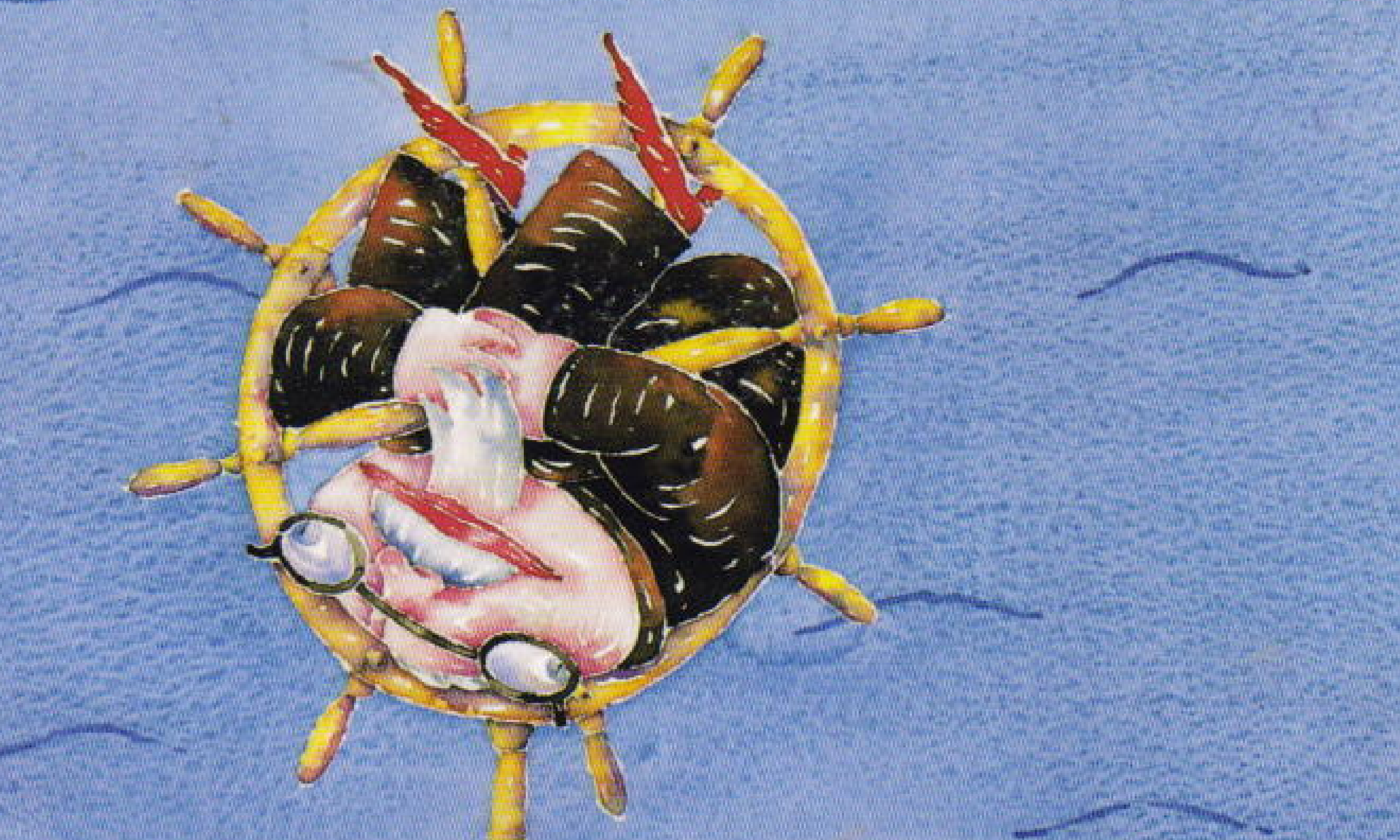
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1995

1.400 ΔΡΧ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

ΠΙΝΑΚΟΘΗΚΗ Ω

Εθνικό Μουσείο Αμερικανικής Τέχνης των ΗΠΑ, Ουάσινγκτον

Εικόνα αφρικανικής ζούγκλας:
Αν οι κυρίες γνώριζαν πως τα φίδια δεν θα τις δάγκωναν, δεν θα τα είχαν βλάψει.
Αν τα φίδια ήξεραν ότι οι κυρίες δεν θα τα έβλαπταν, δεν θα τις είχαν δαγκώσει.
(1989) του Thornton Dial

Πώς είναι δυνατόν δύο είδη να κατοικούν στην ίδια οικολογική φωλιά κι ωστόσο να παρανοούν το ένα το άλλο τόσο βαθιά; Ας υποθέσουμε πως τα πλευρά φιδιού δεν αποτελούν ορεκτικό στην κουζίνα αυτών των κυριών· γνωρίζουμε δε ότι τα φίδια δεν συνηθίζουν να τρώνε ανθρώπους. Η ειρωνεία όμως εδώ είναι ότι η σχέση μη θηρευτή- μη θηράματος εκφράζεται ως *διπλή* σχέση θηρευτή-θηράματος: κάθε συμμετέχων είναι τόσο θηρευτής, όσο και θήραμα! Ή, ίσως, θα έπρεπε να πούμε: προσβάλλων και προσβαλλόμενος, αφού κανένα όφελος δεν προκύπτει από αυτή τη σύγκρουση. Κανείς δεν απέρχεται με γεμάτο στομάχι. Στη χειρότερη περίπτωση, κανένας δεν μένει ζωντανός.

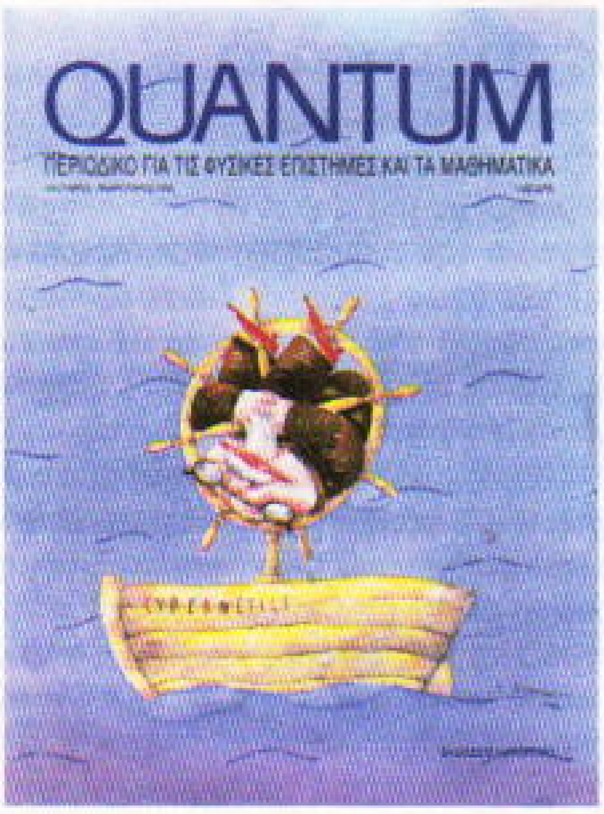
Πρέπει να αναρωτηθούμε πώς θα μπορούσε να έχει αποφευχθεί αυτή η άσκοπη τραγωδία. Όταν τα φίδια όρθωσαν τα κεφάλια τους προς αυτοάμυνα, ποιος ήταν ο λόγος για τον οποίο οι κυρίες το ερμήνευσαν αυτό ως απειλή; Όταν οι κυρίες στρίγγλισαν, γιατί τα φίδια δεν κατάλαβαν ότι οι κυρίες φοβήθηκαν, παρά απλώς σύρθηκαν μακριά; Σύμφωνα με τα αξέχαστα λόγια του δεσμοφύλακα στην κλασική ταινία *Cool Hand Luke*, «Αυτό δεν είναι παρά έλλειψη επικοινωνίας». Απ' την άλλη, όμως, ίσως και να υπήρχε επικοινωνία ανάμεσα στις κυρίες και τα φίδια, αλλά ο θόρυβος που προέκυψε από τους ενστικτώδεις αμοιβαίους φόβους τους κατέπνιξε τα μηνύματα. Αυτό είναι κάτι που, ως γνωστόν, συμβαίνει ακόμη και ανάμεσα σε άτομα του ίδιου είδους.

Αυτό το ακατάστατο θέαμα θηρευτών και θηραμάτων έχει αποκατασταθεί στο άρθρο της σελίδας 25. Επιπλέον, στο δοκίμιο για τον Norbert Wiener, ιδρυτή της επιστήμης της κυβερνητικής, παρουσιάζονται ζητήματα της θεωρίας επικοινωνίας (σελ. 51).

QUANTUM

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ / ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1995

ΤΟΜΟΣ 2 / ΤΕΥΧΟΣ 1



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Ο μειλίχιος κυβερνήτης του όμορφου καραβιού *Cybernetics* είναι ο Norbert Wiener, ο οποίος επινόησε αυτόν τον όρο για τη μελέτη του ελέγχου και της επικοινωνίας στους οργανισμούς, τις αυτόματες μηχανές και τα συστήματα. (Ο όρος προέρχεται από την ελληνική λέξη κυβερνώ/κυβερνήτης.) Ο Wiener ήταν ένας από τους κυριότερους παράγοντες ανάπτυξης της *κυβερνητικής*, μιας επιστήμης που συνενώνει πολλούς επιστημονικούς κλάδους. Οι εργασίες του πάνω στην κίνηση Brown, τη θεωρία δυναμικού και τη γενικευμένη αρμονική ανάλυση τον τοποθετούν ανάμεσα στους μεγάλους μαθηματικούς του αιώνα μας.

Στις τριακόσιες δημοσιεύσεις του έχει ασχοληθεί, εκτός από τα μαθηματικά, με τη φιλοσοφία, την κβαντομηχανική, τη νευρολογία, τη θρησκεία. Επιπλέον, έχει γράψει και κριτικές βιβλίων, επιστημονική φαντασία και —φημολογείται— αστυνομικές ιστορίες με ψευδώνυμο.

Στη σελίδα 51 μπορείτε να διαβάσετε το πρώτο μέρος ενός δοκιμίου που αναφέρεται στη ζωή και το έργο αυτού του καινοτόμου στοχαστή.

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Ο ΚΟΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

Τι είναι ο χρόνος;

Και ευχές από το περιοδικό για μια ευτυχισμένη νέα χρονιά

ΚΑΘΕ ΜΑΘΗΤΗΣ ΓΝΩΡΙΖΕΙ ΤΙ ΕΙΝΑΙ Ο ΧΡΟΝΟΣ. ΩΣΤΟ-σο, για κάθε μαθητή έρχεται η στιγμή να αντιμετωπίσει για πρώτη φορά τα παράδοξα που βρίσκονται πίσω απ' ό,τι κατανοούμε καθημερινά ως χρόνο. Θυμάμαι πως όταν ήμουν παιδί με μάγευε το ερώτημα αν ο χρόνος μπορούσε να τελειώσει. Πρέπει να έχει ένα τέλος, διότι διαφορετικά πώς είναι δυνατό να συλλάβουμε την απεραντοσύνη του κόσμου; Αν, όμως, έχει τέλος, τι συμβαίνει έπειτα;

Μελετώ το πρόβλημα του χρόνου για μεγάλο διάστημα της ενήλικης ζωής μου. Πρέπει, όμως, να παραδεχτώ εξαρχής ότι δεν βρίσκομαι πιο κοντά στην απάντηση αυτής της παιδικής απορίας μου. Μάλιστα, ακόμη και έπειτα απ' όλα αυτά τα χρόνια, δεν νομίζω ότι μπορώ να απαντήσω καν στην απλή ερώτηση «Τι είδους πράγμα είναι ο χρόνος;». Ίσως, τα λίγα που έχω να πω για το θέμα είναι να εξηγήσω πώς το μυστήριο βάθυνε για μένα ενώ προσπαθούσα να το αντιμετωπίσω.

Ένα άλλο παράδοξο σχετικά με το χρόνο που άρχισε να με ανησυχεί αφότου μεγάλωσα είναι το εξής: Όλοι γνωρίζουμε ότι τα ρολόγια μετρούν το χρόνο. Τα ρολόγια, όμως, είναι σύνθετα φυσικά συστήματα και κατά συνέπεια υπόκεινται σε ατέλειες, φθορές, ακόμη και διακοπές του ηλεκτρικού ρεύματος. Αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε πραγματικά ρολόγια, τα συγχρονίσουμε και τα αφήσουμε να λειτουργήσουν, είναι βέβαιο ότι έπειτα από λίγο θα δείχνουν διαφορετική ώρα.

Ποιο, λοιπόν, από αυτά μετρά τον πραγματικό χρόνο; Κι ακόμη, υπάρχει μοναδικός, απόλυτος χρόνος, ο οποίος είναι ο αληθινός χρόνος του κόσμου, μολονότι ένα πραγματικό ρολόι τον μετράει ατελώς; Φαίνεται ότι πρέπει να υπάρχει, αλλιώς τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα ρολόι πάει μπροστά ή πίσω; Από την άλλη, μπορεί αυτό που ονομάζουμε απόλυτο χρόνο να υπάρχει αν δεν μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια;

Η πίστη σ' έναν απόλυτο χρόνο γεννά άλλα παράδοξα. Ο χρόνος θα κυλούσε ακόμη κι αν δεν υπήρχε τίποτε στο Διάστημα; Αν τα πάντα σταματούσαν, αν δεν συνέβαινε τίποτε, ο χρόνος θα συνέχιζε να κυλάει; Απ' την άλλη μεριά, ίσως δεν υπάρχει μοναδικός, απόλυτος χρόνος. Στην περίπτωση αυτή χρόνος είναι μόνο αυτό που μετρούν τα ρολόγια και, εφόσον υπάρχουν πολλά ρολόγια και τελικά όλα διαφωνούν, θα υπάρχουν πολλοί χρόνοι. Χωρίς απόλυτο χρόνο, το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι πως ο χρόνος καθορίζεται σε σχέση με το τυχαίο ρολόι που διαλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε.

Αυτή ίσως είναι μια ελκυστική άποψη, διότι δεν μας υποχρεώνει να πιστέψουμε σε μια απόλυτη ροή του χρόνου, που δεν μπορούμε να την παρατηρήσουμε. Αρκούν, όμως, λίγες επιστημονικές γνώσεις για να διαπιστώσουμε πως η άποψη αυτή μας οδηγεί σ' ένα πρόβλημα. Η έννοια του χρόνου είναι θεμελιώδης στη φυσική και δεν μπορούμε να αντιληφθούμε την κίνηση χωρίς το χρόνο. Ας πάρουμε τον απλούστερο νόμο κίνησης, που ανακαλύφθηκε από τον Γαλιλαίο και τον Καρτέσιο και εκφράστηκε μαθηματικά από τον Νεύτωνα: ένα σώμα στο οποίο δεν δρα καμιά δύναμη κινείται σε ευθεία γραμμή και με σταθερή ταχύτητα. Για να κατανοήσουμε τι εκφράζει αυτός ο νόμος πρέπει να γνωρίζουμε τι σημαίνει κινούμαι με σταθερή ταχύτητα. Αυτό προϋποθέτει την έννοια του χρόνου, αφού κάποιος που κινείται με σταθερή ταχύτητα διανύει ίσα διαστήματα μήκους σε ίσους χρόνους.

Μπορούμε λοιπόν να ρωτήσουμε, σε σχέση με ποιο χρόνο είναι σταθερή η ταχύτητα; Πρόκειται για το χρόνο κάποιου συγκεκριμένου ρολογιού; Αν είναι έτσι, πώς γνωρίζουμε ποιου ρολογιού; Είναι απαραίτητο να επιλέξουμε διότι, όπως ήδη παρατηρήσαμε, τελικά όλα τα πραγματικά ρολόγια θα αποσυγχρονιστούν μεταξύ τους. Ή μήπως πρόκειται για κάποιον ιδανικό, απόλυτο χρόνο; Αυτό λύνει το πρόβλημα της επιλογής ρολογιού, εγείρει, όμως, ένα άλλο, διότι κανένα πραγματικό ρολόι δεν μετράει τέλεια τον υποθετικό, ιδανικό χρόνο. Πώς μπορούμε πραγματικά να είμαστε βέβαιοι ότι η απόφανση του νόμου είναι σωστή, αν δεν έχουμε καμία ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον απόλυτο, ιδανικό χρόνο; Πώς μπορούμε να ξεχωρίσουμε αν μια αύξηση η μείωση της ταχύτητας ενός σώματος σε κάποιο πείραμα οφείλεται στην αποτυχία του νόμου ή απλώς στην ατέλεια του ρολογιού που χρησιμοποιούμε;

Εξαιτίας αυτού ακριβώς του προβλήματος, όταν ο Νεύτων διατύπωσε τους νόμους της κίνησης προτίμησε να θεωρήσει δεδομένη την ύπαρξη ενός απόλυτου χρόνου. Έτσι εναντιώθηκε στις απόψεις των συγχρόνων του, όπως ο Καρτέσιος και ο Λάιμπνιτς, που υποστήριζαν ότι ο χρόνος πρέπει να είναι απλώς μια έκφανση των σχέσεων μεταξύ πραγματικών αντικειμένων και πραγματικών διαδικασιών του κόσμου. Ίσως αυτό είναι καλύτερη φιλοσοφία, όμως —όπως ο Νεύτων γνώριζε καλύτερα απ' τον καθέναν εκείνη την εποχή— οι νόμοι της κίνησης, περιλαμβανομένου και αυτού που συζητάμε, έχουν νόημα μόνο αν δεχτούμε την ύπαρξη απόλυτου χρόνου. Αναφέρεται, μάλιστα, ότι ο Αϊνστάιν, που ανέτρεψε τη θεωρία του Νεύτωνα για το χρόνο, επαινούσε το «κουράγιο και την κρίση» του Νεύτωνα να αντιπαρατεθεί στο εμφανώς καλύτερο φιλοσοφικό επιχείρημα και να προβεί στις υποθέσεις που του ήταν απαραίτητες ώστε να ανακαλύψει μια φυσική που έχει νόημα.

Μπορείτε να κατανοήσετε την αντίθεση μεταξύ του χρόνου ως απόλυτου και προϋπάρχοντος και του χρόνου ως έκφανσης των σχέσεων των πραγμάτων με το ακόλουθο παράδειγμα: Φανταστείτε ότι ο κόσμος είναι η σκηνή πάνω στην οποία πρόκειται να παίξει ένα κουαρτέτο εγχόρδων ή ένα συγκρότημα τζαζ, και κάποιος έχει ξεχάσει, μετά την τελευταία πρόβα, να κλείσει έναν μετρονόμο που βρίσκεται στη γωνία του παλκοσένικου. Ο μετρονόμος που χτυπάει στην άδεια αίθουσα είναι ο υποθετικός απόλυτος χρόνος του Νεύτωνα: προχωρά επ' άπειρον με συγκεκριμένο ρυθμό, ανεξάρτητα απ' οτιδήποτε υπάρχει ή συμβαίνει στο σύμπαν. Οι μουσικοί βγαίνουν, ξαφνικά το σύμπαν δεν είναι άδειο αλλά βρίσκεται σε κίνηση, και ξεκινούν να υφαίνουν τη ρυθμική τους τέχνη. Τώρα, ο χρόνος που αναδύεται από τη μουσική τους δεν είναι ο απόλυτος προϋπάρχων χρόνος του μετρονόμου, αλλά ένας σχετικός χρόνος που βασίζεται στις πραγματικές σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μουσικών σκέψεων και φράσεων. Γνωρίζουμε ότι είναι έτσι, διότι οι μουσικοί δεν ακούνε το μετρονόμο, ακούνε ο ένας τον άλλον. Ο μετρονόμος, όμως, χτυπάει συνεχώς στη γωνιά του χωρίς να τον ακούνε οι μουσικοί. Για τον Νεύτωνα, ο χρόνος των μουσικών είναι μια σκιά αυτού που μετράει ο μετρονόμος, του αληθινού, απόλυτου χρόνου. Κάθε ρυθμός που ακούμε (καθώς και τα χτυπήματα κάθε πραγματικού ρολογιού), απλώς σκιαγραφεί ατελώς τον αληθινό απόλυτο χρόνο. Για τον Λάιμπνιτς, ωστόσο, ο μετρονόμος είναι μια φαντασίωση που δεν μας αφήνει να δούμε αυτό που πραγματικά συμβαίνει, δηλαδή ότι ο μόνος χρόνος είναι ο ρυθμός που υφαίνουν οι μουσικοί.

Αν δεν υπάρχει απόλυτος χρόνος, τότε οι νόμοι της κίνησης του Νεύτωνα δεν έχουν νόημα. Πρέπει να τους αντικαταστήσει ένας νόμος διαφορετικής μορφής που να έχει νόημα αν ο χρόνος μετριέται με οποιοδήποτε ρολόι. Δηλαδή, αυτό που χρειάζεται είναι ένας δημοκρατικός νόμος παρά ένας απολυταρχικός. Και το νόμο αυτό κατάφερε να τον ανακαλύψει ο Αϊνστάιν. Είναι πραγματικά ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας το ότι βρέθηκε τρόπος να εκφραστούν οι νόμοι της κίνησης έτσι ώστε να έχουν νόημα οποιοδήποτε ρολόι κι αν χρησιμοποιεί αυτός που προσπαθεί να τους προσδώσει σημασία. Κατά παράδοξο τρόπο, αυτό συμβαίνει αν εξαλείψουμε το χρόνο από τις βασικές εξισώσεις της θεωρίας. Το αποτέλεσμα είναι ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για το χρόνο γενικά και αφηρημένα, μπορούμε μόνο να περιγράφουμε πώς αλλάζει το σύμπαν με το πέρασμα του χρόνου αν πρώτα καθορίσουμε στη θεωρία τις ακριβείς φυσικές διατάξεις που θα χρησιμοποιηθούν ως ρολόγια για τη μέτρηση του χρόνου.

Αν, λοιπόν, όλα είναι ξεκάθαρα, γιατί υποστηρίζω ότι δεν γνωρίζω τι είναι ο χρόνος; Το πρόβλημα είναι ότι η γενική σχετικότητα αποτελεί μόνο το μισό τμήμα της επανάστασης της φυσικής στον 20ό αιώνα. Υπάρχει επίσης η κβαντική θεωρία. Και η κβαντική θεωρία, η οποία αναπτύχθηκε για να εξηγήσει τα άτομα και τα μόρια, στηρίζεται πλήρως στη νευτώνεια φυσική, στη νευτώνεια αντίληψη περί απόλυτου, ιδανικού χρόνου.

Στη θεωρητική φυσική, λοιπόν, έχουμε όχι μία αλλά δύο θεωρίες, τη σχετικότητα και την κβαντομηχανική, που βασίζονται σε δύο διαφορετικές αντιλήψεις για το χρόνο. Το κομβικό πρόβλημα της θεωρητικής φυσικής σήμερα είναι να συνδυάσουμε τη γενική σχετικότητα και την κβαντομηχανική σε μία και μοναδική θεωρία της φύσης, η οποία θα μπορέσει τελικά να αντικαταστήσει τη νευτώνεια αντίληψη περί χρόνου. Και το κομβικό εμπόδιο για να επιτευχθεί αυτό είναι ακριβώς ότι οι δύο θεωρίες περιγράφουν τον κόσμο με όρους διαφορετικής κατανόησης του χρόνου: καταστάσεις που η αμοιβαία συνύπαρξή τους αποκλείεται στην κοινή φυσική, μπορούν να συνυπάρχουν στην κβαντική θεωρία· διότι τα συστήματα μπορούν να οδηγηθούν σε καταστάσεις στις οποίες οι διαφορετικές κλασικές πιθανότητες συνυπάρχουν όλες ως δυνατότητες, καθεμία απ' τις οποίες μπορεί να πραγματοποιηθεί σε μια επόμενη χρονική στιγμή. Έτσι, στην κβαντική θεωρία έχουμε να αντιμετωπίσουμε όχι μόνο την ελευθερία επιλογής διαφορετικών ρολογιών για τη μέτρηση του χρόνου αλλά και τη δυνάμει πραγμάτωση σε κάθε ξεχωριστή κατάσταση όλων των διαφορετικών πιθανών ρολογιών που δυνητικά υπάρχουν στην κβαντική θεωρία. Το πρώτο μάθαμε να το αντιμετωπίζουμε από τον Αϊνστάιν. Το δεύτερο, μέχρι τώρα, βρίσκεται πέρα από τα όρια της φαντασίας μας.

Το πρόβλημα, επομένως, για το τι είναι ο χρόνος παραμένει άλυτο. Τα πράγματα μάλιστα είναι ακόμη χειρότερα, διότι η θεωρία της σχετικότητας φαίνεται να απαιτεί και άλλες αλλαγές στην αντίληψη του χρόνου. Μια απ' αυτές αφορά την αρχική μου ερώτηση, δηλαδή αν ο χρόνος μπορεί να έχει τέλος. Πράγματι, η γενική σχετικότητα είναι μια θεωρία στην οποία ο χρόνος μπορεί να ξεκινά και να σταματά.

Κάτι τέτοιο συμβαίνει στο εσωτερικό μιας μαύρης τρύπας. Οι μαύρες τρύπες δημιουργούνται από την κατάρρευση ενός άστρου μεγάλης μάζας αφού καούν τα πυρηνικά του καύσιμα. Όταν δεν δημιουργεί πια θερμότητα, τίποτε δεν μπορεί να σταματήσει την κατάρρευσή του κάτω από τη δύναμη της ίδιας του της βαρύτητας. Αυτή η διαδικασία ανατροφοδοτεί τον εαυτό της, διότι όσο μικρότερο γίνεται το άστρο τόσο ισχυρότερη γίνεται και η δύναμη με την οποία τα μέρη του έλκουν αμοιβαία το ένα το άλλο. Έτσι φτάνει κάποια στιγμή που για να ξεφύγει κάτι από την επιφάνεια του άστρου πρέπει να κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Εφόσον όμως δεν μπορεί να ταξιδέψει ταχύτερα από το φως, τίποτε δεν μπορεί να ξεφύγει απ' το άστρο· γι' αυτό και το ονομάζουμε μαύρη τρύπα.

Συγκρατήστε, όμως, λίγο τη φαντασία σας και προσέξτε τι συμβαίνει σ' αυτό το ίδιο το άστρο. Από τη στιγμή που γίνεται αόρατο για μας, περνά μόνο λίγος χρόνος ώσπου να συμπιεστεί ολόκληρο σε ένα σημείο έχοντας άπειρη πυκνότητα ύλης και δημιουργώντας άπειρο βαρυτικό πεδίο. Το πρόβλημα είναι τι συμβαίνει έπειτα. Ή καλύτερα, το πρόβλημα είναι τι σημαίνει σε μια τέτοια περίπτωση το «έπειτα». Αν ο χρόνος αποκτά έννοια μόνο απ' τη λειτουργία των ρολογιών, τότε πρέπει να πούμε ότι ο χρόνος σταματά μέσα σε κάθε μαύρη τρύπα. Διότι από τη στιγμή που το άστρο θα φτάσει στην κατάσταση άπειρης πυκνότητας και βαρυτικού πεδίου, καμιά περαιτέρω αλλαγή δεν μπορεί να συμβεί και καμιά φυσική διαδικασία δεν μπορεί να συνεχιστεί και να δώσει έννοια στο χρόνο. Έτσι, η θεωρία αποφαίνεται απλώς ότι ο χρόνος σταματά.

Το πρόβλημα είναι ακόμη δραματικότερο, διότι η γενική σχετικότητα επιτρέπει σε ολόκληρο το σύμπαν να καταρρεύσει σαν μια μαύρη τρύπα, περίπτωση στην οποία ο χρόνος σταματά παντού. Επιτρέπει επίσης στο χρόνο να ξεκινήσει, κι αυτός είναι ο τρόπος που αντιλαμβανόμαστε τη Μεγάλη Έκρηξη, τη δημοφιλέστερη σύγχρονη θεωρία για τη γένεση του σύμπαντος.

Ίσως το κεντρικό πρόβλημα για όσους από μας προσπαθούμε να συνδυάσουμε τη σχετικότητα και την κβαντομηχανική είναι το τι συμβαίνει πραγματικά μέσα σε μια μαύρη τρύπα. Αν ο χρόνος εκεί σταματά πραγματικά, τότε πρέπει να θεωρήσουμε ότι όλος ο χρόνος σταματά παντού στην κατάρρευση του σύμπαντος. Απ' την άλλη μεριά, αν δεν σταματά, πρέπει να θεωρήσουμε έναν ολόκληρο, χωρίς όρια κόσμο μέσα σε κάθε μαύρη τρύπα, που δεν μπορούμε να τον δούμε ποτέ. Να υπογραμμίσω ότι αυτό δεν είναι απλώς ένα θεωρητικό πρόβλημα, διότι μια μαύρη τρύπα δημιουργείται κάθε φορά που ένα άστρο μεγάλης μάζας φτάνει στο τέλος της ζωής του και καταρρέει · το μυστήριο αυτό συμβαίνει κάπου στο αχανές σύμπαν περίπου εκατό φορές το δευτερόλεπτο.

Τι είναι λοιπόν ο χρόνος; Είναι μήπως το μεγαλύτερο μυστήριο; Δεν το πιστεύω. Το μεγαλύτερο μυστήριο είναι ότι καθένας μας βρίσκεται εδώ, και ότι ένα συστατικό της συμμετοχής που μας επιτρέπει το σύμπαν στη μεγάλη του ύπαρξη είναι να θέτουμε τέτοιες ερωτήσεις. Και να μεταφέρουμε από μαθητή σε μαθητή τη χαρά τού να απορεί, να αναρωτιέται και να συζητά τι γνωρίζουμε και τι όχι.

Lee Smolin

Ο ***Lee Smolin*** είναι θεωρητικός φυσικός, καθηγητής φυσικής στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Πενσυλβανίας και μέλος του Κέντρου Βαρυτικής Φυσικής και Γεωμετρίας των ΗΠΑ. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα βρίσκονται στην περιοχή της κβαντικής βαρύτητας. Το ελληνικό *Quantum* τον ευχαριστεί για το κείμενό του, το οποίο δημοσιεύεται για πρώτη φορά, και αποκλειστικά, σ' αυτό.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνα
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης	Υπεύθυνος εικονογράφησης	Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων
Timothy Weber	**Sergey Ivanov**	**Edward Lozansky**

Σύμβουλοι Σύνταξης
Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας
Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική Επιτροπή
Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT
James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM
George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη
Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα
Carol-ann Tripp, Καθηγήτρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πρόβιντενς, Ρόουντ Άιλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης	Διευθυντής
Αλέκος Μάμαλης	**Γιώργος Ευαγγελόπουλος**

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.:
Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, **Γιάννης Βακαλόπουλος**-φυσικός, **Μαριάνθη Πετράκη**-φυσικός, **Μιχάλης Λάμπρου**-μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης**-μαθηματικός, **Αλέκος Μάμαλης**-φυσικός και **Μάκης Παπαχριστόπουλος**-φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια	Τυπογραφικές διορθώσεις	Υπεύθυνη λογιστηρίου
Παντελής Μπουκάλας	**Π. Τασιόπουλος** και **Γ. Κυριακόπουλος**	**Μαρία Μάμαλη**

Επιστημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση	Φιλμ, μοντάζ	Εκτύπωση	Βιβλιοδεσία
Κάτοπτρο	**Γ. Κεραμάς**	**Τετραχρωμία**	**Θ. Αρχοντουλάκης**

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 7.500 δρχ. για ιδιώτες, 12.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.400 δρχ.

ΚΒΑΝΤΙΚΑ
ΧΑΜΟΓΕΛΑ

Ο λύκος, ο Μυνχάουζεν και ο Νεύτων

Κινούμενα σχέδια, πυρηνική σύντηξη και Συρανό ντε Μπερζεράκ

V.A. Fabrikant

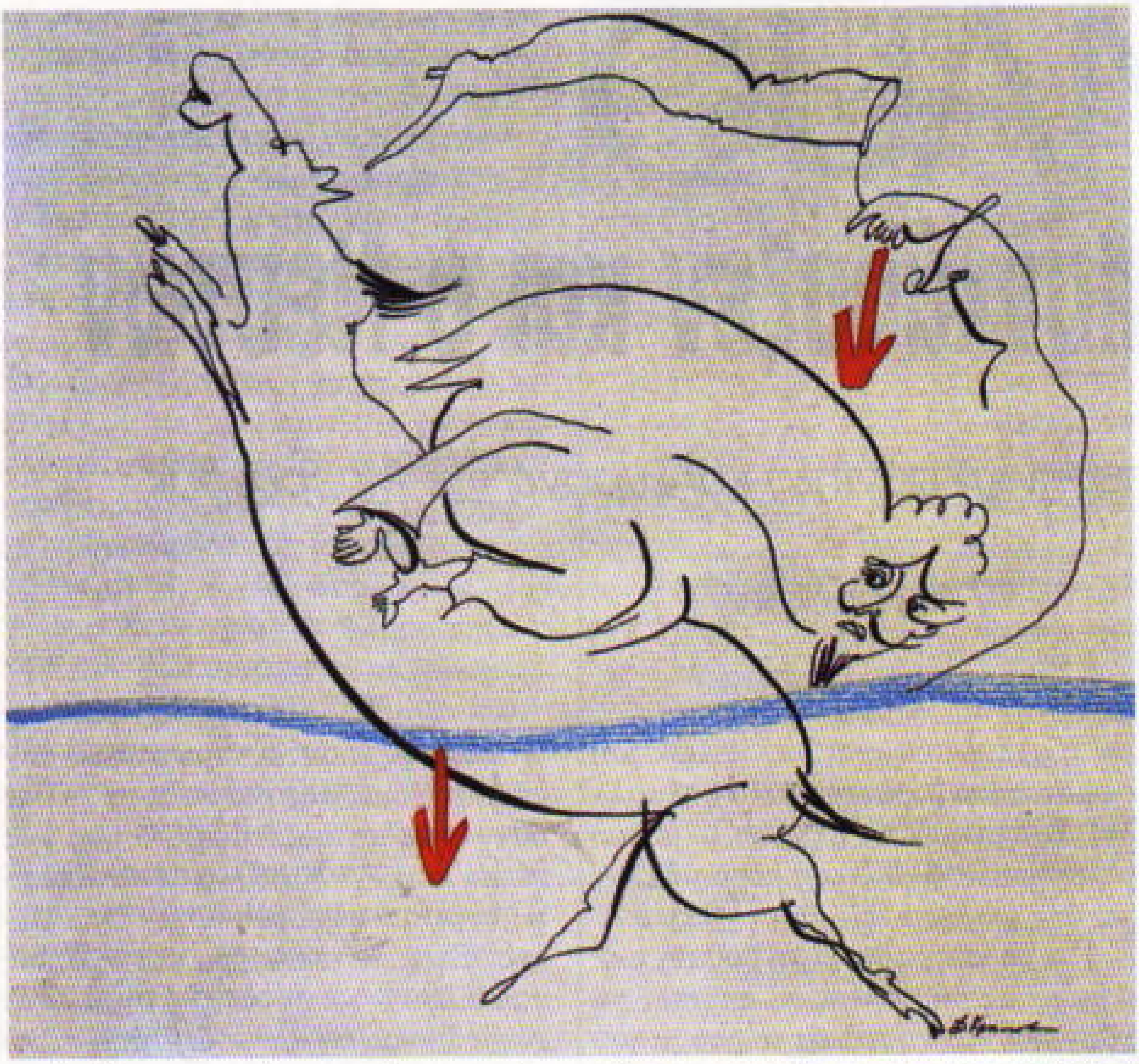
ΣΕ ΜΙΑ ΤΑΙΝΙΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΣΧΕ-δίων, ένας λύκος που βρίσκεται πάνω σ' ένα ιστιοφόρο κυνηγάει έναν λαγό που ταξιδεύει με ατμόπλοιο. Για να αυξήσει την ταχύτητα του ιστιοφόρου, ο λύκος φυσάει με δύναμη πάνω στο πανί. Σε πρώτη ματιά, μπορεί να φανεί ότι η εν λόγω κατάσταση μοιάζει αμυδρά μ' εκείνη που περιέγραψε ο βαρόνος Μυνχάουζεν: όταν βούλιαζε σ' έναν βάλτο καβάλα στ' άλογό του, κατάφερε να σωθεί τραβώντας τον εαυτό του από τα ίδια του τα μαλλιά. Εντούτοις, υπάρχει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις. Ο λύκος δεν παραβαίνει έναν θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, ενώ ο βαρόνος τον παραβαίνει· δεν αδικούμε λοιπόν τον τελευταίο χαρακτηρίζοντάς τον φαντασιόπληκτο.

Στα *Principia* ο Ισαάκ Νεύτων διατυπώνει τον τρίτο νόμο του ως εξής: «Σε κάθε δράση υπάρχει μια αντίδραση· δηλαδή οι δράσεις μεταξύ δύο σωμάτων είναι ίσες και με αντίθετες κατευθύνσεις». Και εξηγεί: «Αν ένα σώμα σπρώχνει ή τραβάει κάποιο άλλο, τότε και το πρώτο σπρώχνεται ή τραβιέται από το δεύτερο. Αν κάποιος σπρώχνει μια πέτρα με το δάχτυλό του, τότε και το δάχτυλο σπρώχνεται από την πέτρα». Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι σ' ένα κλειστό σύστημα (από το οποίο τίποτε δεν ξεφεύγει) καμιά αλληλεπίδραση δεν μπορεί να επηρεάσει την κίνηση του συστήματος ως όλου. Στο παράδειγμα που αναφέραμε, η αλληλεπίδραση των μελών του σώματος του βαρόνου (χέρια και μαλλιά) δεν μπορεί να αλλάξει το ρυθμό με τον οποίο βυθίζεται, πόσο μάλλον να τον τραβήξει έξω από το βάλτο.

Για να επιβραδύνει τη βύθισή του, ο βαρόνος θα έπρεπε ν' αρχίσει να γδύνεται και να πετάει τα ρούχα του προς τα κάτω στο βάλτο —δηλαδή έπρεπε ν' «ανοίξει» το σύστημά του. Οι βαριές μπότες του θα ήταν ιδιαιτέρως χρήσιμες. Στο τέλος, μάλιστα, ο βαρόνος θα μπορούσε να σταθεί όρθιος πάνω στη σέλα και να πηδήσει στο στέρεο έδαφος. Έτσι, βεβαίως, θα έπρωχνε το άλογό του μέσα στη λάσπη, επισπεύδοντας το θάνατο του καημένου του ζώου.

Αλλά ας επανέλθουμε στα κινούμενα σχέδια. Θα υποθέσουμε ότι το πανί είναι κατασκευασμένο από ένα υλικό που εγκλωβίζει και κατακρατεί το ρεύμα αέρα που προκαλεί ο λύκος. Έτσι, το ιστιοφόρο και ο λύκος αποτελούν κλειστό σύστημα, και χωρίς άνεμο το πλοίο δεν μπορεί να κινηθεί, όσο δυνατά κι αν φυσάει ο λύκος. Οι προσπάθειες του λύκου να επιταχύνει το πλοίο είναι μάταιες: η δύναμη του ρεύματος αέρα πάνω στο πανί εξουδετερώνεται από τη δράση των νυχιών του πάνω στην κουπαστή του πλοίου. Και τούτο επειδή ο λύκος ωθείται προς τα πίσω όταν φυσάει προς τα εμπρός —νόμος δράσης-αντίδρασης.

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov



Ανάλογο φαινόμενο είναι η ανάκρουση ενός όπλου: η σφαίρα ή η οβίδα φεύγει προς μία κατεύθυνση ενώ το όπλο κινείται προς την αντίθετη. Όλοι οι κυνηγοί το γνωρίζουν καλά αυτό. Ακόμη μεγαλύτερη είναι η ομοιότητα μ' έναν πύραυλο, τα αέρια εξαγωγής του οποίου εκτοξεύονται προς μια κατεύθυνση ενώ αυτός κινείται προς την αντίθετη.

Στην πραγματικότητα, όμως, η βάρκα έχει πανί από συνηθισμένο υλικό, που φυσιολογικά δεν κατακρατεί το ρεύμα αέρα αλλά το αντανακλά. Αν θεωρήσουμε ότι το ίδιο ισχύει και στα κινούμενα σχέδια, ο αέρας που φυσάει ο λύκος επιστρέφει αφού ανακλαστεί στο πανί και εγκαταλείπει το σύστημα «λύκος-ιστιοφόρο». Μ' άλλα λόγια, από τη στιγμή που ο λύκος αρχίζει να φυσάει, το σύστημα παύει να είναι κλειστό. Και βεβαίως, το φαινόμενο της ανάκρουσης θα αυξάνει την ταχύτητα του ιστιοφόρου.

Φαίνεται λοιπόν ότι ο λύκος ήταν περισσότερο καταρτισμένος στη μηχανική απ' ό,τι ο βαρόνος. Θα μπορούσαμε, όμως, να προτείνουμε μια βελτίωση στον τρόπο που προσπαθεί να φτάσει το λαγό. Θα ήταν πολύ αποδοτικότερο αν έκανε μισή στροφή και φυσούσε προς την αντίθετη κατεύθυνση: το πανί δεν είναι ιδανικός ανακλαστήρας και το ρεύμα αέρα που επιστρέφει είναι εξασθενημένο.

Ο Συρανό ντε Μπερζεράκ

Το φαινόμενο της ανάκρουσης εφαρμόζεται σήμερα σε διαστημικούς πυραύλους. Ας έρθουμε, λοιπόν, στον γάλλο συγγραφέα Συρανό ντε Μπερζεράκ (1619-1655), μια παράδοξη μορφή της παγκόσμιας λογοτεχνίας. Ο Συρανό καταγόταν από ευγενή οικογένεια, η οποία πτώχευσε, και πέρασε μια στερημένη ζωή. Την εποχή εκείνη ευημερούσαν μόνο οι ποιητές που υπηρετούσαν πλούσιους αριστοκράτες. Ο Συρανό δεν μπορούσε να υπηρετήσει κανένα, διότι ήταν εξαιρετικά ανεξάρτητος και ευέξαπτος, δημοσίευε μάλιστα φυλλάδια με ποιήματα εναντίον του πανίσχυρου πρωθυπουργού, του καρδινάλιου Μαζαρίνου. Προσπαθούσε να πιάσει την καλή στα χαρτιά, αλλά δεν τα κατάφερνε. Ο Συρανό είχε προικιστεί από τη φύση με μια αλλόκοτη, τεράστια μύτη, που αποτέλεσε το αντικείμενο αστείων και χλευασμών και την αιτία πολλών μεγάλων μονομαχιών. Αυτός ο χαρτοπαίκτης και μονομάχος, όμως, είχε οξύ πνεύμα, ήταν υποστηρικτής του φιλοσόφου Γκασσέντι, και δημιουργός του μυθιστορήματος επιστημονικής φαντασίας *Ο άλλος Κόσμος*.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι στο μυθιστόρημα ο Συρανό περιγράφει την πτήση του στη Σελήνη... με τη βοήθεια πυραύλων! Υπάρχει μια παλιά γκραβούρα του Συρανό που τον παρουσιάζει να πετάει προς τη Σελήνη μέσα σ' ένα καλάθι στο οποίο έχει προσαρτήσει πυραύλους. Οι πύραυλοι εκπέμπουν πύρινα αέρια που ωθούν το καλάθι προς τα πάνω. Έτσι, ο Συρανό προέβλεψε τριακόσια και πλέον χρόνια πριν τη χρήση των πυραύλων στα διαστημικά ταξίδια. Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι ο Συρανό ισχυρίζεται στο βιβλίο αυτό, το οποίο γράφτηκε περίπου τριάντα χρόνια πριν από τα *Principia* του Νεύτωνα, ότι η βαρυτική έλξη της Σελήνης γίνεται ισχυρότερη από αυτή της Γης σ' ένα σημείο πιο κοντινό στη Σελήνη απ' ό,τι στη Γη, διότι η μάζα της Σελήνης είναι μικρότερη από τη μάζα της Γης. Υπολόγισε μάλιστα και το λόγο αυτών των αποστάσεων (αλλά, τι κρίμα, έκανε λάθος: 3 αντί για περίπου 9).

Ο Συρανό περιγράφει ειρωνικά τη Σελήνη σαν τον κήπο της Εδέμ. Ισχυρίζεται ότι συναντά εκεί τον προφήτη Ηλία και τον ρωτά πώς έφτασε ώς τη Σελήνη. Ο προφήτης περιγράφει τον τρόπο που ταξίδεψε, ο οποίος παραβιάζει τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Είχε κατασκευάσει ένα σιδερένιο άρμα (πίστευαν ότι η βροντή είναι η βοή του άρματος του προφήτη Ηλία), μπήκε μέσα και άρχισε να πετάει προς τα πάνω μια μαγνητισμένη σφαίρα από σίδηρο. Η σφαίρα προσείλκυε το άρμα, και κάθε ρίψη το έφερνε πιο ψηλά, ώσπου έφτασε στη Σελήνη. Ο προφήτης δεν έλαβε υπόψη του την ανάκρουση του άρματος κάθε φορά που αυτός πετά τη σφαίρα προς τα πάνω, και έτσι έγινε ο προπομπός του «φιλαλήθους» βαρόνου Μυνχάουζεν.

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, ο γάλλος δραματογράφος Εντμόν Ροστάν έγραψε το έργο *Συρανό ντε Μπερζεράκ*, το οποίο εξακολουθεί και σήμερα να παίζεται μ' επιτυχία στο θέατρο και τον κινηματογράφο. Ο συγγραφέας, που χαρακτήρισε το

έργο του «ηρωική κωμωδία», αποδίδει στον Συρανό μια μέθοδο πτήσης στη Σελήνη που «εφευρέθηκε» από τον προφήτη Ηλία, δεν αναφέρει όμως πυραύλους. Κατά ανεξήγητο τρόπο, αλλάζει επίσης το άρμα σε απλό φύλλο μετάλλου.

Σχετικά πρόσφατα ένας σεληνιακός κρατήρας ονομάστηκε Συρανό, για προφανείς λόγους.

Λίγα λόγια και για τον Ιούλιο Βερν

Ο Ιούλιος Βερν έγραψε το 1865 το μυθιστόρημα επιστημονικής φαντασίας *Από τη Γη στη Σελήνη σε 97 ώρες και 20 λεπτά*. Ο Βερν περιγράφει μια πτήση στη Σελήνη μέσα σε μια οβίδα που εκτοξεύεται από ένα γιγαντιαίο κανόνι. Πρέπει να παραδεχτούμε ότι αυτός ο τρόπος πτήσης είναι λιγότερο ορθολογικός από το καλάθι με τους πυραύλους που επινόησε ο Συρανό. Και τούτο διακόσια χρόνια αργότερα!

Βέβαια, σε ένα άλλο μυθιστόρημα, το *Γύρω απ' τη Σελήνη*, ένας από τους ταξιδιώτες, ο Μισέλ Αρντάν, παίρνει μαζί του μερικούς πυραύλους, μόνο, όμως, για να εξομαλύνει τη σύγκρουση κατά τη διάρκεια της προσεδάφισης. Πάντως, και στα δύο μυθιστορήματά του ο Βερν προσδιορίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια το σημείο στο οποίο η βαρυτική έλξη της Γης ισούται με την έλξη της Σελήνης: στα 47/52 της απόστασης από τη Γη προς τη Σελήνη. Το νούμερο είναι σωστό και αυτό δεν αποτελεί έκπληξη —η σχέση των μαζών Γης και Σελήνης ήταν ήδη γνωστές, καθώς και ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα.

Με την ευκαιρία ας αναφέρουμε ότι κατάσταση έλλειψης βαρύτητας, σύμφωνα με τον Ιούλιο Βερν, μπορεί να παρατηρηθεί μέσα σ' ένα διαστημόπλοιο μόνο στη θέση μηδενικής βαρύτητας, δηλαδή εκεί όπου η βαρύτητα της Γης εξισορροπείται από τη βαρύτητα της Σελήνης. Ο Βερν έκανε λάθος. Για να εμφανιστεί κατάσταση έλλειψης βαρύτητας δεν είναι απαραίτητο η συνολική δύναμη βαρύτητας που δρα στο διαστημόπλοιο να ισούται με μηδέν. Πέρα από την περίπτωση των αστροναυτών, οι οποίοι νιώθουν αβαρείς μόλις σβήσουν οι μηχανές, γνωρίζουμε ότι οι άλτες επί κοντώ, για παράδειγμα, αισθάνονται επίσης αυτή την κατάσταση έλλειψης βάρους (εφόσον αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα).

Πυρηνική σύντηξη και ανάκρουση

Ας επιστρέψουμε, όμως, στον αιώνα μας ή, καλύτερα, ας κάνουμε ένα βήμα προς τον επόμενο. Θα μιλήσουμε εδώ για τη νεότατη τεχνολογία, που όμως απέχει πολύ από την τελειότητα. Αναφέρομαι σε μια μορφή ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης, για την έναυση της οποίας χρησιμοποιούνται δέσμες λέιζερ.

Οι δέσμες πολλών λέιζερ υψηλής ισχύος εστιάζονται από πολλές κατευθύνσεις σ' έναν μικρό στόχο. Η ένταση των δεσμών λέιζερ μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με συγκεκριμένο τρόπο. Στην αρχή οι δέσμες προκαλούν γρήγορη εξάτμιση του επιφανειακού στρώματος του στόχου. Αυτό έχει αποτέλεσμα να συμπιεστεί βίαια το εσωτερικό μέρος του στόχου (κατά έναν παράγοντα μερικών εκατοντάδων ή χιλιάδων), εξαιτίας της ανάκρουσης των μορίων που εξατμίζονται. Η συμπίεση είναι απαραίτητη για να φέρει τους πυρήνες αρκετά κοντά για μια θερμοπυρηνική αντίδραση. Πρόωρη θέρμανση του εσωτερικού του στόχου θα εμπόδιζε τη συμπίεση, και γι' αυτό η θέρμανση επέρχεται μετά τη συμπίεση. Για να είναι αποδοτική η συμπίεση πρέπει οι δέσμες λέιζερ να «φωτίζουν» το στόχο ομοιόμορφα απ' όλες τις πλευρές, επίτευγμα καθόλου εύκολο. Μόνο τότε οι «άνεμοι» που εγείρονται απ' την εξάτμιση του επιφανειακού υλικού θα επιτρέψουν να σχηματιστεί η δομή που είναι απαραίτητη για την υψηλή συμπίεση. Σε αντίθετη περίπτωση, μέρη του στόχου που «φωτίζονται» ελλιπώς θα διογκωθούν. Η συσκευή λέιζερ «Dolphin» δημιουργεί 216 δέσμες που χτυπούν έναν στόχο μικρότερο κι από μπιζέλι.

Υπερυπολογιστές και οι τελευταίες κατακτήσεις της μη γραμμικής οπτικής χρησιμοποιούνται για τον αυτόματο έλεγχο του σύνθετου εξοπλισμού που απαιτείται στη σύντηξη με λέιζερ. Η σύντηξη με λέιζερ, όμως, έχει και ανταγωνιστές —σήμερα υπάρχουν διατάξεις που χρησιμοποιούν ισχυρές δέσμες ηλεκτρονίων ή ιόντων. Όλες τους, όμως, βασίζονται στη συμπίεση από την εξάτμιση του επιφανειακού στρώματος και στο επακόλουθο φαινόμενο της ανάκρουσης.

Επιβράβευση

Στο τρέχον τεύχος του αμερικανικού *Quantum*, στο άρθρο του εκδότη B. Aldridge με τίτλο «It's all Greek to me!», που αναφέρεται στη σημασία των συμβόλων (επομένως και των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου) στα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες, είδαμε με ευχάριστη έκπληξη και υπερηφάνεια να εικονίζονται το εξώφυλλο και μία εσωτερική σελίδα του προηγούμενου τεύχους του ελληνικού *Quantum*, συνοδευόμενα από το παρακάτω κείμενο:

«"It's all English to me!" That's what many potential readers of *Quantum* around the world might well say. So I'm pleased to announce the publication of a Greek version of *Quantum*. We hope this is but the first in a series of foreign-language editions.

The Greek-language *Quantum* is produced by Katoptro Publications, a publishing house in Athens devoted almost exclusively to scientific and educational titles. In the words of Alex Mamalis, the director of Katoptro: "We believe that *Quantum* is exactly what not only Greek students and teachers but also all the students and teachers of the world need — the ideal magazine." I couldn't agree more.

—Bill G. Aldridge»


B.B. 94.

Περίπατος ώς το θεώρημα Chebyshev

Δεν είναι στ' αλήθεια ο στόχος μας, αλλά εκεί θα καταλήξουμε

Victor Ufnarovsky

ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΑΠΟΛΑΥΣΤΙΚΟ να βγαίνουμε περίπατο χωρίς ιδιαίτερο στόχο: περιπλανιόμαστε άσκοπα, και ξαφνικά συναντούμε κάτι τελείως απρόοπτο, κάτι που ούτε θα μπορούσαμε να φανταστούμε όταν ξεκινούσαμε τη βόλτα μας. Επιτρέψτε μου να σας προσκαλέσω σ' έναν παρόμοιο περίπατο μέσα από ένα δαιδαλώδες μαθηματικό μονοπάτι.

Θα ξεκινήσουμε από ένα γνωστότατο κριτήριο για τη διαιρετότητα με τον αριθμό 9: *ένας αριθμός n διαιρείται με το 9 αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.* Ή, για να το διατυπώσουμε εντυπωσιακότερα: *αν αφαιρέσουμε από έναν αριθμό n το άθροισμα σ(n) των ψηφίων του, τότε το αποτέλεσμα διαιρείται πάντοτε με το 9.*

Ας σταματήσουμε για λίγο εδώ, και ας συζητήσουμε για το συμβολισμό. Η επιλογή του συμβολισμού, όσο παράδοξη και αν φαίνεται, καθορίζει πολλά πράγματα. Αυτός είναι και ο λόγος που οι μαθηματικοί είναι συνήθως συντηρητικοί ως προς αυτό το ζήτημα. Για παράδειγμα, το σύμβολο *n* υποδεικνύει σε οποιονδήποτε μαθηματικό ότι μιλάμε για ακέραιους —το πιθανότερο μάλιστα για θετικούς ακέραιους. (Άλλωστε, αυτό δεν κάναμε και *εμείς* με το σύμβολο *n* στην προηγούμενη παράγραφο;) Επίσης, το σύμβολο *σ* δεν επιλέχτηκε στην τύχη: από αμνημονεύτων εποχών, το γράμμα σίγμα, είτε πεζό είτε κεφαλαίο, χρησιμοποιείται για να συμβολίσει αθροίσεις. Το δικό μας άθροισμα είναι μικρό, γι' αυτό χρησιμοποιήσαμε το πεζό *σ*.

Ας εξετάσουμε το συμβολισμό από μια άλλη οπτική γωνιά. Γνωρίζετε, ίσως, ότι οι Άραβες γράφουν, αντίθετα απ' ό,τι εμείς, από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έχετε όμως σκεφτεί ποτέ ότι και εμείς αντιμετωπίζουμε τους αριθμούς με τον αραβικό τρόπο; Σίγουρα δεν με πιστεύετε —μια και γράφουμε τους αριθμούς από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αυτό είναι σωστό. Όμως πώς τους προσθέτουμε; Από ποιο ψηφίο αρχίζουμε, από το πρώτο ή από το τελευταίο; Και τι γίνεται με τον πολλαπλασιασμό; Προσπαθήστε, αλήθεια, να εκτελέσετε αυτές τις πράξεις αντίθετα! Στην πραγματικότητα θα ήταν βολικότερο αν γράφαμε τα ψηφία από τα δεξιά προς τα αριστερά, αλλά δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα επ' αυτού: η συνήθεια μας έχει γίνει δεύτερη φύση. Για να αντιμετωπίσουμε αυτή τη συνήθεια ας γράψουμε τους αριθμούς διαφορετικά: όχι ως σειρά ψηφίων αλλά ως ανάπτυγμα δυνάμεων του δέκα. Για παράδειγμα, όχι 234, αλλά $4 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 100$. Η συνήθειά μας δεν επαναστατεί εναντίον αυτής της μορφής, και έτσι ας γράψουμε τον αριθμό *n* με αυτό τον τρόπο:

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_k \cdot 10^k,$$

όπου a_0 είναι το τελευταίο ψηφίο του *n*, a_1 το προτελευταίο, ..., και a_k το πρώτο. Επομένως, το συνολικό πλήθος των ψηφίων θα είναι $k + 1$ και το άθροισμά τους θα είναι

$$\sigma(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Τώρα δεν χρειάζεται να κουραστούμε ιδιαίτερα για να αποδείξουμε την πρότασή μας:

$$\begin{aligned} n - \sigma(n) &= (a_0 - a_0) + a_1(10 - 1) \\ &\quad + a_2(10^2 - 1) + \ldots + a_k(10^k - 1) \\ &= 0 + 9a_1 + 99a_2 + \ldots + 99\ldots9a_k, \end{aligned}$$

το οποίο, φυσικά, διαιρείται με το 9. (Αλήθεια, πόσα ψηφία 9 υπάρχουν στον τελευταίο συντελεστή;)

Και τώρα, αφού θαυμάσουμε το αποτέλεσμα των κόπων μας, ας συνεχίσουμε τον περίπατό μας. Τι άλλο μπορούμε να πετύχουμε εξίσου εύκολα, χωρίς να κουραστούμε ιδιαίτερα; Μπορούμε ν' αλλάξουμε το πρόβλημα, την απόδειξη ή το συμβολισμό. Ας μη χάσουμε την ώρα μας με την απόδειξη. Μπορούμε ν' αλλάξουμε το πρόβλημα; Οπωσδήποτε δεν είναι δύσκολο να επινοήσουμε και να αποδείξουμε ένα κριτήριο για τη διαιρετότητα με το 11 —χρειάζεται απλώς να θεωρήσουμε το εναλλασσόμενο άθροισμα $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$. Και αν προχωρήσουμε λίγο βαθύτερα, θα βρούμε κάτι που μοιάζει με καθολικό κριτήριο διαιρετότητας (αποδείξτε το ως άσκηση):

Έστω *m* ένας φυσικός αριθμός και έστω $p_1, p_2, \ldots, p_k$ τα υπόλοιπα της διαίρεσης των αριθμών $10, 10^2, \ldots, 10^k$ με το *m*. Τότε ο αριθμός

$$n - (a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_kp_k)$$

διαιρείται με το *m*.

Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

Για $m = 9$ παίρνουμε το αποτέλεσμα που αποδείξαμε προηγουμένως. (Τι συμβαίνει για $m = 11$;) Για $m = 7$ παίρνουμε την ακολουθία των υπολοίπων 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, κ.ο.κ., περιοδικά. Επομένως, το υπόλοιπο του 1.994 διαιρούμενο με το 7 ισούται με το υπόλοιπο του $4 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 55$, που με τη σειρά του είναι ίσο με το υπόλοιπο του $5 + 5 \cdot 3 = 20$, που με τη σειρά του... Αλλά σε αυτό το σημείο μπορούμε να σταματήσουμε και να πούμε ότι είναι 6. Όχι και ιδιαίτερα ενδιαφέρον...

Ας βαδίσουμε προς μιαν άλλη κατεύθυνση και ας προσπαθήσουμε ν' αλλάξουμε το συμβολισμό. Με ποιον τρόπο; Όσοι είναι έστω και λίγο εξοικειωμένοι με τον προγραμματισμό θα προτείνουν αμέσως τη χρήση ενός άλλου συστήματος αρίθμησης —για παράδειγμα, τον δυαδικό συμβολισμό:

$$n = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + ... + b_m \cdot 2^m,$$

όπου οι συντελεστές b_i είναι ένα ή μηδέν —για παράδειγμα, $25 = 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 16$. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το άθροισμα των δυαδικών ψηφίων $\sigma_2(n) = b_0 + b_1 + ... + b_m$. (Ο δείκτης 2 αναφέρεται, φυσικά, στη βάση του συστήματος αρίθμησης, οπότε το σίγμα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως εννοείται πως ήταν το σ_{10}.) Το αντίστοιχο θεώρημα είναι το εξής: *Ο αριθμός $n - \sigma_2(n)$ διαιρείται από* ... Από ποιον αλήθεια; Στο δεκαδικό σύστημα η αντίστοιχη διαφορά ήταν διαιρετή με το $9 = 10 - 1$, επομένως τώρα πρέπει να διαιρείται με το $2 - 1 = 1$. Το γεγονός αληθεύει αλλά δεν είναι και τόσο αξιόλογο. Τι θα συμβεί αν δοκιμάσουμε τη γενική περίπτωση του p–αδικού συμβολισμού με μια τυχαία βάση p; Γράφουμε

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_k p^k,$$

όπου $a_i < p$, και συμβολίζουμε

$$\sigma_p(n) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k.$$

Φτάνουμε τώρα σε ένα όμορφο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ο αριθμός $n - \sigma_p(n)$ διαιρείται με το $p - 1$.

Ας το αποδείξουμε. Ο συλλογισμός μας παραμένει κατά βάση ο ίδιος: Το

$$n - \sigma_p(n) = (a_0 - a_0) + a_1(p - 1) + a_2(p^2 - 1) + ... + a_k(p^k - 1)$$

είναι σίγουρα πολλαπλάσιο του $p - 1$, διότι για κάθε θετικό ακέραιο m, ισχύει

$$(p^m - 1) = (p - 1)(p^{m-1} + p^{m-2} + ... + 1).$$

Για παράδειγμα, στο οκταδικό σύστημα ο αριθμός $n = 124$ διαιρείται με το 7 (διότι η διαφορά $n - \sigma_8(n) = n - 7$ διαιρείται με το 7). Θέλετε να το επιβεβαιώσετε; Έχουμε λοιπόν:

$$4 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 64 = 84,$$

το οποίο πραγματικά διαιρείται με το 7. Επομένως έχουμε ένα νέο κριτήριο για τη διαιρετότητα με το 7. Είμαστε όμως άτυχοι, αφού δεν είμαστε εξοικειωμένοι με το οκταδικό σύστημα.

Τι άλλο θα μπορούσαμε να κάνουμε; Τι άλλο θα μπορούσαμε να συναγάγουμε από τη διαιρετότητα; Τι θα γίνει αν... εκτελέσουμε τη διαίρεση; Αυτή είναι μια πραγματικά πολύ καλή ερώτηση: με τι ισούται το κλάσμα

$$\delta_p(n) = \frac{n - \sigma_p(n)}{p - 1};$$

Ενδιαφέρον... Γιατί δεν αρχίζουμε θέτοντας απλώς $p = 2$ —τουλάχιστον δεν θα χρειαστεί να κουραστούμε για τη διαίρεση. Προς χάριν των αρχαρίων, ας συμπληρώσουμε τον επόμενο πίνακα:

n_{10}	n_2	$\sigma_2(n)$	$\delta(n) = n - \sigma_2(n)$
0	0	0	0
1	1	1	0
2	10	1	1
3	11	2	1
4	100	1	3
5	101	2	3
6	110	2	4
7	111	3	4
8	1000	1	7
9	1001	2	7
10	1010	2	8
11	1011	3	8
12	1100	2	10

Τι διαπιστώνουμε; Ο αριθμός $\delta(n)$ δεν αλλάζει για τις περιττές τιμές του n αλλά μεταβάλλεται κάθε φορά που ο n είναι άρτιος. Πόσο μεταβάλλεται; Όσο το πλήθος των μηδενικών που βρίσκονται στο τέλος του δυαδικού αναπτύγματος του n. Και αυτός ο αριθμός ισούται, όπως είναι φανερό, με τη μέγιστη δύναμη του 2 που είναι παράγοντας του n.[1] Για παράδειγμα, ο $n = 12$ διαιρείται το πολύ με το $4 = 2^2$, ενώ αλλάζουμε τάξη μεγέθους 2 από το 8 ($n = 11$) έως το 10 ($n = 12$). Επομένως μπορούμε να πούμε ότι το $\delta(n)$ «απαριθμεί» το πλήθος των δυνάμεων του 2 που περιέχονται στους αριθμούς 1, 2, ..., n, ή, πιο σωστά, στο γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, το οποίο ονομάζεται *n παραγοντικό* και συμβολίζεται με $n!$. Επομένως, φαίνεται ότι αληθεύει το εξής γεγονός: το *$\delta(n) = n - \sigma_2(n)$ είναι ο μέγιστος εκθέτης της δύναμης του δύο που διαιρεί το $n!$*. Τι θα λέγατε να αποδείξουμε αυτή την πρόταση;

Είναι φυσικό να μας έρθει στο μυαλό η μέθοδος της τέλειας επαγωγής. Όταν το n είναι μικρό, όλα είναι προφανή από τον πίνακα. Ας κάνουμε το «επαγωγικό βήμα.» Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε ήδη ότι η πρόταση είναι αληθής για $n - 1$ —δηλαδή, ότι $(n - 1) - \sigma_2(n - 1)$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του δύο που είναι διαιρέτης του $(n - 1)!$. Θεωρούμε τον αριθμό n. Για να πάρουμε το $n!$ από το $(n - 1)!$ πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με n. Όταν το κάνουμε αυτό αυξάνουμε το πλήθος των δυνάμεων του δύο στο $(n - 1)!$ κατά το πλήθος αυτών των δυνάμεων στο n —δηλαδή, κατά το πλήθος των μηδενικών που έχουμε στο τέλος της δυαδικής παράστασης του n. Και τι συμβαίνει με τη διαφορά $(n - 1) - \sigma_2(n - 1)$; Ο μειωτέος $n - 1$ αυξάνει κατά 1. Πώς μεταβάλλεται ο αφαιρετέος $\sigma_2(n - 1)$;

Ας υποθέσουμε ότι η δυαδική παράσταση του n έχει k μηδενικά ($k \geq 0$) στο τέλος: $n = ...100...0$. Τότε η δυαδική παράσταση του $n - 1$ τελειώνει σε k ακριβώς μονάδες: $n - 1 = ...011...1$

1. Αυτή είναι ασφαλώς μια απρόσεκτη διατύπωση που όμως θα τη χρησιμοποιούμε μερικές φορές χάριν συντομίας. Για να είμουν ακριβής θα έπρεπε να γράψω «ο εκθέτης της μέγιστης δύναμης του 2...». Ελπίζω ότι αυτή η μικρή συντόμευση δεν θα σας παραπλανήσει —ούτε εδώ ούτε στη συνέχεια.

(μπορεί να αποτελείται και μόνον από αυτές). Επομένως, το πλήθος των μονάδων έχει μειωθεί κατά $k-1$, και η συνολική μεταβολή ισούται με $1-[-(k-1)]=k$. Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγική απόδειξη.

Τι έχουμε στη συνέχεια; Λοιπόν, θα ήταν ενδιαφέρον να ελέγξουμε αν αυτό είναι αληθές γενικά —δηλαδή, αν ο αριθμός

$$\delta_p(n)=\frac{n-\sigma_p(n)}{p-1}$$

είναι ο μέγιστος εκθέτης της δύναμης του p που διαιρεί το $n!$.

Άσκηση 1. Αποδείξτε αυτή την πρόταση για $p=3$.

Δυστυχώς θα απογοητευτούμε στην περίπτωση που $p=4$. Ο αριθμός 6! διαιρείται με το 4^2, αλλά αφού το 6 γράφεται ως 12 με βάση το 4, έχουμε ότι $\delta_4(6)=(6-3)/3=1\neq 2$. Θα σας αποκαλύψω την αιτία αμέσως: ο p πρέπει να είναι πρώτος.

Άσκηση 2. Αποδείξτε την πρόταση για κάθε πρώτο p.

Ευτυχώς, οι πρώτοι αριθμοί επαρκούν για να απαντήσουμε σε προβλήματα σχετικά με τη διαιρετότητα. Τι μπορούμε, όμως, να κάνουμε με τα παραγοντικά; Πού μπορούμε να εφαρμόσουμε τις καινούργιες γνώσεις μας; Πρώτα απ' όλα στους διωνυμικούς συντελεστές $C_n^k=n!/k!(n-k)!$ (που συχνά συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$).

Ο τύπος με τον οποίο συνδέονται συχνότερα είναι ο διωνυμικός:

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\ldots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n.$$

Για μεγαλύτερη συμμετρία θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$C_{m+n}^n=\frac{(m+n)!}{n!m!}.$$

Χάρη σε όσα μάθαμε μέχρι τώρα, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον μέγιστο εκθέτη με τον οποίο εισέρχεται ένας πρώτος αριθμός p στην παραγοντοποίηση αυτού του διωνυμικού συντελεστή. Είναι ίσος με

$$\delta_p(m+n)-\delta_p(m)-\delta_p(n),\quad \text{ή}$$

$$\frac{(m+n)-\sigma_p(m+n)-\big(m-\sigma_p(m)\big)-\big(n-\sigma_p(n)\big)}{p-1}$$

$$=\frac{\sigma_p(m)+\sigma_p(n)-\sigma_p(m+n)}{p-1}.$$

Δεν είναι όμορφο; Για παράδειγμα, αν $\sigma_p(m+n)=\sigma_p(m)+\sigma_p(n)$, τότε ο C_{m+n}^n δεν διαιρείται με το p, και αντιστρόφως. Και πότε συμβαίνει αυτό; Τουλάχιστον όταν δεν υπάρχουν κρατούμενα από ψηφίο σε ψηφίο όταν προσθέτουμε τις p–αδικές αναπαραστάσεις των m και n. Αν, για παράδειγμα, προσθέσουμε το 23 με το 32 (ως προς βάση 7), παίρνουμε 55 χωρίς κρατούμενα. Το συμπέρασμα: αφού $3+2\cdot7=17$ και $2+3\cdot7=23$, τότε ο C_{40}^{17} δεν διαιρείται με το 7.

Τι συμβαίνει όταν έχουμε κρατούμενα; Ας υποθέσουμε ότι τα ψηφία των m και n στη θέση i είναι $r<p$ και $s<p$, αντίστοιχα, και ότι το άθροισμά τους $r+s>p$. Τότε, πρέπει να μεταφέρουμε το κρατούμενο 1 στο επόμενο ψηφίο και στη θέση i θα βάλουμε το $r+s-p$ αντί του $r+s$. Επομένως, η συμβολή αυτού του ψηφίου στο $\sigma_p(m)+\sigma_p(n)-\sigma_p(m+n)$ θα είναι $p-1$. Όμως, αυτή τη διαφορά τη διαιρούμε με $p-1$. Αξιοσημείωτο! Πώς και δεν μπορέσαμε να μαντέψουμε αμέσως ότι αληθεύει το επόμενο θεώρημα;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Αν ο p είναι πρώτος, τότε ο εκθέτης της μέγιστης δύναμης του p που* διαιρεί το C_{m+n}^n *ισούται με το πλήθος των κρατουμένων κατά την πρόσθεση των m και n στο p-αδικό αριθμητικό σύστημα.*

Καταφέραμε και φτάσαμε σε ένα πραγματικά αξιόλογο θεώρημα! Τι θα μπορούσαμε να συναγάγουμε από ένα τέτοιο μη τετριμμένο γεγονός; Δεν ξέρουμε πού να πρωτοκοιτάξουμε!

Για χάρη της απλότητας, ας ξεκινήσουμε μελετώντας τον C_{2n}^n, τον μεγαλύτερο διωνυμικό συντελεστή που εμφανίζεται στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(x+y)^{2n}$. (Παρεμπιπτόντως, μπορείτε να αποδείξετε ότι αυτός ο συντελεστής είναι πραγματικά ο μεγαλύτερος;) Η μεγαλύτερη δύναμη του p που τον διαιρεί ισούται με το πλήθος των κρατουμένων κατά την πρόσθεση του n στον εαυτό του στο p–αδικό αριθμητικό σύστημα.

Ας υποθέσουμε ότι $n<p<2n$. Τότε η p–αδική παράσταση του n αποτελείται από ένα ψηφίο (το ψηφίο n), και το $2n$ αποτελείται από δύο ψηφία —ας πούμε, $2n=r+1\cdot p$. Επομένως, υπάρχει ακριβώς ένα κρατούμενο, και ο παράγοντας p εμφανίζεται στο C_{2n}^n μία μόνο φορά. (Μπορείτε να ελέγξετε αυτό το απλό αποτέλεσμα κατευθείαν.) Προκύπτει ότι *το γινόμενο όλων των πρώτων αριθμών μεταξύ του n και του $2n$ δεν υπερβαίνει το C_{2n}^n*. Μπορείτε να φανταστείτε κάποιο ελκυστικότερο αποτέλεσμα; Ας κάνουμε μια χοντρική εκτίμηση του C_{2n}^n.

Θέτοντας $x=y=1$ στο θεώρημα του διωνύμου, παίρνουμε

$$1+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+1=2^{2n},$$

απ' όπου συνάγουμε

$$C_{2n}^n<4^n.$$

Ομοίως, το γινόμενο όλων των πρώτων αριθμών μεταξύ του $n/2$ και του n είναι μικρότερο από $4^{n/2}$, μεταξύ του $n/4$ και του $n/2$ είναι μικρότερο από $4^{n/4}$, κ.ο.κ. Άρα το γινόμενο όλων των πρώτων μεταξύ του 1 και του n είναι μικρότερο από

$$4^{n/2}\cdot4^{n/4}\cdot4^{n/8}\cdot\ldots<4^n.$$

Έτσι, χωρίς να μας κοστίσει τίποτα, καταλήγουμε στο επόμενο γεγονός, το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *Το γινόμενο όλων των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του n δεν υπερβαίνει το 4^n.*

Άσκηση 3. Αποδείξτε ακριβέστερα αυτό το θεώρημα. (Ήμασταν πολύ απρόσεκτοι όταν διαιρούσαμε με το 2, «ξεχνώντας» ότι μερικοί αριθμοί μπορεί να είναι περιττοί. Η καλύτερη αυστηρή προσέγγιση είναι ίσως η χρήση επαγωγής.)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $p\leq n$. Τότε ο n συμβολίζεται με δύο τουλάχιστον p-αδικά ψηφία. Αν ο $2n$ γράφεται με δύο ακριβώς ψηφία, τότε $2n<p^2$, και επομένως δεν έχουμε περισσότερα από 1 κρατούμενα. Άρα ισχύει η εξής πρόταση:

ΛΗΜΜΑ 1. *Αν $p>\sqrt{2n}$, τότε η μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί το C_{2n}^n έχει εκθέτη μικρότερο ή ίσο του 1.*

Τι συμβαίνει όταν το p δεν διαιρεί το C_{2n}^n; Αφού $2n<p^2$, μπορούμε να γράψουμε $n=a_0+a_1p$, όπου $a_0<p$, $a_1<p/2$. Για να μην έχουμε κρατούμενα πρέπει οπωσδήποτε $a_0<p/2$.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά το a_1 βλέπουμε ότι το C_{2n}^n δεν διαιρείται με το p αν $a_0 = n - p < p/2$. Αυτό μας οδηγεί στο επόμενο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 2. *Αν $n \geq p > 2n/3$, τότε το C_{2n}^n δεν διαιρείται με το n ($n > 2$).*

Για να αποδείξουμε το λήμμα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η συνθήκη $n - p < p/2$ είναι ισοδύναμη με την $n < 3p/2$, ή $p > 2n/3$.

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει για τις μικρές τιμές του p για $p \leq \sqrt{2n}$. Εδώ μπορεί να έχουμε πολλά κρατούμενα, όχι όμως περισσότερα από k, αν $2n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_k p^k$. Αφού $2n \geq p^k$, έχουμε ότι $\log_p 2n \geq k$, επομένως η μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί το C_{2n}^n έχει εκθέτη μικρότερο ή ίσο του $\log_p 2n$. Αυτό σημαίνει ότι για τον τυχαίο πρώτο p ισχύει το εξής λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 3. *Αν $N = p^m$ είναι διαιρέτης του C_{2n}^n, τότε $N \leq 2n$.*

Πραγματικά,

$$p^m \leq p^{\log_p 2n} = 2n.$$

Τώρα πλέον έχουμε μια περισσότερο ή λιγότερο καθαρή εικόνα της δομής του αριθμού C_{2n}^n. Η παραγοντοποίησή του σε δυνάμεις πρώτων αριθμών συντίθεται από τρεις τύπους παραγόντων:

1. Πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι από το n (και φυσικά μικρότεροι από το $2n$) —καθένας απ' αυτούς εισέρχεται στην παραγοντοποίηση μία φορά ακριβώς.

2. Πρώτοι αριθμοί μικρότεροι από $2n/3$, αλλά μεγαλύτεροι από $\sqrt{2n}$ —ο καθένας εμφανίζεται το πολύ μια φορά.

3. Πρώτοι αριθμοί μικρότεροι από $\sqrt{2n}$. Εδώ είναι δυνατή η διαιρετότητα με p^k για $k > 1$, αλλά η συνολική συμβολή p^k καθενός από αυτούς τους πρώτους είναι ίση ή μικρότερη από $2n$.

Είναι δυνατό να απουσιάζουν τα μέλη της πρώτης ομάδας —δηλαδή να μην υπάρχουν πρώτοι ανάμεσα στο n και το $2n$; Σε αυτήν την περίπτωση όλοι οι πρώτοι παράγοντες πρέπει να συγκεντρώνονται στη δεύτερη και την τρίτη ομάδα. Μπορούμε να εκτιμήσουμε την πραγματική τους συμβολή; Το γινόμενο όλων των αριθμών της δεύτερης ομάδας, με βάση το Θεώρημα 3, είναι το πολύ $4^{2n/3}$. Στην τρίτη ομάδα έχουμε σίγουρα λιγότερους από $\sqrt{2n} - 1$ πρώτους, και επομένως η συμβολή τους δεν υπερβαίνει το $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$. Συνοψίζοντας: αν δεν υπάρχει κανένας πρώτος μεταξύ του n και του $2n$ πρέπει να ισχύει η εξής ανισότητα

$$C_{2n}^n < 4^{2n/3} \cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1}. \qquad (1)$$

Τι ιδέα! Αν αποδείξουμε ότι αυτή η ανισότητα είναι λανθασμένη, θα έχουμε αποδείξει το φημισμένο αίτημα του Bertrand: *Υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός μεταξύ του n και του 2n.*

Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το C_{2n}^n. Αφού είναι ο μεγαλύτερος διωνυμικός συντελεστής στο $(1 + 1)^{2n}$, και αφού έχουμε $2n + 1 < 4n$ τέτοιους συντελεστές συνολικά, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι $C_{2n}^n > 4^n/4n$. Επομένως, και με βάση την ανισότητα (1), παίρνουμε διαδοχικά (για αρκετά μεγάλα n)

$$\frac{4^n}{4n} < 4^{2n/3} \cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1},$$

$$4^{n/3} < 2 \cdot (2n)^{\sqrt{2n}},$$

$$\frac{n}{3} < \sqrt{18} \log_4 2n + \frac{1}{2},$$

και τελικά

$$\sqrt{n} < \sqrt{18} \log_4 2n + \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Η λογαριθμική συνάρτηση όμως αυξάνεται με αργό ρυθμό και επομένως η $\sqrt{n}$ αργά ή γρήγορα γίνεται μεγαλύτερη. Αυτό που χρειάζεται να μάθουμε είναι το πότε γίνεται αυτό. Ας θέσουμε $n = 1.000$. Έχουμε ότι $\sqrt{1.000} > 30$, ενώ $\log_4 2.000 < \log_4 4.096 = \log_4 4^6 = 6$. Αφού $30 > \sqrt{18} \cdot 6 + 1/2$, η ανισότητά μας δεν ισχύει για $n = 1.000$ όπως και (κάτι που ελπίζω ότι θα αποδείξετε μόνοι σας χρησιμοποιώντας παραγώγους) για κάθε $n > 1.000$. Επομένως, γι' αυτές τις τιμές του n αληθεύει το εξής θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CHEBYSHEV (ΑΙΤΗΜΑ ΤΟΥ BERTRAND). *Υπάρχει πάντοτε ένας τουλάχιστον πρώτος μεταξύ του n και του 2n.*

Όλα αυτά είναι πολύ ωραία, αλλά τι γίνεται με τις μικρές τιμές του n; Γι' αυτές τις τιμές η ανισότητα (2) φαίνεται να αληθεύει. Μη στενοχωριέστε —το αίτημα του Bertrand αληθεύει και γι' αυτές. Μπορούμε να βεβαιωθούμε ερευνώντας έναν πίνακα πρώτων αριθμών ή γράφοντας ένα μικρό πρόγραμμα για υπολογιστή. Ή, αν είσαστε ιδιαίτερα ακριβολόγοι, μπορείτε να προσπαθήσετε να βρείτε μια ακριβέστερη ανισότητα. Είναι θέμα γούστου.

Όμως ο «περίπατός» μας κράτησε αρκετά. Δεν νομίζετε ότι έφτασε η στιγμή να ξεκουραστούμε; Αν πάντως θέλετε να κάνετε στη συνέχεια μια βόλτα μόνοι σας, ορίστε μερικά προβλήματα για να ξεκινήσετε.

Προβλήματα

1. Αποδείξτε ότι για κάθε πρώτο p και για ακέραιους x και y ο αριθμός $(x + y)^p - x^p - y^p$ διαιρείται με το p.

2. Να επεκτείνετε το προηγούμενο πρόβλημα στην περίπτωση πολλών προσθετέων και να συναγάγετε το «μικρό» θεώρημα του Fermat: ο $x^p - x$ διαιρείται με το p (όπου p, φυσικά, είναι πρώτος αριθμός).

3. Αποδείξτε ότι αν ένας διωνυμικός συντελεστής C_n^k διαιρείται από μια δύναμη ενός πρώτου αριθμού $N = p^m$, τότε $N \leq n$.

4. Αποδείξτε ότι για $n > 5$ υπάρχουν δύο πρώτοι αριθμοί μεταξύ του n και του $2n$.

5. Έστω p_k ο k–οστός πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι $p_{k+2} < 2p_k$.

6. Αποδείξτε ότι το $n!$ (για $n > 1$) δεν είναι ποτέ δύναμη ενός ακέραιου αριθμού.

ΣΠΑΖΟΚΕΦΑΛΙΕΣ

Σ21

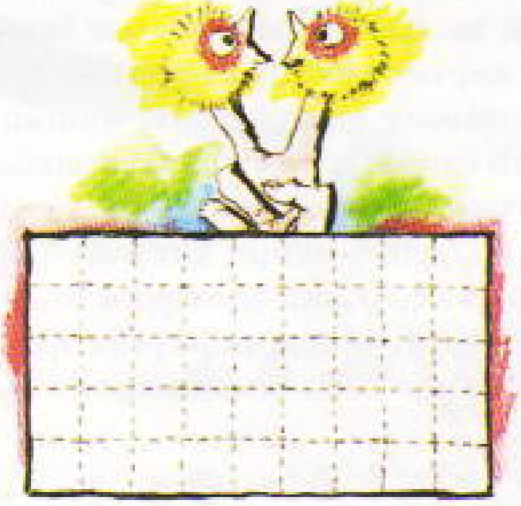
Ξεκαθαρίστε το. Αν η σπαζοκεφαλιά που λύσατε πριν από τούτη εδώ ήταν δυσκολότερη από τη σπαζοκεφαλιά που λύσατε αφότου λύσατε τη σπαζοκεφαλιά που λύσατε πριν λύσετε τούτη εδώ τη σπαζοκεφαλιά, τότε ήταν άραγε η σπαζοκεφαλιά που λύσατε πριν λύσετε τούτη εδώ δυσκολότερη από τούτη εδώ; (N. Rozov)

Σ22

Κατασκευή ρόμβου. Χωρίστε ένα παραλληλόγραμμο με μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του έτσι ώστε τα δύο τμήματα που προκύπτουν να μπορούν να σχηματίσουν ένα ρόμβο.
(A. Savin)

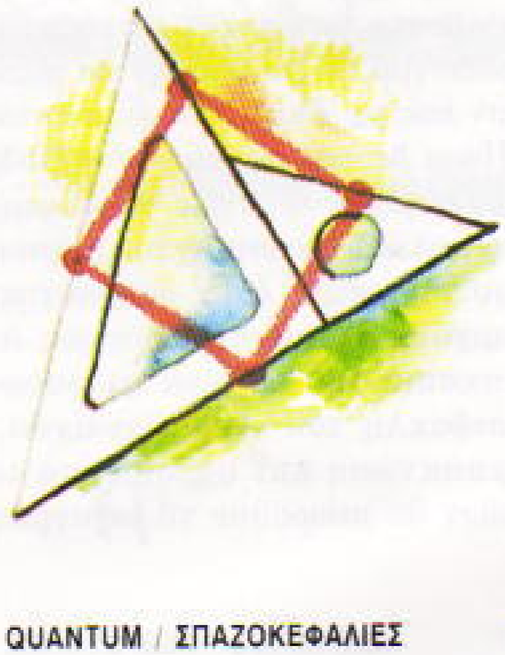
Σ23

Όχι και τόσο βαριά. Έχουμε ένα σύνολο από βάρη, καθένα από τα οποία έχει μάζα το πολύ 10 kg. Αν χωρίσουμε τα βάρη σε δύο ομάδες με τυχαίο τρόπο, η συνολική μάζα της μιας ομάδας είναι επίσης το πολύ 10 kg. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή μάζα που μπορεί να έχουν όλα τα βάρη συνολικά;



Σ24

Ακέραια ορθογώνια. Ένα ορθογώνιο διαστάσεων 5×9 έχει χωριστεί σε δέκα ορθογώνια με ακέραιο μήκος πλευρών. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον δύο από αυτά είναι ίσα. (K. Kohas)



Σ25

Το τετράγωνο των μέσων. Σχεδιάζουμε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα που εφάπτονται όπως βλέπετε στο σχήμα. Αποδείξτε ότι τα μέσα των πλευρών του μη κυρτού τετραπλεύρου αποτελούν κορυφές ενός τετραγώνου. (V. Proizvolov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Εικονογράφηση Pavel Chernusky

Αγάπη και μίσος στον μοριακό κόσμο

«Άλλοτε μεν φιλότητι συνερχόμεν' εις ένα κόσμον, άλλοτε δ' αυ δίχ' έκαστα φορούμενα νείκεος έχθει, εισόκεν εν συμφύντα το παν υπένερθε γένηται.»

— Εμπεδοκλής

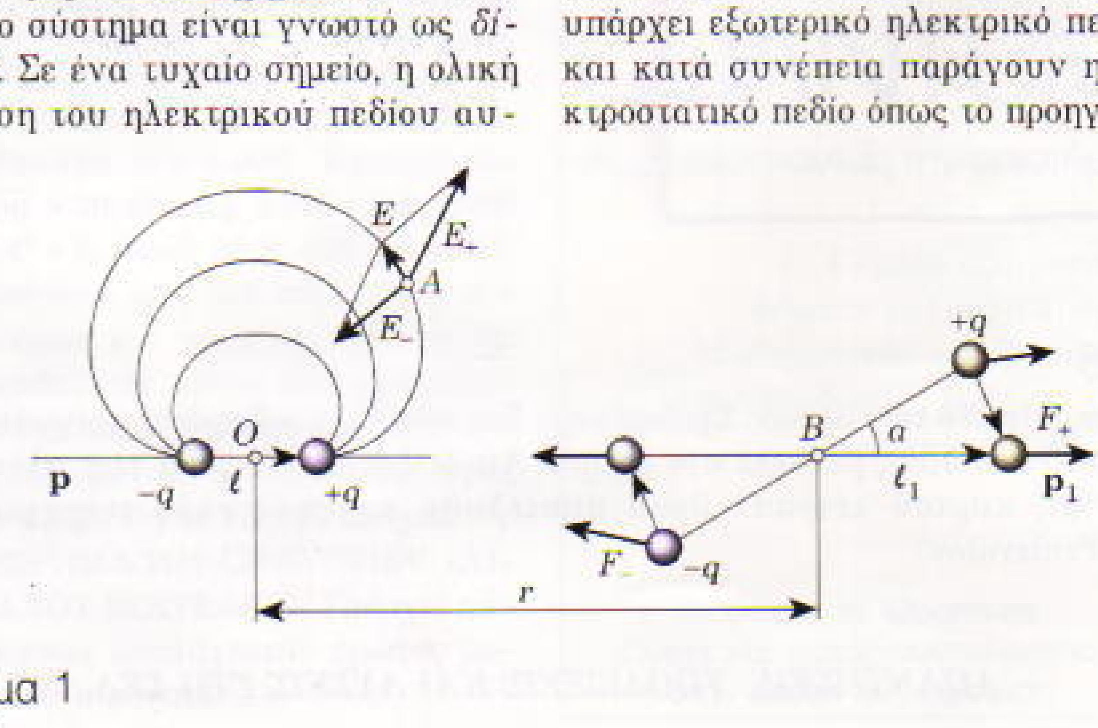
Albert Stasenko

Ο ΜΕΓΑΛΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ ΑΝΤΟΝ Τσέχωφ έγραφε σ' ένα έργο του ότι στην Αγία Πετρούπολη «έπεσε παγωνιά διακοσίων βαθμών... Οι άνθρωποι τρομοκρατήθηκαν...» Ο Τσέχωφ, έχοντας μόρφωση γιατρού, είχε φυσικά στο νου του την κλίμακα θερμοκρασιών Κελσίου, κι έτσι μια «παγωνιά διακοσίων βαθμών» αντιστοιχεί σε απόλυτη θερμοκρασία 273 – 200 = 73 K. Αν κοιτάξουμε σ' ένα βασικό βιβλίο φυσικής, μπορούμε να δούμε ότι στη θερμοκρασία αυτή υγροποιείται ο αέρας. Θα ήταν λοιπόν άθλος ακόμη και να «τρομοκρατηθεί» κανείς με τέτοιο καιρό.

Μόλις στον αιώνα μας οι επιστήμονες κατόρθωσαν να μετατρέψουν όλα τα αέρια σε υγρά —ακόμη και εκείνα που φαινόταν αδύνατο να υγροποιηθούν. Πράγματι, το κύριο χαρακτηριστικό των αερίων είναι ότι τείνουν να καταλαμβάνουν όλο τον διαθέσιμο χώρο· έτσι τα μόρια του αερίου στο μακρινό Διάστημα, για παράδειγμα, θα μπορούσαν να ταξιδέψουν έως τα άκρα του σύμπαντος.

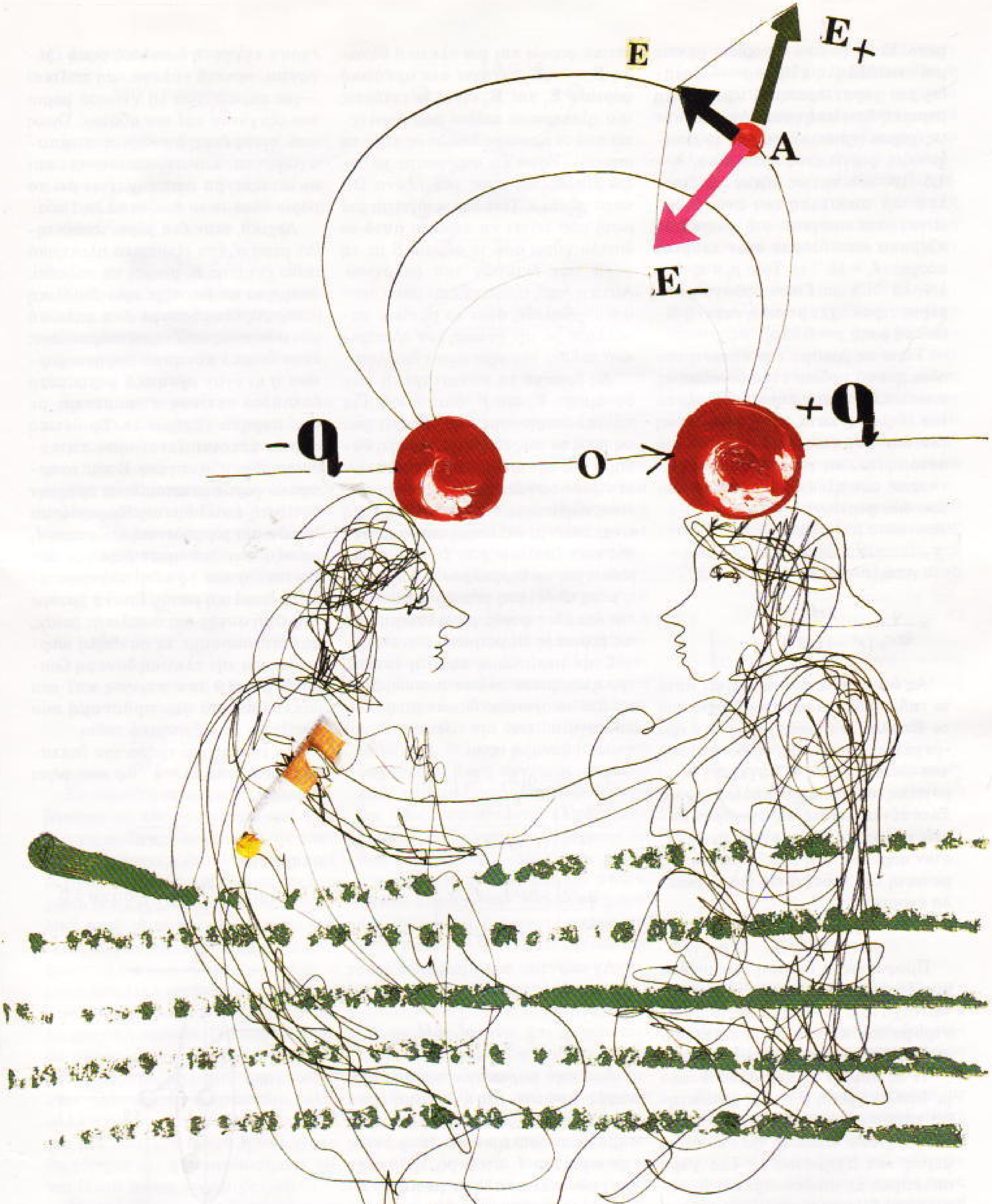
Ποιοι δεσμοί συγκρατούν δίπλα-δίπλα τα μόρια στα υγρά; Θα μπορούσε πραγματικά να υπάρχουν κάποιου είδους άγκιστρα, όπως φαντάστηκαν οι αρχαίοι ατομικοί φιλόσοφοι; Από τη σκοπιά του έλληνα φιλοσόφου Εμπεδοκλή του Ακραγαντίνου, η συμπύκνωση και υγροποίηση των αερίων θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής: ελκόμενα από την Αγάπη, (τη «Φιλότητα») τα μόρια πλησιάζουν μεταξύ τους, αλλά τότε απλώνεται η Διχόνοια (το «Νείκος») ανάμεσά τους, προσπαθώντας να τα χωρίσει. Τελικά, η ισορροπία αυτών των συναισθημάτων δημιουργεί την υγρή φάση. Αλλά ποιο είναι το ποσοτικό μέτρο αυτών των «μοριακών συναισθημάτων» —ή, στην ορολογία της σύγχρονης φυσικής, των δυνάμεων έλξης και άπωσης; Επιπλέον, γιατί αυτές οι δυνάμεις εμφανίζονται ανάμεσα σε ηλεκτρικώς ουδέτερα μόρια;

Πρώτα απ' όλα, η ουδετερότητα του φορτίου δεν σημαίνει την απουσία ηλεκτρικού πεδίου. Ας θεωρήσουμε δύο σημειακά φορτία $+q$ και $-q$ σε μεταξύ τους απόσταση ℓ (βλ. αριστερό μέρος του Σχήματος 1). Ένα τέτοιο σύστημα είναι γνωστό ως *δίπολο.* Σε ένα τυχαίο σημείο, η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αυτών των φορτίων είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο εντάσεων $\mathbf{E}_+$ και $\mathbf{E}_-$. Υπολογίζοντας κανείς αυτό το άθροισμα σε κάθε σημείο, μπορεί να χαράξει συνεχείς γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου, από το θετικό φορτίο έως το αρνητικό (το σχήμα δείχνει μια τομή του ηλεκτρικού πεδίου, με τον άξονα συμμετρίας να περνάει από τα δύο φορτία). Το γινόμενο $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$ (το διάνυσμα $\boldsymbol{\ell}$ σύρεται από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο) λέγεται *διπολική ροπή.* Υπάρχουν τα λεγόμενα *πολικά μόρια* στα οποία τα «κέντρα βάρους» των θετικών και των αρνητικών φορτίων δεν συμπίπτουν (πράγμα που, φυσικά, δεν τα εμποδίζει να είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα). Τέτοια μόρια έχουν σαφή διπολική ροπή ακόμη και όταν δεν υπάρχει εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, και κατά συνέπεια παράγουν ηλεκτροστατικό πεδίο όπως το προηγού-



Σχήμα 1

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov


E
E+
A
E−
−q
O
+q

μενο. Είναι βολικό να ορίσει κανείς μια «κατάλληλη κλίμακα» — δηλαδή, μια χαρακτηριστική τιμή για τη μοριακή διπολική ροπή. Ας πάρουμε ως χαρακτηριστικό φορτίο το στοιχειώδες φορτίο ενός πρωτονίου, $e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb, και ως μήκος του διπόλου την απόσταση του ενός Angstrom (που εισάγεται στη φυσική ως κλίμακα αποστάσεων στον ατομικό κόσμο): $\ell_0 = 10^{-10}$ m. Τότε $p_0 = e_0 \cdot \ell_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-29}$ Cb · m. Για παράδειγμα, ένα μόριο νερού έχει μεγάλη εγγενή διπολική ροπή $p = 0{,}62p_0$.

Τώρα ας βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός διπόλου σε απόσταση r κατά μήκος του άξονά του (δηλαδή, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\ell}$). Για το σκοπό αυτό πρέπει να προσθέσουμε τις εντάσεις των ηλεκτρικών πεδίων και των δύο φορτίων:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-\ell/2)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+\ell/2)^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2r\ell}{\left(r^2-(\ell/2)\right)^2}. \qquad (1)$$

Ας δούμε πώς τροποποιείται αυτό το πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις από το δίπολο. Τι εννοούμε με τον όρο «μεγάλες»; Ασφαλώς, σε αποστάσεις που είναι μεγάλες σε σύγκριση με το μέγεθος του ίδιου του διπόλου: $r \gg \ell$. Τότε είναι δυνατό να αγνοήσει κανείς τον όρο $(\ell/2)^2$ σε σχέση με τον r^2 στον παρονομαστή της εξισώσεως (1) · με αυτή την προσέγγιση για το δίπολο έχουμε:

$$E \cong \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ell}{r^3}. \qquad (2)$$

Προφανώς, η ένταση του πεδίου που δημιουργεί το δίπολο ελαττώνεται ταχύτερα (ανάλογα με το αντίστροφο του κύβου της απόστασης) από εκείνη ενός σημειακού φορτίου.

Τι θα συμβεί αν ένα άλλο δίπολο με διπολική ροπή $\mathbf{p}_1 = q\,\boldsymbol{\ell}_1$ τοποθετηθεί κάπου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο του αρχικού διπόλου (βλ. το δεξιό μέρος του Σχήματος 1); Για χάρη απλότητας ας υποθέσουμε ότι το κέντρο του βρίσκεται πάνω στον άξονα ΟΒ. Καθώς η ένταση του πεδίου που παράγεται εδώ από το αριστερό δίπολο έχει φορά προς τα δεξιά, μια απωστική δύναμη $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}_1$ ενεργεί στο θετικό φορτίο και μια ελκτική δύναμη $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}_2$ ενεργεί στο αρνητικό φορτίο ($\mathbf{E}_1$ και $\mathbf{E}_2$ είναι οι εντάσεις του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το αριστερό δίπολο σε αυτά τα σημεία). Έστω ότι στρέφουμε το δεξιό δίπολο ως προς τον άξονα ΟΒ κατά γωνία α. Τότε δημιουργείται μια ροπή που τείνει να στρέψει αυτό το δίπολο γύρω από το σημείο Β με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Αυτή η ροπή εξαφανίζεται μόνο όταν $\alpha = 0$ —δηλαδή, όταν το $\mathbf{p}_1$ είναι παράλληλο με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του αριστερού διπόλου.

Ας βρούμε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\mathbf{F}_+$ και $\mathbf{F}_-$ όταν $\alpha = 0$. Για να απλοποιήσουμε την έρευνά μας ως προς το πώς εξαρτάται αυτή η δύναμη από την απόσταση r μεταξύ των κέντρων των διπόλων, υποθέτουμε, όπως παραπάνω, ότι η απόσταση αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από το μέγεθος κάθε διπόλου: $r \gg \ell$, ℓ_1. Για παράδειγμα, σε θερμοκρασία δωματίου η μέση απόσταση μεταξύ μορίων είναι δεκάδες φορές μεγαλύτερη από τις μοριακές διαμέτρους.

Στην περίπτωση αυτή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το αριστερό δίπολο μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (2) και η ολική δύναμη είναι

$$F_+ - F_- = q\left(E_1 - E_2\right)$$

$$= \frac{2q^2\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r+\ell_1/2)^3} - \frac{1}{(r-\ell_1/2)^3}\right)$$

$$= \frac{2q^2\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3r^2\ell_1 - \ell_1^3/4}{\left(r^2-(\ell_1/2)^2\right)^3}\right).$$

Αγνοώντας τους μικρούς όρους στον αριθμητή και τον παρονομαστή προκύπτει

$$F_+ - F_- \cong -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6\ell\ell_1}{r^4}. \qquad (3)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι σαφές, πρώτον, ότι η δύναμη είναι ελκτική (προσέξτε το αρνητικό πρόσημο), και δεύτερον ότι θεωρώντας την τιμή του ℓ_1 σταθερή, η δύναμη ελαττώνεται ανάλογα με το αντίστροφο της τέταρτης δύναμης της απόστασης μεταξύ των διπόλων.

Έτσι διαπιστώνουμε πώς έλκονται αμοιβαία τα πολικά μόρια. Υπάρχουν όμως και μόρια που δεν έχουν εγγενή διπολική ροπή (λέγονται, αρκετά εύλογα, *μη πολικά*) —για παράδειγμα τα γνωστά μόρια του οξυγόνου και του αζώτου. Όμως υπό ορισμένες συνθήκες συμπυκνώνονται και υγροποιούνται και αυτά, πράγμα που σημαίνει ότι τα μόρια έλκουν το ένα το άλλο. Γιατί;

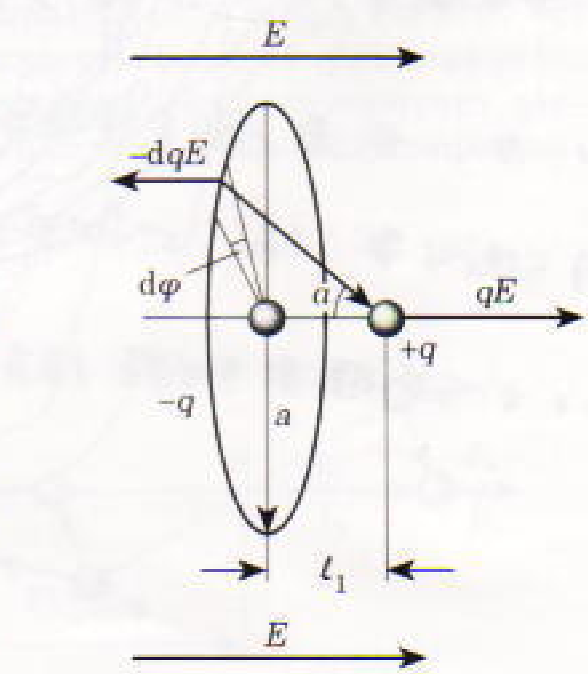
Αρχικά, όταν ένα μόριο τοποθετηθεί μέσα σ' ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\mathbf{E}$, μπορεί να πολωθεί, ακόμη κι αν δεν είχε πριν διπολική ροπή. Ας θεωρήσουμε ένα απλοϊκό μοντέλο ενός ουδέτερου σωματιδίου: έναν θετικό κεντρικό πυρήνα φορτίου q κι έναν αρνητικά φορτισμένο δακτύλιο ακτίνας a ομόκεντρο με τον πυρήνα (Σχήμα 2). Το θετικό φορτίο μετατοπίζεται προς κατεύθυνση ίδια μ' αυτή του $\mathbf{E}$ και το αρνητικό φορτίο μετατοπίζεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Εμφανίζεται λοιπόν μία μη μηδενική απόσταση ℓ_1 μεταξύ των «κέντρων βάρους» των φορτίων q και $-q$ (δηλαδή εμφανίζεται διπολική ροπή). Για να βρούμε την τιμή αυτής της διπολικής ροπής, ας διατυπώσουμε τη συνθήκη ισορροπίας για την ελκτική δύναμη Coulomb μεταξύ του πυρήνα και του δακτυλίου και για τη δύναμη που οφείλεται στο εξωτερικό πεδίο.

Για ένα τυχαίο τμήμα του δακτυλίου με μήκος $ds = a \cdot d\varphi$ που φέρει φορτίο

$$dq = -q\frac{ds}{2\pi a},$$

παίρνουμε

$$-dqE + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dq}{a^2+\ell_1^2}\,\text{συν}\,\alpha = 0,$$



Σχήμα 2

ή, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\sigma \upsilon \nu a = \frac{\ell_1}{\sqrt{a^2 + \ell_1^2}},$$

απλοποιώντας το dq από την εξίσωση και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ότι η παραμόρφωση του συστήματός μας εξαιτίας του εξωτερικού πεδίου είναι μικρή ($\ell_1^2 << a^2$), έχουμε τελικά

$$q\ell_1 = 4\pi \varepsilon_0 a^3 E.$$

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό το ότι αυτή η *επαγόμενη* διπολική ροπή είναι ανάλογη με την ένταση του εξωτερικού πεδίου και έχει την ίδια κατεύθυνση μ' αυτήν.

Επιστρέφοντας στην κατάσταση που απεικονίζεται στο Σχήμα 1, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2) (που προσδιορίζει ποσοτικά την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου το οποίο παράγει το αριστερό δίπολο) ως ένταση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, βλέπουμε ότι ένα μη πολικό μόριο σε απόσταση r αποκτά μια επαγόμενη διπολική ροπή

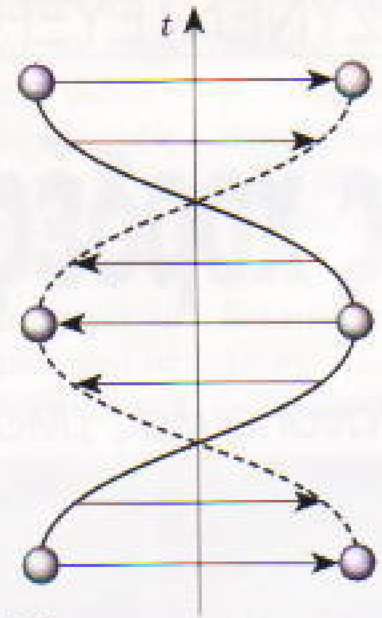
$$p_1 = q\ell_1 = 4\pi \varepsilon_0 a^3 \frac{2q\ell}{4\pi \varepsilon_0 r^3} = 2q\ell \frac{a^3}{r^3}.$$

Τότε, σύμφωνα με την εξίσωση (3), θα έλκεται από μια δύναμη

$$-\frac{2(q\ell)^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{6a^3}{r^7} \sim -\frac{1}{r^7}.$$

Εν τοιαύτη περιπτώσει, αντιλαμβάνομαι την εύλογη απορία σας, πώς ένα μη πολικό μόριο μπορεί να αποκτά μια αρχική διπολική ροπή $q\ell$ (Σχήμα 1). Πρώτα απ' όλα, το ότι ένα μόριο δεν έχει κατά μέσον όρο διπολική ροπή, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν έχει ροπή και σε *κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή*. Κατά συνέπεια, η μέση διπολική ροπή μπορεί να είναι μηδέν αν υπολογιστεί για μια μεγάλη χρονική περίοδο. Για παράδειγμα, θα μπορούσατε να τρέξετε γρήγορα στο διάδρομο από τον έναν τοίχο στον άλλο και να κουραστείτε πολύ, αλλά η «μέση» συντεταγμένη σας $x(t)$ για μία ώρα, μία ημέρα ή ένα χρόνο θα έδειχνε ότι η μετατόπισή σας είναι (κατά μέσον όρο) μηδενική.

Με τον ίδιο τρόπο η διπολική ροπή ενός μορίου μπορεί να μεταβάλλεται πολύ γρήγορα με το χρόνο ενώ κατά μέσον όρο να είναι μηδέν (μια τέτοια κατάσταση φαίνεται ποιοτικά στο

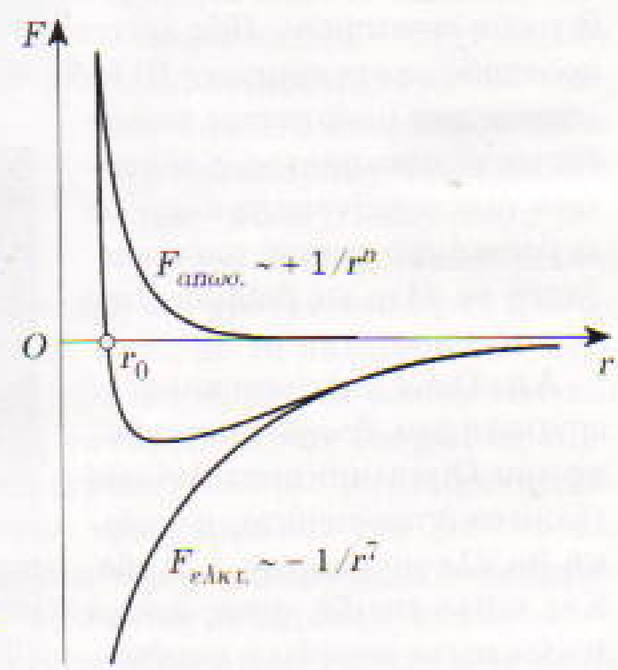


Σχήμα 3

Σχήμα 3). Φανταστείτε, για παράδειγμα, ότι το θετικό φορτίο στο Σχήμα 2 ταλαντώνεται με κάποια συχνότητα, κινούμενο από το κέντρο του δακτυλίου μία προς τα δεξιά και μία προς τα αριστερά. Η διπολική ροπή θα μεταβάλλεται αντίστοιχα με την ίδια συχνότητα και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του, που υπολογίστηκε στην εξίσωση (2), θα κάνει το ίδιο —αν αγνοήσουμε τη χρονική υστέρηση που οφείλεται σε σχετικιστικά φαινόμενα. Αν ένα άλλο μόριο της ίδιας ουσίας βρισκόταν σε κάποιο άλλο σημείο του χώρου, το εναλλασσόμενο πεδίο του πρώτου μορίου θα πόλωνε το δεύτερο μόριο με την ίδια συχνότητα. Κατά συνέπεια, τα μόρια κάθε στιγμή έχουν διπολικές ροπές της ίδιας κατεύθυνσης, και έτσι έλκονται με δύναμη που περιγράφεται από την εξίσωση (3), και οι μέσες διπολικές ροπές τους είναι μηδέν. (Αυτό θυμίζει την αλληλεπίδραση δύο διαπασών: Χτυπήστε το ένα απ' αυτά και το άλλο θα ανταποκριθεί με την ίδια συχνότητα· αυτό το ονομάζουμε «συζευγμένη ταλάντωση».)

Στην ελκτική δύναμη που περιγράψαμε παραπάνω, και η οποία αυξάνεται απότομα ενόσω ελαττώνεται η απόσταση, δόθηκε το όνομα *δύναμη Van der Waals*, από το όνομα του επιστήμονα που διατύπωσε μια σχετικά απλή εξίσωση για τα πραγματικά αέρια, η οποία διαφέρει από τη γνωστή καταστατική εξίσωση για τα ιδανικά αέρια. Η ύπαρξη ενδομοριακών δυνάμεων είναι η αιτία να «αισθάνονται» τα μόρια το ένα το άλλο σε μεγάλες αποστάσεις, και όχι μόνο όταν συγκρούονται, όπως αν λειτουργούσαν απλώς σαν στερεές σφαίρες. Όταν το αέριο ψύχεται και η μέση ταχύτητα και κινητική ενέργεια των μορίων του ελαττώνονται, αυτά μπορούν να είναι το ένα κοντά στο άλλο περισσότερο χρόνο· μακροπρόθεσμα, το έργο των ελκτικών δυνάμεων (που αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια) θα «νικήσει» την κινητική ενέργεια, με αποτέλεσμα την υγροποίηση.

Φυσικά, όσο τα μόρια πλησιάζουν, η έλξη δίνει τη θέση της στην άπωση (τη «Φιλότητα» την αντικαθιστά το «Νείκος», στην ορολογία των αρχαίων φιλοσόφων), επειδή, όπως ξέρετε, η απόσταση μεταξύ μορίων δεν μπορεί να είναι μηδενική. Οι απωστικές δυνάμεις εξαρτώνται ισχυρότερα από την απόσταση· είναι ανάλογες του $1/r^n$, όπου το n κυμαίνεται για διάφορες ουσίες από 9 έως 15. Σε μια ορισμένη απόσταση $r = r_0$, η έλξη και η άπωση γίνονται ίσες (Σχήμα 4). Αυτή είναι απλώς η μέση



Σχήμα 4

απόσταση μεταξύ μορίων στη συμπυκνωμένη ύλη —σ' ένα υγρό ή στερεό σώμα. Αυτό φυσικά δεν σημαίνει ότι τα μόρια έπαψαν τελείως να κινούνται.

Είναι ώρα όμως να θυμηθούμε ότι όλα αυτά είναι μικροσκοπικά αντικείμενα και ότι μόνο η κβαντική μηχανική μπορεί να δώσει μια ορθή περιγραφή της αλληλεπίδρασής τους —μια ιδιαίτερα ευχάριστη υπόμνηση όταν εμφανίζεται στις σελίδες του περιοδικού *Quantum*!

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

Οι ευαίσθητες χορδές της φυσικής

Ο Δημήτρης Νανόπουλος μιλά στο Quantum

Το 1990 το ευρύ κοινό έμαθε από τον ελληνικό τύπο ότι το όνομά του περιλαμβανόταν στον «κατάλογο υποψηφίων» για το Νόμπελ φυσικής εκείνης της χρονιάς. Από τότε πέρασαν τέσσερα ολόκληρα χρόνια· οι πολλοί ίσως τον ξέχασαν, οι επαΐοντες όμως γνωρίζουν ότι ο Δημήτρης Νανόπουλος είναι, χάρη στο έργο του, ένας από τους κορυφαίους θεωρητικούς φυσικούς στον τομέα της φυσικής των υψηλών ενεργειών. Στο παρόν τεύχος ο καθηγητής Νανόπουλος συζητάει με τον Γιώργο Ευαγγελόπουλο για την επιστημονική του πορεία και το μέλλον της φυσικής.

Ερ.: *Κύριε καθηγητά, το Quantum σας καλωσορίζει στην Αθήνα και με την ευκαιρία σας ευχαριστεί για την εγκάρδια επιστολή που μας στείλατε με αφορμή την έκδοσή του. Όπως επισημαίνετε στην επιστολή σας, σκοπός του περιοδικού είναι η καλλιέργεια και η ανάπτυξη της κριτικής, άρα και δημιουργικής, σκέψης των μαθητών και των φοιτητών στα γνωστικά αντικείμενα των θετικών επιστημών. Πώς κρίνετε το μέλλον μιας τέτοιας προσπάθειας στη σημερινή Ελλάδα, όπου, λόγω των απαιτήσεων του υπάρχοντος εκπαιδευτικού συστήματος, η ικανότητα απομνημόνευσης αποτελεί το βασικότερο προσόν του σπουδαστή σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης;*

Απ.: Όπως σημείωνα και στην επιστολή μου, θεωρώ ότι η έκδοση του Quantum αποτελεί μια εξαιρετική προσπάθεια, μοναδική θα έλεγα για την Ελλάδα. Και τούτο επειδή, όπως σωστά τονίσατε, το περιοδικό συμβάλλει, με την προσεκτικά επιλεγμένη ύλη του και με τον «έξυπνο» και πρωτότυπο τρόπο παρουσίασής της, στην απελευθέρωση και την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης των αναγνωστών του. Μ' αυτό τον τρόπο αντιμάχεται την κυρίαρχη τάση της στείρας απομνημόνευσης πληροφοριών που γι' αυτόν ακριβώς το λόγο δεν μετατρέπονται ποτέ σε γνώσεις. Είναι επίσης πολύ σημαντικό το ότι το περιοδικό δεν είναι πολύ εκλαϊκευτικό ούτε πολύ τεχνικό: αν ήταν πολύ τεχνικό, δεν θα ήταν προσιτό στους φοιτητές και τους μαθητές, αλλά και στο ευρύτερο κοινό στο οποίο απευθύνεται· αν, αντίθετα, ήταν καθαρά εκλαϊκευτικό, θα επιτελούσε μια τελείως διαφορετική λειτουργία που δεν θα ανταποκρινόταν στον κατ' εξοχήν σκοπό του, που είναι εκπαιδευτικός.

Ο Δημήτρης Νανόπουλος ολοκλήρωσε τις προπτυχιακές του σπουδές στο Φυσικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών και πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα στον τομέα της φυσικής υψηλών ενεργειών από το Πανεπιστήμιο του Essex της Αγγλίας. Εργάστηκε ως ερευνητής στην Ecole Normale Supérieure, στο Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν (ένα έτος), στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ (δύο έτη), και σήμερα είναι καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο A&M του Τέξας. Ταυτόχρονα είναι διευθυντής του Τμήματος Αστροφυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων στο Κέντρο Ανωτέρων Σπουδών του Χιούστον, και ερευνητής στο Τμήμα Θεωρητικής Φυσικής του CERN, στη Γενεύη. Το 1990 επιβεβαιώθηκε η ύπαρξη των έξι κουάρκ, όπως είχε προβλέψει θεωρητικά στην από κοινού εργασία του με τον John Ellis και την Mary Gaillard.

Ερ.: *Ευχαριστώ πολύ για τα καλά σας λόγια. Ας στρέψουμε τώρα τη συζήτησή μας στο επιστημονικό σας έργο. Στην κοινότητα των φυσικών, ελληνική και διεθνή, ήσαστε πολύ γνωστός και πριν από το 1990. Εκείνη τη χρονιά, όμως, το όνομά σας πέρασε και στις στήλες των ελληνικών εφημερίδων, αφού πιθανολογούνταν ότι η εργασία που κάνατε από κοινού με τον John Ellis και τη Mary Gaillard το 1977, και η οποία οδήγησε στην πρόβλεψη ότι ο αριθμός των κουάρκ είναι έξι, μετά την πειραματική της επαλήθευση στο CERN το 1989, θα σας απέφερε το Νόμπελ φυσικής. Θα θέλατε να μας πείτε λίγα λόγια για κείνη την εργασία;*

Απ.: Ναι, είναι αλήθεια ότι υπήρξε μια απροσδόκητα θερμή υποδοχή αυτής της είδησης, σχεδόν ενθουσιώδης, η οποία με συγκίνησε πολύ και τη θυμάμαι πάντοτε με ευγνωμοσύνη. Εκείνο, όμως, που είναι ευρύτερης σημασίας είναι το να έχει κάποια συνέχεια το ενδιαφέρον των μέσων ενημέρωσης για επιστημονικά θέματα. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τους νέους ανθρώπους που αγαπούν την επιστήμη και ξεκινούν τώρα τη σταδιοδρομία τους να γνωρίζουν ότι η κοινωνία επιβραβεύει τις προσπάθειες όχι μόνον των αθλητών και των καλλιτεχνών, αλλά και των επιστημόνων. Προς αποφυγήν όμως παρεξηγήσεων, και χωρίς αυτό να αναιρεί την προηγούμενη επισήμανσή μου, σπεύδω να τονίσω ότι όποιος αποφασίσει να μπει στην «περιπέτεια» της επιστημονικής έρευνας, πρέπει να γνωρίζει ότι το μεγάλο του κέρδος δεν θά 'ναι παρά το «ταξίδι», όπως αναφέρει και ο Καβάφης στην «Ιθάκη» του.

Έρχομαι τώρα στο συγκεκριμένο θέμα αυτής της εργασίας. Πραγματικά, θυμάμαι ότι από την εποχή που παρουσιάσαμε την εργασία μας ήμαστε πεπεισμένοι ότι ο αριθμός των κουάρκ θα ήταν έξι. Όταν λοιπόν το 1989 μάθαμε τα πειραματικά αποτελέσματα του CERN, νιώσαμε μεγάλη χαρά και ικανοποίηση, όχι όμως και έκπληξη. Επρόκειτο για ένα ακόμη επιτυχημένο βήμα στην προσπάθεια των φυσικών να «αποκωδικοποιήσουν» τη δομή της ύλης.

Ερ.: *Επιτρέψτε μου τώρα μια ερώτηση που αφορά τη λίγο «βιαστική» δημοσιότητα που δίνεται καμιά φορά σε επιστημονικές ανακαλύψεις, προτού αυτές ελεγχθούν και επιβεβαιωθούν πλήρως. Σας αναφέρω ως παράδειγμα το ακόλουθο περιστατικό: Πριν από λίγους μήνες δημοσιεύθηκε στον διεθνή τύπο η εντυπωσιακή είδηση ότι στο Fermilab ανακαλύφθηκε το κουάρκ «κορυφή» (top quark), το έκτο και τελευταίο από τα κουάρκ που έμενε ακόμη να ανακαλυφθεί. Εντούτοις, όπως διαβάζουμε στο Scientific American του Ιουλίου 1994, ο W.C. Carrithers, ως εκπρόσωπος των Εργαστηρίων, διέψευσε την είδηση, υποσχόμενος όμως ευχάριστα νέα στο άμεσο μέλλον. Ο καθηγητής Steven Weinberg θεωρεί πως υπάρχει ισχυρή πιθανότητα, η οποία προκύπτει από τις θεωρητικές προβλέψεις, «το κουάρκ "κορυφή" να είναι εκεί». Ποια είναι η γνώμη σας; Βρισκόμαστε κοντά στην ανακάλυψη του κουάρκ «κορυφή»; Γιατί αυτή η βιασύνη στη διάδοση του νέου; Και τέλος, τι θα σήμαινε αυτή η ανακάλυψη για την κατανόηση της φύσης της ύλης;*

Απ.: Πρώτον: Δεν νομίζω πως υπάρχει φυσικός των στοιχειωδών σωματιδίων, πειραματικός ή θεωρητικός, που να μην πιστεύει ότι υπάρχει το κουάρκ «κορυφή», το οποίο είναι το «συμμετρικό» μέρος του κουάρκ «πυθμένας». Επομένως, εφόσον βρήκαμε το ένα, πρέπει φυσιολογικά να βρούμε και το άλλο!

Δεύτερον: Με τη θεωρητική επεξεργασία ορισμένων πειραματικών δεδομένων που πήραμε από τον LEP, αυτόν τον μεγάλο επιταχυντή που βρίσκεται στο CERN, στη Γενεύη, μπορέσαμε να υπολογίσουμε πόση πρέπει να είναι περίπου η μάζα του κουάρκ «κορυφή». Προκύπτει λοιπόν μια μάζα 160-170 GeV, δηλαδή 60 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του πρωτονίου. Τι συνέβη, λοιπόν, στα τέλη Απριλίου; Δόθηκε μια συνέντευξη τύπου στο Fermilab, στην οποία παρευρέθησαν ο διευθυντής όλου του Fermilab, ο επικεφαλής του συγκεκριμένου πειράματος (CDF) και ο εκπρόσωπος τύπου των Εργαστηρίων. Ανακοίνωσαν πως υπάρχει πάρα πολύ ισχυρή ένδειξη ότι ανακάλυψαν το κουάρκ «κορυφή», το οποίο πρέπει να έχει μια μάζα της τάξεως των 170 GeV, με σχετικό σφάλμα της τάξεως των ±17 GeV. Βλέπετε λοιπόν ότι η ανακοίνωση του Fermilab επιβεβαιώνει την πρόβλεψή μας όσον αφορά το μέγεθος της μάζας του κουάρκ «κορυφή». Επίσης θα πω κάτι που δεν έχει γραφεί ακόμη στα περιοδικά: οι προαναφερθέντες υπεύθυνοι έχουν οργανώσει σεμινάρια σ' όλο τον κόσμο, στα οποία συζητήθηκαν αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα και δεν βρέθηκε κανείς να τα αμφισβητήσει! Για μένα το κουάρκ «κορυφή» βρέθηκε πειραματικά, και το μόνο που απομένει είναι να βελτιώσουμε τα υπάρχοντα αποτελέσματα, μικραίνοντας το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό της μάζας του.

Τρίτον: Έρχομαι τώρα στο ερώτημά σας που αφορά το λόγο για τον οποίο η προαναφερθείσα συνέντευξη τύπου δόθηκε τον περασμένο Απρίλιο και οι υπεύθυνοι του Fermilab δεν προτίμησαν να δουλέψουν περισσότερο και να κάνουν αργότερα την ανακοίνωση. Πριν απ' όλα, πρέπει να πω ότι όλοι μας γνωρίζαμε, ή είχαμε ακούσει, ήδη από τον Οκτώβριο του 1993, πως υπήρχαν τέτοιες ενδείξεις, οπότε οι υπεύθυνοι του πειράματος δεν προέβησαν σε εσπευσμένη και πρόχειρη ανακοίνωση. Αντιθέτως, επί ένα εξάμηνο έκαναν πολλούς διασταυρωτικούς ελέγχους των πρώτων αποτελεσμάτων τους και κατόπιν αποφάσισαν να τα δημοσιοποιήσουν. Πέραν αυτού όμως, υπάρχει και ένας βαθύτερος λόγος, οικονομικός, που οδήγησε στην επιλογή του χρόνου που έγινε η ανακοίνωση. Όπως ξέρετε, τώρα, με τη ματαίωση του σχεδίου κατασκευής του SSC, του τεραστίων διαστάσεων και κόστους επιταχυντή συγκρουόμενων δεσμών πρωτονίου-πρωτονίου, η Αμερική κάνει μια μεγάλη αναθεώρηση των ερευνητικών προγραμμάτων της. Στο πλαίσιο αυτής της αναθεώρησης τίθεται το ερώτημα ποια εργαστήρια θα παραμείνουν ανοιχτά και ποια θα κλείσουν. Η προσωπική μου γνώμη είναι ότι το Fermilab, το οποίο είναι ένα πάρα πολύ καλό εργαστήριο, χρειαζόταν μια σημαντική ανακάλυψη, σαν κι αυτήν εδώ, για να υπογραμμίσει ότι είναι αναγκαία η περαιτέρω οικονομική υποστήριξη του έργου του.

Τέταρτον: Η ανακάλυψη είναι σημαντική, διότι, αν και είχε προβλεφθεί πως υπάρχουν μόνο έξι κουάρκ και είχαμε από τον LEP, με έμμεσο αλλά ξεκάθαρο τρόπο, πειραματική επαλήθευση αυτής μας της πρόβλεψης, μας έλειπε το έκτο κουάρκ, που δεν το είχαμε ανακαλύψει ακόμη. Τώρα ο κύκλος κλείνει, οπότε, αν έχουμε δίκιο και η φύση δεν μας έχει κρύψει και πάλι κάποια βαθύτερα μυστικά της, αν δηλαδή δεν υπάρχει περαιτέρω υποδιαίρεση της ύλης την οποία αγνοούμε, τότε, με την ανακάλυψη του κουάρκ «κορυφή» ολοκληρώνεται το «όνειρο» του Δημόκριτου για τη διαίρεση της ύλης στα πιο στοιχειώδη συστατικά της.

Ερ.: *Ας δεχτούμε ότι τώρα μάλλον ολοκληρώνεται η* *εικόνα των στοιχειωδεστέρων υποδιαιρέσεων της ύλης. Θα συμφωνείτε όμως ότι, παρά ταύτα, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε πως έχουμε σχηματίσει πλήρη εικόνα του «κόσμου των στοιχειωδών σωματιδίων»! Πώς θα μπορούσαμε να πούμε κάτι τέτοιο, όταν π.χ. δεν έχει ακόμη ανακαλυφθεί το μποζόνιο Higgs, που θεωρείται ότι είναι ο «μηχανισμός» ο οποίος μπορεί να εξηγήσει το γιατί τα σωματίδια έχουν τις μάζες που έχουν;*

Απ.: Νομίζω ότι όλα αυτά που λέμε τώρα, είναι σταγόνα στον ωκεανό σε σχέση με τα προβλήματα που έχουμε μπροστά μας και τις φιλοδοξίες που έχει καλλιεργήσει η έρευνα στον κλάδο μας. Η ανακάλυψη του έκτου κουάρκ είναι, επαναλαμβάνω, ένα σημαντικό γεγονός, όμως είναι βέβαιο ότι το μέλλον μάς επιφυλάσσει μεγαλύτερα και σημαντικότερα επιτεύγματα. Αναφερθήκατε πολύ σωστά στο μποζόνιο Higgs το οποίο έχει πολύ διαφορετική υφή και διαδραματίζει πολύ διαφορετικό ρόλο σε όλη την ιστορία της κατανόησης του κόσμου. Προσωπικά θα ήμουν πολύ πιο ενθουσιασμένος αν άκουγα ότι ανακαλύφθηκε το μποζόνιο Higgs παρά το κουάρκ «κορυφή». Το ξεκαθαρίζω αυτό επειδή έχουν γραφεί πολλές υπερβολές σχετικά με τη σημασία της ανακάλυψης του τελευταίου.

Ερ.: *Εδώ και αρκετά χρόνια συγκαταλέγεστε στους πρωτοπόρους ερευνητές στον τομέα των θεωριών των υπερχορδών, ή απλώς χορδών, όπως ξαναλέγονται τελευταία. Πρόκειται, ως γνωστόν, για τις πιο διαδεδομένες και πιο αποδεκτές θεωρίες της κβαντικής βαρύτητας. Σήμερα, δέκα χρόνια μετά την πρωτοεμφάνιση των εν λόγω θεωριών, ποια είναι η κατάσταση στον τομέα αυτό και τι προσδοκίες υπάρχουν;*

Απ.: Πράγματι, πέρασαν δέκα χρόνια από τον Σεπτέμβριο του 1984, όταν οι Green και Schwarz απέδειξαν ότι οι χορδές μπορούν να μας δώσουν μια συνεπή κβαντική θεωρία της βαρύτητας. Είναι η πρώτη και η μόνη θεωρία που διαθέτουμε προς το παρόν. Νομίζω ότι είναι περιττό να σχολιάσω το πόσο σημαντικό είναι αυτό, ύστερα από εβδομήντα χρόνια ανεπιτυχών προσπαθειών! Επίσης είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρον, αλλά δυστυχώς δεν συζητείται πολύ, το ότι οι θεωρίες των χορδών ή υπερχορδών «περιέχουν» σε κάποιο όριο όλα αυτά τα οποία συζητούνταν τα προηγούμενα χρόνια, συμπεριλαμβανομένων των έξι κουάρκ, του μποζονίου Higgs, αλλά και αυτής ακόμη της λεγόμενης υπερσυμμετρίας, που δεν την έχουμε ακόμη βρει και η οποία μας χρειάζεται, για να επιτευχθεί η «ευστάθεια» της θεωρίας του καθιερωμένου μοντέλου (Standard Model), δηλαδή για να υπάρξει «ιεραρχία βαθμίδας» εντός αυτής. Εξηγώ ευθύς αμέσως τι εννοώ: Το καθιερωμένο μοντέλο «δουλεύει» πειραματικά, αλλά έχει το μειονέκτημα πως αν το αφήσω έτσι όπως είναι, τότε αυτή η θεωρία δεν είναι «ευσταθής», με την έννοια ότι, αν βάλω κβαντικές διορθώσεις, θα δω ότι οι μάζες των σωματιδίων που θα πάρω δεν είναι αυτές που μετράμε στο εργαστήριο, αλλά τρομακτικά μεγαλύτερες. Για να μας δώσει η εν λόγω θεωρία τις σωστές μάζες πρέπει να εισαγάγουμε σ' αυτή μια καινούργια συμμετρία, η οποία λέγεται υπερσυμμετρία και λειτουργεί κατά βάση ως «σταθεροποιητής» της. Δεν μπορώ να σκεφτώ τι καλύτερο όνειρο θα μπορούσε να κάνει κάποιος όσον αφορά τη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων από το να έχει στη διάθεσή του τόσο «λειτουργικές» θεωρίες. Οφείλω όμως να επισημάνω ότι υπάρχει παράλληλα και ένα σημαντικό πρόβλημα με τις θεωρίες των υπερχορδών, που έγκειται στην ύπαρξη δύο διαφορετικών «σχολών», οι οποίες ακολουθούν τους δικούς τους ιδιαίτερους δρόμους στην αντιμετώπιση των ερωτημάτων που θέτουν αυτές οι θεωρίες. Είναι σίγουρο ότι δεν έχουμε κατανοήσει σε βάθος πολλές από τις «περιοχές» της θεωρίας των χορδών και γι' αυτό πρέπει στο μέλλον είτε να χρησιμοποιήσουμε ακόμη πιο προχωρημένα μαθηματικά από τα όντως δύσκολα μαθηματικά που ήδη χρησιμοποιούμε, είτε ακόμη να επινοήσουμε καινούργια μαθηματικά, αν αυτό χρειαστεί. Υπάρχει λοιπόν η «μαθηματική σχολή» που πρεσβεύει ότι οι επιστήμονες που προσπαθούν να δουλέψουν ως φυσικοί στην εν λόγω θεωρία επιχειρούν κάτι που είναι πρόωρο ακόμη, και τούτο διότι δεν γνωρίζουμε όλες τις μορφές των χορδών και, κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να κάνουμε φαινομενολογία! Έτσι όμως χάνουμε το δάσος, κοιτάζοντας το δέντρο! Εγώ ανήκω στην άλλη «σχολή», σ' εκείνη που επιμένει να κάνει φυσική με τη θεωρία των χορδών και παραμερίζει προσωρινά τις μαθηματικές δυσκολίες, ώστε να ερευνήσει αν η συγκεκριμμένη θεωρία επιλύει κάποια ανοιχτά προβλήματα της σύγχρονης φυσικής. Ο φυσικός οφείλει να ακολουθεί τη διαίσθησή του και ν' ασχολείται με τα πρωτεύοντα ερωτήματα, από τις απαντήσεις στα οποία κρίνεται και η λειτουργικότητα της κάθε θεωρίας! Αυτές οι δύο σχολές πρέπει στο τέλος να συναντηθούν κάπου: προς το παρόν όμως τις χωρίζει μεγάλη απόσταση!

Ερ.: *Ο καθηγητής Roger Penrose, τόσο στο βιβλίο του* Ο νέος αυτοκράτορας(;), *όσο και στη συνέντευξη που παραχώρησε στο περιοδικό μας, επιμένει ότι υπάρχει ένα σημαντικό κενό γνώσης στο σημείο όπου έχουμε μετάβαση από το κβαντικό στο κλασικό επίπεδο, δηλαδή δεν θεωρεί ικανοποιητικές τις υπάρχουσες ερμηνείες του «προβλήματος της μέτρησης». Αυτός είναι και ο λόγος που αμφισβητεί τις υπάρχουσες θεωρίες της κβαντικής βαρύτητας, αφού όλες τους δέχονται την κβαντική θεωρία στην παρούσα μορφή της. Στη σημαντική πρόσφατη κοινή σας εργασία με τον John Ellis και τον Νίκο Μαυρόματο, «A Non-Critical String Approach to Black Holes, Time and Quantum Mechanics», αναφέρεστε σ' αυτή την άποψη του Penrose, και ισχυρίζεστε ότι η νέα προσέγγιση που επιχειρείτε μπορεί να ρίξει φως στο «πρόβλημα της μέτρησης». Θα επιθυμούσατε να μας διευκρινίσετε περισσότερο αυτό το σημείο;*

Απ.: Κατ' αρχάς πιστεύω ότι ο Penrose έχει δίκιο όταν ισχυρίζεται ότι δεν καταλαβαίνουμε τι συμβαίνει τη στιγμή που πάμε να «περάσουμε» από το κβαντικό επίπεδο στο κλασικό. Πριν προχωρήσω, όμως, πρέπει να διευκρινίσω το εξής: Η κβαντομηχανική και η κβαντική θεωρία πεδίου στην πιο ολοκληρωμένη της μορφή «δουλεύουν» καταπληκτικά εκεί όπου έχουν ελεγχθεί, δηλαδή στο μικρόκοσμο. Από την άλλη πλευρά, αν κάποιος μελετήσει με προσοχή τα έργα των θεμελιωτών της κβαντομηχανικής, θα διαπιστώσει μερικά ενδιαφέροντα πράγματα, όπως π.χ. ότι ακόμη και στο κλασικό βιβλίο του Dirac, *The*

Principles of Quantum Mechanics, αναφέρεται ότι οι φυσικοί της εποχής εκείνης δεν καταλάβαιναν το πέρασμα από το κβαντικό στο κλασικό επίπεδο, αλλά ήταν ευχαριστημένοι που η θεωρία «δούλευε» στο μικροκοσμικό επίπεδο, και πίστευαν ότι κάποια στιγμή θα διαπίστωναν τι συμβαίνει και στο μακροκοσμικό επίπεδο. Βέβαια είναι αλήθεια ότι δεν κατανοούμε πλήρως την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης που συμβαίνει ακόμη και στο μικρόκοσμο. Για να «δουλέψει» η κβαντομηχανική κάνουμε ορισμένες παραδοχές, οι οποίες είναι αναγκαίες ώστε να έχουμε μια λειτουργική θεωρία, δηλαδή μια θεωρία ικανή να κάνει προβλέψεις. Σωστά λοιπόν ο Penrose λέει ότι κάτι πρέπει ν' αλλάξει κάπου, ώστε να «επεκταθεί» η κβαντομηχανική και να συμπεριλάβει το πρόβλημα της μέτρησης. Θα διαφωνούσα όμως με τον ισχυρισμό του ότι υπάρχουν πολλές κβαντικές θεωρίες της βαρύτητας. Εγώ γνωρίζω μία μόνο συνεπή θεωρία αυτού του είδους και αυτή είναι η θεωρία των χορδών.

Τα τρία τελευταία χρόνια, οι συνεργάτες μου και εγώ, μελετάμε και το πρόβλημα της μέτρησης και νομίζω ότι έχουμε καταλήξει σε πολύ συγκεκριμένες προτάσεις, οι οποίες όμως δεν γίνονται αποδεκτές από όλους. Θεωρούμε λοιπόν ότι μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα της μέτρησης και μάλιστα έχουμε κατορθώσει να δώσουμε και ποσοτική ερμηνεία σ' αυτό το φαινόμενο με την εξής έννοια: Γνωρίζουμε όλοι μας ήδη από το γυμνάσιο ότι ένα mole οποιουδήποτε στοιχείου (ή χημικής ένωσης) αποτελείται από αριθμό μορίων αυτού του στοιχείου (ή της χημικής ένωσης) ίσο προς τον αριθμό του Avogadro ($N_A = 6.2 \times 10^{23}$ μόρια/mole). Γιατί όμως να είναι 10^{23} και όχι 10^{25} ή 10^{80}; Όλοι μας καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να είναι κάποιος μεγάλος αριθμός, ώστε να «ανήκει» στο μακρόκοσμο, γιατί όμως αυτός ο συγκεκριμένος αριθμός; Και μήπως αυτός προκύπτει «δυναμικά» από κάποια θεωρία, και αν ναι, ποια είναι αυτή; Απαντώ λοιπόν ότι προκύπτει από τη θεωρία των «non-critical strings», η οποία είναι μια νέα θεωρία χορδών, που αποτελεί επέκταση της κλασικής θεωρίας των υπερχορδών, και έχει διατυπωθεί από τον Ellis και τρεις Έλληνες, τον Ιγνάτιο Αντωνιάδη, τον Κώστα Μπαχά και εμένα. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσω τα εξής, ώστε να μην υπάρξει σύγχυση. Οι «non-critical strings» είναι αποδεκτές απ' όλους και χρησιμοποιούνται από πολλούς· εκείνες που δεν είναι αυτή τη στιγμή 100% αποδεκτές είναι οι «επεκτάσεις» που επιχειρούμε στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας ο Ellis, ο Μαυρόματος και εγώ, και οι οποίες αφορούν τη λύση του προβλήματος της μέτρησης και άλλα θέματα. Ακόμη και αν έχουμε ατυχήσει σ' αυτές τις «επεκτάσεις» η θεωρία των «non-critical strings» δεν θίγεται, δεν «αναιρείται»· πρόκειται για μια σημαντική θεωρία χορδών που αφορά και την κοσμολογία!

Επανέρχομαι τώρα στο ερώτημά σας και ισχυρίζομαι ότι ο Penrose κάνει λάθος όταν λέει πως όλες οι θεωρίες των χορδών «ενσωματώνουν» την κβαντική μηχανική στη μέχρι σήμερα γνωστή της μορφή. Εμείς νομίζουμε ότι η θεωρία μας δεν μας δίνει την κβαντική μηχανική όπως είναι γραμμένη στα βιβλία. Επειδή όμως φυσική σημαίνει πείραμα, μέσω του οποίου ελέγχεται πάντοτε η ορθότητα της θεωρίας, προτείναμε συγκεκριμένα πειράματα, ένα από τα οποία θα γίνει στο Franscati, που είναι το αντίστοιχο του «Δημόκριτου» ερευνητικό κέντρο στην Ιταλία, και βρίσκεται κοντά στη Ρώμη. Το όνομα του πειράματος είναι DAΦNE και μας έχουν καλέσει να το παρακολουθήσουμε. Ένας από τους βασικούς στόχους του πειράματος είναι να ελεγχθεί η ορθότητα των συμπερασμάτων μας. Επ' αυτού πρέπει να πω τα ακόλουθα: Αν το αποτέλεσμα του πειράματος αποβεί αρνητικό, υπό την έννοια ότι δεν θα επαληθεύσει τις προβλέψεις μας, τότε αυτό είναι κακό για μας, γιατί σημαίνει ότι κάπου έχουμε κάνει λάθος. Αν είναι θετικό, αυτό είναι καλό για μας, γιατί ναι μεν δεν θα σημαίνει ότι έχουμε πλήρη απόδειξη της θεωρίας, πλην όμως, επειδή αυτά που συζητάμε στη συγκεκριμένη περίπτωση συμβαίνει να «αποκλίνουν» τόσο πολύ από τα μέχρι τώρα παραδεκτά, νομίζω ότι θα αποτελέσει μια ισχυρότατη ένδειξη, σχεδόν απόδειξη της ορθότητας της θεωρίας. Άλλωστε, στη συνέχεια η θεωρία μας θα ξαναελεγχθεί με άλλους τρόπους και με άλλα πειράματα.

Ερ.: *Πώς αποδίδουμε στα ελληνικά τον όρο «non-critical strings»;*

Απ.: Κάποτε νομίζαμε ότι οι θεωρίες των χορδών και υπερχορδών είναι λειτουργικές μόνο σε συγκεκριμένες διαστάσεις. Στην περίπτωση των χορδών απαιτούνταν 26 χωροχρονικές διαστάσεις, δηλαδή 25 διαστάσεις του χώρου και 1 του χρόνου, ενώ στη περίπτωση των υπερχορδών μόνον 10 διαστάσεις, 9 διαστάσεις του χώρου και 1 του χρόνου. Οι εν λόγω διαστάσεις ήταν λοιπόν «κρίσιμες», δηλαδή αποφασιστικής σημασίας για τη λειτουργικότητα αυτών των θεωριών, γι' αυτό κάναμε λόγο για critical strings. Με τον καιρό όμως αποδείχθηκε ότι μπορώ να φτιάξω υπερχορδές ή χορδές σε διαστάσεις στην αρχή κάτω από τον αριθμό 26 ή ακόμη και κάτω από τον αριθμό 10, δηλαδή μπορώ να φτιάξω κατευθείαν τετραδιάστατες χορδές. Ακολούθως, εμείς αποδείξαμε ότι μπορούμε να φτιάξουμε χορδές και σε περισσότερες από 26 διαστάσεις. Αφού λοιπόν καταργήσαμε τα όρια του 26 και του 10 και μπορούμε πλέον να φτιάξουμε χορδές σε οποιεσδήποτε διαστάσεις, τις νέες χορδές, σε αντιδιαστολή προς τις προηγούμενες, τις ονομάζουμε non-critical strings.

Ερ.: *Ο Richard Feynman, με την εκπληκτική επιστημονική του εντιμότητα, αντιμετώπιζε μεν με σκεπτικισμό τις θεωρίες των υπερχορδών, πλην όμως διατύπωνε την επιφύλαξη πως ίσως η ανικανότητά του να τις κατανοήσει οφειλόταν στην ηλικία του. Υπενθυμίζω ότι και ο Αϊνστάιν αρνούνταν να δεχθεί την ορθότητα της κβαντικής μηχανικής, μολαταύτα ενθάρρυνε την έρευνα των φίλων του στο Μόναχο, το Γκαίττιγκεν, το Βερολίνο και την Κοπεγχάγη. Εκεί όμως που ο Feynman εμφανίζεται πιο διστακτικός είναι η υιοθέτηση του όρου «Τελική θεωρία» ή «θεωρία των Πάντων». Όπως αναφέρει ο βιογράφος του, J. Mehra, στο βιβλίο του* The Beat of a Different Drum, *ο Feynman έλεγε: «Δεν έχω καμιά προκατάληψη σχετικά με το πώς είναι η φύση ή με το πώς θα έπρεπε να είναι». Εσείς αποδέχεστε το χαρακτηρισμό των θεωριών σας ως τελικών θεωριών;*

Απ.: Θέλω κατ' αρχάς να διευκρινίσω κάτι που αφορά τις επιφυλάξεις του Αϊνστάιν για την ορθότητα της κβαντικής μηχανικής, και τούτο γιατί κι εγώ μέχρι πρόσφατα είχα εσφαλμένες εντυπώσεις γι' αυτό το θέμα. Δεν νομίζω ότι ο Αϊνστάιν είχε ιδιαίτερους δισταγμούς ως προς την εφαρμογή της κβαντομηχανικής στο μικρόκοσμο. Εκεί που διαφωνούσε με τον Bohr (όπως προκύπτει και από τα διάφορα «παράδοξα» που επινοούσε για να υποστηρίξει τις θέσεις του, ένα απο τα οποία είναι το πολύ γνωστό «παράδοξο» των Einstein-Podolsky-Rosen), ήταν το σημείο ακριβώς που έθιξε και ο Penrose, δηλαδή το πρόβλημα της μέτρησης. Μελετώντας πρόσφατα την ιστορία της κβαντομηχανικής οδηγήθηκα στην αναθεώρηση της άποψης που είχα σχηματίσει από τα φοιτητικά μου χρόνια, ότι δηλαδή ο Αϊνστάιν δεν είχε καταλάβει αυτή τη νέα τότε θεωρία. Εκείνο που μάλλον συνέβη ήταν ότι οι θεμελιωτές της κβαντικής μηχανικής ενδιαφέρονταν να ελέγξουν, πριν απ' όλα, το πόσο λειτουργική είναι η θεωρία τους στο μικρόκοσμο, ενώ τον Αϊνστάιν τον «βασάνιζε» ήδη από τότε η αδυναμία της θεωρίας να εξηγήσει το πέρασμα από το κβαντικό επίπεδο στο κλασικό. Τώρα έρχομαι στον αείμνηστο φίλο μου Feynman για να υπογραμμίσω πως είναι προς τιμήν του το ότι είπε πως μπορεί να μην καταλάβαινε τις θεωρίες των χορδών γιατί είχε πια γεράσει, αν και νομίζω ότι το μυαλό του δεν έχασε ποτέ τη λάμψη του μέχρι το τέλος της ζωής του. Επαναλαμβάνω, όμως, ότι οι θεωρίες των χορδών είναι εξαιρετικά περίπλοκες και, ανεξάρτητα από την πνευματική δύναμη του επιστήμονα, απαιτείται πολλή «τεχνική» δουλειά για την κατανόησή τους. Έτσι, όσο μεγαλώνει κάποιος, και ταυτόχρονα γίνεται διάσημος, τόσο λιγότερο χρόνο έχει για έρευνα. Στο ερώτημά σας αν οι χορδές ή οι θεωρίες που έχουν σχέση με τις χορδές αποτελούν ή ενδέχεται να αποτελέσουν μια «Τελική θεωρία», η απάντησή μου είναι ναι. Δεν είναι παράλογο ούτε ουτοπικό να ισχυριστούμε ότι κάποιος ή κάποιοι, που μπορεί να μην είναι της γενιάς μου αλλά των επόμενων γενιών, θα επινοήσουν κάποια στιγμή μια θεωρία που να περιέχει μια σειρά βασικών νόμων, με τους οποίους θα μπορέσουμε να ερμηνεύσουμε πλήρως τον κόσμο. Αυτή η «Τελική θεωρία» ίσως να είναι η θεωρία των χορδών, μπορεί όμως να είναι και κάτι άλλο, λόγου χάρη μια «μετεξέλιξή» της. Επίσης δεν γνωρίζουμε τόσο τον ακριβή χρόνο στον οποίο θα ολοκληρωθεί αυτή η πορεία όσο και το αν πατέρας αυτής της θεωρίας θα είναι ο Weinberg, ο Ellis, ο Νανόπουλος ή κάποιος μεταγενέστερος φυσικός! Όμως πρέπει να τονίσουμε ότι η φυσική δεν θα τελειώσει αν δημιουργηθεί μια τέτοια θεωρία. Θα υπάρχουν πάντοτε νέες ιδέες και θα γίνονται συνεχώς νέες ανακαλύψεις. Ας πάρουμε για παράδειγμα την ατομική φυσική. Η ατομική φυσική τελείωσε, κατά τη γνώμη μου, όταν γράψαμε την εξίσωση του Schrödinger (με την εξίσωση του Dirac πήραμε και ρελατιβιστικές διορθώσεις της) και διατυπώσαμε αργότερα και τη θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Ωστόσο, γίνονται συνεχώς νέες ανακαλύψεις, όπως οι ακτίνες λέιζερ, οι οποίες έχουν σημαντικές και ιδιαίτερα χρήσιμες για τον άνθρωπο εφαρμογές.

Ερ.: *Ο καθηγητής Freeman Dyson σε πρόσφατη συνέντευξή του στο περιοδικό* The College Mathematics Journal *επισημαίνει τον κίνδυνο που εγκυμονεί η τρομακτική στροφή νέων ταλαντούχων μαθηματικών και φυσικών στη μελέτη των «θεωριών των χορδών», με τις οποίες μάλιστα ασχολούνται αποκλειστικά επί σειρά ετών. Αναρωτιέται τι θα κάνουν όλοι αυτοί οι επιστήμονες αν οι εν λόγω θεωρίες χάσουν το ενδιαφέρον τους. Το ερώτημα είναι μήπως το σύνδρομο της μόδας κυριαρχεί σήμερα όλο και πιο έντονα στην έρευνα στο χώρο της θεωρητικής φυσικής και ποιες είναι οι συνέπειες αυτού του φαινομένου.*

Απ.: Νομίζω ότι ο Dyson έχει δίκιο στο συγκεκριμένο θέμα. Δυστυχώς, υπάρχουν φυσικοί οι οποίοι έχουν πάρει διδακτορικά διπλώματα στον τομέα των στοιχειωδών σωματιδίων και το μόνο που ξέρουν είναι οι ιδιότητες των υπερχορδών και τα μαθηματικά που συνδέονται μ' αυτές. Εγώ ουδέποτε επιλέγω ως συνεργάτες τέτοια άτομα. Προτιμώ επιστήμονες που έχουν ευρύτητα γνώσεων στο χώρο της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων, αλλά και γενικότερα της φυσικής. Είναι αλήθεια όμως ότι πρέπει να προσέξουμε ώστε να μην απορροφηθούν τα καλύτερα μυαλά από τη μελέτη των μαθηματικών των χορδών, οπότε τελικά θα μείνουν κατ' ανάγκη στη φυσική όσοι φοβούνται ν' ασχοληθούν με τα μαθηματικά της εν λόγω θεωρίας. Κάτι τέτοιο θ' αποτελούσε σοβαρό πλήγμα για τη φυσική των υψηλών ενεργειών, που συγκεντρώνει πάντοτε στους κόλπους της εκλεκτά μυαλά. Τέλος, όσον αφορά το σύνδρομο της μόδας, πρέπει να πω ότι δυστυχώς υπάρχει και στη θεωρητική φυσική, όπως υπάρχει και στους άλλους τομείς της ζωής. Πολλοί νέοι και ταλαντούχοι φυσικοί ασχολούνται με τη θεωρία των χορδών, όχι επειδή η διαίσθησή τους τους οδήγησε να κάνουν αυτή την επιλογή, αναζητώντας τις απαντήσεις σε ορισμένα ερωτήματα που τους απασχολούν, αλλά επειδή η συγκεκριμμένη θεωρία είναι της μόδας.

Ερ.: *Σίγουρα θα συμφωνείτε ότι η ματαίωση της κατασκευής του SSC στο Τέξας των ΗΠΑ αποτέλεσε ένα οδυ-*

νηρό πλήγμα για τον τομέα της φυσικής υψηλών ενεργειών. Αν κοιτάξει κανείς τα τελευταία τεύχη του περιοδικού Physics Today *θα βρει αρκετά άρθρα, γεμάτα μελαγχολικές διαπιστώσεις σχετικά με τις επιπτώσεις που θα έχει η απόφαση αυτή, τόσο για το μέλλον της έρευνας στη συγκεκριμένη περιοχή της φυσικής όσο και για την επαγγελματική απασχόληση πολλών επιστημόνων. Συμμερίζεστε αυτή την απαισιοδοξία ή μήπως πιστεύετε ότι είναι υπερβολική; Και πώς βλέπετε ότι μπορεί να αντιμετωπιστεί η συγκεκριμένη κατάσταση; Μήπως διαβλέπετε έναν αποφασιστικότερο ρόλο του CERN εν όψει αυτής της εξέλιξης;*

Απ.: Οπωσδήποτε, η κατάργηση του SSC αποτέλεσε ένα ισχυρό και ταυτόχρονα οδυνηρό πλήγμα για τη φυσική των υψηλών ενεργειών. Ίσως αυτή η απόφαση να σημαίνει ότι οι ΗΠΑ παραδέχονται πως δεν μπορούν πλέον να συνεχίσουν μόνες τους σ' αυτό τον τομέα, ο οποίος γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη σ' αυτή τη χώρα από τον πόλεμο και μετά, και ήρθε πλέον ο χρόνος να μοιραστούν τα «βάρη» της στήριξης της έρευνας με άλλους εταίρους, προωθώντας μια στενότερη διεθνή συνεργασία μαζί τους. Απαιτείται λοιπόν μια διεθνής συνεργασία των ΗΠΑ, της Ευρώπης, της Ιαπωνίας, κ.λπ. Όσον αφορά τη ματαίωση της κατασκευής του SSC, θέλω να τονίσω ότι φυσικά και δεν πρόκειται να επιφέρει το τέλος της έρευνας, πειραματικής και θεωρητικής, που διεξάγεται στον τομέα της φυσικής των υψηλών ενεργειών. Απλώς έχει επιβραδύνει κάπως τις εξελίξεις. Δεν γνωρίζω πότε θα κατασκευαστεί ο επόμενος επιταχυντής, αλλά πρέπει να υπογραμμίσω ότι χρειαζόμαστε πια πολύ μεγάλους επιταχυντές, στους οποίους να μπορούμε να αναπαράγουμε συνθήκες οι οποίες βρίσκονται πολύ «κοντά» σ' εκείνες που επικράτησαν κατά τη δημιουργία του σύμπαντος. Και τούτο συμβαίνει διότι, λόγω της αρχής της αβεβαιότητος, για να έχουμε πολύ μεγάλες ενέργειες απαιτούνται πολύ μικρές αποστάσεις, και για να έχουμε πολύ μικρές αποστάσεις απαιτούνται «αρχικοί» χρόνοι! Τέλος, όσον αφορά το CERN, πρέπει να πω ότι μπορεί να παίξει διεθνή ρόλο, επειδή είναι σημαντικό εργαστήριο στο οποίο πρόσφατα εντάχθηκαν και οι πρώην ανατολικές χώρες, με αποτέλεσμα σήμερα να αριθμεί τα 19 έως 20 μέλη. Άλλωστε, ο LHC, που ήταν ο «αντίπαλος» του SSC, θα γίνει στο CERN και ενδέχεται να συμμετάσχουν και οι Αμερικανοί ως ισότιμοι εταίροι. Ας μην ξεχνάμε ότι κύριος σκοπός μας είναι να προάγουμε την ανθρώπινη γνώση και δεν πρέπει να μας νοιάζει καθόλου το πού θα γίνουν οι ανακαλύψεις!

Ερ.: *Η τελευταία ερώτησή μου αφορά μια σημαντική παρατήρηση του Eugene Wigner σχετικά με την κατεύθυνση που έχει πάρει η έρευνα στη φυσική στο δεύτερο μισό του 20ού αιώνα. Στο βιβλίο* The Recolections of Eugene P. Wigner as told to Andrew Stanton *υποστηρίζει ότι, ενώ κατά τις δεκαετίες του 1920 και του 1930, την εποχή των μεγάλων επιτευγμάτων της θεωρητικής φυσικής, υπήρχε πλήρης ελευθερία στην έρευνα και επιθυμία κατανοήσεως της φυσικής στο σύνολό της, σήμερα που η θεωρητική φυσική διαιρείται σε περισσότερους τομείς και αυτοί πάλι σε επιμέρους υποτομείς, και το σύστημα επιχορηγήσεων και υποτροφιών έχει εξασφαλίσει στους επιστήμονες οικονομική άνεση, δεν υπάρχει τόσο μεγάλη ελευθερία στην έρευνα, και τα αποτελέσματά της δεν είναι εξίσου ικανοποιητικά. Πώς σχολιάζετε αυτές τις απόψεις;*

Απ.: Μερικές από αυτές τις απόψεις είναι σωστές. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ωστόσο πως ο Wigner είναι τώρα 90 ετών, και βέβαια κάθε γενιά νομίζει ότι η δική της εποχή υπήρξε η καλύτερη. Πράγματι, η δεκαετία του 1920-30 ήταν συγκλονιστική περίοδος για τη φυσική, διότι σηματοδότησε το τέλος της κλασικής φυσικής και την ανατολή μιας νέας εποχής σ' αυτή την επιστήμη. Είναι αλήθεια, επίσης, ότι σήμερα υπάρχουν περισσότεροι οργανισμοί, ιδρύματα κ.λπ. που χρηματοδοτούν την έρευνα, όπως και κανονισμοί, οι οποίοι ορίζουν το πώς πρέπει να διατίθενται οι σχετικοί πόροι. Οι δεσμεύσεις του ερευνητή, όσον αφορά το αντικείμενο της έρευνάς του, είναι κατά συνέπεια αυτονόητες. Δεν πρέπει, όμως, να ξεχνάμε ότι η επιστημονική πρόοδος είναι από τη φύση της άναρχη διαδικασία. Αν μελετήσουμε την ιστορία, όχι μόνο της επιστήμης αλλά λόγου χάρη και της μουσικής, θα διαπιστώσουμε ότι οι μεγάλες πρόοδοι υπήρξαν αποτελέσματα τομών, ρήξεων και «επαναστάσεων» στον τρόπο σκέψης, και δεν ήταν απότοκες μιας γραμμικής εξέλιξης των πραγμάτων. Μπορεί, λοιπόν, σήμερα να υπάρχουν περισσότεροι περιορισμοί, μπορεί οι ερευνητές δίπλα στις επιστημονικές τους αγωνίες να έχουν και το πρόσθετο βάρος άλλων καθηκόντων, π.χ. διοικητικών, όμως το μυαλό δεν παύει ποτέ να κινείται ελεύθερα αναζητώντας τη γνώση στις κατευθύνσεις που εκείνο θέλει! Κατά συνέπεια, δεν νομίζω ότι η έρευνα στη θεωρητική φυσική θα γίνει ποτέ απολύτως κατευθυνόμενη και ελεγχόμενη. Θα μπορούσε επίσης να απαντήσει κανείς στον Wigner ότι τον 19ο αιώνα, οπότε υπήρχε ακόμη μεγαλύτερη ελευθερία και λιγότερη οργάνωση στην έρευνα απ' ό,τι τον 20ό αιώνα, υπήρξαν μεν σημαντικά επιστημονικά επιτεύγματα, πλην όμως όχι ανάλογα εκείνων που σημειώθηκαν στο πρώτο μισό του αιώνα μας. Άρα, το επιχείρημά του δεν ευσταθεί! Τέλος, πιστεύω ότι, αν η θεωρία των υπερχορδών είναι σωστή, τότε θα αποτελέσει το σημαντικότερο γεγονός στη φυσική του 20ού αιώνα.

Αιγυπτιακά κλάσματα

Ένας εναλλακτικός τρόπος ζωής χωρίς την προπαίδεια

George Berzsenyi

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δεν βασάνιζαν τα παιδιά τους αναγκάζοντάς τα να απομνημονεύουν ατέλειωτους πίνακες πολλαπλασιασμού. Αντί γι' αυτούς, χρησιμοποιούσαν διαδοχικούς διπλασιασμούς για να εκτελέσουν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις —αναγνωρίζοντας έμμεσα με αυτόν τον τρόπο ότι κάθε αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δυνάμεων του δύο. Επομένως, η πρακτική τους μπορεί να χαρακτηριστεί πρόδρομος της εποχής των υπολογιστών.

Για να αντιμετωπίσουν τα κλάσματα, απέφευγαν μερικές από τις υπολογιστικές δυσκολίες αναπτύσσοντας εκτεταμένους πίνακες αναπαράστασης των κλασμάτων της μορφής $2/n$ ως αθροίσματα διαφορετικών ανά δύο κλασμάτων της μονάδας —της μορφής $1/k$— τα οποία συμβόλιζαν με μια επιμηκυμένη έλλειψη πάνω από τον αριθμό k. Για να απλοποιήσουμε τη δική μας παρουσίαση, θα χρησιμοποιήσουμε μια γραμμή αντί του ελλειπτικού συμβόλου τους. Ο πάπυρος του Ahmes (ή του Rhind), που χρονολογείται από το 1650 π.Χ., αρχίζει μ' έναν πίνακα τέτοιων παραστάσεων του $2/n$ για όλες τις περιττές τιμές του n από το 5 έως το 101. Παρουσιάζουμε μερικές από τις καταχωρήσεις στη συνέχεια για να εξοικειωθείτε με το συμβολισμό:

$$\frac{2}{5} = \overline{3} + \overline{15}, \quad \frac{2}{7} = \overline{4} + \overline{28},$$

$$\frac{2}{11} = \overline{6} + \overline{66}, \quad \frac{2}{13} = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104},$$

$$\frac{2}{23} = \overline{12} + \overline{276}, \quad \frac{2}{35} = \overline{30} + \overline{42},$$

$$\frac{2}{97} = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776},$$

$$\frac{2}{101} = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}.$$

Είναι φανερό ότι γνώριζαν μια σειρά από ταυτότητες, όπως $2/3k = \overline{2k} + \overline{6k}$, $2/n = \overline{n} + \overline{2n} + \overline{3n} + \overline{6n}$, και $1/n = \overline{n+1} + \overline{n(n+1)}$, ενώ μερικές από τις άλλες καταχωρήσεις του παπύρου πρέπει να είναι αποτέλεσμα πρακτικών μεθόδων που στόχευαν στους μικρότερους παρονομαστές.

Ο κόσμος των αιγυπτιακών κλασμάτων συνεχίζει να συναρπάζει τους μαθηματικούς. Για παράδειγμα, ο Erdös έθεσε το ερώτημα: *Είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί πάντα το $4/n$ ως άθροισμα τριών ή λιγότερων κλασμάτων της μονάδας;* Ορισμένες μερικές απαντήσεις μάς προσφέρουν οι ταυτότητες που περιέχονται στο παρακάτω πλαίσιο. Η πρώτη μου πρόκληση προς τους αναγνώστες είναι η ανάπτυξη ανάλογων ταυτοτήτων για τις πιο εύκολες περιπτώσεις των $4/(4k-1)$, $4/(4k-2)$, $4/(8k-3)$, και $4/(24k-7)$. Η δεύτερη πρόκληση είναι να επιβεβαιώσετε ότι αυτές οι ταυτότητες αποδεικνύουν την εικασία του Erdös για όλα τα κλάσματα, εκτός από τα κλάσματα της μορφής $4/(120k+1)$ και $4/(120k+49)$. Αυτές οι ανακαλύψεις ανακοινώθηκαν στα ουγγρικά σ' ένα άρθρο του Janos Suranyi το 1981. Σύμφωνα με το *Unsolved Problems in Number Theory* (Ανοιχτά προβλήματα στη θεωρία αριθμών) του Richard Guy, που εκδόθηκε την ίδια χρονιά από τον εκδοτικό οίκο Springer Verlag, μια παρόμοια εικασία του Sierpinski που αφορά τα κλάσματα της μορφής $5/n$ έχει αποδειχτεί για όλα τα $n \leq 108$.

Η τελευταία πρόκληση για τους αναγνώστες μου αποτελείται από μερικά ευκολότερα προβλήματα: (1) Για ποια ζεύγη πρώτων μεταξύ τους αριθμών a και b υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $a/b = \overline{x} + \overline{y}$; (2) Βρείτε όλες τις θετικές ακέραιες λύσεις των εξισώσεων $\overline{x} + \overline{y} = \overline{z}$ και $\overline{x^2} + \overline{y^2} + = \overline{z^2}$. (3) Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z τέτοιοι ώστε $\overline{x^n} + \overline{y^n} = \overline{z^n}$ αν $n > 2$; Ο περιορισμένος χώρος δεν μου επιτρέπει να εκθέσω με περισσότερες λεπτομέρειες τη τελευταία ερώτηση. ◘

$$\frac{4}{120k+25} = \overline{48k+10} + \overline{120k+25} + \overline{240k+50},$$

$$\frac{4}{120k+73} = \overline{30k+20} + \overline{(6k+4)(120k+73)} + \overline{(15k+10)(120k+73)},$$

$$\frac{4}{120k+97} = \overline{30k+25} + \overline{10(k+1)(120k+97)} + \overline{10(k+1)(6k+5)(120k+97)}$$

Απειροστικός λογισμός —ναι ή όχι;

Χρήση των λογιστικών φύλλων υπολογιστή στη μελέτη της δυναμικής πληθυσμών

Kurt Kreith

ΤΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ επηρεάζουν πολλές πλευρές της ζωής μας. Στο δημοφιλές και διασκεδαστικό βιβλίο *Jurassic Park* διαβάζουμε για έναν μυστηριώδη μαθηματικό ο οποίος, αφού δεχτεί την επίθεση ενός τυραννόσαυρου, μας προσφέρει μερικές ενδιαφέρουσες απόψεις για τα περιβαλλοντικά προβλήματα που αντιμετωπίζουμε. Αφού επισημάνει ότι η Γη υπήρχε δισεκατομμύρια χρόνια πριν εμφανιστεί ο άνθρωπος, απορρίπτει την ιδέα ότι «πρέπει να σώσουμε τον πλανήτη μας». Τα τελευταία του λόγια είναι: «Ας ξεκαθαρίσουμε κάτι. Ο πλανήτης δεν κινδυνεύει. *Εμείς* κινδυνεύουμε. Δεν έχουμε τη δυνατότητα να καταστρέψουμε τον πλανήτη μας —ή να τον σώσουμε. Ίσως, όμως, έχουμε τη δυνατόιητα να σώσουμε τον εαυτό μας.»

Σύμφωνα μ' αυτήν την οπτική γωνία, η δυναμική πληθυσμών είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με αφηρημένα μοντέλα τα οποία περιγράφουν την ανάπτυξη, την αλληλεπίδραση και τη μείωση των «πληθυσμών» (συνήθως φυτικών ή ζωικών ειδών, αλλά και ανθρώπων). Αφού ο απειροστικός λογισμός έχει τις ρίζες του στην προσπάθεια να εξηγήσουμε «πώς μεταβάλλονται τα πράγματα στη διάρκεια του χρόνου», το πεδίο της δυναμικής πληθυσμών χαρακτηρίζεται από εργαλεία που βασίζονται στον απειροστικό λογισμό. Όμως, σε τούτο το άρθρο θα δούμε ότι είναι δυνατό να αντιμετωπισουμε εξαιρετικά σημαντικά ζητήματα της δυναμικής πληθυσμών *χωρίς* να χρησιμοποιήσουμε απειροστικό λογισμό.

Η δυνατότητα να αποφύγουμε τον απειροστικό λογισμό οφείλεται στην τεχνολογική ανάπτυξη κατά τον 20ό αιώνα που κατέστησε δυνατή τη μελέτη «διακριτών μοντέλων μεταβολής». Αυτά τα μοντέλα βασίζονται σε μαθηματικές διαδικασίες που, μολονότι ευκολονόητες, απαιτούν συνήθως υπερβολικά πολύ χρόνο. Ιστορικά, ο απειροστικός λογισμός ήταν σημαντικός γιατί προσέφερε τεχνικές οι οποίες παρέκαμπταν τις χρονοβόρες διαδικασίες που συνεπάγονταν αυτά τα μοντέλα. Σήμερα, όμως, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μάς δίνουν τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε άμεσα πολλά απο αυτά τα μοντέλα, συμπεριλαμβανομένων όσων περιγράφουν τη μεταβολή ενός πληθυσμού.

Ένας από τους λόγους που μας ενδιαφέρει η δυναμική πληθυσμών είναι ότι σχετίζεται με σημαντικές αλλαγές, οι οποίες ενδέχεται να συμβούν στη διάρκεια της ζωής μας. Ο παγκόσμιος (ανθρώπινος) πληθυσμός είναι περίπου 5,6 δισεκατομμύρια και αυξάνεται σχεδόν κατά εκατό εκατομμύρια κάθε χρόνο. Σε πενήντα χρόνια είναι πολύ πιθανό να έχει υπερβεί τα δέκα δισεκατομμύρια. Προκύπτουν συνεπώς ερωτήματα όπως τα εξής: Ποια θα είναι τα αποτελέσματα της μελλοντικής ανάπτυξης του ανθρώπινου πληθυσμού σε άλλα ζωικά και φυτικά είδη; Ποιες θα είναι οι επιπτώσεις για μας τους ίδιους;

Παρότι η δυναμική πληθυσμών δεν παρέχει τελεσίδικες απαντήσεις, μας δίνει τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε αυτά τα προβλήματα με βάση την ορθολογική σκέψη και τους υπολογισμούς. Και, με τη βοήθεια ενός απλού υπολογιστή, μπορούμε να διεισδύσουμε στις σχετικές διαδικασίες και μηχανισμούς χωρίς να χρησιμοποιήσουμε εργαλεία βασισμένα στον απειροστικό λογισμό.

Πώς αυξάνεται το χρήμα

Παρότι η δυναμική πληθυσμών ασχολείται συνήθως με ζώα και φυτά, είναι χρήσιμο να αρχίσουμε με συλλογισμούς σχετικά με το χρήμα. Ας εξετάσουμε την περίπτωση των χρημάτων που κατατίθενται σε μια τράπεζα και τοκίζονται, ο δε τόκος είναι ένα ποσοστό του ποσού που έχετε καταθέσει. Αν υποθέσουμε ότι επιλέγετε να προστίθεται ο τόκος στο λογαριασμό σας, τότε η αύξηση των χρημάτων της κατάθεσής σας είναι παράδειγμα ενός «βρόχου ανάδρασης». Δηλαδή, το ποσόν των χρημάτων που έχετε καταθέσει καθορίζει το ποσόν των τόκων που κερδίζετε, ο οποίος καθορίζει το ποσόν της κατάθεσής σας, που καθορίζει...

Αν έχουμε μια κατάθεση 100 δολαρίων με επιτόκιο 10% το χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέλλουσα αξία της ως εξής: Στο τέλος του πρώτου χρόνου θα έχουμε τα αρχικά 100 δολάρια συν το 10% των 100 δολαρίων, δηλαδή $(1 + 1/10) \cdot 100 = 110$ δολάρια. Έπειτα από 2 χρόνια, θα έχετε 110 δολάρια συν το 10% των 110 δολαρίων, δηλαδή $(1 + 1/10) \cdot 110 = 121$ δολάρια, κ.ο.κ. Με αυτές τις σκέψεις καταλήγουμε στον εξής πίνακα:

k	0	1	2	3	4	...
$N(k)$	100	110	121	133,1	146,41	...

Στη συγκεκριμένη διαδικασία έχουμε τη δυνατότητα να εκφράσουμε το αποτέλεσμα μέσω μιας σχέσης: *Η καταχώρηση στην k θέση αυτού του πίνακα προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε το 100 επί το (1 + 1/10) k φορές*. Με ορολογία συναρτήσεων,

$$N(k) = 100 \cdot (1 + 1/10)^k = 100 \cdot 1{,}1^k.$$

Πολλές αριθμομηχανές τσέπης προσφέρουν μια δυναμική μέθοδο αναπαράστασης αυτής της διαδικασίας μεταβολής. Στο παλιό μου Casio fx–911 χρειάζεται να πληκτρολογήσεις το 1,1 και κατόπιν να πατήσεις *δύο* φορές το πλήκτρο του πολλαπλασιασμού. Με αυτόν τον τρόπο προγραμματίζεται η αριθμομηχανή να εκτελεί *επαναλαμβανόμενους* πολλαπλασιασμούς επί το 1,1. Πληκτρολογώντας, τώρα, 100 και πατώντας έπειτα το σύμβολο της ισότητας διαδοχικά, παίρνουμε τα αποτελέσματα 110, 121, 133,1, 146,41, κ.ο.κ.

Μια περισσότερο ευέλικτη μέθοδο για να εκτελέσουμε παρόμοιους επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς μας προσφέρει η χρήση των λογιστικών φύλλων σ' έναν υπολογιστή. Σε τούτο το άρθρο θα παρουσιάσω τις βασικές ιδέες στηριζόμενος σε ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου της Microsoft, το Excel. Πάντως, και άλλα προγράμματα λογιστικού φύλλου σας δίνουν τη δυνατότητα να παρακολουθήσετε και να ασχοληθείτε με τις εργασίες που παρουσιάζονται στη συνέχεια, αν και μπορεί να χρειαστεί να τροποποιήσετε κατάλληλα κάποιες από τις οδηγίες.

Για να κατασκευάσουμε έναν πίνακα που θα αντιπροσωπεύει την αξία μιας κατάθεσης 100 δολαρίων με ετήσιο επιτόκιο 10% επί k χρόνια, θα χρησιμοποιήσουμε δύο στήλες (Σχήμα 1). Ονομάζουμε την πρώτη στήλη k και τη δεύτερη $N(k)$.

Οι αρχικές μας καταχωρήσεις είναι $k = 0$ (στο κελί A2) και $N(0) = 100$ (στο κελί B2). Για να αυξάνεται το k κατά 1 σε κάθε βήμα προς τα κάτω, θα πρέπει να εισαγάγουμε έναν κατάλληλο κανόνα (ή τύπο) στο κελί A3. Για να ενημερώσουμε το Excel ότι

	A	B
1	k	N(k)
2	0	100
3	=A2+1	
4		

Σχήμα 1

	A	B
1	k	N(k)
2	0	100
3	=A2+1	=1.1*B2
4	=A3+1	=1.1*B3
5	=A4+1	=1.1*B4
6	=A5+1	=1.1*B5
7	=A6+1	=1.1*B6
8	=A7+1	=1.1*B7
9	=A8+1	=1.1*B8
10	=A9+1	=1.1*B9
11	=A10+1	=1.1*B10
12	=A11+1	=1.1*B11

Σχήμα 2

k	N(k)
0	100
1	110.00
2	121.00
3	133.10
4	146.41
5	161.05
6	177.16
7	194.87
8	214.36
9	235.79
10	259.37

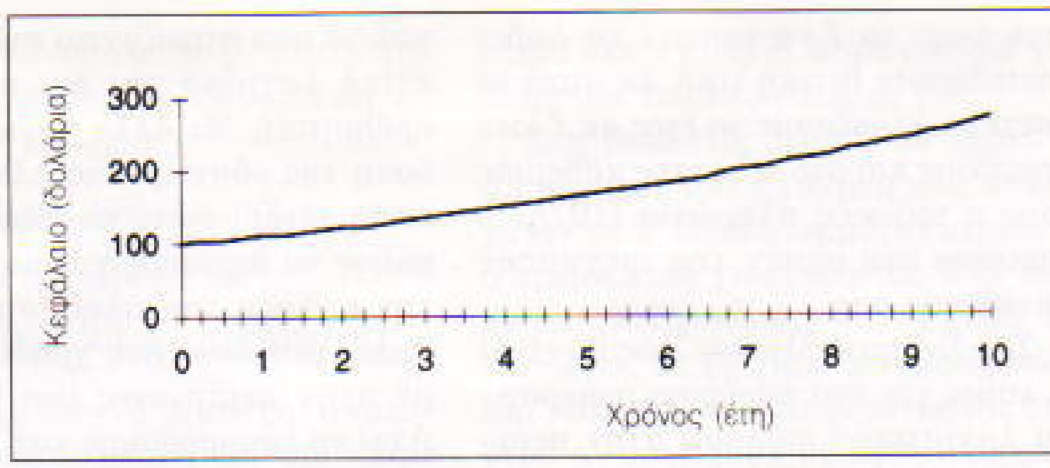
Σχήμα 3

	A	B	C
1	f =	4	
2			
3	k	Time	N(k)
4	0	=A4/$B$1	100
5	=A4+1	=A5/$B$1	=C4*(1+0.1/$B$1)
6	=A5+1	=A6/$B$1	=C5*(1+0.1/$B$1)
7	=A6+1	=A7/$B$1	=C6*(1+0.1/$B$1)
8	=A7+1	=A8/$B$1	=C7*(1+0.1/$B$1)
9	=A8+1	=A9/$B$1	=C8*(1+0.1/$B$1)
10	=A9+1	=A10/$B$1	=C9*(1+0.1/$B$1)

Σχήμα 4

f =	4	
k	Time	N(k)
0	0	100
1	0.25	102.50
2	0.5	105.06
3	0.75	107.69
4	1	110.38
5	1.25	113.14
6	1.5	115.97
7	1.75	118.87
8	2	121.84
9	2.25	124.89
10	2.5	128.01
11	2.75	131.21
12	3	134.49
13	3.25	137.85
14	3.5	141.30
15	3.75	144.83
16	4	148.45
17	4.25	152.16
18	4.5	155.97
19	4.75	159.87
20	5	163.86
21	5.25	167.96
22	5.5	172.16
23	5.75	176.46
24	6	180.87
25	6.25	185.39
26	6.5	190.03
27	6.75	194.78
28	7	199.65
29	7.25	204.64
30	7.5	209.76
31	7.75	215.00
32	8	220.38
33	8.25	225.89
34	8.5	231.53
35	8.75	237.32
36	9	243.25
37	9.25	249.33
38	9.5	255.57
39	9.75	261.96
40	10	268.51

Σχήμα 5



Σχήμα 6

πρόκειται να καταχωρήσουμε έναν τύπο πρέπει να πληκτρολογήσουμε πρώτα το σύμβολο της ισότητας. Στην περίπτωσή μας, λοιπόν, στο κελί A3 θα πληκτρολογήσουμε «=A2 + 1».

Αντιγράφοντας τον ίδιο τύπο «προς τα κάτω» (θα χρειαστεί να διαβάσετε τις οδηγίες του προγράμματός σας για να δείτε πώς θα το πετύχετε αυτό), προγραμματίζετε το λογιστικό φύλλο να επαναλάβει τον ίδιο κανόνα στα κελιά που ακολουθούν —δηλαδή, να καταχωρήσει τον τύπο «=A3 + 1» στο κελί A4, τον «=A4 + 1» στο κελί A5, κ.ο.κ.* Ομοίως, αν πληκτρολογήσουμε «=1.1*B2» στο κελί B3 και αντιγράψουμε τον τύπο προς τα κάτω θα έχουμε τον κανόνα «=1.1*B3» στο κελί B4, «=1.1*B4» στο κελί B5, κ.ο.κ. (Ο αστερίσκος χρησιμοποιείται για την εντολή του πολλαπλασιασμού στο λογιστικό φύλλο. Δεν θα τον χρησιμοποιήσω ξανά στη συνέχεια, πιστεύοντας ότι θα θυμάστε να μετατρέπετε την τελεία του πολλαπλασιασμού σε αστερίσκο κάθε φορά που είναι απαραίτητο. Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο "/" για να δώσουμε την εντολή της διαίρεσης.)

Στα Σχήματα 2 και 3 αντέγραψα αυτούς τους δύο τύπους σε δέκα θέσεις (στην περιοχή κελιών ανάμεσα στο A3 και στο B12) και το λογιστικό φύλλο υπολόγισε τις τιμές που προκύπτουν για το k και το $N(k)$. (Συνήθως εκτυπώνουμε μόνο τις αριθμητικές τιμές των καταχωρήσεων, αλλά στο Σχήμα 2 σας παρουσιάζω τους τύπους.)

Τι σχέση έχουν αυτοί οι πίνακες με τη δυναμική πληθυσμών; Λοιπόν, με δεδομένο έναν πληθυσμό 100 κουνελιών που αυξάνεται 10% κάθε χρόνο, αυτός ο πίνακας μας δίνει το πλήθος των κουνελιών έπειτα από k χρόνια. Τα μαθηματικά του χρήματος και των κουνελιών μοιάζουν ίδια.

Ας επανέλθουμε στο τραπεζικό μας πρόβλημα, και ας υποθέσουμε ότι μια ανταγωνίστρια της τράπεζας η οποία σας προσέφερε 10% ετήσιο επιτόκιο, σας παρέχει τη δυνατότητα *ανατοκισμού ανά τρίμηνο.* Αυτό σημαίνει ότι αντί να εισπράττετε 10% του κεφαλαίου σας στο τέλος του χρόνου, θα εισπράττετε 2,5% αυτού τέσσερις φορές μέσα σ' ένα χρόνο. Με αυτόν το διακανονισμό θα έχετε $100 \cdot (1 + 0{,}025) = 102{,}5$ δολάρια έπειτα από τρεις μήνες, $102{,}5 \cdot (1 + 0{,}025) = 100 \cdot (1 + 0{,}025)^2 = 105{,}06$ δολάρια έπειτα από έξι μήνες, ..., και $100 \cdot (1 + 0{,}025)^4 = 110{,}38$ δολάρια έπειτα από δώδεκα μήνες. Τα επιπλέον 0,38 δολάρια είναι το αποτέλεσμα του τριμηνιαίου —αντί του ετήσιου— ανατοκισμού.

Τι θα συμβεί αν συνεχίσουμε τον τριμηνιαίο ανατοκισμό για διάστημα δέκα ετών; Μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως την απάντηση είτε με μια αριθμομηχανή τσέπης είτε μ' ένα μοντέλο λογιστικού φύλλου. Με μια αριθμομηχανή θα παίρναμε την απάντηση $N(40) = 100 \cdot (1 + 0{,}025)^{40} = 268{,}50$ δολάρια. Όπως είναι αναμενόμενο, το ποσόν αυτό είναι μεγαλύτερο από εκείνο που θα εισπράξουμε με ετήσιο ανατοκισμό.

Ας δούμε τώρα πώς θα συμπεριλάβουμε και τα δύο αυτά παραδείγματα (και ακόμα περισσότερα!) σ' ένα μοναδικό μοντέλο λογιστικού φύλλου. Για να το πετύχουμε, συμβολίζουμε με f τη *συχνότητα ανατοκισμού* (έχουμε εξετάσει ήδη τις περιπτώσεις $f = 1$ και $f = 4$) και διαμορφώνουμε το λογιστικό φύλλο

* Στα σχήματα όπου παρουσιάζονται οι καταχωρήσεις και οι τύποι των λογιστικών φύλλων, η υποδιαστολή συμβολίζεται, κατά τα διεθνώς κρατούντα, με τελεία. (Σ.τ.μ.)

έτσι ώστε το f να μπορεί να λάβει οποιαδήποτε θετική τιμή. Σε αυτό το μοντέλο, χωρίζουμε το έτος σε f ίσες περιόδους και στο τέλος της καθεμιάς τους η τράπεζα πληρώνει $(10/f)$% επιτόκιο στο ποσόν της τρέχουσας κατάθεσής σας.

Στο Σχήμα 4 βλέπετε πώς θα είναι οι τύποι για ένα παρόμοιο πρόγραμμα λογιστικού φύλλου στην περίπτωση που $f = 4$. Το σύμβολο «$» που προηγείται της αναφοράς στο κελί B1 επιφέρει το «κλείδωμά» της. Δηλαδή, κανονικά, όταν αντιγράφεται ένας τύπος του λογιστικού φύλλου από ένα κελί σ' ένα άλλο, κάθε αναφορά σε κελί αλλάζει αυτόματα και προσαρμόζεται στη νέα θέση του τύπου —στο παράδειγμά μας, το A4 γίνεται A5, κατόπιν γίνεται A6, κ.ο.κ. Το «$», όμως, που προηγείται του 1 στο «$B$1» θα εμποδίσει την αλλαγή του δεύτερου δείκτη. Προστατεύοντας την εν λόγω καταχώρηση και επαναλαμβάνοντας αυτούς τους τύπους για 40 διαστήματα (που αντιστοιχούν στα 10 χρόνια), θα πάρουμε τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.

Αν το λογιστικό σας φύλλο έχει τη δυνατότητα παρουσίασης γραφημάτων (όπως το Excel 4.0), θα μπορέσετε να δημιουργήσετε γραφήματα για τις διάφορες τιμές του f (βλ. το Σχήμα 6).

Ο λόγος που τοποθετήσαμε την τιμή «4» της f σε ξεχωριστό κελί είναι ότι με αυτόν τον τρόπο καταχώρησης των δεδομένων είναι ευκολότερο να μεταβάλουμε τη συχνότητα ανατοκισμού. Για παράδειγμα, αλλάζοντας απλώς την καταχώρηση στο κελί B1 από 4 σε 10, το Excel θα επαναλάβει όλους τους υπολογισμούς και θα σχεδιάσει ξανά το αντίστοιχο γράφημα!

Μήπως χρησιμοποιούμε απειροστικό λογισμό;

Πριν περάσουμε από το χρήμα στα κουνέλια (και σε άλλους πληθυσμούς), πρέπει να σχολιάσουμε ένα παράξενο γεγονός. Η αύξηση του χρήματος εξετάζεται συνήθως με βάση τον ανατοκισμό και υπολογίζεται μέσω των επαναληπτικών μεθόδων που περιγράψαμε προηγουμένως. Αντίθετα, η αύξηση των κουνελιών εξετάζεται συνήθως με όρους διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή με τα εργαλεία που στηρίζονται στον απειροστικό λογισμό και όχι στην απλή αριθμητική. Με άλλα λόγια, η παράδοση της «δυναμικής πληθυσμών» είναι τέτοια ώστε κάποιος θα απέφευγε να δημιουργήσει μοντέλα για την αύξηση του πληθυσμού με τις απλές μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση του χρήματος. Αντί να εφαρμόσουμε κατ' επανάληψη την

$$N(k+1) = (1 + 1/10) \cdot N(k), \text{ με } N(0) = 100$$

για να πάρουμε την

$$N(k) = 100(1 + 0{,}1)^k \cdot N(0),$$

συνήθως στηρίζουμε το μοντέλο της αύξησης του πληθυσμού στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}1 \cdot N(t), \quad \text{με } N(0) = 100 \qquad (1)$$

της οποίας η λύση που βασίζεται στον απειροστικό λογισμό είναι η

$$N(t) = 100e^{t/10}$$

και η οποία περιέχει τη σταθερά του Euler $e = 2{,}71828...$.

Το γεγονός ότι οι δύο τεχνικές είναι κάπως διαφορετικές αντανακλάται στο γεγονός ότι η προσέγγιση του ανατοκισμού μάς δίνει

$$N(10) = 100(1 + 1/10)^{10} = 259{,}37,$$

ενώ η βασιζόμενη στον απειροστικό λογισμό προσέγγιση δίνει

$$N(10) = 100e^1 = 271{,}83.$$

Μπορούμε να συμβιβάσουμε τις δύο προσεγγίσεις θεωρώντας μεγαλύτερη συχνότητα ανατοκισμού. Αν, για παράδειγμα, η τράπεζα ανατοκίζει τα χρήματα ανά τρίμηνο, τότε $N(10) = 100 \cdot (1 + 0{,}025)^{40} = 268{,}51$ δολάρια, ποσόν που βρίσκεται πιο κοντά στην απάντηση 271,83 απ' όσο αυτό που πετυχαίνουμε με τον ετήσιο ανατοκισμό. Αν η τράπεζα ανατοκίζει τα χρήματα δέκα φορές μέσα σ' ένα χρόνο επί δέκα χρόνια, η απάντηση δίνεται από τη σχέση $N(100) = 100 \cdot (1 + 0{,}01)^{100} = 270{,}48$ δολάρια —ποσόν που βρίσκεται ακόμη πιο κοντά. Επομένως, βλέπουμε ότι η βασισμένη στον απειροστικό λογισμό απάντηση φαίνεται να αντιστοιχεί σε εξαιρετικά συχνό ανατοκισμό.

Είναι εύκολο, στην πραγματικότητα, να δούμε τη σύνδεση μεταξύ του ανατοκισμού και των διαφορικών εξισώσεων. Αν συμφωνήσουμε να μετράμε το χρόνο με διακριτές μονάδες —$t = k$, όπου $k = 0, 1, 2, 3, ...$— και αντικαταστήσουμε το σύμβολο dN/dt (το «ρυθμό μεταβολής του N ως προς το t») με τη $N(k+1) - N(k)$, τότε η διαφορική εξίσωση (1) γίνεται

$$N(k+1) - N(k) = 0{,}1 \cdot N(k), \text{ με } N(0) = 100.$$

Μεταφέροντας το $N(k)$ στο δεξιό μέλος, αυτή η *εξίσωση διαφορών* γίνεται ταυτόσημη με το σχήμα που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τον ανατοκισμό! Η μετάβαση στον απειροστικό λογισμό αντιστοιχεί στον εξαιρετικά συχνό ανατοκισμό (μειώνοντας, για παράδειγμα, το χρονικό διάστημα μεταξύ των διαδοχικών ανατοκισμών από ένα χρόνο σε ένα τρίμηνο, σε ένα μήνα, σε μία μέρα, ...).

Κάνοντας τέτοιες αλλαγές στην f, είναι απαραίτητο να προσέξουμε ότι, ενώ δέκα χρόνια ετήσιων ανατοκισμών απαιτούν δέκα μόνο επαναλήψεις στο μοντέλο του λογιστικού φύλλου, ο τρίμηνος ανατοκισμός απαιτεί 40 επαναλήψεις. Γενικότερα, η αύξηση της f προκαλεί αντίστοιχη αύξηση στο μήκος του λογιστικού φύλλου. Αυτό θα μπορούσε ίσως να καταλήξει ενοχλητικό, με τη διαφορά ότι από ένα σημείο και έπειτα η αύξηση της f έχει ελάχιστη επίδραση στα αποτελέσματα που παίρνουμε. Για παράδειγμα, η αύξηση της f από 10 σε 100 ή 1.000 θα μεταβάλει την αξία της κατάθεσής σας λίγο παραπάνω από μία δραχμή σε δέκα χρόνια. Από τη στιγμή που θα φτάσουμε σ' ένα τέτοιο σημείο, μπορούμε να είμαστε αρκετά βέβαιοι ότι η λύση με το λογιστικό φύλλο βρίσκεται εγγύτατα στη λύση με τον απειροστικό λογισμό. Και πραγματικά, οι διαφορικές εξισώσεις λύνονται συχνά με αυτές ακριβώς τις τεχνικές που περιγράψαμε.

Πώς αυξάνεται ο πληθυσμός των ανθρώπων

Οι άνθρωποι δεν είναι ούτε δολάρια ούτε κουνέλια, και η υπόθεση ότι το δημογραφικό μας μέλλον καθορίζεται από έναν τύπο ή μια διαφορική εξίσωση είναι σκέτη ανοησία. Οι διαφορικές εξισώσεις μάς προσφέρουν ικανοποιητικές αναπαραστάσεις *ντετερμινιστικών* διαδικασιών. Αν, για παράδειγμα, μας δοθεί η αρχική θέση και η ταχύτητα ενός σώματος που πέφτει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αποτελεσματικά διαφορικές εξισώσεις για να προβλέψουμε τη θέση του σε επόμενες χρονικές στιγμές.

Αντίθετα, έχουμε την ικανότητα να επηρεάσουμε τους μελλοντικούς πληθυσμούς μας μέσω μιας πληθώρας ατομικών και συλλογικών διαδικασιών λήψης αποφάσεων. Με άλλα λόγια, στο δημογραφικό μας μέλλον εμπλέκεται η *ελεύθερη βούληση*. Επομένως, η χρήση των μαθηματικών στη δημιουργία μοντέλων για την αύξηση του ανθρώπινου πληθυσμού δεν αποκλείει τη δυνατότητά μας να καταλήξουμε σ' ένα μέλλον διαφορετικό από εκείνο που προβλέπει κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο. Αντίθετα, επιτρέποντάς μας να προβλέψουμε το αποτέλεσμα συγκεκριμένων ενεργειών, τα μαθηματικά ίσως μας βοηθήσουν να αποφύγουμε το δυσάρεστο μέλλον που προβλέπει κάποιο μοντέλο.

Πέρα από αυτές τις διευκρινίσεις, παραμένει το γεγονός ότι η αύξηση του ανθρώπινου πληθυσμού καθορίζεται από το ρυθμό των γεννήσεων και των θανάτων. Αν δοθούν συγκεκριμένες εκτιμήσεις αυτών των ρυθμών για το παρόν και το μέλλον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τεχνικές της δυναμικής πληθυσμών (τις ίδιες που χρησιμοποιήσαμε για τα δολάρια και τα κουνέλια) και να καθορίσουμε τις αντίστοιχες μεταβολές στον ανθρώπινο πληθυσμό.

Αρχίζοντας με τη βιβλική εκτίμηση για την ανθρώπινη μακροβιότητα, «τρεις φορές είκοσι και δέκα», είναι λογικό να ξεκινήσουμε εκτιμώντας ότι ο ετήσιος ρυθμός θανάτων είναι 1/70, ή 14,3 θάνατοι ανά χίλιους ανθρώπους περίπου. Για να εκτιμήσουμε τον ετήσιο ρυθμό γεννήσεων, παρατηρούμε ότι στις μέρες μας ο ανθρώπινος πληθυσμός διπλασιάζεται κάθε 40 χρόνια. Αυτό μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε χοντρικά σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό όπου η αρχική κατάθεση διπλασιάζεται κάθε 40 χρόνια. Με ετήσιο ανατοκισμό, το επιτόκιο που απαιτείται γι' αυτήν την απόδοση μπορεί να καθοριστεί αν επιλυθεί η εξίσωση

$$200 = 100\,(1 + r)^{40}.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$r = 2^{1/40} - 1 \cong 0{,}0174797.$$

Με πολύ συχνό (συνεχή) ανατοκισμό, μπορούμε να καθορίσουμε αυτό το επιτόκιο επιλύοντας την εξίσωση

$$200 = 100\, e^{40r},$$

απ' όπου

$$r = (1/40)\ln 2 \cong 0{,}0173286.$$

Με δεδομένη την εγγύτητα αυτών των απαντήσεων, μπορούμε να συνεχίσουμε χρησιμοποιώντας ως βάση τον ετήσιο ανατοκισμό και να θέσουμε $r = 0{,}0174$, τιμή που εκφράζει μια ετήσια αύξηση 17,4 ανθρώπων ανά χίλιους ανθρώπους. Με βάση, λοιπόν, την προηγούμενη εκτίμησή μας για το ρυθμό θανάτων (14,3), καταλήγουμε σε 31,7 περίπου γεννήσεις ζώντων ανά χίλιους ανθρώπους κάθε χρόνο. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτά τα δεδομένα στον σημερινό πληθυσμό των 5,6 περίπου δισεκατομμυρίων, προκύπτει μια ετήσια αύξηση 97,4 εκατομμυρίων ανθρώπων.

Είναι δύσκολο να έχουμε καλή αίσθηση της κλίμακας τόσο μεγάλων αριθμών. Για να αντιληφθούμε τι μπορεί να συνεπάγονται, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά που έχουν ήδη ηλικία 2.000 ετών, ώστε να εκτιμήσουμε την έκταση της καλλιεργήσιμης γης σε όλον τον πλανήτη μας και κατόπιν να διαιρέσουμε αυτόν τον αριθμό με το $5{,}6 \cdot 10^9$. Ο Ερατοσθένης πέτυχε μια πολύ ακριβή εκτίμηση της ακτίνας της Γης —συγκεκριμένα βρήκε ότι $R = 6.400$ km (βλ. το πρόβλημα 1 στη συνέχεια). Επίσης, ο Αρχιμήδης ανακάλυψε τον τύπο $S = 4\pi R^2$ για το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας. Κάνοντας έναν υπολογισμό τάξεως μεγέθους προκύπτει $S = 12 \cdot 40 \cdot 10^6$, ή 500 εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα περίπου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το 70% της επιφάνειας της Γης καλύπτεται από νερό και εκτιμώντας ότι μόνο το 11% της στεριάς είναι καλλιεργήσιμο, καταλήγουμε σε 16 περίπου εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα καλλιεργήσιμης γης.

Στη δεκαετία του 1920 (όταν ο πληθυσμός του πλανήτη μας ανερχόταν σε 2 δισεκατομμύρια περίπου) ο αμερικανός χιουμορίστας Will Rogers παρατήρησε ότι «είναι καλό να επενδύεις σε γη γιατί δεν φτιάχνουν πια καινούργια». Το γεγονός ότι σήμερα αντιστοιχούν σε κάθε άνθρωπο λιγότερα από 4 στρέμματα καλιεργήσιμης γης, μας προσφέρει μια βάση για να συλλογιστούμε τις συνέπειες της αύξησης του ανθρώπινου πληθυσμού στο κοινό μας μέλλον.

Μπορούμε, φυσικά, να χρησιμοποιήσουμε ένα λογιστικό φύλλο για να αναπαραστήσουμε αυτές τις εκτιμήσεις, όπως και να τις προβάλουμε σε 100, για παράδειγμα, χρόνια στο μέλλον. Το αποτέλεσμα είναι τόσο απόλυτο και ξεκάθαρο ώστε να υποδηλώνει ότι οι τρέχουσες τάσεις είναι μάλλον απίθανο να διατηρηθούν. Πάντως, παρόμοιες προβολές δεν είναι πιθανό να ενθαρρύνουν από μόνες τους δημιουργικές σκέψεις για την αντιμετώπιση των θεμελιακών ζητημάτων.

Και τι γίνεται με την ελεύθερη βούληση; Αν θέλουμε να πετύχουμε ένα διαφορετικό μέλλον, ένα μέλλον όπου ο ανθρώπινος πληθυσμός θα έχει σταθεροποιηθεί σε κάποιο προαποφασισμένο ύψος (ας πούμε, 10 δισεκατομμύρια), απαιτείται να μειωθεί σταδιακά ο τρέχων ρυθμός αύξησης. Από μαθηματική άποψη, πρέπει να αντικαταστήσουμε τη σταθερά $r = 0{,}0174$ με μια συνάρτηση $r(t)$ —μια συνάρτηση που θα ικανοποιεί την $r(0) = 0{,}0174$ και θα φθίνει αρκετά γρήγορα έτσι ώστε να επιτευχθεί η σταθεροποίηση του $N(t)$ σε κάποια προκαθορισμένη τιμή. Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η

$$r(t) = 0{,}0174/(1 + 0{,}001 \cdot t^2). \quad (2)$$

Αυτό αντιστοιχεί στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dN}{dt} = r(t)\cdot N(t), \text{ με } N(0) = 5{,}6$$

και στο να θέσουμε την απαίτηση

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 10.$$

Το να δουλεύουμε από τη λύση προς τα πίσω για να προσδιορίσουμε

	A	B	C	D
1	f =	4	N(0) =	100
2	k	Time	N(k)	
3	0	=A3/$B$1	=$D$1	
4	=A3+1	=A4/$B$1	=C3+(0.1*C3-0.0005*C3^2)/$B$1	

Σχήμα 7

μια διαφορική εξίσωση είναι ένα πρόβλημα της *θεωρίας ελέγχου*.

Στην πραγματικότητα, πάντως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα λογιστικά φύλλα για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι καταθέτετε 5,6 μονάδες χρήματος σε μια τράπεζα που προσφέρει *μεταβλητό* επιτόκιο $r(k)$ κατά την k χρονική περίοδο ανατοκισμού. Αυτή η υπόθεση δεν είναι εντελώς εξωπραγματική. Τα επιτόκια πραγματικά μεταβάλλονται (αν και συνήθως όχι μέσω τύπων), και οι τράπεζες συνάπτουν δάνεια με μεταβλητά επιτόκια. Από αυτήν την άποψη, χρειάζονται μικρές μόνο αλλαγές στο προηγούμενο λογιστικό μας φύλλο για να ενσωματώσουμε την αντικατάσταση της παραμέτρου r με τη συνάρτηση $r(k)$.

I. Σχεδιασμός μελλοντικού πληθυσμού

1. Ορίστε μια συνάρτηση $r(k)$ για την οποία $r(0) = 0{,}0174$ και η $r(k)$ τείνει στο μηδέν όταν το k γίνεται πολύ μεγάλο [βλ. για παράδειγμα, την εξίσωση (2)].

2. Αναπτύξτε ένα πρόγραμμα λογιστικού φύλλου για τον υπολογισμό της μέλλουσας αξίας $N(0)$ δολαρίων που επενδύονται με ετήσιο επιτόκιο $r(k)$% και ανατοκίζονται μία φορά το χρόνο.

3. Τροποποιήστε τη συνάρτηση $r(k)$ έως ότου η λύση που αντιστοιχεί σε $N(0) = 5{,}6$ να σταθεροποιείται κοντά στην τιμή $N = 10$.

4. Βελτιώστε το μοντέλο σας έτσι ώστε να αντιστοιχεί σε «συχνότερο ανατοκισμό». Το $N(k)$ εξακολουθεί να τείνει στο 10; Αν όχι, ορίστε ξανά την $r(k)$ και ξανακάντε τους υπολογισμούς σας.

Η λογιστική εξίσωση

Παρότι η μείωση του ρυθμού αύξησης αποτελεί μια φυσική προσέγγιση του προβλήματος της σταθεροποίησης του ανθρώπινου πληθυσμού, υπάρχει μια διαφορετική μέθοδος που κατέχει σπουδαιότερη θέση στη θεωρητική δυναμική πληθυσμών. Η λογιστική εξίσωση (ή αλλιώς εξίσωση Verhulst) αντανακλά την υπόθεση ότι η ανάπτυξη ενός συγκεκριμένου πληθυσμού *αποσβέννυται* καθώς αυξάνει ο πληθυσμός, και ότι, αντίθετα με τις συνέπειες του ετήσιου ρυθμού θνησιμότητας των 14,3 θανάτων ανά χίλια άτομα, αυτή η απόσβεση είναι ανάλογη με το *τετράγωνο* του μεγέθους του πληθυσμού.

Απομένει να φανταστούμε ποιος θα είναι ο μηχανισμός αυτής της προοδευτικής ελάττωσης —ή απόσβεσης. Οι αισιόδοξοι μπορεί να θεωρήσουν ότι αντανακλά περιοριστικές ή οικονομικές δυνάμεις, ενώ οι απαισιόδοξοι μπορεί να δουν σ' αυτόν λιμούς, σεισμούς και καταποντισμούς. Ο συγκεκριμένος κανόνας για την απόσβεση (ανάλογη με το τετράγωνο του N) μοιάζει περισσότερο με μια βολική μαθηματική κατασκευή παρά με αναπαράσταση ενός συγκεκριμένου μηχανισμού.

Μπορούμε, διαισθητικά και πάλι, να ερευνήσουμε το παραπάνω φαινόμενο εκφράζοντας τον θεμελιώδη μηχανισμό του σε συνάρτηση με χρηματικούς όρους. Θεωρούμε μια τράπεζα (ας την ονομάσουμε «Αδιαφανείς Δανεισμοί και Αποταμιεύσεις») η οποία σας προσφέρει το ίδιο ελκυστικό επιτόκιο του 10% που μελετήσαμε προηγουμένως. Η ΑΔ&Τ, όμως, απαιτεί και μια «πολύ μικρή» αμοιβή υπηρεσιών («μόλις 0,0005») που την υπολογίζει επί του τετραγώνου του ποσού που έχετε στο λογαριασμό σας. Αν συμπεριλάβουμε αυτήν την αμοιβή στο μοντέλο μας, θα έχουμε

$$N(k+1) = N(k) + 0{,}1 \cdot N(k) - 0{,}0005 \cdot N(k)^2.$$

Το πρόγραμμα λογιστικού φύλλου του Σχήματος 7 σας προσφέρει τη δυνατότητα να υπολογίσετε τα μελλοντικά υπόλοιπα του λογαριασμού σας με βάση τις ετήσιες καταθέσεις $N(0)$ και με διάφορες συχνότητες ανατοκισμού. Το πρόβλημα 2 στη συνέχεια θα σας βοηθήσει να καταλάβετε γιατί είναι απίθανο να πλουτίσετε καταθέτοντας τα χρήματά σας σε αυτήν την τράπεζα.

Στην πιο συνηθισμένη (βασισμένη στον απειροστικό λογισμό) γλώσσα της δυναμικής πληθυσμών, παρόμοια μοντέλα χρησιμοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot N(t) - b \cdot N(t)^2. \qquad (3)$$

Θεωρώντας ότι το σύμβολο dN/dt εκφράζει το «ρυθμό της μεταβολής», αυτή η εξίσωση αντιστοιχεί σ' έναν πληθυσμό που έχει ρυθμό ανάπτυξης $a \cdot N(t)$, ενώ επιδρά και ένας παράγοντας ελάττωσης της μορφής $-b \cdot N(t)^2$. Όπως σε όλα τα παρόμοια προβλήματα, οι όροι a και b αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη (αλλά συχνά όχι δηλωμένη) μονάδα χρόνου. Αν το $N(t)$ υπερβεί μια συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή (βλ. το πρόβλημα 2) τότε ο dN/dt γίνεται αρνητικός, ακόμη και αν ο a είναι θετικός.

«Ες αύριον τα σπουδαία...»

Σε τούτο το σημείο, η προσέγγιση μέσω του λογιστικού φύλλου παρουσιάζει μερικά σημαντικά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με την απευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (3). Αυτό οφείλεται στο ότι μπορούμε να κάνουμε πιο ρεαλιστικό το λογιστικό μοντέλο αν παρατηρήσουμε ότι πολλοί από τους παράγοντες που μπορούν να ελαττώσουν την αύξηση των πληθυσμών εμπεριέχουν καθυστερήσεις. Για παράδειγμα, οι τοξικές ουσίες χρειάζονται χρόνο για να επηρεάσουν την υγεία μας, ενώ οι κακές αγροτικές πρακτικές χρειάζονται χρόνο για να εξαντλήσουν το έδαφος. Επομένως, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε «τι θα συμβεί αν εισαγάγουμε μια *καθυστέρηση* διάρκειας d χρονικών μονάδων στον όρο $-b \cdot N(t)^2$;».

Για τη διαφορική εξίσωση (3) αυτό αντιστοιχεί στο να επιλύσουμε την

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot N(t) - b \cdot N(t-d)^2.$$

Τέτοιες *διαφορικές εξισώσεις καθυστέρησης* έχουν μελετηθεί μόνον τα τελευταία πενήντα χρόνια, και δεν υπάρχουν διαδικασίες βασιζόμενες στον απειροστικό λογισμό που να προσφέρουν κάποιον τύπο για την επίλυσή τους. Ακόμη και αν δουλέψουμε με τον απειροστικό λογισμό, είμαστε υποχρεωμένοι να στηριχτούμε σε μεθόδους των διακριτών μαθηματικών, οι οποίες μοιάζουν με αυτές που χρησιμοποιήσαμε για να παρουσιάσουμε τις εργασίες της ΑΔ&Τ.

Παρά ταύτα, στα πλαίσια του λογιστικού μας φύλλου είναι εύκολο να κατανοήσουμε και να αντιμετωπίσουμε τις καθυστερήσεις. Για παράδειγμα, τι θα συμβεί σε μια αρχική κατάθεση 100 δολαρίων όταν η ΑΔ&Τ πληροφορήσει τους παλιούς πελάτες της ότι σχεδιάζει να «μειώσει τη χρέωσή τους για τις υπηρεσίες της»; Συγκεκριμένα, αν έπειτα από 10 χρόνια κατάθεσης των χρημάτων σας η αμοιβή της τράπεζας δεν βασίζεται στο τετράγωνο της τρέχουσας κατάθεσής σας αλλά στο τετράγωνο της κατάθεσής σας πριν από d χρόνια;

ΙΙ. Σχεδιασμός απόσβεσης με χρονική καθυστέρηση

1. Διαμορφώστε το σύστημα
$N(k+1) = N(k) + 0{,}1N(k) - 0{,}0005N(k)^2$, με $N(0) = 100$
σ' ένα λογιστικό φύλλο. Αποδείξτε ότι η $N(k)$ δεν ξεπερνά ποτέ το 200.

2. Μελετήστε το σύστημα
$N(k+1) = N(k) + 0{,}1N(k) - 0{,}0005N(k-d)^2$, με $N(0) = 100$
για d = 4, 6, και 8.

Εξηγήστε γιατί πρέπει να αναμένουμε τα διάφορα αποτελέσματα του Προβλήματος 2 μέσα στο πλαίσιο της δυναμικής πληθυσμών.

Περισσότερα για τις διαφορικές εξισώσεις

Πριν προχωρήσουμε σε άλλο παράδειγμα, είναι καιρός να αναρωτηθούμε αν τα τραπεζικά μας παραδείγματα (τα οποία αρχίζουν να γίνονται λίγο υπερβολικά) είναι απαραίτητα για την αναπαράσταση μιας διαφορικής εξίσωσης σ' ένα λογιστικό φύλλο. Η απάντηση είναι ένα εμφατικό *όχι*. Στη συνέχεια, λοιπόν, θα περιγράψω μια διαφορετική υπολογιστική προσέγγιση για τις διαφορικές εξισώσεις.

Όπως ήδη επισημάναμε, κάθε διαφορική εξίσωση που περιλαμβάνει το dN/dt είναι διατυπωμένη σε σχέση με μια συγκεκριμένη μονάδα για το t. Το γεγονός ότι οι σταθερές a και b στη λογιστική εξίσωση $dN/dt = a \cdot N(t) - b \cdot N(t)^2$ αντιπροσωπεύουν «μεταβολή *ανά έτος*» συνεπάγεται ότι το t πρέπει να μετρηθεί σε *έτη*.

Ήδη, στο μοντέλο του ανατοκισμού μετρήσαμε το χρόνο με διακριτές μονάδες —$t = k$, όπου $k = 0, 1, 2, ...$— και ερμηνεύσαμε το σύμβολο dN/dt ως τη «μεταβολή του $N(t)$ στη μονάδα του χρόνου». Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί σε περισσότερο γενικές διαφορικές εξισώσεις.

Για παράδειγμα, αν αντικαταστήσουμε το dN/dt με $N(k+1) - N(k)$, η λογιστική διαφορική εξίσωση (3) γίνεται

$$N(k+1) - N(k) = aN(k) - bN(k)^2,$$

ή

$$N(k+1) = (1+a)N(k) - bN(k)^2,$$

που αντιστοιχεί στο επαναληπτικό σχήμα στο οποίο έχουμε βασίσει το μοντέλο μας στο λογιστικό φύλλο.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = t^2 + \frac{1}{N(t)} \tag{4}$$

γίνεται

$$N(k+1) - N(k) = k^2 + 1/N(k),$$

ή

$$N(k+1) = N(k) + k^2 + 1/N(k).$$

Τέτοιες εξισώσεις μπορούμε επίσης να τις επαναλαμβάνουμε σ' ένα λογιστικό φύλλο.

Χρειάζεται προσοχή (πράγμα που το επισημάναμε ήδη στην περίπτωση του ανατοκισμού) όταν έχουμε ξεκινήσει να λύσουμε την εξίσωση (4) για ορισμένο πεδίο τιμών του t και αποφασίσουμε να αυξήσουμε τη συχνότητα του ανατοκισμού. Για να επιλύσουμε την

$$\frac{dN}{dt} = t^2 + \frac{1}{N(t)}, \text{ με } N(0) = 100,$$

για $0 \le t \le 10$ με ετήσιο ανατοκισμό, θα προγραμματίζαμε το λογιστικό φύλλο να υπολογίσει το

$$N(k+1) = N(k) + [k^2 + 1/N(k)], \quad \text{με } N(0) = 100,$$

για $k = 0, 1, ..., 9$. Αν όμως θέλουμε να ανατοκίζουμε συχνότερα (ας πούμε τέσσερις φορές συχνότερα), ο αντίστοιχος υπολογισμός που απαιτείται είναι ο

$$N(k+1) = N(k) + [k^2 + 1/N(k)]/4, \quad \text{με } N(0) = 100,$$

για $k = 0, 1, ..., 39$. Στη δεύτερη περίπτωση είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε το $N(k)$ σε 40 κελιά και όχι σε 10.

Στα παραδείγματα που εξετάσαμε μέχρι στιγμής, ο συχνότερος ανατοκισμός δεν άλλαζε ουσιαστικά το αποτέλεσμα, και γι' αυτό το λόγο ο ανατοκισμός μία φορά σε κάθε χρονική μονάδα ήταν απολύτως ικανοποιητικός. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντοτε, και πρέπει να πειραματιζόμαστε με μία τουλάχιστον «εκλέπτυνση» του διαστήματος (που αντιστοιχεί σε συχνότερο ανατοκισμό) για να εξασφαλίσουμε ότι η λύση του λογιστικού φύλλου συμφωνεί σε λογικό βαθμό με τη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Μια καλή μέθοδος να το πετύχουμε αυτό είναι να θεωρήσουμε τη συχνότητα ανατοκισμού ως παράμετρο στο πρόγραμμα του λογιστικού φύλλου.

Αλληλεπίδραση θηρευτή-θηράματος

Έπειτα από αυτήν τη σύντομη εισαγωγή στη μετατροπή διαφορικών εξισώσεων σε ασυνεχή μορφή, μπορούμε να εξετάσουμε ένα ακόμη ενδιαφέρον παράδειγμα από τη δυναμική πληθυσμών —συγκεκριμένα, το σύστημα θηρευτή-θηράματος που εισήγαγε ο Vito Volterra. Εδώ θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο της αλληλεπίδρασης *δύο* πληθυσμών.

Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό κουνελιών και αλεπούδων σ' ένα καταπράσινο νησί. Τα κουνέλια, αν ήταν μόνα τους στο νησί, θα αυξάνονταν κατά 10% κάθε μήνα. Οι αλεπούδες, αν ζούσαν μόνες τους στο νησί, και αφού δεν μπορούν να ζήσουν τρώγοντας χορτάρι, θα μειώνονταν με ρυθμό 10% κάθε μήνα. Στην πραγματικότητα, όμως, τα δύο είδη αλληλεπηρεάζονται μέσω περιστασιακών συναντήσεων, που γενικά είναι κακές για τα κουνέλια και καλές για τις αλεπούδες. Το ερώτημα που έθεσε ο Voltera είναι πώς θα συνυπάρξουν οι δυο πληθυσμοί.

	A	B	C	D
1	X(0) =	110	Y(0)=	100
2	a =	0.1	b =	0.001
3	c =	0.1	d =	0.001
4	f =	1		
5	k	Time	X(k)	Y(k)
6	0	=A6/$B$4	=$B$1	=$D$1
7	=A6+1	=A7/$B$4	=C6+($B$2*C6-$D$2*C6*D6)/$B$4	=D6+(-$B$3*D6+$D$3*C6*D6)/$B$4

Σχήμα 8

Αν αγνοήσουμε προς στιγμήν την αλληλεπίδραση των κουνελιών και των αλεπούδων, μπορούμε ν' αρχίσουμε τη μελέτη των πληθυσμών συμβολίζοντας με X το πλήθος των κουνελιών, και με Y το πλήθος των αλεπούδων, και θέτοντας

$$\frac{dX}{dt}=aX(t),\ \frac{dY}{dt}=-cY(t)$$

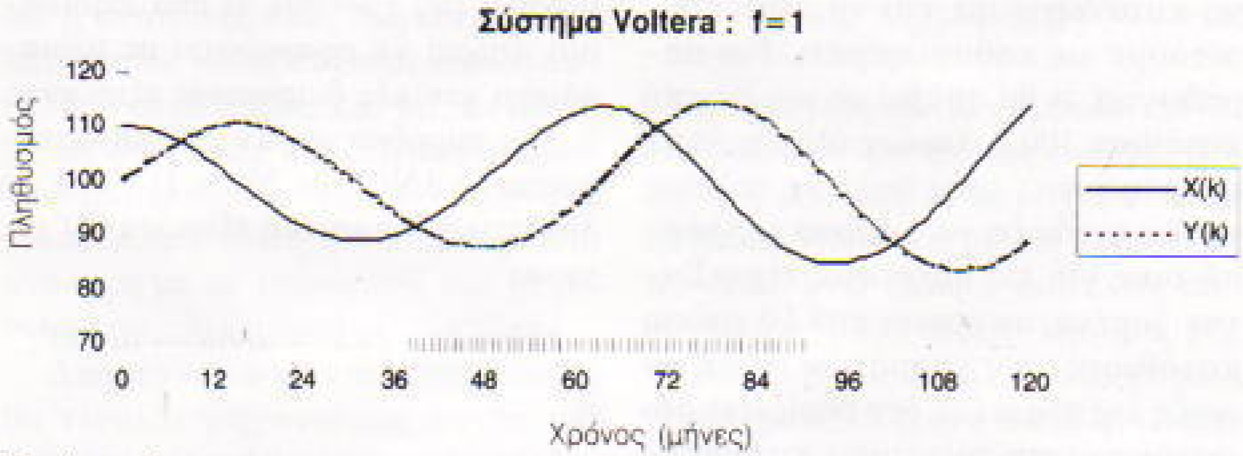
όπου $a = c = 1/10$. Φυσικά, αυτά μπορούν να μετατραπούν σε μοντέλα λογιστικού φύλλου αν θέσουμε $X(k+1) - X(k)$ στη θέση του dX/dt, κ.ο.κ.

Για να συμπεριλάβει την «αλληλεπίδραση» σε αυτό το μοντέλο ο Volterra χρειάστηκε να ποσοτικοποιήσει το πλήθος των συναντήσεων μεταξύ κουνελιών και αλεπούδων. Υπέθεσε ότι αν τριπλασιαστεί το πλήθος των αλεπούδων θα τριπλασιαστεί και το πλήθος των συναντήσεων. Παρομοίως, αν υποδιπλασιαστεί το πλήθος των κουνελιών θα υποδιπλασιαστεί και το πλήθος των συναντήσεων. Αυτό απαιτεί το πλήθος των συναντήσεων (στη μονάδα του χρόνου που αρχίζει τη στιγμή t_0) να είναι ανάλογο με το $X(t_0) \cdot Y(t_0)$. Εισάγοντας τις σταθερές αναλογίας b και d σε σχέση με αυτή τη μονάδα χρόνου, ο Volterra κατέληξε στο εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

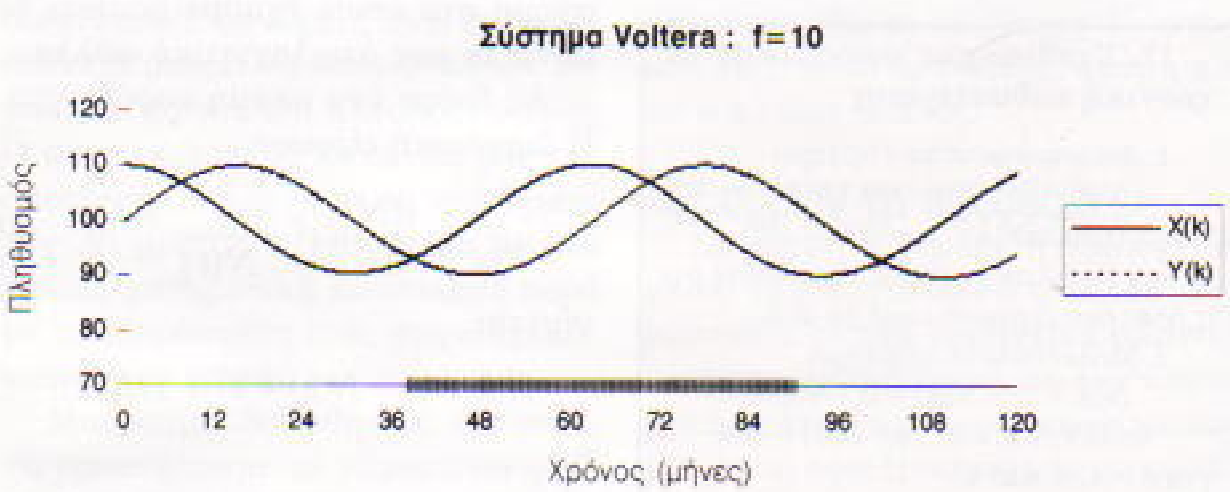
$$\frac{dX}{dt} = aX(t) - bX(t) \cdot Y(t),$$

$$\frac{dX}{dt} = -cY(t) + dX(t) \cdot Y(t).$$

Το πρόσημο πριν τους δεύτερους όρους στα δεξιά μέλη των εξισώσεων εκφράζει το αποτέλεσμα των συναντήσεων για τους δύο πληθυσμούς —δηλαδή είναι μια μορφή αλληλεπίδρασης «κακή για το πλήθος των κουνελιών και καλή για το πλήθος των αλεπούδων».



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Για να αναπαραστήσουμε αυτές τις διαφορικές εξισώσεις σ' ένα λογιστικό φύλλο, γράφουμε $X(k+1) - X(k)$ στη θέση του dX/dt, κ.ο.κ., και παίρνουμε

$$X(k+1) = X(k) + [a \cdot X(k) - b \cdot X(k) \cdot Y(k)] / f,$$
$$Y(k+1) = Y(k) + [-c \cdot Y(k) + d \cdot X(k) \cdot Y(k)] / f.$$

Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το f συμβολίζει το πόσες φορές θα μετρήσουμε τις αλεπούδες και τα κουνέλια στη μονάδα του χρόνου (στην περίπτωσή μας, κάθε μήνα). Στο Σχήμα 8 βλέπετε έναν ευέλικτο τρόπο προγραμματισμού ενός τέτοιου συστήματος σ' ένα λογιστικό φύλλο.

Εάν εισαγάγουμε τις τιμές $X(0) = 110$, $Y(0) = 100$, $a = c = 1/10$, $b = d = 1/1.000$, και $f = 1$, προκύπτει το γράφημα του Σχήματος 9. Αν αυξήσουμε την τιμή του f από 1 σε 10 προκύπτει το γράφημα του Σχήματος 10.

III. Σχεδιασμός συγκομιδής

Στο νησί εμφανίζεται ο Ροβινσών Κρούσος ο οποίος αρχίζει επίσης να κυνηγάει τα κουνέλια. Χρησιμοποιήστε ένα λογιστικό φύλλο για να μελετήσετε τα αποτελέσματα του κυνηγιού h επιπλέον κουνελιών ανά μήνα, για μεγάλη χρονική περίοδο. Υπάρχουν κάποια εντυπωσιακά αποτελέσματα;

Παρατηρήστε ότι τα δύο γραφήματα είναι όμοια, με τη διαφορά ότι οι διακυμάνσεις των πλατών έχουν μειωθεί με την αύξηση του f.

Προβλήματα

1. Η πόλη της Συήνης (το σημερινό Ασουάν) ήταν γνωστή στον Ερατοσθένη για το πηγάδι της, στον πυθμένα του οποίου έπεφταν κατευθείαν οι ακτίνες του Ήλιου το μεσημέρι κατά το θερινό ηλιοστάσιο. Την

ίδια μέρα στην Αλεξάνδρεια, 800 χιλιόμετρα βορείως της Συήνης, οι ακτίνες του Ήλιου το μεσημέρι σχηματίζουν γωνία 7,2° με το νήμα της στάθμης. Ο Ερατοσθένης γνώριζε επίσης ότι η Γη είναι σφαιρική και ότι το φως του Ήλιου φτάνει σε μας με παράλληλες ακτίνες. Πώς μπόρεσε να υπολογίσει ότι η ακτίνα της Γης ισούται περίπου με 6.400 km;

2. Με τη λογιστική εξίσωση, τα χρήματά σας αυξάνονται ή μειώνονται σε χρόνο t ανάλογα με το αν είναι θετική ή αρνητική η τιμή της $0{,}1N(t) - 0{,}0005N(t)^2$. Για ποιες τιμές του N η $N(t)$ είναι αύξουσα; Για ποιες τιμές του N είναι φθίνουσα; Οι απαντήσεις που βρήκατε συμφωνούν με το μοντέλο σας για την ΑΔ&Τ; ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ

Καυτό τσάι και κρύος ιδρώτας

Ιστορίες εξάτμισης στον φυσικό κόσμο

Andrey Korzhuyev

Όπως γνωρίζετε, εξάτμιση ενός υγρού συμβαίνει όταν τα ταχύτερα μόριά του, αφού διαγράψουν μια πορεία προς την επιφάνεια, υπερνικήσουν την έλξη των γειτονικών μορίων και εγκαταλείψουν το υγρό. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα της εξάτμισης εξαρτάται από πολλούς παράγοντες: τη φύση του υγρού, τη θερμοκρασία του, το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειάς του, το μέρος όπου περιέχεται (σε ανοιχτό ή κλειστό δοχείο), κ.ά. Επίσης γνωρίζουμε ότι όσο εντονότερη είναι η εξάτμιση τόσο ταχύτερα ψύχεται το υγρό, διότι το εγκαταλείπουν τα μόρια με την περισσότερη ενέργεια (τα πιο «ζεστά»).

Η εξάτμιση είναι φαινόμενο διαδεδομένο στη φύση και παίζει σημαντικό ρόλο στον ζωικό και τον φυτικό κόσμο. Ας δούμε μερικά παραδείγματα και ας προσπαθήσουμε να τα ερμηνεύσουμε.

Όπως γνωρίζετε, όταν αρχίζει ξηρασία, τα φύλλα των περισσότερων φυτών αρχίζουν να μαραίνονται. Γιατί; Προφανώς, επειδή δεν υπάρχει νερό στο έδαφος. Κατά τη διάρκεια της ξηρασίας η παροχή νερού στις ρίζες μειώνεται, και έτσι τα φυτά υποχρεώνουν τα φύλλα τους (ή έτσι τουλάχιστον φαίνεται) να συρρικνωθούν. Μ' αυτόν τον τρόπο μειώνεται η εκτεθειμένη επιφάνειά τους, και επομένως ελαττώνεται η ποσότητα του νερού που διαφεύγει λόγω της εξάτμισης. Παρομοίως, πολλά φυτά της ερήμου δεν διαθέτουν φύλλα παρά μόνον αγκάθια. Έτσι διαφυλάσσουν την πολύτιμη υγρασία.

Και τι χρειάζεται για ν' αυξηθεί η ταχύτητα εξάτμισης; Απλώς, να αυξηθεί το εμβαδόν της επιφάνειας όσο το δυνατόν περισσότερο. Αυτό κάνουμε όταν ρίχνουμε καυτό τσάι από το φλυτζάνι στο πιατάκι, ή όταν κόβουμε πατάτες, μήλα και άλλα φρούτα και λαχανικά σε μικρά κομμάτια θέλοντας να τα ξεράνουμε.

Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει την ταχύτητα εξάτμισης είναι η κίνηση του αέρα πάνω από την επιφάνεια του υγρού —με απλά λόγια, ο άνεμος. Έτσι, όταν θέλουμε να κρυώσουμε τον καφέ μας, δημιουργούμε τεχνητό άνεμο —δημιουργούμε ρεύμα αέρα φυσώντας προς την επιφάνειά του. Για τον ίδιο λόγο, το κομμένο χόρτο ξεραίνεται πιο γρήγορα σ' ένα λιβάδι παρά σ' ένα δάσος (αν και, για να είμαστε ειλικρινείς, εδώ παίζει ρόλο και ένας άλλος παράγοντας: η εξάτμιση αυξάνεται λόγω των ακτίνων του ήλιου που λούζουν το λιβάδι αλλά διαπερνούν ελάχιστα τη βλάστηση του δάσους). Από την άλλη πλευρά, τα φύλλα πολλών φυτών της ερήμου καλύπτονται από κοντό, πυκνό χνούδι που εμποδίζει την κυκλοφορία του αέρα κοντά στη επιφάνεια του φύλλου και επιβραδύνει τη διαδικασία της εξάτμισης.

Ας εξετάσουμε τώρα ένα άλλο ενδιαφέρον φαινόμενο. Έχετε παρατηρήσει πόσο εντονότερο είναι το άρωμα των λουλουδιών μετά τη βροχή; Για να το εξηγήσουμε αυτό πρέπει να θυμηθούμε ότι το άρωμα οφείλεται σε αιθέρια έλαια που παράγονται στα νεκτάρια του άνθους. Ένα αιθέριο έλαιο που δεν περιέχει νερό εξαερώνεται βραδύτερα απ' ό,τι ένα μείγμα ελαίου και νερού. Όταν βρέχει, το νερό πέφτει άφθονο στους κάλυκες και φτάνει στα νεκτάρια δημιουργώντας ένα μείγμα που εξαερώνεται γρήγορα αυξάνοντας το άρωμα.

Όπως προανέφερα, η εξάτμιση μειώνει τη θερμοκρασία του σώματος απ' το οποίο εξατμίζεται το υγρό. Γι' αυτό, όταν κόψετε το φύλλο ενός δέντρου και το ακουμπήσετε στο πρόσωπό σας θα αισθανθείτε μια ευχάριστη δροσιά. Και πάλι, αυτό οφείλεται στην έντονη εξάτμιση του νερού από το φύλλο. Μπορείτε να παρατηρήσετε το ίδιο φαινόμενο στο κολύμπι —όταν βγαίνετε από το νερό κρυώνετε, ακόμη και με ζεστό καιρό, και γι' αυτό σκουπίζεστε αμέσως με την πετσέτα σας.

Έχετε αναρωτηθεί ποτέ ποια είναι η μεγαλύτερη θερμοκρασία που μπορεί να αντέξει ο ανθρώπινος οργανισμός; Λοιπόν, έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι αν η θερμοκρασία του ξηρού αέρα αυξάνεται σταδιακά, οι άνθρωποι μπορούν να αντέξουν θερμοκρασίες 160°C. Πώς μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό; Ας μην ξεχνάμε ότι μεταβολή της θερμοκρασίας και μόνο κατά 1°C μπορεί να είναι πολύ δυσάρεστη για τον άνθρωπο. Τελικά, αποδεικνύεται ότι η θερμοκρασία του σώματος μεταβάλλεται ελάχιστα. Ο οργανισμός αντιδρά στη θέρμανσή του με την έντονη εφίδρωση. Η εξάτμιση του ιδρώτα απαιτεί

Εικονογράφηση: Pavel Chermusky

μεγάλο ποσόν θερμότητας που απορροφάται από το στρώμα του αέρα το οποίο βρίσκεται κοντά στο δέρμα. Εξαιτίας της απορρόφησης της θερμότητας το στρώμα αυτό ψύχεται. Για να λειτουργήσει, όμως, αυτός ο μηχανισμός πρέπει ο αέρας να είναι αρκετά ξηρός. Αν, αντίθετα, περιέχει άφθονη υγρασία, η διαδικασία της εξάτμισης θα είναι ιδιαίτερα αργή και ο οργανισμός δεν θα καταφέρει ν' αντέξει τη ζέστη. Γι' αυτό το λόγο το υγρό και θερμό κλίμα της Αγίας Πετρούπολης είναι πολύ πιο αποπνικτικό από το ξηρό και θερμό κλίμα της Κεντρικής Ασίας.

Από την άλλη μεριά, οι σκύλοι προσαρμόζονται πολύ δύσκολα στις υψηλές θερμοκρασίες. Επειδή έχουν ιδρωτοποιούς αδένες μόνο στα πέλματά τους, ανοίγουν το στόμα τους και αφήνουν τη γλώσσα τους να κρέμεται — η εξάτμιση του σάλιου μειώνει τη θερμοκρασία του σώματος. Οι σκύλοι διαθέτουν και άλλους μηχανισμούς για τη μεταφορά θερμότητας που βασίζονται στην αγωγή και τη μεταφορά: για παράδειγμα, τεντώνουν τα πόδια τους ή ξαπλώνουν ανάσκελα αφήνοντας εκτεθειμένη την κοιλιά τους όπου το τρίχωμά τους είναι αραιότερο.

Και τέλος, ας αναφέρουμε για ποιο λόγο είναι ευκολότερο να αντέξουμε την κρύα ατμόσφαιρα όταν δεν φυσάει άνεμος. Το αίσθημα του κρύου οφείλεται στο ότι τα εκτεθειμένα μέρη του σώματος χάνουν μεγάλα ποσά θερμότητας όταν φυσάει, επειδή ο αέρας που θερμαίνεται από αυτά αντικαθίσταται γρήγορα από άλλον κρύο αέρα, που με τη σειρά του απορροφά και άλλη θερμότητα. Όσο δυνατότερος είναι ο άνεμος τόσο ταχύτερα γίνεται αυτή η αντικατάσταση. Πάντως, η εξάτμιση παίζει και εδώ κάποιο ρόλο. Το νερό του σώματος εξατμίζεται από την επιδερμίδα ακόμη και όταν ο καιρός είναι κρύος. Αν δεν φυσάει καθόλου άνεμος η εξάτμιση είναι αργή, διότι το στρώμα του αέρα που βρίσκεται κόντα στο δέρμα μας σύντομα γίνεται κορεσμένο από υδρατμούς. Αν φυσάει (ή αν κινείστε γρήγορα μέσα στον ακίνητο αέρα), νέα στρώματα αέρα έρχονται σε επαφή με το δέρμα σας, και το αποτέλεσμα είναι περαιτέρω εξάτμιση και ψύξη. Το χειμώνα, λοιπόν, όποτε φυσάει, δεν θα κάνετε καθόλου άσχημα να αναβάλλετε την έξοδό σας από το σπίτι! ◙

Οι διάμεσοι

Ποτέ δεν είναι κουραστικό να ξανακούς μια όμορφη ιστορία

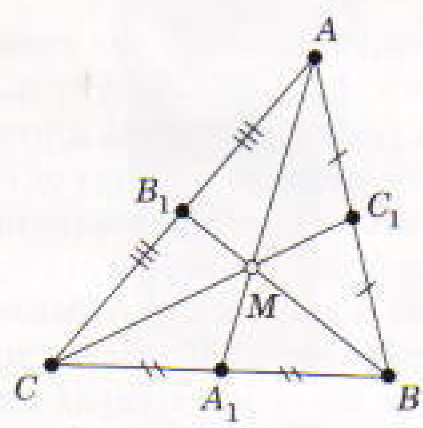
Vladimir Dubrovsky

ΣΕ ΤΟΥΤΟ ΤΟ ΤΕΥΧΟΣ ΣΑΣ ΠΑΡΟΥσιάζουμε ένα καλειδοσκόπιο αποδείξεων ενός πολύ γνωστού θεωρήματος: της ιδιότητας των διαμέσων ενός τριγώνου. Θα αφηγηθούμε την «ιστορία» αυτής της απόδειξης όχι μία, όχι δύο αλλά επτά φορές! (Κάποιοι σοφοί ισχυρίζονται ότι αυτό είναι συχνά πιο διδακτικό από την παράθεση διαφορετικών γεγονότων με μια μοναδική απόδειξη για το καθένα.)

Κάθε απόδειξη θα βασιστεί στη δική της σημαντική και χρήσιμη ιδέα, και θα συνοδεύεται από άλλες εφαρμογές αυτής της ιδέας που περιλαμβάνουν αρκετές γενικεύσεις του κύριου θεωρήματος. Παρότι,όμως, η πρόταση που θα συζητήσουμε είναι τόσο γνωστή, επιτρέψτε μου να σας την υπενθυμίσω.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΣΩΝ (Σχήμα 1). *Οι διάμεσοι AA_1, BB_1 και CC_1 ενός τριγώνου ABC διέρχονται από το ίδιο σημείο M και διαιρούνται από το σημείο αυτό σε λόγο 2 : 1, μετρώντας από τις κορυφές, δηλαδή $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2$.*

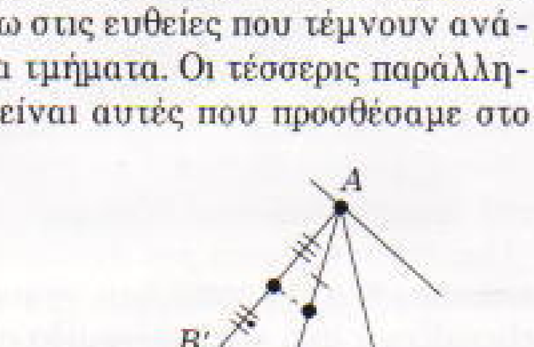
Όλες οι αποδείξεις, εκτός από την τέταρτη και την έκτη, ακολουθούν το ίδιο σχήμα: θεωρούμε το σημείο M της διαμέσου AA_1 το οποίο τη διαιρεί σε λόγο $AM : MA_1 = 2$, και αποδεικνύουμε μόνο ότι η ευθεία BM διχοτομεί την AC. Αντικαθιστώντας την ευθεία BM σε οποιαδήποτε από αυτές τις αποδείξεις με την CM, θα αποδείξουμε ότι και η τρίτη διάμεσος, η CC_1, διέρχεται από το M. Και αφού μπορούμε να αλλάξουμε το ρόλο των



Σχήμα 1

διαμέσων, οι BB_1 και CC_1 διαιρούνται από το M στον ίδιο λόγο όπως και η AA_1. Το σημείο B', οπουδήποτε εμφανίζεται στη συνέχεια, ορίζεται ως η τομή της προέκτασης της BM με την πλευρά AC.

Απόδειξη 1: με χρήση ανάλογων τμημάτων. Φέρουμε μια ευθεία από το A_1 παράλληλη προς την BM και ονομάζουμε N το σημείο στο οποίο τέμνει την AC (Σχήμα 2). Φέρουμε επίσης από τα σημεία A και C ευθείες παράλληλες προς αυτές τις δύο. Ας εφαρμόσουμε την εξής γνωστή πρόταση: παράλληλες ευθείες ορίζουν πάνω στις ευθείες που τέμνουν ανάλογα τμήματα. Οι τέσσερις παράλληλες είναι αυτές που προσθέσαμε στο



Σχήμα 2

σχήμα μας. Οι τρεις από αυτές τέμνουν στις AC και AA_1 τα ανάλογα τμήματα $AB' : B'N = AM : MA_1 = 2 : 1$. Ανάλογα, στις CA και CB παίρνουμε $CB' : B'N = CB : BA_1 = 2 : 1$. Επομένως, $AB' : CB'_1 = 1$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Άσκηση 1. Στο Σχήμα 2 φανταστείτε ότι η $B'MB$ είναι μια τυχαία ευθεία που τέμνει τις πλευρές CA, AA_1, και την προέκταση της πλευράς CA_1 του τριγώνου AA_1C, και ότι M είναι ένα τυχαίο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AA_1. Αποδείξτε ότι

$$\frac{AM}{MA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$

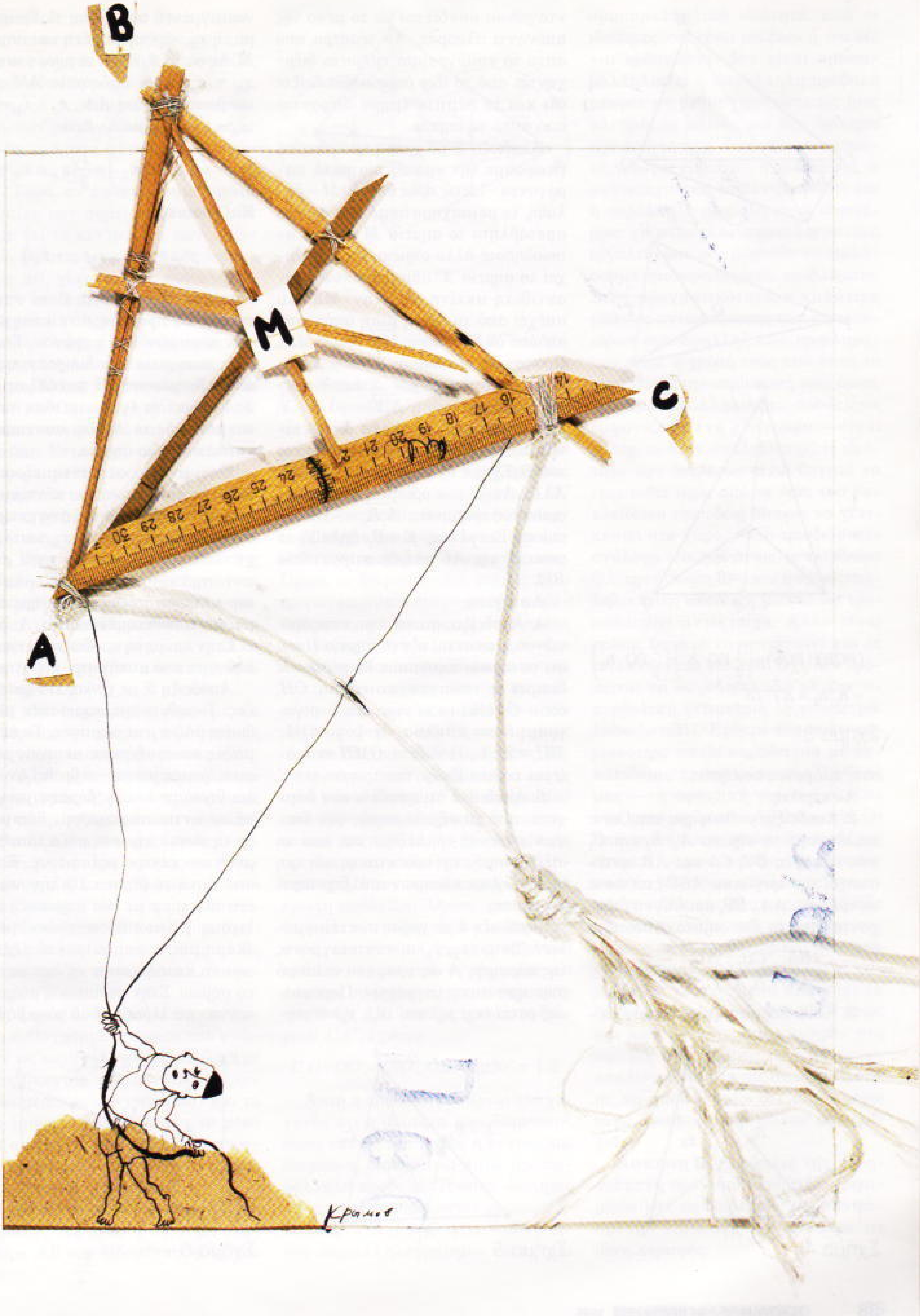
(Αυτό είναι το θεώρημα του Μενελάου.)

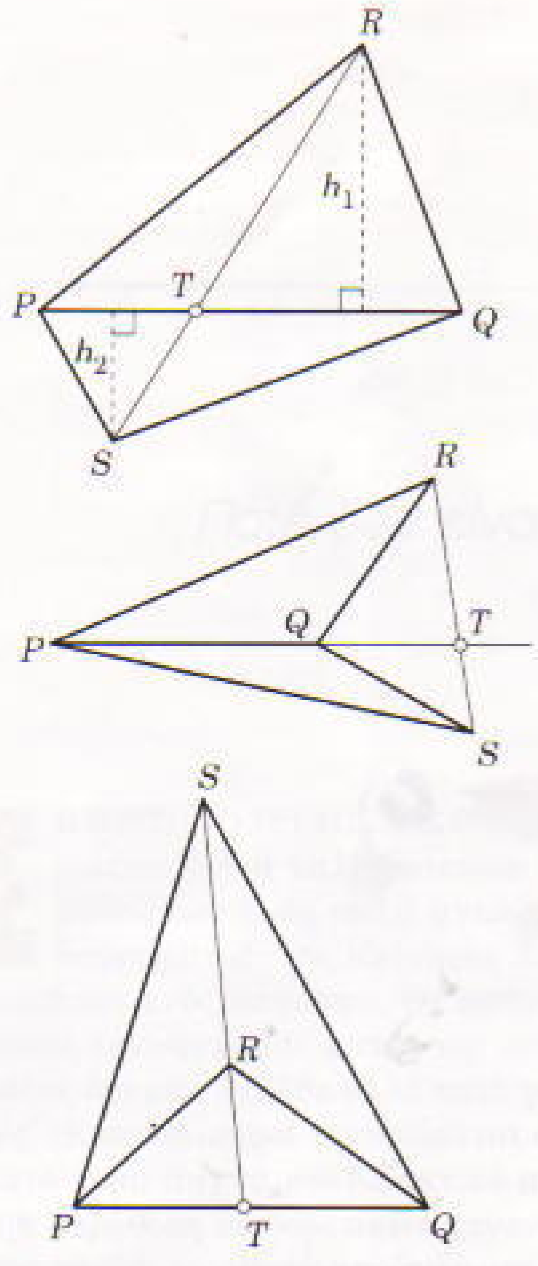
Η ιδέα της επόμενης απόδειξης είναι να εκφράσουμε το λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων συναρτήσει λόγου εμβαδών. Βασίζεται σε ένα πολύ απλό γεγονός (βλ. το Σχήμα 3): *Αν δύο τρίγωνα PQR και PQS έχουν κοινή βάση, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των τμημάτων στα οποία χωρίζει η ευθεία PQ το τμήμα RS —δηλαδή $(PQR) : (PQS) = RT : TS$,* όπου οι παρενθέσεις συμβολίζουν εμβαδά και T είναι το σημείο τομής των RS και PQ.

Απόδειξη 2: με χρήση εμβαδών. Έστω x το εμβαδόν του τριγώνου BA_1M (Σχήμα 4). Τότε, το προηγούμενο λήμμα μάς δίνει $(BMA) = (AM/MA_1)x = 2x$ και $(BMC) = (BC/BA_1)x = 2x$, και επομένως $AB' : B'C = (BMA) : (BMC) = 1$.

Χρησιμοποιήστε αυτήν τη μέθοδο

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov


B
M
C
A



$(PQR):(PQS) = \left(\frac{1}{2}PQ \cdot h_1\right):\left(\frac{1}{2}PQ \cdot h_2\right)$

$= h_1 : h_2 = RT : TS$

Σχήμα 3

στις επόμενες ασκήσεις.

Ασκήσεις

2. Αποδείξτε το θεώρημα του Ceva: επιλέγουμε τα σημεία A_1, B_1 και C_1 στις πλευρές BC, CA και AB, αντίστοιχα, του τριγώνου ABC έτσι ώστε τα τμήματα AA_1, BB_1 και CC_1 να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Αποδείξτε ότι

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1 .$$

3. Κάθε κορυφή ενός κυρτού πενταγώνου συνδέεται με το μέσο της απέναντι πλευράς. Αν τέσσερα από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα διέρχονται από το ίδιο σημείο, αποδείξτε ότι και το πέμπτο τμήμα διέρχεται από αυτό το σημείο.

Απόδειξη 3: με χρήση ομοιοθεσίας. Θεωρούμε την ομοιοθεσία κατά παράγοντα $-1/2$ ως προς κέντρο M—δηλαδή, το μετασχηματισμό που αφήνει αμετάβλητο το σημείο M ενώ σε οποιοδήποτε άλλο σημείο X αντιστοιχεί το σημείο X' που βρίσκεται στην αντίθετη ακτίνα από την MX και απέχει από το M τη μισή απόσταση απ' όσο το X (τυπικά, $\overrightarrow{MX'} = -1/2\,\overrightarrow{MX}$). Προφανώς, οι εικόνες X' και Y' οποιωνδήποτε σημείων X και Y ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{X'Y'} = -1/2\,\overrightarrow{XY}$. Από κατασκευή, η εικόνα του A είναι το A_1. Ονομάζουμε E την εικόνα του B (Σχήμα 5). Τότε $\overrightarrow{A_1E} = -1/2\,\overrightarrow{AB}$. Αλλά, λόγω του ορισμού της διαμέσου ενός τριγώνου, $\overrightarrow{A_1B_1} = -1/2\,\overrightarrow{AB}$ επίσης. Επομένως, $E = B_1$, δηλαδή, το μέσο B_1 της AC ανήκει στην ευθεία BM.

Ασκήσεις

4. Αποδείξτε ότι τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται σ' ένα σημείο H και ότι το σημείο τομής των διαμέσων M διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα OH, όπου O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, σε λόγο $OM : MH = 2 : 1$. (Η ευθεία OMH ονομάζεται ευθεία Euler του τριγώνου.)

5. Αποδείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων ενός τραπεζίου και από το σημείο τομής της προέκτασης των (μη παράλληλων πλευρών του) διχοτομεί τις βάσεις.

Απόδειξη 4: με χρήση συντεταγμένων. Έστω (x_A, y_A) οι συντεταγμένες της κορυφής A ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Παρομοίως, έστω (x_B, y_B) και (x_C, y_C) οι συντεταγμένες των B και C. Βρίσκουμε τη x_M, την τετμημένη του σημείου M. Αφού το A_1 είναι το μέσον του BC, $x_{A_1} = (x_B + x_C)/2$. Εφόσον το AM ισούται με τα 2/3 του AA_1, $x_A - x_M = \frac{2}{3}(x_A - x_{A_1})$ (Σχήμα 6). Άρα

$$x_M = \frac{1}{3}\left(x_A + 2x_{A_1}\right) = \frac{1}{3}\left(x_A + x_B + x_C\right).$$

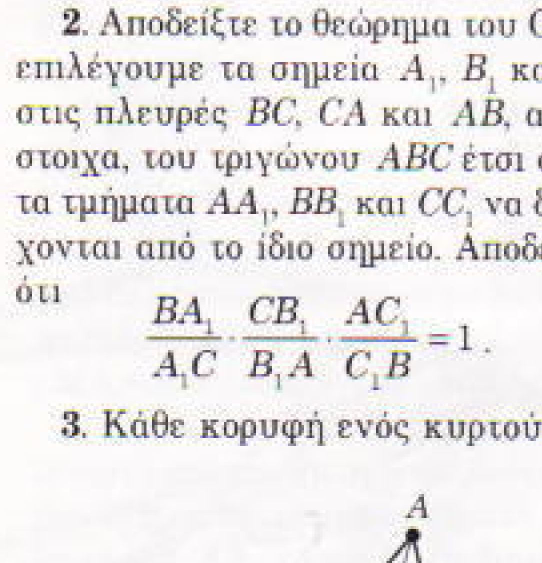
Και, φυσικά,

$$y_M = \frac{1}{3}\left(y_A + y_B + y_C\right).$$

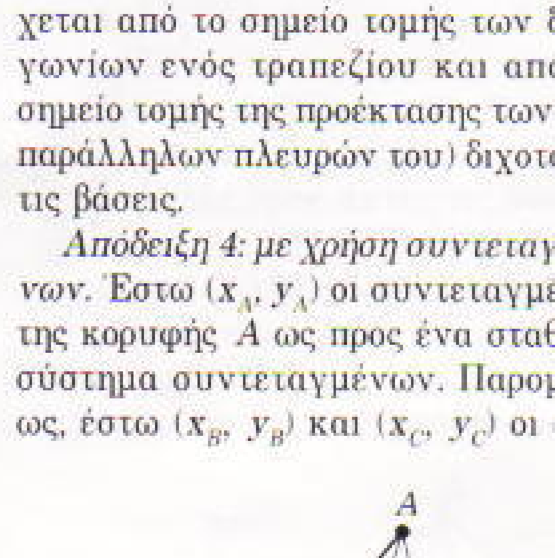
Αυτές οι παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου. Επομένως, τα σημεία που διαιρούν τις δύο άλλες διαμέσους BB_1 και CC_1 σε λόγο 2 : 1 πρέπει να έχουν τις ίδιες συντεταγμένες με το M, και συνεπώς είναι όλα το ίδιο σημείο.

Όσοι αναγνώστες είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του κέντρου μάζας πρέπει να έχουν αναγνωρίσει στις εκφράσεις για τα x_M και y_M τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας των σημείων A, B, και C—δηλαδή του κέντρου μάζας ίσων σημειακών μαζών τοποθετημένων στα A, B και C. Στην επόμενη απόδειξη θα επωφεληθούμε από αυτήν την παρατήρηση.

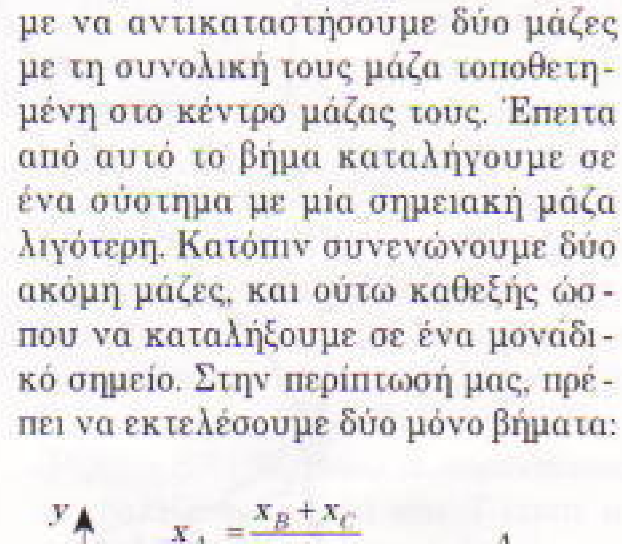
Απόδειξη 5: με χρήση κέντρου μάζας. Τοποθετούμε σημειακές μοναδιαίες μάζες στις κορυφές. Το κέντρο μάζας οποιουδήποτε πεπερασμένου συστήματος μπορεί να βρεθεί άν ακολουθήσουμε τα εξής βήματα: μπορούμε να αντικαταστήσουμε δύο μάζες με τη συνολική τους μάζα τοποθετημένη στο κέντρο μάζας τους. Έπειτα από αυτό το βήμα καταλήγουμε σε ένα σύστημα με μία σημειακή μάζα λιγότερη. Κατόπιν συνενώνουμε δύο ακόμη μάζες, και ούτω καθεξής ώσπου να καταλήξουμε σε ένα μοναδικό σημείο. Στην περίπτωσή μας, πρέπει να εκτελέσουμε δύο μόνο βήματα:



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

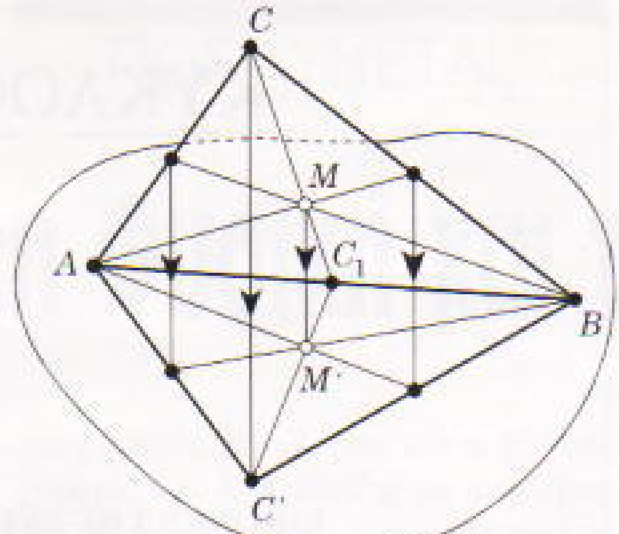
οι σημειακές μάζες στα B και C μπορούν να αντικατασταθούν από μία μάζα στο σημείο A_1. Το κέντρο μάζας της μοναδιαίας μάζας στο A και της μάζας στο A_1, σύμφωνα με το θεώρημα των ροπών, διαιρεί το τμήμα AA_1 σε τμήματα αντιστρόφως ανάλογα με τις μάζες —δηλαδή, σε λόγο 2 : 1. Τώρα, αν συνενώσουμε πρώτα τις μάζες των σημείων A και C, θα δούμε ότι το κέντρο και των τριών μαζών βρίσκεται σε μια άλλη διάμεσο, τη BB_1 γεγονός που συμπληρώνει την απόδειξή μας.

Μερικοί αναγνώστες θα υποστηρίξουν ότι αυτή η απόδειξη είναι από μαθηματική άποψη ανεπαρκής. Και πραγματικά, η έννοια του κέντρου μάζας καθώς και οι ιδιότητές του ανήκουν στη φυσική και όχι στα μαθηματικά. Εντούτοις, είναι δυνατό να προσφέρουμε τελείως αυστηρή μαθηματική υποστήριξη στην τεχνική του κέντρου μάζας χρησιμοποιώντας μερικά στοιχεία διανυσματικού λογισμού. Στην πραγματικότητα, αυτή η τεχνική (στη γεωμετρία) δεν είναι παρά μια άλλη «γλώσσα» που περιγράφει τα ίδια θέματα όπως και η «γλώσσα των διανυσμάτων», αλλά είναι βολικότερη σε μια κατηγορία προβλημάτων.

Με την ευκαιρία, μπορούμε να αναφέρουμε ότι το κέντρο μάζας μιας τριγωνικής λεπτής ομογενούς πλάκας συμπίπτει συμπτωματικά με το σημείο τομής M των διαμέσων της (βαρύκεντρο). Όμως, το κέντρο μάζας ενός συρμάτινου τριγώνου δεν συμπίπτει με το σημείο τομής των διαμέσων του (βλ. την ερώτηση 17 στο Καλειδοσκόπιο του τεύχους Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1994 του *Quantum*.) Σε άλλα πολύγωνα, αυτά τα τρία είδη κέντρου μάζας είναι, γενικά, διαφορετικά.

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις κορυφές ενός τετραέδρου με το βαρύκεντρα των απέναντι εδρών (οι διάμεσοι του τετραέδρου) και τα τρία τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι ακμών του συντρέχουν. Το σημείο αυτό ονομάζεται *βαρύκεντρο* του τετραέδρου.

Απόδειξη 6: με χρήση παράλληλης προβολής. Ας προσαρτήσουμε στην πλευρά AB του δεδομένου τριγώνου



Σχήμα 7

ένα *ισόπλευρο* τρίγωνο ABC' που η κορυφή του C' βρίσκεται έξω από το επίπεδο ABC (Σχήμα 7). Θεωρούμε τώρα την παράλληλη προβολή του τριγώνου ABC στο επίπεδο ABC', παράλληλα στην CC'. Είναι φανερό ότι το τρίγωνο ABC με τις διαμέσους του προβάλλεται στο τρίγωνο ABC' και τις διαμέσους του (γιατί το μέσον ενός τμήματος προβάλλεται στο μέσον της προβολής του τμήματος). Όμως, οι διάμεσοι ενός ισόπλευρου τριγώνου συμπίπτουν με τις μεσοκαθέτους του (και με τις διχοτόμους και με τα ύψη του) που γνωρίζουμε ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο —το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου. Επομένως, και οι διάμεσοι του αρχικού τριγώνου διέρχονται επίσης από το ίδιο σημείο. Ως προς τους λόγους τώρα, παρατηρούμε ότι ο λόγος στον οποίο διαιρείται ένα τμήμα από οποιοδήποτε σημείο διατηρείται έπειτα από μια παράλληλη προβολή (αυτό οφείλεται στην ιδιότητα των ανάλογων τμημάτων που αναφέραμε στην πρώτη απόδειξη). Όμως, για το κέντρο O (που τώρα είναι και βαρύκεντρο, και κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου, και κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου συγχρόνως) του ισόπλευρου τριγώνου ABC' και, ας πούμε, τη διάμεσο C_1C', έχουμε

$$C_1O : OC' = C_1O : OB = \text{ημ}30^\circ = 1/2 .$$

Αυτή η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι η ιδιότητα των διαμέσων, όπως επίσης και η ίδια η έννοια της διαμέσου, διατηρείται κατά την παράλληλη προβολή. Τέτοιες ιδιότητες και έννοιες ονομάζονται *ομοπαραλληλικές*. Για παράδειγμα, «το να είναι παραλληλόγραμμο» είναι μια ομοπαραλληλική ιδιότητα, ενώ οι ιδιότητες «να είναι ρόμβος» ή «να είναι ορθογώνιο» δεν είναι ομοπαραλληλικές: η παράλληλη προβολή μπορεί να μετασχηματίσει τις ίσες πλευρές σε άνισες και δεν διατηρεί την καθετότητα. Τα ανάλογα τμήματα, ο λόγος εμβαδών, η ομοιοθεσία, οι συντεταγμένες, το κέντρο μάζας και η παράλληλη προβολή είναι ιδιαιτέρως χρήσιμα και αποτελεσματικά εργαλεία που μας βοηθούν να επιλύσουμε ομοπαραλληλικά προβλήματα. Στην πραγματικότητα, η καλύτερη μέθοδος αντιμετώπισης των περισσότερων ομοπαραλληλικών προβλημάτων είναι η χρήση ενός από αυτά τα εργαλεία. Στην περίπτωσή μας, όμως, οι ομοπαραλληλικές αποδείξεις εμφανίζουν ένα ελάττωμα —είναι «υπέρ το δέον ευκλείδειες». Η ιδιότητα των διαμέσων είναι δυνατό να επεκταθεί πέρα από τα όρια του ευκλείδειου επιπέδου. Μπορεί να γενικευτεί στο χώρο —στο τρισδιάστατο ανάλογο του τριγώνου, το τετράεδρο (βλ. την άσκηση 6)— και η ομοπαραλληλική της απόδειξη μπορεί να τροποποιηθεί αντίστοιχα. Αλλά είναι επίσης δυνατό να γενικευτεί και σε μη ευκλείδεια επίπεδα. Όχι, δεν πρόκειται να ασχοληθώ εδώ με την υπερβολική γεωμετρία (ή γεωμετρία Lobachevski). Έχουμε ένα πολύ περισσότερο οικείο παράδειγμα μη ευκλείδειας γεωμετρίας στη διάθεσή μας —τη σφαιρική γεωμετρία. Ένα σφαιρικό τρίγωνο ABC προκύπτει από την ένωση τριών σημείων της επιφάνειας μιας σφαίρας με ελάσσονα τόξα μέγιστων κύκλων (αυτοί είναι οι τομές της σφαίρας με επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της —όπως οι μεσημβρινοί και ο ισημερινός στην υδρόγειο, αλλά όχι οι παράλληλοι γεωγραφικού πλάτους). Οι διάμεσοι του τριγώνου ABC, όπως και κάθε «ευθύγραμμο τμήμα» στη σφαίρα, είναι επίσης τόξα μέγιστων κύκλων. Γνωρίζοντας αυτό, μπορούμε να αποδείξουμε ότι *οι διάμεσοι ενός σφαιρικού τριγώνου συντρέχουν*.

Άσκηση 7. Αποδείξτε την προηγούμενη πρόταση. *Υπόδειξη*: χρησιμοποιήστε τις διαμέσους του συνηθισμένου επίπεδου τριγώνου με τις ίδιες κορυφές.

Τώρα μπορώ να εξηγήσω το πρόβλημα των ομοπαραλληλικών αποδείξεων. Εξαρτώνται από την παραλληλία, ίσως έμμεσα, και επομένως δεν είναι δυνατό να προσαρμοστούν στη σφαιρική (ούτε στην υπερβολική) γεωμετρία. Βέβαια, μια παρόμοια καθολικότητα δεν είναι πάντοτε το πρώτο πράγμα που ζητάμε από μια απόδειξη, αλλά θα ήθελα να τελειώσω με μια απόδειξη που μπορεί, λίγο ως πολύ, να εφαρμοστεί και στη σφαίρα.

Απόδειξη 7: με χρήση του νόμου των ημιτόνων. Ας ακολουθήσουμε και πάλι το σχήμα απόδειξης που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ABB' και CBB' (Σχήμα 4), παίρνουμε

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB \text{ ημ} \angle ABB'}{\text{ημ} \angle AB'B} : \frac{BC \text{ ημ} \angle CBB'}{\text{ημ} \angle CB'B}$$

$$= \frac{AB \text{ ημ} \angle ABB'}{CB \text{ ημ} \angle CBB'},$$

διότι $\text{ημ} \angle CB'B = \text{ημ}(180^\circ - \angle AB'B) = \text{ημ} \angle AB'B$. Παρομοίως, από τα τρίγωνα AMB και A_1MB προκύπτει

$$\frac{AM}{A_1M} = \frac{AB \text{ ημ} \angle ABB'}{A_1B \text{ ημ} \angle CBB'}.$$

Αφού $AM = 2MA_1$ και $CB = 2A_1B$, διαιρώντας την πρώτη ισότητα με τη δεύτερη έχουμε $AB'/B'C = 1$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Στη σφαίρα, ο νόμος των ημιτόνων εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου με τα ημίτονα των γωνιακών μέτρων των πλευρών. Έτσι αντί για την ευκλείδεια σχέση $AB/\text{ημ}\angle C = BC/\text{ημ}\angle A$ που ισχύει σ' ένα συνηθισμένο τρίγωνο ABC, θα έχουμε τις σφαιρικές σχέσεις $s(A, B)/\text{ημ}\angle C = s(B, C)/\text{ημ}\angle A$, όπου $s(X, Y) = \text{ημ}\angle XOY$ και O είναι το κέντρο της σφαίρας. Αν διαλέξουμε το σημείο M στη διάμεσο AA_1 ενός σφαιρικού τριγώνου ABC έτσι ώστε $s(A, M)/s(M, A_1) = 2$ και αντικαταστήσουμε στην απόδειξη 7 όλες τις αποστάσεις XY με $s(X, Y)$, τότε η απόδειξη θα εφαρμοστεί θαυμάσια και στη σφαίρα. ■

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Προκλήσεις στη Φυσική και τα Μαθηματικά

Μαθηματικά

M21

Εξίσωση αντιστρόφων. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $1/x - 1/y = 1/n$, όπου x, y θετικοί ακέραιοι, έχει μια μοναδική λύση για δεδομένο θετικό ακέραιο n αν και μόνο αν ο n είναι πρώτος. (A. Danielyan)

M22

Κυκλική τοποθέτηση. Γράφουμε N αριθμούς σε έναν κύκλο έτσι ώστε ο κάθε αριθμός να προκύπτει από τον γειτονικό του (αυτόν που συναντάμε κινούμενοι αριστερόστροφα) προσθέτοντας 1 ή αλλάζοντας το πρόσημό του. Αποδείξτε ότι αν ο N είναι περιττός, τότε όλοι οι αριθμοί είναι ακέραιοι και κάθε αριθμό m τον συναντάμε τόσες φορές ανάμεσά τους όσες και τον $-m$. (A.Veselov)

M23

Η επιστροφή. Θεωρούμε τα σημεία A, B, C, και D του επιπέδου έτσι ώστε $AB = BC = CD = 1$. Εφαρμόζουμε επαναληπτικά τον εξής μετασχηματισμό που αφήνει τα σημεία B και C σταθερά και διατηρεί τα μήκη των AB, BC, CD, και DA. Κατ' αρχάς, παίρνουμε το συμμετρικό σημείο του A ως προς το BD, και μετά παίρνουμε το συμμετρικό σημείο του D ως προς το AC (όπου το A είναι το νέο, συμμετρικό σημείο). Στη συνέχεια, παίρνουμε το συμμετρικό του νέου σημείου A ως προς το BD (το νέο D). Κατόπιν, παίρνουμε το συμμετρικό του D κ.ο.κ. Αποδείξτε ότι έπειτα από κάποιο πλήθος τέτοιων συμμετρικών μετασχηματισμών τα σημεία A και D θα επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις. (M. Kontsevich)

M24

Παράδοξη μειοψηφία. Θα ονομάζουμε έναν άνθρωπο με λιγότερους από 10 γνωστούς *ακοινώνητο* ενώ έναν άνθρωπο του οποίου όλοι οι γνωστοί είναι ακοινώνητοι θα τον ονομάζουμε *παράξενο*. Υποθέτουμε ότι η «σχέση γνωριμίας» είναι *συμμετρική* —δηλαδή, όταν ο X είναι γνωστός του Y, τότε και ο Y είναι γνωστός του X. Αποδείξτε ότι το πλήθος των παράξενων είναι μικρότερο από το πλήθος των ακοινώνητων. (F. Nazarov)

M25

Άφθονοι κύκλοι. Προεκτείνουμε τις απέναντι πλευρές ενός κυρτού τετραπλεύρου έτσι ώστε να τμηθούν σε δύο σημεία. Από καθένα απ' αυτά τα σημεία φέρουμε μια ευθεία. Αυτές οι δύο ευθείες χωρίζουν το τετράπλευρο σε τέσσερα μικρότερα τετράπλευρα. Αποδείξτε ότι αν δύο από αυτά τα τετράπλευρα (χωρίς κοινή πλευρά) έχουν εγγεγραμμένο κύκλο, τότε και το αρχικό τετράπλευρο έχει εγγεγραμμένο κύκλο. (I. Sharygin)

Φυσική

Φ21

Ένα μακρύ τρένο. Ένα τρένο κινείται σε οριζόντιο δρόμο, όταν ξαφνικά συναντά κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης α. Εκείνη τη στιγμή ο μηχανοδηγός σβήνει τη μηχανή και το τρένο, εξαιτίας της ορμής του, αρχίζει να ανηφορίζει στο κεκλιμένο επίπεδο. Όταν σταματά, στον οριζόντιο δρόμο έχει απομείνει το μισό μήκος του. Πόσος χρόνος περνά από τη στιγμή που το τρένο αρχίζει να ανηφορίζει στο κεκλιμένο επίπεδο ώς τη στιγμή που σταματά; Το μήκος του τρένου είναι L. Αγνοήστε την τριβή μεταξύ των τροχών του τρένου και του κεκλιμένου επιπέδου. (A. Buzdin)

Φ22

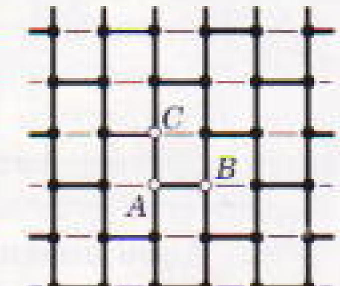
Σαν ματριόσκα. Ένα πλήθος κυλινδρικών δοχείων με λεπτά τοιχώματα περιέχουν νερό και βυθίζονται το ένα μέσα στο άλλο έτσι ώστε κάθε επόμενο δοχείο να επιπλέει μέσα στο προηγούμενο. Η επιφάνεια S_0 του πυθμένα του μικρότερου δοχείου είναι πολύ μικρότερη από εκείνη του μεγαλύτερου. Επιπρόσθετη ποσότητα νερού όγκου V_0 προστίθεται στο μικρότερο δοχείο. Πόσο βυθίζεται το δοχείο αυτό σε σχέση με το έδαφος; (Όλα τα δοχεία εξακολουθούν να επιπλέουν μετά την προσθήκη του νερού). (S. Krotov)

Φ23

Παγωμένη λίμνη. Στη διάρκεια μιας ψυχρής νύχτας στις αρχές του χειμώνα, αρχίζει να σχηματίζεται πάγος στην ήρεμη επιφάνεια μιας πολύ βαθιάς λίμνης· έπειτα από 10 ώρες το πάχος του πάγου είναι 10 cm. Πόσο θα είναι το πάχος του αν η θερμοκρασία δεν αλλάξει για 1.000 ώρες; Θεωρήστε τη θερμική αγωγιμότητα του πάγου πολύ μεγαλύτερη από εκείνη του νερού. (V. Skorovarov)

Φ24

Άπειρο πλέγμα. Άπειρου πλήθους κομμάτια σύρματος, που το καθένα έχει ωμική αντίσταση r, συγκολλούνται μεταξύ τους σχηματίζοντας τετραγωνικό αγώγιμο πλέγμα άπειρων διαστάσεων. Στη συνέχεια αποκολλώνται και αφαιρούνται όλοι αυτοί οι αγωγοί που φαίνονται στο Σχήμα 1. Υπολογίστε τη συνολική



Σχήμα 1

αντίσταση του κυκλώματος μεταξύ των κόμβων A-B, B-C και A-C. (S. Krotov)

Φ25

Ιπτάμενος αλτήρας. Ας ονομάσουμε αλτήρα ένα σύστημα που αποτελείται από μια αβαρή ράβδο στα άκρα της οποίας συνδέονται στέρεα δύο μικρές σφαίρες. Ένας αλτήρας, λοιπόν, ισορροπεί κατακόρυφα στηριζόμενος στη λεία επιφάνεια ενός τραπεζιού. Κάποια στιγμή, χτυπώντας την πάνω σφαίρα του αλτήρα τής προσδίδουμε οριζόντια ταχύτητα υ. Ποιο πρέπει να είναι το μέγιστο μήκος της ράβδου ώστε η κάτω σφαίρα να χάσει την επαφή της με το τραπέζι αμέσως μόλις χτυπήσουμε την πάνω σφαίρα;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

Υπεραγώγιμος μαγνήτης

«Γνωρίζω, λοιπόν, ότι αυτός είναι ο νόμος: ο βόρειος πόλος ενός μαγνητίτη έλκει το νότιο πόλο ενός άλλου.»
—Petrus Peregrinus (13ος μ.Χ αι.)

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΓΙΑ ΤΗΝ 25Η ΔΙΕΘΝΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ Φυσικής που έγινε τον Ιούλιο του 1994 στο Πεκίνο, οι κινέζοι οικοδεσπότες προετοίμασαν προβλήματα που αποτελούν μια ενδιαφέρουσα σύνθεση του μοντέρνου και του παραδοσιακού. Χρησιμοποιήσαμε ένα από τα θεωρητικά θέματα ως βάση για το πρόβλημα αυτού του μήνα.

Όσοι από μας μεγάλωσαν με τους συμβατικούς ηλεκτρομαγνήτες παραξενεύονται ιδιαίτερα όταν βλέπουν έναν ηλεκτρομαγνήτη ο οποίος δεν είναι συνδεδεμένος με μια εξωτερική πηγή ενέργειας. Αυτό ακριβώς, όμως, συμβαίνει μ' έναν υπεραγώγιμο μαγνήτη. Αφού αποκατασταθεί κάποιο ρεύμα στο μαγνήτη, μπορούμε να τον αποσυνδέσουμε από την εξωτερική πηγή ενέργειας και αυτός θα συνεχίσει να δημιουργεί ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο για μεγάλο χρονικό διάστημα.

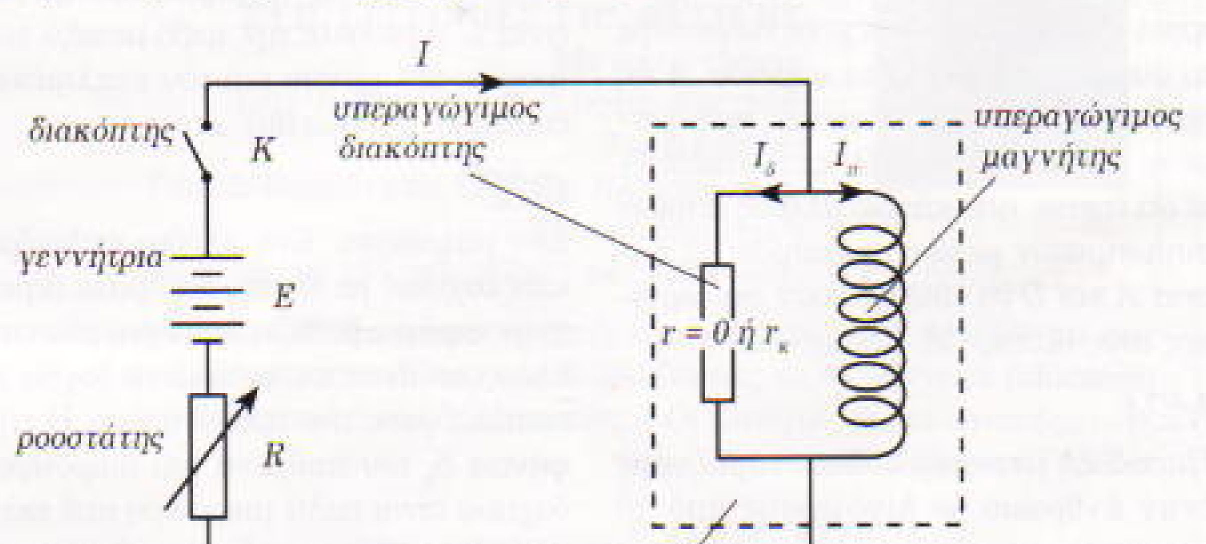
Σ' έναν συμβατικό ηλεκτρομαγνήτη, ηλεκτρικό ρεύμα περνά μέσα από το πηνίο δημιουργώντας μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του. Όμως, το ρεύμα παράγει μεγάλη θερμότητα εξαιτίας της αντίστασης του σύρματος. Η παραγωγή θερμότητας σημαίνει ότι για να διατηρείται η κυκλοφορία σταθερών ρευμάτων, είναι απαραίτητη μια πηγή ενέργειας.

Σ' έναν υπεραγώγιμο μαγνήτη, το πηνίο είναι βυθισμένο σε υγρό ήλιο θερμοκρασίας 4,2 K. Στη θερμοκρασία αυτή το σύρμα καθίσταται υπεραγώγιμο —δηλαδή η ηλεκτρική του αντίσταση μηδενίζεται. Συνεπώς, δεν παράγεται θερμότητα και δεν υπάρχει πλέον η ανάγκη μιας εξωτερικής πηγής ενέργειας.

Το ρεύμα στον υπεραγώγιμο μαγνήτη ελέγχεται από έναν ειδικά σχεδιασμένο υπεραγώγιμο διακόπτη, συνδεδεμένο παράλληλα με το πηνίο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Ο υπεραγώγιμος διακόπτης είναι συνήθως ένα υπεραγώγιμο καλώδιο μικρού μήκους περιτυλιγμένο μ' ένα σύρμα θέρμανσης, θερμικά απομονωμένο από το υγρό ήλιο. Όταν το σύρμα θερμαίνεται, το καλώδιο επιστρέφει στην κανονική του κατάσταση και η αντίστασή του αλλάζει απότομα από $r = 0$ σε $r = r_\kappa$.

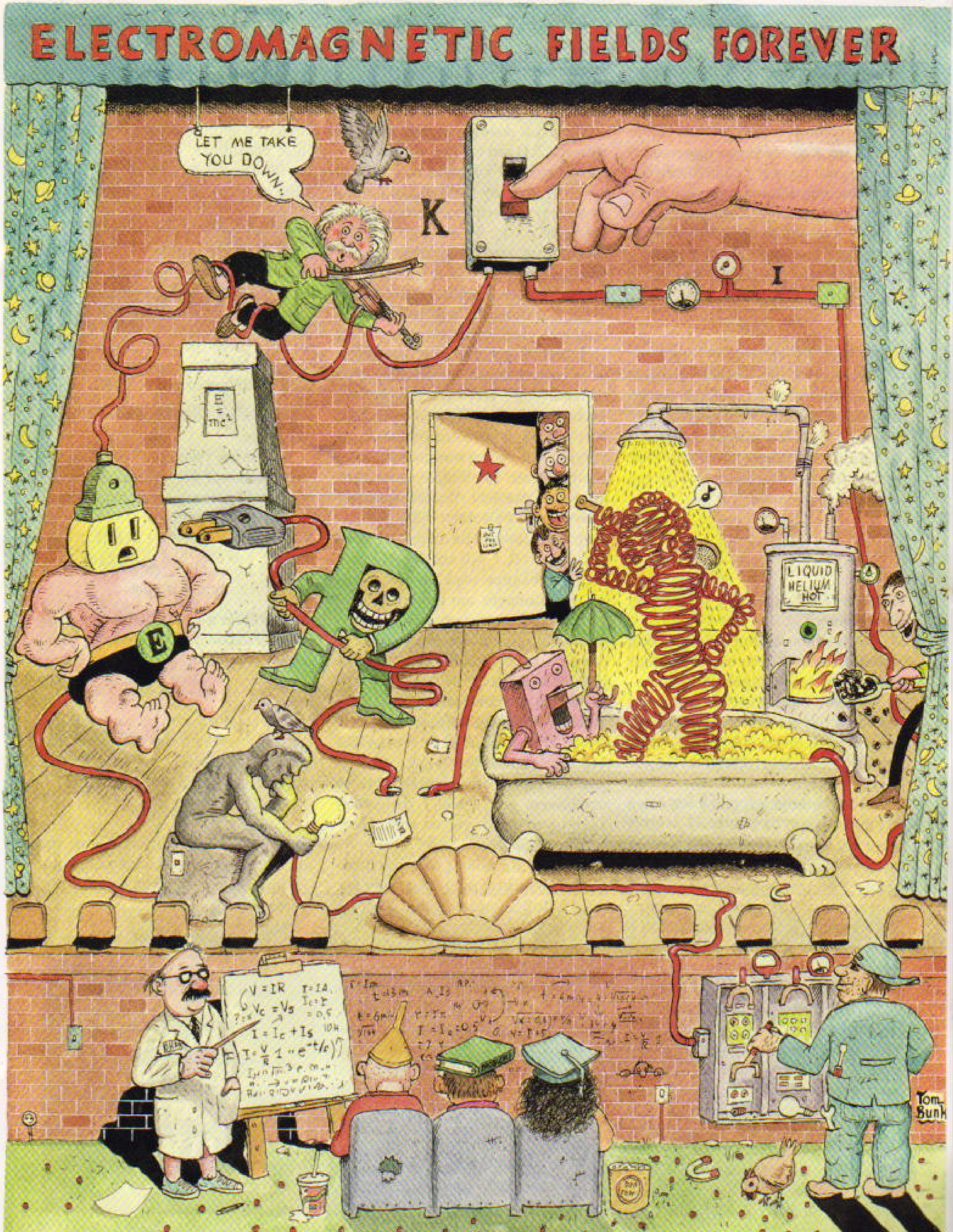
Αυτή η πολύ σύγχρονη διάταξη μπορεί να μελετηθεί αν χρησιμοποιήσουμε την παραδοσιακή ύλη του ηλεκτρισμού που διδασκόμαστε στο λύκειο. Ξεκινάμε με το νόμο του Ohm, $V = IR$. Κατόπιν χρησιμοποιούμε τους δύο κανόνες του Kirchhoff. Σύμφωνα με τον δεύτερο κανόνα, η πτώση τάσης στο υπεραγώγιμο πηνίο πρέπει να είναι ίση με την πτώση τάσης στον υπεραγώγιμο διακόπτη, $V_\pi = V_\delta$. Η σχέση αυτή, όπως υποθέτουμε ότι γνωρίζετε, εκφράζει απλώς τη διατήρηση της ενέργειας. Ο πρώτος κανόνας μάς λέει ότι το ρεύμα που φτάνει σ' έναν κόμβο πρέπει να είναι ίσο με το ρεύμα που φεύγει από τον κόμβο —μια έκφραση της διατήρησης του φορτίου. Χρησιμοποιώντας για τα ρεύματα τις φορές που φαίνονται στο Σχήμα 1, έχουμε $I = I_\pi + I_\delta$.

Η απαιτούμενη φυσική που απομένει αφορά το πηνίο. Και είναι εν-



Σχήμα 1

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


ELECTROMAGNETIC FIELDS FOREVER
LET ME TAKE YOU DOWN.
K
I
E = mc²
E
LIQUID HELIUM HOT
V = IR
Vc = Vs
I = Ic + Is
Tom Bunk

διαφέρουσα η περίπτωση, διότι το σύρμα του πηνίου είναι υπεραγώγιμο και η ωμική αντίστασή του μηδενική —εμφανίζει μόνο αυτεπαγωγή. Η πτώση τάσης σ' ένα ιδανικό πηνίο εξαρτάται από τη γεωμετρία και το μέγεθος του πηνίου (παράγοντες απ' τους οποίους εξαρτάται ο συντελεστής αυτεπαγωγής L) και από τη μεταβολή του ρεύματος σ' αυτό. Παρατηρήστε ότι σημασία έχει μόνο η μεταβολή του ρεύματος, και όχι η ακριβής τιμή του. Έτσι,

$$V_{\pi} = -L\frac{\Delta I_{\pi}}{\Delta t}$$

Κατά συνέπεια, όταν ένα πηνίο συνδέεται σε σειρά με μια ωμική αντίσταση και μια γεννήτρια, το ηλεκτρικό ρεύμα δεν μπορεί να φτάσει ακαριαία την τελική του τιμή V/R· αυξάνεται εκθετικά σύμφωνα με την εξίσωση

$$I = \frac{V}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

όπου $\tau = L/R$ η σταθερά χρόνου του κυκλώματος.

Ας χρησιμοποιήσουμε, λοιπόν, όλα τα παραπάνω για να κατανοήσουμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο υπεραγώγιμος διακόπτης στον έλεγχο της λειτουργίας του υπεραγώγιμου μαγνήτη. Ας υποθέσουμε ότι $r_{\kappa} = 5\ \Omega$ και $L = 10$ H. Ξεκινάμε με το διακόπτη K κλειστό.

Α. Υποθέτουμε ότι από $t = 0$ έως $t = 3$ min έχουμε $I = 1$ A, $I_{\delta} = I_{\pi} = 0{,}5$ A και $r = 0$. Χρησιμοποιούμε το ροοστάτη R για να μειώσουμε γραμμικά το ρεύμα I ως την τιμή μηδέν από $t = 3$ min έως $t = 6$ min, ενώ διατηρούμε την $r = 0$. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις του I_{π} και του I_{δ} σε συνάρτηση με το χρόνο και εξηγήστε γιατί έχουν αυτή τη μορφή.

Β. Υποθέτουμε ότι από $t = 0$ έως $t = 3$ min έχουμε $I = I_{\pi} = 0{,}5$ A, $I_{\delta} = 0$ και $r = 0$. Τη στιγμή $t = 3$ min χρησιμοποιούμε το σύρμα θέρμανσης για να φέρουμε τον υπεραγώγιμο διακόπτη στην κανονική κατάσταση με $r = r_{\kappa}$. Τη στιγμή $t = 6$ min ψύχουμε το διακόπτη έτσι ώστε να επιστρέψει απότομα στην υπεραγώγιμη κατάσταση με $r = 0$. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των I, I_{π} και I_{δ} σε συνάρτηση με το χρόνο και εξηγήστε γιατί έχουν αυτή τη μορφή.

Γ. Ας αντιστρέψουμε τώρα τις παραπάνω αρχικές συνθήκες. Υποθέτουμε ότι ο ροοστάτης έχει σταθερή τιμή $R = 5\ \Omega$ και ότι από $t = 0$ έως $t = 3$ min έχουμε $I = I_{\delta} = 0{,}5$ A, $I_{\pi} = 0$ και $r = 0$. Τη στιγμή $t = 3$ min ο διακόπτης έρχεται στην κανονική κατάσταση με $r = r_{\kappa}$. Τη στιγμή $t = 6$ min ο διακόπτης επιστρέφει στην υπεραγώγιμη κατάσταση με $r = 0$. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των I, I_{π} και I_{δ} σε συνάρτηση με το χρόνο και εξηγήστε γιατί έχουν αυτή τη μορφή.

Δ. Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στην υπεραγώγιμη κατάσταση, ο υπεραγώγιμος μαγνήτης μπορεί να λειτουργήσει με «ατέρμονα τρόπο». Κατ' αυτόν, ο διακόπτης K είναι ανοιχτός και ρεύμα κυκλοφορεί μέσα στο πηνίο και τον υπεραγώγιμο διακόπτη επ' άπειρον. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι από $t = 0$ έως $t = 3$ min ο μαγνήτης λειτουργεί με ατέρμονα τρόπο (δηλαδή $I = 0$, $I_{\pi} = 0$ και $I_{\delta} = -I_0$) με $I_0 = 20$ A. Θέλουμε τώρα να διακόψουμε τη λειτουργία του μαγνήτη μειώνοντας το I_0 στην τιμή μηδέν. Ο διακόπτης, όμως, θα καταστραφεί αν το ρεύμα υπερβεί το 0,5 A. (Μεγάλα ρεύματα φέρνουν το καλώδιο στην κανονική του κατάσταση, και η συνακόλουθη θερμότητα το λιώνει.) Ποιες κινήσεις μπορείτε να κάνετε για να σταματήσετε τη λειτουργία του μαγνήτη; Μην παραλείψετε να σχεδιάσετε τα I, I_{π} και I_{δ} σε συνάρτηση με το χρόνο για να επεξηγήσετε τη μέθοδό σας.

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum* έως τις 10 Φεβρουαρίου 1995. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία.

Αιώρηση με λέιζερ

Στο πρόβλημα του τεύχους του Ιουλίου/Αυγούστου 1994 ζητούσαμε από τους αναγνώστες να υπολογίσουν την ένταση μιας δέσμης λέιζερ που απαιτείται για να παραμείνει σε αιώρηση ένα τριγωνικό πρίσμα. Ας πάρουμε τα πράγματα με τη σειρά.

Α. Το προκαταρκτικό πρόβλημα αναφέρεται στην αιώρηση ενός κουτιού με σφαιρίδια που χτυπούν τη βάση του κουτιού υπό γωνία θ. Επειδή η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος, μπορούμε να αναλύσουμε την αρχική και τελική ορμή των σφαιριδίων σε κατακόρυφες και οριζόντιες συνιστώσες. Θεωρώντας μηδενική τη συνολική ορμή στον οριζόντιο άξονα, όπως προτάθηκε, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαιριδίου στον κατακόρυφο άξονα:

$$\Delta p_{\text{σφαιρ.}} = (-mv_0 \text{ συν}\theta) + (-mv_0 \text{ συν}\theta) = -2mv_0 \text{ συν}\theta,$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η μεταβολή ορμής έχει φορά προς τα κάτω. Έτσι, η δύναμη που ασκείται στο κουτί είναι

$$F_{\text{κουτ}} = N\Delta p = 2Nmv_0 \text{ συν}\theta = 0{,}6 \text{ Nt},$$

σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος.

Β. Από τη γεωμετρία του Σχήματος 2 βλέπουμε ότι η γωνία πρόσπτωσης για την εισερχόμενη ακτίνα φωτός είναι α. Εφαρμόζοντας το νόμο του Snell και θέτοντας το δείκτη διάθλασης του αέρα ίσο με 1, έχουμε

$$\text{ημ}\alpha = n \text{ ημ}\varphi,$$

όπου φ είναι η γωνία διάθλασης στην πρώτη επιφάνεια. Λίγη ακόμη γεωμετρία δείχνει ότι

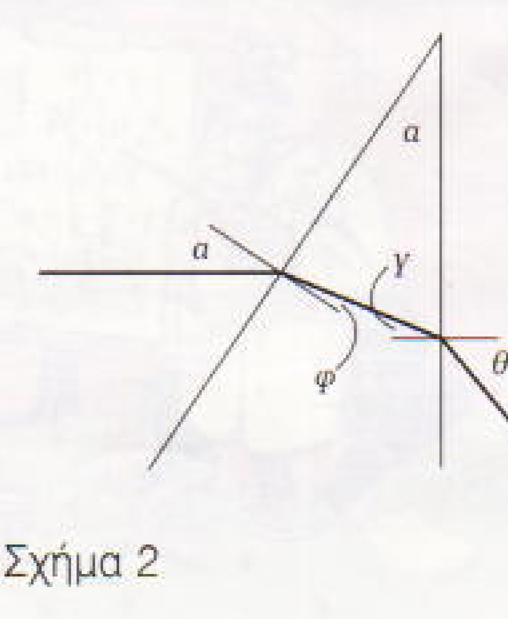
$$\varphi + \gamma = \alpha,$$

όπου γ είναι η γωνία πρόσπτωσης στη δεύτερη επιφάνεια του πρίσματος. Τελικά, εφαρμόζοντας το νόμο του Snell στη δεύτερη επιφάνεια προκύπτει

$$n \text{ ημ}\gamma = \text{ημ}\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία διάθλασης της ακτίνας που εξέρχεται από το πρίσμα.

Επιλύοντας τις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε



Σχήμα 2

$$\theta = \text{τοξημ}[n\ \text{ημ}(a - \varphi)],$$

με $$\varphi = \text{τοξημ}\frac{\text{ημ}\,a}{n}.$$

Γ. Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ορμής, η συνολική ορμή του συστήματος πρέπει να παραμένει σταθερή. Αφού το μήκος κύματος της δέσμης λέιζερ είναι το ίδιο πριν από και μετά την είσοδό του στο πρίσμα, το μέτρο της ορμής για κάθε φωτόνιο είναι το ίδιο και ίσο με E/c, όπου E είναι η ενέργεια κάθε φωτονίου. Όμως, η γωνία της δέσμης έχει αλλάξει. Έτσι, οι οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες της μεταβολής της ορμής του πρίσματος είναι

$$\Delta p_{\pi x} = p - p\,\text{συν}\,\theta = \frac{E}{c}(1 - \text{συν}\,\theta),$$

$$\Delta p_{\pi y} = p\,\text{ημ}\,\theta = \frac{E}{c}\text{ημ}\,\theta.$$

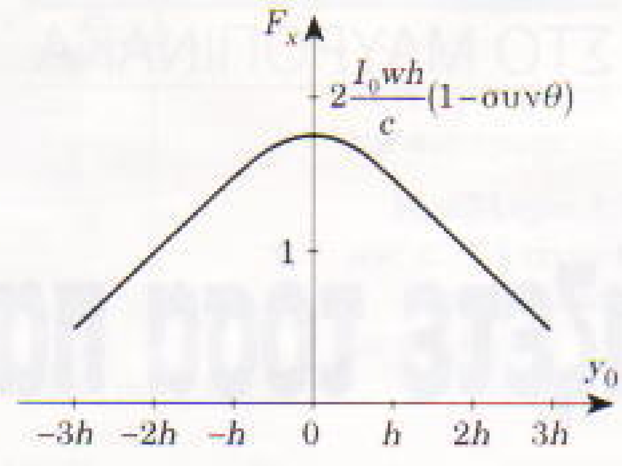
Έτσι, εφαρμόζοντας την τεχνική του μέρους Α, βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες της δύναμης στο πρίσμα είναι

$$F_x = \frac{N}{t}\Delta p_{\pi x} = \frac{NE}{ct}(1 - \text{συν}\,\theta),$$

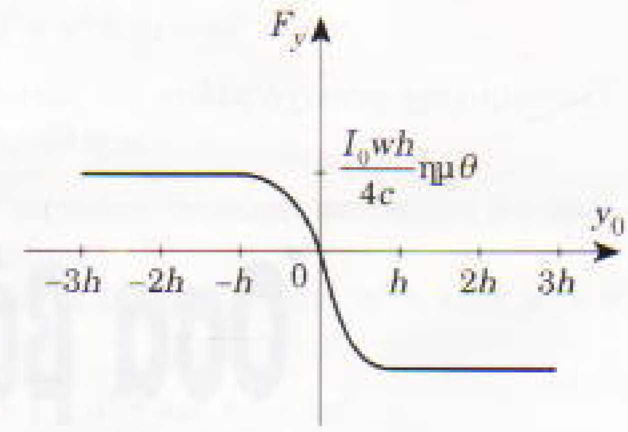
$$F_y = \frac{N}{t}\Delta p_{\pi y} = \frac{NE}{ct}\text{ημ}\,\theta.$$

Γνωρίζοντας ότι η ισχύς P σε συνάρτηση με την ένταση και το πλήθος φωτονίων είναι $P = IA = NE/t$, έχουμε

$$F_x = \frac{IA}{c}(1 - \text{συν}\,\theta),$$



Σχήμα 3



Σχήμα 4

$$F_y = \frac{IA}{c}\text{ημ}\,\theta.$$

Ωστόσο, η ένταση της δέσμης λέιζερ δεν είναι ομοιόμορφη σε όλο το πλάτος της. Επειδή μειώνεται γραμμικά με την απόσταση από τον άξονα x, μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση ολοκληρωμάτων, και απλώς να χρησιμοποιήσουμε τη μέση τιμή για κάθε έδρα. Οι μέσες εντάσεις για τις επάνω και κάτω έδρες για την περίπτωση $h \le y_0 \le 3h$ είναι

$$\overline{I_\varepsilon} = \frac{I(y_0) + I(y_0 + h)}{2} = I_0\left(\frac{7h - 2y_0}{8h}\right),$$

$$\overline{I_\kappa} = \frac{I(y_0) + I(y_0 - h)}{2} = I_0\left(\frac{9h - 2y_0}{8h}\right).$$

Όπως δείξαμε στο μέρος Β, η πάνω έδρα οδηγεί ώστε το πρίσμα να αποκτά ορμή με φορά προς τα πάνω. Αντίστροφα, η κάτω έδρα οδηγεί σε ορμή με φορά προς τα κάτω. Έτσι, η συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη είναι

$$F_y = \left(\overline{I_\varepsilon} - \overline{I_\kappa}\right)\frac{wh}{c}\text{ημ}\,\theta$$

$$= -\frac{I_0 wh}{4c}\text{ημ}\,\theta.$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το πρίσμα πρέπει να τοποθετηθεί κάτω από τον άξονα της δέσμης λέιζερ ώστε να παραμένει αιωρούμενο.

Επειδή οι οριζόντιες συνιστώσες δρουν στην ίδια κατεύθυνση, έχουμε

$$F_x = \left(\overline{I_\varepsilon} + \overline{I_\kappa}\right)\frac{wh}{c}(1 - \text{συν}\,\theta)$$

$$= -\frac{I_0 w}{2c}(4h - y_0)(1 - \text{συν}\,\theta).$$

Δ. Με ανάλογους υπολογισμούς για την περιοχή $0 \le y_0 \le h$, καταλήγουμε στις γραφικές παραστάσεις που φαίνονται στα Σχήματα 3 και 4.

Ε. Χρησιμοποιώντας τις διαστάσεις και την πυκνότητα που δίνονται στο πρόβλημα, υπολογίζουμε το βάρος του πρίσματος: $B = 1{,}42 \cdot 10^{-9}$ Nt. Για να εξισορροπήσουμε το βάρος του πρίσματος απαιτείται $I_0 = 6{,}19 \cdot 10^8$ watt/m^2. Η μέση ένταση της δέσμης είναι $I_0/2$, και επομένως η ισχύς της δέσμης πρέπει να είναι

$$P = IA = 24{,}8 \text{ watt.}$$

ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ

Όσα βάζετε τόσα παίρνετε

—αλλά ίσως κερδίσετε και κάτι

Andrey Yegorov

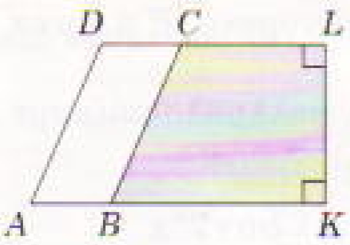
ΘΑ ΗΘΕΛΑ ΝΑ ΑΡΧΙΣΩ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΜΟΥ ΜΕ ΜΙΑ ΣΠΑζοκεφαλιά που είναι γνωστή από πολλά χρόνια. Εγώ πάντως την ανακάλυψα στο παλιό ρωσικό βιβλίο ψυχαγωγικών μαθηματικών του E.I. Ignatyev *Στο βασίλειο της εξυπνάδας*, που πρωτοεκδόθηκε το 1908:

Ένας Άραβας είχε τρεις γιους. Τους άφησε την εντολή να μοιράσουν μετά το θάνατό του το κοπάδι του με τον εξής τρόπο: ο μεγαλύτερος γιος θα κληρονομούσε το μισό κοπάδι, ο δεύτερος το ένα τρίτο και ο μικρότερος θα έπαιρνε το ένα ένατο του κοπαδιού.Όταν, λοιπόν, πέθανε άφησε 17 καμήλες. Οι γιοι του προσπάθησαν να μοιράσουν την περιουσία, αλλά διαπίστωσαν ότι ο αριθμός 17 δεν διαιρείται με κανέναν από τους αριθμούς 2, 3 ή 9. Τα παιδιά δεν ήξεραν τι να κάνουν και ζήτησαν τη βοήθεια ενός σοφού. Ο σοφός κατέφθασε στο σπίτι τους καβάλα στην καμήλα του και, τελικά, κατάφερε να μοιράσει το κοπάδι σύμφωνα με την επιθυμία του πατέρα. Πώς το κατάφερε;

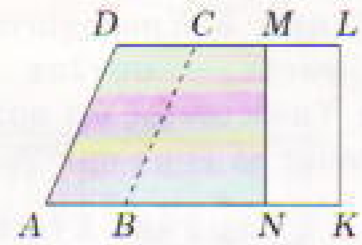
Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

Ίσως η σπαζοκεφαλιά σας ξάφνιασε, αλλά μη βασανίζετε πολύ ώρα το μυαλό σας μ' αυτήν. Είναι απλώς ένα αστείο: ο σοφός πρόσθεσε τη δική του καμήλα στο κοπάδι, έδωσε το μισό του νέου κοπαδιού (9 καμήλες) στον μεγαλύτερο γιο, το ένα τρίτο (6 καμήλες) στον δεύτερο, το ένα ένατο (2 καμήλες) στον νεότερο, και στο τέλος πήρε ο ίδιος την καμήλα που περίσσευε ($18 - 9 - 6 - 2 = 1$) —και η οποία ήταν η δική του! Έπειτα έφυγε, αφήνοντας τα τρία αδέλφια —και εσάς, υποθέτω— σε μεγάλη σύγχυση.

Είμαι βέβαιος ότι θα ανακαλύψετε το μυστικό στο κόλπο του σοφού (αν και σε πρώτη ματιά φαίνεται να είναι σπαζοκεφαλιά). Σκοπός μου, όμως, δεν ήταν να σας μπλέξω, ούτε να σας κάνω να νιώσετε αμήχανα . Απλώς, το τέχνασμα του σοφού αποτελεί πολύ καλό παράδειγμα μιας από τις συχνότερα χρησιμοποιούμενες τεχνικές αναδιάταξης μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, στην άλγεβρα προσθέτουμε συχνά κάποιους όρους σε μία παράσταση και κατόπιν τους αφαιρούμε, διατηρώντας σταθερή τη συνολική τιμή αλλά διευκολύνοντας τη διευθέτησή της. Θα βρείτε πολλούς παρόμοιους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς σε τούτο το άρθρο —πριν όμως επικεντρωθούμε στην άλγεβρα πρέπει να επισημάνουμε ότι αυτός δεν είναι ο μοναδικός κλάδος των μαθηματικών όπου εφαρμόζονται τεχνάσματα «προσθαφαίρεσης». Στην πραγματικότητα μπορούμε να τα συναντήσουμε οπουδήποτε, και το πρώτο μου, πιο σοβαρό, παράδειγμα ανήκει στη γεωμετρία. Θα συναγάγουμε τον γνωστό τύπο για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου —το ότι είναι ίσο με το γινόμενο της βάσης επί το ύψος— χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ότι το εμβαδόν ενός ορ-



Σχήμα 1



Σχήμα 2

θογωνίου ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών πλευρών του.

Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$ και προσθέτουμε σε αυτό το τραπέζιο $CBKL$ (Σχήμα 1) του οποίου οι βάσεις BK και CL είναι προεκτάσεις των AB και DC, η δε πλευρά του KL είναι κάθετη στις βάσεις του. Φέρουμε τώρα την MN παράλληλη προς την LK και σχηματίζουμε ένα τραπέζιο $ANMD$, ίσο με το τραπέζιο $BKLC$ (Σχήμα 2). Τώρα, το ορθογώνιο $KLMN$ έχει ίσο εμβαδόν με το $ABCD$. Αυτό το εμβαδόν επομένως ισούται με $NK \cdot KL$. Επειδή όμως το NK ισούται με τη βάση AB του παραλληλογράμμου και το KL ισούται με το ύψος του, έχουμε το ζητούμενο.

Ασκήσεις

1. Ένας αφηρημένος μαθηματικός, αντί να ρίξει γάλα στο φλιτζάνι του καφέ του, έριξε μια κουταλιά καφέ στο μπουκάλι με το γάλα και ανακάτεψε προσεκτικά το μείγμα. Έπειτα πρόσεξε το λάθος του, και έριξε μια κουταλιά από το μείγμα πίσω στο φλιτζάνι. Υπάρχει περισσότερο γάλα στον καφέ ή καφές στο γάλα; Εξαρτάται άραγε η απάντηση από το πόσο καλά έγινε η ανάμειξη των υγρών; Και ποια είναι η σχέση αυτού του προβλήματος με τον προηγούμενο υπολογισμό του εμβαδού του παραλληλογράμμου;

2. Δείξτε πώς μπορεί να μετασχηματιστεί ένα τραπέζιο σε παραλληλόγραμμο ίσου εμβαδού με την προσθήκη και την αφαίρεση ίσων σχημάτων. Με αυτόν τον τρόπο να συναγάγετε τύπους για το εμβαδόν τραπεζίου καθώς και τριγώνου.

3. Αποδείξτε ότι ο όγκος ενός πλάγιου πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της εγκάρσιας τομής η οποία είναι κάθετη στις ακμές που ενώνουν τις βάσεις του επί το μήκος μιας από αυτές τις ακμές του.

4. Βρείτε έναν τύπο για το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος του προηγούμενου προβλήματος σε συνάρτηση με το μήκος μιας «παράπλευρης» ακμής του και της περιμέτρου μιας εγκάρσιας τομής κάθετης σε αυτήν την ακμή.

Τέλεια τετράγωνα

Και τώρα στρεφόμαστε στην άλγεβρα.

Μια από τις συχνότερες εφαρμογές της τεχνικής της προσθαφαίρεσης είναι ο μετασχηματισμός μιας αλγεβρικής παράστασης έτσι ώστε να εμφανισιεί το ανάπτυγμα του τετραγώνου ενός αθροίσματος ή μιας διαφοράς. Για παράδειγμα, έχουμε

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= u^2 + 2uv + v^2 - 2uv \\ &= (u + v)^2 - 2uv, \end{aligned}$$

και, παρομοίως,

$$u^2 + v^2 = (u - v)^2 + 2uv.$$

Η πρώτη από αυτές τις απλές σχέσεις χρησιμοποιείται στο επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 1. Για ποιους θετικούς ακέραιους n ο αριθμός $n^4 + 4$ είναι πρώτος;

Λύση. Μπορούμε να σκεφτούμε τον $n^4 + 4$ ως $u^2 + v^2$ με $u = n^2$, $v = 2$. Τότε,

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

Επομένως, ο αριθμός $n^4 + 4$ είναι πάντοτε το γινόμενο δύο ακέραιων παραγόντων από τους οποίους ο μικρότερος, που ισούται με $(n - 1)^2 + 1$, είναι μεγαλύτερος από το 1, εκτός από την περίπτωση που $n = 1$. Έτσι, για $n > 1$ αυτός ο αριθμός είναι σύνθετος ενώ για $n = 1$ είναι ο πρώτος αριθμός 5.

Ταυτόχρονα, παραγοντοποιήσαμε το πολυώνυμο $n^4 + 4$ του n σε δύο δευτεροβάθμιους παράγοντες. Ακολουθεί μια παρόμοια παραγοντοποίηση.

Πρόβλημα 2. Παραγοντοποιήστε το πολυώνυμο $x^4 + x^2 + 1$.

Λύση. Προσθέτουμε και αφαιρούμε το x^2:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο συνάγουμε τους τύπους για τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 + bx + c = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= x^2 + 2\cdot\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4} \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} - c\right) \\ &= \left(x + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}\right)\left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}\right), \end{aligned}$$

όπου υποθέτουμε ότι η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4c$ είναι μη αρνητική. Αμέσως προκύπτει ένας τύπος για τις ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Στη συνέχεια έχουμε μια τεταρτοβάθμια εξίσωση.

Πρόβλημα 3. Επιλύστε την εξίσωση $x^4 + 4x - 1 = 0$.

Λύση. Θα εμφανίσουμε το ανάπτυγμα δύο τέλειων τετραγώνων ταυτόχρονα, προσθέτοντας και αφαιρώντας το $2x^2 + 1$:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x - 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 + 4x - 2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2(x - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}\,(x - 1)$, δηλαδή, $x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$ ή $x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0$. Επιλύοντας αυτές τις εξισώσεις, παίρνουμε την απάντηση:

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}$$

(όπου $i=\sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα).

Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των τέλειων τετραγώνων για να παραγοντοποιήσουμε ένα τυχαίο τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο τρέποντάς το σε γινόμενο δευτεροβάθμιων παραγόντων. Για την ώρα, θα ήθελα να αναφέρω ένα ιστορικό παράδοξο που συνδέεται με την παραγοντοποίηση της παράστασης x^4+a^4. Ο μεγάλος μαθηματικός Λάιμπνιτς (ένας από τους δημιουργούς του απειροστικού λογισμού) πίστευε ότι αυτή η παράσταση δεν μπορούσε να γραφεί ως γινόμενο δευτεροβάθμιων παραγόντων. Και όμως, αυτό ακριβώς θα κάνουμε αμέσως τώρα:

$$\begin{aligned} x^4+a^4 &= x^4+2x^2a^2+a^4-2x^2a^2 \\ &= (x^2+a^2)^2-(\sqrt{2}\,xa)^2 \\ &= (x^2+\sqrt{2}\,xa+a^2)(x^2-\sqrt{2}\,xa+a^2). \end{aligned}$$

Ασκήσεις

5. Για ποιους ακέραιους θετικούς n είναι πρώτος ο αριθμός n^4+4^n;

6. Να τρέψετε σε γινόμενο δευτεροβάθμιων παραγόντων τις παραστάσεις (α) $x^4-a^2x^2+a^4$, (β) x^4+bx^2+c (βλ. το τελευταίο παράδειγμα του κειμένου).

7. Λύστε τις εξισώσεις (α) x^4+8x-7, (β) $(x^2-1)^2=4(2x+1)$, (γ) $x^2+x^2/(x+1)^2=1$.

Θα ολοκληρώσω αυτή τη σειρά προβλημάτων μ' ένα παράδειγμα όπου η τεχνική της προσθαφαίρεσης χρησιμοποιείται για τη δημιουργία του «ατελούς» τετραγώνου u^2+uv+v^2, το οποίο εμφανίζεται κατά την παραγοντοποίηση του u^3-v^3.

Πρόβλημα 4. Να τρέψετε το a^5+a+1 σε γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

Λύση.
$$\begin{aligned} a^5+a+1 &= a^5-a^2+a^2+a+1 \\ &= a^2(a^3-1)+a^2+a+1 \\ &= (a^2+a+1)(a^3-a^2+1). \end{aligned}$$

[Χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $u^3-v^3=(u-v)(u^2+uv+v^2)$ για $u=a$, $v=1$.]

Μια πρόσθετη συνέπεια είναι ότι ο αριθμός a^5+a+1 είναι σύνθετος για κάθε $a>1$.

Ασκήσεις

8. Παραγοντοποιήστε τα πολυώνυμα (α) $a^{10}+a^5+1$, (β) a^8+a+1.

9. Αποδείξτε ότι ο αριθμός 1.280.000.401 είναι σύνθετος

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Μέχρι τώρα εκτελέσαμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς προσθέτοντας και αφαιρώντας την ίδια παράσταση. Μερικές φορές μας βοηθάει η χρήση ενός άλλου ζεύγους αντίστροφων πράξεων —του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Πρόβλημα 5. Υπολογίστε το γινόμενο $P=\text{συν}x\cdot\text{συν}2x\cdot\text{συν}4x\cdot\cdots\cdot\text{συν}2nx$.

Λύση. Υποθέτοντας ότι $\text{ημ}x\neq 0$, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε το P με ημx:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\text{ημ}x\cdot\text{συν}x\cdot\text{συν}2x\cdot\cdots\cdot\text{συν}2^n x}{\text{ημ}x} \\ &= \frac{\text{ημ}2x\cdot\text{συν}2x\cdot\cdots\cdot\text{συν}2^n x}{2\,\text{ημ}x} \\ &= \cdots = \frac{\text{ημ}2^{n+1}x}{2^{n+1}\,\text{ημ}x}. \end{aligned}$$

(Αν $\text{ημ}x=0$, $P=\pm 1$.)

Έτσι, έχουμε έναν κομψό τύπο που θα μας επιτρέψει να συναγάγουμε τον τύπο του Viete για το π. Για να το επιτύχουμε αυτό, παίρνουμε το όριο καθώς $n\to\infty$ και στα δύο μέλη της ισότητας

$$\text{συν}\frac{x}{2}\cdot\text{συν}\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\text{συν}\frac{x}{2^n}=\frac{\text{ημ}x}{2^n\,\text{ημ}\frac{x}{2^n}},$$

η οποία είναι άμεση συνέπεια του Προβλήματος 5 (αντικαταστήσαμε το n με το $n-1$ και το x με το $2^{-n}x$).

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $\text{ημ}a/a\to 1$ όταν $a\to 0$), βλέπουμε ότι ο παρονομαστής του δεξιού μέλους αυτής της ισότητας τείνει στο x καθώς το $n\to\infty$:

$$2^n\,\text{ημ}\frac{x}{2^n}=x\frac{\text{ημ}(x/2^n)}{x/2^n}\to x,$$

αφού $x/2^n\to 0$ καθώς το $n\to\infty$. Το αριστερό μέλος γίνεται ένα άπειρο γινόμενο και καταλήγουμε στη σχέση

$$\text{συν}\frac{x}{2}\cdot\text{συν}\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\text{συν}\frac{x}{2^n}\cdot\cdots=\frac{\text{ημ}x}{x}.$$

Με την αντικατάσταση $x=\pi/2$, παίρνουμε

$$\text{συν}\frac{\pi}{4}\cdot\text{συν}\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\text{συν}\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

Όμως, για κάθε οξεία γωνία x έχουμε

$$\text{συν}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\text{συν}x}{2}}.$$

Επομένως, για $n\geq 2$

$$\begin{aligned} \text{συν}\frac{\pi}{2^n} &= \sqrt{\frac{1+\text{συν}\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{συν}\frac{\pi}{2^{n-1}}}} \\ &= \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n-1\ \text{ριζικά}}, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

Άσκηση 10. Υπολογίστε το άπειρο γινόμενο

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot\cdots\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}}}\cdots$$

Με τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε και ορισμένα αθροίσματα.

Πρόβλημα 6. Υπολογίστε το άθροισμα

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Λύση. Ας πολλαπλασιάσουμε (και αργότερα θα διαιρέσουμε) με το 9:

$$\begin{aligned} 9S_n &= 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{9\ldots9}_{n} \\ &= 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \cdots + 10^n - 1 \\ &= 10 + 10^2 + \cdots + 10^n - n \\ &= \frac{10^{n+1}-10}{9} - n. \end{aligned}$$

Και επομένως η απάντηση είναι

$$S_n = \frac{10^{n+1}-9n-10}{81}.$$

Πρόβλημα 7. Βρείτε το άθροισμα

$$S_n = \eta\mu x + \eta\mu 2x + \cdots + \eta\mu nx.$$

Λύση. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει (ή να θυμηθεί) ότι $2\cdot\eta\mu A\cdot\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)$. Αν $\eta\mu(x/2)\neq 0$, τότε με τη βοήθεια αυτού του τύπου έχουμε:

$$\begin{aligned} S_n\,\eta\mu\frac{x}{2} &= \eta\mu\frac{x}{2}\cdot\eta\mu x + \eta\mu\frac{x}{2}\cdot\eta\mu 2x + \cdots + \eta\mu\frac{x}{2}\cdot\eta\mu nx \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{5x}{2}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2n-1}{2}x - \sigma\upsilon\nu\frac{2n+1}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{2n+1}{2}x\right) \\ &= \eta\mu\frac{nx}{2} - \eta\mu\frac{(n+1)x}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$S_n = \frac{\eta\mu\frac{nx}{2}\cdot\eta\mu\frac{(n+1)x}{2}}{\eta\mu\frac{x}{2}}.$$

[Είναι φανερό ότι $S_n = 0$ αν $\eta\mu(x/2) = 0$.]

Άσκηση 11. Υπολογίστε τα αθροίσματα (α) $x + 2x^2 + \ldots + nx^n$, (β) $1 + \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x + \ldots + \sigma\upsilon\nu nx$.

Και τώρα ένα πρόβλημα από τη θεωρία αριθμών.

Πρόβλημα 8. Ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί το γινόμενο $P_n = (n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n$;

Λύση. Ας πολλαπλασιάσουμε και ας διαιρέσουμε το P_n με το $n!$ και ας δουλέψουμε στον αριθμητή του κλάσματος που προκύπτει:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{n!\cdot(n+1)\cdot\cdots\cdot(2n)}{n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \\ &= \frac{2\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdot\cdots\cdot(2n)\cdot(1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1))}{n!} \\ &= \frac{2^n\cdot n!\cdot(1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1))}{n!} \\ &= 2^n\cdot(2n-1)!!, \end{aligned}$$

όπου $(2n-1)!!$ είναι, εξ ορισμού, το γινόμενο όλων των περιττών αριθμών από το 1 έως το $2n-1$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η απάντηση είναι 2^n.

Είναι αδύνατο να δώσουμε μ' ένα μόνο άρθρο μια έστω και σε κάποιο βαθμό πλήρη εικόνα της ποικιλίας των προβλημάτων που είναι δυνατό να επιλυθούν με τα τεχνάσματα της προσθαφαίρεσης ή της πολλαπλασιασμοδιαίρεσης. (Για παράδειγμα, ούτε καν αναφέρθηκα στις εφαρμογές αυτών των μεθόδων στην επίλυση ανισώσεων.) Ελπίζω ότι θα ανακαλύψετε και θα επιλύσετε μόνοι σας πολλά παρόμοια προβλήματα. Τώρα όμως θα ήθελα να εκπληρώσω την υπόσχεσή μου και να εξηγήσω πώς θα τρέψουμε ένα τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο σε γινόμενο δευτεροβάθμιων πολυωνύμων.

Η μέθοδος του Ferrari

Θα ακολουθήσουμε τα βήματα του Lodovico Ferrari (1522 –1565) που ανακάλυψε μια μέθοδο επίλυσης τεταρτοβάθμιων εξισώσεων μέσω της αναγωγής τους σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις (χρησιμοποιώντας μια βοηθητική τριτοβάθμια εξίσωση).

Θεωρήστε την εξίσωση

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Εφαρμόζοντας την τεχνική μας, την ξαναγράφουμε ως

$$P(x) = x^4 + 2\frac{a}{2}x^3 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d$$

$$=\left(x^2+\frac{ax}{4}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)x^2+cx+d.$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να εκφράσουμε την τελευταία παράσταση ως διαφορά τετραγώνων, πράγμα που θα μας επιτρέψει να την παραγοντοποιήσουμε. Για να το πετύχουμε αυτό, θα προσθέσουμε και θα αφαιρέσουμε από το $P(x)$ την παράσταση $2\rho(x^2 + ax/2) + \rho^2$, όπου ρ είναι ένας προς το παρόν άγνωστος αριθμός. Τότε το $P(x)$ παίρνει τη μορφή

$$P(x) = (x^2 + ax/2 + \rho)^2 - (Ax^2 + Bx + C),$$

όπου $A = 2\rho + a^2/4 - b$, $B = a\rho - c$, $C = \rho^2 - d$. Επιθυμούμε να είναι τέλειο τετράγωνο το τριώνυμο $Ax^2 + Bx + C$, πράγμα που αληθεύει αν και μόνο αν ισχύουν οι επόμενες συνθήκες: $A > 0$ και $B^2 - 4AC = 0$ —δηλαδή αν

$$(a\rho - c)^2 = 4(2\rho + a^2/4 - b)(\rho^2 - d).$$

Αυτή η τριτοβάθμια εξίσωση ως προς ρ ονομάζεται επιλύουσα του Ferrari για το πολυώνυμο $P(x)$. Αν ρ_0 είναι μία ρίζα της επιλύουσας που ικανοποιεί τη σχέση $2\rho_0 + a^2/4 - b > 0$ (δηλαδή, $A > 0$), τότε το $P(x)$ ισούται με τη διαφορά τετραγώνων:

$$P(x) = (x^2 + ax/2 + \rho)^2 - (kx + \ell)^2,$$

όπου k και ℓ εκφράζονται συναρτήσει των συντελεστών του $P(x)$ και του ρ_0, και επομένως η αρχική μας εξίσωση έχει αναχθεί σε δύο δευτεροβάθμιες εξισώσεις. [Και, φυσικά, είμαστε σε θέση να παραγοντοποιήσουμε το $P(x)$.]

Ας βεβαιωθούμε ότι υπάρχει πραγματικά η απαιτούμενη ρίζα της επιλύουσας. Η τριτοβάθμια εξίσωση του ρ που δόθηκε προηγουμένως μπορεί να γραφεί ως

$$Q(\rho) = 4(2\rho + a^2/4 - b)(\rho^2 - d) - (a\rho - c)^2.$$

Για $\rho = ½\,(b - a^2/4)$ έχουμε ότι $Q(\rho) = -(a\rho - c)^2 < 0$, και για αρκετά μεγάλο ρ, $Q(\rho) > 0$ [διότι $Q(\rho) = 8\rho^3$ + κάποιο δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του ρ]. Επομένως, υπάρχει κάποιος αριθμός $\rho_0 > ½\,(b - a^2/4)$ τέτοιος ώστε $Q(\rho_0) = 0$ —το συμπέρασμα ακριβώς που θέλαμε.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Ferrari χρειάζεται να γνωρίζουμε τον τρόπο επίλυσης των τριτοβάθμιων εξισώσεων. Υπάρχει ένας τύπος, γνωστός ως τύπος του Cardano,[1] που μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις ρίζες μιας κυβικής εξίσωσης συναρτήσει των συντελεστών της, ο οποίος χρησιμοποιεί μόνο τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις και ριζικά (τετραγωνικές και κυβικές ρίζες). Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις λύνονται επίσης με ριζικά. Επομένως, με τη μέθοδο του Ferrari μπορούμε να εκφράσουμε τις ρίζες μιας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης με ριζικά —δηλαδή, υπάρχει ένας *τύπος* που χρησιμοποιεί τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, τετραγωνικές και κυβικές ρίζες για την επίλυση τεταρτοβάθμιων εξισώσεων. Ο Paolo Ruffini (1765-1822) και ο Niels Henric Abel (1802-1829) απέδειξαν ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι τύποι για εξισώσεις ανώτερου βαθμού. Και μάλιστα όχι μόνο αυτό, αλλά από την εργασία του Evariste Galois προκύπτει ότι υπάρχει μια εξίσωση πέμπτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές της οποίας οι ρίζες δεν είναι δυνατό να εκφραστούν συναρτήσει των συντελεστών της —δηλαδή, ακεραίων— μέσω οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους προσθέσεων, αφαιρέσεων, πολλαπλασιασμών, διαιρέσεων και εξαγωγής ριζών οποιασδήποτε τάξης. Τέτοια εξίσωση είναι για παράδειγμα η $x^5 - 25x - 5 = 0$, που έχει τρεις πραγματικές και δύο μιγαδικές ρίζες.

Μπορείτε αν θέλετε να επιστρέψετε στο Πρόβλημα 3 και να δείτε πώς εφαρμόστηκε αυτή η μέθοδος. Επίσης, μπορείτε στο επόμενο πρόβλημα να δείτε την απευθείας εφαρμογή της μεθόδου του Ferrari.

Πρόβλημα 9. Επιλύστε την εξίσωση $x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0$.

Λύση. Αντί να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο στον οποίο καταλήξαμε, ας περιηγηθούμε άλλη μια φορά στα βήματα της μεθόδου του Ferrari. Γράφουμε την εξίσωση ως

$$x^4 = 10x^2 + 8x - 5.$$

Προσθέτουμε $2ax^2 + a^2$ και στα δύο μέλη:

$$(x^2 + a)^2 = (10 + 2a)x^2 + 8x + a^2 - 5.$$

Εξισώνουμε τη διακρίνουσα του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου στο δεξιό μέλος με το μηδέν:

$$16 - (10 + 2a)(a^2 - 5) = 0.$$

Μετά τις απλοποιήσεις καταλήγουμε στην εξίσωση ως προς a

$$a^3 + 5a^2 - 5a - 33 = 0.$$

Μπορούμε εύκολα να μαντέψουμε μια από τις ρίζες αυτής της εξίσωσης: $a = -3$. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε:

$$(x^2 - 3)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = 4(x + 1)^2,$$

απ' όπου παίρνουμε είτε $x^2 - 3 = 2x + 2$ ή $x^2 - 3 = -2x - 2$. Επιλύοντας τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις $x^2 - 2x - 5 = 0$ και $x^2 + 2x - 1 = 0$, παίρνουμε τελικά την απάντηση $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Προσπαθήστε τώρα να εργαστείτε μόνοι σας με τη μέθοδο Ferrari.

Ασκήσεις

12. Επιλύστε τις εξισώσεις (α) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$, (β) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$.

13. Να τραπούν οι επόμενες παραστάσεις σε γινόμενα δευτεροβάθμιων πολυωνύμων (α) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2$, (β) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64

1. Ο δάσκαλος του Ferrari, ο Girolamo Cardano (1501-1576), δημοσίευσε πρώτος αυτόν τον τύπο. Η ανακάλυψή του είναι ένα από τα συναρπαστικότερα κεφάλαια στην ιστορία των μαθηματικών, και το *Quantum* σκοπεύει να δημοσιεύσει ένα άρθρο ειδικά γι' αυτό το θέμα.

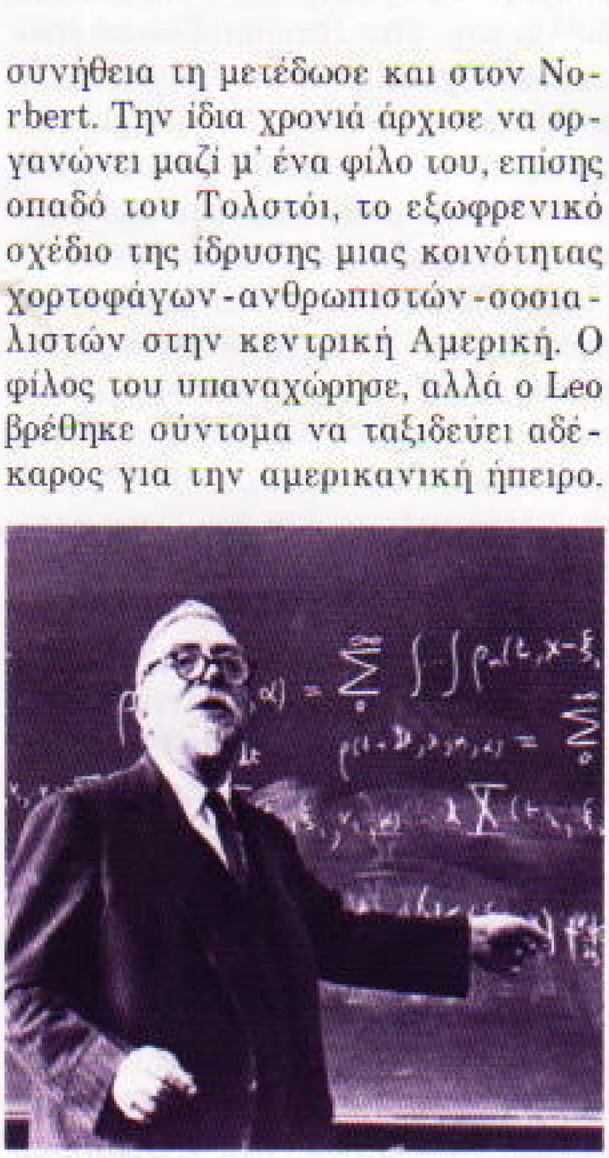
Η κληρονομιά του Norbert Wiener

Μέρος Ι. Παιδική ηλικία, εφηβεία και νεότητα

Ο NORBERT WIENER ΕΓΡΑΨΕ ΤΗΝ αυτοβιογραφία του σε δύο τόμους με τους τίτλους *Ex-Prodigy* (Πρώην παιδί-θαύμα) και *I Am a Mathematician* (Είμαι μαθηματικός). Ο τίτλος του πρώτου λέει πολλά: το ότι ήταν παιδί-θαύμα καθόρισε αποφασιστικά τη ζωή του Wiener. Όμως, παρότι είναι ίσως αλήθεια πως τα παιδιά-θαύματα γεννιούνται, είναι αλήθεια και ότι δημιουργούνται. Ο Βόλφγκανγκ ίσως δεν θα είχε γίνει Μότσαρτ χωρίς τον Λέοπολντ, και ο Norbert ίσως δεν θα είχε γίνει Wiener χωρίς τον Leo.

Ο Leo Wiener (1862-1939) είναι ο πιο εντυπωσιακός χαρακτήρας που εμφανίζεται στην αυτοβιογραφία του γιου του, και υπάρχουν αρκετοί λόγοι γι' αυτό. Γεννημένος σε μια οικογένεια εβραίων λογίων, σε μια πόλη της Λευκορωσίας, το Μπιάλυστοκ (σήμερα ανήκει στον Πολωνία), ο Leo φανέρωσε ένα εξαιρετικό χάρισμα στις γλώσσες· στην εφηβεία του μιλούσε ήδη γερμανικά, ρωσικά, γαλλικά, ιταλικά και πολωνικά. Σύμφωνα με τον Norbert, ο Leo μπορούσε να συλλάβει τα βασικά στοιχεία μιας γλώσσας σε λίγες εβδομάδες και, αργότερα, στην επαγγελματική σταδιοδρομία του «μιλούσε περίπου σαράντα γλώσσες». Είχε επίσης δημοσιεύσει άρθρα μαθηματικού περιεχομένου σε κάποια άσημα περιοδικά και μετέδωσε τις γνώσεις του στον γιο του.

Ο Leo ένιωθε πάντοτε συμπάθεια για τις ιδέες του Τολστόι και στα 18 του έγινε μέλος μιας φιλανθρωπικής οργάνωσης και «αποκήρυξε το ποτό, τον καπνό και το κρέας για την υπόλοιπη ζωή του». Αυτή την τελευταία συνήθεια τη μετέδωσε και στον Norbert. Την ίδια χρονιά άρχισε να οργανώνει μαζί μ' ένα φίλο του, επίσης οπαδό του Τολστόι, το εξωφρενικό σχέδιο της ίδρυσης μιας κοινότητας χορτοφάγων-ανθρωπιστών-σοσιαλιστών στην κεντρική Αμερική. Ο φίλος του υπαναχώρησε, αλλά ο Leo βρέθηκε σύντομα να ταξιδεύει αδέκαρος για την αμερικανική ήπειρο.



Ο Norbert Wiener (1894-1964).

Ύστερα από μερικές ωφέλιμες περιπέτειες, κατέληξε στο Κάνσας Σίτυ του Μιζούρι, όπου μια επιγραφή που διαφήμιζε «Μαθήματα γαελικής γλώσσας» τράβηξε την προσοχή του. Γράφτηκε στα μαθήματα, κατέληξε σε λίγο να διδάσκει στην τάξη και εγκαταστάθηκε στο Κάνσας.

Το 1893 ο Leo παντρεύτηκε την Bertha Kahn, κόρη του ιδιοκτήτη ενός πολυκαταστήματος. Στις 26 Νοεμβρίου του 1894 η Bertha γέννησε τον Norbert. Την ίδια περίπου εποχή, ο Leo έχασε τη θέση του καθηγητή Σύγχρονων Γλωσσών στο Πανεπιστήμιο του Μιζούρι, στην Κολούμπια, και η οικογένεια μετακόμισε ανατολικά στη Leonard Avenue στο σύνορο των πόλεων Καίμπριτζ και Σάμερβιλ, στη Μασσαχουσέττη. Ο Leo αναγκάστηκε για μία ακόμη φορά να αποδεχθεί παράξενες δουλειές, αλλά χάρη στο αξιοσημείωτο ταλέντο του βρήκε σύντομα μια θέση επιμελητή στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ, όπου και παρέμεινε ώσπου συνταξιοδοτήθηκε ως καθηγητής Σλαβικών Γλωσσών το 1930.

Σύμφωνα με τον Leo, και όπως αναφέρεται στο τεύχος Ιουλίου του 1911 του *American Magazine*, η πρόωρη ανάπτυξη του Norbert πρωτοφανερώθηκε στην ηλικία των 18 μηνών, όταν η παραμάνα του είδε ότι την παρατηρούσε προσεκτικά καθώς σχεδίαζε γράμματα στην άμμο της παραλίας. Μέσα σε λίγες μέρες είχε μάθει το αλφάβητο. «Θεωρώντας το αυτό ως ένδειξη πως θα ήταν εύκολο να στρέψω το ενδιαφέρον του στο διάβασμα, άρχισα να τον διδάσκω να γράφει στην ηλικία των τριών ετών. Σε πολύ λίγες εβδομάδες διάβαζε άνετα. Κι όταν έφτασε τα έξι είχε εξοικειωθεί με πάμπολλα εξαιρετικά βιβλία, ανάμεσα στα οποία περιλαμβάνονταν έργα του Δαρβίνου, του Ribot και άλλων επιστημόνων, τα οποία του είχα δώσει επιθυμώντας να του ενσταλάξω κάτι από το επιστημονικό πνεύμα.»

Ο Leo δεν απέκρυψε το γεγονός ότι επιθυμούσε να κάνει παιδιά-θαύματα το γιο του και τις δυο του κόρες. Στο ίδιο άρθρο υπογραμμίζει πως «είναι ανοησία να λέμε, όπως μερικοί άνθρωποι, ότι ο Norbert, η Constance και η Bertha (οι αδελφές του Norbert) είναι ασυνήθιστα προικισμένα παιδιά. Δεν είναι τίποτα τέτοιο. Αν γνωρίζουν πε-

Ο Norbert Wiener σε ηλικία 7 ετών.

ρισσότερα από τα άλλα παιδιά της ηλικίας τους, αυτό συμβαίνει επειδή έχουν εκπαιδευτεί διαφορετικά».

Πραγματικά, ο πατέρας Wiener ανέλαβε σχεδόν εξ ολοκλήρου την εκπαίδευση του νεότερου. Ο Norbert, αν και γράφτηκε στην τρίτη τάξη στην ηλικία των επτά ετών —όχι υπερβολικά νωρίς δηλαδή— προχώρησε γρήγορα στην τετάρτη. Αλλά και αυτό αποδείχτηκε ότι δεν ήταν αρκετό. Έτσι ο Leo αποφάσισε να σταματήσει να πηγαίνει στο σχολείο ο Norbert και να συνεχίσει τη διδασκαλία του στο σπίτι. Αυτή η περίοδος, που διήρκεσε δύο περίπου χρόνια, περιλάμβανε μεγάλες δόσεις άλγεβρας, λατινικών και γερμανικών. Ένα σημαντικό γεγονός συνέβη όταν ο Norbert ήταν οκτώ ετών. Εξαιτίας της ήδη μεγάλης μυωπίας του, αναγκάστηκε να σταματήσει να διαβάζει επί έξι μήνες και μάθαινε τα μαθήματά του μόνο ακούγοντάς τα. Ο Wiener υποστηρίζει ότι χάρη σε αυτήν την εμπειρία του βελτιώθηκε σημαντικά η μνήμη του, η οποία, σύμφωνα με κατοπινές μαρτυρίες, ήταν σχεδόν φωτογραφική. Αναφέρεται μάλιστα το ανέκδοτο ότι μπορούσε να απαγγείλει μια οπερέτα των Gilbert και Sullivan ολόκληρη, ακούγοντάς την μία μόνο φορά.

Αναμφίβολα, ο Leo θεωρούσε τον εαυτό του καλοπροαίρετο πατέρα και αμερόληπτο καθοδηγητή, αλλά ο γιος θυμάται διαφορετικά την εκπαίδευσή του. Σύμφωνα με τον Norbert, όποτε έκανε το παραμικρό σφάλμα, «ο ευγενικός και στοργικός πατέρας έδινε τη θέση του σ' έναν άτεγκτο τιμωρό». Και κάτι ακόμη χειρότερο: τα σχόλια του Leo στο *American Magazine* δημιουργούν την εντύπωση ότι οι έμφυτες ικανότητες του Norbert ήταν ασήμαντες. Ο Norbert θυμάται: «το άρθρο άσκησε τρομακτική επίδραση πάνω μου. Δήλωνε σε όλον τον κόσμο ότι οι αποτυχίες μου ήταν δικές μου, ενώ οι επιτυχίες μου οφείλονταν σ' αυτόν». Σε αντίθεση, πάντως, με ό,τι γράφει ο Wiener στο *Πρώην παιδί-θαύμα*, ο Amar Bose, παλαιός φοιτητής του και συνάδελφος, και ίσως ο στενότερος συνεργάτης του τη τελευταία δεκαετία της ζωής του, αναφέρει πως είχε πει ότι «χρωστά τα πάντα στον πατέρα του». Τα αισθήματα του Wiener προς τον πατέρα του ήταν, τελικά, αλληλοσυγκρουόμενα, και αυτό γίνεται φανερό στην αφιέρωση που υπάρχει στο βιβλίο του *The Human Use of Human Beings* (Η ανθρώπινη χρήση των ανθρώπινων όντων): «Στη μνήμη του πατέρα μου, του Leo Wiener... στον κοντινότερό μου σύμβουλο και στον πιο αγαπημένο μου ανταγωνιστή».

Το 1903 η οικογένεια μετακόμισε στο Χάρβαρντ στη Μασσαχουσέττη, όπου ο Norbert, που δεν είχε κλείσει ακόμη τα εννιά, γράφτηκε στο γειτονικό Γυμνάσιο Ayer. Έμεινε εκεί τρία χρόνια, έως την αποφοίτησή του το 1906. Σε αυτό το σημείο ο σύμβουλος και ανταγωνιστής του αποφάσισε να εγγράψει τον ενδεκάχρονο Norbert στο Κολέγιο Tufts, αντί να διακινδυνέψει την πίεση των εισαγωγικών εξετάσεων στο Χάρβαρντ. Εκείνη την εποχή το ενδιαφέρον του Norbert στρέφεται κυρίως στη βιολογία· τα μαθήματα που παρακολουθεί είναι τυπικά για κάποιον σπουδαστή θετικών επιστημών: παραδόσεις φυσικής και μαθηματικών και μαθήματα βιολογίας. Ο Leo συνέχισε να διδάσκει τον γιο του στο σπίτι και το αποτέλεσμα ήταν ότι ο Norbert βρήκε «τα μαθήματα του απειροστικού λογισμού και των διαφορικών εξισώσεων πολύ εύκολα». Παραδέχεται όμως ότι «με ξεπερνούσε η εισαγωγή στη θεωρία των εξισώσεων υπό τον καθηγητή Ransom και ειδικά το κεφάλαιο με τη θεωρία Galois». Όπως και νά' χει, το 1909 ο Norbert αποφοίτησε με διάκριση στα μαθηματικά. Ήταν δεκατεσσάρων ετών.

Η σταδιοδρομία του Wiener στο Tufts μοιάζει να τελειώνει με μια σοβαρή εφηβική κατάθλιψη που υποχώρησε μόνο ώς ένα βαθμό. Η επανερχόμενη κατά διαστήματα κατάθλιψη θα γίνει βασικό γνώρισμα της ζωής του Wiener και, σύμφωνα με τα δικά του λεγόμενα, εκείνη η περίοδος διήρκεσε ώς τις πτυχιακές του σπουδές στο Χάρβαρντ. Ο Wiener σκόπευε να παρακολουθήσει ζωολογία στο Χάρβαρντ, αυτή η απόφαση όμως αποδείχτηκε σύντομα καταστροφική —κάτι που ο ίδιος το αποδίδει στο ότι «δεν έπιαναν τα χέρια του» και στη σοβαρή μυωπία του. Νωρίτερα, στο Tufts, είχε κάποια επιτυχία στη φιλοσοφία. Με την προτροπή του πατέρα του λοιπόν —κάτι που είναι αρκετά χαρακτηριστικό— εγκατέλειψε τη ζωολογία και γράφηκε στη Σχολή Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου Cornell. Η κατάθλιψη του Norbert συνεχίστηκε και στην Ίθακα και τα γραπτά του δεν αφήνουν καμιά αμφιβολία ότι μισούσε αυτό το μέρος. Δεν τα κατάφερε καλά με τα μαθήματα φιλοσοφίας, αλλά και «η θεωρία συναρτήσεων μιγαδικών μεταβλητών ήταν κάτι πολύ απόμακρο γι' αυτόν», όπως λέει ο ίδιος.

Εξαιτίας της κακής του επίδοσης, η υποτροφία του στο Cornell δεν ανανεώθηκε. Τον επόμενο χρόνο επέστρεψε στο Τμήμα Φιλοσοφίας του Χάρβαρντ και στον πατέρα του. Στο Χάρβαρντ σπούδασε μαθηματική λογική και, υπό την επίβλεψη του Karl Schmidt του Tufts, έγραψε τη διατριβή του με θέμα τις θεωρίες των Schroeder, Whitehead και Russell. Αν και υποστήριξε ότι ήταν μια εύκολη εργασία, παραδέχεται ότι αργότερα, «υπό την καθοδήγηση του Bertrand Russell, στην Αγγλία, έμαθα πως μου είχαν διαφύγει σχεδόν όλα τα ζητήματα πραγματικής φιλοσοφικής σημασίας». Γενικά, ο Wiener δεν αγάπησε το Χάρβαρντ περισσότερο απ' όσο αγάπησε το Cornell. Το 1913 πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα. Δεν είχε κλείσει ακόμα τα 19 —ήταν περίπου έξι χρόνια νεότερος από τον μέσο όρο ηλικίας όσων έπαιρναν διδακτορικό εκείνη την εποχή.

Κατά τη διάρκεια του τελευταίου έτους στο Χάρβαρντ κέρδισε μια υποτροφία και αμέσως μετά την αποφοίτησή του ξεκίνησε για το Καίμπριτζ της Αγγλίας, για να δουλέψει πάνω στη μαθηματική λογική μαζί με τον Bernard Russell. Ο Wiener άρχισε να απολαμβάνει τη νεοαποκτημένη ανεξαρτησία από τους γονείς του, μολονότι η απειρία του του προξενούσε προβλήματα: για παράδειγμα, ξεκίνησε έναν δονκιχωτικό καβγά με τη σπιτονοικυρά του σχετικά με τους όρους του ενοικιαστηρίου. Ανακάλυψε, όμως, και ένα νέο είδος φοιτητών που αποδέχονταν την εκκεντρικότητά του και ενθουσιάζονταν με τις διανοητικές αναζητήσεις. Εκείνη τη χρονιά γνώρισε έναν άλλο ξενιτεμένο, τον T.S. Eliot, με τον οποίο αντάλλαξε βιβλία και φιλοσοφικές ιδέες. Ο Russell έπεισε τον Wiener να μάθει περισσότερα γνήσια μαθηματικά και του γνώρισε την εργασία του Αϊνστάιν. Περισσότερο απ' όλους, όμως, τον επηρέασε ο G.H. Hardy, τον οποίο χαρακτηρίζει «δάσκαλό του στα μαθηματικά». Ο Hardy τον εισήγαγε στις μιγαδικές μεταβλητές και στο ολοκλήρωμα Lebesgue, θέματα που θα διαδραμάτιζαν αργότερα κυρίαρχο ρόλο στη σταδιοδρομία του.

Παρ' όλη τη σπουδαιότητα της επιρροής του Hardy, ο Wiener κατέληξε να χαρακτηρίζει «καθαρή τάση φυγής» τη φημισμένη υποβίβαση του Hardy των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Στις κατοπινές συναντήσεις τους ο Wiener αντιμαχόταν την άποψη του Hardy ότι το μοναδικό κίνητρο της όμορφης εργασίας του Wiener πάνω στην αρμονική ανάλυση ήταν η εσωτερική αισθητική των μαθηματικών και όχι οι εφαρμογές. Νιώθοντας βαθύ και μόνιμο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές, ο Wiener πίστευε ότι οι μαθηματικοί δεν μπορούν να αγνοούν τον εξωτερικό κόσμο, και ότι οφείλουν να εφαρμόζουν τα μαθηματικά αλλά και να έχουν την ηθική ευθύνη για τις εφαρμογές. Αυτή η πεποίθηση θα εδραιωνόταν περισσότερο όσο περνούσε ο καιρός. Και, τελικά, ο Wiener γέλασε τελευταίος: ακόμη και η αγαπημένη θεωρία του Hardy, η θεωρία αριθμών, βρήκε εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες, στην κρυπτογραφία και στην επιστήμη των υπολογιστών.

O Leo Wiener.

Επειδή ο Russell σχεδίαζε να περάσει το εαρινό εξάμηνο στο Χάρβαρντ, ο Wiener αποφάσισε να ολοκληρώσει το μεταδιδακτορικό του έτος στο Γκαίττινγκεν, έδρα μαθηματικών διανοιών όπως ο David Hilbert και ο Edmund Husserl. Μετά το Γκαίττινγκεν επέστρεψε στην Αγγλία, ελπίζοντας να περάσει και το ακαδημαϊκό έτος του 1914-1915 στο Καίμπριτζ. Βρήκε όμως το πανεπιστήμιο πρακτικά κλειστό λόγω του πολέμου και αποφάσισε να επιστρέψει στη Αμερική. Εκεί περνάει ένα δυσάρεστο εξάμηνο στο Πανεπιστήμιο της Κολούμπια, όπου οι ακαδημαϊκές του δραστηριότητες φαίνεται να σκιάζονται από θλιβερές περιπέτειες με τους συγκάτοικους συμφοιτητές του.*

Έχοντας διδακτορικό από το Χάρβαρντ, ο Wiener είχε το δικαίωμα να δώσει μια σειρά διαλέξεων στο ίδιο πανεπιστήμιο χωρίς αμοιβή. Τον επόμενο χρόνο έδωσε μερικές διαλέξεις για τη μαθηματική λογική και μια συνηθισμένη σειρά προπτυχιακών μαθημάτων φιλοσοφίας. Ήλπιζε ότι με αυτόν τον τρόπο θα εξασφάλιζε μόνιμη θέση στο Τμήμα Φιλοσοφίας του Χάρβαρντ. Δεν το κατάφερε ποτέ. Ο Wiener ως ομιλητής ήταν χαοτικός —ένα χαρακτηριστικό που δεν αμβλύνθηκε με τα χρόνια. Επιπλέον, ο George David Birkhoff, ο σημαντικότερος μαθηματικός της Αμερικής εκείνη την εποχή, αναστάτωσε ακόμη περισσότερο τις διαλέξεις του Wiener επισημαίνοντας σφάλματα.

Στο *Είμαι μαθηματικός*, ο Wiener κατηγορεί τον Birkhoff ότι τον έδιωξε από το Χάρβαρντ, και στηλιτεύει τον αντισημιτισμό του. Ο Norbert αναφέρει επίσης ότι ο Birkhoff είχε αγανακτήσει με τους υπερβολικούς κομπασμούς του Leo Wiener για τον Norbert καθώς και με την επιθετική προσωπικότητα και του πατέρα και του γιου —ο Leo είχε επιβεβαιώσει πρόσφατα τη φήμη του «εριστικού» χαρακτήρα με δηλητηριώδεις δημόσιες επιθέσεις εναντίον του γερμανικού μιλιταρισμού και των υπερασπιστών του ανάμεσα στους καθηγητές του Χάρβαρντ. Με αντικειμενικά κριτήρια, όμως, η απόδοση του Norbert εκείνη τη χρονιά δεν θα αρκούσε για να του εξασφαλίσει μια θέση στο Χάρβαρντ, ακόμη και αν ανήκε στη γαλαζοαίματη αγγλοσαξονική ελίτ της Βοστώνης.

Αν και ο Wiener δεν συμβιβάστηκε ποτέ με την αποτυχία του να πάρει μια θέση στο Χάρβαρντ, τελικά κέρδισε την εκτίμηση του Birkhoff. Διηύθυναν μαζί το κοινό συνέδριο μαθηματικών του Χάρβαρντ και του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Μασσαχουσέττης, η αλληλογραφία τους δε αποκαλύπτει ότι ο ένας θαύμαζε το μαθηματικό έργο του άλλου και ότι ανέπτυξαν βαθιά σχέση. Μπορούμε να μαντέψουμε τη βάση αυτής της σχέσης από την εξής αναφορά στον Birkhoff, που τη βρίσκουμε στο *Είμαι μαθηματικός*: «Δεν ήμουν μόνος στην ανταγωνιστικότητά μου. Ένας τουλάχιστον από τους μεγαλύτερους αμερικανούς μαθηματικούς, ένας άνθρωπος του οποίου η αρνητική γνώμη ήταν το μεγαλύτερο εμπόδιο που έπρεπε να ξεπεράσω, ήταν περισσότερο έντονα ανταγωνιστικός κι από εμένα».

Μετά το φιάσκο του Χάρβαρντ, ο Norbert —και πάλι μετά τη συμβουλή του Leo— άρχισε να αναζητεί δουλειά στα μαθηματικά αντί στη φιλοσοφία. Έπειτα από κάποιες δυσκολίες, κατόρθωσε να βρει μια θέση στο Πανεπιστήμιο της Μαίην. Όμως, η πνευματική ζωή σε αυτό το μέρος ήταν νεκρή, και όλη η εμπειρία αποδείχτηκε ένας εφιάλτης. (Για παράδειγμα, αν και δεν ήταν υποχρεωμένος να αντιπαλεύει με τον φοβερό Birkhoff, είχε να αντιμετωπίσει τους φοιτητές που πετούσαν κέρματα και διέκοπταν τις παραδόσεις του.) Περί το τέλος του ακαδημαϊκού έτους 1917 οι Ηνωμένες Πολιτείες εισήλθαν στον πόλεμο και ο Norbert προσπάθησε να καταταγεί. Κρίθηκε όμως ακατάλληλος για κάθε υπηρεσία λόγω της κακής του όρασης. Στη συνέχεια εργάστηκε για μικρό χρονικό διάστημα στην General Electric και ως συγγραφέας λημμάτων στην *Encyclopedia Americana*. Αυτή η δουλειά του άρεσε πραγματικά, αλλά το κα-

Η συνέχεια στη σελ. 60 ⇨

* Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές τότε στο Κολούμπια έμεναν μαζί, σε ένα θάλαμο της φοιτητικής εστίας. (Σ.τ.ε.)

They were talking about Fractals TISHKOV

Μια βόλτα με το χαλί του Sierpinski

Και μια κρουαζιέρα στην άπειρη παραλία

I.M. Sokolov

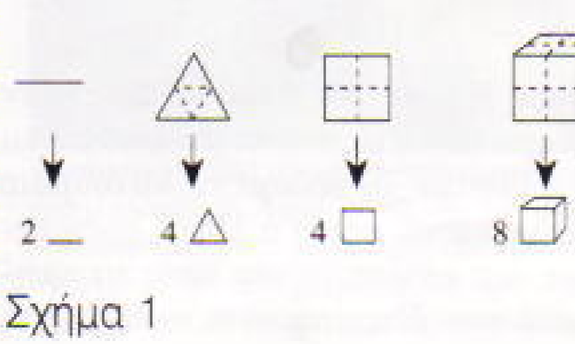
ΤΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΠΟΥ ΟΝΟΜΑζονται «φράκταλ» πρωτοδημιουργήθηκαν στη φαντασία των μαθηματικών στις αρχές του αιώνα μας. Είναι αμφίβολο αν είχε διανοηθεί κανείς ότι θα μπορούσε να υπάρχει στη φύση κάτι παρόμοιο μ' αυτές τις απίθανες και κομψές καμπύλες. Και παρότι σε τούτο το άρθρο θα ασχοληθώ κυρίως με φυσικά συστήματα, πρέπει να κάνω μια σύντομη, όχι αυστηρή, μαθηματική εισαγωγή.

Αυτοομοιότητα

Ένα αυτοόμοιο γεωμετρικό σχήμα (ή στερεό) μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένο πλήθος ταυτόσημων σχημάτων όμοιων με αυτό.

Επιτρέψτε μου να σας υπενθυμίσω τον γενικό ορισμό της ομοιότητας: δύο σχήματα ονομάζονται όμοια αν έχουν το ίδιο σχήμα, ακόμη και αν τα μεγέθη τους είναι διαφορετικά. Επομένως, το ένα από τα δύο είναι αντίγραφο του άλλου, σε μεγέθυνση ή σε σμίκρυνση.

Ακριβέστερα, το ένα από τα δύο όμοια σχήματα μπορεί να απεικονιστεί στο άλλο έτσι ώστε η απόσταση ανάμεσα σε δύο τυχαία σημεία του να αυξάνεται ή να μειώνεται με τον ίδιο λόγο —ο οποίος ονομάζεται *λόγος ομοιότητας*. Παραδείγματα αυτοόμοιων σχημάτων βλέπετε στο Σχήμα 1: ένα ευθύγραμμο τμήμα, ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και ένας κύβος.



Σχήμα 1

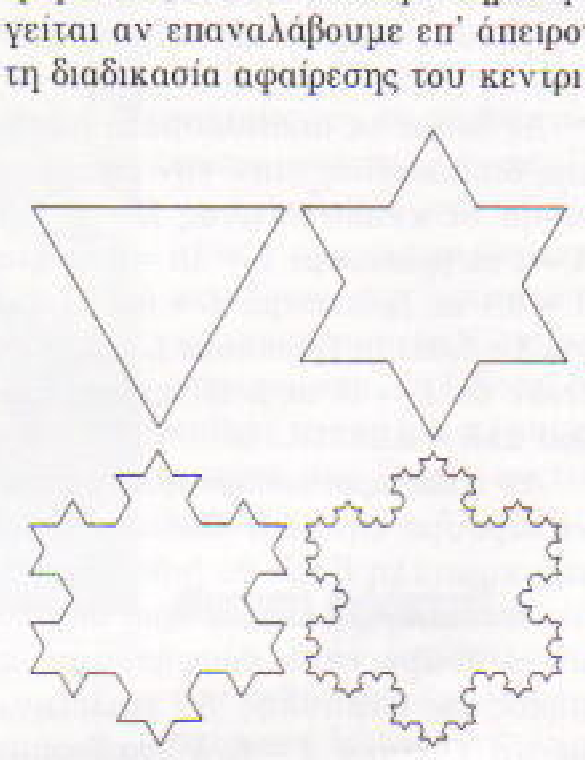
Το αντικείμενο που βλέπετε στο Σχήμα 2 δείχνει λίγο πιο περίπλοκο αλλά η κατασκευή του είναι ιδιαίτερα απλή. Αρχίζουμε μ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς ℓ_0 και επαναλαμβάνουμε (επ' άπειρον) την επόμενη διαδικασία: κάθε ευθύγραμμο τμήμα της καμπύλης που έχουμε κατασκευάσει στο προηγούμενο βήμα διαιρείται σε τρία τμήματα και το μεσαίο τμήμα του αντικαθίσταται με δύο τμήματα μήκους $\ell/3$, όπου ℓ είναι το μήκος του αρχικού τμήματος. Στο Σχήμα 2 βλέπετε τα πρώτα στάδια αυτής της διαδικασίας. Στο n στάδιο η καμπύλη είναι μια πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από $3 \cdot 4^n$ ευθύγραμμα τμήματα, μήκους $\ell_0/3^n$ το καθένα, και το συνολικό της μήκος είναι

$$L = 3\ell_0(4/3)^n.$$

Αυτή η πολυγωνική γραμμή ονομάζεται *τριαδική καμπύλη Koch* ή *νιφάδα Koch* (από το όνομα του σουηδού μαθηματικού Helge von Koch που την επινόησε).

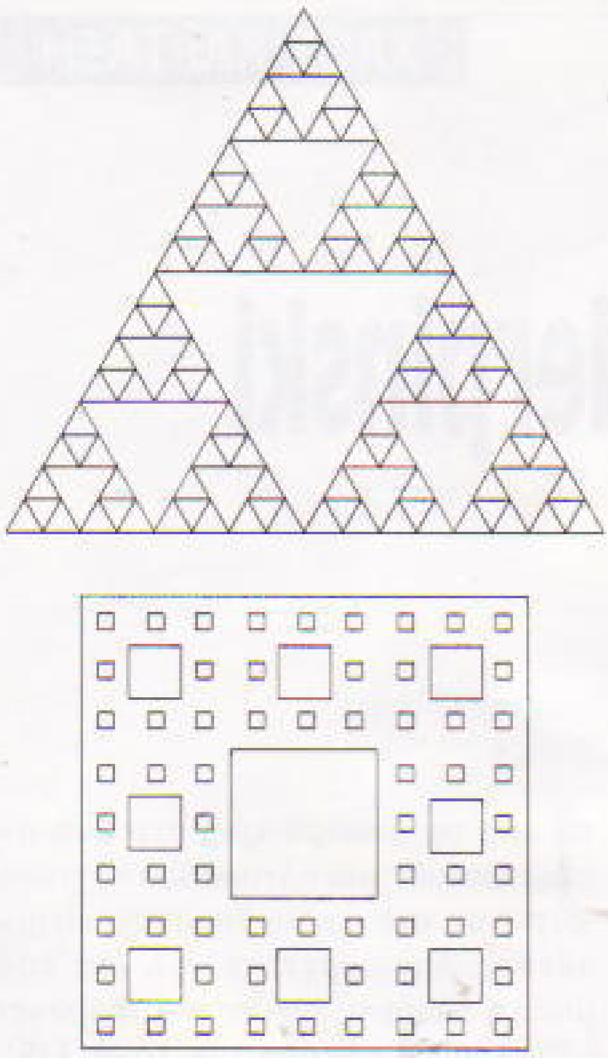
Με αυστηρά κριτήρια, και σύμφωνα με τον ορισμό που παραθέσαμε, η νιφάδα Koch δεν είναι αυτοόμοιο αντικείμενο. Αποτελείται όμως από τρεις αυτοόμοιες καμπύλες που «αναπτύσσονται» πάνω στις τρεις πλευρές του αρχικού τριγώνου: το καθένα από τα τέσσερα τμήματα που αντικαθιστούν μια πλευρά του αρχικού τριγώνου στο πρώτο βήμα της κατασκευής, δημιουργεί τελικά μια καμπύλη όμοια μ' αυτήν που παράγει ολόκληρη η πλευρά (με λόγο 1/3). Επιπλέον, κάθε τμήμα της πολυγωνικής γραμμής στο οποίο καταλήγουμε μετά το n-οστό βήμα ανήκει επίσης σε μια όμοια καμπύλη με λόγο ομοιότητας 3^{-n}.

Τα αντικείμενα του Σχήματος 3 είναι επίσης αυτοόμοια. Ονομάζονται *τρίγωνο Sierpinski* και *καθολική καμπύλη Sierpinski* ή «χαλί Sierpinski», από το όνομα του πολωνού μαθηματικού Waclaw Sierpinski (1882-1962). Μπορείτε να δείτε τον τρόπο κατασκευής τους: το πρώτο δημιουργείται αν ενώσουμε επαναληπτικά τα μέσα των πλευρών ισόπλευρων τριγώνων, ενώ το δεύτερο δημιουργείται αν επαναλάβουμε επ' άπειρον τη διαδικασία αφαίρεσης του κεντρι-



Σχήμα 2

Εικονογράφηση: Leonid Tishkov



Σχήμα 3

κού τμήματος ενός τετραγώνου που έχει χωριστεί σε εννέα ίσα τετράγωνα.

Ας επανέλθουμε τώρα στην καμπύλη Koch και ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το μήκος της μ' έναν διαβήτη. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε αν ανοίξουμε, για παράδειγμα, το διαβήτη κατά διάστημα μήκους λ και σημειώσουμε διαστήματα μήκους λ κατά μήκος των τμημάτων της καμπύλης. Το μήκος της καμπύλης θα είναι τότε κατά προσέγγιση λn, όπου n είναι το πλήθος των διαστημάτων που έχουμε σημειώσει. Η τιμή του λ ονομάζεται κλίμακα μέτρησης.

Ας δούμε τα αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας όταν την εφαρμόσουμε σε κύκλο ακτίνας $R = 1$. Για $\lambda = 1$ m, βρίσκουμε $L = \lambda n = 6$ m. Για $\lambda = 0{,}1$ m, βρίσκουμε $L = 6{,}2$ m και για $\lambda = 0{,}001$ m, βρίσκουμε $L = 6{,}28$ m. Όταν το $\lambda \to 0$, το L τείνει στο όριο του $2\pi R = 6{,}28318...$ m.

Αν όμως προσπαθήσουμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία με την καμπύλη Koch θα βεβαιωθούμε ότι δεν υπάρχει κάποιο όριο που θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε ως μήκος της καμπύλης. Αν επιλέξουμε την κλίμακα $\lambda = \ell_0/3^n$, θα βρούμε ότι το υπολογιζόμενο μήκος της καμπύλης ισούται με το μήκος της πολυγωνικής γραμμής που αντιστοιχεί στο n στάδιο της κατασκευής —$L = 3\ell_0(4/3)^n$. Επομένως, αυξάνεται επ' άπειρον καθώς το $n \to \infty$.

Η προσπάθεια να μετρήσουμε το μήκος άλλων αυτοόμοιων καμπυλών θα κατέληγε σε ανάλογα αποτελέσματα: όσο μειώνεται η κλίμακα της μέτρησης, το μήκος της καμπύλης αυξάνεται απεριόριστα.

Εδώ πρέπει να επισημάνω ένα εξαιρετικά σημαντικό γεγονός που διακρίνει ένα πραγματικό αυτοόμοιο αντικείμενο από ένα ιδανικό μαθηματικό αυτοόμοιο αντικείμενο. Τα πραγματικά αντικείμενα έχουν μια ελάχιστη κλίμακα μέτρησης Λ_{min}.

Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε την πραγματική διαδικασία κατασκευής της καμπύλης Koch με χαρτί και μολύβι. Ας υποθέσουμε ότι κατασκευάζουμε την καμπύλη ξεκινώντας από ένα τρίγωνο με πλευρά μήκους 1 m και ότι χρησιμοποιούμε μολύβι που σχεδιάζει γραμμές πλάτους $a_0 = 0{,}1$ mm $= 10^{-4}$ m. Από μαθηματική άποψη η διαδικασία κατασκευής της καμπύλης μπορεί να συνεχιστεί για πάντα. Η πραγματική κατασκευή, όμως, θα σταματήσει από τη στιγμή που το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει δύο γειτονικές γωνίες θα γίνει συγκρίσιμο με το πλάτος της γραμμής. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτό θα συμβεί στο βήμα $n = \ln(\ell_0/a_0)/\ln 3 \cong 9$. Η γραμμή μας θα έχει μήκος $L \cong 40$ m. Επομένως, η πραγματική αυτοόμοια καμπύλη έχει πεπερασμένο μήκος.

Ας επιστρέψουμε στα ιδανικά μαθηματικά αντικείμενα. Ο τύπος για το μήκος της καμπύλης Koch μπορεί να εκφραστεί ως

$$L = A\lambda^{-a}, \qquad (1)$$

όπου $A = 3\ell_0^{\ln 4/\ln 3}$, και $a = \ln 4 / \ln(3-1)$. [Μπορείτε να αποδείξετε μόνοι σας ότι αυτή η παράσταση είναι ισοδύναμη με τον τύπο $L = 3\ell_0(4/3)^n$.] Ο εκθέτης a σχετίζεται με τη διάσταση της καμπύλης.

Τι είναι διάσταση;

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί της διάστασης, ο καθένας από τους οποίους βασίζεται σε εντελώς διαφορετικές ιδέες. Ας δούμε μερικούς από αυτούς.

Ο πρώτος σχετίζεται με το πλήθος των συντεταγμένων που απαιτούνται για να προσδιοριστεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου. Στο χώρο, αυτός ο αριθμός ισούται με τρία. Στο επίπεδο αρκούν δύο συντεταγμένες, ενώ σε μια ευθεία χρειάζεται μία μόνο συντεταγμένη. Με αυτήν την έννοια, ο χώρος είναι τρισδιάστατος, το επίπεδο δισδιάστατο και η ευθεία μονοδιάστατη. Όπως είναι φυσικό, σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό η διάσταση είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός.

Ένας δεύτερος τρόπος ορισμού της διάστασης βασίζεται στην παρατήρηση ότι για να χωρίσουμε ένα σχήμα σε ασύνδετα τμήματα, αρκεί να αφαιρέσουμε ένα σύνολο του οποίου η διάσταση είναι κατά 1 μικρότερη. Για παράδειγμα, για να χωρίσουμε μια ευθεία αφαιρούμε ένα σημείο της. Για να χωρίσουμε ένα επίπεδο σχήμα, το κόβουμε κατά μήκος κάποιας καμπύλης, ενώ ένα στερεό το χωρίζουμε κατά μία επιφάνεια. Επομένως, η διάσταση μπορεί να οριστεί επαγωγικά: αντιστοιχούμε τη διάσταση 0 σ' ένα μοναδικό σημείο ή, γενικότερα, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο ή άπειρο αλλά αριθμήσιμο σύνολο (δηλαδή, ένα σύνολο που τα σημεία του απαριθμούνται με τους αριθμούς 1, 2, 3, ...). Η διάσταση οποιουδήποτε άλλου συνόλου υποθέτουμε ότι είναι μεγαλύτερη κατά 1 από τη διάσταση του συνόλου που το χωρίζει σε δύο ξένα τμήματα. Αυτή τη διάσταση την ονομάζουμε *επαγωγική* και είναι πάντοτε, ακέραιος.

Ας εξετάσουμε τώρα έναν τρίτο, και περισσότερο ενδιαφέροντα για μας, ορισμό της διάστασης —ή καλύτερα μιας ολόκληρης κατηγορίας παρόμοιων εννοιών διάστασης. Η απλούστερη είναι η *διάσταση αυτοομοιότητας*.

Η διάσταση αυτοομοιότητας D μπορεί να οριστεί από τον τύπο

$$D = \ln N/\ln n,$$

όπου N είναι το πλήθος των ίσων τμημάτων στα οποία μπορούμε να χωρίσουμε το δεδομένο αυτοόμοιο αντικείμενο, και n ο λόγος ομοιότητας του αντικειμένου προς τα τμήματά του. Παρατηρήστε το Σχήμα 1.

Αν χωρίσουμε το τετράγωνο με τον τρόπο που απεικονίζεται στο σχήμα, το διαιρούμε σε $N = 4$ τετράγωνα οι πλευρές των οποίων έχουν το μισό μήκος από τις πλευρές του αρχικού ($n = 2$). Ο κύβος με μήκος ακμής 1 αποτελείται από $N = 8$ κύβους με μήκος ακμής $1/2$ ($n = 2$). Άρα, η διάσταση αυτοομοιότητας για το τετράγωνο είναι $\ln 4/\ln 2 = 2$, ενώ για τον κύβο είναι $\ln 8/\ln 2 = 3$. Και, προφανώς, η διάσταση μιας ευθείας γραμμής είναι 1.

Αν υπολογίσουμε τη διάσταση των αντικειμένων που βλέπουμε στα Σχήματα 2 και 3 με την ίδια μέθοδο, θα διαπιστώσουμε ότι η διάσταση οποιουδήποτε τμήματος της καμπύλης Koch (και η διάσταση όλης της καμπύλης) είναι $D = \ln 4/\ln 3 \cong 1{,}2618$. Για το τρίγωνο Sierpinski είναι $\ln 3/\ln 2 \cong 1{,}5849$ ενώ για το χαλί Sierpinski είναι $\ln 8/\ln 3 \cong 1{,}8727$. Αυτές οι παράξενες καμπύλες έχουν κλασματική διάσταση!

Ας επιστρέψουμε στον τύπο (1) που δίνει το μήκος της καμπύλης Koch. Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ορισμό της διάστασης D μπορούμε να ξαναγράψουμε τον τύπο ως εξής:

$$L = 3\ell_0^D \lambda^{1-D}.$$

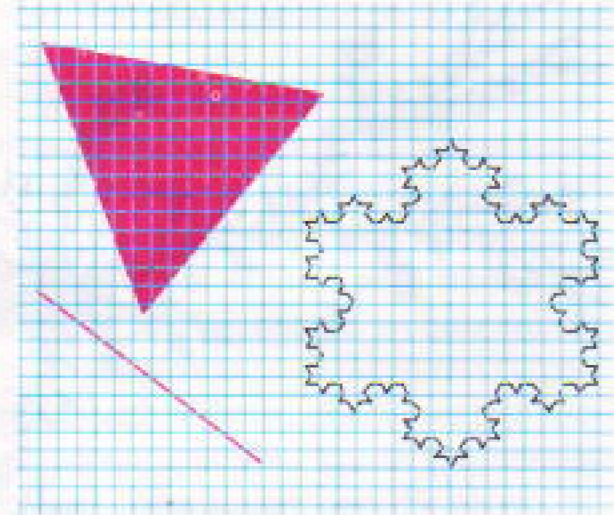
Βλέπουμε ότι ο ρυθμός αύξησης του μετρούμενου μήκους μιας αυτοόμοιας καμπύλης, θεωρούμενος ως συνάρτηση της μειούμενης κλίμακας μέτρησης, εξαρτάται από τη διάσταση της καμπύλης. Συγκεκριμένα, το L/λ —που είναι, προσεγγιστικά, το πλήθος των βημάτων κατά τη μέτρηση της καμπύλης με το διαβήτη μας— είναι ανάλογο με το λ^{-D}. Και αυτό μας οδηγεί σ' έναν νέο ορισμό της διάστασης.

Πώς μετρούμε τη διάσταση;

Η διάσταση αυτοομοιότητας μπορεί να καθοριστεί μόνο για πολύ κανονικά αντικείμενα τα οποία κατασκευάζονται σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες. Όταν οι αποκλίσεις από την κανονικότητα είναι μικρές, το αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση αυτοόμοιο. Τι συμβαίνει όμως όταν είναι μεγάλες;

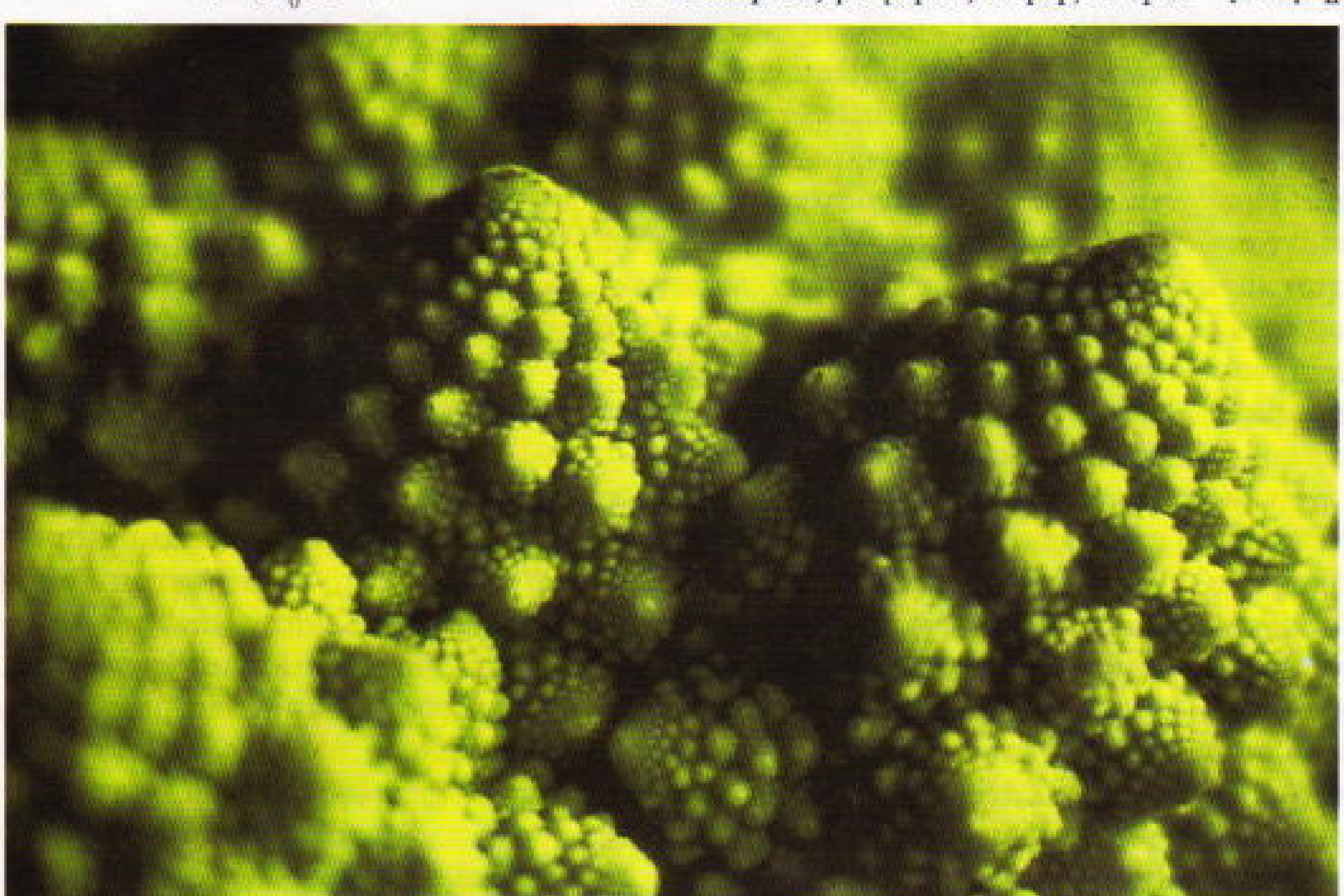
Ας χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο ορισμό της διάστασης —έναν ορισμό που τον χρησιμοποιούμε συχνά για να μετρήσουμε πειραματικά τη διάσταση διαφόρων φυσικών συστημάτων.

Χωρίζουμε το χώρο στον οποίο βρίσκεται το εξεταζόμενο αντικείμενο σε κύβους με μήκος ακμής λ (για



Σχήμα 4

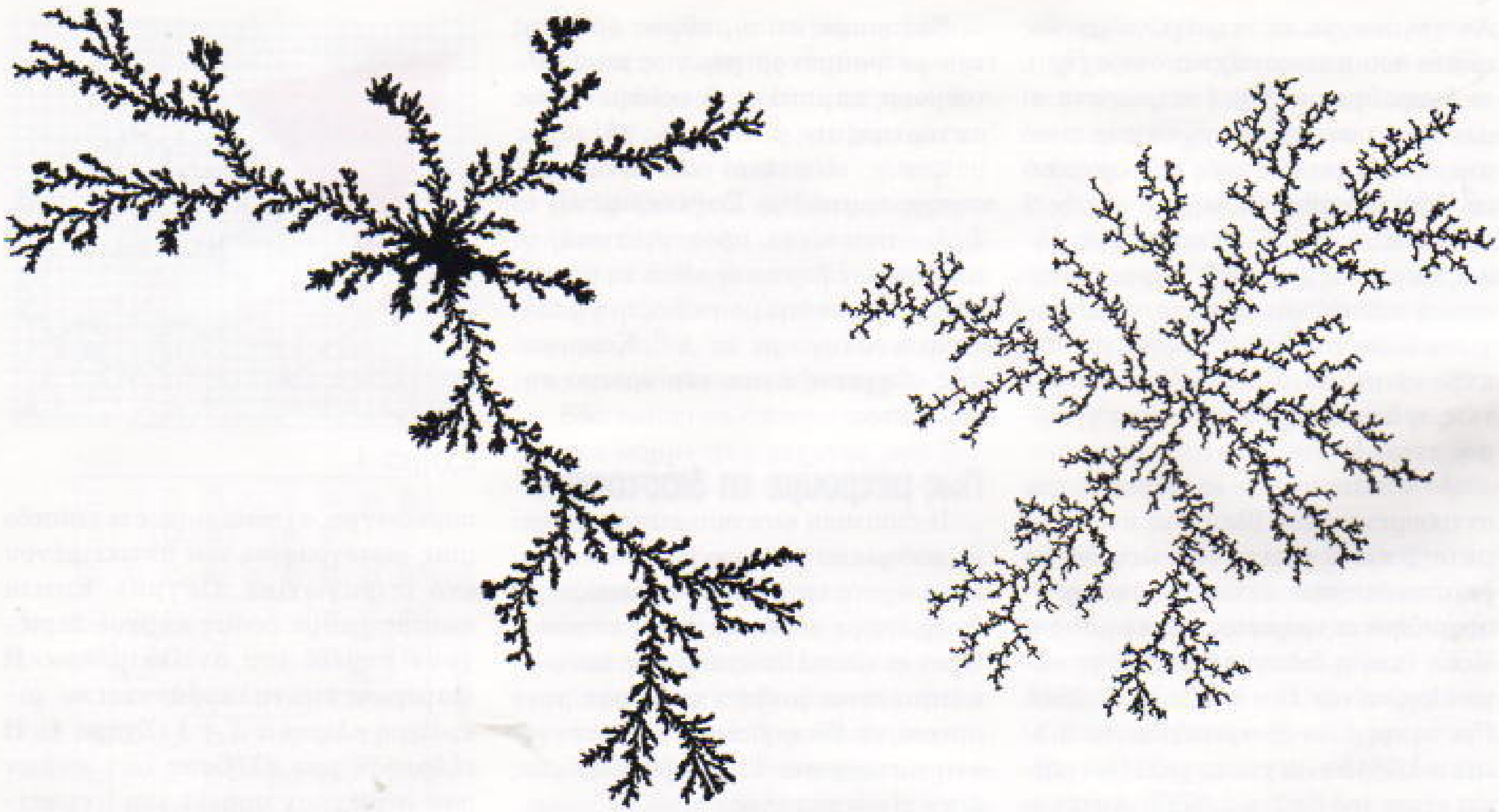
παράδειγμα, σχεδιάζουμε στο επίπεδο μιας φωτογραφίας του αντικειμένου ένα τετραγωνικό πλέγμα). Έπειτα καταμετρούμε όσους κύβους περιέχουν σημεία του αντικειμένου. Η διαμέριση επαναλαμβάνεται σε μικρότερη κλίμακα $\lambda' < \lambda$ (Σχήμα 4). Η εξάρτηση του πλήθους των κύβων που περιέχουν σημεία του αντικειμένου από το μέγεθος του κύβου εκφράζεται από το νόμο $N = A\lambda^{-D}$, όπου A είναι μια σταθερά και D η άγνωστη διάσταση. Μελετώντας μια επίπεδη περιοχή με εμβαδόν S (όπως το τρίγωνο στο Σχήμα 4), μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι $N \cong S/\lambda^2$, επομένως $D = 2$. Για ένα ευθύγραμμο τμήμα, $N = BL/\lambda$, όπου L είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος και B ένας συντελεστής που εξαρτάται από τον προσανατολισμό του. Η διάσταση D ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι 1. Αν επαναλάβουμε αυτήν τη διαδικασία με τα αντικείμενα των Σχημάτων 2 και 3, θα βρούμε τιμές της D που συμπίπτουν με τη διάσταση αυτοομοιότητάς τους. Για να προσδιορίσουμε τη διάσταση πραγματικών αντικειμένων, σχεδιάζουμε το γράφημα του $\ln N$ ως συνάρτηση του $-\ln\lambda$. Είναι μια ευθεία γραμμή, η κλίση της οποίας μας δίνει την τιμή της D.



Φωτογραφία από μικρή απόσταση του μπρόκολου Romanesco, μιας διασταύρωσης του κουνουπιδιού και του μπρόκολου. Αυτό το υβρίδιο εμφανίζει εντυπωσιακό βαθμό αυτοομοιότητας: οι μεμονωμένοι ανθικοί οφθαλμοί είναι μικρότερες εκδοχές ολόκληρου του σχηματισμού. Οι οφθαλμοί αυτοί με τη σειρά τους αποτελούνται από μικρότερους οφθαλμούς που έχουν το ίδιο σχήμα, κ.ο.κ. (Από το Fractals for the Classroom *των Peitgen, Jürgens και Saupe, Νέα Υόρκη, Springer-Verlag, 1992.)*

Φυσικά φράκταλ

Το 1961 δημοσιεύτηκε ένα άρθρο του άγγλου επιστήμονα L. Richardson με θέμα τη μέτρηση του μή-



Το αντικείμενο αριστερά αποτελεί παράδειγμα συσσωμάτωσης ψευδαργύρου ελεγχόμενης από τη διάχυση στην επιφάνεια συνεπαφής διαλύματος θειικού ψευδαργύρου και οξικού n-βουτυλεστέρα. Δεξιά φαίνεται η εξομοίωση μέσω υπολογιστή του ίδιου φαινομένου, βασισμένη στην κίνηση Brown των μεμονωμένων σωματιδίων. (Από το Fractals for the Classroom.*)*

κους των ακτών. Ο συγγραφέας απέδειξε ότι το μετρούμενο μήκος της παραλίας αυξάνεται όσο μειώνεται η κλίμακα, σύμφωνα με το νόμο $L = A\lambda^{-\alpha}$ (νόμος του Richardson), όπου ο συντελεστής α ισούται, για παράδειγμα, με 0,24 για τη βρετανική ακτογραμμή και 0,13 για την αυστραλιανή. Αν και αυτός ο νόμος μοιάζει με τους τύπους για το μήκος των αυτοόμοιων καμπυλών, ο Richardson ανέπτυξε την εργασία του ανεξάρτητα. Στη φυσική υπήρχαν και μερικά άλλα παραδείγματα που σχετίζονταν με αυτοόμοια αντικείμενα. Όλα όμως ήταν εντελώς αποσπασματικά...

Όλα άλλαξαν δραματικά με την έκδοση ενός βιβλίου από τον Benoit Mandelbrot, έναν γάλλο μαθηματικό που σήμερα ζει στις ΗΠΑ. Το βιβλίο που εκδόθηκε το 1975 στα γαλλικά και το 1977 στα αγγλικά, συγκέντρωνε πολλά μαθηματικά και φυσικά παραδείγματα και τα καθιστούσε κοινό κτήμα των επιστημόνων όλου του κόσμου. Η μεγαλύτερη υπηρεσία του Mandelbrot, όμως, ήταν ότι επινόησε ένα όνομα για όλα αυτά.

Ίσως θυμάστε ποια ήταν η σημαντικότερη κίνηση στην οποία προέβη ο Άθως, ένας από τους ήρωες του έργου του Αλέξανδρου Δουμά πατρός *Μετά είκοσι έτη* —βρήκε ένα όνομα για την επιχείρηση: την ονόμασε «οικογενειακή υπόθεση». Αυτό θεωρήθηκε εξίσου σημαντικό με το ξίφος του Ντ' Αρτανιάν και τα χρήματα του Πόρθου. Η επινόηση ενός καλού ονόματος είναι σπουδαίο επίτευγμα.

Τα αντικείμενα που έχουν μη ακέραιη διάσταση —ή μάλλον, τα αντικείμενα που η διάστασή τους μετρούμενη με την τελευταία από τις προηγούμενες μεθόδους είναι μεγαλύτερη από την τοπολογική τους διάσταση— ονομάστηκαν από τον Mandelbrot «φράκταλ». Η λέξη προέρχεται από τη λατινική *fractus* —κλασματικός, σπασμένος.

Το πρώτο βιβλίο του Mandelbrot είχε τίτλο *Fractals: Form, Chance, Dimension* (Φράκταλ: μορφή, τύχη, διάσταση). Το δεύτερο, που εκδόθηκε το 1982, τιτλοφορείται *The Fractal Geometry of Nature* (Η φράκταλ γεωμετρία της φύσης) —και δεν μπορούσε να υπάρχει καταλληλότερος τίτλος.

Πολλά γεωγραφικά αντικείμενα έχουν φράκταλ ιδιότητες: ακτές, ποταμοί, βουνά, φαράγγια. Τα σύνορα των χωρών, όταν αντιστοιχούν σε φυσικά ορόσημα και δεν έχουν σχεδιαστεί στο χάρτη με το χάρακα (όπως τα σύνορα της Αιγύπτου με το Σουδάν), είναι επίσης φράκταλ. Το μήκος της πορτογαλοϊσπανικής μεθορίου (σύμφωνα με τα πορτογαλικά εγχειρίδια) και το μήκος της ισπανοπορτογαλικής μεθορίου (σύμφωνα με τα επίσημα ισπανικά στοιχεία) διαφέρουν κατά 20% λόγω της διαφορετικής κλίμακας που έχει χρησιμοποιηθεί. Αυτό μας δείχνει για άλλη μια φορά ότι η έννοια του μήκους μιας φράκταλ καμπύλης δεν έχει ιδιαίτερο νόημα.

Αποδεικνύεται ότι στη φύση καμπύλες όπως η καμπύλη Koch είναι μάλλον ο κανόνας και όχι η εξαίρεση. Είναι φανερό ότι η αυτοομοιότητα ενός πραγματικού φυσικού αντικειμένου καταστρατηγείται λόγω τυχαίων αποκλίσεων από την απόλυτη κανονικότητα. Για παράδειγμα, τα διαφορετικά τμήματα μιας ακτής δεν είναι ταυτόσημα —απλώς μοιάζουν μεταξύ τους. Επίσης, για όλα τα πραγματικά συστήματα υπάρχει ελάχιστη κλίμακα μέτρησης. Αυτά τα δεδομένα πρέπει να τα λαμβάνετε υπόψη κάθε φορά που αναλύετε μια φυσική κατάσταση.

Για να μπορέσουμε να εξετάσουμε τις φράκταλ ιδιότητες ενός συστήματος, πρέπει να είναι μεγάλη η διαφορά ανάμεσα στην ελάχιστη και τη μέγιστη κλίμακα. Αν θεωρήσουμε μια ακτή, η μέγιστη κλίμακα θα είναι περίπου 1.000 km = 10^6 m, και η ελάχιστη κλίμακα, που καθορίζεται από την αστάθεια της παραλίας εξαιτίας των κυμάτων, της παλίρροιας κ.ο.κ., είναι της τάξης του 1 m. Αυτές οι κλίμακες διαφέρουν ένα εκατομμύριο φορές!

Ένα άλλο παράδειγμα φράκταλ καμπύλης είναι το ορατό περίγραμμα ενός νέφους. Εδώ η διαφορά ανάμεσα στην ελάχιστη και τη μέγιστη κλίμακα είναι ακόμη μεγαλύτερη: υπάρχουν δεδομένα για νέφη μεγέθους μερικών εκατοντάδων μέτρων, με ορατές λεπτομέρειες του ενός περίπου μέτρου, έως και για νέφη μεγέθους όσο η Γη (κυκλωνικές περιοχές). Η διάσταση του περιγράμματος ενός νέφους είναι $D = 1{,}35$.

Μέχρι στιγμής έχουμε περιορίσει τη συζήτησή μας αποκλειστικά σε φράκταλ καμπύλες —δηλαδή σε εξαιρετικά ελικτές ευθείες, όπως η καμπύλη Koch. Τα γεωγραφικά μας παραδείγματα ήταν κυρίως παραδοξότητες. Υπάρχουν όμως πολλές φυσικές διαδικασίες που δημιουργούν περιπλοκότερες και σπουδαιότερες φράκταλ δομές.

Χωρίς αμφιβολία, αρκετοί από σας θα έχουν δημιουργήσει κρυστάλλους από κάποιο κορεσμένο διάλυμα. Εάν το διάλυμα δεν είναι υπερκορεσμένο και έχει αναμειχθεί καλά, τότε αναπτύσσεται ένας όμορφος, κανονικός κρύσταλλος από έναν κρυσταλλικό πυρήνα, έναν «σπόρο» που μπορούμε να ρίξουμε μέσα στο διάλυμα. Ο κρύσταλλος αναπτύσσεται επειδή μερικά μόρια κατά τη διάρκεια της θερμικής κίνησής τους προσεγγίζουν θέσεις στην επιφάνεια όπου μπορούν να «κολλήσουν» καταλαμβάνοντας την πλεονεκτικότερη θέση σε σχέση με την ενεργειακή τους κατάσταση. Φυσικά, τα περισσότερα μόρια καταλήγουν σε λιγότερο πλεονεκτικές θέσεις, αλλά αργά ή γρήγορα επιστρέφουν στο διάλυμα διότι οι δεσμοί τους με τον κρύσταλλο δεν είναι αρκετά ισχυροί. Εξαιτίας αυτής της εξισορροπημένης ανάπτυξης αποκτούμε έναν κρύσταλλο χωρίς κοιλότητες και με εντελώς λείες, επίπεδες επιφάνειες. Εάν η κρυστάλλωση και η διάλυση δεν βρίσκονται σε ισορροπία (κάτι που μπορεί να συμβεί με την απότομη κρυστάλλωση σ' ένα υπερκορεσμένο διάλυμα ή κατά την κρυστάλλωση από την αέρια φάση), εμφανίζονται κρύσταλλοι άλλου τύπου. Έχετε δει το στρώμα πάγου που εμφανίζεται στην κατάψυξη του ψυγείου σας, και τα μορφώματα πάγου στα τζάμια των παράθυρων το χειμώνα. Αυτοί οι μάλλον πορώδεις σχηματισμοί δημιουργούνται από τη συμπύκνωση του νερού μέσα στον αέρα. Στην αρχή σχηματίζονται ξεχωριστά συσσωματώματα μορίων. Στη συνέχεια, τα συσσωματώματα πολλαπλασιάζονται και ενοποιούνται δημιουργώντας τα εν λόγω μορφώματα. Οι συνθήκες για την ανάπτυξη των συσσωματωμάτων μοιάζουν με τις συνθήκες σχηματισμού των νιφάδων χιονιού στα σύννεφα.

Αυτή η διαδικασία ανάπτυξης, που ονομάζεται συσσωμάτωση ελεγχόμενη από τη διάχυση, δημιουργεί κρυστάλλους με φράκταλ μορφή που ονομάζονται δενδρίτες. Η φράκταλ διάσταση των δενδριτικών κρυστάλλων καθορίζεται από τους ειδικούς μηχανισμούς ανάπτυξής τους. Ανάλογα με την αλληλεπίδραση των μορίων που σχηματίζουν τον κρύσταλλο αφενός και με το μέγεθός του αφετέρου, ο δενδρίτης μπορεί να έχει είτε τυχαία, ακανόνιστη μορφή είτε τέλεια κανονικό σχήμα —σαν μια νιφάδα χιονιού, για παράδειγμα. Στην πραγματικότητα, όμως, μπορούμε να μιλάμε για την κανονική μορφή μιας νιφάδας μόνο όταν η κλίμακα είναι αρκετά μεγάλη (όσο το μέγεθος της ίδιας της νιφάδας). Σε μικρότερες κλίμακες δεν υπάρχει κανονικότητα —και αυτό αποτελεί αντανάκλαση της τυχαίας διαδικασίας που οδήγησε στο σχηματισμό της.

Η ύπαρξη μιας ελάχιστης κλίμακας (σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να είναι της τάξης μεγέθους, ή και πολύ μεγαλύτερη, ενός μορίου) σημαίνει ότι το συνολικό πλήθος μορίων στον κρύσταλλο (ή η μάζα του) εξαρτάται από το μέγεθός του σύμφωνα με το νόμο $N_{\text{mol}} \sim M \sim \ell^D$. Επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε τη διάσταση των δενδριτικών κρυστάλλων χρησιμοποιώντας την εξάρτηση της μάζας τους από το μέγεθός τους.

Μορφές που μοιάζουν πάρα πολύ στους δενδριτικούς κρυστάλλους αναπτύσσονται στα διηλεκτρικά. Αν ένας ισχυρός ηλεκτρικός σπινθήρας χτυπήσει μια διηλεκτρική πλάκα, θ' αφήσει ένα ιδιαίτερο σχήμα πάνω στην επιφάνεια —τα λεγόμενα σχήματα Lichtenberg, από το όνομα του γερμανού φυσικού και πειραματιστή που τα ανακάλυψε τον 18ο αιώνα. Η ομοιότητα των σχημάτων Lichtenberg και των δενδριτικών κρυστάλλων δεν είναι τυχαία —ο σχηματισμός τους περιγράφεται θεωρητικά από παρόμοιες εξισώσεις.

Η φράκταλ διάσταση είναι ένα σημαντικότατο και μετρήσιμο μέγεθος των φυσικών συστημάτων. Επιπλέον, μπορούμε να την υπολογίσουμε μέσω διαφόρων θεωρητικών μοντέλων. Συγκρίνοντας τις μετρούμενες και τις υπολογιζόμενες τιμές, μπορούμε να αποφασίσουμε ποιο μοντέλο είναι το καλύτερο. Επιπλέον, όταν υπολογίζουμε τις φυσικές ιδιότητες ενός φράκταλ συστήματος (για παράδειγμα, την ελαστικότητα του χιονιού και άλλων πορωδών υλικών), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μαθηματική μέθοδο ανεπτυγμένη ειδικά γι' αυτή την περίπτωση.

Πολλά συστήματα που έχουν χρησιμοποιηθεί για πρακτικούς σκοπούς πολύ καιρό, έχουν φράκταλ ιδιότητες. Για παράδειγμα, η επιφάνεια του ενεργοποιημένου ζωικού άνθρακα, που χρησιμοποιείται ως απορροφητική ουσία σε προστατευτικές μάσκες, είναι φράκταλ. Η διάστασή του είναι μεγαλύτερη από 2. Έχει εξαιρετικά μεγάλη επιφάνεια (τυπικά άπειρη, με την ίδια έννοια που είναι άπειρη η καμπύλη του Koch), και έχει τρύπες κάθε μεγέθους που μπορούν να δεσμεύσουν και να συγκρατήσουν σταθερά οποιουδήποτε μεγέθους σωματίδια —από σκόνη έως μεγαλομόρια. Οι επιφάνειες πολλών στερεών καταλυτών που χρησιμοποιούμε στη χημεία είναι επίσης φράκταλ. Η ενεργότητά τους εξαρτάται από τις φράκταλ ιδιότητες των επιφανειών τους, οι οποίες καθορίζονται από τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε για την προετοιμασία τους και την επεξεργασία τους.

Γνωρίσαμε πολλά αντικείμενα που δεν έχουν ακέραιη διάσταση. Προκύπτει λοιπόν το ερώτημα: ο χώρος που ζούμε είναι τρισδιάστατος; Μπορούμε να δώσουμε σαφή απάντηση σε αυτήν την ερώτηση. Η φράκταλ διάσταση του χώρου καθορίζει την έκφραση πολλών γνωστών φυσικών νόμων. Για παράδειγμα, ο εκθέτης 2 στον παρονομαστή του νόμου του Coulomb $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ ισούται στην πραγματικότητα με $D-1$, όπου D είναι η φράκταλ διάσταση του χώρου. Η ανάλυση των δεδομένων που έχουν συλλεγεί για την επαλήθευση των φυσικών νόμων, οι τύποι των οποίων εξαρτώνται από τη διάσταση του χώρου, έχει δείξει ότι αυτή δεν διαφέρει από το 3 περισσότερο από 10^{-10}. Ο χώρος μας είναι πραγματικά «πολύ τρισδιάστατος».

Αντί συμπεράσματος

Η ιστορία της μελέτης των φράκταλ συστημάτων είναι ιδιαίτερα διδακτική. Στην αρχή τα φράκταλ έμοιαζαν με διανοητικό παιχνίδι όσων ασχολούνταν με τα καθαρά μαθηματικά, και οι ερευνητές των φυσικών επιστημών δεν έδειξαν το παραμικρό ενδιαφέρον γι' αυτά τα αντικείμενα.

Την ίδια εποχή, υπήρχαν μερικά γεγονότα ελάχιστα κατανοητά (όπως το μη μετρήσιμο των ακτών) τα οποία δεν ήταν αρκετά σημαντικά ώστε να αποσπάσουν τη γενική προσοχή και ούτε τόσο ενδιαφέροντα ώστε να μελετηθούν. Το πλήθος των ανάλογων γεγονότων συνέχισε να αυξάνεται, εξακολουθούσαν όμως να είναι μεμονωμένα και να έχουν μικρό ενδιαφέρον. Και τότε απέκτησαν ένα περιεκτικότατο όνομα και σύντομα (δεν πέρασαν παρά μόλις δέκα χρόνια!) άρχισε η «φράκταλ έκρηξη» στη φυσική. Ένας επιστήμονας έφτασε στο σημείο να αποκαλέσει τα φράκταλ μόλυνση του τέλους του αιώνα μας.

Γιατί καθιερώθηκαν τα φράκταλ; Πρώτα απ' όλα, διότι αποδείχτηκε ότι περιβαλλόμαστε από τέτοια συστήματα και ότι ουσιαστικά τα συναντάμε καθημερινά. Δεύτερον, τέτοια αντικείμενα έχουν πολλές ασυνήθιστες ιδιότητες. Αν δεν τις κατανοήσουμε αυτές, δεν μπορούμε να κατανοήσουμε ακόμη και απλά πράγματα όπως τα σχήματα των νεφών ή των νιφάδων του χιονιού. Τρίτον, τα πάντα αποδείχτηκαν περισσότερο πολύπλοκα απ' ό,τι φαινόταν αρχικά: ένα φράκταλ δεν περιγράφεται από μία μοναδική φράκταλ διάσταση αλλά από ένα σύνολο, ένα φάσμα διαφορετικών διαστάσεων, καθεμία από τις οποίες γίνεται ίση με τη διάσταση του ευκλείδειου χώρου απ' τη στιγμή που μεταβαίνουμε από τα φράκταλ στα συνηθισμένα σώματα. Οι διαφορετικές ιδιότητες των φράκταλ συστημάτων εξαρτώνται από τις διαφορετικές διαστάσεις. Τέταρτο... Πέμπτο... Δέκατο... —νέα ερωτήματα εγείρονται ταχύτερα απ' όσο μπορούμε ν' απαντήσουμε στα παλιά.

Πολλές θεωρίες έχουν περάσει από το στάδιο της συσσώρευσης των ερωτημάτων πριν επιτύχουν την αρμονία και την ολοκλήρωση. Η καλύτερη εποχή για τα φράκταλ, λοιπόν, δεν έχει έρθει ακόμη. ◘

⇨ *Συνέχεια από τη σελίδα 53*

λοκαίρι του 1918 αποφάσισε να αναζητήσει ξανά εργασία. Την περίοδο εκείνη ήταν τόσο απελπισμένος ώστε έκανε αίτηση ακόμη και για μια θέση στο Πουέρτο Ρίκο.

Εκείνη την εποχή ο καθηγητής Oswald Veblen του Πανεπιστημίου του Πρίνστον τον κάλεσε να συμμετάσχει στην πρόσφατα δημιουργημένη ομάδα βλητικής στο πεδίο δοκιμών του Αμπερντήν, στο Μαίριλαντ. Η κύρια αποστολή της ομάδας ήταν η δοκιμή νέων πυροβόλων όπλων και η κατάρτηση πινάκων βεληνεκούς σε σχέση με τη γωνία βολής, το μέγεθος του βλήματος, και άλλους παράγοντες. Απ' ό,τι φαίνεται, ο Wiener απολάμβανε την άμεση πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών στους βαλλιστικούς υπολογισμούς, και η εμπειρία του στο Αμπερντήν αποδείχτηκε πολύτιμη στις μελέτες του κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο για τα αντιαεροπορικά πυρά.

Μετά τον πόλεμο, ο Wiener ήλπιζε ότι θα ακολουθούσε τον Veblen πίσω στο Πρίνστον, όπου ο Veblen ήταν βασικός οργανωτής του τμήματος των μαθηματικών —τμήμα που γρήγορα θα γινόταν διάσημο. Η πρόσκληση δεν ήρθε ποτέ. Την ίδια περίπου εποχή, κατά την επιδημία γρίπης που σάρωσε όλη τη χώρα μετά το τέλος του Α' Παγκοσμίου Πολέμου, πέθανε ο αρραβωνιαστικός της αδελφής του Constance, ο οποίος μόλις είχε αρχίσει τη σταδιοδρομία του ως μαθηματικός. Μετά τον πρόωρο θάνατό του, ο Norbert απέκτησε αρκετά μαθηματικά βιβλία από τη βιβλιοθήκη του. Με αυτόν τον τυχαίο τρόπο ο Wiener γνώρισε τη *Θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων* του Volterra, τη *Θεωρία συναρτήσεων* του Osgood, το βιβλίο του Lebesgue για τη θεωρία ολοκλήρωσης και την πραγματεία του Fréchet για τη θεωρία των συναρτησεοειδών. Ο Wiener υποστηρίζει ότι «για πρώτη φορά άρχισα να κατανοώ πραγματικά τα σύγχρονα μαθηματικά». Όπως παρατηρεί ο Norman Levinson, ο σημαντικότερος μαθητής του Wiener, αυτή η δήλωση είναι εντυπωσιακή αφού προέρχεται από έναν άνθρωπο που είχε παρακολουθήσει τις διαλέξεις του Hardy πέντε χρόνια νωρίτερα —για να μην αναφέρουμε το εξάμηνο στο Γκαίτινγκεν με τον Hilbert, την πηγή της σύγχρονης ανάλυσης. Εδώ βλέπουμε την ειρωνεία της πρόωρης ανάπτυξης του Wiener: πήρε το διδακτορικό του όταν ήταν 18 ετών, αλλά άρχισε να κατανοεί τα μαθηματικά μόνο όταν έφτασε στην αρκετά προχωρημένη ηλικία των 24 ετών. ◘

ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ

Μπορούν οι μηχανές να σκέφτονται;

John Haugeland, *ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ.*
(Αγγλικός τίτλος: *Artificial Intelligence.*)
Μετάφραση: Στέλιος Ζαχαρίου.
Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1992.

του Σπύρου Μανουσέλη

Το όνειρο να κατασκευαστεί ένα μηχανικό ομοίωμα του ανθρώπινου σώματος και του ανθρώπινου νου χάνεται στα βάθη των αιώνων. Από την *Ιλιάδα* μαθαίνουμε ότι ο Ήφαιστος —ο θεϊκός τεχνίτης— είχε φτιάξει πολυάριθμα αυτόματα για να υπηρετούν τον ίδιο και τους άλλους θεούς του Ολύμπου. Τέτοια μυθικά τεχνήματα, όπως ο Τάλως και οι τρίποδες του Ηφαίστου, τα περίεργα αγάλματα του Δαιδάλου, που κατά τον Πλάτωνα, ο δημιουργός του έπρεπε να τα κλειδώνει για να μην το σκάνε τη νύχτα, αλλά και οι μεταγενέστεροι μύθοι του Γκόλεμ και του Φρανκενστάιν, φαίνεται να αποτελούν ένα σταθερό μοτίβο στην ιστορία κάθε μεγάλου πολιτισμού.

Έκτοτε ο άνθρωπος επινόησε διάφορες μηχανές είτε για να ελαφρύνει το μόχθο και να πολλαπλασιάσει την αποτελεσματικότητα της εργασίας του, είτε για να διεκπεραιώσει με κάποια μηχανή την ίδια την ανθρώπινη εργασία. Αλλά, όπως και οι μυθικοί πρόγονοί τους, τα νέα τεχνήματα γεννούσαν πάντοτε κατά την εμφάνισή τους ένα ανάμεικτο και διφορούμενο αίσθημα: τη χαρά της δημιουργίας και έναν αόριστο φόβο απειλής.

Σήμερα, το ανάμεικτο αίσθημα ενθουσιασμού/ανησυχίας είναι εντονότερο από ποτέ, αφού οι μηχανές, που σταδιακά υποκατέστησαν τα ανθρώπινα σώματα, απειλούν να υποκαταστήσουν στο άμεσο μέλλον τη νόηση που τις δημιούργησε. Ό,τι χθες υπήρχε μονάχα σαν ένα όνειρο (ή εφιάλτης), δηλαδή το να προικίσουμε τις μηχανές με νοημοσύνη, σήμερα αποτελεί το αντικείμενο εντατικών ερευνών δύο νέων και εξαιρετικά παραγωγικών επιστημονικών κλάδων: της τεχνητής νοημοσύνης και της γνωσιακής επιστήμης.

Πράγματι, τις τελευταίες δεκαετίες γίναμε μάρτυρες μιας πρωτοφανούς συσσώρευσης νέων και επαναστατικών ανακαλύψεων σχετικά με τη δομή και τη λειτουργία του ανθρώπινου νου. Διαφορετικοί και απομονωμένοι κατά το παρελθόν επιστημονικοί κλάδοι, όπως η ψυχολογία, η γλωσσολογία, η επιστήμη των υπολογιστών, η φιλοσοφία της νόησης, άρχισαν κατά τη δεκαετία του 1960 να συγκλίνουν, στο πλαίσιο ενός κοινού διεπιστημονικού ερευνητικού προγράμματος, που κάποιοι το ονόμασαν «γνωσιακό πρόγραμμα» (cognitivism) και κάποιοι άλλοι «υπολογιστική θεωρία της νόησης» (computationalism).

Τα τελευταία χρόνια δαπανήθηκαν ποταμοί μελάνης γι' αυτά τα θέματα και δημοσιεύτηκαν κυριολεκτικά χιλιάδες άρθρα και εκατοντάδες βιβλία. Σε αυτή την εκδοτική έκρηξη το βιβλίο του John Haugeland *Τεχνική Νοημοσύνη* κατέχει εξέχουσα θέση τόσο για τη σαφήνεια των επιχειρημάτων του όσο και για τη διαυγή παρουσίαση αυτών των δύσκολων θεμάτων. Ο συγγραφέας, που είχε πρωταγωνιστικό ρόλο στη διαμόρφωση της «γνωσιακής επιστήμης», καταφέρνει να παρουσιάσει με σπάνια απλότητα τις βασικές έννοιες και τις μεθόδους της πρόσφατης Επιστήμης και Τεχνολογίας της Νόησης. Μάταια θα αναζητήσει ο αναγνώστης πληροφορίες για τις τελευταίες εξελίξεις στην αρχιτεκτονική των υπολογιστών ή για τα πιο πρόσφατα επιτεύγματα στην τεχνολογία λογισμικού και στα έμπειρα συστήματα. Το βιβλίο αυτό δεν είναι ούτε ένα εγχειρίδιο τεχνητής νοημοσύνης για ειδικούς ούτε ένα είδος «οδηγού για αρχάριους» σε «ευφυή» προγράμματα για υπολογιστή. Αντίθετα, ο Haugeland επέλεξε να παρουσιάσει εκείνες τις βασικές ιδέες και μεθόδους της τεχνητής νοημοσύνης που καταφέρνουν να ρίξουν κάποιο φως στο μέχρι χθες αινιγματικό ερώτημα «πώς λειτουργεί η ανθρώπινη νόηση;».

Η θεμελιώδης και καθοδηγητική υπόθεση για τη διαμόρφωση της τεχνητής νοημοσύνης (εφεξής ΤΝ) ήταν η παραδοχή ότι κάθε νοητική διαδικασία είναι μια υπολογιστική διεργασία πάνω σε συμβολικές αναπαραστάσεις, δεν είναι δηλαδή τίποτε άλλο από το χειρισμό συμβόλων βάσει κανόνων. Όπως γράφει ο ίδιος ο Haugeland, το βασικό θέμα του βιβλίου του είναι «η ιδέα ότι σκέψη και υπολογισμός είναι ουσιαστικά το ίδιο πράγμα»! Πρόκειται για την κυρίαρχη σήμερα θεωρία της νόησης που εισηγούνται η γνωσιακή επιστήμη και η ΤΝ. Αυτή η επιστημονική υπόθεση έχει ορισμένες απροσδόκητες συνέπειες. Κατ' αρχάς, επιβάλλει τη διάκριση του λογισμικού (software) από το υλικό (hardware) κάθε υπολογιστικού συστήματος. Πίσω από αυτήν τη φαινομενικά αθώα διάκριση κρύβεται μια βαθύτερη δυϊστική αντίληψη που υποχρεώνει τους οπαδούς του γνωσιακού προγράμματος όχι μόνο να διαχωρίζουν τη νόηση από το υλικό της υπόστρωμα, δηλαδή τον εγκέφαλο, αλλά και ουσιαστικά να αδιαφορούν γι' αυτό! Αυτό που έχει πραγματικά σημασία, υποστηρίζουν, είναι να βρεθεί το κατάλληλο πρόγραμμα και όχι το πού υλοποιείται αυτό το πρόγραμμα. Αν η νόηση βρίσκεται στον εγκέφαλο όπως το πρόγραμμα σε μια υπολογιστική μηχανή, τότε τα νοητικά φαινόμενα δεν είναι *τίποτε άλλο* από μερικά πολύπλοκα προγράμματα που «τρέχουν» στον εγκέφαλο. Και ο εγκέφαλος, με τη σειρά του, δεν είναι *τίποτε άλλο* από μια πολύπλοκη υπολογιστική μηχανή βιολογικού τύπου που αντί για κυκλώματα πυριτίου έχει νευρώνες. Αν μάλιστα καταφέρναμε —και, στη θεωρία, τίποτε δεν μας το απαγορεύει— να προσομοιώσουμε μέσω των κατάλληλων προγραμμάτων τις ανθρώπινες νοητικές ικανότητες σ' έναν ψηφιακό υπολογιστή, τότε και αυτός ο «ηλεκτρονικός εγκέφαλος» θα έπρεπε να θεωρείται νοήμων!

Μία από τις μεγάλες αρετές του βιβλίου είναι ότι αναζητεί την «πραγματική διανοητική γενεαλογία» αυτής της φαινομενικά απλής ιδέας όχι τόσο στην εκπληκτική πρόοδο των υπολογιστικών μηχανών όσο στις θεωρητικές προϋποθέσεις αυτής της προόδου. Ορθά ο Haugeland θεωρεί ότι τα σπέρματα των πρόσφατων επιστημονικών εξελίξεων πρέπει να τα αναζητήσουμε στην ίδια τη λογοκεντρική παράδοση του δυτικού πολιτισμού, και ειδικότερα στη λεπτή εννοιολογική εργασία στοχαστών όπως ο Τόμας Χομπς, ο Τζων Λοκ και ο Ντέιβιντ Χιουμ. Αυτό όμως που ο Haugeland δεν το τονίζει όσο θα έπρεπε είναι ότι το έργο αυτών των φιλοσόφων θα είχε μείνει «κενό γράμμα» χωρίς τις πρωτοποριακές προσπάθειες μεγάλων επιστημόνων της λογικής, (όπως ο G.W. Leibniz και ο G. Boole) να συγκροτήσουν μια τέλεια λογική γλώσσα. Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι σχεδόν όλες οι θεμελιώδεις έννοιες της ΤΝ, όπως η έννοια του αυτόματου τυπικού συστήματος ή της καθολικής μηχανής Turing, και οι πρώτες γλώσσες προγραμματισμού αποτελούν τη φυσική εξέλιξη της σύγχρονης τυπικής λογικής.

Εξαιρώντας την εισαγωγή, όπου παρουσιάζεται το αντικείμενο και τα όρια του βιβλίου, και το πρώτο κεφάλαιο, που έχει ιστορικό χαρακτήρα, στα υπόλοιπα πέντε κεφάλαια ο Haugeland αναλύει εξαντλητικά όλες τις βασικές έννοιες, τις μεθόδους αλλά και τα προβλήματα της κλασικής ΤΝ, που ο ίδιος την αποκαλεί χαριτολογώντας «Παλιά Καλή Τεχνητή Νοημοσύνη». Θα μπορούσε κανείς να αντιτείνει ότι η παρουσίαση της ΤΝ στην οποία προβαίνει ο Haugeland είναι κάπως υπερβολικά περιορισμένη, αφού δεν γίνεται καμία αναφορά στο εναλλακτικό ερευνητικό πρόγραμμα που θα γεννηθεί μέσα στο πλαίσιο της ΤΝ κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1970. Πρόκειται για τα πολυσυζητημένα *συστήματα παράλληλα κατανεμημένης επεξεργασίας* ή, όπως έγιναν ευρύτερα γνωστά, *τεχνητά νευρωνικά δίκτυα*, που εμφανίζονται ως η μοναδική εναλλακτική λύση στα αδιέξοδα της κλασικής ΤΝ[1]. Το γεγονός ότι δεν γίνεται καμία αναφορά σε αυτή τη νέα προοπτική είναι ασφαλώς μια σοβαρή παράλειψη του βιβλίου. Ωστόσο, ακόμη και τα εν λόγω συστήματα εντάσσονται σε αυτό που ο Haugeland αποκαλεί *υπολογιστικό μοντέλο της νόησης*.

Έπειτα από εντατικές έρευνες και εκπληκτικές κατακτήσεις σαράντα ετών, παραμένει ανοιχτό το ερώτημα «είναι τελικά δυνατή η μηχανοποίηση της νόησης;», ή, με άλλα λόγια, «θα καταφέρουμε ποτέ να κατασκευάσουμε μηχανές προικισμένες με σκέψη και συναίσθημα;». Ίσως τελικά αυτό να μην έχει και τόση σημασία, αφού κυνηγώντας το όνειρο των «νοημόνων μηχανών» μαθαίνουμε περισσότερα πράγματα για τη νόηση των ανθρώπων.

1. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα νευρωνικά δίκτυα, βλ. George Johnson, *Τα παλάτια της μνήμης*, Κάτοπτρο, Αθήνα 1993, και για μια γενικότερη κριτική του υπολογιστικού μοντέλου της νόησης, βλ. τα δοκίμια των H. Morowitz, J.R. Searle και T. Nagel που υπάρχουν στο βιβλίο *Το εγώ της νόησης*, Κάτοπτρο, Αθήνα 1993.

Υψηλή εκλαΐκευση

Ε.Ν. Οικονόμου κ.ά., *Η ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΕΡΑ*, τόμ Ι και ΙΙ. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1986.

του Νίκου Κοτρίδη

Το 1986 κυκλοφόρησε ένα από τα πρώτα βιβλία των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης με τίτλο *Η Φυσική σήμερα* και υπότιτλο «Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας». Στο εξώφυλλο του βιβλίου, στο κάτω μέρος του, υπήρχε η «περίεργη» φράση: προκαταρκτική έκδοση. Από τον πρόλογο καταλάβαινε κανείς ότι το βιβλίο εντασσόταν στην «Εισαγωγική Σειρά Θετικών και Ιατρικών Επιστημών» αυτού του εκδοτικού οίκου, η οποία «απευθύνεται σ' ένα ευρύτερο κοινό», και ότι η προκαταρκτική έκδοση —που είχε ως βασικό συγγραφέα τον Ε.Ν. Οικονόμου και περιείχε συνεργασίες των Γ. Ηλιόπουλου, Π. Λαμπρόπουλου, Γρ. Νίκολη, Β. Παπαζάχου, Β. Ξανθόπουλου και Στ. Τραχανά— έγινε κυρίως για να καλύψει τις διδακτικές ανάγκες των πρωτοετών φοιτητών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Μερικά χρόνια αργότερα κυκλοφόρησε *Η Φυσική σήμερα* σε δύο τόμους (το 1990 ο πρώτος τόμος, με υπότιτλο «Ι. Τα θεμέλια», και το 1991 ο δεύτερος τόμος, με υπότιτλο «ΙΙ. Οι δέκα κλίμακες της ύλης»), ολοκληρωμένη και αναθεωρημένη, και με τους ίδιους συγγραφείς.

Οι μόνες πληροφορίες που μπορεί να βρει κανείς για την παραπάνω εισαγωγική σειρά υπάρχουν στον πρώτο τόμο του εν λόγω έργου, και συγκεκριμένα στο εισαγωγικό σημείωμα-πρόλογο, όπου υπογραμμίζεται ότι στόχος της είναι να καλύψει τα μαθηματικά, την επιστήμη των υπολογιστών, τη φυσική, τη χημεία, τη βιολογία και την ιατρική με ένα βασικό σύγγραμμα για καθεμιά από αυτές τις επιστήμες, το οποίο να δίνει στον αναγνώστη μια πανοραματική άποψη και μια συνολική εικόνα τους. Η σειρά απευθύνεται τόσο στους επιστήμονες των αντίστοιχων κλάδων —προπαντός δε στους καθηγητές της μέσης εκπαίδευσης— όσο και σ' ένα ευρύτερο κοινό με επιστημονικά ενδιαφέροντα (επιστήμονες άλλων κλάδων, εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, φοιτητές, ακόμη και μαθητές λυκείου). Για το λόγο αυτό η παρουσίαση έπρεπε να γίνεται ποιοτικά και περιγραφικά και να αποφεύγεται —κατά το δυνατόν— η χρήση μαθηματικών τύπων. Πρόκειται, λοιπόν, για μια εκλαϊκευτική σειρά.

Η εκλαΐκευση της επιστήμης είναι έργο εξαιρετικά δύσκολο. Προϋποθέτει όχι μόνο την καλή γνώση του αντικειμένου αλλά, κυρίως, την ικανότητα εύληπτης παρουσίασής του στο ευρύ κοινό (απαλοιφή του τεχνικού χαρακτήρα, της συντεχνιακής γλώσσας και του μαθηματικού φορμαλισμού) και σύνδεσης της επιστήμης με την καθημερινή ζωή μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων και επινοήσεων. Αν ρίξει κανείς μια ματιά στους υπερεκατό τίτλους εκλαϊκευτικών βιβλίων που κυκλοφορούν σήμερα στη γλώσσα μας θα παρατηρήσει αμέσως ότι, στην πλειονότητά τους, διάσημοι επιστήμονες ασχολούνται με εξειδικευμένους τομείς της επιστήμης. Κοιτώντας τα πράγματα από τη σκοπιά αυτή πρέπει να δεχτούμε ότι το εγχείρημα με το οποίο καταπιάστηκαν οι εμπνευστές της «Εισαγωγικής Σειράς Θετικών και Ιατρικών Επιστημών» είναι τεράστιο, τολμηρό, φιλόδοξο και συναρπαστικό, αλλά και επικίνδυνο.

Η Φυσική σήμερα, το πρώτο έργο που κυκλοφόρησε στο πλαίσιο της σειράς, ίσως αποτελέσει και το «δείγμα γραφής» της (οι συντελεστές της, άλλωστε, δεν κρύβουν τη φιλοδοξία τους να εκδοθούν μελλοντικά και άλλοι τόμοι του έργου). Σε γενικές γραμμές, κατά τους ίδιους, στον πρώτο τόμο επιχειρείται να δοθεί μια «εκ του μακρόθεν» εικόνα των βασικών ιδεών και νόμων της φυσικής (κλασικής και κβαντικής), ενώ στον δεύτερο παρατίθενται αυτοτελή κεφάλαια, επιλεγμένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αντιπροσωπεύονται όλες οι κλίμακες οργάνωσης της ύλης. Σε κάθε κεφάλαιο εξετάζεται κάποιο συγκεκριμένο θέμα.

Στον πρώτο τόμο ο Ε.Ν. Οικονόμου αναλαμβάνει να «βγάλει τα κάστανα απ' τη φωτιά» και το κατορθώνει με απόλυτη επιτυχία. Και ξέρει και μπορεί να μυήσει στη βασική επιστήμη της φύσης καθώς, σχεδόν χωρίς να χρησιμοποιεί μαθηματικό φορμαλισμό, αναδεικνύει, σχολιάζει και συνδέει βασικές έννοιες και νόμους που διέπουν τη συμπεριφορά της ύλης (μακροσκοπικής και μικροσκοπικής). Έτσι, ο αναγνώστης του:

— Εξοικειώνεται με τη βασική μεθοδολογία, το αντικείμενο και το χαρακτήρα της φυσικής, αλλά και την ατομική εικόνα και, μέσω αυτής, με το «γενικό πρόγραμμα ερμηνείας» του κόσμου.

— Αντιλαμβάνεται τη σημασία που έχει η έννοια της τροχιάς στην κλασική μηχανική, κατορθώνει να συνδέσει τους γενικούς νόμους διατήρησης (ορμής, στροφορμής, ενέργειας) με ιδιότητες του (κενού) χώρου (ομοιογένεια, ισοτροπία) και του χρόνου (ομοιογένεια), τη βαρυτική και την ηλεκτρομαγνητική δύναμη με τα αντίστοιχα πεδία, τις εξισώσεις του Maxwell με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, την αρχή της σχετικότητας με το πείραμα των Michelson-Morley, την εντροπία με το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα (και το ζήτημα του σχηματισμού έμβιων όντων). Με αυτό τον τρόπο ξεναγείται, χωρίς να χαθεί ή να κουραστεί, στο λαμπρό οικοδόμημα της κλασικής φυσικής. Η ξενάγηση ολοκληρώνεται με την εισαγωγή του στο χώρο της σχετικότητας (ειδικής και γενικής), δίνονται δε πληροφορίες τόσο για τα θετικά του γνωρίσματα όσο και για τις αδυναμίες του που οδήγησαν στην κβαντική επανάσταση.

— Οδηγείται από την κβάντωση της ενέργειας στα ατομικά μοντέλα και την ερμηνεία της ευστάθειας των ατόμων, ανακαλύπτει την «ανυπαρξία» της έννοιας της τροχιάς για το μικρόκοσμο και την αντικατάστασή της (μέσω της έννοιας της κυματοσυνάρτησης) από την έννοια της πυκνότητας πιθανότητας, εισάγεται στο «χώρο» των κυματοσωματιδίων και συνδέει την αρχή της αβεβαιότητας με τη σταθερότητα των «μικροδομών». Η ξενάγησή του κλείνει με τα βασικά αξιώματα της «νέας φυσικής» και την απαγορευτική αρχή του Pauli, αφού εν τω μεταξύ έχει αναδειχθεί η τεράστια ερμηνευτική ισχύς της κβαντικής μηχανικής η οποία, παρότι «δυσπρόσιτη» και «αφηρημένη», αποτελεί σημαντικό εργαλείο για να κατανοήσουμε έναν ευρύτατο κύκλο μικροσκοπικών και μακροσκοπικών φαινομένων, και να γνωρίσουμε την ιστορία και —σε γενικό επίπεδο— το μέλλον του σύμπαντος.

— Εισάγεται στους κλάδους της σύγχρονης φυσικής και γνωρίζει συνοπτικά το αντικείμενο, τις σημερινές τάσεις και τις προοπτικές κάθε κλάδου, σχηματίζοντας έτσι πλήρη εικόνα για τη γένεση και την εξέλιξη της φυσικής.

Στον δεύτερο τόμο τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά, και τούτο όχι επειδή συνυπάρχουν πολλοί συγγραφείς, αλλά λόγω του διαφορετικού τρόπου με τον οποίο προσεγγίζεται ο βασικός στόχος που έθεσαν οι δημιουργοί της σειράς (συνέπεια, άραγε, της έλλειψης συντονιστή —αν και από την εισαγωγή και τη σύνταξη ερωτήσεων σε μερικά κεφάλαια μπορεί κανείς να υποθέσει δικαιολογημένα ότι ο Ε.Ν. Οικονόμου «έπαιξε», εν μέρει τουλάχιστον, αυτό το ρόλο). Συγκεκριμένα:

— Οι Ηλιόπουλος, Οικονόμου, Ορφανουδάκης και Ξανθόπουλος επιλέγουν και αναπτύσσουν αυτοτελή κεφάλαια που αναφέρονται στις αντίστοιχες κλίμακες οργάνωσης της ύλης αλλά συνθέτουν τη σημερινή εικόνα της φυσικής στοιχειωδών σωματίων, της φυσικής του πυρήνα, της ιατρικής φυσικής και της αστροφυσικής (και κοσμογονίας-κοσμολογίας). Και καλά κάνουν· στόχος του έργου, άλλωστε, δεν είναι να δώσει στον αναγνώστη την εικόνα της φυσικής σήμερα;

— Οι Λαμπρόπουλος, Οικονόμου, Παπαζάχος και Νίκολης ασχολούνται με εξειδικευμένα θέματα —τα οποία, βεβαίως, παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον— από τις αντίστοιχες κλίμακες οργάνωσης της ύλης, και ξεναγούν τον αναγνώστη ο πρώτος στον μαγευτικό χώρο των λέιζερ (όχι, όμως, στην ατομική και μοριακή φυσική), ο δεύτερος στον εξωτικό χώρο της υπεραγωγιμότητας (όχι, όμως, στη φυσική συμπυκνωμένης ύλης), ο τρίτος στον τρομακτικό χώρο των σεισμών, της πρόγνωσής τους μάλλον (όχι, όμως, στη γεωφυσική), και ο τελευταίος στη θερμοδυναμική της εξέλιξης.

— Το βιβλίο κλείνει μ' ένα γλαφυρό και ενδιαφέρον άρθρο του Στ. Τραχανά που πραγματεύεται τη βιολογική καταλληλότητα των φυσικών νόμων (αλλά και σωματιδίων, δυνάμεων, σταθερών), και το οποίο συνδέεται μόνο με τον πρόλογο του πρώτου τόμου του έργου.

Ωστόσο, παρότι ο δεύτερος τόμος εμφανίζεται άνισος και ανομοιόμορφος και δεν «στέκεται στο ύψος» του πρώτου, είναι ελκυστικός και βοηθάει τον αναγνώστη να συνειδητοποιήσει τις υπερβολές που ενδεχομένως συνοδεύουν κάποια από τα θέματα που αναπτύσσονται στις σελίδες του.

Συμπερασματικά, η έκδοση του έργου *Η Φυσική σήμερα* πλούτισε το χώρο της εκλαΐκευσης. Οι βασικοί εμπνευστές της ιδέας της «Εισαγωγικής Σειράς Θετικών και Ιατρικών Επιστημών», λοιπόν, πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι το κοινό περιμένει τη συνέχισή της.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M21

Αφού $1/x > 1/n$, έχουμε $x < n$, και επομένως μπορούμε να θέσουμε $x = n - i$, όπου i είναι ακέραιος με $1 \le i \le n - 1$. Τότε

$$y = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{n-i} - \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{n(n-i)}{i}.$$

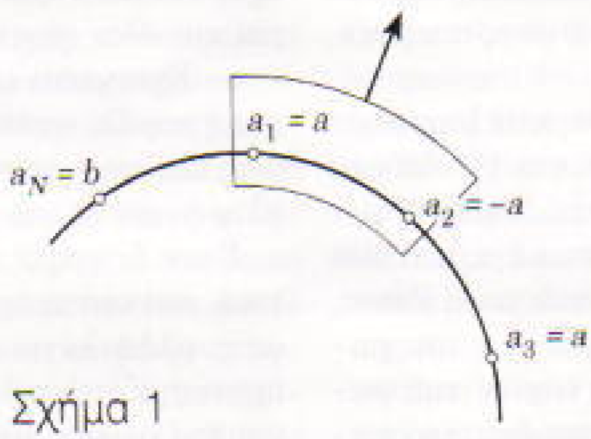
Βλέπουμε ότι η εξίσωσή μας δεν έχει ακέραιες θετικές λύσεις για $n = 1$ (αφού $x = n - i \ge 1$), και πως για κάθε $n > 1$ έχει τουλάχιστον μία λύση (με $i = 1$): $x = n - 1$, $y = n(n - 1)$. Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη και άλλης λύσης είναι η διαιρετότητα του $n(n - i) = n^2 - ni$ από κάποιο i, με $1 < i < n$, πράγμα που ισοδυναμεί με τη διαιρετότητα του n^2 με το i (έτσι εξασφαλίζουμε ότι το y είναι ακέραιος). Είναι φανερό, όμως, ότι τέτοιο i υπάρχει αν και μόνο αν ο n είναι σύνθετος —γεγονός που συμπληρώνει την απόδειξη.

M22

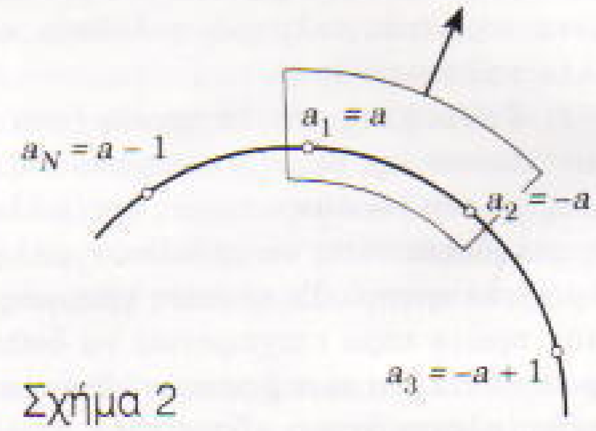
Μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση επαγωγικά. Για $N = 1$, ο μοναδικός αριθμός a που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος μόνος του είναι το 0 (πρέπει να ισχύει $a = -a$).

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $N - 2$ αριθμούς ($N \ge 3$), και ας θεωρήσουμε μια διευθέτηση N αριθμών $a_1, a_2, ..., a_N$ (αριθμημένων κατά δεξιόστροφη φορά) που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος (Σχήμα 1). Ένας τουλάχιστον από αυτούς θα πρέπει να προέρχεται από τον προηγούμενό του με αλλαγή του προσήμου του —διαφορετικά, θα είχαμε $a_1 = a_N + 1 = a_{N-1} + 2 = ... = a_1 + N$, πράγμα που είναι αδύνατον.

Μπορούμε επομένως να διαλέξουμε ένα ζεύγος αριθμών που διαφέρουν μόνο ως προς το πρόσημο και να τους ονομάσουμε $a_1 = a = -a_2$. Έχουμε τώρα δύο δυνατότητες για την τιμή του a_N: μπορεί να είναι $-a$ ή $a - 1$. Επίσης, έχουμε δύο δυνατότητες για την τιμή του a_3: μπορεί να είναι είτε a είτε $-a + 1 = 1 - a$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ανεξάρτητα από το ποιες είναι οι τιμές των a_N και a_3, αν αφαιρέσουμε τους a_1 και a_2, τότε οι αριθμοί που απομένουν ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Άρα, η επαγωγική υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι οι αριθμοί που απομένουν είναι ακέραιοι και ότι βρίσκουμε οποιονδήποτε ακέραιο m τόσες φορές όσες βρίσκουμε τον $-m$. Μπορούμε τότε να δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την αρχική διευθέτηση των αριθμών, ολοκληρώνοντας έτσι την επαγωγή.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $a_3 = a$. Τότε, ανεξάρτητα από την τιμή του a_N που διαλέγουμε, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι αριθμοί που απομένουν ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος: ο a_3 προκύπτει από τον a_N είτε προσθέτοντας 1 (αν $a_N = a - 1$) είτε αντιστρέφοντας το πρόσημό του (αν $a_N = -a$). Επομένως, οι αριθμοί που απομένουν πρέπει να είναι ακέραιοι και κάθε αριθμός να εμφανίζεται τόσες φορές όσες και ο αντίθετός του. Τότε, όμως, και η αρχική διευθέτηση των αριθμών αποτελείται επίσης από ακέραιους. Και, αφού προκύπτει με την προσθήκη του a και του $-a$, θα περιέχει και αυτή ίσο πλήθος αντιγράφων κάθε ακέραιου και του αντίθετού του.

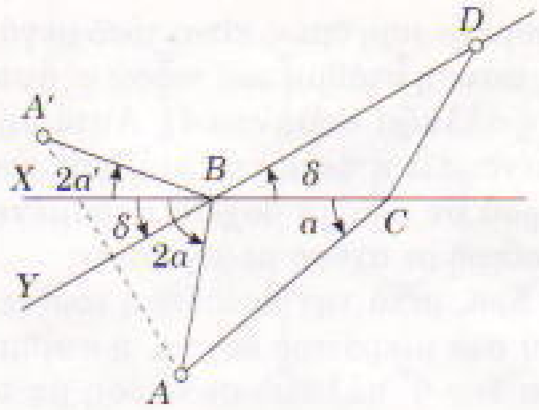
Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι τα ίδια ισχύουν όταν $a_3 = 1 - a$ (Σχήμα 2), ανεξάρτητα από την τιμή του a_N που επιλέγουμε. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή.

Παρότι η περίπτωση $N = 3$ καλύπτεται από την επαγωγή, θα ήταν διδακτικό να εξετάσετε απευθείας αυτή την περίπτωση. Για άρτιες τιμές του N το συμπέρασμα του προβλήματος είναι ψευδές. Μπορείτε να προσπαθήσετε να κατασκευάσετε αντιπαραδείγματα.

M23

Μπορούμε να θεωρήσουμε το διάγραμμα «κεντραρισμένο» γύρω από τα σημεία B και C, τα οποία δεν μετακινούνται κατά τους μετασχηματισμούς που περιγράψαμε. Τότε το σημείο A παραμένει σε απόσταση μίας μονάδας από το B. Έπεται ότι η θέση του σημείου A καθορίζεται μονοσήμαντα από την προσημασμένη γωνία $\alpha = \angle BCA$ (το πρόσημο είναι θετικό όταν η «συντομότερη» περιστροφή από την ακτίνα CB στην CA είναι δεξιόστροφη, διαφορετικά είναι αρνητικό). Παρομοίως, το σημείο D καθορίζεται από την προσημασμένη γωνία $\delta = \angle CBD$. Ως παρά τη βάσει γωνίες ισοσκελών τριγώνων, οι γωνίες αυτές λαμβάνουν τιμές μεταξύ των $\pi/2$ και $-\pi/2$. Ας δούμε τι συμβαίνει στο ζεύγος (α, δ) ύστερα από τους μετασχηματισμούς μας.

Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την BD. Για οποιοδήποτε σημείο X της προέκτασης της CB (Σχήμα 3) η προσημασμένη γωνία $\angle XBA = 2\alpha$



Σχήμα 3

(ως εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου ABC). Παρομοίως, $\angle XBA' = 2\alpha'$, όπου $\alpha' = \angle BCA'$. Από την κατασκευή, η προέκταση BY της DB διχοτομεί τη γωνία ABA'. Εκφράζοντας τις ίσες προσημασμένες γωνίες ABY και YBA' βάσει των προσημασμένων γωνιών δ, 2α, και $2\alpha'$ (δείτε το Σχήμα 3), έχουμε

$$\angle ABX + \angle XBY = \angle ABY = \angle YBA' = \angle YBX + \angle XBA',$$

ή $-2\alpha + \delta = -\delta + 2\alpha'$, ή $\delta = \alpha + \alpha'$, δηλαδή η πρώτη συμμετρία αντικαθιστά το ζεύγος (α, δ) το οποίο ορίζει ολόκληρο το τετράπλευρο, με το ζεύγος $(\delta - \alpha, \delta)$:

$$(\alpha, \delta) \to (\delta - \alpha, \delta).$$

Για να είμαστε ειλικρινείς, το επιχείρημά μας έχει κενό: στηρίζεται ισχυρά στο σχήμα. Στην πραγματικότητα, η σχέση $\angle ABY = \angle ABX + \angle XBY$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως αληθεύει γενικά μόνο «modulo 2π» —δηλαδή όταν η διαφορά ανάμεσα στο δεξιό και το αριστερό μέλος είναι πολλαπλάσιο του 2π (δείτε τα παραδείγματα του Σχήματος 4). Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τη $\angle YBA'$ επίσης. Επομένως, ο σωστός τύπος για το α' είναι $\alpha' = \delta - \alpha + k\pi$ για κάποιο ακέραιο k ($k = 0$, 1, ή -1). Όμως, γνωρίζοντας το $\delta - \alpha$, μπορούμε πάντοτε να καθορίσουμε μονοσήμαντα το k από τη συνθήκη $-\pi/2 < \alpha' < \pi/2$. Αυτό μας επιτρέπει να παραλείπουμε τους όρους $k\pi$ από τους τύπους των μετασχηματισμών μας (και να τους κρατάμε στο μυαλό μας).

Ο μετασχηματισμός της συμμετρίας ως προς την BD είναι ίδιος με τον προηγούμενο, με τη διαφορά ότι οι όροι στο ζεύγος αλλάζουν ρόλους: ο πρώτος παραμένει ο ίδιος και ο δεύτερος αντικαθίσταται από τη διαφορά ανάμεσα στον πρώτο και τον δεύτερο. Εναλλάσσοντας αυτούς τους μετασχηματισμούς, παίρνουμε διαδοχικά:

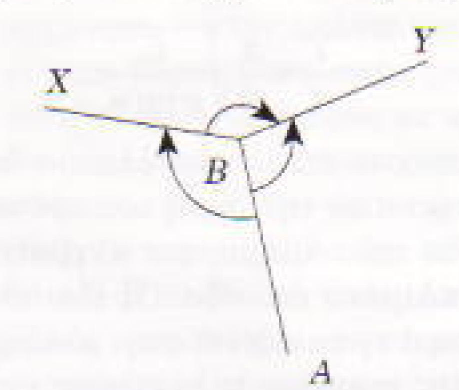
$$(\alpha, \delta) \to (\delta - \alpha, \delta) \to (\delta - \alpha, -\alpha) \to (-\delta, -\alpha) \to (-\delta, \alpha - \delta) \to (\alpha, \alpha - \delta) \to (\alpha, \delta)$$

—επιστρέψαμε σε έξι βήματα! (Για να είμαστε ακριβέστεροι, γνωρίζουμε μόνο ότι έπειτα από έξι βήματα οι γωνίες είναι $\alpha + n\pi$ και $\delta + m\pi$. Όμως $n = m = 0$, διότι διαφορετικά οι γωνίες δεν θα ανήκαν στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$.) (N. Vasilyev, M. Kontsevich)

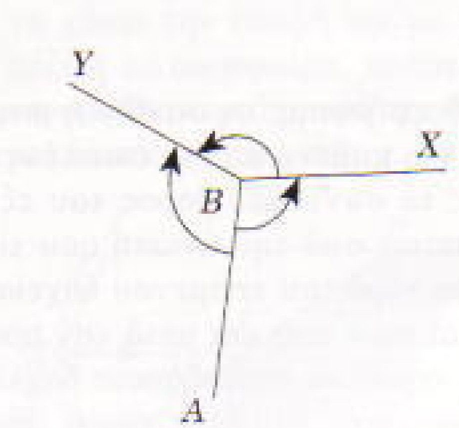
M24

Ας θεωρήσουμε τρεις ομάδες ατόμων: την ομάδα K των ακοινώνητων παράξενων (ας τους ονομάζουμε *κανονικούς*), την ομάδα Π όλων των υπόλοιπων παράξενων, και την ομάδα A όλων των υπόλοιπων (όχι παράξενων) ακοινώνητων. Έστω κ, π και α το πλήθος των ατόμων σε καθεμία από αυτές τις ομάδες, αντίστοιχα, και έστω γ το πλήθος των ζευγών γνωστών μεταξύ τους ανθρώπων, από τους οποίους ο ένας ανήκει στην ομάδα Π και ο άλλος στην ομάδα A. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\pi + \kappa < \alpha + \kappa$, ή ότι $\pi < \alpha$.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα K δεν μπορεί να έχει γνωστούς στην ομάδα Π, αφού η Π αποτελείται από κοινωνικούς ανθρώπους. Αφού η γνωριμία είναι συμμετρική, έπεται ότι ένα άτομο της ομάδας Π μπορεί να έχει γνωστούς μόνο στην ομάδα A και ότι αυτοί πρέπει να είναι περισσότεροι από 10. Επομένως το γ, που μετράει πόσες φορές ανήκει ένα άτομο της ομάδας Π σε ένα «ζεύγος γνωστών» με ένα άτομο της ομάδας A, είναι τουλάχιστον 10π, δηλαδή, $10\pi \le \gamma$. Κάποιος που ανήκει στην ομάδα A μπορεί να έχει γνωστούς σε οποιαδήποτε ομάδα, αλλά λιγότερους από 10. Επομένως, ένα άτομο της ομάδας A ανήκει σε ένα «ζεύγος γνωστών» με κάποιο άτομο της ομάδας Π (ή και οποιοδήποτε άλλο) λιγότερες από 10α φορές. Άρα $\gamma < 10\alpha$. Έπεται ότι $10\pi < 10\alpha$, ή $\pi < \alpha$.



$\angle ABY = \angle ABX + \angle XBY + 2\pi$



$\angle ABY = \angle ABX + \angle XBY - 2\pi$

Σχήμα 4

M25

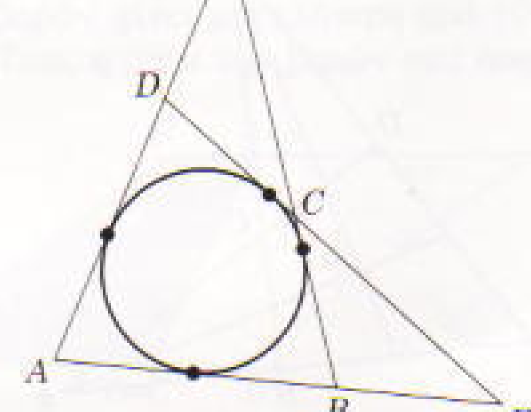
Είναι γνωστό ότι ένα τετράπλευρο έχει εγγεγραμμένο κύκλο (μπορεί να περιγραφεί γύρω από κύκλο) αν και μόνο αν τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί, για παράδειγμα, παρατηρώντας τα ζεύγη των ίσων εφαπτομενικών τμημάτων που άγονται από κάθε κορυφή του τετραπλεύρου. Υπάρχουν δύο ακόμη αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να έχει εγγεγραμμένο κύκλο ένα τετράπλευρο. Αυτές θα χρησιμοποιήσουμε για τη λύση του προβλήματός μας.

Έστω ότι οι πλευρές AB και DC του τετραπλεύρου $ABCD$ τέμνονται (αφού προεκταθούν) στο σημείο E, ενώ οι πλευρές AD και BC τέμνονται στο σημείο F (Σχήμα 5). Τότε, καθεμία από τις δύο επόμενες συνθήκες είναι αναγκαία και ικανή για να περιγράφεται το τετράπλευρο γύρω από τον κύκλο:

$$EB + FB = ED + FD, \quad (1)$$

$$EA - FA = EC - FC. \quad (2)$$

Πρώτα θα δείξουμε ότι και οι δύο συνθήκες είναι αναγκαίες. Ας υποθέσουμε ότι το $ABCD$ έχει εγγεγραμμέ-

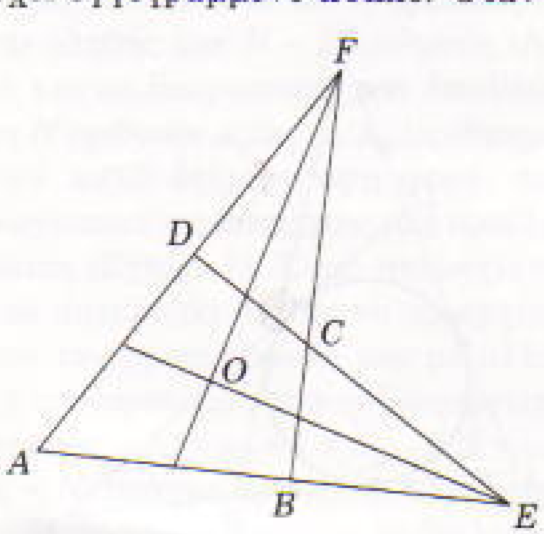


Σχήμα 5

νο κύκλο. Έστω a, b, c, d, e, και f τα μήκη των εφαπτομένων από τα σημεία A, B, C, D, E και F προς τον εγγεγραμμένο κύκλο, αντίστοιχα. Τότε $EB = e - b$, $FB = f + b$, $ED = e + d$, $FD = f - d$, και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) ισούνται με $e - f$. Μια ανάλογη απόδειξη δικαιολογεί την εξίσωση (2).

Ας αποδείξουμε τώρα ότι η συνθήκη (1) είναι ικανή. Υποθέτουμε ότι η συνθήκη ισχύει. Εγγράφουμε έναν κύκλο στο τρίγωνο AED (αυτό είναι πάντοτε δυνατό) και φέρουμε από το σημείο F εφαπτομένη προς τον κύκλο. Έστω ότι αυτή η εφαπτομένη τέμνει τα EA και ED στα σημεία B_1 και C_1, αντίστοιχα. Από την αναγκαιότητα της συνθήκης (που αποδείχτηκε παραπάνω) προκύπτει ότι $EB_1 + FB_1 = ED + FD = EB + FB$. Δηλαδή, $FB = FB_1 + (EB_1 - EB) = FB_1 \pm BB_1$ (το αν θα έχουμε διαφορά ή άθροισμα εξαρτάται από τη θέση του σημείου B_1 ως προς το B). Αν τα σημεία B και B_1 είναι διαφορετικά, αυτή η ισότητα αντιφάσκει με την τριγωνική ανισότητα (για τα σημεία F, B και B_1). Επομένως, $B_1 = B$ —δηλαδή ο κύκλος που κατασκευάσαμε εφάπτεται στην πλευρά BC του δεδομένου τετραπλεύρου. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι και η συνθήκη (2) είναι ικανή.

Τώρα δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε την πρόταση του προβλήματος. Έστω ότι O είναι το σημείο τομής των ευθειών που χωρίζουν το τετράπλευρο (Σχήμα 6). Αν τα τετράπλευρα που περιέχουν τα σημεία B και D έχουν εγγεγραμμένους κύκλους, τότε η συνθήκη (1) μας εξασφαλίζει ότι $EB + FB = EO + FO = ED + FD$. Η συνθήκη (1) μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι το αρχικό τετράπλευρο έχει εγγεγραμμένο κύκλο. Όταν τα τετράπλευρα περιέχουν τα σημεία A και C, η πρόταση αποδεικνύεται μέσω της συνθήκης (2) και της σχέσης $EA - FA = EO - FO = EC - FC$.



Σχήμα 6

Φυσική

Φ21

Ας επιλέξουμε ως σύστημα αναφοράς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και τον άξονα x παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο με φορά προς τα πάνω. Αν η συνολική μάζα του τρένου είναι M, και κάποια στιγμή το μήκος του τμήματος του τρένου που βρίσκεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο είναι x, τότε η μάζα αυτού του τμήματος θα είναι Mx/L. Η δύναμη που εκείνη τη στιγμή τείνει να επαναφέρει το τρένο στο οριζόντιο επίπεδο είναι:

$F = -(Mx/L)g\eta\mu a = -(Mg\eta\mu a/L)x = -Dx$, όπου $D \equiv Mg\eta\mu a/L =$ σταθ.

Διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση αυτή δεν είναι παρά η εξίσωση των αρμονικών ταλαντώσεων. Η περίοδος T της ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\,\eta\mu\, a}}.$$

Ο απαιτούμενος χρόνος για την ακινητοποίηση του τρένου είναι ίσος με το τέταρτο της παραπάνω περιόδου, δηλαδή

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\,\eta\mu\, a}}.$$

Σημειώστε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την ορμή του τρένου ή από το ποιο τμήμα του ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. (Η ίδια συμπεριφορά εμφανίζεται στην ανεξαρτησία της περιόδου ταλάντωσης ενός εκκρεμούς από το πλάτος του.)

Φ22

Ας θεωρήσουμε τη συνθήκη ισορροπίας για καθένα από τα επιπλέοντα δοχεία: το συνολικό βάρος του εξισορροπείται από την άνωση που του ασκεί το νερό του επόμενου δοχείου. Άρα, και πριν από και μετά την προσθήκη νερού σε οποιοδήποτε δοχείο, η διαφορά στις στάθμες νερού μέσα και έξω από κάθε δοχείο παραμένει η ίδια (εκτός από το εξωτερικό δοχείο, που δεν επιπλέει· η επιφάνεια του πυθμένα του, όμως, είναι τόσο μεγάλη ώστε η στάθμη του νερού σ' αυτό δεν αλλάζει σημαντικά). Αυτό σημαίνει ότι η θέση της στάθμης του νερού σε όλα τα δοχεία παραμένει σταθερή σε σχέση με το έδαφος.

Άρα, μετά την προσθήκη του νερού στο μικρότερο δοχείο, η στάθμη του δεν θ' αλλάξει σε σχέση με το έδαφος. Κατά συνέπεια, ο πυθμένας του δοχείου αυτού θα βυθιστεί κατά $h = V_0/S_0$, δηλαδή κατά το ύψος του στρώματος νερού που προστέθηκε.

Φ23

Εφόσον το νερό δεν αναταράσεται και δεν αναμειγνύεται, όλη η θερμότητα που απελευθερώνεται καθώς το νερό παγώνει διαχέεται μόνο στην ατμόσφαιρα. Κάθε στιγμή η ροή θερμότητας είναι ευθέως ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας ΔT μεταξύ του νερού και του αέρα, και αντιστρόφως ανάλογη του πάχους x του πάγου. Κατά συνέπεια, για μια αλλαγή Δx στο πάχος του πάγου σε χρονική περίοδο Δt, θα έχουμε

$$x \sim \frac{\Delta T}{x}\Delta t,$$

ή, δεδομένου ότι $\Delta T =$ σταθερή,

$$x \cdot \Delta x \sim \Delta t.$$

Από αυτή τη σχέση είναι φανερό ότι

$$x^2 \sim t,$$
$$x \sim \sqrt{t}\,.$$

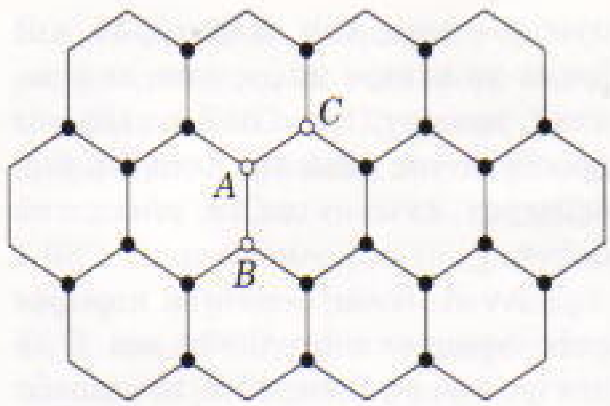
Εύκολα αντιλαμβάνεστε ότι σε 1.000 ώρες το πάχος του πάγου θα είναι

$$x_{1.000} = x_{10}\sqrt{\frac{1.000}{10}} = 1\ \mathrm{m}\,.$$

Φ24

Ας αρχίσουμε με τους κόμβους A και B. Επανασχεδιάζουμε το κύκλωμα, αλλά τώρα όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Θα υποθέσουμε ότι στα σημεία A και B συνδέουμε δύο όμοιες ιδανικές γεννήτριες ΗΕΔ $E_1 = E_2 = E$ και δύο ιδανικές ωμικές αντιστάσεις R κατά σειρά (θεωρούμε πως $R >> r$ και πως η εσωτερική αντίσταση των γεννητριών είναι αμελητέα) (βλ. Σχήμα 8). Ας υποθέσουμε ότι $r = 1\ \Omega$ και ας επιλέξουμε τις τιμές των E και R τέτοιες ώστε $E/R = 1$ A.

Αρχικά, λοιπόν, θεωρούμε τη σύνδεση της μιας πηγής στον κόμβο A. Το προκύπτον ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει προς τον κόμβο A διακλαδίζεται σε

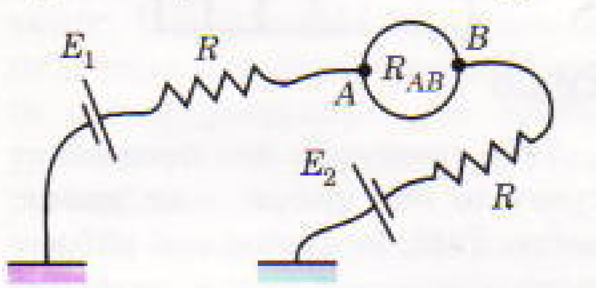


Σχήμα 7

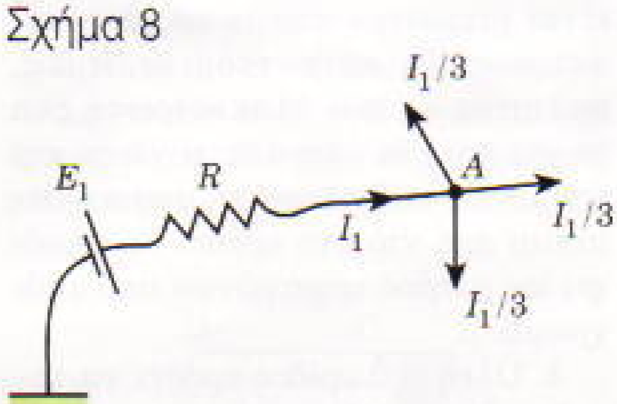
τρία κομμάτια σύρματος (βλ. Σχήμα 9) και, λόγω συμμετρίας, η έντασή του σε καθένα απ' αυτά είναι $I_1/3$, όπου $I_1 = E/(R + r_x) \cong 1$ A και r_x είναι η αντίσταση μεταξύ των κόμβων *A* και *B*.

Παρομοίως, με την πηγή E_2 συνδεδεμένη στον κόμβο *B*, ρεύμα έντασης $I_2 = E/(R + r_x) \cong 1$ A εκρέει απ' αυτόν. Το ρεύμα έρχεται από τους τρεις κόμβους που βρίσκονται πλησιέστερα στον κόμβο *B*, και κινείται προς το «άπειρο» μέσω της πηγής (Σχήμα 10).

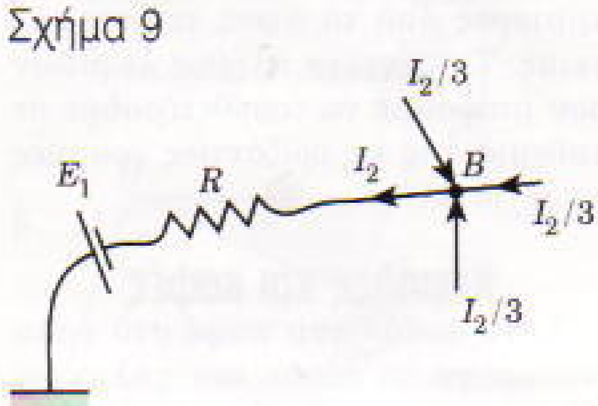
Τώρα, λοιπόν, ας θεωρήσουμε συνδεδεμένες στους κόμβους *A* και *B* και τις δύο πηγές ταυτόχρονα. Από την αρχή της επαλληλίας και τη συνθήκη $R >> r$ προκύπτει ότι στο συρμάτι-



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

νο αγωγό *AB* ρέει ηλεκτρικό ρεύμα έντασης $I_{AB} = (I_1/3 + I_2/3) = 2/3$ A. Κατά συνέπεια, παρατηρείται πτώση τάσης στα άκρα του

$$V_{AB} = \frac{2}{3}\,\text{A}\cdot 1\,\Omega = \frac{2}{3}\,\text{V}.$$

Από την άλλη πλευρά, το κύκλωμά μας τροφοδοτείται με συνολική τάση 2*E*, και το ρεύμα που το διαρρέει έχει ένταση $I \cong 2E/2R = 1$ A. Συνεπώς, $R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{2}{3}\,\Omega = \frac{2}{3}\,r$.

Η περίπτωση της ολικής αντίστασης μεταξύ των κόμβων A και C είναι απολύτως ανάλογη με την παραπάνω περίπτωση:

$$R_{AC} = \frac{2}{3}\,\Omega = \frac{2}{3}\,r.$$

Απομένει να βρούμε την αντίσταση μεταξύ των κόμβων B και C. Συνδέοντας τη μία πηγή στο B προκύπτει ρεύμα έντασης $I_1/3$ που διαρρέει το σύρμα AB και ρεύμα έντασης $I_1/6$ που διαρρέει το σύρμα BC. Συνδέοντας τη δεύτερη πηγή στον κόμβο C, και αφού λάβουμε υπόψη τις αρχές συμμετρίας και επαλληλίας, προκύπτει

$$V_{BC} = 1\,\Omega\left(\tfrac{1}{3}\,\text{A} + \tfrac{1}{6}\,\text{A}\right) + 1\,\Omega\left(\tfrac{1}{3}\,\text{A} + \tfrac{1}{6}\,\text{A}\right) = 1\,\text{V}$$

και $R_{BC} = \frac{V_{BC}}{I} = 1\,\Omega = r.$

Φ25

Όταν προσδώσουμε οριζόντια ταχύτητα υ στην επάνω σφαίρα, το κέντρο βάρους του συστήματος θα κινηθεί προς τα εμπρός με ταχύτητα $\upsilon/2$. Αν το σύστημα χάσει αμέσως την επαφή του με το τραπέζι, η μόνη δύναμη που θα δρα πάνω του θα είναι το βάρος του· αυτό, βεβαίως, προσδίδει στο σύστημα —επομένως και στην κάτω σφαίρα— επιτάχυνση *g*. Επομένως, για να χάσει την επαφή της με το τραπέζι η κάτω σφαίρα, πρέπει η κεντρομόλος επιτάχυνσή της να είναι μεγαλύτερη ή ίση του *g*.

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου βάρους του αλτήρα και οι δύο σφαίρες κινούνται με ταχύτητες ίσων μέτρων —$\upsilon/2$—, και η κεντρομόλος επιτάχυνσή τους έχει μέτρο

$$\gamma_\kappa = \frac{(\upsilon/2)^2}{\ell/2} = \frac{\upsilon^2}{2\ell}.$$

Έτσι, η κάτω σφαίρα θα χάνει την επαφή της με το τραπέζι αν

$\frac{\upsilon^2}{2\ell} \geq g$, δηλαδή αν $\ell \leq \frac{\upsilon^2}{2g}$.

Σπαζοκεφαλιές

Σ21

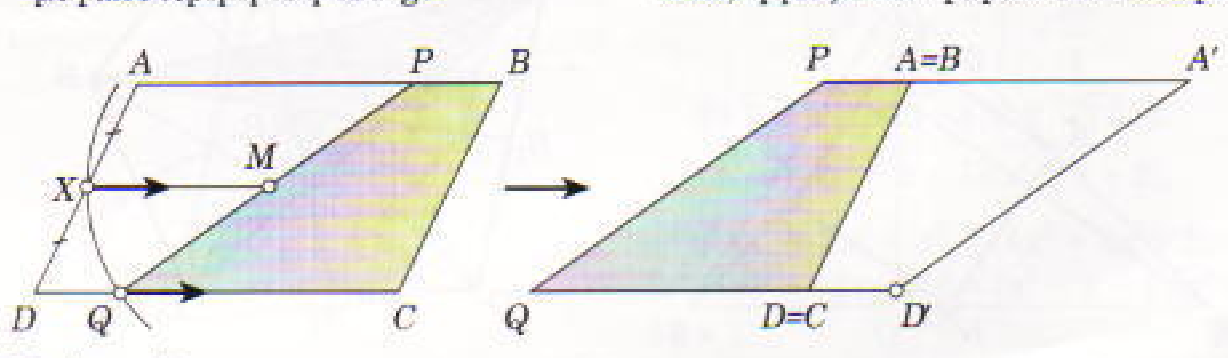
Η απάντηση είναι ναι. Η δυσκολότερη σπαζοκεφαλιά είναι τούτη εδώ.

Σ22

Ας υποθέσουμε ότι *PQ* είναι η ευθεία που αναζητούμε (Σχήμα 11). Μπορούμε να σχηματίσουμε το ρόμβο μετατοπίζοντας το *APQD* έτσι ώστε να συμπέσουν τα τμήματα *AD* και *BC*. Πώς, όμως, θα καθορίσουμε την *PQ*; Για να είναι ρόμβος το *PA′D′Q*, πρέπει να ισχύει $QP = QD' = DC$. Ένας τρόπος να το επιτύχουμε είναι να φέρουμε μια ευθεία παράλληλη προς την *DC* διερχόμενη από το *M*. Αυτή τέμνει το *AD* στο μέσο του, *X*. Τότε, ο κύκλος με κέντρο *M* και ακτίνα *MX* τέμνει την *DC* στο ζητούμενο σημείο *Q*.

Σ23

Αν πάρουμε τρία βάρη των 10 kg, έχουμε ένα σύνολο 30 kg και ικανοποιούνται και οι συνθήκες του προβλήματος. Για να αποδείξουμε πως είναι αδύνατο η μάζα να είναι μεγαλύτερη, ας πάρουμε ένα τυχαίο βάρος και ας προσθέσουμε και άλλα βάρη σε αυτό, ένα-ένα, έως ότου η συνολική μάζα *M* των επιλεγμένων βαρών γίνει μεγαλύτερη από 10 kg. Τότε, η μάζα των βαρών που απομέ-



Σχήμα 11

νουν θα είναι $m \leq 10$ kg. Από την άλλη πλευρά, αν a είναι η μάζα του τελευταίου βάρους που επιλέξαμε, τότε $a \leq 10$ kg και $M - a \leq 10$ kg, άρα η συνολική μάζα είναι $M + m = (M - a) + a + m \leq 30$ kg.

Σ24

Αν έχουμε δέκα διαφορετικά ορθογώνια, τότε το εμβαδόν του καθενός τους δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλο. Αν γράψουμε τις διαστάσεις όλων των δυνατών ακέραιων ορθογωνίων σε αύξουσα σειρά εμβαδού (1 ′ 1, 1 ′ 2, 1 ′ 3, 1 ′ 4, 2 ′ 2, 1 ′ 5, 1 ′ 6, 2 ′ 3, 1 ′ 7, 1 ′ 8, 2 ′ 4, ...) βλέπουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των πρώτων δέκα ορθογωνίων αυτού του καταλόγου είναι $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 46 > 45$. Επομένως, δεν μπορούμε να έχουμε μεγαλύτερα ορθογώνια και, επιπλέον, τουλάχιστον ένα από αυτά πρέπει να επαναλαμβάνεται.

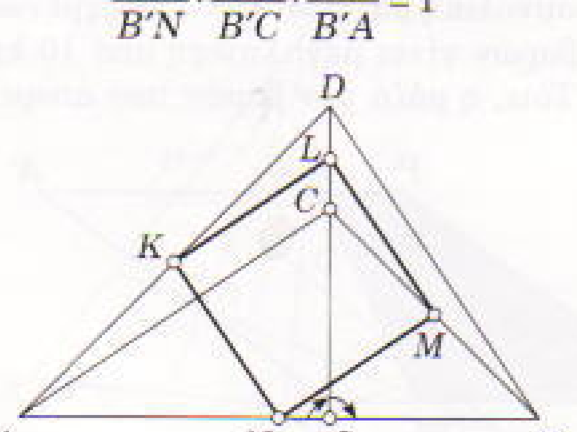
Σ25

Στο Σχήμα 12 τα KN και KL ενώνουν τα μέσα των πλευρών στα τρίγωνα ABD και CBD, και επομένως αυτά τα τμήματα είναι παράλληλα προς το BD και έχουν το μισό του μήκος. Ομοίως, τα KL και MN είναι παράλληλα και έχουν το μισό μήκος του AC. Η περιστροφή κατά 90° περί το O φέρει το A στο D και το C στο B και, επομένως, φέρει το AC στο BD. Αυτό όμως σημαίνει ότι τα τμήματα AC, BD (και άρα τα NK, NM) είναι κάθετα και έχουν ίσο μήκος.

Καλειδοσκόπιο

1. Εξετάζοντας το Σχήμα 2 του άρθρου, μπορούμε να δούμε ότι το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης είναι ίσο με

$$\frac{AB'}{B'N} \cdot \frac{NB'}{B'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$



Σχήμα 12

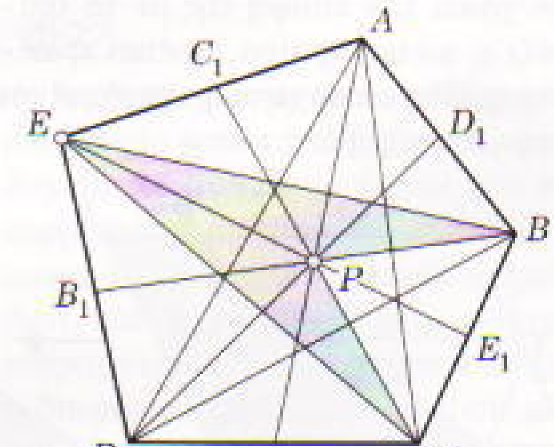
2. Έστω P το κοινό σημείο των τμημάτων AA_1, BB_1, CC_1. Τότε, οι λόγοι που εμφανίζονται στη σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε μπορεί να εκφραστούν συναρτήσει των εμβαδών των τριγώνων ABP, BCP, CAP —για παράδειγμα, $BA_1 / A_1C = (ABP) / (CAP)$, κ.ο.κ. Έπειτα από αυτές τις αντικαταστάσεις όλα τα εμβαδά απαλείφονται.

3. Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία A_1, B_1, C_1, D_1 στο Σχήμα 13 είναι τα μέσα των αντίστοιχων πλευρών του πενταγώνου. Τότε έχουμε, διαδοχικά, την ισότητα των τριγώνων PBE και PBD, PBD και PAD, PAD και PAC, PAC και PEC. Επομένως τα εμβαδά των PBE και PEC είναι ίσα, πράγμα που σημαίνει ότι το E_1 είναι μέσο του BC.

4. Η ομοιοθεσία που θεωρήσαμε στην απόδειξη 3 μεταφέρει τα ύψη ενός τριγώνου ABC στα ύψη του τριγώνου $A_1B_1C_1$ (όπου A_1, B_1, C_1 είναι τα μέσα των πλευρών του ABC). Τα ύψη, όμως, του $A_1B_1C_1$ είναι οι μεσοκάθετοι του ABC, και επομένως τέμνονται στο O. Άρα, τα αρχικά ύψη τέμνονται σ' ένα σημείο, και αυτό το σημείο H μεταφέρεται στο O έπειτα από ομοιοθεσία κατά $-1/2$ ως προς το M, αφού αυτή η ομοιθεσία μετασχηματίζει το ABC στο $A_1B_1C_1$.

5. Θεωρήστε δύο ομοιοθεσίες που μεταφέρουν τη μια βάση του τραπεζίου στην άλλη: η μία με κέντρο το σημείο τομής των προεκτάσεων των πλευρών του τραπεζίου (κατά έναν θετικό παράγοντα), και η άλλη ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων (κατά τον αντίθετο του προηγούμενου παράγοντα). Και οι δύο ομοιοθεσίες μεταφέρουν το μέσο της μιας βάσης στο μέσο της άλλης.

6. Τοποθετήστε μοναδιαίες μάζες



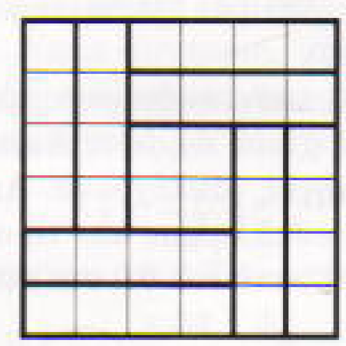
Σχήμα 13

στις κορυφές του τετραέδρου και βρείτε το κέντρο μάζας τους ενώνοντας, πρώτον, τρεις από αυτές και προσθέτοντας μετά την τέταρτη, και, δεύτερον, ενώνοντας τις μάζες ανά ζεύγη.

7. Αν A, B και C είναι οι κορυφές ενός σφαιρικού τριγώνου και O το κέντρο της σφαίρας, τότε τα επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας και τις διαμέσους του κανονικού τριγώνου έχουν μια κοινή ευθεία, την OM (όπου M είναι το βαρύκεντρο αυτού του τριγώνου). Αυτά τα επίπεδα τέμνουν τη σφαίρα κατά τις σφαιρικές διαμέσους. Επομένως, αυτές οι διάμεσοι έχουν ένα κοινό σημείο —και συγκεκριμένα, το σημείο τομής της ευθείας OM και της σφαίρας.

Παιχνιδότοπος

1. Βλ. το Σχήμα 14.


Σχήμα 14

2. Τα τετράγωνα που αφαιρέσαμε έχουν το ίδιο χρώμα —ας πούμε, μαύρο. Τότε, το πλήθος των μαύρων τετραγώνων που έχουν απομείνει είναι μικρότερο από το πλήθος των άσπρων. Το κάθε ντόμινο, όμως, καλύπτει σε μια πλακόστρωση ένα μαύρο και ένα άσπρο τετράγωνο, και επομένως κάθε περιοχή που καλύπτεται από ντόμινο πρέπει να περιέχει ίσο πλήθος τετραγώνων από κάθε χρώμα.

3. Όλες οι λωρίδες πρέπει να τοποθετηθούν οριζόντια διότι είναι μακρύτερες από το ύψος της επιφάνειας. Το μέγιστο πλήθος λωρίδων που μπορούμε να τοποθετήσουμε σε καθεμιά από τις οριζόντιες γραμμές είναι $[m/k]$.

Καμήλες και καφές

1. Το ποσόν του καφέ στο γάλα ισούται με το ποσόν του γάλακτος στον καφέ, και αυτό είναι ανεξάρτητο από το πόσο καλά έχουν αναμειχθεί.

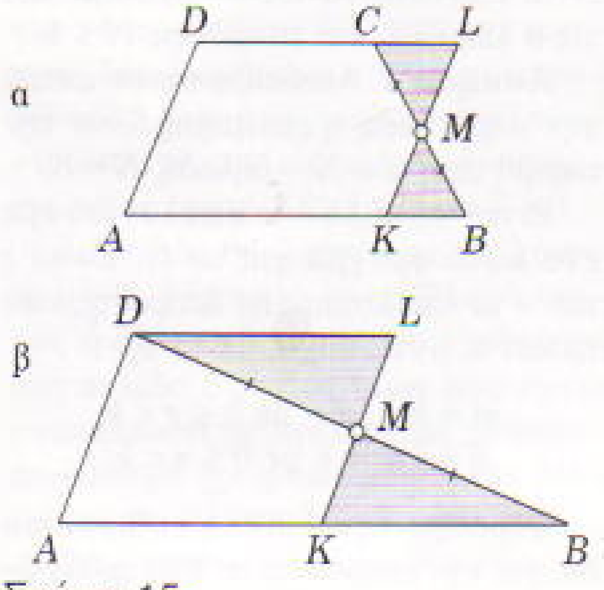
Σε ό,τι αφορά το γεωμετρικό ερώτημα, μπορούμε να φανταστούμε ότι το τραπέζιο $ANMD$ του Σχήματος 2 στο άρθρο είναι η κουταλιά του καφέ που έπεσε στο γάλα, ενώ το τραπέζιο $CBKL$ είναι η κουταλιά του μείγματος που ρίχτηκε ξανά στον καφέ. Τότε, το $ABCD$ είναι «ο καφές που έμεινε στο μπουκάλι με το γάλα» και ισούται σε «ποσότητα» με το $KLMN$ —«το γάλα που έπεσε στο φλιτζάνι του καφέ».

2. Στο Σχήμα 15α βλέπετε πώς μπορείτε να μετασχηματίσετε το τραπέζιο $ABCD$ στο παραλληλόγραμμο $AKLD$ αποκόπτοντας το τρίγωνο BMK και επισυνάπτοντας το ίσο τρίγωνο CML (όπου M είναι το μέσον του BC). Τώρα μπορούμε να συναγάγουμε τον τύπο για το εμβαδόν του $ABCD$ από τον τύπο για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. Με παρόμοιο τρόπο, βασιζόμενοι στο Σχήμα 15β, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός τριγώνου.

3. Προεκτείνουμε τις παράλληλες ακμές του πρίσματος (Σχήμα 16) και τις τέμνουμε με δύο επίπεδα κάθετα σ' αυτές. Τα επίπεδα απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος της ακμής. Επαναλαμβάνουμε τώρα το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για το παραλληλόγραμμο στο άρθρο, χρησιμοποιώντας όγκους στη θέση των εμβαδών.

4. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου επί το μήκος της ακμής.

5. Μόνο για $n = 1$. Αν ο n είναι άρτιος, τότε και ο $n^4 + 4^n$ είναι επίσης άρτιος. Αν $n = 2k + 1$, τότε ο αριθμός μας μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:



Σχήμα 15

$n^4 + 2^{2n} = n^4 + 2 \cdot n^2 \cdot 2^n + 2^{2n} - 2^{n+1} \cdot n^2$
$= (n^2 + 2^n)^2 - (2^{k+1} \cdot n)^2$
$= (n^2 + 2^n - 2^{k+1} \cdot n)(n^2 + 2^n + 2^{k+1} \cdot n)$.

Ο δεύτερος παράγοντας είναι πάντοτε μεγαλύτερος από το ένα, ενώ για τον πρώτο παράγοντα το ίδιο αληθεύει όταν $n > 1$, διότι

$$n^2 + 2^n \geq 2\sqrt{n^2 \cdot 2^n} > n \cdot 2^{k+1}.$$

6. (α) $x^4 - a^2x^2 + a^4 = x^4 + 2a^2x^2 + a^4 - 3a^2x^2 = (x^2 + a^2)^2 - 3a^2x^2 = (x^2 - ax\sqrt{3} + a^2)(x^2 + ax\sqrt{3} + a^2)$.

(β) Αν $D = b^2 - 4c \geq 0$, τότε $x^4 + bx^2 + c = (x^2 - y_1)(x^2 - y_2)$, όπου τα y_1, y_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $y^2 + by + c = 0$. Στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση που $D < 0$, ή $4c > b^2$, έχουμε

$$\begin{aligned} &x^4 + bx^2 + c \\ &= x^4 + 2\sqrt{c}x^2 + c + \left(b - 2\sqrt{c}\right)x^2 \\ &= \left(x^2 + \sqrt{c}\right)^2 - \left(2\sqrt{c} - b\right)x^2, \end{aligned}$$

που παραγοντοποιούμε ως διαφορά τετραγώνων.

7. (α) $\dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$.

Υπόδειξη: $x^4 + 8x - 7 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2(x^2 - 4x + 4) = (x^2 + 1)^2 - 2(x - 1)^2$.

(β) $1 \pm \sqrt{2}$ και $1 \pm i\sqrt{2}$. *Υπόδειξη:* Η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως $(x^2 + 1)^2 = 4(x + 1)^2$.

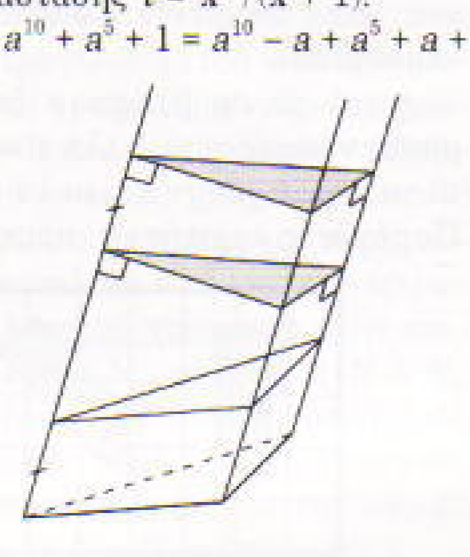
(γ) $\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - \dfrac{2x^2}{x-1}$.

Υπόδειξη: αφαιρώντας το $2x^2/(x + 1)$ και από τα δύο μέλη της εξίσωσης και γράφοντας το αριστερό μέλος ως τετράγωνο της διαφοράς $x - x/(x + 1)$, φτάνουμε στην

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{x-1}.$$

Αυτή η εξίσωση λύνεται μέσω της αντικατάστασης $t = x^2/(x + 1)$.

8. (α) $a^{10} + a^5 + 1 = a^{10} - a + a^5 + a + 1 = a(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1) + a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = (a^2 + a + 1)[(a^2 - a)(a^6 + a^3 + 1) + a^2(a - 1) + 1] = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$.



Σχήμα 16

(β) $a^8 + a + 1 = a^8 - a^5 + a^5 + a + 1 = a^5(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1) = (a^2 + a + 1)(a^6 - a^5 + a^3 - a^2 + 1)$.

Και στις δύο περιπτώσεις είναι αδύνατο να παραγοντοποιήσουμε περαιτέρω και να εξακολουθήσουμε να έχουμε ακέραιους συντελεστές.

9. Το $1.280.000.401 = a^7 + a^2 + 1$, όπου $a = 20$. Όμως, $a^7 + a^2 + 1 = a^7 - a + a^2 + a + 1 = (a^2 + a + 1)[a(a - 1)(a^3 + 1) + 1]$.

10. Η απάντηση είναι $3\sqrt{3}/(2\pi)$. Καταλήγουμε σ' αυτήν από την παράσταση του ημx/x ως άπειρου γινόμενου, που δίνουμε στο άρθρο, αφού θέσουμε $x = 2\pi/3$.

11. (α) $\dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$

Πολλαπλασιάστε το S_n με x και θεωρήστε τη διαφορά $xS_n - S_n$.

(β) $\dfrac{\text{συν}\dfrac{nx}{2} \cdot \text{συν}\dfrac{n+1}{2}x}{\text{ημ}\dfrac{x}{2}}$.

Πολλαπλασιάστε το άθροισμα επί ημ$(x/2)$ και εργαστείτε με αυτό ακολουθώντας τη λύση του Προβλήματος 7 του άρθρου.

12. (α) $1 \pm \sqrt{3}$ και $1 \pm i\sqrt{3}$. Ξαναγράψτε την εξίσωση εμφανίζοντας το τέλειο τετράγωνο στο αριστερό μέλος της:

$$(x^2 - 2x)^2 = -x^2 + 2x + 6.$$

Προσθέτουμε το $2\rho(x^2 - 2x) + \rho^2$ και στα δύο μέλη:

$$(x^2 - 2x + \rho)^2 = (2\rho - 1)x^2 - (4\rho - 2)x + 6 + \rho^2.$$

Η επιλύουσα του Ferrari γι' αυτήν την εξίσωση είναι

$$(2\rho - 1)^2 = (2\rho - 1)(6 + \rho^2),$$

και έχει τη ρίζα $\rho = 1/2$. Γι' αυτό το ρ η εξίσωσή μας παίρνει τη μορφή

$$\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

(β) $1 \pm \sqrt{3}$ και $-3/2 \pm \sqrt{17}/2$.

13. (α) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2)$.

(β) $x^4 + 2x^3 + x^2 - (4x^2 + 4x + 1) = (x^2 + x)^2 - (2x + 1)^2 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 1)$.

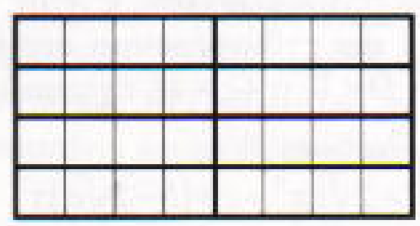
Λωρίδες

Πλακόστρωση στις δύο διαστάσεις (αλλά όχι στις τρεις)

Boris Kotlyar

ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΔΗΜΟΦΙΛΗΣ ΣΠΑΖΟΚΕΦΑΛΙΑ που ζητάει να πλακοστρώσουμε μια δεδομένη επιφάνεια με δώδεκα διαφορετικά σχή-σχήματα, το καθένα από τα οποία αποτελείται από πέντε ίσα τετράγωνα. Έχουν δημιουργηθεί αναρίθμητες παραλλαγές αυτής της σπαζοκεφαλιάς, καθώς και μαθηματικά προβλήματα. Ένα από αυτά είναι το να ανακαλύψουμε κατά πόσον είναι δυνατή μια τέτοια πλακόστρωση —για διάφορα είδη επιφανειών και για διάφορες παραλλαγές των αρχικών σχημάτων. Ακόμη και για τις απλούστερες επιφάνειες, το πρόβλημα αποδεικνύεται εξαιρετικά δύσκολο. Ένα σχετικό αποτέλεσμα έχει επιτευχθεί για την πλακόστρωση μιας ορθογώνιας επιφάνειας διαστάσεων $m \times n$ με ορθογώνια διαστάσεων $p \times q$ (όπου m, n, p, και q, ακέραιοι). Για την ειδικότερη περίπτωση που έχουμε στενά πλακίδια $1 \times k$ ή $k \times 1$ —τα οποία στη συνέχεια θα ονομάζουμε λωρίδες— το θεώρημα αυτό μας λέει ότι ένα ορθογώνιο $m \times n$ μπορεί να πλακοστρωθεί με τέτοιες λωρίδες αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς m και n διαιρείται με το k.

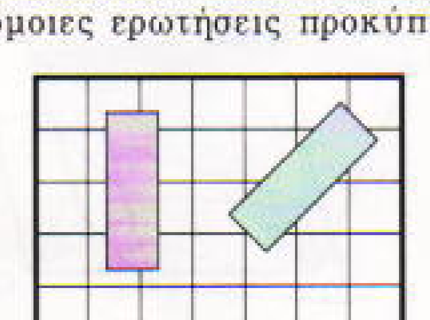
Οι πρώτες αποδείξεις αυτού του μάλλον απλού γεγονότος δόθηκαν ανεξάρτητα από τον ολλανδό μαθηματικό N.G. de Bruijn και τον αμερικανό D.F. Klarner, το 1969. Φυσικά, το γεγονός ότι η συνθήκη είναι ικανή είναι προφανές: αν, για παράδειγμα, η οριζόντια διάσταση m της «επιφάνειας» είναι πολλαπλάσιο του k, μπορούμε να απλώσουμε m/k λωρίδες σε καθεμία από τις n οριζόντιες γραμμές (Σχήμα 1). Η όλη ουσία του θεωρήματος βρίσκεται στο «αναγκαίο».



Σχήμα 1

Μπορεί να αποδειχθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, και μια από τις αποδείξεις θα προκύψει από την εξέταση της ακόλουθης γενικότερης ερώτησης: ποιο είναι το μέγιστο πλήθος $N = N(m, n, k)$ λωρίδων $1 \times k$ που μπορούν να ταιριάξουν σε μια επιφάνεια $m \times n$; Εξυπακούεται, φυσικά, ότι οι λωρίδες δεν επικαλύπτονται, και επιπλέον βάζουμε τον περιορισμό ότι τα k μοναδιαία τετράγωνα της λωρίδας συμπίπτουν ακριβώς με τα μοναδιαία τετράγωνα της επιφάνειας. Επομένως, δεν πρόκειται να εξετάσουμε «αντικανονικές» θέσεις των λωρίδων όπως αυτές του Σχήματος 2. Επισημαίνουμε ότι δεν χρειάστηκε να θέσουμε αυτόν τον περιορισμό στη διατύπωση του θεωρήματος Bruijn-Klarner, διότι είναι προφανές ότι σε οποιαδήποτε πλήρη πλακόστρωση της επιφάνειας με τις λωρίδες μας, όλες τους είναι τοποθετημένες «κανονικά».

Αυτά τα προβλήματα δεν είναι μόνο ενδιαφέροντα, αλλά είναι δυνατό να αποδειχθούν και πολύ χρήσιμα. Παρόμοιες ερωτήσεις προκύπτουν



Σχήμα 2

όταν συσκευάζουμε αντικείμενα («Πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα αντικείμενα σε ένα δεδομένο κιβώτιο;» —ένα πολύ γνωστό πρόβλημα συσκευασίας) ή στην κοπή σχεδίων («Πώς μπορούμε να κόψουμε το μέγιστο πλήθος ορθογωνίων δεδομένου μεγέθους από ένα ορθογώνιο μεταλλικό φύλλο;»).

Ούτε περισσότερα ούτε λιγότερα

Μια πρώτη εκτίμηση για το N μας δίνει η ανισότητα $Nk \leq mn$ μεταξύ του εμβαδού N λωρίδων και του εμβαδού της επιφάνειας. Βλέπουμε ότι

$$N \leq \left[\frac{mn}{k}\right]$$

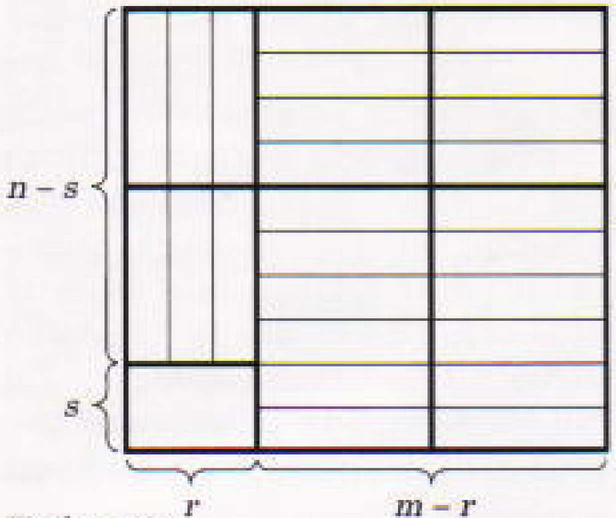
(όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x). Το θεώρημα Bruijn-Klarner μας δίνει μερικές πρόσθετες πληροφορίες. Αν, για παράδειγμα, τοποθετούμε λωρίδες 1×4 σ' ένα τετράγωνο 6×6, η προηγούμενη ανισότητα μας δίνει $N \leq 6 \cdot 6/4 = 9$. Αλλά αφού το 6, το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, δεν διαιρείται με το 4, είναι αδύνατο να τοποθετήσουμε και τις 9 λωρίδες, και επομένως $N \leq 8$.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι σε αυτήν την περίπτωση η εκτίμηση δίνει την ακριβή τιμή του N —δηλαδή, $N = 8$.

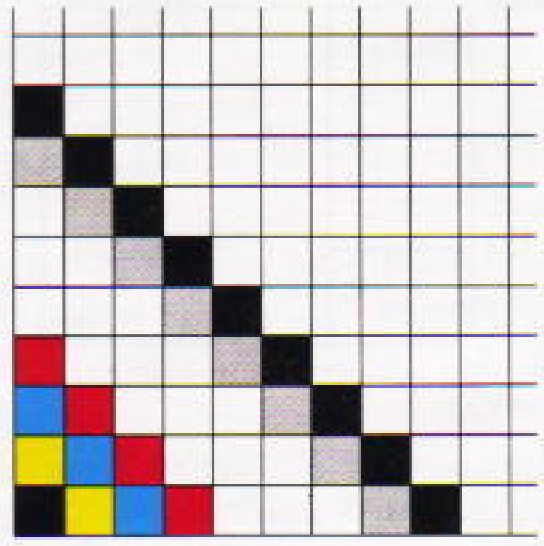
Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα για το N. Έστω r και s τα υπόλοιπα της διαίρεσης των m και n, αντίστοιχα, με το k:

$$m = km_1 + r, \text{ με } 0 \leq r < k,$$
$$n = kn_1 + s, \text{ με } 0 \leq s < k.$$

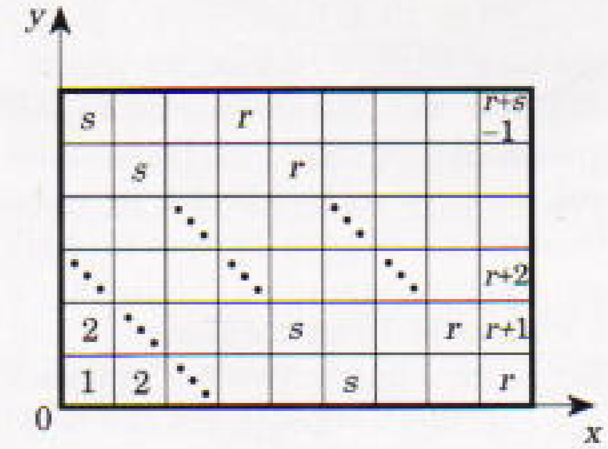
Φέρουμε την κάθετη ευθεία που διαιρεί την επιφάνεια σε δύο ορθογώνια διαστάσεων $(m - r) \times n$ και $r \times n$,



Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5

και την οριζόντια που διαιρεί το δεύτερο ορθογώνιο σε δύο τμήματα διαστάσεων $r \times (n-s)$ και $r \times s$. Αφού οι $m-r$ και $n-s$ διαιρούνται με το k, τα ορθογώνια $(m-r) \times n$ και $r \times (n-s)$ μπορούν να πλακοστρωθούν με τις $1 \times k$ λωρίδες μας (Σχήμα 3). Το εμβαδόν της πλακοστρωμένης επιφάνειας ισούται με $(m-r) \cdot n + r \cdot (n-s) = mn - rs$, και επομένως το πλήθος των χρησιμοποιηθέντων πλακιδίων είναι $N_0 = (mn-rs)/k$. Άρα, το μέγιστο πλήθος N των λωρίδων δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το N_0.

Φυσικά, τα δύο φράγματα που βρήκαμε δεν συμπίπτουν συνήθως, και επομένως δεν μας δίνουν την ακριβή τιμή του N. Ωστόσο, θα καταφέρουμε να βρούμε αυτήν την τιμή μέσω ενός ειδικού χρωματισμού της επιφάνειας —μια τεχνική που τη χρησιμοποιούμε συχνά σε προβλήματα πλακόστρωσης.

Απαρίθμηση μέσω χρωμάτων

Το επόμενο κλασικό πρόβλημα ολυμπιάδων μας προσφέρει ένα καλό και απλό παράδειγμα της μεθόδου.

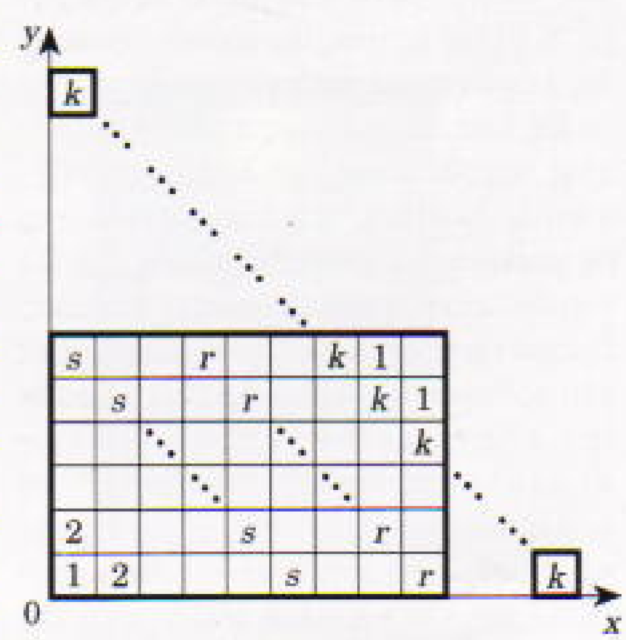
Άσκηση 2. Χρησιμοποιήστε τον συνηθισμένο ασπρόμαυρο χρωματισμό μιας σκακιέρας διαστάσεων 8×8 για να αποδείξετε ότι μετά την αποκοπή δύο διαγωνίως απέναντι τετραγώνων, δεν μπορούμε να πλακοστρώσουμε τη σκακιέρα χρησιμοποιώντας ντόμινο διαστάσεων 2×1.

Ασφαλώς θα μπορέσετε να λύσετε μόνοι σας αυτό το πρόβλημα (ούτως ή άλλως, δίνουμε την απάντηση στη σελίδα 64.) Και τώρα που έχετε συμφιλιωθεί με την ιδέα, ας χρησιμοποιήσουμε χρωματισμό για να βελτιώσουμε τις εκτιμήσεις μας.

Φανταστείτε ότι τοποθετούμε την $m \times n$ επιφάνεια που πλακοστρώνουμε στη γωνία του πρώτου τεταρτημορίου ενός συστήματος συντεταγμένων, το οποίο έχουμε χωρίσει σε μοναδιαία τετράγωνα. Χρωματίζουμε τα τετράγωνα διαγωνίως με k χρώματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Η αξιοσημείωτη ιδιότητα αυτού του χρωματισμού είναι ότι κάθε φορά που τοποθετούμε μια $1 \times k$ λωρίδα (τετράγωνο προς τετράγωνο), αυτή καλύπτει ένα ακριβώς τετράγωνο από κάθε χρώμα. Επομένως, το πλήθος των λωρίδων που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των τετραγώνων ίδιου χρώματος. Ας αριθμήσουμε τα χρώματα από 1 έως k, ας χωρίσουμε την επιφάνεια σε τρία ορθογώνια όπως κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα (Σχήμα 3), και ας απαριθμήσουμε το πλήθος των τετραγώνων της επιφάνειας που έχουν το k-οστό χρώμα. Στα πλακοστρωμένα ορθογώνια $(m-r) \times n$ και $r \times (n-s)$ το πλήθος των τετραγώνων του χρώματος αυτού ισούται με το πλήθος των λωρίδων που τα καλύπτουν —δηλαδή, με $N_0 = (mn-rs)/k$. Για το τρίτο ορθογώνιο διαστάσεων $r \times s$ (Σχήμα 5), υπάρχουν δύο δυνατότητες. Αν $r + s - 1 < k$, τότε το πάνω δεξιά τετράγωνο αυτού του ορθογωνίου είναι χρωματισμένο με το χρώμα $r + s - 1$, και δεν υπάρχουν τετράγωνα του k-οστού χρώματος σε αυτό το ορθογώνιο. Σε αυτήν την περίπτωση, το συνολικό πλήθος των τετραγώνων k-οστού χρώματος στην επιφάνεια είναι N_0, επομένως $N \leq N_0$. Και με βάση την ανισότητα $N \geq N_0$ που αποδείξαμε προηγουμένως, παίρνουμε τον τύπο για την ακριβή τιμή του N: $N = N_0 = (mn-rs)/k$.

Η άλλη περίπτωση, όπου $r + s - 1 \geq k$ (Σχήμα 6), είναι δυσκολότερη. Εδώ, η k-οστή διαγώνιος τέμνεται με το $r \times s$ ορθογώνιο που έχει μείνει εκτός πλακοστρώσεως, και μπορούμε να βρούμε το πλήθος των τετραγώνων που ανήκουν στην τομή αφαιρώντας από το πλήθος k των τετραγώνων ολόκληρης της k-οστής διαγωνίου το πλήθος των τετραγώνων της που βρίσκονται πάνω ή δεξιά από το ορθογώνιο: $k - (k-r) - (k-s) = r + s - k$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, το πλήθος των τετραγώνων k-οστού χρώματος σε ολόκληρη την επιφάνεια —που, όπως γνωρίζουμε, είναι ένα άνω φράγμα του N— ισούται με $N_0 + (r + s - k)$. Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο αριθμός αυτός, με την προφανή εξαίρεση της περίπτωσης όπου $k > m$ ή $k > n$, είναι η *ακριβής* τιμή του μεγαλύτερου δυνατού πλήθους N λωρίδων στην επιφάνειά μας.

Αλλά ας επιστρέψουμε στο θεώρημα Bruijn-Klarner για ν' αποδείξουμε ότι το αναγκαίο της συνθήκης συνάγεται από την τελευταία μας εκτίμηση. Ας υποθέσουμε ότι η $m \times n$ επιφάνεια μπορεί να πλακο-



Σχήμα 6

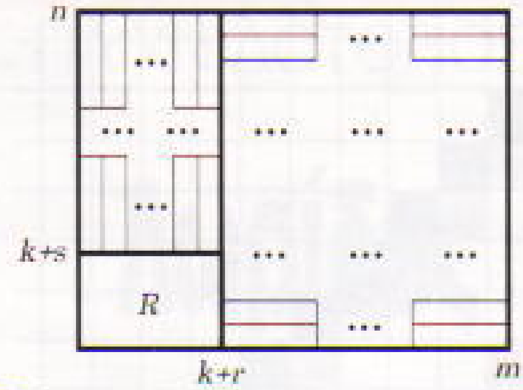
στρωθεί με $1 \times k$ λωρίδες. Τότε περιέχει τόσα τετράγωνα k-οστού χρώματος όσα και οποιουδήποτε άλλου χρώματος —άρα και s-οστού χρώματος. Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι ούτε το m ούτε το n είναι πολλαπλάσιο του k —δηλαδή, $r > 0$ και $s > 0$. Τότε, η κατασκευή του Σχήματος 3 μας δείχνει ότι τα πρώτα δύο από τα τρία ορθογώνια που θεωρήσαμε περιέχουν N_0 τετράγωνα καθενός από τα χρώματα s και k, ενώ στο τρίτο ορθογώνιο (Σχήμα 5) υπάρχουν s τετράγωνα χρώματος s, και μηδέν ή $r + s - k < s$ τετράγωνα χρώματος k. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση η πλήρης πλακόστρωση είναι αδύνατη.

Μια βέλτιστη πλακόστρωση

Τώρα θέλω να σας εξηγήσω πώς θα τοποθετήσουμε τις $N_1 = N_0 + (r + s - k)$ λωρίδες πάνω στην $m \times n$ επιφάνεια στην περίπτωση που $r + s - k \geq 1$, $k < n$, $k < m$. Την κατασκευή που ακολουθεί την οφείλουμε στο φοιτητή μου L. Khariton. Είναι παρόμοια με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε (Σχήμα 3), με τη διαφορά ότι αντί για το $r \times s$ ορθογώνιο στην κάτω αριστερή γωνία της επιφάνειας εξαιρούμε ένα ορθογώνιο R, διαστάσεων $(r + k) \times (s + k)$ (Σχήμα 7), που μας επιτρέπει να ταιριάξουμε πάνω του όσες λωρίδες χρειαζόμαστε.

Όσον αφορά τα δύο υπόλοιπα ορθογώνια, που τώρα έχουν διαστάσεις $(m - r - k) \times n$ και $(r + k) \times (n - s - k)$, μπορούμε να τα πλακοστρώσουμε χωρίς ν' αφήσουμε κενά, γιατί το καθένα τους έχει μια πλευρά με μήκος διαιρούμενο από το k. Στο Σχήμα 8 βλέπετε πώς θα τοποθετήσουμε τις λωρίδες στο ορθογώνιο R.

Σε δύο διαγωνίως απέναντι γωνίες τοποθετούμε τις λωρίδες οριζόντια (s λωρίδες σε κάθε γωνία), και σε καθεμία από τις άλλες δύο γωνίες τοποθετούμε r κατακόρυφες λωρίδες. Επομένως, έχουμε $2(r + s)$ λωρίδες στο ορθογώνιο R, και άρα θα έχουμε $(r + k)(s + k) - 2(r + s)k = (r - k)(s - k)$ ακάλυπτα τετράγωνα. Επομένως οι λωρίδες καλύπτουν σε αυτήν την πλακόστρωση $mn - (r - k)(s - k) = (mn - rs) + (r + s - k)k$ τετράγωνα της επιφάνειας. Διαιρώντας αυτόν τον αριθμό με k, βρίσκουμε ότι υπάρ-

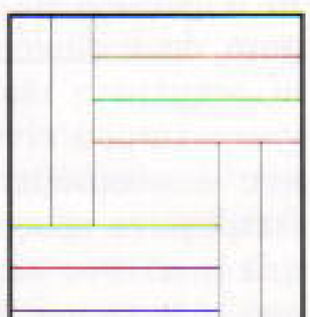


Σχήμα 7

χουν ακριβώς N_1 λωρίδες.

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι στην περίπτωση που $k > n$ ο μέγιστος δυνατός αριθμών λωρίδων είναι $N = n[m/k]$.

Στην περίπτωση που $k > m$, η παράσταση για το N είναι παρόμοια: $N = m[n/k]$. (Αν $k > n$ και $k > m$, τότε και οι δύο παραστάσεις δίνουν $N = 0$.)



Σχήμα 8

Και τώρα ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το μέγιστο πλήθος N λωρίδων διαστάσεων $1 \times k$ που είναι δυνατό να τοποθετηθούν («κανονικά») σ' ένα ορθογώνιο $m \times n$, όπου τα m και n αφήνουν υπόλοιπο r και s, αντίστοιχα, διαιρούμενα με το k, δίνεται από τις σχέσεις*

$$N = \begin{cases} N_0 + \max(r+s-k,\ 0), & \\ \qquad \text{αν } k \leq \min(m, n), & \\ \left[\dfrac{n}{k}\right]m, \quad \text{αν } k > m, & \\ \left[\dfrac{m}{k}\right]n, \quad \text{αν } k > n, & \end{cases}$$

όπου $N_0 = (mn - rs)/k$, $max(x, y)$ είναι ο μεγαλύτερος και $min(x, y)$ ο μικρότερος από τους αριθμούς x, y. (Ίσως διαφαίνεται ότι δεν αντιμετωπίσαμε τις περιπτώσεις $k = m$ και $k = n$ στην προηγούμενη επιχειρηματολογία μας, αλλά αυτές είναι απλώς ειδικές περιπτώσεις της διαιρετότητας των m και n με το k.)

Τούβλα σε κιβώτια

Φαίνεται ότι έχουμε αντιμετωπίσει πλήρως το πρόβλημά μας. Δεν έφτασε, όμως, ακόμη η στιγμή των πανηγυρισμών. Αποδεικνύεται ότι δεν μπορούμε να επεκτείνουμε τη λύση που χρησιμοποιήσαμε για το ορθογώνιο και στην περίπτωση ενός κιβωτίου (ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) στον τρισδιάστατο χώρο. Η κατάσταση είναι ακόμη χειρότερη στους n-διάστατους χώρους όπου $n > 3$. Θα περιγράψω με συντομία μερικά αποτελέσματα χωρίς να δώσω αποδείξεις.

Αντί της επιφάνειας με διαστάσεις $m \times n$, ας θεωρήσουμε ένα κιβώτιο διαστάσεων $m \times n \times p$, και αντί λωρίδες ας χρησιμοποιήσουμε «τούβλα» διαστάσεων $1 \times 1 \times k$. Ας βάλουμε τα τούβλα μέσα στο κιβώτιο «κανονικά» —δηλαδή, έτσι ώστε οι μοναδιαίοι κύβοι που αποτελούν κάθε τούβλο να συμπίπτουν ακριβώς με τους μοναδιαίους κύβους που αποτελούν το κιβώτιο. Τότε, όπως και στην περίπτωση του επιπέδου, μπορούμε πάντα να βάλουμε $N_0 = (mnp - rst)k$ τούβλα στο κιβώτιο, όπου r, s, t είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης των m, n, p με το k αντίστοιχα. Το θεώρημα Bruijn-Klarner αληθεύει και σε αυτήν την περίπτωση (ο de Bruijn το απέδειξε για τον τρισδιάστατο χώρο καθώς και για τους χώρους άρτιας διάστασης). Όμως, δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμη ένας ακριβής τύπος για το μέγιστο δυνατό πλήθος τούβλων N στη γενική περίπτωση. Γνωρίζω μόνο την εκτίμηση

$$N_0 \leq N \leq mnp - k^3 \cdot \left\|\frac{m}{k}\right\| \cdot \left\|\frac{n}{k}\right\| \cdot \left\|\frac{p}{k}\right\|,$$

όπου $\|v\|$ συμβολίζει την απόσταση ενός πραγματικού αριθμού v από τον πλησιέστερο ακέραιο —$\|v\| = \min(\{v\}, 1 - \{v\})$, όπου $\{v\} = v - [v]$ είναι το κλασματικό μέρος του v. Όταν και οι τρεις αριθμοί r, s, t είναι μικρότεροι ή ίσοι του $k/2$, τότε αυτή η ανισότητα γίνεται η ακριβής ισότητα $N = N_0$.

Στη γενική περίπτωση, όμως, το αριστερό και το δεξί μέλος αυτής της ανισότητας δεν συμπίπτουν, και έτσι δεν μας δίνουν την ακριβή τιμή του N. Μπορεί οι αναγνώστες μας να είναι πιο τυχεροί και να επιτύχουν τον υπολογισμό του N. ◘

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 64