QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΙΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1995

1.400 ΔΡΧ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Η ανθρώπινη κατάσταση (1933), του René Magritte.

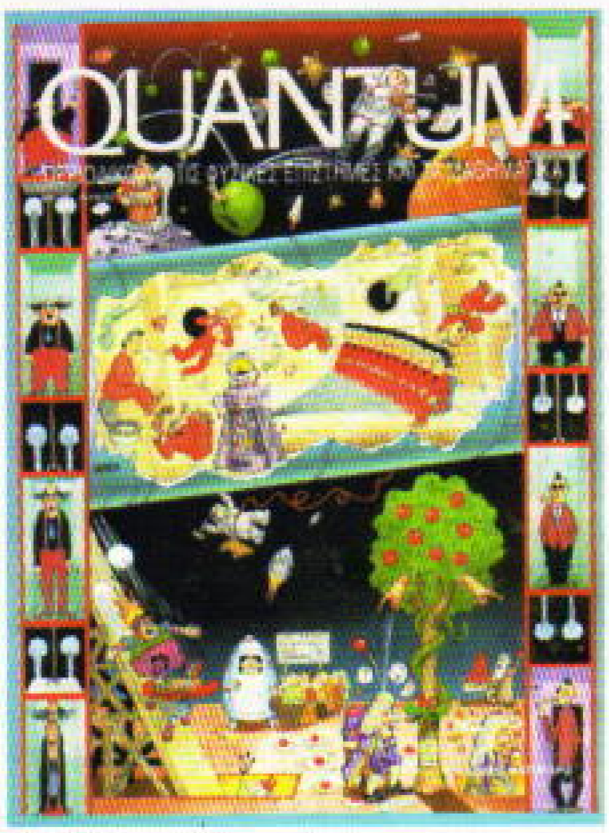
ΌΠΩΣ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΚΑΙ ΜΕ ΤΑ ΑΛΛΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ MAGRITTE, δεν υπάρχει αμφιβολία για το *τι* εικονίζεται σ' αυτό τον πίνακα. Για άλλη μια φορά, ο Magritte συνδυάζει το συνηθισμένο με το ασυνήθιστο, εγείροντας ένα πλέγμα ερωτημάτων με μια «αδύνατη» αναπαράσταση καθημερινών πραγμάτων.

Ως ένα βαθμό, ο παραπάνω πίνακας αποκαλύπτει την πλάνη ότι η τέχνη «συλλαμβάνει τη στιγμή». Θα έπρεπε κανείς να εργάζεται ταχύτατα, ώστε να δημιουργήσει έναν πίνακα μέσα στον πίνακα. Σε αντίθεση με το φωτογράφο, ο οποίος πράγματι εργάζεται στην κλίμακα κλασμάτων του δευτερολέπτου, ο ζωγράφος συνθέτει εντυπώσεις που είναι διασκορπισμένες στο χρόνο. Αυτό το έργο μάς επηρεάζει τόσο πολύ ίσως επειδή απηχεί την επιθυμία που νιώθουμε σε μια στιγμή ευτυχίας: «ας μην τελειώσει αυτή η στιγμή!» Αυτή είναι η ανθρώπινη κατάσταση: μπορούμε να φανταζόμαστε το αχρονικό, αλλά είμαστε αμετάκλητα υποταγμένοι στη ροή του χρόνου.

Η ικανότητά μας να φανταζόμαστε (ή τουλάχιστον να ονομάζουμε) το αδύνατο, λόγου χάρη το «άπειρο» ή το «τέλειο», μερικές φορές μας ωθεί προς την πρόοδο και άλλες φορές μας παραπλανά. Στη σελίδα 18 ο Gennady Myakishev καταπιάνεται με την έννοια του «πλέον αδρανειακού» συστήματος αναφοράς.

QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1995 ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση: Tomas Bunk

Αυτή τη φορά, το μόνο που μπορούμε να πούμε για την εικόνα του εξωφύλλου μας είναι: ουδέν σχόλιον.

Θα θέλαμε πάντως να επισημάνουμε ότι, αν και το *Quantum* είναι σοβαρό περιοδικό, γεμάτο σημαντικές ιδέες, προκλητικά προβλήματα και υψηλή τέχνη, δεν παύει να είναι και ψυχαγωγικό. Βέβαια, ο Tom Bunk μάς διασκεδάζει με το προκλητικό ύφος του σε κάθε τεύχος, στη στήλη «Πεδία της Φυσικής». Αυτό το μήνα, όμως, αποφασίσαμε να προβάλλουμε την «ασεβή» σύνθεση του καλού συνεργάτη στο εξώφυλλο του περιοδικού μας. (Να οφείλεται αυτό και στη διάχυτη χαρά από την έλευση του μυροβόλου Μάη;)

Ο Ισαάκ Νεύτων, που για πολλοστή φορά δέχεται το χτύπημα του θρυλικού μήλου, ίσως δυσφορούσε μ' αυτό το αστείο. Υποψιαζόμαστε όμως ότι ο Άλμπερτ Αϊνστάιν θα το διασκέδαζε. Εξάλλου, δεν χρειάζεται να είστε ιδιοφυής για να απολαύσετε μια φάρσα.

Και αφού μιλάμε για φάρσες, αναρωτιόμαστε αν οι αναγνώστες μας θα παρατηρήσουν τίποτε ύποπτο στο Καλειδοσκόπιο....

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Ο ΚΟΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

Ένα χρόνο μετά...

Εν όψει όλων των καιρών / Εν όψει όλων των εκτάσεων / Μια πρώτη μέρα προχωρεί.
—Ανδρέας Εμπειρίκος

ΜΕ ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΤΕΥΧΟΣ, ΤΟ *QUANTUM* ΣΥΜΠΛΗΡΩΝΕΙ ένα χρόνο ζωής. Κατ' αρχάς, λοιπόν, θέλω να ευχαριστήσω όλους εσάς, τους αναγνώστες, αφού χάρη στη δική σας συμπαράσταση μπορούμε τώρα να γιορτάζουμε αυτό το γεγονός, που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για μας. Αυτά τα λόγια δεν έχουν ανασυρθεί από τον μακρύ κατάλογο των συνηθισμένων κλισέ, αλλά θέλουν να εκφράσουν ειλικρινώς τη βαθιά συγκίνηση που νιώθουμε βλέποντας τη δύσκολη προσπάθειά μας να πετυχαίνει. Και η προσπάθεια αυτή ήταν πράγματι δύσκολη, διότι οι παράμετροι που αψηφήσαμε όταν αποφασίζαμε να προχωρήσουμε στην έκδοση του περιοδικού δεν ήταν αμελητέες.

Δεν ήταν λίγοι εκείνοι που προέβλεπαν ότι το περιοδικό μας δεν θα είχε καλή υποδοχή, αφού το εκπαιδευτικό μας σύστημα ευνοεί την αποστήθιση, ενώ στη μέση εκπαίδευση σχεδόν τα πάντα κινούνται γύρω από το θεσμό των πανελληνίων εξετάσεων, μια κατεύθυνση προς την οποία δεν είναι στραμμένο το *Quantum*. Πολλοί παρατηρούσαν πως οι νέοι δεν έλκονται πια τόσο πολύ από τα μαθηματικά και τη φυσική, δεδομένου ότι τα ενδιαφέροντά τους στρέφονται προς τις τεχνολογικές εφαρμογές των βασικών επιστημών, και κυρίως προς την επιστήμη της πληροφορικής (θαρρείς και δεν υπάρχει στενή και αμφίδρομη σχέση των μεν με τα δε). Σύμφωνα με κάποιες άλλες επίσης αποτρεπτικές γνώμες, το *Quantum* δεν θα κατόρθωνε να κερδίσει ούτε κάποιο τμήμα του ευρύτερου κοινού, το οποίο, ενώ ενδιαφέρεται αρκετά για θέματα επιστήμης και διαβάζει μορφωτικά και εκλαϊκευτικά βιβλία, θα αδυνατούσε να παρακολουθήσει το επίπεδο της ύλης που περιέχεται στο περιοδικό. (Κατά μία γνώμη, η θέα και των απλούστερων εξισώσεων σε κάποια από τα άρθρα θα απωθούσε τους πιθανούς αναγνώστες του!) Και όλα τούτα συμπληρώνονταν με αφορισμούς του τύπου «στον ελληνικό χώρο κυριαρχεί η πνευματική νωχέλεια» και «το ελληνικό κοινό είναι αδιάφορο για τα θέματα της επιστήμης».

Χωρίς να παραγνωρίσουμε τη βασιμότητα κάποιων στοιχείων που περιέχονται σε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς, προχωρήσαμε στην έκδοση του *Quantum* με την προσδοκία να καλύψουμε τη δραματική έλλειψη που υπήρχε στο χώρο των φυσικομαθηματικών περιοδικών. Ακλόνητη πεποίθησή μας ήταν και είναι ότι η μέθοδος της στείρας απομνημόνευσης που επιβάλλει το εκπαιδευτικό μας σύστημα δεν κατάφερε και δεν θα καταφέρει ποτέ να «τιθασεύσει» τα πιο ζωντανά και ανήσυχα μυαλά των μαθητών και των φοιτητών μας. Γνωρίζουμε ότι μέσα σ' αυτό το σύστημα είναι πολλοί οι καθηγητές της μέσης, της ανώτερης και της ανώτατης εκπαίδευσης που ασφυκτιούν, αυτοί που θέλουν να υπηρετήσουν πραγματικά την επιστήμη, να επιτελέσουν το διδακτικό λειτούργημα, οι δάσκαλοι που αγωνίζονται «όχι να επιβιώσουν αλλά να ζήσουν». Για όλους αυτούς ήταν απαραίτητο ένα έγκυρο εκπαιδευτικό περιοδικό που να προσφέρει γενικότερη επιστημονική ενημέρωση, να αναπτύσσει την κριτική σκέψη, να αναζωογονεί τη δημιουργική φαντασία. Όλοι αυτοί, λοιπόν, αναγνώρισαν αυτά τα στοιχεία στο *Quantum*, γι' αυτό και το αγκάλιασαν και το αγάπησαν.

Δεν έμεινε όμως αδιάφορο ούτε το αποκαλούμενο ευρύ κοινό. Σε μια εποχή κατά την οποία οι ψευδοεπιστήμες —η αστρολογία, η παραψυχολογία, κ.ά.— είναι ιδιαιτέρως δημοφιλείς, σε μια εποχή όπου κλονίζονται ο ορθός λόγος και οι παγκόσμιες ηθικές αρχές και δεσπόζουν η άγνοια και οι προκαταλήψεις, η έκδοση ενός περιοδικού σαν το *Quantum* συνιστά μια κίνηση που υπηρετεί τη γνώση, την πρόοδο, την ειρήνη. Και το ελληνικό κοινό αναγνωρίζει τη συμβολή και επιβραβεύει την προσπάθεια.

Ένα χρόνο μετά, λοιπόν, για το ελληνικό *Quantum*... Ο απολογισμός του υλικού που χώρεσε στις σελίδες του είναι εντυπωσιακός: Μοναδικά άρθρα ενημέρωσης, εκλαϊκευσης και προβληματισμού, όπως τα «Γιατί μελετάμε τα Μαθηματικά;» του V. Arnold, «Διατάξεις Penrose και ημικρύσταλλοι» του V. Koryepin, «Το κυνήγι των μαγικών σφαιρών» του S. Tikhodeyev, «Η χρυσή σκάλα του Φαραώ» του M. Reytman, «Τι είναι ο χρόνος» του L. Smolin, «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda» του J. Raskin, «Προς την κορυφή του όρους Fermat-Euler» του V. Tikhomirov, «Απειροστικός λογισμός —ναι ή όχι;» του K. Kreith, «Τι είναι η κομψότητα;» της J. Angwin... Εξαιρετικά δείγματα ανάπτυξης θεμάτων της σχολικής ύλης, όπως «Η υπόθεση του μυθικού τέρατος» του R. Vinokur στο παρόν τεύχος, «Σήματα διαβάσεων» των Eisenkraft και Kirkpatrick, «Το φλογιστό και το μαγνητικό πεδίο» των Eatman, Muir και Hickman, «Οι συνιστώσες της γνώσης» του B. Korsunsky, «Η μεγάλη βουτιά» του A. Dozorov, «Ένας παράξενος αυτοκράτορας» του I. Akulich... Πρωτόγνωρες —και όχι μόνο για τα ελληνικά δεδομένα— σε ποιότητα συνεντεύξεις με παγκοσμίου κύρους επιστημονικές προσωπικότητες από τον Γ. Ευαγγελόπουλο, και εξαιρετικές βιογραφικές παρουσιάσεις μορφών της επιστήμης («Η κληρονομιά του Norbert Wiener», κ.ά). Πολλές πρωτότυπες ασκήσεις φυσικής και μαθηματικών με τις λύσεις τους, πολλά ψυχαγωγικά θέματα (που όμως πίσω τους κρύβουν σοβαρότατη επιστήμη), βιβλιοκριτικές, θέματα Ολυμπιάδων, δείγματα σχολικής εργαστηριακής έρευνας... Και όλα αυτά, συνοδευόμενα πάντοτε από μια εικονογράφηση εξαιρετικής αισθητικής.

Τούτη τη στιγμή, μια στιγμή γενεθλίων, είναι φυσικό η σκέψη μας να στρέφεται και προς το μέλλον. Το *Quantum* λοιπόν υπόσχεται ότι θα συνεχίσει να υπηρετεί την ιδέα της συνεχούς εκπαίδευσης για όλους. Θα συνεχίσει με τον ίδιο ζήλο να προσφέρει παιδαγωγικό έργο της ίδιας ποιότητας. Θα συνεχίσει να προτρέπει τον αναγνώστη να μελετά και να εμβαθύνει στην επιστήμη, να ταξιδεύει το ωραίο ταξίδι προς τη γνώση.

Κατά μία άποψη, η ενασχόλησή μας με το *Quantum*, τόσο η δική μας όσο και η δική σας, ίσως μοιάζει με το καβαφικό ταξίδι στην Ιθάκη· ίσως να μη φτάσουμε ποτέ στον τελικό προορισμό μας, ίσως οι στόχοι οι δικοί μας και οι προσδοκίες οι δικές σας να μην ικανοποιηθούν ποτέ πλήρως. Ωστόσο το μεγάλο κέρδος όλων μας θα είναι το ταξίδι, οι προσπάθειες για το καλύτερο και οι εμπειρίες που αυτό θα μας προσφέρει. Οδηγό σ' αυτή την περιπέτεια θά' χουμε πάντα τα λόγια του Αϊνστάιν: «Στη διάρκεια της ζωής μου έμαθα ένα πράγμα: όλη μας η επιστήμη, σε σύγκριση με την πραγματικότητα, είναι πρωτόγονη και παιδαριώδης, αλλά, παρ' όλ' αυτά, είναι το πιο πολύτιμο πράγμα που διαθέτουμε».

Για τούτο το σημείο, το τέλος του σύντομου σημειώματος, έχω αφήσει τις πιο θερμές ευχαριστίες: ευχαριστώ εκ βάθους καρδίας όλους όσοι συμμετέχουν στην ελληνική έκδοση του περιοδικού· υπερβάλλουν εαυτούς σε προσφορά, και χωρίς αυτή την αυταπάρνησή τους το αποτέλεσμα θα ήταν οπωσδήποτε αισθητά κατώτερο.

Αλέκος Μάμαλης

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 7.500 δρχ. για ιδιώτες, 12.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.

Η υπόθεση του μυθικού τέρατος

Ο Σέρλοκ Χολμς διαλευκαίνει ένα «διαβολικό» μυστήριο

Roman Vinokur

«Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΠΟΥ ΘΑ ΣΑΣ ΑΦΗΓΗΘΩ συνέβη τον 5ο μ.Χ. αιώνα, στις όχθες μιας βαθιάς λίμνης της βόρειας Αγγλίας. Ένας μοναχός, ο αδελφός Γεώργιος, έφτασε στην περιοχή για να εκχριστιανίσει τους ντόπιους. Το έργο ήταν δύσκολο, αλλά ο μοναχός ήταν θαρραλέος άνθρωπος. Οι κάτοικοι της περιοχής, λοιπόν, τον πληροφόρησαν ότι μέσα στη λίμνη ζούσε ένας πανίσχυρος θεός. Οδήγησαν μάλιστα τον μοναχό στην άκρη ενός ψηλού γκρεμού που έβλεπε στη λίμνη. Οι γύρω λόφοι ήταν καλυμμένοι από πυκνή βλάστηση, και η επιφάνεια του νερού έμοιαζε πράσινη.

»Ξαφνικά, ένα τεράστιο τέρας υψώθηκε από τα βάθη της λίμνης. Το κεφάλι του έμοιαζε με κεφάλι γιγαντιαίας φώκιας, και στη μέση του μαύρου μετώπου του υπήρχε ένα λευκό κέρατο. Η εμφάνισή του τρόμαξε τους ντόπιους, παρότι, όπως είπαν στο μοναχό, το τέρας ήταν φυτοφάγο. Το κεφάλι του πλάσματος έφτανε σχεδόν στην κορυφή του γκρεμού. Οι ντόπιοι έπεσαν στα γόνατα και προσκύνησαν το τέρας, ζητώντας του να μην τους τιμωρήσει. Ο αδελφός Γεώργιος τότε ύψωσε το σταυρό του και διέταξε το τέρας στο όνομα του Θεού να επιστρέψει στον κάτω κόσμο. Εκείνο όμως δεν του έδωσε καμιά σημασία.

»Εκείνη την εποχή οι ιεραπόστολοι αντιμετώπιζαν μεγάλους κινδύνους και γι' αυτό ήταν συνήθως και δεινοί μαχητές. Ο αδελφός Γεώργιος, λοιπόν, άρπαξε το κοντάρι ενός ντόπιου, το εκτόξευσε με δύναμη και χτύπησε το τέρας στο μάτι. Εκείνο μούγκρισε και βυθίστηκε στα νερά της λίμνης, όπου εξαφανίστηκε για πάντα...

»Έκτοτε δεν το ξαναείδε κανείς, αν και μερικοί ισχυρίστηκαν ότι το είδαν από μακριά.»

Ο Τζον Τέρνερ, ένας νεαρός μηχανικός του ναυτικού, σταμάτησε για λίγο κι ύστερα συνέχισε την αφήγησή του.

«Νομίζω ότι το τέρας ήταν ένας δεινόσαυρος που έφτασε στη λίμνη από κάποια μακρινή θάλασσα, όπου ίσως ζούσαν και άλλα μέλη της οικογένειάς του. Δεν πρέπει να ήταν πολλά, έφταναν όμως για να επιβιώσει το είδος...»

Ο Σέρλοκ Χολμς έδειξε εντυπωσιασμένος. «Σας εύχομαι καλή τύχη στις προσπάθειές σας να βρείτε αυτό το πλάσμα στη λίμνη», είπε, «ή και οπουδήποτε αλλού, βέβαια. Φαντάζομαι ότι θα έχετε αφιερώσει πολύ χρόνο σε αυτή την επιστημονική αναζήτηση. Είναι μια δύσκολη προσπάθεια, όχι όμως και αδύνατη... Ποια είναι η δική σας γνώμη, δόκτορα Γουάτσον;»

Απάντησα ότι μια τέτοια ανακάλυψη θα ήταν εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, και ότι ήταν πολύ πιθανό να έχουν επιβιώσει μερικοί συγγενείς των δεινοσαύρων, όπως για παράδειγμα οι κροκόδειλοι και οι σαύρες της εποχής μας. Ένας από τους ασθενείς μου, γνωστός γεωγράφος, μου είχε πει ότι στις ζούγκλες του Καμερούν ζουν μυστηριώδη γιγαντιαία πλάσματα. Δεν τα είχε δει ο ίδιος, αλλά τα είχαν συναντήσει μερικοί ντόπιοι κυνηγοί, και οι περιγραφές τους ήταν αξιόπιστες.

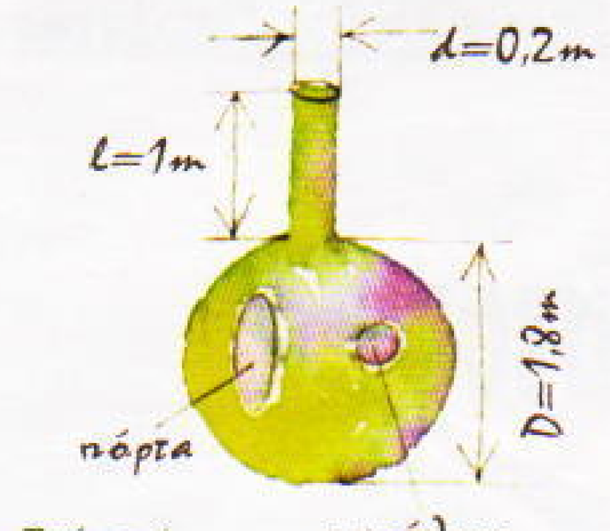
Ξαφνικά ο Χολμς γέλασε και απευθύνθηκε στον καλεσμένο μας: «Παρεμπιπτόντως, το μαύρο σκυλάκι σας θα σας βοηθήσει σίγουρα στην αναζήτηση του τέρατος, έτσι δεν είναι; Μην εκπλήσσεσθε, κύριε Τέρνερ. Αυτή είναι η δουλειά μου, να γνωρίζω διάφορα πράγματα».

Ο Τέρνερ είχε μείνει άναυδος. «Κύριε Χολμς», είπε, «έχω διαβάσει για τις ικανότητές σας, αλλά και πάλι μένω έκπληκτος. Δεν θυμάμαι να έχουμε γνωριστεί παλαιότερα. Πώς γνωρίζετε, λοιπόν, ότι έχω ένα μαύρο σκυλάκι;»

«Είδα τα σημάδια από τις δαγκωματιές του στα τακούνια των παπουτσιών σας», του απάντησε ο Χολμς. «Τα σημάδια αυτά υπάρχουν συνήθως όταν έχει κανείς ένα ζωηρό σκυλάκι στο σπίτι του. Επιπλέον, έτυχε να στέκομαι μπροστά στο παράθυρο όταν σταματήσατε στο δρόμο και πρόσεξα πως κοιτάξατε έναν κύριο που είχε βγάλει βόλτα ένα μαύρο πουντλ. Ήταν φανερό ότι το σκυλάκι σάς έφερνε στο νου κάτι πολύ γνωστό και ευχάριστο. Αυτό μου κίνησε την περιέργεια κι όταν μπήκατε μέσα παρατήρησα τα τακούνια των παπουτσιών σας. Αυτό είναι όλο. Βλέπετε, λοιπόν, ότι δεν είμαι μάγος. Εξηγήστε μου, όμως, πώς μπορούμε να σας βοηθήσουμε.»

«Θέλω να βρω το τέρας της λίμνης», είπε αποφασιστικά ο Τέρνερ. «Για το σκοπό αυτό κατασκεύασα ένα υποβρύχιο σκάφος με το οποίο θα εξερευνήσω τον πυθμένα της λίμνης. Να, θα σας το σχεδιάσω εδώ.» Ο Τέρνερ πήρε

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 1

ένα χαρτί και σχεδίασε την εικόνα που φαίνεται στο Σχήμα 1. «Μοιάζει σαν μεγάλο μπουκάλι: είναι μια σφαίρα μ' έναν κυλινδρικό σωλήνα στην κορυφή της. Στο πλάι υπάρχει μια πόρτα κι ένα παράθυρο, που κλείνουν ερμητικά. Το παράθυρο είναι φτιαγμένο από ανθεκτικό γυαλί, ενώ όλο το υπόλοιπο σκάφος είναι από χάλυβα. Η κατασκευή του έγινε με βάση τις οδηγίες μου, και όταν ολοκληρώθηκε το μετέφερα στις όχθες της λίμνης. Σκόπευα να το ρυμουλκήσω στο μέσον της λίμνης και να το βυθίσω με ειδικές άγκυρες, που δεν φαίνονται στην εικόνα.

»Εδώ όμως αντιμετώπισα ένα σοβαρό πρόβλημα. Είχα προσλάβει μερικούς εργάτες για να κάνουν επιτόπου μερικές τελευταίες δουλειές: να εγκαταστήσουν τους σωλήνες εξαερισμού και μια τηλεφωνική γραμμή, και να σφραγίσουν το άνοιγμα στο άκρο του κυλινδρικού σωλήνα. Οι εργάτες όμως αρρώστησαν, και προσπάθησαν όλοι να με πείσουν ότι κάτι συμβαίνει με το σκάφος μου· ότι μέσα του βρισκόταν κάποιος δαίμονας που ήθελε να εμποδίσει την εξερεύνηση της λίμνης! Για να τους αποδείξω ότι κάνουν λάθος, αποφάσισα να μείνω μία ώρα μέσα στο σκάφος.

»Ο καιρός ήταν καλός και μια απαλή αύρα φυσούσε απ' τη μεριά της λίμνης. Προς μεγάλη μου έκπληξη, όμως, η σκυλίτσα μου η Τζούντι δεν με άφηνε να μπω στο σκάφος. Άρπαξε με τα δόντια της το παντελόνι μου και δεν έλεγε να το αφήσει. Τελικά κατάφερα να της ξεφύγω και μπήκα στο σκάφος, κλείνοντας πίσω μου την πόρτα. Σχεδόν αμέσως ένιωσα σαν να έτρεμαν τα σωθικά μου. Μ' έπιασε σκοτοδίνη. Με κυρίεψε ένας ανεξήγητος φόβος. Δεν άντεχα άλλο και βγήκα από το σκάφος όσο πιο γρήγορα μπορούσα.

»Αργότερα έκανα αρκετές προσπάθειες να ξαναμπώ, αλλά το αποτέλεσμα ήταν πάντοτε το ίδιο. Οι εργάτες πιστεύουν ότι ο δαίμονας θέλει να εμποδίσει την εξερεύνηση. Λένε ότι ζει στα βάθη της λίμνης και μερικές φορές μεταμορφώνεται στον μυθικό μονόκερο. Η μόνη μου ελπίδα να βρω κάποια εξήγηση είστε εσείς, κύριε Χολμς, και η παραγωγική συλλογιστική μέθοδός σας. Εκτός βέβαια αν οι εργάτες έχουν δίκιο και υπάρχουν σκοτεινές δυνάμεις εδώ γύρω.»

«Πρέπει να ομολογήσω πως δεν έχω δει ποτέ στη ζωή μου ούτε θεούς ούτε δαίμονες», είπε ο Χολμς. «Και υποψιάζομαι ότι το τέρας της λίμνης δεν έχει καμία σχέση με την εμπειρία σας. Τα

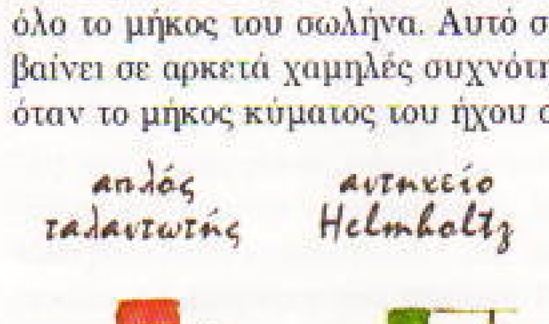
Σχήμα 2

προβλήματά σας οφείλονται σε καθαρά φυσικά αίτια. Είχα συναντήσει μια παρόμοια περίπτωση όταν ερευνούσα το θάνατο ενός κυνηγού που κατέφυγε σε μια μικρή σπηλιά στη διάρκεια μιας θύελλας. Δεν υπήρχαν ίχνη πάλης είτε με άνθρωπο είτε με ζώο, ούτε κανένα τραύμα που να μπορούσε να δικαιολογήσει το θάνατό του. Για να πω την αλήθεια, δεν θα είχα λύσει το μυστήριο χωρίς τη βοήθεια ενός παλιού μου δασκάλου, ενός πολύ γνωστού καθηγητή της φυσικής...»

Ο Χολμς σηκώθηκε και πήρε ένα μπιμπελό από το γραφείο του. Ήταν φτιαγμένο από πολύχρωμο γυαλί και έμοιαζε πολύ με το υποβρύχιο σκάφος του Τέρνερ. Το έφερε στα χείλη του και φύσηξε πάνω από το στόμιο (Σχήμα 2). Έπειτα από μερικές προσπάθειες, κατόρθωσε να βγάλει ένα καθαρό σφύριγμα. Είδα τον καλεσμένο μας να με κοιτάζει σαν αποβλακωμένος και αισθάνθηκα αμηχανία. Θα' λεγε κανείς ότι ο Χολμς είχε ξεμωραθεί.

«Αυτή η σφυρίχτρα», εξήγησε ο Χολμς, «είναι ένα αντηχείο Helmholtz, όπως λένε οι φυσικοί. Έχει πάρει το όνομά του από τον επιστήμονα που χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τα αντηχεία για να αναλύσει τους ήχους σύμφωνα με τη συχνότητα των ταλαντώσεών τους. Το αντηχείο αποτελείται από δύο βασικά μέρη: έναν λεπτό σωλήνα ανοιχτό και από τα δύο άκρα, και έναν θάλαμο πολύ μεγαλύτερου όγκου. Η μεταβολή της πίεσης του αέρα στο εξωτερικό άκρο του σωλήνα προκαλεί την κίνηση του αέρα μέσα στο αντηχείο. Ας φανταστούμε ότι μια ποσότητα αέρα εισρέει στο θάλαμο. Το αποτέλεσμα είναι να αυξηθεί η πίεση μέσα στο θάλαμο, οπότε εμποδίζεται η εισροή και άλλου αέρα σ' αυτόν. Παρομοίως, η εκροή αέρα από το θάλαμο προκαλεί μείωση της πίεσης, πράγμα που εμποδίζει την εκροή και άλλου αέρα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο αέρας στο εσωτερικό του θαλάμου δρα σαν ένα κατακόρυφο ελατήριο, και ότι ο αέρας που υπάρχει μέσα στο σωλήνα παίζει το ρόλο μιας μάζας που είναι προσαρτημένη στην κορυφή του ελατηρίου. Βλέπουμε δηλαδή ότι το αντηχείο Helmholtz μοιάζει με απλό ταλαντωτή (Σχήμα 3).

»Πρέπει να επισημάνω ότι η αναλογία αυτή δεν ισχύει πάντοτε αλλά μόνον όταν η ταχύτητα των σωματιδίων του αέρα είναι κατά προσέγγιση ίδια σε όλο το μήκος του σωλήνα. Αυτό συμβαίνει σε αρκετά χαμηλές συχνότητες, όταν το μήκος κύματος του ήχου στον



Σχήμα 3

αέρα είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με τις διαστάσεις του αντηχείου. Αλλιώς, στο μοντέλο που περιγράφει τις ταλαντώσεις του αέρα μέσα στο σκάφος θα έπρεπε να μιλάμε για πολλούς απλούς ταλαντωτές.»

«Απ' ό,τι θυμάμαι», είπε ο Τέρνερ, «η ιδιοσυχνότητα ενός απλού ταλαντωτή είναι

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (1)$$

όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου και m η μάζα. Ποια είναι η ιδιοσυχνότητα του αντηχείου Helmholtz, κύριε Χολμς;»

«Αν το μήκος του σωλήνα είναι πολύ μεγαλύτερο από τη διάμετρό του, η συχνότητα είναι ίση με

$$v_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Su^2}{V\ell}}, \qquad (2)$$

όπου u είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, S είναι το εμβαδόν της διατομής του σωλήνα, V είναι ο όγκος του θαλάμου και ℓ είναι το μήκος του σωλήνα. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2) για να υπολογίσουμε την ιδιοσυχνότητα του υποβρύχιου σκάφους σας...» Ο Χολμς πήρε το σημειωματάριό του κι ένα μολύβι και κοίταξε την εικόνα που είχε σχεδιάσει ο Τέρνερ. «Θα βρούμε ότι

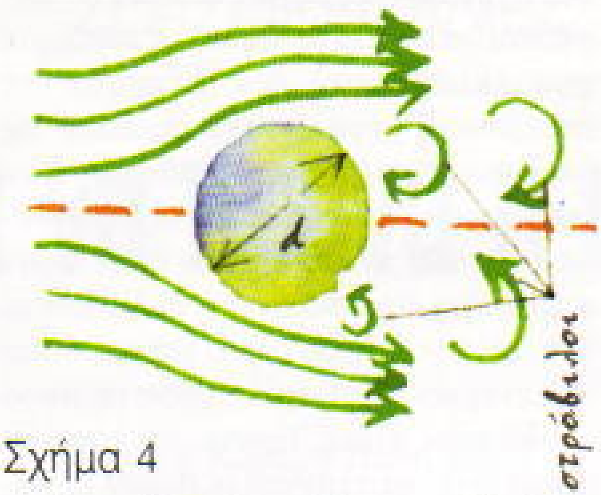
$$v_a \cong 5 \text{ Hz}.$$

Συμφωνείτε;»

«Νομίζω ότι καταλαβαίνω», είπε διστακτικά ο Τέρνερ. «Προηγουμένως φυσήξατε στο στόμιο του αντηχείου και παραγάγατε ένα σφύριγμα. Στη δική μου περίπτωση, το φύσημα γινόταν από τον άνεμο. Αλλά, όπως σας είπα, ο άνεμος που φυσούσε από τη λίμνη δεν ήταν δυνατός...»

«Έχετε δίκιο», συμφώνησε ο Χολμς, «τουλάχιστον σε ό,τι αφορά το ρόλο του ανέμου. Όταν ο αέρας περνά δίπλα από ένα αντικείμενο, η ροή του πίσω από το αντικείμενο δεν είναι ομαλή. Παρουσιάζει τους λεγόμενους στροβίλους (Σχήμα 4), οι οποίοι εγκαταλείπουν ο ένας μετά τον άλλο το αντικείμενο, με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέρχεται ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ανάμεσα στο σχηματισμό των διαδοχικών στροβίλων.

»Αυτή η "στροβιλώδης ροή", όπως ονομάζεται, ερευνήθηκε θεωρητικά



Σχήμα 4

από τον Theodore Karman. Η πίεση του αέρα μέσα σ' έναν στρόβιλο είναι μικρότερη απ' ό,τι στις γύρω αδιατάρακτες περιοχές της ατμόσφαιρας (γι' αυτό και οι ανεμοστρόβιλοι ενεργούν σαν τεράστιες σκούπες, που ρουφούν ό,τι βρίσκουν στο πέρασμά τους). Επίσης, η πίεση του αέρα μέσα στους στροβίλους είναι μικρότερη απ' ό,τι στον ίδιο χώρο κατά το χρονικό διάστημα που παρέρχεται μεταξύ των διαδοχικών στροβίλων. Αν το αντικείμενο είναι συμμετρικό, η συνολική πίεση του αέρα πίσω του μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο. Η συχνότητα της μεταβολής της ισούται με

$$v_k = k\frac{v}{a}, \qquad (3)$$

όπου v είναι η ταχύτητα ροής του αέρα, a είναι το ενεργό μέγεθος του αντικειμένου και k είναι ένας αδιάστατος συντελεστής που εξαρτάται από το σχήμα και τον προσανατολισμό του αντικειμένου. Η τιμή του k συνήθως προσδιορίζεται πειραματικά, αλλά είναι δυνατό να γίνουν και θεωρητικές προβλέψεις. Για παράδειγμα, αν η ροή του αέρα είναι κάθετη προς έναν μακρύ κύλινδρο, η τιμή του k βρίσκεται κατά προσέγγιση ίση με 0,2, με το δεδομένο ότι $a = D$ (όπου D η διάμετρος του κυλίνδρου). Αν θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα του ανέμου στην όχθη της λίμνης ήταν γύρω στα 5 m/sec (είπατε ότι ο άνεμος δεν ήταν πολύ δυνατός), και αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (3) το $D = 0,2$ m και $k = 0,2$, θα πάρουμε

$$v_k = 5 \text{ Hz}.$$

»Πρέπει να επισημάνω ότι, στην περίπτωση που εξετάζουμε, το ρόλο του αντικειμένου μπορεί να τον παίξει όχι μόνο ο σωλήνας στο σύνολό του αλλά και το άνω χείλος του. Επομένως, μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3), θεωρώντας ότι $a = h$, όπου h είναι το πάχος του τοιχώματος. Το μόνο που απομένει είναι μετρήσουμε το συντελεστή k. Πιστεύω όμως ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο ρόλος του σωλήνα ως συνόλου είναι πιο σημαντικός, αφού και οι δύο συχνότητες είναι ίδιες.»

«Επομένως $v_a = v_k$», είπε κατάπληκτος ο Τέρνερ. «Πράγμα που σημαίνει ότι υπήρχε ακουστικός συντονισμός! Έτσι οι ταλαντώσεις της πίεσης του αέρα μέσα στο σκάφος μπορούσαν να αποκτήσουν μεγάλο πλάτος. Το ίδιο φαινόμενο κάνει τη σφυρίχτρα να παράγει το σφύριγμα. Αλλά...»

«Φυσικά δεν ακούσατε τίποτα», τον διέκοψε ο Χολμς, μαντεύοντας τη σκέψη του. «Το ανθρώπινο αυτί δεν μπορεί ν' ακούσει ήχους με συχνότητα μικρότερη από 16 Hz. Οι ήχοι αυτοί ονομάζονται υπόηχοι, και δεν έχουμε ακόμη κατανοήσει πλήρως την επίδραση που ασκούν στον άνθρωπο. Ξέρουμε ωστόσο ότι οι υπέρηχοι μεγάλης έντασης προκαλούν πονοκεφάλους, κόπωση και άγχος. Επιπλέον, οι ισχυροί υπόηχοι μπορούν να προκαλέσουν ακόμη πιο σοβαρά προβλήματα. Τα εσωτερικά μας όργανα (η καρδιά, το συκώτι, το στομάχι, τα νεφρά) συνδέονται με τα οστά με ελαστικούς συνδετικούς ιστούς, και οι ιστοί αυτοί, σε χαμηλές συχνότητες, μπορούν να θεωρηθούν απλοί ταλαντωτές. Οι περισσότεροι έχουν ιδιοσυχνότητες που κυμαίνονται κάτω από τα 12 Hz (δηλαδή βρίσκονται στην υποηχητική ζώνη). Έτσι, τα όργανα αυτά είναι δυνατό να παρουσιάσουν συντονισμό.

»Φυσικά, το πλάτος των ταλαντώσεων στις περιπτώσεις συντονισμού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την απόσβεση, η οποία μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε θερμική. Στην ιδανική περίπτωση που έχουμε μηδενική απόσβεση, το πλάτος συντονισμού θα ήταν απεριόριστο, θα έτεινε στο άπειρο. Στις πραγματικές καταστάσεις, όμως, το πλάτος αυτό μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσβεση. Επίσης, το πλάτος είναι ανάλογο με το μέτρο της αρμονικής δύναμης που προκαλεί τις ταλαντώσεις. Η δύναμη που παράγεται από τους στροβίλους Karman είναι κατά προσέγγιση ανάλογη προς ρv^2, όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα και v η ταχύτητα του ανέμου. Η εμπειρία σας, κύριε Τέρνερ, ήταν δυσάρεστη αλλά υπήρξε σχετικά ακίνδυνη, επειδή ο άνεμος είχε μικρή ταχύτητα. Στην περίπτωση που σας προανέφερα, με τον κυνηγό που βρέθηκε νεκρός μέσα στη σπηλιά, οι άνεμοι ήταν θυελλώδεις...»

«Εντάξει, αλλά πώς εξηγείτε τη συμπεριφορά της Τζούντι, που προσπάθησε να εμποδίσει τον κύριο Τέρνερ;» ρώτησα το φίλο μου. «Προσπάθησε να σώσει τον κύριό της. Μήπως η ακοή των σκύλων στους υπόηχους είναι καλύτερη από τη δική μας, όπως συμβαίνει και με την όσφρησή τους;»

«Πιθανόν», απάντησε χαμογελώντας ο Χολμς. «Παρεμπιπτόντως, το μήκος κύματος ενός υπόηχου με συχνότητα 5 Hz είναι

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{340\,\mathrm{m/sec}}{5\,\mathrm{Hz}} = 68\ \mathrm{m}.$$

Αυτή η τιμή είναι πολύ μεγαλύτερη από το μέγιστο μέγεθος του σκάφους (που είναι 3 m περίπου), οπότε η εξήγησή μας είναι σωστή. Έχω κι άλλον ένα λόγο όμως που υπολόγισα το μήκος κύματος του υπόηχου. Είναι γνωστό στην ακουστική ότι οι μικρές πηγές ηχητικών κυμάτων (μικρές σε σύγκριση με το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπουν) δεν μπορούν να εκπέμπουν μεγάλη ισχύ εξαιτίας της περιορισμένης δυνατότητάς τους να εκπέμπουν τον ήχο. Γι' αυτό αισθανόσασταν τον υπόηχο μόνο όταν ήσασταν μέσα στο σκάφος ή πολύ κοντά του· το μεγαλύτερο μέρος της ακουστικής ενέργειας παρέμενε μέσα σε αυτό.

»Ελπίζω, κύριε Τέρνερ, ότι τώρα θα μπορέσετε να εξηγήσετε στους εργάτες σας πως η δυσφορία που αισθάνθηκαν μέσα στο σκάφος σας δεν οφειλόταν σε κάποιο δαίμονα.»

«Και βέβαια», απάντησε εκείνος. «Θα είναι το πρώτο πράγμα που θα κάνω αύριο.»

...Δυστυχώς, όμως, το «αύριο» επιφύλασσε άλλα γεγονότα. Την επόμενη μέρα η Αγγλία έμπαινε στον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο. Ένα μοναχικό βρετανικό αντιτορπιλικό τορπιλίστηκε από ένα γερμανικό υποβρύχιο και βυθίστηκε σχεδόν αύτανδρο. Μοναδικός επιζών ήταν ο μηχανικός του, Τζον Τέρνερ, που βρέθηκε να κολυμπάει σε μια απέραντη θάλασσα. Οι ώρες περνούσαν, αλλά δεν φαινόταν κανένα πλοίο για να τον σώσει. Ήταν παγωμένος και εξαντλημένος. Είχε αρχίσει να απελπίζεται, όταν αισθάνθηκε κάποιο μεγάλο κήτος να τον πλησιάζει. «Καρχαρίας!» σκέφτηκε με τρόμο. Κοίταξε με αγωνία γύρω του... Δεν ήταν καρχαρίας· ήταν ένα γιγάντιο θαλάσσιο τέρας. Το κεφάλι του έμοιαζε με της φώκιας, αλλά είχε ένα λευκό κέρατο στη μέση του μετώπου του. Για λίγο διάστημα κολύμπησαν δίπλα δίπλα. Έπειτα το κήτος απομακρύνθηκε με μεγάλη ταχύτητα και βυθίστηκε στα βάθη του ωκεανού. Μισή ώρα αργότερα, ένα γαλλικό πλοίο βρήκε τον Τέρνερ και τον περιμάζεψε.

«Είστε πολύ τυχερός, κύριε», άκουσε ένα ναύτη να του λέει σε σπαστά αγγλικά. «Ο πλοίαρχος έχει δύο μέρες να κοιμηθεί. Του φάνηκε ότι είδε με τα κιάλια ένα τέρας, κάτι σαν τεράστια φώκια με κέρατο. Διέταξε αμέσως ν' αλλάξουμε πορεία για να μπορέσουμε να το πλησιάσουμε και να το δούμε καλύτερα. Το τέρας είχε εξαφανιστεί, αλλά βρήκαμε εσάς... Σωθήκατε χάρη σε μια οφθαλμαπάτη, κύριε!»

Για να περνά η ώρα

Σ31

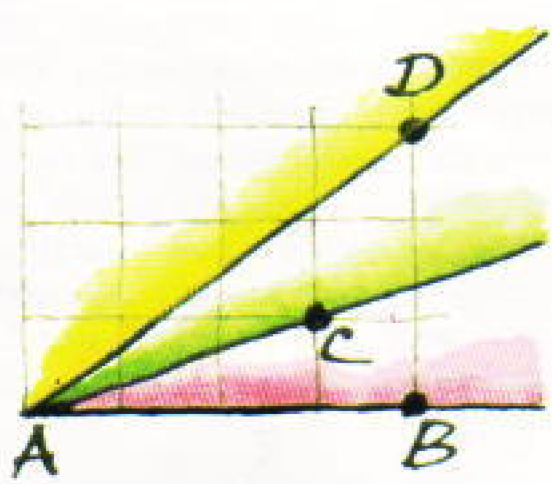
Έγχρωμη λογική. Τέσσερα κορίτσια, η Βαρβάρα, η Χαρά, η Πόπη και η Γεωργία, κάθονται σε κύκλο και κουβεντιάζουν. Το κορίτσι με το πράσινο φόρεμα (που δεν είναι ούτε η Βαρβάρα ούτε η Χαρά) κάθεται ανάμεσα στο κορίτσι με το μπλε φόρεμα και τη Γεωργία. Το κορίτσι με το άσπρο φόρεμα κάθεται ανάμεσα στο κορίτσι με το ροζ φόρεμα και τη Χαρά. Ποιο φόρεμα φοράει το κάθε κορίτσι;

Σ32

Διχοτόμηση σε τετραγωνισμένο χαρτί. Το διπλανό σχήμα πρέπει να το διαιρέσουμε σε έξι ίσα μέρη χωρίζοντάς το κατά μήκος των γραμμών του πλέγματος. Ποια μπορεί να είναι τα σχήματα των ίσων τμημάτων; (M. Koman)

Σ33

Περπατώντας ή τρέχοντας; Μια ομάδα εκδρομέων συναντά ένα μικρό ποτάμι. Ο πρώτος αρχίζει να περπατά αργά και προσεκτικά πάνω σ' έναν κορμό δέντρου που χρησιμεύει ως γέφυρα, αλλά κάποια στιγμή γλιστρά, πέφτει στο ποτάμι και τσαλαβουτώντας φτάνει έως την απέναντι όχθη. Τότε, όμως, ο αρχηγός της ομάδας αντί να περπατήσει αρχίζει να τρέχει πάνω στον κορμό. Το ίδιο κάνουν και οι υπόλοιποι. Γιατί είναι προτιμότερο το τρέξιμο πάνω στον κορμό παρά το περπάτημα; (S. Krotov)



Σ34

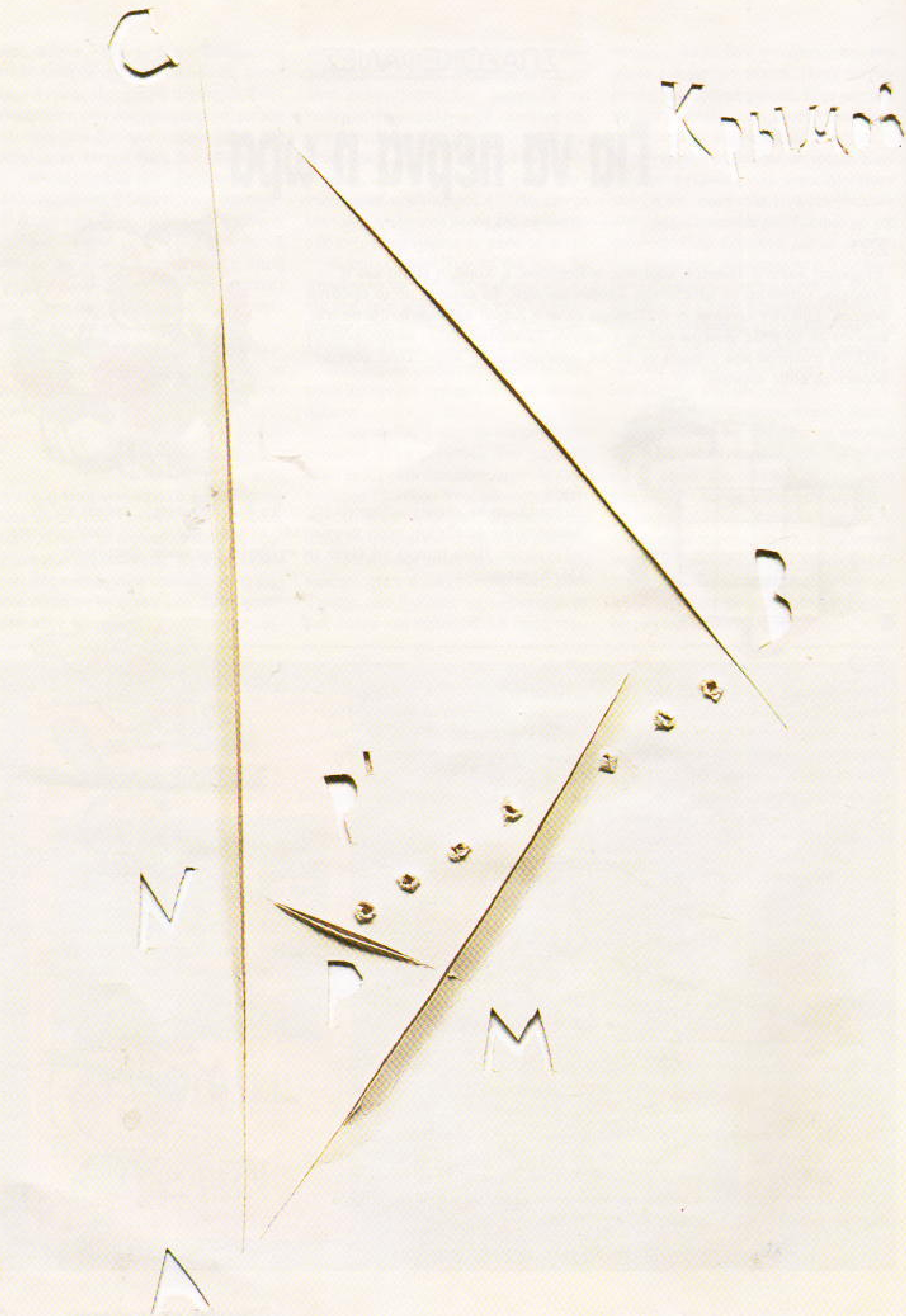
Γεωμετρία στο τετραγωνισμένο χαρτί. Σχεδιάζουμε από τον κόμβο A του πλέγματος τρεις ακτίνες AB, AC, και AD, όπως βλέπουμε στο σχήμα. Χρησιμοποιώντας το τετραγωνικό πλέγμα, αποδείξτε ότι οι γωνίες BAC και CAD είναι ίσες. (M. Koman)

Σ35

Ο πύργος που περισσεύει. Τοποθετούμε δεκαπέντε πύργους σε μια σκακιέρα έτσι ώστε να υπάρχει ένας τουλάχιστον πύργος σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη. Αποδείξτε ότι είναι δυνατό να απομακρύνουμε έναν πύργο και να εξακολουθήσουν να περιέχουν έναν τουλάχιστον πύργο όλες οι γραμμές και οι στήλες. (V. Proizvolov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky


C
Крымов
B
P'
N
P
M
A

Κάνοντας μικρά βήματα προς την απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μικρών διαταραχών

Galina Balk, Mark Balk και Vladimir Boltyansky

ΈΝΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΟΥ ΕΛΕΓχει την ευλογοφάνεια μιας γεωμετρικής πρότασης ή προσπαθεί να κατασκευάσει ένα αντιπαράδειγμα, ακολουθεί συχνά την εξής συλλογιστική: «Θα θεωρήσω μια περίπτωση όπου αληθεύει αυτή η πρόταση και θα μετακινήσω ελαφρά ένα σημείο (ή ευθύγραμμο τμήμα, ή κάποιο άλλο σχήμα). Αν το κάνω αυτό, μπορώ να βρω μια κατάσταση όπου η πρόταση παύει να ισχύει;»

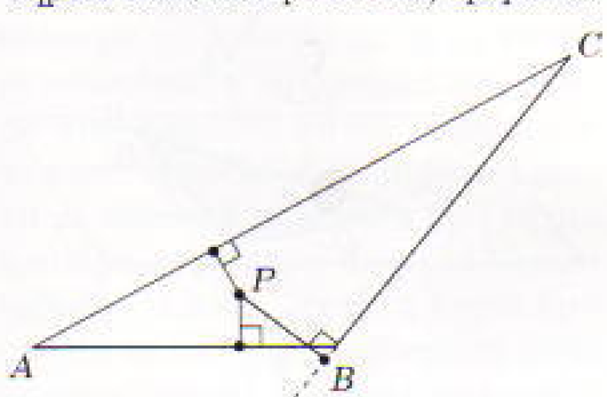
Για πρώτο παράδειγμα, ας δούμε το επόμενο απλό ερώτημα.

Πρόβλημα 1. Ένα σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό ενός κυρτού πολυγώνου και θεωρούμε τις προβολές του στις πλευρές του πολυγώνου ή στις προεκτάσεις τους. Θα ονομάζουμε μια τέτοια προβολή «ευχάριστη» αν ανήκει στην αντίστοιχη πλευρά και «δυσάρεστη» αν ανήκει στην προέκτασή της. Αληθεύει ότι τουλάχιστον δύο από αυτές τις προβολές είναι πάντοτε ευχάριστες;

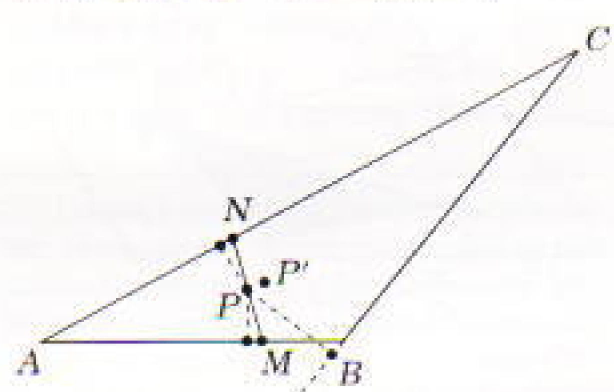
Λύση. Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα σημείο στο εσωτερικό ενός *τριγώνου* ABC. Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, τότε όλες οι προβολές ενός εσωτερικού του σημείου είναι ευχάριστες. Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο είναι εύκολο να βρούμε ένα σημείο με δύο ακριβώς ευχάριστες προβολές. (Μπορούμε να επιλέξουμε ένα κοντά σε μία από τις οξείες γωνίες —βλ. Σχήμα 1.) Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα κυρτό *τετράπλευρο* και ένα σημείο της περιμέτρου του που έχει μία μόνο ευχάριστη προβολή. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, το τετράπλευρο $MNCB$ του Σχήματος 2, όπου η MN είναι τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το P και διαχωρίζει τις προβολές του P πάνω στις AB και AC από την πλευρά BC. Το σημείο P έχει μία μόνο ευχάριστη προβολή ως προς αυτό το τετράπλευρο (το ίδιο το P). Δεν βρίσκεται όμως στο εσωτερικό του τετραπλεύρου. Ας «διαταράξουμε» λοιπόν ελαφρά το διάγραμμα, μετακινώντας ελάχιστα το σημείο P στο εσωτερικό του $MNCB$. Αν η μετακίνηση είναι μικρή, οι προβολές θα μετατοπιστούν πολύ λίγο, και μπορούμε να θεωρήσουμε τόσο μικρές μετατοπίσεις ώστε οι δυσάρεστες προβολές να παραμείνουν στις προεκτάσεις των αντίστοιχων πλευρών —με άλλα λόγια, να παραμείνουν δυσάρεστες. Επομένως, καταλήξαμε σε ένα σημείο P' το οποίο έχει μία μοναδική ευχάριστη προβολή (επί της πλευράς MN για την ακρίβεια).

Πρόβλημα 2. Είναι πασίγνωστο ότι τα ύψη ενός τριγώνου (ή οι προεκτάσεις τους) συντρέχουν σε ένα σημείο. Αληθεύει ότι και τα τέσσερα ύψη ενός τυχαίου τετραέδρου (δηλαδή, οι κάθετες που φέρουμε σε μια έδρα από την απέναντι κορυφή) συντρέχουν σε ένα σημείο;

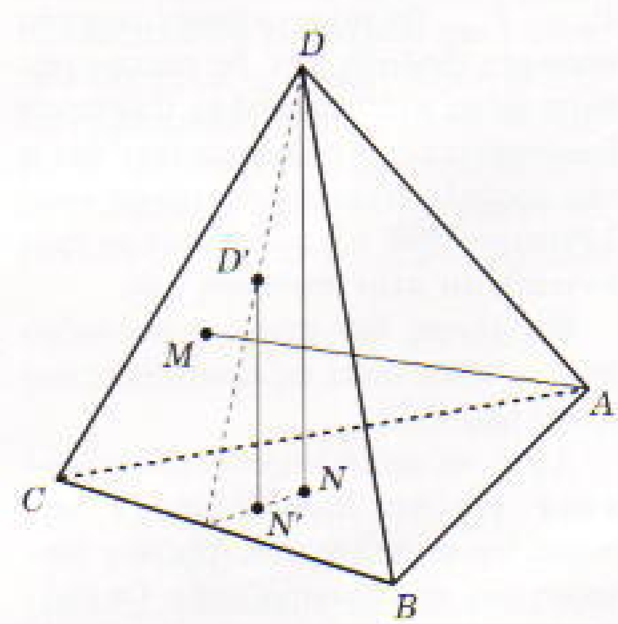
Λύση. Σχεδιάζουμε τα ύψη AM και DN ενός τυχαίου τετραέδρου $ABCD$ (Σχήμα 3). Το διαταράσσουμε μετακινώντας την κορυφή D σε μια νέα θέση D' στο ίδιο επίπεδο BCD. Στο νέο τετράεδρο, το ύψος από την κορυφή A είναι η ίδια ευθεία AM



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

(επειδή τα επίπεδα BCD και BCD' συμπίπτουν). Ταυτόχρονα το ύψος DN μπορεί να μετακινηθεί σε οποιαδήποτε καινούργια θέση $D'N'$ παράλληλη και οσοδήποτε κοντά στην αρχική θέλουμε. Τώρα, είναι φανερό ότι αν μετακινήσουμε κατάλληλα το σημείο D μπορούμε να φροντίσουμε να μην τέμνονται τα ύψη AM και $D'N'$ του νέου τετραέδρου, ακόμη και αν τέμνονταν στο αρχικό. Επομένως, το θεώρημα των υψών για τα τρίγωνα δεν επεκτείνεται και στα τετράεδρα (ή τουλάχιστον, όχι σε όλα τα τετράεδρα).

Πρόβλημα 3. (A. Kuzminykh) Υπάρχει κυρτό πολύεδρο που η ορθογώνια προβολή του ως προς οποιοδήποτε επίπεδο να είναι πολύγωνο με 1995 πλευρές;

Λύση. Αντί να θεωρήσουμε ένα σταθερό πολύεδρο και τα διάφορα επίπεδα πάνω στα οποία προβάλλεται, είναι βολικότερο να θεωρήσουμε ένα σταθερό επίπεδο α και ν' αλλάζουμε τη θέση του πολυέδρου.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα πολύεδρο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Ας το τοποθετήσουμε έτσι ώστε μία από τις ακμές του, η AB, να είναι κάθετη στο επίπεδο α. Τότε οι κορυφές A και B προβάλλονται στην ίδια κορυφή P_1 της προβολής του πολυέδρου στο επίπεδο α —ενός πολυγώνου $P_1P_2 ... P_{1995}$ με 1995 πλευρές. Ας μετακινήσουμε τώρα ελαφρά το πολύεδρο έτσι ώστε η πλευρά AB να αποκτήσει κλίση και η προβολή της να γίνει μια νέα πλευρά του πολυγώνου στο επίπεδο α. Αν η παρέλξη είναι αρκετά μικρή, οι (διαφορετικές μεταξύ τους) κορυφές $P_2, ..., P_{1995}$ θα παραμείνουν αφενός κορυφές (δηλαδή, δεν θα απορροφηθούν μέσα στην προβολή), αφετέρου διαφορετικές. Αυτό σημαίνει ότι η νέα προβολή είναι πολύγωνο με τουλάχιστον 1996 πλευρές, πράγμα που αντιτίθεται στην υπόθεσή μας.

Επομένως, δεν υπάρχει πολύεδρο που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Αυτά τα απλά παραδείγματα αρκούν για να αποκαλύψουν την ουσία της τεχνικής των «μικρών διαταραχών» που εφαρμόζουμε. Οι ιδιότητες ενός γεωμετρικού αντικειμένου χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις *ευσταθείς* ιδιότητες, οι οποίες διατηρούνται έπειτα από οποιαδήποτε (αρκετά μικρή) διαταραχή του σχήματος, και τις *ασταθείς*, οι οποίες παύουν να ισχύουν έπειτα από ορισμένες μικρές διαταραχές. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα 1, «το να ανήκει η προβολή ενός σημείου στην προέκταση μιας πλευράς» είναι ευσταθής ιδιότητα ενός σημείου του πολυγώνου, ενώ «το να ανήκει στην περίμετρο του πολυγώνου» είναι ασταθής. Στο πρόβλημα 3, η ιδιότητα «οι προβολές δύο κορυφών είναι διαφορετικές» είναι ευσταθής, ενώ η ιδιότητα «οι προβολές δύο κορυφών συμπίπτουν» είναι ασταθής. Χαρακτηρίστε μόνοι σας τις ιδιότητες που υπεισέρχονται στο πρόβλημα 2.

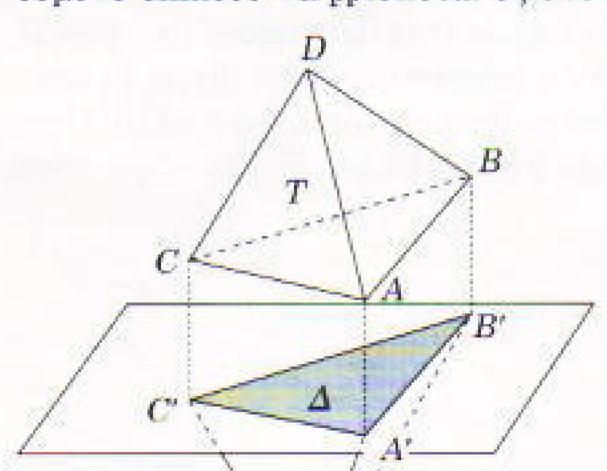
Επομένως, για να βρούμε κάποιο σχήμα με συγκεκριμένο σύνολο ιδιοτήτων, προσπαθούμε πρώτα να επιτύχουμε τις επιθυμητές *ευσταθείς* ιδιότητες και κατόπιν να εκτελέσουμε μια μικρή διαταραχή η οποία θα απομακρύνει τις ιδιότητες που δεν χρειαζόμαστε.

Ας λύσουμε τώρα ένα περισσότερο περίπλοκο πρόβλημα.

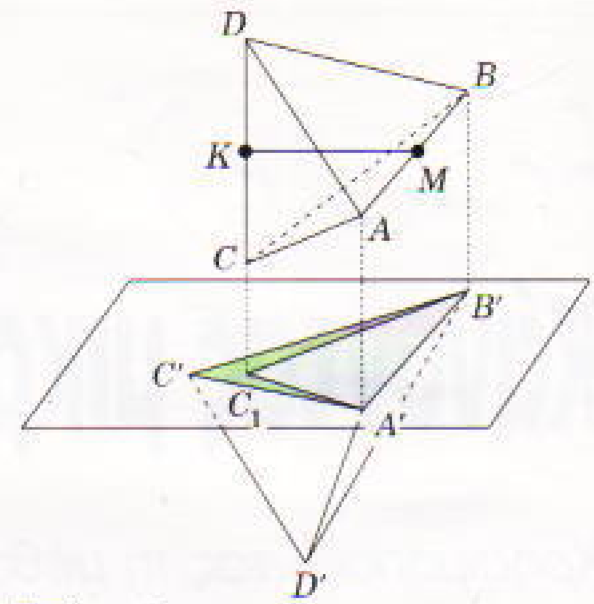
Πρόβλημα 4. Είναι δυνατό ν' ανοίξουμε μια τρύπα σε κανονικό τετράεδρο έτσι ώστε ένα άλλο ίσο τετράεδρο να χωράει να περάσει μέσα απ' αυτήν;

Είναι προτιμότερο να αναδιατυπώσουμε το πρόβλημα (θα δούμε στη συνέχεια ότι τα δύο προβλήματα είναι ισοδύναμα):

Πρόλημα 4α. Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε στο χώρο δύο ίσα κανονικά τετράεδρα T και T' έτσι ώστε η ορθογώνια προβολή του ενός σε δεδομένο επίπεδο να βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο εσωτερικό της προβολής του άλλου τετραέδρου στο ίδιο επίπεδο;



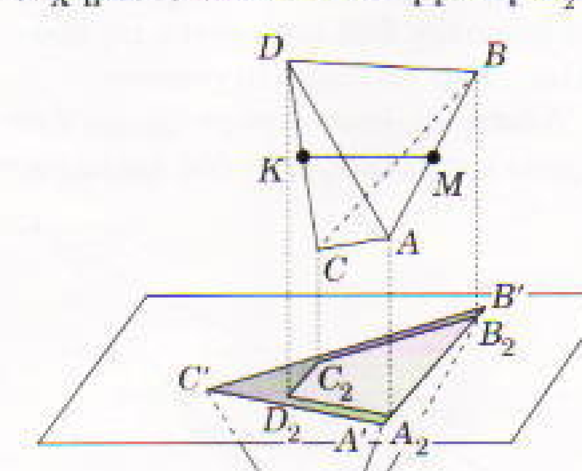
Σχήμα 4



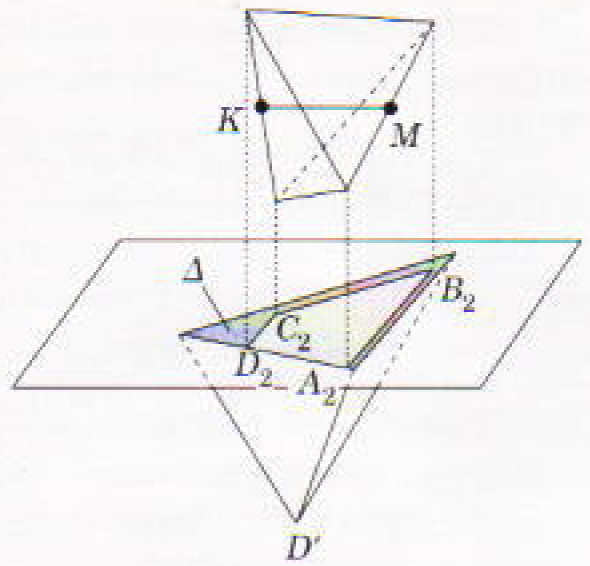
Σχήμα 5

Λύση. Τοποθετήστε το τετράεδρο T' κάτω από το επίπεδο έτσι ώστε η έδρα του $\Delta = A'B'C'$ να βρίσκεται πάνω στο επίπεδο (Σχήμα 4). Φέρνουμε το άλλο τετράεδρο πάνω από το επίπεδο έτσι ώστε η προβολή της έδρας του ABC να συμπίπτει τελείως με την Δ. Θα προσπαθήσουμε τώρα να μετακινήσουμε το T έτσι ώστε να «στριμώξουμε» την προβολή του μέσα στην Δ. Στην αρχή, στρέφουμε το T γύρω από την ακμή AB έως ότου η ακμή CD γίνει κάθετη στο επίπεδό μας (Σχήμα 5). Τότε, η προβολή του T θα είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο $A'B'C_1$ με το C_1 στο εσωτερικό της Δ.

Στη συνέχεια θα κάνουμε την προβολή της ακμής AB μικρότερη από την $A'B' = AB$. Αυτό το επιτυγχάνουμε στρέφοντας ελαφρά το T γύρω από την ευθεία που διέρχεται από τα μέσα M και K των AB και CD αντίστοιχα. Η προβολή του T μετατρέπεται σε ισοσκελές τραπέζιο $A_2B_2C_2D_2$ (Σχήμα 6) του οποίου η βάση A_2B_2



Σχήμα 6



Σχήμα 7

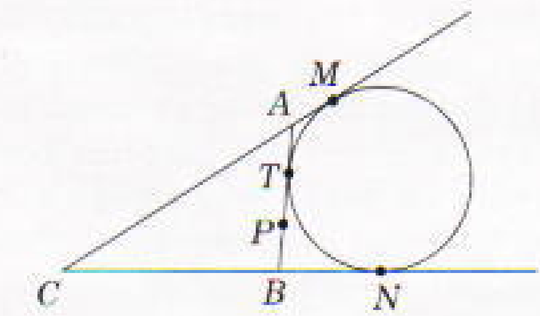
βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$. Η άλλη βάση, C_2D_2, βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό της Δ όταν η γωνία περιστροφής είναι κατάλληλα μικρή.

Τελικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε το T κατά μια μικρή απόσταση παράλληλα με την ευθεία MK έτσι ώστε να φέρουμε τις κορυφές A_2 και B_2 στο εσωτερικό της Δ χωρίς να βγάλουμε τις C_2 και D_2 έξω από την Δ (Σχήμα 7).

Καταλήγουμε λοιπόν σε καταφατική απάντηση για το βοηθητικό πρόβλημα 4α.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα 4, μένει να σημειώσουμε ότι αν αφαιρέσουμε το τμήμα του τετραέδρου T' που αποτελείται απ' όλα τα σημεία που βρίσκονται κάτω ακριβώς από την προβολή τού T στην Δ και κάνουμε την τρύπα που δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο ελάχιστα μεγαλύτερη, τότε αν αφήσουμε το τετράεδρο T να πέσει από τη θέση που το έχουμε φέρει (αυτήν του Σχήματος 7), θα περάσει μέσα από την τρύπα χωρίς να συναντήσει κανένα εμπόδιο.

Μια άλλη κατάσταση όπου αποδεικνύονται χρήσιμες οι μικρές διαταραχές είναι οι περιπτώσεις που θέλουμε να επιλέξουμε (ή να κατασκευάσουμε, ή να βρούμε) ένα σχήμα από δεδομένο σύνολο σχημάτων το οποίο είναι το «βέλτιστο» σύμφωνα με κάποιο κριτήριο (να έχει τη μικρότερη περίμετρο, το μεγαλύτερο εμβαδόν, κ.ο.κ). Συχνά, η κύρια δυσκολία σε αυτά τα προβλήματα είναι να μαντέψουμε τη σωστή απάντηση. Και σ' αυτό ακριβώς μπορεί να βοηθήσει η μέθοδος των μικρών διατα-



Σχήμα 8

ραχών: θεωρούμε ένα σχήμα που ανήκει στο δεδομένο σύνολο και προσπαθούμε να το βελτιώσουμε μέσω μιας μικρής διαταραχής. Αν δεν τα καταφέρουμε, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι έχουμε διαλέξει το επιθυμητό σχήμα. (Φυσικά, την εικασία μας πρέπει να την επιβεβαιώσει μια αυστηρή απόδειξη.)

Πρόβλημα 5. Δίνεται ένα σημείο P στο εσωτερικό μιας γωνίας. Σχεδιάστε μια ευθεία που διέρχεται από το P και τέμνει επί της δεδομένης γωνίας ένα τρίγωνο με την μικρότερη δυνατή περίμετρο.

Αναζήτηση λύσης. Η περίμετρος ενός τριγώνου ABC εκφράζεται συναρτήσει του μήκους των εφαπτομένων που φέρουμε από, ας πούμε, την κορυφή C στον κύκλο που εφάπτεται (εξωτερικά) της πλευράς AB και των προεκτάσεων των CA και CB (Σχήμα 8). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι δύο εφαπτόμενες από ένα σημείο προς τον ίδιο κύκλο έχουν ίσο μήκος, συμπεραίνουμε ότι η περίμετρος $2s$ ισούται με

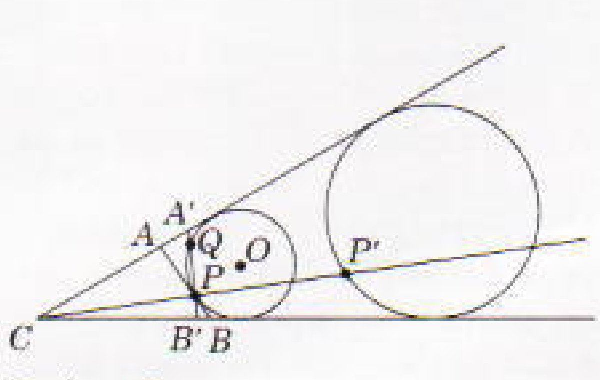
$$\begin{aligned} 2s &= CA + AB + BC \\ &= CA + AT + TB + BC \\ &= CA + AM + NB + BC \\ &= CM + CN \\ &= 2CM, \end{aligned}$$

όπου T, M, και N είναι τα σημεία επαφής με τον συγκεκριμένο κύκλο.[1] Αυτός είναι ένας από τους *παρεγγεγραμμένους* κύκλους του τριγώνου.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τρίγωνο ABC ορίζεται από τη δεδομένη γωνία (με κορυφή C) και από την ευθεία AB που διέρχεται από το P. Αν συμπιέσουμε τον κύκλο κατευθύνοντάς τον προς το C έτσι ώστε να εξακολουθήσει να είναι εγγεγραμμένος στη γωνία και στρέψουμε κατάλληλα την ευθεία AB έτσι ώστε να συνεχίσει να εφάπτεται του κύκλου, τότε το εφαπτόμενο τμήμα CM, συνεπώς και η περίμετρος του τριγώνου ABC, γίνεται μικρότερο. Αυτή η διαταραχή που μικραίνει την περίμετρο είναι δυνατή εφόσον το σημείο P παραμένει εκτός του κύκλου. Από τη στιγμή που το σημείο P φτάνει στον κύκλο είναι αδύνατο να συνεχίσουμε τη διαδικασία. Επομένως, είναι απολύτως λογικό να θεωρήσουμε ότι επιτυγχάνουμε τη μικρότερη δυνατή περίμετρο με το τρίγωνο ABC, ο εξωτερικός κύκλος του οποίου εφάπτεται της AB στο P. Τώρα πλέον μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακριβή απόδειξη χωρίς μεγάλη προσπάθεια.

Σχεδιάζουμε έναν τυχαίο κύκλο εγγεγραμμένο στη δεδομένη γωνία. Έστω P' το σημείο τομής του με την ευθεία CP που βρίσκεται πλησιέστερα στο C. Η ομοιοθεσία ως προς κέντρο C με λόγο CP/CP' μεταφέρει αυτόν τον κύκλο σε έναν κύκλο O εγγεγραμμένο στη δεδομένη γωνία και που διέρχεται από το P (το οποίο βρίσκεται στο τόξο που είναι προς το μέρος της κορυφής C —βλ. Σχήμα 9). Έστω A και B τα σημεία τομής της εφαπτομένης του κύκλου O που διέρχεται από το P με τις πλευρές της γωνίας. Τότε το τρίγωνο ABC είναι το ζητούμενο.

Πραγματικά, ας θεωρήσουμε ένα άλλο τρίγωνο $A'B'C$ το οποίο σχηματίζεται από τη γωνία και μια ευθεία που διέρχεται από το P. Αφού η $A'B'$ δεν εφάπτεται του κύκλου O, τον τέμνει και σε ένα ακόμα σημείο, έστω Q. Επομένως, ο παρεγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A'B'C$ βρίσκε-



Σχήμα 9

1. Αυτή η όχι και τόσο προφανής σχέση είναι το ωραιότερο σημείο της απόδειξης που ακολουθεί, και είναι σχεδόν απίθανο να βρεθεί μέσω της μεθόδου των μικρών διαταραχών. Όμως, αν είστε τόσο τυχεροί —ή τόσο έξυπνοι— ώστε να την ανακαλύψετε, η μέθοδος των διαταραχών θα σας βοηθήσει να τη χρησιμοποιήσετε κατάλληλα.

ται πιο μακριά από την κορυφή C απ' ό,τι ο κύκλος O. Άρα, το τρίγωνο $A'B'C$ έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το τρίγωνο ABC.

Μπορείτε να διατρέξετε την απόδειξη ακόμη μια φορά για να βεβαιωθείτε ότι το τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο είναι μοναδικό.

Το επόμενο παράδειγμα φανερώνει ότι η μέθοδος των μικρών διαταραχών είναι χρήσιμη και σε περιπτώσεις μη γεωμετρικών προβλημάτων.

Πρόβλημα 6. Τρεις φίλοι, ο Αλέκος, ο Βασίλης και η Γεωργία, οργάνωσαν ένα σκακιστικό τουρνουά μεταξύ τους, στο οποίο κάθε αντίπαλος έπαιξε το ίδιο πλήθος αγώνων με τους άλλους. Μετά το τέλος των παιχνιδιών, ο Αλέκος δήλωσε ότι θεωρεί τον εαυτό του νικητή, διότι είχε λιγότερες ήττες από τους άλλους δύο παίκτες. Ο Βασίλης υποστήριξε ότι του ανήκει η πρώτη θέση διότι είχε τις περισσότερες νίκες, ενώ η Γεωργία επισήμανε ότι είχε την υψηλότερη βαθμολογία (κάθε παίκτης κέρδιζε 1 βαθμό για κάθε νίκη, 1/2 για ισοπαλία και 0 για ήττα). Είναι δυνατό να έχουν και οι τρεις φίλοι δίκιο, ή κάποιος απ' αυτούς υπολόγισε λάθος τα αποτελέσματα;

Λύση. Ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα τουρνουά που θα ικανοποιεί και τις τρεις συνθήκες που διατύπωσαν οι σκακιστές μας. Θα είναι βολικό να το «συναρμολογήσουμε» από τρεις διαφορετικούς *γύρους* —δηλαδή, σύνολα τριών αγώνων ανάμεσα σε καθένα από τα τρία διαφορετικά ζεύγη παικτών. Ένα ζεύγος γύρων θα ονομάζεται *διπλός γύρος τύπου–Α* (από το αρχικό γράμμα του Αλέκου) αν (α) ο Αλέκος φέρνει ισοπαλία και στους τέσσερις αγώνες του και (β) ο Βασίλης κερδίζει τη Γεωργία στον πρώτο γύρο ενώ χάνει απ' αυτήν στον δεύτερο. Αυτός ο διπλός γύρος, καθώς επίσης και οποιοδήποτε πλήθος τέτοιων γύρων, ικανοποιεί τη συνθήκη του Αλέκου: έχει τις λιγότερες ήττες (ουδεμία ήττα). Ταυτόχρονα, σε έναν διπλό γύρο τύπου–Α και οι τρεις φίλοι έχουν την ίδια βαθμολογία, ο Αλέκος έχει τις λιγότερες νίκες, και οι άλλοι δύο παίκτες έχουν το ίδιο πλήθος από νίκες και ήττες (μία νίκη και μία ήττα). Το ίδιο θα ισχύει και σε ένα τουρνουά των, ας πούμε, 100 διπλών γύρων τύπου–Α.

Ας διαταράξουμε τώρα αυτό το μεγάλο τουρνουά προσθέτοντας ένα συγκριτικά μικρό πλήθος γύρων (που δεν είναι αναγκαστικά διπλοί γύροι τύπου–Α). Η συνθήκη του Αλέκου θα εξακολουθήσει να ισχύει (διότι θα έχει ένα μικρό σχετικά πλήθος ήττες —όχι μεγαλύτερο από το πλήθος των πρόσθετων γύρων— ενώ ο Βασίλης και η Γεωργία θα έχουν τουλάχιστον 100 ήττες ο καθένας). Με άλλα λόγια, αυτή η συνθήκη είναι σταθερή. Ας προσπαθήσουμε να επιλέξουμε μια διαταραχή που θα ικανοποιεί τη συνθήκη του Βασίλη. Ας θεωρήσουμε έναν διπλό γύρο τύπου–Γ (στον οποίο η Γεωργία φέρνει μόνο ισοπαλίες, ενώ ο Αλέκος και ο Βασίλης κερδίζουν εναλλάξ τα μεταξύ τους παιχνίδια). Τώρα παραμένει η ίση βαθμολογία μεταξύ των παικτών, αλλά ο Βασίλης έχει πλέον περισσότερες νίκες από τη Γεωργία. Επομένως, έπειτα από 100 διπλούς γύρους τύπου–Α και, ας πούμε, 10 διπλούς γύρους τύπου–Γ, ο Αλέκος, ο Βασίλης και η Γεωργία θα έχουν, αντίστοιχα, 10, 110 και 100 ήττες και 10, 110 και 100 νίκες, οπότε ικανοποιούνται οι συνθήκες του Αλέκου και του Βασίλη. Όμως, η βαθμολογία και των τριών παικτών είναι η ίδια (220 βαθμοί), άρα δεν ικανοποιείται η συνθήκη της Γεωργίας.

Επομένως, ας διαταράξουμε λίγο ακόμη το τελευταίο τουρνουά προσθέτοντας έναν ακόμη γύρο (που, βέβαια, δεν θα καταστρατηγεί τις δύο πρώτες συνθήκες) έτσι ώστε να συγκεντρώσει η Γεωργία την υψηλότερη βαθμολογία. Για παράδειγμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε αυτόν τον γύρο η Γεωργία κερδίζει τον Αλέκο και τον Βασίλη ενώ αυτοί φέρνουν ισοπαλία μεταξύ τους. Έτσι συμπληρώνεται η κατασκευή του ζητούμενου τουρνουά.

Ασκήσεις.

1. Ένα τετράπλευρο $ABCD$ έχει ίσες και κάθετες διαγωνίους και ένα ζεύγος ίσων απέναντι πλευρών ($AB = CD$). Είναι υποχρεωτικά τετράγωνο;

2. Σε ένα κυρτό πεντάγωνο και οι πέντε πλευρές είναι ίσες. Το πεντάγωνο αυτό είναι αναγκαστικά κανονικό;

3. Ένα κυρτό πεντάγωνο με ίσες διαγωνίους είναι αναγκαστικά κανονικό;

4. Ένα κυρτό εξάγωνο έχει παράλληλες απέναντι πλευρές και ίσες τις διαγωνίους που συνδέουν απέναντι κορυφές. Είναι αναγκαστικά κανονικό;

5. Ένα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο έχει ίσες διαγωνίους. Οι απέναντι πλευρές του είναι υποχρεωτικά παράλληλες; (Υπόδειξη: ξεκινήστε με ένα τετράγωνο!)

6. Δίνονται $2n$ σημεία $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n$ στο επίπεδο. Αποδείξτε ότι είναι δυνατόν να τα μετακινήσουμε κατά οσοδήποτε μικρή απόσταση έτσι ώστε κανένα από τα τμήματα $A_1B_1, ..., A_nB_n$ να μην είναι παράλληλο με κάποιο από τα άλλα και, επίσης, να μην υπάρχουν τρία απ' αυτά που συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

7. Δίνονται n τυχαία σημεία στο χώρο. Αποδείξτε ότι είναι δυνατό να τα μετακινήσουμε κατά οσοδήποτε μικρή απόσταση έτσι ώστε να μην υπάρχουν τέσσερα συνεπίπεδα.

8. Αποδείξτε ότι μπορούμε να διαταράξουμε κατά οσοδήποτε μικρή απόσταση $n - 5$ κορυφές ενός κυρτού n-γώνου ($n > 5$) έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρεις διαγώνιοι που να συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

9. Αποδείξτε ότι μπορούμε να μεταβάλουμε κατά οσοδήποτε μικρή ποσότητα τον σταθερό όρο a_n του πολυωνύμου $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ έτσι ώστε το πολυώνυμο να μην έχει πολλαπλές ρίζες. (Πολλαπλή ρίζα είναι αυτή που αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερους ταυτόσημους παράγοντες του πολυωνύμου.)

10. Να φέρετε μια ευθεία που θα διέρχεται από ένα σημείο P στο εσωτερικό δεδομένης γωνίας έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα τρίγωνο με το μικρότερο δυνατόν εμβαδό.

11. Αν ένα τετράπλευρο είναι κυρτό, το άθροισμα των διαγωνίων του είναι μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρό του. Βρείτε ένα αντιπαράδειγμα που αποδεικνύει ότι η αντίστροφη πρόταση είναι εσφαλμένη. ◙

Οι άγρυπνες νύχτες του Lewis Carroll

Δύο προβλήματα πιθανοτήτων για όσους υποφέρουν από αϋπνία

Martin Gardner

ΤΟ "LEWIS CARROLL" ΗΤΑΝ ΤΟ ψευδώνυμο του Charles Dodgson, καθηγητή μαθηματικών στο Christ Church, ένα από τα κολέγια του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης στην Αγγλία. Είναι, φυσικά, περισσότερο γνωστός ως ο συγγραφέας των δύο αθάνατων ιστοριών της Αλίκης και μιας μακροσκελούς δυσνόητης μπαλάντας με τίτλο *The Hunting of the Snark* (Το κυνήγι του Φιρχαρία).[1]

Το 1893 ο Carroll εξέδωσε ένα μικρό βιβλίο με εβδομήντα δύο πρωτότυπες μαθηματικές σπαζοκεφαλιές, πολλές από τις οποίες ήταν δύσκολο να λυθούν. Ο τίτλος του βιβλίου ήταν *Pillow-Problems Thought Out During Sleepless Nights* (Προβλήματα στο προσκέφαλο εμπνευσμένα κατά τις άγρυπνες νύχτες). Στη δεύτερη έκδοση του βιβλίου άλλαξε το «άγρυπνες νύχτες» του τίτλου με το «άγρυπνες ώρες», ώστε να μη θεωρήσουν οι αναγνώστες ότι υπέφερε από χρόνιες αϋπνίες. Στην τέταρτη έκδοση (1895) προστέθηκε μια καινούργια εισαγωγή. Ο Carroll σκόπευε να χρησιμοποιήσει αυτό το βιβλίο ως δεύτερο μέρος ενός έργου που ονόμαζε *Curiosa Mathematica* (Μαθηματικά περίεργα). Το πρώτο μέρος, *A New Theory of Parallels* (Μια νέα θεωρία των παραλλήλων), ήταν υπερβολικά σοβαρό για να θεωρηθεί ψυχαγωγικό, παρότι ήταν γραμμένο με το συνηθισμένο χιούμορ του Carroll.

Τα προβλήματα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στο *Pillow-Problems* αφορούν πιθανότητες. Το πρώτο, το πρόβλημα 5, είναι απλό στη διατύπωσή του αλλά η σωστή του ανάλυση είναι εξαιρετικά πολύπλοκη:

«Ένα σακούλι περιέχει μια σφαίρα που γνωρίζουμε ότι είναι είτε άσπρη είτε μαύρη. Βάζουμε μια άσπρη σφαίρα μέσα στο σακούλι, ανακατεύουμε τις σφαίρες, και κατόπιν βγάζουμε μια σφαίρα από το σακούλι που αποδεικνύεται άσπρη. Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να τραβήξουμε άσπρη σφαίρα;»

Όπως γράφει ο Carroll, νιώθουμε τον πειρασμό να απαντήσουμε 1/2. Πριν βγάλουμε την άσπρη σφαίρα, το σακούλι υποτίθεται ότι περιέχει, με ίσες πιθανότητες, είτε μια μαύρη και μια άσπρη σφαίρα είτε δύο άσπρες. Αν έχουμε μια μαύρη και μια άσπρη σφαίρα, τότε όταν τραβήξουμε την άσπρη,

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

1. Το Snark, σύνθετη λέξη από το Snail (σαλιγκάρι) και το Sark (καρχαρίας), είναι ένα από τα χιλιάδες λογοπαίγνια του Carroll. Η μπαλάντα αυτή, την οποία έγραψε ο Dodgson το 1876, είναι ακόμη και σήμερα μια από τις πιο γνωστές και μακροσκελείς μπαλάντες της αγγλικής γλώσσας με ασυνάρτητο περιεχόμενο. Στα ελληνικά, κυκλοφορεί από τις Εκδόσεις Ύψιλον. (Σ.τ.επιστ.συμβ.)

στο σακούλι θα απομείνει η μαύρη. Αν είναι και οι δύο άσπρες, θα απομείνει η άσπρη. Εφόσον οι δύο καταστάσεις είναι εξίσου πιθανές, φαίνεται πως όταν βγάζουμε μια άσπρη σφαίρα, αυτή που απομένει στο σακούλι έχει ίδιες πιθανότητες να είναι μαύρη ή άσπρη.

Ο Carroll υποστηρίζει δίκαια ότι το προηγούμενο επιχείρημα, αν και διαισθητικά εύλογο, είναι απολύτως λανθασμένο. Έστω ότι το *A* συμβολίζει μια άσπρη σφαίρα τοποθετημένη από την αρχή μέσα στο σακούλι, το *B* μια μαύρη, και το *C* την άσπρη που προσθέτουμε εκ των υστέρων. Αφού τραβήξουμε την άσπρη σφαίρα, υπάρχουν τρεις, και όχι δύο, ισοπίθανες καταστάσεις:

1. Τραβήξαμε τη *C*, αφήνοντας την *A*.
2. Τραβήξαμε την *A*, αφήνοντας τη *C*.
3. Τραβήξαμε τη *C*, αφήνοντας τη *B*.

Στις δύο πρώτες περιπτώσεις απομένει μια άσπρη σφαίρα στο σακούλι. Στην τρίτη, η σφαίρα που απομένει είναι μαύρη. Επομένως, η κάπως απροσδόκητη απάντηση είναι 2/3.

Η πιθανότητα να τραβήξουμε την πρώτη φορά μια άσπρη σφαίρα είναι 3/4, και η πιθανότητα να είναι άσπρη η σφαίρα που απομένει είναι επίσης 3/4. Φυσικά, από τη στιγμή που θα δείτε ότι το χρώμα της σφαίρας που τραβήξατε είναι άσπρο, οι πιθανότητες αλλάζουν. Αν είναι μαύρη, η σφαίρα που απομένει είναι σίγουρα άσπρη. Αν είναι άσπρη, τότε η σφαίρα που απομένει στο σακούλι είναι άσπρη με πιθανότητα 2/3 και μαύρη με πιθανότητα 1/3. Όλα αποσαφηνίζονται με τη βοήθεια ενός ανεστραμμένου δενδρικού διαγράμματος (δείτε το σχήμα στη συνέχεια).

Τα κλάσματα αντιπροσωπεύουν πιθανότητες. Η πιθανότητα καθενός από τα τέσσερα αποτελέσματα (τελευταία γραμμή στο σχήμα) είναι 1/2 επί 1/2, δηλαδή 1/4. Το διάγραμμα μας δείχνει ότι τρεις στις τέσσερις φορές θα τραβήξουμε άσπρη σφαίρα, ενώ τρεις φορές στις τέσσερις απομένει άσπρη σφαίρα στο σακούλι. Αν δεν υπολογίσουμε την περίπτωση τραβήγματος της μαύρης σφαίρας —ας υποθέσουμε ότι κάθε φορά που βγάζουμε μαύρη σφαίρα την τοποθετούμε ξανά στο σακούλι και συνεχίζουμε ώσπου να βγάλουμε άσπρη σφαίρα— δύο φορές στις τρεις η σφαίρα που απομένει είναι άσπρη.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε εύκολα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τραπουλόχαρτα. Ανακατεύουμε την τράπουλα και διαλέγουμε ένα φύλλο χωρίς να κοιτάξουμε ποιο είναι. Βάζουμε δίπλα του, χωρίς να το φανερώνουμε, ένα φύλλο που γνωρίζουμε πως είναι κόκκινο. Γυρίζουμε την πλάτη μας, όσο ένας φίλος μας θα ανακατέψει τις θέσεις των δύο φύλλων. Ξαναγυρίζουμε και επιλέγουμε ένα φύλλο. Η πιθανότητα να είναι κόκκινο ισούται με 3/4 και η πιθανότητα να είναι το άλλο φύλλο κόκκινο είναι επίσης 3/4. Αναποδογυρίστε το φύλλο που διαλέξατε. Αν είναι μαύρο, το άλλο φύλλο *είναι* κόκκινο. Αν είναι κόκκινο, η πιθανότητα να είναι κόκκινο το άλλο φύλλο ισούται με 2/3.

Το τελευταίο πρόβλημα του βιβλίου, το 72ο, έχει προκαλέσει πολλές έντονες συζητήσεις.

«*Ένα σακούλι περιέχει δύο σφαίρες για τις οποίες γνωρίζουμε μόνο ότι η καθεμιά είναι είτε μαύρη είτε άσπρη. Καθορίστε το χρώμα τους χωρίς να τις βγάλετε από το σακούλι.*»

Ιδού η εντυπωσιακή απάντηση του Carroll:

«*Γνωρίζουμε ότι αν το σακούλι περιείχε τρεις σφαίρες, δύο μαύρες και μια άσπρη, η πιθανότητα να τραβήξουμε μαύρη σφαίρα θα ήταν 2/3, και γνωρίζουμε επίσης ότι ουδεμία άλλη κατάσταση δίνει αυτή την πιθανότητα.*

»Τώρα, η πιθανότητα να είναι οι σφαίρες που περιέχονται στο δεδομένο σακούλι (α) ΜΜ, (β) ΜΑ, (γ) ΑΑ, είναι αντίστοιχα 1/4, 1/2, 1/4.

»Προσθέτουμε μία μαύρη σφαίρα.

»Οι πιθανότητες τώρα να είναι οι σφαίρες που περιέχονται στο σακούλι (α) ΜΜΜ, (β) ΜΑΜ, (γ) ΑΑΜ, είναι, όπως και πριν, 1/4, 1/2, 1/4.

»Επομένως, η πιθανότητα να τραβήξουμε τώρα μια μαύρη σφαίρα είναι

$$1/4 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2/3 + 1/4 \cdot 1/3 = 2/3.$$

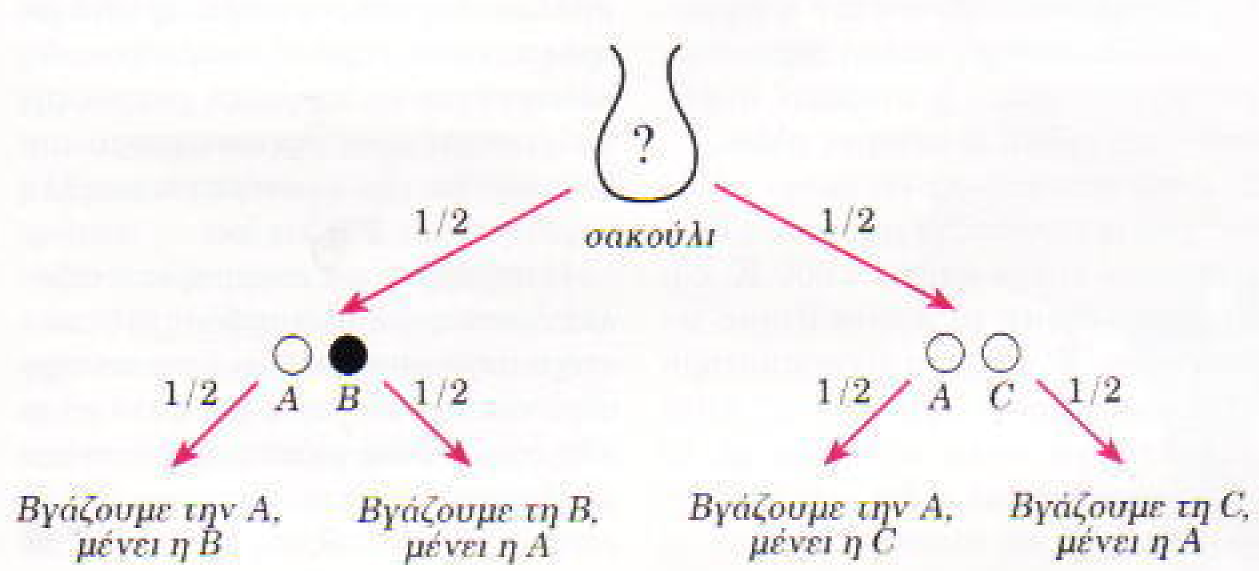
»Επομένως το σακούλι περιέχει τώρα τις σφαίρες ΜΜΑ (αφού ουδεμία άλλη κατάσταση δίνει αυτή την πιθανότητα).

»Άρα, πριν προστεθεί η μαύρη σφαίρα, περιείχε τις ΜΑ, δηλαδή μία μαύρη και μία άσπρη».

Η απόδειξη είναι τόσο φανερά λανθασμένη ώστε δύσκολα καταλαβαίνουμε γιατί αρκετοί κορυφαίοι μαθηματικοί την πήραν στα σοβαρά και την παραθέτουν ως παράδειγμα για το πόσο λίγο κατανοούσε ο Carroll τη θεωρία των πιθανοτήτων! Δεν υπάρχει όμως η ελάχιστη αμφιβολία ότι ήταν ένας αστεϊσμός του Carroll. Στα υπόλοιπα δεκατρία προβλήματα πιθανοτήτων του βιβλίου του δίνει απολύτως σωστές απαντήσεις. Στην εισαγωγή του βιβλίου αποκαλύπτει την φάρσα:

«*Αν κάποιος από τους αναγνώστες μου αισθανθεί την επιθυμία να με κατηγορήσει ότι έχω ασχοληθεί αποκλειστικά με την περιοχή του Κοινότοπου, χωρίς να διακινδυνέψω ποτέ μια περιήγηση έξω από τα οικεία μονοπάτια, μπορώ με υπερηφάνεια να του επισημάνω ένα πρόβλημα των «Υπερβατικών Πιθανοτήτων» —ένα θέμα που, όπως πιστεύω, έχει αντιμετωπιστεί ελάχιστα ακόμη και από τους πλέον ριψοκίνδυνους ερευνητές των μαθηματικών. Στον συνηθισμένο αναγνώστη μπορεί να φανεί αφύσικο, ίσως και παράδοξο —όμως αυτός ο αναγνώστης πρέπει να αναρωτηθεί ειλικρινά: "Και η ίδια η ζωή δεν είναι ένα Παράδοξο;"».*

Ένα ιδιαίτερο γνώρισμα του Carroll ήταν ότι τελείωνε τα βιβλία του με κάποια από τις χαρακτηριστικές παραδοξολογίες του. ◘



ΜΕ ΛΙΓΗ ΦΑΝΤΑΣΙΑ

Το «πλέον αδρανειακό» σύστημα αναφοράς

Gennady Myakishev

Ένα αδρανειακο συστημα αναφοράς είναι ένα σύστημα όπου τα ελεύθερα σώματα κινούνται με σταθερές ταχύτητες. Αν είμαστε αυστηροί, δεν είναι αδρανειακό κάθε σύστημα που συνήθως υποτίθεται πως είναι αδρανειακό. Μπορεί να γίνει λόγος μόνο για συστήματα *κατά προσέγγιση* αδρανειακά.

Το γεωκεντρικό σύστημα δεν είναι αδρανειακό λόγω της κυκλικής κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο και, το κυριότερο, λόγω της κίνησής της γύρω από τον άξονα περιστροφής της. Η αντίστοιχη επιτάχυνση είναι μέγιστη στον ισημερινό —μόνο 3,4 cm/sec^2. Η τιμή αυτή είναι πολύ μικρότερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 980$ cm/sec^2. Ο λόγος της αδρανειακής φυγόκεντρης δύναμης προς τη δύναμη της βαρύτητας είναι περίπου 0,4%. Κατά συνέπεια, σε πάρα πολλές περιπτώσεις μπορεί να υποτεθεί ότι η Γη αποτελεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Η επιτάχυνση Coriolis λόγω της κίνησης στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς δεν υπερβαίνει το 0,1%. Παρ' όλα αυτά η αδρανειακή δύναμη Coriolis αποκτά σημασία όταν η κίνηση διαρκεί πολύ χρόνο.

Το ηλιοκεντρικό σύστημα αναφοράς είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό αδρανειακό. Κανένα δυνατό πείραμα στο παρόν ή στο μέλλον δεν μπορεί να διακρίνει τον μη αδρανειακό χαρακτήρα του ηλιοκεντρικού συστήματος αναφοράς. Μιλώντας όμως αυστηρά, δεν αποτελεί αδρανειακό σύστημα. Ο Ήλιος μας βρίσκεται στις παρυφές του Γαλαξία μας και συμπληρώνει μία περιφορά γύρω από το κέντρο του κάθε 200 εκατομμύρια χρόνια. Ίσως λοιπόν είναι αδύνατο να βρει κανείς ένα σύστημα αναφοράς «περισσότερο αδρανειακό» από το σύστημα με κέντρο τον Ήλιο (ή το κέντρο του Γαλαξία).

Και όμως, πρόσφατα έγινε μάλλον σαφές ότι τα πράγματα δεν είναι έτσι. Μην ξεχνάτε ότι η συζήτηση δεν γίνεται επειδή υπάρχει κάποια πρακτική ανάγκη για το «πλέον αδρανειακό σύστημα αναφοράς» αλλά επειδή αποτελεί ένα θέμα με θεωρητική σημασία.

Είναι γενικά παραδεκτό ότι 15 δισεκατομμύρια χρόνια πριν έγινε μια «Μεγάλη Έκρηξη», και έκτοτε το σύμπαν διαστέλλεται συνεχώς. Αρχικά η θερμοκρασία του σύμπαντος ήταν εξαιρετικά μεγάλη, αλλά καθώς διαστελλόταν, η ταχύτητα των συστατικών των σωματιδίων ελαττωνόταν και το σύμπαν άρχισε να ψύχεται. Στη θερμοκρασία των 10^9 K, δεν ήταν δυνατό να υπάρξουν ούτε άτομα ούτε ατομικοί πυρήνες. Η κινητική ενέργεια των σωματιδίων υπερέβαινε την ενέργεια σύνδεσης των νουκλεονίων —όταν σχηματίζονταν, διαλύονταν αμέσως με την επόμενη σύγκρουση. Έτσι όλα τα σωματίδια —πρωτόνια, ηλεκτρόνια, φωτόνια και νετρόνια— βρίσκονταν σε δυναμική ισορροπία. Ο αριθμός των σωματιδίων που σχηματίζονταν από τις συγκρούσεις ήταν κατά μέσον όρο ίσος με τον αριθμό των σωματιδίων που εξαφανίζονταν κατά τις συγκρούσεις. Μόνο όταν η θερμοκρασία ελαττώθηκε ακόμη περισσότερο εμφανίστηκαν οι ατομικοί πυρήνες— και πρώτα οι πυρήνες ηλίου.

Αυτό συνεχίστηκε για εκατό χιλιάδες χρόνια περίπου, μέχρις ότου η θερμοκρασία έπεσε στους 3.000 K και σχηματίστηκαν τα πρώτα άτομα υδρογόνου. Ένα άτομο είναι σύστημα ηλεκτρικώς ουδέτερο, και γι' αυτό αλληλεπιδρά πολύ ασθενικά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο —δηλαδή τα φωτόνια. Ως εκ τούτου, σε αυτή τη φάση δημιουργήθηκε ένα «ρήγμα» μεταξύ ακτινοβολίας και ύλης. Τα υπάρχοντα φωτόνια ψύχθηκαν βαθμιαία καθώς το σύμπαν διαστελλόταν, ανεξάρτητα από τους άλλους τύπους σωματιδίων. Η θερμοκρασία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας έπεσε. Αυτή η «παραμένουσα» ακτινοβολία (ή κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου) είναι ακόμη παρούσα, και μπορεί να ανιχνευθεί οπουδήποτε μέσα στο σύμπαν.

Η ύπαρξη της παραμένουσας ακτινοβολίας είχε προβλεφθεί θεωρητικά από τους αμερικανούς επιστήμονες Alfer και Herman. Το 1964 οι Penzias και Wilson ανακάλυψαν πειραματικά με ραδιοτηλεσκόπιο την ακτινοβολία αυτή. Η ακτινοβολία υποβάθρου φτάνει στη Γη από κάθε κατεύθυνση. Είναι θερμική ακτινοβολία με μέγιστο ενέργειας σε μήκος κύματος $\lambda = 1$ mm, που αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 3 K.

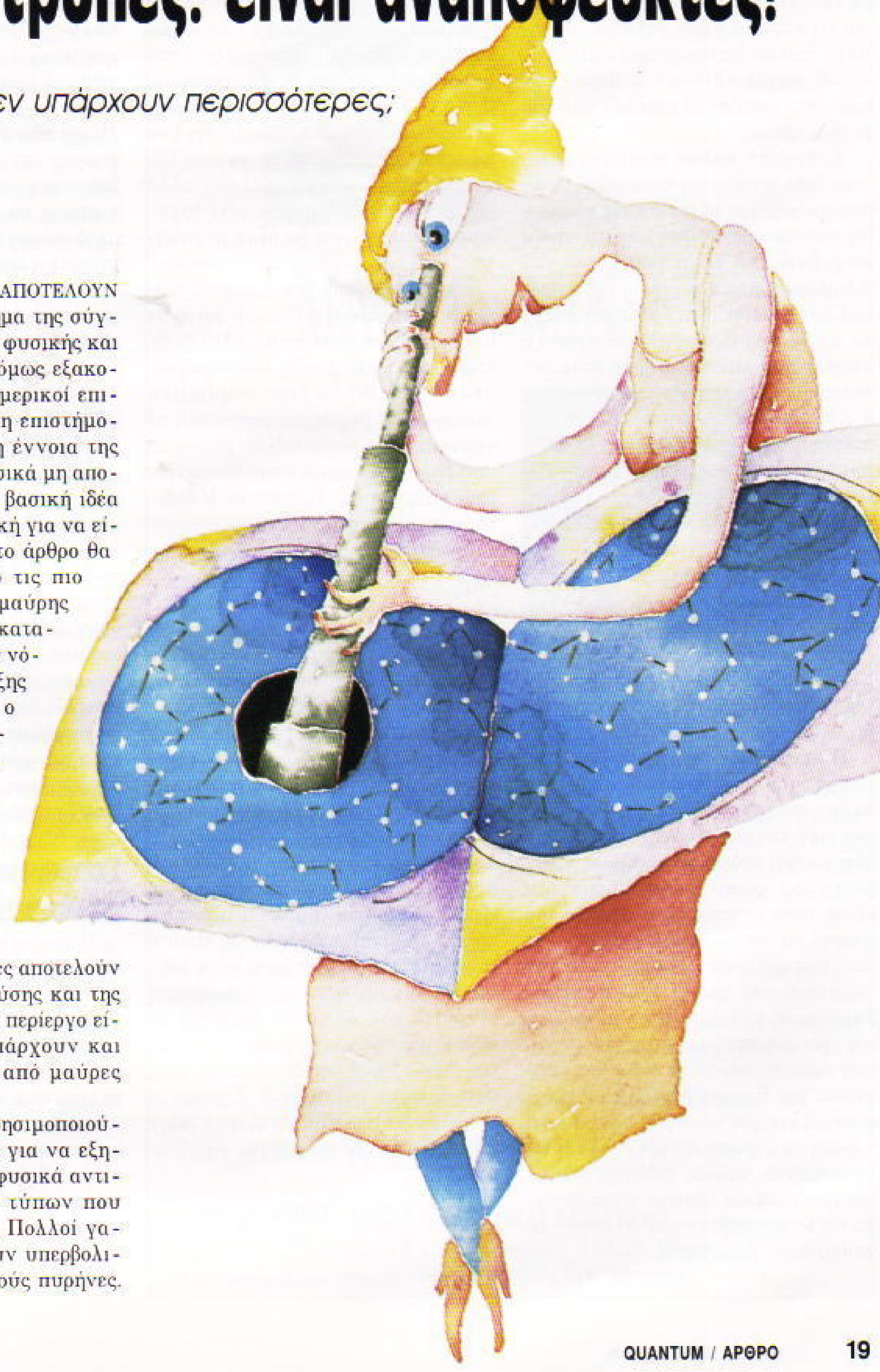
Μέσω του φαινομένου Doppler είναι δυνατό να ανιχνεύσει κανείς την κίνηση της Γης σε σχέση με την ακτινοβολία υποβάθρου. Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι μικρότερο όταν η πηγή και ο ανιχνευτής πλησιάζουν μεταξύ τους παρά όταν απομακρύνονται. Είναι αδύνατο να παρατηρηθεί η κίνηση της Γης ως προς τον υποθετικό αιθέρα ή ένα φυσικό κενό, αλλά είναι μάλλον δυνατό να παρατηρηθεί ως προς την ακτινοβολία υποβάθρου. Αποδεικνύεται ότι το ηλιακό μας σύστημα κινείται προς τον αστερισμό του Κύκνου με την ασυνήθιστα μεγάλη ταχύτητα των 200 km/sec.

Η παραμένουσα κοσμική ακτινοβολία, λοιπόν, αποτελεί τη βάση ενός συστήματος αναφοράς, και «περισσότερο αδρανειακό» σύστημα απ' αυτό είναι αδιανόητο: αυτό το σύστημα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς την ακτινοβολία υποβάθρου. ◘

Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες!

Αλήθεια, γιατί δεν υπάρχουν περισσότερες;

William A. Hiscock



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Οι ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ένα σημαντικό τμήμα της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής και αστροφυσικής. Κι όμως εξακολουθούν να υπάρχουν μερικοί επιστήμονες (και πολλοί μη επιστήμονες) που θεωρούν ότι η έννοια της μαύρης τρύπας είναι φυσικά μη αποδεκτή. Πιστεύουν ότι η βασική ιδέα είναι πολύ εξωπραγματική για να είναι αληθινή. Σε τούτο το άρθρο θα δούμε ότι μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες μιας μαύρης τρύπας είναι δυνατό να κατανοηθούν στο πλαίσιο του νόμου της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα και ότι ο σχηματισμός των μαύρων τρυπών δεν χρειάζεται να περιπλέξει καταστάσεις της ύλης με εξαιρετικά υψηλή πυκνότητα ούτε άλλες περιοχές της φυσικής για τις οποίες πολύ λίγα είναι γνωστά σήμερα. Οι μαύρες τρύπες αποτελούν φυσική συνέπεια της φύσης και της βαρύτητας· πράγματι, το περίεργο είναι ότι στο σύμπαν υπάρχουν και άλλα πράγματα *εκτός* από μαύρες τρύπες!

Οι μαύρες τρύπες χρησιμοποιούνται στην αστροφυσική για να εξηγήσουν ορισμένα αστροφυσικά αντικείμενα διαφορετικών τύπων που έχουν υψηλή ενέργεια. Πολλοί γαλαξίες φαίνεται να έχουν υπερβολικά λαμπρούς και ενεργούς πυρήνες.

Ανάλογα με την εμφάνισή τους, αυτοί οι γαλαξίες κατατάσσονται σε κβάζαρ, γαλαξίες Seyfert ή αντικείμενα BL Lac. Πιστεύεται ευρέως ότι αυτοί οι ενεργοί γαλαξιακοί πυρήνες έχουν πηγή ενέργειας μια μαύρη τρύπα με εξαιρετικά μεγάλη μάζα που η τιμή της κυμαίνεται ανάμεσα σε 10^6 και 10^9 ηλιακές μάζες. Θεωρείται ότι στον δικό μας γαλαξία συστήματα διπλών αστέρων που είναι φωτεινές πηγές ακτίνων Χ περιέχουν είτε έναν αστέρα νετρονίων είτε μια μαύρη τρύπα.

Υπάρχουν καλώς ορισμένα ανώτερα όρια (αν και όχι επακριβώς γνωστά ακόμη) για τη μάζα ενός οποιουδήποτε αστέρα νετρονίων, τα οποία με βεβαιότητα είναι μικρότερα από 3,5 ηλιακές μάζες περίπου. Οι τροχιές πολλών διπλών αστέρων είναι αρκετά καλά προσδιορισμένες ώστε να αποκλείουν την περίπτωση αστέρων νετρονίων. Ο γνωστότερός τους είναι ο Κύκνος Χ-1, που ονομάζεται έτσι επειδή ήταν η πρώτη πηγή ακτίνων Χ που ανακαλύφθηκε στον αστερισμό του Κύκνου. Για πολλά χρόνια ο Κύκνος Χ-1 ήταν ο περισσότερα υποσχόμενος υποψήφιος για σύστημα που περιέχει μαύρη τρύπα. Ο καλύτερος υπολογισμός της μάζας του αόρατου αντικειμένου του Κύκνου Χ-1 που εκπέμπει ακτίνες Χ είναι 16 ηλιακές μάζες —τιμή πολύ μεγαλύτερη από τη μέγιστη μάζα ενός αστέρα νετρονίων.

Η πραγματική φυσική ιδέα μιας μαύρης τρύπας είναι τόσο απλή που ακόμη και ο Νεύτων θα μπορούσε να την είχε κατανοήσει στην εποχή του. Μια μαύρη τρύπα είναι απλώς η περιοχή του χώρου όπου η βαρύτητα είναι τόσο έντονη ώστε τίποτε δεν μπορεί να διαφύγει από αυτήν, ούτε καν ένα φωτόνιο κινούμενο με την ταχύτητα του φωτός. Ενώ η θεωρία βαρύτητας του Αϊνστάιν, η γνωστή ως «γενική σχετικότητα» (ονομασία που αποκρύπτει το γεγονός ότι πρόκειται για θεωρία βαρύτητας) είναι απαραίτητη για να περιγραφεί σωστά η βαρυτική φυσική ενός τέτοιου αντικειμένου, πολλές κρίσιμες ιδιότητες των μαύρων τρυπών είναι δυνατό να κατανοηθούν στο πλαίσιο της νευτώνειας βαρύτητας.

Νευτώνειες μαύρες τρύπες: ο Michell

Για πρώτη φορά, η πιθανή ύπαρξη ενός αστρονομικού αντικειμένου από το οποίο δεν θα μπορούσε να διαφύγει το φως, εξετάστηκε από τον αιδεσιμότατο John Michell, έναν ερασιτέχνη βρετανό αστρονόμο. Σε επιστολή του στον Henry Cavendish το 1783, ο Michell περιέγραψε έναν υπολογισμό με τον οποίο, χρησιμοποιώντας τη θεωρία της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, έδειξε ότι ένα σφαιρικό αντικείμενο με ακτίνα 500 φορές την ακτίνα του Ήλιου, αλλά με την ίδια πυκνότητα, θα είχε ταχύτητα διαφυγής που θα ήταν μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός.

Ας θεωρήσουμε ένα σφαιρικό σώμα ακτίνας R και μάζας M. Αυτό θα μπορούσε να ήταν ένας πλανήτης, ένα άστρο ή μία μπάλα ποδοσφαίρου, αλλά εμείς θα το λέμε συμβατικά «αστέρα». Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου μάζας m που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια του αστέρα είναι V, όπου το V δίνεται από τη σχέση:

$$V = -\frac{GMm}{R},$$

και $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nt m^2/kgr^2 είναι η βαρυτική σταθερά. Το σωματίδιο θα μπορεί να φτάσει στο άπειρο αν εκτοξευθεί από την επιφάνεια του αστέρα με ταχύτητα μεγαλύτερη ή ίση με την ταχύτητα διαφυγής υ_δ. Η ταχύτητα διαφυγής ορίζεται ως η ταχύτητα που θα δώσει τη δυνατότητα στο σωματίδιο μόλις που να φτάσει στο άπειρο, χωρίς καθόλου ταχύτητα ή κινητική ενέργεια. Έτσι, στο άπειρο η ολική ενέργεια του σωματιδίου θα πρέπει να είναι μηδέν. Αν υ_δ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου στην επιφάνεια του αστέρα, τότε η συνολική ενέργειά του σ' αυτήν θα είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειάς του $\frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2$ και της δυναμικής του, που δίνεται παραπάνω. Εφόσον η ενέργεια διατηρείται, αυτή η συνολική ενέργεια πρέπει επίσης να είναι μηδέν:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 - \frac{GMm}{R} = 0.$$

Από την εξίσωση αυτή μπορούμε να βρούμε μια έκφραση για την ταχύτητα διαφυγής από έναν αστέρα μάζας M και ακτίνας R· προκύπτει λοιπόν ότι

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Σημειώστε ότι η μάζα m του σωματιδίου απαλείφεται, και μάλιστα, καλώς σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας του Γαλιλαίου (όλα τα σώματα μέσα σ' ένα βαρυτικό πεδίο πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση). Μέχρι εδώ έχουμε απλώς χρησιμοποιήσει την καθιερωμένη νευτώνεια βαρυτική φυσική, έτσι όπως μπορεί κάποιος να τη βρει σε οποιοδήποτε σχολικό εγχειρίδιο μηχανικής. Για να μάθουμε όμως κάτι για τη «νευτώνεια μαύρη τρύπα» πρέπει να λάβουμε υπόψη μας άλλη μία ιδέα: ότι στο σύμπαν υπάρχει μια μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορούν να ταξιδεύουν τα σωματίδια, δηλαδή η ταχύτητα c του φωτός. Ας φανταστούμε ότι διατηρούμε τη μάζα M σταθερή στην παραπάνω εξίσωση για την υ_δ, ενώ θεωρούμε πως ελαττώνεται η ακτίνα R. Καθώς λοιπόν η ακτίνα του αστέρα ελαττώνεται, η ταχύτητα διαφυγής αυξάνεται. Θα υπάρχει επομένως κάποια κρίσιμη τιμή του R στην οποία η ταχύτητα διαφυγής θα ισούται με την ταχύτητα του φωτός. Οποιοσδήποτε αστέρας μικρότερης ακτίνας θα έπρεπε να έχει ταχύτητα διαφυγής μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, και τίποτε (φως, διαστημόπλοια...) δεν θα μπορούσε να διαφύγει από αυτόν.

Σχετικιστικές μαύρες τρύπες: ο Schwarzschild

Η κρίσιμη τιμή του R για την οποία η ταχύτητα διαφυγής ισούται με c ονομάζεται ακτίνα Schwarzschild, προς τιμήν του Karl Schwarzschild, ο οποίος ανακάλυψε τη λύση που περιγράφει την απλούστερη μαύρη τρύπα στη θεωρία βαρύτητας του Αϊνστάιν. Αν θέσουμε λοιπόν την υ_δ ίση με την c και λύσουμε ως προς την ακτίνα Schwarzschild, προκύπτει

$$R_s = \frac{2GM}{c^2},$$

μια σχέση που ισχύει τόσο στη νευτώνεια βαρύτητα όσο και στη θεωρία του Αϊνστάιν. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των G και c για να βρούμε πόσο ακριβώς μικρή θα μπορούσε να είναι μια μαύρη τρύπα για δεδομένη μάζα, προκύπτουν μερικοί αξιοπρόσεκτοι αριθμοί. Σε μονάδες του SI (όπου η ακτίνα μετρείται σε m και η μάζα σε kgr),

$$R_s = (1{,}48 \times 10^{-27})\ M.$$

Έτσι, για παράδειγμα, η ακτίνα Schwarzschild του Ήλιου (με μάζα $1{,}99 \times 10^{30}$ kgr) είναι περίπου 3 km. Για τη Γη (με μάζα $5{,}98 \times 10^{24}$ kgr) η ακτίνα Schwarzschild είναι μόνο 1 cm περίπου. Αυτό βεβαίως δεν σημαίνει ότι υπάρχει μια μαύρη τρύπα μ' αυτές τις διαστάσεις στο κέντρο της Γης ή του Ήλιου! Αυτή είναι η ακτίνα στην οποία θα έπρεπε να συμπιέσουμε όλη τη Γη ή ολόκληρο τον Ήλιο για να καταστούν μαύρες τρύπες.

Πρόβλημα 1. Υπολόγισε τη δική σου ακτίνα Schwarzschild. Είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το μέγεθος ενός ατομικού πυρήνα; Υπολόγισε την ακτίνα Schwarzschild του γαλαξία μας (με μάζα 10^{11} φορές τη μάζα του Ήλιου).

Ίσως έχετε αντιληφθεί ότι η *πυκνότητα* ενός αντικειμένου με μέγεθος ίσο με την ακτίνα Schwarzschild πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη (αρκεί να φανταστούμε ότι συμπιέζουμε τη Γη έως ότου όλη η μάζα της να συρρικνωθεί σε μια σφαίρα στο μέγεθος μιας μπάλας του γκολφ). Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι το αντικείμενο έχει σταθερή πυκνότητα ρ σε όλα τα σημεία του, τότε $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, σχέση που επίσης ισχύει, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, τόσο στη θεωρία του Αϊνστάιν (παρά την καμπύλωση του χωρόχρονου) όσο και στη θεωρία του Νεύτωνα.

Μπορούμε να θέσουμε $R = R_s$, να λύσουμε ως προς R_s και έτσι να εκφράσουμε την πυκνότητα ρ_s ως συνάρτηση της μάζας M για ένα αντικείμενο με ακτίνα τη δική του ακτίνα Schwarzschild. Προκύπτει ότι:

$$\rho_s = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}.$$

Αν αντικαταστήσουμε τα μεγέθη με τις αριθμητικές τιμές τους βρίσκουμε ξανά μερικά αξιοπρόσεκτα αποτελέσματα: τιμές πυκνότητας που είναι οπωσδήποτε πολύ μεγαλύτερες από τις τιμές για τις οποίες έχουμε εργαστηριακή εμπειρία. Αν ο Ήλιος μας επρόκειτο να υποστεί βαρυτική κατάρρευση ώστε να σχηματίσει μαύρη τρύπα (κάτι που δεν θα συμβεί, αλλά αυτό είναι άλλη ιστορία), η πυκνότητά του, όταν θα περνούσε από την ακτίνα Schwarzschild που του αντιστοιχεί, θα ήταν *αντιστρόφως* ανάλογη του τετραγώνου της μάζας του —πράγμα που σημαίνει πως οι μικρότερες μάζες δίνουν μεγαλύτερες πυκνότητες.

Για σύγκριση, ας θυμηθούμε ότι η πυκνότητα του νερού είναι 1 gr/cm^3 και ότι ο πυρήνας του ατόμου, που είναι η πυκνότερη μορφή ύλης που μελετήθηκε στο εργαστήριο, έχει πυκνότητα 10^{14} gr/cm^3 περίπου. Αυτή είναι το 1/100 της πυκνότητας που θα είχε ο Ήλιος στην ακτίνα Schwarzschild.

Πρόβλημα 2. Υπολόγισε την πυκνότητα ενός αντικειμένου που καταρρέει και έχει μάζα ίση με τη μάζα του Γαλαξία μας όταν περνάει από την ακτίνα Schwarzschild που του αντιστοιχεί.

Αρχή της ισοδυναμίας: από τον Γαλιλαίο στον Αϊνστάιν

Οι πολύ μεγάλες τιμές της πυκνότητας της ύλης στην ακτίνα Schwarzschild είναι ένας από τους λόγους που μερικοί επιστήμονες αρνούνται να πάρουν στα σοβαρά τις μαύρες τρύπες. Πώς μπορεί να προσποιηθεί κάποιος ότι γνωρίζει οτιδήποτε για τις ιδιότητες της ύλης σε τόσο υψηλές πυκνότητες; Θα μπορούσαμε να φανταστούμε νέους φυσικούς νόμους οποιουδήποτε είδους που να εμφανίζονται σε τέτοιες πυκνότητες, και οι οποίοι να εμποδίζουν το σχηματισμό ενός σώματος τόσο παράλογου όπως μια μαύρη τρύπα. Άλλωστε η φυσική του πάγου είναι αρκετά διαφορετική από τη φυσική του ατμού. Δεν θα φαινόταν λογικό να περιμένουμε ότι σε κάποια κατάσταση υψηλής πυκνότητας, προτού σχηματιστεί η μαύρη τρύπα, η ύλη δημιουργεί πολύ μεγάλη εσωτερική πίεση που σταματά την κατάρρευση και εμποδίζει το σχηματισμό της μαύρης τρύπας; Πολλοί επιστήμονες, που δεν είναι αρκετά εξοικειωμένοι με τη γενική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, έχουν προτείνει ιδέες αυτού του είδους για να «διαφύγουν» από την ιδέα ότι η φύση μπορεί να περιέχει τέτοια παράξενα αντικείμενα όπως οι μαύρες τρύπες.

Ωστόσο, στη γενική θεωρία της σχετικότητας, μια πολύ μεγάλη πίεση (τέτοια που θα χρειαζόταν για να σταματήσει την κατάρρευση σ' αυτές τις εξαιρετικά υψηλές πυκνότητες) μπορεί, στην πραγματικότητα, να ενισχύει την κατάρρευση παρά να την εμποδίζει. Για να καταλάβουμε αυτό το φαινομενικά παράδοξο αποτέλεσμα πρέπει να κατανοήσουμε την αρχή της ισοδυναμίας του Αϊνστάιν, που είναι μια από τις κρίσιμες ιδέες πάνω στις οποίες αυτός οικοδόμησε τη γενική θεωρία της σχετικότητας.

Η αρχή της ισοδυναμίας αποτελεί πάντοτε, από τον Γαλιλαίο έως τον Αϊνστάιν, το θεμέλιο της κατανόησης της βαρύτητας. Η αρχή αυτή διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Γαλιλαίο, ο οποίος αναγνώρισε ότι όλα τα είδη υλικών σωμάτων πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση σ' ένα βαρυτικό πεδίο. Ενώ ο Αριστοτέλης είχε διατυπώσει την άποψη ότι τα βαρύτερα αντικείμενα πέφτουν ταχύτερα από τα ελαφρά, η οξυδέρκεια του Γαλιλαίου τον οδήγησε να εξετάσει χωριστά τη δράση της βαρύτητας από τη δράση της αντίστασης του αέρα. Σύμφωνα με μια δημοφιλή (αλλά πιθανώς αναληθή) ιστορία, ο Γαλιλαίος έριχνε μπάλες κανονιού από τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας για να δείξει ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας δεν εξαρτάται από το μέγεθος ή τη σύσταση των αντικειμένων.

Ελέγχοντας την αρχή της ισοδυναμίας: Braginsky και Panov

Σήμερα, η ισότητα της επιτάχυνσης της βαρύτητας η οποία χαρακτηρίζει τα υλικά σώματα κάθε είδους είναι μια από τις σχέσεις στη φυσική που είναι με τη μεγαλύτερη ακρίβεια γνωστές. Πειράματα που πραγματοποίησαν ο V.B. Braginsky και ο V.I. Panov στη Μόσχα το 1971 έδειξαν ότι η πλατίνα και το αλουμίνιο πέφτουν προς τον Ήλιο με επιταχύνσεις που έχουν την ίδια τιμή, με ακρίβεια καλύτερη από 1 μέρος στα 10^{12}. Αυτό σημαίνει ότι αν γράψουμε τις αριθμητικές τιμές των επιταχύνσεων της πλατίνας και του αλουμινίου, θα έχουμε τον ίδιο αριθμό τουλάχιστον για τα πρώτα 12 δεκαδικά ψηφία. Λίγες ιδιότητες της ύλης είναι γνωστές με τέτοια ακρίβεια.

Ο Αϊνστάιν χρησιμοποίησε την αρχή της ισοδυναμίας του Γαλιλαίου —όλες οι μορφές της ύλης ανταποκρίνονται στη βαρύτητα (και δημιουργούν βαρύτητα) με τον ίδιο τρόπο— και τη συνδύασε με μια ιδέα προερχόμενη από την ειδική σχετικότητα: η ενέργεια και η ύλη είναι ισοδύναμες ($E = mc^2$). Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας του Αϊνστάιν όλες οι μορφές ενέργειας (συμπεριλαμβανομένων όλων των μορφών ύλης) ανταποκρίνονται στη βαρύτητα και δημιουργούν βαρυτικά πεδία με τον ίδιο τρόπο. Αυτό που έχει σημασία είναι μόνο το συνολικό ποσόν της μάζας, ανεξάρτητα από το αν αυτή είναι πλατίνα ή αλουμίνιο, ενέργεια «μάζας ηρεμίας», θερμική ενέργεια ή ακόμη και βαρυτική δυναμική ενέργεια. Η ιδέα ότι η ίδια η ενέργεια μέσα στο βαρυτικό πεδίο *δρα ως πηγή για το βαρυτικό πεδίο* ήταν μια από τις πιο βαθυστόχαστες νέες ιδέες στη γενική σχετικότητα.

Για παράδειγμα, αν έχουμε δύο μπάλες κανονιού με την ίδια αρχική μάζα και θερμάνουμε τη μία από αυτές σε υψηλή θερμοκρασία, τότε η θερμή μπάλα θα έλκει μια δοκιμαστική μάζα ισχυρότερα απ' ό,τι η κρύα, αφού έχει περισσότερη ολική ενέργεια (και επομένως περισσότερη ολική μάζα). Η θερμική ενέργεια της θερμής μπάλας είναι ισοδύναμη με κάποια επιπλέον ποσότητα μάζας ($m = E/c^2$) και, λόγω της αρχής της ισοδυναμίας του Αϊνστάιν, όλες οι μορφές της ύλης και της ενέργειας συμμετέχουν ισοδύναμα στη βαρύτητα. Επομένως η μεγαλύτερη μάζα της θερμής μπάλας παράγει ισχυρότερο βαρυτικό πεδίο. Η διαφορά σ' αυτή την περίπτωση είναι αδύνατο να μετρηθεί με τις σημερινές τεχνολογικές δυνατότητες, αλλά η αρχή εφαρμόζεται σε όλα τα σώματα, ανεξαρτήτως μεγέθους και σύστασης.

Η σχέση όλων αυτών με το σχηματισμό μαύρων τρυπών είναι ότι η συνήθης μέθοδος που προτείνεται για να απορριφθεί ο σχηματισμός τους συνίσταται στην υπόθεση πως η ύλη σε υψηλές τιμές πυκνότητας αναπτύσσει υπερβολικά μεγάλες πιέσεις· αυτές βοηθούν τον αστέρα να αντισταθεί στην κατάρρευση, άρα στο σχηματισμό μαύρης τρύπας. Αποδεικνύεται ωστόσο ότι στη θεωρία της βαρύτητας του Αϊνστάιν η μεγάλη πίεση που θα ήταν απαραίτητη για να σταματήσει την κατάρρευση, στην πραγματικότητα την επιταχύνει! Η εσωτερική πίεση ενός σώματος που καταρρέει αποτελεί μια μορφή ενέργειας. Από τη σχέση $E = mc^2$ συμπεραίνουμε ότι η μάζα που αντιστοιχεί σ' αυτή την ενέργεια (άρα η πίεση) ενισχύει τη βαρύτητα του σώματος που καταρρέει, επιταχύνοντας έτσι την κατάρρευση!

Στον καθημερινό κόσμο, η πίεση δρα ώστε να «υποστηρίζει» τα αντικείμενα όπως εσάς, εμένα, τη Γη και τον Ήλιο ενάντια στη βαρυτική κατάρρευση για δύο λόγους: Ο πρώτος είναι ότι όλα αυτά τα αντικείμενα είναι «μη-σχετικιστικά», δηλαδή είναι πολύ μεγαλύτερα από τις αντίστοιχές τους ακτίνες Schwarzschild, οπότε η βαρυτική δύναμη που ευθύνεται για την κατάρρευσή τους δεν είναι αρκετά μεγάλη. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι οι πιέσεις μέσα σε όλα αυτά τα αντικείμενα είναι μικρές σε σχέση με την πυκνότητά τους —δηλαδή ο λόγος $P/\rho c^2$ είναι πολύ μικρότερος από τη μονάδα.

Πρόβλημα 3. Υπολόγισε το λόγο $P/\rho c^2$ για το νερό σε θερμοκρασία δωματίου και υπό ατμοσφαιρική πίεση. Ο αριθμός που προκύπτει βρίσκεται κοντά στη μονάδα;

Η αρχή της ισοδυναμίας του Αϊνστάιν, υποστηριζόμενη από τα πειράματα υψηλής ακρίβειας τόσο της ομάδας της Μόσχας όσο και άλλων ομάδων, δείχνει ότι η μεγάλη πίεση (όπως και κάθε άλλη μορφή εσωτερικής ενέργειας) δεν θα μπορούσε να αποτρέψει το σχηματισμό μαύρων τρυπών. Προς το παρόν δεν γνωρίζουμε ακόμη όλες τις λεπτομέρειες της φυσικής της ύλης σε πυκνότητες που είναι 10-100 φορές μεγαλύτερες από την πυκνότητα του ατομικού πυρήνα. Για το λόγο αυτό η εκ πρώτης όψεως ανακάλυψη μαύρων τρυπών με εξαιρετικά μεγάλες μάζες στα κέντρα πολλών γαλαξιών είναι συναρπαστική, αφού μας εξασφαλίζει μια ακλόνητη ένδειξη για την ύπαρξη των μαύρων τρυπών. Όταν καταρρέει ένα αντικείμενο με μάζα μεγαλύτερη από 10^8 ηλιακές μάζες περίπου, τότε τη στιγμή που η ακτίνα του γίνεται ίση με την ακτίνα Schwarzschild, η πυκνότητά του είναι μικρότερη από την πυκνότητα του νερού, δηλαδή από 1 gr/cm^3.

Ενώ από τη μια πλευρά μπορεί να υπάρχουν μυστήρια σχετικά με τη συμπεριφορά της ύλης σε πυκνότητες μεγαλύτερες από την πυκνότητα του ατομικού πυρήνα, από την άλλη έχουμε κατανοήσει καλά τη συμπεριφορά της ύλης σε συνήθεις πυκνότητες όπως αυτή του 1 gr/cm^3, και γνωρίζουμε ότι τίποτε στη φυσική της ύλης τέτοιας πυκνότητας δεν μπορεί να σταματήσει την κατάρρευση και να εμποδίσει να σχηματιστεί μαύρη τρύπα! Ακόμη κι αν κάποτε αποδειχθεί ότι η θεωρία του Αϊνστάιν είναι λανθασμένη όσον αφορά τα επαρκώς ισχυρά βαρυτικά πεδία (όπως ακριβώς γνωρίζουμε ότι συμβαίνει με τη θεωρία του Νεύτωνα για τέτοια πεδία), το γεγονός ότι απαιτούνται μικρές πυκνότητες ύλης για να σχηματιστούν μαύρες τρύπες από πολύ μεγάλες μάζες καθιστά την ύπαρξή τους αναπόφευκτη. ◙

Ο **William A. Hiscock** είναι αναπληρωτής καθηγητής Φυσικής στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας, στο Μπόουζμαν των ΗΠΑ.


JAGUAR

Γενικεύοντας το δίλημμα του Monty

Στρατηγικές αντιμετώπισης ενός πονηρού τηλεπαρουσιαστή

John P. Georges και Timothy V. Craine

ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΜΕΡΙΚΑ ΧΡΟΝΙΑ, ΤΟ ΔΙΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΥ —γνωστό και ως το «πρόβλημα του αυτοκίνητου και της κατσίκας»— πυροδότησε μια έντονη διαμάχη μέσα από τις σελίδες του τύπου και προκάλεσε ζωηρές συζητήσεις στις σχολικές αίθουσες σε όλες τις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής. Το έντονο ενδιαφέρον οφείλεται στο εξής γεγονός: όταν η αρθρογράφος του περιοδικού *Parade* Marilyn vos Savant δημοσίευσε τη λύση της για το πρόβλημα, έλαβε χιλιάδες επιστολές, ακόμη και από καθηγητές μαθηματικών, που αμφισβητούσαν την ανάλυσή της. Προς μεγάλη έκπληξη πολλών μαθηματικών, κατόχων διδακτορικού διπλώματος, αποδείχτηκε ότι, σύμφωνα με μια έννοια, η Marilyn είχε δίκιο. Σε τούτο το άρθρο θα μελετήσουμε γενικεύσεις του διλήμματος του Monty.

Και πρώτα πρώτα, ας κάνουμε μια ανασκόπηση του αρχικού προβλήματος. Ο Monty Hall, παρουσιαστής ενός παιχνιδιού στην τηλεόραση,[1] ζητά από έναν διαγωνιζόμενο να επιλέξει μία από τρεις πόρτες που κρύβουν κάποιο βραβείο. Πίσω από τις δύο πόρτες υπάρχει από μια κατσίκα, ενώ στην τρίτη βρίσκεται ένα αυτοκίνητο. Αφού διαλέξει ο παίκτης, ο παρουσιαστής αποκαλύπτει την κατσίκα πίσω από τη μία απ' τις πόρτες που δεν επέλεξε. (Αν πίσω από την πόρτα που διαλέγει ο παίκτης υπάρχει το αυτοκίνητο, ο Monty μπορεί να διαλέξει οποιαδήποτε από τις δύο πόρτες. Θα υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να ανοίξει καθεμιά από αυτές τις πόρτες είναι $1/2$.)

Στη συνέχεια ο Monty ρωτάει τον παίκτη αν προτιμά να αλλάξει γνώμη και να επιλέξει την πόρτα που απομένει. Ο παίκτης, που υποθέτουμε ότι θέλει να κερδίσει το αυτοκίνητο, έχει τη δυνατότητα να ακολουθήσει δύο στρατηγικές: να «επιμείνει» στην αρχική πόρτα ή να την «ανταλλάξει» με την άλλη.

Τι θα κάνατε *εσείς*; Πιστεύετε ότι οι πιθανότητες είναι πενήντα-πενήντα, οπότε δεν έχει σημασία τι θα αποφασίσετε σ' αυτό το στάδιο;

Λοιπόν, αντίθετα προς τη διαίσθηση πολλών ανθρώπων, η στρατηγική ανταλλαγής είναι καλύτερη από τη στρατηγική επιμονής. Αν την ανταλλάξει, η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης είναι $2/3$, ενώ αν επιμείνει σ' αυτήν, η πιθανότητα είναι $1/3$. Ιδού μια εξήγηση. Αν υποθέσουμε ότι η αρχική επιλογή του παίκτη είναι τυχαία, θα επιλέξει το αυτοκίνητο με πιθανότητα $1/3$ και την κατσίκα με πιθανότητα $2/3$. Αν χρησιμοποιήσει την στρατηγική επιμονής, η οποία στην ουσία ισοδυναμεί με το να αγνοήσει την πρόταση του Monty, ο παίκτης πρέπει να αναμένει να κερδίσει το αυτοκίνητο στο $1/3$ των περιπτώσεων και την κατσίκα στα $2/3$ των περιπτώσεων. Από την άλλη πλευρά, αν χρησιμοποιήσει τη στρατηγική ανταλλαγής, στα $2/3$ των περιπτώσεων όπου έχει διαλέξει αρχικά την κατσίκα θα την ανταλλάξει με το αυτοκίνητο, ενώ στο $1/3$ των περιπτώσεων που αρχικά διαλέγει το αυτοκίνητο θα το ανταλλάξει με την κατσίκα. Με άλλα λόγια, με τη στρατηγική ανταλλαγής το γεγονός της αρχικής επιλογής μιας κατσίκας γίνεται ισοδύναμο με την επιλογή τελικά του αυτοκινήτου.

Ένα αυτοκίνητο, πολλές κατσίκες

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Monty αποφασίζει να δώσει μεγαλύτερο ενδιαφέρον στο παιχνίδι προσθέτοντας περισσότερες πόρτες. Ας εξετάσουμε την περίπτωση που υπάρχουν n πόρτες, $n \geq 3$, πίσω από τις οποίες κρύβονται $n-1$ κατσίκες και ένα αυτοκίνητο. Όταν ο παίκτης διαλέξει μια πόρτα, ο Monty ανοίγει μια από τις υπόλοιπες πόρτες πίσω από την οποία υπάρχει μια κατσίκα. (Και πάλι διαλέγει με ίσες πιθανότητες ανάμεσα σ' αυτές που κρύβουν πίσω τους κατσίκα.)

Ο παίκτης μπορεί είτε να επιμείνει στην αρχική του επιλογή είτε να την ανταλλάξει με μια από τις υπόλοιπες $n-2$ πόρτες. Ο παίκτης διαλέγει τη σωστή πόρτα στο $1/n$ των περιπτώσεων και λαθεμένη πόρτα στις $(n-1)/n$ περιπτώσεις. Συνεπώς, η πιθανότητα επιτυχίας της στρατηγικής επιμονής είναι $1/n$.

1. Το τηλεπαιχνίδι αυτό του Monty Hall, «Ας κάνουμε ένα παζάρι», δεν προβάλλεται πλέον στην αμερικανική τηλεόραση (υπάρχει όμως στην ελληνική ένα σχεδόν όμοιο). Ο ίδιος ο Monty έδειξε πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για το δίλημμα που έκτοτε πήρε το όνομά του (βλ. το πρωτοσέλιδο άρθρο των *New York Times* στις 21 Ιουλίου 1991.) (Σ.τ.ε.)

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Εάν όμως ο παίκτης υιοθετήσει τη στρατηγική ανταλλαγής, η πιθανότητα επιτυχίας υπολογίζεται, όπως θα εξηγήσουμε, πολλαπλασιάζοντας δύο πιθανότητες. Στον υπολογισμό υπεισέρχεται η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας. Οι συμβολισμοί που περιγράφουμε στο πλαίσιο που ακολουθεί θα χρησιμοποιηθούν σε όλη την υπόλοιπη συζήτησή μας.

> $P(A)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός A
>
> $P(B \setminus A)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός B με δεδομένο ότι συνέβη το γεγονός A. Το διαβάζουμε ως «πιθανότητα του B δεδομένου του A»
>
> $P_{\text{επιμ.}}$ συμβολίζει την πιθανότητα να κερδηθεί το αυτοκίνητο όταν ο παίκτης υιοθετεί τη στρατηγική επιμονής
>
> $P_{\text{ανταλ.}}$ συμβολίζει την πιθανότητα να κερδηθεί το αυτοκίνητο όταν ο παίκτης υιοθετεί τη στρατηγική ανταλλαγής

Η πιθανότητα να συμβούν δύο γεγονότα είναι ίση με την πιθανότητα να συμβεί το πρώτο πολλαπλασιασμένη με τη δεσμευμένη πιθανότητα να συμβεί το δεύτερο με δεδομένο το πρώτο —δηλαδή, $P(A \text{ και } B) = P(A)P(B \setminus A)$. Σ' αυτή την περίπτωση η πιθανότητα να διαλέξει ο παίκτης το αυτοκίνητο προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε την πιθανότητα να είναι λανθασμένη η αρχική επιλογή, $(n-1)/n$, επί την πιθανότητα να διαλέξει το αυτοκίνητο ανάμεσα στις υπόλοιπες $n-2$ πόρτες, $1/(n-2)$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό μας,

$P_{\text{ανταλ.}} = P$(1η επιλογή κατσίκα)P(2η επιλογή αυτοκίνητο \ 1η επιλογή κατσίκα)

$$= \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-2}\right) = \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\frac{1}{n} > \frac{1}{n} = P_{\text{επιμ.}}$$

Συμπεραίνουμε ότι σ' αυτή τη γενίκευση η στρατηγική ανταλλαγής είναι καλύτερη από τη στρατηγική επιμονής.

Πολλά αυτοκίνητα, πολλές κατσίκες

Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε περισσότερα από ένα αυτοκίνητα; Παραμένει προτιμότερο να αλλάξουμε επιλογή; Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n πόρτες πίσω από τις οποίες κρύβονται j αυτοκίνητα και $n-j$ κατσίκες, όπου το j έχει κάποια επιτρεπτή τιμή. Αυτή τη φορά, ο Monty μπορεί να αποκαλύψει είτε ένα αυτοκίνητο είτε μια κατσίκα, χωρίς να προδώσει το μυστικό του. Αν φανερώσει κατσίκα, πρέπει να έχουμε $1 \le j \le n-2$. Αν φανερώσει αυτοκίνητο, τότε $2 \le j \le n-1$. Και στις δύο περιπτώσεις, η πιθανότητα επιτυχίας της στρατηγικής επιμονής είναι j/n. Σε κάθε παραλλαγή η στρατηγική ανταλλαγής επιτυγχάνει κάθε φορά που ο παίκτης διαλέγει πρώτα την κατσίκα και κατόπιν την ανταλλάσσει με αυτοκίνητο, ή όταν διαλέγει πρώτα ένα αυτοκίνητο και έπειτα το ανταλλάσσει πάλι με αυτοκίνητο —δηλαδή,

$P_{\text{ανταλ.}} = P$(1η επιλογή κατσίκα)P(2η επιλογή αυτοκίνητο \ 1η επιλογή κατσίκα) + P(1η επιλογή αυτοκίνητο) P(2η επιλογή αυτοκίνητο \ 1η επιλογή αυτοκίνητο).

Όταν ο Monty αποκαλύψει κατσίκα, η πιθανότητα επιτυχημένης ανταλλαγής δίνεται από την

$$P_{\text{ανταλ.}} = \frac{n-j}{n}\left(\frac{j}{n-2}\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right)$$
$$= \frac{j}{n}\left[\frac{(n-j)+(j-1)}{n-2}\right] = \frac{j}{n}\left(\frac{n-1}{n-2}\right) > \frac{j}{n} = P_{\text{επιμ.}} \quad (1)$$

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι στη δεύτερη περίπτωση, όπου ο Monty αποκαλύπτει αυτοκίνητο,

$$P_{\text{ανταλ.}} = \frac{n-j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{j-2}{n-2}\right) \quad (2)$$

και ότι $P_{\text{ανταλ.}} \le P_{\text{επιμ.}}$.

Συνεπώς, όταν ο Monty αποκαλύπτει κατσίκα, η πιθανότητα επιτυχίας της στρατηγικής ανταλλαγής είναι μεγαλύτερη από j/n (που είναι η πιθανότητα επιτυχίας της στρατηγικής επιμονής). Όμως, όταν ο Monty αποκαλύπτει αυτοκίνητο, η πιθανότητα επιτυχίας της στρατηγικής ανταλλαγής είναι μικρότερη από j/n. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η στρατηγική που θα υιοθετήσει ο παίκτης εξαρτάται από το τι κρύβεται πίσω από την πόρτα που ανοίγει: ανταλλαγή αν είναι κατσίκα, επιμονή αν είναι αυτοκίνητο.

Πολλά αυτοκίνητα, πολλές κατσίκες, αβέβαιες αποκαλύψεις

Στο προηγούμενο παράδειγμα, ο Monty είχε αποφασίσει εκ των προτέρων αν θα αποκαλύψει κατσίκα ή αυτοκίνητο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι λέει στον παίκτη: «Θα σας φανερώσω μια κατσίκα με πιθανότητα p ή ένα αυτοκίνητο με πιθανότητα $1-p$. Πριν όμως ανοίξω την πόρτα, πρέπει να αποφασίσετε αν θα ανταλλάξετε την αρχική επιλογή σας ή αν θα επιμείνετε σ' αυτήν».

Και πάλι, αν ο παίκτης επιμείνει έχει πιθανότητα επιτυχίας j/n. Όταν ανταλλάξει την επιλογή του, η πιθανότητα επιτυχίας είναι

$$P_{\text{ανταλ.}} = p\left[\frac{n-j}{n}\left(\frac{j}{n-2}\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right)\right]$$
$$+(1-p)\left[\frac{n-j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{j-2}{n-2}\right)\right]. \quad (3)$$

Παρατηρήστε ότι η παράσταση (3) προκύπτει από τις παραστάσεις (1) και (2).

Πρόβλημα 2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε οκτώ πόρτες που κρύβουν 5 κατσίκες και 3 αυτοκίνητα. Ο Monty σας λέει ότι θα ρίξει ένα ζάρι για να αποφασίσει ποια πόρτα θα ανοίξει. Αν το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο του 3 θα αποκαλύψει ένα αυτοκίνητο, διαφορετικά θα φανερώσει μια κατσίκα. Είστε υποχρεωμένοι να αποφασισετε από πριν αν θα ανταλλάξετε την αρχική επιλογή σας ή αν θα επιμείνετε σ' αυτή. Τι πρέπει να κάνετε;

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $p = (n-j)/n$. Τότε, $1 - p = j/n$ και η παράσταση (3) γίνεται

$$P_{\text{ανταλ.}} = \frac{n-j}{n}\left[\frac{n-j}{n}\left(\frac{j}{n-2}\right)+\frac{j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right)\right]$$

$$+\frac{j}{n}\left[\frac{n-j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right)+\frac{j}{n}\left(\frac{j-2}{n-2}\right)\right]$$

$$=\frac{j}{n}\left[\frac{(n-j)^2+2(n-j)(j-1)+(j-1)^2-1}{n(n-2)}\right]$$

$$=\frac{j}{n}\left[\frac{(n-j+j-1)^2-1}{(n-1)^2-1}\right]=\frac{j}{n}.$$

Συνεπώς, όταν $p = (n-j)/n$, δεν έχει σημασία αν ο παίκτης επιλέξει να επιμείνει ή να ανταλλάξει.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι αν $p > (n-j)/n$, τότε $P_{\text{ανταλ.}} > j/n$, ενώ αν $p < (n-j)/n$, τότε $P_{\text{ανταλ.}} < j/n$.

Για να εκτιμήσετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόβλημα 3, παρατηρήστε ότι οι ακραίες περιπτώσεις $p = 1$ και $p = 0$ αντιστοιχούν σε καταστάσεις όπου η συμπεριφορά του Monty είναι απολύτως προβλέψιμη, και οι πιθανότητες επιτυχίας της στρατηγικής ανταλλαγής δίνονται, αντίστοιχα, από τις παραστάσεις (1) και (2) που είδαμε προηγουμένως.

Πολλές αποκαλύψεις

Και τώρα ακολουθεί μια επιπλέον γενίκευση του αρχικού προβλήματος. Ο Monty δεν ανοίγει μία μόνο πόρτα, αλλά κάποιο υποσύνολο από τις πόρτες που δεν επιλέχτηκαν. Ας υποθέσουμε, όπως και πριν, ότι υπάρχουν n πόρτες και j αυτοκίνητα. Ο Monty θα αποκαλύψει τώρα στον παίκτη k αυτοκίνητα και $m - k$ κατσίκες όπου $1 \le m \le n-2$ και $0 \le k \le m$. Και πάλι, η πιθανότητα επιτυχίας της στρατηγικής επιμονής είναι j/n. Η πιθανότητα επιτυχίας της στρατηγικής ανταλλαγής είναι

$P_{\text{ανταλ.}}$ = P(1η επιλογή κατσίκα)P(2η επιλογή αυτοκίνητο \ 1η επιλογή κατσίκα) + P(1η επιλογή αυτοκίνητο)P(2η επιλογή αυτοκίνητο \ 1η επιλογή αυτοκίνητο)

$$=\frac{n-j}{n}\left(\frac{j-k}{n-m-1}\right)+\frac{j}{n}\left(\frac{j-k-1}{n-m-1}\right) \qquad (4)$$

$$=\frac{nj-nk-j}{n(n-m-1)}.$$

Πρόβλημα 4. Αποδείξτε ότι η παράσταση (4) ισούται με j/n όταν $k/m = j/n$, είναι μεγαλύτερη από j/n όταν $k/m < j/n$ και μικρότερη από j/n όταν $k/m > j/n$.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε τα αποτελέσματα του προβλήματος 4 είναι ο εξής: όταν η σχετική συχνότητα με την οποία εμφανίζονται οι κατσίκες στις πόρτες που ανοίγουν είναι μεγαλύτερη από τη σχετική συχνότητα με την οποία εμφανίζονται οι κατσίκες στο αρχικό σύνολο, ο παίκτης πρέπει να υιοθετήσει τη στρατηγική ανταλλαγής. Όταν αυτή η σχετική συχνότητα είναι η ίδια με του αρχικού συνόλου, δεν έχει σημασία ποια στρατηγική θα επιλέξει, και όταν είναι μικρότερη απ' ό,τι στο αρχικό σύνολο ο παίκτης πρέπει να επιμείνει στην αρχική του επιλογή.

Διαφορετικά βραβεία

Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης έχει τη δυνατότητα να κερδίσει μεγαλύτερη ποικιλία δώρων και όχι μόνο αυτοκίνητα ή κατσίκες. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχουν έξι πόρτες που κρύβουν δύο σπορ αυτοκίνητα, το καθένα αξίας 10.010.000 δρχ., δύο ταχύπλοα, το καθένα αξίας 5.010.000 δρχ., και δύο κατσίκες, η καθεμιά αξίας 10.000 δρχ. Σ' αυτή την περίπτωση, όταν ο παίκτης επιμένει στην αρχική του επιλογή, ελπίζει να κερδίσει 10.010.000 δρχ. με πιθανότητα 1/3, 5.010.000 δρχ. με πιθανότητα 1/3, και 10.000 δρχ. με πιθανότητα 1/3. Η προσδοκώμενη τιμή του δώρου του είναι

$$\frac{1}{3}(10.010.000)+\frac{1}{3}(5.010.000)+\frac{1}{3}(10.000)$$
$$=\frac{1}{3}(15.030.000)=5.010.000 \text{ δρχ.}$$

Προκύπτει λοιπόν και πάλι το ερώτημα: είναι προτιμότερο να ανταλλάξει την αρχική του επιλογή;

Ας υποθέσουμε ότι ο Monty αποφασίζει ν' ανοίξει μια πόρτα με αυτοκίνητο. Τότε, η προσδοκώμενη τιμή του δώρου που θα κερδίσει ο παίκτης αν ανταλλάξει την επιλογή του καθορίζεται από το τι βρίσκεται πίσω από την πόρτα που διάλεξε αρχικά και πίσω από τις υπόλοιπες κλειστές πόρτες.

Αν το δώρο που κρύβεται πίσω από την πόρτα που έχει διαλέξει είναι αυτοκίνητο, η προσδοκώμενη τιμή είναι

$$\frac{2}{4}(5.010.000)+\frac{2}{4}(10.000)=2.510.000 \text{ δρχ.}$$

Αν είναι ταχύπλοο, η προσδοκώμενη τιμή είναι

$$\frac{1}{4}(10.010.000)+\frac{1}{4}(5.010.000)+\frac{1}{4}(10.000)$$
$$=3.760.000 \text{ δρχ.}$$

Αν είναι κατσίκα, η προσδοκώμενη τιμή είναι

$$\frac{1}{4}(10.010.000)+\frac{2}{4}(5.010.000)+\frac{1}{4}(10.000)$$
$$=5.010.000 \text{ δρχ.}$$

Τα ενδεχόμενα αυτά είναι εξίσου πιθανά, επομένως η συνολική προσδοκώμενη τιμή όταν ανταλλάσσετε την επιλογή σας είναι

$$\frac{1}{3}(2.510.000)+\frac{1}{3}(3.760.000)+\frac{1}{3}(5.010.000)$$
$$=3.760.000 \text{ δρχ.}$$

Εφόσον, όταν ο Monty αποκαλύπτει αυτοκίνητο, η προσδοκώμενη τιμή με τη στρατηγική ανταλλαγής είναι μικρότερη από την προσδοκώμενη τιμή με τη στρατηγική επιμονής, ο παίκτης πρέπει να επιμείνει στην αρχική του επιλογή.

Πρόβλημα 5. Ας υποθέσουμε και πάλι ότι υπάρχουν έξι πόρτες με δύο αυτοκίνητα, το καθένα αξίας 10.010.000 δρχ., δύο ταχύπλοα, το καθένα αξίας 5.010.000 δρχ., και δύο κατσίκες, η καθεμιά αξίας 10.000 δρχ. Αυτή τη φορά ο Monty αποφασίζει να φανερώσει μία κατσίκα. Υπολογίστε την προσδοκώμενη τιμή όταν ο παίκτης αποφασίζει να ανταλλάξει την αρχική επιλογή του και καθορίστε τι πρέπει να πράξει.

Πρόβλημα 6. Ας υποθέσουμε ότι ενώ η κατάσταση είναι η ίδια με του προβλήματος 5, ο Monty αποφασίζει να φανερώσει ένα ταχύπλοο σκάφος. Συγκρίνετε τις προσδοκώμενες αξίες για τις στρατηγικές ανταλλαγής και επιμονής. Ποια απόφαση πρέπει να πάρει ο παίκτης;

Για να γενικεύσουμε το πρόβλημα στην περίπτωση των πολλών δώρων, θα χρειαστούμε κάποιους επιπλέον συμβολισμούς που σχετίζονται με την προσδοκώμενη τιμή (δείτε το επόμενο πλαίσιο). Γενικά, η προσδοκώμενη τιμή υπολογίζεται αν πολλαπλασιάσουμε την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός επί την αξία αυτού του γεγονότος και αθροίσουμε όλα τα γινόμενα. Όταν έχουμε m γεγονότα, η προσδοκώμενη τιμή γράφεται συνήθως ως

$$E = \sum_{i=1}^{m} p_i v_i ,$$

όπου p_i είναι η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός i και v_i είναι η αξία του δώρου που συνδέεται με το γεγονός i.

$\sum$ σημαίνει «το άθροισμα των»

$E = \sum_{i=1}^{m} p_i v_i ,$

$E_{\text{επιμ.}}$ είναι η προσδοκώμενη τιμή του δώρου με τη στρατηγική επιμονής

$E_{\text{ανταλ.}}$ είναι η προσδοκώμενη τιμή του δώρου με τη στρατηγική ανταλλαγής

$E_{\text{ανταλ.}}(1\text{η αξία} = v_i)$ είναι η προσδοκώμενη τιμή του δώρου με τη στρατηγική ανταλλαγής, με δεδομένο ότι η αξία της πρώτης επιλογής είναι v_i

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν m είδη δώρων, με αξίες $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Για $1 \le i \le m$, υπάρχουν n_i δώρα με αξία v_i. Σημειώνουμε ότι το συνολικό πλήθος των δώρων είναι

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i .$$

Ο παίκτης επιθυμεί να μεγιστοποιήσει την προσδοκώμενη τιμή του δώρου του.

Η προσδοκώμενη τιμή του δώρου με τη στρατηγική επιμονής δίνεται τώρα από την

$$E_{\text{επιμ.}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} v_i ,$$

όπου n_i/n είναι η πιθανότητα επιλογής ενός δώρου με αξία v_i. Αν συμβολίσουμε με

$$t = \sum_{i=1}^{m} n_i v_i$$

τη συνολική αξία των δώρων, τότε

$$E_{\text{επιμ}} = \frac{t}{n}.$$

Αφού γίνει η αρχική επιλογή του παίκτη, ο Monty αποκαλύπτει ένα δώρο αξίας v_r. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_r \ge 2$, και επομένως είναι πιθανό ότι το δώρο που έχει διαλέξει ο παίκτης έχει επίσης αξία v_r. Η προσδοκώμενη τιμή με τη στρατηγική ανταλλαγής δίνεται τώρα από τη

$$E_{\text{ανταλ.}} =$$

$$\sum_{i=1}^{m} P(\text{αξία 1ης επιλογής} = v_i) E_{\text{ανταλ.}}(\text{αξία 1ης επιλογής} = v_i).$$

Με δεδομένο ότι πίσω από την πόρτα που επιλέχτηκε αρχικά υπήρχε ένα δώρο αξίας v_i, η προσδοκώμενη τιμή του δώρου όταν ανταλλάσσουμε την επιλογή μας είναι ο μέσος όρος των $n-2$ διαθέσιμων δώρων. Βρίσκουμε αυτόν τον μέσο όρο παίρνοντας το t, αφαιρώντας το $v_i + v_r$ (το άθροισμα της αξίας των βραβείων που υπήρχαν πίσω από την πρώτη πόρτα και την πόρτα που άνοιξε ο Monty), και διαιρώντας το αποτέλεσμα με $n-2$. Επομένως,

$$\begin{aligned} E_{\text{ανταλ.}} &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{n_i}{n}\right)\left(\frac{t - v_i - v_r}{n-2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-2}\left[nt - \sum_{i=1}^{m} n_i v_i - n v_r\right] \\ &= \frac{nt - t}{n(n-2)} - \frac{n v_r}{n(n-2)} \\ &= \frac{t}{n}\left(\frac{n-1}{n-2}\right) - \frac{v_r}{n-2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Πρόβλημα 7. Αποδείξτε ότι $E_{\text{επιμ.}} = E_{\text{ανταλ.}}$ αν $v_r = t/n$. Δείξτε επίσης ότι αν $v_r > t/n$, η στρατηγική επιμονής είναι καλύτερη, ενώ αν $v_r < t/n$, καλύτερη είναι η στρατηγική ανταλλαγής.

Το πρόβλημα 7 καταδεικνύει ότι η επιλογή του παίκτη πρέπει να βασιστεί στη σύγκριση της αξίας του αποκαλυπτόμενου δώρου με τη μέση τιμή των δώρων.

Τι συμβαίνει αν στην περίπτωση των πολλών δώρων ο Monty αποφασίσει να φανερώσει περισσότερα από ένα δώρα στον παίκτη; Ας υποθέσουμε ότι αποκαλύπτονται s δώρα συνολικής αξίας x. Τώρα, η εξίσωση (5) γίνεται

$$\begin{aligned} E_{\text{ανταλ.}} &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{n_i}{n}\right)\left(\frac{t - v_i - x}{n-s-1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-s-1}\left[nt - \sum_{i=1}^{m} n_i v_i - nx\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{n}\left(\frac{n-1}{n-s-1}\right) - \frac{x}{n-s-1} \qquad (6)$$

$$= \frac{tn-t-xn}{n(n-s-1)}.$$

Πρόβλημα 8. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση (6) για να αποδείξετε ότι οι προσδοκώμενες τιμές για τις στρατηγικές επιμονής και ανταλλαγής είναι ίσες αν $x/s = t/n$.

Το κριτήριο με το οποίο καθορίζουμε την καλύτερη στρατηγική είναι η σύγκριση της μέσης τιμής x/s των αποκαλυπτόμενων δώρων με τη μέση τιμή t/n του συνόλου των δώρων. Όταν η πρώτη είναι μεγαλύτερη από τη δεύτερη, ο παίκτης πρέπει να επιμείνει. Όταν είναι μικρότερη, πρέπει να ανταλλάξει.

Αυτή η τελευταία γενίκευση συνοψίζει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις που εξετάσαμε. Στις περιπτώσεις που τα δώρα είναι μόνο αυτοκίνητα και κατσίκες μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την τιμή 0 στην κατσίκα και την τιμή 1 στο αυτοκίνητο. Τότε η προσδοκώμενη τιμή που συνδέεται με μια στρατηγική ισούται με την πιθανότητα να κερδηθεί το αυτοκίνητο. Θυμηθείτε ότι προηγουμένως, όταν ο παρουσιαστής άνοιγε m πόρτες για να αποκαλύψει k αυτοκίνητα, καθορίσαμε ότι το κριτήριο είναι η σύγκριση του k/m με τον αρχικό λόγο των αυτοκινήτων προς τις πόρτες. Αυτό είναι μία περίπτωση του γενικότερου κριτηρίου που μόλις καθορίσαμε.

Τέλος, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη προσέγγιση, μπορούμε να αναλύσουμε με όρους προσδοκώμενης τιμής και τη γενίκευση όπου ο Monty αποκαλύπτει μια κατσίκα με πιθανότητα p και ένα αυτοκίνητο με πιθανότητα $1 - p$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν $n_1 = j$ αυτοκίνητα που το καθένα αξίζει $v_1 = 1$ και $n_2 = n - j$ κατσίκες που η καθεμία αξίζει $v_2 = 0$. Η συνολική αξία των βραβείων ισούται με το πλήθος j των αυτοκινήτων, και η προσδοκώμενη τιμή v_r του αποκαλυπτόμενου δώρου ισούται με την πιθανότητα $1 - p$ να κερδηθεί αυτοκίνητο. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5), έχουμε

$$E_{\text{ανταλ.}} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i}{n}\right)\left(\frac{t-v_i-v_r}{n-2}\right)$$

$$= \frac{j}{n}\left[\frac{j-1-(1-p)}{n-2}\right] + \frac{n-j}{n}\left[\frac{j-0-(1-p)}{n-2}\right]$$

$$= \frac{j(j+p)-2j+n(j+p)-j(j+p)-n+j}{n(n-2)} \qquad (7)$$

$$= \frac{nj+np-n-j}{n(n-2)}.$$

Πρόβλημα 9. Αποδείξτε ότι οι παραστάσεις (3) και (7) είναι ισοδύναμες.

Μια εναλλακτική μέθοδος

Η εξίσωση (6) μπορεί να προκύψει με χρήση μιας εναλλακτικής μεθόδου. Αντί να θεωρήσουμε τη συμπεριφορά του παίκτη ως αποτέλεσμα συνειδητής απόφασης να επιμείνει στην αρχική επιλογή του ή να την ανταλλάξει, ας την υποθέσουμε απολύτως τυχαία. Όταν ο παρουσιαστής ανοίξει s πόρτες αποκαλύπτοντας δώρα συνολικής αξίας x, απομένουν $n - s$ κλειστές πόρτες στις οποίες περιλαμβάνεται και η πόρτα που επέλεξε αρχικά ο παίκτης. Αν τώρα διαλέξει τυχαία μία από αυτές, θα επιμείνει με πιθανότητα $1/(n - s)$ και θα ανταλλάξει με πιθανότητα $(n - s - 1)/(n - s)$. Η προσδοκώμενη τιμή του δώρου που κερδίζει ισούται με τον μέσο όρο των δώρων που παραμένουν κρυμμένα: $(t - x)/(n - s)$. Εφόσον, όμως, γνωρίζουμε ότι η προσδοκώμενη τιμή με τη στρατηγική επιμονής είναι t/n, έχουμε

$$E_{\text{τυχαία}} = \frac{1}{n-s}E_{\text{επιμ.}} \frac{n-s-1}{n-s}E_{\text{ανταλ.}},$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$\frac{t-x}{n-s} = \frac{1}{n-s}\cdot\frac{t}{n} + \frac{n-s-1}{n-s}E_{\text{ανταλ.}}. \qquad (8)$$

Αν λύσουμε την εξίσωση (8) ως προς $E_{\text{ανταλ.}}$, παίρνουμε την εξίσωση (6).

Ας επανέλθουμε για λίγο στο αρχικό πρόβλημα με τις τρεις πόρτες. Μόλις ο Monty αποκαλύψει την κατσίκα, ο παίκτης πρέπει να αποφασίσει αν θα επιμείνει στην αρχική του επιλογή ή αν θα την ανταλλάξει με την άλλη πόρτα. Αν σ' αυτό το σημείο ο παίκτης έριχνε ένα αμερόληπτο νόμισμα για να καθορίσει τη συμπεριφορά του, θα περίμενε να κερδίσει το αυτοκίνητο στις μισές περιπτώσεις —με άλλα λόγια, $P_{\text{τυχαία}} = 1/2$. Αν δεχτούμε το γεγονός ότι ο παίκτης έχει πιθανότητα 1/3 να επιλέξει αρχικά τη σωστή πόρτα (δηλαδή, $P_{\text{επιμ.}} = 1/3$), τότε η εξίσωση (8) μας δίνει

$$\frac{1}{2} = P_{\text{τυχαία}} = \frac{1}{2}P_{\text{επιμ.}} + \frac{1}{2}P_{\text{ανταλ.}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}P_{\text{ανταλ.}},$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι $P_{\text{ανταλ.}} = 2/3$.

Πολλοί απ' όσους αμφισβήτησαν τη λύση που έδωσε η Marilyn στο αρχικό πρόβλημα θεωρούσαν με βάση τη διαίσθησή τους ό,τι η πιθανότητα επιλογής της σωστής πόρτας με τη στρατηγική ανταλλαγής είναι 1/2. Είχαν μπερδέψει την τυχαία στρατηγική με την στρατηγική ανταλλαγής. Στην πραγματικότητα, όπως βλέπουμε στην εξίσωση (8), η τυχαία είναι μείγμα των αμιγών στρατηγικών επιμονής και ανταλλαγής.

Συμπέρασμα

Σε μια πρώτη ματιά το δίλημμα του Monty μοιάζει με τα προβλήματα εκείνα που εξηγούνται καλύτερα μέσω της δεσμευμένης πιθανότητας. Γι' αυτό το λόγο οι περισσότερες από τις πρώτες συζητήσεις για το δίλημμα του Monty αναπτύσσονταν σε αυτό το πλαίσιο. Πραγματικά οι περισσότερες από τις γενικεύσεις μας περιγράφτηκαν με αυτούς τους όρους —συγκρίναμε τις πιθανότητες επιτυχίας που έχουμε ακολουθώντας τη στρατηγική επιμο-

Η συνέχεια στη σελ. 68 ⇨

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

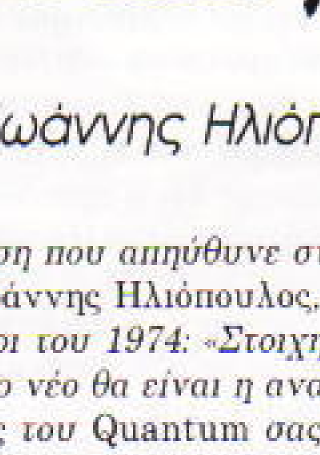
Προβλεπτική ισχύς, ομορφιά και απλότητα

Ο Ιωάννης Ηλιόπουλος μιλά στο Quantum

Έχει μείνει ιστορική η πρόκληση που απηύθυνε στο εμβρόντητο ακροατήριο ο ομιλητής για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις, ο έλληνας φυσικός Ιωάννης Ηλιόπουλος, σ' εκείνο το διεθνές συνέδριο φυσικής υψηλών ενεργειών που έγινε στο Λονδίνο το καλοκαίρι του 1974: «Στοιχηματίζω με όλους σας από ένα κιβώτιο μπουκάλια κρασί ότι στο επόμενο συνέδριο το πολύκροτο νέο θα είναι η ανακάλυψη του "γοητευτικού" κουάρκ». Και ο Ηλιόπουλος κέρδισε το στοίχημα. Στο παρόν τεύχος του Quantum σας παρουσιάζουμε τη συνέντευξη που έδωσε στις αρχές του 1995 στον Γιώργο Ευαγγελόπουλο ο παγκοσμίου φήμης κορυφαίος θεωρητικός φυσικός.

Ερ.: *Αφού ο τομέας σας είναι η φυσική των υψηλών ενεργειών, επιτρέψτε μου να σας ρωτήσω, ποιος είναι ο λόγος που ένα σημαντικό ποσοστό των καλύτερων νέων φυσικών επιλέγουν ως χώρο της ερευνητικής τους δραστηριότητας και της επαγγελματικής τους σταδιοδρομίας τον συγκεκριμένο κλάδο της επιστήμης της φυσικής;*

Απ: Αυτό που λέτε είναι γεγονός. Πράγματι πολλοί νέοι σε όλο τον κόσμο, όχι μόνο στην Ελλάδα, στρέφονται σ' αυτόν τον τομέα. Νομίζω ότι ο λόγος είναι σχετικά απλός: οι νέοι που ενδιαφέρονται για τη φυσική αισθάνονται να έλκονται περισσότερο από τα προβλήματα που θεωρούν, εκ πρώτης ίσως όψεως, πιο θεμελιώδη, όπως π.χ. η δομή της ύλης. Άλλωστε, είναι αρκετά χαρακτηριστικό ότι αυτή η έλξη ασκείται κυρίως από τους δύο εκ διαμέτρου αντίθετους «πόλους» στην κλίμακα της φυσικής: είτε από τη φυσική του απειροστά μικρού, τη φυσική των υψηλών ενεργειών, είτε από τη φυσική του πάρα πολύ μεγάλου, την κοσμολογία. Και τούτο διότι οι νέοι πιστεύουν ότι σ' αυτούς τους κλάδους βρίσκονται τα πιο θεμελιώδη προβλήματα. Βέβαια, αργότερα διαπιστώνουν ότι αυτό δεν είναι απόλυτα σωστό, καθόσον θεμελιώδη προβλήματα υπάρχουν σε όλες τις κλίμακες της ύλης, οπότε αυτή η αρχική εντύπωση μετριάζεται. Στο ξεκίνημα όμως της σταδιοδρομίας τους η εν λόγω εντύπωση παίζει αποφασιστικό ρόλο στις επιλογές τους.



Ο Ιωάννης Ηλιόπουλος γεννήθηκε στην Καλαμάτα το 1940. Πήρε το δίπλωμα του μηχανολόγου-ηλεκτρολόγου από το ΕΜΠ το 1962, ενώ το 1965 απέκτησε το διδακτορικό του στη θεωρητική φυσική στο Παρίσι. Έκανε μεταδιδακτορικές σπουδές στο CERN (1966-1968) και στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ (1969-1971). Από το 1971 έως σήμερα είναι μέλος του Εθνικού Κέντρου Επιστημονικών Ερευνών (CNRS) της Γαλλίας, και ο τομέας του είναι η φυσική των υψηλών ενεργειών. Δίδαξε στην École Polytechnique τα προπτυχιακά μαθήματα της «Κβαντομηχανικής», της «Στατιστικής φυσικής» και της «Εισαγωγής στη θεωρία πεδίων». Σήμερα διδάσκει στον κοινό μεταπτυχιακό κύκλο των Πανεπιστημίων του Παρισιού VI, VII, XI, της École Polytechnique και της École Normale Supérieure τα μαθήματα της «Θεωρίας των ασθενών αλληλεπιδράσεων», της «Θεωρίας στοιχειωδών σωματιδίων» και της «Θεωρίας κβαντικών πεδίων». Είναι μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Γαλλίας και αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Αθηνών.

Ερ.: *Δεδομένου ότι στη συνέχεια, αναφερόμενοι στις εργασίες σας, θα μιλήσουμε για συμμετρίες, θα ήθελα στην αρχή να σας θέσω το εξής γενικό ερώτημα: σύμφωνα με έναν έξοχο ορισμό της συμμετρίας που δόθηκε από τον μαθηματικό Hermann Weyl, «ένα αντικείμενο είναι συμμετρικό, αν υπάρχει μια διαδικασία που αφήνει αναλλοίωτη τη μορφή του». Αξιοποιώντας τη βασική αρχή του ορισμού αυτού, που αφορά την «εξωτερική» συμμετρία, αλλά προχωρώντας και στην ανακάλυψη και κατανόηση διαφόρων «εσωτερικών» πλέον συμμετριών, πώς θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την εν λόγω έννοια στον φυσικό νόμο;*

Απ.: Η συμμετρία μπήκε στη φυσική από πολύ νωρίς και επρόκειτο ακριβώς γι' αυτή τη διαισθητική έννοια της συμμετρίας του χώρου και του χρόνου. Πίσω από κάθε υπόθεση συμμετρίας υπάρχει μια βασική φυσική παραδοχή, σύμφωνα με την οποία κάποια ποσότητα δεν είναι μετρήσιμη. Όταν λέμε ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε μια απόλυτη αρχή συντεταγμένων στο σύμπαν, σημαίνει ότι όλες οι αρχές είναι ισοδύναμες, οπότε οδηγούμαστε στη συμμετρία πραγματοποιώντας μεταθέσεις, δηλαδή μπορούμε να μεταθέσουμε το σύστημα των αξόνων, να το περιστρέψουμε κ.λπ. Πρόκειται για προφανείς αρχές συμμετρίας που τις συναντάμε στις «εξωτερικές», όπως σωστά τις ονομάσατε, συμμετρίες, ή αλλιώς «συμμετρίες του χωρόχρονου». Χρειάστηκε μια αρκετά μεγάλη αφαιρετική διαδικασία για να φτάσουμε σε άλλες συμμετρίες, και ίσως ο πρώτος που εισήγαγε «εσωτερικές» συμμετρίες στη φυσική να ήταν ο Heisenberg. Αυτός παρατήρησε, μελετώντας τα πειραματικά δεδομένα, ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε μέσα στους πυρήνες, με αρκετά καλή προσέγγιση, ένα πρωτόνιο με ένα νετρόνιο και ότι μέσα σε ορισμένα όρια παίρνουμε περίπου τα ίδια αποτελέσματα. Η διαπίστωση αυτή τον οδήγησε να φτιάξει μια αρκετά μυστήρια «κατασκευή», διότι, αν δείτε το σχετικό άρθρο του, θα διαπιστώσετε ότι δεν είναι και τόσο προφανές το τι κάνει! Εν πάση περιπτώσει, επινόησε μια κατασκευή στην οποία τα πρωτόνια και τα νετρόνια τα θεωρούσε διαφορετικές μορφές ενός βασικού σωματιδίου, που το ονόμαζε νουκλεόνιο. Έτσι «δημιουργήθηκε» μια συμμετρία ανάμεσα σε πρωτόνια και σε νετρόνια. Ήταν η πρώτη ίσως φορά που εισήχθη τέτοιου είδους συμμετρία, η οποία δεν είχε καμία σχέση με μετασχηματισμούς στο χώρο και το χρόνο, αλλά αφορούσε έναν «εσωτερικό» μετασχηματισμό, μια «εσωτερική» ισοδυναμία. Λοιπόν, αυτή η «διαδικασία-μέθοδος» γενικεύτηκε, και ενώ στην αρχή εθεωρείτο απλώς σαν ένα τέχνασμα για να «βγάζει» κανείς τις εξισώσεις, σιγά σιγά εξελίχθηκε σε μια «πλασματική» φυσική θεωρία· μάλιστα, τότε την ονομάζαμε θεωρία του ισοτοπικού σπιν. Ωστόσο, πέρασαν πολλά χρόνια ώσπου να γίνει γενικά αποδεκτή η εν λόγω έννοια της συμμετρίας. Μόλις μετά τον πόλεμο, στο τέλος της δεκαετίας του 1940 και στις αρχές της δεκαετίας του 1950, οι φυσικοί άρχισαν να σκέφτονται χρησιμοποιώντας πράγματι τις έννοιες της συμμετρίας. Αν και έχω αρκετές επιφυλάξεις όσον αφορά την ιστορική ακρίβεια του ισχυρισμού μου, εντούτοις νομίζω ότι στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων ο πρώτος που έκανε υπολογισμούς, κρατώντας και αξιοποιώντας μόνο τις ιδέες της συμμετρίας χωρίς να χρησιμοποιήσει τίποτε άλλο, ήταν ο Fermi! Μετά, σιγά σιγά, αυτή η έννοια έγινε ευρύτερα αποδεκτή, και από τότε αποτελεί το πιο βασικό ίσως στοιχείο μιας φυσικής θεωρίας. Στην αρχή, αυτό δεν είχε πολύ μεγάλη σημασία, διότι η συμμετρία π.χ. στην περίπτωση της «σχέσης» πρωτονίου-νετρονίου σημαίνει απλώς ότι η μάζα του πρωτονίου πρέπει να είναι περίπου ίση με τη μάζα του νετρονίου. Χρειάστηκαν και πάλι πολλά χρόνια ώσπου να φτάσουμε στα σημερινά μοντέλα των ενοποιημένων θεωριών, για να καταλάβουμε ότι σε μια πιο βασική μορφή των συμμετριών, στις συμμετρίες βαθμίδας, τη δυναμική την καθορίζει η ίδια η συμμετρία! Με άλλα λόγια, ενώ η συμμετρία έδινε απλώς σχέσεις ανάμεσα σε παραμέτρους, π.χ. σε μάζες, σε πλάτη σκέδασης, κ.λπ., τώρα σε μια θεωρία βαθμίδας, η συμμετρία αυτή καθεαυτή καθορίζει τι είδους δυναμικές εξισώσεις μπορούμε να έχουμε! Και αυτό υπήρξε ουσιαστικά το μεγάλο ποιοτικό άλμα, καθώς διαπιστώσαμε πως η συμμετρία αποτελεί το πρωταρχικό χαρακτηριστικό μιας θεωρίας και όχι ένα μόνο από τα συστατικά της. Η θεωρία βαθμίδας είναι μια θεωρία στην οποία οι μετασχηματισμοί διαφέρουν σε κάθε σημείο του χώρου. Επιτρέπουμε έτσι στον εαυτό μας να κάνει μετασχηματισμούς που είναι διαφορετικοί από το ένα σημείο στο άλλο, και αυτό είναι ίσως το πιο μεγάλο επίτευγμα στην επιστήμη της θεωρητικής φυσικής τα τελευταία χρόνια!

Ερ.: *Ας έρθουμε τώρα σε μια σημαντική στιγμή της σταδιοδρομίας σας. Το 1970, σε συνεργασία με τους Glashow και Maiani προτείνατε την επανόρθωση της παλαιάς συμμετρίας λεπτονίων-αδρονίων που υπήρχε το 1932 και η οποία είχε χαθεί με την ανακάλυψη όλων των άλλων σωματιδίων στο ενδιάμεσο διάστημα. Σκεφτήκατε ότι, εφόσον είχαμε τέσσερα λεπτόνια (e^-, ν_e, μ^-, ν_μ), θα μπορούσαμε να προσθέσουμε και ένα τέταρτο κουάρκ c, το οποίο εισάγει έναν καινούργιο κβαντικό αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι όπως υπάρχουν «παράδοξα» σωματίδια που σχηματίζονται από τις δεσμευμένες καταστάσεις του κουάρκ s, έτσι θα υπάρχουν «χαρισματικά» σωματίδια από το κουάρκ c. Μετατρέψατε την ομάδα συμμετρίας των ισχυρών αλληλεπιδράσεων από $SU(3) \times SU(3)$ σε $SU(4) \times SU(3)$, οπότε ο αριθμός των μεσονίων μηδενικού σπιν αυξήθηκε από 9 σε 16, των βαρυονίων με σπιν 1/2 από 8 σε 20, κ.λπ. Έτσι βρεθήκαμε μπροστά σ' έναν καινούργιο αδρονικό κόσμο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτή τη γλώσσα των συμμετριών βαθμίδας, οι Glashow, Weinberg και Salam πέτυχαν να περιγράψουν σε ενιαίο σύστημα τις φαινομενικά τόσο διαφορετικές ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις και τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1979. Κατά πόσο το δικό σας μοντέλο, γνωστό ως GIM (από τα αρχικά των ονομάτων σας), συνέβαλε στην επίτευξη αυτής της ενοποίησης;*

Απ.: Η εργασία στην οποία αναφέρεστε αποτέλεσε ένα από τα απαραίτητα συστατικά του ενοποιημένου μοντέλου. Σπεύδω να θέσω τα πράγματα σε μια χρονολογική σειρά. Η εργασία του Glashow είναι πολύ παλαιότερη, είναι του 1961. Η εργασία του Weinberg είναι του 1967 και παρουσίαζε μια «ενοποιημένη» θεωρία, η οποία όμως μπορούσε να εφαρμοστεί μόνο στα λεπτόνια. Γι' αυτό άλλωστε και ο τίτλος του άρθρου του Weinberg ήταν «Ένα μοντέλο για λεπτόνια». Το άρθρο αυτό πέρασε ουσιαστικά απαρατήρητο το 1967, όταν δημοσιεύτηκε. Και τούτο επειδή κανείς δεν ενδιαφερόταν για μια θεωρία που εφαρμοζόταν μόνο στα λεπτόνια. Όλοι πιστεύαμε στη λεγόμενη «καθολικότητα» των αλληλεπιδράσεων, και επομένως θέλαμε το μοντέλο να είναι το ίδιο για τα αδρόνια, δηλαδή τα κουάρκ, και τα λεπτόνια. Ήταν φανερό ότι για να γίνει αυτή η επέκταση έπρεπε τα κουάρκ να συμπεριφέρονται σαν τα λεπτόνια. Χωρίς το επιπλέον κουάρκ, το κουάρκ c, η ενοποίηση δεν θα ήταν εφικτή. Επρόκειτο για κάτι τετριμμένο, κάτι προφανές, και απορώ που ούτε εμείς ούτε κανένας άλλος δεν το είχε σκεφτεί νωρίτερα!

Ερ.: *Ας θέσω ένα γενικότερο ερώτημα: ποια η σημασία για τη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων του γεγονότος ότι ο 't Hooft, χάρη στις δυνατότητες που του προσφέρουν οι «θεωρίες βαθμίδας», απέδειξε το 1971 στη διατριβή του πως είναι επανακανονικοποιήσιμες ακόμη και οι θεωρίες που περιέχουν φορείς με μάζα διαφορετική από 0 και στην ίσο με 1;*

Απ.: Μια φυσική θεωρία, εκτός από τις αισθητικές απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιεί, να είναι δηλαδή όμορφη και απλή, «οφείλει» πάνω απ' όλα να μας παρέχει τη δυνατότητα να κάνουμε υπολογισμούς, δηλαδή να έχει αυτό που θα έλεγα «προβλεπτική ισχύ». Αν μια θεωρία δεν προβλέπει τίποτε, είναι άχρηστη, δεν είναι φυσική θεωρία! Οι θεωρίες που είχαμε ώς τότε δεν είχαν τέτοια ισχύ. Είχαν κακές μαθηματικές ιδιότητες, οπότε δυστυχώς δεν μπορούσαν να γίνουν πρακτικοί υπολογισμοί. Γι' αυτό και κανείς δεν τις έπαιρνε στα σοβαρά! Η εργασία του 't Hooft συνίστατο στο να αποδείξει ότι μια μεγάλη κλάση θεωριών, που περιλαμβάνει και το μοντέλο του Weinberg, έχει ακριβώς αυτή τη «μαγική» ιδιότητα να επιτρέπει τις προβλέψεις, έτσι ώστε να μπορεί κανείς να κάνει θεωρητικούς υπολογισμούς και να φτάνει σε απαντήσεις που να μην επιδέχονται αμφισβήτηση, που να μην αποτελούν δηλαδή θέμα ορισμού αλλά να είναι μονοσήμαντα ορισμένες. Αυτή είναι η «μαγική» ιδιότητα της επανακανονικοποίησης! Πράγματι, πρόκειται για την πιο βασική από πλευράς σπουδαιότητας εργασία, παρά τον ιδιαίτερα τεχνικό της χαρακτήρα!

Ερ.: *Ο Feynman, στο βιβλίο του* Ο χαρακτήρας του φυσικού νόμου, *γράφει: «Η κβαντική θεωρία της βαρύτητας προχωρεί πολύ αργά, αν υποθέσουμε ότι προχωρεί, επειδή όλα τα πειράματα που έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε δεν αφορούν ποτέ ταυτόχρονα την κβαντομηχανική και τη βαρύτητα. Η δύναμη της βαρύτητας είναι υπερβολικά ασθενής σε σύγκριση με την ηλεκτρική». Η παρατήρηση αυτή, καθώς και ορισμένα άλλα δεδομένα, με οδηγούν στο ακόλουθο ερώτημα: αληθεύει η παραπάνω διαπίστωση του Feynman, και πώς διαμορφώνονται οι σχέσεις πειράματος και θεωρίας στο πλαίσιο της σύγχρονης φυσικής;*

Απ.: Οι σχέσεις αυτές, στο βασικό τους μέρος, δεν έχουν προφανώς αλλάξει. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ποτέ ότι η φυσική είναι πειραματική επιστήμη. Κάθε σύλληψη που γεννιέται στο μυαλό ενός μαθηματικού και δεν έχει αντιφάσεις —δηλαδή είναι σωστή—, είναι μαθηματικά. Κάθε σύλληψη στο μυαλό ενός φυσικού δεν είναι φυσική. Το πείραμα αποφασίζει ποιες απ' όλες τις ιδέες του θα μείνουν ως θεωρία φυσικής και ποιες θα απορριφθούν. Μπορώ θαυμάσια να σκεφτώ μια θεωρία βαρύτητας κατά την οποία τα σώματα απωθούνται, αντί να έλκονται. Μια τέτοια θεωρία δεν είναι φυσική, διότι το πείραμα με διαβεβαιώνει ότι τα σώματα έλκονται· αυτή είναι η πρωταρχική, η βασική σχέση! Τώρα, ειδικότερα στο ερώτημα που μου θέσατε υπάρχουν δύο σκέλη. Το ένα αφορά την κβαντική βαρύτητα. Αυτό που λέει ο Feynman είναι σωστό. Δεν μπορούμε —και ούτε βλέπουμε πώς θα μπορέσουμε στα προσεχή χρόνια— να προγραμματίσουμε στο εργαστήριο πειράματα που να αφορούν συγχρόνως και την κβαντική μηχανική και τη βαρύτητα. Επομένως, είναι αλήθεια ότι αυτός είναι ένας από τους λόγους για τους οποίους η θεωρία της κβαντικής βαρύτητας «προχωρεί» τόσο αργά. Πρέπει όμως να διευκρινίσουμε ότι ναι μεν δεν υπάρχουν τέτοια πειράματα, πλην όμως υπάρχουν παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε στο σύμπαν. Δεν έχουμε κάνει κάτι τέτοιο μέχρι σήμερα, αλλά ίσως να γίνει εφικτό στο προσεχές μέλλον. Εάν π.χ. ανακαλύψουμε ότι πράγματι υπάρχουν μελανές οπές, θα μπορέσουμε να κάνουμε παρατηρήσεις που να έχουν σχέση με την κβαντική βαρύτητα. Επαναλαμβάνω ότι δεν μπορούμε να κάνουμε πειράματα, διότι δεν μπορούμε να ξαναφτιάξουμε το σύμπαν στο εργαστήριο και να δούμε πώς είναι. Επομένως, δεν είναι το ίδιο πράγμα η παρατήρηση και το πείραμα. Όμως και η παρατήρηση έχει μεγάλη σημασία!

Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος της ερώτησής σας, που αναφέρεται, γενικά, στη σχέση του πειράματος με τη θεωρία, πρέπει να ομολογήσουμε ότι στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων αντιμετωπίζουμε σήμερα ένα πρόβλημα το οποίο είναι και τεχνολογικό και κοινωνικό και οικονομικό. Πολλοί υποστηρίζουν ότι τα πειράματα στοιχίζουν πάρα πολύ· αυτό δεν νομίζω ότι αληθεύει απόλυτα, όπως προκύπτει και από κάποια σύγκριση που μπορεί να γίνει με τη χρηματοδότηση που γίνεται σε άλλες δραστηριότητες. Εκείνο όμως που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι ότι τα πειράματα, από τεχνολογική πλευρά, όσο περνάει ο καιρός, γίνονται εξαιρετικά περίπλοκα. Κατ' αρχάς, χρειάζεται να απασχοληθεί πολύς κόσμος και να επενδυθεί πολύς χρόνος σ' ένα πείραμα! Σε μια ομάδα πειραμάτων που έχουν προγραμματιστεί να γίνουν στον LHC, τον μεγαλύτερο επιταχυντή που κατασκευάζεται στη Γενεύη, θα απασχοληθούν πάνω από χίλια άτομα. Και μιλώ μόνο για φυσικούς, και όχι για τεχνικούς, για τεχνίτες και πλήθος άλλους ανθρώπους που θα συμμετάσχουν στο πρόγραμμα· πρόκειται για ένα τεράστιο πείραμα, δεν είναι δυνατό να «λειτουργήσει» με λιγότερους!

Πέραν αυτού, ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα είναι η κατασκευή τόσο του ανιχνευτή όσο και του επιταχυντή. Υπάρχουν τεχνολογικά προβλήματα που δεν τα έχουμε επιλύσει ακόμη, και τα οποία αφορούν τους επιταχυντές, αλλά κυρίως τους ανιχνευτές! Η επίλυσή τους θα πάρει πολύ χρόνο και το αποτέλεσμα θα συνιστά τεχνολογικό θαύμα! Για να γίνω σαφέστερος, αρκεί να σας πω ότι το πείραμα του Carlo Rubbia συγκρινόμενο με τα πειράματα του LHC μοιάζει με πείραμα για δημοτικό σχολείο. Η τάξη μεγέθους έχει αλλάξει φοβερά! Σε ένα τέτοιο πείραμα, επομένως, από τη σύλληψή του ώς τον τερματισμό του, μέχρις ότου δηλαδή πάρουμε τα αποτελέσματα, απαιτείται να περάσουν 25 χρόνια περίπου. Αυτό είναι ένα πρόβλημα! Η ταχύτητα της επαλήθευσης ή μη μιας θεωρίας είναι εξαιρετικά αργή. Διατυπώνουμε μια θεωρία σήμερα για να επαληθευθεί ή να διαψευσθεί έπειτα από 30 χρόνια· αυτό σημαίνει ότι πολλοί από τους θεωρητικούς φυσικούς ενδέχεται και να μη ζουν όταν θα έχει ελεγχθεί η θεωρία! Ακόμη και αν παραγνωρίσουμε αυτό το προσωπικό, το υποκειμενικό για κάθε επιστήμονα πρόβλημα, δεν μπορούμε να πράξουμε το ίδιο και με το αντικειμενικό πρόβλημα της ταχύτητας με την οποία επαληθεύεται ή διαψεύδεται μια θεωρία. Η ταχύτητα αυτή συνιστά σημαντικό εμπόδιο, διότι αυτή κανονίζει και την ταχύτητα της προόδου στην επιστήμη μας, αφού πρέπει να γνωρίζουμε αν μια ιδέα είναι σωστή ή λανθασμένη για να προχωρήσουμε στην επόμενη. Απαιτούνται λοιπόν καινούργιες τεχνολογικές πρόοδοι, τις οποίες δεν έχουμε ακόμη επιτύχει. Αυτό είναι ίσως το σοβαρότερο πρόβλημα σήμερα στη φυσική των πιο μικρών αποστάσεων!

Ερ.: *Ας περάσουμε τώρα σ' ένα άλλο πολυσυζητημένο ζήτημα της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής, στις σχέσεις της δηλαδή με τη μαθηματική επιστήμη. Είναι αλήθεια ότι οι νέοι θεωρητικοί φυσικοί κάνουν σήμερα μαθηματικά και όχι φυσική; Το ρωτάω αυτό διότι ασφαλώς γνωρίζετε και εσείς τις σχετικές επικρίσεις που διατυπώνονται εναντίον εκείνων που δουλεύουν π.χ. στις θεωρίες των χορδών, ότι δηλαδή «χάνουν» τη φυσική μέσα στα δύσκολα και δαιδαλώδη μαθηματικά που χρησιμοποιούν. Από την άλλη πλευρά πρέπει να επισημανθεί η συμβολή ορισμένων κορυφαίων θεωρητικών φυσικών στη δημιουργία νέων κλάδων των μαθηματικών, όπως της κβαντικής συνομολογίας, που αναπτύχθηκε χάρη στις πρωτοποριακές εργασίες των Gromov και Witten. Θα ήθελα το σχόλιο σας γι' αυτές τις σκέψεις.*

Απ.: Δεν συμφωνώ με αυτή την κριτική, παρότι ανήκω και εγώ στους πιο ηλικιωμένους που δεν μπορούν να παρακολουθήσουν πλέον όλους τους αφηρημένους κλάδους των μαθηματικών, τους οποίους χρησιμοποιούν στις τόσο ενδιαφέρουσες εργασίες τους οι νεότεροι θεωρητικοί φυσικοί. Αλλά δεν συμφωνώ για πολλούς λόγους. Πρώτον, διότι πρόκειται για ένα επαναλαμβανόμενο φαινόμενο. Πάντοτε η προηγούμενη γενιά φυσικών κατηγορούσε την επόμενη ότι δεν έκανε πραγματική φυσική αλλά μαθηματικά! Και τούτο διότι, καθώς η φυσική προοδεύει, γίνεται αναγκαία η εκ μέρους της υιοθέτηση νέων και πιο προχωρημένων μαθηματικών τεχνικών, τις οποίες δεν χρειάζονταν οι παλαιότεροι στις εργασίες τους. Κάποτε οι διαφορικές εξισώσεις ήταν το πιο σημαντικό μαθηματικό εργαλείο της δουλειάς των φυσικών· μετά, στη δική μου την εποχή, εμφανίστηκαν οι αναλυτικές συναρτήσεις και η θεωρία ομάδων. Σήμερα ο πρώτος ρόλος ανήκει στην τοπολογία και στη διαφορική γεωμετρία!

Δεύτερον, πιστεύω ότι μια από τις πιο ευχάριστες εξελίξεις στο χώρο των θετικών επιστημών στα τέλη του 20ού αιώνα είναι ακριβώς αυτή η στενή συνεργασία ανάμεσα σε μαθηματικούς και φυσικούς, πράγμα που είχαμε να το δούμε εδώ και πολλά χρόνια, ίσως από την εποχή του Poincaré. Οι δύο αυτοί κλάδοι είχαν ξεχωρίσει σχεδόν εντελώς, οπότε οι μαθηματικοί δεν καταλάβαιναν τους φυσικούς και οι φυσικοί δεν καταλάβαιναν τους μαθηματικούς. Τώρα ξανασμίγουν, και βλέπουμε πάμπολλες εργασίες που τις συνυπογράφουν μαθηματικοί και φυσικοί. Πρόκειται για ένα μήνυμα πολύ παρήγορο και, θα πρόσθετα, ελπιδοφόρο. Όσον αφορά το συγκεκριμένο παράδειγμα των θεωριών των υπερχορδών, είναι λάθος να ισχυριστούμε ότι δεν αποτελούν θεωρίες φυσικής. Ίσα ίσα, είναι θεωρίες που επιχειρούν να απαντήσουν στα πιο βασικά ερευνητικά προβλήματα της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής. Επιπλέον δεν είναι σωστός ο ισχυρισμός ότι δεν έχουν πειραματικές συνέπειες. Όλες αυτές οι θεωρίες έχουν βασικά συστατικά, όπως π.χ. η υπερσυμμετρία, τα οποία είναι δυνατόν να ελεγχθούν, και θα ελεγχθούν, μέσα στα προσεχή 20 χρόνια. Όπως ήδη σας είπα, ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει ένα πείραμα είναι πολύ μεγάλος. Επομένως, όντως χρειάζεται μεγάλος επιταχυντής, όπως ο LHC του CERN, πρέπει να κατασκευαστούν επίσης οι ανάλογοι ανιχνευτές, κ.λπ. Ας υποθέσουμε ότι ο επιταχυντής θα είναι έτοιμος το 2005, ή στην καλύτερη περίπτωση το 2004, και ας προσθέσουμε και μερικά χρόνια ακόμη για τα πειράματα, οπότε πριν από το 2010 θα έχουμε τις αποδείξεις! Με άλλα λόγια, έστω και κάπως αργά, θα ελεγχθεί πειραματικά η ορθότητα μερικών από τις προβλέψεις αυτών των θεωριών!

Ερ.: *Ποια θεωρείτε ότι είναι η ευρύτερη κοινωνική και πολιτισμική προσφορά του θετικού επιστήμονα, πέρα από την προφανή, εκείνη δηλαδή που συνδέεται άμεσα με την επαγγελματική του δραστηριότητα; Το ρωτάω αυτό, διότι θυμάμαι το παλαιό ωραίο βιβλίο του C.P. Snow,* The two cultures, *όπου ο συγγραφέας, αφού διακρίνει τις κουλτούρες σε «επιστημονική-τεχνολογική» και σε «ανθρωπιστική-λογοτεχνική», ισχυρίζεται ότι αμόρφωτος πρέπει να θεωρείται όχι μόνο εκείνος που αγνοεί πλήρως τον Σαίξπηρ αλλά και όποιος δεν γνωρίζει τίποτε για τον Δεύτερο Νόμο της θερμοδυναμικής!*

Απ.: Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι σύνθετη, χρειάζεται δηλαδή να εξετάσουμε πολλές συνιστώσες του προβλήματος. Κατ' αρχάς υπάρχει η προσφορά του θετικού επιστήμονα στην ανθρώπινη κουλτούρα, στην παραγωγή καινούργιας γνώσης. Ο Zweig, στο βιβλίο του *Οι τρεις τιτάνες*, το οποίο αναφέρεται στον Μπετόβεν, τον Μιχαήλ Άγγελο και τον Ρέμπραντ, γράφει στην εισαγωγή ότι το ανθρώπινο είδος θα ήταν δυστυχισμένο αν δεν υπήρχαν ορισμένοι άνθρωποι σαν αυτούς τους τρεις για να του θυμίζουν τη θεία καταγωγή του, να του υπενθυμίζουν δηλαδή ότι είναι «κάτι παραπάνω»! Θα μπορούσα εξίσου άνετα να προσθέσω σ' αυτόν τον κατάλογο τον Αρχιμήδη, τον Αϊνστάιν, κ.ά. Η φυσική, όπως και κάθε άλλη θετική επιστήμη, είναι μέρος της ανθρώπινης κουλτούρας και αυτός είναι ο βασικός λόγος που πρέπει να διδάσκεται παντού, και στα σχολεία και στις ανώτερες και ανώτατες σχολές· πρέπει όμως να διδάσκεται όχι μόνον σαν ένα ωφελιμιστικό κατασκεύασμα, αλλά κυρίως σαν ενδιαίτημα πολιτισμού! Δεν «κάνουμε» φυσική μόνο γιατί μας επιτρέπει να έχουμε ηλεκτρισμό, ραδιόφωνα, τηλεοράσεις κ.λπ., αλλά διότι αποτελεί μέρος της ανθρώπινης κουλτούρας! Και ίσως να φταίμε εμείς οι φυσικοί, αφού έχουμε παραμελήσει να τονίσουμε αυτή τη διάσταση του έργου μας. Ο κόσμος θεωρεί αμόρφωτο έναν άνθρωπο που δεν έχει διαβάσει ένα βιβλίο του άλφα ή του βήτα μεγάλου συγγραφέα, δεν τον θεωρεί όμως αμόρφωτο αν αγνοεί το νόμο του Νεύτωνα ή τους νόμους της θερμοδυναμικής. Και όμως, αυτό είναι λάθος, όπως εύστοχα είπατε.

Μια άλλη πλευρά που πρέπει να επισημανθεί είναι η εξής: τα μαθηματικά, η φυσική, η βιολογία, οι θετικές επιστήμες γενικά, προσφέρουν ίσως τον μοναδικό χώρο ειλικρινούς και μόνιμης συμφωνίας ανάμεσα σε διαφορετικά έθνη και πολιτισμούς. Σήμερα, δυστυχώς, οι άνθρωποι ομονοούν σε λίγα· υπάρχουν λίγοι «χώροι συμφωνίας», ενώ διαφωνούν σε πολλά, και μάλιστα έντονα, οπότε συχνά τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα λυπηρά. Εδώ όμως αυτομάτως γεννιέται μια μεγάλη ευθύνη των επιστημόνων. Πρέπει να διαφυλάξουν αμόλυντο, καθαρό αυτόν το «χώρο συμφωνίας», να μην προσπαθούν επιτηδείως να προσθέτουν στις βασικές «αρχές συμφωνίας» και δικές τους απόψεις, που δεν έχουν καμία σχέση με την αυστηρά επιστημονική τους αρμοδιότητα αλλά απορρέουν από τις πολιτικές, τις θρησκευτικές και άλλες πεποιθήσεις τους. Ο κάθε άνθρωπος έχει βέβαια δικαίωμα να εκφράζει τις απόψεις του, όταν όμως αυτές δεν είναι επιστημονικές, πρέπει να καθιστά σαφές ότι μιλάει σαν άνθρωπος ή σαν πολίτης, και όχι υπό την ιδιότητά του ως επιστήμονα. Θα ολοκληρώσω την απάντησή μου στο ερώτημά σας θίγοντας μία ακόμη διάσταση του θέματος, αν και είμαι βέβαιος ότι υπάρχουν και πολλές άλλες, οι οποίες προς το παρόν μού διαφεύγουν. Ο Dirac είχε γράψει κάποτε ένα πολύ ωραίο άρθρο για την αισθητική αξία μιας μαθηματικής θεωρίας. Αν και η έννοια της αισθητικής ορίζεται πολύ δύσκολα, εντούτοις, πιστεύω ότι οι άνθρωποι που ασχολούνται με ένα θέμα δεν δυσκολεύονται συνήθως να ανακαλύψουν και να αναγνωρίσουν την αισθητική αξία του. Με τον ίδιο τρόπο, και όσοι ασχολούνται με τα μαθηματικά μπορούν να ανακαλύψουν την αισθητική αξία τους. Εδώ όμως υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο, που συνίσταται στην παρατήρηση ότι, όπως στην τέχνη, έτσι και στα μαθηματικά απαιτείται η κατάλληλη παιδεία για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την αισθητική αξία μιας θεωρίας. Δεν είμαι όμως καθόλου βέβαιος ότι αυτό το εφόδιο το αποκτάμε μέσα από την παιδεία που μας προσφέρεται στα γυμνάσια και στα πανεπιστήμια. Αν, δηλαδή, πολλές φορές η επιστήμη απωθεί αντί να ελκύει, φταίει και ο τρόπος διδασκαλίας, που γίνεται ιδιαίτερα σχολαστικός και δεν προβάλλει ανάμεσα στις άλλες αρετές μιας μαθηματικής ή φυσικής θεωρίας και την αξία της αισθητικής της αξίας!

Ερ.: *Ζείτε και εργάζεστε στη Γαλλία, και όχι στις ΗΠΑ, όπως συμβαίνει με τους περισσότερους διακεκριμένους Έλληνες στις θετικές επιστήμες. Πώς βλέπετε το μέλλον της ευρωπαϊκής επιστήμης στον τομέα σας, αλλά και γενικά;*

Απ.: Φαντάζομαι ότι όσοι ασχολούνται με την ιστορία δεν θα εκπλαγούν αν ανακαλύψουν πως η πορεία της ευρωπαϊκής επιστήμης ακολούθησε τα βήματα που έκανε η Ευρώπη στον οικονομικό και πολιτικό τομέα. Πριν από τον πόλεμο η Ευρώπη είχε μια σαφή κυριαρχία στον επιστημονικό χώρο. Μετά τον πόλεμο φτάσαμε ουσιαστικά στο χείλος της καταστροφής. Οι περισσότεροι επιστήμονες είχαν φύγει, η Ευρώπη ήταν κατεστραμμένη, διηρημένη κ.λπ. Πέρασαν χρόνια για να ξαναφτιάξουμε την επιστημονική Ευρώπη, όπως πέρασαν χρόνια για να οικοδομήσουμε και την οικονομική Ευρώπη. Στον δικό μου τομέα, τη φυσική των υψηλών ενεργειών, θα μπορούσε να πει κανείς ότι ώς το τέλος της δεκαετίας του 1960 οι ΗΠΑ ήταν απολύτως κυρίαρχες. Όλες οι μεγάλες ιδέες, οι πιο σοβαρές «συλλήψεις», τα πιο σημαντικά πειράματα γίνονταν εκεί. Είναι περίεργο, αλλά η ραγδαία ανάπτυξη της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων στην ήπειρό μας ακολουθεί την «άνοδο» της καινούργιας «θεωρίας της επανακανονικοποίησης»! Σ' αυτή την πορεία δεν συνέβαλε μόνον ο 't Hooft αλλά και πολλοί άλλοι σημαντικοί ευρωπαίοι θεωρητικοί φυσικοί.

Στη συνέχεια, οι συνάδελφοί μας, οι πειραματικοί, μετά το 1970 κατάφεραν να σημειώσουν τις μεγαλύτερες επιτυχίες τους σε ευρωπαϊκό έδαφος. Θα έλεγα λοιπόν ότι από το 1980 περίπου και έπειτα υπήρξε μια ισόρροπη ανάπτυξη της αμερικανικής και της ευρωπαϊκής φυσικής επιστήμης. Σήμερα, η Ευρώπη τείνει να πάρει το προβάδισμα και, κατά τη γνώμη μου, ο βασικός λόγος γι' αυτή την εξέλιξη είναι ότι η Ευρώπη δέχτηκε το «βάρος» να φτιάξει έναν καινούργιο μεγάλο επιταχυντή, τον LHC. Θα κοστίσει ακριβά, αλλά ο αμερικανικός, ο SSC, επρόκειτο να είναι κατά μία τάξη μεγέθους ακριβότερος! Επομένως, στα προσεχή χρόνια η Ευρώπη θα έχει το προβάδισμα στην πειραματική φυσική, όπου άλλωστε βρίσκονται και τα αποτελέσματα· μια τέτοια εξέλιξη όμως θα συμπαρασύρει σε άνθηση και τη θεωρητική φυσική. Το μέλλον της ευρωπαϊκής φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων είναι λαμπρό και προβλέπω στη στενότερη συνεργασία μας με τις ΗΠΑ, με σκοπό να διαμορφωθεί στο μέλλον μια κοινή ερευνητική πολιτική στον τομέα μας.

Όσον αφορά τη γενικότερη κατάσταση της ευρωπαϊκής επιστήμης, οφείλω να πω ότι είμαι βέβαιος πως ανάλογη πρόοδος αναπτύσσεται και στους άλλους κλάδους. Η Ευρώπη έχει πλήρως «ανδρωθεί» στον επιστημονικό τομέα. Δεν χρειάζεται να «διδάσκεται» από τις ΗΠΑ, όπως γινόταν τα πρώτα μεταπολεμικά χρόνια. Αν με ρωτήσετε γιατί εγώ αποφάσισα να δουλέψω στην Ευρώπη, η απάντηση είναι ότι σπούδασα στη Γαλλία και στη συνέχεια πήγα στις ΗΠΑ αρκετά μεγάλος, έχοντας πια συνηθίσει και αγαπήσει τη ζωή στην ήπειρό μας· έτσι δεν έμεινα στην Αμερική, όπως έκαναν όσοι πήγαν εκεί σε μικρή ηλικία.

Ερ.: *Στο σημείο αυτό θα 'θελα να ζητήσω τη γνώμη σας για ένα ζήτημα, που το θεωρώ εξέχουσας σημασίας και το οποίο, δυστυχώς, συζητείται ελάχιστα στους επιστημονικούς και πολιτικούς κύκλους. Με την άνοδο του ναζισμού και τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, παρατηρείται μια τεράστια μετανάστευση εγκεφάλων από την Ευρώπη στις ΗΠΑ, και ορισμένα επιστημονικά κέντρα, όπως το Μόναχο, το Γκαίτινγκεν, η Χαϊδελβέργη, το Βερολίνο, η Κοπεγχάγη, δεν επανακτούν μεταπολεμικά την προπολεμική τους αίγλη. Πέρασαν αρκετά χρόνια για να επανέλθει η Ευρώπη στο προσκήνιο, αλλά σήμερα, μετά την κατάρρευση του κομμουνισμού υπάρχει ο ανάλογος κίνδυνος να εξαφανιστεί μια σπουδαία παράδοση στη θεωρητική φυσική στις χώρες της τέως ΕΣΣΔ. Τι νομίζετε ότι πρέπει να πράξει η παγκόσμια επιστημονική κοινότητα για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα;*

Απ.: Πρόκειται για ένα πρόβλημα σημαντικό και καθόλου απλό. Πράγματι, η σοβιετική φυσική, κυρίως η θεωρητική φυσική και όχι τόσο η πειραματική, αποτελούσε μια από τις καλύτερες σχολές. Τα «εγγόνια» (και όχι τα «παιδιά») του Landau, ο οποίος, ας σημειωθεί, ήταν ιδιαίτερα αυστηρός με τους μαθητές του, έφτιαξαν το Ινστιτούτο Landau, ένα από τα καλύτερα κέντρα θεωρητικής φυσικής του κόσμου. Βρισκόταν κάπου 40 χιλιόμετρα έξω από τη Μόσχα, αλλά εμείς οι ξένοι επισκέπτες ποτέ δεν πηγαίναμε εκεί, διότι η περιοχή ήταν απαγορευμένη ζώνη επειδή υπήρχαν στρατιωτικές βάσεις. Συναντούσαμε τους συναδέλφους μας φυσικούς στη Μόσχα, όπου είχαν ένα γραφείο. Ανάμεσά τους βρίσκονταν ο Polyakov, ο Migdal και ο Zamolodchikov, οι οποίοι μετά την κατάρρευση του κομμουνισμού και το άνοιγμα των συνόρων, εγκατέλειψαν τη Ρωσία, επειδή οι εκεί συνθήκες διαβίωσης και εργασίας τους ήταν άσχημες. Και επειδή είναι όλοι τους πάρα πολύ καλοί φυσικοί, πήγαν στα μεγαλύτερα πανεπιστήμια. Συγκεκριμένα, ο Polyakov και ο Migdal στο Πρίνστον, ο Zamolodchikov στο Rutgers, ενώ τον αδελφό του τελευταίου και τον Kazakov τους πήραμε εμείς στη Γαλλία. Επομένως, οι περισσότεροι θεωρητικοί φυσικοί αυτής της γενιάς φύγανε από τις χώρες της τέως ΕΣΣΔ και δουλεύουν πλέον αλλού. Αυτό που φοβάμαι όμως είναι ότι κινδυνεύει να μην επιζήσει μια σχολή, και επομένως ένα φυτώριο νέων, εξαιρετικά προικισμένων μαθηματικών και φυσικών. Αν η διάλυση αυτή επεκταθεί και σε κατώτερα επίπεδα, π.χ. στο σχολικό, τότε η καταστροφή θα έχει ολοκληρωθεί! Είναι γνωστό ότι τα γυμνάσια και τα λύκεια δούλευαν πολύ καλά στην τέως Σοβιετική Ένωση. Αν κοιτάξει κάποιος τα θέματα τόσο των Πανενωσιακών Μαθηματικών Ολυμπιάδων όσο και των Μαθηματικών Ολυμπιάδων της Μόσχας, θα μείνει άναυδος από την πρωτοτυπία και τη δυσκολία τους· είναι εκπληκτικό το ότι υπήρχαν νέοι που κατάφερναν να τα λύσουν...

Ερ.: *Κάποτε μάλιστα προτάθηκε ως θέμα ακόμη και το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat», ώστε να διαπιστωθεί μέχρι πού φτάνει η ευρηματικότητα των διαγωνιζομένων...*

Απ.: Αν λοιπόν αυτή η σχολή διαλυθεί, θα είναι μια απώλεια για την ανθρώπινη κουλτούρα γενικά. Δεν έχουμε τόσο πολλά φυτώρια θετικών επιστημόνων, ώστε να επιτρέψουμε στον εαυτό μας να χαθεί αυτό το συγκεκριμένο. Υπάρχουν λοιπόν διάφορα προγράμματα, τα οποία δεν γνωρίζω πόσο θα επιτύχουν, πλην όμως αποσκοπούν στην οικονομική και τεχνολογική υποστήριξη σημαντικών επιστημονικών κέντρων των χωρών της τέως ΕΣΣΔ· έτσι ελπίζεται ότι θα ανακοπεί η διαρροή εγκεφάλων προς το εξωτερικό.

Ερ.: *Θα ήθελα να κλείσουμε τη συζήτησή μας με μια αναφορά σας στο τωρινό ερευνητικό σας πρόγραμμα.*

Απ.: Υπάρχουν φυσικοί που παραμένουν δραστήριοι και σε μεγάλη ηλικία. Φοβάμαι ότι δεν ανήκω σ' αυτούς. Εξάλλου, όσο μεγαλώνει κανείς έχει περισσότερες υποχρεώσεις, διοικητικές, οργανωτικές αλλά και άλλες, που του απορροφούν πολύ χρόνο. Η προσωπική μου ερευνητική δραστηριότητα είναι αρκετά μειωμένη. Αλλά, εφόσον θέλετε, μπορώ να σας πω με τι θέματα ασχολούμαι σήμερα: κυρίως με θέματα που έχουν σχέση με την κβαντική βαρύτητα σε διάφορες μορφές της. Είναι αλήθεια ότι δεν υπάρχει μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας αυτή τη στιγμή, τέτοια ώστε να πούμε ότι αυτή είναι και άλλη δεν υπάρχει! Υπάρχουν διάφορες «κατασκευές». Υπάρχει η θεωρία των χορδών, που είναι μεν ελπιδοφόρα, πλην όμως δεν έχει ακόμη ελεγχθεί πειραματικά. Έχει ιδιαίτερη σημασία να βρούμε μια συνεπή κβαντική θεωρία βαρύτητας, διότι θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε καλύτερα το σύμπαν, μέρος του οποίου αποτελούμε όλοι μας. Το σύμπαν, σε κάποια πολύ πρώιμη φάση της εξέλιξής του, πέρασε από μια κατάσταση de Sitter, ή αλλιώς «πληθωριστική». Πρόκειται για μια κατάσταση πολύ γρήγορης διαστολής, εκθετικά γρήγορης σε σχέση με τη διαστολή της παρούσας φάσης του. Έχουμε διάφορες ενδείξεις ότι πράγματι έτσι συνέβη. Σ' αυτή την κατάσταση του σύμπαντος η κβαντική βαρύτητα διαδραμάτιζε σπουδαίο ρόλο. Επομένως έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία να μελετήσουμε το εν λόγω πρόβλημα. Αυτό κάνω κι εγώ τώρα, ασχολούμενος με το πώς συμπεριφέρεται η θεωρία κβαντικής βαρύτητας σ' ένα σύμπαν που διαστέλλεται εκθετικά. Δεν είναι καθόλου απλό πρόβλημα, διότι, δυστυχώς, έχει πάρα

Η συνέχεια στη σελίδα 62 ⇨

Το πιο μυστηριώδες σχήμα

Μια σύντομη εισαγωγή στις σπειροειδείς καμπύλες

N. Bourbaki

Η ΣΠΕΙΡΟΕΙΔΗΣ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΚΑΜΠΥΛΗ του επιπέδου η οποία γράφεται από ένα σημείο που στρέφεται γύρω από συγκεκριμένο σταθερό σημείο (τον *πόλο* της σπειροειδούς), πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενο απ' αυτό ανάλογα με τη διεύθυνση της κίνησης. Η ονομασία της προέρχεται από τη λέξη σπείρα,* που σημαίνει το περιστραμμένο γύρω από ένα σημείο· η λέξη έχει την ίδια σχεδόν προφορά στα ελληνικά και στα λατινικά (spira).

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σπειροειδής εκφράζει έναν τύπο συμμετρίας[1] εντελώς διαφορετικό από τη συμμετρία μιας χιονονιφάδας, ενός πυρήνα ατόμου ή μιας σκακιέρας, την οποία θα μπορούσαμε να ονομάσουμε σφαιρική συμμετρία. Ενώ η σφαιρική συμμετρία χαρακτηρίζεται από τη σταθερότητα της ακτίνας που φέρουμε από το κέντρο όταν το σχήμα περιστρέφεται μέχρι να συμπέσει με τον εαυτό του, η σπειροειδής συμμετρία επιτρέπει την αλλαγή της ακτίνας. Επομένως το σπειροειδές είναι μια περισσότερο θεμελιώδης ιδιότητα της ύλης, ενώ η σφαιρική συμμετρία είναι μια ιδιαίτερη, εξαιρετική περίπτωση της σπειροειδούς.

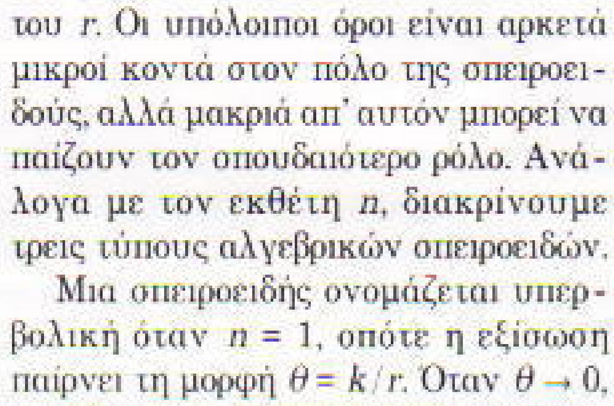
Η καλύτερη μαθηματική περιγραφή των σπειροειδών γίνεται μέσω πολικών συντεταγμένων. Έστω r η απόσταση από τον πόλο O έως το σημείο M της σπειροειδούς, και έστω θ η γωνία μεταξύ της ΟΜ και του σταθερού άξονα OA (του πολικού άξονα) (Σχήμα 1). Η ενδιαφέρουσα περίπτωση μιας σπειροειδούς που φτάνει τον πόλο της μόνο όταν η θ τείνει στο άπειρο —δηλαδή, έπειτα από άπειρο πλήθος στροφών— δίνεται από την εξίσωση $\theta = kr^{-n}$, όπου $k > 0$, $n > 0$ είναι σταθερές, $r > 0$, $0 < \theta < \infty$. Οι σπειροειδείς με εξισώσεις αυτής της μορφής ονομάζονται αλγεβρικές. Αυτή η μορφή μπορεί να θεωρηθεί ως ο πρώτος όρος μιας γενικότερης συνάρτησης $\theta = \theta(r)$ δυνάμεων του r. Οι υπόλοιποι όροι είναι αρκετά μικροί κοντά στον πόλο της σπειροειδούς, αλλά μακριά απ' αυτόν μπορεί να παίζουν τον σπουδαιότερο ρόλο. Ανάλογα με τον εκθέτη n, διακρίνουμε τρεις τύπους αλγεβρικών σπειροειδών.

Μια σπειροειδής ονομάζεται υπερβολική όταν $n = 1$, οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\theta = k/r$. Όταν $\theta \to 0$, η απόσταση από ένα σημείο της σπειροειδούς έως τον πολικό άξονα σταθεροποιείται, αφού είναι ίση με $r\text{ημ}\theta \cong r\theta = k$. Έπεται ότι η υπερβολική σπειροειδής έχει μια ασύμπτωτη —την ευθεία που προσεγγίζει όταν $\theta \to 0$. Η υπερβολική σπειροειδής περιγράφηκε από τον γάλλο μαθηματικό Pierre Varignon (1654-1722).

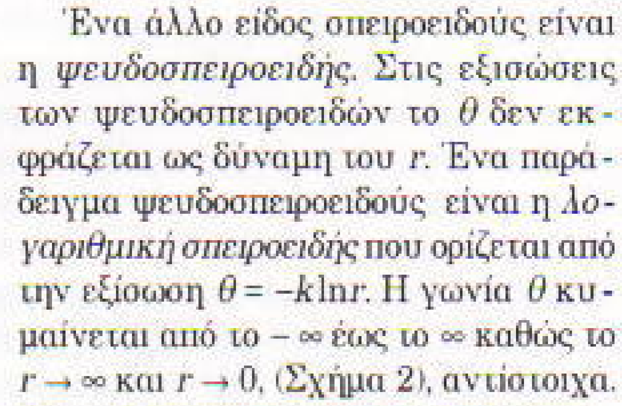
Αν $n > 1$, τότε $r\text{ημ}\theta \cong r\theta = kr^{1-n}$ για μικρά θ —δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση η ασύμπτωτη συμπίπτει με τον πολικό άξονα OA. Για $n = 2$, αυτό το είδος σπειροειδούς ονομάζεται *σαλπιγγική* (lituus). Ο όρος χρησιμοποιήθηκε από τον Colin Maclaurin το 1722, αλλά η καμπύλη περιγράφηκε πρώτη φορά το 1714 από τον Rodger Cotes.

Όταν $n < 1$, η αλγεβρική σπειροειδής δεν έχει ασύμπτωτη. Η απόσταση μεταξύ της σπειροειδούς και του πολικού άξονα αυξάνει όσο περίπου και το kr^{1-n} (καθώς $r \to \infty$).

Ένα άλλο είδος σπειροειδούς είναι η *ψευδοσπειροειδής*. Στις εξισώσεις των ψευδοσπειροειδών το θ δεν εκφράζεται ως δύναμη του r. Ένα παράδειγμα ψευδοσπειροειδούς είναι η *λογαριθμική σπειροειδής* που ορίζεται από την εξίσωση $\theta = -k\ln r$. Η γωνία θ κυμαίνεται από το $-\infty$ έως το ∞ καθώς το $r \to \infty$ και $r \to 0$, (Σχήμα 2), αντίστοιχα. Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα της λογαριθμικής σπειροειδούς είναι ότι τέμνει κάθε ακτίνα που φέρουμε από τον πόλο της υπό την ίδια πάντοτε γωνία



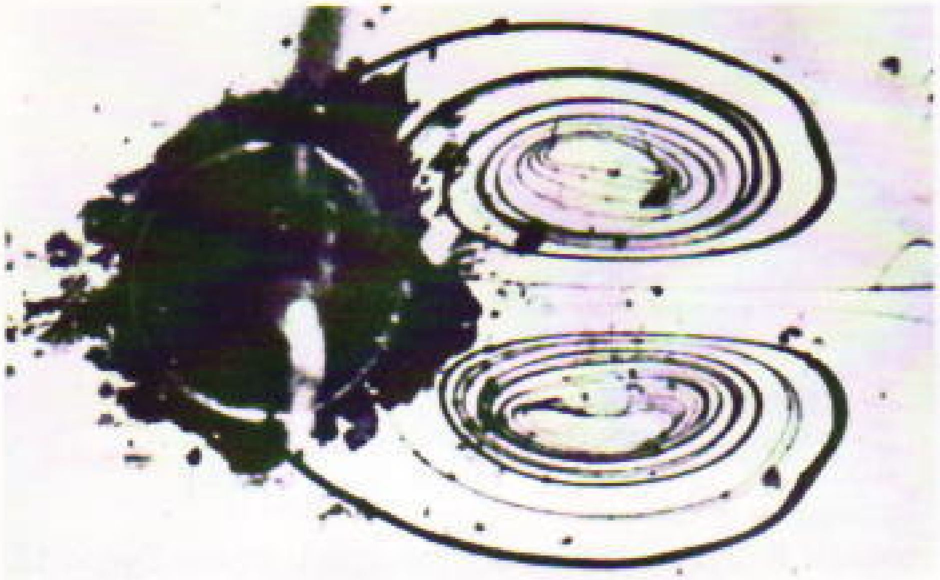
Σχήμα 1



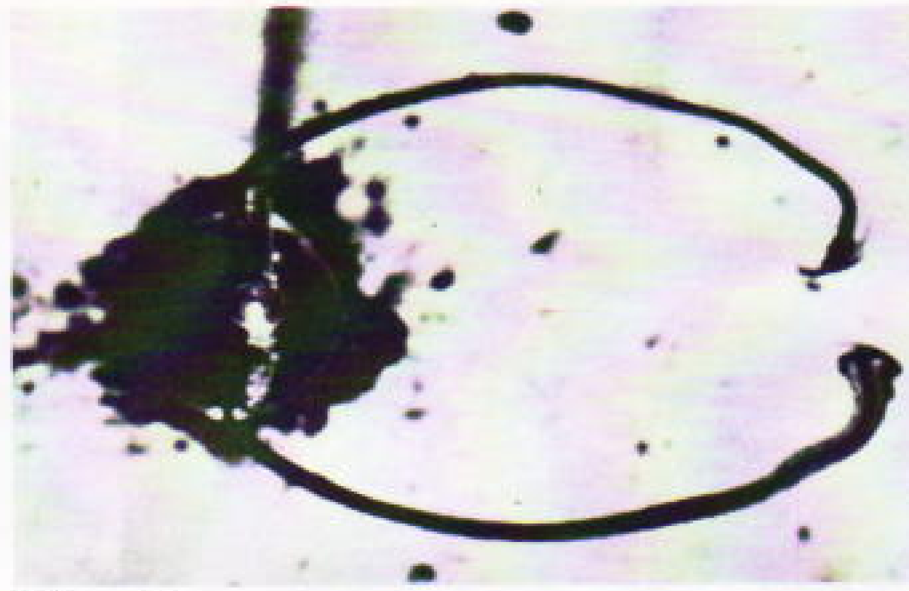
Σχήμα 2

* Η λέξη «σπείρα» έχει άλλη έννοια στα αρχαία ελληνικά· σημαίνει το τρισδιάστατο σχήμα που μοιάζει με κουλούρα (το οποίο σήμερα ονομάζεται αδόκιμα «τόρος»). Οι σπείρες που εμφανίζονται στο παρόν άρθρο είναι γενικεύσεις της αρχιμήδειας έλικας. Ο ορισμός της έλικας βρίσκεται στο *Περί Ελίκων* του Αρχιμήδη, σε δωρική διάλεκτο: «εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ... σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ... τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ...» (Σ.τ. επιστ. συμβ.)

1. Δηλαδή, μια μέθοδος να κάνουμε ένα αντικείμενο να συμπέσει με τον εαυτό του χρησιμοποιώντας ένα μετασχηματισμό.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

α (προσπαθήστε να αποδείξετε μόνοι σας αυτή την πρόταση). Γι' αυτόν το λόγο ονομάζεται συχνά *ισογώνιος* σπειροειδής. Την καμπύλη αυτή την περιέγραψε το 1638 ο μεγάλος γάλλος φιλόσοφος και μαθηματικός René Descartes (Καρτέσιος) (1596-1650). Συναντάμε πλήθος εφαρμογές της στη μηχανική: με αυτό το σχήμα κατασκευάζονται συχνά περιστρεφόμενοι κοπτήρες, τρυπάνια και γρανάζια.

Έπειτα από ομοιοθεσία με λόγο A μιας λογαριθμικής σπειροειδούς και ταυτόχρονη περιστροφή της κατά γωνία $-k\ln A$, η σπειροειδής θα συμπέσει με τον εαυτό της (επειδή η εξίσωση εξακολουθεί να ισχύει). Αυτή είναι μία μόνο από τις διάφορες «αναπαραγωγικές» ιδιότητες της λογαριθμικής σπειροειδούς. Πολλές άλλες τις ανακάλυψε ο Jacob Bernoulli (1654-1705), ο οποίος είχε εντυπωσιαστεί τόσο πολύ από τις ανακαλύψεις του ώστε ζήτησε να χαραχτεί στον τάφο του η καμπύλη μαζί με το λατινικό επίγραμμα *Eadem mutata resurgo* (Θα αναστηθώ όπως ήμουν, αν και θα έχω μεταβληθεί).

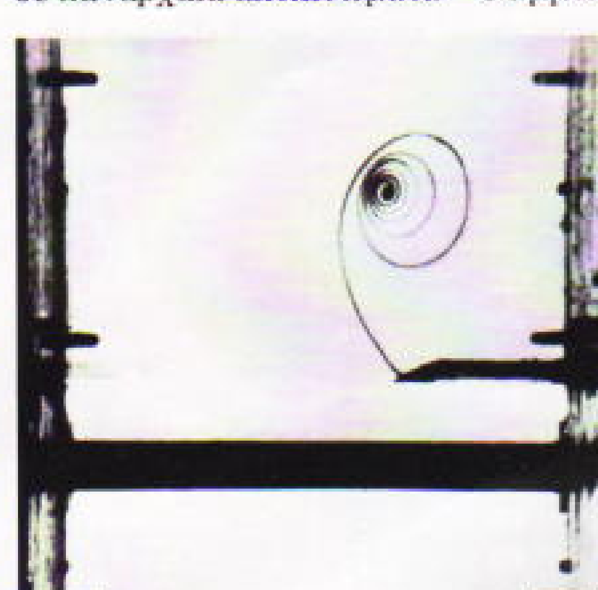
Σχήμα 5

Η σπειροειδής μπορεί να ελίσσεται άπειρες φορές όχι μόνο κοντά στον πόλο της αλλά και στην «περιοχή του απείρου» —δηλαδή, καθώς το σημείο που τη διατρέχει απομακρύνεται από τον πόλο της προς το άπειρο. Παραδείγματα αυτής της περίπτωσης είναι η αρχιμήδεια σπειροειδής $\theta = kr$, η σπειροειδής του Γαλιλαίου $\theta^2 = k(r - r_0)$, και η παραβολική σπειροειδής $\theta^{1/2} = k(r - r_0)$. Είναι επίσης δυνατόν η σπειροειδής να στρέφεται άπειρες φορές γύρω από συγκεκριμένη καμπύλη προσεγγίζοντάς την οριακά καθώς το $\theta \to \infty$. Για παράδειγμα, η σπειροειδής $\theta(r - r_0) = k$ που «τυλίγεται» γύρω από τον κύκλο $r = r_0$.

Σε μοριακό επίπεδο, βρίσκουμε σπειροειδείς (ή ελικοειδείς —δείτε στη συνέχεια) δομές στα μόρια του DNA, ενώ σε κοσμική κλίμακα υπάρχουν γιγάντιοι σπειροειδείς γαλαξίες. Ανάμεσα σ' αυτές τις δύο κλίμακες, στον δικό μας κόσμο, συναντάμε σπειροειδείς δομές σε κάθε μας βήμα. Ένας στρόβιλος σχηματίζεται καθώς η άκρη ενός κουπιού χτυπά το νερό· ενισχύεται κατά τη διάρκεια της κρούσης και εν συνεχεία απομακρύνεται προς τα πίσω. Οι σπειροειδείς στρόβιλοι έχουν περίπλοκο σχήμα. Μπορεί να είναι αλγεβρικοί (Σχήμα 3) ή και λογαριθμικοί κοντά στον πόλο. Στο Σχήμα 4 βλέπετε μια λογαριθμική σπειροειδή με μικρό k: η σπειροειδής δομή είναι πρακτικά αόρατη, διότι η ακτίνα r μειώνεται απότομα (με μαθηματική ορολογία, εκθετικά) όσο αυξάνεται η θ. Οι φωτογραφίες στα Σχήματα 3 και 4 έχουν ληφθεί σε μια υδροδυναμική σήραγγα καθώς ένα επιταχυνόμενο ρεύμα ύδατος ρέει γύρω από ένα δίσκο, στου οποίου τα άκρα διαβιβάζεται χρωστική ουσία.

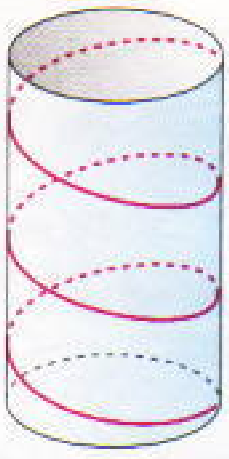
Οι σπειροειδείς στροβιλισμοί δεν εμφανίζονται μόνο όταν ένα υγρό ρέει γύρω από ένα αντικείμενο αλλά και όταν διαφεύγει από μια σχισμή. Στο Σχήμα 5 βλέπουμε τη φωτογραφία μιας ... ατομικής έκρηξης; Όχι, είναι απλώς η μπροστινή άκρη ενός πίδακα που αναβλύζει από μια στενή σχισμή. Αρχικά, το υγρό που βρισκόταν πάνω από το επίπεδο της σχισμής είχε χρωματιστεί με μελάνι. Η ροή άρχισε από τη σταθερή κατάσταση όπου η σπειροειδής δομή είναι δυσδιάκριτη. Αποκαλύπτεται όμως αμέσως μόλις ρίξουμε κάποια χρωστική ουσία (όπως το μελάνι μας) στην άκρη της σχισμής. (Δείτε το Σχήμα 6, όπου η σχισμή έχει μόνο ένα άκρο. Το άλλο έχει αντικατασταθεί από μια σταθερή επιφάνεια που μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο συμμετρίας της σχισμής, και έτσι το Σχήμα 6 μάς δίνει την εικόνα μιας «ημισχισμής».)

Η φύση —και η οργανική και η ανόργανη— είναι γεμάτη σπειροειδείς μορφές. Τις ανακαλύπτουμε στο κέλυφος των πιο κοινών σαλιγκαριών και σε πανάρχαια απολιθώματα —ο αμμω-

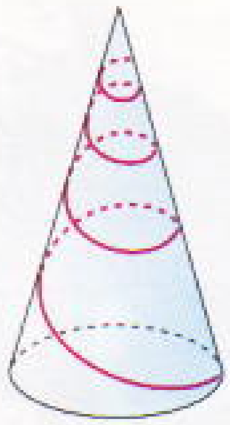


Σχήμα 6

Σχήμα 7



Σχήμα 8

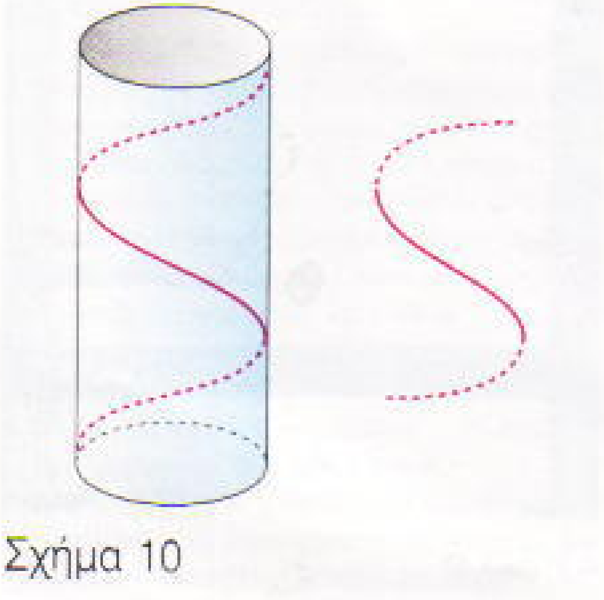


Σχήμα 9

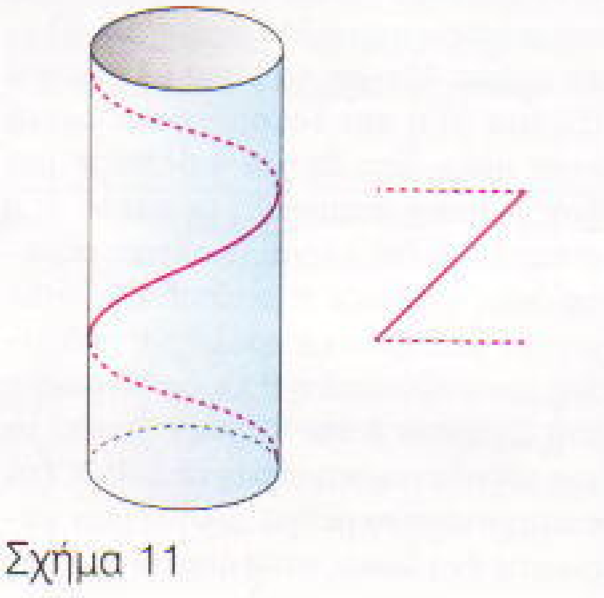
νίτης του Σχήματος 7 έχει ηλικία περίπου 180 εκατομμυρίων ετών. Τα ανθύλλια του ηλιοτρόπιου σχηματίζουν δύο οικογένειες αντίθετα συστρεφόμενων σπειροειδών. Στη βοτανική, η τάση δημιουργίας σπειροειδών καμπυλών ονομάζεται φυλλοταξία. Πολλές φορές αυτό το φαινόμενο εκδηλώνεται επίσης και με *ελικοειδείς* σχηματισμούς. Η έλικα είναι ένα είδος τριοδιάστατης σπειροειδούς —είναι η καμπύλη που γράφει ένα σημείο το οποίο στρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα και ταυτόχρονα κινείται κατά μήκος αυτού. Ακριβέστερα, αυτή είναι μια κυλινδρική έλικα (Σχήμα 8). Συχνά, τα κλαδιά φυτρώνουν πάνω στον κορμό ακολουθώντας μια τέτοια καμπύλη. Όταν το σημείο που γράφει μια έλικα, παράλληλα με την περιστροφή του και με την κίνησή του κατά μήκος του άξονα, απομακρύνεται ή πλησιάζει σ' αυτόν, παίρνουμε μια καμπύλη επί ενός κυκλικού κώνου —μια κωνική έλικα (Σχήμα 9). Αυτή η καμπύλη σχηματίζεται από τις φολίδες της εξωτερικής επιφάνειας των κουκουναριών.

Μια έλικα μπορεί να είναι συστραμμένη όπως το γράμμα S (Σχήμα 10) ή όπως το γράμμα Z (Σχήμα 11) (όπου θεωρούμε ότι τα γράμματα περιτυλίγονται γύρω από έναν φανταστικό κύλινδρο ενώ το μεσαίο τμήμα τους βρίσκεται στην ορατή πλευρά του κυλίνδρου). Οι έλικες S και Z είναι η μία κατοπτρικό είδωλο της άλλης, κάτι που μπορούμε να τα δούμε εύκολα στα κέρατα της αντιλόπης ή άλλων κερασφόρων (Σχήμα 12). Ελικοειδές σχήμα παίρνουν διάφορα αναρριχητικά φυτά. Ο λυκίσκος, ο κισσός, τα φραγκοστάφυλλα και τα βατόμουρα είναι όλα τους αναρριχητικά. Η ικανότητά τους να περιτυλίσσονται αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια της εξέλιξης και υπήρξε απόρροια του αγώνα τους για φως. Στην αρχή ένα βλαστάρι, μόλις βγει από το χώμα, κατευθύνεται προς τα πάνω, και κατόπιν η άκρη του αρχίζει να εκτελεί κυκλικές κινήσεις (προς ποια κατεύθυνση; —κάντε τις δικές σας παρατηρήσεις!) για να βρει ένα στήριγμα. Αν δεν βρει, το φυτό πέφτει πάλι στο έδαφος, μεγαλώνει λίγο ακόμη και συνεχίζει την «περιστροφική» του εξερεύνηση.

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει καμπύλες. Υπάρχουν όμως επιφάνειες που τυλίγονται γύρω από έναν συγκεκριμένο, γενικά καμπύλο, άξονα (η καμπύλη με τις τελείες στο Σχήμα 13) τέτοιες ώστε οι πλάγιες τομές τους (ως προς τον άξονα) να είναι σπειροειδείς. Οι εν λόγω επιφάνειες ονομάζονται σπειροειδείς. Χωρικές σπειροειδείς δομές βρίσκουμε σε συγκεκριμένα ατμοσφαιρικά φαινόμενα, όπως οι κυκλώνες και οι σίφωνες. Στο Σχήμα 14 φαίνεται ένας κυκλώνας πάνω από τον Ινδικό Ωκεανό φωτογραφημένος από το δορυφόρο Kosmos-144. Στο Σχήμα 15 φαίνεται ένας σίφωνας πάνω από μια λίμνη. Αυτή η καταστροφική στήλη παρασύρει οτιδήποτε συναντά στο πέρασμά της. Το 1905 ο ωκεανογράφος W. Eckmann ανακάλυψε χωρικά σπειροειδή υποβρύχια ρεύματα που χαρακτηρίζονται από ισορροπία μεταξύ των δυνάμεων Coriolis και των δυνάμεων τριβής. Το ρεύμα Eckmann παρατηρείται συχνά στο περιβόητο Τρίγωνο των Βερμούδων. Παρόμοιες σπειροειδείς κινήσεις στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας μελέτησε το 1915 ο άγγλος επιστήμονας J. Taylor. Αυτές οι ωκεάνειες και ατμοσφαι-

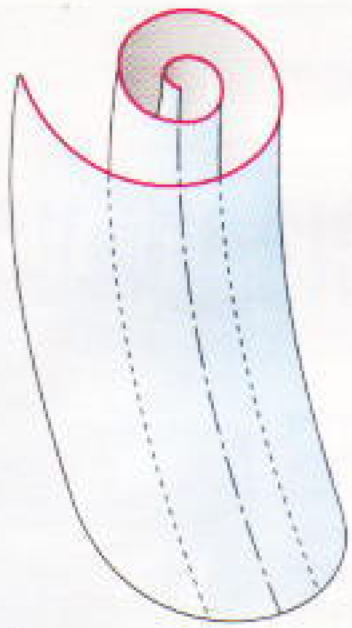


Σχήμα 10

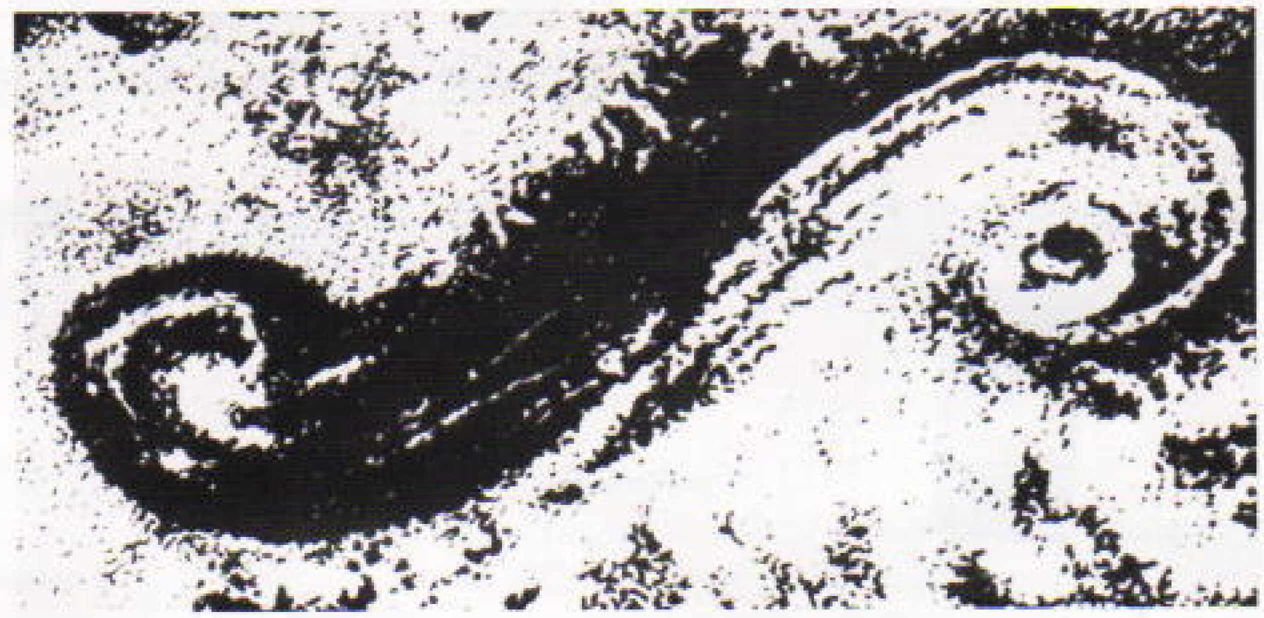


Σχήμα 11

Σχήμα 12



Σχήμα 13

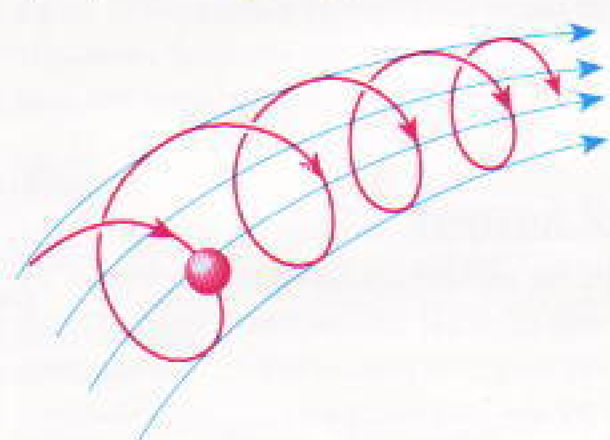


Σχήμα 14

ρικές σπειροειδείς οφείλονται στην περιστροφική κίνηση της Γης γύρω από τον άξονά της.

Οι σπειροειδείς μορφές εμφανίζονται τόσο συχνά ώστε είναι αδύνατον ακόμη και να κατονομάσουμε όλες τις εκδηλώσεις τους. Ένα φορτισμένο σωματίδιο σε κάποιο μαγνητικό πεδίο (της Γης, ενός επιταχυντή ή ενός θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα) κινείται σε μια έλικα που ο άξονάς της συμπίπτει με τη διεύθυνση του πεδίου (οι μπλε καμπύλες στο Σχήμα 16). Σπειροειδή κύματα δημιουργούνται από κάτι που ονομάζεται έκρηξη σπιν. Παρατηρούνται επίσης και στη θεμελιώδη χημική αντίδραση Belousov-Zhabotinsky. Παρότι χιλιάδες ειδικοί εργάζονται πάνω σε αυτό το πρόβλημα, δεν υπάρχει ακόμη κάποια θεωρία γι' αυτή την αντίδραση. Πολλοί βιολόγοι πιστεύουν ότι τα σπειροειδή κύματα είναι υπεύθυνα για την καρδιακή αρρυθμία και άλλα βιολογικά φαινόμενα.

Σχήμα 15



Σχήμα 16

Θα έπρεπε ίσως να αναφερθούν εδώ κάποιες θεμελιώδεις φιλοσοφικές θεωρίες που υποστηρίζουν τη σπειροειδή ανάπτυξη του πνεύματος και της φύσης. Τι είναι, αλήθεια, ο κόσμος που μας περιβάλλει; Διαστελλόμενος; Άπειρος; Ένδεκα διαστάσεων; Τυχαίος; Πρωτεϊνικός; Οι επιστήμονες δεν έχουν δώσει ακόμη απάντηση σ' αυτά τα ερωτήματα. Σε ό,τι αφορά τις σπειροειδείς, τα παραδείγματα που αναφέραμε προσφέρουν μια βαρύνουσα ένδειξη ότι ο κόσμος μας είναι σπειροειδής. Όμως, έχουμε ακόμη πολύ δρόμο ώσπου να ερμηνεύσουμε το μυστήριο της δημιουργίας και της σταθερότητας των σπειροειδών.

* Υπενθυμίζουμε στον έλληνα αναγνώστη ότι το όνομα Nicholas Bourbaki είναι ψευδώνυμο μιας μυστικής ομάδας σπουδαίων σύγχρονων γάλλων μαθηματικών που γράφουν άρθρα και βιβλία με το συλλογικό αυτό ψευδώνυμο. (Σ.τ. επιστ. συμβ.)

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M31

Άγνωστες δυνάμεις. Λύστε καθεμιά από τις επόμενες εξισώσεις για τους φυσικούς αριθμούς x, y, z: (α) $x^y + 1 = (x + 1)^z$, (β) $2^y + 1 = 3^z$. (D. Fleishman)

M32

Αποστάσεις σε ένα τραπέζιο. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου του επιπέδου από τις τρεις κορυφές ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την απόσταση του σημείου από την τέταρτη κορυφή. (S. Rukshin)

M33

Χαρούμενα καγκουρό. Δέκα καγκουρό ξεκινούν από το σημείο A και αρχίζουν να κάνουν άλματα κατά μήκος μιας ευθείας που οδηγεί στο σημείο B. Τα καγκουρό κινούνται ως εξής: το πρώτο πηδά μέχρι οποιοδήποτε σημείο επιθυμεί, το δεύτερο πηδάει πάνω από το πρώτο καλύπτοντας τη διπλάσια απόσταση (έτσι το πρώτο θα βρεθεί στο μέσον ακριβώς της απόστασης ανάμεσα στο σημείο εκκίνησης και το σημείο άφιξης του δεύτερου καγκουρό), το τρίτο πηδάει πάνω από το δεύτερο καλύπτοντας τη διπλάσια απόσταση, κ.ο.κ, ώσπου να πηδήσει και το δέκατο πάνω από το ένατο καγκουρό. Έπειτα, το πρώτο μπορεί να πηδήσει μέχρι όποιο σημείο επιθυμεί, ξεκινώντας έτσι μια νέα σειρά αλμάτων. (α) Είναι δυνατόν έπειτα από δέκα σειρές αλμάτων να συγκεντρωθούν όλα τα καγκουρό στο σημείο B; Μπορούν να συγκεντρωθούν στο B πιο νωρίς; (S. Eliseyev)

M34

Πρώτοι προς αλλήλους αριθμοί. Έστω $f(x) = x^3 - x + 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $m > 1$, οι αριθμοί m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ..., είναι ανά δύο πρώτοι προς αλλήλους. (A. Kolotov)

M35

Διαιρέτες διαιρετών. Έστω $d_1, ..., d_n$ όλοι οι διαιρέτες ενός θετικού ακεραίου N, και έστω δ_i, $i = 1, ..., n$, το πλήθος των διαιρετών του d_i. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $\delta_1, ..., \delta_n$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$(\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n)^2 = \delta_1^3 + \delta_2^3 + ... + \delta_n^3.$$

Για παράδειγμα, ο αριθμός $N = 6$ έχει τέσσερις διαιρέτες: 1, 2, 3, 6. Οι αντίστοιχοι αριθμοί δ_i είναι 1, 2, 2, 4, και πραγματικά ισχύει $(1 + 2 + 2 + 4)^2 = 81 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3$. (V. Matizen)

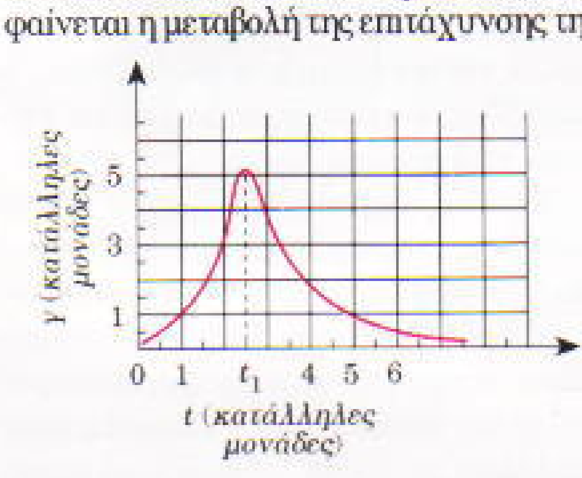
Φυσική

Φ31

Το άλογο στο ροντέο. Ένα άλογο τρέχει με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ σε κύκλο ακτίνας R. Ένας άνθρωπος στέκεται σε απόσταση r από το κέντρο του κύκλου. Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία το άλογο και ο άνθρωπος πλησιάζουν μεταξύ τους; (A. Bytsko)

Φ32

Η ηλεκτρισμένη σταγόνα. Μια φορτισμένη σταγόνα αιωρείται στον αέρα με τη βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου. Κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αρχίζει να μειώνεται και μηδενίζεται τη στιγμή $t = t_1$. Στο σχήμα φαίνεται η μεταβολή της επιτάχυνσης της



σταγόνας σε συνάρτηση με το χρόνο σε κατάλληλες μονάδες. Χρησιμοποιώντας αυτό το διάγραμμα υπολογίστε τη μέγιστη επιτάχυνση της σταγόνας. Θεωρήστε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη με την ταχύτητα της σταγόνας.

Φ33

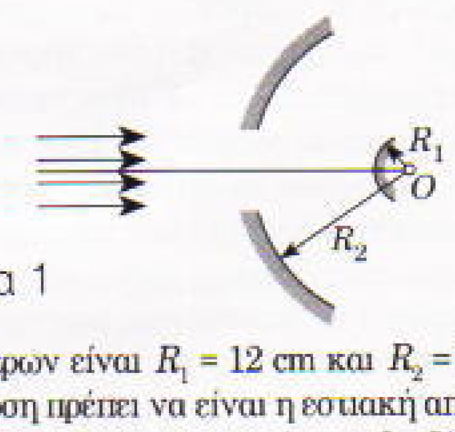
Η ζωή μιας σαπουνόφουσκας. Πάρτε έναν λεπτό και κοντό σωλήνα —λόγου χάρη, ένα καλαμάκι αναψυκτικού— με διάμετρο D, και σχηματίστε μια σαπουνόφουσκα ακτίνας $R_0 >> D$. Αφήστε ανοιχτή στη συνέχεια την άλλη άκρη του σωλήνα και περιμένετε ώσπου να εξαφανιστεί η φυσαλίδα συστελλόμενη. Υπολογίστε το χρόνο ζωής μιας τέτοιας φυσαλίδας, απ' τη στιγμή που ανοίξατε το πίσω στόμιο του σωλήνα, αν $D = 2$ mm και $R_0 = 2$ cm. Η επιφανειακή τάση του νερού είναι $\sigma = 0{,}07$ Nt/m. (V. Drozdov)

Φ34

Ένα σύνολο αγωγών. Μερικοί ηλεκτρικοί αγωγοί είναι τοποθετημένοι μακριά από άλλα φυσικά σώματα. Το ηλεκτρικό δυναμικό ενός από αυτούς είναι φ_1. Το δυναμικό αυτό μηδενίζεται όταν καθένας απ' όλους τους άλλους αγωγούς αποκτήσει αντίθετο ακριβώς φορτίο. Πόσο θα γίνει το δυναμικό του πρώτου αγωγού αν το φορτίο του τετραπλασιαστεί; (A. Zilberman)

Φ35

Το είδωλο του Ήλιου. Σε μια οθόνη σχηματίζεται το είδωλο του Ήλιου με τη βοήθεια δύο ομόκεντρων σφαιρικών κατόπτρων (Σχήμα 1). Οι ακτίνες των



Σχήμα 1

κατόπτρων είναι $R_1 = 12$ cm και $R_2 = 30$ cm. Πόση πρέπει να είναι η εστιακή απόσταση ενός λεπτού φακού που θα δίνει είδωλο του Ήλιου με το ίδιο μέγεθος; (E. Kuznetsov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Η μαγνητική αιώρηση «ενηλικιώνεται»

Ελάττωση της τριβής και αύξηση της απόδοσης σε οχήματα και μηχανές

Thomas D. Rossing και John R. Hull

ΦΑΝΤΑΣΤΕΙΤΕ ΣΦΟΝΔΥΛΟΥΣ ΠΟΥ αποθηκεύουν τεράστιες ποσότητες ενέργειας, οχήματα που πετούν σε μικρό ύψος πάνω από ειδικές ράγες-οδηγούς, κινητήρες που περιστρέφονται με περισσότερες από 10^5 στροφές ανά λεπτό. Πρόκειται για μερικές μόνο από τις εφαρμογές της μαγνητικής αιώρησης που αναπτύσσονται σήμερα σε ερευνητικά εργαστήρια σε όλο τον κόσμο. Η μαγνητική αιώρηση μας απαλλάσσει από τη μηχανική τριβή και ανοίγει νέους ορίζοντες στο σχεδιασμό μηχανών και στη μεταφορά ανθρώπων και αγαθών με μεγάλες ταχύτητες και ενεργειακά οικονομικό τρόπο.

Υπεραγωγοί και αιώρηση

Το 1911 ο ολλανδός φυσικός Heike Kammerlingh Onnes ανακοίνωσε ότι η ηλεκτρική αντίσταση του υδραργύρου εξαφανιζόταν απότομα κάτω από τους 4,2 K (–269°C) —το σημείο βρασμού του ηλίου. Ωστόσο, ακόμη κι ο Kammerlingh Onnes, στον οποίο απονεμήθηκε το βραβείο Νόμπελ το 1913, δεν μπορούσε να φανταστεί πόσες σημαντικές τεχνολογικές εφαρμογές θα προέκυπταν από τη χρήση των υπεραγωγών. Για παράδειγμα, μαγνήτες κατασκευασμένοι με υπεραγώγιμο σύρμα το οποίο ψύχεται με υγρό ήλιο, αποτελούν σήμερα βασικά τμήματα στους επιταχυντές σωματιδίων υψηλών ενεργειών και στις μηχανές απεικόνισης του μαγνητικού συντονισμού που χρησιμοποιούνται στα νοσοκομεία.

Ένας άλλος σταθμός στην ιστορία της υπεραγωγιμότητας είναι η ανακοίνωση που έκαναν οι Ελβετοί Alex Müller και Georg Bednorz το 1986, ότι το οξείδιο λανθανίου-βαρίου-χαλκού παρουσιάζει υπεραγωγιμότητα σε θερμοκρασία 30 K. Η ανακάλυψή τους προκάλεσε μια ξαφνική έκρηξη ενδιαφέροντος για υπεραγωγούς υψηλών θερμοκρασιών και οδήγησε στην ανάπτυξη υλικών με ακόμη υψηλότερες θερμοκρασίες μετάβασης στην υπεραγώγιμη κατάσταση —μερικές απ' αυτές υπερέβαιναν ακόμη και το σημείο βρασμού του αζώτου (77 K). Το πλεονέκτημα δεν είναι μόνο ότι το υγρό άζωτο είναι πολύ πιο φτηνό και πιο εύχρηστο από το υγρό ήλιο, αλλά και ότι τα νέα αυτά υλικά, που ανήκουν στη λεγόμενη κατηγορία των υπεραγωγών τύπου II, διατηρούν την υπεραγωγιμότητά τους παρουσία μαγνητικού πεδίου πολύ καλύτερα απ' ό,τι οι υπεραγωγοί τύπου I (όπως ο υδράργυρος, ο μόλυβδος, ο κασσίτερος και άλλα χημικά στοιχεία).

Αφότου αποκτήσαμε αρκετά υλικά που είναι υπεραγώγιμα στη θερμοκρασία βρασμού του υγρού αζώτου, η αιώρηση ενός μικρού μαγνήτη πάνω από έναν υπεραγωγό (ή το αντίστροφο) αποτελεί συνηθισμένη επίδειξη στις διαλέξεις φυσικής.[1] Η αιώρηση αυτή, που βασίζεται στο νόμο του Faraday ή το φαινόμενο Meissner (ανάλογα με το πώς γίνεται το πείραμα), επιδείχθηκε για πρώτη φορά από τον V. Arkadyev το 1945, ο οποίος πέτυχε την αιώρηση ενός μαγνήτη πάνω από έναν κοίλο δίσκο από μόλυβδο εμβαπτισμένο σε υγρό ήλιο.

Όταν ο μαγνήτης χαμηλώνει και πλησιάζει τον υπεραγωγό, στην επιφάνεια του υπεραγωγού επάγονται υπερρεύματα θωράκισης (σύμφωνα με το νόμο του Faraday: κατά μήκος αγωγού που βρίσκεται μέσα σε μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη). Τα ρεύματα αυτά δημιουργούν ένα μαγνητικό πεδίο που απωθεί το μαγνήτη, διατηρώντας τον σε αιώρηση σε τέτοιο ύψος ώστε η απωστική δύναμη να ισούται με το βάρος του μαγνήτη. Υπερρεύματα εμφανίζονται λόγω της μηδενικής αντίστασης που εμφανίζει ο υπεραγωγός.

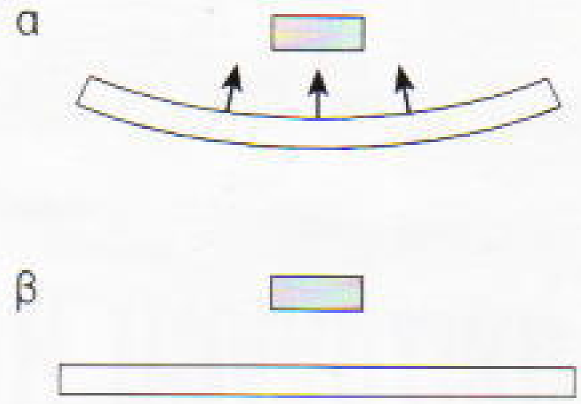
Αντίθετα, αν ο μαγνήτης ισορροπεί ακουμπώντας πάνω στον υπεραγωγό, τη στιγμή που ο τελευταίος ψύχεται κάτω από τη θερμοκρασία υπεραγώγιμης μετάβασης και το υλικό του καθίσταται υπεραγώγιμο, ο μαγνήτης μυστηριωδώς ανυψώνεται (όχι όμως τόσο ψηλά όσο πριν) διότι ο υπεραγωγός αποβάλλει τη μαγνητική ροή από το εσωτερικό του. Αυτή η εκπληκτική ιδιότητα των υπεραγωγών, που την ανακάλυψαν το 1933 οι W. Meissner και R. Ochsenfeld, είναι γνωστή ως φαινόμενο Meissner.

Σε συζητήσεις για τη μαγνητική

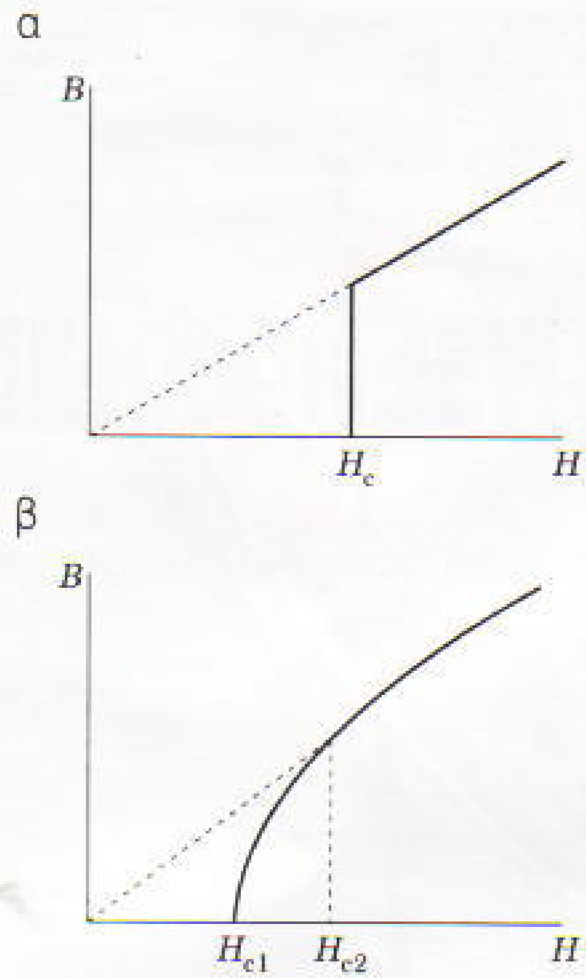
1. Στο άρθρο «Νικώντας τις αντιστάσεις» του τεύχους Μαΐου/Ιουνίου 1994 του *Quantum* υπάρχει μια φωτογραφία αυτού του φαινομένου. Δείτε ακόμη τη στήλη «Στα πεδία της φυσικής» στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1995.

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

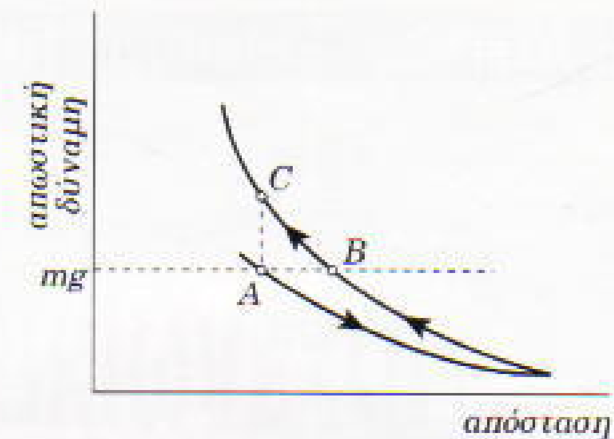

EDDY



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

αιώρηση, και στα δύο παραπάνω φαινόμενα συχνά αποδίδεται ο όρος «φαινόμενο Meissner», όμως ο όρος αυτός πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο για την περίπτωση που ο υπεραγωγός ψύχεται ευρισκόμενος μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Η τέλεια αγωγιμότητα (μηδενική αντίσταση —$R = 0$) και ο τέλειος διαμαγνητισμός (μηδενική μαγνητική διαπερατότητα —$\mu = 0$, που σημαίνει ότι η μαγνητική ροή δεν μπορεί να διαπεράσει το εσωτερικό του υπεραγωγού) αποτελούν τις δύο σημαντικές ιδιότητες ενός υπεραγωγού.

Στο πείραμά του με υπεραγωγό από μόλυβδο ο Arkadyev χρησιμοποίησε κοίλη επιφάνεια για να προσδώσει πλευρική σταθερότητα στο μαγνήτη (βλ. Σχήμα 1α)—με άλλα λόγια, για να εμποδίσει το μαγνήτη να ξεφύγει από την άκρη του υπεραγωγού. Σήμερα η επίδειξη της αιώρησης μαγνήτη πάνω από υπεραγωγό γίνεται συνήθως με οξείδια που είναι υπεραγώγιμα στους 77 K. Σε αυτά τα υλικά, εξαιτίας ενός φαινομένου που ονομάζεται *αγκύρωση ροής*, δεν χρειάζεται κοίλη επιφάνεια για να έχουμε πλευρική σταθερότητα, όπως στην περίπτωση των δειγμάτων από μόλυβδο που χρησιμοποίησε ο Arkadyev (βλ. Σχήμα 1β). Μπορούμε να σπρώξουμε το μαγνήτη που αιωρείται πάνω από έναν υπεραγωγό τύπου II, για παράδειγμα οξείδιο υτρίου-βαρίου-χαλκού (συμβολίζεται Y-Ba-Cu-O, ή YBCO), ώς την άκρη του υπεραγωγού χωρίς να χάσει την πλευρική του σταθερότητα. Επιπλέον, ο μαγνήτης θα αιωρείται σε διαφορετικά ύψη πάνω από τον υπεραγωγό. Και οι δύο παραπάνω ιδιότητες οφείλονται στην αγκύρωση ροής.

Τι είναι όμως η αγκύρωση ροής; Θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε εν συντομία το φαινόμενο. Ο μόλυβδος και οι άλλοι υπεραγωγοί τύπου I αποβάλλουν από το εσωτερικό τους τη μαγνητική ροή (οπότε μηδενίζεται η πυκνότητα μαγνητικής ροής, ή το πεδίο-*B*) έως κάποια κρίσιμη τιμή, H_c, του πεδίου-*H*, οπότε χάνουν την υπεραγωγιμότητά τους και τότε ισχύει $B = \mu H$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2α. (Για να αποφύγουμε μια μάλλον περίπλοκη συζήτηση για τη διαφορά μεταξύ του μαγνητικού πεδίου-*B* και του μαγνητικού πεδίου-*H*, αρκεί να αναφέρουμε ότι το πεδίο-*H* περιγράφει το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αιωρούμενος μαγνήτης, ενώ το πεδίο-*B* περιλαμβάνει και το φαινόμενο των υπερρευμάτων στον υπεραγωγό.) Οι υπεραγωγοί τύπου II, από την άλλη, χαρακτηρίζονται από δύο κρίσιμες τιμές, H_{c1} και H_{c2}, του πεδίου-*H*. Κάτω από την H_{c1} ολόκληρο το δείγμα είναι υπεραγώγιμο, ενώ μεταξύ H_{c1} και H_{c2} κάποια τμήματα του υλικού είναι υπεραγώγιμα και κάποια άλλα όχι, συμπεριφορά που απεικονίζεται στο Σχήμα 2β. Οι γραμμές της μαγνητικής ροής διαπερνούν τις «κανονικές» ή μη υπεραγώγιμες περιοχές, και αν το δείγμα είναι επαρκώς «βρώμικο» παραμένουν παγιδευμένες, αγκυρωμένες σε αυτές τις περιοχές. Επομένως, έτσι εξηγείται η πλευρική σταθερότητα του μαγνήτη που αιωρείται πάνω από υπεραγώγιμο υλικό τύπου II ακόμη κι όταν η επιφάνεια του δεύτερου είναι επίπεδη.

Όταν ο υπεραγωγός είναι τύπου I ο μαγνήτης αιωρείται πάντοτε στο ίδιο ύψος, ανεξάρτητα αν ο υπεραγωγός ψύχθηκε παρουσία πεδίου ή όχι. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τους υπεραγωγούς τύπου II. Εξαιτίας της αγκύρωσης ροής, η ανυψωτική δύναμη που ασκείται στο μαγνήτη είναι διαφορετική όταν αυτός πλησιάζει τον υπεραγωγό τύπου II απ' ό,τι όταν απομακρύνεται (Σχήμα 3). Καθώς ο μαγνήτης χαμηλώνει και πλησιάζει τον υπεραγωγό, το μαγνητικό πεδίο-*H* φτάνει την κρίσιμη τιμή του H_{c1}, οπότε όλο και περισσότερη ροή διαπερνά τον υπεραγωγό. Όταν απομακρύνεται ο μαγνήτης, οι παγιδευμένες γραμμές ροής τείνουν να παραμένουν στο δείγμα, με αποτέλεσμα να ασκείται στο μαγνήτη ελκτική δύναμη που μειώνει τη συνολική απωστική δύναμη. (Υπό κάποιες συνθήκες, η συνολική δύναμη στο μαγνήτη μπορεί να γίνει ελκτική.)

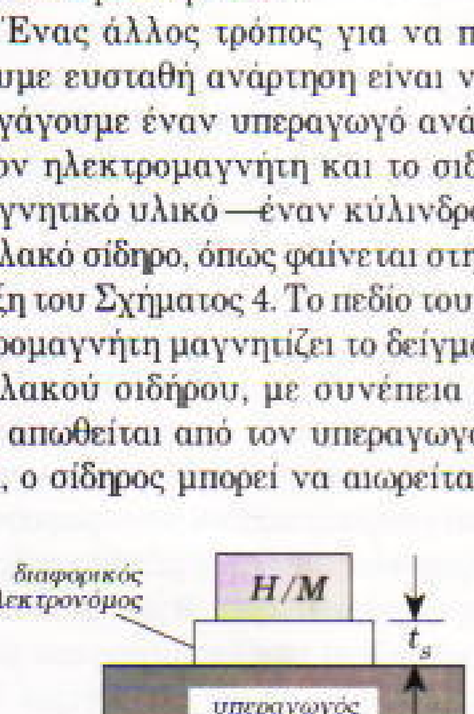
Στο Σχήμα 3, στα σημεία *A* και *B*, και σε κάθε σημείο της γραμμής που τα ενώνει, η απωστική δύναμη ισούται με το βάρος, *mg*, του μαγνήτη. Το σημείο *B* αντιπροσωπεύει το ύψος αιώρησης για την περίπτωση που ο μαγνήτης πλησιάζει χαμηλώνοντας τον υπεραγωγό. Αν ωθήσουμε το μαγνήτη προς τον υπεραγωγό και τον αφήσουμε ελεύθερο στο σημείο *C*, ο μαγνήτης θα μετακινηθεί προς το σημείο ισορροπίας *A*. Παρομοίως, αν ο μαγνήτης βρίσκεται ακίνητος πάνω στον υπεραγωγό, καθώς ο υπεραγωγός θα ψύχεται κάτω από τη θερμοκρασία υπεραγώγιμης μετάβασης, ο μαγνήτης θα ανυψωθεί στο σημείο *A*.

Μαγνητική ανάρτηση

Είναι αδύνατο να υπάρξει ευσταθής ανάρτηση μαγνήτη κάτω από άλλο μόνιμο μαγνήτη χωρίς να ασκούνται ταυτόχρονα και άλλες δυνάμεις. Σε ορισμένη μεταξύ τους απόσταση, η ελκτική δύναμη στον κάτω μαγνήτη ισούται με το βάρος του, και επομένως η συνολική δύναμη στον αιωρούμενο μαγνήτη είναι μηδενική. Πρόκειται όμως για ασταθή ισορροπία, διότι αν ο μαγνήτης μετακινηθεί λίγο πιο πάνω από αυτή τη θέση ισορροπίας, η ελκτική δύναμη αυξάνεται γρήγορα και ο μαγνήτης κινείται επίσης γρήγορα προς τον άλλον. Με το ίδιο επιχείρημα, αν αυξηθεί ελάχιστα η μεταξύ τους απόσταση, το βάρος του μαγνήτη υπερβαίνει την ελκτική δύναμη, και ο αιωρούμενος μαγνήτης πέφτει. Πραγματικά, η ευσταθής ισορροπία είναι αδύνατη σ' ένα σύστημα στο οποίο αναπτύσσονται μόνο ηλεκτροστατικές ή μαγνητοστατικές δυνάμεις, που ακολουθούν το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου.

Εάν όμως το ρεύμα σε έναν ηλεκτρομαγνήτη ελέγχεται προσεκτικά μέσω ανάδρασης, είναι δυνατόν να αναρτηθεί από τον ηλεκτρομαγνήτη ένας μόνιμος μαγνήτης ή ένα σιδηρομαγνητικό υλικό. Παρομοίως, ένας ηλεκτρομαγνήτης μπορεί να αναρτηθεί κάτω από ένα φύλλο χάλυβα, με την προϋπόθεση ότι το ρεύμα στον ηλεκτρομαγνήτη ελέγχεται προσεκτικά. Έτσι λειτουργεί και το σύστημα ηλεκτρομαγνητικής ανάρτησης σ' ένα είδος οχημάτων που ίπτανται σε μικρό ύψος πάνω από ράγες-οδηγούς. Το σύστημα αυτό θα το εξετάσουμε αναλυτικότερα παρακάτω.

Ένας άλλος τρόπος για να πετύχουμε ευσταθή ανάρτηση είναι να εισαγάγουμε έναν υπεραγωγό ανάμεσα στον ηλεκτρομαγνήτη και το σιδηρομαγνητικό υλικό —έναν κύλινδρο από μαλακό σίδηρο, όπως φαίνεται στη διάταξη του Σχήματος 4. Το πεδίο του ηλεκτρομαγνήτη μαγνητίζει το δείγμα του μαλακού σιδήρου, με συνέπεια αυτό να απωθείται από τον υπεραγωγό. Έτσι, ο σίδηρος μπορεί να αιωρείται ευσταθώς, επειδή στην ελκτική δύναμη του ηλεκτρομαγνήτη αντιτίθεται η απωστική δύναμη του υπεραγωγού. Βεβαίως, η πλευρική σταθερότητα επιτυγχάνεται μέσω της αγκύρωσης ροής στον υπεραγωγό.



Σχήμα 4

Μια τέτοια διάταξη χρησιμοποίησε η Loren Passmore, φοιτήτρια στο θερινό σχολείο του Εθνικού Εργαστηρίου Argonne, στο Σικάγο, για να παρουσιάσει την αιώρηση ενός κυλίνδρου από μαλακό σίδηρο με τη βοήθεια ενός μόνιμου μαγνήτη και ενός υπεραγωγού. Από τη στιγμή που ο κύλινδρος αιωρείτο ήταν δυνατό να περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα και με αμελητέα τριβή. Η Passmore διαπίστωσε πως όταν προσέθετε ένα δεύτερο ζεύγος μαγνήτη-υπεραγωγού κάτω από τον κύλινδρο, η αιώρηση γινόταν ακόμη πιο ευσταθής.

Είναι επίσης δυνατό ένας μαγνήτης να αιωρείται κάτω από έναν υπεραγωγό τύπου ΙΙ (ή αντίστροφα) αν η αγκύρωση ροής είναι αρκετά ισχυρή. Ο μαγνήτης τοποθετείται εν γένει μετά την ψύξη του υπεραγωγού κάτω από τη θερμοκρασία υπεραγώγιμης μετάβασης. Τότε, το μεγαλύτερο μέρος της μαγνητικής ροής παγιδεύεται στον υπεραγωγό σε στροβίλους ροής, οι οποίοι δρουν σαν μικροί μαγνήτες και ασκούν ελκτική δύναμη στον μόνιμο μαγνήτη. Ταυτόχρονα, οι άλλες περιοχές του υπεραγωγού απωθούν το μαγνήτη, με αποτέλεσμα για κάποιο εύρος αποστάσεων να επιτυγχάνεται ισορροπία μεταξύ των ελκτικών και των απωστικών δυνάμεων. Η πλευρική σταθερότητα διατηρείται και πάλι μέσω της αγκύρωσης ροής στον υπεραγωγό.

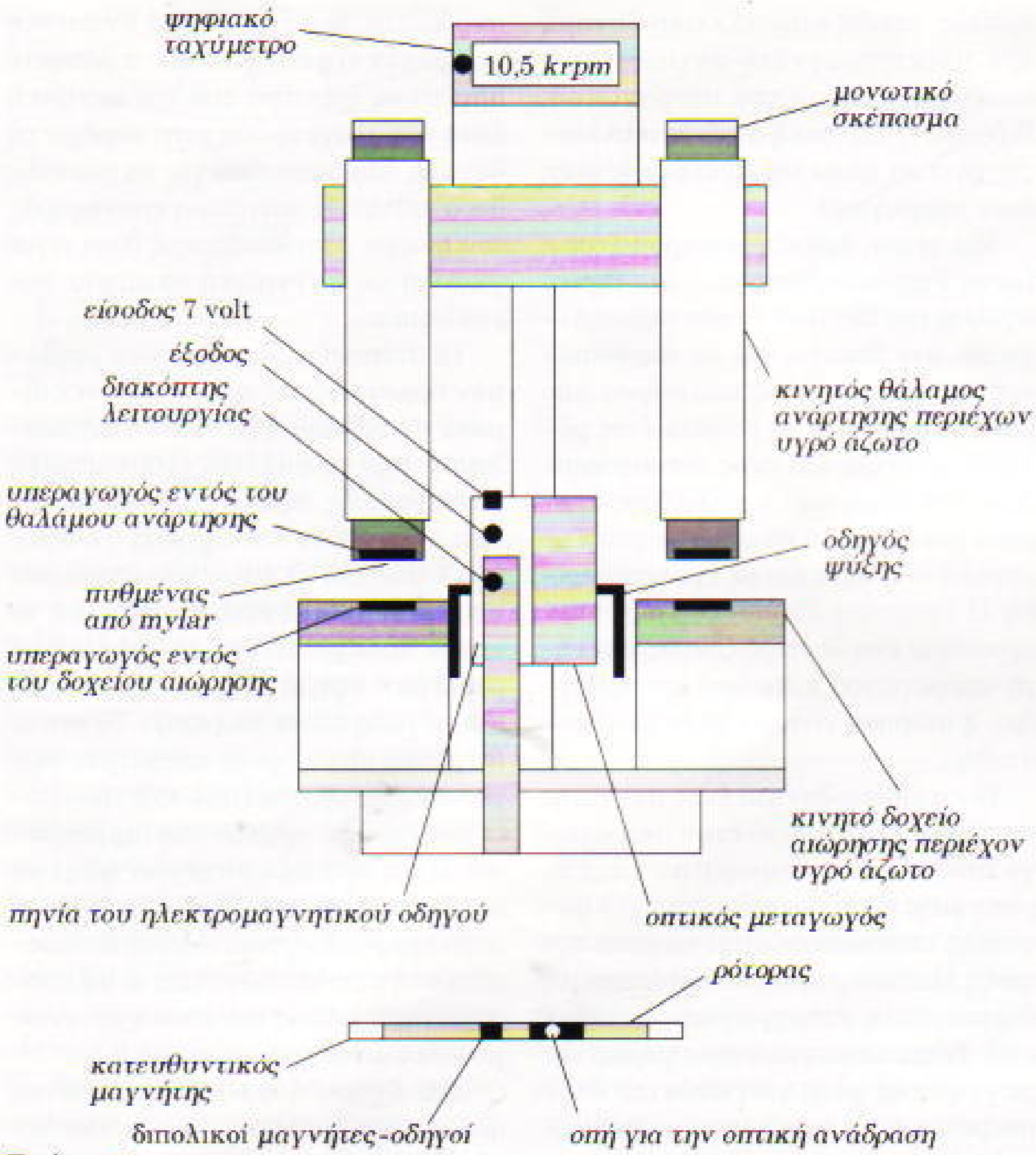
Ένα νέο είδος ρουλεμάν

Ένα παράπλευρο προϊόν της έρευνας στην υπεραγωγιμότητα είναι και το μαγνητικό ρουλεμάν, το οποίο βασίζεται στο φαινόμενο της μαγνητικής αιώρησης, και το χρησιμοποιούμε για να αναρτήσουμε ταχέως περιστρεφόμενα σώματα αποφεύγοντας τη μηχανική τριβή. Παρότι σήμερα χρησιμοποιούνται διάφοροι τύποι ηλεκτρομαγνητικών ρουλεμάν, τα απλούστερα είναι αυτά που περιλαμβάνουν μόνιμους μαγνήτες και υπεραγωγούς. Τα εν λόγω ρουλεμάν, που μπορεί να είναι ευσταθή χωρίς ενεργό σύστημα ανάδρασης, βρίσκονται υπό ανάπτυξη σε αρκετά εργαστήρια. Αν ο ρότορας αρχίσει να ξεφεύγει από την κεντρική θέση του, η αγκύρωση ροής παρέχει τη δύναμη που απαιτείται για να επανέλθει σ' αυτήν. Η ικανότητα επαναφοράς του ρότορα στην επιθυμητή θέση είναι γνωστή ως μαγνητική ακαμψία του ρουλεμάν.

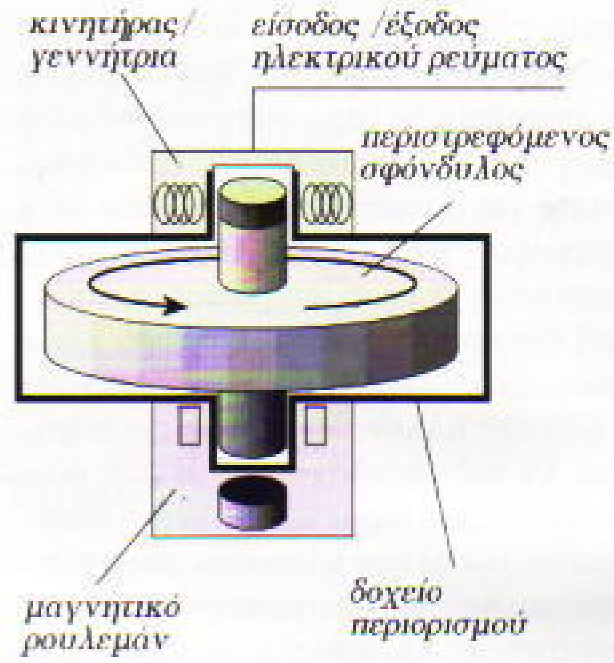
Τα υπεραγώγιμα μαγνητικά ρουλεμάν παρουσιάζουν αρκετά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με άλλα είδη ρουλεμάν: συν τοις άλλοις, έχουν μεγάλη διάρκεια ζωής, υψηλή απόδοση και μικρές απαιτήσεις συντήρησης. Το οξείδιο Y-Ba-Cu-O που έχει αποκτήσει υφή μέσω τήξης είναι ένα υλικό το οποίο υπόσχεται για τα μαγνητικά ρουλεμάν υψηλή μαγνητική ακαμψία και μεγάλη πίεση αιώρησης. Το ότι τα δείγματα αυτά έχουν αποκτήσει υφή μέσω τήξης σημαίνει πως το Y-Ba-Cu-O θερμαίνεται αρχικά στη θερμοκρασία τήξης του, στη συνέχεια ψύχεται αργά, και τέλος υφίσταται ανόπτηση σε ατμόσφαιρα οξυγόνου. Με τη διαδικασία αυτή εξουδετερώνονται οι μη υπεραγώγιμες φάσεις και επιτυγχάνονται μεγάλες δυνάμεις αιώρησης.

Στο Σχήμα 5 απεικονίζεται ένας απλός κινητήρας που τον κατασκεύασε ο φοιτητής του Πανεπιστημίου του Βέρμοντ Christopher Gabrys, στη διάρκεια θερινού σχολείου στο Argonne, χρησιμοποιώντας μαγνητικά ρουλεμάν. Οι άκρες του ρότορα έχουν κυλινδρικούς μαγνήτες NdFeB που υποβαστάζονται είτε με απωστική αιώρηση πάνω από δύο υπεραγωγούς υψηλής θερμοκρασίας είτε με ελκτική αιώρηση κάτω από τους ίδιους υπεραγωγούς. (Για να επιτευχθεί ελκτική αιώρηση, αφήνεται ροή από τους κατευθυντικούς μαγνήτες να εισχωρήσει στους υπεραγωγούς πριν από την ψύξη. Η ψύξη παρουσία πεδίου εξασφαλίζει ελκτική δύναμη.) Ο ρότορας μπορεί να περιστρέφεται με περισσότερες από 10.000 στροφές ανά λεπτό από τρία μαγνητικά πηνία τα οποία ελέγχονται μέσω οπτικής ανάδρασης που ενεργοποιεί και απενεργοποιεί τα πηνία την κατάλληλη χρονική στιγμή. Ο κινητήρας αυτός κέρδισε το πρώτο βραβείο το 1992 στο διαγωνισμό συσκευών της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT).

Τα μαγνητικά ρουλεμάν θα αποτε-



Σχήμα 5



Σχήμα 6

λέσουν μια από τις πρώτες πρακτικές εφαρμογές των υπεραγωγών υψηλών θερμοκρασιών, αφού στο υπεραγώγιμο υλικό δεν είναι ανάγκη να δοθεί μορφή σύρματος, όπως απαιτείται για τις περισσότερες από τις υπόλοιπες εφαρμογές.

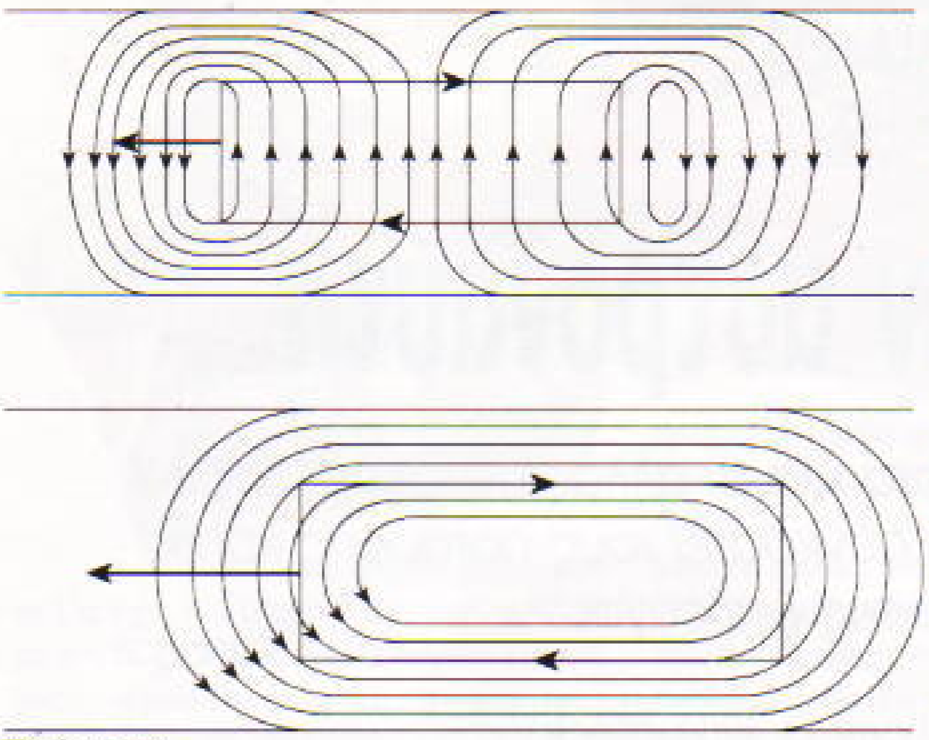
Σφόνδυλοι με χαμηλές απώλειες

Μια άλλη εφαρμογή της υπεραγωγιμότητας αναφέρεται στη βελτίωση μιας συσκευής που πρωτοεμφανίστηκε μαζί με την ατμομηχανή, στην αυγή της βιομηχανικής εποχής —του σφονδύλου. Οι σφόνδυλοι αποθηκεύουν ενέργεια με τη μορφή κινητικής ενέργειας περιστροφής σε πολλές διατάξεις, μεταξύ των οποίων λεωφορεία και τρένα. Ένας μεγάλος σφόνδυλος που αιωρείται μαγνητικά και περιστρέφεται σε θάλαμο κενού θα μπορούσε να αποθηκεύει μεγάλες ποσότητες ενέργειας με μικρή ή και μηδενική απώλεια λόγω τριβής. Τέτοιου είδους σφόνδυλοι ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τις εταιρείες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, ώστε να ικανοποιούν τη ζήτηση ενέργειας σε ώρες αιχμής και να κάνουν αποδοτικότερη τη χρήση των εργοστασιακών μονάδων παραγωγής ενέργειας. Οι σφόνδυλοι θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν επίσης για την κίνηση μικρών οχημάτων σε σύντομες διαδρομές. Η χωρητικότητά τους για την αποθήκευση ενέργειας είναι συγκρίσιμη μ' εκείνη που έχουν οι μπαταρίες ίδιου μεγέθους· μάλιστα δεν χρειάζεται να αντικαθίστανται περιοδικά, σε αντίθεση με τις μπαταρίες. Επιπλέον, όπως και οι μπαταρίες, δεν μολύνουν την ατμόσφαιρα.

Στο Σχήμα 6 απεικονίζεται ένας μικρός σφόνδυλος που αιωρείται με τη χρήση μαγνητικού ρουλεμάν μέσα σ' ένα θάλαμο κενού. Το ρουλεμάν αποτελείται από ένα δακτυλιοειδή μαγνήτη που αιωρείται πάνω από υπεραγώγιμους δίσκους κατασκευασμένους από Y-Ba-Cu-O που έχει αποκτήσει υφή μέσω τήξης. Σε πειράματα που γίνονται στο Εθνικό Εργαστήριο Argonne, οι συντελεστές τριβής που επιτυγχάνονται μ' αυτό τον τρόπο είναι μικρότεροι από 10^{-6}. (Στις δοκιμές που γίνονται, ένας ηλεκτρικός κινητήρας ή ρεύμα αέρα επιταχύνει το σφόνδυλο σε μεγάλες ταχύτητες· στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερος να περιστραφεί και οι ερευνητές παρατηρούν το ρυθμό επιβράδυνσής του.)

Αιώρηση μέσω επαγωγικών ρευμάτων

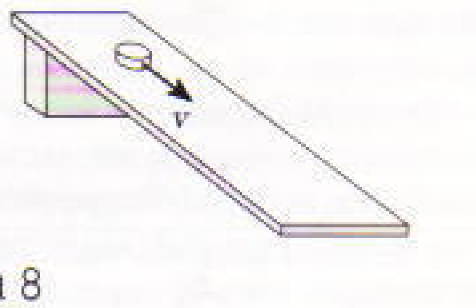
Σύμφωνα με το νόμο του Faraday, όταν ένας μαγνήτης κινείται πάνω από έναν αγωγό, το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγει ηλεκτρεγερτική δύναμη στον αγωγό, η οποία δημιουργεί επαγωγικά ρεύματα σ' αυτόν· με τη σειρά τους, τα επαγωγικά ρεύματα δημιουργούν μαγνητικό πεδίο το οποίο αντιτίθεται στη μεταβολή του πεδίου που προκαλείται λόγω της κίνησης του μαγνήτη. Τα επαγωγικά ρεύματα ρέουν σε κλειστές γραμμές κάτω από τον κινούμενο μαγνήτη. Όταν ο μαγνήτης κινείται με μέτρια ταχύτητα, τα επαγωγικά ρεύματα κάτω από το μπροστινό μέρος του μαγνήτη ρέουν με ορισμένη φορά, ενώ ρέουν με αντίθετη φορά κάτω από το πίσω μέρος του μαγνήτη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7α. Όταν όμως ο μαγνήτης κινείται με μεγάλη ταχύτητα, δημιουργείται μόνο μία ομάδα κλειστών γραμμών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7β. Σύμφωνα με τον μεγάλο φυσικό James Clerk Maxwell, για να κατανοήσουμε τα επα-



Σχήμα 7

γωγικά ρεύματα που αναπτύσσονται σε έναν αγωγό ο οποίος βρίσκεται κάτω από κινούμενο μαγνήτη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο ειδώλων του κινούμενου μαγνήτη. Κατά το μοντέλο του Maxwell, καθώς ο μαγνήτης φτάνει και προσπερνά κάποιο σημείο του επιπέδου του αγωγού, επάγεται πρώτα ένα «θετικό» και κατόπιν ένα «αρνητικό» είδωλο του μαγνήτη ως προς αυτό το σημείο. Τα εν λόγω είδωλα δημιουργούνται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τον αγωγό, όπως δημιουργείται το είδωλό μας όταν στεκόμαστε μπροστά σ' έναν καθρέφτη.

Τα επαγόμενα ρεύματα, λοιπόν, δημιουργούν στον κινούμενο μαγνήτη μια ανυψωτική δύναμη και μια δύναμη αντίστασης. Στις μικρές ταχύτητες κυριαρχεί η δύναμη αντίστασης και αυτό μπορείτε να το διαπιστώσετε εύκολα αν αφήσετε έναν μαγνήτη σε σχήμα δίσκου να γλιστρήσει στην ομαλή επιφάνεια ενός κεκλιμένου επιπέδου από αλουμίνιο (Σχήμα 8): ο μαγνήτης γλιστρά αργά λόγω της δύναμης αντίστασης που δημιουργούν τα επαγωγικά ρεύματα. (Το φαινόμενο αυτό μπορείτε επίσης να το διαπιστώσετε αν αφήσετε έναν μαγνήτη να πέσει μέσα σε κατακόρυφο σωλήνα αλουμινίου ή χαλκού, οπότε θα παρατηρήσετε την



Σχήμα 8

αργή κίνησή του.) Όσο, όμως, αυξάνεται η ταχύτητα του κινούμενου μαγνήτη η δύναμη αντίστασης μειώνεται (κατά προσέγγιση ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα της ταχύτητας του μαγνήτη) και αρχίζει να κυριαρχεί η ανυψωτική δύναμη.

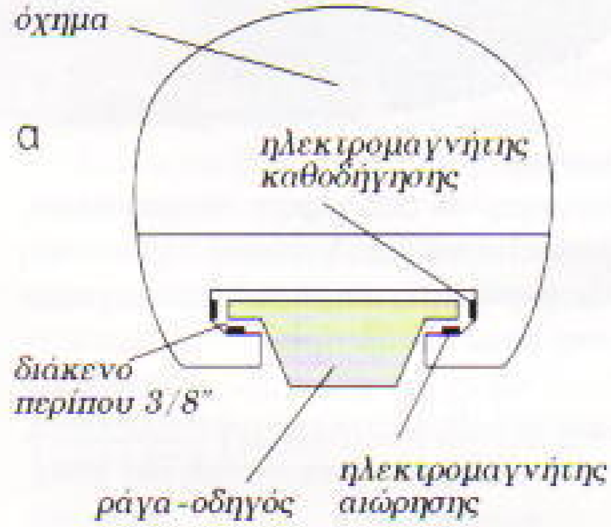
Για κάποια αρκετά μεγάλη ταχύτητα, η ανυψωτική δύναμη γίνεται ουσιαστικά όση και η απωστική δύναμη που ασκεί στον κινούμενο μαγνήτη ένα «ίσο και αντίθετο» είδωλο του μαγνήτη κάτω από το επίπεδο του αγωγού. Αναφέραμε προηγουμένως πως όταν πλησιάζουμε ένα μαγνήτη κοντά σ' έναν υπεραγωγό επάγονται υπερρεύματα που το μαγνητικό τους πεδίο αντιτίθεται στο πεδίο του μαγνήτη. Τα ρεύματα που επάγονται σ' έναν συνηθισμένο αγωγό από έναν ταχέως κινούμενο μαγνήτη παρουσιάζουν εκπληκτική ομοιότητα με τα υπερρεύματα που επάγονται σ' έναν υπεραγωγό. Η ουσιαστική διαφορά έγκειται στο ότι δεν απαιτείται ταχεία κίνηση στην περίπτωση του υπεραγωγού.

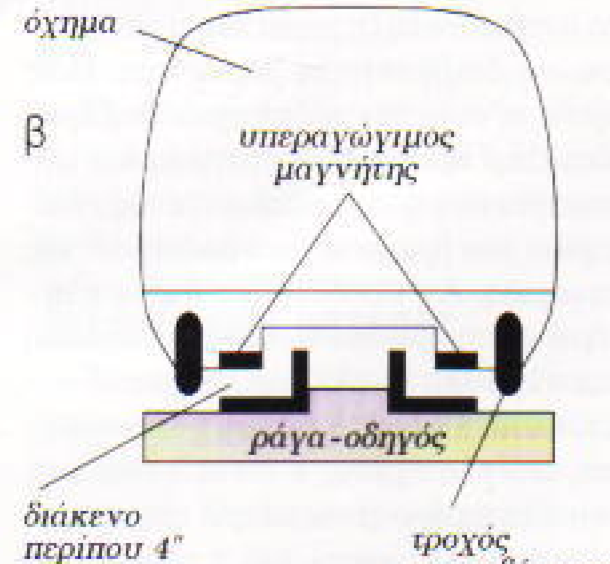
«Ιπτάμενα» οχήματα

Με τη σημερινή τεχνολογία δείχνει εφικτή η κατασκευή ενός υψηλής ταχύτητας μεταφορικού μέσου εδάφους το οποίο να χρησιμοποιεί μαγνητικώς αιωρούμενα οχήματα κινούμενα με ταχύτητα 500 km/h. Ένα τέτοιο σύστημα θα περιόριζε σημαντικά τη συμφόρηση στους αυτοκινητοδρόμους ταχείας κυκλοφορίας και στα αεροδρόμια, και θα ήταν ενεργειακά πιο αποδοτικό από τις περισσότερες πτήσεις μικρής απόστασης (150 έως 900 km) που χρησιμοποιούν μεγάλα αεροδρόμια. Τα οχήματα αυτά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθούν επίσης για να συνδέουν τις μεγάλες πόλεις με τα τεράστια διεθνή αεροδρόμια που θα βρίσκονται μακριά από τις συνωστισμένες προαστιακές περιοχές.

Τα οχήματα αυτά ίσως να μοιάζουν περισσότερο με τρένα, ο σχεδιασμός τους όμως βρίσκεται πιο κοντά στον αντίστοιχο των αεροπλάνων. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις δυνάμεις ανύψωσης και αντίστασης και στις δυνάμεις που καθορίζουν την κλίση, την περιστροφή, την καμπύλωση της τροχιάς, όπως και στα αεροσκάφη. Ένα είδος τέτοιου συστήματος μάλιστα θα χρησιμοποιεί «τροχούς προσεδάφισης» για τις χαμηλές ταχύτητες. Η λειτουργία μαγνητικώς αιωρούμενων οχημάτων υψηλής ταχύτητας αναφέρεται ως «μαγνητική πτήση».

Στη μαγνητική πτήση μπορεί να χρησιμοποιούνται είτε ελκτικές είτε απωστικές δυνάμεις για την αιώρηση του οχήματος. Η ηλεκτρομαγνητική ανάρτηση εξαρτάται από την ελκτική δύναμη μεταξύ των ηλεκτρομαγνητών και της χαλύβδινης ράγας-οδηγού (Σχήμα 9α), ενώ η ηλεκτροδυναμική ανάρτηση εξαρτάται από τις απωστικές δυνάμεις μεταξύ των κινούμενων μαγνητών και των επαγωγικών ρευ-





Σχήμα 9

μάτων που αναπτύσσονται στη ράγα-οδηγό (Σχήμα 9β). Τα συστήματα η-

Η συνέχεια στη σελίδα 68 ⇨

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Ζυγίζοντας έναν αστροναύτη

«Η Γη μας δεν είναι παρά μια χούφτα χώμα, αλλά βαστάει τα βουνά χωρίς να νιώθει το βάρος τους και συγκρατεί τους ποταμούς και τις θάλασσες χωρίς να της ξεφεύγουν.»

—Κομφούκιος

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΚΑΠΟΤΕ ΜΕΡΙΚΟΙ ΑΠΟ ΜΑΣ ΘΑ ζουν για μεγάλα χρονικά διαστήματα σε κάποια διαστημική αποικία. Τι προβλήματα υγείας θα αντιμετωπίζουμε άραγε; Θα χάσουμε βάρος, ή μήπως ο σκελετός μας θα καταλήξει ασθενικότερος στη «μηδενική βαρύτητα»; Τα ιατρικά ερωτήματα απέκτησαν ιδιαίτερη σημασία κατά τη διάρκεια της αποστολής του Skylab, από τον Μάιο του 1973 ώς τον Φεβρουάριο του 1974. Ένα από τα βασικότερα ερωτήματα των επιστημόνων ήταν το αν οι αστροναύτες θα έχαναν βάρος μένοντας για πολύ καιρό στο διάστημα. Ας δούμε στην αρχή λίγο πιο προσεκτικά την έννοια της ζύγισης ενός αστροναύτη.

Αν θελήσετε ένα πρωί να μάθετε πόσο ζυγίζετε, δεν έχετε παρά να ανεβείτε στη ζυγαριά του μπάνιου και να διαβάσετε το βάρος σας. Πώς όμως «γνωρίζει» η ζυγαριά το βάρος σας; Στην πραγματικότητα μετράτε την επιμήκυνση ή τη συμπίεση ενός ελατηρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό της ζυγαριάς. Αν υποθέσουμε ότι το ελατήριο είναι ιδανικό (υπακούει δηλαδή στο νόμο του Hook), ξέρουμε ότι $F = -kx$, όπου F είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου, k είναι η σταθερά του ελατηρίου (ένα μέτρο της ακαμψίας του ελατηρίου), και x η μεταβολή του μήκους του. Σ' αυτή την περίπτωση η δύναμη επαναφοράς ισούται με τη δύναμη της βαρύτητας που δρα πάνω σας. Αφού η βαρυτική έλξη ισούται με mg, υποθέτοντας πως έχετε μάζα 60 kgr και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην τοποθεσία που βρίσκεστε είναι 9,80 m/sec², βρίσκουμε ότι η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι 588 Nt.

Πόσο λοιπόν θα ζυγίζατε άν ήσασταν επιβάτης του Skylab το 1973; Η τροχιά του Skylab απείχε 386 km από την επιφάνεια της Γης, δηλαδή η ακτίνα της ήταν ίση με 6.378 km + 386 km = 6.764 km. Εφόσον η βαρύτητα είναι μια δύναμη αντίστροφου τετραγώνου, μπορείτε να υπολογίσετε τη δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στο σώμα σας, μέσα στο Skylab:

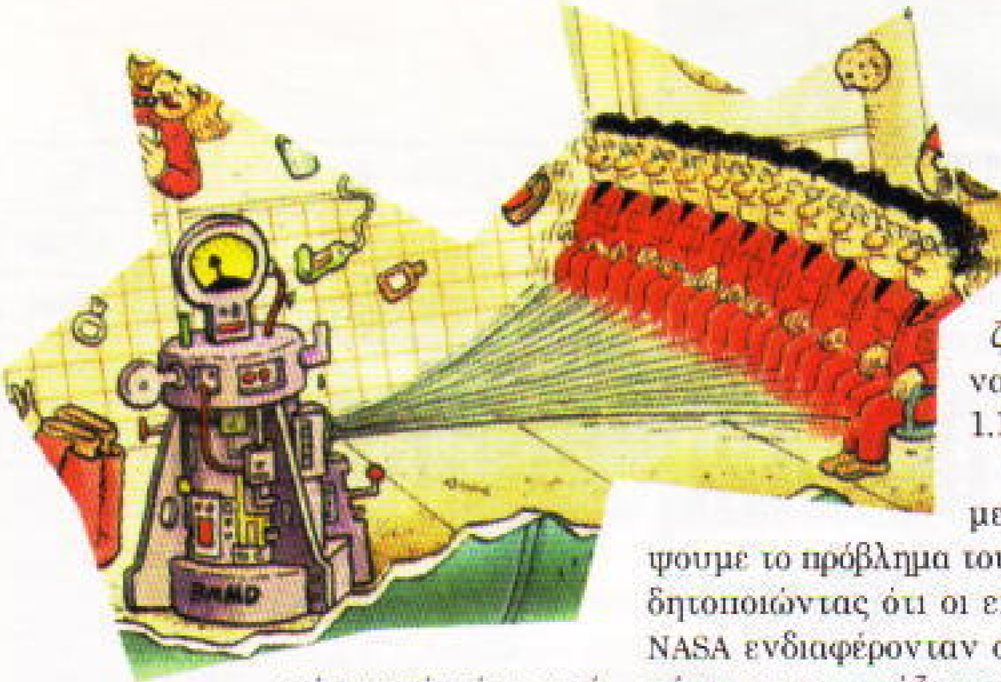
$$F = F_\Gamma \left(\frac{R}{R_\Gamma}\right)^2 = (588\ \text{Nt})\left(\frac{6.378\ \text{km}}{6.764\ \text{km}}\right)^2$$
$$= 523\ \text{Nt},$$

όπου ο δείκτης Γ αναφέρεται στις αντίστοιχες τιμές στην επιφάνεια της Γης. Θα περιμένατε, λοιπόν, μια ένδειξη 523 Nt στη ζυγαριά σας.

Παρ' όλα αυτά, αν ανεβαίνατε στη ζυγαριά μέσα στο Skylab, η ένδειξη θα ήταν μηδέν! Στη διαστημική διάλεκτο, είστε αβαρής. Τι σημαίνει άλλωστε το να «ανεβείτε στη ζυγαριά» σε περιβάλλον έλλειψης βαρύτητας; Η σύγχυση πηγάζει από το γεγονός ότι η λέξη βάρος έχει χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει δύο διαφορετικά πράγματα —τη δύναμη της βαρύτητας και την ένδειξη της ζυγαριάς. Αυτό δεν προκαλεί περιπλοκές αν βρίσκεστε σε αδρανειακό σύστημα— δηλαδή σε σύστημα που δεν επιταχύνεται. Υποθέτουμε ότι το δωμάτιο του μπάνιου σας στη Γη είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς (στην πραγματικότητα δεν είναι, επειδή η Γη στρέφεται γύρω από τον άξονά της και περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, αλλά κατά προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί αδρανειακό σύστημα).[1] Όταν στέκεστε πάνω στη ζυγαριά στο μπάνιο σας, η επιτάχυνσή σας είναι μηδενική· από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω σας είναι επίσης μηδενική. Κατά συνέπεια, η κατακόρυφη δύναμη της βαρύτητας που έχει φορά προς τα κάτω πρέπει να είναι ίση κατά μέτρο με τη δύναμη που σας ασκεί η ζυγαριά, οπότε δεν έχει καμιά σημασία το ποια δύναμη μετράμε.

Τα προβλήματα ανακύπτουν όταν το σύστημα αναφοράς σας επιταχύνεται. Επειδή το Skylab διαγράφει κυκλι-

1. Βλ. και το άρθρο «Το "πλέον αδρανειακό" σύστημα αναφοράς» στη σελίδα 18.



κή τροχιά γύρω από τη Γη, έχει κεντρομόλο επιτάχυνση ίση με υ^2/R. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για σας —αφού διαγράφετε την ίδια τροχιά. Η δύναμη της βαρύτητας εξασφαλίζει την απαραίτητη κεντρομόλο επιτάχυνση ώστε να μένετε σε τροχιά, και δεν χρειάζεται καμιά ζυγαριά για να σας στηρίζει, ούτε εσάς ούτε οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο μέσα στο διαστημόπλοιο.

Μια παρόμοια κατάσταση μπορούμε να δημιουργήσουμε και στη Γη. Φανταστείτε ότι τα βαγονάκια ενός λούνα παρκ σας οδηγούν στην κορυφή της μεταλλικής ράγας και κατόπιν σας «αφήνουν να πέσετε» σ' ένα πολύ απότομο τμήμα της. Αν μπορούσατε να σταθείτε πάνω σε μια ζυγαριά μπάνιου στη διάρκεια αυτής της ελεύθερης πτώσης, η ένδειξή της θα ήταν μηδέν. Τόσο η ζυγαριά όσο και εσείς, εκτελείτε ελεύθερη πτώση και δεν χρειάζεται να σας στηρίζει. Γι' αυτό το λόγο πολλοί δάσκαλοι φυσικής διακρίνουν προσεκτικά τη δύναμη της βαρύτητας από το βάρος. Βάρος είναι η ένδειξη της ζυγαριάς, δηλαδή η δύναμη στήριξης που χρειάζεται για να παραμείνετε ακίνητοι σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Κάποιοι άλλοι χρησιμοποιούν τον όρο «φαινόμενο βάρος» όταν αναφέρονται στην ένδειξη της ζυγαριάς και τον όρο βάρος όταν αναφέρονται στη βαρυτική έλξη.

Ας έρθουμε τώρα στο παράδειγμα του ανελκυστήρα και ας υποθέσουμε ότι επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση 9,80 m/sec². Πόσο θα ζυγίζατε; Η συνισταμένη δύναμη πάνω σας πρέπει να είναι mg, με φορά προς τα πάνω, για να σας προσδώσει επιτάχυνση g με την ίδια φορά. Αφού η δύναμη της βαρύτητας είναι mg με φορά προς τα κάτω, το ελατήριο της ζυγαριάς πρέπει να σας ασκεί δύναμη $2mg$ με φορά προς τα πάνω. Κατά συνέπεια, η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι 2 · 588 Nt = 1.176 Nt.

Θα μπορούσαμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα του βάρους συνειδητοποιώντας ότι οι επιστήμονες της NASA ενδιαφέρονταν στην πραγματικότητα για τη μάζα των αστροναυτών. Πώς θα μπορούσαμε όμως να μετρήσουμε τη μάζα ενός αστροναύτη στο διάστημα; Προφανώς δεν μπορούμε να του ζητήσουμε να σταθεί πάνω σε μια ζυγαριά. Ένας εύκολος τρόπος είναι μέσω του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα, ασκώντας μια γνωστή δύναμη στον αστροναύτη και μετρώντας την επιτάχυνσή του. Η NASA το πραγματοποίησε αυτό σχεδιάζοντας μια συσκευή μέτρησης της μάζας των σωμάτων (το Body Mass Measuring Device, ή εν συντομία BMMD). Η συσκευή αποτελείται βασικά από ένα κάθισμα τοποθετημένο πάνω σε ένα ζευγάρι σούστες. Γνωρίζετε ότι οποτεδήποτε μια μάζα m συνδεθεί στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k και μετατοπιστεί κατά μικρή απόσταση από τη θέση ισορροπίας, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T που δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

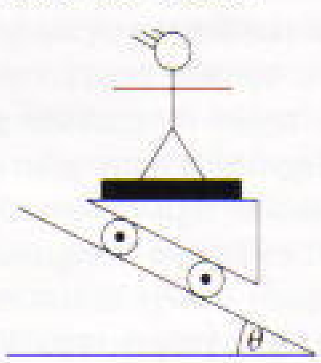
Στην πράξη, ο αστροναύτης κάθεται στη συσκευή BMMD και μετράει την περίοδο ταλάντωσής του ώστε να υπολογίσει τη μάζα του. Αυτό μας οδηγεί στα προβλήματα αυτού του μήνα.

Α. Για να βαθμονομηθεί η συσκευή BMMD τοποθετήθηκε στο κάθισμα μια γνωστή μάζα και μετρήθηκε η αντίστοιχη περίοδος της ταλάντωσης. Αποτυπώστε σε διάγραμμα τα ακόλουθα δεδομένα της NASA για να βρείτε τη σύνθετη σταθερά των ελατηρίων και τη μάζα του κενού καθίσματος του συστήματος:

Μάζα (kgr)	Περίοδος (sec)
0,00	0,90149
14,06	1,24979
23,93	1,44379
33,80	1,61464
45,02	1,78780
56,08	1,94442
67,05	2,08832

Β. Ένα από τα μέλη του πληρώματος της δεύτερης ομάδας των τριών αστροναυτών του Skylab ήταν ο ηλεκτρολόγος μηχανικός δρ. Owen K. Garriott. Ο Garriott, καθισμένος στη συσκευή BMMD, μέτρησε περιόδους 2,012 sec και 1,981 sec στην αρχή και στο τέλος ενός χρονικού διαστήματος 58 ημερών. Πόσο βάρος (διάβαζε μάζα) κέρδισε ή έχασε σ' αυτό το χρονικό διάστημα;

Γ. Υποθέστε ότι με μια σανίδα σκέιτμπορντ κινείστε κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ με φορά προς τα κάτω. Πάνω στο σκέιτμπορντ όμως έχετε ήδη στερεώσει μια ζυγαριά με τρόπο ώστε να παραμένει πάντα σε οριζόντια θέση (Σχήμα 1). Μεταξύ του σκέιτμπορντ και του κεκλιμένου επιπέδου δεν υπάρχει τριβή· η μάζα σας είναι 60 kgr. Ποια θα είναι η ένδειξη της ζυγαριάς; (Μια παραλλαγή αυτής της ερώτησης δόθηκε στον προκαταρκτικό διαγωνισμό από τον οποίο θα επιλέγονταν τα μέλη της ομάδας φυσικής των ΗΠΑ που θα διαγωνιστούν στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής στην Καμπέρα της Αυστραλίας τον Ιούλιο του 1995.)



Σχήμα 1

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum* έως τις 10 Ιουνίου 1995. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία!

Ανερχόμενοι αστέρες

Στο πρόβλημα του τεύχους Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1994, ο ραδιοφωνικός δέκτης καταγράφει μέγιστα και ελάχιστα. Είναι φανερό ότι συμβαίνει

Σχήμα 2

Σχήμα 3

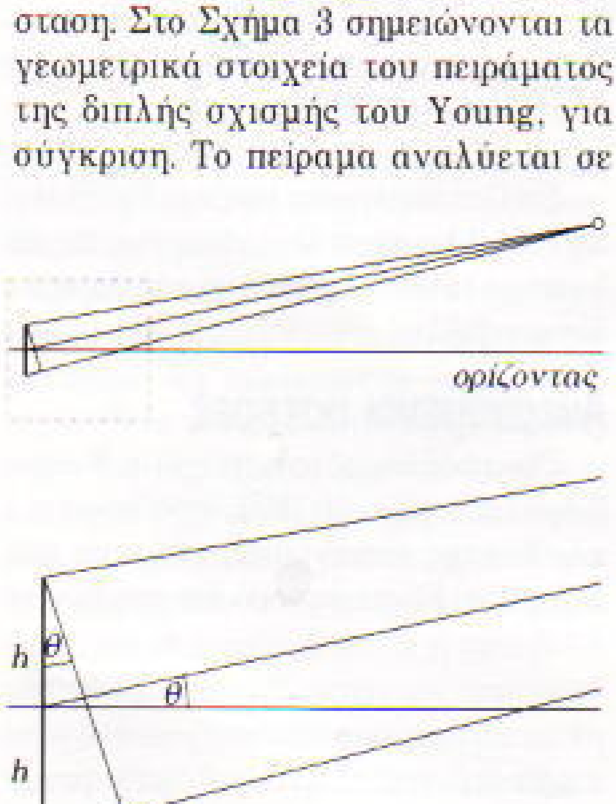
κάποιο φαινόμενο συμβολής. Ο τρόπος που έχει τοποθετηθεί ο δέκτης στο νησί μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για τη συμβολή του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που φτάνει στο δέκτη απ' ευθείας από τη ραδιοπηγή και του κύματος που φτάνει σ' αυτόν έπειτα από ανάκλαση στην επιφάνεια του νερού. Το Σχήμα 2 δείχνει τα δύο αυτά κύματα.

Έτσι, κατ' αρχάς μπορούμε να πούμε ότι για να είναι ενισχυτική η συμβολή (και να παράγει μέγιστα), η συνολική διαφορά δρόμων πρέπει να ισούται με το ακέραιο πλήθος μηκών κύματος, και για να είναι αναιρετική (και να παράγει ελάχιστα), η διαφορά δρόμων πρέπει να είναι περιττό πολλαπλάσιο ημιμηκών κύματος. Πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι το ανακλώμενο κύμα υφίσταται αλλαγή φάσης 180°, που αντιστοιχεί σε $\lambda/2$.

Η γεωμετρία, αν και όχι δύσκολη, είναι ασυνήθιστη. Σχεδιάζοντας την προέκταση της ανακλώμενης ακτίνας και το είδωλο του δέκτη θυμόμαστε το πείραμα της διπλής σχισμής του Young, όπου το φως περνώντας από ένα ζευγάρι οπών σχηματίζει μια εικόνα συμβολής πάνω στην οθόνη που βρίσκεται τοποθετημένη σε ορισμένη απόσταση. Στο Σχήμα 3 σημειώνονται τα γεωμετρικά στοιχεία του πειράματος της διπλής σχισμής του Young, για σύγκριση. Το πείραμα αναλύεται σε όλα τα βιβλία φυσικής που περιέχουν το κεφάλαιο της οπτικής. Σχηματίζοντας, λοιπόν, το τρίγωνο που φαίνεται στο Σχήμα 4, βλέπουμε ότι η διαφορά δρόμων δ δίνεται από τη σχέση

$$\delta \cong 2h \cdot \eta\mu\theta,$$

όπου θ είναι το ύψος της ραδιοπηγής και h το ύψος του ραδιοφωνικού δέκτη· έχουμε υποθέσει βεβαίως ότι για μικρές γωνίες θ το τρίγωνο είναι κατά προσέγγιση ορθογώνιο.



Σχήμα 4

Στο πρόβλημά μας, λοιπόν, οι συνθήκες δημιουργίας μεγίστων και ελαχίστων (με δεδομένη την αλλαγή φάσης κατά την ανάκλαση στο νερό) είναι

$$\delta_{\mu\epsilon\gamma} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \text{ και } \delta_{\epsilon\lambda} = k\lambda,$$

όπου k είναι ένας ακέραιος 0, 1, 2, 3, ...

Το ερώτημα Α ζητούσε το ύψος της πηγής ραδιοκυμάτων όταν παρατηρείται μέγιστο και ελάχιστο:

$$\eta\mu\theta_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\delta_{\mu\epsilon\gamma}}{2h} = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2h},$$

$$\eta\mu\theta_{\epsilon\lambda} = \frac{\delta_{\epsilon\lambda}}{2h} = \frac{k\lambda}{2h}.$$

Το ερώτημα Β ζητούσε το αν η ένταση αυξάνεται ή μειώνεται καθώς η πηγή ανυψώνεται πάνω από τον ορίζοντα. Όταν $\theta = 0$, η πηγή μόλις ξεπροβάλλει από τον ορίζοντα. Αφού αυτό αντιστοιχεί σε ελάχιστο, η ένταση της πηγής θα αυξάνεται μέχρι να φτάσει το πρώτο της μέγιστο.

Το ερώτημα Γ ζητούσε να βρεθούν οι εντάσεις κύματος των διαδοχικών ελαχίστων και μεγίστων, δεδομένου ότι ο λόγος του πλάτους του ανακλώμενου προς το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος στην επιφάνεια του νερού είναι

$$\frac{n - \eta\mu\theta}{n + \eta\mu\theta},$$

και $n = 9$.

Το μέγιστο πλάτος μπορούμε να το βρούμε προσθέτοντας τις εντάσεις των ηλεκτρικών πεδίων του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος. Αν υποτεθεί ότι η ένταση του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου είναι E, το πλάτος θα είναι

$$a_{\mu\epsilon\gamma} = E + E\frac{n - \eta\mu\theta}{n + \eta\mu\theta}$$

k	$\theta_{\epsilon\lambda}$	$\theta_{\mu\epsilon\gamma}$	$I_{\epsilon\lambda}$	$I_{\mu\epsilon\gamma}$
0	0	1.50°	0	3,9768
1	3.01°	4.52°	0.000135	3,9309
2	6.03°	7.54°	0,000532	3,8858
3	9.06°	10.59°	0.00118	3,8415

Σχήμα 5

$$= E + E\left[\frac{n - \frac{\lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2h}}{n + \frac{\lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2h}}\right]$$

$$= \left[\frac{4nh}{2nh + \lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)}\right]E.$$

Εφόσον η ένταση του κύματος είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους,

$$I_{\mu\epsilon\gamma} \sim \left[\left(\frac{4nh}{2nh + \lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)}\right)E\right]^2.$$

Ομοίως, το ελάχιστο πλάτος μπορεί να βρεθεί αν αφαιρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του ανακλώμενου κύματος από την ένταση του προσπίπτοντος. Η αντίστοιχη ένταση του κύματος είναι:

$$I_{\epsilon\lambda} \sim \left[\left(\frac{2k\lambda}{2nh + \lambda k}\right)E\right]^2.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις σχετικές αριθμητικές τιμές, όπως φαίνονται στον πίνακα του Σχήματος 5.

Διευκρίνιση

Αν δυσκολευτήκατε στο μέρος Δ του προβλήματος του τεύχους Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου με θέμα τον «υπεραγώγιμο μαγνήτη», αυτό πιθανότατα οφείλεται στην κακή διατύπωση της ερώτησης από τους συγγραφείς. Γι' αυτό διαβάστε: «Ο διακόπτης, όμως, θα καταστραφεί αν το ρεύμα που τον διαρρέει στην *κανονική κατάσταση* υπερβεί το 0,5 A». Το σχόλιο της παρένθεσης σχετικά με τα μεγάλα ρεύματα είναι σωστό, αλλά μάλλον προκαλεί παρανόηση στο συγκεκριμένο σημείο του κειμένου. ◘

Η κληρονομιά του Norbert Wiener

Μέρος III: Από την ανάδραση στην κυβερνητική

ΤΟ 1933 Ο WIENER ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΟΝ Arturo Rosenblueth, μεξικανό φυσιολόγο που διηύθυνε μια σειρά διεπιστημονικών σεμιναρίων στην Ιατρική Σχολή του Χάρβαρντ. Ταίριαξαν, και άρχισε μια μακρόχρονη συνεργασία, στη διάρκεια της οποίας άρχισαν να καρποφορούν οι ιδέες του Wiener για τις σχέσεις των μηχανικών και των φυσιολογικών συστημάτων —ιδιαίτερα σε ό,τι αφορά το ρόλο της ανάδρασης. Φαίνεται επίσης ότι η αλληλεπίδραση με τον Rosenblueth έδωσε το έναυσμα στην αλυσίδα των σκέψεων που θα εξελισσόταν στην *κυβερνητική*. Έτσι, από πνευματική και επιστημονική άποψη, η συνεργασία τους είχε τεράστια επιτυχία. Επιπλέον, κρίνοντας από την εγκαρδιότητα της αλληλογραφίας τους, ο Rosenblueth έγινε ο στενότερος φίλος που είχε ο Wiener, ως ενήλικος.

Η έννοια του *βρόχου ανάδρασης* ήταν ήδη οικεία στον James Watt κατά τον 18ο αιώνα, και σήμερα είναι τόσο βαθιά ενσωματωμένη στις διεργασίες της σκέψης μας ώστε ελάχιστα τη συνειδητοποιούμε. Ένα παράδειγμα βρόχου ανάδρασης στην καθημερινή ζωή είναι η σύνδεση μιας θερμάστρας μ' έναν θερμοστάτη. Η θερμάστρα εκπέμπει θερμότητα ανεβάζοντας τη θερμοκρασία του δωματίου. Ο θερμοστάτης καταγράφει τη θερμοκρασία του δωματίου· μόλις γίνει αρκετά χαμηλή, ο θερμοστάτης κλείνει ένα κύκλωμα και ανάβει τη θερμάστρα. Αυτή παραμένει αναμμένη έως ότου η θερμοκρασία του δωματίου ανέβει αρκετά, οπότε ο θερμοστάτης διακόπτει το κύκλωμα και τη σβήνει. Με αυτόν τον τρόπο, η έξοδος της θερμάστρας ανατροφοδοτεί την είσοδό της.[1]

Αυτό που ενδιέφερε κυρίως τον Wiener ήταν οι ασταθείς μηχανισμοί ανάδρασης. Σχεδόν όλοι γνωρίζουμε πόσο δύσκολο είναι να μεταφέρουμε στο τραπέζι ένα πιάτο γεμάτο μέχρι το χείλος με σούπα: η σούπα αρχίζει να χύνεται και κάθε προσπάθεια να διορθώσουμε την κατάσταση γέρνοντας αντίθετα το πιάτο (αρνητική ανάδραση), απλώς χειροτερεύει τα πράγματα. Ο Wiener και ο Rosenblueth προσπάθησαν να δημιουργήσουν μοντέλα συγκεκριμένων μυϊκών σπασμών χρησιμοποιώντας έναν ασταθή βρόχο ανάδρασης. Αργότερα εφάρμοσαν τις ίδιες αρχές στη μελέτη του καρδιακού μυός.

Όταν ξέσπασε ο Β' Παγκόσμιος Πόλεμος, ο Wiener υποχρεώθηκε να διακόψει τις έρευνές του. Νιώθοντας ότι επαπειλείται η κατάρρευση του ευρωπαϊκού πολιτισμού, ο Wiener, όπως πολλοί επιστήμονες, αναζήτησε έναν τρόπο να συμβάλει στην πολεμική προσπάθεια. Επέλεξε τελικά το πρόβλημα της σκόπευσης των αντιαεροπορικών όπλων. Ήταν ένα πρόβλημα πολύ πιο περίπλοκο από αυτά που είχε αντιμετωπίσει κατά τον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο. Τα αεροπλάνα είχαν γίνει πολύ ταχύτερα και πιο επικίνδυνα, και έτσι ο πυροβολητής χρειαζόταν κάποια μηχανή. Επιπλέον, δεν είχε πια νόημα η κατευθείαν σκόπευση του αεροπλάνου, επειδή τη στιγμή που θα έφτανε το βλήμα, το αεροπλάνο θα είχε απομακρυνθεί. Ήταν ένα πρόβλημα *πρόβλεψης*. Έπρεπε δηλαδή να καθοριστεί η θέση του αεροπλάνου βάσει των σημάτων του ραντάρ και να *προβλεφθεί* η μελλοντική τροχιά του. Επειδή ήταν φανερό πως η τέλεια πρόβλεψη ήταν αδύνατη, ο Wiener αποφάσισε να υιοθετήσει μια στατιστική προσέγγιση. Με άλλα λόγια, επινόησε ένα στατιστικό μοντέλο στο οποίο μπορούσε να διατυπώσει με ακρίβεια τι σημαίνει *μεγιστοποίηση της πιθανότητας επιτυχίας*.

Το στατιστικό μοντέλο του Wiener αντιμετώπισε ένα σοβαρότερο πρόβλημα: όταν προσπαθούμε να ελέγξουμε τη δράση του όπλου βασιζόμενοι αυστηρά στα δεδομένα του ραντάρ, τα σφάλματα μέτρησης ενδέχεται να προκαλέσουν έντονες ταλαντώσεις του όπλου. Ένας πυροβολητής μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί σε ατελείς μετρήσεις, αλλά μια μηχανή πρέπει να σχεδιαστεί ειδικά ώστε να αποφεύγονται οι αστάθειες. Ο Wiener εξουδετέρωσε τις ατέλειες των δεδομένων του ραντάρ εξάγοντας τον μέσο όρο τους για να αφαιρέσει το *θόρυβο* (τυχαία σφάλματα μέτρησης). Όταν θεωρούμε τον μέσο όρο των δεδομένων σε μια χρονική περίοδο, οι ταλαντώσεις αποσβέννυνται.

Οι ιδέες του σχετίζονταν στενά με τις απόψεις του για τη σταθεροποίηση των ασταθών βρόχων ανάδρασης. Φυσικά, πρέπει να προσέχουμε μήπως, εξάγοντας τον μέσο όρο, εξαφανίσουμε χρήσιμες πληροφορίες. Το

1. Αυτού του είδους η ανάδραση ονομάζεται αρνητική επειδή ο θερμοστάτης αντιστρέφει τη δράση της θερμάστρας.

όλο ζήτημα ήταν να επιλεγεί σωστά μια διαδικασία υπολογισμού του μέσου όρου που θα διατηρούσε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες.

Το 1942 ο Julian Bigelow,[2] συνεργάτης του Wiener, κατασκεύασε ένα πρότυπο που παρακολουθούσε την πορεία ενός αεροπλάνου επί δέκα δευτερόλεπτα και προέβλεπε τη θέση του είκοσι δευτερόλεπτα αργότερα. Δυστυχώς, οι προσπάθειες του Wiener και του Bigelow δεν επιτάχυναν το τέλος του πολέμου. Μόνο μετά τον πόλεμο οι βελτιώσεις στην ταχύτητα και στην ακρίβεια του εξοπλισμού των αεροπλάνων και των ραντάρ κατέστησαν εξαιρετικά σημαντικές τις συσκευές συστηματικού φιλτραρίσματος και ανίχνευσης. Από την άλλη πλευρά, οι ιδέες του Wiener είχαν συνέπειες πολύ πέρα από το πεδίο που τις ενέπνευσε. Αυτός που θέλει να προβλέψει την κίνηση του αεροπλάνου τροφοδοτείται με μια ροή δεδομένων γεμάτη θόρυβο. Αντιμετωπίζει λοιπόν το ίδιο πρόβλημα με τον μηχανικό επικοινωνιών που θέλει να στείλει ή να λάβει ένα μήνυμα με νόημα μέσω ενός θορυβώδους καναλιού. Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να εξαλείψουμε το θόρυβο σχεδιάζοντας ένα *φίλτρο* —αυτή την ορολογία χρησιμοποιούν οι μηχανικοί γι' αυτό που έκανε ο Wiener. Φιλτράρισμα είναι κάθε στρατηγική που εξαλείφει τα αποτελέσματα των τυχαίων δονήσεων ή παρασίτων από ένα μηχανικό ή ηλεκτρικό σύστημα. Τα φίλτρα χρειάζονται σε κάθε είδους συσκευές, από τα στερεοφωνικά συστήματα έως τα όργανα των αεροπλάνων.

Με βάση τις υποθέσεις του, η λύση του Wiener στο πρόβλημα της πρόβλεψης και του φιλτραρίσματος ήταν η καλύτερη δυνατή —με την έννοια ότι ήταν μαθηματικά ακριβής. Την ίδια ουσιαστικά εποχή ο μεγάλος ρώσος μαθηματικός A.N. Kolmogorov,[3] ένας από τους πρωτοπόρους της σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων, δημιούργησε μια παρόμοια μαθηματική θεωρία. Έτσι, ο Kolmogorov και ο Wiener ανέπτυξαν την πρώτη συστηματική προσέγγιση του σχεδιασμού φίλτρων. Όμως, οι υποθέσεις τους για πολλές καταστάσεις δεν είναι ρεαλιστικές. Χρησιμοποιώντας τεχνική ορολογία μπορούμε να πούμε ότι η στρατηγική τους είναι σχεδιασμένη για τυχαίες διαταραχές που συναρτώνται γραμμικά από τον λευκό θόρυβο —δεν αποδίδει όταν οι διαταραχές δεν είναι γραμμικές συναρτήσεις του λευκού θορύβου. Αργότερα, ο Wiener αντιμετώπισε τα μη γραμμικά προβλήματα με τη θεωρία του *ομογενούς χάους*, όπως την ονόμασε. Ωστόσο, ούτε ο Wiener ούτε ο Kolmogorov ούτε και κανείς άλλος κατάφεραν να αντιμετωπίσουν το μη γραμμικό φιλτράρισμα με την ίδια επιτυχία που είχαν στην γραμμική περίπτωση.

Ο Wiener κατέγραψε τα αποτελέσματά του το 1942 σε μια αναφορά που είχε τον τίτλο *The Interpolation, Extrapolation of Linear Time Series and Communication Engineering* (Παρεμβολή, παρεκβολή γραμμικών χρονοσειρών και μηχανική επικοινωνιών). Την εργασία αυτή την αποκαλούσαν και «κίτρινο κίνδυνο», εξαιτίας του κίτρινου εξωφύλλου της και των τρομερών μαθηματικών της. Ο Wiener αφιέρωσε ένα χρόνο έντονης εργασίας σ' αυτή την αναφορά, η οποία, όμως, διαβαθμίστηκε ως απόρρητη. Με δεδομένη την ακατάπαυστη επιθυμία του να μιλήσει για τη δουλειά του και να τη συνεχίσει, ο χαρακτηρισμός της ως απόρρητης του ήταν αβάσταχτος. Έκτοτε κατάφέρθηκε πολύ συχνά εναντίον της στρατιωτικής μυστικότητας και υποστήριξε ότι δεν συμβιβάζεται με την ελεύθερη επιστημονική έρευνα.

Στα μέσα της δεκαετίας του 1940 ο Wiener άρχισε να στρέφεται στη νευροφυσιολογία. Υποστήριξε μια διεπιστημονική προσέγγιση με την οποία θα συνδύαζαν τις δυνάμεις τους φυσικοί, ηλεκτρολόγοι μηχανικοί και βιολόγοι. Μαζί με τον John von Neumann ξεκίνησαν μια σειρά συνεδρίων για τους «Κυκλικούς, αιτιακούς και αναδραστικούς μηχανισμούς σε βιολογικά και κοινωνικά συστήματα».[4] Ο Wiener διέδωσε τις ιδέες του και μέσω ενός σεμιναρίου που συνδεόταν με το Εργαστήριο Ακτινοβολίας του MIT, το οποίο είχε ιδρυθεί κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου με σκοπό την ανάπτυξη των ραντάρ. Διατυπώνοντας τις ιδέες του ο Wiener επινόησε τον όρο «κυβερνητική», από την ελληνική λέξη *κυβερνήτης*. Το λεξικό του Webster ορίζει την κυβερνητική ως «μελέτη των ανθρώπινων λειτουργιών ελέγχου και των μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων που σχεδιάζονται για να τις αντικαταστήσουν, μελέτη που συνδέεται με την εφαρμογή της στατιστικής μηχανικής στη μηχανική επικοινωνιών.»[5] Ο Wiener στο *Είμαι μαθηματικός* αναφέρει πως ήταν η καλύτερη λέξη που μπόρεσε να βρει «για να εκφράσει την τέχνη και επιστήμη του ελέγχου σε όλα τα πεδία όπου είναι εφαρμόσιμη αυτή η έννοια».

Το 1949, οπότε εκδόθηκε το *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine* (Κυβερνητική, ή έλεγχος και επικοινωνία στα ζώα και τις μηχανές), ο Wiener έγινε από τη μια στιγμή στην άλλη ένα είδος επιστημονικής διασημότητας. Σε πρώτη ματιά, αυτό είναι περίεργο. Το βιβλίο αποτελεί μια παράθεση φαινομενικά ασύνδετων διαλογισμών για το χρόνο, την εντροπία και τους υπολογιστές, είναι δε διά-

2. Στη συνέχεια ο Bigelow προσελήφθη από τον John von Neumann για να κατασκευάσει τον πρώτο προγραμματιζόμενο υπολογιστή, τον ENIAC.

3. Ο A.N. Kolmogorov είναι ο συνιδρυτής (μαζί με τον φυσικό I.K. Kikoyin) του *Kvant*, του ρωσικού προδρόμου και «αδελφού περιοδικού» του *Quantum*.

4. Το Νοέμβριο του 1964 ο von Neumann, σε μια επιστολή του προς τον Wiener, εξέφραζε τη γνώμη ότι οι τρέχουσες εργαστηριακές τεχνικές ήταν υπερβολικά πρωτόγονες για να δώσουν λεπτομερή εικόνα του εγκεφάλου και ότι θα ήταν προτιμότερο να αναπτυχθούν ηλεκτρονικά μικροσκόπια και να γίνει κρυσταλλογραφία με ακτίνες X μεγάλων οργανικών μορίων, όπως των πρωτεϊνών σε ιούς. Όπως συχνά συμβαίνει στην ιστορία της επιστήμης, αυτή η προφητική επιστολή δεν άσκησε κάποια ορατή επίδραση στη λαμπρή πορεία της μοριακής βιολογίας τα χρόνια που ακολούθησαν. Παρόμοια μοίρα φαίνεται πως είχαν πολλές ιδέες του Wiener σχετικά με το σχεδιασμό των υπολογιστών.

5. Ο πατέρας του Wiener, ο φιλόλογος Leo Wiener, θα περνούσε μια πολύ ευχάριστη μέρα μελετώντας το πώς έχει διεισδύσει η κυβερνητική στη λαϊκή κουλτούρα μέσω λέξεων όπως *κυβερνοχώρος* και *κυβόργια*. Ωστόσο, και οι θαυμαστές αλλά και όσοι αντιπαθούν τον Άρνολντ Σβαρτσενέγκερ θα δυσκολεύονταν να εξηγήσουν τι ακριβώς είναι η κυβερνητική.

Ο πρόεδρος των ΗΠΑ Lyndon Johnson απονέμει το Εθνικό Μετάλλιο των Επιστημών του 1963 στον Norbert Wiener και σε τέσσερις ακόμη επιστήμονες, τους John R. Pierce, Vannevar Bush, Cornelius B. Van Niel και Luis W. Alvarez. Στην άκρη αριστερά είναι ο Jerome Wiesner, βοηθός του προέδρου Johnson εκείνη την εποχή.

σπαρτο από προχωρημένα μαθηματικά. Όπως γράφει ο Hans Freudenthal στο *The Dictionary of Scientific Biography*:* «Ακόμη και με τα κριτήρια του Wiener, η *Κυβερνητική* είναι ένα άσχημα οργανωμένο έργο —μια συλλογή τυπογραφικών λαθών, εσφαλμένων μαθηματικών προτάσεων, λανθασμένων τύπων, θαυμάσιων αλλά ασύνδετων ιδεών και λογικών ασυναρτησιών».

Όπως και νά 'χει, η *Κυβερνητική* άσκησε ισχυρή επίδραση. Ο Murray Eden στο κατατοπιστικό του άρθρο «Κυβερνητική», που περιέχεται στο *The Study of Information* (Η μελέτη της πληροφορίας), παραθέτει δεκάδες βιβλία και άρθρα που χρησιμοποιούν τη λέξη «κυβερνητική» στις δεκαετίες του 1950 και του 1960: *Φιλοσοφία και κυβερνητική. Κυβερνητικές αρχές της μάθησης και εκπαιδευτικός σχεδιασμός. Κυβερνητικά μοντέλα: η επιστήμη της τέχνης. Η ανάπτυξη της κυβερνητικής εξωαισθητηριακής αντίληψης*... Ακόμη και αυτός ο σύντομος κατάλογος δημιουργεί την εντύπωση ότι υπήρχε κάποια σύγχυση ως προς τη σημασία της λέξης. Ο ίδιος ο Wiener ουδέποτε έδωσε ακριβή ορισμό της, αλλά η γενική πορεία της σκέψης του είναι ξεκάθαρη. Όπως σημειώνει ο Eden, οι φιλόσοφοι πάντοτε συνέκριναν τη ζωή με το κυρίαρχο μηχανιστικό Παράδειγμα της εποχής. Η σύνδεσή του με τον Rosenblueth και η εργασία του στη θεωρία των επικοινωνιών και στα αντιαεροπορικά πυρά, έπεισαν τον Wiener για τη σημασία της ανάδρασης σε πλήθος περιστάσεις, φυσικές και βιολογικές. Από το σημείο αυτό δεν είναι μεγάλο άλμα το να υποθέσουμε ότι τα αυτόματα και τα ζωντανά συστήματα κυβερνώνται από τους ίδιους «νόμους».

Ο Wiener όμως προχώρησε περισσότερο. Η επικοινωνία, γράφει, «είναι το συνδετικό υλικό της κοινωνίας». Και εφόσον «η κοινωνιολογία και η ανθρωπολογία είναι πρωταρχικά επιστήμες της επικοινωνίας, βρίσκονται υπό τον γενικό έλεγχο της κυβερνητικής. Αυτός ο ιδιαίτερος κλάδος της κοινωνιολογίας που είναι γνωστός ως οικονομία ... είναι κλάδος της κυβερνητικής». Αυτό είναι ίσως το σημείο που έβαλε τον Wiener σε κάποιους μπελάδες. Από τη μια πλευρά, ο Jerome Wiesner θυμάται τον ενθουσιασμό που πυροδότησαν οι ιδέες του Wiener ανάμεσα στους συναδέλφους του στο MIT —ενθουσιασμό που απέφερε έρευνες και προγράμματα σπουδών οι απόγονοι των οποίων υπάρχουν ακόμη και σήμερα. Η βιολογία ενσωμάτωσε τον τρόπο θεώρησης της κυβερνητικής και αυτό αποδείχτηκε γόνιμο για πολλές νευρολογικές και φυσιολογικές μελέτες, ενώ η βασική ιδέα ότι η πληροφορία μπορεί να ποσοτικοποιηθεί διαπερνά πλέον ολόκληρη την κουλτούρα μας. Από την άλλη πλευρά, επεκτείνοντας την κυβερνητική στην κοινωνιολογία, την ανθρωπολογία και την οικονομία, εξέθεσε την ιδέα του σε αυτό το είδος της κατάχρησης που αποκαλύπτουν οι τίτλοι που προαναφέραμε. Όπως αναφέρει ο Dirk Struik, ο Wiener ήταν δυσαρεστημένος με μερικές χρήσεις της κυβερνητικής:

«Υπάρχει μια σπουδαία ιδέα πίσω από αυτή —ο έλεγχος— που μπορεί να επεκταθεί και να υπερεπεκταθεί στην κοινωνία, κάτι που δεν ήταν δική του ιδέα. Ανησυχούσε πολύ με τους ανθρώπους που την έβλεπαν σαν ένα είδος παγκόσμιας πανάκειας. Συνήθιζε να μου λέει: "Δεν είμαι βινεριστής". Για παράδειγμα, ο Deutsch στο Χάρβαρντ δημιούργησε μια ολόκληρη κοινωνική θεωρία με αυτή τη βάση, και ο Wiener ανυσηχούσε πολύ γι' αυτά τα πράγματα. Είχε την αίσθηση ότι το όλο θέμα είχε χάσει τη λάμψη του και είχε καταλήξει κάπως γελοίο. Μπορεί και ο ίδιος να είχε μερικές φορές κάποιες υπερβολικές ιδέες επειδή πάντοτε έπαιζε με ιδέες, αλλά, παρ' όλη τη φαντασία του, κρατούσε σταθερά τα δυνατά του πόδια στη γη».

Η ανάλαφρη και η δυσάρεστη πλευρά

Το 1926 ο Wiener παντρεύτηκε τη Margaret Engemann, που είχε μεταναστεύσει στις ΗΠΑ από τη Γερμανία σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών και είχε σπουδάσει ρωσική φιλολογία με καθηγητή της τον Leo Wiener. Η συμβίωση με τον Norbert δεν ήταν εύκολη υπόθεση. Όπως θυμάται ο Norman Levinson, «έπρεπε να παρηγορεί τον άντρα της όταν υπέφερε από κατάθλιψη, να καταπραΰνει τους φόβους και τα άγχη του και να αντέχει τις απεριόριστες πτήσεις της φαντασίας του όταν ήταν ευδιάθετος». Με λίγα λόγια, έκανε βιώσιμη τη ζωή του συζύγου της. Ο Wiener αφιέρωσε το *Πρώην παιδί-θαύμα* στη γυναίκα του «με την ευγενική καθοδήγηση της οποίας γνώρισα πρώτη φορά την ελευθερία». Μετά το θάνατο του Norbert, η γυναίκα του εξομολογήθηκε: «Ήταν σαν να φρόντιζα τρίδυμα».

Υπάρχουν, φυσικά, αρκετά ανέκδοτα. Ιδού το διασημότερο. Κάποια

* Αυτό το δωδεκάτομο έργο αποτελεί την πιο έγκυρη εγκυκλοπαίδεια βιογραφιών όλων των σημαντικών επιστημόνων, από την αρχαιότητα μέχρι τις μέρες μας. Εκδόθηκε το 1973 από τις Εκδόσεις Scribner με επιμελητή της έκδοσης τον C. Gillespie. (Σ.τ.επιστ.συμβ.)

μέρα ο Wiener μετακόμισε από το σπίτι του στο Μπέλμοντ σε μια πιο ήσυχη μονοκατοικία, λίγα τετράγωνα μακρύτερα. Όταν έφευγε για τη δουλειά εκείνο το πρωί, η γυναίκα του του υπενθύμισε ότι το απόγευμα θα έπρεπε να επιστρέψει στο καινούργιο τους σπίτι. Το απόγευμα όμως το είχε ξεχάσει και ξαναπήγε στο παλιό σπίτι. Συνειδητοποιώντας το λάθος του στράφηκε θορυβημένος σε μια κοπελίτσα που βρισκόταν εκεί κοντά και τη ρώτησε: «Κοριτσάκι μου, μήπως γνωρίζεις πού μετακόμισε η οικογένεια Wiener;» Και το κορίτσι του απάντησε: «Φυσικά, μπαμπά, η μαμά με έστειλε να σε πάρω».

Αυτή η ιστορία δεν είναι βέβαια αληθινή, πολλές άλλες όμως είναι. Για παράδειγμα, μια μέρα ο Wiener πήγε σε ένα σεμινάριο στο Πανεπιστήμιο Brown στην Πρόβιντενς. Όταν επέστρεψε στον σιδηροδρομικό σταθμό της Βοστώνης, τηλεφώνησε στη γυναίκα του για να έρθει να τον πάρει με το αυτοκίνητο. «Μα, Norbert», του απάντησε, «με το αυτοκίνητό μας πήγες στην Πρόβιντενς». Συναντώντας έναν φίλο του έξω από το Walker Hall στην πανεπιστημιούπολη του MIT, ο Wiener τον ρώτησε: «Αλήθεια, προς τα πού κατευθυνόμουν;» «Πήγαινες προς το γραφείο σου, Norbert.» «Ευχαριστώ», απάντησε ο Wiener, «αυτό σημαίνει ότι τελείωσα το γεύμα μου». Ο David Cobb, φοιτητής στο MIT, αναφέρει ότι τον είχε δει να περπατά στην πανεπιστημιούπολη ντυμένος μόνο με το κουστούμι «χωρίς να αντιλαμβάνεται τη χιονοθύελλα που λυσσομανούσε γύρω του». Ο Cobb αναφέρει επίσης ότι κάποτε ο Wiener μπήκε στην τάξη, έγραψε στον πίνακα ένα μεγάλο «4» και κατόπιν εξαφανίστηκε. Αργότερα οι φοιτητές ανακάλυψαν ότι θα έλειπε από την πόλη τέσσερις εβδομάδες. Κάποτε ο Wiener έδωσε ένα αντίτυπο της *Κυβερνητικής* σε έναν διάσημο συνάδελφό του, και όταν την επομένη ανακάλυψε ότι εκείνος δεν είχε κοιτάξει καθόλου το βιβλίο, του δήλωσε: «Είσαι ανάξιος να το διαβάσεις». Αρκετά χρόνια αργότερα, ο Wiener ρώτησε τον νεαρό συνάδελφό του Gian-Carlo Rota αν είχε διαβάσει το μυθιστόρημά του *The Tempter* (Ο πειρασμός), που είχε εκδοθεί πρόσφατα. Ο Rota απάντησε ότι το διάβασε, οπότε ο Wiener του είπε: «Πες μου, τότε, τι συμβαίνει στο κεφάλαιο που έχει τίτλο "1908"».

Όλοι όσοι γνώρισαν τον Wiener θυμούνται τη συνήθειά του να περπατάει πάνω-κάτω στους μεγάλους διαδρόμους του MIT πιάνοντας συζήτηση με τους συναδέλφους του για τις τελευταίες του θεωρίες. «Μερικές φορές θα ξεφούρνιζε τη μεγαλύτερη ανοησία», αναφέρει ο Struik. «Σε άλλες περιπτώσεις, ήταν σχεδόν προφητικός.» Η Fagi Levinson, χήρα του Norman Levinson, θυμάται έναν συνάδελφό του που, όποτε έβλεπε τον Wiener, κρυβόταν κυριολεκτικά κάτω από το γραφείο του. Ο σύζυγός της γράφει για έναν άλλο συνάδελφο που έβρισκε τόσο ενοχλητικές τις συναντήσεις με τον Wiener ώστε έπειτα απ' αυτές πήγαινε κατευθείαν στον ψυχαναλυτή του. Ο Gordon Raisbeck, ο γαμπρός του Wiener, παρατηρεί ότι αυτή η πληροφορία δεν επαρκεί για να προσδιορίσουμε με ακρίβεια ποιος ήταν αυτός ο συνάδελφος. Ο Bose θυμάται αυτές τις συναντήσεις ως αναγνωριστικές αποστολές. «Θα προσδιόριζε όσους ασχολούνταν με μια ειδικότητα στις πολιτικές επιστήμες —ή σε οποιοδήποτε πεδίο ήθελε να ενημερωθεί— και θα άρχιζε την καθημερινή του βόλτα. Θα τους μιλούσε επί πέντε ή δεκαπέντε λεπτά και στο τέλος θα ήταν ενημερωμένος για τα πάντα.»

Ο Wiener δεν είχε πρόβλημα να διακόψει κάποιον. Ο Donald Spencer, μαθητής του Littlwood, που πήγε στο MIT το 1939 ως καθηγητής, θυμάται τον Wiener να ορμά ξαφνικά στο γραφείο του και να του λέει: «Spencer, πες μου τι μεγέθους ζώο μπορεί να πέσει από ένα αεροπλάνο και να επιζήσει —είναι αρουραίος ή ποντικός; Με βάση αυτό θα μπορούσαμε να κάνουμε μια τομή Dedekind».[6] Ο Spencer θυμάται μια άλλη μέρα που είχαν αρχίσει μια συζήτηση με τον Wiener σ' έναν διάδρομο. Ο Wiener χρειάστηκε να γράψει κάτι, οπότε μπήκε κατευθείαν στο πλησιέστερο γραφείο και άρχισε να χρησιμοποιεί το μαυροπίνακα ενώ ο κάτοχος του γραφείου, ένας καθηγητής φυσικής, τον κοίταζε άναυδος. Ο Wiener φοβόταν ότι τελικά θα έχανε ολοκληρωτικά την όρασή του και για να εξασκηθεί για την περίπτωση που θα έμενε τυφλός, περπατούσε στους διαδρόμους κρύβοντας το πρόσωπό του μέσα σ' ένα βιβλίο, χρησιμοποιώντας το χέρι του για να βρει το δρόμο του. Αν έφτανε στην ανοιχτή πόρτα μιας αίθουσας διδασκαλίας, θα συνέχιζε απλώς την πορεία του και θα περιδιάβαινε την αίθουσα, ενώ όλη η τάξη τον κοίταζε αποσβολωμένη.

Ο Wiener έκανε περιστασιακά ταξίδια στο χώρο της φανταστικής λογοτεχνίας. Το 1952 έδωσε με το ζόρι ένα κινηματογραφικό σενάριο στον Alfred Hitchcock. Ο Joseph Kohn, ο μοναδικός προπτυχιακός φοιτητής στο μεταπτυχιακό μάθημα του Wiener πάνω στην ανάλυση Fourier την επόμενη χρονιά, αναφέρει ότι ο Wiener διέκοπτε συχνά τη διάλεξη για να περιγράψει την υπόθεση του τελευταίου του αστυνομικού μυθιστορήματος, που το είχε γράψει με ψευδώνυμο.

Ο Hans Freudenthal περιγράφει ως εξής τον Wiener:

«Στην εμφάνιση και τη συμπεριφορά του, ο Wiener ήταν αλλόκοτη φιγούρα, κοντός, στρογγυλός και μυωπικός, συγκεντρώνοντας αυτές και άλλες ποιότητες σε εξαιρετικό βαθμό. Η ομιλία του ήταν ένα περίεργο μείγμα υπεροψίας και υπερβολής. Ήταν κακός ακροατής. Ο αυτοθαυμασμός του ήταν παιχνιδιάρικος, πειστικός και ουδέποτε προσβλητικός. Μιλούσε πολλές γλώσσες αλλά δεν ήταν εύκολο να τον καταλάβεις σε καμία από αυτές. Ήταν φημισμένος ως κακός ομιλητής».

Ο Wiener ήταν εξαιρετικά προστατευτικός απέναντι στους νεότερους συναδέλφους του. Έδειχνε έντονο ενδιαφέρον για τους νέους καθηγητές του μαθηματικού τμήματος, τους προσκαλούσε για γεύμα και δείπνο, ενώ τις πρώτες εβδομάδες επισκεπτόταν συχνά τα γραφεία τους. Ο Norman Levinson γράφει:

6. Ένα αστείο μεταξύ «μυημένων». Τομή Dedekind είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται στην τυπική μαθηματική κατασκευή του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Κάθε τομή χωρίζει στα δύο τους αριθμούς —σε όσους είναι μικρότεροι και σε όσους είναι μεγαλύτεροι από την τομή.

«Έκανε, κυριολεκτικά, την έρευνά του στο μαυροπίνακα. Μόλις έδειξα τα πρώτα σημεία κατανόησης μου έδωσε το χειρόγραφο με τα θεωρήματα Paley-Wiener για να το επιμεληθώ και να εντοπίσω τυχόν σφάλματα. Ανακάλυψα ένα κενό σε μια απόδειξη και απέδειξα ένα λήμμα για να τη συμπληρώσω. Ο Wiener κάθισε αμέσως στη γραφομηχανή του, πληκτρολόγησε το λήμμα μου, πρόσθεσε το όνομά μου και το ταχυδρόμησε σε ένα ερευνητικό περιοδικό. Δεν είναι συνηθισμένο φαινόμενο ένας διάσημος καθηγητής να εκτελεί χρέη γραμματέα κάποιου νεαρού φοιτητή».

Ο Amar Bose θυμάται πως όταν έφτασε στην Ινδία, παρότι άγνωστος μεταδιδάκτωρ,* έτυχε βασιλικής φιλοξενίας —του χάρισαν ειδικές εκδόσεις βιβλίων, του διέθεσαν αυτοκίνητο με οδηγό για να πηγαίνει σε διάφορες εκδηλώσεις, του πρότειναν να γίνει αντιπρόσωπος στον ΟΗΕ. Αποδείχτηκε ότι ο Wiener, που είχε περάσει τον προηγούμενο χρόνο στην Ινδία, είχε προλειάνει το έδαφος γι' αυτόν επισκεπτόμενος κάθε εβδομάδα το διευθυντή του Ινδικού Στατιστικού Ινστιτούτου. Ο Wiener κατέβαλε επίσης έντονες προσπάθειες υπέρ των προσφύγων μαθηματικών κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο. Για παράδειγμα, έπεισε τη διεύθυνση του MIT να πληρώσει τα έξοδα του υπερατλαντικού ταξιδιού του Antoni Zygmund, διάσημου πολωνού ειδικού στην ανάλυση Fourier, και ενήργησε ως μεσάζοντας στις προτάσεις εργασίας που έγιναν στον Zygmund.

Σχετικά με τη σκοτεινή πλευρά του, ο Levinson σημειώνει:

«Αν αυτή η εικόνα εξαιρετικής καλοσύνης και γενναιοδωρίας φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τη συμπεριφορά του Wiener σε άλλες περιπτώσεις, οφείλεται στο ότι ήταν ικανός να επιδείξει από τη μια πλευρά παιδιάστικη εγωιστική ανωριμότητα, και από την άλλη ακραίο ιδεαλισμό και γενναιοδωρία. Παρομοίως, η διάθεσή του μπορούσε να μεταπέσει από μια κατάσταση ευφορίας στα βάθη της πιο μαύρης απελπισίας».

Ο Wiener είχε ανάγκη τη συνεχή επιβεβαίωση. Τη ζητούσε από τους συναδέλφους του, από τον επιστάτη και από τη φουρνιά των πρωτοετών και πτυχιακών φοιτητών που έφτανε κάθε χρόνο. Όλοι στο MIT τον θυμούνται να αναρωτιέται συνεχώς «Κάνω λάθος;» και περιγράφουν την υπερευαισθησία του και τις δραματικές μεταπτώσεις της διάθεσής του. Ο Paley αναφέρει ότι κάθε φορά που χρειαζόταν ένα διάλειμμα από την εντατική συνεργασία του με τον Wiener έλεγε πως ό,τι έκαναν δεν οδηγούσε πουθενά. Αυτό βύθιζε τον Wiener σε κατάσταση απελπισίας και ο Paley μπορούσε να φύγει ελεύθερα για το αγαπημένο του νυκτερινό κέντρο, το Texguinan στη Νέα Υόρκη. Επιστρέφοντας του έλεγε ότι είχε ανακαλύψει τον τρόπο να ξεπεράσουν τις δυσκολίες και ο Wiener ξαναζωντάνευε με αναπτερωμένο το ηθικό του. Μερικά μέλη της οικογένειάς του πιστεύουν ότι η κατάστασή του ήταν εκδήλωση ψυχικής νόσου και ότι σήμερα θα είχε αντιμετωπιστεί με την κατάλληλη θεραπεία, βάζοντας πιθανόν σε κίνδυνο τη δημιουργικότητά του.

Η *Κυβερνητική* σηματοδότησε το απόγειο της φήμης του Wiener αλλά και την αρχή του τέλους της σοβαρής μαθηματικής εργασίας του. Το μεγαλύτερο μέρος της υπόλοιπης σταδιοδρομίας του αφιερώθηκε στην εφαρμογή των προηγούμενων ανακαλύψεών του σε ένα εύρος από πεδία —για παράδειγμα, την εφαρμογή της λειτουργίας αυτοσυσχέτισης στα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα. Δραστηριοποιήθηκε όλο και περισσότερο συγγραφικά: ας αναφέρουμε τις αυτοβιογραφίες του, τις ημιεκλαϊκευμένες παρουσιάσεις κυβερνητικών θεμάτων (*The Human Use of Human Beings* [Η ανθρώπινη χρήση των ανθρώπινων όντων] και *God and Golem, Inc.* [Θεός και Γκόλεμ, Α.Ε.]), και το μυθιστόρημα *Ο πειρασμός*. Μέσα από αυτά τα έργα αναδεικνύεται ένας ανθρωπιστής, μια παθιασμένη προσωπικότητα, που είδε ίσως πιο καθαρά απ' ό,τι οι σύγχρονοί του την επίδραση της τεχνολογίας στην κοινωνία. Ήταν ένας φιλελεύθερος με την καλύτερη σημασία της λέξης και με βαθιά ριζωμένες ηθικές αρχές. Έως το τέλος της ζωής του εξέφραζε σθεναρά τις απόψεις του για τα θέματα που τον ενδιέφεραν, και από αυτή την άποψη ήταν το αντίθετο του απόκοσμου ακαδημαϊκού.

Ο Wiener είχε οραματιστεί ως πρελούδιο της κυβερνητικής την κατασκευή τεχνητών μελών νέου είδους που θα αντικαθιστούσαν τις λειτουργίες της όρασης και της ακοής χρησιμοποιώντας τους διαύλους πληροφοριών των άθικτων αισθήσεων. Στη γνωστότερη φωτογραφία του εμφανίζεται στο "Infinite Corridor" (Άπειρος διάδρομος) του MIT, μπλεγμένος με κάτι που μοιάζει με συνονθύλευμα διακοπτών αλλά στην πραγματικότητα είναι μια συσκευή λήψης σημάτων μέσω της αίσθησης της αφής. Προς το τέλος της ζωής του, ένα από τα πιό αγαπημένα του σχέδια ήταν το "Boston Arm" (Ο βραχίονας της Βοστώνης), ένα τεχνητό χέρι ελεγχόμενο από τα ηλεκτρικά σήματα των μυών του βραχίονα του χρήστη.

Ο Norbert Wiener πέθανε από καρδιακή προσβολή στις 18 Μαρτίου του 1964, έπειτα από μια διάλεξή του στη Στοκχόλμη. Η αξία της επιστημονικής του κληρονομιάς είναι γνωστή και του εξασφαλίζει μια θέση στην ιστορία. Αυτό που τον διακρίνει από άλλους μεγάλους μαθηματικούς του αιώνα μας είναι η ικανότητά του να αξιοποιεί την ισχύ του αφηρημένου συλλογισμού σε πρακτικά θέματα. Οι συνάδελφοί του και οι μαθητές του έχουν διατηρήσει ζωντανή την ανάμνησή του ως δασκάλου, αφηγούμενοι και προβάλλοντας τις κωμικές και εκκεντρικές απόψεις της προσωπικότητάς του. Τον θυμούνται όμως και για τον ενθουσιασμό που αισθανόταν και που ενέπνεε για κάθε εναργή διανοητική δραστηριότητα. Ο Amar Bose υποστηρίζει:

«Ουδέποτε θα μπορούσα να ξεπληρώσω όσα μου δίδαξε ο Wiener. Το σημαντικότερο απ' όλα ήταν η πίστη που μου εμφύτευσε στις εκπληκτικές δυνατότητες που διαθέτουμε όλοι μας».

---

* Αποδώσαμε έτσι τον όρο postdoctor. Πρόκειται για τίτλο, ανύπαρκτο στη χώρα μας, τον οποίο αποκτούν ορισμένοι διδάκτορες έπειτα από σπουδές μετά το διδακτορικό, στις οποίες προβαίνουν με σκοπό να ενισχύσουν περαιτέρω την έρευνά τους, πριν διοριστούν ως λέκτορες. (Σ.τ.επιστ.συμβ.)

Αριθμητική στο τετραγωνισμένο χαρτί

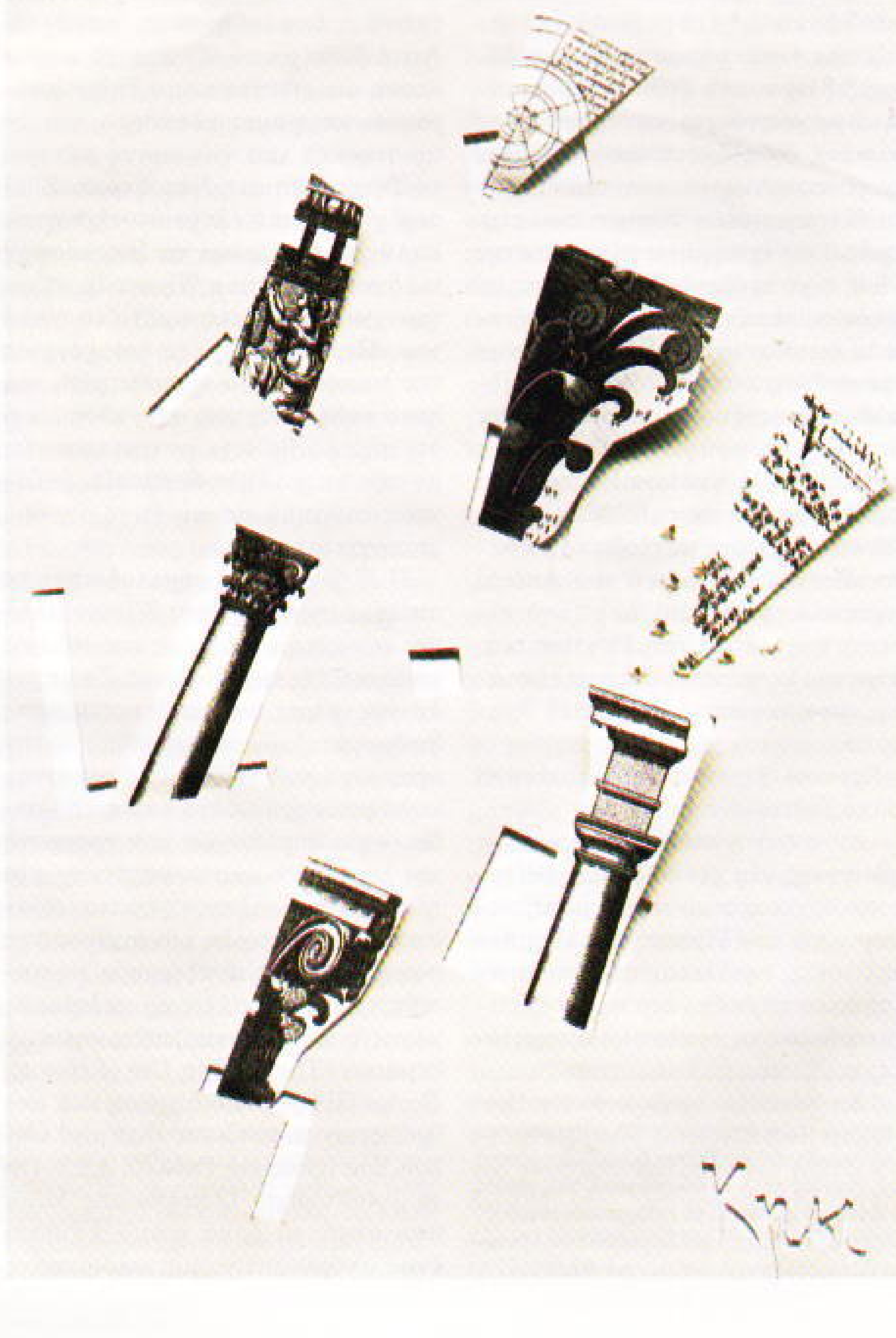
Ή σε τετραγωνισμένες πινακίδες, σε τετραγωνισμένους παπύρους...

Semyon Gindikin

ΣΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΧΩΡΕΣ ΤΑ ΤΕΤΡΑΔΙΑ μαθηματικών έχουν συνήθως σελίδες με τετραγωνισμένο χαρτί —χαρτί πάνω στο οποίο είναι σχεδιασμένο ένα τετραγωνικό πλέγμα. Τα παιδιά των πρώτων τάξεων του δημοτικού στις χώρες αυτές ρωτούν πάντα γιατί συμβαίνει αυτό. Βρίσκουν μάλλον άβολο να γράφουν τους αριθμούς τους μέσα στα μικρά κουτάκια. Αργότερα ανακαλύπτουν ότι το τετραγωνισμένο χαρτί βοηθά εξαιρετικά στη σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων. Θα προσπαθήσω να σας δείξω ότι, επιπλέον, σχεδιάζοντας διάφορα σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί μπορούμε να μάθουμε πολλά ενδιαφέροντα πράγματα για την αριθμητική.

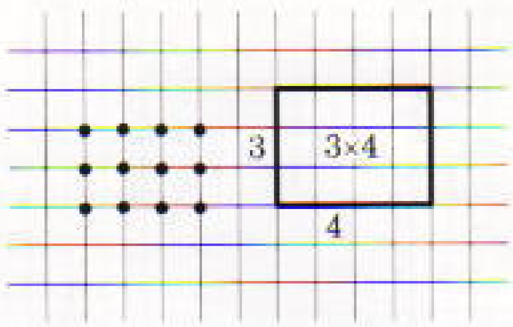
Η αναπαράσταση των αριθμών με συγκεκριμένα σχήματα σε ένα τετραγωνικό πλέγμα έχει τις ρίζες της βαθιά στην αρχαιότητα —στα μαθηματικά της αρχαίας Βαβυλώνας, της Αιγύπτου και της Ελλάδας. Φυσικά, εκείνη την εποχή οι μαθηματικοί δεν σχεδίαζαν γραμμές πάνω στις πήλινες πινακίδες τους ούτε τετράγωνα στους παπύρους τους —τα σχήματά τους αποτελούνταν από στιγμές.

Οι αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν *επίπεδο αριθμό* το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών:* αυτός ο αριθμός συνδεόταν με ένα τετραγωνικό πλέγμα που



Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

* Στο 7ο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αναφέρεται «όταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσίν τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται» και συμπληρώνεται ότι το γινόμενο τριών αριθμών ονομάζεται «στερεός». (Σ.τ.επιστ.συμβ.)



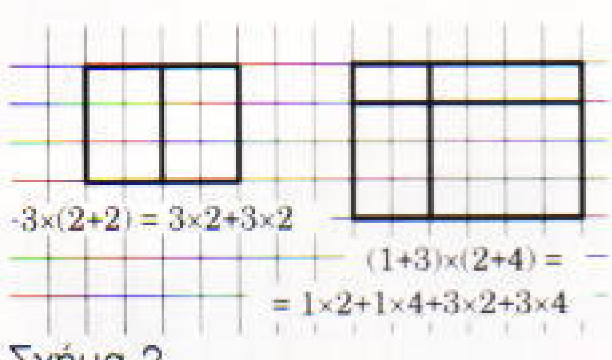
Σχήμα 1

σχηματιζόταν από στιγμές (Σχήμα 1). Εμείς εδώ θα απεικονίσουμε έναν επίπεδο αριθμό ως ένα ορθογώνιο σε τετραγωνισμένο χαρτί και θα απαριθμήσουμε το πλήθος των τετραγώνων που περιέχει.

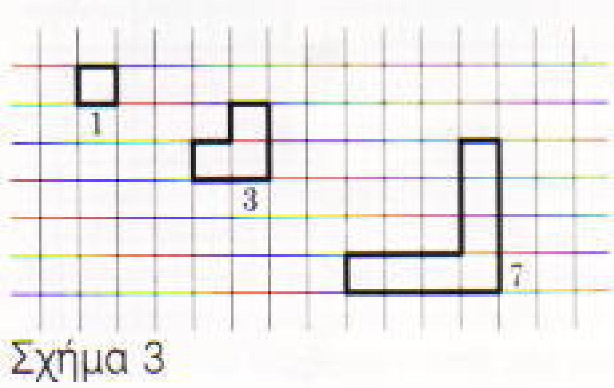
Μπορούμε τώρα, μέσω διαγραμμάτων, να επιδείξουμε κομψά τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα, ο επιμεριστικός νόμος (ο κανόνας για την απομάκρυνση των παρενθέσεων) αντιστοιχεί στο χωρισμό ενός ορθογωνίου σε μικρότερα ορθογώνια (Σχήμα 2). Το όνομα «επίπεδος αριθμός» έχει πλέον ξεχαστεί αλλά εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε τη λέξη «τετράγωνο» με τη σημασία του γινομένου δύο ίσων παραγόντων.

Τετράγωνα και γνώμονες

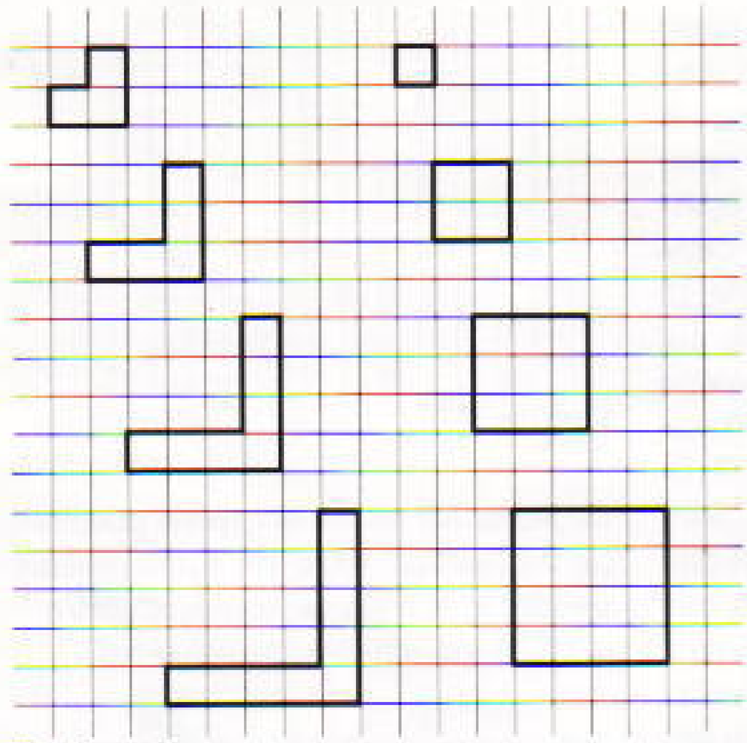
Στην αρχαία Ελλάδα οι περιττοί αριθμοί απεικονίζονταν μέσω των στιγμών ως ορθές γωνίες με ίσα σκέλη, οι οποίες ονομάζονταν *γνώμονες*. Στο τετραγωνισμένο χαρτί μας θα είναι γωνιώδη σχήματα αποτελούμενα από μοναδιαία τετράγωνα του πλέγματος και με πάχος ενός τετραγώνου (Σχήμα 3). Η πρώτη πρόταση που θέλω να αποδείξω αναφέρεται σε γνώμονες και τετράγωνα, αποδίδεται δε στον Νικόμαχο τον Γερασηνό (περίπου το 100 μ.Χ.).



Σχήμα 2



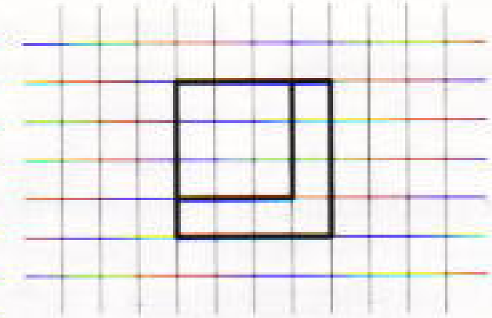
Σχήμα 3



Σχήμα 4

Σχεδιάζουμε μια σειρά από διαδοχικούς γνώμονες και τετράγωνα (Σχήμα 4). Δεν φαίνεται σαν να θέλει ο κάθε γνώμονας να συμπληρωθεί από το αντίστοιχο τετράγωνο; Και αν γίνει αυτό, δεν προκύπτει το *επόμενο* τετράγωνο (Σχήμα 5); Αυτή η παρατήρηση οδηγεί αμέσως στο επόμενο συμπέρασμα: *κάθε περιττός αριθμός είναι διαφορά δύο διαδοχικών τετραγώνων.*

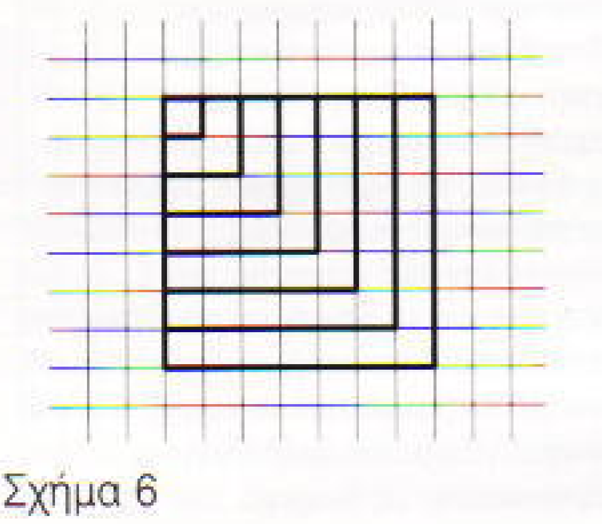
Ας προσαρμόσουμε τώρα ένα πλήθος γνώμονες, τον ένα μέσα στον άλλο, αρχίζοντας από τον μικρότερο. Θα καταλήξουμε με ένα τετράγωνο (Σχήμα 6). Επομένως, *το άθροισμα διαδοχικών περιττών αριθμών, ξεκινώντας από τον μικρότερο, ισούται με το τετράγωνο ενός ακεραίου: 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 7 = 16, κ.ο.κ.*



Σχήμα 5

Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι

Στον σοφό Πυθαγόρα, αυτή τη σχεδόν μυθική προσωπικότητα, άρεσαν τα ταξίδια, και μεγάλο μέρος της διδασκαλίας του ήταν απάνθισμα της σοφίας της Ανατολής (με άλλα λόγια, της Αιγύπτου και της Εγγύς Ανατολής). Ένα χαρακτηριστικό των Πυθαγορείων ήταν η μυστικιστική αντιμετώπιση των αριθμών. Συγκέντρωναν μάλιστα κάθε είδους αριθμητικά παράδοξα που τα θεωρούσαν εκδηλώσεις των θεϊκών δυνάμεων. Οι Πυθαγόρειοι εξέφραζαν τις σκέψεις τους και τα αισθήματά τους μέσω αριθμητικών εικόνων. Ονόμαζαν *αρσενικούς* τους περιττούς αριθμούς και *θηλυκούς* τους άρτιους. Ο αριθμός 10 = 1 + 2 + 3 + 4 (Σχήμα 7) είχε ιδιαίτερη σημασία για τους Πυθαγόρειους. Μια τέτοια τετράδα την αποκαλούσαν *τέλεια*,* και ορκίζονταν σε «αυτούς που έβαλαν την τετράδα —την πηγή και ρίζα της αιώνιας φύσης— στην ψυχή μας».



Σχήμα 6

Οι αριθμοί που ισούνται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών τους (δηλαδή, όλων των διαιρετών τους με εξαίρεση τους ίδιους), όπως ο 6 = 1 + 2 + 3, ονομάζονταν *τέλειοι*. Ο Νικόμαχος γνώριζε τέσσερις τέλειους αριθμούς: 6, 28, 496 και 8.128. Η φιλία συμβολιζόταν με ζεύγη *φίλων* αριθμών —κάθε αριθμός σε ένα τέτοιο ζεύγος ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 284 και 220 είναι φίλοι: 284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 και 220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142.

Σχήμα 7

* Ιαμβλίχου, *Θεολογούμενα Αριθμητικής*: «έστι δε τα δέκα τέλειος [αριθμός], και ορθώς τε και κατά φύσιν εις τούτον καταντώμεν παντοίως αριθμούντες Έλληνές τε και πάντες άνθρωποι...» (Σ.τ.επιστ.συμβ.)

Αφού όμως υπάρχουν «καλοί» αριθμοί, πρέπει να υπάρχουν και «κακοί». Ένας αριθμός χωρίς αρετές είναι «κακός», αλλά ένας κακός αριθμός που περιβάλλεται από ενδιαφέροντες αριθμούς είναι ακόμη χειρότερος. Όλοι γνωρίζουμε, βέβαια, ότι ο αριθμός 13 φέρνει κακή τύχη. Υπήρχαν, όμως, και άλλοι αριθμοί που έσπερναν τρόμο στην καρδιά των ανθρώπων. Όπως αναφέρει ο Πλούταρχος, «Οι Πυθαγόρειοι απεχθάνονται τον αριθμό 17, διότι βρίσκεται ανάμεσα στον αριθμό 16, που είναι τέλειο τετράγωνο, και τον 18, που είναι το διπλάσιο ενός τετραγώνου. Αυτοί οι δύο αριθμοί είναι οι μοναδικοί επίπεδοι αριθμοί των οποίων η περίμετρος (του αντίστοιχου ορθογωνίου) ισούται με το εμβαδόν». Με άλλα λόγια, είναι βέβαιο ότι αν το γινόμενο δύο αριθμών (θετικών ακεραίων, φυσικά) ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματός τους, τότε αυτοί οι αριθμοί είναι το 3 και το 6 ή το 4 και το 4 (γιατί;).

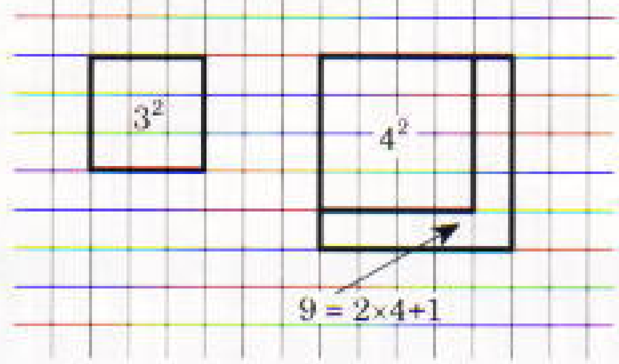
Πυθαγόρειες τριάδες

Σύμφωνα με κάποιον θρύλο, ο Πυθαγόρας γιόρτασε μια από τις ανακαλύψεις του θυσιάζοντας έναν ταύρο. (Ή εκατό —εξαρτάται από την εκδοχή του θρύλου που θα υιοθετήσουμε.) Ο Βιτρούβιος μας βεβαιώνει ότι αυτό που θεώρησε τόσο σημαντικό ο Πυθαγόρας ήταν η ανακάλυψη ότι υπάρχουν δύο τετράγωνα που το άθροισμά τους ισούται με ένα τρίτο τετράγωνο. Αυτή η πρόταση έχει να κάνει με τη σχέση $3^2 + 4^2 = 5^2$. Σήμερα, τις τριάδες των φυσικών αριθμών a, b, c για τις οποίες ισχύει $a^2 + b^2 = c^2$ τις ονομάζουμε πυθαγόρειες. Έχει αποδειχτεί ότι ήταν γνωστές στην αρχαία Βαβυλώνα. Σταδιακά, τις ανακάλυψαν και οι έλληνες μαθηματικοί.

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε με ποιο τρόπο μπορούμε να βρούμε πυθαγόρειες τριάδες. Θυμηθείτε ότι κάθε περιττός αριθμός μπορεί να παρασταθεί ως διαφορά δύο διαδοχικών τετραγώνων. Τότε ένα περιττό τετράγωνο και τα τετράγωνα των οποίων η διαφορά ισούται με αυτόν τον περιττό, σχηματίζουν μια πυθαγόρεια τριάδα. Για παράδειγμα, $3^2 = 9 = 2 \cdot 4 + 1 = 5^2 - 4^2$ (Σχήμα 8). Επομένως, παίρνουμε την τριάδα 3, 4, 5. Παρομοίως, $5^2 = 25 = 2 \cdot 12 + 1 = 13^2 - 12^2$ ή $12^2 + 5^2 = 13^2$, $7^2 = 49 = 2 \cdot 24 + 1 = 25^2 - 24^2$ ή $24^2 + 7^2 = 25^2$, κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε *όλες* τις πυθαγόρειες τριάδες a, b, c για τις οποίες ισχύει $c = a + 1$. Η γενική τους μορφή είναι

$$a = \frac{m^2 - 1}{2}, \quad b = m, \quad c = \frac{m^2 + 1}{2}$$

(το m είναι περιττός!). Αποδείξτε αυτή την πρόταση. Και πώς θα μπορέσουμε να βρούμε *όλες* τις πυθαγόρειες τριάδες;

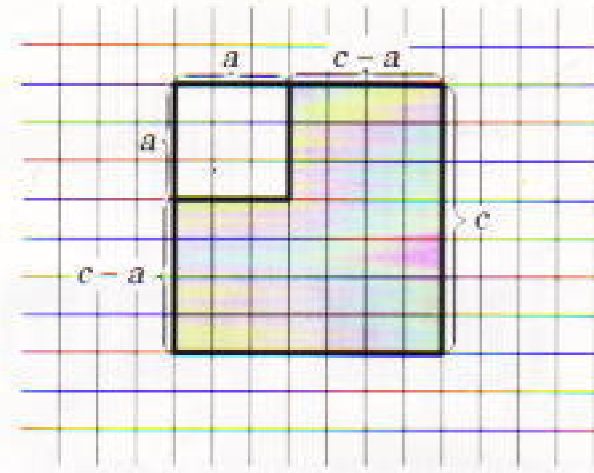


Σχήμα 8

Το γενικό πρόβλημα

Με βάση τα όσα έχουμε δει μέχρι στιγμής, οδηγούμαστε να εξετάσουμε τη διαφορά δύο οποιωνδήποτε (όχι διαδοχικών) τετραγώνων $c^2 - a^2$ ($c > a$). Έτσι παίρνουμε έναν «παχύ γνώμονα» με πάχος $c - a$ τετράγωνα (Σχήμα 9). Το πρόβλημα επομένως ανάγεται στο να περιγράψουμε όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς ενός τετραγώνου $b \times b$ σε έναν «παχύ γνώμονα» χωρίς να μεταβληθεί το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων που περιέχει.

Παρατηρούμε πρώτα ότι ένας παχύς γνώμονας μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ορθογώνιο (έναν επίπεδο αριθμό!) με μήκη πλευρών $m = c - a$ και $n = c + a$ (Σχήμα 10). Από εδώ προκύπτει, παρεμπιπτόντως, μια γεωμετρική απόδειξη του τύπου $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$. Είναι φανερό ότι οι αριθμοί $m = c - a$ και $n = c + a$ είναι διαφορετικοί και ότι είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί, ενώ δεν έχουμε κανέναν άλλο περιορισμό. Επομένως, ένα ορθογώνιο που δεν είναι τετράγωνο, και του οποίου τα μήκη των πλευρών m και n έχουν την ίδια ομοτιμία (είναι είτε και τα δύο άρτια είτε και τα δύο περιττά), μπορεί να μετασχηματιστεί σε έναν παχύ γνώμονα που αντιπροσωπεύει τη διαφορά των τετραγώνων



Σχήμα 9

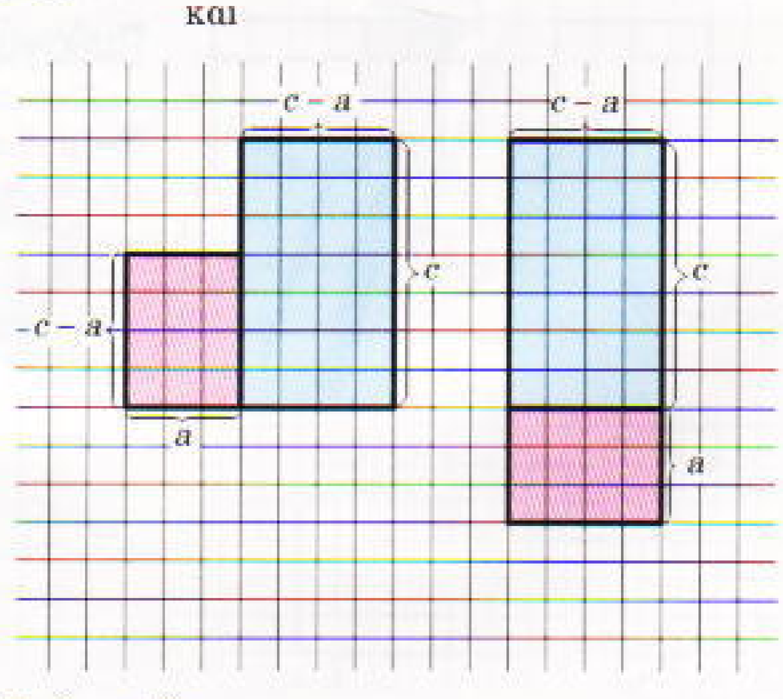
$$c^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \text{ και } a^2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

(με βάση τις υποθέσεις μας, οι αριθμοί $m + n$ και $m - n$ είναι άρτιοι και μη μηδενικοί).

Επομένως το πρόβλημα της ανακάλυψης των πυθαγόρειων τριάδων έχει αναχθεί στο μετασχηματισμό του τετραγώνου b^2 σε ένα ορθογώνιο τα μήκη των πλευρών του οποίου έχουν την ίδια ομοτιμία ($m \neq n$). Πώς θα γίνει αυτός; Έστω $r \neq b$ ένας διαιρέτης του αριθμού b^2 (όχι όμως αναγκαστικά και του ίδιου του b) τέτοιος ώστε ο b^2/r να έχει την ίδια ομοτιμία με τον r. Τότε ο r πρέπει να έχει την ίδια ομοτιμία με τον b, αν και αυτή η συνθήκη από μόνη της δεν είναι ικανή. (Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;) Τότε, ένα ορθογώνιο $m \times n$ με $m = r$, $n = b^2/r$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε έναν παχύ γνώμονα που αντιπροσωπεύει τη διαφορά των τετραγώνων

$$c^2 = \left(\frac{b^2/r + r}{2}\right)^2$$

και



Σχήμα 10

$$a^2 = \left(\frac{b^2/r - r}{2}\right)^2.$$

Σημειώστε ότι ο r μπορεί να ισούται με 1 και ότι μπορούμε να αρκεστούμε στους διαιρέτες r του b^2 που είναι μικρότεροι από τον b.

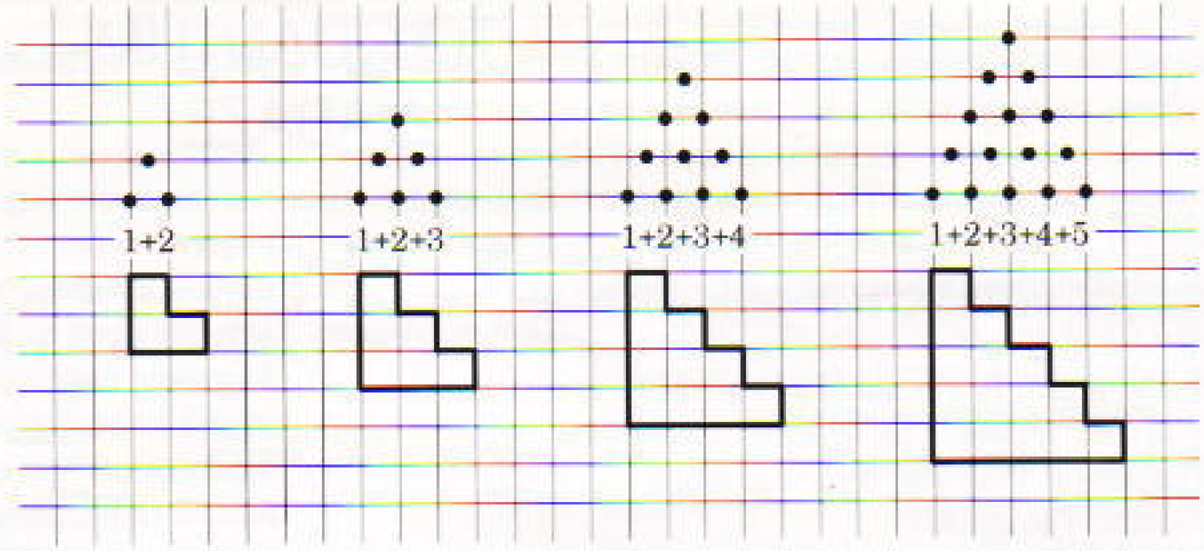
Τέλος, μια τυχαία πυθαγόρεια τριάδα μπορεί να γραφεί ως

$$a = \frac{b^2 - r^2}{2r}, \quad b, \quad c = \frac{b^2 + r^2}{2r},$$

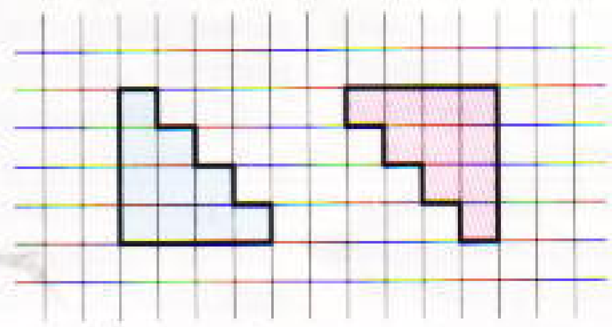
όπου ο r, με $1 \le r < b$, είναι ένας διαιρέτης του b^2 τέτοιος ώστε οι r και b^2/r να έχουν την ίδια ομοτιμία (που είναι και η ομοτιμία του b). Χρησιμοποιώντας αυτόν τον κανόνα μπορούμε να παίρνουμε αυτόματα πυθαγόρειες τριάδες. Προσπαθήστε και μόνοι σας. Για να βεβαιωθείτε ότι έχετε καταλάβει σωστά, ελέγξτε τα αποτελέσματά σας με βάση τον επόμενο πίνακα που περιέχει τις πυθαγόρειες τριάδες a, b, c, για τις πρώτες δέκα τιμές του b.

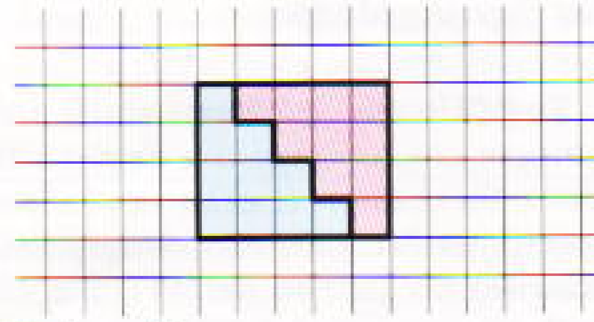
b	r	a	c
3	1	4	5
4	2	3	5
5	1	12	13
6	2	8	10
7	1	24	25
8	2	15	17
8	4	6	10
9	1	40	41
9	3	12	15
10	2	24	26

Αφού μπορούμε να εναλλάξουμε τους αριθμούς a και b σε μια πυθαγόρεια τριάδα a, b, c, στον πίνακα εμφανίζονται ζεύγη τριάδων που διαφέρουν μόνο κατά μια μετάθεση των a και b. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν υπάρχει τριάδα για $b = 2$: σ' αυτή την περίπτωση ο αριθμός b δεν έχει κατάλληλο διαιρέτη (μόνο ο $r = 1$ ικανοποιεί τη συνθήκη $r < b = 2$, αλλά αυτός ο r είναι περιττός). Για κάθε άλλο b υπάρχει μία τουλάχιστον πυθαγόρεια τριάδα. Όταν ο b είναι περιττός, μπορούμε να πάρουμε $r = 1$, οπότε προκύπτουν οι a και c που διαφέρουν κατά μία μονάδα (εξετάσαμε αυτή την περίπτωση στην αρχή του άρθρου). Για άρτιο $b \neq 2$, μπορούμε να θέσουμε $r = 2$: έτσι προκύπτουν τριάδες με $c - a = 2$ (γιατί;).



Σχήμα 11


Σχήμα 12


Σχήμα 13

Τρίγωνοι αριθμοί

Έχουν ανακαλυφθεί βαβυλωνιακές πινακίδες που περιέχουν γραμμένη σε σφηνοειδή γραφή μια μέθοδο υπολογισμού του αθροίσματος των n πρώτων φυσικών αριθμών $1 + 2 + ... + n$. Αυτά τα αθροίσματα ονομάζονταν *τριγωνικοί αριθμοί* διότι οι στιγμές που απεικονίζουν τους όρους του αθροίσματος μπορεί να διευθετηθούν ώστε να σχηματίζουν τρίγωνα (Σχήμα 11). Στο τετραγωνισμένο χαρτί είναι βολικότερο να σχεδιάσουμε ένα σχήμα με μορφή σκάλας (Σχήμα 12), όπου κάθε γραμμή περιέχει ένα τετράγωνο περισσότερο από τη γραμμή που βρίσκεται από πάνω της. Για να μετρήσουμε το πλήθος των τετραγώνων αυτής της σκάλας, το οποίο ισούται με το ζητούμενο άθροισμα, σχεδιάζουμε μια άλλη αντεστραμμένη σκάλα και φέρνουμε τις δύο σκάλες μαζί (Σχήμα 13). Τα σκαλοπάτια της μιας σκάλας ταιριάζουν με τα σκαλοπάτια της άλλης, και έτσι σχηματίζεται ένα ορθογώνιο $n \times (n + 1)$. Αυτό αποτελείται από $n(n + 1)$ μοναδιαία τετράγωνα. Η σκάλα αποτελείται από τα μισά —δηλαδή $n(n + 1)/2$. Επομένως,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Πρόβλημα 1. Χρησιμοποιώντας σκάλες, βρείτε το άθροισμα $1 + 3 + 5 + ... + (2k + 1)$ των περιττών αριθμών, το άθροισμα $2 + 4 + 6 + ... + 2k$ των άρτιων αριθμών, και το άθροισμα $1 + 4 + 7 + ... + (3k + 1)$ των αριθμών της μορφής $3i + 1$. (Το πρώτο από αυτά τα αθροίσματα έχει ήδη βρεθεί χρησιμοποιώντας γνώμονες.)

Το επόμενο πρόβλημα βασίζεται σε μία ακόμη ενδιαφέρουσα παρατήρηση του Νικόμαχου.

Πρόβλημα 2. Επαληθεύστε ότι ο γνώμονας που ισούται με τη διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ένας κύβος —ακριβέστερα,

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

Από αυτή τη σχέση, ο Νικόμαχος συνήγαγε έναν τύπο για το άθροισμα των διαδοχικών κύβων:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Αυτό γίνεται φανερό αν τοποθετήσουμε μαζί όλους τους γνώμονες που αντιστοιχούν σε διαδοχικούς τριγωνικούς αριθμούς.

Εναργής πίνακας των μαθηματικών

P.J. Davis και R. Hersh *Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ*
(Αγγλικός τίτλος: *The Mathematical experience*)
Μετάφραση: Γιώργος Αναστασιάδης
Εκδόσεις Τροχαλία

του Στράτου Μάκρα

Το βιβλίο των P.J. Davis και R. Hersh *Η μαθηματική εμπειρία* κυκλοφόρησε στα αγγλικά το 1980 από τις Εκδόσεις Birkhäuser. Η ελληνική έκδοση του βιβλίου πρέπει να έγινε το 1992 (δεν αναφέρεται πουθενά ο χρόνος έκδοσης).

Οι συγγραφείς του βιβλίου είναι επαγγελματίες μαθηματικοί. Ο πρώτος είναι απόφοιτος του Χάρβαρντ, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Brown και ειδικός στην αριθμητική ανάλυση. Ο δεύτερος είναι απόφοιτος του Ινστιτούτου Courant της Νέας Υόρκης, ειδικός στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Νιου Μέξικο. Το ότι οι συγγραφείς είναι επαγγελματίες μαθηματικοί δεν αρκεί βέβαια για να γραφεί ένα καλό βιβλίο για τα μαθηματικά. Θα τονίσω ωστόσο ευθύς εξαρχής ότι οι Davis και Hersh κατάφεραν να γράψουν ένα εξαιρετικό βιβλίο! Ένα βιβλίο που παρουσιάζει όψεις της μαθηματικής επιστήμης σε ευρύτατο κοινό, χωρίς υπεραπλουστεύσεις και χωρίς διάθεση εύκολου εντυπωσιασμού. Φιλοτεχνούν έναν πίνακα αυτής της ανθρώπινης δραστηριότητας προσπαθώντας να περιγράψουν τις διάφορες συνιστώσες της, τις διαδικασίες δημιουργίας και αξιολόγησης των αποτελεσμάτων, τις διαθέσεις και τα συναισθήματα που προκαλεί, τις ανθρώπινες αξίες των οποίων είναι φορέας. Οι συγγραφείς μιλούν με σαφήνεια και εντιμότητα για πάρα πολλά θέματα των μαθηματικών, χωρίς να καταφεύγουν σε εύκολες λύσεις. Αντίθετα με ό,τι συμβαίνει πολύ συχνά, αποφεύγουν με μεγάλη προσοχή το δρόμο του «επιστημονικού σόου». Δεν θα βρείτε στις σελίδες αυτού του βιβλίου εντυπωσιακά σχήματα με φράκταλ, θα βρείτε όμως έναν βαθύ προβληματισμό για την μαθηματική έρευνα, για τη θέση των μαθηματικών ανάμεσα στις άλλες επιστήμες, για τη διδασκαλία των μαθηματικών καθώς και την παρουσίαση ορισμένων σημαντικών τομέων αυτής της επιστήμης.

Το βιβλίο χωρίζεται στις εξής οκτώ ενότητες:

1. *Ο χώρος των μαθηματικών:* Εδώ αναπτύσσεται ο προβληματισμός για το τι είναι τα μαθηματικά που υπάρχουν, με ποια εργαλεία δουλεύουν, «πόσα» είναι... «Ο ορισμός των μαθηματικών αλλάζει, κάθε γενιά και κάθε σκεπτόμενος μαθηματικός μέσα σε μια γενιά διατυπώνουν έναν ορισμό σύμφωνα με την αντίληψή τους», σημειώνουν οι συγγραφείς. «Προτού γράψουμε την λέξη τέλος σ' αυτό το βιβλίο, θα έχουμε εξετάσει αρκετές εναλλακτικές διατυπώσεις.» Και πράγματι κρατούν την υπόσχεσή τους, πράγμα ιδιαίτερα σημαντικό, αφού παρουσιάζουν απόψεις για κάτι που σπανιότατα θίγεται στα βιβλία των μαθηματικών.

2. *Οι ποικιλίες στη μαθηματική εμπειρία:* Ένας πλούσιος προβληματισμός για τα μαθηματικά από την πλευρά του μαθηματικού, του φυσικού αλλά και του «καθημερινού» μορφωμένου ανθρώπου.

3. *Εξωτερικά θέματα:* Γιατί λειτουργούν τα μαθηματικά, ποια είναι η χρησιμότητά τους, ποια είναι η σχέση τους με τη θρησκεία και με τις λεγόμενες «απόκρυφες επιστήμες». Ας θυμίσουμε την άποψη του διάσημου μαθηματικού V. Arnold (*Quantum*, τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1994): «... Η φυσική έχει απορρίψει όλες τις καθαρά φυσικές έννοιες που επικρατούσαν στις αρχές του αιώνα μας, ενώ τα μαθηματικά μοντέλα που αποτελούσαν μέρος του οπλοστασίου των φυσικών απέκτησαν σταδιακά φυσικό νόημα. Εδώ προβάλλει ολοκάθαρα η σταθερότητα των μαθηματικών». Ο αναγνώστης θα βρει στη *Μαθηματική εμπειρία* πολλές και ενδιαφέρουσες απόψεις για τα θέματα που θίγονται σ' αυτό το απόσπασμα.

4. *Εσωτερικά θέματα:* Μια πρώτη προσέγγιση σε ορισμένα σημαντικά θέματα των μαθηματικών (συμβολισμός, αφαίρεση, τυποποίηση, ύπαρξη, απόδειξη, κ.ά.) όπου οι συγγραφείς, με σαφήνεια και χρησιμοποιώντας εξαιρετικά παραδείγματα, καταπιάνονται μ' ένα θέμα εξαιρετικά δύσκολο.

5. *Επίλεκτοι τομείς στα μαθηματικά:* Παρουσίαση ορισμένων τομέων των μαθηματικών, από τους πιο σημαντικούς, που προσφέρονται για εκλαΐκευση. Η επιλογή των θεμάτων έχει γίνει με ιδιαίτερη προσοχή. Θα μπορούσε να ήταν και διαφορετική, ίσως πιο πρωτότυπη. Το κομμάτι που αναφέρεται στην ταξινόμηση των απλών ομάδων είναι λίγο «γερασμένο», αφού το σχετικό πρόβλημα λύθηκε εν τω μεταξύ. Τα σχετικά με τη μη κανονική ανάλυση και την ανάλυση Fourier είναι ενδιαφέροντα και σπάνια σχολιάζονται στα βιβλία με παρόμοιο περιεχόμενο. Ίσως να λείπει κάτι σχετικά με τη θεωρία των γραφημάτων, πάντως γενικά η προσπάθεια είναι επιτυχημένη και ενδιαφέρουσα για όλους, μαθηματικούς και μη.

6. *Διδασκαλία και μάθηση:* Ένας εξαιρετικά ενδιαφέρων προβληματισμός σαράντα σελίδων περίπου, για ένα σημαντικό θέμα για το οποίο πολλά λέγονται και ακούγονται, λίγοι όμως μιλούν τεκμηριωμένα.

7. *Από την βεβαιότητα στο επισφαλές:* Μια θεώρηση των φιλοσοφικών προβληματισμών που διατρέχουν τα μαθηματικά εδώ και αιώνες και τα οποία κατά καιρούς έχουν προκαλέσει αντιθέσεις ιδιαίτερα έντονες. Το θέμα

είναι πολυσυζητημένο. Οι συγγραφείς εκθέτουν νηφάλια τις διάφορες απόψεις και όταν παίρνουν θέση, το κάνουν με διακριτικότητα.

8. *Η μαθηματική πραγματικότητα:* Μια δεύτερη προσέγγιση ορισμένων μαθηματικών θεμάτων από πιο φιλοσοφική σκοπιά αυτή τη φορά. Οι συγγραφείς στηρίζονται στην «ωριμότητα» που έχει ήδη αποκτήσει ο αναγνώστης και πραγματεύονται σε μεγαλύτερο βάθος θέματα, ορισμένα από τα οποία έχουν ήδη παρουσιαστεί.

Η σύντομη αυτή αναφορά στο περιεχόμενο του βιβλίου αρκεί πιστεύω για να δείξει τον πλούτο των θεμάτων με τα οποία καταπιάνονται οι συγγραφείς. Το βιβλίο είναι στην πραγματικότητα μια συλλογή άρθρων για τα μαθηματικά, δεν είναι όμως «συρραφή» άρθρων. Τα παραδείγματα, τα ιστορικά στοιχεία, οι απόψεις σημαντικών μαθηματικών, οι φιλοσοφικοί προβληματισμοί, συνδυάζονται μ' έναν τρόπο που καθιστά το βιβλίο ιδιαίτερα σημαντικό, θα έλεγα πολύτιμο.

Πολλά και σημαντικά βιβλία έχουν «ενταφιαστεί» στην ελληνική τους έκδοση. Εδώ, ευτυχώς, δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο! Η έκδοση είναι προσεγμένη από κάθε άποψη: όμορφο εξώφυλλο, καλή βιβλιοδεσία, η μετάφραση πολύ καλή και η επιμέλεια το ίδιο, με εύστοχες σημειώσεις εκεί όπου χρειάζονται, χωρίς υπερβολές που θα βάραιναν το βιβλίο. Τα δύο ευρετήρια (ένα για τους όρους και ένα για τα ονόματα) διευκολύνουν ιδιαίτερα τον αναγνώστη. Οι βιβλιογραφικές παραπομπές είναι αρκετές αλλά ελάχιστα χρήσιμες στον έλληνα αναγνώστη που δεν έχει εύκολη πρόσβαση στα αναφερόμενα βιβλία και άρθρα.

Χάρη στα γνωρίσματά του, λοιπόν, πιστεύω ότι το βιβλίο των Davis και Hersh είναι ένα από εκείνα που δεν πρέπει να λείπουν από τη βιβλιοθήκη οποιουδήποτε ενδιαφέρεται για τη σύγχρονη επιστήμη.

Ένα υποδειγματικό λαϊκό ανάγνωσμα

T. Hey και P. Walters, *ΤΟ ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΣΥΜΠΑΝ*
(Αγγλικός τίτλος: *The Quantum Universe*)
Μετάφραση: Νίκος Λιλής
Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1992

του Βασίλη Σπανού

Κάποτε είχαν ρωτήσει τον Richard Feynman ποια είναι κατά την άποψή του η σημαντικότερη γνώση που ανακάλυψε μέχρι σήμερα ο ανθρώπινος πολιτισμός και η οποία θα άξιζε οπωσδήποτε να μεταβιβαστεί σε έναν επόμενο πολιτισμό, εάν συνέβαινε κάποια ολοκληρωτική καταστροφή· κι εκείνος είχε προσδιορίσει την ατομική υπόθεση. Η ασυνέχεια της ύλης, έπειτα από πολλές αντιδράσεις, έγινε εν τέλει γενικά παραδεκτή μόλις στις αρχές του αιώνα μας. Βέβαια, χρειάστηκε να προηγηθεί η αυτοκτονία του Boltzmann, που υπογράμμισε με τον δραματικότερο τρόπο τις αντιδράσεις αυτές, μερικές μάλιστα από τις οποίες προέρχονταν από τους διασημότερους φυσικούς της εποχής.

Αφότου έγινε πια φανερό ότι υπάρχουν άτομα —με τη βοήθεια και τών πειραμάτων του Rutherford— άρχισαν τα μεγάλα προβλήματα της νευτώνειας φυσικής, οποτεδήποτε και αν επιχειρούνταν να εφαρμοστεί σ' αυτές τις «νέες» οντότητες. Το μόνο ίσως πεδίο στο οποίο είχε κάποιες επιτυχίες ήταν η στατιστική μηχανική, δηλαδή η στατιστική περιγραφή των κινήσεων των μορίων των αερίων. Αλλά ακόμη και εκεί υπήρχαν φαινόμενα στα οποία οι απαντήσεις της απείχαν αρκετά από το πείραμα, όπως για παράδειγμα το παράδοξο Gibbs. Βέβαια, το πρώτο πλήγμα στη νευτώνεια φυσική ήρθε από τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας, και τούτο μοιάζει παράξενο, διότι θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι στο ατομικό επίπεδο και πολλά θεωρητικά παράδοξα υπήρχαν (ακτιβολία των ατόμων, ευστάθεια της ύλης κ.ά.) και αρκετά πειραματικά δεδομένα παρέμεναν ανεξήγητα (ακτινοβολία μέλανος σώματος, φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, ειδικές θερμότητες των μετάλλων κ.ά.). Τελικά φάνηκε ότι ήταν πιο απλό, για τους φυσικούς των αρχών του αιώνα, να αποδεχτούν μια αλλαγή του χωροχρονικού σκηνικού στο οποίο εξελίσσεται το «φυσικό δράμα», παρά μια αλλαγή των ηθοποιών και των ρόλων τους, δηλαδή των σωματιδίων και των αλληλεπιδράσεών τους. Ακόμη και ο ίδιος ο δημιουργός της ειδικής σχετικότητας, ο Αϊνστάιν, δεν κατάφερε έως το τέλος της ζωής του να παραδεχτεί ότι θα μπορούσε να μεταβληθεί η εικόνα που είχαμε, με βάση τη νευτώνεια μηχανική, για τα υλικά σωματίδια και την κίνησή τους.

Το Κβαντικό σύμπαν εισάγει τον αναγνώστη, με τρόπο σχετικά απλό και οπωσδήποτε κατανοητό, στη θεωρία που περιγράφει τη φύση στο ατομικό επίπεδο, την κβαντική μηχανική. Το μέγα προσόν του βιβλίου είναι ότι στις σελίδες του παρουσιάζονται οι σπουδαιότερες εφαρμογές της κβαντικής φυσικής στην καθημερινή μας ζωή. Τεχνολογίες, όπως αυτές των ηλεκτρονικών υπολογιστών, του ηλεκτρονικού μικροσκοπίου, των ακτίνων λέιζερ κ.ά., οφείλουν την ύπαρξή τους αποκλειστικά στη θεωρία αυτή. Μπορεί λοιπόν κάποιος να κατανοήσει ότι η κβαντική μηχανική δεν είναι η θεωρία των εννοιολογικών παράδοξων και των ακατανόητων εννοιών, αλλά εκείνη στην οποία βασίζονται πάρα πολλές από τις ευκολίες που μας παρέχουν τα σύγχρονα επιτεύγματα της επιστήμης και της τεχνολογίας. Πραγματικά, δεν γνωρίζω εάν ο Αϊνστάιν θα σκεφτόταν την αναθεώρηση των απόψεών του σχετικά με την κβαντική μηχανική, αντικρίζοντας τις εντυπωσιακές φωτογραφίες των ακκαρίων και των βακτηρίων, που έχουν ληφθεί με ηλεκτρονικό μικροσκόπιο και οι οποίες υπάρχουν στο *Κβαντικό σύμπαν*.

Η δομή του βιβλίου ακολουθεί, σε γενικές γραμμές, τη χρονολογική έκθεση των επιστημονικών γεγονότων. Μετά την υπέροχη εισαγωγή, που καλό θα ήταν να τη μελετήσουν σε βάθος όλοι οι πολιτικοί και οι γραφειοκράτες που αποφασίζουν πώς θα κατανεμηθούν τα κονδύλια βασικής έρευνας, καθώς και όλοι εκείνοι που, ακόμη και σήμερα, διασπείρουν τις απόψεις της ψευδοεπιστήμης και του αγνωστικισμού, ακολουθεί το πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο. Εκεί ο αναγνώστης κατανοεί τα σπουδαιότερα πειραματικά δεδομένα (φασματικές γραμμές ακτινοβολίας των ατόμων, πειράματα διπλής σχισμής κ.ά.), τα οποία ώθησαν τους δημιουργούς της νέας θεωρίας στη διατύπωσή της, στις αρχές του αιώνα.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στην αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, ο παράδοξος χαρακτήρας της οποίας αίρεται μέσω της λεπτομερούς ανάλυσης του τρόπου με τον οποίο αποτυπώνονται οι φωτογραφίες! Στο τρίτο κεφάλαιο εκτίθεται ο ρόλος που παίζει στη νέα περιγραφή η βασική εξίσωση κίνησης της κβαντικής μηχανικής, η εξίσωση Schrödinger. Στο επόμενο κεφάλαιο ο αναγνώστης βλέπει πώς η κβαντική μηχανική περιγράφει τα άτομα και τα μόρια. Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται σε άλλο ένα «παράδοξο» κβαντικό φαινόμενο, το φαινόμενο σήραγγας, συζητούνται δε οι εφαρμογές του, με έμφαση σε όσες αφορούν τις πυρηνικές διασπάσεις, η αξία των οποίων είναι αναμφισβήτητη. Σε αυτές στηρίχτηκε όχι μόνο η κατασκευή των πυρηνικών όπλων αλλά και ο μηχανισμός παραγωγής ενέργειας στον Ήλιο, η οποία έχει τεράστια σημασία για την ανάπτυξη και την εξέλιξη της ζωής στον πλανήτη μας.

Στο έκτο κεφάλαιο παρακολουθούμε πώς όλη η θεωρία της χημείας, από την εποχή που ο Μεντελέγιεφ κατέταξε τα χημικά στοιχεία στον ομώνυμο περιοδικό πίνακα, βρήκε τη φυσιολογική ερμηνείας της με βάση την κβαντική μηχανική. Εκεί επίσης εκτίθενται και οι σπουδαίες εφαρμογές της κβαντικής μηχανικής στον τομέα της θεωρίας αγωγιμότητας των στερεών: τρανζίστορ, μικροηλεκτρονικά κ.ά. Όμως, πέρα από τα οφέλη που είχε ο πολιτισμός μας από τις τεχνολογικές εφαρμογές της κβαντικής μηχανικής, ανεκτίμητη ήταν και η συμβολή της στην πρόοδο της ίδιας της επιστημονικής έρευνας, τόσο στο επίπεδο των μεγάλων κλιμάκων (κοσμολογία, αστροφυσική κ.ά.), όσο και στο επίπεδο των μικρών (φυσική στοιχειωδών σωματιδίων, φυσική συμπυκνωμένης ύλης). Στο έβδομο κεφάλαιο αναλύεται, με αφορμή τη ζωή και το θάνατο των αστεριών, η εφαρμογή της κβαντικής μηχανικής στις μεγάλες κλίμακες. Στο όγδοο κεφάλαιο βλέπουμε πώς με βάση τη νέα μηχανική ερμηνεύονται φαινόμενα όπως η υπερρευστότητα και η υπεραγωγιμότητα, αλλά και με ποιο μηχανισμό παράγεται το φως των λέιζερ.

Ίσως η σπουδαιότερη, από θεωρητικής πλευράς, εφαρμογή της κβαντικής μηχανικής είναι η κβαντική θεωρία πεδίου, η οποία προέκυψε ευθύς μόλις ο P. Dirac, κατόρθωσε να συνδυάσει την κβαντική μηχανική και τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας. Μπροστά στα μάτια μας άρχισε να ξετυλίγεται όλος ο θαυμαστός κόσμος των στοιχειωδών σωματιδίων και άνοιξε ένας δρόμος, που η φυσιολογική κατάληξή του δεν μπορεί να είναι άλλη από τη θεωρία η οποία θα ερμηνεύει τον τρόπο δημιουργίας του σύμπαντος και θα μας εξηγεί πώς οργανώθηκε η ύλη έτσι όπως γνωρίζουμε. Όλα τούτα εκτίθενται στο ένατο και δέκατο κεφάλαιο, όπου ο αναγνώστης μπορεί να ενημερωθεί για όλα τα σπουδαία θεωρητικά επιτεύγματα της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων.

Οι συγγραφείς του βιβλίου προσπαθούν συνεχώς να πείσουν τον αναγνώστη, με τη βοήθεια γλαφυρών ιστορικών στοιχείων και πολλών εντυπωσιακών φωτογραφιών, ότι η κβαντική μηχανική δεν είναι μια θεωρία που αφορά μόνο τους ειδικούς, αλλά ότι είναι μια θεωρία που οι καθημερινές εφαρμογές τους είναι τόσο συχνές και σημαντικές όπως και οι ανάλογες του ηλεκτρομαγνητισμού. Υπογραμμίζουν επίσης ότι αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο μας στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε το σύμπαν κατά τρόπο ενιαίο και γενικό. Είναι πολύ σημαντικό το ότι και οι έλληνες αναγνώστες μπορούν πλέον να διαβάσουν αυτό το βιβλίο, σε μια μετάφραση άρτια.

Πολλά συμβάντα της καθημερινής ζωής, σε όλες τις γωνιές του πλανήτη μας, αποτελούν οπωσδήποτε αντικείμενο έρευνας της κοινωνικής ψυχοπαθολογίας. Νομίζω ότι ξεχωριστή θέση ανάμεσά τους κατέχει η εικόνα του «διανοητή» που αμφισβητεί την αξία αλλά και την αποτελεσματικότητα της επιστήμης χρησιμοποιώντας όμως για το λόγο αυτό όλα τα σύγχρονα επιτεύγματά της! *Το Κβαντικό σύμπαν* μπορεί να βοηθήσει ώστε οι αναγνώστες να κατανοήσουν τη συμβολή της κβαντικής μηχανικής στον σύγχρονο πολιτισμό αλλά και γενικότερα τη συμβολή της φυσικής στην πορεία που χάραξε το ανθρώπινο είδος για είκοσι πέντε αιώνες περίπου.

⇨ *Συνέχεια από τη σελίδα 35*

πολλούς και ιδιαίτερα δύσκολους υπολογισμούς. Το μελετώ από κοινού με τον κ. Θεόδωρο Τομαρά, που διδάσκει στο Πανεπιστήμιο της Κρήτης, και τον κ. Ιγνάτιο Αντωνιάδη, που είναι συνεργάτης μου στο Παρίσι. Ένα άλλο θέμα της κβαντικής βαρύτητας που με ενδιαφέρει είναι η συμπεριφορά της ύλης στη «γειτονιά» μιας μελανής οπής, στην περιοχή γύρω από αυτήν. Δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο τι συμβαίνει εκεί, αφού το πεδίο βαρύτητας είναι πάρα πολύ ισχυρό, οπότε έχουμε συγχρόνως και την κβαντομηχανική και τη βαρύτητα. Πρόκειται για ένα πρόβλημα που επιχειρούν να το λύσουν πολλοί· σ' αυτή την προσπάθεια έχει συνεισφέρει πολλές καινούργιες ιδέες ο 't Hooft, τον οποίο αναφέραμε και πριν. Εκείνο που εγώ προσπαθώ να κάνω, χωρίς όμως επιτυχία μέχρι τώρα, είναι να δω τι γίνεται εάν ένα σωματίδιο σκεδαστεί και πέσει μέσα σε μια μελανή οπή. Θέλω να καταλάβω πώς γίνεται αυτό κβαντικά, δηλαδή πώς αντιδρά η μελανή οπή. Γι' αυτό το θέμα υπάρχει μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εργασία των αδελφών Verlinde (και οι δύο ήταν μαθητές του 't Hooft). Η εργασία τους αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση του θέματος. Ίσως υπάρχει τρόπος να γενικεύσει κανείς τη λύση, και αυτό αποτελεί μια πρόκληση, τόσο για μένα όσο και για άλλους φυσικούς. Ίσως, τώρα διαθέτουμε τις μαθηματικές τεχνικές ώστε, κι αν ακόμα δεν καταφέρουμε να λύσουμε πλήρως τα προβλήματα, να μπορέσουμε τουλάχιστον να κατανοήσουμε ποιοτικά μερικές πλευρές τους.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M31

(α) Η απάντηση είναι $x = 2$, $y = 3$. Η εξίσωση ανάγεται εύκολα στη μορφή $x^y = x^2 + 2x$ ή $x^{y-1} - x = 2$ (αφού $x > 0$). Έπεται ότι το x είναι φυσικός διαιρέτης του 2. Η τιμή $x = 1$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση, οπότε $x = 2$, και επομένως $y = 3$.

(β) Αυτή η εξίσωση έχει δύο λύσεις: $(y, z) = (1, 1)$ και $(y, z) = (3, 2)$. Η δεύτερη λύση ισοδυναμεί με την ίδια αριθμητική σχέση που έχουμε στο ερώτημα (α): $2^3 + 1 = 3^2$. Η περίπτωση $y = 1$ είναι προφανής. Ας υποθέσουμε ότι $y > 1$. Τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση ως

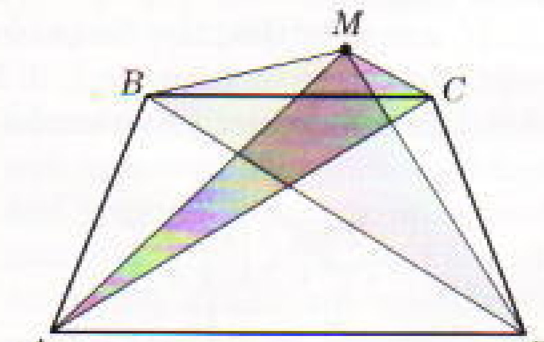
$$\begin{aligned} 2^y &= 3^z - 1 \\ &= (3-1)(3^{z-1} + 3^{z-2} + \dots + 1). \end{aligned}$$

Αφού $y > 1$, το γινόμενο στο δεξιό μέλος πρέπει να περιλαμβάνει περισσότερους από έναν παράγοντες του 2. Έπεται ότι ο δεύτερος παράγοντας του δεξιού μέλους είναι άρτιος και επομένως το z πρέπει να είναι άρτιο. Έστω $z = 2k$. Τότε έχουμε $2^y = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Επομένως τα $3^k - 1$ και $3^k + 1$ είναι δυνάμεις του 2 που διαφέρουν κατά 2, πράγμα που είναι δυνατόν μόνο για $k = 1$ ή για $z = 2$, $y = 3$.

Αρχικά, ο συγγραφέας αυτού του προβλήματος είχε προτείνει την πολύ δυσκολότερη και πιο γενική εξίσωση $x^y + 1 = (x + 1)^z$ για x, y, z ακέραιους. Προσπαθήστε να αποδείξετε ότι αυτή έχει μόνον τις επόμενες λύσεις: $(x, 1, 1)$ για κάθε x, $(1, y, 1)$, για κάθε y, και $(2, 3, 2)$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον τύπο του διωνύμου και εξετάστε τη διαιρετότητα.) Οι εξισώσεις (α) και (β) είναι ειδικές περιπτώσεις για $z = 2$ και $x = 2$. (V. Dubrovsky)

M32

Έστω $ABCD$ το δεδομένο τραπέζιο (Σχήμα 1). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι διαγώνιοι AC και BD είναι ισομήκεις, και βάσει της τριγωνικής ανισότητας για τα τρίγωνα MAC και MBD, όπου M είναι το δεδομένο σημείο, παίρνουμε



Σχήμα 1

$$\begin{aligned} MA &\le MC + AC \\ &= MC + BD \le MC + MB + MD. \end{aligned}$$

Απομένει να παρατηρήσουμε ότι τουλάχιστον μία από αυτές τις δύο ανισότητες είναι γνήσια, διότι η πρώτη γίνεται ισότητα μόνο όταν το M ανήκει στην προέκταση της AC πέρα από το σημείο C, ενώ η δεύτερη μόνο όταν το M ανήκει στο τμήμα BD.

Μια κομψή, καθαρά γεωμετρική λύση φαίνεται στο Σχήμα 2: αν φέρουμε σε σύμπτωση την πλευρά BD του τριγώνου BDM με την πλευρά AC του τριγώνου ACM, δημιουργούμε ένα τετράπλευρο τα μήκη των πλευρών του οποίου είναι ίσα με τις αποστάσεις που μελετούμε, οπότε η πρόταση του προβλήματος είναι πλέον αυταπόδεικτη. Απομένει στον αναγνώστη να εξετάσει τι συμβαίνει όταν το M βρίσκεται εκτός του επιπέδου του τραπεζίου $ABCD$.

M33

Αυτό είναι ένα τυπικό πρόβλημα

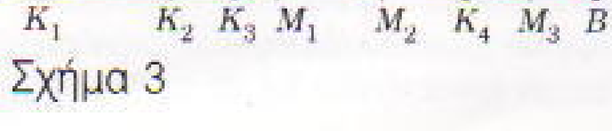
Σχήμα 2

που μπορεί να λυθεί «από το τέλος προς την αρχή». Και μάλιστα, θα αρχίσουμε τη λύση από το δεύτερο ερώτημα, στο οποίο η απάντηση είναι αρνητική.

Ας συμβολίσουμε με N_i το πλήθος των σειρών δέκα αλμάτων μετά τις οποίες το i-οστό καγκουρό, που θα το συμβολίζουμε k_i, ($i = 1, 2, 3, ..., 10$), *φτάνει τελικά* στο B —δηλαδή φτάνει στο σημείο B πηδώντας από κάποιο άλλο σημείο και παραμένει εκεί για πάντα, αναπηδώντας ίσως επιτόπου αν συνεχίζονται τα άλματα. Τότε, $N_{10} < N_9 < ... < N_1$, διότι για να φτάσει τελικά στο B το καγκουρό k_i πρέπει να πηδήσει πάνω από από το k_{i-1}, το οποίο δεν έχει φτάσει ακόμη στο B ($i = 2, 3, ..., 10$). Επομένως το συνολικό πλήθος των σειρών αλμάτων είναι τουλάχιστον $N_1 \ge N_2 + 1 \ge N_3 + 2 \ge ... \ge N_{10} + 9 \ge 10$.

Είναι σχεδόν προφανές ότι οποιαδήποτε στιγμή η επόμενη σειρά αλμάτων μπορεί να οργανωθεί έτσι ώστε να οδηγηθεί ένα επιλεγμένο καγκουρό k_i στο σημείο B. Αν τα καγκουρό μας βρίσκονται αρχικά στα σημεία K_1, K_2, ..., K_{10}, τότε, αρχίζοντας από το τέλος, βρίσκουμε ότι το k_{i-1} πρέπει να οδηγηθεί στο μέσον M_{i-1} του τμήματος K_iB (για να αναγκάσουμε το k_i να πηδήσει στο B—βλ. Σχήμα 3), και επομένως το k_{i-2} πρέπει να οδηγηθεί στο μέσον M_{i-2} του τμήματος $K_{i-1}M_{i-1}$, κ.ο.κ. έως το k_1 το οποίο πρέπει να οδηγηθεί στο μέσον M_1 του τμήματος K_2M_2 που καθορίζεται από αυτή τη διαδικασία.

Τώρα, χρησιμοποιώντας αυτό το σχήμα, μπορούμε να στείλουμε το k_{10} στο B με την πρώτη σειρά αλμάτων, έπειτα να στείλουμε το k_9 στο B με τη δεύτερη σειρά αλμάτων (το k_{10} θα αναπηδά επιτόπου), κατόπιν να στείλουμε το k_8 στο B με την τρίτη σειρά αλμάτων (το k_9 και το k_{10} θα αναπηδούν



Σχήμα 3

επιτόπου), κ.ο.κ. Στην τελευταία (δέκατη) σειρά, το k_1 πηδάει έως το B ενώ όλα τα υπόλοιπα συνεχίζουν τα επιτόπια άλματα. Επομένως, είναι δυνατόν να οργανώσουμε τη ζητούμενη «μετανάστευση» ολόκληρου του κοπαδιού σε δέκα σειρές.

Οι αναγνώστες που έλκονται από την άλγεβρα θα ανακαλύψουν ότι έχει ενδιαφέρον η προσπάθεια να παρακολουθήσουν αυτή τη «μετανάστευση» μέσω συντεταγμένων. Για να γίνει αυτό πρέπει να χρησιμοποιηθεί το τρίγωνο του Pascal και οι διωνυμικοί συντελεστές. Πάντως, αυτή η μέθοδος δεν είναι πραγματικά απαραίτητη για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημά μας με τη μορφή που το παρουσιάσαμε.
(V. Dubrovsky)

M34

Θέτουμε $f_1(x) = f(x) = x^3 - x + 1$, και, για κάθε $n = 2, 3, ...,$

$$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

Τότε $f_1(0) = f_1(1) = 1$, και επομένως (επαγωγικά) $f_n(0) = f_n(1) = 1$ για κάθε n. Αυτό σημαίνει ότι ο σταθερός όρος $f_n(0)$ κάθε πολυωνύμου $f_n(x)$ με ακέραιους συντελεστές ισούται με 1. Επομένως, για κάθε φυσικό αριθμό a ο αριθμός $f_n(a)$ διαιρούμενος με το a δίνει υπόλοιπο 1. Έπεται ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους m, k, και p, με $k > p > 0$, ο αριθμός $f_k(m) = f_{k-p}(f_p(m))$ διαιρούμενος με το $f_p(m)$ αφήνει υπόλοιπο 1 — δηλαδή οι $f_k(m)$ και $f_p(m)$ είναι πρώτοι προς αλλήλους αριθμοί, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Τώρα, είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να βρούμε όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές που έχουν την ίδια ιδιότητα: *για κάθε φυσικό αριθμό* $m > 1$, οι αριθμοί m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ..., είναι ανά δύο πρώτοι προς αλλήλους.

Η προηγούμενη απόδειξη μας δείχνει ότι κάθε f που ικανοποιεί την $f(0) = f(1) = 1$, δηλαδή της μορφής $f(x) = x(x-1)r(x) + 1$ [όπου $r(x)$ είναι πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές], είναι κατάλληλο. Παρατηρήστε ότι η κατασκευή που περιγράφεται στο πρόβλημα δημιουργεί άπειρο πλήθος άπειρων ακολουθιών φυσικών αριθμών στις οποίες οποιοιδήποτε δύο αριθμοί είναι πρώτοι προς αλλήλους. [Για παράδειγμα, αν $m = 2$: $f_1(2) = 7$, $f_2(2) = f_1(7) = 337$, ..., $f_n(2)$, ...] Από την ύπαρξη μιας τέτοιας ακολουθίας συνεπάγεται ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο (γιατί;).

M35

Πρώτα, θεωρούμε έναν αριθμό $N = p^k$, όπου ο p είναι πρώτος. Διαιρέτες του N είναι οι $k + 1$ το πλήθος αριθμοί $1, p, p^2, ..., p^k$, και το πλήθος των διαιρετών αυτών ισούται, αντίστοιχα, με $1, 2, 3, ..., k + 1$. Επομένως πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$[1 + 2 + ... + (k + 1)]^2 = 1^3 + 2^3 + ... + (k + 1)^3.$$

Συμβολίζουμε το άθροισμα $(1 + 2 + ... + n)^2$ με s_n. Τότε, χρησιμοποιώντας τους τύπους για τη διαφορά τετραγώνων και για το άθροισμα μιας αριθμητικής προόδου παίρνουμε

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_k &= (k + 1)[2(1 + 2 + ... + k) + k + 1] \\ &= (k + 1)[k(k + 1) + k + 1] \\ &= (k + 1)^3. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= (k + 1)^3 + s_k \\ &= (k + 1)^3 + k^3 + s_{k-1} \\ &= ... \\ &= (k + 1)^3 + k^3 + ... + 1^3, \end{aligned}$$

επειδή $s_1 = 1$.

Έτσι αποδεικνύεται η πρόταση για $N = p^k$, όπου ο p είναι πρώτος. Υποθέτουμε τώρα ότι $N = AB$, όπου οι A και B είναι πρώτοι προς αλλήλους αριθμοί με διαιρέτες $a_1, ..., a_n$, και $b_1, ..., b_m$, αντίστοιχα. Έστω α_i, $i = 1, ..., n$ και β_j, $j = 1, ..., m$, το πλήθος των διαιρετών των a_i και b_j. Αφού τα A και B δεν έχουν κοινούς διαιρέτες, οι διαιρέτες του AB είναι όλα τα γινόμενα a_ib_j, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. Παρατηρούμε ότι το πλήθος αυτών των γινομένων είναι mn. Για τον ίδιο λόγο, το πλήθος των διαιρετών του a_ib_j ισούται με $\alpha_i\beta_j$. Το άθροισμα όλων αυτών των αριθμών μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} &\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + ... + \alpha_n\beta_m \\ &= (\alpha_1 + ... + \alpha_n)(\beta_1 + ... + \beta_m). \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} &(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + ... + \alpha_n\beta_m)^2 \\ &= (\alpha_1 + ... + \alpha_n)^2(\beta_1 + ... + \beta_m)^2. \end{aligned}$$

Παρομοίως

$$\begin{aligned} &(\alpha_1\beta_1)^3 + (\alpha_1\beta_2)^3 + ... + (\alpha_n\beta_m)^3 \\ &= (\alpha_1^3 + ... + \alpha_n^3)(\beta_1^3 + ... + \beta_m^3). \end{aligned}$$

Έπεται ότι αν για τα A και B ισχύει η σχέση που μας ζητά το πρόβλημα να αποδείξουμε, θα ισχύει και για το AB (γιατί και τα δύο μέλη της σχέσης για το AB είναι ίσα με το γινόμενο των αντίστοιχων μελών των σχέσεων για τα A και B).

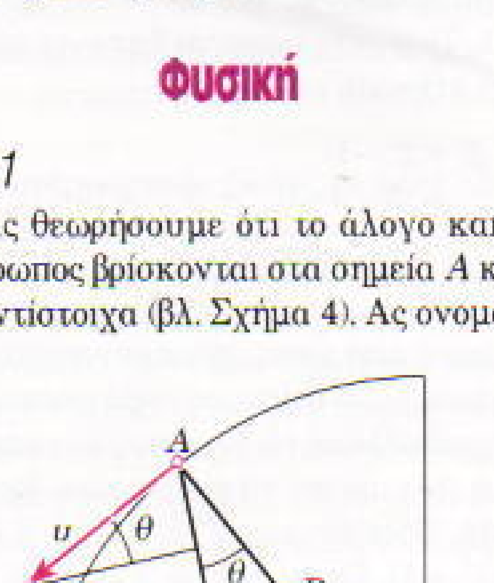
Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας τέλεια επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι η σχέση μας αληθεύει για κάθε αριθμό μικρότερο του N. Μπορούμε πάντοτε να παραστήσουμε το N ως $N = p^kA$, όπου ο p είναι πρώτος και το A δεν διαιρείται από το p. Η περίπτωση $A = 1$ αντιμετωπίστηκε ξεχωριστά, και στην περίπτωση που $A > 1$, οι πρώτοι προς αλλήλους παράγοντες p^k και A ικανοποιούν τη σχέση μας (είναι μικρότεροι από το N), άρα το ίδιο ισχύει και για το γινόμενό τους, το N.

Όσο γνωρίζουμε, η πρόταση αυτή αποδείχτηκε πρώτη φορά από τον διάσημο γάλλο μαθηματικό J. Liouville.

Φυσική

Φ31

Ας θεωρήσουμε ότι το άλογο και ο άνθρωπος βρίσκονται στα σημεία A και B, αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 4). Ας ονομάσουμε $OA = R$, $OB = r$, $\angle OBA = \varphi$ και $\angle BAO = \theta$. Η ταχύτητα με την οποία ο άνθρωπος και το άλογο πλησιάζουν είναι ίση με την προβολή της ταχύτητας υ πάνω στη διεύθυνση AB: $\upsilon_1 = \upsilon \cdot ημθ$. Πρέπει να βρούμε για ποια θέση του σημείου A η γωνία θ γίνεται μέγιστη:



Σχήμα 4

$$ημφ/R = ημθ/r,$$
$$ημθ = (r/R)\, ημφ \le (r/R).$$

Έτσι, όταν $\varphi = 90°$, η σχετική ταχύτητα αποκτά μέγιστη τιμή

$$\upsilon_{1\,max} = \upsilon\,(r/R).$$

Φ32

Αρχικά πρέπει να επεξεργαστούμε προσεκτικά την καμπύλη της επιτάχυνσης της σταγόνας ώστε να παραστήσουμε γραφικά την ταχύτητά της σε συνάρτηση με το χρόνο (σε κατάλληλες μονάδες και πάλι). Ας θυμηθούμε ότι η αύξηση της ταχύτητας ανά μονάδα χρόνου είναι ίση με το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη της επιτάχυνσης για το ίδιο χρονικό διάστημα. Ως γνήσιοι φυσικοί, λοιπόν, σχεδιάστε σε χαρτί μιλιμετρέ την καμπύλη μεταβολής της ταχύτητας της σταγόνας. Από την καμπύλη της ταχύτητας πρέπει να καθορίσουμε τι κλάσμα της μέγιστης ταχύτητας υ_{γ} είναι η ταχύτητα υ κατά τη χρονική στιγμή t_1 της κατάργησης του πεδίου. Νομίζω, λοιπόν, ότι και εσείς θα διαπιστώσετε από το διάγραμμα που κατασκευάσατε πως

$$\upsilon = 0{,}4\ \upsilon_{\gamma}.$$

Η αντίσταση του αέρα $F_{\text{αντ.}}$, που το μέτρο της είναι ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας της σταγόνας, έχει φορά αντίθετη της δύναμης της βαρύτητας mg. Έτσι η επιτάχυνση της σταγόνας τη στιγμή t_1 (δηλαδή η μέγιστη επιτάχυνση της σταγόνας) είναι

$$\gamma = \frac{mg - F_{\text{αντ.}}}{m} = g\left(1 - \frac{F_{\text{αντ.}}}{mg}\right)$$

$$= 10\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\gamma}}\right) = 6\ \text{m/sec}^2.$$

Φ33

Ας ξεκινήσουμε με μια σύντομη ποιοτική μελέτη. Προφανώς ο ζητούμενος χρόνος T είναι μεγαλύτερος όταν η ακτίνα R_0 της φυσαλίδας και η πυκνότητα του περιεχόμενου αερίου είναι μεγαλύτερες (για παράδειγμα, αν η φυσαλίδα περιέχει υδρογόνο εξαφανίζεται γρηγορότερα παρά όταν περιέχει ατμοσφαιρικό αέρα). Από την άλλη, ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος όταν η επιφανειακή τάση του υμενίου είναι μεγαλύτερη (μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα διαφορετικό σαπωνοδιάλυμα) και η ακτίνα του σωλήνα είναι μικρότερη.

Ας κάνουμε τώρα μερικούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας, η δυναμική ενέργεια της επιφάνειας της φυσαλίδας μετατρέπεται κατά τη διάρκεια της συστολής της σε κινητική ενέργεια του αέρα που διαφεύγει (η κινητική ενέργεια της ίδιας της φυσαλίδας μπορεί να αγνοηθεί, όπως θα δείξουμε σε λίγο στους υπολογισμούς μας). Έτσι λοιπόν

$$\mathrm{d}(2\sigma S) = \frac{-\upsilon^2 \mathrm{d}m}{2},$$

όπου $\mathrm{d}m = -\rho_a \mathrm{d}V$ είναι η μάζα του αέρα που διαφεύγει από τη φυσαλίδα σε μικρό χρονικό διάστημα $\mathrm{d}t$, ρ_a είναι η πυκνότητα του αέρα και $\mathrm{d}V$ η ελάττωση του όγκου της φυσαλίδας. Ο συντελεστής 2 στο πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης οφείλεται στο ότι η φυσαλίδα έχει δύο επιφάνειες και κάθε επιφάνεια έχει δυναμική ενέργεια σS (φυσικά, αγνοούμε το πάχος του υμενίου και θεωρούμε ίσες τις ακτίνες αυτών των επιφανειών). Επειδή αφ' ενός $\mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}R$ και αφ' ετέρου $\mathrm{d}V = -\pi\frac{D^2}{4}\upsilon \mathrm{d}t$, παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_a}}\frac{D^2}{4R^{5/2}}. \qquad (1)$$

Και τώρα ας συγκρίνουμε την κινητική ενέργεια της φυσαλίδας $E_\kappa = M(\mathrm{d}R/\mathrm{d}t)^2/2$ με τη δυναμική ενέργεια της επιφάνειας της $E_\delta = 2\sigma S = 8\pi\sigma R^2$ κάποια τυχαία στιγμή, ας πούμε τη στιγμή που έχει υποδιπλασιαστεί η ακτίνα της. Αφού η μάζα του υμενίου είναι $M = \rho_v 4\pi R^2 h$, όπου ρ_v η πυκνότητα του νερού και h το πάχος του υμενίου, τότε

$$\frac{E_\kappa}{E_\delta} = \frac{\rho_v}{8\rho_a}\frac{h}{R^5}\frac{D^4}{16}.$$

Αν $D/2 = 1$ mm, $R = R_0/2 = 10$ mm, $h = 0{,}01$ mm, $\rho_v = 10^3$ kgr/m^3 και $\rho_a = 1{,}29$ kgr/m^3, παίρνουμε $(E_\kappa/E_\delta) = 10^{-5} << 1$, που σημαίνει ότι η παραπάνω υπόθεσή μας επιβεβαιώνεται.

Τελειώνοντας ας χωρίσουμε τις μεταβλητές R και t στη σχέση (1), και ας την ολοκληρώσουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \le R \le R_0$:

$$\mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{2\rho_a}{\sigma}}\frac{4}{D^2}R^{5/2}\mathrm{d}R,$$

$$T = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{2\rho_a}{\sigma}}\frac{R_0^{7/2}}{D^2} = 4\ \text{sec}.$$

Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει τις αρχικές ποιοτικές συσχετίσεις και προσεγγίζει ικανοποιητικά τις εργαστηριακές παρατηρήσεις μας.

Φ34

Για τη λύση αυτού του προβλήματος ας χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας των ηλεκτρικών πεδίων. Αρχικά

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} + \sum_2^n \frac{q_i}{C_{ij}},$$

όπου C_{ij} είναι κάποιοι συντελεστές (οι λεγόμενες αμοιβαίες ηλεκτρικές χωρητικότητες των αγωγών). Όταν τα ηλεκτρικά φορτία αντικατασταθούν με τα αντίθετά τους, η εξίσωση γίνεται

$$0 = \frac{q_1}{C_1} - \sum_2^n \frac{q_i}{C_{ij}},$$

απ' όπου προκύπτει

$$\sum_2^n \frac{q_i}{C_{ij}} = \frac{q_1}{C_1}.$$

Άρα το ζητούμενο δυναμικό είναι

$$\varphi_x = \frac{4q_1}{C_1} - \sum_2^n \frac{q_i}{C_{ij}} = \frac{3q_1}{C_1} = \frac{3}{2}\varphi_1.$$

Φ35

Το πρόβλημα λύνεται με δύο τρόπους.

1. Το είδωλο του Ήλιου που εμφανίζεται στο εστιακό επίπεδο του πρώτου κατόπτρου (ακτίνας R_1) λειτουργεί ως αντικείμενο για το δεύτερο κάτοπτρο (ακτίνας R_2). Θεωρώντας ότι το γωνιακό μέγεθος του Ήλιου είναι a, η διάμετρος του ειδώλου του θα είναι $\ell = af_1 = aR_1/2$, και η απόστασή του από το δεύτερο κάτοπτρο $d_2 = R_2 - R_1/2$. Η μεγέθυνση του δευτέρου κατόπτρου είναι

$$M_2 = f_2/(d_2 - f_2) = R_2/(R_2 - R_1).$$

Έτσι, το μέγεθος του ειδώλου του συστήματος των δύο κατόπτρων θα είναι ίσο με

$$L_\kappa = \ell M_2 = \frac{aR_1}{2}\frac{R_2}{R_2 - R_1}$$

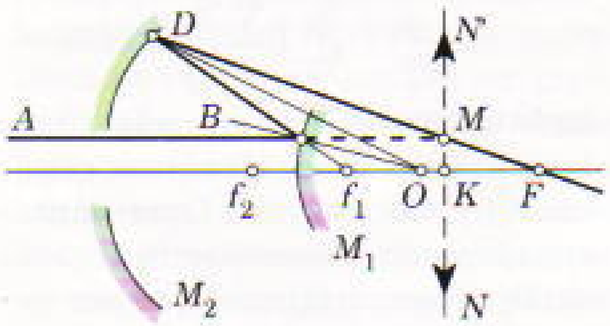
$$= a\frac{R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}.$$

Θεωρούμε ότι ένας λεπτός φακός σχηματίζει στο εστιακό του επίπεδο είδωλο του Ήλιου μεγέθους $L_\varphi = af_\varphi$. Για να ισχύει για το είδωλο αυτό $L_\varphi = L_\kappa$

πρέπει να επιλεγεί ένας φακός εστιακής απόστασης

$$f_{\varphi} = \frac{R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)} = 10 \text{ cm}.$$

2. Μία από τις ακτίνες παράλληλη στον οπτικό άξονα του συστήματος των κατόπτρων φαίνεται στο Σχήμα 5 (βλ. γραμμή AB). Το σημείο M είναι η



Σχήμα 5

τομή της ακτίνας AB και της ακτίνας DF, η οποία εγκαταλείπει το σύστημα. Ας τοποθετήσουμε έναν λεπτό φακό με εστιακή απόσταση $f_{\varphi} = |KF|$ στο επίπεδο NN' που διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετος στον οπτικό άξονα του συστήματος.

Η ακτίνα AB που εισέρχεται στο φακό (χωρίς βεβαίως να υπάρχουν τα κάτοπτρα) μετά τη διάθλασή της σ' αυτόν περνά από το σημείο F —που σημαίνει ότι η πορεία της είναι η ίδια όπως και όταν εγκαταλείπει το σύστημα των κατόπτρων. Επομένως το είδωλο του Ήλιου που σχηματίζεται από το φακό θα είναι ίδιο μ' εκείνο που σχηματίζεται από το σύστημα των κατόπτρων.

Εύκολα υπολογίζεται ότι η εστιακή απόσταση του φακού θα είναι $f_{\varphi} = 10$ cm.

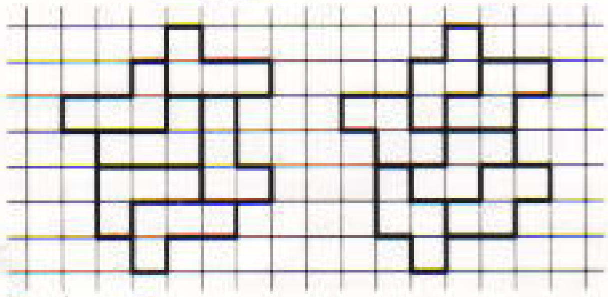
Σπαζοκεφαλιές

Σ31

Η Βαρβάρα φοράει το άσπρο φόρεμα, η Χαρά το μπλε, η Πόπη το πράσινο και Γεωργία το ροζ. Από την πρώτη συνθήκη συμπεραίνουμε αμέσως ότι το κορίτσι με το πράσινο φόρεμα είναι η Πόπη. Τότε, από τη δεύτερη συνθήκη βρίσκουμε ότι η Χαρά φοράει μπλε (ούτε άσπρο ούτε ρόζ —και φυσικά ούτε πράσινο). Εφόσον η Γεωργία βρίσκεται δίπλα στην Πόπη, στέκεται απέναντι από τη Χαρά, και επομένως φοράει το ροζ φόρεμα. (V. Dubrovsky)

Σ32

Είναι φανερό ότι το καθένα από τα έξι τμήματα αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι έχουν υποχρεωτικά ένα από πέντε δυνατά διαφορετικά σχήματα (ένα σχήμα που μοιάζει με I, ένα με L, ένα με T, ένα με Z και ένα τετράγωνο 2 × 2). Έπειτα από λίγες δοκιμές βλέπουμε ότι μόνο ο χωρισμός σε σχήματα L και Z είναι δυνατός (εξετάστε πότε είναι δυνατή η πλακόστρωση του πάνω δεξιά τετραγώνου). Στο Σχήμα 6 βλέπετε δύο τρόπους διαίρεσης με βάση αυτά τα σχήματα (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες διευθετήσεις αυτών των σχημάτων).



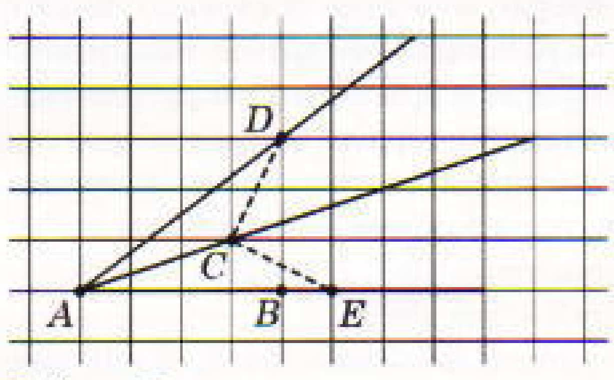
Σχήμα 6

Σ33

Ένας άνθρωπος που τρέχει πάνω στη «γέφυρα» και αρχίζει να πέφτει, καταλήγει στην απέναντι όχθη και όχι στο νερό, επειδή χρειάζεται περισσότερος χρόνος για να πέσει στο νερό παρά να διασχίσει τρέχοντας τον κορμό.

Σ34

Διαπιστώνουμε αμέσως από το Σχήμα 7 ότι $AD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, όπου το

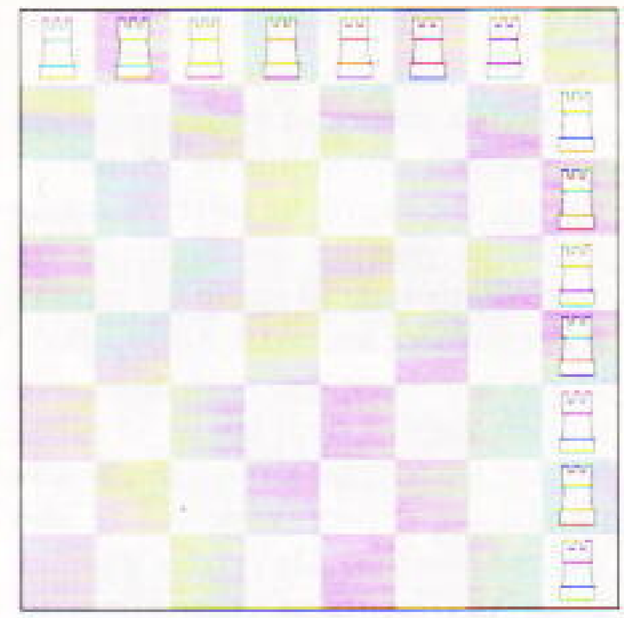


Σχήμα 7

μοναδιαίο μήκος ισούται με την πλευρά ενός τετραγώνου του πλέγματος. Επομένως, $AD = AE$ (λόγω της επιλογής του σημείου E) και $CD = CE = \sqrt{5}$. Άρα, τρίγωνο$AEC \equiv$ τρίγωνοADC, απ' όπου συνάγουμε τη ζητούμενη ισότητα. (V. Dubrovsky)

Σ35

Με βάση τον περιορισμό του προβλήματος, μπορούμε να απομακρύνουμε έναν πύργο από τη σκακιέρα μόνο όταν υπάρχει ένας ακόμη πύργος στη γραμμή του και ένας ακόμη στη στήλη του. Ένας τέτοιος πύργος υπάρχει υποχρεωτικά. Διαφορετικά, ο κάθε πύργος θα είναι ο μοναδικός σε κάποια γραμμή ή σε κάποια στήλη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν γραμμές ή στήλες που περιέχουν έναν μόνο πύργο. Τώρα, οκτώ από αυτές πρέπει να είναι του ίδιου είδους —ας πούμε γραμμές. Τότε η κάθε γραμμή περιέχει μόνο έναν πύργο, και το συνολικό πλήθος των πύργων είναι οκτώ, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση του προβλήματος. Η διευθέτηση των 14 πύργων στο Σχήμα 8 μας δείχνει ότι ο αριθμός 15 στην εκφώνηση του προβλήματος δεν μπορεί να μειωθεί.



Σχήμα 8

Παιχνιδότοπος

1. Όλες οι ακολουθίες n κινήσεων ($n \geq 3$) ανήκουν σε δύο κατηγορίες: (1) αυτές στις οποίες η έδρα που περιστρέφεται τελευταία είναι κάθετη στην προηγούμενη, (2) αυτές στις οποίες οι δύο έδρες που περιστρέφονται τελευταίες είναι παράλληλες. Μια ακολουθία του πρώτου είδους καθορίζεται αν επιλέξουμε τις πρώτες $n - 1$ κινήσεις της (S_{n-1} δυνατότητες), στη συνέχεια την τελευταία έδρα κάθετη στην ($n - 1$) έδρα (τέσσερις τρόποι), και τέλος τη γωνία περιστροφής της (τρεις τρόποι). Επομένως, έχουμε $3 \cdot 4 \cdot S_{n-1}$ ακολουθίες στην πρώτη κατηγορία. Για να καθορίσουμε μια ακολουθία του δεύτερου τύπου, επιλέγουμε μια ακολουθία $n - 2$ κινήσεων (S_{n-2} τρόποι), ένα ζεύγος εδρών κάθετων στην έδρα που περιστρέψαμε τελευταία (δύο τρόποι), και τις γωνίες περιστροφής αυτών των εδρών ($3 \cdot 3 = 9$ τρόποι). Άρα, έχουμε 2

$\cdot 9 \cdot S_{n-2}$ ακολουθίες. Ο υπολογισμός για $n = 2$ είναι όμοιος: $18 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 243$.

2. Ο συλλογισμός είναι όμοιος με την περίπτωση των κυβιδίων των ακμών.

3. Επαληθεύστε και χρησιμοποιήστε την εξής πρόταση: αν δύο διαδοχές που εφαρμόζονται σε συγκεκριμένη κατάσταση του κύβου παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα, θα παραγάγουν διαφορετικά αποτελέσματα εφαρμοζόμενες και σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση.

Το δίλημμα του Monty

1. Δείτε την εξίσωση 1 στο διπλανό πλαίσιο.

2. Εδώ $p = 2/3$, $n = 8$, και $j = 3$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3) του άρθρου παίρνουμε $P_{\text{ανταλ.}} = 55/144 > 54/144 = 3/8 = P_{\text{επιμ.}}$. Πρέπει να ανταλλάξετε την επιλογή σας.

3. Έστω $p = (n-j)/n + x$. Αντικαθιστώντας το p στην εξίσωση (3) παίρνουμε $P_{\text{ανταλ.}} = j/n + x/(n-2)$. Αν $p > (n-j)/n$ τότε $x > 0$. Άρα, $P_{\text{ανταλ.}} > j/n = P_{\text{επιμ.}}$. Αν $p < (n-j)/n$ τότε $x < 0$ και επομένως $P_{\text{ανταλ.}} < j/n = P_{\text{επιμ.}}$.

4. Θεωρούμε την εξίσωση $kn = jm + y$. Αν $k/m = j/n$ τότε $y = 0$. Αν $k/m < j/n$ τότε $y < 0$, και αν $k/m > j/n$ τότε $y > 0$. Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (4) παίρνουμε

$$P_{\text{ανταλ.}} = \frac{j}{n} - \frac{y}{n(n-m-1)},$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

5. $E_{\text{ανταλ.}} = 6.260.000$ δρχ. $> 5.010.000$ δρχ. $= E_{\text{επιμ.}}$. Ο παίκτης πρέπει να ανταλλάξει την επιλογή του.

6. $E_{\text{ανταλ.}} = 5.010.000$ δρχ. $= E_{\text{επιμ.}}$. Ο παίκτης μπορεί να χρησιμοποιήσει οποιαδήποτε από τις δύο στρατηγικές.

7. Έστω $v_r = t/n + x$. Αντικαθιστώντας το v_r στην εξίσωση (5) παίρνουμε $E_{\text{ανταλ.}} = t/n - x/(n-2)$. Αν $v_r = t/n$ τότε $x = 0$. Αν $v_r > t/n$ τότε $x > 0$, ενώ αν $v_r < t/n$ τότε $x < 0$. Σε όλες τις περιπτώσεις, αποδεικνύεται η πρόταση. Παρατηρήστε την ομοιότητα με τη λύση του προβλήματος 3.

8. Αν $x/s = t/n$, τότε $xn = st$. Αντικαταστήστε το xn στην εξίσωση (6).

9. Συνδυάζοντας τους όρους της εξίσωσης (3) παίρνουμε την εξίσωση (2) στο παραπάνω πλαίσιο.

1. $P_{\text{ανταλ.}} = P$(1η επιλογή κατσίκα)P(2η επιλογή αυτοκίνητο \ 1η επιλογή κατσίκα) + P(1η επιλογή αυτοκίνητο)P(2η επιλογή αυτοκίνητο \ 1η επιλογή αυτοκίνητο)

$$= \frac{n-j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{j-2}{n-2}\right) = \left(\frac{j-1}{n}\right)\left(\frac{n-j}{n-2}\right) + \left(\frac{j}{n}\right)\left(\frac{j-2}{n-2}\right)$$

$$< \left(\frac{j}{n}\right)\left(\frac{n-j}{n-2} + \frac{j-2}{n-2}\right) = \frac{j}{n} = P_{\text{επιμ.}}$$

2. $$p\left[\frac{n-j}{n}\left(\frac{j}{n-2}\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right)\right] + (1-p)\left[\frac{n-j}{n}\left(\frac{j-1}{n-2}\right) + \frac{j}{n}\left(\frac{j-2}{n-2}\right)\right]$$

$$p\left[\frac{jn-j}{n(n-2)}\right] + (1-p)\left[\frac{jn-j-n}{n(n-2)}\right] = \frac{[p+(1-p)](jn-j)-(1-p)n}{n-2}$$

$$= \frac{nj+np-n-j}{n(n-2)}.$$

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 29*

νής ή τη στρατηγική ανταλλαγής.

Στη θεωρία παιγνίων, οι στρατηγικές συνήθως συγκρίνονται σε σχέση με την προσδοκώμενη τιμή —τον διγραμμικό συνδυασμό των αποδόσεων και των πιθανοτήτων. Η τελευταία γενίκευσή μας αποκαλύπτει την πραγματική φύση του προβλήματος: κάποιος πρέπει να επιλέξει τυχαία από ένα σύνολο επιλογών A ή πρέπει να επιλέξει τυχαία από το σύνολο επιλογών $A - B$, όπου B είναι δεδομένο υποσύνολο του A; Η απάντηση είναι πολύ απλή: αν η μέση τιμή των στοιχείων του A είναι μικρότερη από τη μέση τιμή των στοιχείων του B, τότε ο παίκτης πρέπει να επιλέξει τυχαία ένα στοιχείο του A (στρατηγική επιμονής). Αν η μέση τιμή των στοιχείων του A είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή των στοιχείων του B πρέπει να προτιμήσει την τυχαία επιλογή ενός στοιχείου του $A - B$ (στρατηγική ανταλλαγής). Τέλος, αν η μέση τιμή των στοιχείων των A και B είναι ίδια, δεν έχει σημασία ποια στρατηγική θα υιοθετήσει.

Καταλήγοντας, επισημαίνουμε ότι μπορούμε να εισαγάγουμε και άλλες γενικεύσεις του διλήμματος του Monty που περιλαμβάνουν τις έννοιες του «ρίσκου» και της «ωφελιμότητας». Το ρίσκο σχετίζεται με το πόσο πρόθυμο είναι ένα άτομο να εκμεταλλευτεί μια πιθανότητα. Κάποιος «ριψοκίνδυνος» θα προτιμήσει μια εναλλακτική δυνατότητα με υψηλότερη προσδοκώμενη τιμή, ακόμη και αν η πιθανότητα να κερδίσει ένα μεγάλο δώρο είναι πολύ μικρή. Από την άλλη πλευρά, ένας «συντηρητικός» παίκτης θα προτιμήσει ένα μικρό δώρο που είναι εξαιρετικά πιθανό παρά ένα πολύ μεγαλύτερο δώρο που είναι περισσότερο απίθανο, ακόμη και αν η προσδοκώμενη τιμή της δεύτερης επιλογής είναι μεγαλύτερη από την προσδοκώμενη τιμή της πρώτης.

Η ωφελιμότητα διευρύνει την έννοια της αξίας ώστε να περιλάβει και τις προσωπικές προτιμήσεις. Δεν θα έπρεπε, και ούτε είναι δυνατό, να αποτιμηθούν όλα τα αποτελέσματα σε δραχμές. Στο κάτω κάτω, για έναν μοναχό του Θιβέτ η κατσίκα μπορεί να είναι πολυτιμότερη απ' ό,τι ένα αυτοκίνητο! ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

⇨ *Συνέχεια από τη σελίδα 47*

λεκτρομαγνητικής ανάρτησης είναι εγγενώς ασταθή, διότι η ελκτική μαγνητική δύναμη αυξάνεται ραγδαία όσο ελαττώνεται η απόσταση του μαγνήτη από τη ράγα-οδηγό· τα συστήματα ηλεκτροδυναμικής ανάρτησης είναι περισσότερο ευσταθή, διότι η απωστική δύναμη μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση. Σ' ένα ηλεκτρομαγνητικό (ελκτικό) σύστημα, τα ρεύματα των μαγνητών πρέπει να ελέγχονται προσεκτικά ώστε να διατηρείται το επιθυμητό ύψος αιώρησης· στο ηλεκτροδυναμικό (απωστικό) σύστημα, ανασυρόμενοι τροχοί στηρίζουν το όχημα στις χαμηλές ταχύτητες και όταν σταματά.

Αν και η έρευνα για τα εν λόγω οχήματα ξεκίνησε στις ΗΠΑ στα τέλη της δεκαετίας του 1960, η οικονομική υποστήριξη του έργου σταμάτησε το 1975 και ξαναξεκίνησε το 1990 περίπου. Ερευνητικές προσπάθειες έγιναν στην Ιαπωνία και τη Γερμανία, και μάλιστα έχουν δοκιμαστεί πλήρη συστήματα και στις δύο χώρες. Ένα σύστημα που βασίζεται στην ηλεκτρομαγνητική τεχνολογία και σχεδιάζεται για το Ορλάντο της Φλόριδας, θα είναι το πρώτο δημόσιο σύστημα «ιπτάμενων» οχημάτων στις ΗΠΑ.

Η εξοικονόμηση ενέργειας μέσω ενός τέτοιου συστήματος μεταφοράς είναι σημαντική. Οι πτήσεις σε αποστάσεις μικρότερες των 800 km τείνουν να είναι μη αποδοτικές, επειδή τα αεροσκάφη ξοδεύουν μεγάλος μέρος του χρόνου για κίνηση στο έδαφος του αεροδρομίου, για απογείωση και προσγείωση, ενώ τα μοντέρνα αεροσκάφη λειτουργούν αποδοτικότερα στα μεγάλα ύψη.

Τα «ιπτάμενα» τρένα, από την άλλη, και για μικρές διαδρομές, θα μπορούσαν να μεταφέρουν επιβάτες στον προορισμό τους σε μικρότερο συνολικό χρόνο και με πολύ λιγότερη ενεργειακή δαπάνη. Επειδή μάλιστα φθίνουν οι πεπερασμένες πηγές ενέργειας που διαθέτουμε, έχουμε κάθε λόγο να επισπεύσουμε την ανάπτυξη των «ιπτάμενων» οχημάτων και να εντείνουμε την έρευνα στην υπεραγωγιμότητα. ◙

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 72*

άσκηση τη δεύτερη (εκφράζοντας το τέταρτο στροφής μιας έδρας συναρτήσει εναλλαγών μεταξύ δύο κυβιδίων). Και η πρώτη πρόταση έχει στοιχειώδη απόδειξη, αλλά είναι αρκετά εκτεταμένη για να περιληφθεί σε τούτο το άρθρο.

Η αναλλοίωτη $P(S)$ λαμβάνει δύο τιμές, ΑΡΤΙΑ και ΠΕΡΙΤΤΗ. Το πλήθος καθενός από αυτά τα δύο είδη καταστάσεων ισούται με το μισό ακριβώς των $12! \cdot 8!$ *μεταθέσεων* των κυβιδίων (το πλήθος των μεταθέσεων δεν είναι $20!$ επειδή τα γωνιακά κυβίδια δεν αναμειγνύονται με τα κυβίδια των ακμών). Οι προσπελάσιμες μεταθέσεις είναι άρτιες, επειδή η αρχική ταυτοτική μετάθεση παριστάνεται από άρτιο (μηδενικό) πλήθος εναλλαγών.

Οι τρεις αναλλοίωτες $F(S)$, $T(S)$ και $P(S)$ αποτελούν πλήρες σύστημα. Δηλαδή, δύο οποιεσδήποτε από τις N_0 επιτεύξιμες καταστάσεις (αυτές που προκύπτουν αν αποσυναρμολογήσουμε τον κύβο και ξανασυνδυάσουμε τυχαία τα κομμάτια του) μπορούν να μετατραπούν η μία στην άλλη αν και μόνο αν οι τρεις αναλλοίωτες λαμβάνουν ίδιες τιμές.

Συγκεκριμένα, οι προσπελάσιμες καταστάσεις χαρακτηρίζονται από τις τιμές $F(S) = T(S) = 0°$, $P(S) =$ ΑΡΤΙΑ. Αυτό το γεγονός δεν είναι ούτε στο ελάχιστο προφανές. Η απόδειξή του ουσιαστικά ισοδυναμεί με το να ολοκληρώσουμε έναν αλγόριθμο που θα αποκαθιστά την αρχική κατάσταση του κύβου. Εφόσον υπάρχουν $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ τριάδες δυνατών τιμών των αναλλοιώτων, όλες οι επιτεύξιμες καταστάσεις του κύβου ανήκουν σε 12 κατηγορίες. Περιστρέφοντας τις έδρες του κύβου έχουμε τη δυνατότητα να καταλήξουμε σε κάθε κατάσταση της κατηγορίας που βρισκόμαστε, αλλά δεν μπορούμε να περάσουμε σε καμία άλλη κατηγορία.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι κάθε κατηγορία περιέχει το ίδιο πλήθος καταστάσεων.

Με το τελευταίο πρόβλημα γίνεται φανερό γιατί διαιρέσαμε το N_0 με 12 για να βρούμε το πλήθος των προσπελάσιμων καταστάσεων. ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 63

Το τελευταίο πρόβλημα του κύβου

Vladimir Dubrovsky

Ο ΠΡΩΤΟΦΑΝΗΣ ΕΝΘΟΥΣΙΑΣΜΟΣ που κατέλαβε όλο τον κόσμο πριν από δεκαπέντε περίπου χρόνια με τον κύβο του Rubik έπαιξε ένα άσχημο παιχνίδι στην καλύτερη σπαζοκεφαλιά του αιώνα μας. Λίγο μετά την εμφάνισή της έπεσε θύμα των μαθηματικών, οι οποίοι θέλησαν αμέσως να επωφεληθούν από αυτή τη σπάνια ευκαιρία και να επιδείξουν τη δύναμη της επιστήμης τους στο ευρύ κοινό. Υπέβαλαν το παιχνίδι σε λεπτομερέστατη εξέταση και εξήγησαν σε όλους τι και τι δεν μπορούσε να γίνει με αυτό. Επίσης, οι κατασκευαστές σπαζοκεφαλιών σε όλο τον κόσμο εκμεταλλεύτηκαν την ιδέα του Rubik και την αντέγραψαν σε αναρίθμητες παραλλαγές. Πολύ σύντομα ο κύβος —που πολύ δύσκολα μπορούσε να τον λύσει ένας απλός άνθρωπος— αναλύθηκε πλήρως από τους «κυβολόγους», και έχασε τη φρεσκάδα και τη μοναδικότητά του εξαιτίας των απομιμήσεων. Κατέληξε λοιπόν ένα όμορφο διακοσμητικό αντικείμενο για μερικούς και ένα υπέροχο οπτικό βοήθημα στη θεωρία των ομάδων για κάποιους άλλους.

Ωστόσο, αναπάντητο παραμένει ένα σημαντικό ερώτημα σχετικά με τον κύβο, και περιμένει ακόμη τον..., ας πούμε, υπολογιστή του: ποιο είναι το μικρότερο πλήθος κινήσεων (μισή στροφή ή τέταρτο στροφής των εδρών του κύβου) που αρκούν για να επαναφέρουμε την αρχική κατάσταση του κύβου ξεκινώντας από οποιαδήποτε «ανακατωμένη» κατάσταση; Αυτός ο αριθμός αναφέρεται συνήθως ως «το μήκος του αλγόριθμου του Θεού», ενός φανταστικού αλγόριθμου που δίνει πάντοτε τις συντομότερες λύσεις.[1] Κατ' αρχήν, ένας τέτοιος αλγόριθμος δεν θα διαφέρει πολύ από έναν γιγάντιο πίνακα όλων των δυνατών καταστάσεων του κύβου και των διαδικασιών επαναφοράς στην αρχική κατάσταση, που προκύπτουν μέσω μιας αναζήτησης περισσότερο ή λιγότερο οικονομικά οργανωμένης αλλά εξαντλητικής. Θεωρητικά, δεν υπάρχει δυσκολία να γράψουμε ένα πρόγραμμα υπολογιστή που θα εκτελεί αυτό το έργο, παρότι δεν θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το πρόβλημα είναι ότι το πλήθος των καταστάσεων και των διαδικασιών αποδεικνύεται υπερβολικά μεγάλο για να εκτελεστεί ένα τέτοιο πρόγραμμα σε πραγματικό χρόνο, ακόμη και αν χρησιμοποιήσουμε την καλύτερη τεχνολογία που έχουμε στη διάθεσή μας.

Η ανθρώπινη περιέργεια, όμως, δεν έχει όρια και πολλοί «κυβομανείς» εξακολουθούν να εργάζονται πάνω σε αλγόριθμους που και πραγματοποιήσιμοι είναι αλλά και πλησιάζουν στον μακροπρόθεσμο στόχο τους. Τα τελευταία χρόνια έγινε αξιοσημείωτη πρόοδος σ' αυτόν τον τομέα. Αλλά για να εκτιμήσουμε τα τελευταία επιτεύγματα, θα πρέπει να κατανοήσουμε πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε την εγγύτητα προς τον αλγόριθμο του Θεού και να δούμε τι είχε γίνει παλαιότερα σχετικά με αυτό το ζήτημα.

Το κατώτερο φράγμα

Είναι πολύ εύκολο να εκτιμήσουμε μια μέγιστη τιμή για το πλήθος των καταστάσεων του κύβου που δημιουργούνται μέσω μιας ακολουθίας n κινήσεων. Η πρώτη κίνηση μπορεί να γίνει με $6 \cdot 3 = 18$ διαφορετικούς τρόπους: μπορούμε να στρέψουμε οποιαδήποτε από τις έξι έδρες κατά οποιαδήποτε από τις τρεις δυνατές γωνίες (90°, 180°, και 270°). Έτσι, η πρώτη κίνηση δημιουργεί 18 διαφορετικές καταστάσεις. Η δεύτερη, και κάθε επόμενη κίνηση, μπορεί να επιλεγεί με $5 \cdot 3 = 15$ διαφορετικούς τρόπους, διότι δεν έχει νόημα να περιστρέψουμε την έδρα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη κίνηση. Επομένως, το πλήθος των διαδοχών δύο κινήσεων είναι $18 \cdot 15$, το πλήθος των διαδοχών τριών κινήσεων είναι $18 \cdot 15^2$, κ.ο.κ. Προσθέτοντας τη διαδοχή των «μηδέν κινήσεων», παίρνουμε $M_n = 1 + 18 \cdot (1 + 15 + ... + 15^{n-1})$ διαδοχές που αποτελούνται από n το πολύ κινήσεις. Αυτές οι κινήσεις δημιουργούν M_n το πολύ διαφορετικές καταστάσεις του κύβου —στην πραγματικότητα, λιγότερες από M_n, διότι διαφορετικές διαδοχές είναι δυνατό να δημιουργούν την ίδια κατάσταση, ακόμη και αν είναι πολύ σύντομες. Για παράδειγμα, εκτελώντας με οποιαδήποτε σειρά δύο διαδοχικές περιστροφές παράλληλων εδρών έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.[2]

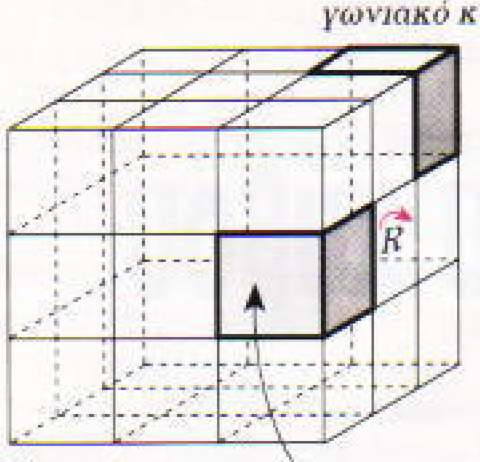
Ας υποθέσουμε τώρα ότι το συνολικό πλήθος των καταστάσεων του κύβου είναι N. Τότε είμαστε σίγουροι ότι για κάθε n τέτοιο ώστε $M_n < N$ θα υπάρχει μια κατάσταση που δεν θα είναι επιτεύξιμη αν ξεκινήσουμε από μια δεδομένη κατάσταση σε n ή λιγότερες κινήσεις —οι n κινήσεις δεν είναι δυνατό να δημιουργήσουν και τις N καταστάσεις.

Για να βρούμε ένα συγκεκριμένο κατώτερο φράγμα, πρέπει να υπολογίσουμε το N. Ακολουθώντας τη σύμβαση των «κυβιστών» θα ονομάζουμε «κυβίδια» τους μικρούς κύβους που σχηματίζουν τον κύβο του Rubik (βλ. Σχήμα 1). Υπάρχουν $8! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 8$ αναδιατάξεις των οκτώ κυβιδίων στις γωνίες του μεγάλου

1. Αυτός ο όρος, όπως και οι περισσότεροι «κυβολογικοί» όροι που εμφανίζονται στο άρθρο, έχει προταθεί, και χωρίς αμφιβολία δημιουργηθεί, από τον David Singmaster, τον βρετανό μαθηματικό που μπορούμε πραγματικά να τον αποκαλέσουμε «κυρίαρχη δύναμη του κυβισμού» (ένα είδος Πικάσσο για τον κύβο του Rubik!).

2. Ή ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα: δύο διαδοχικές ημιστροφές *γειτονικών* εδρών που επαναλαμβάνονται έξι φορές επαναφέρουν τον κύβο στην αρχική του κατάσταση. Επομένως, και οι τριάντα αυτές ακολουθίες των 12 κινήσεων ισοδυναμούν στην πραγματικότητα με τη «μηδενική» ακολουθία και δεν πρέπει να τις υπολογίσουμε.

γωνιακό κυβίδιο



Σχήμα 1

κύβου και, παρομοίως, 12! αναδιατάξεις των κυβιδίων των ακμών του. Πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη τους διαφορετικούς προσανατολισμούς των κυβιδίων μέσα στις «φωλιές» τους: ένα γωνιακό κυβίδιο μπορεί να περιστραφεί στη θέση του με τρεις διαφορετικούς τρόπους, κάτι που μας δίνει 3^8 δυνατότητες, και ένα κυβίδιο ακμής μπορεί να «αναποδογυρίσει» (να περιστραφεί κατά 180°), οπότε έχουμε 2^{12} δυνατότητες για τις 12 ακμές. Τελικά, καταλήγουμε στο γινόμενο $N_0 = 8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}$.

Στην πραγματικότητα, αυτό είναι το πλήθος όλων των δυνατών τρόπων ανασυναρμολόγησης του κύβου αφού τον διαλύσουμε τελείως. Όμως, μόνο ένα μέρος από αυτές τις δυνατότητες μπορούμε να πραγματοποιήσουμε ακολουθώντας τους κανόνες του παιχνιδιού —δηλαδή, περιστρέφοντας έδρες. Όπως και πολλές άλλες σπαζοκεφαλιές μετασχηματισμών (για παράδειγμα, οι τριάδες που εξετάσαμε στον Παιχνιδότοπο του προηγούμενου τεύχους), ο κύβος του Rubik έχει ένα σύνολο από *αναλλοίωτες* οι οποίες θέτουν συγκεκριμένους περιορισμούς στις δυνατές μορφές που μπορεί να πάρει ο κύβος. Θα αναφερθούμε σ' αυτές στο τελευταίο μέρος του άρθρου. Για την ώρα, θα δώσω μόνο το αποτέλεσμα: για να βρούμε το πλήθος N των καταστάσεων του κύβου που προκύπτουν μέσω όλων των δυνατών διαδικασιών ξεκινώντας από συγκεκριμένη σταθερή κατάσταση, πρέπει να διαιρέσουμε το N_0 με το 12: $N = N_0/12 \cong 4{,}3 \cdot 10^{19}$.

Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι $M_{16} < N < M_{17}$, άρα το μήκος του αλγόριθμου του Θεού δεν είναι μικρότερο από 17 κινήσεις. Αυτή η εκτίμηση μπορεί να βελτιωθεί ελαφρά αν παρατηρήσουμε ότι πλεονάζουν οι διαδικασίες που περιέχουν τρεις διαδοχικές στροφές παράλληλων εδρών. Ας συμβολίσουμε με R και L τα δεξιόστροφα τέταρτα στροφής της αριστερής και της δεξιάς, αντίστοιχα, έδρας του κύβου, και ας συμβολίσουμε με R^2 τη διπλή κίνηση RR. Η ακολουθία τριών κινήσεων RLR μπορεί, για παράδειγμα, να αντικατασταθεί με την R^2L ή την LR^2, επομένως αυτές οι τρεις διαδοχές πρέπει να μετρηθούν ως μία. Μπορούμε να βρούμε το πλήθος S_n των διαδοχών n κινήσεων λαμβάνοντας υπόψη τους πλεονασμούς αυτού του είδους —αγνοώντας δηλαδή τις διαδικασίες που περιλαμβάνουν τρεις διαδοχικές στροφές παράλληλων εδρών και απαριθμώντας ως μία διαδικασία όσες διαφέρουν μόνο κατά τη σειρά διαδοχής των «παράλληλων κινήσεων».

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι $S_n = 12S_{n-1} + 18S_{n-2}$ για $n \geq 3$, όπου $S_0 = 1$, $S_1 = 18$, $S_2 = 243$. Επαληθεύστε ότι, για $T_n = S_0 + S_1 + \ldots + S_n$, ισχύει $T_{17} < N < T_{18}$.

Από αυτό το πρόβλημα έπεται ότι από μερικές καταστάσεις του κύβου δεν μπορούμε να φτάσουμε στην αρχική σε λιγότερες από 18 κινήσεις.

Προς τον αλγόριθμο του Θεού

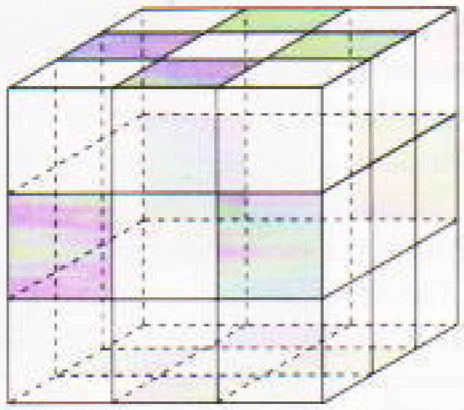
Κατά τη «χρυσή εποχή» του κύβου του Rubik δημιουργήθηκε μια πληθώρα αλγόριθμων ανασύνθεσης της αρχικής κατάστασης. Όσο διαφορετικοί και αν ήταν, σχεδόν όλοι μπορούσαν να χαρακτηριστούν με δύο λέξεις: «γεωμετρικοί» και «χειρωνακτικοί». Χειρωνακτικοί επειδή ήταν δημιουργημένοι «με το χέρι» και ήταν δυνατό να εκτελεστούν «με το χέρι», και γεωμετρικοί επειδή η σειρά της ανασύνθεσης εξαρτώνταν από τη γεωμετρία του κύβου. Στους περισσότερους απ' αυτούς τους αλγόριθμους, τα κυβίδια έπρεπε να οδηγηθούν ένα ένα στις επιθυμητές θέσεις τους, εκτός από τα τελευταία στάδια, στα οποία έπρεπε να δουλεύει κανείς με δύο ή τρία κυβίδια ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας ειδικά σχεδιασμένες, έξυπνες διαδικασίες. Οι γωνίες και οι ακμές, όπως και οι θέσεις και οι προσανατολισμοί, αντιμετωπίζονταν συνήθως ξεχωριστά· ακολουθώντας τα βήματα που προκαθόριζε ο αλγόριθμος, έβλεπε κανείς καθεμιά από τις έδρες του κύβου να αποκτά το ίδιο χρώμα.

Τα μήκη που έχουν αναφερθεί γι' αυτούς τους αλγόριθμους κυμαίνονται από αρκετές εκατοντάδες έως 70 περίπου κινήσεις. Στο βιβλίο του *Notes on Rubik's "Magic Cube"* (Σημειώσεις για τον «μαγικό κύβο» του Rubik [ένα από τα κλασικά έργα για την κυβολογία]), ο David Singmaster αναφέρει πως ένας άλλος διάσημος κυβολόγος, ο Morwen B. Thistlethwaite, επινόησε έναν αλγόριθμο των 63 το πολύ κινήσεων που έφερνε πρώτα στη θέση τους τις ακμές και μετά τις γωνίες. Αυτός είναι ο συντομότερος γεωμετρικός, χειροκίνητος αλγόριθμος για τον οποίο έχω ακούσει.

Ίσως δεν θα έπρεπε να ονομαστεί «χειροκίνητος»: ο δημιουργός του χρησιμοποίησε σε μεγάλο βαθμό τον υπολογιστή του για να επιλύσει τον κύβο, και υποθέτω ότι ένα τμήμα τουλάχιστον του αλγόριθμου πρέπει να αποδοθεί στο μηχάνημα. Και ήταν ο Morwen Thistlethwaite με τον υπολογιστή του εκείνος που σημείωσε πραγματική επιτυχία στο κυνήγι του θεϊκού αλγόριθμου. Το 1980 δημιούργησε (ή θα έπρεπε να πούμε δημιούργησαν;) έναν αλγόριθμο 52 κινήσεων που δεν ήταν ούτε γεωμετρικός ούτε χειρωνακτικός (με τη σημασία που προσδιορίσαμε προηγουμένως).

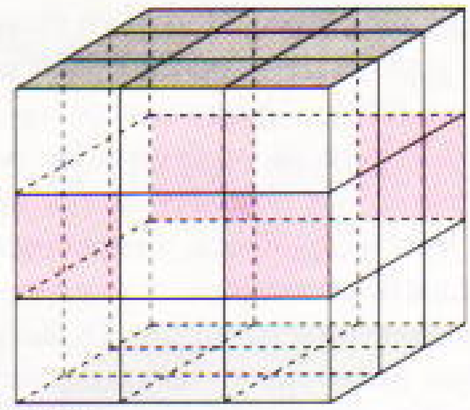
Ο αλγόριθμος αποτελούνταν από τέσσερα στάδια. Από τον ορισμό τους δεν προέκυπτε σαφής εικόνα του τρόπου με τον οποίο θα γινόταν η διευθέτηση των κυβιδίων. Στο πρώτο στάδιο προσδιοριζόταν απλώς ότι ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθούν όλοι οι τρόποι περιστροφής των εδρών. Στο δεύτερο, δύο παράλληλες έδρες (ας πούμε, η εμπρός και η πίσω) μπορούσαν να περιστραφούν μόνο κατά 180°, ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις κατά οποιαδήποτε γωνία. Στο τρίτο στάδιο έμπαινε ο ίδιος περιορισμός για ένα ακόμη ζεύγος παράλληλων εδρών (ας πούμε, τη δεξιά και την αριστερή), ενώ στο τέταρτο ο ίδιος περιορισμός εφαρμοζόταν και για το τρίτο ζεύγος εδρών —μόνο «μισές» στροφές ήταν πλέον επιτρεπτές. Προσθέτοντας για λόγους πληρότητας ένα «πέμπτο στάδιο» στο οποίο δεν επιτρέπονται περιστροφές μπορούμε να ορίσουμε ότι στόχος των σταδίων 1 έως 4 είναι να φέρουν τον κύβο σε μια θέση από την οποία μπορεί να έρθει στην αρχική του κατάσταση χρησιμοποιώντας μόνο τις διαδικασίες του επόμενου σταδίου. Έτσι, το τέταρτο στάδιο έχει στόχο να ολοκληρώσει τη λύση.

Ένα από τα χαρακτηριστικά αυτής της προσέγγισης που ευνοεί ιδιαίτερα την αντιμετώπισή της μέσω υπολογιστή είναι ότι όλα τα επιτεύγματα ενός σταδίου διατηρούνται αυτόματα και στα επόμενα (σκεφτείτε γιατί!). Στα Σχήματα 2-5 παρουσιάζονται γεωμετρικά τα αποτελέ-



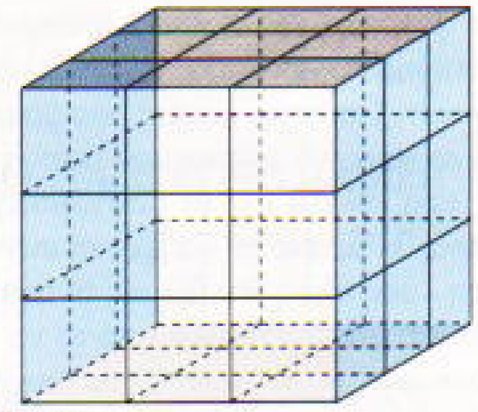
Σχήμα 2

Αν αυτός ήταν ο αρχικός χρωματισμός του κύβου, τότε θα αποκατασταθεί μετά το πρώτο στάδιο του αλγόριθμου του Thistlethwaite.



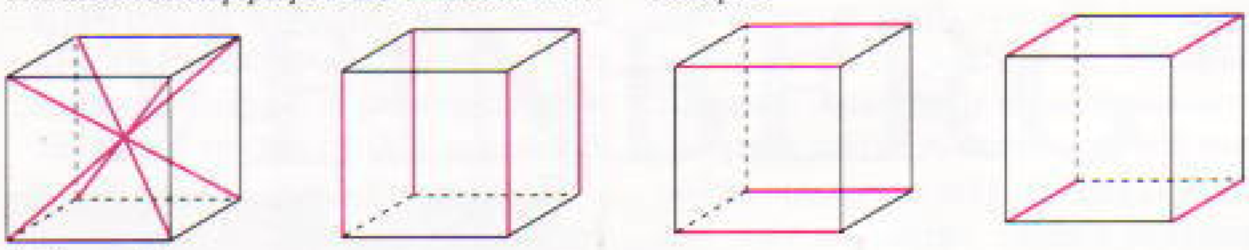
Σχήμα 3

Αν αυτός ήταν ο αρχικός χρωματισμός του κύβου, τότε το δεύτερο στάδιο θα τον αποκαταστήσει.



Σχήμα 4

Το τρίτο στάδιο του αλγόριθμου του Thistlethwaite πρέπει (1) να αποκαταστήσει τον αρχικό χρωματισμό που βλέπουμε στο Σχήμα 4, και (2) να τοποθετήσει τα γωνιακά κυβίδια έτσι ώστε όταν συνδέσουμε γωνίες αρχικά αντίθετες να προκύπτει κάποιο από τα τέσσερα σχήματα των ευθειών που βλέπουμε στα Σχήματα 5α έως 5δ (το αρχικό σχήμα είναι το 5α).



Σχήμα 5

σματα που προκύπτουν από κάθε στάδιο αυτού του αλγόριθμου (διαβάστε επίσης το τελευταίο μέρος του άρθρου). Πάντως, οι εικόνες δεν θα σας βοηθήσουν ιδιαίτερα να λύσετε τον κύβο με αυτή τη μέθοδο. Για να βρείτε τις κατάλληλες διαδικασίες είστε υποχρεωμένοι να αναζητήσετε τις τρέχουσες καταστάσεις του κύβου σας σε εκτεταμένους πίνακες με εκατοντάδες καταχωρίσεις. Δεν νομίζω ότι υπάρχουν πολλοί φανατικοί του είδους που θα τους άρεσε να το κάνουν αυτό, παρότι η όλη διαδικασία ίσως βρίσκεται στο πλαίσιο των ανθρώπινων («χειρωνακτικών») δυνατοτήτων.

Ας επιστρέψουμε όμως στην ιστορία των ρεκόρ του κύβου. Το 1982 μια ομάδα μαθητών του Donald Knuth επιβεβαίωσε την εικασία του Thistlethwaite ότι το τελευταίο στάδιο του αλγόριθμού του μπορεί να εκτελεστεί σε 15 αντί για 17 κινήσεις, και απέδειξε ότι το πλήθος αυτών των κινήσεων δεν είναι δυνατό να μειωθεί περισσότερο.

Το ρεκόρ των 50 κινήσεων κράτησε για επτά χρόνια, οπότε πέρασε στο προσκήνιο μια νέα γενιά υπολογιστών. Το 1989 ο ολλανδός «κυβιστής» Hans Kloosterman, ο «τελευταίος των Μοϊκανών» (ή τουλάχιστον ένας από τους ελάχιστους εναπομείναντες) δημοσίευσε την περιγραφή ενός αλγόριθμου 44 κινήσεων στο *Cubism for fun* (Κυβισμός για διασκέδαση), *ΚΓΔ* στη συνέχεια, ένα ενημερωτικό φυλλάδιο της Ολλανδικής Λέσχης Κυβιστών. (Είναι ίσως η μοναδική κυβιστική έκδοση και λέσχη που επιβίωσαν αφότου καταλάγιασε η τρέλα για τον κύβο.) Στη συνέχεια, χρειάστηκε δύο χρόνια περίπου για να βελτιώσει αυτό το ρεκόρ κατά δύο κινήσεις. Βασικά, ο Kloosterman ακολουθεί την ίδια πορεία με τον Thistlethwaite. Χρησιμοποιεί το ίδιο πλήθος κινήσεων —7 το πολύ— για το πρώτο στάδιο, αλλά μειώνει τις κινήσεις του δεύτερου σταδίου από 13 σε 10 (κάτι που το είχε προβλέψει ο δημιουργός της μεθόδου). Το σημαντικότερο είναι ότι εξαλείφει το τέταρτο στάδιο, που είναι αδύνατο να συντομευθεί περισσότερο, και αντ' αυτού υποδιαιρεί «γεωμετρικά» το τρίτο στάδιο (διατηρώντας τις ίδιες επιτρεπτές κινήσεις) σε (1) τοποθέτηση των κυβιδίων της πάνω και της κάτω έδρας στα αντίστοιχά τους στρώματα και σε (2) τοποθέτηση των υπόλοιπων κυβιδίων στην σωστή τους θέση. Αυτό το στάδιο απαιτεί το πολύ 25 κινήσεις συνολικά. Ο Kloosterman βεβαιώνει ότι αυτοί οι τρεις αριθμοί κινήσεων (7, 10, 25) είναι οι βέλτιστοι για τη δεδομένη διαδικασία.

Λίγο αργότερα, όμως, σε ένα γράμμα του David Singmaster προς τους εκδότες του *Quantum*, διάβασα ότι το 1991 κάποιος στην Ολλανδία —πιθανότατα ο Kloosterman— έφτασε στις 35 κινήσεις (θα πρέπει να βελτίωσε τη διαδικασία)! Έκτοτε, δεν υπήρχε καμία επιβεβαίωση αυτού του αποτελέσματος (τουλάχιστον στο φυλλάδιο *ΚΓΔ* δεν έχει), και ούτε έχουν αναφερθεί άλλες βελτιώσεις. Επομένως αυτή τη στιγμή γνωρίζουμε θετικά ότι το μήκος του αλγόριθμου του Θεού είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο 18 και το 42, και πιθανόν ανάμεσα στο 18 και το 35. Για ακριβέστερες εκτιμήσεις μπορούμε να κάνουμε μόνο εικασίες. Υπάρχει όμως κάτι στο οποίο μπορούμε να βασίσουμε τις εικασίες μας: στο τεύχος του Απριλίου του 1992 του *ΚΓΔ* ο Herbert Kociemba από το Ντάρμσταντ της Γερμανίας περιέγραψε έναν αλγόριθμο ο οποίος έχει επιλύσει όλες τις αρχικές καταστάσεις που έχουν εμφανιστεί στο περιοδικό, σε 21 το πολύ κινήσεις!

Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι αυτό *δεν* σημαίνει ότι το μήκος του αλγόριθμου του Kociemba είναι 21. Δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι κάποια άγνωστη αρχική κατάσταση του κύβου δεν θα απαιτήσει περισσότερες κινήσεις, ακόμη και με αυτό το πρόγραμμα. Πάντως, τέτοια κατάσταση δεν έχει βρεθεί μέχρι στιγμής.

Λίγα λόγια για το πρόγραμμα. Ο Kociemba εξάλειψε το δεύτερο και το τέταρτο στάδιο του αλγόριθμου του Thistlethwaite. Έτσι, στόχος του πρώτου του σταδίου είναι να αποκαταστήσει το χρωματισμό του Σχήματος 3 (υποθέτοντας ότι, πριν από το ανακάτεμά του, ο κύβος ήταν χρωματισμένος με αυτόν τον τρόπο), ενώ το δεύτερο στάδιο αποκαθιστά τον αρχικό χρωματισμό χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε στροφή των οριζόντιων εδρών και αποκλειστικά ημιστροφές για τις άλλες τέσσερις έδρες. Το συνολικό πλήθος των καταστάσεων που πρέπει να εξεταστούν σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία εξακολουθεί να υπερβαίνει τις δυνατότητες των σημερινών υπολογιστών. Έτσι το πρόγραμμα του Kociemba, αντί να κάνει εξαντλητική αναζήτηση, αντιμετωπίζει κάθε δεδομένη περίπτωση μεμονωμένα, ελέγχοντας αν οι διαδικασίες που παράγει επιτρέπουν να ολοκληρωθεί το τρέχον στάδιο (πρώτο ή δεύτερο) σε συγκεκριμένο προκαθορισμένο πλήθος κινήσεων. Οπότε οι λύσεις που βρίσκει είναι οι «αρκετά σύντομες» (και είναι πράγματι!) αλλά όχι οι συντομότερες (φυσικά, θα μπορούσε να βρει τη συντομότερη λύση αλλά δεν θα μας το πει).

Αν και απέχουν πολύ από το να είναι οριστικά, τα αποτελέσματα του Kociemba δείχνουν ότι κατά πάσα πιθανότητα το μήκος του αλγόριθμου του Θεού είναι αρκετά κοντά στο είκοσι, κάτι που το είχαν υποθέσει οι ειδικοί στη θεωρία των ομάδων από την εποχή των ημερών δόξας του κύβου.

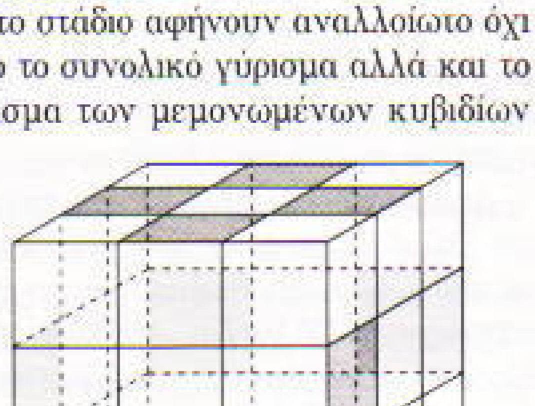
Οι αναλλοίωτες στον κύβο του Rubik

Ανέφερα προηγουμένως ότι ξεκινώντας από τη συνηθισμένη αρχική κατάσταση και περιστρέφοντας έδρες μπορούμε να καταλήξουμε σε μερικές μόνο απ' όλες τις δυνατές καταστάσεις του κύβου. Αυτές τις καταστάσεις —ας τις ονομάσουμε *προσπελάσιμες*— μπορούμε να τις περιγράψουμε με όρους αναλλοιώτων. Οι αναλλοίωτες είναι συγκεκριμένες τιμές που εξαρτώνται από τη διάταξη των κομματιών του κύβου και διατηρούνται κατά την περιστροφή των εδρών. Ο κύβος έχει τρεις αναλλοίωτες που περιορίζουν τους προσπελάσιμους προσανατολισμούς των κυβιδίων των ακμών και των γωνιών και τις μεταθέσεις τους.

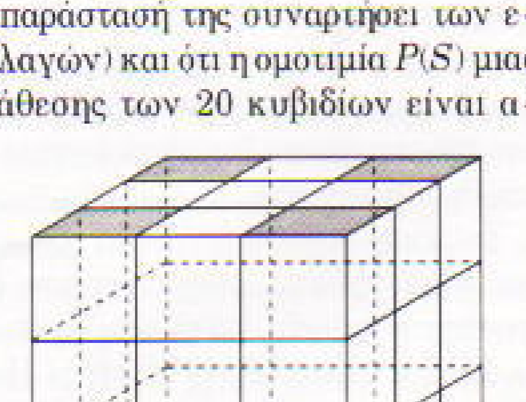
Ας ξεκινήσουμε με τους προσανατολισμούς των ακμών. Θεωρούμε το χρωματισμό των ακμών του Σχήματος 2—το *χρωματισμό αναφοράς*. Υποθέτουμε ότι αρχικά τα κυβίδια των ακμών είναι χρωματισμένα με αυτόν τον τρόπο. Ανακατεύουμε τώρα τον κύβο (αλλά απομνημονεύουμε το χρωματισμό αναφοράς). Ορίζουμε ότι το *γύρισμα* κάθε κυβιδίου ακμής είναι 0° ή 180°, ανάλογα με το αν ο χρωματισμός στις έδρες του συμπίπτει με το χρωματισμό αναφοράς. Το *συνολικό γύρισμα* $F(S)$ μιας κατάστασης S είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος των 12 μεμονωμένων γυρισμάτων δια 360 (όταν έχουμε γωνίες εκ περιστροφής χρησιμοποιούμε συχνά το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης) —με άλλα λόγια, $F(S) = 0°$ όταν το πλήθος των γυρισμένων κυβιδίων είναι άρτιο, και $F(S) = 180°$ όταν είναι περιττό. Το συνολικό γύρισμα είναι η πρώτη μας αναλλοίωτη.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα τέταρτο στροφής μιας έδρας. Μπορεί να επηρεάσει το γύρισμα μόνο όσων κυβιδίων ανήκουν σε αυτήν. Όμως είναι φανερό ότι δεν αλλάζουν τα γυρίσματα αν περιστρέψουμε, για παράδειγμα, την πάνω έδρα, διότι η περιστροφή αυτή μεταφέρει το χρωματισμό αναφοράς της συγκεκριμένης έδρας στον εαυτό του. Το ίδιο επιχείρημα μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για την κάτω, τη δεξιά, και την αριστερή έδρα, όπως επίσης και για τις ημιστροφές τής εμπρός και της πίσω έδρας. Όσο για τα τέταρτα στροφής τής εμπρός (ή της πίσω) έδρας, επιχειρηματολογούμε ως εξής: ας υποθέσουμε ότι εναλλάσσουμε το χρωματισμό αναφοράς των δύο κατακόρυφων ακμών αυτής της έδρας (Σχήμα 6). Τότε το γύρισμα σε δύο ακριβώς κυβίδια ακμών (αυτών που έχουμε αλλάξει) θα μεταβληθεί κατά 180°, επομένως το συνολικό γύρισμα σε σχέση με τον νέο χρωματισμό θα παραμείνει ίσο με το αρχικό. Τώρα, με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, βλέπουμε ότι οι περιστροφές της εμπρός έδρας διατηρούν σταθερό το τροποποιημένο συνολικό γύρισμα, και επομένως διατηρούν σταθερό και το αρχικό (που ισούται με αυτό).

Για τις προσπελάσιμες καταστάσεις έχουμε $F(S) = 0°$, επειδή αρχικά καμία ακμή δεν είναι «γυρισμένη». Υπάρχουν 2^{12} δυνατοί τρόποι να γυρίσουμε τις ακμές του κύβου, αλλά λόγω του περιορισμού μας μόνο οι μισές από αυτές τις καταστάσεις είναι προσπελάσιμες. Όπως προκύπτει από την προηγούμενη απόδειξη, όλες οι διαδικασίες που επιτρέπει ο αλγόριθμος του Thistlethwaite μετά το πρώτο στάδιο αφήνουν αναλλοίωτο όχι μόνο το συνολικό γύρισμα αλλά και το γύρισμα των μεμονωμένων κυβιδίων των ακμών. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στόχος του πρώτου σταδίου είναι να «επαναφέρει το γύρισμα» των κυβιδίων των ακμών (σχετικά προς το χρωματισμό αναφοράς). Υπάρχουν 2^{11} = 2.048 καταστάσεις που πρέπει να εξεταστούν σε αυτό το στάδιο.



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Η αναλλοίωτη των γωνιακών προσανατολισμών ορίζεται με σχεδόν όμοιο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση ο χρωματισμός αναφοράς είναι αυτός του Σχήματος 7. Για να συμπέσει με τη θέση αναφοράς ένα κυβίδιο που βρίσκεται σε άλλη κατάσταση, πρέπει να στραφεί γύρω από την αντίστοιχη διαγώνιο του κύβου κατά 0°, 120°, ή −120°. Η γωνία περιστροφής ονομάζεται *συστροφή* του κυβιδίου. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος και των οκτώ συστροφών δια 360 μας δίνει τη *συναλική συστροφή* $T(S)$ της δεδομένης κατάστασης S. Λαμβάνει τρεις τιμές: 0°, 120°, και −120° (ή 240°, αν προτιμάτε).

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι η $T(S)$ είναι αναλλοίωτη κατά τις περιστροφές των εδρών και ότι και οι οκτώ «μεμονωμένες» συστροφές παραμένουν αναλλοίωτες κατά το τρίτο και το τέταρτο στάδιο του αλγόριθμου του Thistlethwaite.

Για τις προσπελάσιμες καταστάσεις, $T(S) = 0°$, και το πλήθος των δυνατών «συστροφών» των γωνιών είναι 3^7.

Η τρίτη αναλλοίωτη αφορά μόνο τις θέσεις των 12 + 8 = 20 κινητών κυβιδίων και όχι τον προσανατολισμό τους, ή, για να το διατυπώσουμε μαθηματικά, τις μεταθέσεις των κυβιδίων. Κάθε μετάθεση ενός συνόλου αντικειμένων μπορεί να παρασταθεί ως μια σειρά διαδοχικών εναλλαγών δύο αντικειμένων. Η ομοτιμία του πλήθους αυτών των εναλλαγών ονομάζεται *ομοτιμία της δεδομένης μετάθεσης*. Μπορεί να αποδειχτεί ότι η ομοτιμία μιας μετάθεσης είναι καλά ορισμένη (δηλαδή δεν εξαρτάται από την αναπαράστασή της συναρτήσει των εναλλαγών) και ότι η ομοτιμία $P(S)$ μιας μετάθεσης των 20 κυβιδίων είναι αναλλοίωτη κατά τις περιστροφές των εδρών. Θεωρώντας δεδομένη την πρώτη πρόταση, μπορείτε να αποδείξετε ως

Η συνέχεια στη σελ. 68 ⇨