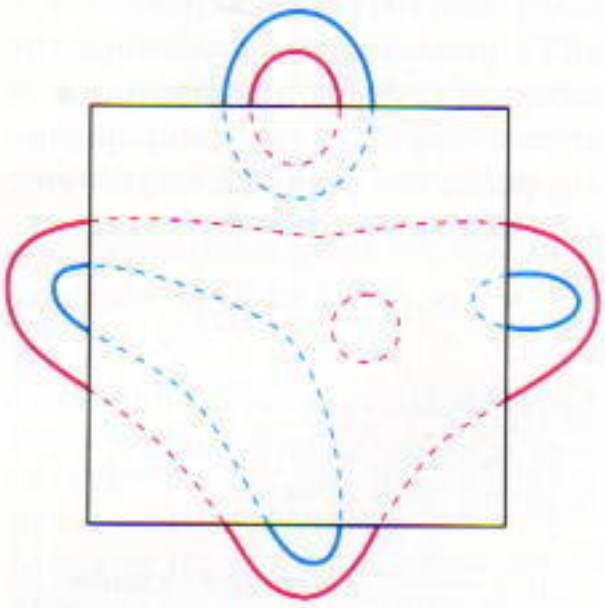
Σ39

Η απάντηση είναι $n = 9$. Εξετάζοντας το πρώτο ψηφίο από τα δεξιά στη δεδομένη εξίσωση, βρίσκουμε ότι το $2 \cdot O$ διαιρείται από το n. Επομένως, είτε $O = 0$ είτε $O = n/2$. Στη δεύτερη περίπτωση, από το τρίτο ψηφίο συμπεραίνουμε ότι $K > n/2$, αλλά από το πέμπτο ψηφίο βλέπουμε ότι $3 \cdot K \le T \le n - 1$, άρα $K < n/3$. Έπεται ότι $O = 0$. Τώρα έχουμε τις εξισώσεις: $3 \cdot T = Kn + Y$ (από τα δεύτερα και τα τρίτα ψηφία), $3 \cdot Y = cn$ (όπου c είναι το κρατούμενο που μεταφέρουμε από το τέταρτο στο πέμπτο ψηφίο), και $3 \cdot K + c = T$ (το πέμπτο ψηφίο). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί 3 και αντικαθιστώντας τα 3Y και 3K από τις δύο άλλες εξισώσεις, παίρνουμε $9T = (T - c)n + cn$, και επομένως $n = 9$. Πρέπει επίσης να ελέγξουμε αν υπάρχει τουλάχιστον μία λύση γι' αυτό το n. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν τέσσερις: KYOTO = 13040, 16050, 23070 ή 26080.

(V. Dubrovsky)

Σ40

Ο καλυμμένος βρόχος είναι κόκκινος. Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε ότι το ανώτερο μπλε τόξο δεν μπορεί να συνδέεται με οποιοδήποτε από τα άλλα τρία μπλε τόξα, διότι διαφορετικά δεν θα μπορούσαμε να κλείσουμε το κόκκινο τόξο που περιβάλλει το μπλε το οποίο συνδέεται με το ανώτερο μπλε. Αν τα τρία μικρότερα μπλε τόξα είναι τμήματα του ίδιου βρόχου, τα κόκκινα τόξα που τα περιβάλλουν αποτελούν επίσης τμήματα του ίδιου βρόχου. Αυτοί, μαζί με τα δύο ανώτερα τόξα μάς δίνουν τέσσερις μερικώς ορατούς βρόχους, ενώ πρέπει να έχουμε πέντε. Άρα, απομένει μία μόνο δυνατότητα: τα δύο από τα μικρότερα μπλε τόξα ανήκουν σ' έναν βρόχο, το τρίτο σε κάποιον άλλο. Επομένως, οι τρεις μπλε βρόχοι έχουν ακάλυπτα τμήματα, οπότε ο καλυμμένος βρόχος είναι κόκκινος. Στο Σχήμα 9 βλέπετε πώς είναι δυνατόν να γίνει αυτό.



Σχήμα 9

Μονόπολα

Αυτή είναι η περίπτωση στην οποία ένας μαγνητικός πόλος κινείται μέσα σε ένα «μαγνητικό πεδίο αντίστροφου τετραγώνου». Είναι το μαγνητικό ιοοδύναμο ενός ηλεκτρονίου που κινείται μέσα στο ηλεκιρικό πεδίο ενός πρωτονίου, ή μίας μάζας που κινείται στο βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί μία άλλη μάζα. Οι συνθήκες είναι κατάλληλες για να τεθεί το δοκιμαστικό μονόπολο σε τροχιά γύρω από το ακίνητο. Η ολική ενέργεια του κινούμενου πόλου είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειάς του:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q^* q^*}{r}.$$

Η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό μονόπολο παίζει ρόλο κεντρομόλου:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q^* q^*}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Από αυτές τις δύο εξισώσεις, λαμβάνουμε:

$$E_{ολ} = -\frac{\mu_0}{8\pi}\frac{Q^* q^*}{r}.$$

Η αρχική ενέργεια του κινούμενου πόλου είναι:

$$E_{αρ} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q^* q^*}{r_0}.$$

Μπορούμε να λύσουμε ως προς την ακτίνα της τροχιάς, εξισώνοντας αυτές τις δύο ενέργειες. Έτσι προκύπτει:

$$r = -\frac{\mu_0}{8\pi}\frac{Q^* q^*}{E_{αρ}}.$$

Υπάρχουν όρια σ' αυτό το αποτέλεσμα. Εάν η αρχική ταχύτητα v_0 είναι πολύ υψηλή, τότε η αρχική ενέργεια θα είναι θετική και δεν θα υπάρχει λύση για την ακτίνα της τροχιάς. Το δοκιμαστικό μονόπολο θα αποφύγει το «τράβηγμα» από το «γείτονά» του. Εάν η αρχική ταχύτητα είναι πολύ μικρή, τότε τα δύο μονόπολα μπορεί να συγκρουστούν, εφόσον έχουν πράγματι κάποιο μέγεθος.

Πώς θα καλούσαμε το μικρό μαγνητικό μας άτομο; Επιτρέψτε μου να είμαι υπέρ του ονόματος "Wylium".

Jesse James

1. Από τη συνθήκη $D^2u(x) = u(x-1) - 2u(x) + u(x+1)] = 0$ έπεται ότι

$$u(x) = \frac{u(x-1) + u(x+1)}{2}.$$

2. Αυτός ο κανόνας είναι ίδιος με του Jesse! Το άτομο x δίνει $0{,}1u(x)$ σε κάθε γείτονά του, αλλά λαμβάνει $0{,}1u(x-1)$ από τον έναν γείτονα και $0{,}1u(x+1)$ από τον άλλο, οπότε έχουμε καθαρή μεταβολή $0{,}1[-2u(x) + u(x-1) + u(x+1)]$.

3. Η ποσότητα

$$[u(x-1, y) - 2u(x, y) + u(x+1, y)] + [u(x, y-1) - 2u(x, y) + u(x, y+1)]$$

καθορίζει τώρα αν το άτομο στη θέση (x, y) θα γίνει πλουσιότερο ή φτωχότερο. Στον απειροστικό λογισμό η αντίστοιχη έκφραση είναι η «λαπλασιανή» Δu, που ορίζεται ως $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

4. Το άτομο με τα 130$ που βρίσκεται πιο αριστερά λαμβάνει συνολικά 10$ από τους δύο γείτονες που βρίσκονται κατακόρυφά του και δίνει 10$ στους δύο γείτονες που βρίσκονται οριζόντιά του. [Αφού το άτομο βρίσκεται σε αρμονία με τους γείτονές του, μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή είναι «αρμονική» σ' αυτή τη θέση. Στον απειροστικό λογισμό, οι συναρτήσεις $u(x, y)$ που ικανοποιούν την $\Delta u = 0$, ονομάζονται «αρμονικές συναρτήσεις».]

5. Αν εξισώσουμε με το 0 την παράσταση του προβλήματος 3, προκύπτει η ισότητα του επόμενου πλαισίου.

$$u(x, y) = \frac{u(x-1, y) + u(x+1, y) + u(x, y-1) + u(x, y+1)}{4}$$

Καλειδοσκόπιο

1. Η Γη στρέφεται κατά 15′ το λεπτό γύρω από τον άξονά της.

2. Ο Ήλιος βρίσκεται σε ύψος $\varphi = 45°$.

3. Αυτό συμβαίνει όταν ο παρατηρητής βρίσκεται σε έναν από τους γεωγραφικούς πόλους της Γης ή όταν το εν λόγω άστρο βρίσκεται σε έναν από τους πόλους του ουρανού.

4. Πρακτικά, η ορατή τροχιά της Σελήνης στον ουρανό συμπίπτει με εκείνη του Ήλιου, αλλά η περιφορά της Σελήνης διαρκεί ένα μήνα και όχι ένα έτος. Έτσι, αν ο παρατηρητής βρίσκεται σε έναν από τους πόλους, η Σελήνη θα παραμένει πάνω από τον ορίζοντα για δύο εβδομάδες και κάτω από τον ορίζοντα για άλλες δύο εβδομάδες.

5. Η ορίζουσα της Αφροδίτης είναι ημικύκλιο, το οποίο παρατηρούμενο από τη Γη υπό γωνία φαίνεται ως ημιέλλειψη.

6. Ναι, μπορείτε να το δείτε αν βρίσκεστε σε περιοχές του ισημερινού.

7. Για έναν παρατηρητή που βρίσκεται στη Σελήνη, η Γη ούτε ανατέλλει ούτε δύει.

8. Ναι, θα μπορούσατε. Για παράδειγμα, μελετώντας τη συμπεριφορά ενός εκκρεμούς.

9. Από τον ισημερινό, οι δακτύλιοι μοιάζουν με μια ταινία που διασχίζει τον ουρανό στο ζενίθ. Από τους πόλους, δεν φαίνονται καθόλου.

10. Αν ο αστροναύτης βρίσκεται στην πλευρά της Σελήνης που βλέπει προς τον Ήλιο, θα δει μια ολική έκλειψη Ηλίου. Αν βρίσκεται στην άλλη πλευρά, θα δει μόνο τα φωτεινότερα άστρα μέσα στον μαύρο ουρανό.

11. Το καλοκαίρι (στο βόρειο ημισφαίριο) η απόσταση μεταξύ του Ήλιου και της Γης είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι το χειμώνα· έτσι, το γωνιακό μέγεθος του Ήλιου το καλοκαίρι είναι λίγο μικρότερο απ' ό,τι το χειμώνα. Από την άλλη, η απόσταση μεταξύ της Γης και της Σελήνης κατά μέσο όρο δεν εξαρτάται από την εποχή. Και γι' αυτό ακριβώς η Σελήνη καλύπτει τελείως τον Ήλιο πιο συχνά το καλοκαίρι απ' ό,τι το χειμώνα.

12. Οι αποστάσεις της Γης και της

Σελήνης από τον Ήλιο είναι πρακτικά ίσες. Έτσι, αν η Σελήνη και σ' τοίχος είχαν τον ίδιο συντελεστή ανάκλασης, η φωτεινότητά τους θα ήταν ίδια. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι το έδαφος της Σελήνης αποτελείται όντως από σκουρόχρωμους βράχους.

13. Όχι. Από τη Σελήνη μπορεί κανείς να δει το ηλιακό στέμμα, το οποίο από τη Γη μπορεί να παρατηρηθεί μόνο κατά τη διάρκεια μιας ολικής έκλειψης Ηλίου.

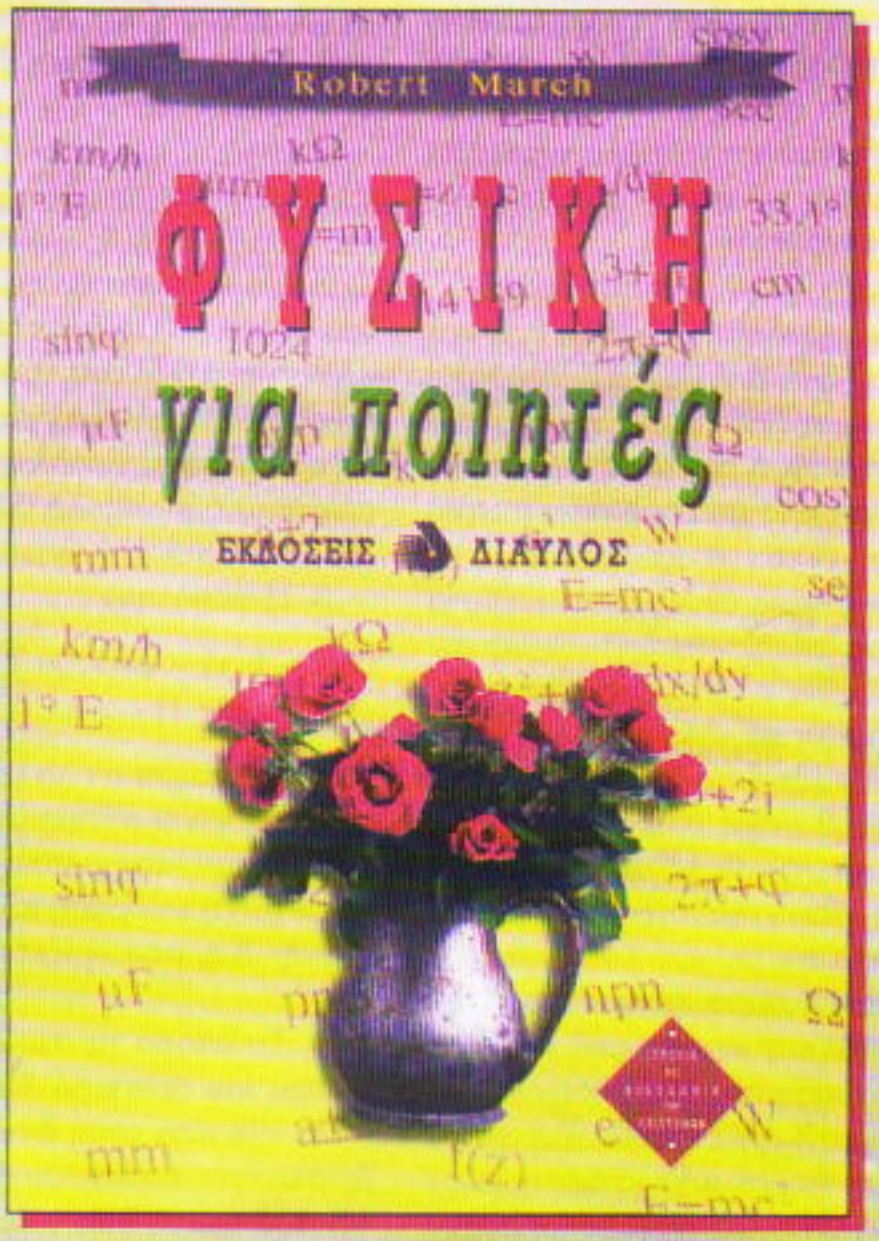
14. Οι φωτεινές ακτίνες εκτρέπονται (διαθλώνται) στην ατμόσφαιρα της Γης· αν λοιπόν η ατμόσφαιρα δεν υπήρχε, η ορατή θέση οποιουδήποτε άστρου θα μετατοπιζόταν λίγο. Για παράδειγμα, θα εξαφανίζονταν τα άστρα που είναι ορατά κοντά στον ορίζοντα.

15. Οι κομήτες συμμετέχουν στην ημερήσια περιστροφή του ουρανού.

16. Οι μετεωρίτες που συναντούν το «πρωινό» ημισφαίριο της Γης εν γένει ταξιδεύουν προς την αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη της περιστροφής της, ενώ εκείνοι που πέφτουν στο «απογευματινό» ημισφαίριο ακολουθούν βασικά την κατεύθυνση της περιστροφής της Γης. Έτσι, οι μετεωρίτες που μπαίνουν στην ατμόσφαιρα τις «μικρές» ώρες έχουν μεγαλύτερη ταχύτητα και φωτεινότητα —καθώς καίγονται— από ό,τι εκείνοι που φτάνουν πριν από τα μεσάνυχτα.

Μικροπειραματισμοί. Για να επαληθεύσετε ότι η διαφορά μεγέθους στον ορίζοντα και στο ζενίθ είναι μόνο φαινομενική, προβάλετε ένα είδωλο του δίσκου (είναι ευκολότερο να το κάνετε με τον Ήλιο) σ' ένα φύλλο χαρτί χρησιμοποιώντας ένα φακό με μεγάλη εστιακή απόσταση (γιατί;). Ο φακός και το χαρτί πρέπει να είναι κάθετα προς τις φωτεινές ακτίνες. Μετρώντας τα είδωλα και στις δύο περιπτώσεις (όταν ο δίσκος βρίσκεται κοντά στον ορίζοντα και όταν βρίσκεται στο ζενίθ), μπορείτε να διαπιστώσετε ότι έχουν την ίδια διάμετρο. ◙

Ύμνος στη Φυσική και τους Φυσικούς



Ο Robert March, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν, αναδεικνύει την ομορφιά και την ποίηση που βρίσκονται κρυμμένες στη Φυσική.

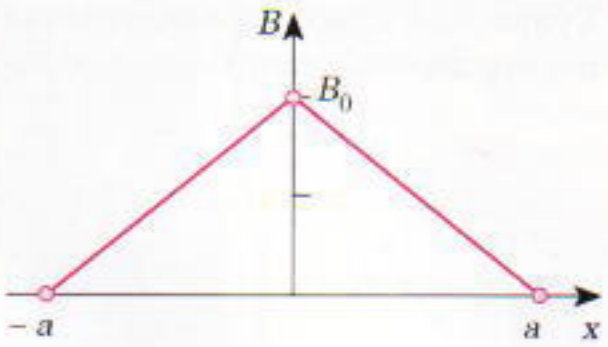
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΔΙΑΥΛΟΣ
ΒΑΛΑΤΣΙΟΥ 10 & ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ, ΑΘΗΝΑ 106 80
ΤΗΛ.: 36.31.160 & 36.17.473 FAX: 36.17.473

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 36*

μοκρασία 1 kgr αυτού του αερίου κατά 1°C υπό σταθερή πίεση, χρειάζεται να του προσφέρουμε θερμότητα 958,4 Joule, ενώ αντιστοίχως υπό σταθερό όγκο μόνο 704,6 Joule. Τι αέριο περιέχει το δοχείο;
(K. Sergeyev)

Φ 39

Δακτύλιος μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Ένας δακτύλιος διαμέτρου $\delta = 6$ mm, κατασκευασμένος από πολύ λεπτό σύρμα ειδικής αντίστασης $\rho = 2 \cdot 10^{-8}$ $\Omega \cdot$ m και πυκνότητας $d = 9 \cdot 10^3$ kgr/m^3, κινείται επί της μεσοκαθέτου ενός ραβδόμορφου μαγνήτη, και αδυναιεί να περιστραφεί. Εκτιμήστε τη μεταβολή της ταχύτητας του δακτυλίου εάν, πριν εισέλθει στο μαγνητικό πεδίο, αυτή ήταν $v_0 = 20$ m/sec. Το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο του δακτυλίου ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας είναι παράλληλο προς το επίπεδο αυτό. Η εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου B από τη συντεταγμένη x (κατά μήκος της οποίας κινείται ο δακτύλιος) φαίνεται στο Σχήμα 2, όπου $B_0 = 1$ T και $a = 10$ cm.
(V. Afanasyev)



Σχήμα 2

Φ 40

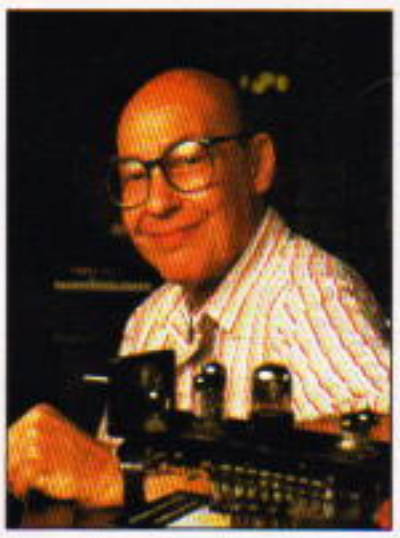
Πυρηνική διάσπαση. Ένας πυρήνας μάζας M κινούμενος με ταχύτητα **u** διασπάται σε δύο ίδια κομμάτια. Αν η εσωτερική ενέργεια του πυρήνα είναι E_1 και η εσωτερική ενέργεια κάθε κομματιού E_2 ($E_1 > 2E_2$), προσδιορίστε τη μέγιστη δυνατή γωνία μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητας ενός από τα κομμάτια και του διανύσματος **u**.
(I. Slobodetsky)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 68

Η ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΝΟΗΣΗΣ

Σελ.: 584,
14 × 21 εκ.,
Α/Μ, 7.500 δρχ.

MARVIN MINSKY



Καθηγητής στο MIT,
Πρόεδρος της Αμερικανικής
Ένωσης Τεχνητής Νοημοσύνης,
Μέλος της Ακαδημίας
Επιστημών των ΗΠΑ

Ο Marvin Minsky, ένας από τους «πατέρες» της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και συνιδρυτής του Εργαστηρίου Τεχνητής Νοημοσύνης στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασσαχουσέττης, δίνει μια επαναστατική απάντηση για το πώς λειτουργεί η νόηση. Τη θεωρεί ως μια «κοινωνία» που αποτελείται από μικρότερα συστατικά τα οποία από μόνα τους είναι α-νόητα. Το βιβλίο του μοιάζει μ' ένα διανοητικό παζλ· κάθε σελίδα του είναι και ένα κομμάτι του παιχνιδιού. Στο τέλος του αναδύεται σαν μωσαϊκό ιδεών μια ενοποιημένη θεωρία της νόησης.

• «Ένα κολάζ διαφορετικών ιδεών που αφήνει άναυδο τον αναγνώστη· το βιβλίο είναι γεμάτο ευφυΐα και εύστοχους αφορισμούς.»
—Douglas Hofstadter, συγγραφέας του βιβλίου *Gödel, Escher, Bach*

• «270 καταπληκτικά, πρωτότυπα κείμενα...» **—Isaac Asimov**

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ***κάτοπτρο***
Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

Με το κεφάλι κάτω

Η μηχανική μιας παράξενης σβούρας

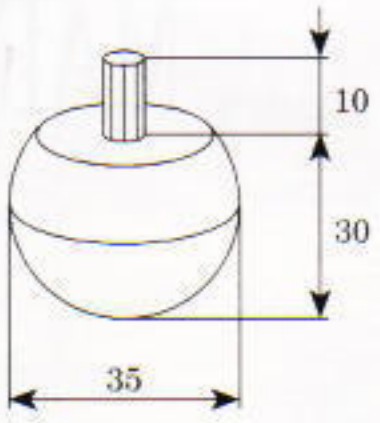
Sergey Krivoshlykov

ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΑΡΚΕΤΟ ΚΑΙΡΟ ΕΦΤΑΣΕ στο γραφείο σύνταξης του Kvant *μια επιστολή. Ένας μαθητής της Α΄ τάξης του Λυκείου Titarevskaya, ο V. Tkachov, έγραφε : «Αγόρασα μια σβούρα από ένα κατάστημα παιχνιδιών. Όταν τη θέτω σε κίνηση, αναποδογυρίζει (σηκώνεται όρθια) και περιστρέφεται στηριζόμενη στη λαβή της. Ποιοι φυσικοί νόμοι διέπουν μια τέτοια κίνηση; Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις της σβούρας ώστε να καταστεί δυνατή αυτή η παράδοξη συμπεριφορά;»*

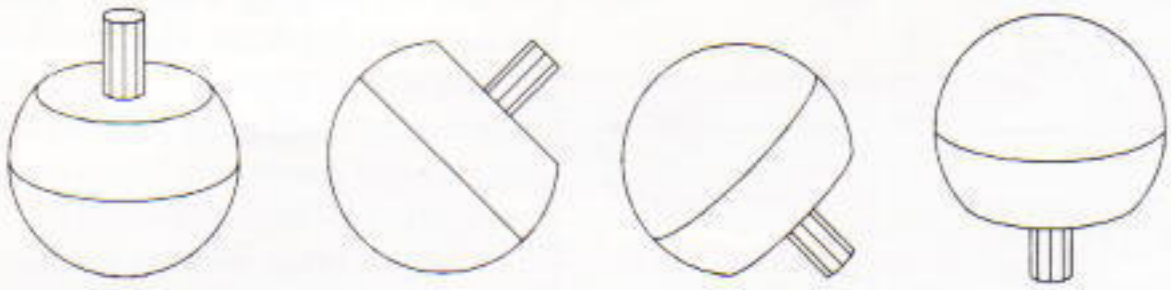
Πιστεύουμε ότι η απάντηση στην επιστολή αυτή θα ενδιαφέρει πολλούς από τους αναγνώστες μας. Το άρθρο που ακολουθεί το έγραψε ο Sergey Krivoshlykov, μαθητής της Α΄ τάξης του Λυκείου No. 45 του Κιέβου, και βασίζεται στη μελέτη που υπέβαλε ο ίδιος προς την Τέταρτη Σπουδαστική Επιστημονική Συνδιάσκεψη, στην πόλη του Κιέβου. Ας το δούμε.

Η σβούρα που περιγράφεται στην επιστολή του Tkachov αναφέρεται συχνά ως ο στρόβος του Thompson. Πρόκειται για μια σφαίρα με αποκομμένο το πάνω μέρος της. Στο κέντρο της επιφάνειας τομής υπάρχει η λαβή, που χρησιμοποιείται για την περιστροφή της σβούρας (βλ. Σχήμα 1, όπου οι διαστάσεις δίνονται σε χιλιοστόμετρα).

Εάν η σβούρα περιστραφεί με το σφαιρικό μέρος προς τα κάτω, αναποδογυρίζει ενώ περιστρέφεται έτσι ώστε η λαβή της να αγγίξει την επιφάνεια του τραπεζιού· κατόπιν στηρίζεται στη λαβή και συνεχίζει να περιστρέφεται αναποδογυρισμένη, κατά έναν ευσταθή τρόπο (Σχήμα 2). Όταν η γωνιακή ταχύτητα ελαττωθεί μέχρι μια συγκεκριμένη τιμή, η σβούρα επανακτά τον αρχικό της προσανατολισμό. Με πρώτη ματιά, μια τέτοια συμπεριφορά φαίνεται παράξενη. Καθώς η σβούρα αναποδογυρίζει και στηρίζεται στη λαβή της, αυξάνει τη δυναμική ενέργειά της. Τι προκαλεί κάτι τέτοιο, δεδομένου ότι είναι ευρέως γνωστό πως κάθε σύστημα έχει την τάση να ελαχιστοποιεί τη δυναμική του ενέργεια;

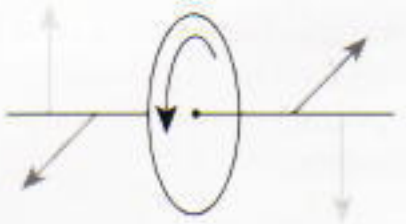


Σχήμα 1



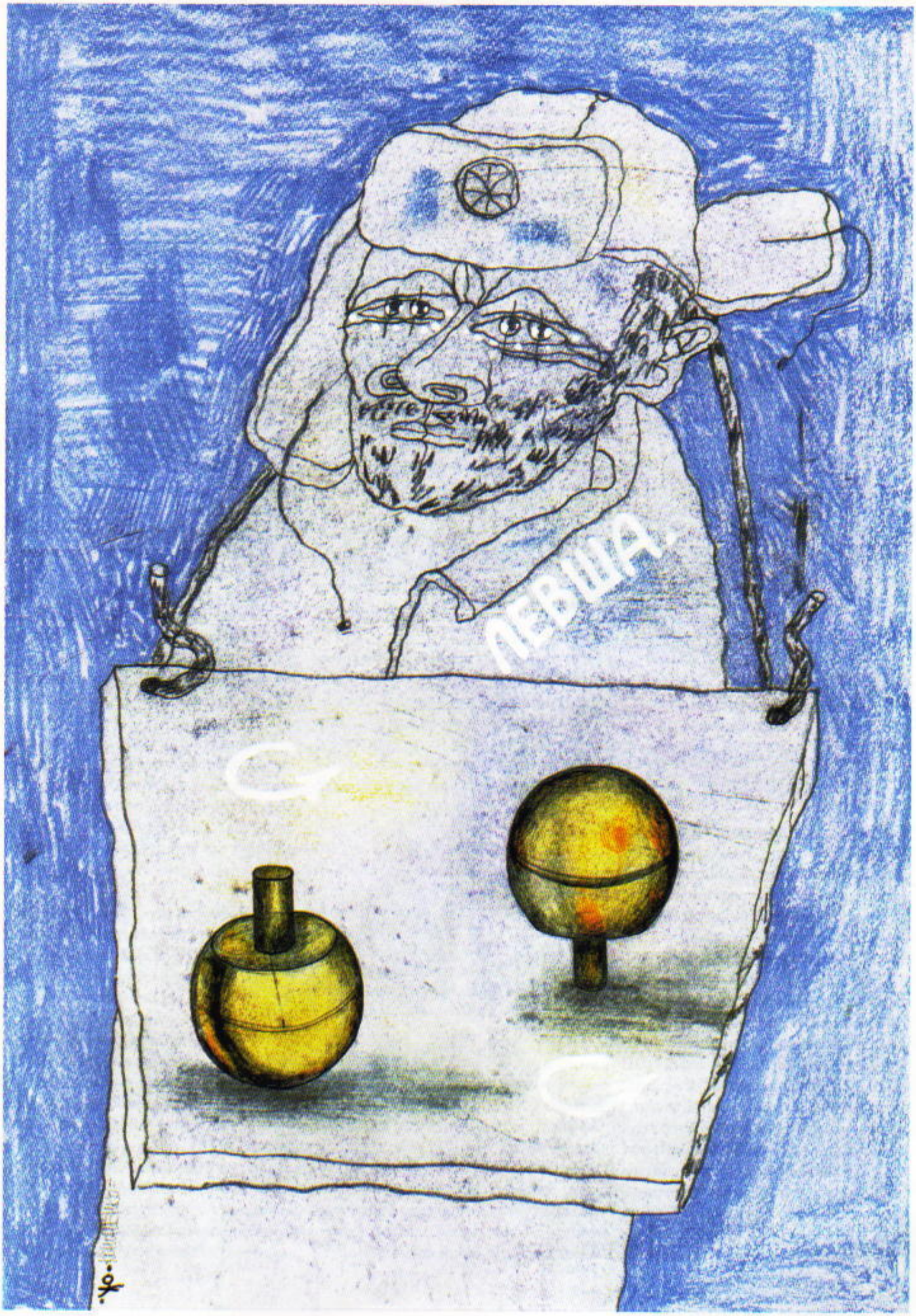
Σχήμα 2

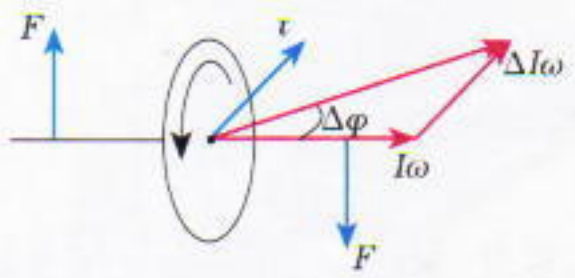
Ας ξεκινήσουμε με την περιστροφή ενός στερεού σώματος γύρω από τον άξονά του. Θεωρήστε έναν μεγάλο τροχό (ας πούμε μια ρόδα ποδηλάτου), που μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από έναν στερεό, οριζόντιο άξονα. Αφού θέσουμε τον τροχό σε κίνηση, ας αρπάξουμε τον άξονα του τροχού και με τα δύο χέρια μας και ας προσπαθήσουμε να τον στρέψουμε στο κατακόρυφο επίπεδο, όπως δείχνουν τα μπλε βέλη στο Σχήμα 3. Αμέσως θα αισθανθούμε μια ισχυρή αντίσταση. Ο περιστρεφόμενος τροχός προσπαθεί να διατηρήσει τόσο το μέτρο όσο και τη διεύθυνση της στροφορμής του, επομένως τη γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής



Σχήμα 3

Εικονογράφηση: Yury Kononenko


MEBIUS



Σχήμα 4

και τη διεύθυνση του άξονά του. Ας ξαναπροσπαθήσουμε, εφαρμόζοντας τώρα μεγαλύτερη δύναμη. Όσο παράξενο και αν φαίνεται, δεν θα πετύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ο άξονας πράγματι στρέφεται —αλλά όχι στο κατακόρυφο επίπεδο, όπως νομίζαμε· στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο, όπως δείχνουν τα κόκκινα βέλη στο Σχήμα 3.

Αυτό φαίνεται παράξενο μόνο σε πρώτη ματιά. Είναι γνωστό ότι καθώς ένα στερεό σώμα περιστρέφεται, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του (ένα διάνυσμα) ισούται με την εξωτερική ροπή που την προκαλεί (ένα άλλο διάνυσμα):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\Delta(I\boldsymbol{\omega})}{\Delta t}.$$

Υπάρχει ένας ανάλογος τύπος για τη μεταφορική κίνηση: ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με την εξωτερική δύναμη που την προκαλεί:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta(m\mathbf{u})}{\Delta t}.$$

Επομένως, η διανυσματική μεταβολή της στροφορμής $\Delta(I\boldsymbol{\omega})$ του τροχού σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι παράλληλη προς τη ροπή $\boldsymbol{\tau}$ (Σχήμα 4) —δηλαδή, βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι το νέο διάνυσμα της στροφορμής βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο. Σημειώστε ότι επειδή το $\boldsymbol{\tau}$ είναι κάθετο προς το $I\boldsymbol{\omega}$, η μεταβολή της στροφορμής $\Delta(I\boldsymbol{\omega})$ είναι κάθετη προς την ίδια τη στροφορμή $I\boldsymbol{\omega}$ [το Σχήμα 4 δείχνει το $\Delta(I\boldsymbol{\omega})$ αρκετά μεγεθυμένο]. Άρα, στην περίπτωσή μας, το μέτρο της στροφορμής ουσιαστικά δεν μεταβάλλεται —μόνο η διεύθυνσή της αλλάζει. Αυτό σημαίνει ότι και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού ουσιαστικά δεν μεταβάλλεται.

Εάν προσπαθήσουμε να στρέψουμε με έναν τροχό, ο οποίος όμως περιστρέφεται κατά αντίθετη φορά απ' ό,τι προηγουμένως, ο άξονάς του θα στραφεί επίσης στο οριζόντιο επίπεδο, αλλά κατά την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτή η κίνηση του άξονα ενός ταχέως περιστρεφόμενου σώματος κάθετα προς τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις ονομάζεται «μετάπτωση» του σώματος.

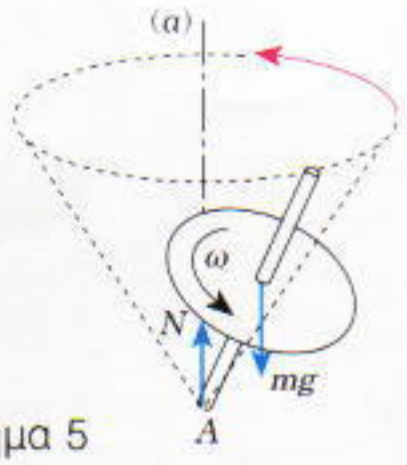
Εάν το μέτρο της εξωτερικής ροπής είναι σταθερό, ο ρυθμός μεταβολής του $I\boldsymbol{\omega}$ θα είναι επίσης σταθερός. Στην περίπτωση αυτή, ο άξονας του τροχού στρέφεται περί κατακόρυφο άξονα με συγκεκριμμένη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}$, γνωστή ως *γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης*. Όσο μεγαλύτερη είναι η εφαρμοζόμενη ροπή τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του τροχού:

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta(I\omega)/I\omega}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t}\cdot\frac{1}{I\omega} = \frac{\tau}{I\omega}.$$

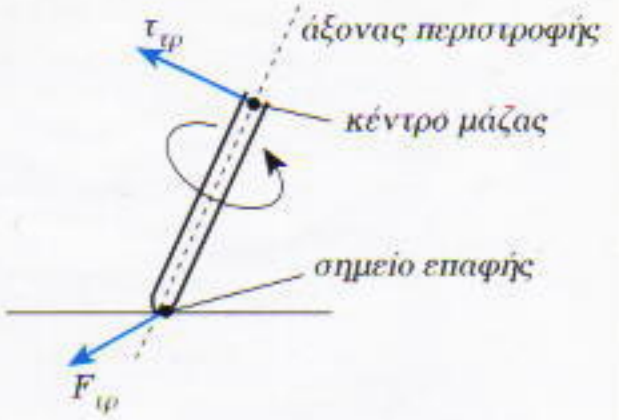
[Επειδή η γωνία $\Delta\varphi$ είναι μικρή, $\Delta\varphi = \Delta(I\omega)/I\omega$].

Είναι φανερό ότι όσο πιο γρήγορα περιστρέφεται ο τροχός (δηλαδή, όσο αυξάνουν τα ω και $I\omega$) τόσο μικρότερη είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης για την ίδια εξωτερική ροπή (αφού η γωνία $\Delta\varphi$ θα είναι μικρότερη στο χρονικό διάστημα Δt —βλ. Σχήμα 4).



Σχήμα 5

Ας φανταστούμε, λοιπόν, τώρα μια σβούρα σε σχήμα δίσκου (Σχήμα 5). Αρχικά, όταν η γωνιακή ταχύτητά της είναι μεγάλη, ο άξονάς της είναι πρακτικά κατακόρυφος. Στη συνέχεια, όμως, η ταχύτητα της σβούρας ελαττώνεται, λόγω της τριβής στο σημείο A και της αντίστασης του αέρα· κατά συνέπεια η σβούρα αρχίζει να εκτελεί μετάπτωση, και ο άξονάς της να διαγράφει μια κωνική επιφάνεια γύρω από τον κατακόρυφο άξονα (a), ο άπηξ της οποίας βρίσκεται στο σημείο A. Γιατί συμβαίνει αυτό;

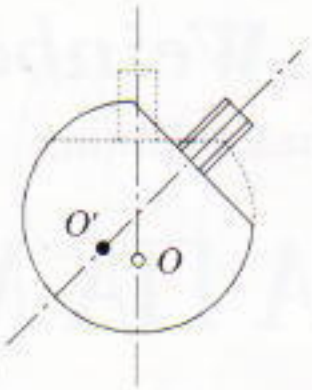


Σχήμα 6

Ας θεωρήσουμε τις δυνάμεις που δρουν στη σβούρα. Το βάρος της $m\mathbf{g}$ και η αντίδραση $\mathbf{N}$ του τραπεζιού δημιουργούν ροπή, η οποία τείνει να αναποδογυρίσει τη σβούρα. Ως αποτέλεσμα, ο άξονας της σβούρας κινείται κάθετα προς το επίπεδο αυτών των δυνάμεων —δηλαδή, εκτελεί μετάπτωση. Η κατεύθυνση της κίνησης του άξονα δείχνεται στο Σχήμα 5 με το κόκκινο βέλος. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετάπτωσης, ο άξονας της σβούρας διαγράφει μια κωνική επιφάνεια της οποίας ο άπηξ βρίσκεται στο σημείο A.

Πρέπει να σημειωθεί ότι μετάπτωση της σβούρας υπήρχε από την αρχή της περιστροφής της —λόγω της αναπόφευκτης ώθησης που της προσδώσαμε όταν την «εκτοξεύσαμε» (είναι αδύνατο να περιστραφεί μια σβούρα κατά ιδανικό τρόπο)—, ήταν όμως μικρή.

Επιπρόσθετα προς τη ροπή των δύο δυνάμεων $m\mathbf{g}$ και $\mathbf{N}$, η σβούρα επηρεάζεται από τη ροπή που δημιουργεί η τριβή $\mathbf{F}_{\tau\rho}$ ως προς το κέντρο μάζας της. Το Σχήμα 6 δίνει μια μεγεθυμένη άποψη της κλίσης της σβούρας. Εάν το σημείο επαφής του άξονα με το τραπέζι δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής της σβούρας (η σβούρα είναι κεκλιμένη), η ροπή της τριβής βρίσκεται στο επίπεδο του σχήματος και έχει φορά προς τον κατακόρυφο άξονα (a). Η μεταβολή της στροφορμής της σβούρας (που οφείλεται στην τριβή) έχει επίσης κατεύθυνση προς την κατακόρυφο (a), επομένως είναι η τριβή εκείνη που



Σχήμα 7

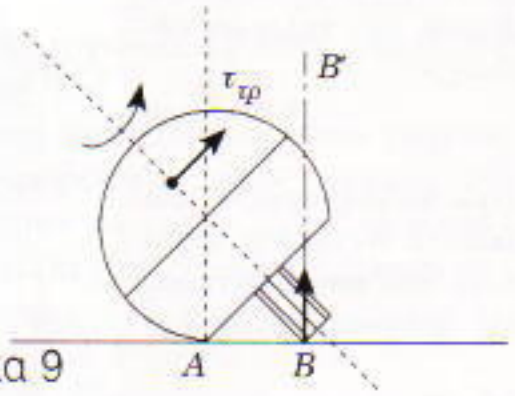
Σχήμα 8

εξαναγκάζει τον άξονα της σβούρας να λάβει την κατακόρυφη θέση.

Αυτό μπορείτε να το παρατηρήσετε αμέσως θέτοντας τη σβούρα σε κίνηση υπό γωνία ως προς την κατακόρυφο. Έπειτα από λίγο, ο άξονάς της θα έχει λάβει την κατακόρυφη θέση. Εξηγήσαμε ήδη το λόγο. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, η ροπή των δυνάμεων τριβής έχει κατεύθυνση προς την κατακόρυφο (a)· άρα η μεταβολή της στροφορμής έχει επίσης κατεύθυνση προς την κατακόρυφο (a), επομένως ο άξονας της σβούρας τείνει να λάβει θέση κάθετα προς το επίπεδο πάνω στο οποίο περιστρέφεται η σβούρα. Συνοψίζοντας, η κεκλιμένη σβούρα επηρεάζεται από δύο ροπές: τη ροπή του ζεύγους δυνάμεων που σχετίζονται με τη βαρύτητα (το βάρος, με κατεύθυνση προς τα κάτω, και την αντίδραση, με κατεύθυνση προς τα πάνω) και τη ροπή της τριβής. Αυτές οι δύο ροπές είναι πάντα παρούσες όταν περιστρέφεται μια σβούρα.

Ας επανέλθουμε τώρα στο στρόβο του Thompson και ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τη συμπεριφορά του. Επειδή η σβούρα αυτή αποτελείται από μια «αποκεφαλισμένη» σφαίρα, το κέντρο βάρους της βρίσκεται χαμηλότερα από το γεωμετρικό κέντρο της σφαίρας. Όταν περιστρέφουμε τη σβούρα, άθελά μας γέρνουμε τον άξονά της ως προς την κατακόρυφο. Επειδή η σβούρα είναι σφαιρική (στη μύτη της δεν υπάρχει ακίδα), μετατοπίζεται το σημείο στήριξής της. Εντούτοις, ο άξονας περιστροφής θα είναι κατακόρυφος· επομένως δεν θα συμπίπτει με τον γεωμετρικό άξονα της σβούρας. Επειδή το κέντρο βάρους της σβούρας βρίσκεται χαμηλώτερα από το γεωμετρικό κέντρο της σφαίρας, η κλίση της σβούρας έχει αποτέλεσμα να μετατοπίζεται το κέντρο βάρους από τον άξονα περιστροφής (Σχήμα 7). Το τελευταίο θα λάβει τη θέση O' και θα περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Καθώς περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα, το κέντρο βάρους της σβούρας θα ανυψωθεί για τους ίδιους λόγους που ανυψώνεται μια μπάλα ανηρτημένη από ένα νήμα, όταν το νήμα στριφτεί, όπως δείχνεται στο Σχήμα 8.

Ωστόσο, η σβούρα δεν θα σταματήσει με τον γεωμετρικό άξονά της στην οριζόντια θέση, αλλά λόγω αδράνειας ο άξονάς της θα έρθει σε επαφή με το τραπέζι (Σχήμα 2). Μόλις συμβεί αυτό, σημείο στήριξης θα

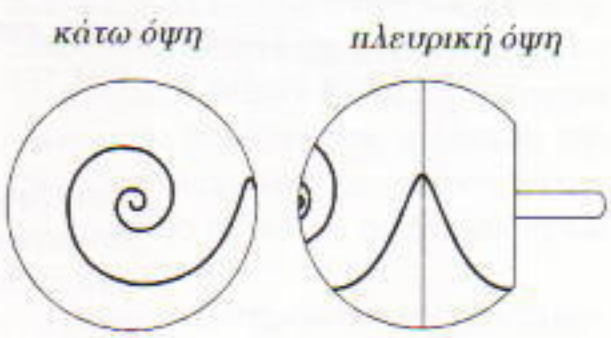


Σχήμα 9

γίνει το σημείο B, αντί του A (Σχήμα 9), και η σβούρα, συνεχίζοντας να περιστρέφεται, θα εκτελέσει μετάπτωση γύρω από τον άξονα BB'. Με άλλα λόγια, ο στρόβος του Thompson θα περιστρέφεται πλέον ακριβώς όπως μια «συνήθης» σβούρα. Υπό την επίδραση της ροπής της τριβής, θα ευθυγραμμίσει τον άξονά της με τον κατακόρυφο άξονα BB' και θα συνεχίσει να περιστρέφεται, όμως πλέον αναποδογυρισμένη.

Αυτή η συλλογιστική δείχνει ότι η παράξενη συμπεριφορά του στρόβου του Thompson οφείλεται στη δράση της τριβής. Πράγματι, εάν δεν υπήρχε τριβή, αφότου ο άξονας της σβούρας θα άγγιζε το τραπέζι, η σβούρα θα επέστρεφε με τον άξονά της στην οριζόντια θέση και θα συνέχιζε να περιστρέφεται όσο η γωνιακή της ταχύτητα της το επέτρεπε. Κατόπιν, υπό την επίδραση της ροπής που σχετίζεται με τη βαρύτητα, θα επέστρεφε στην αρχική της θέση (Σχήμα 2).

Ας εκτελέσουμε τώρα ένα άλλο πείραμα σχετικό με το στρόβο του Thompson. Θέτουμε τη σβούρα σε κίνηση πάνω σε μια επιφάνεια καλυμμένη από λεπτό στρώμα πούδρας. Η πούδρα θα αφήσει ένα ίχνος πάνω στην επιφάνεια της σβούρας, που ουσιαστικά θα καταγράφει την τροχιά του σημείου επαφής της σβούρας με το επίπεδο. Το ίχνος αυτό φαίνεται στο Σχήμα 10. Στην κορυφή το ίχνος τυλίγεται σαν μια έλικα, αλλά στον ισημερινό αλλάζει φορά και αρχίζει να ξετυλίγεται προς τα πίσω. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ο νόμος διατήρησης της στροφορμής απαιτεί η σβούρα να περιστρέφεται προς την ίδια κατεύθυνση τόσο στην κανονική (αρχική) όσο και στην αναποδογυρισμένη θέση της. Ας περιστρέψουμε τη σβούρα κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού (κοιτάζοντάς την από πάνω). Όταν αναποδογυρίσει, θα περιστρέφεται αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού. Δηλαδή, για να διατηρήσει το μέτρο και την κατεύθυνση της στροφορμής της, η σβούρα πρέπει μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή να σταματήσει να περιστρέφεται γύρω από τον γεωμετρικό της άξονα κατά τη μια φορά και να αρχίσει να περιστρέφεται κατά την αντίθετη. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10, αυτό συμβαίνει ακριβώς τη στιγμή που η σβούρα ακουμπά «στα πλευρά» της, τη στιγμή που ο γεωμετρικός της άξονας είναι οριζόντιος.



Σχήμα 10

Όσον αφορά τις διαστάσεις της σβούρας, μπορεί να διαφέρουν, αλλά πρέπει να ικανοποιείται μια συνθήκη: το κέντρο βάρους τηςδεν πρέπει να συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο της «αποκεφαλισμένης» σφαίρας. ■