

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1994
ΤΟΜΟΣ 1 / ΤΕΥΧΟΣ 1
1.200 ΔΡΧ.

Έκδοση
της Εθνικής Ένωσης
Καθηγητών Θετικών
Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ,
του Γραφείου *Kvant*
της Ρωσικής Ακαδημίας
Επιστημών,
της Αμερικανικής Ένωσης
Καθηγητών Φυσικής (AAPT),
του Εθνικού Συμβουλίου
Καθηγητών Μαθηματικών
(NCTM) των ΗΠΑ,
του Εκδοτικού οίκου
Springer και των
Εκδόσεων Κάτοπτρο



- Υπεραγωγιμότητα
υψηλής θερμοκρασίας
- Το θεώρημα
της πίτσας
- Δυναμικός
προγραμματισμός
- Γιατί τρεμοπαίζουν
τ' άστρα;

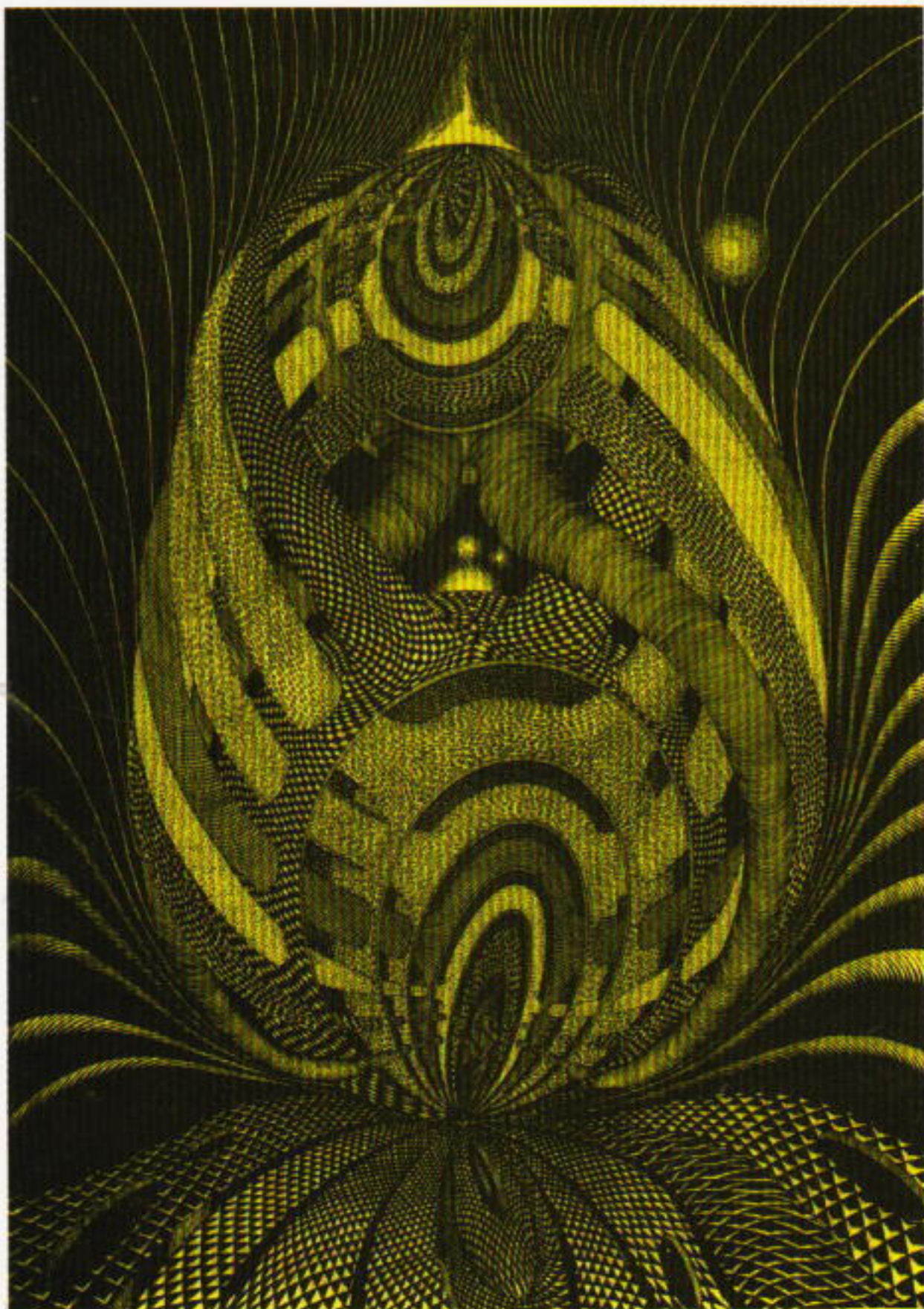
ΠΙΝΑΚΟΘΗΚΗ



Ο ΑΝΑΤΟΛΥ ΤΙΜΟΦΕΥΕΒΙΧ FOMENKO (γεννημένος το 1945) είναι μαθηματικός στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας. Αν και δημιουργεί έργα μεγάλης συναισθηματικής δύναμης και τεχνικής δεξιοτήτων, δεν θεωρεί τον εαυτό του ζωγράφο. «Αυτές οι εικόνες, όπως τις αντιλαμβάνομαι εγώ, δεν είναι απλώς έργα ενός ζωγράφου... Είμαι μαθηματικός. Για μένα, τα έργα μου είναι φωτογραφίες ενός παράξενου κόσμου. Αυτό που θεωρώ εγώ σημαντικό δεν είναι το να είμαι ζωγράφος, αλλά το να παρουσιάζω εικόνες αυτού του κόσμου, έτσι ώστε να τον εκτιμήσουν και οι άλλοι. Για να εισχωρήσει κανείς σε τούτο τον κόσμο, πρέπει να μελετήσει μαθηματικά σε σχετικά υψηλό επίπεδο, και ίσως να είναι επαγγελματίας μαθηματικός. Αν μελετήσετε μαθηματικά μόνο για τεχνικούς λόγους και δεν αναλογιστείτε σοβαρά τις ιδέες που τα διέπουν, δεν θα καταρθώσετε να κατανοήσετε αυτό τον κόσμο. Με αυτή την έννοια, διαφέρω από άλλους ζωγράφους.»

Ο Πίνακας 229 του Fomenko, η «Παραμόρφωση της επιφάνειας Riemann μιας αλγεβρικής συνάρτησης», είναι μια από τις πολλές γοητευτικές και πολύπλοκες εικόνες που βρίσκονται στο βιβλίο του *Mathematical Impressions* (Μαθηματικές εντυπώσεις, Πρόβιντενς: Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία, 1990). Νά πώς περιγράφει ο ίδιος το συγκεκριμένο έργο του:

Κάτω από αυτή τη συνεστραμμένη παραμόρφωση του χώρου, όπου μακριοί σωλήνες συνυφαίνονται για να σχηματίσουν ένα στρεβλωμένο ωσειδές σχήμα, υπάρχει ένα συγκεκριμένο τρισδιάστατο πρότυπο. Αυτό το πρότυπο δείχνει την παραμόρφωση μιας επιφάνειας Riemann μιας ειδικής αλγεβρικής συνάρτησης, στον ευκλείδειο χώρο τεσσάρων διαστάσεων. Θεωρείται ότι είναι ομοιομορφική με μια δισδιάστατη σφαίρα που έχει μια χειρολαβή, καθώς και με μια δισδιάστατη σπείρα. Με τους όρους της θεωρίας των αλγεβρικών συναρτήσεων, μπορούμε να κατασκευάσουμε αυτό το είδος επιφάνειας Riemann παίρνοντας δύο αντίγραφα μιας δισδιάστατης σφαίρας, χαράσσοντας δύο τομές σε καθεμιά και κολλώντας κάθε τομή με την αντίστοιχή της. Έτσι θα φτιάξουμε μια σπείρα, ένα αντικείμενο που θα



Πίνακας 229 (1983) του Α. Fomenko

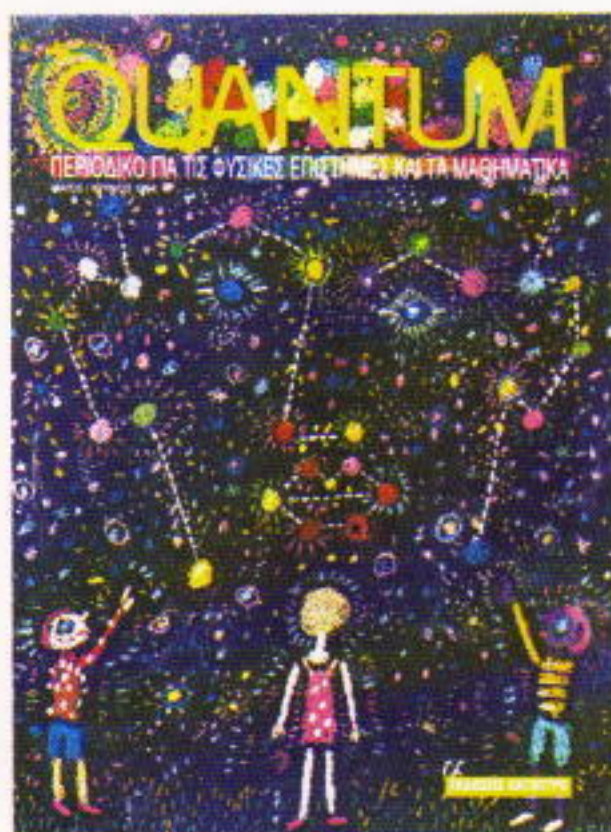
μοιάζει με κουλούρι και θα αναπαρίσταται ως δύο σφαίρες ενωμένες από σωληνόμορφους κυλίνδρους (όπως φαίνονται σε τούτη την εικόνα). Ένα παράξενο χαρακτηριστικό αυτού του σχήματος είναι ότι αν παραμορφώσουμε τη συνάρτηση που βρίσκεται από κάτω (ένα πολυώνυμο, τέτοιο που οι ρίζες του να ταυτίζονται), τότε παραμορφώνεται και η αντίστοιχη επιφάνεια Riemann. Εξαφανιζόμενοι κύκλοι εμφανίζονται, ιδιάζοντα σημεία αναφαίνονται, και η επιφάνεια παύει να είναι λεία. Σ' αυτή την εικόνα δύο ρίζες τείνουν να ταυτιστούν, και, ως αποτέλεσμα, η πάνω σφαίρα μικραίνει, ενώ η κάτω σφαίρα μεγαλώνει. Αυτή τη διαδικασία τη βλέπουμε, κατά κάποιον τρόπο, μέσα από τις τομές του αντικειμένου.

Αν σας άφησε άναυδους η επίσκεψή σας στον «παράλληλο κόσμο» του Fomenko, επισκεφθείτε το Καλειδοσκόπιο και τον Παιχνιδότοπο αυτού του τεύχους. Ο Riemann δεν θα είναι εκεί, αλλά οι σπείρες θα είναι.

QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1994

ΤΟΜΟΣ 1, ΑΡΙΘΜΟΣ 1



Εικόνα εξωφύλλου: Sergey Barkhin

«Τα αστέρια κρατούν έναν κόσμο δικό τους» λέει ένας στίχος του μεγάλου μας ποιητή Γιώργου Σεφέρη. Είναι αλήθεια ότι κανείς δεν μπορεί να μείνει ασυγκίνητος όταν βλέπει τα άστρα να τρεμοπαίζουν, σαν να μας προσκαλούν σε μια γοητευτική περιπλάνηση στον κόσμο τους. Όλοι έχουμε μείνει κάποτε εκστατικοί κάτω από τη μαγεία του έναστρου ουρανού, βυθισμένοι σε ρεμβασμούς, μαγνητισμένοι από το μυστήριο της νύχτας, απορημένοι σαν παιδιά μπροστά στο αίνιγμα του σύμπαντος και της ύπαρξής μας. Ας επιτρέψουμε σ' αυτή την αφοπλιστική παιδική λέξη — το «γιατί» — να ζωογονήσει τη σκέψη και τον προβληματισμό μας. Ας θυμηθούμε την παιδική απορία και ας αφήσουμε την ξεχασμένη παιδική δίψα για μάθηση να μας οδηγήσει στη διάνοιξη νέων κόσμων προς εξερεύνηση.

Μια καλή αρχή θα ήταν να διαβάσουμε το άρθρο «Τι κάνουν τα μικρά αστέρια», στη σ. 24, όπου ο Pavel Bliokh θέτει μια απλή ερώτηση (και απαντά σ' αυτή): Γιατί τρεμοπαίζουν τα άστρα;

ΑΡΘΡΑ

- 6 Ο τύπος του Bellman
Η χρυσή σκάλα του Φαραώ
M. Reytmann
- 12 Φυσική και τεχνητή βροχή
Σταγόνες και υιχάλες
Yuly Bruk και Albert Stasenko
- 18 Μονομεταβλητές
Φως στην άκρη του τούνελ
Dmitry Fomin και Lev Kurlyandchik
- 24 Ουράνια φυσική
Τι κάνουν τα μικρά αστέρια
Pavel Bliokh
- 48 Υπεραγωγιμότητα υψηλής θερμοκρασίας
Νικώντας τις αντιστάσεις
Alexander Buzdin και Andrey Varlamov

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- | | |
|--|---|
| 2 Ο κόσμος των κβάντων | 40 Στα πεδία της φυσικής
Σήματα διαβάσεων |
| 5 Κβαντικά χαμόγελα
<i>Τρεις μεταφυσικές ιστορίες</i> | 44 Στο μαυροπίνακα
Το σκαθάρι και το λάστιχο |
| 17 Σπαζοκεφαλιές | 55 Το Quantum διαβάσει |
| 31 Αναδρομές
<i>Το φλογιστό και το μαγνητικό πεδίο</i> | 58 Γεγονότα
<i>Η Πέμπτη Διεθνής Ολυμπιάδα Πληροφορικής</i> |
| 34 Μαθηματικές αναζητήσεις
<i>Το θεώρημα της πίτσας</i> | 64 Απαντήσεις, Υποδείξεις
και Λύσεις |
| 36 Καλειδοσκόπιο
<i>Τόροι, τόροι, τόροι!</i> | 70 Παιχνιδότοπος
<i>Μάχες πάνω στη σπείρα</i> |
| 39 Πώς λύνεται; | |

Καλώς ήρθατε στο Quantum

Για μια μέλλουσα σύσκεψη των πολιτικών αρχηγών

Θα ηχούσε τουλάχιστον περίεργη, για να μην πούμε αστεία, μια είδηση στην ελληνική τηλεόραση που θα μας πληροφορούσε ότι στη σύσκεψη των πολιτικών αρχηγών των κομμάτων συζητήθηκε, ανάμεσα σε άλλα θέματα, και η επίδραση που έχει ή μπορεί να έχει η έκδοση ενός σημαντικού περιοδικού ή βιβλίου κύρους στην εκπαίδευση και στα πολιτιστικά πράγματα της χώρας μας.

Ό,τι χαρακτηρίζει όμως το μικρόκοσμό μας δεν αποτελεί κατ' ανάγκη είδωλο τάσεων, ιδεών και ηθών που κυριαρχούν και έξω από αυτόν. Πράγματι, όπως ανέφερε το περιοδικό *The College Mathematics Journal* της Αμερικανικής Μαθηματικής Ένωσης (MAA) τον Μάιο του 1990, στη συνάντηση Γκορμπατσόφ-Μπους που έγινε τον Δεκέμβριο του 1989 στη Μάλτα, ο τότε σοβιετικός πρόεδρος πληροφορήθηκε την έκδοση του *Quantum*, ενός περιοδικού που αποτελεί το προϊόν της συνεργασίας επιστημόνων και εκπαιδευτικών της πρώην ΕΣΣΔ και των ΗΠΑ.

Η αναπόφευκτη σύγκριση δημιουργεί το ερώτημα σχετικά με το τι είναι σημαντικό και τι όχι για μια κοινωνία και τον πολιτισμό της. Πέραν του σημείου τούτου, ένα είναι βέβαιο. Ότι η απάντηση επιβεβαιώνει ή όχι την ύπαρξη κρίσης. Γιατί, όπως λέει και ο Γιώργος Γραμματικάκης, κρίση δεν είναι παρά «η περιδίνηση περί τα ασημένια και η ακροβασία περί τα σημαντικά». Επομένως, εάν τα αποτελέσματα της παρατήρησης της ελληνικής πραγματικότητας ανταποκρίνονται στα στοιχεία του παραπάνω ορισμού, η κρίση είναι παρούσα, και κάτι πρέπει να κάνουμε για να βγούμε από αυτή. Αν όχι, τόσο το καλύτερο για όλους μας! Σε τούτο το ζήτημα όμως θα επανέλθουμε στο τέλος αυτού του σημειώματος, οπότε θα καταστεί σαφέστερος ο στόχος της μικρής, και πάντως όχι φιλόδοξης, «κοινωνιολογικής» μας ανάλυσης.

Τι είναι το *Quantum*; Είναι το «αδελφό περιοδικό» του φημισμένου *Kvant*, που άρχισε να εκδίδεται πριν από 24 χρόνια στην πρώην Σοβιετική Ένωση από επιτελείο εκλεκτών επιστημόνων και ακαδημαϊκών με επικεφαλής τον μαθηματικό Α. Κολμογορον και τον φυσικό Ι. Κίκοιν. Η προσφορά του *Kvant* στο εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας του υπήρξε εξαιρετικά σημαντική. (Θα μπορούσε, ενδεχομένως, να θεωρηθεί μικρότερη μόνο από την αντίστοιχη συμβολή του ουγγρικού μαθηματικού περιοδικού *Kozepiskolai Matematikai Lapok*, που πρωτοεκδόθηκε το 1894, στην αναμόρφωση των λυκειακών μαθηματικών και στην ανάδειξη λαμπρών ούγγρων μαθηματικών και φυσικών κατά τον 20ό αιώνα.)

Το 1990 οι Αμερικανοί επιχείρησαν κάτι που επιθυμούσαν από καιρό, δηλαδή την έκδοση ενός ομότιτλου περιοδικού, που περιέχει τα κυριότερα από τα άρθρα που δημοσιεύονται στο *Kvant* καθώς και κάποιες «αμερικανικές» σελίδες. Έπειτα από δύο δοκιμαστικά τεύχη, το *Quantum* κυκλοφόρησε ως τριμηνιαίο περιοδικό κατά το πρώτο έτος (Σεπτέμβριος 1990 – Απρίλιος 1991), και κατόπιν εκδίδεται σε διμηνιαία βάση.

Με το ανά χείρας τεύχος η Ελλάδα αποκτά το δικό της *Quantum*. Αυτό θα είναι η μετάφραση του αμερικανικού μαζί με κάποιες «ελληνικές» σελίδες –στο πρώτο τεύχος θα βρείτε μόνο τη σελίδα της Σύνταξης (Ο κόσμος των κβάντων) και τις σελίδες της βιβλιοκριτικής (Το *Quantum* διαβάσει).

Ποιοι λόγοι, όμως, δικαιολογούν την έκδοσή του; Ποια είναι η ταυτότητά του;

Το *Quantum* είναι ένα «ιδιαίτερο» περιοδικό, διότι:

α– Συντάσσεται από διαπρεπείς επιστήμονες, ακαδημαϊκούς και εκπαιδευτικούς, και μολονότι απευθύνεται σε μαθητές λυκείου και προπτυχιακούς φοιτητές, τελικά διαβάζεται από ευρύτερο κοινό, στο οποίο περιλαμβάνονται και ώριμοι επιστήμονες. (Με τον τρόπο αυτό το *Kvant* είχε εξασφαλίσει στις χώρες της πρώην ΕΣΣΔ σταθερή κυκλοφορία που υπερέβαινε τα 200.000 αντίτυπα ανά τεύχος.)

β– Στα άρθρα του, που αποτελούν το κύριο βάρος της ύλης του, τον πυρήνα του, και τα οποία γράφονται με δεξιοτεχνία και αυστηρή επιστημονική ακρίβεια από κορυφαίους ειδικούς, κατά τέτοιο τρόπο όμως ώστε να είναι προσαρμοσμένα στις γνώσεις ενός μαθητή λυκείου, αναπτύσσονται ποικίλα θέματα που συχνά αποτελούν αντικείμενο πανεπιστημιακής διδασκαλίας, ή ακόμη και έρευνας! Τα κείμενα δεν είναι εύκολα, δεν ευνοούν την πνευματική ραθυμία. Η μελέτη τους απαιτεί σκέψη. Αυτή είναι η ομορφιά του *Quantum*, δηλαδή το γεγονός ότι καθιστά τον πνευματικά ανήσυχο, τον ενδιαφερόμενο για τις θετικές επιστήμες μαθητή του λυκείου από πολύ νωρίς κοινωνό γνώσεων τις οποίες αργότερα θα συστηματοποιήσει και θα διευρύνει. Επιπλέον, χάρη στα άρθρα του, το περιοδικό απέκτησε και ένα ευρύτερο κοινό, που κατά κανόνα δεν διαθέτει προχωρημένες «τεχνικές» γνώσεις, πλην όμως παρακολουθεί με ζωηρό ενδιαφέρον την εξέλιξη της επιστήμης και γοητεύεται από τα επιτεύγματά της.

γ– Δεν περιορίζεται απλώς στην ύλη που διδάσκεται συνήθως στα σχολεία, αλλά πραγματεύεται και ειδικά θέματα τα οποία απασχολούν μαθητές και φοιτητές που ανήκουν σε Λέ-

σχές Μαθηματικών ή Φυσικής και προετοιμάζονται για τις αντίστοιχες Ολυμπιάδες, εθνικές και διεθνείς. Ο τρόπος με τον οποίο επιχειρεί να βοηθήσει αυτούς τους ταλαντούχους μαθητές να αναπτύξουν περαιτέρω τις δεξιότητές τους είναι μοναδικός. Τα προβλήματα που προτείνει έχουν το χαρακτηριστικό να μην είναι ιδιαίτερος «τεχνικά», δηλαδή η επίλυσή τους προϋποθέτει περισσότερο την επινοητικότητα, τη φαντασία και την ευφυΐα του λύτη και λιγότερο τις προχωρημένες γνώσεις του σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής· αυτό ακριβώς τα διακρίνει από προβλήματα ανάλογων στηλών άλλων περιοδικών (π.χ. του *Cruix Mathematicorum*).

Κλείνοντας θα ήθελα να προσθέσω έναν ακόμη λόγο για τον οποίο προχωρήσαμε στην ελληνική έκδοση του *Quantum*. Ο λόγος αυτός μας παραπέμπει στα αρχικά ερωτήματα του εισαγωγικού σημειώματος, έναντι των οποίων παίρνου-

με πλέον θέση. Χρόνια τώρα διατυπώνεται από τα πλέον επίσημα χείλη και σε απολύτως δραματικούς τόνους η άποψη ότι η χώρα μας διέρχεται κρίση σε όλους τους τομείς της κοινωνικοπολιτικής, οικονομικής και πνευματικής της ζωής. Ελάχιστα γίνονται για να βγούμε από την κρίση. Και αυτά γίνονται από κάποιους αδόρυβους «εργάτες» που οικοδομούν την αθέατη και «κυνηγημένη» Ελλάδα, την Ελλάδα του μόχθου, των αξιών και της ευθύνης, αυτή δηλαδή που σε τελευταία ανάλυση «αποτελεί και τη μόνη Ελλάδα».

Είναι χρέος μας να συμπαρασταθούμε σ' αυτή την προσπάθεια. Να βαδίσουμε αντίθετα προς το ρεύμα που ευνοεί το πρόχειρο, το εύκολο, το εφήμερο. Κι αυτό νομίζουμε ότι επιχειρούμε με την έκδοση του *Quantum*.

Γιώργος Α. Ευαγγελόπουλος

Σημειώματα από τους ιδρυτικούς διευθυντές σύνταξης του *Quantum*



Yuri Ossipyan, φυσικός, Αντιπρόεδρος του Γραφείου Κvant της Ακαδημίας Επιστημών της ΕΣΣΔ

«Η ανάγνωση του *Quantum* δεν είναι πάντοτε εύκολη· αν όμως σας αρέσει πραγματικά η επιστήμη, είμαι βέβαιος ότι θα το βρείτε συναρπαστικό. Οποσδήποτε, το περιοδικό περιέχει ψυχαγωγικό υλικό, εύθυμη εικονογράφηση, χιούμορ και διασκεδαστικά ανέκδοτα από την ιστορία της επιστήμης. Στην ουσία όμως, το ενδιαφέρον που προκαλεί πηγάζει από τα άρθρα του, που αναφέρονται κυρίως στη φυσική και τα μαθηματικά, και τα οποία απαιτούν σκέψη, και κάποτε πολύ έντονο συλλογισμό, για να γίνουν κατανοητά. Οι έμπειροι αναγνώστες του *Kvant* καταφεύγουν συχνά στο μολύβι και το χαρτί, καθώς διαβάζουν τα άρθρα, για να λύσουν εξισώσεις ή για να φτιάξουν τα δικά τους σχήματα. Βέβαια, απαιτείται πολλή πνευματική και αρκετή γραφική δουλειά για να επιλύσει κανείς τα προβλήματα, τα οποία δεν είναι πάντοτε και τόσο εύκολα. Ωστόσο, όλη αυτή η εργασία δεν παραμένει χωρίς επιβράβευση· λίγες εμπειρίες προσφέρουν τόσο έντονη χαρά όσο η διαπίστωση “το βρήκα”, που έρχεται σαν λάμψη μόλις λύσετε κάποιο περίπλοκο πρόβλημα ή μόλις κατανοήσετε μια δυσνόητη ιδέα.

Οι αμερικανοί συνάδελφοί μου και εγώ ελπίζουμε ότι στο μέλλον η συνεργασία ανάμεσα στο *Quantum* και στο *Kvant* θα έχει ως αποτέλεσμα την ταυτόχρονη έκδοση των τευχών στην αγγλική και τη ρωσική, με το ίδιο σχεδόν περιεχόμενο, έτσι ώστε οι σοβιετικοί και οι αμερικανοί σπουδαστές να εργάζονται με αντικείμενο την ίδια ύλη στον ίδιο χρόνο, αμιλλώμενοι ειρηνικά. Αν έχετε ήδη ενδιαφερθεί για τα μαθηματικά και την επιστήμη, ή αν έχετε συμπεράνει από τα σχολικά μαθήματα ότι αυτά τα θέματα είναι βαρετά (όπως έκανα και εγώ στην αρχή της εφηβείας μου), ελπίζω ότι το *Quantum* θα σας βοηθήσει να ανακαλύψετε τις συγκινήσεις που προσφέρουν τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες.»



Sheldon Lee Glashow, Νόμπελ φυσικής, Καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

«Τα μαθηματικά και η φυσική μπορούν πραγματικά να είναι διασκεδαστική. Μου αρέσει να σκέφτομαι τα μαθηματικά αινίγματα, τα μυστήρια του μικρόκοσμου και των στοιχειωδών σωματιδίων. Και μάλιστα πληρώνομαι για να το κάνω αυτό! Αν κάποτε γίνετε επαγγελματίας επιστήμονας ή καθηγητής, ίσως ανακαλύψετε ότι είναι πολύ δύσκολο να διακρίνετε το χόμπι από τη δουλειά σας – μια κατάσταση πραγματικά αξιοζήλευτη.

Θα ευχόμουν να κυκλοφορούσε το *Quantum* όταν ήμουν φοιτητής. Θα ήταν έτσι πολύ ευκολότερο για μένα να νιώσω την αίσθηση της πληρότητας ως φυσικός. Παρόλο που υπάρχει εδώ και είκοσι χρόνια περίπου στη ρωσική του μορφή, δεν ήταν ως τώρα διαθέσιμο στους αμερικανούς φοιτητές.

Σχεδόν κάθε σοβιετικός φυσικός που γνωρίζω, είτε γράφει για το *Quantum*, είτε καταπνέεται με τη φυσική λύοντας τις ασκήσεις του. Εκατοντάδες χιλιάδες σοβιετικοί φοιτητές είναι ένθερμοι συνδρομητές της ρωσικής του έκδοσης. Τώρα, ευτυχώς, έχουμε στη διάθεσή μας και μια έκδοσή του στην αγγλική γλώσσα.»



William Thurston, Μετάλλιο Φιλντς, Καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Πρίνστον

«Όταν ήμουν παιδί, συχνά μισούσα την αριθμητική και τα μαθηματικά στο σχολείο. Σελίδες ασκήσεων, ανιαρές και πληκτικές. Δεν ήταν διασκεδαστικές ή

προκλητικές ήταν απλώς μια αγγαρεία. Όποτε μπορούσα, έβρισκα κάτι άλλο για να ψυχαγωγηθώ. Μουντζούρωνα, διάβαζα βιβλία κάτω από το θρανίο, ατένιζα έξω από το παράθυρο της τάξης. Καμιά φορά προσπαθούσα να βρω απάντηση σε κάποια σπαζοκεφαλιά.

Όταν έγινα μαθηματικός, ένιωσα εκπληξη και ταυτόχρονα ενθαρρύνθηκα διαπιστώνοντας ότι υπάρχει μια κοινότητα ανθρώπων που χαίρονται με πράγματα που κι εγώ απολαμβάνω, ανθρώπων που μελετούν εντατικά και προσπαθούν να κατανοήσουν.

Δεδομένου ότι σήμερα οι μαθητές είναι προσκολλημένοι στη βαθμοθηρία και τον ανταγωνισμό των εξετάσεων, φαίνεται συχνά πως η ποικιλία, ο πλούτος, η ζωηρότητα και το βάθος των μαθηματικών έχουν αποκοπεί από τη σχολική εμπειρία. Τα μαθηματικά δεν είναι μια φοινικιά, με έναν μακρύ ευθύ κορμό σκεπασμένο από τύπους που γρατζουνάνε. Είναι μια ινδική συκιά, με πολλούς αλληλοσυνδεόμενους κορμούς και κλάδους, που έχει αναπτυχθεί σε μέγεθος ολόκληρου δάσους, και μας προσκαλεί να σκαρφαλώσουμε και να την εξερευνήσουμε. (Αν δεν έχετε δει ποτέ ινδική συκιά, αξίζει τον κόπο να την αναζητήσετε παρεκκλίνοντας από το δρόμο σας.)

Τρέφω μεγάλες ελπίδες ότι το *Quantum* θα ανοίξει δρόμους, αποκαλύπτοντας την ευρύτητα, το δέος και τις συγκινήσεις των μαθηματικών και της φυσικής. Ωστόσο, θα ήθελα να τοποθετήσω ένα προειδοποιητικό σήμα στην αρχή του δρόμου. Όταν ήμουν μικρός, κόμπαζα για το πόσο πολλές σελίδες διάβαζα σε μία ώρα. Στο κολέγιο έμαθα πόσο βλακώδες ήταν αυτό. Το να διαβάσεις δέκα σελίδες μαθηματικά την ημέρα μπορεί να είναι ένας εξαιρετικά γοργός ρυθμός. Ακόμη και μία σελίδα, όμως, μπορεί να είναι αρκετή.

Τα άρθρα του *Quantum* δεν είναι γραμμένα όπως τα άρθρα των άλλων επιστημονικών περιοδικών: μη διστάζετε να σταματήσετε στη μέση μιας παραγράφου ή μιας πρότασης όταν κάτι σας εκπλήσσει ή σας γεννά απορίες. Το ζήτημα δεν είναι η ταχύτητα. Μην υποθέτετε ότι κάτι είναι προφανές απλώς και μόνο επειδή κάποιος συγγραφέας το χειρίζεται έτσι. Οι λύσεις που εσείς δίνετε στο περιθώριο, αν και απαιτούν πολύ περισσότερο χρόνο, έχουν εξαιρετικά μεγαλύτερη αξία απ' όσα διαβάσετε.»

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Bill G. Aldridge, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντιπρόεδρος Εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές Σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant,

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντε (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντές Σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μοντάνα,

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές Σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Vladimir Dubrovsky, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης

Timothy Weber

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Sergey Ivanov

Σύμβουλος επί διεθνών θεμάτων

Edward Lozansky

Σύμβουλοι Σύνταξης

Alexander Buzdin, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Yuly Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Larissa Panyushkina, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική Επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος Εκτελεστικός Υπάλληλος, AAPT

James D. Gates, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνο

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Jonston, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτιστικό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kerney, Καθηγητής Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη

Thomas D. Rossing, Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Βορείου Ιλλινόις

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stoff, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα

Carol-Ann Tripp, Καθηγήτρια Φυσικής, Ημερήσια Σχολή της Περιφέρειας Πράντιντεν, Ρόουντ Άιλαντ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Αλέκος Μάμαλης

Διευθυντής

Γιώργος Ευαγγελόπουλος

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν

οι κ. Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός, Φάνης Γραμμένος-φυσικός,

Τάσος Κυπριανίδης-φυσικός, Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός,

Κώστας Σκανδάλης-μαθηματικός, Θεοδόσης Χριστοδουλάκης-φυσικός

και Αλέκος Μάμαλης-φυσικός.

Επιμέλεια ελληνικής ύλης

Γιώργος Κυριακόπουλος

Γλωσσική επιμέλεια

Παντελής Μπουκάλας

Καλλιτεχνική επιμέλεια

Γιώργος Καραμέτος

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Εθνικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ιδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπεύθυνη διαφήμισης

Μαρία Νικοπούλου-Μάμαλη

Διακίνηση και συνδρομές

Γιώργος Βιτσιάκης και Σπύρος Αντόνας

Φωτοστοιχειοθεσία

Άνυσμα

Εκτύπωση

Όλθος

Βιβλιοδεσία

Σ. Σγαρδέλης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάμαλης. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Ασφονόμηλη, 11471-Αθήνα.

Τηλ.: (01)3643272, 3645098, Fax: (01)3641864.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.200 δρχ.

Συνδρομές: Ατομική ετήσια: 7.000 δρχ. για ιδιώτες,

6.000 δρχ. για μαθητές και φοιτητές, 10.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα, οργανισμούς. Ατομική διετής:

12.000 δρχ. για ιδιώτες, 10.800 δρχ. για μαθητές και φοιτητές, 18.000 για βιβλιοθήκες, ιδρύματα, οργανισμούς. Για ομαδικές συνδρομές, με χαμηλότερο κόστος, απευθυνθείτε στις Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Τρεις μεταφυσικές ιστορίες

Το νόημα της ζωής για τις γραμμές, το φως και τα κοσμικά σώματα

A. Filonov

Κουβέντες στο επίπεδο

Πολλές γραμμές διέρχονται από ένα επίπεδο: ευθείες, καμπύλες, τεθλασμένες. Και καθεμιά από αυτές έχει τον δικό της τρόπο να βλέπει τον κόσμο.

«Τα πάντα στον κόσμο είτε ανεβαίνουν είτε χαμηλώνουν» – αυτό ήταν η Αλήθεια για μια ευθεία γραμμή.

«Όχι», τη διέκοψε μια άλλη, «οτιδήποτε στον κόσμο είναι δεξιά ή δεν είναι δεξιά».

«Σταματήστε τον καβγά, καλές μου», παρενέβη μια λυγρόκορμη καμπύλη. «Όλα στον κόσμο είναι διαλεκτικά: εδώ βρίσκεσαι στα δεξιά, εκεί χαμηλώνεις.»

Οι τεθλασμένες ντρέπονταν να εκφράσουν την άποψή τους, ο κύκλος όμως τη διατύπωσε ως εξής: «Ολόκληρος ο κόσμος είναι είτε το εσωτερικό είτε οτιδήποτε άλλο. Εγώ δεν θα μπορούσα να πω και πολλά για όλα τα άλλα, αλλά ο εσωτερικός μου κόσμος είναι πραγματικά πολύ πλούσιος. Μόνο χαρακτήρες όπως εγώ...»

«Οι δισδιάστατες προσωπικότητες μιλούν πάντοτε πάρα πολύ», τον διέκοψε μια έλικα. «Ο κόσμος δεν είναι παρά το στρώμα ανάμεσα στις σπείρες που δεν τις αφήνει να ενωθούν μεταξύ τους...»

Και κανείς δεν ζήτησε τη γνώμη του μικρού σημείου – του μοναδικού κοινού σημείου του επιπέδου και της ευθείας που το τέμνει.

Παγκόσμια βαρύτητα

Κάποτε η Γη δεν είχε κανέναν δορυφόρο. Όταν

μία μέρα εμφανίστηκε ένας, αποδείχτηκε ότι ήταν το μικρό, απροστάτευτο Φεγγάρι.

Και κάθε μετεωρίτης, κάθε κοσμικό μόριο σκόνης το πλήγωνε – βλέπετε, το Φεγγάρι δεν έχει ατμόσφαιρα που να το προστατεύει. Η Γη, γέρνοντας τον άξονά της, έπεσε σε βαθιά περισυλλογή. Αλλά γιατί να προβληματίζεται; Στο κάτω κάτω αυτή είχε ατμόσφαιρα, ακόμη και νερό – γιατί να ανησυχεί; Η Γη, όμως, ανησυχούσε: υπήρχε κοντά της ένας πλανήτης που χρειαζόταν προστασία.



Η πονόψυχη Γη πρόσφερε στο Φεγγάρι τον αέρα της, το νερό της: «Πάρε όσο θέλεις, Φεγγάρι, έχω αρκετά από αυτά». Και η Γη ήρθε πιο κοντά στο Φεγγάρι. Το Φεγγάρι μετακινήθηκε κοντύτερα στη Γη.

Έτσι γεννήθηκαν οι παλίρροιας. Έτσι γεννήθηκε και αυτό που αργότερα οι άνθρωποι το ονόμασαν «άδολη αγάπη».

Έλξη από πανίσχυρες αισθήσεις

Το φως ταξιδεύει ακολουθώντας ευθεία πορεία – αν είναι στο κενό. Τι συμβαίνει, όμως, όταν περνάει κοντά από ένα μεγάλο, λαμπρό άστρο; Καμπυλώνει ελαφρά την πορεία του για να μπορέσει να πλησιάσει πιο κοντά.

«Ε, καλά! Πολύ λίγο, σχεδόν καθόλου!» λέει το φως απολογητικά. «Παρασύρθηκα να ρίξω μια ματιά!»

Έπειτα όμως συναντάει μια μαύρη τρύπα, που δεν αφήνει το ελάχιστο ίχνος φωτός να ξεφύγει από το σφιχταγκάλισμά της. Σαν το φιλάργυρο, κρύβει το δικό της φως απ' όλους τους άλλους, και προσπαθεί ν' αρπάξει όποιο φως περάσει από κοντά της. Και πάλι το φως προσπαθεί να πλησιάσει από περιέργεια.

«Μόνο για μία φορά ακόμη!» λέει το φως.

Και πράγματι, είναι η τελευταία. Γι' αυτό μην ξεφεύγετε από το δρόμο σας! (Ακόμη και αν η έλξη είναι μεγάλη.)

Η χρυσή σκάλα του Φαραώ

Ο δυναμικός προγραμματισμός στην αρχαιότητα —και σήμερα

M. Reytman

Το ανάκτορο του Φαραώ φημιζόταν για την πολυτέλειά του: μαργαριταρένια παραπετάσματα, τοίχοι διακοσμημένοι με κεχριμπάρι, χρυσά πιάτα —είναι σχεδόν αδύνατο να περιγράψουμε όλους τους θησαυρούς του. Όμως, ό,τι εντυπωσίαζε περισσότερο όσους μπορούσαν να φτάσουν στην αίθουσα του θρόνου ήταν η χρυσή σκάλα που οδηγούσε στο θρόνο. Στο Σχήμα 1 βλέπετε μια εγκάρσια τομή της σκάλας, όπου έχουμε μετατρέψει τις αρχαίες αιγυπτιακές μονάδες μέτρησης σε παλάμες (dm, δεκατόμετρα). Οι αρχαιολόγοι δεν χρειάστηκε να βασανίσουν ιδιαίτερα το μυαλό τους για να καταλάβουν γιατί ήταν τόσο χαμηλά τα σκαλοπάτια. Η εξήγηση είναι ιδιαίτερα απλή: ο ηλικιωμένος Φαραώ δεν ήθελε να βλέπουν οι υπήκοοί του πόσο δυσκολευόταν να ανέβει στο θρόνο του —μπορεί να έχαναν το

σεβασμό τους, και ποιος ξέρει πού θα οδηγούσε κάτι τέτοιο! Είχε παραγγείλει λοιπόν στους χρυσοχόους της αυλής να κατασκευάσουν τα σκαλοπάτια πολύ χαμηλά —όχι ψηλότερα από 1,5 dm.

Όμως τα χρόνια πέρασαν και ο γέρος Φαραώ πέθανε. Ο νεαρός γιος του τον διαδέχτηκε στο θρόνο.

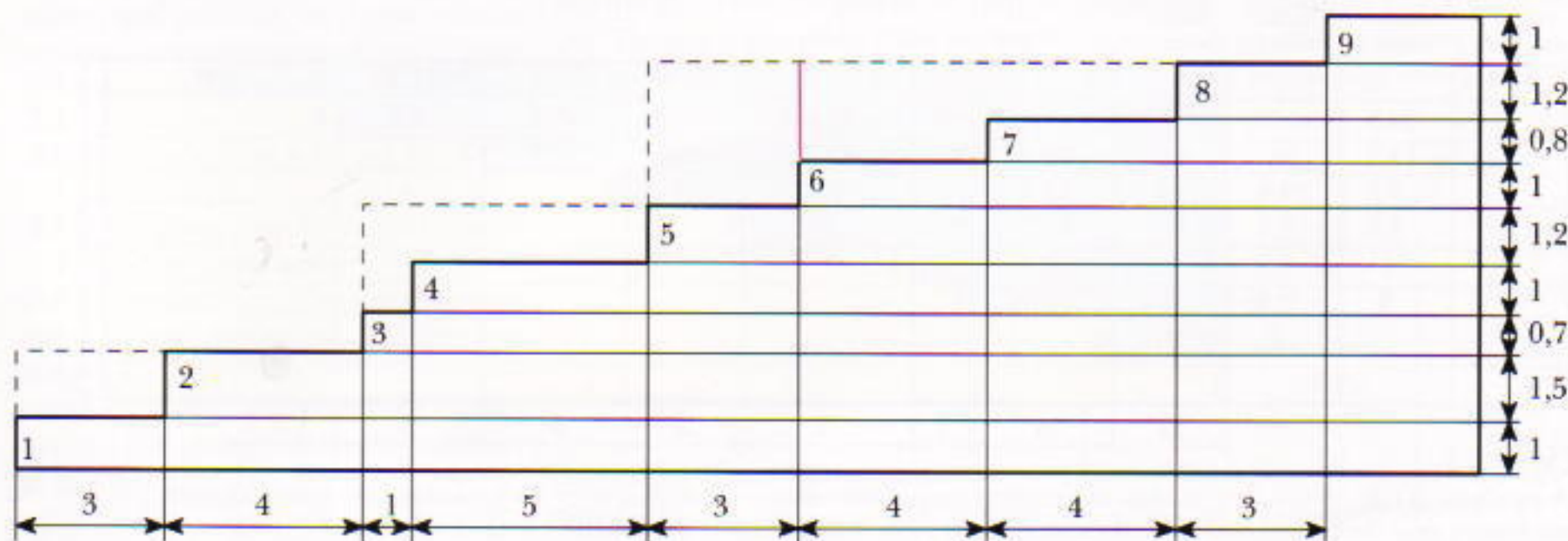
Ο νεαρός Φαραώ είχε ήδη ακούσει τους αυλικούς να ειρωνεύονται την απλοϊκή πονηριά του πατέρα του. Και παρότι ο ίδιος μπορούσε να ανέβει τα σκαλοπάτια τρία τρία, τα κακόπιστα σχόλια συνεχίζονταν. Τελικά, ο νεαρός κυβερνήτης αποφάσισε να δώσει ένα τέλος στα κουτσομπολιά κατασκευάζοντας νέα σκαλοπάτια πάνω στα παλιά. Κάλεσε τους χρυσοχόους της αυλής και το θησαυροφύλακα και τους είπε:

«Υπηρέτες μου! Σας προστάζω να κατασκευάσετε ξανά τη σκάλα έτσι ώ-

στε να μην έχει περισσότερα από τέσσερα σκαλοπάτια. Τοποθετήστε τα όπου θέλετε, αλλά δεν πρέπει να υπάρχουν περισσότερα από τέσσερα!»

«Όμως, Άρχοντά μου», είπε δειλά ο θησαυροφύλακας, «πού θα μπορέσουμε να βρούμε τόσο χρυσάφι; Έκανα μια εκτίμηση που την έγγραφα πρόχειρα σε τούτον τον πάπυρο». (Και έδειξε στον Φαραώ το σχέδιο με τις διακεκομμένες γραμμές που βλέπετε στο Σχήμα 1.) «Η σκάλα έχει πλάτος 1m, ή 10 dm. Επομένως, για να κάνουμε την κατασκευή που επιθυμείτε χρειαζόμαστε $[3 \cdot 1,5 + 1 \cdot 1 + 1,2 \cdot (1 + 5) + 1 \cdot 3 + 0,8 \cdot (3 + 4) + 1,2 \cdot 11] \cdot 10 = 345 \text{ dm}^3$ χρυσού! Αλλά, κύριε, δεν έχουμε τόσο χρυσό στο θησαυροφυλάκιό μας, που έχει μισοαδειάσει εξαιτίας του πολέμου.»

«Αχρείε! Θέλεις να καταστρέψεις τη χώρα; Βλέπω καθαρά ότι ποτέ σου δεν σκέφτηκες σοβαρά την οικονομία! Κοί-



Σχήμα 1

τα!» Και ο Φαραώ χάραξε την κόκκινη γραμμή που βλέπετε στο Σχήμα 1. «Είσαι πάντοτε πρόθυμος να ξοδέψεις περισσότερο χρυσάφι απ' όσο πραγματικά χρειάζεται!»

«Ω, εσύ, ο πιο σοφός ανάμεσα στους Φαραώ! Έχεις πραγματικά δίκιο. Αλλά και έτσι, γλιτώνουμε μόνο 90 dm^3 , και χρειαζόμαστε ακόμη $345 - 90 = 255 \text{ dm}^3$. Και πάλι δεν έχουμε αρκετό χρυσάφι.»

«Άθλιο πλάσμα! Αμφισβητείς τη δύναμή μου! Αν η σκάλα δεν είναι έτοιμη σε επτά ημέρες θα σε ρίξω εγώ ο ίδιος στον ιερό Νείλο και θα πουλήσω για σκλάβους τους χρυσοχόους. Και μη σκεφτείς καν να μου ξαναπαρουσιάσεις αυτά τα γελοία σχέδια!»

Ο απελπισμένος θησαυροφύλακας έφυγε από τα ανάκτορα και πήγε να βρει έναν φίλο του. Δεν υπήρχε κανείς ικανότερος από αυτόν στην κατασκευή των πυραμίδων και στον υπολογισμό εκτάσεων γης. Ο φίλος του ήταν ιερέας στο ναό της πρωτεύουσας, και είχε τη φήμη πως ήταν ένας άνθρωπος υπολογιστής και πρακτικός. Όταν έμαθε την κακοτυχία του φίλου του, ο ιερέας τον ρώτησε:

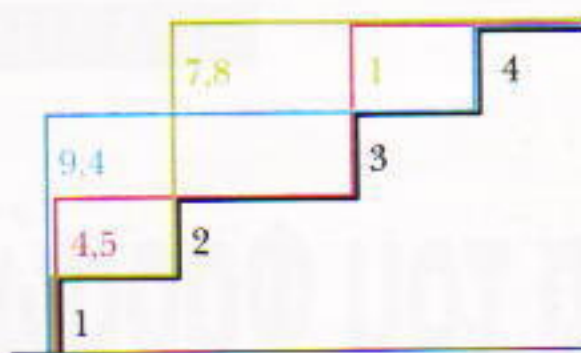
«Πόσο χρυσάφι υπάρχει στο θησαυροφυλάκιο;»

«Διακόσια dm³.»

«Δεν είναι πολύ! Ίσως όμως τα καταφέρεις και με λιγότερο χρυσάφι, αν τα σκαλοπάτια σχεδιαστούν σωστά.»

«Το προσπάθησα», αναστέναξε ο
θησαυροφύλακας. «Υπάρχουν, όμως,
τόσο πολλές δυνατότητες, και έχω τό-
σο λίγο χρόνο στη διάθεσή μου.»

«Λοιπόν, φίλε μου», είπε ο ιερέας, «άφησέ με να το σκεφτώ. Έλα πάλι αύ-



Σχήμα 2

Η σκάλα που απαιτεί το λιγότερο χρυσάφι είναι η κόκκινη: $f_2(4) = 4, 5 + 1 = 5, 5$.

ριο». Την επόμενη ημέρα, ο δυστυχημένος θησαυροφύλακας επέστρεψε στον ιερέα, που τον υποδέχτηκε με ένα χαμόγελο ικανοποίησης.

«Πες μου, φίλε μου, θα μπορούσα άραγε να υπολογίζω ότι θα πάρω όσο χρυσάφι περισσέψει αν καταφέρω να χρησιμοποιηθεί μικρότερη ποσότητα από αυτή που διαθέτεις;»

«Ω, θεοί!» αναφώνησε ο θησαυροφύλακας, χωρίς να πιστεύει στην τύχη του. «Θα σου δώσω και μια ντουζίνα σκλάβους επιπλέον και άλλα τόσα σακιά σπόρους!»

«Ορίστε, λοιπόν!» Ο ιερέας εμφάνισε ένα φύλλο παπύρου με ένα άλλο σχέδιο για την κατασκευή της σκάλας. «Με τούτο το σχέδιο χρειάζονται μόνο 171 dm³ χρυσού. Και τα υπόλοιπα 29 dm³ είναι δικά μου!»

«Πες μου, όμως, ω άριστε στην τέχνη των υπολογισμών, πώς κατάφερες να βρεις αυτή τη λύση; Έκανα τόσες προσπάθειες, αυτή η περίπτωση όμως δεν πέρασε από το μυαλό μου!»

«Άκου λοιπόν», είπε ο ιερέας. «Στην αρχή εξέτασα τις περιπτώσεις όπου α-

ντικαθιστούμε ορισμένα από τα πρώ-
τα σκαλοπάτια της σκάλας με ένα μόνο
σκαλοπάτι. Για να είναι πιο απλοί οι α-
ριθμοί, υπολόγισα μόνο το εμβαδόν f
της περιοχής ανάμεσα στη συνεχή και
στη διακεκομμένη γραμμή και εισήγα-
γα αργότερα έναν σταθερό παράγοντα
— το πλάτος της σκάλας. Αυτό δεν νο-
μίζω να σε πειράζει, έτσι; Για να είμα-
στε συνεπείς, πρέπει να αρχίσουμε με
ένα σκαλοπάτι, το πρώτο στη σκάλα.
Σ' αυτή την περίπτωση, δεν χρειάζεται
να χτίσουμε τίποτε καινούργιο, γιατί έ-
χουμε ένα μοναδικό σκαλοπάτι από την
αρχή· έτσι γράφουμε

$$f_1(1) = 0.$$

• Ο τύπος $f_1(2) = 1,5 \cdot 3 = 4,5$ μάς δείχνει ότι χρειαζόμαστε $4,5 \text{ dm}^2$ για να αντικαταστήσουμε τα δύο πρώτα σκαλοπάτια με ένα σκαλοπάτι. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι για να αντικαταστήσουμε τα πρώτα τρία σκαλοπάτια θα χρειαστούμε

$$f_1(3) = 4,5 + 0,7 \cdot (3 + 4) = 9,4 \text{ dm}^2.$$

Επίσης,

$$f_1(4) = 9,4 + 1 \cdot (3 + 4 + 1) = 17,4$$

$$f_1(5) = 17,4 + 1,2 \cdot (3 + 4 + 1 + 5) = 33.$$

και ούτω καθεξής. Κάθε νέος υπολογισμός προσθέτει ένα ποσό στον προηγούμενο.»

«Τα καταλαβαίνω όλα αυτά», διέκοψε ο θησαυροφύλακας, «αλλά τι χρειαζόμαστε το ένα σκαλοπάτι; Ο Φαραώ θέλει τέσσερα! Και εκτός αυτού, η αρχική σκάλα έχει πολύ περισσότερα από πέντε σκαλοπάτια!».

τέσσερα σκαλο- πάτια	τρία σκαλο- πάτια	δύο σκαλο- πάτια	ένα σκαλο- πάτι									
17,1	...	...	...	...	...	61,8	35,8	23,8	11,8	3	9	1
...	24,3	...	...	...	46	42,8	21,8	12,8	4,8	8		1,2
...	14,1	26	65	46,6	27,6	23,6	8,6	3,2	7			0,8
...	8,5	20,4	49	32,4	17,2	14	3	6				1
...	5,5	12,7	33	19,8	8,2	6	5					1,2
0	1	5,5	17,4	7,8	1	4						1
	0	2,8	9,4	2,8	3							0,7
		0	4,5	2								1,5
			1									1
				3		4	1	5	3	4	4	3

Σχήμα 3

Οι αριθμοί $g(i, j)$, $1 \leq i, j \leq 9$, στο σκιασμένο τμήμα του πίνακα, μας δείχνουν το χρυσάφι που χρειαζόμαστε για ένα νέο σκαλοπάτι που θα ξεκινά από το παλιό σκαλοπάτι i και θα καταλήγει στο παλιό j , ενώ οι αριθμοί $f_k(j)$ στο αριστερό τμήμα ($k = 2, 3, 4$) μας δείχνουν το ελάχιστο ποσόν χρυσού που απαιτείται για μια σκάλα με k σκαλοπάτια που καταλήγει στο παλιό σκαλοπάτι j .

$$\begin{aligned}
f_2(3) &= \min\{2,8, 4,5\} = 2,8 \\
f_2(4) &= \min\{7,8, 1+4,5, 9,4\} = 5,5 \\
f_2(5) &= \min\{19,8, 8,2+4,5, 6+9,4, 17,4\} = 12,7 \\
f_2(6) &= \min\{32,4, 17,2+4,5, 14+9,4, 3+17,4, 33\} = 20,4 \\
f_2(7) &= \min\{46,6, 27,6+4,5, 23,6+9,4, 8,6+17,4, 3,2+33, 49\} = 26 \\
f_3(4) &= \min\{1, 2,8\} = 1 \\
f_3(5) &= \min\{0+8,2, 2,8+6, 5,5\} = 5,5 \\
f_3(6) &= \min\{0+17,2, 2,8+14, 5,5+3, 12,7\} = 8,5 \\
f_3(7) &= \min\{0+27,6, 2,8+23,6, 5,5+8,6, 12,7+3,2, 20,4\} = 14,1 \\
f_3(8) &= \min\{0+46, 2,8+42,8, 5,5+21,8, 12,7+12,8, 20,4+4,8, 26\} = 25,2 \\
f_4(9) &= \min\{0+61,8, 1+35,8, 5,5+23,8, 8,5+11,8, 14,1+3, 24,3\} = 17,1
\end{aligned}$$

Σχήμα 4

«Μη βιάζεσαι!», του είπε χαμογελώντας ο ιερέας. «Πολύ σύντομα θα έχουμε περισσότερα νέα σκαλοπάτια – και μάλιστα δύο (Σχήμα 2). Πρώτα, όμως, πρέπει να βρούμε τα διάφορα εμβαδά που πρέπει να προστεθούν για να κατασκευαστεί ένα καινούργιο σκαλοπάτι που θα ξεκινά από τα διάφορα σκαλοπάτια της αρχικής σκάλας. Αυτά τα εμβαδά, τα $g(i, j)$, εξαρτώνται από τους αριθμούς i και j των παλιών σκαλοπατιών – εκεί όπου αρχίζουν και τελειώνουν τα νέα σκαλοπάτια – και μπορούμε να τα υπολογίσουμε το ένα μετά το άλλο. Για παράδειγμα, για να χτίσουμε ένα νέο σκαλοπάτι από το δεύτερο παλιό έως το τέταρτο χρειάζονται

$$g(2, 4) = 2,8 + 1 \cdot 5 = 7,8 \text{ dm}^2.$$

«Έγραψα όλους αυτούς τους αριθμούς, που θα τους χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς μας στη συνέχεια, σε έναν ειδικό πίνακα που χωρά σ' ένα απλό φύλλο παπύρου (Σχήμα 3). Έχουμε ήδη υπολογίσει τους αριθμούς $g(1, j) = f_1(j)$ της στήλης που έχει τίτλο «ένα σκαλοπάτι». Οι υπόλοιποι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε γραμμή διαδοχικά, μετακινούμενοι προς τα δεξιά και προς τα πάνω:

$$g(2, 3), g(3, 4), g(2, 4), g(4, 5), \dots$$

«Τώρα μπορώ να βρω το ελάχιστο εμβαδόν για δύο σκαλοπάτια. Αφού δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα σκαλοπάτι με δύο, το $f_2(1)$ δεν έχει νόημα. Για να έχουμε δύο νέα σκαλοπάτια αντί για τα δύο παλιά (τα δύο πρώτα) δεν χρειάζεται να προσθέσουμε χρυσάφι:

$$f_2(2) = 0.$$

«Για να βρούμε, όμως, το $f_2(3)$ θα

χρειαστεί να κάνουμε μερικούς υπολογισμούς – πρέπει να εξετάσουμε δύο δυνατότητες και να διαλέξουμε την καλύτερη. Πρέπει είτε να ανεβάσουμε το δεύτερο σκαλοπάτι έως το επίπεδο του τρίτου, προσθέτοντας έτσι το εμβαδόν $g(2, 3)$, είτε να ανεβάσουμε το πρώτο σκαλοπάτι στο επίπεδο του δεύτερου (σ' αυτή την περίπτωση, $g(1, 2) = f_1(2)$). Αυτό που χρειαζόμαστε είναι το ελάχιστο από τα δύο εμβαδά:

$$\begin{aligned}
f_2(3) &= \min\{g(2, 3), f_1(2)\} \\
&= \min\{2,8, 4,5\} = 2,8.
\end{aligned}$$

«Για να βρούμε το $f_2(4)$, πρέπει να βρούμε τον μικρότερο από τρεις αριθμούς (στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται με διαφορετικά χρώματα):

$$\begin{aligned}
f_2(4) &= \min\{g(2, 4), f_1(2) + g(3, 4), f_1(3)\} \\
&= \min\{7,8, 4,5 + 1, 9,4\}
\end{aligned}$$

και ούτω καθεξής.» (Οι πλήρεις υπολογισμοί δίνονται στο Σχήμα 4.)

«Περίμενε. Κατάλαβα με ποιον τρόπο θα βρούμε την καλύτερη σκάλα με δύο σκαλοπάτια, αλλά ο αριθμός των δυνατοτήτων θα αυξηθεί πολύ γρήγορα. Τρομάζω και μόνο όταν σκέφτομαι πόσο πολλές σκάλες με τρία σκαλοπάτια πρέπει να εξετάσουμε – και ως

μην ξεχνάμε ότι χρειαζόμαστε τέσσερα σκαλοπάτια! Μελέτησες όντως όλες αυτές τις δυνατότητες;»

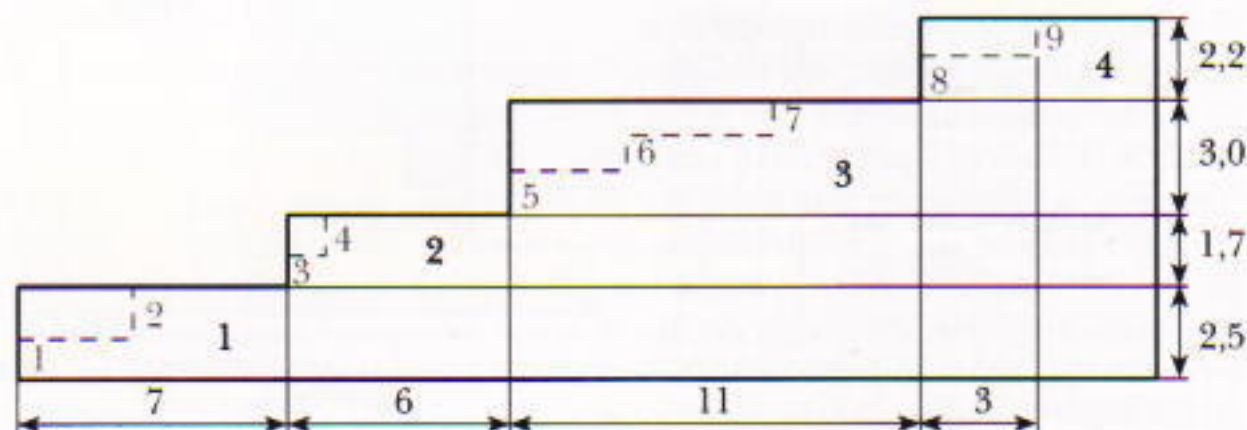
«Όπως σύντομα θα διαπιστώσεις, δεν υπήρξε ανάγκη για κάτι τέτοιο. Ας βρούμε, για παράδειγμα, το $f_3(4)$ – δηλαδή τη σκάλα με τρία σκαλοπάτια που καταλήγει στο ίδιο επίπεδο με το παλιό τέταρτο σκαλοπάτι και έχει το ελάχιστο εμβαδόν. Ας δούμε πού μπορεί να τελειώνει το δεύτερο σκαλοπάτι της. Όπως είναι φυσικό, θα έρχεται στο ίδιο επίπεδο με το παλιό δεύτερο ή το παλιό τρίτο σκαλοπάτι. Δηλαδή, ή πρέπει να κατασκευάσουμε ένα νέο σκαλοπάτι από το ύψος του παλιού τρίτου έως το παλιό τέταρτο, με κόστος $g(3, 4)$, ή πρέπει να αντικαταστήσουμε τα πρώτα τρία σκαλοπάτια με δύο. Αλλά γνωρίζουμε ήδη ποια ακριβώς από τις σκάλες με δύο σκαλοπάτια είναι η καλύτερη. Κοστίζει $f_2(3) = 2,8$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
f_3(4) &= \min\{g(3, 4), f_2(3)\} \\
&= \min\{1, 2,8\} = 1.
\end{aligned}$$

«Περίμενε μια στιγμή. Θέλω να βεβαιωθώ ότι κατάλαβα πώς θα βρούμε το $f_3(5)$. Έχουμε τα τρία σκαλοπάτια που καταλήγουν στο ίδιο επίπεδο με το παλιό πέμπτο, οπότε το δεύτερο από αυτά θα τελειώνει στο παλιό δεύτερο, τρίτο ή τέταρτο. Άρα,

$$\begin{aligned}
f_3(5) &= \min\{g(3, 5), f_2(3) + g(4, 5), f_2(4)\} \\
&= \min\{8,2, 2,8 + 6, 5,5\} = 5,5.
\end{aligned}$$

«Είναι αλήθεια ότι ένας σοφός φυλάει το θησαυροφυλάκιο του κράτους μας», είπε φιλόφρονα ο ιερέας. «Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το f_3 για 6, 7, και 8, και κατόπιν να συνεχίσουμε με την περίπτωση των τεσσάρων σκαλοπατιών. Όμως, δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τα $f_4(4), \dots, f_4(8)$, διότι γνωρίζουμε ότι το τέταρτο σκαλοπάτι πρέπει να καταλήγει οπωσ-



Σχήμα 5

δήποτε στο επίπεδο του παλιού ένατου σκαλοπατιού (διαφορετικά, η σκάλα θα είχε περισσότερα από τέσσερα σκαλοπάτια). Επομένως, απομένει να βρούμε το $f_4(9)$ ως το ελάχιστο των αθροισμάτων $f_3(j) + g(j, 9)$, όπου j είναι ένας από τους αριθμούς 3, 4, ..., 8. Αυτό το ελάχιστο βέβαια είναι ίσο με $f_3(7) + g(8, 9) = 14,1 + 3 = 17,1$. Και αυτή είναι η καλύτερη από όλες τις σκάλες με τέσσερα σκαλοπάτια!

«Αυτό σημαίνει ότι η καινούργια σκάλα θα απαιτήσει $17,1 \cdot 10 = 171 \text{ dm}^3$ χρυσού συνολικά. Ας δούμε τώρα πώς ακριβώς θα κατασκευαστούν τα σκαλοπάτια. Υπογραμμίσουμε όλες τις βέλτιστες επιλογές. Η τελευταία βέλτιστη λύση περιλαμβάνει το εμβαδόν (το οποίο μπορούμε να θεωρούμε ως το κόστος) τριών νέων σκαλοπατιών, το $f_3(7) = 14,1$, και επομένως το τρίτο σκαλοπάτι πρέπει να καταλήγει στο ίδιο επίπεδο με το παλιό έβδομο. Ας πάμε τώρα ένα βήμα πίσω στον ορισμό του $f_3(7)$, για να δούμε ότι περιλαμβάνει το κόστος $f_2(4) = 5,5$ των δύο πρώτων σκαλοπατιών. Συμπεραίνουμε ότι το δεύτερο νέο σκαλοπάτι πρέπει να καταλήγει στο ίδιο επίπεδο με το παλιό τέταρτο. Και τελικά, στην παράσταση του $f_2(4)$ βλέπουμε τον όρο $f_1(2) = 4,5$. Αυτό σημαίνει ότι το πρώτο σκαλοπάτι της καινούργιας σκάλας πρέπει να καταλήγει στο ίδιο επίπεδο με το δεύτερο σκαλοπάτι της παλιάς.»

Στο Σχήμα 5 βλέπετε το σχέδιο που προκύπτει για τη φτηνότερη καινούργια σκάλα.

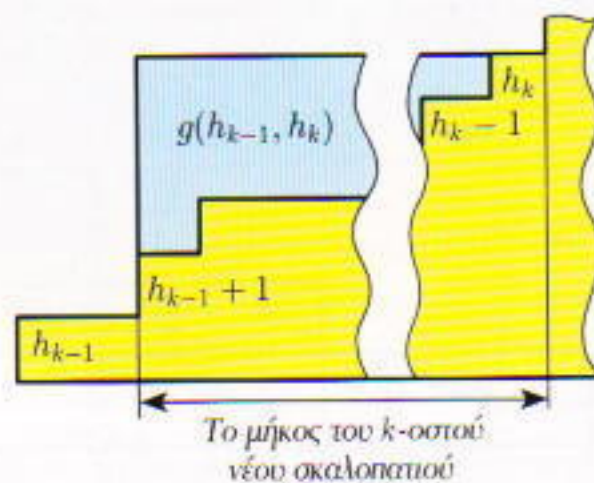
Η θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού

Δεν γνωρίζω αν ο πανούργος θησαυροφύλακας τήρησε την υπόσχεση που έδωσε στον ιερέα. Δεν γνωρίζω ούτε αν όλα αυτά έγιναν πράγματι ή αν όλη η ιστορία είναι επινοημένη. Όμως, γνωρίζω ότι θα μπορούσε όντως να είχε συμβεί, γιατί χρησιμοποιήσαμε δύο μόνο αριθμητικές πράξεις, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, που οι αρχαίοι Αιγύπτιοι γνώριζαν πολύ καλά (αν και ο συμβολισμός των αριθμών και των πράξεων που χρησιμοποιήσαμε ανακαλύφθηκε πολύ αργότερα). Και φυσικά, χρησιμοποιήσαμε και λίγο κοινό νου, αλλά αυτή την ανθρώπινη δεξιότητα την ανακαλύπτουμε σε ικανοποιητικές ποσότητες σε κάθε τόπο και σε κάθε εποχή. Πάντως, η μαθημα-

τική τεχνική που εφαρμόσαμε εδώ αναπτύχθηκε μόλις τα τελευταία σαράντα χρόνια. Ονομάζεται *δυναμικός προγραμματισμός*.

Ας σκεφτούμε λίγο για το πώς καταφέραμε να ανακαλύψουμε τη βέλτιστη λύση χωρίς να χρειαστεί να εξετάσουμε όλους τους δυνατούς τρόπους κατασκευής της σκάλας (και υπάρχουν πολλοί – πράγματι, ο ιερέας δεν θα είχε αρκετό χρόνο για να τους μελετήσει όλους). Η ιδέα ήταν να μοιράσουμε, σε κάθε στάδιο, το γενικό πρόβλημα σε έναν αριθμό απλούστερων προβλημάτων.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αναμορφώσουμε μια σκάλα με N σκαλοπάτια με τέτοιο τρόπο ώστε να κατασκευάσουμε μια σκάλα με n σκαλοπάτια, όπου το N είναι μεγαλύτερο από το n . Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ήδη τη βέλτιστη διεύθυνση των σκαλοπατιών στη νέα σκάλα όταν ο αριθμός τους είναι μικρότερος από το n . Ας υποθέσουμε ότι h_k είναι ο αύξων αριθμός του παλιού σκαλοπατιού που φτάνει στο ίδιο επίπεδο με το k -οστό νέο σκαλοπάτι. Είναι φανερό ότι αυτό το k -οστό σκαλοπάτι αρχίζει από το $(h_{k-1} + 1)$ -οστό παλιό σκαλοπάτι. Συμβολίζουμε το επιπλέον εμβαδόν, αυτό το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 6, με το $g(h_{k-1} + 1, h_k)$. Τότε, το γενικό πρόβλημα έγκειται στο να βρούμε τις τιμές $h_1, h_2, \dots, h_{k-1}$ που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των k τιμών $g(1, h_1) + g(h_1 + 1, h_2) + \dots + g(h_{k-2} + 1, h_{k-1}) + g(h_{k-1} + 1, h_k)$ (για ένα δεδομένο $k = n$ και $h_k = h_n = N$). Συμβολίζουμε αυτή την ελάχιστη τιμή με το $f_n(h_n)$. Παρατηρήστε ότι για να βρούμε την ελάχιστη τιμή $f_{n-1}(h_{n-1})$ των πρώτων $n - 1$ όρων, όπου δεν υπεισέρχεται το h_n , πρέπει να λύσουμε το ίδιο πρόβλημα για αριθμό



Σχήμα 6

σκαλοπατιών μικρότερο κατά ένα. Αυτό μας οδηγεί στον επόμενο αξιοπρόσεκτο τύπο, που ανακαλύφθηκε από τον αμερικανό μαθηματικό Richard Bellman (1920-1984):

$$f_k(h_k) = \min \{ f_{k-1}(h_{k-1}) + g(h_{k-1} + 1, h_k) \},$$

όπου το ελάχιστο λαμβάνεται για όλες τις δυνατές τιμές των h_{k-1} , ($k - 1 \leq h_{k-1} < h_k$). Αυτός ο τύπος μάς επιτρέπει να υπολογίσουμε διαδοχικά τους αριθμούς $f_k(h_k)$ για κάθε $k \leq n$ και $h_k \leq N$. Θα πρέπει να γίνει κατανοητός ως εξής: για να βρούμε το ελάχιστο, οφείλουμε να προσδώσουμε όλες τις δυνατές τιμές στο k , αρχίζοντας από το $k = 1$, και για καθεμιά από αυτές να καθορίσουμε και να θυμόμαστε την τιμή h_{k-1} που ελαχιστοποιεί το $f_k(h_k)$. Τότε, όταν θα φτάσουμε την τελευταία τιμή $k = n$, πρέπει να κινηθούμε προς τα πίσω και να λάβουμε υπόψη όλες τις βέλτιστες τιμές $h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_1$ (δείτε τα κόκκινα βέλη στο Σχήμα 3).

Σχόλια και ιστορικά στοιχεία

Σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθόδου που προαναφέραμε αποτελεί το ότι είναι εφαρμόσιμη χωρίς να απαιτείται καμία ειδική συνθήκη για τη συνάρτηση g . (Από αυτή την άποψη ο δυναμικός προγραμματισμός υπερτερεί του αποκαλούμενου γραμμικού προγραμματισμού, στον οποίο απαιτείται να είναι γραμμικοί οι περιορισμοί και οι μεταβλητές να είναι συνεχείς.) Ουσιαστικά, το μόνο που απαιτείται είναι να εκφράζεται η συνάρτηση f (της οποίας θέλουμε το ελάχιστο) ως άθροισμα όρων που ο καθένας τους εξαρτάται από λιγότερες μεταβλητές συγκριτικά με τον επόμενο. Έτσι, η εξίσωση του Bellman και η μέθοδος που περιγράψαμε προηγουμένως χρησιμοποιούνται στις μέρες μας ευρύτατα, όχι βέβαια για να ικανοποιήσουν τις ιδιοτροπίες κάποιου Φαραώ. Προσπαθήστε να τα καταφέρετε χωρίς αυτήν, όταν προσπαθείτε να βρείτε τη βέλτιστη αναλογία που πρέπει να έχουν τα βάρη των ορόφων ενός πυραύλου, ή όταν θέλετε να καθορίσετε τον καλύτερο τρόπο συναρμογής διαφόρων κομματιών σε μια βιομηχανική διαδικασία, ή όταν σχεδιάζετε ένα χρονοδιάγραμμα με τον ελάχιστο δυνατό νεκρό χρόνο! Θα βρεθείτε στην απελπιστική θέση του θησαυροφύλακα, καταπιεσμένοι από την πληθώρα των δυνα-

τοτήτων. Φυσικά, οι υπολογισμοί που απαιτούνται για τον δυναμικό προγραμματισμό δεν γίνονται σχεδόν ποτέ «με το χέρι». Ωστόσο, αυτή η μέθοδος προσαρμόζεται πολύ καλά σε τεχνικές επεξεργασίας με ηλεκτρονικούς υπολογιστές και, επιπλέον, είναι απαλλαγμένη από τις παγίδες που δυστυχώς κρύβονται στον γραμμικό προγραμματισμό και σε άλλες μεθόδους υπολογισμού των ακροτάτων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Η ιδέα του δυναμικού προγραμματισμού πρωτοεμφανίστηκε εδώ και πολλά χρόνια. Μπορούμε να βρούμε ίχνη της στις εργασίες του C. MacLaurin (1698-1746), και, από κάποια άποψη, την εφάρμοσε και ο Αρχιμήδης, πολύ πιο παλιά. Πήρε, όμως, την τελική του μορφή με το έργο του Bellman και συνδέθηκε διά παντός με το όνομά του.

Είδαμε πώς λειτουργεί ο δυναμικός προγραμματισμός σε ένα πολύ απλό πρόβλημα. Σε ποια έκταση μπορεί να εφαρμοστεί σε συνθετότερα προβλήματα; Η ερώτηση πρέπει να απαντηθεί με μερικές επιφυλάξεις. Το πρόβλημα είναι ότι μπορεί να εμφανιστεί μια ιδιαίτερη δυσκολία, η λεγόμενη «κατάρρα της διάστασης». Πρέπει να αναζητούμε ανάμεσα σε τόσο πολλές μεταβλητές και να απομνημονεύουμε τόσο πολλά ενδιάμεσα αποτελέσματα, ώστε χάνουμε τα πλεονεκτήματα της μεθόδου. Όμως, η μέθοδος κέρδισε μια δεύτερη ώθηση χάρη στην παράλληλη επεξεργασία, η οποία προσελκύει όλο και περισσότερο το ενδιαφέρον των προγραμματιστών και των σχεδιαστών των υπολογιστών.

Δυναμικός προγραμματισμός στη μοριακή βιολογία¹

Λίγο καιρό πριν, ανακαλύφθηκε μια νέα εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού: στη μοριακή βιολογία, ένα πεδίο όπου οι βάσεις δεδομένων περιέχουν βιολογικές ακολουθίες (όπως τα μόρια του DNA, του RNA και των πρωτεϊνών) που αριθμούν πολλά εκατομμύρια «γραμμάτων» και δεν είναι δυνατό να αναλυθούν χωρίς τη βοήθεια υπολογιστών. Τα μόρια του DNA που μεταφέρουν τη γενετική πληροφορία μπορούμε να τα δούμε σαν μακρές σειρές των τεσσάρων γραμμά-

C	1	2	3	3	4	5	5	6	7
T	1	2	2	3	4	5	5	6	7
G	1	2	2	3	4	4	5	6	6
G	1	2	2	3	4	4	5	5	5
A	1	1	2	3	4	4	4	4	4
T	1	1	2	3	3	4	4	4	4
A	1	1	2	3	3	3	3	3	3
C	0	1	2	2	2	2	2	2	2
G	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	A	G	C	A	A	T	G	G	T

Σχήμα 7

Τα κόκκινα τετράγωνα σημειώνουν μία από τις μεγαλύτερες υπακολουθίες (μήκους 7).

των A, C, G, T (που συμβολίζουν αντίστοιχα, την αδερίνη, την κυτοσίνη, τη γουανίνη και τη θυμίνη – τις χημικές ομάδες που σχηματίζουν αυτά τα μόρια). Κατά τη διάρκεια της εξέλιξης, οι μεταλλάξεις διαταράσσουν αυτές τις ακολουθίες. Ένα παλιό γράμμα μπορεί να αντικατασταθεί από κάποιο άλλο, αυτό να φύγει από την ακολουθία, ή μπορεί να εμφανιστεί ένα άλλο καινούριο. Πόσο όμοια είναι αυτά τα δύο τμήματα DNA; Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός μετασχηματισμών που θα μετατρέψουν το ένα από αυτά στο άλλο;

Νά μια ακριβέστερη διατύπωση του προβλήματος. Μια σειρά των γραμμάτων A, C, G, και T θα την ονομάζουμε λέξη. Υπακολουθία μιας λέξης ονομάζουμε μια νέα λέξη που δημιουργείται αν διαγράψουμε μερικά γράμματα από την αρχική λέξη. Με δεδομένες δύο λέξεις μήκους m και n , το πρόβλημά μας είναι να ανακαλύψουμε τη μεγαλύτερη υπακολουθία που εμφανίζεται και στις δύο. Μια απλή διαδικασία, που προτάθηκε κατά τη δεκαετία του 1970, λύνει αυτό το πρόβλημα (οι βιολόγοι την ονομάζουν αλγόριθμο Nudelman-Wunsh).

Γράψτε τη μία από τις δεδομένες λέξεις – τη $x = X_1 X_2 \dots X_m$ – από τα κάτω προς τα πάνω, και την άλλη – την $y = Y_1 Y_2 \dots Y_n$ – από τα αριστερά προς τα δεξιά, κατά μήκος των πλευρών ενός $m \times n$ πίνακα (Σχήμα 7). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε: $m = n = 9$, $x = \text{GCATAGGTC}$, $y = \text{AGCAATGGT}$. Δημιουργούμε μια συνάρτηση που εκφράζει την ταυτότητα ή τη μη ταυτότητα:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_i = Y_j, \\ 0, & \text{αν } X_i \neq Y_j. \end{cases}$$

(τα τετράγωνα με $d_{ij} = 1$ έχουν μπλε χρώμα στον πίνακα). Έστω a_{ij} το μήκος της μεγαλύτερης υπακολουθίας που μπορούμε να επιλέξουμε από τα αρχικά τμήματα των λέξεών μας: $X_1 \dots X_j$ και $Y_1 \dots Y_i$. Μπορούμε να βρούμε διαδοχικά όλους τους αριθμούς a_{ij} ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) χρησιμοποιώντας τον επόμενο τύπο (που θυμίζει τον τύπο του Bellman):

$$a_{ij} = \max\{a_{i-1,j}, a_{i,j-1}, a_{i-1,j-1} + d_{ij}\}$$

(για $i = 1$ ή $j = 1$ ο τύπος απλοποιείται: $a_{11} = d_{11}$, $a_{i1} = \max\{a_{i-1,1}, d_{i1}\}$, $a_{1j} = \max\{a_{1,j-1}, d_{1j}\}$). Με άλλα λόγια, ένας αριθμός σε οποιοδήποτε τετράγωνο του πίνακα είναι ο μεγαλύτερος από τρεις συγκεκριμένους αριθμούς: αυτού που βρίσκεται αριστερά του, αυτού που βρίσκεται από κάτω του, και, αν το τετράγωνο είναι μπλε, αυτού που είναι κάτω αριστερά συν 1.

Έτσι, υπολογίζοντας κάθε φορά το μέγιστο δύο ή τριών αριθμών – και κρατώντας πάντοτε στη μνήμη μας τα ενδιάμεσα αποτελέσματα, όπως και στο πρόβλημα με τη σκάλα του Φαραώ – θα συμπληρώσουμε ολόκληρο τον πίνακα σε $m \cdot n$ βήματα.

Επαληθεύστε ότι ο τελευταίος αριθμός a_{mn} θα είναι ίσος με το μήκος της μεγαλύτερης υπακολουθίας που είναι κοινή στις δύο λέξεις. Την ίδια την υπακολουθία μπορούμε να τη διαβάσουμε ακολουθώντας την αντίστροφη κατεύθυνση (μερικές φορές, όμως, η διαδρομή μπορεί να μην είναι μοναδική). Η αντίστροφη διαδρομή πρέπει να προχωρεί με «διαγώνια βήματα» που αυξάνουν κατά ένα τους αριθμούς του πίνακα όταν μετακινούμαστε κατευθείαν. Τα τετράγωνα που έχουν κόκκινο περίγραμμα αντιπροσωπεύουν μία από τις μέγιστες υπακολουθίες. Οι βιολόγοι συνήθως απεικονίζουν το αποτέλεσμα σαν μια «ευθυγράμμιση» των δεδομένων λέξεων (Σχήμα 8). Μπορούμε να βρούμε παρόμοιους ταχείς αλγορίθμους, που δεν απαιτούν μεγάλη μνήμη, για ανάλογα προβλήματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διαφορετικό «βάρος» στην αντικατάσταση ενός γράμματος, συγκριτικά με την απομάκρυνσή του (ή την εισαγωγή του).

Η συνέχεια στη σ. 42

1. Αυτό το τμήμα του άρθρου έχει γραφεί από τον Nikolay Vasilyev.

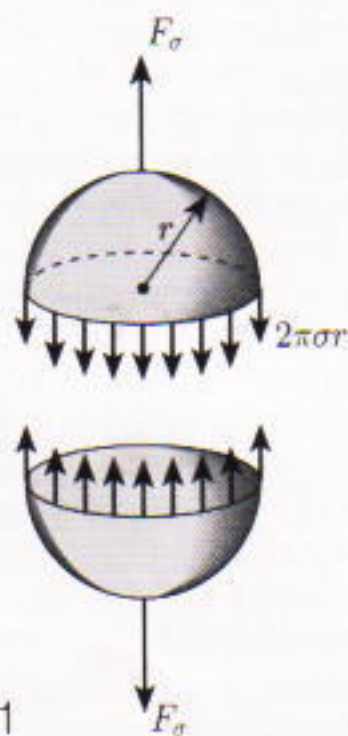
Σταγόνες και γιγάντες

Δημιουργώντας βροχή μια ηλιόλουστη μέρα

Yuly Bruk και Albert Stasenko

Κάποτε, ένα μικρό κορίτσι με ανήσυχο πνεύμα ρώτησε: «Γιατί οι σταγόνες της βροχής δεν είναι ποτέ τόσο μεγάλες όσο το κεφάλι μου;» Η φίλη της της απάντησε: «Κοίτα, αν ήταν τόσο μεγάλες, θα δυσκολευόμασταν να κρατάμε την ομπρέλα».

Το ερώτημα όμως παραμένει. Τσως οι σταγόνες της βροχής που πέφτουν από τα σύννεφα είναι μικρές επειδή δεν έχουν αρκετό χρόνο, είτε μέσω της συμπύκνωσης υδρατμών είτε μέσω της συσσωμάτωσης με άλλες σταγόνες, για να μεγαλώσουν τόσο πολύ. Αν, όμως, με τη βοήθεια ενός μετεωρολογικού αερόστατου, ρίξουμε ένα δοχείο νερό από το ύψος ενός σύννεφου, θα δούμε ότι το νερό δεν φτάνει στο έδαφος όλο μαζί, αλλά πάντοτε με τη μορφή ξεχωριστών σταγόνων.



Σχήμα 1

(Αν δεν πιστεύετε, μπορείτε να επαναλάβετε αυτό το πείραμα από τη στέγη ενός ψηλού κτιρίου.) Επομένως, κάτι άλλο καθορίζει το τελικό μέγεθος των σταγόνων της βροχής.

Αυτό το «κάτι άλλο» είναι η επιφανειακή τάση. Για να χωρίσουμε στη μέση μια σταγόνα, κατά μήκος του «ισημερινού» της (Σχήμα 1), θα χρειαστεί να ασκήσουμε μια δύναμη F_σ ίση με το γινόμενο του μήκους του ισημερινού $2\pi r$ και ενός παράγοντα σ που ονομάζεται συντελεστής επιφανειακής τάσης. Ο σ έχει διαστάσεις δύναμης προς μήκος, και τον μετράμε σε Nt/m ή σε Joule/m². Για το νερό, $\sigma \sim 0,05 - 0,08$ Nt/m.

Σκεφτείτε τη σαμπρέλα μέσα σε μια μπάλα ποδοσφαίρου. Η τάση της σαμπρέλας, η οποία σε κάθε σημείο είναι εφαπτομενική στην επιφάνειά της, δημιουργεί ακτινικές δυνάμεις, που κατευθύνονται προς το κέντρο της μπάλας και εξισορροπούν την υπερπίεση του αερίου. Στην περίπτωση μιας υγρής σταγόνας, η επιφανειακή τάση έχει αποτέλεσμα μια εσωτερική υπερπίεση, γνωστή ως πίεση Laplace. (Φυσικά, αυτή η αναλογία δεν είναι ακριβής. Η επιφανειακή τάση στη σταγόνα, και αντίθετα με ό,τι συμβαίνει στην μπάλα, δεν σχετίζεται πρακτικά με την ακτίνα της – τουλάχιστον για την τάξη των μεγεθών που θα χρησιμοποιήσουμε σε τούτο το άρθρο.)

Εξαιτίας αυτών των δυνάμεων, μια σταγόνα υγρού σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας (ας πούμε, σε ένα διαστημικό όχημα που βρίσκεται σε τροχιά)

διατηρεί σφαιρικό σχήμα. Από την άλλη πλευρά, μια σταγόνα τοποθετημένη πάνω στη στεγνή επιφάνεια ενός τραπεζιού αποκτά πεπλατυσμένο σχήμα. Μπορείτε να το παρατηρήσετε με μια δροσοσταλίδα πάνω σ' ένα φύλλο ή σ' ένα πέταλο λουλουδιού. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μια σταγόνα βροχής που πέφτει με σταθερή ταχύτητα παίρνει πεπλατυσμένο σχήμα λόγω της αντίστασης του αέρα, και καταλήγει να μοιάζει με ψωμάκι του χάμπουργκερ.

Με λίγα λόγια, η αντίσταση του αέρα αλλάζει τη μορφή της σταγόνας, και η άλλη δύναμη – η επιφανειακή τάση – προσπαθεί να την επαναφέρει στο σχήμα της σφαίρας. Είναι φανερό ότι η ισορροπία αυτών των δύο δυνάμεων μας παρέχει μια προσέγγιση (έστω και μόνο της τάξης μεγέθους) των μέγιστων διαστάσεων μιας σταγόνας που πέφτει με σταθερή ταχύτητα. Η ομαλή κίνηση της σταγόνας μάς υπαγορεύει ότι η δύναμη της αντίστασης του αέρα ισούται με το βάρος της. Επομένως,

$$2\pi\sigma r \sim \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v g,$$

όπου ρ_v είναι η πυκνότητα του νερού. Λύνοντας ως προς r έχουμε

$$r_{\max} \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_v g}}.$$

(Φυσικά, έχουμε παραλείψει τον όρο $\sqrt{6/4}$, θεωρώντας πως ισούται περίπου με τη μονάδα.) Αν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα $g=10$ m/sec², $\sigma \sim 0,06$ Nt/m, $\rho_v = 10^3$ kg/m³ προκύπτει



$r_{\max} \sim \sqrt{6} \cdot 10^{-6} \cong 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,5 \text{ mm}$, που φαίνεται τελείως ρεαλιστικό, όπως μπορείτε να διαπιστώσετε και μόνοι σας στη διάρκεια μιας καλοκαιριάτικης βροχής.

Ας κάνουμε τώρα μια εκτίμηση της ταχύτητας των σταγόνων. Όπως προαναφέραμε, πρέπει να θέσουμε το βάρος της σταγόνας ίσο με τη δύναμη της αντίστασης του αέρα. Η αντίσταση του αέρα που ενεργεί σε μια σφαίρα ακτίνας r κινούμενη με ταχύτητα v μέσα σ' ένα μέσο πυκνότητας ρ_a είναι γνωστό ότι είναι της τάξης $F_a \sim \rho_a r^2 v^2$. Αν θελήσουμε να μιλήσουμε ακριβέστερα, αντικαθιστώντας το σύμβολο $\sim$ (που εκφράζει την «τάξη μεγέθους») με το σύμβολο της ισότητας, θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε πειραματικά τον αδιάστατο συντελεστή που θα περιλαμβάνει αυτός ο τύπος. Και γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούνται οι αεροδυναμικές σήραγγες. Πάντως, για τους στόχους που έχουμε θέσει εδώ, αρκούν μερικές χοντρικές εκτιμήσεις.

Έτσι, για την ευθύγραμμη και ομαλή πτώση μιας σταγόνας έχουμε

$$F_a \sim \rho_a r^2 v^2 \sim \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v g,$$

απ' όπου λαμβάνουμε

$$v \sim (4\rho_v r g / \rho_a)^{1/2}.$$

Αν αντικαταστήσουμε τη μέγιστη ακτίνα μιας σταγόνας που υπολογίσαμε προηγουμένως, προκύπτει

$$v_{\max} \sim (4 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10/1)^{1/2} \sim 10 \text{ m/sec},$$

που επίσης φαίνεται ρεαλιστικό, όπως μπορείτε να πιστοποιήσετε υπολογίζοντας τις γωνίες που σχηματίζουν τα ίχνη που αφήνουν οι σταγόνες πέφτοντας στο παράθυρο ενός αυτοκινήτου ή ενός τρένου, όταν γνωρίζετε την ταχύτητα του οχήματος.

Υπάρχει, όμως, μία ακόμη πηγή αντίστασης στην κίνηση ενός σώματος: η εσωτερική τριβή του μέσου. Η ύπαρξή της γίνεται έντονα φανερή όταν ρίξετε έναν βόλο μέσα σ' ένα δοχείο με μέλι (όσο πιο κρύο είναι το μέλι τόσο βραδύτερη είναι η κάθοδος). Καθώς πέφτει, εμφανίζεται ένα ιδιαίτερο είδος αργής, «έρπουσας» κίνησης γύρω από το βόλο. Ο αέρας, βέβαια, δεν είναι μέλι, αλλά όταν οι σταγόνες είναι μικρές, τα φαινόμενα είναι παρόμοια.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να φανταστούμε ότι το περιβάλλον μέσον (το μέλι ή ο αέρας) κολλάει στο κινούμενο σώμα: τα στρώματα του υγρού που είναι πιο απομακρυσμένα από το σώμα κινούνται ταχύτερα, με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται μια εφαπτομενική δύναμη τριβής ανάμεσά τους, όπως όταν τρίβετε τα χέρια σας μεταξύ τους.

Το αποτέλεσμα είναι να ασκείται μια δύναμη πάνω στο σώμα που δεν είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ακτίνας του και της ταχύτητάς του, αλλά ανάλογη με την ακτίνα του και την ταχύτητά του. Τον τύπο γι' αυτή τη δύναμη τον ανακάλυψε τον προηγούμενο αιώνα ο σερ George Gabriel Stokes:

$$F_\mu = 6\pi\mu r v,$$

όπου μ είναι ο συντελεστής εσωτερικής τριβής του μέσου. Για τον αέρα, $\mu \cong 2 \cdot 10^{-5} \text{ Nt} \cdot \text{sec} / \text{m}^2$. Αν συγκρίνουμε τις σχέσεις $F_a \sim (rv)^2$ και $F_\mu \sim rv$, διαπιστώνουμε εύκολα πως όταν μειώνεται το γινόμενο rv (δηλαδή όταν μειώνεται οποιοσδήποτε από τους παράγοντές του), η αντίσταση του αέρα F_a μειώνεται ταχύτερα από την εσωτερική τριβή F_μ , με αποτέλεσμα η δεύτερη να υπερισχύει στα μικρά σώματα και στις αργές κινήσεις. Εξισώνοντας, λοιπόν, την εσωτερική τριβή με το βάρος, βρίσκουμε την ταχύτητα της αργής καθόδου για μικρές σταγόνες:

$$v = \frac{2\rho_v g r^2}{9\mu} = ar^2,$$

όπου $a = (2/9)(\rho_v g / \mu)$ είναι μια σταθερά.

Στο Σχήμα 2 έχουμε τη γραφική παράσταση και των δύο σχέσεων: η μια συνάρτηση περιέχει το r^2 και αφορά τις μικρές σταγόνες, και η άλλη το $\sqrt{r}$ και αφορά τις μεγαλύτερες. Είναι φανερό ότι οι δύο καμπύλες έχουν ένα



Σχήμα 2

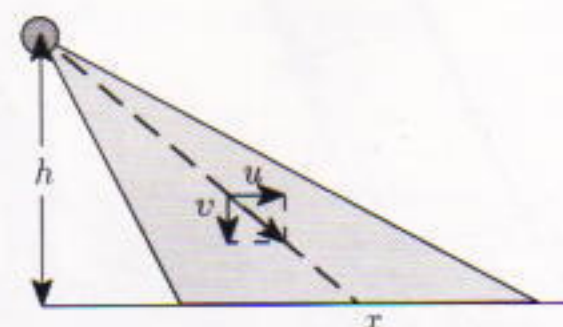
κοινό σημείο σε μια συγκεκριμένη τιμή της ακτίνας ($r = r_*$), και έτσι μας παρέχεται μια φυσική βάση για να χρησιμοποιούμε τον όρο «σταγονίδια» για τις σταγόνες που έχουν ακτίνα $r < r_*$ και τον όρο «σταγόνες» για όσες έχουν ακτίνα $r > r_*$. Οι δύο δυνάμεις στην τομή των καμπυλών είναι ίσες: $F_a / F_\mu = 1$. Ο λόγος στο αριστερό μέλος αυτής της ισότητας είναι γνωστός ως αριθμός Reynolds. Συμβολίζεται με Re, και έχει μεγάλη σημασία στην αεροδυναμική. Είναι προφανές ότι τα μικρόβια και τα σταγονίδια της ομίχλης έχουν $Re < 1$, ενώ τα αεροπλάνα, τα πλοία και οι σταγόνες της βροχής σε μια μπόρα έχουν $Re > 1$.

Υπάρχει όμως οποιαδήποτε πρακτική χρησιμότητα σε όλες αυτές τις σκέψεις; Θυμηθείτε τα λόγια του ήρωα του παραμυθιού: «Όσο γνωρίζω, μοναδικός λόγος για να είναι κάποιος μέλισσα, είναι το να φτιάχνει μέλι. Και ο μοναδικός λόγος για να φτιάχνει κανείς μέλι, είναι για να το τρώω εγώ».

Οπότε, σε τι χρησιμεύουν οι σταγόνες της βροχής; Μήπως μόνο για να ποτίζουμε τους κήπους μας; Αυτό θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Αλλά δεν μπορούμε παντού και πάντοτε να στηριζόμαστε στη βροχή. Μερικές φορές θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα μόνοι μας. Μπορούμε, φυσικά, να κάνουμε τη δουλειά μας μ' έναν κουβά ή ένα ποτιστήρι — κατά κάποιον τρόπο «στο πόδι». Ή μπορούμε να οδηγήσουμε ένα τρακτέρ ανάμεσα στις σειρές των φυτών, μαζί με μια δεξαμενή νερού και ένα ψεκαστικό μηχανήμα. Όταν, όμως, πρέπει να ποτίσουμε μεγάλες εκτάσεις γης, είναι πρακτικότερο να χρησιμοποιήσουμε τον άνεμο που πνέει σχεδόν σταθερά κατά μήκος των μεγάλων ανοιχτών εκτάσεων.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ότι ένας οριζόντιος σωλήνας με ψεκαστήρες βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος (Σχήμα 3). Το νερό παρέχεται υπό πίε-



Σχήμα 3

ση και εκτινάσσεται με τη μορφή σταγόνων προς όλες τις κατευθύνσεις. Οι ακτίνες των σταγόνων μπορεί να διαφέρουν, αλλά θα ασχοληθούμε μόνο με εκείνες που οι ακτίνες τους θεωρούνται μικρές σύμφωνα με το κριτήριο που καθορίσαμε προηγουμένως (δηλαδή, τις πεπλατυσμένες σύμφωνα με το νόμο του Stokes), διότι μόνο τα μικρά σταγονίδια μπορούν να παρασυρθούν σε μεγάλες αποστάσεις από τον άνεμο.

Ας υποθέσουμε ότι ο άνεμος φυσάει με σταθερή οριζόντια ταχύτητα u , κάθετα προς το σωλήνα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, ανεξάρτητα από την αρχική ταχύτητά του, κάθε σταγονίδιο θα συμμετάσχει και σε μια ευθύγραμμη ομαλή οριζόντια κίνηση με την ταχύτητα του ανέμου. Δηλαδή, κάθε σταγονίδιο θα έχει μια σταθερή ταχύτητα u κατά την οριζόντια διεύθυνση και μια σταθερή ταχύτητα $v = ar^2$ κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.

Αφού και οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας είναι σταθερές, όλα τα σταγονίδια κινούνται σε ευθεία γραμμή. Είναι φανερό ότι ένα μικρότερο σταγονίδιο θα ταξιδεύει σε μεγαλύτερη απόσταση κατά τον οριζόντιο άξονα x , αλλά αυτό μεταφέρει μικρότερη ποσότητα νερού για το ψέκασμα του εδάφους. Αν θέλουμε να ψεκάσουμε ομοιόμορφα ένα χωράφι, πράγμα που είναι συνήθως και το ζητούμενο, πρέπει ο αριθμός των μικρών σταγονιδίων να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των μεγάλων. Και εδώ προκύπτει ένα λογικό ερώτημα: ποια είναι η σχέση ανάμεσα στους αριθμούς των σταγονιδίων διαφορετικού μεγέθους; Στη γλώσσα της φυσικής, ποια είναι η συνάρτηση κατανομής των σταγονιδίων σύμφωνα με το μέγεθός τους, με την οποία προκύπτει ομοιόμορφο ψέκασμα;

Όλα αυτά μπορεί, διαισθητικά, να σας είναι περισσότερο ή λιγότερο γνωστά, αλλά θα προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα με ακριβέστερο τρόπο. Τι σημαίνει «ομοιόμορφο ψέκασμα»; Σημαίνει ότι οποιοδήποτε μικρό κομμάτι του χωραφιού με μήκος L (που είναι επίσης και το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο σωλήνας μας) και με πλάτος Δx (επομένως, με εμβαδόν $L\Delta x$) δέχεται μια ποσότητα νερού ΔM τέτοια ώστε ο λόγος $G = \Delta M / L\Delta x$ να είναι σταθερός. Θα ονομάσουμε αυτό τον αριθμό «επιφανειακή πυκνότητα ψεκασμού».

Και τι σημαίνει «κατανομή των σταγονιδίων σύμφωνα με το μέγεθός τους»; Ας θεωρήσουμε ένα διάστημα ακτίνων Δr και ας δηλώσουμε με Δn τον αριθμό των σταγονιδίων που η ακτίνα τους ανήκει σε αυτό το διάστημα. Ο λόγος

$$f(r) = \frac{\Delta n}{\Delta r}$$

είναι η συνάρτηση κατανομής μεγέθους των σταγονιδίων που αναζητούμε.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κάποιος να βρει τη συνάρτηση κατανομής των σπουδαστών ενός σχολείου σύμφωνα με την ηλικία, το ύψος ή το χρώμα των ματιών (αν εκφραστεί ως μήκος κύματος του ορατού φωτός). Ή την κατανομή των μοριακών ταχυτήτων για ένα αέριο (οι τύποι που ανακάλυψαν οι Boltzmann και Maxwell). Ή τη συνάρτηση κατανομής των κβάντων της ηλιακής ακτινοβολίας σύμφωνα με τις συχνότητές τους (ο νόμος του Planck). Ή την κατανομή των ηλεκτρονίων σε ένα στερεό σύμφωνα με τις ενεργειές τους (η στατιστική του Fermi) – και ούτω καθεξής.

Αλλά ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα του ομοιόμορφου ψεκασμού. Ο χρόνος που περνάει μέχρι να πέσει στο έδαφος ένα σταγονίδιο ακτίνας r , από ύψος h , είναι $t(r) = h/v(r) = h/ar^2$. Η οριζόντια μετατόπιση των σταγονιδίων είναι

$$x = ut = \frac{uh}{ar^2}.$$

Ποιο είναι το πλάτος Δx της περιοχής που ψεκάζεται από τα σταγονίδια οι ακτίνες των οποίων διαφέρουν από τη δεδομένη τιμή r κατά μια μικρή ποσότητα Δr ; Αυτό μπορούμε να το βρούμε παραγωγίζοντας, ή υπολογίζοντας τη διαφορά στις τιμές του x για τις τιμές r και $r + \Delta r$:

$$\Delta x = -\frac{2uh}{ar^3} \Delta r.$$

Εδώ το αρνητικό πρόσημο εκφράζει το γεγονός που αναφέραμε νωρίτερα: ότι η μείωση της ακτίνας ενός σταγονιδίου ($\Delta r < 0$) έχει αποτέλεσμα να διανυθεί μεγαλύτερη απόσταση ($\Delta x > 0$), και αντιστρόφως.

Ας δούμε τώρα πόσο νερό πέφτει πάνω στην επιφάνεια εμβαδού $L\Delta x$. Ο αριθμός των σταγονιδίων με ακτίνα που κυμαίνεται από το r έως το $r + \Delta r$ είναι $\Delta n(r)$. Μπορούμε να κάνουμε το Δr τόσο μικρό ώστε οι μάζες όλων των σταγονιδίων που ανήκουν σ' αυτή την ομάδα να θεωρούνται ίδιες, και ί-

σες με $m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v$. Επομένως, η μάζα του νερού που μεταφέρουν αυτά τα σταγονίδια είναι

$$\Delta M = m(r)\Delta n(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v \Delta n(r).$$

Από αυτή τη σχέση συνεπάγεται ότι

$$G = \frac{\Delta M}{L\Delta x} = -\left(\frac{2\rho_v u}{3Lah}\right)r^6 \frac{\Delta n}{\Delta r}.$$

Όλες οι σταθερές παράμετροι σ' αυτό το πρόβλημα έχουν συγκεντρωθεί μέσα στην παρένθεση. Όμως, ο λόγος $\Delta n/\Delta r$ είναι η αναζητούμενη συνάρτηση κατανομής για τα σταγονίδια. Επομένως,

$$f(r) = \frac{\Delta n}{\Delta r} \sim \frac{1}{r^6}.$$

Αυτή είναι μια πολύ απότομα μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Ας θεωρήσουμε δύο ίσα διαστήματα ακτίνων σταγονιδίων, Δr , κοντά σε δύο τιμές r_1 και $r_2 = 2r_1$. Μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα μέσω του τελευταίου τύπου: ο αριθμός των μικρών σταγονιδίων $\Delta n(r_1)$ μέσα στο διάστημα Δr πρέπει να είναι $(r_2/r_1)^6 = 2^6 = 64$ φορές ο αριθμός των μεγάλων σταγονιδίων $\Delta n(r_2)$.

Επομένως, βρήκαμε τη συνάρτηση κατανομής που πρέπει να χρησιμοποιήσει ένας γεωπόνος για να επιλέξει κατάλληλα τους ψεκαστήρες και τον τρόπο χρήσης τους. Και μάλιστα, μπορεί να την εφαρμόσει όχι μόνο στον ψεκασμό με νερό αλλά και σε άλλες περιπτώσεις – για παράδειγμα, στον ομοιόμορφο ψεκασμό με ζιζανιοκτόνα.

Τελικά, υπάρχουν παράγοντες που δεν τους έχουμε λάβει υπόψη στη λύση μας; Υπάρχουν αρκετοί. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι ο άνεμος δεν φυσάει πάντοτε με σταθερή ταχύτητα, ή το ότι η ταχύτητά του αλλάζει ανάλογα με το ύψος πάνω από το έδαφος, ή το ότι τα σταγονίδια (και ειδικά τα μικρότερα που ταξιδεύουν μακρύτερα) μπορεί να αλλάξουν εξαιτίας της εξάτμισης, κ.λπ. Οποιοδήποτε φυσικό μοντέλο έχει και τα όριά του, μέσα στα οποία είναι αληθινό. Έξω από αυτά τα όρια χρειάζεται διορθώσεις και συμπληρώσεις. Και μερικές φορές, παύει εντελώς να δουλεύει.

Από την άλλη πλευρά, παρατηρήστε πόσους σπουδαίους φυσικούς θυμηθήκαμε μόνο και μόνο επειδή αναρωτηθήκαμε για τον καλύτερο τρόπο ποτίσματος του κήπου μας. Δεν πρέπει να έχετε παράπονο για τη συγκομιδή μας! 

Για να περνά η ώρα

Σ1

Οι σθησμένοι αριθμοί. Σε κάθε τετράγωνο της σειράς στη διπλανή εικόνα υπήρχε γραμμένος ένας αριθμός τέτοιος ώστε το άθροισμα οποιασδήποτε τριάδας διαδοχικών αριθμών να είναι δεκαπέντε. Στη συνέχεια σθησθηκαν όλοι οι αριθμοί εκτός από δύο. Ανακαλύψτε τους σθησμένους αριθμούς.



Σ2

Μια βόλτα στον κήπο. Ένας κήπος έχει δύο ομόκεντρα κυκλικά μονοπάτια και πολλούς ακτινικούς διαδρόμους που τα συνδέουν. Βρίσκεστε στον εξωτερικό κύκλο και θέλετε να πάτε σε κάποιο άλλο σημείο του ίδιου κύκλου. Αν το σημείο αυτό βρίσκεται στο ίδιο τεταρτημόριο, είναι προφανές ότι θα το φτάσετε συντομότερα αν ακολουθήσετε τον εξωτερικό κύκλο. Αν όμως ο προορισμός σας είναι ένα σημείο που βρίσκεται σε θέση σχεδόν εκ διαμέτρου αντίθετη από αυτή που βρίσκεστε αυτή τη στιγμή, είναι μάλλον προτιμότερο να πάτε πρώτα στον εσωτερικό κύκλο από κάποιο ακτινικό μονοπάτι, να περπατήσετε κατά μήκος του εσωτερικού κύκλου, και να καταλήξετε πάλι στον εξωτερικό κύκλο ακολουθώντας το πλησιέστερο ακτινικό μονοπάτι. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει πάντοτε ένα ακτινικό μονοπάτι όπου τυχόν το χρειάζοσαστε, ποια είναι η «διαχωριστική γραμμή» ανάμεσα στις δύο δυνατές επιλογές; (S. Sidhu)



Σ3

Κύκλοι στο νερό. Όταν πέφτει μια πέτρα σε ακίνητο νερό δημιουργούνται κυματισμοί που απομακρύνονται σχηματίζοντας κύκλους. Τι μορφή θα έχουν οι κυματισμοί αν ρίξουμε την πέτρα στο κινούμενο νερό ενός ποταμού; (S. Krotov)



Σ4

Το μυστήριο της Ιντερπόλ. Λύστε τον παρακάτω γρίφο:

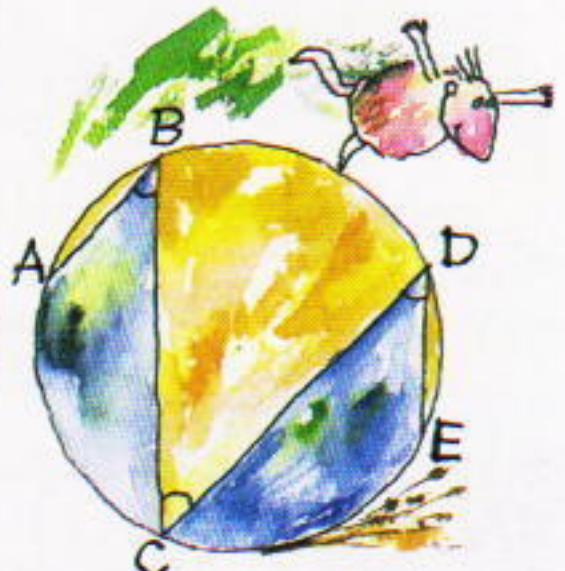
$$\frac{SIX}{NINE} = \frac{2}{3}$$

(Διαφορετικά γράμματα αντιπροσωπεύουν διαφορετικά ψηφία, όμοια γράμματα αντιπροσωπεύουν όμοια ψηφία.) (P. Filevich)



Σ5

Χωρισμός διά της τεθλασμένης οδού. Όλες οι κορυφές μιας πολυγωνικής γραμμής βρίσκονται πάνω σε μια περιφέρεια (δείτε την εικόνα), και οι γωνίες στις κορυφές B, C και D είναι όλες 45°. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του μπλε τμήματος του κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν του κίτρινου τμήματος. (V. Proizvolov)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 64



Φως στην άκρη του τούνελ

Μερικά πράγματα φτάνουν κάποτε σ' ένα τέλος

Dmitry Fomin και Lev Kurlyandchik

Αν σας αρέσει να συνδυάζετε το τερπνόν μετά του ωφελίμου (σ' αυτή την περίπτωση ωφέλιμο είναι τα μαθηματικά), πάρτε μια σακούλα με καραμέλες και καλέστε έναν φίλο σας για να παίξετε το εξής παιχνίδι: Φτιάξτε δύο σωρούς με καραμέλες — 12 κομμάτια στον ένα σωρό και 13 στον άλλο. Κάθε παίκτης κάνει στη σειρά του μια κίνηση που έγκειται είτε στο να φάει δύο καραμέλες από κάποιον από τους δύο σωρούς είτε να μεταφέρει μια καραμέλα από τον πρώτο σωρό στον δεύτερο. Ο παίκτης που δεν μπορεί να κάνει κίνηση, χάνει.

Αν τα εφόδιά σας είναι αρκετά ώστε να σας επιτρέψουν να παίξετε αυτό το υπέροχο παιχνίδι για αρκετή ώρα, θα παρατηρήσετε μια παράξενη κανονικότητα: ο παίκτης που αρχίζει το παιχνίδι χάνει πάντοτε! Όμως, είναι εύκολο να καταλάβουμε πού οφείλεται η μεροληπτική στάση της θεάς Τύχης. Κάθε κίνηση αλλάζει κατά δύο τη διαφορά ανάμεσα στο αριθμό των καραμελών σε κάθε σωρό. Επομένως, το υπόλοιπο αυτής της διαφοράς μετά τη διαίρεσή του με το τέσσερα θα μεταβάλλεται με έναν αυστηρά καθορισμένο τρόπο: $1 (= 13 - 12)$, 3 , 1 , 3 , 1 , 3 , ... Βλέπουμε ότι κάθε φορά, πριν από την κίνηση του δεύτερου παίκτη, το υπόλοιπο είναι τρία. Όμως, το παιχνίδι σταματά μόνο όταν φαγωθούν όλες οι καραμέλες (το υπόλοιπο είναι μηδέν), ή όταν απομείνει μόνο μία καραμέλα στον δεύτερο σωρό (το υπόλοιπο είναι 1). Επομένως, ο δεύτερος παίκτης ουδέποτε αντιμετωπίζει τον κίνδυνο να χάσει.

Πάντως, το πρόβλημα δεν έχει ακόμη λυθεί πλήρως. Αποδείξαμε απλώς ότι δεν είναι δυνατό να χάσει ο δεύτερος παίκτης. Κερδίζει, όμως, υποχρεωτικά; Με άλλα λόγια, το παιχνίδι τελειώνει οπωσδήποτε;

Δεν είναι δύσκολο να βρούμε την απάντηση σ' αυτή τη συγκεκριμένη ερώτηση (η οποία, φυσικά, είναι καταφατική). Υπάρχουν, όμως, πολύ πιο ενδιαφέροντα προβλήματα αυτού του είδους. Σε τούτο το άρθρο θα περιγράψουμε μια μέθοδο επίλυσής τους.

Ας ξεκινήσουμε με ένα παλιό πρόβλημα (που ήταν θέμα στην 1η Ρωσική Μαθηματική Ολυμπιάδα το 1961).

Πρόβλημα 1. (A. Schwarz) Δίνεται ένας $m \times n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Επιτρέπεται να αλλάξουμε τα πρόσθετα όλων των αριθμών σε οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη. Αποδείξτε ότι έπειτα από κάποιον αριθμό εκτελέσεων αυτής της πράξης μπορούμε να κάνουμε μη αρνητικό το άθροισμα όλων των αριθμών σε κάθε γραμμή ή στήλη του πίνακα.

Ας δούμε τι συμβαίνει στο άθροισμα όλων των αριθμών του πίνακα έπειτα από μια εκτέλεση της πράξης. Αν το άθροισμα των όρων της επιλεγμένης γραμμής ή στήλης (αυτής που άλλαξαν τα πρόσθετα) ήταν αρνητικό, το συνολικό άθροισμα αυξάνει. Αν το «άθροισμα της γραμμής ή στήλης» ήταν θετικό, το συνολικό άθροισμα μειώνεται, ενώ αν «η γραμμή ή στήλη είχε άθροισμα» μηδέν, το συνολικό άθροισμα παραμένει το ίδιο. Επομέ-

νως, όταν υπάρχει μια γραμμή ή στήλη με αρνητικό άθροισμα, μπορούμε να αυξήσουμε το συνολικό άθροισμα εφαρμόζοντας την πράξη μας σ' αυτή τη γραμμή ή στήλη.

Είναι δυνατόν, όμως, να αυξηθεί άπειρες φορές το συνολικό άθροισμα;

Φυσικά όχι! Πραγματικά, οι πράξεις μας μπορούν να δημιουργήσουν μόνο πεπερασμένο πλήθος πινάκων, διότι καθεμιά από τις m καταχωρίσεις του πίνακα μπορεί να πάρει δύο μόνο τιμές (που διαφέρουν στο πρόσημό τους), και επομένως δεν μπορεί να υπάρχουν συνολικά περισσότεροι από 2^{mn} διαφορετικοί πίνακες.¹ Επομένως, το συνολικό άθροισμα όλων των αριθμών στον πίνακά μας παίρνει πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών τιμών.

Ας επιστρέψουμε τώρα στον αρχικό πίνακα. Διαλέξτε μια γραμμή ή στήλη με αρνητικό άθροισμα (αν δεν υπάρ-

1. Στην πραγματικότητα, το πλήθος των πινάκων που μπορούμε να πάρουμε από τον δεδομένο πίνακα μέσω των πράξεών μας είναι σημαντικά μικρότερο. Αφού δύο εφαρμογές της πράξης μας στην ίδια γραμμή ή στήλη αλληλοεξουδετερώνονται, κάθε διαφορετικός πίνακας προκύπτει αν αντιστρέψουμε τα πρόσθετα της κάθε γραμμής ή στήλης όχι περισσότερο από μία φορά. Υπάρχουν $m + n$ γραμμές και στήλες, και επομένως το πλήθος των πινάκων δεν είναι μεγαλύτερο από 2^{m+n} . Τελικά, είναι ακόμη μικρότερο, διότι διαφορετικά σύνολα πράξεων μπορεί να δημιουργήσουν το ίδιο αποτέλεσμα. Ίσως θελήσετε να επιβεβαιώσετε ότι το ακριβές πλήθος των πινάκων που παράγονται από τον δεδομένο πίνακα είναι 2^{m+n-1} .

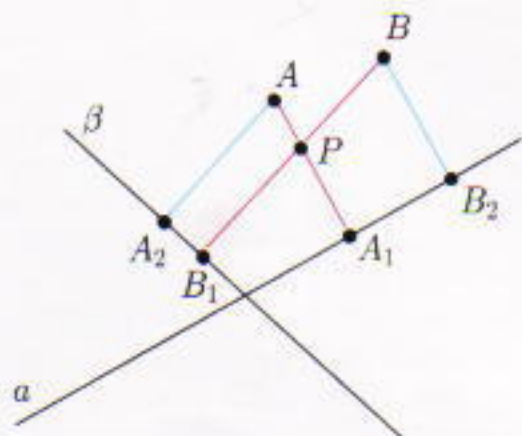
χουν τέτοιες έχουμε ήδη τελειώσει). Εφαρμόστε την πράξη εναλλαγής προσήμου σ' αυτή τη γραμμή ή στήλη. Βρείτε ξανά μια γραμμή ή στήλη με αρνητικό άθροισμα στον πίνακα που προκύπτει, και ούτω καθεξής. Προσέξτε ότι το συνολικό άθροισμα: (α) αυξάνεται κάθε φορά που εφαρμόζουμε την πράξη μας, και (β) παίρνει πεπερασμένο μόνο πλήθος τιμών. Επομένως, αργά ή γρήγορα, η διαδικασία θα φτάσει σε ένα τέλος. Και αυτό σημαίνει ότι δεν θα μπορούμε να βρούμε μια γραμμή ή στήλη με αρνητικό άθροισμα — δηλαδή, όλα τα αθροίσματα σε κάθε γραμμή ή στήλη θα έχουν γίνει μη αρνητικά, και επομένως θα έχουμε καταλήξει στον επιθυμητό πίνακα.

Το επόμενο πρόβλημα δεν έχει, σε πρώτη ματιά, τίποτε το κοινό με αυτό που μόλις εξετάσαμε. Και όμως...

Πρόβλημα 2. Δίνονται n σημεία, που ανά τρία δεν είναι συγγραμμικά, και n ευθείες, που ανά δύο δεν είναι παράλληλες. Αποδείξτε ότι από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς μια από τις ευθείες (ένα ανά ευθεία) έτσι ώστε κανένα κάθετο τμήμα να μην τέμνει άλλο.

Ας αρχίσουμε σχεδιάζοντας κάθετα ευθύγραμμα τμήματα — ένα από κάθε σημείο και ένα σε κάθε ευθεία — με αυθαίρετη σειρά. Αν κανένα από τα κάθετα τμήματα δεν τέμνει άλλο, τότε ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του προβλήματος.

Διαφορετικά, θεωρήστε δύο τεμνόμενα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα AA_1 και BB_1 που έχουμε φέρει από τα σημεία A και B προς τις ευθείες a και β αντίστοιχα (Σχήμα 1). Έστω P το κοινό τους σημείο. Αντικαταστήστε τις AA_1 και BB_1 με τα κάθετα AA_2 και BB_2 που φέρουμε από τα σημεία A και B προς τις ευθείες β και a αντίστοιχα. Τότε το άθροισμα του μήκους των



Σχήμα 1

κάθετων ευθύγραμμων τμημάτων θα μειωθεί. Πράγματι, είναι φανερό ότι $AA_2 \leq AB_1 \leq AP + PB_1$, ενώ και οι δύο αυτές ανισότητες γίνονται ισότητες μόνο όταν το AB_1 είναι κάθετο στην β . Ομοίως, $BB_2 \leq BP + PA_1$. Αν προσθέσουμε τις δύο ανισότητες, και λαμβάνοντας υπόψη ότι το AB δεν μπορεί να είναι κάθετο προς τις δύο ευθείες a και β ταυτόχρονα, παίρνουμε $AA_2 + BB_2 < (AP + PA_1) + (BP + PB_1)$ ($BP + PB_1 = AA_1 + BB_1$).

Τώρα, ας κάνουμε ό,τι κάναμε και στο πρώτο πρόβλημα. Πάρτε το αρχικό αυθαίρετο σύνολο κάθετων ευθύγραμμων τμημάτων. Διαλέξτε δύο τεμνόμενα (αν υπάρχουν) και εφαρμόστε την πράξη μας: αντικαταστήστε τα τεμνόμενα κάθετα τμήματα, με δύο άλλα, που το άθροισμα του μήκους τους είναι μικρότερο. Βρείτε δύο τεμνόμενα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα στο νέο σχήμα, εφαρμόστε και πάλι την πράξη μας, και ούτω καθεξής. Παρατηρήστε τις εξής δύο ιδιότητες που έχει το άθροισμα όλων των καθέτων: (α) το άθροισμα μειώνεται σε κάθε βήμα της διαδικασίας μας, και (β) το άθροισμα μπορεί να πάρει πεπερασμένο μόνο πλήθος τιμών (γιατί;). Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι αυτή η διαδικασία «ξεμπλέγματος» των καθέτων δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον. Από τη στιγμή, όμως, που θα σταματήσει, θα έχουμε φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα, γιατί θα είναι πια αδύνατο να βρούμε άλλα τεμνόμενα κάθετα τμήματα.

Ας εξετάσουμε τις λύσεις των δύο προβλημάτων. Ακολουθήσαμε την ίδια προσέγγιση και τις δύο φορές: Ορίσαμε συγκεκριμένη τιμή (το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα στο πρώτο πρόβλημα, το άθροισμα του μήκους όλων των κάθετων ευθύγραμμων τμημάτων στο δεύτερο) και μια πράξη, η εφαρμογή της οποίας αλλάζει την τιμή αυτή με τον ίδιο τρόπο κάθε φορά (την αυξάνει στο πρώτο πρόβλημα, τη μειώνει στο δεύτερο). Η λύση βασίστηκε στο γεγονός ότι η ποσότητα που εισαγάγαμε μπορούσε να πάρει μόνο πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών τιμών. Επομένως, η πράξη μπορούσε να εφαρμοστεί πεπερασμένες μόνο φορές, μετά τις οποίες φτάναμε αναπόφευκτα στην επιθυμητή κατάσταση.

Από αυτή την άποψη, το δεύτερο πρόβλημα είναι δυσκολότερο από το

πρώτο, αφού για να το λύσουμε έπρεπε να επινοήσουμε και την άγνωστη τιμή, της οποίας θα παρακολουθούσαμε τη μεταβολή, αλλά και την πράξη.

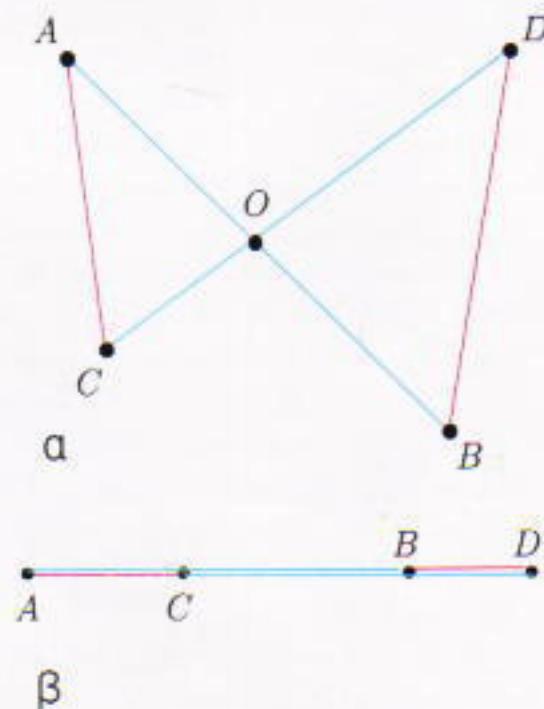
Επίσης, το δεύτερο πρόβλημα μας προσφέρει ένα θαυμάσιο παράδειγμα για το πόσο εύκολο είναι να πάρουμε λανθασμένο δρόμο: Τα νέα κάθετα τμήματα, AA_2 και BB_2 , δεν τέμνονται, και επομένως μοιάζει λογικό να εισαγάγουμε ως χαρακτηριστική τιμή το συνολικό πλήθος των τομών των n καθέτων στο σχήμα μας, που φαίνεται να μειώνεται έπειτα από κάθε εκτέλεση της πράξης μας. Όμως, αυτό δεν είναι σωστό (προσπαθήστε να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα). Δεν είναι καθόλου εύκολο να μάθουμε πώς να δημιουργούμε ένα κατάλληλο ζεύγος «πράξης-τιμής» — απαιτείται πείρα και έμπνευση.

Δεν υπάρχει καθιερωμένος μαθηματικός όρος για μια ποσότητα που μεταβάλλεται μονότονα και παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών. Ας την ονομάσουμε *μονομεταβλητή*.

Το επόμενο πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί επίσης πολύ γνωστό.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε $2n$ σημεία του επιπέδου μπορούν να θεωρηθούν ως τα άκρα n μη τεμνόμενων ανά δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

Κατ' αρχάς σχεδιάζουμε, αυθαίρετα, n ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν n ζεύγη των δεδομένων σημείων. Αν τα τμήματα αυτά δεν τέμνονται ανά δύο, έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά, θεωρούμε δύο τεμνόμενα τμήματα



Σχήμα 2

AB και CD (Σχήμα 2). Η πράξη έγκειται στην αντικατάσταση αυτών των τμημάτων από τα μη τεμνόμενα τμήματα AC και BD .

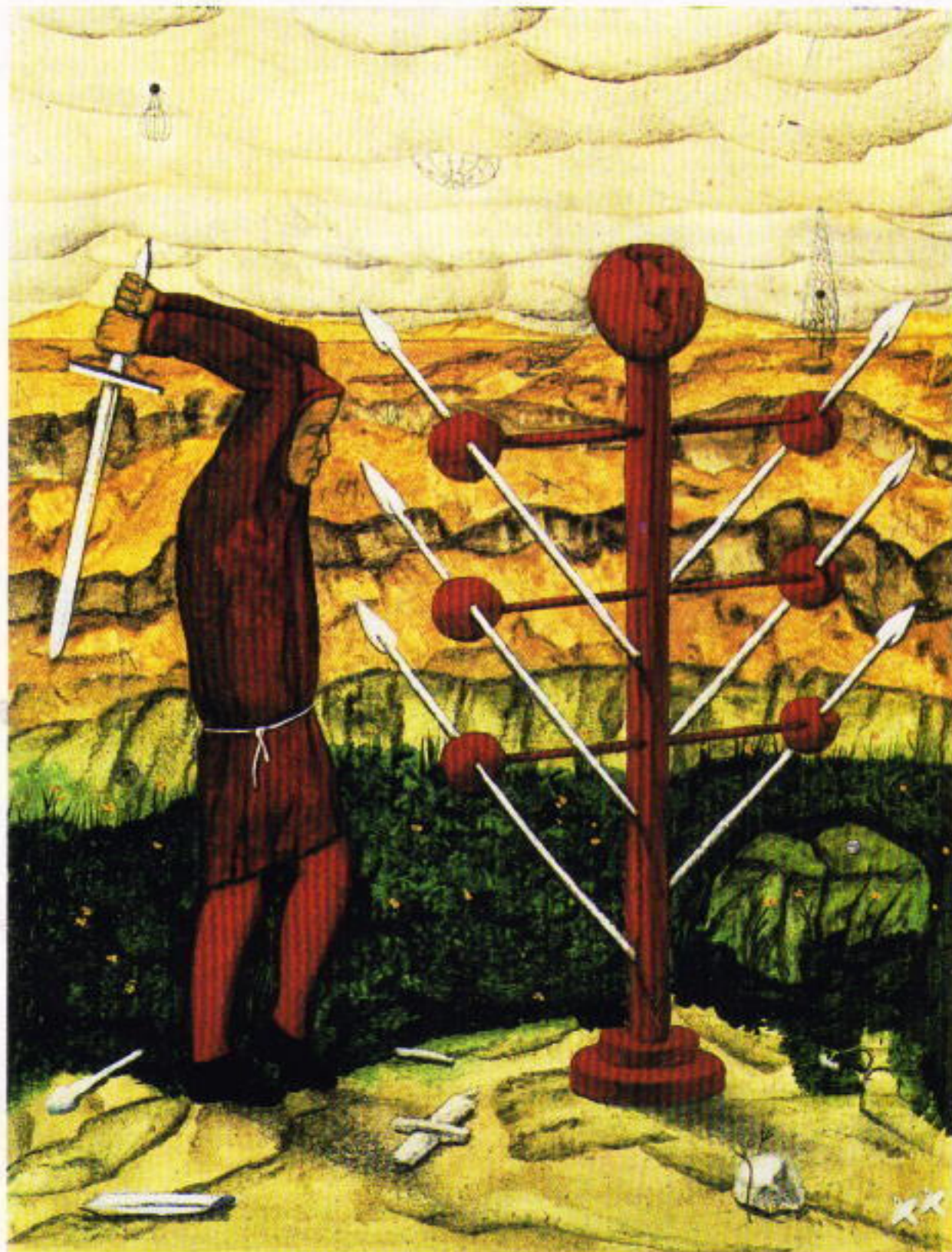
Απομένει να βρούμε μια μονομεταβλητή – μια τιμή που θα αλλάζει μονότονα με την πράξη μας. Το άθροισμα των διαγωνίων AB και CD ενός κυρτού τετραπλεύρου $ABCD$ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των απέναντι πλευρών AC και BD : στο Σχήμα 2α, $AB + CD = (AO + OB) + (CO + OD) = (AO + OC) + (BO + OD) > AC + BD$. Ο αναγνώστης μπορεί να διαπιστώσει ότι αυτή η ανισότητα παραμένει αληθής και στην εκφυλισμένη περίπτωση του Σχήματος 2β. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ως μονομεταβλητή το άθροισμα του μήκους όλων των n τμημάτων. Το άθροισμα αυτό μπορεί να πάρει μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών, διότι υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος δυνατών τμημάτων. Ακριβώς όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, αυτές οι πράξεις θα μας οδηγήσουν σε ένα σύνολο n μη τεμνόμενων τμημάτων.

Σε τούτο το πρόβλημα, δεν είχαμε εξαρχής ούτε την πράξη ούτε τη μονομεταβλητή. Αλλά από τη στιγμή που ανακαλύψαμε την πράξη, δεν ήταν δύσκολο να διαλέξουμε την κατάλληλη μονομεταβλητή.

Πρόβλημα 4. (V. Alexeyev) Διάφοροι αριθμοί είναι τοποθετημένοι πάνω σε έναν κύκλο. Όταν τέσσερις διαδοχικοί αριθμοί a, b, c και d ικανοποιούν την ανισότητα $(a - d)(b - c) > 0$, μπορούμε να εναλλάξουμε τους b και c . Αποδείξτε ότι μπορούμε να επαναλάβουμε αυτή την πράξη μόνο πεπερασμένο πλήθος φορές.

Εδώ η πράξη μας δίνεται από την αρχή. Αν και αφορά μόνο δύο αριθμούς, είναι βολικότερο να τη θεωρούμε ως μια πράξη πάνω στο σύνολο όλων των δοθέντων αριθμών, υποθέτοντας ότι όλοι οι αριθμοί, εκτός από τους b και c , παραμένουν αμετάβλητοι: σύμφωνα με τη «φιλοσοφία επίλυσης» που ακολουθούμε, κάθε μονομεταβλητή που εισάγουμε πρέπει να εξαρτάται από το σύνολο όλων των αριθμών.

Επομένως, υποθέτουμε ότι εφαρμόζουμε την πράξη μας στους αριθμούς a, b, c και d – δηλαδή $(a - d)(b - c) > 0$ ή $ab + cd > ac + bd$. Η πράξη μετατρέ-



πει την τετράδα a, b, c, d στην a, c, b, d και, λόγω της προηγούμενης ανισότητας, μειώνει το άθροισμα των γινομένων των γειτονικών αριθμών:

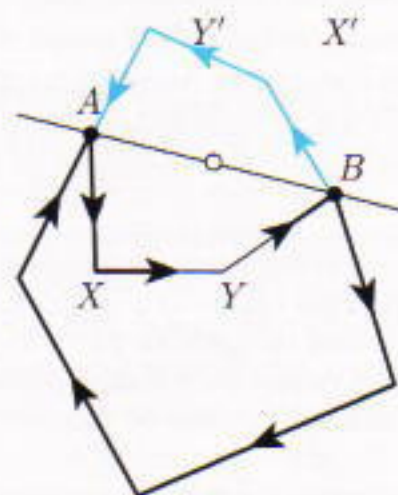
$$ab + bc + cd > ac + cb + bd.$$

Είναι φανερό τώρα ότι η απαιτούμενη μονομεταβλητή μπορεί να οριστεί ως το άθροισμα των γινομένων όλων των ζευγαριών γειτονικών αριθμών πάνω στον κύκλο. Η πράξη μας μειώνει αυτή τη μονομεταβλητή, και αφού το άθροισμα των γινομένων μπορεί να πάρει μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών (γιατί;), η πράξη μπορεί να εφαρμοστεί μόνο πεπερασμένο πλήθος φορές.

Το επόμενο πρόβλημα το έχουμε δανειστεί από το *Problems in Plane Geometry* του V. Prasolov.

Πρόβλημα 5. Σε ένα μη κυρτό πολύ-

γωνο εφαρμόζουμε την εξής πράξη: αν βρίσκεται από τη μια πλευρά μιας ευθείας AB , που ενώνει δύο μη διαδοχικές κορυφές A και B , τότε το ένα από τα μέρη της περιμέτρου του πολυγώνου, στα οποία χωρίζεται αυτή από την AB , «αντικατοπτρίζεται» στο μέ-



Σχήμα 3

σο του τμήματος AB — δηλαδή, περιστρέφεται κατά 180° γύρω από το μέσο (Σχήμα 3). Αποδείξτε ότι έπειτα από έναν αριθμό παρόμοιων πράξεων, το πολύγωνο γίνεται κυρτό.

Και εδώ, η πράξη καθορίζεται από τη διατύπωση του προβλήματος. Η μονομεταβλητή ποσότητα είναι εξίσου φανερά — είναι το εμβαδόν του πολυγώνου. Το γεγονός ότι το εμβαδόν μπορεί να πάρει μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών είναι λιγότερο φανερό. Για να το αποδείξετε, θεωρήστε τα ελεύθερα διανύσματα που συνδέουν διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου, ας πούμε κατά δεξιόστροφη φορά. Η πράξη μας διατηρεί αυτό το σύνολο των διανυσμάτων, αν και τα αναδιατάσσει γύρω από την περίμετρο. Μπορούμε να δούμε ότι κάθε πολύγωνο που είναι δυνατό να προκύψει, ξεκινώντας από αυτό που μας έχει δοθεί, ορίζεται πλήρως από τη σειρά των διανυσμάτων. Όμως υπάρχει πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών σειρών διανυσμάτων, και, επομένως, πολυγώνων και δυνατών εμβαδών.²

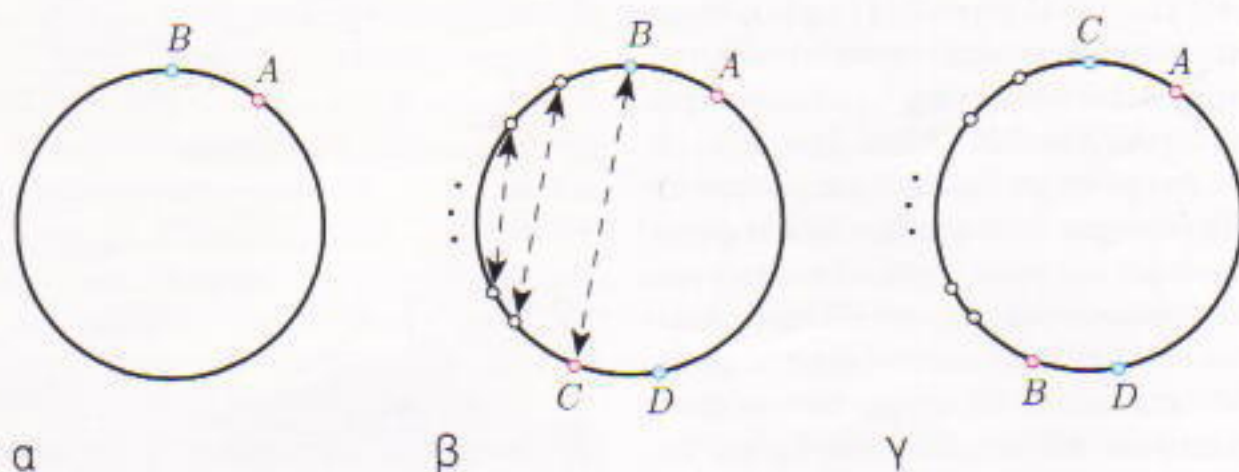
Και τώρα, ένα πρόβλημα από τη Μαθηματική Ολυμπιάδα της ΕΣΣΔ του 1979. Μόνο τρεις από τους διαγωνιζόμενους κατάφεραν να το λύσουν.

Πρόβλημα 6. Κάθε μέλος του κοινοβουλίου δεν έχει περισσότερους από τρεις εχθρούς ανάμεσα στα άλλα μέλη του κοινοβουλίου.³ Αποδείξτε ότι μπορούμε να χωρίσουμε το κοινοβούλιο σε δύο ομάδες, έτσι ώστε κάθε μέλος του να μην έχει περισσότερους από έναν εχθρούς στην ομάδα στην οποία ανήκει.

Όπως και προηγουμένως, ας χωρίσουμε αρχικά το κοινοβούλιο σε δύο ομάδες με τυχαίο τρόπο. Αν κάθε μέλος του κοινοβουλίου δεν έχει περισσότερους από έναν εχθρούς στην ομάδα στην οποία ανήκει, θα έχουμε την επιθυμητή διαμέριση. Διαφορετικά, υπάρχει ένα τουλάχιστον μέλος A του κοινοβουλίου που έχει τουλάχιστον δύο ε-

2. Είναι ενδιαφέρον ότι η απόδειξη αυτή δεν ισχύει για συμμετρία ως προς την ευθεία AB αντί ως προς το μέσο του AB . Η αιτία είναι απλώς ότι η συμμετρία ως προς άξονα αλλάζει το σύνολο των διανυσμάτων.

3. Σε τούτο και στο επόμενο πρόβλημα υποθέτουμε ότι αν ο B είναι εχθρός του A , τότε και ο A είναι εχθρός του B .



Σχήμα 4

χθρούς στην ομάδα του. Επομένως, ο A δεν έχει περισσότερους από έναν εχθρούς στην άλλη ομάδα. Οπότε, αν μεταφέρουμε τον A στην άλλη ομάδα, το πλήθος των ζευγαριών εχθρών που ανήκουν στην ίδια ομάδα θα μειωθεί. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε τον εν λόγω αριθμό ως μονομεταβλητή. Η απόδειξη μπορεί να συμπληρωθεί με την τυπική φράση, «η μονομεταβλητή είναι δυνατό να λάβει μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών».

Παρεμπιπτόντως, σε τούτο το πρόβλημα μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την τελευταία δήλωση χωρίς σχεδόν να χρειαστεί να μελετήσουμε τη συγκεκριμένη κατάσταση: αρκεί να επισημάνουμε ότι η μονομεταβλητή μας είναι ένας θετικός ακέραιος (μία ακολουθία θετικών ακεραίων δεν μπορεί να ελαττώνεται επ' άπειρον).

Το επόμενο πρόβλημα τέθηκε στην Ολυμπιάδα της Μόσχας το 1964. Αποδείχτηκε τόσο δύσκολο, ώστε κανείς από τους διαγωνιζόμενους δεν κατόρθωσε να το λύσει.

Πρόβλημα 7. Ο βασιλιάς Αρθούρος κάλεσε $2N$ ιππότες στην αυλή του. Ο κάθε ιππότης δεν έχει περισσότερους από $N - 1$ εχθρούς ανάμεσα στους ιππότες που είναι παρόντες. Αποδείξτε ότι ο μάγος Μέρλιν μπορεί να τοποθετήσει τους ιππότες γύρω από τη Στρογγυλή Τράπεζα με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν δύο εχθροί καθισμένοι ο ένας δίπλα στον άλλο.

Ας τοποθετήσουμε τους ιππότες με τυχαίο τρόπο γύρω από τη Στρογγυλή Τράπεζα. Αν η απαίτηση του προβλήματος δεν ικανοποιείται, θα μπορέσουμε να βρούμε δύο εχθρούς, A και B , να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι ο B κάθεται δεξιά από τον A (Σχήμα 4α).

Το ίδιο το πρόβλημα υποβάλλει την τιμή που θα δοκιμάσουμε ως μονομεταβλητή: το πλήθος των ζευγαριών γειτονικών εχθρών στο τραπέζι (συγκρίνετε την περίπτωση αυτή με την προηγούμενη λύση).

Θεωρήστε δύο φίλους (δηλαδή, ιππότες που δεν είναι εχθροί) του A . Κάποιος από αυτούς, ο C , πρέπει να έχει έναν φίλο του B στα δεξιά του — θα τον ονομάσουμε D . (Διαφορετικά, ο B θα είχε περισσότερους από $N - 1$ εχθρούς, διότι ο A δεν έχει λιγότερους από N φίλους.) Τώρα, ας αντιστρέψουμε τη σειρά των ιπποτών που κάθονται ανάμεσα στον A και στον D από τη δεξιά πλευρά του A (Σχήμα 4β). Τότε ο C γίνεται γείτονας του A και ο B γίνεται γείτονας του D , ενώ όλα τα άλλα γειτονικά ζευγάρια παραμένουν τα ίδια (Σχήμα 4γ). Επομένως, η υποθετική μας μονομεταβλητή πραγματικά μειώνεται, διότι τα ζευγάρια (A, B) και (C, D) — από τα οποία, τουλάχιστον το ένα, το (A, B) , αποτελείται από εχθρούς — αντικαθίστανται από δύο «φιλικά ζευγάρια»: (A, C) και (B, D) . Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε την απόδειξη με τον συνήθη τρόπο.

Μια φυσική ερώτηση που προκύπτει σε προβλήματα με μονομεταβλητές είναι πόσο θα διαρκέσει η εξεταζόμενη διαδικασία. Μελετήστε από αυτή την οπτική γωνία τα προβλήματα που εξετάσαμε. Θα δείτε ότι συνήθως δεν είναι εύκολο να απαντήσουμε.

Θα δώσουμε ένα μόνο παράδειγμα.

Πρόβλημα 8. Έχουμε γράψει στο μαυροπίνακα μια σειρά από N αριθμούς, καθένας από τους οποίους είναι ίσος με $+1$ ή με -1 . Μια «κίνηση» έγκειται στην αλλαγή του προσήμου μερικών διαδοχικών αριθμών. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που αρ-

κεί για να καταλήξουμε σε μια σειρά από $+1$, ξεκινώντας από οποιαδήποτε αρχική τοποθέτηση των προσήμων;

Σ' αυτή την περίπτωση, η πράξη μάς δίνεται από τις συνθήκες του προβλήματος. Ας μετρήσουμε τα ζευγάρια των γειτονικών αριθμών που έχουν διαφορετικά πρόσημα και ας πάρουμε ως μονομεταβλητή το αποτέλεσμα της μέτρησης. Μετά την εφαρμογή της πράξης μας, η τιμή της μονομεταβλητής μεταβάλλεται το πολύ κατά δύο.

Ας αποδείξουμε ότι η σειρά των N αριθμών $-1, +1, -1, +1, \dots$ δεν μπορεί να μετατραπεί στην $+1, +1, +1, \dots$ σε λιγότερο από $n = [(N+1)/2]$ κινήσεις, όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x . Όταν θα έχουμε εκτελέσει k κινήσεις, η μονομεταβλητή μας θα μεταβληθεί το πολύ κατά $2k$. Η μεταβολή της θα είναι ακόμη μικρότερη αν μία τουλάχιστον από τις κινήσεις αφορά κάποιον από τους αριθμούς που βρίσκονται στα άκρα της σειράς, διότι μια παρόμοια κίνηση μεταβάλλει τη μονομεταβλητή κατά ένα (ή δεν τη μεταβάλλει καθόλου, αν αντιστρέφει τα πρόσημα όλων των αριθμών). Μετατρέποντας τη δεδομένη σειρά με τα εναλλασσόμενα πρόσημα στη σταθερή σειρά των $+1$, πρέπει να κάνουμε τουλάχιστον μία φορά αυτή τη «μικρή αλλαγή» — όταν θα αλλάξουμε το πρόσημο του -1 στην αρχή της σειράς. Επομένως, αν καταφέρουμε να κάνουμε αυτό το μετασχηματισμό σε $k < n$ κινήσεις, θα έχουμε μεταβάλει τη μονομεταβλητή λιγότερο από $2k \leq 2(n-1) \leq 2((N+1)/2) - 2 = N-1$. Όμως, αυτή η μεταβολή πρέπει να είναι ακριβώς ίση με $N-1$, αφού η αρχική τιμή της μονομεταβλητής είναι $N-1$ και η τελική τιμή της είναι μηδέν. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός που αναζητούμε είναι τουλάχιστον n .

Στην πραγματικότητα, είναι ίσος με το n . Για να το αποδείξετε, πάρτε οποιαδήποτε αρχική σειρά με $+1$ και -1 και ξεχωρίστε τις ομάδες που αποτελούνται από διαδοχικά -1 . Αν το πλήθος αυτών των ομάδων είναι k , τότε τα $+1$ που υπάρχουν ανάμεσα στις ομάδες είναι τουλάχιστον $k-1$, και επομένως $k+(k-1) = 2k-1 \leq N$, και το πλήθος των ομάδων $k \leq (N+1)/2$. Επειδή το k είναι ακέραιος, $k \leq [(N+1)/2] = n$. Αν τώρα αλλάξουμε διαδοχικά τα σύμβολα στις ομάδες, θα κάνουμε όλους τους αριθμούς θετικούς σε $k \leq n$ κινήσεις.

Επομένως, n κινήσεις είναι πάντοτε αρκετές, ενώ λιγότερες από n μπορεί να μην επαρκέσουν.

Επιστρέφοντας στο παιχνίδι μας με τις καραμέλες, παρατηρούμε ότι και σ' αυτό υπάρχει μονομεταβλητή — για παράδειγμα, η παράσταση $2a+b$, όπου a και b είναι οι καραμέλες που υπάρχουν στον πρώτο και στον δεύτερο σωρό, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι το παιχνίδι δεν μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον.

Ασκήσεις

Οι περισσότερες από τις επόμενες ασκήσεις προέρχονται από τις Μαθηματικές Ολυμπιάδες της ΕΣΣΔ και τις Μαθηματικές Ολυμπιάδες του Λένινγκραντ, στο διάστημα 1973-1987.

1. Έχουμε N κόκκινα και N μπλε σημεία στο επίπεδο, χωρίς να υπάρχουν μεταξύ τους τρία συγγραμμικά. Αποδείξτε ότι μπορούμε να φέρουμε N μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα κόκκινα σημεία με τα μπλε.

2. Δίνεται ένας αριθμός από κόκκινα και μπλε σημεία, μερικά από τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα. Θα ονομάζουμε ένα σημείο ειδικό αν περισσότερα από τα μισά σημεία που συνδέονται με αυτό έχουν διαφορετικό χρώμα από το ίδιο. Διαλέγουμε ένα ειδικό σημείο (αν υπάρχει) και το χρωματίζουμε με το άλλο χρώμα. Αποδείξτε ότι έπειτα από έναν αριθμό παρόμοιων βημάτων δεν θα απομείνουν ειδικά σημεία.

3. Έχουμε N σημεία στο επίπεδο, και μερικά από αυτά συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα. Από κανένα σημείο δεν ξεκινούν περισσότερα από 11 ευθύγραμμα τμήματα. Αποδείξτε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε αυτά τα σημεία με τέσσερα χρώματα, με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν περισσότερα από N τμήματα με άκρα του ίδιου χρώματος.

4. Κάθε έδρα ενός κύβου έχει έναν αριθμό γραμμένο πάνω της, και οι αριθμοί δεν είναι όλοι ίδιοι. Αντικαθιστούμε κάθε αριθμό με τον αριθμητικό μέσο των αριθμών που βρίσκονται στις τέσσερις γειτονικές έδρες του κύβου. Είναι δυνατό να εμφανιστούν οι αρχικοί αριθμοί στις έδρες του κύβου έπειτα από έναν αριθμό παρόμοιων πράξεων;

5. Έχουμε γράψει N θετικούς ακέραιους πάνω σ' έναν κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο γειτονικούς αριθμούς γράφουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους. Στη συνέχεια σβήνουμε τους παλιούς αριθμούς και επαναλαμβάνουμε την ίδια πράξη με τους νέους αριθμούς που έχουμε γράψει. Αποδείξτε ότι έπειτα από έναν αριθμό βημάτων όλοι οι αριθμοί θα είναι ίσοι.

6. Στο μαυροπίνακα είναι γραμμένα ένα 1 και εννέα 0. Καθένας αριθμός από οποιοδήποτε ζευγάρι μπορεί να αντικατασταθεί από τον αριθμητικό τους μέσο. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να εμφανιστεί στη θέση του αριθμού 1 έπειτα από μια σειρά τέτοιων πράξεων;

7. Έχουμε ένα απεριόριστο πλέγμα σχεδιασμένο πάνω σε άσπρο χαρτί και χρωματίζουμε πεπερασμένο πλήθος τετραγώνων του πλέγματος με μαύρο χρώμα. Σε κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, 3, \dots$ κάθε τετράγωνο παίρνει το χρώμα που πλειοψηφεί στα επόμενα τρία τετράγωνα: το ίδιο, το τετράγωνο που βρίσκεται από πάνω του, και το τετράγωνο που βρίσκεται δεξιά του. Αποδείξτε ότι έπειτα από κάποιο χρονικό διάστημα δεν θα υπάρχουν καθόλου μαύρα τετράγωνα.

8. Μερικά παιδιά στέκονται έτσι που να σχηματίζουν έναν κύκλο, και το καθένα κρατά μια χούφτα καραμέλες. Όταν ο αρχηγός του παιχνιδιού δώσει το σινιάλο, ο κάθε παίκτης δίνει τις μισές καραμέλες του στον δεξιό γείτονά του (αν το πλήθος των καραμελών είναι περιττός αριθμός, ο αρχηγός δίνει μία επιπλέον καραμέλα στον παίκτη). Αποδείξτε ότι έπειτα από έναν ορισμένο αριθμό γύρων του παιχνιδιού, όλα τα παιδιά θα έχουν το ίδιο πλήθος καραμελών.

9. Όλοι οι τόμοι της Εγκυκλοπαίδειας Μπριτάννικα βρίσκονται σε τυχαία σειρά σε ένα ειδικό ράφι της βιβλιοθήκης. Κάθε λειψό, ένας βιβλιοθηκάριος-ρομπότ παίρνει αυθαίρετα έναν τόμο που δεν είναι στη σωστή του θέση και τον τοποθετεί στη σωστή — δηλαδή, αν ο τόμος έχει αύξοντα αριθμό k , το ρομπότ τον τοποθετεί στη θέση k . Αποδείξτε ότι, αργά ή γρήγορα, όλοι οι τόμοι θα βρεθούν στη σωστή τους θέση. 

Τι κάνουν τα μικρά αστέρια

Που δεν μπορούν να κάνουν οι μεγάλοι πλανήτες

Pavel Bliokh

Προσπαθήστε καμιά φορά να παίξετε το εξής παιχνίδι: εσείς λέτε μια λέξη, και ο φίλος σας πρέπει να απαντήσει λέγοντας όποια ενέργεια του έρχεται στο μυαλό. Έπειτα παρουσιάζετε ένα χαρτί πάνω στο οποίο έχετε από πριν γράψει τις απαντήσεις, οι οποίες, στις περισσότερες περιπτώσεις, είναι τα ρήματα που έχει αναφέρει ο φίλος σας. Καταπληκτικό... Σχεδόν μπορείτε να διαβάσετε το μυαλό των ανθρώπων! Εσείς λέτε «σκυλί», ο φίλος σας απαντά «γαβγίζει», λέτε «πουλί», και απαντά «πετάει», λέτε «ψάρι», και απαντά «κολυμπάει». Και αν πείτε «αστέρι», το πιθανότερο είναι ότι θα απαντήσει «λάμπει», γιατί το πανέμορφο θέαμα του νυχτερινού ουρανού με τα χιλιάδες αστρα που λαμπυρίζουν, είναι βαθιά χαραγμένο στη συνείδησή μας.

Χωρίς αμφιβολία, θα μπορούσαμε να θαυμάζουμε για ώρες το στερέωμα και τα αστρα του που τρεμοπαίζουν παίρνοντας όλες τις αποχρώσεις του ουράνιου τόξου. Αργά ή γρήγορα, όμως, σε ένα ερευνητικό μυαλό θα γεννηθεί η απορία: «Γιατί τρεμοπαίζουν τα αστρα; Γιατί σπινθηρίζουν;»

Σπινθηροβόλα γεγονότα

Η λαμπρότητα ενός αστρού μπορεί να μεταβληθεί με δύο τρόπους: είτε αλλάζει η ποσότητα του φωτός που εκπέμπει το αστρο (όπως ακριβώς τρεμοσβήνει η φλόγα του κεριού μια νύχτα με δυνατό αέρα) είτε αλλάζει το φως κατά τη διάρκεια του μεγάλου ταξιδιού του ως τη Γη. Ας επισημάνουμε

μερικά γεγονότα που συνδέονται με το σπινθήρισμα των αστρον (τα περισσότερα μπορείτε να τα επαληθεύσετε και μόνοι σας).

1. Το σπινθήρισμα των αστρον εξαρτάται και από τον καιρό και από την τοποθεσία όπου βρίσκεστε. Με καλό καιρό σε ένα βουνό, το σπινθήρισμα των αστρον είναι ελάχιστο. Αυτό ισχύει ακόμη περισσότερο όταν βλέπετε τα αστρα από ένα αεροπλάνο που πετάει σε μεγάλο ύψος, ενώ η λαμπρότητα των αστρον που παρατηρούν οι αστροναύτες δεν μεταβάλλεται καθόλου.

2. Τα αστρα που βρίσκονται κοντά στο ζενίθ (ακριβώς από πάνω μας) σπινθηρίζουν πολύ λιγότερο από όσα βρίσκονται κοντά στον ορίζοντα. Αντίστοιχα, η λαμπρότητα μιας απομακρυσμένης επίγειας φωτεινής πηγής μεταβάλλεται επίσης σε μεγάλο βαθμό, ενώ η ίδια ακριβώς φωτεινή πηγή δίνει σταθερή λάμψη (χωρίς σπινθηροβόλημα) όταν βρίσκεται κοντά.

3. Η ένταση του σπινθηρισμού εξαρτάται από το αν παρατηρούμε τον ουρανό με γυμνό μάτι ή μέσω ενός τηλεσκοπίου. Αν η διάμετρος του αντικειμενικού φακού του τηλεσκοπίου είναι μεγαλύτερη από λίγες δεκάδες εκατοστά, η λαμπρότητα του αστρού δεν φαίνεται να μεταβάλλεται, αν και το είδωλό του τρέμει — δηλαδή, ταλαντώνεται χαστικά γύρω από μια συγκεκριμένη μέση θέση.

4. Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά τα ουράνια σώματα, θα προσέξουμε ορισμένα συγκεκριμένα «αστρα» που

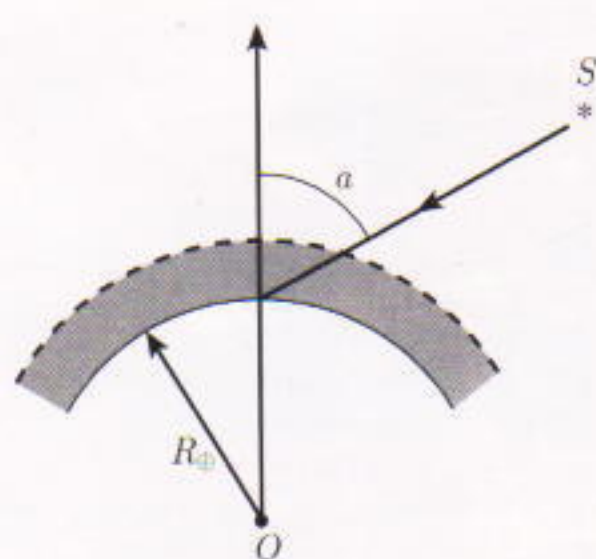
δεν σπινθηρίζουν καθόλου. Αυτά δεν είναι αστρα, αλλά πλανήτες. Ο καλύτερος τρόπος για να πειστούμε ότι οι πλανήτες δεν σπινθηρίζουν είναι να παρατηρήσουμε την Αφροδίτη — το λαμπρότερο ουράνιο σώμα μετά τον Ήλιο και τη Σελήνη. Μπορείτε να την αναζητήσετε είτε το πρωί, πριν την ανατολή (Αυγερινός), είτε το απόγευμα, μετά τη δύση (Εσπερος). Προτιμότερο πάντως είναι να γνωρίζετε από πριν τη θέση της, και αυτό μπορείτε να το πληροφορηθείτε από κάποιο εγχειρίδιο αστρονομίας.

5. Όταν τα αστρα βρίσκονται κοντά στον ορίζοντα, μπορείτε να παρατηρήσετε και χρωματικό σπινθηρισμό: αλλαγές, περισσότερο ή λιγότερο απότομες, όχι μόνο στη λαμπρότητα αλλά και στο χρώμα του αστρού.

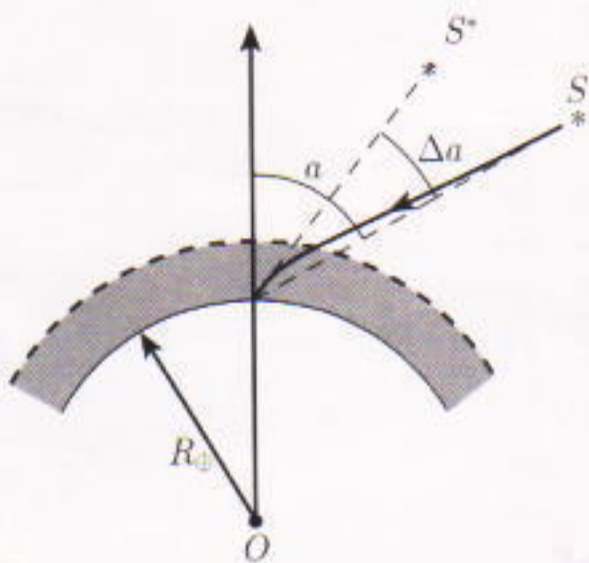
Το πρώτο και το δεύτερο από τα παραπάνω χαρακτηριστικά δείχνουν ότι η αιτία του σπινθηρισμού δεν πρέπει να αναζητηθεί στα φυσικά χαρακτηριστικά των αστρον, αλλά στις οπτικές ιδιότητες της ατμόσφαιράς μας. Το στρώμα του αέρα είναι πολύ λεπτό αν συγκριθεί με την ακτίνα της Γης, που έχει μήκος $R_{\oplus} = 6.500 \text{ km}$. Το 50% περίπου της μάζας του αέρα βρίσκεται σε υψόμετρο χαμηλότερο των 6 km, ενώ έως τα 30 km περιέχεται σχεδόν το 99%.

Μια δέσμη φωτός προερχόμενη από ένα αστρο που βρίσκεται κοντά στον ορίζοντα διασχίζει πολύ μεγαλύτερη απόσταση μέσα στα χαμηλότερα, πυκνά στρώματα της ατμόσφαιρας απ' ό,τι μια δέσμη που προέρχεται από ένα αστρο το οποίο βρίσκεται ακριβώς από





α



β

Σχήμα 1

Μια δέσμη φωτός στην ατμόσφαιρα της Γης (α) χωρίς διάθλαση και (β) με διάθλαση. S είναι η φωτεινή πηγή και S^* είναι η φαινομένη θέση της πηγής.

πάνω μας (Σχήμα 1). Η μεγαλύτερη διαδρομή του φωτός μέσα στον αέρα είναι ένα σοβαρό επιχείρημα υπέρ της ατμοσφαιρικής φύσης του σπινθηρισμού, αν και από μόνο του δεν εξηγεί τίποτε. Άλλωστε, ο καθαρός αέρας είναι απολύτως διαφανής, παρά ταύτα ο σπινθηρισμός παρατηρείται με καθαρή ατμόσφαιρα.

Ατμοσφαιρική διάθλαση

Οι οπτικές ιδιότητες της ατμόσφαιρας καθορίζονται από το δείκτη διάθλασης n , ο οποίος είναι πάντοτε ελάχιστος μεγαλύτερος από τη μονάδα και εξαρτάται από την πυκνότητα ρ του αέρα:

$$n = 1 + k\rho, \quad (1)$$

όπου k είναι ένας συντελεστής αναλογίας. Η ποσότητα $k\rho$ είναι πολύ μικρή — της τάξης του 10^{-4} — αλλά ακριβώς αυτά τα δεκάκις χιλιοστά διαφοροποιούν τον «απολύτως διαφανή αέρα» από ένα άδειο μέσο: το κενό.

Ας θυμηθούμε ότι ο δείκτης διάθλασης μας δείχνει κατά πόσο μειώνεται η ταχύτητα του φωτός όταν διέρχεται από το δεδομένο μέσο, συγκριτικά με την ταχύτητα c που έχει στο κενό: $c_n = c/n$. Η διαφορά ανάμεσα στη c_n και στη c είναι τόσο μικρή, ώστε είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι θα μπορούσε να μετρηθεί μόνο με εξαιρετικά ευαίσθητα πειράματα που θα επέτρεπαν να ανιχνευτεί αυτή η ασημαντή μείωση της ταχύτητας του φωτός.

Και αυτό θα συνέβαινε αν ο αέρας ήταν απολύτως ομογενής. Όπως όμως

αναφέραμε προηγουμένως, η πυκνότητα ρ μειώνεται όσο ανεβαίνουμε ψηλότερα, και μαζί της μειώνεται ο δείκτης διάθλασης. Κοντά στην επιφάνεια της Γης ο $n \cong 1,0003$, αλλά στο ύψος των 10 km ο $n \cong 1,0001$. Επομένως, η ατμόσφαιρα της Γης είναι ένα οπτικά ετερογενές μέσο που προκαλεί την καμπύλωση των ακτίνων του φωτός.

Δεν λάβαμε υπόψη αυτό το φαινόμενο (τη διάθλαση) όταν σχεδιάσαμε τις ακτίνες στο Σχήμα 1α. Το λάβαμε όμως υπόψη στο Σχήμα 1β. Είναι φανερό ότι η διαδρομή της δέσμης του φωτός μέσα στην ατμόσφαιρα αυξάνει ελαφρά, και — αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό — η γωνία με την οποία φτάνει η δέσμη στον παρατηρητή αλλάζει.

Εξαιτίας, λοιπόν, του φαινομένου της διάθλασης, ο παρατηρητής βλέπει όλα τα ουράνια σώματα «να ανυψώνονται», δηλαδή να κατέχουν θέση πλησιέστερη προς το ζενίθ. Η γωνία διάθλασης, ή απλώς η διάθλαση, της οπτικής ακτίνας, $\Delta\alpha$, είναι μεγαλύτερη όταν η φωτεινή πηγή βρίσκεται πλησιέστερα στον ορίζοντα. Η μέγιστη τιμή της είναι περίπου $30'$ — τιμή που δεν είναι αμελητέα. Για παράδειγμα, η φαινομένη διάμετρος του Ήλιου είναι $30'$. Επομένως, όταν ο Ήλιος δύει, εξακολουθούμε να τον βλέπουμε μέχρι να κατέβει η πάνω άκρη του ηλιακού δίσκου μισή μοίρα κάτω από τον ορίζοντα. Το ίδιο συμβαίνει στην ανατολή: ο Ήλιος γίνεται ορατός λίγο πριν από την «αληθινή» ανατολή. Το αποτέλεσμα είναι να αυξάνεται κατά τι η διάρκεια της ημέρας (8-

13 λεπτά στα μεσαία γεωγραφικά πλάτη), ενώ η διάρκεια της πολικής νύχτας μειώνεται κατά αρκετές ημέρες.

Αρχίσαμε να μιλάμε για τη λεγόμενη ομαλή διάθλαση, αυτή όμως δεν εξηγεί το σπινθηρισμό των άστρων.

Τυχαίες μεταβολές

Τα απλούστερα μετεωρολογικά όργανα — το θερμόμετρο και το βαρόμετρο — υπάρχουν σε πολλά σπίτια. Όπως θα γνωρίζετε, οι ενδείξεις τους αλλάζουν από μέρα σε μέρα. Μερικές φορές αυτές οι μεταβολές εμφανίζονται μέσα σε λίγες ώρες, υποδηλώνοντας μια απότομη αλλαγή του καιρού. Αν χρησιμοποιήσουμε πιο ευαίσθητες και «χωρίς αδράνεια» συσκευές που έχουν τη δυνατότητα να καταγράφουν μικρές, γρήγορες αλλαγές, θα δούμε ότι η θερμοκρασία και η ατμοσφαιρική πίεση μεταβάλλονται σχεδόν συνεχώς. Και όχι μόνο αυτό, αλλά εμφανίζουν διαφορετικές τιμές σε διαφορετικά μέρη, ακόμη και αν οι μετρήσεις γίνουν σε σημεία που απέχουν πολύ λίγο το ένα από το άλλο.

Η πυκνότητα του αέρα μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία και την πίεση, και το ίδιο ισχύει για το δείκτη διάθλασης, ο οποίος, επομένως, είναι μια συνάρτηση των συντεταγμένων r και του χρόνου t . Αυτή η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο συνιστωσών:

$$n(r, t) = n_0(z) + \delta n(r, t). \quad (2)$$

Ο πρώτος όρος εκφράζει την ομαλή μεταβολή του n συναρτήσει του ύψους z , και, γενικά, εξαρτάται επίσης από το χρόνο. Όμως, δεν μας ενδιαφέρουν τόσο αργές αλλαγές (για παράδειγμα, μεταξύ ημέρας και νύχτας) και επομένως δεν γράφουμε το όρισμα t στη συνάρτηση $n_0(z)$. Η ομαλή διάθλαση που αναφέραμε προηγουμένως συνδέεται με τον $n_0(z)$. Ο δεύτερος όρος, $\delta n(r, t)$ χαρακτηρίζεται από αλλαγές που είναι γρήγορες (μετριούνται για δευτερόλεπτα ή και για κλάσματα του δευτερολέπτου) και μικρής κλίμακας (από λίγες δεκάδες μέτρα έως και χιλιοστά).

Ωστόσο, οι διαφορές ανάμεσα στην n_0 και στη δn δεν είναι δυνατό να αποδοθούν αποκλειστικά στο βαθμό και την έκταση των μεταβολών τους. Σημαντικότερα χαρακτηριστικά αυτών των τιμών εκφράζονται με τις προτά-

σεις «καθορισμένη συνάρτηση» (για την n_0) και «στοχαστική συνάρτηση» (για την δn). Καθορισμένη σημαίνει ότι, κατ' αρχήν, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $n_0(z)$ για οποιοδήποτε ύψος z . Από την άλλη πλευρά, η ποσότητα $\delta n(r, t)$ εξαρτάται από μια πληθώρα τυχαίων καταστάσεων (απ' όπου και το όνομα στοχαστική) και είναι αδύνατο να την υπολογίσουμε. Μπορούμε μόνο να υποδείξουμε την πιθανότητα να πάρει αυτή η συνάρτηση μια δεδομένη τιμή. Τίως όχι τόσο περιεκτικό όσο η συνάρτηση πιθανότητας, αλλά οπωσδήποτε πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η μέση τιμή της, την οποία θα συμβολίζουμε γράφοντας από πάνω της μια οριζόντια γραμμή: $\overline{\delta n}$.

Αντίθετα με την ίδια τη συνάρτηση, η μέση τιμή της είναι συχνά μια σταθερά. Για να απλοποιήσουμε λίγο τα πράγματα θα θεωρήσουμε ότι $\overline{\delta n} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η δn λαμβάνει και θετικές και αρνητικές τιμές με την ίδια πιθανότητα. Όμως, το τετράγωνο των διακυμάνσεων $(\delta n)^2$ είναι μια εντελώς διαφορετική ιστορία. Αυτή η τιμή είναι πάντοτε θετική. Η μέση της τιμή $(\delta n)^2$ χαρακτηρίζει το εύρος των διακυμάνσεων και είναι γνωστή ως διασπορά $\sigma_n^2 \equiv \overline{(\delta n)^2}$. Συχνά δε χρησιμοποιείται και η λεγόμενη τυπική απόκλιση:

$$\sigma_n = \sqrt{\overline{(\delta n)^2}}.$$

Στα κατώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας, λοιπόν, η $\sigma_n \sim 10^{-6}$ έως 10^{-7} , πράγμα που σημαίνει ότι οι διακυμάνσεις του δείκτη διάθλασης είναι πολύ μικρές – ακόμη και αν συγκριθούν με τη μικρή απόκλιση του n_0 από τη μονάδα που αναφέραμε προηγουμένως ($n_0 - 1 \sim 10^{-4}$).

Διαταραχή του ειδώλου

Με ποιον τρόπο επηρεάζει η στοχαστική ετερογένεια δn τη διάθλαση των ακτίνων του φωτός; Είναι εύκολο να φανταστούμε ότι πέρα από την ομαλή διάθλαση (η γωνία Δa στο Σχήμα 1β) μπορεί να υπάρχουν πρόσθετες στοχαστικές αποκλίσεις δa που είναι δυνατό να κατευθυνθούν προς οποιαδήποτε πλευρά με ίση πιθανότητα – δηλαδή, $\overline{\delta a} = 0$. Όπως ακριβώς κάναμε για τη δn , εισάγουμε τις έννοιες της διασποράς $(\delta a)^2 \neq 0$ και της τυπικής απόκλισης της διάθλασης $\sigma_a = \sqrt{\overline{(\delta a)^2}}$. Οι αστρονομικές παρατηρήσεις μάς δί-

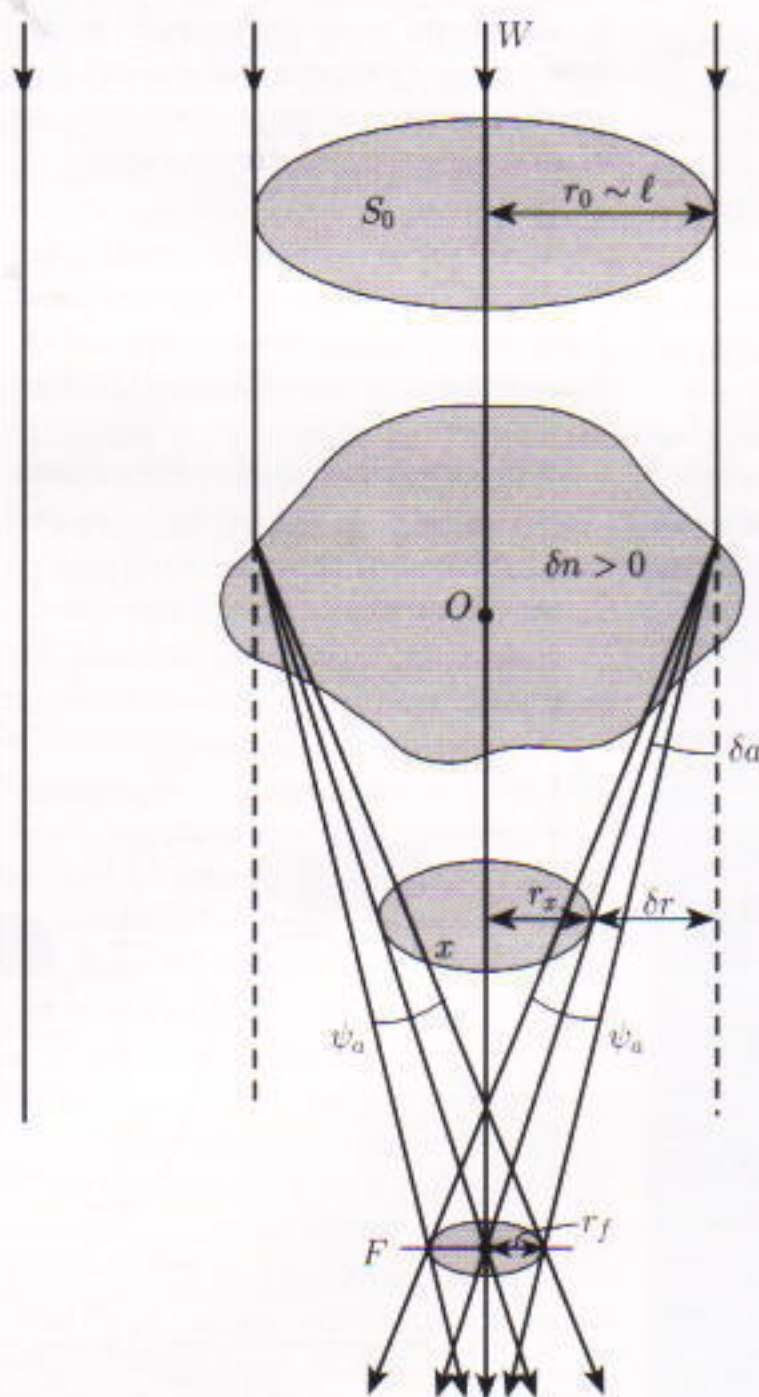
νουν την εκτίμηση $\sigma_a \sim 1''$. Αυτό σημαίνει ότι το είδωλο ενός άστρου στο τηλεσκόπιο «περιπλανάται τυχαία» μέσα σε έναν κύκλο ακτίνας ίσης περίπου με ένα δεύτερο της μοίρας. Είναι φανερό ότι αυτό το «τρέμουλο» του ειδώλου παρεμποδίζει τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι αστρονόμοι επιλέγουν με μεγάλη προσοχή τη θέση των μεγάλων οπτικών οργάνων, προτιμώντας ορεινές περιοχές με καλή «ορατότητα», δηλαδή με πολύ μικρές σ_n και σ_a .

Η διαταραχή του ειδώλου σε ένα τηλεσκόπιο είναι συχνά τόσο σύντομη, ώστε μόνο το μάτι μπορεί να την αντιληφθεί. Όταν γίνεται φωτογράφιση ενός άστρου, το αποτέλεσμα εξαρτάται από το χρόνο έκθεσης, ο οποίος με τη σειρά του εξαρτάται από την ευαισθη-

σία του φιλμ και τη λαμπρότητα του άστρου. Οι πρώτες αστρονομικές φωτογραφίες αοθενών πηγών λαμβάνονταν με χρόνους έκθεσης πολλών λεπτών ή και αρκετών ωρών. Η διαταραχή του ειδώλου μέσα σε τόσο μεγάλη χρονική περίοδο συντείνει ώστε κάθε «σημειακή» πηγή φωτός να δημιουργεί ως είδωλο έναν συγκεχυμένο κύκλο με γωνιακό μέγεθος $\sim \sigma_a$.

Εκτός από τις σύντομες μετατοπίσεις του ειδώλου υπάρχουν και αργές μετατοπίσεις με περίοδο ενός περίπου λεπτού. Έχουν μεγαλύτερο μέγεθος και μπορούν να μειωθούν σε αξιοσημείωτο βαθμό αν ο αστρονόμος εξουδετερώσει τη μετατόπιση αλλάζοντας τη διεύθυνση του τηλεσκοπίου ή τη θέση του φωτογραφικού φιλμ. Αν και είναι δύσκολο να το πιστέψουμε σήμερα,

στις αρχές του αιώνα μας οι αστρονόμοι έπρεπε να δουλεύουν όλη νύχτα χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα τα μάτια τους, τα χέρια τους, ακόμη και το στόμα τους. Τα μάτια τους έβλεπαν το είδωλο του άστρου, τα χέρια τους ρύθμιζαν τη θέση της φωτογραφικής πλάκας σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, ενώ με το στόμα τους κρατούσαν το καλώδιο που συνδεόταν με το διάφραγμα της φωτογραφικής μηχανής. Όπως μπορείτε να φανταστείτε, αυτή η διαδικασία είναι στις μέρες μας εντελώς αυτοματοποιημένη.



Σχήμα 2

Διάθλαση ακτίνων που προκαλείται από τυχαίες μεταβολές του δείκτη διάθλασης του αέρα.

Διαταραχή ειδώλου ≠ Σπινθηρισμός

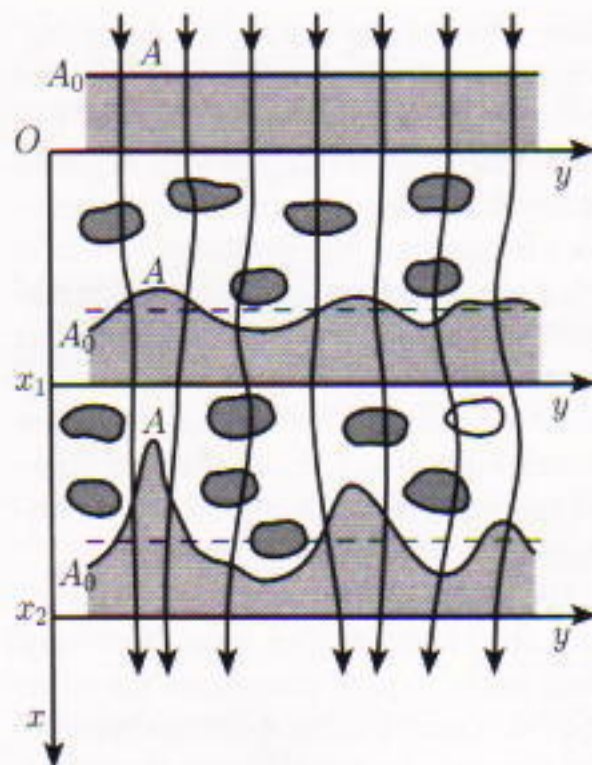
Η διαίσθηση μας λέει ότι οι τυχαίες μετατοπίσεις της εικόνας ενός άστρου και οι χαστικές μεταβολές της λαμπρότητάς του πρέπει να συνδέονται με κάποιον τρόπο· και όμως, είναι διαφορετικά φαινόμενα. Με μια πρώτη ματιά ο σπινθηρισμός μπορεί να εξηγηθεί εύκολα, όχι μόνο από τις διακυμάνσεις του δείκτη διάθλασης του αέρα, αλλά και από τις διακυμάνσεις στη διαφάνειά του. Σίγουρα αυτή είναι μια όμορφη, απλή εξήγηση, αλλά γιατί τότε μερικά ουράνια σώματα σπινθηρίζουν (τα άστρα) ενώ άλλα όχι (οι πλανήτες); Επιπλέον, άμεσες οπτικές μετρήσεις αποδεικνύουν ότι η διαφάνεια του αέρα είναι πολύ μεγάλη και ότι δεν μεταβάλλεται σε σύντομες χρονικές περιόδους. Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε άλλες ερμηνείες.

Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα την επίδραση των ετερογενειών δn στις ακτίνες του φωτός. Κάθε ετερογένεια ενεργεί σαν ένας μικρός φακός, που μπορεί να είναι είτε συγκλίνων (όταν $\delta n > 0$) είτε αποκλίνων (όταν $\delta n < 0$). Η περίπτωση $\delta n > 0$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 2, όπου οι ακτίνες που διέρχονται από μια ετερογένεια συγκλίνουν.

Η ροή της φωτεινής ενέργειας που προσπίπτει σ' αυτό το «φακό», χαρακτηριζτικών διαστάσεων ℓ , είναι ανάλογη με το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής της S_0 . Το εμβαδόν αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε ότι είναι ίσο κατά προσέγγιση με το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας $r_0 \sim \ell$: $S_0 \cong \pi \ell^2$. Δηλαδή, $E \cong J_0 \pi \ell^2$. Επομένως, $E \cong J_0 \pi \ell^2$, όπου J_0 είναι το μέγεθος που εκφράζει την ένταση του φωτός. Μετά τη διέλευση του φωτός από το «φακό», η ακτίνα της εγκάρσιας τομής του κώνου φωτός μειώνεται κατά $\delta r \cong x \delta a$ και γίνεται ίση με $r \sim \ell - x \delta a$. Εδώ $\delta a \cong \delta n$ είναι η γωνία εκτροπής που οφείλεται σε μια μοναδική ετερογένεια, και x είναι η απόσταση από αυτήν. Από το νόμο διατήρησης της ενέργειας προκύπτει $E \cong J_0 \pi \ell^2 = J_x \pi (\ell - x \delta a)^2$, απ' όπου είναι εύκολο να βρούμε την ένταση της εστιασμένης δέσμης:

$$J_x \cong \frac{J_0 \ell^2}{(\ell - x \delta a)^2} \quad (3)$$

Η τιμή του δa είναι πάντοτε μικρή, αλλά το γινόμενο $x \delta a$ μπορεί να γίνει συγκρίσιμο με το ℓ όταν το x είναι αρκετά



Σχήμα 3

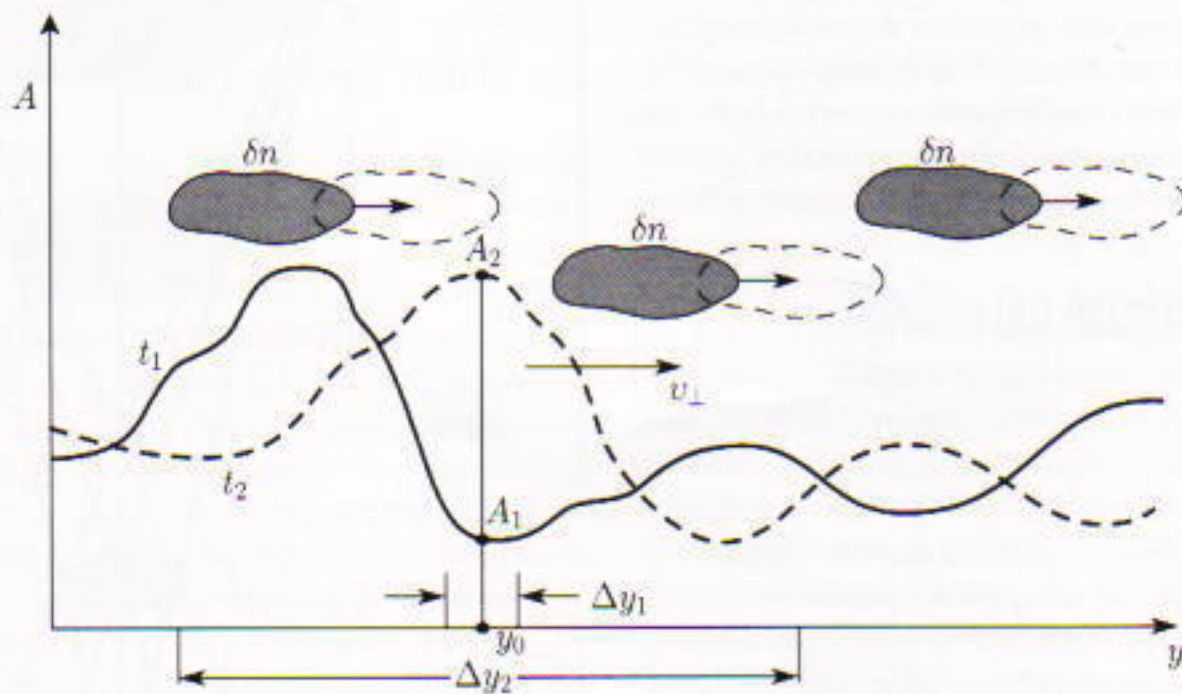
Διάθλαση των φωτεινών ακτίνων στις τυχαίες ατμοσφαιρικές ετερογένειες, η οποία οδηγεί σε ανακατανομή της έντασης στην εγκάρσια διεύθυνση. Στα σημεία όπου οι ακτίνες συγκλίνουν, το πλάτος αυξάνει, και αντιστρόφως.

μεγάλο. Αυτό πρέπει να το προσέξουμε ιδιαίτερα, όταν το $x = f = 1/\delta a$ (όπου f η εστιακή απόσταση του «φακού»), ο παρονομαστής στην εξίσωση (3) γίνεται 0 και το $J_x \rightarrow \infty$.

Στην πραγματικότητα, η αύξηση του

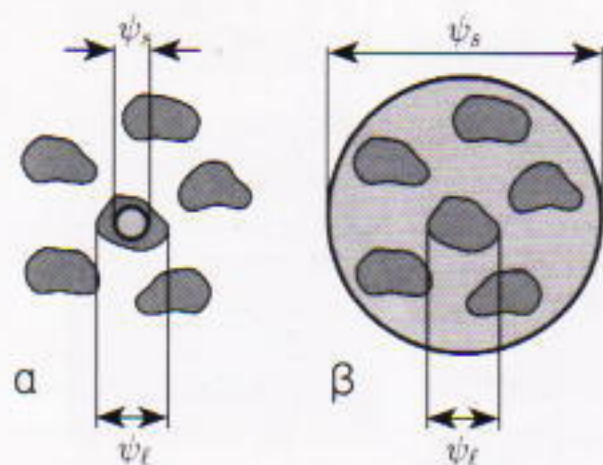
J_x περιορίζεται πάντοτε από την κυματική φύση του φωτός. Όπως πιθανότατα γνωρίζετε, το φως είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που χαρακτηρίζεται από μήκος κύματος λ και από πλάτος A . Η ένταση του φωτός είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους: $J_0 \propto A_0^2$, $J_x \propto A^2$. Το μήκος κύματος καθορίζει τη γωνία περίθλασης: μόλις το φωτεινό κύμα συναντήσει ένα εμπόδιο με διαστάσεις ℓ , περνάει γύρω του και διασπείρεται μέσα σε μια γωνία $\psi_a \sim \lambda/\ell$ (Σχήμα 2). Το αποτέλεσμα είναι ότι ακόμη και ένας ιδανικός φακός διαμέτρου ℓ δεν συγκεντρώνει το φως σε ένα σημείο (όπως προβλέπει η γεωμετρική οπτική) αλλά σε έναν κύκλο ακτίνας $r_f \sim x \psi_a$ που βρίσκεται πάνω στο εστιακό επίπεδο $x = f$ (εδώ έχουμε υπολογίσει ότι οι γωνίες δa και ψ_a είναι πολύ μικρές).

Μπορούμε ακόμη να θυμηθούμε ότι τα μήκη κύματος που είναι ορατά από τον άνθρωπο, κυμαίνονται ανάμεσα στα $\sim 0,4 \mu\text{m}$ (ιώδες) και στα $\sim 0,76 \mu\text{m}$ (ερυθρό). Ο ατμοσφαιρικός διασκορπισμός είναι σε ένα βαθμό υπεύθυνος για τον πολύχρωμο (χρωματικό) σπινθηρισμό. Αυτό συμβαίνει διότι ο παράγοντας k στην εξίσωση (1) εξαρτάται από το λ . Γενικά, και η σ_n^2 εξαρτάται επίσης από το λ . Ο χρωματικός σπινθη-



Σχήμα 4

Μεταφορά των ατμοσφαιρικών ετερογενειών από τον άνεμο, που έχει ως αποτέλεσμα την προσωρινή μεταβολή της έντασης της φωτεινής ακτινοβολίας (σπινθηρισμός). Δy_1 είναι το μέγεθος της κόρης του οφθαλμού και Δy_2 η διάμετρος ενός αντικειμενικού φακού (y_0 είναι το κέντρο τους).



Σχήμα 5

Πηγές (α) μικρού και (β) μεγάλου γωνιακού μεγέθους. Στην πρώτη περίπτωση παρατηρείται σπινθηρισμός, στη δεύτερη όμως όχι.

ρισμός μπορεί να παρατηρηθεί σε άστρα που βρίσκονται σε μικρή γωνία πάνω από τον ορίζοντα, και αποτελεί ένα πανέμορφο θέαμα.

Συμπερασματικές παρατηρήσεις

Γιατί μεταβάλλεται η ένταση του φωτός όταν διαδίδεται στον απολύτως διαφανή αέρα; Επειδή η ενέργεια ανακατανέμεται στην εγκάρσια ως προς τη δέσμη του φωτός διεύθυνση (Σχήμα 3). Μέχρι στιγμής, έχουμε αντιμετωπίσει μόνο χωρικές μεταβολές δA , αλλά ο σπινθηρισμός είναι μια αλλαγή στη λαμπρότητα ενός άστρου που μεταβάλλεται με το χρόνο. Αν ο αέρας ήταν εντελώς ακίνητος, δεν θα παρατηρούσαμε κανέναν σπινθηρισμό. Απλώς, το ίδιο άστρο θα ήταν λαμπρότερο σε ένα σημείο (ας πούμε, στο σημείο $x_1 y_1$) απ' ό,τι σε κάποιο άλλο (το $x_2 y_2$).

Στην πραγματικότητα, όμως, ο αέρας κινείται συνεχώς, και μαζί του κινούνται οι διάφορες ετερογένειες του συντελεστή διάθλασης. Εδώ, ο κύριος ρόλος ανήκει στον άνεμο που φυσάει στην εγκάρσια ως προς τη δέσμη τού φωτός διεύθυνση, ο οποίος «μεταφέρει» την καμπύλη $A(y)$, σαν μια ολότητα, κατά μήκος του άξονα y με ταχύτητα $v_{\perp}$. Το αποτέλεσμα είναι ότι ένας στάσιμος παρατηρητής, καθώς κυλάει ο χρόνος, βλέπει αλλαγές στη λαμπρότητα των άστρων — δηλαδή, αντιλαμβάνεται το σπινθηρισμό (Σχήμα 4). Η μέση απόσταση ανάμεσα στις μέγιστες τιμές της έντασης έχει περίπου το μέγεθος ℓ της ετερογένειας. Επομένως, ο χαρακτηριστικός χρόνος για μια αλλαγή στη λαμπρότητα (η «περίοδος» του σπινθηρισμού) είναι $\tau \cong \ell/v_{\perp}$. Ας υπο-

θέσουμε, με βάση την τρέχουσα εκτίμησή μας, ότι $\ell \cong 10^{-1}$ m και $v_{\perp} \cong 1-10$ m/sec. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι ο αέρας περιέχει ετερογένειες διαφορετικού μεγέθους, μπορούμε να καταλάβουμε γιατί ο σπινθηρισμός χαρακτηρίζεται από τόσο ευρύ πεδίο τιμών — συχνότητες από δέκατα του Hz έως και 10 ή και περισσότερα Hz.

Αυτές οι υποθέσεις μάς βοηθούν να κατανοήσουμε και τις άλλες ιδιότητες του σπινθηρισμού που αναφέραμε στην αρχή του άρθρου μας. Όταν κοιτάμε ένα άστρο με γυμνό μάτι, εισέρχεται στην κόρη μια δέσμη φωτός με διάμετρο λίγων χιλιοστών. Όμως, η απόσταση ανάμεσα στις ταλαντώσεις της έντασης στον αέρα είναι πολύ μεγαλύτερη, και έτσι το μάτι κατά μέσο όρο δεν αντιλαμβάνεται τις μεταβολές του $A(y)$. Με το τηλεσκόπιο συμβαίνει το αντίθετο. Όταν η διάμετρος d του αντικειμενικού φακού είναι μεγαλύτερη από το $\ell \cong 10^{-1}$ m, δέχεται και το ισχυρότερο και το ασθενέστερο τμήμα της φωτεινής ροής, πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα την κατά μέσο όρο «εξισορρόπηση» της έντασης και την εξάλειψη του σπινθηρισμού.

Το μόνο που απομένει να καταλάβουμε είναι γιατί δεν σπινθηρίζουν οι πλανήτες. Ας φανταστούμε ότι η φωτεινή πηγή δεν είναι ένα «σημείο» αλλά ένα φωτεινό σώμα, με μάλλον μεγάλη διάμετρο D — τόσο μεγάλη, στην πραγματικότητα, ώστε το γωνιακό του μέγεθος $\psi_s = D/R_s$ (R_s είναι η απόσταση από την πηγή) υπερβαίνει κατά πολύ τις γωνιακές διαστάσεις των ατμοσφαιρικών ετερογενειών $\psi_l \cong \ell/x$. Αυτό σημαίνει ότι όταν κοιτάμε ένα φωτεινό σώμα, πολλές ετερογένειες προβάλλονται στην επιφάνειά του. Στο Σχήμα 5 συγκρίνονται δύο πηγές: μια σημειακή πηγή ($\psi_s \ll \psi_l$) και μια εκτεταμένη ($\psi_s \gg \psi_l$). Στην πρώτη περίπτωση, η δέσμη φωτός χτυπάει στη μια ή στην άλλη ετερογένεια (θυμηθείτε τον άνεμο!) και η έντασή της αλλάζει συνεχώς. Στην αντίθετη περίπτωση, μπορούμε να φανταστούμε την εκτεταμένη πηγή σαν ένα σύνολο μεγάλου αριθμού «σημείων». Η λαμπρότητα κάθε σημείου αλλάζει, όπως και στην πρώτη περίπτωση, αλλά το καθένα μεταβάλλεται ανεξάρτητα από τα άλλα, διότι οι ακτίνες του φωτός που προέρχονται από διαφορετικά σημεία της πηγής περνούν από διαφορετικές ετερο-

γένειες. Το αποτέλεσμα είναι ότι όταν αυξάνεται η λαμπρότητα ενός τμήματος, μειώνεται η λαμπρότητα ενός άλλου. Πρακτικά, η συνολική ένταση του φωτός που εκπέμπεται από ολόκληρη την πηγή δεν μεταβάλλεται.

Επομένως, απαντήσαμε (αν και όχι εξαντλητικά) στις ερωτήσεις που προέκυψαν στην αρχή του άρθρου και ελπίζουμε ότι δείξαμε ακόμη μία φορά το πώς η κατανόηση της φυσικής μάς βοηθάει να εκτιμήσουμε βαθύτερα την ομορφιά της Φύσης. ◼

QUANTUM

το μοναδικό
περιοδικό

- «... Γεμάτο εξαιρετικά θέματα υπέροχα άθρα Μαθηματικών και Φυσικής για σπουδαστές λυκείων και πανεπιστημίων...» *Nature*

• «Θα πρέπει να υπάρχει στη βιβλιοθήκη κάθε σχολείου και πανεπιστημίου... Έχουμε χρέος έναντι των μαθητών να κάνουμε το *Quantum* ευρέως γνωστό.» *Richard Askey, Καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν*

- «...Πρώτης τάξεως περιοδικό... Μ' αυτό αποκτά πρόσωπο η ποιότητα, η φαντασία και η γνώση... Το συνιστούμε ανεπιφύλακτα...» *Library Journal*

• «...Θα ευχόμουν το *Quantum* να κυκλοφορούσε στην Αμερική όταν ήμουν φοιτητής...» *Sheldon Glashow, Νόμπελ Φυσικής, Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ*

**Διαβάστε το QUANTUM.
Γίνετε συνδρομητής του
και στηρίξτε το.**

Το φλογιστό και το μαγνητικό πεδίο

Μια μικρή περιήγηση στο παλαιοπωλείο της επιστήμης

Stephanie Eatman, Fraser Muir και Hugh Hickman

Ερχονται στιγμές στην επιστήμη όπου οι παλιές ιδέες πρέπει να αντικατασταθούν από νέες. Το φλογιστό, το θερμικό και ο αιθέρας υπήρξαν όλες τους νόμιμες επιστημονικές έννοιες, που κάποτε ήταν αποδεκτές σαν αληθινές. Η μια μετά την άλλη, όμως, απορρίφθηκαν, όταν νέες πληροφορίες αποκάλυψαν ότι δεν ήταν πλέον απαραίτητες για να εξηγηθούν εκείνα τα φαινόμενα για την ερμηνεία των οποίων είχαν δημιουργηθεί. Θα έρθει άραγε μια μέρα που και το μαγνητικό πεδίο θα έχει την ίδια μοίρα και θα καταλήξει και αυτό στα επιστημονικά αζήτητα;

Ο ηλεκτρισμός και ο μαγνητισμός ήταν γνωστοί από την αρχαιότητα, αλλά μόνο το 1820 ο Hans Christian Oersted απέδειξε πως υπάρχει σαφής σχέση ανάμεσα στα δύο φαινόμενα. Ο Oersted ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα που διατρέχει ένα σύρμα μπορεί να εκτρέψει από τη θέση της μια πυξίδα, όταν το σύρμα είναι τοποθετημένο παράλληλα προς την αρχική διεύθυνση της πυξίδας. Από τη στιγμή που το ηλεκτρικό ρεύμα συνίσταται από μια γραμμή κινούμενων φορτίων, και αφού γνωρίζουμε ότι οι πυξίδες εκτρέπονται από μαγνητικά πεδία, η σύνδεση είναι προφανής – τα κινούμενα φορτία δημιουργούν μαγνητικά πεδία.

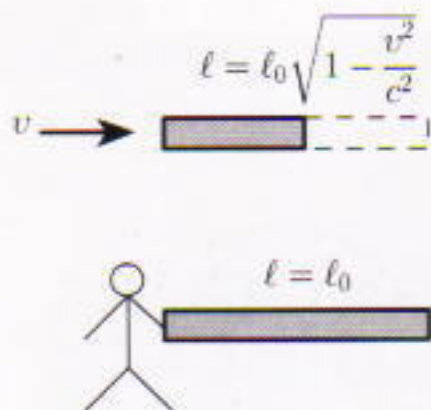
Στα εκατό χρόνια που ακολούθησαν, μεγάλοι επιστήμονες, όπως ο Ampere, ο Faraday και ο Maxwell, συνέβαλαν αποφασιστικά στο να κατανοήσουμε καλύτερα τον ηλεκτρομαγνητισμό. Σε τελική ανάλυση, όμως, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο εξακο-

λουθούσαν να θεωρούνται δύο διαφορετικά πράγματα. Μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε γιατί: τα δύο πεδία φαίνεται να δημιουργούν εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρικό πεδίο θα ασκή-

σει δύναμη σε ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο ανεξάρτητα από το αν το φορτίο κινείται ή όχι. Ωστόσο, για να ασκήσει το μαγνητικό πεδίο δύναμη στο ίδιο φορτίο, πρέπει το τελευταίο να κινείται, και μάλιστα να κινείται σε μια



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov



Σχήμα 1

διεύθυνση που δεν είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Η αντίληψη που θεωρεί τα δύο πεδία ως δύο διαφορετικές οντότητες κλονίστηκε σοβαρά λίγο μετά το 1905, όταν ο Άλμπερτ Αϊνστάιν δημοσίευσε την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Για πρώτη φορά έγινε δυνατό να αποδειχτεί ότι η μαγνητική δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σημειακό φορτίο οφείλεται στην πραγματικότητα στον σχετικιστικό μετασχηματισμό του ηλεκτρικού πεδίου. Ας δούμε το πώς.

Κατά τον Αϊνστάιν, το μήκος ενός κινούμενου αντικειμένου, μετρούμενο από έναν στάσιμο παρατηρητή, συστέλλεται κατά τη διεύθυνση της κίνησης του αντικειμένου (Σχήμα 1). Όσο γρηγορότερα κινείται το αντικείμενο ως προς τον παρατηρητή τόσο μικρότερο γίνεται το μήκος του ℓ από το μήκος ℓ_0 που έχει όταν είναι ακίνητο ως προς τον παρατηρητή. Μαθηματικά, αυτό εκφράζεται από τη σχέση

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1)$$

όπου v είναι η ταχύτητα του αντικειμένου ως προς τον παρατηρητή, και c η ταχύτητα του φωτός (κατά προσέγγιση, $3 \cdot 10^8$ m/sec στο κενό).

Η ιδέα ότι το μήκος ενός κινούμενου αντικειμένου συστέλλεται κατά τη διεύθυνση της κίνησής του έχει επαληθευτεί πλήρως πειραματικά. Από την άλλη πλευρά, και το πείραμα και η θεωρία υποδεικνύουν ότι η ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου που φέρει ένα κινούμενο αντικείμενο δεν αλλάζει λόγω της κίνησης του αντικειμένου.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν γραμμικό αγωγό ο οποίος περιέχει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο, που βρίσκεται μέσα στον αέρα. Το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από μια τέτοια γραμμή «άπειρου» μήκους, στάσιμη

ως προς έναν παρατηρητή, δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2)$$

όπου το έντονο $\mathbf{E}$ υποδηλώνει ακριβέστερα την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία είναι διανυσματικό μέγεθος και έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά (στο δεξιό μέλος της σχέσης, το $\hat{\mathbf{r}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που εκφράζει ότι το πεδίο κατευθύνεται ακτινικά μακριά από τον αγωγό), το ϵ_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού (η διηλεκτρική σταθερά, γενικότερα, είναι μέτρο του κατά πόσο επιδρά στην ένταση του πεδίου το μέσον που περιβάλλει τη γραμμή φορτίου). Το r είναι η απόσταση του σημείου στο οποίο μετράμε το πεδίο από τον αγωγό. Το λ είναι η γραμμική πυκνότητα φορτίου, δηλαδή το πηλίκον

$$\lambda = \frac{Q}{\ell}. \quad (3)$$

Αν ο ευθύγραμμος αγωγός κινείται κατά μήκος του άξονά του ως προς έναν παρατηρητή, ο παρατηρητής διαπιστώνει πως το μήκος του γίνεται $\ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, χωρίς να παρατηρεί οποιαδήποτε αλλαγή στο φορτίο του. Επομένως η εξίσωση (3) γίνεται

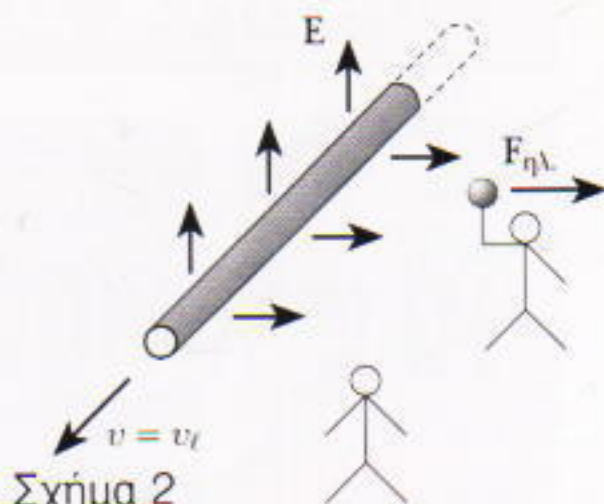
$$\lambda = \frac{Q}{\ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (4)$$

όπου λ_0 είναι η «στάσιμη» γραμμική πυκνότητα φορτίου Q/ℓ_0 . Αντικαθιστώντας από την εξίσωση (4) στην εξίσωση (2) οδηγούμαστε στην

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}} \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

όπου το $\mathbf{E}_0$ υποδηλώνει τώρα το ηλεκτρικό πεδίο της γραμμής φορτίου ως προς τον στάσιμο παρατηρητή.

Η εξίσωση (5) είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτική. Σύμφωνα με αυτήν, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το φορτίο του κινούμενου γραμμικού αγωγού εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα μεταξύ παρατηρητή και αγωγού. Όσο ταχύτερα παρατηρούμε να κινείται η γραμμή φορτίου τόσο ισχυρότερο είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Αυτή η «μεταβλητότητα» του



Σχήμα 2

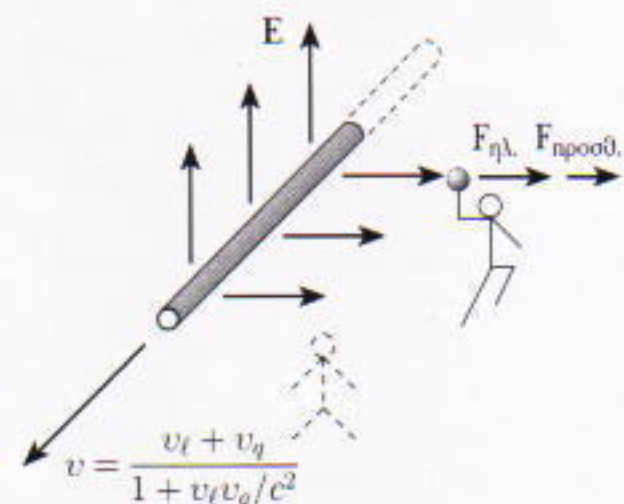
Ερμηνευόμενη μέσα στο πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, δημιουργεί τη δύναμη που επί αιώνες συνδέθηκε με την ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου.

Για να δείτε πώς γίνεται αυτό, φανταστείτε ότι κρατάτε ένα σημειακό θετικό φορτίο q και στέκεστε κοντά στην κινούμενη γραμμή φορτίου. Κάθε φορτίο q που βρίσκεται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο δέχεται δύναμη που δίνεται από τη σχέση $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Σ' αυτή την περίπτωση,

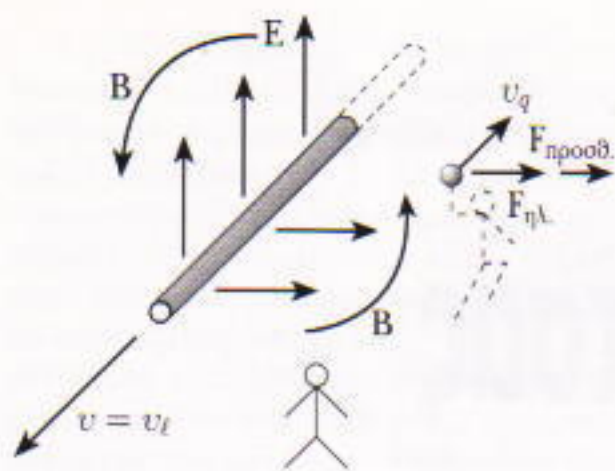
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (6)$$

αφού ο γραμμικός αγωγός κινείται με ταχύτητα v . Επομένως, το θετικό σημειακό φορτίο σας ωθείται μακριά από τον θετικά φορτισμένο αγωγό, και είσαστε υποχρεωμένοι να το σπρώχνετε προς την αντίθετη κατεύθυνση για να το διατηρήσετε στη θέση του.

Υποτίθεται, όμως, πως η κινούμενη γραμμή φορτίου δημιουργεί επιπλέον και ένα μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$ (θυμηθείτε το πείραμα του Oersted), το οποίο, εντούτοις, δεν επηρεάζει το σημειακό φορτίο σας, αφού ένα μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη μόνο σε κινούμενα φορτία, και το δικό σας δεν κινείται. (Ως προς εσάς, είναι στάσιμο όσο συνεχίζετε να το κρατάτε.)



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αρχίζετε να τρέχετε παράλληλα προς τη γραμμή φορτίου, αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν της κίνησής της (Σχήμα 3). (Θα μπορούσατε ίσως να κρατάτε το φορτίο πάνω από το κεφάλι σας, όπως ένας αθλητής την ολυμπιακή φλόγα.) Από τη δική σας οπτική γωνία, η γραμμή φορτίου κινείται τώρα ταχύτερα, διότι η σχετική ταχύτητα ανάμεσα σ' αυτήν και στο φορτίο που κρατάτε είναι πια

$$v = v_l + v_q. \quad (7)$$

(Στην πραγματικότητα, η εξίσωση αυτή είναι λανθασμένη. Ο Γαλιλαίος, ο πρώτος που πρότεινε την εξίσωση (7), δεν γνώριζε ότι η σχετική ταχύτητα ανάμεσα σε δύο αντικείμενα δεν μπορεί να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός. Ο Αϊνστάιν αναγκάστηκε να αντικαταστήσει την εξίσωση (7) με την

$$v = \frac{v_l + v_q}{1 + v_l v_q / c^2} \quad (8)$$

για να κατορθώσει να διατηρείται ως μέγιστη δυνατή ταχύτητα στο σύμπαν η ταχύτητα του φωτός. Αν $v_l = v_q = c$, τότε η εξίσωση του Αϊνστάιν καταλήγει στην

$$v = \frac{c + c}{2} = c.$$

Όταν οι v_l και v_q είναι μικρές, έτσι ώστε $v_l v_q \ll c^2$, τότε η εξίσωσή του ανάγεται στην εξίσωση του Γαλιλαίου. Απομακρυνθήκαμε, όμως, αρκετά από την ιστορία μας.)

Το ζήτημα είναι ότι, όταν το φορτίο q κινείται παράλληλα αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση από τον αγωγό, η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στη γραμμή φορτίου και στο σημειακό φορτίο αυξάνεται. Επομένως, για τον παρατηρητή που κινείται μαζί με το σημειακό φορτίο, αυτό φαίνεται ακίνητο, ενώ ο αγωγός φαίνεται να κινείται ταχύτερα και

να συστέλλεται ακόμη περισσότερο. Η επιπλέον συστολή αυξάνει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. (Η αύξηση της v στην εξίσωση (6) έχει αποτέλεσμα την αύξηση της E .) Και η νέα, συνολική δύναμη που ασκείται στο σημειακό μας κινούμενο φορτίο θα μπορούσε να γραφεί ως

$$F_{\text{ολ}} = F_{\text{ηλ}} + F_{\text{πρόσθ.}} \quad (9)$$

όπου $F_{\text{ηλ}}$ είναι η δύναμη που ασκείται από το ηλεκτρικό πεδίο στο σημειακό φορτίο πριν αρχίσει να κινείται, και $F_{\text{πρόσθ.}}$ είναι η πρόσθετη συνιστώσα της δύναμης, που οφείλεται στην κίνηση του σημειακού φορτίου.

Φυσικά, κινείστε μαζί με το σημειακό φορτίο, και επομένως η πηγή της $F_{\text{πρόσθ.}}$ σας είναι προφανής. Η $F_{\text{πρόσθ.}}$ είναι απλώς η αύξηση της δύναμης του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από την πρόσθετη γραμμική συστολή την οποία παρατηρείτε καθώς τρέχετε κατά μήκος του αγωγού. Ας υποθέσουμε, όμως, ότι ένας φίλος σας στέκεται ακίνητος και σας βλέπει να τρέχετε. Βλέπει, λοιπόν, τον ίδιο αγωγό που βλέπατε εσείς πριν αρχίσετε να τρέχετε, χωρίς να παρατηρεί οποιαδήποτε πρόσθετη συστολή. Επομένως πώς θα εξηγήσει την $F_{\text{πρόσθ.}}$;

Πριν απαντήσετε, ας ανακεφαλαιώσουμε τις δύο οπτικές γωνίες. Εσείς τρέχετε μαζί με το σημειακό φορτίο. Για σας το σημειακό φορτίο είναι στάσιμο, αλλά ο αγωγός κινείται γρήγορα και φαίνεται ιδιαίτερα συσταλμένος. Αντιλαμβάνεστε ότι η πρόσθετη δύναμη προέρχεται από την αύξηση του ηλεκτρικού πεδίου του αγωγού. Άρα, δεν αντιμετωπίζετε κανένα πρόβλημα. Ο φίλος σας στέκεται ακίνητος. Γι' αυτόν, το σημειακό φορτίο κινείται, αλλά η γραμμή φορτίου κινείται αργά, και επομένως δείχνει όπως πάντα – χωρίς να έχει συσταλεί ιδιαίτερα. Διαπιστώνει μια πρόσθετη δύναμη, χωρίς όμως να έχει οποιαδήποτε ένδειξη σχετικά με την πηγή της. Άρα, αντιμετωπίζει μεγάλο πρόβλημα.

Ο φίλος σας δεν μπορεί να ερμηνεύσει την πρόσθετη δύναμη χρησιμοποιώντας μόνο το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από τη γραμμή φορτίου, διότι ουδέποτε είδε να αλλάζει αυτό το πεδίο. Δεν έχει λοιπόν άλλη επιλογή από το να παραδεχτεί την ύπαρξη ενός δεύτερου πεδίου. Πιστεύει ότι το δεύτερο πεδίο πηγάζει από την κινούμενη γραμ-

μή φορτίου (από πού αλλού θα μπορούσε να προέλθει;), και διαπιστώνει ότι επιδρά μόνο σε κινούμενα σημειακά φορτία. Αυτό ακριβώς το πεδίο το ονομάζει μαγνητικό (Σχήμα 4).

Ο φίλος σας παραδέχεται την ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου για να μπορέσει να ερμηνεύσει ένα φαινόμενο που δεν έχει άλλο τρόπο να το εξηγήσει από τη δική του (στάσιμη) οπτική γωνία. Το φλογιστό (το «στοιχείο» της καύσης), το θερμικό (το «ρευστό» της θερμότητας), και ο αιθέρας (το υποτιθέμενο μέσο διάδοσης του φωτός) προτάθηκαν, όλα, για τον ίδιο ακριβώς λόγο. Αργότερα, όμως, όταν αναπτύχθηκε η επιστημονική γνώση, αυτές οι τρεις έννοιες εγκαταλείφθηκαν.

Θα μπορούσε πραγματικά η επιστήμη να εγκαταλείψει την ιδέα του μαγνητικού πεδίου; Οι περισσότεροι φυσικοί θα απαντούσαν αρνητικά. Θα συμφωνούσαν ότι αυτό που σε ένα πλαίσιο συντεταγμένων φαίνεται ως ένα καθαρό ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο, σε ένα άλλο πλαίσιο συντεταγμένων θα φαίνεται ως ένα μείγμα ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Θα υποστήριζαν όμως ότι και το E και το B είναι στοιχεία ενός (όπως αποκαλείται) δευτέρας τάξεως τανυστή, και ότι το σωστό είναι να μιλάμε για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παρά για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό ξεχωριστά. Το μαγνητικό πεδίο, θα ισχυρίζονταν, είναι βαθύτατα ενσωματωμένο στη θεωρία, οπότε είναι δύσκολο να το απορρίψουμε.

Δεν υπάρχει αμφιβολία πάντως, ότι η ανάπτυξη της ηλεκτροδυναμικής θα ήταν εντελώς διαφορετική αν η θεωρία της ειδικής σχετικότητας είχε εμφανιστεί εκατό χρόνια νωρίτερα.

Οι επίκυκλοι του Πτολεμαίου αποτελούσαν την καρδιά της ουράνιας μηχανικής επί 1.400 χρόνια. Ακόμη και ο Κοπέρνικος, αυτούς χρησιμοποίησε στην αρχική ηλιοκεντρική θεωρία του. Οι επίκυκλοι εξαφανίστηκαν αφότου έγινε αποδεκτή η εικασία του Κέπλερ ότι οι πλανητικές τροχιές δεν είναι κυκλικές αλλά ελλειπτικές. Το μαγνητικό πεδίο έχει ήδη κλονιστεί. Θα μπορούσε μια νέα θεωρία με ευρύτερη εμβέλεια να το εξαφανίσει εντελώς; ■

H Stephanie Eatman και ο Fraser Muir είναι φοιτητές στο Hillsborough Community College, στην Τάμπα της Φλόριντα. Ο δρ. Hugh Hickman διδάσκει φυσική στο ίδιο ίδρυμα.

Το θεώρημα της πίτσας

George Berzsenyi

Με τούτο το άρθρο σκοπεύω να εισαγάγω τους αναγνώστες μου σε μια καταπληκτική περιοχή προβλημάτων, η οποία προσέλκυσε τελευταία το ενδιαφέρον μου, μετά τη σχετική πληροφόρηση που είχα από τον Stan Wagon, καθηγητή του Macalester College στο Σαιντ Πωλ της Μινεζότα. Ο Stan Wagon πληροφορήθηκε την ύπαρξη αυτού του προβλήματος από τον καθηγητή Joseph D.E. Konhauser, ο οποίος το παρουσίασε στο γνωστό πρόγραμμά του «Το πρόβλημα της εβδομάδας». Όπως είπε ο ίδιος ο Stan, «με αυτό το πρόβλημα θελτίωσα σε πολύ μεγάλο βαθμό τη μαθηματική μου ζωή και ανάλωσα μεγάλο μέρος του ελεύθερου χρόνου μου». Είμαι βέβαιος ότι ούτε και οι αναγνώστες μου θα γλιτώσουν από τη γοητεία του.

Στην απλούστερη μορφή του, το θεώρημα της πίτσας είναι το εξής: Αν ένας κύκλος χωριστεί σε οκτώ μέρη από 4 χορδές που διέρχονται από ένα τυχαίο σημείο το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του ή στην περιφέρειά του, και αν οι προκύπτουσες «ψευδοακτί-

σμα των εμβαδών των μαύρων περιοχών ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των άσπρων περιοχών. Η πρώτη μου πρόκληση είναι: Αποδείξτε αυτή την πρόταση. Υπάρχουν τρεις τουλάχιστον τρόποι να το καταφέρετε — και οι δύο από αυτούς δεν απαιτούν καν απειροστικό λογισμό.

Η δεύτερη πρόκλησή μου είναι: Γενικεύστε και επεκτείνετε το προηγούμενο θεώρημα. Είναι φανερό ότι μπορούμε να αλλάξουμε το πλήθος n των χορδών, να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα από δύο χρώματα, να αναζητήσουμε επεκτάσεις σε τρεις διαστάσεις ή να θεωρήσουμε ελλείψεις στη θέση των κύκλων. Θα μπορούσε επίσης κάποιος να ορίσει τους ψευδοτομείς μέσω σημείων του κύκλου που ισαπέχουν, αντί των ίσων γωνιών μεταξύ των ψευδοακτίνων. Θα ήταν δυνατό ακόμη και να εγκαταλείψουμε το κοινό εσωτερικό σημείο και να σχεδιάσουμε διαδοχικούς τομείς που σχηματίζουν καθορισμένες γωνίες μεταξύ τους (δείτε το Πρόβλημα 5 στις Σπαζοκεφαλιές του παρόντος τεύχους).

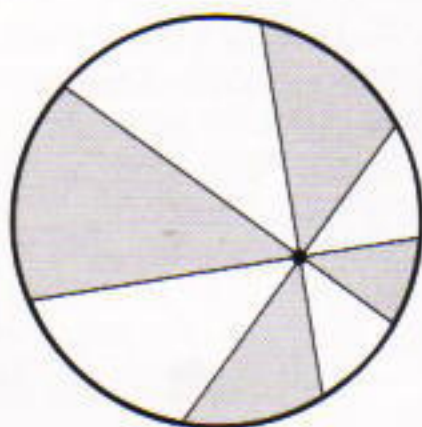
Λίγη ιστορία

Τα προβλήματα αυτά φαίνεται πως έχουν την αρχή τους στο Πρόβλημα 660 που το πρότεινε ο L.J. Upton, στο *Mathematics Magazine*, και η λύση του εμφανίστηκε το 1968 στη σελίδα 46. Ένα ακόμη, στενά σχετιζόμενο πρόβλημα, προτάθηκε από τον Stanley Rabinowitz ως Πρόβλημα 1325, στο *Crux Mathematicorum*. Μια ειδική περίπτωση αυτού του προβλήματος αποτελεί το θεώρημα της πίτσας.

Οι Stan Wagon και Larry Carter (IBM) ανακάλυψαν μια μέθοδο απόδειξης του θεωρήματος μέσω κατάτμησης, που πρόκειται σύντομα να δημοσιευτεί στο *Mathematics Magazine*. Η

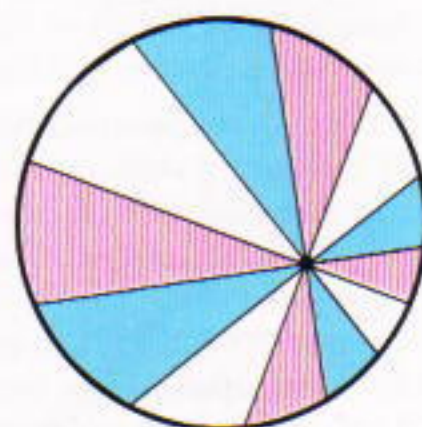
τρίτη πρόκληση για τους αναγνώστες μου είναι: Βρείτε μια απόδειξη μέσω κατάτμησης του θεωρήματος της πίτσας. Αποδείξεις μέσω κατάτμησης για την περίπτωση $n = 6$ και $n = 8$ χορδών ανακάλυψε ο Allen Schwenk (Πανεπιστήμιο του Δυτικού Μίτσιγκαν), ο οποίος έχει την αίσθηση ότι υπάρχουν γενικώς τέτοιες αποδείξεις, αν και είναι δύσκολο να δούμε πώς θα μπορούσαμε να αποδείξουμε τη γενική περίπτωση.

Εδώ πρέπει να αναφέρω πως όταν δούλευα γι' αυτό το άρθρο, ήρθα τυχαία σε επαφή με τον Stan Rabinowitz, ο οποίος μου έδωσε ένα υπέροχο χειρόγραφο 37 σελίδων με τον τίτλο «A survey of interesting results about regular polygons» (Επισκόπηση ενδιαφερόντων αποτελεσμάτων σχετικών με τα κανονικά πολύγωνα). Στο εν λόγω χειρόγραφο περιέχεται σχεδόν οτιδήποτε γνωστό για το θεώρημα της πίτσας. Μπορείτε να ζητήσετε ένα αντίγραφο γράφοντας στον Stan (MathPro Press, 12 Vine Brook Road, Westford MA 01886, USA). Επίσης, μπορείτε να αναζητήσετε (και να αγοράσετε!) το βιβλίο



Σχήμα 1

νες» σχηματίζουν ίσες γωνίες μεταξύ τους, τότε, αν οι «ψευδοτομείς» που προκύπτουν χρωματιστούν εναλλάξ (ανά 2) άσπροι και μαύροι, το άθροισμα των εμβαδών των μαύρων περιοχών ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των άσπρων περιοχών.



Σχήμα 2

του *Index of Mathematical Problems, 1980-1984*, που είναι η απόλυτη επιλογή για τη βιβλιοθήκη όποιου ενδιαφέρεται για μαθηματικά προβλήματα.

Την ίδια περίοδο, έμαθα από τον Murray Klamkin ότι προετοιμάζει ένα άρθρο σχετικό με τρία είδη «ισεμβαιδικών διαμερίσεων». Συγκεκριμένα, ανακάλυψε ότι ο περιορισμός του σημείου στο εσωτερικό του κύκλου δεν είναι απαραίτητος αν χρησιμοποιήσουμε προσημασμένα εμβαδά. Επιπλέον, γενίκευσε το πρόβλημα σε k σημεία, κατανεμημένα κανονικά πάνω στην περιφέρεια του κύκλου: αν αθροίσουμε τα εμβαδά ανά k τομείς, προκύπτει το $1/k$ του εμβαδού του κύκλου. Η τέταρτη πρόκλησή μου είναι: *Επιθεβαιώστε τους ισχυρισμούς του Klamkin.*

Και μετά την πίτσα, δοκιμάστε το σκαλτσόνε

Η τελευταία μου πρόκληση αφορά μια τριτοδιάστατη επέκταση, για την οποία έμαθα από τον Tom Banchoff. Την ανακάλυψε ένας φοιτητής του, ο Michael Nathanson, πρωτοετής στο Πανεπιστήμιο Brown. Την ονομάζουν θεώρημα του σκαλτσόνε: *Διαλέξτε οποιοδήποτε σημείο P στο εσωτερικό ή την επιφάνεια μιας σφαίρας (σκαλτσόνε), μια ευθεία που διέρχεται από αυτό το σημείο, και τέσσερα επίπεδα που διέρχονται από την ευθεία σχηματίζοντας στο P οκτώ ίσες γωνίες 45° . Τότε, αυτά τα επίπεδα μαζί με το επίπεδο που είναι κάθετο στην ευθεία, χωρίζουν το σκαλτσόνε σε 16 τμήματα. Μπορούμε να βάψουμε αυτά τα τμήματα εναλλάξ μαύρα και άσπρα: τότε το άθροισμα των όγκων των μαύρων τμημάτων θα είναι ίσο με το άθροισμα των όγκων των άσπρων τμημάτων. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή του Cavalieri. Η τελευταία μου πρόκληση είναι: Αναπτύξτε μια παρόμοια απόδειξη, ή βρείτε μια απόδειξη μέσω κατάτμησης.*

Τελειώνοντας, θα ήθελα να αναφέρω ότι το χειρόγραφο του Rabinowitz ασχολείται και με τις διαιρέσεις κανονικών πολυγώνων και ομοπαράλληλων εικόνων τους (και κύκλων), και ότι ο ίδιος υποψιάζεται πως υπάρχει μια αρχή δυϊσμού ανάμεσα σε σημεία τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός κύκλου και σε ίσες γωνίες ανάμεσα στις «ψευδοακτίνες» που ξεκινούν από το P . Θα σας ενημερώσω μόλις δημοσιευτεί το χειρόγραφο του, και βέβαια όταν ανακοινωθούν οι ανακαλύψεις των Wagon και Carter. Έως τότε, σας εύχομαι... καλή όρεξη σ' αυτή την υπέροχη περιοχή προβλημάτων. 

ΝΕΑΝΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ... ΓΙΑ ΜΕΓΑΛΟΥΣ

Brian Bolt

Μαθηματικές Σπαζοκεφαλίες 1, 2 και 3



Τρεις συλλογές μαθηματικών προβλημάτων και παιχνιδιών που έχουν σχεδιαστεί για να κεντρίσουν το ενδιαφέρον όχι μόνο των νεαρών αναγνωστών αλλά και των ανθρώπων όλων των ηλικιών που αγαπούν τις μαθηματικές σπαζοκεφαλίες και τα ψυχαγωγικά μαθηματικά. Στο δεύτερο μέρος κάθε βιβλίου περιλαμβάνονται υποδείξεις και λύσεις στα προβλήματα του πρώτου μέρους.

195, 186 και 174 σελ. αντίστοιχα,
2.500, 2.600 και 2.800 δρχ. αντίστοιχα.

Russell Stannard

Ο χρόνος και ο χώρος του Θείου Αλβέρτου

και

Οι μαύρες τρύπες και ο Θεός Αλβέρτος

Η ειδική και η γενική θεωρία της σχετικότητας μέσα από δύο διασκεδαστικές ιστορίες.

«Πιστεύετε ότι τη θεωρία του Αϊνστάιν μπορεί να την κατανοεί μόνο η επιστημονική κοινότητα; Τότε διαβάστε τα βιβλία του Stannard, και μετά χαρίστε τα στα παιδιά σας.»

The Herald

«Πρέπει να τα διαβάσουν όλοι οι νέοι από τα 12 και πάνω.»

The New Scientist

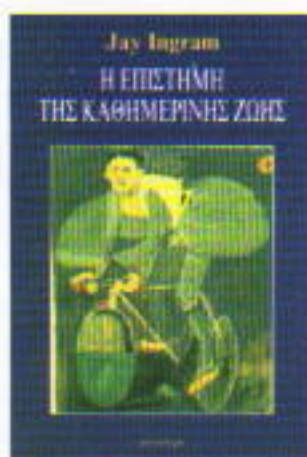
Ο R. Stannard είναι καθηγητής φυσικής στο Ανοικτό Πανεπιστήμιο του Λονδίνου.

125 και 160 σελ. αντίστοιχα,
2.400 και 2.600 δρχ. αντίστοιχα.



Jay Ingram

Η επιστήμη της καθημερινής ζωής



Γιατί το χασμουρητό είναι μεταδοτικό; Γιατί το φεγγάρι φαίνεται μεγαλύτερο στον ορίζοντα απ' ότι ψηλά στον ουρανό; Όταν βρέχει πρέπει να τρέχετε για να βραχείτε λιγότερο ή όχι; Πώς καταφέρνετε να περπατάτε; Τι είναι το φαινόμενο του κοκτέιλ-πάρτυ; Γιατί συχνά αναγνωρίζετε τα πρόσωπα των ανθρώπων αλλά δεν θυμάστε τα ονόματά τους; Σε εκατοντάδες ερωτήματα από την καθημερινή ζωή θα βρείτε απαντήσεις στις σελίδες αυτού του βιβλίου, με έναν τρόπο γοητευτικό και χιουμοριστικό.

250 σελ., 2.900 δρχ.

Κάθε παραγγελία σας μπορείτε να την πληρώνετε και με την πιστωτική σας κάρτα (Diners ή Visa).

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Ισαύρων 10 και Λαφνομήλη, 114 71 Αθήνα

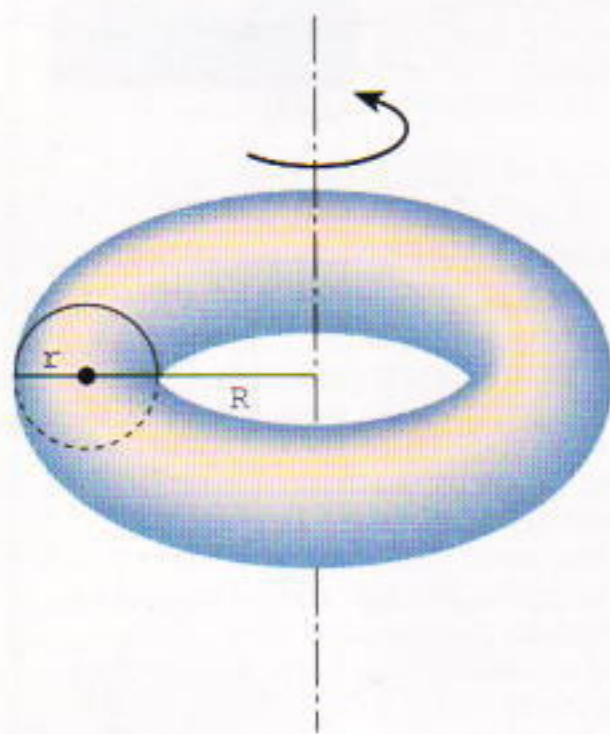
Τηλ.: 3643272, 3645098 Fax: 3641864

Τόροι, Τόροι, Τόροι!

Η επιδρομή της τοπολογίας στα πνευματικά παιχνίδια

Πότε είδατε για πρώτη φορά μια σπείρα; Ήταν ένας λουκουμάς που, παιδί ακόμη, παρακαλούσατε να σας δώσουν; Μια σαμπρέλα αυτοκινήτου παρατημένη σε ένα χωράφι; Η βέρα στο δάκτυλο του πατέρα σας; Ή μήπως το αχνό δακτυλίδι καπνού που έφτιαχνε ο θεριακλής θείος σας;

Η μαθηματικά τέλεια σπείρα (που λέγεται και τόρος) ορίζεται ως το στερεό σώμα που σχηματίζεται από την περιστροφή ενός κύκλου γύρω από μια ευθεία η οποία βρίσκεται στο επίπεδο του κύκλου και δεν έχει κοινά σημεία με αυτόν (Σχήμα 1). Ο όγκος ενός



Σχήμα 1

παρόμοιου δακτυλίου υπολογίστηκε από τον Γιοχάννες Κέπλερ. Νά τι έγραψε στο διάσημο βιβλίο του *Η νέα στερεομετρία των βαρελιών του κρασιού*:

«Κάθε στερεό εκ περιστροφής κυκλικής ή ελλειπτικής τομής έχει όγκο ίσο με τον κύλινδρο του οποίου το ύψος ισούται με την περιφέρεια που

διαγράφει το κέντρο του περιστρεφόμενου σχήματος, ενώ η βάση του ισούται με την τομή αυτή».

Ο πλήρης τίτλος αυτού του έργου, σύμφωνα και με τη συνήθεια της εποχής, ήταν μάλλον σχοινοτενής: *Η νέα στερεομετρία των βαρελιών του κρασιού, κυρίως αυστριακών, καθώς έχουν το περισσότερο πλεονεκτικό σχήμα, και η αξιοσημείωτα εύκολη χρήση του κυβικού κανόνα σε αυτά, με ένα παράρτημα περί αρχιμήδειας στερεομετρίας. Έργο του Γιοχάννες Κέπλερ, του μαθηματικού του αυτοκράτορα Καίσαρα Ματθαίου του Α' και του πιστού του λαού της Άνω Αυστρίας με καισαρικό προνόμιο για 25 έτη.*

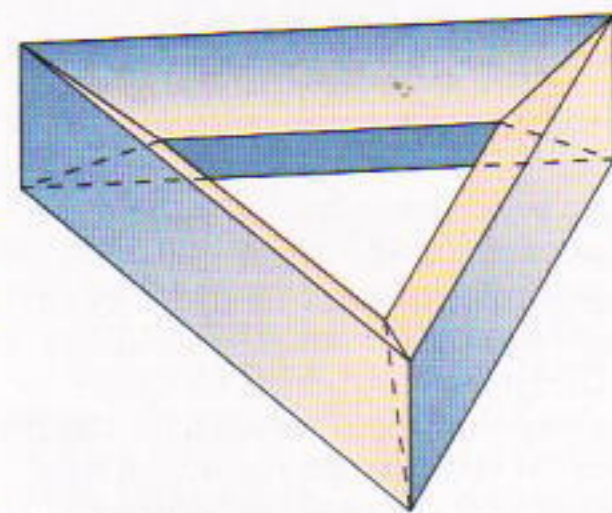
Με σύγχρονο συμβολισμό, ο τύπος του Κέπλερ για τον όγκο V μιας σπείρας με γενετήριο κύκλο ακτίνας r , όταν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τον άξονα περιστροφής είναι R , γράφεται ως εξής:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Το εμβαδόν της επιφάνειας της σπείρας είναι $4\pi^2 Rr$ — δηλαδή, ισούται με το γινόμενο του μήκους δύο περιφερειών: της μίας που παράγει τη σπείρα και αυτής που διαγράφεται από το κέντρο της πρώτης όταν περιστρέφεται γύρω από τον άξονα. Ομοίως, ο όγκος της σπείρας μπορεί να θεωρηθεί ως το γινόμενο του εμβαδού του περιστρεφόμενου κύκλου επί το μήκος της περιφέρειας που διαγράφεται από το κέντρο του. Και οι δύο αυτές ερμηνείες είναι ειδικές περιπτώσεις των επονομαζόμενων τύπων του Guldin, που δίνουν τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας στερεών εκ περιστροφής.

Ο όρος «σπείρα» δεν χρησιμοποιείται μόνο για το στερεό αλλά και για την επιφάνειά του. Αυτή η επιφάνεια

είναι ιδιαίτερα προσφιλής στους τοπολόγους — στους μαθηματικούς οι οποίοι μελετούν τις ιδιότητες των σχημάτων που διατηρούνται αναλλοίωτες κάτω από συνεχείς παραμορφώσεις. Από τοπολογική άποψη, η σπείρα είναι η απλούστερη επιφάνεια μετά τη σφαίρα, από την οποία τη διαφοροποιεί η τρύπα. Αυτή η ορατή γεωμετρική διαφορά μπορεί να εκφραστεί αλγεβρικά. Ο Leonard Euler παρατήρησε ότι κάθε πολύεδρο που είναι τοπολογι-



Σχήμα 2

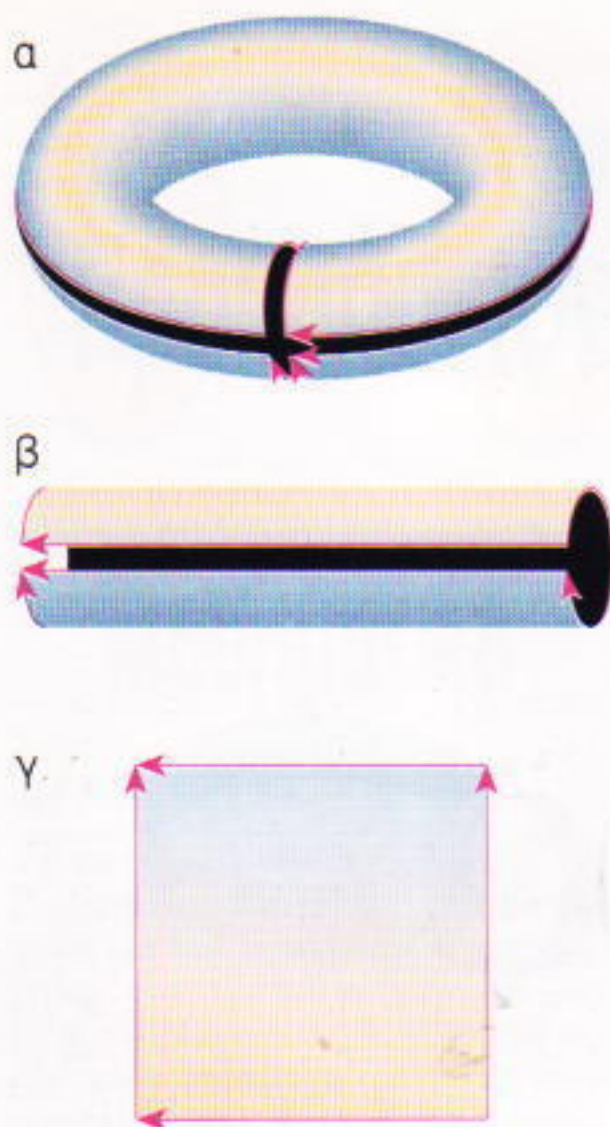
κά ισοδύναμο με τη σφαίρα ικανοποιεί τη σχέση

$$K - A + E = 2,$$

όπου K , A , και E εκφράζουν το πλήθος των κορυφών, των ακμών, και των εδρών του αντίστοιχα. Για παράδειγμα, ένας κύβος έχει 8 κορυφές, 12 ακμές και 6 έδρες. Κατά τεκμήριο,

$$K - A + E = 8 - 12 + 6 = 2.$$

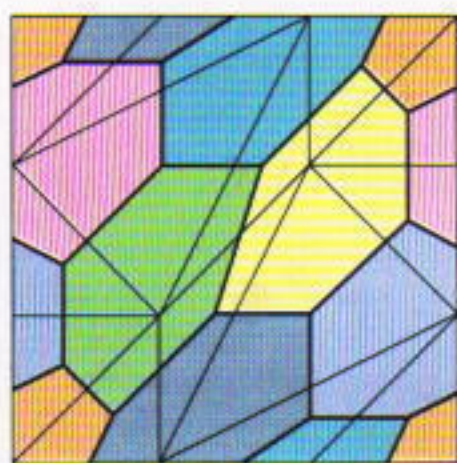
Η, θεωρήστε μια πυραμίδα με βάση ένα πολύγωνο με n κορυφές: έχει $n + 1$ κορυφές, $2n$ ακμές, και $n + 1$ έδρες, ο-



Σχήμα 3

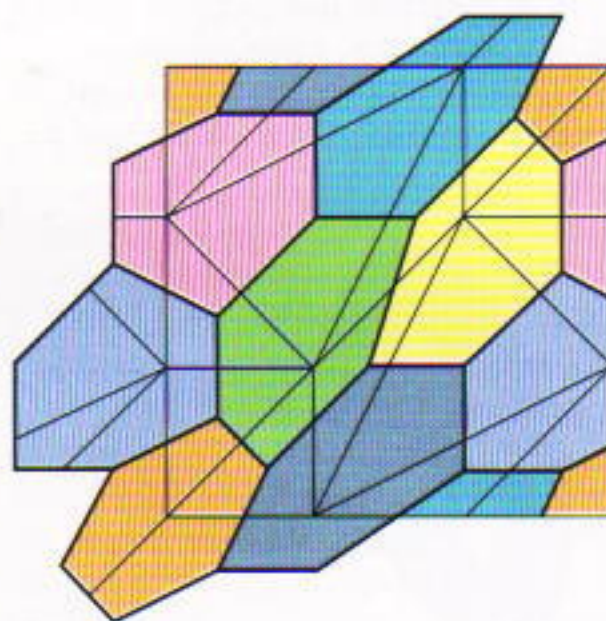
πότε έχουμε $K - A + E = (\nu + 1) - 2\nu + (\nu + 1) = 2$ και πάλι. Αν όμως, υπολογίσετε την ίδια παράσταση (που ονομάζεται *χαρακτηριστική του Euler*) για ένα πολύεδρο δακτυλιοειδές (δηλαδή, σχήματος σπείρας), θα βρείτε ότι είναι ίση με 0, και όχι με 2. Για παράδειγμα, για την «τριγωνική σπείρα» του Σχήματος 2, έχουμε: $K - A + E = 9 - 18 + 9 = 0$.

Φανταστείτε τώρα ότι τέμνουμε μια σπείρα (την επιφάνεια, όχι το στερεό!) εγκάρσια και κατά μήκος της (Σχήμα 3α) — δηλαδή γύρω από τον περιστρεφόμενο κύκλο και γύρω από τον κύ-



Σχήμα 4

κλο που διαγράφει οποιοδήποτε από τα σημεία του — και ότι κατόπιν αναπτύσσουμε την επιφάνειά του. Όταν ξετυλίξουμε το δακτύλιο μετά την πρώτη τομή (Σχήμα 3β) παίρνουμε έναν κύλινδρο κατά μήκος του οποίου υπάρχει η δεύτερη τομή. Επομένως, καταλήγουμε σε ένα ορθογώνιο του οποίου οι απέναντι πλευρές — οι ακμές των τομών — μπορούν να θεωρηθούν ταυτόσημες (κολλημένες μεταξύ τους). Οι διαστάσεις δεν έχουν καμία σημασία για τους τοπολόγους, και γι' αυτό συνήθως σχεδιάζουν το σχήμα που προκύπτει σαν τετράγωνο (Σχήμα 3γ). Τα βέλη στις πλευρές του τετραγώνου έχουν σχεδιαστεί για να είναι ευκολότερη η σωστή συγκόλληση των πλευρών — το κάθε βέλος με το αντίστοιχό του. (Η αντιστροφή ενός βέλους στο ένα ή και στα δύο παράλληλα ζεύγη οδηγεί σε άλλες ενδιαφέρουσες επιφάνειες.) Αυτή η αναπαράσταση διευκολύνει εξαιρετικά την εξερεύνηση και την ερ-



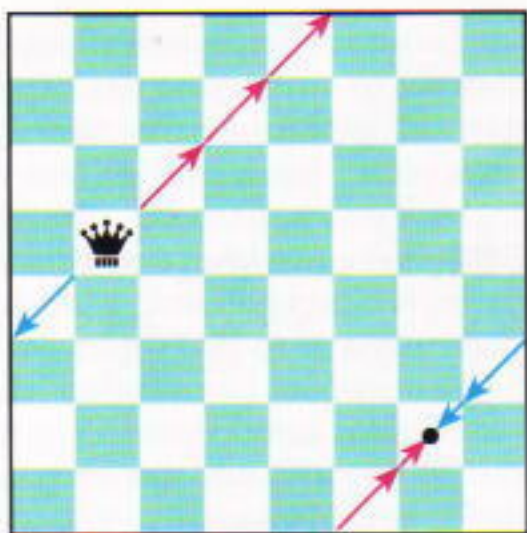
Σχήμα 5

μηνεία πολλών ιδιοτήτων της σπείρας. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4 βλέπουμε έναν χάρτη σχεδιασμένο πάνω σε μια σπείρα, στον οποίο κάθε ζεύγος χωρών έχει κοινά σύνορα. Μην ξεχνάτε ότι οι απέναντι πλευρές του χάρτη του Σχήματος 4 πρέπει να κολληθούν μεταξύ τους, οπότε τα φαινομενικά ξένα μεταξύ τους τμήματα στις γωνίες του χάρτη είναι, στην πραγματικότητα, τμήματα της ίδιας χώρας. Στις ίδιες χώρες ανήκουν επίσης και τα άλλα τμήματα με ίδιο χρώμα που βρίσκονται στις άκρες του χάρτη. Μια διαφορετική εκδοχή του ίδιου χάρτη (Σχήμα 5), που τη δημιουργήσαμε κόβοντας

σε κομμάτια τον τετράγωνο χάρτη και ενώνοντάς τα κατά μήκος των ακμών, δείχνει καθαρά ότι υπάρχουν επτά εξαγωνικές χώρες, που η καθεμία τους περιβάλλεται από τις άλλες έξι. (Στο σχήμα βλέπουμε μόνο μία χώρα να περιβάλλεται από τις υπόλοιπες, αλλά στην πραγματικότητα το ίδιο ισχύει για όλες. Προσπαθήστε να το δείξετε αυτό ξανακόβοντας κατάλληλα το χάρτη.) Από αυτό το χάρτη φαίνεται ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον επτά χρώματα για να χρωματίσουμε οποιονδήποτε χάρτη πάνω στη σπείρα, έτσι ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικό χρώμα. Μπορεί επίσης να αποδειχτεί ότι επτά χρώματα αρκούν για να χρωματίσουμε οποιονδήποτε τέτοιο χάρτη. Το ίδιο πρόβλημα για τη σφαίρα δεν είχε λυθεί έως πριν από λίγα χρόνια, οπότε και αποδείχτηκε οριστικά ότι τέσσερα χρώματα αρκούν πάντοτε για έναν «σφαιρικό» χάρτη.

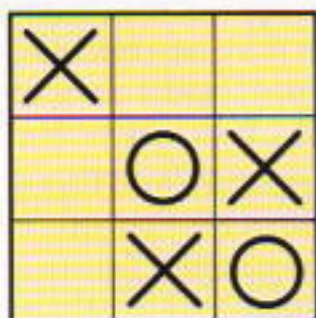
Οι λεπτές μαύρες γραμμές στο Σχήμα 4 αποτελούν ένα πλέγμα τριγώνων πάνω στη σπείρα (οι κορυφές των εξαγώνων του χάρτη μας είναι τα κέντρα βάθους των τριγώνων του δικτύου). Αυτό το δίκτυο έχει επτά κορυφές που ανά δύο συνδέονται με μια ακμή. Οι ακμές σχηματίζουν 14 τριγωνικές έδρες. Στον Παιχνιδότοπο αυτού του τεύχους θα μάθετε πώς να κατασκευάσετε το μοντέλο ενός πολύεδρου, το ανάπτυγμα του οποίου είναι τοπολογικά ισοδύναμο με το παρόν δίκτυο. Επίσης, αυτό είναι και το απλούστερο δακτυλιοειδές πολύεδρο, με την έννοια ότι έχει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό κορυφών.

Φανταστείτε ότι κολλάμε μεταξύ τους τις απέναντι ακμές μιας σκακιέρας. Τότε τα «ακραία» και τα «γωνιακά» τετράγωνα θα εξαφανιστούν — όλα τα τετράγωνα θα είναι γεωμετρικά ισοδύναμα. Τι πληθώρα ευκαιριών για τους αξιωματικούς, τους πύργους και τις βασίλισσες! Ένας πύργος ή μια βασίλισσα μπορεί να μετακινηθεί, για παράδειγμα, από το β5 στο η2 σε μια κίνηση, και μάλιστα επιλέγοντας ανάμεσα σε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις (Σχήμα 6). Ένας βασιλιάς με έναν πύργο ή μια βασίλισσα δεν μπορούν να κάνουν ματ σ' έναν βασιλιά που αμύνεται μόνος του. (Δείτε στον Παιχνιδότοπο αυτού του τεύχους μερικά σκακιστικά προβλήματα σε μια σπειροειδή σκακιέρα.)

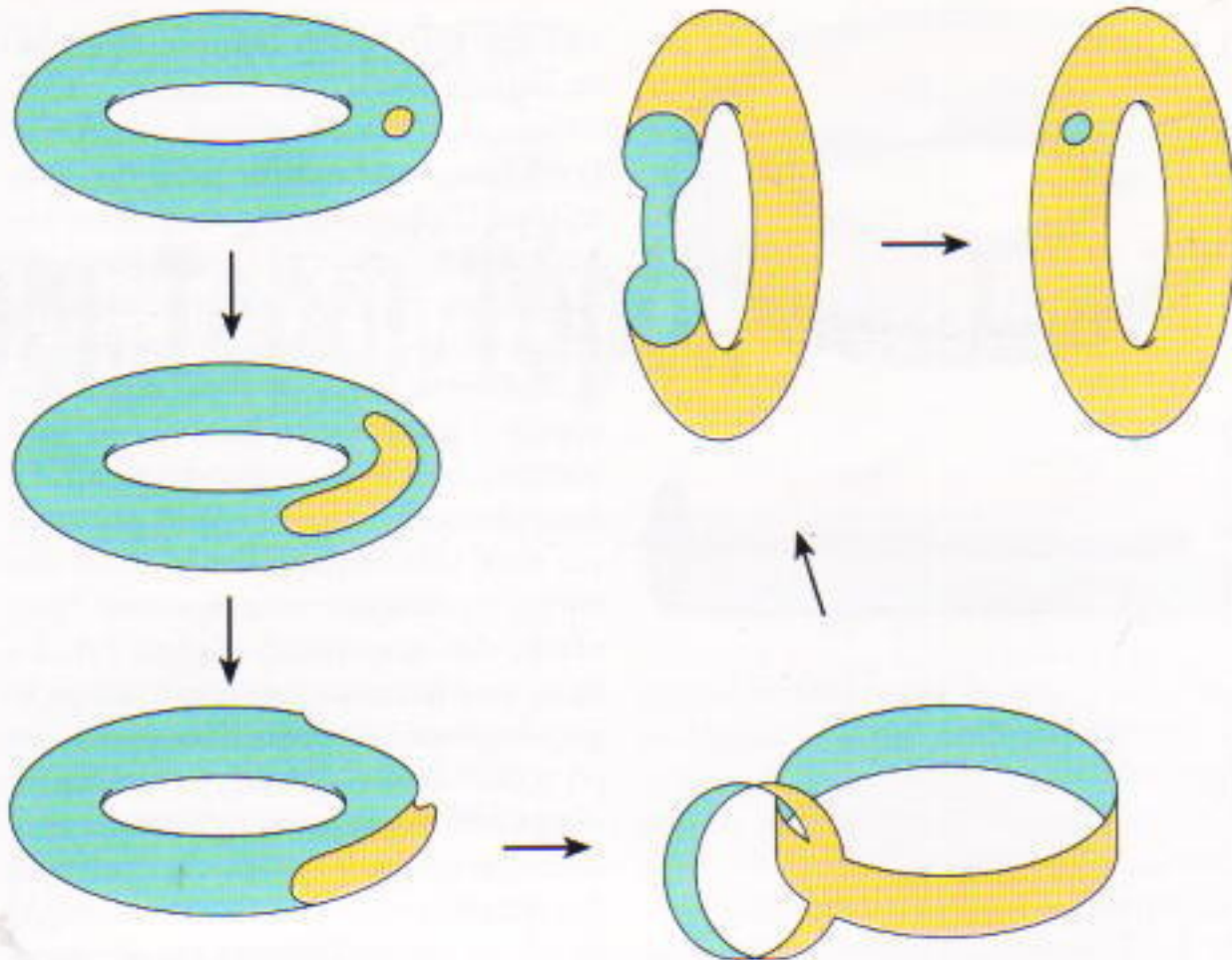


Σχήμα 6

Και άλλα παιχνίδια που παίζονται κανονικά σε μια τετράγωνη επιφάνεια μπορούν να μεταφερθούν στη σπείρα. Για παράδειγμα, προσπαθήστε να παίξετε τρίλιζα. Είναι γνωστό (και μπορούμε να το αποδείξουμε εύκολα) ότι στο συνηθισμένο παιχνίδι που παίζεται σε μια τετραγωνισμένη επιφάνεια διαστάσεων 3×3 οποιοσδήποτε από τους δύο παίκτες μπορεί να εξασφαλίσει την ισοπαλία. Ποιος κερδίζει στη σπείρα; Ποια θα πρέπει να είναι η πρώτη κίνηση; Προσέξτε ότι με τις θέσεις του Σχήματος 7 ο πρώτος παίκτης έχει



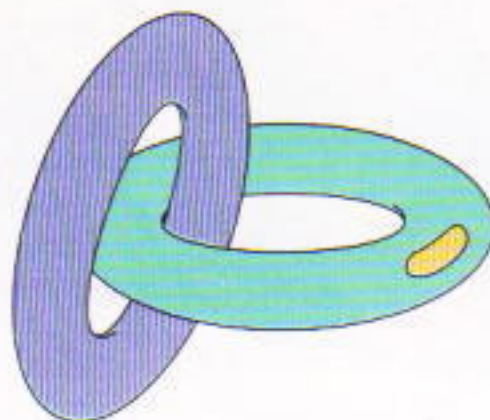
Σχήμα 7



Σχήμα 8

ήδη σχηματίσει μια γραμμή με τρία X, και, επομένως, έχει κερδίσει!

Τελειώνοντας, ας γυρίσουμε τη σπείρα «τα μέσα-έξω». Αυτό είναι κά-



Σχήμα 9

τι που μπορούμε να το κάνουμε εύκολα μ' ένα μπαλόνι, χρησιμοποιώντας την τρύπα από την οποία το φουσκώνουμε, αν είναι αρκετά ελαστικό. Ίσως φαίνεται αδύνατο να πετύχουμε το ίδιο με τη σαμπρέλα ενός ποδηλάτου. Ωστόσο, είναι δυνατό να γίνει, αν ακολουθήσουμε τα βήματα του Σχήματος 8. Και τώρα, μια τοπολογική ερώτηση για να δοκιμάσετε τη φαντασία σας: Σκεφτείτε δύο σπείρες ενωμένες όπως στο Σχήμα 9. Γυρίζουμε και τις δύο «τα μέσα-έξω». Τι θα γίνει μετά τη βάρβαρη ενέργειά μας;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 64

ΤΟ
ΙΔΙΑΙΤΕΡΟ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ
ΓΙΑ
ΤΙΣ
ΦΥΣΙΚΕΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
ΚΑΙ
ΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

QUANTUM

Κάντε ένα πολύτιμο δώρο!

Συμπληρώστε την κάρτα συνδρομής και χαρίστε το Quantum στους φίλους σας, στους συναδέλφους σας, στα παιδιά σας, στους μαθητές σας, στους γονείς σας... Μπορείτε να πληρώσετε και με την πιστωτική σας κάρτα (Diners ή Visa).

Περιοδικό Quantum, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα.
Τηλ.: (01)3643272, 3645098. Fax: (01)3641864

Προκλήσεις στη Φυσική και τα Μαθηματικά

Μαθηματικά

M1

Τα πανταχού παρόντα σημεία. (α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός σημείων που πρέπει να γραφούν στο εσωτερικό ενός κυρτού πενταγώνου έτσι ώστε να βρίσκεται ένα τουλάχιστον σημείο μέσα σε καθένα από τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τρεις κορυφές του πενταγώνου; (β) Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για ένα κυρτό n -γωνο.

M2

Αναζητώντας το PA . Από ένα σημείο O στο εσωτερικό ενός τριγώνου $ABΓ$, φέρουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα OM , ON , και OP στις πλευρές AB , $ΒΓ$, και $ΓΑ$, αντίστοιχα. Αν $AM = 3$, $MB = 5$, $BN = 4$, $ΝΓ = 2$ και $ΓΡ = 4$, βρείτε το PA .
(E. Tsinovi)

M3

Ανισότητα στη μοναδιαία σφαίρα. Αποδείξτε ότι αν μια τριάδα μη αρνητικών αριθμών x, y, z ικανοποιεί την εξίσωση της μοναδιαίας σφαίρας: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, τότε αληθεύει η ανισότητα

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(V. Matizen)

M4

Αφθονία ορθών γωνιών. Από την κορυφή A ενός τετραγώνου $ABΓΔ$ σχεδιάζουμε δύο ευθείες μέσα στο τετράγωνο. Από τις κορυφές B και $Δ$, φέρουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα προς τις δύο ευθείες: το BK και το

$ΔM$ είναι κάθετα στη μία από αυτές, ενώ το $ΒΛ$ και το $ΔN$ είναι κάθετα στη δεύτερη. Αποδείξτε ότι τα τμήματα $KΛ$ και MN είναι μεταξύ τους ίσα και κάθετα.

(D. Nyamsuren [Μογγολία])

M5

Το τέλος των μετακομίσεων. Ο ξενώνας της Μουσικής Σχολής έχει έναν διάδρομο απείρου μήκους και άπειρο πλήθος δωματίων στη μια πλευρά του διαδρόμου. Τα δωμάτια είναι αριθμημένα στη σειρά με ακέραιους αριθμούς, και σε κάθε δωμάτιο υπάρχει ένα πιάνο με ουρά. Ένας πεπερασμένος αριθμός φοιτητών μένει σε αυτά τα δωμάτια (αρκετοί φοιτητές μπορεί να μένουν στο ίδιο δωμάτιο). Κάθε μέρα, δύο φοιτητές που μένουν σε γειτονικά δωμάτια — το κ και το $(\kappa + 1)$ — ενοχλούνται ο ένας από τη μουσική του άλλου και μετακομίζουν — στο $(\kappa - 1)$ και στο $(\kappa + 2)$ δωμάτιο. Αποδείξτε ότι οι κινήσεις σταματούν έπειτα από πεπερασμένο αριθμό ημερών.
(V. Pyichon).

Φυσική

Φ1

Ρεκόρ άλματος. Εκτιμήστε το ελάχιστο μέγεθος που πρέπει να έχει ένας σφαιρικός αστεροειδής έτσι ώστε ένας αστροναύτης να μην μπορεί να φύγει από αυτόν πηδώντας.
(G. Meledin)

Φ2

Χυμένο γάλα. Ενώ βάζετε γάλα σε ένα ποτήρι, σας πέφτει λίγο πάνω στο κάλυμμα του τραπέζιού, που είναι από μουςαμά. Διαπιστώνετε ότι μπορείτε

να διακρίνετε ελάχιστα το σχέδιο του μουςαμά μέσα από το λεπτό στρώμα του χυμένου γάλατος. Γνωρίζοντας ότι το γάλα είναι διάλυμα μικρών σφαιρών λίπους μέσα σε νερό, εκτιμήστε το μέγεθός τους.

(P. Zubkov)

Φ3

Δύστροπη χύτρα. Ένα λίτρο νερού δεν βράζει μέσα σε μια χύτρα όταν χρησιμοποιούμε ένα ηλεκτρικό θερμαντικό στοιχείο των 100 watt. Βρείτε το χρόνο που περνά για να ψυχθεί το νερό κατά 1°C όταν σβήνουμε το θερμαντικό στοιχείο.

Φ4

Ένας ακόμη πυκνωτής. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C και ένα πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L συνδέονται σε σειρά με μια πηγή τάσεως V_0 . Στη συνέχεια, το πηνίο συνδέεται παράλληλα με έναν ακόμη πυκνωτή της ίδιας χωρητικότητας. Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή; Αγνοήστε την αντίσταση των καλωδίων και την εσωτερική αντίσταση της πηγής.
(A. Zilberman)

Φ5

Ο φράχτης που εξαφανίζεται. Παρακολουθώντας ένα παιχνίδι τένις πίσω από έναν φράχτη από συρματόπλεγμα, παρατηρούμε δύο φαινόμενα: Κατ' αρχάς, αν απομακρυνθούμε από το φράχτη, βλέπουμε τους παίκτες καλύτερα. Έπειτα, αν κινηθούμε γρήγορα κατά μήκος του φράχτη, ο φράχτης μοιάζει να εξαφανίζεται. Εξηγήστε τα δύο φαινόμενα.

(S. Krotov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 64.

Σήματα διαβάσεων

*«Τα πράσινα φανάρια δεν τα προφταίνεις
καθώς τρέχεις και κυνηγάς το χαμένο καιρό
μια στιχμή, μια στιχμή μέσα στα σκοτεινά
— τα κόκκινα φανάρια άναψαν πάλι...»*

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

Οταν οδηγείτε σε μια λεωφόρο και ανάψει μπροστά σας το κίτρινο φανάρι, δεν αναρωτιέστε σε πόσο ακριβώς χρόνο θα ανάψει το κόκκινο; Προλαβαίνετε να περάσετε τη διάβαση; Πρέπει να αναπτύξετε ταχύτητα ή καλύτερα να σταματήσετε; Ίσως θα ήταν καλύτερα αν υπήρχε ένα επιπλέον φανάρι, ας πούμε μπλε, που θα μας πληροφορούσε ότι μόλις έσβηνε, θα άναβε αμέσως το κόκκινο. Αλλά τότε πάλι μάλλον θα χρειαζόταν ένα ακόμη φανάρι, ίσως με χρώμα μοβ, που θα μας προειδοποιούσε ότι επίκειται το άναμμα του μπλε. Πριν από το κόκκινο το μπλε, πριν από το μπλε το μοβ, πριν από το μοβ... Φαύλος κύκλος!

Γιατί υπάρχουν τα κίτρινα φανάρια στις διασταυρώσεις; Ποιος αποφάσισε αν θα μένουν αναμμένα για ένα, δύο ή τέσσερα δευτερόλεπτα; Και συμβάλλουν πάντοτε στην ασφαλή οδήγηση; Ας αναλύσουμε τι συμβαίνει όταν οδηγώντας πλησιάζετε ένα κίτρινο φανάρι.

Καθώς, λοιπόν, οδηγείτε σε μια λεωφόρο με συγκεκριμένη ταχύτητα, βλέπετε στα φανάρια της διασταύρωσης που βρίσκεται μπροστά σας να σβήνει ξαφνικά το πράσινο και να ανάβει το κίτρινο. Πρέπει να πατήσετε το φρένο ή το γκάζι; Αν μεν βρίσκεστε πολύ κοντά στη διασταύρωση, γνωρίζετε ότι μπορείτε να συνεχίσετε να κινείστε

χωρίς να αλλάξετε ταχύτητα, και να διασχίσετε τη διασταύρωση όσο είναι αναμμένο το κίτρινο. Αν πάλι βρίσκεστε αρκετά μακριά από αυτή, γνωρίζετε ότι πρέπει να σταματήσετε.

Αλλά ας θεωρήσουμε πως θέλετε να περάσετε τη διασταύρωση χωρίς να ελαττώσετε ταχύτητα. Μέχρι πόσο πρέπει να απέχετε από τη διασταύρωση για να τη διαβείτε με ασφάλεια, όσο θα είναι αναμμένο το κίτρινο φανάρι; Η μελέτη μας θα γίνει ευκολότερη αν χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα αριθμητικά στοιχεία.

Ας υποθέσουμε ότι κινείστε με ταχύτητα 83 km/h, ή αλλιώς 23 m/sec. Επιπλέον, ότι το κίτρινο φανάρι παραμένει αναμμένο, πριν ανάψει το κόκκινο, για 3 sec. Το συνολικό μήκος που μπορείτε να διανύσετε με τη συγκεκριμένη ταχύτητα σ' αυτό το διάστημα είναι 69 m. Αν το πλάτος της διασταύρωσης είναι, λόγου χάρη, 15 m, τότε μπορείτε να περάσετε με ασφάλεια τη διασταύρωση, αν τη στιγμή που ανάβει το κίτρινο απέχετε από την άκρη της έως 54 m. Ας ονομάσουμε αυτή την απόσταση «ζώνη διάβασης».

Αν πάλι θεωρήσουμε ότι αποφασίζετε να σταματήσετε μόλις βλέπετε το κίτρινο φανάρι να ανάβει, πρέπει να υπολογίσουμε την απόσταση που θα διανύσει το αυτοκίνητο στο χρόνο

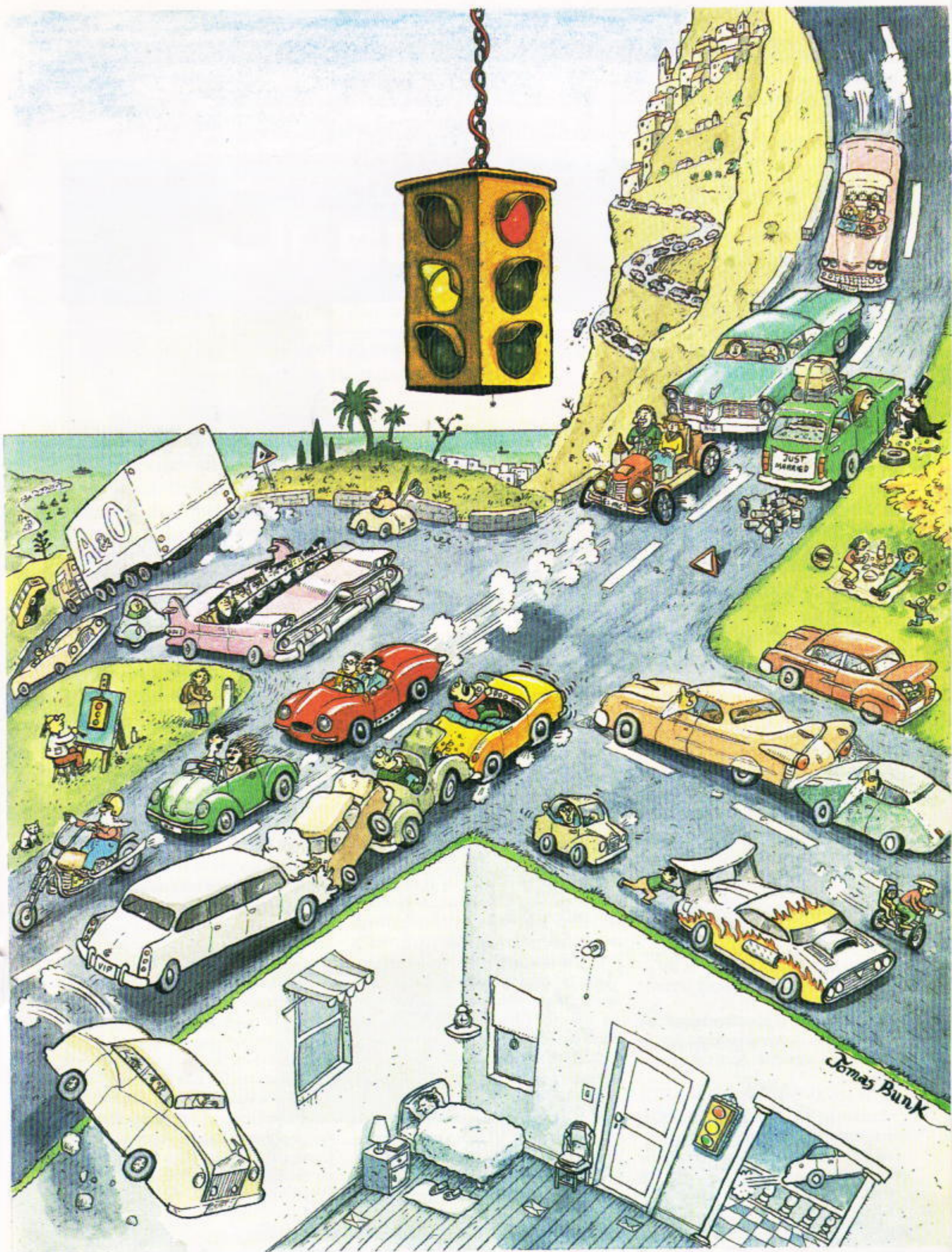
που το πόδι σας θα κινηθεί από το πετάλι του γκαζιού και θα πατήσει το πετάλι του φρένου (χρόνος αντίδρασης), και την απόσταση που θα διανύσει από εκείνη τη στιγμή το αυτοκίνητο επιβραδυνόμενο μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Ας ανατρέξουμε και πάλι σε αριθμούς. Αν ο χρόνος αντίδρασής σας είναι 1 sec, το αυτοκίνητο θα διανύσει απόσταση 23 m. Αν η επιβράδυνση του αυτοκινήτου όσο χρόνο πατάτε το φρένο είναι 5 m/sec², το αυτοκίνητο θα διανύσει επιπλέον 53 m. Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει από τη γνωστή σας εξίσωση για την επιβραδυνόμενη κίνηση

$$v_f^2 - v_o^2 = 2\gamma s,$$

όπου v_f και v_o η τελική και η αρχική ταχύτητα αντίστοιχα, γ η επιβράδυνση και s το διανυόμενο διάστημα. Επομένως, μπορείτε να σταματήσετε με ασφάλεια πριν από τη διασταύρωση αν τη στιγμή που ανάβει το κίτρινο απέχετε από την άκρη της τουλάχιστον 76 m. Ας ονομάσουμε αυτή την απόσταση «ζώνη στάσης».

Αλλά πάλι, τι γίνεται αν τη στιγμή που ανάβει το κίτρινο απέχετε μόνο 65 m από τη διασταύρωση; Αν προσπαθήσετε να φρενάρετε, τότε μόλις ανάψει το κόκκινο θα αποτελέσετε εμπόδιο για τα αυτοκίνητα του κάθετου



ρεύματος κυκλοφορίας. Και αν προπαθήσετε να περάσετε τη διασταύρωση χωρίς να ανακόψετε ταχύτητα, τότε μόλις ανάψει το κόκκινο θα βρεθείτε «αγκαλιασμένος» με τα αυτοκίνητα του κάθετου ρεύματος. Μπροσ γκρεμός και πίσω ρέμα! Ας ονομάσουμε αυτό το τμήμα μεταξύ των 54 m και των 76 m από την άκρη της διασταύρωσης «ζώνη διλήμματος».

Βέβαια, μια ασφαλής διασταύρωση δεν επιτρέπει την ύπαρξη ζώνης διλήμματος. Αν, για παράδειγμα, η διάρκεια του κίτρινου ήταν 4 sec, η ζώνη διάβασης θα γινόταν 77 m ενώ η ζώνη στάσης θα παρέμενε στα 76 m. Έτσι, αν βρίσκεστε σε απόσταση μικρότερη των 77 m απ' τη διασταύρωση, μπορείτε να συνεχίσετε με ασφάλεια. Αν βρίσκεστε σε απόσταση μεγαλύτερη των 76 m, μπορείτε να σταματήσετε με ασφάλεια. Αν, τέλος, βρίσκεστε μεταξύ των 76 m και 77 m, μπορείτε με ασφάλεια να συνεχίσετε ή να σταματήσετε. Το τμήμα αυτό του 1 m μπορούμε να το ονομάσουμε «ζώνη επικάλυψης».

Ας σταματήσουμε όμως εδώ τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Ο ρόλος που σας επιφύλαξε το πρώτο τεύχος του *Quantum* είναι του ειδικού μηχανικού λεωφόρων ταχείας κυκλοφορίας. Μελετήστε, λοιπόν, προσεκτικά τα παρακάτω προβλήματα και κάντε τις προτάσεις σας.

A. Ποια είναι η γενική εξίσωση για: (α) τη ζώνη διάβασης, (β) τη ζώνη στάσης, (γ) τη ζώνη διλήμματος ή τη ζώνη επικάλυψης; Συμβολίστε με t_0 το χρόνο αντίδρασης του οδηγού, με γ τη μέγιστη επιβράδυνση κατά το φρενάρισμα, t_k τη χρονική διάρκεια που παραμένει αναμμένο το κίτρινο φανάρι, v_0 την ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή που ανάβει το κίτρινο, με ω το πλάτος της διασταύρωσης και με L το μήκος του αυτοκινήτου.

B. Για ποιες τιμές ταχύτητας θα υπάρχει πάντοτε μια ζώνη διλήμματος;

Γ. Ξαναγράψτε τις εξισώσεις του προβλήματος A υποθέτοντας ότι το αυτοκίνητο κατεβαίνει έναν κατηφορικό δρόμο.

Στείλτε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum* έως τις 10 Ιουνίου 1994. Κάποιοι από σας θα κερδίσουν βιβλία δώρο!

Αν θέλετε να στοιχειοθετήσετε και να φιλμογραφήσετε τη διδακτορική διατριβή σας ή τη διπλωματική εργασία σας, το βιβλίο σας ή τις σημειώσεις σας, τη μαθητική ή την επαγγελματική εφημερίδα σας, ελάτε σε μας.

**Ηλεκτρονική σελιδοποίηση,
μαθηματικά κείμενα, έγχρωμες εκτυπώσεις**

Ατελέ γραφικών τεχνών

A N Y S M A

Πανόρμου 54 Τηλέφωνο 6931352

Πριν αποφασίσεις πού θα πας να αγοράσεις βιβλία μαθηματικών, πρέπει να ρωτήσεις...

Αν θέλεις να πληροφορηθείς σωστά και υπεύθυνα για όλες τις μαθηματικές εκδόσεις, πρέπει να ρωτήσεις...

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ
Ιπποκράτους 6, 106 79 - Αθήνα. Τηλ.: 3628492

■ Συνέχεια από τη σ. 11

$$\begin{array}{r} x = \text{ } \boxed{\text{GCA}} \text{ } \boxed{\text{T}} \text{ } \boxed{\text{A}} \text{ } \text{ } \boxed{\text{GGT}} \text{ } \text{C} \\ y = \text{A } \boxed{\text{GCA}} \text{ } \text{ } \boxed{\text{A}} \text{ } \boxed{\text{T}} \text{ } \boxed{\text{GGT}} \text{ } \text{ } \end{array}$$

Σχήμα 8

Μια απ' τις καλύτερες ευθυγραμμίσεις των δύο «λέξεων» του Σχήματος 7.

Στις ακολουθίες των πρωτεϊνών (λέξεις με είκοσι «γράμματα» αμινοξέων) είναι λογικό να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ζευγάρι γραμμάτων ένα «βάρος» που υποδηλώνει το βαθμό ομοιότητάς τους (μετρούμενο, λόγου χάρη, από τη συχνότητα των αντικαταστάσεων του ενός γράμματος από το άλλο). Άλλο ένα ιδιαίτερα σημαντικό πρόβλημα είναι η «πολλαπλή ευθυγράμμιση» αρκετών λέξεων ταυτόχρονα. Στην τελευταία περίπτωση, όμως, ο αριθμός των πράξεων αυξάνεται γρήγορα με τον αριθμό των λέξεων, και είμαστε υποχρεωμένοι να εφαρμόσουμε πιο πολύπλοκους ευρετικούς αλγόριθμους.

Ασκήσεις

1. Συμπληρώστε τους υπολογισμούς για τη σκάλα του Φαραώ και βρείτε την οικονομικότερη σκάλα με πέντε σκαλοπάτια. Πόσο χρυσάφι θα χρειαστείτε;

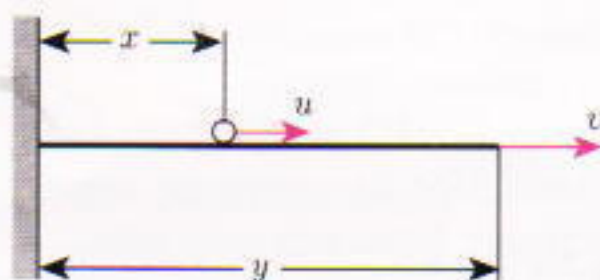
2. Πριν από μερικά χρόνια, σε μια σχολή αποφάσισαν να αγοράσουν για το εργαστήριο εννέα διαφορετικούς τόνους, που κόστιζαν 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160, και 190 δολάρια. Κάθε τόνος μπορεί να αντικαταστήσει οποιοδήποτε από τα φτηνότερα μοντέλα. Επειδή κάθε τόνος έχει τα δικά του ανταλλακτικά, ο διευθυντής της σχολής αποφάσισε τελικά να αγοράσουν εννέα τόνους τεσσάρων μόνο τύπων, με την προϋπόθεση ότι θα είχαν τη δυνατότητα να κάνουν οτιδήποτε μπορούσαν να κάνουν οι αρχικοί εννέα τόνοι. Ζήτησαν, λοιπόν, από τον καθηγητή των μαθηματικών να διαλέξει τους τόνους που θα αγόραζαν, έτσι ώστε το κόστος της αγοράς να είναι το μικρότερο δυνατόν. Ποια ήταν η επιλογή του μαθηματικού και πόσα πλήρωσε το σχολείο; (Αυτό το πρόβλημα είναι ένα παράδειγμα προβλήματος ενοποίησης.)

Το σκαθάρι και το λάστιχο

Ένα πρόβλημα με απρόσμενη λύση

Alexander A. Pukhov

Η μια άκρη ενός λάστιχου μήκους L είναι στερεωμένη σε έναν τοίχο. Η ελεύθερη άκρη του λάστιχου αρχίζει να κινείται με ταχύτητα v και να το επιμηκύνει. Ταυτόχρονα, ένα σκαθάρι αρχίζει να περπατάει, ξεκινώντας από τον τοίχο, κατά μήκος του λάστιχου με ταχύτητα $u < v$. Υποθέτουμε ότι το λάστιχο μπορεί να επιμηκυνθεί επ' άπειρον. Θα φτάσει ποτέ το σκαθάρι στην ελεύθερη άκρη του λάστιχου; Αν ναι, πόσο χρόνο θα χρειαστεί;



Σχήμα 1

Μια πρώτη ματιά

Μια σύντομη εξέταση του προβλήματος μας οδηγεί να σκεφτούμε ότι μπορεί να λυθεί εύκολα στο στάσιμο σύστημα συντεταγμένων που συνδέεται με τον τοίχο (Σχήμα 1). Η απόσταση ανάμεσα στο σκαθάρι και στον τοίχο αυξάνει με την πάροδο του χρόνου, και κάθε στιγμή δίνεται από τη σχέση $x(t) = ut$. Το μήκος του λάστιχου μεταβάλλεται στο ίδιο χρονικό διάστημα, και εκφράζεται από τη συνάρτηση $y(t) = L + vt$. Εφόσον $v > u$, φαίνεται ότι το $y(t)$ θα είναι κάθε στιγμή μεγαλύτερο του $x(t)$, πράγμα που σημαίνει ότι το σκαθάρι δεν θα φτάσει ποτέ στην άκρη του λάστιχου. Σωστά;

Μη θιάζεστε τόσο πολύ! Στα προηγούμενα δεν έχουμε λάβει υπόψη μας την επιμήκυνση του λάστιχου. Αυτό έχει ως συνέπεια μια πρόσθετη συμβολή στην ταχύτητα dx/dt του σκαθαριού καθώς προχωρεί από τον τοίχο προς την άκρη του λάστιχου. Ποια τιμή έχει αυτή η συμβολή; Το λάστιχο επιμηκύνεται γραμμικά, και επομένως η ταχύτητα του σημείου στο οποίο περπατά το σκαθάρι είναι ανάλογη του x και αντιστρόφως ανάλογη του y . Λογι-

κά, η ταχύτητα του σκαθαριού ισούται με $dx/dt = u + x \cdot v/y$. Αυτή η σχέση είναι μια διαφορική εξίσωση και η λύση της $x(t)$ θα καθορίσει τη γραφική παράσταση της διαδρομής που θα έχει διανύσει το σκαθάρι σε συνάρτηση με το χρόνο. Αν καταφέρουμε να βρούμε τη λύση της, θα μπορούσαμε κατόπιν να τη συγκρίνουμε με την κίνηση της ελεύθερης άκρης του λάστιχου $y(t) = L + vt$ και να ξεκαθαρίσουμε την υπόθεση. Επομένως, η εξίσωση που πρέπει να λύσουμε είναι η

$$\frac{dx}{dt} = u + \frac{v}{L + vt} x. \quad (1)$$

Η λύση της εξίσωσης

Η εξίσωση (1) φαίνεται «ύποπτη». Ας προσπαθήσουμε πάντως να την αντιμετωπίσουμε. Θα αρχίσουμε με κάτι πιο ευχάριστο. Μπορούμε οίγουρα να λύσουμε την εξής εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{L + vt} x. \quad (2)$$

Έχουμε:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v dt}{L + vt},$$

$$\ln x = \ln(L + vt) + \text{σταθ.},$$

$$x = C(L + vt).$$

Η σταθερά C εμφανίζεται πάντοτε στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, και στη συγκεκριμένη περίπτωση καθορίζεται πλήρως από την αρχική θέση του σκαθαριού. Δυστυχώς, αυτή η μέ-

Η γνώμη των μεγάλων

Συνάντησα αυτό το πρόβλημα σε κάποιο τεύχος του περιοδικού Priroda (Φύση) αφιερωμένο στη μνήμη του Αντρέι Ζαχάρωφ (1990, Νο 8, σελ. 119). Σε κάποιο σημείο υπήρχε η περιγραφή ενός επεισοδίου που συνέβη κατά τη διάρκεια ενός συνεδρίου φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων. Σε ένα διάλειμμα του συνεδρίου προτάθηκε στους συνέδρους το πρόβλημα του σκαθαριού σαν ένα είδος τεστ νοημοσύνης. Μερικοί φυσικοί χρειάστηκαν μόνο δεκαπέντε λεπτά για να το λύσουν, άλλοι χρειάστηκαν πάνω από μία ώρα, ενώ μερικοί δεν τα κατάφεραν, συμπεραίνοντας ότι το σκαθάρι δεν θα μπορούσε ποτέ να φτάσει την άκρη του λάστιχου. Όταν τέθηκε το πρόβλημα στον Αντρέι Ζαχάρωφ, το έλυσε σε ένα λεπτό - τόσο χρόνο χρειάστηκε για να γράψει τη λύση στην πίσω όψη του προγράμματος του συνεδρίου. Ας προσπαθήσουμε και εμείς να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα.

Дорожит? не дорожит?



θοδος, γνωστή ως μέθοδος «διαχωρισμού των μεταβλητών», δεν αποδίδει στην εξίσωση (1). Ας προσπαθήσουμε κάτι διαφορετικό: την «αλλαγή των μεταβλητών». Θα αναζητήσουμε μια λύση της μορφής $x(t) = C(t)(L + vt)$, όπου $C(t)$ είναι μια νέα, άγνωστη συνάρτηση. Αντικαθιστώντας την $x(t)$ στην εξίσωση (1) προκύπτει η επόμενη εξίσωση ως προς $C(t)$,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{u}{L + vt}, \quad (3)$$

την οποία μπορούμε να λύσουμε αμέσως:

$$\int dC = \int \frac{u dt}{L + vt},$$

$$C = \frac{u}{v} (L + vt) + \text{σταθ.}$$

Λόγω της αρχικής συνθήκης $x(0) = 0$, παίρνουμε τελικά

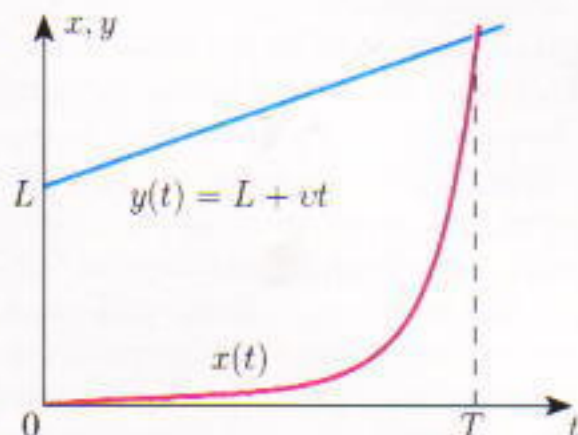
$$x(t) = \frac{u}{v} (L + vt) \ln \left(1 + \frac{vt}{L} \right).$$

Επιστροφή στο σκαθάρι

Παρατηρήστε ότι καθώς $t \rightarrow \infty$, η απόσταση $x(t)$ αυξάνεται ταχύτερα από την πρώτη δύναμη του t . Αυτό σημαίνει ότι το σκαθάρι φτάνει πάντοτε στην άκρη του λάστιχου, ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι η ταχύτητά του $u \ll v$ (Σχήμα 2). Αυτό θα συμβεί τη στιγμή T που θα ισχύει $x(T) = y(T)$ -δηλαδή όταν

$$T = \frac{L}{v} (e^{v/u} - 1). \quad (5)$$

Επομένως το πρόβλημα λύθηκε. Καθώς όμως θαυμάζουμε τη λύση μας, νιώθουμε και κάποια ανησυχία. Μήπως υπάρχει αριθμητικό σφάλμα στην εξίσωση (5); Ας ελέγξουμε λοιπόν τη



Σχήμα 2

λύση μας. Αν $u = 0$, το σκαθάρι δεν κινείται και δεν θα φτάσει ποτέ στην ελεύθερη άκρη. Και πραγματικά, $T \sim e^{\infty} \sim \infty$. Από την άλλη μεριά, αν $v = 0$, το λάστιχο δεν επιμηκύνεται και $T = L/u$. Η τιμή αυτή προκύπτει και από την εξίσωση (5), αφού όταν $v \rightarrow 0$, $e^{v/u} = 1 + v/u + 0(v/u)$. Όλα είναι εντάξει, και μόνο μια ερώτηση απομένει.

Υπάρχει συντομότερος δρόμος;

Ναι! Βασίζεται σε μια πολύ απλή ιδέα. Θεωρήστε το κλάσμα του συνολικού μήκους $z(t) = x(t)/y(t)$, που καταφέρει να διανύσει το σκαθάρι σε χρόνο t . Το μήκος του λάστιχου αυξάνει, αλλά ανεξάρτητα από το πόσο το επιμηκύνουμε, η αύξηση του (απειροστού) κλάσματος ισούται με το (απειροστό) κλάσμα της αύξησης, δηλαδή

$$dz = \frac{u dt}{y(t)}. \quad (6)$$

Αν έχετε οποιαδήποτε αμφιβολία για την ορθότητα της εξίσωσης (6), κάντε απλώς την αντικατάσταση $z = x/y$. Τι παίρνουμε; Την εξίσωση (1)!

Είναι πολύ ευκολότερο να λύσουμε την εξίσωση (6) απ' ό,τι την εξίσωση (1). Λαμβάνοντας υπόψη ότι $z(0) = 0$, έχουμε

$$z(t) = u \int \frac{dt}{L + vt} + \text{σταθ.}$$

$$= \frac{u}{v} \ln \left(1 + \frac{vt}{L} \right).$$

Το σκαθάρι θα φτάσει στο ελεύθερο άκρο όταν $z(T) = 1$, και επομένως καταλήγουμε στην εξίσωση (5), που βρήκαμε προηγουμένως για την τιμή του χρόνου T . Όμορφο! Και στην πραγματικότητα, αυτή είναι η κομψή λύση που βρήκε ο Αντρέι Ζαχάροφ μέσα σε δευτερόλεπτα.

Η ιδέα να χρησιμοποιήσουμε το κλάσμα του μήκους του λάστιχου φαίνεται ιδιαίτερα ελκυστική στην ασυνεχή παραλλαγή του προβλήματος του σκαθαριού.

Μια μικρή τροποποίηση

Ας υποθέσουμε ότι $L = 1\text{ km}$ και $u = 1\text{ cm/sec}$, και το λάστιχο το επιμηκύνουμε κατά βήματα: μετά το πρώτο δευτερόλεπτο επιμηκύνεται 1 km , μετά

από ένα ακόμη δευτερόλεπτο επιμηκύνεται άλλο 1 km , και ούτω καθεξής. Αυτή η παραλλαγή του προβλήματος εμφανίζεται στο βιβλίο *Time Travel* του Martin Gardner. Λοιπόν, σ' αυτή την περίπτωση, στο τέλος του πρώτου δευτερολέπτου το σκαθάρι έχει διανύσει το $1/10^5$ του δρόμου, στο τέλος του δεύτερου μόνο το $1/(2 \cdot 10^5)$, και ούτω καθεξής.

Το σκαθάρι θα φτάσει στην άλλη άκρη έπειτα από n δευτερόλεπτα, όταν

$$\frac{1}{10^5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 1 \quad (7)$$

Η αρμονική σειρά

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

αποκλίνει, πράγμα που σημαίνει ότι η σχέση αυτή ισχύει για αρκετά μεγάλο n . Η σειρά μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά από το ολοκλήρωμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \cong \int_1^n \frac{dn}{n} = \ln(n),$$

και όσο μεγαλύτερο είναι το n τόσο ακριβέστερος είναι και ο υπολογισμός. Το σκαθάρι θα διασχίσει όλο το μήκος του λάστιχου σε χρονικό διάστημα $n = \exp(10^5)$ sec, αποτέλεσμα που συμπίπτει με το αποτέλεσμα της εξίσωσης (5).

Αυτή η παραλλαγή του προβλήματος γεννάει καινούργιες ιδέες. Τι θα συμβεί όταν το μήκος του λάστιχου διπλασιάζεται κάθε δευτερόλεπτο; Μετά το τέλος του n δευτερολέπτου το σκαθάρι θα έχει διανύσει το

$$\frac{1}{10^5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

του μήκους του λάστιχου. Η σειρά μέσα στην παρένθεση είναι μια γεωμετρική σειρά που συγκλίνει στο 2. Αυτό σημαίνει ότι καθώς το $n \rightarrow \infty$, το σκαθάρι θα πλησιάζει το σημείο που θα βρίσκεται στα $2/10^5$ του συνεχώς επιμηκυνόμενου λάστιχου. Είναι φανερό ότι το σκαθάρι δεν θα φτάσει ποτέ στο ελεύθερο άκρο.

Επομένως, η μοίρα του σκαθαριού εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο επιμηκύνεται το λάστιχο και από το πόσο γρήγορα περπατάει το σκαθάρι. Όλα τούτα μας οδηγούν στο να προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε το πρόβλημα του σκαθαριού.

Μια παρέκβαση πριν από τη γενίκευση

Θα υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες του σκαθαριού $u(t)$ και του ελεύθερου άκρου του λάστιχου $v(t)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου. Υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε αν το σκαθάρι θα φτάσει στο τέλος του λάστιχου; Θυμηθείτε την εξίσωση (6), η οποία έχει καθολική ισχύ. Ολοκληρώνοντάς την, παίρνουμε την εξίσωση για τη διάρκεια του ταξιδιού του σκαθαριού:

$$\int_0^T \frac{u(t)dt}{y(t)} = 1, \quad (8)$$

όπου το τρέχον μήκος του λάστιχου είναι

$$y(t) = L + \int_0^t v(t')dt'. \quad (9)$$

Η σχέση (8) μας προσφέρει ένα κριτήριο του κατά πόσον το σκαθάρι θα φτάσει στην άλλη άκρη του λάστιχου. Η απάντηση είναι απλή: αυτό θα συμβεί μόνο όταν αληθεύει η εξίσωση (8) για κάποια τιμή $t = T$. Όπως είδαμε προηγουμένως, οι προσπάθειες του σκαθαριού δεν στέφονται πάντοτε από επιτυχία. Επομένως, αν εκλέξουμε διάφορες συναρτήσεις $u(t)$ και $v(t)$, και αντικαταστήσουμε στην (8), μπορούμε γρήγορα να μάθουμε τη μοίρα του σκαθαριού.

Μερικά παραδείγματα

1. **Επιμήκυνση του λάστιχου με σταθερή επιτάχυνση.** Αντικαθιστώντας την $u(t)$ με $u = \text{σταθερή}$, και $v(t) = \gamma t$ στις εξισώσεις (8) και (9), έχουμε

$$\text{τοξεφ} \left(\frac{\gamma T^2}{2L} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma L}{2u^2} \right)^{1/2} \quad (10)$$

Από αυτή τη σχέση συνεπάγεται ότι το σκαθάρι δεν θα ολοκληρώσει το ταξίδι του αν $\gamma L/u^2 > \pi^2/2$. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν $\gamma L/u^2 < \pi^2/2$, το ταξίδι του σκαθαριού θα τελειώσει με επιτυχία τη χρονική στιγμή

$$T = \sqrt{2L/\gamma} \cdot \text{εφ} \sqrt{\gamma L/2u^2}.$$

Η συνθήκη που βρήκαμε έχει ένα απλό φυσικό νόημα: το σκαθάρι διαθέτει αρκετό χρόνο για να διανύσει όλο το λάστιχο, αν κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου $\sim L/u$ η ελεύθερη άκρη του λάστιχου δεν αποκτήσει ταχύτητα συγκρίσιμη με την ταχύτητα του σκαθαριού – δηλαδή, αν $L/u \leq u/\gamma$.

2. **Σταθερή επιτάχυνση του σκαθαριού.** Όταν το σκαθάρι κινείται επίσης με σταθερή επιτάχυνση $u(t) = \gamma_1 t$, τότε θα καταφέρει να φτάσει στο τέλος του λάστιχου ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι η επιτάχυνσή του $\gamma_1 \ll \gamma$. Από τις εξισώσεις (8) και (9), προκύπτει για τη διάρκεια του ταξιδιού

$$T = \left[2L \left(\exp \frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) / \gamma \right]^{1/2}$$

3. **Επιμήκυνση του λάστιχου n φορές το δευτερόλεπτο.** Σ' αυτή την περίπτωση το μήκος του λάστιχου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$y(t) = L \cdot \exp(t/\tau).$$

Για παράδειγμα, όταν $\tau = 1/\ln 2$ sec, το μήκος διπλασιάζεται κάθε ένα δευτερόλεπτο. Τότε, αν $u(t) = u = \text{σταθερή}$, η συνθήκη (8) γίνεται

$$1 - e^{-T/\tau} = \frac{L}{u\tau}.$$

Από αυτή συνεπάγεται πως όταν $L < u\tau$, το ταξίδι του σκαθαριού τελειώνει έπειτα από χρόνο

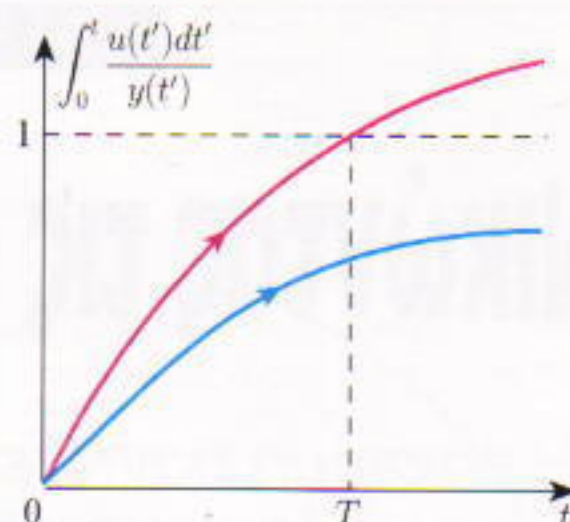
$$T = \tau \cdot \ln [u\tau / (u\tau - L)].$$

Στην αντίθετη περίπτωση, όταν $L > u\tau$, το σκαθάρι θα περπατά για πάντα. Αυτή η συνθήκη έχει το νόημα ότι το μήκος του λάστιχου δεν πρέπει να αυξηθεί πάρα πολύ μέσα στο χρονικό διάστημα ($\sim L/u$) που διαρκεί το ταξίδι – δηλαδή, $L/u \leq \tau$.

4. **Εκθετική αύξηση της ταχύτητας του σκαθαριού.** Αν η ταχύτητα του σκαθαριού αυξάνεται επίσης εκθετικά, $u(t) = u \cdot \exp(t/\tau_1)$, τότε, αν $1/\tau < 1/\tau_1 + u/L$, το ταξίδι θα τελειώσει με επιτυχία έπειτα από χρόνο $T = (1/\tau_1 - 1/\tau)^{-1} \cdot \ln [1 + L(1/\tau_1 - 1/\tau)/u]$. Στην αντίθετη περίπτωση, το σκαθάρι δεν θα τελειώσει ποτέ το ταξίδι του.

Η τροχιά της επιτυχίας

Τα προηγούμενα παραδείγματα μας δείχνουν ότι υπάρχει ένα είδος ανταγωνισμού μεταξύ των συναρτήσεων $u(t)$ και $v(t)$ που ολοκληρώνονται στην εξίσωση (8). Όταν η $u(t)$ υπερσχύει της $v(t)$, το συνολικό ολοκλήρωμα αυξάνεται με τέτοιο τρόπο ώστε φτάνει το 1 όταν $t = T$ (η κόκκινη καμπύλη στο Σχήμα 3). Αυτό σημαίνει



Σχήμα 3

ότι το σκαθάρι καταφέρει να διανύσει όλο το μήκος του λάστιχου. Από την άλλη πλευρά, όταν αποδεικνύεται νικήτρια η $y(t)$ το ολοκλήρωμα είναι πολύ μικρό και δεν φτάνει ποτέ στο 1 (η μπλε καμπύλη στο Σχήμα 3). Σε αυτή την περίπτωση, το σκαθάρι αποτυγχάνει.

Λοιπόν, αυτό ήταν όλο. Η σχεδόν όλο.

Λίγα λόγια αποχαιρετισμού

Ας επιστρέψουμε στο αρχικό σημείο της έρευνάς μας, τότε που είχαμε βρει μόνο την εξίσωση (5) για τη διάρκεια T του ταξιδιού του σκαθαριού. Αυτή εξαρτάται εκθετικά από το λόγο των ταχυτήτων v/u . Αυτή η εξάρτηση είναι πολύ ισχυρή. Για να επιδείξουμε την ισχύ της εκθετικής συνάρτησης, ας υποθέσουμε ότι $u = 1 \text{ cm/sec}$ και $v = 1 \text{ km/sec}$, και ας αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (5). Για τη διάρκεια T του δύσκολου ταξιδιού του σκαθαριού, παίρνουμε

$$T \sim \exp(10^5) \text{ sec} \sim 10^{43.400} \text{ sec}$$

τιμή που ξεπερνάει κατά πολύ την ηλικία του σύμπαντος (10^{18} sec). Στο τέλος του ταξιδιού, το λάστιχο θα έχει φτάσει σε ένα μήκος μεγαλύτερο από το πλάτος του σύμπαντος – κάπου 10^{28} cm .

Φυσικά, ένα πραγματικό σκαθάρι θα παραδώσει το πνεύμα από την αρχή κιόλας ενός παρόμοιου ταξιδιού, ενώ ένα πραγματικό λάστιχο θα γίνει τόσο λεπτό, ώστε τα μόριά του θα διαχωρίζονται από αχανείς εκτάσεις κενού διαστήματος. Τίποτε, όμως, από αυτά δεν ακυρώνει στο ελάχιστο τη λύση μας για το πρόβλημα του σκαθαριού. ■

ΝΙΚΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΙΣ

«Η επιστήμη πάντοτε σφάλει: δεν λύνει ποτέ ένα πρόβλημα χωρίς να δημιουργήσει άλλα δέκα.» — George Bernard Shaw

Alexander Buzdin και Andrey Varlamov

Το σπουδαιότερο γεγονός στη φυσική τα πρόσφατα χρόνια είναι αναμφίβολα η ανακάλυψη των υπεραγωγών υψηλής θερμοκρασίας, η αντίσταση των οποίων γίνεται μηδενική σε θερμοκρασίες που υπερβαίνουν τους 100K. Η πρακτική σημασία αυτής της ανακάλυψης μπορεί να συγκριθεί με την αντίστοιχη της μαγνητικής επαγωγής, στις αρχές του 19ου αιώνα. Πρόκειται για ανακάλυψη ισάξια με τη σχάση του ουρανίου, την εφεύρεση των λέιζερ και την ανακάλυψη των ασυνήθιστων ιδιοτήτων των ημιαγωγών που έγιναν σ' αυτόν τον αιώνα. Η απαρχή αυτού του νέου και συναρπαστικού σταδίου στην ανάπτυξη της υπεραγωγιμότητας ήταν η εργασία των K.A. Müller και T.J. Bednorz στο εργαστήριο της IBM στην Ελβετία. Το χειμώνα του 1985-1986 κατάφεραν να συνθέσουν μια ένωση βαρίου, λανθανίου, χαλκού και οξυγόνου — το λεγόμενο κεραμικό οξειδίου μετάλλου La-Ba-Cu-O, μια ένωση που είχε ιδιότητες υπεραγωγιμότητας στους 35K, θερμοκρασία η οποία αποτελούσε ρεκόρ εκείνη την (τόσο πρόσφατη) εποχή. Το άρθρο τους, που είχε τον μετριοπαθή τίτλο «The Possibility of High-Temperature Superconductivity in the La-Ba-Cu-O System» (Η πιθανότητα υπεραγωγιμότητας υψηλής θερμοκρασίας στο σύστημα La-Ba-Cu-O), απορρίφθηκε από το κορυφαίο αμερικανικό περιοδικό *Physical Review Letters*. Η επιστημονική ένωση το αντιπαρήλθε, επειδή είχε κουρασθεί να λαμβάνει κατά την τελευταία εικοσαετία εντυπωσιακές αναφορές σχετικά με την ανακάλυψη υ-

περαγωγών υψηλής θερμοκρασίας, οι οποίες αποδείχτηκε ότι ήταν λαθεμένες. Οι Müller και Bednorz έστειλαν το άρθρο τους στο γερμανικό περιοδικό *Zeitschrift für Physik*. Όταν μαθεύτηκε το νέο ότι βρέθηκε τελικά αυτή η υπεραγωγιμότητα, και ότι έρευνες με αντικείμενο τους υπεραγωγούς υψηλής θερμοκρασίας διεξάγονταν σε εκατοντάδες εργαστήρια, κάθε άρθρο αφιερωμένο στη διερεύνηση του νέου φαινομένου θα άρχιζε με μια αναφορά σ' αυτό το άρθρο. Ωστόσο, το φθινόπωρο του 1986 πέρασε ουσιαστικά απαρατήρητο.¹

Μόνο μια ιαπωνική ομάδα έλεγξε και επαλήθευσε το αποτέλεσμα. Σύντομα η υπεραγωγιμότητα υψηλής θερμοκρασίας επιβεβαιώθηκε από φυσικούς στις Ηνωμένες Πολιτείες, την Κίνα και τη Σοβιετική Ένωση. Στις αρχές του 1987, όλος ο κόσμος αναζητούσε πυρετωδώς νέους υπεραγωγούς και ερευνούσε τις ιδιότητες όσων είχαν ήδη ανακαλυφθεί. Η κρίσιμη θερμοκρασία, η θερμοκρασία υπεραγωγίμης μετάβασης, T_c , αυξήθηκε γρήγορα: για το La-Sr-Cu-O ήταν $T_c = 45K$ και για το La-Ba-Cu-O (υπό πίεση) έφτανε τους 52K. Τον Φεβρουάριο του 1987 η κρίσιμη θερμοκρασία της ένωσης $YBa_2Cu_3O_7$ έσπασε το μυθικό «φράγμα του αζώ-

του», φτάνοντας τους 93K.² Σήμερα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ενώσεις με $T_c > 100K$ — για παράδειγμα, για το $Tl_2Ca_2Ba_2Cu_3O_x$ η κρίσιμη θερμοκρασία είναι 125K.

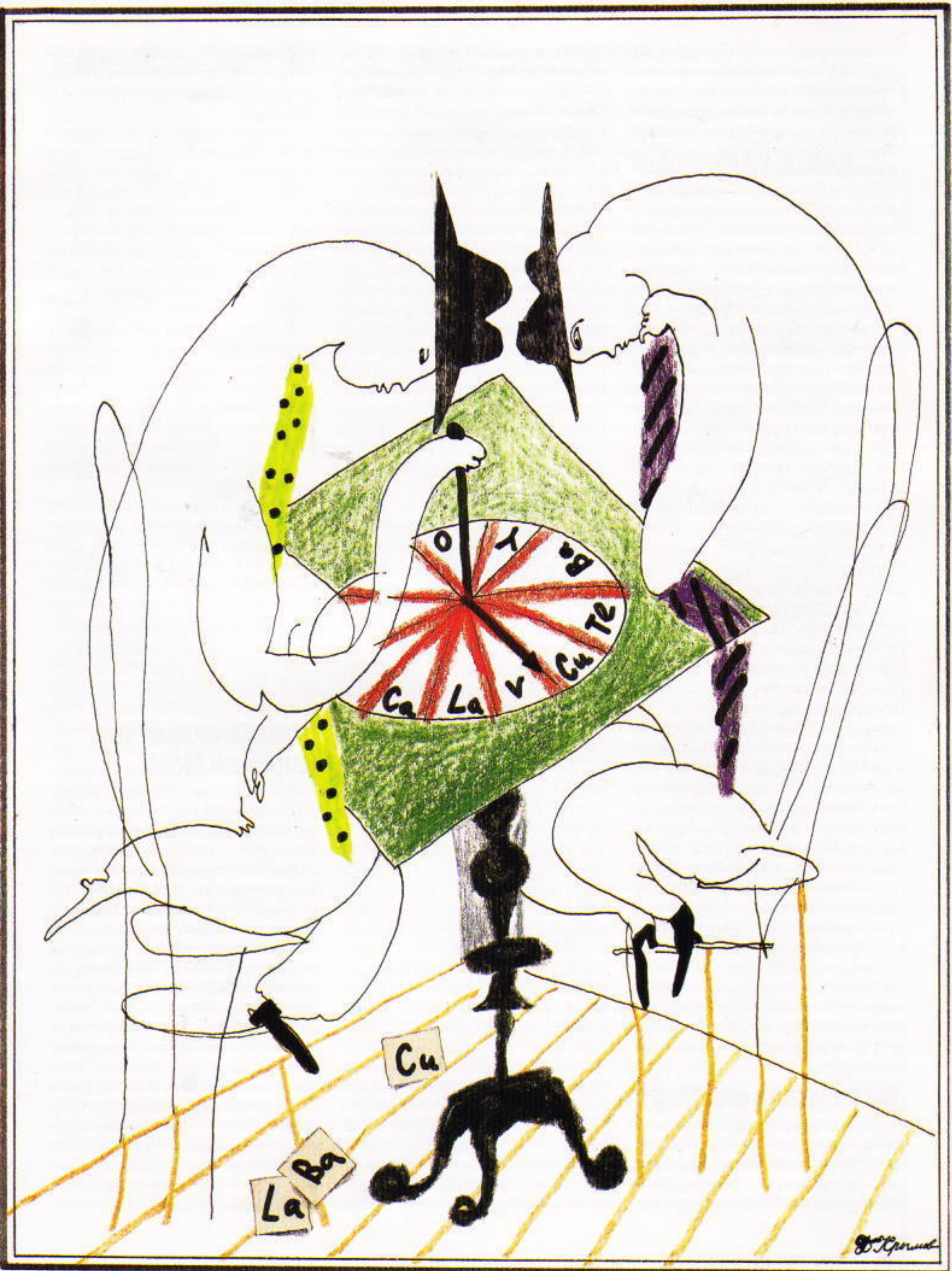
Μοναχικοί ερευνητές και χαμηλοί προϋπολογισμοί

Η ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας υψηλής θερμοκρασίας είναι κάτι το μοναδικό στη σύγχρονη φυσική. Επιτεύχθηκε από δύο μόνο επιστήμονες που διέθεταν λιγοστά μέσα, σε αντίθεση με τις ανακαλύψεις που έγιναν σε άλλους τομείς της φυσικής. Για παράδειγμα, στη φυσική σωματιδίων υψηλών ενεργειών οι έρευνες πραγματοποιούνται από μεγάλες ομάδες επιστημόνων (ο κατάλογος των συγγραφέων καταλαμβάνει ολόκληρη σελίδα σε ένα άρθρο περιοδικού), και ο εξοπλισμός κοστίζει εκατομμύρια δολάρια. Αυτή η ανακάλυψη έδωσε λαβή για αισιοδοξία: η εποχή του μοναχικού ερευνητή στη φυσική δεν έχει παρέλθει!

Η ανακάλυψη ήταν επίσης εντυπωσιακή επειδή αυτές οι ενώσεις περιέχουν στοιχεία που βρίσκονται εύκολα. Στην πραγματικότητα, οι συγκεκριμένοι υπεραγωγοί είναι δυνατό να κατασκευαστούν μέσα σε μία ημέρα στο ερ-

1. Το 1987 το βραβείο Νόμπελ φυσικής απονεμήθηκε στους Müller και Bednorz. Η σπουδαιότητα της ανακάλυψής τους γίνεται φανερή από το γεγονός ότι από τη δημοσίευση της διάσημης εργασίας τους ως τη βράβευσή τους μεσολάβησε διάστημα μόλις λίγο μεγαλύτερο του ενός έτους.

2. Αυτή η θερμοκρασία θα μπορούσε να επιτευχθεί με τη χρήση υγρού αζώτου, το οποίο είναι πολύ φτηνότερο από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνταν σ' αυτή την περίπτωση. (Βλ. παρακάτω την αναφορά στη χρήση υγρού ηλίου και υγρού υδρογόνου για την ψύξη των υπεραγωγίων ενώσεων.)



γαστήριο χημείας ενός γυμνασίου. Και μολονότι η ανακάλυψη αναμενόταν επί 75 χρόνια, εντούτοις όλοι κατελήφθησαν εξαπίνης. Οι θεωρητικοί αντιμετώπισαν το γεγονός με σκεπτικισμό, που γινόταν εντονότερος όσο αύξανε η κρίσιμη θερμοκρασία.

Ήταν λοιπόν η ανακάλυψη των Bednorz και Müller απροσδόκητη σύμπτωση ή κάτι το αναπόφευκτο; Θα μπορούσε η ένωση που ανακαλύφθηκε, και η οποία διέθετε αυτές τις μοναδικές ιδιότητες, να έχει συντεθεί νωρίτερα; Πόσο δύσκολο είναι να απαντήσουμε σ' αυτές τις ερωτήσεις! Έχουμε από καιρό συνηθίσει στην ιδέα ότι καθετί νέο επιτυγχάνεται στα όρια του αδύνατου με τη χρήση σπάνιου εξοπλισμού, υπερσυχρών πεδίων, εξαιρετικά χαμηλών θερμοκρασιών και τρομερά υψηλών ενεργειών... Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν συμβαίνει τίποτε τέτοιο. Δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να φτιάξει κανείς έναν υπεραγωγό υψηλής θερμοκρασίας — ένας ικανός αλχημιστής του Μεσαίωνα θα τα κατάφερνε.

Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι πριν από δέκα χρόνια περίπου σε πολλά εργαστήρια του κόσμου οι επιστήμονες ερευνούσαν με επιμονή μια ασυνήθιστη υπεραγώγιμη ένωση, το Hg_3AsF_6 . Αυτή η ουσία ονομάστηκε «αλχημικός χρυσός», λόγω της κίτρινης λάμψης και της μεγάλης πυκνότητάς της, που την έκαναν να μοιάζει με το ευγενές μέταλλο. Είχε συντεθεί από αλχημιστές του Μεσαίωνα, εμφανίστηκε σαν αληθινός χρυσός, και προβλήθηκε σαν αποτέλεσμα της επιτυχούς χρήσης της «φιλοσοφικής λίθου». Ο αλχημικός χρυσός είναι μια πολύπλοκη ένωση, και, ποιος ξέρει, ίσως θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένας υπεραγωγός υψηλής θερμοκρασίας τον Μεσαίωνα, αν ήταν προικισμένος με χρυσή λάμψη.

Τώρα που όλος ο κόσμος ερευνά εντατικά τις ιδιότητες των υπεραγωγών υψηλής θερμοκρασίας και σχεδιάζονται όργανα που βασίζονται σ' αυτές, πολλές όψεις της ιστορίας της υπεραγωγιμότητας προσεγγίζονται με διαφορετικό μάτι.

Μια αινιγματική ανακάλυψη

Η υπεραγωγιμότητα, ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και ασυνήθιστα φαινόμενα της φυσικής στερεάς κατάστασης, έγινε γνωστή για πρώτη φορά στις 28 Απριλίου του 1911, σε μια συνάντη-

ση της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών στο Άμστερνταμ, όταν ο ολλανδός φυσικός Heike Kammerlingh Onnes αναφέρθηκε σε ένα φαινόμενο που είχε ανακαλυφθεί πρόσφατα: στην πλήρη εξαφάνιση της ηλεκτρικής αντίστασης του υδραργύρου, όταν αυτός ψύχεται από υγρό ήλιο στους 4,15K.

Μολονότι ουδείς ανέμενε αυτή την ανακάλυψη, η οποία αντέβαινε στην υπάρχουσα κλασική ηλεκτρονική θεωρία των μετάλλων, δεν ήταν τυχαίο το γεγονός ότι ο Kammerlingh Onnes ήταν αυτός που ανακάλυψε την υπεραγωγιμότητα. Υπήρξε ο πρώτος επιστήμονας που κατόρθωσε να λύσει το πιο πολύπλοκο επιστημονικό και τεχνικό πρόβλημα της εποχής: κατάφερε να υγροποιήσει το ήλιο, το οποίο έχει σημείο βρασμού στους 4,16K. Αυτό επέτρεψε στους επιστήμονες να ρίξουν μια ματιά στον άγνωστο κόσμο των θερμοκρασιών που βρίσκονται κοντά στο απόλυτο μηδέν.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η αντίσταση ενός δείγματος που βρίσκεται σε υπεραγώγιμη κατάσταση δεν είναι κατά προσέγγιση αλλά ακριβώς ίση με το μηδέν. Γι' αυτό ακριβώς το ηλεκτρικό ρεύμα σε κλειστό κύκλωμα μπορεί να κυκλοφορεί για όσο χρόνο επιθυμεί κανείς, χωρίς απόσβεση. Η μεγαλύτερη διάρκεια υπεραγωγίμου ρεύματος χωρίς απόσβεση, που ήταν περίπου δύο χρόνια, καταγράφηκε στην Αγγλία. (Αυτό το ρεύμα θα κυκλοφορούσε στο δακτύλιο ακόμη και σήμερα, αν δεν είχε διακοπεί η παροχή υγρού ηλίου στο εργαστήριο, εξαιτίας μιας απεργίας που έκαναν οι εργαζόμενοι στις μεταφορές.) Ακόμη και ύστερα από δύο χρόνια, δεν είχε παρατηρηθεί καμία απόσβεση του ρεύματος.

Πολύ σύντομα ανακαλύφθηκε υπεραγωγιμότητα όχι μόνο στον υδράργυρο αλλά και σε άλλα μέταλλα. Οι προοπτικές για πρακτικές εφαρμογές του φαινομένου που είχε ανακαλυφθεί φάνονταν απεριόριστες: γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας χωρίς απώλειες, εξαιρετικά ισχυροί μαγνήτες, ηλεκτρικοί κινητήρες, νέοι τύποι μετασχηματιστών, κ.ά. Εντούτοις, υπήρχαν δύο εμπόδια. Πρώτον, οι υπερβολικά χαμηλές θερμοκρασίες στις οποίες παρατηρούνταν η υπεραγωγιμότητα των υλικών που ήταν γνωστό ότι παρουσιάζουν αυτό το φαινόμενο. Για να ψυχθούν οι υπεραγωγοί σ' αυτές τις θερ-

μοκρασίες χρησιμοποιείται ήλιο, που είναι λιγιστό (τα αποθέματα είναι περιορισμένα, και η παραγωγή του πολύ δαπανηρή).

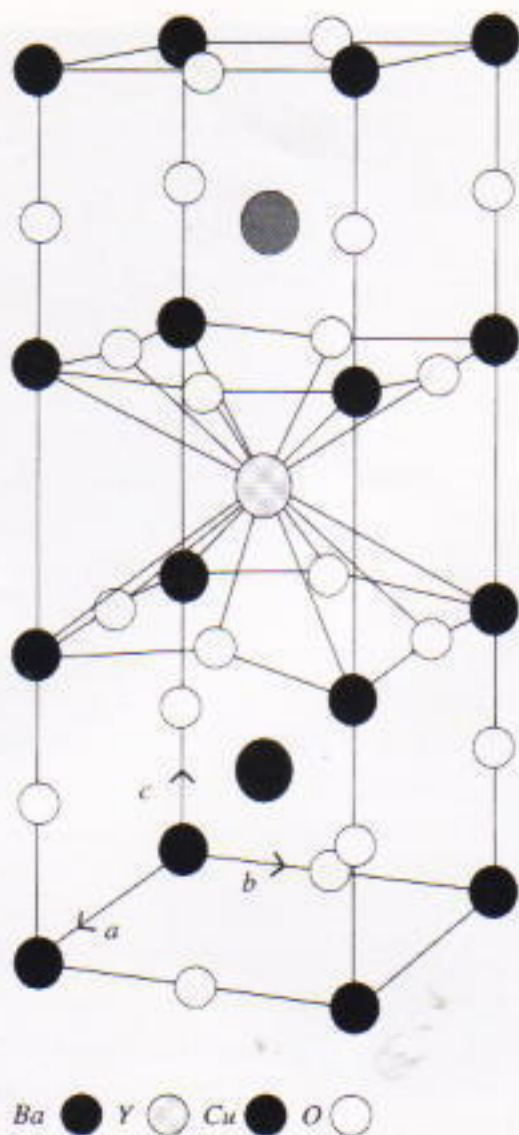
Το γεγονός αυτό καθιστά ασύμφορα πολλά σχέδια για την εφαρμογή της υπεραγωγιμότητας. Το δεύτερο εμπόδιο, που ανακαλύφθηκε από τον Kammerlingh Onnes, συνδέεται με το γεγονός η υπεραγωγιμότητα αποδείχτηκε ιδιαίτερα ευαίσθητη στα μαγνητικά πεδία (και στη μέγιστη τιμή του ρεύματος, επίσης). Πράγματι, καταστρεφόταν στα ισχυρά πεδία.

Χρειάστηκε σχεδόν μισός αιώνας για να κατανοήσουμε τη φύση αυτού του υπέροχου φαινομένου και να δημιουργήσουμε μια συνεπή θεωρία. Αυτή η περίοδος μπορεί να θεωρηθεί ως το πρώτο στάδιο στη διερεύνηση της υπεραγωγιμότητας: το στάδιο συγκέντρωσης πληροφοριών σχετικά με αυτό το πολύπλοκο φαινόμενο.

Η επόμενη θεμελιώδης ιδιότητα της υπεραγωγίμης κατάστασης, που ανακαλύφθηκε το 1933, ήταν το φαινόμενο Meissner-Ochsenfeld: η πλήρης αποβολή του μαγνητικού πεδίου από το σώμα του υπεραγωγού. Αλλά και πάλι οι πειραματικές έρευνες περιπλέκονταν επειδή έπρεπε να χρησιμοποιήσει κανείς το σπάνιο υγρό ήλιο, το οποίο πριν από τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο παραγόταν σε δέκα εργαστήρια σε όλο τον κόσμο.

Ο παράξενος χορός των ζευγών του Cooper

Η δεκαετία του 1950 μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή του δεύτερου σταδίου της έρευνας για την υπεραγωγιμότητα. Εκείνη την εποχή σημειώθηκε σημαντική πρόοδος στην κατανόηση της φύσης του φαινομένου. Χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα και θεωρητικές έννοιες της φυσικής στερεάς κατάστασης, με βάση την κβαντομηχανική και τη στατιστική φυσική, οι Ginzburg και Landau (της ΕΣΣΔ) ανέπτυξαν τη φαινομενολογική θεωρία το 1950, την οποία ακολούθησε μια συνεπής μικροσκοπική θεωρία της υπεραγωγιμότητας, έργο των John Bardeen, Leon Cooper και J. Robert Schrieffer (των ΗΠΑ) το 1957. Διαπιστώθηκε ότι η υπεραγωγιμότητα συνδέεται με την εμφάνιση μιας παράξενης έλξης μεταξύ των ηλεκτρονίων στα μέταλλα. Αυτό το φαινόμενο παρουσιάζει έντονα κβαντικά χαρακτηριστικά.



Δομή του υπεραγωγίου $YBa_2Cu_3O_7$.

Για να εξετάσουμε μια ανάλογη περίπτωση, ας σκεφτούμε δύο σφαίρες που βρίσκονται πάνω σ' ένα ελαστικό επίπεδο. Αν οι σφαίρες είναι απομακρυσμένες η μια από την άλλη, καθεμιά βαθουλώνει το επίπεδο, σχηματίζοντας μια μικρή «κοιλιά». Αν αφήσουμε όμως μια σφαίρα πάνω στο επίπεδο και κατόπιν τοποθετήσουμε άλλη μια κοντά της, οι δύο «κοιλιάδες» θα ενωθούν, και οι δύο σφαίρες θα κυλήσουν προς το κέντρο της κοινής τους «κοιλιάδας». Παρομοίως, αν η θερμοκρασία είναι αρκετά χαμηλή, μερικά ηλεκτρόνια σχηματίζουν ζεύγη, τα «ζεύγη Cooper». Το μέγεθος αυτών των ζευγών στην ατομική κλίμακα είναι πραγματικά αρκετά μεγάλο, της τάξης εκατοντάδων και χιλιάδων διατομικών αποστάσεων. Σύμφωνα με την εύγλωττη σύγκριση που πρότεινε ο Schrieffer, δεν πρέπει να τα φανταζόμαστε σαν δύο ηλεκτρόνια που συνδέονται όπως ένα διπλό άστρο, αλλά σαν δύο χορευτές σε μια ντισκοτέκ που αποτελούν ζευγάρι ενώ μπορεί να χορεύουν σε διαφορετικές άκρες της αίθουσας, με πολλούς άλλους χορευτές ανάμεσά τους. Τα ηλεκτρόνια που ενώνονται σε ένα ζεύγος Cooper έχουν ορισμένη ενέργεια δεσμού, με τιμή 2Δ (η Δ ονο-

μάζεται παράμετρος ενεργειακού χάσματος). Αυτή είναι η ενέργεια που απαιτείται για να χωριστεί το ζεύγος σε απομονωμένα σωματίδια. Το μέγεθος της στη θερμοκρασία $T = 0$ ορίζει την τιμή της κρίσιμης θερμοκρασίας.

Σύμφωνα με τους νόμους του κβαντικού κόσμου, η συμπεριφορά των ζευγών Cooper είναι εντελώς διαφορετική από τη συμπεριφορά των ηλεκτρονίων. Ανακαλύφθηκε ότι βρίσκονται στη χαμηλότερη κοινή ενέργεια –στη βασική κατάσταση. Όσο περισσότερα σωματίδια βρίσκονται σ' αυτή την κατάσταση τόσο ευκολότερο είναι να προστεθούν και νέα μέλη και τόσο δυσκολότερο να την εγκαταλείψει ένα μεμονωμένο ζεύγος. Αυτός ο σωρός ονομάζεται «συμπύκνωμα του Bose». Η συγκέντρωση των ζευγών Cooper στο συμπύκνωμα του Bose εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Το γεγονός της εμφάνισής τους σηματοδοτεί τη μετάβαση του μετάλλου στην υπεραγώγιμη κατάσταση (που συντελείται στην κρίσιμη θερμοκρασία). Καθώς η θερμοκρασία μειώνεται ακόμη περισσότερο, ο αριθμός των ζευγών Cooper αυξάνεται, και στο απόλυτο μηδέν δεν υπάρχουν ελεύθερα σωματίδια στο σύστημα.

Επομένως, σε θερμοκρασίες κατώτερες από την κρίσιμη, δύο τύποι φορέων μπορούν να συμμετάσχουν στη μεταφορά φορτίου: τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και τα ζεύγη Cooper. Όμως, τα πρώτα διατρέχουν όλους τους συνηθισμένους κινδύνους που επιφυλάσσει η ζωή μέσα σ' ένα μέταλλο, δηλαδή ξένες προσμείξεις, σκέδαση στο πλέγμα, κ.ά. (Αυτοί οι παράγοντες καθορίζουν την αντίσταση στα συνηθη μέταλλα.) Από την άλλη πλευρά, τα ζεύγη Cooper που παραμένουν στη βασική κατάσταση μπορούν να μεταφέρουν φορτίο χωρίς να αλληλεπιδρούν με τις προσμείξεις ή τις άλλες ατέλειες του υλικού. Η αλληλεπίδραση που μεταβάλλει την ενέργεια (γεγονός που προκαλεί την αντίσταση) μεταβάλλει και την ενέργεια στα ζεύγη Cooper, κάτι που είναι δυνατό μόνο πέρα από το κατώφλι του 2Δ . Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια μένουν κατά κάποιον τρόπο «άεργα», αφού οι υπηρεσίες των ζευγών Cooper για τη μεταφορά φορτίου κοστίζουν λιγότερο. Έτσι, ένα μετρίως ισχυρό ρεύμα περνά από τον υπεραγωγό χωρίς να παράγει καθόλου θερμότητα, χάρη στο συμπύκνωμα των ζευγών Cooper. Αποδεικνύεται

λοιπόν ότι η υπεραγωγιμότητα είναι το μακροσκοπικό αποτέλεσμα των νόμων του κβαντικού κόσμου. Πρόκειται για ένα «μακροσκοπικό κβαντικό φαινόμενο».

Αναζητώντας νέα υλικά

Η δημιουργία μιας θεωρίας της υπεραγωγιμότητας αποτέλεσε ισχυρή ώθηση για τη σοβαρή διερεύνησή της. Χωρίς υπερβολή, μπορούμε να πούμε ότι κατά τα χρόνια που ακολούθησαν επιτεύχθηκε σημαντική πρόοδος στην παραγωγή νέων υπεραγωγίων υλικών. Η ανακάλυψη μιας ασυνήθιστης υπεραγωγίμης κατάστασης σε ένα μαγνητικό πεδίο, από τον σοβιετικό επιστήμονα Α.Α. Abrikosov, διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο σ' αυτή την ανάπτυξη. Πριν από την εν λόγω ανακάλυψη θεωρούνταν ότι το μαγνητικό πεδίο ήταν αδύνατο να διεισδύσει στην υπεραγώγιμη φάση, και επομένως ήταν ανίκανο να την καταστρέψει (κάτι που όντως αληθεύει για τα καθαρά μέταλλα). Ο Abrikosov απέδειξε θεωρητικά ότι υπήρχε μια άλλη δυνατότητα: σε συγκεκριμένες συνθήκες το μαγνητικό πεδίο μπορούσε να διεισδύσει στον υπεραγωγό με τη μορφή στροβίλων ρεύματος που ο πυρήνας τους επανερχόταν στη φυσιολογική κατάσταση αλλά η περιφέρειά τους παρέμενε υπεραγώγιμη! Ανάλογα με τη συμπεριφορά τους σε ένα μαγνητικό πεδίο, οι υπεραγωγοί χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες: στους υπεραγωγούς πρώτου (παλαιού) τύπου και στους υπεραγωγούς δεύτερου τύπου (που ανακαλύφθηκαν από τον Abrikosov). Είναι σημαντικό το γεγονός ότι ένας υπεραγωγός του πρώτου τύπου μπορεί να μετατραπεί σε υπεραγωγό του δεύτερου τύπου αν τον «νοθεύσουμε» προσθέτοντας ξένες προσμείξεις ή και άλλες ατέλειες.

Ανάμεσα στους υπεραγωγούς του δεύτερου τύπου, οι επιστήμονες κατόρθωσαν να βρουν ενώσεις ικανές να μεταφέρουν ρεύμα υψηλής πυκνότητας και να σχηματίζουν γιγάντια μαγνητικά πεδία. Αν και έμενε να λυθούν πολλά προβλήματα προτού βρεθούν πρακτικές εφαρμογές (οι ενώσεις ήταν εύθραυστες, το υψηλό ρεύμα ήταν ασταθές), γεγονός ήταν ότι ένα από τα δύο σοβαρά εμπόδια για την ευρεία χρήση των υπεραγωγών στην τεχνολογία είχε ξεπεραστεί.

Εντούτοις, η αύξηση της κρίσιμης

θερμοκρασίας παρέμενε προβληματική. Τα κρίσιμα μαγνητικά πεδία είχαν αυξηθεί κατά χιλιάδες φορές σε σύγκριση με τα πρώτα πειράματα του Kammerlingh Onnes, αλλά οι αλλαγές στην κρίσιμη θερμοκρασία δεν ήταν ιδιαίτερα ενθαρρυντικές: κατόρθωσε να φτάσει μόλις τους 20K. Έτσι, για την κανονική λειτουργία των υπεραγωγίων οργάνων εξακολουθούσε να είναι απαραίτητο το ακριβό υγρό ήλιο. Αυτό ήταν ιδιαίτερα ενοχλητικό, διότι είχε ανακαλυφθεί ένα θεμελιωδώς νέο κβαντικό φαινόμενο, το «φαινόμενο Josephson», το οποίο καθιστούσε δυνατή την ευρεία χρήση υπεραγωγών στη μικροηλεκτρονική, στην ιατρική, στην κατασκευή επιστημονικών οργάνων και στους υπολογιστές.

Η αύξηση της κρίσιμης θερμοκρασίας συνιστούσε ένα πρόβλημα εξαιρετικά σοβαρό. Θεωρητικοί υπολογισμοί της μέγιστης τιμής της έδειξαν ότι μέσα στα όρια της συνήθους υπεραγωγιμότητας φωνονίων³ (δηλαδή της υπεραγωγιμότητας που προσδιορίζεται από την έλξη μεταξύ ηλεκτρονίων η οποία οφείλεται στην αλληλεπίδραση με το κρυσταλλικό πλέγμα), αυτή η θερμοκρασία δεν μπορούσε να υπερβεί τους 40K. Ωστόσο, η ανακάλυψη ενός υπεραγωγού με τέτοια T_c θα ήταν σπουδαίο επίτευγμα, αφού θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με σχετικά φτηνό και άφθονο υγρό υδρογόνο (το οποίο έχει σημείο θρασμού στους 20K). Έτσι, θα εγκαινιαζόταν η εποχή της «υπεραγωγιμότητας μέσης θερμοκρασίας» και θα αναπτυσσόταν η έρευνα για την τροποποίηση των υπάρχοντων υπεραγωγών, καθώς και για τη δημιουργία νέων. Το ύστατο όνειρο όμως ήταν η δημιουργία ενός υπεραγωγού με κρίσιμη θερμοκρασία 100K (ή, ακόμη καλύτερα, με θερμοκρασία που να υπερβαίνει τη θερμοκρασία δωματίου), ο οποίος θα μπορούσε να ψύχεται με υγρό άζωτο, που είναι φτηνό και χρησιμοποιείται ευρέως.

Το καλύτερο προϊόν αυτής της έρευνας ήταν το κράμα Nb_3Ge , με κρίσιμη θερμοκρασία 23,2K. Αυτή η θερμοκρασία-ρεκόρ επιτεύχθηκε το 1973 και δεν καταρρίφθηκε για 13 χρόνια. Έως το 1986 η κρίσιμη θερμοκρασία δεν μπορούσε να αυξηθεί ούτε κατά ένα



Ένας μαγνήτης σε αιώρηση, που έχει γίνει το σύμβολο της υπεραγωγιμότητας υψηλής θερμοκρασίας υπεραγωγιμής μετάβασης. Το ρεύμα στον υπεραγωγό επάγεται από το μαγνήτη. Όσο η θερμοκρασία παραμένει αρκετά χαμηλή, το ρεύμα κυκλοφορεί συνεχώς. Αυτό δημιουργεί ένα αντίθετο πεδίο, το οποίο προκαλεί την αιώρηση του μαγνήτη.

βαθμό. Φαινόταν, λοιπόν, πως είχαν εξαντληθεί οι δυνατότητες υπεραγωγιμότητας του μηχανισμού φωνονίων.

Εν όψει αυτής της διαπίστωσης, το 1964 ο αμερικανός επιστήμονας Little και ο σοβιετικός V.L. Ginzburg πρότειναν την ακόλουθη ιδέα: αν η δυνατότητα αύξησης της κρίσιμης θερμοκρασίας περιορίζεται από τη φύση του μηχανισμού φωνονίων της υπεραγωγιμότητας, τότε αυτός ο μηχανισμός έλξης των ηλεκτρονίων πρέπει να αντικατασταθεί από κάποιον άλλο –δηλαδή, τα ηλεκτρόνια πρέπει να σχηματίζουν ζεύγη Cooper μέσω κάποιου άλλου μηχανισμού, και όχι μέσω της έλξης με φωνόνια.

Την τελευταία εικοσαετία προτάθηκαν πολλές θεωρίες, και διερευνήθηκαν λεπτομερώς δεκάδες, ή εκατοντάδες, ή και χιλιάδες νέες ουσίες. Ο Little επικέντρωσε την προσοχή του στις σχε-

δόν μονοδιάστατες ενώσεις – μακριές, αγωγιμες μοριακές αλυσίδες με διακλαδώσεις στα πλάγια. Σύμφωνα με τις θεωρητικές εκτιμήσεις, θα μπορούσαμε να περιμένουμε αξιοσημείωτη αύξηση της κρίσιμης θερμοκρασίας σ' αυτές τις ενώσεις. Παρά τις προσπάθειες που καταβλήθηκαν σε πολλά εργαστήρια σε όλο τον κόσμο, δεν συντέθηκαν τέτοιοι υπεραγωγοί. Αλλά οι φυσικοί και οι χημικοί έκαναν εν τω μεταξύ πολλές σπουδαίες ανακαλύψεις: κατασκεύασαν οργανικά μέταλλα, και το 1980 συνέθεσαν κρυστάλλους από οργανικούς υπεραγωγούς (το σημερινό ρεκόρ της κρίσιμης θερμοκρασίας ενός οργανικού υπεραγωγού είναι άνω των 10K). Κατάφεραν να κατασκευάσουν διδιάστατα «σάντουιτς» μετάλλου-ημιαγωγού – διαστρωματωμένους μαγνητικούς υπεραγωγούς όπου, επιτέλους, η υπεραγωγιμότητα και ο μα-

3. Το φωνόνιο είναι το κβάντο της ενέργειας δόνησης.

γνητισμός συνυπήρχαν ειρηνικά. Εντούτοις, δεν υπήρχαν νέες προοπτικές για υπεραγωγιμότητα υψηλής θερμοκρασίας.

Εκείνη την εποχή, είχε διευρυνθεί το φάσμα εφαρμογών των υπεραγωγών, αλλά η ανάγκη να ψύχονται με υγρό ήλιο παρέμενε το αδύνατο σημείο τους.

Σύγχρονοι αλχημιστές

Ας επανέλθουμε στην ανακάλυψη των Müller και Bednorz. Στα μέσα της δεκαετίας του 1970, κάποιες παράξενες κεραμικές ενώσεις εμφανίστηκαν ως υποψήφιοι για την υπεραγωγιμότητα υψηλής θερμοκρασίας. Όσον αφορά τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες σε θερμοκρασία δωματίου ήταν «ασθενή μέταλλα», αλλά γίνονταν υπεραγώγιμα σε θερμοκρασία που δεν απείχε πολύ από το απόλυτο μηδέν. Όταν λέμε ότι «δεν απείχε πολύ», εννοούμε περίπου δέκα βαθμούς κάτω από την τιμή-ρεκόρ εκείνης της εποχής. Η νέα ένωση, όμως, δύσκολα θα μπορούσε να ονομαστεί μέταλλο. Σύμφωνα με τη θεωρία, η τιμή της κρίσιμης θερμοκρασίας που επιτεύχθηκε δεν ήταν χαμηλή, αλλά πολύ υψηλή για τέτοιες ουσίες.

Πρέπει να παραδεχτούμε ειλικρινά ότι δεν υπήρχε σοβαρή θεωρητική υπόνοια που να στήριζε το πειραματικό ενδιαφέρον γι' αυτές τις ενώσεις. Από το 1983 οι Müller και Bednorz εργάζονταν σαν αλχημιστές με εκατοντάδες διαφορετικά οξειδία, τροποποιώντας τα συστατικά, την ποσότητα και τις συνθήκες της σύνθεσής τους. Σ' αυτή την επιμελή προσπάθεια, προσέγγισαν αδιόρατα μια ένωση βαρίου, λανθανίου, χαλκού και οξυγόνου που εμφάνιζε υπεραγώγιμα χαρακτηριστικά στους 35K. Αυτό συνέβη στα τέλη του 1985.

Δεν είναι εύκολο να βρεθεί η λογική της ανακάλυψης στη σύγχρονη επιστήμη υλικών. Μέχρι τώρα, τον βασικό ρόλο τον κατείχαν η διαίσθηση, η πείρα, η επιμονή και, γιατί όχι, η καθαρή τύχη. Ας δανειστούμε το παράδειγμα που αναφέρει ο σοβιετικός επιστήμονας Α. S. Boronik-Romanov: «Για πολύ καιρό οι φυσικοί αποτύγχαναν να επιτύχουν⁴ το φράγκιο και το γερμάνιο. Τότε ο ολ-

λανδός φυσικός H. Kazimir πρότεινε να χρησιμοποιηθεί ρήνιο ως διεπιφανειακή στρώση. Το σκεπτικό του ήταν ότι η Γαλλία και η Γερμανία συνδέονται με ένα στοιχείο της φύσης, τον ποταμό Ρήνο. Τα αποτελέσματα ξεπέρασαν κάθε πρόβλεψη».

Εδώ πρέπει να συναγάγουμε ένα σημαντικό συμπέρασμα: η έρευνα για τεχνολογικά αποτελεσματικούς υπεραγωγούς αποδείχτηκε ιδιαίτερα ασυνήθιστη. Οι επιστήμονες ξεκίνησαν με καθαρά μέταλλα, κατόπιν ασχολήθηκαν με «θρόμικα» κράματα, και κατέληξαν σε οξειδία μετάλλων, τα οποία μόλις και μετά βίας μοιάζουν με μέταλλα — στην πραγματικότητα είναι ένα είδος αργίλου. Γενικά, τα πράγματα πήγαιναν από το απλό στο σύνθετο. Μερικές φορές η θεωρία έμενε πίσω από το πείραμα, ενώ άλλοτε έδινε μια ισχυρή ώθηση για περαιτέρω έρευνα. Σήμερα η θεωρία υπολείπεται και πάλι έναντι του πειράματος: οι επιστήμονες έχουν δημιουργήσει νέους υπεραγωγούς υψηλής θερμοκρασίας, βαδίζοντας ψηλαφητά, και πρέπει να βρεθεί μια ικανοποιητική θεωρητική ερμηνεία αυτών των ανακαλύψεων. Πολλά χαρακτηριστικά αυτών των υπεραγωγών δεν είναι δυνατό να εξηγηθούν μέσα στο πλαίσιο των παραδοσιακών προσεγγίσεων.

Βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι οι θεωρητικοί έχουν μείνει άπραγοι: υπάρχουν τουλάχιστον πενήντα νέες θεωρίες υπεραγωγιμότητας υψηλής θερμοκρασίας που προτάθηκαν τα τελευταία χρόνια. Αλλά δεν χρειαζόμαστε πενήντα· χρειαζόμαστε μόνο μία, και αυτή η μία αληθινή θεωρία δεν έχει βρεθεί ακόμη. Η αποσαφήνιση της φύσης της υπεραγωγιμότητας υψηλής θερμοκρασίας παραμένει το πιο σημαντικό πρόβλημα που έθεσε η ανακάλυψή της.

Λαμπρές προοπτικές

Πρέπει να αναφερθούμε εν συντομία και στις πρακτικές εφαρμογές που βασίζονται στους υπεραγωγούς οι οποίοι έχουν ανακαλυφθεί. Οι προοπτικές είναι πραγματικά εκπληκτικές. Πολλά από τα έργα παγκόσμιας κλίμακας που είχαν προταθεί παλαιότερα επανήλθαν στην ημερήσια διάταξη, με την ελπίδα ότι οι υπεραγωγοί υψηλής θερμοκρασίας θα τα καταστήσουν πραγματοποιήσιμα από εμπορική άποψη. Για παράδειγμα, στις μέρες μας το 20%-30% της

παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας χάνεται στις γραμμές μεταφοράς. Αν χρησιμοποιούσαμε υπεραγωγούς υψηλής θερμοκρασίας, θα μπορούσαμε να εξαλείψουμε αυτές τις απώλειες. Οι επιστήμονες έχουν ήδη κατορθώσει να επιτύχουν υπεραγώγιμα υμένια ικανά να μεταφέρουν ηλεκτρικό ρεύμα πυκνότητας 106A/cm² σε θερμοκρασία υγρού αζώτου.

Όλα τα έργα που αφορούν τη θερμοπυρηνική σύνθεση προϋποθέτουν τη χρήση γιγαντιαίων υπεραγωγίων μαγνητών για να παραμένει το πλάσμα υψηλής θερμοκρασίας μακριά από τα τοιχώματα του θαλάμου. Για να διατηρείται η υπεραγώγιμη κατάσταση απαιτούνται ρεύματα, αν όχι ποταμοί υγρού ηλίου. Το οικονομικό κέρδος θα είναι τεράστιο αν το ήλιο αντικατασταθεί από άζωτο.

Γιγαντιαία υπεραγώγιμα πηνία θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως συσσωρευτές ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία θα παρεχόταν σε περιόδους αυξημένων αναγκών.

Υπερευαίθητα όργανα για μαγνητοκαρδιογραφήματα και μαγνητοεγκεφαλογραφήματα, βασισμένα στη χρήση των υπεραγωγίων στοιχείων Josephson, θα μπορούσαν να χρησιμοποιούνται σε κάθε νοσοκομείο.

Είναι δυνατό να δημιουργηθεί μια νέα γενιά υπερυπολογιστών, με βάση υπεραγώγιμα στοιχεία και την ψύξη με υγρό άζωτο.

Μη νομίζετε ότι έχουμε χάσει τα μυαλά μας με την υπεραγωγιμότητα. Από τότε που ανακαλύφθηκε, ο ζήλος πολλών ερευνητών υποχώρησε σημαντικά. Το ίδιο συμβαίνει και όταν ένα ολυμπιακό ρεκόρ μένει ακατάρριπτο για πολλά χρόνια. Αλλά το ρεκόρ έχει σημειωθεί, και τώρα λειτουργεί ως σημείο αναφοράς. Επιβεβαιώθηκε η δυνατότητα παραγωγής υλικών με τις απαραίτητες, μοναδικές ιδιότητες. Οποσδήποτε, μένει να λυθούν πολλά σοβαρά προβλήματα που συνδέονται με την παραγωγή τεχνολογικά αποδοτικών υπεραγωγών υψηλής θερμοκρασίας. Ο οικονομικός παράγοντας θα επηρεάσει το βαθμό στον οποίο θα τελεσφορήσουν τα σχέδια που προαναφέραμε. Αλλά το σημαντικό είναι ότι σήμερα γνωρίζουμε πως το αδύνατο έχει γίνει προσιτό. Και αυτή η διαπίστωση άλλαξε αμετάκλητα την αντίληψή μας για την υπεραγωγιμότητα. ■

4. «Επίτευξη» σημαίνει δημιουργία μιας ομοιόμορφης μάζας μέσω της θέρμανσης των συστατικών της χωρίς αυτά να υποστούν τήξη. Οι υπεραγώγιμες ενώσεις συντίθενται με πίεση και λεπτή επίτευξη αλεομένων οξειδίων σε υψηλές θερμοκρασίες.

Η καλή αρχή

Η παρούσα στήλη, που γράφεται ειδικά για το ελληνικό Quantum, δηλαδή δεν αποτελεί μετάφραση του αντίστοιχου αμερικανικού, ελπίζει ότι θα συμβάλει ιδιαίτερα στην ενημέρωση του Έλληνα αναγνώστη. Από αυτή θα γίνεται κριτική τόσο σε βιβλία ελληνικά ή μεταφρασμένα στα ελληνικά, που απευθύνονται στο ευρύ κοινό αλλά και στους ειδικούς, και καλύπτουν σημαντικά κενά στην ελληνική βιβλιογραφία, όσο και σε ξενόγλωσσα στην πλειοψηφία τους βιβλία και περιοδικά, απευθυνόμενα σε όσους αγαπούν γενικώς τη διανοητική πρόκληση που αποτελεί η προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων, τα οποία σπανίως απαντώνται σε σχολικά εγχειρίδια ή συγγράμματα.

Θα προσπαθήσουμε ώστε η επιλογή των βιβλίων να υπακούει σε αυστηρά κριτήρια ποιότητας. Η στήλη φιλοδοξεί να υπογραμμίζει σημαντικά εκδοτικά γεγονότα στο χώρο των βιβλίων των θετικών επιστημών. Ας μην λησμονούμε ότι κυριότερος ίσως στόχος του Quantum είναι η δημιουργία κινήτρων και η πρόκληση ερεθισμάτων στο μαθητή, στο φοιτητή, στον εκπαιδευτικό, αλλά και στο ευρύτερο κοινό, για περαιτέρω ενημέρωση και μελέτη.

Επισημαίνουμε ότι οι βιβλιοκριτικές θα είναι πάντοτε ενυπόγραφες, και δεν θα εκφράζουν απαραίτητα την άποψη του περιοδικού. Ως εκ τούτου, όποιος διαφωνεί με κάποια κριτική ή θέλει να διατυπώσει οποιαδήποτε παρατήρηση, μπορεί να αναπτύξει την επιχειρηματολογία του από τη στήλη των αναγνωστών.

Ποιοτική φυσική

Paul G. Hewitt – ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
(Αγγλικός τίτλος: Conceptual Physics). Τόμ. Ι και ΙΙ.
Μετάφραση: Ελένη Σηφάκη.
Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1992.

του Αντρέα Ι. Κασέτα

Ο Paul Hewitt γράφει για τη φυσική με έναν τρόπο που – εκτός των άλλων – προδίδει και τη μεγάλη αδυναμία που της έχει. Αφήνεται στη γοητεία της, και αυτό που νιώθει θέλει να το μοιραστεί με τον αναγνώστη του. «Η ανάγνωση είναι χορός με αόρατο καθαλιέρο», έγραψε κάποτε ο Maurice Blanchot. Ο Paul G. Hewitt είναι ο αόρατος καθαλιέρος. Θέλει να μας οδηγήσει στην ομορφιά που πιστεύει πως βρίσκεται κρυμμένη μέσα στη φυσική, και όχι μόνο εκεί. Το έχει ομολογήσει, εξάλλου, με την αφιέρωση «To Frank Oppenheimer and those like him who explore the beauty that lies in all things»¹. Θέλει να μας ξαναγίσει στα μονοπάτια της φυσικής αφηνιδιάζοντάς μας από τις πρώτες κιόλας σελίδες, αφού ρωτάει: «Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αποτελεί επιστημονικό ισχυρισμό; α. Το φεγγάρι αποτελείται από πράσινο τυρί. β. Λογικά όντα υπάρχουν κάπου αλλού στο σύμπαν. γ. Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν είναι ο μεγαλύτερος φυσικός του 20ού αιώνα», για να δώσει την απάντηση πως «μόνον η πρώτη πρόταση είναι επιστημονική» και να το τεκμηριώσει. Η γλώσσα του είναι ρέουσα, κι αυτό δεν είναι κάτι το αυτονόητο για ένα βιβλίο φυσικής. Ο Hewitt τολμά, και τελικά τα καταφέρνει. Ανανεώνει τα εκφραστικά μέσα αυθαδιάζοντας σε μια παράδοση που επιμένει πως η γλώσσα της επιστήμης οφείλει να είναι συγκρατημένη και να διατηρείται σε σχετική αφυδάτωση. Ρήματα της καθημερινής γλώσσας κάνουν θαραλέα την εμφάνισή τους τόσο στο αγγλικό κείμενο όσο και στην ελληνική μετάφραση, ενώ το χιούμορ «ρέει άφθονο» μέσα από σκίτσα και υπαινιγμούς. Φαίνεται να πιστεύει

πως η συνύπαρξη του σοβαρού με το αστείο είναι ένα σημαντικό γεγονός και ότι το χιούμορ είναι ένα εσωτερικό κομμάτι της σοβαρότητάς μας: είναι αυτό που τη δροσίζει. Και το βιβλίο του Hewitt έχει – πάνω απ' όλα – δροσιά. Η φυσική του διεισδύει με έναν απολαυστικό τρόπο στην καθημερινή μας ζωή. Αλλά η καθημερινότητά του δεν είναι «φτιαχτή». Παγούρια, μπιλιάρδα, πιστόνια, βαριοπούλες, ο Jearl Walker πάνω στα κάρβουνα, βρύσες, τσατσάρες, γουρούνια, χτυπήματα καράτε, τούβλα, και κυρίως άνθρωποι. Άνθρωποι που δεν είναι μόνο λευκοί και μόνο αρσενικοί, όπως συμβαίνει στα συνήδη σχολικά και πανεπιστημιακά εγχειρίδια. Είναι άνθρωποι/κινέζοι, άνθρωποι/γυναίκες που βάζουν κραγιόν², άνθρωποι με μαύρη επιδερμίδα, άνθρωποι/κορίτσια... Όσο για τα υποκείμενα της κίνησης, δεν είναι μόνο κινητά και αυτοκίνητα. Η βιόσφαιρα είναι παρούσα. Ο αφρικανικός ελέφαντας, ένα χρυσόψαρο, φωτογραφία με καμηλοπάρδαλη, ένα σκίτσο με κροκόδειλους, νούφαρα, περιστέρια, ο πίθηκος... Αλλά και η τέχνη έχει επίσης «προσκληθεί» και εκπροσωπείται. Μια γκραβούρα του 18ου αιώνα, ένας τραγουδιστής κάουντρι, ο πίνακας του Magritte «Κάστρο στα Πυρηνία», μια σκηνή από την ταινία «Burton Fink»³ των αδελφών Κοέν... Ο Hewitt δεν είναι μόνο φυσικός. Αγαπάει τη ζωγραφική, πάει και στον κινηματογράφο. Φαίνεται να πιστεύει στον εσωτερικό δεσμό που υπάρχει ανάμεσα σε όλα τα πράγματα. Ο βασικός του, όμως, στόχος στο Conceptual Physics είναι οι φυσικές έννοιες. Οι έννοιες αποτελούν «τέκνα» της ανθρώπινης αφαιρετικής παρέμβασης μέσα στον ωκεανό των εμπειριών και των αντιλήψεων. Ορισμένες από αυτές, όταν ενηλικιώθηκαν – όταν δηλαδή επινοήθηκε τρόπος για τη μέτρησή τους –, έγιναν έννοιες/μέγεθη διατηρώντας και το αρχικό όνομά τους: θερμοκρασία, δύναμη, ορμή, πίεση... Ο Hewitt μάς θυμίζει ότι κάθε έννοια/μέγεθος έχει το δικό της «είναι», το δικό της «μετρείται» και το δικό της «λέγεται». Κι αυτό έχει μεγάλη σημασία για όσους διδάσκουν φυσική σε σχολεία και σε πανεπιστή-

μια, δεδομένου ότι υπάρχει μια αρνητική παράδοση που συρρικνώνει τη διδασκαλία των εννοιών στον ορισμό, στο «τι λέγεται», αγνοώντας τις δύο βασικές πτυχές της έννοιας/μεγέθους, το «μετρίεται» και το «είναι», τη φυσική, δηλαδή, σημασία της. Ο Hewitt, χωρίς να είναι γνώστης των πορισμάτων της διδακτικής της φυσικής – απ' ό,τι φαίνεται, μας διδάσκει «πώς να διδάσκουμε». Με τη σημειολογική ευαισθησία την οποία διαθέτει, μας επισημαίνει τη σημασιακή υπεροχή της λέξης σε σχέση προς το σύμβολο. Η λέξη είναι κάτι πιο οικείο για τον αναγνώστη ή για τον διδασκόμενο, ενώ το σύμβολο/σημειόγραμμα βρίσκεται σε υψηλότερο επίπεδο αφάιρεσης. Βάζει, λοιπόν, το «ορμή=μάζα × ταχύτητα» να προηγείται του « $J = m \cdot v$ », ενώ στον ορισμό της έννοιας «πίεση» αρκείται στο «πίεση=δύναμη/επιφάνεια».

Το «δάσος» από μακριά δείχνει σαγηνευτικό. Αν βέβαια πλησιάσουμε, θα διακρίνουμε τα μεμονωμένα «δέντρα» και τις σχετικές «ρυτίδες» τους, γεγονός που πρέπει να θεωρηθεί αναμενόμενο, αν λάβουμε υπόψη τις δυσκολίες του εγχειρήματός του, καθώς αγωνίζεται να συσχετίσει την ιδιόμορφα αυστηρή γλώσσα της επιστήμης με εκείνη της καθημερινότητας. Ας εντοπίσουμε ορισμένες από τις «ρυτίδες» αυτές.

– Στη σελίδα 62 γράφει «*δύναμη είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο πραγμάτων*». Αυτή η διατύπωση είναι προβληματική, δεδομένου ότι η αλληλεπίδραση είναι το φαινόμενο, ενώ η δύναμη είναι η έννοια/μέγεθος με την οποία το φαινόμενο αυτό περιγράφεται. Και μάλιστα η «δύναμη» είναι μία (όχι η μοναδική) από τις έννοιες που έχουμε επινοήσει για την περιγραφή των αλληλεπιδράσεων. Υπάρχουν ακόμη η ώθηση, η δυναμική ενέργεια...

– Στη λεζάντα της σελίδας 63 γράφει «*η δύναμη δράσης είναι η προς τα πάνω ώθηση που ασκεί ο αθλητής στα "βάρη"*» η δύναμη αντίδρασης είναι το βάρος των «βαρών». Η χρήση του όρου «ώθηση» (στο αγγλικό κείμενο push) δημιουργεί πρόβλημα στον έλληνα αναγνώστη. Κι αυτό, γιατί στη γλώσσα της φυσικής, η «ώθηση» (αγγλ. impulse) δεν είναι δύναμη. Γι' αυτό, βέβαια, δεν ευθύνεται ο Hewitt, αλλά η δυσκολία του μεταφραστή να βρει δύο διαφορετικές ελληνικές λέξεις για τα «push» και «impulse». Στην ίδια, όμως, λεζάντα εμφανίζεται «κάτι» πολύ σοβαρότερο. Η αντίδραση στη δύναμη που ασκεί ο αθλητής δεν είναι το βάρος (!) των «βαρών».

– Στη σελίδα 65: «*οι δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων Α και Β είναι ίσες και αντίθετες*». Το σημαινόμενο της λέξης «δύναμη» οφείλει να υποδηλώνει την έννοια/μέγεθος, δηλαδή οφείλει να εμπεριέχει και τη διανυσματικότητά της. Υπό αυτή την έννοια, δύο δυνάμεις ίσες δεν μπορεί να είναι και αντίθετες.

– Στη σελίδα 206: «*η πίεση ενός υγρού ισούται με το γινόμενο του ειδικού βάρους επί το βάθος*». Η διατύπωση εμφανίζεται ως απάντηση στο ερώτημα «πόση είναι η πίεση ενός υγρού;», και φαίνεται να αγνοεί ότι το φαινόμενο είναι η ισορροπία του υγρού και το επιστημονικό ερώτημα είναι το «ποια είναι στη γλώσσα των φυσικών η συνθήκη ώστε ένα υγρό να ισορροπεί;». Ανάλογη παρουσίαση παρατηρείται και σε εγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια, στα οποία το γινόμενο «ειδικό βάρος επί βάθος» αναφέρεται με το όνομα «υδροστατική πίεση», χωρίς να διευκρινίζεται τι ακριβώς σημαίνει αυτό το «στατική». Η παρουσίαση αυτή δημιουργεί προβλήματα στο να κατανοηθεί από τους μαθητές η περι-

γραφή του φαινομένου με τη γλώσσα της φυσικής. Η ποσότητα «ειδικό βάρος × βάθος» υποδηλώνει το «πόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι η πίεση στο βαθύτερο σημείο ώστε το υγρό να ισορροπεί». Η χρήση των εννοιών για την περιγραφή των φαινομένων είναι ένα ευαίσθητο ζήτημα. Για την μελέτη του φαινομένου «ισορροπία ενός στερεού σώματος», οι έννοιες δύναμη και ροπή έχουν αποδειχτεί αποτελεσματικές. Για την περιγραφή, όμως, του φαινομένου «ισορροπία ενός υγρού», η έννοια που αποδεικνύεται αποτελεσματική είναι η πίεση, και η σχετική εξίσωση $P_2 - P_1 = \rho h$ (θεμελιώδης εξίσωση της υδροστατικής) αυτό ακριβώς κάνει.

– Στο κεφάλαιο «Θερμοδυναμική» είναι εμφανής η σύγχυση ανάμεσα στις έννοιες heat (θερμότητα) και thermal energy (θερμική ενέργεια). Πουθενά δεν φαίνεται ότι η θερμότητα (heat) είναι ένας από τους δύο «μηχανισμούς» με τους οποίους ένα σύστημα ανταλλάσσει (δίνει-παίρνει) ενέργεια με το περιβάλλον του, με αποτέλεσμα να είναι κενές νοήματος φράσεις όπως «ένα σύστημα "έχει" θερμότητα» και «μεταβάλλεται η θερμότητα». Αντίθετα, η θερμική ενέργεια (thermal energy) είναι ενέργεια την οποία «έχει» ένα σύστημα (είναι η εσωτερική του ενέργεια) και η οποία αυξομειώνεται καθώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία του. Η όλη ιστορία οδηγεί σε αμηχανία και το μεταφραστή, ο οποίος στη σελίδα 316 αποδίδει το «heat» με «θερμική ενέργεια», ενώ αποδίδει στην επόμενη σελίδα το «thermal energy» επίσης ως «θερμική ενέργεια»⁴.

Ας προσθέσουμε, τέλος, ορισμένες ακόμη επισημάνσεις:

– Για «αυτό που προκύπτει» από τη διαίρεση δύο φυσικών μεγεθών η ευρωπαϊκή γλωσσική παράδοση χρησιμοποιεί (α) τον όρο «πηλίκο» (γαλλ. quotient) εφόσον τα μεγέθη δεν είναι ομοειδή και (β) τον όρο «λόγος» για μεγέθη ομοειδή. Λέμε, λόγου χάρη, το πηλίκο της τάσης προς το ρεύμα, το πηλίκο της μάζας προς τον όγκο, ενώ λέμε ο λόγος των συχνοτήτων και ο λόγος των ταχυτήτων. Οι Αμερικανοί, όμως, έχουν μόνο τον όρο «ratio», τον οποίο χρησιμοποιούν σε όλες τις περιπτώσεις. Η φράση, λοιπόν, «ο λόγος της δύναμης προς την επιφάνεια», της σελίδας 219, θα ήταν προτιμότερο να έχει αποδοθεί «πηλίκο της δύναμης προς την επιφάνεια». Και αυτό, αν αποδεχτούμε βέβαια την απλουστευτική ταύτιση της έννοιας «επιφάνεια» με το μέγεθος «εμβαδόν».

– Ο όρος «direction». Στη σελίδα 25 αποδίδεται ως «διεύθυνση», ενώ στη σελίδα 87 ο ίδιος όρος αποδίδεται με τη λέξη «κατεύθυνση». Εκτιμούμε ότι ο όρος «κατεύθυνση» είναι γλωσσικά πιο άρτιος, καθώς το αγγλικό direction εμπεριέχει τόσο την έννοια «διεύθυνση» όσο και την έννοια «φορά». Οι Γάλλοι, βέβαια, χρησιμοποιούν δύο λέξεις για τα διανύσματα, το «direction» και το «sens», οι οποίες πρέπει στη γλώσσα μας να αποδίδονται ως διεύθυνση και φορά.

– Στη σελίδα 65: «*η δράση και η αντίδραση αποτελούν ένα ζεύγος δυνάμεων*». Πρόκειται για ένα παράδειγμα «ώσμων» ανάμεσα στη γλώσσα της φυσικής και στη γλώσσα της καθημερινότητας. Στη γλώσσα της φυσικής ζεύγος δυνάμεων (αγγλ. couple) σημαίνει σύστημα δύο αντιπαράλληλων δυνάμεων, με ίσα μέτρα, ασκούμενων στο ίδιο σώμα. Ίσως θα έπρεπε η αγγλική λέξη «pair», την οποία χρησιμοποιεί εδώ ο Hewitt, να αποδοθεί «ζευγάρι», και με τη λόγια «ζεύγος» να αποδίδεται το επιστημονικό «couple».

– Ο όρος «magnitude» (ενός διανυσματικού μεγέθους, ό-

πως η ορμή) αποδίδεται με τη λέξη «μέγεθος». Θα ήταν προτιμότερη η λέξη «μέτρο» (ή τιμή), την οποία και χρησιμοποιούμε στα σχολικά και πανεπιστημιακά εγχειρίδια, με τη διατύπωση «το διανυσματικό μέγεθος έχει μέτρο και κατεύθυνση». Η λέξη που χρησιμοποιεί ο μεταφραστής μάς οδηγεί σε διατυπώσεις του τύπου «το μέγεθος του φυσικού μεγέθους “ορμή”» ή «το μέγεθος “ορμή” έχει μέγεθος και κατεύθυνση».

Η ελληνική μετάφραση είναι στο σύνολό της εξαιρετική και συνιστά πράξη θαρραλέα, αν λάβει κανείς υπόψη του τα προβλήματα που δημιουργεί η γραφή του Hewitt, προβλήματα «ώσμωσης» ανάμεσα στη γλώσσα της καθημερινότητας και στη γλώσσα της επιστήμης. Κλείνοντας αυτό το σύντομο σημείωμα είναι αδύνατο να μην ομολογήσω την απόλαυση που προσωπικά ένιωσα διαβάζοντας τον Hewitt, και ειδικά τα κεφάλαια «Η ατομική φύση της ύλης», «Αέρια

και πλάσμα», «Ο ήχος», «Ειδική και γενική θεωρία της σχετικότητας».

1. Η αφιέρωση υπάρχει στην πέμπτη έκδοση (1985), χωρίς όμως να υπάρχει στην ελληνική έκδοση.
2. Είναι ίσως το πρώτο βιβλίο φυσικής στο οποίο οι γυναίκες (σε σκίτσα και φωτογραφίες) είναι σχεδόν ισάριθμες με τους άνδρες.
3. Η ταινία «Burton Fink» κυρίστηκε το 1991. Εννοείται ότι η σχετική φωτογραφία της σελίδας 67 δεν προέρχεται από την πέμπτη έκδοση του βιβλίου (1985), αλλά πιθανόν από κάποια πιο πρόσφατη.
4. Βλ. (α) Alan Van Heuvelen, *Physics*, Εκδ. Little, Brown & Co., Βοστώνη 1982 (σ. 164), και Arnold B. Arons, σε ελληνική μετάφραση με τίτλο *Οδηγός διδασκαλίας της Φυσικής*, Εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1992 (σελ. 211, 215).

Συλλογή πρωτότυπων προβλημάτων

Donald J. Newman – *A PROBLEM SEMINAR: Problem Books In Mathematics*.
Springer Verlag, Νέα Υόρκη 1982.

του Γιώργου Ευαγγελόπουλου

Το βιβλίο του Newman αποτελεί μια συλλογή δύσκολων προβλημάτων για προπτυχιακούς και επί πτυχίω φοιτητές των μαθηματικών. Η δυσκολία των προβλημάτων του είναι ανάλογη προς εκείνη των θεμάτων του περίφημου αμερικανικού μαθηματικού διαγωνισμού Putnam¹. Παραταύτα, οι υποψήφιοι Έλληνες αναγνώστες του θα πρέπει να γνωρίζουν ότι περιέχει αρκετά προβλήματα (σχεδόν όλα του πρώτου κεφαλαίου) που η επίλυσή τους δεν προϋποθέτει τίποτε περισσότερο από γνώσεις μαθηματικών λυκειακού επιπέδου (μερικές φορές μάλιστα ούτε αυτές!).

Π.χ. Πρόβλημα Νο 34: «Διαλέγω έναν ακέραιο από το 0 έως το 15. Μπορείτε να μου υποβάλετε επτά ερωτήσεις, στις οποίες απαντώ με ναι ή όχι. Απαντώ σε όλες, έχοντας την ευχέρεια (όχι όμως την υποχρέωση) να ψευδθώ μία μόνο φορά. Προσδιορίστε τον αριθμό».

Ο συγγραφέας στον πρόλογο του βιβλίου μάς αποκαλύπτει ευθύς εξ αρχής τη «φιλοσοφία» του. Πιστεύει ότι ο συνήθης τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών, με την παράθεση μιας εκτενούς και αδιάκοπης σειράς θεωρημάτων και αποδείξεων, καθιστά τη μάθηση μια παθητική διαδικασία. Αντίθετα, πρεσβεύει ότι με το να προτείνει ο διδάσκων στα πλαίσια ειδικών φροντιστηριακών μαθημάτων πρωτότυπα προβλήματα στο φοιτητή, του προσφέρει ερεθίσματα για την αξιοποίηση των γνώσεών του και τον προ(σ)καλεί να συμμετάσχει ενεργητικά σε μια διαδικασία που έχει, τηρουμένων των αναλογιών, όλα τα χαρακτηριστικά της έρευνας.

Το βιβλίο του Newman είναι μόλις 113 σελίδων και διαιρείται σε τρία μέρη: στα προβλήματα, τις υποδείξεις και τις λύσεις. Τα 58 από τα 109 προβλήματά του αποτελούν την ύλη του πρώτου κεφαλαίου, υπό τον γενικό τίτλο «Προβλήματα», ενώ τα υπόλοιπα κατατάσσονται στις ακόλουθες επτά ενότητες: Θεωρία εκτίμησης σφάλματος, γεννήτορες, όρια ολοκληρωμάτων, μαθηματικές ελπίδες (θεωρία πιθανοτή-

των), πρώτοι παράγοντες, θεωρήματα που χρησιμοποιούν την πληρότητα του χώρου, κυρτότητα. Στην αρχή της κάθε ενότητας αιτιολογείται πλήρως η επιλογή του τίτλου της.

Τα περισσότερα από τα προβλήματα του βιβλίου προέρχονται από τις ακόλουθες περιοχές: ασυμπτωτικές σχέσεις μεταξύ συναρτήσεων, συνδυαστική γεωμετρία, πραγματική ανάλυση, θεωρία πιθανοτήτων και ακολουθίες ακεραίων. Υπάρχουν λίγα προβλήματα λογικής, μεγίστων και ελαχίστων, αφηρημένης άλγεβρας και συναρτησιακών εξισώσεων. Λείπουν εντελώς προβλήματα από τους άλλους κλάδους της γεωμετρίας, από τη θεωρία γραφημάτων και την αριθμητική ανάλυση. Η τελευταία παρατήρηση γίνεται μόνο για την ενημέρωση του αναγνώστη σχετικά με το περιεχόμενο του βιβλίου, και δεν αποσκοπεί ουδόλως στη μείωση της αξίας του. Άλλωστε, ένα βιβλίο προβλημάτων είναι αδύνατο να καλύπτει τόσο ευρεία ύλη όσο η προαναφερθείσα.

Το μεγάλο όμως προτέρημα της υπό κρίση συλλογής είναι η πρωτοτυπία των προβλημάτων που την αποτελούν. Οι εξαιρέσεις είναι ελάχιστες.

Π.χ. Πρόβλημα Νο 95: «Τύπος του Stirling»: Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n} \text{ »}.$$

Η απόδειξη του ανωτέρω τύπου, που αποδίδεται στον γνωστό σκώτο μαθηματικό, μπορεί εύκολα να βρεθεί σε οποιοδήποτε σχετικό σύγγραμμα.

Θα παραθέσουμε ακολούθως κάποιες εύστοχες παρατηρήσεις του γνωστού αριθμοθεωρητικού Ivan Niven, οι οποίες περιλαμβάνονται στην κριτική του για το εν λόγω βιβλίο, που δημοσιεύτηκε στο *American Mathematical Monthly*, Ιούνιος-Ιούλιος 1985, σελ. 437-439:

1) Ο Newman είναι αξιέπαινος, γιατί δεν περιορίζεται στην παράθεση μιας απλής λύσης σε κάθε πρόβλημα. Όπου αυτό είναι δυνατό, γενικεύει, υποδεικνύει πιθανούς τρόπους διαφορετικών λύσεων, και κατά περίπτωση αποδεικνύει το εσφαλμένο διαφόρων «προσεγγίσεων» (η παιδαγωγική αξία της μεθόδου είναι προφανής)!

Π.χ. Πρόβλημα Νο 18: «Υπολογίστε την παράσταση:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}} \text{ »}.$$

Ο συγγραφέας επιλύει το πρόβλημα στη γενική του μορφή, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \dots}}}}$$

Ας σημειωθεί ότι η επίλυση του προβλήματος είναι τώρα πιο εύκολη απ' ό,τι στην ειδική περίπτωση για $n = 2$.

2) Συχνά κάποιο πρόβλημα είναι αρκετά εύκολο για τον εξοικειωμένο με το σχετικό θέμα αναγνώστη, αλλά παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες για κάποιον άλλο.

Π.χ. Πρόβλημα Νο 48: «Ας καλέσουμε "πλήρη τετραγώνων" έναν ακέραιο, εάν καθένας από τους πρώτους του παράγοντες εμφανίζεται στη δεύτερη δύναμη (τουλάχιστον). Αποδείξτε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος από ζεύγη διαδοχικών ακεραίων αυτής της μορφής».

Κάθε φοιτητής που είναι εξοικειωμένος με τη στοιχειώδη θεωρία της εξίσωσης του Pell γνωρίζει ότι για κάθε θετικό ακέραιο k , που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, η $x^2 - ky^2 = 1$ έχει άπειρο πλήθος ακεραίων λύσεων. Από την εξίσωση $x^2 - 8y^2 = 1$ παίρνουμε τους ζητούμενους διαδοχικούς ακεραίους της προαναφερθείσας μορφής. Η διαφορετική λύση

του συγγραφέα είναι ιδιαίτερα ευφυής και προϋποθέτει μόνο γνώσεις της άλγεβρας που διδάσκεται στο λύκειο!

Εν κατακλείδι, θα ήθελα να αναφέρω τα εξής: Η υπό κρίση συλλογή απευθύνεται μεν στους προπτυχιακούς και επί πτυχίω φοιτητές, αλλά δεν ανήκει στην κατηγορία των συλλογών που περιέχουν προβλήματα από έναν μόνο κλάδο ή κεφάλαιο των μαθηματικών και αποσκοπούν στην εμπέδωση της σχετικής ύλης. Καλύπτει, βέβαια, έστω και αποσπασματικά, ένα ευρύ φάσμα της ύλης των προπτυχιακών μαθηματικών, αλλά δεν υπηρετεί έναν τόσο ειδικό σκοπό. Αντίθετα, συνιστάται θερμώς σε κάθε φοιτητή με ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά, και γενικά σε όποιον θεωρεί διανοητική πρόκληση την επίλυση τέτοιων πρωτότυπων προβλημάτων. Επαναλαμβάνουμε ότι αρκετά προβλήματα του βιβλίου εμπίπτουν στις δυνατότητες και μαθητών του λυκείου!

1. Ο πιο γνωστός μαθηματικός διαγωνισμός που διεξάγεται μεταξύ πανεπιστημίων (δηλαδή με συμμετοχή ομάδων, αλλά και μεμονωμένων φοιτητών) στις ΗΠΑ και τον Καναδά. Ξεκίνησε το 1938.

Στους λαβύρινθους του νου

D. Hofstadter-D. Dennett - *ΤΟ ΕΓΩ ΤΗΣ ΝΟΗΣΗΣ*

(Αγγλικός τίτλος: *The Mind's I*).

Μετάφραση: Μυρτώ Αντωνοπούλου.

Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1993.

του Σπύρου Μανουσέλη

«Εγώ είμαι, εσύ είσαι, αυτός είναι», έτσι προστάζει η γραμματική και έτσι πιστεύει ότι έχουν τα πράγματα ο κοινός νους. Γραμματική και κοινός νους οργανώνουν τις ιδέες μας για τον κόσμο οργανώνοντας τη γλώσσα: ρήμα συν κατηγορημα περιστρέφονται πάντοτε γύρω από έναν θεμελιώδη οντολογικό άξονα, το υπο-κείμενο, που σύμφωνα με τη ετυμολογία είναι «ό,τι βρίσκεται από κάτω», δηλαδή στη βάση κάθε δράσης που το ρήμα περιγράφει. Αυτή η δράση έχει ως αναφορά τα πράγματα που βρίσκονται έξω και απέναντι από το υποκείμενο, τα αντι-κείμενα.

Τι γίνεται όμως όταν το υποκείμενο στρέφει την προσοχή του πάνω στον ίδιο του τον εαυτό, όταν το εγώ θέλει να γνωρίσει την ίδια του την ουσία, δηλαδή την «εγώτητα» και την «εαυτότητά» του;

Τι συμβαίνει όταν ο νους -πυρήνας κάθε υποκειμένου- γίνεται «αντικείμενο» μελέτης του ίδιου του νου; Άλλωστε, αυτό δεν επιδιώκουν οι πρόσφατοι διεπιστημονικοί κλάδοι της νευροεπιστήμης (νευρολογία, νευροφυσιολογία, νευροχημεία) και της γνωσιακής επιστήμης (γνωσιακή ψυχολογία, γλωσσολογία, τεχνητή νοημοσύνη) όταν προσπαθούν να κατανοήσουν τον εγκέφαλο και τη νόηση μέσω του ίδιου του εγκεφάλου και της νόησης;

Στο επίκεντρο των ενδιαφερόντων αυτού του βιβλίου των Hofstadter και Dennett βρίσκουμε πανάρχαια ερωτήματα, όπως τι είναι νόηση, ποιος είμαι εγώ, αν υπάρχει ψυχή, αλλά και ερωτήματα εντελώς νέα, που οι πρόσφατες επιστημονικές

και τεχνολογικές κατακτήσεις επιβάλλουν στην ανθρώπινη σκέψη: μπορούν οι μηχανές να σκέφτονται, τι διαφοροποιεί την πραγματικότητα από την προσομοίωσή της στον υπολογιστή, η νόηση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόγραμμα που «τρέχει» στον εγκέφαλό μας; Όπως γράφουν οι συγγραφείς αυτού του βιβλίου: «Όποιος επιχειρεί να αντιμετωπίσει αυτά τα ερωτήματα προσκρούει αμέσως σε ένα τείχος από αβεβαιότητες». Και καταλήγουν: «Εμπνευστήκαμε αυτό το βιβλίο σαν μια απόπειρα να αποκαλύψουμε και να καταστήσουμε ολοφάνερες αυτές τις αβεβαιότητες».

Πριν εξετάσουμε ποια στρατηγική υιοθέτησαν για να δια φωτίσουν τέτοια ακανθώδη ερωτήματα, θα πρέπει να πούμε δυο λόγια για τους συγγραφείς αυτού του βιβλίου. Ο Douglas Hofstadter είναι ένας κορυφαίος θεωρητικός της τεχνητής νοημοσύνης και ένας καταξιωμένος συγγραφέας που έγινε παγκόσμια γνωστός με το βιβλίο του *Gödel, Escher, Bach* (το οποίο τιμήθηκε με το βραβείο Πούλιτζερ). Εξίσου διάσημος είναι και ο Daniel Dennett, επιφανής φιλόσοφος και ένας από τους αδιαμφισβήτητους πρωταγωνιστές του νέου διεπιστημονικού κλάδου της γνωσιακής επιστήμης. Στα πολυάριθμα βιβλία του μελετά σε βάθος τις φιλοσοφικές προϋποθέσεις και τις συνέπειες της τεχνητής νοημοσύνης.

Από τη συνεργασία αυτών των δύο διάσημων εξερευνητών θα προκύψει ένα πρωτότυπο είδος βιβλίου «ταξιδιωτικών εντυπώσεων»: το *Εγώ τη Νόησης*, ένας πολύτιμος οδηγός για την εξερεύνηση των νοητικών φαινομένων. Πεισμένοι από τις έρευνές τους ότι οι πρόσφατες εκρηκτικές ανακαλύψεις στο χώρο της γνωσιακής επιστήμης και των νευροεπιστημών ανοίγουν, για πρώτη φορά στην ανθρώπινη ιστορία, το δρόμο για την ουσιαστική κατανόηση του εγκεφάλου και της νόησης, θέλησαν σ' αυτό το βιβλίο να επιχειρήσουν από κοινού τη χαρτογράφηση αυτής της νέας και γεμάτης παγίδες επιστημονικής ηπείρου.

Η συνέχεια στη σ. 69 ➡

Η Πέμπτη Διεθνής Ολυμπιάδα Πληροφορικής

*Αργεντινικοί μεζέδες και προβλήματα
για νεαρούς προγραμματιστές*

Donald T. Piele

Η περιπέτειά μας άρχισε την Παρασκευή, στις 15 Οκτωβρίου 1993, στο Διεθνές Αεροδρόμιο του Μαϊάμι. Εκείνη την ημέρα συγκεντρώθηκε η Ολυμπιακή Ομάδα Πληροφορικής των ΗΠΑ, για πρώτη φορά μετά το θερινό εκπαιδευτικό πρόγραμμα στο Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν-Παρκσάιντ. Ο δρ. Harold Reiter, ο αρχηγός της ομάδας, ήρθε από το Λονδίνο, όπου δίδασκε τον τελευταίο χρόνο Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Κίνγκστον. Ο Hal Burch, 18 ετών, το ένα μέλος της ομάδας, ήρθε από το Μιζούρι όπου είναι πρωτοετής στο Πανεπιστήμιο του Μιζούρι, στο Ρόλλα, έχοντας αποφοιτήσει τον Ιούνιο από το Σχολείο Φυσικών Επιστημών και Μαθηματικών της Οκλαχόμα. Ο Eric Pabst, 17 ετών, ήρθε από το Σωλτ Λέικ, της Γιούτα, και ο Mehul Patel, 16 ετών, ήρθε από το Χιούστον του Τέξας και οι δύο είναι τελειόφοιτοι Λυκείου. Ο Yohan Schmeidler, 17 ετών, πρωτοετής φοιτητής στο MIT, είχε ήδη πετάξει για το Μπουένος Άιρες και θα τον συναντούσαμε την Κυριακή. Η επόμενη στάση μας θα ήταν το Σαντιάγκο της Χιλής, όπου θα αλλάζαμε αεροπλάνο, για να φτάσουμε, πετώντας πάνω από την οροσειρά των Άνδεων, στον προορισμό μας — τη Μεντόσα της Αργεντι-

νής, την πόλη που φιλοξένησε την Πέμπτη Διεθνή Ολυμπιάδα Πληροφορικής (ΔΟΠ).

Αφήσαμε τις Ηνωμένες Πολιτείες γεμάτες φθινοπωρινά χρώματα και βρήκαμε τη Μεντόσα μέσα στην καρδιά της άνοιξης. Στο αεροδρόμιο της

Μεντόσα μας υποδέχτηκε μια αντιπροσωπεία φοιτητών του τοπικού Πανεπιστημίου. Η δουλειά τους για τις επόμενες δέκα ημέρες θα ήταν να ξεναγήσουν τους φιλοξενούμενους (273 σπουδαστές και αρχηγοί ομάδων από 45 χώρες) στις διάφορες εκδηλώσεις



Νεανικά χαμόγελα, που υπόσχονται λαμπρές προοπτικές για το μέλλον της Πληροφορικής.

στην πόλη και σε μια εκδρομή στις Άνδεις. Ο ενθουσιασμός και η ζεστασιά τους γρήγορα μας παρέσυραν. Ο Eric είχε την ευκαιρία να εξασκηθεί στα ισπανικά που μάθαινε επί πέντε χρόνια, και σύντομα απέκτησε ιδιαίτερη σχέση με τους οικοδεσπότες μας. Η ικανότητά του στα ισπανικά αποδείχτηκε μεγάλο πλεονέκτημα και γι' αυτόν αλλά και για όλα τα μέλη της ομάδας των ΗΠΑ. Πολλές φορές κατά τη διάρκεια της παραμονής μας προσκλήθηκε σε συνεντεύξεις για το ραδιόφωνο και την τηλεόραση, ενώ μας μετέφραζε ειδήσεις από τις Los Andes (την τοπική εφημερίδα). Και βέβαια, αυτός ανακάλυπτε τα πιάτα με το μοσχάρι και το κοτόπουλο στους καταλόγους των εστιατορίων.

Στη σκιά της Ακονκάγκουα

Όσοι συμμετείχαν στη ΔΟΠ φιλοξενήθηκαν σε δύο ξενοδοχεία. Η δική μας ομάδα έμεινε στο «Ξενοδοχείο Ακονκάγκουα», που έχει πάρει το όνομά του από την Ακονκάγκουα, την υψηλότερη οροσειρά του δυτικού ημισφαιρίου, και το οποίο βρισκόταν κοντά στη Μεντόσα. Στον δεύτερο όροφο του ξενοδοχείου είχαν εγκατασταθεί πενήντα υπολογιστές Compac, για να τους χρησιμοποιούν τα μέλη των ομάδων. Ήταν μια χειρονομία καλωσορίσματος, και ένα μέρος που όλοι το επισκέπτονταν συχνά για κάποιες επαναλήψεις. Υπολογιστές Compac είχαν τοποθετηθεί και στο Συνεδριακό Κέντρο, όπου θα γινόταν ο διαγωνισμός, γύρω στα έξι οικοδομικά τετράγωνα μακριά από το ξενοδοχείο, και όπου γευματίζαμε κάθε μέρα. Ο δήμος της Μεντόσα αγόρασε για τις ανάγκες τις Ολυμπιάδας 400 υπολογιστές Compac, οι οποίοι θα παρέμεναν στη διάθεση της πόλης μετά τη λήξη του διαγωνισμού. Υπήρχαν αρκετοί υπολογιστές για να εξοπλιστούν πλήρως τα δωμάτια των αρχηγών των ομάδων με ένα δίκτυο που προσέφερε και ηλεκτρονικό ταχυδρομείο και δυνατότητες εκτύπωσης. Αυτή η καινοτομία της Ολυμπιάδας εκτιμήθηκε ιδιαίτερα απ' όλους. Χρησιμοποίησα συχνά το δίκτυο για να έρθω σε επαφή με την οικογένειά μου και με συνεργάτες πίσω στην πατρίδα.

Το απόγευμα της Κυριακής συγκεντρωθήκαμε στο Συνεδριακό Κέντρο για την τελετή έναρξης. Αργεντινοί επίσημοι, ανάμεσά τους ο διευθυντής τε-

χνολογίας στην εκπαίδευση, ο δήμαρχος της Μεντόσα, και ο οργανωτής της Ολυμπιάδας του 1993, ο δρ. Alicia Bañuelos, απηύθυναν τους χαιρετισμούς τους στα ισπανικά (που ταυτόχρονα μεταφράζονταν, παράγραφος προς παράγραφο, στην επίσημη γλώσσα της ΔΟΠ, τα αγγλικά). Ωστόσο, κάθε προσπάθεια για συζητήσεις και ανταλλαγή απόψεων πνίγηκε πολύ σύντομα από δυνατούς λατινοαμερικανικούς ρυθμούς. Οι νεαρές οικοδεσποινές μας παρέσυραν τα μέλη των ομάδων σε ατέλειωτο χορό — επιβίωσα μένοντας όσο μπορούσα στην άκρη, βλέποντας και βγάζοντας φωτογραφίες.

Ξεκίνημα με τρία προβλήματα

Η Τρίτη ήταν η πρώτη ημέρα του διαγωνισμού. Ένα τηλεφώνημα στις 3 το πρωί ξύπνησε τους αρχηγούς των ομάδων ώστε να ετοιμαστούν για τη συνάντηση της επιτροπής στις 5, στο Συνεδριακό Κέντρο. Κύρια εργασία της επιτροπής ήταν να επιλέξει τρία προβλήματα για την πρώτη ημέρα του διαγωνισμού. Τα τρία προβλήματα επιλέχτηκαν ανάμεσα στα εννέα που πρότεινε η επιστημονική επιτροπή της Αργεντινής. Πέρα από την επιλογή των προβλημάτων, τα μέλη των αποστολών από μη αγγλόφωνες χώρες έπρεπε να μεταφράσουν τις εκφωνήσεις των προβλημάτων και να ετοιμάσουν αντίγραφα για όλους τους διαγωνιζόμενους. Υπήρχαν περίπου τριάντα πέντε διαφορετικές γλώσσες, και όλα έπρεπε να είναι έτοιμα έως την προγραμματισμένη ώρα έναρξης.

Στις 11 το πρωί άρχισε ο διαγωνισμός. Οι 155 σπουδαστές πήγαν στους προσωπικούς τους Compac 386, καθένας από τους οποίους είχε μπροστά μια μικρή σημαία της χώρας του διαγωνιζόμενου, και «βάλανε μπροστά τις μηχανές». Είχαν στη διάθεσή τους πέντε ώρες για να λύσουν τρία προβλήματα, χρησιμοποιώντας μια από τις επίσημα εγκατεστημένες γλώσσες προγραμματισμού: Turbo Pascal v. 6.0, Turbo C++ v. 2.0, Quick Basic v. 4.5, και LCN Logo v. 3.0. Είχαμε ήδη εργαστεί εξαντλητικά επί έξι ώρες σε μια αίθουσα γεμάτη καπνούς τσιγάρων, και τώρα ήταν ώρα για λίγη ξεκούραση. Έπρεπε, όμως, να παραμείνουμε στη θέση μας για ν' απαντήσουμε σε οποιαδήποτε γραπτή ερώτηση θα υπέβαλε κάποιος σπουδαστής κατά τη διάρκεια

της πρώτης ώρας. Έπειτα θα ήμασταν ελεύθεροι να ξεκουραστούμε ως την ώρα που θα συνεδρίαζε η εξεταστική επιτροπή.

Στις 4 το απόγευμα ο διαγωνισμός έληξε και οι σπουδαστές επέστρεψαν στα δωμάτιά τους ανακουφισμένοι, γεμάτοι αυτοπεποίθηση. Μέσα στις επόμενες ώρες, θα τους καλούσαν ξανά, έναν κάθε φορά μαζί με τον αρχηγό της ομάδας του, για να ελεγχθεί το πρόγραμμά τους. Το πρόγραμμα θα δοκιμαζόταν για διάφορες σειρές δεδομένων εισόδου και θα γινόταν αξιολόγηση ως προς την ορθότητα των αποτελεσμάτων του αρχείου εξόδου. Αν όλα ήταν άψογα, το πρόγραμμα έπαιρνε 100 βαθμούς.

Τα προγράμματα του Hal και του Mehul ήταν αλάνθαστα, ενώ του Eric και του Yonah ακολουθούσαν από κοντά με 71 και 62 βαθμούς. Για την πρώτη ημέρα δεν ανακοινώθηκε επίσημα κανένα αποτέλεσμα, αλλά γρήγορα μάθαμε από φήμες ότι στον πρώτο γύρο είχαν πετύχει άριστη βαθμολογία συνολικά 16 σπουδαστές.

Ένα ευχάριστο διάλειμμα: αργεντίνικες νοστιμιές

Η επόμενη ημέρα ήταν αφιερωμένη στην επίσκεψη σε μια τοπική σοκολατοβιομηχανία. Στη συνέχεια, ήμασταν καλεσμένοι για φαγητό στο χωριό ενός από τους οργανωτές της ΔΟΠ. Η αρχή έγινε με πιατέλες γεμάτες «εμπανάδας», πίτες γεμιστές με κρέας και μυρωδικά ψημένα σε πλίνθινους φούρνους.

Μια από τις αργεντίνικες σπεσιαλιτέ είναι μεγάλα κομμάτια μοσχάρισιου κρέατος ψημένα πολύ αργά στα κάρβουνα. Το κρέας κόβεται έπειτα σε μικρά κομμάτια και σερβίρεται πάνω σε μικρά ψωμάκια μαζί με μια ειδική σάλτσα μουστάρδας. Το αποτέλεσμα είναι ένα υπέροχο σάντουιτς. Φυσικό είναι λοιπόν που ο χρόνος ζωής μιας πιατέλας γεμάτης κρέας μπορεί να μετρηθεί σε nanosecond. Πολύ γρήγορα, οι οικοδεσπότες μας έπρεπε να τρέχουν ανάμεσα στο πλήθος με γεμάτους δίσκους, για να προλάβουν να προσφέρουν λίγα κομμάτια σε όσους είχαν την ατυχία να βρίσκονται αρκετά μακριά.

Έπειτα από ένα απολαυστικό απόγευμα, επιστρέψαμε στο ξενοδοχείο για να προετοιμαστούμε για τον τελικό γύρο.

Δύο δύσκολα προβλήματα (το ένα απρόσμενο)

Την Πέμπτη ξεκινήσαμε και πάλι στις 3 το πρωί, και όλα ήταν μια επανάληψη της διαδικασίας της Τρίτης — με τη διαφορά ότι τώρα επιλέχτηκε ένα δυσκολότερο πρόβλημα ανάμεσα σε τρία. Ένα πρόβλημα εξαιρέθηκε εξαιτίας της διφορούμενης διατύπωσής του και επειδή ήταν δύσκολο να αποσαφηνιστεί πλήρως σε 35 γλώσσες. Σχεδόν κάθε πρόβλημα μπορεί να ερμηνευτεί διαφορετικά, ανάλογα με το πώς μεταφράζεται. Η διατύπωση, για παράδειγμα, «όλα τα ορθογώνια βρίσκονται μέσα στα όρια ενός φύλλου χαρτιού διαστάσεων $a \times b$ » σημαίνει ότι τα ορθογώνια μπορεί να έχουν ή να μην έχουν κοινό σύνορο με το φύλλο του χαρτιού. Ανάλογα με τη γλώσσα στην οποία μεταφράζουμε αυτή τη δήλωση, τα πράγματα αλλάζουν. Ως εκ τούτου, το να δοθεί η κατάλληλη μετάφραση σε 35 γλώσσες μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα δύσκολο εγχείρημα. Έτσι, η επιτροπή επέλεξε ένα πρόβλημα που πιστεύαμε ότι δεν είχε διφορούμενα σημεία.

Η διατύπωση, λοιπόν, του προβλήματος ήταν καθαρή, αλλά ξεχάσαμε να συζητήσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα βαθμολογούσαμε τις λύσεις. Αυτό, δυστυχώς, προκάλεσε μια σοβαρή παρανόηση, που έγινε φανερή μόλις περάσαμε στο δωμάτιο των υπολογιστών και είδαμε για πρώτη φορά τους κανόνες που θα εφαρμόζονταν για να αξιολογηθούν οι οκτώ δοκιμαστικές εκτελέσεις των προγραμμάτων. Για τα πρώτα έξι σύνολα δεδομένων υπήρχε ένα όριο επεξεργασίας δύο λεπτών, ενώ για τα τελευταία δύο υπήρχε όριο πέντε λεπτών.

Όλα τα προγράμματα των μελών της ομάδας μας εκτελούνταν στιγμιαία με τα πρώτα επτά σύνολα δεδομένων, αλλά ξεπερνούσαν το όριο των πέντε λεπτών με το τελευταίο και δυσκολότερο σύνολο. Αυτή η τελευταία εκτέλεση του προγράμματος έπαιρνε 25 βαθμούς, και έτσι χάθηκαν οι ελπίδες των παιδιών για ένα χρυσό μετάλλιο — όπως και άλλων 12 διαγωνιζόμενων που είχαν πετύχει άριστο αποτέλεσμα την πρώτη ημέρα και οι οποίοι, επίσης, δεν είχαν αναζητήσει την άριστη ταχύτητα. Είχαν πέσει στην παγίδα του χρόνου, την οποία, όμως, πολλοί θα

είχαν αποφύγει αν γνώριζαν ότι, για πρώτη φορά σε μια ΔΟΠ, η ταχύτητα θα ήταν ο αποφασιστικός παράγοντας.

Τον προηγούμενο χρόνο, στη ΔΟΠ της Γερμανίας, είχα εκπλαγεί όταν πληροφορήθηκα ότι η ταχύτητα και η αποδοτικότητα ενός αλγορίθμου δεν συνυπολογίζονταν στην αξιολόγηση. Και πράγματι, η εκτέλεση πολλών προγραμμάτων διαρκούσε για ώρες, ακόμη και όλη τη νύχτα, ενώ άλλα σταματούσαν σε δευτερόλεπτα. Και όμως, δεν γινόταν καμία διάκριση ανάμεσά τους. Αυτό το θεωρούσα μάλλον παράξενο, όμως φαινόταν πως ήταν αποδεκτό σαν άγραφος κανόνας στις ΔΟΠ. Οι σπουδαστές το γνώριζαν, και είχαμε συμβουλευτεί τα μέλη της ομάδας μας να κινηθούν συντηρητικά και να χρησιμοποιήσουν οποιονδήποτε αποτελεσματικό αλγόριθμο, χωρίς να ανησυχούν για το θέμα της ταχύτητας, αν δεν αναφερόταν ρητά στο πρόβλημα.

Η επιτροπή δεν σκέφτηκε να ρωτήσει για τον τρόπο βαθμολογίας. Έτσι, όταν ήρθε στην επιφάνεια το θέμα του χρόνου μόλις έληξε ο διαγωνισμός, ήταν πλέον αργά. Πολλοί σπουδαστές είχαν πλήρη συνείδηση ότι τα προγράμματά τους θα χρειάζονταν χρόνια για να εκτελεστούν αν δινόταν μεγάλο πλήθος δεδομένων, αλλά αφού ο χρόνος δεν ήταν ποτέ πριν παράγοντας στη βαθμολογία, πίστευαν ότι δεν θα ήταν ούτε και αυτή τη φορά. Τα πράγματα όμως εξελίχθηκαν διαφορετικά.

Η επιτροπή αντιμετώπισε την κατάσταση καθορίζοντας πρόσθετους όρους για τη ΔΟΠ του 1994, στους οποίους συμπεριέλαβε τον εξής: «Όταν χρησιμοποιηθεί χρονικό όριο στην αξιολόγηση, πρέπει να γίνει ρητή αναφορά στη διατύπωση του προβλήματος». Αν είχε γίνει το ίδιο και στην Ολυμπιάδα του 1993, θα είχε βοηθήσει πολύ την κατάσταση. Βέβαια, δεν είναι άσχημη ιδέα να χρησιμοποιείται η ταχύτητα εκτέλεσης ως παράγοντας βαθμολογίας των λύσεων. Αφού αυτή ήταν η πρώτη Ολυμπιάδα στην οποία ετέθη το ζήτημα του χρόνου, οι αρχηγοί των ομάδων θα το λάβουν υπόψη τους κατά την προετοιμασία για την ΔΟΠ του 1994. Στη Μεντίτσα, η παράλειψη επηρέασε όλους το ίδιο.

Στις ανεμοδαρμένες Άνδεις

Το Σάββατο ήταν αφιερωμένο σε

μια μεγάλη εκδρομή με λεωφορείο στις Άνδεις. Ο τελικός μας προορισμός ήταν το Ουσπαγιάτα, ένα χιονοδρομικό κέντρο πάνω στα βουνά. Εκεί γευτήκαμε ξανά, σε μεγάλες ποσότητες, το περίφημο ψητό μοσχάρι. Ο δυνατός ανοιξιάτικος άνεμος φυσούσε διαρκώς από τις ψηλές κορυφές, και έπρεπε να στήσουμε έναν ανεμοφράχτη για να προστατεύσουμε τη φωτιά. Δεν υπήρχε πια καθόλου χιόνι, ούτε και άλλοι επισκέπτες στο χιονοδρομικό κέντρο. Μέσα στην τραπεζαρία, όμως, η μεγάλη μας παρέα ήταν ευτυχής καταναλώνοντας όσο περισσότερους μεζέδες μπορούσε, και πίνοντας εις υγείαν ενός ξεναγού που ανακαλύψαμε ότι είχε τα γενέθλιά του.

Έπρεπε, εντούτοις, να επιστρέψουμε σύντομα για μια σημαντική σύσκεψη της επιτροπής που θα αποφάσιζε τα βαθμολογικά όρια για τα χρυσά, τα αργυρά και τα χάλκινα μετάλλια. Ήταν μια γραφική εκδρομή σε μια άνυδρη, γυμνή και ορεινή περιοχή. Λίγοι κατάφεραν να φτάσουν έως ένα σημείο απ' όπου μπορούσαν να δουν την κορυφή της Ακονκάγκουα.

Πίσω πάλι στο Συνεδριακό Κέντρο, όπου η επιτροπή έπρεπε να αποφασίσει για την απονομή των μεταλλίων. Σύμφωνα με τους κανονισμούς, μετάλλιο μπορούν να πάρουν μόνο οι μισοί από τους διαγωνιζόμενους. Με αυτόν τον κανόνα, διατηρείται άδικτη η αξία των μεταλλίων. Επίσης, τα χρυσά, αργυρά και χάλκινα μετάλλια απονέμονται σε αναλογία 1: 2: 3 (ή όσο το δυνατόν πλησιέστερα). Με δεδομένη μέγιστη βαθμολογία το 200, αποφασίστηκε ότι θα δοθούν 13 χρυσά μετάλλια (για βαθμολογία από 180-200), 27 αργυρά (για βαθμολογία από 160-179), και 39 χάλκινα (για βαθμολογία από 125-159).

Βραβεία και σχέδια

Ο Hal Burch και ο Mehul Patel κέρδισαν αργυρά μετάλλια, ενώ ο Eric Pabst και ο Yonah Schmeidler χάλκινα. Η ομάδα μας κατετάγη έβδομη στη συνολική βαθμολογία. Για πρώτη φορά κέρδισαν αργυρό μετάλλιο δύο κορίτσια, ένα από την Τσεχία και ένα από τη Σλοβακία.

Επτά ομάδες κέρδισαν τέσσερα μετάλλια, όπως διαπιστώνετε στον παρακάτω πίνακα:

	Βαθμοί	Χρ.	Αρ.	Χάλ.
Σλοβακία	714	2	1	1
Ρουμανία	691	2	1	1
Ρωσία	683	1	2	1
Ιράν	660	1	2	1
Κίνα	644	1	1	2
Κορέα	640	1	1	2
ΗΠΑ	633	-	2	2

Χρυσά μετάλλια κέρδισαν επίσης σπουδαστές από τη Σουηδία, τη Δημοκρατία της Τσεχίας, τη Βουλγαρία, τη Λευκορωσία και μια ομάδα ενωμένων εθνών από τη Γιουγκοσλαβία.

Μετά τη λήξη των εργασιών της επιτροπής, η αντιπροσωπεία των ΗΠΑ προσκλήθηκε να παρευρεθεί σε μια συνάντηση της Διεθνούς Επιτροπής για να συζητηθεί το πότε θα ήμασταν πρόθυμοι να φιλοξενήσουμε μια Ολυμπιάδα. Για την περίοδο ως το 1997 έχουν υποβάλει υποψηφιότητα η Σουηδία, η Ολλανδία, η Ουγγαρία και η Νότια Αφρική. Αρκετές χώρες προσκλήθηκαν στην ίδια συνάντηση για να υποβάλουν προτάσεις για τα επόμενα χρόνια. Είναι η Πορτογαλία (1998), η Τουρκία (1999), η Κίνα (2000), η Ταϊλάνδη (2001) και η Κορέα (2002). Μας ενδιέφερε και εμάς το 2000, αλλά η Κίνα είναι μέλος της ΔΟΠ περισσότερα χρόνια, και επομένως η υποψηφιότητά της έχει προτεραιότητα. Επειδή το 2003 είναι πολύ μακριά για να κάνουμε σχέδια, ο πρόεδρος του Κέντρου Βελτίωσης της Εκπαίδευσης Joann DiGennaro, που είναι ο χορηγός μας, δεν ήθελε να δεσμευτεί την παρούσα στιγμή, και αποφασίσαμε να περιμένουμε έναν ακόμη χρόνο για να δούμε αν θα υλοποιηθεί η πρόταση του 2000.

Η τελετή της απονομής των μεταλλίων άρχισε στις 9.30 το πρωί της Κυριακής, στο Θέατρο της Ανεξαρτησίας. Όλοι οι βραβευθέντες ήταν στη σκηνή του θεάτρου, ενώ οι αντιπροσωπείες, οι υπόλοιποι διαγωνιζόμενοι και οι καλεσμένοι αποτελούσαν το ακροατήριο. Μετά την τελετή έναρξης, ο αρχηγός κάθε ομάδας ανέβηκε στη σκηνή και προσέφερε τα μετάλλια στα μέλη της ομάδας του, αρχίζοντας από το χάλκινο και καταλήγοντας στο αργυρό. Τα χρυσά μετάλλια τα απένειμαν αργεντινοί επίσημοι. Οι τέσσερις πρώτοι σπουδαστές που πέτυχαν βαθμολογία 200 βαθμών, κέρδισαν από έναν υπολογιστή· επιπλέον τιμήθηκαν με

ένα νέο μετάλλιο, το οποίο θα απονέμεται κάθε χρόνο στον καλύτερο ή στους καλύτερους σπουδαστές που συμμετέχουν στη ΔΟΠ.

Οι τέσσερις ευτυχισμένοι και άξιοι νεαροί από την Τσεχία, τη Ρουμανία, το Ιράν και τη Σουηδία σήκωσαν ψηλά τα μετάλλιά τους καθώς η αίθουσα φωτιζόταν από τα φλας των φωτογράφων. Η σουηδική ομάδα μάς προσκάλεσε όλους στην επόμενη ΔΟΠ, του 1994, που θα γίνει στη Στοκχόλμη, και έτσι έπεσε η αυλαία μίας ακόμη επιτυχημένης Διεθνούς Ολυμπιάδας Πληροφορικής. Αργεντινή, σε ευχαριστούμε για την υπέροχη Ολυμπιάδα. Η ανάμνηση της ζεστής σου φιλοξενίας θα μας συνοδεύει παντοτινά.

Προβλήματα της Πέμπτης Ολυμπιάδας Πληροφορικής

Πρώτος Γύρος

Πρόβλημα 1

Έχετε ένα περιδέραιο με n χάντρες ($n \leq 100$) μερικές από τις οποίες είναι κόκκινες, μερικές μπλε και άλλες άσπρες, τοποθετημένες στην τύχη. Ας δούμε δύο παραδείγματα για $n = 29$:

1 2

o x x o

o x

o o

o o

x o

x x

x x

x x

o o

x o

x o

o o

o x o

1 2

x o o x

x x

x o

@ o

@ @

o o

x x

o x

x o

o o

o o

o x

o o @

Σχήμα 1

Σχήμα 2

όπου, o = κόκκινη χάντρα

x = μπλε χάντρα

@ = άσπρη χάντρα.

(Οι χάντρες που θεωρούμε πρώτη και δεύτερη στη συνέχεια του κειμένου, έχουν αριθμηθεί και στα δύο σχήματα.)

Η διευθέτηση του πρώτου σχήματος μπορεί να παρασταθεί με μια σειρά από b και r, όπου «b» αντιπροσωπεύει μια μπλε χάντρα και «r» μια κόκκινη: brbrrrbbbrrrrrbrbrbrbrbrbrbrbr.

Ας υποθέσουμε ότι σπάτε το περιδέραιο, το απλώνετε σε ευθεία γραμμή και κατόπιν αρχίζετε να μαζεύετε χάντρες ίδιου χρώματος από τη μία άκρη μέχρι να φτάσετε σε χάντρα διαφορετικού χρώματος· έπειτα κάνετε το ίδιο και από την άλλη άκρη (οπότε οι χάντρες μπορεί να έχουν διαφορετικό χρώμα από τις χάντρες που μαζέψατε προηγουμένως). Καθορίστε το σημείο που πρέπει να σπάσουμε το περιδέραιο ώστε να μπορέσουμε να μαζέψουμε τον μεγαλύτερο αριθμό από χάντρες.

Για παράδειγμα, στο περιδέραιο του πρώτου σχήματος, μπορούμε να μαζέψουμε οκτώ χάντρες, είτε σπάζοντάς το ανάμεσα στις χάντρες 9 και 10 είτε ανάμεσα στις χάντρες 24 και 25.

Σε μερικά περιδέραια, όπως σ' αυτό του Σχήματος 2, υπάρχουν και άσπρες χάντρες. Όταν μαζεύουμε χάντρες, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την τυχόν άσπρη χάντρα που συναντάμε είτε ως κόκκινη είτε ως μπλε, και να τη «βάψουμε» με το επιθυμητό χρώμα. Μια σειρά γραμμάτων που θα αντιπροσωπεύει μια παρόμοια διευθέτηση θα περιλαμβάνει τα σύμβολα r, b, και w. (Το w για τις άσπρες χάντρες.)

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα κάνει τα εξής:

1. Θα διαβάσει μια διευθέτηση από ένα αρχείο εισόδου ASCII, το NECKLACE.DAT, με την κάθε διευθέτηση σε μια γραμμή. Θα γράφει αυτά τα δεδομένα σε ένα αρχείο εξόδου ASCII, το NECKLACE.SOL. Ένα παράδειγμα αρχείου εισόδου είναι το

NECKLACE.DAT

brbrrrbbbrrrrrbrbrbrbrbrbrbr
bbwbrrrwbrbrrrrrb

2. Για κάθε διευθέτηση, θα καθορίζει τον μέγιστο αριθμό M από χάντρες που είναι δυνατό να συγκεντρωθούν,

καθώς και το σημείο όπου θα κοπεί το περιδέραιο.

3. Θα γράφει στο αρχείο εξόδου NECKLACE.SOL τον αριθμό M και το σημείο όπου θα κοπεί το περιδέραιο. Οι λύσεις για διαφορετικές διευθετήσεις θα διαχωρίζονται από μια κενή εγγραφή. Παράδειγμα μιας πιθανής λύσης:

NECKLACE.SOL
brbrrrrbbrrrrrrbrrbrrbbrrrrrb
8, ανάμεσα στην 9 και τη 10

bbwbrrrrwbrbrrrrrb
10, ανάμεσα στη 16 και τη 17

Πρόβλημα 2

Κάποιες εταιρείες είναι ιδιοκτήτριες ενός τμήματος άλλων εταιρειών, επειδή έχουν αποκτήσει ένα ποσοστό του συνολικού μετοχικού κεφαλαίου τους. Για παράδειγμα, η Ford έχει την ιδιοκτησία του 12% της Mazda. Λέμε ότι μια εταιρεία A ελέγχει την εταιρεία B όταν ικανοποιείται τουλάχιστον μία από τις επόμενες συνθήκες:

(α) $A = B$

(β) Η A έχει στην ιδιοκτησία της περισσότερο από το 50% της B

(γ) Η A ελέγχει k ($k \geq 1$) εταιρείες $C(1), \dots, C(k)$, όπου η $C(i)$ έχει στην ιδιοκτησία της το $x(i)\%$ της B , για $1 \leq i \leq k$ και $x(1) + \dots + x(k) > 50$.

Το πρόβλημα που πρέπει να λύσετε είναι το εξής:

Με δεδομένη μια λίστα από τριάδες (i, j, p) , που σημαίνουν ότι η εταιρεία i έχει στην ιδιοκτησία της το $p\%$ της εταιρείας j , να βρείτε τα ζεύγη (h, s) όπου η εταιρεία h ελέγχει την s . Υπάρχουν το πολύ 100 εταιρείες.

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα κάνει τα εξής:

1. Θα διαβάζει από ένα αρχείο εισόδου ASCII, το COMPANY.DAT, τη λίστα των τριάδων (i, j, p) που πρέπει να εξεταστούν σε κάθε περίπτωση (δηλαδή, το κάθε σύνολο δεδομένων), όπου i, j , και p είναι θετικοί ακέραιοι. Διαφορετικές περιπτώσεις (σύνολα δεδομένων) θα διαχωρίζονται με μια κενή εγγραφή.

2. Θα βρίσκει όλα τα ζεύγη (h, s) όπου η εταιρεία h ελέγχει την s .

3. Θα γράφει σε ένα αρχείο εξόδου ASCII, στο COMPANY.SOL, όλα τα ζεύγη (h, s) , με h διαφορετικό από το s . Τα ζεύγη (h, s) πρέπει να γραφούν σε διαδοχικές εγγραφές και με αύξουσα σειρά των h . Οι λύσεις για διαφορετικές περιπτώσεις πρέπει να διαχωρίζονται με μια κενή εγγραφή.

Παράδειγμα:

COMPANY.DAT			COMPANY.SOL	
2	3	25	4	2
1	4	36	4	3
4	5	63	4	5
2	1	48		
3	4	30		
4	2	52		
5	3	30		
1	2	30	2	3
2	3	52	2	4
3	4	51	2	5
4	5	70	3	4
5	4	20	3	5
4	3	20	4	5

Πρόβλημα 3

N ορθογώνια διαφορετικού χρώματος τοποθετούνται πάνω σ' ένα φύλλο χαρτιού. Το χαρτί έχει a cm πλάτος και b cm μήκος. Τα ορθογώνια τοποθετούνται με τις πλευρές τους παράλληλες στα όρια της σελίδας. Όλα τα ορθογώνια βρίσκονται μέσα στα όρια της σελίδας. Το αποτέλεσμα είναι διαφορετικά σχήματα διαφορετικών χρωμάτων. Δύο περιοχές του ίδιου χρώματος θεωρούνται μέρος του ίδιου σχήματος αν έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, ειδικά, θεωρούνται διαφορετικά σχήματα. Το πρόβλημα είναι να υπολογίσετε το εμβαδόν όλων αυτών των σχημάτων. Οι αριθμοί a και b είναι θετικοί ακέραιοι, όχι μεγαλύτεροι του 30. Το θεωρούμενο σύστημα συντεταγμένων έχει την αρχή των αξόνων του στο κέντρο της σελίδας και τους άξονές του παράλληλους με τα όρια της σελίδας.

Τα διαφορετικά σύνολα δεδομένων βρίσκονται σ' ένα αρχείο εισόδου ASCII, το RECTANG.DAT, στο οποίο η πρώτη γραμμή κάθε συνόλου δεδομένων περιέχει τα a, b και N , χωρισμένα

από ένα κενό διάστημα. Στις επόμενες N γραμμές θα βρείτε:

- Τις ακέραιες συντεταγμένες της θέσης της κάτω αριστερής κορυφής του ορθογωνίου.
- Στη συνέχεια, τις ακέραιες συντεταγμένες της θέσης της πάνω δεξιάς κορυφής του ορθογωνίου
- Τέλος, το χρώμα του ορθογωνίου, το οποίο αντιπροσωπεύεται από έναν ακέραιο ανάμεσα στο 1 και στο 64, με το 1 να αντιπροσωπεύει το άσπρο χρώμα.

Η σειρά των εγγραφών αντιστοιχεί στη σειρά που χρησιμοποιήσαμε για να τοποθετήσουμε τα ορθογώνια στο χαρτί. Διαφορετικά σύνολα δεδομένων θα διαχωρίζονται από μια κενή εγγραφή.

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα κάνει τα εξής:

1. Θα διαβάζει το επόμενο σύνολο δεδομένων από το RECTANG.DAT.

2. Θα υπολογίζει το εμβαδόν κάθε έγχρωμου σχήματος.

3. Θα γράφει στο αρχείο εξόδου ASCII, στο RECTANG.SOL, το χρώμα και το εμβαδόν κάθε έγχρωμου σχήματος με τον τρόπο που βλέπετε στο παράδειγμα που ακολουθεί. Αυτές οι εγγραφές θα γίνουν με αύξουσα σειρά χρώματος. Οι λύσεις για διαφορετικά σύνολα δεδομένων θα διαχωρίζονται με μια κενή εγγραφή.

Παράδειγμα:

RECTANG.DAT					RECTANG.SOL	
20	12	5			1	172
-7	-5	-3	-1	4	2	47
-5	-3	5	3	2	4	12
-4	-2	-2	2	4	4	8
2	-2	3	-1	12	12	1
3	1	7	5	1		
30	30	2			1	630
0	0	5	14	2	2	70
-10	-7	0	13	15	15	200

Δεύτερος γύρος

Έχετε κερδίσει στο διαγωνισμό που διοργάνωσε μια αεροπορική εταιρεία. Το βραβείο είναι ένα εισιτήριο που σας επιτρέπει να ταξιδέψετε στον Καναδά, ξεκινώντας από το δυτικότερο σημείο που εξυπηρετεί αυτή η αεροπορική εταιρεία, και ταξιδεύοντας στη συνέχεια μόνο από τα δυτικά προς τα ανατολικά, μέχρι να φτάσετε στο ανατολικότερο σημείο που εξυπηρετεί η εταιρεία. Έπειτα, επιστρέφετε ταξιδεύοντας μόνο από τα ανατολικά προς τα δυτικά, μέχρι να φτάσετε στην αρχική πόλη. Δεν θα πρέπει να επισκεφθείτε καμία πόλη περισσότερο από μία φορά, εκτός από την πρώτη, που θα την επισκεφθείτε ακριβώς δύο φορές (στην αρχή και στο τέλος του ταξιδιού). Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε άλλη αεροπορική εταιρεία ή άλλο μεταφορικό μέσο. Με δεδομένο έναν κατάλογο των πόλεων που εξυπηρετεί η εταιρεία και έναν κατάλογο με τις κατευθείαν πτήσεις ανάμεσα σε ζεύγη πόλεων, βρείτε ένα δρομολόγιο που επισκέπτεται όσες περισσότερες πόλεις είναι δυνατόν και ικανοποιεί τις προηγούμενες συνθήκες, με το οποίο δηλαδή αρχίζετε από την πρώτη πόλη του καταλόγου, επισκέπτεστε την τελευταία πόλη του καταλόγου και επιστρέφετε στην πρώτη.

Διαφορετικά σύνολα δεδομένων περιέχονται σ' ένα αρχείο εισόδου ASCII, το ITIN.DAT. Κάθε σύνολο δεδομένων αποτελείται από τα εξής:

- Στην πρώτη γραμμή έχουμε τον αριθμό N των πόλεων που εξυπηρετούνται από την αεροπορική εταιρεία και τον αριθμό V των κατευθείαν πτήσεων που θα παρατεθούν στον κατάλογο. Ο N είναι θετικός ακέραιος, όχι μεγαλύτερος του 100. Ο V είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος.
- Σε καθεμία από τις επόμενες N γραμμές έχουμε το όνομα μιας πόλης που εξυπηρετεί η εταιρεία. Στο αρχείο εισόδου οι πόλεις έχουν διαταχθεί από τα δυτικά προς τα ανατολικά — δηλαδή, η πόλη i είναι δυτικά της πόλης j , αν και μόνο αν $i < j$. (Δεν υπάρχουν δύο πόλεις στον ίδιο μεσημβρινό.) Το όνομα κάθε πόλης είναι ένα αλφαριθμητικό με 15 το

πολύ ψηφία και/ή γράμματα του λατινικού αλφαβήτου — για παράδειγμα, AGR34 ή BEL4. (Δεν υπάρχουν κενά στο όνομα μιας πόλης.)

- Σε καθεμία από τις επόμενες V γραμμές έχουμε δύο ονόματα πόλεων, παρμένα από τον κατάλογο των πόλεων, διαχωριζόμενα από ένα διάστημα. Όταν εμφανίζεται το ζεύγος $πόλη1 πόλη2$ σε μια γραμμή, τότε υπάρχει κατευθείαν πτήση από την $πόλη1$ στην $πόλη2$ και, επίσης, κατευθείαν πτήση από την $πόλη2$ στην $πόλη1$.

Διαφορετικά σύνολα δεδομένων θα διαχωρίζονται από μια κενή εγγραφή (δηλαδή από μια γραμμή που περιέχει μόνο το χαρακτήρα τέλους γραμμής). Δεν θα υπάρχει κενή εγγραφή μετά το τελευταίο σύνολο δεδομένων. Το επόμενο παράδειγμα περιέχεται στο αρχείο ITIN.DAT:

```
ITIN.DAT
8 9
Vancouver
Yellowknife
Edmonton
Calgary
Winnipeg
Toronto
Montreal
Halifax
Vancouver Edmonton
Vancouver Calgary
Calgary Winnipeg
Winnipeg Toronto
Toronto Halifax
Montreal Halifax
Edmonton Montreal
Edmonton Yellowknife
Edmonton Calgary
```

```
5 5
C1
C2
C3
C4
C5 C4
C2 C3
C3 C1
C4 C1
C5 C2
```

Η είσοδος πρέπει να θεωρηθεί σωστή. Δεν χρειάζεται κανείς έλεγχος.

Η λύση η οποία θα βρεθεί για κάθε σύνολο δεδομένων πρέπει να γραφεί σε ένα αρχείο εξόδου ASCII, το ITIN.SOL: Στην πρώτη του γραμμή ο αριθμός των πόλεων στο σύνολο δεδομένων εισόδου. Στην επόμενη γραμμή ο αριθμός M των διαφορετικών πόλεων που επισκέπτεται το δρομολόγιο, και στις επόμενες $M + 1$ γραμμές τα ονόματα των πόλεων, ένα σε κάθε γραμμή, με τη σειρά επίσκεψής τους. Παρατηρήστε ότι η πρώτη πόλη που επισκεπτόμαστε πρέπει να είναι ίδια με την τελευταία. Απαιτείται να βρεθεί μία μόνο λύση. Αν δεν βρεθεί λύση για ένα σύνολο δεδομένων, τότε γι' αυτό το σύνολο θα έχουμε δύο μόνο εγγραφές στο ITIN.SOL: η πρώτη θα δίνει τον συνολικό αριθμό των πόλεων, ενώ η δεύτερη θα λέει «KAMIA LYSH».

Μια δυνατή λύση για το προηγούμενο παράδειγμα:

```
ITIN.SOL
8
7
Vancouver
Edmonton
Montreal
Halifax
Toronto
Winnipeg
Calgary
Vancouver

5
KAMIA LYSH
```

Το πρόγραμμά σας θα τεθεί σ' ένα αρχείο ASCII με όνομα DDD.xxx. Η επέκταση .xxx είναι .BAS για την QBASIC, .LCN για τη Logo, .C για τη C, και .PAS για την Pascal. ■

Περιοδικό

QUANTUM

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη,
114 71-Αθήνα

Τηλ: (01) 3643272, 3645098
Fax: (01) 3641864

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

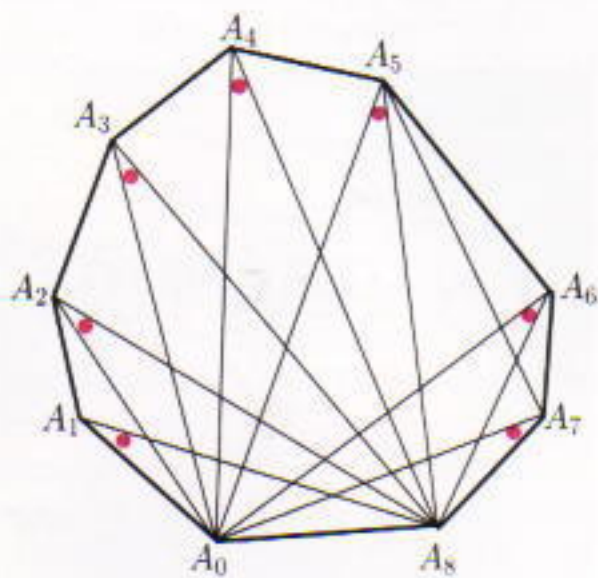
Μαθηματικά

M1

Η απάντηση στο γενικό ερώτημα (β) είναι $n - 2$ (για $n = 5$, η απάντηση είναι 3). Είναι φανερό ότι ο αναζητούμενος αριθμός δεν μπορεί να είναι μικρότερος από $n - 2$, διότι ένα n -γωνο μπορεί να χωριστεί σε $n - 2$ ξένα μεταξύ τους τρίγωνα (φέροντας, για παράδειγμα, όλες τις διαγωνίους από μια κορυφή), και καθένα από αυτά πρέπει να περιέχει ένα σημείο. Για να αποδείξουμε ότι $n - 2$ σημεία αρκούν για ένα κυρτό n -γωνο $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$, ας σημειώσουμε ένα σημείο B_κ , με $\kappa = 1, 2, \dots, n - 2$, μέσα στο τρίγωνο $A_0 A_\kappa A_{n-1}$ πολύ κοντά στην κορυφή A_κ (δείτε το Σχήμα 1) – και συγκεκριμένα, μέσα στο τρίγωνο που αποκόπτει η ευθεία από το $A_0 A_\kappa A_{n-1}$. Οποιοδήποτε τρίγωνο $A_i A_\kappa A_j$, που σχηματίζεται από τρεις κορυφές του πολυγώνου τέτοιες ώστε $0 \leq i < \kappa < j \leq n - 1$, θα περιέχει το σημείο B_κ , διότι η γωνία $A_i A_\kappa A_j$ περιέχεται στη γωνία $A_{\kappa-1} A_\kappa A_{\kappa+1}$, και η διαγώνιος $A_{\kappa-1} A_{\kappa+1}$ τέμνει τα τμήματα $A_i A_\kappa$ και $A_j A_\kappa$.
(N. Vasilyev)

M2

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $AM^2 + BN^2 + \Gamma P^2 = AP^2 + BM^2 + \Gamma N^2$.



Σχήμα 1

Αν αντικαταστήσουμε τις δεδομένες τιμές παίρνουμε $3^2 + 4^2 + 5^2 = 5^2 + 2^2 + x^2$, και $x = \sqrt{12}$.

Για να αποδείξουμε ότι $AM^2 + BN^2 + \Gamma P^2 = AP^2 + BM^2 + \Gamma N^2$, φέρουμε τις AO, BO και ΓO (Σχήμα 2). Τότε, $AO^2 + BO^2 + \Gamma O^2 = (AM^2 + OM^2) + (BN^2 + ON^2) + (\Gamma P^2 + OP^2) = (AP^2 + OP^2) + (BM^2 + OM^2) + (\Gamma N^2 + ON^2)$. Αν απαλείψουμε τους όμοιους όρους από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

M3

Φαίνεται αναπάντεχο, αλλά ο κάθε όρος του αθροίσματος στο αριστερό μέλος της ανισότητας μπορεί να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{t}{1-t^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} t^2$$

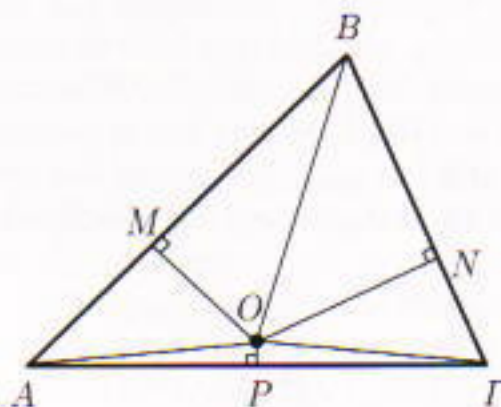
για όλα τα t , με $0 \leq t < 1$. Σ' αυτό το διάστημα, η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$f(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} t(1-t^2) \leq 1,$$

η οποία μπορεί να αποδειχτεί μέσω μιας απλής αναλυτικής μελέτης της συνάρτησης: Βρίσκουμε την παράγωγο

$$f'(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (1-3t^2).$$

Η παράγωγος μηδενίζεται μόνο μία φορά στο $[0, 1]$: $t_0 = 1/\sqrt{3}$. Αφού $f(0) = f(1) = 0 < f(1/\sqrt{3}) = 1$, το t_0 είναι σημείο μεγίστου της $f(t)$ – δηλαδή, $f(t) \leq f(1/\sqrt{3}) = 1$ για κάθε t στο $[0, 1]$.



Σχήμα 2

Συνεπάγεται ότι το αριστερό μέλος της ανισότητας του προβλήματος δεν είναι μικρότερο από

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Η ισότητα ισχύει για $x = y = z = 1/\sqrt{3}$.

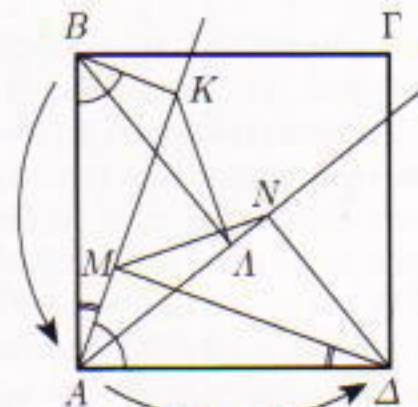
M4

Θεωρήστε την περιστροφή R του τετραγώνου κατά 90° περί το κέντρο του, η οποία μεταφέρει το B στο A και το A στο Δ (στο Σχήμα 3 έχουμε μια αριστερόστροφη περιστροφή). Ας αποδείξουμε ότι αυτή η περιστροφή μεταφέρει το τμήμα KA στο MN – με αυτό τον τρόπο θα αποδειχτεί η πρόταση του προβλήματος.

Αφού, $\angle KBA = 90^\circ - \angle KAB = \angle KAD$ και, ομοίως, $\angle KAB = \angle ADM$, το BK μετά την περιστροφή μεταφέρεται στο AM (τα τμήματα αυτά σχηματίζουν ίσες γωνίες με τα BA και AD , αντίστοιχα, και το BA μεταφέρεται στο AD λόγω του ορισμού της περιστροφής), και το AK στο ΔM . Συνεπώς, το σημείο τομής K των BK και AK μεταφέρεται στο σημείο τομής των AM και ΔM – δηλαδή στο M . Αυτό μπορούμε να το συμβολίσουμε ως: $R(K) = M$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $R(A) = N$, πράγμα που σημαίνει ότι $R(KA) = MN$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.
(V. Dubrovsky)

M5

Αν διαβάσατε σε τούτο το τεύχος το άρθρο «Φως στην άκρη του τούνελ»,



Σχήμα 3

θα παρατηρήσετε πιθανώς ότι αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με τις λεγόμενες μονομεταβλητές – μια χρήσιμη έννοια για να αντιμετωπίζουμε συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων. Ανατρέξτε στο άρθρο για λεπτομέρειες και για να συγκρίνετε την προτεινόμενη λύση με τη μέθοδο που αναπτύσσεται σ' αυτό.

Για κάθε φοιτητή, πάρτε τον αριθμό του δωματίου στο οποίο διαμένει, υποψώστε τον στο τετράγωνο και συμβολίστε με s το άθροισμα όλων αυτών των τετραγώνων (το πλήθος των όρων του αθροίσματος είναι ίσο με τον αριθμό των φοιτητών).

Κάθε φορά που μετακομίζουν δύο φοιτητές που μένουν στα δωμάτια κ και $\kappa + 1$, το άθροισμα s αυξάνει κατά $[(\kappa - 1)^2 + (\kappa + 2)^2] - [\kappa^2 + (\kappa + 1)^2] = (2\kappa^2 + 2\kappa + 5) - (2\kappa^2 + 2\kappa + 1) = 4$.

Ας αποδείξουμε ότι αυτό το άθροισμα δεν μπορεί να αυξάνει επ' άπειρον.

Παρατηρήστε ότι αν έμεινε κάποτε ένας φοιτητής σε ένα από τα τρία διαδοχικά δωμάτια $\kappa - 1$, κ , και $\kappa + 1$, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά τα δωμάτια θα κατοικείται οποιαδήποτε από τις επόμενες ημέρες. Πράγματι, ένας μπορεί να φύγει από την τριάδα αυτών των δωματίων, μετακινούμενος είτε από το δωμάτιο $\kappa + 1$ στο δωμάτιο $\kappa + 2$, είτε από το δωμάτιο $\kappa - 1$ στο $\kappa - 2$. Όμως, οποιαδήποτε από αυτές τις δύο μετακινήσεις μπορεί να γίνει μόνο αν υπάρχει ένας φοιτητής στο δωμάτιο κ , ο οποίος μετακινείται στο δωμάτιο $\kappa - 1$ ή στο $\kappa + 1$, αντίστοιχα. Σε κάθε περίπτωση, ο εν λόγω φοιτητής παραμένει σε ένα από τα δωμάτια αυτής της τριάδας. Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι ένας φοιτητής δεν μπορεί να μετακινηθεί από ένα δωμάτιο κ σε ένα δωμάτιο με αριθμό μεγαλύτερο από $\kappa + 3N$, όπου N είναι ο αριθμός των φοιτητών – διότι, διαφορετικά, θα έπρεπε να μένει τουλάχιστον ένας φοιτητής σε καθεμιά από τις $N + 1$ τριάδες δωματίων $(\kappa, \kappa + 1, \kappa + 2)$, $(\kappa + 3, \kappa + 4, \kappa + 5)$, ..., $(\kappa + 3N, \kappa + 3N + 1, \kappa + 3N + 2)$ κάτι που, φυσικά, είναι αδύνατο. Παρομοίως, ο φοιτητής μας δεν μπορεί να πάει στην αντίθετη κατεύθυνση μακρύτερα από το δωμάτιο $\kappa - 3N$. Επομένως, αν α και β ($\alpha \leq \beta$) είναι ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος αριθμός δωματίου που είναι αρχικά κατειλημμένα, οι νεαροί μας πιανίστες θα μένουν πάντοτε σε δωμάτια με α-

ριθμούς ανάμεσα στο $\alpha - 3N$ και στο $\beta + 3N$. Ως εκ τούτου, το άθροισμα s που θεωρήσαμε προηγουμένως δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από Nm , όπου m είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $(\alpha - 3N)^2$ και $(\beta + 3N)^2$. Αρά, λοιπόν, το s θα σταματήσει να αυξάνει κάποια μέρα, πράγμα που σημαίνει ότι οι φοιτητές θα σταματήσουν να μετακινούνται.

Το άθροισμα s της λύσης μας μπορεί να αντικατασταθεί από άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη της κατανομής των φοιτητών στα δωμάτια. Δοκιμάστε, για παράδειγμα, το άθροισμα των «αποστάσεων» ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη των φοιτητών, όπου ως «απόσταση» εννοούμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αριθμών των δωματίων στα οποία μένουν δύο φοιτητές.

Φυσική

Φ1

Σε παρόμοια προβλήματα εκτίμησης πρέπει μόνοι σας να λαμβάνετε υπόψη σας ορισμένα μεγέθη, εκτιμώντας τις τιμές τους κατά προσέγγιση, με βάση τη γνώση που έχετε για οικεία φαινόμενα. Το σημαντικό, βέβαια, είναι η πορεία που ακολουθείτε για τη λύση του προβλήματος.

Ποια είναι, λοιπόν, κατά προσέγγιση η τιμή της ταχύτητας που χρειάζεται ένας αστροναύτης για να εγκαταλείψει την επιφάνεια ενός αστεροειδούς; Γνωρίζουμε ότι ένας άνθρωπος μπορεί να κάνει άλμα ύψους $h \cong 1$ m, χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια (χωρίς τη διαστημική σιολή θα μπορούσε να τα καταφέρει και καλύτερα, αλλά το θέμα είναι ότι ο αστροναύτης δεν είναι ούτε ψύλλος ούτε ολυμπιονίκης του ύψους!). Το ύψος αυτό αντιστοιχεί σε ταχύτητα «εκτόξευσης» ίση με

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 4,4 \text{ m/sec.}$$

Ας υποθέσουμε ότι η πυκνότητα του αστεροειδούς είναι ίση με τη μέση πυκνότητα της Γης, ρ . Τότε, η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του αστεροειδούς ακτίνας r είναι

$$g_a = G \frac{M_a}{r^2} = G \rho \frac{4\pi r}{3}.$$

Η αντίστοιχη τιμή για τη Γη, η οποία έχει ακτίνα $R = 6.400$ km, είναι

$$g = G \rho \frac{4\pi R}{3}.$$

Μπορούμε να βρούμε εύκολα τη λεγόμενη ταχύτητα διαφυγής (την ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται ώστε μόλις να διαφύγουμε από την έλξη ενός πλανήτη ή ενός άλλου αντικειμένου μεγάλης μάζας) εφαρμόζοντας για το σώμα την αρχή διατήρησης της μηχανικής του ενέργειας κατά τη διαδρομή του από την επιφάνεια του αστεροειδούς έως το άπειρο. Έτσι:

$$\begin{aligned} v_\delta &= \sqrt{2g_a r} = \sqrt{G \rho \frac{8\pi r^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{2gr^2}{R}} \\ &= r \sqrt{\frac{2g}{R}}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας αυτή την τιμή με την αρχική ταχύτητα του άλματος παίρνουμε την ακτίνα του αστεροειδούς:

$$r = \sqrt{Rh} = 2,5 \text{ km.}$$

Η τιμή αυτή είναι εύλογη για έναν πραγματικό αστεροειδή. Είναι φανερό ότι η απάντησή μας δεν θα άλλαζε δραστικά αν επιλέγαμε διαφορετική τιμή για το ύψος του άλματος. Μπορείτε να δείξετε ότι η απάντηση δεν εξαρτάται και πολύ από την υπόθεση ότι οι πυκνότητες του αστεροειδούς και της Γης είναι ίσες.

Φ2

Πρόκειται για ένα ακόμη πρόβλημα εκτίμησης. Έστω ότι οι σφαίρες του λίπους έχουν το ίδιο μέγεθος και ότι κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στο γάλα. Μπορούμε να καθορίσουμε των αριθμό των σφαιρών αν θυμηθούμε ότι στις εμπορικές συσκευασίες του γάλατος βλέπουμε πως το ποσοστό του λίπους κυμαίνεται ανάμεσα σε αμελητέες ποσότητες (άπαχο γάλα) και στο 5%. Ας διαλέξουμε ποσοστό 2%. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η πυκνότητα του λίπους και του νερού είναι κατά προσέγγιση ίσες, θα υποθέσουμε ότι στο λίπος οφείλεται το 0,02 του όγκου του γάλατος. Ας προσδιορίσουμε την ακτίνα r των σφαιρών και το πάχος h του στρώματος γάλατος που έχει χυθεί. Στη συνέχεια θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό N των σφαιρών, σε μια κηλίδα επιφάνειας S από την εξίσωση

$$N \frac{4\pi r^3}{3} = 0,02Sh.$$

Οι εγκάρσιες τομές των σφαιρών καλύπτουν πλήρως την επιφάνεια της κηλίδας. Επομένως,

$$\pi r^2 N = S.$$

Αν διαιρέσουμε την πρώτη εξίσωση με τη δεύτερη παίρνουμε μια εκτίμηση για την ακτίνα μιας σφαίρας λίπους:

$$r = 0,015h.$$

Το πάχος του στρώματος μπορεί να εκτιμηθεί από τη γνωστή τιμή της επιφανειακής τάσης του νερού, αλλά για μια χοντρική εκτίμηση μπορούμε να στηριχτούμε στην εμπειρία μας και να το θεωρήσουμε 1 – 2 mm. Επομένως, η ακτίνα μιας σφαίρας λίπους είναι κατά προσέγγιση 0,01 – 0,02 mm.

Φ3

Από τη διατύπωση του προβλήματος είναι φανερό ότι η ισχύς του θερμαντικού στοιχείου ισούται με την ισχύ που διαχέεται στο περιβάλλον (η θερμοκρασία του νερού δεν μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου). Επομένως, αν οθήσουμε το στοιχείο, η διαχέομενη ισχύς θα είναι $P = 100 \text{ watt}$, και ο χρόνος που θα περάσει για να κρυώσει το νερό κατά 1°C είναι ίσος με

$$t = \frac{cm\Delta\theta}{P} \cong 42 \text{ sec},$$

όπου η τιμή της ειδικής θερμότητας c για το νερό είναι $4.200 \text{ joule/kg} \cdot ^\circ\text{C}$.

Φ4

Το άθροισμα των τάσεων των πυκνωτών είναι πάντοτε ίσο με την τάση της πηγής V_0 , και επομένως, όταν η τάση σε έναν από αυτούς φτάνει στη μέγιστη τιμή, η τάση στα άκρα του άλλου είναι ελάχιστη. Αφού δεν διέρχεται ρεύμα από κανέναν πυκνωτή, δεν θα διέρχεται και από το πηνίο, και κατά συνέπεια η συνολική ενέργεια του συστήματος θα ισούται με το άθροισμα των ενεργειών των πυκνωτών. Παρατηρήστε πως όταν συνδέεται ο δεύτερος πυκνωτής, μπορεί να υπάρξει απώλεια ενός ορισμένου ποσού θερμικής ενέργειας Q (είναι επίσης δυνατό να μην έχουμε απώλεια ενέργειας, αν τη στιγμή της σύνδεσης η τάση στα άκρα του πρώτου πυκνωτή είναι ίση με την τάση της πηγής, με αποτέλεσμα ο δεύ-

τερος πυκνωτής να συνδέεται με μια πηγή μηδενικής τάσης). Το συνολικό έργο που παράγει η πηγή μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με το φορτίο του πρώτου πυκνωτή. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} = V_0,$$

και

$$q_1 V_0 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} + Q.$$

Αν απαλείψουμε το q_1 από αυτές τις εξισώσεις, καταλήγουμε στην επόμενη εξίσωση για τον δεύτερο πυκνωτή:

$$\frac{q_2^2}{C} = \frac{CV_0^2}{2} - Q.$$

Είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή του q_2 επιτυγχάνεται όταν δεν υπάρχει απώλεια θερμότητας στο σύστημα. Επομένως, έχουμε τελικά

$$q_2 = \frac{CV}{\sqrt{2}}.$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής L δεν εμφανίζεται στην απάντηση. Η αυτεπαγωγή καθορίζει τη χρονική κλίμακα στο πρόβλημα, αλλά δεν επηρεάζει τις μέγιστες ενέργειες των πυκνωτών.

Φ5

Όταν βρισκόμαστε κοντά στο φράχτη, ακόμη και ένα μοναδικό κομμάτι σύρματος μπορεί να καλύψει ένα σημαντικό ποσοστό του οπτικού μας πεδίου. Όταν απομακρυνόμαστε από το φράχτη, αυξάνεται το οπτικό μας πεδίο, και η αναλογία μεταξύ του φωτός που προέρχεται από τους παίκτες του τένις και φτάνει πίσω από το φράχτη και του φωτός που προέρχεται από τα κομμάτια σύρματος του φράχτη μεταβάλλεται υπέρ του πρώτου – αναλογία που κατά προσέγγιση είναι ίση με το λόγο του εμβαδού των κενών στο φράχτη προς το συνολικό εμβαδόν του φράχτη. (Ένας παίκτης καλύπτεται τώρα από πολύ περισσότερα κενά.)

Όταν μετακινούμαστε γρήγορα κατά μήκος του φράχτη, μπορούμε να δούμε καθαρότερα τους παίκτες, διότι, εξαιτίας του μετεϊκάσματος, πολλές διαφορετικές στιγμιαίες εικόνες συμβάλλουν στη διαμόρφωση της εικόνας των παικτών που αντιλαμβανόμαστε. Σ' αυτές τις διαφορετικές εικόνες βλέ-

πουμε διαφορετικά τμήματα των παικτών, έτσι ώστε, όταν τις «αθροίζουμε», βλέπουμε έναν μοναδικό, θολό φράχτη που είναι σε σημαντικό βαθμό διαφανέστερος, και, επομένως, οι παίκτες είναι περισσότερο ορατοί.

Σπαζοκεφαλιές

Σ1

Η απάντηση είναι: 6, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 5. Έστω a, β, γ, δ τέσσερις διαδοχικοί αριθμοί. Τότε, $a + \beta + \gamma = \beta + \gamma + \delta$, και επομένως, $a = \delta$. Αρά, η ακολουθία είναι περιοδική, με περίοδο 3 – δηλαδή, μπορεί να γραφεί ως $a, \beta, \gamma, a, \beta, \gamma, a, \beta, \gamma, a, \beta$. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $a = 6, \gamma = 4$. Οπότε, $\beta = 15 - 6 - 4 = 5$.

Σ2

Έστω r και R οι ακτίνες του εσωτερικού και του εξωτερικού κυκλικού μονοπατιού. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ακτινικών γραμμών που διέρχονται από το αρχικό και το τελικό σημείο, τότε η τιμή της θ (σε ακτίνια) για την οποία οι δύο διαδρομές έχουν το ίδιο μήκος δίνεται προφανώς από την

$$R\theta = r\theta + 2(R - r).$$

Η απάντηση, $\theta = 2 \text{ rad}$ (περίπου το ένα τρίτο της διαδρομής γύρω από την περιφέρεια), είναι ανεξάρτητη από τις δύο ακτίνες. Έτσι, ακόμη και όταν δεν υπάρχει εσωτερικός κύκλος ($r = 0$) και είσαστε περιορισμένοι να κινηθείτε μόνο σε κυκλικό μονοπάτι ή μόνο σε ακτινικά μονοπάτια, είναι καλύτερο να μείνετε στο πρώτο, αν το σημείο στο οποίο κατευθύνεστε απέχει λιγότερο από το ένα τρίτο της περιφέρειας.

Σ3

Ας θεωρήσουμε την κίνηση των μορίων της επιφάνειας του νερού μετά την πτώση της πέτρας ως το άθροισμα (επαλληλία) δύο κινήσεων: κυματική κίνηση με τη μορφή εκτεινόμενων κύκλων και μεταφορική κίνηση με την ταχύτητα του ποταμού. Τα κύματα θα σχηματίζουν εκτεινόμενους κύκλους που το κέντρο τους θα κινείται με την ταχύτητα του ποταμού. (Υποθέσαμε, βέβαια, ότι το νερό του ποταμού έχει παντού σταθερή ταχύτητα.)

Σ4

Η απάντηση είναι 942/1.413. Αφού $NINE = (3/2)SIX < 1.500$, συμπεραίνουμε ότι $N = 1$. Τώρα μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή $2.020 + 200I + 2E = 300S + 30I + 3X$, ή

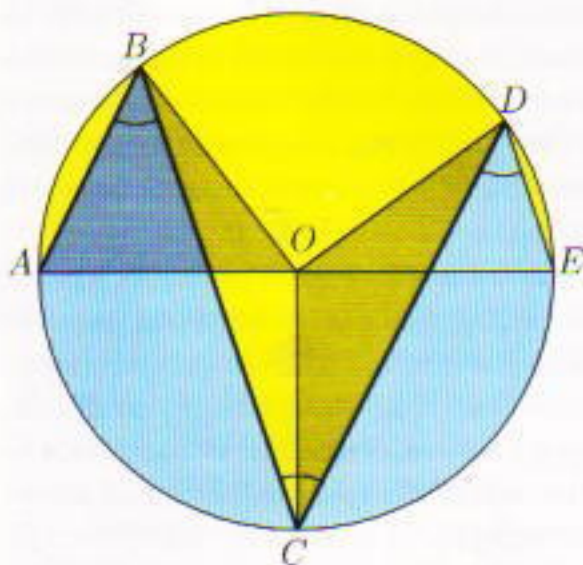
$$300S = 2.020 + 170I + 2E - 3X.$$

Το δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι οίγουρα μεγαλύτερο από το 1.800, και επομένως το S δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το 7. Εξετάζουμε, λοιπόν, τρεις δυνατότητες. Για $S = 7$, έχουμε $80 = 170I + 2E - 3X$, που είναι αδύνατο. Για $S = 8$, έχουμε $380 = 170I + 2E - 3X$, ή $40 - 2E + 3X = 170(I - 2)$, που είναι επίσης αδύνατο, διότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι μεγαλύτερο από το μηδέν και μικρότερο από (ας πούμε) το 70, και κατά συνέπεια δεν διαίρεται με το 170.

Τελικά, θέτουμε $S = 9$, και παίρνουμε $680 = 170I + 2E - 3X$, ή $170(4 - I) = 2E - 3X$. Συνεπάγεται ότι $I = 4$ και $2E = 3X$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα E και X πρέπει να είναι διαφορετικοί αριθμοί, όχι ίσοι με $S = 9$ και $I = 4$, καταλήγουμε στη μοναδική δυνατότητα $X = 2, E = 3$.

Σ5

Ενώστε το κέντρο O του κύκλου και με τα πέντε δεδομένα σημεία (Σχήμα 4). Οι γωνίες AOC, BOD και EOC είναι ορθές, διότι είναι επίκεντρες γωνίες που βλέπουν τα ίδια τόξα με τις αντίστοιχες εγγεγραμμένες των 45° . Συνεπάγεται ότι το κέντρο O βρίσκεται μέσα στη γωνία BCD , και ότι η κίτρινη περιοχή χωρίζεται από τις ακτίνες που φέραμε σε πέντε κομμάτια: σε δύο κυκλικά τμήματα, AB και DE ,



Σχήμα 4

στον κυκλικό τομέα BOD , και στα δύο τρίγωνα OBC και ODC . Παρατηρήστε ότι $\angle DOC = 180^\circ - \angle AOB$, $\angle BOC = 180^\circ - \angle DOE$. Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου ODC , που ισούται με $\frac{1}{2}(OC)^2 \eta\mu(\angle DOC)$, είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου AOB (αφού $\eta\mu(\angle DOC) = \eta\mu(\angle AOB)$), και τα εμβαδά των τριγώνων OBC και ODE είναι ίσα. Αν, τώρα, αντικαταστήσουμε τα τρίγωνα ODC και OBC στην κίτρινη περιοχή με τα τρίγωνα OAB και ODE , που έχουν τα ίδια, αντίστοιχα, εμβαδά, θα μετατρέψουμε την κίτρινη περιοχή στο ημικύκλιο $ABDE$ χωρίς να αλλάξει το εμβαδόν της, το οποίο, επομένως, είναι ίσο με το εμβαδόν της μπλε περιοχής. (V. Dubrovsky)

Καλειδοσκόπιο

Στην τρίλιζα (που παίζεται στη σπείρα) ο πρώτος παίκτης μπορεί πάντοτε να κερδίσει. Η πρώτη κίνησή του είναι αδιάφορη (διότι σε σπειροειδή επιφάνεια όλα τα τετράγωνα είναι ισοδύναμα). Η δεύτερη κίνησή του μπορεί να είναι οποιαδήποτε εκτός από την πιο ανόητη (που είναι το τσεκάρισμα του τετραγώνου στη γραμμή με τα πρώτα X και O). Οι υπόλοιπες κινήσεις είναι, πρακτικά, μονοσήμαντα καθορισμένες.

Όταν η μια σπείρα γυρίζει «τα μέσα-έξω» μέσω της τρύπας της, η δεύτερη, που αρχικά συνδέεται με την πρώτη, απορροφάται, και καταλήγει εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό της πρώτης.

Παιχνιδότοπος

1. Είναι φανερό ότι η ειρηνική συνύπαρξη επτά βασιλισσών πρέπει να αφήνει μια γραμμή και μια στήλη χωρίς βασίλισσες. Αν κόψουμε τη σκακιέρα (πάνω στην οποία είναι τοποθετημένες οι βασίλισσες) κατά μήκος της ευθείας που χωρίζει γραμμές ή στήλες, και ανταλλάξουμε τις θέσεις των δύο κομματιών που προκύπτουν (μαζί με τις βασίλισσες που υπάρχουν πάνω τους), το αποτέλεσμα θα είναι μια ειρηνική συνύπαρξη βασιλισσών κάθε φορά που έχουμε και αρχικά ειρηνική συνύπαρξη. (Στην πραγματικότητα, αυτές οι δύο διευθετήσεις των βασιλισσών α-

ντιπροσωπεύουν απλώς την ίδια διευθέτηση στη σπείρα: τις επιτυγχάνουμε τέμνοντας τη σπείρα κατά μήκος διαφορετικών κύκλων – δείτε το Σχήμα 3 στο Καλειδοσκόπιο.) Χρησιμοποιώντας αυτή την πράξη, μπορούμε να αναδιατάξουμε οποιαδήποτε διευθέτηση των επτά βασιλισσών έτσι ώστε να μεταφέρουμε τις ελεύθερες γραμμές και στήλες στις ακραίες πάνω και δεξιά θέσεις. Στη συνέχεια, εξετάζουμε διευθετήσεις στη σκακιέρα διαστάσεων 7×7 που προκύπτει. Οποιαδήποτε συμμετρία σ' αυτή την «ελαττωμένη» σκακιέρα (περιστροφή γύρω από το κέντρο της ή κατοπτρισμός ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της) μεταφέρει οποιοδήποτε ζεύγος παράλληλων διαγωνίων που η απόσταση μεταξύ τους είναι d – με άλλα λόγια, δύο τμήματα μιας πλήρους διαγωνίου – σε ένα παρόμοιο ζεύγος. Επομένως, αυτές οι συμμετρίες διατηρούν τον «ειρηνικό χαρακτήρα» των διευθετήσεων. Αριθμήστε τις γραμμές και τις στήλες 1, 2, ..., 8 (βλ. Σχήμα 5). Υποθέστε ότι υπάρχει μια ειρηνική διευθέτηση των επτά βασιλισσών στη σκακιέρα διαστάσεων 7×7 . Έστω $(1, q_1), \dots, (7, q_7)$ τα τετράγωνα των βασιλισσών. Εφαρμόζοντας τη συλλογιστική του άρθρου μπορούμε να δούμε ότι τα υπόλοιπα r_k των διαφορών $q_k - k, k = 1, \dots, 7$, όταν διαιρεθούν με το 8 πρέπει να είναι όλα διαφορετικά, ενώ το άθροισμά τους πρέπει να διαιρείται με το 8 (διότι το άθροισμα των επτά διαφορών είναι μηδέν). Επομένως, το άθροισμα $r_1 + \dots + r_7$ προκύπτει από το $0 + 1 + \dots + 7$ με διαγραφή ενός όρου έτσι ώστε το υπόλοιπο άθροισμα να είναι διαιρετό με το 8. Εύκολα διαπιστώνουμε

8							
7	○		○		○		○
6	○	○	○	○		○	
5	○	○	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○		○	
3	○		○		○		○
2	○	○	○			○	
1	●	○	○	○	○	○	○
	1	2	3	4	5	6	7

Σχήμα 5

ότι ο αριθμός που πρέπει να διαγραφεί είναι ο 4. Επομένως, δεν υπάρχει βασίλισσα με $r_k = 4$, και υπάρχει ακριβώς μία βασίλισσα με καθένα από τα υπόλοιπα r_k , με $0 \leq r_k \leq 7$. Τα τετράγωνα (i, j) , με $j - i = 4 \pmod{8}$ είναι τα $(1, 5)$, $(2, 6)$, $(3, 7)$ (με $j - i = -4$) και τα $(5, 1)$, $(6, 2)$, $(7, 3)$ (με $j - i = 4$). Λόγω της συμμετρίας, υπάρχουν έξι ακόμη τετράγωνα που δεν περιέχουν βασίλισσα (τα βρίσκουμε από τα έξι πρώτα τετράγωνα με περιστροφή κατά 90° γύρω από το $(4, 4)$). Και τα 12 απαγορευμένα τετράγωνα φαίνονται σκιασμένα στο Σχήμα 5. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια βασίλισσα με $r_k = 0$ — βρίσκεται σε ένα από τα μη σκιασμένα τετράγωνα της διαγωνίου $(1, 1) - (7, 7)$. Συμμετρικά, πρέπει να υπάρχει μια βασίλισσα σε ένα από τα μη σκιασμένα τετράγωνα της διαγωνίου $(1, 7) - (7, 1)$. Υπάρχουν μόνο δύο ουσιαστικά διαφορετικές δυνατότητες (θέσεις που δεν είναι συμμετρικές μεταξύ τους). Είτε υπάρχει μία μοναδική βασίλισσα και για τις δύο διαγωνίους στο $(4, 4)$ είτε υπάρχει μια βασίλισσα στο $(1, 1)$ και μια στο $(3, 5)$. Στην πρώτη περίπτωση, η βασίλισσα δεν επιτίθεται σε κανένα από τα τετράγωνα $(3, 2)$, $(3, 6)$, $(7, 2)$, $(7, 6)$, και μια δεύτερη βασίλισσα τοποθετημένη σε ένα από αυτά θα επιτίθεται στα υπόλοιπα. Έχουμε επίσης εξαιρέσει όλα τα υπόλοιπα τετράγωνα στις στήλες 3 και 7, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχει μία μόνο βασίλισσα σ' αυτές τις δύο στήλες, και επομένως δεν μπορεί να υπάρχουν επτά στη σκακιέρα. Με μια ελαφρώς εκτενέστερη επιχειρηματολογία, εξετάζοντας μια μια τις περιπτώσεις, μπορούμε να αποκλείσουμε και το ενδεχόμενο να έχουμε βασίλισσες στα $(1, 1)$ και $(3, 5)$. Επομένως, δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε ειρηνικά επτά βασίλισσες σε σπειροειδή σκακιέρα.

2. Μια ειρηνική διεύθετη (με τον συνήθη συμβολισμό των τετραγώνων μιας σκακιέρας) είναι η $a1, b3, g6, d2, e7, z5$.

3. Το επιχείρημα διαιρετότητας μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε άρτιο n , διότι το άθροισμα $1 + 2 + \dots + (n - 1)$ δεν διαιρείται με το n , ενώ το διπλάσιο αυτού του αθροίσματος διαιρείται με το n . Για τα περιττά n που δεν διαιρούνται με το 3 είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι τα τετράγωνα (k, i_k) , όπου i_k είναι τα υπόλοιπα της

διαίρεσης του $2k$ με το n , με $k = 1, \dots, n$, είναι όλα διαφορετικά, και οι βασίλισσες τοποθετημένες σ' αυτά συνυπάρχουν ειρηνικά.

Σκακιστικό πρόβλημα. Έπειτα από $Bz5 - \theta7(!)$ ο μαύρος βασιλιάς έχει μόνο δύο δυνατές κινήσεις:

(α) 1. ... $Pz8 - \zeta8$

2. $B\theta7 - \eta6$, $P\zeta8 - \varepsilon7$

3. $P\varepsilon2 - \varepsilon1$, $P\varepsilon7 - \delta7$

4. $B\eta6 - \varepsilon8$ ματ!

(β) 1. ... $P\varepsilon8 - \delta8$

2. $B\theta7 - \gamma7$ και $P\delta8 - \varepsilon8$

3. $I\beta5 - \theta6!$ (άλμα πάνω από την άκρη), $P\varepsilon8 - \zeta8$

4. $B\gamma7 - \varepsilon1$ ματ! Όλες οι κινήσεις του μαύρου βασιλιά είναι αναγκαστικές λόγω των επιθέσεων των άσπρων κομματιών από την «άλλη πλευρά» της σκακιέρας.

Φως στην άκρη του τούνελ

1. Ενώστε τα κόκκινα σημεία με τα μπλε χαράζοντας N τυχαία ευθύγραμμα τμήματα και εφαρμόστε σε κάθε ζευγάρι τεμνόμενων τμημάτων την πράξη που περιγράψαμε στο Πρόβλημα 3 του άρθρου, αντικαθιστώντας τα με ένα ζευγάρι μη τεμνόμενων τμημάτων που τα άκρα τους έχουν διαφορετικό χρώμα. Επαναλάβετε για όσο υπάρχουν τεμνόμενα τμήματα. Το συνολικό μήκος των τμημάτων μειώνεται μονότονα.

2. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το πλήθος των τμημάτων που έχουν άκρα ίδιου χρώματος (θα τα ονομάζουμε *μονοχρωματικά*) είναι μονομεταβλητή.

3. Χρωματίστε τα σημεία με τυχαίο τρόπο. Έστω m το πλήθος των μονοχρωματικών τμημάτων (δείτε την προηγούμενη λύση). Θα δείξουμε ότι το m είναι μονομεταβλητή — ακριβέστερα, ότι το m μπορεί να μειωθεί αν χρωματίσουμε διαφορετικά τα σημεία κάθε φορά που $m > N$.

Ας υποθέσουμε ότι $m > N$. Κατ' αρχάς δείχνουμε ότι υπάρχει ένα σημείο που συνδέεται με τρία τουλάχιστον σημεία του δικού του χρώματος. Πράγματι, ας υποθέσουμε το αντίθετο — δηλαδή, ότι κάθε σημείο του συνόλου μας συνδέεται με δύο το πολύ σημεία του δικού του χρώματος. Τότε, τα αρχικά N σημεία είναι, όλα μαζί, άκρα το πολύ $2N$ μονοχρωματικών τμημάτων.

Με αυτό τον τρόπο απαριθμούμε τα μονοχρωματικά τμήματα δύο φορές (μία για κάθε άκρο), και επομένως υπάρχουν το πολύ N μονοχρωματικά τμήματα, ή $m \leq N$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας.

Έτσι, έστω ότι το σημείο A συνδέεται με τρία τουλάχιστον σημεία που έχουν το χρώμα του. Επειδή υπάρχουν το πολύ 11 τμήματα που ξεκινούν από το A , έπεται ότι ένα από τα τέσσερα χρώματα — ας πούμε το μαύρο — εμφανίζεται λιγότερο από τρεις φορές στα άκρα τους. Βάφοντας μαύρο το A μειώνουμε το m . Το υπόλοιπο της απόδειξης γίνεται με τον γνωστό τρόπο.

4. Όχι, είναι αδύνατο. Εξετάζουμε σε κάθε στάδιο τη διαφορά d του μεγαλύτερου από τον μικρότερο αριθμό. Καθένας από αυτούς τους αριθμούς είναι το ένα τέταρτο του αθροίσματος των τεσσάρων αριθμών που είχαμε προηγουμένως στις γειτονικές έδρες, και αυτά τα δύο αθροίσματα πρέπει να έχουν δύο ακριβώς κοινούς όρους. Όταν αφαιρούμε το ένα άθροισμα από το άλλο για να βρούμε το d , οι κοινοί όροι απαλείφονται. Επομένως, το d μπορεί να γραφεί ως το ένα τέταρτο του αθροίσματος δύο διαφορών ανάμεσα σε συγκεκριμένους προηγούμενους αριθμούς. Η καθεμιά από αυτές τις διαφορές δεν είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη τιμή του d , πράγμα που σημαίνει ότι σε κάθε βήμα το d μειώνεται κατά το ήμισυ ή και περισσότερο.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι στην πραγματικότητα η ακολουθία των αριθμών σε οποιαδήποτε έδρα του κύβου τείνει στον αριθμητικό μέσο των έξι αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι το d δεν ικανοποιεί τον ορισμό που δώσαμε για τη μονομεταβλητή στο άρθρο μας: μπορεί να πάρει άπειρες τιμές. Επίσης, και η διαδικασία που εξετάζουμε δεν είναι πεπερασμένη, αν και η d φθίνει και είναι κάτω φραγμένη. Πάντως, αυτό δεν το χρειαστήκαμε για να λύσουμε το πρόβλημα.

5. Αν $a < b$, τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b δεν είναι μεγαλύτερος από το a , και είναι γνήσια μικρότερος του b . Συνεπάγεται ότι το άθροισμα όλων των αριθμών που βρίσκονται πάνω στον κύκλο είναι μια μονομεταβλητή.

6. Η απάντηση είναι $1/512$. Θεωρήστε τον αριθμό $c = m/2^n$, όπου m εί-

ναι ο μικρότερος θετικός αριθμός που υπάρχει στον πίνακα, και n είναι το πλήθος των μηδενικών. Όταν παίρνουμε τον μέσο όρο δύο γνήσια θετικών αριθμών, το n δεν αλλάζει, ενώ το m μπορεί μόνο να αυξηθεί, και, επομένως, και το c μπορεί μόνο να αυξηθεί. Όταν παίρνουμε τον μέσο όρο ενός μηδενικού με έναν γνήσια θετικό αριθμό a , το n μειώνεται κατά μία μονάδα, και το m είτε παραμένει αμετάβλητο είτε γίνεται ίσο με $a/2 \geq m/2$, και επομένως η νέα τιμή του c θα είναι μεγαλύτερη ή ίση με το $(m/2)/2^{n-1} = m/2^n$. Και στις δύο περιπτώσεις το c δεν μπορεί να μειωθεί, και επομένως είναι μονομεταβλητή. Στην αρχή, $c = 1/2^9 = 1/512$. Επομένως, θα έχουμε πάντα $m \geq 2^n/512 \geq 1/512$. Για να πετύχουμε ακριβώς το $1/512$, πρέπει να πάρουμε διαδοχικά τον μέσο όρο του αριθμού που εμφανίζεται στη θέση της αρχικής μονάδας και με τα εννέα μηδενικά.

7. Περιβάλλουμε το σύνολο των μαύρων τετραγώνων με ένα ορθογώνιο που έχει ως πλευρές γραμμές του πλέγματος. Δημιουργούμε ένα σύστημα συντεταγμένων λαμβάνοντας την κάτω αριστερή κορυφή του ορθογωνίου ως αρχή και τις δύο γραμμές του

πλέγματος που διέρχονται από αυτήν (με κατεύθυνση προς τα δεξιά και προς τα πάνω) ως τους θετικούς ημιάξονες. Βρείτε το άθροισμα των συντεταγμένων του κέντρου κάθε μαύρου τετραγώνου. Το μεγαλύτερο από αυτά τα αθροίσματα είναι μια γνήσια φθίνουσα μονομεταβλητή.

8. Θεωρήστε το πλήθος των καραμελών που κρατά κάθε παίκτης σε κάποιο συγκεκριμένο γύρο του παιχνιδιού. Παρατηρήστε ότι το μικρότερο από αυτά τα πλήθη δεν μειώνεται κατά το παιχνίδι, ενώ το μεγαλύτερο είτε αυξάνει κατά 1 (αν είναι περιττός αριθμός και βρίσκεται σε δύο γειτονικά σημεία) ή δεν αυξάνει καθόλου. Αυτό σημαίνει ότι το μέγιστο δεν γίνεται ποτέ μεγαλύτερο από $M_0 + 1$, όπου M_0 είναι η αρχική του τιμή. Επομένως, όλες μαζί οι καραμέλες που κρατάνε τα παιδιά δεν ξεπερνούν ποτέ το $n(M_0 + 1)$, όπου n είναι το πλήθος των παιδιών. Επομένως, κάποια στιγμή ο αρχηγός σταματάει να δίνει καραμέλες, πράγμα που σημαίνει ότι εκείνη τη στιγμή τα πλήθη έχουν γίνει άρτιοι αριθμοί.

Από εκείνο το σημείο και κατόπιν, μπορούμε να δείξουμε ότι ο αριθμός $S = nM + \kappa$ είναι μια μονομεταβλητή,

όπου M είναι ο μέγιστος αριθμός καραμελών που κρατάει κάποιος παίκτης και κ το πλήθος των παικτών με M καραμέλες. Για $\kappa < n$, θεωρήστε τον παίκτη με M καραμέλες, ο αριστερός γείτονας του οποίου έχει λιγότερες από M καραμέλες. Μετά την πράξη, αυτός ο παίκτης θα έχει λιγότερες από M καραμέλες, και, επομένως, είτε το M παραμένει το ίδιο ενώ το κ μειώνεται είτε το M μειώνεται ενώ το κ μπορεί να αυξηθεί το πολύ κατά $n - 1$. Στην κάθε περίπτωση, το S μειώνεται κατά μία μονάδα ή περισσότερο.

Από τη στιγμή που το S θα πάψει να μειώνεται, όλοι οι αριθμοί θα έχουν γίνει ίσοι.

9. Έστω a_i ο δείκτης της θέσης που καταλαμβάνει ο τόμος i , και $d_i = |a_i - i|$. Τότε το άθροισμα όλων των αριθμών d_i είναι μια φθίνουσα μονομεταβλητή. Πράγματι, όταν τοποθετηθεί ο τόμος k στη θέση k , ο όρος d_k μηδενίζεται, και μόνο οι $d_k - 1$ όροι d_i , με δείκτες i ανάμεσα στο k και το a_k , μπορεί να αλλάξουν, αλλά ο καθένας τους το πολύ κατά μία μονάδα. Επομένως, το άθροισμα μειώνεται τουλάχιστον κατά $d_k - (d_k - 1) = 1$.



► Συνέχεια από τη σ. 57

Ωστόσο, το *Εγώ της Νόησης* δεν είναι ούτε ένας συνηθισμένος –και συχνά βαρετός– απολογισμός των τελευταίων κατακτήσεων της επιστήμης, ούτε πάλι μια «λογιότατη» φιλοσοφική πραγματεία για το πολυδιάστατο πρόβλημα της νόησης. Πρόκειται, αντίθετα, για μια συναρπαστική συλλογή από είκοσι επτά κείμενα που αγκαλιάζουν όλα σχεδόν τα είδη του γραπτού λόγου: επιστημονικό και φιλοσοφικό δοκίμιο, επιστημονική φαντασία, ακόμη και αυτό το δύσκολο, και δυστυχώς ξεχασμένο στις μέρες μας λογοτεχνικό είδος, το διάλογο. Η στρατηγική, λοιπόν, που υιοθέτησαν οι Hofstadter και Dennett ήταν να ανθολογήσουν και να σχολιάσουν εμβριθώς είκοσι επτά από τα πλέον αντιπροσωπευτικά κείμενα των σημαντικότερων σύγχρονων στοχαστών, που από διαφορετική ο καθένας οπτική γωνία προσπαθούν να δια φωτίσουν το αίνιγμα της νόησης.

Φανταστικά διηγήματα (βγαλμένα από την πένα ενός Μπόρχες ή ενός Λεμ) και ερεθιστικά νοητικά πειράματα εισάγουν με έμμεσο, αλλά αποτελεσματικό τρόπο, τον αναγνώστη στις πιο κρυφές πτυχές της θεματικής αυτού του βιβλίου, ενώ τα δοκίμια και τα σχόλια αποσαφηνίζουν αυτή τη θεματική ασκώντας ένας είδος «χειρουργικής των ιδεών», όπου η σαρκαστική κριτική του λάθους αναμειγνύεται με την «ιατρική» φροντίδα για τη θεραπεία του.

Έτσι, εκτός από τα κείμενα των ίδιων των Hofstadter και Dennett, ο έλληνας αναγνώστης έχει επιτέλους την ευκαιρία

να γνωρίσει μεταφρασμένα για πρώτη φορά στη γλώσσα μας τρία πολύ σημαντικά δοκίμια. Στο πρώτο, το «Υπολογιστικές μηχανές και νοημοσύνη», ο μεγάλος άγγλος μαθηματικός Alan Turing επιχειρεί να απαντήσει στο φαινομενικά απλό ερώτημα: «μπορούν οι μηχανές να σκέφτονται;». Και για να το πετύχει προτείνει μια αποφασιστική δοκιμασία, το πασίγνωστο «τεστ του Turing», το οποίο, κατά τη γνώμη του, επιτρέπει στον καθένα να διαπιστώσει αν μια μηχανή διαθέτει νοημοσύνη. Στις αισιόδοξες προβλέψεις του Turing και των οπαδών της τεχνητής νοημοσύνης έρχονται να απαντήσουν δύο διάσημοι κριτικοί της μηχανοποίησης της νοημοσύνης. Ο John Searle, επιφανής φιλόσοφος της γλώσσας, στο δοκίμιό του «Νοήσεις, εγκεφαλοι και προγράμματα», αντιπαραθέτει στο τεστ του Turing το δικό του διάσημο νοητικό πείραμα, του κινέζικου δωματίου. Ο Thomas Nagel στο δοκίμιό του με τον προκλητικό τίτλο «Τι νιώθει κανείς όντας νυχτερίδα;» υποστηρίζει ότι όσο θα αγνοούμε την απάντηση στο ερώτημα «τι σημαίνει για μια έμβια ύπαρξη να διαθέτει μια ιδιαίτερη οπτική γωνία», θα μας είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε πραγματικά νοήμονες μηχανές.

Όσα αναφέραμε αποτελούν ένα μικρό δείγμα των αρετών αυτού του βιβλίου. Και δικαιολογούν, ως ένα σημείο, τη μεγάλη επιτυχία που γνώρισε όχι μόνο ανάμεσα στους ειδικούς αναγνώστες, αλλά και στο ευρύτερο κοινό ολόκληρου σχεδόν του κόσμου. Η μετάφραση, λοιπόν, του *Εγώ της Νόησης* στα ελληνικά αποτελεί ένα σημαντικό εκδοτικό γεγονός που αξίζει να εκτιμηθεί και να επαινεθεί ιδιαίτερα.



Μάχες πάνω στη σπείρα

Τι μπορείτε να κάνετε με λίγη κόλλα

Vladimir Dubrovsky

Αν διαβάσετε συστηματικά αυτή τη στήλη του *Quantum*, θα δημιουργήσετε μια αξιοσέβαστου μεγέθους συλλογή με χάρτινα μοντέλα περίεργων γεωμετρικών αντικειμένων. Τα σημερινά, αντίθετα με την πλειονότητα των μοντέλων, δεν είναι εύκαμπτα. Αυτό που τα καθιστά αξιοπρόσεκτα είναι ότι πρόκειται για τα απλούστερα πολύεδρα που τα διαπερνά μια τρύπα – με άλλα λόγια, που είναι τοπολογικά ισοδύναμα με τη σπείρα (δείτε το Καλειδοσκόπιο του παρόντος τεύχους). Σ' αυτή την περίπτωση «απλούστερο» δεν σημαίνει και «ευκολότερο στην κατασκευή». Θα πρέπει να ερμηνεύσουμε τη λέξη περισσότερο τυπικά: εδώ σημαίνει ότι «έχουν τον ελάχιστο δυνατό αριθμό κο-

ρυφών». Τα μοντέλα εικονίζονται στο Σχήμα 1: το αριστερό έχει $K = 7$ κορυφές, και το δεξιό $K = 8$.

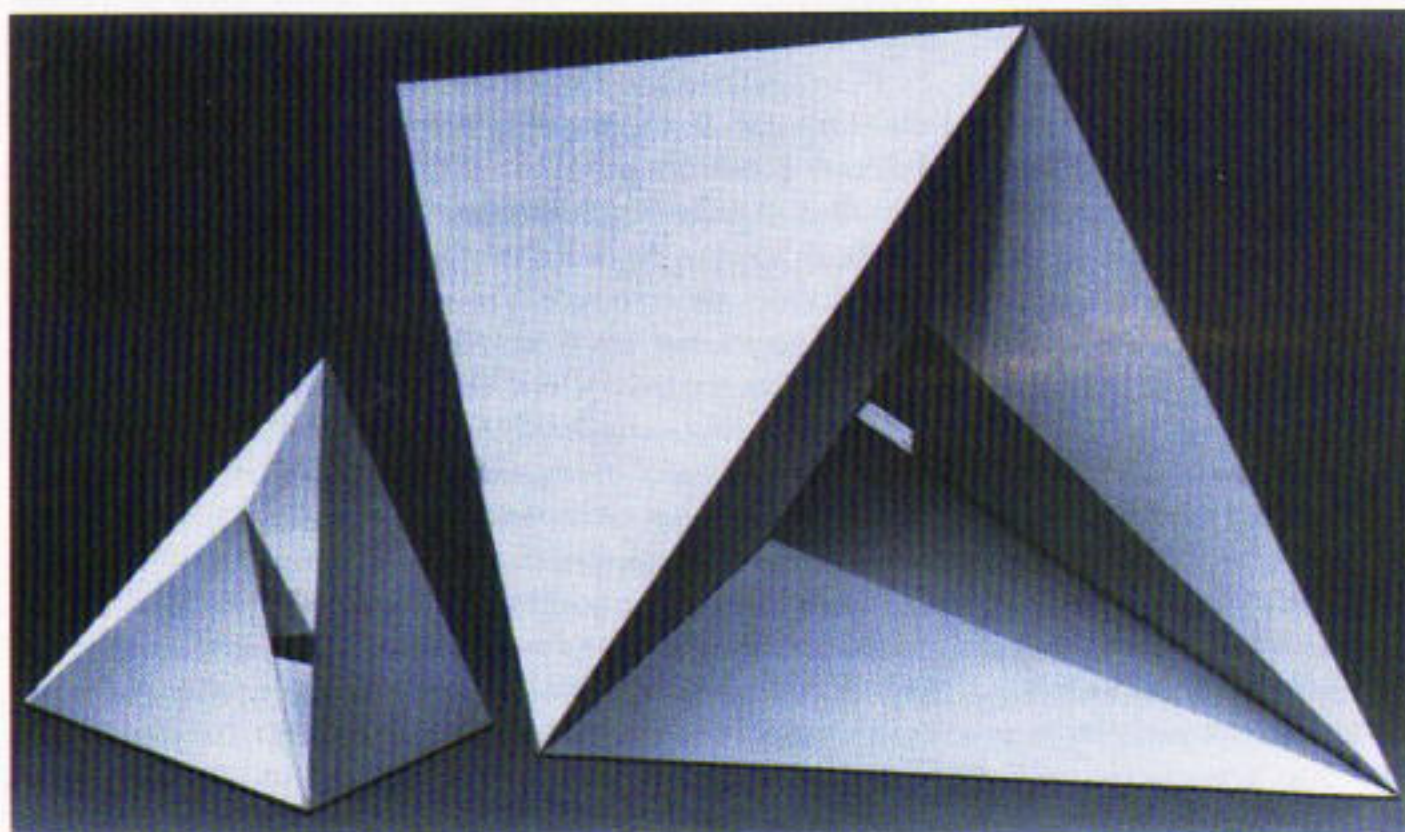
Πολυεδρικές σπείρες

Πριν εξηγήσουμε την κατασκευή τους, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε γιατί αυτές οι πολυεδρικές σπείρες έχουν πράγματι τις ελάχιστες κορυφές. Ας ξεκινήσουμε με οποιαδήποτε πολυεδρική σπείρα, και ας δούμε τι πρέπει να ισχύει όταν έχει τις ελάχιστες κορυφές. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler για τη σπείρα: $K - A + E = 0$, όπου K , A , και E εκφράζουν, αντίστοιχα, το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των εδρών οποιουδήποτε δακτυλιοειδούς (σχή-

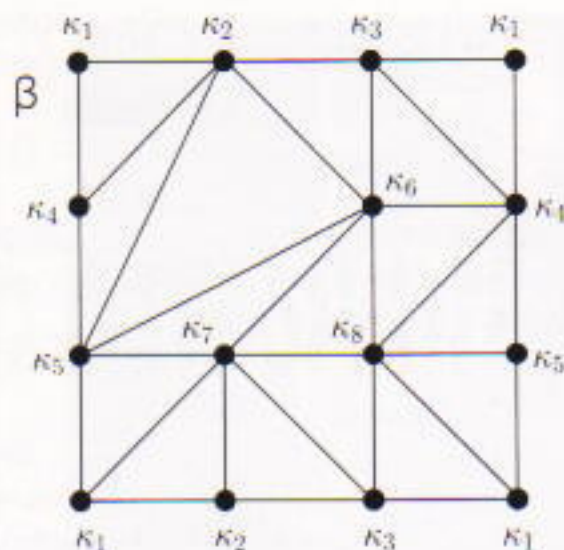
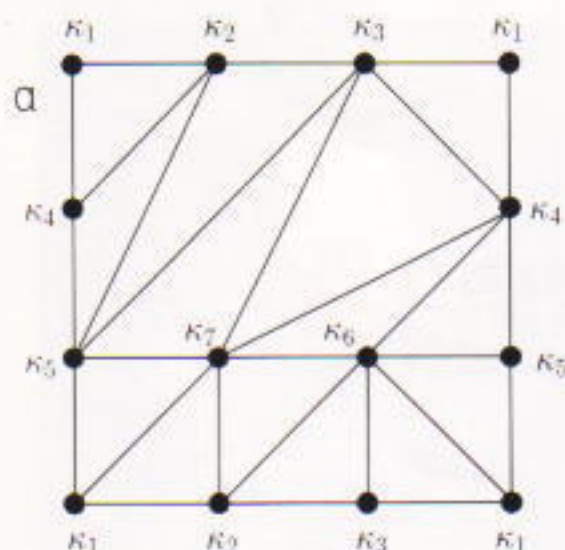
ματος σπείρας) πολυέδρου. Εφόσον κάθε έδρα μπορεί να διαμεριστεί σε τρίγωνα (από τις διαγωνίους της) χωρίς να αλλάξει το πλήθος των κορυφών, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι έδρες είναι τρίγωνα. Αν μετρήσουμε τώρα το πλήθος των ακμών σε κάθε έδρα και προσθέσουμε τα αποτελέσματα, θα πάρουμε, από τη μια, $3E$ (όλες οι έδρες είναι τρίγωνα) και, από την άλλη, $2A$ (κάθε ακμή είναι πλευρά σε δύο έδρες), οπότε $3E = 2A$, και συνεπώς $3K = 3A - 3E = A$. Κάθε ακμή συνδέει δύο κορυφές, και έτσι το πλήθος των ακμών δεν είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των ζευγών κορυφών, το οποίο είναι $K(K-1)/2$. Επομένως, έχουμε

$$3K = A \leq \frac{K(K-1)}{2},$$

και απλοποιώντας, $K \geq 7$. Αυτή, όμως, είναι απλώς μια αναγκαία συνθήκη. Για να κατασκευάσουμε ένα σπειροειδές πολύεδρο με επτά κορυφές λόγω χάρη, πρέπει πρώτα να σχεδιάσουμε το δίκτυο των ακμών και των εδρών του – δηλαδή, έναν χάρτη πάνω σε μια σπείρα που θα αποτελείται από τριγωνικές χώρες (έδρες), οι οποίες, ανά δύο, μπορεί να έχουν είτε μια κοινή πλευρά (ακμή) είτε μια κοινή κορυφή, ή και κανένα κοινό σημείο. Έπειτα, με βάση το δίκτυο, θα κατασκευαστεί



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Τα δίκτυα ενός σπειροειδούς πολυγώνου με (α) 7 κορυφές και με (β) 8 κορυφές.

το πολύεδρο. Στην περίπτωση που $K = 7$, η προηγούμενη ανισότητα γίνεται ισότητα: $3K = K(K-1)/2$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι κορυφές, ανά δύο, συνδέονται με ακμές. Βέβαια, κάθε τρεις κορυφές δεν θα είναι υποχρεωτικά και κορυφές της ίδιας έδρας.

Η δημιουργία του απαιτούμενου δικτύου είναι καλή άσκηση. Προσπαθήστε να το καταφέρετε, και κατόπιν συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το Σχήμα 2α, ή με το δίκτυο του Σχήματος 4 στο Καλειδοσκόπιο. Παρατηρήστε ότι, αν και δείχνουν διαφορετικά, τα δύο δίκτυα είναι ισοδύναμα — μην ξεχνάτε ότι, σ' αυτά τα σχήματα, πρέπει να φανταζόμαστε τις απέναντι πλευρές των τετραγώνων σαν να είναι κολλημένες μεταξύ τους! Μπορείτε να δημιουργήσετε μια αντιστοιχία ανάμεσα στις κορυφές των δύο δικτύων τέτοια ώστε κάθε τριάδα κορυφών μιας έδρας στο ένα δίκτυο να αντιστοιχεί στις κορυφές μιας έδρας του άλλου δικτύου;

Και τώρα που το δίκτυο είναι έτοιμο, προσπαθήστε να φανταστείτε ένα πολύεδρο $K_1K_2 \dots K_7$ βασισμένο σε αυτό το δίκτυο ακμών και εδρών. Πρόκειται για ένα πρόβλημα ερεθιστικό αλλά και απαιτητικό. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα από τα δυνατά πολύεδρα χρησιμοποιώντας τα εξής μήκη ακμών (σε εκατοστά):

$$K_1K_4 = K_2K_3 \cong 10,3$$

$$K_4K_7 = K_3K_7 \cong 7,8$$

$$K_4K_3 = 10,0$$

$$K_2K_4 = K_1K_3 \cong 8,7$$

$$K_4K_5 = K_3K_6 \cong 7,0$$

$$K_1K_6 = K_2K_6 = K_1K_5 = K_2K_5 \cong 7,0$$

$$K_1K_2 \cong 6,0$$

$$K_5K_6 \cong 4,1$$

$$K_1K_7 = K_2K_7 \cong 3,4$$

$$K_6K_7 = K_5K_7 \cong 4,9$$

$$K_1K_6 = K_3K_5 \cong 3,8.$$

Κόψτε τρίγωνα από λεπτό χαρτόνι με αυτά τα μήκη πλευρών ενώστε τα σύμφωνα με το Σχήμα 2α, και θα αποκτήσετε το αριστερό μοντέλο του Σχήματος 1. Το μοντέλο αυτό δημιουργήθηκε από δύο προπτυχιακούς φοιτητές του Πανεπιστημίου της Μόσχας, τον Α. Bushmelev και τον S. Lavtchenko. Στην πραγματικότητα, οι δύο φοιτητές επεξεργάζονταν το γενικότερο και σημαντικότερο πρόβλημα της ύπαρξης ενός σπειροειδούς πολυέδρου όταν είναι δεδομένο ένα δίκτυο ακμών. Το αντίστοιχο θεώρημα για συνηθισμένα πολύεδρα είχε ανακαλυφθεί το 1917 από τον E. Steinitz. Οι νεαροί μοσχοβίτες μαθηματικοί απέδειξαν ότι κάθε δίκτυο τριγώνων σε μια σπείρα αναπαριστά ένα συγκεκριμένο πολύεδρο. Στην απόδειξή τους, ανήγαγαν ένα τυχαίο δίκτυο σε ένα από τα απλούστερα (ένα με το πολύ 10 κορυφές). Ένα από τα τέσσερα δυνατά δίκτυα 8 κορυφών φαίνεται στο Σχήμα 2β, ενώ το αντίστοιχο πολύεδρο εικονίζεται στο Σχήμα 1, στο δεξιό μέρος. Τα μήκη των ακμών γι' αυτό το μοντέλο είναι

$$K_iK_j \cong 15,0$$

$$K_iK_s \cong 18,1 \quad (\text{για } i = 1 \text{ ή } 6, \\ j = 3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 8, \quad s = 2 \text{ ή } 5 \text{ ή } 7)$$

$$K_7K_2 = K_2K_5 = K_5K_7 \cong 18,5$$

$$K_8K_3 = K_3K_4 = K_4K_8 \cong 6,3$$

$$K_7K_8 = K_2K_3 = K_4K_5 \cong 7,0$$

$$K_7K_3 = K_2K_4 = K_5K_8 \cong 12,9.$$

Το Πρόβλημα των Βασιλισσών στη σπείρα

Το Πρόβλημα των Βασιλισσών είναι ένα παλιό και φημισμένο πρόβλημα των ψυχαγωγικών μαθηματικών, που συχνά συνδέεται με τον περίφημο Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Το πρόβλημα είναι να τοποθετήσουμε οκτώ βασίλισσες σε μια σκακιέρα έτσι ώστε καμία τους να μην απειλείται από τις άλλες, και να βρούμε το πλήθος όλων των παρόμοιων διατάξεων. Προφανώς, είναι αδύνατο να τοποθετήσουμε περισσότερες από οκτώ βασίλισσες και να ικανοποιείται η συνθήκη του προβλήματος, διότι σε κάθε τέτοια τοποθέτηση των βασιλισσών, δύο ή περισσότερες θα βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη.

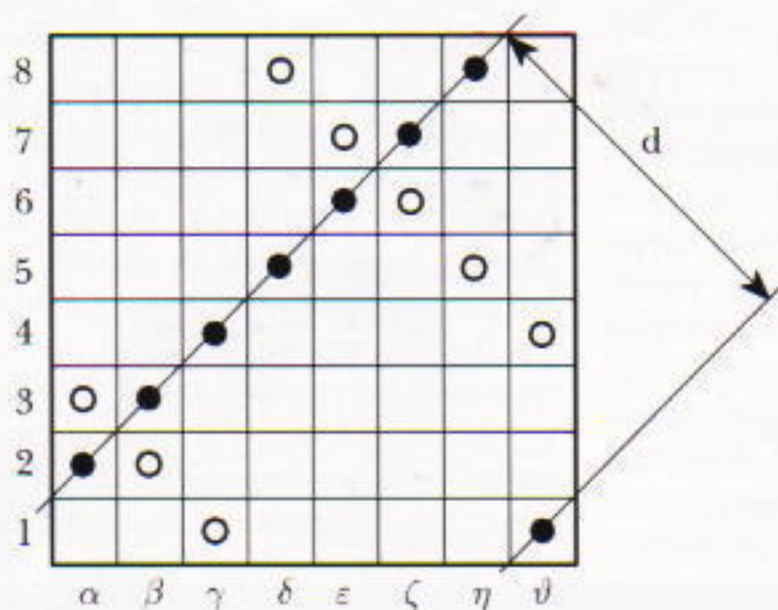
Τι συμβαίνει όταν κολλήσουμε τις απέναντι πλευρές της σκακιέρας, μετατρέποντάς τη σε σπείρα; Η διαφορά ανάμεσα στα κεντρικά, τα ακραία και τα γωνιακά τετράγωνα εξαφανίζεται, διότι εξαφανίζονται τα άκρα της σκακιέρας, και μια βασίλισσα θα επιτίθεται πάντοτε σε $7 \cdot 4 = 28$ τετράγωνα, ανεξάρτητα από τη θέση της. Οριζόντια και κάθετα, επιτίθεται στα ίδια 14 τετράγωνα που επιτίθεται και στη συνηθισμένη σκακιέρα. Αλλά οποιαδήποτε διαγώνιος βρίσκεται στην εμβέλεια της βασίλισσας (αν δεν είναι μία από τις κύριες διαγωνίους των 8 τετραγώνων, $a1 - \theta 8$ ή $a8 - \theta 1$), μπορεί να «επεκταθεί» σε μια παράλληλη μικρή διαγώνιο που βρίσκεται σε σταθερή απόσταση d , ίση με μήκος τεσσάρων διαγωνίων ενός τετραγώνου της σκακιέρας.

Στο Σχήμα 3 βλέπετε δύο «επεκταμένες διαγωνίους» — θα τις ονομάζουμε *πλήρεις*. Μπορείτε να φανταστείτε ότι μια βασίλισσα κινούμενη σε μια πλήρη διαγώνιο πηδά στην απέναντι πλευρά της σκακιέρας τη στιγμή ακριβώς που φτάνει στην άκρη της, και κατόπιν συνεχίζει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση: η σπείρα δεν έχει άκρες!

Επομένως, οι βασίλισσες στη σπειροειδή σκακιέρα είναι ισχυρότερες, και ως εκ τούτου, η «ειρηνική συνύπαρξη» οκτώ βασιλισσών είναι αδύνατη. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος χρησιμοποιεί επιχειρήματα *διαρρηκτικότητας*.

Ας αριθμήσουμε τις γραμμές και τις στήλες με $1, 2, \dots, 8$ (Σχήμα 3). Τότε, σε κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί ένα ζεύγος

συντεταγμένων (i, j) , με $1 \leq i, j \leq 8$. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε οκτώ βασίλισσες στη σκακιέρα έτσι ώστε καμία να μην επιτίθεται σε οποιαδήποτε άλλη (τέτοιες διευθετήσεις θα τις ονομάζουμε ειρηνικές). Τότε, σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη της σκακιέρας θα υπάρχει ακριβώς μία βασίλισσα. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τις συντεταγμένες των βασιλισσών ως εξής: $(1, q_1), (2, q_2), \dots, (8, q_8)$, όπου οι αριθμοί $q_1, \dots, q_8$ παίρνουν τις τιμές από το 1 έως το 8, από μία φορά. Επίσης, δεν μπορεί να υπάρχουν δύο βασίλισσες σε μια πλήρη διαγώνιο παράλληλη με την κύρια διαγώνιο $a1 - h8$. Αυτό σημαίνει ότι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των διαφορών $q_k - k$ με το 8 πρέπει να είναι όλα διαφορετικά. (Επιβεβαιώστε ότι για όλα τα τετράγωνα (i, j) οποιασδήποτε από τις πλήρεις διαγωνίους, το υπόλοιπο της $j - i$ modulo 8 είναι το ίδιο!) Επομένως, το υπόλοιπο του αθροίσματος $(q_1 - 1) + \dots + (q_8 - 8)$ πρέπει να είναι



Σχήμα 3

ίσο με $0 + 1 + 2 + \dots + 7 = 28$ - δηλαδή, με 4. Αλλά αυτό είναι αδύνατον, διότι $(q_1 - 1) + \dots + (q_8 - 8) = (q_1 + \dots + q_8) - (1 + \dots + 8) = (1 + \dots + 8) - (1 + \dots + 8) = 0$.

Στα προβλήματα που ακολουθούν αναπτύσσονται και άλλες πτυχές αυτού του θέματος.

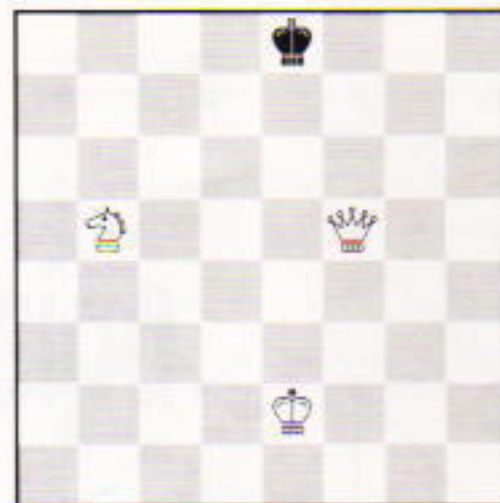
Προβλήματα

1. Δείξτε ότι επτά βασίλισσες δεν μπορούν να συνυπάρξουν ειρηνικά σε μια σπειροειδή σκακιέρα διαστάσεων 8×8 . (Υπόδειξη: μπορείτε να μειώσετε το πλήθος των αναζητούμενων δυνατοτήτων αποδεικνύοντας ότι είναι δυνατό να θεωρήσουμε πως δεν υπάρχουν βασίλισσες στην πάνω γραμμή και στην τελευταία δεξιά στήλη, και ότι όλες οι συμμετρίες στη σκακιέρα διαστάσεων 7×7 που προκύπτει μετατρέπουν μια ειρηνική συνύπαρξη σε μια άλλη ειρηνική συνύπαρξη. Χρησιμοποιήστε επίσης τα προηγούμενα επιχειρήματα διαιρετότητας.)

2. Βρείτε μια ειρηνική συνύπαρξη έξι βασιλισσών.

3. Αποδείξτε ότι σε μια σπειροειδή σκακιέρα διαστάσεων $n \times n$, δεν υπάρχει ειρηνική συνύπαρξη για n βασίλισσες, όταν το n είναι άρτιος, ενώ υπάρχει τουλάχιστον μία για κάθε περιττό n που δεν διαιρείται με το 3.

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός βασιλισσών που μπορούν να συνυπάρξουν ειρηνικά σε μια σπειροειδή σκα-



Σχήμα 4

Πρόβλημα του E. Mach: Ματ σε τέσσερις κινήσεις.

κιέρα διαστάσεων $n \times n$, όταν το n διαιρείται με το 2 ή το 3; Μια απάντηση που φαίνεται λογική είναι $n - 2$. Προσπαθήστε να αποδείξετε ή να διαψεύσετε αυτή την εικασία.

Ματ στη σπείρα

Για τον επίλογο, νά ένα σκακιστικό πρόβλημα του E. Mach¹ (Σχήμα 4). Τα λευκά κάνουν ματ σε τέσσερις κινήσεις. Μην ξεχνάτε ότι στη σπείρα κάθε κομμάτι επιτίθεται στο ίδιο πλήθος τετραγώνων ανεξάρτητα από τη θέση του στη σκακιέρα (όπως η βασίλισσα προηγουμένως), είναι λοιπόν ισχυρότερο: όμως και ο μαύρος βασιλιάς έχει περισσότερες δυνατότητες να αποφύγει το ρουά.

1. Αυτό το πρόβλημα έχει ληφθεί από το Mathematics on Chessboard του Yevgeny Gik (στα ρωσικά).



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ Σ. 64

ΤΟ ΝΕΑΝΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

QUANTUM

Τι βαθμό μας βάζετε

Για να φτάσει σε σας το υλικό αυτού του τεύχους έχουν καταβληθεί προσπάθειες από ένα Εθνικό Συμβούλιο και δύο Εθνικές Ενώσεις καθηγητών των ΗΠΑ, από την Ακαδημία Επιστημών της Ρωσίας, από ένα γερμανοαμερικανικό και έναν ελληνικό εκδοτικό οίκο. Εσείς καλείστε να κρίνετε το αποτέλεσμα.

Γράψτε μας τις απόψεις σας, υποδείξτε μας τις ελλείψεις και τις ατέλειες μας, κάντε μας τις προτάσεις σας.

Γίνετε και σεις συντελεστής στην QUANT-ΙΚΗ εξίσωση.