ΛΥΣΕΙΣ 2^{ης} ΠΡΟΟΔΟΥ

(i) Θεωρήστε το αέριο Νέο, ως τέλειο (ιδανικό) αέριο, όγκου V και αριθμού ατόμων N. Η εντροπία του δίνεται από τον τύπο

$$S = Nk_B \ln\left(CU^a V^\beta N^\gamma \hbar^\delta m^\varepsilon\right) \qquad (1)$$

όπου C αριθμητική σταθερά και m η μάζα κάθε ατόμου. Γραψτε τις τιμές των εκθετών α έως ε.

Λύση: Από τη σχέση $dU = TdS - PdV + \mu dN$ έπεται ότι $\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{P}{T}$ (2)

Η (1) όμως δίνει $\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{Nk_B\beta}{V}$ που σε συνδυασμό με την (2) δίνει $PV = \beta Nk_B T \quad \Rightarrow \beta = 1$

Αφού το Nk_B εξασφαλίζει ότι η εντροπία είναι και εκτατική και έχει τις σωστές διαστάσεις έπεται ότι το όρισμα του ln στην (1) οφείλει να είναι (α) αδιάστατο και (β) εντατικό. Άρα

$\ln\left[C\left(\frac{U}{N\varepsilon_0}\right)^a\left(\frac{V}{Na_0^3}\right)^\beta\right]$, όπου β=1.

Επί πλέον το γινόμενο $\varepsilon_0{}^\alpha a_0^{3\beta} = \varepsilon_0{}^\alpha a_0^3$ οφείλει να εξαρτάται από τη μόνη ποσότητα που χαρακτηρίζει ένα ατομικό τέλειο αέριο, δηλαδή τη μάζα, m, του κάθε ατόμου και ενδεχομένως παγκόσμιες σταθερές. Η μόνη τέτοια παγκόσμια σταθερά που έχει σχέση με το θέμα μας είναι η $\hbar$. Άρα $\varepsilon_0{}^\alpha a_0^3 = \hbar^x m^y$, η $\varepsilon_0 = \hbar^{x/a} m^{y/a} / a_0^{3/a}$. Δεδομένου ότι το ε_0 έχει διαστάσεις ενέργειας και το a_0 έχει διαστάσεις μήκους, έχουμε ότι $\chi/\alpha = 2, \quad y/\alpha = -1, \quad 3/\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3/2$.

Επομένως τελικά

$$a = 3/2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -5/2, \quad \delta = -3, \quad \varepsilon = 3/2 \ .$$

(ii) Θεωρήστε το αέριο Αργό, ως τέλειο (ιδανικό) αέριο, όγκου *V* και αριθμού ατόμων *N*. Η ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz του αερίου αυτού δίνεται από τον τύπο

$$F = Nk_B T \ln\left(CT^a V^\beta N^\gamma \hbar^\delta m^\varepsilon k_B^\zeta\right) \qquad (1)$$

όπου *C* αριθμητική σταθερά και *m* η μάζα κάθε ατόμου. Γραψτε τις τιμές των εκθετών *α* έως *ζ.*

Λύση: Ακολουθώντας μια διαδικασία ανάλογη με την παραπάνω βρίσκομε:

$$a = -3/2, \quad \beta = -1 \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \varepsilon = -3/2, \quad \zeta = -3/2$$

Η απόδειξη βασίζεται στα εξής:

(α) $\varepsilon_0 a_0^2 = \frac{\hbar^2}{m}$

(β) $dF = -SdT - PdV + \mu dN \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -P$

όμως από την (1) έχουμε $\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{N\,k_B T\beta}{V} = \beta P \;\Rightarrow\; \beta = -1$

(γ) το όρισμα του ln είναι αδιάστατο

(δ) το όρισμα του ln είναι εντατικό, άρα $F = Nk_B T\ln\left[\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_0}\right)^a\left(\frac{V}{Na_0^3}\right)^{-1}\right]$

(iii) Θεωρήστε το αέριο Κρυπτό, ως τέλειο (ιδανικό) αέριο, όγκου *V* και αριθμού ατόμων *N*. Η ελεύθερη ενέργεια του Gibbs του αερίου αυτού δίνεται από τον τύπο

$$G = Nk_B T\ln\left[C\,P^a T^\beta N^\gamma m^\delta \hbar^\varepsilon k_B^\zeta\right] \qquad (1)$$

όπου *C* αριθμητική σταθερά και *m* η μάζα κάθε ατόμου. Γράψτε τις τιμές των εκθετών *α* έως *ζ*.

Λύση: Ακολουθώντας μια διαδικασία ανάλογη με την παραπάνω βρίσκομε:

$$a = 1,\quad \beta = -5/2,\quad \gamma = 0,\quad \delta = -3/2,\quad \varepsilon = 3,\quad \zeta = -5/2$$

Η απόδειξη βασίζεται στα εξής:

(α) $\varepsilon_0 a_0^2 = \frac{\hbar^2}{m}$

(β) $dG = -SdT + VdP + \mu dN \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,N} = V$

όμως από την (1) έχουμε ότι $\left.\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,N} = \frac{N\,k_B T a}{P} = aV \;\Rightarrow\; a = 1$

(γ) το όρισμα του ln είναι αδιάστατο

(δ) το όρισμα του ln είναι εντατικό, αφού το $Nk_B T$ εξασφαλίζει και το εκτατικό του G και ότι έχει διαστάσεις ενέργειας. Άρα $G = Nk_B T\ln\left[C\left(\frac{Pa_0^3}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_0}\right)^\beta\right]$

ΑΣΚΗΣΗ: Δώστε τη γραφική παράσταση του G vs. T (0 K<T<1000 K) για σταθερή πίεση μιας ατμόσφαιρας για το αέριο Κρυπτό. Το C ισούται με 2,7568. Υπάρχει κάποιο πρόβλημα για χαμηλές θερμοκρασίες ; Αν ναι πού οφείλεται;

(iv) Γράψτε την κβαντική κινητική ενέργεια του κουάρκ *u* και του αντικουάρκ $\bar{d}$ λόγω εγκλωβισμού τους στο μεσόνιο π^+ ακτίνας *r*.

Λύση: Περίμενα να γνωρίζετε ότι, αφού η ενέργεια ηρεμίας του κάθε κουάρκ είναι μερικά MeV ενώ αυτή του π^+ είναι περίπου 100 MeV και δεδομένης της ασυμπτωτικής ελευθερίας, η κινητική ενέργεια των κουάρκ θα είναι ακραία σχετικιστική. Περίμενα να γνωρίζετε ακόμη ότι η κινητική ενέργεια λόγω κβαντικού χωρικού περιορισμού αναφέρεται στο χωρικό περιορισμό μόνο της σχετικής απόστασης $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ των δύο σωματίων (το κέντρο μάζας τους $\boldsymbol{R} = \left(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2\right)/M$, $M \equiv m_1 + m_2$ δεν υφίσταται χωρικό περιορισμό και επομένως η ελάχιστη κινητική ενέργεια που του αναλογεί είναι μηδέν). Με βάση τα παραπάνω η κβαντική κινητική ενέργεια των δύο σωματίων που αποτελούν το π^+ θα είναι

$$\varepsilon_{\mathrm{K}} = c_1 \frac{\hbar c}{r_0}$$

όπου το r_0 είναι η ακτίνα του π^+ και το c_1 είναι αριθμητική σταθερά που εξαρτάται από την κατανομή πιθανότητας να βρει κανείς το κάθε σωμάτιο κάπου εντός του π^+ και από τη σχέση μεταξύ των $\sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle}$, $\left\langle |\boldsymbol{p}| \right\rangle$.

Για ενημέρωση όσων ενδιαφέρονται παραθέτω τον λεπτομερή υπολογισμό:

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,$

$\boldsymbol{R} = (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)/M$

$M = m_1 + m_2,$

$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2),$

$\boldsymbol{P} = M\, d\boldsymbol{R}/dt = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2,$

$\boldsymbol{p} = \mu d\boldsymbol{r}/dt = (m_2/M)\boldsymbol{p}_1 - (m_1/M)\boldsymbol{p}_2.$

Θεωρώντας ότι $m_1 = m_2$ έχουμε

$$\tfrac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right) = R = 0 \quad \Rightarrow r_1 = -r_2 \quad \Rightarrow \quad r = 2r_1$$

$$p = \mu d\boldsymbol{r}/dt = p_1$$

$$\left\langle {p_1}^2 \right\rangle = \left\langle p^2 \right\rangle = \frac{9}{4}\frac{\hbar^2}{\left\langle r^2 \right\rangle} = \frac{9}{16}\frac{\hbar^2}{\left\langle r_1^2 \right\rangle} = \frac{9}{16}\frac{5}{3}\frac{\hbar^2}{r_0^2} = \frac{15}{16}\frac{\hbar^2}{r_0^2}, \quad \left\langle r_1^2 \right\rangle = \frac{3}{5} r_0^2 \text{ if uniform}$$

$$\text{if uniform in } p, \quad \frac{\left\langle |p| \right\rangle}{\sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle}} = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{3/5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\left\langle |p| \right\rangle = \frac{\sqrt{15}}{4}\sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle} = \frac{\sqrt{15}}{4}\sqrt{\frac{15}{16}}\frac{\hbar}{r_0} = \frac{15}{16}\frac{\hbar}{r_0} = 0.9375\frac{\hbar}{r_0}$$

$$\left\langle \varepsilon_K \right\rangle = c\left\langle |p| \right\rangle = 0.9375\frac{\hbar c}{r_0}$$

If $r_0 = 1.28\,\mathrm{fm} = 2{,}42\times 10^{-5}\, a.u.$ $\left\langle \varepsilon_K \right\rangle = 273\, m_e c^2$

(v) Γράψτε την κβαντική κινητική ενέργεια των $A = Z + N \gg 1$ νουκλεονίων λόγω εγκλωβισμού τους σε πυρήνα όγκου *V*.
Λύση: Βλ. σχέση (8.4) σελ. 115

(vi) Θεωρήστε ένα ουδέτερο άτομο ατομικού αριθμού $Z \gg 1$. Γράψτε τη συνολική κινητική ενέργεια όλων των Z ηλεκτρονίων αγνοώντας την κατανομή τους σε ενεργειακές στάθμες.

Λύση:

$$E_K \approx 1{,}105 \frac{\hbar^2 Z^{5/3}}{m_e R^2}$$

όπου *R* είναι η ακτίνα του ατόμου ($4\pi R^3 / 3$ είναι ο όγκος όπου σχεδόν όλα τα ηλεκτρόνια είναι εγκλωβισμένα).