

## Με λίγη φαντασία και σκέψη: Η δύναμη της διαστατικής ανάλυσης

Ε. Ν. Οικονόμου

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης και  
Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας (ΙΤΕ), Ηράκλειο, Κρήτη

**Σύνοψη:** Οι βασικές ιδέες της επιστήμης είναι οι εξής τρεις: η *ατομική δομή της ύλης*, ο *κυματοσωματιδιακός δυισμός* και η *ελαχιστοποίηση της ελεύθερης ενέργειας*.

Ο *κυματοσωματιδιακός δυισμός* οδηγεί στις τρεις θεμελιώδεις αρχές της Κβαντομηχανικής: Αυτές του Heisenberg, του Pauli, και του Schrödinger. Οι *παγκόσμιες σταθερές*  $\hbar$ ,  $c$  και αυτές που σχετίζονται με τα στοιχειώδη σωματίδια και τις δυνάμεις, μαζί με τους βασικούς νόμους της φύσης που αναφέρθηκαν παραπάνω και σε συνδυασμό με την διαστατική ανάλυση μας επιτρέπουν να αποκτήσουμε «*μια τεράστια ποσότητα πληροφοριών*» (για να αναφέρω τον Feynman), σχετικά με τις αλληλεπιδράσεις φωτός-ύλης, την μάζα των νουκλεονίων, και τη δομή των πυρήνων, των ατόμων, των μορίων, των στερεών, των υγρών, των πλανητών, των αστεριών, των νεκρών άστρων, των μαύρων οπών, και, τέλος, την ιστορία του Σύμπαντος.

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

*Στην ατομική ιδέα ενυπάρχει μια τεράστια ποσότητα πληροφορίας για τον Κόσμο, αν διαθέσει κανείς λίγη φαντασία και σκέψη.*  
R.P.Feynman

Τρεις βασικές ιδέες αποτελούν τα θεμέλια των σύγχρονων φυσικών επιστημών:

1. Η **ατομική ιδέα**, σύμφωνα με την οποία τα πάντα είναι φτιαγμένα από άφθαρτα, αδιαίρετα, μικροσκοπικά σωματίδια που έλκονται για να σχηματίσουν σύνθετες δομές. Για να αποκτήσει αυτή η ιδέα «*σάρκα και οστά*», πρέπει να γνωρίζουμε: (α) Ποιές είναι οι ιδιότητες αυτών των στοιχειωδών σωματιδίων; (β) Τι είδος αλληλεπιδράσεων οδηγεί σε αμοιβαία έλξη τους; και (γ) Τι αντισταθμίζει αυτή την έλξη, εμποδίζει την κατάρρευση των σχηματιζομένων σύνθετων δομών και οδηγεί στην ισορροπία τους; Στους πίνακες 1 και 2, παρουσιάζονται οι τρέχουσες απαντήσεις στα (α) και (β), συμπεριλαμβανομένων και των αριθμών που χαρακτηρίζουν τα στοιχειώδη σωματίδια και τις αλληλεπιδράσεις τους. Εκτός από αυτούς τους αριθμούς, χρειαζόμαστε επίσης δύο πραγματικά παγκόσμιες σταθερές, την  $\hbar \approx 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  (σήμα κατατεθέν της Κβαντομηχανικής) και το  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , τη ταχύτητα του φωτός στο κενό.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.** Τα λεπτόνια και τα κουάρκ (που κατατάσσονται σε τρεις οικογένειες), είναι τα καθιερωμένα στοιχειώδη σωματίδια [1]. Μόνο τρία από αυτά (το ηλεκτρόνιο  $e^-$ , το πάνω κουάρκ  $u$ , και το κάτω κουάρκ  $d$ ) συμμετέχουν στη δομή της συνήθους ύλης. Τα νετρίνα ( $\nu$ ) είναι πολύ ελαφριά και πολύ αδύναμα στις αλληλεπιδράσεις τους ώστε να δεσμευθούν στη συνηθισμένη ύλη. Οι άλλες δύο οικογένειες λεπτονίων και κουάρκ (τρίτη έως εκτη γραμμή του πίνακα) είναι ασταθείς λόγω μεγαλύτερης μάζας ηρεμίας. Η αναζήτηση για το σωματίδιο Higgs βρίσκεται σε εξέλιξη, ενώ πιο εξωτικά σωματίδια μπορεί να ευθύνονται για την σκοτεινή ύλη και, ενδεχομένως, για τη σκοτεινή ενέργεια.

Symbol	Mass (MeV)	Charge	Spin	Symbol	Mass (MeV)	Charge	Spin
$e$	0.51	-1	1/2	u	1.5-4.5	2/3	1/2
$\nu_e$	$\sim 10^{-9}?$	0	1/2	d	5-8.5	-1/3	1/2
$\mu$	105.7	-1	1/2	c	1000-1400	2/3	1/2
$\nu_\mu$	$\sim 10^{-8}?$	0	1/2	s	80-155	-1/3	1/2
$\tau$	1777	-1	1/2	t	$\sim 174000$	2/3	1/2
$\nu_\tau$	$\sim 10^{-7}?$	0	1/2	b	4000-4500	-1/3	1/2

**ΠΙΝΑΚΑΣ 2.** Ιδιότητες των τεσσάρων βασικών αλληλεπιδράσεων.

Name	Dimensionless Strength	Range	Type	Carrier Particle	Emitters/ Acceptors
Gravitational	$\alpha_g \equiv \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 5.9 \times 10^{-39}$	$\infty$	Attractive	Graviton ?	All particles
Electromagnetic	$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$	$\infty$	Attractive or repulsive	Photon	Charged particles
Weak "nuclear"	$\alpha_w \equiv \frac{g_w^2}{\hbar c} \frac{\sqrt{2}m_p^2}{m_w^2} \approx 10^{-5}$	$10^{-18} m$	$u \rightleftharpoons d + \dots$	Vector bosons	All "matter" particles
Strong "nuclear"	$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{\hbar c} \approx 15$	$10^{-15} m$	Attractive or repulsive	gluons	Quarks and gluons

## Νόμοι της κίνησης

Οι απαντήσεις στο τρίτο ερώτημα «Τι αντισταθμίζει τη συνολική έλξη και καθορίζει την ισορροπία;» αποτελούν τη δεύτερη και τη τρίτη από τις βασικές ιδέες. Ας ξεκινήσουμε με τη δεύτερη βασική ιδέα:

**2. Ο κυματοσωματιδιακός δισμός** (που οδηγεί στην **κβαντομηχανική**) σώζει τις δομές της ύλης από την κατάρρευση παρέχοντας την κινητική ενέργεια που αντισταθμίζει τη συμπιεστική δράση των αλληλεπιδράσεων. Το περιεχόμενο της ΚβΜ μπορεί να συνοψισθεί στις εξής τρεις βασικές αρχές:

**α. Αρχή του Heisenberg:**  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ . Η αρχή αυτή συνεπάγεται ότι όσο οι δυνάμεις συμπιέζουν τα σωματίδια τόσο αυτά κινούνται αενάως και όλο και πιο γρήγορα εμποδίζοντας έτσι την κατάρρευση. Πιο συγκεκριμένα από την αρχή του Heisenberg έπονται οι εξής ανισότητες για την κινητική ενέργεια

$$\langle \varepsilon_k \rangle \geq \frac{\Delta p^2}{2m} \geq \frac{9}{8} \frac{\hbar^2}{m \Delta r^2} \approx 4.87 \frac{\hbar^2}{m V^{2/3}}, \quad (1\alpha)$$

αν υποθεθεί ότι η σχέση μεταξύ της κινητικής ενέργειας  $\varepsilon_k$  και της ορμής  $p$  είναι η μη σχετικιστική,  $\varepsilon_k = p^2/2m$ , όπου  $m$  είναι η μάζα των σωματιδίων. Στην ακραία σχετικιστική περίπτωση, όπου  $\varepsilon_k = cp$ , η αρχή του Heisenberg οδηγεί στην ακόλουθη ανισότητα:

$$\langle \varepsilon_k \rangle \geq c |\Delta p| \geq \frac{2}{3} \frac{\hbar c}{|\Delta r|} \approx 3.12 \frac{\hbar c}{V^{1/3}} \quad (1\beta)$$

Σημειώστε ότι ο όγκος  $V$  (υποτίθεται σφαιρικός), εντός του οποίου το σωματίδιο περιορίζεται είναι στον παρανομαστή ως  $V^{-2/3} \sim r^{-2}$ : (στη μη σχετικιστική περίπτωση) ή ως  $V^{-1/3} \sim r^{-1}$  (στην ακραία σχετικιστική περίπτωση). Αυτοί οι εκθέτες έχουν θεμελιώδη σημασία: Εάν η αλληλεπίδραση είναι της μορφής  $-A/r$ , η κινητική ενέργεια του τύπου  $B/r^2$  θα κυριαρχήσει για πολύ μικρές τιμές του  $r$  και, ως εκ τούτου, δεν θα επιτρέψει στη δομή να καταρρεύσει, ενώ, αν η κινητική ενέργεια είναι της μορφής  $C/r$  (όπως στην ακραία σχετικιστική περίπτωση) η πιθανότητα της κατάρρευσης δεν μπορεί να αποκλειστεί (Στην πραγματικότητα, αυτό συμβαίνει, αν  $A > C$ . Υπενθυμίζουμε την περίπτωση κατάρρευσης ενός αστέρα νετρονίων σε μια μαύρη τρύπα).

Η δεύτερη βασική αρχή της ΚβΜ είναι η αρχή του Pauli, η οποία, για ταυτόσημα σωματίδια με spin  $1/2$  που μοιράζονται τον ίδιο όγκο, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

**β. Απαγορευτική Αρχή Pauli:** Δεν μπορούν δύο ταυτόσημα σωματίδια με spin  $1/2$  να βρίσκονται στην ίδια κατάσταση.

Αν έχουμε  $N$  ταυτόσημα σωματίδια, με spin  $1/2$ , που μοιράζονται τον όγκο  $V$ , ένας τρόπος να ικανοποιήσουμε την αρχή του Pauli, είναι να διαιρέσουμε τον όγκο  $V$  σε  $N/2$  ίσους υποόγκους, κάθε έναν όγκου  $2V/N$ , και να τοποθετήσουμε μόνο ένα ζεύγος (spin πάνω / spin κάτω) σε κάθε υποόγκο. Αυτός δεν είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για να ικανοποιήσουμε την αρχή του Pauli, αλλά οδηγεί ουσιαστικά στο σωστό αποτέλεσμα όσον αφορά τη συνολική μέση κινητική ενέργεια. Αντικαθιστώντας το  $V$  με  $2V/N$  στις εξισώσεις (1α) και (1β) και προσαρμόζοντας τους αριθμητικούς παράγοντες, βρίσκουμε για την ολική κινητική ενέργεια:

$$\langle E_k \rangle \equiv \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_{ik} \rangle \geq N 2.87 \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{m V^{2/3}} \quad (2\alpha)$$

$$\langle E_k \rangle \equiv \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_{ik} \rangle \geq N 2.32 \frac{\hbar c N^{1/3}}{V^{1/3}} \quad (2\beta)$$

Έτσι η αρχή του Pauli οδηγεί σε μια τεράστια αύξηση της ελάχιστης κινητικής ενέργειας του συστήματος των  $N$  πανομοιότυπων σωματιδίων με spin  $1/2$  που μοιράζονται το ίδιο όγκο  $V$ .

Η τρίτη από τις βασικές αρχές της ΚβΜ, είναι αυτό που ονομάζω **αρχή του Schrödinger**, η οποία αναφέρει ότι η πρώτη διεγερμένη ενεργειακή στάθμη ενός σωματιδίου μάζας  $m$ , που περιορίζεται σε όγκο  $V$ , είναι υψηλότερη από εκείνη της βασικής κατάστασης κατά ένα μη μηδενικό ποσό  $\delta\varepsilon$ , το οποίο στη μη σχετικιστική περίπτωση δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$\delta\varepsilon \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = c_1 \frac{\hbar^2}{m V^{2/3}} \quad (3)$$

όπου  $c_1$  είναι μια αριθμητική σταθερά της τάξεως της μονάδας.

Θα επιστήσω την προσοχή του αναγνώστη στο θεμελιώδη ρόλο που παίζουν αυτές οι τρεις βασικές αρχές στη δομή όλων των μορφών της ύλης. Η εξίσωση (2α) εξασφαλίζει την ύπαρξη του Κόσμου, όπως τον ξέρουμε, εμποδίζοντας την κατάρρευση της ύλης σε μία ή περισσότερες μαύρες τρύπες και εξασφαλίζοντας τη σταθερή ισορροπία, όταν η συμπιεστική πίεση,  $P_{\text{int}}$ , των αλληλεπιδράσεων γίνει ίση με την διασταλτική πίεση,  $P_k$ , της κβαντικής κινητικής ενέργειας. Η εξίσωση (3) διασφαλίζει ότι η ισορροπία αυτή είναι σταθερή, ακόμη και παρουσία προσωρινών εξωτερικών πεπερασμένων διαταραχών. Πράγματι, όταν το μέγεθος  $\varepsilon_{\text{pert}}$  της διαταραχής είναι μικρότερο από το  $\delta\varepsilon$ , το σωματίο, ή γενικότερα το σύστημα, αδυνατεί να την προσλάβει και παραμένει στη βασική του κατάσταση, ως εάν η διαταραχή να ήταν απύουσα. Αυτό, για παράδειγμα, εξηγεί την αξιοθαύμαστα προβλέψιμη φυσικοχημική συμπεριφορά των ατόμων σε ποικίλα περιβάλλοντα. Σκεφτείτε τι θα γινόταν αν το  $\delta\varepsilon$  ήταν μηδέν: Τότε η συμπεριφορά κάθε ατόμου θα εξαρτάτο ανά πάσα στιγμή από το περιβάλλον του και την προιστορία του. Αντίο Χημεία! Από την άλλη πλευρά, αυτή η σταθερότητα δεν είναι απόλυτη και δεν αποκλείει τις αλλαγές. Αντιθέτως, οι αλλαγές είναι εφικτές, όταν ισχύει η ανισότητα  $\varepsilon_{\text{pert}} > \delta\varepsilon$ .

Και ερχόμαστε τώρα στην τρίτη βασική ιδέα, η οποία ποσοτικοποιεί την κατάσταση ισορροπίας γενικεύοντας τη σχέση  $P_{\text{int}} = P_k$ , που αναφέραμε προηγουμένως, ως εξής:

### 3.Η κατάσταση σταθερής ισορροπίας αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της ελεύθερης ενέργειας.

Κάτω από τις συνήθεις συνθήκες σταθερής εξωτερικής πίεσης,  $P_{\text{ext}}$ , και σταθερής εξωτερικής θερμοκρασίας,  $T_{\text{ext}}$ , η ευσταθής ισορροπία αντιστοιχεί στο ελάχιστο της ελεύθερης ενέργειας Gibbs,  $G$ , όπου

$$G \equiv E_i + P_{\text{ext}}V - T_{\text{ext}}S. \quad (4)$$

$S$  είναι η εντροπία του συστήματος και  $E_i + P_{\text{ext}}V$  είναι η ενθαλπία  $H$ . Όταν  $P_{\text{ext}}, T_{\text{ext}}$  είναι αμελητέα, η ισορροπία αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της συνολικής ενέργειας,  $E_i$ .

## ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ (ΗΜ) ΠΕΛΙΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΥΛΗ

### Φωτόνια σε ισορροπία

Θεωρούμε πρώτα φωτόνια τα οποία περιορίζονται σε μια μεγάλη κοιλότητα όγκου  $V$  ( $V \rightarrow \infty$ ) που περιβάλλεται από ύλη θερμοκρασίας  $T$ .

Τα φωτόνια έρχονται σε κατάσταση ισορροπίας μέσω της αλληλεπίδρασής τους (λόγω απορρόφησης και εκπομπής) με την περιβάλλουσα ύλη. Θα θέλαμε να υπολογίσουμε την ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων σε ισορροπία υπό θερμοκρασία  $T$ . Προφανώς αυτή η ενεργειακή πυκνότητα θα εξαρτηθεί από την  $T$  (μέσω του συνδυασμού  $k_B T$ , όπου  $k_B$  είναι η σταθερά του Boltzmann, διότι το  $T$  στη φύση πάντα εμφανίζεται μέσω αυτού του γινομένου). Το ζητούμενο θα εξαρτηθεί επίσης από το  $c$  και το  $\hbar$ , αφού τα  $c$  και  $\hbar$  είναι οι μοναδικές καθολικές σταθερές που χαρακτηρίζουν ένα φωτόνιο. Από τις τρεις ποσότητες  $k_B T$ ,  $c$  και  $\hbar$  υπάρχει ένας μοναδικός συνδυασμός με διαστάσεις ενέργειας ανά όγκο (το  $k_B T$  έχει διαστάσεις

ενέργειας, το  $c$  έχει διαστάσεις μήκους ανά χρόνο, και το  $\hbar$  έχει διαστάσεις ενέργειας  $\times$  χρόνο. Επομένως η ποσότητα  $\hbar/k_B T$  έχει διάσταση χρόνου, το  $\hbar c/k_B T$  έχει διαστάσεις μήκους, και το  $k_B T/(\hbar c/k_B T)^3$  έχει διαστάσεις ενέργειας ανά όγκο). Άρα

$$\text{πυκνότητα ενέργειας φωτονίων} = c_1 \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3} \quad (5)$$

όπου  $c_1$  είναι μια αριθμητική σταθερά της τάξης του ενός (στην πραγματικότητα  $c_1 = \pi^2/15$ ). Από την εξίσωση (5) έχουμε για την ενέργεια των φωτονίων  $U_{ph}$

$$U_{ph} = \frac{\pi^2 V (k_B T)^4}{15 \hbar^3 c^3} \quad (6)$$

Το υπόλοιπο των θερμοδυναμικών ποσοτήτων για ένα αέριο φωτονίων σε ισορροπία μπορεί να εξασφαλιστεί από τις σχέσεις  $dU_V = TdS$ ,  $F = U - TS$ ,  $P = -(\partial F/\partial V)_T$ ,  $C_V = T(\partial S/\partial T)_V$  με τα εξής αποτελέσματα:

$$S_{ph} = \frac{4}{3} \frac{U_{ph}}{T}, \quad (7)$$

$$F_{ph} = -\frac{1}{3} U_{ph}, \quad (8)$$

$$P = \frac{1}{3} \frac{U_{ph}}{V}, \quad (9)$$

$$C_{Vph} = \frac{4U_{ph}}{T}. \quad (10)$$

Ένα «μέλαν σώμα» είναι εκείνο που απορροφά όλη την εισερχόμενη ροή ΗΜ ενέργειας (χωρίς αντανάκλαση). Ένα τέτοιο σώμα σε θερμοκρασία  $T$  πρέπει να εκπέμπει ΗΜ ακτινοβολία  $J_o$  ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου ίση με εκείνη που λαμβάνει, ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνο, από ένα αέριο φωτονίων θερμοκρασίας  $T$  σε επαφή και σε ισορροπία με το «μέλαν σώμα». Η  $J_o$  μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας τη κάθετη συνιστώσα,  $j_{\perp}$ , της ενεργειακής ροής προς το «μέλαν σώμα»,  $j_{\perp} = c(U/V) \cos\theta/4\pi$ , πάνω στη μισή στερεά γωνία:  $J_o = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta j_{\perp}$ . Το αποτέλεσμα είναι:

$$J_o = \frac{1}{4} \frac{cU}{V} = \frac{\pi^2}{60} \frac{(k_B T)^4}{c^2 \hbar^3} \equiv \sigma T^4. \quad (11)$$

Το  $J_o$ , εξ ορισμού, έχει διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα χρόνο και ανά μονάδα επιφάνειας. Ως εκ τούτου, το αποτέλεσμα ώφειλε να ήταν ανάλογο του  $(k_B T)^4/c^2 \hbar^3$ .

### Εκπομπή ακτινοβολίας από ένα φορτισμένο επιταχυνόμενο σωματίδιο ή από ένα ταλαντούμενο δίπολο

Για ένα σωματίδιο φορτίου  $q$  και επιτάχυνσης  $a(t)$ , η εκπεμπόμενη ΗΜ ενέργεια ανά μονάδα χρόνο, εξαρτάται από το  $q$  (εάν  $q = 0$ , δεν υπάρχει ακτινοβολία), καθώς και από το  $a(t)$  (εάν  $a(t) = 0$ , δεν υπάρχει ακτινοβολία) και, φυσικά, από το  $c$  (που είναι η μοναδική καθολική σταθερά που σχετίζεται με την ΗΜ ακτινοβολία). Υπάρχει μόνο ένας συνδυασμός των  $q$ ,  $a$ , και  $c$  με διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα χρόνο:

$$I(t) = c_1 a^2 q^2 / c^3 \quad (12)$$

Η αριθμητική σταθερά  $c_1$  είναι ίση με  $2/3$ , όταν η χρονική εξάρτηση του  $a(t)$  είναι ημιτονοειδής και η  $a^2$  αντικατασταθεί από το χρονικό μέσο όρο  $\overline{a^2}$ . Για ταλαντούμενο δίπολο, το  $I$  εξαρτάται από τη στιγμιαία τιμή του διπόλου  $p$ , από τη συχνότητα  $\omega$  (αν  $\omega = 0$ , δεν υπάρχει ακτινοβολία), και φυσικά, από την  $c$ . Άρα

$$I = c_1 \frac{p^2 \omega^4}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{p^2 \omega^4}{c^3}. \quad (13)$$

Η εξίσωση (13) μπορεί να προέλθει επίσης από την εξίσωση (12) λαμβάνοντας υπόψη ότι  $p = q \cdot r$ . Η εξίσωση (13) μας επιτρέπει να κάνουμε μια εκτίμηση για τον χρόνο ζωής  $\tau$  μιας συγκεκριμένης διεγερμένης ατομικής κατάστασης η οποία αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα φωτόνιο μέσω διπολικής αλληλεπίδρασης. Πράγματι, η συνολική ενέργεια που εκπέμπεται κατά τη διάρκεια του χρόνου ζωής είναι  $I\tau$  που πρέπει να είναι ίση με την ενέργεια  $\hbar\omega$  του εκπεμπομένου φωτονίου. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με την εξίσωση (13)

$$\tau = \frac{1}{c_1} \frac{\hbar c^3}{(e \cdot r)^2 \omega^3}, \quad (14)$$

όπου  $c_1$  είναι ένας αριθμητικός παράγοντας. Για την μετάβαση  $2p \rightarrow 1s$  στο άτομο του υδρογόνου μπορούμε να εκτιμήσουμε το  $\tau$  παίρνοντας  $r = a_B$ ,  $\hbar\omega = \varepsilon_{2p} - \varepsilon_{1s} = 10.2 \text{ eV}$  και,  $c_1 = 2/3$ . Βρίσκουμε ότι

$$\tau \approx 1.77 \times 10^{-9} \text{ s} \quad (15)$$

πολύ κοντά στην τιμή  $\tau \approx 1.59 \times 10^{-9} \text{ s}$  που δίνει ένας λεπτομερειακός και περίπλοκος κβαντομηχανικός υπολογισμός.

### Σκέδαση ενός φωτονίου από ένα φορτισμένο σωματίδιο ή από ένα ουδέτερο άτομο ή μόριο

Η ενεργός διατομή σκέδασης,  $\sigma$ , ενός τέτοιου γεγονότος ορίζεται ως ο λόγος  $\Gamma / F$ , όπου  $\Gamma$  είναι ο αριθμός των σκεδαζόμενων φωτονίων ανά μονάδα χρόνου και  $F$  είναι η ροή των προσπίπτοντων φωτονίων. Το  $\Gamma$  ισούται με την εκπεμπομένη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου διηρημένη με την ενέργεια κάθε φωτονίου,  $\Gamma = I / \hbar\omega$  και το  $F$  ισούται με τη συγκέντρωση των φωτονίων (=πυκνότητα ενέργειας/  $\hbar\omega$ ) επί

την ταχύτητα του φωτός  $F = c \times \frac{E_o^2}{4\pi \hbar\omega}$

Επομένως 
$$\sigma = \frac{I}{\hbar\omega} \frac{4\pi\hbar\omega}{cE_o^2} = \frac{4\pi I}{cE_o^2}. \quad (16)$$

Για ένα φορτισμένο σωματίδιο  $I = \frac{2}{3} q^2 a^2 / c^3$  και  $a = qE_o / m$ .

Άρα 
$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q^2}{mc^2} \right)^2 = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2 \quad (17a)$$

όπου  $q^2 / mc^2 = r_e = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m}$  είναι η κλασσική "ακτίνα" του ηλεκτρονίου (που προκύπτει εξισώνοντας την ενέργεια ηρεμίας του,  $mc^2$ , με την ηλεκτροστατική ενέργεια  $q^2 / r_e$ , όπου  $q=e$ ). Η εξίσωση (17a) μπορεί να προκύψει από διαστατική ανάλυση, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διατομή σκέδασης,  $\sigma$ , πρέπει να εξαρτάται από το  $q$  (για  $q = 0$  δεν υπάρχει σκέδαση), από το  $m$  (για  $m = \infty$  δεν υπάρχει κίνηση του σωματιδίου και, ως εκ τούτου, δεν υπάρχει σκεδαζόμενη ακτινοβολία), και από τα χαρακτηριστικά του προσπίπτοντος φωτονίου, το  $c$ , και το  $\hbar\omega$ . Έτσι, η διαστατική

ανάλυση προβλέπει για το  $\sigma$  την ακόλουθη έκφραση (γνωστή ως σχέση των Klein-Nishina )

$$\sigma = c_1 \left( \frac{q^2}{mc^2} \right)^2 f \left( \frac{\hbar\omega}{mc^2} \right) \quad (17\beta)$$

όπου η συνάρτηση  $f$  του αδιάστατου λόγου  $\hbar\omega/mc^2$  δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαστατική ανάλυση. Πάντως, αν το  $c_1$  ληφθεί ίσο με  $8\pi/3$ , η  $f$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του λόγου  $\hbar\omega/mc^2$  η οποία είναι μονάδα για  $\hbar\omega = 0$  και μηδέν για  $\hbar\omega/mc^2 \rightarrow \infty$ .

Η διατομή σκέδασης ενός φωτονίου από ένα ουδέτερο άτομο ή μόριο με μηδενική μέση διπολική ροπή,  $p$ , οφείλεται στην επαγόμενη από το εξωτερικό πεδίο  $E_o$  διπολική ροπή  $p$

$$p = a_p E_o \quad (18)$$

όπου  $a_p$  είναι η πόλωσιμότητα του ατόμου ή του μορίου. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (13) και (18) στην (16) προκύπτει η σχέση

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{c^4} a_p^2 \quad (19)$$

Η πόλωση  $a_p$  έχει διαστάσεις μήκους στον κύβο

$$a_p = c_1 r_o^3 f_R(\omega) \quad (20)$$

όπου  $c_1$  είναι ένας αριθμητικός παράγοντας της τάξης της μονάδας,  $r_o$  είναι η ακτίνα του ατόμου (ή κάποιο άλλο μήκος που χαρακτηρίζει το μέγεθος του μορίου) και  $f_R(\omega)$  είναι η τυπική εξάρτηση από τη συχνότητα για φαινόμενα συντονισμού

$$f_R(\omega) = \frac{\omega_{oi}^2}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_i}$$

με την οποία λαμβάνουμε υπόψη μας την έντονα αυξανόμενη απόκριση του ατόμου (ή του μορίου) όταν η συχνότητα  $\omega$  της προσπίπτουσας ΗΜ ακτινοβολίας συμπίπτει με μια από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_{oi} = |\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu|/\hbar$  του ατόμου ή του μορίου. Έτσι, για  $\omega \ll \omega_{oi}$ ,  $f_R(\omega) \approx 1$ , ενώ για  $\omega = \omega_{oi}$ ,  $|f_R(\omega)| = \omega_{oi}\tau_i$

όπου  $\tau_i$  είναι ο χρόνος ζωής που δίνεται από την εξίσωση (14). Επομένως, για  $\omega \ll \omega_{oi}$  έχουμε

$$\sigma \approx 3 \times 10^5 \frac{r_o^6}{\lambda^4}, \quad \omega \ll \omega_{oi} \quad (21)$$

ενώ, για  $\omega = \omega_{oi}$  έχουμε

$$\sigma \approx c_3^2 3.6 \times 10^6 r_o^2, \quad \omega = \omega_{oi} \quad (22)$$

Η εξίσωση (21) σημαίνει ότι η εκτός συντονισμού διατομή σκέδασης ενός οπτικού φωτονίου από ένα ουδέτερο άτομο ή μόριο είναι της τάξης του  $10^{-30}$  ή  $10^{-29} m^2$ , δηλαδή, περίπου δέκα τάξεις μεγέθους μικρότερη από τη γεωμετρική διατομή  $\pi r_o^2$ . Από την άλλη πλευρά, η υπό συνθήκες συντονισμού διατομή σκέδασης είναι έξι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τη γεωμετρική διατομή!

## ΑΠΟ ΤΑ QUARKS ΣΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

### Η ενέργεια ηρεμίας ενός πρωτονίου ή νετρονίου

Θα δείξουμε ότι αυτές οι ενέργειες ηρεμίας, οι οποίες είναι  $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$  για το πρωτόνιο και  $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$  για το νετρόνιο οφείλονται κυρίως στην κβαντική κινητική ενέργεια των κουάρκ, που είναι παγιδευμένα στο εσωτερικό του πρωτονίου ή του νετρονίου. Η ενέργεια ηρεμίας του κάθε κουάρκ, όπως φαίνεται στον πίνακα 1, είναι μικρότερη από το 1% του  $m_p c^2$ .

Συνεπώς η εξίσωση (1β) είναι η ενδεχόμενη. Από τους εννέα βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στα τρία κουάρκ που αποτελούν το πρωτόνιο (ή το νετρόνιο), τρεις αφορούν το κέντρο μάζας, το οποίο δεν περιορίζεται χωρικά και, συνεπώς, η ελάχιστη κινητική ενέργεια του είναι μηδέν. Μόνο οι υπόλοιποι έξι βαθμοί ελευθερίας (που αντιστοιχούν σε δύο σωματίδια) περιορίζονται εντός του όγκου  $V = 4\pi r_p^3/3$ , όπου  $r_p = 0.8 \text{ fm}$  είναι η ακτίνα του πρωτονίου ή του νετρονίου.

Άρα

$$m_p c^2 \approx m_n c^2 \approx 2 \frac{3 \cdot 12 \hbar c}{V^{1/3}} \approx 953.8 \text{ MeV} \quad (23)$$

δηλ., πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές (σχετικό σφάλμα 1.5%).

### Η ενέργεια ενός πυρήνα με $A=Z+N$ νουκλεόνια

Η ενέργεια ενός πυρήνα που αποτελείται από  $Z$  πρωτόνια και  $N$  νετρόνια είναι ίση με  $Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$ , όπου  $B$  είναι η ενέργεια σύνδεσης όλων των νουκλεονίων. Τρεις είναι οι κυριότεροι παράγοντες που συμβάλλουν στο  $-B$ :  
1. Η ισχυρή πυρηνική αλληλεπίδραση δίνει μια συνεισφορά  $E_s$  ίση με  $N_{pairs} V_s$ , όπου  $N_{pairs}$  είναι ο αριθμός των αλληλεπιδρώντων ζευγών νουκλεονίων και  $V_s$  είναι η μέση ενέργεια αλληλεπίδρασης ανά ζευγάρι νουκλεονίων που αλληλεπιδρά ( $V_s = -11.3 \text{ MeV}$ ). Λόγω του βραχείας εμβέλειας χαρακτήρα της ισχυρής πυρηνικής δύναμης μόνο τα πλησιέστερα ζεύγη γειτόνων αλληλεπιδρούν. Άρα

$$N_{pairs} = \frac{1}{2} A_B N_B + \frac{1}{2} A_s N_s,$$

όπου  $A_B$  είναι ο αριθμός των εσωτερικών νουκλεονίων (δηλαδή, αυτών που βρίσκονται στο εσωτερικό του πυρήνα) και  $A_s$  των επιφανειακών νουκλεονίων (δηλαδή αυτών που βρίσκονται στην επιφάνεια).  $A_s \sim R^2 \sim A^{2/3}$  και  $A_B = A - A_s$ , όπου  $R \sim A^{1/3}$ , είναι η ακτίνα του πυρήνα (αφού ο όγκος του είναι ανάλογος του αριθμού  $A$  των νουκλεονίων).  $N_B \approx 8$  είναι ο μέσος αριθμός των πλησιέστερων γειτόνων για τα εσωτερικά νουκλεόνια και  $N_s \approx 5$  για τα επιφανειακά νουκλεόνια. Έχουμε στη συνέχεια, επιλέγοντας  $A_s = A^{2/3}$ , το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$E_s = -45.2A + 17A^{2/3} \text{ σε MeV} \quad (24)$$

2. Η δεύτερη συνεισφορά για το  $-B$  είναι εξαιτίας της κινητικής ενέργειας των νουκλεονίων, και αυτή δίνεται (σύμφωνα με την (2α)) από

$$E_k = 2.87 \frac{\hbar^2}{mV^{2/3}} (Z^{5/3} + N^{5/3}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι  $V = 4\pi R^3/3$ ,  $R \approx 1.2A^{1/3}$  (σε fm) και



$$Z^{5/3} + N^{5/3} \approx \frac{1}{2^{2/3}} \left[ A^{5/3} + \frac{(N-Z)^2}{A^{1/3}} \right]$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την  $E_{kin}$  ως εξής

$$E_{kin} = 30.6A + 17 \frac{(N-Z)^2}{A} \text{ σε MeV} . \quad (25)$$

3. Η άπωση Coulomb μεταξύ των πρωτονίων είναι

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^Z \frac{e^2}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{Z(Z-1)e^2}{r}, \quad r \approx \frac{5}{6} R$$

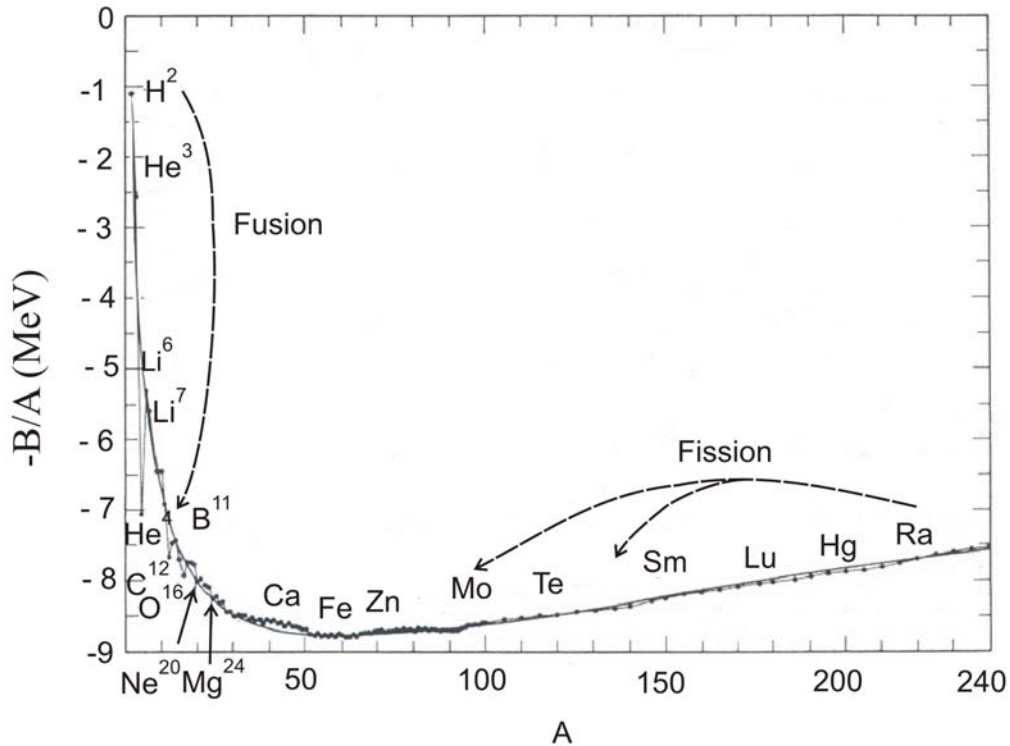
ή

$$E_c = 0.71 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}, \quad \text{in MeV} \quad (26)$$

Από την (25) βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια ελαχιστοποιείται για  $N=Z=A/2$ , ενώ η ενέργεια Coulomb ελαχιστοποιείται για  $N=A$ . Για μικρούς πυρήνες η κινητική ενέργεια κυριαρχεί έναντι της ενέργειας Coulomb και, συνεπώς, επιβάλλει τη δική συνθήκη ελαχιστοποίησης,  $N=Z$ . Καθώς το μέγεθος  $A$  αυξάνει, η ενέργεια Coulomb αυξάνεται ταχύτερα από την κινητική, και, ως εκ τούτου, η ισορροπία κινείται προς περισσότερα νετρόνια από όσα πρωτόνια. Ο λόγος  $Z/A$  μπορεί να βρεθεί με την ελαχιστοποίηση της συνολικής ενέργειας (άθροισμα των εξισώσεων (24), (25), και (26)) ως προς το  $Z$  υπό  $A$  σταθ. Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{Z}{A} \approx \frac{1 + 0.0075/A^{1/3}}{2 + 0.015A^{2/3}} \quad (27)$$

Παρατηρήστε ότι οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις επιτρέπουν στον πυρήνα να αλλάζει νετρόνια σε πρωτόνια και αντίστροφα μέχρι να επιτευχθεί η βέλτιστη αναλογία  $Z/A$  (που δίνεται από την εξίσωση (27)), δηλαδή αυτή που ελαχιστοποιεί την ολική ενέργεια). Αντικαθιστώντας την εξίσωση (27) σε αυτή που δίνει το  $-B = E_s + E_k + E_c$  και διαιρώντας διά  $A$ , βρίσκουμε την ποσότητα  $-B/A$  ως συνάρτηση του  $A$  (Η γραφική της παράσταση δίνεται στο Σχήμα 1). Οι εξισώσεις (24), (25), (26), και (27) μαζί με την  $-B = E_s + E_k + E_c \pm \delta$ , όπου  $\pm \delta$  είναι μια μικρή διόρθωση (το  $-\delta$  είναι για πυρήνες με  $N, Z$  άρτιους αριθμούς, το  $+\delta$  είναι για πυρήνες με  $N, Z$  περιττούς αριθμούς και το  $\delta=0$  είναι για  $A$  περιττός) μας επιτρέπουν να εξηγήσουμε ορισμένα σημαντικά φαινόμενα (π.χ., Γιατί τα προϊόντα της σχάσης είναι ραδιενεργά και εκπέμπουν ηλεκτρόνια, δηλ. ακτινοβολία  $\beta$ ; Γιατί το ουράνιο 235 υφίσταται σχάση με πρόσκρουση νετρονίου σχεδόν μηδενικής κινητικής ενέργειας, ενώ το ουράνιο 238 δεν υφίσταται τέτοιου είδους σχάση; κτλ).



**Σχήμα 1.** Η μείωση της ενέργειας ανά νουκλεόνιο,  $-B/A$  (ως αποτέλεσμα του σχηματισμού του πυρήνα) έναντι του αριθμού των νουκλεονίων  $A$ . Η αύξηση της καμπύλης για μικρά  $A$  οφείλεται στην αύξηση του αριθμού των νουκλεονίων στην επιφάνεια (όπου η εκμετάλλευση της ισχυρής πυρηνικής δύναμης είναι λιγότερο αποτελεσματική). Η αύξηση για μεγάλες τιμές του  $A$  οφείλεται στις απωστικές δυνάμεις Coulomb. Αυτή η τελευταία αύξηση καθιστά δυνατή την εξαγωγή ενέργειας από σχάση (δηλαδή, από τη διάσπαση του αρχικού πυρήνα σε δύο μικρότερους), είναι επίσης υπεύθυνη για τη μη ύπαρξη πυρήνων με  $A$  μεγαλύτερο από περίπου 240 (γιατί τότε η σχάση είναι αυθόρμητη).

## Άτομα

Η δομή της ύλης από το επίπεδο των ατόμων μέχρι και το επίπεδο ενός αστεροειδή (με γραμμική διάσταση μικρότερη από μερικές εκατοντάδες χιλιόμετρα), κυριαρχείται από μία μόνο από τις τέσσερις δυνάμεις: την ηλεκτρομαγνητική δύναμη, που χαρακτηρίζεται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο  $e$  (του πρωτονίου). Η κβαντική κινητική ενέργεια, η οποία αντισταθμίζει τη δύναμη Coulomb εξαρτάται (σύμφωνα με την εξίσωση (1α)) από το συνδυασμό  $\hbar^2/m$ . Η κυρίαρχη κινητική ενέργεια θα είναι εκείνη με τη μικρότερη μάζα στον παρονομαστή, δηλαδή, τη μάζα του ηλεκτρονίου,  $m_e$ . Οι τρεις ποσότητες  $e$ ,  $\hbar$ ,  $m_e$  καθορίζουν όμως ένα φυσικό σύστημα μονάδων. Στο σύστημα αυτό έχουμε (επιλέγοντας  $4\pi\epsilon=1$ , όπου  $\epsilon$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού)

$$\text{Μονάδα μήκους} \quad a_B \equiv \hbar^2 / m_e e^2 = 0.529 \text{ \AA}$$

$$\text{Μονάδα ενέργειας} \quad E_o = \hbar^2 / m_e a_B^2 = e^2 / a_B = 27.2 \text{ eV}$$

$$\text{Μονάδα χρόνου} \quad t_o = \hbar / \epsilon_o = 2.42 \times 10^{-17} \text{ s}$$

$$\text{Μονάδα ταχύτητας} \quad v_o = a_B / t_o = \hbar / m_e a_B = e^2 / \hbar = c / 137$$

$$\text{Μονάδα πίεσης } P_o = \varepsilon_o / a_B^3 = \hbar^2 / m_e a_B^5 = 2.94 \times 10^8 \text{ bar}$$

$$\text{Μονάδα θερμοκρασίας } T_o = \varepsilon_o / k_B = 27.2 \times 11600 = 3.16 \times 10^5 \text{ K}$$

$$\text{Μονάδα πυκνότητας } \rho_M = m_e / a_B^3 = 6.15 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Μονάδα ηλεκτρικής αντίστασης } R_o = \hbar / e^2 = 4108 \text{ ohm}$$

$$\text{Μονάδα ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης } \rho_o = R_o a_B = 21.7 \text{ } \mu\text{ohm} \cdot \text{cm}$$

Οι πιο σημαντικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν ένα άτομο είναι η ακτίνα του,  $r_a$  (όπως καθορίζεται από την έκταση του ανώτερου κατειλημμένου τροχιακού) και το έργο ιονισμού του,  $I_a$ . Και τα δύο εξαρτώνται κυρίως από τα  $e$ ,  $\hbar$ ,  $m_e$ . Η μάζα του πυρήνα  $m_a$  θα εισέλθει μέσω της ανηγμένης μάζας  $m_e m_a / (m_a + m_e) \approx m_e [1 + (m_e / m_a)]$  ως μια πολύ μικρή διόρθωση μικρότερη από 1%. Η ταχύτητα του φωτός δεν θα επηρεάσει αισθητά το υψηλότερα κατειλημμένο τροχιακό. Ομοίως η εξωτερική πίεση και η εξωτερική θερμοκρασία δεν παίζουν κανένα σημαντικό ρόλο εκτός αν οι τιμές τους μπορούν να συγκριθούν με τα  $P_o$  και  $T_o$ . Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$r_a = c_a a_B \quad (28)$$

$$I_a = c'_I \frac{e^2}{a_B} = c_I \frac{e^2}{r_a} \quad (29)$$

Η αριθμητική σταθερά  $c_a$  εξαρτάται από το συγκεκριμένο άτομο και η τιμή της κυμαίνεται σε εύρος από περίπου ένα, σε περίπου πέντε, με μέση τιμή στον Περιοδικό Πίνακα των Στοιχείων ίση με 2,6. Οι τοπικές μέγιστες τιμές είναι για τα άτομα των αλκαλίων ( $c_a = 3, 3.24, 4.09, 4.32, 4.76$ , για Li, Na, K, Rb, Cs αντίστοιχα) και οι τοπικές ελάχιστες τιμές για τα άτομα των ευγενών αερίων ( $c_a = 0.55, 0.669, 1.25, 1.50, 1.86, 2.06$  για το He, Ne, Ar, Kr, Xe και Rn αντίστοιχα). Η αριθμητική σταθερά  $c_I$  στην εξίσωση (29) έχει πιο περιορισμένο εύρος τιμών (μεταξύ περίπου 0.45 και 0.75) από όσο αυτό της  $c'_I$ . Έτσι είναι προτιμότερο να αντικατασταθεί η  $a_B$  από την πραγματική ακτίνα  $r_a$  του κάθε ατόμου. Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των ατόμων χρειάζεται επίσης να έχουμε κάποιες πληροφορίες σχετικά με τις ατομικές τους ιδιοκαταστάσεις, τα λεγόμενα ατομικά τροχιακά. Το ακτινικό μέρος κάθε τροχιακού χαρακτηρίζεται από έναν κύριο κβαντικό αριθμό  $n$  τέτοιο ώστε η έκταση του τροχιακού να είναι περίπου ανάλογη του  $n^2$ . Το γωνιακό μέρος είναι το ίδιο με το γωνιακό μέρος των πολωνύμων βαθμού  $l$  (όλοι οι όροι του κάθε πολωνύμου να είναι βαθμού  $l$ ) που πληρούν την εξίσωση Laplace. Όταν  $l = 0$  τα τροχιακά συμβολίζονται με το γράμμα  $s$  και δεν εξαρτώνται από τις γωνίες. Όταν  $l = 1$  υπάρχουν τρία διαφορετικά τροχιακά, που συμβολίζονται με  $p_x, p_y, p_z$  και αντιστοιχούν στα τρία ανεξάρτητα πολωνύμα πρώτου βαθμού (τα  $x, y, z$ ) και τα οποία προφανώς έχουν τη γωνιακή εξάρτηση του  $x/r, y/r$  και  $z/r$ . Για  $l=2$  υπάρχουν 5 και μόνο 5 ανεξάρτητα πολωνύμα δευτέρου βαθμού που η γωνιακή τους εξάρτηση είναι αυτή των πέντε τροχιακών  $d$ . Για  $l=3$  έχουμε 7 και μόνο 7 ανεξάρτητα πολωνύμα τρίτου βαθμού που αντιστοιχούν στα επτά τροχιακά  $f$  και ούτω καθεξής. Η σχετική θέση της ενεργειακής στάθμης που αντιστοιχεί στο κάθε ατομικό τροχιακό, η οποία και καθορίζει τη δομή του Περιοδικού Πίνακα των

Στοιχείων μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση των αποτελεσμάτων για το υδρογόνο και μερικά απλά φυσικά επιχειρήματα. Τα κύρια αποτελέσματα είναι τα εξής:

$$\varepsilon_{n,i} < \varepsilon_{n+1,i} \quad i = s, p, d, f, \dots \text{ and } \varepsilon_{ns} < \varepsilon_{np} < \varepsilon_{nd} < \varepsilon_{nf} \dots \quad (30)$$

$$\varepsilon_{n+2,s} \approx \varepsilon_{n+1,d} \approx \varepsilon_{n,f} < \varepsilon_{n+2,p} < \varepsilon_{n+3,s} \quad (31)$$

### Διατομικά μόρια

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο ατόμων σε απόσταση  $d$  μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι είναι της μορφής  $-A/d^6$ , όταν  $d \gg r_{a1} + r_{a2}$ , και  $Z_1 Z_2 e^2 / d$ , όταν  $d \rightarrow 0$ . Έτσι, πρέπει να υπάρχει κατ' ανάγκη ένα ελάχιστο με αρνητική τιμή για κάποια απόσταση  $d_o$  που θα είναι και η απόσταση ισορροπίας, δηλ., το μήκος του μοριακού δεσμού. Αυτή η απόσταση ισορροπίας πρέπει να εμφανισθεί όταν τα ηλεκτρονικά νέφη των δύο ατόμων έχουν ένα μικρό βαθμό επικάλυψης. Άρα

$$d_o = c_1 (r_{a1} + r_{a2}) \quad (32)$$

όπου  $c_1$  είναι ένας αριθμητικός παράγοντας συνήθως λίγο μικρότερος από ένα (ισχυροί δεσμοί αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές του  $c_1$ ). Η ενέργεια σύνδεσης,  $\varepsilon_b$ , του μορίου είναι κατ' ανάγκη της τάξης της μονάδας ενέργειας  $\varepsilon_o = \hbar^2 / m_e a_B^2$  με την ακτίνα του Bohr,  $a_B$ , να αντικαθίσταται από το  $d_o$

$$\varepsilon_b = c_2 \frac{\hbar^2}{m_e d_o^2} \quad (33)$$

όπου ο αριθμητικός παράγοντας  $c_2$  είναι συνήθως μικρότερος από ένα για μονούς αδύναμους δεσμούς και μεγαλύτερος από ένα για τριπλούς ισχυρούς δεσμούς. Το κβάντο της δονητικής ενέργειας,  $\hbar\omega$ , θα είναι ανάλογο του  $1/\sqrt{\mu}$ , όπως σε κάθε αρμονική ταλάντωση, όπου  $\mu = m_{1a} m_{2a} / (m_{1a} + m_{2a})$  είναι η ανηγμένη μάζα. Έτσι, για να εκτιμήσουμε την τάξη μεγέθους αυτού του κβάντου θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη μονάδα ενέργειας,  $\varepsilon_o = e^2 / a_B$ , με την αδιάστατη ποσότητα  $\sqrt{m_e / \mu}$  και να αντικαταστήσουμε το  $a_B$  με το μήκος του δεσμού  $d_o$ .

$$\hbar\omega = c_3 \frac{e^2}{d_o} \sqrt{\frac{m_e}{\mu}} \quad (34)$$

όπου η αριθμητική σταθερά  $c_3$  είναι της τάξης της μονάδας με μεγάλες τιμές για ισχυρούς τριπλούς δεσμούς, και με μικρότερες τιμές για τους ασθενείς απλούς δεσμούς. (π.χ. Για  $c_3=1$  βρίσκουμε 644meV, 116meV, 98meV, 32meV, για H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> και Na<sub>2</sub> αντίστοιχα, ενώ οι πραγματικές τιμές είναι 546, 292, 196 και 19.7meV αντίστοιχα).

Το κβάντο περιστροφής δίνεται από τη σχέση  $\hbar^2 / I_r$ , όπου  $I_r = \mu d_o^2$  είναι η ροπή αδραειάς, η οποία συνδέεται άμεσα με το μήκος του δεσμού

$$\frac{\hbar^2}{I_r} = \frac{\hbar^2}{\mu d_o^2} = 27.2 \left( \frac{m_e}{\mu} \right) \left( \frac{a_B}{d_o} \right)^2 \text{ eV} \quad (35)$$

(για το O<sub>2</sub> το κβάντο αυτό είναι 0.359meV  $\Leftrightarrow$  4.16K ).

## Στερεά

Στα στερεά, όπως στα μόρια, τα άτομα ακουμπούν το ένα το άλλο έτσι ώστε τα ηλεκτρονικά τους νέφη να έχουν μια μικρή επικάλυψη. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος  $d_0$  μεταξύ κοντινότερων γειτόνων είναι όπως στην Εξ. (32). Αντί για  $d_0$  είναι πιο εύχρηστο να χρησιμοποιούμε τη μέση ακτίνα ανά άτομο,  $r_c$ , όπως ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{4\pi}{3}r_c^3 \equiv \frac{V}{N_a} \quad (36)$$

όπου  $V/N_a$  είναι ο όγκος ανά άτομο, που είναι το αντίστροφο της συγκέντρωσης των ατόμων,  $n_a = N_a/V$ . Αυτή η ακτίνα  $r_c$  συνδέεται άμεσα με την πυκνότητα της μάζας,  $\rho_M$  (ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της συμπυκνωμένης ύλης).

$$\rho_M = \frac{m_a}{(4\pi/3)r_c^3} = 2.68 \frac{A_w}{f_c^3} \text{ (σε g/cm}^3\text{)} \quad (37)$$

όπου  $A_w$  είναι το (μέσο) ατομικό βάρος και η αδιάστατη ποσότητα  $f_c$  ορίζεται από τη σχέση

$$r_c \equiv f_c a_B \quad (38)$$

Η  $f_c$  πρέπει να είναι συγκρίσιμη με το  $c_a$  (όπως η τελευταία ορίζεται από την Εξ. (28)), αλλά λίγο μεγαλύτερη (αφού ο όγκος ανά άτομο είναι μεγαλύτερος από τον όγκο του ατόμου, μια και οι εφραπτόμενες σφαίρες αφήνουν κενό χώρο). Στην πραγματικότητα, η μέση τιμή της  $f_c$  για όλα τα στοιχειακά στερεά είναι 3 αντί για 2,6 που είναι για το  $c_a$ . Με βάση διαστατικά επιχειρήματα, περιμένουμε ότι κάθε ποσότητα  $A$  που έχει σχέση με την στερεά κατάσταση να είναι ανάλογη ενός συνδυασμού  $A_0$  των βασικών ποσοτήτων  $\hbar$ ,  $m_e$  και  $a_B$ , τέτοιου ώστε οι διαστάσεις του  $A_0$  να είναι ίδιες με εκείνες της  $A$ :  $[A_0]=[A]$ . Φυσικά, η ποσότητα  $A$  μπορεί να εξαρτάται και από άλλες ποσότητες (π.χ., από το είδος του ατόμου, όπως αυτό καθορίζεται από τον ατομικό αριθμό  $Z$ , από την ατομική μάζα  $m_a$ , από την ταχύτητα του φωτός  $c$ , από τη θερμοκρασία  $T$ , από την πίεση  $P$ , κλπ.). Όλοι αυτοί οι παράγοντες πρέπει να εισαχθούν στον τύπο για το  $A$  σε μια αδιάστατη μορφή διαιρώντας με τις αντίστοιχες μονάδες. Τελικά, αναμένουμε να βελτιώσουμε τις αριθμητικές εκτιμήσεις μας αντικαθιστώντας την ποσότητα  $a_B$  με  $r_c = f_c a_B$ , όπου  $1 \leq f_c \leq 6$  (αυτή η αντικατάσταση υποδηλώνεται με τονισμένο το αντίστοιχο σύμβολο). Έτσι, καταλήγουμε στον παρακάτω γενικό τύπο

$$A = A'_0 F(Z, m_a/m_e, T/T'_0, P/P'_0, c/v'_0, \dots) \quad (39)$$

όπου η συνάρτηση  $F$  δεν μπορεί να καθοριστεί διαστατικά. Είναι απαραίτητες είτε φυσικές εκτιμήσεις ή μία πλήρης θεωρία για την εύρεση της  $F$ . Σε ότι ακολουθεί εφαρμόζουμε την Εξ. (39) σε μερικές βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν την στερεά κατάσταση. (Η εξάρτηση από τους λόγους  $m_a/m_e, T/T'_0, \dots$  θα συμπεριληφθεί μόνο όταν είναι απαραίτητη). Έτσι έχουμε:

- Ενέργεια συνοχής ανά άτομο  $\varepsilon_c$ :

$$\varepsilon_c = \eta_1 \frac{\hbar^2}{m_e r_c^2} = \eta_1 \frac{27.2 \text{ eV}}{f_c^2 \text{ atom}} = \frac{625 \text{ kcal}}{f_c^2 \text{ mol}}, \quad \eta_1 \approx 1 \quad (40)$$

- Υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας  $B$ :

$$B = \eta_2 \frac{\hbar^2}{m_e r_c^5} = \eta_2 \frac{294}{f_c^5} \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad \eta_2 \approx 0.6 \quad (41)$$

- Ταχύτητα του ήχου  $v_s$ :

$$v_s = \eta_3 \frac{\hbar}{m_e r_c} \sqrt{\frac{m_e}{m_a}} \approx \frac{82}{f_c \sqrt{A_w}} \frac{\text{km}}{\text{s}}, \quad \eta_3 \approx 1.6 \quad (42)$$

Στην  $v_s$ , η ατομική μάζα  $m_a$  πρέπει να εμφανισθεί ως  $1/\sqrt{m_a}$ , αφού ο ήχος στην συμπυκνωμένη ύλη διαδίδεται μέσω ατομικών *ταλαντώσεων*, οι οποίες μετακινούνται από άτομο σε άτομο

- Διατμητικό μέτρο ελαστικότητας,  $G$

$$G \approx \eta_4 B, \quad 0.1 \leq \eta_4 \leq 1 \quad (43)$$

- Κρίσιμη διατμητική τάση για πλαστική παραμόρφωση,  $\tau_c$

$$\tau_c \approx \frac{G}{100} \quad (44)$$

Η Εξ. (44) είναι μια πολύ χονδρική μέση προσέγγιση. Είναι δύσκολο να υπολογίσουμε την  $\tau_c$  διότι δεν εξαρτάται μόνο από μικροσκοπικούς, αλλά και από μεσοσκοπικούς παράγοντες, όπως είναι η ύπαρξη μικρορωγμών και η συγκέντρωση, κινητικότητα και ταχύτητα δημιουργίας εξαθρώσεων.

- Εκτίμηση της μεγαλύτερης συχνότητας ατομικών ταλαντώσεων. Όπως και με την Εξ. (34) παίρνουμε

$$\omega_{\max} \approx \omega_D = \eta_5 \frac{e^2}{\hbar r_c} \sqrt{\frac{m_e}{m_a}} = \eta_5 \frac{96.8}{f_c \sqrt{A_w}} \times 10^{13} \text{ rad/s}, \quad \eta_5 \approx 1 \quad (45)$$

- Η θερμοκρασία Debye είναι περίπου

$$\Theta_D \equiv \frac{\hbar \omega_D}{k_B} = \eta_6 \frac{7400}{f_c \sqrt{A_w}} \text{ K}, \quad \eta_6 \approx 1 \quad (46)$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3.** Σύγκριση των αποτελεσμάτων των Εξ. (40), (41), (42) και (46) με τα πειραματικά δεδομένα [2] για τέσσερα από τα πιο σημαντικά στερεά (τεχνολογικά και ιστορικά).

	Fe		Al		Cu		Si	
	Estimate	Exp	Estimate	Exp	Estimate	Exp	Estimate	Exp
$A_w$		55.85		26.98		63.55		28.09
$f_c$ (exp)		2.70		2.99		2.67		3.18
$\varepsilon_c$ (eV/atom)	3.73	4.28	3.04	3.39	3.82	3.49	2.69	4.63
$B$ ( $10^{11}$ N/m <sup>2</sup> )	1.29	1.68	0.73	0.72	1.29	1.37	0.54	0.99
$v_s$ (km/s)	4.06	4.63	5.28	5.68	3.85	3.93	4.87	6.48
$\Theta_D$ (K)	366	464	476	426	347	344	438	645

## Υγρά: ταχύτητα θαλάσσιων κυμάτων

Η ταχύτητα αυτή πρέπει να εξαρτάται (α) από την επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ , η οποία παρέχει τη δύναμη επαναφοράς προς αποκατάσταση της επιφάνειας της θάλασσας στην επίπεδη μορφή ισορροπίας, (β) πιθανότατα από το μήκος κύματος  $\lambda$ , (γ) ενδεχομένως από το βάθος της θάλασσας  $d$  (υποτιθεμένου σταθερού). Η πυκνότητα  $\rho_M$  του νερού δεν εισέρχεται αφού το  $g$  είναι το ίδιο για όλα τα σώματα. Αν υποθέσουμε ότι δεν παραλείψαμε κάποιο άλλο σημαντικό παράγοντα, έχουμε, εισάγοντας τον κυματαριθμό<sup>ii</sup>  $k=2\pi/\lambda$  αντί του μήκους κύματος  $\lambda$ , το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$v^2 = (g/k)F(kd) \quad (47)$$

όπου η διαστατική ανάλυση δεν μπορεί να καθορίσει τη συνάρτηση  $F$  της αδιάστατης ποσότητας  $kd$ . Παρολαυτά, είναι προφανές ότι στο όριο  $kd \gg 1$ , το βάθος της θάλασσας δεν παίζει κανένα ρόλο. Ομοίως, στο αντίθετο όριο  $kd \ll 1$  το βάθος της θάλασσας θα κυριαρχήσει. Επομένως

$$F(kd) \rightarrow \text{constant}, \quad kd \gg 1 \quad (48a)$$

$$F(kd) \rightarrow \text{constant} \times k, \quad kd \ll 1 \quad (48b)$$

Συμβαίνει η σταθερά και στις δύο περιπτώσεις να είναι ίση με 1. Έτσι, η  $F(x)$  ξεκινάει ως  $x$  (για  $x \rightarrow 0$ ) και τελειώνει ως μονάδα για  $x \rightarrow \infty$  (στην πραγματικότητα,  $F(x) = \tanh(x)$ ). Άρα,

$$v = \sqrt{gd}, \quad \text{εάν } \lambda \gg d \quad (49a)$$

$$v = \sqrt{g\lambda/2\pi}, \quad \text{εάν } 1\text{cm} \ll \lambda \ll d \quad (49b)$$

Χρειάστηκε η ανισότητα  $\lambda \gg 1\text{cm}$  για τον εξής λόγο: για μήκη κύματος  $\lambda = 1\text{cm}$  ή μικρότερα, παίζει ρόλο και άλλη μία ενέργεια ανά μονάδα μάζας (εκτός από τη βαρυτική) η οποία τείνει να αποκαταστήσει την ισορροπία της επίπεδης επιφάνειας. Αυτή είναι η επιφανειακή τάση, η οποία εξαρτάται από την σταθερά επιφανειακής τάσης  $\sigma$ , από το μήκος κύματος (ή καλύτερα από τον  $k$ ) και από την πυκνότητα,  $\rho_M$ . Εφόσον αυτές οι δύο δυναμικές ενέργειες ανά μονάδα μάζας είναι προσθετικές, θα δημιουργούν δύο προσθετικές συνεισφορές στο τετράγωνο της ταχύτητας.

$$v^2 = v_g^2 + v_\sigma^2 = \left[ \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho_M} \right] F(kd) \quad (50)$$

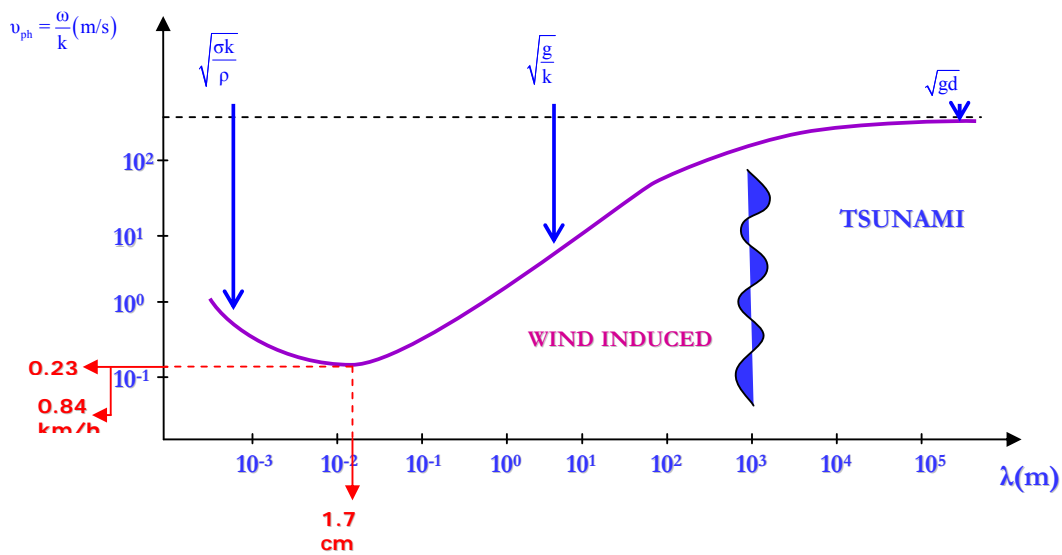
όπου η  $v_g^2$  δίνεται από την Εξ. (47) και για διαστατικούς λόγους,  $v_\sigma^2 = (\sigma k / \rho_M) F(kd)$  (όπου  $F(x) = \tanh(x)$  ξανά). Ο συντελεστής επιφανειακής τάσης,  $\sigma$ , μπορεί να υπολογιστεί με παρόμοιο τρόπο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της διαφοράς μεταξύ των επιφανειακών νουκλεονίων και των νουκλεονίων που βρίσκονται στον εσωτερικό όγκο του πυρήνα. Αν επιλέξουμε τη λογική τιμή των 0.45 eV/μόριο για τα μόρια του νερού που αλληλοσυγκρατούνται

---

<sup>ii</sup> Αντί για  $\lambda$  είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τον κυματαριθμό  $k=2\pi/\lambda$ , αφού το  $\sin(2\pi x/\lambda) = \sin(kx)$  είναι αυτό που καθορίζει τη χωρική διακύμανση του κύματος.

από τον ασθενή δεσμό υδρογόνου, βρίσκουμε  $\sigma \approx 0.1 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ , ενώ η πειραματική τιμή είναι  $0.073 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ .

Στο σχήμα 2 συνοψίζουμε γραφικά τους τύπους, που δίνουν την ταχύτητα ως συνάρτηση του μήκους κύματος για τα θαλάσσια κύματα. Αφού ο άνεμος μπορεί να διεγείρει τα θαλάσσια κύματα πιο αποδοτικά όταν η ταχύτητά του,  $v_w$ , συμπίπτει με την ταχύτητα του θαλάσσιου κύματος  $v$ , αναμένουμε τα μικρού μήκους κύματος ( $\lambda \approx 1.7 \text{ cm}$ ) με τη μικρότερη ταχύτητα να είναι τα πρώτα που θα διεγερθούν καθώς ο άνεμος αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα και φτάνει στην κρίσιμη τιμή των  $0.8 \text{ km/h}$ .



**Σχ. 2.** Ταχύτητα θαλάσσιου κύματος ως προς το μήκος κύματος. Για μικρά μήκη κύματος κυριαρχεί η επιφανειακή τάση έναντι της βαρύτητας. Πολύ μεγάλα μήκη κύματος, όπως στα τσουνάμι, διαδίδονται πολύ γρήγορα, πχ. για  $d = 2.5 \text{ km}$  και  $\lambda \gg d$ ,  $v = 158 \text{ m/s} = 569 \text{ km/h}$

### Πλανήτες: Πόσο ψηλό μπορεί να είναι ένα βουνό;

Το ότι ένας πλανήτης είναι σχεδόν σφαιρικός σημαίνει ότι το ύψος,  $h_{max}$ , του ψηλότερου βουνού οφείλει να είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα  $R$  του πλανήτη. Αυτό που αναγκάζει ένα πλανήτη να γίνει σφαιρικός, είναι, σαφώς, η βαρυτική του ενέργεια που ελαχιστοποιείται για σφαιρικό σχήμα. Επομένως η βαρυτική ενέργεια σε ένα πλανήτη θα πρέπει να είναι τουλάχιστον συγκρίσιμη με την ηλεκτροστατική. Εξισώνοντας τις δύο αυτές ενέργειες προσδιορίζουμε περίπου το τυπικό μέγεθος ενός βραχώδους πλανήτη, όπως η Γη



$$E_G = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \approx E_{elect.} \approx 2N_a \varepsilon_b = 2N_a \frac{\hbar^2}{m_e a_B^2 f_c^2} \quad (51)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $M = N_a A m_u$  ( $m_u = 1823 m_e$ ) και  $(4\pi/3)R^3 = N_a (4\pi/3) a_B^3 f_c^3$ , έχουμε

$$AN_a = \left( \frac{10}{3f_c} \right)^{3/2} \frac{1}{A^2} \left( \frac{\alpha}{\alpha_G} \right)^{3/2} \quad (52)$$

όπου ο λόγος του μεγέθους της ηλεκτρικής προς την βαρυτική δύναμη,  $\alpha/\alpha_G = e^2/Gm_u^2 = 1.24 \times 10^{36}$ , (βλ. Πίνακα 2) εμφανίζεται στη δύναμη  $3/2$ . Αν επιλέξουμε  $f_c \approx 2.3$  και χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (37) με τη μέση πυκνότητα της Γης,  $5.515 \text{g/cm}^3$ , βρίσκουμε τον αριθμό των νουκλεονίων  $AN_a$  σε ένα πλανήτη όπου η βαρυτική ενέργεια είναι περίπου ίση με την ηλεκτροστατική:

$$AN_a = 3.81 \times 10^{51}$$

Η αντίστοιχη ακτίνα είναι

$$R = 6.46 \times 10^6 \text{ m}$$

ενώ για τη Γη τα αντίστοιχα μεγέθη είναι  $AN_a \approx 3.59 \cdot 10^{51}$  και  $R \approx 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

Το υψηλότερο δυνάμει βουνό σε έναν βραχώδη πλανήτη εμφανίζεται όταν η διατμητική τάση  $\tau$  στη βάση του είναι ίση με την κρίσιμη διατμητική τάση  $\tau_c$  για πλαστική ροή (βλ. Εξ. (44)). Συνδυάζοντας τις Εξ. (41), (43) και (44) έχουμε για την  $\tau_c$

$$\tau_c \approx \frac{1}{1000} \frac{\hbar^2}{m_e a_B^5 f_c^5} \quad (53)$$

Η διατμητική τάση είναι ίση με  $\gamma W/S$ , όπου  $\gamma = 2/3$ ,  $W$  είναι το βάρος του βουνού και  $S$  είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής στη βάση του. Αν  $V = \frac{1}{3} Sh$  είναι ο όγκος του βουνού και  $h$  το ύψος του, το βάρος είναι  $W = gV\rho_M$ , όπου η  $\rho_M$  δίνεται από την Εξ. (37) και το  $g$  δίνεται  $GM/R^2$ ,  $M = (4\pi/3)R^3\rho'_M$ . Οι πυκνότητες  $\rho_M$  και  $\rho'_M$  είναι για το βουνό και τον πλανήτη ως σύνολο αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (37) και παίρνοντας για  $\rho_M$  και  $\rho'_M$  τις τιμές της Γης ( $3 \text{g/cm}^3$  και  $5.515 \text{g/cm}^3$  αντίστοιχα) έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα (επιλέγοντας  $f_c \approx 3$ ).

$$\frac{Rh}{a_B^2} \approx \frac{4\pi}{10^3 \gamma} \frac{(2.68)^2}{\rho \rho' f_c^5} \frac{\alpha}{\alpha_G} = 3.37 \times 10^{-5} \left( \frac{\alpha}{\alpha_G} \right) \quad (54)$$

ή

$$Rh = 1.17 \times 10^{11} \text{ m}^2$$

Για τη Γη με  $R = 6.366 \times 10^6 \text{ m}$  το υψηλότερο δυνάμει βουνό δε θα μπορούσε να ξεπεράσει σε ύψος το  $h = 18 \text{ km}$ , ενώ για τον Άρη με  $R = 3.39 \times 10^6 \text{ m}$ ,  $h = 34.5 \text{ km}$ . Ο μεγαλύτερος αστεροειδής, προκειμένου το σχήμα του να είναι ακανόνιστο, θα πρέπει να έχει  $h = R$ . Έτσι η γραμμική του διάσταση οφείλει να είναι μικρότερη ή περίπου ίση με  $2[1.17 \times 10^{11}]^{1/2} \approx 700 \text{ km}$ .

<sup>iii</sup> Λόγω της βαρυτικής συμπίεσης, η ποσότητα  $f_c$  αναμένεται να είναι μικρότερη απ' ό τι σε ένα συνηθισμένο στερεό

## Άστρο, ζωντανά ή νεκρά.

Θεωρήστε ένα σφαιρικό διαστρικό νέφος μάζας  $M=AN_a m_p$  και ακτίνας  $R(t)$  να συμπυκνώνεται αργά (τόσο αργά ώστε η θερμοδυναμική του ισορροπία να μπορεί να επιτευχθεί για κάθε τιμή της ακτίνας  $R$ ), σχηματίζοντας τελικά ένα άστρο. Από το θεώρημα Virial, έπεται ότι η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων που αποτελούν το νέφος είναι η μισή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας (σε απόλυτη τιμή)

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (55)$$

Η κινητική ενέργεια έχει μία κβαντομηχανική συνεισφορά (βλ. Εξ. (2α)) και μία θερμική συνεισφορά. Ο ακριβής τύπος που δίνει την ολική κινητική ενέργεια είναι σχετικά περίπλοκος. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε ένα προσεγγιστικό τύπο, που αποτελεί μία λογική παρεμβολή μεταξύ των δύο οριακών περιπτώσεων ( $T = 0\text{K}$  και  $T = \infty$ ), που αναπαράγονται σωστά:

$$E_k \approx \left[ \left( 2.87 \hbar^2 N_e^{5/3} / m V^{2/3} \right)^2 + \left( \frac{3}{2} N_a k_B T \right)^2 \right]^{1/2} \quad (56)$$

Από τις Εξ. (55) και (56) μπορούμε να βρούμε τη θερμοκρασία του νέφους ως συνάρτηση της ακτίνας (υποθέτοντας ότι δεν συμβαίνουν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις). Αυτή η εξάρτηση οδηγεί σε μία μέγιστη θερμοκρασία  $T_{max}$ . Για να γίνει το νέφος άστρο, η  $T_{max}$  πρέπει να είναι καθαρά μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία ανάφλεξης  $T_{ign}$  για αντιδράσεις θερμοπυρηνικής σύντηξης, π.χ.

$$T_{max} \approx 2T_{ign} \quad (57)$$

Η θερμοκρασία ανάφλεξης μπορεί να υπολογιστεί διαστατικά λαμβάνοντας υπόψη ότι η σύντηξη πραγματοποιείται με τη βοήθεια του κβαντομηχανικού φαινομένου σήραγγας για την υπερπήδηση του φράγματος Coulomb μεταξύ ενός ζεύγους πρωτονίων. Έτσι η ποσότητα  $k_B T_{ign}$  πρέπει να εξαρτάται από τα  $\hbar$ ,  $m_p$  και  $e$ . Το αποτέλεσμα είναι

$$k_B T_{ign} = \eta_8 \frac{e^4 m_p}{\hbar^2}; \quad \eta_8 \approx 0.1 \quad (58)$$

Από τις Εξ. (55) έως (58) βρίσκουμε τον ελάχιστο αριθμό πυρήνων  $N_v$  για να μπορεί να γίνει ένα διαστρικό νέφος άστρο.

$$N_{v,min} \approx 0.5 \left( \frac{m_p}{m_e} \right)^{3/4} \left( \frac{\alpha}{\alpha_G} \right)^{3/2} = 1.93 \times 10^{56} \quad (59)$$

Αν ο αριθμός των πυρήνων σε ένα άστρο είναι πολύ μεγάλος, η μέση θερμοκρασία του είναι πολύ υψηλή και η πίεση των φωτονίων (που είναι ανάλογη του  $T^4$ , βλ. Εξ (6) έως (9)) κυριαρχεί της πίεσης της ύλης. Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες, η συμπιεστική βαρυτική πίεση δεν είναι αρκετή για να αντισταθμίσει την τρομερή πίεση των φωτονίων και το άστρο δεν σχηματίζεται καθόλου. Αυτό συμβαίνει όταν ο αριθμός των νουκλεονίων ξεπεράσει μία κρίσιμη τιμή  $N_{v,max}$ , που δίνεται από την προσεγγιστική σχέση

$$N_{v,max} \approx \left( \frac{\alpha_s}{\alpha_G} \right)^{3/2} = 1.3 \times 10^{59} \quad (60)$$

όπου  $\alpha_s$  είναι το αδιάστατο μέγεθος της ισχυρής αλληλεπίδρασης (Ο αριθμός των νουκλεονίων στον Ήλιο μας είναι  $1.2 \times 10^{57}$ , περίπου 6 φορές μεγαλύτερος από τον ελάχιστο αριθμό και περίπου εκατό φορές μικρότερος από τον μέγιστο).

Αφού εξαντληθεί το θερμοπυρηνικό καύσιμο, το άστρο υπόκειται σε ένα περισσότερο ή λιγότερο βίαιο θάνατο. Στο τέλος αυτών των μεταβατικών γεγονότων, η βαρύτητα συνεχίζει να πιέζει την εναπομείνουσα (μετά την εκροή μάζας κατά τη μεταβατική περίοδο) μάζα  $M_0$ . Αν η μάζα αυτή,  $M_0$ , είναι περίπου τριπλάσια της μάζας του Ήλιου μας,  $M_s$ , δεν υπάρχει μηχανισμός να σταματήσει τη βαρύτητα και το νεκρό άστρο γίνεται μια μαύρη τρύπα. Η ακτίνα του ορίζοντά της,  $R_s$ , μπορεί να βρεθεί από διαστατική ανάλυση

$$R_s = \eta_9 \frac{GM_o}{c^2} \quad (61)$$

όπου η αριθμητική σταθερά  $\eta_9$  συμβαίνει να είναι ίση με 2.  $R_s = 14 \text{ km}$  για  $M_0 = 5M_s$ . Ο Hawking πρότεινε ότι λίγο έξω από τον ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας, το βαρυτικό πεδίο είναι τόσο ισχυρό ώστε μπορεί να απορροφήσει ένα από τα δύο σωματίδια/αντισωματίδια του ζεύγους που δημιουργείται από τις κβαντικές διακυμάνσεις του κενού. Το άλλο σωματίδιο/αντισωματίδιο δεν μπορεί πιά να εκμηδενιστεί και εκπέμπεται ως ακτινοβολία, που φέρει το όνομα του Hawking. Το ζεύγος που πιο εύκολα απ' όλα θα υποστεί την κβαντική διακύμανση του κενού, είναι ένα ζεύγος φωτονίων (αφού τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας). Έτσι, η μαύρη τρύπα «εκπέμπει» έμμεσα ΗΜ ακτινοβολία κβαντικής φύσεως η οποία αποδεικνύεται να είναι τελικά τύπου ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Η ενεργός θερμοκρασία  $T$  που θα έδινε αυτήν την ακτινοβολία μέλανος σώματος μπορεί να βρεθεί από διαστατικούς υπολογισμούς, αφού πρέπει να εξαρτάται από τη σταθερά  $\hbar$ , από την ποσότητα  $GM_0$  και από την ταχύτητα του φωτός  $c$

$$k_B T = \eta_{10} \frac{\hbar c}{R_s} = \eta_{10} \frac{\hbar c^3}{2GM_o} \quad (62)$$

όπου το  $\eta_{10}$  συμβαίνει να είναι  $1/4\pi$ . Η έμμεση εκπομπή ακτινοβολίας από τη μαύρη τρύπα συνεπάγεται συνεχή απώλεια ενέργειας:  $dU/dt = c^2 dM/dt = -4\pi R_s^2 \sigma T^4$ . Αντικαθιστώντας  $k_B T$  από την (62) έχουμε για τη μάζα  $M(t)$  της μαύρης τρύπας την ακόλουθη χρονική εξάρτηση:

$$M^3 = M_o^3 - \frac{\pi^2}{10(8\pi)^3} \frac{\hbar c^4}{G^2} t \quad (63)$$

Ο τύπος (63) συνεπάγεται ότι μια απομονωμένη μαύρη τρύπα έχει ένα πεπερασμένο χρόνο ζωής ίσο με  $t_0 = 2.63 \times 10^{-13} M_o^3$  χρόνια, όπου η  $M_o$  είναι σε kg. Έχοντας την ενέργεια και τη θερμοκρασία, βρίσκουμε την ενεργό εντροπία  $S$  της μαύρης τρύπας από την εξίσωση  $dU = TdS$ . Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{S}{k_B} = \frac{A}{4\ell_p^2} \quad (64)$$

όπου  $A = 4\pi R_s^2$  είναι το εμβαδόν της μαύρης τρύπας και  $\ell_p$  είναι το μήκος Planck, που δίνεται από την εξίσωση  $\ell_p = \sqrt{\hbar G / c^3} = 1.62 \times 10^{-35} \text{ m}$ .

Ας αναλογιστούμε τώρα την περίπτωση που η εναπομείνουσα μάζα  $M_0$  του άστρου συμβαίνει να είναι μικρότερη ή περίπου ίση με τη μάζα του Ήλιου. Σε αυτήν την περίπτωση η βαρύτητα θα συμπιέσει την μάζα  $M_0$  έως ότου όλα τα ηλεκτρόνια να αποσπαστούν από τον πυρήνα και να σχηματίσουν ένα ψυχρό πλάσμα από  $N_\alpha$  πυρήνες με φορτίο  $Z$  (κατά μέσο όρο) ο καθένας και  $Z N_\alpha$  ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η

ενέργεια αυτού του νεκρού άστρου, γνωστού ως λευκού (ή σκοτεινού) νάνου, αποτελείται από την κβαντική κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων (που δίνεται από την Εξ. (2α), υποθέτοντας προς το παρόν ότι οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων δεν είναι σχετικιστικές) και από τη βαρυτική ενέργεια (η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι αμελητέα σε σχέση με τη βαρυτική). Ελαχιστοποιώντας την ολική ενέργεια ως προς τον όγκο  $V=(4\pi/3)R^3$  (ή ως προς την ακτίνα  $R$ ) για να βρούμε την τιμή ισορροπίας έχουμε<sup>iv</sup>

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 \approx 385 \left( \frac{Z}{A} \right)^5 \frac{\hbar^6}{G^3 m_e^3 m_u^5} \frac{1}{M_o} \quad (65)$$

Για  $M_o=M_s$ , δηλ. ίση με τη μάζα του Ηλιου μας, ο τελικός όγκος του λευκού νάνου είναι περίπου ίσος με τον όγκο της Γης. Από τις Εξ. (65) και (2α) μπορούμε να βρούμε τη μέση κινητική ενέργεια ανά ηλεκτρόνιο,  $\epsilon_k$ , η οποία είναι ανάλογη με τη δύναμη  $4/3$  της μάζας:  $\epsilon_k \sim M_o^{4/3}$ . Εφόσον  $\epsilon_k \ll m_e c^2$ , η Εξ. (65) ισχύει. Όσο όμως η μάζα  $M_o$  αυξάνεται, η ποσότητα  $\epsilon_k$  μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από  $m_e c^2$ , και η Εξ. (2β) είναι η κατάλληλη για την κινητική ενέργεια. Σ'αυτή την περίπτωση, και η βαρυτική ενέργεια  $E_G$  και η κινητική  $E_k$  είναι της μορφής  $1/R$ . Αν ο συντελεστής της  $E_G$  είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή της  $E_k$ , (σε απόλυτη τιμή) η ηλεκτρονική κβαντική κινητική ενέργεια δεν μπορεί να σταματήσει τη βαρυτική κατάρρευση. Η ισότητα των δύο συντελεστών συμβαίνει όταν<sup>iv</sup>

$$N_n = 0.77 \left( \frac{1}{\alpha_G} \right)^{3/2} = 1.45 N_s \quad (66)$$

Όταν ο αριθμός νουκλεονίων ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή (66), ο λευκός νάνος καταρρέει. Η κατάρρευση του λευκού νάνου, ωθεί τα ηλεκτρόνια μέσα στον πρωτόνια και το σύστημα γίνεται αυτό που ονομάζουμε αστέρας νετρονίων. Όσο τα νετρόνια είναι μη σχετικιστικά, μπορούν να σταματήσουν τη βαρυτική κατάρρευση στην ακτίνα των περίπου 15km και μιας πυκνότητας συγκρίσιμης με αυτή του πυρήνα. Όμως, για μεγαλύτερη μάζα, τα νετρόνια θα γίνουν και αυτά σχετικιστικά και η ολική ενέργεια θα έχει τη μορφή

$$E = E_k + E_G = \frac{2.32\beta c h N_v^{4/3}}{V^{1/3}} - \frac{1.612a G N_v^2 m_u^2}{V^{1/3}} \quad (67)$$

όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αριθμητικοί παράγοντες κοντά στη μονάδα, που η τιμή τους εξαρτάται από την κατανομή πυκνότητας μέσα στον αστέρα νετρονίων. Έτσι ο αστέρας νετρονίων θα καταρρεύσει σε μια μαύρη τρύπα όταν η μάζα του ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή που δίνεται από

$$N_{v,crit} = \left( \frac{2.32\beta}{1.612a} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\alpha_G} \right)^{3/2} \approx 3.25 N_s \quad (68)$$

Η τελευταία τιμή αποκτάται παίρνοντας  $\beta=\alpha$ .

## Σύμπαν

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με τη συνήθη παραδοχή ότι το Σύμπαν είναι ομοιογενές και ισότροπο (για κλίμακες μεγαλύτερες από περίπου 100 εκατ. έτη φωτός). Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ότι το Σύμπαν διαστέλλεται

<sup>iv</sup> Ο αριθμητικός παράγοντας άλλαξε ώστε να συμπεριλαμβάνεται και το γεγονός ότι η πυκνότητα είναι ανομοιογενής.

με μία ταχύτητα  $dR/dt \equiv \dot{R}$  η οποία είναι ανάλογη της απόστασης  $R$  από το σημείο παρατήρησης. Η σταθερά αναλογίας, ονομάζεται σταθερά του Hubble, συμβολίζεται με  $H$  και είναι ανεξάρτητη του  $R$  αλλά εξαρτάται από το χρόνο  $t$ . Εκτός από τις παγκόσμιες σταθερές, όπως η  $G$ , ο βασικός παράγοντας που καθορίζει το Σύμπαν είναι η μέση πυκνότητα μάζας του,  $\rho$ , ή η πυκνότητα ενέργειάς του,  $\varepsilon = \rho c^2$ . Από διαστατική ανάλυση προκύπτει ότι η σταθερά  $H$  πρέπει να είναι ανάλογη του  $\sqrt{G\rho}$ . Αυτή η εξάρτηση επιβεβαιώνεται από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ). Μπορεί ακόμα να εξαχθεί και από τη Νευτώνια Μηχανική, θεωρώντας τη βαρυτική δύναμη  $F$  σε μία μάζα  $\delta m$  που βρίσκεται σε απόσταση  $R$  από το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων. Η δύναμη αυτή είναι  $-GM\delta m/R^2$  όπου  $M$  είναι η μάζα που περικλείεται σε όγκο σφαίρας ακτίνας  $R$ . Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Νεύτωνα  $\delta m \dot{v} = F$  (με  $M$ =σταθ.) έχουμε

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{C}{R^2} \quad (69)$$

$C$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Η Εξ. (69) συμπίπτει με το τελικό αποτέλεσμα της ΓΘΣ. Σύμφωνα με την τελευταία, η τιμή του  $C$  καθορίζει τη γεωμετρία του χώρου. Εάν  $C=0$ , η γεωμετρία είναι ευκλείδεια. Αλλιώς είναι είτε σφαιροειδής, είτε υπερβολοειδής ανάλογα με το πρόσημο του  $C$ . Το επιχείρημα του πληθωρισμού οδηγεί στο συμπέρασμα ότι απουσιάζει ο τελευταίος όρος. Άρα η γεωμετρία του χώρου (σε μεγάλες κλίμακες) είναι ευκλείδεια. Συνήθως, η Εξ. (69) γράφεται θέτοντας  $C=0$  και αντικαθιστώντας το  $\rho$  από το  $\varepsilon/c^2$ :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon \quad (70)$$

Για να λύσουμε την Εξ. (70) πρέπει να γνωρίζουμε τις διάφορες συνεισφορές στην πυκνότητα ενέργειας  $\varepsilon$  και την εξάρτησή τους από το  $R$ . Μία συνεισφορά είναι από τη συνήθη ύλη, δηλ., τα πρωτόνια, τα νετρόνια κλπ. Ονομάζεται βαρυονική συνεισφορά και η εξάρτησή της από το  $R$  είναι  $\varepsilon_b \sim 1/R^3$ , αφού ο αριθμός τους διατηρείται. Άλλη μία είναι από τα νετρίνα που είναι επίσης  $1/R^3$  (για  $t$  όχι τόσο κοντά στη στιγμή του big-bang). Μία τρίτη συνεισφορά έρχεται από τα φωτόνια, που βάσει της Εξ. (7) είναι ανάλογη του  $T^4 \sim 1/R^4$  (αφού η εντροπία των φωτονίων,  $S \sim R^3 T^3$  διατηρείται). Μερικές πρόσφατες παρατηρήσεις δείχνουν ότι υπάρχουν δύο επιπλέον συνεισφορές: Μία, που σχετίζεται με την επονομαζόμενη σκοτεινή ύλη, η οποία πιστεύεται ότι αποτελείται από εξωτικά σωματίδια – δεν έχουν παρατηρηθεί πειραματικά – τα οποία δεν αλληλεπιδρούν με το ΗΜ πεδίο. Η  $\varepsilon_{DM}$  αναμένεται να εξαρτάται από την απόσταση ως  $1/R^3$ , μια και ο αριθμός των σωματιών αυτών διατηρείται. Η άλλη συνεισφορά, που ονομάζεται σκοτεινή ενέργεια, φαίνεται να είναι ανεξάρτητη από την απόσταση  $R$  και, συνεπώς, είναι παρόμοια με την κοσμολογική σταθερά του Einstein.

Στην πρώιμη ιστορία του Σύμπαντος, κυριάρχησε η φωτονική συνεισφορά στην ενεργειακή πυκνότητα εξαιτίας της εξάρτησής της από το  $1/R^4$ . Έτσι, σ' αυτή την εποχή, η Εξ. (70) γίνεται  $\dot{R}/R \sim 1/R^2$  ή  $R\dot{R} = const$  ή

$$R \sim t^{1/2}, \text{ κυριαρχία φωτονίων} \quad (71)$$

Σε μια μεταγενέστερη περίοδο η ύλη (συνήθης και σκοτεινή) μαζί με τις συνεισφορές της σκοτεινής ενέργειας κυριαρχούν, που ενσωματωμένες στην Εξ. (70) δίνουν

$$\dot{R} = \left[ \frac{c_1}{R} + c_2 R^2 \right]^{1/2} \quad (72)$$

Η Εξ. (72) μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά για να δώσει

$$R(t) = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/3} \left[ \sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{c_2}t\right) \right]^{2/3} \quad (73)$$

που για σχετικά μικρές τιμές του ορίσματος  $\sqrt{c_2}t$  ανάγεται στην εξής σχέση

$$R \sim t^{2/3}, \text{ κυριαρχία ύλης,} \quad (74)$$

ενώ για μεγάλες τιμές του  $\sqrt{c_2}t$  δίνει

$$R \sim e^{H_0 t}, \quad H_0 = \sqrt{c_2}, \text{ κυριαρχία σκοτεινής ενέργειας} \quad (75)$$

Εισάγοντας τη σημερινή τιμή της ακτίνας του Σύμπαντος  $R_\Sigma$  και τη σημερινή τιμή της σταθεράς του Hubble καταλήγουμε, με βάση την (73), στην ακόλουθη σχέση

$$R(t) \approx 0.7R_\Sigma \left[ \sinh(0.09t) \right]^{2/3}, \quad t \geq 2 \times 10^5 \text{ χρόνια} \quad (76)$$

όπου  $t$  είναι σε δις χρόνια. Η Εξ. (76) συνεπάγεται ότι η δεύτερη παράγωγος της  $R$  ως προς το χρόνο, από αρνητική γίνεται θετική για  $t \approx 7.5$  δις χρόνια μετά το big-bang. Εφόσον σήμερα είμαστε 13.7 δις χρόνια μετά το big-bang, μπορούμε να φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι ζούμε στην περίοδο της επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος. Δεδομένα από το δορυφόρο WMAP [5,6] και δεδομένα από μακρινούς υπερnovα δείχνουν ότι πράγματι έτσι έχει η κατάσταση.

## Αναφορές

1. E.R.Cohen, D.R. Lide, G.L.Trigg, eds., AIP Desk Reference, Springer-Verlag, New York (2003).
2. D. R. Lide, ed., Handbook of Chemistry and Physics, 87<sup>th</sup> edition, CRC, Taylor and Francis, NW (2006).
3. E. N. Economou, *The Physics of Solids*, to be published by Springer-Verlag.
4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London (1959).
5. [http://www.nasa.gov/topics/universe/features/wmap\\_five.html](http://www.nasa.gov/topics/universe/features/wmap_five.html).
6. Hinshaw, G.; et al. (2008), "Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results", *Astrophysical Journal Supplement* (submitted). arXiv:0803.0732.