

# QUANTUM

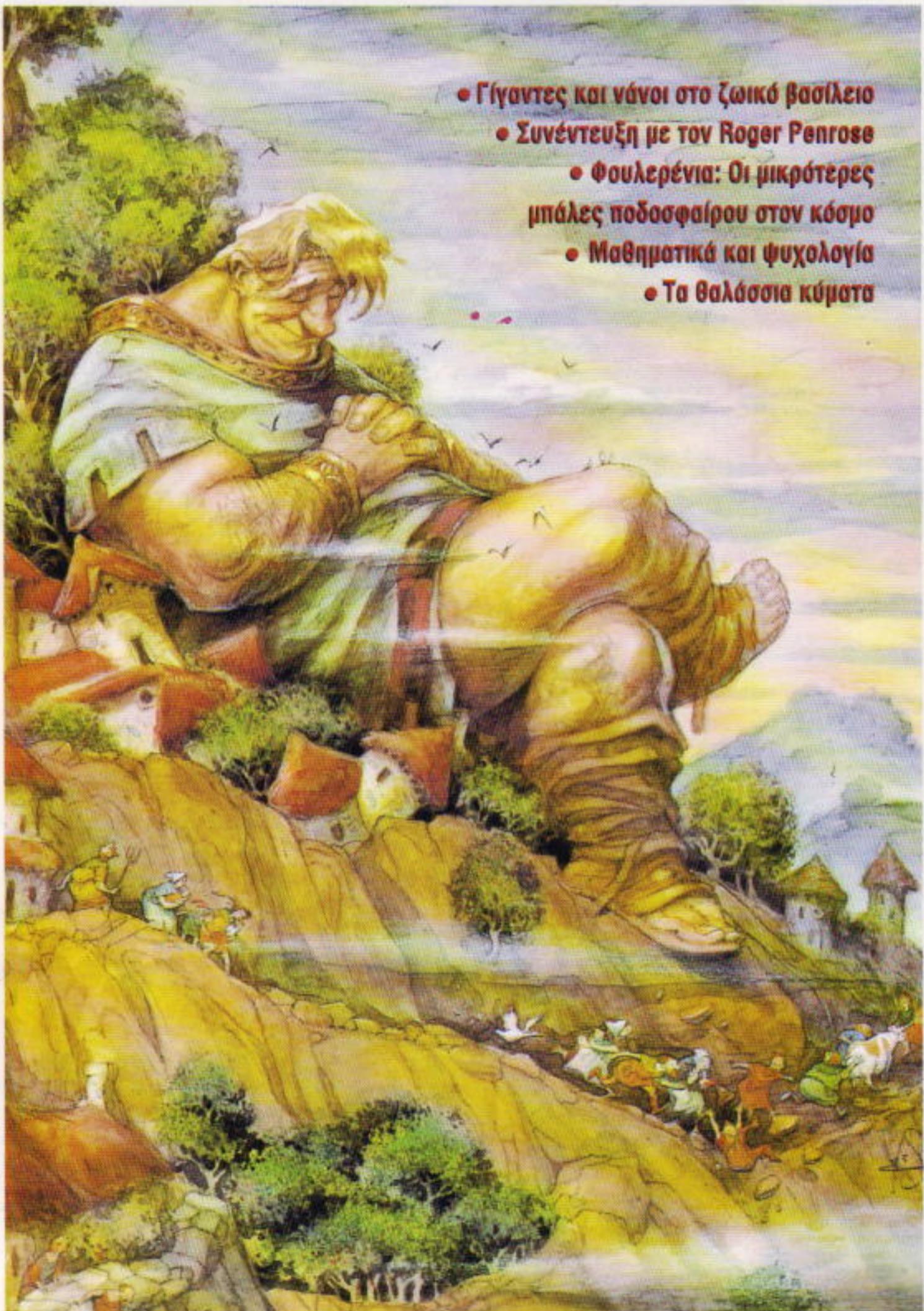
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1994

ΤΟΜΟΣ 1 / ΤΕΥΧΟΣ 2

1.200 ΔΡΧ.

- Γίγαντες και νάνοι στο ζωικό βασίλειο
- Συνέντευξη με τον Roger Penrose
- Φουλερένια: Οι μικρότερες μπάλες ποδοσφαίρου στον κόσμο
- Μαθηματικά και Φυχολογία
- Τα θαλάσσια κύματα



Έκδοση  
της Εθνικής Ένωσης  
Καθηγητών Θετικών  
Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ,  
του Γραφείου Kvant  
της Ρωσικής Ακαδημίας  
Επιστημών,  
της Αμερικανικής Ένωσης  
Καθηγητών Φυσικής (AAPT),  
του Εθνικού Συμβουλίου  
Καθηγητών Μαθηματικών  
(NCTM) των ΗΠΑ,  
του Εκδοτικού οίκου  
Springer και των  
Έκδόσεων Κάτοπτρο

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1994

1.200 ΔΡΧ

Τισκόβ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



Ο γεωδαισιακός θόλος του R. Buckminster Fuller

**Α**κόμη κι αν ο Buckminster Fuller δεν είχε κάνει τίποτε άλλο στη ζωή του από την επινόηση του γεωδαισιακού θόλου, η θέση του στην ιστορία θα ήταν εξαιφαλισμένη. Από πολλούς θεωρείται ως η σημαντικότερη καινοτομία κατά τον 20ό αιώνα στον τομέα των κατασκευών. Ο γεωδαισιακός θόλος περικλείει περισσότερο χώρο με λιγότερα υλικά απ' ό, τι οποιαδήποτε άλλη εναλλακτική μορφή. «Όταν επινόησα και ανέπιξα τον πρώτο μου γεωδαισιακό θόλο με ελεύθερα διανούματα για όλες τις εποχές», γράφει ο Fuller, «οι δύο μεγαλύτεροι θόλοι του κόσμου βρίσκονταν στη Ρώμη, και καθένας τους είχε περίπου 50 μέτρα διάμετρο. Πρόκειται για το θόλο του ναού του Αγίου Πέτρου, που χτίστηκε γύρω στο 1500 μ.Χ., και για το Πάνθεον, που χτίστηκε περίπου το 1 μ.Χ. Καθένας τους ζυγίζει περίπου 15.000 τόνους. Αντίθετα, ο πρώτος δικός μου γεωδαισιακός θόλος, με διάμετρο 50 μέτρα, που εγκατασ्थήκε στη Χαβάη, ζυγίζει μόνο 15 τόνους – δηλαδή το ένα χιλιοστό του βάρους του αντίστοιχου χτιστού θόλου. Ένας σεισμός θα μπορούσε να γκρεμίσει τους δύο θόλους της Ρώμης, αλλά θα άφηνε ανέπαφο τον γεωδαισιακό».

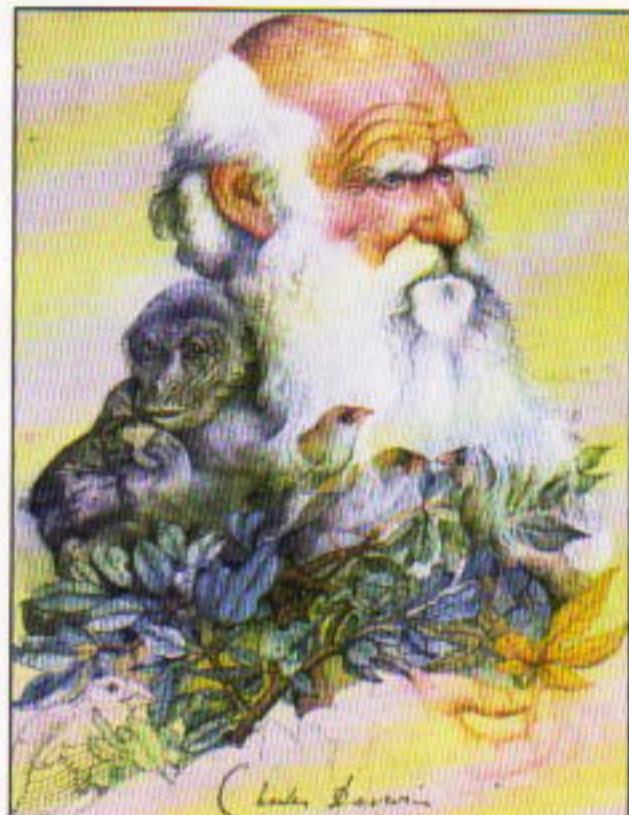
Ο Fuller επινόησε τη λέξη «tensegrity» (~γενικευμένη τάση) για το σύστημα κατασκευών συνεχούς τάσης/ασυνεχούς θλίψης το οποίο ανέπτυξε, έχοντας ως αφετηρία μια ιδέα που του έδωσε ένας γλύπτης. Γρήγορα αντιλήφθηκε ότι, λόγω της μεγαλύτερης απόδοσης του συνδυασμού τάσης και θλίψης, είναι δυνατό να χτιστούν πολύ μεγάλοι θόλοι, με τα δικτυώματα γενικευμένης τάσης που είχε επινοήσει. Υπολόγισε ότι ένας θόλος διαμέτρου 3 χιλιομέτρων θα ζυγίζε μόλις 4.000 τόνους.

Στην παραπάνω φωτογραφία, βλέπουμε τον Fuller να στέκεται μπροστά στο θόλο διαμέτρου 76 μέτρων που στέγασε το περίπτερο των ΗΠΑ στην παγκόσμια έκθεση του Μόντρεαλ το 1967. Δεν έχουν όλοι οι γεωδαισιακοί θόλοι τέτοια μνημειώδη μορφή. Στην παρακάτω φωτογραφία, βλέπουμε τον Buckminster Fuller και τη σύζυγό του, Anne Hewlett Fuller, στο γεωδαισιακό τους σπίτι, στο Κάρμποντέλ του Ιλλινόις. Γυρίστε στη σελίδα 10, για να δείτε μερικές ακόμη μικρότερες γεωδαισιακές δομές: κούλα μόρια άνθρακα που ονομάζονται «μπάκυμπωλ», προς πρώτη φορά στην παραγωγή, και διορατικού στογαστή.



*Richard Dawkins*

# Ο ΤΥΦΛΟΣ ΩΡΟΛΟΓΟΠΟΙΟΣ



- «Ενα θαυμάσιο βιβλίο... Εξηγεί όλες τις όφεις της εξέλιξης με διαύγεια, και απαντά σε κάθε επιχείρημα των οπισθόδρομικών οπαδών του δημιουργούμού.»

*Isaac Asimov*

- «Μια εκπληκτικά διαυγής παρουσίαση του δαρβινισμού... Το καλύτερο βιβλίο του Dawkins.»

*F. Ayala, Καθηγητής Γενετικής στο  
Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας*

- «Τως το περισσότερο ενδιαφέρον βιβλίο για την εξέλιξη από την εποχή του Δαρβινού.»

*John Gribbin στο Good Book  
Guide*

- «Το θέρα του ο Dawkins το χειρίζεται με τον ευαγγελικό όπλο ενός κληρικού και με το μυαλό ενός μεγάλου επιστήμονα.»

*The Times*

- «Καταρρίπτει τα επιχειρήματα της θεϊκής δημιουργίας χωρίς να μειώνει την αισθητή του μυστηρίου και της πολυπλοκότητας του κόσμου μας...»

*A.G. Cairns-Smith στο Independent*

- «Το μυστικό για να γράφει κανείς καλά επιστημονικά βιβλία είναι να έχει κατανοήσει ο ίδιος τις ιδέες... Μακάρι να μπορούσα να γράψω κι εγώ οιν τον Dawkins.»

*John Maynard Smith στο New  
Scientist*

- «Μια διαυγής και πλήρης επιχειρημάτων παρουσίαση της νεοδαρβινικής θεωρίας της εξέλιξης...»

*The Times Education Supplement*



Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε  
σε όλα τα καλά  
βιβλιοπωλεία. Αν θέλετε  
μπορούμε να σας το  
ταχυδρομίσουμε. Τα  
ξέδα αποστολής θα  
επιβαρύνουν εράς.

Γράψτε μας ή  
τηλεφωνήστε μας:

Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Ιοαύρων 10 και Δαφνομήλη,  
11471 - Αθήνα.

Tηλ.: 3643272, 3645098

Fax: 3641864

**ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ:  
Κώστας Κριμπάς**

**Σελ.: 500, Μεγ.: 14x21, Εικ.: Α/Μ, 6.500 δρχ.**

«Η εξέλιξη διαμέσου της φυσικής επιλογής —π μη συνειδητή, αυτόματη, τυφλή αλλά ουσιαστικά μη τυχαία διαδικασία που ανακαλύφθηκε από τον Δαρβίνο— είναι π μοναδική απάντηση στο μεγαλύτερο απ' όλα τα ερωτήματα: γιατί υπάρχουμε;»

*Richard Dawkins — Καθηγητής Ζωολογίας  
στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης*

Το πιο πρόσφατο βιβλίο του Dawkins.  
Γράφτηκε έντεκα χρόνια μετά το *Έγωιστικό γονίδιο*,  
και έχει τιμηθεί με το Βραβείο Faraday  
της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου (1990).  
Έχει γυριστεί σε τηλεοπτικό φιλμ από το BBC,  
και κέρδισε το Βραβείο καλύτερης  
επιστημονικής ταινίας (1987).

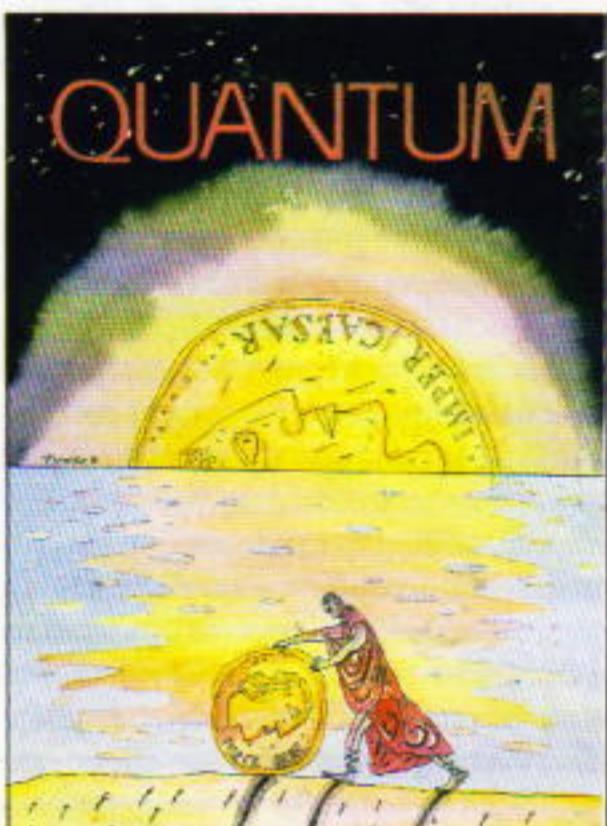
Έχει μεταφραστεί σε είκοσι πέντε γλώσσες,  
και είναι παγκόσμιο μπεοτ-όλερ.

**ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ**

# QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1994

ΤΟΜΟΣ 1 / ΤΕΥΧΟΣ 2



Εικονογράφηση εξωφύλλου: Leonid Tishkov

Μερικοί από εμάς θυμούνται, με θυμηδία, την εποχή που τους ήταν εύκολο να κερδίσουν λίγα χρήματα. Το μόνο που χρειαζόταν ήταν να κάνουν μια ξενοπνή συμφωνία με τον μικρό τους γιο: «Ορίστε. Σε συμφέρει. Θα σου δώσω ένα μεγάλο δίφραγκο και θα μου δώσεις ένα μικρό τάληρο! Ήταν μια καλή ευκαιρία – αλλά δεν κρατούσε πολύ. Τελικά, ή το παιδί γινόταν οσφότερο, ή κάποιος μεγαλύτερος επενέβαινε – με οδυνηρές συνέπειες για τον πονηρό επιχειρηματία.

Ποιος μπορεί να κατηγορήσει έναν τετράχρονο που νομίζει ότι ένα δίφραγκο αξίζει περισσότερο από ένα τάληρο; Μόνο ένας ενήλικος θα μπορούσε να σκεφτεί ότι ένα μεγάλο νόμιμα αξίζει λιγότερο από ένα πιο μικρό. Στο μυαλό ενός παιδιού, όλα αυτά μοιάζουν με απάτη. Φυσικά οι μεγάλοι δεν έχουν ανοσία στα ψυχολογικά ολισθήματα, όταν ασχολούνται με τα χρήματα. Πράγματι, ο ρωμαίος αξιωματούχος του εξωφύλλου μας έπεσε θύμα ενός πανούργου αυτοκράτορα. Πόσο πανούργου όμως; Αυτό θα το κρίνετε εσείς. Η ιστορία μας αρχίζει στη σελίδα 7.

## ΑΡΘΡΑ

- 7 Μαθηματικά και ψυχολογία  
**Ένας παράξενος αυτοκράτορας...**  
*Igor Akulich*
- 10 Μοριακή αρχιτεκτονική  
**Το κυνήγι των μαγικών σφαιρών**  
*Sergey Tikhodeyev*
- 18 Πρώτες ιδιότητες  
**Προς την κορυφή του όρους Fermat – Euler**  
*Vladimir Tikhomirov*
- 22 Φαινόμενα μεγάλης κλίμακας  
**Τρικυμισμένες θάλασσες**  
*Ivan Vorobyov*

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 Ο κόσμος των κεθάντων
- 5 Μαθηματικά απρόοπτα  
Έξι προβλήματα διαμέρισης
- 16 Στο μαυροπίνακα I  
Η μεγάλη βουτιά
- 28 Πώς λύνεται;
- 29 Απληπλογραφία
- 30 Συνέντευξη  
*O Roger Penrose μιλά στο ελληνικό Quantum*
- 36 Καλειδοσκόπιο  
*Nάνοι και γίγαντες*
- 40 Σπαζοκεφαλιές
- 41 Στα πεδία της φυσικής  
*Αιώρηση με λέιζερ*
- 44 Μαθηματικές αναζητήσεις  
*Χρόνια πολλά, Θείε Paul*
- 47 Στο μαυροπίνακα II  
*Κουβεντούλα για έναν μικρό φακό*
- 50 Το *Quantum* διαθάζει
- 52 Με λίγη φαντασία  
*Γεωμετρικές αδροίσεις*
- 54 Στο μαυροπίνακα III  
*Εννέα λύσεις για ένα πρόβλημα*
- 58 Γεγονότα  
*Η ιστορία μιας πόλης*
- 61 Απαντήσεις, Υποδείξεις  
και Λύσεις
- 69 Παιχνιδότοπος  
*Οι κυλιόμενοι κύβοι*

# Η ευχαρίστηση της επιστήμης

Κύριε είναι μεσημέρι κι ακόμα δεν ξυπνήσατε... Κύριε, εισαστε νεκρός;

Μίλτος Σαχτούρης

**H**έκδοση του *Quantum* στα ελληνικά χαιρεύστηκε με θέρμη τόσο από την ελληνική και διεθνή επιστημονική κοινότητα όσο και από το ευρύτερο ελληνικό κοινό. Μεταξύ των επωνύμων που μας έγραψαν ήταν και ο Peter Atkins.\* Μαθαίνοντας με ευχάριστη έκπληξη την ελληνική έκδοση του *Quantum*, χαιρετίζει τους έλληνες αναγνώστες τού περιοδικού με το παρακάτω κείμενο (το δημοσιεύουμε με τις λιγότερες δυνατές συμπύξεις και περικοπές). Θέμα του είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της επιστημονικής μεθόδου αλλά και η χαρά που αποκομίζει όποιος τη χρησιμοποιεί στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει και να κατανοήσει τον κόσμο μας.

«Μπορείτε να συναντήσετε την ευτυχία με πολλές μορφές. Μια πηγή ευτυχίας έναι η τέχνη, που διεγείρει το νου και τα συναισθήματά μας. Μια άλλη σχετίζεται με την κατανόηση του γιατί ένα πράγμα είναι έτοι και όχι αλλιώς. Σας κυριεύει μια βαδιά αίσθηση ευχαρίστησης όταν ξαφνικά κατανοήσετε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί κάτι: πώς πετούν τα αεροπλάνα, με ποιον τρόπο σκέφτεται ο εγκέφαλος, γιατί τα τριαντάφυλλα μοσχοβολάνε. Ορισμένοι πιστεύουν πως η γνώση του τρόπου που λειτουργούν τα πράγματα, η γνώση του λόγου για τον οποίο ο ουρανός είναι γαλανός και τα χόρτα πράσινα, σκιάζει κάπως την απόλαυση. Πρόκειται για ανθρώπους που δεν έχουν μπει ποτέ στον κόπο να κατανοήσουν (διότι χρειάζεται οκληρή δουλειά) ή δεν έχουν βοηθηθεί να κατανοήσουν, ή διαπίστωσαν ότι η κατανόηση απαιτεί έντονη προσάρδεια και γι' αυτό παραιτήθηκαν.

«Η κατανόηση δεν μπορεί ποτέ να αφαιρέσει από την απόλαυση μπορεί μόνο να προοδέσει, οδηγώντας σε μια βαθύτερη εκτίμηση του κόσμου. Και επιπλέον, δεν είναι απαραίτητο να πασχίζετε να κατανοήσετε κάθε φορά που βλέπετε ένα τριαντάφυλλο. Η κατανόηση μπορεί να διαπηρείται μέσα σας, έτοιμη να αναδυθεί όταν χρειάζεται, αλλά να παραμένει κοιμιομένη όταν θέλετε, απλή, αδιαμεσολάβητη, επιφανειακή, άμεση απόλαυση. Οπωδήποτε, είναι προτυπότερο να έχετε την κατανόηση διαδέσμη, αλλά πιθανώς κοιμιομένη μέσα σας, παρά να σας λείπει εντελώς.

\* Ο P.W. Atkins είναι υφυγήτης στο Lincoln College της Οξφόρδης και λέκτωρ φυσικοχημείας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Το ερευνητικό ενδιαφέρον του επικεντρώνεται στην κβαντική θεωρία, και ειδικότερα στη θεωρία των μοριακών ιδιοτήτων. Μεταξύ των πολλών βιβλίων που έχει γράψει είναι τα *Molecular Quantum Mechanics*, *Quanta*, *Physical Chemistry* (μετειφράζεται ήδη στα ελληνικά από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης) και *The Creation* (κυκλοφορεί στα ελληνικά με τον τίτλο *Η Δημιουργία* από τις Εκδόσεις Κέτοπρο).

»Οι επιστήμονες βρήκαν το δρόμο προς ένα πολύ ιδιαίτερο είδος κατανόησης και, ως εκ τούτου, προς μια βαθύτερη μορφή ευχαρίστησης. Δεν υπάρχει τίποτε το ιδιαίτερο στο μυστικό τους παρουσιάζουν δημοσίως την εργασία τους, οπότε η κατανόηση μπορεί να ελεγχθεί από την κοινή εμπειρία. Οι επιστήμονες ανακαλύπτουν τα μυστικά της φύσης καταγράφοντας ότι παραπρούν σε συνδήκες προσεκτικά ελεγχόμενες. Αυτές – προσεκτικά καθορισμένοι τρόποι πρόκλησης γεγονότων – είναι σημαντικές, επειδή το στοιχείο της επιστημονικής μεθόδου που την καθιστά τόσο αξιόπιστη είναι ο ανοιχτός, κοινός χαρακτήρας της. Ένας επιστήμονας στη Βεγγάλη μπορεί να εκτελέσει ένα πείραμα με τον ίδιο τρόπο που ένας επιστήμονας στην Αθήνα ανέφερε ότι το διεξήγαγε, και στη συνέχεια ο πρώτος να ελέγχει αν ο δεύτερος έσφαλε ή όχι.

»Μερικοί ισχυρίζονται ότι η προσήλωση στο πείραμα αποτελεί σοβαρό περιορισμό της επιστήμης. Υποστηρίζουν ότι δεν καταφέρνει να λάβει υπόψη της ένα γεγονός που μπορεί να συμβεί μία φορά στη ζωή μας (ένα θάύμα, για παράδειγμα) ή ένα γεγονός που για τον παραπρητή είναι άκρως προσωπικό (μια μυστικιστική εμπειρία, ας πούμε, ή ένα όραμα).

»Η επιστήμη προβάλλει δύο επιχειρήματα για να αντικρύσσει αυτή την άποψη. Πρότον, ότι, όταν αναφέρεται ένα ιδιαίτερα απίθανο γεγονός, είναι πιο λογικό να αμφιβάλλουμε για την αξιοπιστία του προσώπου που το αναφέρει, παρά να πιστέψουμε ότι το ασυνήθιστο γεγονός συνέβη όντως. Η επιστήμη δεν υποστηρίζει, βέβαια, ότι το πρόσωπο αυτό φεύδεται οπωσδήποτε (αν και μερικές φορές αυτό συμβαίνει πράγματι). Δέχεται ότι μπορεί κάποιος να νομίζει πως είχε την εμπειρία ενός θάύματος ή ενός οράματος, αλλά κατόπιν αναζητεί τους λόγους και τους τρόπους με τους οποίους το συγκεκριμένο πρόσωπο παραπλανήθηκε. Δεύτερον, ότι, αν η επιστήμη διαπιστώσει πως πρέπει να αποδεχθεί την αναφορά ως αληθινή, προσπαθεί να την εξηγήσει με τα συμπεράσματα που ήδη διαδέτει επιδιώκει να την ερμηνεύσει με προσεκτικούς συλλογισμούς βασιομένους σε θεμελιώδεις ιδέες, παρά να επινοήσει ερμηνείες για μία συγκεκριμένη περίπτωση.

»Η επιστήμη δεν είναι απλώς μια συλλογή από ανεξάρτητες ιδέες, σαν οάσεις διάσοπαρτες σε μια έρημο, αλλά ένα πυκνό δίκτυο αλληλένδετων ιδεών. Αν αυτές ήταν ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε η ανατροπή μίας από αυτές δεν θα είχε ιδιαίτερη σημασία, διότι οι υπόλοιπες θα επιβίωναν, και ίσως θα ήταν εύκολο να αντικαπασιαθεί η νεκρή ιδέα. Ωστόσο, αν α-





# Έξι προκλητικά προβλήματα διαμέρισης

*Kai énaς στενός συζενής της χρυσής τουής*

Martin Gardner

**O**Karl Scherer, ειδικός στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές στο Όκλαντ της Νέας Ζηλανδίας, έθεσε πρόσφατα τα εξής προβλήματα:

1. Να μεριστεί ένα τετράγωνο σε τρία ίσα μέρη.

2. Να μεριστεί ένα τετράγωνο σε τρία ίσα μέρη, από τα οποία μόνο τα δύο είναι ίσα.

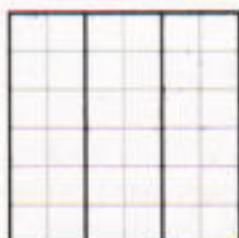
3. Να μεριστεί ένα τετράγωνο σε τρία ίσα μέρη, αλλά άνισα ανά δύο μέρη.

4. Να μεριστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε τρία ίσα μέρη.

5. Να μεριστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε τρία ίσα μέρη, από τα οποία μόνο τα δύο είναι ίσα.

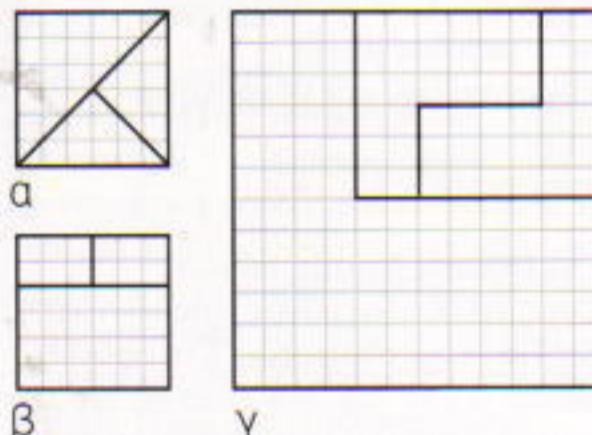
6. Να μεριστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε τρία ίσα μέρη, αλλά άνισα ανά δύο μέρη.

Η λύση του πρώτου προβλήματος είναι προφανής (βλ. Σχήμα 1). Είναι σίγουρα μοναδική, αν και δεν γνωρίζω καμιά απόδειξη γι' αυτό. Οι Ian Stewart και A. Womstein έχουν αποδείξει ότι αν ένα ορθογώνιο χωριστεί σε τρία ίσα πολυόμινα<sup>1</sup>, τότε αυτά είναι ορθογώνια.<sup>2</sup>



Σχήμα 1

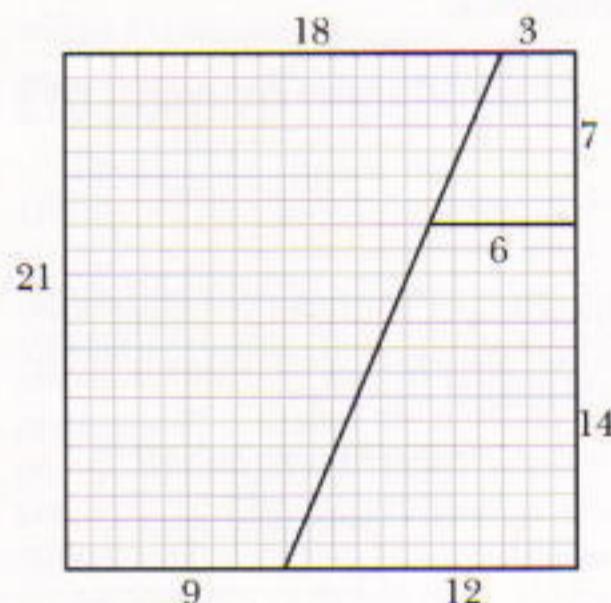
Στο Σχήμα 2 βλέ-



Σχήμα 2

πουμε τρεις λύσεις του δεύτερου προβλήματος διαμέρισης.

Το τρίτο πρόβλημα είναι δυσκο-



Σχήμα 3

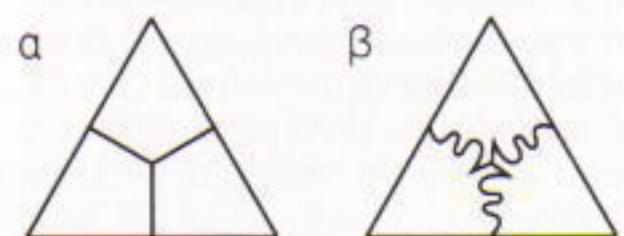
λότερο. Ο Scherer ανακάλυψε τη λύση που βλέπετε στο Σχήμα 3. Η λύση δεν είναι μοναδική διότι το κεκλιμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να τοποθετηθεί σε άπειρες θέσεις. Η λύση που βλέπετε είναι ίσως αυτή στην οποία τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν τα μικρότερα δυνατά ακέραια μήκη.

Όπως παρατήρησε ο μαθηματικός Robert Wainwright, από το Νιού Τζέροεϋ, όταν το πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα γίνει κατακόρυφο, προκύπτει το Σχήμα 2g.

Ας συνεχίσουμε με τα προβλήματα των ισόπλευρων τριγώνων.

Το τέταρτο πρόβλημα έχει φανερά άπειρο πλήθος λύσεων, οι οποίες προκύπτουν από την περιστροφή γύρω από το κέντρο του τριγώνου των τριών τμημάτων που το τριχοτομούν (Σχήμα 4). Οι γραμμές που τριχοτομούν το τρίγωνο δεν είναι απαραίτητως ευθείες. Μπορεί να έχουν οποιαδήποτε μορφή, αρκεί να είναι ίσα μέρη και να μην τέμνονται (Σχήμα 4b).

Ο Scherer βρήκε μια κομψή λύση



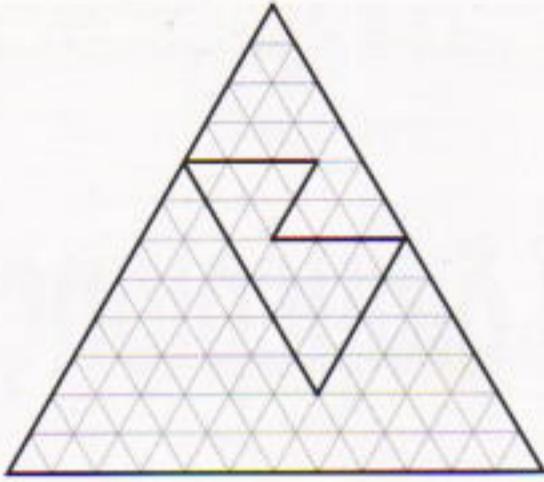
Σχήμα 4

για το πέμπτο πρόβλημα (Σχήμα 5). Επικρατεί η άποψη ότι είναι μοναδική. Παρατηρήστε την ομοιότητά της με τη λύση του Σχήματος 2g.

Το έκτο πρόβλημα λύνεται εύκολα

1. Η λέξη «πολυόμινο» είναι νεολογισμός που προσπαθεί να αποδώσει τον αντίστοιχο ξένο νεολογισμό «polyomino». Η λέξη είναι σύνθετη και παράγεται από τις polygon και domino. Ο όρος εισήχθη το 1954 από τον Solomon Golomb σε ένα άρθρο του με ψυχαγωγικά μαθηματικά. Ο ορισμός του γι' αυτό ήταν: «Συνεκτικό σύνολο ίσων τετραγώνων που συνδέονται κατά μήκος των πλευρών τους». (Τα γειτονικά τετράγωνα μπορούν να συνδέονται αριστερά-δεξιά, πάνω-κάτω αλλά όχι διαγώνιας π.χ. τα τετρόμινα επιτρέπονται, αλλά όχι το . Επίσης απαγορεύονται οι τρύπες.) (Σ.τ.ε.)

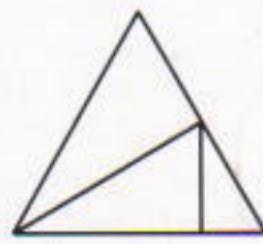
2. Journal of Combinatorial Theory, Σειρά A', Τομ. 61, Σεπτ. 1992, σ. 130-36.



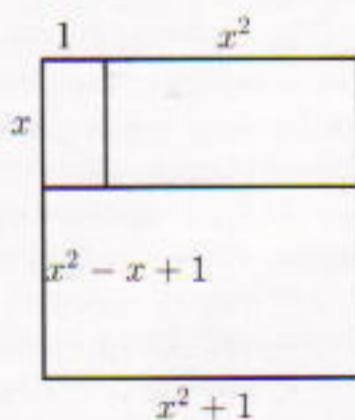
Σχήμα 5

(Σχήμα 6). Η λύση είναι πιθανότατα μοναδική, αν και δεν είναι γνωστή καμία σχετική απόδειξη.

Η μοναδική μου συμβολή σε αυτά τα έξι πρόβληματα είναι η επανανακάλυψη μιας δεύτερης λύσης στο τρίτο πρόβλημα (Σχήμα 7).



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Όπως έμαθα αργότερα από τον Scherer, την είχε ανακαλύψει αρκετά χρόνια νωρίτερα.

Ποια είναι η τιμή του  $x$ , αν υποθέσουμε πως η μικρότερη πλευρά του πιο μικρού ορθογώνιου έχει μήκος 1; Νόμιζα ότι η απάντηση σε αυτήν την ερώτηση θα ήταν απλή. Αν δεν ήταν ρητός ο  $x$ , θα ήταν σίγουρα κάποιος αναγνωρίσιμος άρρητος, όπως ο 1,732... (η τετραγωνική ρίζα του 3), ή ο 1,618... (ο λόγος της χρυσής τομής)<sup>3</sup>, ή κάποιος άλλος γνωστός άρρητος.

Προς μεγάλη μου έκπληξη, ο  $x$  αποδείχτηκε ένας άρρητος που δεν τον είχα συναντήσει ποτέ στο παρελθόν.

Η τριτοβάθμια εξίσωση που συν-

δέει το λόγο των πλευρών του μικρότερου ορθογώνιου με το λόγο των πλευρών του μεγαλύτερου, όμοιου ορθογώνιου, είναι η

$$\frac{1}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1},$$

$$\text{ή } x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0,$$

$$\text{ή } (x^2 - x)(x - 1) = 1.$$

Το δεκαδικό ανάπτυγμα του  $x$  είναι

$$1,75487766624669276\dots$$

Όπως επισήμανε ο Wainwright, αυτός ο αριθμός σχετίζεται στενά με τον  $\phi$ , το λόγο της χρυσής τομής. Ο αντίστροφος του  $\phi$  ισούται με  $\phi - 1$ . Ο αντίστροφος του  $x$  ισούται με  $(x - 1)^2$ . Ισχύουν επίσης και οι ισότητες

$$\frac{1}{x^2} = \sqrt{x} - 1, \quad \sqrt{x} = \frac{1}{x - 1}.$$

Ο Donald Knuth, ειδικός στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ, προτείνει για σύμβολο αυτού του αριθμού το  $\tilde{\phi}$ . Σε μια επιστολή του, μου επισημαίνει πόσο πολύ μοιάζουν τα συνεχή κλάσματα που αντιστοιχούν στους δύο αριθμούς (του  $\phi$  και του  $\tilde{\phi}$ ). Ο λόγος  $\phi$  της χρυσής τομής είναι το όριο του συνεχούς κλάσματος

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1}}}.$$

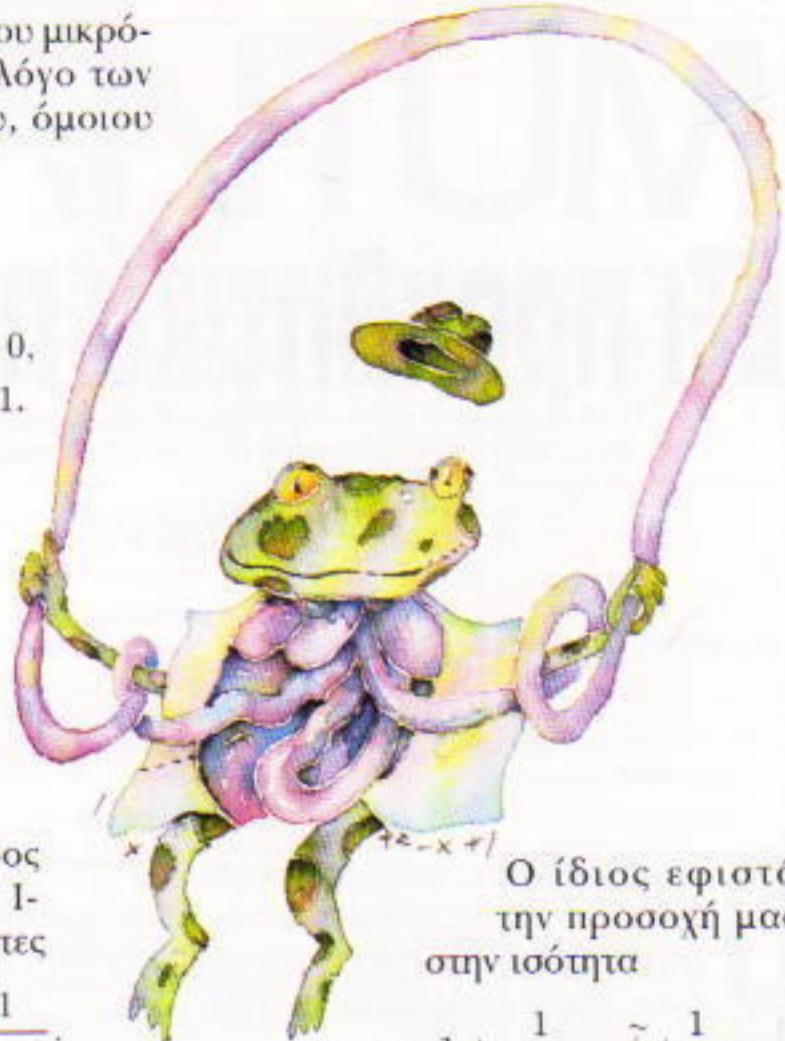
Επιουνάψτε σύμβολα τετραγωνικών ριζών και έχετε το συνεχές κλάσμα για το  $\tilde{\phi}$ :

$$1 + \cfrac{1}{\sqrt{1 + \cfrac{1}{\sqrt{1 + \cfrac{1}{\sqrt{1 + 1}}}}}}.$$

Όπως παρατηρεί ο Knuth, το συνεχές αυτό κλάσμα συγκλίνει ταχύτερα από το αντίστοιχο του λόγου της χρυσής τομής, ενώ οι τιμές των μερικών προσεγγίσεων είναι εναλλάξ μεγαλύτερες και μικρότερες από την οριακή τιμή:

$$1, 2, 1,71, 1,765, 1,753, 1,7554, \dots$$

3. Ο λόγος της χρυσής τομής – που συμβολίζεται συχνά με το  $\phi$  – είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης  $\phi^2 = \phi + 1$ . (Σ.τ.μ.)



Ο ίδιος εφιστά την προσοχή μας στην ισότητα

$$1 + \cfrac{1}{\tilde{\phi} - 1} = \tilde{\phi} + \cfrac{1}{\tilde{\phi}}.$$

Ο Karl Scherer επισημαίνει ότι τα τρία ορθογώνια στο σχήμα μου έχουν εμβαδά  $x$ ,  $x^3$ , και  $x^4$ . Αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό τετράγωνο έχει πλευρά 1, τα ορθογώνια έχουν εμβαδά  $1/x$ ,  $1/x^3$ , και  $1/x^4$ . Επομένως,  $1 = 1/x + 1/x^3 + 1/x^4$ , ενώ ο λόγος του μεγαλύτερου ορθογώνιου προς το υπόλοιπο τετράγωνο είναι  $\sqrt{\tilde{\phi}}$ .

Ο Scherer προτείνει τους όρους  $\tilde{\phi}_2$ ,  $\tilde{\phi}_3$ , κ.ο.κ. για τους όρους της ακολουθίας των (μοναδικών, όπως αποδεικνύεται) λύσεων των εξισώσεων

$$\frac{1}{x} = (x - 1)^n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Επίσης, εικάζει ότι:

$$\sum_{m=0}^n \tilde{\phi}_m^{2^m} = 1.$$

Θα μπορούσε κάποιος αναγνώστης να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει αυτήν την εικασία;<sup>4</sup> Θα ήταν επίσης ευπρόσδεκτη κάθε καινούργια λύση οποιουδήποτε από τα έξι πρόβληματά μας. ◻

4. Για  $n = 0, 1, 2$  το άθροισμα είναι σωτό. Άλλα για  $n = 3$ , οι επιστημονικοί σύμβουλοι του ελληνικού Quantut δείχαμε ότι το άθροισμα δεν κάνει 1. Μπορούν οι αναγνώστες μας να κάνουν το ίδιο; (Σ.τ.ε.)

# Ένας παράξενος αυτοκράτορας...

...και ένας αλλόκοτος στρατηγός

Igor Akulich

**Ο**ταν ο γενναίος ρωμαίος στρατηγός Τερέντιος αποφάσισε να παραιτηθεί, παρουσιάστηκε στον αυτοκράτορα και απάιμησε να αμειφθεί με πέντε εκατομμύρια μπρούτζινα για τις υπηρεσίες του (το «μπρούτζινο» ήταν ένα χάλκινο νόμισμα των πέντε γραμμαρίων). Ο αυτοκράτορας, όμως, που δεν ήταν ιδιαίτερα γενναιόδωρος, οκέφτηκε να εξαπάτησε το στρατηγό. Του είπε, λοιπόν: «Δεν θα ήθελα να αρκεστείς σε μια τόσο μικρή ανταμοιβή. Πήγαινε στο θησαυροφυλάκιο και πάρε ένα νόμισμα την πρώτη ημέρα. Τη δεύτερη ημέρα μπορείς να πάρεις ένα νόμισμα αξίας δύο μπρούτζινων, την τρίτη ένα αξίας τεσσάρων, την επομένη ένα αξίας οκτώ, και ούτω καθεξής, διαλέγοντας κάθε μέρα ένα νόμισμα με διπλάσια αξία. Θα διατάξω το νομισματοκοπείο να φτιάχνει ένα νόμισμα με το κατάλληλο μέγεθος κάθε φορά. Για όσο καιρό θα μπορείς να μεταφέρεις τα νομίσματα μόνος σου, χωρίς καμία βοήθεια, θα είναι δικά σου. Μόλις, όμως, απούχεις να μεταφέρεις ένα νόμισμα, η συμφωνία μας παύει να ισχύει.» Ο Τερέντιος ενθουσιάστηκε. Άρχισε να ονειρεύεται τον τεράστιο σωρό των νομισμάτων, το ένα μεγαλύτερο από το άλλο, που θα κατάφερνε να πάρει από το θησαυροφυλάκιο.

Τι έγινε τελικά στην πραγματικότητα; Ο Τερέντιος πλούτιζε για δεκαοκτώ ημέρες μόνο. Τη δέκατη όγδοη ημέρα το νόμισμα ζύγιζε 655 κιλά περίπου και με τρομερή δυσκολία κατάφερε να το κυλήσει έξω από το θησαυροφυλά-

κιο, χρησιμοποιώντας το ακόντιο του ως μοχλό. Ήταν απολύτως αδύνατο να μετακινήσει το επόμενο νόμισμα. Έτσι, το συνολικό ποσόν που αποκόμισε ήταν 262.143 μπρούτζινα – με άλλα λόγια, κάπι λίγο παραπάνω από το 1/20 του ποσού που είχε ζητήσει αρχικά. Ο αυτοκράτορας βέβαια ενθουσιάστηκε αλλά ο Τερέντιος μετάνιωσε πικρά.

Την ιστορία αυτή, μαζί με πλήθος ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες και γραμμένη με το θαυμάσιο ύφος που τον χαρακτηρίζει, μπορείτε να τη διαβάσετε στο βιβλίο *Mathematics Comes Alive* (Τα Μαθηματικά ζωντανεύουν) του Yakov Perelman.

## Στο μακρινό παρελθόν

Πριν από εκατό και περισσότερα χρόνια, σε μια διάλεξη στη Βαλτιμόρη, ο λόρδος Kelvin διατύπωσε την επόμενη ρητορική ερώτηση: «Από τα διακόσια εκατομμύρια άνδρες, γυναίκες και παιδιά που, από τις πρώτες μέρες της ανθρωπότητας ώς τη συνάντηση της Βρετανικής Ένωσης\* στο Αμπερντή το 1885, περπάτησαν σε μια παραλία πάνω στην υγρή άμμο, πόσοι θα απαντούσαν αρνητικά στην ερώτηση “συμπιέζεται η άμμος κάτω από τα πόδια σας;”» Γιατί ειδικά το Αμπερντή το 1885; Διότι εκεί ο O. Reynolds

απέδειξε ότι η άμμος στην πραγματικότητα, και αντίθετα με ό, τι λέει ο κοινός νους, δεν συστέλλεται κάτω από τα πόδια μας αλλά διαστέλλεται.

Ας μην απομακρυνθούμε, όμως, τόσο πολύ από το θέμα μας. Θα ήταν πρωτότερο να κάνουμε μια παρόμοια ερώτηση σχετικά με την αμοιβή που προσέφερε ο αυτοκράτορας: «Πόσοι από τα εκατομμύρια των αναγνωστών του βιβλίου του Perelman ή τους χιλιάδες αναγνώστες του Quantum παρατήρησαν ότι η συμπεριφορά του αυτοκράτορα, αλλά και του στρατηγού, ήταν τουλάχιστον αλλόκοτη και εντελώς παράλογη;

Τι ήταν τόσο παράδοξο και παράλογο στη συμπεριφορά τους; Σύντομα θα το διαπιστώσουμε.

Καταρχάς, ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε μερικές τιμές που θα τις χρειαστούμε. Από την ιστορία μας είναι φανερό ότι ένα νόμισμα με μάζα 655 kg ήταν σχεδόν στο όριο των δυνατοτήτων του Τερέντιου: του ήταν αδύνατο να μεταπούσει ένα νόμισμα έστω και λίγο βαρύτερο. Ας υποθέσουμε όπως αυτό το «λίγο» ήταν 45 kg – δηλαδή, ότι το μεγαλύτερο νόμισμα που μπορούσε να μεταφέρει ο Τερέντιος είχε μάζα 700 kg (και επομένως θα άξιζε 140.000 μπρούτζινα). Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι η κατάσταση της υγείας του Τερέντιου θα του επέτρεπε να επισκέπτεται καθημερινά το θησαυροφυλάκιο επί δέκα χιλιάδες ημέρες (περίπου 25 χρόνια).

Έτσι, βλέπουμε ότι ο αυτοκράτορας αποφάσισε να παρασύρει τον ορμητι-

\* British Association: Οργανισμός που ιδρύθηκε το 1831 με σκοπό την προώθηση της επιστήμης. Τα μέλη της συναντώνται μία φορά το χρόνο σε διαφορετική κάθε φορά πόλη της Βρετανίας ή της Κοινοπολιτείας, για να εκθέσουν τα επιτεύγματά τους ή να συζητήσουν νέες προτάσεις, μεθόδους κ.λπ. (Σ.τε.)

κό στρατηγό του στην παγίδα που ουχά αναφέρεται με το όνομα χιονοστιβάδα. (Και πραγματικά, είναι δύοκολο να φανταστούμε καλύτερο όνομα: τα νομίσματα μεγαλώνουν με την ταχύτητα που μεγαλώνει μια χιονοστιβάδα, και σε αυτό ακριβώς σπηρίχτηκε ο φιλοχρήματος και πανούργος αυτοκράτορας.) Στην περίπτωσή μας, ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας είναι  $k = 2$  – δηλαδή, κάθε νόμισμα έχει διπλάσια μάζα από το προηγούμενό του.

Ακριβώς, λοιπόν, η επλογή του πολλαπλασιαστικού παράγοντα είναι που μας γεννά την υποψία ότι ο αυτοκράτορας ήταν μια παράξενη προσωπικότητα, διότι, απ' όλους τους θετικούς ακεραίους  $k$ , διάλεξε εκείνον που θα προσέφερε στον Τερέντιο το μεγαλύτερο κέρδος!

Θεωρήστε, για παράδειγμα, την περίπτωση όπου το καινούργιο νόμισμα δεν είναι διπλάσιο, αλλά τριπλάσιο από το προηγούμενο. Πόσα νομίσματα θα μπορούσε να μεταφέρει ο Τερέντιος; Η αξία τού (n+1) νομίσματος θα ήταν  $3^n$  μπρούντζινα. Ο στρατηγός δεν μπορεί να μεταφέρει ένα νόμισμα με αξία μεγαλύτερη από 140.000 μπρούντζινα. Επομένως, ποιο είναι το μεγαλύτερο  $n$  τέτοιο ώστε  $3^n \leq 140.000$ ? Είναι εκείνο που ικανοποιεί τις ανισότητες  $3^n \leq 140.000 < 3^{n+1}$ , ή

$$\log_3 140.000 - 1 \leq n \leq \log_3 140.000.$$

Αφού  $\log_3 140.000 = 10,7\dots$ , παίρνουμε  $n = 10$ . Επομένως, το τελευταίο νόμισμα που θα μπορέσει να μετακινήσει ο Τερέντιος είναι το ενδέκατο: την πρώτη ημέρα θα πάρει ένα μπρούντζινο, τη δεύτερη τρία, την τρίτη  $3^2 = 9$ , κ.ο.κ. Το συνολικό ποσόν θα φτάσει στα  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} = 88.573$  μπρούντζινα. Θυμηθείτε ότι με  $k = 2$  ο Τερέντιος κέρδισε 262.143 μπρούντζινα – σχεδόν τα τριπλάσια!

Παρόμοια θα ήταν η κατάσταση με μεγαλύτερες τιμές του  $k$ . Γενικά, το συνολικό ποσόν  $S$  που θα πάρει ο Τερέντιος έπειτα από  $n$  ημέρες, όταν ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας είναι  $k$ , ισούται με

$$S = 1 + k + k^2 + \dots + k^n,$$

όπου  $n = [\log_k 140.000]$  (όπου, με  $[\alpha]$  συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του  $\alpha$ ). Με τη βοήθεια του τόπου που μας δίνει το άθροισμα της γεωμετρικής πρόσδου, έχουμε

$$S = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Όταν το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

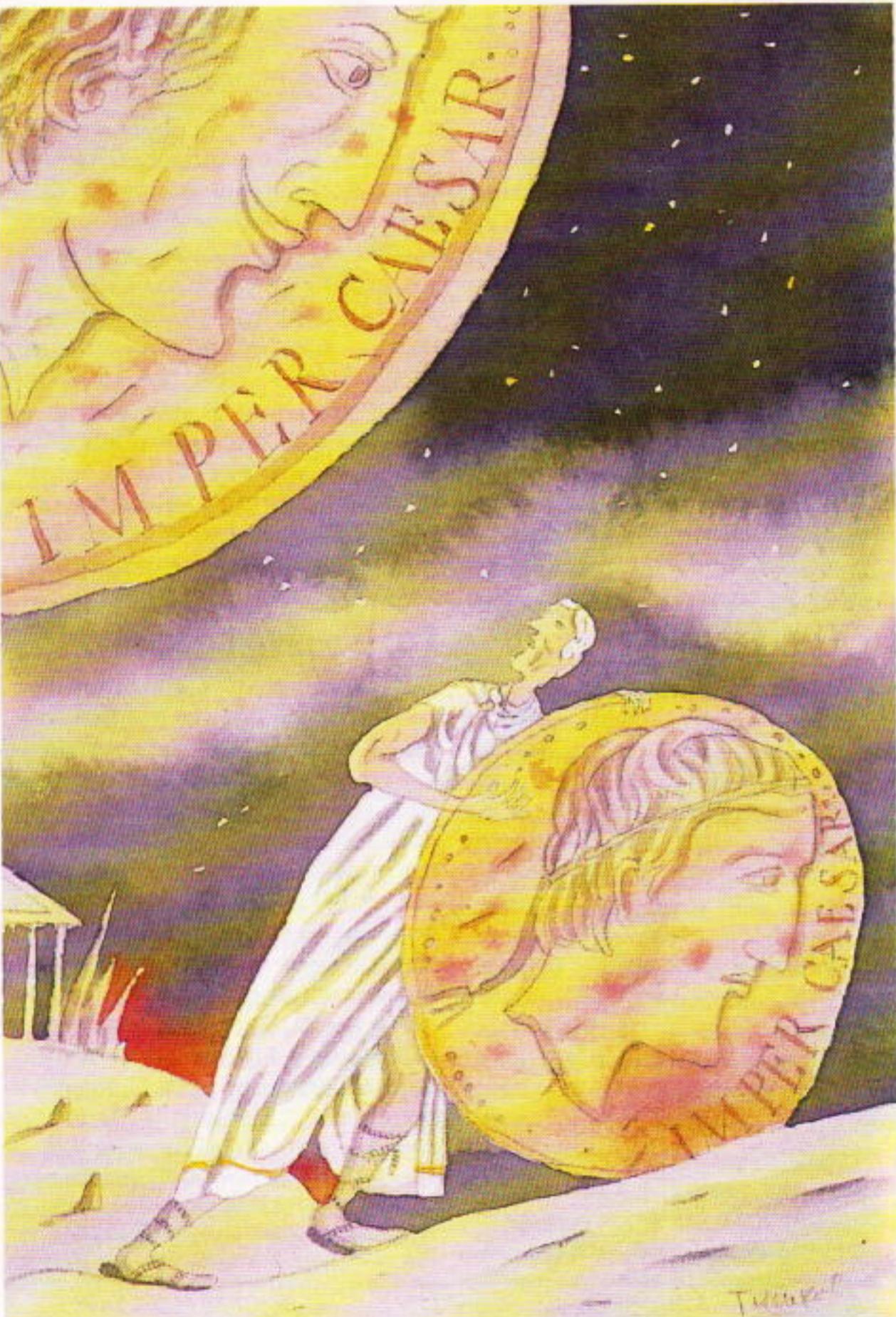
$$n = [\log_k 140.000] \approx \log_k 140.000. \text{ Τότε,}$$

$$S \approx \frac{140.000k - 1}{k - 1} = 140.000 + \frac{139.999}{k - 1}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $S$  μειώνεται όσο μεγαλώνει το  $k$ . Στην περίπτωσή μας, όμως, αυτό δεν είναι απολύτως αληθές: ο λογάριθμος δεν είναι πολύ μεγάλος, και έτσι το  $S(k)$  μειώνεται «ακανόνιστα». Για παράδειγμα, μερικές τιμές του  $S$  είναι οι εξής:  $S(4) = 87.381$ ,  $S(5)$

$= 97.658$ ,  $S(6) = 55.987$ ,  $S(7) = 137.257$ ,  $S(8) = 37.499$ ,  $S(10) = 111.111$ ,  $S(20) = 8.421$ ,  $S(50) = 127.551$ ,  $S(100) = 10.101$  (στην τελευταία περίπτωση, ο Τερέντιος θα επισκεπτόταν το θησαυροφύλακιο μόνο τρεις φορές!).

Και τι συμβαίνει όταν το  $k$  είναι ίσο με το 1; Μήπως τότε το άθροισμα  $S$  είναι μεγαλύτερο απ' ό, τι όταν το  $k = 2$ ; Δυστυχώς, δεν είναι έτοι. Εδώ, παρεμβαίνει ένας άλλος παράγοντας – το αναπότρεπτο γεγονός του θανάτου κάθε ανθρώπου. Ήδη εκτιμήσαμε ότι ο Τερέντιος θα μπορούσε να πάρνει την αμοιβή του επί 10.000 ημέρες. Συνέπος, στην περίπτωση που  $k=1$ , θα συγ-





# Το κυνήγι των μαγικών σφαιρών

Σχετικά με τα φουλερένια και άλλες δομές του άνθρακα

Sergey Tikhodeyev

**Ο**λοι γνωρίζουν ότι ο άνθρακας είναι ένα από τα πιο κοινά χημικά στοιχεία. Ξέρετε, όμως, ότι τα άτομα του άνθρακα αποτελούν ένα πρώτης τάξεως δομικό υλικό για να κατασκευαστεί μια ευρύτατη ποικιλία κρυστάλλων και μορίων; Ανάμεος τους το διαμάντι – μια από τις κρυσταλλικές μορφές του άνθρακα – το οποίο μάλιστα κατέχει το ρεκόρ σκληρότητας. Επίσης, τα σύνθετα οργανικά μόρια γνωστά ως πρωτεΐνες – οι ατομικοί «σκελετοί» των οποίων είναι άτομα άνθρακα και αζότου – και τα οποία αποτελούν τη βάση όλων των έμβιων ζωντων.

Η μεγάλη ποικιλία των ατομικών δομών που συντίθενται από άνθρακα οφείλεται στο γεγονός ότι ο άνθρακας – στοιχείο που ανήκει στην τέταρτη ομάδα του περιοδικού συστήματος – έχει τέσσερα ηλεκτρόνια στη σπιθάδα σδένουνται και μπορεί να σχηματίζει δεσμούς σδένουνται με τέσσερα, τρία ή δύο γειτονικά άτομα. Όταν ένα άτομο άνθρακα περιβάλλεται από τέσσερα γειτονικά άτομα, προκύπτει τριδιάστατη δομή. Παράδειγμα τέτοιας δομής αποτελεί ο κρύσταλλος του αδάμαντα, όπου κάθε άτομο άνθρακα βρίσκεται στο κέντρο ενός κανονικού τετραέδρου, τις κορυφές του οποίου κατέχουν τα γειτονικά άτομα άνθρακα.

Όταν υπάρχουν μόνο δύο γειτονικά άτομα, εμφανίζονται μονοδιάστατες γραμμικές δομές – παράδειγμα αυτού του τύπου είναι τα μεγαλομόρια των πολυμερών. Όταν υπάρχουν τρεις γείτονες, οι ατομικές δομές που δημιουργούνται περιλαμβάνουν επίπεδες περιοχές. Για παράδειγμα, στο επίπε-

δο μόριο της βενζολίου,  $C_6H_6$ , κάθε άτομο άνθρακα σχηματίζει δεσμούς με ένα άτομο υδρογόνου και δύο άτομα άνθρακα. Ένα ακόμα παράδειγμα ατομικής δομής στην οποία κάθε άτομο άνθρακα έχει τρεις γείτονες είναι ο γραφίτης, η δεύτερη φυσική μορφή του άνθρακα. Ο γραφίτης αποτελείται από στρώματα, δηλαδή η δομή του βασίζεται σε επίπεδα στα οποία τα άτομα καταλαμβάνουν τις γωνίες κανονικών εξαγώνων, σχηματίζοντας ένα είδος κερήθρας. Στην πραγματικότητα, καμιά άλλη δομή δεν είναι δυνατή όταν όλα τα άτομα του άνθρακα σχηματίζουν δεσμούς σδένουνται με τρεις μόνο γείτονες και όταν όλα τα άτομα είναι διευθετημένα με τον ίδιο τρόπο. Ευτυχώς, η αμοιβαία έλξη μεταξύ των γειτονικών επιπέδων συγκρατεί τα γειτονικά στρώματα του άνθρακα σχηματίζοντας τον κρύσταλλο του γραφίτη. Αυτές οι ελκτικές δυνάμεις (είναι γνωστές ως δυνάμεις van der Waals, και μειώνονται με την απόσταση ανάλογα με το  $r^{-7}$ ) είναι πολύ ασθενέστερες από την αλληλεπίδραση που ασκείται μεταξύ των γειτονικών ατόμων άνθρακα τα οποία ανήκουν στο ίδιο στρώμα. Γι' αυτό το λόγο, ο γραφίτης δεν είναι μηχανικά ισχυρός, και έτοι μπορούμε να τον χρησιμοποιούμε για να κατασκευάζουμε μολύβια. Τα ίδια τα στρώματα του άνθρακα, όμως, είναι εξίσου ισχυρά με το διαμάντι.

Σε τούτο το σημείο ανακύπτει το ερώτημα: είναι δυνατό να δημιουργήσουμε με τα άτομα του άνθρακα κάπι περισσότερο ενδιαφέρον από ένα απλό στρώμα σε έναν κρύσταλλο γρα-

φίτη – όπως, ας πούμε, ένα πολύεδρο; Δεδομένου ότι κάθε άτομο άνθρακα πρέπει να έχει τρεις ακριβώς γείτονες, το ερώτημα αυτό μας οδηγεί στο επόμενο γεωμετρικό πρόβλημα: πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πολύεδρο, σε κάθε κορυφή του οποίου συγκλίνουν τρεις ακριβώς ακμές;

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Euler: για κάθε κυρτό πολύεδρο, ισχύει

$$K + E - A = 2, \quad (1)$$

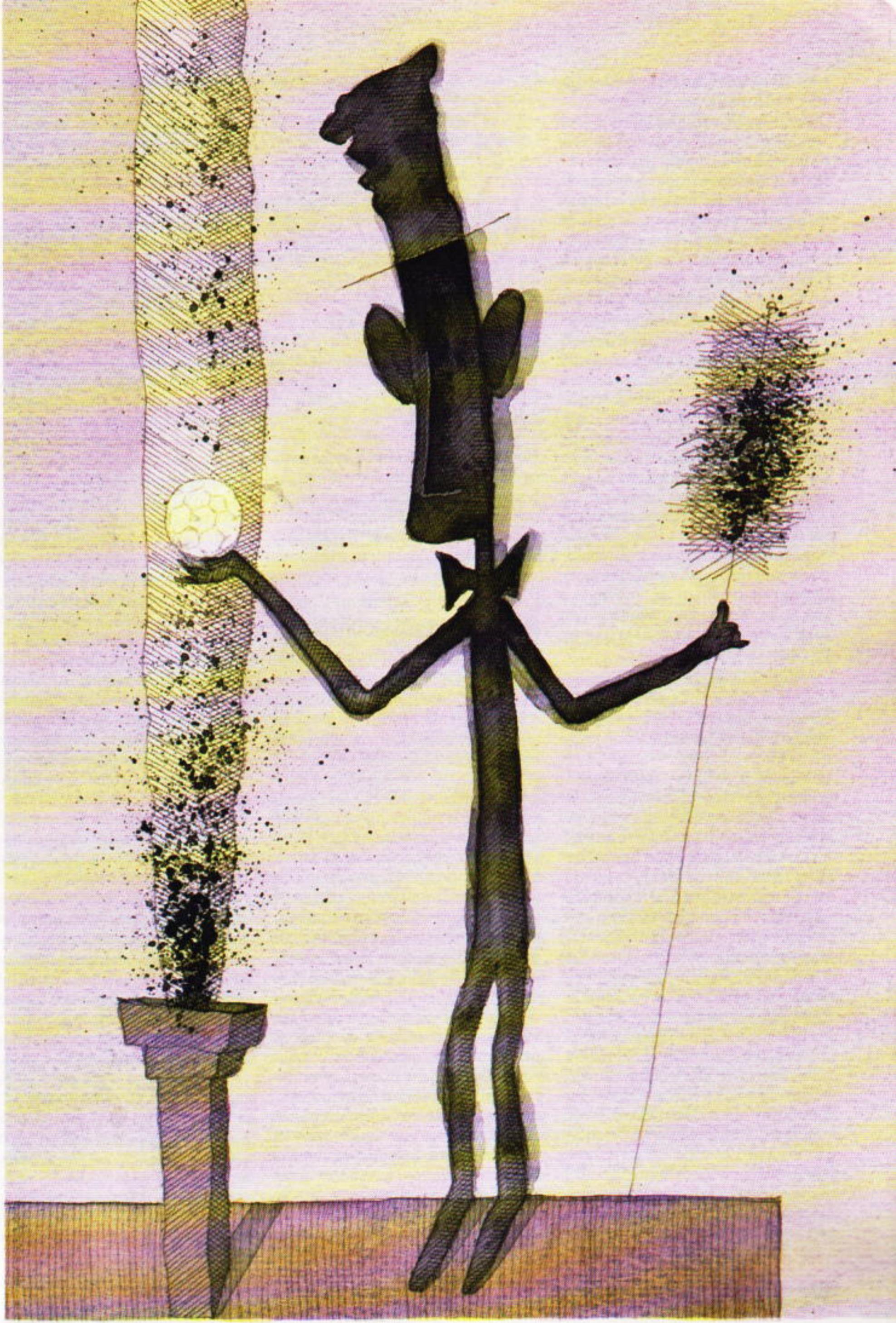
όπου  $K$  είναι ο αριθμός των κορυφών του πολυέδρου,  $E$  ο αριθμός των εδρών του και  $A$  ο αριθμός των ακμών του.

Για περισσότερο περίπλοκα πολύεδρα η εξίσωση (1) τροποποιείται με την εισαγωγή μιας νέας έννοιας (τη συμβολίζουμε με το  $g$ ) που έχει σχέση με το πόσες «λαβές» (ή τρύπες) έχει το πολύεδρο. Για μια σπείρα το  $g = 1$  (δείτε και το Καλειδοσκόπιο του προγούμενου τεύχους), πράγμα που σημαίνει ότι έχει μία λαβή, ενώ για ένα κυρτό πολύεδρο το  $g$  ισούται με μηδέν.

Το γενικευμένο θεώρημα του Euler εκφράζεται ως

$$K + E - A = 2 - 2g. \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) αποδεικνύεται με εντυπωσιακά εύκολο τρόπο. Δεν έχουμε παρά να παρατηρήσουμε ότι κάθε λαβή ενός πολυέδρου (ξεχωριστά) και το πολύεδρο χωρίς τις λαβές του ικανοποιούν την εξίσωση (1). Όταν ξανανέσουμε τις λαβές με το πολύεδρο, οι τέσσερις έδρες που «κολλάνε» μεταξύ



τους εξαφανίζονται, ενώ η διαφορά  $K - A$  δεν αλλάζει.

Και τώρα διαδέτουμε ότι μας είναι απαραίτητο για να συναγάγουμε τους αρχιτεκτονικούς νόμους της κατασκευής πολυέδρων από άτομα άνθρακα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κλειστό πολύέδρο με εξαγωνικές μόνο έδρες, και ότι ο αριθμός των έδρων είναι  $n_6$ . Αφού σε κάθε κορυφή συγκλίνουν τρεις έδρες, και αφού κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες ταυτόχρονα, έχουμε

$$K = \frac{6n_6}{3}, \quad E = n_6, \quad A = \frac{6n_6}{2}. \quad (3)$$

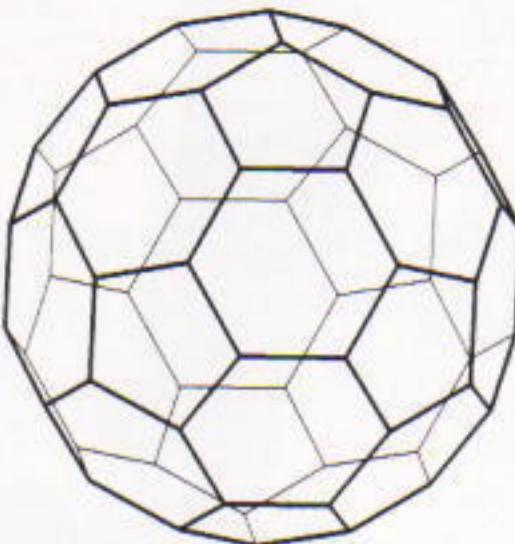
Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην εξίσωση (2) λαμβάνουμε  $g = 1$ . Επομένως, όταν χρησιμοποιούμε μόνο εξάγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πολύέδρο που είναι τοπολογικά ισοδύναμο με μια σπείρα.

Αν θελήσουμε να κατασκευάσουμε και άλλες, διαφορετικές δομές, οι εξαγωνικές έδρες δεν επαρκούν. Ας υποθέσουμε ότι, εκτός από τα  $n_6$  εξάγωνα, χρησιμοποιούμε και  $n_5$  πεντάγωνα και  $n_7$  επτάγωνα. Επαναλαμβάνοντας τους προηγούμενους συλλογισμούς, θα πάρουμε

$$n_5 - n_7 = 6(2 - 2g). \quad (4)$$

Επομένως, εάν μας ενδιαφέρουν μόνο τα κυρτά πολύέδρα ( $g = 0$ ), η κατασκευή μπορεί να προκύψει χωρίς επάγωνα, αλλά σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να προσθέσουμε 12 ακριβώς πεντάγωνα. (Συμπτωματικά, ο πρώτος που παρατήρησε και απέδειξε αυτό το γεγονός ήταν ο ίδιος ο Euler). Για να κατασκευάσουμε πιο περίπλοκες δομές, θα χρειαστούμε οπωδήποτε και επάγωνα.

Επομένως, έχουμε συναγάγει τους βασικούς κανόνες για την κατασκευή περίπλοκων τριδιάστατων δομών από άτομα άνθρακα. Παρόμοιες μεγάλες δομές συναντάμε στη φύση. Για παράδειγμα, αυτήν ακριβώς τη δομή έχουν οι σκελετοί των ακτινόζων – των απλούστερων οργανισμών που συναντάμε στο πλαγκτόν – όπως και πολλοί ιοί. Αυτές οι κατασκευές είναι επίσης συνηθισμένες στην αρχιτεκτονική. Το πρώτο παράδειγμα που μας έρχεται στο μυαλό είναι οι γεωδαισιακές δομές του R. Buckminster Fuller.<sup>1</sup> Και



**Σχήμα 1**

Τριδιάστατη δομή του μπλακμινστερφουλερένιου  $C_{60}$ . Τα άτομα του άνθρακα βρίσκονται στις κορυφές του πολυέδρου.

για να πειστείτε ότι οι εν λόγω κατασκευές δεν είναι καθόλου σπάνιες, παρατηρήστε μια συνηθισμένη μπάλα ποδοσφαίρου: αποτελείται από 20 εξάγωνα και 12 πεντάγωνα. Το αρχικό ερώτημα, όμως, παραμένει: είναι δυνατό να κατασκευάσουμε μια παρόμοια δομή από άτομα άνθρακα;

## ΦΟΥΛΕΡΕΝΙΑ ΚΑΙ ΦΟΥΛΕΡΙΤΕΣ

Το 1985, ο H.W. Kroto (Μεγάλη Βρετανία) και οι J. Heath, S. O'Brien, R. Curl, R. Smalley (ΗΠΑ) ανακάλυψαν πώς όταν εξαερώνεται ο γραφίτης υπό την επίδραση μιας δέσμης λέιζερ μέσα σε ρεύμα ηλίου δημιουργούνται μόρια, αρκετά σταθερά, που αποτελούνται από έναν μεγάλο (32-90) και πάντοτε άριθμο ατόμων άνθρακα. Το σταθερότερο ήταν το μόριο  $C_{60}$ , και οι επιστήμονες που το ανακάλυψαν θεώρησαν ότι είχε τη μορφή μιας μπάλας ποδοσφαίρου (Σχήμα 1). Οι ερευνητές ονόμασαν το μόριο μπλακμπολ (buckyball), δηλαδή μπάλα του Buckey, προς τιμήν του Buckminster Fuller. Το όνομα αυτό εξελίχθηκε σύντομα στο επισημότερο μπλακμινστερφουλερένιο, ενώ η κλάση όλων των παρόμοιων με το  $C_{60}$  μορίων πήρε την ονομασία φουλερένια.

Αποδείχτηκε ότι τα φουλερένια δεν είναι καθόλου σπάνια: αφθονούν στην αιθαλή αερίων και σε άλλες ουσίες που παράγονται από ατελείς καύσεις. Το πρόβλημα είναι η απομόνωση ενός καθαρού δείγματος αυτών των μορίων – δηλαδή, να επιτύχουμε μια ουσία που να μην περιέχει σχεδόν τίποτε άλλο.

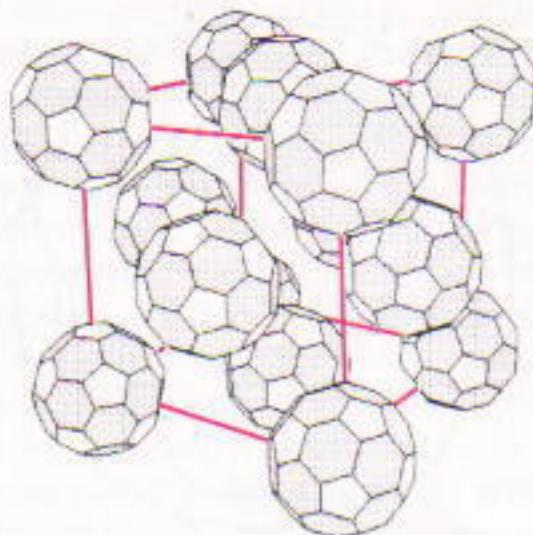
Στο μόριο μπλακμινστερφουλερένιο,  $C_{60}$ , οι κορυφές είναι τα άτομα άνθρακα και οι ακμές είναι οι δεσμοί σύνθετοις τους. Δεν υπάρχουν ελεύθερα σθένη στο  $C_{60}$ , και αυτό εξηγεί τη μεγάλη χημική και φυσική σταθερότητά του. Το μόριο  $C_{60}$  είναι το συμμετρικότερο και το σταθερότερο απ' όλα τα φουλερένια. Το επόμενο (κατά σειρά αυξανόμενου πλήθους ατόμων άνθρακα) σταθερό μόριο, το  $C_{70}$ , έχει 25 εξάγωνα και 12 (επίσης) πεντάγωνα. Σχηματίζεται σπανιότερα από το  $C_{60}$ . Τα ιδιαίτερα συμμετρικά μόρια  $C_{240}$ ,  $C_{540}$ , και  $C_{960}$ , τα οποία θεωρούνται επίσης σταθερά, δεν έχουν ανακαλυφθεί ακόμη.

Το περίεργο είναι ότι τίποτε δεν εμποδίζει ένα μόριο  $C_{960}$  να περιέχει στο εσωτερικό του ένα μόριο  $C_{540}$  (ή κάποιο άλλο φουλερένιο). Ούτε τέτοια σύνθετα μόρια έχουν ανακαλυφθεί ακόμη, αλλά έχει ήδη επινοηθεί ένας όρος για την ονομασία τους: «ματριόσκες» (από τις ρώσικες κούκλες που μπαίνουν η μία μέσα στην άλλη). Είναι επίσης παράξενο ότι σχεδόν είκοσι χρόνια πριν ανακαλυφθούν αυτά τα κοίλα μόρια, η ύπαρξή τους είχε πιθανολογηθεί από τον David E.H. Jones, ο οποίος ήταν για πολλά χρόνια ο συγγραφέας της διάσημης στήλης «Δαιδαλος» στο περιοδικό *New Scientist*.

Στις μέρες μας, γνωρίζουμε πολύ καλά τις διαστάσεις του μπλακμπολ. Η ακτίνα του είναι  $0,3512$  nm, το μήκος του μικρού δεσμού (που διαγρίζει τα εξάγωνα) είναι  $0,1388$  nm, και του μεγάλου δεσμού (ίδιος για τα εξάγωνα και τα πεντάγωνα) είναι  $0,1433$  nm. Οι αριθμοί αυτοί είναι σχεδόν ίδιοι με τους αντίστοιχους του γραφίτη. Κβαντομηχανικοί υπολογισμοί μάς δείχνουν ότι τα ηλεκτρόνια σύντομα κατανέμονται περισσότερο ή λιγότερο ομοιόμορφα σε ένα σφαιρικό κέλυφος με πλάτος περίπου  $8 \text{ \AA}$  [ $1 \text{ \AA}$  (ατομική μονάδα) =  $0,0529$  nm, η γνωστή ακτίνα Bohr]. Στο κέντρο του μπλακμπολ σχηματίζεται μια κοιλότητα ελεύθερη από ηλεκτρόνια, με ακτίνα  $2 \text{ \AA}$  περίπου. Έτσι, το  $C_{60}$  μοιάζει σαν ένα μικρό άδειο κλουβί.

Η ύπαρξη της κοιλότητας μέσα στο μπλακμπολ φαίνεται ότι έχει αποδειχθεί πειραματικά μέσω της μιονικής ανάλυσης. Σε αυτή τη μέθοδο ο ανιχνευτής είναι μιονικό υδρογόνο, το οποίο είναι κάτι σαν το άτομο του υδρογόνου, όπου τη θέση του πρωτονίου έχει

1. Δείτε την Πινακοδήμη του παρόντος τεύχους.



**Σχήμα 2**

Δομή του καθαρού φουλερίτη – ο κρύσταλλος σχηματίζεται από μπακμινστερφουλερένια. Βλέπετε μια στοιχειώδη κυψελίδα του κρυστάλλου. Τα μόρια του  $C_{60}$  βρίσκονται στις κορυφές και στο κέντρο των εδρών του κύβου.

πάρει ένα μιόνιο – ένα στοιχειόδες σωματίδιο με φορτίο +e και μάζα 200  $m_e$ . Οι ιδιότητες του μιονικού υδρογόνου εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την πυκνότητα των ηλεκτρονίων στην περιοχή όπου βρίσκεται. Οι ερευνητές κατάφεραν να τοποθετήσουν μιονικό υδρογόνο σε ένα «κλουβί φουλερενίου» και να δείξουν ότι οι ιδιότητες του ελεύθερου και του εγκλωβισμένου μιονικού υδρογόνου είναι ουσιαστικά οι ίδιες.

Τα ελεύθερα μόρια του μπάκυμπολ έλκονται μεταξύ τους με τις ίδιες ασθενείς δυνάμεις van der Waals που εμφανίζονται ανάμεσα στα στρώματα άνθρακα του γραφίτη. Εξαιτίας αυτής της έλξης, τα μόρια του μπάκυμπολ σε θερμοκρασία δωματίου σχηματίζουν εύθραυστους κιτρινοκόκκινους κρυστάλλους κυβικού εδροκεντρωμένου πλέγματος. Ο νέος κρύσταλλος ονομάστηκε φουλερίτης. Η απόσταση ανάμεσα στα γειτονικά μόρια μπάκυμπολ του κρυστάλλου, σε θερμοκρασία δωματίου, είναι 1,00 nm. Ο καθαρός φουλερίτης που δεν περιέχει τίποτε άλλο από μπακμινστερφουλερένια είναι μονωτής.

Στο Σχήμα 2 βλέπετε μια στοιχειώδη κυψελίδα φουλερίτη. Τα μπάκυμπολ παίζουν σ' έναν κρύσταλλο φουλερίτη τον ίδιο ρόλο που παίζουν τα άτομα σ' έναν ουνηθισμένο κρύσταλλο. Μπορούμε να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια πολλά χαρακτηριστικά του φουλερίτη (για παράδειγμα, το φά-

σμα ηλεκτρονίων), αντιμετωπίζοντας τα μπάκυμπολ σαν να ήταν άτομα και εφαρμόζοντας τις παραδοσιακές μεθόδους υπολογισμού των ιδιοτήτων των κρυστάλλων.

Αυτά τα νέα μόρια άνθρακα (τα φουλερένια) και οι κρύσταλλοι που δημιουργούν (οι φουλερίτες) είναι η τρίτη μορφή εμφανιζόμενη στη φύση άνθρακα – ή, με επισημονική ορολογία, η τρίτη αλλοτροπική μορφή του άνθρακα. Οι δύο πρώτες αλλοτροπικές μορφές – το διαμάντι και ο γραφίτης – έχουν ελεύθερους δεσμούς που ουλαμβάνουν αδέσμευτα άτομα (για παράδειγμα, άτομα υδρογόνου). Αυτό δεν ισχύει για τα φουλερένια και τους φουλερίτες (αφού δεν έχουν ελεύθερους δεσμούς) και επομένως είναι η καθαρότερη από τις αλλοτροπικές μορφές του άνθρακα.

## Πώς να κατασκευάσετε ένα φουλερένιο

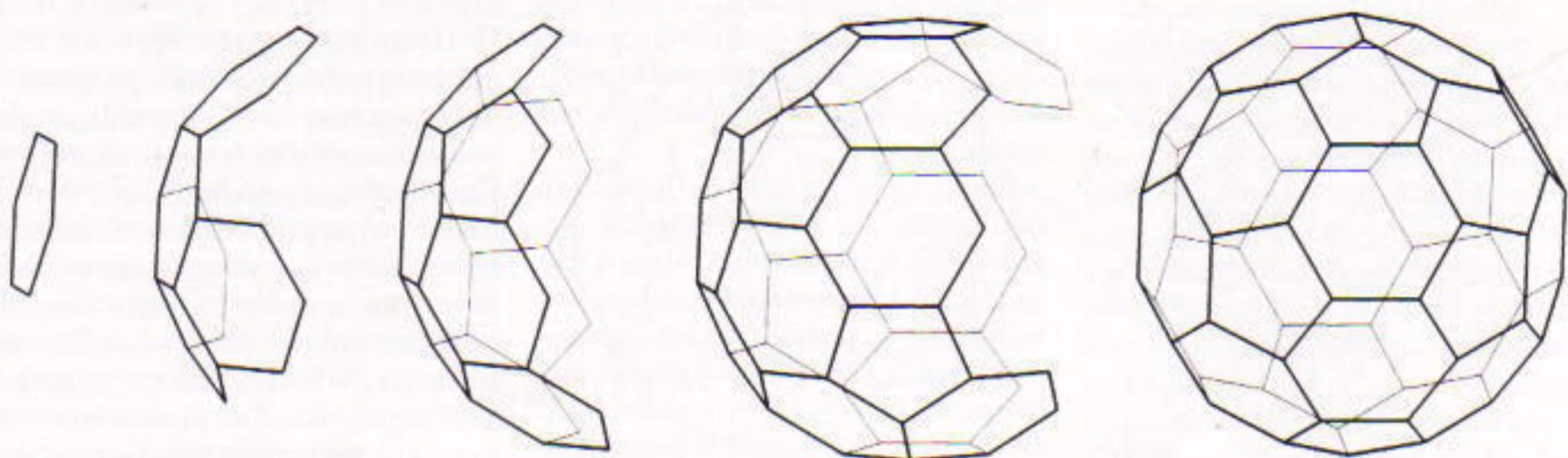
Στα μέσα της δεκαετίας του 1980, όταν ανακαλύφθηκαν τα φουλερένια, οι μέθοδοι για την πειραματική δημιουργία των λεγόμενων μορίων-συσσωματώματων (αποτελούνται από μικρό αριθμό όμοιων ατόμων) είχαν φτάσει σε αξιόλογο στάδιο ανάπτυξης. Συνήθως, ο αριθμός των ατόμων σε αυτά τα συσσωματώματα ήταν μάλλον αυθαίρετος. Τα πρώτα πειράματα με άνθρακα, όμως, δημιούργησαν την έκπληξη: ουδέποτε δεν σχηματίζονταν μεγάλα συσσωματώματα άνθρακα με περιττό αριθμό ατόμων! Στην αρχή, το γεγονός ερμηνεύτηκε με την υπόθεση για δημιουργία αλυσίδων πολυμερών του τύπου  $[-C \equiv C-]$ . Ο H.W. Kroto και οι συνάδελφοί του ήταν οι πρώτοι που έδωσαν τη σωστή εξήγηση, χωρίς, όμως, να είναι σε θέση να κάνουν μια αξιόπιστη δομική ανάλυση – γνώριζαν πολύ λίγα φουλερένια. Η ερμηνεία τους παρέμεινε μια υπόθεση, και τα φουλερένια ένα εξωτικό παιχνίδι για θεωρητικούς. Τελικά, το καλοκαίρι του 1990, σημειώθηκε ένα επαναστατικό γεγονός: ανακαλύφθηκε μια μέθοδος για μεγάλης κλίμακας παραγωγή φουλερενίων.

Αρκετά απρόσιμενα, η λύση βρέθηκε από μια ομάδα αμερικανών αστροφυσικών, ειδικών στον τομέα της κοσμικής σκόνης: του W. Kretschmer, του D. Huffman, και των φοιτητών τους L. Lamp και K. Φωστηρόπουλου.

Ηδη από το 1983, ο Kretschmer και ο Huffman είχαν προσπαθήσει να αναπαραγάγουν πειραματικά τις φυσικές συνθήκες που είναι απαραίτητες για να δημιουργηθεί η κοσμική σκόνη. Για να το πετύχουν αυτό, εξαέρωναν δείγματα γραφίτη θερμαίνοντάς τα με ηλεκτρικό ρεύμα μέσα σε αέριο ήλιο. Μετά την ανακάλυψη του μπακμινστερφουλερένιου, οι ερευνητές απόφασισαν να επαναλάβουν τα παλιά τους πειράματα. Για να εξαγάγουν τα οφαιρικά μόρια που ανέμεναν να δημιουργήσουν, ο Kretschmer και ο Huffman εκμεταλλεύτηκαν τον παλιό κανόνα της χημείας: διαλύστε μια ουσία μέσα σε μια παρόμοια. Διέλυσαν την αιθάλη (που σχηματίζόταν από την εξαέρωση άνθρακα) σε βενζόλιο, το οποίο αποτελείται επίσης από κλειστά μόρια. Το αποτέλεσμα ήταν να παραχθεί ένα κιτρινωπό ή ένα κοκκινωπό υγρό (το χρώμα εξαρτώνταν από τη συγκέντρωσή του). Σύντομα έγινε σαφές ότι η διαλυμένη αιθάλη αποτελούνταν από μόρια  $C_{60}$  (75%) και  $C_{70}$  (23%), και από μεγαλύτερα φουλερένια (2%). Και μετά την εξαέρωση του βενζολίου, στον πυθμένα του δοκιμαστικού σωλήνα απέμεναν μικροί κρύσταλλοι φουλερίτη. Η ανάλυση αυτών των κρυστάλλων προσέφερε τις πρώτες αξιόπιστες πληροφορίες για τη μορφή και τις ιδιότητες του φουλερενίων.

Αργότερα, η μέθοδος τελειοποιήθηκε. Αποδείχθηκε ότι για να μπορέσουμε να πετύχουμε αιθάλη πλούσια σε φουλερένια, ήταν βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε ένα ηλεκτρικό τόξο ανάμεσα σε ηλεκτρόδια άνθρακα. Μετά την απομάκρυνση των μονομοριακών ποσοτήτων από το διάλυμα των φουλερενίων, επιτεύχθηκε καθαρότητα 99,99%. Πάντως, τα βασικά στάδια της παραγωγής παρέμειναν τα ίδια: εξαέρωση ηλεκτρόδιων γραφίτη μέσα σε ήλιο και στη συνέχεια διάλυση της αιθάλης σε οργανικό διαλύτη. Η τιμή του τελικού προϊόντος σε αυτή τη βελτιωμένη διαδικασία παραγωγής εξαρτάται μόνο από το κόστος του ηλεκτρικού ρεύματος που καταναλώνουμε: περίπου 15 δραχμές για κάθε γραμμάριο φουλερενίου!

Πώς σχηματίζονται τα φουλερένια όταν εξαερώνεται ο γραφίτης, και γιατί είναι ουσιώδης η ατμόσφαιρα ήλιου; Όπως προαναφέραμε, ο γραφίτης



**Σχήμα 3**

Διαδοχικά στάδια σχηματισμού του μπακμινστερφουλερένιου κατά την εξαέρωση γραφίτη σε ατμόσφαιρα ήλιου.

αποτελείται από επίπεδα στρώματα εξαγώνων άνθρακα. Κατά την εξαέρωση του γραφίτη στο ηλεκτρικό τόξο, φαίνεται ότι αρχικά δημιουργούνται μικρά συσσωματώματα άνθρακα, που είναι γραμμικά και έχουν πλήθος ελεύθερων δεσμών. Μέσα στην ατμόσφαιρα ήλιου που τα ψύχει, τα συσσωματώματα σχηματίζουν «λέπια» γραφίτη που μοιάζουν με κομμάτια από επίπεδα γραφίτη (δείτε το Σχήμα 3). Από ενεργειακή άποψη, είναι προτιμότερο γι' αυτά τα λέπια ν' αλλάζουν το σχήμα τους (διότι έχουν ελεύθερους δεσμούς στις ακμές τους, κάτι που είναι μειονέκτημα). Έτοι, σχηματίζουν αρκετά πεντάγωνα αντί για εξάγωνα, και ως εκ τούτου κάμπτονται (τα άκρα των ελεύθερων δεσμών ενώνονται και επομένως μειώνεται η ενέργειά τους). Επειδή ενεργειακά είναι μειονεκτικό να βρίσκονται δύο πεντάγωνα το ένα δίπλα στο άλλο, η δομή που προκύπτει αυτόματα είναι αυτή της μπάλας του ποδοσφαίρου! (Το μπάκυμπωλ είναι το ελάχιστο φουλερένιο στο οποίο δεν υπάρχουν πεντάγωνα με κοινές πλευρές.) Επομένως, όταν αναπυχθεί ένα φουλερένιο με αργό ρυθμό, θα γίνει υποχρεωτικά μπακμινστερφουλερένιο. Φυσικά, σε πραγματικές συνθήκες, το κέλυφος μπορεί να κλείσει πριν επιτευχθεί η ιδανική δομή της μπάλας, οπότε προκύπτουν διάφορες άλλες δομές.

Δεν είναι τυχαίο ότι το αδρανές ήλιο χρησιμεύει σαν το δροσιστικό λουτρό κατά την ανάπτυξη των φουλερενίων. (Εδώ η λέξη «λουτρό» δεν χρησιμοποιείται μεταφορικά, αλλά στην κυριολεξία της.) Αυτό οφείλεται στο γεγονός

ότι το ήλιο δεν προκαλεί κορεσμό των ελεύθερων δεσμών άνθρακα, πράγμα που επιτρέπει στα λέπια του άνθρακα να συμπληρωθούν μεταξύ τους. Αν, για παράδειγμα, υπήρχαν άτομα υδρογόνου, θα προκαλούσαν τον κορεσμό μερικών ελεύθερων δεσμών και θα καταστρέφοταν η συμμετρία του σχηματισμού. Οι αντίθετες πλευρές δεν θα μπορούσαν να ενωθούν μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα θα ήταν να δημιουργηθούν δομές που θα έμοιαζαν με όστρακα. Είναι ενδιαφέρον ότι αυτή ακριβώς η διαδικασία παρατηρείται κατά το σχηματισμό της αιδάλης στην ατελή καύση στον συνηδιομένο αέρα.

## Ο μικρός πρωταθλητής

Έχουν προταθεί πολλές εφαρμογές για τα φουλερένια. Μπορούν, για παράδειγμα, να χρησιμοποιηθούν ως βάση για την παραγωγή μοναδικών λιπαντικών. Όπως προαναφέραμε, το μόριο  $C_{60}$  είναι ισχυρότατο και χημικά και μηχανικά. Η μηχανική του αντοχή δοκιμάστηκε με την εξής μέθοδο: μπακμινστερφουλερένια επιταχύνθηκαν ώς την ταχύτητα των 30.000 km/h (περίπου η τροχιακή ταχύτητα) και κατόπιν οδηγήθηκαν σε σύγκρουση με έναν ατολινό τοίχο. Τα φουλερένια αναπήδησαν, και κανένα τους δεν καταστράφηκε! Τέτοια αντοχή είναι ότι περισσότερο μπορούμε να ζητήσουμε από ένα λιπαντικό. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το φουλερένιο  $C_{60}$  δεν είναι μόνο η μικρότερη μπάλα ποδοσφαίρου στον κόσμο, αλλά και η ανθεκτικότερη.

Η χημική σταθερότητα και η κοίλη δομή των φουλερενίων μας δίνουν τη

δυνατότητα να φανταστούμε τρόπους εφαρμογής τους στη χημεία, τη μικροβιολογία και την ιατρική. Για παράδειγμα, φαίνεται ότι δεν υπάρχει τύπος που να συγκρίνεται με τα φουλερένια ως υλικό συσκευασίας μεμονωμένων ατόμων. Οι επιστήμονες έχουν μάθει πώς να τοποθετούν μέσα στα φουλερένια ακόμη και άτομα μεγάλου βάρους, όπως το λανθάνιο και το ουράνιο. Φουλερένια γεμάτα με παρόμοια άτομα προσφέρουν απρόσμενες δυνατότητες στους χημικούς. Θα μπορούσε, λόγου χάρη, να χρησιμοποιηθούν για τη αποδήμηση και τη μεταφορά στον επιδυμητό προορισμό όχι μόνο ατόμων, αλλά και ολόκληρων μορίων. Καθόλου άσχημη ιδέα για έναν μικροβιολόγο ή έναν φαρμακοποιό! Επομένως, η μικρότερη μπάλα ποδοσφαίρου στον κόσμο είναι και το μικρότερο κουτί συσκευασίας – ή, καλύτερα, το μικρότερο κουτί φαρμάκων στον κόσμο.

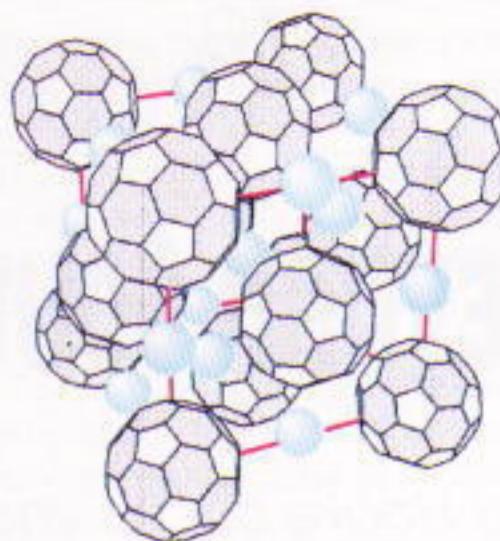
Στις μέρες μας, οι μοριακοί βιολόγοι που ασχολούνται με τη γενετική μηχανική χρησιμοποιούν ιούς (πολλοί από τους οποίους, παρεμπιπόντως, έχουν το ίδιο σχήμα με το μπακμινστερφουλερένιο). Αν οι επιστήμονες κατορθώσουν να μεταφέρουν με τη βοήθεια των φουλερενίων το αναγκαίο οργανικό μόριο σε μια συγκεκριμένη θέση μιας πρωτεΐνης, θα επιτύχουν τη δημιουργία ενός τεχνητού, εξειδικευμένου ιού – που θα είναι, και πάλι, ο μικρότερος απ' όλους (για το καλό της ζωής στη Γη, όπως όλοι ελπίζουμε).

Και τώρα, ας μιλήσουμε για μικρολεκτρονική. Είναι γνωστό ότι η διαδικασία ελαχιστοποίησης των διαστάσεων των ηλεκτρονικών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων έχει ήδη φτάσει στα φυσικά της όρια – με άλλα λόγια, μοριακές και ατομικές διαστάσεις. Στην

πραγματικότητα, μάλιστα, χρησιμοποιείται όλο και συχνότερα ένας άλλος όρος για τη νέα τεχνολογία: όχι μικρο-αλλά νανοηλεκτρονική. Τα χαρακτηριστικά μήκη των στοιχείων μετριούνται σε νανόμετρα. Τα πιο ενδιαφέροντα αντικείμενα στη νανοηλεκτρονική, από την άποψη των πιθανών εφαρμογών, είναι οι κβαντικές κουκκίδες<sup>2</sup> – μικροκρύσταλλοι ή άλλοι σχηματισμοί σε νανοηλεκτρονικά κυκλώματα – οι οποίες μπορούν να συγκρατούν (εντοπίζουν) ηλεκτρόνια. Αυτές οι κουκκίδες έχουν ορισμένες μοναδικές ιδιότητες που μας επιτρέπουν να τις χρησιμοποιήσουμε είτε ως στοιχεία ελέγχου σε επικοινωνίες οπικών ινών είτε ως βασικά στοιχεία του επεξεργαστή στους οπικούς υπερυπολογιστές που σχεδιάζονται αυτήν την εποχή. Τα φουλερένια είναι από πολλές απόψεις ιδιαίτερες κβαντικές κουκκίδες. Κάνοντας, λοιπόν, ακόμη μια προσθήκη στον κατάλογο των ρεκόρ μας, μπορούμε να πούμε ότι τα φουλερένια έχουν πολλές πιθανότητες να γίνουν τα μικρότερα ολοκληρωμένα κυκλώματα ενός νανοεπεξεργαστή.

Και τέλος, αλλά όχι λιγότερο σημαντικό, έχουμε την υπεραγωγιμότητα υψηλής θερμοκρασίας.<sup>3</sup> Μετά το 1980, οπότε οι Bednorz και Müller ανακάλυψαν την υψηλή θερμοκρασία υπεραγωγού οξειδίου, δοκιμάζονται συνεχώς νέες ουσίες σχετικά με την πιθανή υπεραγωγιμότητά τους. Φυσικά, οι καθαροί φουλερίτες είναι μάλλον απίδανοι υποψήφιοι για υπεραγωγοί, αφού είναι μονωτές (όπως ήδη αναφέραμε). Όλοι, όμως, γνωρίζουμε πώς μεταπρέπουμε έναν μονωτή σε αγωγό: τον νοθεύουμε. Τα άτομα μιας κατάλληλης πρόσμειης μπορούν, για παράδειγμα, να είναι οι δότες των ηλεκτρονίων που απαιτούνται για τη δημιουργία του ηλεκτρικού ρεύματος. Με αυτή τη μέθοδο δημιουργήθηκε ο πρώτος υπεραγωγός υψηλής θερμοκρασίας, ο  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  (όπου  $x = 0,1-0,2$  είναι η συγκέντρωση της πρόσμειης – στην περίπτωση αυτή το στρόντιο).

Στις αρχές του 1991, μια νέα ανακάλυψη αναστάτωσε την επιστημονική κοινότητα: ο A. Hebard και οι συνεργάτες του ανακάλυψαν ότι ένας φουλε-



Σχήμα 4

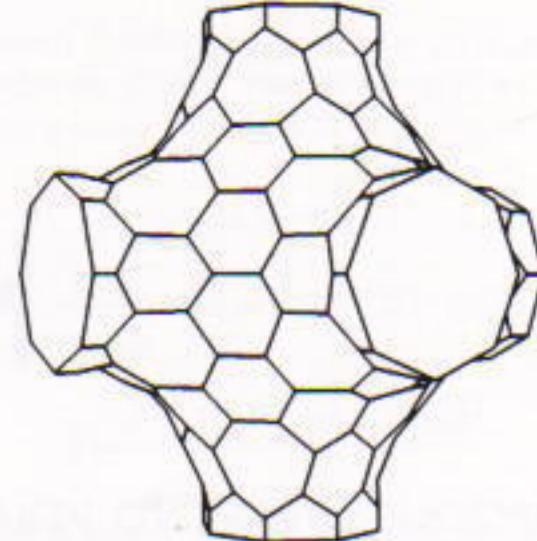
Κρυσταλλική δομή του υπεραγώγου φουλερίτη  $\text{K}_3\text{C}_{60}$ . Οι μικρές σφαίρες αντιστοιχούν στα άτομα της πρόσμειης (κάλιο).

ρίτης με πρόσμειη καλίου –  $\text{K}_3\text{C}_{60}$  – έγινε υπεραγωγός στη θερμοκρασία των 18 K (−255°C). Η θερμοκρασία αυτή δεν αποτελούσε ρεκόρ, αλλά όταν το κάλιο αντικαταστάθηκε από ρουβίδιο η θερμοκρασία υπεραγώγημης μετάβασης έφτασε στους 28-29 K. Προτού αρχίσει, το 1986, η ξέφρενη κούρσα για την ανακάλυψη υπεραγώγων υψηλής θερμοκρασίας, ουδείς είχε βρει υλικό υπεραγώγιμο σε θερμοκρασία μεγαλύτερη των 24 K. Στις μέρες μας έχουν ανακαλυφθεί υλικά υπεραγώγιμα στους 126 K, και υπάρχουν αναφορές για ακόμη υψηλότερες θερμοκρασίες.

Οι υπεραγωγοί που βασίζονται στα μόρια του  $\text{C}_{60}$  φαίνεται ότι έχουν μεγαλύτερη σταδιερότητα εξαιτίας της αντοχής των εν λόγω μορίων. Αυτό τους ξεχωρίζει από τους υψηλής θερμοκρασίας υπεραγωγούς οξειδίου. Στο Σχήμα 4 βλέπετε την κρυσταλλική δομή ενός υπεραγώγου φουλερίτη. Οι πρόσμειες καταλαμβάνουν θέσεις στον κρύσταλλο ανάμεσα στα φουλερένια.

## Μια ακόμη μορφή άνθρακα: σβαρτότες

Είδαμε, λοιπόν, ότι έχουν ανακαλυφθεί κυψελωτές δομές αποτελούμενες από πεντάγωνα και εξάγωνα άνθρακα, και οι οποίες είναι το αντικείμενο εντατικών ερευνών.<sup>4</sup> Τι συμβαίνει, όμως, με τα επτάγωνα; Παρόμοιες δομές δεν



Σχήμα 5

Στοιχειώδης κυψελίδα ενός σβαρτούτη – μια άπειρη επιφάνεια αποτελούμενη από άτομα άνθρακα. (Τα έξι από τα 24 επτάγωνα είναι πλήρως ορατά.)

έχουν ακόμη εντοπιστεί πειραματικά, αλλά οι θεωρητικοί έχουν ήδη δημιουργήσει μοντέλα τους και μελετούν τις ιδιότητές τους με τη βοήθεια υπολογιστών. Μάλιστα, τα επάγωνα προσφέρουν ακόμη περισσότερες δυνατότητες απ' ό,τι τα φουλερένια. Παραδείγματος χάρη, έχει ανακαλυφθεί ένα «σφουγγάρι» άνθρακα η σύνθετη επιφάνεια του οποίου αποτελείται από εξάγωνα και επτάγωνα που διαχωρίζουν τον τριδιάστατο χώρο σε δύο υποχώρους.

Αυτές οι δομές ονομάστηκαν σβαρτότες, προς τιμήν του γερμανού μαθηματικού που μελέτησε πρώτος αυτές τις επιφάνειες στο τέλος του προηγούμενου αιώνα. Στο Σχήμα 5 βλέπουμε μια στοιχειώδη κυψελίδα ενός σβαρτούτη. Ολόκληρος ο κρύσταλλος δημιουργείται από την άπειρη επανάληψη παρόμοιων κυψελίδων. Οι σβαρτότες έχουν τον ίδιο τύπο κρυσταλλικού πλέγματος με τον εδροκεντρωμένο κυβικό φουλερίτη του Σχήματος 2. Η στοιχειώδης κυψελίδα έχει 216 κορυφές, 24 επτάγωνα, 80 εξάγωνα και 3 λαβές. Σημειώστε ότι σ' αυτήν την περιοδική δομή, οι λαβές συνδέουν διαδοχικές κυψελίδες του κρύσταλλου. Στο Σχήμα 5 οι λαβές έχουν κοπεί στα δύο και φαίνεται μόνο το μισό τμήμα τους.

Επαναλαμβάνουμε και πάλι ότι αυτές οι δομές δεν έχουν ακόμη παραπρηθεί πειραματικά. Αν, όμως, οι ερευνητές επιτύχουν να συνθέσουν αυτή τη νέα αλλοτροπική μορφή του άνθρακα, θα δημιουργήσουν μια ουσία με μοναδικές μηχανικές, φυσικές, και χημικές ιδιότητες.

2. Για περιοστέρα δείτε το άρθρο του M. Reed στο *Scientific American*, Ian. 1993. (Σ.τ.ε.)

3. Δείτε το «Νικόνιας πει αντιστάσεις» στο προηγούμενο τεύχος του *Quantum*.

4. Για περισσότερα δείτε: *Scientific American*, Sept. 1993 και *New Scientist*, 23 Apr. 1994. (Σ.τ.ε.)

## ΣΤΟ ΜΑΥΡΟΠΙΝΑΚΑ I

# Η μεγάλη βουτιά

Εφαρμόζοντας το νόμο του Hooke σ' ένα νησί των Νοτίων Θαλασσών

A.A. Dozorov

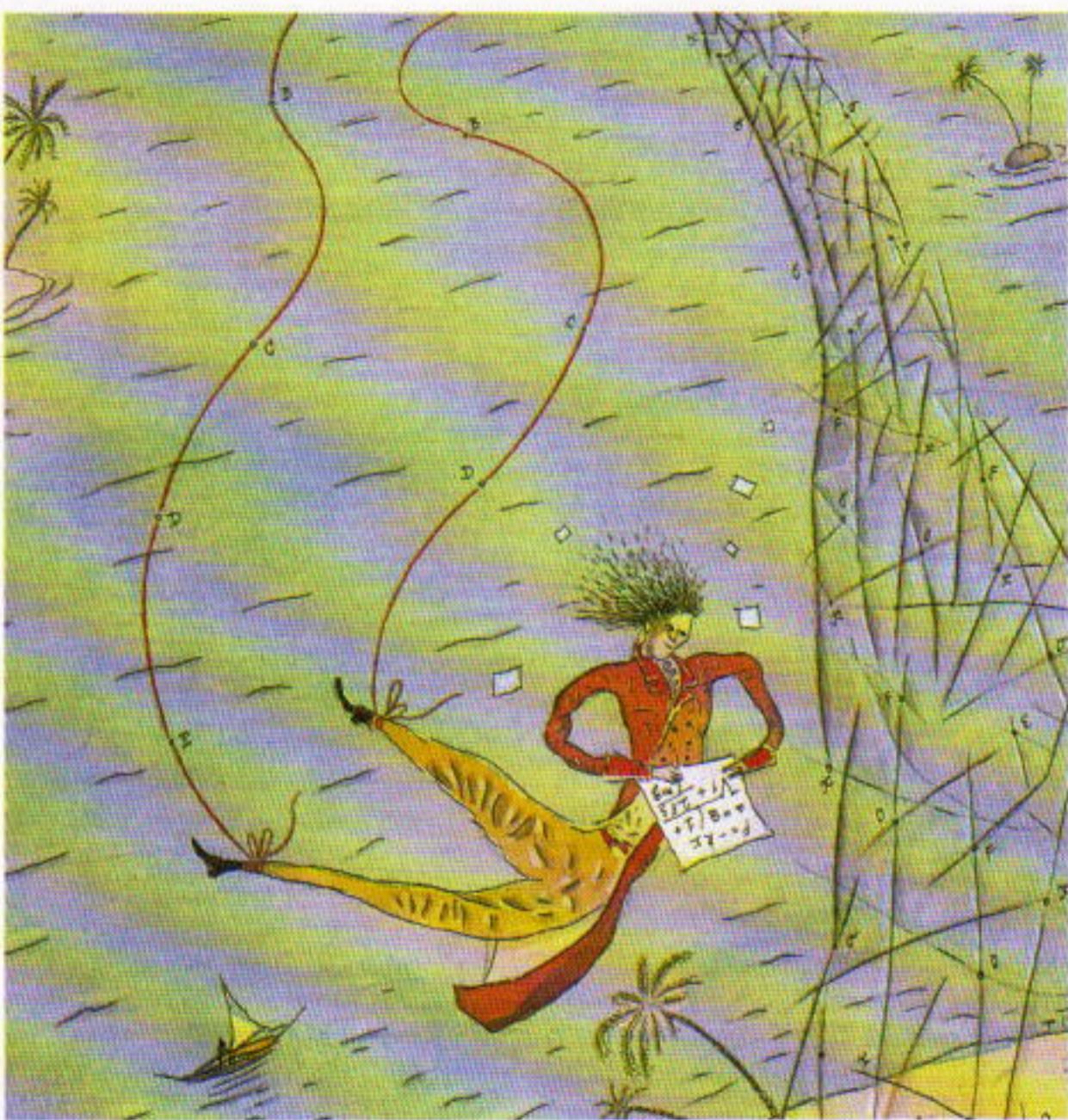
**Ο**ι ιδαγενείς ενός απ' τα νησιά του Βανουάτου (πρώην Νέες Εβρίδες) διασκεδάζουν στις γιορτές τους μ' έναν διαφορετικό και πρωτότυπο τρόπο. Νέοι της φυλής οκαρφαλώνουν σε ειδικούς πυργίσκους, δένουν στους αστραγάλους τους τις άκρες μακριών και σκοινοειδών βλαστών αναρριχητικών φυτών και, συνοδευόμενοι από τη όμορφη μουσική που απαιτεί το έδιμο, βουτούν στο κενό. Βεβαίως κάθε βλαστός αναρριχητικού φυτού – η άλλη άκρη του οποίου έχει δεδεί σταθερά στην κορυφή του πυργίσκου –, επιβραδύνει την κίνηση και ανακόπτει την πτώση, έτσι ώστε οι νεαροί ιδαγενείς να προσγειώνονται στο έδαφος με ασφάλεια.

Το ύψος των πυργίσκων που στήνονται στο νησί κυμαίνεται από 15 έως 30 μέτρα. Σε πρώτη σκέψη, λοιπόν, θα υπέθετε κανείς ότι το φορτίο στα πόδια των νεαρών ιδαγενών, καθώς πλησιάζουν στο έδαφος, αυξάνει όσο ξεκινούν το άλμα τους από όλο και υψηλότερο σημείο και τα μήκη των βλαστών των αναρριχητικών φυτών γίνονται μεγαλύτερα. Επομένως, πρέπει να υπάρχει κάποιο μέγιστο ύψος για ασφαλή βουτιά στο κενό. Αυτό το «προφανές» συμπέρασμα, όμως, είναι απολύτως λανθασμένο! Την ορθή απάντηση μας την προσφέρει ο νόμος του Hooke.

Ας υποδέσουμε ότι το μήκος ενός νήματος που κρέμεται ελεύθερο φορτίου είναι  $\ell$ . Αν ασκήσουμε δύναμη στην ελεύθερη άκρη του τεντώ-

νοντάς το, θα επιμηκυνθεί και θα αποκτήσει συνολικό μήκος  $\ell + x$ . Το μήκος  $x$  το ονομάζουμε μήκυνση του νήματος, ενώ το πηλίκον  $x/\ell = \varepsilon$  ανηγμένη μήκυνση. Θα λέμε ότι η παραπάνω παραμόρφωση του νήματος είναι ελαστική αν, μετά την άρση της δύναμης, το νήμα αποκτά το αρχικό του μήκος. Γενικώς, για μικρές ελα-

στικές παραμορφώσεις ( $x \ll \ell$ ) το ισχύει πως η μήκυνση είναι ανάλογη της δύναμης που την προκαλεί. Η ίδια πρόταση ισχύει και για τη δύναμη επαναφοράς του ελαστικού νήματος, τη δύναμη δηλαδή που τείνει να επαναφέρει το νήμα στην αρχική του κατάσταση και η οποία έχει κατεύθυνση αντίθετη από την κατεύθυνση



της παραμόρφωσης. Μπορούμε να εκφράσουμε μαθηματικά τα παραπάνω με την εξίσωση

$$F = -kx. \quad (1)$$

που αποτελεί τον λεγόμενο νόμο του Hooke. Ο συντελεστής  $k$  ονομάζεται ελαστική σταθερά του σώματος.

Οσο μεγαλύτερη, είναι η εγκάρσια διατομή του ελαστικού νήματος τόσο μεγαλύτερη δύναμη πρέπει να ασκήσουμε στην ελεύθερη άκρη του για να επιτύχουμε την ίδια επιμήκυνση. Με άλλα λόγια, η σταθερά  $k$  του νήματος εξαρτάται από την εγκάρσια διατομή του. Στο νόμο του Hooke χρησιμοποιούμε συχνά την έννοια τάσης,  $\sigma = F/S$ . (Αν μια ράβδος εγκάρσιας διατομής  $S$  συμπεστεί από δύναμη  $F$ , τότε το  $\sigma$  εκφράζει τη μέση πίεση που αναπίσσεται στα άκρα της.) Μπορούμε λοιπόν να τον εκφράσουμε και με τη σχέση

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2)$$

που σημαίνει ότι για μικρές ελαστικές παραμορφώσεις η τάση είναι ανάλογη της ανηγμένης μήκυνσης του σώματος. Ο συντελεστής  $E$  ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young και εξαρτάται αποκλειστικά από το υλικό του παραμορφούμενου σώματος. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί και ως

$$F = \frac{SE}{\ell}x. \quad (3)$$

Συγκρίνοντας τις εξιόσεις (1) και (3) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $k = SE/\ell$ , πράγμα που σημαίνει πως η σταθερά  $k$  του νήματος εξαρτάται τόσο από το υλικό του όσο και από τις διαστάσεις του. Επιπλέον, πως το μέτρο του Young εκφράζει τη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στην ελεύθερη άκρη ελαστικού νήματος, μοναδιαίας εγκάρσιας διατομής, ώστε να διπλασιαστεί το μήκος του. (Το μέτρο του Young μετριέται συνήθως σε  $Nt/m^2$ ).

Ωραίως να επιστρέψουμε στους ιδιαγενείς του Βανουάτου και να υπολογίσουμε μερικά μεγέθη που αφορούν τα παράτολμα άλματά τους. Αυτό ας το κάνουμε μέσω του εξής προβλήματος:

Σώμα μάζας  $m = 72 \text{ kg}$  δένεται στην άκρη ενός αβαρούς ελαστικού νήματος και αφίγνεται να πέσει στο

κενό από το ύψος όπου έχει προσδεθεί σταθερά η άλλη άκρη του νήματος. Να υπολογιστεί η μέγιστη δύναμη επαναφοράς κατά την επιμήκυνση του νήματος και η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος κατά την πτώση του. Για το ελαστικό νήμα δίνεται:  $E = 10^7 \text{ Nt/m}^2$  και  $S = 9 \text{ cm}^2$ .

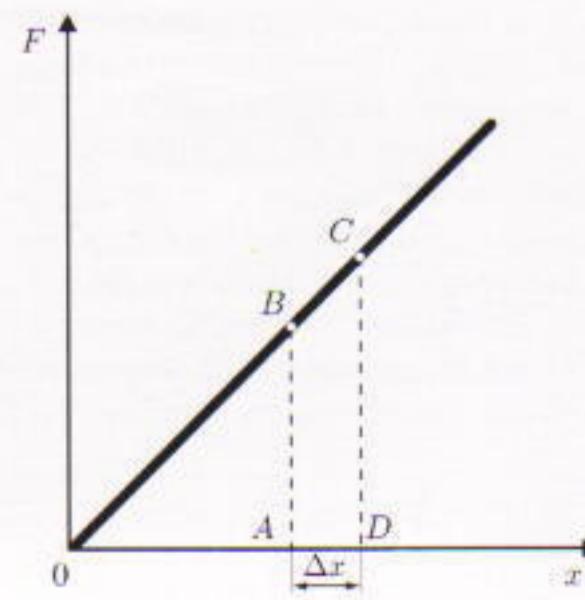
Το έργο που δαπανάται για να επιμήκυνθεί το νήμα κατά το στοιχειώδες ποσόν  $\Delta x$  ισούται με

$$\Delta W = F \cdot \Delta x.$$

Η δύναμη  $F$  είναι ανάλογη του  $x$  (Σχήμα 1). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το παραπάνω έργο ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν του τραπεζίου  $ABCD$ . Αν το νήμα επιμήκυνθεί από μήκος  $\ell$  σε μήκος  $\ell + x$ , η αριθμητική τιμή του συνολικού έργου που θα έχει δαπανηθεί (και το οποίο θα έχει αποδημητεί με τη μορφή δυναμικής ενέργειας παραμόρφωσης του ελαστικού νήματος) θα προκύπτει από την άθροιση των εμβαδών ανάλογων στοιχειωδών τραπεζίων, ή, συνολικά, από το εμβαδόν του τριγώνου  $OCD$  στο διάγραμμα του Σχήματος 1. Η τιμή αυτή εκφράζει και τη συνολική δυναμική ενέργεια που θα έχει αποδημητεί στο νήμα κατά την επιμήκυνσή του:

$$W = \frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}kx^2. \quad (4)$$

Η δυναμική ενέργεια λόγω θέσης που έχει το σώμα κατά το ξεκίνημα της κίνησής του μετατρέπεται σταδιακά σε κινητική ενέργεια του, και αυτή με τη σειρά της στη δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσης του ελαστικού νήματος. Επειδή η υφομε-



Σχήμα 1

τρική διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης του σώματος κατά την πτώση του είναι  $\ell + x$ , ισχύει:

$$mg(\ell + x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Επομένως, η μήκυνση του νήματος ισούται με

$$x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmg\ell}}{k},$$

και η μέγιστη δύναμη επαναφοράς (αφού  $k = SE/\ell$ ) ισούται με

$$F = mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mgES}.$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα ισούται με την παραπάνω δύναμη μείον το βάρος του  $mg$ . Επομένως, η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος κατά την πτώση του ισούται με

$$\gamma = g\sqrt{1 + \frac{2ES}{mg}}.$$

(Προφανώς αυτό ισχύει για το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς.)

Επομένως, τόσο η μέγιστη δύναμη επαναφοράς όσο και η μέγιστη επιτάχυνση δεν εξαρτώνται από το μήκος του ελαστικού νήματος. Έτσι, όσον αφορά τα άλματα των νεαρών ιδιαγενών από τους πυργίσκους, δεν υπάρχει κρίσιμο ύψος πέραν του οποίου το ανθρώπινο σώμα δεν θα αντεχει την υπερφόρτιση (τις επιπλέον δυνάμεις  $-g$ ). Εάν, λοιπόν, οι ελαστικές ιδιότητες των βλαστών των αναρριχητικών φυτών προσεγγίζουν τις αντίστοιχες του ελαστικού νήματος (ίδια περίπου  $E$  και  $S$ ) και η μάζα κάθε ιδιαγενούς είναι περίπου όση η μάζα  $m$  του παραπάνω σώματος, τότε προκύπτει ότι  $\gamma = 5g$ . Και είναι πράγματι αληθές πως το ανθρώπινο σώμα αντέχει σε τέτοιες υπερφορτίσεις.

Νά όμως και κάτι που μένει για σας: Άλλαζε η τιμή της μέγιστης επιτάχυνσης στο προηγούμενο πρόβλημα αν θεωρήσουμε ότι το ελαστικό νήμα (και κατ' επέκταση ο βλαστός του αναρριχητικού φυτού) δεν είναι αβαρές αλλά έχει κάποιο συγκεκριμένο βάρος; Και εν συνεχείᾳ, ποιος δα δεχτεί μεγαλύτερη υπερφόρτιση, ένας μικρόσωμος ή ένας μεγαλόσωμος ιδιαγενής; Με τις... υγείες σας. ◻

# Προς την κορυφή του όρους Fermat-Euler

Οδηγοί μας στην αναρρίχηση οι Lagrange, Zagier και Minkowski

Vladimir Tikhomirov

**Π**αραπρόντιας ένα αρχικό τμήμα από πρώτους αριθμούς μεγαλύτερους από το 2 (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...), βλέπουμε ότι ανάμεσά τους υπάρχουν αριθμοί – όπως οι 5, 13, και 17 – που είναι δυνατόν να παρασταθούν ως άδροισμα δύο τετραγώνων:

$$5 = 1^2 + 2^2,$$

$$13 = 2^2 + 3^2,$$

$$17 = 1^2 + 4^2.$$

Αντίθετα, οι αριθμοί 3, 7, 11, και 9 δεν μπορεί να παρασταθούν με αυτόν τον τρόπο. (Επιβεβαιώστε το μόνοι σας!) Υπάρχει τρόπος να ξεχωρίζουμε το ένα είδος αριθμών από το άλλο, χωρίς να χρειάζεται να καταφεύγουμε σε καταγραφή όλων των εκδοχών για κάθε περίπτωση χωριστά; Και πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτή τη διαφορά; Η απάντηση δίνεται από το επόμενο δεύτερημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** Ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να παρασταθεί ως άδροισμα δύο τετραγώνων αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 4 ισούται με 1.

(Πραγματικά,  $5 = 4 \cdot 1 + 1$ ,  $13 = 4 \cdot 3 + 1$ ,  $17 = 4 \cdot 4 + 1$ , ενώ  $3 = 4 \cdot 0 + 3$ ,  $7 = 4 \cdot 1 + 3$ ,  $11 = 4 \cdot 2 + 3$ , ...)

**Πρόβλημα 1.** Αποδείξτε την αναγκαία συνθήκη του προηγούμενου δεύτερηματος: κάθε πρώτος αριθμός (εκτός από το 2) που είναι ίσος με το άδροισμα δύο τετραγώνων μπορεί να γραφεί ως  $4n + 1$ , για κάποιον ακέραιο  $n$ .

Ποιος ανακάλυψε πρώτος αυτό το μαθηματικό φαινόμενο; Υπάρχουν εν-

δείξεις ότι θα μπορούσαμε να έχουμε γιορτάσει πριν από λίγα χρόνια την 350ή επέτειο αυτού του αξιοσημείωτου αποτελέσματος. Τα Χριστούγεννα του 1640, ο μεγάλος μαθηματικός Pierre Fermat (1601-1665) έστειλε ένα γράμμα στον περίφημο Mersenne, φίλο του Καρτέσιου και σπουδαιότερο μεσολαβητή στην αλληλογραφία μεταξύ των επιστημόνων εκείνη την εποχή. Με αυτό το γράμμα πληροφορούσε τον Mersenne ότι «κάθε πρώτος αριθμός που αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με το 4 παριστάνεται μονοσήμαντα ως άδροισμα δύο τετραγώνων.»<sup>1</sup> Εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν μαθηματικά περιοδικά, και οι μαθηματικοί αντάλλασσαν πληροφορίες μέσω αλληλογραφίας. Συνήθως, ανακοίνωναν απλώς τα αποτελέσματά τους, χωρίς να περιλαμβάνουν αποδείξεις.

Πάντως, περίπου είκοσι χρόνια μετά την επιστολή προς τον Mersenne, ο Fermat περιέγραψε το σχέδιο που είχε καταστρέψει για να αποδείξει το δεύτερημα που αναφέραμε παραπάνω. Τον Αύγουστο του 1659, σε μια επιστολή που απευθύνοταν στον Carcavy<sup>2</sup>, γράφει ότι η απόδειξή του βασίζεται στη μέθοδο της άπειρης καθόδου. Ξεκινώντας από την υπόθεση ότι το συμπέρασμα του δευτέρηματος είναι ψευδές για κάποιον πρώτο αριθμό της μορφής

1. Σε τούτο το άρθρο δεν θα αναφερθούμε στο μονοσήμαντο, που είχε αποδειχθεί πολύ πριν από την εποχή του Fermat. Δείτε σχετικά τη λύση του προβλήματος M10 στο παρόν τεύχος.

$4n + 1$ , αποδεικνύει ότι πρέπει να είναι ψευδές και για κάποιον μικρότερο αριθμό, και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο έως τον αριθμό 5, καταλήγοντας έτοις σε αντίφαση (αφού το δεύτερημα αληθεύει για το 5).

Την πρώτη ολοκληρωμένη απόδειξη την παρουσίασε ο Leonhard Euler (1707-1783) ανάμεσα στο 1742 και το 1747. Ο Euler, που εκτιμούσε βαθύτατα τον Fermat, παραχώρησε την προτεραιότητα στον προκάτοχό του και κατέστρωσε μια απόδειξη που επεξεργάζοταν την ιδέα της επιστολής του Fermat. Τιμώντας και τους δύο μεγάλους επιστήμονες, ονομάζουμε σήμερα αυτή την πρόταση «δεύτερημα των Fermat-Euler».

Υπάρχει ένα χαρακτηριστικό κοινό σε όλα σχεδόν τα όμορφα μαθηματικά αποτελέσματα (όπως και σε σχεδόν όλες τις όμορφες αλλά δυσπρόσιτες κορυφές): τα μονοπάτια που οδηγούν σε αυτά είναι πολλά. Μπορούμε να τα προσεγγίσουμε από διαφορετικές πλευρές, και όλα τα μονοπάτια προσφέρουν έντονη απόλαυση σε όσους τολμούν να τα ακολουθήσουν.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το δεύτερημα των Fermat-Euler αποκαλύπτει ανάγλυφα αυτό το διαυμάσιο χαρακτηριστικό.

Θα αναρριχηθούμε σε αυτήν την κο-

2. Μετά το θάνατο του Mersenne, το ρόλο του επιστημονικού «μεσολοβητή» ανέλαβε ο Βασιλικός Βιβλιοθηκάριος, ένας ερασιτέχνης μαθηματικός και φίλος του Fermat, ο Pierre de Carcavy (πεθ. το 1684).



ρυφή, που πρωτοανακαλύφθηκε τον 17ο αιώνα, ακολουθώντας τρία διαφορετικά μονοπάτια. Το ένα βρέθηκε τον 18ο αιώνα, το δεύτερο τον 19ο, και το τελευταίο πολύ πρόσφατα, στον αιώνα μας.

## Η απόδειξη του Lagrange

Η πρώτη απόδειξη (με κάποιες τροποποιήσεις) περιέχεται σε όλα σχεδόν τα εγχειρίδια Θεωρίας Αριθμών. Βασίζεται στο επόμενο λήμμα.

**ΛΗΜΜΑ WILSON.** Για κάθε πρώτο αριθμό  $p$ , ο αριθμός  $(p-1)! + 1$  διαιρείται με το  $p$ .

Για να μην απομακρυνθούμε από το θέμα μας αποδεικνύοντας αυτό το βοηθητικό (αλλά πολύ χρήσιμο) γεγονός, θα παρουσιάσουμε την κύρια ιδέα για την απόδειξή του χρησιμοποιώντας τον αριθμό 13 ως παράδειγμα. Για κάθε ακέραιο από το 2 έως και το 11, βρίσκουμε τον αριθμό του οποίου το γινόμενο με αυτόν τον ακέραιο δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με το 13. Στη συνέχεια, κατά την παραγοντοποίηση του  $(13-1)!$  γράφουμε μαζί αυτά τα ζεύγη παραγόντων:

$$\begin{aligned} (13-1)! &= 12! = \\ &= (2 \cdot 7)(3 \cdot 9)(4 \cdot 10)(5 \cdot 8)(6 \cdot 11) \cdots 12 \\ (\text{όπου } 2 \cdot 7 &= 14 = 13+1, 3 \cdot 9 = 27 = \\ 2 \cdot 13 &+ 1, 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40 = 3 \cdot 13 + 1, \\ 6 \cdot 11 &= 66 = 5 \cdot 13 + 1). \end{aligned}$$

Τερπεται ότι το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $12!$  με το  $13$  είναι  $12 - \text{άρα } 12! + 1$  διαιρείται με το  $13$ . Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

**Πρόβλημα 2.** Αποδείξτε ότι για κάθε πρώτο αριθμό  $p$  μπορούμε να χωρίσουμε τους αριθμούς  $2, 3, \dots, p-2$  σε ζεύγη, έτοι ώστε το γινόμενο των αριθμών σε όλα τα ζεύγη  $(a, b)$  να δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με το  $p$ . (Αυτό γράφεται ως  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ .) Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να αποδείξετε το λήμμα του Wilson στη γενική περίπτωση.

Από το λήμμα Wilson ουνάγουμε ένα πόρισμα.

**ΠΟΡΙΣΜΑ.** Αν ο αριθμός  $p = 4n + 1$  είναι πρώτος, τότε ο  $[(2n)!]^2 + 1$  διαιρείται με το  $p$ .

Για να αποδείξουμε το πόρισμα, γράφουμε τον αριθμό  $(p-1)! + 1$  ως  $(4n)! + 1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot \dots \cdot (4n) + 1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (p-2n) \cdot (p-2n+1) \cdot \dots \cdot (p-1) + 1 \equiv (2n)! \cdot (-1)^{2n} (2n)! + 1 \equiv [(2n)!]^2 + 1 \pmod{p}$ , και παραπρούμε ότι το αριστερό μέ-

λος διαιρείται με το  $p$ . (Υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο  $\equiv$  έχει τη σημασία ότι οι παραστάσεις δεξιά και αριστερά του αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.)

Συμβολίζουμε με  $N$  το  $(2n)!$ . Το πόρισμά μας, λοιπόν, σημαίνει ότι  $N^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Τώρα πρέπει να ξεπεράσουμε την κύρια δυσκολία.

Θεωρήστε όλα τα ζεύγη  $(k, m)$  των μη αρνητικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από το  $\sqrt{p}$ . Ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς  $k$  (ή  $m$ ) είναι μεγαλύτερος από το  $\sqrt{p} - 1$ , και επομένως το πλήθος αυτών των ζευγών είναι μεγαλύτερο από το  $[(\sqrt{p} - 1) + 1]^2 = p$ . Τώρα, και με βάση την Αρχή του περιστερώνα του Dirichlet<sup>3</sup>, υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαφορετικά ζεύγη  $(k_1, m_1)$  και  $(k_2, m_2)$  τέτοια ώστε τα υπόλοιπα της διαιρεσης των  $(k_1 + Nm_1)$  και  $(k_2 + Nm_2)$  με το  $p$  να είναι ίσα. Τότε, το  $a + Nb$  (όπου  $a = k_1 - k_2$  και  $b = m_1 - m_2$ ) διαιρείται με το  $p$ . Παραπρήστε ότι  $|a| < \sqrt{p}$  και  $|b| < \sqrt{p}$ .

Τώρα,  $a^2 - N^2b^2 = (a+Nb)(a-Nb)$  διαιρείται με το  $p$ , και αφού ισχύει ότι  $N^2 \equiv -1 \pmod{p}$ , το  $a^2 + b^2$  διαιρείται επίσης με το  $p$ . Με άλλα λόγια,  $a^2 + b^2 = rp$  για κάποιο θετικό ακέραιο  $r$  ( $r \neq 0$ , διότι διαφορετικά τα δύο προηγούμενα ζεύγη θα ήταν τα ίδια). Απομένει να παραπρήσουμε ότι  $a^2 + b^2 < 2p$ , πράγμα που σημαίνει ότι

$r = 1$  και  $a^2 + b^2 = p$ , οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη.

## Η απόδειξη του Zagier

Μια άλλη απόδειξη, που την οφείλουμε στον σύγχρονο μαθηματικό D. Zagier, με άφησε κατάπληκτο: το αποτέλεσμα μοιάζει να είναι ουρανοκατέβατο.

Αναπαράγοντας την απόδειξη του Zagier, ο σκοπός μας θα είναι να δείξουμε ότι για κάθε πρώτο αριθμό  $p$  της μορφής  $p = 4n + 1$ , η εξίσωση

$$x^2 + 4yz = p$$

( $x, y, z$  ακέραιοι θετικοί) έχει λύση  $(x, y, z)$  με  $y = z$ . Αν ισχύει αυτό, θα έχουμε την παράσταση  $p = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2$ , οπότε το θεώρημα θα έχει αποδειχθεί.

Θα αποδείξουμε την ύπαρξη τέτοιας λύσης με μάλλον αλλόκοτο τρόπο: θα αποδείξουμε ότι το (προφανώς πεπερασμένο) πλήθος λύσεων αυτής της εξίσωσης είναι περιπτό. Πώς συνδέεται το περιπτό πλήθος λύσεων με την ύπαρξη της λύσης που χρειαζόμαστε; Μπορούμε να κατατάξουμε σε ζεύγη όλες τις λύσεις με  $y \neq z$  αντιμεταθέτοντας τα  $y$  και  $z$ : αν η  $(x, y, z)$  είναι λύση της εξίσωσης, τότε είναι και η  $(x, z, y)$ . Επομένως το πλήθος αυτών των λύσεων θα είναι άρτιο, και το συνολικό πλήθος μπορεί να είναι περιπτό μόνο όταν υπάρχει λύση με  $y = z$ .

Θα προχωρήσουμε το συλλογισμό μας με μια σύγχρονη θεώρηση. Θεωρούμε το σύνολο  $S$  (το σύνολο όλων των τριάδων θετικών ακέραιων που ικανοποιούν την εξίσωσή μας) και το μετασχηματισμό  $J$  αυτού του συνόλου που εναλλάσσει τα  $y$  και  $z$  – δηλαδή,  $J(x, y, z) = (x, z, y)$  – και παρατηρούμε ότι, καταρχάς, ο μετασχηματισμός αυτός είναι μια ενέλιξη – δηλαδή, όταν εφαρμοστεί δύο φορές επιστρέφουμε στην αρχή. Δεύτερο, τα σταθερά του σημεία – αυτά για τα οποία  $J(x, y, z) = (x, y, z)$  – μας δίνουν την επιθυμητή παράσταση του  $p$  (αφού χαρακτηρίζονται από το ότι  $y = z$ ). Τέλος, το πλήθος των σημείων που δεν είναι σταθερά είναι άρτιο, διότι μπορούν να καταταχθούν σε ζεύγη έτοι ώστε το οποιοδήποτε στοιχείο ενός ζεύγους να είναι εικόνα του άλλου στοιχείου. Η τελευταία πρόταση ισχύει φυσικά για κάθε ενέλιξη οποιουδήποτε πεπερασμένου συνόλου.

Και τώρα, ας θεωρήσουμε το μετα-

σχηματισμό  $B$  των τριάδων  $(x, y, z)$  που ορίζεται ως εξής:  $B(x, y, z) = (x', y', z')$  όπου

- (1) αν  $x < y - z$ , δέτουμε  
 $x' = x + 2z, y' = z, z' = y - x - z$
- (2) αν  $y - z \leq x \leq 2y$ , δέτουμε  
 $x' = 2y - x, y' = y, z' = x - y + z$
- (3) αν  $x > 2y$ , δέτουμε  
 $x' = x - 2y, y' = x - y + z, z' = y$

Οπως ο  $J$ , και αυτός ο μετασχηματισμός, αν θεωρηθεί επί του συνόλου  $S$ , είναι μια ενέλιξη του  $S$ . Καταρχάς, απεικονίζει το  $S$  στον εαυτό του διότι διατηρεί την τιμή  $x^2 + 4yz$ . Πραγματικά, ας πάρουμε την περίπτωση (1) για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} x'^2 + 4yz' &= (x + 2z)^2 + 4z(y - x - z) \\ &= x^2 + 4xz + 4z^2 + 4zy - 4zx - 4z^2 \\ &= x^2 + 4yz. \end{aligned}$$

Η επαλήθευση στις άλλες δύο περιπτώσεις είναι εξίσου απλή. Επιπλέον, αν  $(x', y', z') = B(x, y, z)$ , τότε και  $B(x', y', z') = (x, y, z)$ . Αυτό επαληθεύεται επίσης με κατευθείαν υπολογισμούς. Αν, για παράδειγμα,  $x < y - z$ , πρέπει να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις της περίπτωσης 1: από αυτές προκύπτει  $x' = x + 2z > 2z = 2y'$ , και επομένως πρέπει να υπολογίσουμε το  $(x'', y'', z'') = B(x', y', z')$  χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις από την περίπτωση 3. Τότε θα πάρουμε

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 2y' = x + 2z - 2z = x, \\ y'' &= x' - y' + z' = x + 2z - z + \\ &\quad + (y - x - z) = y, \\ z'' &= y' = z \end{aligned}$$

Η εξέταση των υπολογίων δύο περιπτώσεων επαφίεται στον αναγνώστη. Έπειτα από αυτήν την επαλήθευση, συμπεραίνουμε ότι ο  $B$  είναι μια ενέλιξη του  $S$ .

Τι συμβαίνει με τα σταθερά σημεία του  $B$ ? Αν ξαναδούμε τον ορισμό του, βλέπουμε ότι στην περίπτωση 1 έχουμε  $x' > x$  και στην περίπτωση 3 έχουμε  $x' < x$ . Επομένως, σταθερό σημείο μπορούμε να έχουμε μόνο στην περίπτωση 2, οπότε προκύπτει  $x = x' = 2y - x$ , ή  $x = y$ .

Αντιστρόφως, μπορείτε αμέσως να δείτε ότι ο μετασχηματισμός  $B$  διατηρεί κάθε τριάδα της μορφής  $(x, x, z)$ . Όμως, μία μόνο από αυτές τις τριάδες ανήκει στο σύνολο  $S$  των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσής μας: αν  $p = x^2 + 4xz = x(x + 4z)$ , τότε  $x = 1$

(αφού ο  $p$  είναι πρώτος) και  $z = p$  (θυμηθείτε ότι  $p = 4n + 1$ ). Έπομένως, η ενέλιξη  $B$  του συνόλου  $S$  έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, το  $(1, 1, p)$  και κατά συνέπεια, όπως έχουμε δει, το  $S$  αποτελείται από περιττό πλήθος τριάδων – πράγμα που είχαμε σκοπό να αποδείξουμε.

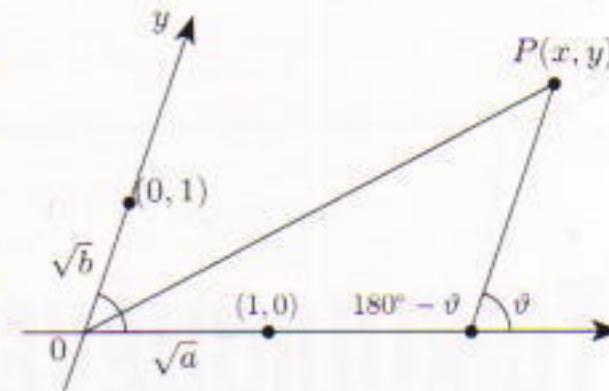
## Η απόδειξη του Minkowski

Η (ελαφρώς τροποποιημένη) απόδειξη του Minkowski (1864-1909) που θα παρουσιάσω στη συνέχεια, είναι ίσως ακόμη πιο εντυπωσιακή.

Η απόδειξη του Minkowski αρχίζει μ' ένα αποτέλεσμα που μοιάζει να μην έχει καμιά σχέση με το θεώρημα Fermat-Euler.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** Έστω  $a, b$ , και  $c$  τυχαίοι ακέραιοι που ικανοποιούν τις σχέσεις  $a > 0$  και  $ac - b^2 = 1$ . Τότε, η εξίσωση  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$  έχει ακέραιη λύση  $(x, y)$ .

Απόδειξη. Η παράσταση  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  μπορεί να θεωρηθεί ως το τετράγωνο της απόστασης του σημείου  $P$  με συντειαγμένες  $(x, y)$  από την αρχή  $O$  σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα συντειαγμένων (όχι απαραίτητα ορθογώνιο). Για να κατασκευάσουμε τους άξονες έτσι ώστε να σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $\vartheta$ , όπου η  $\vartheta$  ορίζεται από τη σχέση  $\sin \vartheta = b/\sqrt{ac}$  (αυτό είναι δυνατόν επειδή  $ac > 0$  και επειδή



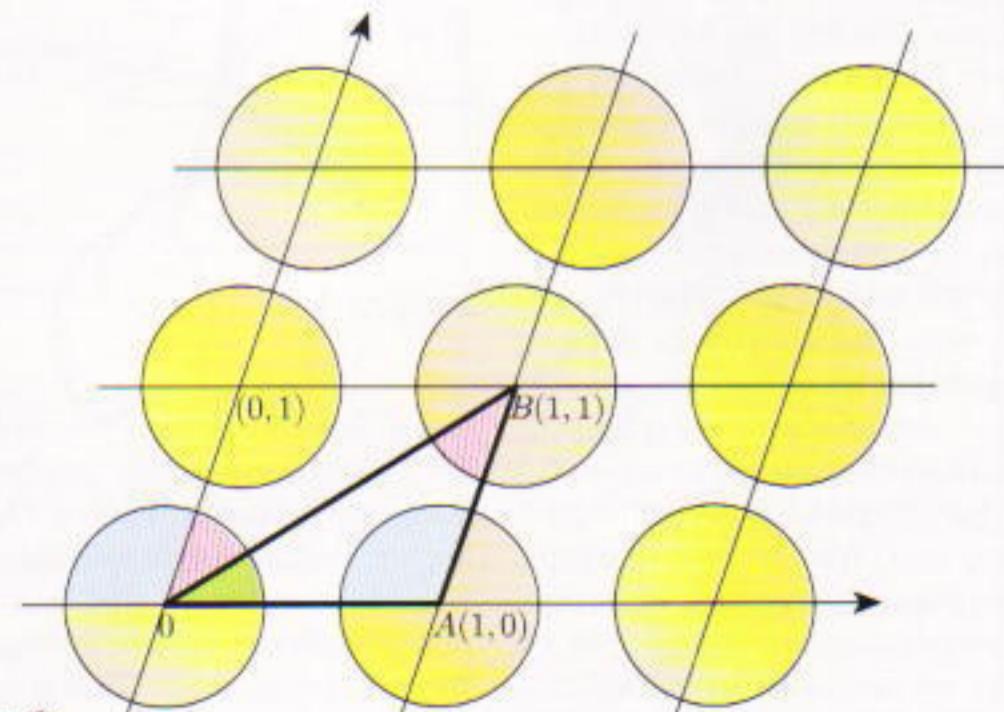
Σχήμα 1

με το τετράγωνο της απόστασης  $OP$ , όπου  $P = (x, y)$ , από το τρίγωνο  $OQP$ , όπου  $Q = (x, 0)$ . Πραγματικά σε αυτό το τρίγωνο,  $OQ = |x|\sqrt{a}$ ,  $QP = |y|\sqrt{c}$ , και η γωνία  $Q$  είναι  $\vartheta$  ή  $180^\circ - \vartheta$ , ανάλογα με τα πρόσημα των  $x$  και  $y$ . Πάντως, και ανεξάρτητα από ποια είναι αυτά τα πρόσημα, ο νόμος των συνημιτόνων μας δίνει πάντα

$$(OP)^2 = (OQ)^2 - 2(OQ) \cdot (OP) \cdot \sin(\angle Q) + (OP)^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Τα σημεία με ακέραιες συντειαγμένες σχηματίζουν ένα «ακέραιο πλέγμα» σε σχέση με το σύστημα συντειαγμένων μας (Σχήμα 2), και πρέπει να αποδείξουμε πώς υπάρχει ένας κόμβος του πλέγματος σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Έστω  $d$  η μικρότερη απόσταση από την αρχή  $O$  προς έναν άλλο κόμβο, και έστω  $(m, n)$  ένας κόμβος που απέχει  $d$  από το  $O$ . Η απόσταση από το  $(x, y)$



Σχήμα 2

$|b/\sqrt{ac}| < 1$ , αφού  $ac = b^2 + 1 > b^2$ ). Διαλέγουμε τις μονάδες κλίμακας στους άξονες  $x$  και  $y$  ως  $\sqrt{a}$  και  $\sqrt{c}$  αντίστοιχα (Σχήμα 1). Τότε, μπορούμε να βρούμε το  $(x_1, y_1)$  είναι ίση με την απόσταση από το  $(0, 0)$  έως το  $(x_1 - x, y_1 - y)$

H συνέχεια στη σ. 60

# Τρικυμισμένες θάλασσες

Η δυναμική των υδάτινων κυμάτων

Ivan Vorobyov

**Ο**υφώνας απέχει εκαποντάδες χιλιόμετρα, τριγύρω δεν πνέει αέρας, κι όμως τα υδάτινα τείχη διαδέχονται το ένα το άλλο, για δόσο μακριά μπορεί να στενίσει το μάτι. Αυτή η εικόνα, γνωστή σε όσους ζουν κοντά σε ανοιχτές θάλασσες ή σε ωκεανούς, ονομάζεται αποθαλασσιά. Μια αλυσίδα από παράλληλες γραμμές σε έκταση δεκάδων χιλιομέτρων, και τα κύματα να συνεχίζουν να εμφανίζονται και να διαδίδονται ομοιόμορφα όρες απέλειωτες.

Κοντά στο Ακρωτήριο της Καλής Ελπίδας, το ύψος των κυμάτων μπορεί να φτάσει από 9 έως 11 μ. και το μήκος κύματος από 100 έως 300 μ. Μόνο το μεγάλο βάθος του ωκεανού (2 km) μας διαβεβαιώνει πως δεν θα δούμε τον πυθμένα του απ' τα μεγάλα κύματα. Η ταχύτητα τέτοιων γιγαντιαίων κυμάτων είναι εντυπωσιακή, αφού κυμαίνεται από 40 έως 70 km/h.\*

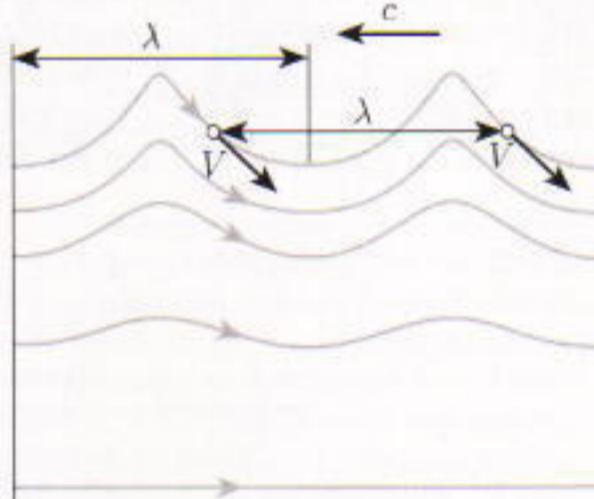
Ποιες δυνάμεις προκαλούν αυτή τη ρυθμική κίνηση τόσο μεγάλων ποσοτήτων νερού; Από τι εξαρτάται η ταχύτητά τους; Ποιο είναι το χαρακτηριστικό τους σχήμα (δηλαδή τι μορφή έχει η κατατομή τους, ή ποιο είναι το σχήμα του περιγράμματός τους ή, ας πούμε, της κορυφογραμμής τους – για να μπορούμε να συνεννοούμαστε καλύτερα); Τι συμβαίνει κάτω από την κυματιστή επιφάνεια; Θα προσπαθήσω να απαντήσω σ' αυτά τα ερωτήματα

προηγουμένως, όμως, αξίζει τον κόπο να ρίξουμε μια προσεκτική ματιά στο ίδιο το κύμα.

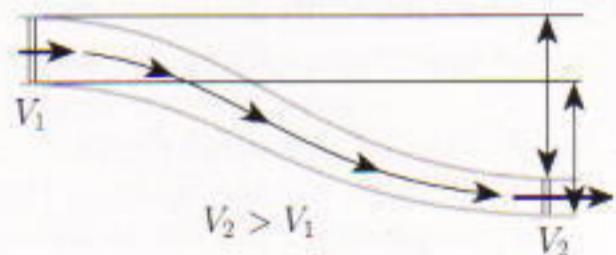
## Στρωματική ροή

Η μελέτη των κυμάτων γίνεται πιο εύκολη αν θεωρήσουμε ότι δεν διαδίδονται ως προς το δικό μας σύστημα αναφοράς. Φανταστείτε ότι βρισκόμα-

θεί ένα τρίτο, κ.ο.κ. (οι φυσικοί ονομάζουν τη ροή κατ' αυτή την έννοια στρωματική ή στρωτή). Καθώς το νερό κινείται ομαλά, δεν υπάρχουν διακοπές ή κενά στη ροή του, και οι κορυφογραμμές των βαθύτερων στρωμάτων διατηρούνται στάσιμες σε σχέση με την κυματική εικόνα του επιφανειακού στρώματος, έχοντας το ίδιο μήκος κύματος λ μ' αυτό (Σχήμα 1).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

στε ο' ένα ελικόπτερο που πετά πάνω απ' τη θάλασσα με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος, έστια  $c$ . Οι καμπύλες της θαλάσσιας επιφάνειας δεν αλλάζουν σε σχέση με μας, και το νερό ρέει μόνιμα κατά μήκος της αμετάβλητης κατατομής τους. Τόσο η ανύψωση και η κλίση της επιφάνειας όσο και η ταχύτητα ροής  $V$  κατά μήκος της στάσιμης κατατομής επαναλαμβάνονται περιοδικά έπειτα από κάθε διάστημα ίσο με το μήκος κύματος  $\lambda$ . Αμέσως κάτω από την επιφανειακό στρώμα νερού υπάρχει ένα δεύτερο στρώμα, ακολου-

το οι σύστημα αναφοράς τού «ακινητοποιημένου κύματός μας» η κίνηση του νερού είναι μόνιμη ροή κατά μήκος των καμπυλωμάτων στρωμάτων. Τα στάσιμα σύνορα κάθε στρώματος σχηματίζονται από οωματίδια νερού που κινούνται κατά μήκος της ίδιας τροχιάς. Το νερό δεν εγκαταλείπει το στρώμα, δηλαδή ανά μονάδα χρόνου από κάθε εγκάρσια τομή ενός δεδομένου στρώματος διέρχεται η ίδια μάζα νερού.

Το σχήμα των διαφόρων στρωμάτων δεν είναι ακριβώς το ίδιο. Τα πλάτη τους ελαττώνονται βαθμιαία καθώς αυξάνει το βάθος. Το γεγονός αυτό καθίσταται σαφέστερο αν μελετήσουμε τη ροή ανάμεσα στις συνοριακές επιφάνειες ενός στρώματος. Επειδή η

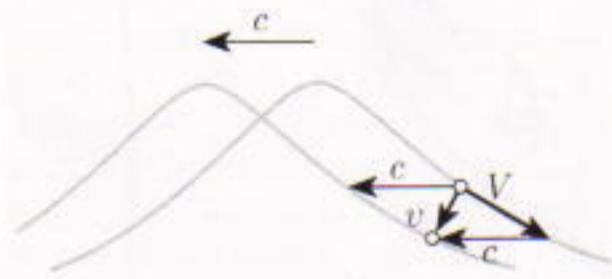
\* Στη Μεσόγειο, το ύψος των κυμάτων δεν υπερβαίνει τα 4-5 μ. και το μήκος κύματος τους τα 150 μ. (Σ.τ.ε.)



ροή είναι μόνιμη, το στρώμα διαδέτει τόσο μεγαλύτερο πάχος όσο μικρότερη είναι η ταχύτητα ροής  $V$ , και αντιστρόφως. Τα σωματίδια του νερού αυξάνουν την ταχύτητά τους όταν κινούνται προς βαθύτερα σημεία, ενώ επιβραδύνονται όταν κινούνται προς υψηλότερα σημεία. Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ των συνοριακών επιφανειών είναι μεγαλύτερη στα όρη και μικρότερη στις κοιλάδες (Σχήμα 2). Ως εκ τούτου, η κάτω συνοριακή γραμμή κάθε στρώματος εμφανίζει μικρότερη κλίση από την πάνω. Η διαφορά ύψους μεταξύ τους ελαττώνεται, οι μεταβολές στην ταχύτητα κατά την άνοδο ή την κάθοδο γίνονται λιγότερο έντονες, και το πάχος των στρωμάτων βαθμιαία εξομαλύνεται λόγω της συνεχούς απόσθεσης των καμπυλώσεων.

Κατερχόμενοι προς τον πυθμένα συναντάμε οριζόντια στρώματα ακίνητων υδάτινων μαζών. Ουσιαστικά, όμως, το νερό αυτό είναι στάσιμο μόνο ως προς τον ίδιο τον πυθμένα του ωκεανού, ενώ στο δικό μας σύστημα αναφοράς (του ακινητοποιημένου κύματος) κινείται με ταχύτητα  $c$  σε κατεύθυνσην αντίθετη από εκείνη προς την οποία διαδίδεται το κύμα: ομοίως ο πυθμένας κινείται με την ίδια ταχύτητα και προς την ίδια κατεύθυνση.

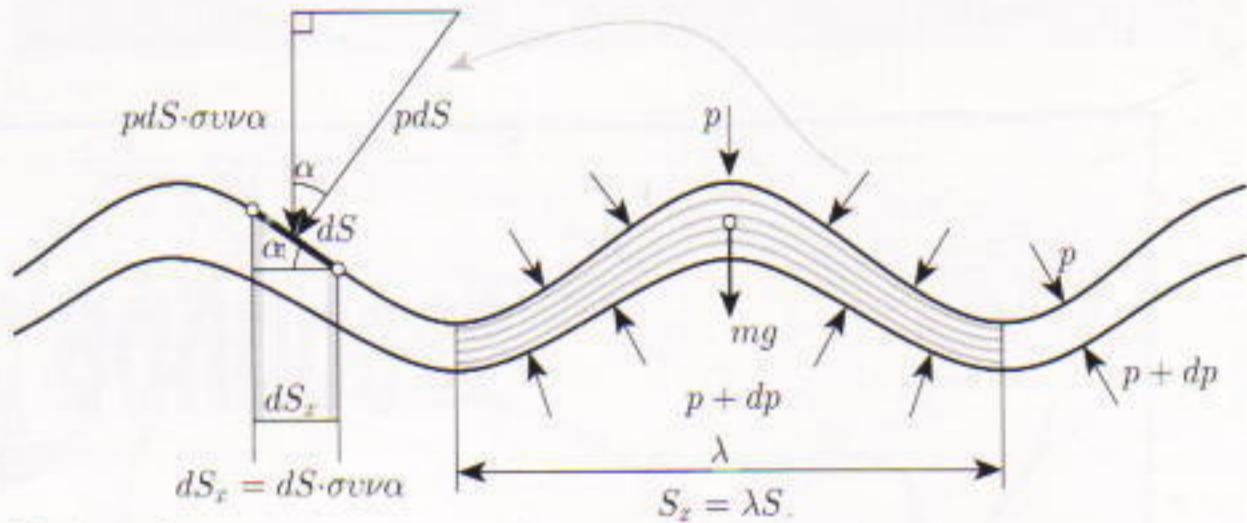
Εάν το βάθος της θάλασσας είναι επαρκώς μεγάλο ώστε να έχουμε σημαντική απόσθεση του κύματος, τότε στον πυθμένα του ωκεανού θα υπάρχουν ήρεμα νερά, και ως εκ τούτου ο πυθμένας δεν θα επηρεάζει την κίνηση στα ανώτερα στρώματα. Στο τέλος του άρθρου παρουσιάζω μια ποσοτι-



Σχήμα 3

κή μελέτη αυτής της συνδήκης. Προς το παρόν πάντως, έχει καταστεί σαφές γιατί το ανώμαλο έδαφος του πυθμένα της θάλασσας δεν επηρεάζει τα κύματα στην επιφάνειά της.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα  $c$  ενός σωματιδίου νερού στο σύστημα αναφοράς του «τρέχοντος κύματος» (στο οποίο ο πυθμένας του ωκεανού



Σχήμα 4

και η ακτή είναι ακίνητη) πρέπει να αθροίσουμε την ταχύτητα  $V$  του σωματιδίου κινουμένου κατά μήκος της κορυφογραμμής του κύματος και την ταχύτητα  $c$  της ίδιας της κορυφογραμμής (Σχήμα 3):

$$v = V + c$$

Παρακάτω, αυτή η απλή εξίσωση θα πάξει σημαντικό ρόλο.

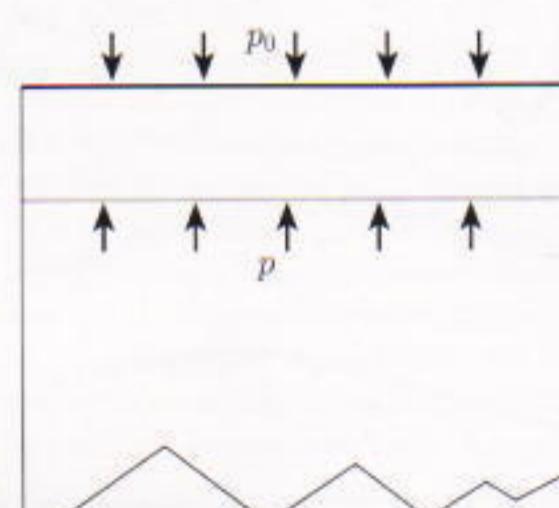
## Βαρύτητα και πίεση

Ο όρος «σάλος» χρησιμοποιείται όταν έχουμε κυματισμό με μήκος κύματος από ένα έως μερικές εκατοντάδες μέτρα. Στη μελέτη κυμάτων τέτοιου μεγέθους μπορούμε να αγνοήσουμε την επιφανειακή τάση. Το γεγονός όπι τέτοια κύματα διανύουν εκατοντάδες χιλιόμετρα χωρίς να υποστούν ιδιαίτερη απόσθεση, αποτελεί ένδειξη για τη μικρή σημασία που έχει γι' αυτά η τριβή. Συνεπώς, ο σάλος στην περίπτωση της αποδαλασσίας καθορίζεται από την αμοιβαία δράση δύο παραγόντων: της βαρύτητας και της πίεσης.

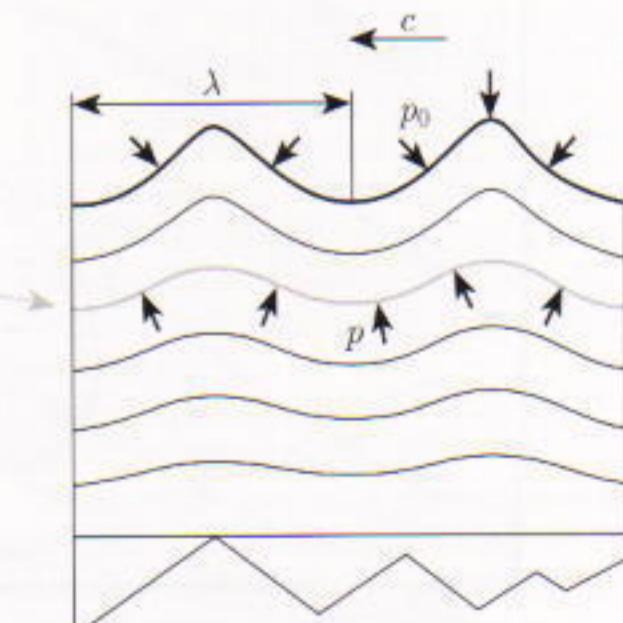
Σε κάθε σημείο της επιφάνειας του νερού η πίεση είναι ίδια, και ισούται με την ατμοσφαιρική πίεση. Σε πολύ

μεγάλο βάθος, τα στρώματα νερού είναι σχεδόν οριζόντια και το νερό ο' αυτά σχεδόν ακίνητο. Στα ήρεμα νερά, η πίεση σε δεδομένο βάθος είναι παντού ίδια. Σε μεγάλο βάθος, η πίεση διαφέρει από την ατμοσφαιρική, αλλά δεν μεταβάλλεται κατά μήκος οποιαδήποτε κορυφογραμμής, είτε αυτή βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια είτε σε μεγάλο βάθος. Στα ενδιάμεσα στρώματα νερού, οι μεταβολές στην πίεση δεν μπορούν να οφείλονται στην ατμοσφαιρική πίεση που είναι σταθερή σε όλη την επιφάνεια, όπως δεν μπορεί να οφείλεται και σε επερογένειες των κατώτερων στρωμάτων. Έτσι έχουμε ένα ιοχυρό επιχείρημα πώς η πίεση είναι η ίδια σημαντική επιφάνεια κάθε στρώματος.

Παρόν η πίεση είναι ίδια σε κάθε σημείο μιας κορυφογραμμής, μεταβάλλεται κατά τη μετάβαση από μια συνοριακή γραμμή σε άλλη. Η διαφορά της πίεσης και η δύναμη της βαρύτητας επιταχύνουν τα σωματίδια του νερού. Μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτήν τη διαφορά πίεσης με τη βοήθεια των ακόλουθων συλλογισμών.



Σχήμα 5



Ένα στρώμα νερού δεν κινείται πάνω κάπως ως ενιαίο όλον. Σε κάθε στοιχείο όγκου του στρώματος, μήκους  $\lambda$  ίσου με το μήκος κύματος  $\lambda$ , οι δυνάμεις δρουν όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.

Για να υπολογίσουμε τη δύναμη της πίεσης στην πάνω καμπυλωμένη συνοριακή γραμμή του στρώματος, σε κάθε σημείο της οποίας η πίεση είναι  $p$ , αρχίζουμε με ένα κεκλιμένο στοιχείο όγκου του στρώματος. Η δύναμη ισούται με την πίεση επί το εμβαδόν της επιφάνειας του στοιχείου, έχει δε διεύθυνση κάθετη στη συνοριακή γραμμή. Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης ισούται με την πίεση επί το εμβαδόν της οριζόντιας προβολής της επιφάνειας του στοιχείου (Σχήμα 4). Όταν αθροίσουμε όλες τις κατακόρυφες συνιστώσες, θα κρατήσουμε την πίεση ως κοινό παράγοντα, ενώ το άθροισμα των εμβαδών των προβολών θα μας δώσει το εμβαδόν  $\lambda L$  της οριζόντιας διατομής του στοιχείου του στρώματος (όπου  $L$  το πλάτος του). Συνεπώς, η ολική δύναμη της πίεσης στην πάνω συνοριακή γραμμή ισούται με  $p\lambda L$  και έχει κατεύθυνση προς τα κάτω.

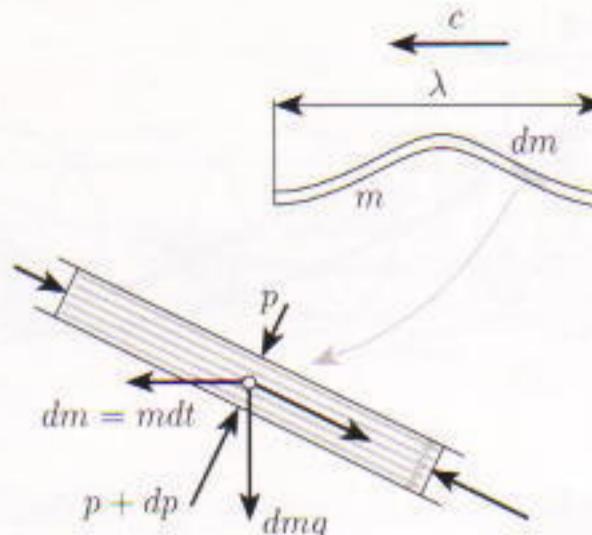
Για την κάτω συνοριακή γραμμή, όπου η πίεση είναι  $p + dp$ , η αντίστοιχη δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα πάνω και ισούται με  $(p + dp)\lambda L$ . Η διαφορά μεταξύ των δύο δυνάμεων εξισορροπεί τη δύναμη της βαρύτητας  $mg$ , όπου  $m$  είναι η μάζα του στοιχείου. Άρα,

$$dp = \frac{mg}{\lambda L}.$$

Ας δούμε όμως προσεκτικά την εξίσωση που μας δίνει την αύξηση της πίεσης. Η καμπύλωση δεν μεταβάλλει τη μάζα ενός στρώματος ή ενός στοιχείου του. Η μάζα παραμένει η ίδια με αυτήν που υπάρχει ανάμεσα στις οριζόντιες συνοριακές γραμμές του ίδιου στοιχείου στα ήρεμα νερά. Έτσι, σε ήρεμα νερά έχουμε την ίδια διαφορά πίεσης, αλλά και την ίδια πίεση. (Σε κάθε περίπτωση, η πίεση ξεκινά από την επιφάνεια με τιμή αυτή της ατμοσφαιρικής πίεσης). Στην καμπυλωμένη συνοριακή γραμμή, η πίεση ισούται με την αρχική υδροστατική πίεση που ασκούνταν στα σωματίδια της όπως ανήκε σε ήρεμα νερά. (Σχήμα 5).

## Επιτάχυνση ενός σωματιδίου νερού

Θεωρήστε ένα μικρό στοιχείο όγκου ενός λεπτού στρώματος νερού (Σχήμα



Σχήμα 6

6), με τα άκρα του κάθετα στην ταχύτητα ροής  $V$ . Κατά τη διάρκεια  $dt$  που περνά το νερό μέσα από αυτό το στοιχείο, το μήκος των κεκλιμένων συνοριακών γραμμών του είναι  $Vdt$  και το εμβαδόν της επιφάνειας του είναι  $LVdt$ . Για να εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και να υπολογίσουμε την επιτάχυνση, χρειάζεται να γνωρίζουμε τη μάζα  $dm$  του στοιχείου και τη συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν πάνω του.

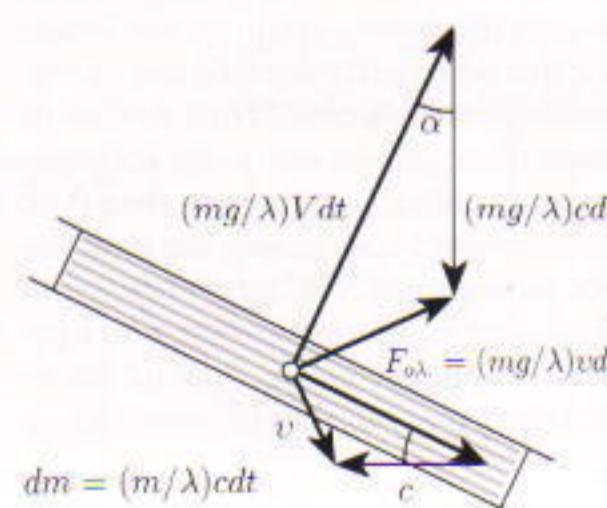
Σε διάστημα ίσο με την περίοδο  $T = \lambda/c$ , ολόκληρη η μάζα  $m$  του στοιχείου όγκου έχει αντικατασταθεί, οπότε η μάζα που διέρχεται από το στοιχείο ανά δευτερόλεπτο ισούται με  $m/T = (m/\lambda)c$ . Άρα, η μάζα που εισέρχεται στο στοιχείο σε χρόνο  $dt$  είναι

$$dm = \left( \frac{m}{\lambda} \right) c dt.$$

Επομένως, η βαρυτική δύναμη επί του στοιχείου ισούται με

$$dm \ g = \left( \frac{mg}{\lambda} \right) c dt,$$

έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και είναι



Σχήμα 7

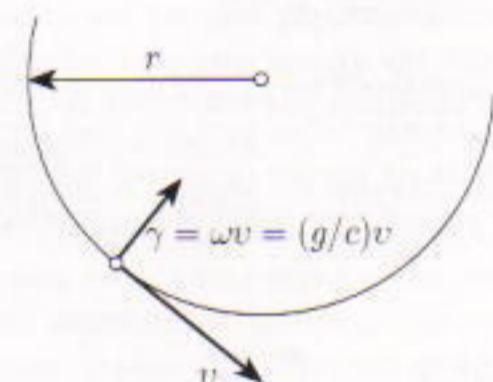
κάθετη στην ταχύτητα  $c$  του κύματος.

Η πίεση δεν μεταβάλλεται από τη μια άκρη ώς την άλλη ενός στρώματος, και η συνισταμένη των δυνάμεων στα δύο άκρα του παραπάνω στοιχείου είναι μηδέν. Έτσι, η διαφορά πίεσης  $dp$  στις κεκλιμένες συνοριακές επιφάνειες έχει αποτέλεσμα μια δύναμη

$$dp \ LV dt = \left( \frac{mg}{\lambda} \right) V dt,$$

που έχει διεύθυνση κάθετη στη συνοριακή γραμμή και υπό ορθή γωνία προς την ταχύτητα ροής  $V$ .

Και οι δύο δυνάμεις μπορούν να προκύψουν από τα διανύσματα  $V$  και  $c$  αντίστοιχα, κατά τον ίδιο τρόπο: περιστρέφοντάς τα κατά  $90^\circ$  και πολλαπλασιάζοντάς τα επί τον ίδιο παράγοντα  $(mg/\lambda) dt$ . Έτσι, η συνισταμένη τους μπορεί αντίστοιχα να προκύψει με τις ίδιες πράξεις από το άθροισμα  $V + c$  των διανυσμάτων: περιστροφή κατά  $90^\circ$  και πολλαπλασιασμός με τον παραπάνω παράγοντα (Σχήμα 7). Επειδή  $V + c = v$ , η ολική δύναμη μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ταχύτητας  $v$  ενός σωματίδιου νερού ως προς τον πυθμένα του ωκεανού (δηλαδή, στο σύστημα αναφοράς του τρέχοντος κύματος). Η δύναμη αυτή είναι κάθετη στην ταχύτητα  $v$  και ισούται με



Σχήμα 8

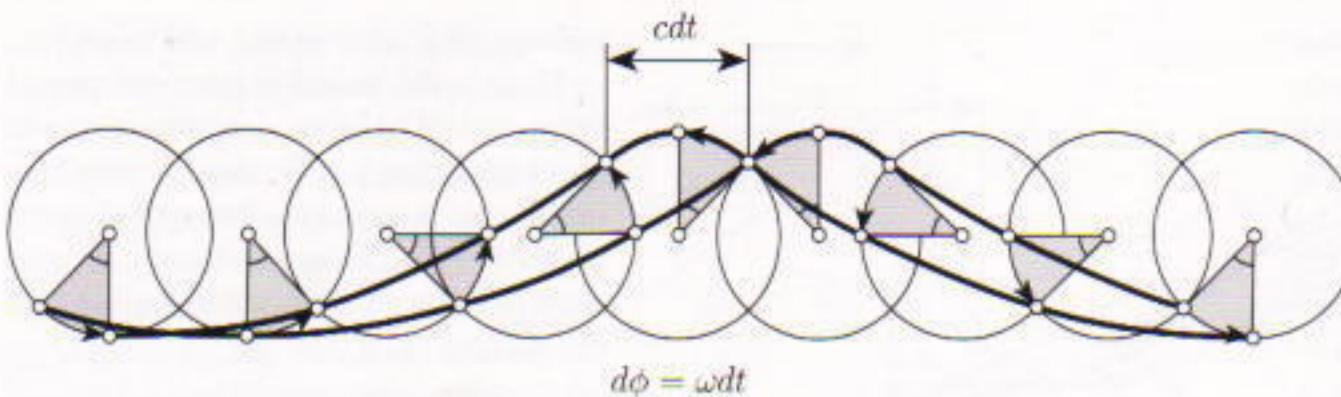
$$F_{\omega\lambda} = \left( \frac{mg}{\lambda} \right) v dt.$$

Διαιρώντας τη συνισταμένη δύναμη με τη μάζα  $dm$  λαμβάνουμε την επιτάχυνση του στοιχείου όγκου

$$\gamma = \frac{g}{c} v,$$

η οποία έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας  $v$ .

Βρισκόμαστε τώρα σ' ένα κρίσιμο σημείο. Υπολογίσαμε την επιτάχυνση



Σχήμα 9

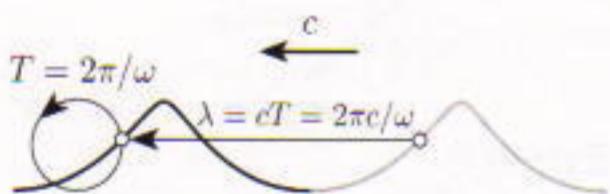
λόγω δυνάμεων βαρύτητας και πίεσης, και είμαστε πλέον έτοιμοι να προχωρήσουμε στις λεπτομέρειες μία προς μία.

## Μια εικόνα της κίνησης

Επιτάχυνση κάθετη στην ταχύτητα δεν μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας. Στην περίπτωσή μας η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο  $\gamma = (g/c)v$ . Επιπλέον, επιτάχυνση σταθερού μέτρου με διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας υποδηλώνει σαφώς ομαλή κυκλική κίνηση (Σχήμα 8). Για κυκλική τροχιά ακτίνας  $r$ , η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο  $\gamma = v^2/r$ , και επειδή η γωνιακή ταχύτητα ισούται με  $\omega = v/r$ , προκύπτει  $\gamma = \omega r$ . Συγκρίνοντας αυτήν τη σχέση με την έκφραση για το  $\gamma$  που προέκυψε παραπάνω, λαμβάνουμε για τη γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{g}{c}.$$

Τώρα διαθέτουμε μια πλήρη εικόνα της κίνησης: τα σωματίδια του νερού κινούται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα στην περιφέρεια ενός κύκλου σταθερής



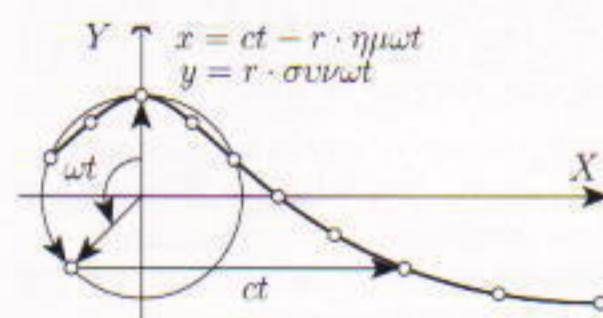
Σχήμα 10

ακτίνας. Για τα σωματίδια που αποτελούν την κορυφογραμμή του κύματος, οι ακτίνες των κύκλων είναι ίσες, ενώ τα κέντρα τους βρίσκονται επί μιας οριζόντιας γραμμής. Τα σωματίδια περιστρέφονται ταυτόχρονα η γωνιακή μετατόπιση μεταξύ των σωματίδιων δεν αλλάζει, αλλά η κορυφογραμμή του κύματος ως όλον «διαδίδεται»

με ταχύτητα  $c$  (Σχήμα 9). Αυτό, βεβαίως, συμβαίνει σε κάθε βάθος του νερού – μόνο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης μεταβάλλεται από στρώμα σε στρώμα.

Επειτα από χρονικό διάστημα  $T = 2\pi/\omega$ , ένα σωματίδιο θα βρίσκεται και πάλι στην αρχική του θέση στο ίδιο στοιχείο όγκου, ώστόσο θα ανήκει στο επόμενο κύμα (Σχήμα 10) – εκείνο, που στο διάστημα  $T$  διήνυσε την απόσταση  $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$ . Επειδή  $\omega = g/c$ , έχουμε  $\lambda = 2\pi c^2/g$ , οπότε προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση για την ταχύτητα των κύματος:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$



Σχήμα 11

Είναι ευκολότερο να κατανοήσουμε τη μορφή της κορυφογραμμής του κύματος στο σύστημα αναφοράς του ακινητοποιημένου κύματος. Τότε, το ίδιο το σωματίδιο χαράζει αυτήν την κορυφογραμμή, καθώς η κίνησή του είναι ένας ουνδυασμός περιστροφής και μεταφοράς με ταχύτητα  $c$ . Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε το σχήμα του κύματος και να βρούμε την εξάρτηση των συντεταγμένων από το χρόνο:

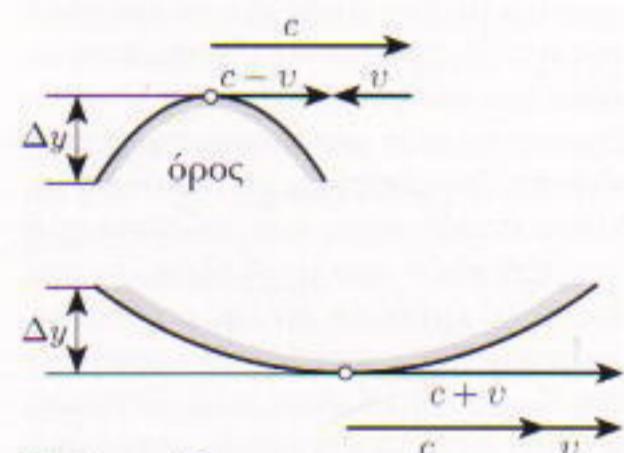
$$x = ct - r \cdot \eta\mu\omega t, \\ y = r \cdot \sigma\upsilon\omega t.$$

Η αρχή των συντεταγμένων (Σχήμα

11) έχει επιλεγεί έτοιμη ώστε να συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου, ενώ ως αρχή του χρόνου θεωρείται η σπιγμή που το σωματίδιο βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο του όρους του κύματος.

Στα ασθενικά κύματα (όπου  $v = \omega r \ll c$ ), η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας  $V_x = c - \omega r \cdot \sigma\upsilon\omega t$  μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και ίση με  $c$ .

Άρα  $x \approx ct$ . Στην έκφραση για το  $y$  αντικαθιστούμε το  $t$  με  $x/c$ ,



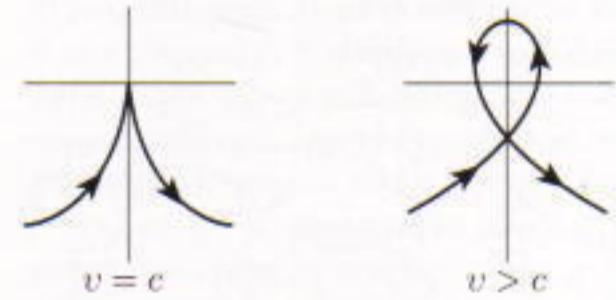
Σχήμα 12

και λαμβάνουμε μια προσεγγιστική εξίσωση για την κυματική εικόνα:

$$y = r \cdot \sigma\upsilon\omega \left( \frac{\omega x}{c} \right) = r \cdot \sigma\upsilon\omega \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \right).$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ένα ασθενικό κύμα έχει ημιτονοειδή μορφή. Η παραπάνω συνδήκη «ασθενικότητας» ισοδυναμεί με την ανισότητα

$$r \ll \frac{\lambda}{2\pi}.$$



Σχήμα 13

Στον μέτριο κυματισμό παρατηρούμε ότι τα όρη γίνονται πιο αιχμηρά ενώ οι κοιλάδες πιο πεπλατυσμένες (Σχήμα 12). Τα πλάτη για τα όρη και τις κοιλάδες είναι ίσα, το μήκος όμως στον οριζόντιο άξονα είναι μικρότερο



Σχήμα 14

στα όρη απ' όπου στις κοιλάδες; Η ταχύτητα των υψηλότερων σημείων ενός όρους είναι  $c - v$ , ενώ του χαμηλότερου σημείου μιας κοιλάδας είναι  $c + v$ . Όσο περισσότερο πλησιάζει η τιμή του  $v$  το  $c$  τόσο πιο αιχμηρά γίνονται τα όρη του κύματος.

Η φυσική μας διαίσθηση μας λέει ότι πρέπει να περιμένουμε κάτι ασυνήθιστο όταν υπερβούμε το φυσικό όριο της ταχύτητας του κύματος. Θεωρητικά, όταν  $v = c$ , εμφανίζεται μια κατακόρυφη ακίδα ως όρος, απειρώς αιχμηρή, ενώ για  $v > c$  η κορυφογραμμή τέμνει τον εαυτό της και δημιουργείται ένας θρόχος (Σχήμα 13). Για ένα κύμα στον ωκεανό, το σενάριο αυτό φαίνεται αρκετά παράξενο. Σύμφωνα με τη θεωρία μας, όταν το  $v$  είναι λίγο μικρότερο του  $c$ , τα στρώματα κοντά στα αιχμηρά όρη καμπυλώνονται απότομα και η ταχύτητα ροής μεταβάλλεται έντονα από στρώμα σε στρώμα. Υπάρχουν αρκετά ερωτήματα όχι μόνο ως προς τη σταθερότητα μιας τέτοιας κίνησης, αλλά ακόμη και κατά πόδιον αυτή η κίνηση έχει τη δυνατότητα να είναι σταθερή. Επομένως το πρόβλημα των μεγάλων κυμάτων φαίνεται να απαιτεί λεπτομερέστερη μελέτη.

## Απόσβεση των κυμάτων σε μεγάλα βάθη

Τα όρη, όπως και οι κοιλάδες, των «στρωματικών» κυματισμών βρίσκονται ακριβώς το ένα κάτω από το άλλο, καθώς αυξάνει το βάθος. Στα σημεία της κορυφογραμμής που είναι συμμετρικά ως προς τα μέγιστα των ορέων, η απόλυτη τιμή της ταχύτητας ροής είναι ίση. Επίσης, σ' αυτά τα σημεία το πάχος του στρώματος είναι ίδιο αφού η ροή είναι σταθερή, οπότε και αποκλείεται ο ποιαδήποτε ασυμμετρία.

Σ' ένα ακινητοποιημένο κύμα, οι συνοριακές γραμμές ενός στρώματος διατυράφονται από τις τροχιές των σωματιδίων που το απαρτίζουν. Η κίνηση

αυξάνει το βάθος. Επειδή  $v = \omega r$ , η ελάττωση της ακτίνας είναι ανάλογη προς την ίδια την ακτίνα. Όταν το κέντρο του κύκλου χαμηλώσει κατά  $dh$ , η ακτίνα ελαττώνεται αναλογικά:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\omega}{c} dh.$$

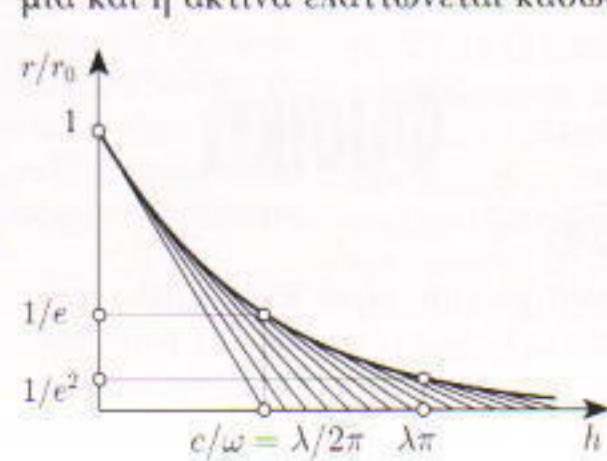
Αρχίζοντας από έναν κύκλο ακτίνας  $r_0$  στην επιφάνεια, και κατεβαίνοντας με μικρά βήματα από το κέντρο του, μπορούμε να υπολογίσουμε γραφικά ή αριθμητικά την τιμή της ακτίνας σε οποιοδήποτε βάθος  $h$  (Σχήμα 15). Οι αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης είναι οι θέση να καταλήξουν στην αναλυτική έκφραση

$$r = r_0 \cdot e^{-\frac{\omega h}{c}} = r_0 \cdot e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}.$$

(Το να βρείτε τη σχέση  $\omega/c = 2\pi/\lambda$  δεν παρουσιάζει επίσης μεγάλη δυσκολία).

Το πλάτος των κυμάτων και η ταχύτητα του νερού ελαττώνονται με γεωμετρική πρόσοδο καθώς αυξάνει το βάθος. (Ο αριθμός  $e$  ισούται περίπου με  $2,72 \cong 10^{0.43}$ ). Σε βάθος ίσο με  $\lambda/2\pi$ , το κύμα έχει αποσθετεί κατά έναν πάραγοντα περίπου ίσο με 3. Σε βάθος ίσο με το μήκος κύματος, ο παράγων αυτός ισούται με  $e^{2\pi}$ , δηλαδή περίπου 535. Όταν, λοιπόν, ο πυθμένας του ωκεανού βρίσκεται σε βάθος της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος, η επίδρασή του στα κύματα είναι πολύ αισθενέστερη από αυτήν της επιφάνειας, γεγονός που μας επιτρέπει να αγνοούμε την πρώτη.

Και τώρα, μια τελευταία παρατήρηση. Η βασική υπόθεση στην παρουσίασή μας ήταν η απουσία πτώσης πίεσης κατά μήκος των καμπυλωμένων στρωμάτων νερού. Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει ότι ο κυματισμός σε μεγάλο βάθος είναι όμοιος με τον κυματισμό στην επιφάνεια του νερού, με μοναδική διαφορά την διαφορετική τιμή της πίεσης σε κάθε καμπύλη. Η ανακάλυψη αυτού του είδους «αυτοομοιότητας» βοήθησε πολύ στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων ευρέος φάσματος, από τη μηχανική ρευστών ως τη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων. Στην περίπτωσή μας, βέβαια, η προέγγιση αυτή κατέστησε δυνατό να περιγραφεί η κίνηση ολόκληρης της μάζας του νερού με την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα σε μία και μόνη σταγόνα.



Σχήμα 15

# Προκλήσεις στη Φυσική και τα Μαθηματικά

## Μαθηματικά

M6

Παραγόντικά και δυνάμεις. (α) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \cdots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(όπου  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ).

(β) Βρείτε το άθροιομα

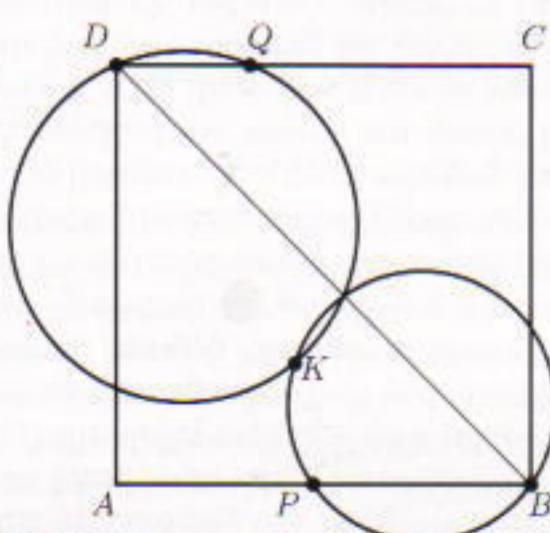
$$\frac{1 \cdot 3!}{3} + \frac{2 \cdot 4!}{3^2} + \cdots + \frac{n(n+2)!}{3^n}.$$

(V. Zhokha)

M7

Συνάντηση στη διαγώνιο. Σχεδιάζουμε μια ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο  $K$ , το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τετραγώνου  $ABCD$ . Η ευθεία αυτή τέμνει τις απέναντι πλευρές  $AB$  και  $BC$  του τετραγώνου στα σημεία  $P$  και  $Q$ , αντίστοιχα (Σχήμα 1). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας διέρχεται από τα σημεία  $K, B$ , και  $P$ , και ο άλλος από τα σημεία  $K, D$ , και  $Q$ . Αποδείξτε ότι το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων (όχι το  $K$  δηλαδή) βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο  $BD$ .

(V. Dubrovsky)



Σχήμα 1

M8

Παιχνίδια με δευτεροβάθμιες. Σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση αντικαθιστούμε τους συντελεστές με αστερίσκους:  $*x^2 + *x + * = 0$ . Ο πρώτος παίκτης λέει τρεις αριθμούς. Ο δεύτερος τους γράφει – με όποιο τρόπο θέλει – στη θέση των αστερίσκων. Υπάρχει τρόπος να εξασφαλίσει ο πρώτος παίκτης ότι η εξίσωση που προκύπτει θα έχει δύο διαφορετικές ριζές, ανεξάρτητα από το πώς θα γράψει τους συντελεστές ο δεύτερος παίκτης; (A. Berzins)

M9

Το οκτάγωνο που πάει παντού. (α) «Κυλάμε» ένα κανονικό οκτάγωνο περιστρέφοντάς το (έξω απ' το επίπεδό του) γύρω από οποιαδήποτε πλευρά του (δηλαδή, παίρνοντας το συμμετρικό του ως προς μια πλευρά). Αποδείξτε ότι μπορούμε να διαλέξουμε την ακολουθία των κυλίσεων έτσι ώστε το κέντρο του οκταγώνου να καταλήξει στο εσωτερικό ή την περιφέρεια δοθέντος (οσοδήποτε μικρού) κύκλου. (β) Λύστε το ίδιο πρόβλημα για ένα κανονικό πεντάγωνο. (γ) Για ποια κανονικά πολύγωνα αληθεύει η ίδια πρόταση; (G. Galperin)

M10

Σύνδετα αδροίσματα τετραγώνων. Αποδείξτε ότι ο αριθμός  $(235^2 + 972^2)$  είναι σύνθετος. (D. Fomin)

## Φυσική

Φ6

Ελατήριο στο νερό. Ένα μεγάλο ομογενές ελατήριο έχει μήκος  $L$  όταν βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας «ξαπλωμένο» πάνω σε ένα τραπέζι, και αποτελείται από ένα μεγάλο πλήθος όμοιων σπειρών. Όταν το ελατήριο το-

ποθετηθεί καπικόρυφα μέσα σ' έναν ψηλό κύλινδρο με λειό τοίχωμα, αποκτά το μισό από το αρχικό του μήκος. Ρίχνουμε μέσα στον κύλινδρο νερό ώσπου η στάθμη του να φτάσει σε ύψος  $L/2$ . Ποιο είναι το μήκος του ελατηρίου μετά την προσθήκη του νερού; Η πυκνότητα του ελατηρίου είναι  $\rho$  και του νερού  $\rho_0$ . (S. Krotov)

Φ7

Αυτό το φορτίο δεν είναι μόνο του. Τοποθετούμε ένα σημειακό σωματίδιο μάζας  $m$  και φορτίου  $Q$  σε απόσταση  $L$  από μία αγώγιμη επίπεδη επιφάνεια απείρων διαστάσεων και το αφήνουμε ελεύθερο. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σωματίδιο στην επιφάνεια; Αγνοήστε την επίδραση της βαρύτητας. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του φορτίου-ειδώλου). (A. Bytsko)

Φ8

Σωμήρια εξάχνωση. Σε ένα διήγημα επιστημονικής φαντασίας, ένας αστροναύτης με μάζα  $M = 100 \text{ kg}$  βρίσκεται σε απόσταση  $L = 100 \text{ m}$  από το διαστημόπλοιο του μ' ένα ποτήρι παγωμένο νερό στο χέρι. Με τη βοήθεια της εξάχνωσης του πάγου ο αστροναύτης καταφέρνει να επιστρέψει στο σκάφος του. Είναι πραγματικά δυνατός αυτός ο τρόπος διάσωσης; Υπολογίστε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για την επιστροφή στο διαστημόπλοιο. Υποδέστε ότι η εξάχνωση του πάγου γίνεται σε σταθερή θερμοκρασία  $T = 272 \text{ K}$ . Η τάση των κεκρεομένων ατμών σε αυτή τη θερμοκρασία είναι  $P = 550 \text{ Nt/m}^2$ . Η παγκόσμια σταθερά των αερίων είναι  $R = 8,3 \text{ Joule}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ . Το μέγεθος του ποτηριού και η μάζα του πάγου μπορεί να έχουν όποια τιμή επιθυμείτε. (A. Stasenko)

Η συνέχεια στη σ. 39 ➔

## Ιστορικό ορόσημο

Αγαπητό *Quantum*,

Κρατάω στα χέρια μου το πρώτο τεύχος του περιοδικού και πραγματικά μένω έκδαμπος από την καλαιοθησία, το ουσιαστικό περιεχόμενο και τις ελληνικές προεκτάσεις του. Μου φαίνεται πραγματικά καταπληκτικό ότι στη μικρή Ελλάδα μας κατορθώσατε μια τόσο υψηλού επιπέδου έκδοση. Μου ήρθαν «παλιές θύμησες», που λέει και ο ποιητής, όταν στα μέσα της δεκαετίας του 1960, μαζί με τον αγαπημένο φίλο Γιώργο Σύφα γυρνούσαμε στα παλαιοπωλεία/βιβλιοπωλεία (-άκεια) της οδού Μασσαλίας – νυν πεζόδρομος –, ψάχνοντας παλιά βιβλία που να περιέχουν «γερές αισκήσεις» και παλιά θέματα των εισαγωγικών εξετάσεων του Πολυτεχνείου, στη φυσική, τη χημεία και τα μαθηματικά! Πού να είχαμε στα χέρια μας κάτια σαν το *Quantum*. Θα ήμαστε οι ευτυχέστεροι άνθρωποι του κόσμου! Ας είναι...

Πιστεύω πάντα ότι η ουσιαστική προσπάθεια στην εκπαίδευση αρχίζει, τουλάχιστον, από τη μέση εκπαίδευση, και εκεί γίνεται η σωστή γαλούχηση και το λευτέρωμα του νου, για να πετάξει σε άλλες σφαίρες, πέρα από την καθημερινή ανία και μικρότητα, και, πρέπει να φυτευτούν οι «σπόροι» για μια δημιουργική και πετυχημένη ζωή. Το *Quantum* ίσως προσφέρει στον τόπο μας ό,τι δεν έχουν προσφέρει μέχρι τώρα «μεγαλόστομες μεταρρυθμίσεις», που αλλάζουν σε μία νύχτα και ξεχνιούνται μετά τις εκάστοτε εκλογές! Εάν υπάρχει η παραμικρή όρεξη και ευαισθησία στον τόπο μας, αυτό το περιοδικό πρέπει να είναι στο «προσκέφαλο» κάθε «θετικής» κατευθύνσεως μαθητή, φοιτητή και γενικότερα σκεπτομένων ανθρώπων. Οι καθηγητές στα λύκεια πρέπει να το «διδάσκουν» σε ελεύθερο χρόνο, έτσι ώστε να γίνει φυτώριο για μια νέα γενιά από ελληνόπουλα, που κατόπιν θα βρεθούν, φυσιολογικά, στα οριακά σύνορα της «θετικής» γνώσης σήμερα. Πρέπει να νικήσουμε και να διαφεύγουμε το πικρό μαντάτο του Enrico Fermi, «Η γνώση είναι δύναμη, μα φοβάμαι ότι, σχεδόν για πάντα, η άγνοια δεν θα σημαίνει αδυναμία»!

Τελειώνοντας, θέλω να ευχαριστήσω ολόψυχα όλους όσουι συμμετέχουν σ' αυτή την εκδοτική προσπάθεια, για τη χαρά και τη συγκίνηση που μου προσέφεραν με την έκδοση του *Quantum*. Θέλω να πιστεύω ότι στο μέλλον θα γίνει ιστορικό ορόσημο, ακούγοντας μελλοντικούς μεγάλους έλληνες επιστήμονες να λένε: «Μου άνοιξε η όρεξη διαβάζοντας το *Quantum*...». Σίγουρα δεν θα υπάρχει πιο μεγάλη υπερηφάνεια για όσους εργάζονται για το περιοδικό.

Με φιλικότατους χαιρετισμούς,

Δημήτρης Νανόπουλος,

Καθηγητής Θεωρητικής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο A&M  
του Τέξας, Ερευνητής στο CERN

## Η διαβολική σπείρα

Αγαπητοί εκδότες του *Quantum*

Εύχομαι καλό ξεκίνημα και ευόδωση των προσπαθειών σας. Πιστεύω ότι ένα περιοδικό με την σκοπιά που υιοθετεί το *Quantum*, αλλά και την εγκυρότητα που το χαρακτηρίζει, είναι χρήσιμη προσδήκη στα, επίσης καλά, περιοδικά μαθηματικών και φυσικής που κυκλοφορούν στην χώρα μας.

Με την ευκαιρία, θα ήθελα να σχολιάσω ορισμένα σημεία του άρθρου «Τόροι, Τόροι, Τόροι!» του τεύχους I.

Η λέξη «τόρος» ως απόδοση του λατινικού *torus* απαντάται συχνά στην ελληνική βιβλιογραφία, αλλά ελπίζω να μην καθιερωθεί. Όσοι χρησιμοποιούν τον νεολογισμό «τόρος» αντί του πιο δόκιμου «σπείρα», ασφαλώς δεν γνωρίζουν ότι ο δεύτερος αυτός όρος προέρχεται από την αρχαία ελληνική γεωμετρία. Π.χ. ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, στο έργο του «Όροι» δίνει τον ορισμό: «Σπείρα γίνεται όταν κύκλος ἐπὶ κύκλου τὸ κέντρον ἔχων ὄρθος ὡν πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον περιενεχθεὶς εἰς τὸ αὐτὸν πάλιν ἀποκατασταθῆ».

Δεν έμειναν όμως τα πράγματα μόνο στον ορισμό. Πολύ πιο πριν από τον Ήρωνα, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος είχε χρησιμοποιήσει σπείρα για να λύσει με ιδιαίτερα εντυπωσιακό τρόπο το πρόβλημα του διπλασιαμού του κύβου, κάνοντας χρήση τριών στερεών. Η μέθοδος του σώζεται από τον Ευτόκιο στο έργο του «Σχόλια του Αρχιμήδη». Επίσης, ο όγκος σπείρας δεν θρέθηκε πρώτα από τον Κέπλερ, όπως υπονοεί το άρθρο, αλλά από τον Διονυσόδωρο.

Τον όγκο αυτό (από όπου και η πληροφορία) μάς τον δίνει, σωστά, ο Ήρων ο Αλέξανδρεύς στα «Μετρικά» του. Από εκεί άλλωστε ξεκίνησε ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς, ο οποίος γενίκευσε τον σχετικό τύπο διατυπώνοντας στην «Συναγωγή» του (βιβλίο 2) τα περίφημα θεωρήματά του για εμβαδά και όγκους εκ περιστροφής. Ήταν μάλιστα πολύ περήφανος ο Πάππος για τα δύο αυτά θεωρήματα, αφού λέει «... ἐγώ... δείξας πολλῷ κρείσσονα καὶ πολλήν προφερόμενα ώφέλειαν...».

Παρεμπιπόντως, τα δύο θεωρήματα του Πάππου ονομάζονται στο άρθρο θεωρήματα Guldin. Άλλοι τα βλέπει κανείς και ως Πάππου-Guldin, προς τιμήν του Guldin (1577-1643), ο οποίος τα ξαναβρήκε τον 16ο αιώνα, αν και υπάρχουν βάσιμοι λόγοι να πιστεύουμε ότι ο Guldin είχε δει το ελληνικό χειρόγραφο του 12ου αιώνα με τη «Συναγωγή», όταν επισκέφθηκε τη βιβλιοθήκη του Βατικανού το 1609. Επιπλέον, στην πρώτη λατινική μετάφραση και τυπογραφική έκδοση της «Συναγωγής» (από τον Commandino το 1588), από διαβολικό παιχνίδι του δαίμονα του τυπογραφείου, παραλείπονται τα δύο θεωρήματα!).

Φιλικά,

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής  
Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

# Ένας αυτοκράτορας στην Αθήνα

*O Roger Penrose μιλά στο Quantum*

Ο καθηγητής Roger Penrose βρέθηκε στην Αθήνα στις 16 Μαΐου, με αφορμή την έκδοση στη χώρα μας του βιβλίου του *The Emperor's New Mind* από τις εκδόσεις Γκοβόστη. [Στα ελληνικά το βιβλίο κυκλοφόρησε με τον τίτλο Ο νέος Αυτοκράτορας (·).] Με την ευκαιρία αυτή δέχτηκε μετά χαράς να μιλήσει στον Γιώργο Ευαγγελόπουλο τόσο για το βιβλίο του όσο και για τις απόψεις του για την επιστήμη και τις προοπτικές της.

Ερ.: Καθηγητά Penrose, για όλους εκείνους που γνωρίζουν την επιστημονική εργασία και τα προηγούμενα βιβλία σας στο χώρο της μαθηματικής φυσικής, το *The Emperor's New Mind* (Η καινούργια νόηση του Αυτοκράτορα) αποτέλεσε έκπληξη. Το βιβλίο είναι μια σφραγίδη επίδειος κατά της ισχυρής τεχνητής νοημοσύνης και στοχεύει να δείξει πώς υπάρχουν κάποιες όψεις της ανθρώπινης νόησης που δεν είναι δυνατό να προσδομούν από τις υπολογιστικές μηχανές. Πώς αποφασίσατε να γράψετε ένα βιβλίο με αυτό το θέμα, και γιατί διαλέξατε τον συγκεκριμένο τίτλο;

Απ.: Για πολύ καιρό σχεδίαζα να γράψω ένα εκλαϊκευτικό βιβλίο. Σκεφτόμουν ότι έτσι θα μπορούσα να εξηγήσω κάποια επιστημονικά θέματα και να αποσαφηνίσω τη φιλοσοφική μου άποψη. Ο λόγος όμως για τον οποίο έγραψα αυτό το βιβλίο προέκυψε όταν, παρακολούθησαν ένα τηλεοπτικό πρόγραμμα με θέμα την τεχνητή νοημοσύνη, όπου επιστήμονες όπως ο Marvin Minsky εξέφραζαν ακραίες θέσεις, ένιωσα ότι η δική μου άποψη δεν είχε εκφραστεί ποτέ. Μου φάνηκε, λοιπόν, ότι είχα να πω κάτι οημαντικό, και γι' αυτό έγραψα το βιβλίο. Τον τίτλο τον οκέφητα αρκετά νωρίς. Πρόκειται για το γνωστό παραμύθι με τα καινούργια ρούχα του αυτοκράτορα, του Hans Chris-

tian Andersen, όπου οι δόλιοι ράφτες υποκρίνονται ότι μπορούν να υφάνουν, με το χρυσάφι που τους δόθηκε, κάποια υπέροχη φορεσιά, την οποία θα μπορούσαν να δουν μόνο όσοι ήταν καλοί, τίμοι και άξιοι. Έτσι, κανείς δεν θα παραδεχόταν ότι δεν υπάρχει καμία φορεσιά. Αυτή η ιστορία θυμίζει την εικόνα που έχει παρουσιαστεί για την τεχνητή νοημοσύνη. Δηλαδή, ενώ εκεί δεν υπάρχει καθόλου νόηση, ακόμη και όσοι το γνωρίζουν δεν έπρεπε να δεχτούν το αντίθετο, επειδή κάποιοι άλλοι το υποστηρίζουν.

Ερ.: Στο βιβλίο σας εξετάζετε τι μπορούν να μας πουν τα μαθηματικά και η φυσική για το πώς λειτουργεί η νόηση, τι δεν μπορούν να μας πουν και τι πρέπει να γνωρίζουμε για να αντιληφθούμε τις φυσικές διαδικασίες της συνείδησης. Η επιχειρηματολογία σας περιλαμβάνει δύο μέρη: στο πρώτο προσπαθείτε να δείξετε ότι ο άνθρωπος μπορεί να νικήσει κάθε μηχανή, λύνοντας ένα πρόβλημα ή αποδεικνύοντας ένα θεώρημα το οποίο η μηχανή αδυνατεί

να λύσει ή να αποδείξει. Στο δεύτερο μέρος περιγράφετε πώς η κβαντική θεωρία παρέχει μια πιθανή εξήγηση για όσα εκδέτετε στο πρώτο μέρος. Θα θέλατε να εξηγήσετε στους αναγνώστες του *Quantum* πώς φτάσατε σ' αυτό το συμπέρασμα;

Ο μεγάλος θεωρητικός φυσικός Roger Penrose γεννήθηκε το 1931. Σπούδασε στο University College του Λονδίνου και στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ. Από το 1973 είναι καθηγητής μαθηματικών στην έδρα Rouse Ball του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης. Αρχικά ασχολήθηκε με την αλγεβρική γεωμετρία. Το έργο του στο χώρο της γενικής σχετικότητας είναι πολύ οημαντικό, διότι το αηιγόν μαθηματικό υπόβαθρο της σκέψης του τον οδήγησε σε μια προσέγγιση που διέφερε από όσες είχαν υιοθετηθεί ώς ίστοι. Αξίζει να αναφερθεί ιδιαίτερα η εξαιρετικά γόνιμη συνεργασία του με τον κορυφαίο αστροφυσικό Stephen Hawking, μαζί με τον οποίο απέδειξε τα θεωρήματα της ύπαρξης των χωροχρονικών ανωμαλιών και αποκάλυψε πολλές από τις ιδιότητες μιας μαύρης τρύπας. Πιο πρόσφατα, ασχολήθηκε με τη διατύπωση της θεωρίας των twistors, η οποία προσφέρει μια νέα και πολλά υποσχόμενη προσέγγιση για την κβάντωση του χωρόχρονου. Στο εύρος των ενδιαφερόντων του, όμως, περιλαμβάνονται και τα φυχαγωγικά μαθηματικά. Έτσι, επινόησε, αρχικά για παχνίδι, την πλακόστρωση Penrose, που εκ των υστέρων αποδεικνύεται ότι αποτελεί μια ιδέα η οποία προεκτείνεται στην κρυσταλλογραφία, διανοίγοντας νέες προοπτικές. Το ακαταπόνητο ερευνητικό του ενδιαφέρον στράφηκε, κατά τα τελευταία χρόνια, και στην τεχνητή νοημοσύνη, η οποία είναι το θέμα του πρόσφατου βιβλίου του *The Emperor's New Mind*. Το 1988 τιμήθηκε, μαζί με τον Stephen Hawking, με το Βραβείο Wolf, για τη συμβολή του στην καπανόηση του σύμπαντος.

**Απ.:** Χρησιμοποιώ την κβαντική θεωρία ως «αρνητικό» επιχείρημα για να στηρίξω όσα εκδέτω στο πρώτο μέρος. Το επιχείρημα αυτό αποδεικνύει ότι, χρησιμοποιώντας τη νόησή μας, κάνουμε κάτι «μη υπολογιστικό», κάτι διαφορετικό από αυτό που μπορεί να κάνει ένας υπολογιστής. Δεν υιοθετώ βεβαίως την άποψη πως υπάρχει κάτι πέρα από τη συνηθισμένη υλική ύπαρξη, κάτι διαφορετικό στον τρόπο συμπεριφοράς της ύλης από τον τρόπο συμπεριφοράς ενός υπολογιστή. Ωστόσο, μπορεί να είναι κάτι πολύ αδιόρατο. Αν εξετάσουμε τη γνωστή επιστήμη, και πρώτα απ' όλα την κλασική επιστήμη, που περιλαμβάνει τη νευτώνεια μηχανική, διαπιστώνουμε ότι η ύλη συμπεριφέρεται μ' έναν τρόπο που είναι ουσιαστικά «υπολογίσιμος». Θα μπορούσε δηλαδή να «εισαχθεί» σε έναν υπολογιστή. Αυτό αληθεύει και για την κβαντική μηχανική, αν παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά της ύλης σε μικροσκοπικό επίπεδο. Υπάρχει όμως ένα παράξενο, μυστηριώδες χαρακτηριστικό στον τρόπο με τον οποίο η συμπεριφορά της ύλης σε μικροσκοπικό επίπεδο συσχετίζεται με τη συμπεριφορά της σε μικροσκοπικό επίπεδο. Πρόκειται για τη γνωστό στην κβαντική θεωρία «πρόβλημα της μέτρησης». Δεν έχουμε απλώς πολλά μικρά πράγματα τα οποία προοδετούμε για να πάρουμε ένα μεγάλο πράγμα. Συμβαίνει κάτι εντελώς διαφορετικό, σ' ένα συγκεκριμένο επίπεδο κλίμακας. Και κανένας δεν το καταλαβαίνει πραγματικά. Αυτό που λέω εγώ είναι ότι εδώ ακριβώς υπεισέρχεται η «μη υπολογιστική» φυσική.

**Ερ.:** Αυτό είναι το θέμα της επόμενης ερώτησής μου. Στο βιβλίο σας υποστηρίζετε ότι υπάρχει ένα οημαντικό κενό στη γνώση, στο οημείο όπου συναντιούνται η κλασική και η κβαντική φυσική. Θά θέλα να συνδέσω αυτό με μια άλλη σημαντική παρατήρησή σας. Στην κριτική που γράφατε για το βιβλίο *Dreams of a Final Theory*

(Όνειρα για μια τελική θεωρία) του Weinberg στο *The New York Review of Books* επισημαίνετε ότι «καμία θεωρία δεν θα μπορέσει να είναι “τελική”, αν δεν ενσωματώσει σημαντικές αλλαγές του υπάρχοντος πλαισίου της κβαντικής θεωρίας». Αυτό σημαίνει ότι δεν πιστεύετε πως βρισκόμαστε κοντά σε μια μεγάλη ενοποιημένη θεωρία; Γιατί δεν εμπιστεύεστε τη θεωρία των υπερχορδών, αλλά ούτε και την περίφημη θεωρία των twistors, που α-

ποτελεί τη δική σας προσάρδεια τις δύο τελευταίες δεκαετίες να εξερευνήσετε έναν χώρο βαθύτερο από αυτόν των σωματιδίων και των πεδίων της κβαντικής μηχανικής;

**Απ.:** Η θεωρία των υπερχορδών, αλλά και κάθε άλλη σοβαρή σχετική θεωρία, οι υπάρχουσες θεωρίες της κβαντικής βαρύτητας ή η θεωρία των twistors, την οποία αναφέρατε, έχουν όλες ένα κοινό χαρακτηριστικό: δέχονται απλώς την κβαντική θεωρία στην παρούσα μορφή της. Αν όμως εξετάσετε αυτό που μας λέει η κβαντική θεωρία στην παρούσα μορφή της για την ύλη σε μακροσκοπικό επίπεδο, θα διαπιστώσετε κάτι παράδοξο, το οποίο πολλοί προσπαθούν να άρουν. Έχω παρακολουθήσει την ευρεία συζήτηση που γίνεται γι' αυτό το θέμα. Αν όμως εξετάσετε προσεκτικά τα πράγματα, θα παρατηρήσετε ότι ουδέποτε παρέχεται μια εξήγηση για το λόγο για τον οποίο δεν έχουμε αντικείμενα μεγάλης κλίμακας που να βρίσκονται ταυτόχρονα και στη μία και στην άλλη κατάσταση, κάτι που θα αποτελούσε συνέπεια της καθιερωμένης κβαντικής θεωρίας (το παράδειγμα που αναφέρεται συνήθως είναι η γάτα του Schrödinger). Δεν διαπιστώνουμε όμως κάτι τέτοιο πρόκειται για έναν παραλογισμό. Αυτό που λέω εγώ, λοιπόν, είναι ότι πρέπει να υπάρξει μια αλλαγή στην κβαντική θεωρία όσον αφορά τα αρκετά μεγάλα αντικείμενα. Ως εκ τούτου, πιστεύω ότι καμία από τις σοβαρές θεωρίες που έχουμε δει ώς τώρα δεν είναι μια πιθανή τελική θεωρία. Δεν πιστεύω στις υπερχορδές, ούτε σε ό,τι άλλο έχει προταθεί προς αυτή την κατεύθυνση. Ωστόσο, υπάρχουν κάποιες ιδέες που τις έχουν προτείνει διάφοροι για την τροποποίηση της κβαντικής μηχανικής, και οι οποίες μπορεί να αποτελέσουν την αφετηρία για την εξέλιξη που τελικά χρειαζόμαστε.



Φωτογραφία: Σάρος Επιτελεσθελέων

**Ερ.:** Πιστεύετε ότι η επιστήμη θα κατορθώσει τελικά να κατανοήσει τον εγκέφαλο και τη νόηση; Και, σε ουνάρτηση με αυτό, που είναι το νόημα της σημερινής έρευνας στην τεχνητή νοημοσύνη; Ποιες προοπτικές βλέπετε να υπάρχουν σ' αυτόν τον επιστημονικό τομέα;

**Απ.:** Η ερώτηση σχετικά με το αν η επιστήμη θα κατανοήσει τις λειτουργίες του εγκεφάλου και τη νόηση είναι μια δύσκολη ερώτηση. Δεν βλέπω όμως γιατί δεν θα μπο-

ρέοι. Δεν γνωρίζουμε βεβαίως ακόμη τι συμβαίνει ακριβώς. Και νομίζω πως αυτά βρίσκονται σχετικά πέρα από τις παρούσες έννοιες της επιστήμης. Θα πρέπει να αλλάξουμε τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε την επιστήμη και την πραγματικότητα. Νομίζω ότι θα συμβούν σημαντικές αλλαγές σ' αυτό το σημείο, πριν υπάρξει οποιαδήποτε πραγματική κατανόηση της νοητικής λειτουργίας. Ως προς το δεύτερο ερώτημά σας, θεωρώ ότι η τεχνητή νοημοσύνη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, με δύο τρόπους. Από τη μια, έχει έναν «αρνητικό» ρόλο, αφού μας δείχνει ποιοι είναι οι περιορισμοί μιας αμιγώς υπολογιστικής προσέγγισης. Έτοι, νομίζω ότι είναι σημαντικό να προχωρήσουμε και να δούμε ός πού μπορούμε να φτάσουμε, να καταλάβουμε πού βρίσκονται τα όρια. Από την άλλη, και μόνο από τεχνολογική άποψη η τεχνητή νοημοσύνη είναι σημαντική, διότι στα πλαίσια αυτής της έρευνας κατασκευάζονται συσκευές που μπορούν να παίξουν σπουδαίο ρόλο, ο οποίος δεν εξαρτάται από το αν θα καταλάβουμε τι είναι η νόηση (αυτό είναι άλλο θέμα). Δεν θέλω λοιπόν να πω ότι η έρευνα στην τεχνητή νοημοσύνη είναι χαμένος χρόνος. Αυτό που επισημαίνω είναι ότι η εν λόγω έρευνα έχει αξία γι' αυτούς τους δύο λόγους. Σκέφτομαι ότι ο πρώτος λόγος δεν χαροποιεί τους επιστήμονες της τεχνητής νοημοσύνης, αλλά νομίζω ότι τον δεύτερο λόγο θα τον θεωρήσουν ως ένα σημαντικό μέρος της δουλειάς τους.

Ερ.: Ο καθηγητής Barr, στην κριτική που έγραψε για το βιβλίο σας στο *American Mathematical Monthly*, λέει ότι εξεπλάγη από την επιτυχία που σημείωσε και παρατηρεί ότι αυτή η επιτυχία ανατρέπει τον ισχυρισμό που διαβάζουμε στο *Xρονικό του Χρόνου του Stephen Hawking*, όπου δηλαδή κάθε μαθηματικός τύπος που υπάρχει σ' ένα βιβλίο μειώνει τις πολλήσεις του στο μισό. Εορίς πώς εξηγείτε την επιτυχία του βιβλίου σας;

Απ.: Άλλη μια δύσκολη ερώτηση! Πιστεύω ότι εν μέρει οφείλω αυτή την επιτυχία στον Hawking, γιατί το δικό του βιβλίο πούλησε πολλά αντίτυπα, και έτοι το κοινό ήθελε να δει τι έχει να πει και κάποιος άλλος. Νομίζω όμως ότι δεν είναι αυτός ο βασικός λόγος. Δεν δέχομαι ότι οι εξισώσεις αποδαρρύνουν απαρατήτως το κοινό. Άλλωστε, στον πρόλογο του βιβλίου μου προτείνω στον αναγνώστη να μη διαβάσει τις εξισώσεις, όπου κάτι τέτοιο το βρίσκει δύσκολο. Έχω την αίσθηση ότι κρίσιμο σημείο, όσον αφορά την κατανόηση, είναι το γεγονός ότι συχνά, όταν παρέχονται εξηγήσεις για κάποιο θέμα, οι άνθρωποι οπισθοχωρούν εν όψει της πραγματικής εξήγησης: έτοι όμως δυσχεραίνεται η κατανόηση. Αν θέλει κάποιος να μάθει τι συμβαίνει και του δώσεις μια απλοϊκή απάντηση, η οποία είναι κατά κάποιον τρόπο «κοροϊ-

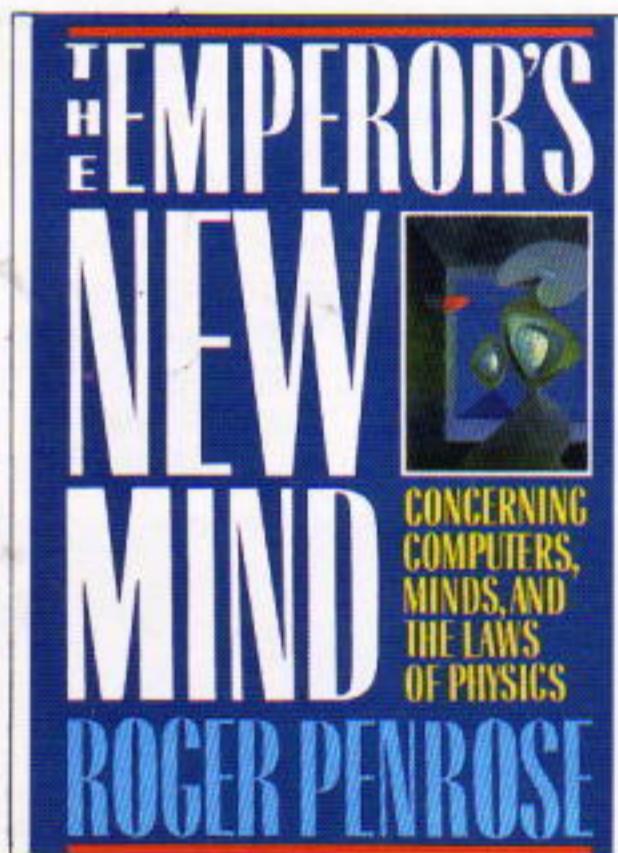
δία», το αποτέλεσμα είναι χειρότερο. Ως εκ τούτου, νομίζω ότι είναι σημαντικό να προσπαθείς να εξηγήσεις τα πράγματα, εάν μπορείς. Το βιβλίο μου φαίνεται ελαφρώς τεχνικό, αλλά προσπαθώ να εξηγήσω τι συμβαίνει όσο σαφέστερα γίνεται. Νομίζω ότι οι αναγνώστες εκτίμησαν αυτήν την προσπάθεια, και ίσως αγόρασαν το βιβλίο επειδή σκέφτηκαν ότι θα είχαν την ευκαιρία να εμβαθύνουν και να κατανοήσουν δέματα διαφόρων επιστημονικών τομέων.

Ερ.: Ας μιλήσουμε τώρα για την επιστημονική σας πορεία. Αρχικά ασχολήθηκατε με την αλγεβρική γεωμετρία. Πώς ενδιαφερθήκατε για τη γενική σχετικότητα; Γνωρίζω ότι το ενδιαφέρον σας για τη σύμμορφη (conformal) γεωμετρία σάς οδήγησε να μελετήσετε τις ιδιότητες

των σχέσεων αιτιότητας μεταξύ σημείων του χωρόχρονου. Είναι αυτός ο τρόπος με τον οποίο καταλήξατε στα θεωρήματα για την ύπαρξη ανωμαλιών στο χωρόχρονο, τα οποία αποτελούν τις πιο σημαντικές προβλέψεις της γενικής σχετικότητας, αφού φαίνεται να συνεπάγονται ότι ο χωρόχρονος έχει αρχή ή τέλος; Θα θέλατε να μιλήσετε για τη συνεργασία σας με τον Stephen Hawking;

Απ.: Νομίζω ότι το ενδιαφέρον μου για τη φυσική προϋπήρχε της εργασίας μου στην αλγεβρική γεωμετρία για το διδακτορικό δίπλωμα. Ακολούθησα όμως αυτή τη διαδρομή γιατί ήταν πιο άνετη για μένα, αφού η γεωμετρία μου φαίνοταν πιο εύκολη. Ωστόσο, πάντοτε ενδιαφέρόμουν για τις λειτουργίες του φυσικού κόσμου. Σκέφτομαι λοιπόν

ότι ακόμη και σ' εκείνο το στάδιο είχα την αίσθηση ότι αργότερα θα έστρεφα το ενδιαφέρον μου σε περισσότερες από μία κατευθύνσεις. Πρέπει εδώ να πω ότι περισσότερο από οποιονδήποτε άλλον, ο συνάδελφός μου Dennis Sciama με έφερε κοντά στη φυσική και συνέβαλε στην ανάπτυξη του ενδιαφέροντός μου για τη γενική σχετικότητα. Ωστόσο, σε αρκετά πρώιμο στάδιο ενδιαφέρθηκα για τη γενική σχετικότητα εν μέρει επειδή ήταν γεωμετρία. Γεωμετρία και φυσική! Ενδιαφέρθηκα και για την κβαντική θεωρία, αλλά αυτή δεν ήταν τόσο «γεωμετρική», ήταν μάλλον σαν μια λογική εικόνα του κόσμου, την οποία όμως δεν μπορούσα να προσεγγίσω εύκολα (και ακόμη δεν μπορώ... για μένα είναι ένα πρόβλημα). Η σχετικότητα όμως ήταν κάτι που μπορούσα να συλλάβω ευκολότερα. Ο Dennis Sciama μου πρότεινε να παρακολουθήσω μια διάλεξη του David Finkelstein στο Λονδίνο. Θυμάμαι ότι μίλησε για τις ανωμαλίες στη λύση Schwarzschild και για το πώς μπορεί κάποιος να εξαλείψει τις ανωμαλίες πάνω σ' αυτό που ονομάζουμε ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας, ενώ δεν μπορεί να εξαλείψει την πραγματική ανωμαλία που βρίσκεται στο κέντρο της, όπου η καμπυλότητα τείνει στο άπειρο. Άρχισα να αναρωτιέμαι και προσπάθησα να διαπιστώσω αν



οι ανωμαλίες ήταν αναπόσπαστο στοιχείο αυτού που συνέβαινε. Εκείνη την εποχή δεν είχα πραγματική γνώση, και οπωσδήποτε δεν είχα κατανοήσει επαρκώς τη σύμμορφη γεωμετρία. Εντούτοις, το πρόβλημα με ενδιέφερε ακόμη και πριν ενδιαφερόμενοι συθαρά για τη γενική σχετικότητα. Η σύμμορφη γεωμετρία με ενδιέφερε και για άλλον ένα λόγο, που σχετίζοταν με τη βαρυτική ακτινοβολία κ.λπ. Έτσι, οι τεχνικές που ανέπτυξαν τότε αποδείχτηκαν χρήσιμες για το πρόβλημα των ανωμαλιών. Με ρωτήσατε για τον Hawking. Το 1964, απέδειξε ένα θεώρημα για τις ανωμαλίες και τις μαύρες τρύπες, και έδωσε μια διάλεξη με αυτό το θέμα στο Λονδίνο, πηγαίνοντας παρακολούθησε ο Stephen Hawking. Ο Stephen τότε ήταν στο πρώτο έτος των μεταπτυχιακών του σπουδών και εργαζόταν υπό την επίβλεψη του Dennis Sciama: η διάλεξή μου του έδωσε το ερέθισμα να εργαστεί σ' αυτόν τον τομέα. Λίγο αργότερα, πήγα στο Καίμπριτζ και μίλησα με τον ίδιο και με τον συνεργάτη του George Ellis. Ο Hawking κατέληξε σε μερικά αποτελέσματα. Αργότερα, οι δύο μας από κοινού αποδείχαμε τα πιο σημαντικά από τα θεωρήματα, και δημοσιεύσαμε μια εργασία στη Βασιλική Εταιρεία του Λονδίνου.

**Ερ.:** Από το 1973 κατέχετε την έδρα Rouse Ball στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Ο Rouse Ball έγραψε το κλασικό για τον τομέα των ψυχαγωγικών μαθηματικών έργο *Mathematical Recreations and Essays*. Και εσείς όμως χαρακτηρίζεστε από τον ίδιο ενδουσιασμό για τα πνευματικά παιχνίδια. Όταν ήσασταν νεότερος, ανακαλύψατε ένα «αντικείμενο» που λέγεται tribar.\* Θέλετε να μας μιλήσετε γι' αυτό;

**Απ.:** Το βιβλίο του Rouse Ball μού ήταν γνωστό πολύ πριν αποκτήσω κάποια σχέση μαζί του. Ενδιαφερόμουν για τα ψυχαγωγικά μαθηματικά από πολύ νέος, και πιστεύω ότι τον ενδουσιασμό, το ενδιαφέρον και τις γνώσεις γι' αυτόν τον τομέα τα οφείλω στον πατέρα μου. Θυμάμαι ότι τον πρώτο χρόνο που ήμουν μεταπτυχιακός φοιτητής στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, πήγα στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Άμστερνταμ και επισκέφθηκα μια έκθεση με έργα του Escher. (Ήταν, μάλιστα, η πρώτη φορά που άκουγα για τον Escher, και νομίζω ότι και οι περιοσότεροι δεν είχαν ξανακούσει γι' αυτόν.) Τα έργα του με καταγοήτευσαν. Αποφάσισα, λοιπόν, να δημιουργήσω και εγώ κάποιες «αδύνατες» δομές με κάπως διαφορετικό χαρακτήρα από εκείνες που είχα

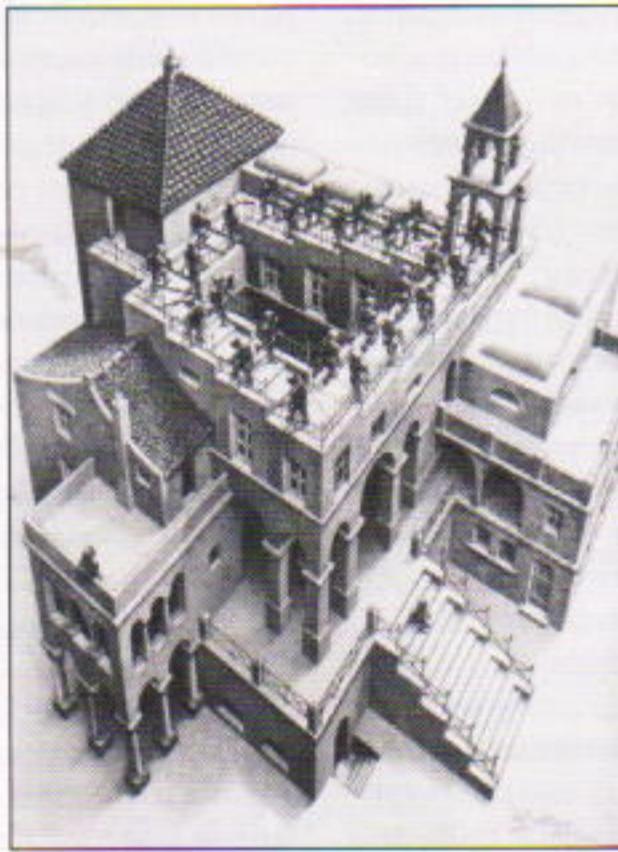
δει στην έκθεση. Αργότερα, όταν ανέπτυξα το tribar, όπως λέγεται – δεν το ονόμασα εγώ έτσι –, ως παράδειγμα εκείνου του είδους αδυνατότητας, και ενώ ακόμη ήταν στην απλούστερη μορφή του, το έδειξα στον πατέρα μου: αυτός το ανέπτυξε σαν μια σκάλα που σχηματίζει κύκλο και η αρχή της συνδέεται με το τέλος της. Δημοσιεύσαμε τότε ένα άρθρο, το οποίο αποστέλλαμε και στον Escher. Εν τω μεταξύ, αυτός είχε σχεδιάσει το «Belvedere», μια άλλη «αδύνατη» δομή, που είναι παρόμοια με το tribar, το οποίο χρησιμοποίησε στο έργο του με τίτλο «Καταρράκτης», και στο άλλο, με τη σκάλα, το «Ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας». Ο Escher έχει αναγνωρίσει ότι σ' αυτά τα έργα των ενέπνευσαν οι ιδέες μας, γεγονός που αναφέρεται ρητά στον κατάλογο των έργων του.

**Ερ.:** Στο επόμενο τεύχος του *Quantum* θα υπάρχει ένα άρθρο με θέμα τα πλακίδια Penrose. Θα θέλατε να εξηγήσετε στους αναγνώστες μας τι είναι αυτά;

**Απ.:** Είναι δύο πολυγωνικά σχήματα με τα οποία μπορείτε να καλύψετε το επίπεδο. Είναι γνωστό ότι μπορείτε να καλύψετε το επίπεδο με τετράγωνα ή με κανονικά εξάγωνα, αλλά η ιδιαιτερότητα των συγκεκριμένων σχημάτων έγκειται στο ότι είναι δύο, και καλύπτουν το επίπεδο με τρόπο μη περιοδικό – που δεν περιλαμβάνει καμία επανάληψη. Αρχικά, είχα ξεκίνησει με έξι τέτοια πλακίδια, τα οποία επίσης δεν επαναλαμβάνονταν. Συνήθιζα να παίζω με τέτοιες πλακόστρωσεις, έτσι, χάριν ψυχαγωγίας.

Τα έδειξα στον Escher, και νομίζω ότι στο τελευταίο του έργο, το «Φαντάσματα», χρησιμοποίησε μια συγκεκριμένη πλακόστρωση, η οποία έχει την ιδιότητα τα πλακίδια να μην είναι όλα ισοδύναμα μεταξύ τους. Άλλα αυτά διαφέρουν από ό, τι εγώ ονομάζω πλακίδια Penrose.

Νομίζω ότι εν μέρει ενδιαφέρομενα για τα σχήματα που παρουσιάζουν ένα χαρακτηριστικό της φύσης το οποίο έβρισκα πάντοτε συναρπαστικό. Όπι, δηλαδή, ενώ φαίνεται πως στον κόσμο μας υπάρχουν απλοί νόμοι που διέπουν τη συμπεριφορά των στοιχειωδών συστατικών, των οωματιδίων, σε μεγάλη κλίμακα εμφανίζεται φανταστική πολυπλοκότητα: προκύπτει λοιπόν το ερώτημα: μπορούμε να έχουμε κάτι που να διαθέτει πολύ απλούς κανόνες σε μικρή κλίμακα, και το οποίο να παράγει περίτεχνη πολυπλοκότητα σε μεγάλη κλίμακα; Τα πλακίδια Penrose δεν διαδέτουν μόνο το χαρακτηριστικό ότι δεν επαναλαμβάνονται, αλλά έχουν επίσης μια «αδύνατη» συμμετρία, μια πενταπλή συμμετρία. Στην κρυσταλλογραφία υπάρχουν καθιερωμένα θεωρήματα σύμφωνα με τα οποία μπορούμε να έχουμε διπλή, τριπλή, τετραπλή ή εξαπλή συμμετρία, αλλά η πενταπλή συμμετρία δεν επιτρέπεται. Επιπλέον, αυτές οι διατάξεις φαίνονται κανονικές δεν είναι ποτέ ακριβώς κανονικές,



\* Ένα «αδύνατο» αντικείμενο που παραβιάζει τους νόμους της τριδιάστατης πραγματικότητας. Αποτελείται από τρεις συνδεδεμένες μεταξύ τους ράβδους. Με πρώτη ματιά δείχνει φυσιολογικό, αλλά αν κονείς παρακολουθήσει προσεκτικά τη μια ράβδο μετά την άλλη, διαπιστώνει πως είναι συστραμμένες (ή μήπως ο ίδιος ο χώρος είναι στρεβλωμένος). (Από το *Scientific American*, Φεβρ. 1993, σελ.12.)

διότι ουδέποτε επαναλαμβάνονται ακριβώς, αλλά σχεδόν επαναλαβάνονται. Αφού λοιπόν οι κρύσταλλοι δεν είναι ποτέ τέλειοι, το «σχεδόν επαναλαμβάνονται» είναι αρκετό.

Για ποιο λόγο όμως δημιούργησα αυτά τα πράγματα στις αρχές της δεκαετίας του 1970; Όταν έδινα κάποια διάλεξη και με ρωτούσαν αν αυτά τα σχήματα οημαίνουν τη διάνοιξη ενός νέου τομέα της κρυσταλλογραφίας, όπου θα μπορούσαν να υπάρξουν ουσίες με παρόμοια δομή, συνήθως απαντούσα όπι κατ' αρχήν αυτό είναι αλήθεια, αλλά δεν μπορούσα να καταλάβω πώς η φύση θα κατάφερνε να παραγάγει αυθόρμητα αυτά τα πράγματα, διότι είναι δύσκολο να τα συναρμολογήσετε ουστά, αν προσπαθήσετε. Έμεινα έκπληκτος, λοιπόν, όταν δέκα χρόνια αργότερα ο Shechtman, ένας ισραηλινός φυσικός που εργαζόταν στις ΗΠΑ, παρατήρησε, από τις εικόνες περιθλασης, ότι ορισμένες ουσίες, κράματα αργιλίου-μαγγανίου, παρουσιάζουν πενταπλή δεκαπλή συμμετρία, κάτι που είναι αδύνατο για έναν κρύσταλλο. Επιπλέον, παρουσιάζουν έντονες κηλίδες στο φάσμα τους, γεγονός που υποδεικνύει ότι είναι κρύσταλλοι. Εδώ λοιπόν έχουμε ένα παράδοξο. Ο Shechtman είχε δει και γνώριζε τις πλακοστρόδοσεις μου, γι' αυτό μπορούσε να υποδέσει ότι κάτι ενδιαφέρον συμβαίνει με όλα αυτά. Σήμερα όλες αυτές οι κρυσταλλικές ουσίες ονομάζονται ημικρύσταλλοι. Αυτή είναι μια ενδιαφέρουσα ιστορία, και τη χρησιμοποιώ μερικές φορές σαν παράδειγμα για να υπογραμμίζω τη σπουδαιότητα της ελευθερίας στην έρευνα. Όπως σας είπα, ασχολιόμουν με τα πλακίδια απλώς για ψυχαγωγία, δεν είχα κανέναν πρακτικό σκοπό. Κι όμως, δέκα χρόνια αργότερα παρατηρήθηκε ότι αυτές οι ουσίες υπάρχουν στη φύση.

Ερ.: Είστε μέλος της επιτροπής του Βραβείου «Βασίλης Ξανθόπουλος» για τη σχετικότητα και την αστροφυσική. Θα θέλατε να μας μιλήσετε για τη συμβολή τού τραγικά δολοφονημένου Βασίλη Ξανθόπουλου στη μαθηματική θεωρία για τις μαύρες τρύπες και στη μελέτη των συγκρούσεων βαρυτικών, ηλεκτρομαγνητικών και υδροδυναμικών κυμάτων στη γενική σχετικότητα;

Απ.: Πράγματι, αυτό που ουνέβη ήταν τραγικό. Αν και η γνωριμία μας δεν ήταν στενή, θέλω να πω ότι ήταν ένας υπέροχος άνθρωπος, με καταπληκτικό ενδουσιασμό και ζήλο για τη ζωή. Συνεργάστηκε με τον διάσημο αστροφυσικό Chandrasekhar, αλλά και μόνος του παρήγαγε σημαντικό έργο. Ο Ξανθόπουλος υπήρξε εξαιρετικός «εργάτης» στον τομέα της γενικής σχετικότητας. Πράγματι, δεν ασχολήθηκε μόνο με τις μαύρες τρύπες, αλλά και με τα συγκρουόμενα κύματα. Ήταν εξαιρετικά δραστήριος, ένα πολύ σημαντικό πρόσωπο για την ανάπτυξη αυτών των ιδεών. Είχε ευρεία συμβολή στον τόπο της «προσέγγισης» ερευνητικών προβλημάτων αυτών των περιοχών που ανέπτυξε ο Chandrasekhar, την οποία όμως «προσέγγιση» εξέλιξε περαιτέρω και μόνος του, με σημαντικές εργασίες του στους ήδη αναφερθείσες τομείς. Αυτό που ουνέβη, ήταν μια μεγάλη τραγωδία, κάτι που με ουγκλόνισε τρομερά.

Ερ.: Θέλετε να μας μιλήσετε για το καινούργιο σας βιβλίο, το *Shadows of the Mind* (Σκιές της νόησης);

Απ.: Θα κυκλοφορήσει στην Αγγλία τον Νοέμβριο,

Αρχικά, σκέφτηκα να το γράψω επειδή διατυπώθηκαν πολλά σχόλια και κριτικές για το προηγούμενο βιβλίο, το *Emperor's New Mind*. Πιστεύω πως έγιναν πολλές παρανοήσεις γι' αυτό το βιβλίο – αν και φοβάμαι ότι αυτό θα συμβαίνει πάντοτε, και ότι θα υπάρξουν εξίσου πολλές παρανοήσεις και για το νέο μου βιβλίο. Εν πάσῃ περιπτώσει, ένιωσα ότι υπάρχουν θέματα που έπρεπε να αναλυθούν διεξοδικότερα, και ιδιαίτερα ό,τι αφορά το επιχείρημα που προκύπτει από το θεώρημα του Gödel και δείχνει ότι υπάρχει κάτι περισσότερο στην ανθρώπινη αντίληψη που δεν μπορεί να επιτύχει ένας υπολογιστής. Είπατε προηγουμένως ότι τα ανθρώπινα όντα μπορούν πάντοτε να υπερισχύουν σε σχέση με έναν υπολογιστή: δεν θέλω να το πω αυτό. Απλώς, αυτό που κάνουμε εμείς είναι διαφορετικό... Ισως, κατ' αρχήν, να μπορούμε να υπερισχύουμε, αλλά στην πράξη, επειδή οι υπολογιστές είναι τόσο ακριβέστεροι, γρηγορότεροι και έχουν μεγαλύτερη χωρητικότητα μνήμης, υπάρχουν διάφορα πράγματα που προφανώς μπορούν να τα κάνουν καλύτερα.

Όντως, οι υπολογιστές αδυνατούν να αποδείξουν οπιδήποτε, διότι μια τέτοια ενέργεια απαιτεί αντίληψη, ενώ αυτοί απλώς ακολουθούν τους κανόνες που τους έχουν δοθεί. Το ότι η εφαρμογή αυτών των κανόνων οδηγεί σε κάποια απόδειξη απαιτεί αντίληψη, και η αντίληψη είναι μια ιδιότητα που δεν μπορεί να τη διαθέτει ένα αμιγώς υπολογιστικό ούστημα. Έτσι, το επιχείρημα του Gödel καθιστά οιαφέστερο και ακριβέστερο αυτό το σημείο.

Στο νέο μου βιβλίο, λοιπόν, διεισδύω βαθύτερα σ' αυτό το θέμα, και εξετάζω διάφορες κριτικές και παρανοήσεις υπάρχουν διάφορα σημαντικά στοιχεία που πρέπει να αναλυθούν εκτενέστερα. Αυτό είναι το πρώτο μέρος του βιβλίου. Προσπαθώ να το κάνω όσο γίνεται περισσότερο εναντίον του, αλλά μερικές φορές είναι ιδιαίτερα «εσπιασμένο» – αν και θα έλεγα ότι είναι λιγότερο τεχνικό –, και τα επιχειρήματα γίνονται, αν θέλετε, περισσότερο ανελέητα. Καθώς έγραφα το εν λόγω βιβλίο, άρχισα να μαθαίνω νέα πράγματα, και για τη φυσική και την κβαντική μηχανική – υπάρχουν κάποια νέα στοιχεία –, αλλά και για τη βιολογία του εγκεφάλου. Υπάρχουν στοιχεία που είναι απολύτως νέα για μένα, τα οποία δεν γνώριζα πριν από δύο χρόνια.

Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου, λοιπόν, αναφέρω κατ' αρχάς τις απόψεις μου για την κβαντική μηχανική, οι οποίες διαφέρουν ελαφρώς από εκείνες που εξέφραζα στο *The Emperor's New Mind*. Όταν λέω ότι διαφέρουν ελαφρώς εννοώ ότι το κριτήριο που έχω όσον αφορά τη μετάβαση από το κβαντικό επίπεδο στο κλασικό είναι λίγο διαφορετικό. Άλλα και όσον αφορά τη δομή του εγκεφάλου, υπάρχουν σημαντικά στοιχεία για τα λεγόμενα μικροσωληνάρια, τον κυτταροσκελετό, που βρίσκεται σε κάθε συνηδισμένο εικαριωτικό κύτταρο. Για παράδειγμα, ένα παραμήκιο ή μια αμοιβάδα μπορούν να κάνουν αρκετά πολύπλοκα πράγματα, να κολυμπούν τριγύρω και να συμπεριφέρονται μ' έναν τρόπο που απαιτεί ορισμένο βαθμό νοημοσύνης μπορούν να κάνουν αρκετά εξεζητημένα πράγματα, και το ερώτημα είναι πώς τα καταφέρνουν, αφού δεν διαθέτουν νευρικό ούστημα. Προφανώς, η απάντηση είναι ότι τα καταφέρνουν χάρη

στη λειτουργία του κυτταροσκελετού, ενός πολυσύνθετου δικτύου που αποτελείται από μικροσωληνάρια και μικροϊνίδια – από συγκεκριμένους τύπους πρωτεΐνων. Προφανώς, μέσω αυτών των σωληνίσκων αποστέλλονται πολύπλοκα μηνύματα.

Τις γνώσεις μου γι' αυτά τα θέματα τις οφείλω στον Stewart Hameroff, καθηγητή στην Αριζόνα. Εργάζεται στο τμήμα αναισθησιολογίας, επειδή ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο «σιθήνουμε» τη συνείδηση. Ερευνώντας το ερώτημα για το πώς συμβαίνει στη συνείδηση, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα μικροσωληνάρια παίζουν αποφασιστικό ρόλο για την παρουσία ή όχι συνείδησης. Οι ίδιοι οι νευρώνες περιέχουν μικροσωληνάρια. Τα μικροσωληνάρια φαίνεται πώς είναι υπεύθυνα για την ένταση που έχουν οι συνδέσεις ανάμεσα στους νευρώνες, δηλαδή για τον έλεγχο των συναπτικών εντάσεων. Έτσι, οδηγούμαστε ο' ένα βαθύτερο επίπεδο, όπου ο έλεγχος της οργάνωσης των νευρώνων μεταβάλλεται συνεχώς, και ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται καθορίζεται από τα μικροσωληνάρια. Στο επίπεδο αυτό τα κβαντικά φαινόμενα μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο. Πρόκειται για περιοχή μεταξύ του κβαντικού επιπέδου και του κλασικού. Κατά τη γνώμη μου, αυτός είναι ο χώρος τον οποίο πρέπει να ερευνήσουμε αν θέλουμε να δούμε πώς τα κβαντικά φαινόμενα παίζουν σημαντικό ρόλο στη λειτουργία του εγκεφάλου.

Ερ.: Αυτό που θέλω να σας ρωτήσω τώρα δεν εμπίπτει στην ειδικότητά σας, αλλά παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για όλους τους μαθηματικούς. Τι γνώμη έχετε για την απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat από τον Andrew Wiles, και για το κενό που διαπιστώθηκε σ' αυτήν;

Απ.: Όπως είπατε, δεν είμαι ειδικός. Ωστόσο, μίλησα με ανθρώπους που γνωρίζουν αυτά τα θέματα, λόγου χάρη με τον καθηγητή του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης Brian Birch, και έμαθα ότι τουλάχιστον σε ένα σημείο υπάρχει ένα κενό στην απόδειξη. Απ' ό,τι καταλαβαίνω, αν και δεν είμαι απολύτως θέβαπος, αυτό δεν οφείλεται τόσο στη δουλειά του ίδιου του Wiles, αλλά στον τρόπο με τον οποίο εφαρμόστηκαν τα συμπεράσματα άλλων. Αυτό είναι πάντοτε ένα επικίνδυνο σημείο. Όταν κάποιος δανειστεί μιαν απόδειξη ή ένα συμπέρασμα για κάπι από κάποιον άλλο, χρειάζεται προσοχή. Αυτό είναι ένα αδύνατο σημείο· εγώ, πάντως, δεν γνωρίζω περισσότερες λεπτομέρειες.

Ερ.: Για το τέλος, καθηγητά Penrose, ήθελα να σας ζητήσω πιθανόν κάπι δύσκολο: να προσπαθήσετε να μιλήσετε στους αναγνώστες του Quantum με τρόπο εκλαϊκευτικό για τη βασική έννοια της θεωρίας των twistors. Προσπαθήστε, σας παρακαλώ, να μας εξηγήσετε τι είναι ο «μετασχηματισμός Penrose» και ποια είναι η σχέση του με τη θεωρία αναπαραστάσεων (representation theory), για την οποία έχει γραφτεί ολόκληρο βιβλίο από τους R.J. Baston και M.G. Eastwood.

Απ.: Πρόκειται για ένα πολύ δύσκολο βιβλίο. Το δικό μου ενδιαφέρον για τον λεγόμενο μετασχηματισμό Penrose σχετίζοταν με τη φυσική, ενώ οι δύο συγγραφείς του οδήγησαν σε περιοχές καθαρών μαθηματικών, στη θεωρία αναπαραστάσεων, δηλαδή σε περιοχές οι οποίες βρί-

σκονται πέρα από αυτό που είχα αρχικά κατά νουν. Ένας τρόπος για να αντιληφθούμε το μετασχηματισμό Penrose είναι μέσω της κλασικής φυσικής, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier. Ο μετασχηματισμός Fourier μάς οδηγεί από μια περιγραφή θέσης σε μια περιγραφή ορμής. Αυτό σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο αναλύουμε τις περιοδικές ταλαντώσεις σε απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Ας πούμε ότι έχουμε έναν μουσικό φθόγγο, που συντίθεται από πολλές διαφορετικές συχνότητες. Πρόκειται για έναν σύνθετο ήχο με σχετικά πολύπλοκο σχήμα. Τον ήχο αυτό μπορούμε να τον αναλύσουμε στα περιοδικά συστατικά του, στους διαφορετικούς τόνους που τον συνθέτουν. Αυτός, λοιπόν, ο μετασχηματισμός από το σχήμα του κύματος στην περιγραφή με όρους διαφορετικών συχνοτήτων, ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier.

Στην κβαντική θεωρία, ο μετασχηματισμός Fourier παίζει κεντρικό ρόλο, όταν μεταβαίνουμε από την αναπαράσταση θέσης (όπου το σημαντικότερο μέγεθος είναι η θέση του σωματιδίου) στην αναπαράσταση ορμής (όπου το σημαντικότερο μέγεθος είναι η ορμή του σωματιδίου). Η θεωρία των twistors, λοιπόν, είναι μια άλλη μορφή περιγραφής απ' αυτήν της θέσης και της ορμής σχετίζεται με τις φωτεινές ακτίνες. Δεν χρησιμοποιούμε περιγραφή χώρου, ούτε περιγραφή ορμής, αλλά κάπι που συνδέεται με τις φωτεινές ακτίνες και το χωρόχρονο. Το θέμα είναι ότι εάν θέλουμε την περιγραφή ενός πεδίου με τους όρους αυτού του χώρου φωτεινών ακτίνων, ή του χώρου twistor, όπως λέγεται, χρειαζόμαστε ένα άλλο είδος μετασχηματισμού, όχι βεβαίως του μετασχηματισμού Fourier. Αυτός ο άλλος μετασχηματισμός μάς μεταφέρει από το χώρο θέσεων σ' αυτό το χώρο φωτεινών ακτίνων.

Αυτός είναι ο λεγόμενος μετασχηματισμός Penrose, ο οποίος συνδέεται με τη συνομολογιακή θεωρία (cohomology theory): εδώ, όμως, τα πράγματα αρχίζουν να γίνονται εξαιρετικά δύσκολα. Πρόκειται για μια ιδέα που προήλθε από την τοπολογία. Σκέφτομαι ότι κάποτε πρέπει να γράψω ένα εκλαϊκευτικό ή ημιεκλαϊκευτικό βιβλίο για τη θεωρία των twistors, όταν θα την έχω κατανοήσει και εγώ πλήρως! Αποτελεί μια πολύ ενδιαφέρουσα άσκηση το να προσπαθήσει κάποιος να εξηγήσει τέτοιες ιδέες, κάπι που θα σήμαινε ότι οφείλει να εξηγήσει ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της συνομολογιακής θεωρίας, για την οποία θα έπρεπε να δοθεί μια διαιθητική περιγραφή.

Παρεμπιπτόντως, επιτρέψτε μου να διευκρινίσω ότι το *Emperor's New Mind* δεν απευθύνεται μόνο στο ευρύ κοινό, αλλά και στους επιστήμονες διαφορετικών τομέων. Έτσι, θα ήταν σημαντικό για έναν βιολόγο, έναν μαθηματικό ή ακόμη και έναν φιλόσοφο να μελετήσουν μια τέτοια παρουσίαση, που δεν είναι απολύτως εκλαϊκευτική (δεν θα μάθαιναν και πολλά πράγματα με αυτόν τον τρόπο), αλλά περιλαμβάνει αρκετές εξηγήσεις, ώστε να αρχίσουν να κατανοούν τις βασικές ιδέες. Έτσι, πιστεύω ότι πρόκειται για ένα επίπεδο περιγραφής που δεν είναι απολύτιμο μόνο για το ευρύ κοινό, αλλά και για όσους είναι μεν ειδικοί στους δικούς τους κλάδους, αλλά επιθυμούν να γνωρίσουν και στοιχεία από άλλους τομείς. ◻

# Νάνοι και γίγαντες

Ερωτήματα για την κλίμακα μεχεθών στο ζωικό βασίλειο

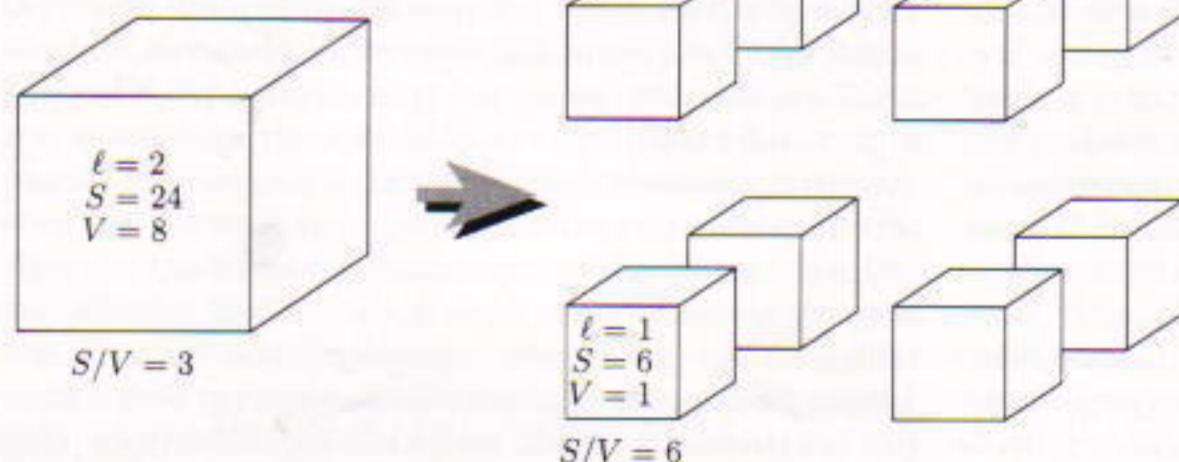
A. Zherdev

**Τ**ο μέγεδος είναι ένα από τα οπ-μαντικότερα χαρακτηριστικά κάθε ζωντανού πλάσματος, ωσ-τόσο, οι διαφορές μεγέθους εί-ναι τόσο προφανείς ώστε, πολύ ου-χνά, τους δίνουμε ελάχιστη προσοχή. Όλοι γνωρίζουμε ότι ο ελέφαντας είναι μεγαλύτερος από το ποντίκι, αλλά πολύ σπάνια αναρωτιόμαστε πόσο μεγαλύτερος είναι (η απάντη-ση είναι 100.000 φορές). Η μικρότε-ρη ενήλικη μυγαλή έχει το ένα δέκατο του μεγέθους ενός ποντικού, και επο-μένως έχει το 1/1.000.000 της μάζας ενός ελέφαντα. Οι διαφορές είναι α-κόμη πιο εντυπωσιακές όταν συγκρί-νουμε ζώα διαφορετικών συνομοτα-ξιών — ας πούμε, ένα πρωτόζωο και μια φάλαινα.

Η διαφορά μεγέθους οδηγεί και σε ποιοτικές αλλαγές; Για μεγάλο χρονι-κό διάστημα, και οι απλοί άνθρωποι αλλά και οι επιστήμονες πίστευαν το αντίθετο και θεωρούσαν ότι όλα τα

χαρακτηριστικά των ζωντανών ορ-γανισμών αλλάζουν ανάλογα με το μέγεδός τους. Το αντιπροσωπευτικότερο παράδειγμα αυτής της αντίλη-ψης είναι ο κόσμος που δημιούργη-σε ο Τζόναθαν Σουίφτ στην κλασική του σάτιρα *Τα ταξίδια του Γκιούλι-βερ*. Ο αναγνώστης του βιβλίου απο-λαμβάνει τον «απίθανο ρεαλισμό» του συγγραφέα που εκφράζεται με την ακρίβεια των αριθμητικών υπολογισμών του: Ο Γκιούλι-βερ ήταν δώδεκα φορές με-γαλύτερος από τους Λιλι-πούτειους, ενώ ήταν τόσες φορές ακριβώς μικρότερος από τους Μπρομπντιγκά-νιους, και το καθετί στις δύο χώρες κλίμακωνόταν κατά το αντίστοιχο ποσόν.

Η πραγματική ζωή, ό-μως, δεν είναι τόσο απλή και ο πρώτος που το πα-ρατήρησε αυτό ήταν ο Γα-

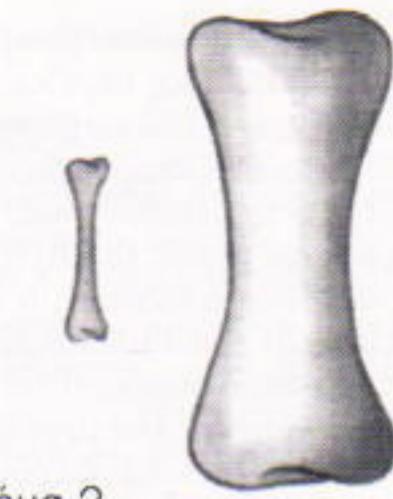


Σχήμα 1



λιλαίος: «Δεν είναι δυνατόν», γράφει, «να μειώσουμε στον ίδιο βαθμό την επιφάνεια και το βάρος ενός σώματος, και να διατηρήσουμε την ομοιότητα στη μορφή. Είναι απολύτως σαφές ότι η μείωση του βάρους είναι ανάλογη με τη μείωση του όγκου, και επομένως, κάθε φορά που μειώνεται ο όγκος περισσότερο από την επιφάνεια (ενώ διατηρείται η ομοιότητα στη μορφή), θα μειώνεται και το βάρος περισσότερο από την επιφάνεια. Όμως, η γεωμετρία μάς διδάσκει ότι ο λόγος των όγκων όμοιων σωμάτων είναι μεγαλύτερος από το λόγο των επιφανειών τους... Με άλλα λόγια, είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε πλοία, ανάκτορα και εκκλησίες πελώριου μεγέθους και να παραμείνουν στη θέση τους τα κουπιά, τα κατάρτια, οι δοκοί και οι σιδερένιες συνδέσεις τους — με λίγα λόγια, όλα τους τα μέρη. Από την άλλη πλευρά, η ίδια η φύση δεν μπορεί να δημιουργήσει γιγαντιαία δέντρα, διότι τα κλαδιά τους θα έσπαζαν τελικά κάτω από το ίδιο τους το βάρος. Παρομοίως, είναι αδύνατο να φανταστούμε απίθανα τεράστιους ανθρώπους, άλλογα ή άλλα ζωντανά πλάσματα, διότι ο σκελετός τους δεν μπορούσε να υποβαστάξει το σώμα τους. Τα ζώα μπορούν να αποκτήσουν τεράστιο μέγεθος μόνο εάν αλλάξουν τα οστά τους, και αυξηθούν σε πάχος κατά το κατάλληλο ποσόν.» (Δείτε το Σχήμα 1.)

Όσο αυξάνει το μέγεθος ενός ζώου, οι παράμετροι των διαφόρων φυσιολογικών διαδικασιών αυξάνονται με διαφορετικούς τρόπους: μερικές ευθέως ανάλογα, άλλες αναλόγως με τα τετράγωνα ή τους κύβους αυτών των τιμών. Κατά συνέπεια, ζώα διαφορετικού μεγέθους πρέπει να έχουν διαφορετικά σχήματα. Ένας ολόκληρος κλάδος της βιολογίας είναι αφιερωμένος στην α-



Σχήμα 2

νάλυση της σχέσης μεταξύ μεγέθους και σχήματος, και οι ερευνητές σε αυτόν τον τομέα έχουν επιτύχει ορισμένα ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Αν ασχοληθείτε με τις επόμενες ερωτήσεις θα γνωρίσετε μερικά από αυτά.

#### Ερωτήσεις

1. Σε μικροοκοπικό επίπεδο, η δομή των μυών όλων σχεδών των ειδών ζώων δεν παρουσιάζει σημαντικές διαφορές. Η μυϊκή συστολή προκαλείται από διαμοριακά χημικά συμπλέγματα, η δομή και η διευθέτηση των οποίων είναι κατά βάση ίδιες. Κι όμως, υπάρχει μια ιδιαίτερη διαφορά: όσο μικρότερο είναι ένα ζώο τόσο μεγαλύτερη μάζα (σε σύγκριση με τη δική του) μπορεί να οηκώσει. Πώς μπορεί να εξηγηθεί το φαινόμενο;

2. Γιατί ζώα με την ίδια περίπου



Σχήμα 3

μορφή (μια μεγάλη πράσινη ακρίδα και μια μεταναστευτική ακρίδα, ή ένας διποδόμυς και ένα καγκουρώ) κάνουν άλματα του ίδιου ύψους, ανεξάρτητα από το μέγεθός τους;

3. Στο πρώτο μέρος του άρδηρου παραδέσαμε ένα απόσπασμα από μια πραγματεία του Γαλιλαίου. Σε αυτήν ο Γαλιλαίος παρουσιάζει ένα σχήμα που δείχνει ότι ένα μεγάλο οστούν είναι δυσανάλογα παχύτερο από ένα μικρότερο (Σχήμα 2). Εντούτοις, έκανε ένα μικρό αριθμητικό σφάλμα. Μπορείτε να το βρείτε;

4. Μια επιστημονική αποστολή ανακάλυψε ένα καινούργιο είδος ζώου: πρόκειται για ένα μονόποδο θηλαστικό (Σχήμα 3). Στο σχήμα σημειώνονται οι διαστάσεις του ζώου μετρημένες σε ορτέμ – στη μονάδα μήκους που χρησιμοποιούν οι ιδιαγενείς. Εκτιμήστε τη μάζα και το ύψος του «μονόποδα» χρησιμοποιώντας ανθρώπινα δεδομένα (μέσο όρο μετρήσεων ή τις δικές σας διαστάσεις). Βρείτε με πόσα μέτρα ισοδυναμεί ένα ορτέμ.

5. Ένα μωρό είχε βάρος κατά τη γέννησή του 4 kg. Σε ένα χρόνο τριπλασίασε το βάρος του, φτάνοντας στα 12 kg. Συνεχίζοντας να μεγαλώνει με αυτόν το ρυθμό, στο τέλος του δεύτερου χρόνου θα ζύγιζε  $12 \times 3 = 36$  kg, έπειτα από τρία χρόνια  $36 \times 3 = 108$  kg, έπειτα από τέσσερα  $108 \times 3 = 324$  kg, και έπειτα από πέντε χρόνια θα είχε φτάσει στα  $324 \times 3 = 972$  kg. Η ημερήσια κατανάλωση τροφής γι' αυτό το ενός τόνου «νήπιο», εκτιμώμενη στο 1/6 με 1/7 της μάζας του (όπως συνήθως συμβαίνει με τα παιδιά), φτάνει τα 150 kg. Με βάση αυτήν την εκτίμηση ο διάσημος πολωνός δάσκαλος Janusz Korczak κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν πρέπει να πιέζουμε τα μικρά παιδιά να τρώνε παρά τη θέλησή τους! Εσείς πόση νομίζετε ότι πρέπει να είναι η ημερήσια κατανάλωση τροφής ενός παρόμοιου τρίχρονου παιδιού; Τι βάρος έχετε, και πόσο φαγητό τρώτε κάθε μέρα; Τα δικά σας νούμερα συμφωνούν με τους υπολογισμούς του Korczak;

6. (a) Το βουητό των εντόμων δεν δημιουργείται ηθελημένα – ο ήχος προκαλείται απλώς από το χτύπημα των φτερών τους. Η δύναμη από αυτό το χτύπημα (που διώχνει προς τα κάτω τον αέρα) εξισορροπεί την τάση για πτώση εξαιτίας της βαρύτητας.

Γιατί, όμως, είναι τόσο διαφορετικός ο ήχος ενός κουνουπιού από τον ήχο της μέλισσας; Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στο ύψος του ήχου ενός εντόμου και στο μέγεθός του; (b) Ο φίλος μας ο Γκιούλιθερ παραπονιόταν για το βουητό των Μπρομπιγκάνιων μυγών: έλεγε ότι κατά το δείπνο αυτά τα απαίσια έντομα δεν τον άφηναν να ξεκουραστεί ούτε λεπτό. Ιως είναι αλήθεια ότι τον ενοχλούσαν, όμως εσείς πιστεύετε ότι μπορούσαν πράγματι να παραγάγουν τέτοιο βουητό;

7. Όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία του σώματος ενός πτηνού ή ενός θηλαστικού τόσο μικρότερο είναι και το ζώο. Γιατί;

8. Όταν οι γονείς είναι βιαστικοί περπατάνε γρήγορα, και αν τύχει να κρατάνε το παιδί τους από το χέρι, αυτό πρέπει να τρέχει για να τους προλαβαίνει. Γιατί τα παιδιά και οι ενήλικοι αναπτύσσουν την ίδια ταχύτητα με τόσο διαφορετικούς τρόπους;

9. Από τα ζώα της ερήμου, ποια καταφέρνουν να ζουν χωρίς νερό περισσότερο χρόνο – τα μικρά ή τα μεγάλα;

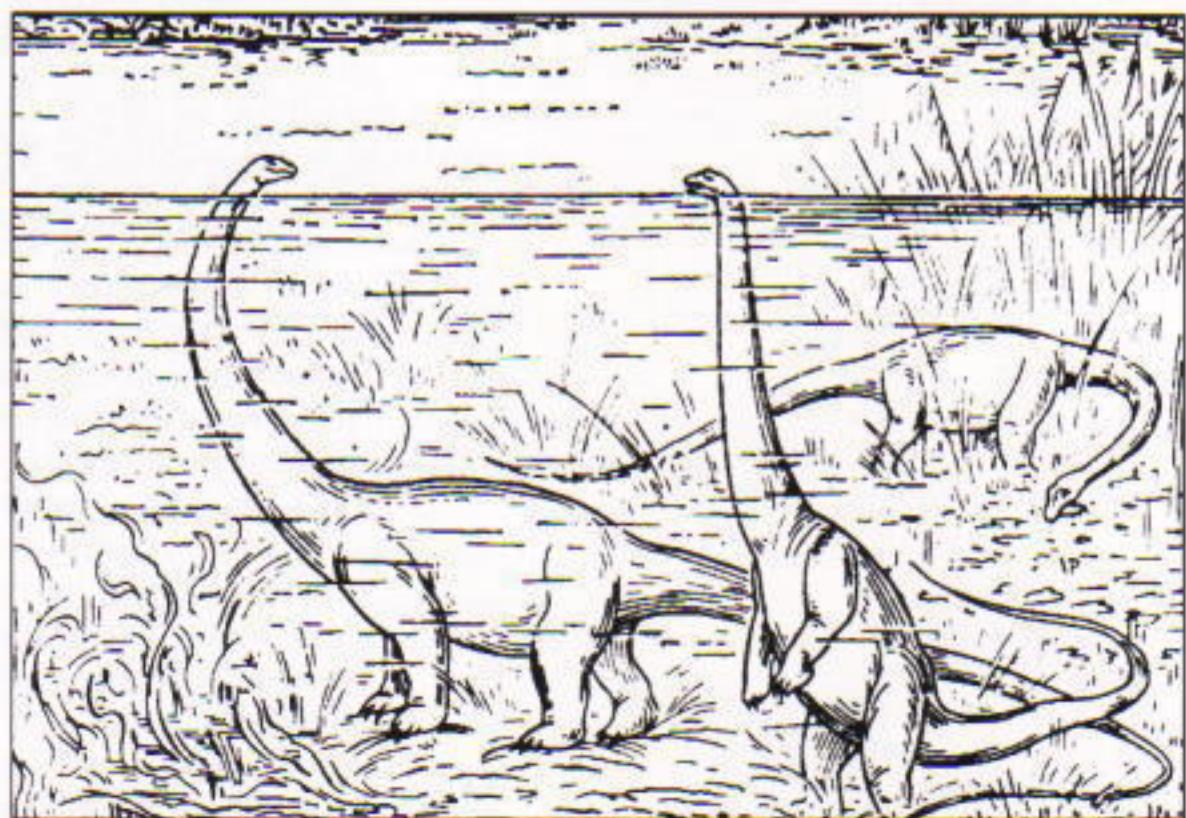
#### Παραπρήστε γύρω σας...

Συγκρίνετε το ύψος και το πάχος των δένδρων γύρω σας, ή των στελέχων φηλού χορταριού. Ποιος τύπος περιγράφει τη σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο παραμέτρους; Ποιοι παράγοντες παρεμβαίνουν σε αυτήν την περίπτωση;

Είναι ενδιαφέρον ότι..

...υπάρχουν τόσο πολλά μεγάλα ζώα γύρω μας. Αν το να έχεις μεγάλες διαστάσεις συνεπάγεται τόσα μειονεκτήματα, γιατί η εξέλιξη δεν δημιούργησε ένα βασίλειο μικρών ζώων; Ο λόγος είναι ότι τα μεγάλα ζώα είναι δυνατότερα, σε απόλυτα μεγέθη, από τα μικρότερα είδη, παρότι τα μικρά είναι συγκριτικά ισχυρότερα. Αυτό τους προσφέρει πλεονέκτημα σε έναν άμεσο ανταγωνισμό και επίσης τους επιτρέπει να καταλαμβάνουν νέες οικολογικές δεσμειώσεις. Το μεγάλο μέγεθος, όμως, δημιουργεί άλλα προβλήματα. Ένα άλλο, για να μπορέσει να βρει τροφή, πρέπει να καλύψει μεγαλύτερη περιοχή απ' ό,τι ένα ποντίκι. Το ποντίκι, από αυτήν την άποψη, και επειδή συνήθως το απόθεμα της τροφής είναι περιορισμένο, υπερτερεί του αλλού διότι χρειάζεται λιγότερη τροφή. Ένα εκτάριο αγρού μπορεί να καλύψει τις ανάγκες ενός πολύ μεγάλου πληθυσμού ποντικιών, αλλά μόνο ενός ή δύο αλόγων. Αξιόλογο πλήθος μεγάλων ζώων μπορεί να συγκεντρωθεί μόνο σε μεγάλες εκτάσεις γης. Επομένως, και το μεγάλο και το μικρό μέγεθος έχουν τα δικά τους οικολογικά πλεονεκτήματα.

...πριν από λίγα χρόνια οι εφημερίδες διατυπώνισαν το κατόρθωμα ενός επτάχρονου αγοριού που πέτυχε ένα απίθανο ρεκόρ σε κάμψεις των χεριών (περίπου 5.000). Το πα-



Σχήμα 4

δί μεγαλώνει και, πιθανότατα, συνέχιζε να ασχολείται με τη γυμναστική, χωρίς, όμως, καμιά ελπίδα να οπάσει το ρεκόρ του. Ελπίζουμε ότι τώρα πια καταλαβαίνετε το λόγο.

...το μεγαλύτερο ζώο που έζησε στην Έηρά ήταν ο βραγχιόσαυρος, με μήκος 20 μέτρα και βάρος 80 τόνους. Οι εικασίες για το πώς ήταν δυνατό να υπάρχει ένα τόσο τεράστιο ζώο οδήγησαν τους παλαιοντολόγους να υποθέσουν ότι αυτός ο δεινόσαυρος ζούσε σε πλημμυριούμενες περιοχές, οπότε ολόκληρο το σώμα του (εκτός από το κεφάλι) βρισκόταν μέσα στο νερό (Σχήμα 4). Διαφορετικά, σύμφωνα με την άποψη αυτών των επιστημόνων, τα οστά τού βραγχιόσαυρου δεν θα μπορούσαν να αντέξουν το τεράστιο φορτίο. Όμως, αυτός ο τρόπος ζωής μέσα στο νερό προξενεί ιδιαίτερα προβλήματα. Συγκεκριμένα, θα ήταν αδύνατο να αναπνεύσει, διότι οι μύες των πνευμόνων δεν θα μπορούσαν να κατανικούν συνεχώς την πίεση του νερού. Ήτοι, λοιπόν, οι βιολόγοι αναγκάστηκαν να επιστρέψουν στο μαρπονίακα και να υπολογίσουν ξανά τη δύναμη των οστών. Κατέληξαν τότε στο συμπέρασμα ότι τα οστά είχαν τη δυνατότητα να υποβαστάξουν αυτό το τεράστιο φορτίο.

... συγκρίνοντας διαφορετικά θηλαστικά, οι βιολόγοι κατέληξαν σε μια περίεργη σχέση (κανόνας του Bergmann): καθώς μετακινούμαστε από τους πόλους στον ισημερινό, μειώνεται το μέγεθος των θερμόσαμων ζώων του ίδιου ή παρόμοιων ειδών. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ένας από τους σημαντικούς παράγοντες που καθορίζουν το ενεργειακό ισοζύγιο σ' έναν οργανισμό είναι η απώλεια θερμότητας – απώλεια που τα ζώα των πολικών περιοχών «προσπάθουν» να τη μειώσουν με οποιοδήποτε μέσον είναι δυνατόν. Τα θηλαστικά είναι θερμόσαμα και η θερμοκρασία τους δεν αλλάζει, οπότε δεν μπορούν να μειώσουν τις απώλειες θερμότητας χαμηλώνοντας τη θερμοκρασία του σώματός τους. Όμως, η αύξηση των διαστάσεων του σώματός τους επιτρέπει τη μείωση της σχετικής (δηλαδή, ανά μονάδα μάζας) επιφάνειας που μεταφέρει θερμότητα. Η μεταφορά θερμότητας είναι μεγαλύτερη στα ψυχρά κλίματα, και επο-

μένως το μεγαλύτερο μέγεθος είναι σημαντικότερο για τα ζώα των πολικών περιοχών – πράγμα που εξηγεί τον κανόνα του Bergmann.

... τα κολύμπρια, με μάζα 3-5 gr, είναι τα μικρότερα πουλιά και υφίστανται ιδιαίτερα μεγάλες απώλειες θερμότητας. Για να κρατήσουν σταθερή τη θερμοκρασία του σώματός τους τη νύχτα, είναι υποχρεωμένα να αποθηκεύουν λίπος ή γλυκογόνο κατά τη διάρκεια της ημέρας. Όμως, κάπι τέτοιο είναι εξαιρετικά ενοχλητικό για το πουλί, διότι οδηγεί σε αύξηση της μάζας του σώματος πλη ημέρα και σε μεγαλύτερη κατανάλωση ενέργειας κατά την πάχη. Επιπλέον, η μετατροπή των αρχικών υδατανθράκων σε αποδημευμένες, πλούσιες σε ενέργεια ουσίες, απαιτεί επίσης ενέργεια. Ακόμη, ο τρόπος διατροφής του κολυμπριού – στέκεται ακίνητο, πετώντας, πάνω από ένα λουλούδι – απαιτεί την κατανάλωση πολύ μεγάλης ποσότητας ενέργειας. Στη διάρκεια της εξέλιξης, το κολύμπριο αντιμετώπισε δύο προοπτικές: να γίνει μεγαλύτερο ή να μειώσει τη νυχτερινή απώλεια θερμότητας. Το αποτέλεσμα είναι ότι η υψηλή θερμοκρασία του σώματός του (έχει την υψηλότερη ανάμεσα στα πουλιά) των 43-45°C διατηρείται μόνο κατά τη διάρκεια της ημέρας. Τη νύχτα πέφτει μόλις στους 10-20°C. Αυτό εξηγεί το γιατί τα κολύμπρια ζουν στις τροπικές χώρες – διαφορετικά θα αντιμετωπίζαν μέσα στο εικοσιτετράωρο μεγάλες απώλειες θερμότητας και δεν θα είχαν τον φυσιολογικό μεταβολισμό των θερμόσαμων ζώων.

#### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 61

Συνέχεια από τη σ. 28 ➔

#### Φ9

**Κινούμενοι δακτύλιοι.** Δύο όμοιοι ουρμάτινοι δακτύλιοι, ακτίνας  $r$  και μάζας  $m$ , είναι τοποθετημένοι εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, μαγνητικής επαγωγής  $B$ , του οποίου οι δυναμικές γραμμές κατευθύνονται κάθετα στο επίπεδο των δακτυλίων και σ' αυτό της σελίδας (Σχήμα 2). Οι δακτύλιοι εφάπτονται αγώγιμα στα σημεία τομής τους  $A$  και  $C$ . Ποια ταχύτητα αποκτά κάθε δακτύλιος όταν διακόψουμε το μαγνητικό πεδίο; Η ηλεκτρική αντίσταση κάθε δακτυλίου είναι  $R$  και η γωνία  $\alpha = \pi/3$ . Αγνοήστε τα φαινόμενα αυτεπαγωγής και αμοιβαίας επαγωγής στους δακτύλιους, τη μετατόπιση των δακτυλίων κατά τη διακοπή του μαγνητικού πεδίου, και κάθε φαινόμενο τριβής. (V. Mozhayev)

#### Φ10

**Καταδίωξη ενός ειδώλου.** Μια σημειακή πηγή φωτός κινείται παράλληλα προς τον κύριο άξονα ενός συκλίνοντος φακού εστιακής απόστασης  $f$ . Προσδιορίστε την απόσταση της πηγής από το φακό τη στιγμή που η αριθμητική τιμή της ταχύτητας του ειδώλου της ισούται με αυτήν της δικής της ταχύτητας. Η απόσταση της πηγής από τον κύριο άξονα είναι  $H = f/4$ . (A. Zilberman)

#### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 61

➡ Συνέχεια από τη σ. 9

μηδαμινό σε σχέση με το συνολικό του κέρδος!

Φυσικά, για μας είναι εύκολο να λέσουμε τα χρηματοοικονομικά προβλήματα του γενναίου στρατηγού. Πώς, όμως, θα αντιδρούσε ο ίδιος ο Τερέντιος στη συμβουλή μου; Νομίζω ότι θα έβρισκε την πρότασή μου τουλάχιστον περιέργη. Και τούτο διότι, τελικά, θα έπρεπε να περιμένει είκοσι ολόκληρα χρόνια για ν' αρχίσει να πάρνει το ουσιαστικό μέρος της

αμοιβής του. Τα πρώτα πέντε χρόνια θα εισέπρατε συνολικά λιγότερα από 6.600 μπρούτζινα, ενώ για τον πρώτο ενέμιο χρόνο θα έπρεπε να πηγαίνει κάθε ημέρα στο θησαυροφυλάκιο για να πάρει ένα μόνο μπρούτζινο! Ποιος είναι λοιπόν ο πιο ιδιόρρυθμος; Ο Τερέντιος, ο αυτοκράτορας ή εγώ; Αυτό θα το αποφασίσετε εσείς. Όπως και νά 'χει, δεν μπορώ παρά να αναρωτιέματι τι θα σκεφτόταν ο Perelman σχετικά μ' αυτήν την εκδοχή της ιστορίας του. Θέλω να ελπίζω ότι θα τον διασκέδαζε. ■

# Αιώρηση με λέιζερ

Αιωρούμενος δίχως τη μητριά μας την αλύγιστη βαρύτητα

Νίκος Καρούζος

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ώς μπορούμε να κάνουμε ένα αντικείμενο να αιωρείται; Οι θαυματοποιοί τα καταφέρνουν πάντοτε: οι φυσικοί όμως; Η ευκολότερη τεχνική είναι να δέσουμε το αντικείμενο μ' ένα νήμα και να το κρεμάσουμε από την οροφή ενός δωματίου. Το βάρος του αντικειμένου θα εξισορροπείται από την τάση του νήματος. Αν το αντικείμενο είναι μαγνήτης, μπορούμε να το κάνουμε να αιωρείται με τη βοήθεια ενός δεύτερου μαγνήτη. Μια τρίτη τεχνική είναι να εκτοξεύσουμε σφαιρίδια προς το αντικείμενο, έτοις ώστε η δύναμη που θα ασκούν τα σφαιρίδια κατά την κρούση τους με το αντικείμενο να εξισορροπεί το βάρος του.

Ας θεωρήσουμε ότι το αντικείμενο που θέλουμε να αιωρείται είναι ένα ορθογώνιο κουτί, προσανατολισμένο με τέτοιο τρόπο ώστε η βάση του να μένει οριζόντια. Αν εκτοξεύσουμε τα σφαιρίδια κατακόρυφα προς τα πάνω, θα ασκούν μια μέση δύναμη στο κουτί που θα είναι ίση και αντίθετη με το βάρος του. Έτοις, αν υποθέσουμε ότι τα σφαιρίδια, αφού προσκρούσουν στο κουτί, αναπηδούν με ίση ταχύτητα προς τα κάτω, τότε η μεταβολή της ορμής κάθε σφαιρίδιου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta p_{\text{σφαιρ.}} = 2mv_0,$$

όπου με  $v_0$  συμβολίζουμε την αρχική ταχύτητα των σφαιρίδιων και με  $m$  τη μάζα κάθε σφαιρίδιου. Από το θεώρημα ωδησης-ορμής και τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε ότι

η δέσμη των σφαιρίδιων ασκεί στο κουτί δύναμη ίση με:

$$F_{\text{κουτ.}} = N \Delta p_{\text{σφαιρ.}},$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός των σφαιρίδιων που χτυπούν το κουτί κάθε δευτερόλεπτο.

Μπορούμε να έχουμε και ποσοτική αντίληψη του προβλήματος χρησιμοποιώντας μερικές βολικές τιμές. Αν ένα όπλο εκτοξεύει 5 σφαιρίδια ανά δευτερόλεπτο, καθένα από τα οποία έχει μάζα 2 gr και χτυπά το κουτί με ταχύτητα 50 m/sec, ενώ κατόπιν αναπηδά με ίση ταχύτητα, ποιο είναι το βαρύτερο κουτί που μπορεί να παραμείνει αιωρούμενο μ' αυτό τον τρόπο; Ας το υπολογίσουμε:

$$p_{\text{σφαιρ.}} = mv = (2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}) \cdot (50 \text{ m/sec}) = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m/sec},$$

$$\Delta p_{\text{σφαιρ.}} = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m/sec},$$

$$F_{\text{κουτ.}} = (5 \text{ σφαιρ.} / \text{sec}) \cdot (0,2 \text{ kg} \cdot \text{m/sec}) = 1 \text{ Nt}.$$

Επομένως, τα συγκεκριμένα σφαιρίδια μπορούν να διατηρήσουν σε αιώρηση ένα κουτί μάζας 0,1 kg.

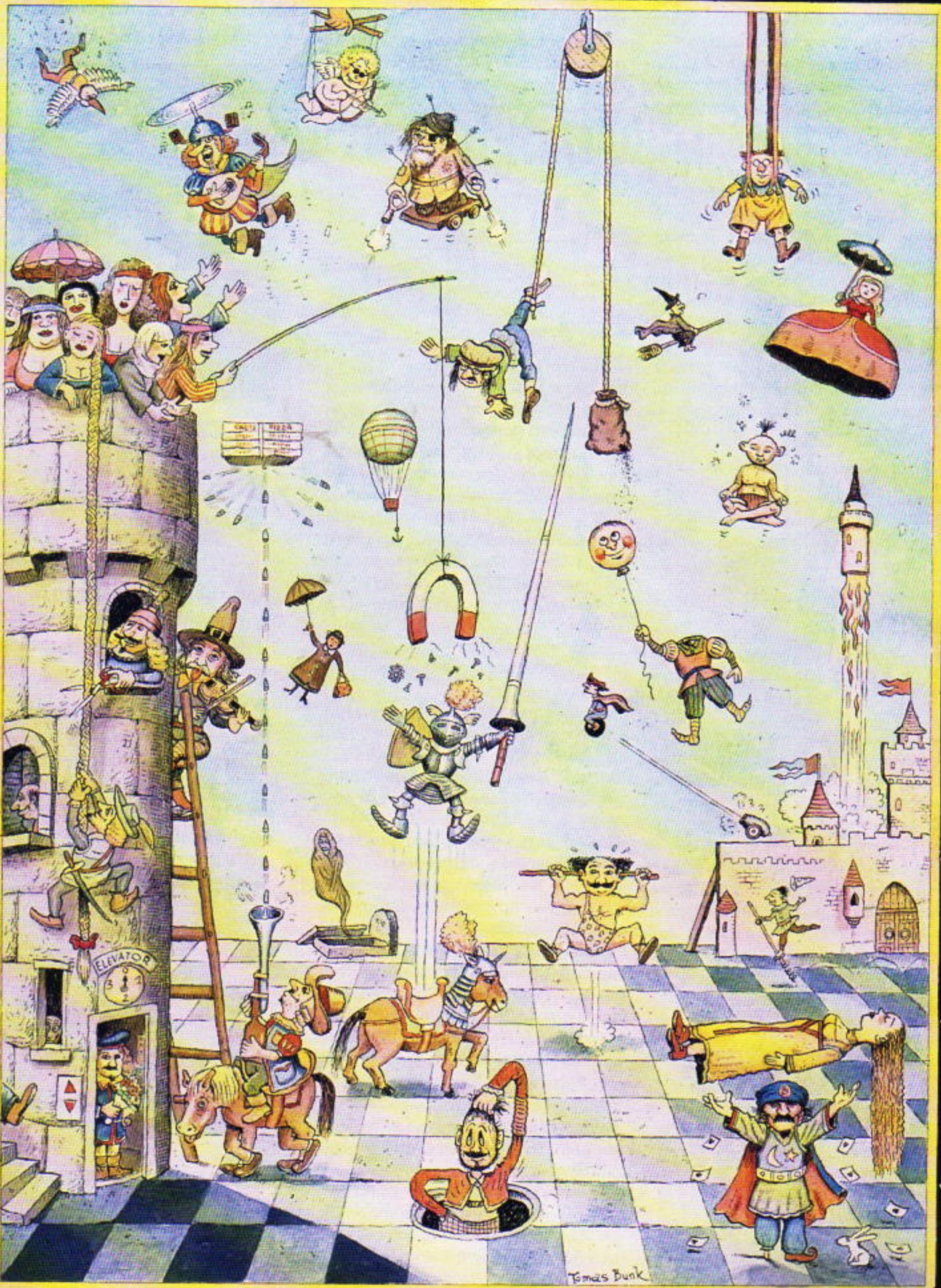
A. Το πρόβλημα γίνεται προκλητικότερο αν τα σφαιρίδια χτυπούν το κουτί υπό γωνία. Θεωρήστε ότι τα σφαιρίδια είναι πανομοιότυπα μ' εκείνα του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά χτυπούν το κουτί υπό γωνία 53° ως προς την κατακόρυφο. Ας υποθέσουμε πάλι ότι τα σφαιρίδια θα αναπηδούν και θα απομακρύνονται με ίση ταχύτητα (50 m/sec) και υπό την ίδια γωνία ως προς την κατα-

κόρυφο. (Θεωρήστε ότι τα σφαιρίδια προσκρούουν με τυχαίους προσανατολισμούς ως προς την κατακόρυφο, έτοις ώστε η οριζόντια συνιστώσα της συνολικής δύναμης να είναι μηδέν. Σ' αυτήν την περίπτωση, ποιο είναι το βαρύτερο κουτί που μπορεί να παραμείνει αιωρούμενο;

Τι πρέπει να κάνουμε όταν το αντικείμενο που θέλουμε να αιωρείται είναι τόσο μικρό ώστε το βάρος του είναι της τάξης των  $10^{-10}$  Nt; Μα, αν το αντικείμενο είναι διαφανές, μπορεί να παραμένει σε αιώρηση με τη βοήθεια μιας δέσμης λέιζερ! Η εκεύρεση του τρόπου με τον οποίο θα μπορούσε να επιτευχθεί κάτι τέτοιο ήταν ένα από τα τρία θεωρητικά προβλήματα που τέθηκαν σε μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στην 24η Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής (ΗΠΑ, Ιούλιος 1993). Αυτό το θεωρητικό πρόβλημα το πρότεινε ο Charles Hollerow, του Πανεπιστημίου Colgate. Εδώ, το παραδέτουμε διασκευασμένο για τους αναγνώστες του *Quantum*.<sup>1</sup>

Μέσω της διάθλασης, μια ισχυρή δέσμη λέιζερ μπορεί να ασκήσει υπολογίσιμες δυνάμεις σε μικρά διαφανή αντικείμενα. Για να το διαπιστώσετε, σκεφτείτε ένα μικρό τριγωνικό γυάλινο πρίσμα με διαθλαστική γω-

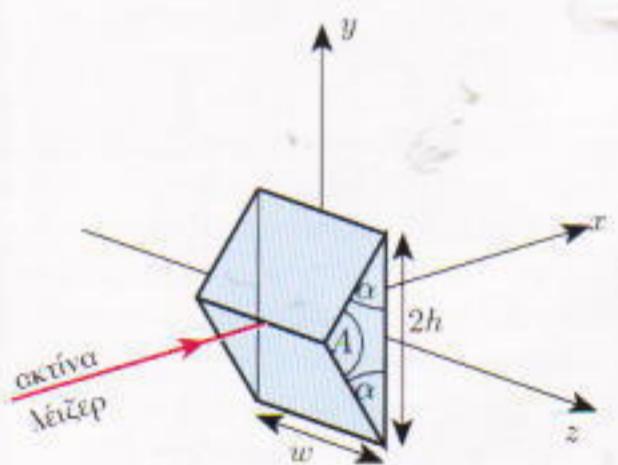
1. Όλα τα θέματα των εξετάσεων της 24ης Διεθνούς Ολυμπιάδας Φυσικής έχουν δημοσιευτεί στο περιοδικό *Physics Today* (Νοέμβριος 1993), σε ένα άρθρο του Anthony P. French, προέδρου της εξεταστικής επιτροπής.



Tomas Bunk

vía  $A = 180^\circ - 2\alpha$ , βάση μήκους  $2h$  και πλάτος  $w$ . Το πρίσμα έχει δείκτη διάθλασης  $n$  και πυκνότητα  $\rho$ .

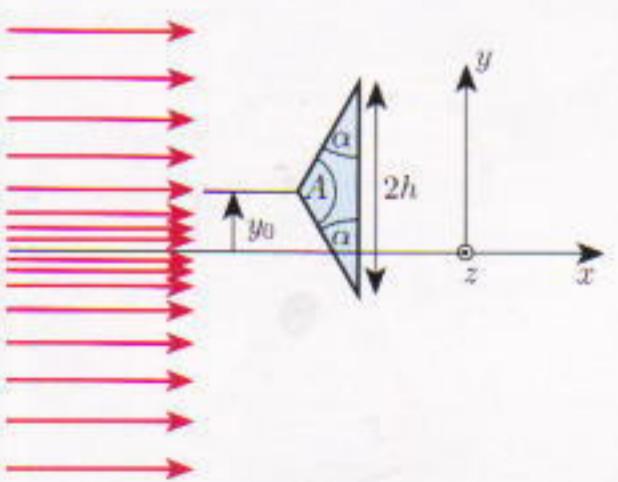
Θεωρήστε ότι το πρίσμα τοποθετείται μέσα σε μια δέσμη λέιζερ προσανατολισμένη παράλληλα στον άξονα  $x$  ενός τρισορθογώνιου συστήματος αξόνων. (Γι' αυτό το πρόβλημα δεχτείτε ότι το πρίσμα δεν περιστρέφεται, «η διαθλαστική γωνία του "δείχνει" συνεχώς προς κατεύθυνση αντίθετη αυτής της δέσμης», οι τριγωνικές έδρες του είναι παράλληλες με το επίπεδο  $xy$ , και η βάση του είναι παράλληλη με το επίπεδο  $yz$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1). Ας δεχτούμε ότι ο απόλυτος δείκτης διάθλασης του περιβάλλοντος αέρα είναι ίσος με τη μονάδα, και ας θεωρήσουμε ότι οι έδρες του πρίσματος εί-



Σχήμα 1

ναι επικαλυμμένες μ' ένα ειδικό αντιανακλαστικό υλικό, ώστε να αποκλείεται η ανάκλαση του φωτός πάνω τους. Η ορμή ενός φωτονίου δίνεται από τον τύπο:  $p = E/c$ .

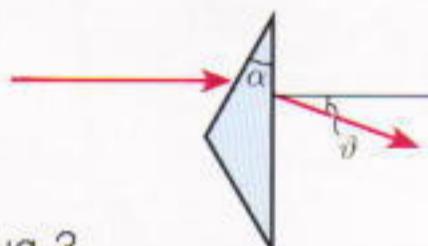
Η δέσμη λέιζερ έχει ένταση που είναι ομοιόμορφη σε όλο το πλάτος της (στη διεύθυνση  $z$ ), αλλά μειώνεται γραμμικά με την κατακόρυφη απόσταση  $y$  από τον άξονα των  $x$ , έτσι ώστε να έχει μέγιστη τιμή  $I_0$



Σχήμα 2

στο  $y = 0$ , και να πέφτει στο μηδέν στο  $y = \pm 4h$  (Σχήμα 2).

**B.** Γράψτε εξισώσεις από τις οποίες η γωνία  $\vartheta$  (βλ. Σχήμα 3) εκφράζεται σε συνάρτηση των  $\alpha$  και  $n$ , για την περίπτωση κατά την οποία ο άξονας της δέσμης λέιζερ «προσκρούει» στην πάνω κεκλιμένη έδρα του πρίσματος.



Σχήμα 3

**G.** Εκφράστε σε συνάρτηση με τα  $I_0$ ,  $\vartheta$ ,  $h$ ,  $w$ , και  $y$  τις συνιστώσες  $x$  και  $y$  της συνολικής δύναμης που ασκείται στο πρίσμα από το φως λέιζερ, όταν η κορυφή της διαθλαστικής γωνίας μετατοπίζεται κατά απόσταση  $y_0$  από τον άξονα  $x$ , όπου  $h \leq y_0 \leq 3h$ . Αν δέλουμε να παραμένει αιωρούμενο το πρίσμα, πρέπει να το τοποθετήσουμε πάνω ή κάτω από τον άξονα της δέσμης λέιζερ;

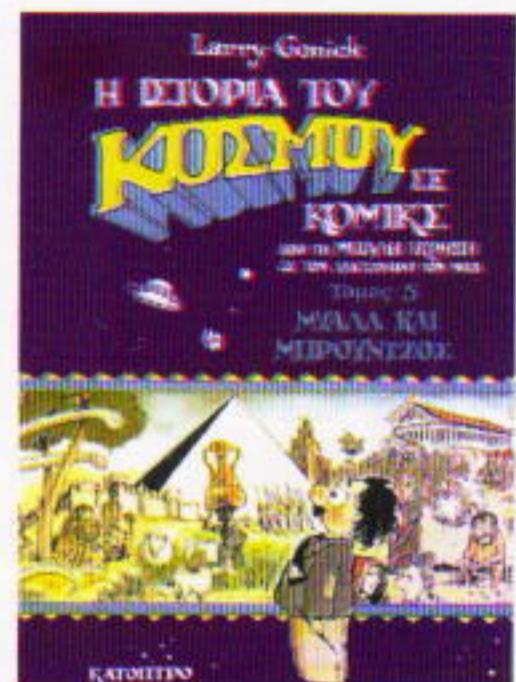
**D.** Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των οριζόντιων και κατακόρυφων συνιστώσων της δύναμης ως συναρτήσεις της κατακόρυφης μετατόπισης  $y_0$ .

Ε. Ας υποθέσουμε ότι η δέσμη λέιζερ έχει πλάτος 1 mm (στη διεύθυνση  $z$ ) και πάχος 80 μm (στη διεύθυνση  $y$ ). Το πρίσμα έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $h = 10$  mm,  $n = 1,5$ ,  $w = 1$  mm,  $\rho = 2,5$  gr/cm<sup>3</sup>. Πόσων watt ισχύς απαιτείται για να εξισορροπηθεί το βάρος του πρίσματος, όταν η κορυφή της διαθλαστικής γωνίας του βρίσκεται σε απόσταση  $y_0 = 2h = 20$  μm;

Οπωσδήποτε, το πρόβλημα είναι αρκετά δύσκολο. Βέβαια, αρκετοί μαθητές από 42 χώρες, που συμμετείχαν στην Ολυμπιάδα, προχώρησαν ένα βήμα παραπέρα, και απάντησαν επιπλέον τις ερωτήσεις Γ, Δ και Ε για θέσεις του πρίσματος με  $y_0 < h$ . Μάλιστα, μερικοί ολοκλήρωσαν αλάνθαστα αυτή την ανάλυση μέσα στο χρονικό όριο των 100 λεπτών!

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού Quantum έως τις 10 Αυγούστου 1994. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία δώρο! ☐

## ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΚΟΜΙΚΣ. ΤΑ ΓΝΩΡΙΖΕΤΕ;



Larry Gonick

## Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ

Από την Μεγάλη Έκρηξη  
έως τον Αλέξανδρο τον Μέγα

### Τόμοι 1 έως 7

Ο Larry Gonick απέκτησε διδακτορικό δίπλωμα στα μαθηματικά από το Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ και στη συνέχεια επιχείρησε το πιο φιλόδοξο έργο στην ιστορία των κόμικς: την σύμπτυξη δεκαπέντε δισεκατομμυρίων ετών σε 400 σελίδες.

Σ' αυτές περιγράφει τη δημιουργία και την εξέλιξη της ζωής και του πολιτισμού με επιστημονική εγκυρότητα και ανεπανάληπτο χιούμορ.

Σελ. κάθε τόμου: 64, 21x29 εκ., Πολύχρ., 2.000 δρχ. κάθε τόμος

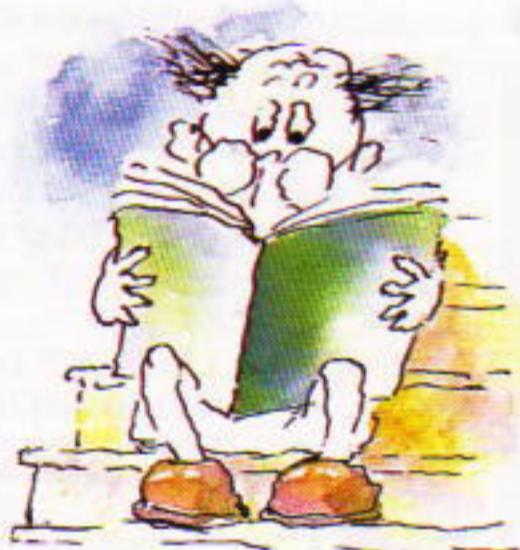
ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα  
Τηλ.: 3643272, 3645098 Fax: 3641864

# Για να περνά η ώρα

Σ6

Εργασιακή ειρήνη. Ένας εργάτης συμφώνησε να πληρώνεται 48 φράγκα για κάθε ημέρα που θα εργαζόταν και να επιστρέψει 12 φράγκα για κάθε ημέρα που δεν θα μπορούσε ή δεν θα επιδύμουσε να εργαστεί. Έπειτα από 30 ημέρες ο εργοδότης δεν χρωστάει χρήματα στον εργάτη, αλλά ούτε και ο εργάτης πρέπει να επιστρέψει τίποτε. Πόσες από τις 30 ημέρες δούλεψε ο εργάτης; (Etienne Bezout [1730-1793])



Σ7

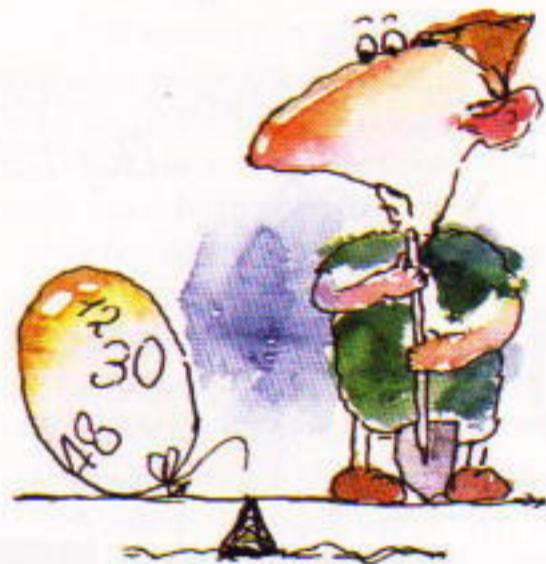
Πού είναι το λάθος; Βρήκα κάποτε ένα παράξενο σημειωματάριο που είχε γραμμένες εκατό προτάσεις. Οι προτάσεις έλεγαν:

«Υπάρχει μία ακριβώς ψεύτικη πρόταση σε τούτο το σημειωματάριο.»

«Υπάρχουν δύο ακριβώς ψεύτικες προτάσεις σε τούτο το σημειωματάριο.»

«Υπάρχουν εκατό ακριβώς ψεύτικες προτάσεις σε τούτο το σημειωματάριο.»

Ποια από αυτές τις προτάσεις είναι αληθινή; (A. Savin)



Σ8

«Φωτιά!» Τι είναι αποτελεσματικότερο στο σβήσιμο μιας πυρκαγιάς, το κρύο ή το καυτό νερό; (S. Krotov)



Σ9

Αριθμητική των κορδονιών. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να δέσετε τα κορδόνια των παπουτσιών σας, και να φαίνονται όπως στην εικόνα (όπου δεν μπορείτε να δείτε πώς είναι περασμένα τα κορδόνια από την εσωτερική μεριά των παπουτσιών). Μπορείτε να βρείτε πόσοι ακριβώς τρόποι υπάρχουν, αν κάθε παπούτσι έχει δέκα τρύπες; (N. Zilberberg).



Σ10

Στο μισό. Χωρίστε το σχήμα της εικόνας σε δύο ίσα μέρη.



# Χρόνια πολλά, Θείε Paul!

*O Paul Erdős «υψώθηκε στο τετράγωνο» και ελπίζουμε ότι  
θα τα καταφέρει ακόμη μία φορά*

Ο Paul Erdős, αυτός ο εξαιρετικός μαθηματικός, γιόρτασε πρόσφατα τα ογδοηκοστά πρώτα του γενέθλια. Ο ίδιος αναφέρθηκε στο γεγονός λέγοντας ότι «υψώθηκε στο τετράγωνο» — μια και  $81 = 9^2$ . Ελπίζουμε ότι θα γιορτάσει πολλά γενέθλια ακόμη, θα γράψει άλλες 1.500 εργασίες, θα εμπνεύσει πολλούς ακόμη μαθηματικούς σε όλο τον κόσμο ώστε να μειώσουν τον δικό τους «αριθμό Erdős» στο 1, και, τέλος, ότι θα προτείνει πολλά ακόμη υπέροχα μαθηματικά προβλήματα.<sup>1</sup> Σε τούτο το άρθρο θα παρουσιάσω μερικά από τα προβλήματά του, ελπίζοντας ότι οι αναγνώστες του θα θελήσουν να βοηθήσουν τον Θείο Paul (όπως τον προσφωνούν χαϊδευτικά οι φίλοι και οι θαυμαστές του) στην ασταμάτητη αναζήτησή του για το μαθηματικό άγνωστο.

Ο Paul Erdős γεννήθηκε στην Ουγγαρία. Οι γονείς του, άριστοι καθηγητές μαθηματικών και οι δύο, αναγνώρισαν και ενθάρρυναν πολύ νωρίς το εξαιρετικό μαθηματικό ταλέντο του. Την εξέλιξή του τη βοήθησε ομαντικά το Középiskolai Matematikai Lapok, το εκπαιδευτικό ουγγρικό περιοδικό για τα μαθηματικά του λυκείου, στο οποίο οφείλεται σε μεγάλο βαθμό το υψηλό επίπεδο

1. Αν έχετε γράψει μια εργασία μαζί με τον Erdős, ο αριθμός σας Erdős είναι 1. Αν έχετε γράψει μια εργασία με κάποιον που έχει γράψει εργασία μαζί με τον Erdős, ο αριθμός σας Erdős είναι 2, κ.ο.κ.

της μαθηματικής ζωής σε αυτήν τη μικρή χώρα. Αφού ολοκλήρωσε τις σπουδές του με μια διδακτορική διατριβή στα μαθηματικά, ο Erdős έγινε ο μοναδικός «πραγματικά παγκό-

βρέθηκε. Όπως ακριβώς η μέλισσα μεταφέρει τη γύρη από λουλούδι σε λουλούδι, έτσι και αυτός ταξιδεύει από το ένα μαθηματικό κέντρο στο άλλο μεταφέροντας προβλήματα και πληροφορίες, συμβάλλοντας στη γονιμοποίηση των μαθηματικών ιδεών.» Τα προβλήματα που ακολουθούν συνιστούν ένα μικρό μόνο δείγμα από τις πολλές ενδιαφέρουσες έρευνές του.

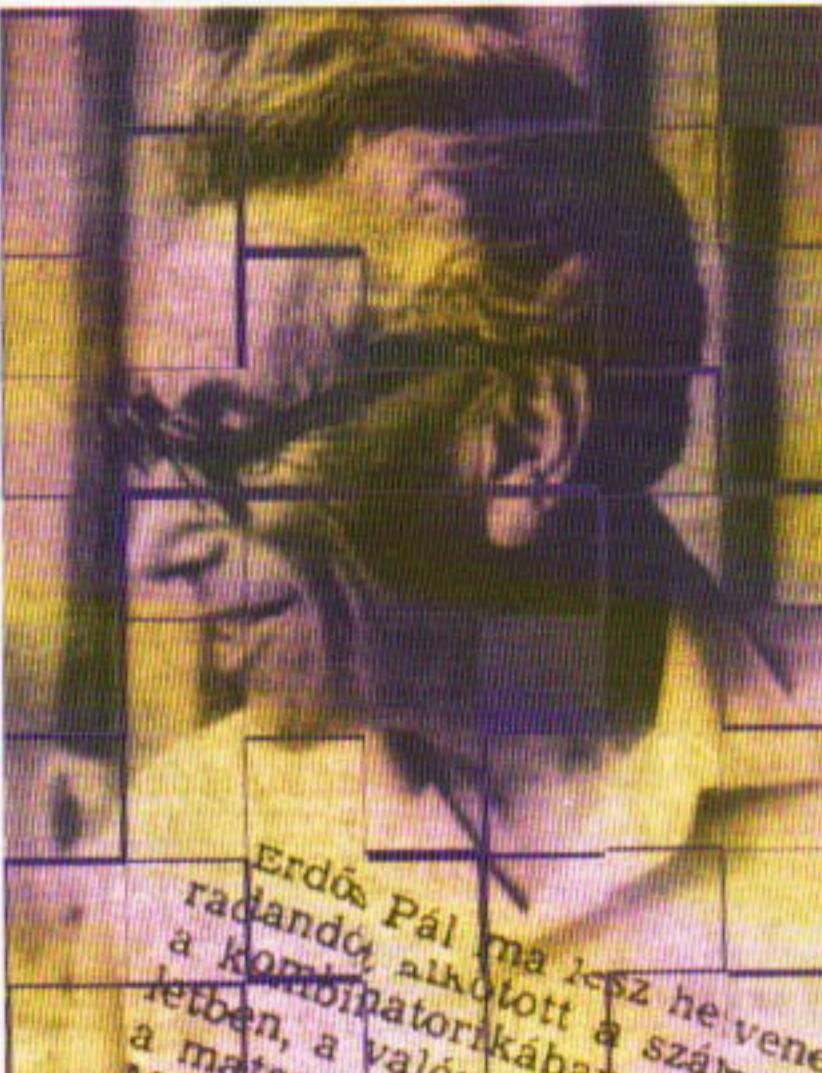
**Πρόβλημα 1:** Έστω  $P$  ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου. Ας συμβολίσουμε με  $a_1, a_2, a_3$  τις αποστάσεις του  $P$  από τις κορυφές του τριγώνου και με  $x, y, z$  τις αποστάσεις του  $P$  από τις πλευρές του τριγώνου. Προσδιορίστε το ελάχιστο της παράστασης  $(a_1 + a_2 + a_3)/(x + y + z)$ .

**Πρόβλημα 2:** Δίνονται  $n$  σημεία στο επίπεδο, που ανάτρια δεν είναι ουγγραμμικά. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος ζευγών σημείων με μοναδιαία (μεταξύ τους) απόσταση;

**Πρόβλημα 3:** Αποδείξτε ότι  $\sum \frac{1}{n! - 1}$  είναι άρρητος.

**Πρόβλημα 4:** Έστω ένα κυρτό  $n$ -γωνο, και έστω ότι τα  $s_1, s_2, \dots$  συμβολίζουν την πολλαπλότητα της εμφάνισης της κάθε απόστασης ανάμεσα στις κορυφές του  $n$ -γώνου. (Παρατηρήστε ότι  $\sum s_i = \binom{n}{2}$ ). Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά  $c$ , τέτοια ώστε  $\sum s_i^2 < cn^3$ .

**Πρόβλημα 5:** Αποδείξτε ότι σε ένα κυρτό  $n$ -γωνο, υπάρχει πάντα μια κορυφή η οποία δεν ισαπέχει από κα-



O Paul Erdős το 1983

σμιος» πανεπιστημιακός καθηγητής μαθηματικών. Ένας από τους θαυμαστές του, ο J.W.S. Cassels του Trinity College του Πανεπιστημίου του Καίμπριτζ, αναφέρει χαρακτηριστικά: «Εκτελόντας, σχεδόν, κίνηση Brown ανάμεσα στα μαθηματικά κέντρα όλου του κόσμου, αποτελούσε πάντοτε το επίκεντρο της μαθηματικής δραστηριότητας σε όλα τα μέρη όπου

μιά τετράδα από τις άλλες κορυφές.

Τα παραπάνω προβλήματα παρουσιάστηκαν στο πανγγυρικό τεύχος για τα εκατό χρόνια του Kōzériskolai Matematikai Lapok. Παραμένουν όλα τους ανοιχτά. Το επόμενο, το Πρόβλημα 6, ήταν το πρώτο οσβαρό πρόβλημα που έθεσε ο Erdős, το 1931. Και αυτό επίσης, παραμένει άλυτο. Τα υπόλοιπα προβλήματα προέρχονται από πρόσφατες επιστολές του Pali Bácsı («Θείος Παύλος» στα ουγγρικά) προς το συγγραφέα του άρθρου. Ο Erdős συνηθίζει να προσφέρει αμοιβές για τη λύση των προβλημάτων του, και σε μερικές περιπτώσεις το ποσό ανέρχεται σε μερικές χιλιάδες δολάρια. Έχει υπολογιστεί ότι αν λύνονταν ταυτόχρονα όλα τα προβλήματά του, δεν θα μπορούσε να εκπληρώσει τις υποσχέσεις του. Ωστόσο, δεν φαίνεται να διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας, αφού τα περισσότερα προβλήματά του είναι πολύ βαθιά και δύσκολα.

**Πρόβλημα 6:** Έστω  $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_k$  θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο, τέτοιοι ώστε τα  $2^k$  αδροίσματα,  $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i$ , όπου  $\varepsilon_i = 0$  ή 1, να είναι όλα διαφορετικά. Εκτιμήστε ή προσδιορίστε την τιμή του ελάχιστου  $a_k$ .

**Πρόβλημα 7:** Έστω  $a_1 < a_2 < \dots$  το σύνολο των ακεραίων της μορφής  $2^\alpha 3^\beta$ . Αποδείξτε ότι κάθε  $n$  μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα κάποιων  $a_i$ , καθένα από τα οποία δεν διαιρεί κανένα από τα υπόλοιπα. Ακόμη καλύτερα, είναι άραγε αλήθεια ότι αν το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο, τότε υπάρχουν τέτοια  $a_i$ , έτοι ώστε

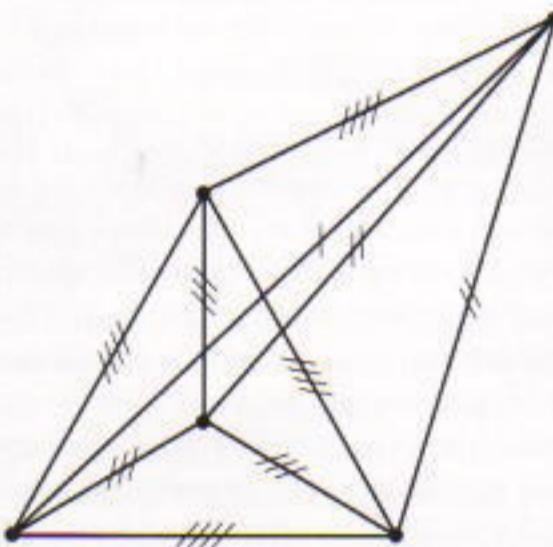
$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} = n$$

και

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k} < 2a_{i_1};$$

**Πρόβλημα 8:** Έστω ότι  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι  $n$  σημεία του επιπέδου σε γενική θέση – δηλαδή, ανά τρία δεν είναι συγγραμμικά και ανά τέσσερα δεν ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Ο Erdős πιστεύει ότι όταν το  $n$  είναι μεγάλο, τα σημεία καθορίζουν τουλάχιστον  $n$  διαφορετικές αποστάσεις. Για μικρά  $n$  αυτό είναι λάθος. Στην πραγματικότητα, όταν  $n < 9$  μία απόσταση μπορεί να εμφανιστεί  $n-1$  φορές, μία  $n-2$  φορές, κ.ο.κ. Αν  $n = 4$ , ένα ισοσκελές τρίγωνο και το κέντρο του μας προσ-

φέρουν ένα οχεικό παράδειγμα. Ο Carl Pomerance κατασκεύασε ένα τέτοιο παράδειγμα για μην περίπτωση που  $n = 5$ , ενώ η Ilona Palasti κατάφερε το ίδιο για τις περιπτώσεις  $n = 6, 7$  και  $8$ . (Για να σας ανοίξουμε την όρεξη, παρουσιάζουμε στην επόμενη εικόνα το παράδειγμα του Pomerance – στις ίσες αποστάσεις υπάρχουν τα ίδια σύμβολα). Ο Erdős προσφέρει 10 δολάρια για ένα παράδειγμα στην περίπτωση που  $n = 9$ , 25 δολάρια για μια απόδειξη ότι όταν το  $n$  είναι μεγάλο δεν υπάρχει παρόμοιο παράδειγμα, και 50 δολάρια για μια



απόδειξη ότι για μεγάλα  $n$  τα σημεία καθορίζουν τουλάχιστον  $n$  διαφορετικές αποστάσεις.

**Πρόβλημα 9:** Έστω  $f(n)$  ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο υπάρχουν ακέραιοι  $a, b$  τέτοιοι ώστε το  $n!/(a!b!)$  να είναι ακέραιος, και  $a+b = n+f(n)$ . Αποδείξτε πώς υπάρχουν  $c_1$  και  $c_2$  τέτοια ώστε  $f(n) < c_1 \log n$  για κάθε  $n$ , και προσπαθήστε να αποδείξετε ότι  $f(n) > c_2 \log n$  για άπειρα  $n$ . Επιπλέον, θα ονομάζουμε το  $n$  πρωταθλητή αν  $f(n) > f(m)$  για κάθε  $m < n$ . Για παράδειγμα, το 10 είναι πρωταθλητής, διότι  $10!/6!7! = 1$ ,  $6+7 = 10+3$ , και  $f(10) < 3 = f(10)$  για κάθε  $m < 10$ . Προσπαθήστε να προσδιορίσετε όλους τους πρωταθλητές. Έστω ότι  $g_n(a) = b$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος  $b$  για τον οποίο το  $n!/(a!b!)$  είναι ακέραιος, και έστω  $f_n(a) = a + g_n(a) - n$ . Εκτιμήστε ή προσδιορίστε την τιμή του

$$\frac{1}{n} \sum_{a=1}^{n/2} f_n(a).$$

**Πρόβλημα 10:** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι κορυφές ενός κυρτού  $n$ -γώνου

στο επίπεδο. Κατασκευάστε όλες τις διαγώνιες του (θα υπάρχουν  $\binom{n}{2} - n$  διαγώνιες). Θεωρήστε όλα τα εσωτερικά σημεία της τομής τους. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν τρεις διαγώνιες που διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε είναι προφανές ότι υπάρχουν  $\binom{n}{4}$  σημεία τομής, αφού με κάθε επλογή τεσσάρων σημείων προκύπτει ένα σημείο τομής. Επομένως, ας μην κάνουμε καμιά υπόθεση σχετικά με το πλήθος των διαγώνιων που διέρχονται από ένα σημείο. Ανακύπτουν τότε δύο ερωτήματα: Πόσα διαφορετικά σημεία τομής μπορεί να υπάρχουν; Και ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος των σημείων τομής; Επιπλέον, για την περίπτωση των  $2n$  σημείων, μπορεί το πλήθος των σημείων τομής να είναι μικρότερο από αυτό που ισχύει για τα κανονικά  $2n$ -γώνα;

Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω προβλήματα, οι ερωτήσεις που θέτει ο Paul Erdős διευρύνουν συνεχώς τα σύνορα του γνωστού μαθηματικού σύμπαντος. Οι ανακαλύψεις του εκτίνονται στους περισσότερους κλάδους των μαθηματικών – από τη Θεωρία Αριθμών στη Συνδυαστική, από τη Θεμελίωση των Μαθηματικών στην Ανάλυση, από τη Γεωμετρία στη Θεωρία των Πιθανοτήτων, και δεν είναι λίγες οι νέες περιοχές που δημιουργήθηκαν ως απόρροια των ερευνών του.

Ο «Pali Bácsı» απολαμβάνει τη ουνεργασία με νέους ανθρώπους, και σε πολλούς από αυτούς έχει εμπνεύσει σπουδαία επιτεύγματα. Επίσης, είναι ένας από τους ιδρυτές του περιφημού προγράμματος Εξάμηνα Μαθηματικών της Βουδαπέστης.

Ο Paul Erdős είναι μέλος της Ουγγρικής Ακαδημίας Επιστημών και έχει εκλεγεί επίσης μέλος της Ακαδημίας της Ολλανδίας, της Αυστραλίας, της Ινδίας και της Αγγλίας. Έχει τιμηθεί με αναρίθμητους τίτλους. Η πλέον πρόσφατη διάκριση είναι η θεομοθήτηση από την Παγκόσμια Ομοσπονδία Εθνικών Μαθηματικών Διαγωνισμών του Βραβείου Erdős. Το βραβείο αυτό απονέμεται σίους μαθηματικούς που με τις προσπάθειές τους για την εξάπλωση των μαθηματικών διαγωνισμών έχουν συμβάλει σημαντικά στην αναγνώριση του σημαντικού ρόλου της μαθηματικής επιστήμης.

# Κουβεντούλα για έναν μικρό φακό

*Kai sto tēlos, «Páme sinemá.»*

Alexander Zilberman

**Τ**ο φαινόμενο της διάμλασης του φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια διαφανών μέσων (λόγου χάρη, του αέρα και του γυαλιού) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ποικίλους σκοπούς σε διάφορες οπτικές διατάξεις, συμπεριλαμβανομένων των πλακιδίων με παράλληλες έδρες, των πριομάτων και των φακών.

Συνήθως οι φακοί χρησιμοποιούνται για να σχηματίζουν είδωλα φωτεινών (ή φωτισμένων) αντικειμένων. Με τη βοήθεια ενός φακού μπορούμε να παραγάγουμε ένα είδωλο εκεί όπου θέλουμε (στο φίλμ μιας κάμερας ή στην οδόνη του κινηματογράφου) ή σε μια απόσταση που είναι κατάλληλη για να το δούμε (ματογυάλια, μεγέθυντικοί φακοί, φακοί επαφής). Μπορούμε να σχηματίσουμε το είδωλο ενός αντικειμένου κατά πολύ μεγαλύτερο απ' αυτό (στο μικροσκόπιο ή στο επιδιασκόπιο) ή και μικρότερο (στο τηλεσκόπιο ή στα κιάλια) – ναι, μικρότερο κατά έναν παράγοντα χιλιάδων, το οποίο έχει όμως έρθει πλησιέστερα κατά έναν παράγοντα εκατοντάδων χιλιάδων,

γεγονός που καθιστά δυνατή την εξέταση του αντικειμένου σε όλες τις λεπτομέρειές του. Επίσης, μπορούμε να σχηματίσουμε το είδωλο ενός φωτεινού οημέρου σε «απείρως» μεγάλη απόσταση – ο' αυτήν την περίπτωση η δέσμη του φωτός είναι σχεδόν παράλληλη (για παράδειγμα, η δέσμη του προθολέα ενός αεροδρομίου).

Σε πολλές περιπτώσεις που είναι σημαντικές από πρακτική άποψη, το οπικό σύστημα αποτελείται από αρκετούς φακούς. Για παράδειγμα, ο αντικειμενικός φακός μιας κάμερας μπορεί να αποτελείται από δέκα, ή

και περιοσότερους, διαφορετικούς φακούς – κούλους και κυρτούς, λεπτούς και παχείς, κατασκευασμένους από διάφορους και ειδικούς τύπους διαφανών υλικών. Μπορεί μάλιστα κάποιος να χρησιμοποιήσει και φακούς που η γεωμετρία τους είναι πιο πολύπλοκη απ' αυτή των συνήθων σφαιρικών επιφανειών. Ομολογουμένως, οι απλοί υπολογισμοί που μαθαίνουμε να κάνουμε στα πλαίσια της οχολικής φυσικής για διάφορα οπικά συστήματα δεν επαρκούν για τις πρακτικές απαιτήσεις που αφορούν τις χρησιμοποιού-



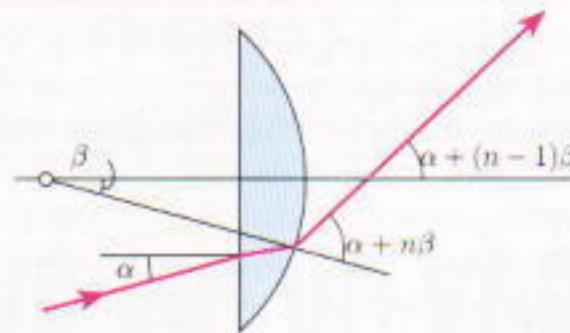
Εκκονογράφηση: Sergey Barkhin

μενες διατάξεις: ακόμη και για τους φακούς που τοποθετούνται στα υψηλής ποιότητας ματογυάλια (για να μην αναφέρουμε τους φακούς επαφής!) συχνά οι υπολογισμοί γίνονται με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, κι αυτό όχι επειδή μας περισσεύουν οι υπολογιστές και δεν έχουμε τι να τους κάνουμε.

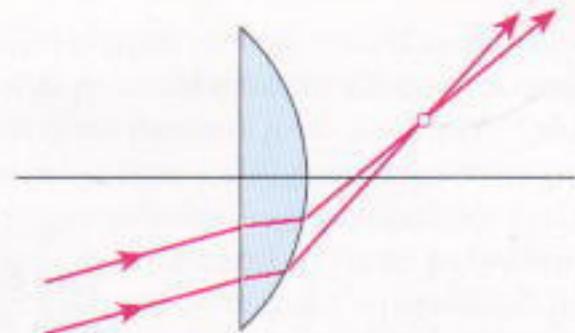
Παρ' όλα αυτά, ακόμη και μια απλή θεωρία μπορεί να αποδειχτεί χρήσιμη, επειδή και οι υπολογισμοί που γίνονται κατά προσέγγιση πολλές φορές είναι επαρκείς. Ας δούμε τις διαδρομές που ακολουθούν οι φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν σε έναν απλό, επιπεδόκυρτο φακό με σφαιρική κυρτή επιφάνεια ακτίνας καμπυλότητας  $R$ . Επέλεξα αυτό το είδος φακού διότι, σ' αυτήν την περίπτωση, οι διαδρομές των ακτίνων φωτός θα είναι απλούστερες. Ας πούμε ότι ο φακός έχει κατασκευαστεί από γυαλί και το υλικό που τον περιβάλλει είναι ο ατμοσφαιρικός αέρας.

Ας φανταστούμε ότι μια παράλληλη δέσμη φωτός προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια του φακού μας. Γνωρίζουμε ότι έπειτα από τη διάδλαση σε έναν συγκλίνοντα φακό, συγκλίνει σε ένα σημείο που βρίσκεται στο εστιακό επίπεδο. Ας δούμε το γιατί. Καταρχάς, πρέπει να διατυπώσουμε το πρόβλημα ακριβέστερα. Δεχόμαστε ότι χρησιμοποιούμε έναν λεπτό φακό (παρακάτω θα εξηγήσω επακριβώς τι εννοώ όταν λέω «λεπτός φακός» και τι πρέπει να εξαιρέσουμε), και θεωρούμε ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι μικρή (αυτό το στοιχείο καθιστά μικρό το σφάλμα, όταν θα αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις ημα και εφα με την ίδια τη γωνία  $\alpha$ , για να κάνουμε απλούστερους τους υπολογισμούς μας). Αυτές είναι λογικές συνθήκες που ανταποκρίνονται γενικά σε πραγματικές περιπτώσεις απλών οπικών πειραμάτων.

Ας σχεδιάσουμε το φακό και τη διαδρομή μιας από τις προσπίπτουσες ακτίνες (Σχήμα 1: εδώ ο φακός είναι παχύς και οι γωνίες μεγάλες, για διευκόλυνση σημειώσης του σχήματος). Η ακτίνα που επιλέξαμε προσπίπτει στο φακό υπό γωνία  $\alpha$  ως προς τον κύριο οπικό άξονα του μετά τη διάδλαση στην επίπεδη επιφάνεια η γωνία μικραίνει κατά έναν παράγοντα  $n$ , όπου  $n$  είναι ο



Σχήμα 1



Σχήμα 2

απόσταση,

$$L = \frac{R}{n - 1}.$$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι η απόσταση που προκύπτει δεν εξαρτάται από τη γωνία  $\beta$  – είναι η ίδια για όλες τις ακτίνες της δέσμης μας –, και ως εκ τούτου αποδείξαμε ότι οι παράλληλες δέσμες φωτός μετά τη διάδλασή τους από το φακό συγκλίνουν σε ένα σημείο: υπολογίσαμε, μάλιστα, την απόσταση μεταξύ αυτού του σημείου και του φακού. Σημειώστε ότι όλα αυτά τα σημεία σύγκλισης (που αντιστοιχούν σε διάφορες γωνίες πρόσπτωσης) ανήκουν στο εστιακό επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο στον κύριο οπικό άξονα του φακού και βρίσκεται σε απόσταση  $R/(n - 1)$  από το φακό. Με άλλα λόγια, υπολογίσαμε την εστιακή απόσταση του φακού μας:

$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, έπειτα από ακόμη πιο μακροοκελείς υπολογισμούς, μπορούμε να βρούμε έναν ανάλογο τύπο για την εστιακή απόσταση ενός σφαιρικού φακού, ο οποίος σχηματίζεται από δύο σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες καμπυλότητας  $R_1$  και  $R_2$ . Είναι πιο ωολικό να παρουσιάσουμε αυτόν τον τύπο σε μια ελαφρώς διαφορετική μορφή:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Οι ακτίνες καμπυλότητας μπορούν να είναι και οι δύο θετικές (αμφίκυρτος φακός) ή αρνητικές (αμφίκοιλος φακός), ή να έχουν αντίθετα πρόσημα. (Στην περίπτωση μας, όπου έχουμε έναν επιπεδόκυρτο φακό, η μία από τις δύο ακτίνες είναι απειρώς μεγάλη.) Αν η εστιακή απόσταση που προκύπτει είναι θετική (λέμε πως η εστία του φακού είναι πραγματική) – δηλαδή, οι διαδλώμενες δέσμες ο-

$$H = L \cdot [(n - 1)\beta + \alpha] - R\beta.$$

Τα ίδια προφανώς θα ισχύουν για οποιαδήποτε δεύτερη ακτίνα της αρχικής δέσμης. Αυτές οι δύο ακτίνες θα τέμνονται μεταξύ τους σε κάποιο σημείο στα δεξιά του φακού (Σχήμα 2). Επομένως, εξισώνοντας τις απόστασεις  $H$  και για τις δύο ακτίνες, βρίσκουμε την απόσταση  $L$  του σημείου τομής τους από το φακό:

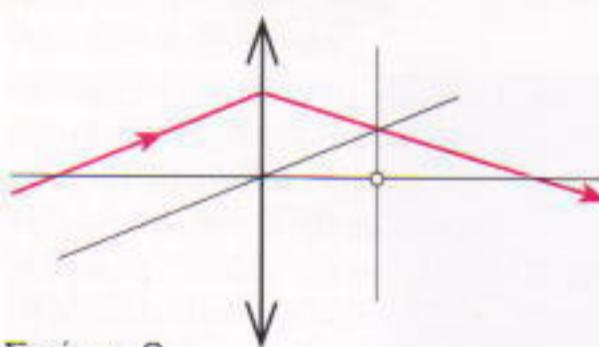
$$L[(n - 1)\beta_1 + \alpha] - R\beta_1 = \\ = L[(n - 1)\beta_2 + \alpha] - R\beta_2,$$

ντως συγκλίνουν σε ένα σημείο —, ο φακός ονομάζεται συγκλίνων (ή θετικός). Αντίθετα, αν η εστιακή απόσταση είναι αρνητική (λέμε πως η εστία είναι φανταστική) — δηλαδή, οι παράλληλες ακτίνες αποκλίνουν μετά τη διάθλαση —, ο φακός ονομάζεται αποκλίνων (ή αρνητικός).

Υπάρχει μια απλή οχέση, γνωστή ως τύπος των φακών (μπορεί να συναχθεί γεωμετρικά), που συνδέει την απόσταση  $s_1$  μεταξύ του αντικειμένου και του φακού, την απόσταση  $s_2$  μεταξύ του φακού και του ειδώλου, και την εστιακή απόσταση  $f$  του φακού:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}.$$

Τέλος, είναι εύκολο να προσδιορίζουμε τη διαδρομή που διαγράφει κάθε ακτίνα φωτός μετά τη διάθλαση της από έναν συγκλίνοντα φακό. Το μόνο που χρειάζεται είναι να χαράξουμε την παράλληλη βοηθητική ακτίνα που περνά από το οπικό κέντρο του φακού (αυτή η ακτίνα «δεν διαθλάται») και να βρούμε το σημείο τομής της με το εστιακό επίπεδο — η αρχική ακτίνα πρέπει να περνά από αυτό το ίδιο σημείο μετά τη διάθλαση της (Σχήμα 3). Η δυνατότητα να χαράξουμε τη διαδρομή



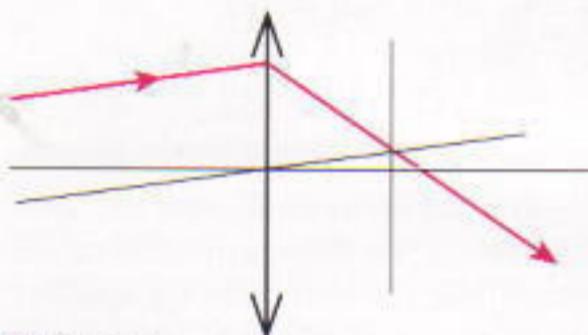
Σχήμα 3

μιας ακτίνας που επιλέγουμε αυθαίρετα, μας βοηθάει σημαντικά όταν δέλουμε να σχηματίσουμε κάποιο είδωλο σε ένα πολύπλοκο οπικό σύστημα που αποτελείται από μεγάλο αριθμό φακών. Δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με τα ενδιάμεσα είδωλα από κάθε φακό.

Πρέπει να επισημάνω ότι με αυτή τη μέθοδο σχεδιασμού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιεσδήποτε ακτίνες — ακόμη και αυτές που προσπίπτουν υπό μεγάλη γωνία ως προς τον κύριο οπικό άξονα ή αυτές που προσπίπτουν κοντά στα χείλη του φακού. Μπορούμε επιπλέον να αυξή-

σουμε το μήκος του φακού, έτοι ώστε ακόμη πιο απομακρυσμένες ακτίνες να «προσγειώνονται» πάνω του. Βέβαια, αυτή η μέθοδος σχεδιασμού, όπως αντιλαμβάνεται, αφορά ένα φακό «στα χαρτιά». Για έναν πραγματικό φακό, τα παραπάνω αποτελέσματα ανταποκρίνονται μόνο σε «σωστές» ακτίνες — δηλαδή, σε ακτίνες που σχηματίζουν μικρή γωνία με τον κύριο οπικό άξονα και προσπίπτουν σχετικά κοντά στο οπικό κέντρο του φακού.

Ας χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω, για να λύσουμε ένα απλό πρόβλημα. Στο Σχήμα 4 βλέπουμε έναν συγκλίνοντα φακό, τον άξονά του και τη διαδρο-



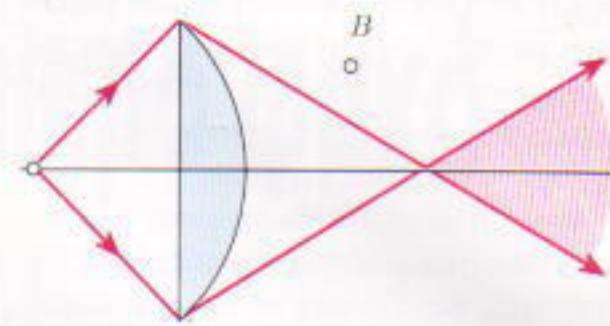
Σχήμα 4

μή μιας ακτίνας πριν και μετά τη διάθλαση από το φακό. Ζητείται να βρούμε τη θέση του εστιακού επιπέδου.

Ας χαράξουμε τη διαδρομή της βοηθητικής ακτίνας φωτός που είναι παράλληλη στην αρχική προσπίπτουσα ακτίνα και περνά από το οπικό κέντρο του φακού — αυτή η ακτίνα δεν διαθλάται, αλλά το σημείο τομής της με τη διαθλώμενη αρχική ακτίνα βρίσκεται πάνω στο εστιακό επίπεδο. Παρεμπιπόντως, μπορούμε να «αντιστρέψουμε» τις ακτίνες — θεωρώντας την προσπίπτουσα ακτίνα ως διαθλώμενη, και τη διαθλώμενη ως προπίπτουσα — και, όπως στην παραπάνω περίπτωση, να εντοπίσουμε το εστιακό επίπεδο στην άλλη πλευρά του φακού. Ωστόσο, και τα δύο εστιακά επίπεδα πρέπει να βρίσκονται στην ίδια απόσταση από το φακό.

Ας επιστρέψουμε και πάλι στους «πραγματικούς» φακούς. Συνήθως θεωρούμε ότι μια σημειακή πηγή εκπέμπει φως ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Οπουδήποτε κι αν βρίσκεται το μάτι, συλλαμβάνει την αποκλίνουσα δέομη φωτό, και αντιλαμβανόμαστε το φωτεινό σημείο. Τα πράγματα διαφέρουν κάπως, αν

θέλουμε να δούμε το είδωλο αυτού του φωτεινού σημείου που σχηματίζει ένας φακός. Ας θεωρήσουμε ότι στο Σχήμα 5 απεικονίζεται ένας



Σχήμα 5

«πραγματικός» φακός, συγκεκριμένου μεγέθους. Στην περίπτωση το είδωλο μιας σημειακής πηγής φωτός σχηματίζεται από όλες αυτές τις ακτίνες που περιορίζονται μέσα στο νοητό κώνο ο οποίος έχει ως κορυφή τη σημειακή πηγή και ως βάση το φακό. Επομένως, μπορούμε να δούμε το είδωλο της σημειακής πηγής μόνο εάν το μάτι μας βρίσκεται μέσα στη γραμμοκασμένη στρεά γωνία του Σχήματος 5.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι υπάρχουν σημεία από τα οποία δεν είναι δυνατό να δούμε ούτε τη φωτεινή πηγή ούτε το είδωλό της. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι βρισκόμαστε στο σημείο  $B$ : η πηγή καλύπτεται από το φακό, και είμαστε έξω από τη στρεά γωνία από την οποία μπορούμε να δούμε το είδωλο. Για να επεκτείνουμε την περιοχή όπου το πραγματικό είδωλο είναι δυνατό να παρατηρηθεί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια οδόνη. Αν τοποθετήσουμε την οδόνη εκεί ακριβώς όπου σχηματίζεται το είδωλο της πηγής, οι ακτίνες που θα ανακλαστούν πάνω της θα ταξιδέψουν προς κάθε κατεύθυνση!

Με αυτό τον τρόπο βλέπετε τις εικόνες στην οδόνη του κινηματογράφου. Αν προσαδησουμε να παρακολουθήσουμε μια τανία κοιτώντας μέσα στον αντικειμενικό φακό του προβολέα, ή χρησιμοποιώντας έναν καθρέφτη στη θέση της οδόνης, θα δούμε, οτιην καλύτερη περίπτωση, μόνο ένα μικρό μέρος του συνόλου της εικόνας. Θα βλέπουμε διαφορετικά μέρη της εικόνας από διάφορες θέσεις της αίθουσας — κάτι που ο οκηνοθέτης μάλλον δεν είχε στο μαλό του όταν γύριζε την τανία. □

# Κρίνε για να κριθείς

Μανώλης Αναγνωστάκης

## Εισαγωγή στην πολυπλοκότητα

Ilya Prigogine και Isabelle Stengers:

ΤΑΞΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΟ ΧΑΟΣ  
(Αγγλικός τίτλος: Order out of Chaos)

Μετάφραση: Μαρία Λουισάπου  
Εκδόσεις Κέδρος, Αθήνα 1992

του Σπύρου Μανουσέλη

Μια φορά κι έναν καιρό οι άνθρωποι ζούσαν σε ένα εύτακτο και νομοκρατούμενο σύμπαν. Ήταν ένα σύμπαν χωρίς μυστήρια και εκπλήξεις, αφού οι βασικοί του νόμοι είχαν μια για πάντα αποκαλυφθεί από το μεγαλοφρές έργο του Κοπέρνικου, του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα. Θέτοντας κατά τον 17ο αιώνα τα θεμέλια του μοντέρνου επιστημονικού τρόπου οκέψης, αυτοί οι μεγάλοι επιστήμονες/φιλόσοφοι πραγματοποίησαν μία από τις μεγαλύτερες διανοητικές επαναστάσεις που γνώρισε ποτέ η ανθρώπινη ιστορία.

Η νέα επιστημονική μέθοδος που διαμορφώθηκε από την καρτεσιανή φιλοσοφία και τη νευτώνεια φυσική θα επιβάλει στον δυτικό πολιτισμό, αλλά και στον ανθρώπινο τρόπο οκέψης γενικότερα, μια σειρά από πρωτόγνωρες τομές, αποκεντρώσεις και μετατοπίσεις: η Γη εξορίζεται από το κέντρο του ήλιακού συστήματος, οι έννοιες του χώρου και του χρόνου μαθηματικοποιούνται, το πνεύμα χωρίζεται από την ψυχή, το γνωστικό υποκείμενο από το γνωστικό αντικείμενο, ο πολίτης από το κράτος. Το ανισότροπο και ανομοιογενές σύμπαν των αρχαίων, που διαχωρίζόταν «αυθαίρετα» σε μια τέλεια ουράνια και μια ατελή γήινη σφαίρα, εγκαταλείπεται εν ονόματι του νέου μαθηματικούμενου σύμπαντος της νευτώνειας φυσικής: ένας ατέλειωτος ευκλείδειος χώρος που δεν εγκυμονεί τίποτα νέο, ένα σύμπαν χωρίς ιστορία, αφού ο χρόνος δεν είναι παρά μια επιπρόσθετη γεωμετρική παράμετρος αυτού του ισότροπου και ομοιογενούς χώρου.

Πίσω από την απατηλή πολυπλοκότητα των μορφών της, υποστηρίζει το νευτώνειο πρόγραμμα, η φύση υπακούει τυφλά σε λίγους απλούς και θεμελιώδεις νόμους. Για την κλασική επιστήμη (που το πρότυπό της ήταν η νευτώνεια μηχανική) οι φυσικοί νόμοι είχαν έναν απόλυτα αιτιοκρατικό και περιγραφικό χαρακτήρα και καθόριζαν την πορεία και την ανάπτυξη κάθε φαινομένου. Η γνώση λοιπόν αυτών των νόμων εγγυώνταν στον ανθρώπινο παρατηρητή την κατανόηση όχι μόνο του παρόντος αλλά και του παρελθόντος και του μέλλοντος. Σε ένα ντετερμινιστικό και χωρίς χρόνο

σύμπαν, η μονόδρομη διαδοχή παρόντος, παρελθόντος και μέλλοντος (το βέλος του χρόνου) δεν είναι παρά μια ανθρώπινη φευδαριόθη: μόνο η θεώρηση του σύμπαντος απ' τη σκοπιά της αιωνιότητας εξασφαλίζει την αλήθεια των φυσικών θεωριών!

Αμεταπτοπία, ισοτροπικότητα, ομοιογένεια είναι οι λέξεις-κλειδιά για την κατανόηση του νεοτερικού τρόπου οκέψης. Εδώ και τρεις αιώνες το κανονιστικό ιδανικό κάθε επιστήμης – από τη φυσική ως τη βιολογία, από την ψυχολογία ως την κονωνιολογία – είναι η αναζήτηση του αρχιμήδειου σημείου ή τόπου που υπούθεται ότι επιτρέπει στον άνθρωπο την ουδέτερη ενατένιση και αποκάλυψη των «αιώνιων μυστικών» της φύσης. Η αναζήτηση λοιπόν του αόρατου/απλού πίσω από το ορατό/πολύπλοκο, δηλαδή η αναγωγική-αναλυτική μέθοδος, θεωρείται μέχρι σήμερα η βασιλική οδός για την επιστημονική ιδιοποίηση και κυριάρχηση της φύσης από τον άνθρωπο. Η τωχαιότητα και η αθεβαϊστή φανόταν να έχουν εξοστρακιστεί οριστικά από την επικράτεια της επιστήμης. Και όπου έκαναν την εμφάνισή τους, θεωρούνταν ασήμαντες εξαιρέσεις που οφείλονταν αποκλειστικά στην ανθρώπινη άγνοια και την προσωρινή ατέλεια των επιστημονικών μας «εργαλείων».

Αυτή, πολύ σχηματικά, είναι η περιγραφή της κλασικής επιστήμης που δίνουν ο Ilya Prigogine και η Isabelle Stengers στην πρώτη ενότητα (κεφάλαια Α', Β' και Γ') του βιβλίου τους *Τάξη μέσα από το χάος*, όπου μεταξύ των άλλων γράφουν: «Η επιστήμη εγκαινίασε τον επιτυχημένο διάλογο με τη φύση. Ωστόσο, πρώτο αποτέλεσμα αυτού του διαλόγου ήταν η ανακάλυψη ενός οιωνηλού κόσμου. Αυτό είναι το παράδοξο της κλασικής επιστήμης. Αποκάλυψε στον άνθρωπο μια φύση νεκρή και παθητική, η οποία συμπεριφέρεται σαν ένα ρομπότ που ακολουθεί τις επιταγές του προγραμματισμού του. Μ' αυτή την έννοια, ο διάλογος απομόνωσε τον άνθρωπο από τη φύση, αντί να τον φέρει πιο κοντά της. Ένας θρίαμβος της ανθρώπινης λογικής μετατράπηκε σε θλιβερή αλήθεια» (σ. 51). Και λίγες σελίδες παρακάτω καταλήγουν: «Έτοι η επιστήμη οδηγεί σε ένα τραγικό, μεταφυσικό δίλημμα. Ο άνθρωπος οφείλει να διαλέξει ανάμεσα στον καθησυχαστικό, αλλά ανορθολογικό πειρασμό να αναζητήσει στη φύση μια εγγύηση των ανθρώπινων αξιών ή την ένδειξη μιας θεμελιακής ένταξης και, από την άλλη μεριά, στην απόλυτη εμπιστοσύνη σε έναν ορθολογισμό που τον απομόνωνε ο' έναν οιωνηλό κόσμο» (σ. 78).

Διαβάζοντας αυτά τα αποσπάματα ένας ανυποψίαστος αναγνώστης θα μπορούσε να υποθέσει ότι έχουν γραφτεί

από κάποιουν σκοταδιστή μεταφυσικό και ορκιομένο εχθρό της σύγχρονης επιστήμης. Ιωάς λοιπόν απογοητεύει μαθαίνοντας ότι τα αποσπάσματα αυτά τα υπογράφουν ο Ilja Prigogine, ένας από τους μεγαλύτερους φυσικούς των ημερών μας (για την επιστημονική του προσφορά τιμήθηκε το 1977 με το θραβείο Νόμπελ), και η εξίσου διάσημη συνεργάτιδά του Isabelle Stengers, επιφανής επιστημολόγος.

Πώς εξηγείται τότε η δριμύτατη κριτική που ασκούν οι Prigogine και Stengers κατά της κλασικής επιστήμης και οι φαινομενικά «επέρδοξες» απόψεις που διατυπώνουν σε αυτό το βιβλίο; Ελπίζω ότι στην συνέχεια του κειμένου θα γίνει φανερό ότι πρόκειται για μια κριτική των αδυναμιών και των αρνητικών συνεπειών της «κλασικής επιστήμης» εν ονόματι της ίδιας της επιστήμης, δηλαδή για μια «εσωτερική» και άκρως εποικοδομητική κριτική.

Εάν, όπως υποστηρίζουν, η αναγωγή της ορατής πολυπλοκότητας του κόσμου σε ένα αόρατο θεμελιώδες επίπεδο ανάλυσης αποτελεί το πρότυπο εξήγησης και τον τελικό στόχο της κλασικής επιστήμης, τότε η αταξία, η τωχαιότητα και η φθορά δεν είναι παρά επιφαινόμενα μιας βαθύτερης αόρατης τάξης, την πραγματικότητα και τη νομοτέλεια της οποίας αποκαλύπτει η επιστήμη προσεγγιστικά. Σε αυτό το χωρίς χρόνο ντετερμινιστικό σύμπαν της κλασικής επιστήμης η τάξη γεννά πάντοτε την αταξία και ποτέ το αντίστροφο! Δυστυχώς, όμως, κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα, αυτή η κομψή, «νοικοκυρεμένη» και καθησυχαστική κοομοδεώρηση έμελλε να γίνει κομμάτια και θρύψαλα μετά τις αδυούπτες επιθέσεις που δέχτηκε από την κβαντική φυσική, την κοσμολογία, τη θερμοδυναμική και την επιστήμη του χάους.

Συνοψίζοντας θαυμάσια τους στόχους της κλασικής επιστήμης, οι Prigogine και Stengers γράφουν: «Η νευτωνική επιστήμη φιλοδοξούσε να παρουσιάσει μια εικόνα της φύσης που θα ήταν καθολική, ντετερμινιστική και αντικειμενική, εφόσον δεν αναφέρεται καθόλου στον παρατηρητή, αλλά και πλήρης, εφόσον επιτυγχάνει ένα επίπεδο περιγραφής που ξεφεύγει από τα πλοκάμια του χρόνου» (σ. 284).

Το όνειρο μιας ενιαίας (που θα ίσχε τόσο για το μικροκοσμό όσο και για το μακρόκοσμο) και αντικειμενικής (ανεξάρτητης δηλαδή από τον παρατηρητή) περιγραφής του φυσικού κόσμου, θα γίνει στις αρχές του αιώνα μας ο εφιάλτης της σύγχρονης φυσικής. Η καθολική αποδοχή της κβαντικής περιγραφής και ερμηνείας του μικροκοσμού, που θεωρείται το θεμελιώδες επίπεδο στο οποίο ανάγονται και εξηγούνται όλα τα φυσικά φαινόμενα, επιβάλλει να αναθεωρηθεί ριζικά όχι μόνο η κλασική περιγραφή αλλά και οι ίδιες οι (μεταφυσικές;) προϋποθέσεις της κλασικής επιστήμης. Σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg και της συμπληρωματικότητας του Bohr, είναι αδύνατη η ουδέτερη και ντετερμινιστική περιγραφή του μικρόκοσμου: η ασυνέχεια και η απροσδιοριστία είναι εγγενή χαρακτηριστικά των μικροφυσικών φαινομένων, για την περιγραφή των οποίων είμαστε υποχρεωμένοι να εντάξουμε τον παρατηρητή μέσα στις ίδιες του τις παρατηρήσεις!

Μολονότι σοδαρό, το πλήγμα που κατάφερε η κβαντομηχανική στην κλασική περιγραφή του φυσικού κόσμου περιορίζοταν στη μικροσκοπική κλίμακα, αφορούσε δηλαδή αποκλειστικά τη συμπεριφορά των στοιχειωδών οιωματιδίων. Εξάλλου, ως προς το πρόβλημα του χρόνου η κβαντική ερμηνεία εξακολουθεύει να διαιωνίζει την κλασική αντίληψη περί

χρονικής συμμετρίας. Με άλλα λόγια, από τις εξισώσεις της κβαντομηχανικής δεν φαίνοταν να αναδύεται ένα «κβαντικό θέλος του χρόνου». Στο βιβλίο τους, λοιπόν, οι Prigogine και Stengers κάνουν λίγες μόνο αλλά σημαντικές νύξεις σχετικά με το πρόβλημα του χρόνου στην κβαντική φυσική, πρόβλημα που το αναπτύσσουν λεπτομερώς σε επόμενα βιβλία τους.

Ουτόσο, όπως εξηγούν αναλυτικά στη δεύτερη και την τρίτη ενότητα του βιβλίου που παρουσιάζουμε εδώ, το θανάσιμο πλήγμα στην κλασική περιγραφή θα δοθεί από δύο σχετικά περιθωριακές, κατά το παρελθόν, περιοχές τη φυσικής: τη θερμοδυναμική των ανοιχτών συστημάτων και τη μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, τη λεγόμενη επιστήμη του χάους. Η συμβολή μάλιστα του Ilja Prigogine στην ανάπτυξη αυτών των δύο νέων κλάδων είναι κατά κοινή ομολογία τεράστια. Ήδη από το 1945, πρώτος αυτός θ' αρχίσει να μελετά στο Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών μια ασυνήθιστη τότε καπηγορία φυσικοχημικών συστημάτων: τα ανοιχτά θερμοδυναμικά συστήματα.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής, ο' ένα απομονωμένο σύστημα (που δεν ανταλλάσσει δηλαδή ύλη και ενέργεια με το περιβάλλον του), η συνολική εντροπία αυξάνεται προοδευτικά ενώ η ελεύθερη ενέργεια μειώνεται ώσπου το σύστημα να φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας, οπότε η εντροπία του αποκτά τη μέγιστη τιμή της. Στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας το σύστημα είναι ομοιογενές και αδρανές. Αν μάλιστα θεωρήσουμε, όπως έκανε ο Clausius, ολόκληρο το σύμπαν ως ένα απομονωμένο σύστημα γιγάντων διαστάσεων, τότε, ούμφωνα με τον δεύτερο νόμο, η προοδευτική υποβάθμιση της ενέργειας, δηλαδή η μεγιστοποίηση της εντροπίας, οδηγεί αναπόφευκτα στον «θερμικό θάνατο» του σύμπαντος.

Με τη θερμοδυναμική, την πρώτη πραγματικά πολύπλοκη επιστήμη, στο «άφθαρτο» και «αδάνατο» οικοδόμημα της νευτώνειας φυσικής παρεισόδει ο χρόνος ως μη αντιστρεπτή εξέλιξη προς τη φθορά, την αταξία και το θάνατο. Ωστόσο, αυτή η πρώτη απαισιόδοξη εκδοχή του χρόνου που μας κληροδότησε η κλασική θερμοδυναμική αφορά μια ιδανική και αφύσικη καπηγορία συστημάτων: τα απομονωμένα και κλειστά γραμμικά συστήματα.

Πώς να εξηγήσουμε όμως την «παράδοξη» συμπεριφορά των ανοιχτών συστημάτων; Τα συστήματα αυτά βρίσκονται μακριά από την κατάσταση ισορροπίας και ανταλλάσσουν αδιάκοπα ύλη και ενέργεια με το περιβάλλον τους. Δεν τείνουν προς μια κατάσταση ελάχιστης ελεύθερης ενέργειας και μέγιστης εντροπίας, αλλά αντίθετα, εκμεταλλεύονται κάποιες ενεργειακές εισροές και διακυμάνσεις όχι μόνο για να διατηρούν τη δομική τους ευστάθεια αλλά και για να εξελισσούνται προς νέες δυναμικές καταστάσεις.

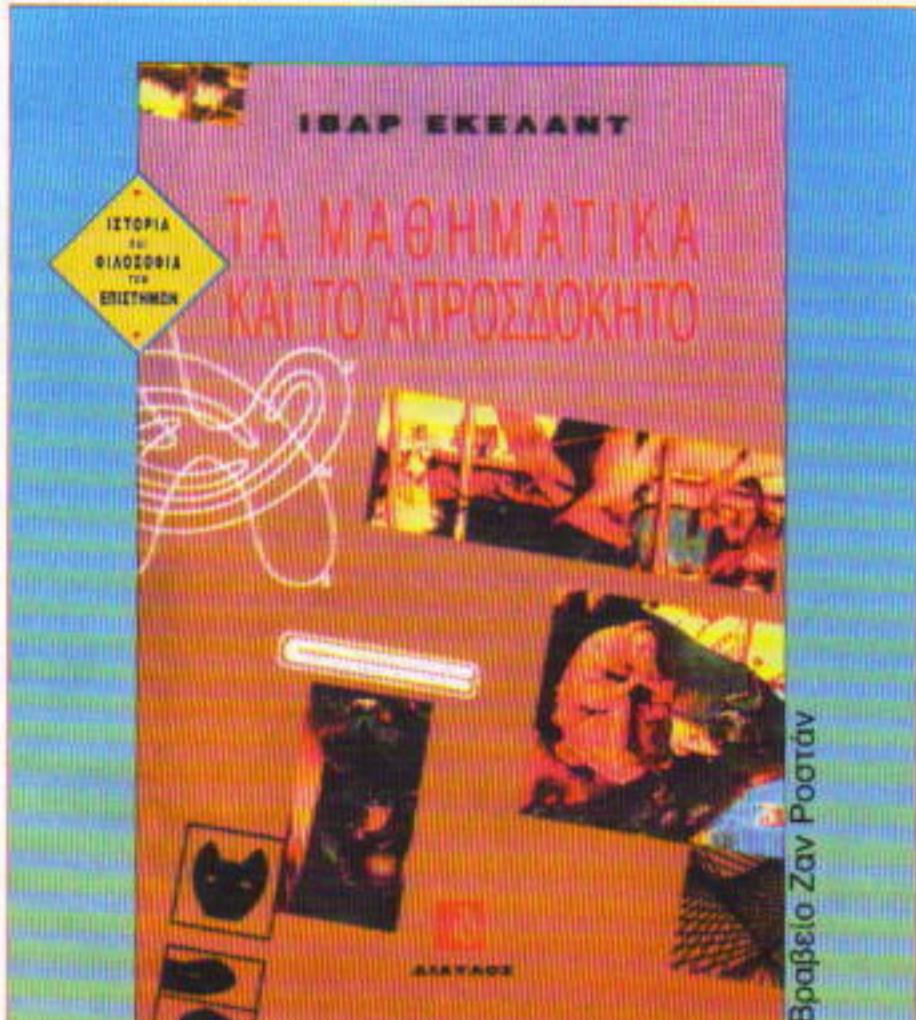
Τα ανοιχτά θερμοδυναμικά συστήματα δεν είναι η εξαίρεση αλλά ο κανόνας. Σε αυτά περιλαμβάνονται όχι μόνο οι ζωντανοί οργανισμοί, οι ανθρώπινες κοινωνίες, αλλά και το μεγαλύτερο μέρος των «απλούστερων» φυσικοχημικών συστημάτων. Στη μελέτη των ανοιχτών θερμοδυναμικών συστημάτων ο Ilja Prigogine είναι αναμφίβολα μία από τις μεγαλύτερες επιστημονικές αυθεντίες. Πρώτος αυτός απέδειξε ότι σε συνθήκες μακριά από τη θερμοδυναμική ισορροπία η ύλη αποκτά νέες απρόσμενες ιδιότητες, αυτοοργανώνται και παράγει πολύπλοκες δομές από τωχαίες διακυμάνσεις.

Τις δομές αυτές θα τις ονομάσει dissipative structures, χρησιμοποιώντας ένα φαινομενικά οξύμωρο σχήμα. Ο όρος θα μπορούσε να αποδοθεί στα ελληνικά ως δομές διασποράς ή διασκορπισμού ή ακόμη και καταναλωτικές δομές, αλλά αυφαλώς όχι σκεδαστικές δομές, όπως εσφαλμένα αποδόθηκε στην παρούσα μετάφραση.

Η απλούστερη μορφή δομών διασποράς είναι κάποια οχεικά απλά φυσικοχημικά συστήματα στα οποία ελάχιστες διαταραχές και διακυμάνσεις σε μικροσκοπική κλίμακα οδηγούν στην ανάδυση νέων απροοδόκητων μακροοπικών δομών. Οι μικρές αυτές διακυμάνσεις αποτελούν τυχαία στοιχειώδη συμβάντα που γίνονται κατά κανόνα σε μοριακό επίπεδο, μπορούν να ενισχυθούν και να μεγεθυνθούν παράγοντας ορατά αποτελέσματα, δηλαδή απρόβλεπτες μορφές χωροχρονικής οργάνωσης. Αυτό ουμβαίνει επειδή οι δομές διασποράς είναι μη γραμμικά συστήματα, η τάξη των οποίων αναδύεται από το χάος. Πέρα από μια κρίσιμη οριακή τιμή, που ονομάζεται σημείο διακλάδωσης ή σημείο κρίσης, αυτά τα «παράδοξα» συστήματα εγκαταλείπουν το «φρόνιμο» καθεστώς στο οποίο βρίσκονται και, ανάλογα με τις συνθήκες, επιλέγουν μεταξύ μιας χαώδους και μιας ευσταθούς συμπεριφοράς. Τα παραδείγματα εύτακτων δομών που προκύπτουν από τυχαίες διακυμάνσεις είναι πολυάριθμα: η αστάθεια του Bénard στην υδροδυναμική, οι ταλαντούμενες χημικές αντιδράσεις και τα χημικά ρολόγια, όπως η διάσημη αντίδραση Belousov-Zhabotinsky στη χημεία, οι περισσότερες βιοχημικές αντιδράσεις στη βιολογία, κ.ά.

Μία από τις μεγάλες αρετές του βιβλίου *Τάξη μέσα από το χάος* είναι ότι παρουσιάζει εξαντλητικά την ιστορία, τη θεωρία και την επιστημολογία αυτών των πολύπλοκων συστημάτων. Στη χώρα μας κυκλοφορούν αξιόλογα βιβλία για το χάος και τη μη γραμμική δυναμική. Σε αυτά όμως η διαπραγμάτευση των ανοιχτών θερμοδυναμικών συστημάτων και των επιστημολογικών συνεπειών που έχει για την ανθρώπινη σκέψη η ανακάλυψη της πολυπλοκότητας του φυσικού κόσμου, έχει μόνο περιθωριακό χαρακτήρα και αφήνει ανικανοποίητο τον απαιτητικό αναγνώστη. Η μετάφραση λοιπόν αυτού του σημαντικού και πολυσυζητημένου βιβλίου των Prigogine και Stengers έρχεται να καλύψει ένα πραγματικό κενό στην ελληνική βιβλιογραφία. Δεδομένων μάλιστα των δυσκολιών που παρουσιάζει η απόδοση του βιβλίου στα ελληνικά, θεωρώ ότι η παρούσα μετάφραση, πέρα από κάποιες αδυναμίες στην απόδοση ορισμένων νέων επιστημονικών όρων, είναι σε γενικές γραμμές ικανοποιητική.

Θα μπορούσε κανείς να συνοψίσει το μήνυμα που οι Prigogine και Stengers θέλουν να μεταφέρουν στον αναγνώστη του βιβλίου τους ως εξής: η επισήμη σήμερα αναγνωρίζει ότι η πολυπλοκότητα, ο χρόνος και η ιστορία δεν αποτελούν εγγενή και αναφαίρετα χαρακτηριστικά μόνο του φυσικού κόσμου αλλά και αυτής της ίδιας της γνώσης του κόσμου από τον άνθρωπο, δηλαδή της επιστήμης. Η άρνηση, κατά το παρελθόν, αυτού του γεγονότος οδήγησε την κλασική επισήμη σε μια απλοϊκή, και γι' αυτό απλοποιητική, σύλληψη της φύσης και του ανθρώπου. Σήμερα, αντίθετα, η είσοδος του χρόνου, η επέλαση του χάους, η ένταξη του παρατηρητή στις ίδιες του τις παρατηρήσεις, με άλλα λόγια η επισήμη της πολυπλοκότητας, οδηγεί σε μια «νέα συμμαχία» του ανθρώπου με τη φύση και των ανθρωποστικών επιστημών με τις φυσικές.



Βραβείο Ζαν Ροτζέ

Καλογραμμένο, το τέλειο βιβλίο εκλαΐκευσης Μαθηματικών, θαυμάσια επικονομαγεψμένο.

**James Franklin Metascience**

Μια θαυμάσια θεωρητική των οργάνων των Μαθηματικών στην περιγραφή του κόσμου.

**Lee Dembart Los Angeles Times**

Γραμμένο από κάποιον που δεν είναι απλός γνώστης του θέματος, αλλά δάσκαλος στην τέχνη της εκλαΐκευσης.

**Prof. E. Power Contemporary Physics**

... Οι εξηγήσεις του Ivar Ekeland μένουν σταθερά σε τέτοιο επίπεδο που να μπορούν να κατανοθούν από τον αμύτη. Με αναφορές στον Ουηρο, τον Σαμέπη, τον Δουμά πατέρα και τον Βολταίο.

**Tim Holt New York Times**

Το όχι ελαχιστα απροοδόκητο σχετικά με τα «Μαθηματικά και το Απροοδόκητο» είναι το γεγονός ότι ένας μαθηματικός μπορεί να έχει όχι μόνο επιστημονική, αλλά και λογοτεχνική γραφή.

**Ian Stewart New Scientist**

Προσιτό σε κάθε σκεπτόμενο άνθρωπο.

**Voice Literary Supplement**



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΔΙΑΥΛΟΣ

Βαλτετσίου 10, Αθήνα 106 80 Τηλ. & Fax 36.17.473

# Γεωμετρικές αθροίσεις

Άπειρες αλγεβρικές πλακοστρώσεις

M. Apresyan

**Ο**ι μαθητές του λυκείου γνωρίζουν πώς όταν  $|q| < 1$ , το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$  ισούται με  $1/(1 - q)$ , και μελετούν μια αναλυτική απόδειξη αυτού του τύπου. Όταν  $q = 1/n$ , όπου το  $n$  είναι φυσικός αριθμός, μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα γεωμετρικά. Ισχείται ότι παρόμοιες αποδείξεις απλών αλγεβρικών ταυτοτήτων – για παράδειγμα, της  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  – όπου χρησιμοποιείται ένα τέχνασμα που ονομάζεται αλγεβρική πλακοστρωση.<sup>1</sup>

Θα ξεκινήσουμε μελετώντας την

1. Η απόδειξη τέτοιων ταυτοτήτων ανάγεται στην αρχαιότητα. Για παράδειγμα, το Β' θιβλίο των περίφημων Στοιχείων του Ευκλείδη ασχολείται ουσιαστικά με αυτό το θέμα. Άλλα και νωρίτερα, στη θερική περίοδο των ινδικών μαθηματικών, υπάρχει ανάλογη θεωρία η οποία, όμως, είναι εμπειρική και υπολείπεται της αυστηρότητας που χαρακτηρίζει την ελληνική. (Σ.τ.ε.)

περίπτωση  $n = 2$ . Ας υπολογίσουμε το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Θεωρούμε ένα τωχαίο ορθογώνιο εμβαδού 2. Χωρίζουμε το εν λόγω ορθογώνιο σε δύο ορθογώνια μοναδιάσιου εμβαδού (Σχήμα 1). Χωρίζουμε και πάλι ένα από αυτά σε δύο ίσα μέρη, το καθένα με εμβαδόν  $1/2$ . Κάνουμε ξανά το ίδιο για να πάρουμε δύο ορθογώνια εμβαδού  $1/4$ , κ.ο.κ. Μ' αυτή τη διαδικασία δημιουργείται μια ακολουθία ορθογώνιων που τα εμβαδά τους ισούνται με  $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n, \dots$ . Η ένωση αυτών των ορθογώνιων συμπίπτει με το αρχικό ορθογώνιο (χωρίς τη μία κορυφή του). Επομένως, το άθροισμα των εμβαδών όλων αυτών των ορθογώνιων ισούται με το εμβαδόν του αρχικού ορθογώνιου – δηλαδή, με 2. Άρα,  $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$ .

Ας βρούμε τώρα το άθροισμα  $1 + 1/n + 1/n^2 + 1/n^3 + \dots$ . Αρχί-

ζουμε με ένα ορθογώνιο εμβαδού  $n$  και το χωρίζουμε σε  $n$  ορθογώνια εμβαδού 1 (Σχήμα 2). Στη συνέχεια, χωρίζουμε ένα από αυτά τα ορθογώνια σε  $n$  ορθογώνια ίσου εμβαδού (δηλαδή,  $1/n$ ), επαναλαμβάνουμε το ίδιο για ένα από αυτά τα μικρότερα ορθογώνια, κ.ο.κ. Μ' αυτή τη διαδικασία δημιουργούνται ορθογώνια με εμβαδά  $1, 1/n, 1/n^2, \dots, 1/n^k, \dots$  ( $n - 1$  ορθογώνια για καθένα από αυτά τα εμβαδά). Η ένωση όλων αυτών των ορθογώνιων είναι και πάλι το αρχικό ορθογώνιο (χωρίς μία κορυφή του) και, επομένως, το εμβαδόν της ισούται με  $n$ . Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι ισούται με

$$(n - 1) + \frac{n - 1}{n} + \frac{n - 1}{n^2} + \dots \\ = (n - 1) \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \right).$$

Και επομένως,

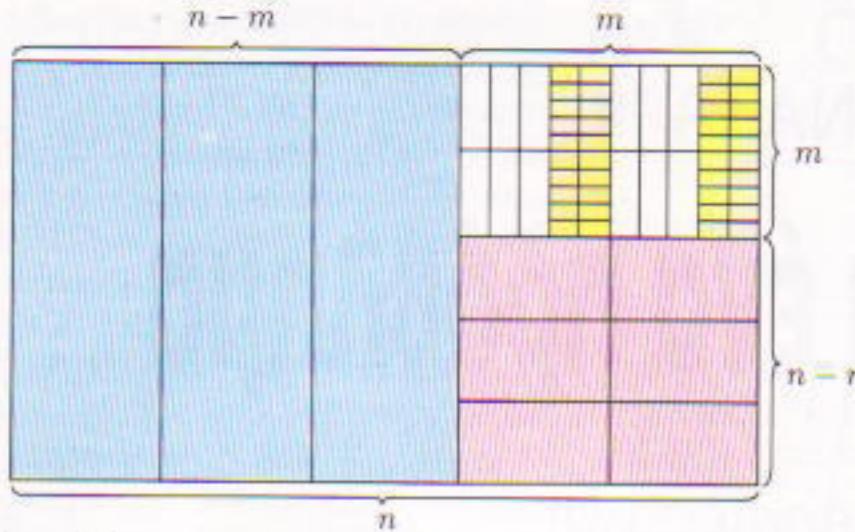
$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{n}{n - 1} = \frac{1}{1 - 1/n}.$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια ιδέα για να βρούμε το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου ακόμη και όταν το  $q$  είναι ένας τυχαίος ρητός, με  $0 < q < 1$ . Πραγματικά, ας επαναλάβουμε την προηγούμενη κατασκευή σε ένα ορθογώνιο εμβαδού  $n$ , αλλά αυτή τη φορά θα χωρίζουμε τα  $m$  ( $m < n$ ) από τα  $n$  ορθογώνια που δημιουργήσαμε στο προηγούμενο θήμα (Σχήμα 3), αφήνοντας απεραχτά τα υπόλοιπα  $n - m$  ορθογώνια. Μπορείτε να συνεχίσετε από αυτό το σημείο; Προσπαθήστε, και βρείτε τον τύπο για το  $1 + 1/(m/n) + 1/(m/n)^2 + 1/(m/n)^3 + \dots$

Η ίδια μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα άπειρα αθροίσματα. Ας αποδείξουμε, για παράδειγμα, ότι



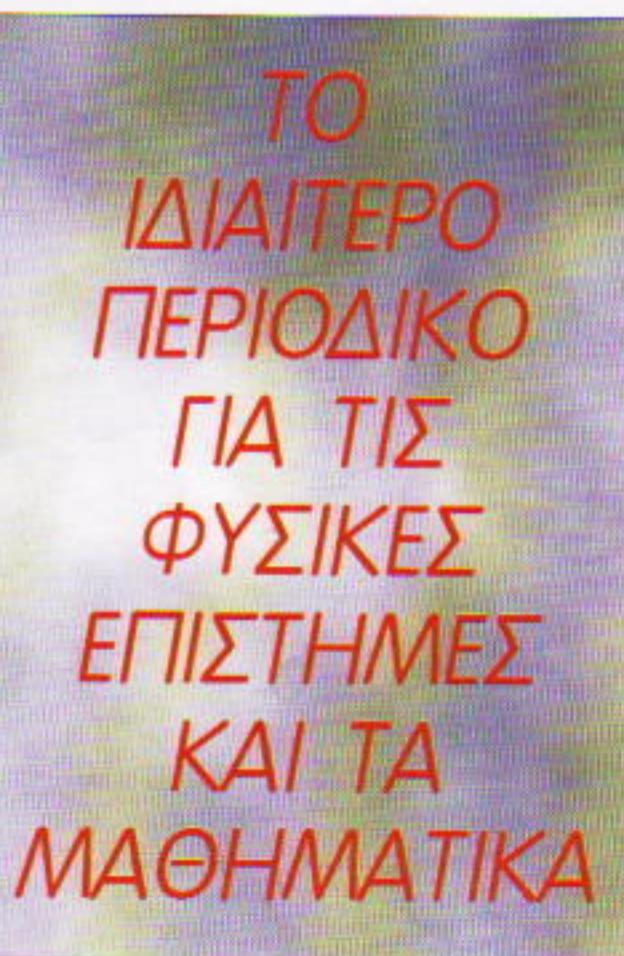
Σχήμα 4

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots = 2.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι ένα ορθογώνιο εμβαδού 2. Τα πρώτα δύο θήματα είναι τα ίδια με αυτά του πρώτου παραδείγματος: χωρίζουμε το ορθογώνιο σε δύο μοναδιαία ορθογώνια, και κατόπιν το ένα από αυτά σε δύο ορθογώνια εμβαδού  $1/2$  (Σχήμα 4). Τώρα, όμως, θα χωρίσουμε το ένα από τα τελευταία δύο ορθογώνια σε τρία ισεμβαδικά μέρη (το εμβαδόν καθενός από αυτά τα τρία μέρη είναι  $(1/2):3 = 1/3!$  =  $1/6$ ). Στη συνέχεια χωρίζουμε το ένα από τα ορθογώνια εμβαδού  $1/6$  σε τέσσερα ίσα μέρη, το ένα από αυτά σε πέντε, κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα ορθο-

γώνιο με εμβαδόν 1, ένα με εμβαδόν  $1/2$ , δύο με εμβαδόν  $1/3!$ , τρία με εμβαδόν  $1/4!$ , ...,  $n$  ορθογώνια με εμβαδόν  $1/(n+1)!$ , κ.ο.κ. Επομένως, το άθροισμα που προκύπτει σ' αυτήν την περίπτωση είναι  $1 + 1/2! + 2/3! + 3/4! + \dots$ , και ισούται με 2 – το εμβαδόν του αρχικού ορθογώνιου.<sup>2</sup> □

2. Ας οημειωθεί ότι το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου με λόγο  $1/n$ , όπου το  $n = 4$ , απαντάται στο «Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής» του Αρχιμήδη. Επίσης, τον 14ο αιώνα ο Suiseth, γνωστός ως o Calculator, χρησιμοποίησε γεωμετρικές μεθόδους στο έργο του *Liber Calculationum* για να βρει απεριαρμοίσματα όπως το  $1/2 + 2/2^2 + 3/2^3 + \dots + n/2^n + \dots = 2$ . Αμέσως μετά ο Nicole Oresme (1323-1382) θελτίωσε πολύ τις τεχνικές του Calculator για παρόμοια αθροίσματα. (Σ.τ.ε.)



# QUANTUM

**Κάντε ένα πολύτιμο δώρο!**

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε τό Quantum στον εαυτό σας, στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας...

Αποφασίστε το τώρα. Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική κάρτα σας (Diners ή Visa).

Η αξία του περιοδικού είναι ανεκτίμητη.

Η τιμή της συνδρομής, υπερβολικά χαμηλή.

Περιοδικό Quantum, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα.  
Τηλ.: (01) 3643272, 3645098. Fax: (01) 3641864

# Εννέα λύσεις για ένα πρόβλημα

*Και άφθονες ακέραιες γωνίες*

Constantine Knop

**Τ**ο πρόβλημα που θα μελετήσουμε εμφανίζεται πολύ συχνά σε βιβλία προβλημάτων γεωμετρίας. Παρότι η διατύπωσή του είναι απλή, η λύση του είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Ισως γι' αυτό τα περισσότερα βιβλία περιγράφουν λίγο ή πολύ την ίδια λύση – και η οποία, κατά τη γνώμη μου, δεν είναι η καλύτερη. Ας αρχίσουμε όμως με τη διατύπωση του προβλήματος.

**Πρόβλημα.** Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$ , ισχύει  $AB = AC$  και η γωνία  $BAC$  είναι  $20^\circ$ . Λαμβάνουμε τα σημεία  $D$  και  $E$  στις πλευρές  $AC$  και  $AB$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε η γωνία  $ECB$  να είναι  $50^\circ$  και η γωνία  $DBC$   $60^\circ$ . Υπολογίστε τη γωνία  $EDB$ .

Πριν συνεχίσετε την ανάγνωση του άρθρου, προσπαθήστε να λύσετε μόνοι σας το πρόβλημα. Αφιερώστε του μερικές ώρες (ή, ίσως, λίγα λεπτά). Θα το απολαύσετε πραγματικά... αν καταφέρετε να το λύσετε.

**Η πρώτη λύση.** Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμό τμήμα  $DF$  παράλληλο προς την  $BC$ , όπου το  $F$  ανήκει στην  $AB$ . Φέρουμε το  $CF$ , ονομάζουμε  $G$  την τομή των  $BD$  και  $CF$ , και φέρουμε το  $GE$ . Το τρίγωνο  $BGC$  είναι προφανώς ισοσκελές (με  $BG = GC$ ) και επομένως ισόπλευρο (αφού  $\angle DBC = 60^\circ$ ). Κατά συνέπεια, και το τρίγωνο  $GDF$  είναι επίσης ισόπλευρο. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι  $\angle BEC = 180^\circ - \angle BCE - \angle CBE = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$  (η γωνία  $CBE$  μπορούμε να την υπολογίσουμε από το δεδομένο ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$ ), και επομένως  $\angle BEC = \angle BCE$ , πράγ-

μα που οημαίνει ότι το τρίγωνο  $BGE$  είναι επίσης ισοσκελές ( $BE = BC = BG$ ) με τη  $\angle EBG = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$  και τη  $\angle EGB = 80^\circ$ . Τώρα βρίσκουμε ότι  $\angle FGE = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ , και ότι  $\angle EFG = 40^\circ$  (ας πούμε, από το τρίγωνο  $BGF$ ). Έτοι αποκαλύπτεται ένα ακόμη ισοσκελές τρίγωνο, το  $FEG$  ( $FE = EG$ ). Τελικά, τα τρίγωνα  $EFD$  και  $EGD$  είναι ίσα (έχουν τις πλευρές τους ανά μία ίσες), και επομένως

$$\angle EDB = \angle EDF = 60^\circ / 2 = 30^\circ.$$

Θέλω να επισημάνω ότι της γεγονός που αναφέρθηκε στην απόδειξη και που ότι το χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές στη συνέχεια: το τρίγωνο  $BCE$  είναι ισοσκελές – δηλαδή,  $BE = BC$ .

Η λύση αυτή, που τη δανειστήκαμε από ένα βιβλίο προβλημάτων, χρησιμοποιεί δύο επιπλέον σημεία και εξε-

τάζει πέντε διαφορετικά τρίγωνα. Δεν θα την αποκαλούσα υπερβολικά περίπλοκη ή υπερβολικά εκτεταμένη, αλλά δεν τη θεωρώ ούτε ιδιαίτερα κομψή. Έτοι, έπειτα από πολλές και επίμονες προσπάθειες – και για αρκετό καιρό ανεπιτυχείς – βρήκα τελικά με μεγάλη χαρά μια άλλη λύση. Το μοναδικό πρόγραμμα που με ενοχλούσε ήταν ότι η λύση αυτή ήταν αναλυτική (τριγωνομετρική) και όχι γεωμετρική.

**Η δεύτερη λύση.** Έστω  $x$  το μέτρο της άγνωστης γωνίας  $EDB$ . Τότε,  $\angle BED = 160^\circ - x$ . Από το νόμο των ημιτόνων, στο τρίγωνο  $BED$  έχουμε ότι  $BD: BE = \eta\mu(160^\circ - x): \eta\mu x$ , και από το τρίγωνο  $BCD$  έχουμε ότι  $BD: BC = \eta\mu 80^\circ: \eta\mu 40^\circ = 2 \cdot \sin 40^\circ$  (αφού  $\angle BDC = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ$ ).

Χρησιμοποιώντας την ισότητα που αναφέραμε νωρίτερα, την  $BE = BC$ , παίρνουμε την εξίσωση

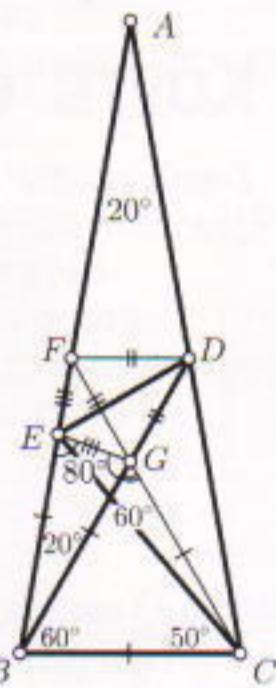
$$\eta\mu(160^\circ - x)/\eta\mu x = 2 \sin 40^\circ.$$

Ας λύσουμε την εξίσωση αυτή:

$$\begin{aligned} \eta\mu(20^\circ + x) &= 2 \sin 40^\circ \cdot \eta\mu x \\ &= 2 \sin(60^\circ - 20^\circ) \cdot \eta\mu x, \text{ άρα} \\ \eta\mu 20^\circ \cdot \sin x + \sin 20^\circ \cdot \eta\mu x &= (\sin 20^\circ + \sqrt{3} \eta\mu 20^\circ) \cdot \eta\mu x, \text{ άρα} \\ \eta\mu 20^\circ \cdot \sin x &= \sqrt{3} \eta\mu 20^\circ \cdot \eta\mu x, \text{ οπότε} \\ \epsilon\phi x &= 1/\sqrt{3}, \text{ και συνεπώς } x = 30^\circ. \end{aligned}$$

Η τριγωνομετρία είναι ένα ισχυρό και καθολικό εργαλείο. Άραγε, έχει το πρόβλημά μας καμιά άλλη γεωμετρική λύση; Ευτυχώς τέτοια λύση υπάρχει – και μάλιστα, όχι μόνο μία. Στον ελεύθερο χρόνο μου δημιούργησα τις δύο επόμενες.

**Η τρίτη λύση.** Όπως και στην πρώ-

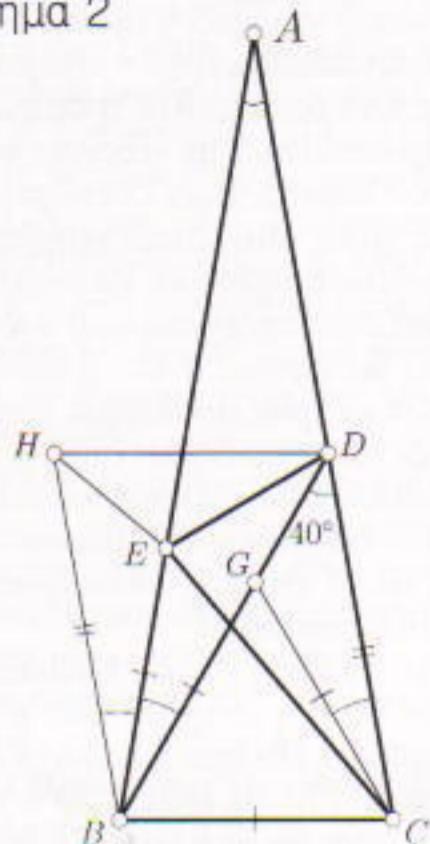


Σχήμα 1

η λόση θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι η  $DE$  είναι η διχοτόμος της  $\angle BDF$  (Σχήμα 1). Για το σκοπό αυτό θα δημιουργήσω ένα τρίγωνο, μία από τις γωνίες του οποίου θα είναι η  $BDF$ , και στο οποίο η εγγεγραμμένη περιφέρεια θα έχει κέντρο το σημείο  $E$ . Σχεδιάζουμε τις  $DH$  και  $BH$  παράλληλες στις  $CB$  και  $CD$ , αντίστοιχα, και δημιουργούμε το παραλληλόγραμμό  $BCDH$  (Σχήμα 2). Φέρουμε τη  $CG$  όπως και στο Σχήμα 1 (για να δημιουργήσουμε το ισόπλευρο τρίγωνο  $BCG$ ). Τώρα έχουμε

- (1)  $BH = CD$  (λόγω των παραλληλογράμμων)
- (2)  $BE = BC = CG$
- (3)  $\angle HBE = \angle HBA = \angle BAC = 20^\circ$ , και  $\angle GCD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ , και επομένως  $\angle HBE = \angle GCD$ .

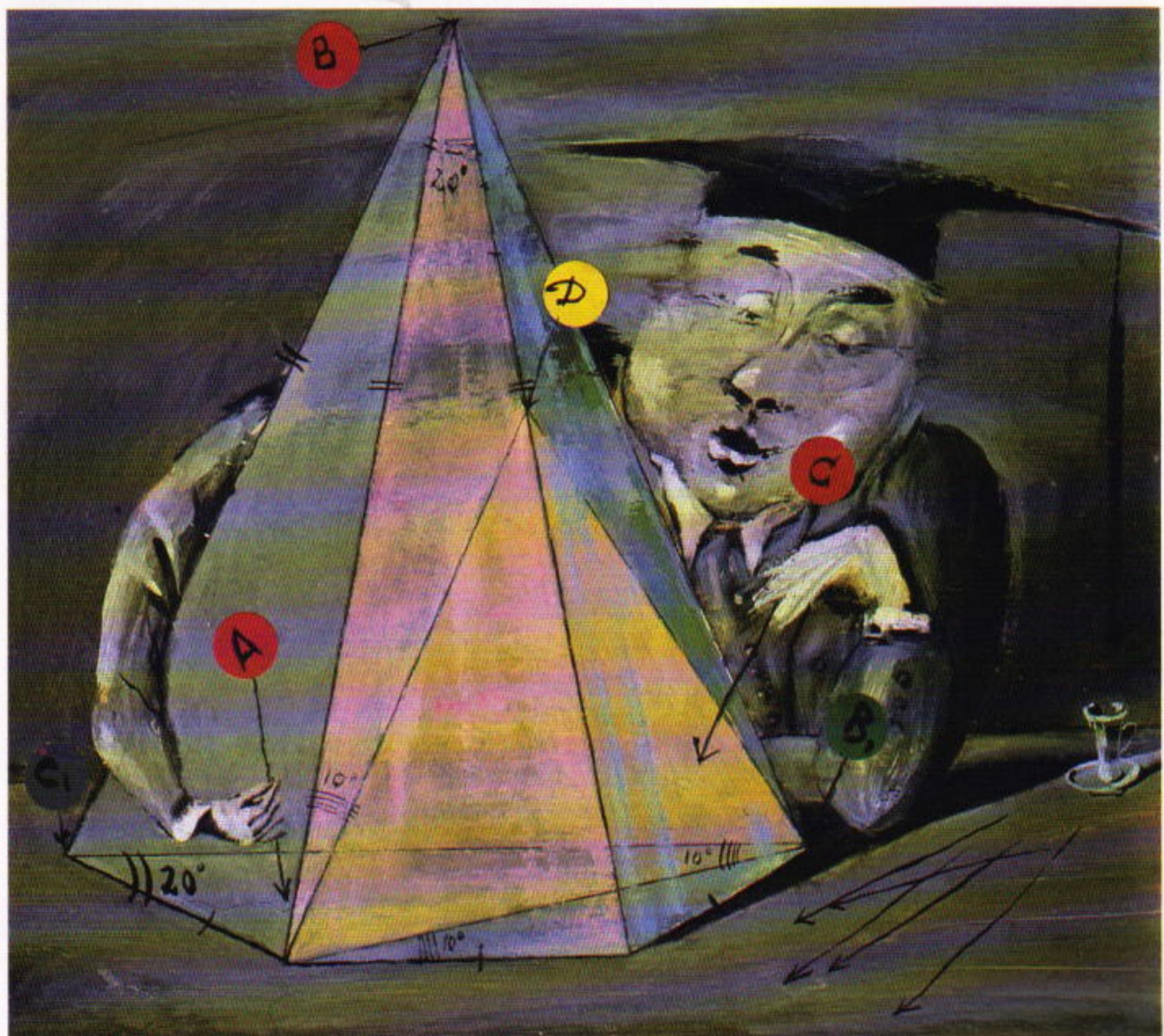
Σχήμα 2

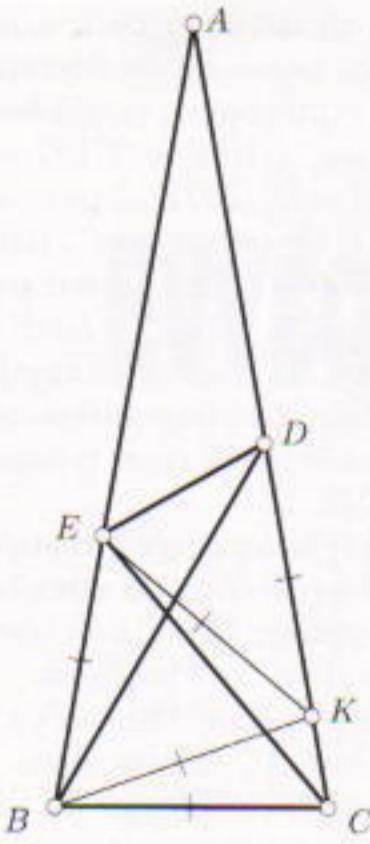


Άρα, τα τρίγωνα  $BEH$  και  $CGD$  είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες, και επομένως,  $\angle BHE = \angle CDG = 40^\circ = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BHD$ . Συνεπάγεται ότι η  $HE$  διχοτομεί την  $\angle BHD$  και συγχρόνως, η  $BE$  διχοτομεί την  $\angle HBD$  (αφού  $\angle HBE = \angle DBE = 20^\circ$ ). Επομένως, το  $E$  είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο  $BDH$  κύκλου, και η  $DE$  είναι η διχοτόμος της  $\angle BDH$ .

Αυτή η λόση ήταν διαφορετική, αλλά ελάχιστα μόνο ευκολότερη από την πρώτη. Η επόμενη λόση φαίνεται να είναι πιο ελκυστική.

**Η τέταρτη λόση.** Θεωρούμε το σημείο  $K$  της  $AC$  τέτοιο ώστε  $\angle KBC = 20^\circ$ , και το συνδέουμε με το  $B$  και το  $E$  (δείτε το Σχήμα 3).





Σχήμα 3

Σιη συνέχεια... Γιατί δεν προσπάθειτε να ολοκληρώσετε μόνοι σας την απόδειξη;

**Άσκηση 1.** Αποδείξτε ότι τα ευδύγραμμα τμήματα που είναι σημειωμένα στο Σχήμα 3 είναι ίσα και χρησιμοποιήστε τα για να υπολογίσετε την άγνωστη γωνία.

Μετά την ανακάλυψη αυτών των λόσεων, απέκτησα την έμμονη ιδέα να θέσω το εν λόγῳ πρόβλημα στους μαθητές που θα συμμετείχαν σε κάποιον σοβαρό διαγωνισμό μαθηματικών. Πίστευα ότι αυτά τα έξυπνα παιδιά θα μπορούσαν να ανακαλύψουν κάτι καινούργιο! Και ξαφνικά, πριν από ένα χρόνο, το όνειρό μου βγήκε αληθινό: το πρόβλημα τέ-

θηκε στους υποψήφιους για την ομάδα Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων της Ουκρανίας. Και η συλλογή μου εμπλουτίστηκε με τέσσερις καινούργιες λύσεις. Έχει ενδιαφέρον ότι στις τρεις από αυτές χρησιμοποιείται μια βοηθητική κατασκευή που βασίζεται στο σχεδιασμό της διχοτόμου της γωνίας  $B$  του τριγώνου  $ABC$ . Και οι τρεις αποδείξεις χρησιμοποιούν το γεγονός ότι αυτή η ευθεία είναι και μεσοκαθέτος του ευδύγραμμου τμήματος  $CE$  (αφού  $BC = BE$ ), αλλά κατά τ' άλλα διαφέρουν εντυπωσιακά.

**Η πέμπτη λύση (Maria Gelband).** Έστω  $M$  το συμμετρικό του  $E$  ως προς την  $AC$  (Σχήμα 4). Τότε  $CE = CM$  και  $\angle ECM = 2\angle ECD = 60^\circ$ , και επομένως το τρίγωνο  $CEM$  είναι ισόπλευρο,  $CM = EM$ , και κατά συνέπεια το  $M$  ανήκει στη διχοτόμο που αναφέραμε προηγουμένως. Τώρα παραπηρούμε ότι το σημείο  $D$  είναι η τομή της μεσοκαθέτου της  $EM$  και της  $BD$ , της διχοτόμου της γωνίας  $EBM$  του τριγώνου  $BEM$  ( $\angle EBD = 20^\circ = \frac{1}{2}\angle EBM$ ). Συνεπάγεται ότι το σημείο  $D$  ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του  $BEM$  (αν η τομή του περιγεγραμμένου κύκλου και της μεσοκαθέτου του  $EM$  ήταν το σημείο  $D_1$ , τότε  $ED_1 = D_1M$  και οι εγγεγραμμένες σε αυτόν τον κύκλο γωνίες  $EBD_1$  και  $MBD_1$  θλέπουν τις ίσες χορδές  $ED_1$  και  $D_1M$ . Άρα, αυτές οι γωνίες είναι ίσες, πράγμα που σημαίνει ότι το  $D_1$  και το  $D$  ταυτίζονται.) Επομένως, οι γωνίες  $EDB$  και  $EMB$  είναι εγγεγραμ-

μένες σε αυτήν την περιφέρεια και θλέπουν την ίδια χορδή,  $BE$ . Επομένως,  $\angle EDB = \angle EMB = \frac{1}{2}\angle EMC = 30^\circ$ , και το πρόβλημα λύθηκε.

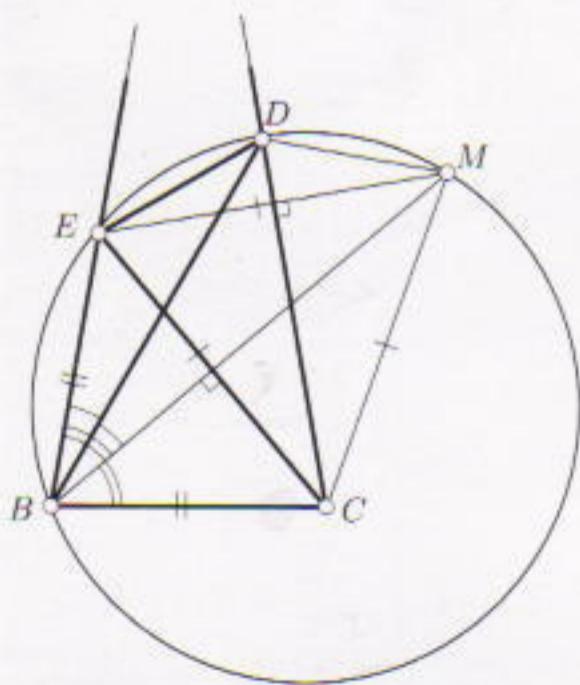
**Η έκτη λύση (Sergey Saprikin).** Έστω ότι η διχοτόμος της  $\angle ABC$  τέμνει την  $AC$  στο σημείο  $T$  (Σχήμα 5). Τότε,  $\angle ETB = \angle BTC$  (γιατί). Όμως,  $\angle BTC = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$  επομένως  $\angle ETD = 60^\circ$ , και η  $TD$  είναι η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου  $BET$  στο  $T$ . Από την άλλη πλευρά, όπως έχουμε ήδη δει, η  $BD$  διχοτομεί τη γωνία  $EBT$ , και επομένως το  $D$  ισαπέχει από τις ευθείες  $BA$ ,  $BT$  και  $ET$ . Άρα η  $ED$  είναι η εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου  $BET$  στο  $E$ .

Σημειώστε, με την ευκαιρία, ότι το  $D$  είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου σε αυτό το τρίγωνο. Τώρα βρίσκουμε ότι  $\angle BED = \angle BET + \angle TED = \angle BET + (\frac{1}{2} \cdot 180^\circ - \angle BET) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BET = 130^\circ$ , αφού  $\angle BET = \angle BCT = 80^\circ$ . Τελικά, από το τρίγωνο  $BED$  καταλήγουμε σε αυτό που ζητάμε:

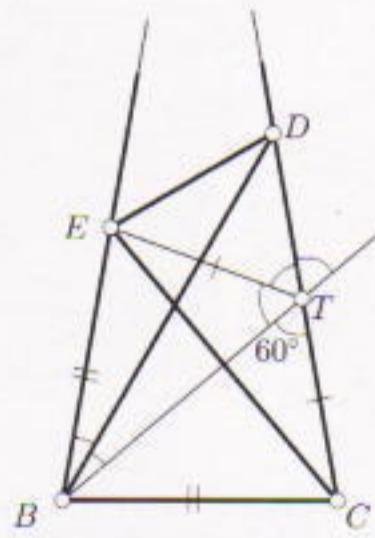
$$\angle EDB = 180^\circ - 130^\circ - 20^\circ = 30^\circ.$$

Στο τελευταίο μέρος αυτής της απόδειξης δείξαμε στην πραγματικότητα την εξής ιδιότητα του κέντρου  $D$  του παρεγγεγραμμένου κύκλου, ενός ιωχαίου τριγώνου  $EBT$ , το οποίο βρίσκεται εντός της γωνίας  $EBT$ :  $\angle EDB = \frac{1}{2}\angle ETB$  (που ισχύει ανεξάρτητα από τις συγκεκριμένες τιμές των γωνιών).

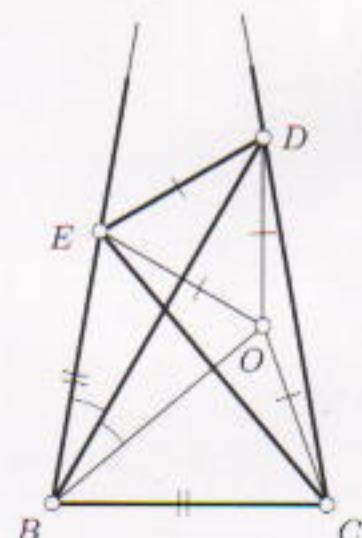
**Η έβδομη λύση (Alexey Borodin).** Θεωρήστε το κέντρο  $O$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου



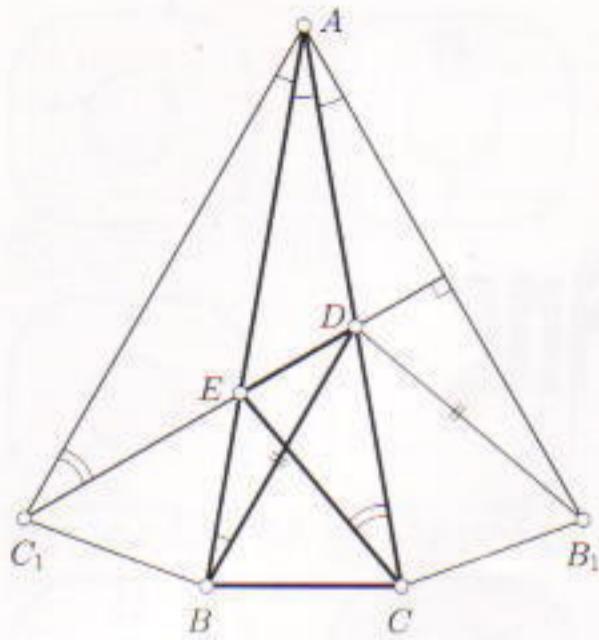
Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7

$EDC$ . Έχουμε ότι  $EO = OC$ , και επομένως η ευθεία  $BO$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $EBC$  που χρησιμοποιήσαμε στις δύο προηγούμενες αποδείξεις.

**Άσκηση 2.** Ολοκληρώστε την απόδειξη με τη βοήθεια του Σχήματος 6. (Υπόδειξη: αποδείξτε την ισότητα των τριγώνων  $BED$  και  $BOD$ .)

Ένας από τους πιο φυσικούς τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος μας είναι να παρατηρήσουμε ότι το μέτρο της γωνίας  $A$  του τριγώνου που μας δίδεται είναι  $20^\circ$  – δηλαδή, το ένα τρίτο των  $60^\circ$  – και να προσπάθησουμε να εκμεταλλευτούμε αυτήν την παρατήρηση. Η επόμενη λύση χρησιμοποιεί αυτήν ακριβώς την ιδέα.

**Η όγδοη λύση** (Alexander Kognienko). Θεωρούμε το συμμετρικό του δεδομένου τριγώνου (Σχήμα 7) ως προς την  $AB$  (και παίρνουμε το  $ABC_1$ ) και το συμμετρικό ως προς την  $AC$  (και παίρνουμε το  $ACB_1$ ). Τότε  $\angle AC_1E = \angle ACE = 30^\circ$ , και  $\angle AC_1B_1 = 60^\circ$  [αφού το τρίγωνο  $AB_1C_1$  είναι ισόπλευρο ( $AC_1 = AB_1$ ,  $\angle C_1AB_1 = 60^\circ$ )], και επομένως η  $C_1E$  διχοτομεί τη γωνία  $AC_1B_1$ , πράγμα που οημαίνει ότι η  $C_1E$  είναι η μεσοκάμπτος του  $AB_1$ . Έχουμε επίσης ότι,  $AD = BD$  (γιατί  $\angle ABD = \angle BAD = 20^\circ$ ), και  $BD = B_1D$  (από κατασκευή). Επομένως, το  $D$  ισαπέχει από τα  $A$  και  $B_1$  και, κατά συνέπεια, ανήκει στην ευθεία  $CE$ . Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη γωνία  $EDB$  από το τρίγωνο  $C_1BD$ , στο οποίο  $\angle BC_1D = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$  και  $\angle C_1BD = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$ . Βρίσκουμε, λοιπόν, ότι  $\angle EDB = 100^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 30^\circ$ .

(Στην πραγματικότητα, αυτή η λύ-

ση βασίζεται στην ιδέα να θεωρήσουμε το Σχήμα 7 ως μέρος ενός κανονικού δεκαοκταγώνου με κέντρο το  $A$ , και τα ευθύγραμμα τμήματα  $C_1B$ ,  $BC$ , και  $CB_1$  ως τρεις διαδοχικές πλευρές του. Τα τμήματα  $C_1D$  και  $BD$  είναι τμήματα δύο διαγώνιων του – πράγμα που πρέπει να αποδειχθεί, φυσικά, αλλά μας επιτρέπει να θρούμε γρήγορα την άγνωστη γωνία.)

Ελπίζω ότι σας άρεσαν και οι οκτώ λύσεις, γεμάτες έξυπνες κατασκευές και χρήσιμες ιδιότητες τριγώνων. Φαντάζομαι, όμως, ότι αναρωτιέστε «πού είναι η ένατη λύση;» Λοιπόν, σας αφήνω να την ανακαλύψετε εσείς!

Τελειώνουμε με ένα ακόμη πρόβλημα σχετικό με το ίδιο τρίγωνο (το οποίο έχει προτείνει ο μαθητής της Γ' γυμνασίου, Sergey Yurin).

**Άσκηση 3.** Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$ , ισχύει  $AB = AC$  και  $\angle A = 20^\circ$ . Λαμβάνουμε σημείο  $P$  στην πλευρά  $AC$  τέτοιο ώστε  $AP = BC$ . Βρείτε τη γωνία  $PBC$ . ◻

#### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 61

## QUANTUM

Ανακαλύπτοντας την επιστήμη

• «... Γεμάτο εξαιρετικά θέματα: υπέροχα άρθρα Μαθηματικών και Φυσικής για σπουδαστές λυκείων και πάνεπιστημάτων...»

Nature

• «... Πρώτης τάξεως περιοδικό... Μ' αυτό αποκτά πρόσωπο η ποιότητα, η φαντασία και η γνώση... Το συνιστούμε ανεπιφύλακτα...»

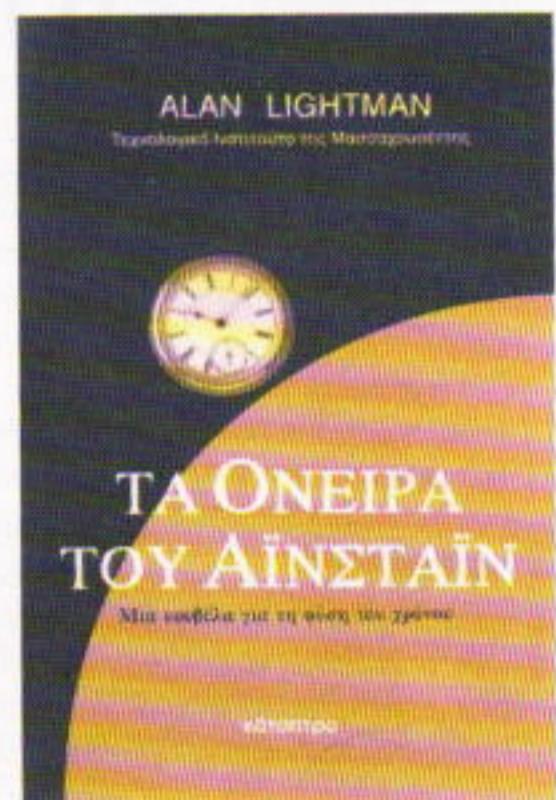
Library Journal

Διαβάστε το Quantum.  
Γίνετε συνδρομητής του  
και στηρίξτε το.

Alan Lightman

## ΤΑ ΟΝΕΙΡΑ ΤΟΥ ΑΙΝΣΤΑΪΝ

Μια νουβέλα για τη φύση του χρόνου



• «Ουδείς λογοτέχνης, φυσικός ή φιλόσοφος μας έχει προσφέρει ποτέ μια τόσο υπέροχη εικόνα για το χρόνο...» James Gleick, συγγραφέας του βιβλίου Χάος - Μια νέα επιστήμη

• «Επειτα από πολύ καιρό είναι η πρώτη νουβέλι μου με συναρπάζει τόσο πολύ...»

Salman Rushdie, συγγραφέας του βιβλίου Σατανικοί σπίχαι

• «Βαθυστόχαστο, παράξενο, χαριτωμένο και γοητευτικό, έλκει σαν μαγνήτης τον αναγνώστη σ' έναν κόσμο ονειρικό...»

The New York Times

Θέμα του βιβλίου αποτελεί το ανεξιχνίαστο από τις θετικές επιστήμες και τη φιλοσοφία πρόβλημα του χρόνου: τι είναι ή τι θα μπορούσε να είναι ο χρόνος; Ο Lightman είναι γνωστός αστροφυσικός και διδάσκει φυσική στο MIT.

Σελ. 160, 2.000 δρχ.

#### ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Ισαύρων 10 & Δαφνομήλη, 11471 Αθήνα  
Τηλ.: 3643272, 3645098, Fax: 3641864

# Η ιστορία μιας πόλης

Προβλήματα από τον Διεθνή Μαθηματικό Διαγωνισμό Πόλεων στο Μπιέλορετοκ

Andy Liu

**T**ο οδικό δίκτυο μιας πόλης αποτελείται από μια συνεχή αλυσίδα κύκλων. Στο σημείο επαφής δύο διαδοχικών κύκλων οι δρόμοι διασταυρώνονται ανισόπεδα, όπως στο παράδειγμα που βλέπετε στο Σχήμα 1, το οποίο παρουσιάζει την περίπτωση τεσσάρων κύκλων.

Γύρω από την πόλη είναι κατασκευασμένος ένας περιφερειακός δρόμος (εξωτερικός δακτύλιος) που διασταυρώνεται ανισόπεδα με την εσωτερική αλυσίδα σε διάφορα σημεία. Σε κάθε «σημείο διασταύρω-

άλλες περιπτώσεις θα το ονομάζουμε μη κανονικό. Επιθυμούμε να ανακαλύψουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα ολοκληρωμένο δίκτυο να είναι κανονικό.

Αυτή ήταν η κύρια ερώτηση στο ένα από τα πέντε προβλήματα που τέθηκαν στο διαγωνισμό επίλυσης προβλημάτων ο οποίος έγινε στο Μπιέλορετοκ, σημ Βασκιριανή Δημοκρατία της Ρωσίας, τον Αύγουστο του 1993. Οι διαγωνιζόμενοι προέρχονταν κυρίως από την πρώην Σοβιετική Ένωση, αλλά υπήρχαν και συμμετοχές από την Αγγλία, την Αυστρία, τον Καναδά, τη Γερμανία

γωνισμού είχαν σχεδιαστεί πολύ προσεκτικά. Χωρίζονταν σε πολλές ερωτήσεις που οδηγούσαν σταδιακά το λύτρι σημ κύρια ερώτηση. Επιπλέον, έθεταν παράλληλα και άλλες σχετικές ερωτήσεις. Το πρόβλημα που παρουσιάζουμε σε τούτο το άρθρο το πρότειναν οι S. Loktev και M. Vialyj, βασίζεται δε σε ένα πρόβλημα του V.I. Arnold, διαπρεπόντος καθηγητή του Πανεπιστημίου Λομονόσοφ της Μόσχας.

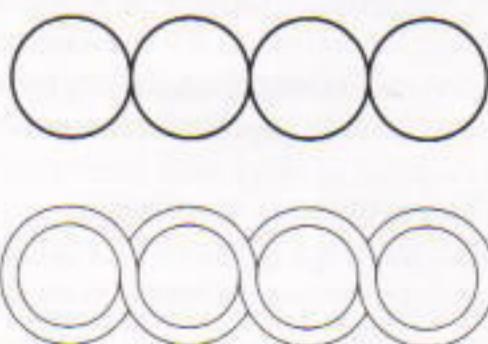
Θα αρχίσουμε την έρευνά μας μετατόπιστα μερικά μικρά ολοκληρωμένα δίκτυα.

**Ερώτηση 1.** Ποια από τα ολοκληρωμένα δίκτυα του Σχήματος 3 είναι κανονικά;

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα μη κανονικά δίκτυα του Σχήματος 3 αποτελούνται από δύο συνιστώσες. Άλληενει αυτό γενικότερα; Με άλλα λόγια, πόσο «κακό» μπορεί να είναι ένα μη κανονικό δίκτυο;

**Ερώτηση 2.** Υπάρχει ολοκληρωμένο δίκτυο που να αποτελείται από τρεις ή περισσότερες συνιστώσες;

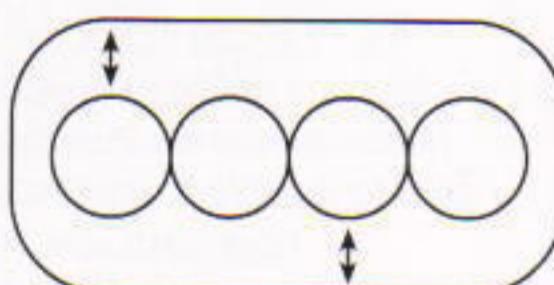
Μερικά από τα ολοκληρωμένα δίκτυα του Σχήματος 3 έχουν, στις άκρες των εσωτερικών αλυσίδων, κύκλους χωρίς σημεία σύνδεσης. Είναι προφανές ότι η αφαίρεση των κύκλων αυτών δεν επηρεάζει την κανονικότητα. Από το σημείο αυτό και μετά, θα θεωρούμε ότι οι εν λόγω κύκλοι έχουν αφαιρεθεί. Όταν η εσωτερική αλυσίδα αποτελείται μόνο από τέτοιους κύκλους, εκφυλίζεται στο κενό σύνολο. Πάντως, θα εξακολουθούμε να θεωρούμε μη κανονικό αυ-



Σχήμα 1

σης» – θα τα ονομάζουμε «σημεία σύνδεσης» – ο δακτύλιος συναντάται με την εσωτερική αλυσίδα, όπως στο παράδειγμα που βλέπετε στο Σχήμα 2, το οποίο παρουσιάζει μια περίπτωση με δύο σημεία σύνδεσης.

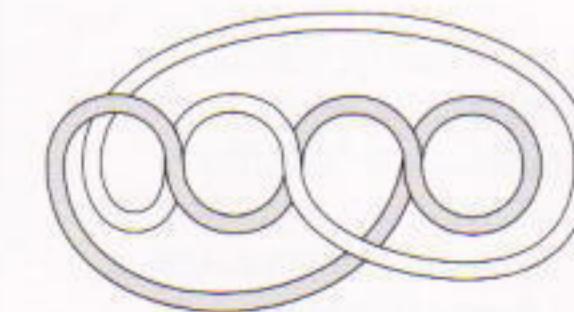
Στο Σχήμα 2 μπορούμε να δούμε ότι το ολοκληρωμένο δίκτυο αποτελείται από δύο αμοιβαίως απρόσαπτα τμήματα, και δεν υπάρχει τρόπος προσπέλασης από το ένα στο άλλο. Θα ονομάζουμε κανονικό ένα ολοκληρωμένο δίκτυο που αποτελείται από μία μόνο συνιστώσα, ενώ στις

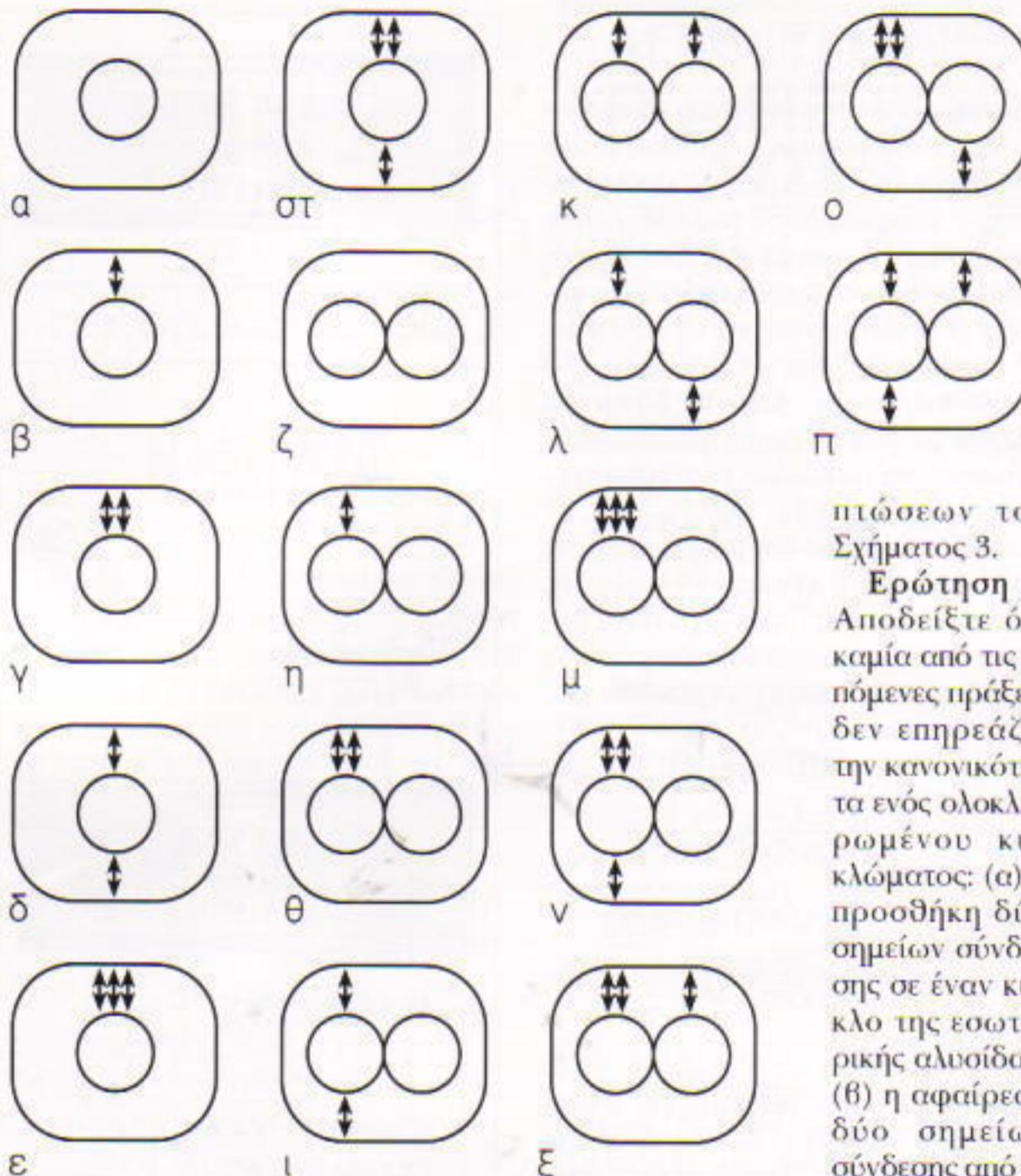


Σχήμα 2

και την Κολομβία. Ήταν μαθητές λυκείου που είχαν επιλεγεί με βάση την απόδοσή τους στον Διεθνή Μαθηματικό Διαγωνισμό Πόλεων.

Και τα πέντε προβλήματα του δια-





Σχήμα 3

τό το ολοκληρωμένο δίκτυο παρόλο που ο περιφερειακός δρόμος αποτελεί τη μόνη ουνιστώσα.

Καθώς ενδιαφερόμαστε μόνο για την κανονικότητα των ολοκληρωμένων δικτύων, μπορούμε να τα απλοποιήσουμε με πολλούς τρόπους. Αυτά που ακολουθούν απορρέουν από παρατηρήσεις επί των απλών περι-

τά απλό αλλά χρήσιμο πόρισμα είναι το θέμα της επόμενης ερώτησης. Με βάση αυτό το πόρισμα, τα Σχήματα 3δ, 3στ, 3ι, 3λ, 3ν, 3ο, και 3π είναι παρείσακτα.

**Ερώτηση 4.** Αποδείξτε ότι σε ένα ολοκληρωμένο δίκτυο μπορούμε να μεταφέρουμε όλα τα σημεία σύνδεσης ενός κύκλου της εσωτερικής αλυσίδας στην ίδια πλευρά του εξωτερικού δακτυλίου.

Ένα σημαντικότερο πόρισμα της ερώτησης 3 είναι ότι μπορούμε να υποδέτουμε πως κάθε κύκλος της εσωτερικής αλυσίδας έχει είτε ένα σημείο σύνδεσης είτε κανένα. Ένα τέτοιο ολοκληρωμένο δίκτυο θα το ονομάζουμε κανονικοποιημένο, και θα το παριστάνουμε με μια ακολουθία από 0 και 1.

**Ερώτηση 5.** Ποιο από τα επόμενα κανονικοποιημένα δίκτυα είναι κανονικό; (α) 101 (β) 111 (γ) 1001 (δ) 1011 (ε) 1111 (ζ) 10001 (η) 10011

(θ) 10101 (ι) 10111 (κ) 11011 (λ) 11111.

Το επόμενο αποτέλεσμα θα μας επιτρέψει να αναγάγουμε οποιοδήποτε κανονικοποιημένο δίκτυο σε ένα από τα τρία σχήματα 3α, 3β, ή 3κ του Σχήματος 3.

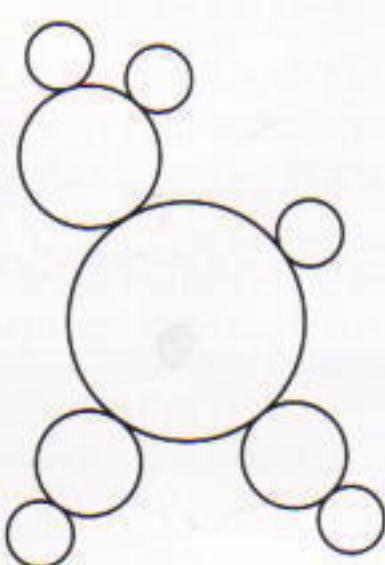
**Ερώτηση 6.** Από μια διαδική ακολουθία, αφαιρούμε όλες τις υπακολουθίες της μορφής 00 και 111. Επίσης, αντικαθιστούμε με το 0 όλες τις υπακολουθίες της μορφής 101. Αποδείξτε ότι η ακολουθία που προκύπτει αντιπροσωπεύει ένα κανονικό δίκτυο αν και μόνο αν και η αρχική αντιπροσωπεύει κανονικό δίκτυο.

Αποδεικνύεται ότι είναι δυνατόν να διαπιστώσουμε αν μια διαδική ακολουθία αντιπροσωπεύει ή όχι ένα κανονικό δίκτυο, χωρίς να χρειαστεί να εκτελέσουμε τη διαδικασία αναγωγών της ερώτησης 6. Θεωρήστε μια ακολουθία ως ομάδες διαδοχικών 1 που διαχωρίζονται από μεμονωμένα μηδενικά. Για παράδειγμα, η 111001101 αποτελείται από τέσσερις ομάδες διαδοχικών 1 (η πρώτη ομάδα έχει τρία 1, η δεύτερη κανένα, η τρίτη δύο και η τελευταία ένα). Ως εναλλασσόμενο άθροισμα αυτών των αριθμών ορίζουμε το  $3 - 0 + 2 - 1 = 4$ , και παρομοίως μπορούμε να ορίσουμε το εναλλασσόμενο άθροισμα οποιασδήποτε ακολουθίας.

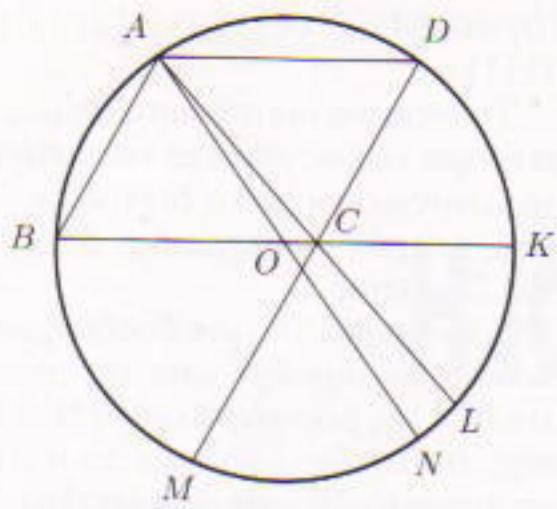
**Ερώτηση 7.** Αποδείξτε ότι μια διαδική ακολουθία αντιπροσωπεύει ένα κανονικό δίκτυο αν και μόνο αν το εναλλασσόμενο άθροισμά της δεν διαιρείται από το 3.

Είναι εντυπωσιακό ότι τα μέχρι τώρα συμπεράσματά μας αφορούν μέρος μόνο του προβλήματος των Loktev-Vialyj. Στη γενικότερη μορφή, αντικαθιστούμε την πόλη με μια μεγαλούπολη όπου το οδικό δίκτυο δεν είναι μια αλυσίδα αλλά μπορεί, για παράδειγμα, να έχει τη μορφή του Σχήματος 4. Επίσης, σχετικά με τα ολοκληρωμένα δίκτυα μπορούμε να θέσουμε και άλλα ερωτήματα.

Ο νικητής του πρώτου βραβείου γι' αυτό το πρόβλημα ήταν ο Clemens Heuberger, τελειόφοιτος λυκείου από το Γκρατς της Αυστρίας. Βραβεύτηκαν επίσης οι M. Alekhnovich και M. Ostrovsky (οι οποίοι συνεργάστηκαν για τις λύσεις), και ο I. Nykonov. Και οι τρεις ήταν μαθητές λυκείου από τη Μόσχα.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Διοργανωτής του διαγωνισμού ήταν ο καθηγητής Nikolay Konstantinov του Ανεξάρτητου Πανεπιστημίου της Μόσχας, ο οποίος τιμήθηκε πρόσφατα από την Παγκόσμια Ομοσπονδία Εθνικών Μαθηματικών Διαγωνισμών με το Βραβείο Paul Erdős. Την εκδήλωση τίμησαν με την παρουσία τους ο καθηγητής Nikolay Vasilyev, πρόεδρος της επιτροπής προβλημάτων του Διαγωνισμού Πόλεων, και ο καθηγητής A.A. Yegorov, διευθυντής σύνταξης του *Kvant*. Και οι δύο τους είχαν προτείνει προβλήματα για το διαγωνισμό.

Οι περισσότερες ομάδες συναντήθηκαν στη Μόσχα στις 30 Ιουλίου του 1993 και διέσχισαν με τρένο την Ευρωπαϊκή Ρωσία για να φτάσουν έπειτα από 36 ώρες στο Μπέλορετοκ. Στη διάρκεια του ταξιδιού δόθηκαν στους διαγωνιζόμενους για «προθέρμανση» πέντε προβλήματα. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα από αυτά.

**Πρόβλημα εξάσκησης.** (a) Έστω  $a$  και  $b$  ακέραιοι και  $p$  ένας πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι

$$a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow a^p \equiv b^p \pmod{p^2}.$$

(b) Έστω  $ABCD$  ένα παραλληλόγραμμο (Σχήμα 5). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $BAD$ , με κέντρο  $O$ , τέμνει τις προεκτάσεις των  $BC$ ,  $AC$ ,  $DC$ , και  $AO$  στα σημεία  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , και  $N$ , αντίστοιχα. (1) Αποδείξτε ότι το  $N$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $KCM$ . (2) Εκφράστε το μήκος του  $LC$  σε συνάρτηση με τα  $a = KL$  και  $b = LM$ . □

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ  
ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΤΕΥΧΟΣ

► Συνέχεια από τη σ. 21

και επομένως η απόσταση ανάμεσα σε οποιουσδήποτε κόμβους είναι τουλάχιστον  $d$ . Άρα, οι κύκλοι με κέντρο τους κόμβους του πλέγματός μας και ακτίνα ίση με  $d/2$  δεν τέμνονται: αν δύο τέτοιοι κύκλοι, με κέντρα  $A$  και  $B$ , έχουν κοινό εσωτερικό σημείο  $C$ , τότε  $AB < AC + CB < d/2 + d/2 = d$ . Από το Σχήμα 2 θέλουμε ότι η περιοχή που καλύπτουν αυτοί οι κύκλοι μέσα στο τρίγωνο με κορυφές  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ , και  $B(1,1)$  είναι ίση με το μισό του εμβαδού ενός κύκλου – δηλαδή,  $\pi d^2/8$ . Και αυτή η περιοχή είναι μέρος μόνο της συνολικής επιφάνειας του τριγώνου, που έχει εμβαδόν

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) \cdot \eta\mu(\angle A) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a} \sqrt{c} \cdot \eta\mu(\angle A) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{ac(1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{ac - b^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως,  $\pi d^2/8 < 1/2$ , ή  $d^2 < 4/\pi < 2$ . Αφού το  $d^2$  είναι ακέραιος ( $d^2 = am^2 + 2bmn + cn^2$ ), έχουμε  $d = 1$ , οπότε το θεώρημα του Minkowski αποδείχθηκε.

Τι σχέση έχει, όμως, αυτό το υπέροχο θεώρημα με τον Fermat και τον Euler; Την πιο άμεση!

Από το πόρισμα του λήμματος του Wilson που αποδείξαμε προηγούμενως, γνωρίζουμε ότι ο αριθμός  $N^2 + 1$ , όπου  $N = [(p-1)/2]!$ , διαιρείται από το  $p$ , έτοι δεν είναι; Ας εφαρμόσουμε λοιπόν το θεώρημα του Minkowski στους αριθμούς  $a = p$ ,  $b = N$ ,  $c = (b^2 + 1)/a$ . Το θεώρημα μας λέει ότι για κάποιους ακέραιους  $m$  και  $n$  ισχύει

$$1 = am^2 + 2bmn + cn^2.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} p = a &= a^2m^2 + 2abmn + (b^2 + 1)n^2 \\ &= (am + bn)^2 + n^2 \end{aligned}$$

– δηλαδή, το  $p$  είναι το άθροισμα δύο τετραγώνων. Άρα, το θεώρημα αποδείχθηκε για μία ακόμη φορά! □

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ  
ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 61

ΔΩΣΤΕ ΖΩΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΤΗΤΑ  
ΣΤΙΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΘΕΛΕΤΕ  
ΝΑ ΕΚΔΟΣΕΤΕ

Φωτοστοιχειοθεσία

Επιστημονικών  
συγγραμμάτων  
Μαθηματικών  
Φυσικής  
Χημείας  
Πολυτονικών κειμένων

**ΑΝΥΣΜΑ**  
DTP - Φωτοστοιχειοθεσία

- Υπεύθυνη και προσεγμένη έργασία.
- Ιδιαίτερη προσοχή στην παρουσία του Εντύπου.
- Παραγωγή με τις πιο σύγχρονες μεθόδους επεξεργασίας κειμένου, φωτογραφίας και σχεδιασμού.
- Σχεδιασμός τρισδιάστατων αντικειμένων.
- Χρήση FRACTALS.
- Εξειδικευμένο και έμπειρο προσωπικό για επιστημονικές εργασίες.
- Εκτυπώσεις από δισκέτα.

Νέα διεύθυνση  
ΨΑΡΩΝ 1 & Ανθέων  
Τηλ.: 9716411

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

## Μαθηματικά

**M6**

(α) Η ταυτότητα μπορεί να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή. Είναι προφανές ότι αληθεύει για  $n = 1$ :  $(1 \cdot 2!)/2 = 3!/2 - 2 = 1$ . Υποθέτοντας ότι αληθεύει για  $n = k$ , θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και για  $n = k + 1$ . Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \dots \\ & + \frac{k(k+1)!}{2^k} + \frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}} \\ & = \frac{(k+2)!}{2^k} + \frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}} - 2 \\ & = \frac{(2+k+1)(k+2)!}{2^{k+1}} - 2 \\ & = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2. \end{aligned}$$

(β) Το άθροισμα ισούται με  $(n+3)!/3^n - 6$ . Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε, όπως και στο ερώτημα (α), με μαθηματική επαγωγή, αλλά θα δώσουμε μια κάπως διαφορετική απόδειξη με «τηλεσκοπικά» άθροισμα. Παρατηρήστε ότι κάθε όρος του δεδομένου άθροισματος μπορεί να γραφτεί ως διαφορά

$$\begin{aligned} & \frac{(k+3)!}{3^k} - \frac{(k+2)!}{3^{k-1}} \\ & = \frac{(k+2)!(k+3-3)}{3^k} \\ & = \frac{k(k+2)!}{3^k}. \end{aligned}$$

Γράφοντας όλες αυτές τις διαφορές για  $k = 1, 2, \dots, n$  και προσθέτοντας όλες τις ισότητες, καταλήγουμε – μετά την απαλοιφή των όρων με αντίθετα πρόσημα – στην επόμενη ταυτότητα:

$$\begin{aligned} & \frac{(n+3)!}{3^n} - 3! = \\ & \frac{1 \cdot 3!}{3} + \frac{2 \cdot 4!}{3^2} + \dots + \frac{n(n+2)!}{3^n}. \end{aligned}$$

Παρομοίως, για κάθε θετικό ακέραιο  $d$ , ισχύει

$$\frac{(k+d)!}{d^k} - \frac{(k+d-1)!}{d^{k-1}} = \frac{k(k+d-1)!}{d^k},$$

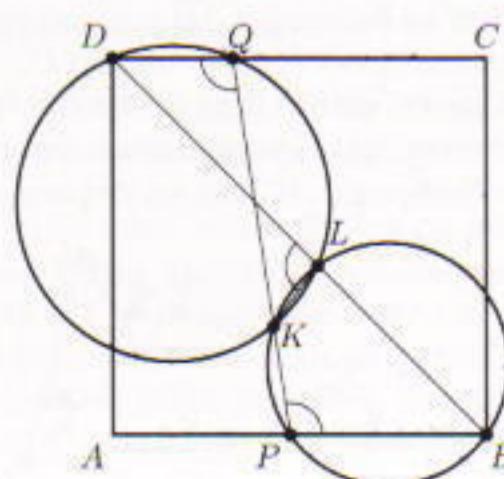
από όπου μπορούμε να συναγάγουμε την εξής γενίκευση των προτάσεων (α) και (β):

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot d!}{d} + \frac{2(1+d)!}{d^2} + \dots \\ & + \frac{n(n+d-1)!}{d^n} = \frac{(n+d)!}{d^n} - d!. \end{aligned}$$

(N. Vasilyev, V. Zhokha)

**M7**

Έστω  $L$  το σημείο τομής της διαγωνίου  $BD$  και του κύκλου  $KDQ$  (Σχήμα 1). Πρέπει να αποδείξουμε ότι το  $L$  ανήκει και στον δεύτερο κύκλο, τον  $KBP$ . Ας θεωρήσουμε ότι τα σημεία  $K$  και  $Q$  βρίσκονται εκτείρωδεν της  $BD$ . Τότε, το  $K$  και το  $P$  βρίσκονται από την ίδια πλευρά της  $BD$ , διότι το ευθύγραμμό τμήμα  $PQ$  θα τέμνει την  $BD$ . Επομένως, οι γωνίες  $DQK$  και  $DLK$  είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο, βλέπουν την ίδια χορδή  $DK$  και έχουν τις κορυφές τους από την ίδια πλευρά της χορδής: άρα είναι ίσες. Από την άλλη, και αφού  $DC \parallel AB$ ,  $\angle DQK = \angle KPB$ . Οπότε



Σχήμα 1

$\angle KPB + \angle KLB$

$$\begin{aligned} & = \angle DQK + (180^\circ - \angle DLK) \\ & = 180^\circ, \end{aligned}$$

πράγμα που ομαινεί ότι τα σημεία  $B, P, K$  και  $L$  είναι ομοκυκλικά – δηλαδή, ότι το σημείο  $L$  ανήκει στον κύκλο  $KBP$ .

**M8**

Η απάντηση είναι ναι. Αν ο πρώτος παίκτης διαλέξει τρεις διαφορετικούς ακεραίους με άθροισμα μηδέν (ας πούμε,  $1, -3, 2$ ), τότε, ανεξάρτητα από τη σειρά που θα τους χρησιμοποιήσει ο δεύτερος παίκτης, η προκύπτουσα εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει μία ρίζα  $\rho_1 = 1$  (γιατί  $\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 0$ ) και μια δεύτερη ρίζα  $\rho_2 = \gamma/\alpha \neq 1$  (αφού το γινόμενο  $\rho_1 \rho_2$  είναι πάντοτε ίσο με  $\gamma/\alpha$ ).

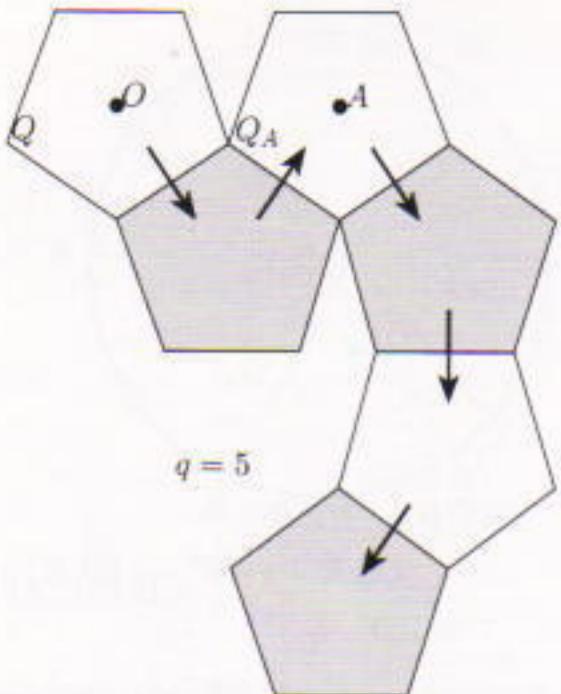
Αν σας άρεσε αυτό το πρόβλημα, ορίστε και μια πολύ πιο θελτιωμένη επέκταση.

Οι δύο παίκτες δημιουργούν μια εξίσωση της μορφής  $x^3 + *x^2 + *x + *$  = 0. Ο πρώτος παίκτης διαλέγει έναν αριθμό. Ο δεύτερος αντικαθιστά με αυτόν όποιον αστερίσκο επιθυμεί. Στη συνέχεια ο πρώτος παίκτης διαλέγει έναν δεύτερο αριθμό και ο άλλος παίκτης τον βάζει στη δέση ενός από τους δύο αστερίσκους που έχουν απομείνει. Στο τέλος, ο πρώτος παίκτης αντικαθιστά τον τελευταίο αστερίσκο με κάποιον αριθμό. Υπάρχει τρόπος να εξασφαλίσει ο πρώτος παίκτης ότι η εξίσωση που προκύπτει θα έχει τρεις διαφορετικές ακέραιες ρίζες;

**M9**

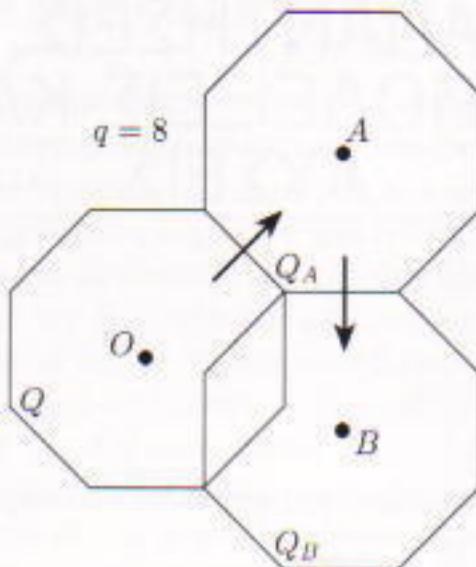
Παρότι τα δύο πρώτα προβλήματα έχουν ξεχωριστές, για κάθε περίπτωση, λύσεις ότι αντιμετωπίσουμε απευθείας το γενικό πρόβλημα (γ).

Θα αρχίσουμε εισάγοντας μερι-



Σχήμα 2

κούς συμβολισμούς και όρους που θα μας διευκολύνουν. Έστω  $Q$  η σταδερή αρχική θέση του κανονικού πολυγώνου (που υποθέτουμε ότι έχει  $q$  κορυφές) και έστω  $O$  το κέντρο του. Θα συμβολίζουμε με  $Q_A$  το κανονικό πολύγωνο (με κέντρο  $A$ ) που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του  $Q$  κατά το διάνυσμα  $\overrightarrow{OA}$ . Θα λέμε ότι δύο σημεία  $A$  και  $B$  συνδέονται όταν μπορούμε να κυλήσουμε το πολύγωνο  $Q_A$  στη θέση του  $Q_B$ . Η ακολουθία των διαδοχικών θέσεων σε αυτή τη σειρά κυλίσεων θα ονομάζεται διαδρομή  $AB$ . Παρατηρήστε ότι αν ο  $q$  είναι περιττός, τότε κάθε διαδρομή  $AB$  αποτελείται αναγκαστικά από περιττό πλήθος πολυγώνων (των  $Q_A$  και  $Q_B$  συμπεριλαμβανομένων), διότι σε αυτήν την περίπτωση έπειτα από μία μοναδική κύλιση το πολύγωνο θα έχει περιστραφεί κατά  $180^\circ$  σε σχέση με το αρχικό, και επομένως μόνο με άριθμο πλήθος κυλίσεων επανερχόμαστε στον αρχικό προσανατολισμό του πολυγώνου – δείτε το Σχή-

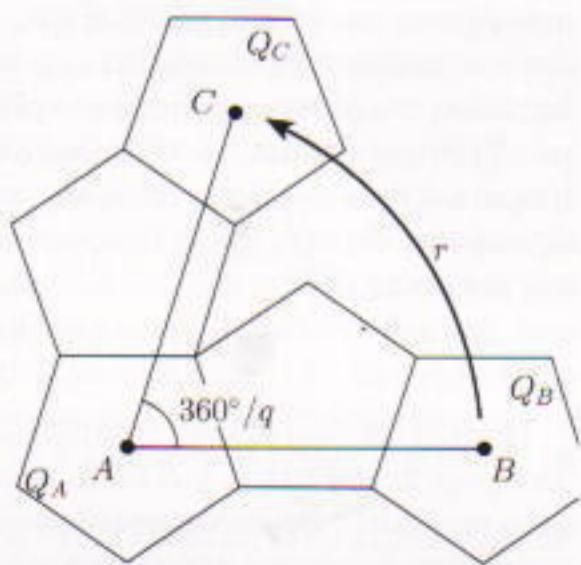


σουμε ότι η παράλληλη μετατόπιση μας μεταφέρει τα  $Q_A$  και  $Q_C$  στα  $Q_B$  και  $Q_D$ , και τη διαδρομή που κατασκευάσαμε σε μια διαδρομή  $BD$ . Επομένως, το  $D$  συνδέεται με το προσεγγίσιμο σημείο  $B$ .

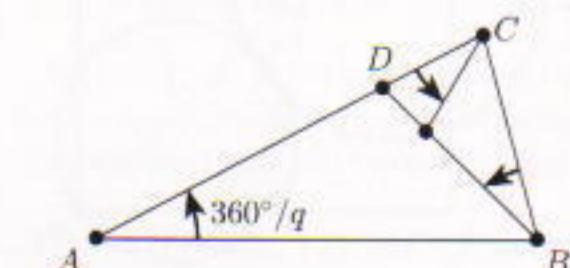
Φυσικά, η πρόταση ισχύει και για την παράλληλη μετατόπιση κατά το  $BA$ .

Και τώρα, ας αποδείξουμε ότι για  $q \geq 7$  κάθε κύκλος περιέχει ένα προσεγγίσιμο σημείο στο εσωτερικό του. Εστω  $\epsilon$  η ακτίνα του κύκλου και έστω  $A$  και  $B$  δύο τυχαία προσεγγίσιμα σημεία. Κατασκευάζουμε το σημείο  $C$  όπως περιγράψαμε στην πρόταση (1). Τότε  $BC/AB = k = 2 \cdot \eta \mu (180^\circ/q) < 2 \cdot \eta \mu 30^\circ = 1$ . Επαναλαμβάνοντας την ίδια κατασκευή με τα  $B$  και  $C$  στη θέση των  $A$  και  $B$ , θα πάρουμε ένα ζεύγος προσεγγίσιμων σημείων  $C$  και  $D$ , τέτοια ώστε  $CD = kBC = k^2 AB$  (Σχήμα 4). Επαναλαμβάνουμε την κατασκευή με τα  $C$  και  $D$ , και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να βρούμε τα προσεγγίσιμα σημεία  $X$  και  $Y$ , (τέτοια ώστε  $XY = k^n AB < \epsilon$ ), καθώς και το  $Z$ , το επόμενο σημείο της ακολουθίας  $A, B, C, D, \dots, X, \dots$ , (τέτοιο ώστε  $XZ = XY$ , και  $XYZ = 360^\circ/q$ ). Εφαρμόζοντας διαδοχικά την πρόταση (2) στα σημεία  $X, Y, O$ , και  $X, Z, O$ , βλέπουμε ότι οποιοσδήποτε αριθμός παραλήλων μετατοπίσεων κατά τα διανύσματα  $\overrightarrow{XY}$ ,  $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$ , ή τα  $\pm \overrightarrow{XZ}$  – δηλαδή, μια παράλληλη μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα  $n\overrightarrow{XY} + m\overrightarrow{XZ}$ , ( $m, n$ , ακέραιοι) – μεταφέρει το σημείο  $O$  σ' ένα προσεγγίσιμο σημείο. Τα σημεία αυτά συνθέτουν ένα ρομβικό πλέγμα, όπου η πλευρά των ρόμβων έχει μήκος μικρότερο από  $\epsilon$  (Σχήμα 5).

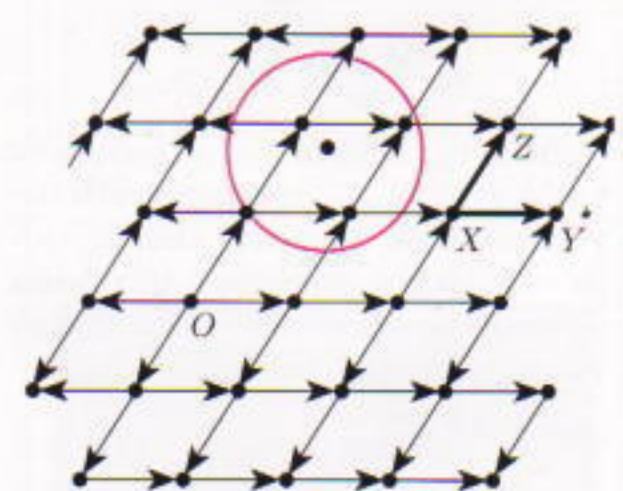
Το κέντρο του δεδομένου κύκλου



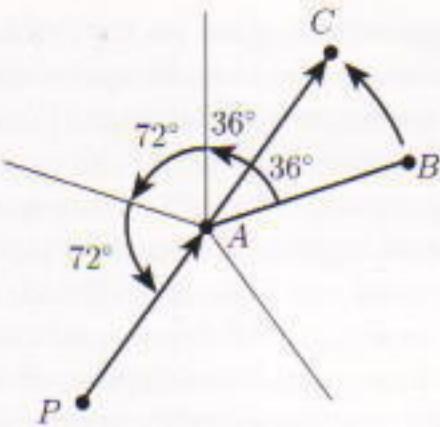
Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

θρίσκεται στο εσωτερικό ενός από αυτούς τους ρόμβους, και εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απόστασή του από μια απ' τις κορυφές του ρόμβου είναι μικρότερη από  $\epsilon$ . Επομένως, αυτή η κορυφή θρίσκεται μέσα στον κύκλο, πράγμα που αποδεικνύει την πρόταση του προβλήματος για  $q \geq 7$ , διότι όλοι οι κόμβοι του πλέγματος είναι προσεγγίσιμοι.

Για  $q = 5$  μπορούμε να πάρουμε δύο προσεγγίσιμα σημεία  $A$  και  $B$ , να περιστρέψουμε το  $B$  γύρω από το  $A$  κατά  $3 \cdot 360^\circ/q = 216^\circ$  για να πάρουμε ένα προσεγγίσιμο σημείο  $P$ , και να μετατοπίσουμε παράλληλα το  $A$  κατά το διάνυσμα  $\overrightarrow{PA}$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει το προσεγγίσιμο σημείο  $C$  (Σχήμα 6), το οποίο μπορούμε, εναλλακτικά, να κατασκευάσουμε περιστρέφοντας το  $B$  γύρω από το  $A$  κατά  $216^\circ - 180^\circ = 36^\circ = 360^\circ/10$ . Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα επιχειρήματα για  $q = 10$ .

Στις περιπτώσεις  $q = 3$ ,  $q = 4$ , και  $q = 6$  είναι φανερό ότι η πρόταση δεν ισχύει (οι κυλίσεις δημιουργούν εξαγωνικό, τετραγωνικό ή τριγωνικό πλέγμα κέντρων, αντίστοιχα). Επομένως, η απάντηση είναι  $q = 5$  ή  $q \geq 7$ . (V. Dubrovsky)

### M9

Ο δεδομένος αριθμός είναι ίσος με  $1.000.009 = 3^2 + 1.000^2$ . Θα αποδείξουμε την εξής γενική πρόταση: Αν ένας ακέραιος  $m$  της μορφής  $4k+1$  (ο  $k$  θετικός ακέραιος) μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων με δύο η περισσότερους διαφορετικούς τρόπους, τότε ο  $m$  είναι σύνδετος.

Υποδέστε ότι

$$m = x^2 + y^2 = u^2 + v^2. \quad (1)$$

Αφού ο  $m$  είναι περιττός, μπορούμε να υποδέσουμε πως οι  $x$  και  $y$  είναι περιττοί, με  $x > u$ , και οι  $y$  και  $v$  είναι άρτιοι με  $y < v$ , έτσι ώστε οι  $x \pm u$  και  $y \pm v$  να είναι θετικοί άρτιοι αριθμοί. Τότε το  $m$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} m &= \left( \frac{x+u}{2} + \frac{x-u}{2} \right)^2 + \\ &\quad + \left( \frac{y+v}{2} - \frac{v-y}{2} \right)^2 \\ &= \left( \frac{x+u}{2} \right)^2 + \left( \frac{x-u}{2} \right)^2 + \\ &\quad + \left( \frac{y+v}{2} \right)^2 + \left( \frac{v-y}{2} \right)^2 \\ &= p^2 + q^2 + r^2 + s^2, \end{aligned}$$

όπου  $p = (x+u)/2$ ,  $q = (x-u)/2$ , κ.λπ. Στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιήσαμε την ισότητα

$$\begin{aligned} pq &= \frac{x+u}{2} \cdot \frac{x-u}{2} \\ &= \frac{v+y}{2} \cdot \frac{v-y}{2} \quad (2) \\ &= rs, \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμη με τη  $x^2 - u^2 = v^2 - y^2$  και, επομένως, ισοδύναμη με την εξίσωση (1).

Εστω  $a$  ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $p$  και  $r$ . Τότε,  $p = ab$ ,  $r = ac$ , όπου οι  $b$  και  $c$  είναι πρώτοι μεταξύ τους. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) προκύπτει  $abq = acs$ , ή  $bq = cs$ . Συνεπάγεται ότι ο  $q$  διαιρείται από το  $c$  – άρα,  $p = cd$ , και επομένως  $bed = cs$ , ή  $s = bd$ . Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} m &= a^2b^2 + c^2d^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + d^2)(b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση του προβλήματος μας, καταλήγουμε στην παραγοντοποίηση

$$\begin{aligned} 1.000.009 &= (17^2 + 2^2)(7^2 + 58^2) \\ &= 293 \cdot 3.413. \end{aligned}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε μια ισχυρότερη πρόταση: ο αριθμός  $m = 4k+1$  είναι πρώτος όταν και μόνο όταν παριστάνεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δύο τετραγώνων. Για λεπτομέρειες δείτε το άρθρο του V. Tikhomirov σε τούτο το τεύχος. (N. Vasilev, D. Fomin)

## Φυσική

Έστω ότι το ελατήριο αποτελείται από  $N$  σπείρες (από τα δεδομένα του προβλήματος  $N \gg 1$ ). Θεωρούμε πρώτα τη συμπίεση του ελατήριου που οφείλεται στο ίδιο του το βάρος (κατά την απουσία του νερού). Η  $j$  στη σειρά σπείρα (μετρώντας από πάνω) υποβαστάζει τις  $(j-1)$  σπείρες που βρίσκονται από πάνω της. Η αλλαγή στο μήκος της εξαρτάται απ' το βάρος  $Mg(j-1)/N$  αυτών των σπειρών (όπου  $M$  είναι η μάζα του ελατηρίου) και από τη σταθερά του ελατηρίου για μία σπείρα (η οποία είναι  $N$  φορές η σταθερά  $k$  ολόκληρου του ελατηρίου). Επομένως,

$$\Delta L_j = \frac{Mg(j-1)}{N} \cdot \frac{1}{Nk}.$$

Η συνολική μείωση του μήκους του ελατηρίου ισούται με το άδροισμα των μεταβολών στο μήκος κάθε σπείρας:

$$\Delta L = \sum_{j=1}^N \Delta L_j = \frac{Mg}{2k} = \frac{L}{2},$$

αφού

$$\sum_{j=1}^N (j-1) = N(N-1) \cong N^2.$$

Επομένως, προκύπτει ότι  $Mg/k = L$ .

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου το νερό φτάνει σε ύψος  $L/2$ . Αν έχουμε  $n$  σπείρες κάτω από το νερό, οι υπόλοιπες  $(N-n)$  θα βρίσκονται πάνω από την επιφάνεια. Ας θρούμε την τιμή του  $n/N$ . Ξεκινάμε βρίσκοντας το φορτίο για κάθε βυθισμένη σπείρα και την αλλαγή στο μήκος της. Στη συνέχεια αδροίζουμε τις μεταβολές και εξισώνουμε το αποτέλεσμα με το  $Ln/N - L/2$  (αυτή είναι η διαφορά μεταξύ του μήκους των  $n$  σπειρών στην κατάσταση ηρεμίας και στην κατάσταση συμπίεσης).

Το βάρος των βυθισμένων σπειρών ελαττώνεται λόγω της άνωσης του νερού. Το ενεργό βάρος κάθε σπείρας είναι

$$\frac{Mg(\rho - \rho_0)}{\rho N} = \frac{\alpha Mg}{N},$$

όπου  $\alpha = (\rho - \rho_0)/\rho$ . Επομένως, η

δύναμη που πιέζει την  $(i+1)$  σπείρα (μετρώντας από την επιφάνεια προς τα κάτω) είναι

$$F_i = \frac{Mg(N-n)}{N} + \frac{\alpha Mgi}{N},$$

και το άθροισμα των μεταβολών στα μήκη των βυθισμένων σπειρών είναι

$$\sum_{i=0}^n \frac{F_i}{kN} = \frac{Mgn(N-n)}{kN^2} + \frac{\alpha Mgn^2}{2kN^2} \\ = L \left( \frac{n}{N} - \frac{1}{2} \right).$$

Θέτοντας  $n/N = x$  και χρησιμοποιώντας το  $Mg/k = L$ , παίρνουμε την εξίσωση

$$x(1-x) + \frac{\alpha x^2}{2} = x - \frac{1}{2},$$

από όπου λαμβάνουμε  $x = 1/\sqrt{2} - \alpha$ .

Μπορούμε τώρα να βρούμε εύκολα το συνολικό μήκος του ελατηρίου αδροίζοντας το μήκος  $L/2$  του βυθισμένου μέρους του με το μήκος των  $(N-n)$  συμπιεσμένων σπειρών που έχουμε πάνω από την επιφάνεια του νερού:

$$L^* = \frac{L}{2} + L(1-x) - \frac{L(1-x)^2}{2} \\ = L \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right),$$

ή

$$L^* = \frac{L(3-2\alpha)}{2(2-\alpha)},$$

## Φ7

Όταν τοποθετήσουμε ένα σημειακό φορτίο κοντά σε μία αγώγιμη επίπεδη επιφάνεια, θα εμφανιστούν εξ επαγωγής φορτία πάνω της που θα έλκουν το σωματίδιο. Το ηλεκτρικό πεδίο που θα αναπυχθεί μεταξύ της επίπεδης επιφάνειας και του σημειακού φορτίου  $+Q$  θα έχει την ίδια μορφή με αυτό που θα αναπυσσόταν μεταξύ του σημειακού φορτίου  $+Q$  και ενός φορτίου  $-Q$  σε συμμετρική θέση ως προς την επιφάνεια (Σχήμα 7). Συνεπώς, η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο προκύπτει από το νόμο του Coulomb:

$$F = \frac{kQ^2}{(2x)^2} = \frac{kQ^2}{4x^2}.$$

Επειδή η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σημειακών μαζών εξαρτάται επί-

σης από το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασής τους, θα μπορούσαμε σ' αυτήν την ποσοτική μελέτη μας να αντικαταστήσουμε την ηλεκτρική δύναμη με μια ισοδύναμη βαρυτική δύναμη. Μπορούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο υποθέτοντας ότι στο σημείο  $O$  υπάρχει μια μάζα  $M$  ίση με

$$M = \frac{Fx^2}{Gm} = \frac{kQ^2}{4mG}.$$

Είσι, μας είναι δυνατό να περιγράψουμε την τροχιά του σωματιδίου χρησιμοποιώντας τους νόμους του Κέπλερ. Η τροχιά μπορεί να θεωρηθεί ως έλλειψη πολύ μεγάλης εκκεντρότητας, με μεγάλο ημιάξονα  $\alpha = L/2$  και μικρό ημιάξονα  $\beta \ll \alpha$  (οι εστίες της έλλειψης θρίσκονται στο  $O$  και σημητούν αρχική θέση του σωματιδίου.)

Η περίοδος μιας ελλειπτικής τροχιάς με μεγάλο ημιάξονα  $r$  είναι ίση με την περίοδο μιας κυκλικής τροχιάς ακτίνας  $r$ . Επομένως, η περίοδος  $T$  της περιστροφής του σωματιδίου γύρω από τη μάζα  $M$  είναι:

$$m \frac{4\pi^2}{T_0^2} r = \frac{GmM}{r^2},$$

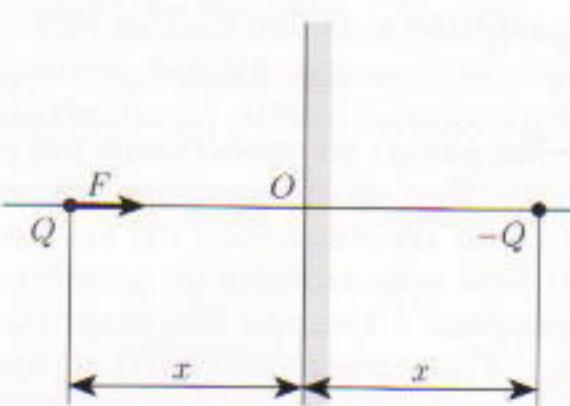
$$\text{από όπου } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

Είναι φανερό ότι ο χρόνος που θα χρειαστεί το σωματίδιο για να φτάσει στην επίπεδη επιφάνεια ισούται με το μισό της περιόδου περιστροφής. Έτοι:

$$t = \frac{1}{2} T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L^3}{2GM}} \\ = \frac{\pi L}{Q} \sqrt{\frac{Lm}{2k}}.$$

## Φ8

Σ' ένα κλειστό δοχείο, το πλήθος των μορίων νερού που προσπίπουν στην επιφάνεια του πάγου ανά μονά-



Σχήμα 7

δα χρόνου ισούται με το πλήθος των μορίων νερού που διαφέύγουν από την επιφάνεια του πάγου (δυναμική ιορροπία). Υπ' αυτές τις συνθήκες μετριέται η τάση  $P_{\kappa.a.}$  των κεκορεσμένων ατμών. Και οι δύο ροές μάζας ισούνται με  $\rho_{\kappa.a.} \cdot \bar{v} S/6$ , όπου  $\rho_{\kappa.a.} = P_{\kappa.a.} \mu / RT$  είναι η πυκνότητα των κεκορεσμένων ατμών,  $S$  το εμβαδόν της επιφανείας του πάγου,  $\bar{v}$  η γραμμομορική μάζα του νερού, και  $\bar{v} \cong \sqrt{3RT/\mu}$  η μέση ταχύτητα των μορίων. Ο παράγοντας  $1/6$  ερμηνεύεται από την επιλογή μίας από τις έξι δυνατιές κατευδύνσεις. Όταν το δοχείο είναι ανοιχτό, η ροή των εξαερούμενων μορίων παραμένει η ίδια, αλλά δεν υπάρχουν μόρια που να επιστρέψουν. Σε αυτήν την περίπτωση η πίεση των ατμών ισούται με  $P_{\kappa.a.}/2$ .

Ας εκτιμήσουμε το χρόνο που απαιτείται για την πλήρη εξαέρωση του πάγου, υποθέτοντας ότι έχουμε μια αρχική μάζα πάγου  $m \sim 0,2 \text{ kg}$ . Θεωρούμε επιπλέον ότι το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής του ποτηριού είναι  $S \sim 30 \text{ cm}^2$ . Γνωρίζουμε ότι για το νερό είναι  $\mu = 18 \text{ gr/mol}$ :

$$\tau \sim \frac{m}{\rho_{\kappa.a.} \cdot \bar{v} \cdot S/6} \cong \frac{6m}{P_{\kappa.a.} \cdot S} \sqrt{\frac{RT}{3\mu}} \\ \cong 150 \text{ sec.}$$

Στην πραγματικότητα, απαιτείται περισσότερος χρόνος για την εξαέρωση: επομένως έχουμε υπολογίσει ένα κατώτερο φράγμα για τον χρόνο εξαέρωσης.

Καθώς εξαερώνεται ο πάγος, ο αστροναύτης μας αποκτά επιτάχυνση  $\gamma = P_{\kappa.a.} \cdot S/2M$ , άρα θα διανύσει απόσταση  $d = \gamma t^2/2 \cong 90 \text{ m}$ . Η απόσταση αυτή είναι ουγκρίσιμη με την απόσταση που δίνεται στο πρόβλημα, και επομένως ο αστροναύτης θα ουδεί!

Χωρίς να ξεχνάμε την προσεγγιστική φύση των υπολογισμών μας, μπορούμε να πούμε ότι ο αστροναύτης θα επιστρέψει στο διαστημόπλοιό του σε χρόνο  $t \geq 100 \text{ sec}$ .

## Φ9

Όταν διακόπτεται το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, η τιμή της μαγνητικής επαγωγής του πέφτει από την αρχική τιμή  $B$  στο μηδέν. Η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου επάγει ηλε-

κτρικό ρεύμα σε κάθε δακτύλιο. Ας υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος  $t$  sec μετά τη διακοπή του μαγνητικού πεδίου.

Θεωρήστε τον κλειστό θρόχο  $AfCbA$  που συμπίπτει με τον αριστερό δακτύλιο (Σχήμα 8). Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, η φορά του ρεύματος είναι δεξιόστροφη. Έστω  $I_1(t)$  το ρεύμα στον κλάδο  $AfC$  και  $I_2(t)$  το ρεύμα στον κλάδο  $CbA$ . Η λεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή που αναπτύσσεται σ' αυτόν το θρόχο είναι

$$\mathcal{E}_{\text{επ}} = -\pi r^2 \frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Σύμφωνα με το νόμο του Ohm για ένα κλειστό κύκλωμα, έχουμε

$$\mathcal{E}_{\text{επ}} = I_1(t) \frac{R}{2\pi r} \ell_{AfC} + I_2(t) \frac{R}{2\pi r} \ell_{CbA},$$

ή, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα μήκη των τόξων  $AfC$  και  $CbA$  είναι  $\pi r/3$  και  $5\pi r/3$ , αντίστοιχα, παίρνουμε

$$I_1(t) + 5I_2(t) = -\frac{6\pi r^2}{R} \frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

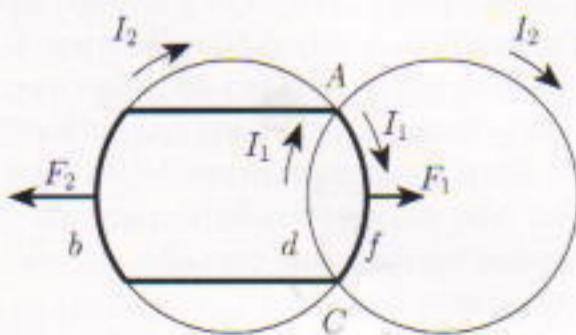
Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε το νόμο του Ohm για το θρόχο  $AfCdA$ :

$$I_1(t) = -\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})r^2}{2R} \frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή του  $I_1(t)$  στην προηγούμενη εξίσωση έχουμε

$$I_2(t) = -\frac{(10\pi + 3\sqrt{3})r^2}{10R} \frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Κάθε στοιχειώδες τμήμα  $\Delta\ell$  του δακτυλίου που διαρρέεται από ρεύμα  $I(t)$  δέχεται δύναμη Laplaceae  $\Delta F = I(t) \cdot \Delta\ell \cdot B(t)$ , που έχει τη διεύθυνση της ακτίνας του δακτυλίου. Εξαιτίας της διμερούς συμμετρίας αυτών των δυνάμεων σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα που συνδέει τα κέντρα των δακτυλίων, η συνολική δύναμη με διεύθυνση κάθετη σ' αυτόν



Σχήμα 8

τον οριζόντιο άξονα είναι μηδέν. Η απουσία συμμετρίας των δυνάμεων σε σχέση με τον κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του αριστερού δακτυλίου ( $I_1(t) \neq I_2(t)$ ) έχει αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας συνισταμένης οριζόντιας δύναμης. Αυτή η δύναμη ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στις δυνάμεις που ασκούνται στο τόξο  $AfC$  και σε όσες ασκούνται στο συμμετρικό τόξο στην απέναντι πλευρά του δακτυλίου:

$$F = F_2 - F_1 = I_2(t) \ell_{AC} B(t) - I_1(t) \ell_{AC} B(t),$$

όπου  $\ell_{AC}$  είναι η χορδή του τόξου  $AfC$  ( $\ell_{AC} = 2r \cdot \eta\mu\alpha/2 = r$ ). Η τελική έκφραση για τη δύναμη  $F$  είναι

$$F = -\frac{9\sqrt{3}r^3}{5R} B(t) \frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Η άσκηση αυτής της δύναμης για ένα μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$  έχει αποτέλεσμα τη μεταβολή της ορμής του δακτυλίου:

$$\begin{aligned} m \cdot \Delta v &= F \cdot \Delta t = -\frac{9\sqrt{3}r^3}{5R} \cdot B(t) \cdot \Delta B(t) \\ &= -\frac{9\sqrt{3}r^3}{10R} \Delta [B^2(t)], \end{aligned}$$

και επομένως, ο δακτύλιος θα αποκτήσει ταχύτητα

$$v = \frac{9\sqrt{3}r^3}{10mR} B_0^2.$$

## Φ10

Συμβολίζοντας την απόσταση μεταξύ της πηγής και του φακού με  $\alpha$  και την απόσταση μεταξύ του ειδώλου και του φακού με  $\beta$ , μπορούμε να γράψουμε τον τύπο των φακών ως εξής:

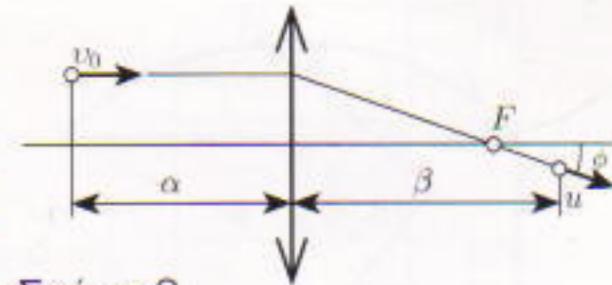
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}.$$

Σε μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$  η απόσταση ανάμεσα στην πηγή και το φακό μειώνεται κατά  $\Delta\alpha = v_0 \cdot \Delta t$ , ενώ η απόσταση ανάμεσα στο φακό και το είδωλο αυξάνεται κατά  $\Delta\beta = u \cdot \sigma\mu\phi \cdot \Delta t$ . Τότε (δείτε το Σχήμα 9)

$$\frac{1}{\alpha - v_0 \Delta t} + \frac{1}{\beta + u \cdot \sigma\mu\phi \cdot \Delta t} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta},$$

ή

$$\frac{v_0 \Delta t}{\alpha^2} = \frac{u \cdot \sigma\mu\phi \cdot \Delta t}{\beta^2}.$$



Σχήμα 9

Από την τελευταία σχέση προκύπτει πως η ταχύτητα του ειδώλου θα ισούται με την ταχύτητα της πηγής  $v_0$  όταν  $\beta_1 = \alpha_1 \sqrt{\sigma\mu\phi}$ . Παίρνοντας υπόψη ότι  $\sigma\mu\phi = f/\sqrt{f^2 + H^2}$ , έχουμε

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\sigma\mu\phi}} = \frac{1}{f},$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma\mu\phi}} \right) = f \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{H^2}{f^2}} \right) = \\ &= f \left( 1 + \frac{\sqrt{17}}{2} \right). \end{aligned}$$

## Σπαζοκεφαλιές

### Σ6

Έξι ημέρες. Ο αριθμός των ημερών αργίας πρέπει να είναι  $48:12 = 4$ -πλάσιος των εργάσιμων ημερών. Επομένως οι ημέρες που δούλεψε ο εργάτης είναι το  $1/5$  των συνολικών ημερών.

### Σ7

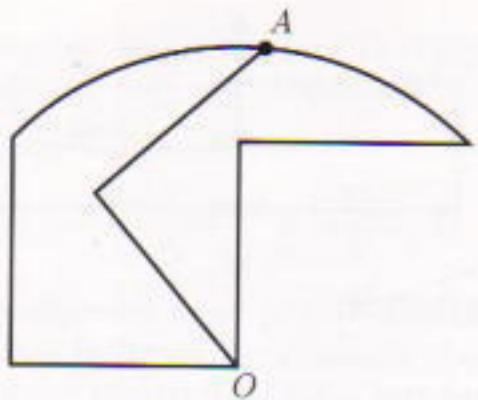
Αφού οι προτάσεις αλληλοαποκλείονται, μόνο μία από αυτές μπορεί να είναι αληθινή. Δεν μπορεί να είναι όλες τους ψευδείς, διότι σε αυτήν την περίπτωση θα ήταν αληθινή η εκαποστή. Αυτό σημαίνει ότι μόνο η ενενηκοστή ένατη πρόταση είναι αληθινή.

### Σ8

Το καυτό νερό σβήνει τη φωτιά ταχύτερα από το κρύο, διότι εξατμίζεται γρηγορότερα και ο απόσταση εμποδίζει την προσέγγιση του αέρα που συντηρεί τη φωτιά.

### Σ9

Η απάντηση είναι 384. Υποθέστε ότι αρχίζετε περνώντας το κορδόνι από την πάνω δεξιά τρύπα. Τώρα, λοιπόν, μπορείτε να το βγάλετε από οποιαδήποτε άλλη τρύπα εκτός από την πάνω αριστερά – δηλαδή, έχετε να διαλέξετε ανάμεσα σε οκτώ διαφο-



Σχήμα 10

ρετικούς τρόπους. Στη συνέχεια περνάτε το κορδόνι από την «απέναντι» τρύπα και κατόπιν μπορείτε να διαλέξετε ανάμεσα σε έξι τρύπες. Επομένως, έχουμε μέχρι στιγμής  $8 \cdot 6 = 48$  τρόπους. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, θα έχουμε τέσσερις επιλογές στο επόμενο βήμα, δύο στο άλλο, και τελικά θα περάσουμε το κορδόνι από την πάνω αριστερά τρύπα. Συνολικά, έχουμε  $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$  τρόπους να δέσουμε τα κορδόνια.

## ΣΤΟ

Παρατηρήστε το Σχήμα 10: Το σημείο  $A$  είναι το μέσο του τόξου. Τα δύο τμήματα μπορούν να συμπέσουν με περιστροφή γύρω από το  $O$  κατά  $45^\circ$ .

## Καθειδοσκόπιο

1. Η μικρή δύναμη είναι ανάλογη με το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής του μύσιου και όχι με τη μάζα του. Επομένως, αν μειωθούν οι γραμμικές διαστάσεις ενός ζώου κατά έναν παράγοντα  $n$ , η μάζα του θα μειωθεί κατά έναν παράγοντα  $n^3$ , ενώ η δύναμη του μόνο κατά έναν παράγοντα  $n^2$ . Άρα, η σχετική δύναμη (δηλαδή, η δύναμη ανά μονάδα μάζας) αυξάνεται καθώς μειώνεται το μέγεθος του ζώου. Βέβαια, σε διαφορετικά ζώα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά δεν είναι τα ίδια, αλλά η επίδραση των διαστατικών παραγόντων ξεπερνά κατά πολύ το ρόλο των ειδικών χαρακτηριστικών, πράγμα που μας επιτρέπει να ορίσουμε μια ξεκάθαρη σχέση ανάμεσα στη σχετική δύναμη και το μέγεθος του ζώου.

2. Η δύναμη που μπορεί να απούξει ένας μύσιος είναι ανάλογη με το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής του (δείτε το προηγούμενο πρόβλημα), και το μήκος κατά το οποίο συστέλλεται ο μύσιος είναι ανάλογο με το αρχι-

κό του μήκος. Η μηχανική ενέργεια που παράγεται από μια συστολή του μύσιου ισούται με το γινόμενο της δύναμης επί το μήκος της συστολής και, επομένως, είναι ανάλογη με τον κύβο του γραμμικού μεγέθους του οργανισμού (και αντίστοιχα με τη μάζα του). Η ίδια ποσότητα μικρής ενέργειας ανά μονάδα μάζας αντιστοιχεί στην ίδια δυναμική ενέργεια στο ανώτερο σημείο του άλματος. Επομένως, γεωμετρικώς παρόμοια ζώα πρέπει να μπορούν να πηδήξουν στο ίδιο ύψος.

3. Όταν αυξάνονται οι γραμμικές διαστάσεις ενός ζώου κατά έναν παράγοντα  $n$ , η μάζα του σώματός του αυξάνεται κατά έναν παράγοντα  $n^3$ . Ας υποθέσουμε πως, όταν συμβαίνει αυτό, το πάχος των οστών αυξάνεται κατά έναν παράγοντα  $m$ . Στο βαθμό που υποδέτουμε (σε συμφωνία με τις προγματικές συνδήσεις) ότι η σύνθεση των οστών δεν αλλάζει, η πίεση στον οστίτη ιστό (ανά μονάδα εγκάρσιας τομής) πρέπει να παραμείνει σταθερή – δηλαδή,  $n^3/m^2 = 1$ . Με άλλα λόγια, το  $m$  είναι ανάλογο με το  $n^{1/3}$ . Όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα, ο Γαλιλαίος έχει αυξήσει τις γραμμικές διαστάσεις κατά έναν παράγοντα ίσο με το 3. Επομένως, η μάζα του ζώου αυξάνεται κατά  $3^3 = 27$  φορές. Το πιθανότερο είναι ότι για λόγους σαφήνειας ο Γαλιλαίος αύξησε το πάχος του οστού στην εικόνα κατά έναν παράγοντα ίσο με  $27/3 = 9$  (αντί για  $3^{1.5} \cong 5.2$ ). Ένα επιπλέον στοιχείο υπέρ του Γαλιλαίου είναι ότι – παρά το σφάλμα στην εικόνα – όλοι οι υπολογισμοί στο κείμενο του βιβλίου του είναι σωστοί.

4. Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, υποδέτουμε ότι η πίεση που ασκείται στην εγκάρσια τομή του ποδιού είναι ίδια και στον άνθρωπο και στο «μονόποδα». Η πυκνότητα του σώματος σε όλα τα θηλαστικά είναι περίπου  $1 \text{ gr/cm}^3$ . Σε παρόμοιους προσεγγιστικούς υπολογισμούς μπορούμε να αγνοήσουμε τη μάζα του ίδιου του ποδιού. Στους ανθρώπους αυτή η πίεση είναι περίπου

$$\frac{700 \text{ Nt}}{2 \cdot 3,14 \cdot (15 \text{ cm}^2)/4} \cong 1 \text{ Nt/cm}^2$$

(ο άνθρωπος είναι δίποδο!). Έστω ότι το 1 ορτέμ είναι  $z$  μέτρα. Τότε, το βάρος του μονόποδα θα είναι

$$3,14z^3 \cdot 1.000 \cdot \frac{9,8}{8} \cong 4.000z^3 \text{ Nt}$$

(υπολογίστε μόνοι σας τη συμβολή της μάζας του ποδιού), και η εγκάρσια τομή του ποδιού θα έχει εμβαδόν

$$3,14 \cdot \frac{(0,2z \cdot 100)^2}{4} = 80z^2 \text{ cm}^2.$$

Τελικά έχουμε ότι

$$50z = 1 \quad \text{ή} \quad z = 0,02.$$

Πρέπει να σημειώσουμε, πάντως, ότι αν συγκρίναμε το μονόποδα με μια αντιλόπη αντί για έναν άνθρωπο, θα καταλήγαμε σε εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα.

5. Οπωσδήποτε, μια ημερήσια κατανάλωση 15-20 κιλών τροφής είναι ένα απίθανο νούμερο και για ένα τρίχρονο παιδί και για τους αναγνώστες μας. (Μην ξεχνάτε ότι δεν περιλαμβανει στους υπολογισμούς μας τις απαιτήσεις σε νερό.) Τα μικρά παιδιά τρώνε μεγαλύτερες ποσότητες τροφής εξαιτίας του ταχύτερου μεταβολισμού τους και ίσως ακόμη περισσότερο επειδή έχουν μεγαλύτερες απώλειες θερμότητας – κάτι που χαρακτηρίζει όλα τα μικρά θηλαστικά. Ένα ακόμη παράδειγμα της επίδρασης του τελευταίου παράγοντα μπορείτε να δείτε στο πρόβλημα 9.

6. Το βάρος ενός εντόμου (δηλαδή, η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται πάνω του) είναι ανάλογο με το  $n^3$ , και η πίεση στον αέρα που δημιουργείται με κάθε χτύπημα του φτερού του είναι ανάλογη προς το εμβαδόν του φτερού ( $n^2$ ) και τη μικρή δύναμη (ακόμη ένας παράγοντας  $n^2$ ). Αν και η μείωση του μεγέθους κάνει ένα ζώο συγκριτικά δυνατότερο (δείτε το πρόβλημα 1), δεν το βοηθάει σε κινήσεις «κωπηλατικού» τύπου. Για να κρατηθεί στον αέρα, το μικρότερο ζώο πρέπει να αυξήσει τον αριθμό των χτυπημάτων. Το ύψος του ήχου που παράγεται από τα φτερά αυξάνεται αντίστοιχα. Όσο για τις μύγες που ενόχλησαν τον Γκιούλιθερ, η πήση τους θα ήταν λίγο-πολύ αδύρυντη (για το ανθρώπινο αυτό) όπως ακριβώς σχετικά αδύρυντη είναι η πήση των πουλιών. (Ο ήχος που ακούγεται όταν πετούν τα πουλιά προξενείται από άλλα είδη κίνησης των φτερών.)

Υπάρχει ένας τρόπος πτήσης που βασίζεται στην περιστροφή μιας

προπέλας και στον οποίο καταναλώνεται ακόμη περισσότερη ενέργεια. Προσπαθήστε στον ελεύθερο χρόνο σας να υπολογίσετε πόση μαρμελάδα πρέπει να τρώει ο Karlsson για να μη χάνει βάρος όταν πετάει. (Ο Karlsson είναι ένας χαρακτήρας των ιστοριών του A. Lindgren.)

7. Τα θερμόαιμα ζώα ξοδεύουν σημαντικό ποσόν ενέργειας για να διατηρούν σταθερή τη θερμοκρασία τους. Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα σοβαρό πρόβλημα για ένα μικρό ζώο με συγκριτικά μεγάλο εμβαδόν επιφανείας. Το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο των γραμμικών του διαστάσεων. Τα μικρά ζώα, για να καταφέρουν να επιτύχουν ισορροπία ανάμεσα στην παραγωγή και στην απώλεια θερμότητας, διατηρούν υψηλότερες θερμοκρασίες σώματος.

8. Όταν περπατάμε, το κέντρο βάρους μας – το οποίο βρίσκεται στο κατώτερο τμήμα του κορμού μας, κάτω ακριβώς από τον ομφαλό – κινείται κατά μήκος ενός τόξου κύκλου που έχει ακτίνα ίση, κατά προσέγγιση, με το μήκος των ποδιών μας. Γνωρίζουμε πως όταν ένα σώμα κινείται με ταχύτητα  $v$  κατά μήκος ενός κύκλου ακτίνας  $r$  έχει επιτάχυνση  $v^2/r$  που κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου. Όταν περπατάει ένας άνδρωπος δρουν πάνω του δύο δυνάμεις: το βάρος του και η δύναμη που του ασκεί το δάπεδο καθώς τον υποβαστάζει. Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων – η κεντρομόλος δύναμη – δεν μπορεί, σίγουρα, να είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη της βαρύτητας (το  $mv^2/r$  δεν μπορεί να υπερβαίνει το  $mg$ , όπου  $m$  είναι η μάζα του σώματος). Επομένως, η μεγαλύτερη ταχύτητα βαδίσματος ισούται με  $v = \sqrt{gr}$ , που για έναν άνθρωπο ισούται με 3 m/sec περίπου (μια λογική τιμή). Τα παιδιά έχουν μικρότερα πόδια και επομένως πρέπει να τρέχουν για να προλαβαίνουν τους γονείς τους, αλλά, στην πραγματικότητα, το τρέξιμό τους είναι μια διαδοχή αλμάτων και όχι περιστροφή του σώματός τους γύρω από τον άξονα του ποδιού.

9. Εφόσον το πρόβλημα ασχολείται με ζώα της ερήμου, μπορούμε να υποθέσουμε πως η απώλεια του

νερού προκαλείται λόγω εξάτμισης από την επιφάνεια του σώματος. Το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας είναι ανάλογο με το τετράγωνο των γραμμικών διαστάσεων του ζώου ( $n^2$ ) ενώ το ποσόν του αποθηκευμένου στο ζώο νερού είναι ανάλογο με τον όγκο του σώματός του ( $n^3$ ). Το αποτέλεσμα είναι ότι τα μεγαλύτερα ζώα μπορούν να ζήσουν περισσότερο καταναλώνοντας το απόθεμα του νερού τους. Κι όμως, υπάρχουν μεγάλες διαφορές στο μέγεθος των ζώων της ερήμου. Πώς μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό; Αποδεικνύεται ότι η συλλογιστική μας μπορεί να εφαρμοστεί σε ζώα που ταξινομικά σχετίζονται (για παράδειγμα η καμήλα και ο ιάκουλος) για τα οποία η μείωση του μεγέθους δεν συνεπάγεται και μείωση της διαπερατότητας του ιστού τους από το νερό. Δεν έχει νόημα να συγκρίνουμε σκαθάρια, σαύρες και ποντίκια με βάση την αρχή της ομοιότητας διότι οι ιστοί τους είναι θεμελιωδώς διαφορετικοί.

## Παιχνιδότοπος

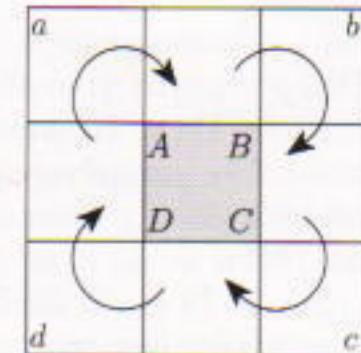
1. Συμβολίζουμε με  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\pi$ , και  $\kappa$  το πλήθος των κινήσεων  $\Delta$ ,  $A$ ,  $P$ , και  $K$ , αντίστοιχα, που απαιτούνται για να μεταφερθούμε από το  $(0, 0)$  στο  $(m, n)$ . Τότε, ισχύει ότι  $\delta - \alpha = m$ , και  $\pi - \kappa = n$ , ενώ ο συνολικός αριθμός των κινήσεων είναι  $\delta + \alpha + \pi + \kappa = m + n + 2(\alpha + \kappa)$ .

2. Παραδείγματα των ζητούμενων σύντομων ακολουθιών από το τετράγωνο  $(0, 0)$  σε ένα έγχρωμο τετράγωνο (με τη μαρκαρισμένη έδρα του κύβου προς τα πάνω) είναι: η  $\Pi\Delta^mK$  για  $m \geq 1$ ,  $n = 0$ , η  $\Pi\Delta^{m-2}\Pi\Delta K\Delta$  για  $m \geq 2$ ,  $n = 1$ . Παρόμοιες ακολουθίες έχουμε για τις περιπτώσεις  $(0, n)$  και  $(1, n)$  ενώ για την περίπτωση  $(m, n) = (1, 1)$  έχουμε την ακολουθία  $\Delta\Pi\Delta\Delta K$ .

3. Οι τρεις ημιστροφές δίνονται από τις  $\Delta\Pi\Delta^2K\Delta$ ,  $\Pi\Delta^2KA^2$  και  $\Pi^2\Delta K^2A$ .

4. Η  $H(a^{-1}b)$  παράγει τη μισή στροφή  $h_v$  του κεντρικού κύβου, και η  $H(ab^{-1})$  την  $h_s$ . Και οι δύο πράξεις είναι δυνατό να γίνουν με 38 κινήσεις.

5. Χρωματίζουμε τα τετράγωνα άσπρα και μαύρα, όπως στη σκακιέρα. Αν ο κενός χώρος επανέλθει τελικά στην αρχική του θέση, τότε ο αριθ-



Σχήμα 11

μός των κύβων που μετακινούνται από μαύρο σε άσπρο τετράγωνο ή αντίστροφα με τον αριθμό δύον μετακινούνται από άσπρο σε μαύρο. Συγκεκριμένα, το συνολικό πλήθος των κύβων που αλλάζουν χρώμα τετραγώνου είναι πάντοτε άρτιο. Επομένως, η απάντηση στο (α) είναι όχι (διότι η περιστροφή των  $90^\circ$  είναι δυνατή μόνο με αλλαγή χρώματος). Η απάντηση στο (β) είναι επίσης όχι, διότι όλα τα γωνιακά τετράγωνα σε μία σκακιέρα διαστάσεων  $3 \times 3$  έχουν το ίδιο χρώμα, και επομένως πρέπει να κάνουμε δύο μόνο όμοιες αλλαγές χρώματος, χωρίς καμία αντίθετη αλλαγή.

Στις επόμενες απαντήσεις θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , και  $d$  για τις κυκλικές κινήσεις (που αποτελούνται από 4 κυλίσεις) γύρω από τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , και  $D$  του Σχήματος 11 (παρόμοια με ότι κάναμε στο άρθρο). Όταν επαληθεύετε τον αριθμό των κινήσεων, λάβετε υπόψη και τις αλληλοσύρωσεις των κυλίσεων.

$$6. (dcba)^3 dc.$$

$$7. a^2 b^2 c^2 d c d^2 c^{-1} d^{-1}.$$

$$8. ab^{-1} ad^{-1} cd^{-1} ab^{-1} ad^{-1} c^2 ab^{-1} c^{-1} c^{-1} b^{-1} debada^2 d.$$

$$9. a^{-1} dc b^2 d^{-1} a^{-2} d^{-1} c^2 bd^{-1} c^{-1} d^{-1} a^{-1} c^2.$$

$$10. b^2 a^{-1} (b^{-1} a)^3 ba^{-2} K \quad (\text{το κενό τετράγωνο μετακινείται}). \quad \text{Εδώ, η κατεύθυνση της περιστροφής είναι αντίθετη από εκείνη της προηγούμενης λύσης.}$$

$$11. a^{-1} ba^2.$$

## Θεώρημα Fermat-Euler

1. Αν το  $a^2 + b^2$  είναι περιττός πρώτος, τότε ένα από τα τετράγωνα – ας πούμε, το  $a^2$  – είναι άρτιος. Επομένως,  $a = 2n$ , ενώ το άλλο τετράγωνο είναι περιττός, επομένως  $b = 2k + 1$ . Άρα  $a^2 + b^2 = 4n^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 4m + 1$ , όπου  $m = n^2 + k^2 + k$ .

2. Για κάθε ακέραιο  $a$ ,  $1 \leq a \leq p-1$ , θεωρούμε τα γινόμενα  $1 \cdot a$ ,  $2 \cdot a$ , ...,  $(p-1) \cdot a$ . Τα υπόλοιπα όλων αυτών των γινομένων μετά τη διαιρεσή τους με το  $p$  είναι όλα διαφορετικά [διότι αν  $\lambda a \equiv \mu a \pmod{p}$ ,  $\lambda > \mu$ , τότε το  $(\lambda - \mu)a$  θα διαιρείται από το  $p$ , κάπι που είναι αδύνατο αφού και οι δύο παράγοντες, ο  $\lambda - \mu$  (που είναι θετικός) και ο  $a$ , είναι μικρότεροι από το  $p$ , ενώ το  $p$  είναι πρώτος.] Κανένα από αυτά τα γινόμενα, λοιπόν, δεν διαιρείται με το  $p$ , και επομένως τα υπόλοιπα παίρνουν τις τιμές  $1, 2, \dots, p-1$  από μία φορά. Άρα, για το δεδομένο  $a$  υπάρχει ένα μοναδικό  $b$ , με  $1 \leq b \leq p-1$ , τέτοιο ώστε  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ . Για  $a = 1$  και  $a = p-1$ , ο αντίστοιχος αριθμός  $b$  ισούται με  $a$ . Για κάθε άλλο  $a$  (όπου  $2 \leq a \leq p-2$ ), ισχύει  $b \neq a$ , αφού η ισοτιμία  $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$  συνέπαγεται ότι το  $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$  διαιρείται με το  $b$  μόνο όταν  $a-1 = 0$  ή όταν  $a+1 = p$ . Έτσι, αποδεικνύεται η πρώτη πρόταση. Το λήμμα του Wilson αποδεικνύεται όπως ακριβώς αποδείξαμε την περίπτωση  $p = 13$  στο άρθρο:

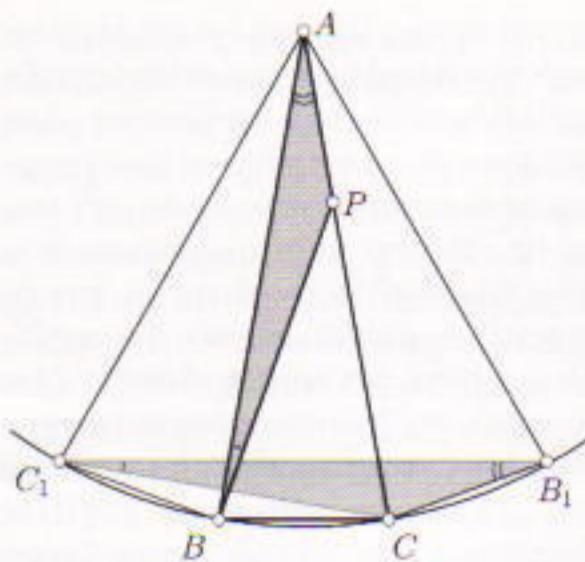
$$\begin{aligned} (p-2)! &= 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2) \\ &= \left(2 \cdot \frac{p+1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left[\frac{p-1}{2} \cdot (p-2)\right] \\ &\equiv 1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

και  $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ .

### Εννέα λύσεις

1. Στο Σχήμα 3 του άρθρου, οι γωνίες του τριγώνου  $CBK$  είναι  $\angle C = 80^\circ$  (από τα δεδομένα του προβλήματος),  $\angle B = 20^\circ$  (από κατασκευή), και  $\angle K = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ$ , και επομένως  $BC = BK$ . Είδαμε στην πρώτη λύση ότι  $BC = BE$ , επομένως  $BE = BK$ . Άρα, και αφού  $\angle KBE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ , το τρίγωνο  $BEK$  είναι ισόπλευρο. Επίσης,  $\angle KBD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ = \angle BDK$  (η τελευταία ισότητα αποδείχθηκε στην τρίτη λύση), και επομένως  $KD = KB = KE$ . Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να παρατηρήσουμε, για παράδειγμα, ότι το  $K$  είναι το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα  $B$ ,  $E$ , και  $D$ . Αυτό συνέπαγεται ότι  $\angle EDB = \frac{1}{2} \angle EKB = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ .

2. Στο Σχήμα 6 του άρθρου,  $\angle EOD$



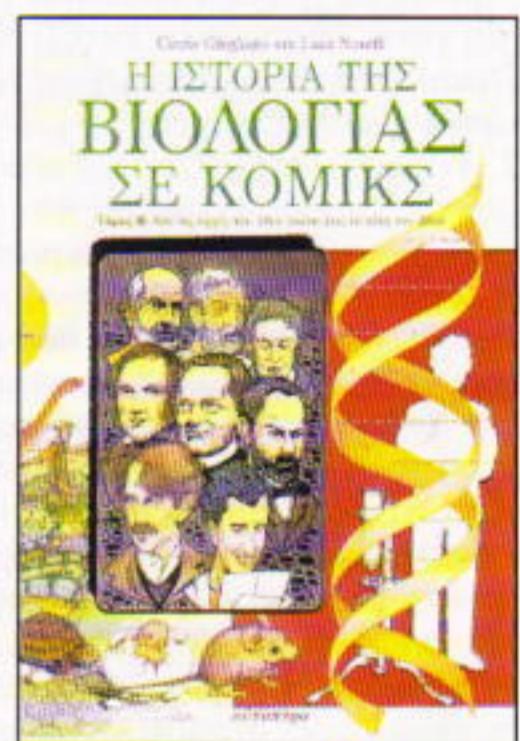
Σχήμα 12

$= 2\angle ECD = 60^\circ$ , διότι η  $\angle EOD$  είναι επίκεντρη γωνία στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $CED$ , ενώ η  $\angle ECD$  είναι εγγεγραμμένη στον ίδιο κύκλο, και βλέπουν και οι δύο την ίδια χορδή  $ED$ . Συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο  $DEO$  είναι ισόπλευρο και ότι  $ED = DO$ . Επομένως το  $D$  ανήκει στη μεσοκάθετο  $p$  του ευθύγραμμου τιμήματος  $EO$ . Γνωρίζουμε επίσης ότι η  $BD$  διχοτομεί τη γωνία  $EBO$ . Αν η  $p$  και η  $BD$  ήταν διαφορετικές ευθείες, θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην πέμπτη λύση για να δείξουμε ότι το σημείο  $D$  ανήκει στο τόξο  $EO$  του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο  $BEQ$  κύκλου. Σε αυτήν την περίπτωση, όμως, θα είχαμε  $\angle EDO + \angle EBO = 180^\circ$ , ενώ στην πραγματικότητα αυτό το άθροισμα ισούται με  $60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$ . Άρα, η  $BD$  είναι η μεσοκάθετος του  $EO$ , πράγμα που σημαίνει ότι τα τρίγωνα  $BDE$  και  $BDO$  είναι ίσα, και, επομένως,  $\angle EDB = \angle BDO = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ .

3. Εφαρμόζουμε την κατασκευή της όγδοης λύσης με τις δύο συμμετρίες (Σχήμα 12 – συγκρίνετε με το Σχήμα 7 του άρθρου). Τότε,  $AP = CB_1$  και  $AB = C_1B_1$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα σημεία  $C_1$ ,  $B$ ,  $C$  και  $B_1$  ανήκουν όλα σε έναν κύκλο με κέντρο το  $A$ , και εφαρμόζοντας το θεώρημα των εγγεγραμμένων γωνιών, λαμβάνουμε  $\angle C_1B_1C = \frac{1}{2}\angle C_1AC = \angle BAC$  (και επομένως, το τρίγωνο  $C_1B_1C$  είναι ίσο με το  $BAP$ ), και  $\angle B_1C_1C = \frac{1}{2}\angle B_1AC = 10^\circ$ . Από την ισότητα των προηγούμενων τριγώνων έχουμε  $\angle ABP = \angle B_1C_1C = 10^\circ$ , και επομένως  $\angle PBC = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$ .

(V. Dubrovsky) □

## ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΚΟΜΙΚΣ. ΤΑ ΓΝΩΡΙΖΕΤΕ;



C. Ghiglano και L. Novelli

### Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ

Τόμοι Α και Β  
Από την αρχαία Αίγυπτο έως τα τέλη του 20ού αιώνα

### Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΒΙΟΛΟΓΙΑΣ

Τόμοι Α και Β  
Από τον Αριστοτέλη έως τα τέλη του 20ού αιώνα

Βιβλία με μεγάλη αφηγηματική δύναμη και τρυφερή εικονογράφηση, που περιγράφουν την περιπέτεια της χημείας και της βιολογίας, και συγχρόνως την ιστορία της ανθρωπότητας, όπως γράφτηκε τόσο στα διάφορα ερευνητικά κέντρα όσο και μέσα από την καθημερινή ζωή των ανθρώπων.

• «Ωραία εισαγωγικά βιβλία που είναι αδύνατο να μην προκαλέσουν ευνοϊκά σχόλια οι τόσες καινοτομίες τους.»

François Dagognet,  
Καθηγητής ιστορίας των φυσικών επιστημών, Πανεπιστήμιο της Λυών

Σελ. κάθε τόμου: 64, 21 x 29 εκ., Εγχρ., 2.800 δρχ. κάθε τόμος

### ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη 114 71 Αθήνα  
Τηλ.: 3643272, 3645098 Fax: 3641864

# ΟΙ ΚΥΛΙΟΜΕΝΟΙ ΚΥΒΟΙ

*Παιζοντας με αυτά τα «ζάρια» δεν χρειάζεται τύχη για να κερδίσετε*

Vladimir Dubrovsky

Σε τόύτο το άρθρο θα αναφερθούμε σε παιχνίδια με κύβους. Τα υλικά των παιχνιδιών μας θα είναι αρκετά απλά – κύβοι, χρωματισμένοι ή μονόχρωμοι, και μια επιφάνεια χωρισμένη σε τετράγωνα. Η ποικιλία των προβλημάτων πάντως είναι εντυπωσιακή. Ξεκινάμε με την πρώτη κατηγορία, που αφορά τις μετακινήσεις ενός μοναδιαίου κύβου.

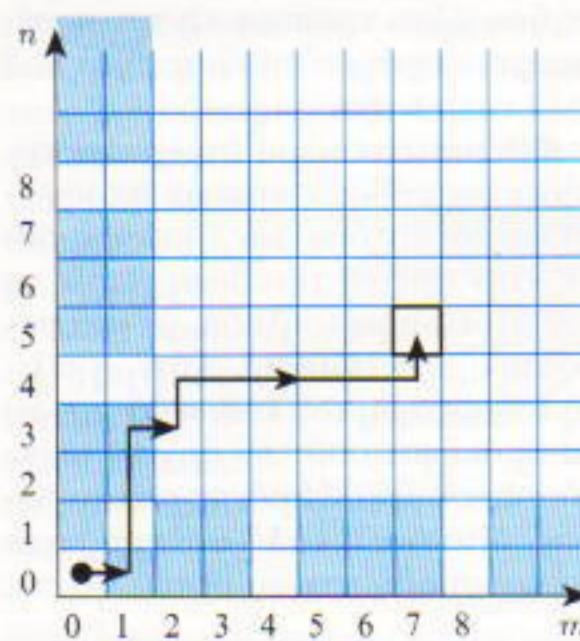
## Μοναδικές διαδρομές

Αρχίζουμε με ένα πλέγμα, τα τετράγωνα του οποίου τα θεωρούμε μοναδιαία, και με έναν κύβο – επίσης μοναδιαίων διαστάσεων – τοποθετημένο στο γωνιακό τετράγωνο του πλέγματος. Υποθέτουμε ότι πέντε έδρες του κύβου έχουν λευκό χρώμα, και μία έδρα – αυτή που βλέπει προς τα πάνω – είναι χρωματισμένη (θα την ονομάζουμε μαρκαρισμένη). Πρέπει να κυλήσουμε τον κύβο έως ένα δεδομένο τετράγωνο του πλέγματος με τρόπο ώστε η μαρκαρισμένη πλευρά του να βλέπει πάλι προς τα πάνω, και να υπολογίσουμε τον αριθμό των κινήσεων (κυλίσεων) που θα απαιτήσει αυτή η διαδικασία.

Το πρόβλημα δεν είναι και τόσο δύσκολο. Η απάντηση δίνεται στο Σχήμα 1: αν αριθμήσουμε 0, 1, 2, ... τις γραμμές και τις στήλες του πλέγματος, αντιστοιχίζοντας με αυτόν τον τρόπο ένα ζεύγος  $(m, n)$  σε κάθε τετράγωνο του πλέγματος ( $m$  και  $n$  είναι οι αριθμοί της στήλης και της γραμμής, αντίστοιχα), τότε ο ελάχιστος αριθμός  $N$  των κυλίσεων που απαιτούνται για να φτάσου-

με στο τετράγωνο  $(m, n)$  και να βρεθεί ο κύβος με τη μαρκαρισμένη έδρα προς τα πάνω είναι ίσος με  $m + n + 2$  για τα άσπρα τετράγωνα,  $m + n + 4 = 6$  για τα μπλέ, και  $m + n + 4 = 6$  για το μοναδικό κίτρινο τετράγωνο, το  $(1, 1)$ .

Για να επαληθεύσετε ότι αυτό ισχύει πραγματικά, πρέπει πρώτα να παρατηρήσετε ότι αν κυλήσουμε τον κύβο τέσσερις φορές προς την ίδια κατεύθυνση, θα ξαναπάρει τον αρχικό του προσανατολισμό (θα έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή). Επομένως, αν  $(m, n) = (4\ell, 0)$  ή  $(0, 4\ell)$ , έχουμε  $N = m + n = 4\ell$ . Είναι προφανώς αδύνατο να φτάσουμε σε αυτά τα τετράγωνα με μικρότερο αριθμό κινήσεων, και είναι εξίσου φανερό ότι δεν μπορούμε να φτάσουμε σε ένα τετράγωνο  $(m, n)$  σε λιγότερες από  $m + n$  κινήσεις.



Σχήμα 1

Ας φανταστούμε ότι κυλάμε τον κύβο από την αρχική του θέση μία φορά προς τα δεξιά. Η μαρκαρισμένη έδρα θα εμφανίζεται τώρα στη δεξιά μεριά του και θα παραμείνει σε αυτή για οποιοδήποτε αριθμό επόμενων κυλίσεων σε κατακόρυφη διεύθυνση. Συγκεκριμένα, αν κάνετε μία μόνο κίνηση «προς τα πάνω» και κατόπιν συνεχίσετε να κυλάτε τον κύβο προς τα δεξιά, ο κύβος θα ξαναπάρει τον αρχικό του προσανατολισμό έπειτα από τρεις κινήσεις προς τα δεξιά, όπως επίσης και έπειτα από  $3 + 4k$  κινήσεις (για οποιοδήποτε  $k$ ). Επομένως, μπορούμε να κυλήσουμε τον κύβο στο τετράγωνο  $(m, n) = (4\ell, 1)$  σε  $m + n = 4\ell + 1$  κινήσεις. Αν συμβολίζουμε τις δεξιές, αριστερές, πάνω και κάτω κινήσεις με Δ, Α, Π και Κ, αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε αυτήν την ακολουθία κυλίσεων ως  $\Delta \Pi^{4\ell-1}$  (όπου με  $\Delta^k$  συμβολίζουμε  $k$  διαδοχικές κινήσεις προς τα δεξιά).

Παρόμοια (και συμμετρικά) μπορούμε να φτάσουμε στο τετράγωνο  $(m, n) = (1, 4\ell)$  με  $m + n = 4\ell + 1$  κινήσεις:  $\Pi \Delta^{4\ell-1}$ . Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα σε  $m + n$  κινήσεις για οποιοδήποτε τετράγωνο  $(m, n)$  με  $m \geq 2, n \geq 2$ . Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό για τις κινήσεις που ορίσαμε προηγουμένως, η ακολουθία των κινήσεων που μεταφέρει τον κύβο στο τετράγωνο αυτό, με τη μαρκαρισμένη έδρα του προς τα πάνω, είναι η  $\Delta \Pi^{n-2} \Delta \Pi^{m-2} \Pi$ . (Δείτε το παραδειγμα για το τετράγωνο  $(m, n) =$

(7, 5) στο Σχήμα 1 –η κύλιση κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών δεν αλλάζει τη σχετική θέση της μαρκαρισμένης έδρας.)

Στη συνέχεια, μπορείτε εύκολα να δείτε ότι  $m + n$  κινήσεις δεν αρκούν για να φτάσετε στα έγχρωμα τετράγωνα (τα μπλε και το κίτρινο) του Σχήματος 1, και ότι για να φτάσετε στο κίτρινο τετράγωνο δεν αρκούν ούτε  $4 = m + n + 2$  κινήσεις (υπάρχουν πολύ λίγες δυνατές διαδρομές μήκους  $m + n$  από το  $(0,0)$  στο  $(m, n)$  όταν το  $m \neq n$  δεν είναι μεγαλύτερα από το 1, και μπορείτε να τις ελέγξετε όλες).

**Πρόβλημα 1.** Αποδείξτε ότι αν μπορείτε να φτάσετε το τετράγωνο  $(m, n)$  σε  $k$  κινήσεις, τότε ο  $k - (m + n)$  είναι ένας μη αρνητικός άριθμός.

Σύμφωνα με αυτό το πρόβλημα, για τα μπλε τετράγωνα απαιτούνται τουλάχιστον  $m + n + 2$  κινήσεις, ενώ για το κίτρινο,  $(m, n) = (1, 1)$ , απαιτούνται τουλάχιστον  $m + n + 4 = 6$  κινήσεις.

**Πρόβλημα 2.** Βρείτε τις λύσεις των 6 και των  $m + n + 2$  κινήσεων, για το κίτρινο και για τα μπλε τετράγωνα, αντίστοιχα.

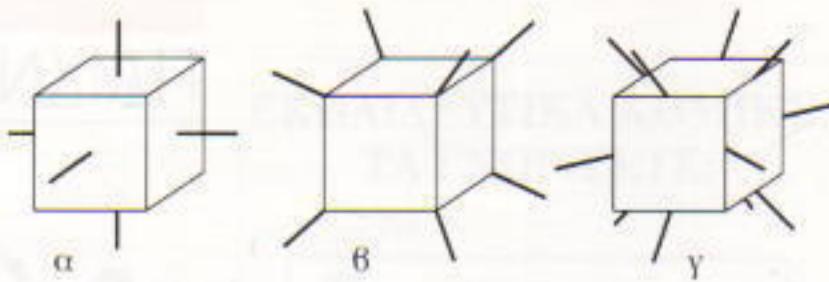
## Βόλτες με περιστροφές και κυλίσεις

Όταν έχουμε έναν κύβο με τις έδρες του χρωματισμένες όλες διαφορετικά, προκύπτουν πολλές διαφορετικές προβλήματα. Μπορούμε, άραγε, να κυλήσουμε έναν κύβο από το τετράγωνο  $(0, 0)$  στο  $(m, n)$  με τέτοιο τρόπο ώστε ο κύβος να καταλήξει έχοντας την ίδια ακριβώς τοποθεσία με την αρχική, ή γενικότερα, μια συγκεκριμένη επιθυμητή τοποθεσία;

Αποδεικνύεται πώς οι δυνατές τελικές θέσεις εξαρτώνται από τις συντεταγμένες  $(m, n)$  του τελικού τετραγώνου – ακριβέστερα, από την ι-

σοτιμία του  $m + n$ .\* Αυτό γίνεται φανερό από το Σχήμα 2. Σχεδιάζουμε μια γραμμή σε κάθε έδρα του κύβου όπως φαίνεται στο σχήμα (οι γραμμές στις έδρες που δεν είναι ορατές, είναι παράλληλες με τις γραμμές των απέναντι έδρων), και σχεδιάζουμε και γραμμές στα τετράγωνα του πλέγματος εναλλάσσοντας τις διεύθυνσεις τους με τον ίδιο τρόπο που εναλλάσσονται τα χρώματα των τετραγώνων μιας σκακιέρας. Τοποθετήστε τον κύβο σε ένα τετράγωνο του πλέγματος έτσι ώστε να συμπίπτει η γραμμή που υπάρχει στην κάτω έδρα του με τη γραμμή του τετραγώνου. Κυλήστε τώρα τον κύβο. Οι γραμμές στον κύβο και στο πλέγμα θα ταιριάζουν και πάλι το ίδιο θα συμβεί και έπειτα από μια δεύτερη κύλιση και, γενικότερα, έπειτα από οποιονδήποτε αριθμό κυλίσεων σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιτύχουμε μόνο τις μισές από τις δυνατές τοποθεσίεις του κύβου σε ένα δεδομένο τετράγωνο κυλώντας τον από άλλο δεδομένο τετράγωνο. Πραγματικά, ο κύβος μπορεί να στηρίζεται σε οποιαδήποτε από τις έξι έδρες του και μπορούμε να τον στρέψουμε με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους γύρω από αυτήν την έδρα. Επομένως, υπάρχουν  $6 \cdot 4 = 24$  τοποθεσίεις του κύβου σε ένα δεδομένο τετράγωνο. Αν, όμως, θέλουμε να ταιριάζει η γραμμή στο κάτω μέρος του κύβου με τη γραμμή του τετραγώνου, έχουμε δύο μόνο τρόπους να τον στρέψουμε – πράγμα που μας δίνει  $6 \cdot 2 = 12$  τοποθεσίεις.

Φανταστείτε τώρα ότι έχουμε κυλήσει τον κύβο σε κάποιο τετράγωνο και ότι κατόπιν τον επαναφέρουμε στην αρχική του θέση χωρίς να τον στρέψουμε (δηλαδή, με μια παράλληλη μετατόπιση). Τότε, η τελική τοποθεσία του κύβου θα μπορεί να προκύψει από την αρχική μέσω κάποιας συγκεκριμένης περιστροφής. Μια πολύ καλή άσκηση είναι να προσπαθήσετε να βρείτε και τις



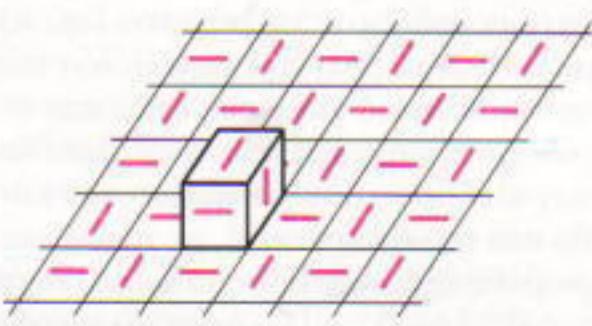
Σχήμα 3

24 δυνατές περιστροφές του κύβου, καθώς και τις 12 που διατηρούν τη διευθετηση των γραμμών στις έδρες του κύβου. Προσπαθήστε να τις βρείτε μόνοι σας.

Η απάντηση σ' αυτό το ζήτημα είναι η εξής: υπάρχουν τρεις περιστροφές (κατά  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ , και  $270^\circ$ ) γύρω από καθέναν από τους τρεις κάθετους στις έδρες του κύβου άξονες (Σχήμα 3α), δύο περιστροφές ( $120^\circ$  και  $240^\circ$ ) γύρω από καθεμία από τις τέσσερις διαγωνίους (Σχήμα 3β), και οι (λιγότερο φανερές) περιστροφές (ή ημιστροφές) γύρω από καθέναν από τους έξι άξονες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι ακμών του κύβου (Σχήμα 3γ). Έχουμε, λοιπόν,  $3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 = 23$  διαφορετικές περιστροφές. Αυτός που λείπει είναι ο ταυτοποιός μετασχηματισμός. Η διάταξη των γραμμών διατηρείται από τις τρεις περιστροφές των  $180^\circ$  γύρω από τους «εδρικούς άξονες», από τις οκτώ περιστροφές γύρω από τις διαγωνίους και, φυσικά, από τον ταυτοποιό μετασχηματισμό.

Αφού κάθε απλή κύλιση αλλάζει τη διεύθυνση της γραμμής στην κάτω έδρα του κύβου, οι περιστροφές που διατηρούν τη διάταξη των γραμμών προκύπτουν έπειτα από άριθμό κυλίσεων, οπότε μπορούμε να τις ονομάσουμε άριτες περιστροφές. Αντίστοιχα, τις υπόλοιπες δώδεκα περιστροφές θα τις ονομάσουμε περιπτές. Από το πρόβλημα 1, γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των κυλίσεων που απαιτούνται για να μεταφερθούμε από το τετράγωνο  $(0,0)$  στο τετράγωνο  $(m, n)$  έχει την ίδια ισοτιμία με το  $m + n$ , και επομένως οι περιστροφές που προκύπτουν από την κύλιση του κύβου από το  $(0,0)$  στο  $(m, n)$  είναι άριτες ή περιπτές ανάλογα με το αν το  $m + n$  είναι άριθμός ή περιπτώ.

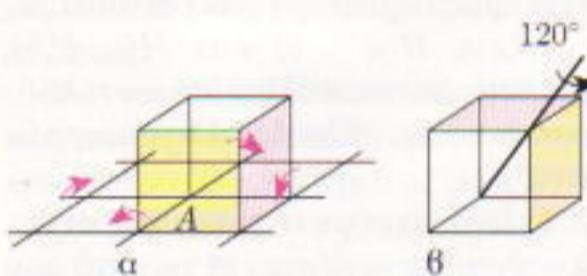
Συγκεκριμένα, όταν έναν κύβος ακολουθεί κλειστή διαδρομή, καταλήγει στο αρχικό τετράγωνο έχοντας



Σχήμα 2

\* Δύο αριθμοί έχουν την ίδια ισοτιμία αν δίνουν το ίδιο υπόλοιπο διαφορούμενο με το 2. (Σ.τ.μ.).

περιστραφεί «άρτια». Μπορούμε, όμως, να εκτελέσουμε και τις 12 άρτιες περιστροφές με αυτόν τον τρόπο; Η απλούστερη κλειστή διαδρομή αποτελείται από 4 κινήσεις σε ένα τετράγωνο διαστάσεων  $2 \times 2$  (Σχήμα 4). Μπορούμε να δούμε αμέσως ότι αυτή η «περιφορά» του κύβου έχει αποτέλεσμα την περιστροφή του κατά  $120^\circ$  γύρω από τη διαγώνιο που διέρχεται από το κέντρο του παραπάνω τετραγώνου (το σημείο  $A$  στο Σχήμα 4a), όπως βλέπουμε στο Σχήμα 4b.



Σχήμα 4

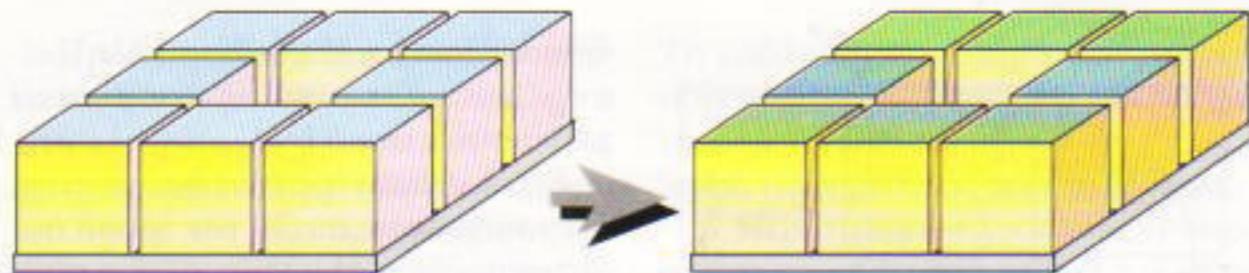
με στο Σχήμα 4b. Η φορά της περιστροφής εξαρτάται από τη φορά της περιφοράς του κύβου. Με τον συνηθισμένο συμβολισμό μας, η περιφορά στο Σχήμα 4a γράφεται  $\text{ΑΠΔΚ}$ . Εφόσον οι κινήσεις  $\Delta$  και  $K$  είναι οι αντίστροφες των  $A$  και  $P$ , μπορούμε να τη γράψουμε και ως  $\text{ΑΠΑ}^{-1}\text{Π}^{-1}$ . Παρόμοιες πράξεις (γενικά της μορφής  $\text{XYX}^{-1}\text{Y}^{-1}$ , ή σε συντομογραφία,  $[\text{X}, \text{Y}]$ ) ονομάζονται αντιμεταδέτες (των  $X$  και  $Y$ ) και συχνά είναι χρήσιμες σε παρόμοια προβλήματα μετασχηματισμών. Ο αντιμεταδέτης  $[\text{A}, \text{Π}]$  μαζί με τους υπόλοιπους επτά αντιμεταδέτες των  $A$ ,  $P$ , και των αντιστρόφων τους ( $[\text{ΑΠ}^{-1}] = \text{ΑΠ}^{-1}\text{Α}^{-1}\text{Π} = \text{ΑΚΔΠ}$ ,  $[\text{Π}, \text{Α}] = \text{ΠΑΚΔ}$ , κ.ο.κ) μας δίνουν και τις οκτώ διαγώνιες περιστροφές του κύβου.

**Πρόβλημα 3.** Βρείτε τις τρεις περιφορές (6 κινήσεων) που περιστρέφουν τον κύβο κατά  $180^\circ$  γύρω από καθέναν από τους εδρικούς του άξονες (αυτούς που βλέπετε στο Σχήμα 4a).

Με παρόμοιες περιφορές μπορούμε να πετύχουμε και τις δώδεκα άρτιες περιστροφές του κύβου και να τον επαναφέρουμε στην αρχική του θέση.

## Πληθώρα κύβων σε στενό χώρο

Και τώρα είμαστε έτοιμοι να μελε-



Σχήμα 5

τήσουμε παιχνίδια με πολλούς κυλιόμενους κύβους και ένα μοναδικό ελεύθερο τετράγωνο. Ένα παιχνίδι αυτής της μορφής έχουμε στο Σχήμα 5. Αποτελείται από οκτώ όμοιους εξάχρωμους κύβους τοποθετημένους σε ένα τετράγωνο κουτί με έναν μόνο κενό χώρο στο κέντρο του. Αρχικά, όλοι οι κύβοι είναι προσανατολισμένοι με τον ίδιο τρόπο έτοις ώστε κάθε έδρα του τετραγωνικού «δισκτυλίου» να έχει το ίδιο χρώμα. Πρέπει να κυλήσετε τους κύβους με τέτοιο τρόπο ώστε να καταλήξουν και πάλι με παρόμοιο προσανατολισμό – όχι όμως ίδιο με τον αρχικό. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι έχουμε να επιλέξουμε την τελική διευθέτηση των χρωμάτων ανάμεσα σε 23 διαφορετικές δυνατότητες – αριθμός που ισούται με το πλήθος των μη ταυτοτικών περιστροφών του κύβου.

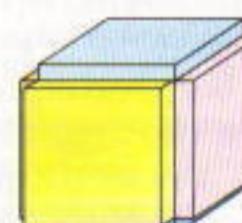
Αυτό το πρόβλημα το έχουν προτείνει οι A. Drayton και G. Shevtsova. Έχει ενδιαφέρον ο τρόπος που ανακάλυψαν για να μη φεύγουν από τις θέσεις τους οι κύβοι: οι κύβοι που χρησιμοποιούν έχουν αυλάκια κατά μήκος των ακμών τους (Σχήμα 6) και ο πάτος του κουτιού είναι ένα τετράγωνο πλέγμα διαστάσεων  $3 \times 3$  που σχηματίζεται από λεπτά ξυλαράκια. Τα αυλάκια των κύβων προσαρμόζονται στα ξυλαράκια και έτσι, όταν κυλάτε έναν κύβο στο γειτονικό του τετράγωνο, «προσγειώνεται» ακριβώς εκεί όπου θέλετε. Φυσικά, υπάρχουν κι άλλες «αντιολισθητικές» κατασκευές, όπως και πολλά ακόμη προβλήματα.

Για παράδειγμα, πριν λίγο καιρό, στην Πολωνία, κατασκευάστηκε ένα παιχνίδι κύβων αποτελούμενο από οκτώ όμοιους κύβους που ο καθένας

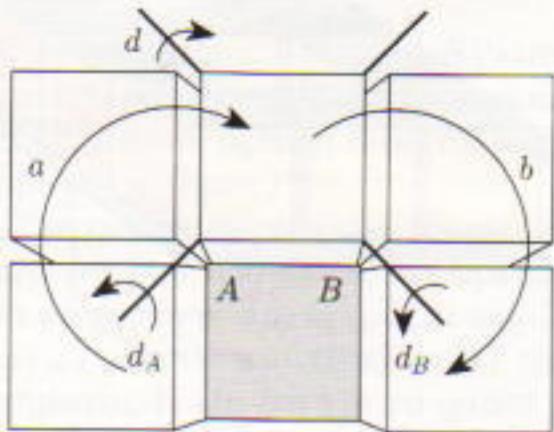
είχε μία μόνο έγχρωμη έδρα. Συνοδεύονταν από οδηγίες που ανέφεραν ότι το παιχνίδι μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να μετρηθεί ο δείκτης νοημοσύνης του παίκτη. Τη μεγαλύτερη βαθμολογία κέρδιζε το λεγόμενο «Βασιλικό πρόβλημα»: τοποθετούνται οι τέσσερις κύβοι στις γωνίες με τις έγχρωμες έδρες τους προς τα πάνω, και οι υπόλοιποι κύβοι τοποθετούνται με τις έγχρωμες έδρες προς τα κάτω (αφήνοντας το κεντρικό τετράγωνο κενό). Πρέπει να μετακινήσετε τους κύβους έτσι ώστε οι έγχρωμες έδρες να βρεθούν από την κάτω μεριά στις γωνίες και από την πάνω μεριά στους υπόλοιπους κύβους. Σύμφωνα με τις οδηγίες, «αν βρείτε μια λύση με όχι περισσότερες από 36 κινήσεις, είσαστε ιδιοφυΐα. Αν όχι, δεν απέχετε και πολύ!»

Ο φυσιολογικός τρόπος να αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα, και άλλα παρόμοια, θα ήταν να προπαδήσουμε να βρούμε μια ακολουθία κυλίσεων που θα έχει αποτέλεσμα την επιτόπιου περιστροφή ενός μόνο κύβου, ενώ δεν θα επηρεάζει όλους τους άλλους. Με αυτόν τον τρόπο, βέβαια, δεν έχουμε οικονομία κινήσεων, αλλά υπάρχει ένα άλλο πλεονέκτημα – η μέθοδος έχει καθολική ισχύ: αν μάθουμε να περιστρέφουμε έναν κύβο με κάθε δυνατό τρόπο, θα μπορούμε να πετύχουμε κάθε επιθυμητή διευθέτηση περιστρέφοντας έναν έναν τους κύβους.

Θα περιγράψω δύο τύπους πράξεων που περιστρέφουν έναν μόνο κύβο. Και οι δύο μπορεί να εκτελέστούν σε ένα «μικρό» κουτί, διαστάσεων  $3 \times 2$ . Για λόγους σαφήνειας, ας υποδέσουμε ότι το κενό τετράγωνο βρίσκεται στο μέσο της μεγαλύτερης πλευράς του κουτιού (Σχήμα 7). Κάθε ακολουθία κυλίσεων των κύβων σε αυτό το κουτί που επαναφέρει τον κενό χώρο στην αρχική του θέση, μπορεί να παρασταθεί ως συνδυασμός των τεσσάρων κυκλικών κι-



Σχήμα 6



Σχήμα 7

νήσεων (που η καθεμία αποτελείται από τέσσερις κυλίσεις) γύρω από τα σημεία  $A$  και  $B$  του Σχήματος 7:  $\Delta K \Delta A$  (ο δεξιόστροφος κύκλος γύρω από το  $A$ , που θα τον συμβολίζουμε με  $a$ ),  $\Delta K \Delta P$  (ο δεξιόστροφος κύκλος  $b$  γύρω από το  $B$ ), και οι αντίστροφές τους  $a^{-1} = \Delta K \Delta P$  και  $b^{-1} = \Delta K \Delta A$ . Αυτό είναι εύκολο να το επιβεβαιώσουμε, και γι' αυτό θα δώσω ένα μόνο παράδειγμα:  $\Delta K \Delta A \Delta K \Delta P = \Delta K \Delta P \Delta K \Delta A = a^{-1}b^{-1}$  – οι διαδοχικές κινήσεις  $P$  και  $K$  στη μεσαία παράσταση αλληλοακυρώνονται. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αυτόν τον ουντομογραφικό συμβολισμό – δηλαδή, τους κύκλους  $a$  και  $b$  – αντί των κυλίσεων  $\Delta$ ,  $A$ ,  $P$ , και  $K$ .

Με τον κυκλικό συμβολισμό, λοιπόν, ο πρώτος τύπος πράξεων θα είναι αντιμεταθέτες (κάπου το ξαναείδαμε αυτό!) των τριπλών κυκλικών κινήσεων  $a^3$ ,  $b^3$ , καθώς και οι αντίστροφοί τους. Συγκεκριμένα, με τον  $[a^3, b^3] = a^3b^3a^{-3}b^{-3}$  οι τέσσερις γωνιακοί κύβοι μένουν στη θέση τους, ενώ ο κεντρικός κύβος εκτελεί μισή στροφή (που τη συμβολίζουμε  $h_t$ ) γύρω από τον άξονα που είναι παράλληλος στις μεγάλες πλευρές τού κουτιού. Στη συνέχεια, με τον  $[a^{-3}, b^{-3}] = a^{-3}b^3a^3b^{-3}$  γίνεται μισή στροφή (τη συμβολίζουμε  $h_s$ ) του κεντρικού κύβου γύρω από τον άξονα τον παράλληλο στις μικρές πλευρές του κουτιού, και κατόπιν ο  $[a^3, b^{-3}]$  περιστρέφει κατά  $180^\circ$  τον κεντρικό κύβο γύρω από τον κατακόρυφο άξονα (τον κάθετο στο κουτί). Παρατηρήστε ότι αυτή η τελευταία μισή στροφή, η συμβολίζόμενη ως  $h_v$ , παράγεται από  $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$  απλές κυλίσεις του κύβου, ενώ ο αριθμός των κυλίσεων στις  $h_t$  και  $h_s$  είναι 46 (έχουμε δει ότι στο συνδυασμό  $a^{-1}b^{-1}$

δύο κυλίσεις –  $P$  και  $K$  – αλληλοακυρώνονται, και το ίδιο συμβαίνει με το συνδυασμό  $b^1a^1$ ).

Είναι ενδιαφέρον να δούμε γιατί λειτουργούν με αυτόν τον τρόπο αυτές οι πράξεις. Η κίνηση  $a$ , που αποτελείται από 4 κυλίσεις, μεταφέρει κυκλικά (δεξιόστροφα) τους τρεις κύβους γύρω από το  $A$  κατά μία θέση. Όταν επαναληφθεί τρεις φορές, μεταφέρει τους κύβους στην αρχική τους θέση, αφού κάνουν έναν πλήρη κύκλο γύρω από το  $A$  – δηλαδή, η  $a^3$  στρέφει αυτούς τους κύβους κατά  $120^\circ$  γύρω από τη διαγώνιο που διέρχεται από τις κορυφές τους στο  $A$  (δείτε το Σχήμα 4). Η πράξη  $b^3$  ενεργεί με παρόμοιο τρόπο γύρω από το σημείο  $B$ . Τι συμβαίνει με την  $a^3b^3a^{-3}b^{-3}$ ? Οι δύο αριστεροί κύβοι στρέφονται από την  $a^3$ , μένουν ανεπιηρέαστοι από την  $b^3$ , στρέφονται αντίθετα από την  $a^{-3}$ , και μένουν ανεπιηρέαστοι από την  $b^{-3}$ . Τελικά, αυτοί οι δύο κύβοι, όπως και οι δύο δεξιοί, μένουν ανεπιηρέαστοι. Ταυτόχρονα, ο κεντρικός κύβος υπόκειται σε διαδοχικές περιστροφές  $120^\circ$  γύρω από τις διαγωνίους του που διέρχονται από το  $A$  και το  $B$  και από τις αντίστροφές τους, και οι οποίες έχουν τελικό αποτέλεσμα τη μισή στροφή που περιγράφαμε προηγουμένως.

Ο δεύτερος τύπος πράξεων παρουσιάστηκε από τον John Harris σε μία από τις πρώτες δημοσιεύσεις σχετικά με τους κυλιόμενους κύβους. Μπορεί να γραφτεί με την εξής γενική μορφή:

$$H(x, y) = xyxxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1},$$

όπου τα  $x$  και  $y$  υποδηλώνουν τα  $a$  και  $b$ , ή τα αντίστροφά τους, τα οποία επιφέρουν επίσης την περιστροφή ενός (του κεντρικού) κύβου. Συγκεκριμένα, θέτοντας  $(x, y) = (a, b)$ , παίρνουμε την πράξη  $H(a, b) = a(ba)^2(b^{-1}a^{-1})^2b^{-1}$  η οποία εκτελεί τη διαγώνιο περιστροφή  $d_B$  που θλέπετε στο Σχήμα 7. Η  $H(b, a)$  μας δίνει την αντίστροφη περιστροφή  $d_B^{-1}$ . Οι  $H(a^{-1}, b^{-1})$  και  $H(b^{-1}, a^{-1})$  παράγουν τις περιστροφές  $d_A$  και  $d_A^{-1}$ , αντίστοιχα. Αν και αυτές οι πράξεις ορίζονται ως ακολουθίες δέκα κυκλικών κινήσεων (όπου η κάθε κίνηση αποτελείται από 4 κυλίσεις), περιέχουν κάποιες διαδοχικές κυλίσεις που αλληλοακυρώνονται (στους

συνδυασμούς  $ba$  και  $a^{-1}b^{-1}$ ) και έτοι είναι δυνατόν να αναχθούν σε 32 (αντί για 40) απλές κυλίσεις. Οι υπόλοιπες τέσσερις πράξεις αυτής της μορφής – οι  $H(a^{-1}, b)$ ,  $H(a, b^{-1})$  και οι αντίστοιχες αντίστροφες  $H(b, a^{-1})$  και  $H(b^{-1}, a)$  – δεν προσδέτουν κάτι ιδιαίτερο σε όσα έχουμε ήδη: επαναλαμβάνουν απλώς μερικές από τις περιστροφές που παράγουν οι προηγούμενοι αντιμεταθέτες – σε λιγότερες, πάντως, κινήσεις.

**Πρόβλημα 4.** Ποιες ακριβώς περιστροφές δημιουργούνται από τις πράξεις  $H(a^{-1}, b)$  και  $H(a, b^{-1})$ , και από πόσες κυλίσεις αποτελούνται μετά τις πιθανές αλληλοακυρώσεις;

Τελικά, έχουμε ανακαλύψει σχετικά σύντομες πράξεις για τις επτά από τις έντεκα μη ταυτοτικές άρτιες περιστροφές του κεντρικού κύβου σε ένα πλέγμα διαστάσεων  $3 \times 2$ . Συγκεκριμένα, για τις τρεις ημιστροφές  $h_t$ ,  $h_s$ ,  $h_v$ , και για τέσσερις περιστροφές  $120^\circ$  ως προς τις δύο από τις διαγωνίους του κύβου. Όσον αφορά τις υπόλοιπες τέσσερις περιστροφές ως προς τις υπόλοιπες διαγωνίους, δεν γνωρίζω κάποιον όμορφο, κομψό τρόπο επίτευξή τους – μπορούμε, πάντως, να τις αναπαραστήσουμε ως συνδυασμούς των  $d_A$  και  $d_B$ . Για παράδειγμα, η περιστροφή  $d$  στο Σχήμα 7 μπορεί να παραχθεί με τη διαδοχική εκτέλεση των  $d_A$  και  $d_B^{-1}$  – δηλαδή,  $d = d_A d_B^{-1}$ . Ένας ουντομότερος τρόπος να εκτελέσουμε την  $d$  είναι (1) να περιστρέψουμε τον κεντρικό κύβο (και ίσως και μερικούς από τους υπόλοιπους) έτσι ώστε ο άξονας  $d$  να συμπέσει με τον άξονα  $t$ , ας πούμε,  $d_B$ , (2) να εκτελέσουμε την  $d_B$ , (3) να «ακυρώσουμε» την πράξη (1) – δηλαδή,  $d = a^3d_B a^{-3}$  ή  $a^{-3}d_A^{-1}a^3$ . Σ' αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι η  $d$  παριστάνεται ως συζυγής της  $d_B$  (ή της  $d_A^{-1}$ ).

Παρόμοιες συζυγείς παραστάσεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να περιστρέψουμε «επιτόπια», και ξεχωριστά, οποιονδήποτε από τους γωνιακούς κύβους. Για παράδειγμα, ο πάνω αριστερά κύβος περιστρέφεται με μία πράξη της μορφής  $ara^{-1}$ , όπου  $r$  είναι οποιαδήποτε από τις περιστροφές του κεντρικού κύβου που εξετάσαμε προηγουμένως: η  $a$  κυλά τον πάνω αριστερό κύβο στην κεντρι-

κή θέση, η τον περιστρέφει, και η  $a^{-1}$  τον κυλά στην αρχική του θέση.

Τώρα μπορούμε να αντιμετωπίσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα κύλισης κύβων στο οποίο η «θέση-στόχος» διαφέρει από την αρχική κατά μία άρτια περιστροφή σε κάθε τετράγωνο, στρέφοντας τους κύβους επιτόπια – έναν κάθε φορά. Σχετικά με τα προβλήματα περιττών περιστροφών μπορούμε να δώσουμε το εξής παράδειγμα: στρέψτε όλους τους κύβους σε ένα κουτί κατά  $90^\circ$  γύρω από τους κατακόρυφους άξονές τους.

Φανταστείτε ότι τα τετράγωνα του κουτιού είναι χρωματισμένα άσπρα και μαύρα, όπως ακριβώς μιας σκακιέρας, και ότι το κενό τετράγωνο είναι άσπρο. Η περιστροφή ενός κύβου είναι «περιττή» όταν το πλήθος των κυλίσεων που εκτελεί ο κύβος είναι περιττό. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, μετακινείται σε τετράγωνο διαφορετικού χρώματος (διότι μία κύλιση αλλάζει το χρώμα του τετραγώνου που βρίσκεται κάτω από τον κύβο). Όμως, οι κύβοι καταλαμβάνουν αρχικά τρία μαύρα και δύο άσπρα τετράγωνα. Το πρόβλημα φαίνεται άλυτο μια και λείπει ένα άσπρο τετράγωνο για τους «μαύρους κύβους»! Ωστόσο, υπάρχει λύση, η εξής:  $a^2b^2a^2b^2a^2K$ . Δεν απαιτήσαμε να μείνει ο ίδιος κενός χώρος, και έτοι, στην τελευταία κίνηση έμεινε κενό ένα μαύρο τετράγωνο, ενώ ένας ακόμη «μαύρος κύβος» άλλαξε το χρώμα που βρίσκεται από κάτω του.

Πέρα από το τέχνασμα της μετακίνησης του κενού τετραγώνου, αυτή η λύση υποδεικνύει έναν γενικό κανόνα επίλυσης προβλημάτων κύλισης κύβων. Καταρχάς, χρησιμοποιώντας το χρωματισμό της σκακιέρας, καθορίζουμε για ποιους κύβους πρέπει να αλλάξουμε το χρώμα του τετραγώνου πάνω στο οποίο βρίσκονται. Στη συνέχεια, κυλάμε τους κύβους έτοι ώστε να βρεθούν στα τετράγωνα του επιδυμητού χρώματος, χωρίς να δίνουμε μεγάλη προσοχή στον προσανατολισμό τους. Έπειτα, μπορούμε να καταλήξουμε στους επιδυμητούς προσανατολισμούς εκτελώντας άρτιες περιστροφές των κύβων στις νέες θέσεις τους, χρησιμοποιώντας τις πράξεις που περιγράφαμε προηγουμένως.

**Πρόβλημα 5.** Σε ένα κουτί διαστάσεων  $3 \times 3$ , με ένα κενό τετράγωνο στο κέντρο του, όλοι οι κύβοι είναι χρωματισμένοι με τον ίδιο τρόπο και έχουν τον ίδιο αρχικό προσανατολισμό. Είναι δυνατόν να επιτύχουμε μια τοποθέτηση όπου (a) ένας κύβος έχει περιστραφεί κατά  $90^\circ$ , (b) δύο γωνιακοί κύβοι έχουν περιστραφεί κατά  $90^\circ$ , ενώ όλοι οι άλλοι κύβοι διατηρούν τον αρχικό τους προσανατολισμό;

## ΞΕΠΕΡΑΣΤΕ ΑΥΤΑ ΤΑ ΡΕΚΟΡΔ

Αν και οι προηγούμενες αναλύσεις μάς επιτρέπουν να λύσουμε οποιοδήποτε (επλύσιμο) πρόβλημα κύλισης κύβων, δεν βοηθούν ιδιαίτερα όταν θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα σε μικρό (ή στον μικρότερο δυνατό) αριθμό κινήσεων. Παρόμοια προβλήματα θεωρώ ότι είναι από τα πιο ενδιαφέροντα και πιο δύσκολα – ακολουθούν, λοιπόν, μερικά από αυτά, μαζί με το πλήθος των κινήσεων των καλύτερων λύσεων που γνωρίζω. Το κενό τετράγωνο πρέπει να παραμείνει στη θέση του σε όλα τα προβλήματα, εκτός από ένα (θρεύτε εσείς σε ποιο).

### Προβλήματα

Τα τρία πρώτα από τα επόμενα προβλήματα προέρχονται από το άρθρο του John Harris στο περιοδικό *Journal of Recreational Mathematics*, τόμ. 7, αρ. 3.

6. Σε ένα κουτί διαστάσεων  $3 \times 3$ , με το κενό τετράγωνο στο κέντρο, υπάρχουν οκτώ κύβοι. Οι κύβοι έχουν χρωματισμένη μόνο τη μία έδρα τους, η οποία βρίσκεται αρχικά στην αριστερή πλευρά τους. Πρέπει να μετακινήσετε στη δεξιά τους πλευρά. (30 κινήσεις)

7. Ξεκινώντας από την αρχική τοποθέτηση του προηγούμενου προβλήματος, φέρτε τις έγχρωμες έδρες στην πρόσθια πλευρά των κύβων. (44 κινήσεις)

(Στο επόμενο πρόβλημα ο χρωματισμός είναι διαφορετικός.)

8. Αρχικά, όλες οι εξωτερικές έδρες των κύβων είναι κόκκινες και όλες οι κρυμένες άσπρες. Πρέπει να κρύψετε όλες τις κόκκινες έδρες. (84 κινήσεις)\*

Τα υπόλοιπα προβλήματα αφορούν εξάχρωμους κύβους. Το ρεκόρ για τα δύο πρώτα το έχει ο A. Panteleyev, μαθηματικός από τη Μόσχα.

9. Περιστρέψτε όλους τους κύβους σε ένα κουτί διαστάσεων  $3 \times 3$  κατά  $90^\circ$  ως προς τον άξονα που είναι παράλληλος με την κάτω πλευρά του κουτιού. (60 κινήσεις)

10. Κάντε ό, τι και στο προηγούμενο πρόβλημα, αλλά σε ένα κουτί διαστάσεων  $3 \times 2$ . (45 κινήσεις)

11. Έχετε πέντε κύβους, με τον ίδιο προσανατολισμό, τοποθετημένους σε ένα κουτί διαστάσεων  $3 \times 2$ . Κυλήστε τους έτοι ώστε να έχετε πέντε ανόμοια χρώματα – διαφορετικά από τα αρχικά – στις πάνω έδρες των κύβων. (Ο δημιουργός του προβλήματος, ο V. Rybinsky, μπορεί να το λύσει σε 14 κινήσεις.)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 61

# QUANTUM

τη Βαθύτερη Έρευνα

Ποινιά φτάσει σε αυτό το  
ολικό αποτύπωμα των κύβων  
της οποίας θέλετε  
προσαρτητές από την Ελληνική  
Συζητητική και διεθνή Εθνική  
Άνθρωπινης Καθηγητικής Έταιρης  
της Ακαδημίας Επιστημών  
της Ρωσίας, από ένα  
γερμανοαμερικανικό και  
έναν ελληνικό εκδοτικό οίκο.  
Εσείς καλείστε να κρίνετε  
το αποτέλεσμα.

Γράψτε μας τις απόψεις  
σας, υποδειξής μας τις  
ελλείψεις μας, κάντε μας τις  
προτάσεις σας.

Γίνετε και σας συνταλαστής  
στην QUANT-ΙΚΗ εξίσωση.

\*Κατά τον Martin Gardner, ο Harris δρόκε αργότερα μια λύση 74 κινήσεων.