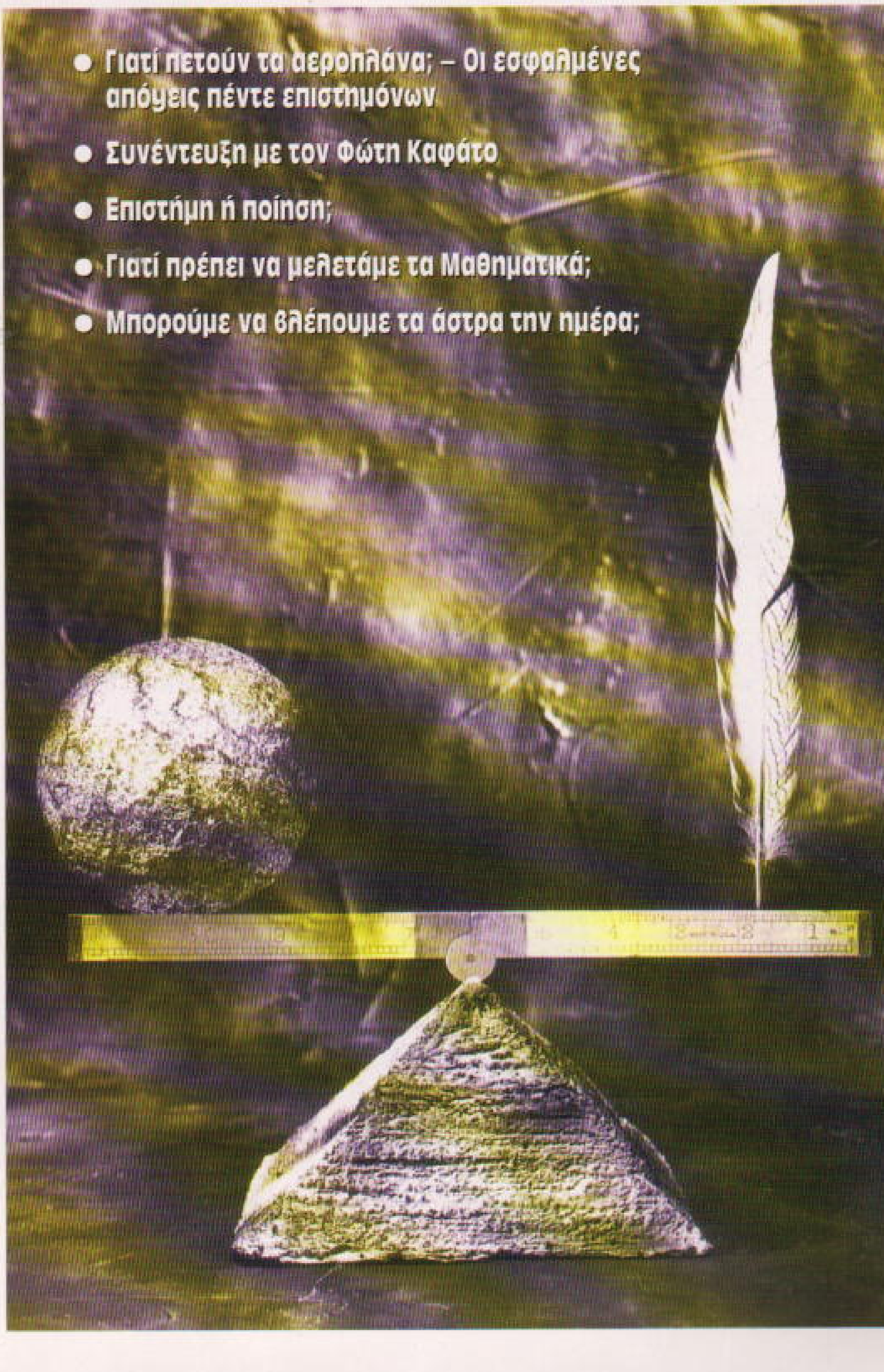
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1994
ΤΟΜΟΣ 1 / ΤΕΥΧΟΣ 4
1.200 ΔΡΧ.



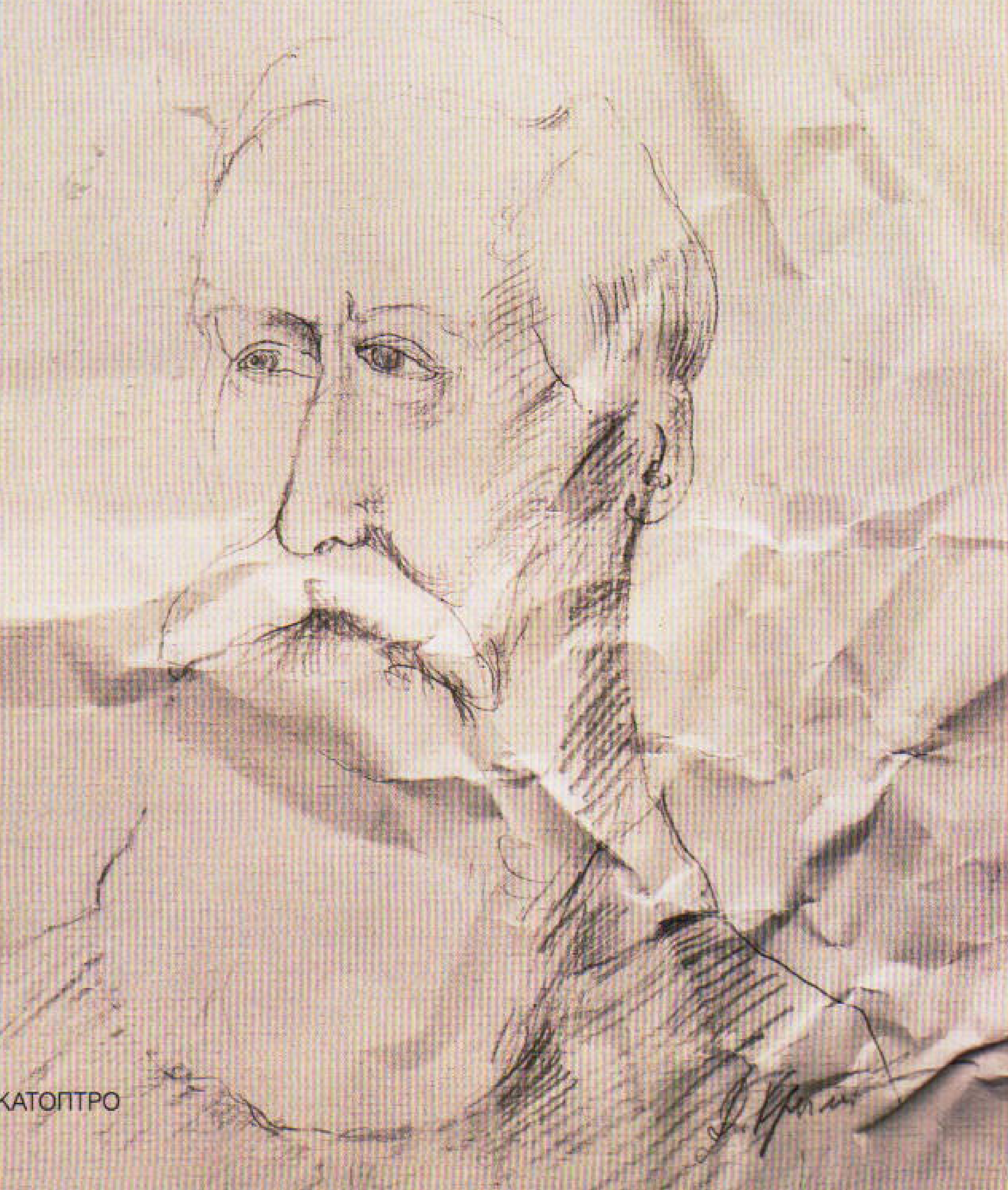
Έκδοση
της Εθνικής Ενωσης
Καθηγητών Θετικών
Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ,
του Γραφείου Kvant
της Ρωσικής Ακαδημίας
Επιστημών,
της Αμερικανικής Ένωσης
Καθηγητών Φυσικής (AAPT),
του Εθνικού Συμβουλίου
Καθηγητών Μαθηματικών
(NCTM) των ΗΠΑ,
του Εκδοτικού οίκου
Springer και των
Εκδόσεων Κάτοπτρο

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1994

1.200 ΔΡΧ.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Εθνική Πινακοθήκη των ΗΠΑ, Ουάσιγκτον (Δωρεά της κυρίας Huttleston Rogers) ©1994 NGA

Η Κοιλάδα της Λακαγουάννα (1855) του George Inness

Συχνά θεωρούμε τους ζωγράφους ελεύθερα πνεύματα, ανεμπόδιστους από τις εγκόσμιες σκέψεις που κρατούν εμάς τους υπόλοιπους δεμένους με τα επίγεια. Τούτος ο πίνακας του George Inness (1825-1894) διαψεύδει αυτή τη σχετικά σύγχρονη ματαιοφροσύνη. Τον παρήγγειλαν οι Σιδηρόδρομοι Ντέλαγουαιρ και Λακαγουάννα, κι όταν ο Inness τον ολοκλήρωσε, διαπίστωσε πως ο πελάτης του δεν έμεινε καθόλου ικανοποιημένος. Ο Inness είχε ζωγραφίσει μόνο μία σιδηροδρομική γραμμή —τα σχέδια απαιτούσαν άλλες τρεις ή τέσσερις, και ο πρόεδρος των σιδηροδρόμων είχε αξιώσει να μπουν όλες στον πίνακα εκ των προτέρων, πριν υπάρξουν στην πραγματικότητα. Επίσης, ο ισχυρός αυτός προστάτης των τεχνών ήθελε να απεικονίζεται στον πίνακα ολόκληρος ο τροχαίος εξοπλισμός καθώς και τα αρχικά της εταιρείας στο πλάι, και πιθανόν είχε και άλλες ιδέες. Σε τελευταία ανάλυση, ήταν πρακτικός άνθρωπος.

Ο Inness αντιμετώπισε ένα δίλημμα: να ζωγραφίσει ό,τι του αρέσει και να αφήσει την οικογένειά του να λιμοκτονήσει, ή να προσαρμοστεί στις παραξενιές του χρηματοδότη του. Τελικά ενέδωσε. Και ύστερα απ' όσα πέρασε, έμαθε αργότερα ότι η εταιρεία είχε πουλήσει τον πίνακα· γέρος πια, τον ξαναβρήκε σε ένα παλαιοπωλείο στο Μεξικό.

«Ποιός είχε δίκιο, η εταιρεία ή ο ζωγράφος;» ρωτά ο John Walker, ομότιμος έφορος της Εθνικής Πινακοθήκης των ΗΠΑ. Υποθέτει πως οι περισσότεροι από μας θα υποστηρίξουν τον ζωγράφο και θα επιτιμήσουν τον χρηματοδότη. «Ωστόσο, πολλά από τα σπουδαιότερα έργα τέχνης εκτελέστηκαν σύμφωνα με τα αυστηρότερα συμβόλαια», γράφει ο Walker· «πόσα πρόσωπα πρέπει να απεικονίζονται, πού πρέπει να στέκονται, πόσο χρυσό, πόσο μπλε, πόσο κόκκινο πρέπει να χρησιμοποιηθεί». Άποψη του Walker είναι πως ο Inness ωφελήθηκε από τους περιορισμούς του μεγιστάνα των σιδηροδρόμων ως προς την καλλιτεχνική του ελευθερία: «Σήμερα η *Κοιλάδα της Λακαγουάννα* είναι πολύ υψηλότερα διατιμημένη απ' όσο τα ομιχλώδη τοπία που ζωγράφισε στα τέλη της ζωής του, όταν δεν υπήρχε κανένας χρηματοδότης να του επιβάλλει τις απόψεις του».

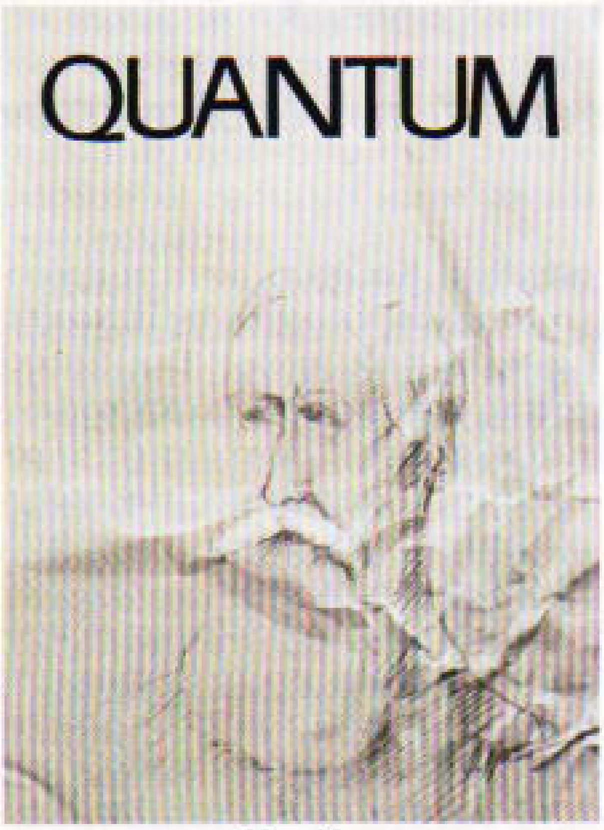
Δεν εξαναγκάζονται μόνο οι ζωγράφοι κατ' αυτό τον τρόπο. Επιστήμονες που δέχονται επιχορηγήσεις από την κυβέρνηση για τις έρευνές τους, έμμισθοι συγγραφείς, καθηγητές, είναι όλοι τους αναγκασμένοι να συμβιβάζονται ως ένα βαθμό αν θέλουν να πληρώνονται. Από μια λιγότερο ευτελή άποψη, πολλοί από μας χρειαζόμαστε τους περιορισμούς ενός συγκεκριμένου καθήκοντος για να παραγάγουμε δημιουργικό έργο.

Σ' αυτό το τεύχος του *Quantum*, τα προβλήματα πρακτικότητας συνεχίζουν να ξαφνιάζουν, όπως μια ατμομηχανή που εμφανίζεται αιφνιδιαστικά.

QUANTUM

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ / ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1994

ΤΟΜΟΣ 1 / ΤΕΥΧΟΣ 4



Εικονογράφηση εξωφύλλου: Dmitri Krymov

Εφέτος κλείνουν εκατό χρόνια από το θάνατο του μεγάλου ρώσου μαθηματικού P.L. Chebyshev. O Chebyshev γεννήθηκε το 1821 στο Οκάτοβο. Ανακηρύχθηκε διδάκτωρ των μαθηματικών και της αστρονομίας (1849), και διετέλεσε τακτικό μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης (1860), μέλος της Βασιλικής Εταιρείας της Λιέγης και της Μαθηματικής Εταιρείας των Παρισίων (1856), ιδρυτικό μέλος της Μαθηματικής Εταιρείας της Μόσχας (1867), μέλος των Ακαδημιών Επιστημών του Βερολίνου (1871) και της Μπολόνιας (1873), της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου (1877), της Μαθηματικής Εταιρείας της Γαλλίας (1874) και της Ακαδημίας Επιστημών της Σουηδίας (1893). Απέκτησε παγκόσμια φήμη για τις εξαιρετικές εργασίες του στις πιθανότητες, στην ολοκλήρωση αλγεβρικών συναρτήσεων, στη θεωρία αριθμών και σε άλλους κλάδους των καθαρών μαθηματικών. O Chebyshev είχε έντονο ενδιαφέρον για τα πρακτικά προβλήματα: ορθολογικό σχεδιασμό μηχανικών διατάξεων, σχεδίαση γεωγραφικών χαρτών, βέλτιστη κοπή των υφασμάτων ένδυσης, κ.ά.

Εις μνήμην του, το *Quantum* δημοσιεύει ένα άρθρο σχετικά με την εργασία του σε ορισμένη κλάση πολυωνύμων (σελ. 14). Διαβάστε το!

ΑΡΘΡΑ

6 Φυσική των πτήσεων
Πετώντας με το φαινόμενο Coanda
Jef Raskin

15 Εις μνήμην Chebyshev
Το πρόβλημα του Chebyshev
S. Tabachnikov και S. Gashkov

20 Διαδόσεις κατά παρατηρήσεων
Οπτική για ουρανοβάμονες
Vladimir Surdin

38 Κίνητρα στα Μαθηματικά
Γιατί μελετάμε τα Μαθηματικά;
Vladimir Arnold

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

2 Ο κόσμος των κβάντων

4 Απόψεις
Η καλοκαιρινή μέρα της ψυχής

25 Πώς λύνεται;

26 Συνέντευξη
Ο Φώτης Καφάτος μιλά στο ελληνικό Quantum

32 Σπαζοκεφαλιές

33 Στο μαυροπίνακα
Μετατρέποντας αλγεβρικές ταυτότητες σε γεωμετρικές ανισότητες

36 Καλειδοσκόπιο
Συντελεστές απόδοσης

46 Στα πεδία της φυσικής
Ανερχόμενοι αστέρες

49 Στο εργαστήριο
Περιστροφή μέσα σε ρεύμα αέρα

53 Αλληλογραφία

55 Μαθηματικές αναζητήσεις
Κατασκευή τριγώνων από τρία δεδομένα σημεία

56 Το *Quantum* διαβάζει

60 Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις

70 Παιχνιδότοπος
Διαμάντια από ένα πιθάρι

ΟΚΟΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

Η εξερεύνηση του κυβερνοχώρου

Φτηνοί εντυπωσιασμοί και πραγματική επιστήμη στην εποχή των υπολογιστών

Πρόσφατα, η Εθνική Ένωση Καθηγητών Θετικών Επιστημών εγκατέστησε έναν κόμβο του δικτύου Internet. Όλοι μας ενθουσιαστήκαμε γι' αυτή την αξιοσημείωτη έκρηξη ενδιαφέροντος για τις ηλεκτρονικές επικοινωνίες, ωστόσο ορισμένοι λόγοι μάς υποχρεώνουν να βλέπουμε με επιφύλαξη μερικές πλευρές αυτής της τάσης.

Το Internet προσφέρει μια μοναδική ευκαιρία να έρθουν κοντά άνθρωποι απ' όλο τον κόσμο. Για να εκτιμήσει κανείς την ισχύ αυτής της νέας τεχνολογίας, φτάνει απλώς να καθίσει μπροστά στον υπολογιστή του, να καλέσει το MOSAIC, και ν' αρχίσει να βλέπει εικόνες και πληροφορίες απ' όλο τον κόσμο. Ή ακόμη και το απλό ζήτημα της αποστολής και λήψης ταχυδρομικών μηνυμάτων ή εγγράφων μπορεί να αντιμετωπιστεί με πολύ αποδοτικότερο τρόπο. Ο συνδυασμός του Internet και των πολυμέσων προσφέρει ακόμη πιο ενδιαφέρουσες και συναρπαστικές δυνατότητες.

Πού οφείλονται, λοιπόν, οι ανησυχίες; Ο υπολογιστής είναι μια σπουδαία συσκευή, που διαθέτει τέλεια μνήμη και ικανότητα λογικού συλλογισμού. Όμως, μπορεί να θυμάται μόνο ό,τι του έχουν δώσει οι άνθρωποι, και οι συλλογισμοί του περιορίζονται στην εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων από προτάσεις που του έχουν προσφέρει και πάλι οι ίδιοι οι άνθρωποι.

Αρκετοί ζητούν να αντικατασταθεί μεγάλο μέρος της επιστημονικής εκπαίδευσης, και ιδιαίτερα της εργαστηριακής, από τη χρήση του Internet, των πολυμέσων και παρόμοιων τεχνολογιών που βασίζονται σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Για παράδειγμα, στο τεύχος του Ιουλίου του περιοδικού *Wired*, ο επιστήμων του MIT Νίκος Νεγρεπόντης υποστηρίζει ότι «εφόσον μπορούμε πλέον να προσομοιώσουμε σχεδόν οτιδήποτε στον υπολογιστή, δεν χρειάζεται να κόβουμε έναν βάτραχο για να μάθουμε την ανατομία του. Αντίθετα, μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν βατράχους, να κατασκευάσουν ζώα με συμπεριφορά βατράχου, να τροποποιήσουν αυτή τη συμπεριφορά, να διεγείρουν τους μυς, να παίξουν με τους βατράχους». Ο Νεγρεπόντης συνεχίζει υπογραμμίζοντας τις σχεδιαστικές πλευρές της μάθησης.

Οι προσομοιώσεις των φυσικών φαινομένων μέσω υπολογιστή δεν διδάσκουν την επιστήμη! Αποτελούν μια μορφή παρουσίασης της επιστήμης παρουσίασης αστήρικτων απόψεων σχετικά με την επιστήμη. Και το χειρότερο, διαχωρίζουν τον άνθρωπο που μαθαίνει την επιστήμη από τη φύση, παρεμβάλλοντας μια ενδιάμεση συσκευή που είναι προγραμματισμένη να παρουσιάζει το μοντέλο του φαινομένου που εξετάζει. Αυτό σημαίνει ότι ο προγραμματιστής μπορεί να ανα-δημιουργήσει τη φύση με όποιον τρόπο επιθυμεί, έτσι ώστε, ανάλογα με την επιλογή του, η επιστήμη να ταιριάζει με τη φύση, ή και να μην ταιριάζει.

Για να μη θεωρήσει ο αναγνώστης ότι όλα αυτά είναι ασυναρτησίες, παραθέτω δύο σχετικά παραδείγματα. Έχω δει προσομοιώσεις που επιτρέπουν τη μελέτη των νόμων των αερίων. Το πρόβλημα αυτών των προσομοιώσεων είναι ότι υπάρχουν 50, ίσως και περισσότερες, διαφορετικές εξισώσεις νόμων αερίων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, και ότι ο νόμος των ιδανικών αερίων είναι εντελώς εσφαλμένος για τα περισσότερα φαινόμενα που παρατηρούνται στα αέρια. Και όμως, αυτές οι προσομοιώσεις χρησιμοποιούν τις περισσότερες φορές αυτόν το νόμο. Έτσι, ο σπουδαστής, αποκομμένος από τον πραγματικό κόσμο των αερίων, εξετάζει το μοντέλο της συμπεριφοράς των αερίων που δημιούργησε κάποιος άλλος. Αυτό, όμως, δεν είναι επιστήμη.

Σ' ένα πείραμα εξετάζονταν οι προβλέψεις μαθητών για την κίνηση ενός βλήματος σε σύγκριση με τις απαντήσεις ενός «έμπειρου συστήματος» μιας προσομοίωσης υπολογιστή. Στη συνέχεια, γινόταν αντιπαραβολή των σχεδίων των παιδιών και του υπολογιστή έτσι ώστε τα παιδιά να μάθουν πώς γίνεται η κίνηση. Όπως αποδείχτηκε, ο υπολογιστής υποδείκνυε μια τέλεια παραβολική τροχιά, ενώ τα διαγράμματα των παιδιών ήταν πολύ πιο κοντά στην πραγματικότητα (λόγω της αντίστασης του αέρα). Το λεγόμενο έμπειρο σύστημα υπέπιπτε σε σφάλμα επειδή οι προγραμματιστές δεν θεώρησαν σκόπιμο να προσθέσουν λίγες γραμμές κώδικα για την αντίσταση του αέρα. Τα παιδιά είχαν δίκιο επειδή είχαν παρατηρήσει την κίνηση σε πραγματικές συνθήκες.

Η επιστήμη μαθαίνεται μέσω της ανάπτυξης εννοιών που πηγάζουν από την εμπειρία των πραγματικών φαινομένων. Μερικές από αυτές τις έννοιες συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις που είναι δυνατό να προσδιοριστούν μέσω ελεγχόμενων πειραμάτων σε φυσικά φαινόμενα. Όταν ανακαλυφθούν αρκετές συσχετιζόμενες εμπειρικές σχέσεις για τις οποίες απαιτούνται ερμηνείες, δημιουργείται μια θεωρία από την ανθρώπινη νόηση. Βεβαίως, οι εμπειρικοί νόμοι συχνά καθορίζονται ευκολότερα με την ανάλυση δεδομένων μέσω υπολογιστή, και σε μερικά μοντέλα ή θεωρίες ταιριάζει ιδιαίτερα η δημιουργία μοντέλων μέσω υπολογιστή. Επίσης, από τη στιγμή που υπάρχουν θεωρίες και εμπειρικοί νόμοι, μπορούν να εφαρμοστούν στον «μηχανολογικό σχεδιασμό». Ο μηχανολογικός σχεδιασμός, όμως, δεν είναι επιστήμη —είναι μηχανική. Και η δημιουργία μοντέλων είναι μια υψηλού επιπέδου ικανότητα της οποίας, κανονικά, θα έπρεπε να προηγηθεί η εμπειρία των φαινομένων και ο πειραματισμός που θα μας επιτρέψει να φτάσουμε σε εμπειρικές σχέσεις, πριν καν συμπεριληφθούν οι σχεδιασμοί και τα μοντέλα των υπολογιστών.

Η σύγχρονη τεχνολογία έχει τη δυνατότητα να βελτιώσει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα των σπουδαστών να προσεγγίσουν ανεπεξέργαστα δεδομένα, να τα αναλύσουν και να δημιουργήσουν μερικούς από τους νόμους της φύσης που έχουν ανακαλύψει οι επιστήμονες. Η τεχνολογία προσφέρει επίσης μεγάλες ευκαιρίες να δημιουργήσουμε μοντέλα και θεωρίες και να προτείνουμε ελέγχους γι' αυτές —πράγμα που απαιτεί μετρήσεις ή παρατηρήσεις στον πραγματικό κόσμο. Η σύγχρονη τεχνολογία των υπολογιστών, μαζί με τις κατάλληλες συσκευές μετατροπής και σύζευξης, μπορεί να επιτρέψει στους σπουδαστές τόσο την καλύτερη και ευκολότερη πρόσβαση σε δεδομένα πραγματικού χρόνου όσο και την ταχύτατη ανάλυση αυτών των δεδομένων. Αυτού του είδους η χρήση της τεχνολογίας μάς προσφέρει πολύ περισσότερες δυνατότητες στο να αλλάζουμε μεταβλητές και να ελέγχουμε υποθέσεις. Έτσι πρέπει να χρησιμοποιείται η τεχνολογία των υπολογιστών, ώστε να γίνεται μέρος των οργάνων μέτρησης ή παρατήρησης.

Οι φυσικές επιστήμες μελετούν τα φαινόμενα της φύσης, και όχι αυτά που κάποιος άνθρωπος αποφάσισε ότι είναι φυσικά φαινόμενα. Η τεχνολογία προσφέρει μεγάλες προοπτικές, αλλά εγκυμονεί και μερικούς πραγματικούς κινδύνους. (Ο μεγάλος ρώσος μαθηματικός Vladimir Arnold κρούει τον κώδωνα του κινδύνου στο άρθρο του στο παρόν τεύχος.) Με τον νέο μας κόμβο του δικτύου Internet, η διεύθυνσή μου είναι bgaldridge@nsta.org. Θα με ενδιέφερε να διαβάσω στην οθόνη μου και τη δική σας άποψη!

Bill G. Aldridge

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης
Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ
William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνα
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Σύνταξης στα Μαθηματικά
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη
Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης **Timothy Weber**
Υπεύθυνος εικονογράφησης **Sergey Ivanov**
Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων **Edward Lozansky**

Σύμβουλοι Σύνταξης
Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας
Yuly Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov
Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική Επιτροπή
Bernand V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT
James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM
George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέττη
Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντέιλ, Λουιζιάνα
Carol-ann Tripp, Καθηγήτρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πρόβιντενς, Ρόουντ Αϊλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης **Αλέκος Μάμαλης**
Διευθυντής **Γιώργος Ευαγγελόπουλος**

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.:
Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, **Φάνης Γραμμένος**-φυσικός, **Θεοδόσης Χριστοδουλάκης**-φυσικός, **Μιχάλης Λάμπρου**-μαθηματικός, **Κώστας Σκανδάλης**-μαθηματικός, **Στέφανος Τραχανάς**-φυσικός και **Αλέκος Μάμαλης**-φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια **Παντελής Μπουκάλας**
Επιμέλεια ελληνικής ύλης και τυπογραφικές διορθώσεις **Γ. Κυριακόπουλος** και **Π. Τασιόπουλος**

Επιστημονικοί σύμβουλοι
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας
Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπεύθυνη λογιστηρίου και διαφήμισης **Μαρία Μάμαλη**
Διακίνηση **Γιώργος Βιτσακάκης**
Συνδρομές **Αλεξία Σταμίρη**

Φωτοστοιχειοθεσία, φιλμ, μοντάζ **Πέραν**
Εκτύπωση **Τετραχρωμία**
Βιβλιοδεσία **Θ. Αρχοντουλάκης**

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο

Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. *Copyright* © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάμαλης. ISSN: 1106-2681.
Διορθώσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα.
Τηλ.: (01)3643272, 3645098, Fax: (01)3641864.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.200 δρχ.
Συνδρομές: Ατομική ετήσια: 7.000 δρχ. για ιδιώτες, 6.000 δρχ. για μαθητές και φοιτητές, 10.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα, οργανισμούς. Ατομική διετής: 12.600 δρχ. για ιδιώτες, 10.800 δρχ. για μαθητές και φοιτητές, 18.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα, οργανισμούς. Για ομαδικές συνδρομές, με χαμηλότερο κόστος, απευθυνθείτε στις Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Η καλοκαιρινή μέρα της ψυχής

«Κι οι ποιητές τι χρειάζονται σ' έναν μικρόψυχο καιρό;»

Φρήντριχ Χέλντερλιν

Peter Atkins[1]

Δεν είναι λίγοι όσοι θρηνούν για την έλλειψη ποιητικής έκφρασης στην επιστήμη. Η επιστήμη, ωστόσο, χαίρει άκρας υγείας και κάθε άλλο παρά πεπεισμένος είμαι ότι οι ποιητές έχουν να της προσφέρουν κάτι. Δεν νιώθω καμία ανάγκη να προσφύγω στην αμφισημία, στη σπαρακτική γλώσσα, στις εκφραστικές ακροβασίες και στις συναισθηματικές ταχυδακτυλουργίες που δίνουν στην ποίηση την υψηλή θέση που κατέχει στην τέχνη. Η επιστήμη ανοίγει τα δικά της βαθιά πηγάδια απόλαυσης και οι συλλήψεις της προσφέρουν όση ικανοποίηση προσφέρουν και οι ποιητές. Δεν έχω την πρόθεση να υποστηρίξω ότι η ποίηση είναι μια άχρηστη επιτήδευση· είναι μια τέχνη με σπουδαίο ρόλο και μας βοηθάει να νιώθουμε πόσο ευφρόσυνη είναι η ζωή. Θέλω απλώς να αποδείξω ότι η επιστήμη, όταν εκφράζεται με τους δικούς της όρους από υπομονετικούς δασκάλους και προσλαμβάνεται από πρόθυμα αυτιά, μπορεί να προσφέρει τουλάχιστον την ίδια ευχαρίστηση.

Αν έπρεπε να επισημάνω το πιο ακαταμάχητο στοιχείο της επιστήμης, θα ανέφερα την ικανότητά της να αποκαλύπτει την απλότητα που υπάρχει στην καρδιά του Κόσμου. Η υψηλή επιστήμη δεν είναι παρά βαθιά απλότητα. Η επιστήμη προβάλλει τους σπόρους της ερμηνείας, σπόρους τόσο πλούσιας απλότητας που έχουν τη δύναμη να γεννούν εύκαρπα δένδρα. Φυσικά, πολλοί θα θεωρούσαν παράλογο τον ισχυρισμό ότι η επιστήμη αποκαλύπτει την απλότητα, γιατί προτιμούν να την αντιλαμβάνονται ως μια διαρκώς επιταχυνόμενη απομάκρυνση από τον κοινό νου. Αλλά κάνουν λάθος. Οπωσδήποτε, η επιστήμη αντιμετωπίζει δυσκολίες επικοινωνίας. Οι επιστήμονες δυσκολεύονται όχι μόνο να κάνουν ανακαλύψεις αλλά και να αναπτύξουν στέρεα επιχειρήματα με τα οποία θα προχωρήσουν από τη διαίσθηση στην παρατήρηση. Ωστόσο, η καρδιά αυτού που πρέπει να ανακαλυφθεί, να αναπτυχθεί και να μεταδοθεί είναι απλή. Ιδού, λοιπόν, ποια βαθιά ευχαρίστηση προσφέρει η επιστήμη: να βλέπει κανείς μια εξήγηση να πηγάζει από την απλότητα.

Πώς μπορώ να σας πείσω ότι η συγκίνηση που προκύπτει από μια επιστημονική σύλληψη είναι η ίδια με τη συγκίνηση που προξενεί η ποίηση, ότι προσφέρει τεράστια ανταμοιβή και ότι αδυνατεί κανείς να τη μοιραστεί πλήρως με τους άλλους; Το μόνο που μπορώ να κάνω στον μικρό χώρο τούτου του κειμένου είναι να παρουσιάσω τρία παραδείγματα για να υποδείξω τη δύναμη της απλότητας και το ρόλο της στην αποκάλυψη της λειτουργίας του Κόσμου.

Ας σταθούμε κατ' αρχάς στη θεωρία της φυσικής επιλογής του Δαρβίνου, χάρη στην οποία μπορούμε να στηριχτούμε στην απλή ιδέα της επιβίωσης του πιο καλά προσαρμοσμένου και να κατανοήσουμε την προέλευση ολόκληρου του ζωικού και φυτικού βασιλείου. Δεν θεωρώ απαραίτητο να προσλάβω κάποιον ποιητή για να διατυπώσει την αρχή της φυσικής επιλογής με στίχους: η απόλυτη απλότητά της, σε συνδυασμό με την ερμηνευτική δύναμή της, την καθιστούν μία από τις ελκυστικότερες ιδέες που έχουν διατυπωθεί ποτέ. Δείχνει περίτρανα τι εννοώ όταν λέω υψηλή επιστήμη: αυτή ακριβώς η απλότητά της ενώνει όλα τα όντα σ' ένα παγκόσμιο δίκτυο επιβίωσης, και αποκαλύπτει την αξία του θανάτου. Άραγε, η ποίηση κάνει τίποτε περισσότερο; Θα μπορούσε στ' αλήθεια να προσθέσει κάτι;

Το επόμενο παράδειγμά μου προβάλλει μια άλλη όψη της χαράς που είναι σύμφυτη στην επιστήμη: την ομορφιά. Η θεωρία της γενικής σχετικότητας του Αϊνστάιν, η θεωρία του για τη βαρύτητα, είναι ένας από τους ευγενέστερους πνευματικούς σπόρους της ανθρωπότητας. Οι περισσότεροι άνθρωποι στην εποχή μας γνωρίζουν έστω αμυδρά την κεντρική ιδέα ότι ο χωρόχρονος (οτιδήποτε είναι αυτό) είναι παραμορφωμένος (οτιδήποτε σημαίνει αυτό) από την ύλη που περιέχει (και λοιπόν;). Η σχεδόν σχηματική ιδέα του παραμορφωμένου χωρόχρονου παρέχει τη δυνατότητα να κατανοήσουμε τα φαινόμενα κοσμικών διαστάσεων και συνδέει τους κατοίκους τους. Δεν χρειαζόμαστε ποιητές να

1. Ο ***P.W. Atkins*** είναι υφηγητής στο Lincoln College της Οξφόρδης και λέκτωρ φυσικοχημείας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Τούτο είναι το δεύτερο κείμενο που αποστέλλει ευγενικά στο ελληνικό *Quantum*. Η σύνταξη του περιοδικού τον ευχαριστεί βαθύτατα.

υμνήσουν τον παραμορφωμένο χωρόχρονο, διότι θα προσθέσουν συναίσθημα σε μια έννοια που δεν το χρειάζεται. Το πραγματικό, ουσιαστικό κέντρο της θεωρίας του Αϊνστάιν είναι τα μαθηματικά, με τα οποία διατύπωσε την έννοια που εισήγαγε. Χρησιμοποίησε μαθηματικά για να εκφράσει την ουσία της, παρακάμπτοντας την ανθρώπινη προκατάληψη, και για να διατυπώσει τις ιδέες του μ' έναν τρόπο τον οποίο ο ίδιος και άλλοι θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν για να απαντήσουν σε μερικά από τα υπαρξιακά ερωτήματα, του τύπου «από πού ερχόμαστε;» και «πού πηγαίνουμε;». Και η ποίηση βέβαια ασχολείται με τέτοιου είδους ανθρώπινες ανησυχίες, ωστόσο δίνει πολύ λιγότερο πειστικές απαντήσεις. Η σφιχτοδεμένη θεωρία του Αϊνστάιν βρίσκεται τόσο μακριά από τη συμβατική ποίηση όσο και οι ιδέες. Κι όμως, έχει τη δική της υπέροχη ομορφιά. Όλα τα άχρηστα μαθηματικά «γένια» έχουν «ξυριστεί» από τις εξισώσεις του, που δεν θα μπορούσαν να είναι πιο «γυμνές»· ωστόσο, αυτές οι εξισώσεις είναι ο σπόρος του σύμπαντος, η αρχή του, η σύντομη στιγμή της αυτεπίγνωσης, όπως αυτή που απολαμβάνουμε τώρα, και το τέλος του, όταν όλα τα επιτεύγματά μας θα είναι σαν να μην υπήρξαν ποτέ. Η μαθηματική ομορφιά είναι βάλσαμο για το μυαλό, όπως ένα σονέτο, και θα μπορούσε επίσης να συγκριθεί με μια καλοκαιρινή μέρα της ψυχής.

Το τελευταίο παράδειγμα για τον πλούτο της απλότητας είναι ο Δεύτερος Νόμος της θερμοδυναμικής. Θεμελιωμένος στο βαρύ σύρσιμο των ατμομηχανών της αρχής του 19ου αιώνα, ο νόμος αυτός δίνει φτερά στους πόθους της ανθρωπότητας. Για άλλη μια φορά, ο χώρος δεν είναι κατάλληλος για να εξηγηθεί το περιεχόμενο του εν λόγω νόμου, θα ήθελα πάντως να σας πω γιατί με γοητεύει. Είναι απολύτως απλός, αλλά διαθέτει τεράστιο εύρος και δύναμη. Προσδιορίζει την προέλευση κάθε αλλαγής δείχνοντας ότι δεν είναι τίποτε πιο εξεζητημένο από μια άσκοπη κατάρρευση προς το χάος. Η επιστήμη απέσταξε από την τεράστια ποικιλία των καθημερινών γεγονότων την πεμπτουσία της αλλαγής και απέδειξε ότι χαρακτηρίζεται από ανυπέρβλητη απλότητα. Οποιαδήποτε κι αν είναι η διεργασία —η ψύξη ενός θερμού μετάλλου, το άνοιγμα ενός λουλουδιού, η δεξιοτεχνία της ποίησης—, εμείς οι επιστήμονες μπορούμε να είμαστε πεπεισμένοι ότι καθοδηγείται τελικά από μια άσκοπη κατάρρευση προς το χάος. Για μερικούς αυτό μπορεί να σημαίνει απόγνωση και να συνιστά αυτοαναίρεση του πνεύματος· αλλά για όσους βρίσκουν ευχαρίστηση στην αλήθεια και θεωρούν ότι η αλήθεια συμβάλλει στην ευχαρίστηση, ο Δεύτερος Νόμος της θερμοδυναμικής συνεισφέρει σημαντικά στα αποθέματά μας. Γνώσεις όπως αυτές που προσφέρει ο εν λόγω νόμος μπορούν να επωφεληθούν από την ποίηση για τη διάδοσή τους, διότι ποιος μπορεί να μη διασκεδάσει με την ειρωνεία μιας εξαίσιας μορφής που προκύπτει από μια σαθρή βάση· εντούτοις, ο ίδιος ο νόμος δεν χρειάζεται το συναίσθημα για να ερμηνευθεί.

Η επιστήμη έχει ανασυρθεί από το τέλμα της προκατάληψης και, εφαρμόζοντας αυστηρά τις άτεγκτες μεθόδους της, προσφέρει, εν δυνάμει, ερμηνείες για τα πάντα. Είναι πλήρως ικανοποιητική από μόνη της· δεν χρειάζεται, λοιπόν, να υιοθετήσει λογοτεχνικούς τρόπους έκφρασης, οι οποίοι απλώς θα συσκότιζαν την άφοβη διαύγειά της. ◙

QUANTUM

Κάντε ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε τό *Quantum* στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...
Αποφασίστε το τώρα. Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa).
Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη.
Η τιμή της συνδρομής υπερβολικά χαμηλή.

Περιοδικό Quantum, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα.
Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864


S. Ivanov

Πετώντας με το φαινόμενο Coanda

«Όταν προσπαθείς να κάνεις ένα αεροπλάνο να πετάξει χωρίς να διαθέτεις τη θεωρία, είναι σαν να παλεύεις μ' ένα φάντασμα.»

David Thornburg

Jef Raskin*

Μέσα σε είκοσι χρόνια μετά την πρώτη πτήση των αδελφών Ράιτ επιτεύχθηκε η βαθιά θεωρητική κατανόηση του φαινομένου της ανύψωσης του αεροπλάνου (τη μεγαλύτερη επίδραση την άσκησε το έργο του Ludwig Prandtl[1]). Ωστόσο, η ερμηνεία αυτού του φαινομένου που συναντάμε συνήθως στα διδακτικά εγχειρίδια και στα εκλαϊκευτικά άρθρα είναι προβληματική. Τυπικό παράδειγμα είναι το επόμενο. Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται ένα απόσπασμα από ένα δημοφιλές βιβλίο που εξηγεί τις μηχανές και την τεχνολογία. Στην ερμηνεία που δίνεται εκεί χρησιμοποιείται, χωρίς να γίνεται άμεση αναφορά, ο νόμος του Bernoulli, σύμφωνα με τον οποίο, και ορθώς, όσο ταχύτερα κινείται ο αέρας πάνω από μια επιφάνεια τόσο χαμηλότερη είναι η πίεση σ' αυτήν.

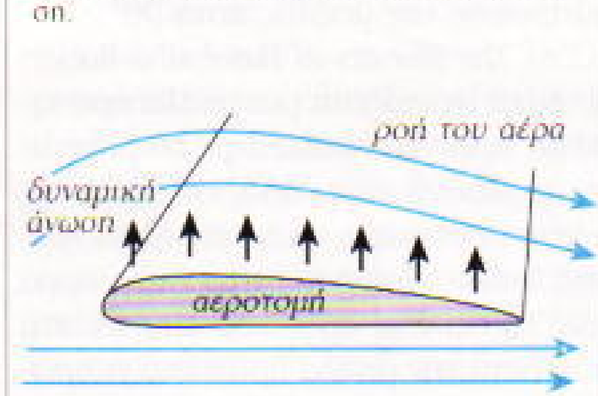
Βεβαίως, οι πτέρυγες των περισσότερων αεροπλάνων έχουν σημαντικά μεγαλύτερη καμπυλότητα στην πάνω επιφάνειά τους παρά στην κάτω, γεγονός που κάνει ακόμη πιο αληθοφανή αυτήν την εξήγηση. Από παιδί, όμως, είχα αντιμετωπίσει το εξής πρόβλημα: πώς μπορεί να πετάει ένα αεροπλάνο ανάποδα (κάτι που το είχα δει σε αεροπορικές επιδείξεις); Όταν κάποτε ρώτησα με ιδιαίτερη επιμονή τον δάσκαλό μου γι' αυτό το ζήτημα, έγινε έξω φρενών, αρνήθηκε ότι τα αεροπλάνα μπορούν να πετάξουν ανάποδα και προσπάθησε να συνεχίσει την παράδοση. Απογοητευμένος, αποπειράθηκα να του εκθέσω τα επιχειρήματά μου, μέχρι που μου φώναξε: «Σκασμός, Raskin!». Το τι επακολούθησε θα σας το πω στη συνέχεια του άρθρου.

Λίγα χρόνια αργότερα έκανα έναν υπολογισμό με βάση μιαν απλοϊκή εξήγηση της συνηθισμένης ερμηνείας για το πώς λειτουργεί η πτέρυγα. Χρησιμοποιώντας δεδομένα από ένα μοντέλο αεροπλάνου, βρήκα ότι η *δυναμική άνωση* (ή άντωση) που προκύπτει από τους υπολογισμούς ήταν μόνο το 2% εκείνης που χρειαζόταν για να πετάξει το μοντέλο (βλ. το πλαίσιο στη σελ. 11). Με δεδομένο ότι η εξίσωση του Bernoulli είναι σωστή (και πραγματικά, δεν είναι παρά μια μορφή του νόμου διατηρήσεως της ενέργειας), βρέθηκα αντιμέτωπος μ' έναν δεύτερο γρίφο: από πού προέρχεται το μεγαλύτερο ποσοστό της ανυψωτικής ικανότητας της πτέρυγας;

Ας ρίξουμε μια ματιά σε μερικές προσπάθειες ερμηνείας δύο φαινομένων —τι είναι αυτό που καμπυλώνει την τροχιά μιας περιστρεφόμενης μπάλας και πώς επηρεάζει τη δυναμική άνωση το σχήμα της πτέρυγας —και ας δούμε το πώς η συνηθισμένη ερμηνεία της δημιουργίας δυναμικής άνωσης έχει ξεγελάσει έναν εντυπωσιακό αριθμό επιστημόνων (ανάμεσά τους και μερικούς διάσημους).

ΑΕΡΟΤΟΜΗ

Η εγκάρσια τομή μιας πτέρυγας ονομάζεται αεροτομή. Καθώς η πτέρυγα μετακινείται μέσα στον αέρα, ο αέρας διαχωρίζεται για να περάσει γύρω της. Οι καμπυλώσεις της αεροτομής είναι τέτοιες ώστε ο αέρας που περνάει πάνω από την πτέρυγα να κινείται ταχύτερα από τον αέρα που διέρχεται από κάτω της. Ο αέρας που κινείται ταχύτερα ασκεί μικρότερη πίεση από τον αέρα που κινείται με λιγότερη ταχύτητα. Επομένως, η πίεση του αέρα είναι μεγαλύτερη κάτω από την πτέρυγα απ' ό,τι από πάνω της. Η διαφορά στην πίεση αναγκάζει την πτέρυγα να κινηθεί προς τα πάνω. Η ανυψωτική αυτή δύναμη ονομάζεται δυναμική άνωση.



Σχήμα 1

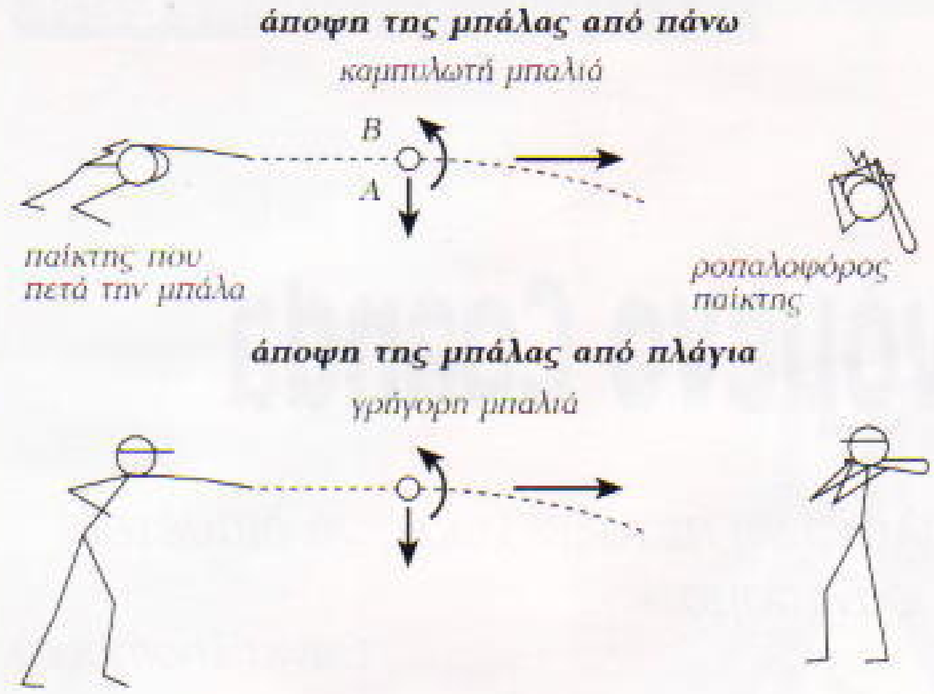
Η τρέχουσα εξήγηση. Από το The Way Things Work *του David Macaulay**.

* Ο ***Jef Raskin*** ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Σαν Ντιέγκο και δημιουργός του υπολογιστή Macintosh της εταιρείας Apple. Έχει συγγράψει πολλά βιβλία, είναι δε φανατικός αερομοντελιστής, καθώς και συνθέτης και μουσικός.

1. Ludwig Prandtl (1875-1953), γερμανός φυσικός που συχνά τον αποκαλούν «πατέρα της αεροδυναμικής». Το διάσημο βιβλίο του για τη θεωρία των πτερύγων, *Tragflufeltheorie*, εκδόθηκε το 1918.

* Το βιβλίο πρωτοκυκλοφόρησε στην Αγγλία το 1988. Έχει γίνει μπεστ-σέλερ παγκοσμίως. Στην Ελλάδα θα κυκλοφορήσει σύντομα από τις Εκδόσεις Γνώση. (Σ.τ.ε.)

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 2
Βασισμένο σ' ένα σχήμα από το βιβλίο A Scientist at the Seashore *του James Trefil.*

Η περιστρεφόμενη μπάλα

Η τροχιά μιας μπάλας που στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της και ταυτόχρονα κινείται προς τα μπροστά μέσα στον αέρα, παρεκκλίνει από την ευθεία είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Το πείραμα μας δείχνει ότι αυτό το φαινόμενο οφείλεται στο γεγονός ότι η μπάλα στρέφεται γύρω από τον άξονά της αλλά και στο ότι βρίσκεται μέσα σ' ένα ρευστό (τον αέρα). Μια μπάλα που δεν στρέφεται γύρω από τον άξονά της ή που περιστρέφεται μέσα στο κενό, ακολουθεί ευθεία πορεία. Πριν συνεχίσουμε, ίσως θελήσετε να σκεφτείτε λίγο και να αποφασίσετε μόνοι σας προς ποια κατεύθυνση θα παρεκκλίνει η μπάλα η οποία περιστρέφεται αριστερόστροφα (όταν την κοιτάμε από πάνω).

Ας δούμε τι γράφουν πέντε βιβλία γι' αυτό το ζήτημα. Τα τρία είναι γραμμένα από φυσικούς, το τέταρτο είναι ένα βασικό βιβλίο αναφοράς, και το τελευταίο, που μιλάει απλώς για κλωτσιές, είναι το βιβλίο του προπονητή ποδοσφαίρου του γιου μου. Θα ξεκινήσουμε με τον φυσικό James Trefil, ο οποίος γράφει:

> Πριν αφήσουμε το φαινόμενο Bernoulli, θα ήθελα να επισημάνω μια ακόμη περιοχή όπου αξίζει να διερευνήσουμε τις συνέπειές του· και που είναι κάπως απρόσμενα το παιχνίδι του μπέιζμπολ. Πάρτε για παράδειγμα την «καμπυλωτή μπαλιά». Σε αυτό το πέταγμα η μπάλα στρέφεται γύρω από τον άξονά της καθώς κινείται προς τα μπροστά, με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 2.[2] Η επιφάνεια της μπάλας είναι ανώμαλη, οπότε λόγω των δυνάμεων εσωτερικής τριβής δημιουργείται ένα λεπτό στρώμα αέρα που περιστρέφεται μαζί με την επιφάνεια της μπάλας. Αν κοιτάξουμε στο σχήμα, βλέπουμε ότι ο αέρας στο σημείο *A* θα κινείται ταχύτερα από τον αέρα στο σημείο *B*, διότι στην πρώτη περίπτωση η κίνηση της επιφάνειας της σφαίρας προστίθεται στη συνολική ταχύτητα της σφαίρας, ενώ στη δεύτερη αφαιρείται. Το αποτέλεσμα είναι μια δύναμη «ανύψωσης», που τείνει να μετακινήσει την μπάλα προς την κατεύθυνση που βλέπετε στο Σχήμα 2.[3]

Οι φανατικοί του μπέιζμπολ θα έλεγαν ότι η μπάλα στρέφεται προς την τρίτη βάση του γηπέδου. Ο Trefil στη συνέχεια μας παρουσιάζει την κίνηση για μια «γρήγορη μπαλιά» βλέπουμε την μπάλα να ακολουθεί μια πορεία που καμπυλώνει προς το έδαφος όταν η μπάλα στρέφεται γύρω από τον άξονά της έτσι ώστε το κάτω μέρος της να κινείται προς τα μπροστά. Πρόκειται για το ίδιο φαινόμενο με τον άξονα περιστροφής της μπάλας κατά 90°.

Στο *The Physics of Baseball* ο Robert K. Adair φαντάζεται μια μπάλα που κινείται προς τον παίκτη με το ρόπαλο και στρέφεται γύρω από τον εαυτό της αριστερόστροφα όταν τη βλέπουμε από πάνω, όπως και στο διάγραμμα του Trefil. Στα αριστερά του παίκτη που πετά την μπάλα βρίσκεται η πρώτη βάση, προς τα δεξιά η τρίτη. Ο Adair γράφει:

> Μπορούμε να περιμένουμε τότε ότι η πίεση του αέρα στην πλευρά της μπάλας που βρίσκεται προς την τρίτη βάση (σημείο *A* στο Σχήμα 2), πλευρά που κινείται ταχύτερα μέσα στον αέρα, θα είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην πλευρά της μπάλας που βρίσκεται προς την πρώτη βάση (σημείο *B* στο Σχήμα 2), η οποία κινείται πιο αργά, και ότι η μπάλα θα κινηθεί προς την πρώτη βάση.

Το συμπέρασμά του είναι ακριβώς αντίθετο από το συμπέρασμα του Trefil, παρότι συμφωνούν και οι δύο ότι η πλευρά που περιστρέφεται προς τα μπροστά κινείται ταχύτερα μέσα στον αέρα. Έχουμε διδαχθεί, λοιπόν, από αυτές τις δύο πηγές ότι η ταχύτερη μετακίνηση της μιας πλευράς μέσα στον αέρα είτε μειώνει είτε αυξάνει την πίεση στη συγκεκριμένη πλευρά. Προς το παρόν, δεν πρόκειται να πάρω θέση γι' αυτό το ζήτημα.

Η εγκυκλοπαίδεια *Britannica* (1979) χρησιμοποιεί έναν διαφορετικό συλλογισμό, ο οποίος εισάγει στη συζήτηση την έννοια της μετωπικής αντίστασης:

> Η αντίσταση επί της πλευράς της μπάλας που περιστρέφεται μέσα στον αέρα (προς την κατεύθυνση μετακίνησης της μπάλας) επιβραδύνει τη ροή του αέρα, ενώ η αντίσταση επί της άλλης πλευράς την επιταχύνει. Η μεγαλύτερη πίεση επί της πλευράς που επιβραδύνεται η ροή εξαναγκάζει την μπάλα να κινηθεί προς την κατεύθυνση της περιοχής χαμηλότερης πίεσης της άλλης πλευράς, όπου παρουσιάζεται σχετική αύξηση στη ροή του αέρα.

Τώρα έχουμε μάθει ότι η στροφή της μπάλας γύρω από τον άξονά της έχει αποτέλεσμα την ταχύτερη ή τη βραδύτερη κίνηση του αέρα στην πλευρά της μπάλας που κινείται προς τα μπροστά, και ότι αυτός ο ταχύτερα κινούμενος αέρας αυξάνει ή μειώνει την πίεση, ανάλογα με την αυθεντία που θα αποφασίσετε να γίνετε οπαδός της. Μιλώντας για αυθεντίες, ίσως πρέπει να στραφούμε σ' έναν από τους γίγαντες της φυσικής του αιώνα μας, τον Richard Feynman. Ο Feynman και οι συνεργάτες του, μαζί με τους οποίους έγραψε το βιβλίο, παίρνουν το μέρος του Trefil,

2. Έχω αλλάξει την αρίθμηση του σχήματος του βιβλίου του Trefil.
3. Οι ανωμαλίες της επιφάνειας δεν έχουν ουσιαστική σημασία. Το φαινόμενο παρατηρείται ανεξάρτητα από το πόσο λεία είναι η μπάλα.

Σχήμα 3

και χρησιμοποιούν έναν κύλινδρο αντί για σφαίρα (τα πλάγια γράμματα είναι δικά τους και η δυναμική άνωσης που αναφέρουν είναι σχεδιασμένη με κατεύθυνση προς τα πάνω):

> Η ταχύτητα ροής είναι μεγαλύτερη στην πάνω πλευρά του κυλίνδρου (ο οποίος φαίνεται να περιστρέφεται έτσι ώστε η κορυφή του να έχει την ίδια κατεύθυνση με την προς τα μπροστά κίνηση) απ' ό,τι στην κάτω πλευρά. Επομένως, η πίεση είναι *μικρότερη* στην πάνω *πλευρά* του κυλίνδρου απ' ό,τι στην κάτω πλευρά του. Έτσι, όταν έχουμε το συνδυασμό μιας περιφερειακής ροής γύρω από έναν κύλινδρο και μιας αμιγούς οριζόντιας ροής, το αποτέλεσμα είναι να αναπτύσσεται μια συνολική *κατακόρυφη δύναμη* πάνω στον κύλινδρο, η οποία ονομάζεται *δυναμική άνωση*.

Και τώρα το βιβλίο του προπονητή του γιου μου. Ο προπονητής είναι ο παγκοσμίου κλάσεως ποδοσφαιριστής George Lamptey. Δεν υπάρχει καθόλου θεωρία, αλλά λογικά πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι ο Lamptey έχει δοκιμάσει πολλές φορές το πείραμα και επομένως πρέπει να περιγράφει σωστά την πορεία της μπάλας. Γράφει λοιπόν:

> Το φαλτσαριστό χτύπημα είναι ένα λιγότερο ή περισσότερο πλάγιο χτύπημα της μπάλας με το εσωτερικό μέρος του ταρσού που προκαλεί την περιστροφή της μπάλας. Όταν χτυπάμε την μπάλα δεξιότερα από το κέντρο της, η τροχιά της καμπυλώνει προς τα αριστερά. Όταν τη χτυπάμε αριστερότερα από το κέντρο, καμπυλώνει προς τα δεξιά... Το πόσο καμπυλώνει η τροχιά της μπάλας εξαρτάται από την ταχύτητα της στροφής γύρω από τον εαυτό της.

Στο Σχήμα 3 μπορείτε να δείτε ότι ο Lamptey, όπως και ο Adair, θεωρεί υψηλή την πίεση στην πλευρά της μπάλας που κινείται στην ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση κίνησής της μέσα στον αέρα. Δεν θα παραθέσω άλλες περιγραφές, σε κάποιες από τις οποίες η πορεία της μπάλας καμπυλώνει προς τη μία μεριά, ενώ σε άλλες προς την αντίθετη. Μερικές από αυτές στηρίζονται στον τρόπο με τον οποίο ο συγγραφέας τους ερμηνεύει το φαινόμενο Bernoulli, άλλες στην εσωτερική τριβή, άλλες στη μετωπική αντίσταση και άλλες στην τυρβώδη ροή.

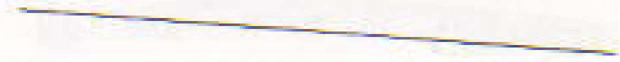
Θα επιστρέψουμε στο θέμα της περιστρεφόμενης μπάλας, αλλά πρώτα θα ανακαλύψουμε και άλλα προβλήματα που ανακύπτουν από τη συνηθισμένη ερμηνεία δημιουργίας της δυναμικής άνωσης.

Και άλλα παράδοξα

Η παραδοσιακή ερμηνεία του τρόπου δράσης μιας πτέρυγας μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι, για παράδειγμα, μια πτέρυγα που είναι κάπως κυρτή στην κάτω πλευρά της —ονομάζεται συχνά «πτέρυγα καμπυλωμένης βάσης»— θα δημιουργεί πάντοτε, κάτω από τις ίδιες συνθήκες, *μικρότερη* δυναμική άνωση απ' ό,τι μια πτέρυγα με επίπεδη κάτω επιφάνεια. Όταν η κάτω πλευρά της πτέρυγας είναι κυρτή (Σχήμα 4), η διαδρομή του αέρα από την κάτω μεριά είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στην περίπτωση της πτέρυγας του Σχήματος 1 με βάση επίπεδη. Επομένως, μικρότερη δυναμική άνωση —σωστά; Δυστυχώς, λάθος!

Στη συνέχεια, πρέπει να αναρωτηθούμε πώς είναι δυνατό να δημιουργεί δυναμική άνωση η επίπεδη πτέρυγα ενός χάρτινου αεροπλάνου, που δεν έχει καμία καμπύλωση (Σχήμα 5). Παρατηρήστε ότι η επίπεδη πτέρυγα έχει σχεδιαστεί με κλίση. Αυτή η κλίση ονομάζεται «γωνία προσβολής» και είναι απαραίτητη για να αναπτυχθεί σ' αυτή την περίπτωση η δυναμική άνωση. Θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα παρακάτω.

Σχήμα 4
Αεροτομή πτέρυγας καμπυλωμένης βάσης.

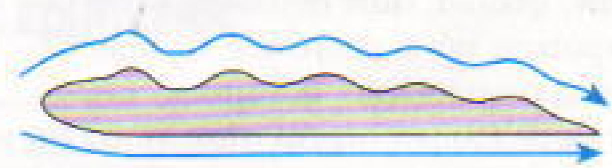


Σχήμα 5
Επίπεδη πτέρυγα

Οι εγκάρσιες τομές των πτερύγων, όπως αυτές που παρουσιάζουμε εδώ, ονομάζονται «αεροτομές». Μια πολύ αποδοτική αεροτομή για μικρά μοντέλα αεροπλάνων κινούμενα με χαμηλές ταχύτητες βλέπετε στο Σχήμα 6, μιας πτέρυγας κατασκευασμένης από χαρτί. Με βάση την τρέχουσα εξήγηση, όμως, δεν είναι καθόλου σαφές πώς είναι δυνατό να δημιουργήσει *οποιαδήποτε* δυναμική άνωση, αφού το πάνω και το κάτω μέρος της αεροτομής έχουν το ίδιο μήκος.

Σχήμα 6
Καμπυλωτή πτέρυγα που χρησιμοποιείται σε μικρά μοντέλα αεροπλάνων.

Αν η τρέχουσα εξήγηση ήταν σωστή, θα έπρεπε να κατασκευάζουμε τις πάνω επιφάνειες των πτερύγων με ακόμη μεγαλύτερη καμπύλωση από αυτήν που έχουν σήμερα. Τότε ο αέρας θα ήταν υποχρεωμένος να κινείται ακόμη ταχύτερα, και θα είχαμε ακόμη μεγαλύτερη δυναμική άνωση. Στο Σχήμα 7 έχει τονιστεί υπερβολικά αυτός ο παράγοντας. (Θα συναντήσουμε περισσότερο ρεαλιστικά «κυματιστά» παραδείγματα στη συνέχεια.) Αν κατασκευάσουμε το πάνω μέρος μιας πτέρυγας όπως στο Σχήμα 7, ο αέρας σ' αυτήν θα έχει να διανύσει πολύ μεγαλύτερη διαδρομή, και επομένως θα κινείται ταχύτερα απ' ό,τι σε μια συμβατική πτέρυγα. Θα μπορούσαμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι αυτό το είδος αεροτομής δημιουργεί μεγάλη δυναμική άνωση. Στην πραγματικότητα, είναι σκέτη καταστροφή.



Σχήμα 7
«Κυματιστή» πτέρυγα

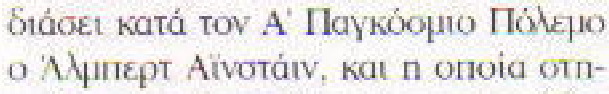
Αρκετά με τα παραδείγματα. Ενώ οι εξισώσεις του Bernoulli είναι σωστές, η κατάλληλη εφαρμογή τους στην αεροδυναμική άνωση διαφέρει σε πολύ μεγάλο βαθμό απ' ό,τι στη συνηθισμένη εξήγηση. Είτε εφαρμοστούν σωστά είτε όχι, οι εξισώσεις δεν μας βοηθούν να σχηματίσουμε κατάλληλη εικόνα για το πώς συνδέεται το σχήμα της αεροτομής και η δυναμική άνωση ούτε και μας αποκαλύπτουν κάτι για τη μετωπική αντίσταση. Αυτή η δυσκολία, σε συνδυασμό και με την ευλογοφανή τρέχουσα εξήγηση, είναι πιθανότατα η αιτία που παραπλανήθηκαν ακόμη και μερικοί εξαίρετοι φυσικοί.

Η πτέρυγα του Αϊνστάιν

Ο φίλος μου Yesso, που εργάζεται για την αεροπορική βιομηχανία (αν και όχι ως σχεδιαστής), μου παρουσίασε μια μέρα την πρότασή του για μια βελτιωμένη αεροτομή. Επιχειρηματολογώντας με βάση τη συνηθισμένη εξήγηση, πρότεινε να

Σχήμα 8
Εξογκωμένη πτέρυγα

ξανασχεδιαστεί όλο το πάνω μέρος της πτέρυγας για να κερδίσουμε σε ανυψωτική ικανότητα (Σχήμα 8). Αυτή είναι απλώς μια «λογική» παραλλαγή της «κυματιστής» αεροτομής που είδαμε νωρίτερα. Η ιδέα του Yesso στηριζόταν, φυσικά, στην αντίληψη ότι η μακρύτερη πάνω επιφάνεια θα προσφέρει μεγαλύτερη δυναμική άνωση. Ήμουν έτοιμος να πω στον Yesso ότι η ιδέα του ήταν για τα σκουπίδια, όταν έτυχε να συζητήσω με τον Jörgen Skogh, σχεδιαστή αεροσκαφών στην Saab στη Σουηδία. Μου μίλησε για μια καμπουριαστή αεροτομή που είχε σχεδιάσει κατά τον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο ο Άλμπερτ Αϊνστάιν, και η οποία στηριζόταν κατά μεγάλο μέρος στην ίδια λογική που είχε χρησιμοποιήσει και ο Yesso (Σχήμα 9). Η πτέρυγα δεν είχε κανένα αεροδυναμικό προσόν. Τελικά, αντί να πω στον Yesso απλώς ότι η αεροτομή του δεν επρόκειτο να αποδώσει, μπορούσα να τον πληροφορήσω ότι είχε δημιουργήσει μια σύγχρονη παραλλαγή του σφάλματος του Αϊνστάιν! Ο Αϊνστάιν είχε αποδεχθεί, βαρύθυμα, πως είχε κάνει λάθος![4]



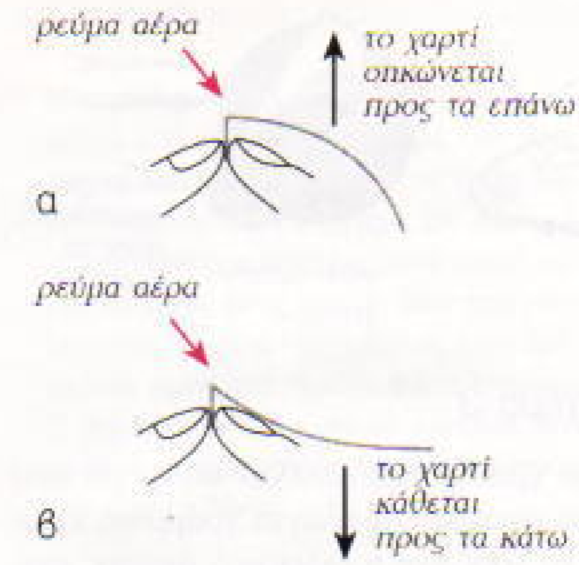
Σχήμα 9
Η αεροτομή του Άλμπερτ Αϊνστάιν

Ενδείξεις από πειράματα

Αν οι πτέρυγες δημιουργούσαν δυναμική άνωση επειδή απλώς η ροή του αέρα πάνω από μια επιφάνεια μειώνει την πίεση σε αυτήν, τότε από τη στιγμή που η επιφάνεια είναι καμπυλωμένη, δεν θα έχει σημασία αν είναι τεθλασμένη, κοίλη ή κυρτή. Η συνηθισμένη εξήγηση στηρίζεται μόνο στη ροή αέρα παράλληλα με την επιφάνεια. Ιδού μερικά πειράματα που μπορείτε να τα επαναλάβετε εύκολα για να ελέγξετε αυτή την ιδέα.

Πείραμα 1ο. Κόψτε μια λωρίδα χαρτί μεγέθους περίπου 5 cm × 25 cm. Κρατήστε τη μπροστά από τα χείλη σας, έτσι ώστε να κρέμεται προς τα έξω και προς τα κάτω, σχηματίζοντας μια κυρτή προς τα πάνω επιφάνεια. Μόλις φυσήξετε πάνω από την επιφάνεια του χαρτιού, αυτό ανασηκώνεται (Σχήμα 10α). Πολλά βιβλία αποδίδουν το γεγονός στην ελάττωση της πίεσης, λόγω του φαινομένου Bernoulli, στην πάνω επιφάνεια. Χρησιμοποιήστε τώρα τα δάχτυλά σας για να γίνει το χαρτί σε όλο το μήκος του ελαφρά κοίλο από πάνω, και φυσήξτε ξανά. Το χαρτί αυτή τη φορά «βουλιάζει» (Σχήμα 10β)!

Πείραμα 2ο. Με τη βοήθεια του Σχήματος 11 κατασκευάστε ένα κουτί από λεπτό κόντρα πλακέ ή από χαρτόνι και μια σειρά ομοιωμάτων πτερύγων από μπάλσα, το ελαφρύ φελλώδες ξύλο. Τα ομοιώματα πτερύγων μπορείτε να τα στερεώνετε με δύο πινέζες στο μπροστινό άκρο τους ώστε να μπορούν να στρέφονται ελεύθερα πάνω-κάτω. Φυσώντας μέσα από ένα καλαμάκι αναψυκτικού διοχετεύετε αέρα στο κουτί. Αυτό είναι ένα από τα ωραία χαρακτηριστικά της επιστήμης. Δεν είστε υποχρεωμένοι για κάποιον ισχυρισμό να στηριχτείτε στις διαβεβαιώσεις οποιουδήποτε· μπορείτε να διαπιστώσετε μόνοι σας τι συμβαίνει![5] Σε αυτή την αεροδυναμική σήραγγα ο αέρας διέρχεται μόνο κατά μήκος της πάνω επιφάνειας του ομοιώματος πτέρυγας. Κατασκεύασα μία άλλη, στην οποία ο αέρας διοχετεύεται από μια ηλεκτρική σκούπα και στις δύο επιφάνειες, και πήρα τα ίδια αποτελέσματα. Αυτός ο σχεδιασμός όμως κατασκευάζεται δυσκολότερα και τα ομοιώματα πτερύγων χρειάζονται λεπτοδούλεμα στην μπροστινή και στην πίσω άκρη τους. Παρεμπιπτόντως, αξίζει να αναφέρω ότι προσπάθησα να πείσω μια εταιρεία, που κατασκευάζει επιστημονικά όργανα και συσκευές για επίδειξη πειραμάτων, να συμπεριλάβει και το μοντέλο μου στις προσφορές της. Δεν ενδιαφέρθηκαν, επειδή «δεν έδινε τα πρέποντα αποτελέσματα». Τους ρώτησα, «και τότε, πώς γίνεται και "δουλεύει";». «Δεν μπορώ να καταλάβω», απάντησε ο επικεφαλής σχεδιαστής της εταιρείας.

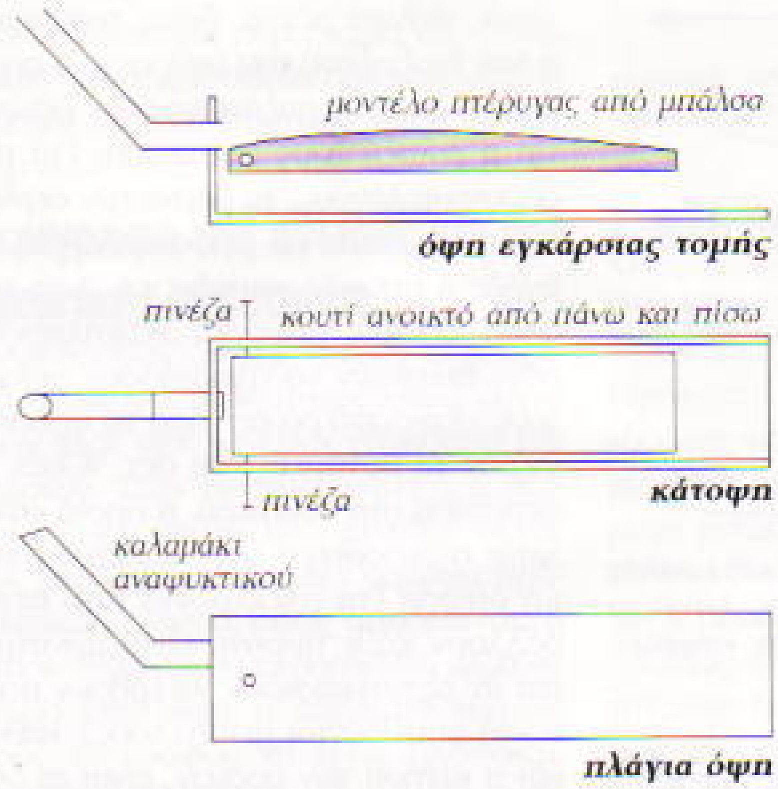


Σχήμα 10

Ίσως είναι δύσκολο να ερμηνεύσουμε ένα πείραμα, αλλά δεν μπορεί — εκτός αν πρόκειται για απάτη— να δίνει λαθεμένα αποτελέσματα!

4. Ο Jörgen Skogh γράφει: «Κατά τον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο, ο Άλμπερτ Αϊνστάιν είχε προσληφθεί για ένα χρονικό διάστημα ως σύμβουλος στη LVG (Luft-Verkehrs-Gesselschaft). Στη LVG σχεδίασε μια αεροτομή με ένα, όπως ονομάζεται, εξόγκωμα μέσης χορδής, με σκοπό να αυξήσει τη δυναμική άνωση. Η πτέρυγα δοκιμάστηκε και σε αεροδυναμική σήραγγα, στο Γκαίττινγκεν, και σε πραγματικό αεροπλάνο, αλλά, και στις δύο περιπτώσεις, αποδείχτηκε πως ήταν μια αποτυχία». Το 1954 ο Αϊνστάιν έγραψε: «Αν και είναι πιθανότατα αληθινό ότι η αρχή της πτήσης μπορεί να εξηγηθεί απλούστερα με αυτόν τον τρόπο [με βάση το νόμο Bernoulli], δεν είναι καθόλου έξυπνο να κατασκευάσουμε μια τέτοια πτέρυγα!»

5. Σε ορισμένους τομείς —για παράδειγμα, στη μελέτη των υποατομικών σωματιδίων— ίσως χρειαστείτε μερικά δισεκατομμύρια δολάρια και προσωπικό χιλιάδων ατόμων για να κατασκευάσετε έναν επιταχυντή προκειμένου να κάνετε ένα ανεξάρτητο πείραμα, αλλά η αρχή εξακολουθεί να ισχύει.

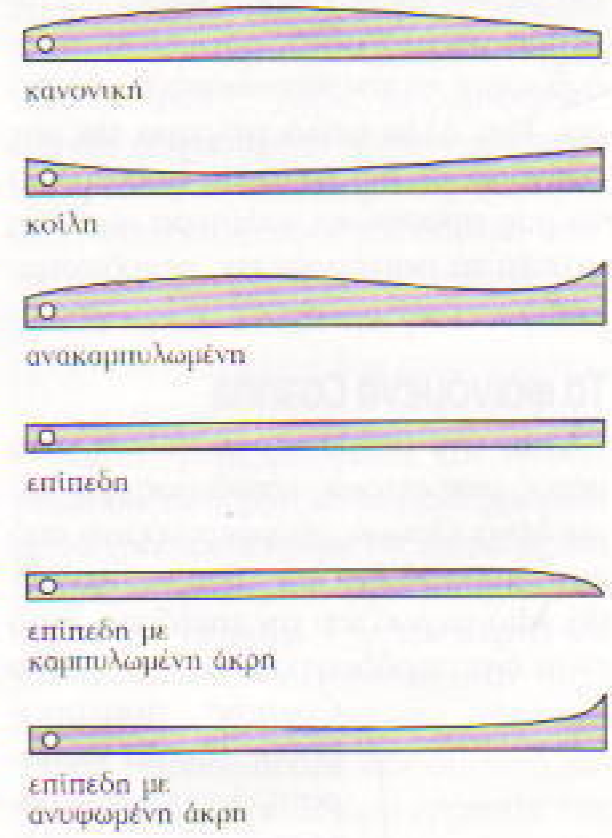


Σχήμα 11

Πειραματικά αποτελέσματα

Όταν φυσήξουμε αέρα στο καλαμάκι, η πτέρυγα με την κανονική αεροτομή (βλ. Σχήμα 12) ανασηκώνεται υπάκουα. Όταν σταματήσει η ροή του αέρα, πέφτει πάλι κάτω. Αυτό ακριβώς περιμένουν όλοι ότι θα συμβεί. Ας δούμε τώρα το κοίλο σχήμα. Η καμπύλωση είναι η ίδια ακριβώς όπως και στην προηγούμενη αεροτομή, μόνο που είναι ανάποδα. Αν ήταν σωστή η τρέχουσα εξήγηση, τότε, και αφού το μήκος της καμπύλης είναι ακριβώς το ίδιο όπως στο «κανονικό» παράδειγμα, θα περιμέναμε να ανασηκωθεί και αυτό το ομοίωμα πτέρυγας. Σε τελική ανάλυση, το ρεύμα του αέρα πάνω από την επιφάνεια θα προκαλεί πτώση της πίεσης, και επομένως πρέπει να αναπτύσσεται δυναμική άνωση. Η κοίλη αεροτομή, όμως, παραμένει σταθερά κολλημένη στη βάση του κουτιού. Αν μάλιστα κρατήσετε τη συσκευή κατακόρυφα, θα τη δείτε να *απομακρύνεται* από το ρεύμα του αέρα.

Επομένως, ένα συχνά αναφερόμενο πείραμα, που υποτίθεται ότι επαληθεύει τη συνηθισμένη εξήγηση της δυναμικής άνωσης, δίνει διαφορετικά αποτελέσματα —κάποιο άλλο φαινόμενο είναι πολύ ισχυρότερο. Τα υπόλοιπα είδη ομοιωμάτων πτερύγων δεν προσθέτουν κάτι καινούργιο— προσπαθήστε να προβλέψετε την κατεύθυνση της κίνησής τους πριν τα τοποθετήσετε στη συσκευή. Ο James Gleick έχει επισημάνει ότι «στην επιστήμη επιτυγχάνεται πρόοδος όταν τα πειράματα διαψεύδουν τη θεωρία». Στην περίπτωσή μας, βέβαια, η επιστήμη γνωρίζει εδώ και πολύ καιρό τι συμβαίνει και το πείραμα δεν αντιτίθεται στη θεωρία της αεροδυναμικής αλλά στην εξήγηση που παρουσιάζεται κατά τη διδασκαλία του θέματος. Και εν τέλει,



Σχήμα 12

Ποσοτική εφαρμογή μιας λανθασμένης ερμηνείας

Αν συμβολίσουμε με P_π την πίεση στην πάνω επιφάνεια της πτέρυγας [μετρημένη σε Nt/m^2 = kgr/(m·sec^2)], με P_κ την πίεση στην κάτω επιφάνεια της πτέρυγας, με υ_π την ταχύτητα του αέρα στην πάνω επιφάνεια της πτέρυγας (μετρημένη σε m/sec) και με υ_κ την ταχύτητα του αέρα στην κάτω επιφάνεια της πτέρυγας, και τέλος με ρ την πυκνότητα του αέρα (περίπου 1,2 kg/m^3), τότε η διαφορά πίεσης μεταξύ της πάνω και της κάτω επιφάνειας της πτέρυγας δίνεται από τον πρώτο όρο της εξίσωσης Bernoulli:

$$P_\pi - P_\kappa = {}^1/_2\, \rho(\upsilon_\pi^2 - \upsilon_\kappa^2).$$

Κατά τη μέτρηση μιας πτέρυγας με ορθογώνια κάτοψη και άνοιγμα (εκπέτασμα) 1 m, βρέθηκε ότι το μήκος χορδής στην κάτω επιφάνειά της είναι 0,1624 m, ενώ το αντίστοιχο μήκος στην πάνω επιφάνειά της είναι 0,2636. Ο λόγος αυτών των μηκών είναι 1,0074. Η συγκεκριμένη τιμή είναι τυπική για τις πτέρυγες πολλών μοντέλων αλλά και πραγματικών αεροπλάνων. Αφού η πάνω και η κάτω επιφάνεια της πτέρυγας ανήκουν στο ίδιο στερεό σώμα, κινούνται με ίσες ταχύτητες. Επομένως, σύμφωνα με τη συνηθισμένη εξήγηση, οι ταχύτητες ροής του αέρα στην πάνω και την κάτω επιφάνεια έχουν τον ίδιο λόγο, δηλαδή 1,0074.

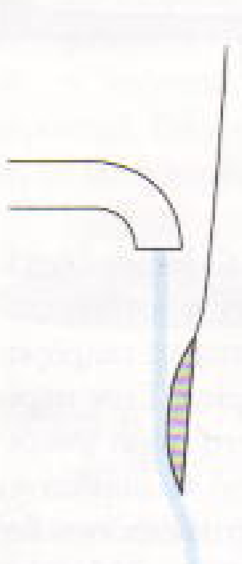
Μια τυπική ταχύτητα για ένα μοντέλο αεροπλάνου με άνοιγμα πτερύγων 1 m, με μήκος χορδής 0,16 m και με μάζα 0,7 kgr (βάρος 6,9 Nt) είναι 10 m/sec. Επομένως, η υ_κ είναι 10 m/sec, πράγμα που σημαίνει ότι η υ_π = 10,074 m/sec. Με δεδομένους αυτούς τους αριθμούς, βρίσκουμε από την παραπάνω εξίσωση μια διαφορά πίεσης περίπου 0,9 kgr/(m·sec^2). Το εμβαδόν της πτέρυγας είναι 0,16 m^2, οπότε έχουμε συνολική ανυψωτική δύναμη 0,14 Nt. Ωστόσο, αυτή η δύναμη δεν είναι αρκετή —είναι 50 φορές μικρότερη από τη δύναμη που απαιτεί η ανύψωση ενός βάρους 6,9 Nt. Θα χρειαζόμασταν μια διαφορά ταχυτήτων ροής του αέρα της τάξης των 3 m/sec για να σηκώσουμε το αεροπλάνο.

Αυτός ο υπολογισμός είναι προσεγγιστικός, αφού η εξίσωση του Bernoulli υποθέτει ροή ασυμπίεστη και χωρίς εσωτερική τριβή, ενώ ο αέρας και συμπιέζεται και αναπτύσσει εσωτερική τριβή. Η εσωτερική τριβή όμως είναι μικρή, ενώ στις ταχύτητες που εξετάζουμε η συμπίεσή του δεν είναι σημαντική. Αν λάβουμε υπόψη αυτές τις λεπτομέρειες, το αποτέλεσμα δεν αλλάζει περισσότερο από 1%. Ο υπολογισμός μας δεν λαμβάνει επίσης υπόψη τον δεύτερο όρο της εξίσωσης Bernoulli —τη διαφορά της στατικής πίεσης ανάμεσα στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια της πτέρυγας που οφείλεται στην υψομετρική διαφορά τους. Η συμβολή του όρου αυτού στη δυναμική άνωση είναι μικρότερη ακόμη και από τη συμβολή των παραγόντων που ήδη αγνοήσαμε. Το να θεωρήσουμε κάποια μέση ταχύτητα προϋποθέτει κυκλικό τόξο για το πάνω μέρος της πτέρυγας. Αυτό δεν είναι το βέλτιστο σχήμα, αλλά το αεροπλάνο θα πετάξει. Πάντως, καμιά από αυτές τις λεπτομέρειες δεν αναιρεί το συμπέρασμα ότι η τρέχουσα ερμηνεία της πτήσης ενός αεροπλάνου —με την απλοϊκή εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli— αποτυγχάνει ποσοτικά.

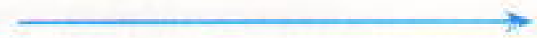
ακόμη και αν δεν προοδεύσει η επιστήμη με όλα αυτά, μπορεί κάποιοι άνθρωποι να την κατανοήσουν καλύτερα. Ένα άλλο απλό πείραμα θα μας οδηγήσει σε μια ερμηνεία που μπορεί να μας προσφέρει καλύτερη αίσθηση γι'αυτά τα φαινόμενα της αεροδυναμικής.

Το φαινόμενο Coanda

Όταν ένα ρεύμα νερού κυλάει κατά μήκος μιας στερεάς επιφάνειας που καμπυλώνει ελαφρά, απομακρυνόμενη από αυτό, το νερό έχει την τάση να ακολουθεί κατά τη ροή του την επιφάνεια. Αυτό είναι ένα παράδειγμα του φαινομένου Coanda[6] που μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε αν κρατήσουμε ένα κουτάλι κατακόρυφα κάτω από ένα λεπτό ρεύμα νερού που εξέρχεται από το στόμιο μιας βρύσης (Σχήμα 13). Αν κρατήσετε το κουτάλι χαλαρά, έτσι ώστε να μπορεί να μετακινηθεί, θα αισθανθείτε ότι έλκεται *προς το μέρος* του ρεύματος νερού. Το φαινόμενο έχει τα όριά του: αν χρησιμοποιήσετε σφαίρα αντί για κουτάλι, το νερό θα ακολουθήσει στην πορεία του ένα μικρό μόνο μέρος της επιφάνειάς της. Επίσης, όταν η επιφάνεια παρουσιάζει ιδιαίτερα μεγάλη καμπύλωση, το νερό δεν θα ακολουθήσει το σχήμα της, αλλά θα καμφθεί ελάχιστα και θα αποσπαστεί απ' αυτήν.



Σχήμα 13



Ένα ρεύμα αέρα, όπως εκείνο που δημιουργούμε φυσώντας μ' ένα καλαμάκι, ακολουθεί ευθεία πορεία.

Ένα ρεύμα αέρα που κινείται κατά μήκος μιας επίπεδης επιφάνειας, ακολουθεί επίσης ευθεία πορεία.

Ένα ρεύμα αέρα που κινείται κατά μήκος μιας καμπυλωμένης επιφάνειας, τείνει να ακολουθήσει την καμπύλωση της επιφάνειας.

Ένα ρεύμα αέρα που κινείται κατά μήκος μιας καμπυλωμένης επιφάνειας (της οποίας όμως η κάμψη είναι τέτοια που να την απομακρύνει από την αρχική διεύθυνση του ρεύματος), εξακολουθεί να έχει την τάση να ακολουθήσει την καμπύλωση της επιφάνειας!

Σχήμα 14

Το φαινόμενο Coanda παρατηρείται σε όλα τα συνηθισμένα ρευστά (όπως π.χ. ο αέρας —Βλ. Σχήμα 14) σε συνηθισμένες θερμοκρασίες, πιέσεις, και ταχύτητες. Αναφέρω αυτούς τους περιορισμούς γιατί το υγρό ήλιο, αέρια σε εξαιρετικά χαμηλές ή υψηλές πιέσεις ή θερμοκρασίες, και ρευστά που κινούνται με υπερηχητικές ταχύτητες μπορεί να συμπεριφερθούν διαφορετικά. Ευτυχώς, δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για τέτοιες ακραίες καταστάσεις όταν ασχολούμαστε με μοντέλα αεροπλάνων.

Επίσης, δεν χρειάζεται να μας απασχολεί το *γιατί* συμβαίνει το φαινόμενο Coanda —μπορούμε να το θεωρήσουμε ένα πειραματικά δεδομένο γεγονός. Αν, όμως, είστε περίεργοι, μπορώ να σας δώσω κάποιες εξηγήσεις. Σε μικροσκοπική κλίμακα παρατηρούμε ότι τα μόρια των περισσότερων αερίων όταν πλησιάζουν μεταξύ τους αναπτύσσουν μια μικρή ελκτική δύναμη, τη λεγόμενη δύναμη van der Waals, η οποία έχει την τάση να τα συγκρατεί κοντά το ένα με το άλλο. Υπάρχουν αρκετές πηγές των δυνάμεων van der Waals, η κυριότερη από αυτές όμως οφείλεται στο ότι η κατανομή του φορτίου στα ηλεκτρικά ουδέτερα μόρια (όπως του υδρογόνου, του οξυγόνου και του αζώτου) διαταράσσεται από τη μεταξύ τους γειτνίαση, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα δίπολο (το ηλεκτρικό ισοδύναμο ενός μαγνήτη). Αυτά τα δίπολα διευθετούνται έτσι ώστε το θετικό άκρο του ενός να βρίσκεται κοντά στο αρνητικό άκρο του άλλου. Επομένως, αναπτύσσουν έναν ασθενέστατο ηλεκτροστατικό «δεσμό». Στα εγγενώς πολικά μόρια, όπως του νερού ή του διοξειδίου του άνθρακα, η αμοιβαία έλξη τους αυξάνεται όταν μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση. Για παρόμοιους λόγους, τα μόρια των αερίων έχουν την τάση να προσκολλώνται σε υγρές ή στερεές επιφάνειες. Από την άλλη πλευρά, τα μόρια αντιστέκονται όταν πιεστούν να πλησιάσουν μεταξύ τους περισσότερο απ' όσο τα προσεγγίζουν οι δυνάμεις van der Waals. Η αντίσταση στη συμπίεση, η οποία οφείλεται περισσότερο στην ηλεκτροστατική άπωση (τα ηλεκτρόνια που περιβάλλουν κάθε πυρήνα είναι αρνητικά και αν εξαναγκαστούν να έρθουν πολύ κοντά απωθούνται μεταξύ τους), καθώς και η κίνηση των μορίων, είναι οι δύο μηχανισμοί που κρύβονται πίσω από την πίεση. Οι δυνάμεις van der Waals μάς εξηγούν για ποιο λόγο τουλάχιστον ένα λεπτό στρώμα ρευστού ρέει έχοντας προσκολληθεί πάνω σε μια επιφάνεια.

Αρκετά συχνά, για να περιγράψουν το φαινόμενο Coanda χρησιμοποιούν την έκφραση ότι το ρεύμα αέρα «παρασύρεται» από την επιφάνεια. Ένα πλεονέκτημα που έχουμε όταν εξετάζουμε τη δυναμική άνωση και τη μετωπική αντίσταση με όρους του φαινομένου Coanda είναι ότι μπορούμε να εντοπίσουμε μάλλον άμεσα τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις. Η τρέχουσα ερμηνεία (και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σε σοβαρά βιβλία αεροδυναμικής) δεν αποσαφηνίζει καθόλου το πώς συνδέεται φυσικά η κίνηση του αέρα με την πτέρυγα. Αυτό κατά ένα ποσοστό οφείλεται στο ότι η προσέγγιση που αναπτύχθηκε κατά τη δεκαετία του 1920 διαμορφώθηκε από την ανάγκη να έχουν κλειστή μορφή οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν (βασίζονται κατά κύριο λόγο στο θεώρημα Kutta-Zhukovsky[7]) ή να δίνουν χρήσιμα αριθμητικά αποτελέσματα με μεθόδους στις οποίες χρησιμοποιούνταν χαρτί και μολύβι. Οι σύγχρονες προσεγγίσεις χρησιμοποιούν ηλεκτρονικούς υπολογιστές και βασίζονται σε κατασκευές ελάχιστα πιο διαισθητικές. Θα αναπτύξουμε τώρα

6. Στη δεκαετία του 1930, ο ρουμάνος ειδικός της αεροδυναμικής Henri-Marie Coanda (1885-1972) παρατήρησε ότι ένα ρεύμα αερίου ή υγρού που εξέρχεται από ένα ακροστόμιο έχει την τάση να πλησιάσει μια γειτονική καμπύλη ή επίπεδη επιφάνεια, όταν η καμπύλωση της επιφάνειας ή η γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια με τον άξονα του ρεύματος δεν είναι πολύ μεγάλη.

7. Ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τον γερμανό μαθηματικό M. Wilhelm Kutta (1867-1944) και τον ρώσο φυσικό Nikolay Zhukovsky (1847-1921).

μια εναλλακτική περιγραφή της δυναμικής άνωσης η οποία διευκολύνει την πρόβλεψη των βασικών φαινομένων που συνδέονται μαζί της.

Περιγραφή της άνωσης και της μετωπικής αντίστασης

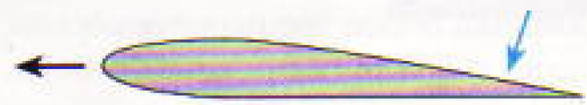
Ακολουθώντας την τυπική συμπεριφορά των φυσικών, αναφέρθηκα συχνά στον αέρα που κινείται γύρω από την πτέρυγα. Στην πραγματικότητα, η πτέρυγα είναι εκείνη που κινείται συνήθως μέσα στον αέρα. Δεν υπάρχει πραγματική διαφορά, όπως αποδεικνύει η πτήση ενός αργού αεροπλάνου μέσα σε άνεμο έτσι ώστε η ταχύτητά του ως προς το έδαφος να είναι μηδενική. Επομένως, άλλοτε θα μιλάω για τον αέρα που κινείται και άλλοτε για το κινούμενο αεροπλάνο, διαλέγοντας κάθε φορά την οπτική γωνία που καθιστά σαφέστερη την παρουσίαση. Στην επόμενη εικόνα είναι βολικότερο να παρατηρούμε τον αέρα από ένα κινούμενο αεροπλάνο.

Σχήμα 15
Η επιφάνεια κινείται προς τα αριστερά ενώ τα μόρια του αέρα, ελκόμενα από την επιφάνεια, σύρονται προς τα κάτω.

Στο Σχήμα 15 θεωρήστε ότι μια πτέρυγα κινείται προς τα αριστερά ενώ ο αέρας μένει ακίνητος. Ο αέρας έλκεται προς την πτέρυγα από τις δυνάμεις που σχολιάσαμε μόλις πριν, σαν να ήταν τα μόριά του δεμένα στην πτέρυγα με αόρατα λάστιχα. Συχνά μας διευκολύνει να φανταζόμαστε τη δυναμική άνωση σαν λάστιχα που τραβάνε την πτέρυγα προς τα πάνω.

Μία ακόμη λεπτομέρεια είναι σημαντική: ο αέρας παρασύρεται και προς την κατεύθυνση της κίνησης της πτέρυγας. Επομένως, στην πραγματικότητα η κίνησή του μοιάζει περισσότερο με αυτήν που βλέπετε στο Σχήμα 16.

Αν είστε μέσα σε μια βάρκα και προσπαθήσετε να τραβήξετε έναν άνθρωπο προς το μέρος σας μ' ένα σχοινί, η βάρκα θα μετακινηθεί προς τον άνθρωπο. Η πτέρυγα είναι όπως η βάρκα, ο αέρας είναι ο άνθρωπος, και το σχοινί αναπαριστά την ελκτική δύναμη μεταξύ της πτέρυγας και του αέρα.



Σχήμα 16
Ο αέρας, εκτός του ότι έλκεται προς τα κάτω από την πτέρυγα, παρασύρεται και προς τα μπροστά εξαιτίας της κίνησής της.

Πρόκειται για κλασική περίπτωση «δράσης και αντίδρασης». Μετακινείται μια μάζα αέρα προς τα κάτω και η πτέρυγα μετακινείται προς τα πάνω. Αυτή είναι η *δυναμική άνωση* που δημιουργεί η πάνω επιφάνεια της πτέρυγας.

Όπως υπονοείται και στο σχήμα, η πτέρυγα δαπανά υποχρεωτικά ένα μέρος της ενέργειάς της μετακινώντας τον αέρα προς τα μπροστά. Τα φανταστικά λάστιχα τη σπρώχνουν σε κάποιο βαθμό προς τα πίσω. Αυτή είναι η μετωπική αντίσταση που δημιουργείται λόγω της δυναμικής άνωσης. Όταν την εξετάζουμε με αυτόν τον τρόπο, γίνεται αμέσως φανερό ότι δεν μπορεί να υπάρξει δυναμική άνωση χωρίς το κόστος κάποιας μετωπικής αντίστασης.

Η επιτάχυνση του αέρα γύρω από την περιοχή μεγαλύτερης καμπυλότητας κοντά στο μπροστινό μέρος της πάνω επιφάνειας της πτέρυγας προσθέτει μια συνιστώσα με κατεύθυνση προς τα μπροστά και κάτω στην κίνηση των μορίων (συνήθως μια επιβράδυνση της προς τα πάνω και πίσω κίνησής τους, γεγονός ισοδύναμο) και έτσι συμβάλλει στη δυναμική άνωση. Είναι ευκολότερο να καταλάβουμε τη δράση της κάτω επιφάνειας της πτέρυγας, την ερμηνεία της οποίας την αφήνω για τον αναγνώστη.

Το πείραμα με τη μινιατούρα της αεροδυναμικής σήραγγας που περιγράφαμε προηγουμένως, μπορεί να γίνει αμέσως κατανοητό με όρους του φαινομένου Coanda: η πτέρυγα που έχει μια καμπύλωση προς τα κάτω παρασύρει προς τα κάτω το ρεύμα του αέρα και το αποτέλεσμα είναι να αναπτυχθεί ως αντίδραση μια δύναμη προς τα πάνω. Η πτέρυγα που έχει μια καμπύλωση προς τα πάνω (κοίλη αεροτομή) αναγκάζει το ρεύμα του αέρα να κινηθεί προς τα πάνω, και το αποτέλεσμα είναι μια δύναμη αντίδρασης προς τα κάτω. Η «κυματιστή» πτέρυγα δημιουργεί μεγάλη μετωπική αντίσταση επειδή μετακινεί συνεχώς τα μόρια του αέρα πότε προς τα πάνω και πότε προς τα κάτω. Αυτό οδηγεί σε κατανάλωση ενέργειας (αναπτύσσεται θερμότητα εκ τριβής) χωρίς να δημιουργείται μια συνισταμένη κίνηση του αέρα προς τα κάτω και, επομένως, χωρίς να αναπτύσσεται ανυψωτική δύναμη στην πτέρυγα. Το φαινόμενο Coanda μας βοηθά να κατανοήσουμε γιατί η γωνία προσβολής (η κλίση του πτέρυγας που είδαμε παραπάνω) έχει τόσο κρίσιμη σημασία· γιατί μπορούν και πετάνε ανάποδα τα αεροπλάνα· γιατί μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις επίπεδες και λεπτές πτέρυγες και γιατί τα αποτελέσματα στο πείραμα 1 με την κυρτή και την κοίλη λωρίδα χαρτιού ήταν αυτά που ήταν.

Ό,τι παρουσιάσαμε δεν συνιστά κατά κανέναν τρόπο πλήρη ερμηνεία της δυναμικής άνωσης και της μετωπικής αντίστασης, αλλά έχει σκοπό να προσφέρει μια ικανοποιητική περιγραφή του φαινομένου. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα αυτές τις γνώσεις μας για να βρούμε μια λογική λύση στο πρόβλημα της περιστρεφόμενης σφαίρας.

Γιατί καμπυλώνει η τροχιά της σφαίρας που στρέφεται γύρω από τον εαυτό της

Ας ξαναδούμε το σχήμα από το βιβλίο του James Trefil (Σχήμα 2). Σύμφωνα με το φαινόμενο Coanda, ο αέρας έλκεται προς την επιφάνεια της μπάλας. Ας θεωρήσουμε την πλευρά της *A*, η οποία κινείται στην ίδια κατεύθυνση πτήσης της. Καθώς η μπάλα στρέφεται γύρω από τον άξονά της, η πλευρά προσπαθεί να παρασύρει τον αέρα μαζί της. Σ' αυτή τη δράση όμως αντιτίθεται η κίνηση του αέρα (ως προς την μπάλα). Στην πλευρά *B*, η οποία κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη με την κατεύθυνση της πτήσης της, ο αέρας κινείται ήδη (σε σχέση με τη μπάλα) προς την ίδια κατεύθυνση. Επομένως παρασύρεται ευκολότερα απ' ό,τι στην πλευρά *A*. Ο αέρας ακολουθεί πιο γρήγορα την καμπυλότητα της πλευράς *B*, και επομένως αποκτά συνολική ταχύτητα που κατευθύνεται προς την πλευρά *A*. Έτσι, λόγω αντίδρασης, η μπάλα θα κινηθεί προς την πλευρά *B*.

Έφτασε και πάλι η στιγμή για ένα απλό πείραμα. Είναι δύσκολο να πειραματιστούμε με μια μπάλα του μπέιζμπολ διότι το βάρος της είναι μεγάλο σε σύγκριση με τις αεροδυναμικές δυνάμεις που επενεργούν πάνω της, και είναι πολύ δύσκολο να ελέγξουμε το μέγεθος και την κατεύθυνση της στροφής της γύρω από τον άξονά της. Επομένως, ας βρούμε μια ελαφρότερη μπάλα, οπότε θα είναι ευκολότερο να αντιληφθούμε τα αεροδυναμικά φαινόμενα. Εγώ χρησιμοποιώ μια φτηνή νάιλον μπάλα της παραλίας (οι ακριβές είναι από βαρύτερο υλικό και τα αεροδυναμικά φαινόμενα δεν είναι τόσο ευδιάκριτα). Αν την πετάξουμε δίνοντάς της αρκετή στροφορμή (έτσι ώστε, καθώς στρέφεται γύρω από τον εαυτό της, το κάτω μέρος της να κινείται προς τα μπροστά), η μπάλα θα *κινηθεί προς τα πάνω* καθώς θα μετατοπίζεται προς τα μπροστά. Η δυναμική άνωση που οφείλεται στην περιστροφή της μπορεί να είναι τόσο ισχυρή ώστε να υπερνικά και το βάρος της! Σε λίγο η μετωπική αντίσταση του αέρα θα σταματήσει και την στροφή της μπάλας γύρω από τον εαυτό της και την κίνησή της προς τα μπροστά, οπότε τελικά πέφτει —όχι όμως πριν μας δείξει ότι είναι λανθασμένη η εξήγηση του Trefil για το πώς επηρεάζει η περιστροφή την κίνηση της μπάλας.

Η ανυψωτική δύναμη που οφείλεται στη στροφή ενός σώματος γύρω από τον οριζόντιο άξονά του κατά τη μετακίνησή του μέσα στον αέρα ονομάζεται συνήθως *φαινόμενο Magnus*.[8] Σε μερικά βιβλία χρησιμοποιείται το όνομα «κύλινδροι Flettner», που σχετίζεται με μια εγκαταλελειμμένη εδώ και πολύ καιρό προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί το φαινόμενο Magnus για την κατασκευή ενός πλοίου κινούμενου με τον άνεμο. Πολλοί άλλοι συγγραφείς πλην του Trefil περιγράφουν το φαινόμενο λανθασμένα, όπως και ο συνήθως αξιόπιστος S.F. Hoerner στο βιβλίο του *Fluid-Dynamic Drag* (1965). Τα κολεγιακού επιπέδου βιβλία συνήθως το αναφέρουν σωστά, αλλά, όπως σημειώσαμε και στην αρχή, στο *Lectures on Physics* του Feynman η περιστροφή σημειώνεται ανάποδα. Ήταν ανακούφιση για μένα όταν είδα ότι στο κλασικό *Aerodynamics* του T. von Karman η δυναμική άνωση της περιστρεφόμενης σφαίρας έχει τη σωστή κατεύθυνση, αν και η επιχειρηματολογία του συγγραφέα φαίνεται κάπως «βεβιασμένη».

8. Ο H.G. Magnus (1802-1870), γερμανός φυσικός και χημικός, παρατήρησε αυτό το φαινόμενο το 1853.

Θα ήθελα να μπορούσα να στείλω τούτο το άρθρο σε εκείνον τον καθηγητή της φυσικής που δεν ήθελε να αφιερώσει λίγο χρόνο για να ακούσει το συλλογισμό μου. Νά τι έγινε στη συνέχεια. Μ' έστειλε στο γραφείο του διευθυντή όπου πήγα την επόμενη ημέρα μαζί μ' ένα ξύλινο μοντέλο αεροπλάνου με απολύτως επίπεδες πτέρυγες. Μπορούσε να πετάξει έχοντας προς τα πάνω οποιαδήποτε πλευρά τους, ανάλογα με τη ρύθμιση ενός ελάσματος από αλουμίνιο. Το χρησιμοποίησα για να αποδείξω ότι η εξήγηση που μας δόθηκε στην τάξη θα έπρεπε, κατά κάποιο τρόπο, να είναι λανθασμένη. Ο διευθυντής, όμως, είχε φροντίσει να πληροφορηθεί ότι «πέταγα χάρτινα αεροπλανάκια μέσα στην τάξη», σαν να είχα γενικώς την πρόθεση να κάνω φασαρία. Με προειδοποίησαν, λοιπόν, ότι θα έπρεπε να βελτιώσω τη συμπεριφορά μου. Στη συνέχεια απευθύνθηκα στον αγαπημένο μου καθηγητή των μαθηματικών, ο οποίος μου πρότεινε να πάω στη βιβλιοθήκη και να ανακαλύψω πώς πετάνε τα αεροπλάνα —κάτι που το έκανα. Το αποτέλεσμα, δυστυχώς, ήταν να ανακαλύψω ότι όλα τα βιβλία συμφωνούσαν με τον καθηγητή της φυσικής!

Είναι ευκολότερο να ερμηνεύουμε την εμφάνιση της δυναμικής άνωσης και της μετωπικής αντίστασης με όρους κάμψης ενός ρεύματος αέρα παρά με όρους διαφορών πίεσης.

Ήταν πραγματικό σοκ όταν ανακάλυψα ότι και ο καθηγητής μου και τα βιβλία στη βιβλιοθήκη μπορούσαν να κάνουν λάθος. Και ήταν μια αποκάλυψη το ότι μπορούσα να εμπιστευτώ τη δική μου σκέψη αντιμετωπίζοντας την καθολική αντίθεση. Το παιχνίδι μου με τα μοντέλα των αεροπλάνων με ώθησε να κάνω ένα μεγάλο βήμα προς τη διανοητική ανεξαρτησία και προς ένα πνεύμα επινοητικότητας που αργότερα, όταν ενηλικιώθηκα πια, με οδήγησε στη δημιουργία των υπολογιστών Macintosh και άλλων εφευρέσεων.

Προτεινόμενα βιβλία

Υπάρχουν πολλά θαυμάσια βιβλία και άρθρα για την αεροδυναμική των αερομοντέλων (και πολύ περισσότερα για την αεροδυναμική γενικά). Ακριβή και ευκολοδιάβαστα είναι τα βιβλία και τα άρθρα του καθηγητή Martin Simons (για παράδειγμα, *Model Aircraft Aerodynamics*, 2η έκδοση, Argus Books Ltd., Λονδίνο 1987). Πολλά μπορείτε να μάθετε από την απολαυστική (αν και ιδιαίτερα τεχνική) σειρά των *Model Aeronautic Yearbook* του Frank Zaic (1936-1964 —διατίθεται από την Ακαδημία Αεροναυτικών Μοντέλων των ΗΠΑ). Δεν υπάρχει πιο επαγγελματική αντιμετώπιση από του Michael Selig (για παράδειγμα, Selig κ.ά., *Airfoils at Low Speeds*, Soartech 8, 1989 (διατίθεται από τον Herb Stokely, 1504 Horseshoe Circle, Virginia Beach VA 23451, USA). Όλοι αυτοί οι συγγραφείς είναι επίσης πολύ γνωστοί αερομοντελιστές. Τα κείμενα μεταπτυχιακού ή προπτυχιακού επιπέδου —για παράδειγμα, *Foundations of Aerodynamics* των Kuethe και Chow και *Aerodynamics for Engineering Students* των Houghton και Carruthers— απαιτούν γνώση λογισμού και μερικών διαφορικών εξισώσεων. Το *Modern Subsonic Aerodynamics* του R.T. Jones (Aircraft Designs, Inc 1988) αποτελεί μια όχι ιδιαίτερα τυπική αντιμετώπιση του θέματος γραμμένη από μια αυθεντία, ενώ το *Fluid-Dynamic Drag* είναι μια υπέροχη επιτομή πειραματικών αποτελεσμάτων —έχει λίγη θεωρία, αλλά οι πρακτικοί σχεδιαστές θεωρούν το έργο ανεκτίμητο. Τέλος, το απόφθεγμα του τίτλου είναι από το *Do You Speak Model Aeroplane?* του Dave Thornburg (Pony X Press, 1992, 5 Monticello Dr., Albuquerue NM 87123, USA).

Είμαι βαθύτατα ευγνώμων για τις υποδείξεις που μου έκαναν αρκετοί προσεκτικοί αναγνώστες, όπως ο Bill Aldridge, ο δρ. Vincent Panico, οι καθηγητές Michael Selig και Steve Berry και η Linda Blum. Βελτίωσαν σε μεγάλο βαθμό και το περιεχόμενο και τον τρόπο παρουσίασης. Φυσικά, στα σημεία που δεν ακολούθησα τις συμβουλές τους, τα λάθη που πιθανώς υπάρχουν είναι δικά μου.

Το πρόβλημα του Chebyshev

Πολυώνυμα ελάχιστης απόκλισης από το μηδέν

S. Tabachnikov και S. Gashkov

Με τούτο το άρθρο αποτίουμε φόρο τιμής στον διάσημο ρώσο μαθηματικό Pafnuty Chebyshev, που πέθανε πριν από εκατό χρόνια, στις 26 Νοεμβρίου του 1894. Στα διάσημα επιτεύγματά του συγκαταλέγεται και η επίλυση ενός από τα κομψότερα προβλήματα που αφορούν πολυώνυμα —το λεγόμενο πρόβλημα του Chebyshev για τα πολυώνυμα ελάχιστης απόκλισης από το μηδέν. Θα συναγάγουμε τις ιδιότητες αυτών των πολυωνύμων με δύο τρόπους: στο πρώτο τμήμα του άρθρου (που έχει γράψει ο πρώτος συγγραφέας), ερευνώντας τη γεωμετρία των γραφημάτων τους. Στο δεύτερο τμήμα (γραμμένο από τον δεύτερο συγγραφέα), κάνοντας μια μικρή διερεύνηση των τριγωνομετρικών πολυωνύμων γενικότερα. Διαλέξτε αυτήν που προτιμάτε περισσότερο.

Θεωρούμε ένα διάστημα του άξονα των πραγματικών αριθμών, ας πούμε το $[-2, 2]$. (Για να είμαστε τίμιοι, αυτό το «ας πούμε» δεν είναι και τόσο τυχαίο —οι τύποι στο συγκεκριμένο διάστημα είναι απλούστεροι.) Έστω

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_0$$

ένα *ανηγμένο* πολυώνυμο βαθμού n (αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου ισούται με 1). Το πεδίο τιμών του $f(x)$ στο διάστημα $[-2, 2]$ είναι το διάστημα $[m, M]$, όπου m είναι η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή του πολυωνύμου. Η *απόκλιση του* $f(x)$ *από το μηδέν* είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $|m|$ και $|M|$. Αν η απόκλιση είναι c, τότε το γράφημα του πολυωνύμου (στο $[-2, 2]$) βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στη λωρίδα $|y| \le c$ και δεν υπάρχει στενότερη λωρίδα (με τον άξονα x στο μέσο της) που να το περιέχει.

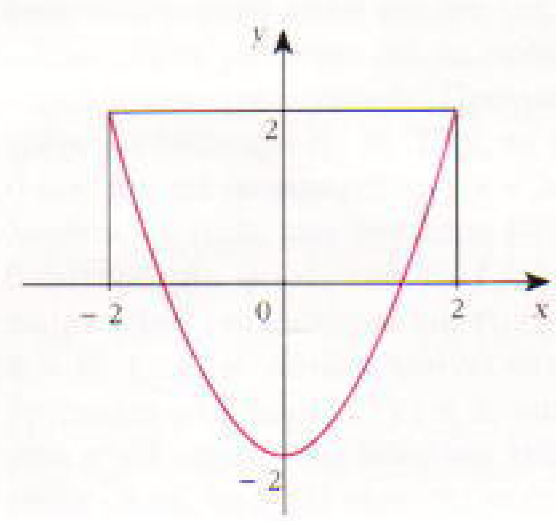
Το πρόβλημα του Chebyshev είναι να βρεθεί ένα ανηγμένο πολυώνυμο $f_n(x)$ βαθμού n του οποίου η απόκλιση από το μηδέν να είναι ελάχιστη. (Η συνθήκη να είναι μοναδιαίος ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου δεν μας επιτρέπει να «συμπιέσουμε» το γράφημα οσοδήποτε κοντά στον άξονα x θέλουμε.) Σε πρώτη ματιά, το πρόβλημα δεν μας ενθουσιάζει ιδιαίτερα: για να βρούμε την απόκλιση, πρέπει να πάρουμε παραγώγους και να λύσουμε εξισώσεις n-οστού βαθμού... Είναι πραγματικά εντυπωσιακό το γεγονός ότι μπορεί να λυθεί γεωμετρικά —και σχεδόν χωρίς υπολογισμούς!

Ας ξεκινήσουμε σιγά σιγά, μελετώντας τις περιπτώσεις πολυωνύμων μικρού βαθμού. Για $n = 1$ έχουμε απλώς τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = x + a$. Το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα $[-2 + a, 2 + a]$ μήκους 4. Επομένως, η ελάχιστη απόκλιση από το μηδέν είναι 2, και $f_1(x) = x$.

Η περίπτωση $n = 2$ (τετραγωνική συνάρτηση) δεν είναι πολύ πιο περίπλοκη. Εδώ το γράφημα είναι ένα μετατοπισμένο τμήμα της παραβολής $y = x^2$, και δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η «οικονομικότερη» τοποθέτηση είναι αυτή του Σχήματος 1. Δηλαδή, $f_2(x) = x^2 - 2$, και η ελάχιστη απόκλιση είναι και πάλι ίση με 2.

Άσκηση 1. Ελέγξτε τη διαίσθησή σας κάνοντας υπολογισμούς: αποδείξτε ότι η απόκλιση από το μηδέν ενός ανηγμένου δευτεροβάθμιου πολυωνύμου δεν είναι μικρότερη από 2.[1]

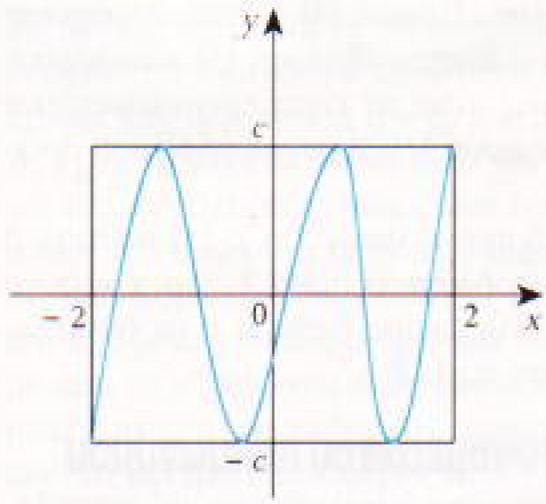
Θα μπορούσαμε να σας προσφέρουμε και τη διερεύνηση των τριτοβάθμιων πολυωνύμων για να βεβαιωθείτε ότι και σε αυτή την περίπτωση η ελάχιστη απόκλιση από το μηδέν είναι και πάλι 2. Και αυτό το πρόβλημα μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε χωρίς ισχυρά μέσα. Ανυπομονούμε, όμως, να σας πούμε πώς λύνεται το γενικό πρόβλημα.



Σχήμα 1

Ας υποθέσουμε ότι έχετε καταφέρει να βρείτε ένα ανηγμένο πολυώνυμο $f_n(x)$ βαθμού n του οποίου το γράφημα βρίσκεται μέσα στη λωρίδα $|y| \le c$, και ότι το γράφημα περιέχει $n + 1$ σημεία που ανήκουν στο σύνορο της λωρίδας, τέτοια

1.Δείτε επίσης το πρόβλημα M15 στο προηγούμενο τεύχος του *Quantum*.

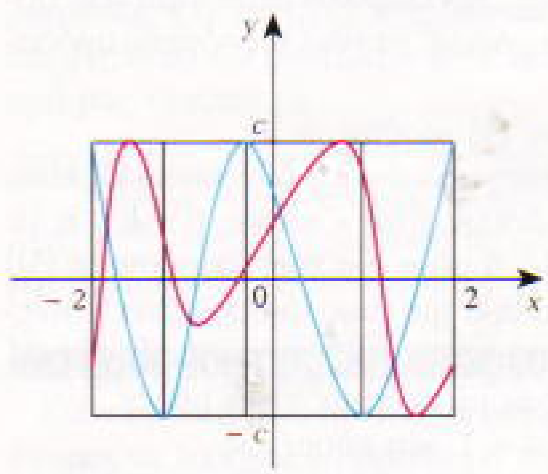


Σχήμα 2

ώστε το δεξιότερο από αυτά να ανήκει στην ευθεία $y = c$, το επόμενο προς τα αριστερά να ανήκει στην ευθεία $y = c$, το επόμενο και πάλι στην $y = c$, κ.ο.κ. (δείτε το Σχήμα 2, όπου φαίνεται η περίπτωση $n = 5$).

ΘΕΩΡΗΜΑ: *Η απόκλιση από το μηδέν οποιουδήποτε πολυωνύμου βαθμού* n, *διαφορετικού από το* $f_n(x)$, *είναι μεγαλύτερη από* c.

Ιδού η γεωμετρική απόδειξη που κάνει τόσο ελκυστικό το πρόβλημα του Chebyshev. Έστω $g(x)$ ένα ανηγμένο πολυώνυμο βαθμού n η απόκλιση του οποίου από το μηδέν είναι μικρότερη ή ίση από c. Τότε, το γράφημά του θα βρίσκεται επίσης μέσα στη λωρίδα $|y| \leq c$. Χωρίζουμε αυτή τη λωρίδα με κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα σε n ορθογώνια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

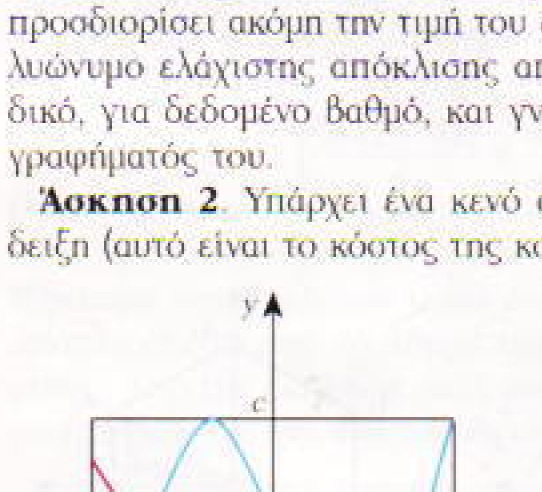


Σχήμα 3

Η μπλε καμπύλη σε αυτό το Σχήμα —το γράφημα της $f_n(x)$— συνδέει διαγώνια δύο απέναντι κορυφές σε κάθε ορθογώνιο. Επομένως η κόκκινη καμπύλη —το γράφημα της $g(x)$— τέμνει την μπλε στο εσωτερικό καθενός από αυτά τα ορθογώνια. Επομένως, η εξίσωση $f_n(x) - g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον n ρίζες. Ο βαθμός του πολυωνύμου $f_n(x) - g(x)$, όμως, είναι το πολύ $n - 1$ (οι όροι x^n απαλείφονται). Αν ένα τέτοιο πολυώνυμο έχει n ή περισσότερες ρίζες, πρέπει υποχρεωτικά να ταυτίζεται με το μηδενικό πολυώνυμο —δηλαδή, $g(x) = f_n(x)$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Αν το καλοσκεφτούμε, αυτή η απόδειξη μας δίνει άμεσα πολλές πρόσθετες πληροφορίες: αν και δεν έχουμε προσδιορίσει ακόμη την τιμή του c, γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο ελάχιστης απόκλισης από το μηδέν είναι μοναδικό, για δεδομένο βαθμό, και γνωρίζουμε τη μορφή του γραφήματός του.

Άσκηση 2. Υπάρχει ένα κενό στην προηγούμενη απόδειξη (αυτό είναι το κόστος της κομψότητάς της). Τι πρέπει να γίνει όταν τα γραφήματα εφάπτονται (Σχήμα 4); (Υπόδειξη: θυμηθείτε τον ορισμό της πολλαπλής ρίζας ενός πολυωνύμου.)



Σχήμα 4

Πρέπει επομένως να βρούμε ένα πολυώνυμο $f_n(x)$ το γράφημα του οποίου θα είναι όπως αυτό του Σχήματος 2. Αυτό το γράφημα θα σας θυμίζει αναμφίβολα τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Σίγουρα, λοιπόν, έφτασε η στιγμή να μπουν και αυτές στο παιχνίδι!

Το απλούστερο θα ήταν να θεωρήσουμε ως $f_n(x)$ μια συνάρτηση όπως η συνna —με τη διαφορά ότι η συνάρτηση του συνημιτόνου δεν είναι πολυωνυμική. Το επόμενο λήμμα σώζει την κατάσταση.

ΛΗΜΜΑ: *Η συνάρτηση 2συνna μπορεί να γραφεί ως ανηγμένο πολυώνυμο βαθμού n της συνάρτησης 2συνa. Συγκεκριμένα,* $2\text{συν}na = f_n(2\text{συν}a)$.

Για παράδειγμα,

$$2\text{συν}2a = 4\text{συν}^2 a - 2 = (2\text{συν}a)^2 - 2$$

—δηλαδή, $f_2(x) = x^2 - 2$. Επίσης

$$2\text{συν}3a = 8\text{συν}^3 a - 6\text{συν}a = (2\text{συν}a)^3 - 3(2\text{συν}a)$$

—δηλαδή, $f_3(x) = x^3 - 3x$.

Για τη γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς n. Υποθέστε ότι το λήμμα αληθεύει για n και για $n - 1$ (όπου $n \geq 2$). Έστω λοιπόν

$$2\text{συν}(n-1)a = f_{n-1}(2\text{συν}a),$$

$$2\text{συν}na = f_n(2\text{συν}a).$$

Τότε η ταυτότητα

$$\text{συν}A + \text{συν}B = 2 \cdot \text{συν}(A-B)/2 \cdot \text{συν}(A+B)/2$$

μας δίνει

$$\text{συν}(n+1)a + \text{συν}(n-1)a = 2\ \text{συν}a \cdot \text{συν}na,$$

ή

$$\begin{aligned} 2\text{συν}(n+1)a &= (2\text{συν}a)(2\text{συν}na) - 2\text{συν}(n-1)a \\ &= (2\text{συν}a) \cdot f_n(2\text{συν}a) - f_{n-1}(2\text{συν}a). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη, που μας δίνει επιπλέον έναν αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό των $f_n(x)$.

Ίσως έχετε μαντέψει ότι τα πολυώνυμα $f_n(x)$ είναι αυτά ακριβώς που χρειαζόμαστε. Πραγματικά, έστω ότι το a διατρέχει το διάστημα $[0, \pi]$. Τότε, το πa θα μεταβάλλεται από 0 έως $n\pi$, και οι συναρτήσεις $x = 2\text{συν}a$ και $f_n(x) = 2\text{συν}na$ λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[-2, 2]$. Το x διατρέχει το διάστημα μία φορά, ενώ το $f_n(x)$ το διατρέχει n φορές, παίρνοντας εναλλακτικά τις τιμές ± 2 για $x = (\pi k/n)$, με $k = 0, 1, \ldots, n$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα της $f_n(x)$ βρίσκεται στη λωρίδα $|y| \leq 2$, και ότι διέρχεται εναλλάξ από $n + 1$ σημεία του πάνω και του κάτω συνόρου της λωρίδας. Άρα, το $f_n(x)$ είναι το πολυώνυμο ελάχιστης απόκλισης από το μηδέν στο διάστημα $[-2, 2]$ (και η απόκλιση είναι 2). Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται *πολυώνυμα Chebyshev*.

Εικονογράφηση: Dmitry Krimov

Η προηγούμενη συζήτηση μας οδηγεί σ' ένα απρόσμενο συμπέρασμα: *Για κάθε ανηγμένο πολυώνυμο $g(x)$, υπάρχει ένα σημείο στο $[-2, 2]$ τέτοιο ώστε η απόλυτη τιμή του $g(x)$ σε αυτό το σημείο να μην είναι μικρότερη από 2.* Νομίζουμε ότι θα ήταν αδύνατο να προβλέψουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα.

Μετά από επίλυση του προβλήματος του Chebyshev στο διάστημα $[-2, 2]$, μπορούμε να το λύσουμε και για οποιοδήποτε άλλο διάστημα. Αρκεί να αλλάξουμε τη μεταβλητή στα πολυώνυμα Chebyshev.[2]

Άσκηση 3. Βρείτε την ελάχιστη απόκλιση από το μηδέν για τα ανηγμένα πολυώνυμα βαθμού n στα διαστήματα (α) $[0, 4]$, (β) $[-1, 1]$.

Δύο είδη πολυωνύμων

Εκτός από τα συνηθισμένα αλγεβρικά πολυώνυμα που έχετε συναντήσει στο σχολείο, οι μαθηματικοί μελετούν και τα *τριγωνομετρικά πολυώνυμα*

$$f(a) = a_0 + a_1\text{συν}a + a_2\text{συν}2a + \dots + a_n\text{συν}na, \qquad (1)$$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι αριθμητικοί συντελεστές. Ο αριθμός n ονομάζεται βαθμός και το a_n είναι ο *συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου* αυτού του τριγωνομετρικού πολυωνύμου. Ίσως αναρωτιέστε, «Γιατί πολυώνυμα;». Ο λόγος είναι ότι το $f(a)$ είναι *αλγεβρικό* πολυώνυμο της συνάρτησης συνa. Προηγουμένως αποδείξαμε ότι το 2συνna είναι πολυώνυμο βαθμού n του 2συνa με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου 1. Για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\text{συν}na = p_n(\text{συν}a),$$

όπου $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το 2^{n-1}:

$$\begin{aligned}
&\text{συν}0a = 1 = p_0(x),\\
&\text{συν}a = x = p_1(x),\\
&\text{συν}2a = 2\text{συν}^2 a - 1 = 2x^2 - 1 = p_2(x), \qquad (2)\\
&\text{συν}3a = 4\text{συν}^3 a - 3\text{συν}a = 4x^3 - 3x = p_3(x),\\
&\text{συν}na = 2^{n-1}x^n + \dots = p_n(x),
\end{aligned}$$

όπου $x =$ συνa.

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ισότητες επί $a_0, a_1, \dots, a_n$, αντίστοιχα, και προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε την παράσταση ενός γενικού τριγωνομετρικού πολυωνύμου (1) ως αλγεβρικού πολυωνύμου βαθμού n του συνa.

Ας διαβάσουμε τώρα τις ισότητες (2) από τα δεξιά προς τα αριστερά και από κάτω προς τα πάνω. Η τελευταία από αυτές μας δίνει

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}}\text{συν}na + \cdots, \qquad (3)$$

όπου με τις τελείες παριστάνουμε τους όρους που περιέχουν τα x^k, $k < n$. Η προτελευταία παράσταση γίνεται

$$x^{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}\text{συν}(n-1)a + \cdots, \qquad (4)$$

όπου οι τελείες παριστάνουν τα μονώνυμα με x^k, $k < n-1$, κ.ο.κ. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4) και τις παρόμοιες εξισώσεις για x^k, $k < n - 1$, στην εξίσωση (3) καταλήγουμε στο εξής: *αν $x =$ συνa, τότε x^n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού* n *με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το $1/2^{n-1}$.*

Έπεται ότι κάθε αλγεβρικό πολυώνυμο $p_n(x)$ βαθμού n και με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου 1, για $x =$ συνa γίνεται τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το $1/2^{n-1}$.

Η μέση τιμή ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου

Θεωρήστε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το a_n. Διαμερίστε το πεδίο ορισμού $[0, 2\pi]$ σε $2n$ ίσα τμήματα χρησιμοποιώντας τα σημεία 0, π/n, $2\pi/n$, $3\pi/n$, ..., $(2n-1)\pi/n$, και υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$\frac{1}{2n}\left[f(0) - f\left(\frac{\pi}{n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{n}\right) - f\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots - f\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right]. \qquad (5)$$

Αυτήν θα την ονομάζουμε, προσωρινά, *μέση τιμή* του πολυωνύμου (παρατηρήστε, όμως, τα εναλλασσόμενα πρόσημα των όρων).

ΛΗΜΜΑ: *Ο αριθμός της* (5) *ισούται με a_n.*

Αφού ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο [εξίσωση (1)] είναι το άθροισμα των συναρτήσεων $g_k(a) =$ συνka, $0 \le k \le n$, με αριθμητικούς συντελεστές, η μέση του τιμή [παράσταση (5)] είναι ένα παρόμοιο άθροισμα (με τους ίδιους συντελεστές) των μέσων τιμών των συναρτήσεων g_k. Ας αποδείξουμε ότι για όλα τα $k < n$ αυτές οι μέσες τιμές είναι μηδέν.

Για $k = 0$, έχουμε $g_0(a) = 1$, και επομένως

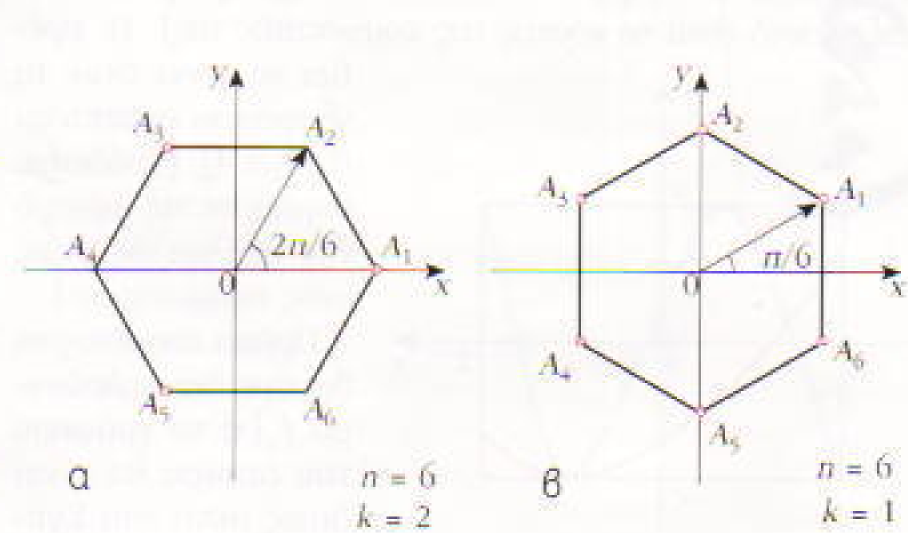
$$g_0 - g_0\left(\frac{\pi}{n}\right) + \dots = 1 - 1 + 1 - \dots - 1 = 0.$$

Τώρα, ας πάρουμε ένα τυχαίο k, όπου $0 < k < n$. Το άθροισμα στην παράσταση (5) για $f = g_k$ ισούται με τη διαφορά των δύο αθροισμάτων:

$$p = \text{συν}0 + \text{συν}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \text{συν}\left(\frac{4\pi k}{n}\right) + \dots + \text{συν}\left(\frac{(2n-2)\pi k}{n}\right)$$

και

$$q = \text{συν}\left(\frac{\pi k}{n}\right) + \text{συν}\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + \text{συν}\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{4\pi k}{n}\right) + \dots + \text{συν}\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{(2n-2)\pi k}{n}\right).$$



Σχήμα 5

2. Στην πραγματικότητα, είναι πιο συνηθισμένο να ορίζονται ως πολυώνυμα με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, 1]$ μέσω του τύπου $T_n(x) = f_n(2x)/2$.

Το καθένα από αυτά τα αθροίσματα είναι μηδέν. Πράγματι, θεωρήστε το κανονικό πολύγωνο του Σχήματος 5α (όπου έχουμε την περίπτωση $n = 6$, $k = 2$). Οι κορυφές A_1, A_{1+k}, A_{1+2k}, ... είναι ένα υποσύνολο των κορυφών του (στο Σχήμα, ένα ισόπλευρο τρίγωνο), και έπειτα από ένα πλήθος βημάτων ένα από αυτά τα σημεία συμπίπτει με το A_1. Αυτό το σύνολο κορυφών παρουσιάζει περιστροφική συμμετρία, και επομένως το άθροισμα των διανυσμάτων που φέρουμε από το κέντρο του πολυγώνου προς τις επιλεγμένες κορυφές ισούται με μηδέν. (Η περιστροφή κατά $2\pi k/n$ γύρω από το κέντρο επαναφέρει το πολύγωνο και τις επιλεγμένες κορυφές στον εαυτό τους, και συνεπώς αυτό το άθροισμα παραμένει αναλλοίωτο μετά την περιστροφή, κάτι που είναι αδύνατο για ένα μη μηδενικό άθροισμα.) Άρα, το άθροισμα των προβολών αυτών των διανυσμάτων στον άξονα x θα είναι επίσης μηδέν. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς το άθροισμα p! Ένα παρόμοιο επιχείρημα που χρησιμοποιεί το Σχήμα 5β (όπου $k = 1$) αποδεικνύει ότι $q = 0$.

Απομένει, λοιπόν, να υπολογίσουμε το άθροισμα της παράστασης (5) για $f(a) = a_n$ συνna. Σε αυτή την περίπτωση, $f(\pi k/n) = a$ συν$(\pi k) = (-1)^k a$, και επομένως το άθροισμά μας ισούται με

$$\frac{a_n}{2n}\left[1-(-1)+1-(-1)+\ldots\right]=\frac{a_n}{2n}\cdot 2n=a_n,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Μια λύση του προβλήματος του Chebyshev

Κάθε προσπάθεια πρέπει να ανταμείβεται: είμαστε λοιπόν έτοιμοι να λύσουμε το πρόβλημα του Chebyshev —να βρούμε την ελάχιστη δυνατή απόκλιση από το μηδέν ενός ανηγμένου πολυωνύμου (δηλαδή, με συντελεστή πρωτοβάθμιου όρου 1) σε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτή τη φορά θα είναι βολικότερο να θεωρήσουμε το διάστημα $[-1, 1]$.

Κατ' αρχάς, ας κάνουμε μια κάτω εκτίμηση της απόκλισης από το μηδέν του τριγωνομετρικού πολυωνύμου $f(a)$ της εξίσωσης (1). Θεωρήστε τη *μέση απόλυτη τιμή* του $f(a)$ στα σημεία $k\pi/n$, $0 \le k \le 2n - 1$:

$$\frac{1}{2n}\left[|f(0)|+\left|f\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|+\ldots+\left|f\frac{(2n-1)\pi}{n}\right|\right]$$
$$\ge\frac{1}{2n}\left|f(0)-f\left(\frac{\pi}{n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{n}\right)-\ldots-\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right|=|a_n|. \quad (6)$$

Η ανισότητα εδώ συνεπάγεται από το γεγονός ότι η απόλυτη τιμή ενός αθροίσματος είναι μικρότερη ή ίση με το άθροισμα των απόλυτων τιμών όλων των όρων του, και η ισότητα έπεται από το λήμμα που αποδείξαμε προηγουμένως. Από την εκτίμηση που μας δίνει η παράσταση (6) συνεπάγεται ότι για ένα τουλάχιστον k,

$$\left|f\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right|\ge|a_n|.$$

Επομένως, *η απόκλιση ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου από το μηδέν είναι μεγαλύτερη ή ίση με την απόλυτη τιμή του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του.*

Τώρα, το πρόβλημα του Chebyshev μπορεί να λυθεί μονομιάς. Αφού η αντικατάσταση x = συνa μετατρέπει ένα τυχαίο ανηγμένο πολυώνυμο $p_n(x)$ βαθμού n σε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $f(a)$ με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το $1/2^{n-1}$ (όπως είδαμε προηγουμένως), και αφού το x διατρέχει το διάστημα $[-1, 1]$ (από το 1 έως το -1), όταν το a παίρνει τιμές από το 0 έως το 2π, η απόκλιση του $p_n(x)$ στο $[-1, 1]$ ισούται με αυτήν του $f(a)$ στο $[0, 2\pi]$. Επομένως, *η απόκλιση στο $[-1, 1]$ από το μηδέν ενός ανηγμένου πολυωνύμου βαθμού* n *είναι μεγαλύτερη ή ίση με $1/2^{n-1}$.*

Μπορούμε να δούμε ότι αυτή η απόκλιση επιτυγχάνεται με το πολυώνυμο $p_n(x)$ που ορίζεται από τον τύπο p_n(συνa) $= (1/2^{n-1})$ συνna —δηλαδή για το

$$p_n(x)=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\text{συν}(n\,\text{τοξσυν}x).$$

Τέλος, σας αφήνουμε αρκετά προβλήματα για να τα αντιμετωπίσετε μόνοι σας.

Προβλήματα

1. Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n ρίζες στο $[0, \pi]$, και το πολύ $2n$ ρίζες στο $[0, 2\pi]$.
2. Εάν δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού n παίρνουν ίσες τιμές σε $n + 1$ σημεία του διαστήματος $[0, \pi]$, τότε είναι παντού ίσα.
3. Το μοναδικό ανηγμένο πολυώνυμο βαθμού n που αποκλίνει από το μηδέν στο διάστημα $[-1, 1]$ κατά $1/2^{n-1}$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev $(1/2^{n-1})$συν(nτοξσυνx.) (Υπόδειξη: πότε η ανισότητα (6) γίνεται ακριβής ισότητα;)
4. Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\text{συν}a+\text{συν}(a+x)+\text{συν}(a+2x)+\ldots+\text{συν}(a+nx)$$
$$=\frac{\text{ημ}[a+(n+1/2)x]-\text{ημ}(a-x/2)}{2\text{ημ}x/2}.$$

[Υπόδειξη: ημ$[a + (k + 1/2)x]$ − ημ$[a + (k - 1/2)x]$ = 2ημ$(x/2)$συν$(a + kx)$.]

5. Από το πρόβλημα 4 να συμπεράνετε το λήμμα για τη μέση τιμή ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου.
6. Αποδείξτε ότι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο χωρίς σταθερό όρο, $f(a) = a_1$ συνa + a_2 συν$2a$ + ... + a_n συνna, έχει αναγκαστικά ρίζα. [Υπόδειξη: ποια είναι η μέση τιμή του $f(a)$;]
7. Θυμηθείτε την απόδειξη του λήμματος, και επαληθεύστε ότι η ακολουθία των κορυφών του πολυγώνου επιστρέφει στην αρχή έπειτα από n/ΜΚΔ(n, k) βήματα. (ΜΚΔ σημαίνει «μέγιστος κοινός διαιρέτης».)

Σε αυτό το άρθρο ασχοληθήκαμε με τις αναλυτικές ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev. Οι συνδυαστικές τους ιδιότητες δεν είναι λιγότερο ενδιαφέρουσες —αυτό όμως είναι το θέμα ενός άλλου άρθρου. ■

– κορφιάτης –

Το φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο

ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6, Τ.Κ.106 79 ΑΘΗΝΑ ΤΗΛ.: 36.28.492

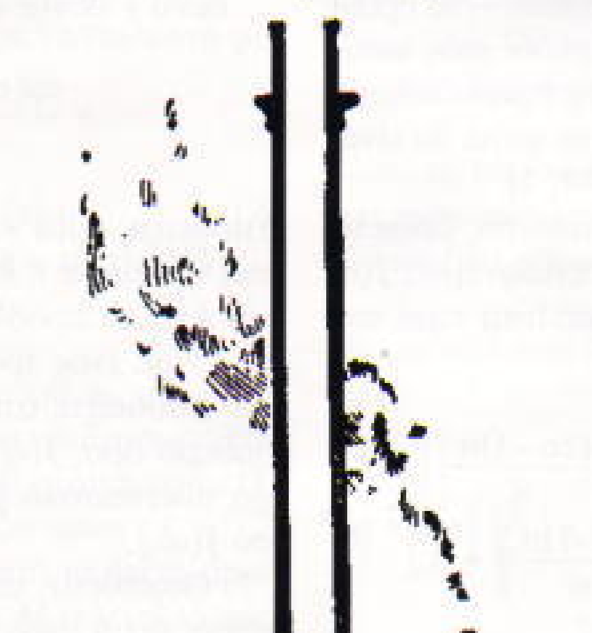
Οπτική για ουρανοβάμονες

Παρατηρώντας τα άστρα καταμεσήμερο: αληθεύουν οι παλιοί θρύλοι;

Vladimir Surdin

Υπάρχει μια παλιά και μάλλον διαδεδομένη δοξασία ότι είναι δυνατό να δούμε τα άστρα ακόμη και στη διάρκεια της ημέρας, αρκεί να βρισκόμαστε στον πυθμένα ενός βαθιού πηγαδιού. Μερικές φορές, μπορεί να συναντήσετε αυτή τη διαβεβαίωση ακόμη και σε έγκυρες πηγές. Πριν από δύο χιλιάδες και περισσότερα χρόνια, ο Αριστοτέλης έγραψε ότι μπορούμε να δούμε τα άστρα κατά τη διάρκεια της ημέρας από το εσωτερικό μιας μεγάλης σπηλιάς. Αργότερα, ο ρωμαίος ιστορικός Πλίνιος επανέλαβε τον ίδιο ισχυρισμό, αντικαθιστώντας τη σπηλιά μ' ένα πηγάδι. Πολλοί συγγραφείς έχουν αναφέρει αυτό το φαινόμενο στα έργα τους: Ο Rudyard Kipling, για παράδειγμα, έγραψε για τα άστρα που ήταν ορατά το μεσημέρι από το βάθος μιας μεγάλης χαράδρας. Ο σερ Robert Ball στο βιβλίο του *Star-Land* (Βοστώνη, 1889) δίνει λεπτομερείς οδηγίες για το πώς θα παρατηρήσουμε τα άστρα την ημέρα από τον πυθμένα μιας ψηλής καμινάδας (Σχήμα 1), και αποδίδει το γεγονός στο ότι η ανθρώπινη όραση γίνεται οξύτερη μέσα στον σκοτεινό σωλήνα.

Υπάρχει, λοιπόν, κάποιο ίχνος αλήθειας σ' αυτούς τους ισχυρισμούς; Ερεύνησε κανείς αν όντως τα άστρα είναι ορατά στη διάρκεια της ημέρας; Πρέπει να παραδεχτώ ότι μέχρι στιγμής δεν είχα την ευκαιρία να βρεθώ στα έγκατα μιας μεγάλης σπηλιάς ή να συρθώ στον πυθμένα μιας καμινάδας. Πάντως, ώς τώρα αρκετοί φιλοπερίεργοι προσπάθησαν να αποδείξουν το «φαινόμενο του πηγαδιού». Επί παραδείγματι, ο διάσημος γερμανός φυσιοδίφης και περιηγητής Alexander von Humbold προσπάθησε να δει τα άστρα κατά τη διάρκεια της ημέρας από διάφορα βαθιά λατομεία στην Αμερική και τη Σιβηρία, χωρίς επιτυχία όμως. Ακόμη και σήμερα, υπάρχουν πολλοί ριψοκίνδυνοι. Ένας από αυτούς, ο δημοσιογράφος L. Repin, έγραψε στην *Komsomolskaya Pravda* της 24 Μαΐου 1978: «Ορισμένοι ισχυρίζονται πως είναι δυνατό να δούμε τα άστρα κατά τη διάρκεια της ημέρας από τον πυθμένα ενός βαθιού πηγαδιού. Προσπάθησα μια φορά να το επαληθεύσω κατεβαίνοντας σ' ένα πηγάδι 60 μέτρων. Δεν είδα όμως καθόλου αστέρια —μόνο ένα μικρό τετράγωνο ενός εκτυφλωτικά γαλάζιου ουρανού».

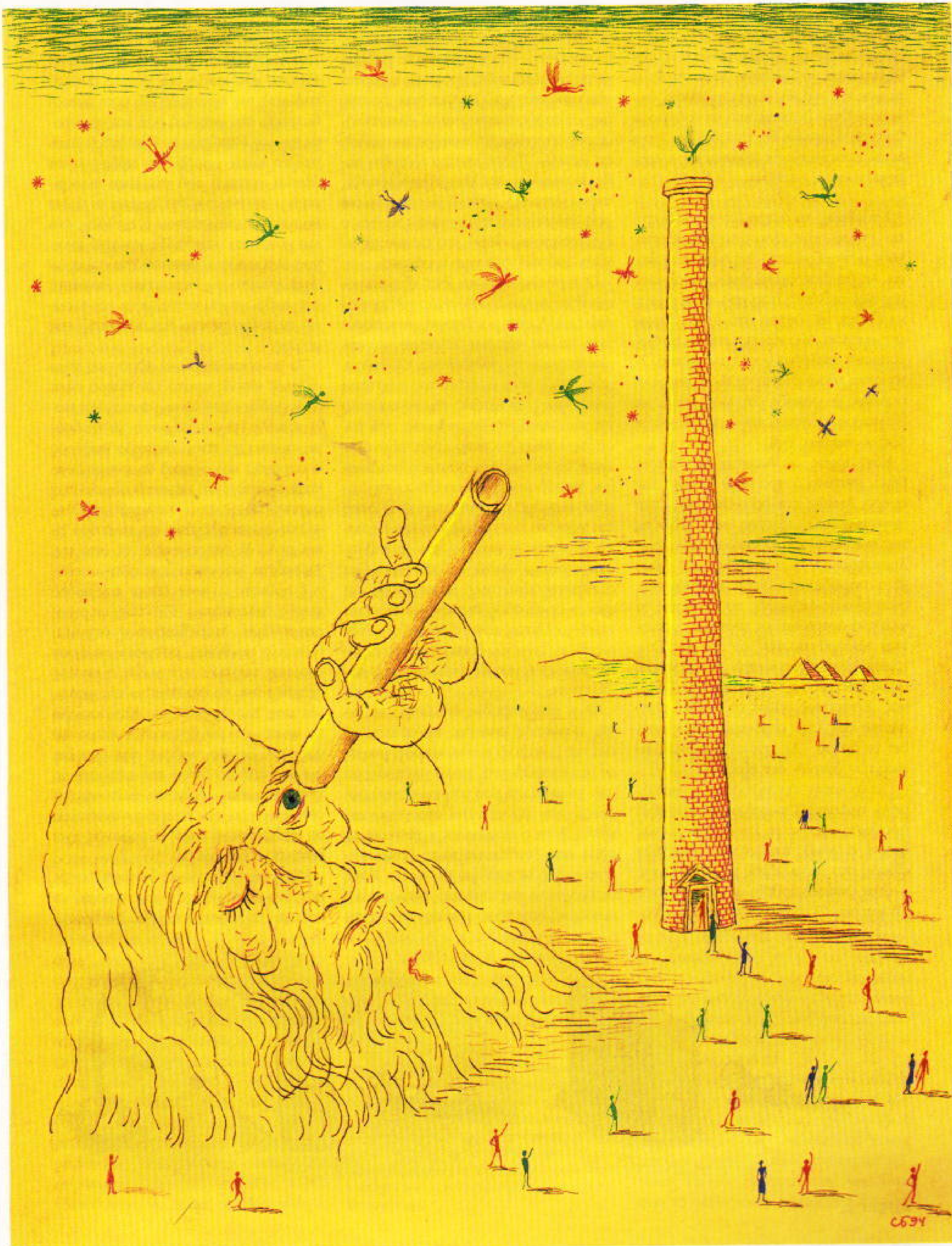


Σχήμα 1

Υπάρχει επίσης η μαρτυρία του Richard Sanderson, πεπειραμένου ερασιτέχνη αστρονόμου από το Σπρίνγκφιλντ της Μασσαχουσέττης, ο οποίος περιγράφει τις παρατηρήσεις του στο *The Skeptical Inquirer* (1992):

> Πριν από 20 περίπου χρόνια, όταν δούλευα ως μαθητευόμενος στο πλανητάριο του Μουσείου Επιστήμης του Σπρίνγκφιλντ, συζήτησα με μερικούς συναδέλφους μου γι' αυτή την παλιά δημοφιλή δοξασία. Τη συζήτησή μας άκουσε ο Frank Corcosh, διευθυντής του μουσείου, που μας πρότεινε να λύσουμε το πρόβλημα πειραματικά. Μας οδήγησε στο υπόγειο του μουσείου, όπου υπήρχε η βάση μιας ψηλής, λεπτής καμινάδας. Μια μικρή πόρτα οδηγούσε στο εσωτερικό της, όπου καταφέραμε να χωρέσουμε τα φιλέρευνα κεφάλια μας. Ακόμη και σήμερα θυμάμαι την αγωνία που ένιωθα περιμένοντας να δω τους νυχτερινούς ουράνιους φωτοδότες στη διάρκεια της ημέρας.
>
> Κοιτώντας προς τα πάνω, μέσα από την καμινάδα, είδα έναν λαμπρό κύκλο να προβάλλει πάνω στο κατασκότεινο φόντο του εσωτερικού της καμινάδας. Μέσα στο σκοτάδι που μας περιέβαλλε οι κόρες των ματιών μου μεγάλωσαν, και το κομμάτι του ουρανού

Εικονογράφηση: Sergey Barkhin


СБ94

λάμπρυνε ακόμη περισσότερο.

Την ίδια στιγμή συνειδητοποίησα ότι δεν θα μπορούσα ποτέ να δω τα άστρα στο άπλετο φως της ημέρας με μια παρόμοια «συσκευή». Όταν βγήκαμε από το υπόγειο, ο Corcosh σημείωσε δηκτικά ότι μόνο ένα άστρο είναι ορατό στη διάρκεια της ημέρας με καλό καιρό —ο Ήλιος.

Επομένως, τα άστρα δεν είναι ορατά την ημέρα ούτε μέσα από κάποιο πηγάδι ούτε μέσα από έναν ψηλό σωλήνα. Ας μη βιαζόμαστε όμως: υπάρχουν μερικοί σωλήνες που μας επιτρέπουν να δούμε τα άστρα στο άπλετο φως της ημέρας. Αναφέρομαι στους αστρονομικούς σωλήνες —τα τηλεσκόπια. Τι τα κάνει τόσο ιδιαίτερα; Γιατί αυτοί οι σωλήνες με φακούς μας επιτρέπουν να βλέπουμε τα άστρα την ημέρα, ενώ οι άδειοι σωλήνες όχι;

Κατ' αρχάς, ας σκεφτούμε λίγο το θέμα: γιατί τα άστρα είναι αόρατα την ημέρα; Απλώς, επειδή ο ουρανός είναι πολύ φωτεινός εξαιτίας της σκέδασης του φωτός. Όταν το σκεδαζόμενο φως λιγοστέψει για οποιονδήποτε λόγο (για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια μιας ολικής έκλειψης του Ηλίου), τα φωτεινά άστρα και οι πλανήτες φαίνονται καθαρά στο φως της ημέρας. Επιπλέον, είναι ορατοί από το Διάστημα, όπως και από την επιφάνεια της Σελήνης. Επομένως, γιατί το σκεδασμένο ηλιακό φως στην ατμόσφαιρα μας κρύβει τα άστρα; Σε τελική ανάλυση, το φως των άστρων δεν εξασθενεί.

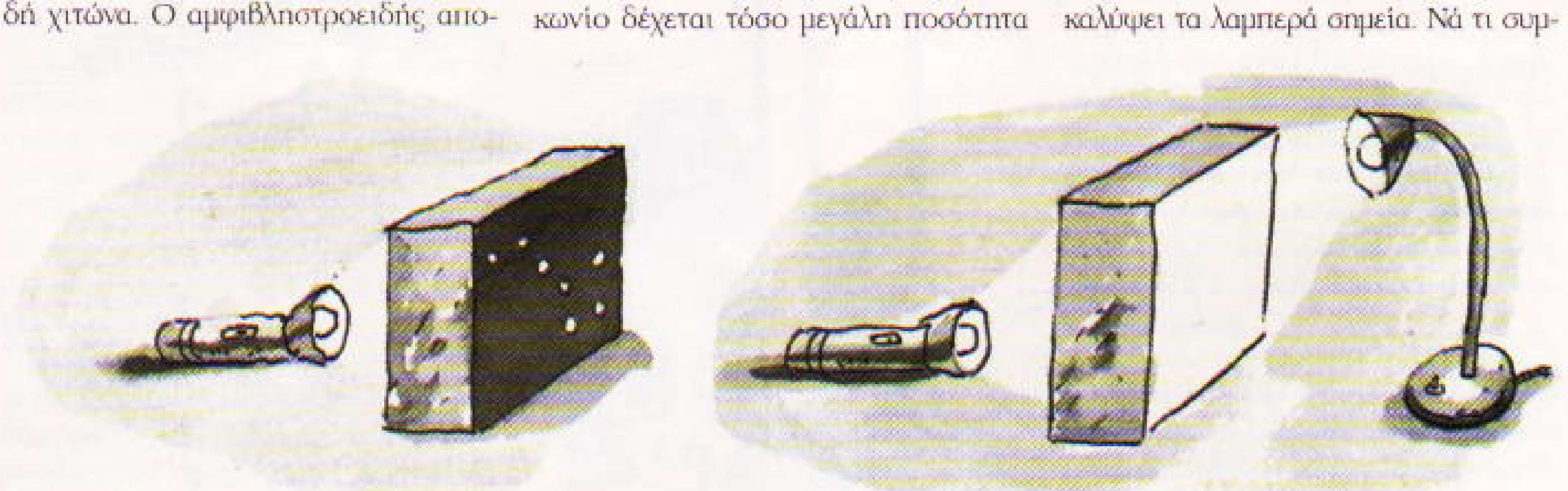
Για να κατανοήσουμε αυτό το φαινόμενο, πρέπει να γνωρίζουμε ορισμένα πράγματα σχετικά με την όραση. Όπως ξέρετε, ο φακός του ματιού σχηματίζει είδωλα στο πίσω μέρος του οφθαλμού —στον φωτοευαίσθητο αμφιβληστροειδή χιτώνα. Ο αμφιβληστροειδής αποτελείται από πάμπολλους στοιχειώδεις φωτοδέκτες— τα κωνία και τα ραβδία. Αυτά διαφέρουν ως προς την ευαισθησία τους στο χρώμα, για τους δικούς μας σκοπούς ωστόσο αυτό είναι αδιάφορο, οπότε θα τα αναφέρουμε απλώς ως «κωνία». Το σημαντικό είναι ότι κάθε κωνίο αποστέλλει πληροφορίες στον εγκέφαλο σχετικά με τη φωτεινή ροή που προσπίπτει πάνω του, και ο εγκέφαλος συνθέτει μια συνολική εικόνα από τα μεμονωμένα σήματα.

Ο οφθαλμός είναι ένα εξαιρετικά σύνθετο όργανο συλλογής πληροφοριών, αλλά από μια άποψη είναι παρόμοιο με μια «έξυπνη» ηλεκτρονική συσκευή όπως το ραδιόφωνο. Ο οφθαλμός έχει ένα αυτόματο σύστημα ενίσχυσης που μειώνει την ευαισθησία του όταν υπάρχει έντονο φως, ενώ την αυξάνει όταν το φως είναι αδύνατο. Διαθέτει επίσης ένα σύστημα καταπνιξης θορύβου που εξομαλύνει τις τυχαίες διακυμάνσεις της φωτεινής ροής και χρονικά και τοπικά (σε μια περιοχή γειτονικών κωνίων του αμφιβληστροειδούς). Αυτό το σύστημα έχει ορισμένες ιδιότητες κατωφλίου, και έτσι ο εγκέφαλος δεν αντιλαμβάνεται ταχείες αλλαγές του ειδώλου (σ' αυτήν ακριβώς την ιδέα βασίζεται ο κινηματογράφος) ή μικρές διακυμάνσεις λαμπρότητας.

Όταν παρατηρούμε ένα άστρο τη νύχτα, η φωτεινή ροή που προσπίπτει σ' ένα και μοναδικό κωνίο, παρότι μικρή, είναι οπωσδήποτε πολύ μεγαλύτερη από τη φωτεινή ροή του σκοτεινού ουρανού που προσπίπτει στα γειτονικά κωνία. Έτσι ο εγκέφαλος ερμηνεύει το σήμα που λαμβάνει από το συγκεκριμένο κωνίο ως μήνυμα με νόημα. Κατά τη διάρκεια της ημέρας, όμως, κάθε κωνίο δέχεται τόσο μεγάλη ποσότητα φωτός από τον ουρανό ώστε το λίγο επιπλέον φως ενός άστρου που πέφτει πάνω σ' ένα κωνίο δεν γίνεται αντιληπτό από τον εγκέφαλο ως πραγματική διαφορά στη φωτεινή ροή και «διαγράφεται» ως διακύμανση. Ένα άστρο μπορεί να είναι ορατό την ημέρα μόνο όταν η φωτεινή ροή του είναι συγκρίσιμη μ' εκείνη που προέρχεται από ένα κομμάτι ουρανού που διεγείρει ένα και μοναδικό κωνίο. Το γωνιακό άνοιγμα αυτού του κομματιού του ουρανού είναι γνωστό ως διακριτική ικανότητα του ανθρώπινου οφθαλμού, και ισούται περίπου με ένα πρώτο λεπτό της μοίρας.

Το μοναδικό ουράνιο σώμα που είναι μερικές φορές ορατό την ημέρα είναι η Αφροδίτη. Δεν είναι πάντως και πολύ εύκολο να καταφέρουμε να τη δούμε: πρέπει να είναι ιδιαίτερα καθαρός ο ουρανός και φυσικά να γνωρίζουμε κατά προσέγγιση σε ποιό σημείο του ουρανού βρίσκεται ο πλανήτης. Όλοι οι υπόλοιποι πλανήτες και τα άστρα είναι πολύ λιγότερο φωτεινοί από την Αφροδίτη, και επομένως είναι απολύτως αδύνατο να τους δούμε την ημέρα χωρίς τηλεσκόπιο. Πάντως, μερικοί αστρονόμοι διαβεβαιώνουν ότι υπό ιδανικές συνθήκες μπορούν να δουν στο φως της ημέρας τον Δία, ο οποίος έχει περίπου το ένα πέμπτο της φωτεινότητας της Αφροδίτης. Και όσο για το φωτεινότερο άστρο του ουρανού μας, τον Σείριο, ουδείς τον έχει δει ημέρα από το ύψος της επιφάνειας της θάλασσας. Λέγεται ωστόσο ότι μπορούμε να τον δούμε αν ανεβούμε σε ψηλά βουνά όταν ο ουρανός έχει βαθύ μενεξεδί χρώμα.

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως ένα φωτεινό υπόβαθρο μπορεί να καλύψει τα λαμπερά σημεία. Νά τι συμ-



Σχήμα 2

βουλεύει ο Yaskov Perelman στο βιβλίο του *Astronomy for fun* :

Μπορούμε να επιδείξουμε την εξαφάνιση των άστρων κατά τη διάρκεια της ημέρας μ' ένα απλό πείραμα. Ανοίξτε στη μια πλευρά ενός χαρτοκιβωτίου μερικές τρύπες, σχηματίζοντας την εικόνα ενός «αστερισμού», και κολλήστε ένα άσπρο χαρτί από πάνω. Βάλτε το κιβώτιο σε σκοτεινό δωμάτιο και φωτίστε το εσωτερικό του. Θα δείτε καθαρά τα φωτεινά σημεία στην τρυπημένη πλευρά του κιβωτίου να μοιάζουν με άστρα στον νυχτερινό ουρανό (Σχήμα 2). Μόλις όμως ανάψετε ένα αρκετά δυνατό φως στο δωμάτιο, τα τεχνητά άστρα χάνονται από το χαρτί: το «φως της ημέρας» εξαφάνισε τα «άστρα».

Πώς λοιπόν μας βοηθά ένα τηλεσκόπιο να βλέπουμε τα ουράνια σώματα στο φως της ημέρας; Το σύστημα των αντικειμενικών φακών του είναι φανερό ότι συλλέγει πολύ περισσότερο φως απ' ό,τι η κόρη του οφθαλμού. Από αυτή την άποψη, όμως, το είδωλο ενός άστρου και ενός κομματιού ουρανού είναι ισοδύναμα, διότι οι φωτεινές τους ροές αυξάνονται κατά τον ίδιο παράγοντα —που ισούται κατά προσέγγιση με το λόγο του εμβαδού του αντικειμενικού φακού προς το εμβαδόν της κόρης του οφθαλμού. Εδώ υπάρχει κάτι σπουδαιότερο: το τηλεσκόπιο αυξάνει τη διακριτική ικανότητα του οφθαλμού διότι μεγεθύνει το γωνιακό μέγεθος των παρατηρούμενων αντικειμένων. Αυτό σημαίνει ότι το τηλεσκόπιο προβάλλει το ίδιο κομμάτι ουρανού σε μεγαλύτερο πλήθος κωνίων, το καθένα από τα οποία απορροφά αναλογικά λιγότερο φως. Για παράδειγμα, όταν ένα τηλεσκόπιο αυξάνει το γωνιακό μέγεθος κατά παράγοντα A, η παρατηρούμενη λαμπρότητα μειώνεται κατά παράγοντα A^2. Ένα άστρο, όμως, έχει πολύ μικρό γωνιακό μέγεθος, και επομένως το φως του εξακολουθεί να πέφτει πάνω σ' ένα και μοναδικό κωνίο ακόμη και όταν περνά από το τηλεσκόπιο. Τώρα, όμως, το επιπλέον φως του άστρου μπορεί να είναι αρκετά σημαντικό συγκριτικά με τη μειωμένη λαμπρότητα (ανά κωνίο) του ουράνιου υποβάθρου. Έτσι, όταν η μεγέθυνση είναι 45×, η ενεργός λαμπρότητα του ουρανού μειώνεται κατά παράγοντα ίσο με $45^2 \cong 2.000$, οπότε είναι δυνατό να δούμε τα φωτεινότερα άστρα και τους πλανήτες με το φως της ημέρας.

Άραγε αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε ένα τηλεσκόπιο με μεγάλη μεγέθυνση και να δούμε και τα αμυδρότερα άστρα στη διάρκεια της ημέρας; Όχι. Η γήινη ατμόσφαιρα δεν είναι ομογενής, και το είδωλο του άστρου είναι συγκεχυμένο έχοντας κάποιο γωνιακό μέγεθος, πολύ μικρό βέβαια. Τη νύχτα, με καλό καιρό, στο ύψος της κορυφής ενός ψηλού βουνού είναι περίπου 1 δεύτερο λεπτό της μοίρας, ενώ την ημέρα και στο επίπεδο της θάλασσας δεν είναι λιγότερο από 2-3 δεύτερα λεπτά. Επομένως, όταν ένα τηλεσκόπιο έχει μεγέθυνση μεγαλύτερη από 30-60×, το γωνιακό μέγεθος του άστρου υπερβαίνει τη διακριτική ικανότητα του οφθαλμού και το είδωλό του προβάλλεται σε αρκετά κωνία. Επομένως, δεν έχει νόημα να αυξάνουμε τη μεγέθυνση: η φωτεινότητα του άστρου θα μειωθεί εξίσου με τη φωτεινότητα του ουρανού.

Ας σημειώσουμε ποια άστρα μπορούμε να δούμε την ημέρα μ' ένα τηλεσκόπιο. Την ημέρα, με καλό καιρό, ο ουρανός έχει μέγεθος −5 ανά τετραγωνικό πρώτο λεπτό[1], που αντιστοιχεί περίπου στο φως που πέφτει σ' ένα κωνίο. Το μέγεθος της Αφροδίτης είναι περίπου −4. Υποθέτουμε, επομένως, ότι ένα άστρο θα είναι ορατό όταν η λαμπρότητά του διαφέρει από αυτήν ενός τετραγωνικού πρώτου λεπτού του ουρανού περισσότερο από 1. Όπως είδαμε προηγουμένως, μπορούμε να μειώσουμε τη φωτεινότητα του ουρανού μ' ένα τηλεσκόπιο κατά έναν παράγοντα που δεν υπερβαίνει το 2.000 —δηλαδή, κατά παράγοντα λαμπρότητας ίσο περίπου με 8. Επομένως, η λαμπρότητα του ουρανού θα μειωθεί από το −5 στο $-5 + 8 = 3$ ανά τετραγωνικό πρώτο λεπτό, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να δούμε άστρα με μέγεθος έως και 4. Οι αστρονομικές παρατηρήσεις επιβεβαιώνουν αυτή την εκτίμηση.

1. Οι αστρονόμοι μετρούν τη λαμπρότητα των ουράνιων σωμάτων με το «αστρικό μέγεθος», το οποίο σημειώνεται (για παράδειγμα) ως −5. Μείωση του αστρικού μεγέθους κατά 1 αντιστοιχεί σε αύξηση της φωτεινότητας κατά 2,5 φορές. Το μέγεθος των περισσότερων άστρων που είναι ορατά μια καθαρή, σκοτεινή νύχτα κυμαίνεται από 6 (το αμυδρότερο) έως 1 (το φωτεινότερο).

Και τώρα που ξεκαθαρίσαμε το πρόβλημα του τηλεσκοπίου, ας επιστρέψουμε στο πηγάδι. Άραγε, ένα πηγάδι μπορεί να μειώσει τη λαμπρότητα του ουρανού για έναν παρατηρητή που βρίσκεται στον πυθμένα του; Θεωρητικά, μπορεί —όχι όμως με φακούς, αλλά γεωμετρικά, εξαφανίζοντας όλο το οπτικό πεδίο εκτός από ένα μικρό κομμάτι του ουρανού, το οποίο εκπέμπει φωτεινή ροή συγκρίσιμη με τη φωτεινή ροή ενός άστρου. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, το στόμιο του πηγαδιού δεν πρέπει να έχει για τον παρατηρητή γωνιακό άνοιγμα μεγαλύτερο από 1 πρώτο λεπτό. Όταν η διάμετρος του πηγαδιού είναι 1 m, το βάθος του πρέπει να είναι μεγαλύτερο από $1\text{m}/\eta\mu 1' = 3,4$ km! Ακόμη και σε αυτήν τη περίπτωση, ο παρατηρητής θα δει μόνο ένα λαμπερό σημείο, η φωτεινότητα του οποίου θα αυξηθεί στιγμιαία όταν το άστρο θα περάσει ακριβώς από πάνω του. Ακόμη και με την ισχυρότερη φαντασία είναι δύσκολο να θεωρήσουμε αυτή τη διαδικασία «παρατήρηση του έναστρου ουρανού» —για να μη μιλήσουμε για το πού θα βρούμε παρόμοιο πηγάδι. Σε ό,τι αφορά την πιθανότητα να περάσει ακριβώς από πάνω (±0,5′) ένα φωτεινό άστρο, σας αφήνω να την υπολογίσετε εσείς, λέγοντάς σας μόνο ότι θα χρειαστεί να περιμένετε περισσότερο από χίλια χρόνια για μια τέτοια υπέροχη στιγμή!

Γενικά, ένας ψηλός σωλήνας μπορεί επίσης να παίξει κάποιο ρόλο στην ημερήσια παρατήρηση των άστρων. Δημιουργεί έναν δίαυλο αέρα όπου πρακτικά δεν υπάρχει καμία σκέδαση φωτός. Αν μπορούσαμε να περάσουμε έναν παρόμοιο σωλήνα μέσα απ' όλη την ατμόσφαιρα, θα είχαμε τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε το νυχτερινό ουρανό οποιαδήποτε στιγμή της ημέρας! Όλη σχεδόν η μάζα του ατμοσφαιρικού αέρα βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης, φτάνοντας σε ύψος περίπου 20 km. Ο σωλήνας μας πρέπει να είναι μάλλον λίγο ψηλός!

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ημερήσια παρατήρηση των άστρων είναι απλώς ένας μύθος. Πώς γεννήθηκε, όμως; Μόνο υποθέσεις μπορούμε να κάνουμε. Ενδέχεται κάποιος να είδε πράγματι την Αφροδίτη από το βάθος ενός λατομείου. Η πιθανότητα να συμβεί ένα παρόμοιο γεγονός είναι ιδιαίτερα μικρή, και, θεωρητικά, είναι δυνατό μόνο στην τροπική ζώνη, όπου η Αφροδίτη διέρχεται ακριβώς από πάνω μας. Το πιθανότερο είναι ότι άνθρωποι που κατέβηκαν σε κάποιο βαθύ πηγάδι ή μπήκαν σε μια μεγάλη σπηλιά είδαν μέσα στο σκοτάδι σωματίδια σκόνης να φωτίζονται από τις ηλιακές ακτίνες. Να νόμισαν άραγε πως ήταν άστρα;

Πάντως, είναι ακόμη νωρίς να θεωρήσουμε πως η υπόθεση έκλεισε. Πρέπει να εξετάσουμε πιο προσεκτικά τις οπτικές πλάνες, απρόσμενους συνδυασμούς φυσικών συνθηκών ή σπάνια φυσικά φαινόμενα. Σε αυτό το ζήτημα, αγαπητοί αναγνώστες, μπορείτε να προσφέρετε πολύτιμη βοήθεια.

Ο Ramiro Cruz, ερασιτέχνης αστρονόμος από το Χιούστον του Τέξας, αποφάσισε να ξεκαθαρίσει μόνος του τις φήμες ότι μπορούμε να δούμε τον Σείριο κατά τη διάρκεια της ημέρας. Έψαξε για το άστρο, στο πιο δυτικό μέρος του ουρανού, τον Απρίλιο του 1992, λίγο πριν από τη δύση του Ήλιου. Λάβετε υπόψη το γεγονός ότι γνώριζε πού πρέπει να ψάξει! Διά γυμνού οφθαλμού κατάφερε να εντοπίσει τον Σείριο 21 λεπτά πριν από τη δύση. Όταν χρησιμοποίησε κιάλια μεγέθυνσης 70 × 50, ανακάλυψε το άστρο 43 λεπτά πριν από τη δύση.[2] Έχουμε αρκετά δεδομένα για να εκτιμήσουμε τη λαμπρότητα του ουρανού τη στιγμή που είδε το άστρο.

Το Χιούστον βρίσκεται σε 30° βόρειο γεωγραφικό πλάτος και, επομένως, ο ουράνιος ισημερινός σχηματίζει εκεί με τον ορίζοντα γωνία 90° – 60° = 30°. Αφού η παρατήρηση έγινε ακριβώς μετά την εαρινή ισημερία, ο Ήλιος βρισκόταν κοντά στον ισημερινό και προσέγγιζε τον ορίζοντα υπό την ίδια γωνία. Ο Ήλιος χρειάζεται ένα λεπτό για να διασχίσει ένα τόξο $360°/(24 \cdot 60) = 0,25°$ στον ουρανό. Επομένως, το ύψος a του Ήλιου πάνω από τον ορίζοντα t λεπτά πριν από τη δύση του ήταν

$$a = 0,25° \cdot \text{ημ}60° \cdot t \cong 0,2\,t\,.$$

Επομένως, μπορείτε να δείτε τον Σείριο διά γυμνού οφθαλμού όταν το ύψος του Ήλιου δεν υπερβαίνει τις $a_o \cong 0,2° \cdot 21 \cong 4,5°$, και με κιάλια όταν η αντίστοιχη τιμή είναι $a_κ \cong 0,2° \cdot 43 \cong 9°$. Με τέτοιες συνθήκες, η λαμπρότητα του ουρανού πάνω απ' το κεφάλι μας είναι το 7% και το 13%, αντίστοιχα, της τιμής που έχει το μεσημέρι. Θυμηθείτε ότι ο Σείριος έχει το ένα δέκατο πέμπτο του αστρικού μεγέθους της Αφροδίτης. Όταν η φωτεινότητα του ουρανού μειωθεί (προ της δύσεως) δεκαπέντε φορές, μπορούμε να δούμε τον Σείριο διά γυμνού οφθαλμού. Τα κιάλια μάς βοηθούν να τον δούμε σε φωτεινότερο ουρανό, επειδή αυξάνουν τη φωτεινότητα του άστρου ενώ αλλάζουν σε αμελητέο βαθμό την επιφανειακή φωτεινότητα του ουρανού. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ένας ερασιτέχνης αστρονόμος από το Χιούστον εκτέλεσε ένα διδακτικό πείραμα!

Μπορούμε, λοιπόν, να πιστέψουμε τώρα ότι ο Σείριος είναι ορατός την ημέρα απ' τις ψηλές βουνοκορφές ή από ένα αεροπλάνο, διότι ο ουρανός είναι 15 με 20 φορές σκοτεινότερος σε ύψη 5-7 km απ' ότι στην επιφάνεια της θάλασσας. Την επόμενη φορά που θα πετάτε με αεροπλάνο, ρίξτε μια ματιά γύρω σας: ίσως δείτε τον Σείριο, τον Δία ή την Αφροδίτη.

2. Βλ. *Sky and Telescope*, τόμ. 85, αρ. 2, Φεβρ. 1993, σελ. 112.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

Jacques Testart

Η ΕΠΙΘΥΜΙΑ ΤΟΥ ΓΟΝΙΔΙΟΥ

Η τεχνολογία του εμβρύου: επιστημονικές προοπτικές και ηθικά διλήμματα του νέου ευγονισμού

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ:
Jacques Testart
ΣΕΙΡΑ: **Γνώση-Κοινωνία-Πολιτισμός**
ΣΕΛ.: 281, 4.000 δρχ.

«Ο Testart έχει αναλύσει και κατά το παρελθόν τις αρνητικές συνέπειες της γενετικής μηχανικής. Τώρα, συνεχίζει τη σταυροφορία του με το παρόν βιβλίο, όπου επισημαίνει τους κινδύνους ενός νέου ευγονισμού... Πρέπει όλοι, απαραιτήτως και επειγόντως, να το διαβάσουμε.»

Le Figaro

«Μέχρι πού δικαιούται να επεκτείνει τη δράση της η ιατρική επιστήμη και ποια είναι τα όριά της; Σ' αυτές τις ερωτήσεις προσπαθεί να απαντήσει με το νέο βιβλίο του ο παγκοσμίως διακεκριμένος βιολόγος Jacques Testart, ένας από τους λίγους επιστήμονες που μας προειδοποιούν για τις ολέθριες συνέπειες που μπορεί να έχουν ορισμένες σύγχρονες πρακτικές της ιατρικής.»

Le Monde

«Ο Testart είναι ταυτόχρονα ένας ερευνητής επιστήμονας και ένας ανθρωπιστής...»

Le Point

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ***κάτοπτρο***

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα, τηλ.: 3643272, 3645098, fax: 3641864

ΠΩΣ ΛΥΝΕΤΑΙ;

Προκλήσεις στη Φυσική και τα Μαθηματικά

Μαθηματικά

M16

Συμμετρική ανισότητα. Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε ακεραίους m και n μεγαλύτερους από το 1 ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} > 1.$$

Ίσως θελήσετε να χρησιμοποιήσετε την εξής τροποποιημένη μορφή της ανισότητας του Bernoulli: για κάθε $x > 0$ και $0 < a < 1$, ισχύει $(1 + x)^a < 1 + ax$. (L. Kurlyandchik)

M17

Συνδυάζοντας άσους και δυάρια. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει ένας αριθμός αποτελούμενος μόνο από τα ψηφία 1 και 2 ο οποίος διαιρείται από το 2. (B. Ivlev)

M18

Πλήρης συσκότιση. Χρωματίζουμε μαύρα μερικά μοναδιαία τετράγωνα σ' ένα πλέγμα άπειρων διαστάσεων. Αποδείξτε ότι είναι δυνατό να αποκόψουμε ένα πλήθος (μη μοναδιαίων) τετραγώνων τέτοιων ώστε (1) να καλύπτουν όλα τα μοναδιαία μαύρα τετράγωνα και (2) στο καθένα τους, τα μαύρα τετράγωνα να καλύπτουν όχι λιγότερο από το 1/5 και όχι περισσότερο από τα 4/5 της συνολικής επιφάνειας. (G. Rozenblume)

M19

Παρατηρώντας ένα σαλιγκάρι. Μια ομάδα σπουδαστών ζωολογίας παρατηρούσε ένα σαλιγκάρι να κινείται για ένα χρονικό διάστημα $t > 1$ min. Ο καθένας τους παρατηρούσε το σαλιγκάρι επί 1 min ακριβώς, και όλοι είδαν ότι σε αυτό το διάστημα διέσχισε 1 m ακριβώς. Η παρατήρηση δεν διακόπηκε καμία στιγμή. Ποιο είναι το μεγαλύτερο και ποιο το μικρότερο διάστημα που μπορεί να διέσχισε το σαλιγκάρι μέσα σε αυτά τα t min; Μπορείτε να ξεκινήσετε με μικρές τιμές του t —ας πούμε, $t = 2{,}5$ min. (N. Konstantinov)

M20

Μια αξιοσημείωτη ευθεία ενός τετραπλεύρου. Ένα τετράπλευρο έχει και περιγεγραμμένο και εγγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι το σημείο τομής των διαγωνίων του και τα κέντρα αυτών των κύκλων ανήκουν στην ίδια ευθεία. (V. Protasov)

Φυσική

Φ16

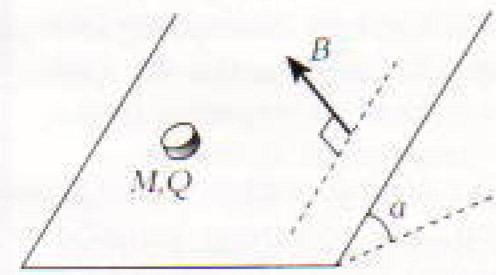
Απογείωση. Ένα μικρό αεροπλάνο με τη μηχανή του σβησμένη μπορεί να «ολισθαίνει» χαμηλώνοντας με ελάχιστη ταχύτητα $\upsilon = 150$ km/h ακολουθώντας πορεία που σχηματίζει γωνία $a = 5^\circ$ με τον ορίζοντα. (Αν ο πιλότος μειώσει την ταχύτητα ή τη γωνία, το αεροπλάνο αρχίζει να πέφτει στρεφόμενο γύρω από τον εαυτό του.) Ποια είναι η ελάχιστη προωστική δύναμη που πρέπει να αναπτύσσει η μηχανή του αεροπλάνου για να μπορέσει να απογειωθεί από έναν οριζόντιο διάδρομο; Σε κάθε περίπτωση η ταχύτητα του αεροπλάνου έχει την ίδια διεύθυνση με την άτρακτο. Η μάζα του αεροπλάνου είναι $m = 2.000$ kgr. (A. Andrianov)

Φ17

Το αέριο και το έμβολο. Ένα γραμμομόριο ενός ιδανικού μονοατομικού αερίου περιορίζεται από βαρύ έμβολο μέσα σ' έναν θερμικά μονωμένο κατακόρυφο κύλινδρο, έχοντας θερμοκρασία T_0. Διατηρούμε το αέριο συμπιεσμένο ασκώντας πίεση προς τα κάτω στο έμβολο. Αφού λοιπόν έχει προσφερθεί το σχετικό έργο W στο αέριο, ελευθερώνουμε το έμβολο, και έτσι αυτό επανέρχεται σε μια νέα θέση ισορροπίας. Βρείτε τη θερμοκρασία T του αερίου στη νέα κατάσταση. (V. Uzdin)

Φ18

Βόλτες σ' ένα μαγνητικό πεδίο. Κρατάμε έναν μικρό κύλινδρο μάζας M που φέρει ηλεκτρικό φορτίο Q πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης a. Ο συντελεστής τριβής του κυλίνδρου με το επίπεδο είναι μ. Όλη η διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B, οι δυναμικές γραμμές του οποίου είναι κάθετες στο κεκλιμένο επίπεδο (δείτε το σχήμα). Εγκαταλείπουμε τον κύλινδρο, ο



οποίος αρχίζει να κινείται (με μηδενική αρχική ταχύτητα). Βρείτε το μέτρο και τη διεύθυνση της ταχύτητας που θα έχει αποκτήσει ο κύλινδρος όταν θα έχει φτάσει σε κατάσταση ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. (A. Alexeyev)

Φ19

Η ισχυρότερη θερμάστρα. Έχετε τρεις αντιστάσεις 1 Ω, 2 Ω και 3 Ω. Η καθεμιά τους δεν μπορεί να αποδώσει ισχύ μεγαλύτερη από 1 W. Πώς πρέπει να τις συνδέσετε και πόση τάση πρέπει να εφαρμόσετε στα άκρα του συστήματος ώστε να λειτουργήσει ως θερμαντική διάταξη με τη μεγαλύτερη δυνατή συνολική ισχύ; (A. Zilberman)

Φ20

Ένας κωνικός αγωγός φωτός. Ένας αγωγός φωτός που έχει τη μορφή κόλουρου κώνου αποτελείται από γυαλί και είναι καλυμμένος στο εσωτερικό του από άργυρο (για να ανακλώνται καλύτερα οι προσπίπτουσες ακτίνες). Τα επίπεδα των βάσεων του κώνου είναι κάθετα στον άξονά του, οι διάμετροί τους είναι D και d, και το ύψος του κώνου είναι H ($H \gg D \gg d$). Μια δέσμη φωτός, παράλληλη με τον άξονα του κώνου, προσπίπτει στη μεγάλη του βάση. Από τη μικρή βάση του κώνου θα εξέλθουν όλες οι ακτίνες αφού υποστούν πολλαπλές ανακλάσεις; (S. Pankov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

Η βιολογία ως πολιτισμικό αγαθό

Ο Φώτης Καφάτος μιλά στο Quantum

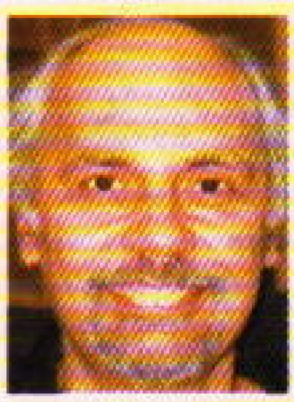
Ο παγκοσμίως διακεκριμένος έλληνας βιολόγος Φώτης Καφάτος πέρασε τις καλοκαιρινές του διακοπές σ' ένα χωριό της Κρήτης. Εκεί τον συνάντησε ο Γιώργος Ευαγγελόπουλος και είχε μια πολύ ενδιαφέρουσα συζήτηση μαζί του. Μέσα στη γαλήνη μιας ακρογιαλιάς του νησιού, ο διαπρεπής επιστήμονας κάνει μια αναδρομή στην ώς τώρα πορεία του, μιλάει για κεφαλαιώδη ζητήματα της επιστήμης του και εκφράζει ιδέες για το μέλλον της έρευνας στη χώρα μας και στο εξωτερικό.

Ερ.: *Αξιότιμε καθηγητά, το Quantum σας καλωσορίζει στην Κρήτη, την ιδιαίτερη πατρίδα σας που τόσο αγαπάτε. Επιτρέψτε μου να ξεκινήσουμε τη συζήτησή μας με κάποιες ερωτήσεις που αφορούν την εντυπωσιακή σταδιοδρομία σας. Πότε και πώς αποφασίσατε να γίνετε βιολόγος; Και πώς εξηγείτε την ταχεία αναγνώριση της επιστημονικής αξίας ενός αλλοεθνούς σε ένα από τα κορυφαία πανεπιστήμια όχι μόνον των ΗΠΑ, αλλά και ολόκληρου του κόσμου, όπως είναι το Χάρβαρντ;*

Απ.: Ενώ μέχρι τα 16 μου χρόνια τα κύρια ενδιαφέροντά μου ήταν η αρχαιολογία και η ποίηση, κάτω από τη θετική επιρροή του εξαίρετου καθηγητή μου στο μάθημα της βιολογίας, Μιχάλη Καραταράκη, αντιλήφθηκα ότι η εν λόγω επιστήμη επιχειρεί να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα που μόλις εκείνη την εποχή άρχισαν να με απασχολούν έντονα, όπως π.χ. τι είναι ο άνθρωπος, πώς φτιάχνονται οι σκέψεις μας, πώς δημιουργούνται τα συναισθήματα, πώς αισθανόμαστε έρωτα κ.λπ. Αποφάσισα λοιπόν να σπουδάσω βιολογία, απλώς και μόνον γιατί ήθελα να κατανοήσω το φαινόμενο της ζωής, και δεν σκέφτηκα καθόλου τη μελλοντική επαγγελματική μου αποκατάσταση. Με την παρότρυνση του πατέρα μου, που είχε ζήσει ως μετανάστης και είχε σπουδάσει στην Αμερική, και χάρη σε μια υποτροφία της Anne Schlumberger, πήγα στις ΗΠΑ, όπου σπούδασα αρχικά ζωολογία και μετέπειτα βιολογία. Η ταχεία επιστημονική μου εξέλιξη οφείλεται στο ανοιχτό και δημοκρατικό σύστημα αυτής της χώρας.

Ερ.: *Οι επιστημονικές σας εργασίες στο χώρο της νεογέννητης τότε γενετικής μηχανικής που κάνατε στο Χάρβαρντ την περίοδο της νεότητάς σας χαρακτηρίζονται από μια πρωτοποριακή ποιότητα. Η γένεση όμως αυτού του επιστημονικού κλάδου δημιούργησε ορισμένους φόβους, ότι θα μπορούσαν να κατασκευαστούν, από λάθος ή από πρόθεση, ιοί, μικρόβια και άλλοι οργανισμοί επικίνδυνοι για τον άνθρωπο και τη ζωή εν γένει. Ξέσπασε τότε μεταξύ των επιστημονικών κύκλων έντονη διαμάχη που θυμίζει, τηρουμένων των αναλογιών, την αντίστοιχη διαμάχη των φυσικών για το αν έπρεπε ή όχι να κατασκευαστεί η ατομική βόμβα. Θα θέλατε να μας μιλήσετε για τα γεγονότα της εποχής εκείνης; Ποιες ήταν οι απόψεις σας τότε και πώς τις κρίνετε τόσα χρόνια μετά;*

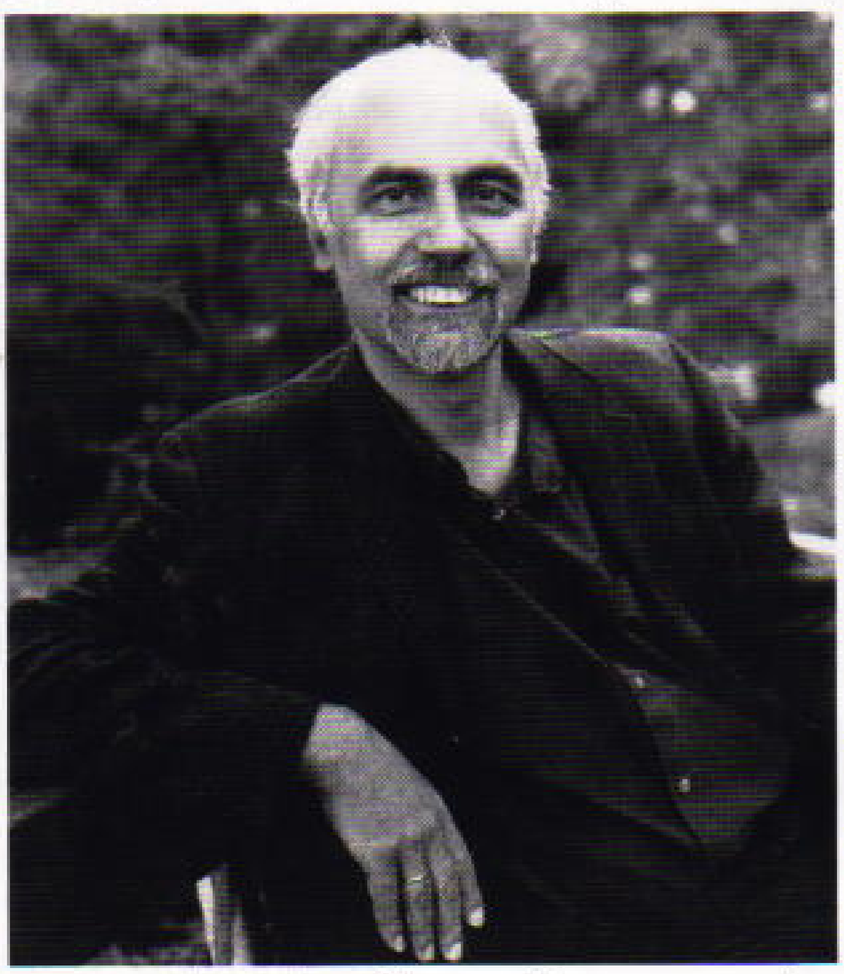
Απ.: Πρόκειται για ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον κεφάλαιο στην ιστορία της επιστήμης. Πράγματι, το 1974 για πρώτη φορά παρουσιάστηκαν εργασίες που έδειχναν ότι η γενετική μηχανική, στην οποία πολλοί ανεφέρονταν σαν σε κάτι που ανα γόταν στο χώρο του φανταστικού πριν από μερικά χρόνια, ήταν πια απολύτως εφικτή, αποτελούσε ένα γεγονός! Λέγοντας γενετική μηχανική εννοούμε την απομόνωση και τον πολλαπλασιασμό με βιολογικό τρόπο συγκεκριμένων γονιδίων, δηλαδή κομματιών DNA, πράγμα που σημαίνει ότι τότε κατέστη για πρώτη φορά δυνατή και μάλιστα εύκολη η απομόνωση οποιουδήποτε γονι-



Ο Φώτης Καφάτος γεννήθηκε στο Ηράκλειο της Κρήτης το 1940, όπου ολοκλήρωσε και τις εγκύκλιες σπουδές του. Πήγε με υποτροφία στις ΗΠΑ, όπου σπούδασε ζωολογία στο Πανεπιστήμιο Cornell. Πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα στη βιολογία από το Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ, στα 25 του χρόνια έγινε επίκουρος καθηγητής και στα 28 του τακτικός καθηγητής στο ίδιο Πανεπιστήμιο· υπήρξε ο νεότερος καθηγητής στην ιστορία του Χάρβαρντ. Το 1972, ύστερα από μετάκληση, γίνεται καθηγητής στο Βιολογικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, ενώ παράλληλα διατηρεί και τη θέση του στο Χάρβαρντ. Το 1975 μαζί με τους Ευστρατιάδη και Μανιάτη επιτυγχάνει χάρη στην εφαρμογή των μεθόδων της γενετικής μηχανικής, την απομόνωση και κλωνοποίηση του πρώτου γονιδίου των ανωτέρων οργανισμών. Το 1981 μετακαλείται και πάλι, αυτή την φορά στο Πανεπιστήμιο Κρήτης όπου γίνεται μέλος της Διοικούσας του Επιτροπής, οργανώνει εκ βάθρων το Τμήμα Βιολογίας και δύο χρόνια αργότερα δημιουργεί και διευθύνει το Ινστιτούτο Μοριακής Βιολογίας και Βιοτεχνολογίας. Το 1993 αναλαμβάνει τη Γενική Διεύθυνση του Ευρωπαϊκού Εργαστηρίου Μοριακής Βιολογίας (EMBL), που εδρεύει στην Χαϊδελβέργη, αλλά έχει και περιφερειακά ιδρύματα στην Γκρενόμπλ, στο Αμβούργο και στο Καίμπριτζ. Το EMBL χρηματοδοτείται από 15 κυβερνήσεις και ο Καφάτος είναι επικεφαλής 750 ανθρώπων που δουλεύουν σ' αυτό. Είναι επίσης μέλος της CODEST, που αποτελεί συμβουλευτική επιτροπή της Ευρωπαϊκής Ένωσης για τη χάραξη της ευρωπαϊκής ερευνητικής πολιτικής.

δίου, ο πολλαπλασιασμός του, η μελέτη του σε χημικό επίπεδο, ακόμη και η τροποποίησή του, και φυσικά η μεταφορά του από οργανισμό σε οργανισμό. Έγινε δηλαδή πραγματικότητα η μοριακή κλωνοποίηση, όπως την ονομάζουμε.

Όταν, λοιπόν, πρωτοπαρουσιάστηκαν αυτές οι πρόοδοι στη μοριακή βιολογία, οι ίδιοι οι επιστήμονες οι οποίοι είχαν πραγματοποιήσει αυτές τις μελέτες, και αυτό αποτελεί πρωτοφανές γεγονός στην ιστορία της επιστήμης, σε μια συνάντησή τους που είναι γνωστή ως Gordon Conference και έγινε στο Νιου Χαμσάιρ το 1974, συζήτησαν το θέμα μήπως αυτή η νέα τεχνολογία ήταν επικίνδυνη. Προς αυτή την εξέλιξη συνέβαλε το γεγονός ότι οι επιστήμονες αυτοί όχι μόνο ήταν γενικά προοδευτικών πολιτικών αντιλήψεων, αλλά ήταν επίσης και ευαισθητοποιημένοι από το προηγούμενο των πυρηνικών φυσικών, που δέχτηκαν να κατασκευάσουν την ατομική βόμβα, για το λόγο ότι υπήρχε η τεχνική δυνατότητα κατασκευής της, με αποτέλεσμα η βόμβα να χρησιμοποιηθεί αμέσως μετά, παρά την αντίθεσή τους! Έτσι, οι συγκεντρωθέντες ερευνητές πρότειναν τότε να γίνει ένα *moratorium*, να σταματήσουν για κάποιο χρονικό διάστημα οι μελέτες που θα χρησιμοποιούσαν αυτή την τεχνική, ώστε να συζητηθεί εκ νέου, με νηφαλιότητα, το θέμα των πιθανών κινδύνων. Όταν όμως τα επόμενα δύο-τρία χρόνια το θέμα ξανασυζητήθηκε, και μάλιστα στις λεπτομέρειές του, είχαμε μια εξέλιξη που θα έλεγα ότι δεν υπήρξε τόσο καλή, όσο η αρχή! Με τη συζήτηση έγινε φανερό ότι το ενδεχόμενο να κατασκευαστούν από λάθος νέοι επικίνδυνοι οργανισμοί ήταν πάρα πολύ απίθανο, γιατί οι οργανισμοί έχουν μια εσωτερική ρύθμιση και δεν είναι εύκολο να αλλάξει κάποιος τελείως τη συμπεριφορά τους, κόβοντας και ράβοντας κομμάτια DNA· είδαν ότι ήταν αρκετά απίθανο να προκύψει τυχαία μια καταστροφική αλλαγή, ένας σχηματισμός επικίνδυνου οργανισμού. Επίσης συζητήθηκε η πιθανότητα να κατασκευαστεί εκ προθέσεως ένας τέτοιος οργανισμός, αλλά είναι φανερό ότι πρόκειται για ένα γενικότερο πρόβλημα, το οποίο συνίσταται στο αν η επιστήμη μπορεί ή όχι να ελέγχει πάντα αυτή η ίδια τις εφαρμογές της! Το να σταματήσεις όμως μια επιστημονική πρόοδο γιατί υπάρχει η πιθανότητα καταχρηστικής εφαρμογής των αποτελεσμάτων της δεν είναι λογικό. Π.χ. εάν υπάρχει σκοπός να κατασκευαστεί ένα επικίνδυνο βιολογικό προϊόν, ένα βιολογικό όπλο, υπάρχουν πάρα πολλοί τρόποι να το κάνει κάποιος και δεν ήταν ανάγκη να ανακαλυφθεί μια καινούργια τεχνολογία για ένα τέτοιο εγχείρημα. Μάλιστα υποστηρίχθηκε βάσιμα από τους ειδικούς σ' αυτό το θέμα και κυρίως από τον Meselson, που υπήρξε συνάδελφός μου στο Χάρβαρντ και έχει αφιερώσει πολλά χρόνια της ζωής του στην προσπάθεια απαγόρευσης των βιολογικών όπλων, ότι τα όπλα αυτά είναι δυνατό να κατασκευαστούν με απλούστερο τρόπο με τις κλασικές μεθόδους· μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει το βακτήριο του άνθρακα, το οποίο είναι τρομερά αποτελεσματικό κατά του ανθρώπου. Αυτή την τεχνική τη γνωρίζουν και μπορούν να την εφαρμόσουν πολλές χώρες. Έτσι, οι άνθρωποι οι οποίοι ξεκίνησαν αυτή τη συζήτηση γρήγορα πείστηκαν ότι δεν υπήρχε λόγος να σταματήσει η έρευνα, δεδομένου μάλιστα ότι παράλληλα φάνηκε πόσο εντυπωσιακά μεγάλες και σημαντικές ήταν οι εφαρμογές της, τόσο για την πρόοδο της βιολογίας, όσο και για την ικανότητά μας να κατανοήσουμε οργανισμούς τους οποίους μόνο φανταζόμαστε στη ζωή, ή ακόμη και για να κάνουμε γενετική σε οργανισμούς στους οποίους αγνοούσαμε μέχρι τη στιγμή εκείνη το πώς να την κάνουμε.



Βέβαια, δικαιούται κάποιος να αναρωτηθεί πόσο αντικειμενική υπήρξε αυτή η εκτίμηση, εφόσον προήλθε από τους ανθρώπους που έκαναν την έρευνα, που μπορούσαν να την εφαρμόσουν και είχαν επίσης το επιστημονικό συμφέρον να το κάνουν.

Νομίζω ότι σε περιπτώσεις σαν κι αυτή μιλάμε για πιθανότητες σωστής ή λανθασμένης επιλογής, για προσέγγιση απλώς της αλήθειας, και δεν υποστηρίζω ότι οι εν λόγω επιστήμονες υπήρξαν απολύτως αντικειμενικοί στις εκτιμήσεις τους. Ας μη λησμονούμε ότι τα πράγματα δεν ήταν εύκολα, γιατί υπήρξαν μερικοί οι οποίοι αντέδρασαν πολύ ζωηρά σ' αυτή την τεχνολογία. Σε μεγάλο ποσοστό ήταν άνθρωποι οι οποίοι είχαν ή μια γενικότερη αντιεπιστημονική στάση ή μια έντονη προοδευτική κατεύθυνση και θεώρησαν ότι με αφορμή αυτό το ερώτημα θα μπορούσε να τεθεί το ευρύτερο θέμα τού ποιος ελέγχει την επιστήμη, ποιος ελέγχει τις αποφάσεις στην κοινωνία κ.ο.κ., το οποίο κατά τη γνώμη μου είναι ένα άλλο θέμα. Το 1974 ήμουν και εγώ ένας από αυτούς που είπαν ότι πρέπει να σταματήσουμε τις έρευνες για να συζητήσουμε τους πιθανούς κινδύνους των. Και βέβαια, ανήκα σ' εκείνους που το 1975 - 1976 υποστήριξαν ότι πρέπει να προχωρήσουμε, και νομίζω ότι η απόφαση αυτή ήταν σωστή. Σήμερα μάλιστα, κοιτάζοντας τα γεγονότα της εποχής εκείνης από κάποια απόσταση, είμαι ακόμη πιο σίγουρος για την ορθότητα της τότε επιλογής μας, καθώς βλέπω ότι η ιστορία μάς δικαίωσε.

Ερ.: *Σταθμός στη σταδιοδρομία σας υπήρξε η ερευνητική εργασία που κάνατε από κοινού με τους καθηγητές Ευστρατιάδη, Μανιάτη κ.ά., το 1975, και αξιολογείται από τους συναδέλφους σας ως η πιο σημαντική της μέχρι σήμερα επιστημονικής πορείας σας. Θα θέλατε να μας εξηγήσετε γιατί η εν λόγω εργασία σας θεωρείται τόσο σημαντική;*

Απ.: Η εργασία αυτή ήταν μια εφαρμογή των νέων μεθόδων της γενετικής μηχανικής, αμέσως μόλις αυτές αναπτύχθηκαν. Δηλαδή ήταν η απομόνωση και κλωνοποίηση του πρώτου γονιδίου των ανωτέρων οργανισμών, συγκεκριμένα του γονιδίου της αιμοσφαιρίνης Β του κουνελιού, και τούτο γιατί το κουνέλι ήταν ένα σύστημα όπου η πειραματική δουλειά μπορούσε να γίνει πρόσφορα. Με τις μεθόδους λοιπόν της γενετικής μηχανικής πολλαπλασιάσαμε μέσα σε βακτηριακά κύτταρα το γονίδιο της σφαιρίνης Β του κουνελιού, ή μάλλον θα έπρεπε να πούμε πιο αυστηρά όχι το γονίδιο, αλλά το αντίγραφο του γονιδίου με τη μορφή του RNA. Ας ανοίξουμε μια παρένθεση εδώ για να πούμε ότι το DNA μεταγράφεται σε RNA και, όπως αργότερα καταλάβαμε, το μετάγραφο τροποποιείται με διάφορους τρόπους μέχρι να γίνει το τελικό αγγελιοφόρο ή μήνυμα RNA, όπως λέγεται. Αυτό που κάναμε λοιπόν ήταν να πάρουμε κύτταρα από το αίμα του κουνελιού, να απομονώσουμε το RNA, να μεταγράψουμε αντίστροφα το μήνυμα RNA, δηλαδή να κάνουμε DNA με κώδικα το μήνυμα RNA, και αυτό το DNA, το λεγόμενο cDNA, να το πολλαπλασιάσουμε στα βακτηριακά κύτταρα. Ήμασταν τυχεροί, γιατί η δουλειά αυτή έγινε στο Χάρβαρντ και στο Cold Spring Harbor, ερευνητικό εργαστήριο στο οποίο έτυχε να εργάζεται ο Τομ Μανιάτης, Ελληνοαμερικανός τρίτης γενιάς και μεταδιδακτορικός τότε υπότροφος ενός άλλου καθηγητή στο Χάρβαρντ· ο Μανιάτης είχε αναπτύξει τεχνικές του ανασυνδυασμένου DNA πιο προχωρημένες από εκείνες του δικού μου εργαστηρίου. Στο δικό μου εργαστήριο δούλευε ο έλληνας γιατρός Αργύρης Ευστρατιάδης, ο οποίος είχε έρθει να κάνει διδακτορικό δίπλα μου και, διαθέτοντας μεγάλη πείρα, αλλά και σπουδαία αντιληπτική ικανότητα, είχε κατανοήσει γρήγορα τη χρήση των νέων τεχνικών. Αυτοί οι δύο λοιπόν και εγώ συνεργαστήκαμε σ' αυτά τα πειράματα με άλλους νεότερους ερευνητές. Πρέπει να πω ότι υπήρξαμε τυχεροί, γιατί βρεθήκαμε και οι τρεις στο Χάρβαρντ έχοντας μάλιστα συμπληρωματικές ειδικότητες, αφού εμένα με ενδιέφερε η αναπτυξιακή βιολογία των ανωτέρων οργανισμών, ο Μανιάτης είχε καλύτερη γνώση της γενετικής μηχανικής και ο Ευστρατιάδης ήταν στο ενδιάμεσο. Έτσι κάναμε αυτή την πρώτη δουλειά. Η δεύτερη επιτυχία μας έγκειται στο ότι ευρεθέντες στο Χάρβαρντ αξιοποιήσαμε την τεχνική που μόλις τότε επινόησαν οι συνάδελφοί μας στο ίδιο πανεπιστήμιο W. Gilbert και A. Maxam, προκειμένου να προσδιορίσουν την αλληλουχία των βάσεων στο DNA και για την οποία ο πρώτος πήρε και το βραβείο Νόμπελ. Άρα βρεθήκαμε στην κατάλληλη θέση, είχαμε τις ιδέες, είχαμε την τεχνική και κάναμε νωρίς αυτά τα πειράματα, με αποτέλεσμα η δική μας δουλειά νά 'ναι εκείνη που οδήγησε στην περιγραφή, στο επίπεδο της αλληλουχίας των βάσεων, του πρώτου γονιδίου ή αντιγράφου DNA από ανώτερους οργανισμούς. Νομίζω ότι ήταν μια σημαντική πρωτιά που έκανε γνωστούς και τους τρεις μας στον διεθνή χώρο.

Ερ.: *Πολλοί συνάδελφοί σας ισχυρίζονται ότι η προαναφερθείσα εργασία σας θα μπορούσε να σας αποφέρει ακόμη και το βραβείο Νόμπελ. Εσείς όμως, όταν ερωτηθήκατε από την εφημερίδα ΤΑ ΝΕΑ στα πλαίσια της συνέντευξης που της παραχωρήσατε στις 7 Μαΐου 1994, σχετικά με την πιθανότητα να σας απονεμηθεί το προαναφερθέν βραβείο, είπατε: «Νομίζω πως δεν θα μπορέσω να πάρω το βραβείο Νόμπελ, αλλά δεν μετανιώνω για τις επιλογές μου. Δεν έβαλα στόχο την προσωπική μου καταξίωση επιστημονικά, υπάρχει και το κοινωνικό καθήκον». Θα θέλατε να μας διευκρινίσετε αυτή την απάντησή σας;*

Απ.: Δεν νομίζω ότι η δουλειά που κάναμε τότε αρκεί για βραβείο Νόμπελ. Είναι μεν σημαντική, αλλά αν ήμουν εγώ στη θέση της επιτροπής δεν θα έδινα βραβείο Νόμπελ γι' αυτή και μόνο την εργασία. Παρ' αυτά θεωρώ ότι ανήκει στις αποκαλούμενες «μετωπικές» δουλειές, τις εργασίες δηλαδή που είναι πρωτοποριακές και ανοίγουν νέα μέτωπα στην έρευνα. Την εποχή εκείνη είχαμε μπροστά μας διάφορες επιλογές και αν κάναμε κάποιες από αυτές ίσως θα μπορούσαμε, και αυτό το λέω γιατί κανείς δεν ξέρει που θα μας «έβγαζε», να «φτάναμε» και στο Νόμπελ. Αυτό προϋπέθετε ότι η προσπάθειά μας θα στρεφόταν προς την επίτευξη αυτού κυρίως του σκοπού.

Η δική μου απόφαση τότε ήταν να αφιερώσω ένα σημαντικό μέρος του χρόνου μου στην επιστήμη στην Ελλάδα. Είχα ήδη έρθει στην Ελλάδα από το 1973 και έπρεπε να αποφασίσω αν θα έμενα εδώ, μοιράζοντας όμως το χρόνο μου ανάμεσα στις ΗΠΑ και στην πατρίδα μου. Δηλαδή, όταν έγιναν όλα αυτά, είχα ουσιαστικά να αποφασίσω αν θα εγκατέλειπα την προσπάθεια που έκανα στην Αθήνα, προκειμένου να αφιερωθώ μόνο στην επιστήμη, ή θα μοίραζα το χρόνο μου, όπως είχα αρχίσει να κάνω. Και αποφάσισα να πράξω το δεύτερο, χωρίς ποτέ να μετανιώσω γι' αυτό. Ήθελα πάντα να κάνω κάτι στην πατρίδα μου! Η επιθυμία μου αυτή πήγαζε από το γεγονός ότι γνώριζα πάρα πολλά παιδιά που δεν είχαν την ίδια με μένα τύχη ώστε να σπουδάσουν στα καλύτερα πανεπιστήμια και να εργαστούν σε σπουδαία ερευνητικά κέντρα. Πίστευα επίσης ότι η βιολογία είναι μια επιστήμη που έχει τρομερή σημασία τόσο για τη γενική κουλτούρα του κόσμου, όσο και για την ανάπτυξη της χώρας, και ήθελα να βοηθήσω την πρόοδο αυτής της επιστήμης εδώ. Θεώρησα ότι αυτή έπρεπε να είναι η δική μου προσφορά στο κοινωνικό σύνολο.

Ερ.: *Στην περίπτωσή σας έχουμε τη σπάνια απόφαση ενός επιστήμονα διεθνούς ακτινοβολίας που μεταβαίνει από ένα κορυφαίο ίδρυμα του εξωτερικού στην περιφέρεια: πρώτα στην Αθήνα και κατόπιν στην Κρήτη. Θα θέλατε να μας μιλήσετε γι' αυτή την «ελληνική» περίοδο της σταδιοδρομίας σας, κατά την οποία, χωρίς να αφήσετε τη θέση σας στο Χάρβαρντ, αναπτύξατε επιστημονική δραστηριότητα και στην πατρίδα μας;*

Απ.: Ήρθα στην Αθήνα το 1972 γιατί μου δόθηκε μια καλή ευκαιρία από το Πανεπιστήμιο Αθηνών να συμβάλω στην ανάπτυξη της επιστήμης μου στην Ελλάδα. Μετακλήθηκα ως καθηγητής στο Βιολογικό Τμήμα με σκοπό να το βοηθήσω να αναπτύξει ερευνητική δραστηριότητα και σε ορισμένους νέους για την εποχή εκείνη τομείς της βιολογίας, δηλαδή την κυτταρική, τη μοριακή και την αναπτυξιακή βιολογία. Αυτό το έκανα με διάφορους τρόπους, όπως π.χ. φέρνοντας νέους ανθρώπους από το εξωτερικό για να στελεχώσουν την τότε έδρα, βοηθώντας νέα παιδιά να πάνε στο εξωτερικό για μεταπτυχιακές σπουδές, εντάσσοντας στο πρόγραμμα σπουδών νέα μαθήματα κ.ο.κ. Όταν το 1981 μου παρουσιάστηκε η ευκαιρία να πάω στην Κρήτη, ύστερα από μετάκληση και πάλι, αποφάσισα να το κάνω για δύο κυρίως λόγους: πρώτον, με επηρέασε το γεγονός ότι είμαι από την Κρήτη, και διατηρώ βαθύ συναισθηματικό δεσμό με τον τόπο, και δεύτερον, πίστεψα ότι επειδή το έδαφος ήταν παρθένο εκεί θα μπορούσα να κάνω ένα βήμα παραπέρα οργανώνοντας εκ βάθρων ένα νέο τμήμα, και παίζοντας μ' αυτό τον τρόπο έναν ευρύτερο ρόλο στην οργάνωση του πανεπιστημίου του νησιού. Δύο χρόνια αργότερα δημιουργήθηκε το Ερευνητικό Κέντρο Κρήτης.

Σ' αυτό συγκεντρώσαμε νέους έλληνες επιστήμονες του εξωτερικού και ξεκινήσαμε με καλά προγράμματα έρευνας και σωστά μεταπτυχιακά προγράμματα εκπαίδευσης. Παράλληλα, υπήρξαμε και τυχεροί, γιατί, καθώς ήμαστε γνωστοί στο εξωτερικό, η Ευρωπαϊκή Κοινότητα είδε με πολύ ενδιαφέρον τη δημιουργία ενός πυρήνα πρώτης τάξεως επιστήμης σε μια περιφερειακή περιοχή της Ευρώπης. Και τούτο γιατί η προσπάθειά μας αφενός μεν εντασσόταν στα ευρύτερα σχέδια της περιφερειακής ανάπτυξης που ήθελε να προωθήσει η Κοινότητα, αφετέρου δε θα μπορούσε να θεωρηθεί, και έτσι πράγματι την είδαν, ως μια πορεία αντίστροφης ροής εγκεφάλων· δηλαδή ενώ στην Ευρώπη παρατηρείται μετακίνηση επιστημόνων κυρίως από τον Νότο (π.χ. Ελλάδα, Ισπανία) προς τον Βορρά, αλλά και η Ευρώπη συνολικά έχει μια ροή εγκεφάλων προς την Αμερική, εμείς αντιπροσωπεύαμε, κατά κάποιον τρόπο, την αντίστροφη πορεία, γιατί ήρθαμε από την Αμερική στην Ευρώπη, στην Αθήνα, στην Κρήτη! Στήριξαν λοιπόν αυτή την προσπάθεια με χρηματοδότηση από τα περιφερειακά προγράμματα και κατόπιν από τα ανταγωνιστικά ερευνητικά προγράμματα, με αποτέλεσμα το Ερευνητικό Κέντρο Κρήτης να γίνει πρότυπο στην Ευρώπη και να «τονωθεί» ακόμη περισσότερο, όταν δημιουργήθηκε το Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας (ΙΤΕ), ως ολοκληρωμένο περιφερειακό ερευνητικό ίδρυμα, που προέκυψε από τη συνένωση των ινστιτούτων μας με αντίστοιχα στην Πάτρα και τη Θεσσαλονίκη.

Ερ.: *Πρόσφατα αποδεχτήκατε σχετική πρόταση και αναλάβατε τη Διεύθυνση του Ευρωπαϊκού Εργαστηρίου Μοριακής Βιολογίας (EMBL), που εδρεύει στη Χαϊδελβέργη και είναι το μεγαλύτερο ευρωπαϊκό ερευνητικό κέντρο και το μόνο που χρηματοδοτείται από 15 κυβερνήσεις. Μάλιστα το «τίμημα» της αποδοχής αυτής της «πρόσκλησης-πρόκλησης» υπήρξε η απόφασή σας να αφήσετε τόσο τη Διεύθυνση του Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας και Βιοτεχνολογίας, όσο και τη θέση σας στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ. Τι σημαίνει για σας αυτός ο νέος σας ρόλος, ποια είναι τα καθήκοντά σας, αλλά και ποιες οι δυνατότητές σας να επηρεάσετε την πορεία της έρευνας στη μοριακή βιολογία και τη βιοτεχνολογία από τη νέα σας θέση;*

Απ.: Όταν μου ζητήθηκε να αναλάβω τη Διεύθυνση του EMBL, θεώρησα ότι αποτελεί πρόταση με πρόκληση γιατί πρόκειται για την σημαντικότερη θέση στη Βιολογία στην Ευρώπη. Το EMBL είναι ένας πυρήνας ευρωπαϊκής επιστήμης, η σύσταση του προσωπικού του σε όλα τα επίπεδα είναι διεθνής, όπως και η χρηματοδότησή του, και η πρόκληση συνίσταται ακριβώς στο αν θα μπορέσω, αξιοποιώντας τις δυνατότητές μου και τις εμπειρίες μου, τόσο τις επιστημονικές, όσο και τις οργανωτικές, να βοηθήσω την ανάπτυξη της βιολογίας στην Ευρώπη σε ένα ανώτερο επίπεδο. Βέβαια υπήρξε κάποιο τίμημα γι' αυτή μου την απόφαση, αλλά πρέπει να πω στο σημείο αυτό ότι είμαι αρκετά τολμηρός άνθρωπος και δεν μου αρέσει η ασφάλεια και η πεπατημένη. Ωστόσο, παραιτήθηκα μεν από το Χάρβαρντ, αλλά μετέφερα το προσωπικό μου εργαστήριο στη Χαϊδελβέργη και διατηρώ τη σχέση μου με το Πανεπιστήμιο Κρήτης και το ΙΤΕ.

Πρωταρχικό μου καθήκον στη νέα μου θέση είναι να προσπαθήσω να διατηρήσω το Ευρωπαϊκό Εργαστήριο στην πρωτοπορία της επιστήμης. Αποτελεί μια βάση από την οποία έχουν γίνει σημαντικές πρόοδοι στην ευρωπαϊκή βιολογία και ίσως το σημαντικότερο είναι ότι έχει παίξει έναν καταλυτικό ρόλο, τόσο στην αλλαγή νοοτροπίας και συστήματος στην έρευνα, όσο και στην εκπαίδευση νέων ηγετικών στελεχών της ευρωπαϊκής βιολογίας. Και τούτο γιατί έχουμε ένα σύστημα, όπου οι επιστημονικοί υπεύθυνοι είναι αρκετά νέοι και δεν τοποθετούνται σε μόνιμες θέσεις, ούτε μονιμοποιούνται αργότερα, αλλά σ' ένα ποσοστό της τάξεως του 90% μένουν στο Εργαστήριο για ένα σχετικά περιορισμένο χρονικό διάστημα (μέχρι και 9 χρόνια), αλλά θά 'λεγα ότι κατά μέσον όρο μένουν για 6 - 7 χρόνια. Αυτή είναι μια ιδιαίτερα σημαντική αρχή, γιατί οι άνθρωποι που αποδεικνύουν την ικανότητά τους, μέσα από αυτή τη δοκιμασία, από κει και πέρα δεν παραμένουν στο EMBL, αλλά επιστρέφουν σε σημαντικά εθνικά ιδρύματα. Θα προσπαθήσω λοιπόν να διατηρήσω και να βελτιώσω τον εν λόγω θεσμό μέσω της επιλογής των καλύτερων νέων επιστημόνων. Επιπλέον, να βοηθήσω στην ανάπτυξη της βιολογικής επιστήμης σε όλες τις περιοχές της Ευρώπης, αλλά και στην προώθηση νέων ερευνητικών κατευθύνσεων και τάσεων.

Ερ.: *Ποιο είναι το προσωπικό ερευνητικό σας πρόγραμμα σήμερα;*

Απ.: Θά 'λεγα ότι δύο κεντρικοί τομείς με απασχολούν την περίοδο αυτή: ο πρώτος θα μπορούσε να ονομαστεί μελέτες γονιδιώματος και ο δεύτερος αναπτυξιακή βιολογία. Ας αρχίσω από τον δεύτερο, γιατί ιστορικά είναι η περιοχή στην οποία πρωτοέγινα γνωστός και όπου έχω δουλέψει αρκετά χρόνια. Το θέμα το οποίο με ενδιέφερε από τα πρώτα κιόλας βήματα της πορείας μου, και το θεώρησα ως ένα από τα μεγαλύτερα μυστήρια, είναι το πώς ένα σκουλήκι γίνεται χρυσαλλίδα και μετά πεταλούδα, δηλαδή πώς γίνεται η μεταμόρφωση σ' αυτούς τους ανώτερους οργανισμούς· με τη βιογένεση ένα απλό, σχετικά απλό κύτταρο, το γονιμοποιημένο ωάριο, γίνεται όλο και πιο πολύπλοκο έμβρυο και τελικά τέλειος οργανισμός. Πρόκειται για ένα πρόβλημα-μυστήριο το οποίο μπορούμε πλέον να διερευνήσουμε με μεθόδους μοριακής βιολογίας. Ιδιαίτερα με ενδιαφέρει το πώς γίνεται χρονικός και χωροταξικός προγραμματισμός για την έκφραση των γονιδίων κατά την ανάπτυξη, δηλαδή πώς κύτταρα σε συγκεκριμένο μέρος του οργανισμού εκφράζουν ορισμένα γονίδια και άλλα όχι, π.χ. πώς το ερυθροκύτταρο εκφράζει το γονίδιο της αιμοσφαιρίνης και το μυοκύτταρο εκφράζει τα γονίδια της μυοσίνης ή της ακτίνης που έχουν σχέση με τη μυϊκή σύσπαση.

Αυτό είναι το θέμα στο οποίο δουλεύω και χρησιμοποιώ τη δροσόφιλα, τον οργανισμό αυτόν που είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τη βιολογία, επειδή είναι σχετικά απλός και έχει μελετηθεί εκτεταμένα στο γενετικό επίπεδο εδώ και 80 - 90 χρόνια. Με ενδιαφέρει λοιπόν να ερευνήσω το πώς ελέγχεται μια ομάδα γονιδίων που «φτιάχνουν» το πολύπλοκο κέλυφος του αυγού, και αυτό σαν παράδειγμα του πώς «φτιάχνεται», πώς «δομείται» η πολυπλοκότητα κατά την ανάπτυξη του οργανισμού.

Η δεύτερη περιοχή που ανέφερα είναι η μελέτη του γονιδιώματος. Από το 1975 μέχρι ακόμη και πρόσφατα, μελετούσαμε τη δομή απομονωμένων γονιδίων. Τώρα όμως τα πράγματα έχουν προχωρήσει τόσο, ώστε κάποιος να μπορεί να μελετήσει σε πολύ ευρύτερο επίπεδο τη δομή και τη λειτουργία όλων των γονιδίων ενός οργανισμού, που σημαίνει ότι μπορούμε να μελετήσουμε το πώς συμπεριφέρεται όλο το γονιδίωμα. Αυτό προϋποθέτει ότι μπορούμε να χαρτογραφήσουμε το γονιδίωμα, δηλαδή να ξέρουμε ποιο DNA προέρχεται από κάθε χρωμόσωμα, πώς είναι τοποθετημένο το κάθε κομμάτι δίπλα στο άλλο, και ακολούθως, σε δεύτερο βήμα, να προσδιορίσουμε την αλληλουχία των βάσεων σε όλο αυτό το γονιδίωμα. Πρόκειται βέβαια για ένα τεράστιο έργο, γιατί, για παράδειγμα, το ανθρώπινο γονιδίωμα αποτελείται από 3 δισεκατομμύρια βάσεις και για να καταλάβουμε την ποσότητα αυτής της πληροφορίας αξίζει να πούμε ότι, αν γράφαμε την αλληλουχία του DNA του ανθρώπου γράμμα προς γράμμα, χρησιμοποιώντας ένα αλφάβητο τεσσάρων γραμμάτων αλλά τυπώνοντάς το με μορφή βιβλίου, θα είχαμε μια βιβλιοθήκη περίπου 1.000 τόμων, όπου ο κάθε τόμος της θα ήταν 1.000 σελίδων με κάθε σελίδα πυκνογραμμένη. Λοιπόν, αυτή η τεράστια πληροφορία πρέπει να προσδιοριστεί και κατόπιν να κατανοηθεί το μήνυμά της. Αυτό είναι μια δουλειά που έχει αρχίσει να γίνεται σε συγκεκριμένα συστήματα. Υπάρχει αφενός μεν το περίφημο πρόγραμμα του ανθρώπινου γονιδιώματος, του οποίου η διεκπεραίωση θα απαιτήσει κατά έγκυρους υπολογισμούς γύρω στο ένα δισεκατομμύριο δολάρια, και αφετέρου το λιγότερο φιλόδοξο πρόγραμμα της χαρτογράφησης των γονιδίων σε απλούς οργανισμούς, όπως η δροσόφιλα. Σ' αυτή την τελευταία περιοχή δουλεύω από κοινού με τους συναδέλφους μου στην Κρήτη σε συνεργασία με άλλα εργαστήρια στην Αγγλία και στην Ισπανία. Τώρα συζητείται το επόμενο βήμα, δηλαδή όχι μόνο η χαρτογράφηση, αλλά και ο προσδιορισμός της αλληλουχίας του DNA. Αν το πρόγραμμα αυτό οριστικοποιηθεί, θα γίνει σε ευρωπαϊκό επίπεδο με τη συμμετοχή και άλλων ομάδων όσον αφορά ένα μέρος του DNA, ενώ ένα άλλο μέρος του θα το κάνουν οι Αμερικανοί.

Ερ.: *Επιτρέψτε μου να στραφώ σε κάποια άλλα βασικά ερωτήματα, όπως π.χ. το ακόλουθο: Οι φυσικοί νόμοι είναι κατάλληλοι για να περιγράψουν τα βιολογικά φαινόμενα; Επιπλέον, η «ανθρωπική αρχή», τόσο στην «ασθενή» της εκδοχή, που ισοδυναμεί με τη «βιολογική καταλληλότητα των φυσικών νόμων», όσο και στην «ισχυρή» της εκδοχή, σύμφωνα με την οποία ο κόσμος είναι υποχρεωμένος να φτιάξει τα όντα που θα τον παρατηρήσουν και θα τον κάνουν έτσι να υπάρξει (!), ξαναδίνει στη ζωή την απολεσθείσα «ιερότητά» της, μέσω όχι πια της οδού της θρησκείας, αλλά της επιστήμης.*

Πώς κρίνετε εσείς ως βιολόγος τις παραπάνω σκέψεις και εικασίες;

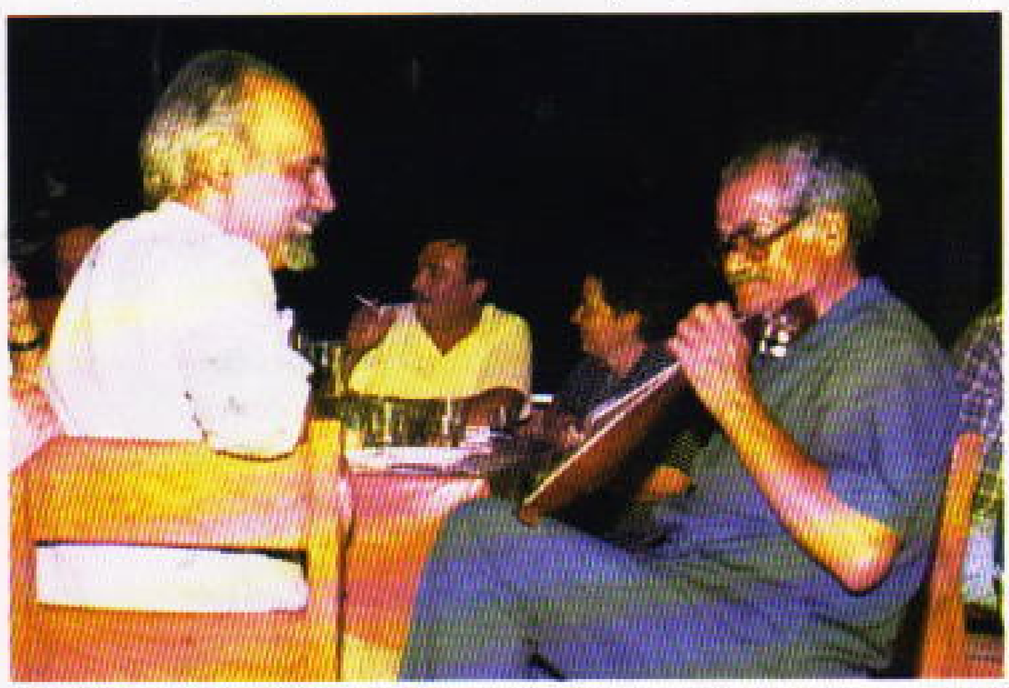
Απ.: Πιστεύω πραγματικά ότι η ζωή είναι ένα θαυμαστό μυστήριο, όχι με την έννοια ότι δεν μπορούμε να κατανοήσουμε τους μηχανισμούς της, ή ακόμη και την προέλευσή της, αλλά ότι έχει μια ομορφιά, την ομορφιά των φυσικών νόμων. Η πολυπλοκότητα της ζωής στηρίζεται σε σχετικά απλά φυσικά φαινόμενα, δηλαδή υπάρχουν ορισμένες βασικές αρχές ανάπτυξης της πολυπλοκότητας ενός οργανισμού. Ο τρόπος με τον οποίο συντελείται η εξέλιξη της ζωής, ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί αποτελεσματικά ο οργανισμός σε κάθε βαθμίδα της εξέλιξής του και η επιβίωση του μέσα από τη διαδικασία της φυσικής επιλογής δημιουργούν πραγματικά έναν θαυμαστό κόσμο, προσαρμοσμένο στις φυσικές ιδιότητες της ύλης, ο οποίος δεν μπορεί παρά να δημιουργήσει στον καθένα μας δέος και ένα αίσθημα ιερότητας, το οποίο κι εγώ φυσικά νιώθω· και μάλιστα όχι μόνο για τη ζωή, αλλά και για ολόκληρο τον κόσμο!

Ερ.: *Τι γνώμη έχετε για την εξωσωματική γονιμοποίηση, την κλωνοποίηση και για έναν νέο και πιθανόν ύπουλο ευγονισμό που εισβάλλει μέσω αυτών;*

Απ.: Ως βιολόγος πιστεύω στη βιολογική βάση των φαινομένων της ζωής. Με άλλα λόγια πιστεύω ότι υπάρχουν ανθρώπινες διαφορές που έχουν βιολογική βάση, αλλά αυτό με καμία έννοια δεν σημαίνει πως πρεσβεύω ότι η πορεία της ανθρωπότητας είναι θέμα βιολογικών φαινομένων από δω και πέρα. Αντίθετα θεωρώ ότι ο άνθρωπος, έχοντας φτάσει σε ένα βαθμό εξέλιξης, στον οποίο χαρακτηρίζεται από ανεπτυγμένη νόηση, δηλαδή ικανότητα σκέψης κ.λπ., έχει ξεπεράσει τους περιορισμούς της φυσικής επιλογής και βρίσκεται σε ένα επίπεδο όπου ο ίδιος μπορεί να ελέγχει μέσω της νόησης την πολιτισμική εξέλιξη.

Δεν πιστεύω καθόλου ότι η ανθρωπότητα θα προοδεύσει με την ευγονική, είμαι βέβαιος ότι ο τρόπος αυτός είναι ριζικά λανθασμένος και μάλιστα όχι μόνο στις ακραίες του εκφράσεις, όπως π.χ. στο χιτλερισμό, αλλά γενικά στην αντιμετώπιση των θεμάτων της ανθρώπινης διαφοράς σαν να ήταν απλώς και μόνο βιολογικά και συνεπώς αναπόφευκτα. Είναι ανάγκη να κατανοήσουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη φύση και την παιδεία, ότι δηλαδή ο καθένας από μας γεννιέται με πάρα πολλές δυνατότητες, από τις οποίες ορισμένες αναπτύσσονται με βάση το πώς μεγαλώνει, τι ερεθίσματα δέχεται, πώς εκπαιδεύεται, και άλλες όχι. Λοιπόν, είμαι εναντίον κάθε ιδέας βιολογικού ντετερμινισμού. Αυτό το αντιδιαστέλλω από εκείνο που ονομάζουμε γενετική θεραπεία. Για την τελευταία μπορούμε να συζητήσουμε, γιατί αξίζει να δούμε πώς μπορούν να διορθωθούν γενετικές ασθένειες με παρέμβαση που θα στηρίζεται στις σύγχρονες μεθόδους της γενετικής μηχανικής. Σ' αυτό το θέμα έχω σαφείς απόψεις· πιστεύω ότι ως άνθρωποι δεν δικαιούμαστε να διορθώσουμε γενετικές ασθένειες στο επίπεδο των γαμετικών κυττάρων, αλλά μόνο σ' εκείνο των σωματικών κυττάρων. Εξηγούμαι ευθύς αμέσως. Υπάρχουν δύο κατηγορίες επεμβάσεων που έχουν σκοπό την επανόρθωση κληρονομικών παθήσεων: αυτές όπου η επέμβαση αφορά την κληρονόμησή τους, δηλαδή τη μεταβίβασή τους στους απογόνους, κι εκείνες όπου η επέμβαση δεν αφορά την κληρονόμησή τους, αλλά αποβλέπει στη θεραπεία του ατόμου που έχει προσβληθεί. Στην πρώτη κατηγορία η επέμβαση πρέπει να γίνει στα γαμετικά κύτταρα, ενώ στη δεύτερη κατηγορία θα γίνει σε ορισμένα σωματικά κύτταρα που είναι δυνατό να τα αποχωρίσουμε από τον οργανισμό, να τα θεραπεύσουμε και να τα ξαναεμφυτεύσουμε κατόπιν με τη γενετική επέμβαση. Στην πρώτη κατηγορία, αν υπάρξει λάθος, βλάπτεται όχι μόνο το συγκεκριμένο άτομο, αλλά και οι απόγονοί του, και αυτός είναι ο λόγος που θεωρώ ηθικά απαράδεκτη την επέμβαση στα γαμετικά κύτταρα, ακόμη και σε απλές περιπτώσεις, όπως π.χ. σε φορέα μεσογειακής αναιμίας. Στη δεύτερη κατηγορία, αν υπάρξει λάθος, βλάπτεται μόνο το άτομο πάνω στο οποίο, ύστερα από δική του συναίνεση, έγινε η επέμβαση, και η περίπτωση αυτή δεν διαφέρει από εκείνη στην οποία ο ασθενής δέχεται να πάρει ένα φάρμακο για τη θεραπεία ορισμένης ασθένειάς του, γνωρίζοντας όμως ότι αυτό μπορεί να βλάψει κάποιο όργανό του. Θεωρώ λοιπόν ότι η επέμβαση στα σωματικά κύτταρα δεν εγείρει ηθικό ζήτημα και τάσσομαι υπέρ αυτής της μορφής γενετικής θεραπείας, η οποία θα αποτελεί αρκετά διαδεδομένο φαινόμενο στα τέλη του αιώνα μας.

Έρχομαι τώρα στα υπόλοιπα θέματα. Όσον αφορά την κλωνοποίηση, νομίζω ότι αποτελεί περισσότερο θέμα φαντασίας, και πάντως δεν ανήκει στο ορατό μέλλον. Εξάλλου, δεν είμαι καθόλου σίγουρος ότι, αν μπορούσαμε να αναπαράγουμε τον Αϊνστάιν από κύτταρά του, θα είχαμε χίλιους ή ένα εκατομμύριο Αϊνστάιν, γιατί ο καθένας τους θα είχε μεν την ίδια κληρονομικότητα, αλλά το πώς θα αναπτυσσόταν ο εγκέφαλός του είναι κάτι που δεν μπορούμε να το προβλέψουμε, όπως εξήγησα και παραπάνω. Πέρα από όλα αυτά, δεν θα ήθελα με κανέναν τρόπο να προλειάνουμε το έδαφος για μια ολοκληρωτικής ιδεολογίας κίνηση, που θα αποσκοπεί στην παραγωγή ανωτέρων φυλών.



Ο Φώτης Καφάτος σε ένα γλέντι στην Ορθόδοξο Ακαδημία Κρήτης, στο Κολυμπάρι, μαζί με τον μακαρίτη λυράρη Κώστα Μουντάκη.

Τέλος, φυσικά και είμαι υπέρ της χρήσης της τεχνολογίας της εξωσωματικής γονιμοποίησης για τις περιπτώσεις εκείνες όπου ένα ζευγάρι έχει προβλήματα και δεν μπορεί να κάνει δικό του παιδί· μια τέτοια λύση είναι απολύτως ανεκτή στο ηθικό επίπεδο.

Ερ.: *Τα θέματα που συζητήσαμε προηγουμένως με οδηγούν στις ακόλουθες σκέψεις: Φαίνεται περίεργο, αλλά η επιστήμη στην περίπτωση της βιολογίας αναζωογονεί την φιλοσοφία! Η βιοηθική, που οι Αγγλοσάξονες τη θεωρούν τμήμα της «πρακτικής» ή «εφαρμοσμένης» φιλοσοφίας, βρίσκεται σε ακμή, ακριβώς επειδή η βιολογία τής θέτει νέα ερωτήματα γύρω από το δέον γενέσθαι. Θα 'θελα τα σχόλιά σας πάνω σ' αυτές τις σκέψεις.*

Απ.: Το σχόλιο μου είναι ότι η επιστήμη είναι μια βασική περιοχή του ανθρώπινου πολιτισμού, έτσι την αντιμετωπίζω και ως τέτοια θέλω πάντα να την προβάλλω. Η επιστήμη δεν είναι κάτι που γίνεται απομονωμένα και που δεν έχει καμία επίδραση στους άλλους· αντιθέτως, αποτελεί τόσο κεντρικό στοιχείο του πολιτισμού μας, όσο και η ποίηση, η τέχνη, η φιλοσοφία, η θρησκεία κ.λπ. Επειδή η βιολογία την περίοδο αυτή φαίνεται να μπαίνει στην πρώτη σειρά των επιστημονικών ανακαλύψεων, μας ανοίγει έναν άγνωστο μέχρι στιγμής κόσμο και μας θέτει προ ερωτημάτων των οποίων τις απαντήσεις επιχειρούμε να ανιχνεύσουμε μέσω άλλων μορφών ανθρώπινης δραστηριότητας, όπως είναι η ηθική και η φιλοσοφία· γενικά θεωρώ απολύτως φυσιολογικό το γεγονός ότι η βιολογία, καθώς είναι μια μετωπική επιστήμη, μια επιστήμη στο μέτωπο της καθόλου Επιστήμης, επανασυνδέει την επιστημονική αναζήτηση με τον φιλοσοφικό ετασμό.

Ερ.: *Κλείνοντας, θα ήθελα να σας ρωτήσω πώς βλέπετε το μέλλον της επιστήμης στην Ελλάδα και τι πρέπει να κάνουμε προκειμένου να αξιοποιηθεί το επιστημονικό δυναμικό που διαθέτει η χώρα μας στο εξωτερικό.*

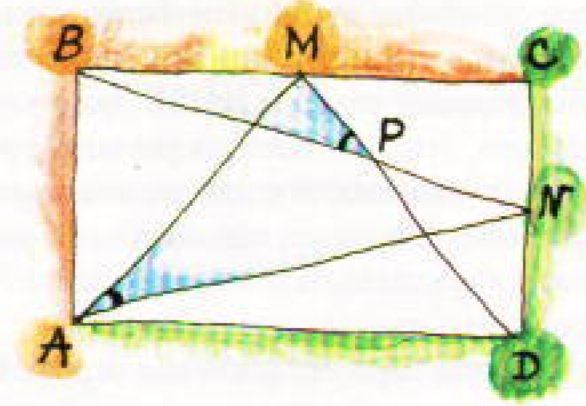
Απ.: Κατ' αρχάς πιστεύω ότι δεν υπάρχει ελληνική, ευρωπαϊκή ή αμερικανική επιστήμη. Υπάρχει μόνο η Επιστήμη, και επομένως στόχος μας πρέπει να είναι να δράσουμε όσο μπορούμε ως ένα επιτυχημένο κομμάτι αυτής της διεθνούς κοινότητας. Στη χώρα μας δεν υπάρχει κοινωνική συνείδηση της σημασίας της επιστήμης ως ενός δημιουργικού φαινομένου και όχι απλώς ως απόκτησης γνώσεων. Αυτό είναι κάτι που εμείς, ως πανεπιστημιακοί δάσκαλοι και επιστήμονες, πρέπει να καλλιεργήσουμε. Η δημιουργία κοινωνικής συνειδήσης για την αξία και την αναγκαιότητα της επιστήμης ως πολιτισμικού αγαθού είναι ένα θέμα που αφορά το μέλλον της Ελλάδας, και αυτό είναι ένα μήνυμα που πρέπει να περάσει τόσο από τα μέσα ενημέρωσης όσο και από οποιονδήποτε οργανισμό επικροτεί γεγονότα και στηρίζει προσπάθειες που έχουν κοινωνική ή εθνική σημασία· βλέπω λοιπόν με ιδιαίτερη χαρά και τη δική σας προσπάθεια, μέσω του περιοδικού *Quantum*, για την προώθηση αυτής της υπόθεσης.

Θεωρώ ότι στην Ελλάδα μια από τις προτεραιότητες θα 'πρεπε να είναι η αύξηση της κατά κεφαλήν επένδυσης στην έρευνα από το 0,4% στο 0,6% ή 0,8% τουλάχιστον του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος. Δεν πρέπει επίσης να ξεχνάμε ότι το ελληνικό επιστημονικό δυναμικό της διασποράς παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς προβάλλει την εθνότητά μας στο εξωτερικό. Ένας πολύ απλός τρόπος να αξιοποιήσουμε αυτούς τους Έλληνες του εξωτερικού είναι να τους δώσουμε θέσεις μερικής απασχόλησης στα ελληνικά πανεπιστήμια, ενώ παράλληλα μπορούμε να «διεθνοποιήσουμε» την «ελληνική» επιστήμη είτε καλώντας ξένους στην Ελλάδα για να δουλέψουν μαζί μας είτε αναπτύσσοντας προγράμματα συνεργασίας με ευρωπαϊκά ερευνητικά κέντρα.

Πιστεύω ότι έχουμε πολλές δυνατότητες. Τη στιγμή αυτή, η Ελλάδα έχει, συγκριτικά με τη συνεισφορά της, που είναι το 1% του προϋπολογισμού στο EMBL, τη μεγαλύτερη παρουσία σ' αυτό το Διεθνές Εργαστήριο, γιατί περίπου το 3% των ατόμων που δουλεύουν εκεί, κυρίως μεταπτυχιακοί φοιτητές και μεταδιδακτορικοί υπότροφοι, είναι Έλληνες.

Για να περνά η ώρα

Σ16



Εμφάνιση ίσων γωνιών. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο *ABCD*, τα *M* και *N* είναι τα μέσα των πλευρών *BC* και *CD* (δείτε το σχήμα), και *P* είναι το σημείο τομής των *DM* και *BN*. Αποδείξτε ότι οι γωνίες *MAN* και *BPM* είναι ίσες. (V. Proizvolov)

Σ17

Μικτός πολλαπλασιασμός. Λύστε το γρίφο ONE · 9 = NINE, όπου 9 είναι το «εννέα» ενώ κάθε γράμμα αντιπροσωπεύει ένα (και μόνο ένα) από τα υπόλοιπα ψηφία. (P. Filevich)

Σ18

Πασκαλόμετρο. Ο Γιάννης κατασκεύασε ένα πιεσόμετρο, και για να δείξει ότι δουλεύει, πήγε σε ένα οικόπεδο όπου χτιζόταν ένα ξενοδοχείο. Εκεί διαπίστωσε ότι ένα τούβλο το οποίο στηριζόταν στη μεγαλύτερη έδρα του ασκούσε πίεση 1.368 Pa. Όταν στηριζόταν στη μικρότερη έδρα του ασκούσε πίεση 5.404 Pa, ενώ όταν στηριζόταν στην ενδιάμεσων διαστάσεων έδρα του ασκούσε πίεση 2.581 Pa. Ένας τοίχος ύψους 4 μέτρων κατασκευασμένος από παρόμοια τούβλα, ασκούσε πίεση 88.200 Pa. Ποια είναι η μάζα ενός τούβλου; (A. Pidora) *(Η μονάδα Pascal δεν είναι άλλη από την Nt/m^2.)*

Σ19

Διάταξη μεταθέσεων. Η γλώσσα της φυλής των Ριγανώκο αποτελείται απ' όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των οκτώ γραμμάτων Ρ, Ι, Γ, Α, Ν, Ω, Κ, Ο και δεν χρησιμοποιεί καμιά άλλη λέξη. Όταν ο αρχηγός της φυλής πληροφορήθηκε την ύπαρξη χρήσιμων αντικειμένων όπως τα λεξικά, ζήτησε από τον γλωσσολόγο της φυλής να κατασκευάσει ένα λεξικό για τη γλώσσα τους. Ο γλωσσολόγος έγραψε ως πρώτη λέξη στο λεξικό το όνομα της φυλής, και κατόπιν, με βάση τη σειρά των γραμμάτων που καθορίστηκε έτσι, άρχισε να ταξινομεί τις λέξεις με τον συνηθισμένο τρόπο. Ποια λέξη έγραψε μετά το *γαριοκων*; Πριν από το *αγρονιωκ*; Μετά το *κορωναγι*; Μπορείτε να βρείτε έναν απλό τρόπο ταξινόμησης των λέξεων του συγκεκριμένου λεξικού; Ποια είναι άραγε η τελευταία λέξη;

Σ20

Μια παρτίδα χωρίς τέλος. Στο παιχνίδι της ντάμας καταλήγουμε συχνά σε ισοπαλία —ακόμη και με τους ρωσικούς κανονισμούς, όπου οι βασίλισσες μπορούν να κινηθούν οσαδήποτε ελεύθερα τετράγωνα (αντίθετα με τις βασίλισσες στην Αμερική όπου κινούνται ένα τετράγωνο κάθε φορά). Είναι δυνατό να καταλήξουμε σε ισοπαλία σε ένα παιχνίδι ντάμας που το παίζουμε με τους συνηθισμένους κανόνες της ευρωπαϊκής (ή πολωνικής) ντάμας, με τη μοναδική διαφορά ότι οι παίκτες προσπαθούν να χάσουν όλα τα κομμάτια τους πριν από τον αντίπαλο; Συγκεκριμένα, υπάρχει θέση στην οποία κανένας παίκτης δεν μπορεί να χάσει, εκτός αν γίνει ένα λάθος; (A. Domashenco) *(Στο πλαίσιο της σελίδας 65 μπορείτε να διαβάσετε μια πλήρη περιγραφή της ευρωπαϊκής ντάμας.)*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Μετατρέποντας αλγεβρικές ταυτότητες σε γεωμετρικές ανισότητες

Θα το πετύχετε χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς

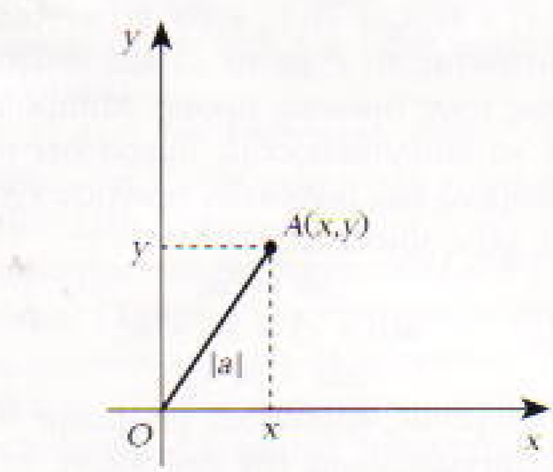
Zalman Skopets

Πολλές ανισότητες που αφορούν απόλυτες τιμές μετατρέπονται σε ταυτότητες όταν απαλείψουμε τις απόλυτες τιμές. Μερικές φορές, μπορούμε να προχωρήσουμε αντίστροφα: μια ταυτότητα που αφορά πολυώνυμα μπορεί να μετατραπεί σε ανισότητα αν πάρουμε τις απόλυτες τιμές του κάθε όρου στο ένα μέλος και την απόλυτη τιμή ολόκληρου του πολυωνύμου στο άλλο.

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε τους όρους μιας τέτοιας σχέσης ως μιγαδικούς αριθμούς και να τους δώσουμε γεωμετρική ερμηνεία. Αυτή η απλή ιδέα μάς επιτρέπει να καταλήξουμε σε αρκετές ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ανισότητες που είναι αρκετά δύσκολο να αποδειχτούν απευθείας.

Πριν εξετάσουμε μερικά παραδείγματα, ας θυμηθούμε τους βασικούς ορισμούς, συμβολισμούς και ιδιότητες που σχετίζονται με τους μιγαδικούς αριθμούς. Έτσι θα έχουμε όλες τις απαιτούμενες πληροφορίες, και δεν θα χρειαστεί άλλη γνώση σχετική με τους μιγαδικούς αριθμούς για να κατανοήσετε τα επιχειρήματα που ακολουθούν (τουλάχιστον θεωρητικά).

Οι μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι θα συμβολίζονται με a, b, c, ..., είναι παραστάσεις της μορφής $x + iy$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί και i είναι η επονομαζόμενη *φανταστική μονάδα* που ορίζεται από την ιδιότητα $i^2 = -1$. Ένας μιγαδικός αριθμός $a = x + iy$ μπορεί να αντιπροσωπευθεί από το σημείο $A(x, y)$ του επιπέδου συντεταγμένων (Σχήμα 1). Τότε, η απόσταση αυτού του σημείου από την αρχή O ονομάζεται μέτρο (ή απόλυτη τιμή) του a και συμβολίζεται με $|a|$:



Σχήμα 1

$$|a| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = OA. \quad (1)$$

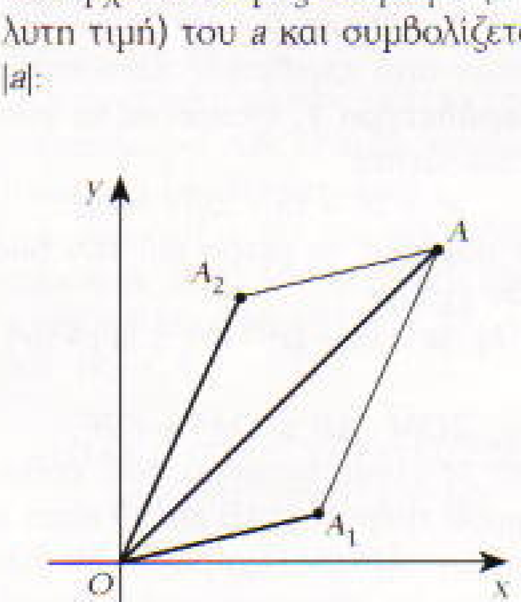
Το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών $a_1 = x_1 + iy_1$ και $a_2 = x_2 + iy_2$ ορίζεται ως $a = a_1 + a_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Στο Σχήμα 2 βλέπετε τη γεωμετρική κατασκευή του σημείου A από τα A_1 και A_2 (με βάση τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$). Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $OA \le OA_1 + A_1A = OA_1 + OA_2$, και επομένως σύμφωνα με την ισότητα (1) έχουμε

$$|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|.$$

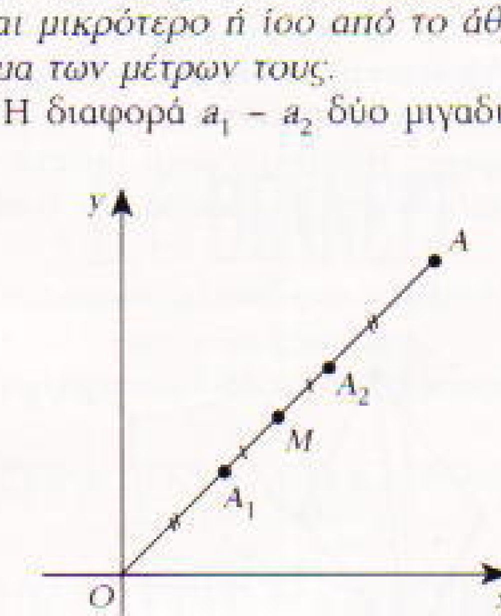
Η παραπάνω σχέση γίνεται ισότητα αν (και μόνο αν) τα σημεία O, A_1, και A_2 είναι συγγραμμικά και το O δεν ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2.

Επομένως, *το μέτρο του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των μέτρων τους.*

Η διαφορά $a_1 - a_2$ δύο μιγαδικών



α

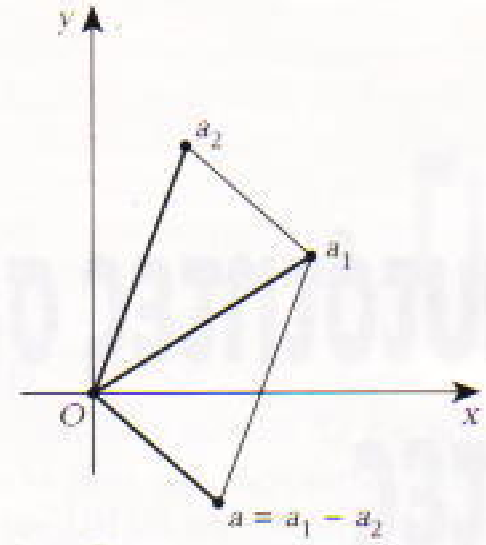


β

Σχήμα 2

(α) Τα σημεία O, A_1, A_2 δεν είναι συγγραμμικά.

(β) Τα σημεία O, A_1, A_2 είναι συγγραμμικά (M είναι το κοινό μέσο των A_1A_2 και OA).



Σχήμα 3
Σε αυτό το σχήμα $|a_1 - a_2| = |a|$.

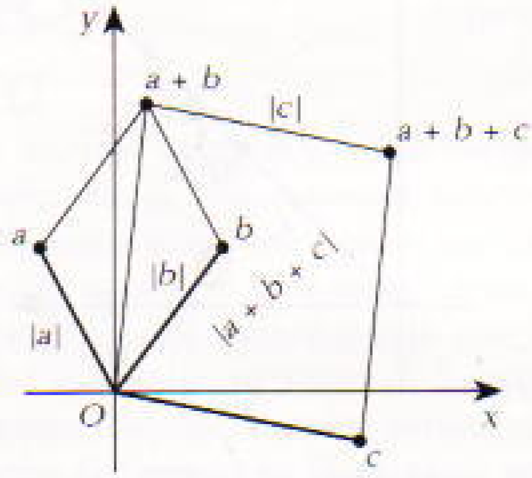
αριθμών a_1 και a_2 είναι ένας αριθμός a, τέτοιος ώστε $a + a_2 = a_1$. Από την κατασκευή του Σχήματος 3 γίνεται φανερό ότι *το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση μεταξύ των σημείων που τους αντιπροσωπεύουν.*

Επιπλέον, από τη σχέση $OA_1 - OA_2 \le A_1A_2 \le OA_1 + OA_2$ έπεται ότι
$$|a_1| - |a_2| \le |a_1 - a_2| \le |a_1| + |a_2|.$$
Όταν τα σημεία O, A_1, A_2 είναι συγγραμμικά, μία από αυτές τις ανισότητες μετατρέπεται σε ισότητα.

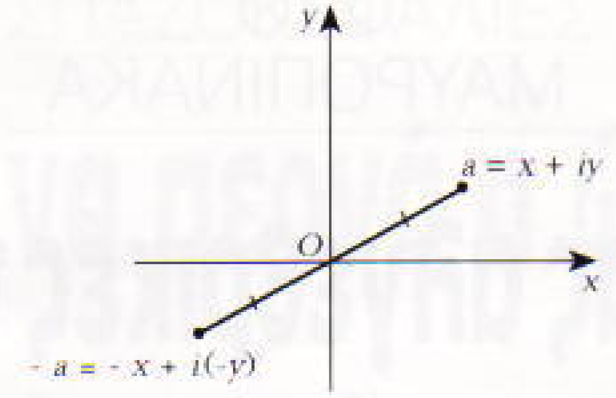
Επομένως, *το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο με το άθροισμα και είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τη διαφορά των μέτρων τους.*

Επίσης, μπορούμε να διαπιστώσουμε (Σχήμα 4) ότι, για παράδειγμα, ισχύει η επόμενη ανισότητα:
$$|a + b + c| \le |a| + |b| + |c|.$$
Παρατηρήστε ότι δύο αντίθετοι αριθμοί a και $-a$ αντιπροσωπεύονται από δύο σημεία, (x, y) και $(-x, -y)$ συμμετρικά ως προς την αρχή (Σχήμα 5), και επομένως $|-a| = |a|$.

Στην πραγματικότητα, όλες οι προηγούμενες ιδιότητες είναι δυνατό να διατυπωθούν στη γλώσσα των διανυ-



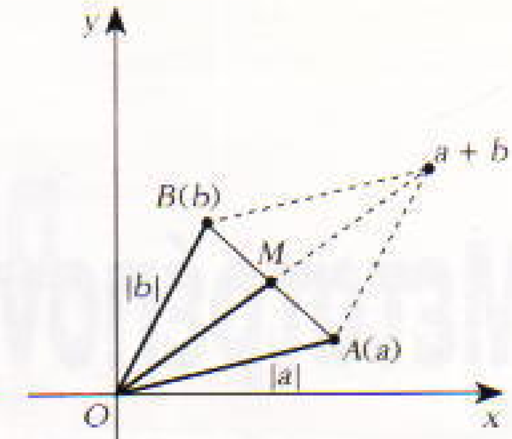
Σχήμα 4



Σχήμα 5

σμάτων. Ουσιαστικά νέες εφαρμογές προκύπτουν μόνο όταν χρησιμοποιήσουμε μια άλλη πράξη μεταξύ των μιγαδικών αριθμών —τον πολλαπλασιασμό. Αυτός ορίζεται από τη σχέση $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ την οποία πετυχαίνουμε αν πολλαπλασιάσουμε τους δύο παράγοντες $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2$, αντικαθιστώντας το i^2 με το -1 και ανάγοντας τους όμοιους όρους. Μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών έχει τις εξής ιδιότητες:
$$ab = ba,$$
$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$
Επομένως, αλγεβρικά, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και το μέτρο των μιγαδικών αριθμών όπως ακριβώς και των πραγματικών αριθμών. Περισσότερες ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών μπορείτε να βρείτε σε διάφορα σχολικά βιβλία άλγεβρας. Εδώ θα περιοριστούμε σε αυτήν τη σύντομη εισαγωγή, η οποία αρκεί για να παρουσιάσουμε τη μέθοδο παραγωγής γεωμετρικών ανισοτήτων από αλγεβρικές ταυτότητες.

Παράδειγμα 1. Θεωρήστε τη γνωστή ταυτότητα
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$
Αν πάρουμε τα μέτρα και των δύο μελών έχουμε
$$|a + b| \cdot |a - b| = |a^2 - b^2| \le |a^2| + |b^2|,$$
ή
$$2OM \cdot AB \le OA^2 + OB^2,$$
όπου M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και O είναι η αρχή των αξόνων (Σχήμα 6). Με άλλα λόγια, *το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το διπλάσιο γινόμενο του μήκους της τρίτης πλευράς επί το μήκος της*



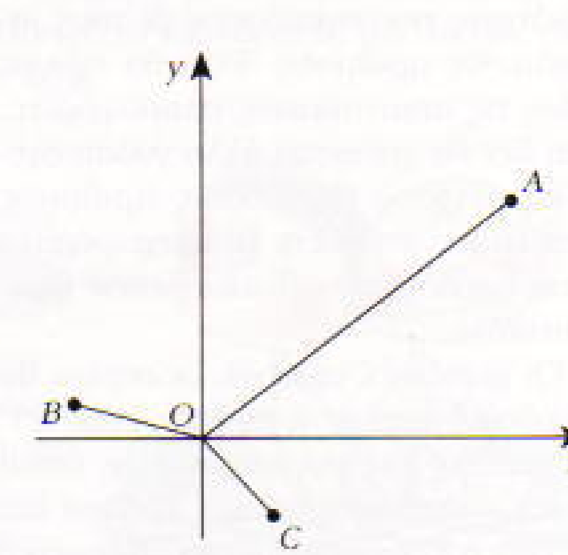
Σχήμα 6

διαμέσου που άγεται προς την τρίτη πλευρά.

Παράδειγμα 2. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε την ταυτότητα
$$-(b - c)(c - a)(a - b)$$
$$= a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b).$$
Από αυτήν έπεται ότι
$$|b - c| \cdot |c - a| \cdot |a - b| \le |a|^2 \cdot |b - c| + |b|^2 \cdot |c - a| + |c|^2 \cdot |a - b|,$$
ή (δείτε το Σχήμα 7)
$$BC \cdot CA \cdot AB \le OA^2 \cdot BC + OB^2 \cdot CA + OC^2 \cdot AB$$
για κάθε τετράδα σημείων O, A, B, C του επιπέδου. Αυτή η ανισότητα είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα στις επόμενες δύο ειδικές περιπτώσεις

(1) Για ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC έχουμε
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 \ge d^2,$$
όπου d είναι το μήκος της πλευράς του. Επομένως, *το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου O από τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το τετράγωνο της πλευράς του.*

(2) Αν O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ABC και R η ακτίνα του, τότε
$$AB \cdot BC \cdot CA \le R^2(AB + BC + CA),$$



Σχήμα 7

ή $$\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{AB + BC + CA} \le R^2$$

—ο λόγος του γινομένου των μηκών όλων των πλευρών ενός τριγώνου προς την περίμετρό του είναι μικρότερος ή ίσος με το τετράγωνο της ακτίνας του περιγεγραμμένου του κύκλου.

Αν θυμηθούμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου ABC μπορεί να γραφεί ως $AB \cdot BC \cdot CA/4R$, ή ως $(AB + BC + CA)r/2$, όπου r είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία ανισότητα με την εξής κομψή μορφή: $R \ge 2r$.

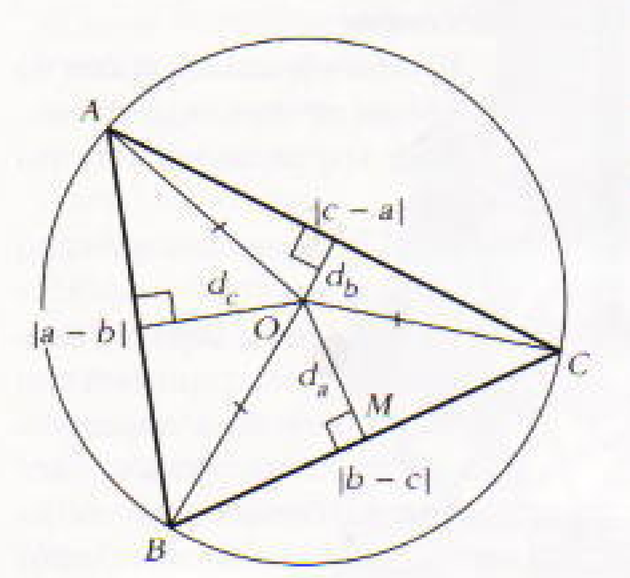
Παράδειγμα 3. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε την ταυτότητα $(a - b)(a - c)(b - c) = (b - c)(b + c)^2 + (c - a)(c + a)^2 + (a - b)(a + b)^2$. Συμβολίζουμε με d_a, d_b, d_c τις αποστάσεις του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ABC από τις πλευρές BC, CA, AB, αντίστοιχα (Σχήμα 8). Έστω ότι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι η αρχή των αξόνων. Τότε

$$|b + c| = 2d_a,$$
$$|c + a| = 2d_b,$$
$$|a + b| = 2d_c,$$

και έτσι από την παραπάνω ταυτότητα έχουμε

$$AB \cdot BC \cdot CA \le 4(d_a^2 \cdot BC + d_b^2 \cdot CA + d_c^2 \cdot AB).$$

Παρατηρήστε ότι $d_a \cdot BC = R^2 \text{ημ} \angle BOC$, επειδή και οι δύο αυτές παραστάσεις είναι ίσες με το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου BOC. Από την άλλη πλευρά, $d_a = OB$ συν$\angle BOM$. Αν είναι οξεία ή ορθή η γωνία A του τριγώνου ABC, τότε $\angle BOC = 2A$ και $\angle BOM = {}^1/_2\, \angle BOC = A$. Αν η γωνία είναι αμβλεία, τότε $\angle BOC = 360^\circ - 2A$ και $\angle BOM = 180^\circ - A$.



Σχήμα 8

Και στις δύο περιπτώσεις όμως, ημ$\angle BOC \cdot$ συν$\angle BOM$ = ημ$2A \cdot$ συνA, και επομένως $d_a^2 \cdot BC = R^3$ συν$A \cdot$ ημ$2A$. Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν για τα $d_b^2 \cdot CA$ και $d_c^2 \cdot AB$, ενώ $AB \cdot BC \cdot CA = 4R \cdot S_{ABC}$, όπου S_{ABC} είναι το εμβαδόν του ABC (αυτό το γεγονός αναφέρθηκε προηγουμένως). Συνδυάζοντας όλες αυτές τις σχέσεις, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\frac{S_{ABC}}{R^2} \le \text{συν}A\ \text{ημ}2A + \text{συν}B\ \text{ημ}2B + \text{συν}C\ \text{ημ}2C,$$

που ισχύει για κάθε τρίγωνο.

Και τώρα αποδείξτε μόνοι σας τις επόμενες ανισότητες.

Ασκήσεις

1. Από την ταυτότητα $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ συνάγετε την ανισότητα $2OM \cdot AB \ge OA^2 - OB^2$, όπου M είναι το μέσον του AB. Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Από την ταυτότητα $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(a + b + c) \cdot (a - b)(b - c)(c - a)$ συνάγετε την ανισότητα $OH \le R^2/2r$, όπου O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, H το ορθόκεντρο, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC. (Το ορθόκεντρο είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου.)

3. Αποδείξτε την ανισότητα $AB \cdot CD + BC \cdot DA \ge AC \cdot BD$ για οποιαδήποτε τετράδα σημείων A, B, C, D του επιπέδου. Ένα επιπλέον πρόβλημα (που μπορεί να απαιτήσει ορισμένα πρόσθετα στοιχεία σχετικά με τους μιγαδικούς) είναι το εξής: αποδείξτε ότι αυτή η ανισότητα γίνεται ισότητα όταν το τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγράψιμο (θεώρημα του Πτολεμαίου).

4. Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, C, M ισχύει $AB \cdot AM \cdot BM + BC \cdot BM \cdot CM + CA \cdot CM \cdot AM \ge AB \cdot BC \cdot CA$.

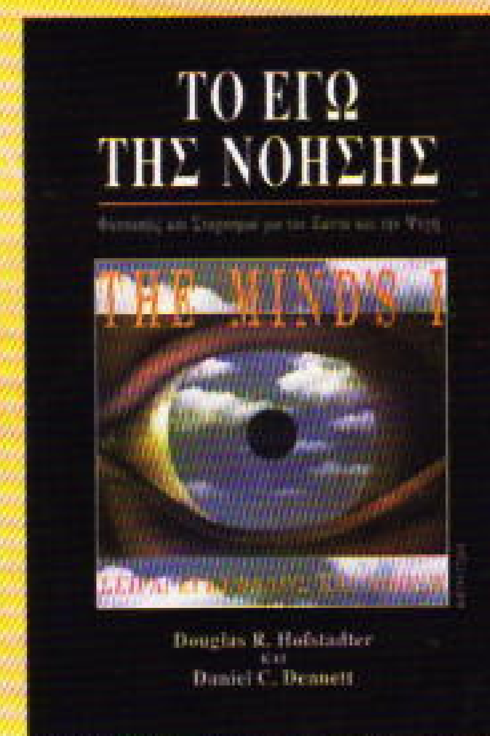
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

ΤΟ ΕΓΩ ΤΗΣ ΝΟΗΣΗΣ

Ένα μοναδικό συμφωνικό έργο, φτιαγμένο όχι με νότες αλλά με τις πιο λεπτές και αινιγματικές ιδέες που μπόρεσε να παραγάγει το ανθρώπινο νοητικό όργανο

THE MIND'S I

Φαντασίες και Στοχασμοί για τον Εαυτό και την Ψυχή: μια πρωτότυπη περιπλάνηση στο λαβύρινθο της νόησης



- Εμπνευσμένη σύνθεση... -*Psychology Today*
- Συναρπαστικά κείμενα... -*The New York Times*
- Έχει μεταφραστεί σ' όλες τις ευρωπαϊκές γλώσσες

D.R. HOFSTADTER

Κορυφαίος θεωρητικός της τεχνητής νοημοσύνης, Πανεπιστήμιο του Μίτσιγκαν, συγγραφέας του βιβλίου *Gödel, Escher, Bach*

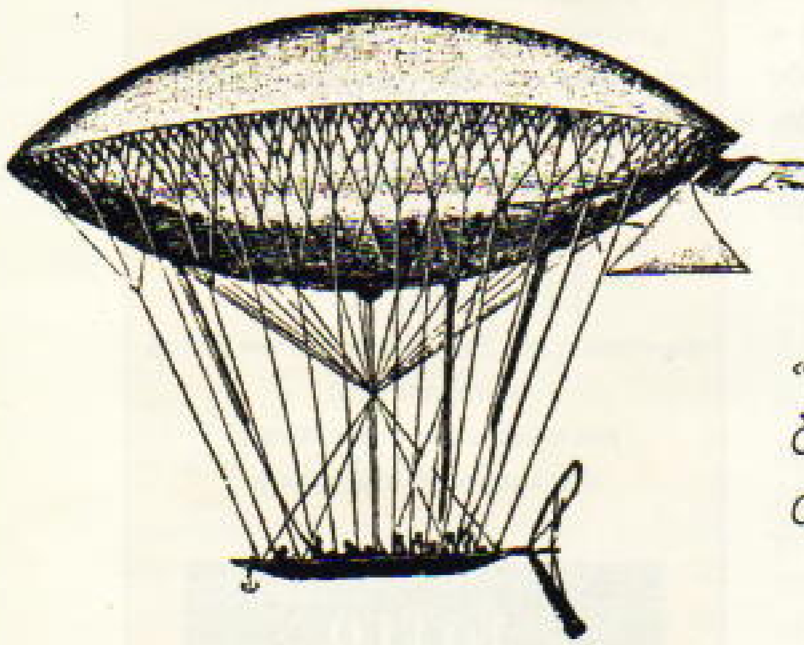
D.C. DENNETT

Διάσημος φιλόσοφος και θεωρητικός της γνωσιακής επιστήμης, Πανεπιστήμιο Tufts της Μασσαχουσέττης

ΣΕΙΡΑ: ΕΓΚΕΦΑΛΟΣ ΚΑΙ ΝΟΗΣΗ
Σελ.: 567, 8.000 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ισαύρων 10 και Δαψιλής, 11471 Αθήνα
Τηλ.: 3643272, 3645098, Fax: 3641864



Συντελεστές απόδοσης

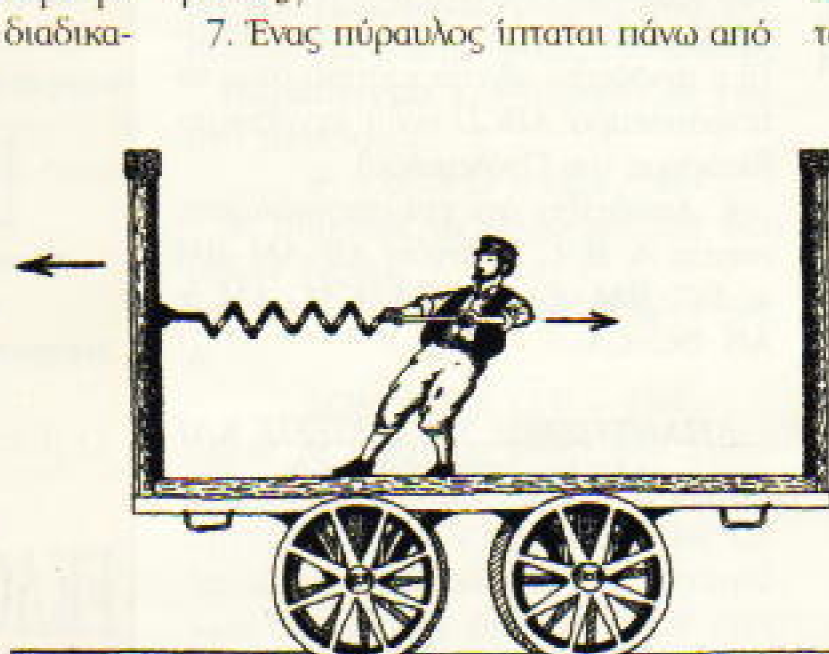
«Εδώ χρησιμοποιούμε την έκφραση "κινητήρια δύναμη" για να δηλώσουμε την απόδοση μιας ατμομηχανής.» —*Sadi Carnot*

Η ακατάπαυστη δραστηριότητα του ανθρώπινου γένους, και ιδιαίτερα τους τρεις τελευταίους αιώνες, μας έχει ωθήσει να σκεφτόμαστε διαρκώς πώς θα δημιουργήσουμε μηχανές που θα «ξοδεύουν λιγότερο και θα παράγουν περισσότερο». Πολλές άκαρπες προσπάθειες έγιναν ώσπου η επιστήμη να θέσει όρια στην ακόρεστη επινοητικότητά μας και να μας υποδείξει με ποιον τρόπο να βελτιώσουμε τις μηχανές και τους κινητήρες που είχαμε ήδη κατασκευάσει. Ως πρώτο βήμα, όμως, ήταν απαραίτητο να εξερευνήσουμε έννοιες όπως το έργο, η ισχύς και η απόδοση, οι οποίες, αφότου καθιερώθηκαν ως θεμελιώδεις έννοιες της νοητικής εργαλειοθήκης των επιστημόνων και των μηχανικών, επιδεικνύουν εκπληκτική ευελιξία. Μπορούμε να τις εφαρμόσουμε με εμπιστοσύνη σε οποιαδήποτε διαδικασία μελετάμε —μηχανική, θερμική ή ηλεκτρική.

Προβλήματα

1. Παράγεται μηχανικό έργο πάνω σε μια μάζα η οποία μεταφέρεται οριζόντια κατά μήκος ευθείας γραμμής με σταθερή ταχύτητα;

2. Μέσα σ' ένα βαγόνι σιδηροδρόμου που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά βρίσκεται ένας άνθρωπος ο οποίος κρατά τεντωμένο ένα ελατήριο ασκώντας του δύναμη F, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το βαγόνι μετακινείται κατά απόσταση D. Πόσο έργο παρήγαγε ο άνθρωπος στο πλαίσιο αναφοράς που συνδέεται με τη Γη;



3. Μπορεί να παραγάγει μηχανικό έργο η δύναμη της στατικής τριβής;

4. Μια φυσαλίδα αερίου ανέρχεται από τον πυθμένα προς την επιφάνεια μιας λίμνης. Το αέριο παράγει έργο;

5. Γιατί οι μηχανές των αγωνιστικών αυτοκινήτων είναι τόσο ισχυρότερες από τις μηχανές των συνηθισμένων αυτοκινήτων;

6. Υποθέτουμε ότι η αντίσταση του αέρα και του νερού αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της ταχύτητας του πλοίου. (Αγνοούμε τις απώλειες από το σχηματισμό κυμάτων.) Πόσο λιγότερη ισχύ χρειάζεται το πλοίο εάν η ταχύτητά του μειωθεί κατά έναν παράγοντα 3;

7. Ένας πύραυλος ίπταται πάνω από την επιφάνεια της Γης. Σε τι δαπανάται η ισχύς της μηχανής του;

8. Θα μεταβληθεί η ισχύς που αναπτύσσουν οι κινητήρες μιας κυλιόμενης σκάλας αν ένας άνθρωπος ο οποίος βρίσκεται στα σκαλοπάτια που κινούνται προς τα πάνω αρχίσει να την ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα;

9. Διαθέτουμε δύο μηχανικές διατάξεις για την ανύψωση φορτίων: ένα κεκλιμένο επίπεδο και μια κεκλιμένη ταινία μεταφοράς που κυλάει πάνω σε κυλίνδρους. Ποια από τις δύο έχει μεγαλύτερο συντελεστή απόδοσης;

10. Μια υδραυλική πρέσα θα δουλέψει αν γεμίσουμε τον κύλινδρό της με αέριο αντί για υγρό;

11. Η θερμοκρασία του αέρα (ο οποίος χρησιμεύει ως δεξαμενή θερμότητας χαμηλής θερμοκρασίας για τη μηχανή του αυτοκινήτου), είναι σημαντικά χαμηλότερη τον χειμώνα απ' ό,τι το καλοκαίρι. Αυτό το γεγονός αυξάνει το συντελεστή απόδοσης της μηχανής του αυ-

τοκινήτου κατά το χειμώνα;

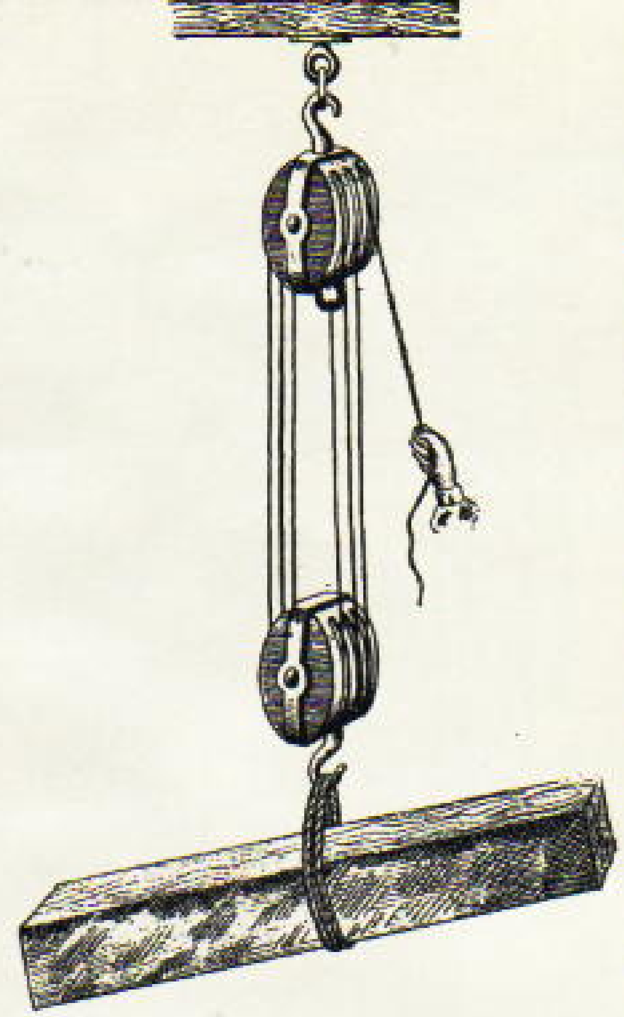
12. Ποια είναι η δεξαμενή θερμότητας υψηλής θερμοκρασίας και ποια η δεξαμενή θερμότητας χαμηλής θερμοκρασίας στη μηχανή ενός πυραύλου;

13. Δύο ηλεκτρικές συσκευές συνδέονται με μια μπαταρία, πρώτα σε σειρά και κατόπιν παράλληλα. Σε ποια περίπτωση είναι μεγαλύτερος ο συντελεστής απόδοσης;

14. Ο συντελεστής απόδοσης μιας μπαταρίας μπορεί να ισούται με 1;

Μικροπειραματισμοί

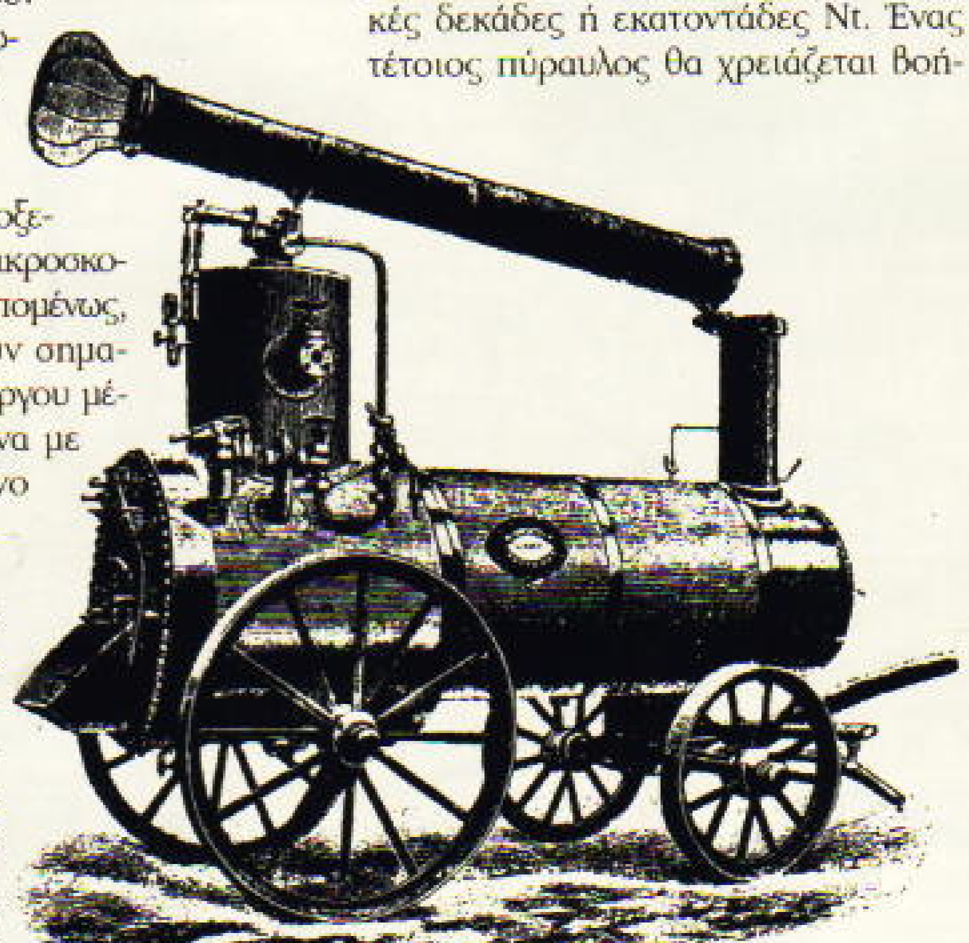
Ανάψτε μια ηλεκτρική σόμπα και παρατηρήστε τη για αρκετή ώρα. Γιατί, παρά τη συνεχή κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας, δεν αυξάνεται απεριόριστα η θερμοκρασία των συρμάτων της;



Είναι ενδιαφέρον ότι...

...ο γάλλος επιστήμονας V. Poncelet κατέληξε στον όχι και τόσο επιστημονικό αλλά εξαιρετικά πρακτικό ορισμό: «Μηχανικό έργο είναι αυτό για το οποίο πληρώνετε».

...όταν ένας άνθρωπος προσπαθεί να ασκήσει σταθερή μυϊκή δύναμη, ακόμη και όταν δεν υπάρχει καμία εξωτερική κίνηση, οι μύες συστέλλονται και χαλαρώνουν συνεχώς, προξενώντας συνεχώς μικροσκοπικές κινήσεις. Επομένως, οι μύες παράγουν σημαντική ποσότητα έργου μέσα τους, σύμφωνα με τον καθιερωμένο ορισμό της έννοιας «έργο».



...η μονάδα ισχύος για μια μηχανή, ο «ίππος», που εισήχθη στα τέλη του 18ου αιώνα από τον James Watt, χρησιμοποιείται ακόμη. Είχε οριστεί ως το μέσο έργο που μπορούσε να παράγει ένα δυνατό αγγλικό άλογο έλξης ανά δευτερόλεπτο όταν δούλευε σταθερά επί μία ολόκληρη ημέρα.

...ο συντελεστής απόδοσης μιας υποθετικής θερμικής μηχανής που θα εκμεταλλευόταν τη διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στην επιφάνεια και τα βάθη του ωκεανού δεν ξεπερνά τις λίγες ποσοστιαίες μονάδες.

...μεγάλη ισχύς δεν σημαίνει απαραίτητα και μεγάλη προωστική δύναμη. Για παράδειγμα, στους προτεινόμενους πυραύλους φωτονίων, η δύναμη αεριοπροώθησης θα ανέρχεται σε μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες Nt. Ένας τέτοιος πύραυλος θα χρειάζεται βοήθεια ακόμη και για να απογειωθεί.

...μια ιδιαίτερα θελκτική προοπτική είναι το να παράγουμε ηλεκτρική ενέργεια απευθείας από τη χημική ενέργεια ενός καυσίμου και ενός οξειδωτικού μέσου χωρίς καύση μέσα σε μια ηλεκτροχημική γεννήτρια, η οποία έχει πολύ υψηλή απόδοση.

...όταν καίμε 1 mgr βενζίνης στη μηχανή ενός αυτοκινήτου παράγουμε θερμική ενέργεια 40 joules, ένα μικρό ποσοστό της οποίας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου. Ένα mgr ζάχαρης προσφέρει σ' έναν οργανισμό πάλι ενέργεια 40 joules, αλλά η ενέργεια αυτή αξιοποιείται πολύ πιο αποδοτικά για να διατηρείται η θερμοκρασία του οργανισμού, καθώς και για άλλες βιολογικές λειτουργίες.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

Ευκαιρίας δοθείσης

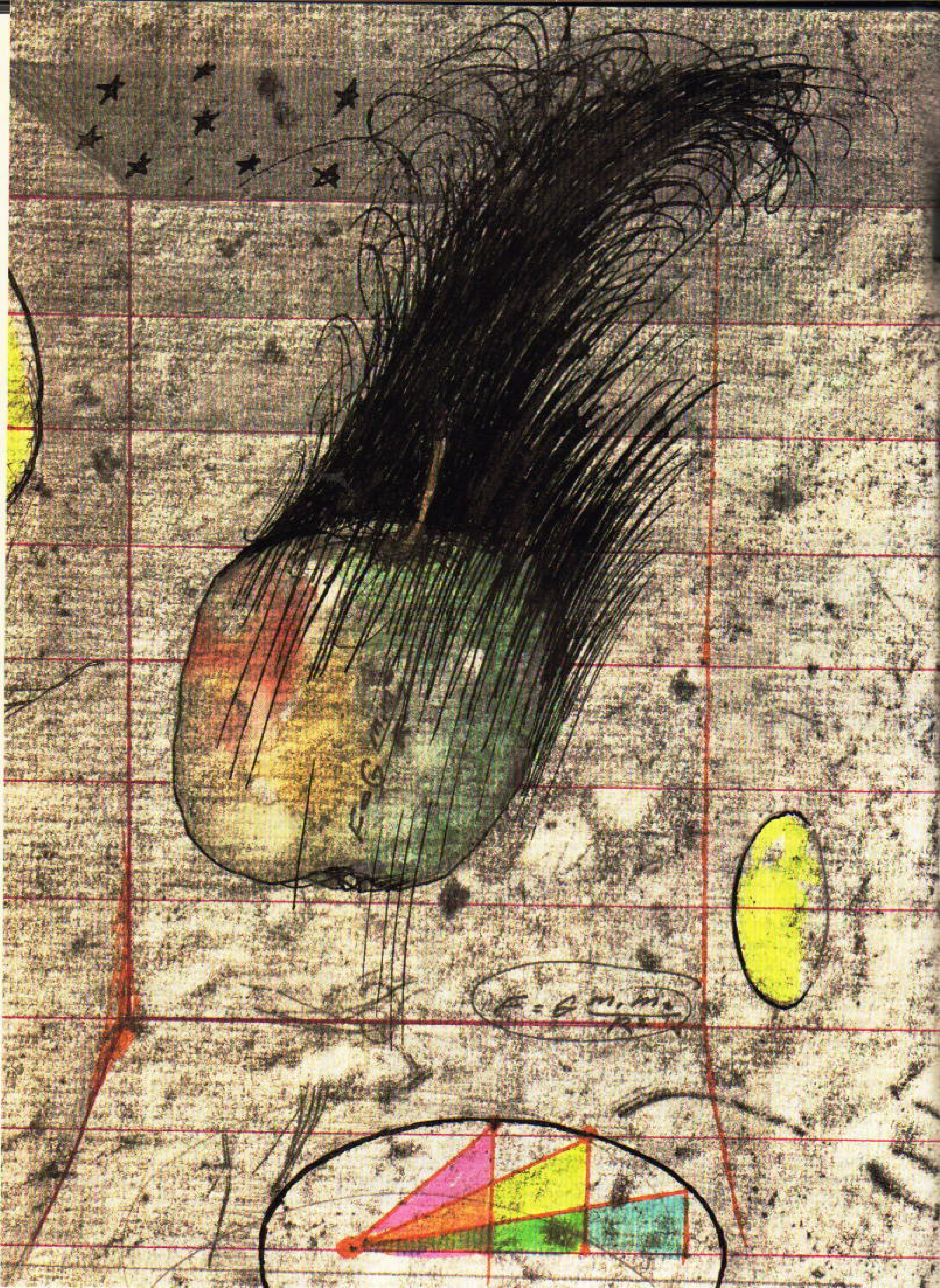
• Η *τιμή πώλησης* του *Quantum* που θα ισχύει από το επόμενο τεύχος (το πρώτο του τόμου 2), θα είναι 1.400 δρχ.

• Οι *τιμές συνδρομής* (ατομικής ή ομαδικής) που σημειώνονται στο ειδικό ένθετο του παρόντος τεύχους θα ισχύουν για εγγραφές *έως τις 31 Δεκεμβρίου 1994*. Οι νέες τιμές συνδρομής θα σημειώνονται στο αντίστοιχο ένθετο του επόμενου τεύχους.

• *Τα τεύχη του τόμου 1* (καθένα δηλαδή από τα τέσσερα τεύχη που έχουν κυκλοφορήσει στο 1994) θα πουλιούνται από την 1η Ιανουαρίου 1995 στην τιμή των *1.400 δρχ.*, και έκτοτε θα ακολουθούν τις αναπιμήσεις του περιοδικού.

• Ευχαριστούμε όλους τους συνεργάτες που βοήθησαν στην έκδοση του περιοδικού και όλους τους αναγνώστες που αγκάλιασαν με θέρμη την έκδοσή του.

Quantum


F = G m.m / R

Γιατί μελετάμε τα Μαθηματικά;

Οι απόψεις των ειδικών για το ζήτημα

Vladimir Arnold[1]

Γιατί πρέπει να μελετάμε τα Μαθηματικά; Το 1267 ο άγγλος φιλόσοφος Ρογήρος Βάκων έδωσε απάντηση σε αυτό το ερώτημα: «Όποιος τα αγνοεί δεν μπορεί να γνωρίσει τις άλλες επιστήμες ούτε και τα αντικείμενα του κόσμου μας... Και το χειρότερο είναι ότι οι άνθρωποι που τα αγνοούν δεν συνειδητοποιούν την ίδια την άγνοιά τους, και επομένως δεν προσπαθούν να τη θεραπεύσουν». Θα μπορούσα σε αυτό το σημείο να σταματήσω τη διάλεξή μου, αλλά οι άνθρωποι πιστεύουν ότι ίσως κάτι έχει αλλάξει κατά τη διάρκεια των τελευταίων επτά αιώνων...

Ας δούμε μερικές πιο πρόσφατες μαρτυρίες. Ο Paul Dirac, ένας από τους δημιουργούς της κβαντικής μηχανικής, υποστηρίζει πως όταν δημιουργούμε μια φυσική θεωρία, δεν πρέπει να εμπιστευόμαστε καμία φυσική έννοια. Όμως, τι πρέπει να εμπιστευτούμε; Σύμφωνα με τον διάσημο φυσικό, μόνο ένα μαθηματικό σχήμα —ακόμη και όταν, εκ πρώτης όψεως, δεν συνδέεται με τη Φυσική.

Και πραγματικά, η Φυσική έχει απορρίψει όλες τις καθαρά φυσικές έννοιες που επικρατούσαν στις αρχές του αιώνα μας, ενώ τα μαθηματικά μοντέλα που αποτελούσαν μέρος του οπλοστασίου των φυσικών απέκτησαν σταδιακά φυσικό νόημα. Εδώ προβάλλει ολοκάθαρα η σταθερότητα των Μαθηματικών.

Επομένως, η δημιουργία μαθηματικών μοντέλων είναι μια γόνιμη μέθοδος κατανόησης στις φυσικές επιστήμες. Θα προσεγγίσουμε τα μαθηματικά μοντέλα από μια άλλη άποψη, εξετάζοντας τα προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Τρεις προσεγγίσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών

Στη Ρωσία, η μαθηματική εκπαίδευση (και η δευτεροβάθμια και η ανώτερη) ακολουθεί το ευρωπαϊκό σύστημα που βασίζεται στην προσέγγιση της «Σχολής Bourbaki». (Με το ψευδώνυμο Nicholas Bourbaki έγινε γνωστή μια ομάδα γάλλων μαθηματικών οι οποίοι από το 1939 και έπειτα εξέδωσαν μια σειρά βιβλία στα οποία οι κύριοι κλάδοι των σύγχρονων Μαθηματικών παρουσιάζονται τυπικά —δηλαδή, μέσω της αξιωματικής μεθόδου που βασίζεται στη θεωρία συνόλων.)

Η φορμαλιστική θεμελίωση των Μαθηματικών επιφέρει την τυποποίηση της διδασκαλίας τους, και κάνει φανερό το κόστος που έχει η «τάση Bourbaki» για τη μαθηματική εκπαίδευση. Ιδού ένα εντυπωσιακό παράδειγμα: Μαθητές της δευτέρας τάξης ενός δημοτικού γαλλικού σχολείου ρωτήθηκαν «πόσο κάνει δύο συν τρία;». Η απάντησή τους ήταν: «Εφόσον η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, ισούται με τρία συν δύο».

Πραγματικά εντυπωσιακή απάντηση! Είναι απολύτως σωστή, αλλά οι μαθητές ούτε καν σκέφτηκαν απλώς να προσθέσουν τους δύο αριθμούς, διότι η εκπαίδευσή τους δίνει έμφαση στις ιδιότητες των πράξεων. Στην Ευρώπη, οι εκπαιδευτικοί έχουν ήδη αντιληφθεί τα μειονεκτήματα αυτής της προσέγγισης και αρχίζουν να εγκαταλείπουν την τάση Bourbaki.

Τα τελευταία χρόνια, η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Ρωσία υπόκειται σε μια διαδικασία «εξαμερικανισμού», βασισμένη στην εξής αρχή: διδάσκουμε ό,τι χρειάζεται στις πρακτικές εφαρμογές. Επομένως, όποιος θεωρεί ότι δεν πρόκειται να χρειαστεί τα Μαθηματικά, δεν χρειάζεται και να ασχοληθεί καθόλου μαζί τους. Τα Μαθηματικά είναι προαιρετικά για τους μαθητές του γυμνασίου —για παράδειγμα, το ένα τρίτο των μαθητών του γυμνασίου δεν επιλέγει την άλγεβρα. Το παρακάτω παράδειγμα μας δείχνει το αποτέλεσμα: Σε ένα διαγώνισμα ζητήθηκε από δεκατετράχρονους αμερικανούς μαθητές να εκτιμήσουν (απλώς να εκτιμήσουν, όχι να υπολογίσουν) τι συμβαίνει στον αριθμό 120 όταν αφαιρέσουμε από αυτόν το 80 τοις εκατό. Οι μαθητές μπορούσαν να επιλέξουν ανάμεσα σε τρεις πιθανές απαντήσεις: θα αυξηθεί, θα μείνει ίδιος ή θα μειωθεί. Απάντησε σωστά περίπου το 30% των εξεταζόμενων μαθητών. Αυτό σημαίνει

1. Το κείμενο αυτό είναι ελαφρά συντομευμένες σημειώσεις από μια διάλεξη του Arnold, ενός από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της εποχής μας, στο Κρατικό Ινστιτούτο για τη Βελτίωση των Προσόντων των Εκπαιδευτικών στις 16 Απριλίου 1992 στη Μόσχα. Τις σημειώσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής Y. Fominykh.

Εικονογράφηση: Yury Vashchenko

ότι απαντούσαν τυχαία. Συμπέρασμα: κανείς δεν ξέρει τίποτε.

Το δεύτερο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της αμερικανικής προσέγγισης στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η εξαπλούμενη σ' αυτά χρήση των υπολογιστών. Το πάθος για τους υπολογιστές δεν αρκεί για να συμβάλει στην ανάπτυξη της συλλογιστικής ικανότητας. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα από κάποιο αμερικανικό διαγώνισμα:

Υπάρχουν 26 μαθητές σε μια τάξη. Θα πάνε μια εκδρομή με αυτοκίνητα. Σε κάθε αυτοκίνητο χωράνε τέσσερις μαθητές και ένας γονιός. Πόσους γονείς πρέπει να καλέσει το σχολείο γι' αυτή την εκδρομή;

Μια τυπική απάντηση είναι 65 γονείς. Ο υπολογιστής δίνει αποτέλεσμα 26 : 4 = 6,5. Και ο μαθητής γνωρίζει πως όταν η λύση πρέπει να είναι ακέραιη, πρέπει κάτι να κάνουμε με την υποδιαστολή —για παράδειγμα, να μην τη γράφουμε.

Και τώρα ένα παράδειγμα από ένα επίσημο διαγώνισμα του 1992 για μαθητές:

Ποιο από τα επόμενα ζεύγη θυμίζει περισσότερο τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη γωνία και τη μοίρα—

(α) χρόνος και ώρα

(β) γάλα και λίτρο

(γ) εμβαδόν και τετραγωνικό εκατοστό (και ούτω καθεξής);

Η απάντηση είναι εμβαδόν και τετραγωνικό εκατοστό, διότι η μοίρα είναι η ελάχιστη μονάδα μέτρησης γωνιών, και το τετραγωνικό εκατοστό είναι η ελάχιστη μονάδα μέτρησης εμβαδών, ενώ η ώρα, π.χ., μπορεί να διαιρεθεί σε λεπτά.

Είναι φανερό ότι οι συγγραφείς αυτού του προβλήματος έχουν σπουδάσει σύμφωνα με το αμερικανικό σύστημα. Φοβάμαι ότι σύντομα θα φτάσουμε και εμείς στο ίδιο επίπεδο.[2] Το μόνο που με εκπλήσσει είναι ότι υπάρχουν τόσοι διαπρεπείς μαθηματικοί και φυσικοί στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Στις μέρες μας, η μαθηματική μας εκπαίδευση μεταβαίνει αργά από το ευρωπαϊκό σύστημα στο αμερικανικό. Όπως πάντοτε, παραμένουμε κάπως αργοπορημένοι, σχεδόν τριάντα χρόνια πίσω από την Ευρώπη. Έτσι, έπειτα από τριάντα χρόνια θα είμαστε έτοιμοι να δούμε τα πράγματα σωστά και να βγούμε από το αδιέξοδο που θα μας έχει οδηγήσει το αμερικανικό εκπαιδευτικό σύστημα με τον πραγματισμό του, το σύστημα που βασίζεται στην κατά προαίρεση επιλογή και στη μαζική χρήση των υπολογιστών.

Η παραδοσιακή μας μαθηματική εκπαίδευση ήταν υψηλότερου επιπέδου και στηριζόταν στην καλλιέργεια των αριθμητικών προβλημάτων. Ακόμη και πριν από είκοσι χρόνια έβρισκε κανείς σε πολλές οικογένειες αντίτυπα από τα παλιά βιβλία «πρακτικής αριθμητικής». Τώρα έχουν χαθεί όλα. Ο υπερτονισμός της άλγεβρας που προκάλεσε η τελευταία μεταρρύθμιση στη μαθηματική εκπαίδευση μετατρέπει τους μαθητές σε ρομπότ. Αλλά τον πλούτο των Μαθηματικών που διδάσκουμε τον αναδεικνύει η αριθμητική προσέγγιση.

Θεωρήστε για παράδειγμα τα παρακάτω προβλήματα:

(1) Έχουμε τρία μήλα. Παίρνουμε το ένα. Πόσα μήλα θα απομείνουν;

(2) Πόσες τομές με το πριόνι χρειάζονται για να χωρίσουμε έναν κορμό σε τρία μέρη;

(3) Οι αδελφές του Μπορίς είναι τρεις περισσότερες από τους αδελφούς του. Πόσα κορίτσια παραπάνω από αγόρια υπάρχουν στην οικογένειά του;

Από την άποψη της αριθμητικής όλα αυτά είναι διαφορετικά προβλήματα —το περιεχόμενό τους είναι διαφορετικό. Εντελώς διαφορετική είναι και η διανοητική προσπάθεια που απαιτείται για να λυθούν, παρότι το αλγεβρικό μοντέλο είναι κάθε φορά το ίδιο: 3 − 1 = 2. Αυτό που μας εντυπωσιάζει πριν από οτιδήποτε άλλο στα Μαθηματικά είναι η εκπληκτική καθολικότητα των μοντέλων τους και η απίστευτη αποτελεσματικότητά τους στις εφαρμογές.

Όπως τόνισε ο μεγάλος ρώσος ποιητής Βλαδίμηρος Μαγιακόφσκι, «ο άνθρωπος που πρώτος είπε ότι "δύο και δύο κάνουν τέσσερα" ήταν μεγάλος μαθηματικός, ακόμη και αν ανακάλυψε αυτή την αλήθεια προσθέτοντας δύο αποτσίγαρα με δύο άλλα αποτσίγαρα. Όλοι αυτοί που ακολούθησαν, ακόμη και αν πρόσθεταν ασυγκρίτως μεγαλύτερα πράγματα —ας πούμε, ατμομηχανές με ατμομηχανές— δεν είναι μαθηματικοί». Η «απαρίθμηση ατμομηχανών» είναι η αμερικανική μέθοδος διδασκαλίας των Μαθηματικών. Είναι καταστροφική. Το παράδειγμα της ανάπτυξης της Φυσικής στις αρχές του αιώνα μας δείχνει ότι τα «Μαθηματικά της ατμομηχανής» αποδείχτηκαν υποδεέστερα από τα «Μαθηματικά των αποτσίγαρων»: τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά δεν μπορούσαν να συμβαδίσουν με τη Φυσική, ενώ τα θεωρητικά Μαθηματικά προσέφεραν ό,τι χρειάζονταν οι φυσικοί για να αναπτύξουν την επιστήμη τους. Τα «Μαθηματικά της ατμομηχανής» λαχανιάζουν τρέχοντας πίσω από την πρακτική: ενώ διδάσκουμε πώς γίνονται οι υπολογισμοί με τον άβακα, εμφανίζονται οι υπολογιστές. Πρέπει να διδάσκουμε πώς να σκεφτόμαστε, όχι πώς να πιέζουμε πλήκτρα.

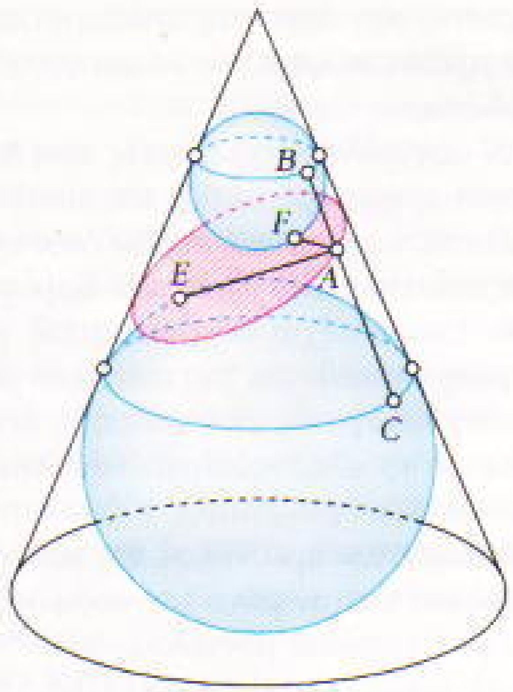
Βέβαια, ένα μαθηματικό μοντέλο δεν δίνει πάντοτε άμεσα πρακτικά οφέλη. Μερικές φορές, μπορεί να αποδειχτεί χρήσιμο μόνο έπειτα από δύο χιλιάδες χρόνια. Αυτό συνέβη στην περίπτωση των *κωνικών τομών*.

Κωνικές τομές και ο νόμος της βαρύτητας

Οι κωνικές τομές ανακαλύφθηκαν στην Αρχαία Ελλάδα και τις περιέγραψε σε ένα οκτάτομο έργο ο Απολλώνιος (265-170 π.Χ.), που καταγόταν από την Πέργη της Παμφυλίας. Η ανάγκη, όμως, αυτής της θεωρίας εμφανίστηκε μόλις τον 16ο αιώνα, όταν ο Γιοχάννες Κέπλερ ανακάλυπτε τους νόμους του για την κίνηση των πλανητών. Ο δάσκαλός του, ο Τύχων Μπράχε, είχε μετρήσει προσεκτικά τις θέσεις των πλανητών του ηλιακού συστήματος από το αστεροσκοπείο της Ουρανιούπολης, κοντά στην Κοπεγχάγη, για μια περίοδο είκοσι ετών. Μετά το θάνατο του δασκάλου του, ο Κέπλερ άρχισε τη μαθηματική επεξεργασία των αποτελεσμάτων αυτών των παρατηρήσεων και ανακάλυψε ότι η τροχιά του Άρη, για παράδειγμα, είναι έλλειψη.

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο δεδομένα ση-

2. Ένας καθηγητής από τη Νέα Υόρκη, ο Joe Birman, μου εξήγησε ότι για τον ίδιο -που είναι Αμερικανός- η «σωστή» απάντηση σε αυτό το πρόβλημα είναι τελείως ξεκάθαρη. «Το θέμα είναι», μου είπε, «ότι μπορώ να φανταστώ με ακρίβεια το επίπεδο ηλιθιότητας του συγγραφέα αυτού του προβλήματος».

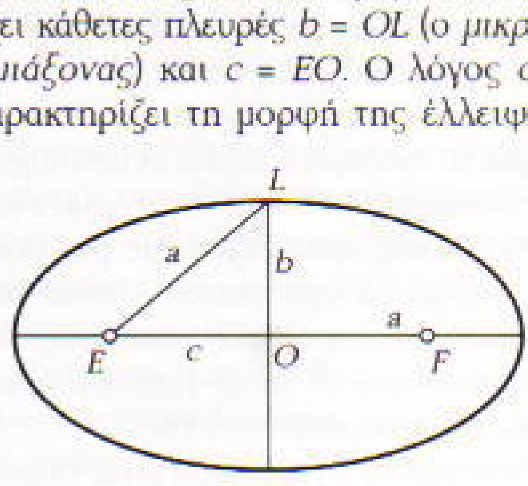


Σχήμα 1

Μια έλλειψη με εστίες F και E και οι σφαίρες Dandelin. Δύο εφαπτόμενες που φέρουμε προς την ίδια σφαίρα από το ίδιο σημείο είναι ίσες, επομένως FA + EA = BA + AC = BC, που είναι σταθερό.

μεία, τις λεγόμενες εστίες, είναι σταθερό. Σύμφωνα μ' ένα αξιοσημείωτο θεώρημα —που, δυστυχώς, δεν αποδεικνύεται στο σχολείο— η τομή ενός κώνου από ένα επίπεδο που σχηματίζει μια κατάλληλα μεγάλη γωνία με τον άξονά του είναι έλλειψη. Η απόδειξή του είναι αρκετά απλή (δείτε το Σχήμα 1). Οι δύο σφαίρες που είναι εγγεγραμμένες στον κώνο και εφάπτονται στο επίπεδο (στις εστίες *E* και *F* της έλλειψης που ορίζει η τομή) ονομάζονται σφαίρες Dandelin.

Για να κατανοήσουμε την αλυσίδα των συλλογισμών του Κέπλερ, θα χρειαστούμε μερικές απλές ιδιότητες σχετικές με τη γεωμετρία της έλλειψης. Μπορεί να αποδειχτεί ότι το μήκος του *μεγάλου ημιάξονα* μιας έλλειψης *OK* (Σχήμα 2), που συνήθως συμβολίζεται με *a*, ισούται με το μήκος της υποτείνουσας *EL* του τριγώνου που έχει κάθετες πλευρές $b = OL$ (ο *μικρός ημιάξονας*) και $c = EO$. Ο λόγος c/a χαρακτηρίζει τη μορφή της έλλειψης



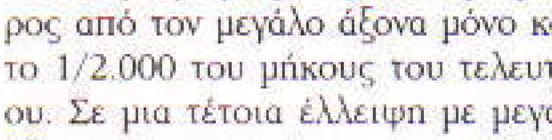
Σχήμα 2

Οι εστίες, οι ημιάξονες και η εκκεντρότητα μιας έλλειψης.

και καλείται *εκκεντρότητα*, επειδή είναι ανάλογος με τη μετατόπιση των εστιών από το κέντρο της έλλειψης. Η εκκεντρότητα συμβολίζεται συνήθως με *e*.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι ο λόγος των ημιαξόνων ισούται με $b/a = \sqrt{1 - e^2} \equiv 1 - e^2/2$ για μικρά *e*. Προκύπτει, λοιπόν, ότι ουσιαστικά είναι αδύνατο να διακρίνουμε μια έλλειψη με μικρή εκκεντρότητα από έναν κύκλο. Αν, για παράδειγμα, $e = 0{,}1$, τότε ο μικρός άξονας είναι μικρότερος από τον μεγάλο άξονα μόνο κατά το 1/2.000 του μήκους του τελευταίου. Σε μια τέτοια έλλειψη με μεγάλο άξονα μήκους 1 μέτρου, ο μικρός άξονας θα είναι μισό μόνο εκατοστό μικρότερος, και επομένως η διαφορά αυτής της έλλειψης από τον κύκλο θα περνάει ουσιαστικά απαρατήρητη. Όμως, οι εστίες θα απέχουν 5 εκατοστά από το κέντρο —απόσταση απολύτως παρατηρήσιμη.

Ο τύπος $b/a = \sqrt{1 - e^2} \equiv 1 - e^2/2$ (που σημαίνει ότι η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά ενός επιμήκους ορθογώνιου τριγώνου έχει πρακτικά το ίδιο μήκος με την υποτείνουσα, μας δίνει δε μια καλή προσέγγιση της διαφοράς που υπάρχει ανάμεσα στα μήκη τους) είναι ένα από τα πιο αξιοσημείωτα γεγονότα στα Μαθηματικά. (Δυστυχώς, δεν διδάσκεται στο σχολείο.)

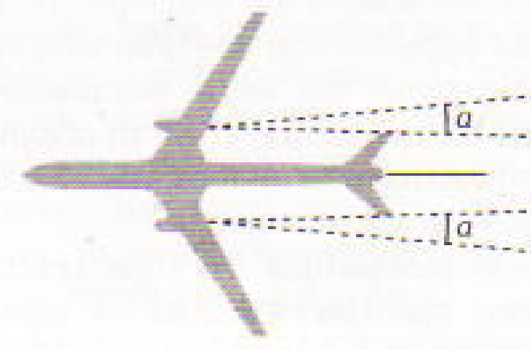


Σχήμα 3

Πόσο μεγαλύτερη είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη από την ευθεία γραμμή;

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι επιστρέφετε στο σπίτι σας ακολουθώντας μια πορεία που έχει τη μορφή ημιτονοειδούς καμπύλης. Πόσο μεγαλύτερη θα είναι η διαδρομή σας από την ευθεία (Σχήμα 3); Η πρώτη εντύπωση (ότι είναι διπλάσια) είναι φυσικά υπερβολική. Πάντως, φαίνεται πως η καμπύλη διαδρομή είναι τουλάχιστον μεγαλύτερη κατά το ήμισυ από την ευθεία. Στην πραγματικότητα, είναι μόνο κατά 20% μεγαλύτερη. Ο λόγος είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος της ημιτονοειδούς καμπύλης έχει μικρή κλίση ως προς τον άξονα, και έτσι οι αντίστοιχες υποτείνουσες είναι ελάχιστα μεγαλύτερες από τις κάθετες.

Ιδού μια ακόμη εφαρμογή αυτού του τύπου. Οι μηχανές των πρώτων αεριωθουμένων ήταν τοποθετημένες στα φτερά κοντά στην άτρακτο και έτσι ο αέρας που έβγαινε από τις μηχανές δημιουργούσε προβλήματα στο σύστημα της ουράς του αεροπλάνου. Οι σχεδιαστές, που γνώριζαν και ένιωθαν το νόημα του τύπου που εξετάσαμε, έστρεψαν τις μηχανές κατά μια μικρή γωνία *a* (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Προστασία της ουράς.

Το σύστημα της ουράς σώθηκε (η απόκλιση του ρεύματος του αέρα είναι ανάλογη προς την *a*) ενώ η καθαρή ώθηση παρέμεινε πρακτικά η ίδια (η απώλεια ισούται περίπου με $a^2/2$, όπου το *a* μετριέται σε ακτίνια —για μια γωνία 3° έχουμε απώλεια μόνο του 1/800 της ισχύος).

Ας επιστρέψουμε στον Κέπλερ. Στην αρχή νόμισε πως η τροχιά του Άρη ήταν κυκλική. Όμως, ο Ήλιος ήταν απομακρυσμένος από το κέντρο της τροχιάς κατά μια απόσταση ίση περίπου με το 0,1 της ακτίνας της τροχιάς. Ο Κέπλερ δεν σταμάτησε σε αυτό το αποτέλεσμα (που από μόνο του ήταν αξιοσημείωτο) αφού γνώριζε τη θεωρία των κωνικών τομών. Ο Κέπλερ ήξερε ότι μια έλλειψη με μικρή εκκεντρότητα μοιάζει πάρα πολύ με κύκλο. Εξέτασε, λοιπόν, τη συμπεριφορά των υπόλοιπων μικρών διαφορών της τροχιάς από τον κύκλο. Έχει ενδιαφέρον ότι αυτή η εξακρίβωση ήταν δυνατή εξαιτίας της εκπληκτικής ακρίβειας των παρατηρήσεων του Τύχωνος Μπράχε, που είχαν γίνει διά γυμνού οφθαλμού. Εκείνη την εποχή οι αστρονόμοι δεν εμπιστεύονταν ιδιαίτερα τα τηλεσκόπια, αλλά και αργότερα, στο τέλος του 17ου αιώνα, δεν είχε ακόμη αποδειχτεί ότι οι παρατηρήσεις μέσω τηλεσκοπίου μπορούσε να είναι εξίσου ακριβείς με όσες γίνονταν διά γυμνού οφθαλμού.

Νέες φυσικές θεωρίες ξεκινούν συχνά με πιο λεπτομερή μελέτη του τελευταίου σημαντικού ψηφίου των προηγουμένων θεωριών. Αν ο Κέπλερ είχε μείνει ικανοποιημένος με μια έκκεντρη κυκλική τροχιά, ή αν οι παρατηρήσεις του Τύχωνος Μπράχε ήταν λιγότερο ακριβείς, η ανάπτυξη της ουράνιας Μηχανικής (και, ίσως, όλης της θεωρητικής Φυσικής) θα είχε καθυστερήσει, ίσως και για αιώνες.

Η τροχιά του Άρη αποδείχτηκε ελαφρά πεπλατυσμένη κατά τη διεύθυνση που είναι κάθετη στη διάμετρό της η οποία διέρχεται από τον Ήλιο κατά το μισό περίπου τοις εκατό του μήκους της —δηλαδή κατά $e^2/2$. Αυτό οδήγησε τον Κέπλερ στην ιδέα των ελλειπτικών πλανητικών τροχιών.

Αν οι μαθηματικοί δεν είχαν επεξεργαστεί νωρίτερα τη θεωρία των κωνικών τομών, συγκεκριμένοι θεμελιώδεις νόμοι της φύσης δεν θα είχαν ανακαλυφθεί έγκαιρα, η σύγχρονη επιστήμη και τεχνολογία δεν θα είχαν αναπτυχθεί, και ο πολιτισμός μας θα είχε παραμείνει στο μεσαιωνικό επίπεδο. Ή, τουλάχιστον, τα μονοπάτια της ιστορίας θα ήταν εντελώς διαφορετικά.

Ο Κέπλερ ανακάλυψε τους νόμους της κίνησης των πλανητών, αλλά το γεγονός ότι οι πλανήτες ακολουθούν πραγματικά ελλειπτικές τροχιές το απέδειξε ο Ισαάκ Νεύτων στο βιβλίο του *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας* (1687), στο οποίο έθεσε τις βάσεις όλης της σύγχρονης θεωρητικής Φυσικής. Ο Νεύτων συμπέρανε ότι οι πλανητικές τροχιές είναι ελλείψεις βασιζόμενος στο νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας. Σημειώστε ότι αυτό το πρόβλημα το είχε εξετάσει προηγουμένως ένας σύγχρονός του, ο Ρόμπερτ Χουκ. Ο Χουκ μελέτησε το νόμο της κίνησης ενός σώματος μέσα σ' ένα πεδίο βαρύτητας υποθέτοντας ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης. Ολοκληρώνοντας προσεγγιστικά την εξίσωση της κίνησης, ο Χουκ σχεδίασε τροχιές και ανακάλυψε ότι έμοιαζαν με ελλείψεις. Η επιστημονική του τιμιότητα δεν του επέτρεψε να τις ονομάσει ελλείψεις, και ούτε μπορούσε να αποδείξει ότι ήταν. Έτσι ο Χουκ τις ονόμασε ελλειψοειδή και πρότεινε στον Νεύτωνα να αποδείξει ότι ο πρώτος νόμος του Κέπλερ (σύμφωνα με τον οποίο οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις) προκύπτει από το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου. Ο Νεύτων, ο οποίος γνώριζε πολύ καλά την αρχαία θεωρία των κωνικών τομών, αντιμετώπισε αυτή την πρόκληση μέσω περίπλοκων κατασκευών που βασίζονταν στη στοιχειώδη γεωμετρία.

Στη συνέχεια, όλο και πιο συχνά άρχισαν να εμφανίζονται στην επιστημονική έρευνα καμπύλες δεύτερου βαθμού. Γιατί αυτό το μοντέλο αποδείχτηκε τόσο πλούσιο σε εφαρμογές; Γιατί, ιδιαίτερα, το μοντέλο των κωνικών τομών περιγράφει την κίνηση των πλανητών; Είναι ένα μυστήριο. Ένα αίνιγμα. Δεν υπάρχει απάντηση σε αυτή την ερώτηση. Πιστεύουμε στη δύναμη της λογικής επιστήμης. Ο Νεύτων είδε εδώ μια απόδειξη της ύπαρξης του Θεού: «Ο πανέμορφος συνδυασμός του Ήλιου, των πλανητών και των κομητών, δεν θα μπορούσε να προέλθει παρά μόνο από τη θέληση και τη δύναμη του κραταιότερου και σοφότερου πλάσματος. (...) Μας κυβερνά όχι ως ψυχή του κόσμου αλλά ως κυρίαρχος του Σύμπαντος, και λόγω της ανωτερότητάς του πρέπει να φέρει το όνομα του Παντοδύναμου Θεού».

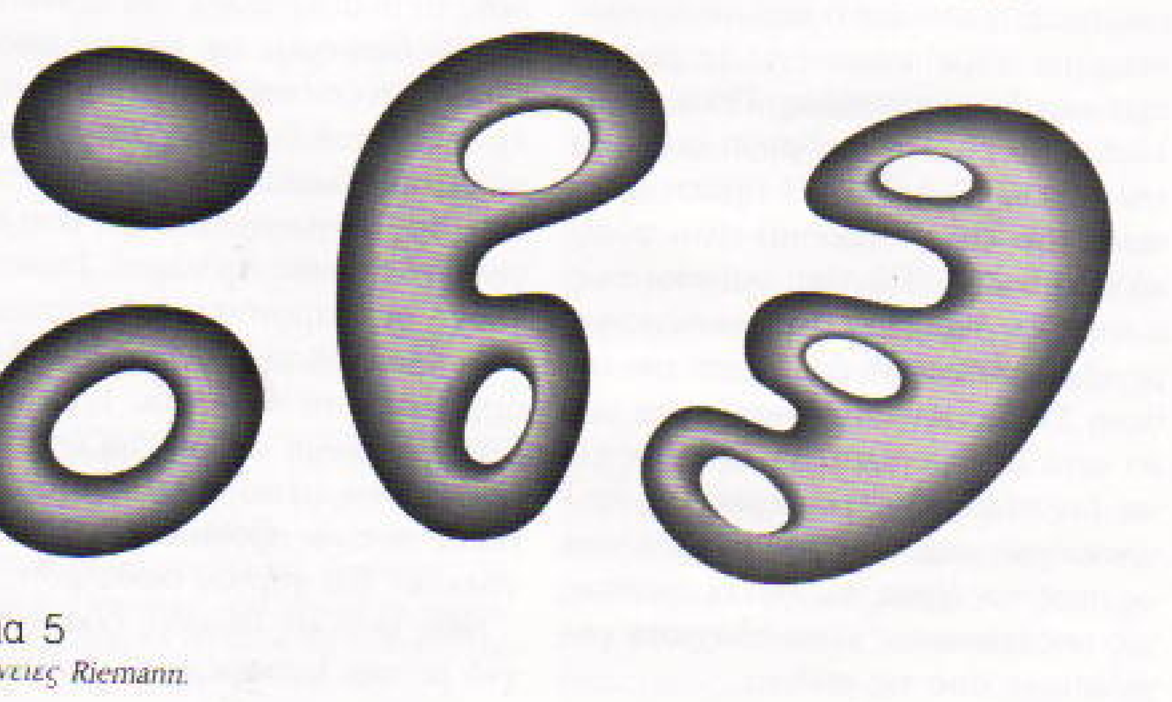
Οι σύγχρονοι εξερευνητές του Διαστήματος χρησιμοποιούν και αυτοί τις ιδιότητες των κωνικών τομών όταν σχεδιάζουν την εκτόξευση των δορυφόρων. Επομένως, η θεμελίωση της μοντέρνας Φυσικής και της επιστημονικής και τεχνολογικής επανάστασης ξεκίνησε με το κλασικό έργο του Απολλώνιου. Και όμως, αυτός ο ξακουστός Έλληνας όταν ερευνούσε τις κωνικές τομές σκεφτόταν μόνο την κομψότητα του μαθηματικού μοντέλου.

Υπολογιστές, κβαντική μηχανική και επιφάνειες Riemann

Ένα ακόμη παράδειγμα είναι η ιστορία της δημιουργίας των υπολογιστών. Πολύ πριν κατασκευαστεί ο πρώτος υπολογιστής, οι δύο βασικές μαθηματικές συνιστώσες του ήταν ήδη γνωστές: η μαθηματική λογική (και συγκεκριμένα η άλγεβρα Boole, που δημιουργήθηκε από τον George Boole (1815-1864), καθώς και ο σχηματικός σχεδιασμός μιας υπολογιστικής μηχανής. Η πρώτη αθροιστική μηχανή σχεδιάστηκε από τον γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal το 1641.

Ένα τρίτο παράδειγμα είναι η ανάπτυξη της κυματομηχανικής από τον Erwin Schrödinger. Την εποχή που ο Schrödinger ασχολήθηκε με το πρόβλημα του κβαντομηχανικού ταλαντωτή, η κβαντομηχανική των πινάκων του Werner Heisenberg ήταν ήδη γνωστή. Δεν ήταν σαφές το πώς μπορούσε να επιτευχθεί ένα φάσμα διακριτό και όχι συνεχές από τη θεωρία των κυμάτων σε όλο το χώρο. Ο Schrödinger βοηθήθηκε από τον φημισμένο γερμανό μαθηματικό Hermann Weyl. Χωρίς τα αποτελέσματα του Weyl στη φασματική θεωρία επί ενός απείρου διαστήματος, ίσως δεν θα είχαμε ακούσει ποτέ για τη διάσημη εξίσωση Schrödinger. Εκτυλίσσεται ξανά η ίδια ιστορία: ένας μαθηματικός εμφανίζεται με μια θεωρία έτοιμη να εφαρμοστεί —στην περίπτωσή μας, οι οριακές συνθήκες στο άπειρο— και το μόνο που απομένει είναι η χρησιμοποίησή της.

Το επόμενο παράδειγμα είναι οι επιφάνειες Riemann. Τις εισήγαγε ο γερμανός μαθηματικός Bernard Riemann στα μέσα του προηγούμενου αιώνα. Αυ-



Σχήμα 5
Επιφάνειες Riemann.

τές οι επιφάνειες δημιουργούνται αν κόψουμε και ενώσουμε ένα πλήθος επιπέδων (που μπορεί να είναι και άπειρο) μιας μιγαδικής μεταβλητής. Τοπολογικά, μια τέτοια επιφάνεια μπορεί να είναι σφαίρα, σφαίρα με λαβές (Σχήμα 5), κ.ο.κ. Η θεωρία των επιφανειών Riemann αναπτύχθηκε ως τμήμα της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων. Αργότερα αποδείχτηκε χρήσιμη σε εντελώς διαφορετικά προβλήματα. Για παράδειγμα, τα ελλειπτικά ολοκληρώματα δέχονται μια απλή γεωμετρική θεώρηση πάνω σε επιφάνειες Riemann.

Ο Karl Gustav Jacobi απέδειξε ότι οι επιφάνειες Riemann κυριαρχούν σε δύο ακόμη προβλήματα:

1. Στον καθορισμό του πλήθους των αναπαραστάσεων ενός δεδομένου ακεραίου ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων $N = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$.

2. Στη μελέτη των ταλαντώσεων ενός εκκρεμούς, που οδηγεί στη διαφορική εξίσωση

$$x'' = -\text{ημ}x.$$

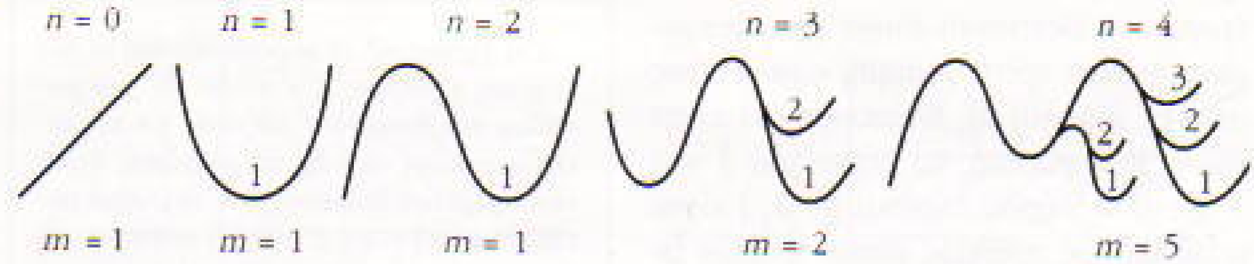
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και απαρίθμηση φιδιών

Ως πέμπτο παράδειγμα, ας χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο τρίγωνο Bernoulli-Euler:

1
1 0
0 1 1
2 2 1 0
0 2 4 5 5
16 16 14 10 5 0
0 16 32 46 56 61 61
272 272 256 224 178 122 61 0

Το τρίγωνο αυτό συμπληρώνεται ως εξής: στη γραμμή 0 γράφουμε το 1. Κάθε περιττή γραμμή (πρώτη, τρίτη, κ.ο.κ.) συμπληρώνεται από τα δεξιά γράφοντας σε κάθε θέση το άθροισμα όλων των αριθμών της προηγούμενης γραμμής που βρίσκονται δεξιά από αυτή τη θέση. Οι άρτιες γραμμές συμπληρώνονται με τον ίδιο τρόπο αλλά από τα αριστερά.

Το θαύμα που κρύβεται σε αυτό το τρίγωνο ανακαλύφθηκε πριν από εκατό χρόνια. Το κλειδί του μυστηρίου βρίσκεται σε τούτο το «απλό» θεώρημα (οι μαθηματικοί συχνά κρύβουν το γεγονός ότι τα πάντα είναι πολύ απλά):



Σχήμα 6
Ταξινόμηση των φιδιών: n είναι το πλήθος των καμπών, m είναι το πλήθος των τύπων φιδιών

$$\text{τεμ}t + \text{εφ}t = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!},$$

όπου οι συντελεστές k_n είναι οι αριθμοί που βρίσκονται στις πλάγιες πλευρές του τριγώνου Bernoulli-Euler (k_n είναι ο μη μηδενικός ακραίος αριθμός της γραμμής n). Προκύπτει ότι οι συντελεστές κατά μήκος της αριστερής πλευράς μάς δίνουν το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της συνάρτησης εφx (είναι περιττή και έτσι το ανάπτυγμά της περιέχει μόνο περιττούς όρους):

$$a_1 = \frac{k_1}{1!} = 1, \quad a_3 = \frac{k_3}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$
$$a_5 = \frac{k_5}{5!} = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}, \ldots$$

και

$$\text{εφ}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

Παρομοίως, η δεξιά πλευρά μάς δίνει το ανάπτυγμα της συνάρτησης τεμx.

Το τρίγωνο Bernoulli-Euler μάς παρέχει την τοπολογική ταξινόμηση των πραγματικών πολυωνύμων x^{n+1} $a_1 x^n + \ldots + a_{n+1}$ των οποίων και τα n κρίσιμα σημεία (τοπικά ακρότατα) είναι πραγματικά και διαφορετικά ανά δύο.

Το γράφημα ενός τέτοιου πολυωνύμου μοιάζει με φίδι, και γι' αυτό θα το ονομάσω φίδι. Στο Σχήμα 6 βλέπετε όλους τους δυνατούς τύπους φιδιών για $n \leq 4$. Δύο φίδια ανήκουν στον ίδιο τύπο όταν είναι δυνατό να μετασχηματιστεί το ένα στο άλλο μέσω μιας ομαλής μεταβολής ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών που διατηρεί τον προσανατολισμό.[3]

3. Δηλαδή, όταν τα πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ που ορίζουν τα φίδια συνδέονται με την εξίσωση $p(x) = f(q(g(x)))$, όπου οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ έχουν θετικές παραγώγους. Μπορείτε να φανταστείτε αυτούς τους μετασχηματισμούς ως ακανόνιστη συρρίκνωση ή επιμήκυνση του επιπέδου των συντεταγμένων κατά το μήκος των αξόνων, χωρίς να το διπλώνουμε ή να το αναποδογυρίζουμε.

Θεωρήστε, για παράδειγμα, τα φίδια των πολυωνύμων 4ου βαθμού ($n = 3$). Η διαδοχή των τριών κρίσιμων σημείων θα γίνεται αναγκαστικά με τη σειρά ελάχιστο-μέγιστο-ελάχιστο. Ο τοπολογικός τύπος ενός φιδιού καθορίζεται από το κατά πόσον το τελευταίο ελάχιστο είναι χαμηλότερα ή υψηλότερα από το πρώτο. Επομένως, ο αριθμός των τύπων για $n = 3$ είναι 2.

Για τα φίδια με $n = 4$ (μέγιστο-ελάχιστο-μέγιστο-ελάχιστο), το δεύτερο μέγιστο μπορεί να βρίσκεται χαμηλότερα ή ψηλότερα από το πρώτο. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν δύο δυνατότητες για το δεύτερο ελάχιστο (χαμηλότερα ή ψηλότερα από το πρώτο ελάχιστο, αλλά πάντοτε χαμηλότερα και από τα δύο μέγιστα), ενώ στη δεύτερη περίπτωση υπάρχουν τρεις δυνατότητες. Συνολικά, έχουμε πέντε τύπους.

Αν έχετε την υπομονή να σχεδιάσετε όλα τα φίδια για $n = 5$, θα πειστείτε ότι υπάρχουν 16, ενώ για $n = 6$ υπάρχουν 61 (όλα αυτά ώς τώρα έχουμε τη δυνατότητα να τα σχεδιάσουμε). Κάθε φορά που εμφανίζεται ο αριθμός 61 του Euler σε μια ταξινόμηση, καλό είναι να ψάχνουμε να δούμε αν οι υπόλοιποι αριθμοί βρίσκονται κάπου κοντά.

Ας ταξινομήσουμε τώρα τα φίδια με βάση τις «ουρές» —δηλαδή, τα δεξιότερα κρίσιμα σημεία τους. Αριθμούμε 1, 2, ..., n και τις n κρίσιμες τιμές σε αύξουσα σειρά (από κάτω προς τα πάνω). Θα ονομάσουμε ύψος τον αριθμό ενός κρίσιμου σημείου. Τα ύψη των ουρών των φιδιών σημειώνονται στο Σχήμα 6. Για παράδειγμα, τα πέντε φίδια με $n = 4$ κατανέμονται σύμφωνα με το ύψος της ουράς τους ως εξής:

Ύψος ουράς	1	2	3	4
Αριθμός φιδιών	2	2	1	0

Αν συγκρίνουμε την κάτω γραμμή του πίνακά μας με τους αριθμούς του τριγώνου Bernoulli-Euler (συγκεκριμένα, με την τρίτη γραμμή, αριθμώντας από τη γραμμή 0), βλέπουμε ότι είναι ίδιες. Και φυσικά, το άθροισμα 2 + 2 + 1 + 0 = 5 (που ισούται με k_4) είναι ο συνολικός αριθμός τύπων φιδιών με τέσσερις καμπές.

Μπορείτε να βεβαιωθείτε ότι το πλήθος των φιδιών με διαφορετικό ύψος ουράς για κάποιον συγκεκριμένο αριθμό n καμπών θα συμπίπτει πάντοτε με την αντίστοιχη γραμμή του τριγώνου (σε κάποια σειρά). Αφού παρατηρήσουμε αυτό το (αρκετά απρόοπτο) γεγονός (κάτι που θα χρειαστεί αναγκαστικά αρκετή πειραματική εργασία —δηλαδή, σχεδιασμό φιδιών), μπορούμε να αποδείξουμε ότι η κατανομή των φιδιών με βάση το ύψος της ουράς ακολουθεί τον αναδρομικό νόμο που ορίζει το τρίγωνο Bernoulli-Euler.[4]

Ο αναλυτικός τύπος

$$K(t) = \text{τεμ}\,t + \text{εφ}\,t$$

όπου ,

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!},$$

μπορεί να αποδειχτεί ως εξής:

Πάρτε ένα τυχαίο φίδι με $n + 1$ καμπές, $n \geq 1$. Διαλέξτε το μεγαλύτερο τοπικό του μέγιστο και τραβήξτε το προς τα πάνω ώς το άπειρο. Έτσι το φίδι μας θα χωριστεί σε δύο κοντύτερα φίδια, ενώ το πλήθος των κρίσιμων σημείων θα μειωθεί κατά ένα. Παρομοίως, μπορούμε να κατεβάσουμε το μικρότερο τοπικό ελάχιστο στο $-\infty$ (και να αναποδογυρίσουμε το αριστερό τμήμα για να γίνει κανονικό φίδι.)

Αυτή η αναγωγή μας οδηγεί στην επόμενη αναδρομική σχέση για $n \geq 1$:

$$2k_{n+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} k_i k_{n-1}.$$

Εδώ το γινόμενο $k_i k_{n-i}$ απαριθμεί όλα τα δυνατά ζεύγη «υποφιδιών». Ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{i}$ φροντίζει για όλες τις δυνατές αμοιβαίες μεταθέσεις των κρίσιμων τιμών στα δύο τμήματα (οποιοιδήποτε i αριθμοί, επιλεγμένοι από τους 1, 2, ..., n, μπορεί να είναι τα ύψη των καμπών στο αριστερό, για παράδειγμα, τμήμα ως προς όλες τις n καμπές σ' ολόκληρο το φίδι). Ο παράγοντας 2 στα αριστερά οφείλεται στους δύο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να κόψουμε κάθε φίδι με $n + 1$ καμπές (και να υπολογιστεί επομένως στο δεξιό μέλος). Για $n = 0$, πρέπει να διαγράψουμε τον παράγοντα 2 (γιατί;).

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως διαφορική εξίσωση ως προς τη συνάρτηση K:

$$2\frac{dK}{dt} = 1 + K^2$$

(δείτε αν μπορείτε να το επαληθεύσετε απευθείας). Από αυτήν συνεπάγεται ότι $K(t) = \text{τεμ}\,t + \text{εφ}\,t$ [η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την εξίσωση και την αρχική συνθήκη $K(0) = k_0 = 1$].

Από τη βέλτιστη αλιεία στις βέλτιστες μεταρρυθμίσεις

Και το τελευταίο παράδειγμα. Ας εξετάσουμε ένα μοντέλο της μεταβολής ενός πληθυσμού ζώων (ας πούμε, των ψαριών μιας λίμνης ή του ωκεανού). Στην απλούστερη περίπτωση η κατάσταση περιγράφεται από το μοντέλο $x' = kx$, όπου $x = x(t)$ είναι το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t —με άλλα λόγια, ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος (με συντελεστή αναλογίας k) με τον ίδιο τον πληθυσμό. Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι η εκθετική συνάρτηση

$$x(t) = x(0)e^{kt}.$$

Στην πραγματικότητα, όμως, οι συνθήκες διαβίωσης ενός πληθυσμού χειροτερεύουν όταν το x αυξάνει και ο συντελεστής k μειώνεται. Θέτοντας, για παράδειγμα, $k = a - bx$, παίρνουμε τη λεγόμενη λογιστική εξίσωση. Στην περίπτωση που $a = b = 1$, οι λύσεις της τείνουν στο σταθερό επίπεδο πληθυσμού $x = 1$ (Σχήμα 7).[5]

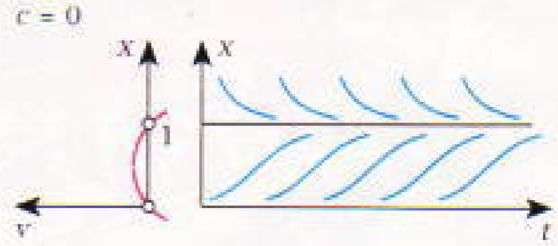
Αν εισαγάγουμε επιπλέον μια συγκεκριμένη ποσόστωση c σύλληψης και κατανάλωσης ενός τμήματος του πληθυσμού, η εξίσωση θα γίνει κάπως πιο περίπλοκη: $x' = x - x^2 - c$. Αυτό είναι το απλούστερο μοντέλο αλιείας.

Για ποσόστωση $c < 1/4$, προκύπτει και πάλι μια στάσιμη λύση (Σχήμα 8). Όταν $c > 1/4$, προκύπτει ταχύτατη εξολόθρευση (Σχήμα 9). Όταν $c = 1/4$, η στάσιμη κατάσταση βρίσκεται στο επίπεδο 1/2 (Σχήμα 10). Αυτή η κατάσταση, όμως, είναι ασταθής: μικρές τυχαίες αποκλίσεις οδηγούν στην καταστροφή —στην εκμηδένιση του πληθυσμού. Πώς μπορούμε να πετύχουμε τη βέλτιστη αλιεία και παράλληλα να διατηρήσουμε σταθερό το επίπεδο του πληθυσμού; Η απάντηση είναι το να μην εφαρμόσουμε ένα σταθερό πλάνο αλιείας αλλά να εισαγάγουμε την ανάδραση —δηλαδή, μια ποσόστωση ανάλογη με τις πραγματικές διαθέσιμες ποσότητες. Στο μοντέλο με ανάδραση $x' = x - x^2 - kx$, η βέλτιστη τιμή του συντελεστή είναι $k = 1/2$. Αν επιλέξουμε αυτό το k, όλες οι λύσεις σταθεροποιούνται στο επίπεδο $x_0 = 1/2$, πράγμα που σημαίνει ότι ο μέσος όρος των αλιευμάτων για μεγάλη χρονική περίοδο θα είναι $kx_0 = 1/4$ (Σχήμα 11). Αυτή η ποσότητα αλιευμάτων είναι η ίδια με τη μεγαλύτερη ποσότητα που

Στα Σχήματα 7-11 παρουσιάζονται οι λύσεις της εξίσωσης $x' = x - x^2 - c$ του μοντέλου πληθυσμιακής αύξησης. Οι κόκκινες καμπύλες στο αριστερό μέρος όλων των σχημάτων απεικονίζουν το ρυθμό μεταβολής $v(x) = x - x^2 - c$ (το σύστημα συντεταγμένων έχει περιστραφεί για ευκολία). Οι μπλε καμπύλες στα δεξιά είναι οι λύσεις. Ο πληθυσμός αυξάνει στα σημεία όπου $v(x) > 0$, μειώνεται για $v(x) < 0$, και είναι σταθερός στα σημεία όπου $v(x) = 0$.

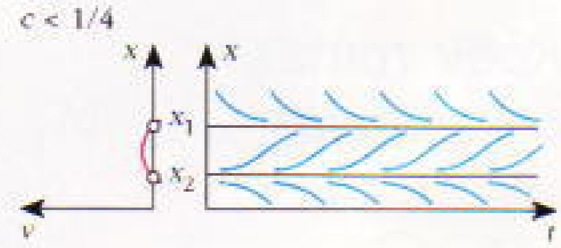
4. Πάρτε ένα φίδι με n καμπές, ισιώστε την ουρά του και γυρίστε την ανάποδα έτσι ώστε να πάρετε ένα νέο φίδι με $n - 1$ καμπές. Έστω ότι το ύψος της ουράς του πρώτου φιδιού είναι h. Αφού το τελευταίο κρίσιμο σημείο ενός φιδιού είναι πάντοτε ελάχιστο, το ύψος της αμέσως πριν από την τελευταία καμπή (που είναι μέγιστο) του πρώτου φιδιού είναι μεγαλύτερο από το h. Η πράξη μας μετατρέπει αυτό το σημείο στο τελευταίο κρίσιμο σημείο του δεύτερου φιδιού, και επομένως το ύψος της ουράς του δεύτερου φιδιού είναι κάποιος αριθμός ανάμεσα στο 1 και το $n - h$. Αυτό μας οδηγεί στην εξής σχέση για το πλήθος των φιδιών $s(n, h)$ με n καμπές και με ύψος ουράς h: $s(n, h) = s(n - 1, 1) + s(n - 1, 2) + ... + s(n - 1, n - h)$. Αν κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο από αυτούς τους αριθμούς έτσι ώστε η γραμμή 0 να αποτελείται από έναν μοναδικό αριθμό, τον $s(1, 1) = 1$, ενώ η $(n - 1)$ γραμμή είναι η $s(n, 1)$, $s(n, 2)$, ..., $s(n, n)$ για κάθε άρτιο n, και η $s(n, n)$, $s(n, n - 1)$, ..., $s(n, 1)$ για κάθε περιττό n, με $n \geq 2$, θα διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι αυτή ακριβώς που χρησιμοποιήσαμε για να συμπληρώσουμε το τρίγωνο Bernoulli-Euler. Ειδικά βλέπουμε ότι το συνολικό πλήθος φιδιών με n καμπές είναι ίσο με $s(n, 1) +, ..., s(n, n) = s(n + 1, 1) = k_n$.

5. Μη σας εκπλήσσει αυτό το παράξενο πληθυσμιακό μέγεθος: είναι απλώς ένα μοντέλο, το οποίο όμως μας δίνει μια αρκετά σωστή ποιοτική εικόνα της κατάστασης.



Σχήμα 7

Σταθεροποίηση του πληθυσμού. Όλες οι τροχιές τείνουν στη σταθερή λύση $x = 1$.



Σχήμα 8

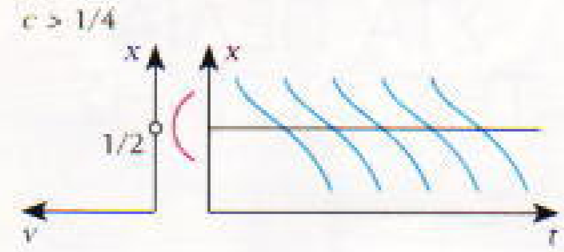
Μοντέλο αλιείας με «μετριοπαθές» ψάρεμα. Αν ο αρχικός πληθυσμός $x(0) < x_2$, τότε ο πληθυσμός εξολοθρεύεται. Οι τροχιές με $x(0) > x_2$ τείνουν όλες στο $x = x_1$.

επιτρέπει η αλιεία με σταθερό πλάνο.

Σ' αυτή την περίπτωση είναι αδύνατη η μεγαλύτερη παραγωγικότητα. Όταν όμως εφαρμόζουμε ένα σταθερό πλάνο, το σύστημα χάνει τη σταθερότητά του και οδηγείται αναπόφευκτα στην αυτοκαταστροφή, ενώ η ανάδραση το σταθεροποιεί και οι μικρές μεταβολές του συντελεστή k δεν οδηγούν σε κατάρρευση.

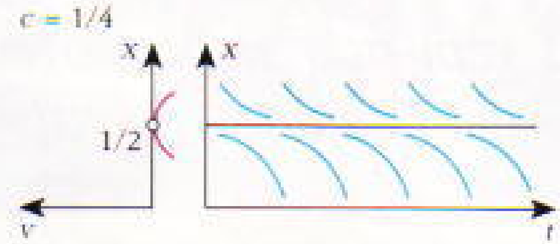
Θα ήταν χρήσιμο οι άνθρωποι που παίρνουν κρίσιμες αποφάσεις να είναι εξοικειωμένοι με παρόμοια μοντέλα και άλλους κανόνες επιλογής στρατηγικών κοινωνικών επιλογών.

Απλούστερες μαθηματικές ιδέες —όπως το γεγονός ότι οι νόμοι της φύσης περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις— μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε φαινομενικά παράδοξες καταστάσεις στη ζωή μας. Για πολλές δεκαετίες για την πορεία της ρωσικής οικονομίας αποφάσιζαν οι ειδικοί: η στρατιωτικοποίηση, η μονοπωλιακή πρακτική και η γενική ανικανότητα της ηγεσίας είχαν αποτέλεσμα να είναι σταθερά αρνητική η δεύτερη παράγωγος (δηλαδή, να επιβραδύνεται σταθερά ο ρυθμός της ανάπτυξης). Αυτό δεν τρόμαζε πραγματικά όσους δεν καταλάβαιναν τα Μαθηματικά, διότι η πρώτη παράγωγος ήταν ακόμη θετική (η κοινωνική ευημερία εξακολουθούσε να βελτιώνεται). Οι μαθηματικοί, όμως, γνωρίζουν ότι σταθερά αρνητική παράγωγος, ακόμη και μεγαλύτερης τάξης, έχει αποτέλεσμα να γίνει τελικά αρνητική και η πρώτη παράγωγος —δηλαδή, οδηγεί σε μείωση της παραγωγής και του πλούτου της κοινωνίας. Γνώριζαν επίσης ότι αυτή η διαδικασία παρακμής, μόλις γίνει παρατηρήσιμη, θα επιταχυνθεί. Λόγω της αδράνειας του συστήματος, δεν υπάρχουν μέσα για τη στιγμιαία μεταβολή της κατάστασής του σε αυτό το σημείο, διότι οι οποιεσδήποτε μεταβολές επηρεάζουν μόνο το πρόσημο μιας παραγώγου ανώτερης τάξης (στην περίπτωση της δικής μας *περεστρόικα*, την τρίτη ή και την τέταρτη παράγωγο). Επομένως, η οικονομική υποβάθμιση που παρατηρούμε οφείλεται σε παλαιά σφάλματα, που έγιναν την εποχή της αύξησης της παραγωγής, παρά σε σημερινές λανθασμένες αποφάσεις. Δυστυχώς, είναι πολύ δύσκολο να εξηγήσουμε αυτά τα στοιχειώδη μαθηματικά γεγονότα σε κατεστραμμένους οικονομικά ανθρώπους που έχουν την τάση να αποδώσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν σε αποτυχημένες μεταρρυθμίσεις. Κάθε μεταρρύθμιση οδηγεί υποχρεωτικά σε επιδείνωση, ακόμη και αν ακολουθεί τα απολύτως σωστά βήματα.



Σχήμα 9

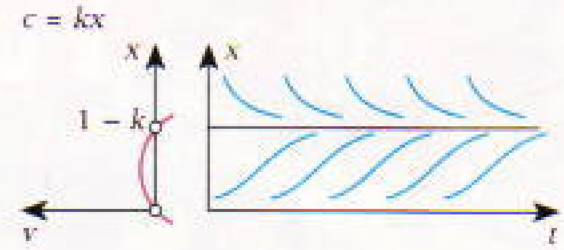
Υπερβολική αλιεία. Ο πληθυσμός εξολοθρεύεται πάντοτε.



Σχήμα 10

Καταστροφή του πληθυσμού από το βέλτιστο πλάνο. Οι τροχιές στο πεδίο τιμών $x < 1/2$ οδηγούν σε εξαφάνιση. Αυτές όπου $x > 1/2$ οδηγούν στη σταθερή κατάσταση $x = 1/2$, αλλά μακροπρόθεσμα, και εξαιτίας μικρών τυχαίων διαταραχών, συναντούν επίσης το επικίνδυνο πεδίο τιμών.

Ο σχεδιασμός στη χώρα μας απέβλεπε συνήθως στη βελτιστοποίηση της παραγωγής για τα επόμενα 20 χρόνια («διάστημα αρκετά μεγάλο για τη διάρκεια της ζωής μας»). Σε έναν μαθηματικό είναι φανερό ότι ο βέλτιστος σχεδιασμός αυτού του τύπου θα καταλήξει στην πλήρη καταστροφή όλων των διαθέσιμων πηγών κατά το τέλος αυτής της περιόδου (διαφορετικά, οι πηγές που θα απέμεναν θα μπορούσαν να είχαν χρησιμοποιηθεί και, επομένως, το σχέδιο δεν θα ήταν βέλτιστο). Ευτυχώς, πάντοτε γίνονταν «διορθώσεις» και τα πλάνα δεν εκπληρώνονταν ποτέ. Οι βασικές τάσεις, όμως, παρέμεναν, και έτσι, σε γενικές γραμμές, με το ξεκίνημα της *περεστρόικα* είχαμε καταναλώσει οτιδήποτε διαθέταμε.



Σχήμα 11

Σταθεροποίηση του συστήματος μέσω ανάδρασης. (Συγκρίνετε με το Σχήμα 7.)

Οι προσπάθειες να δημιουργήσουμε λεπτομερειακά, «μέρα-με-τη-μέρα» προγράμματα οικονομικών μεταρρυθμίσεων, μοιάζουν με τις προσπάθειες να σχεδιάσουμε ολόκληρη την οικονομία και δεν διαφέρουν από το να προσπαθούμε να δώσουμε λεπτό προς λεπτό οδηγίες σε κάποιον που οδηγεί από τη Μόσχα στην Πετρούπολη: «Την τάδε χρονική στιγμή, στρίψε δεξιά. Τη δείνα στιγμή, στρίψε αριστερά...» Η επιτυχία μπορεί να έρθει μόνο μέσω της ανάδρασης. Δηλαδή, αυτό που χρειάζεται δεν είναι ένα πρόγραμμα (τροχιά) αλλά, με μαθηματικούς όρους, ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο καταστάσεων του συστήματος, ένας μηχανισμός λήψης αποφάσεων με βάση τις απαιτήσεις της κατάστασης που έχει επιτευχθεί, και όχι με βάση το ημερολόγιο.

Μερικά από αυτά τα σημεία πρέπει να τα θυμόμαστε και όταν έρχεται η στιγμή να μεταρρυθμίσουμε το εκπαιδευτικό σύστημα. Τα παραδείγματά μας δείχνουν ότι «δεν υπάρχει τίποτε πιο πρακτικό από μια καλή θεωρία». Το ουσιώδες για τους εκπαιδευτικούς δεν είναι να κυνηγούν τις πρακτικές ανάγκες της στιγμής αλλά να διακρίνουν σταθερά τους μακροπρόθεσμους στόχους της κοινωνίας. ■

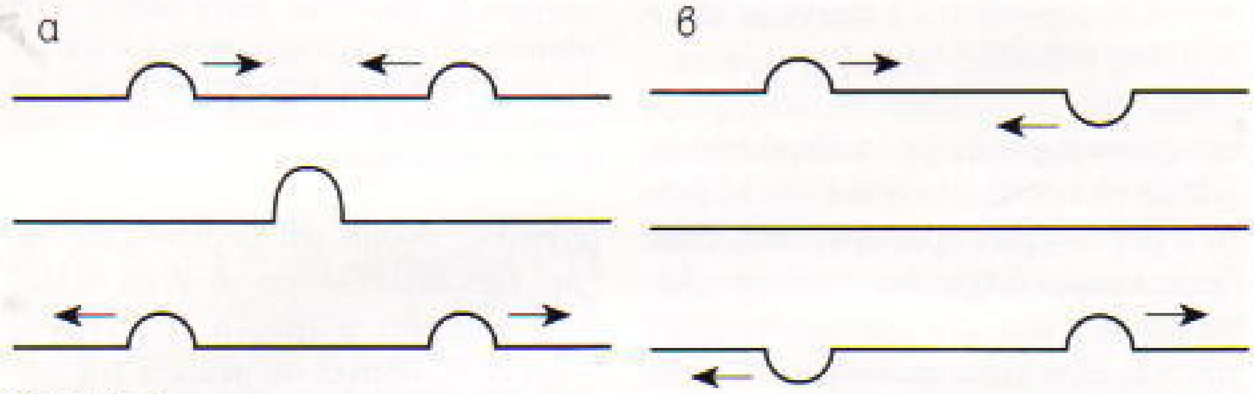
Ανερχόμενοι αστέρες

«Τι ήχο κάνει ένα χέρι που χειροκροτεί;» Κοάν του Ζεν
«Μπορούν δύο ήχοι να δημιουργήσουν σιωπή;» Πρόκληση της φυσικής

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

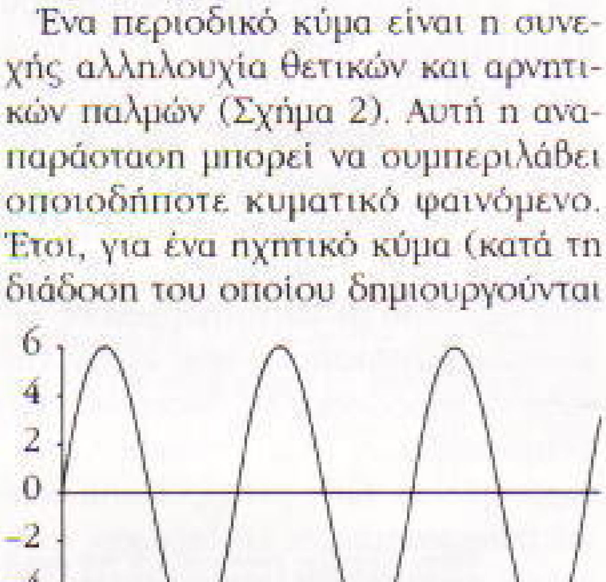
Μια καλή ευκαιρία να γνωρίσουμε τις ιδιότητες των κυμάτων είναι να παρακολουθήσουμε αθλητικές συναντήσεις. Και δεν αναφερόμαστε στα αγωνίσματα της κολύμβησης, του πόλο ή των καταδύσεων, αλλά στα «κύματα» των κερκίδων. Αυτά ακριβώς μπορούν να μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε την ιδιότητα των κυμάτων που περισσότερο απ' όλες τις άλλες εναντιώνεται στην κοινή αντίληψη: το κύμα κινείται, όχι όμως και το μέσο. Βλέπουμε, λοιπόν, συχνά μια ομάδα θεατών, που κάθονται σε κάποιο σημείο μιας κερκίδας του σταδίου, να σηκώνεται ξαφνικά και κατόπιν να ξανακάθεται. Αυτό δίνει το σύνθημα στη γειτονική ομάδα θεατών να σηκωθεί και να ξανακαθίσει, έπειτα να ακολουθήσει η επόμενη ομάδα, κ.ο.κ. Ενώ το ανθρώπινο κύμα κινείται γύρω γύρω στο στάδιο, ουδείς άνθρωπος μετακινείται σ' αυτή την κατεύθυνση — δηλαδή, οι θεατές μένουν στις θέσεις τους. Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι πρόσεξε αυτή την κυματική ιδιότητα στο νερό και υπογράμμισε ότι το κύμα φεύγει ταχύτατα από τον τόπο της δημιουργίας του ενώ το νερό όχι.

Ένα ενδιαφέρον κυματικό φαινόμενο που δεν είναι εύκολο να το παρατηρήσουμε στις κερκίδες ενός σταδίου είναι η συμβολή. Τι συμβαίνει όταν συναντιούνται δύο κύματα; Ένα πρώτο βήμα για να κατανοήσουμε το φαινόμενο θα ήταν η παρατήρηση δύο παλμών σε μια χορδή. Αυτό που προσέχει κάποιος είναι πως όταν συναντιούνται τα όρη δύο παλμών, δημιουργείται στιγμιαία ένα υψηλό όρος (Σχήμα 1α). Κάτι εντυπωσιακότερο, ίσως, είναι ότι όταν συναντηθεί το όρος ενός παλμού (θετικός παλμός) με την κοιλάδα ενός άλλου (αρνητικός παλμός) μπορεί να υπάρξει ένα σημείο της χορδής που δεν θα κινηθεί καθόλου. Στο συγκεκριμένο σημείο είναι σαν να μην πέρασε κανείς παλμός (Σχήμα 1β).



Σχήμα 1

Ένα περιοδικό κύμα είναι η συνεχής αλληλουχία θετικών και αρνητικών παλμών (Σχήμα 2). Αυτή η αναπαράσταση μπορεί να συμπεριλάβει οποιοδήποτε κυματικό φαινόμενο. Έτσι, για ένα ηχητικό κύμα (κατά τη διάδοση του οποίου δημιουργούνται πυκνώσεις και αραιώσεις αέρα), τα όρη μπορούν να αναπαριστούν τα πυκνώματα και οι κοιλάδες τα αραιώματα. Η σειρά των παρακάτω διαγραμμάτων μας δείχνει το αποτέλεσμα της συμβολής δύο όμοιων κυμάτων που διαδίδονται στην ίδια χορδή. Όπως διαπιστώνετε, λόγω της υπέρθεσης των κυμάτων κάποια σημεία της χορδής υπόκεινται σε ταλαντώσεις με *μεγάλες* απομακρύνσεις ενώ ορισμένα άλλα δεν παρουσιάζουν *καμία* απομάκρυνση (βλ. Σχήμα 3). Τα σημεία στα οποία το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο ονομάζονται *κοιλίες* (ή αντιδεσμοί) ενώ εκείνα όπου το πλάτος της ταλάντωσης είναι μηδενικό ονομάζονται *δεσμοί*.

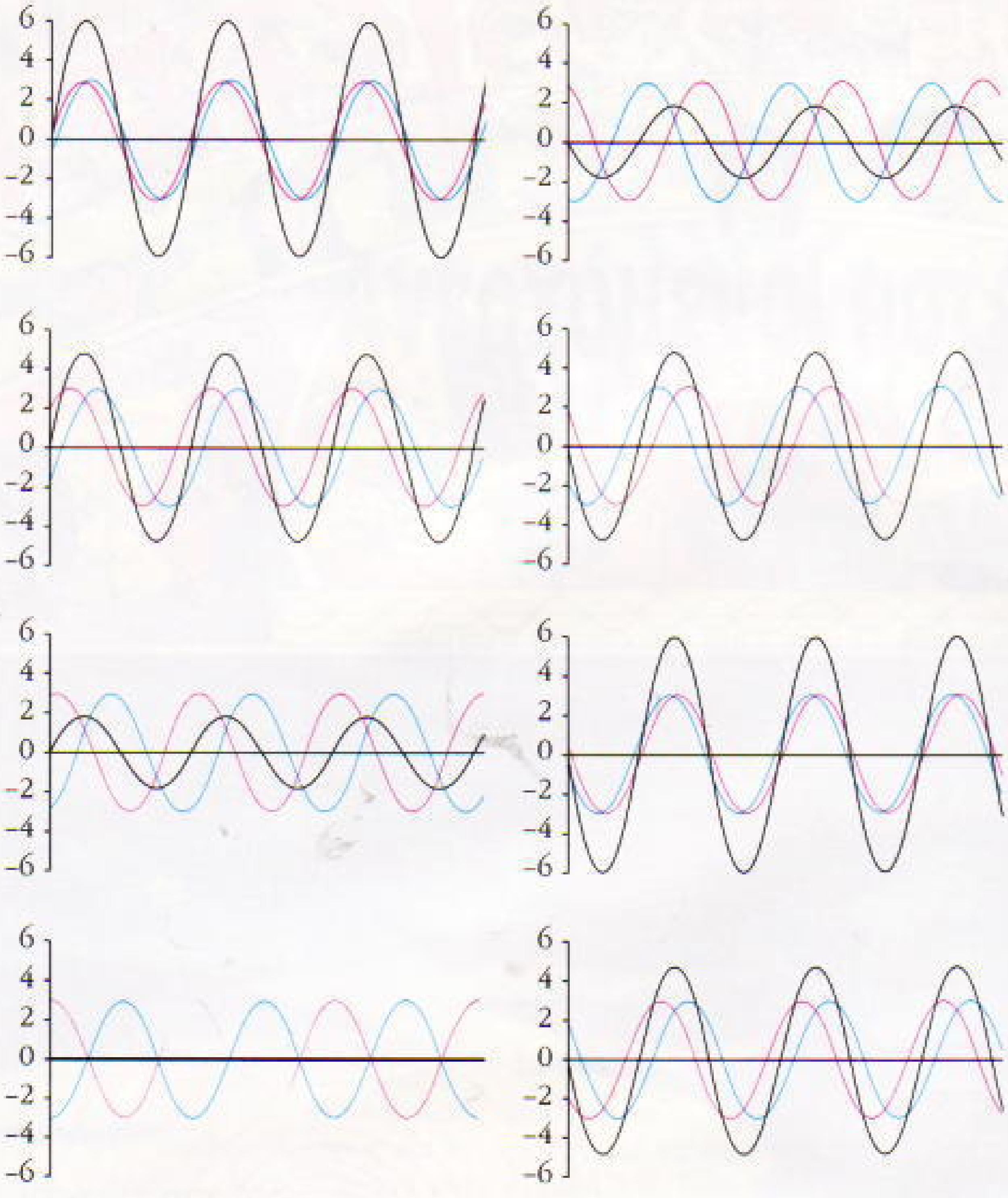


Σχήμα 2

Προφανώς, και η συμβολή των ηχητικών κυμάτων είναι δυνατό να δημιουργήσει δεσμούς. Μια από τις δουλειές των μηχανικών ακουστικής χώρων, λοιπόν, είναι να εξασφαλίσουν ότι σε μια καινούργια αίθουσα συναυλιών δεν θα υπάρχουν σημεία στα οποία η συμβολή των πολλών εξ ανακλάσεων ήχων θα έχει αποτέλεσμα να μην ακούγονται κάποια στοιχεία της

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


SOUNDS OF SILENCE IN STEREO
REFLECTION
INTERFERENCE
tom bunk



Σχήμα 3

μουσικής. Η μελέτη της ακουστικής ενός χώρου είναι ταυτόχρονα τέχνη και επιστήμη. Κατά ένα μέρος είναι ευτυχής σύμπτωση και κατά ένα μέρος μυστήριο το γεγονός ότι το Κάρνεγκι Χολ ή η Σκάλα του Μιλάνου έχουν τέτοια εξαιρετική ακουστική.

Επομένως, και για να απαντήσουμε στη φυσική πρόκληση του υπότιτλου, δύο ήχοι *μπορούν* να δημιουργήσουν σιωπή. Δύο φωτεινές πηγές μπορούν επίσης να δημιουργήσουν σκοτάδι, όπως επιδεικνύεται στο πείραμα δύο οπών του Young ή σ' ένα συμβολόμετρο Michelson. Και δύο δέσμες ηλεκτρονίων μπορούν να δημιουργήσουν περιοχές όπου δεν πρόκειται να υπάρξει κανένα ηλεκτρόνιο, γεγονός που αποτελεί πιθανότατα τη σπουδαιότερη ανακάλυψη του 20ού αιώνα. Ωστόσο, το κοάν του Ζεν σχετικά με το ένα χέρι που χειροκροτεί παραμένει μυστήριο. Και αγνοούμε τι στήριγμα μπορεί να προσφέρει η φυσική σε όσους διαλογίζονται περί αυτού.

Το πρόβλημα αυτού του μήνα προέρχεται από τη XII Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής, που διοργανώθηκε στη Βουλγαρία το 1981.

Ο δέκτης ενός ραδιοτηλεσκοπίου βρίσκεται σ' ένα νησί, κοντά στην παραλία, σε ύψος 2 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Το ραδιοτηλεσκόπιο ανιχνεύει μόνο την οριζόντια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου. Όταν αναδυθεί πάνω από τον ορίζοντα μια ραδιοπηγή που εκπέμπει κύματα (μήκος κύματος 21 cm), ο δέκτης καταγράφει μέγιστα και ελάχιστα.

Α. Υπολογίστε την ανύψωση της πηγής ραδιοκυμάτων όταν παρατηρείται μέγιστο και ελάχιστο.

Β. Η ένταση μειώνεται ή αυξάνεται μετά από πρώτη εμφάνιση της πηγής πάνω από τον ορίζοντα;

Γ. Βρείτε το λόγο της έντασης των διαδοχικών μεγίστων και ελαχίστων.

[Σημείωση: Ο λόγος του πλάτους του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος είναι $(n - \eta\mu\theta)/(n + \eta\mu\theta)$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το προσπίπτον κύμα με τον ορίζοντα και n ο δείκτης διάθλασης. Για τα ραδιοκύματα και το νερό, $n = 9$.]

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum* έως τις 10 Δεκεμβρίου 1994. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία!

Αλέξανδρος Σταυρόπουλος

Η ΖΩΗ Σ' ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΟΡΙΩΝ

Βραβείο Ακαδημίας Αθηνών

«Κανένα από τα βιβλία που έχω υπόψη μου δεν παρουσιάζει το ενδιαφέρον και την διεπιστημονικότητα του βιβλίου του καθηγητή Αλ. Σταυρόπουλου.»

***Γ. Μανιάτης** -Καθηγητής Βιολογίας, Πανεπιστήμιο Πατρών*

«Ουσιαστικές γνώσεις, εύληπτος τρόπος παρουσίασης, αγάπη προς την επιστήμη και τον άνθρωπο...»

***Κ. Σέκερης** -Καθηγητής Βιοχημείας, Πανεπιστήμιο Αθηνών*

«Το βιβλίο αυτό αποτελεί απόκτημα στην ελληνική βιβλιογραφία...»

***Χ. Ζιούρδου** -Καθηγήτρια Βιοχημείας, Πανεπιστήμιο Κρήτης*

Το σύνολο των εσόδων του συγγραφέα από την πώληση του βιβλίου διατίθεται υπέρ του αγώνα κατά των ναρκωτικών.

Τόμ. Α': 394 σελ., 3.000 δρχ.
Τόμ. Β': 370 σελ., 3.000 δρχ.

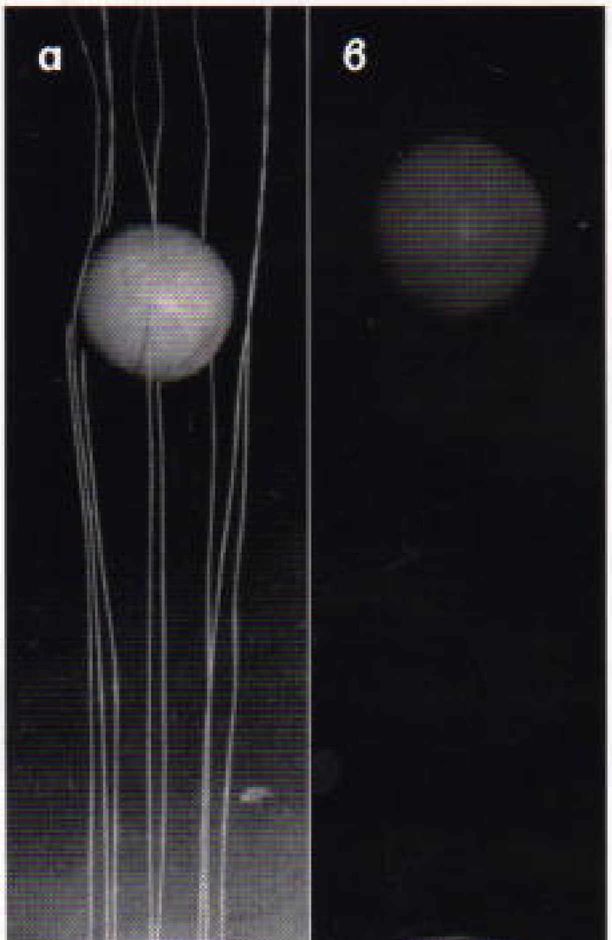
Κεντρική διάθεση: **Εκδόσεις Κάτοπτρο,**
τηλ.: 3643272, 3645098

Περιστροφή μέσα σε ρεύμα αέρα

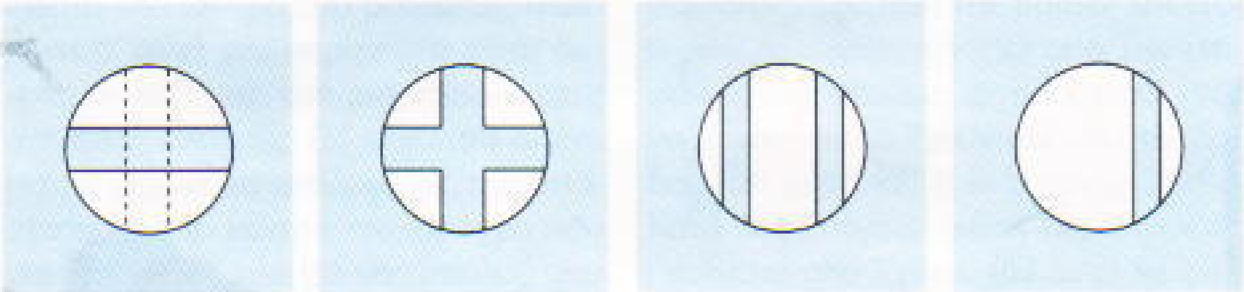
Εξιχνιάζοντας το νόμο του Bernoulli και τη δύναμη Magnus

Stanislav Kuzmin

Ίσως μερικοί αναγνώστες του *Quantum* είχαν κάποτε την ευκαιρία να παρατηρήσουν μια μπάλα του πινγκ πονγκ να αιωρείται μέσα στο ρεύμα του αέρα που δημιουργείται από ένα πιστολάκι για το στέγνωμα των μαλλιών ή μια ηλεκτρική σκούπα. Ας τροποποιήσουμε ελαφρά αυτό το πείραμα. Πάρτε μια ξύλινη μπάλα (πιθανόν από ένα παιδικό παιχνίδι κατασκευών) και ανοίξτε μια τρύπα κατά μήκος του άξονά της με διάμετρο περίπου 1 cm. Αν τοποθετήσετε την μπάλα μέσα σ' ένα ρεύμα αέρα, θα διαπιστώσετε ότι στην



Σχήμα 1

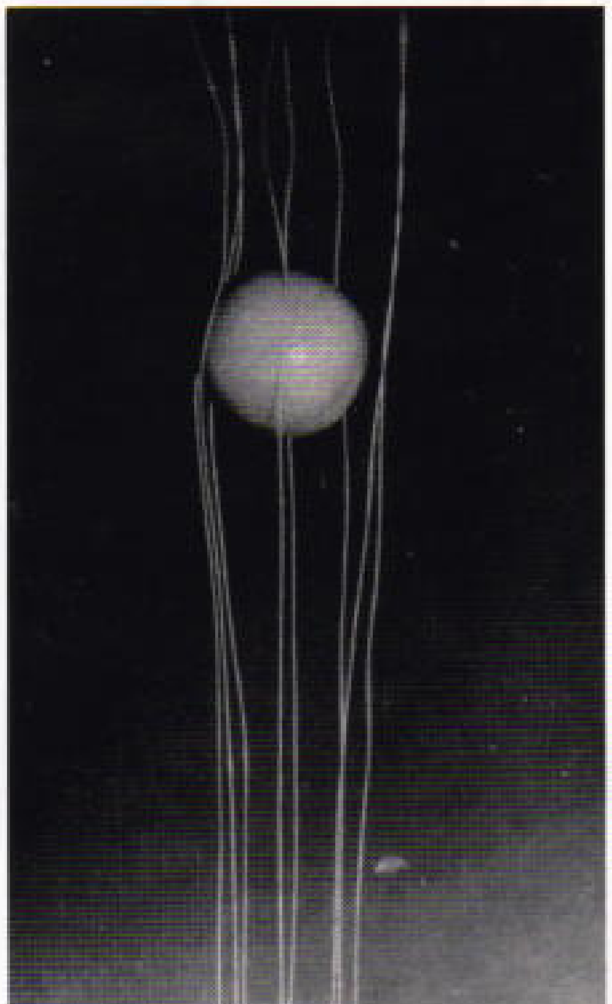


Σχήμα 2

αρχή απλώς αιωρείται, και κατόπιν αρχίζει να περιστρέφεται όλο και πιο γρήγορα έτσι ώστε ο άξονας της τρύπας να λάβει τελικά οριζόντια θέση. Η συχνότητα περιστροφής μπορεί να φτάσει και τις 100 στροφές ανά δευτερόλεπτο ενώ το ύψος που φτάνει είναι πενταπλάσιο από το αρχικό (συγκρίνετε τα Σχήματα 1α και 1β). Μπορούμε να μετρήσουμε τη συχνότητα περιστροφής στο πείραμά μας ως εξής: προσκολλάμε έναν μικρό μαγνήτη στην επιφάνεια της μπάλας, τοποθετούμε την μπάλα μέσα σ' ένα πηνίο, και με την τάση εξ επαγωγής τροφοδοτούμε έναν παλμογράφο.

Παρόμοια πειράματα μπορούμε να διεξαγάγουμε και με άλλες μπάλες —επίσης στερεές αλλά «τρυπημένες» με διαφορετικό τρόπο (Σχήμα 2). Σε όλες τις περιπτώσεις θα παρατηρήσουμε περιστροφή και ανύψωση, αλλά η περιστροφή της μπάλας όταν έχει μετατοπιστεί ο άξονας της τρύπας δεν θα γίνεται γύρω από έναν μοναδικό άξονα (με επιστημονική ορολογία, η μπάλα θα *μεταπίπτει*). Αυτό το φαινόμενο φαίνεται να συνδέεται με την αλλαγή της θέσης του κέντρου μάζας σε σχέση με το γεωμετρικό της κέντρο.

Σε αυτά τα πειράματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης και κενές μπάλες (όπως αυτές του πινγκ πονγκ)



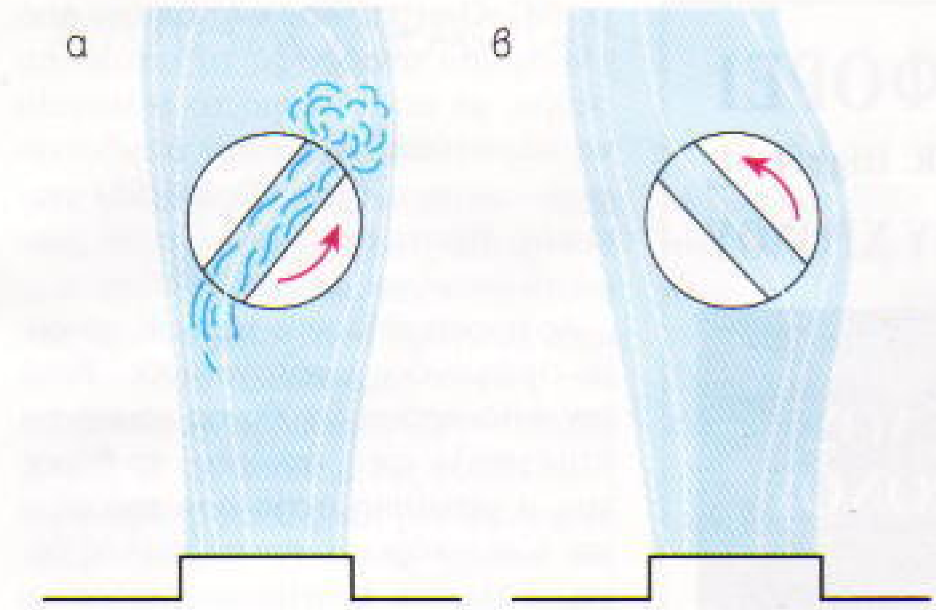
Σχήμα 3

με τρύπες. Πάντως, αυτές περιστρέφονται πιο αργά και δεν φτάνουν σε τόσο ύψος. Αν, όμως, σφηνώσουμε μέσα στην τρύπα έναν χάρτινο σωλήνα, ο ρυθμός της περιστροφής αυξάνεται.

Όλα αυτά τα πειράματα μας δείχνουν ότι η ροή του αέρα μέσα από την τρύπα έχει πρωταρχική σημασία. Αν κλείσουμε την τρύπα (για παράδειγμα, με πλαστελίνη), η περιστροφή σταματά. Για να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφή της ροής του αέρα γύρω από την περιστρεφόμενη μπάλα, μπορούμε να συνδέσουμε μακριές κλωστές στο σωλήνα της ηλεκτρικής σκούπας και να φωτογραφίσουμε τη διάταξη χρησιμοποιώντας φλας. Στο Σχήμα 3 βλέπουμε ότι η ροή πιέζει την μπάλα στην πλευρά της που στρέφεται στην ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση του ρεύματος αέρα ενώ, στην αντίθετη πλευρά, απομακρύνεται από την μπάλα. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, η μπάλα μετατοπίζεται σε σχέση με το κέντρο του ρεύματος.

Ας προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε μια πιθανή ερμηνεία του πειράματος. Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση μιας απολύτως λείας μπάλας χωρίς τρύπα. Αιωρείται με ευσταθή τρόπο μέσα στο ρεύμα του αέρα, ακόμη και όταν δώσουμε στο ρεύμα μικρή κλίση. Αυτό ερμηνεύεται από το νόμο του Bernoulli: η πίεση στο κύριο μέρος του ρεύματος είναι χαμηλότερη απ' ό,τι στην πλευρά της μπάλας όπου ο αέρας την παρακάμπτει. Έτσι, εάν η μπάλα μετατοπιστεί ελαφρά έξω από το κέντρο του ρεύματος, η αντίστοιχη πλευρά της ωθείται ξανά προς τα μέσα.[1]

Ας εξετάσουμε τώρα μια περιστρεφόμενη μπάλα. Όταν περιστρέφεται στο κέντρο του ρεύματος, η ταχύτητα, και επομένως και η πίεση, πρέπει να είναι διαφορετική στις αντίθετες πλευρές της, επειδή η περιστρεφόμενη μπάλα επιβραδύνει τη ροή στη μία πλευρά και την επιταχύνει στην άλλη. Αναπτύσσεται, επομένως, μια δύναμη που μετατοπίζει την μπάλα προς το πλάι. Όμως, αφού η μπάλα μας παραμένει στο ίδιο σημείο, η μέση πίεση



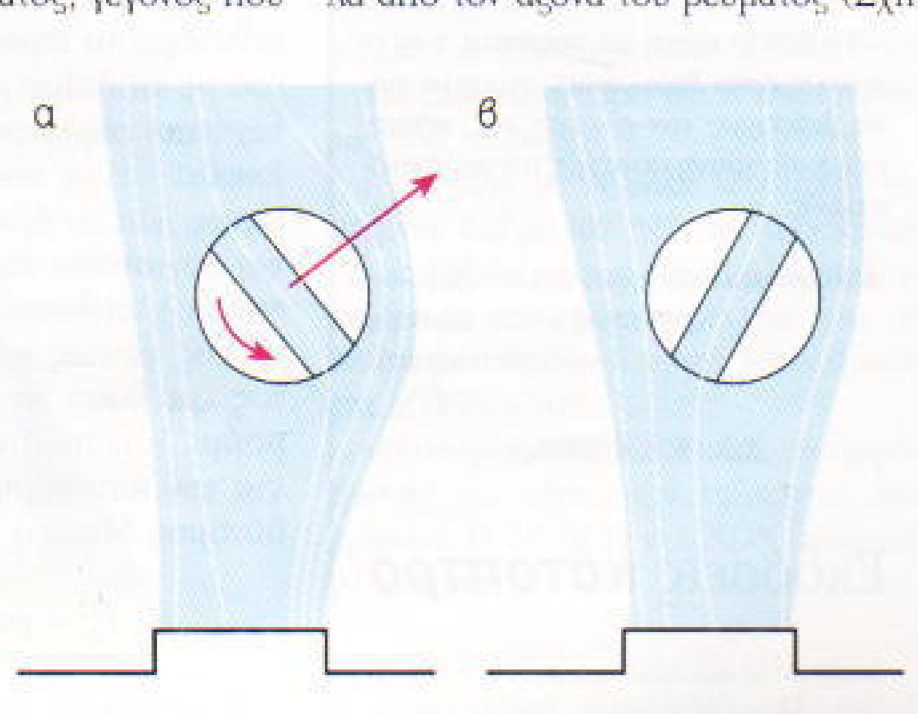
Σχήμα 4

στις δύο πλευρές θα πρέπει να είναι η ίδια. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η περιστρεφόμενη μπάλα πρέπει να μη βρίσκεται στο κέντρο του ρεύματος, διότι μόνο σ' αυτή την περίπτωση είναι δυνατή η ισότητα των ταχυτήτων στις αντίθετες πλευρές. (Η ταχύτητα σ' ένα ρεύμα μειώνεται ανάλογα με την απόσταση από το κέντρο του, πράγμα που σημαίνει ότι η πλευρά της μπάλας που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο περιστρέφεται στην ίδια κατεύθυνση με αυτή του ρεύματος, ενώ η άλλη πλευρά περιστρέφεται σε αντίθετη κατεύθυνση.)

Γιατί λοιπόν αρχίζει να περιστρέφεται η μπάλα; Ας εξετάσουμε μια μπάλα χωρίς τρύπα η οποία αιωρείται ακριβώς στον άξονα του ρεύματος και δεν περιστρέφεται. Αν εξαναγκάσουμε την μπάλα να μετακινηθεί προς τη μια άκρη του ρεύματος, ο αέρας του κύριου ρεύματος τρίβεται με μεγαλύτερη επιφάνεια μπάλας απ' ό,τι ο αέρας στην άκρη του ρεύματος, γεγονός που έχει αποτέλεσμα την περιστροφή της μπάλας γύρω από οριζόντιο άξονα. Όταν η μπάλα ελευθερωθεί επιστρέφει στη θέση ισορροπίας στον άξονα του ρεύματος και παύει να περιστρέφεται.

Στην αντίστοιχη περίπτωση με την «τρυπημένη» μπάλα παίζεται ένα άλλο παιχνίδι —η τρύπα καθιστά την περιστροφή ευσταθή ακόμη και χωρίς τη δράση εξωτερικής δύναμης. Αυτό συμβαίνει επειδή η τρύπα αλλάζει τη δομή της ροής γύρω από την μπάλα. Κατά τη φάση περιστροφής ενός τετάρτου του κύκλου (που φαίνεται στο Σχήμα 4α) το μικρό ρεύμα αέρα που εξέρχεται από την τρύπα δημιουργεί μια ομάδα μικρών στροβίλων. Αυτοί οι στρόβιλοι εμποδίζουν τη διαφυγή του ρεύματος αέρα από την μπάλα, και έτσι η ροή διατηρείται γύρω από την επιφάνεια της μπάλας περισσότερο χρόνο. Είναι σαν να έχουν αυξηθεί το ιξώδες του αέρα και η αντίστοιχη τριβή. Κατά την επόμενη φάση περιστροφής (φαίνεται στο Σχήμα 4β) αυτό το φαινόμενο απουσιάζει, μια και το ρεύμα αέρα καταφέρνει να διαφεύγει. Επομένως, αναπτύσσεται μια δύναμη τριβής που περιστρέφει την μπάλα. Καθώς η μπάλα περιστρέφεται, αναπτύσσεται μια εγκάρσια δύναμη Magnus η οποία μεταθέτει τη θέση ευσταθούς ισορροπίας της μπάλας σε σχέση με τον άξονα του ρεύματος.

Η επιπλέον ανύψωση της «τρυπημένης» μπάλας μπορεί να συνδεθεί με την ύπαρξη (σε ορισμένες θέσεις) μιας κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης που απομακρύνει την μπάλα από τον άξονα του ρεύματος (Σχή-



Σχήμα 5

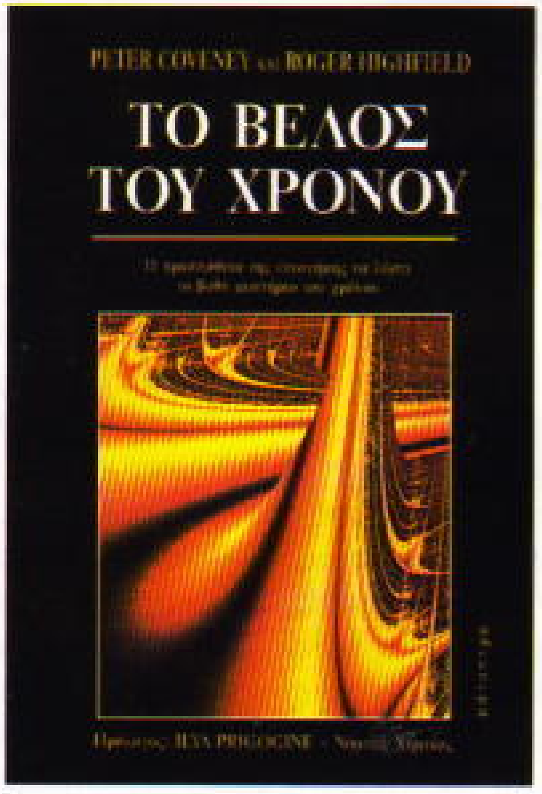
1. Διαβάστε, όμως, το άρθρο «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda» στη σελ. 7 του παρόντος τεύχους. (Σ.τ.ε.)

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ

P. Coveney και **R. Highfield**

ΤΟ ΒΕΛΟΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



Η προσπάθεια της επιστήμης να λύσει το βαθύ μυστήριο του χρόνου

Πρόλογος: Ilya Prigogine

«Καλωσορίζω θερμά αυτό το βιβλίο, που είναι γραμμένο σε υψηλό επιστημονικό επίπεδο, ενώ συγχρόνως παραμένει βατό για το ευρύ κοινό...»

Ilya Prigogine -Νόμπελ Χημείας

«Το εκρηκτικότερο βιβλίο για τη φύση του χρόνου αφότου άρχισε να υπάρχει χρόνος...»

The New Scientist

«Το βιβλίο εξηγεί με σαφήνεια πώς ο χρόνος είναι θεμελιώδες στοιχείο για να βιώσουμε τον φυσικό μας κόσμο ενώ η σύγχρονη επιστήμη τον κατανοεί ατελώς...»

Alastair Rae -Συγγραφέας του βιβλίου *Κβαντομηχανική: πλάνη ή πραγματικότητα;*

Σελ.: 526, 6.000 δρχ.

Εκδόσεις ***κάτοπτρο***

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα
Τηλ.: 3643272, 3645098, Fax: 3641864

μα 5α). Ο αέρας που περνά μέσα από την τρύπα αναρροφά το υπόλοιπο ρεύμα, με αποτέλεσμα το τελευταίο να κάμπτεται. Αυτό δεν συμβαίνει στην απέναντι θέση (Σχήμα 5β) γιατί εδώ τίποτε δεν εμποδίζει το ρευμα να διαφύγει από τη σφαίρα.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε ορισμένους υπολογισμούς. Κατά την κατακόρυφη διεύθυνση ασκούνται στην μπάλα τρεις δυνάμεις: το βάρος της, η μετωπική αντίσταση του αέρα και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης Magnus. Η αντίσταση μπορεί να γραφεί ως $F_d = k\rho \upsilon^2 S$, όπου k είναι ο συντελεστής αντίστασης (που εξαρτάται από το σχήμα του σώματος), ρ είναι η πυκνότητα του αέρα, υ η ταχύτητα ροής του αέρα και S το εμβαδόν της μετωπικής επιφάνειας της μπάλας. Η τάξη μεγέθους της δύναμης Magnus μπορεί να εκτιμηθεί από το νόμο του Bernoulli. Ας υποθέσουμε ότι ένας κύλινδρος με ύψος l και διάμετρο βάσης d περιστρέφεται δεξιόστροφα με γραμμική ταχύτητα u μέσα σ' ένα απείρων διαστάσεων ρεύμα αέρα που έχει ταχύτητα υ. Τότε στη δεξιά πλευρά του κυλίνδρου η ταχύτητα θα είναι $\upsilon - u$, ενώ στην αριστερή πλευρά του $\upsilon + u$. Σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli, η διαφορά πίεσης στον κύλινδρο θα είναι

$$\Delta p = \rho\frac{(\upsilon + u)^2}{2} - \rho\frac{(\upsilon - u)^2}{2},$$

οπότε η δύναμη Magnus θα ισούται με $F_M \cong \rho\upsilon u l d$.

Μια και οι υπολογισμοί μας είναι σχετικά προσεγγιστικοί, μπορούμε να θεωρήσουμε την μπάλα σαν έναν κύλινδρο το ύψος του οποίου είναι ίσο με τη διάμετρο, ενώ η γραμμική ταχύτητα περιστροφής της μπορεί να ληφθεί ίση με την ταχύτητα του ρεύματος. Για να βρούμε την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης Magnus, την πολλαπλασιάζουμε με το ημίτονο της γωνίας κλίσης β του ρεύματος (με βάση το Σχήμα 3, την εκτιμούμε ίση περίπου με 4-5°). Έτσι, για την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης Magnus προκύπτει

$$F_m = \rho d^2 \upsilon^2 \,\text{ημ}\beta.$$

Τη μεταβολή της ταχύτητας σε συνάρτηση με την ανύψωση μέσα στο ρεύμα μπορούμε να την υπολογίσουμε με τη βοήθεια του νόμου της διατήρησης της ορμής. Αφού η στατική πίεση και η πυκνότητα του αέρα στο ρεύμα αλλάζουν στην περίπτωσή μας ελάχιστα, αυτός ο νόμος μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά ως $\upsilon_1^2 S_1 = \upsilon_2^2 S_2$. Η εγκάρσια τομή του ρεύματος μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση με τα ύψη h_1 και h_2 και της γωνίας διεύρυνσης του ρεύματος. Συνεπώς

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το ρεύμα δεν θεωρείται ότι αρχίζει στο στόμιο του σωλήνα αλλά στην κορυφή της γωνίας διεύρυνσής του, και επομένως την ανύψωση τη μετράμε από αυτή την κορυφή και όχι από το στόμιο του σωλήνα.

Από την εξίσωση ισορροπίας της μπάλας κατά την κατακόρυφη διεύθυνση: $mg = F_d + F_m$, προκύπτει η επόμενη σχέση για το ύψος όπου φτάνει η μπάλα:

$$h_2 \cong h_1 d \upsilon_1 \sqrt{\frac{\rho(k + \text{ημ}\beta)}{mg}}.$$

Εδώ h_1 είναι η αρχική ανύψωση της μπάλας και υ_1 είναι η ταχύτητα του αέρα μόλις εξέρχεται από τον σωλήνα, μεγέθη που μπορούμε εύκολα να μετρήσουμε. Η εκτίμησή μας δίνει για την ανύψωση της μπάλας τιμή 30 cm, που συμφωνεί ικανοποιητικά με τις πειραματικές παρατηρήσεις μας. ◙

*Όταν έγραψε αυτό το άρθρο ο **Stanislav Kuzmin** ήταν μαθητής της ενδέκατης τάξης (δηλαδή της αντίστοιχης δευτέρας τάξης του ελληνικού λυκείου) στο 130ό γυμνάσιο του Νοβοσιμπίρσκ στη Ρωσία.*

QUANTUM

Ανακαλύπτοντας την επιστήμη

• «...Γεμάτο εξαιρετικά θέματα· υπέροχα άρθρα Μαθηματικών και Φυσικής για σπουδαστές λυκείων και πανεπιστημίων...»

Nature

Διαβάστε το ***Quantum***.
Γίνετε και εσείς συντελεστής
στην ***Quan***-τική εξίσωση

Σημαντικές πληροφορίες

Αγαπητοί φίλοι,

Με το γράμμα μου αυτό θα ήθελα να σας απευθύνω τα ειλικρινή συγχαρητήριά μου για την ελληνική έκδοση του *Quantum* και τις θερμές ευχές μου για την επιτυχία της αξιέπαινης αυτής πρωτοβουλίας σας. Με την ευκαιρία, επιτρέψτε μου και μια προσθήκη στο αξιόλογο άρθρο του V. Tikhomirov (τεύχος 2, σελ. 18).

Η πιο πρόσφατη και πιο απροσδόκητη απόδειξη του θεωρήματος Fermat-Euler ήρθε το 1977 από τον αμερικανό μαθηματικό Loren C. Larson. Η απόδειξη έγινε με βάση το κλασικό πρόβλημα της τοποθέτησης σε μια σκακιέρα πλευράς *n* ισάριθμων βασιλισσών που να μην απειλεί η μια την άλλη, και δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Mathematics Magazine*, τεύχος Μαρτίου 1977. Περιγραφή της απόδειξης υπάρχει στη στήλη "Mathematical Games" του Martin Gardner στο περιοδικό *Scientific American*, τεύχος Δεκεμβρίου 1980.

Με φιλικούς χαιρετισμούς,
Αντρέας Π. Χατζηπολάκης, Αθήνα.

Κι άλλες λύσεις

Αγαπητοί κύριοι,

Στις αρχές Ιουλίου του 1994 πήρα ταυτόχρονα και τα δύο πρώτα τεύχη του περιοδικού *Quantum*. Ξεφυλλίζοντάς τα πραγματικά εντυπωσιάστηκα, τόσο από την καλαίσθητη εμφάνισή του, όσο, και κυρίως, από το περιεχόμενό του. Και όταν αναφέρομαι στο περιεχόμενο, εννοώ την όλη παρουσίαση του κάθε θέματος. Είναι ένα περιοδικό που έλειπε από τον ελληνικό χώρο. Μη θέλοντας να κάνω κατάχρηση του χώρου πρέπει να πω τούτο: θεωρώ απαραίτητο κάθε αναγνώστης να διαβάσει τις απόψεις του καθηγητή Δημήτρη Νανόπουλου, όπως αυτές παρουσιάζονται στο τεύχος 2 σελ. 29, και ο καθένας μας ας προσπαθήσει όσο και όπως μπορεί να βοηθήσει για την κατά το δυνατόν μεγαλύτερη εξάπλωση του περιοδικού αυτού.

Στο τεύχος 2, σελ. 54-57, και στο άρθρο «Εννέα λύσεις για ένα πρόβλημα», ο καθηγητής Constantine Knop παρουσιάζει οκτώ λύσεις και ζητάει από τους αναγνώστες την ένατη λύση του προβλήματος που πραγματεύεται στο εν λόγω άρθρο. Στις σελίδες που ακολουθούν παραθέτω δύο επιπλέον λύσεις με τη βοήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας, καθώς και μια αναλυτική λύση. Βέβαια, κάνοντας χρήση της αναλυτικής γεωμετρίας μπορεί κανείς να δώσει πολλές λύσεις, ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων που θα επιλέξει.

1η λύση: Επί της AC παίρνω το σημείο Z έτσι ώστε να είναι $\angle CBZ = 20°$. Στην προέκταση της BC και προς το μέρος του C παίρνω το σημείο M ώστε να είναι $BM = BD$.

Φέρνω τις BZ, ZM και DM, (Σχήμα 1). Τα τρίγωνα BCZ, BCE και ZBD είναι ισοσκελή, απ' όπου παίρνουμε:

(1) $BC = BZ = ZD = BE$.

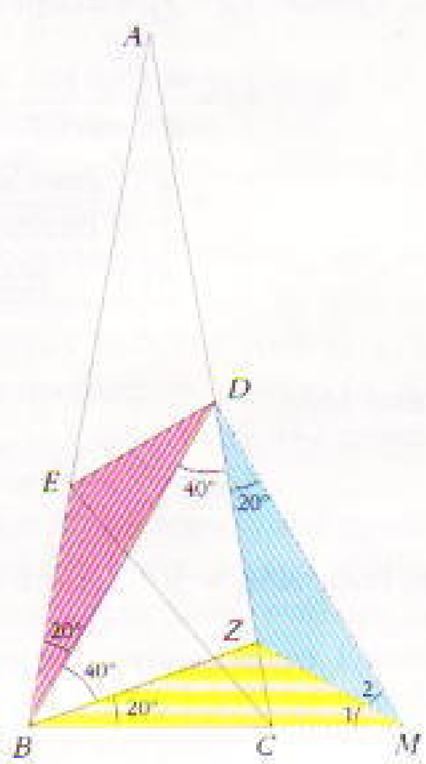
Το τρίγωνο BMD έχει $BM = BD$ (εκ κατασκευής), άρα είναι ισοσκελές, και επειδή $\angle DBM = 60°$ (από την υπόθεση) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο BMD είναι ισόπλευρο, οπότε είναι:

(2) $BD = DM = MB$, καθώς και
$$\angle ZDM = \angle BDM - \angle BDC = 60° - 40° = 20°.$$

Οπότε είναι:

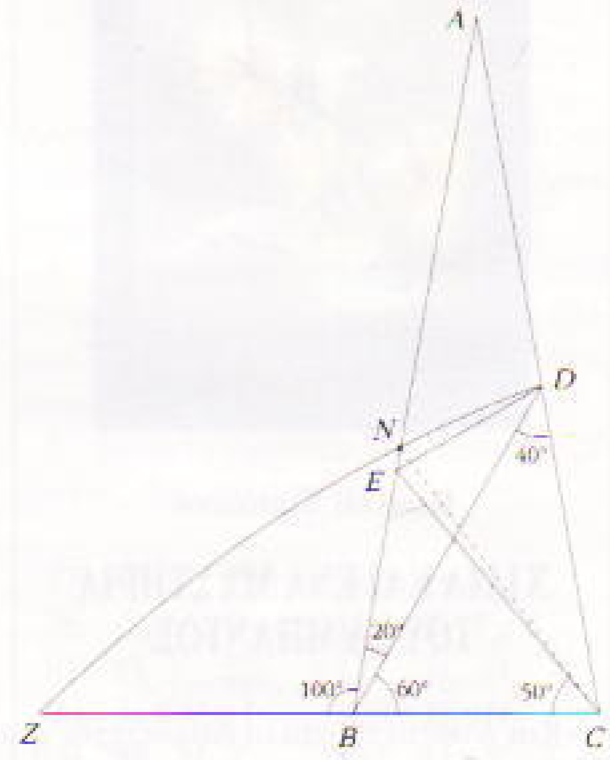
(3) $\angle EBD = \angle ZBM = \angle ZDM = 20°$.

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι



Σχήμα 1

τα τρίγωνα EBD, ZBM και ZDM είναι ίσα, διότι έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία και τις γωνίες που περιέχουν ίσες. Οπότε είναι $\angle M_1 = \angle M_2 = \angle BDE$, και επειδή $\angle M_1 + \angle M_2 = 60°$ προκύπτει ότι θα είναι: $\angle BDE = \angle M_1 = \angle M_2 = 30°$.



Σχήμα 2

2η λύση: Στην προέκταση της BC και προς το μέρος του B παίρνω

(1) $BZ = BD$ (Σχήμα 2).

Επειδή η DZ διέρχεται από το E (βλέπε την απόδειξη παρακάτω) και το τρίγωνο BDZ λόγω της (1) είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής $\angle B = \angle ZBE + \angle EBD = 100° + 20° = 120°$, προκύπτει ότι είναι:

$\angle EDB = \angle ZDB = 1/2\,(180° - \angle ZBD) = 30°$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η DZ διέρχεται από το σημείο E.

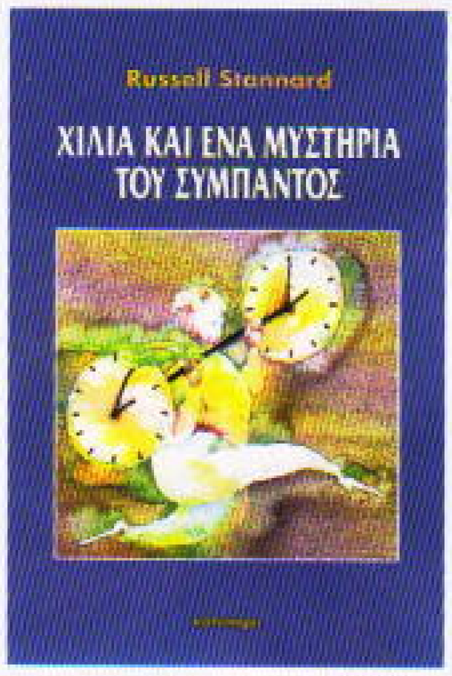
Πράγματι, αν N είναι το σημείο τομής της DZ με την AB, για να δείξουμε ότι η DZ διέρχεται από το E αρκεί να δείξουμε ότι $N \equiv E$. Αλλά για να δείξουμε ότι $N \equiv E$ αρκεί να δείξουμε ότι $\angle BCN = 50°$.

Θέτουμε $\angle BCN = x$ και εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα BCN, BCD και BDN παίρνουμε αντίστοιχα:

(2) $$\frac{BN}{\text{ημ}x} = \frac{BC}{\text{ημ}(100° - x)}$$

ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

ένα ακόμη βιβλίο του «παραμυθά» καθηγητή για νεαρούς αναγνώστες



Russell Stannard

ΧΙΛΙΑ ΚΑΙ ΕΝΑ ΜΥΣΤΗΡΙΑ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ

«Και σ' αυτό το βιβλίο διαφαίνεται ο ένθερμος ζήλος με τον οποίο ο Stannard εισάγει τους νεαρούς αναγνώστες στα μυστικά της φυσικής, με έναν τρόπο συναρπαστικό... Δροσερό ανάγνωσμα, γνήσια επιστήμη.»

Physics World

«Πρέπει να το διαβάσουν τουλάχιστον όλοι οι μαθητές...»

The Times Educational Supplement

Ο R. Stannard είναι καθηγητής φυσικής στο Ανοιχτό Πανεπιστήμιο της Αγγλίας και αντιπρόεδρος του Ινστιτούτου Φυσικής της Αγγλίας.

Σελ.: 165, 2.900 δρχ.

ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ

Ο χρόνος και ο χώρος του Θείου Αλβέρτου

Οι μαύρες τρύπες και ο Θείος Αλβέρτος

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα

Τηλ.: 3643272, 3645098, Fax: 3641864

(3) $$\frac{BC}{\eta\mu 40^\circ} = \frac{BD}{\eta\mu 80^\circ}$$

(4) $$\frac{BD}{\eta\mu 130^\circ} = \frac{BN}{\eta\mu 30^\circ}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (2), (3), (4) παίρνουμε:

$$\eta\mu x \cdot \eta\mu 40^\circ \cdot \eta\mu 130^\circ = \eta\mu(100^\circ - x) \cdot \eta\mu 80^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ$$

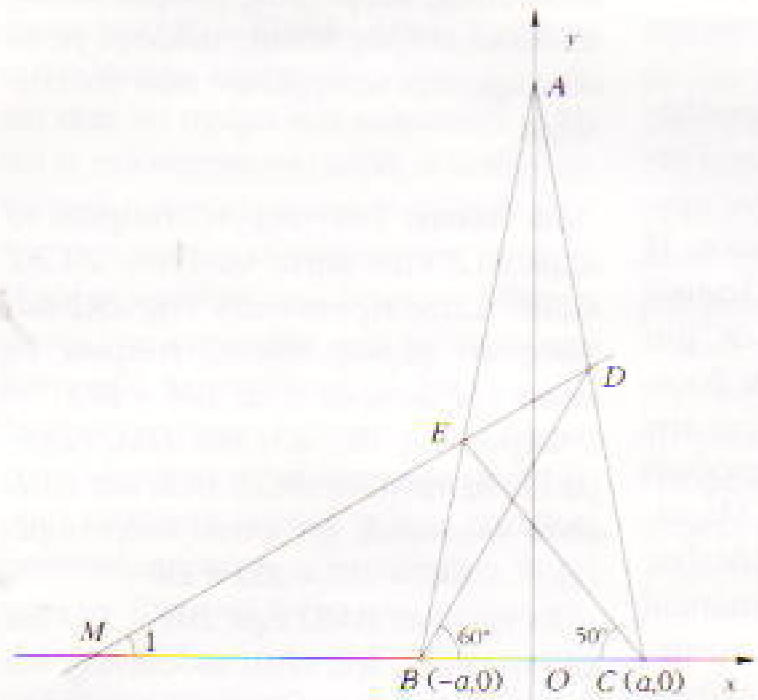
$$\eta\mu x \cdot \eta\mu 40^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ = \eta\mu(100^\circ - x) \cdot 2\eta\mu 40^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ \cdot 1/2$$

$$\eta\mu x = \eta\mu(100^\circ - x)$$

(5) $$x = 360^\circ\kappa + (100^\circ - x),\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή $0^\circ < x < 80^\circ$, όπως προκύπτει από το σχήμα, από την (5) προκύπτει $\kappa = 0$. Οπότε είναι $x = 50^\circ$, δηλαδή $\angle BCN = 50^\circ$.

3η λύση: Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα τετμημένων το φορέα της πλευράς BC και άξονα τεταγμένων το φορέα του ύψους AO (Σχήμα 3). Στο τρίγωνο BDM είναι $\angle DBM = 120^\circ$. Για να υπολογίσουμε λοιπόν τη $\angle BDM$, αρκεί να υπολογίσουμε τη $\angle M_1$, δηλαδή αρκεί να υπολογίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{DE} = \varepsilon\varphi M_1$ της ευθείας DE. Οι AB, CE, AC και BD, ως προς το θεωρηθέν σύστημα συντεταγμένων, έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:



Σχήμα 3

$$\left.\begin{array}{l} AB:\ y = (x+a)\varepsilon\varphi 80^\circ \\ CE:\ y = (x-a)\varepsilon\varphi 130^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow x_E = -\frac{a}{2\sigma\upsilon\nu 40^\circ},\ y_E = 2a\sigma\upsilon\nu 10^\circ.$$

$$\left.\begin{array}{l} AC:\ y = (x-a)\varepsilon\varphi 100^\circ \\ BD:\ y = (x+a)\varepsilon\varphi 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow x_D = -\frac{a}{2\sigma\upsilon\nu 40^\circ},\ y_D = 2a(\sigma\upsilon\nu 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ).$$

Έτσι έχουμε: $y_D - y_E = 2a\sigma\upsilon\nu 70^\circ = 2a\eta\mu 20^\circ$,

$$x_D - x_E = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ}\right) = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ} =$$
$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{2\sigma\upsilon\nu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 10^\circ}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\eta\mu 80^\circ}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ} =$$
$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2(2\eta\mu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ} = 2a\sqrt{3} \cdot \eta\mu 20^\circ.$$

Οπότε είναι:

$$\lambda_{DE} = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{2a\eta\mu 20^\circ}{2a\sqrt{3}\eta\mu 20^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi 30^\circ.$$

Άρα είναι $\angle M_1 = 30^\circ$. Οπότε από το τρίγωνο BDM βρίσκουμε:

$$\angle BDE = 180^\circ - \angle DBM - \angle M_1 = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Μιχάλης Κεσογλίδης, μαθηματικός,
λέκτορας στην Πολυτεχνική Σχολή Ξάνθης.

Κατασκευή τριγώνων από τρία δεδομένα σημεία

Τα 20 από τα 139 προβλήματα αναζητούν ακόμη τη λύση τους!

George Berzsenyi

Όπως υποσχέθηκα στο τελευταίο μου άρθρο, παρουσιάζω στους αναγνώστες μου μια επιπλέον ομάδα άλυτων προβλημάτων κατασκευών στα οποία μου επέστησε την προσοχή ο φίλος μου Leroy (Roy) F. Meyers. Αυτά τα προβλήματα βασίζονται σε ένα άρθρο του William (Bill) Wernick που δημοσιεύτηκε στο *Mathematics Magazine* τον Σεπτέμβριο του 1982, και στην εργασία του Roy και του Bill που ακολούθησε — και παραμένει αδημοσίευτη. Ο Bill Wernick είναι συνταξιούχος μαθηματικός από το Πανεπιστήμιο CCNY της Νέας Υόρκης. Το βιβλίο του *Advanced Geometric Constructions* (το έγραψε μαζί με τον Alfred S. Posamentier και εκδόθηκε το 1973) το συνιστώ ανεπιφύλακτα στους αναγνώστες μου.

Ακολουθώντας την εργασία του Bill Wernick, θα συμβολίσουμε τα δεκαέξι κυριότερα σημεία ενός τριγώνου ως εξής:

κορυφές	A, B, Γ
κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου	O
ίχνη διαμέσων	M_α, M_β, M_γ
κέντρο βάρους	G
ίχνη υψών	H_α, H_β, H_γ
ορθόκεντρο	H
ίχνη διχοτόμων	T_α, T_β, T_γ
κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου	I

[Χάριν συντομίας, ο όρος «ίχνος» δηλώνει το σημείο τομής των δεδομένων ευθειών (διαμέσων, υψών και διχοτόμων) με τις απέναντι πλευρές του τριγώνου. Οι διχοτόμοι είναι των εσωτερικών γωνιών.]

Τα 139 προβλήματα του Bill Wernick είναι ένας κατάλογος με τις ουσιαστικά διαφορετικές τριάδες αυτών των «καθορισμένων σημείων». Για καθεμία από αυτές ζητάμε την (ανα)κατασκευή του τριγώνου $AB\Gamma$. Στη γενική περίπτωση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι δίνονται τρία σημεία στο επίπεδο, ότι αντιστοιχίζουμε σε αυτά τρία από τα δεκαέξι σύμβολα που παραθέσαμε προηγουμένως, και ότι ζητάμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο τα καθορισμένα σημεία του οποίου θα είναι αυτά που έχουν δοθεί. Μια άλλη, πιο περιοριστική περίπτωση, είναι να ξεκινήσουμε μ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, να ονομάσουμε με τα αντίστοιχα σύμβολα τα δεξαέξι σημεία του, να τα σβήσουμε όλα εκτός από τρία (καθώς και τα διάφορα ευθύγραμμα τμήματα που τα συνδέουν), και να προσπαθήσουμε να ανακατασκευάσουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$. Είναι φανερό ότι μερικές διευθετήσεις των τριών καθορισμένων σημείων δεν θα είναι επιτεύξιμες με τον δεύτερο τρόπο.

Η πρώτη πρόκληση για τους αναγνώστες είναι η ανακατασκευή των 139 διαφορετικών προβλημάτων. Ένα βοηθητικό στοιχείο είναι η αρίθμηση του πίνακα που ακολουθεί, η οποία είναι ίδια με την αρχική αρίθμηση των προβλημάτων που έδωσε ο Bill.

Τα 139 προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:

1. *Ταυτολογικές* τριάδες, στις οποίες δύο οποιαδήποτε από τα τρία σημεία καθορίζουν το τρίτο. Από τα 119 επιλυμένα προβλήματα, μόνο τα (A, B, M_γ), (A, M_α, G), και (O, G, H) ανήκουν σ' αυτή την κατηγορία.

2. *Τοπικά-περιοριζόμενα* προβλήματα. Αυτά έχουν είτε άπειρο πλήθος λύσεων είτε καμία λύση, ανάλογα με την επιλογή ενός από τα σημεία. Είκοσι τρία από τα επιλυμένα προβλήματα ανήκουν σ' αυτή την κατηγορία.

3. *Μη επιλύσιμα* προβλήματα, όπου είναι αδύνατο να κατασκευαστεί το τρίγωνο με ευκλείδεια μέσα (δηλαδή, με κανόνα και διαβήτη). Μέχρι στιγμής έχουν εντοπιστεί 20 παρόμοιες τριάδες.

4. *Επιλύσιμα* προβλήματα. Σε αυτά μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα (βασικά) μοναδικό τρίγωνο με ευκλείδεια μέσα.

5. *Ανοικτά* προβλήματα. Είναι οι 20 τριάδες που ακολουθούν:

77.	O, H_α, T_β	122.	G, T_α, T_β
78.	O, H_α, I	123.	G, T_α, I
81.	O, T_α, T_β	127.	$H_\alpha, H_\beta, T_\gamma$
90.	M_α, M_β, I	128.	H_α, H_β, I
109.	M_α, H, T_β	132.	$H_\alpha, T_\gamma, T_\beta$
110.	M_α, H, I	134.	$H_\alpha, T_\beta, T_\gamma$
111.	$M_\alpha, T_\alpha, T_\beta$	135.	H_α, T_β, I
113.	$M_\alpha, T_\beta, T_\gamma$	136.	H, T_α, T_β
118.	G, H_α, T_β	137.	H, T_α, I
119.	G, H_α, I	138.	$T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$

Πιθανότατα, πολλά από αυτά τα προβλήματα ανήκουν στην κατηγορία των «μη επιλύσιμων». Σ' αυτή την περίπτωση, εκτός από τα εργαλεία που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο άρθρο μου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το επόμενο αποτέλεσμα που υπάρχει στο *Algebra, an elementary textbook* του G. Chrystal (επανέκδοση από την Chelsea Publishing Company το 1964).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η τεταρτοβάθμια μονική εξίσωση* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *με ρητούς συντελεστές* a, b, c, *και* d *έχει μια κατασκευάσιμη ρίζα αν και μόνο αν η επιλύουσα Lagrange,* $y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + (4bd - c^3 - b^2d) = 0$ *έχει ρητή ρίζα.*

Είναι βέβαιο ότι στη βιβλιογραφία κρύβονται αρκετά ακόμη χρήσιμα εργαλεία που μπορεί να φανούν πολύτιμα καθώς θα διερευνάτε αυτά τα 20 προβλήματα!

Για τα μαθηματικά του χρόνου

Ivar Ekeland, *ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΟ ΑΠΡΟΣΔΟΚΗΤΟ*.
Μετάφραση: Ι. Στρατής και Γ. Σαγιάς.
Δίαυλος, Αθήνα 1993.

του Στράτου Μάκρα

Το βιβλίο του Ivar Ekeland *Τα μαθηματικά και το απροσδόκητο* πρωτοεκδόθηκε στα γαλλικά με τίτλο *Le calcul, l' imprévu: Les figures du temps de Kepler à Thom* από τις Éditions du Seuil, το 1984. Το 1988 το βιβλίο εκδόθηκε από τον οίκο The University of Chicago Press, σε μετάφραση του ίδιου του συγγραφέα. Στη δεύτερη έκδοση βασίστηκε και η ελληνική μετάφραση του έργου. Το περιεχόμενο του όρου «απροσδόκητο» αναφέρεται στο μη προβλέψιμο. Αυτό άλλωστε είναι και το περιεχόμενο του γαλλικού όρου «imprévu» που υπάρχει στο πρωτότυπο γαλλικό κείμενο.

Γιος νορβηγού διπλωμάτη και κορσικανής καθηγήτριας φιλοσοφίας ο Ekeland, παρακολουθώντας τις υπηρεσιακές μετακινήσεις τους πατέρα του, πέρασε μεγάλο μέρος της παιδικής του ηλικίας σε διάφορες πόλεις του κόσμου, γεγονός που επέδρασε άμεσα στις σπουδές του, οι οποίες ολοκληρώθηκαν στο Παρίσι, στην École Normale Superieure. Το κύριο επιστημονικό έργο του Ekeland, καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Paris-Dauphine και διευθυντή του CEREMADE, το οποίο είναι ένα ερευνητικό κέντρο στον κλάδο που επικράτησε να ονομάζεται επιχειρησιακή έρευνα, εστιάζεται σε δύο σημαντικές ερευνητικές περιοχές: στη μη γραμμική βελτιστοποίηση και στη μελέτη περιοδικών λύσεων χαμιλτονιανών συστημάτων.

Το βιβλίο του Ekeland αποτελεί υψηλή εκλαΐκευση μιας οικογένειας ιδεών και αποτελεσμάτων για τα μαθηματικά του χρόνου, όπως υποδηλώνει ο υπότιτλος της πρώτης γαλλικής έκδοσής του, που έχουν αποτελέσει ένα από τα κύρια ερευνητικά αντικείμενα των φυσικών επιστημών σε περιοχές που αναφέρονται με τίτλους όπως «μη γραμμικά δυναμικά συστήματα» ή «τάξη και Χάος». Συγκεκριμένα, το βιβλίο πραγματεύεται το πώς οι απλοί νόμοι που διέπουν τη «φυσική του σύμπαντος» προκαλούν την πολύπλοκη ή και χαοτική μορφή του πραγματικού κόσμου.

Για να πετύχει το στόχο του ο συγγραφέας, στο πρώτο κεφάλαιο, ξεκινώντας από τον Κέπλερ και τον Νεύτωνα, παρουσιάζει τη διαμόρφωση της ουράνιας μηχανικής και αναπτύσσει ένα αιτιοκρατικό μοντέλο λειτουργίας του σύμπαντος. Στο δεύτερο κεφάλαιο εκθέτει τα «αόρατα» προβλήματα που ενυπάρχουν στο λαμπρό οικοδόμημα της ουράνιας μηχανικής, αναφέρει την απόδειξη του Πουανκαρέ ότι ακόμη και απλά συστήματα (όπως το σύστημα τριών σωμάτων που κινούνται υπό την επίδραση κοινών πεδίων βαρύτητας) μπορούν να συμπεριφέρονται πολύπλοκα ή και χαοτικά, και συνδέει το αιτιοκρατικό με το τυχαίο. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συστήματα με απόσβεση, ώστε να γίνει η εισαγωγή στη θεωρία των καταστροφών. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο επιχειρείται η συνδετική σύνθεση και η διατύπωση των συμπερασμάτων, και γίνεται μια ιδιαίτερα εύστοχη αναφορά στην *Οδύσσεια* και την *Ιλιάδα*.

Χωρίς να φιλοδοξεί να αποτελέσει συστηματική επισκόπηση των μαθηματικών του χρόνου, το βιβλίο του Ekeland αποτελεί πολύτιμη εκλαϊκευτική συνεισφορά. Χωρίς να παίρνει θέση για τα ζητήματα που προκαλούν διχογνωμίες, ο συγγραφέας εκθέτει με αρκετή ακρίβεια τα κυριότερα μαθηματικά μοντέλα του χρόνου μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο. Στα θετικά της έκδοσης η καλή ελληνική απόδοση (πλην ελαχίστων «σκοτεινών» σημείων). Επιπλέον, το βιβλίο εμφανίζεται στο ελληνικό κοινό σε μια στιγμή κατά την οποία ο χώρος έχει καταληφθεί από πλήθος βιβλία που πραγματεύονται το «χάος» δίχως ιδιαίτερη σοβαρότητα. Όταν οι διάφοροι τυπολογικοί και φυσικοί όροι ερμηνεύονται με υποκειμενικό και «ψυχολογικά φορτισμένο» τρόπο, η επιστημονική αλήθεια στρεβλώνεται. Πιστεύουμε, λοιπόν, ότι το βιβλίο αυτό πρέπει να ενταχθεί στη βιβλιοθήκη κάθε ανθρώπου που ενδιαφέρεται για τις σύγχρονες εξελίξεις της επιστήμης.

Το πανίσχυρο εργαλείο

Athur Engel, *EXPLORING MATHEMATICS WITH YOUR COMPUTER*, New Mathematical Library - No. 35,
The Mathematical Association of America, 1993.

του Γιώργου Ευαγγελόπουλου

Το πόνημα του Arthur Engel αποτελεί το τριακοστό πέμπτο βιβλίο της ιδιαίτερα επιτυχημένης σειράς New Mathematical Library, η οποία προσφέρει σε μαθητές και καθηγητές λυκείου, αλλά και σε φοιτητές, βιβλία που καλύπτουν θέματα Μαθηματικών τα οποία δεν ανήκουν στη συνήθη σχολική ύλη.

Ο συγγραφέας του βιβλίου είναι μαθηματικός με μεγάλη προσφορά στη διδακτική των Μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση. Δίδαξε επί 18 χρόνια σε λύκεια της χώρας του, προτού γίνει καθηγητής της διδακτικής των Μαθηματικών στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου της Φρανγκφούρτης. Ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την οργάνωση της (τότε) Δυτικογερμανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας, από το ξεκίνημά της κιόλας ως θεσμού, δηλαδή από το 1970, ενώ από το 1977 έως το 1984 υπήρξε «προπονητής» και αρχηγός των αποστολών της Δυτικής Γερμανίας στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες που διεξήχθησαν σ' αυτό το διάστημα. Το 1990 του απονεμήθηκε ο Μεγαλόσταυρος της Τιμής από τον υπουργό Παιδείας της τότε Δυτικής Γερμανίας, ενώ το 1991 πήρε το βραβείο David Hilbert της Παγκόσμιας Ομοσπονδίας των Εθνικών Μαθηματικών Διαγωνισμών (WFNMC).

Το *Εξερευνώντας τα Μαθηματικά με τον υπολογιστή σου* είναι, όπως τονίζει και ο συγγραφέας, ένα βιβλίο για τα Μαθηματικά και όχι για τον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σκοπός του είναι να δείξει ότι ο υπολογιστής είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο για την εκτέλεση αριθμητικών «πειραμάτων» και προσομοιώσεων σε ευρύτατη κλίμακα. Ο Engel γνωρίζει ότι η νέα γενιά των μαθηματικών χρησιμοποιεί από μικρή ηλικία τον υπολογιστή στην έρευνα και επιθυμεί να τη βοηθήσει να μελετήσει μερικά ενδιαφέροντα κεφάλαια των Μαθηματικών, χρησιμοποιώντας αυτό το εργαλείο. Το βιβλίο περιέχει επτά ανεξάρτητα κεφάλαια, τα οποία καλύπτουν 65 διαφορετικά θέματα. Κατά τη μελέτη των θεμάτων, ο Engel προβαίνει σε λογική ανάλυση του προγράμματος που κάθε φορά παραθέτει· χρησιμοποιεί τη γλώσσα Turbo Pascal, την οποία οι αναγνώστες του βιβλίου μαθαίνουν εύκολα, μελετώντας μόνοι τους τα λυμένα παραδείγματα και τα προτεινόμενα προς λύση προβλήματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι μερικά από τα προβλήματα έχουν προταθεί σε Ολυμπιάδες, εθνικές και διεθνείς. Τα περισσότερα προγράμματα είναι πλήρη, παρότι σύντομα, και συνήθως δεν απαιτείται παράθεση επεξηγηματικών σχολίων για να γίνουν εύκολα κατανοητά· αυτό δεν σημαίνει ότι όλα τα προγράμματα είναι τετριμμένα, το αντίθετο μάλιστα! Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι, πρώτον, το βιβλίο συνοδεύεται από μία 3,5 ιντσών, συμβατή με IBM, δισκέτα, που περιέχει τα προγράμματα Pascal τα οποία παρατίθενται σ' αυτό, και δεύτερον, το υλικό του προέκυψε από δύο σεμινάρια, ένα για καθηγητές λυκείου και ένα που έφερε τον τίτλο «Μαθηματικές ανακαλύψεις με έναν PC».

Ας δούμε όμως το βιβλίο αναλυτικότερα. Η θεματική του είναι εξαιρετική. Οι τίτλοι των επτά κεφαλαίων είναι οι ακόλουθοι: 1) Εισαγωγικά προβλήματα, 2) Αλγόριθμοι στη θεωρία αριθμών, 3) Πιθανότητες, 4) Στατιστική, 5) Συνδυαστικοί αλγόριθμοι, 6) Αριθμητικοί αλγόριθμοι, και 7) Ανάλεκτα προβλήματα. Ο συγγραφέας έκανε μια θαυμάσια επιλογή υλικού όσον αφορά τα περιεχόμενα των κεφαλαίων. Αναφέρω ενδεικτικά: 1) το περίφημο πρόβλημα του Flavius Josephus, 2) ο αλγόριθμος του Ευκλείδη, 3) ο αλγόριθμος του Gill για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη και του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου, 4) η εμπειρική μελέτη της εικασίας Goldbach, 5) η παράσταση του n ως αθροίσματος τεσσάρων τετραγώνων, 6) η αρχιμήδεια ολοκλήρωση της παραβολής, 7) η ακολουθία U του Stan Ulam (την οποία ο μεγάλος πολωνός μαθηματικός πρότεινε σ' ένα συνέδριο για τη θεωρία αριθμών, το 1963), 8) το πρόβλημα του αλγόριθμου $3n+1$, 9) το πρόβλημα του Frobenius, 10) συνεχή κλάσματα, και 11) το πρόβλημα της εύρεσης των 1.000 δεκαδικών ψηφίων του e.

Ο Engel έγραψε το βιβλίο του σε ύφος που δεν κουράζει, αλλά κυριολεκτικά ψυχαγωγεί τον αναγνώστη του, χωρίς να θυσιάσει ούτε μία στιγμή την καθαρότητα και την ακρίβεια στην έκφραση και την εν γένει διατύπωση των συλλογισμών του.

Για να «τρέξει» κάποιος τα προγράμματα χρειάζεται ένα μεταγλωττιστή της Pascal. Η Turbo Pascal προτείνεται για τα συστήματα MS-DOS, και η Think Pascal για το Macintosh. Για να βοηθηθεί ο αναγνώστης υπάρχουν στο τέλος του βιβλίου τα ακόλουθα δύο κεφάλαια: 1) Μια μικρή περίληψη της Turbo Pascal, και 2) Για χρήστες άλλων μεταγλωττιστών της Pascal. Είναι όμως χαρακτηριστική η άποψη του άριστου λύτη μαθηματικών προβλημάτων Γρηγόρη Οικονομίδη, όπως αυτή διατυπώθηκε στην κριτική που έγραψε για λογαριασμό του αγγλικού περιοδικού *Mathematical Spectrum* (τόμ. 26, αρ. 3, σελ. 93-94): «Δεν είχα ποτέ πριν χρησιμοποιήσει την Pascal, αλλά κατάφερα τόσο να τρέξω τα προγράμματα (χρησιμοποιώντας την Turbo Pascal version 6.0) όσο και να γράψω τα δικά μου προγράμματα για πολλές ασκήσεις του βιβλίου, χωρίς καμία δυσκολία και χωρίς να χρειαστεί να ανατρέξω σε κάποιο εγχειρίδιο για την Pascal ή σε οποιαδήποτε άλλη πηγή για βοήθεια· ο συγγραφέας είναι αυθεντία στη διδακτική».

Ας έρθουμε τώρα στον κεντρικό σκοπό του βιβλίου, αφού πρώτα επισημάνουμε ότι το βιβλίο δεν αποτελεί εισαγωγή ούτε στα θέματα των Μαθηματικών που θίγει, ούτε στον προγραμματισμό, ούτε στη θεωρία αλγορίθμων· υπάρχουν άλλα βιβλία που εκπληρώνουν αυτούς τους σκοπούς. Ο Engel μας «ξεναγεί» βέβαια σε διάφορες συναρπαστικές περιοχές των στοιχειωδών Μαθηματικών και τη μελέτης των αλγορίθμων, αλλά εκείνο το οποίο επιχειρεί να αναδείξει είναι η παιδαγωγική αξία της χρήσης του υπολογιστή ως πειραματικού εργαλείου, που το χρησιμοποιούμε για να ρίξουμε φως σ' ένα πρόβλημα, να κάνουμε παρατηρήσεις και να διατυπώσουμε εικασίες. Στην επίτευξη αυτού του στόχου επιτυγχάνει απολύτως. Στη μελέτη κάθε προβλήματος υπογραμμίζει το μαθηματικό του υπόβαθρο, το αναλύει λογικά και «καταστρώνει» ένα πλήρες πρόγραμμα. Αρκετές φορές, κι αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον, οι λύσεις που δίνει σε ορισμένα δύσκολα προβλήματα, μελετώντας τα με τον υπολογιστή και γράφοντας τους κατάλληλους αλγορίθμους, είναι πιο εύκολες από εκείνες που προκύπτουν αν χρησιμοποιηθούν μόνο Μαθηματικά.

Παραδειγμα: Ο Engel στις σελίδες 229-231 του βιβλίου του, και υπό τον τίτλο «Ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα», μελετά το 6ο πρόβλημα της 29ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας που έγινε στην Καμπέρα της Αυστραλίας το 1988. Πρόκειται για ένα πρόβλημα της θεωρίας αριθμών το οποίο δεν μπόρεσε να λύσει ούτε ένα μέλος της αυστραλιανής επιτροπής για την επιλογή των θεμάτων του διαγωνισμού, ούτε κάποιος από τους τέσσερις επιφανείς αριθμοθεωρητικούς της ίδιας χώρας στους οποίους δόθηκε για να το λύσουν εντός έξι ωρών· παρ' όλα αυτά το πρόβλημα προτάθηκε στο διαγωνισμό και 11 μαθητές λυκείου έδωσαν πλήρεις απαντήσεις!

Πρόκειται για το ακόλουθο θέμα: «*Αποδείξτε ότι αν a, b, q είναι θετικοί ακέραιοι και $a^2 + b^2 = q(ab + 1)$, τότε ο q είναι τέλειο τετράγωνο*».

Στη συνέχεια παραθέτουμε την «αυστηρά μαθηματική» λύση του προβλήματος, δηλαδή τη λύση που δόθηκε στο διαγωνισμό και δεν περιέχεται στο βιβλίο, ώστε οι αναγνώστες του *Quantum*, μελετώντας και την «πειραματική-υπολογιστική» στο πρώτο της μέρος λύση του Engel, που δεν παύει όμως να είναι και αυτή απολύτως ορθή από μαθηματική σκοπιά, να μπορέσουν να κάνουν τη σύγκριση.

Λύση 1η: Ας υποθέσουμε ότι $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q$, όπου q είναι ακέραιος, αλλά όχι τέλειο τετράγωνο, και όπου ο $\max\{a, b\}$ είναι ο μικρότερος δυνατός. Εάν $a = b$, θα ισχύει

$$0 < q = \frac{2a^2}{a^2 + 1} < 2$$

και επομένως $q = 1$, δηλαδή τέλειο τετράγωνο. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς αυτό να αποβαίνει εις βάρος της γενίκευσης, ότι $a < b$.

Η εξίσωση $a^2 + b^2 - q(ab + 1) = 0$ γίνεται $b^2 - baq + (a^2 - q) = 0$, οπότε το άθροισμα των ριζών της είναι qa, ενώ το γινόμενό τους είναι $a^2 - q$· τότε υπάρχει ένα δεύτερο ζεύγος ακεραίων (a, b') που ικανοποιεί την εξίσωση, με $b' = qa - b$ και $b'b = a^2 - q$.

Αφού οι a και q είναι θετικοί ακέραιοι, η υπόθεση $b' < 0$ είναι άτοπη, δεδομένου ότι πρέπει να ισχύει η εξίσωση $a^2 + (b')^2 = q(ab' + 1)$. Επίσης, αφού ο q δεν είναι τέλειο τετράγωνο, η υπόθεση $b' = 0$ είναι άτοπη, αφού πρέπει να ισχύει $bb' = a^2 - q$. Επομένως $b' > 0$, και το ζεύγος (a, b') ικανοποιεί όλες τις συνθήκες που θέσαμε για το ζεύγος (a, b), εκτός ίσως από την $a < b$. Πάντως, τώρα έχουμε ότι

$$b' = \frac{a^2 - q}{b} < \frac{b^2 - q}{b} < b,$$

που αντιφάσκει με την αξίωσή μας ότι ο $\max\{a, b\}$ είναι ο μικρότερος δυνατός. Τότε η αρχική μας υπόθεση είναι εσφαλμένη και επομένως ο q είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση 2η (η λύση που παραθέτει ο Engel): «Ας υποθέσουμε ότι είμαστε μαθηματικοί μεσαίων ικανοτήτων, αλλά έχουμε κάποιον υπολογιστή στη διάθεσή μας. Θα δείξουμε ότι τότε το πρόβλημα γίνεται συγκριτικά απλούστερο.

Στο πρώτο βήμα μας συλλέγουμε υλικό. Κατόπιν το μελετάμε για να βρούμε κάποιες "ενδείξεις". Τελικά βλέπουμε πώς θα οδηγηθούμε στις λύσεις. Εξαιτίας "συμμετρίας" των a και b στη σχέση που δόθηκε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \leq b$.

α) Είναι εύκολο να δούμε ότι $a = b$ μόνο για $a = b = q = 1$. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a < b$.

β) Γράψτε ένα πρόγραμμα που να μας δίνει όλες τις λύσεις για $a \leq 150$, $b \leq 1.000$.

Παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	27	30	112
b	1	8	27	64	125	216	343	30	512	279	1000	240	112	418
q	1	4	9	16	25	36	49	4	64	81	100	9	4	4

γ) Μια πρώτη ματιά στον πίνακα μας "προτείνει" τη λύση $(a, b, q) = (c, c^3, c^2)$. Πράγματι $c^2 + c^6 = c^2(c^4 + 1)$. Βρήκαμε μια λύση για κάθε τετράγωνο.

δ) Ας ρίξουμε μιά ματιά στις τριάδες των αριθμών που δίνουν τον ίδιο q, για παράδειγμα $q = 4$.

2	8	30	112	a	b
8	30	112	418	b	a_1
4	4	4	4	q	q

Ο δεύτερος αριθμός σε κάθε τριάδα (a, b, q) είναι ο πρώτος της επόμενης τριάδας. Αυτό εισηγείται το μετασχηματισμό $(a, b, q) \rightarrow (b, a_1, q)$.

Η διοφαντική εξίσωση $a^2 + b^2 = q(ab + 1)$, ή

(0) $\qquad a^2 - qba + b^2 - q = 0$

είναι δευτεροβάθμια ως προς το a και έχει δύο λύσεις a, a_1, που ικανοποιούν τις

(1) $\qquad a + a_1 = qb$

(2) $\qquad a \cdot a_1 = b^2 - q$.

Η εξίσωση (1) δείχνει ότι εκτός από τον a και ο a_1 είναι ακέραιος, και έχουμε

(3) $\qquad a_1 = qb - a$.

Αφού $q \geq 2$ και $b > a$, έχουμε ότι $a_1 > b$. Έτσι για κάθε b, οι δύο λύσεις a, a_1 της (0) "υπερπηδούν" τον b. Λόγω "συμμετρίας", οι δύο λύσεις b, b_1 της (0) για δεδομένο a "υπερπηδούν" τον a. Έτσι μπορεί κάποιος να παίρνει ολοένα και μεγαλύτερα ζεύγη ακεραίων (a, b) για συγκεκριμένο q.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο q είναι τέλειο τετράγωνο, "κατεβαίνοντας" τη σκάλα της "οικογένειας" των λύσεων. Η αρχική εξίσωση $a^2 + b^2 = q(ab + 1)$ δείχνει ότι ο ab δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Επομένως οι a και b πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο (ίσως ο ένας να ισούται με το μηδέν). Χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα ιδιότητα (της "υπερπήδησης"), μπορούμε να αντικαθιστούμε εναλλακτικά τον μεγαλύτερο από τους a και b με έναν μικρότερο μη αρνητικό ακέραιο. Στο τέλος ο ένας από τους αριθμούς πρέπει να γίνει μηδέν, και ο q είναι το τετράγωνο του άλλου».

Συμπέρασμα: Βλέπουμε λοιπόν ότι η λύση του Engel είναι λιγότερο κομψή από την πρώτη, πλην όμως κάνει πιο φανερή στον αναγνώστη τη «δομή» του προβλήματος, καθώς αναλύει τα δεδομένα του και «πειραματίζεται» με αυτά, χάρη στη βοήθεια του υπολογιστή.

Το βιβλίο αυτό είναι κατά την άποψή μου υπέροχο, ένα από τα καλύτερα που έχω διαβάσει τα τελευταία χρόνια. Είναι πρωτότυπο, γεμάτο φρέσκιες ιδέες και άριστο υλικό· το συνιστώ θερμά στους αναγνώστες του *Quantum*. ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M16

Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη, μπορούμε να εκτιμήσουμε τους παρονομαστές των όρων του αριστερού μέλους της δεδομένης ανισότητας:

$$(1+m)^{1/n} < 1 + \frac{m}{n},$$

$$(1+m)^{1/m} < 1 + \frac{n}{m}.$$

Συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} > \frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n}$$

= 1, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Για να αποδείξουμε την παραλλαγή της ανισότητας του Bernoulli που είδαμε στη εκφώνηση του προβλήματος, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a - ax - 1$. Εφόσον $f'(x) = a(1+x)^{a-1} - a$ για $x > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, και επομένως $f(x) < f(0) = 0$ για $x > 0$. (V. Senderov)

M17

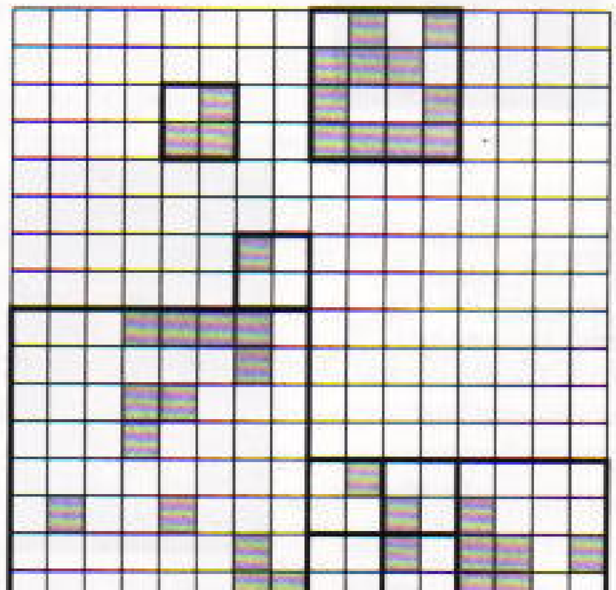
Θεωρήστε όλους τους n-ψήφιους αριθμούς που αποτελούνται από τα ψηφία 1 και 2. Υπάρχουν 2^n ακριβώς τέτοιοι αριθμοί και ισάριθμα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός αριθμού με το 2^n. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι όλοι οι 2^n αριθμοί αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν με το 2^n: τότε ένα (και μόνο ένα) από αυτά τα υπόλοιπα πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν.

Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τέλεια επαγωγή. Αφήνουμε την περίπτωση $n = 2$ στον αναγνώστη, και υποθέτουμε ότι όλοι οι $(n-1)$-ψήφιοι αριθμοί που αποτελούνται από τα ψηφία 1 και 2 αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν με το 2^{n-1}. Θα αποδείξουμε ότι αυτή η επαγωγική υπόθεση δεν επιτρέπει την ύπαρξη δύο n-ψήφιων αριθμών (της μορφής του προβλήματός μας) που αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το 2^n.

Έστω a_n και b_n δύο τυχαίοι από αυτούς τους n-ψήφιους αριθμούς. Ας υποθέσουμε ότι τα υπόλοιπα της διαίρεσης των a_n και b_n με το 2^n είναι ίδια. Τότε ο a_n και ο b_n είναι και οι δύο είτε άρτιοι είτε περιττοί —δηλαδή, καταλήγουν στο ίδιο ψηφίο r ($r = 1$ ή 2). Επομένως μπορούμε να τους γράψουμε στη μορφή $a_n = 10a_{n-1} + r$ και $b_n = 10b_{n-1} + r$, όπου οι a_{n-1} και b_{n-1} αποτελούνται από $n - 1$ ψηφία 1 ή 2 (είναι οι a_n και b_n χωρίς το τελευταίο τους ψηφίο). Αφού το $a_n - b_n = 10(a_{n-1} - b_{n-1})$ διαιρείται με το 2^n, το $5(a_{n-1} - b_{n-1})$ διαιρείται με το 2^{n-1}. Αυτό σημαίνει ότι οι a_{n-1} και b_{n-1} αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι με το 2^{n-1}. Αλλά αυτό έρχεται σε αντίφαση με την επαγωγική υπόθεση.

M18

Ας ονομάσουμε ένα τετράγωνο *κατάλληλο* όταν το τμήμα του εμβαδού του που είναι χρωματισμένο μαύρο δεν υπερβαίνει τα 4/5 και δεν υπολείπεται του 1/5 της συνολικής επιφάνειας του τετραγώνου. Αφού το πλέγμα μας είναι άπειρο, μπορούμε να βρούμε έναν ακέραιο n αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να υπάρχει ένα ορθογώνιο Q με πλευρά μήκους 2^n, οριζόμενο από ευθείες του πλέγματος, το οποίο θα περιέχει όλα τα μαύρα τετράγωνα και τέτοιο ώστε το συνολικό εμβαδόν των μαύρων τετραγώνων να μην υπερβαίνει το 1/5 του εμβαδού του Q. Διαιρούμε αυτό το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα τετράγωνα με μήκος πλευράς 2^{n-1}. Στο καθένα από αυτά, το πολύ τα 4/5 του εμβαδού τους θα είναι μαύρα. Όσα έχουν τουλάχιστον το 1/5 του εμβαδού τους χρωματισμένο θα είναι κατάλληλα. Τα υπόλοιπα έχουν λιγότερο από το 1/5 του εμβαδού τους χρωματισμένο και επομένως μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία της υποδιαίρεσής τους, κ.ο.κ. (Σχήμα 1).



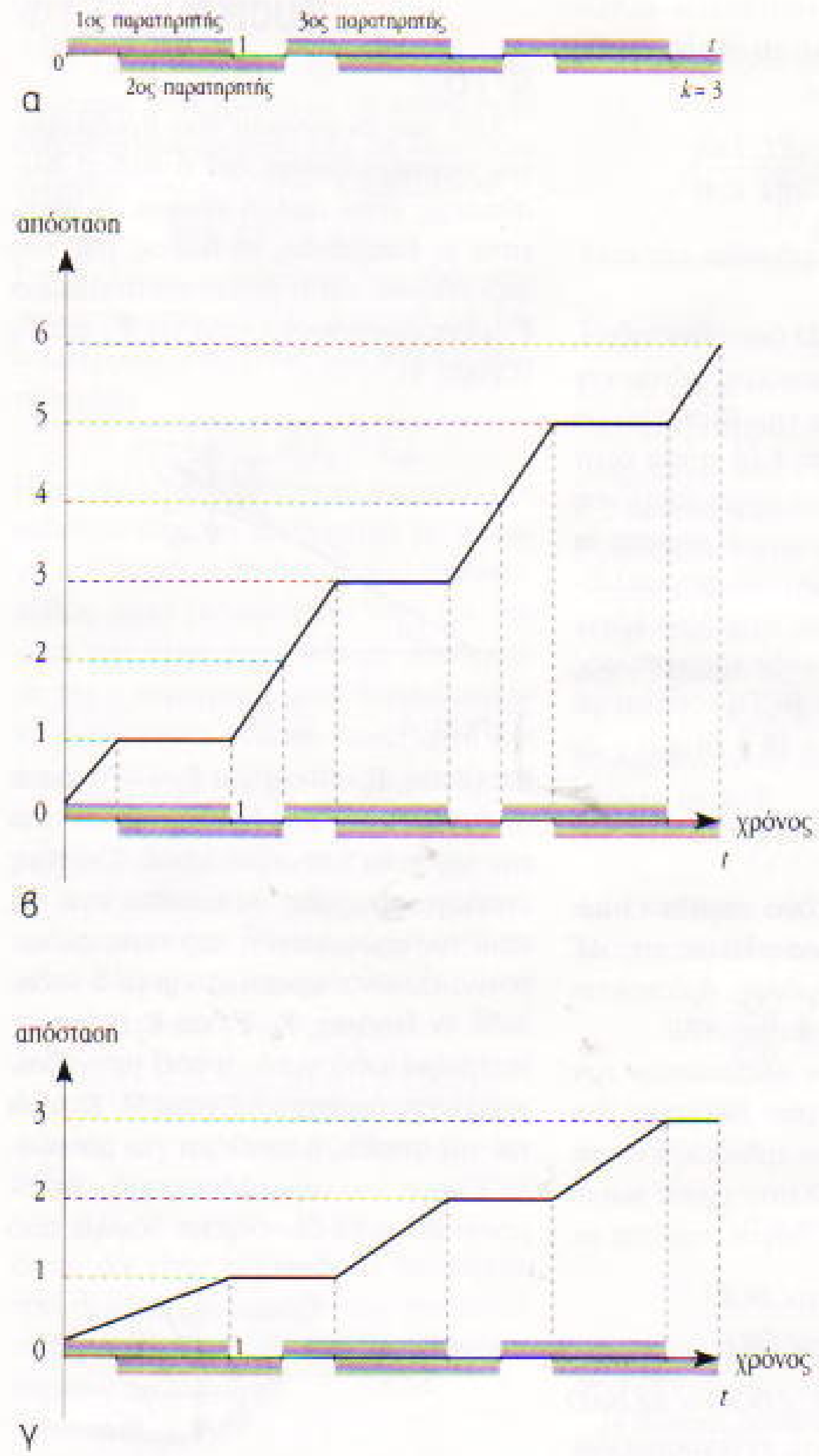
Σχήμα 1

Μετά την $(n-2)$-οστή υποδιαίρεση θα έχουμε καταλήξει σε κάποιο πλήθος κατάλληλων τετραγώνων και σ' ένα πλήθος τετραγώνων διαστάσεων 2 × 2, στα οποία το πολύ τα 4/5 τους είναι χρωματισμένα. Όσα από τα τελευταία περιέχουν τουλάχιστον ένα μαύρο τετράγωνο είναι κατάλληλα (έχουν τουλάχιστον το 1/4 > 1/5 του εμβαδού τους χρωματισμένο). Τα υπόλοιπα δεν περιέχουν κανένα μαύρο τετράγωνο, και επομένως σε αυτό το στάδιο όλα τα μαύρα τετράγωνα θα καλύπτονται από κατάλληλα τετράγωνα, πράγμα που ήταν και ο στόχος μας.

Το πρόβλημα μπορεί να επεκταθεί και στο χώρο, αν αντικαταστήσουμε τα 1/5 και 4/5 με 1/9 και 8/9, αντίστοιχα. Η απόδειξη τροποποιείται με φυσιολογικό τρόπο.

M19

Αυτό το πρόβλημα προήλθε από ένα λάθος που έκανε ένας φοιτητής στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας. Μια φορά χρησιμοποίησε το εξής λήμμα, το οποίο του φάνηκε προφανές: *αν μια συνάρτηση είναι οριομένη στο διάστημα* [*a*, *b*] *το οποίο καλύπτεται από πεπερα-*



Σχήμα 2

σμένο σύστημα διαστημάτων, και αν η μεταβολή της συνάρτησης σε καθένα από αυτά διαστήματα είναι μικρότερη ή ίση από το μήκος του, τότε η μεταβολή της συνάρτησης σε ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$ *είναι μικρότερη ή ίση από το* $b - a$. (Μεταβολή της συνάρτησης σ' αυτή την περίπτωση είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής της.) Στην περίπτωσή μας θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως συνάρτηση την απόσταση $s(x)$ που διασχίζει το σαλιγκάρι στο χρονικό διάστημα x, με $0 \leq x \leq t$, ενώ ως τμήματα που καλύπτουν το διάστημα $[0, t]$ μπορούμε να θεωρήσουμε τα διαστήματα παρατήρησης όλων των σπουδαστών.

Τότε, και αν το λήμμα ήταν αληθές, η συνολική διαδρομή του σαλιγκαριού δεν θα ξεπερνούσε τα t μέτρα. Αυτό πιστεύουν οι περισσότεροι άνθρωποι σ' αυτή την περίπτωση πολλοί μάλιστα νομίζουν ότι το σαλιγκάρι πρέπει να μετακινείται με σταθερή ταχύτητα 1 μέτρου ανά λεπτό και ότι διασχίζει ακριβώς t μέτρα κατά το δεδομένο χρονικό διάστημα. Στην πραγματικότητα, η διαδρομή του σαλιγκαριού ποικίλλει, χοντρικά, ανάμεσα στα $t/2$ και στα $2t$ μέτρα. Αυτή η προφανής σύγκρουση μεταξύ κοινής αντίληψης και πραγματικότητας κάνει το πρόβλημα ιδιαίτερα ελκυστικό.

Ακριβέστερα, αν m και M είναι ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος ακέραιος στο διάστημα $(t/2, t)$, τότε η μικρότερη και η μεγαλύτερη διαδρομή που διανύει το σαλιγκάρι είναι m και $2M$, αντίστοιχα. (Για $t > 1$ οι αριθμοί m και M είναι καλά ορισμένοι.)

Ας εξηγήσουμε πώς θα οργανώσουμε την παρατήρηση και την κίνηση του σαλιγκαριού για να επιτύχουμε αυτές τις ακραίες τιμές.

Πάρτε οποιονδήποτε ακέραιο k, με $t/2 < k < t$ (μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι $k = m$ και $k = M$). Διαιρέστε το διάστημα $[0, t]$ σε k ίσα τμήματα. Το μήκος t/k καθενός από τα τμήματα αυτά είναι μεγαλύτερο από το 1 και μικρότερο από το 2, και επομένως μπορεί να καλυφθεί από δύο επικαλυπτόμενα διαστήματα, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 2α. Θεωρούμε ως διαστήματα παρατήρησης των σπουδαστών αυτά τα διαστήματα. Το σαλιγκάρι μπορεί να αποφασίσει να κινείται μόνο όταν το παρατηρεί ένας μόνο σπουδαστής (Σχήμα 2β), και σ' αυτή την περίπτωση θα διασχίζει $2k$ μέτρα. Μπορεί επίσης να αποφασίσει να κινείται μόνο όταν το παρατηρούν δύο σπουδαστές (Σχήμα 2γ), και σ' αυτή την περίπτωση η συνολική απόσταση που θα διανύσει είναι k μέτρα. Θέτοντας $k = 2M$ και m παίρνουμε, αντίστοιχα, $2M$ και m μέτρα για το μήκος της διαδρομής του σαλιγκαριού. (Παρεμπιπτόντως, αν τροποποιήσουμε ελαφρά το νόμο κίνησης, το σαλιγκάρι μπορεί να διασχίσει *οποιαδήποτε* απόσταση ανάμεσα στα m και στα $2M$ μέτρα. Κάντε μόνοι σας τον σχετικό έλεγχο.)

Απομένει να δείξουμε ότι η απόσταση που διασχίζει το σαλιγκάρι δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το $2M$ ούτε μικρότερη από το m.

Για οποιαδήποτε σειρά παρατήρησης, έστω $I_1 = [0, 1]$ το πρώτο διάστημα παρατήρησης, έστω I_2 το δεξιότερο διάστημα που τέμνεται με το I_1 (πιθανόν, το I_2 έχει μόνο ένα κοινό άκρο με το I_1, αλλά η τομή των I_1 και I_2 δεν μπορεί να είναι κενή αφού η παρατήρηση δεν διακόπτεται ποτέ), και γενικά, έστω I_{n+1} το δεξιότερο διάστημα που τέμνεται με το I_n. Αν υπάρχουν p διαστήματα σ' αυτή την ακολουθία, τότε το τελευταίο διάστημα σ' αυτή την ακολουθία, το I_1, είναι το $[t-1, t]$. Παρατηρήστε ότι για $n = 2, 3, ..., p-1$, τα διαστήματα I_{n-1} και I_{n+1} δεν έχουν κοινά σημεία (διαφορετικά, το I_n δεν θα ήταν το *δεξιότερο* διάστημα που τέμνεται με το I_{n-1}). Έστω k το πλήθος των «περιττών» διαστημάτων $I_1, I_3, I_5, ...$ (οπότε $p = 2k$ ή $p = 2k - 1$). Τότε, ολόκληρο το διάστημα $[0, t]$ περιέχει k ξένα μεταξύ τους «περιττά» διαστήματα και καλύπτεται πλήρως απ' όλα τα $p \leq 2k$ διαστήματα I_n. Έπεται ότι $k < t \leq 2k$. Παρόμοια, αν θεωρήσουμε τα p τμήματα της διαδρομής του σαλιγκαριού που αντιστοιχούν στα χρονικά διαστήματα I_n, μπορούμε να δούμε ότι $k \leq s \leq 2k$. Αφού το k είναι ακέραιος, με $k < t$ και $k > t/2$ (εκτός από την περίπτωση που $t = 2k$), παίρνουμε $m \leq k \leq M$, και επομένως $m \leq s \leq 2M$

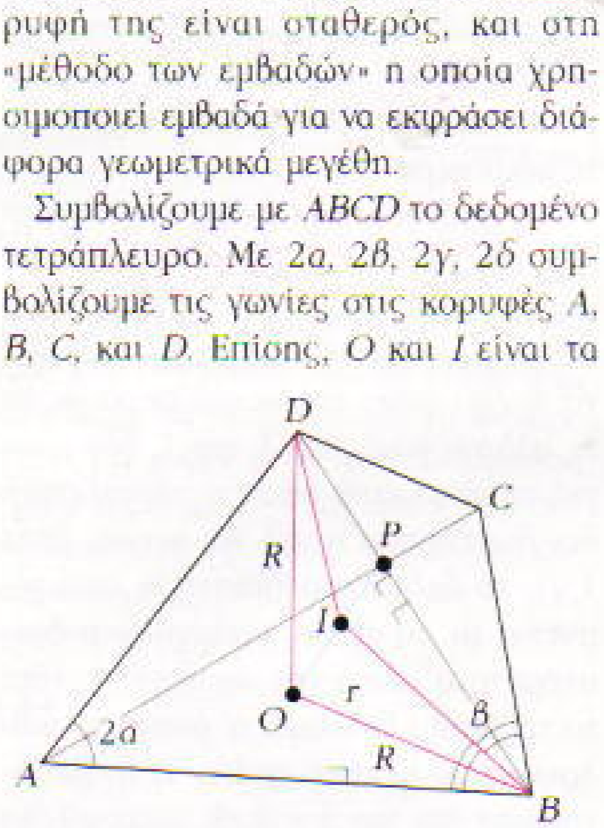
όταν $t \neq 2k$.

Στην ειδική περίπτωση που $t = 2k$, καταλαβαίνουμε εύκολα ότι $p = t$, και $I_n = [n - 1, n]$ για όλα τα $n = 1, 2, \ldots, p$. Επομένως, η μόνη δυνατή τιμή για το s είναι $2k$, άρα η μοναδική δυνατή τιμή για το s είναι $2k$, και συνεπώς η ανισότητα $s \geq m$ είναι και πάλι αληθής (εδώ $m = k + 1$). Ιδού ένα ακόμη πρόβλημα: διορθώστε το λήμμα που αναφέρθηκε στην αρχή της λύσης. (N. Konstantinov, V. Dubrovsky)

M20

Η λύση μας θα βασιστεί σε δύο χρήσιμες ιδέες: στο γεγονός ότι ο λόγος των αποστάσεων από τις πλευρές μιας γωνίας όλων των σημείων μιας ευθείας που φέρουμε στο εσωτερικό της γωνίας και η οποία διέρχεται από την κορυφή της είναι σταθερός, και στη «μέθοδο των εμβαδών» η οποία χρησιμοποιεί εμβαδά για να εκφράσει διάφορα γεωμετρικά μεγέθη.

Συμβολίζουμε με $ABCD$ το δεδομένο τετράπλευρο. Με 2α, 2β, 2γ, 2δ συμβολίζουμε τις γωνίες στις κορυφές A, B, C, και D. Επίσης, O και I είναι τα



Σχήμα 3

κέντρα, και R και r οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα. Και, τέλος, P είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του (Σχήμα 3). Αφού το τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Συνεπάγεται, επομένως, ότι δύο διαδοχικές γωνίες του είναι οξείες (ή ορθές). Ας υποθέσουμε ότι οι γωνίες 2α και 2β δεν είναι αμβλείες (και επομένως οι 2γ και 2δ δεν είναι οξείες).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση τα σημεία O και I βρίσκονται στο εσωτερικό της γωνίας APB και ότι οι λόγοι των αποστάσεων αυτών των σημείων από τις πλευρές αυτής της γωνίας είναι ίσοι:

$$\frac{d(O, DB)}{d(O, CA)} = \frac{d(I, DB)}{d(I, CA)}$$

(εδώ το γράμμα d συμβολίζει την απόσταση).

Αφού η γωνία BCD δεν είναι οξεία, το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται από την ίδια πλευρά της BD όπως και το A (ή πάνω στην BD). Το κέντρο I του εγγεγραμμένου κύκλου (το σημείο όπου τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου) βρίσκεται επίσης στην ίδια πλευρά της BD, διότι η γωνία της κορυφής I του τετραπλεύρου $BCDI$ ισούται με $2\pi - \beta - 2\gamma - \delta = \pi - (\beta + \delta) + \pi - 2\gamma = \pi/2 + 2\alpha \leq \pi$ ($\beta + \delta = \pi/2$ αφού το $ABCD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο).

Παρόμοια, και τα δύο σημεία O και I βρίσκονται στην ίδια πλευρά της AC με το σημείο B. Επομένως, βρίσκονται στο εσωτερικό της γωνίας APB.

Ο λόγος, τώρα, των αποστάσεων των σημείων O και I από την BD μπορεί να γραφεί ως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων OBD και IBD που έχουν κοινή βάση BD —με άλλα λόγια, ισούται με

$$\frac{OB \cdot OD \cdot \text{ημ}\angle BOD}{IB \cdot ID \cdot \text{ημ}\angle BID}.$$

Όμως, $OB = OD = R$, $\angle BOD = 2\angle BAD = 4\alpha$ (από την ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών σε ίσα τόξα), $IB = r/\text{ημ}\beta$, $ID = r/\text{ημ}\delta = r/\text{συν}\beta$ (βλ. Σχήμα 3), και, όπως αποδείξαμε, $\angle BID = \pi/2 + 2\alpha$. Συνεπάγεται ότι

$$\frac{d(O, BD)}{d(I, BD)} = \frac{R^2 \text{ημ}4\alpha\,\text{ημ}\beta\,\text{συν}\beta}{r^2 \text{ημ}(\pi/2 + 2\alpha)} = \frac{R^2 \text{ημ}2\alpha\,\text{συν}2\alpha\,\text{ημ}2\beta}{r^2 \text{συν}2\alpha} = \frac{R^2}{r^2}\,\text{ημ}2\alpha\,\text{ημ}2\beta.$$

Από τη συμμετρία του προβλήματος και από την παράσταση που έχουμε βρει, προκύπτει ότι ο λόγος

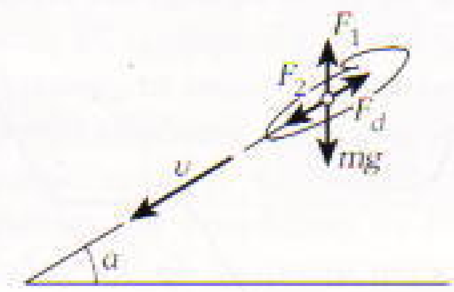
$$d(O, AC)\ /d(I, AC)$$

είναι ο ίδιος, πράγμα που σημαίνει ότι η ισότητα των λόγων που σκοπεύαμε να αποδείξουμε ισχύει πραγματικά. (V. Dubrovsky)

Φυσική

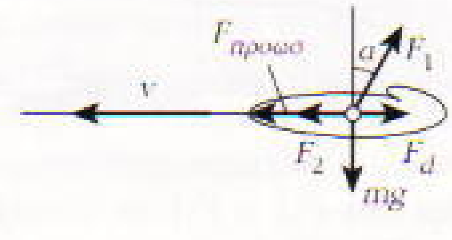
Φ16

Από την εκφώνηση του προβλήματος συμπεραίνουμε ότι η πτήση ολισθήσεως είναι ομαλή κίνηση με ταχύτητα υ. Επομένως το βάρος $m\mathbf{g}$ του αεροπλάνου και η μετωπική αντίσταση $\mathbf{F}_d$ εξισορροπούνται από τις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Επομένως, $\mathbf{F}_1 = -m\mathbf{g}$ και $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_d$, όπου οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ εξαρτώνται από την ταχύτητα του αεροπλάνου. Για τους υπολογισμούς μας θα υποθέσουμε ότι κατά την απογείωση η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι πρακτικά ίση με υ —δηλαδή, οι δυνάμεις $\mathbf{F}_d$, $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ έχουν περιστραφεί κατά γωνία α μαζί με το διάνυσμα της ταχύτητας (Σχήμα 5). Σ' αυτή την περίπτωση, η συνθήκη για την ομαλή κίνηση του αεροπλάνου —και δεδομένου ότι αυτό δεν δέχεται δύναμη από



Σχήμα 5

το διάδρομο απογείωσης (αφού ουσιαστικά δεν βρίσκεται σε επαφή μαζί του)—, είναι:

$$F_{\text{προωσ}} = F_1\ \text{ημ}\alpha,$$
$$mg = F_1\ \text{συν}\alpha.$$

Επομένως,

$$F_{\text{προωσ}} = mg\ \text{εφ}\alpha \cong 1.700\ \text{Nt}.$$

Δεν έχει νόημα να κάνουμε ακριβέστερη αυτή την εκτίμηση —η φύση της ροής του αέρα γύρω από το αεροπλάνο κοντά στο έδαφος είναι αρκετά διαφορετική από την περίπτωση της πτήσης ολισθήσεως, αλλά εδώ δεν μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας τα στοιχεία αυτά.

Φ17

Το έργο που έχει προσφερθεί στο σύστημα μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του αερίου και σε δυναμική ενέργεια του εμβόλου. Ακριβέστερα,

$$W = \Delta U_g + \Delta U_p.$$

Για το ένα γραμμομόριο του ιδανικού μονοατομικού αερίου, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειάς του δίνεται από τη σχέση

$$\Delta U_g = {}^3/_2\, R(T_x - T_0).$$

Η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του εμβόλου ισούται αριθμητικά με το έργο που παράγει το βάρος του εμβόλου, καθώς αυτό μετακινείται από την αρχική του θέση στην τελική. (Θεωρούμε ότι η περιγραφόμενη θερμοδυναμική διαδικασία γίνεται πολύ αργά και πως το αέριο περνά από μια διαδοχική σειρά *σχεδόν* καταστάσεων ισορροπίας.) Έτσι, κάθε στιγμή η δύναμη PS που ασκεί στο έμβολο το συμπιεσμένο μέσα στο δοχείο αέριο ισούται με το βάρος mg του εμβόλου (η πίεση του εξωτερικού αέρα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα). Αν συμβολίσουμε με Δh την υψομετρική διαφορά μεταξύ της τελικής και της αρχικής θέσης του εμβόλου, έχουμε

$$\Delta U_p = mg\Delta h = PS\Delta h = P\Delta V,$$

όπου ΔV είναι η μεταβολή του όγκου του αερίου. Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση (για ένα γραμμομόριο αερίου) λαμβάνουμε

$$\Delta U_p = P\Delta V = R\,(T_x - T_0).$$

Επομένως,

$$W = {}^3/_2\, R(T_x - T_0) + R(T_x - T_0) = {}^5/_2\, R(T_x - T_0),$$

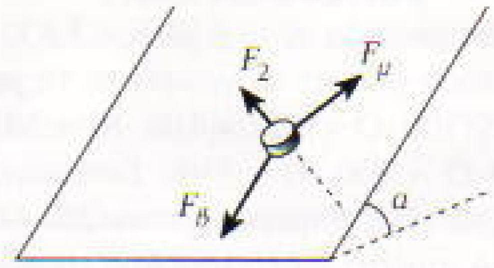
άρα

$$T_x = T_0 + \frac{2}{5}\frac{W}{R}.$$

Φ18

Είναι φανερό ότι αν $\mu \geq$ εφα, ο κύλινδρος δεν πρόκειται να μετακινηθεί. Επομένως εξετάζουμε την περίπτωση που $\mu <$ εφα.

Ας εξετάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και βρίσκονται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο (Σχήμα 6). Αυτές είναι (1) η συνιστώσα του βάρους με φορά προς το κάτω μέρος του επιπέδου, και η οποία ισούται με $F_\beta = Mg$ ημα, (2) η δύναμη της τριβής



Σχήμα 6

$\mathbf{F}_\tau$, με φορά αντίθετη της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$ του κυλίνδρου, που ισούται με $F_\tau = \mu Mg$ συνα, και (3) η δύναμη Laplace $\mathbf{F}_\mu$, κάθετη στην ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ και ίση με $F_\mu = Q\upsilon B$. Κατά την ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση του κυλίνδρου το διανυσματικό άθροισμα αυτών των δυνάμεων πρέπει να ισούται με το μηδέν:

$$\mathbf{F}_\beta + \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_\mu = 0,$$

ή, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\mathbf{F}_\tau$ είναι κάθετη στην $\mathbf{F}_\mu$,

$$F_\beta^2 = F_\tau^2 + F_\mu^2.$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκουμε το μέτρο της σταθερής ταχύτητας

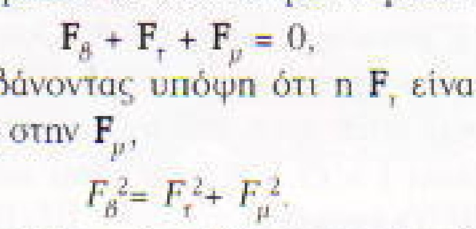
$$\upsilon = \frac{Mg}{QB}\sqrt{\text{ημ}^2\alpha - \mu^2\text{συν}^2\alpha}$$

και τη γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\boldsymbol{\upsilon}$ και $\mathbf{F}_\beta$

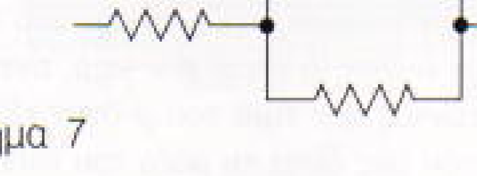
$$\beta = \text{τοξημ}\,\frac{\mu}{\text{εφ}\alpha}$$

Φ19

Η βασική δυσκολία σε τούτο το πρόβλημα είναι το να βρείτε όλους τους



Σχήμα 7



Σχήμα 8

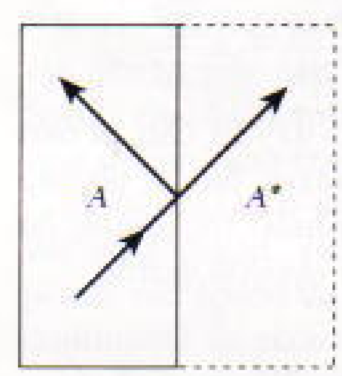
δυνατούς τρόπους σύνδεσης των αντιστάσεων. Οι αντιστάσεις μπορούν να συνδεθούν εν σειρά, και σ' αυτή την περίπτωση η μέγιστη ισχύς είναι 2 W (η μέγιστη ένταση του ρεύματος στη συγκεκριμένη περίπτωση καθορίζεται από την αντίσταση των 3 Ω). Όταν συνδέσουμε όλες τις αντιστάσεις εν παραλλήλω, η ισχύς δεν θα ξεπερνά τα $(1 + {}^1/_2 + {}^1/_3)$ W $= {}^{11}/_6$ W, επειδή η μέγιστη τάση καθορίζεται από την αντίσταση του 1 Ω. Υπάρχουν τρεις ακόμη συνδεσμολογίες που αντιστοιχούν στο Σχήμα 7 και άλλες τρεις που αντιστοιχούν στο Σχήμα 8. «Πρωταθλητής» αναδεικνύεται η συνδεσμολογία του Σχήματος 7 όπου οι αντιστάσεις των 2 και των 3 Ω είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Έτσι, η μέγιστη ισχύς είναι

$$P_{\max} = \left(1 + \frac{6}{5}\right)\text{ W} = 2{,}2\text{ W},$$

και η τάση ${}^{11}/_5$ V.

Φ20

Η «μέθοδος του μπιλιάρδου», που είναι πολύ γνωστή από τη γεωμετρία, μας προσφέρει έναν εύκολο τρόπο να προσδιορίσουμε τη διαδρομή μιας δέσμης φωτός που υπόκειται σε πολλαπλές ανακλάσεις σε επίπεδες επιφάνειες. (Στην περίπτωσή μας, η επιφάνεια είναι κωνική, αλλά αυτό δεν έχει σημασία για τις ακτίνες που μας ενδιαφέρουν.) Η γενική αρχή που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι ότι μια μπίλια, αφού συγκρουστεί με το τοίχωμα, «περνάει» στο κατοπτρικό τραπέζι A^* και *συνεχίζει να μετακινείται σε ευθεία* (Σχήμα 9). (Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το «τοίχωμα» με την «ανακλαστική επιφάνεια» και την «μπίλια» με την «ακτίνα φωτός».)



Σχήμα 9

Σχήμα 10

Στο πρόβλημά μας, αρκεί να εξετάσουμε τις «ακραίες» φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν στο σύνορο της μεγάλης βάσης. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, μετά την πρώτη ανάκλαση κάθε ακτίνα φωτός εισέρχεται στον γειτονικό «πρόσθετο» κώνο, κ.ο.κ. (Σχήμα 10). Οι μικρές διάμετροι d αποδεικνύονται πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R. Με βάση τις παραδοχές του προβλήματος ($d << D << H$), μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια ακτίνα φωτός θα περνά από το επίπεδο της μικρής βάσης εάν

$$\frac{D}{2} < R .$$

Με τη βοήθεια λίγης γεωμετρίας προκύπτει ότι

$$R \cong \frac{d}{D-d} H ,$$

απ' όπου έχουμε

$$\frac{D}{2} < \frac{Hd}{D-d} ,$$

ή

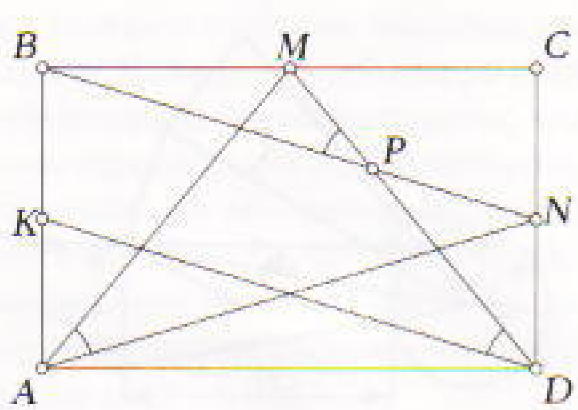
$$H > \frac{D(D-d)}{2d} \cong \frac{D^2}{2d} .$$

Επομένως, εάν $H > D^2/2d$, όλες οι ακτίνες της προσπίπτουσας δέσμης θα διέρχονται από το επίπεδο της μικρής βάσης του κωνικού αγωγού φωτός.

Σπαζοκεφαλιές

Σ16

Έστω K το μέσο του AB (Σχήμα 11). Τότε η DK είναι παράλληλη προς την NB, επομένως $\angle BPM = \angle KDM$. Λόγω της συμμετρίας του ορθογωνίου, $\angle KDM = \angle NAM$.



Σχήμα 11

Σ17

Η απάντηση είναι $650 \cdot 9 = 5.850$. Η εξίσωση μπορεί να γραφεί με τη μορφή $9(100 \cdot O + NE) = 100 \cdot NI + NE$, ή $900 \cdot O = 100 \cdot NI - 8NE$. Συνεπάγεται ότι το NE διαιρείται με το 25 —δηλαδή, πρέπει να εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις: NE = 25, NE = 50, και NE = 75. Αντικαθιστώντας, καταλήγουμε στις εξισώσεις

(1) NE = 25, $18 + I = 9 \cdot O$
(2) NE = 50, $46 + I = 9 \cdot O$
(3) NE = 75, $64 + I = 9 \cdot O$

Η εξίσωση (1) δεν έχει καμία λύση, διότι $I < 9$, $O \neq 2$. Η εξίσωση (2) έχει τη μοναδική λύση $I = 8$, $O = 6$, απ' όπου προκύπτει η λύση που αναφέραμε στην αρχή, ενώ η εξίσωση (3) μας δίνει $I = O = 8$, που είναι αδύνατο. (V. Dubrovsky)

Σ18

Ας θεωρήσουμε ότι οι διαστάσεις του τούβλου είναι a, b, c, η πυκνότητά του είναι ρ, και ότι η πίεση στις τρεις θέσεις που αναφέραμε στην εκφώνηση του προβλήματος είναι p_1, p_2, p_3. Τότε

$$p_1 = \frac{\rho gabc}{ab} ,$$

απ' όπου παίρνουμε $c = p_1/\rho g$. Αντίστοιχα έχουμε $b = p_2/\rho g$ και $a = p_3/\rho g$. Επομένως, η μάζα του τούβλου είναι

$$m = \rho V = \rho abc\ \frac{p_1 p_2 p_3}{\rho^3 g^3} .$$

Εφόσον η πίεση που ασκείται από έναν τοίχο ύψους h είναι $p = \rho gh$, αντικαθιστώντας την τιμή του ρ στην εξίσωση που μας δίνει τη μάζα του τούβλου έχουμε

$$m = \frac{p_1 p_2 p_3 h^2}{\rho^2 g}$$

$$= \frac{1{,}368 \cdot 2{,}581 \cdot 5{,}404 \cdot 16}{88{,}200^2 \cdot 9{,}8}$$

$$\cong 4 \text{ kg}.$$

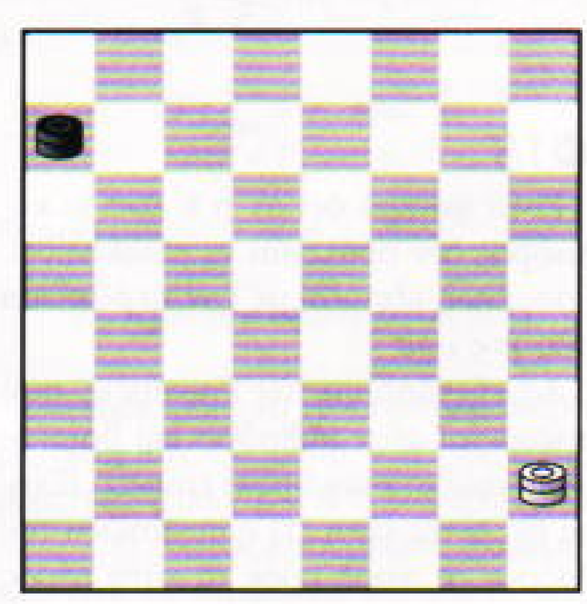
Σ19

Η λέξη *γαρνιωκο* ακολουθεί τη *γαριοκων*. Η *αγροικων* προηγείται της *αγρονιωκ*. Η επόμενη της *κορωναγι* είναι η *κοιργανω*. Τελευταία λέξη είναι η *οκωναγιρ*.

Μας βολεύει να αντικαταστήσουμε τα γράμματα της «βασικής λέξης» *ριγανωκο* με τα ψηφία 1, 2, 3, ..., 8, αντίστοιχα. Τότε, κάθε «λέξη» γίνεται ένας οκταψήφιος αριθμός που αποτελείται από μια συγκεκριμένη διάταξη αυτών των ψηφίων, και το πρόβλημα ανάγεται στο να ταξινομήσουμε αυτούς τους αριθμούς σε αύξουσα διάταξη. Ο γενικός κανόνας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: διαβάζουμε έναν δεδομένο αριθμό (μετάθεση) $a_1a_2...a_8$ από τα δεξιά, βρίσκουμε το πρώτο ψηφίο a_n τέτοιο ώστε $a_{n-1} < a_n$, και βρίσκουμε το μικρότερο από τα ψηφία a_n, a_{n+1}, ..., a_8 που είναι μεγαλύτερο από το a_{n-1}, ας πούμε, το a_k. Γράφουμε τότε τα ψηφία $a_1...a_{n-2}$ στην αρχική σειρά και στη συνέχεια όλα τα υπόλοιπα ψηφία σε αύξουσα τάξη. Για παράδειγμα, στον 75348621, $a_n = 8$ ($n = 5$), $a_k = 6$, και ο επόμενος αριθμός είναι ο 75361248. (V. Dubrovsky)

Σ20

Στη θέση του Σχήματος 12 καμιά από τις βασίλισσες δεν πρόκειται να χάσει αν πηγαίνει κάθε φορά στο αντίθετο άκρο της μεγάλης διαγωνίου που καταλαμβάνει. Επομένως, το παιχνίδι είναι ισόπαλο. Πάντως, δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι αυτή η θέση μπορεί να προκύψει στο τέλος μιας πραγματικής παρτίδας κατά τη διάρκεια της οποίας οι παίκτες δεν χάνουν ευκαιρία να προσφέρουν την τελευταία τους βασίλισσα.



Σχήμα 12

Η **ευρωπαϊκή ντάμα**, γνωστή και ως πολωνική, παίζεται σε μια σκακιέρα με 100 τετράγωνα και κάθε παίκτης έχει 20 πιόνια. Τα πιόνια κινούνται και αιχμαλωτίζουν όπως και στην αμερικανική και αγγλική ντάμα, με τη διαφορά ότι καθώς αιχμαλωτίζουν μπορούν να μετακινηθούν και προς τα πίσω. Ένα πιόνι προάγεται σε βασίλισσα όταν φτάσει στην τελευταία γραμμή του αντιπάλου. Αν, φτάνοντας στη γραμμή αυτή, μπορεί να αιχμαλωτίσει κομμάτια, πρέπει να το κάνει υποχρεωτικά, και προάγεται μόνο όταν φτάσει ξανά στην τελευταία γραμμή και παραμείνει εκεί μετά την ολοκλήρωση της κίνησης. Μια βασίλισσα μπορεί να μετακινηθεί οσαδήποτε τετράγωνα κατά μήκος μιας διαγωνίου αιχμαλωτίζοντας οποιοδήποτε απροστάτευτο πιόνι βρεθεί στη διαδρομή της, καθώς και να αλλάξει διαγώνιο για να αιχμαλωτίσει κάποιο απροστάτευτο πιόνι. Όταν αιχμαλωτίζει πιόνια, ο παίκτης πρέπει να διαλέξει την κατεύθυνση στην οποία αιχμαλωτίζει τον μεγαλύτερο αριθμό πιονιών (είτε είναι απλά πιόνια είτε βασίλισσες) —διαφορετικά, χάνει το κομμάτι του.
(Εγκυκλοπαίδεια *Britannica*, 15η έκδοση)

Αλγεβρικές ταυτότητες

1. Η ισότητα ισχύει όταν τα σημεία O, A και B είναι συγγραμμικά.

2. Αποδείξτε ότι αν O είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο μιγαδικός αριθμός h που αντιπροσωπεύεται από το ορθόκεντρο H ισούται με $a + b + c$ (όπου a, b, c είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύονται από τα A, B, και C). Παρατηρήστε ότι $h - a = \lambda(b + c)$, $h - b = \mu(c + a)$, $h - c = \nu(a + b)$, όπου λ, μ, ν είναι πραγματικοί αριθμοί, και αποδείξτε ότι $\lambda = \mu = \nu = 1$.

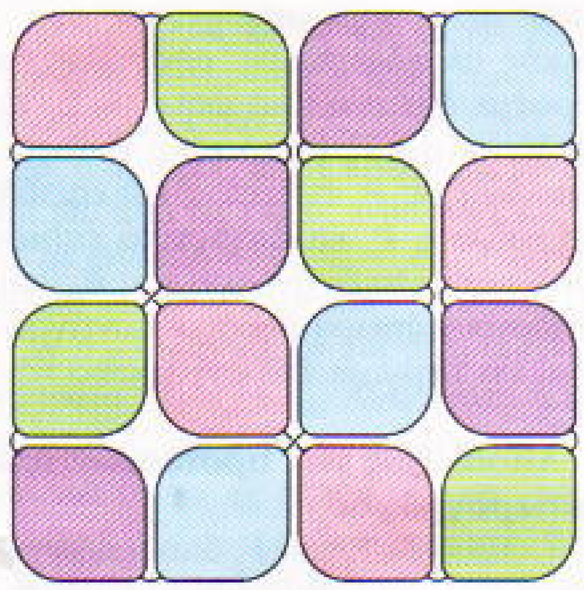
3. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $(a - b)(d - c) + (b - c)(d - a) + (c - a)(d - b) = 0$. Για να αποδείξετε το θεώρημα του Πτολεμαίου, αποδείξτε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $(a - b)(d - c)$ και $(b - c)(d - a)$ έχουν ίσα ορίσματα (αυτό προκύπτει από την ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών σε ίσα τόξα).

4. Επαληθεύστε ότι αν αντικαταστήσουμε τα μήκη AB, BC, CA, AM, BM, CM με τους μιγαδικούς αριθμούς $(b - a)$, $(c - b)$, $(a - c)$, $(m - a)$, κ.ο.κ., προκύπτει μια ταυτότητα μιγαδικών αριθμών.

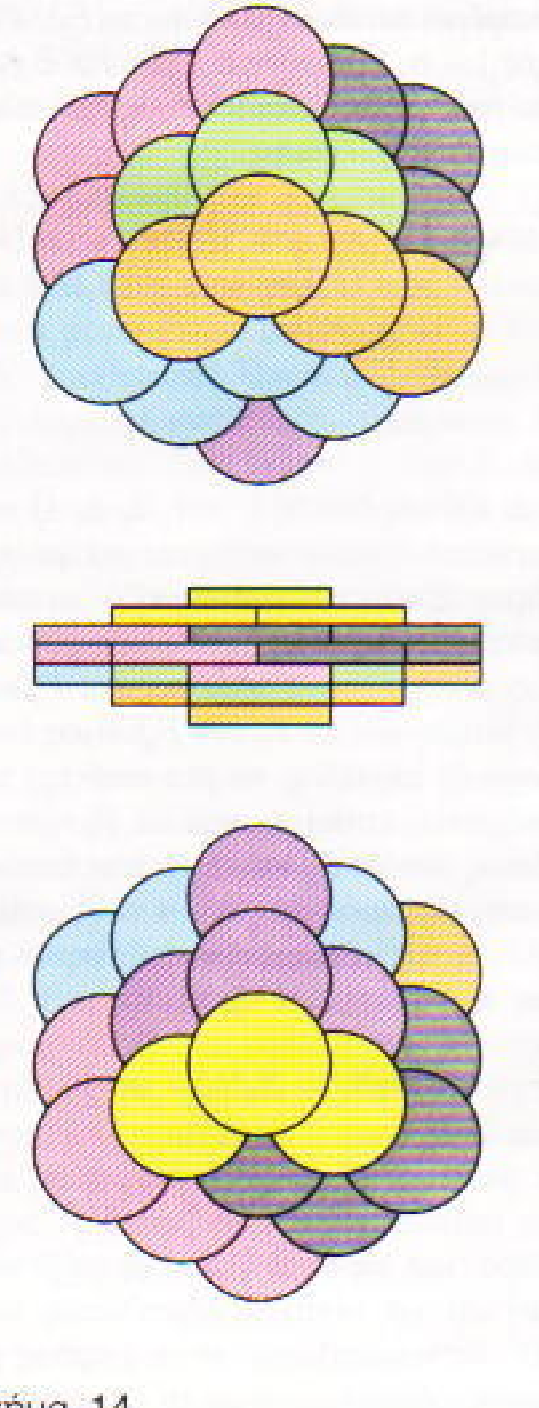
Παιχνιδότοπος

Ο κλέφτης και η έξυπνη σύζυγος.
Δείτε το Σχήμα 13.

Ο άπληστος αργυραμοιβός.
Δείτε το Σχήμα 14.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

Καλειδοσκόπιο

1. Όχι, δεν παράγεται.

2. Το συνολικό έργο που παρήγαγε είναι μηδέν και ως προς το πλαίσιο αναφοράς που συνδέεται με τη Γη και ως προς αυτό του κινούμενου τρένου.

3. Ναι —για παράδειγμα, όταν ασκείται σ' ένα βάρος που βρίσκεται πάνω στο πάτωμα ενός κινούμενου βαγονιού.

4. Ναι: όσο η φυσαλίδα ανέρχεται προς την επιφάνεια μειώνεται η υδροστατική πίεση, και το αέριο παράγει έργο αυξάνοντας τον όγκο της φυσαλίδας.

5. Στις μεγάλες ταχύτητες η αντίσταση του αέρα αυξάνει σημαντικά.

6. Η απαιτούμενη ισχύς μειώνεται κατά έναν παράγοντα 27.

7. Το έργο του πυραύλου δαπανάται σε κινητική ενέργεια των αερίων που εξέρχονται από το ακροφύσιο.

8. Ναι, οι κινητήρες της κυλιόμενης σκάλας θα χρειαστεί να αναπτύξουν μεγαλύτερη ισχύ, αλλά για σχετικά μικρότερο χρονικό διάστημα.

9. Για μικρές γωνίες κλίσης η ταινία μεταφοράς έχει μεγαλύτερη απόδοση, επειδή η τριβή κύλισης είναι «μικρότερη» από την τριβή ολίσθησης.

10. Ναι, αλλά η απόδοσή της θα είναι πολύ μικρή, γιατί το μεγαλύτερο μέρος του έργου θα δαπανάται για να συμπιεστεί το αέριο.

11. Είναι αμφίβολο, διότι θα υπάρχει αύξηση των απωλειών ενέργειας (λόγω της ανάγκης να ζεσταίνεται η μηχανή και ο αέρας στο χώρο των επιβατών).

12. Δεξαμενή θερμότητας υψηλής θερμοκρασίας είναι ο θάλαμος ανάφλεξης και δεξαμενή θερμότητας χαμηλής θερμοκρασίας το περιβάλλον.

13. Ο συντελεστής απόδοσης είναι μεγαλύτερος όταν οι συσκευές συνδέονται σε σειρά.

14. Όχι, διότι για να προσεγγίζει ο συντελεστής απόδοσης τη μονάδα πρέπει η αντίσταση του φορτίου να τείνει στο άπειρο. Όμως, και η ισχύς που παράγει η μπαταρία και η ισχύς που καταναλώνει η αντίσταση θα τείνουν στο μηδέν.

Μικροπειραματισμοί. Καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία, αυξάνονται επίσης οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας της ακτινοβολίας και της μεταφοράς θερμότητας.

Διατάξεις Penrose

(Δείτε το άρθρο «Διατάξεις Penrose και ημικρύσταλλοι» στο προηγούμενο τεύχος.)

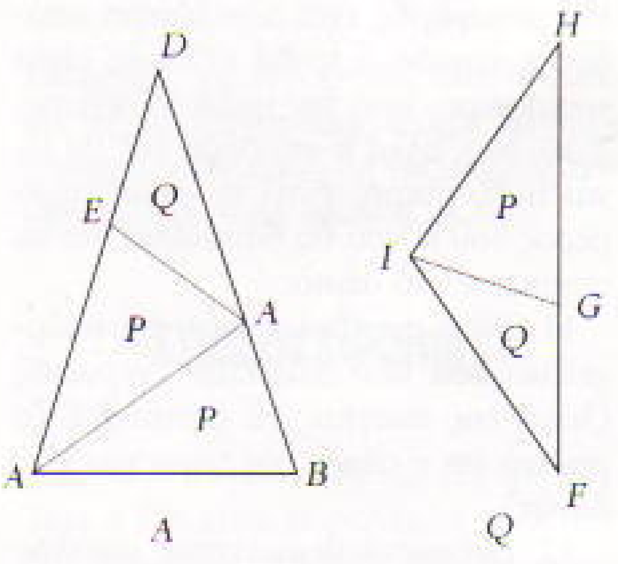
1. Στο Σχήμα 15 (που είναι όμοιο με το Σχήμα 7 του άρθρου) το ευθύγραμμο τμήμα AC διχοτομεί τη γωνία BAD. Επομένως, $\angle BAC = \angle CAD = \angle ADB = 36^\circ$. Συνεπάγεται ότι τα ABC και DAB είναι όμοια ισοσκελή τρίγωνα, και αφού $DC = CA = AB = 1$ (επειδή $\angle CAD = \angle CDA$), έχουμε

$$x = DB = \frac{DB}{AB} = \frac{AB}{CB} = \frac{1}{DB - DC} = \frac{1}{x - 1}.$$

Και τώρα, από τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 - x - 1 = 0$ προκύπτει $x = \phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Το τρίγωνο FHI έχει τις ίδιες γωνίες με το τρίγωνο ADC (36°, 36°, 108°). Επιπλέον, $FI = AC = 1$. Άρα $FH = AD = \phi$.

2. Υπολογίστε τις γωνίες και χρησιμοποιήστε την προηγούμενη λύση.



Σχήμα 15

3. Έστω P_0 και Q_0 τα αρχικά τρίγωνα τύπου P και Q, αντίστοιχα, και έστω P_n το τρίγωνο τύπου P που προκύπτει μετά την εφαρμογή της πράξης της επέκτασης n φορές. Λόγω του τρόπου κατασκευής τους, κάθε τρίγωνο P_n καλύπτεται από μια πλακόστρωση τριγώνων P_0 και Q_0, ενώ η πλακόστρωση που καλύπτει κάθε τρίγωνο P_{n+1} είναι επέκταση της πλακόστρωσης που καλύπτει το τρίγωνο P_n, και επιπλέον, περιέχει ένα ακόμη αντίγραφο του P_n που καλύπτεται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο καλύπτεται το P_n. Άρα, το P_{n+2} περιέχει δύο αντίγραφα του P_{n+1} και, επομένως, τέσσερα αντίγραφα του P_n· γενικότερα, το P_{n+k} περιέχει 2^k αντίγραφα του P_n τα οποία καλύπτονται με όμοιο τρόπο από την πλακόστρωση.

Αν, λοιπόν, T_0 είναι ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο τμήμα της συνολικής πλακόστρωσης, μπορούμε να βρούμε ένα n τέτοιο ώστε το P_n να καλύπτει το T_0 (αυτό είναι δυνατόν επειδή $P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots$, και επειδή τα τρίγωνα P_n καλύπτουν το επίπεδο). Κάθε νέο αντίγραφο του P_n (και υπάρχουν άπειρα παρόμοια αντίγραφα) θα περιέχει ένα αντίγραφο του T_0.

Αποδείξεις των προτάσεων του υστερογράφου

1. Αφού οι F_1 και F_2 διαχωρίζονται μόνο από μία ευθεία του i-οστού συνόλου, ανήκουν σε διαδοχικές λωρίδες του i-οστού συνόλου και στις ίδιες λωρίδες των υπολοίπων τεσσάρων συνόλων. Επομένως, το $n_i(F_1)$ διαφέρει κατά ± 1 από το $n_i(F_2)$, ενώ $n_j(F_1) - n_j(F_2) = 0$ για κάθε $j \neq i$. Λόγω του τρόπου κατασκευής της πλακόστρωσης, έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} &= [n_1(F_2) - n_1(F_1)]\mathbf{e}_1 + [n_2(F_2) - n_2(F_1)]\mathbf{e}_2 + \ldots + [n_5(F_2) - n_5(F_1)]\mathbf{e}_5 \\ &= [n_i(F_2) - n_i(F_1)]\mathbf{e}_i \\ &= \pm\mathbf{e}_i.\end{aligned}$$

2. Οι κόμβοι N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) κατασκευάστηκαν αντίστοιχοι με τις έδρες F_i του πλέγματος G οι οποίες ορίζονται από δύο τεμνόμενες ευθείες του πλέγματος. Επομένως, οι F_1 και F_2 (όπως και οι F_3 και F_4) είναι διαδοχικές ως προς τη μία από τις τεμνόμενες ευθείες, και οι F_1 και F_4 (όπως και οι F_2 και F_3) είναι διαδοχικές ως προς την άλλη ευθεία του πλέγματος. Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση,

$$\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{N_4N_3} (= \pm\mathbf{e}_j).$$

και

$$\overrightarrow{N_2N_3} = \overrightarrow{N_1N_4} (= \pm\mathbf{e}_j).$$

Τώρα, και αφού η γωνία μεταξύ των $\pm\mathbf{e}_i$ και $\pm\mathbf{e}_j$ είναι πολλαπλάσιο των 36°, το τετράπλευρο είναι ρόμβος με μήκος πλευράς ίσο με τη μονάδα και γωνίες 36°, 144° ή 72°, 108°.

3. Έστω ότι η γωνία ανάμεσα στο $\overrightarrow{PP'}$ και το $\mathbf{e}_i$ είναι οξεία. Τότε, όταν μετακινούμαστε κατά μήκος της ευθείας PP', από το P στο P', διασταυρωνόμαστε με κάθε ευθεία $l_i(n)$ που συναντάμε σε «θετική» κατεύθυνση —δηλαδή, περνάμε από τη λωρίδα που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $l_i(n-1)$ και $l_i(n)$ στη λωρίδα που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $l_i(n)$ και $l_i(n+1)$. (Αυτό συμβαίνει επειδή οι ευθείες έχουν αριθμηθεί στην κατεύθυνση του $\mathbf{e}_i$.) Αν, διατέμνοντας τη γραμμή $l_i(n)$, περάσουμε από την έδρα F_k στην F_{k+1}, τότε $n_i(F_{k+1}) - n_i(F_k) = n - (n-1) = 1$, και

$$\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = [n_i(F_{k+1}) - n_i(F_k)]\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$$

(συγκρίνετε αυτήν την απόδειξη με την απόδειξη της πρότασης 1).

Ομοίως, αν η γωνία ανάμεσα στο $\overrightarrow{PP'}$ και το $\mathbf{e}_i$ είναι αμβλεία, διασταυρωνόμαστε με κάθε ευθεία $l_i(n)$ που συναντάμε σε «αρνητική» κατεύθυνση, περνώντας από μεγαλύτερους αριθμούς σε μικρότερους. Επομένως, σ' αυτή την περίπτωση $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = -\mathbf{e}_i$ κάθε φορά που το A_kA_{k+1} είναι παράλληλο με το $\mathbf{e}_i$.

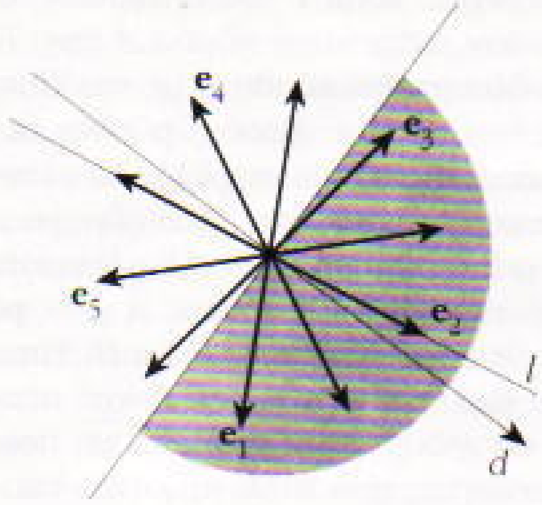
Αν το $\overrightarrow{PP'}$ είναι κάθετο προς το $\mathbf{e}_i$, μετακινούμαστε παράλληλα με τις γραμμές του i-οστού συνόλου και δεν θα διασταυρωθούμε ποτέ με καμία από αυτές. Επομένως, κανένα από τα διανύσματα του αθροίσματος δεν είναι ίσο με $\pm\mathbf{e}_i$.

4. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}n_i(F') - n_i(F) &= n_i(F_n) - n_i(F_1) \\ &= [n_i(F_2) - n_i(F_1)] + [n_i(F_3) - n_i(F_2)] + \ldots + [n_i(F_n) - n_i(F_{n-1})].\end{aligned}$$

Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε στις αποδείξεις των προτάσεων 1 και 3 μας φανερώνουν ότι οι μη μηδενικοί όροι αυτού του αθροίσματος αντιστοιχούν στους όρους $\pm\mathbf{e}_i$ $\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ και επομένως το άθροισμά τους μας δίνει το συντελεστή του $\mathbf{e}_i$ μετά την αναγωγή των ομοίων όρων —δηλαδή, το c_i.

5. Εξαιτίας του τρόπου που ορίσαμε την πλακόστρωση T, οι δεδομένοι κόμβοι αντιστοιχούν σε δύο έδρες F και F'. Αν εφαρμόσουμε στις F και F' την κατασκευή που συζητήσαμε στις προτάσεις 3 και 4, προ-



Σχήμα 16

κύπτει η ζητούμενη προοδευτική διαδρομή που συνδέει τους δεδομένους κόμβους.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη πρόταση, συνδέουμε τους κόμβους με μια προοδευτική διαδρομή $A_1 ... A_n$. Όλες οι ακμές της σχηματίζουν οξείες γωνίες με μια συγκεκριμένη διεύθυνση d. Από ένα σημείο O σχεδιάζουμε και τα δέκα διανύσματα $\pm\mathbf{e}_i$, και φέρουμε και την κάθετη από το O προς την d (Σχήμα 16). Από τα δέκα διανύσματα διαλέγουμε τα πέντε που βρίσκονται προς τη «θετική» πλευρά της καθέτου —την πλευρά που δείχνει η φορά της d. (Αν συμβεί να είναι δύο από τα διανύσματα, ας πούμε το $\mathbf{e}_i$ και το $-\mathbf{e}_i$, κάθετα στην d, παίρνουμε τα τέσσερα «θετικής κατεύθυνσης» διανύσματα και ένα οποιοδήποτε από αυτά τα δύο.) Η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στα δύο «ακραία» από τα πέντε διανύσματα είναι $4 \cdot 36° = 144°$, ενώ τα υπόλοιπα τρία διανύσματα τη χωρίζουν σε τέσσερα ίσα τμήματα, που το καθένα ισούται με 36°. Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι το ένα από τα «ακραία» διανύσματα είναι το $\mathbf{e}_1$ και το άλλο το $\mathbf{e}_3$. Τότε, τα υπόλοιπα διανύσματα θα είναι τα $-\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_2$ και $-\mathbf{e}_5$. Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ κατά μήκος της διαδρομής μας θα είναι ίσο με κάποιο από αυτά τα πέντε διανύσματα.

Ας σχεδιάσουμε μια ευθεία l που διέρχεται από το $\mathbf{e}_2$ και ας θεωρήσουμε την προβολή $A'_1 ... A'_n$ της διαδρομής πάνω σ' αυτήν την ευθεία. Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ είναι προβολή ενός από τα πέντε διανύσματά μας πάνω στην l, και επομένως το μήκος του ισούται με συν72° (εάν $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = \mathbf{e}_1$ ή $\mathbf{e}_3$), συν36° (εάν $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = -\mathbf{e}_4$ ή $-\mathbf{e}_5$), ή με 1 (όταν $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = \mathbf{e}_2$). Σε κάθε περίπτωση, δεν είναι μικρότερο από συν72° = 0,309..., και επομένως η απόσταση r μεταξύ των δεδομένων κόμβων ικανοποιεί τη σχέση $r = A_1A_n \geq A'_1A'_n = A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + ... + A'_{n-1}A'_n \geq (n-1)$ συν72° .

Αν ο αριθμός $n - 1$ των ακμών στη διαδρομή είναι μεγαλύτερος από το 3, τότε $r \geq 4$ συν72° .

Αν ο αριθμός $n - 1$ είναι ίσος με 3 και μια από τις ακμές είναι παράλληλη με ένα από τα $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4$, ή $\mathbf{e}_5$, τότε $r \geq$ συν36° + 2συν72° $> 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}3 > 1$.

Αν $n - 1 = 3$ και αν και τα τρία διανύσματα $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ είναι ίσα με $\mathbf{e}_1$ ή $\mathbf{e}_3$, τότε δύο από αυτά θα είναι ίσα με το, ας πούμε, $\mathbf{e}_1$, και, λόγω της τριγωνικής ανισότητας, θα ισχύει

$$r = \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = |2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i| > |2\mathbf{e}_1| - |\mathbf{e}_i| = 1$$

(εδώ $i = 1$ ή 3).

Τέλος, εάν η διαδρομή αποτελείται από δύο ακμές A_1A_2 και A_2A_3, η γωνία a που σχηματίζουν είναι πολλαπλάσιο των 36°. Από το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ έχουμε $r = A_1A_3 = 2$ημ$(a/2)$, που είναι ίσο με 2ημ18° = 2συν72° για $a = 36°$, ενώ για $a > 36°$ είναι ίσο ή μεγαλύτερο από 2ημ36° > 1.

6. Υποθέτουμε ότι δύο διαφορετικές έδρες F και F' του πλέγματος G ορίζουν τον ίδιο κόμβο A της T. Αν εκτελέσουμε την κατασκευή που περιγράψαμε στις προτάσεις 3 και 4 με βάση τις έδρες F και F' προκύπτει μια προοδευτική διαδρομή $A_1 ... A_n$, που αποτελείται από μία τουλάχιστον έδρα, και επομένως, λόγω της προηγούμενης πρότασης, $A_1 \neq A_n$. Όμως, τα άκρα αυτής της διαδρομής είναι οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις F και F' —δηλαδή, $A_1 = A = A_n$. Αυτή η αντίφαση διεκπεραιώνει την απόδειξη.

7. Έστω $F_1 = F$, F_2, ..., $F_n = F'$ οι έδρες του G που συνδέονται με τους κόμβους A_1, A_2, ..., A_n, αντίστοιχα. Λόγω της πρότασης 6 είναι ορισμένοι μονοσήμαντα, και επομένως η έδρα F_k συνορεύει υποχρεωτικά με την F_{k+1} (διότι ο κόμβος A_k συνδέεται μέσω ακμής με τον A_{k+1}). Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χωρίς καμία αλλαγή την απόδειξη της πρότασης 4.

8. Έστω A_1A_2 μια ακμή της T, και έστω F_1, F_2 οι έδρες του πλέγματος G που αντιστοιχούν στους κόμβους A_1 και A_2. Λόγω του τρόπου κατασκευής της T, η A_1A_2 είναι πλευρά ενός ρομβικού πλακιδίου εάν και μόνο εάν ο κόμβος του πλέγματος G που αντιστοιχεί σ' αυτό το πλακίδιο είναι άκρο της κοινής πλευράς των πολυγώνων F_1 και F_2 (δείτε την απόδειξη της πρότασης 2). Όμως οι F_1 και F_2 έχουν μία ακριβώς κοινή πλευρά η οποία έχει δύο άκρα, που το καθένα συνδέεται μ' ένα πλακίδιο.

9. Μετακινούμαστε από το A στο X και ονομάζουμε s_1, s_2, s_3, ... τις ακμές που συναντάμε διαδοχικά, και X_1, X_2, X_3, ... τις τομές των ακμών με την AX. Κάθε ζεύγος διαδοχικών ακμών s_k και s_{k+1} είναι πλευρές του ίδιου πλακιδίου και επομένως, όταν είναι παράλληλες, η X_kX_{k+1} είναι ίση ή μικρότερη από h, όπου με h συμβολίζουμε το μικρότερο ύψος του στενού ρόμβου. Αν τρεις διαδοχικές ακμές s_{k-1}, s_k και s_{k+1} σχηματίζουν μια τεθλασμένη γραμμή ($s_{k-1} = BC$, $s_k = CD$, $s_{k+1} = DE$) τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $X_{k-1}X_{k+1} \geq h$ (διότι καμία από τις γωνίες BCD και CDE δεν είναι μικρότερη από 36°).

Τώρα χωρίζουμε το τμήμα AX σε πεπερασμένο πλήθος τμημάτων με μήκος μικρότερο από h. Τότε δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές παράλληλες ακμές που να τέμνουν ένα από αυτά τα τμήματα, όπως δεν υπάρχουν και τρεις διαδοχικές ακμές που να τέμνουν το ίδιο τμήμα και να σχηματίζουν τεθλασμένη γραμμή. Επομένως, όλες οι ακμές που τέμνουν το ίδιο τμήμα θα ξεκινούν από ένα κοινό σημείο. Αφού, λοιπόν, από κάθε κόμβο ξεκινούν το πολύ δέκα ακμές (οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ τους είναι το πολύ 36°), καθένα από αυτά τα τμήματα περιέχει το πολύ δέκα σημεία X_k (στην πραγματικότητα, περιέχει πέντε το πολύ τέτοια σημεία). Επομένως, το συνολικό πλήθος των σημείων X_k —και το συνολικό πλήθος πλακιδίων στην αλυσίδα μας— είναι πεπερασμένο.

10. Έστω A ένας κόμβος της T, ο οποίος συνδέεται με μια συγκεκριμένη έδρα του πλέγματος G —ένα πολύγωνο $F = X_1X_2 ... X_n$. Τότε, κάθε

ρομβικό πλακίδιο με κορυφή το A θα συνδέεται με μία από τις κορυφές αυτού του πολυγώνου. Ονομάζουμε R_i το ρόμβο που αντιστοιχεί στη X_i. Λόγω του τρόπου της κατασκευής τους, οι πλευρές του R_i που ξεκινούν από το A είναι κάθετες προς τα $X_{i-1}X_i$ και X_iX_{i+1}, και επομένως η γωνία a_i που σχηματίζουν είναι ίση με $180° - \angle X_{i-1}X_iX_{i+1}$ (δηλαδή, είναι ίση με την εξωτερική γωνία του πολυγώνου F στο X_i) . Κάθε ρόμβος R_i βρίσκεται ανάμεσα στους ρόμβους R_{i-1} και R_{i+1}, οι οποίοι συνορεύουν με τις πλευρές του που ξεκινούν από το A (ο R_1 βρίσκεται ανάμεσα στον R_n και τον R_2, και ο R_n ανάμεσα στον R_{n-1} και τον R_1), διότι ο κόμβος X_n συνδέεται με ακμές με τον X_{i-1} και τον X_{i+1}. Επομένως, στην ακολουθία $R_1, R_2, ..., R_n, R_1$, τα πλακίδια συνορεύουν με το επόμενο και με το προηγούμενό τους χωρίς επικαλύψεις και περιβάλλουν το A χωρίς να αφήνουν κενά. Επειδή $a_1 + a_2 + ... + a_n = 360°$ (το άθροισμα αυτό είναι ίσο με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του F), οι ρόμβοι περιβάλλουν τον κόμβο A ακριβώς μία φορά. Επομένως, δεν υπάρχει καμία επικάλυψη.

11. Η ύπαρξη των ζητούμενων ακμών είναι σχεδόν προφανής, αλλά η απόδειξη έχει πλήθος ασήμαντες λεπτομέρειες και γι' αυτό θα την παραλείψουμε.

Αν M είναι το μοναδικό κοινό σημείο των AB και CD, τότε η μία από τις αποστάσεις MA και MB είναι το πολύ $1/2$ (αφού $AM + MB = AB = 1$). Το ίδιο θα ισχύει και για την CD . Έστω $AM \le 1/2$ και $CM \le 1/2$. Τότε, $AC < AM + CM \le 1$.

12. Θεωρούμε το πλακίδιο $ABPQ$ που βρίσκεται από την ίδια πλευρά της AB που βρίσκεται η ακμή BC. Μια και $\angle ABP \ge 36°$, η ακμή BC δεν μπορεί να βρίσκεται έξω από αυτό το πλακίδιο. Επίσης, δεν μπορεί να βρίσκεται τελείως στο εσωτερικό του, διότι σ' αυτή την περίπτωση ένα πλακίδιο με πλευρά την BC θα επικαλυπτόταν με το $ABPQ$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πρόταση 10. Επομένως, η BC συμπίπτει με την πλευρά BP του πλακιδίου $ABPQ$ (με άλλα λόγια $C = P$ και το πλακίδιο $ABPQ$ ταυτίζεται με το $ABCQ$).

Για παρόμοιους λόγους, οποιεσδήποτε ακμές AD και CE πρέπει να βρίσκονται έξω από το πλακίδιο $ABCQ$. Αν, επομένως, τέμνονται στο M, το τρίγωνο AMC περιέχει είτε το B είτε το Q. Τότε, $AM + MC > AB + BC = AQ + QC = 2$. Αυτό όμως είναι αδύνατον, διότι $AM + MC < AD + CE = 2$.

13. Έστω ένας τυχαίος κόμβος B της πλακόστρωσης T. Η παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\mathbf{p}$ τον μεταφέρει σ' έναν άλλο κόμβο B' της T. Συνδέστε αυτούς τους κόμβους με μια διαδρομή $b = B_0B_1...B_n$, όπου τα B_i είναι κόμβοι της T, και $B_0 = B$, $B_n = B'$.

Αντικαθιστούμε τους όρους του αθροίσματος

$$\overrightarrow{B_0B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + ... + \overrightarrow{B_nB_{n-1}}$$

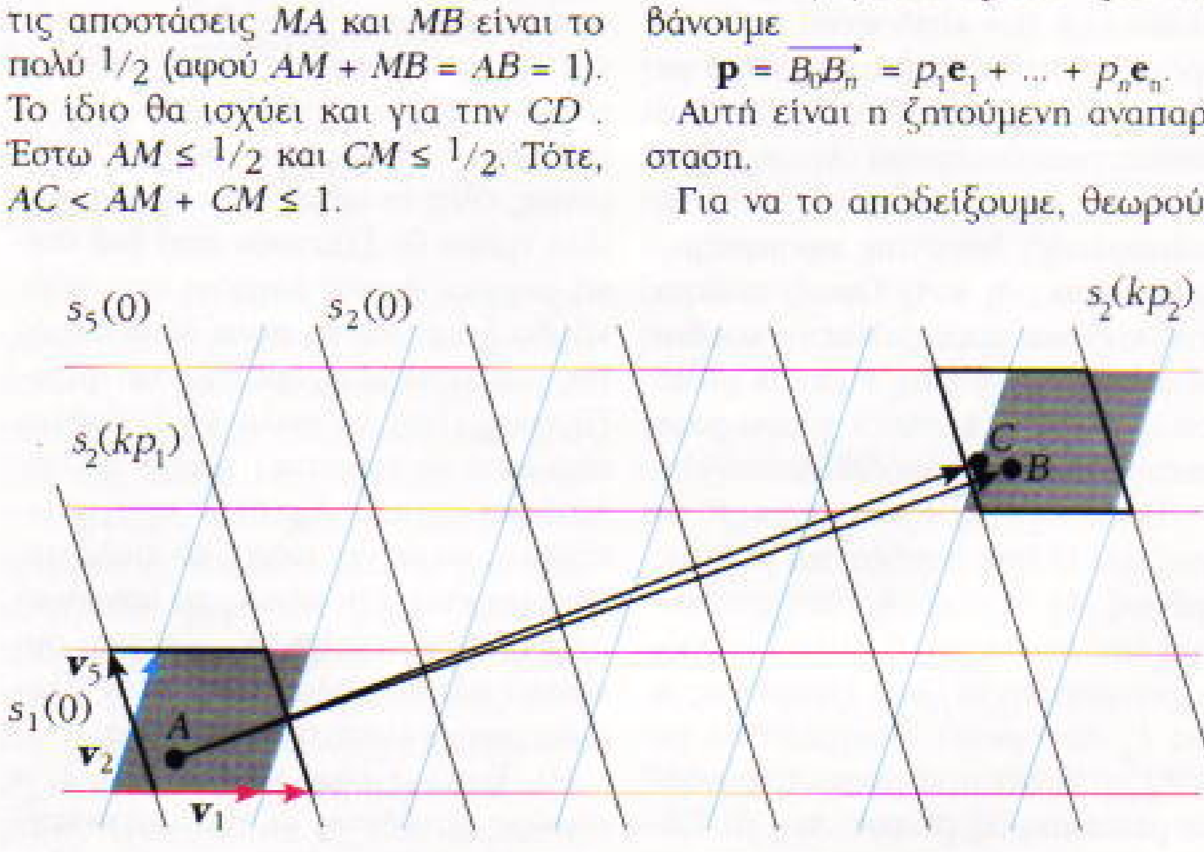
με τα κατάλληλα διανύσματα $\pm\mathbf{e}_i$. Μετά την αναγωγή των όμοιων όρων λαμβάνουμε

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{B_0B_n} = p_1\mathbf{e}_1 + ... + p_n\mathbf{e}_n.$$

Αυτή είναι η ζητούμενη αναπαράσταση.

Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε μια τυχαία έδρα F του πλέγματος G και τον αντίστοιχο κόμβο A της T. Συνδέουμε τον κόμβο A με τον B με μια διαδρομή a. Αφού η $\mathbf{p}$ είναι περίοδος της T, μια παράλληλη μετατόπιση θα μεταφέρει τη διαδρομή a σε μια διαδρομή a' που θα ξεκινάει από τον κόμβο A' (όπου $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{p}$) και θα καταλήγει στον κόμβο B'. Έστω F' η έδρα του G που αντιστοιχεί στον A'. Θεωρούμε τώρα τη διαδρομή που, ξεκινώντας από το A, πηγαίνει, ακολουθώντας την a, στο B, έπειτα, ακολουθώντας την b, πηγαίνει στο B', και τέλος καταλήγει στο A' ακολουθώντας την a'. Γράφουμε το άθροισμα των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στη διαδρομή $ABB'A'$ και ανάγουμε τους όμοιους όρους. Οι όροι που αντιστοιχούν στις ακμές της a και της a' απαλείφονται, διότι αυτές οι δύο διαδρομές αποτελούνται από τις ίδιες ακμές (η μια προκύπτει από την άλλη μέσω παράλληλης μετατόπισης) αλλά τις διασχίζουμε με αντίθετες φορές. Επομένως, μετά τις απλοποιήσεις παίρνουμε το ίδιο άθροισμα $p_1\mathbf{e}_1 + ... + p_n\mathbf{e}_n$. Και τελικά, εφαρμόζοντας την πρόταση 7 στη διαδρομή $ABB'A'$ βλέπουμε ότι $n_i(F') = n_i(F) + p_i$, για $i = 1, 2, ..., 5$.

14. Θα δείξουμε ότι αυτή η πρόταση είναι αληθής ακόμη και για την τομή τριών λωρίδων —συγκεκριμένα, για τις λωρίδες του πρώτου, του δεύτερου, και του πέμπτου συνόλου. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς υποθέτουμε ότι $n_1 = n_2 = n_5 = 0$ (διαφορετικά, μπορούμε να αριθμήσουμε ξανά τις γραμμές του πλέγματος G). Οι τομές $r_{12} = s_1(0) \cap s_2(0)$ και $r_{15} = s_1(0) \cap s_5(0)$ είναι ίσοι ρόμβοι (τους βλέπουμε στην αριστερή γωνία του Σχήματος 17, όπου η r_{12} είναι σκιασμένη). Αν οι δύο ρόμβοι δεν έχουν κοινό σημείο, έχουμε τελειώσει. Έτσι, υποθέτουμε ότι περιέχουν και οι δύο το σημείο A. Σχεδιάζουμε διανύσματα κατά μήκος των πλευρών τους: το $\mathbf{v}_1$ (το κόκκινο στο Σχήμα 17) παράλληλο με τη λωρίδα $s_1(0)$, το $\mathbf{v}_2$ (μπλε) παράλληλο με τη λωρίδα $s_2(0)$, και το $\mathbf{v}_5$ (μαύρο) παράλληλο με τη λωρίδα $s_5(0)$. Και τα τρία διανύσματα έχουν το ίδιο μήκος, v. Μπορούμε να δούμε ότι η τομή των $s_1(kp_1)$ και $s_2(kp_2)$ είναι ο ρόμβος r'_{12} που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του r_{12} κατά



Σχήμα 7

το διάνυσμα $kp_2\mathbf{v}_1 + kp_1\mathbf{v}_2$. Παρόμοια, η τομή των $s_1(kp_1)$ και $s_5(kp_5)$ είναι ο ρόμβος r'_{15} που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του r_{15} κατά το διάνυσμα $kp_5\mathbf{v}_1 + kp_1\mathbf{v}_5$ (βλέπουμε αυτές τις τομές στη δεξιά γωνία του Σχήματος 17). Έστω B και C οι εικόνες του A μέσω των παράλληλων μετατοπίσεων που περιγράψαμε. Το σημείο B ανήκει στον r'_{12}, το C στον r'_{15}, και $\overrightarrow{BC} = k(p_5\mathbf{v}_1 + p_1\mathbf{v}_5) - k(p_2\mathbf{v}_1 + p_1\mathbf{v}_2) = k[(p_5 - p_2)\mathbf{v}_1 + p_1(\mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_2)] = k\mathbf{d}$. Παρατηρούμε ότι τα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_2$ είναι παράλληλα αλλά ο λόγος των μηκών τους είναι άρρητος (αν φέρουμε τα $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_5$ από το ίδιο σημείο και ενώσουμε τα άκρα τους σχηματίζεται ένα τρίγωνο τύπου P, επομένως το μήκος του $\mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_2$ ισούται με v/ϕ). Κατά συνέπεια, αφού τα p_1, p_2, και p_5 είναι ακέραιοι, το $\mathbf{d} \neq 0$. Άρα, η απόσταση ανάμεσα στο B και το C (που ισούται με $k|\mathbf{d}|$) μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη επιθυμούμε διαλέγοντας αρκούντως μεγάλο k. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να απομακρύνουμε το ρόμβο r'_{12} σε οσοδήποτε μεγάλη απόσταση θέλουμε από τον r'_{15} έτσι ώστε η τομή των $s_1(kp_1)$, $s_2(kp_2)$ και $s_5(kp_5)$ να είναι κενή.

15. Αυτή η πρόταση προκύπτει κατευθείαν από τους ορισμούς.

16. Αναπαριστούμε το πλέγμα G ως την ένωση δύο πλεγμάτων: του G', που αποτελείται από τις ευθείες του πρώτου, του δεύτερου και του πέμπτου συνόλου, και του G'', που αποτελείται από τις ευθείες του τρίτου και του τέταρτου συνόλου. Θεωρήστε μια έδρα F' του πλέγματος G' και μια έδρα F'' του πλέγματος G''. Αν μετατοπίσουμε την F'' έτσι ώστε οι πλευρές της να μη διέρχονται από τις κορυφές της F' και οι κορυφές της να μη συναντήσουν τις πλευρές της F' καθώς θα τη μετακινούμε, τότε η τομή των F' και F'' θα παραμείνει κενή ή όχι, ανάλογα με το τι ήταν αρχικά. Επιπλέον, το σύνορο της νέας τομής (αν αυτή δεν είναι κενή) θα σχηματίζεται από τις ευθείες με ίδιους αριθμούς που θα ανήκουν στα ίδια σύνολα όπως και αρχικά.

Συμβολίζουμε με G_0 το τμήμα εκείνο του G που αντιστοιχεί στην T_0 (την ένωση όλων των εδρών που συνδέονται με κόμβους της T_0). Για κάθε κόμβο του G_0 μετρούμε την απόσταση από την πλησιέστερη ευθεία του G (που δεν διέρχεται από αυτόν τον κόμβο). Έστω δ η ελάχιστη αυτών των αποστάσεων (ο δ είναι θετικός διότι αυτό το σύνολο των κόμβων της G_0 είναι πεπερασμένο). Αν μετατοπίσουμε το πλέγμα G'' κατά ένα διάνυσμα που έχει μήκος μικρότερο από δ, τότε θα ισχύει η συνθήκη που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο για τους κόμβους και τις πλευρές οποιωνδήποτε εδρών F' (του G') και F'' (του G'') που η τομή τους είναι έδρα του G_0. Αυτό σημαίνει ότι κάθε έδρα F του G_0, παρότι θα μεταβάλλεται ελαφρά από τη μετατόπιση, θα παραμείνει η τομή των λωρίδων με τους ίδιους αριθμούς που ορίζονται από τις ευθείες του πλέγματος με τους ίδιους αριθμούς. Επομένως, ο κόμβος που αντιστοιχεί στην F θα παραμείνει στη θέση του μαζί με όλες τις ακμές που ξεκινούν από αυτόν. Άρα, διατηρείται όλη η υποπλακόστρωση T_0, δηλαδή όλοι οι κόμβοι και οι ακμές της διατηρούνται.

Παρατηρήστε επιπλέον ότι η πράξη μας δεν δημιουργεί νέους κόμβους και ακμές στην περιοχή που καλύπτεται από την T_0, διότι κάτι τέτοιο επέφερε την εμφάνιση νέων πλακιδίων που θα επικαλύπτονταν με τα παλιά πλακίδια της T_0.

17. Οι ευθείες του δεύτερου συνόλου σχηματίζουν γωνία 72° με τις ευθείες του πρώτου συνόλου, και το μεταξύ τους διάστημα είναι 1. Άρα, το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}$ είναι $1/\text{ημ}72°$. Ομοίως, το μήκος του $\mathbf{v}'$ είναι $1/\text{ημ}36°$. Αυτά τα μήκη έχουν λόγο $\text{ημ}36°/\text{ημ}72° = 1/(2\text{συν}36°)$. Από το τρίγωνο τύπου Q FHI του Σχήματος 15 και από το πρόβλημα 1 βλέπουμε ότι $2\text{συν}36° = FH/FI = \phi$, και επομένως $\mathbf{v} = (1/\phi)\mathbf{v}'$ και $|n\mathbf{v} - m\mathbf{v}'| = |n - m\phi| \cdot (1/\text{ημ}72°)$. Η πρότασή μας τώρα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα του κλασματικού μέρους, διότι το $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ είναι άρρητος.

18. Κατ' αρχάς, θεωρούμε δύο πλέγματα G_1 και G_2 (κατασκευασμένα και αριθμημένα όπως το G) τέτοια ώστε το G_1 να μπορεί να μεταφερθεί με παράλληλη μετατόπιση στο G_2. Χρησιμοποιώντας το ίδιο σταθερό σημείο O, κατασκευάζουμε πλακοστρώσεις T_1 και T_2 που συνδέονται με τα G_1 και G_2 (δείτε τη σελίδα 24 του άρθρου). Με βάση την πρόταση 1 είναι φανερό ότι η T_2 προέρχεται από την T_1 μέσω μιας παράλληλης μετατόπισης. Συγκεκριμένα, υποθέστε ότι οι αριθμοί των γραμμών του i-οστού συνόλου στο πλέγμα G_2 διαφέρουν κατά t_i από τους αριθμούς των αντίστοιχων ευθειών του πλέγματος G_1 (είναι φανερό ότι η διαφορά ανάμεσα στους αριθμούς των αντίστοιχων ευθειών είναι η ίδια σε κάθε σύνολο). Τότε, για κάθε έδρα F_1 του G_1 και για την εικόνα της F_2 (εικόνα της μέσω της παράλληλης μετατόπισης που μεταφέρει το G_1 στο G_2), θα ισχύει $n_i(F_2) = n_i(F_1) + t_i$. Αυτό σημαίνει ότι οι κόμβοι A_1 και A_2 των T_1 και T_2 που συνδέονται με τις F_1 και F_2, αντίστοιχα, θα διαφέρουν κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + \dots + t_5\mathbf{e}_5$ (με την προϋπόθεση ότι κατασκευάσαμε τις πλακοστρώσεις χρησιμοποιώντας τον ίδιο πόλο O). Επομένως, η παράλληλη μετατόπιση κατά αυτό το διάνυσμα μεταφέρει την T_1 στην T_2.

Και τώρα, ας θεωρήσουμε ως G_1 το πλέγμα G' που προκύπτει από το G όταν μετατοπίσουμε το τρίτο και το τέταρτο σύνολο ευθειών κατά το διάνυσμα $m\mathbf{v}' - n\mathbf{v}$, και ως G_2 το ίδιο το G. Παρατηρήστε ότι η παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $n\mathbf{v}$ μεταφέρει το G' στο G. Πράγματι, για $i = 1$, 2, και 5 κάθε ευθεία $l'_i(k)$ του G' συμπίπτει απλώς με την $l_i(k)$ και, μέσω της πρότασης 15, μεταφέρεται στην $l_1(k)$ (για $i = 1$), στην $l_2(k + n)$ (για $i = 2$), ή στην $l_5(k - n)$ (για $i = 5$). Τότε, η $l'_3(k)$ μεταφέρεται στην εικόνα της $l_3(k)$ μέσω της μετατόπισης κατά το διάνυσμα $(m\mathbf{v}' - n\mathbf{v}) + n\mathbf{v} = m\mathbf{v}'$ —δηλαδή, και κατ' αναλογίαν με την πρόταση 15, στην $l_3(k + m)$ —και, παρομοίως, η $l'_4(k)$ μεταφέρεται στην $l_4(k - m)$. Όπως είδαμε προηγουμένως, αυτό σημαίνει ότι η πλακόστρωση T' που συνδέεται με το G' μεταφέρεται στην T έπειτα από την παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $0 \cdot \mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2 + m\mathbf{e}_3 - m\mathbf{e}_4 - n\mathbf{e}_5 = \mathbf{t}$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

QUANTUM
διαβάστε το και διαδώστε το!

Διαμάντια από ένα πιθάρι

Δύο παραμύθια με δύο απίθανους γρίφους

Sergey Grabarchuk

Στον παιχνιδότοπο αυτού του τεύχους παρουσιάζουμε δύο ιστορίες από τη συλλογή παραμυθιών του Sergey Grabarchuk *Ένα πιθάρι γεμάτο διαμάντια.* Κάθε ιστορία στρέφεται γύρω από ένα γρίφο (γενικά, μια σπαζοκεφαλιά «διαμέρισης», «συναρμολόγησης» ή «ταιριάσματος»). Γνωρίστε αυτόν τον ταλαντούχο δημιουργό γρίφων από το Ούζγκοροντ της Ουκρανίας.

Ο κλέφτης και η έξυπνη σύζυγος

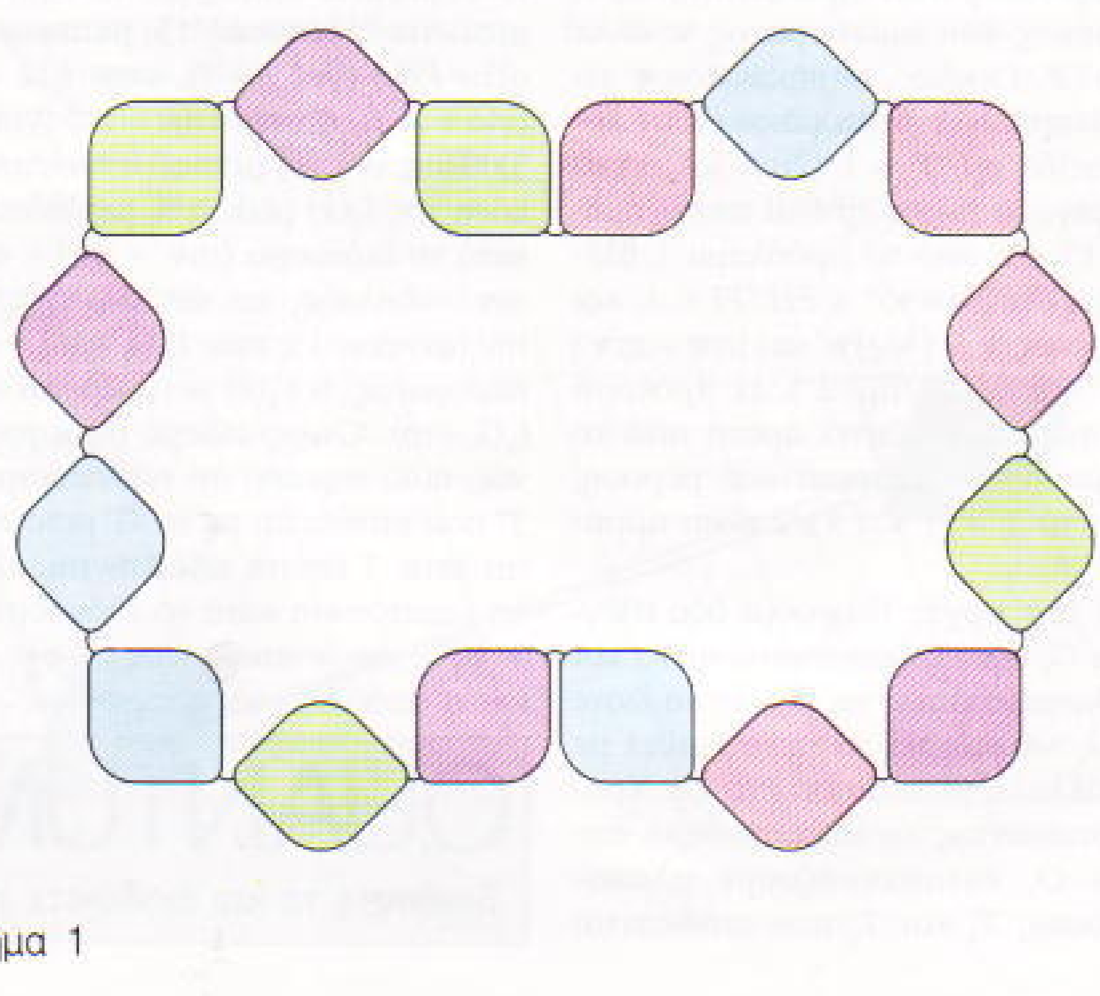
Κάποια νύχτα ένας κλέφτης τρύπωσε στο σπίτι ενός εμπόρου και έκλεψε τα κοσμήματα της γυναίκας του. Καθώς έφευγε δεν πρόσεξε ότι την ίδια ώρα επέστρεφε ο σπιτονοικοκύρης. Όταν ο έμπορος είδε έναν άγνωστο να βγαίνει από το σπίτι κατάλαβε ότι κάτι κακό είχε συμβεί, και τον ακολούθησε κρυφά. Λίγο αργότερα βρέθηκε κάτω από το παράθυρο του κλέφτη απ' όπου μπορούσε να ακούσει ό,τι γινόταν μέσα στο σπίτι. Έτσι, άκουσε τον κλέφτη να φωνάζει άγρια στη φίλη του: «Φόρεσε γρήγορα όλα τα κοσμήματα, και αν σε ρωτήσουν γι' αυτά, πες ότι τα κληρονόμησες από τη μητέρα σου».

Νωρίς το επόμενο πρωί ο έμπορος παρουσιάστηκε στο δικαστή και του διηγήθηκε όλη την ιστορία. Ο δικαστής διέταξε τη φρουρά να φέρει μπροστά του τον κλέφτη, τη φίλη του και τη σύζυγο του εμπόρου, και ρώτησε αρχικά τον κλέφτη:

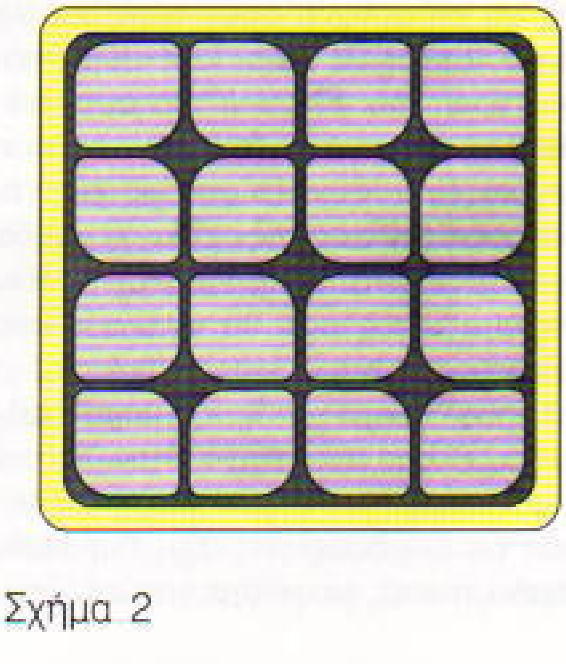
«Είναι αλήθεια πως έκλεψες τα κοσμήματα της συζύγου αυτού του αξιότιμου εμπόρου;»

«Όχι, Εντιμότατε, αυτό είναι μια επαίσχυντη συκοφαντία», απάντησε ο κλέφτης, που δεν ήταν μόνο επιδέξιος αλλά και πανούργος. «Τα κοσμήματα ανήκουν στη φίλη μου —τα κληρονόμησε από τη μητέρα της.»

Η φίλη του κλέφτη ορκίστηκε και αυτή πως έτσι είχαν τα πράγματα και πως ο έμπορος έλεγε ψέματα. Τότε, όμως, η γυναίκα του εμπόρου είπε:



Σχήμα 1



Σχήμα 2

«Μπορώ να αποδείξω ότι αυτό το βραχιόλι —που αυτό το αναιδές γύναιο τόλμησε να φορέσει στο χέρι του— είναι δικό μου».

Εμφάνισε λοιπόν ένα μικρό κουτί και το έδωσε στον δικαστή, λέγοντάς του:

«Παρακαλώ την Εντιμότητά σας να ζητήσει από αυτή τη γυναίκα το βραχιόλι. Θα μπορέσω τότε να αποδείξω ότι το βραχιόλι και το κουτί έχουν κατασκευαστεί το ένα για το άλλο και ταιριάζουν απόλυτα».

Ο δικαστής άνοιξε το κουτί και είδε μερικές σκαλισμένες κοιλότητες στον πυθμένα του —υπήρχαν συνολικά δεκαέξι. Διέταξε τη φίλη του κλέφτη να βγάλει το βραχιόλι και το έδωσε στη γυναίκα του εμπόρου. Αυτή, με λίγες επιδέξιες κινήσεις, τοποθέτησε το βραχιόλι μέσα στο κουτί έτσι ώστε κάθε κομμάτι του ταίριαξε ακριβώς σε μια κοιλότητα. Ολόκληρο το βραχιόλι χώρεσε μέσα στο κουτί χωρίς να μείνει ούτε μια κοιλότητα άδεια.

«Δεν είναι, όμως, μόνο αυτό», είπε η έξυπνη γυναίκα. «Η Εντιμότητά σας μπορεί να δει ότι κάθε γραμμή που σχηματίζεται μέσα στο κουτί από τέσσερα κομμάτια του βραχιολιού, περιέχει πέτρες τεσσάρων διαφορετικών χρωμάτων!»

Ο δικαστής κατάλαβε τότε ότι η γυναίκα του εμπόρου έλεγε την αλήθεια. Ο κλέφτης και η φίλη του συνειδητοποίησαν ότι είχαν αποκαλυφθεί, και ομολόγησαν το έγκλημά τους.

Και τώρα, αγαπητέ αναγνώστη, μπορείς να βρεις πώς έβαλε η γυναίκα του εμπόρου το βραχιόλι (Σχήμα 1) μέσα στο κουτί (Σχήμα 2); Απαιτείται όλες οι γραμμές τεσσάρων κομματιών, οριζόντιες, κατακόρυφες και διαγώνιες, να περιέχουν κομμάτια τεσσάρων διαφορετικών χρωμάτων.

Ο άπληστος αργυραμοιβός

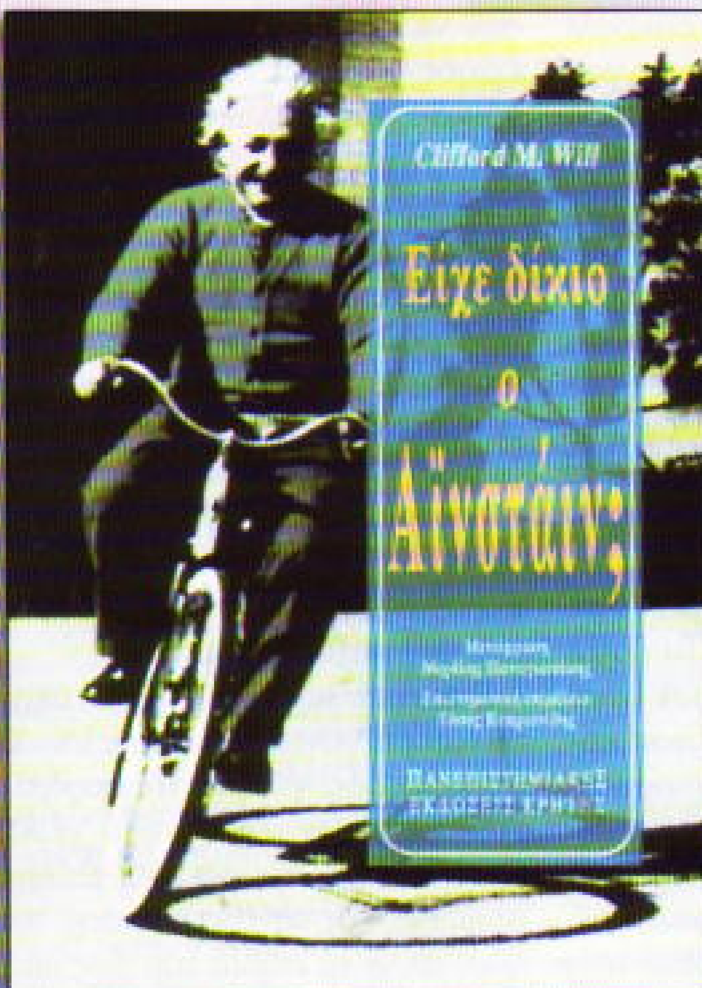
Υπήρχε κάποτε ένας αργυραμοιβός στο παζάρι της Δαμασκού. Παρότι ήταν άπληστος και τσιγκούνης, είχε καταφέρει να αποκτήσει τη φήμη ενός καλόκαρδου και απλοϊκού ανθρώπου. Χάρη στη φήμη του, λοιπόν, οι πελάτες προτιμούσαν το δικό του σαράφικο, και η δουλειά του πήγαινε απ' το καλό στο καλύτερο.

Μια μέρα, ήρθε ένας τυφλός γέρος στο μαγαζί του και ζήτησε να ανταλλάξει με δηνάρια ένα μικρό σακούλι γεμάτο χρυσά νομίσματα. Ο αργυραμοιβός είδε τα νομίσματα του γέρου και στάθηκε στην αρχή διστακτικός: τα νομίσματα ήταν άγνωστα και παράξενα. Μόλις, όμως, δάγκωσε ένα, πείστηκε πως ήταν από καθαρό χρυσάφι. Ήταν έτοιμος να μετρήσει τα δηνάρια που αντιστοιχούσαν στα χρυσά νομίσματα, όταν έγινε το αναπόφευκτο: κυριεύτηκε από απληστία και, αδυνατώντας να ελέγξει τον εαυτό του, μέτρησε με χέρια που έτρεμαν τα μισά μόνο δηνάρια απ' όσα έπρεπε να δώσει στο γέρο. Τα έριξε μέσα στο σακούλι και τα έδωσε στον τυφλό επισκέπτη. Ο γέρος τον ευχαρίστησε και έφυγε. Ο αργυραμοιβός έκλεισε το σαράφικο και απομονώθηκε σ' ένα κλειστό δωμάτιο, όπου άρχισε να εξετάζει προσεκτικά τα νομίσματα του γέρου. Μέσα στο μισοσκόταδο του δωματίου τα νομίσματα λαμποκοπούσαν μαγικά, και αυτό απάλυνε τις τύψεις του απατεώνα. Τακτοποίησε τα νομίσματα και κατόπιν άρχισε να τα τοποθετεί σε στήλες, σε επίπεδες σειρές, ή σε μικρούς σωρούς. Έπαιξε με τα νομίσματα για ώρα πολλή, ώσπου βράδιασε και σταμάτησε. Ο αργυραμοιβός προσευχήθηκε, ευχαρίστησε τον Αλλάχ για την επιτυχημένη μέρα του, και πήγε να κοιμηθεί. Αντίθετα με ό,τι συνήθιζε, δεν έκρυψε τα νομίσματα του γέρου αλλά τα άφησε πάνω σ' ένα μικρό τραπέζι.

Κοιμήθηκε ευχάριστα, χωρίς να δει κανένα όνειρο. Προς το ξημέρωμα, όμως, ονειρεύτηκε τον τυφλό γέρο. Ο αργυραμοιβός έφριξε βλέποντας τον γέρο να τον κοιτάει κατάματα, με δάκρυα να κυλάνε από το ένα του μάτι ενώ το άλλο αλληθώριζε παράξενα. Ο αργυραμοιβός έτρεξε στο τραπέζι και βρήκε τα νομίσματα εκεί όπου τα είχε αφήσει το προηγούμενο βράδυ. Σχημάτιζαν έναν όμορφο σωρό και έμοιαζαν με κοχύλια. Ο αργυραμοιβός ξαφνιάστηκε γιατί τα είχε αφήσει τοποθετημένα με διαφορετικό τρόπο. Προσπάθησε να πιάσει τα νομίσματα, αλλά αισθάνθηκε μια δυσκολία στα χέρια του. Τα κοίταξε πιο προσεκτικά και τον κατέλαβε ανείπωτος τρόμος: όλα του τα δάχτυλα και στα δύο χέρια, εκτός από τους αντίχειρες, είχαν ενωθεί σαν να ήταν κολλημένα. Τον έλουσε κρύος ιδρώτας και με κομμένα τα γόνατά του κύλησε σ' ένα χαλί δίπλα στο τραπέζι. Κοίταξε μία φορά ακόμη τα νομίσματα και προσπάθησε να τα ξαναπάρει στα χέρια του. Η συνέχεια, όμως, απλώς μεγάλωσε τον τρόμο του. Τα νομίσματα, όπως και τα δάχτυλά του, είχαν κολλήσει μεταξύ τους, και είχαν γίνει ένα είδος σβόλου χρυσού, ένα στέρεο, ενιαίο κομμάτι. Ο αργυραμοιβός άρχισε να παίζει το σβόλο στα χέρια του ανίκανος να ξεφύγει από τον τρόμο και την κατάπληξη.

Ξαφνικά, κάτι κουνήθηκε στη σκοτεινότερη γωνιά του δωματίου. Ο αργυραμοιβός γύρισε το κεφάλι του, είδε ξανά τον ίδιο τυφλό γέρο, και θυμήθηκε το όνειρό του. Θέλησε να σηκωθεί και να τρέξει προς τον τυφλό, αλλά τα πόδια του δεν υπάκουσαν. Προσπάθησε να μιλήσει, αλλά δεν μπορούσε ούτε να κουνήσει τη γλώσσα του. Ο γέρος, σαν να τον σταματούσε, σήκωσε το χέρι του και του μίλησε: «Βλέπεις αχρείε άνθρωπε ότι κλέβοντάς με κορόιδεψες τον ίδιο σου τον εαυτό; Τι θα σου προσφέρουν τα χρήματά μου αν δεν μπορείς να τα χρησιμοποιήσεις; Πώς θα τολμήσεις να εμφανιστείς στον κόσμο με αυτά τα χέρια; Θα καταστραφείς και θα καταλήξεις ένας ζητιάνος σαν εμένα». Και κοιτώντας τον διαπεραστικά, συνέχισε: «Αισθάνομαι, όμως, ότι δεν έχεις κατρακυλήσει ακόμη τόσο χαμηλά, και θέλω να σου δώσω μια ευκαιρία να εξιλεωθείς για το κρίμα σου. Ρίξε κάτω αυτό που κρατάς στα χέρια σου, και όταν διαλυθεί σε κομμάτια προσπάθησε να το ξανασχηματίσεις. Θα δεις τι θα συμβεί τότε. Κάνε γρήγορα, όμως, γιατί κάθε ώρα που περνά θα είναι και πιο δύσκολο να τα καταφέρεις». Και μόλις ο γέρος σταμάτησε να μιλάει, εξαφανίστηκε, σαν νέφος που διαλύθηκε.

Μόλις μειώθηκε η κατάπληξη του αργυραμοιβού, πέταξε αμέσως το χρυσάφι στο πάτωμα. Ο σβόλος χωρίστηκε στη στιγμή σε πολλά κομμάτια. Ο αργυραμοιβός τα μάζεψε και άρχισε αμέσως να τα ταιριάζει μεταξύ τους. Είχε πολύ καλή μνήμη, και θυμόταν κα-



ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΥΤΟ, ο Clifford Will με το κύρος του ειδικού και τη γλαφυρότητα ενός ταλαντούχου αφηγητή, περιγράφει την τιτάνια προσπάθεια επιστημόνων και ερευνητικών ομάδων απ' όλο τον κόσμο να απαντήσουν στο «αυθάδες» ερώτημα ΕΙΧΕ ΔΙΚΙΟ Ο ΑΪΝΣΤΑΙΝ; Να βεβαιωθούν αν το ωραιότερο ίσως δημιούργημα του ανθρώπινου μυαλού, Η ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ, περιγράφει σωστά τον κόσμο μας στην κλίμακα των άστρων, των γαλαξιών και του σύμπαντος στο σύνολό του.

ΕΙΧΕ ΤΕΛΙΚΑ ΔΙΚΙΟ Ο ΑΪΝΣΤΑΙΝ; Θα «πέσει» ή δεν θα «πέσει» η θεωρία του; Στο βιβλίο του Clifford Will θα βρείτε την πιο πρόσφατη απάντηση σε ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα της επιστήμης του καιρού μας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

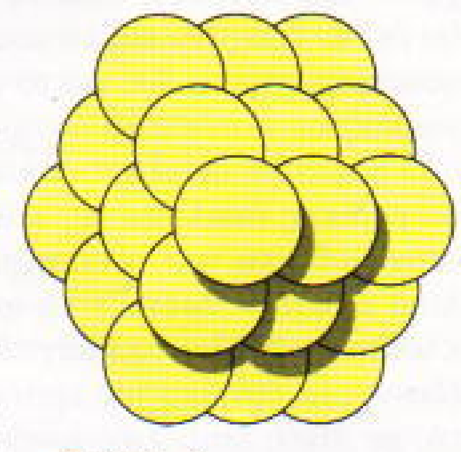
ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τ.Θ. 1527, 71 110 ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΗΛ. 210035, FAX 239735

θαρά τη μορφή του οβόλου. Μπόρεσε έτσι να σχηματίσει εύκολα περισσότερο από το μισό μέρος του, αλλά δεν κατάφερε να συνεχίσει από κει και πέρα. Αισθανόταν ότι τα κομμάτια είχαν γίνει βαρύτερα και πιο μεγάλα, και ότι συνέχιζαν κάθε λεπτό να βαραίνουν και να μεγαλώνουν. Όταν, τελικά, έφτασε η στιγμή να τοποθετήσει και το τελευταίο κομμάτι, ήταν σχεδόν αδύνατο να το σηκώσει.

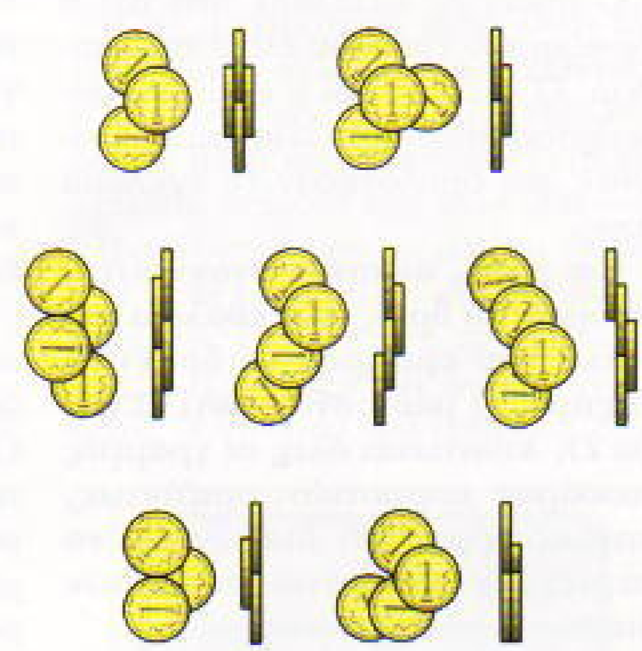
Κατάφερε να βάλει μια από τις άκρες του στη θέση της και προσπάθησε να το τοποθετήσει σωστά. Τότε αυτό γλίστρησε ξαφνικά από τα χέρια του και ήρθε στη θέση του, χτυπώντας τον αντίχειρά του. Αισθάνθηκε έναν έντονο πόνο, λιποθύμησε και σωριάστηκε δίπλα στο οβόλο...



Σχήμα 3

Ο αργυραμοιβός ξύπνησε, όπως πάντα, πριν ανατείλει ο ήλιος. Δεν θυμόταν το όνειρό του. Προσευχήθηκε και πλησίασε στο τραπέζι. Τα νομίσματα ήταν απλωμένα όπως τα είχε αφήσει το προηγούμενο βράδυ. Μόλις προσπάθησε να τα ακουμπήσει, θυμήθηκε όσα είχε ονειρευτεί. Αμέσως τον έλουσε κρύος ιδρώτας. Με καρδιά που έτρεμε, προσπάθησε να τα μαζέψει στα χέρια του και... τα κατάφερε. Τα νομίσματα έπεσαν το ένα μετά το άλλο μ' ένα απαλό κουδούνισμα. Και μόλις έπεσε και το τελευταίο νόμισμα, ο αργυραμοιβός ένιωσε αδύναμος και γονάτισε στο χαλί δίπλα στο τραπέζι. Δύσκολα μπορούμε να πούμε πόση ώρα έμεινε καθισμένος εκεί. Μόλις συνήλθε, πέρασε στο μαγαζί του, γέμισε τις τσέπες του με νομίσματα, και βγήκε έξω στο παζάρι. Σε όλο το δρόμο, έδωσε απλόχερα βοήθεια σε κάθε ζητιάνο που συνάντησε.

Από εκείνη την ημέρα και έπειτα έκανε το ίδιο κάθε πρωί, ουδέποτε όμως συνάντησε τον τυφλό γέρο. Και σύντομα, όλοι οι πελάτες του παρατήρησαν ότι στον καλόκαρδο χαρακτήρα του και την απλοϊκότητά του είχε προστεθεί μια ανεξήγητη γενναιοδωρία.



Σχήμα 4

Και τώρα, αγαπητέ αναγνώστη, μπορείς να κατασκευάσεις το οβόλο του Σχήματος 3 από τα επτά κομμάτια του Σχήματος 4;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

Richard Dawkins

Ο ΤΥΦΛΟΣ ΩΡΟΛΟΓΟΠΟΙΟΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ:
Κώστας Κριμπάς

Σελ.: 514, Μεγ.: 14x21 εκ., Εικ.: Α/Μ, 6.500 δρχ.

«Η εξέλιξη διαμέσου της φυσικής επιλογής —η μη συνειδητή, αυτόματη, τυφλή αλλά ουσιαστικά μη τυχαία διαδικασία που ανακαλύφθηκε από τον Δαρβίνο— είναι η μοναδική απάντηση στο μεγαλύτερο απ' όλα τα ερωτήματα: γιατί υπάρχουμε;»
Richard Dawkins — Καθηγητής Ζωολογίας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

Το πιο πρόσφατο βιβλίο του Dawkins.
Γράφτηκε έντεκα χρόνια μετά το *Εγωιστικό γονίδιο*,
και έχει τιμηθεί με το Βραβείο Faraday
της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου (1990).
Έχει γυριστεί σε τηλεοπτικό φιλμ από το BBC,
και κέρδισε το βραβείο καλύτερης
επιστημονικής ταινίας (1987).
Έχει μεταφραστεί σε είκοσι πέντε γλώσσες,
και είναι παγκόσμιο μπεστ-σέλερ.

ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

- «Ένα θαυμάσιο βιβλίο... Εξηγεί όλες τις όψεις τς εξέλιξης με διαύγεια, και απαντά σε κάθε επιχείρημα των οπισθοδρομικών οπαδών του δημιουργισμού.»

  Isaac Asimov

- «Μια εκπληκτικά διαυγής παρουσίαση του δαρβινισμού... Το καλύτερο βιβλίο του Dawkins.»

  F. Ayala, Καθηγητής Γενετικής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας

- «Ίσως το περισσότερο ενδιαφέρον βιβλίο για την εξέλιξη από την εποχή του Δαρβίνου.»

  John Gribbin στο *Good Book Guide*

- «Το θέμα του ο Dawkins το χειρίζεται με τον ευαγγελικό ζήλο ενός κληρικού και με το μυαλό ενός μεγάλου επιστήμονα.»

  The Times

- «Καταρρίπτει τα επιχειρήματα της θεϊκής δημιουργίας χωρίς να μειώνει την αίσθηση του μυστηρίου και της πολυπλοκότητας του κόσμου μας...»

  A.G. Cairns-Smith στο *Independent*

- «Το μυστικό για να γράφει κανείς καλά επιστημονικά βιβλία είναι να έχει κατανοήσει ο ίδιος τις ιδέες... Μακάρι να μπορούσα να γράφω κι εγώ σαν τον Dawkins.»

  John Maynard Smith στο *New Scientist*

- «Μια διαυγής και πλήρης επιχειρημάτων παρουσίαση της νεοδαρβινικής θεωρίας της εξέλιξης...»

  The Times Education Supplement

Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε σε όλα τα καλά βιβλιοπωλεία. Αν θέλετε μπορούμε να σας το ταχυδρομήσουμε. Τα έξοδα αποστολής θα επιβαρύνουν εμάς. Γράψτε μας ή τηλεφωνήστε μας:
Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη,
11471 - Αθήνα.
Τηλ.: 3643272, 3645098
Fax: 3641864