ΚΕΦ. 13.2

ΣΕΛ. 222 έως 226 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΚΣ. 22^{O} VIDEO, 19/12/2013

0λ έως 29λ : Επανάληψη

Υπενθυμίζεται ότι η τιμή του G σε ατομικές μονάδες είναι $2{,}4\times 10^{-43}$.

Για την ακραία σχετικιστική περίπτωση λευκού νάνου ο συντελεστής της ολικής κινητικής ενέργειας είναι $A_K = a'_K \hbar c N_e^{4/3}$ ο οποίος εξισούμενος με τον συντελεστή της βαρυτικής ενέργειας $A_B = \gamma G N_\nu^2 m_u^2$ δίνει το ακόλουθο όριο Chandrasekhar

$$N_{\nu,cr} = \left(\frac{a'_K}{\gamma'}\right)^{3/2}\left(\frac{N_e}{N_\nu}\right)^{2}\left(\frac{c\hbar}{G m_u^2}\right)^{3/2} = 0{,}775\left(\frac{c\hbar}{G m_u^2}\right)^{3/2}, \quad \frac{a'_K}{\gamma'} = \frac{1{,}44}{0{,}6} = 2{,}4 \rightarrow 2{,}127 \quad (1)$$

Για να παρακολουθήσετε την επανάληψη πατήστε εδώ

29λ έως το τέλος: Αστέρες νετρονίων και μαύρες τρύπες

Η βασική ιδέα της μελέτης τους είναι παρόμοια με αυτήν των λευκών νάνων με τη διαφορά ότι μετά την κατάρρευση των τελευταίων και μετά την τεράστια βαρυτική συμπίεση ο αστέρας νετρονίων αποτελείται κυρίως από νετρόνια λόγω της αντίδρασης $p + e \rightleftarrows n + (\nu_e)$. Στη φάση της ισορροπίας του αστέρα νετρονίων η αναλογία n:p:e είναι 93,4:6,6:6,6, με τα ηλεκτρόνια να είναι στην ακραία σχετικιστική κατάσταση, οπότε η κινητική τους ενέργεια είναι

$$E_{Ke} = a'_{Ke} \hbar c N_e^{4/3} / R \quad (2)$$

ενώ τα νετρόνια και τα λίγα πρωτόνια είναι σε μη σχετικιστική κατάσταση, οπότε η κινητική τους ενέργεια είναι

$$E_{Kp} = a_{Kp} \hbar^2 N_p^{5/3} / m_p R^2, \qquad E_{Kn} = a_{Kn} \hbar^2 N_n^{5/3} / m_p R^2 \quad (3)$$

Εξισώνοντας την κινητική ενέργεια $E_{Kn} + E_{Kp}$ (που προκύπτει ίση με $1{,}01 E_{Kn}$) με το μισό της απόλυτης τιμής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, $E_B = -\gamma G M^2 / R$, $M = N_n m_n + N_p m_p$ (μείον την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που είναι και αυτή της μορφής 1/*R*) βρίσκουμε την ακτίνα του αστέρα νετρονίου, η οποία, επειδή η κυρίαρχη κινητική ενέργεια είναι αυτή των νετρονίων (αντί αυτής των ηλεκτρονίων που κυριαρχεί στους λευκούς νάνους) προκύπτει να είναι κατά ένα παράγοντα m_e / m_n μικρότερη από την ακτίνα των λευκών νάνων, δηλ. της τάξεως των 10 km.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε για την ακτίνα του αστέρα νετρονίων

$$R = \frac{1{,}875 a_K}{\gamma}\frac{m_e}{m_n}\frac{e^2}{G m_n^2}\frac{a_B}{N_\nu^{1/3}} \tag{4}$$

Η κινητική ενέργεια ανά νουκλεόνιο των αστέρων νετρονίων (όπως και των λευκών νάνων), λόγω της (3), της (4) και της $E_B = -\gamma GM^2 / R$, είναι ανάλογη της $M^{4/3}$ και επομένως και στον αστέρα νετρονίων τα νετρόνια και τα πρωτόνια θα τείνουν να γίνουν ακραία σχετικιστικά με την αύξηση της μάζας M και άρα η ολική κινητική ενέργεια θα τείνει στη μορφή A/R, (όπου το A είναι ανάλογο του $N_\nu^{4/3}$) πράγμα που θα οδηγήσει σε κατάρρευση όπως και το λευκό νάνο. Η κρίσιμη τιμή του M θα προκύψει όπως και στο λευκό νάνο με μια κύρια διαφορά ότι στη θέση του λόγου $\left(N_e / N_\nu\right)^2$ που εμφανίζεται στον τύπο (1), στον αστέρα νετρονίων θα εμφανισθεί η μονάδα αφού τη θέση του N_e έχει πάρει περίπου το N_ν.

Άρα η κρίσιμη τιμή του N_ν

$$N_\nu = \left(\frac{0{,}908\, a_K'}{\gamma'}\right)^{3/2}\left(\frac{\hbar c}{G m_n^2}\right)^{3/2} \tag{5}$$

για την κατάρρευση του αστέρα νετρονίων προς μαύρη τρύπα είναι περίπου $4(\eta'/\eta)$ φορές μεγαλύτερη από αυτήν της κατάρρευσης του λευκού νάνου, όπου η'/η είναι ίσο με $\left(0{,}908 a_K' / \gamma'\right)_{a.\nu}^{3/2} / \left(a_K' / \gamma'\right)_{\lambda.\nu}^{3/2} = \left(1.52/2.25\right)^{3/2} = 0{,}55$. Άρα με βάση αυτές τις εκτιμήσεις (βλ. σχέση (13.10) σελ.223 του βιβλίου ΚΣ και το πρόβλημα 11, σελ.235) καταλήγουμε ότι ένας αστέρας νετρονίων θα καταρρεύσει προς μαύρη τρύπα όταν η μάζα του υπερβεί το $4 \times 0{,}64 \times 1{,}4 = 3{,}08$ της μάζας του Ήλιου.

Μια εναλλακτική εκτίμηση για αυτή τη κρίσιμη μάζα βασίζεται στην εξίσωση της ακτίνας του τύπου (4) με την ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας. Το αποτέλεσμα είναι περίπου 2,6 φορές τη μάζα του Ήλιου. Η αποδεκτή τιμή είναι περίπου 3 φορές τη μάζα του Ήλιου.

Μαύρες τρύπες

Όταν δημιουργηθεί η μαύρη τρύπα η συρρίκνωση συνεχίζεται προς ένα σημείο χωροχρονικής ανωμαλίας που αποτελεί το κέντρο της μαύρης τρύπας. Εάν η μαύρη τρύπα μάζας M δεν περιστρέφεται, δημιουργείται μια σφαιρική επιφάνεια γύρω από το κέντρο της που ονομάζεται **ορίζοντας γεγονότων** και έχει ακτίνα r_S (**ακτίνα του Schwarzchild**). Ο ορίζοντας γεγονότων είναι η τέλεια ημιδιαπερατή επιφάνεια (τίποτε δεν την διαπερνά από μέσα προς τα έξω, ενώ την διαπερνά από έξω προς τα μέσα). Η ακτίνα r_S υπολογίζεται από τη Γ.Θ.Σ. αλλά προκύπτει (εκτός του αριθμητικού παράγοντα) και από διαστατική ανάλυση καθώς και από μη σχετικιστική φυσική εξισώνοντας την κρίσιμη ταχύτητα διαφυγής από τον ορίζοντα γεγονότων με την ταχύτητα του φωτός. Το αποτέλεσμα είναι

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{6}$$

Ακτινοβολία Hawking: Έξω αλλά πολύ κοντά στον ορίζοντα γεγονότων επικρατεί ένα τεράστιο βαρυτικό πεδίο το οποίο παρουσία των κβαντικών διακυμάνσεων του κενού (όπου δημιουργούνται και καταστρέφονται σχεδόν ακαριαία ζεύγη σωματίου/αντισωματίου) μπορεί να απορροφήσει το ένα εκ των δύο προς το εσωτερικό της μαύρης τρύπας και επομένως το άλλο θα γίνει από εικονικό πραγματικό και θα απομακρυνθεί από τη μαύρη τρύπα. Το ευκολότερο ζεύγος να δημιουργηθεί είναι αυτό δύο φωτονίων και επομένως θα εκπεμφθεί ακτινοβολία από τη γειτονιά της μαύρης τρύπας που, κατά συνέπεια, συμπεριφέρεται ως να ήταν μέλαν σώμα θερμοκρασίας T, η οποία για διαστατικούς λόγους ικανοποιεί τη σχέση

$$k_B T = \eta (GM)^a c^b \hbar^d \text{ με } a = -1,\ b = 3,\ d = 1,\ \eta = 1/8\pi \quad \Rightarrow k_B T = \hbar c / 4\pi r_S \tag{7}$$

Αφού η μαύρη τρύπα έχει ενέργεια $M c^2$ και της αποδίδουμε και θερμοκρασία T θα πρέπει να της αποδώσουμε και εντροπία S βάσει της σχέσης

$$dU = TdS \;\Rightarrow\; S / k_B = 4\pi G M^2 / \hbar c = 4\pi r_S^2 / 4l^2, \qquad l_P^2 = G\hbar / c^3 \tag{8}$$

Παρατηρήστε ότι η αδιάστατη εντροπία της μαύρης τρύπας ισούται με το 1/4 της επιφάνειας της μαύρης τρύπας σε μονάδες Planck. Το να είναι η εντροπία ανάλογη επιφάνειας και όχι όγκου είναι ασυνήθιστο αλλά όχι αναπάντεχο, αφού ήδη έχουμε τονίσει ότι, λόγω της μακράς εμβέλειας της βαρύτητας που κυριαρχεί, το εκτατικό ή το εντατικό των θερμοδυναμικών ποσοτήτων δεν ισχύει.

Σημειώστε ότι η εντροπία συνδέεται με την πληροφορία, η οποία στα ολογράμματα απεικονίζεται επίσης σε επιφάνεια. Έχοντας υπόψη αυτή τη σχέση θεωρούμε ότι η αναλογία $S \propto r_S^2 \propto A$ είναι συνέπεια μιας γενικότερης αρχής που για προφανείς λόγους ονομάζεται **ολογραφική αρχή**.

Για να παρακολουθήσετε το 22^o VIDEO, 19/12/2013, από 29λ έως το τέλος πατήστε **εδώ**

Σύνοψη των κυριοτέρων τύπων

Είναι οι σχέσεις (1) έως (7). Η τεκμηρίωση αυτών των σχέσεων στο βιβλίο ΚΣ είναι στις σελ. 222 έως 226.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στον αστέρα νετρονίων η τεράστια βαρυτική συμπίεση έχει συνενώσει σε ένα ενιαίο σύνολο τους πυρήνες και τα ηλεκτρόνια. Τα περισσότερα πρωτόνια και ηλεκτρόνια έχουν αντιδράσει και έχουν δώσει νετρόνια. Έτσι ο αστέρας νετρονίων αποτελείται κυρίως από νετρόνια $(N_n / N_\nu = 0,934)$ αλλά και από κάποια πρωτόνια και ηλεκτρόνια. Τα νουκλεόνια είναι σε μη σχετικιστική κατάσταση σε αντίθεση με τα ηλεκτρόνια που είναι. Η συνολική κινητική ενέργεια ισούται με 1,085 φορές την ολική ενέργεια των νετρονίων. Η ακτίνα R του αστέρα νετρονίων δίνεται από τον τύπο:

   (α) $R = \eta(\hbar^2 / m_e G m_u^2) N_\nu^{-1/3}$ (β) $R = \eta(\hbar^2 / G m_n^3) N_\nu^{-1/3}$

   (γ) $R = \eta(\hbar^2 / G m_n^3) N_\nu^{-2/3}$ (δ) $R = \eta(\hbar^2 / m_e G m_u^2) N_\nu^{-2/3}$

   όπου η=3,2

2. Η μάζα ενός αστέρα νετρονίων στο διπλό σύστημα 4U1820-30 εκτιμήθηκε να είναι 1,58 φορές τη μάζα του Ήλιου, δηλαδή $N_\nu = 1,885 \times 10^{57}$. Ποια είναι η ακτίνα του R;

   (α) $R \approx 9,15\,\text{km}$ (β) 16,4 km (γ) 28,63 km (δ) 6760 km

3. Με την αύξηση της μάζας ενός αστέρα νετρονίων η μέση ταχύτητα των νουκλεονίων του γίνεται και αυτή ακραία σχετικιστική, οπότε η συνολική κινητική ενέργεια έχει τη μορφή

   (α) $E_K = a_K c\hbar N_\nu^{4/3} / R$ (β) $E_K = a_K c\hbar (N_n^{4/3} + N_p^{4/3} + N_e^{4/3}) / R$

   (γ) $E_K = a_K c\hbar N_n^{4/3} / R$ (δ) $E_K = a_K c\hbar (N_n^{5/3} + N_p^{5/3} + N_e^{5/3}) / R$

4. Με την αύξηση της μάζας ενός αστέρα νετρονίων η μέση ταχύτητα των νουκλεονίων του γίνεται και αυτή ακραία σχετικιστική, οπότε η συνολική κινητική ενέργεια έχει την εξής μορφή, λαμβάνοντας υπόψη ότι $N_n = (0,8/0,9) N_\nu$, $N_p = N_e = (0,1/0,9) N_\nu$

   (α) $E_K = a_K c\hbar N_\nu / R$ (β) $E_K = a_K c\hbar N_\nu^{4/3} / R$

   (γ) $E_K = 0,9615 a_K c\hbar N_\nu^{4/3} / R$ (δ) $E_K = 0,9615 a_K c\hbar N_\nu^{5/3} / R$

5. Η βαρυτική αυτοενέργεια ενός αστέρα νετρονίων είναι:

   (α) $E_B = -\gamma G N_\nu^2 m_n^2 / R$ (β) $E_B = -\gamma G N_\nu^2 m_n^2 / R^{4/3}$

(γ) $E_B = -\gamma G N_\nu^2 m_n^2 / R^2$ (δ) $E_B = -\gamma G N_\nu^2 m_n^2 / R^{3/2}$

6. Με την αύξηση της μάζας ενός αστέρα νετρονίων η μέση ταχύτητα των νουκλεονίων του γίνεται και αυτή ακραία σχετικιστική, οπότε η συνολική κινητική ενέργεια είναι $E_K = 0,9615 a_K c\hbar N_\nu^{4/3} / R$ και ο αστέρας νετρονίων θα καταρρεύσει προς μαύρη τρύπα, όταν η μάζα του γίνει:

(α) $M_{cr} = (0,9615 a_K / \gamma)(c\hbar / G m_n^2)$ (β) $M_{cr} = (0,9615 a_K / \gamma)(c\hbar / G m_n)$

(γ) $M_{cr} = (0,9615 a_K / \gamma)^{3/2}(c\hbar / G m_n^2)^{3/2}$ (δ) $M_{cr} = (0,9615 a_K / \gamma)^{3/2}(c\hbar / G m_n^2)^{3/2} m_n$

7. Εξισώνοντας την ακραία σχετικιστική κινητική ενέργεια με την βαρυτική αυτοενέργεια ενός αστέρα νετρονίων βρίσκουμε ότι η κρίσιμη μάζα του $M_{cr,a\nu}$ για την κατάρρευσή του προς μαύρη τρύπα συνδέεται με την κρίσιμη μάζα $M_{cr,\lambda\nu}$ για την κατάρρευση του λευκού νάνου με μία από τις ακόλουθες σχέσεις: (αν θεωρήσετε ότι ο λόγος a_K / γ είναι ο ίδιος)

(α) $M_{cr,a\nu} \approx (N_\nu / N_e) M_{cr,\lambda\nu}$ (β) $M_{cr,a\nu} \approx (N_\nu / N_e)^{3/2} / M_{cr,\lambda\nu}$

(γ) $M_{cr,a\nu} \approx (N_\nu / N_e)^2 / M_{cr,\lambda\nu}$ (δ) $M_{cr,a\nu} \approx (N_\nu / N_e)^{5/2} / M_{cr,\lambda\nu}$

8. Η ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας είναι:

(α) $r_s = GM / c^2$ (β) $r_s = GM^2 / c^2$ (γ) $r_s = 2GM^2 / c^2$ (δ) $r_s = 2GM / c^2$

9. Λόγω των κβαντικών διακυμάνσεων του κενού και του τεράστιου βαρυτικού πεδίου στις παρυφές του ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας, η τελευταία εμφανίζεται να ακτινοβολεί ως να ήταν ένα μέλαν σώμα θερμοκρασίας T, που δίνεται από τον τύπο:

(α) $k_B T = \eta\hbar c^2 / GM$ (β) $k_B T = \eta\hbar c^3 / GM^2$

(γ) $k_B T = \eta\hbar^2 c^3 / GM^2$ (δ) $k_B T = \eta\hbar c^3 / GM$

10. Αφού αποδίδουμε θερμοκρασία T στη μαύρη τρύπα και έχει και ενέργεια Mc^2, θα πρέπει να της αποδώσουμε και εντροπία S η οποία οφείλει να είναι:

(α) $S / k_B = 4\pi G M^3 / \hbar c$ (β) $S / k_B = 4\pi G M^3 / \hbar c^2$

(γ) $S/k_B = 4\pi GM^2/\hbar c$ (δ) $S/k_B = 4\pi GM^3/\hbar^2 c$

11. Στο σύστημα μονάδων Planck $(\hbar = 1, c = 1, G = 1)$ η εντροπία S μιας μαύρης τρύπας συνδέεται με την επιφάνειά της $A \equiv 4\pi r_s^2$ ως εξής:

(α) $S/k_B = A$ (β) $S/k_B = A/4$ (γ) $S/k_B = A^{3/2}$ (δ) $S/k_B = A^{3/2}/4$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Τα υπ’αρ. 8 έως 11 της σελ. 235 του βιβλίου ΚΣ