ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

6^{o} VIDEO, 24/10/2013, Σελ. 61-68

Η βασική ιδέα της διαστατικής ανάλυσης είναι το προφανές ότι, δηλαδή, σε ένα τύπο φυσικής οι διαστάσεις του αριστερού σκέλους είναι ίδιες με αυτές του δεξιού. Αυτό μας επιτρέπει να ελέγξουμε την ορθότητα ενός δεδομένου τύπου. Πολύ πιο ενδιαφέρον είναι να βρούμε τύπους φυσικής χρησιμοποιώντας τη διαστατική ανάλυση και το γεγονός ότι οι διαστάσεις $[f]$ οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους f είναι της μορφής

$$[f] = m^a l^b t^d \ , \qquad \text{σύστημα G-CGS}$$

δηλαδή γινόμενο δυνάμεων μάζας, μήκους, χρόνου ή

$$[f] = m^a l^b t^d I^g ; \quad I = q/t \qquad \text{σύστημα SI}$$

δηλαδή γινόμενο δυνάμεων μάζας, μήκους, χρόνου, ηλεκτρικού ρεύματος.

Για να βρει κανείς τον τύπο για το φυσικό μέγεθος Χ (για το οποίο γνωρίζουμε τις διαστάσεις του) θα πρέπει να προσδιορίσουμε (με βάση φυσικά επιχειρήματα) τις φυσικές ποσότητες $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ **από τις οποίες εξαρτάται. Αυτό είναι ένα κρίσιμο και δύσκολο βήμα.**

Αν το μέγεθος Χ είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσης τότε πρέπει να επιλέξει κανείς αν θα εργασθεί στο σύστημα G-CGS (στο οποίο εμφανίζεται οπωσδήποτε η ταχύτητα του φωτός c) ή στο σύστημα SI (στο οποίο εμφανίζονται οπωσδήποτε οι σταθερές ε_0, μ_0 ή κάποιες άλλες ισοδύναμες). Ας επιλέξουμε πρώτα το σύστημα G-CGS. (Αν αποτύχει, τότε μόνο θα δοκιμάσουμε το σύστημα SI).

Αν οι ποσότητες $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ είναι τρεις ή λιγότερες όλες τους διαφορετικών διαστάσεων, τότε έχουμε βρει τον τύπο για το μέγεθος Χ:

$$\mathrm{X} = \eta \mathrm{A}_1^{\mu} \mathrm{A}_2^{\nu} \mathrm{A}_3^{\xi}$$

όπου η είναι ένας αριθμητικός παράγοντας και οι εκθέτες μ, ν, ξ προσδιορίζονται μονοσήμαντα από την απαίτηση οι διαστάσεις του Χ να είναι ίδιες με αυτές του δεξιού σκέλους. Αν οι ποσότητες $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ είναι περισσότερες από τρεις ή δεν είναι όλες τους διαφορετικών διαστάσεων, τότε βλέπε τον **τύπο (4.1), σελ. 62** του βιβλίου ΚΣ.

Ακολουθούν παραδείγματα:

1) Συχνότητα ταλάντωσης εκκρεμούς (**σελ. 62-63, και video 6ο, 24/10/2013, από 0 έως 15λ)**

2) Συχνότητα ταλάντωσης κυκλώματος LC. **6ο Video, 24/10/2013, από 15λ,40δ έως 38λ,30δ**. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα G-CGS δεν δίνει τελικό τύπο γιατί και η αυτεπαγωγή L και η χωρητικότητα C έχουν τις ίδιες διαστάσεις (διάσταση μήκους). Έτσι δοκιμάζουμε το σύστημα SI. Χρειαζόμαστε όμως τις διαστάσεις των μεγεθών L, C, ε_0, μ_0. Αυτές των δύο τελευταίων ποσοτήτων μπορούν να ευρεθούν από τον τύπο της δύναμης Coulomb

$$F = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_0 r^2 \Rightarrow \left[\varepsilon_0\right] = \left[q^2 l^{-2}\right]\left[m^{-1} l^{-1} t^2\right] = \left[q^2 l^{-3} m^{-1} t^2\right]$$

και τον τύπο για τη δύναμη ανά μονάδα μήκους μεταξύ δύο παράλληλων άπειρου μήκους ρευμάτων σε απόσταση d

$$F / l = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi d \Rightarrow \left[\mu_0\right] = \left[m t^{-2}\right]\left[t^2 q^{-2} l\right] = \left[m q^{-2} l\right]$$

Η διάσταση της χωρητικότητας προκύπτει από τον ορισμό της

$$C = q / V \Rightarrow \left[C\right] = \left[q\right] / \left[E q^{-1}\right] = \left[q^2\right]\left[m^{-1} l^{-2} t^2\right] \Rightarrow \left[C\right] = \left[l\right]\left[\varepsilon_0\right]$$

και η διάσταση της αυτεπαγωγής από τη σχέση

$$E = \tfrac{1}{2} L I^2 \Rightarrow \left[L\right] = \left[m l^2 t^{-2}\right]\left[q^{-2} t^2\right] = \left[m l^2 q^{-2}\right] \Rightarrow \left[L\right] = \left[l\right]\left[\mu_0\right]$$

Σημειώστε ότι ισχύει η γενική σχέση για την ταχύτητα του φωτός c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \left[\sqrt{LC}\right] = [l]\left[c^{-1}\right] = [t] = \left[\omega^{-1}\right]$$

Άρα από άποψη διαστάσεων $\left[\omega\right] = 1 / \sqrt{\left[LC\right]}$ που συμβαίνει να είναι ο αριθμητικός παράγοντας 1, οπότε τελικά $\omega = 1 / \sqrt{LC}$

Σημειώστε ότι στο video οι αποδείξεις είναι πιο περίπλοκες και σε κάποιο σημείο είναι και λάθος η ανάμιξη των συστημάτων G-CGS και SI.

Παρένθεση: Στο υπόλοιπο του 6ου video παρουσιάζεται το φυσικό μέγεθος και οι διαστάσεις της ηλεκτρικής αντίστασης R στα δύο συστήματα για να τονισθεί ότι στο μεν SI οι μονάδες είναι οικείες, ενώ στο G-CGS οι μονάδες είναι ασυνήθιστες και περίεργες. Παρουσιάζεται επίσης η ειδική ηλεκτρική αντίσταση ρ που συνδέεται με την αντίσταση ενός σύρματος μέσω του τύπου

$$R = \rho l / S \Rightarrow [\rho] = [Rl]$$

και η αγωγιμότητα $\sigma \equiv 1/\rho$. Η αγωγιμότητα συνδέεται με την διηλεκτρική συνάρτηση ε ως εξής:

$$\varepsilon_{SI} = \varepsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega}, \quad SI; \qquad \varepsilon_{G-CGS} = \frac{\varepsilon_{SI}}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}, \quad G-CGS$$

Σημειώστε ότι για μη μηδενική συχνότητα τόσο η αγωγιμότητα όσο και η διηλεκτρική συνάρτηση είναι μιγαδικές ποσότητες. Ποιο είναι το φυσικό νόημα του μιγαδικού τους μέρους;

Η ατομική μονάδα της ηλεκτρικής αντίστασης είναι $R_0 = \hbar / e^2 = 4108,236\,\Omega$, ενώ αυτή της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης είναι $\rho_0 = R_0 a_B = 21,7398\,\mu\Omega$.cm. Η αντίσταση R_0 συνδέεται με την κβαντική αντίσταση Hall $R_H = 2\pi R_0 = h / e^2$ και με την impendence του κενού $Z_0 = 4\pi\alpha R_0 = 376,7\,\Omega$

3) ένα τρίτο παράδειγμα που παρουσιάζεται στο video, είναι αυτό του επιδερμικού φαινομένου, όπου ένα υψίσυχνο ρεύμα περιορίζεται σε ένα μικρό βάθος δ κοντά στην επιφάνεια ενός καλού αγωγού αγωγιμότητας σ. Αυτό είναι ένα άλλο , παράδειγμα όπου το G-CGS δεν παράγει αποτέλεσμα ενώ το SI δίνει τον ζητούμενο τύπο. Στο video η παρουσίαση είναι ανεπαρκής. Το σωστό σκεπτικό είναι το εξής: Το μήκος δ θα πρέπει να εξαρτάται, λόγω εκφώνησης, από το ω, το σ και το μ_0 . Δεν εξαρτάται από το ε_0 αφού ήδη εξαρτάται από το σ το οποίο συνδέεται με το ε_0. Ακολουθώντας τη συνταγή $\delta = \eta \sigma^{\mu} \mu_0^{\nu} \omega^{\xi}$ βρίσκουμε ότι $\delta = \sqrt{\eta / \sigma \mu_0 \omega}$ όπου το η συμβαίνει να είναι 2.

Τέλος, στο $6^{\text{ο}}$ video σχολιάζονται τα διάφορα ήδη μαγνητικών υλικών και η πρόσφατη επινόηση των λεγομένων μεταϋλικών που εμφανίζουν σε μια περιοχή συχνοτήτων αρνητική μαγνητική διαπερατότητα, αρνητική διηλεκτρική συνάρτηση και αρνητικό δείκτη διάθλασης.

Άλλα και πολύ σημαντικά παραδείγματα εφαρμογής της διαστατικής ανάλυσης θα βρείτε στο βιβλίο ΚΣ σελ. 63-67.

<u>Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής Κεφαλαίου 4</u>

1. Ο χρόνος ζωής t_0 ενός κλασικού μοντέλου για το άτομο του υδρογόνου, που, απουσία ακτινοβολίας, θα εκτελούσε κυκλική τροχιά ακτίνας a_B είναι (G-CGS):

   (α) $t_0 \propto m^{1/2} a_B^{3/2} / e$ (β) $t_0 \propto m^2 a_B^3 c^3 / e^4$ (γ) $t_0 \propto a_B / c$ (δ) $t_0 \propto m a_B^2 c / e^2$

2. Η ελκτική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας P μεταξύ δύο παράλληλων αφόρτιστων τέλειων μεταλλικών πλακών σε απόσταση d δίνεται από τον τύπο (Casimir, 1948):

(α) $P \propto \hbar c / d^4$ (β) $P \propto \hbar^2 c^2 / e^2 d^4$ (γ) $P \propto GM^2 / S^2$, $\sqrt{S} \gg d$ (δ) $P \propto e^2 / d^4$

3. Η ταχύτητα υ ενός τσουνάμι $(\lambda \gg d)$ όπου d είναι το βάθος της θάλασσας δίνεται από τον τύπο:

(α) $\upsilon = \sqrt{gd}$ (β) $\upsilon = \sqrt{g\lambda}$ (γ) $\upsilon = \sqrt{g/k}$ (δ) $\upsilon = c_{\eta\chi o\upsilon}$

4. Η ταχύτητα ενός συνήθους θαλάσσιου κύματος $(1\text{m} < \lambda \ll d)$, όπου d είναι το βάθος της θάλασσας, δίνεται από τον τύπο:

(α) $\upsilon = \sqrt{gd}$ (β) $\upsilon = \sqrt{g\lambda / 2\pi}$ (γ) $\upsilon = \sqrt{gk}$ (δ) $\upsilon = c_{\eta\chi o\upsilon}$

5. Η αντίσταση του αέρα F σε ένα αυτοκίνητο που τρέχει με $\upsilon = 100\,\text{km/h}$ είναι:

(α) $F = C_1 \upsilon \eta \sqrt{S}$ (β) $F = C_1 \upsilon^2 \rho_{\alpha\varepsilon\rho\alpha} S$

(γ) $F = C_1 B \upsilon / c_{\eta\chi o\upsilon}$ (δ) $F = C_1 S \rho_{\alpha\varepsilon\rho\alpha} c_{\eta\chi o\upsilon} \upsilon$

η το ιξώδες του αέρα, S η διατομή του αυτοκινήτου, C_1 αδιάστατη ποσότητα που εξαρτάται από το σχήμα του αυτοκινήτου, B το βάρος του αυτοκινήτου

6. Το επιδερμικό βάθος d (skin depth) ενός υψίσυχνου ΗΜ πεδίου σε ένα μέταλλο αγωγιμότητας σ, διηλεκτρικής συνάρτησης ε και διαπερατότητας μ $(\sigma \gg \omega\varepsilon)$ δίνεται από τον τύπο (στο σύστημα SI):

(α) $d \propto c / \omega$ (β) $d \propto 1/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ (γ) $d \propto 1/\sqrt{\omega\sigma\mu}$ (δ) $d \propto \lambda$