

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 4

2.300 ΔΡΧ. / € 6,75

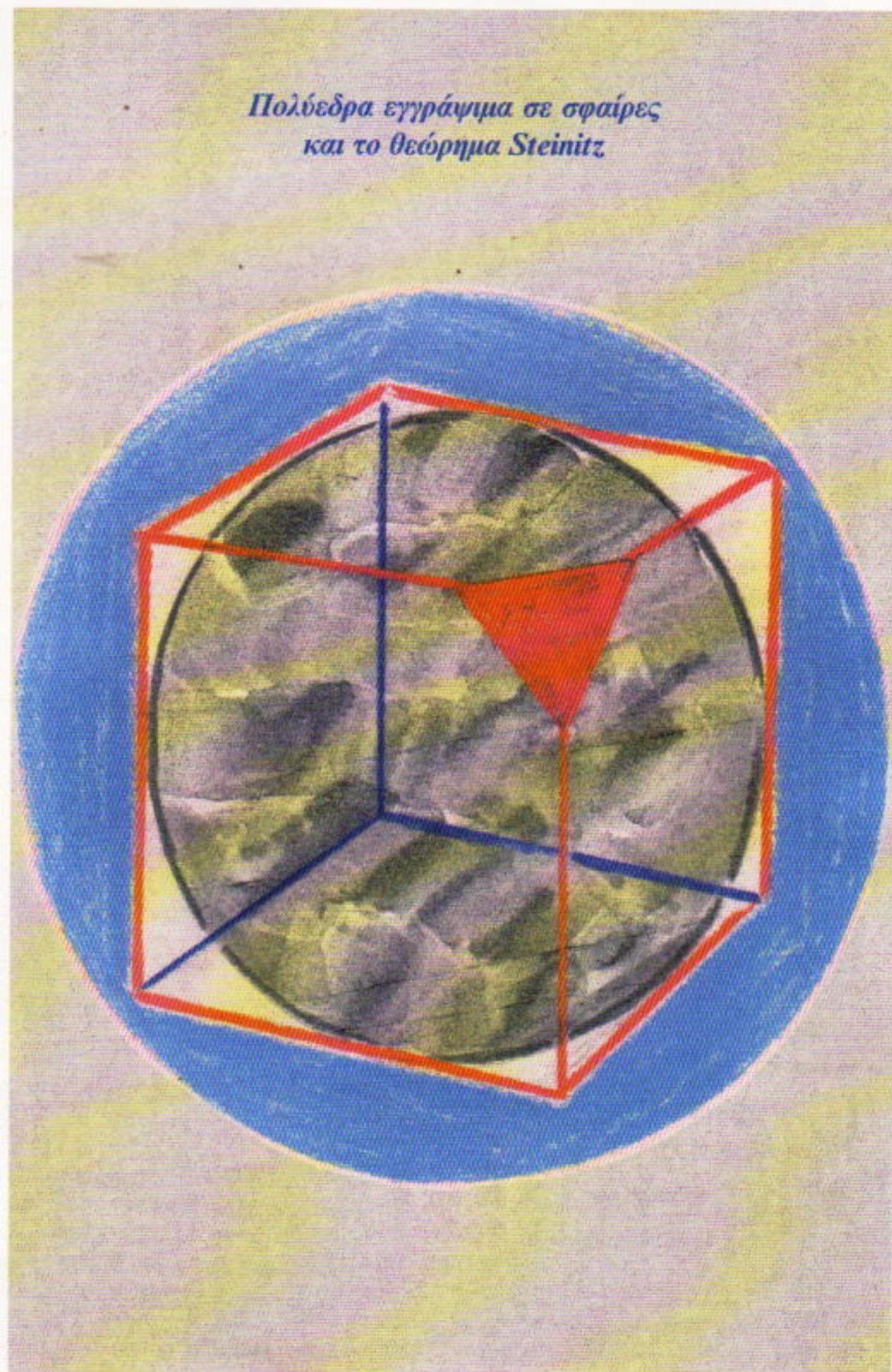
*Πολύεδρα εγγράψιμα σε σφαίρες  
και το θεώρημα Steinitz*

- Νανοτεχνολογία και εγκέφαλος
- Ο «καρόνας του ακραίου» στα μαθηματικά
- Τι είναι το κέντρο μάζας;
- Πόσο ζει ένας κομήτης;
- Εξερεύνηση υπολοίπων και ισοτιμιών
- Η επιστήμη του άλματος επί κοντώ
- Το θεώρημα των Μενελάου
- Η κυματομηχανική του Erwin Schrödinger
- Ύλη και μαγνητισμός
- Τι είναι τα πηγάδια δυναμικού;



9 771106 268007 07

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ





*Διάπτων αστέρας* (1936), του Joan Miró

**Μ**ΕΤΕΩΡΑ ΕΙΣΕΡΧΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΑ ΜΑΣ ΚΑΘΗμερινά, αλλά η διάρκεια ζωής των «διαττόντων αστέρων» —των φλεγόμενων μετεώρων— είναι τόσο βραχεία που καθιστά σπάνια την παρατήρησή τους. Ωστόσο, ακόμη πο δυσεύρετοι στον νυχτερινό ουρανό είναι οι κομήτες: στην περίπτωσή τους, η σπάνιας της επίσκεψης υπερκερά τη βραχύτητα της ζωής τους. Παρότι μακρό-

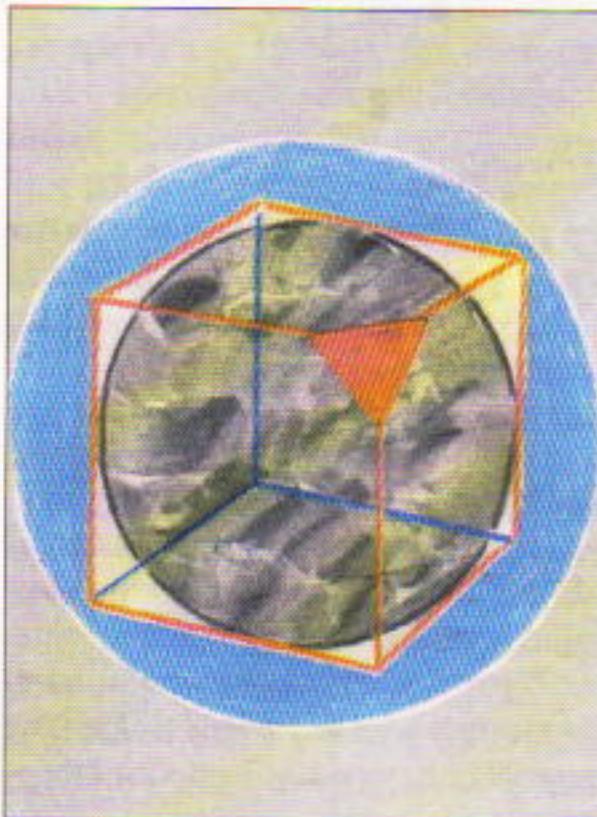
βιοι, οι κομήτες ουσιαστικά «καίγονται» ασταμάτητα, καταναλώνοντας το «καύσιμο» που τους καθιστά φεγγοβόλους. Άλλα πόσο χρόνο μπορούμε να αναμένουμε πως θα φέγγει στον ουρανό ένας κομήτης όπως αυτός του Halley όταν διασχίζει το ηλιακό μας σύστημα; Μια καυτή ερώτηση για λαμπερά μυαλά, που απαντιέται στο άρθρο της σελίδας 20.

Λάδι σε μουσαρά, 100 × 85 εκ., Δωρεά Joseph H. Hazen, © 2001 Διοκτητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουδούνηκτον

# QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2001

ΤΟΜΟΣ 8 / ΤΕΥΧΟΣ 4



Εικονογράφηση: Yuri Vaschenko

Γνωρίζετε το θεώρημα Steinitz; Μήπως γνωρίζετε κατά πόσον είναι δυνατόν να εγγράψουμε σε μια σφαίρα το πολύεδρο που προκύπτει εάν από έναν κύβο αποκόψουμε κάποια από τις κορυφές του; Αν όχι, τότε πρέπει να ανατρέξετε στο άρθρο «Εγγράψιμα ή όχι;» (σελ. 24) για να έχετε εμπειριστατωμένες απαντήσεις.

Στο παρόν τεύχος, όμως, περιλαμβάνονται και άλλα ενδιαφέροντα θέματα: η «νανο-βιομηχανική επανάσταση» (σελ. 6), ο «κανόνας του ακραίου» στα μαθηματικά (σελ. 14), τα «πηγάδια δυναμικού» (σελ. 30), το «κινεζικό θεώρημα υπολοίπων» (σελ. 47), ο «ηφαιστιακός καταπέλτης» δορυφόρων (σελ. 52), κ.λπ. Πραγματικά ένα πλούσιο τεύχος —«μια αγάπη» για όλο το καλοκαίρι.

## ΑΡΘΡΑ

6 Εγκέφαλος και νόηση

### Τι είναι η σκέψη;

V. Meshcheryakov

14 Άκρον άωτον

### Φτάστε στα έσχατα όρια

A.L. Rosenthal

20 Κοσμική εξάντληση

### Πόσο ζει ένας κομπότης;

S. Varlamov

24 Τρισδιάστατες δομές

### Εγγράψιμα ή όχι;

E. Andreev

30 Πρόσκληση σε πτώση

### Μελετώντας τα πηγάδια δυναμικού

K. Kikoin

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

2 Ο κόσμος των κβάντων

Τι και πώς να μαθαίνουμε

5 Σπαζοκεφαλίες

19 Πώς λύνεται;

37 Στο μαυροπίνακα I

Το θεώρημα του Μενελάου

40 Καθειδοσκόπιο

Έλη και μαγνητισμός

42 Στο μαυροπίνακα II

Τι είναι το κέντρο μάζας;

45 Στο εργαστήριο I

Ο χειμώνας υπό τους πόδας

47 Στο μαυροπίνακα III

Εξερεύνηση υπολοίπων και  
ιοπιμιών

52 Θεμέλια

Βάση εκτόξευσης δορυφόρων

57 Φυσική αγωγή

Περί του άλματος επί κοντώ

59 Στο εργαστήριο II

Παρατηρήστε την επιφανειακή  
τάση

62 Αναδρομές

Η κυματομηχανική του Erwin  
Schrödinger

65 Με λίγη φαντασία

Αυτοκίνητοι εκτοξευτήρες νερού

69 Απαντήσεις, Υποδείξεις  
και Λύσεις

77 Πληροφορική

Μουσικές καρέκλες

# Τι και πώς να μαθαίνουμε

«Εξω, έξω τα βιβλία. / Στη φωτιά η φλυαρία.  
Λέξεις, λόγοι, όλα κάτω, / τί του κάκου τα φυλάττω;»  
—Αθανάσιος Χριστόπουλος

**T**I ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΞΕΡΕΙ ΚΑΠΟΙΟΣ για να θεωρείται μορφωμένος; Στην εκπαίδευση δεν αφιερώνεται σημαντικός χρόνος σ' αυτή την προβληματική —το σχολείο έχει ήδη την απάντηση: τα απαραίτητα σε γραμματική και συντακτικό, την πλοκή μερικών λογοτεχνικών έργων των περασμένων αιώνων, τις αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων για τα τρίγωνα. Ωστόσο, όταν στους υπολογιστές προσπαθούμε να «μεταδώσουμε» γνώσεις ώστε να μπορούν να λειτουργούν «έξυπνα», αποδεικνύεται ότι αυτά δεν είναι όλα όσα κυρίως πρέπει να γνωρίζουν. Οι υπολογιστές πρέπει να ξέρουν πώς να δρουν, πώς να καταλαβαίνουν τι έχουν πει και τι έχουν κάνει οι άλλοι, και να μαθαίνουν από τα λάθη τους σχετικά με όλα τούτα.

Το να «μορφώσεις» έναν υπολογιστή σημαίνει να τον καταστήσεις ικανό να συνάγει συμπεράσματα (εάν ο Πάνος χτυπήσει τη Γιώτα, σημαίνει ότι αυτή μάλλον είναι πληγωμένη ή θυμωμένη, και πιθανόν θα του ανταποδώσει το χτύπημα)· να τεκμαίρει πεποιθήσεις (εάν οι ένοπλες δυνάμεις των ΗΠΑ βομβαρδίζουν το Ιράκ, πάει να πει ότι οι Αμερικανοί πρέπει να πιστεύουν πως η βία είναι δικαιολογημένη προκειμένου να προστατευθεί η παγκόσμια τάξη)· και να διδάσκεται από την αποτυχία (εάν την τελευταία φορά που καθίσατε σε εστιατόριο παραγγείλατε φιλέτο και

σας το έφεραν ωμό, ίσως την επόμενη φορά να θυμάστε να το ζητήσετε καλοφημένο). Τούτα ακριβώς είναι τα πράγματα που και οι άνθρωποι πρέπει να μάθουν να κάνουν. Γνωρίζουμε ότι ένας υπολογιστής, επί παραδείγματι, μπορεί να προγραμματιστεί έτσι ώστε να διαθέτει εγκυκλοπαιδικές γνώσεις για σωρεία γεγονότων, αλλά αυτό καθόλου δεν σημαίνει ότι ο υπολογιστής είναι «νοήμων» —τουλάχιστον περισσότερο απ' όσο θα θεωρούσα νοήμονα κάποιον που απλώς έχει την ικανότητα να αραδιάζει πληθώρα άσχετων γεγονότων. Άλλα, παρά τα όσα γνωρίζουμε για τον τρόπο με τον οποίο μαθαίνουν οι άνθρωποι όπως και για την ίδια τη νοημοσύνη, τα σχολεία παραμένουν σταθερά προσκολλημένα στο μαθησιακό πρότυπο που δίνει έμφαση στα γεγονότα και υποβαθμίζει την πράξη. Ο διαχωρισμός της μάθησης από την πράξη αποδεικνύεται επιζήμιος σε όλα.

Σχετικά πρόσφατα έχει γίνει της μόδας να καθορίζουμε τη νοημοσύνη χρησιμοποιώντας διάφορους «καταλόγους εγγραμματοσύνης». Τα βιβλιοπωλεία βρίθουν από συλλογές με διάφορα ειδη γεγονότων —επιστημονικών, καλλιτεχνικών, ακόμη και θρησκευτικών—, όλες με στόχο να υποδείξουν τι ακριβώς οφείλει να ξέρει κάποιος για να θεωρείται «στοιχειωδώς εγγράμματος». Η υποκείμενη ιδέα είναι ότι η μόρφωση σημαί-

νει τη γνώση συγκεκριμένων πραγμάτων. Σε αυτό βεβαίως εξυπακούεται ότι ως κοινωνία έχουμε συμφωνήσει στο ποια πράγματα θα πρέπει να ξέρει ο καθένας, και μάλιστα έχουμε αποφασίσει πως ο ρόλος της εκπαίδευσης δεν είναι παρά η διανομή πληροφοριών.

Άλλα μην τα πιστεύετε όλα τούτα. Δεν υπάρχει σύνολο γνώσεων που ο καθένας θα πρέπει να κατέχει. Δεν είναι κακό, βέβαια, να γνωρίζει κάποιος πότε ανακαλύφθηκε η Αμερική και ποιος συνέταξε το πρώτο σύνταγμα της, αλλά είναι κακό να υιοθετήσουμε τη θέση ότι, εφόσον αξίζει να τα ξέρει κάποιος, η διδασκαλία τους στους μαθητές θα πρέπει να μονοπωλήσει όλη την εκπαίδευση. Αυτή η αντίληψη καθιστά το σχολείο ένα πληκτικό, αγχωτικό και αδιάφορο μέρος —όπως ίσως έχετε ήδη ανακαλύψει.

Τα γεγονότα δεν συνιστούν το «νόμισμα» της μάθησης, ούτε η καλή γνώση τους είναι ενδεικτική για τη μόρφωση κάποιου. Τα γεγονότα παιζουν σημαντικό ρόλο στο εκπαιδευτικό σύστημα επειδή προσφέρονται για εξετάσεις. Και αυτό που «εξ απαλών ονύχων» έχει διαμορφώσει την εκπαίδευσή μας είναι οι εξετάσεις (ως επί το πλείστον «άσχετες»). Περιέργως, τα πο σημαντικά πράγματα που μαθαίνουν οι άνθρωποι δεν μπορούν να τα θεωρήσουν σαφώς ως κεκτημένες γνώσεις. Ποιος

είναι ο σωστός τρόπος να κάνεις το πρόσωπο των ονείρων σου να ενδιαφέρθει για σένα; Πώς μπορεί κάποιος να καταφέρει να ακολουθήσει μια επιτυχημένη καριέρα; Αληθεύει ότι η κατάσταση στη Βοσνία είναι ίδια μ' αυτή στη Γερμανία των ναζί ή μοιάζει περισσότερο με του Βιετνάμ; Το εγγράμματο άτομο θα μπορούσε να έχει απαντήσεις γι' αυτές τις ερωτήσεις. Ωστόσο, δεν είναι εύκολες ερωτήσεις και δεν υπάρχουν απλές απαντήσεις. Το να είναι κανείς μορφωμένος σημαίνει να μπορεί να καταλάβει τις ερωτήσεις, και να γνωρίζει σε βάθος τη σχετική ιστορία ώστε να είναι ικανός να διατυπώνει αιτιολογημένα επιχειρήματα. Το πραγματικό περιεχόμενο της εκπαίδευσης συνίσταται στο να μαθαίνουμε να σκεφτόμαστε και να εκφράζουμε τη σκέψη μας με πειστικό τρόπο.

Ποιο είναι τότε το «νόμισμα» της μάθησης, θα αναρωτιέστε. Είναι η ετοιμότητα αποδοχής του λάθους, η προθυμία στην αποτυχία και η ικανότητα εστίασης στη σύγχυση, με την ελπίδα να μπορέσετε να αναπτύξετε ή να κατανοήσετε μια εξήγηση που θα ξεκαθαρίζει τα πράγματα.

Γι' αυτό, ο τρόπος με τον οποίο μεταδίδονται οι γνώσεις είναι πολύ πιο σημαντικός και απ' αυτές τις ίδιες. Σημασία δεν έχει το τι ξέρετε, αλλά το πώς φτάσατε να το ξέρετε. Συνήθως, όσα μαθαίνουμε στο σχολείο προκύπτουν μέσα από τη διαδικασία της αποστήθισης. Άλλα το να αποστηθίσετε κάτι δεν σημαίνει ότι είστε ικανοί να το θυμάστε αργότερα, όταν η πληροφορία αυτή μπορεί να σας είναι χρήσιμη. Η πληροφορία που αποκτάτε σε ένα συγκεκριμένο γενικό πλαίσιο δεν είναι άμεσα χρήσιμη σε ένα άλλο πλαίσιο. Και ενόσω δεν μπορείτε να αντισταθείτε στις προσπάθειες του σχολείου να σας υποχρεώσει να αποστηθίσετε γεγονότα, είναι σημαντικό να αναγνωρίσετε ότι η απλή αποστήθιση δεν σημαίνει ότι ξέρετε πολλά. Η ικανότητα να απομνημονεύετε και να αραδιάζετε γεγονότα μπορεί να χρησιμεύει στο να περνάτε τις εξετάσεις, να εντυπωσιάζετε τους φίλους σας, και να κερδίζετε τηλεοπτικά παιχνί-

δια γνώσεων, αλλά σχεδόν σε τύπο τα περισσότερο.

Πρόσφατα, ρώτησα τους προπτυχιακούς φοιτητές μου τι είχαν μάθει τον τελευταίο καιρό. Ανέφεραν διάφορα γεγονότα που είχαν διδαχθεί σε άλλα μαθήματα, ωστόσο δεν είχαν ιδέα αν όλες αυτές οι πληροφορίες θα τους χρησίμευαν κάποτε. Όταν υπέβαλα την ίδια ερώτηση σε μια τάξη μεταπτυχιακών φοιτητών, οι απαντήσεις τους αφορούσαν κυρίως την καθημερινή τους ζωή. Είχαν μόλις ενοικιάσει διαμερίσματα για πρώτη φορά, και έτσι άκουσα πολλά για μαγειρική και πάστρα· αλλά μου είπαν και πόσα από αυτά που είχαν μάθει στη σχολή τούς ήταν χρήσιμα σε προγράμματα που προσπαθούσαν να ολοκληρώσουν. Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές μαθαίνουν όσα χρειάζονται για να φέρουν εις πέρας συγκεκριμένα καθήκοντά τους. Γι' αυτούς, η μάθηση σημαίνει απόκτηση γνώσης στην υπηρεσία ενός σκοπού. Άλλα (εκτός κι αν θεωρείτε το να περνάτε τις εξετάσεις αυτοοκοπό) δεν θα βρείτε αυτό το μοτίβο να επαναλαμβάνεται πριν το πτυχίο.

Για να κάνουμε τους υπολογιστές νοήμονες, πρέπει να τους διδάξουμε να κατευθύνουν μόνοι τους την εκπαίδευσή τους. Δεν μπορούμε απλώς να μεταγγίζουμε γεγονότα στις μνήμες τους, διότι δεν θα ξέρουν πώς να αξιοποιήσουν αυτές τις γνώσεις. Άλλα αν οι υπολογιστές αποκτήσουν κάποια γνώση εκτελώντας κάτι, τότε θα μπορούν και να τροποποιήσουν τις διαδικασίες που μέχρι τότε ήταν λανθασμένες. Όμοια και εσείς πρέπει να μάθετε να κατευθύνετε την εκπαίδευσή σας. Το γενικό πλαίσιο παρέχει τα υποστυλώματα για τη μάθηση, και έτσι το να βιώσετε πολλές διαφορετικές καταστάσεις ή να δοκιμάσετε πολλά διαφορετικά πράγματα είναι πολύ σημαντικό. Το να μην ξέρει κάποιος πώς να ενεργήσει σε μια ορισμένη κατάσταση τον ωθεί να προσπαθήσει να μάθει πώς να αντιμετωπίζει το άγνωστο —γι' αυτό συνεχίστε να προσπαθείτε να κάνετε νέα πράγματα, και επιχειρήστε να καταλάβετε γιατί επιτυγχάνετε και γιατί αποτυγχάνετε. Αντιδράστε σε όσους αρέσκονται να σας κάνουν δι-

αλέξεις, παρέχοντάς σας πληροφορίες που δεν θέλετε. Από την άλλη, απαιτήστε να σας διδάξουν για ότι μπορέσατε να πετύχετε αντιμετωπίζοντας δύσκολίες.

Το κλειδί για να μάθετε —αφού προσπαθήσατε να κάνετε κάτι, αποτύχατε, και χρησιμοποιήσατε την απαιτούμενη βοήθεια— έγκειται στη διαδικασία της γενίκευσης. Δεν είναι αρκετό να ξέρετε απλώς πώς να λειτουργήσετε σε μια ορισμένη κατάσταση· πρέπει να μάθετε επίσης να γενικεύετε τις γνώσεις που αποκτήσατε, για να μπορείτε να τις εφαρμόζετε και αλλού. Εάν αυτό σας φαίνεται δύσκολο, τότε δεν είστε παρά ένας συλλέκτης άσχετων γνώσεων, χρήσιμων μόνο για μεμονωμένους τομείς αλλά άχρηστων αλλού.

Ασφαλώς, δεν μπορείτε να πραγματοποιείτε γενικεύσεις χωρίς ενσυνειδητή προσπάθεια. Αυτό ωστόσο σημαίνει και δημιουργία γενικεύσεων που είναι εγγενώς μη ελέγχιμες, που παραμένουν καθαρά υποθετικές, που δεν συνιστούν γεγονότα. Ακόμα κι έτσι, όμως, μη διστάζετε να διατυπώνετε γενικεύσεις σε άτομα που γνωρίζετε. Αναμφίβολα, πολλές φορές θα σας πουν ότι κάνετε λάθος, αλλά επιμένετε να στηρίζουν τους ισχυρισμούς τους. Γενικά, οι άνθρωποι αντιπαθούν τις νέες γενικεύσεις, επειδή δεν μπορούν να γνωρίζουν εάν είναι ορθές ή όχι. Οι άνθρωποι φοβούνται το άγνωστο· η πραγματική μάθηση και η βαθιά γνώση όμως εξαρτώνται από την αντιπαράθεση με το άγνωστο, ίσως και με το μη γνώσιμο. Προτείνετε λοιπόν νέες γενικεύσεις, και εστέ έτοιμοι να τις υπερασπιστείτε.

—Roger C. Schank

*O Roger C. Schank είναι παγκοσμίως γνωστός επιστήμονας των υπολογιστών και γνωσιακός ψυχολόγος. Κατέχει την έδρα John Evans στην ηλεκτρομηχανολογία και την επιστήμη των υπολογιστών στο Πανεπιστήμιο Northwestern. είναι διευθυντής του Ινστιτού των επιστημών της μάθησης, καθηγητής ψυχολογίας, και καθηγητής εκπαίδευσης και κοινωνικής πολιτικής στο ίδιο πανεπιστήμιο.*

## Περιόδου πρώτης, τέλος

Με μεγάλη λύπη πληροφορηθήκαμε από την ομάδα που επιμελείται και εκδίδει το *Quantum* στις ΗΠΑ ότι σταματά η έκδοση του αμερικανικού περιοδικού. Τα διοικητικά συμβούλια των επιστημονικών ενώσεων που συμμετείχαν στην έκδοση κατέληξαν σ' αυτή την απόφαση υπό την πίεση πολλών προβλημάτων που σχετίζονταν με ατέλειες στην εσωτερική δομή των ενώσεων, με την οικονομική τους δυσπραγία και, βεβαίως, με τις πωλήσεις του περιοδικού στον αγγλόφωνο κόσμο, οι οποίες πλέον δεν χαρακτηρίζονταν ικανοποιητικές. Έτσι, η αμερικανική έκδοση αδυνατούσε να ανταποκριθεί στις οικονομικές της κυρίως υποχρεώσεις, και η περαιτέρω λειτουργία της ήταν αμφίβολη.

Πέραν τούτων, σημασία έχει ότι «εξ ανακλάσεως» υποχρεωνόμαστε και εμείς να διακόψουμε, επί του παρόντος τουλάχιστον, την έκδοση του ελληνικού *Quantum* —το πρωτογενές υλικό του περιοδικού (τα περισσότερα κείμενα και την εικονογράφηση) το αντλούσαμε αποκλειστικά από την αμερικανική έκδοση. Το παρόν τεύχος, λοιπόν, είναι το τελευταίο της περιόδου των οκτώ χρόνων συνεχούς και συνεπούς έκδόσεως του *Quantum* στα ελληνικά. Ελπίζουμε πως στο εγγύς μέλλον θα υπάρξουν οι προϋποθέσεις εκείνες που θα μας επιτρέψουν να επαναλάβουμε, με το ίδιο αίσθημα ευθύνης, την έκδοση ενός από τα καλύτερα παγκοσμίως εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά.

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συνεργάτες και φίλους που επί οκτώ χρόνια βοήθησαν στην έκδοση του περιοδικού, και φυσικά όλους τους αναγνώστες που με ιδιαίτερο πάθος και ζήλο αγκάλιασαν την ελληνική έκδοση.

—Αλ. Μάραλης

# QUANTUM

## ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ  
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,  
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)  
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

### ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης  
Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλων Εκδότης  
Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές σύνταξης  
Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant  
Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ  
William P. Thurston, Μετάλλιο Φίλντις (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική  
Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας  
Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά  
Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη  
Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης  
Sergey Ivanov  
Αντεπιστέλλουσα Αρχισυντάκτρια  
Jennifer M. Wang  
Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων  
Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης  
Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του Quantum  
Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov  
Yevgeniya Morozova, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή  
Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT  
John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα  
Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη  
Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας  
Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασασαγουσέττη  
Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς  
Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Rutherford, Λουιζιάνα  
Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα  
Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίσιγκαν

### ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής  
Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια  
Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός,  
Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός,  
Παναγιώτης Σταρούλης-φυσικός και Αλέκος Μάραλης-φυσικός

Ειδικοί συνεργάτες και Επιστημονικοί σύμβουλοι  
Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Οχείου  
Πέτρος Δήμητρας, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης  
Γιώργος Θηραίος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας  
Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης  
Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας  
Θεοδόσης Χριστοδούλακης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πλωσική επιμέλεια  
Νίκος Νιάκος  
Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση  
Αβ. Μαχαρίδης  
Τυποτεχνική επιμέλεια  
Ηρακλής Ντούσος  
Φύλμ., μοντάζ  
Χρ. Μήτσης  
Γραμματεία  
Μαρία Κουρή<sup>1</sup>  
Εκτύπωση  
Ν. Πουλόπουλος  
Υπεύθυνη λογιστρίδη  
Μαρία Μάραλη<sup>2</sup>  
Βιβλιοδεσία  
Θ. Αρχοντουλάκης

To *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο  
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

*Quantum*, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης.  
Διοφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Κορική 8, 117 43 Αθήνα, τηλ.: (01) 9244827, 9244852,  
fax: (01) 9244756, e-mail: info@katoptro.gr.  
Βιβλιοπωλείο: Στούδιο της βιβλίου (Πανεπιστημίου 49),  
106 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο άλλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.  
Ετησία συνδρομή: 12.000 δρχ. για ιδιώτες, 21.000 δρχ.  
για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.

# Για να περνά η ώρα

Σ216

Τα μαθηματικά της λαικής αγοράς. Ένας μανάβης, αφού πουλήσε το τελευταίο του κιλό ροδάκινα προς 230 δραχμές, υπολόγισε ότι η μέση τιμή πώλησης των ροδάκινων του ήταν 245 δραχμές το κιλό. Όμως, ένας πελάτης επέστρεψε το κιλό ροδάκινα που είχε αγοράσει επειδή βρήκε ότι κάποια ροδάκινα ήταν φαγωμένα από σκουλήκια. Ο πελάτης συμφώνησε να πληρώσει μόνο 158 δραχμές για το κιλό που του αντιστοιχούσε. Ο μανάβης υπολόγισε ξανά τη μέση τιμή του κιλού των ροδάκινων, και τώρα τη βρήκε ίση με 242 δραχμές. Πόσα κιλά ροδάκινα πουλήσε;



Σ218

Ισάξιοι αντίπαλοι. Έπειτα από το τέλος ενός σκακιστικού πρωταθλήματος, κάθε παίκτης είχε κερδίσει, παίζοντας με τα άσπρα, το ίδιο πλήθος παρτίδων με αυτές που είχαν κερδίσει, παίζοντας με τα μαύρα, όλοι οι άλλοι παίκτες μαζί. Αποδείξτε ότι όλοι οι συμμετείχαν στο πρωτάθλημα κέρδισαν το ίδιο πλήθος παρτίδων.



Σ220

Ένα ιδιαίτερο ζευγάρι. Βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο του οποίου το άθροισμα των ψηφίων του καθώς και το άθροισμα των ψηφίων του επόμενου του ακέραιου να διαιρούνται διά του 17. (G. Galperin).



Σ217

Αποκοπή γωνίας. Αποκόπτουμε μία από τις γωνίες ενός τετραγώνου και δημιουργούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο έτσι ώστε το άθροισμα των κάθετων πλευρών του να είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών υπό τις οποίες φαίνεται η υποτείνουσα από τις υπόλοιπες κορυφές του τετραγώνου ισούται με  $90^\circ$ .



Σ219

Οικονομία στις διευθύνσεις. Υπάρχει μια πολυκατοικία με τέσσερα διαμερίσματα σε κάθε όροφο, τα οποία είναι αριθμημένα διαδοχικά. Οι ένοικοι ενός ορόφου αποφάσισαν να βάλουν νέους αριθμούς στις πόρτες τους. Για να γίνει αυτό χρειάστηκαν επτά ψηφία, τα οποία παράγγειλαν σε μια εταιρεία που χρέωνε το ψηφίο  $n$  με  $n$  δολάρια (για παράδειγμα, το ψηφίο 0 ήταν δωρεάν). Οι ένοικοι συγκέντρωσαν 3 δολάρια από κάθε διαμέρισμα του ορόφου, και το ποσό που συγκέντρωθηκε κάλυψε ακριβώς το κόστος των νέων ψηφίων. Ποια ψηφία παρήγγειλαν;



# Τι είναι η σκέψη;

«Δεν διαθέτουμε καμία εύλογη βάση για να θεωρούμε την ευφυΐα συνεζευγμένη με το σώμα.»

—Αριστοτέλης

V. Meshcheryakov

**Φ**ΑΝΤΑΣΤΕΙΤΕ ΤΟΝ ΕΑΥΤΟ ΣΑΣ μέσα σε ένα μηχάνημα σάρωσης μέσω υπολογιστικής αξονικής τομογραφίας (CAT), μια εκλεπτυσμένη συσκευή για τη μελέτη της μοριακής δομής των έμβιων όντων. Θα βρισκόσασταν εκτεθειμένος σε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συχνότητας περίπου  $10^7$  Hz και σε ένα μαγνητικό πεδίο έντασης 1 T περίπου (για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης, ειρήσθω ότι το μαγνητικό πεδίο του πλανήτη μας είναι μικρότερο από  $10^{-4}$  T). Και εις πείσμα όλων τουών, ο εγκέφαλός σας παραμένει απολύτως ανεπηρέαστος! Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία η οποία εκπέμπεται από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορεί κάλλιστα να αλλοιώσει το σήμα που λαμβάνει ένας τηλεοπτικός δέκτης, και όμως δεν διατάρασσει στο παραμικρό τη λειτουργία του εγκεφάλου σας! Στο περιβάλλον γύρω μας επικρατεί πραγματική συμφόρηση από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διά των οποίων μεταδίδονται τα πάσης φύσεως ραδιοφωνικά και τηλεοπτικά προγράμματα. Οι πόλεις μας είναι μπλεγμένες μέσα σε πυκνά δίχτυα ρευματοφόρων καλωδίων (τα οποία φυσικά παράγουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία) ειδικά δε όταν μένουμε στα ίδια μας τα σπίτια, δεν απέχουμε ποτέ περισσότερο από

ένα βήμα από κάποια ηλεκτρική συσκευή.

Όλα όσα αναφέραμε παραπάνω αποτελούν παραδείγματα από τη σύγχρονη εποχή. Ας θυμηθούμε, ωστόσο, τον κεραυνό, ο οποίος δεν είναι παρά μια ηλεκτρική εκκένωση γνωστή στους ανθρώπους από αμνημονεύτων ετών. Ο κεραυνός παράγει ηλεκτρομαγνητικά κύματα τα οποία, εφόσον χρησιμοποιηθεί ο κατάλληλος δέκτης, ανιχνεύονται σε οποιαδήποτε περιοχή συχνοτήτων. Τι συμβαίνει όμως με τις σκέψεις μας; Επηρεάζονται καθόλου από τούτα τα κύματα; Ε, λοιπόν, αν εξαιρέσουμε το φόβο που ενδέχεται να νιώσουμε, σε όλη την πορεία της καταγεγραμμένης ιστορίας δεν διαπιστώθηκε ποτέ η παραμικρή επίδραση του κεραυνού στις ψυχονοητικές μας διαδικασίες.

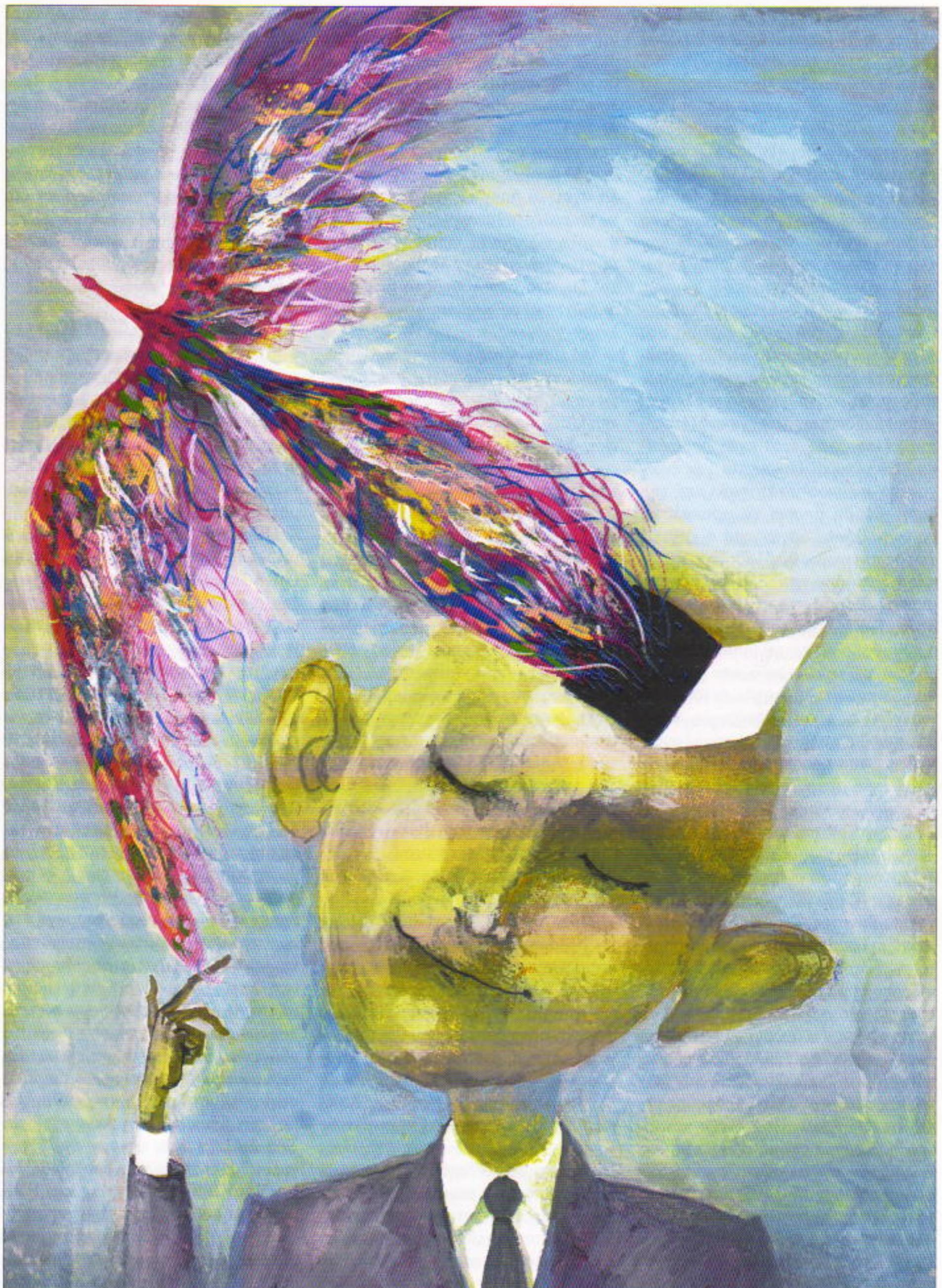
Μπορούμε επίσης να αναλογιστούμε το ορατό φως, καθώς και τις αόρατες ακτινοβολίες, την υπέρυθρη και την υπεριώδη. Πρόκειται ομοίως για ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Κατά το μεγαλύτερο μέρος της, τούτη η ακτινοβολία φτάνει ώς τον εγκέφαλο. Και μάλιστα, δεν τον φτάνει απλώς, αλλά διεισδύει σ' αυτόν και τον διαπερνά!

Την αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος με τα βιολογικά συστήματα την καθορίζουν κατά

κύριο λόγο δύο παράγοντες: η ένταση και η συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η αναζήτηση παραμέτρων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων οι οποίες να είναι ικανές να ελέγχουν την κατάσταση των κυττάρων σε ένα βιολογικό σύστημα, χωρίς όμως και να τη διαταράσσουν (ή, όπως λέγεται, να τροποποιούν την πληροφοριακή δομή ενός ζώντος οργανισμού), οδηγήσε σε χαμηλής έντασης κύματα με μήκος της τάξεως του χιλιοστομέτρου. Ακόμη και σ' αυτή την περίπτωση, ωστόσο, δεν ανευρέθη καμία ένδειξη που να μαρτυρά ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα επιδρούν καθ' οιονδήποτε τρόπο στη διαδικασία της σκέψης.

Μήπως όμως θα είχαμε καλύτερες προοπτικές επιτυχίας αν προσπαθούσαμε, αντίστροφα, να εξηγήσουμε την επίδραση της σκέψης στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο; Μολονότι υπάρχουν πράγματι συσκευές (μία από τις οποίες ονομάζεται SQUID) ικανές να μετρήσουν τα ασθενέστατα μαγνητικά πεδία που παράγονται από τον εγκέφαλο —οι εντάσεις τους μόλις και φτάνουν στα  $10^{-13}$  T—, τα εν λόγω πεδία ουδεμία σχέση έχουν με τις νοητικές διαδικασίες.

Σε τι συμπεράσματα καταλήγουμε βάσει όλων αυτών των αρνητικών αποτελεσμάτων; Η ηλεκτρομαγνητική



ακτινοβολία ενδέχεται να μην είναι τελικά η διαδικασία που ευθύνεται για τη γένεση των σκέψεων. Έχουν διατυπωθεί αρκετά επιχειρήματα τα οποία συνηγορούν υπέρ της συγκεκριμένης υπόθεσης. Την επιβεβαιώνει όχι μόνο η μεγάλη μάζα των πειραματικών στοιχείων, αλλά και ο κοινός νους. Κρίνετε μόνοι σας: Θα διέπραττε ποτέ, άραγε, ο Δημιουργός το ολέθριο σφάλμα να εναποθέσει τον έλεγχο της σκέψης σε κάποιο μηχανισμό ηλεκτρομαγνητικής φύσεως γνωρίζοντας ότι η ανώριμη ανθρωπότητα θα εξιχνίαζε τα μυστικά του ηλεκτρομαγνητισμού τον 20ό αιώνα; Φανταστείτε σε τι εξωφρενικές καταστάσεις θα οδηγούμεθα αν ο έλεγχος ραδιοσυχνοτήτων του εγκεφάλου περιερχόταν στα χέρια ενός παρανοϊκού δικτάτορα! Πρόκειται για ενδεχόμενο απείρως πιο επίφοβο από την όποια βλάβη μπορεί να προκαλέσει σε έναν ζώντα οργανισμό η έκθεσή του σε ακτινοβολία, βλάβη που χαρακτηρίζεται από τη διάρρηξη των μοριακών δεσμών και τον ιονισμό των ατόμων. Εξάλλου, μη λησμονείτε ότι ο ρυθμός ραδιενέργού διάσπασης μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, καθώς και ότι οι πηγές έντονης ακτινοβολίας είναι δυσεύρετες, ακριβές και δύσκολα ελεγχόμενες, σε αντίθεση με τα ραδιοκύματα, τα οποία και φθηνά στοιχίζουν και παντού υπάρχουν διαθέσιμα κάθε στιγμή.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, επί του παρόντος μόνο δύο καταστάσεις αλληλεξάρτησης του ανθρώπινου νου και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου φαίνονται δυνατές. Είτε, για κάποια περιοχή ηλεκτρομαγνητικών παραμέτρων, δεν υφίσταται καμία αλληλεπίδραση είτε, για άλλες τιμές των παραμέτρων, αυτή η αλληλεπίδραση είναι υπαρκτή και αποβαίνει καταστροφική για τον εγκέφαλο. Τούτη η υπόθεση δεν αντίκειται στις σύγχρονες απόψεις περί αλληλεπίδρασης μεταξύ πεδίων και ύλης, έστω και αν δεν διαθέτουμε ακόμη κάποια πλήρη θεωρία για την αλληλεπίδραση εγκεφάλου-πεδίου. Μολονότι η θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ολοκληρώθηκε από μακρού, ήδη από τον 19ο αιώνα, εξακολουθούμε να αγνοούμε τι εστί «νους».

Μήπως όμως θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι δεν πρόκειται για πιεστικό πρόβλημα και να αναβάλουμε την αντιμετώπισή του για το μέλλον; Λοιπόν, στην ιστορία συναντούμε πολλούς επιστήμονες που καταπάστηκαν με φαινομενικά «μη πιεστικά» προβλήματα. Από τα πάμπολλα σχετικά παραδείγματα μπορούμε να επικαλεστούμε την έρευνα για την ύπαρξη εξωγήινης νοημοσύνης, την παραψυχολογία, την τηλεκινησία, τα ταξίδια στο παρελθόν, στο μέλλον ή ακόμη και σε κάποιους «παράλληλους» χρόνους, κ.ά.

Θα μπορούσαμε επίσης να υπενθυμίσουμε τα πειράματα που πραγματοποίησαν ο βρετανός χημικός Steven Gray και ο ιερέας Granville Wheeler. Στις αρχές του 18ου αιώνα κατασκεύασαν ρευματοφόρες γραμμές τριβοντας γυάλινες ράβδους και διοχετεύοντας το φορτίο μέσω νημάτων. Θα διανοούνταν τάχα κανείς να χαρακτηρίσει αυτή την έρευνα πιεστικό ζήτημα σε μια περίοδο που προηγήθηκε κατά εκατό και πλέον έτη της ανάπτυξης της ηλεκτρικής θεωρίας και της πρακτικής της εφαρμογής; Κατά πάσαν πιθανότητα, όχι. Και όμως, από όλες τις εργασίες του Gray, συμπεριλαμβανομένων και σων αφορούσαν επίκαιρα προβλήματα της οπτικής, της αστρονομίας και της μετεωρολογίας, μόνο η μελέτη του για τον ηλεκτρισμό δημοσιεύθηκε στα *Πρακτικά της Βασιλικής Εταιρείας*, και μάλιστα κατά την περίοδο που της Εταιρείας προήδρευε ο μέγας Ιωάννης Νεύτων.

Πόσο μακριά έβλεπε αυτή η εξέχουσα προσωπικότητα, ο άνθρωπος που δήλωσε ότι δεν εφεύρισκε υπόθεσεις! Ίσως αυτός ακριβώς να ήταν ο λόγος που τον ώθησε να διατυπώσει την άποψή του περί των βιολογικών συστημάτων υπό μορφή ερωτήματος: «Δεν εμφανίζεται η Ζωική Κίνηση μέσω της δύνησης του Αιθέριου Μέσου η οποία διεγείρεται στον Εγκέφαλο από τη δύναμη της Βούλησης και μεταδίδεται διαμέσου συνεχών, διαφανών και ομοιογενών τριχοειδών Νεύρων στους Μυς, προκαλώντας τοιουτοτρόπως τη συστολή και την έκτασή τους;»

Τελικά, πόση σπουδαιότητα έχει

για την ανθρωπότητα το πρόβλημα της εξίχνιασης του μηχανισμού στον οποίο οφείλεται η δραστηριότητα του εγκεφάλου; Το Κογκρέσο των Ηνωμένων Πολιτειών ανακήρυξε τη δεκαετία του 1990 «δεκαετία του εγκεφάλου», διότι «οι θεμελιώδεις ανακαλύψεις σχετικά με την οργάνωση του εγκεφάλου στο μοριακό και το κυτταρικό επίπεδο έθεσαν τις βάσεις για την κατανόηση των μηχανισμών της ψυχονοητικής δραστηριότητας των ανθρώπινων όντων».

## ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Προς το παρόν, ένα από τα σοβαρότερα πειστήρια για τη σπουδαιότητα της έρευνας του εγκεφάλου συνίσταται στην ανάπτυξη νέων τεχνολογιών. Το ότι έχουν τα πράματα επιβεβαιώνεται από την εμφάνιση της έννοιας της εικονικής πραγματικότητας.

Ήδη από το 1959, ο διάσημος αμερικανός φυσικός Richard Feynman (1918-1988) διακήρυξε ότι στο μέλλον η ανθρωπότητα, αφού κατακτήσει την ικανότητα χειρισμού μεμονωμένων ατόμων, θα διαθέτει την απαραίτητη τεχνολογία για να συνθέτει τα πάντα. Ένα αναπάντεχο πρώτο βήμα προς την πρακτική υλοποίηση αυτής της φανταστικής ιδέας σημειώθηκε το 1981, όταν οι φυσικοί Gerd Binning και Heinrich Rohrer, που εργάζονταν στον ελβετικό κλάδο της IBM, κατασκεύασαν μια συσκευή η οποία περιείχε μια ελέγχιμη μονατομική επαφή μεταξύ δύο στερεών σωμάτων. Η εν λόγω συσκευή βρήκε για πρώτη φορά εφαρμογή στη σάρωση των επιφανειών στερεών αντικειμένων, η οποία αποσκοπούσε στη λεπτομερειακή εξέταση της δομής τους. Οι βελτιώσεις που επετεύχθησαν κατά την επόμενη δεκαετία οδήγησαν στην εμφάνιση συσκευών ικανών να συγκροτήσουν μοριακά συγκροτήματα από μεμονωμένα άτομα στη βάση επιλεγμένου σχεδίου. Στη διάλεξη που έδωσαν κατά την τελετή απονομής του βραβείου Νόμπελ (το 1987), οι Binning και Rohrer διακήρυξαν: «Επιτέλους αποκτήσαμε τη δυνατότητα να επηρεάζουμε μεμονωμένα άτομα και να τροποποιούμε μεμονωμένα μόρια.»

Η εξέλιξη αυτή σηματοδότησε τη γέννηση μιας νέας τεχνολογίας, η οποία έχει γίνει πλέον γνωστή ως **νανοτεχνολογία**. Πώς δικαιολογείται το πρόθεμα «νανο-»; Η τυπική απόσταση μεταξύ ατόμων στη συμπυκνωμένη κατάσταση της ύλης ανέρχεται στα  $10^{-10}$  m περίπου, ενώ η χαρακτηριστική γραμμική διάσταση μιας τυπικής μοριακής δομής συντιθέμενης από εκατοντάδες και χιλιάδες ατόμων είναι  $10^{-9}$  m, ή 1 νανόμετρο.

Η σημασία της εργασίας των Binning και Rohrer έτυχε άμεσης αναγνώρισης. Όχι απλώς τους απενεμήθη το βραβείο Νόμπελ, αλλά επακολούθησε και μια χιονοστιβάδα επιστημονικής έρευνας. Το πλήθος των πεδίων που επηρεάστηκαν ξεπέρασε κάθε προηγούμενο: φυσική, ηλεκτρονική, βιολογία, ιατρική, γεροντολογία, κυβερνητική, οικολογία, τέχνη, θρησκεία, επιστημονική φαντασία... Διανύουμε πλέον μια περίοδο που πολλοί την αποκαλούν «**νανο-βιομηχανική επανάσταση**».

Με δεδομένες τις διαγραφόμενες ευοίωνες προοπτικές για τη μελλοντική ανάπτυξη της νανοτεχνολογίας, κάποιες παρατηρήσεις του Feynman, που είδαν το φως της δημοσιότητας το 1984, αποκτούν εξαιρετική επικαιρότητα. Ο Feynman διατύπωσε την τολμηρή ιδέα ότι θα ήταν δυνατόν να κατασκευαστεί ένας κβαντομηχανικός υπολογιστής, όπου το ρόλο των λογικών στοιχείων θα τον αναλάμβαναν μεμονωμένα άτομα. Και ίδού πώς εξελίχθηκε η κατάσταση στην πραγματικότητα.

Κατά τη δεκαετία του 1980, οι υπολογιστές ήταν ικανοί να εγγράφουν δεδομένα με πυκνότητα πληροφορίας 1 περίπου μπιτ ανά  $10^{11}$  άτομα. Για έναν τυπικό ατομικό όγκο  $10^{-29}$  m<sup>3</sup>, κάθε στοιχείο μνήμης χωρητικότητας 1 μπιτ καταλαμβάνει  $10^{-18}$  m<sup>3</sup>, όγκος ο οποίος αντιστοιχεί σε μια γραμμική διάσταση ανά μπιτ της τάξεως των  $10^{-6}$  m = 1 μικρόμετρο. Ιδού, λοιπόν, γιατί τα τοπ των σημερινών υπολογιστών λογίζονται ως **μικροστοιχεία**.

Το μέγεθος των λογικών στοιχείων στους επεξεργαστές ναι μεν έχει πλησιάσει την περιοχή του νανομέτρου, πλην όμως ακόμη μένει να κα-

λυφθεί δρόμος ώσπου να φτάσουμε εκεί. Οι ειδικοί προβλέπουν ότι η παραγωγή νανοστοιχείων —δηλαδή, τοπ με πυκνότητα στοιχείων περίπου 1 μπιτ ανά  $10^2\text{-}10^3$  άτομα— πρόκειται να αρχίσει την επόμενη δεκαετία, παρά το γεγονός ότι εκκρεμούν ακόμη αρκετά προβλήματα τα οποία πρέπει να αντιμετωπιστούν.

Ένα από τα προβλήματα για τα οποία γίνεται λόγος συνίσταται στο ότι η σύγχρονη σχεδίαση κυκλωμάτων είναι επίπεδη (τα στοιχεία τοποθετούνται σε ένα και το αυτό επίπεδο), όπερ σημαίνει πως η μετάβαση στις τρισδιάστατες δομές θα απαιτήσει βιομηχανική ανάπτυξη και προσαρμογή των μεθόδων της νανοτεχνολογίας. Οι προοπτικές για την ανάπτυξη τοπ με πυκνότητα στοιχείων 1 μπιτ ανά άτομο παραμένουν αβέβαιες, η γενική τάση όμως έχει εκδηλωθεί σαφέστατα: συνεχής σμίκρυνση των στοιχείων (των τοπ μνήμης, των επεξεργαστών, των ελεγκτών) με απώτερο στόχο την ανάπτυξη της τεχνολογίας των λεγόμενων **κρυστάλλων τεραμπίτ** (δηλαδή, κρυστάλλων χωρητικότητας  $10^{12}$  μπιτ). Και σήμερα ακόμη, στις ΗΠΑ και την Ιαπωνία βρίσκονται υπό εξέλιξη αναρίθμητα προγράμματα στην κατεύθυνση αυτή, που κοστίζουν εκατοντάδες εκατομμύρια δολάρια και στα οποία συμμετέχουν δεκάδες ιδιωτικές εταιρίες και κυβερνητικοί οργανισμοί προωθώντας την ανάπτυξη τέτοιων νανοτεχνολογιών.

Σε τούτη ακριβώς την πορεία γεννήθηκε και η έννοια της «**μεταφόρτωσης**». Το ουσιώδες περιεχόμενό της μπορεί εύκολα να συλληφθεί αν μείνουμε στο πλαίσιο της νανοτεχνολογίας. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, τον ανθρώπινο εγκέφαλο, ο οποίος σύμφωνα με τους νευροφυσιολόγους περιέχει περί τους  $10^5$  νευρώνες ανά κυβικό χιλιοστό εγκεφαλικού ιστού. Αν λάβουμε υπόψη ότι ο εγκεφαλικός φλοιός καταλαμβάνει όγκο περίπου  $10^{-3}$  m<sup>3</sup>, αρκεί ένας απλός πολλαπλασιασμός για να προσδιορίσουμε το συνολικό πλήθος των νευρώνων. Πρόκειται για έναν κυριολεκτικά αστρονομικό αριθμό:  $10^{11}$ .

Υποθέτοντας πως το κάθε μπιτ ανθρώπινης μνήμης απαιτεί έναν του-

λάχιστον νευρώνα, καταλήγουμε ότι το ολικό πληροφοριακό περιεχόμενο του εγκεφάλου περιγράφεται από τον αριθμό  $10^{11}$ . Ας φανταστούμε τώρα ότι με κάποιον τρόπο κατορθώνουμε να εξετάσουμε την κατάσταση των νευρώνων κύτταρο προς κύτταρο, έτσι ώστε να εξακριβώσουμε τα φυσικά χαρακτηριστικά κάθε νευρώνα του εγκεφάλου. Κατόπιν «μεταφόρτωνουμε» αυτό το «**αρχείο**» σε μερικά τοπ τεραμπίτ (με χωρητικότητα μνήμης περίπου  $10^{12}$  μπιτ). Ένα τέτοιο «έξυπνο» τοπ θα μπορούσε να ενσωματωθεί σε έναν προσωπικό υπολογιστή ή στον ελεγκτή ενός αστυνομικού-ρομπότ. Θα μπορούσαμε επίσης να το βάλουμε να περιφέρεται στον Παγκόσμιο Ιστό. Δεδομένου ότι η σαρωθείσα πληροφορία κατ' ανάγκην φέρει αποτυπωμένα πάνω της ορισμένα προσωπικά χαρακτηριστικά, δεν στερείται βάσης η σκέψη πως θα ήταν δυνατόν να εφοδιάσουμε τούτη την ξεχωριστή ροή πληροφορίας με την ικανότητα να λαμβάνει τις δικές της αποφάσεις —με άλλα λόγια, να παράγει νέα πληροφορία, πράγμα που σημαίνει να σκέπτεται.

Έτσι, αυτό το υποθετικό «**κάτι**» το οποίο γεννήθηκε από τη σάρωση του εγκεφάλου και τη μεταφόρτωση της πληροφορίας σε ένα υπολογιστικό σύστημα είναι γνωστό ως **κατάσταση εικονικής πραγματικότητας** και διακαθορίζει την αντίληψη η οποία διαμορφώνεται βάσει των επιτευγμάτων της νανοτεχνολογίας.

## Αρνητική πραγματικότητα

Ας θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα από μια άλλη οπτική γωνία, αφήνοντας προς το παρόν κατά μέρος το αίνιγμα της σάρωσης του εγκεφάλου.

Φανταστείτε ότι είστε ένας μηχανικός σχεδίασης και υλοποίησης δομών και πως έχετε στη διάθεσή σας κάθε δυνατό συνδυασμό ατόμων. Θα μπορούσατε εύκολα να κατασκευάσετε μια σφαίρα, έναν κύβο ή ένα δακτύλιο. Και στις τρεις περιπτώσεις, πρόκειται για σχήματα που θα τα ανασύρατε από την προσωπική σας μνήμη. Ωστόσο, εάν προσπαθούσατε να αναπαραγάγετε το σχήμα μιας χιονονιφάδας, αν μη τι άλλο θα χρειαζόσασταν μια λεπτομερή φωτογρα-

φία, ενώ πολύ περισσότερο θα σας βοηθούσε ένα ακριβές διάγραμμα της διάταξης όλων των ατόμων. Τούτα τα νοητικά πειράματα περιστρέφονται γύρω από ότι εκλαμβάνουμε ως νεκρή ύλη. Ας προχωρήσουμε, λοιπόν, παραπέρα και ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα μόριο DNA, το οποίο αποτελεί ένα μόνο από τα αναρίθμητα συστατικά στοιχεία των νευρώνων του εγκεφάλου. Πρόκειται για ένα πραγματικά απλούστατο πρόβλημα —αρκεί να καταφέρετε να χαρτογραφήσετε τη μοριακή δομή. Κατόπιν δεν έχετε παρά να ανοίξετε το πακέτο με τα άτομα (που «αγοράσατε» στο κατάστημα ατόμων) και να στρωθείτε στη δουλειά!

Προηγουμένως, όμως, ενδείκνυται να μελετήσουμε τις χαρτογραφήσεις ή τα ενδεδειγμένα συγγράμματα προκειμένου να διαπιστώσουμε σε τι είδους μόρια θα καταλήξουμε —σε έμβια ή σε άβια. Ατυχώς, τα επιστημονικά περιοδικά δεν μας προσφέρουν καμία απάντηση ως προς αυτό, αλλά ούτε και ως προς το ερώτημα πώς να συνθέσουμε ένα νευρώνα, ή, για να προχωρήσουμε μερικά βήματα παρακάτω, έναν ανθρώπινο εγκέφαλο. Προς το παρόν, η επιστήμη αγνοεί κατά πόσον το αποτέλεσμα των προσπαθειών θα είναι ζωντανό ή νεκρό —ένα σκεπτόμενο αντικείμενο ή απλώς ένας σωρός από άτομα.

Φτάσαμε σ' ένα σημείο όπου η λέγομένη «παραδοσιακή επιστήμη» βρίσκεται σε αδυναμία να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις τις οποίες εγείρουν οι προοδευτικές τάσεις. Αφ' ενός, οι πειραματικές της μέθοδοι δεν προσφέρουν ακόμη τη δυνατότητα για τη λήψη δεδομένων σχετικά με τις επιδράσεις των εξωτερικών δυνάμεων στις νοητικές δραστηριότητες του ανθρώπινου εγκεφάλου —ή, αντιστρόφως, σχετικά με τις επιδράσεις των ανθρώπινων σκέψεων στις μετρητικές συσκευές. Αφ' ετέρου, ο αναλυτικός τομέας της επιστήμης αδυνατεί να προσδιορίσει τη διαφορά ανάμεσα στις έμβιες και τις άβιες ομάδες ατόμων, ανάμεσα στα σκεπτόμενα και τα μη σκεπτόμενα μοριακά συγκροτήματα. Και η κατανόηση την οποία επιζητούμε δεν πρέπει να έχει λεκτικό χαρακτήρα —δεν μας ενδια-

φέρει διόλου ποιος μπορεί να μιλήσει για το θέμα ευφυέστερα και μακροσκελέστερα χρειαζόμαστε μια δομική κατανόηση —μια κατανόηση ικανή να παράσχει τη βάση για τη δημιουργία τεχνητής νοημοσύνης. Εδώ το κριτήριο είναι ξεκάθαρο. Εάν ισχυριζόμαστε ότι γνωρίζουμε πώς παράγονται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ή οι σκέψεις, πρέπει επίσης να ξέρουμε και πώς να κατασκευάσουμε ένα ραδιόφωνο ή έναν τεχνητό εγκέφαλο.

Από την άλλη πλευρά, η πειραματική φυσική και βιολογία πέτυχαν να χειρίζονται μεμονωμένα άτομα και μόρια και να κατασκευάζουν ατομικά συμπλέγματα τα οποία συνιστούν τους δομικούς λίθους της έμβιας και της άβιας ύλης, ή των σκεπτόμενων και μη σκεπτόμενων οργανισμών. (Προς το παρόν, η υλοποίηση αυτής της δυνατότητας περιορίζεται σχεδόν αποκλειστικά στα επιστημονικά εργαστήρια. Μέχρι στιγμής, μόνο ο νανοτεχνολογικός έλεγχος των οπτικών δίσκων (CD) και των ψηφιακών βιντεοδίσκων (DVD) έχει εισέλθει στο βιομηχανικό επίπεδο.) Έτσι, η αναζήτηση συνεχίζεται. Ποιοι συμμετέχουν σ' αυτή; Θεολόγοι, βιολόγοι, φυσικοί και, φυσικά, συγγραφείς επιστημονικής φαντασίας.

Σε τούτο τον αγκαθόσπαρτο δρόμο, επιβάλλεται να επισημάνουμε πως η αναπαραγωγή ενός σκεπτόμενου προτύπου, ανεξαρτήτως της αρτιότητας της επεξεργασίας της, δεν πρόκειται ποτέ να αποφέρει ένα απολύτως ταυτόσημο αντίτυπο, αλλά ούτε και να εξηγήσει γιατί τα αντίτυπα ενδέχεται να διαφέρουν. Βλέπετε, τα φυσικά χαρακτηριστικά των ατόμων σαρώνονται από μετρητικά όργανα. Με άλλα λόγια, δεν είναι δυνατόν να σαρώθουν παρά μόνο μετρητιμες παράμετροι. Ως σήμερα, εντούτοις, δεν έχουμε κατορθώσει ακόμη να εφεύρουμε κάποια συσκευή ικανή να διαβάζει τις σκέψεις. Και ίσως ο βασικός λόγος γι' αυτό να έγκειται στο ότι οι σκέψεις δεν μπορεί να εκφραστούν από στατικά σύνολα ατόμων, ιόντων και μορίων. Η σκέψη είναι εκ φύσεως διαδικασία, κίνηση. Γνωρίζουμε ότι κάτι κινείται, όμως αγνοούμε το πώς,

Έτσι, η προσπάθειά μας να δημιουργήσουμε έναν τεχνητό νου δεν μπορεί παρά αναγκαστικά να συνδέεται με την ανακάλυψη του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί ο εγκέφαλος. Αυτό το υπέροχο «όργανο» μας χαρίστηκε από τη φύση, ή από το Θεό. Ωστόσο, η έρευνά μας οφείλει να εδράζεται στις σύγχρονες απόψεις περί του κόσμου, στις χιλιετίες ανθρώπινης εμπειρίας που συνηγορεί υπέρ της συνέχειας της γνώσης και απορρίπτει, εάν όχι τις περισσότερες από τις νοητικές και πειραματικές απόπειρες για ένα «άλμα» στη μεταφυσική πραγματικότητα, τότε τουλάχιστον την προσδοκία ότι παρόμοιες προσπάθειες θα αποδώσουν εποικοδομητικά αποτελέσματα —δηλαδή, ότι θα οδηγήσουν σε πραγματικά αντικείμενα ευρείας χρήσεως.

Παρά ταύτα, η ορθόδοξη επιστήμη παραμένει προσκολλημένη στις αρχές της και σιγεί. Ο λόγος είναι απλός. Από τη μία πλευρά, διαθέτουμε ένα εξαιρετικό μοντέλο του εγκεφάλου, το οποίο βασίζεται σε ένα σύνθετο ακέραιο σύστημα απαρτιζόμενο από πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία που λειτουργούν επί τη βάσει της μεταφοράς ηλεκτρικού φορτίου ή της διέγερσης του ηλεκτρονιακού υποσυστήματος, διαδικασίες οι οποίες αμφότερες οδηγούν στη μεταβίβαση και τη λήψη πληροφορίας κωδικοποιημένης με όρους παραμέτρων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Από την άλλη, περισσότερα από εκατό χρόνια πρακτικής πείρας στη χρήση τέτοιων συστημάτων δεν έχει φέρει στο φως, είτε συμπτωματικά είτε ως αποτέλεσμα σκόπιμης έρευνας, την παραμικρή επίδραση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στις ψυχονοητικές διαδικασίες.

Με άλλα λόγια, από τη μία πλευρά έχουμε τον υπολογιστή ως το τελειότερο μοντέλο του εγκεφάλου, ενώ από την άλλη είναι πάντοτε δυνατόν να βρούμε ένα σύνολο παραμέτρων που δεν θα καταστρέψει αλλά θα τροποποιεί, κατά συγκεκριμένο τρόπο, τη λειτουργία των αντιστατών, των πυκνωτών, των τρανζιστορ και όλων των άλλων συστατικών μονάδων του εν λόγω υπολογιστή.

Οπότε, ανακύπτει το εξής ερώτημα: Μπορεί ένας υπολογιστής, τώρα ή στο απότερο μέλλον —ακόμη και ένας υπερυπολογιστής εφοδιασμένος με τερατσίπ—, να μοντελοποιήσει τον ανθρώπινο εγκέφαλο, έστω και προσεγγιστικά μόνο; Κατά πάσαν πιθανότητα, όχι.

## Προδιαγραφόμενη πραγματικότητα

«Καλά», ενδέχεται να διερωτηθείτε, «δεν υπάρχουν άλλα μοντέλα της ψυχονοητικής δραστηριότητας;» Είναι μια κατάσταση μάλλον περίπλοκη, η οποία χρήζει περαιτέρω επεξήγησης. Φανταστείτε κάποιον που δεν γνωρίζει καθόλου φυσική αλλά επιμένει να μάθει οπωσδήποτε πώς λειτουργεί ένα αυτοκίνητο. Τι θα έπρεπε να εξετάσει αυτός ο άνθρωπος; Τους τροχούς, τον εξαερωτήρα, τον κινητήρα ή τη δεξαμενή καυσίμου; Σε τελική ανάλυση, κανείς θα μπορούσε να μαντέψει ότι είναι η καύση της βενζίνης εκείνη που κινεί το αυτοκίνητο και να δηλώσει ότι η καύση αποτελεί τη ζητούμενη αρχή λειτουργίας του αυτοκινήτου. Τούτη η εξήγηση, μολονότι θα ικανοποιούσε μερικούς ανθρώπους, αφήνει ένα χαίνον κενό ανάμεσα σ' αυτό το συμπέρασμα και, επί παραδείγματι, τον κύκλο Carnot, ο οποίος μας προσφέρει τα ποσοτικά στοιχεία για την απόδοση της μηχανής. Το ίδιο αληθεύει και σε ό,τι αφορά τη δραστηριότητα των νευρώνων. Γνωρίζουμε πολλά χαρακτηριστικά των νευρώνων: τη δομή, τη χημική σύσταση, το χαρακτήρα των ροών διάχυσης, τις θερμικές συνθήκες, την κατανομή των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων, την ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητά τους, κ.ο.κ. Μολαταύτα, εξακολουθούμε να μη διαθέτουμε απάντηση για το ερώτημα που κυρίως μας απασχολεί: Ποια φυσική διαδικασία συνιστά την υποκείμενη βάση της ψυχονοητικής δραστηριότητας;

Πιθανόν να χρειάζεται να ανακαλύψουμε διαισθητικά το δρόμο που θα μας οδηγήσει σε ένα ποιοτικά και νούργιο, μη ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο του εγκεφάλου, ένα μοντέλο

το οποίο δεν θα βασίζεται στη μεταφορά ηλεκτρονίων ή άλλων φορτισμένων σωματιδίων ή στις διεγερμένες καταστάσεις τους.

Εκ προοιμίου απορρίπτουμε τις οποιεσδήποτε προσπάθειες εισαγωγής υπερφυσικών εννοιών όπως εκείνη του «βιολογικού πεδίου». Υπενθυμίζουμε ότι η μετάδοση πληροφορίας (για να μην αναφέρουμε τη δημιουργία της) προϋποθέτει κάποιον υλικό φορέα. Δεν γνωρίζουμε παρά δύο μόνο ουσίες κατάλληλες για να αναλάβουν έναν τέτοιο ρόλο: αφ' ενός, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και, αφ' ετέρου, μια ουσία συγκείμενη από άτομα τα οποία με τη σειρά τους συγκροτούνται από πρωτόνια και νετρόνια (που σχηματίζουν τον πυρήνα) και από ηλεκτρόνια περιφερόμενα πέριξ του πυρήνα στην πραγματικότητα, τα ηλεκτρόνια καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο μέρος του δύκου του ατόμου. Δεδομένου ότι τόσο τα πρωτόνια όσο και τα ηλεκτρόνια έχουν ηλεκτρικό φορτίο, οι δεσμικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ατόμων, δυνάμεις ηλεκτρομαγνητικής φύσεως, διασφαλίζουν τη συνοχή κάθε τεμαχίου της εν λόγω ουσίας. Εντούτοις, το ίδιο το τεμάχιο ύλης παραμένει «ηλεκτρομαγνητικά ουδέτερο» εφόσον βρίσκεται σε ισορροπία.

Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στο εξής πρόβλημα: Πώς είναι δυνατόν, χρησιμοποιώντας ένα σύνολο ουδέτερων ατόμων τα οποία συμμετέχουν σε μια περίπλοκη ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, να παραγάγουμε και να μεταδώσουμε πληροφορία χωρίς να διαταράξουμε την ηλεκτρική ουδετερότητα του συγκεκριμένου συνόλου; Την απάντηση δεν δυσκολεύμαστε να την ανακαλύψουμε. Θα ωθήσουμε την πλησιέστερη ομάδα ατόμων. Εφόσον τα άτομα συνέχονται μεταξύ τους μέσω των δεσμικών δυνάμεων, και δεδομένου ότι το τεμάχιο της ύλης ως όλον αποτελεί ένα ελαστικό, κατά το μάλλον ή ήττον, μέσο, η διαταραχή που εφαρμόζεται στη θέση ισορροπίας των ατόμων θα διαδοθεί σε ολόκληρο το τεμάχιο. Αν δράσουμε στη μια πλευρά του τεμαχίου με δύναμη συγκεκριμένης μορφής, θα καταφέρου-

με να παραγάγουμε ένα ορισμένο σήμα της ίδιας φύσεως στην απέναντι πλευρά.

Όπως είπαμε νωρίτερα, μπορούμε να μπούμε σε ένα μηχανημα υπολογιστικής αξονικής τομογραφίας και να εξετάσουμε την επιδραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη λειτουργία του εγκεφάλου μας. Πού θα έπρεπε όμως να βάλουμε το κεφάλι μας για να ανιχνεύσουμε τις πιθανές επιδράσεις των μηχανικών δυνάμεων; Το απλούστερο από τα δυνατά πειράματα δεν απαιτεί τον παραμικρό εξοπλισμό, καθότι τα ελαστικά κύματα υπάρχουν παντού. Τα μηχανικά ρόλογια χτυπούν τα δευτερόλεπτα, από την τηλεόραση δεν πάουν να ακούγονται φωνές και κάθε λογής άλλοι ήχοι, το τηλέφωνο κουδουνίζει —όλα αυτά συμβαίνουν μέσα στο ίδιο σας το σπίτι. Άλλα και όταν βρισκόμαστε σε ανοιχτό χώρο, ακούμε το θρόισμα των φύλλων, τις πόρτες να βροντούν, το στρίγκλισμα των φρένων, το βρυχηθμό των μηχανών των αεροπλάνων. Επιπλέον, υπάρχουν φυσικά συμβάντα τα οποία διακρίνονται για τον έντονο θόρυβο που τα συνοδεύει: πάρτε για παράδειγμα τις βροντές των καταιγίδων ή το υπόκωφο βουητό του σεισμού. Επηρέαζουν άραγε τέτοια γεγονότα την ανθρώπινη ψυχονοητική δραστηριότητα; Κατά βάση, όχι. Διότι, στ' αλήθεια, πώς θα μπορούσε να συντελείται ο ευσταθής σχηματισμός σκέψεων σε έναν εγκέφαλο που η λειτουργία του στηρίζεται στα ελαστικά κύματα υπό συνθήκες πλήρους ηχητικής αναρχίας, την οποία τροφοδοτούν τόσο η φύση όσο και η πάντα πολυάσχολη ανθρωπότητα; Ο Δημιουργός προνόησε να προστατεύσει τον εγκέφαλο από τον θορυβώδη περίγυρό του.

Μπορούμε να διερευνήσουμε την κατάσταση εκτελώντας πειράματα. Πάρτε μια γεννήτρια ήχου (που συνήθως θα τη βρείτε διαθέσιμη στα σχολικά εργαστήρια), συνδέστε τη με ακουστικά και προσπαθήστε να προσδιορίσετε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακουστών συχνοτήτων. Με το κατώτερο όριο δεν θα συναντήσετε σοβαρές δυσκολίες. Στην περιοχή συχνοτήτων που εκτείνεται

κάτω των 20 Hz, οι μεμβράνες των ακουστικών παύουν να παράγουν σαφείς τόνους, και στη θέση τους ακούγονται μόνο κλικ. Η τιμή ( $20 \pm 10$ ) Hz είναι απολύτως ικανοποιητική για τους σκοπούς μας.

Απεναντίας, θα δυσκολευτείτε πολύ περισσότερο να προσδιορίσετε το ανώτερο όριο. Όταν η συχνότητα του ήχου υπερβαίνει τα 18 kHz (την περιοχή του ανώτερου ορίου της ανθρώπινης ακοής), αδυνατούμε να προσδιορίσουμε τις μεταβολές στην ένταση του ήχου με ακρίβεια ανάλογη εκείνης που επιτυγχάνεται στην περίπτωση του κατώτερου ορίου. Μας φαίνεται σαν να συνεχίζουμε να «ακούμε» τον ήχο, όμως δεν πρόκειται παρά για καθαρή ακουστική ψευδαίσθηση. Στην πραγματικότητα, είναι αδύνατο να εντοπίσουμε την ακρίβη συχνότητα όπου αποτελεί η ακουστική ευαισθησία. Τα πειράματα αυτού του είδους δεν πρέπει να επαναλαμβάνονται υπερβολικά συχνά, διότι αλλιώς ο πειραματιστής θα αρχίσει να υποφέρει από πονοκεφάλους. Αρκεί μόνο να διαπιστώσετε προσωπικά ότι όντως υπάρχει μια τέτοια ακουστική ψευδαίσθηση.

Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα παρόμοιων ψυχολογικών πειραμάτων, μπαίνουμε στον πειρασμό να παραδεχτούμε την ύπαρξη κάποιας μη καταστρεπτικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στον εγκέφαλο και τα ελαστικά κύματα. Ωστόσο, σε αυτό το σημείο αναφύεται ένα νέο πρόβλημα. Τα ηχητικά κύματα με συχνότητα περί τα  $10^4$  Hz έχουν μήκος κύματος 1 εκατοστό περίπου. Έτσι, καθώς ένα τέτοιο κύμα διαδίδεται μέσα στον εγκέφαλο, επάγει ταλαντώσεις μεγάλων ατομικών συγκροτημάτων που αποτελούνται από  $10^{23}$  άτομα. Κατά συνέπεια, αν το στοιχείο της ανθρώπινης μνήμης δεν είναι ένα άτομο ή ένα νανοτσίπ αλλά ένα μάλλον «μεγάλο» μικροτσίπ απαρτιζόμενο από  $10^{11}$  άτομα, τα ελαστικά κύματα μετατοπίζουν ταυτόχρονα  $10^{12}$  «κελιά μνήμης». Όπως εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, ένα ελαστικό κύμα με μήκος της τάξεως του εκατοστού είναι αδύνατο να ελέγχει χωριστά το καθένα από τα  $10^{12}$  αυτά κελιά, διότι ένα κύμα τέτοιου μήκους αδυνα-

τεί να μεταβάλει την κατάσταση οποιουδήποτε κελιού χωρίς να διαταράξει τους κοντινούς και μακρινούς του γείτονες. Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, το κύμα που σπάζει στην παραλία καταβρέχει ταυτόχρονα όλα τα αντικείμενα που ισαπέχουν από την κορυφή του. Με άλλα λόγια, εάν τα ελαστικά κύματα όντως συντελούν με κάποιον τρόπο στην ψυχονοητική δραστηριότητα, πρέπει να χαρακτηρίζονται από μήκη κύματος που δεν υπερβαίνουν το 1 νανόμετρο, το οποίο αντιπροσωπεύει το τυπικό μέγεθος των μοριακών δομών του εγκεφάλου (παραδείγματος χάριν, το μέριο του DNA έχει διάμετρο 2 nm). Για να παραγάγει κανείς ταλαντώσεις με τέτοια μήκη κύματος, χρειάζεται συχνότητες που υπερβαίνουν τις μερικές εκατοντάδες GHz.

Εύρηκα! Κάτι ενδιαφέρον κρύβεται εδώ. Αξίζει να επισημανθεί ότι αυτή η περιοχή συχνοτήτων των ελαστικών ταλαντώσεων παραμένει απροσέλαστη στην πειραματική φυσική. Δεν διαθέτουμε κάποια μέθοδο που να μας επιτρέπει να παράγουμε σε τακτική βάση υπερήχους σε υπερυψηλές συχνότητες με ελεγχόμενες παραμέτρους, κάτι που αποτελεί προ-απαιτούμενο για τη διεξαγωγή φυσικών πειραμάτων. Μολαταύτα, η έλλειψη πειραμάτων ουδέποτε στάθηκε ανυπέρβλητο εμπόδιο για τη φιλέρευνη ανθρωπότητα στον αγώνα της να κατανοήσει τη φύση. Και για να επικαλεστούμε ένα από παράδειγμα, η φυσική των μεγάλων ομάδων ατόμων κατανοήθηκε επί των ημερών του Maxwell και του Boltzmann, έστω και αν αυτή καθαυτή η ύπαρξη των ατόμων δεν αποδείχτηκε παρά μόνο αφού οι δύο γίγαντες της επιστήμης είχαν εκμετρήσει το βίο τους.

Επί του παρόντος, έχουν προταθεί δεκάδες μηχανισμοί για την αποθήκευση και τη μετάδοση δεδομένων στις βιολογικές και ανόργανες μοριακές δομές, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται και τα οιονεί ελαστικά μοντέλα. Ας εξετάσουμε εν τάχει ένα από αυτά, το οποίο, καίτοι σήμερα θεωρείται λανθασμένο (σύμφωνα με την κρατούσα αντίληψη), εξακολουθεί να κινεί το ενδιαφέρον και να συζητιέται ευρέως: πρόκειται για το μο-

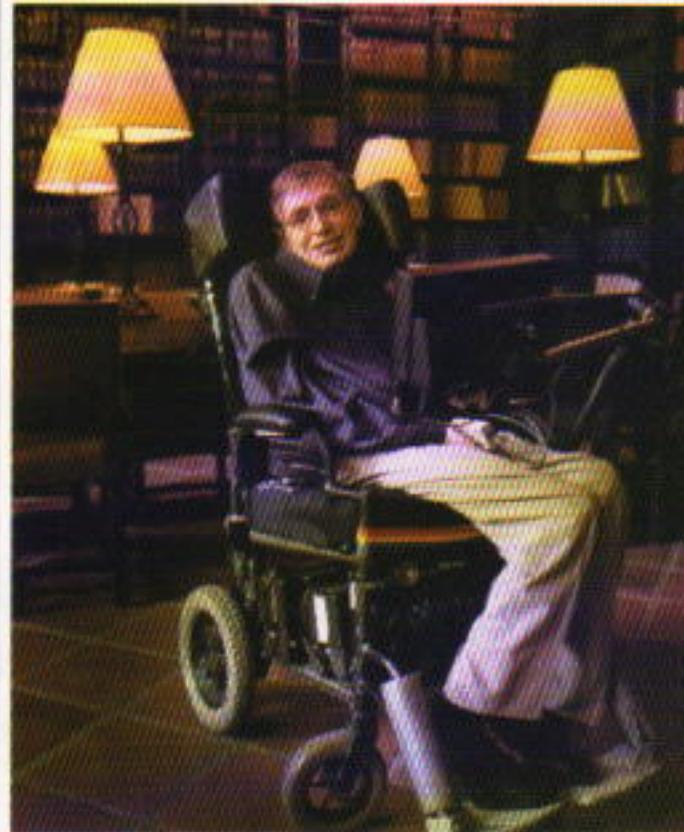
ντέλο που πρότεινε στη δεκαετία του 1970 ο διακεκριμένος βρετανός φυσικός Herbert Froelich. Για να εξηγήσει πώς πραγματοποιείται η μετάδοση των δεδομένων στα βιολογικά συστήματα, ο Froelich παρουσίασε ένα μηχανισμό διά του οποίου παράγονται ταλαντώσεις με συχνότητα περίπου  $10^{12}$  Hz σε ένα μέσο αποτελούμενο από φορτισμένα σωματίδια. Εντούτοις, στην εν λόγω περιοχή συχνοτήτων οι ταλαντώσεις εκδηλώνουν σαφέστατα την κβαντική τους φύση. Αυτή η κατάσταση των πραγμάτων αντιπροσωπεύει ένα ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό του μοντέλου, καθότι προκειμένου να ελέγχεται η μετάβαση των νευρώνων ή των τριμάτων τους από τη μία κατάσταση στην άλλη, επιβάλλεται η παραμονή τους στην αρχική κατάσταση επί αρκούντως μακρό διάστημα. Πρόκειται για μια συνθήκη που δεν ικανοποιείται στην περίπτωση ταλαντωτικών καταστάσεων με χρόνο ζωής περί τα  $10^{-12}$  s. Ως εκ τούτου, ο Froelich προέβαλε την έννοια της λεγόμενης σύμφωνης διέγερσης, η οποία είναι ένας κλασικός κυματοσυρμός που συγκροτείται από κβαντικές καταστάσεις. Ο συγκεκριμένος κυματοσυρμός διαδίδεται με την ταχύτητα του συνήθους ήχου και —το σπουδαιότερο— μπορεί να μεταβάλλει την ελαστική κατάσταση των νευρώνων επί μακρόν. Το μοντέλο του Froelich έμεινε ανεπέξεργαστο ως προς τις λεπτομέρειές του επειδή, όπως σύντομα διαπιστώθηκε, ο σχηματισμός τέτοιων σύμφωνων κυματοσυρμών είναι αδύνατος. Παρά ταύτα, το εν λόγω μοντέλο έχει μεγάλη ελκυστικότητα από εννοιολογικής απόψεως, καθότι αντικατέστησε τα συμβατικά ηλεκτρομαγνητικά κελιά μνήμης με νέα που η λειτουργία τους βασίζεται στην παραμόρφωση.

Σε τούτο το πλαίσιο, το πρόβλημα της παραμόρφωσης των βιολογικών δομών αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ήδη από το 1678, ο ολλανδός επιστήμονας Anton van Leeuwenhoek (1632-1723) επεσήμανε ότι όσο έπασχε από μια σοβαρή ασθένεια, τα ερυθρά του αιμοσφαίρια φαίνονταν άκαμπτα και δύσπλαστα, ενώ προοδευτικά γίνονταν μαλακά και ανα-

κτούσαν την ελαστικότητά τους καθώς προχωρούσε η ανάρρωσή του. Παρότι έκτοτε έχουν παρέλθει τρεις ολόκληροι αιώνες, δεν κατορθώσαμε να μάθουμε τίποτε περισσότερο πέραν του ότι η ελαστικότητα (δηλαδή η ικανότητα για αντιστρεπτή μεταβολή σχήματος υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων) συνιστά εγγενή ιδιότητα όλων των βιολογικών δομών, των νευρώνων συμπεριλαμβανομένων, και δχι κάποια ιδιαιτερότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων. Μέχρι στιγμής, ωστόσο, όλες οι πειραματικές και θεωρητικές προσπάθειες για την ανακάλυψη του μηχανισμού στον οποίο οφείλεται αυτή η ελαστικότητα έχουν αποβεί ατελέσφορες.

Συνοψίζοντας τα πορίσματα που μας απέφερε η σύντομη εξέταση της προδιαγραφόμενης πραγματικότητας, ας καταπιαστούμε με το εξής ερώτημα: Μήπως η έλλειψη τόσο της κατάλληλης πειραματικής τεχνολογίας για τη μελέτη των υπερήχων υπερυψηλών συχνοτήτων δύο και κάποιας θεωρίας για την παραμόρφωση των βιολογικών συστημάτων αποτελεί τη «βασιλική οδό» που μας οδηγεί προς την κατανόηση του πώς λειτουργεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος; Επιπροσθέτως, η τρέχουσα έρευνα γύρω από την απόκριση των νανομετρικών μοριακών συγκροτημάτων στη δράση εξωγενών δυνάμεων —δηλαδή, η μελέτη των ελαστικών ιδιοτήτων των νανοκρυστάλλων— συγκαταλέγεται στους κλάδους εκείνους της νανοτεχνολογίας που γνωρίζουν την πλέον ραγδαία ανάπτυξη. Μήπως άραγε εναπόκειται στην ανάλυση των επιδράσεων των δυνάμεων στα μόρια, στα ατομικά συμπλέγματα ή τους νανοκρυστάλλους να μας δώσει την απάντηση στο ερώτημα «Τι εστί σκέψις;» και, κατά συνέπεια, να μας οδηγήσει στη δημιουργία της τεχνητής νοημοσύνης;

Εν ειδεί συμπεράσματος, ας υπενθυμίσουμε τι δήλωσε ένας από τους ιδρυτές της βιοφυσικής, ο Emil du Bois-Reymond: «Δεν υπάρχουν δυνάμεις που να δρουν στα σωματίδια ενός ζώντος οργανισμού και οι οποίες να μην εκδηλώνονται επίσης και εκτός του οργανισμού.» □

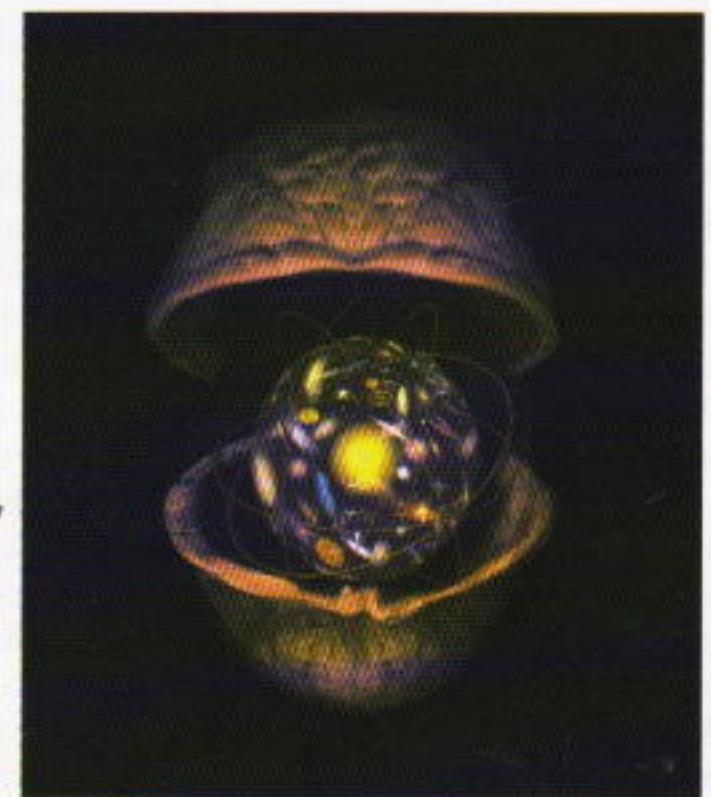


STEPHEN HAWKING

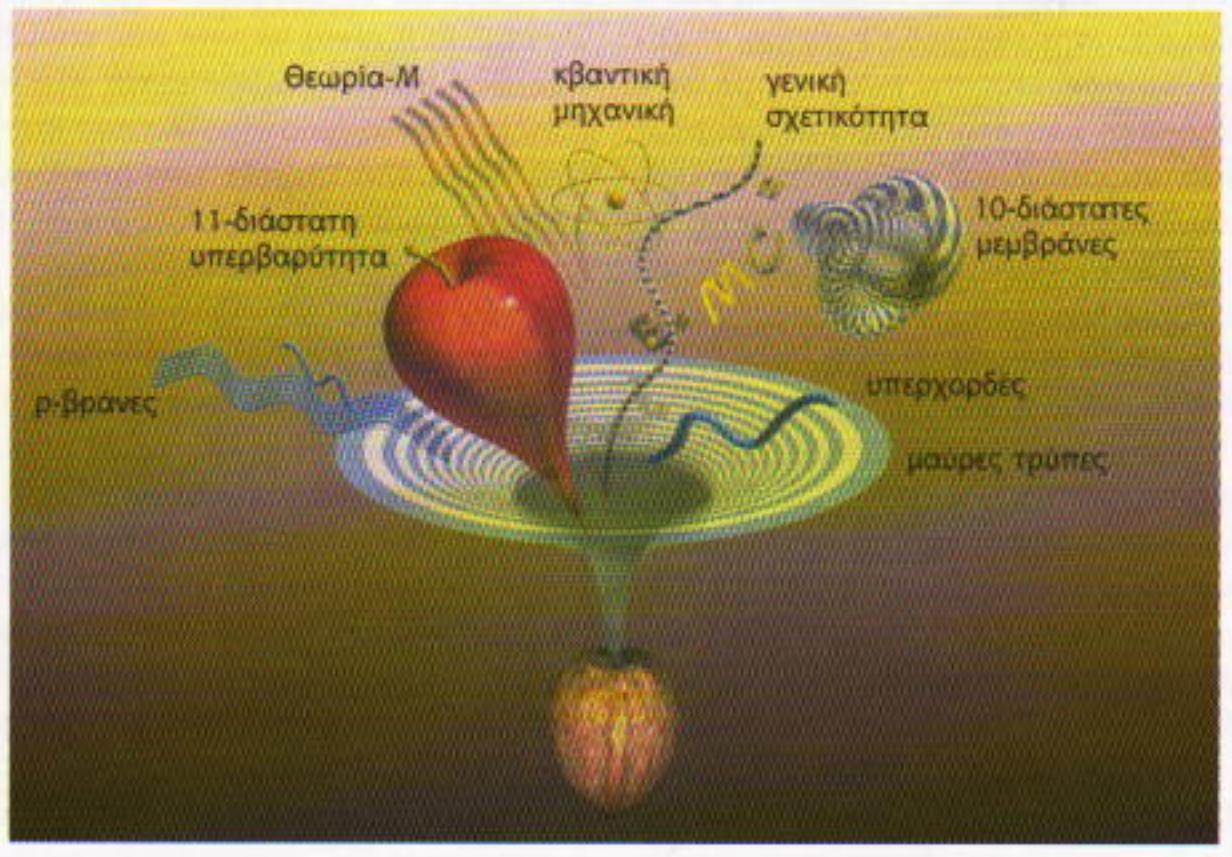
*Το Σύμπαν  
σ' ένα καρυδότσουφλο*

Κυκλοφορεί το φθινόπωρο του 2001, ταυτόχρονα σε ολόκληρο τον κόσμο

Τετράχρωμο, 275 εικόνες,  
260 σελ., 19 × 26 εκ.,  
Πανόδετο



Με το νέο βιβλίο του, ο Stephen Hawking, ένας από τους σπουδαιότερους θεωρητικούς φυσικούς της εποχής μας και σημαίνων διανοητής, μας οδηγεί στην πρώτη γραμμή της έρευνας στην κοσμολογία και στη θεωρητική φυσική για να μας διασαφηνίσει τα μυστήρια των εντυπωσιακών ανακαλύψεων που συνέβησαν στο χρονικό διάστημα από την έκδοση του πρώτου δημοφιλούς βιβλίου του (Το χρονικό του Χρόνου, 1988).



# Φτάστε στα έσχατα όρια

«Πολλοί εἰσι κλητοί, ολίγοι δὲ εκλεκτοί.»

—Κατὰ Ματθαιον, Κ 16

A.L. Rosenthal

**Α**Ν ΕΠΙΘΥΜΕΙΤΕ ΝΑ ΑΠΟΚΤΗΣΕΤΕ επιδεξιότητα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, πρέπει να προσπαθήσετε να εμπεδώσετε μια σειρά από λίγο ώς πολύ συνήθεις προσεγγίσεις, τεχνικές και μεθόδους μαθηματικού συλλογισμού. Σε αυτό το άρθρο θα παρουσιάσουμε μια εξαιρετικά γενική προσέγγιση που θα ονομάσουμε «κανόνα του ακραίου».

Ο κανόνας του ακραίου διατυπώνεται συνοπτικά με τέσσερις λέξεις: «Θεωρήστε την ακραία περίπτωση!» Στην ουσία, μας συμβουλεύει να θεωρήσουμε ένα αντικείμενο που έχει ακραίες ιδιότητες. Αν μελετάμε ένα σύνολο σημείων μιας ευθείας, ο κανόνας μάς λέει να εστιάσουμε την προσοχή μας στο ακραίο αριστερό ή στο ακραίο δεξιό σημείο του συνόλου. Αν το πρόβλημα αναφέρεται σε αριθμούς, ο κανόνας του ακραίου μάς συμβουλεύει να θεωρήσουμε τον ελάχιστο ή τον μέγιστο από αυτούς. Ιδού μερικά παραδείγματα.

**Πρόβλημα 1.** Δίνεται ένα σύνολο σημείων  $M$  στο επίπεδο, τέτοιο ώστε κάθε σημείο που ανήκει στο  $M$  να είναι το μέσον ενός διαστήματος το οποίο συνδέει δύο σημεία που ανήκουν στο  $M$ . Αποδείξτε ότι το σύνολο  $M$  είναι άπειρο.

Ένα καλό πρώτο βήμα είναι να εξετάσουμε ένα παρόμοιο αλλά απλούστερο πρόβλημα. Έτσι, πριν αντιμε-

τωπίσουμε το Πρόβλημα 1, ας δοκιμάσουμε να λύσουμε το επόμενο.

**Πρόβλημα 2.** Δίνεται ένα σύνολο σημείων  $M$  μιας ευθείας, τέτοιο ώστε κάθε σημείο που ανήκει στο  $M$  να είναι το μέσον ενός διαστήματος το οποίο συνδέει δύο σημεία που ανήκουν στο  $M$ . Αποδείξτε ότι το σύνολο  $M$  είναι άπειρο.

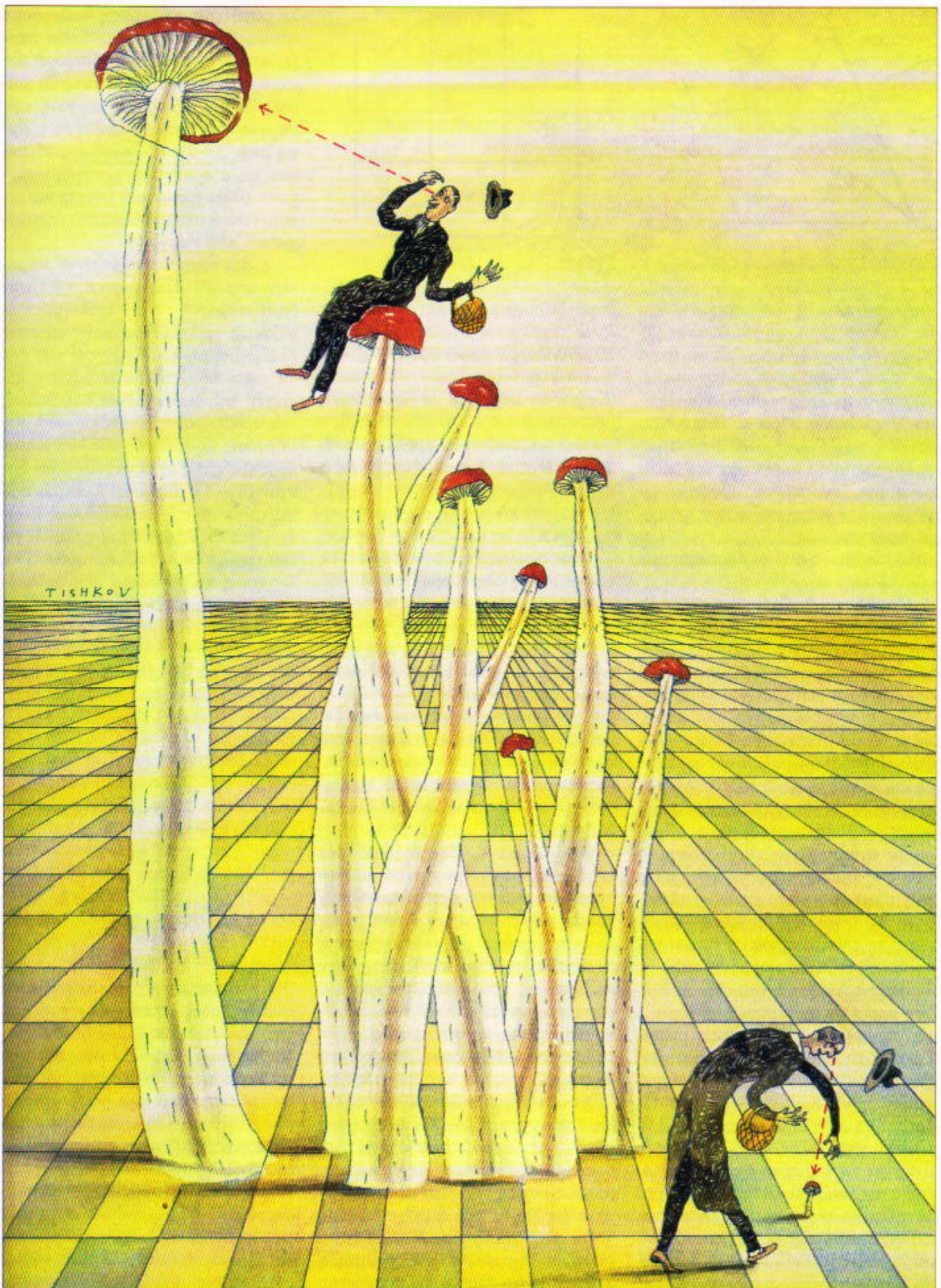
Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο  $M$  είναι πεπερασμένο και ας εφαρμόσουμε τον κανόνα του ακραίου. Αν το  $M$  είναι πεπερασμένο, έχει ακραία σημεία — το ακραίο αριστερό και το ακραίο δεξιό. Ας θεωρήσουμε ένα από αυτά — για παράδειγμα, το αριστερό — και ας το συμβολίσουμε με  $A$ . Το σημείο  $A$  είναι ακραίο και, επομένως, δεν μπορεί να βρίσκεται στο εσωτερικό ενός διαστήματος που συνδέει δύο άλλα σημεία του συνόλου  $M$ . Η αντίφαση αποδεικνύει ότι το  $M$  δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο.

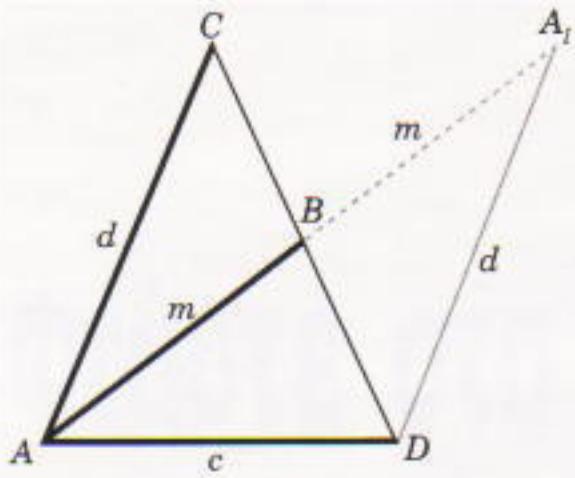
Υπάρχει και μια άλλη λύση του προβλήματος, η οποία επίσης βασίζεται στον κανόνα του ακραίου. Ας υποθέσουμε και πάλι ότι το  $M$  είναι πεπερασμένο σύνολο και ας θεωρήσουμε τα μήκη των διαστημάτων που συνδέουν ζεύγη σημείων του  $M$ . Αυτό το σύνολο αριθμών είναι πεπερασμένο. Εφαρμόζουμε τον κανόνα μας και θεωρούμε το μεγαλύτερο διάστημα, έστω  $BC$ . Είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν σημεία του  $M$  εκτός του διαστήματος  $BC$ , διότι τότε θα υπήρ-

χαν μεγαλύτερα διαστήματα. Επομένως, όλα τα σημεία του  $M$  ανήκουν στο διάστημα  $BC$ , οπότε ούτε το  $B$  ούτε το  $C$  ικανοποιούν τη βασική συνθήκη για τα σημεία του συνόλου  $M$  — και καταλήγουμε ξανά σε αντίφαση.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο Πρόβλημα 1. Υποθέτουμε ότι το σύνολο  $M$  είναι πεπερασμένο, και εφαρμόζουμε τον κανόνα του ακραίου ως εξής: Ορίζουμε έναν σταθερό προσανατολισμό στο επίπεδο και θεωρούμε το ακραίο αριστερό σημείο του συνόλου  $M$ . Αν υπάρχουν πολλά «ακραία αριστερά» σημεία, επλέγουμε το «χαμηλότερο» απ' αυτά. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το σημείο αυτό (έστω  $A$ ) δεν μπορεί να ανήκει σε διάστημα που συνδέει δύο σημεία του  $M$ . Πράγματι, αν υπήρχε τέτοιο διάστημα, τότε ένα από τα άκρα του θα βρισκόταν είτε αριστερά από το σημείο  $A$  είτε θα ανήκε στην ίδια κατακόρυφη με το  $A$ , αλλά χαμηλότερά του. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε αντίφαση.

Όπως και στην περίπτωση του Προβλήματος 2, υπάρχει μία ακόμα προσέγγιση. Θεωρούμε το σύνολο των αποστάσεων μεταξύ ζευγών σημείων του  $M$ . Αν το  $M$  είναι πεπερασμένο, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τέτοιων αποστάσεων και, συνεπώς, μπορούμε να βρούμε τη μεγαλύτερη από αυτές. Έστω ότι αυτή είναι η



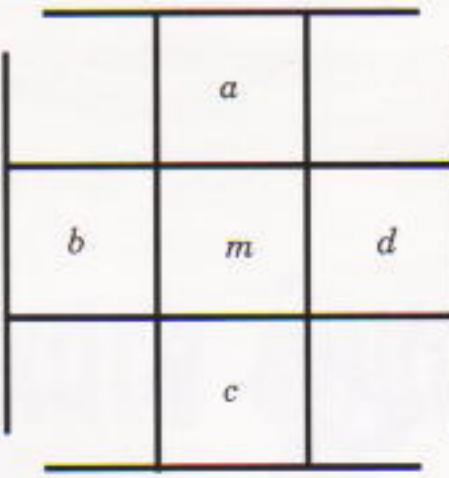


Σχήμα 1

απόσταση μεταξύ των σημείων  $A$  και  $B$ . Τότε όμως το σημείο  $B$  είναι μέσον ενός διαστήματος  $CD$ , τα άκρα του οποίου, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, ανήκουν στο σύνολο  $M$  (Σχήμα 1). Εύκολα τώρα αποδεικνύεται ότι είτε το  $AD$  είτε το  $CD$  είναι μεγαλύτερο από το  $AB$  (αποδείξτε το μόνοι σας, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η διάμεσος  $m$  που φέρουμε προς την πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του).

**Πρόβλημα 3.** Γράφουμε φυσικούς αριθμούς στα τετράγωνα μιας άπειρης σκακιέρας, έτσι ώστε κάθε αριθμός να ισούται με τον αριθμητικό μέσο των τεσσάρων γειτονικών του αριθμών —αυτών που βρίσκονται από πάνω, κάτω, δεξιά και αριστερά του. Αποδείξτε ότι όλοι οι αριθμοί που γράφουμε στη σκακιέρα είναι ίσοι.

Εδώ θα μας βοηθήσει μια παραλλαγή του κανόνα του ακραίου: «Θεωρήστε τη μικρότερη τιμή!» Ανάμεσα στους αριθμούς που είναι γραμμένοι στη σκακιέρα υπάρχει ένας ελάχιστος. Το γεγονός αυτό είναι γνωστή ιδιότητα κάθε συνόλου που αποτελείται από φυσικούς αριθμούς, αλλά ας δούμε μια απόδειξή του. Έστω  $k$  ένας από τους αριθμούς. Αν μεταξύ των αριθμών της σκακιέρας περιλαμβάνεται το 1, τότε το 1 είναι ο ελάχιστος αριθμός (θεωρούμε ότι οι φυσικοί αριθμοί αρχίζουν από το 1· άλλοι προτιμούν το 0 ως αρχικό, αλλά ο συλλογισμός δεν αλλάζει). Αν δεν υπάρχει το 1 στη σκακιέρα, κοιτάζουμε αν υπάρχει το 2. Αν υπάρχει, τότε ο μικρότερος αριθμός είναι το 2. Διαφορετικά, ψάχνουμε για το 3, και ούτω καθεξής. Σε  $k$  το πολύ βήματα, θα βρούμε τον μικρότερο αριθμό. Τον



Σχήμα 2

συμβολίζουμε με  $m$ , και ονομάζουμε  $P$  το τετράγωνο στο οποίο ανήκει. Συμβολίζουμε τους αριθμούς των γειτονικών τετραγώνων  $a, b, c$  και  $d$  (Σχήμα 2). Σύμφωνα με τη συνθήκη μας,  $m = (a + b + c + d)/4$ , ή  $a + b + c + d = 4m$ . Λόγω του τρόπου που επιλέξαμε το  $m$ , έχουμε ότι  $a \geq m$ ,  $b \geq m$ ,  $c \geq m$ ,  $d \geq m$ . Αν έστω και μία από τις ανισότητες αυτές είναι γνήσια, βρίσκουμε  $a + b + c + d > 4m$ , γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας. Συνεπώς  $a = b = c = d = m$ .

Άρα, αν ένα τετράγωνο της σκακιέρας περιέχει τον ελάχιστο αριθμό  $m$ , τότε τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα περιέχουν επίσης τον  $m$ . Μετακινούμενοι συνεχώς σε γειτονικά τετράγωνα μπορούμε, ξεκινώντας από το  $P$ , να καταλήξουμε σε οποιοδήποτε τετράγωνο της σκακιέρας. Άρα, όλοι οι αριθμοί στη σκακιέρα είναι ίσοι με  $m$ .

**Πρόβλημα 4.** Τοποθετούμε ένα πλήθος πύργων σε μια σκακιέρα διαστάσεων  $n \times n$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξής συνθήκη: αν ένα τετράγωνο της σκακιέρας είναι ελεύθερο, τότε το συνολικό πλήθος των πύργων στην οριζόντια και στην κάθετη γραμμή που διασταυρώνονται σε αυτό το τετράγωνο είναι τουλάχιστον  $n$ . Αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον  $n^2/2$  πύργοι στη σκακιέρα.

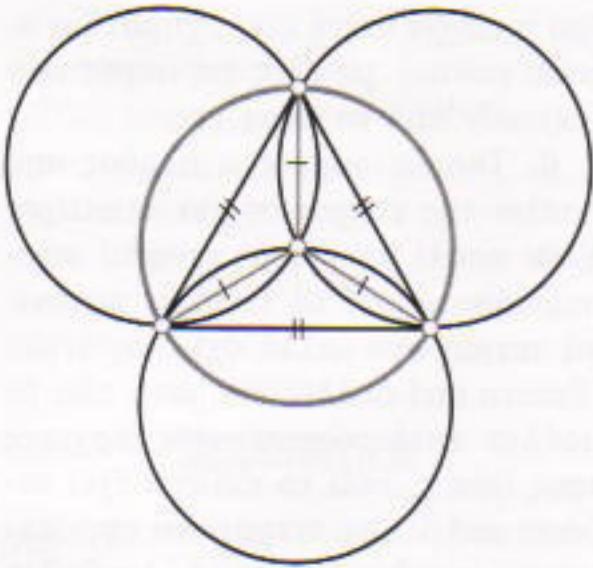
Αυτό είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Όμως, μια επιδέξια εφαρμογή του κανόνα του ακραίου απλοποιεί δραστικά την κατάσταση. Ας θεωρήσουμε μια γραμμή της σκακιέρας (οριζόντια ή κάθετη) που περιέχει το ελάχιστο πλήθος πύργων. Μπορεί να υπάρχουν διάφορες τέτοιες γραμμές, η καθεμία με το ίδιο «φορτίο» πύργων.

Σε αυτή την περίπτωση διαλέγουμε οποιαδήποτε από αυτές. Έστω ακόμη ότι είναι οριζόντια (διαφορετικά στρέφουμε τη σκακιέρα κατά 90 μοίρες). Συμβολίζουμε το πλήθος των πύργων σε αυτή την οριζόντια γραμμή με  $k$ . Αν  $k \geq n/2$ , τότε σε καθεμία από τις  $n$  οριζόντιες γραμμές υπάρχουν τουλάχιστον  $n/2$  πύργοι και, επομένως, η σκακιέρα περιέχει τουλάχιστον  $n^2/2$  πύργους.

Έστω τώρα ότι το  $k$  είναι μικρότερο του  $n/2$ . Υπάρχουν  $n - k$  ελεύθερα τετράγωνα στην επιλεγμένη οριζόντια γραμμή, και κάθε κατακόρυφη γραμμή που διέρχεται από ένα απ' αυτά τα ελεύθερα τετράγωνα περιέχει, σύμφωνα με τη διατύπωση του προβλήματος, τουλάχιστον  $n - k$  πύργους. Άρα, αυτές οι  $n - k$  κατακόρυφες γραμμές περιέχουν τουλάχιστον  $(n - k)^2$  πύργους. Καθεμία από τις υπόλοιπες  $k$  κατακόρυφες περιέχει τουλάχιστον  $k$  πύργους (λόγω του τρόπου επιλογής του αριθμού  $k$ ). Συνεπώς, το συνολικό πλήθος πύργων στη σκακιέρα είναι τουλάχιστον  $(n - k)^2 + k^2$ . Απομένει να αποδείξουμε ότι  $(n - k)^2 + k^2 \geq n^2/2$ . Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους —για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} [(n - k)^2 + k^2] - \frac{n^2}{2} &= \\ &= \frac{n^2}{2} - 2nk + 2k^2 \\ &= 2\left(\frac{n^2}{4} - nk + k^2\right) \\ &= 2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Αν το  $n$  είναι άρτιος, μπορούμε να τοποθετήσουμε τους πύργους στη σκακιέρα έτσι ώστε και η συνθήκη να ικανοποιείται και οι πύργοι να είναι ακριβώς  $n^2/2$ : Τοποθετούμε όλους τους πύργους σε μαύρα τετράγωνα (ή όλους σε άσπρα). Αν το  $n$  είναι περιττό, δεν μπορεί να τοποθετηθούν  $n^2/2$  πύργοι στη σκακιέρα έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του προβλήματος (διότι το  $n^2/2$  δεν είναι ακέραιος). Υπάρχει όμως μια κατάλληλη διευθέτηση  $(n^2 + 1)/2$  πύργων: ένας τοποθετείται σε γωνια-



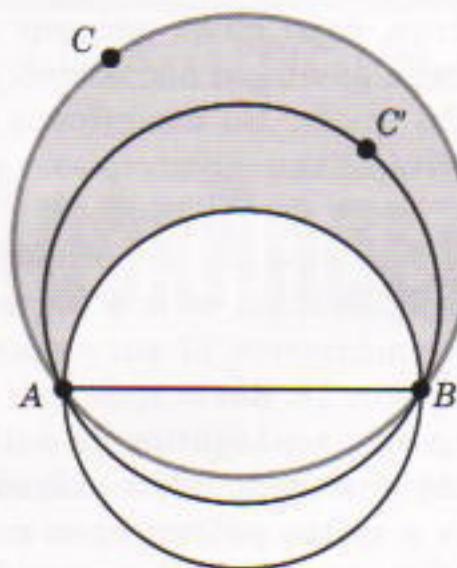
Σχήμα 3

κό τετράγωνο και οι υπόλοιποι σε τετράγωνα ίδιου χρώματος.

Και το επόμενο πρόβλημα επλύεται με τον κανόνα του ακραίου.

**Πρόβλημα 5.** Δίνεται ένα πλήθος μη συγγραμμικών σημείων του επιπέδου. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας κύκλος που διέρχεται από τρία απ' αυτά τα σημεία, ο οποίος δεν περιέχει στο εσωτερικό του κανένα από τα δεδομένα σημεία.

Αν σχεδιάσουμε όλους τους κύκλους που διέρχονται από τριάδες των δεδομένων σημείων, θα πάρουμε ένα σύνολο κύκλων (μερικοί από τους οποίους μπορεί να συμπίπτουν). Πρέπει να αποδείξουμε ότι τουλάχιστον ένας απ' αυτούς δεν περιέχει κάποιο από τα δεδομένα σημεία. Ο κανόνας του ακραίου μάς λέει να θεωρήσουμε τον μικρότερο κύκλο, αλλά στο Σχήμα 3 παρατηρούμε ότι ένας τέτοιος κύκλος υπάρχει περίπτωση να περιέχει ένα από τα δεδομένα σημεία. Αν και υπάρχει τρόπος να βρούμε τη λύση με αυτή τη μέθοδο (βλ. Άσκηση 2), θα κάνουμε κάτι διαφορετικό. Θα προσπαθήσουμε πρώτα να λύσουμε ένα απλούστερο πρόβλημα: ας βρούμε έναν κύκλο που διέρχεται από δύο από τα δεδομένα σημεία και δεν περιέχει κανένα από τα υπόλοιπα. Μετράμε τις αποστάσεις μεταξύ όλων των ζευγών σημείων και χρησιμοποιούμε τον κανόνα του ακραίου με τη μορφή «θεωρήστε το ελάχιστο!» —δηλαδή, θεωρούμε το ζεύγος των σημείων  $A$  και  $B$  που έχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι ο κύκλος που κατασκευάζεται με διάμετρο το διάστημα  $AB$  1-

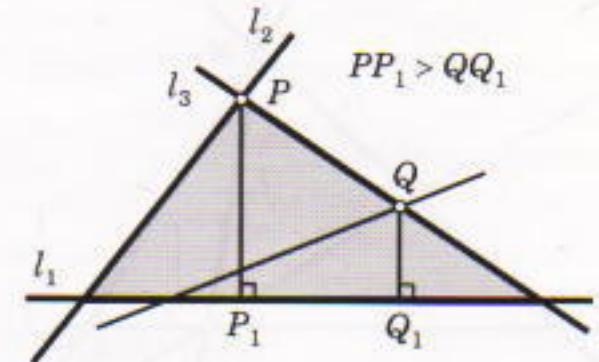


Σχήμα 4

κανοποιεί την εξής συνθήκη: η απόσταση και του  $A$  και του  $B$  από οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα ( $n - 2$ ) δεδομένα σημεία είναι μεγαλύτερη ή ίση με  $AB$  και, επομένως, καθένα από τα υπόλοιπα ( $n - 2$ ) σημεία βρίσκονται εκτός του κύκλου. Σχεδιάζουμε τώρα τους κύκλους που διέρχονται από τα  $A$ ,  $B$  και από καθένα από τα υπόλοιπα ( $n - 2$ ) σημεία, και επλέγουμε τον μικρότερο απ' αυτούς (εφαρμόζοντας και πάλι τον κανόνα του ακραίου). Έστω ότι αυτός είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$ . Αυτός είναι και ο κύκλος που αναζητούμε, διότι κάθε κύκλος που διέρχεται από τα  $A$ ,  $B$  και κάποιο σημείο  $C'$  το οποίο ανήκει στον σκιασμένο μηνίσκο (βλ. Σχήμα 4) είναι μικρότερος από τον κύκλο που διέρχεται από τα  $A$ ,  $B$  και  $C$  (αποδείξτε το).

**Πρόβλημα 6.** Δίνονται  $n$  ευθείες στο επίπεδο,  $n \geq 3$ , ώστε οποιοδήποτε τρεις από αυτές να μη συντρέχουν στο ίδιο σημείο, ούτε να υπάρχουν δύο παράλληλες μεταξύ τους. Οι ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε διάφορα τμήματα. Αποδείξτε ότι για κάθε ευθεία, τουλάχιστον ένα από τα χωρία στα οποία πρόσκειται είναι τρίγωνο.

Έστω  $l_1$  μία από τις ευθείες. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του ακραίου και επλέγουμε μεταξύ των σημείων των ευθειών των ευθειών το σημείο  $P$  που βρίσκεται στην πλησιέστερη απόσταση από την ευθεία  $l_1$ . Έστω  $l_2$  και  $l_3$  οι ευθείες που τέμνονται στο σημείο  $P$ . Θεωρούμε το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες  $l_1$ ,  $l_2$  και  $l_3$  (Σχήμα 5). Καμία άλλη ευθεία δεν τέμνει αυτό το τρίγωνο (διότι διαφορε-



Σχήμα 5

τικά θα υπήρχε ένα σημείο τομής  $Q$ , είτε επί της  $l_2$  είτε επί της  $l_3$ , το οποίο θα βρισκόταν πλησιέστερα στην  $l_1$  απ' όσο το σημείο  $P$ ).

**Πρόβλημα 7.** Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ .

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση. Ας θεωρήσουμε τη λύση για την οποία το άθροισμα  $x^2 + y^2$  παίρνει την ελάχιστη τιμή (αν υπάρχουν διάφορες τετράδες αριθμών με αυτή την ιδιότητα, επλέγουμε οποιαδήποτε από αυτές). Συμβολίζουμε τους τέσσερις αριθμούς με  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$ , αντίστοιχα. Από την ισότητα  $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$  έπειται ότι το  $a^2 + b^2$  είναι πολλαπλάσιο του 3. Όμως, το  $a^2 + b^2$  διαιρείται διά του 3 αν και μόνο αν διαιρούνται διά του 3 και τα  $a$ ,  $b$  (διότι το τετράγωνο ενός αριθμού που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 αφήνει πάντα υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί διά του 3).

Συνεπώς,  $a = 3m$ ,  $b = 3n$ , οπότε

$$a^2 + b^2 = 9m^2 + 9n^2 = 3(c^2 + d^2).$$

Αν διαιρέσουμε την τελευταία ισότητα διά 3, βρίσκουμε

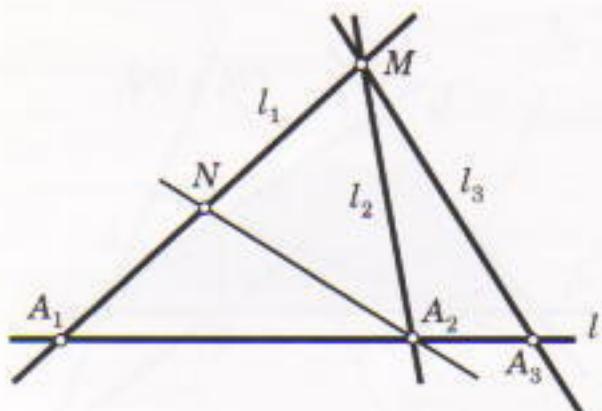
$$c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2).$$

Επομένως, βρήκαμε τέσσερις φυσικούς αριθμούς  $c$ ,  $d$ ,  $m$ ,  $n$  που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση και για τους οποίους ισχύει

$$c^2 + d^2 < a^2 + b^2.$$

Η τελευταία ανισότητα έρχεται σε αντίφαση με τον τρόπο που επλέξαμε τα  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

**Πρόβλημα 8.** Δίνονται  $n$  ευθείες στο επίπεδο, όπου  $n \geq 3$ , οι οποίες τέμνονται όλες ανά δύο, ενώ από κάθε σημείο τομής διέρχονται τουλάχιστον τρεις ευθείες. Αποδείξτε ότι όλες οι δε-



Σχήμα 6

δομένες ευθείες συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

Έστω  $l$  μία από τις δεδομένες ευθείες. Αν δεν συντρέχουν όλες οι ευθείες στο ίδιο σημείο, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής το οποίο δεν ανήκει στην  $l$ . Από αυτά τα σημεία επιλέγουμε το  $M$ , το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στην ευθεία  $l$ . Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις ευθείες  $l_1$ ,  $l_2$  και  $l_3$  που διέρχονται από το  $M$ . Αυτές οι ευθείες τέμνουν την  $l$  στα σημεία  $A_1$ ,  $A_2$  και  $A_3$ . Έστω ότι το  $A_2$  βρίσκεται ανάμεσα στο  $A_1$  και το  $A_3$  (Σχήμα 6). Από τη διατύπωση του προβλήματος έπειτα ότι εκτός των  $l$  και  $l_2$ , τουλάχιστον άλλη μία ευθεία διέρχεται από το  $A_2$ . Αυτή πρέπει να τέμνει ένα από τα διαστήματα  $MA_1$  ή  $MA_2$  σε κάποιο σημείο  $N$ . Τότε, το σημείο  $N$  βρίσκεται πλησιέστερα στην ευθεία  $l$  απ' όσο το  $M$ , γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με τον τρόπο επλογής του  $M$ .

Μια περαιτέρω εξέλιξη του κανόνα του ακρίου είναι ο «κανόνας διάταξης», ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: «Διατάξτε τα στοιχεία του συνόλου σας με κατάλληλο τρόπο — σε αύξουσα, φθίνουσα, ή οποιαδήποτε άλλη βολική διάταξη!»

**Πρόβλημα 9.** Επτά συλλέκτες μανιταριών μάζεψαν 100 μανιτάρια. Κανείς από τους επτά δεν μάζεψε το ίδιο πλήθος μανιταριών με κάποιον από τους άλλους. Αποδείξτε ότι τρεις από αυτούς μάζεψαν, από κοινού, τουλάχιστον 50 μανιτάρια.

Ας γράψουμε τα ονόματα των επτά ανθρώπων σε έναν κατάλογο, αρχίζοντας από τον πιο παραγωγικό συλλέκτη και τελειώνοντας με αυτόν που μάζεψε τα λιγότερα μανιτάρια. Είναι προφανές ότι πρέπει να ασχοληθούμε με τους τρεις πρώτους στον

κατάλογο, διότι αυτοί μάζεψαν περισσότερα μανιτάρια από οποιαδήποτε άλλη τριάδα. Θα αποδείξουμε ότι τα μανιτάρια που συγκέντρωσαν από κοινού είναι τουλάχιστον 50. Αν ο τρίτος στη σειρά μάζεψε 16 μανιτάρια ή περισσότερα, τότε ο δεύτερος βρήκε τουλάχιστον 17 και ο πρώτος τουλάχιστον 18. Και οι τρεις μάζεψαν συγκέντρωσαν τουλάχιστον  $16 + 17 + 18 = 51$  μανιτάρια, οπότε τελειώσαμε. Αν ο τρίτος μάζεψε 15 το πολύ μανιτάρια, τότε οι υπόλοιποι συλλέκτες (τους οποίους κατατάξαμε από την τέταρτη έως την εβδομη θέση) συγκέντρωσαν το πολύ  $14 + 13 + 12 + 11 = 50$  μανιτάρια, αφήνοντας και πάλι 50 για τους πρώτους τρεις.

Και τώρα ήρθε η στιγμή να δοκιμάσετε μόνοι σας να «φτάσετε στα άκρα»!

### Ασκήσεις

1. Σε έναν  $n \times n$  πίνακα είναι γραμμένοι  $n^2$  ακέραιοι με τέτοιον τρόπο ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή και στήλη που διασταυρώνονται σε κελί το οποίο περιέχει το μηδέν να είναι τουλάχιστον  $n$ . Αποδείξτε ότι το άθροισμα των  $n^2$  αριθμών ισούται τουλάχιστον  $n^2/2$ .

2. (a) Στο εσωτερικό του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου  $ABC$  υπάρχει ένα σημείο  $D$  τέτοιο ώστε η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου να είναι μικρότερη ή ίση με την ακτίνα των κύκλων  $ABD$ ,  $BCD$  και  $CAD$ . Αποδείξτε ότι το τρίγωνο  $ABC$  είναι οξυγώνιο, το σημείο  $D$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και ότι οι ακτίνες των τεσσάρων κύκλων είναι ίσες.

(b) Βρείτε δεύτερη λύση για το Πρόβλημα 5, ξεκινώντας με την επλογή του μικρότερου κύκλου που διέρχεται από τρία σημεία.

3. Δίνονται  $n$  σημεία στο επίπεδο, όπου  $n \geq 3$ . Κάθε ευθεία που διέρχεται από ένα ζεύγος σημείων περιέχει τουλάχιστον ένα ακόμη από τα δεδομένα σημεία. Αποδείξτε ότι και τα  $n$  σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία.

4. Βρείτε όλες τις τριάδες φυσικών αριθμών  $x$ ,  $y$ ,  $z$  για τις οποίες ισχύει  $x + y + z = xyz$ .

5. Αποδείξτε ότι σε κάθε τετράε-

δρο υπάρχει ακμή που σχηματίζει οξείες γωνίες με όλες τις ακμές που ξεκινούν από τα άκρα της.

6. Τοποθετούμε ένα πλήθος από πούλια της ντάμας σε μια σκακιέρα. Κάθε πούλι μπορεί να κινηθεί σε οποιοδήποτε από τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα (αλλά όχι διαγώνια). Έπειτα από πολλές κινήσεις, όλα τα πούλια επιστρέφουν στις αρχικές τους θέσεις, ενώ το καθένα έχει περάσει από όλα τα τετράγωνα της σκακιέρας ακριβώς μία φορά. Αποδείξτε ότι υπήρξε μια στιγμή κατά την οποία κανένα πούλι δεν βρισκόταν στην αρχική του θέση.

7. Λύστε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= x_3^2, \\x_2 + x_3 &= x_4^2, \\x_3 + x_4 &= x_5^2, \\x_4 + x_5 &= x_1^2, \\x_5 + x_1 &= x_2^2,\end{aligned}$$

8. Χωρίζουμε έναν κύβο σε μικρότερους κύβους. Αποδείξτε ότι αυτή η διαδικασία θα δημιουργήσει τουλάχιστον δύο ίσους κύβους.

9. Σε μια χώρα, όλες οι αποστάσεις μεταξύ των αεροδρομίων είναι διαφορετικές. Ένα αεροπλάνο απογειώνεται από κάθε αεροδρόμιο και κατευθύνεται στο πλησιέστερο. Αποδείξτε (a) ότι σε κάθε αεροδρόμιο προσγειώθηκαν το πολύ 5 αεροπλάνα, και (b) αν το πλήθος των αεροδρομίων είναι περιττό, τότε υπάρχει ένα αεροδρόμιο στο οποίο δεν προσγειώθηκε κανένα αεροπλάνο. □

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 69

# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

### M216

**Αποδείξεις ύπαρξης.** Αποδείξτε ότι  
(α) σε ένα κανονικό δωδεκάγωνο και  
(β) σε ένα κανονικό 54-γωνο υπάρχουν τέσσερις διαγώνιοι που συντρέχουν σε ένα σημείο και δεν διέρχονται από το κέντρο του πολυγώνου.

### M217

**Στοιχεία προϋπολογισμού.** Ένα διοικητικό συμβούλιο που αποτελείται από 2.000 μέλη πρέπει να καταθέσει έναν προϋπολογισμό που περιέχει 200 στοιχεία δαπανών. Το κάθε μέλος προετοιμάζει τη δική του πρόταση για τον προϋπολογισμό, στην οποία προσδιορίζει τη μέγιστη δαπάνη για κάθε στοιχείο έτσι ώστε η συνολική δαπάνη να μην υπερβαίνει μια δεδομένη τιμή  $S$ . Για κάθε στοιχείο του προϋπολογισμού, το διοικητικό συμβούλιο εγκρίνει μια μέγιστη δαπάνη όταν αυτή προτείνεται από τουλάχιστον  $k$  μέλη. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή τού  $k$  που εξασφαλίζει ότι η συνολική δαπάνη δεν θα είναι μεγαλύτερη από  $S$ ; (I. Sergeyev)

### M218

**Βρείτε το άθροισμα.** Οι αριθμοί  $a$  και  $\beta$  ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$a^3 - 3a^2 + 5a = 1,$$

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5.$$

Βρείτε το  $a + \beta$ . (V. Kukushkin)

### M219

**Ο τελευταίος αριθμός.** Γράφουμε στον πίνακα  $n$  αριθμούς. Στη συνέχεια εκτελούμε την εξής διαδικασία: Σβήνουμε δύο αριθμούς  $a$  και  $b$  και γράφουμε τον αριθμό  $(a + b)/4$ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία  $n - 1$  φορές. Στο τέλος, στον πίνακα απομένει ένας μόνο αριθμός. Αποδείξτε ότι, αν όλοι οι αρχικοί αριθμοί είναι

ίσοι με τη μονάδα, ο αριθμός στον οποίο καταλήγουμε είναι μεγαλύτερος τη  $1/n$ .

### M220

**Ο διώκτης του εγκλήματος.** Ένας επιθεωρητής της αστυνομίας επινόησε ένα σχέδιο ανάκρισης μαρτύρων που εξασφαλίζει τη διαλεύκανση ενός εγκλήματος. Θα υποβάλλει ερωτήματα που επιδέχονται ως απάντηση μόνο ναι ή όχι. Κάθε ερώτηση μπορεί να εξαρτάται από τις απαντήσεις που δόθηκαν σε προηγούμενες ερωτήσεις. Ο επιθεωρητής υποθέτει ότι όλες οι απαντήσεις θα είναι σωστές. Υπολόγισε ότι, ανεξάρτητα από τις απαντήσεις που θα δοθούν, δεν χρειάζονται περισσότερες από 91 ερωτήσεις. Αποδείξτε ότι ο επιθεωρητής μπορεί να καταρτίσει ένα σχέδιο που να αποτελείται από 105 το πολύ ερωτήσεις, το οποίο θα εξασφαλίζει τη διαλεύκανση του εγκλήματος ακόμα και αν δοθεί μία ψευδής απάντηση (θα είναι όμως αποτελεσματικό ακόμα κι αν όλες οι απαντήσεις είναι αληθείς).

**Σημείωση:** Αν μπορείτε να καταρτίσετε σχέδια μόνο με περισσότερες από 105 ερωτήσεις, δώστε το καλύτερο απ' αυτά.

## Φυσική

### Φ216

**Γραμμή από κιμωλία.** Ένα κομμάτι κιμωλίας ηρεμεί πάνω σε μια οριζόντια σανίδα συντελεστή τριβής  $\mu$ . Ξαφνικά, η σανίδα αρχίζει να κινείται οριζόντια με ταχύτητα  $v_0$ , και μετά την πάροδο χρόνου  $t$  σταματά απότομα. Βρείτε το μήκος της γραμμής που χάραξε η κιμωλία πάνω στη σανίδα. (A. Zilberman)

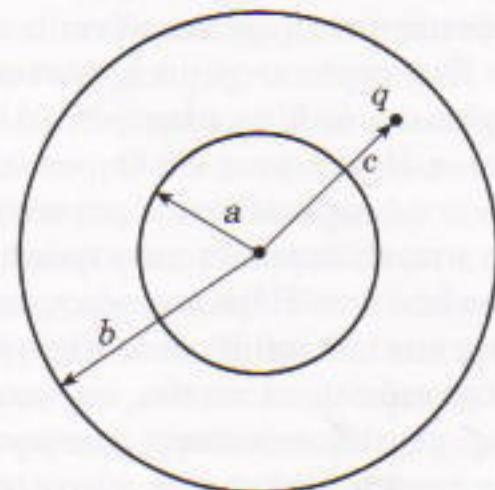
### Φ217

**Μακρινό πυκνό αντικείμενο.** Σχετι-

κά πρόσφατα, οι αστρονόμοι ανακάλυψαν έναν εξαιρετικά πυκνό πλανήτη σε κάποιο μακρινό αστρικό σύστημα. Η περίοδος της περιστροφής του είναι μόνο  $T = 6$  min. Υπολογίστε την πυκνότητα του πλανήτη.

### Φ218

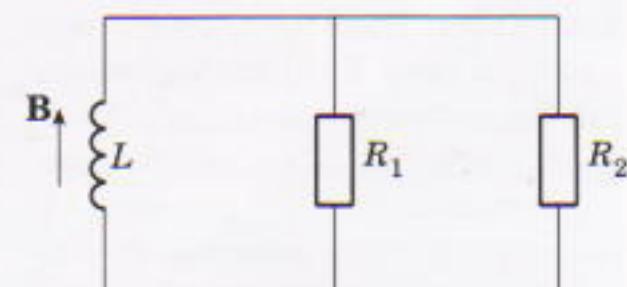
**Φορτία και σφαίρες.** Ένα σημειακό φορτίο  $q$  βρίσκεται ανάμεσα σε δύο αφόρτιστες και ομόκεντρες μεταλλικές σφαίρες με ακτίνες  $a$  και  $b$  και σε απόσταση  $c$  από το κέντρο του συστήματος (Σχήμα 1). Πόσο φορτίο θα περάσει από ένα λεπτό σύρμα δταν τα άκρα του έρθουν σε επαφή με τις δύο σφαίρες; (V. Komov)



Σχήμα 1

### Φ219

**Εκλινόμενη θερμότητα.** Ένα πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$  (Σχήμα 2) βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου. Το πεδίο απενεργοποιείται απότομα. Αμέσως κατόπιν, ένα ηλε-



Σχήμα 2

Η συνέχεια στη σελ. 56

# Πόσο ζει ένας κομήτης;

Ωσπου να «ξεμείνει» από καύσιμα

S. Varlamov

**Ο**Ι ΠΛΑΝΗΤΕΣ ΤΟΥ ΗΛΙΑΚΟΥ ΜΑΣ συστήματος διαιρούνται συνήθως σε δύο ομάδες. Όσοι βρίσκονται πλησιέστερα στον Ήλιο (Ερμής, Αφροδίτη, Γη και Άρης) ονομάζονται γήινοι πλανήτες —οι επιφάνειές τους χαρακτηρίζονται από την ίδια περίπου χημική σύσταση. Αντιθέτως, οι δίνοι πλανήτες (Δίας, Κρόνος, Ποσειδώνας και Ουρανός) έχουν πολύ περισσότερο υδρογόνο και ήλιο στα εξωτερικά τους στρώματα. Γύρω από τον Ήλιο περιφέρονται επίσης και πολλοί ήσονες πλανήτες (αστεροειδείς), οι οποίοι παρουσιάζουν χημική σύσταση παρεμφερή προς εκείνη των γήινων πλανητών.

Μερικές φορές η εγγύς του Ήλιου περιοχή δέχεται την επίσκεψη κομητών, οι οποίοι από χημική άποψη διαφέρουν τόσο από τους γήινους όσο και από τους δίνους πλανήτες. Έχει δε διατυπωθεί η υπόθεση πως στο ηλιακό μας σύστημα υπάρχει ένα τεράστιο πλήθος μικρών ουράνιων σωμάτων, τα οποία κείνται πέραν της τροχιάς του Πλούτωνα, στο λεγόμενο Νέφος Oort. Κατά κανόνα, τα στερεά σώματα που περιέχει αυτό το νέφος, μαζί με τα αέρια και τη μεσογαλαξιακή σκόνη, περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο κατά την ίδια φορά όπως και οι πλανήτες. Κινούνται βραδύτατα, ενίστε όμως, όταν περνούν πολύ κοντά το ένα από το άλλο, τα μέτρα και οι κατευθύνσεις των



Ο κομήτης Hyakutake. Η φωτογραφία απεικονίζει μια περιοχή με πλευρά μήκους 3.340 km. Όπως φαίνεται, η σκόνη από τον κομήτη παράγεται ως επί το πλείστον στην πλευρά του που στρέφεται προς τον Ήλιο. Στο πάνω μισό της φωτογραφίας διακρίνονται τρία θραύσματα από τον κομήτη τα οποία έχουν δημιουργήσει δικές τους ουρές.

ταχυτήτων τους μπορεί να παρουσιάζουν αξιοσημείωτες μεταβολές.

Αν, συνεπεία μιας τέτοιας συνάντησης, κάποιο ουράνιο σώμα μεταβιβάσει ένα σημαντικό μέρος της ορμής του σε κάποιο άλλο, η αρχική του τροχιά αλλάζει, οδηγώντας το πλησιέστερα προς τον Ήλιο. Οι αστρονόμοι λένε τότε ότι το ουράνιο αυτό σώμα πέφτει από το Νέφος Oort στην ηλιακή περιοχή. Ανάλογα με την ταχύτητα που έχει όσο βρίσκεται στην περιφέρεια του ηλιακού συστήματος, το συγκεκριμένο σώμα ενδέχεται να μετατραπεί είτε σε «εφάπαξ επισκέπτη» είτε σε έναν κομήτη με μακρά περίοδο. Διερχόμενο πλησίον κάποιου από τους μεγάλους πλανήτες, ένα τέτοιο ουράνιο σώμα μπορεί να μεταβάλει πάλι την ταχύτητά του (δηλαδή, να πραγματοποιήσει έναν βαρυτικό ελιγμό) και να γίνει ένας κομήτης με μάλλον βραχεία περίοδο περιφοράς, όπως ο κομήτης του Halley.

Οι αστρονομικές παρατηρήσεις των φασμάτων εκπομπής από τις ουρές των κομητών έδειξαν ότι οι πυρήνες των κομητών συνίστανται από πτητικές ουσίες όπως το νερό, το μεθάνιο και η αμμωνία. Αναμφίβολα, μένουν πολλά ακόμη να μάθουμε σχετικά με τις διαφορές ως προς τη χημική σύσταση που παρουσιάζονται ανάμεσα στους δίνους πλανήτες, του γήινους πλανήτες και τους κομήτες. Στο παρόν άρθρο, ωστόσο, θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε σε ένα διαφορετικό ερώτημα: Πόσο χρόνο ζει ο παγωμένος πυρήνας ενός κομήτη; Και είναι η διάρκεια ζωής του μεγάλη ή μικρή εν συγκρίσει προς εκείνη του ηλιακού μας συστήματος;

Φανταστείτε πως ένας σφαιρικός κομήτης με αρχική ακτίνα 1 km και αρχική θερμοκρασία 0 K έχει εισέλθει στο ηλιακό σύστημα και ότι τέθηκε σε περιφορά γύρω από τον Ήλιο, ακολουθώντας μια κυκλική τροχιά με ακτίνα ίση προς το μισό της απόστασης που χωρίζει τη Γη από τον Ήλιο —δηλαδή, ίση με μισή αστρονομική μονάδα (a.u.). Έστω ακόμη ότι ο κομήτης μας περιστρέφεται μάλλον ταχέως γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς του. Θα υποθέσουμε επίσης ότι το μεγαλύτερο μέρος της προσπίπουσας ηλιακής ακτινοβολίας (75%) ανακλάται από την επιφάνεια του κομήτη. Αυτά τα δεδομένα μάς αρκούν για να εκτιμήσουμε τη διάρκεια ζωής ενός τέτοιου κομήτη, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν πρόκειται να κατακερματιστεί λόγω κάποιας καταστροφικής σύγκρουσης με κάποιο άλλο ουράνιο σώμα.

Το βαρυτικό πεδίο του κομήτη θα σταθεί ικανό να επαναφέρει στην παγωμένη επιφάνεια του πυρήνα τα μόρια νερού που την εγκαταλείπουν μόνο εφόσον η ταχύτητα της θερμικής κίνησής τους είναι πολλές φορές μικρότερη από την ταχύτητα διαφυγής (η οποία συχνά αναφέρεται και ως δεύτερη κοσμική ταχύτητα, εξ ου και ο συμβολισμός  $v_{II}$ )

$$v_{II} = \sqrt{2Gm_{\text{κομ}}/r}.$$

Στην περίπτωση του κομήτη μας, η εν λόγω ταχύτητα ανέρχεται στα περίπου 0,7 m/s, οπότε διαπιστώνουμε α-

μέσως ότι η ιδιοβαρύτητα του κομήτη αδυνατεί να συγκρατήσει τα μόρια νερού που διαφεύγουν από την επιφάνειά του. Με άλλα λόγια, ο κομήτης μας δεν αναμένεται να περιβάλλεται από κάποιου ειδους ατμόσφαιρα. Τα μόρια που τον εγκαταλείπουν δεν πρόκειται να επιστρέψουν ποτέ πίσω.

Είναι επίσης σαφές ότι η μεγαλύτερη ροή ηλιακής ακτινοβολίας θα προσπίπτει στην επιφάνεια του κομήτη κοντά στον ισημερινό του. Η ποσότητα ηλιακής ενέργειας που πέφτει κάθετα σε μια πλάκα εμβαδού  $1 \text{ m}^2$  στη Γη (η λεγόμενη ηλιακή σταθερά) ανά μονάδα χρόνου ισούται με  $P_{\mu\text{e}} = I \cdot (1 \text{ m}^2) = 1,36 \text{ kW}$ . Την ίδια ισχύ θα απορροφήσει και κάθε τετραγωνικό μέτρο πάγου κοντά στον ισημερινό του κομήτη. Και τούτο διότι, μολονότι η προσπίπουσα ροή ηλιακής ακτινοβολίας αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 4 επειδή ο κομήτης απέχει λιγότερο από τον Ήλιο, το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας (75%) ανακλάται από την επιφάνεια του και διαχέεται στο Διάστημα.

Λαμβανόμενη στη διάρκεια ενός μεγάλου χρονικού διαστήματος, η μέση τιμή της ισχύος που προσπίπτει σε  $1 \text{ m}^2$  επιφάνειας στον ισημερινό του κομήτη ανέρχεται σε  $P_{\mu\text{e}}/\pi = 433 \text{ W}$ . Η συγκεκριμένη εκτίμηση προκύπτει μάλλον εύκολα. Ας θεωρήσουμε μια ζώνη πλάτους  $h = 1 \text{ m}$  η οποία καλύπτει κυκλικά ολόκληρο τον ισημερινό. Η ζώνη αυτή συλλέγει ηλιακό φως από μια επιφάνεια συνολικού ενεργού εμβαδού ίσου με  $h \cdot 2r$ , ενώ η συλλεγόμενη ενέργεια κατανέμεται σε ολόκληρο το εμβαδόν της, το οποίο ισούται με  $h \cdot 2\pi r$ .

Ερχόμαστε τώρα να εξετάσουμε την εξής ενδιαφέρουσα κατάσταση. Ας υποθέσουμε ότι ο κομήτης μας μόλις έχει τεθεί σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο, οπότε αρχίζει να φωτίζεται από το ηλιακό φως, με αποτέλεσμα η θερμοκρασία της επιφάνειάς του να ανεβαίνει. Τα εξωτερικά στρώματα πάγου θερμαίνονται βαθμιαία, και η θερμότητα μεταφέρεται προς το εσωτερικό του κομήτη. Καθώς θερμαίνεται η επιφάνεια, ο ρόλος που διαδραματίζει η έκλιση θερμότητας προς το περιβάλλον αποκτά ολοένα και μεγαλύτερη βαρύτητα. Ο επιφανειακός πάγος



Ο αστεροειδής Gaspra. Ιως έτοι να μοιάζουν οι πυρήνες των κομητών όταν έχουν εξαχνωθεί πλέον τα πηγικά συστατικά τους.

χάνει θερμότητα με ποικίλους τρόπους. Πρώτον, η εξάχνωσή του απαιτεί ενέργεια· δεύτερον, ορισμένη ενέργεια επίσης απάγεται μέσω της εκπομπής θερμικής ακτινοβολίας· και τρίτον, κάποια άλλη ποσότητα θερμικής ενέργειας δαπανάται στη θέρμανση των εσωτερικών στρωμάτων του κομήτη (η οποία τελικά θα αναλωθεί είτε στην εξαέρωση του επιφανειακού πάγου είτε στην εκπομπή θερμικής ακτινοβολίας προς το Διάστημα).

Θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να εκτιμήσουμε τη μέση θερμοκρασία που επικρατεί στην επιφάνεια ενός κομήτη ο οποίος κινείται επί μακρόν γύρω από τον Ήλιο. Για να μπορέσουμε να προσανατολιστούμε κάπως, σημειώνουμε ότι στην επιφάνεια της Γης η μέση θερμοκρασία ανέρχεται στους περίπου 290 K. Ο πλανήτης μας εκλύει ενέργεια στο Διάστημα κυρίως λόγω της εκπομπής θερμικής ακτινοβολίας. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιφάνεια της Γης καλύπτεται από νερό σε ποσοστό μεγαλύτερο από 70%, καθώς και ότι η Γη απορροφά την ίδια ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και εμβαδού όπως και το μοντέλο μας για τον κομήτη, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας του κομήτη αποκλείεται να υπερβαίνει τους 290 K.

Δεδομένου ότι ο πάγος είναι πολύ κακός αγωγός της θερμότητας (έχει θερμική αγωγιμότητα  $2,2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ), η ισημερινή ζώνη αναμένεται να θερμανθεί γρήγορα. Προκειμένου να απάγεται όλη η θερμότητα που κερδίζει η επιφάνεια του κομήτη στην ισημερινή ζώνη, η κλίση της εξάρτησης της θερμοκρασίας από το βάθος (η βαθμίδα θερμοκρασίας) πρέπει να ανέρχεται σε 200 K/m.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η διαδικασία της θέρμανσης περιορίζεται αποκλειστικά σε ένα επιφανειακό στρώμα πάγου με πάχος  $290/200 \text{ m} \approx 1,5 \text{ m}$ , και ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε η θερμοκρασία του συγκεκριμένου στρώματος να φτάσει στους 290 K. Προς τούτο, θεωρούμε έναν κύβο πάγου με μήκος ακμής  $A = 1,5 \text{ m}$  ο οποίος κείται επί του ισημερινού. Για τη δεδομένη θερμοκρασιακή βαθμίδα ( $200 \text{ K/m}$ ), στον κύβο αυτό εισέρει κάθετα προς την προσήλια έδρα του ακτινοβολία ισχύος  $A^2 \cdot 430 \text{ W}$  περίπου. Η ποσότητα της θερμότητας που απαιτείται για τη θέρμανση του κύβου δίνεται από τον τύπο  $Q = cm_n \Delta T$ . Αν ανατρέξουμε σε κάποιο βιβλίο αναφοράς, θα διαπιστώσουμε ότι η ειδική θερμότητα του πάγου έχει τιμή  $c = 2.100 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ . Η θερμοκρασιακή διαφορά των απέναντι εδρών του κύβου βρίσκεται κάπου ανάμεσα στους 0 και τους 290 K (θα χρησιμοποιήσουμε κατ' εκτίμηση την τιμή  $\Delta T \approx 150 \text{ K}$ ). Τέλος, η μάζα του κύβου πάγου είναι  $m_n \approx 3.000 \text{ kg}$ . Το απαιτούμενο διάστημα για τη θέρμανση ενός τέτοιου κύβου ανέρχεται στα  $10^6 \text{ s}$ , χρόνος ο οποίος μόλις και υπερβαίνει κατά τι τις 10 ημέρες. Στη διάρκεια αυτού του διαστήματος η θερμοκρασιακή βαθμίδα μειώνεται αισθητά, και έτσι το ισοζύγιο ανάμεσα στη θερμότητα που ρέει προς το εσωτερικό του κομήτη και τη θερμότητα η οποία φτάνει στην επιφάνειά του διαταράσσεται. Δεδομένου ότι έχουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε ανεπιφύλακτα πως η διάρκεια ζωής του κομήτη υπερβαίνει κατά πολύ τις 10 ημέρες, συμπεραίνουμε

πως η θερμική ροή προς το εσωτερικό του κομήτη είναι δυνατόν να αγνοηθεί κατά την εκτίμηση της επιφανειακής θερμοκρασίας του.

Η ισχύς της θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από επιφάνεια εμβαδού  $S$  δίνεται από την έκφραση  $aS\sigma T^4$ , όπου  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$  η σταθερά των Stefan-Boltzmann,  $T$  η θερμοκρασία της επιφάνειας, ενώ  $a$  είναι ένας συντελεστής χαρακτηριστικός της διαφοράς ανάμεσα σε ένα πραγματικό σώμα που ακτινοβολεί και σε ένα ιδανικό μέλαν σώμα. Στην περίπτωσή μας, ο εν λόγω συντελεστής μπορεί να ληφθεί κατά προσέγγιση ίσος με 1: Οι κομήτες απορροφούν ηλιακή ακτινοβολία στο ορατό φάσμα, ενώ εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ενέργεια στην υπεριώδη περιοχή. Έτσι προκύπτει ότι η θερμοκρασία τους θα πρέπει να είναι ακριβώς 290 K!

Στο συλλογισμό μας δεν λάβαμε υπόψη τις απώλειες θερμότητας οι οποίες οφείλονται στην εξάχνωση που συντελείται στην επιφάνεια. Το πλήθος των μορίων που εξαχνώνονται από επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού ανά μονάδα χρόνου μπορεί να εκτιμηθεί με τη βοήθεια της πίεσης των κεκορεσμένων ατμών της εκάστοτε θεωρούμενης ουσίας σε δεδομένη θερμοκρασία:  $p = nkT$ . Ως προς την τάξη μεγέθους, τα μόρια που εγκαταλείπουν την επιφάνεια του κομήτη, η οποία βρίσκεται σε άμεση επαφή με ένα στρώμα κεκορεσμένου ατμού, ισούνται κατά το πλήθος με τις προσκρούσεις των μορίων του ατμού στην επιφάνεια. Φανταστείτε ότι κάθε μόριο που χτυπά στην επιφάνεια κατά τη διάρκεια κάποιου χρονικού διαστήματος προσκολλάται σ' αυτήν. Κατά τον ίδιο χρόνο πρέπει να εξαχνωθούν ισάριθμα μόρια. Στην πραγματικότητα, βεβαίως, το πλήθος των μορίων που εγκαταλείπουν την επιφάνεια είναι αρκετές φορές μικρότερο, καθότι δεν ανταποκρίνεται στην αλήθεια η υπόθεση ότι προσκολλώνται στην επιφάνεια όλα τα προσπίπτοντα μόρια τουναντίον, τα περισσότερα εξ αυτών ανακλώνται ελαστικά.

Κάθε μόριο που εξαχνώνεται απάγει την ενέργεια η οποία χρειάζεται για να ξεφύγει από την έλξη των γειτόνων του, καθώς επίσης και τη μέση θερμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία της επιφάνειας. Εφόσον γύρω από τον κομήτη δεν υφίσταται ατμόσφαιρα, ο ατμός δεν παράγει το έργο που απαιτείται για να διασταλεί εν παρουσίᾳ ατμόσφαιρας. Κάθε μονάδα επιφανειακού εμβαδού χάνει ανά δευτερόλεπτο την εξής ποσότητα θερμότητας:

$$P = \left( \frac{L}{N_A} \right) \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \frac{pL\sqrt{3}}{\sqrt{RTM}}$$

$$= 1,6 \cdot 10^5 \frac{p}{\sqrt{T}} \quad (\text{μονάδες SI}),$$

όπου με  $N_A$  συμβολίζουμε τον αριθμό του Avogadro, με  $L = 3,6 \cdot 10^4 \text{ J/mol}$  τη γραμμομοριακή θερμότητα εξάχνωσης του πάγου και με  $M$  τη γραμμομοριακή μάζα του.

Είμαστε τώρα πλέον σε θέση να αξιοποιήσουμε τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα που περιγράφουν την πίεση των κεκορεσμένων ατμών συναρτήσει της θερμοκρα-

$T(K)$	143	152	161	171	183	197
$\log(p/p_{\text{ατμ}})$	-11	-10	-9	-8	-7	-6
$T(K)$	212	231	253	281	319	373
$\log(p/p_{\text{ατμ}})$	-5	-4	-3	-2	-1	0

Πίνακας 1

σίας (Πίνακας 1), για να υπολογίσουμε πώς εξαρτώνται οι οφειλόμενες στην εξάχνωση απώλειες θερμότητας από τη θερμοκρασία (Πίνακας 2).

Από τις εκτιμήσεις μας προκύπτει πώς η επιφάνεια της ισημερινής ζώνης του κομήτη θα θερμανθεί μέχρι μιας θερμοκρασίας ανάμεσα στους 183 και τους 197 K. (Παρεμπιπτόντως, πώς θα μεταβάλλεται αυτή η θερμοκρασία κατά την πορεία της «ημέρας» του κομήτη;) Σε τέτοιες συνθήκες, οι ανά μονάδα εμβαδού θερμικές απώλειες λόγω ακτινοβολίας θα ανέρχονται σε  $70 \text{ W/m}^2$  και  $92 \text{ W/m}^2$  για θερμοκρασίες 183 K και 197 K, αντιστοιχώς. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η εξάχνωση αποτελεί τον μείζονα μηχανισμό εκροής ενέργειας από την επιφάνεια. Όπως δείχνει ο δεύτερος πίνακάς μας, ευθύνεται για το 80% των συνολικών απωλειών θερμότητας του κομήτη.

Ας εκτιμήσουμε τώρα τη διάρκεια ζωής ενός κομήτη, με την προϋπόθεση ότι οι απώλειες θερμότητας οφείλονται εξολοκλήρου στην εξάχνωση του πάγου στην επιφάνειά του. Όπως τονίσαμε ήδη, η διαδικασία αυτή συντελείται με σαφώς ταχύτερο ρυθμό στην ισημερινή ζώνη παρά στις πολικές περιοχές. Εξαιτίας, λοιπόν, τούτης της ανομοιόμορφης εξάχνωσης, ο κομήτης προσλαμβάνει σχήμα επιμηκυσμένο κατά τον άξονα της περιστροφής του. Ο ρυθμός της ισημερινής «λέπτυνσης» του κομήτη δεν εξαρτάται από το μέγεθός του, διότι καθορίζεται από το ισοζύγιο των ενεργειακών εισροών λόγω απορρόφησης ηλιακής ενέργειας και απωλειών λόγω εξάχνωσης:

$$IM/(\pi L\rho) \equiv 2 \cdot 10^{-7} \text{ m/s.}$$

Με άλλα λόγια, η ισημερινή ακτίνα του κομήτη μειώνεται (κατά μέσο όρο) κατά  $2 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ . Συνεπώς, για την πλήρη εξάχνωση του κομήτη δεν χρειάζονται παρά μόνο  $2,5 \cdot 10^9 \text{ s}$ . Αυτό σημαίνει ότι η διάρκεια ζωής του κομήτη μας είναι περίπου 80 έτη! Πρόκειται για ένα

χρονικό διάστημα κυριολεκτικά μηδαμινό σε σύγκριση με την ηλικία του ηλιακού συστήματος.

Φυσικά, δεν υπάρχει κανένας κομήτης που να περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο σε κυκλική τροχιά. Οι περιοδικοί κομήτες περνούν το μεγαλύτερο μέρος του βίου τους μακριά από τον Ήλιο. Εντούτοις, ο ρυθμός με τον οποίο χάνουν τη μάζα τους επιταχύνεται ραγδαία κατά τις μικρές περιόδους που κινούνται σε σχετικά μικρές αποστάσεις από τον Ήλιο. Αν ο κομήτης του Halley είχε πυρήνα από πάγο διαμέτρου 10 km και περνούσε κοντά από τον Ήλιο σε απόσταση 0,5 a.u. (το δεύτερο δεδομένο αντιστοιχεί σε περίοδο περιφοράς 80 ετών), για να εξαχνωθεί ολοσχερώς θα αρκούσαν μόνο 1.300 περιφορές — δηλαδή, μόνο 100.000 έτη, τα οποία αντιπροσωπεύουν μια χρονική περίοδο αμελητέα σε σύγκριση με την ηλικία του ηλιακού συστήματος (5 δισεκατομμύρια έτη). Αυτό εξηγεί γιατί οι κομήτες αποτελούν τόσο σπάνιους καλεσμένους στο στερέωμα και δεν μας εποκέπτονται βραδιά παρά βραδιά — απλούστατα, αποκλείεται να συγκεντρωθούν κοντά στον Ήλιο σε κάποιον αξιόλογο αριθμό.

Η εμφάνιση ενός κομήτη με περίοδο συγκρίσιμη προς την περίοδο περιφοράς των μεγάλων πλανητών συνιστά σπάνιο γεγονός, διότι απαιτεί ένα συνδυασμό συνθηκών τέτοιων ώστε ο κομήτης, κατά τη διάβασή του πλησίον του Ήλιου, να έλθει σε ισχυρή αλληλεπίδραση με κάποιον από τους μεγάλους πλανήτες. Ο συγκεκριμένος πλανήτης πρέπει να τροποποιήσει την τροχιά του κομήτη κατά τέτοιον τρόπο ώστε η μακρά περίοδος του δεύτερου (ή η «μη περίοδος», στην περίπτωση που πρόκειται για εφάπαξ εποκέπτη) να μετατραπεί σε βραχεία. Τι πιθανότητα έχει να συμβεί ένα τέτοιο γεγονός; Ίσως εκείνος που θα δώσει απάντηση στο ερώτημά μας να είναι κάποιος από τους αναγνώστες του *Quantum*.

Φανταστείτε ότι κάθε δεκαετία (κατά μέσο όρο) εμφανίζεται στον νυχτερινό ουρανό κάποιος κομήτης με χαρακτηριστικά παρεμφερή προς εκείνα του κομήτη του Halley. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι περίπου δέκα μεγάλα αντικείμενα εμφανίζονται περιοδικά πλησίον του Ήλιου και γίνονται ορατά ως κομήτες. Εφόσον η διάρκεια ζωής ενός τέτοιου κομήτη ανέρχεται κατά προσέγγιση στα 100.000 έτη, θα συμπεραίναμε ότι παρόμοιοι κομήτες αναδύονται από το Νέφος Oort με συχνότητα περίπου ένας ανά 10.000 έτη, καθώς και ότι κατά την περίοδο ύπαρξης της Γης έχουν εμφανιστεί πλησίον του Ήλιου και εξαχνωθεί κάπου μισό εκατομμύριο κομήτες παρόμοιοι με εκείνον του Halley. ◻

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- W.A. Hiscock, «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες», Μάιος/Ιούν. 1995.
- A.G.W. Cameron, «Όταν ένα σώμα συναντά ένα άλλο», Μάρτ./Απρ. 1995.
- S. Silich, «Ένα άστρο γεννιέται», Ιαν./Φεβρ. 1998.
- I.D. Novikov, «Το Θερμοδυναμικό Σύμπαν», Μάιος/Ιούν. 1998.
- V. Surdin, «Ένα αστέρι γεννιέται», Μάιος/Ιούν. 2000.

$T(K)$	143	152	161	171
$I(\text{W/m}^2)$	0,013	0,13	1,3	12,3
$T(K)$	183	197	212	
$I(\text{W/m}^2)$	120	1.150	11.000	

Πίνακας 2

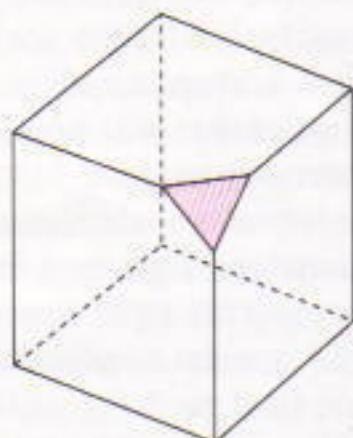
# Εγγράψιμα ή όχι;

Η απόδειξη του θεωρήματος Steinitz

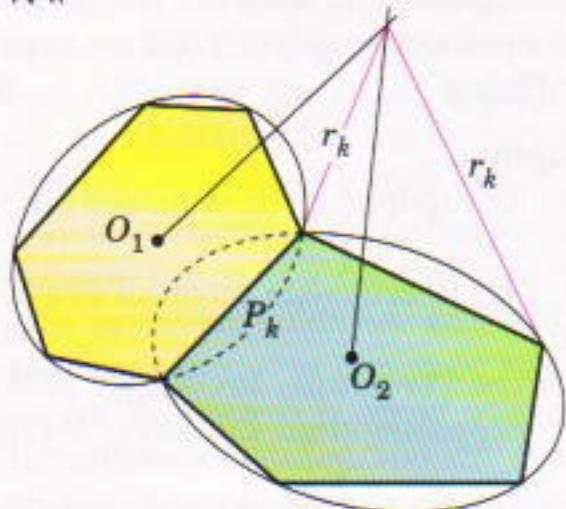
E. Andreev

**A**Σ ΥΠΟΘΕΣΟΥΜΕ ΟΤΙ ΜΕ ΕΝΑ Επίπεδο αποκόπτουμε μία από πό τις κορυφές ενός κύβου. Θα ήταν ενδιαφέρον να προσδιορίσουμε κατά πόσον αυτό το πολύεδρο μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα. Θα εξαρτάται η απάντηση από το τέμνον επίπεδο; Το παρόν άρθρο είναι αφιερωμένο στην επίλυση αυτού και άλλων παρόμοιων προβλημάτων.

Έστω ότι δίνεται ένα κυρτό φραγμένο πολύεδρο. Ακριβέστερα, θα α-



Σχήμα 1



Σχήμα 2

σχοληθούμε με τρισδιάστατα σώματα οι πλευρές των οπίων αποτελούνται από επίπεδα πολύγωνα (που καλούνται έδρες). Θεωρούμε επίσης ότι τα σώματα αυτά βρίσκονται εξολοκλήρου στη μία πλευρά του επιπέδου κάθε έδρας τους. Θέλουμε να ανακαλύψουμε αν ένα τέτοιο πολύεδρο μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα.

Έστω  $M$  ένα δεδομένο πολύεδρο. Αριθμούμε (ξεχωριστά) τις έδρες, τις ακμές και τις κορυφές του, ονομάζοντας την  $i$ -οστή έδρα  $E_i$ , την  $i$ -οστή ακμή  $A_i$ , και την  $i$ -οστή κορυφή  $K_i$ . Δύο έδρες θα καλούνται προσκείμενες αν έχουν μία κοινή ακμή, και δύο κορυφές θα θεωρούνται προσκείμενες αν συνδέονται μέσω μίας ακμής.

Αν ένα τέτοιο πολύεδρο εγγράφεται σε σφαίρα, τότε, αν περιοριστούμε στο επίπεδο κάθε έδρας, προφανώς κάθε έδρα του είναι εγγράψιμη σε κύκλο. Για να λύσουμε το πρόβλημά μας πρέπει πρώτα να εξακριβώσουμε αν όλα τα πολύγωνα  $E_i$  είναι εγγράψιμα.

Στη συνέχεια επιλέγουμε κάποια ακμή  $A_k$  και εξετάζουμε τις δύο έδρες  $E_i$  και  $E_j$  που έχουν ως σύνορό τους αυτή την ακμή. Έστω  $O_1$  και  $O_2$  τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων σ' αυτές τις δύο έδρες (Σχήμα 2). Τότε, οι ευθείες που διέρχονται από τα  $O_1$ ,  $O_2$  και είναι κάθετες στα επίπεδα των δύο έδρων ανήκουν και οι δύο στο μεσοκάθετο επίπεδο της

$A_k$  και, επομένως, τέμνονται. (Αλήθεια, πώς θα έμοιαζαν οι δύο έδρες αν οι ευθείες ήταν παράλληλες;) Συμβολίζουμε με  $r_k$  την απόσταση μεταξύ του σημείου τομής αυτών των καθέτων και μιας από τις κορυφές τής  $E_i$  ή τής  $E_j$ . Είναι προφανές ότι το μήκος του  $r_k$  δεν εξαρτάται από την επιλογή της κορυφής.

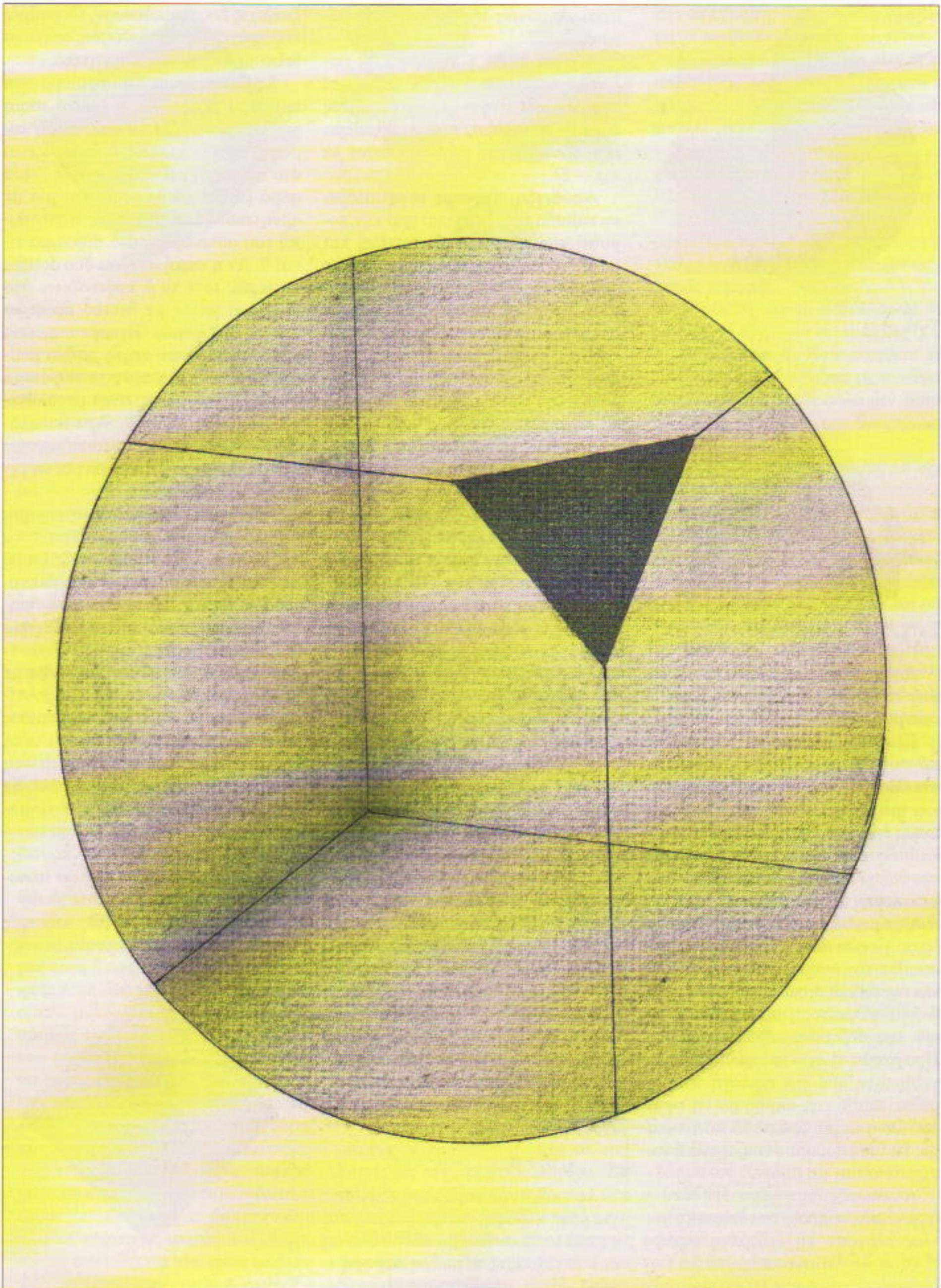
**Πρόβλημα 1.** Αποδείξτε ότι το πολύεδρο  $M$  είναι εγγράψιμο σε σφαίρα αν και μόνο αν όλα τα πολύγωνα  $E_i$  είναι εγγράψιμα και  $r_1 = r_2 = \dots = r_m$ , όπου  $m$  το πλήθος των ακμών του πολυέδρου.

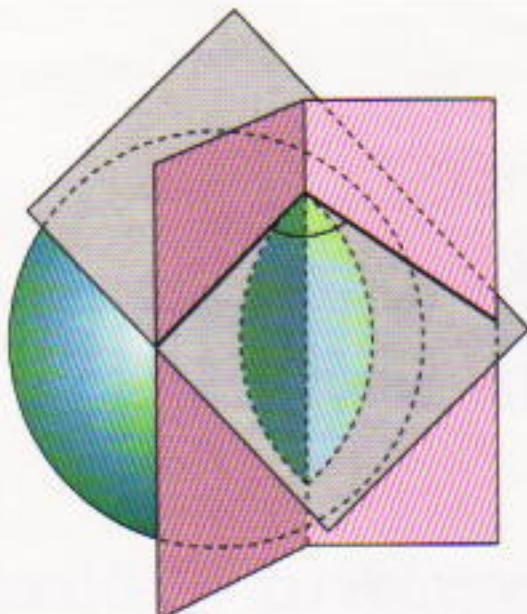
Αυτό και άλλα παρόμοια κριτήρια είναι γνωστά επί πολλά χρόνια. Στις αρχές του 20ού αιώνα αποδείχτηκε ότι μερικές φορές μπορούμε να δείξουμε ότι το  $M$  δεν είναι εγγράψιμο σε σφαίρα, χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε υπολογισμούς.

Ο πρώτος που παρατήρησε αυτό το γεγονός ήταν ο γερμανός μαθηματικός E. Steinitz. Το 1927 δημοσίευσε ένα άρθρο στο οποίο αποδεικνύοταν το επόμενο θεώρημα.

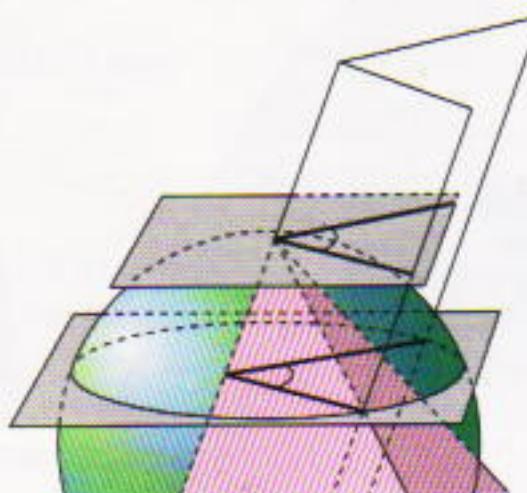
**Θεώρημα Steinitz.** Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε άσπρες και μαύρες όλες τις κορυφές του πολυέδρου  $M$ , έτσι ώστε

- (1) να μην υπάρχουν δύο προσκείμενες μαύρες κορυφές, και
- (2) το πλήθος των μαύρων κορυφών να είναι μεγαλύτερο του πλήθους των άσπρων.





Σχήμα 3



Σχήμα 4

Αν ισχύουν αυτές οι δύο συνθήκες, τότε το  $M$  δεν μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα.

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα, θα κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις. Ας υποθέσουμε ότι δίνεται μια σφαίρα και μια δίεδρη γωνία, η ακμή της οποίας τέμνει τη σφαίρα. Φέρουμε ένα επίπεδο που εφάπτεται στη σφαίρα και διέρχεται από ένα από τα δύο σημεία τομής (βλ. Σχήμα 3). Η τομή του εφαπτόμενου επιπέδου και της δίεδρης γωνίας είναι μια επίπεδη γωνία. Θα την ονομάζουμε επίπεδη γωνία της δεδομένης δίεδρης ως προς τη δεδομένη σφαίρα, ή απλώς σχετική γωνία της δεδομένης δίεδρης γωνίας. Προφανώς, η σχετική γωνία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου τομής της ακμής με τη σφαίρα. Αν η ακμή εφάπτεται στη σφαίρα, θα θεωρήσουμε ότι η σχετική γωνία είναι ίση με μηδέν.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι όλες οι ακμές μιας κυρτής πολυεδρικής γωνίας τέμνουν τη δεδομένη σφαίρα (Σχήμα 4). Οι σχετικές γωνίες των δίεδρων γωνιών της θα ονομάζονται

σχετικές γωνίες της πολυεδρικής γωνίας.

**Λήμμα 1.** Αν η κορυφή μιας πολυεδρικής γωνίας  $n$  εδρών κείται επί σφαίρας, και όλες οι ακμές της γωνίας τέμνουν τη σφαίρα, τότε το άθροισμα των σχετικών της γωνιών ισούται με  $\pi(n - 2)$ .

**Απόδειξη.** Φέρουμε το εφαπτόμενο επίπεδο που διέρχεται από την κορυφή της πολυεδρικής γωνίας, και μετά ένα επίπεδο παράλληλο προς το εφαπτόμενο, το οποίο τέμνει τη σφαίρα και όλες τις ακμές της δεδομένης πολυεδρικής γωνίας (αυτό είναι δυνατόν, διότι όλες οι ακμές της γωνίας τέμνουν τη σφαίρα). Η τομή της πολυεδρικής γωνίας με αυτό το επίπεδο είναι ένα πολύγωνο, και τα ζεύγη των πλευρών αυτού του πολυγώνου είναι παράλληλα προς τις πλευρές των σχετικών γωνιών που θέλουμε να αθροίσουμε. Επομένως, κάθε σχετική γωνία ισούται με μια γωνία του πολυγώνου, οπότε το άθροισμά τους είναι ίσο με  $\pi(n - 2)$ .

**Απόδειξη του θεώρηματος Steinitz.** Ας υποθέσουμε ότι το πολύεδρο  $M$  εγγράφεται σε σφαίρα και ότι οι κορυφές του έχουν χρωματιστεί όπως απαιτεί το θεώρημα. Θα αποδείξουμε ότι καταλήγουμε σε μια αντίφαση που αφορά συγκεκριμένες σχετικές γωνίες. Θα ονομάσουμε  $\gamma_i$  τη σχετική γωνία που αντιστοιχεί στη δίεδρη γωνία με ακμή  $A_i$ . Έστω  $n_k$  το πλήθος των ακμών που συντρέχουν στην κορυφή  $K_k$ . Από το Λήμμα 1 έχουμε ότι το άθροισμα των σχετικών γωνιών στην κορυφή  $K_k$  ισούται με  $\pi(n_k - 2)$ . Θέτουμε  $\beta_i = \pi - \gamma_i$  και ονομάζουμε τη  $\beta_i$  εξωτερική σχετική γωνία. Ισχύει  $\gamma_i = \pi - \beta_i$ . Αφού το άθροισμα των εσωτερικών σχετικών γωνιών κάθε πολυεδρικής γωνίας είναι ίσο με  $\pi(n_k - 2)$ , το άθροισμα των εξωτερικών σχετικών γωνιών ισούται με  $2\pi$ . Συνεπώς, αν οι ακμές  $A_1, A_2, \dots, A_l$ , συντρέχουν στην κορυφή  $K_k$ , έχουμε ότι

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_l = 2\pi.$$

Ας γράψουμε παρόμοιες εξισώσεις για κάθε κορυφή του πολυέδρου, και ας πολλαπλασιάσουμε κάθε εξισώση που αντιστοιχεί σε μαύρη κορυφή επί -1. Μετά, προσθέτουμε όλες τις ε-

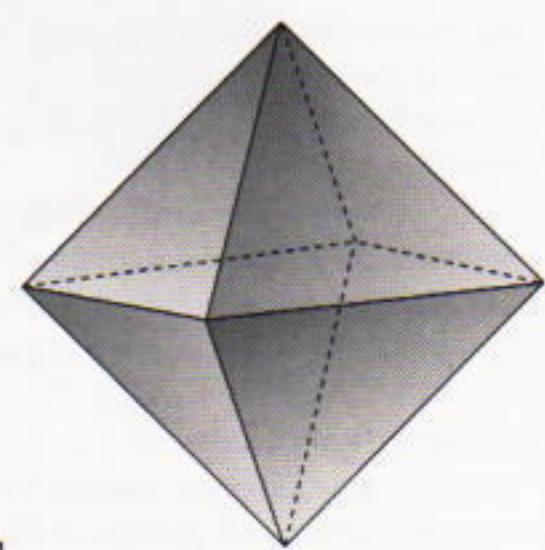
ξισώσεις που προκύπτουν. Οι μαύρες κορυφές είναι περισσότερες, οπότε το δεξιό μέλος θα είναι αρνητικό.

Ας θεωρήσουμε το άθροισμα στο αριστερό μέλος. Αν η  $i$ -οστή ακμή συνδέει μια μαύρη με μια άσπρη κορυφή, τότε ο αριθμός  $\beta_i$  εμφανίζεται στο αριστερό μέλος δύο φορές —μία φορά με θετικό πρόσημο και μία με αρνητικό— και, επομένως, η συνολική του συνεισφορά στο άθροισμα είναι 0. Αν η ακμή συνδέει δύο άσπρες κορυφές, τότε το  $\beta_i$  εμφανίζεται στο αριστερό μέλος με θετικό πρόσημο και τις δύο φορές. Έχουμε υποθέσει ότι δεν υπάρχουν ακμές με δύο μαύρες κορυφές, συνεπώς το άθροισμα στο αριστερό μέλος είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Άρα καταλήξαμε σε αντίφαση που αποδεικνύει ότι το πολύεδρο  $M$  δεν μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα.

Πριν αναλύσουμε το θεώρημα —δηλαδή, πριν αποκαλύψουμε το νόημά του—, θα θέλαμε να δείξουμε ότι υπάρχουν πολύέδρα που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεώρηματος. Θεωρούμε ένα οκτάεδρο (Σχήμα 5α) και κατασκευάζουμε σε κάθε έδρα του μια τριγωνική πυραμίδα με βάση την αντίστοιχη έδρα. Φροντίζουμε ώστε το ύψος κάθε πυραμίδας να είναι αρκετά μικρό, έτοι ώστε οι δίεδρες γωνίες που πρόσκεινται στη βάση να είναι μικρότερες των  $25^\circ$ . Ας θεωρήσουμε το πολύεδρο που σχηματίζεται από το οκτάεδρο και τις οκτώ πυραμίδες (Σχήμα 5β).

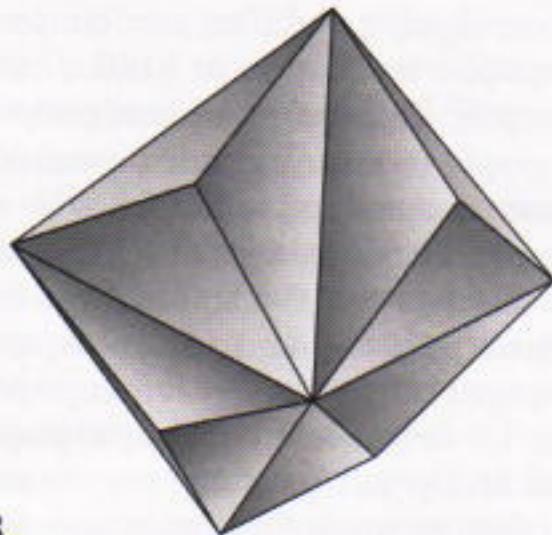
**Πρόβλημα 2.** Αποδείξτε ότι το πολύεδρο  $M$  είναι κυρτό.

Χρωματίζουμε όλες τις κορυφές του  $M$  που είναι και κορυφές του αρ-



α

Σχήμα 5

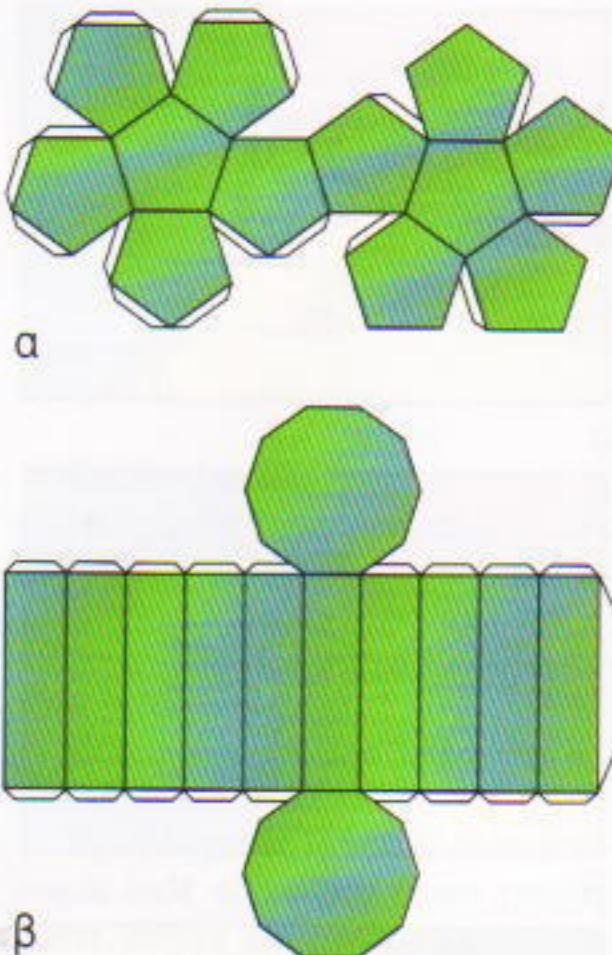


Σχήμα 5

χικού οκταεδρου άσπρες, και όλες τις υπόλοιπες μαύρες. Είναι προφανές ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Steinitz. Επομένως, έχουμε κατασκευάσει ένα πολύεδρο που δεν μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα, και αυτό μπορεί να επαληθευθεί χωρίς να γνωρίζουμε το μέγεθος και τις γωνίες του πολυέδρου. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι η δομή του.

Θα εξετάσουμε τώρα λεπτομερέστερα την έννοια της δομής. Στο επίπεδο όλα είναι πολύ απλά. Για να περιγράψουμε τη δομή ενός κυρτού πολυγώνου αρκεί να πούμε ότι το πλήθος των κορυφών του ισούται με το πλήθος των πλευρών του, ότι κάθε πλευρά πρόσκειται σε άλλες δύο, και ότι κάθε κορυφή πρόσκειται σε δύο πλευρές.

Η κατάσταση στο χώρο, όμως, είναι πολύ πιο περίπλοκη. Για παράδειγμα, το δωδεκάεδρο (Σχήμα 6α) και το δεκαγωνικό πρίσμα (Σχήμα 6β) έχουν το ίδιο πλήθος εδρών (12), το ίδιο πλήθος ακμών (30) και το ίδιο πλήθος κορυφών (20), αλλά οι δομές τους διαφέρουν. Για να περιγράψουμε τη δομή ενός πολυέδρου δεν αρκεί μόνο να προσδιορίσουμε το πλήθος των εδρών του, των ακμών και των κορυφών του, αλλά πρέπει να περιγράψουμε και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι έδρες. Δηλαδή, να προσδιορίσουμε ποιες έδρες και ποιες κορυφές είναι προσκείμενες, καθώς και ποιες έδρες συντρέχουν σε κάθε κορυφή. Δύο πολύεδρα έχουν την ίδια δομή αν έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών, ακμών και εδρών, και αν συντίθενται από αυτά τα στοιχεία με ταυτόσημο τρόπο.



Σχήμα 6

Ας υποθέσουμε ότι ένα κυρτό πολύεδρο  $M$ , καθώς και κάθε άλλο πολύεδρο που έχει την ίδια δομή με αυτό, δεν είναι δυνατόν να εγγραφεί σε μία σφαίρα. Θα ονομάζουμε ένα τέτοιο πολύεδρο απολύτως μη εγγράψιμο. Από το θεώρημα Steinitz έπειται ότι οποιοδήποτε πολύεδρο ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2) δεν είναι απλώς μη εγγράψιμο αλλά απολύτως μη εγγράψιμο. Το πολύεδρο του Σχήματος 5β μάς προσφέρει ένα τέτοιο παράδειγμα. Μπορούμε να συγκρίνουμε αυτό το αποτέλεσμα με την κατάσταση που επικρατεί στο επίπεδο. Εδώ, όλα τα πολύγωνα με  $n$  πλευρές έχουν την ίδια δομή, και υπάρχει ένα εγγράψιμο πολύγωνο αυτής της δομής για κάθε  $n$ . Γι' αυτό το λόγο, πριν αποδείξει ο Steinitz το θεώρημά του, πίστευαν ότι δεν υπάρχουν απολύτως μη εγγράψιμα πολύεδρα. Υπήρχαν μάλιστα και μερικές απόλυτα εύλογες, αν και όχι τελείως πλήρεις, «αποδείξεις» αυτού του γεγονότος.

Ανακύπτει πλέον ένα νέο πρόβλημα: Να προσδιοριστούν όλα τα απολύτως μη εγγράψιμα πολύεδρα. Συγκεκριμένα, θέλουμε να βρούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα πολύεδρο να είναι απολύτως μη εγγράψιμο. Το θεώρημα Steinitz μάς δίνει ικανές συνθήκες. Είναι επίσης

και αναγκαίες; Τα επόμενα προβλήματα αποδεικνύουν ότι δεν είναι.

**Πρόβλημα 3.** Έστω ότι όλες οι κορυφές ενός πολυέδρου  $M$  μπορούν να χρωματιστούν μαύρες και άσπρες, έτσι ώστε

(1) το πλήθος των μαύρων κορυφών να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το πλήθος των άσπρων κορυφών, και

(2) να μην υπάρχουν δύο προσκείμενες μαύρες κορυφές, ενώ να υπάρχουν τουλάχιστον δύο προσκείμενες άσπρες κορυφές.

Αποδείξτε ότι το πολύεδρο  $M$  δεν μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα.

**Πρόβλημα 4.** Κατασκευάστε ένα πολύεδρο που ικανοποιεί τις συνθήκες του Προβλήματος 3, αλλά δεν ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Steinitz.

Πρέπει να επισημάνουμε το εξής σημαντικό γεγονός:

**Λήμμα 2.** Αν σε κάθε γωνία του πολυέδρου συντρέχει το ίδιο πλήθος (ας πούμε  $k$ ) ακμών, τότε το πολύεδρο αυτό δεν ικανοποιεί ούτε τις συνθήκες του θεωρήματος Steinitz ούτε τις συνθήκες του Προβλήματος 3.

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Έστω  $m$  το συνολικό πλήθος ακμών του πολυέδρου,  $p$  το πλήθος των μαύρων κορυφών του και  $g$  το πλήθος των άσπρων. Τότε έχουμε ότι  $p \geq g$  (στην περίπτωση του θεωρήματος Steinitz, η ανισότητα είναι γνήσια). Ισχύει ότι  $2m = k(p + g)$  —αφού κάθε ακμή έχει δύο άκρα και σε κάθε κορυφή συντρέχουν  $k$  ακμές. Έχουμε τώρα ότι τουλάχιστον ένα από τα άκρα κάθε ακμής είναι άσπρο —δηλαδή,  $m \leq kg$  (στην περίπτωση του Προβλήματος 3, αυτή η ανισότητα είναι γνήσια). Από την άλλη πλευρά,  $p + g \geq 2g$  (στην περίπτωση του θεωρήματος Steinitz, αυτή η ανισότητα είναι γνήσια). Άρα, καταλήγουμε στις ανισότητες

$$kg \leq m \leq kg.$$

Αν το  $M$  ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Steinitz ή του Προβλήματος 3, τότε μία από αυτές τις ανισότητες είναι γνήσια —γεγονός αδύνατο. Η αντίφαση αποδεικνύει το λήμμα.

Ας θεωρήσουμε πολύεδρα σε κάθε κορυφή των οποίων συντρέχουν

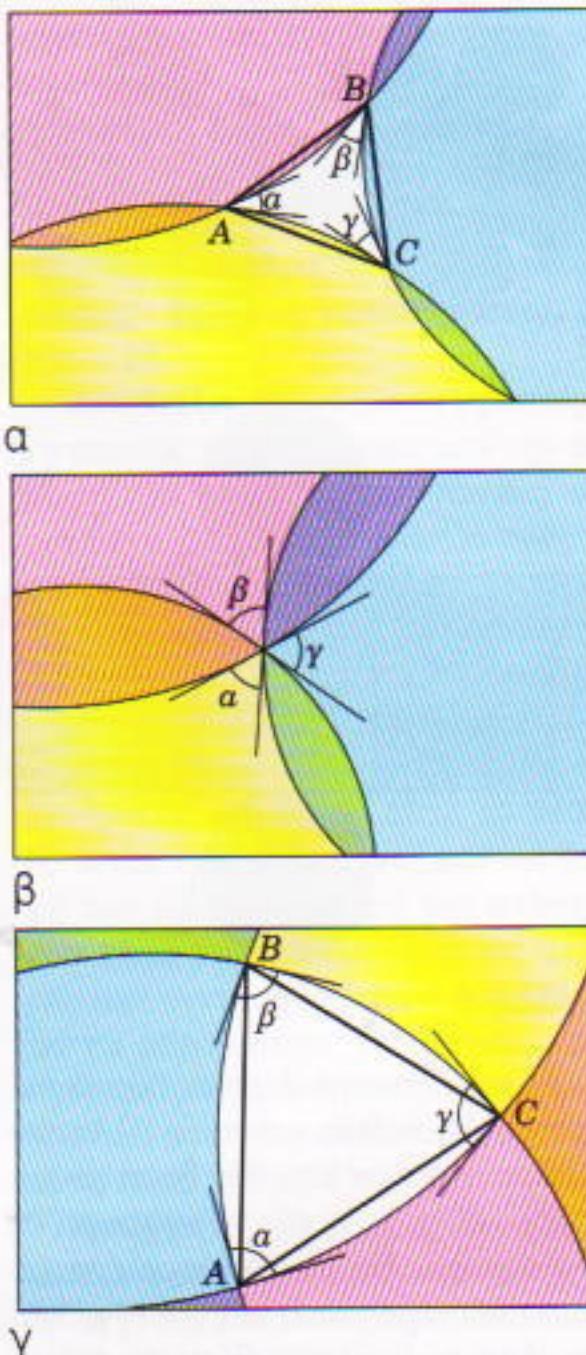
τρεις έδρες. Από μια άποψη, τέτοια πολύεδρα είναι τα πλέον συνήθη, αγνοούμε όμως κατά πόσον μπορούν να εγγραφούν σε σφαίρα.

Έστω τρία επίπεδα που τέμνονται ανά δύο. Αυτά είτε θα σχηματίζουν μια τρίεδρη γωνία ή οι ευθείες τομής τους θα είναι παράλληλες. Στη δεύτερη περίπτωση θα λέμε ότι τα επίπεδα σχηματίζουν μια άπειρη τρίεδρη γωνία. Ας εισαγάγουμε μια σφαίρα. Έστω ότι όλες οι ακμές της τρίεδρης γωνίας τέμνουν τη σφαίρα αλλά η κορυφή δεν ανήκει σε αυτή (ή δεν υπάρχει κορυφή της τρίεδρης). Αποδεικνύεται ότι αν η κορυφή βρίσκεται στο εξωτερικό της σφαίρας, τότε το άθροισμα των σχετικών γωνιών είναι μεγαλύτερο του  $\pi$ , ενώ αν βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας ή αν η τρίεδρη είναι άπειρη, τότε το άθροισμα είναι μικρότερο του  $\pi$ .

Πράγματι, ας θεωρήσουμε τους κύκλους που ορίζουν οι τομές των εδρών της τρίεδρης γωνίας με τη σφαίρα. Οι γωνίες μεταξύ αυτών των κύκλων είναι ίσες με τις σχετικές γωνίες της τρίεδρης γωνίας. Θεωρούμε ένα σημείο της σφαίρας που δεν ανήκει σε κανέναν από αυτούς τους κύκλους, και κατασκευάζουμε τις στερεογραφικές προβολές των κύκλων από αυτό το σημείο προς ένα επίπεδο. Υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις (βλ. τα Σχήματα 7α, 7β και 7γ). Στην πρώτη περίπτωση, η κορυφή βρίσκεται στο εξωτερικό της σφαίρας στη δεύτερη περίπτωση, στη σφαίρα στην τρίτη, στο εσωτερικό της. Οι στερεογραφικές προβολές διατηρούν τα μέτρα των γωνιών και, επομένως, οι γωνίες  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι ίσες με τις αντίστοιχες σχετικές γωνίες. Στην πρώτη περίπτωση, το  $a + \beta + \gamma$  είναι μικρότερο από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $ABC$ , και στην τρίτη είναι μεγαλύτερο. Επομένως, η πρόταση αποδείχτηκε.

Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές του πολυέδρου  $M$  μπορούν να χρωματίστούν μαύρες και άσπρες, ώστε να μην υπάρχουν προσκείμενες κορυφές του ιδίου χρώματος. Αποδείξτε ότι το πλήθος των μαύρων κορυφών ισούται με το πλήθος των άσπρων.

**Πρόβλημα 5.** Έστω ότι σε κάθε κορυφή του πολυέδρου  $M$  συντρέχει το ίδιο πλήθος εδρών και ότι οι κορυφές του μπορεί να χρωματιστούν μαύρες



Σχήμα 7

και άσπρες, ώστε να μην υπάρχουν προσκείμενες κορυφές του ιδίου χρώματος. Αποδείξτε ότι το πλήθος των μαύρων κορυφών ισούται με το πλήθος των άσπρων.

**Πρόβλημα 6.** Αποδείξτε ότι οι κορυφές ενός πολυέδρου μπορεί να χρωματιστούν μαύρες και άσπρες έτσι ώστε να μην υπάρχουν προσκείμενες κορυφές του ιδίου χρώματος αν και μόνο αν κάθε έδρα του πολυέδρου έχει άρτιο πλήθος πλευρών.

**Υπόδειξη.** Αρκεί να χρωματίσουμε μια τυχαία κορυφή άσπρη, μετά να χρωματίσουμε τις προσκείμενες μαύρες, και ούτω καθεξής. Απομένει να αποδείξουμε ότι κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας δεν εμφανίζεται κάποια αντίφαση — δηλαδή, κάθε κλειστή πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από ακμές του πολυέδρου έχει άρτιο πλήθος πλευρών.

Ας επιστρέψουμε στο πολύεδρο  $M$  με τις χρωματισμένες κορυφές. Αφού σε κάθε κορυφή του  $M$  συντρέχουν

τρεις έδρες, το πλήθος των άσπρων κορυφών ισούται με το πλήθος των μαύρων. Επιλέγουμε κάποιες μαύρες κορυφές (ή και όλες) και τις αποκόπτουμε τέμνοντας το πολύεδρο με επίπεδα. Κάθε επιλεγμένη κορυφή αποκόπτεται από ένα επίπεδο που (α) τέμνει μόνο τις ακμές οι οποίες συντρέχουν στην επιλεγμένη κορυφή, και (β) δεν αποκόπτει άλλη κορυφή του  $M$ . Σχηματίζεται έτσι ένα νέο πολύεδρο, το οποίο θα ονομάσουμε  $M'$ . Η διαφορά του από το  $M$  είναι ότι στη θέση ορισμένων μαύρων κορυφών έχει τριγωνικές έδρες. Θα αποδείξουμε ότι το  $M'$  είναι απολύτως μη εγγράψιμο.

Ας υποθέσουμε ότι το  $M'$  ή κάποιο άλλο πολύεδρο παρόμοιας μορφής μπορεί να εγγραφεί σε σφαίρα. Θεωρούμε τις τρεις έδρες που αντιστοιχούν στις τρεις έδρες του  $M$  οι οποίες συντρέχουν στην κορυφή που έχει αποκοπεί. Αυτές οι έδρες είναι ανά δύο προσκείμενες, και η κορυφή της τρίεδρης γωνίας που έχει αποκοπεί βρίσκεται σύγουρα έξω από τη σφαίρα (αφού το  $M'$  είναι εγγράψιμο). Επομένως, το άθροισμα των σχετικών γωνιών αυτής της τρίεδρης γωνίας είναι μικρότερο του  $\pi$ . Αντιστοιχούμε σε κάθε ακμή του  $M$  τη σχετική γωνία της διεδρης που σχηματίζεται από τις προσκείμενες έδρες της αντίστοιχης ακμής του  $M'$ . Για κάθε άσπρη και για κάθε μη επιλεγμένη μαύρη κορυφή, το άθροισμα όλων των γωνιών που έχουν αντιστοιχηθεί με αυτό τον τρόπο ισούται με  $\pi$ . Από την άλλη, το άθροισμα όλων των γωνιών που έχουν αντιστοιχηθεί σε όλες τις επιλεγμένες μαύρες κορυφές είναι (γνήσια) μικρότερο του  $\pi$ . Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος Steinitz, γράφουμε όλες αυτές τις ισότητες και ανισότητες, πολλαπλασιάζουμε τα αθροίσματα που αντιστοιχούν σε άσπρες κορυφές επί  $-1$  και προσθέτουμε. Θα προκύψει μια γνήσια ανισότητα:  $0 < 0$ , γεγονός που είναι αδύνατο. Πράγματι, το αριστερό μέλος αυτής της ανισότητας ισούται με  $0$ , διότι το μέτρο κάθε γωνίας εισέρχεται στο άθροισμα δύο φορές — μία με αρνητικό πρόσημο (στις άσπρες κορυφές) και μία με θετικό (στις μαύρες). Το δεξιό μέλος

της ανισότητας είναι επίσης ίσο με το 0, διότι το πλήθος των άσπρων κορυφών είναι ίσο με το πλήθος των μαύρων.

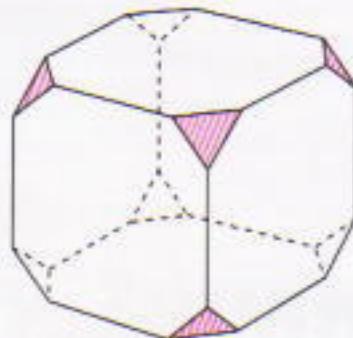
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια συλλογιστική και στην περίπτωση που κάθε κορυφή αποκόπτεται από αρκετά επίπεδα, και όχι μόνο από ένα. Ο μόνος περιορισμός έγκειται στο ότι οι έδρες που δημιουργούνται πρέπει να είναι ανά δύο προσκείμενες και να μην τέμνονται στην ίδια κορυφή.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παρόμοιες τεχνικές για να βρούμε και άλλες επαρκείς συνθήκες. Προς το παρόν, είναι γνωστές ορισμένες αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα πολύεδρο απολύτως μη εγγράψιμο. Όμως, το πρόβλημα γενικώς παραμένει ανοικτό.

Η μέθοδος των σχετικών γωνιών προσφέρει ένα εργαλείο που μας βοηθά να επλύσουμε και άλλα ενδιαφέροντα προβλήματα.

**Πρόβλημα 7.** Έστω ότι σε κάθε κορυφή ενός πολυέδρου συντρέχουν τρεις έδρες, και ότι κάθε έδρα έχει άρτιο πλήθος ακμών. Αποδείξτε ότι αν όλες οι κορυφές, εκτός από μία, ανήκουν σε σφαίρα, τότε το πολύεδρο είναι εγγράψιμο.

Σχήμα 8



**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 6. Μην αγνοήστε την εξής περίπλοκη εκδοχή: Οι ακμές που ξεκινούν από μια κορυφή που δεν ανήκει στη σφαίρα μπορεί να εφάπτονται σε αυτήν.

Ιδού ένα παρόμοιο αλλά πιο δύσκολο πρόβλημα.

**Πρόβλημα 8.** Έστω ότι όλες οι κορυφές ενός πολυέδρου έχουν χρωματιστεί άσπρες και μαύρες με τον τρόπο που περιγράφεται στο Πρόβλημα 5, και έστω ότι το πλήθος των άσπρων κορυφών είναι ίσο με το πλήθος των μαύρων. Αποδείξτε ότι αν όλες οι κορυφές, εκτός από μία, ανήκουν σε σφαίρα, τότε το πολύεδρο είναι εγγράψιμο.

Συνεπώς, αν οι κορυφές ενός πολυέδρου είναι χρωματισμένες άσπρες και μαύρες με τον τρόπο που περιγράφεται στο Πρόβλημα 5, τότε το

πολύεδρο είναι είτε απολύτως μη εγγράψιμο είτε ικανοποιεί τις συνθήκες του Προβλήματος 8. Δηλαδή, από το γεγονός ότι όλες οι κορυφές εκτός μίας ανήκουν σε σφαίρα, έπειτα ότι το πολύεδρο είναι εγγράψιμο.

Το απλούστερο παράδειγμα απολύτως μη εγγράψιμου πολυέδρου είναι ένας κύβος από τον οποίο έχει αποκοπεί μία κορυφή (Σχήμα 1).

Ολοκληρώνοντας, θα αναφέρουμε ότι ο Steinitz δεν απέδειξε το θεώρημα που φέρει το όνομά του, αλλά ένα σχετικό θεώρημα που θα διατυπώσουμε ως πρόβλημα.

**Πρόβλημα 9.** Έστω ότι οι έδρες ενός πολυέδρου μπορούν να χρωματιστούν μαύρες και άσπρες, έτσι ώστε

(1) το πλήθος των μαύρων εδρών να είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των άσπρων, και

(2) να μην υπάρχουν δύο προσκείμενες μαύρες έδρες.

Αποδείξτε ότι το εν λόγω πολύεδρο δεν μπορεί να περιγραφεί σε μια σφαίρα.

Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται ένα από τα απλούστερα παραδείγματα ενός απολύτως μη περιγράψιμου πολυέδρου —ένας κύβος από τον οποίο έχουν αποκοπεί όλες οι κορυφές. ◻

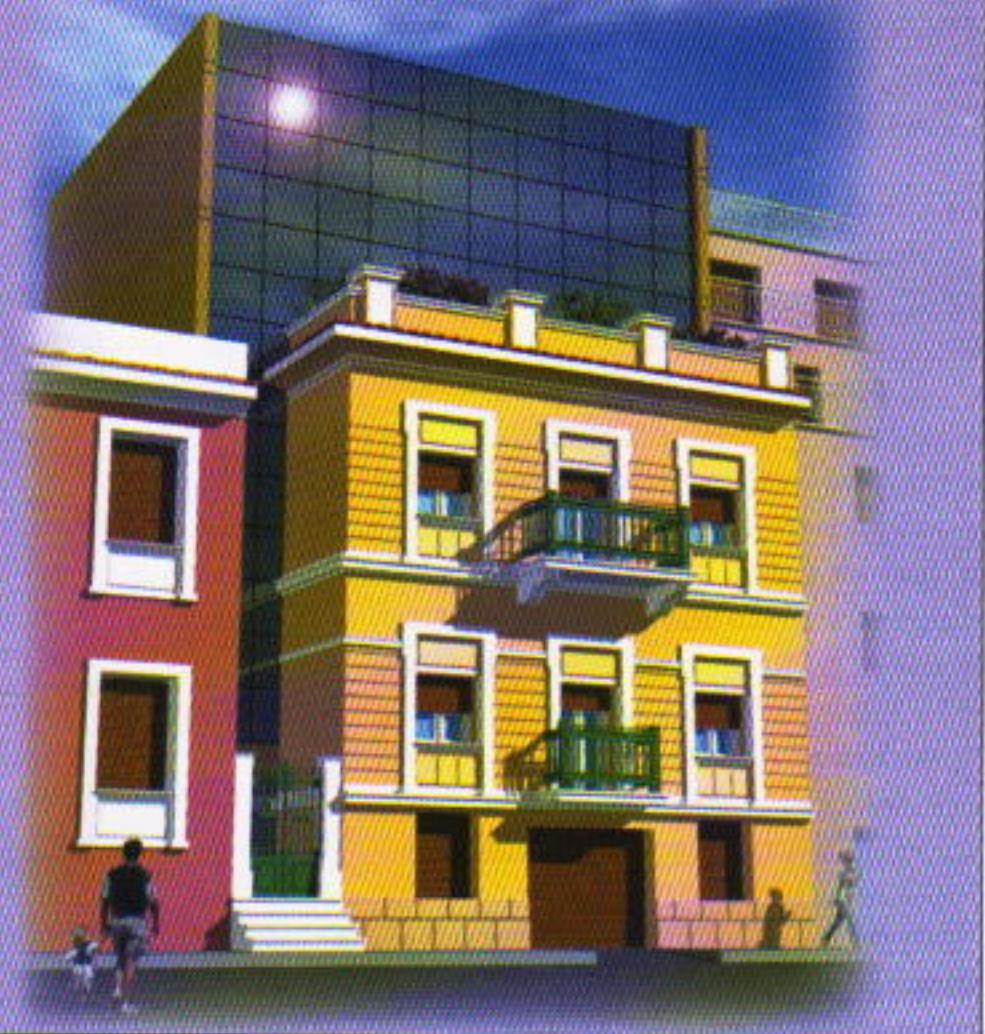
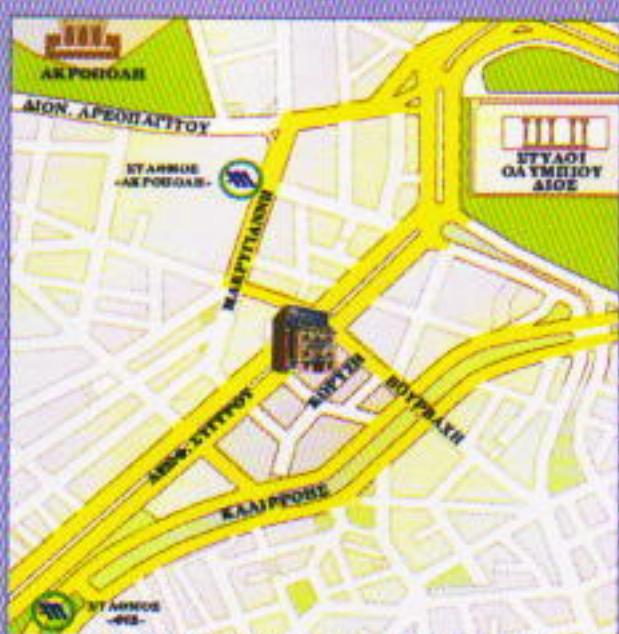
## Η ΝΕΑ ΜΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ

### ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Κορυζή, 8, 11743 Αθήνα.

τηλ.: 9244827, 9244852, fax: 9244756

e-mail: info@katoptro.gr



# Μελετώντας τα πηγάδια δυναμικού

«Πηγάδι δυναμικού είναι ο λάκκος που δεν έχουμε ακόμη ανοίξει.»

—Επιστημονική ρήση

K. Kikoin

**Σ**ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΣΥΝΑΝΤΟΥΜΕ ΠΥΚΝΑ συχνά προτάσεις όπως η ακόλουθη: «Ένα σωματίδιο (ή ένα σύστημα) βρίσκεται μέσα σε πηγάδι δυναμικού.» Τι ακριβώς είναι αυτό το πηγάδι και γιατί, τέλος πάντων, πρέπει οιοδήποτε φυσικό αντικείμενο να παγιδεύεται εντός του; Στο παρόν άρθρο σκοπεύουμε να μελετήσουμε τούτους του «λάκκους» δυναμικού με τη δέουσα προσοχή. Και για να προσδώσουμε στην ανάλυσή μας από και προστό χαρακτήρα, θα εξετάσουμε ορισμένα συγκεκριμένα παραδείγματα, αρχίζοντας από το απλούστερο δυνατό.

## Σφαίρα και κουτί

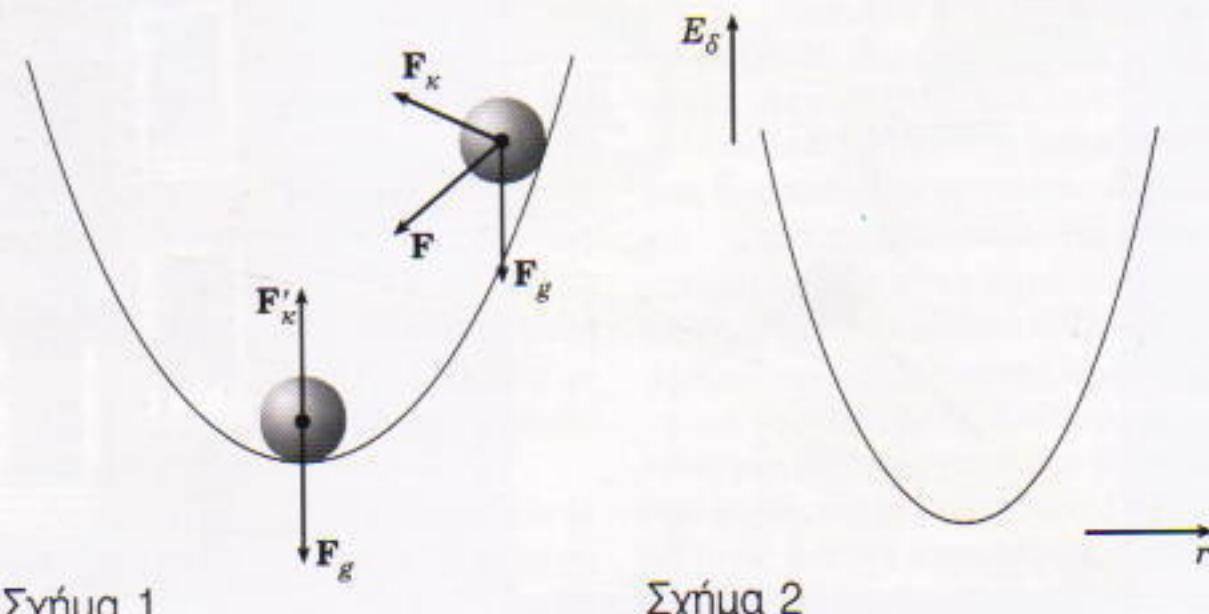
Φανταστείτε ότι ρίχνουμε μια μικρή μεταλλική σφαίρα μέσα σε ένα δοχείο με ανώμαλο πυθμένα, ο οποίος φέρει «λόφους» και «κοιλάδες». Αφού αναπηδήσει και περιπλανηθεί κυλώντας εδώ κι εκεί, η σφαίρα θα ηρεμήσει τελικά στον πυθμένα κάποιας κοιλάδας. Γιατί άραγε η σφαίρα σταματά στο συγκεκριμένο σημείο και όχι, ας πούμε, σε κάποια από τις πλαγιές της ανώμαλης επιφάνειας; Το ερώτημα αυτό επιδέχεται μια μάλλον προφανή απάντηση, η οποία και έχει ως εξής. Στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος της  $F_g$  και η κάθετη δύναμη  $F_k$ . Όταν η σφαίρα βρίσκεται στην πλαγιά ενός λόφου ή στην κατωφέρεια μιας κοιλάδας (Σχή-

μα 1), η συνισταμένη δύναμη δρα κατά την εφαπτομένη της πλαγιάς και έχει φορά προς τα κάτω· συνεπώς, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η σφαίρα επιταχύνεται και κινείται προς τον πυθμένα. Απεναντίας, στον πυθμένα οι δύο δυνάμεις ( $F_g$  και  $F_k$ ) αλληλοεξουδετερώνονται. Τελικά, η σφαίρα θα ηρεμήσει σ' αυτό το σημείο.

Ας εξετάσουμε τώρα το ίδιο πρόβλημα από διαφορετική οπτική γωνία. Μια σφαίρα που ηρεμεί στον πυθμένα κάποιας κοιλάδας προφανώς δεν έχει καθόλου κινητική ενέργεια. Με άλλα λόγια, όλη η ενέργεια της σφαίρας είναι δυναμική ( $E_d$ ). Ας φανταστούμε ότι μετατοπίζουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας της. Όπως αντιλαμβάνεστε, για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, χρειάζεται να παραγάγουμε ορισμένο έργο προκειμέ-

vou να υπερνικήσουμε τη δύναμη της βαρύτητας, η οποία ανθίσταται σε κάθε ανοδική κίνηση της σφαίρας προς την κορυφή του λόφου. Ωστόσο, εφόσον η δυναμική ενέργεια αυξάνεται συνεπεία οποιαδήποτε μετατόπισης  $r$  από τη θέση ισορροπίας, τότε στο σημείο ισορροπίας η δυναμική ενέργεια κατ' ανάγκην λαμβάνει την ελάχιστη της τιμή ( $r = 0$ , Σχήμα 2).

Ας παρακολουθήσουμε τώρα πώς εξελίσσεται η διαδικασία μετατροπής της ενέργειας στην περίπτωση μιας σφαίρας που ρίχνεται μέσα στο δοχείο. Κατά την έναρξη της κίνησης, η σφαίρα διέθετε ορισμένη ποσότητα κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Η περιπλάνηση της σφαίρας πάνω στους λόφους και τις κοιλάδες του πυθμένα, πότε ανοδική και πότε κα-





θοδική, συνοδεύεται από το μετασχηματισμό της κινητικής ενέργειας σε δυναμική και τούμπαλιν. Επιπροσθέτως, συντελείται διαρκώς μια άκρως σημαντική διαδικασία: οι δυνάμεις τριβής καταναλώνουν έργο (τελικά η ενέργεια αυτή εκλύεται στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας). Με τα πολλά, η ολική ποσότητα της μηχανικής (κινητικής και δυναμικής) ενέργειας θα ελαττωθεί τόσο ώστε η σφαίρα να εγκλωβιστεί στην κοιλάδα, αδυνατώντας πλέον να εξέλθει απ' αυτή. Έπειτα από πολλές ταλαντώσεις, η σφαίρα θα καταλήξει να ηρεμεί στον πυθμένα της κοιλάδας. Στη συγκεκριμένη θέση, όλη η υπολειπόμενη ενέργεια της σφαίρας είναι δυναμική. Επιπλέον, η ενέργεια αυτή έχει την ελάχιστη από τις τιμές που μπορεί να προσλάβει εντός της κοιλάδας. Παραδείγματος χάριν, το Σχήμα 3 δείχνει δύο δυνατές θέσεις ισορροπίας για μια σφαίρα σε γειτονικές κοιλάδες διαφορετικού βάθους. Η καθεμία από τις θέσεις ισορροπίας χαρακτηρίζεται από το δικό της ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, και ισχύει  $E_{\text{min1}} < E_{\text{min2}}$  (όπερ σημαίνει ότι, για να μετατοπιστεί η σφαίρα από τη θέση 1 στη θέση 2, πρέπει να παραχθεί θετικό έργο).

Έτοιμοι καταλήγουμε σε έναν εναλλακτικό ορισμό της ευσταθούς ισορροπίας: *Η ευσταθής ισορροπία ενός αντικειμένου αντιστοιχεί πάντοτε στο ελάχιστο της δυναμικής του ενέργειας.* Με άλλα λόγια, όταν ένα αντικείμενο τελεί σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, βρίσκεται πάντα εντός κάποιου πηγαδιού δυναμικού.

Το παράδειγμα που εξετάσαμε δια-

κρίνεται για την απλότητα και την απόλυτη σαφήνειά του: Στην περίπτωση της σφαίρας, το πηγάδι δυναμικού είναι στην κυριολεξία κάποιο βαθούλωμα. Εν συνεχείᾳ, όμως, θα περάσουμε σε ένα πολύ διαφορετικό αντικείμενο, για το οποίο αδυνατούμε να φανταστούμε οποιοδήποτε «πηγάδι» με τη συνήθη έννοια της λέξης: παρά ταύτα, το πηγάδι εξακολουθεί να υφίσταται και καθορίζει την κατάσταση ισορροπίας του αντικειμένου.

### ΣΑΠΟΥΝΩΦΟΥΣΚΕΣ

Όπως ξέρει και το τελευταίο παιδί ακόμη, οι σαπουνόφουσκες έχουν πάντοτε σφαιρικό σχήμα. Γνωρίζει όμως και το τελευταίο παιδί το γιατί;

Για να απαντήσουμε σε τούτο το ερώτημα, χρειάζεται προηγουμένως να ανακαλέσουμε στη μνήμη μας ορισμένες βασικές γνώσεις γύρω από το φαινόμενο της επιφανειακής τάσης. Από την άποψη της φυσικής, η σαπουνόφουσκα δεν είναι παρά ένα υγρό υμένιο που περικλείει όγκο ο οποίος καταλαμβάνεται από αέριο. Αν παρατηρήσει κανείς αυτό το υμένιο υπό μεγέθυνση, διαπιστώνει ότι αποτελείται από δύο επιφανειακά στρώματα (εσωτερικό και εξωτερικό) και από το υγρό που περιέχεται ανάμεσά τους. Τα μέρια της κάθε επιφάνειας υπόκεινται σε ολότελα διαφορετικές συνθήκες από εκείνες υπό τις οποίες τελούν τα μεταξύ των δύο επιφανειών μέρια. Κάθε μέριο στο εσωτερικό του υγρού περιβάλλεται από πανομοιότυπα μέρια, των οποίων η αθροιστική επίδραση σε κάθε δεδομένο μέριο μηδενίζεται λόγω της υφιστάμενης συμμετρίας. Κατ' αντιδιαστολή, τα επιφανειακά μέρια δέχονται την επίδραση σημαντικά διαφορετικών δυνάμεων από τη γειτονική περιοχή του υγρού και από το αέριο. Εφόσον τα αέρια υστερούν κατά πολύ σε πυκνότητα έναντι των υγρών, η συνισταμένη δύναμη που δρά σε ένα επιφανειακό μέριο κατευθύνεται πάντοτε προς τα έσω, προς το μέρος δηλαδή του υγρού. Ως εκ τούτου, για να εγκαταλείψουν την επιφάνεια, τα μέρια χρειάζεται να παραγάγουν μια καθορισμένη ποσότητα έργου ώστε να υπερνικήσουν τις προαναφερθεί-

σες ελκτικές δυνάμεις. Με άλλα λόγια, τα επιφανειακά μέρια έχουν μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια απ' ότι τα μέρια στο εσωτερικό του υγρού. Τούτη η πρόσθετη δυναμική ενέργεια αναφέρεται ως επιφανειακή ενέργεια  $E_{\text{ep}}$ :

$$E_{\text{ep}} \sim S,$$

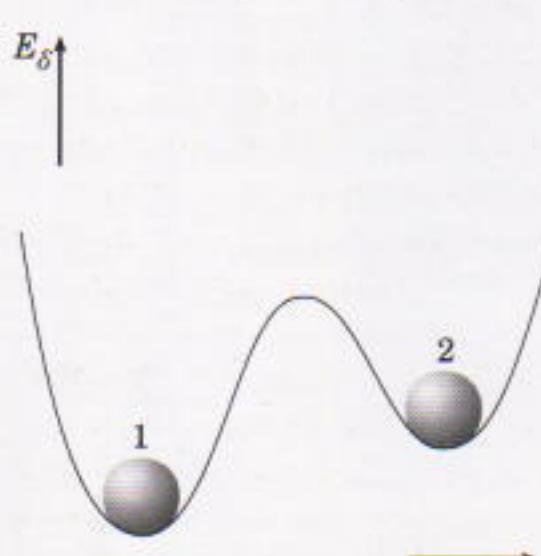
ή

$$E_{\text{ep}} = aS.$$

Ο συντελεστής αναλογίας  $a$  που εμφανίζεται στην τελευταία σχέση ονομάζεται συντελεστής επιφανειακής τάσης. Ισούται με το λόγο του έργου  $W$  που απαιτείται ώστε να αυξηθεί το εμβαδόν επιφανείας κατά  $\Delta S$  προς το ίδιο το  $\Delta S$ . Κάθε υγρό έχει και τον χαρακτηριστικό του συντελεστή επιφανειακής τάσης.

Όταν φουσκώνουμε μια σαπουνόφουσκα, ο δύκος της αυξάνεται (πράγμα που ισχύει εξίσου και για το εμβαδόν επιφανείας του υμενίου): εντούτοις, η ποσότητα του υγρού από το οποίο αποτελείται το τοίχωμα της σαπουνόφουσκας παραμένει σταθερή. Προφανώς, η αύξηση του εμβαδού επιφανείας καθίσταται δυνατή μόνο και μόνο επειδή νέα μέρια μετακινούνται προς την επιφάνεια από το εσωτερικό του υγρού. Κατά συνέπεια, για να πραγματοποιηθεί τούτη η διαδικασία, η οποία συνεπάγεται και τη συνακόλουθη αύξηση της επιφανειακής ενέργειας του υμενίου, χρειάζεται να παραχθεί ορισμένη ποσότητα έργου.

Μπορούμε πλέον να εξηγήσουμε γιατί οι σαπουνόφουσκες είναι πάντοτε σφαιρικές και όχι, για παράδειγμα, ελλειψοειδείς ή πολυεδρικές. Η σφαίρα έχει την εξής υπέροχη ιδιότητα: Ανάμεσα σε όλα τα γεωμετρικά στερεά με τον ίδιο όγκο, εκείνη παρουσιάζει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας. Κατά συνέπεια, εάν προσπαθήσουμε να παραμορφώσουμε μια σαπουνόφουσκα έτσι ώστε να αποκτήσει σχήμα ελλειψοειδούς, θα χρειαστεί να παραγάγουμε ορισμένη ποσότητα έργου για να επιτύχουμε την αύξηση του εμβαδού της και της επιφανειακής της ενέργειας. Με άλλα λόγια, το σφαιρικό σχήμα της σαπουνόφουσκας αντιστοιχεί στην ελάχιστη



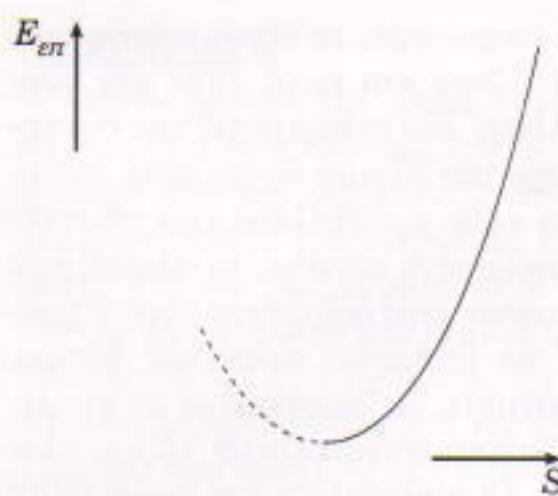
Σχήμα 3

δυναμική ενέργεια του υμενίου που αποτελεί το κέλυφός της.

Επομένως, θα αναρωτηθεί ενδεχομένως ο αναγνώστης, τι είναι ακριβώς αυτό που βρίσκεται στον πυθμένα του πηγαδιού δυναμικού στη συγκεκριμένη περίπτωση; Προφανώς, αποκλείεται να πρόκειται για κάποιο μεμονωμένο σωματίδιο, καθότι η επιφανειακή τάση προκύπτει ως αποτέλεσμα όχι της συμπεριφοράς ενός μεμονωμένου μορίου αλλά της αλληλεπίδρασης τεράστιου πλήθους από αυτά. Δεν επιτρέπεται καν να πούμε ότι το πηγάδι δυναμικού περιέχει όλα τα επιφανειακά μόρια, καθόσον κάθε μεταβολή της ακτίνας της σαπουνόφουσκας συνοδεύεται και από κάποια μετακίνηση μορίων από την επιφάνεια προς το εσωτερικό του υγρού, και αντίστροφα. Επιπλέον, ανάμεσα στην επιφάνεια και τα βαθύτερα στρώματα του υμενίου συντελείται διαρκής ανταλλαγή μορίων λόγω της θερμικής κίνησης. Άρα, το πηγάδι δυναμικού περιέχει όλο το υγρό που σχηματίζει το υμένιο σαπωνοδιαλύματος.

Αν κατέστη δυνατόν να εφαρμόσουμε την έννοια της δυναμικής ενέργειας (και του πηγαδιού δυναμικού) στο παρόν πρόβλημα, τούτο οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στο ότι υπάρχει μια παγκόσμια παράμετρος η οποία περιγράφει την ενέργεια του συστήματος: πρόκειται για το εμβαδόν επιφανείας της φυσαλίδας, το οποίο βρίσκεται απλούστατα σε σχέση αναλογίας προς την επιφανειακή της ενέργεια.

Για να ακριβολογούμε, κατ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε μόνο το ένα ήμισυ του πηγαδιού δυναμικού το οποίο αντιστοιχεί στη σφαιρική μορφή της φυσαλίδας (Σχήμα 4). Η μοναδική μέθοδος για να μειώσουμε το εμβαδόν επιφανείας συνίσταται στο να συμπιέσουμε τη φυσαλίδα —δηλαδή, στο να εκτελέσουμε έργο συμπιέζοντας το αέριο στο εσωτερικό της φυσαλίδας. Η αντίστοιχη αύξηση της ενέργειας του συστήματος σημειώνεται με τη διακεκομένη γραμμή του Σχήματος 4. Στην πραγματικότητα, λοιπόν, το πηγάδι δυναμικού μιας φυσαλίδας σαπωνοδιαλύματος περιέχει το σύνθετο σύστημα «(επιφανειακά μόρια του υ-



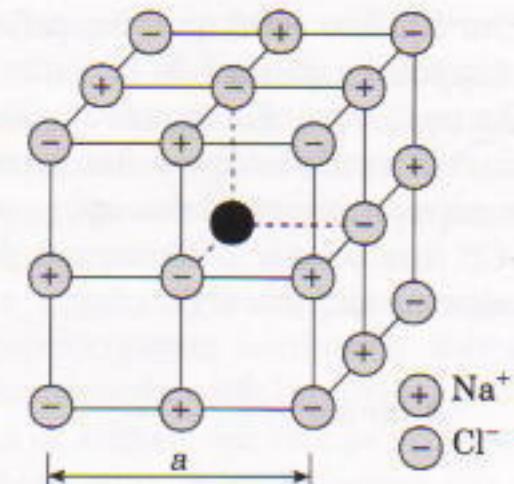
Σχήμα 4

γρού) + (εσωτερικά μόρια του υγρού) + (μόρια του αερίου στο εσωτερικό της φυσαλίδας)».

### ΙΟΝΤΙΚΟΣ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΣ

Ερχόμαστε τώρα στο τελευταίο παράδειγμα συστήματος ευρισκόμενου εντός πηγαδιού δυναμικού το οποίο πρόκειται να μελετήσουμε στο παρόν άρθρο. Η μορφή του πηγαδιού δυναμικού για ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς μέσω αυστηρών αλλά υπερβολικά περιπλοκών και επίπονων υπολογισμών. Εντούτοις, υπάρχει μια εξαιρετικά απλή συλλογιστική ικανή να μας οδηγήσει σε ένα αξιόλογο προσεγγιστικό αποτέλεσμα. Θα ακολουθήσουμε, λοιπόν, αυτή την καρποφόρα πορεία, όπου με τίμημα μια μικρή αβαρία ως προς την ακρίβεια κερδίζουμε ως αντάλλαγμα πολύ μεγαλύτερη διαύγεια.

Το σύστημα για το οποίο γίνεται λόγος δεν είναι άλλο από τον ιοντικό κρύσταλλο, τυπικό παράδειγμα του οποίου αποτελεί το κοινό επιτραπέζιο αλάτι ( $\text{NaCl}$ ). Ως γνωστόν, στα κρυσταλλικά σώματα τα άτομα (ή τα ιόντα) σχηματίζουν κανονικά γεωμετρικά πλέγματα. Ο κρύσταλλος του αλατιού χαρακτηρίζεται από ένα απλό κυβικό πλέγμα, τους κόμβους του οποίου καταλαμβάνουν θετικά ιόντα νατρίου ( $\text{Na}^+$ ) και αρνητικά ιόντα χλωρίου ( $\text{Cl}^-$ ) διατεταγμένα εναλλάξ στο χώρο σε ένα μόρφωμα που θυμίζει τρισδιάστατη σκακιέρα (Σχήμα 5). Κάθε ιόν  $\text{Na}^+$  έχει ως εγγύτατους γείτονές του έξι ιόντα  $\text{Cl}^-$ , πρόταση η οποία εξακολουθεί να ισχύει αν εναλλάξουμε αμοιβαία τα  $\text{Na}^+$  και  $\text{Cl}^-$ . Η απόσταση ανάμεσα στα δύο



Σχήμα 5

πλησιέστερα άμοια ιόντα στην έδρα του κύβου ονομάζεται σταθερά πλέγματος και συμβολίζεται με  $a$ .

Για να προσδιορίσουμε τη μορφή του πηγαδιού δυναμικού για έναν συγκεκριμένο κρύσταλλο, χρειάζεται να υπολογίσουμε την ολική δυναμική του ενέργεια, η οποία συνίσταται από την ενέργεια αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε όλα τα ιόντα του κρυστάλλου. Ως πρώτο βήμα, θεωρούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ των ιόντων  $\text{Na}^+$  και  $\text{Cl}^-$  που γειτονεύουν στενότερα. Η εν λόγω αλληλεπίδραση αναλύεται στην έλξη Coulomb και στην κβαντομηχανική άπωση, η οποία εμποδίζει τα ιόντα να πλησιάσουν υπερβολικά κοντά.

Τούτη την αλληλεπίδραση είναι δυνατόν να την περιγράψουμε εφαρμόζοντας την έννοια του δυναμικού. Ας φανταστούμε ένα ιόν νατρίου που βρίσκεται εντός των δύο πεδίων τα οποία παράγει ένα ιόν χλωρίου —του ελκτικού ηλεκτρικού, αφ' ενός, και του απωστικού κβαντικού, αφ' ετέρου. Σύμφωνα με την ηλεκτροστατική, το δυναμικό του ελκτικού πεδίου δίνεται από την έκφραση  $-ke/r$ . Εδώ, με  $k$  παριστούμε τη σταθερά του Coulomb, με  $e$  το φορτίο ενός μονοσθενούς ιόντος (το οποίο ισούται κατ' απόλυτη τιμή με το φορτίο του ηλεκτρονίου) και  $r$  την απόσταση που χωρίζει το ιόν του νατρίου από το ιόν του χλωρίου. Κατά κανόνα, οι ακριβείς εκφράσεις του απωστικού δυναμικού για τα διάφορα ιόντα μάς είναι άγνωστες, όμως μπορούμε να το περιγράψουμε προσεγγιστικά μέσω μιας ταχέως φθίνουσας δυναμοσυνάρτησης  $b/r^n$ , όπου το  $b$  παριστά κάποια σταθερά. Για κρυστάλλους σ-

πως το NaCl, ο εκθέτης  $n$  θεωρείται ότι λαμβάνει την τιμή 9.

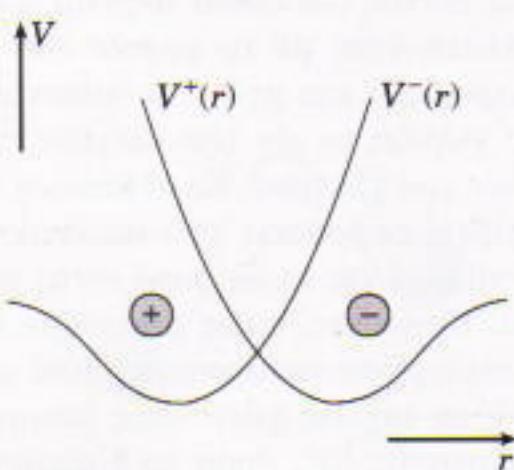
Συνοψίζοντας, ένα θετικό ιόν  $\text{Na}^+$  βρίσκεται εντός ενός σύνθετου πεδίου παραγόμενου από ένα αρνητικό ιόν  $\text{Cl}^-$ , του οποίου το δυναμικό περιγράφεται από τον εξής τύπο:

$$V^-(r) = -\frac{ke}{r} + \frac{b}{r^n}.$$

Εφόσον το  $n$  είναι μεγάλο, σε μικρές αποστάσεις το απωστικό δυναμικό αυξάνεται ραγδαία και κυριαρχεί πλήρως επί του ελκτικού δυναμικού. Σε μεγάλες αποστάσεις, αντιθέτως, το απωστικό δυναμικό ουσιαστικά μηδενίζεται, οπότε το ολικό δυναμικό συμπίπτει με το δυναμικό Coulomb. Ως αποτέλεσμα, το  $V(r)$  λαμβάνει τη μορφή μιας καμπύλης με ένα μοναδικό σημείο ελαχίστου και αποτελεί το πηγάδι δυναμικού για το ιόν του νατρίου (Σχήμα 6). Από την άλλη, κάθε ιόν νατρίου δρα ως πηγή ενός παρόμοιου πηγαδιού που λειτουργεί ως παγίδα για τα γειτονικά ιόντα χλωρίου.

Επομένως, τα δύο γειτονικά ετερόνυμα ιόντα δημιουργούν πηγάδια δυναμικού το ένα για το άλλο αλληλεπιδρώντας στις μεγάλες αποστάσεις ελκτικά, στις δε μικρές αποστικά. Μέσα σ' αυτά τα πηγάδια, το ένα ιόν συγκρατεί το άλλο σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας.

Φυσικά, ο κρύσταλλος στην ολότητά του αποτελεί ένα σύστημα πολύ μεγαλύτερης πολυπλοκότητας από το ζεύγος των ετερώνυμων ιόντων που μόλις εξετάσαμε. Εκτός από το ότι τα γειτονικά ετερώνυμα ιόντα είναι περισσότερα από ένα, κάθε δεδομένο ιόν περιστοιχίζεται από ακόμη πιο απόμακρα ιόντα, τόσο ομώνυμα όσο



## Σχήμα 6

και ετερώνυμα, τα οποία επίσης το επηρεάζουν και κατά συνέπεια συμβάλλουν στο σχηματισμό της συνάρτησης του ολικού δυναμικού. Μολονότι κάθε κρύσταλλος έχει πάντοτε πεπερασμένο μέγεθος, το πλήθος των γειτόνων ενός δεδομένου μορίου μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά άπειρο. Πράγματι, ας θεωρήσουμε το πο λεπτόκοκκο δείγμα επιτραπέζιου αλατιού. Οι κρύσταλλοί του έχουν ακριμή μήκους περί τα 0,1 mm, ενώ η σταθερά πλέγματος είναι  $\sim 10^{-8}$  cm —πράγμα που σημαίνει ότι στην ακμή ενός κρυστάλλου του διατάσσονται  $\sim 10^6$  ιόντα. Συνακόλουθα, στην επιφάνεια μιας έδρας και στον όγκο του κρυστάλλου υπάρχουν αντίστοιχα  $10^{12}$  και  $10^{18}$  ταυτόσημα ιόντα.

Εκ πρώτης όψεως, ο υπολογισμός της ολικής ενέργειας αλληλεπίδρασης για όλα τα ιόντα του κρυστάλλου φαίνεται απίστευτα δύσκολος. Ωστόσο, με τη βοήθεια ενός ευφυούς τεχνάσματος που βασίζεται σε ορισμένες θεμελιώδεις φυσικές ιδιότητες, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημά μας καταβάλλοντας ελάχιστη προσπάθεια. Οι λεπτομέρειες του υπολογισμού παρατίθενται στο Παράρτημα ΙΙ, και έτσι εδώ θα περιοριστούμε να δώσουμε το τελικό αποτέλεσμα. Η ολική δυναμική ενέργεια για το σύνολο των ιόντων του κρυστάλλου περιγράφεται από την έκφραση

$$E_{\kappa\rho}(a) = -\frac{Ae^2}{a} + \frac{B}{a^n},$$

όπου τα  $A$  και  $B$  συμβολίζουν κάποιες σταθερές. Εάν παραστήσουμε γραφικά την ανωτέρω συνάρτηση, παίρνουμε μια καμπύλη με ένα μοναδικό σημείο ελαχίστου (δηλαδή, ένα πηγάδι δυναμικού). Τι ακριβώς βρίσκεται στον πυθμένα αυτού του πηγαδιού; Μα, φυσικά, ολόκληρος σκρύσταλλος! Τούτο σημαίνει ότι σταθερά πλέγματος προσλαμβάνεται στην κατάσταση ισορροπίας την τιμή  $a_0$ , η οποία και αντιστοιχεί στο ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας.

Για να συνοψίσουμε, μελετήσαμε τρία αντικείμενα, τα οποία εκ πρώτης όψεως φαίνονται ολότελα διαφορετικά. Μολαταύτα, εμφανίστηκε έ

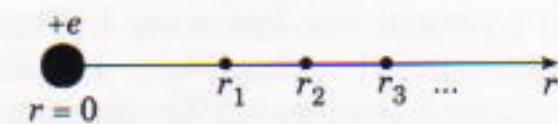
να κοινό χαρακτηριστικό —η δυναμική ενέργεια του καθενός τους είχε τη μορφή μιας καμπύλης με ένα μοναδικό σημείο ελαχίστου. Στη γενική περίπτωση, το δυναμικό μπορεί να έχει συνθετότερη μορφή (πιο συγκεκριμένα, η δυναμική ενέργεια ενδέχεται να εξαρτάται από πολλές παραμέτρους αντί από μία). Εντούτοις, η γενική αρχή παραμένει πάντοτε η ίδια: *Στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, κάθε σύστημα έχει την ελάχιστη δυνατή δυναμική ενέργεια —με άλλα λόγια, βρίσκεται στον πιθμένα ενός πηγαδιού δυναμικού.*

Παράτημα

Ας υπολογίσουμε το δυναμικό  $V_1$  το οποίο παράγει στο σημείο 1 με (ακτινική) συντεταγμένη  $r_1$  ένα ηλεκτρικό φορτίο  $+e$  τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος αναφοράς (Σχήμα 7). Το εν λόγω δυναμικό ισούται εξ ορισμού με το έργο του ηλεκτρικού πεδίου το οποίο απαιτείται για να μετακινηθεί ένα μοναδιαίο θετικό φορτίο από το δεδομένο σημείο ώς το άπειρο.

Έστω, λοιπόν, ότι τοποθετούμε ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q$  στο σημείο 1. Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb, λόγω της παρουσίας του φορτίου  $e$ , στο  $q$  ασκείται μια δύναμη  $F = kqe/r_1^2$ . Θα επιχειρήσουμε τώρα να υπολογίσουμε το έργο  $W_{1-2}$  που απαιτείται για να μεταφερθεί το φορτίο  $q$  από το σημείο 1 στο πλησιέστερο προς την αρχή των αξόνων σημείο 2. Για να απλουστεύσουμε τον υπολογισμό μας, θα επιλέξουμε μια απόσταση  $r_2 - r_1$  τόσο μικρή ώστε να επιτρέπεται να θεωρήσουμε πως η ασκούμενη δύναμη παραμένει σταθερή σε ολόκληρο το διάστημα 1-2:  $F_1 = kqe/r^2 = kqe/(r_1r_2)$ . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$W_{1.2} = F_1(r_2 - r_1) = \frac{kqe}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$



Σχήμα 7

Εργαζόμενοι κατά τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε και το έργο  $W_{2-3}$  που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο κατά τη μεταφορά του φορτίου  $q$  από το σημείο 2 στο γειτονικό σημείο 3:

$$W_{2-3} = F_2(r_3 - r_2) \\ = \frac{kqe}{r_2 r_3} (r_3 - r_2) = kqe \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right).$$

Καταφανώς, το έργο του πεδίου στο διάστημα 1-3 ισούται με το άθροισμα των έργων που παράγονται στο διάστημα 1-2 και 2-3:

$$W_{1-3} = W_{1-2} + W_{2-3} \\ = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + kqe \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \\ = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right).$$

Συνεχίζοντας αυτό τον υπολογισμό, διαπιστώνουμε πως τα ενδιάμεσα σημεία δεν παίζουν κανένα ρόλο σε διάστημα 1-3, αφού το τελικό αποτέλεσμα, και ότι στην προκύπτουσα έκφραση για το έργο υπεισέρχονται αποκλειστικά και μόνο οι συντεταγμένες του αρχικού και του τελικού σημείου. Ως εκ τούτου, το έργο του ηλεκτρικού πεδίου για τη μεταφορά του δοκιμαστικού φορτίου από το σημείο 1 στο άπειρο (όπου  $1/r_\infty = 0$ ) ισούται με

$$W_1 = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_\infty} \right) = \frac{kqe}{r_1}.$$

Τελικά, το δυναμικό στο σημείο 1 παρέχεται από τον ευκολομνημόνευτο τύπο

$$V_1 = \frac{W_1}{q} = \frac{ke}{r_1}.$$

Όσοι από τους αναγνώστες γνωρίζουν ολοκλήρωση, θα μπορούσαν να έχουν εξαγάγει αυτό το αποτέλεσμα σε μία γραμμή (το λέω για την περίπτωση όπου κάποιος θα χρειάζεται ένα κίνητρο για να μελετήσει απειροστικό λογισμό).

## Παράτημα II

Για να βρούμε την ολική δυναμική ενέργεια ενός κρυστάλλου, ας αρχίσουμε από τον υπολογισμό της ηλεκτροστατικής του ενέργειας. Θεωρούμε ένα ιόν  $\text{Na}^+$  ευρισκόμενο στο κέντρο του κυβικού πλέγματος το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 5. Οι εγγύτατοι γείτονές του είναι εξιά ιόντα χλωρίου που απέχουν από αυτό απόσταση  $r = a/2$ . Το καθένα από τα εν λόγω ιόντα χλωρίου παράγει ένα δυναμικό  $-ke/r = -2ke/a$ . Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, το δυναμικό που οφείλεται σε διάφορα επιμέρους φορτία ισούται με το άθροισμα των δυναμικών τα οποία παράγει το καθένα τους χωριστά. Κατά συνέπεια, τα εξιά ιόντα χλωρίου παράγουν δυναμικό ίσο με  $-12ke/a$ . Το αμέσως πιο απομακρυσμένο σύνολο γειτονικών φορτίων περιλαμβάνει 12 ιόντα νατρίου τοποθετημένα σε απόσταση  $a\sqrt{2}$  από το επιλεγέν (κεντρικό) ιόν νατρίου. Τούτα τα ιόντα νατρίου παράγουν ολικό δυναμικό ίσο με  $+12\sqrt{2}ke/a = +16,97ke/a$ . Συνεχίζοντας τον υπολογισμό μας, βρίσκουμε ότι το τρίτο σύνολο φορτίων παράγει δυναμικό  $-9,24ke/a$ , το τέταρτο σύνολο δυναμικό  $+6ke/a$ , κ.ο.κ.

Η προκύπτουσα σειρά δεν παρουσιάζει κάποια εμφανή κανονικότητα (επί παραδείγματι, το δέκατο ένατο σύνολο φορτίων συνεισφέρει στο ολικό δυναμικό έναν όρο  $-3,08 ke/a$ ), οπότε η προσπάθεια υπολογισμού του άπειρου αθροίσματος με την πρόσθεση των διαδοχικών μελών της σειράς φαίνεται να στερείται νοήματος. Ωστόσο, η σειρά αυτή παρουσιάζει ένα χαρακτηριστικό το οποίο αξίζει την προσοχή μας. Συγκεκριμένα, το πρόσημο των μελών της εναλλάσσεται, πράγμα που συνεπάγεται την πιθανότητα κάποιας αναδιάταξης των προσθετέων η οποία θα καθιστούσε δυνατό τον υπολογισμό του ολικού αθροίσματος. Και όντως, μια τέτοια ευφυής αναδιάταξη όντως υπάρχει, και την ιδέα της μας την υποβάλλει η έννοια της ηλεκτρικής ουδετερότητας.

Ας υπολογίσουμε το ολικό φορτίο του κύβου που φαίνεται στο Σχήμα 5. Θα θεωρήσουμε ότι στον κύβο α-

νήκει μόνο το μισό κάθε ιόντος που βρίσκεται στις έδρες, το ένα τέταρτο κάθε ιόντος που βρίσκεται σε κάποια ακμή και το ένα όγδοο κάθε ιόντος που βρίσκεται σε κάποια κορυφή. Πρόκειται για μια παραδοχή η οποία σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αστηρικτή: Εάν υποδιαιρέσουμε ολόκληρο τον κρύσταλλο σε κύβους όμοιους με εκείνον που εξετάζουμε, διαπιστώνουμε ότι ανάλογα με το αν κάποιο ιόν είναι τοποθετημένο σε κάποια έδρα, ακμή ή κορυφή, το μοιράζονται δύο, τέσσερις ή οκτώ κύβοι, αντιστοίχως. Το μεγάλο μας επίτευγμα έγκειται στο εξής: Το συνολικό φορτίο ενός τέτοιου κύβου που αποτελείται από διαμερισμένα φορτία ισούται ακριβώς με μηδέν! Με άλλα λόγια, ανακαλύψαμε έναν τρόπο να διαιρέσουμε τον κρύσταλλο σε ηλεκτρικά ουδέτερες κυψελίδες. Η ενέργεια Coulomb μιας τέτοιας ουδέτερης κυψελίδας δίνεται από την έκφραση

$$-\frac{12 ke^2}{2 a} + \frac{16,97 ke^2}{4 a} - \frac{9,24 ke^2}{8 a} = \\ = -2,91 \frac{ke^2}{a}.$$

Ας περάσουμε τώρα σε ένα πο περίπλοκο συγκρότημα ιόντων. Θα αποτελείται από τον αρχικό κύβο (με ολόκληρα τα ιόντα) περιβεβλημένο με ένα μοναδικό στρώμα από ιόντα που εν μέρει ανήκουν σε γειτονικά ομοειδή συγκροτήματα. Ο νέος κύβος μας θα έχει ακμή  $2a$ : τα ιόντα του εσωτερικού κύβου ανήκουν εξολοκλήρου στη νέα κατασκευή, τα περιβάλλοντα ιόντα θα ανήκουν, ανάλογα με τη θέση τους, στο σύστημα κατά το ένα ήμισυ, το ένα τέταρτο ή το ένα όγδοο. Πρόκειται για μια πο περίπλοκη διαίρεση του κρυστάλλου σε ηλεκτρικά ουδέτερες κυψελίδες. Αναμένεται ότι η προκύπτουσα δυναμική ενέργεια θα συνιστά ακριβέστερη προσέγγιση του ζητούμενου αποτελέσματος. Πράγματι, η ηλεκτροστατική ενέργεια της νέας ηλεκτρικής κυψελίδας βρίσκεται ίση με  $-3,50 ke^2/a$ . Αν πάρουμε έναν ηλεκτρικά ουδέτερο κύβο με μήκος ακμής 3a, η ενέργειά του θα ισούται με

$-3,49 \text{ ke}^2/\text{a}$ . Οι περαιτέρω αυξήσεις του όγκου του θεωρούμενου κύβου πρακτικά δεν τροποποιούν το αποτέλεσμα, οπότε τελικά λαμβάνουμε μια τιμή για την ενέργεια κατά προσέγγιση  $\approx -3,495 \text{ ke}^2/\text{a}$ .

Η ίδια ιδέα της διαίρεσης του κρυστάλλου σε στοιχειώδεις κυψελίδες υποδεικνύει έναν διαφορετικό τρόπο προσεγγιστικού υπολογισμού της ενέργειας του κρυστάλλου. Ας θεωρήσουμε ένα ιόν φορτίου  $+1$  και ας το περιβάλλουμε με μια σφαίρα ακτίνας  $a$  γεμάτη με ομοιόμορφα κατανεμημένο αρνητικό φορτίο, του οποίου η ολική τιμή ανέρχεται σε  $-1$ . Αν υπολογίσουμε την ηλεκτροστατική ενέργεια αυτής της ουδέτερης σφαίρας, καταλήγουμε στην τιμή  $-3,6 \text{ ke}^2/\text{a}$ , η οποία δεν απέχει παρά ελάχιστα από τη σωστή τιμή.

Όπως διαπιστώνουμε, λοιπόν, ένα ορθό μοντέλο που λαμβάνει υπόψη τα πλέον ουσιώδη χαρακτηριστικά μιας φυσικής διαδικασίας απλουστεύει σε μεγάλο βαθμό τους υπολογισμούς μας.

Περιέργως, η ενέργεια που συνδέεται με την κβαντική άπωση μπορεί να υπολογιστεί με πολύ απλούστερο τρόπο, αν και η φύση αυτής της άπωσης κάθε άλλο παρά τετριμμένη είναι. Όπως είπαμε, το απωστικό δυναμικό φθίνει ταχύτατα αυξανομένης της απόστασης. Συνεπώς, μπορούμε να λάβουμε υπόψη μόνο την άπωση που αναπτύσσεται ανάμεσα σε γειτονικά ιόντα τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $a/2$ . Σε τούτη την προσέγγιση, η ολική ενέργεια της άπωσης ισούται απλώς με το άθροισμα των ενεργειών άπωσης («κατά ζεύγη αλληλεπίδραση») για όλα τα ζεύγη ιόντων. Βρίσκουμε αμέσως το αποτέλεσμα  $+B/a^n$ , όπου  $B = Nb$ , με το  $N$  να παριστά το πλήθος των ζευγών στην κυψελίδα. Με τον ίδιο παράγοντα  $N$  πρέπει να πολλαπλασιαστεί και η ανωτέρω υπολογισθείσα ηλεκτροστατική ενέργεια που αντιστοιχεί στα μεμονωμένα ιόντα. Ως αποτέλεσμα, καταλήγουμε στον τύπο για την ολική ενέργεια του κυβικού κρυστάλλου τον οποίο χρησιμοποιήσαμε στο κυρίως σώμα του παρόντος άρθρου.

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ**

MARTIN REES

**Mόνο  
έξι αριθμοί**

Οι θεμελιώδεις δυνάμεις που διαμορφώνουν το Σύμπαν

Σε αυτό το βιβλίο —το οποίο προκάλεσε αντιπαραθέσεις πριν ακόμη εκδόθει—, ο Martin Rees, Βασιλικός Αστρονόμος της Μ. Βρετανίας, μάς εξηγεί πώς έξι μόνο αριθμοί, «εντυπωμένοι» στη Μεγάλη Έκρηξη, προσδιορίζουν τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά του φυσικού κόσμου, και πώς από τις τιμές των έξι αυτών αριθμών εξαρτάται, με εκπληκτική ευαισθησία, η κοσμική εξέλιξη: αν οποιοσδήποτε από τους εν λόγω αριθμούς «είχε ρυθμιστεί» διαφορετικά, δεν θα μπορούσε να υπάρξουν ούτε άστρα ούτε ζωή. Το γεγονός μάς παρέχει τη δυνατότητα να αντιληφθούμε ριζικά νέες προοπτικές για το Σύμπαν και τη δική μας θέση μέσα σ' αυτό, καθώς και για την υπόσταση των φυσικών νόμων.

- «Το βιβλίο αποτελεί το λεπτό άρωμα της μοντέρνας φυσικής και κοσμολογίας, παρότι (λόγω μεγέθους) δεν μας φανερώνει όλες τις λεπτομέρειες...»  
—Lawrence Krauss, στο *The New Scientist*
- «Ο Rees συχνά αναφέρεται ως ο αστροφυσικός των "αστρο"φυσικών. Τώρα, μετά το έξοχο βιβλίο του, μπορεί να θεωρείται το αστέρι όλων μας.»  
—Lee Smolin, στο *Natural History*

240 σελ., Α/Μ,  $14 \times 21$  εκ., 6.000 δρχ.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο**

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ**

η 2η έκδοση

Jearl Walker

Το πανηγύρι της Φυσικής  
—με απαντήσεις

406 σελ., Α/Μ,  $17 \times 25$  εκ., 6.500 δρχ.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο**

# Το θεώρημα του Μενελάου

«Και προς γε Μενέλαον αποβλέψας (ο Λεύκιος) εν τω διαλέγεσθαι τον Μαθηματικόν “αισχύνομαι μεν” ἐφη “σου παρόντος, ω φίλε Μενέλαε, θέσιν αναιρείν μαθηματικήν...”»

—Πλούταρχος

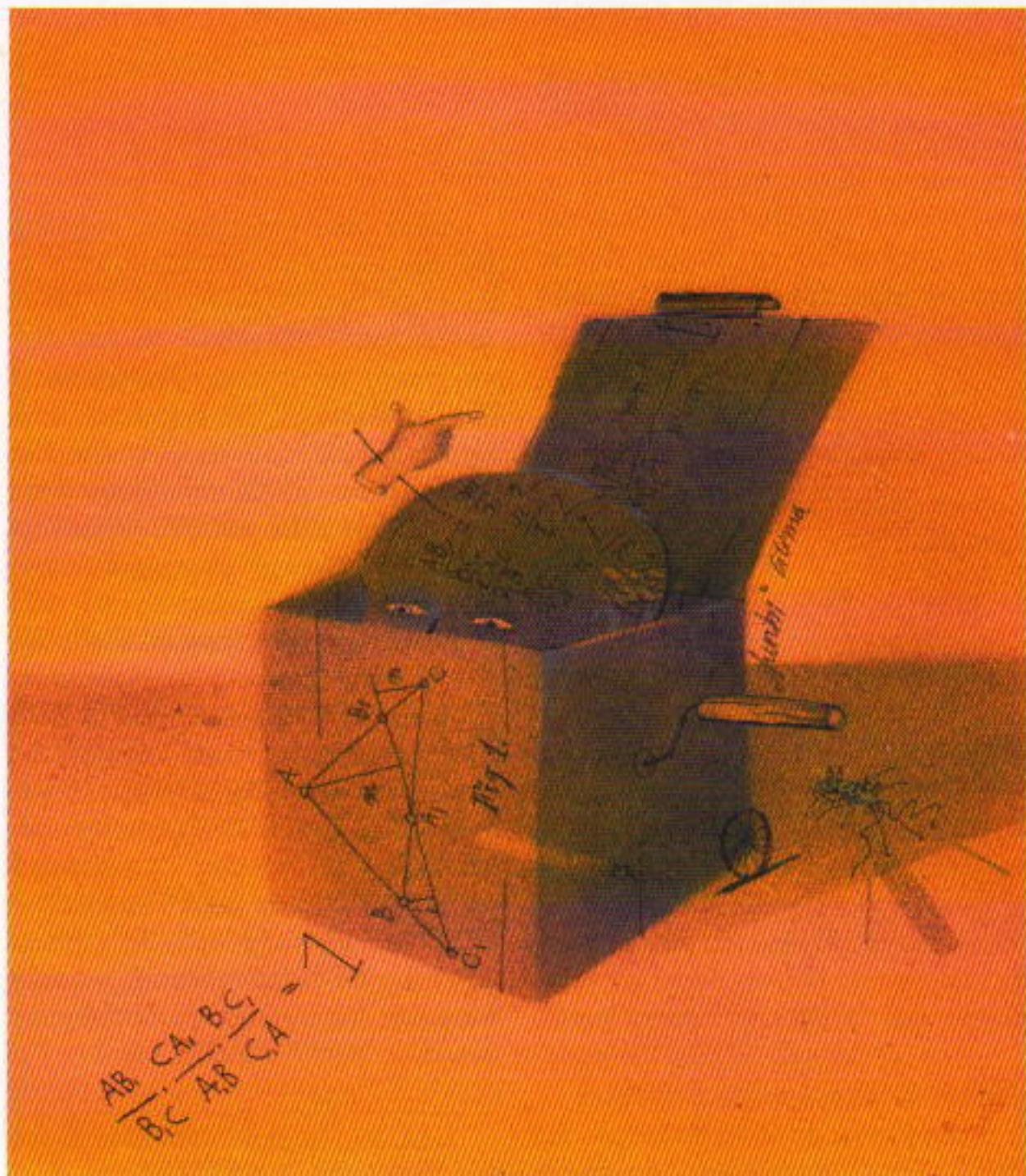
B. Orach

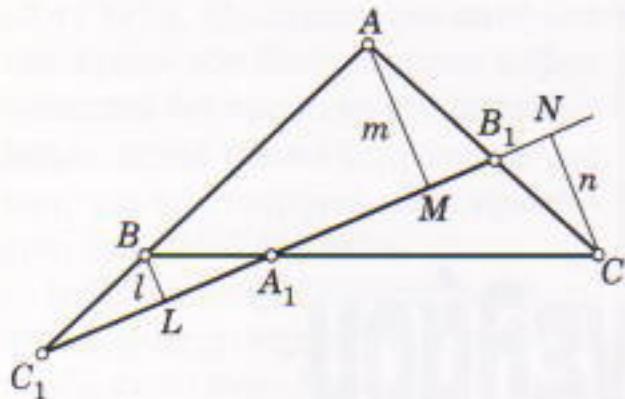
**H**ΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ στη λύση προβλημάτων, συχνά κρύβει μέσα σε περισσότερο πολύπλοκα και εξειδικευμένα προβλήματα την απλή και κομψή πρόταση η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Μενελάου. Το θεώρημα αυτό αποτελεί ένα μικρό διαμάντι των μαθηματικών της αρχαιότητας.

Το θεώρημα του Μενελάου αφορά μια ευθεία που τέμνει και τις τρεις πλευρές ενός τριγώνου. Θα ονομάζουμε μια τέτοια ευθεία διατέμνουσα του τριγώνου. Προφανώς, δεν είναι δυνατόν και τα τρία σημεία τομής να ανήκουν στο εσωτερικό των πλευρών του τριγώνου· συνεπώς, ένα τουλάχιστον από αυτά θα ανήκει στην προέκταση μιας πλευράς. Σε διαδικασία ακολουθεί θα χρησιμοποιούμε συχνά προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα. Με αυτή τη σύμβαση, για παράδειγμα, θα είναι  $\overline{AB} = -\overline{BA}$ , όπου  $\overline{AB}$  ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Το θεώρημα του Μενελάου διατυπώνεται ως εξής:

Έστω ότι μια διατέμνουσα του τριγώνου  $ABC$  τέμνει τις πλευρές του στα σημεία  $A_1$ ,  $B_1$  και  $C_1$  (Σχήμα 1). Τότε, λαμβάνοντας υπόψη και τους προσανατολισμούς, θα είναι:





Σχήμα 1

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1.$$

(Για να θυμάστε τη σειρά των γραμμάτων, ακολουθήστε το περίγραμμα του τριγώνου από μία κορυφή προς ένα σημείο τομής, μετά στην επόμενη κορυφή, κ.ο.κ. μέχρι να επιστρέψετε στην αρχική κορυφή.)

**Απόδειξη.** Από τις τρεις κορυφές φέρουμε προς τη διατέμνουσα τρία παράλληλα μεταξύ τους τυχαία ευθύγραμμα τμήματα. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένα πλήθος ομοίων τριγώνων.

Από τα όμοια τρίγωνα  $AMB_1$  και  $CNB_1$  του Σχήματος 1, έχουμε:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{m}{n}.$$

Από τα όμοια τρίγωνα  $CNA_1$ ,  $BLA_1$ , έχουμε:

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{n}{l}.$$

Από τα όμοια τρίγωνα  $BLC_1$ ,  $AMC_1$ , έχουμε:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{l}{m}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες, λαμβάνοντας υπόψη τους προσανατολισμούς, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} &= \\ &= -\frac{m \cdot n \cdot l}{n \cdot l \cdot m} = -1. \end{aligned}$$

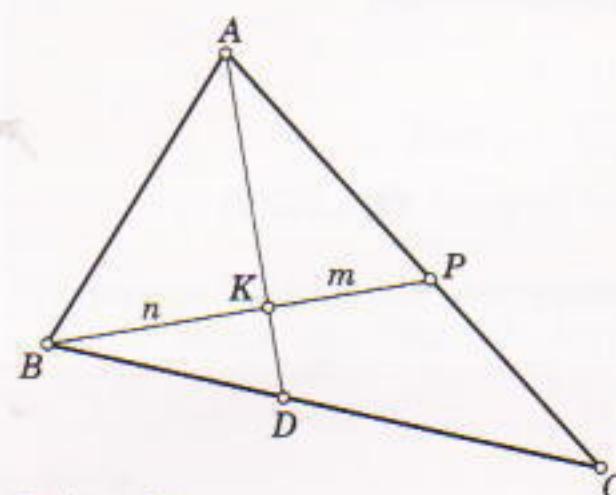
Οπότε, το θεώρημα αποδείχτηκε.

Γνωρίζουμε αυτό το θεώρημα από μια αραβική μετάφραση του έργου

Σφαιρικά του Μενελάου του Αλεξανδρίνου (1 αι. μ.Χ.), όπου διατυπώνεται χωρίς απόδειξη. Υπάρχει με απόδειξη στη Μεγίστη Σύνταξη του Πτολεμαίου<sup>1</sup>.

Θα επιδείξουμε την αποτελεσματικότητα του θεωρήματος παραθέτοντας δύο απόδειξεις του ίδιου προβλήματος —μία που χρησιμοποιεί εμβαδά και μία που βασίζεται στο θεώρημα του Μενελάου.

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $AD$  η διάμεσος του τριγώνου  $ABC$  (Σχήμα 2). Επί της  $AD$  λαμβάνουμε ένα σημείο  $K$  τέτοιο ώστε  $AK + KD = 3 + 1$ . Βρείτε σε ποιο λόγο διαιρεί η ευθεία  $BK$  το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$ .



Σχήμα 2

**Λύση** (που χρησιμοποιεί εμβαδά). Θα εφαρμόσουμε επανειλημμένα το θεώρημα που δηλώνει ότι ο λόγος των εμβαδών τριγώνων με ίσα ύψη ισούται με το λόγο των βάσεων τους. (Θα συμβολίζουμε τα εμβαδά με απόλυτες τιμές.) Φέρουμε το τμήμα  $PD$ , και έστω ότι  $|PDK| = S$ . Τότε, αφού τα τρίγωνα  $PDK$  και  $PAK$  έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή  $P$ , έχουμε ότι  $|PAK| = 3S$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι  $BK + KP = k$ . Θα βρούμε το  $k$  συγκρίνοντας εμβαδά. Τα τρίγωνα  $BDK$  και  $PDK$  έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή  $D$  και, επομένως,  $|BDK| = kS$ . Τα τρίγωνα  $PBD$  και  $PDC$  έχουν ίσες βάσεις  $BD = BC$  και ίσα ύψη από την κορυφή  $P$ , οπότε  $|PDC| = |PBD| = |KBD| + |PKD| = kS + S$ . Τα τρίγωνα  $ABD$  και  $ADC$  έχουν επίσης ίσα ύψη (από την κορυφή  $A$ ) και ίσες βάσεις, συνεπώς  $|ABD| = |ADC|$ .

Η τελευταία εξίσωση γράφεται, συναρτήσει των διαφόρων εμβαδών που έχουμε εισαγάγει, ως εξής:  $3kS + kS = 3S + S + S + kS$ , ή  $3kS = 5S$ , και  $k = 5/3$ . Ομοίως,  $|ABP| = 3kS + 3S = 8S$ , και  $|PBC| = kS + S + S + kS = 16S/3$ . Άρα, ο λόγος  $|APB| + |PBC|$  ισούται με  $8 + (16/3) = 3 + 2$ .

**Λύση** (που βασίζεται στο θεώρημα του Μενελάου). Εφαρμόζουμε το θεώρημα για το τρίγωνο  $ACD$  και τη διατέμνουσα  $BP$ , οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DK}}{\overline{KA}} = 1,$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{3} = -1,$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \frac{3}{2},$$

οπότε ο ζητούμενος λόγος είναι επίσης  $3 + 2$ .

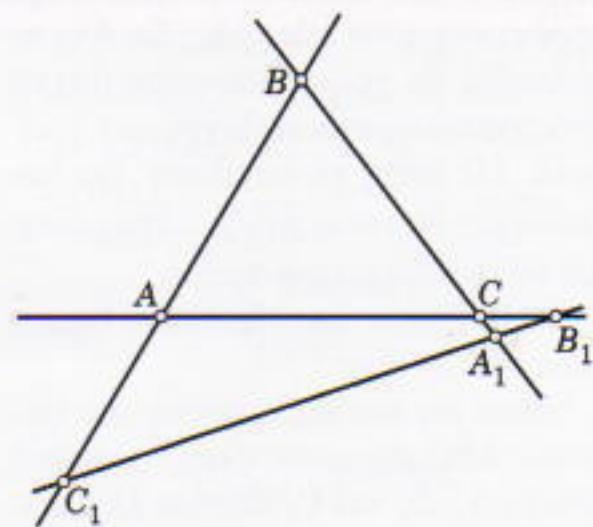
Τα πλεονεκτήματα από τη χρήση του θεωρήματος του Μενελάου είναι προφανή.

Η επόμενη πρόταση, που είναι η αντίστροφη του θεωρήματος του Μενελάου, αποδεικνύεται συχνά πολύ χρήσιμη.

Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία  $A_1$ ,  $B_1$  και  $C_1$  ανήκουν στις πλευρές  $BC$ ,  $AC$  και  $AB$ , αντίστοιχα, ενός τριγώνου  $ABC$ , ή στις προεκτάσεις αυτών των πλευρών (Σχήμα 3). Αν

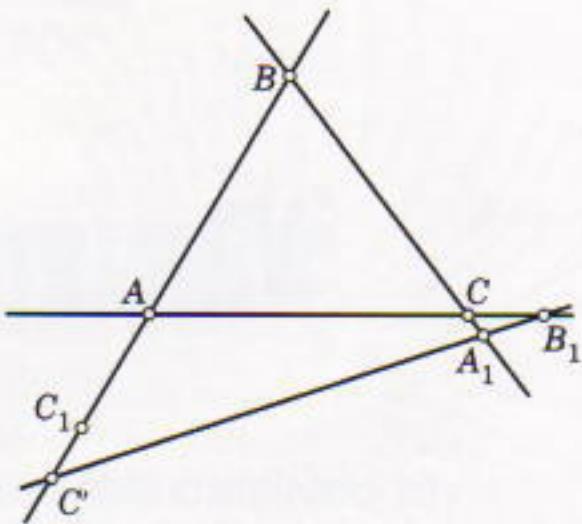
$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1,$$

τότε τα σημεία  $A_1$ ,  $B_1$  και  $C_1$  είναι συγγραμμικά.



Σχήμα 3

1. Βλ. Μιχ. Λάμπρου, «Μενελάου Σφαιρικά» Μάιος-Ιούνιος 2001. (Σ.τ.μ.)



Σχήμα 4

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε ότι το σημείο  $C_1$  δεν ανήκει στην ευθεία  $A_1B_1$  (Σχήμα 4). Έστω  $C'$  το σημείο τομής των ευθειών  $A_1B_1$  και  $AB$ . Τότε, βάσει του θεωρήματος του Μενελάου, έχουμε:

$$\frac{\overline{AB}_1}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA}_1}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC}'}{\overline{C'A}} = -1.$$

Ωστόσο, είναι προφανές ότι

$$\frac{\overline{BC}_1}{\overline{C_1A}} \neq \frac{\overline{BC}'}{\overline{C'A}}.$$

Επομένως, η σχέση που αναφέρεται στη συνθήκη του θεωρήματος δεν μπορεί να είναι σωστή. Και αυτή η αντίφαση αποδεικνύει το θεώρημα.

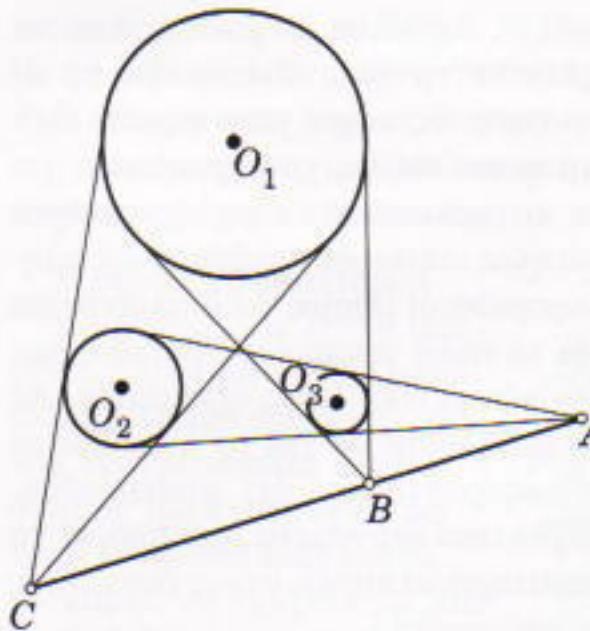
Το επόμενο κομψό πρόβλημα είναι γνωστό από πολύ παλιά. Έχει χρησιμοποιηθεί συχνά σε μαθηματικές ολυμπιάδες.

**Πρόβλημα 2.** Δίνονται τρεις κύκλοι διαφορετικών ακτίνων στο επίπεδο, έτσι ώστε κανείς τους να μη βρίσκεται στο εσωτερικό άλλου. Κατασκευάζουμε για κάθε ζεύγος κύκλων τα σημεία τομής των κοινών τους εξωτερικών εφαπτομένων. Αποδείξτε ότι αυτά τα τρία σημεία τομής είναι συγγραμμικά (Σχήμα 5).

**Λύση.** Έστω  $r_1$ ,  $r_2$  και  $r_3$  οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα τα σημεία  $O_1$ ,  $O_2$  και  $O_3$ , αντίστοιχα. Τότε

$$\frac{\overline{CO}_1}{\overline{CO}_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

διότι οι κύκλοι με κέντρο  $O_1$  και  $O_2$  είναι ομοιόθετοι ως προς το σημείο  $C$ , με λόγο ομοιοθεσίας  $r_1/r_2$ . Παρόμοια, έχουμε:



Σχήμα 5

$$\frac{\overline{AO}_2}{\overline{AO}_3} = \frac{r_2}{r_3},$$

και

$$\frac{\overline{BO}_3}{\overline{BO}_1} = \frac{r_3}{r_1}.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και τους προσανατολισμούς, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{O}_1\overline{C}}{\overline{CO}_2} \cdot \frac{\overline{O}_2\overline{A}}{\overline{AO}_3} \cdot \frac{\overline{O}_3\overline{B}}{\overline{BO}_1} &= \\ &= \left( -\frac{r_1}{r_2} \right) \cdot \left( -\frac{r_2}{r_3} \right) \cdot \left( -\frac{r_3}{r_1} \right) = -1. \end{aligned}$$

Βάσει του αντιστρόφου του θεωρήματος του Μενελάου, τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$  είναι συγγραμμικά.

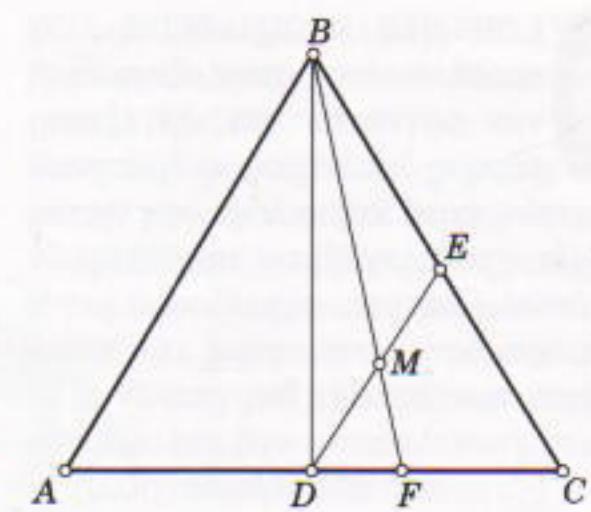
#### Ασκήσεις

1. Δίνονται τα σημεία  $M$  και  $N$  στις πλευρές  $AB$  και  $AC$ , αντίστοιχα, ενός τριγώνου  $ABC$ , τέτοια ώστε  $AM/MB = CN/NA = 1/2$ . Έστω  $S$  το σημείο τομής των τμημάτων  $BN$  και  $CM$ . Προσδιορίστε το λόγο στον οποίο το  $S$  διαιρεί καθένα από αυτά τα τμήματα.

2. Η διχοτόμος  $AD$  του τριγώνου  $ABC$  διαιρεί την πλευρά  $BC$  σε λόγο  $2+1$ . Προσδιορίστε το λόγο στον οποίο η διάμεσος  $CE$  διαιρεί αυτή τη διχοτόμο.

3. Θεωρούμε ένα σημείο  $D$  στην πλευρά  $AB$ , και σημεία  $E$  και  $F$  στην πλευρά  $BC$  ενός τριγώνου  $ABC$ , τέτοια ώστε  $AD + DB = 3+2$ ,  $BE + EC = 1+3$  και  $BF + FC = 4+1$ . Προσδιορίστε το λόγο στον οποίο η ευθεία  $AE$  διαιρεί το τμήμα  $DF$ .

4. Το σημείο τομής των υψών του

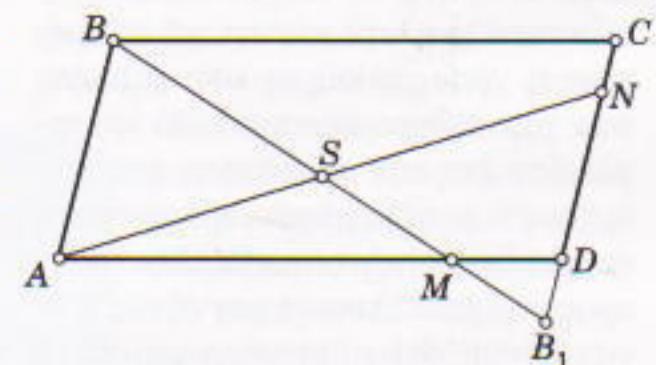


Σχήμα 6

τριγώνου  $ABC$  βρίσκεται στο μέσον του ύψους που φέρουμε από την κορυφή  $C$  του τριγώνου. Αποδείξτε ότι  $\text{συν}C = \text{συν}A \cdot \text{συν}B$ , όπου  $A$ ,  $B$  και  $C$  είναι οι γωνίες του τριγώνου.

5. Σε ισόπλευρο τρίγωνο  $ABC$ , πλευράς  $a$ , τα σημεία  $E$  και  $D$  είναι τα μέσα των πλευρών  $BC$  και  $AC$ , αντίστοιχα,  $F$  είναι ένα σημείο του τμήματος  $DC$ , και η  $BF$  τέμνει την  $DE$  στο σημείο  $M$ . Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $BMD$  είναι τα  $1/8$  του εμβαδού του τριγώνου  $ABC$ , βρείτε το μήκος του  $MF$  συναρτήσει του  $a$  (Σχήμα 6).

6. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο  $ABCD$ . Το σημείο  $M$  διαιρεί την πλευρά  $AD$  σε λόγο  $p+1$  και το σημείο  $N$  διαιρεί την  $DC$  σε λόγο  $q+1$ . Οι ευθείες  $BM$  και  $AN$  τέμνονται στο σημείο  $S$ . Προσδιορίστε το λόγο  $AS + SN$  (Σχήμα 7).



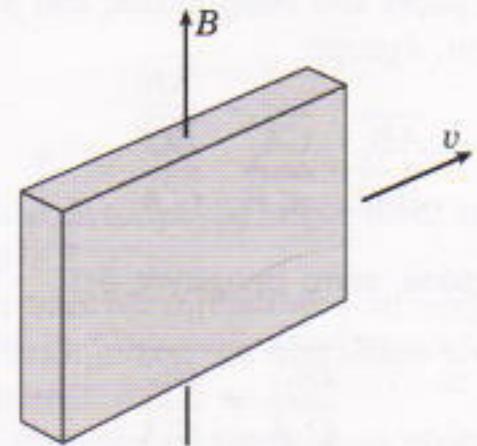
Σχήμα 7

7. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου  $ABCD$  ισούται με 1. Φέρουμε μια ευθεία που διέρχεται από το μέσο  $M$  της πλευράς  $BC$ , η οποία τέμνει τη διαγώνιο  $BD$  στο σημείο  $Q$ . Προσδιορίστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $QMCD$  (Σχήμα 8).

8. Οι πλευρές του τριγώνου  $ABC$

# Yan Kai

«Τα μαγνητικά φαινόμενα πολλεκτρισμό δεν υφίσταται καμια μαγνητικούς πόλους εκτός από ηλεκτρικά ρεύματα πολλαπλής σύστασης»



Σχήμα 1

**Ο**Ι ΠΡΩΤΕΣ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΠΟΥ αποσκοπούσαν στην αξιοποίηση των μαγνητών για την εξυπηρέτηση δικών μας, ανθρώπινων σκοπών, κατά κύριο λόγο στη ναυσιπλοΐα, χρονολογούνται προ αρκετών αιώνων. Έκτοτε, σημειώσαμε μεγάλες προόδους όσον αφορά την κατανόηση των λεπτών διεργασιών οι οποίες συντελούνται στα αντικείμενα που μας περιστοιχίζουν όταν αυτά τοποθετηθούν εντός μαγνητικού πεδίου. Η μία καταπληκτική ανακάλυψη διαδεχόταν την άλλη, και η πρακτική εκμετάλλευση της παραγόμενης γνώσης οδηγούσε στη δημιουργία όλο και καινούργιων πεδίων τεχνολογικών εφαρμογών: ηλεκτρικές μηχανές και μετασχηματιστές, συσκευές εγγραφής και αναπαραγωγής του ήχου, συστήματα επικοινωνιών, υπολογιστική τεχνολογία...

Η γέννηση της μαγνητοχημείας, η οποία μελετά τις μαγνητικές ιδιότητες της ύλης και τη σχέση τους με τη μοριακή δομή, η εφαρμογή της μαγνητοσυστολής (της ικανότητας δηλαδή των σωμάτων να μεταβάλλουν το σχήμα και το μέγεθός τους όταν μαγνητίζονται) για την παραγωγή υπερήχων, η χρησιμοποίηση του φαινομένου του σιδηρομαγνητισμού ως εργαλείου για την αποτίμηση της ποιότητας των ημιαγωγών, η παραγωγή φερριτών ως υλικών εναλλακτικών προς του μεταλλικούς μαγνήτες, η ανακάλυψη ότι η υπεραγωγή μότητα και ο μαγνητισμός συνδέονται, όλα τούτα συγκαταλέγονται στα μεγαλειώδη επιτεύγματα του 20ού αιώνα τα οποία απέφερε η μελέτη των μαγνητικών φαινομένων.

Ωστόσο, ο αιώνας αυτός δεν στάθηκε ικανός να προσφέρει λύσεις σε όλα τα προβλήματα που άπτονται, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, του μαγνητισμού, πολλά εκ των οποίων τα κληρονόμησε ως εκκρεμότητες ο καινούργιος αιώνας! Μην αποκλείετε,

λοιπόν, καθόλου το ενδεχόμενο να βρεθείτε να ερευνάτε ουσίες με άγνωστες ώς τώρα μαγνητικές ιδιότητες και να τις χρησιμοποιείτε για να κατασκευάσετε υψηλής χωρητικότητας συσκευές αποθήκευσης πληροφοριών οι οποίες θα διακρίνονται για το πολύ μικρό τους μέγεθος και την εξαιρετική τους αξιοποστία. Ας μη μιλήσουμε δε για τα αναρίθμητα ενδιαφέροντα, αν όχι μυστηριώδη, μαγνητικά φαινόμενα που μπορεί να παρατηρήσει κανείς στους ζωντανούς οργανισμούς!

Μην ξεχνάτε ότι ο μαγνητισμός κατάφερε να μαγέψει ακόμη και ποιητές, και ότι η ίδια η λέξη «μαγνητισμός» χρησιμοποιείται συχνά ως συνώνυμο του «γοητεία». Και αν νιώσετε το θέμα που διαλέξαμε για το παρόν Καλειδοσκόπιο να σας έλκει σαν μαγνήτης, τότε η επιτυχία του είναι εγγυημένη!

## Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Γιατί μαγνητίζονται αργά ή γρήγορα τα κατακόρυφα κάγκελα ασφαλείας στα παράθυρα; Σε ποιο άκρο του κατακόρυφου κάγκελου εμφανίζεται ο βόρειος πόλος και σε ποιο ο νότιος;

2. Είναι οι μόνιμοι μαγνήτες πραγματικά μόνιμοι;

3. Μπορεί να μαγνητιστεί μια σιδερένια σφαίρα;

4. Γιατί στις χαλυβουργίες δεν χρησιμοποιούνται μαγνητικοί γερανοί για τη μεταφορά ερυθροπυρωμένων μαζών μετάλλου στα έλαστρα;

5. Μια λεκάνη που περιέχει διάλυμα θεικού χαλκού τοποθετείται μεταξύ των πόλων ενός ισχυρού ηλεκτρομαγνήτη (με την επιφάνεια του διαλύματος κάθετη στο μαγνητικό πεδίο). Ένα χάλκινο ηλεκτρόδιο εμβυθίζεται στο κέντρο της λεκάνης και συνδέεται με τον θετικό ακροδέκτη μιας μπαταρίας, της οποίας ο αρνητικός ακροδέκτης συνδέεται με έναν χάλκινο δακτύλιο επίσης εμβυθισμένο στο διάλυμα και εκτεινόμενο κατά μήκος της περιμέτρου της λεκάνης. Τι περιμένετε να συμβεί όταν θα κλείσει το κύκλωμα;

6. Μια μακριά, λεπτή και αφόρτιστη ράβδος κατασκευασμένη από μη μαγνητικό υλικό κινείται με στα-

θερή ταχύτητα κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές ενός μαγνητικού πεδίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Μεταξύ των δύο όψεων της ράβδου εμφανίζεται διαφορά δυναμικού; Γιατί;

7. Είναι δυνατόν να εξαλείψουμε, ή έστω να εξασθενίσουμε, τη δράση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου με τη βοήθεια μιας σιδηρομαγνητικής ασπίδας όπως το επιτυγχάνουμε στην περίπτωση ενός ηλεκτροστατικού πεδίου;

8. Γιατί οι ταλαντώσεις μιας μαγνητικής βελόνας αποσβεννύονται ταχύτερα σε μια πυξίδα κατασκευασμένη από ορείχαλκο αντί από πλαστικό;

9. Γιατί οι πυρήνες των μετασχηματιστών αποτελούνται από πολλές και μονωμένες μεταξύ τους πλάκες;

10. Εξαρτάται ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός ηλεκτρομαγνήτη με σιδερένιο πυρήνα από το ρεύμα που το διαρρέει;

11. Πώς μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από ένα

# μαγνητισμός

άγονται αποκλειστικά από τον άλλη διαφορά ανάμεσα σε δύο τη θέση τους σε σχέση με τα συγκροτούν το μαγνήτη.»

—André Marie Ampère

ρευματοφόρο πηνίο εάν εισαγάγουμε εντός του κάποιον πυρήνα; Θεωρήστε τις περιπτώσεις όπου ο πυρήνας είναι κατασκευασμένος (α) από σίδηρο, (β) από αργίλιο, και (γ) από χαλκό.

**12.** Σε ένα πείραμα εξετάζεται η μαγνητική διαπερατότητα μερικών υγρών. Τα υγρά μεταγγίζονται το ένα κατόπιν του άλλου σε συγκοινωνούντα δοχεία, εκ των οποίων κάποιο τοποθετείται μεταξύ των πόλων ενός ισχυρού ηλεκτρομαγνήτη. Γιατί η στάθμη ορισμένων από τα υγρά ανεβαίνει στο συγκεκριμένο δοχείο, ενώ κάποιων άλλων κατεβαίνει;

**13.** Γιατί εκτρέπεται προς τα έξω η φλόγα ενός κεριού όταν τη φέρουμε ανάμεσα στους πόλους ενός μαγνήτη;

**14.** Εάν εισαγάγουμε ένα μαγνήτη εντός ενός δακτυλίου, τι αναμένεται να συμβεί σ' αυτόν στην περίπτωση όπου αποτελείται από υλικό το οποίο είναι (α) διηλεκτρικό, (β) αγώγιμο, και (γ) υπεραγώγιμο;

**15.** Ένας υπεραγώγιμος δακτύλιος ακτίνας  $r$  διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Ο δακτύλιος παραμορφώ-

νεται όπως δείχνει το Σχήμα 2. Πώς θα μεταβληθεί το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του μικρού δακτυλίου συγκρινόμενο με το πεδίο στο κέντρο του αρχικού δακτυλίου;

### Μικροπειραματισμοί

Κρεμάστε ένα λεπτό σιδερένιο καρφί από ένα ελαφρό άκαυστο νήμα έτσι ώστε, όταν ενεργοποιείται ένας ισχυρός ηλεκτρομαγνήτης τοποθετημένος εκεί κοντά, το καρφί να εκτρέπεται και να βυθίζεται στη φλόγα ενός λύχνου. Όπως θα διαπιστώσετε, έπειτα από λίγο το καρφί —λες και «κάηκε»— θα εκτιναχθεί μακριά από τη φλόγα και θα επιστρέψει στην αρχική του θέση. Μετά την πάροδο ορισμένου χρόνου, παρατηρούμε να εκτυλίσσεται η ίδια ακολουθία σκηνών, η οποία επαναλαμβάνεται συνεχώς. Πού οφείλεται αυτή η περιοδική κίνηση του καρφιού;

### Είναι ενδιαφέρον ότι...

...η πρώτη περιεκτική εργασία πάνω στις ιδιότητες και τις πρακτικές εφαρμογές των μαγνητών, όπου περιγραφόταν ο μαγνητόλιθος

και δίνονταν οδηγίες για το πώς μπορεί κανείς να εντοπίζει τους μαγνητικούς πόλους και να μαγνητίζει βελόνες, υπῆρξε το χειρόγραφο «Ἐπιστολὴ περὶ του μαγνήτη, από τὸν Pierre de Maricourt, τὸν γνωστὸν ὡς Peregrinus, πρὸς τὸν ἵπποτὴν Siguerte de Foucaucourt», τὸ οποῖο εμφανίστηκε στη Γαλλίᾳ τὸ 1269.

...ήδη από τον 16ο αιώνα, ο William Gilbert διατύπωσε την υπόθεση ότι έπρεπε να υπάρχουν δύο ειδών «μαγνητικά φορτία», εκείνα που ρέπουν προς το βορρά και κάποια άλλα που ρέπουν προς το νότο. Την ιδέα τούτη την ανέπτυξε περαιτέρω ο Charles Coulomb (1736-1806), ο οποίος μάλιστα πρότεινε και το νόμο που διέπει την αλληλεπίδραση των εν λόγω «φορτίων», που συνέπιπτε από άποψη μαθηματικής μορφής με τον γνωστό νό-

μο της ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης. Τελικά, ο André Marie Ampère (1775-1836) κατέστησε την υπόθεση των μαγνητικών φορτίων περιττή, εξηγώντας όλα τα μαγνητικά φαινόμενα στη βάση των στοιχειώδων ηλεκτρικών ρευμάτων.

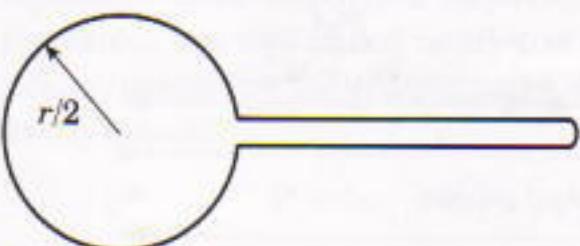
...κάθε περιστρεφόμενο οώμα, των πλανητών συμπεριλαμβανομένων, δεν μπορεί παρά να παρουσιάζει κάποια μαγνήτιση, έστω και ασθενή. Σημαντικές προσπάθειες για την ανίχνευση αυτής της μαγνήτισης εκ περιστροφής κατέβαλε ο ρώσος φυσικός Pyotr Lebedev (1866-1912). Το φαινόμενο όμως αυτό δεν παρατηρήθηκε παρά αργότερα, με τη χρήση εκλεπτυσμένων και ευαισθητών οργάνων. Πιο συγκεκριμένα, κατέστη δυνατόν να μετρηθεί η μαγνήτιση μιας ράβδου που περιστρέφοταν γύρω από τον διαμήκη άξονά της.

...η ολική μαγνητική διαπερατότητα ενός κράματος αποτελούμενου από διαμαγνητικό χρυσό και παραμαγνητικό λευκόχρυσο υπολείπεται κατά δύο τάξεις μεγέθους από εκείνη των συνήθων μη σιδηρομαγνητικών υλικών.

...μερικά κράματα παραμαγνητικών και διαμαγνητικών μετάλλων —για παράδειγμα, το λεγόμενο κράμα Heusler, το οποίο συντίθεται από χαλκό, μαγγάνιο και αργίλιο— εμφανίζονται από την άποψη των μαγνητικών τους ιδιοτήτων σχεδόν εφάμιλλα με το σίδηρο. Σήμερα, χρήσιμοι μαγνητικοί παράγονται ακόμη και από οργανικά υλικά.

...οι νέες ανακαλύψεις στο μαγνητισμό μάς παρέχουν τη δυνατότητα να παράγουμε τοπ μνήμης προϊκισμένα με ικανότητες υπέρπουκης εγγραφής δεδομένων, τέτοιες ώστε μια περιοχή εμβαδού ίσου με εκείνο του νυχιού του αντίχειρά μας να μπορεί να χωρέσει δεκάδες χιλιάδες αντίγραφα της Οδύσσειας του Ομήρου.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 69**



Σχήμα 2



# Τι είναι το κέντρο μάζας;

Ενα πολύ ειδικό σημείο για κάθε σώμα ή σύστημα σωμάτων

A.I. Chernutsan

**Ω**Σ ΓΝΩΣΤΟΝ, ΑΝ ΕΚΣΦΕΝΔΟΝΙΣΟΥΜΕ ΜΙΑ ΠΕΤΡΑ ΥΠΟ γωνία ως προς το οριζόντιο επίπεδο, εκείνη θα διαγράψει παραβολική τροχιά. Τι περιμένουμε να δουμε, όμως, στην περίπτωση όπου θα ρίξουμε μια ράβδο δίνοντάς της αρχικά ένα δυνατό χτύπημα ώστε να περιστρέφεται καθώς θα διασχίζει τον αέρα; Φυσικά, τα διάφορα σημεία της ράβδου θα κινηθούν με διαφορετικούς εν γένει τρόπους, ακολουθώντας αρκετά πολύπλοκες τροχιές: ωστόσο, η κίνηση της ράβδου στο σύνολό της θα μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με την κίνηση της πέτρας: αρχικά θα παρατηρήσουμε τη φάση της ανόδου, η οποία θα διακοπεί όταν η ράβδος φτάσει στο μέγιστο ύψος της, για να επακολουθήσει η φάση της καθόδου. Αν μάλιστα αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, τότε υπάρχει και ένα σημείο της ράβδου το οποίο κινείται α-

κριβώς όπως η πέτρα. Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο μάζας της ράβδου.

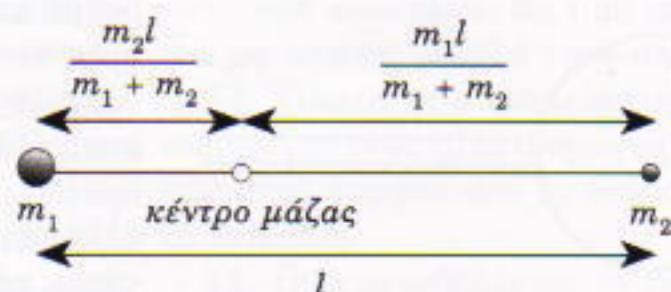
Κέντρο μάζας διαθέτουν όλα τα σώματα, καθώς επίσης και τα συστήματα σωμάτων. Πρόκειται για ένα σημείο με ιδιαίτερα σημαντικές ιδιότητες, μερικές από τις οποίες θα εξετάσουμε στο παρόν άρθρο.

Θα αρχίσουμε τη συζήτησή μας από τον καθορισμό της θέσης του κέντρου μάζας. Έστω, λοιπόν, ότι έχουμε ένα σύστημα υλικών σημείων με μάζες  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , των οποίων οι συντεταγμένες θεωρούνται γνωστές. Πώς καθορίζονται εν τοιαύτη περιπτώσει οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας, αυτού «του σημαντικότερου σημείου» του συστήματος; Η απάντηση στο ερώτημά μας δίνεται από τον τύπο:

$$x_{kp} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \quad (1)$$

με ανάλογες εκφράσεις για τις άλλες δύο συντεταγμένες  $y_{kp}$  και  $z_{kp}$ . Το γιατί ορίζουμε έτσι το κέντρο μάζας θα αποσαφηνίστεί αργότερα, όταν θα αναλύσουμε τις δυναμικές ιδιότητές του. Προς το παρόν, όμως, ας εξοικειωθούμε με την έκφραση (1) διερευνώντας ορισμένα ζητήματα που συνδέονται μ' αυτήν.

(a) Στην περίπτωση όπου το σύστημά μας αποτελείται από δύο σημειακές μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , το κέντρο μάζας κείται επί της ευθείας που ενώνει τα δύο υλικά σημεία και βρίσκεται πλησιέστερα προς εκείνο το οποίο έχει τη μεγαλύτερη μάζα (Σχήμα 1): ο λόγος των αποστάσε-



Σχήμα 1



ων από το κέντρο μάζας ώς τα δύο υλικά σημεία ισούται με τον αντίστροφο του λόγου των μαζών τους (μπορείτε να το επαληθεύσετε μόνοι σας). Γενικεύοντας την ιδιότητα αυτή για την περίπτωση ενός τυχόντος συστήματος, καθίσταται πρόδηλο ότι το κέντρο μάζας θα βρίσκεται κάπου στην περιοχή του χώρου που καταλαμβάνουν τα σημεία του (πιο συγκεκριμένα, δεν υπάρχει επίπεδο διερχόμενο από το κέντρο μάζας που να αφήνει όλα τα υλικά σημεία του συστήματος προς το ίδιο μέρος του), ενώ η ακριβής θέση του θα εξαρτάται από τη συγκεκριμένη χωρική κατανομή των μαζών.

(β) Όλα τα υλικά σημεία συμμετέχουν στον καθορισμό της θέσης του κέντρου μάζας με «ίσα δικαιώματα». Αν η κατανομή των μαζών παρουσιάζει συμμετρία ως προς κάποιο σημείο, τότε το συγκεκριμένο σημείο θα είναι και το κέντρο μάζας. Για παράδειγμα, το κέντρο μάζας μιας ομογενούς σφαίρας συμπίπτει με το γεωμετρικό της κέντρο (το ίδιο ισχύει και για τον κύλινδρο, τον κύβο, κ.ο.κ.).

(γ) Και ένα ακόμη σχόλιο. Όπως προκύπτει (προσπάθηστε να αποδείξετε μόνοι σας το θεώρημα αυτό), η θέση του κέντρου μάζας παραμένει αμετάβλητη αν ξεχωρίσουμε κάποιο τμήμα του συστήματος και συγκεντρώσουμε όλη τη μάζα του σε ένα συγκεκριμένο σημείο του —το κέντρο μάζας του. Για παράδειγμα, το κέντρο μάζας ενός συρμάτινου τριγώνου συμπίπτει με το κέντρο μάζας του συστήματος που αποτελείται από τρία υλικά σημεία τοποθετημένα στα μέσα των πλευρών του τριγώνου (που, φυσικά, έχουν μάζες ίσες με τις μάζες των αντίστοιχων πλευρών).

Ας περάσουμε τώρα στο κυρίως θέμα μας —στην εξεταση των φυσικών ιδιοτήτων του κέντρου μάζας.

Έστω ότι οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων του συστήματος σε ένα μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$  είναι  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Τότε, από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι η μετατόπιση του κέντρου μάζας δίνεται από την έκφραση:

$$s_{\text{κμ}} = \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2 + \dots + m_n s_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

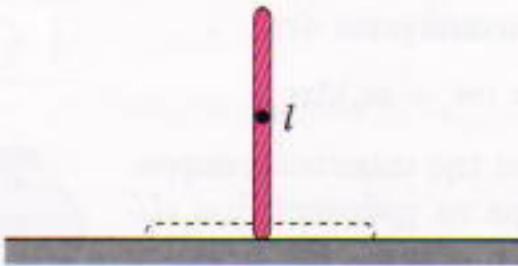
(σας θυμίζω ότι οι προβολές του διανύσματος μετατόπισης στους άξονες του συστήματος αναφοράς ισούνται με τις μεταβολές των αντίστοιχων συντεταγμένων). Αν διαιρέσουμε τη μετατόπιση  $s_{\text{κμ}}$  διά του χρονικού διαστήματος  $\Delta t$ , βρίσκουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας:

$$v_{\text{κμ}} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + \dots + m_n u_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (2)$$

Προσέξτε ποια ποσότητα εμφανίζεται στον αριθμητή: πρόκειται για την ολική ορμή του συστήματος  $P$ . Επομένως, μπορούμε να γράψουμε εκ νέου την εξίσωση (2) με τη μορφή:

$$P = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) v_{\text{κμ}}. \quad (3)$$

Η πρώτη ιδιότητα του κέντρου μάζας είναι λοιπόν η εξής: Αν φανταστούμε πως όλη η μάζα ενός συστήματος



Σχήμα 2

βρίσκεται συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας του, τότε η ορμή αυτού του νοητού υλικού σημείου θα ισούται με την ολική ορμή του συστήματος. Και τι σημαίνει η εν λόγω ιδιότητα; Ξέρουμε, για παράδειγμα, ότι η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται. Έτσι, γνωρίζουμε ότι, αν έχουμε να κάνουμε με ένα απομονωμένο σύστημα, το κέντρο μάζας του εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση διότι η ταχύτητά του  $v_{\text{κμ}}$  παραμένει σταθερή.

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι κρατάμε κατακόρυφη μια λεπτή ομογενή ράβδο μήκους  $l$  με το ένα άκρο της να ακουμπά σε ένα λείο δάπεδο (Σχήμα 2). Κατόπιν την αφήνουμε ελεύθερη, οπότε εκείνη πέφτει πάνω στο δάπεδο. Υπάρχει άραγε κάποιος εύκολος τρόπος να υπολογίσουμε την απόσταση κατά την οποία θα έχει μετατοπιστεί το κάτω άκρο της ράβδου τη στιγμή που εκείνη θα έχει σωριαστεί στο δάπεδο; Βέβαια, η ράβδος από μόνη της δεν αποτελεί κλειστό σύστημα· εφόσον όμως πάνω της δεν ασκούνται παρά μόνο κατακόρυφες δυνάμεις, η οριζόντια συνιστώσα της ορμής της δεν μεταβάλλεται —στην περίπτωση μας, παραμένει μηδενική. Κατά συνέπεια, το κέντρο μάζας δεν μετακινείται στην οριζόντια διεύθυνση —με άλλα λόγια, το κέντρο της ράβδου θα πέσει στο δάπεδο ακριβώς στο σημείο όπου αρχικά βρισκόταν το κάτω άκρο της, πράγμα που σημαίνει ότι τη στιγμή εκείνη το κάτω άκρο θα έχει μετατοπιστεί κατά απόσταση ίση με  $l/2$ .

Ας περάσουμε τώρα και σε μερικές άλλες ιδιότητες του κέντρου μάζας. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο υλικά σημεία με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ . Έστω ότι το εν λόγω σύστημα δεν είναι απομονωμένο —δεχόμαστε δηλαδή ότι στα δύο υλικά σημεία του συστήματος ασκούνται τόσο εξωτερικές όσο και εξωτερικές δυνάμεις. Ξεκινώντας από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, γράφουμε τις εξισώσεις για τη μεταβολή της ορμής του κάθε υλικού σημείου σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ :

$$m_1 \Delta u_1 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) \Delta t,$$

$$m_2 \Delta u_2 = (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) \Delta t,$$

όπου με  $\mathbf{F}_1$  και  $\mathbf{F}_2$  συμβολίζουμε τις εξωτερικές δυνάμεις, ενώ με  $\mathbf{F}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, i \neq j$ ) δηλώνουμε τη δύναμη που ασκεί το υλικό σημείο  $j$  στο υλικό σημείο  $i$ .

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, ισχύει  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , οπότε η μεταβολή της ολικής ορμής του συστήματος θα ισούται με:

$$\Delta P = m_1 \Delta u_1 + m_2 \Delta u_2 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \Delta t,$$

αποτέλεσμα το οποίο σημαίνει πως η μεταβολή της ορμής του συστήματος οφείλεται αποκλειστικά στη δράση των εξωτερικών δυνάμεων. Από την άλλη πλευρά, η ε-

Ξίσωση (3) συνεπάγεται ότι

$$\Delta P = (m_1 + m_2)\Delta u_{\text{κρ.}}$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας έκφρασης, μπορούμε να γράψουμε μια εξίσωση για την κίνηση του κέντρου μάζας ανάλογη με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$(m_1 + m_2)\Delta u_{\text{κρ.}} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)\Delta t,$$

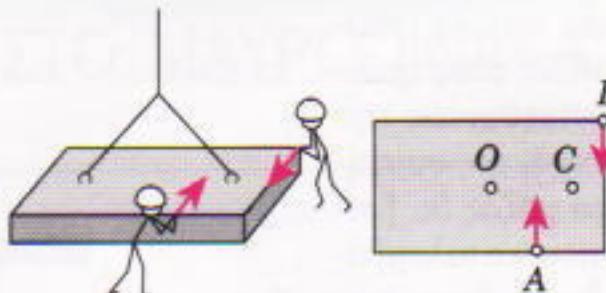
η οποία μπορεί να προσλάβει και την πιο οικεία μορφή

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{U}_{\text{κρ.}}. \quad (4)$$

Πρόκειται για το σημαντικότερο από τα αποτελέσματα που εξαγάγαμε στο παρόν άρθρο: Το κέντρο μάζας κινείται όμοια με ένα υλικό σημείο όπου είναι συγκεντρωμένη όλη η μάζα του συστήματος και στο οποίο ασκούνται όλες οι εξωτερικές δυνάμεις. Προσέξτε: όχι όλες οι δυνάμεις, μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις. Οι εσωτερικές δυνάμεις δεν επηρεάζουν καθόλου την κίνηση του κέντρου μάζας. Έτσι εξηγείται γιατί σε πολλές περιπτώσεις η κίνηση του κέντρου μάζας αποδεικνύεται τόσο απλή.

Η εν λόγω ιδιότητα του κέντρου μάζας βρίσκεται ποικίλες εφαρμογές. Για παράδειγμα, πιθανόν να κατανοείτε τώρα γιατί το κέντρο μάζας της ράβδου που βάλλεται υπό γωνία ως προς το οριζόντιο επίπεδο διαγράφει —ακριβώς όπως και μια πέτρα— παραβολική τροχιά. Αν αγνοήσουμε τη δύναμη τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ ράβδου και αέρα, στο σώμα δεν ασκείται καμία άλλη εξωτερική δύναμη πλην του βάρους του  $m g$ , και έτσι τόσο η επιτάχυνση της ράβδου δύσκο και εκείνη της πέτρας ισούται με  $g$ , ανεξαρτήτως της περιστροφής της πρώτης.

Ας δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της ιδιότητας. Ένας οικοδομικός γερανός τοποθετεί μια βαριά πλάκα στη θέση που προβλέπει το σχέδιο ενός ανεγειρόμενου κτηρίου. Για να δώσουν στην πλάκα τον κατάλληλο προσανατολισμό, δύο εργάτες τη σπρώχνουν ασκώντας ίσες (κατά μέτρο) δυνάμεις στα σημεία της  $A$  και  $B$  (Σχήμα 3). Γύρω από ποιο σημείο θα αρχίσει να περιστρέφεται η πλάκα; Στοιχηματίζουμε ότι πολλοί από εσάς θα απαντήσουν αμέ-



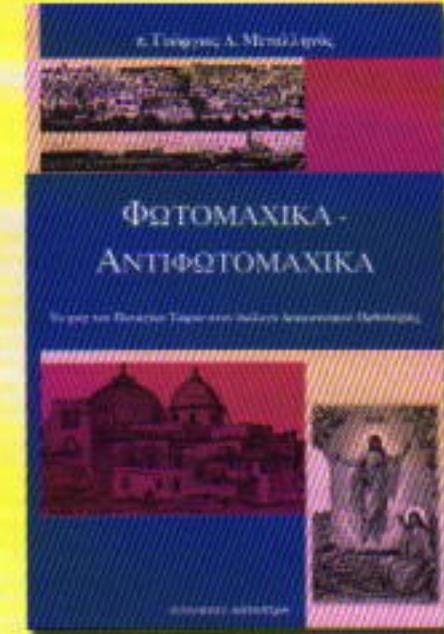
Σχήμα 3

σως «Μα, φυσικά, γύρω από το σημείο  $C$ , το οποίο βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα  $A$  και  $B$ . Μη βιάζεστε τόσο! Η σωστή απάντηση είναι γύρω από το σημείο  $O$ , το κέντρο μάζας της πλάκας. Κοιτάξτε την εξίσωση (4). Εφόσον το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με μηδέν, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας: συνεπώς, αυτό είναι το σημείο που θα παραμείνει ακίνητο.

Εν κατακλειδί, θα αναφέρω ακόμη μια «ευκολία» που μας παρέχει το κέντρο μάζας. Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς με τη βοήθεια της εξίσωσης (3), η ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας (οι άξονες του εν λόγω συστήματος έχουν ως αρχή το κέντρο μάζας και κατά την κίνηση παραμένουν παράλληλοι προς εαυτούς) ισούται με μηδέν. Σε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς, είναι φυσικό η κίνηση να φαίνεται απλούστερη, καθότι στην προκειμένη περίπτωση το σύστημα ως όλον βρίσκεται σε ηρεμία. Η μελέτη της κίνησης στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας ενδείκνυται ιδιαίτερα εφόσον το σύστημα που μας απασχολεί είναι απομονωμένο. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας μηδενίζεται (βλ. εξίσωση (4)), οπότε το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι αδρανειακό. Για παράδειγμα, η μετωπική κρούση δύο ελαστικών σφαιρών σε ένα τέτοιο σύστημα φαίνεται τόσο απλή ώστε μπορούμε να μαντέψουμε την απάντηση αμέσως: μετά την κρούση, οι δύο σφαίρες θα απομακρυνθούν η μία από την άλλη σε αντίθετες κατευθύνσεις και με τις ίδιες ακριβώς ταχύτητες που είχαν και προτού συγκρουστούν. Μηπως, αλήθεια, μπορείτε να εξηγήσετε το γιατί;

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

π. Γεωργίου, Α. Μεταλληνός



π. ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΜΕΤΑΛΛΗΝΟΣ  
Φωτομαχικά - Αντιφωτομαχικά

Μια χαρακτηριστική στιγμή του Ελληνικού Διαφωτισμού φωτίζεται με το βιβλίο αυτό, που επικεντρώνεται στη διαπάλη του Ελληνικού Διαφωτισμού, στο πρόσωπο του πατριάρχη του Αδαμαντίου Κοραή, με τα ρωμαϊκά Πατριαρχεία της Ανατολής (Κωνσταντινουπόλεως και Ιεροσολύμων). Η ανακάλυψη τεσσάρων έργων που συζητούν το πρόβλημα του φωτός του Παναγίου Τάφου κατά το Μέγα Σάββατο, με άμεση ή έμμεση αναφορά στο Διάλογο του Κοραή «Περί του εν Ιεροσολύμοις Αγίου Φωτός».

προσφέρει τη δυνατότητα διερεύνησης της σύγκρουσης του κόσμου της Ελληνορθοδοξίας με τα δυτικά φώτα, που από τα τέλη του 18ου αιώνα εισβάλλουν στην Ορθόδοξη Ανατολή, ανατρέποντας τις υπάρχουσες σχέσεις και ισορροπίες. Τα κείμενα εκδίδονται κριτικά και σχολιάζονται, ενώ στο εκτενές πρώτο μέρος του βιβλίου εκδιπλώνονται οι ιστορικές και θεολογικές παράμετροι της έριδας που αρχίζει ως θεολογικό πρόβλημα, για να υποστασιώσει τελικά τις εθνικές διαστάσεις της, σε μια κρισιμότατη φάση της πορείας του Νέου Ελληνισμού και της σχέσης του με την Ορθόδοξη Παράδοση. Ο π. Γ.Δ. Μεταλληνός, δρ. θεολογίας και δρ. φιλοσοφίας, είναι καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.

448 σελ., Α/Μ, 14 x 21 εκ.,  
5.500 δρχ.

ΙΣΤΟΡΗΤΗΣ / ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Ο χειμώνας υπό τους πόδας

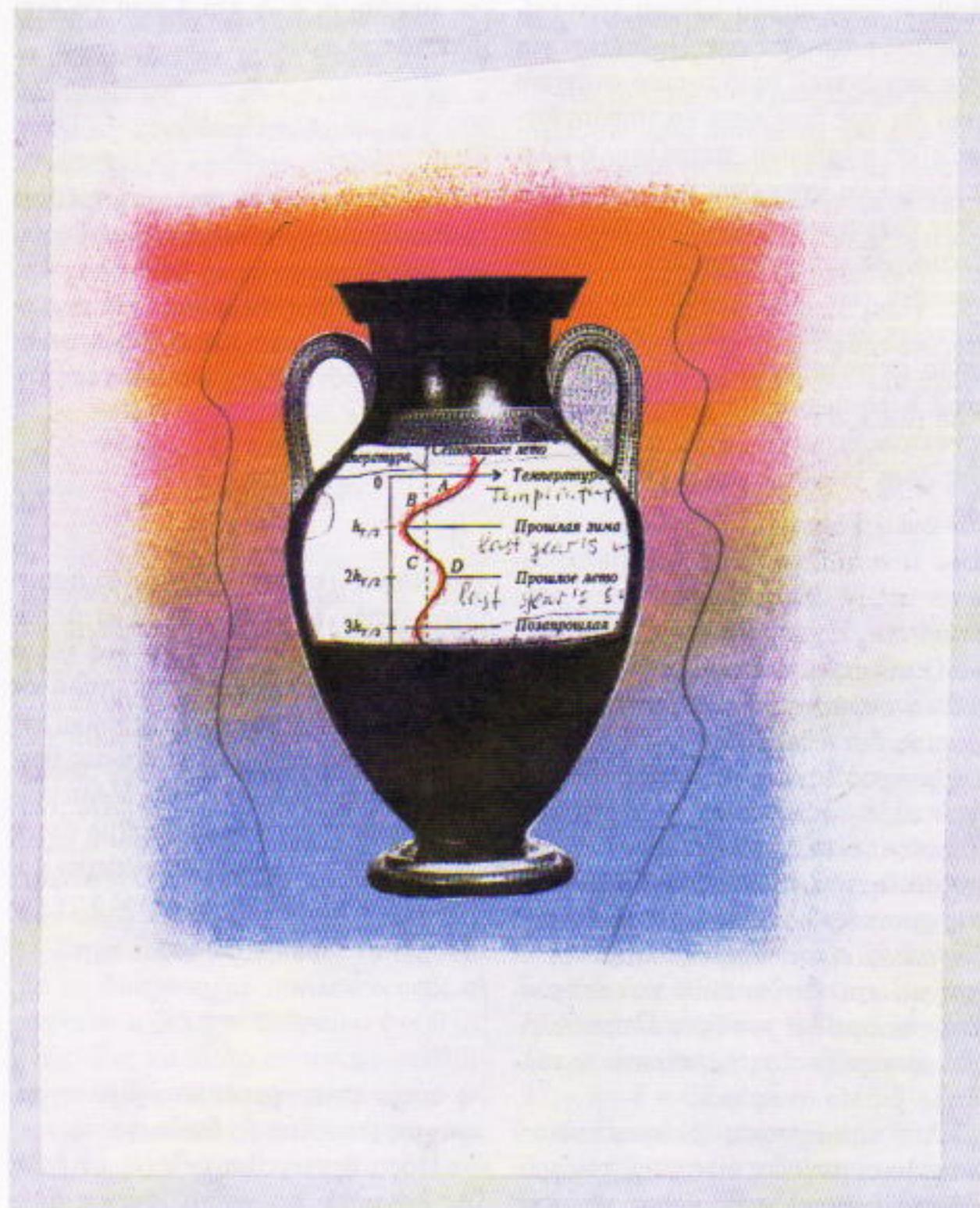
«Μεγάλα κεραμικά δοχεία για την αποθήκευση τροφίμων θάβονταν σε βάθος όσο το ύψος ανθρώπου για να διατηρούνται δροσερά (όπως αποδεικνύουν τα ευρήματα της αρχαιολογικής σκαπάνης στην Κνωσό, την Τροία και την Τίρυνθα).»

—Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαιότητας

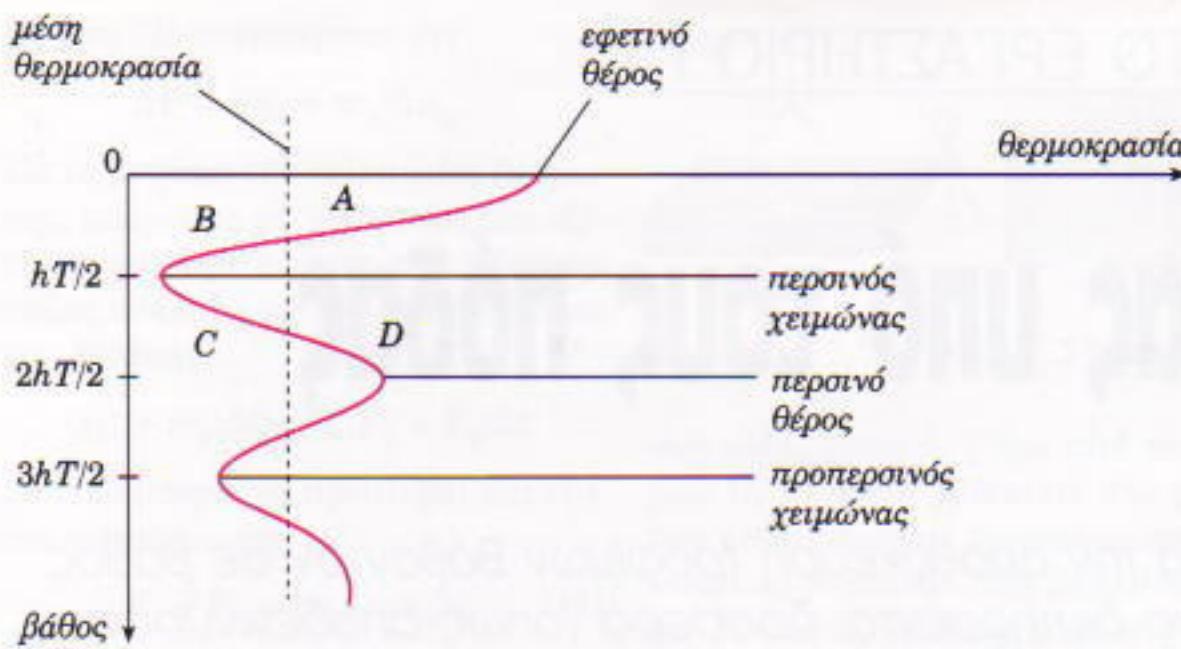
A. Stasenko

**Ο**ΜΕΓΑΣ ΛΟΥΚΡΗΤΙΟΣ (98-55 π.Χ.) έδινε μια περίεργη εξήγηση για την ημιετήσια περιοδικότητα που χαρακτηρίζει τις διακυμάνσεις της θερμοκρασίας σε ορισμένο βάθος κάτω από την επιφάνεια της Γης: «Ας εξετάσουμε τώρα γιατί συμβαίνει το πηγαδίσιο νερό να είναι θερμότερο το χειμώνα και ψυχρότερο το θέρος. Αυτό οφείλεται στο ότι κατά το θέρος η γη χαλαρώνει λόγω της ζέστης, και τα όσα σωματίδια ενδεχομένως περιέχει διασκορπίζονται στον αέρα από τη δική της θερμότητα. [...] Αντιθέτως, όταν δὲ η γη συμπέζεται από το ψύχος και συστέλλεται και ουσιαστικά συσφίγγεται, είναι φυσικό κατά τη συστολή της να αποβάλλει την όποια θερμότητα περιέχει στα πηγάδια.»<sup>1</sup>

Έκτοτε, η φυσική ανέπτυξε έννοιες αυστηρότερες από τα «σωματίδια της θερμότητας» και από την «πίεση του ψύχους». Οι φυσικοί προτιμούν να εκφράζουν τις σκέψεις τους μιλώντας για την πυκνότητα  $\rho$  και την ειδική θερμότητα  $c$ . Τούτες οι έννοιες θα μας φανούν χρήσιμες στο παρόν άρθρο. Υπάρχει και ένα ακόμη φυσικό μέγεθος το οποίο θα



1. Lucretius, *The Nature of the Universe* (Η φύση του Σύμπαντος), Penguin Books, Βαλτιμόρη 1962.



Σχήμα 1

μεταχειριστούμε: η θερμική αγωγιμότητα. Ας εξετάσουμε λοιπόν πως επισταμένως τη χρήσιμη αυτή έννοια.

Έστω, λοιπόν, ότι θέλετε να ξέρετε πόση θερμότητα εκλύεται ανά δευτερόλεπτο στο περιβάλλον μέσω κάθε τετραγωνικού μέτρου των τοίχων της κατοικίας σας. Πρόκειται για ένα σημαντικό αριθμητικό στοιχείο που θα σας βοηθήσει να υπολογίσετε πόσο κάρβουνο, πετρέλαιο ή ηλεκτρισμό θα χρειαστεί να καταναλώσετε για να διατηρήσετε το σπίτι σας ζεστό. Ας υποθέσουμε ότι οι θερμοκρασίες των εσωτερικών και των εξωτερικών επιφανειών των τοίχων είναι αντιστοίχως  $T_{\text{so}}$  και  $T_{\text{el}}$ , και ότι  $h$  το πάχος των τοίχων. Η πυκνότητα θερμικής ροής  $q$  (σε μονάδες  $\text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ) δίνεται από την έκφραση

$$q = \lambda \frac{T_{\text{so}} - T_{\text{el}}}{h}. \quad (1)$$

Ο τύπος αυτός εισάγει το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας  $\lambda$ , ο οποίος δεν εξαρτάται ούτε από τις θερμοκρασίες στις δύο όψεις των τοίχων αλλά ούτε και από το πάχος των τελευταίων. Ο εν λόγω συντελεστής χαρακτηρίζει αποκλειστικά και μόνο τις φυσικές ιδιότητες του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένοι οι τοίχοι, και έτσι ο κάθε κατασκευαστής μπορεί να τον βρει όποτε θελήσει ανατρέχοντας σε κάποιο κατάλληλο βιβλίο αναφοράς.

Από την εξίσωση (1) προκύπτουν εύκολα οι μονάδες στις οποίες εκφράζεται ο συντελεστής θερμικής αγω-

γιμότητας: Βρίσκουμε αμέσως ότι  $[\lambda] = \text{J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$ . Το σημαντικό έγκειται στο ότι η τελευταία έκφραση εμπεριέχει και τη μονάδα του χρόνου —το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα συνδυασμό από τα μεγέθη  $\rho$ ,  $c$ ,  $h$  και  $\lambda$  που να έχει διαστάσεις χρόνου:

$$\tau \sim \frac{\rho c}{\lambda} h^2.$$

Σε τι μπορεί να μας χρησιμεύσει τούτη η τιμή; Ε, λοιπόν, μας βοηθά να προσδιορίσουμε το βάθος  $h_{T/2}$  στο οποίο έφτασε η θερμοκρασία που επικρατούσε στην επιφάνεια πριν από μισό χρόνο. Χρησιμοποιώντας τη, βρίσκουμε

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{\lambda T}{\rho c}}. \quad (2)$$

Φυσικά, υπάρχουν πολλές ποικιλίες «γης» ή «εδάφους». Για παράδειγμα, ο πηλός, το αμμώδες χώμα και ο γρανίτης διαφέρουν πολύ σε διάφορα τις πυκνότητές τους, τις ειδικές τους θερμότητες και τις θερμικές τους αγωγιμότητες. Μολαταύτα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τιμή  $2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  αντιπροσωπεύει κάποιου είδους «μέση» τιμή για την έκφραση

$$a = \frac{\lambda}{\rho c},$$

η οποία αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως συντελεστής διάδοσης.

Πόσα δευτερόλεπτα έχει το έτος; Ας κάνουμε τον απαιτούμενο αριθ-

μητικό υπολογισμό:

$$T = (3.600 \text{ s/h}) \cdot (24 \text{ h/ημ.}) \cdot (365 \text{ ημ.}) \\ \equiv 3 \cdot 10^7 \text{ s.}$$

Εισάγοντας την παραπάνω αριθμητική τιμή στον τύπο για το  $h_{T/2}$ , παίρνουμε

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{aT}{2}} =$$

$$\sqrt{(2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}) \cdot (3 \cdot 10^7 \text{ s})} \sim 2 \text{ m.}$$

Όπως αντιλαμβάνεστε βέβαια, το αποτέλεσμά μας δεν αντιπροσωπεύει παρά μια χονδρική εκτίμηση τάξεως μεγέθους. Εντούτοις, ακόμη και αυτή η προσέγγιση μας επιτρέπει να εξηγήσουμε γιατί οι αρχαίοι Έλληνες έθαβαν τους αμφορείς τους σε βάθος μεγαλύτερο από το ύψος ενός ανθρώπου. Οι αρχαίοι Έλληνες εφάρμοζαν τούτη την πρακτική επειδή απλούστατα τόσο είναι το βάθος στο οποίο φτάνει το θερμικό κύμα του προγούμενου χειμώνα κατά το χρόνο που το έδαφος θερμαίνεται από τον θερινό ήλιο.

Στο Σχήμα 1 αποτυπώνεται ποιοτικά η «στιγμιαία» κατανομή της θερμοκρασίας σε συνάρτηση με το βάθος. Σε ποιο λόγο πρέπει να αποδώσουμε την απόσβεση των ταλαντώσεων που διαπιστώνεται στα βαθύτερα στρώματα του εδάφους; Οφειλεται στο ίδιο και πάλι φαινόμενο της θερμικής αγωγιμότητας που περιγράφαμε νωρίτερα. Το φαινόμενο αυτό επιτρέπει, από τη μια πλευρά, να διαδοθεί η θερμική ενέργεια στο έδαφος: από την άλλη, δύως, ευνοεί τη διάχυση και συντελεί ώστε να εξομαλύνουν οι κορυφές και τα βαθουλώματα της θερμοκρασιακής καμπύλης. Πιο συγκεκριμένα, μάλιστα, η εξίσωση (1) αποκαλύπτει ότι η θερμική ενέργεια ρέει προς τα κάτω στην «πλαγιά»  $AB$ , ενώ, αντίθετα, κατευθύνεται προς τα πάνω στην «πλαγιά»  $DC$ .

Θα μπορούσαμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας παρόμοιας στιγμιαίας κατανομής της θερμοκρασίας και για τα ηχητικά κύματα στον αέρα. Κατά καλή μας τύχη, η θερμι-

Η συνέχεια στη σελ. 56

# Εξερεύνηση υπόλοιπων και ισοτιμών

«Εξ ισοτιμίας διαλέγεσθαι πνί.»

—Λουκιανού Αλιεύς, 34

A. Yegorov

**Σ**ΤΙΣ 3 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000, ήθελα να βρω ποια ημέρα της εβδομάδας θα ήταν η 20ή Δεκεμβρίου 2001. Δεν υπήρχε πρόχειρο κάποιο ημερολόγιο, και έτσι ήμουν υποχρεωμένος να κάνω μερικούς υπολογισμούς. Γνώριζα ότι η 3η Σεπτεμβρίου ήταν Κυριακή. Από τις 3 Σεπτεμβρίου του 2000 έως και τις 20 Δεκεμβρίου του 2001 μεσολαβούν  $27 + 31 + 30 + 20 + 365 = 473$  ημέρες —δηλαδή 67 εβδομάδες και 4 ημέρες ( $473 = 67 \cdot 7 + 4$ ). Επομένως, στις 20 Δεκεμβρίου του 2001 θα έχουμε Πέμπτη.

Κάποιος μαθητής ύψωσε στο τετράγωνο έναν πολυψήφιο αριθμό και βρήκε 46.991.075. Ο δάσκαλος κοίταξε το αποτέλεσμα και είπε αμέσως ότι η απάντηση είναι λάθος. Πώς το γνώριζε;

**Άσκηση 1.** Μπορεί να λήγει στα ψηφία 75 το τετράγωνο ενός αριθμού;

Στη συνέχεια του άρθρου θα διαπιστώσουμε ότι η λύση αυτού του απλού προβλήματος, και πολλών άλλων ακόμη, βασίζεται στις ιδιότητες της διαίρεσης. Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας την έννοια της διαίρεσης με υπόλοιπο.

## Διαίρεση με υπόλοιπο

**Ορισμός.** Η διαίρεση ενός φυσικού

αριθμού  $a$  διά ενός φυσικού αριθμού  $b$  ισοδύναμεί με το να γράφουμε τον αριθμό  $a$  ως  $a = qb + r$ , όπου  $q$  και  $r$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και  $r < b$ . Ο αριθμός  $q$  καλείται πηλίκο και ο  $r$  υπόλοιπο της διαίρεσης του  $a$  διά  $b$ .

Στην πράξη, η διαίρεση με υπόλοιπο μπορεί να γίνει με τη χρήση του αλγορίθμου που ονομάζεται μακρά διαίρεση. Για παράδειγμα,

$$\begin{array}{r} 179 \\ -14 \\ \hline 39 \\ -28 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \hline 12 \end{array}$$

Επομένως,  $179 = 12 \cdot 14 + 11$ . Εδώ, το πηλίκο είναι 12 και το υπόλοιπο 11.

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός δεν απαιτεί το  $a$  να είναι μεγαλύτερο του  $b$ . Για παράδειγμα, μπορούμε να διαιρέσουμε το 5 διά του 7, γράφοντας  $5 = 0 \cdot 7 + 5$ . Γενικώς, αν  $a < b$ , τότε  $a = 0 \cdot b + a$ . Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση,  $q = 0$  και  $r = a$ .

**Σημείωση.** Μπορούμε να ορίσουμε τη διαίρεση με υπόλοιπο ενός ακέραιου  $a$  διά του ακέραιου  $b \neq 0$  ως εξής: Για να διαιρέσουμε με υπόλοιπο το  $a$  διά του  $b$ , γράφουμε το  $a$  ως  $a = qb + r$ , όπου  $q$  είναι ακέραιος και  $0 \leq r < |b|$ . Για παράδειγμα, εάν  $a = -15$  και  $b = 7$ , έχουμε  $-15 = (-3) \cdot 7$

+ 6. Αν  $a = 15$  και  $b = -7$ , έχουμε  $15 = (-2) \cdot (-7) + 1$ .

Αν το υπόλοιπο ισούται με μηδέν, λέμε ότι το  $a$  διαιρείται διά του  $b$ .

Το επόμενο απλό γεγονός είναι εξαιρετικά σημαντικό: Αν  $a$  και  $b$  διαιρούνται διά του  $c$ , τότε ο αριθμός  $ka + lb$  διαιρείται διά του  $c$ , για οποιουδήποτε ακέραιους  $k$  και  $l$ .

**Πρόβλημα 1.** Βρείτε έναν ακέραιο  $d > 1$ , τέτοιον ώστε να υπάρχουν αριθμοί της μορφής  $7n + 1$  και  $8n + 3$  που να διαιρούνται διά  $d$ .

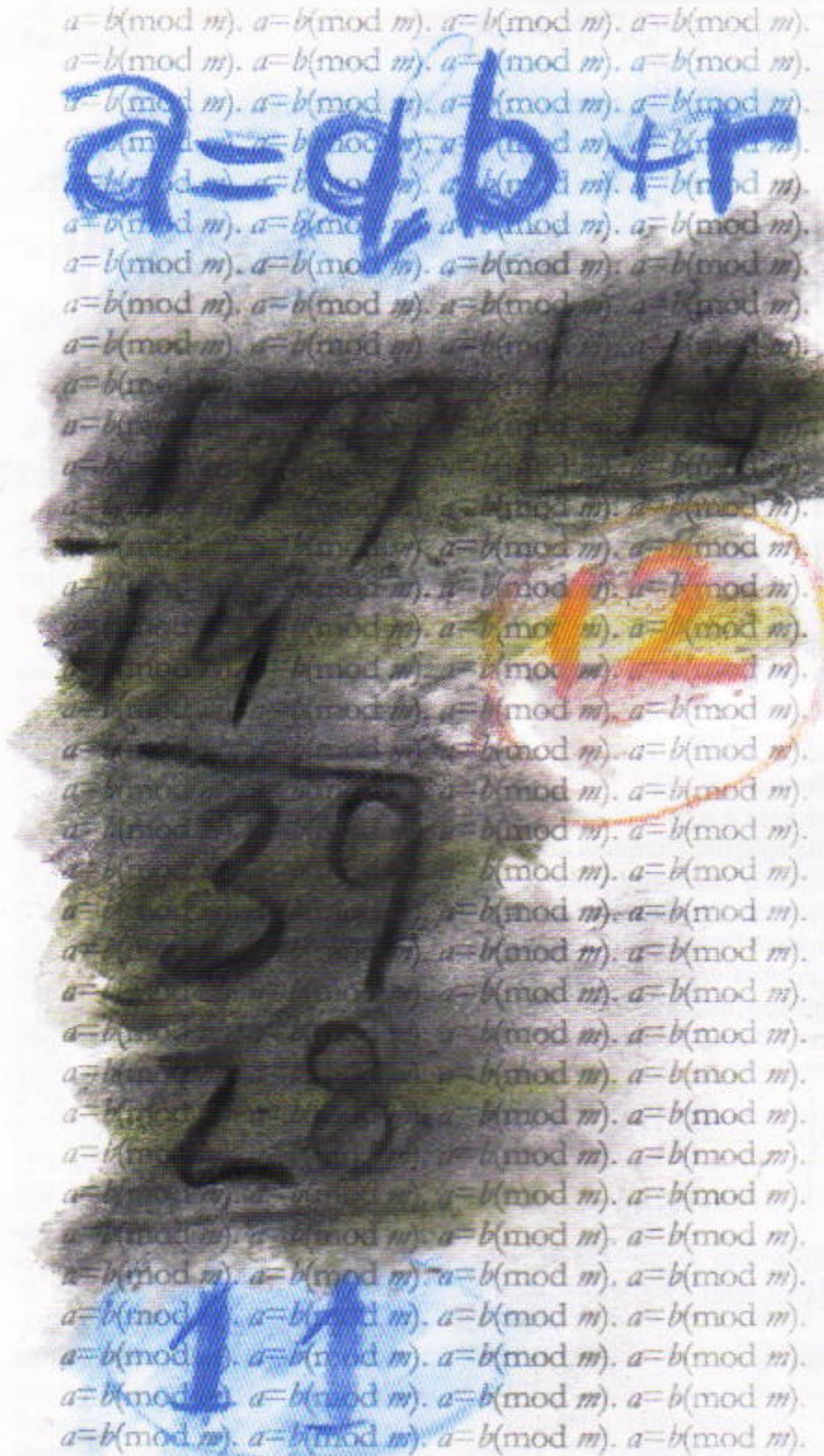
**Λύση.** Αφού  $7(8n + 3) - 8(7n + 1) = 13$ , ο αριθμός 13 διαιρείται διά του  $d$ . Αφού  $d \neq 1$  και το 13 είναι πρώτος, έχουμε ότι  $d = 13$ . Μένει να ελέγξουμε αν υπάρχουν  $n$  τέτοια ώστε οι  $7n + 1$ ,  $8n + 3$  να είναι πολλαπλάσια του 13. Ένας τέτοιος είναι ο  $n = 11$ .

## Άσκησεις

2. Βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των εξής διαιρέσεων: (i) 1931 διά 17, (ii) -295 διά 31, (iii) -1005 διά -98.

3. Αν ο αριθμός  $17x + 3y$  διαιρείται διά του 61, αποδείξτε ότι το  $8x + 5y$  διαιρείται επίσης διά του 61 (τα  $x$  και  $y$  είναι ακέραιοι). (Υπόδειξη:  $5 \cdot 17 - 3 \cdot 8 = 61$ .)

4. Προσδιορίστε τα υπόλοιπα της διαίρεσης των (i)  $n$  διά του  $n - 1$  και διά του  $n - 2$ , (ii)  $n^2 + n + 1$  διά του



$n + 1$  και διά του  $n + 2$ , (iii)  $n^4 + 1$  διά του  $n + 3$  (όπου  $n \geq 180$ ).

5. Βρείτε όλους τους ακέραιους  $n$  για τους οποίους οι επόμενοι αριθμοί είναι ακέραιοι: (i)  $(n^2 + 1)/(n - 1)$ , (ii)  $(n^5 + 3)/(n^2 + 1)$ .

## Ισοτιμίες

Από το σημείο αυτό και μετά θα

υποθέτουμε ότι όλοι οι αριθμοί στους οποίους αναφέρομαστε είναι ακέραιοι. Ας δούμε ένα ακόμη πρόβλημα.

**Πρόβλημα 2.** Προσδιορίστε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού  $2^{999}$ .

**Λύση.** Ας αρχίσουμε να γράφουμε την ακολουθία των δυνάμεων του 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

Διαπιστώνουμε ότι τα τελευταία ψηφία των όρων αυτής της ακολουθίας επαναλαμβάνονται έχοντας περίοδο μήκους 4. Επομένως, το τελευταίο ψηφίο του αριθμού  $2^n$  εξαρτάται μόνο από το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $n$  διά του 4. Αφού  $999 = 996 + 3 = 4 \cdot 249 + 3$ , η απάντηση είναι 8.

Στο παραπάνω παράδειγμα, το σύνολο των εκθετών των δυνάμεων του 2 κατανέμεται σε τέσσερις κλάσεις, οι οποίες αποτελούνται από τους αριθμούς  $n$  της μορφής

$$4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3.$$

Γενικώς, για κάθε φυσικό αριθμό  $m$ , όλοι οι ακέραιοι (και όχι μόνο οι θετικοί) μπορούν να κατανεμηθούν σε  $m$  κλάσεις, καθεμία από τις οποίες περιέχει όλους τους αριθμούς που δίνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενο διά του  $m$ . Οι κλάσεις αυτές μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

(0) οι αριθμοί  $a$  της μορφής  
 $a = km$ ,

(1) οι αριθμοί  $a$  της μορφής  
 $a = km + 1$ ,

(2) οι αριθμοί  $a$  της μορφής  
 $a = km + 2$ ,

...  
 $(m - 1)$  οι αριθμοί  $a$  της μορφής  
 $a = km + m - 1$ .

Είναι προφανές ότι κάθε αριθμός ανήκει σε μία από αυτές τις κλάσεις. Η διαφορά μεταξύ δύο αριθμών που ανήκουν στην ίδια κλάση διαιρείται διά του  $m$ , ενώ η διαφορά δύο αριθμών που είναι μέλη διαφορετικών κλάσεων δεν διαιρείται διά του  $m$ .

**Ορισμός.** Αν η διαφορά των ακέραιων  $a$  και  $b$  διαιρείται διά του ακέραιου  $m$ , τότε οι αριθμοί  $a$  και  $b$  καλούνται *ισότιμοι modulo m*.

Η ισότιμια modulo  $m$  γράφεται ως

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Οι αριθμοί  $a$  και  $b$  είναι ισότιμοι modulo  $m$  αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια κλάση —δηλαδή, όταν δίνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενο διά  $m$ . Με άλλα λόγια,  $a \equiv b \pmod{m}$  σημαίνει ότι  $a = b + km$ , όπου  $k$  ακέραιος. Για παράδειγμα,  $27 \equiv 7 \pmod{10}$ ,  $78 \equiv 6 \pmod{24}$ ,  $6 \equiv 0 \pmod{3}$  και  $25 \equiv -4 \pmod{29}$ .

### Ασκήσεις

6. Για κάθε ακέραιο  $a$ , αποδείξτε ότι (i)  $a^3 \equiv a \pmod{6}$ , (ii)  $a^5 \equiv a \pmod{5}$ .

7. Αποδείξτε ότι ο αριθμός

$$\frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!}$$

είναι ακέραιος.

8. Αποδείξτε ότι  $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{5}$  για (i) modulo 5, (ii) modulo 13, (iii) modulo 211.

9. Αποδείξτε ότι το  $11^{10} - 1$  διαιρείται διά του 100.

10. Έστω  $S(N)$  το άθροισμα όλων των ψηφίων του αριθμού  $N$ . Αποδείξτε ότι  $N \equiv S(N) \pmod{3}$  καθώς και modulo 9.

11. Έστω  $S(A) = S(5A)$ . Αποδείξτε ότι  $A \equiv 0 \pmod{9}$ .

12. Η παράσταση ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα περιλαμβάνει 1991 μονάδες και ένα πλήθος μηδενικών. Μπορεί να είναι αυτός ο αριθμός τέλειο τετράγωνο;

13. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι  $10 \equiv -1 \pmod{11}$  για να αποδείξετε το εξής κριτήριο διαιρετότητας διά του 11:

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv 0 \pmod{11}$$

μόνο αν το  $(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0$  διαιρείται διά του 11.

### Ιδιότητες ισοτιμιών

Οι ιδιότητες των ισοτιμιών είναι όμοιες με τις ιδιότητες των ισοτήτων.

(1) Αν  $a \equiv b \pmod{m}$  και  $b \equiv c \pmod{m}$ , τότε  $a \equiv c \pmod{m}$ .

Αν  $a \equiv b \pmod{m}$  και  $c \equiv d \pmod{m}$ , τότε

$$(2) a + c \equiv b + d \pmod{m},$$

$$(3) a - c \equiv b - d \pmod{m},$$

$$(4) ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Επομένως, οι ισοτιμίες, όπως ακριβώς και οι ισότητες, μπορούν να προστεθούν, να αφαιρεθούν και να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους.

Εδώ θα αποδείξουμε, ενδεικτικά, την ιδιότητα 4. Αφού  $a \equiv b$  και  $c \equiv d$ , τότε τα  $a - b$  και  $c - d$  διαιρούνται διά  $m$ . Από την ισότητα  $ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$  έπειται ότι και το  $ac - bd$  διαιρείται διά  $m$ , επομένως,

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

**Άσκηση 14.** Αποδείξτε τις ιδιότητες (1)-(3).

Έστω  $a \equiv b \pmod{m}$ . Από τις ιδιότητες (1)-(4) έπειται ότι, για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ ,

$$(5) a^k \equiv b^k \pmod{m}.$$

Επίσης, μερικές φορές μπορούμε να διαιρέσουμε ισοτιμίες με έναν παράγοντα που είναι κοινός στο δεξιό και το αριστερό τους μέλος.

(6) Αν  $ac \equiv bc \pmod{m}$  και οι αριθμοί  $c$  και  $m$  είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

(7) Αν  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $k$  ακέραιος και  $a = ka_1$ ,  $b = kb_1$  και  $m = km_1$ , τότε

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}.$$

Με άλλα λόγια, αν διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ισοτιμίας και το modulo με έναν κοινό τους διαιρέτη, η ισοτιμία διατηρείται.

Ας αποδείξουμε την ιδιότητα (6). Ο αριθμός  $c(a - b)$  διαιρείται διά  $m$ . Αφού τα  $c, m$  είναι πρώτα μεταξύ τους, το  $a - b$  διαιρείται διά  $m$ , οπότε

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

**Άσκηση 15.** Αποδείξτε την ιδιότητα (7).

Από αυτές τις ιδιότητες έπειται ότι το υπόλοιπο της διαιρεσης μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει τους ακεραίους  $a, b, c, \dots$ ,  $z$  διά ενός αριθμού  $m$  δεν μεταβάλλεται όταν αντικαταστήσουμε αυτούς τους ακεραίους με τα υπόλοιπα της διαιρεσής τους διά  $m$ .

**Πρόβλημα 3.** Βρείτε το υπόλοιπο της διαιρεσης διά 3 του αριθμού

$$N = (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)\dots \dots (1000^2 + 1).$$

**Λύση.** Από την προηγούμενη παρατήρηση έπειται ότι

$$\begin{aligned} N &\equiv (1^2 + 1)^{334} \cdot (2^2 + 1)^{333} \cdot (3^2 + 1)^{333} \\ &\equiv 2^{334} \cdot 2^{333} \cdot 1^{333} \equiv 2^{667} \equiv 2 \cdot (2^2)^{333} \\ &\equiv 2 \cdot 1^{333} \equiv 2. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 4.** Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς  $n$  για τους οποίους το  $8n + 3$  διαιρείται διά 13 (βλ. Πρόβλημα 1).

**Λύση.** Βάσει των ιδιοτήτων των

ισοτιμιών, μπορούμε να γράψουμε την εξής σειρά σχέσεων:

Έστω  $8n + 3 \equiv 0 \pmod{13}$ . Τότε

$$8n \equiv -3 \pmod{13},$$

$$8 \times 8n \equiv -24 \pmod{13},$$

$$64n \equiv -n \equiv -24 \equiv -11 \pmod{13}.$$

Επομένως,  $n \equiv 11 \pmod{13}$ . Τελικώς, το  $8n + 3$  διαιρείται διά του 13 αν και μόνο αν  $n = 13k + 11$ .

### Άσκησης

16. Βρείτε τα υπόλοιπα της διαιρεσης (i) του  $2^{1991} + 1$  διά 17, (ii) του  $(3^{30} + 11)^{55}$  διά 13.

17. Αποδείξτε ότι (i) το  $2^{50} + 1$  διαιρείται διά του 125, (ii) το  $2^{48} - 1$  διαιρείται διά του 105, (iii) το  $2^{3^n} + 1$  διαιρείται διά του  $3^{n+1}$  αλλά δεν διαιρείται διά του  $3^{n+2}$ .

18. Βρείτε όλους τους πρώτους  $p$  για τους οποίους ο αριθμός  $20p^2 + 1$  είναι πρώτος.

19. Αποδείξτε ότι (i) το  $1^{1991} + 2^{1991} + \dots + 30^{1991}$  διαιρείται διά του 31, (ii) το  $1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m$  διαιρείται διά του  $n$ , για κάθε περιττό  $m$  και  $n$ .

20. Βρείτε όλους τους φυσικούς  $n$  για τους οποίους ο αριθμός  $20^n + 16^n - 3^n - 1$  διαιρείται διά 323. (Υπόδειξη:  $323 = 17 \cdot 19$ )

21. Αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , ο  $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$  διαιρείται διά του 19.

22. Βρείτε όλα τα  $n$  για τα οποία το κλάσμα

$$\frac{15n+2}{14n+3}$$

δεν είναι ανάγωγο.

## Το κινεζικό θεώρημα

### υποδοίπων

Θεωρούμε τους  $m$  όρους της αριθμητικής προόδου

$$a, a+d, \dots, a+(m-1)d, \quad (*)$$

όπου ο  $a$  είναι ακέραιος και ο  $d$  και  $m$  πρώτοι μεταξύ τους. Το επόμενο θεώρημα συχνά είναι χρήσιμο.

**Θεώρημα 1.** Υπάρχει ακριβώς ένας όρος της προόδου  $(*)$  ο οποίος διαιρείται διά του  $m$ .

**Απόδειξη.** Η διαφορά μεταξύ του  $k$ -οστού και του  $l$ -οστού όρου της  $(*)$ , η οποία ισούται με  $d(k-l)$ , δεν διαιρείται διά του  $m$ . Πράγματι, αν διαιρούνταν, τότε το  $m$  θα διαιρούσε τη

διαφορά  $k - l$ , κάτι που είναι αδύνατο αφού  $|k - l| < m$ .

Επομένως, δεν υπάρχουν δύο διαφορετικοί όροι τής (\*) που είναι ισότιμοι modulo  $m$  και, συνεπώς, όλοι δίνουν διαφορετικό υπόλοιπο όταν διαιρεθούν διά  $m$ .

Συνεπώς, οι όροι τής (\*) αντιπροσωπεύουν όλες τις κλάσεις ισοτιμίας modulo  $m$  — δηλαδή, σε καθένα από τα υπόλοιπα  $0, 1, 2, \dots, m - 1$  αντιστοιχεί ένας ακριβώς όρος της ακολουθίας (\*), ο οποίος δίνει αυτό το υπόλοιπο όταν διαιρεθεί διά  $m$ .

Άρα, αποδείξαμε το Θεώρημα 1 (και κάτι επιπλέον).

### Ασκήσεις

23. Βρείτε όλες τις τριάδες πρώτων αριθμών της μορφής

$$p, p + 2, p + 4.$$

24. Βρείτε τη μέγιστη πεπερασμένη αριθμητική πρόσδοτο που αποτελείται από πρώτους αριθμούς και έχει διαφορά τον αριθμό 6.

25. Δεκαπέντε πρώτοι αριθμοί σχηματίζουν αριθμητική πρόσδοτο με διαφορά  $d$ . Αποδείξτε ότι  $d > 30.000$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θεώρημα 1 για να αποδείξουμε το επονομαζόμενο κινεζικό θεώρημα υπολοίπων. Ήταν γνωστό στην αρχαία Κίνα εδώ και 2.000 χρόνια.

**Θεώρημα 2.** Έστω ότι οι  $n$  αριθμοί  $m_1, m_2, \dots, m_n$  είναι πρώτοι ανά δύο. Έστω ότι δίνονται  $n$  αριθμοί  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , τέτοιοι ώστε  $0 \leq r_i \leq m_i - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Τότε, υπάρχει αριθμός  $N$  ο οποίος δίνει υπόλοιπο  $r_i$  όταν διαιρεθεί διά του  $m_i$ .

Με άλλα λόγια,  $N \equiv r_i \pmod{m_i}$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Απόδειξη.** Θα αποδείξουμε την πρόταση με τέλεια επαγωγή. Για  $n = 1$ , ο ισχυρισμός του θεωρήματος είναι προφανής. Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για  $n = k - 1$ . Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει φυσικός αριθμός  $M$ , τέτοιος ώστε

$$M \equiv r_i \pmod{m_i} \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Θέτουμε  $d = m_1 m_2 \dots m_{k-1}$ . Θεωρούμε τους αριθμούς  $M, M + d, M + 2d, \dots, M + (m_k - 1)d$ .

Αφού οι  $d$  και  $m_k$  είναι πρώτοι μεταξύ τους, από το Θεώρημα 1 έπειται

ότι υπάρχει ένας αριθμός  $N$  μεταξύ των αριθμών της παραπάνω ακολουθίας που, όταν διαιρεθεί διά του  $m_k$ , δίνει υπόλοιπο  $r_k$ . Από την άλλη πλευρά, το  $N$  δίνει υπόλοιπο  $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$ , όταν διαιρεθεί, αντιστοίχως, διά  $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ . Οπότε το θεώρημα αποδείχτηκε.

Τέλος, αποδεικνύουμε ένα ακόμη θεώρημα.

**Θεώρημα 3.** Για οποιουσδήποτε αριθμούς  $m_1, m_2, \dots, m_n$  που είναι πρώτοι μεταξύ τους και για οποιαδήποτε υπόλοιπα  $r_1, r_2, \dots, r_n$  διαιρεσης διά  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , αντίστοιχα, υπάρχουν  $n$  διαδοχικοί ακέραιοι  $a, a + 1, \dots, a + n - 1$  τέτοιοι ώστε  $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$ ,  $a + 1 \equiv r_2 \pmod{m_2}, \dots, a + n - 1 \equiv r_n \pmod{m_n}$ .

Με άλλα λόγια, για οποιουσδήποτε αριθμούς  $m_1, m_2, \dots, m_n$  που είναι πρώτοι μεταξύ τους υπάρχουν  $n$  διαδοχικοί ακέραιοι οι οποίοι, όταν διαιρεθούν με τους  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , δίνουν οποιαδήποτε προκαθορισμένο σύνολο υπολοίπων.

**Απόδειξη.** Βάσει του κινεζικού θεωρήματος υπολοίπων, υπάρχει ένας αριθμός  $a$  τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ a &\equiv r_2 - 1 \pmod{m_2}, \\ &\dots \\ a &\equiv r_n - n + 1 \pmod{m_n}. \end{aligned}$$

Τα  $a, a + 1, \dots, a + n - 1$  ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος.

### Ασκήσεις

26. Αποδείξτε ότι (i) ανάμεσα σε οποιουσδήποτε 10 και (ii) οποιουσδήποτε 16 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς υπάρχει ένας που είναι πρώτος προς όλους τους άλλους. (iii) Ισχύει η προηγούμενη πρόταση και για 17 διαδοχικούς αριθμούς;

27. Αποδείξτε ότι για κάθε  $n$  υπάρχουν  $n$  διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί καθένας από τους οποίους διαιρείται με το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού.

28. Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία ο ωροδείκτης, ο λεπτοδείκτης και ο δευτερολεπτοδείκτης ενός σωστά ρυθμισμένου ρολογιού σχηματίζουν γωνίες  $120^\circ$  μεταξύ τους;

29. Βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που δίνει υπόλοιπο 1, 2, 4 και 6 όταν διαιρεθεί διά 2, 3, 5 και 7, αντίστοιχα.

30. Βρείτε τον μικρότερο άρτιο αριθμό  $a$  για τον οποίο έχουμε ότι ο  $a + 1$  διαιρείται διά 3, ο  $a + 2$  διαιρείται διά 5, ο  $a + 3$  διαιρείται διά 7, ο  $a + 4$  διαιρείται διά 11 και ο  $a + 5$  διαιρείται διά 13.

### Επίλυση Ισοτιμιών

Στο Πρόβλημα 4 βρήκαμε όλους τους ακέραιους  $n$  για τους οποίους το  $8n + 3$  διαιρείται διά 13. Με άλλα λόγια, λύσαμε την ισοτιμία

$$8n + 3 \equiv 0 \pmod{13}.$$



Είμαστε πλέον σε θέση να λύσουμε αυτό το πρόβλημα στη γενική περίπτωση. Έστω ότι δίνονται οι αριθμοί  $a$  και  $m$  οι οποίοι είναι πρώτοι μεταξύ τους. Θέλουμε να λύσουμε την ισοτιμία  $ax \equiv b \pmod{m}$ , όπου  $b$  είναι τυχαίος αριθμός.

Βάσει του Θεωρήματος 1, υπάρχει  $k$  τέτοιο ώστε  $ak \equiv 1 \pmod{m}$ . Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της αρχικής μας ισοτιμίας επί  $k$ , βρίσκουμε  $k(ax) = (ak)x \equiv x \equiv bk \pmod{m}$ , απ' όπου έχουμε άμεσα  $x \equiv bk + ml$ , όπου  $l$  τυχαίος ακέραιος.

Επομένως ανακύπτει το πρόβλημα του προσδιορισμού του  $k$ . Όταν το  $m$  είναι μικρό, μπορούμε να βρούμε το  $k$  με άμεση αναζήτηση, αλλά η γενική λύση αυτού και πολλών άλλων προβλημάτων απαιτεί ένα ξεχωριστό άρθρο.

#### Πρόβλημα 5. Λύστε την ισοτιμία

$$32n \equiv 7 \pmod{37}.$$

**Λύση.** Αφού  $32 \equiv -5 \pmod{37}$ , έχουμε τις ισοδύναμες ισοτιμίες  $5n \equiv -7 \equiv 30 \pmod{37}$ , ή  $n \equiv 6 \pmod{37}$ .

Η επίλυση γραμμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές ανάγεται στην επίλυση ισοτιμιών.

**Πρόβλημα 6.** Βρείτε όλα τα ζεύγη ακέραιών  $x, y$  που ικανοποιούν την εξισωση  $7x - 23y = 131$ .

**Λύση.** Αφού  $23 \equiv 2 \pmod{7}$ , βρίσκουμε τις ισοτιμίες  $2y \equiv -131 \pmod{7}$  ή  $2y \equiv 2 \pmod{7}$ , απ' όπου προκύπτει  $y \equiv 1 \pmod{7}$ .

Αρα  $y = 7k + 1$ , όπου  $k$  είναι ακέραιος. Μπορούμε τώρα εύκολα να βρούμε το  $x$ :  $7x - 23(7k + 1) = 131$ , ή  $7x = 154 + 23 \cdot 7k$ , και τελικά  $x = 22 + 23k$ .

Ολοκληρώνοντας, σας προτείνουμε να λύσετε τις επόμενες ασκήσεις.

#### Ασκήσεις

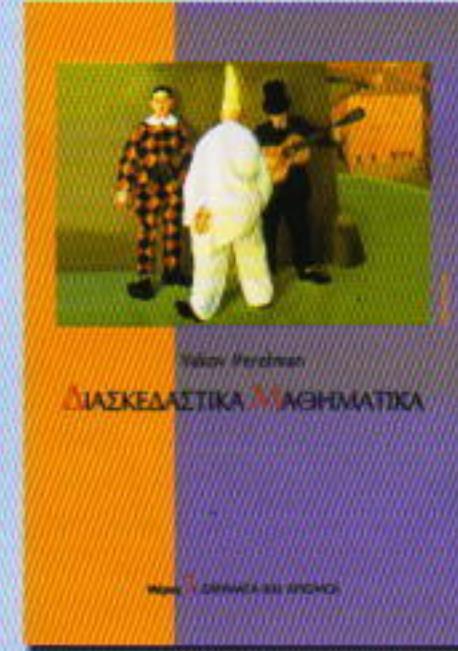
31. Λύστε τις ισοτιμίες (i)  $17x \equiv 19 \pmod{37}$ , (ii)  $147x \equiv 63 \pmod{29}$ .

32. Βρείτε ακέραιες λύσεις των εξισώσεων (i)  $7x + 8y = 1$ , (ii)  $13x - 15y = 16$ , (iii)  $257x + 18y = 175$ .

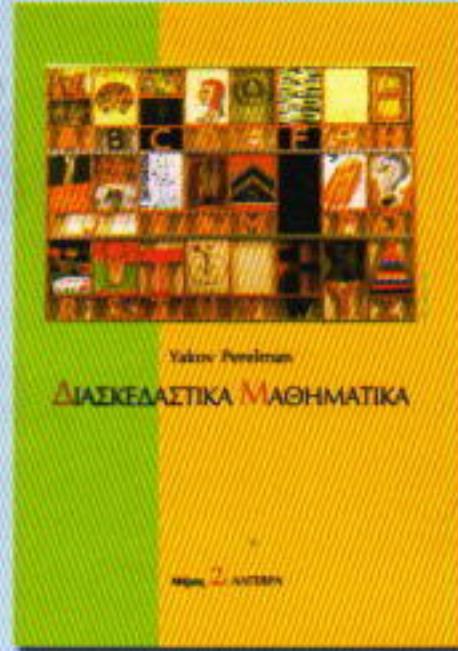
33. Βρείτε ακέραιες λύσεις του επόμενου συστήματος εξισώσεων

$$\begin{cases} 32x + 5y - 7z = 1, \\ 4x + 9y + 11z = 2. \end{cases}$$

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ**



Yakov Perelman  
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
—Μέρη 1 & 2—



Yakov Perelman  
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
—Μέρη 2 & 3—

**Yakov Perelman**

**ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

—Μέρη 1 και 2—

Το βιβλίο περιλαμβάνει εξαιρετικής ποικιλίας θέματα των στοιχειωδών μαθηματικών: από γρίφους και μαθηματικές σπαζοκεφαλίες, πνευματικές προκλήσεις και μαθηματικές τεχνικές μέχρι προβλήματα χρήσης της άλγεβρας σε καθημερινές δραστηριότητες και διασκεδαστικές αναδρομές στην ιστορία των μαθηματικών.

Καταφανή χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι η πρωτοτυπία των θεμάτων του, ο γοητευτικός τρόπος παρουσίασής τους και η υπέροχη εικονογράφησή τους. Ο συγγραφέας έχει καταβάλει κάθε δυνατή προσπάθεια για να κάνει το βιβλίο ζωηρό και διασκεδαστικό, ο αναγνώστης δε, για να το παρακολουθήσει, δεν χρειάζεται να γνωρίζει παρά τους κανόνες της στοιχειώδους άλγεβρας και γεωμετρίας.

Τα προβλήματα συνοδεύονται πάντα από τις λύσεις τους.

- «Ο Perelman γράφει με τρόπο καταπληκτικό, εκλαϊκεύοντας δύσκολα ζητήματα της φυσικής, των μαθηματικών και της αστρονομίας.

Τα βιβλία του είναι ευφυή, τερπνά κι ωφέλιμα.»

—K. Tsiolkovsky (1857-1935), πατέρας της αστροναυτικής

Τόμος 1: 176 σελ., 17,5 x 25 εκ., δίχρωμος, πανόδετος, 5.700 δρχ.

Τόμος 2: 212 σελ., 17,5 x 25 εκ., δίχρωμος, πανόδετος, 6.500 δρχ.

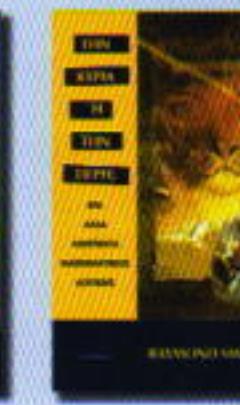
**Αυτό το καλοκαίρι, δείτε ακόμη:**



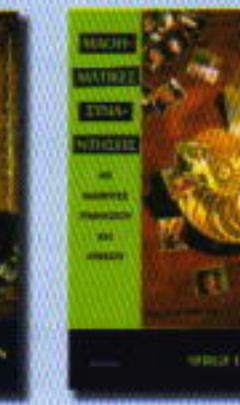
Yakov Perelman  
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
—Μέρη 3 & 4—



Yakov Perelman  
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
—Μέρη 5 & 6—



Yakov Perelman  
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
—Μέρη 7 & 8—



Yakov Perelman  
ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
—Μέρη 9 & 10—

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάποιπρο**

# Βάση εκτόξευσης δορυφόρων

A. Stasenko

**T**Ο ΔΙΧΩΣ ΆΛΛΟ, ΤΑ ΗΦΑΙΣΤΕΙΑ ΕΙΝΑΙ πολύ ενδιαφέροντα φυσικά αντικείμενα —μεγαλοπρεπή και τρομακτικά. Ιδού τι γράφει για ένα από αυτά μια εγκυκλοπαίδεια: «Το Κρακατόα είναι ένα ενεργό ηφαιστείο στον Πορθμό Σουύντα μεταξύ των νήσων Ιάβα και Σουμάτρα. Έχει ύψος 813 μέτρα. Τον Αύγουστο του 1883 εξερράγη με όλως εξαιρετική βιαιότητα. Η έκρηξη κατέστρεψε περισσότερο από το ένα τρίτο του ηφαιστειογενούς νησιού Ρακάτα, ενώ ακούστηκε σε ακτίνα μεγαλύτερη από 3.000 χιλιόμετρα. Δημιούργησε ένα τεράστιο παλιρροϊκό κύμα (τουνάμι), το οποίο προκάλεσε το θάνατο περισσότερων από 36.000 ανθρώπων στις ακτές της Ιάβας και της Σουμάτρας. Ο όγκος των αναβλημάτων ανήλθε σε 19 κυβικά χιλιόμετρα. Φτάνοντας σε ύψος 80 χιλιόμετρων, η ηφαιστειακή τέφρα παρέμεινε αιωρούμενη στη ατμόσφαιρα επί αρκετά χρόνια.»

Ένα βιβλίο που πραγματεύεται τη δυναμική του μεσοαστρικού αερίου σχολιάζει ως εξής το ενδεχόμενο κάποιοι αστεροειδείς να έχουν δημιουργηθεί από ηφαίστεια: «Ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εκδηλώσεις συνήθους ηφαιστειακής δραστηριότητας, οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε θεαματικές καταστροφικές εκρήξεις παρόμοιες με εκείνη του Κρακατόα. Οι τέτοιου είδους εκρήξεις δεν αποτελούν εξαιρέσεις —έρχονται ως φυσιολογικό αποτέλεσμα των φυσικών και χημικών διαδικασιών που συντελούνται στο εσω-

«...και σεισμός μέγας  
εγένετο,  
και ο ήλιος μέλας  
εγένετο  
ως σάκκος τρίχινος,  
και η σελήνη όλη εγένετο  
ως αἷμα,  
και οι αστέρες  
του ουρανού  
έπεσαν εις την γην, ως  
σική  
βαλλούσα τους ολύνθους  
αυτής  
υπό ανέμου μεγάλου  
σειομένη,  
και ο ουρανός  
απεχωρίσθη  
ως βιβλίον ελισσόμενον,  
και παν όρος και νήσος  
εκ των τόπων αυτών  
εκινήθησαν.»  
—Ιωάννου, Αποκάλυψις

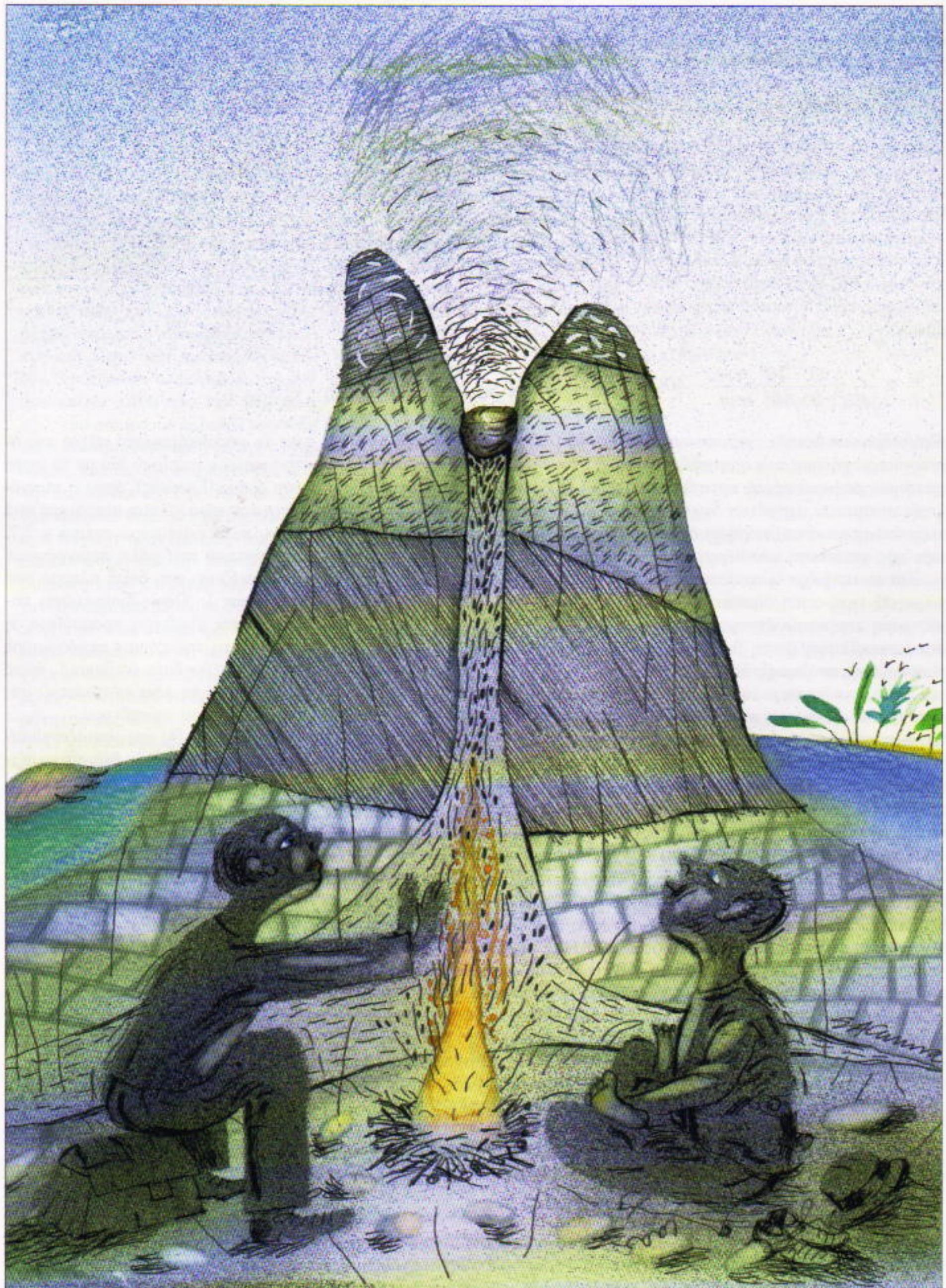
τερικό της Γης. Οι υψηλές ταχύτητες του εκτοξευόμενου αερίου, που αναμφίβολα υπερβαίνουν τα μερικά χιλιόμετρα ανά δευτερόλεπτο, εξηγούν τα μεγάλα υψόμετρα έως τα οποία εκτείνεται η στήλη του εκτοξευόμενου ηφαιστειακού υλικού, που μερικές φορές φτάνουν και τα 60 km... Σε ορισμένες περιπτώσεις, το υλικό, όταν η αρχική του ταχύτητα αγγίζει τα 11 km/s, εκτινάσσεται πέ-

ραν των ορίων του γήινου βαρυτικού πεδίου.»

Μήπως, λοιπόν, η δημιουργία κάποιου δορυφόρου της Γης ή του Ήλιου είναι δυνατόν να οφείλεται σε μια ηφαιστειακή έκρηξη; Έχει αναμφίβολα ενδιαφέρον να εξετάσουμε κατά πόσον μπορεί να ευσταθεί μια τέτοια εκδοχή.

Ας υποθέσουμε ότι ένας όγκος βασάλτη, λάβας ή άλλου ηφαιστειακού υλικού που αποκόπηκε τυχαία, κινείται προς τα πάνω μέσω του κατακόρυφου φρέατος ενός ηφαιστείου (Σχήμα 1). Λάτρεις και εμείς, ως φυσικοί, των ιδανικών μορφών, θα θεωρήσουμε το φρέαρ απολύτως κυλινδρικό και το βλήμα σφαιρικό. Επιπλέον δε, θα υποθέσουμε ότι και τα δύο έχουν την ίδια ακτίνα R. Το βλήμα επιταχύνεται υπό την επίδραση της πίεσης P των ηφαιστειακών αερίων, η οποία υπερβαίνει κατά πολύ την ατμοσφαιρική πίεση (σύμφωνα με τις εκτιμήσεις που παρατίθενται στο προαναφερθέν βιβλίο, η πίεση των αερίων σε μια ηφαιστειακή έκρηξη ανέρχεται σε εκατό περίπου χιλιάδες ατμόσφαιρες).

Στην «μπούκα» του ηφαιστείου —δηλαδή στον κρατήρα— η ταχύτητα του βλήματος λαμβάνει τη μεγιστή της τιμή  $v_0$  στη συνέχεια, το βλήμα επιβραδύνεται υπό την επίδραση της γήινης βαρύτητας και της αντίστασης του αέρα. Σημειωτέον ότι δεν τολμούμε να εκστομίσουμε τη στερεότυπη φράση «θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα», καθότι η αρχική ταχύτητα του ηφαιστει-



ακού μας βλήματος κατ' ανάγκην υπερβαίνει την ταχύτητα διαφυγής (ή δεύτερη διαστημική ταχύτητα)

$$v_\delta = \sqrt{2gR_\Gamma} \approx 11 \text{ km/s.} \quad (1)$$

όπου με  $R_\Gamma$  συμβολίζουμε την ακτίνα της Γης. Συνεπώς, το βλήμα μας κινείται με υπερηχητική ταχύτητα. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική τιμή  $c = 300 \text{ m/s}$  για την ταχύτητα του ήχου, καταλήγουμε στον εξής λόγο ταχυτήτων (ο οποίος μας είναι γνωστός ως αριθμός Mach):

$$\frac{v_0}{c} \geq \frac{v_\delta}{c} = \frac{11 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^2} \text{ m/s} \sim 40.$$

Βρισκόμαστε λοιπόν για τα καλά στην περιοχή των υπερηχητικών ταχυτήτων, όπου κανένας κατασκευαστής ιπτάμενων οχημάτων δεν θα διανοούνταν ποτέ να θεωρήσει αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

Και τι τιμή έχει η αντίσταση του αέρα; Η τιμή αυτή δίνεται από μια έκφραση την οποία έχουμε εξαγάγει κατ' επανάληψη με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης. Εξαρτάται από την πυκνότητα  $\rho$  του αέρα, από το εμβαδόν  $S$  της μέγιστης εγκάρσιας διατομής του κινούμενου σώματος και από την ταχύτητά του  $v$  (αφήνουμε στον αναγνώστη να ελέγξει μόνος του ότι και τα δύο μέλη της κατωτέρω εξισώσης έχουν διαστάσεις δύναμης):

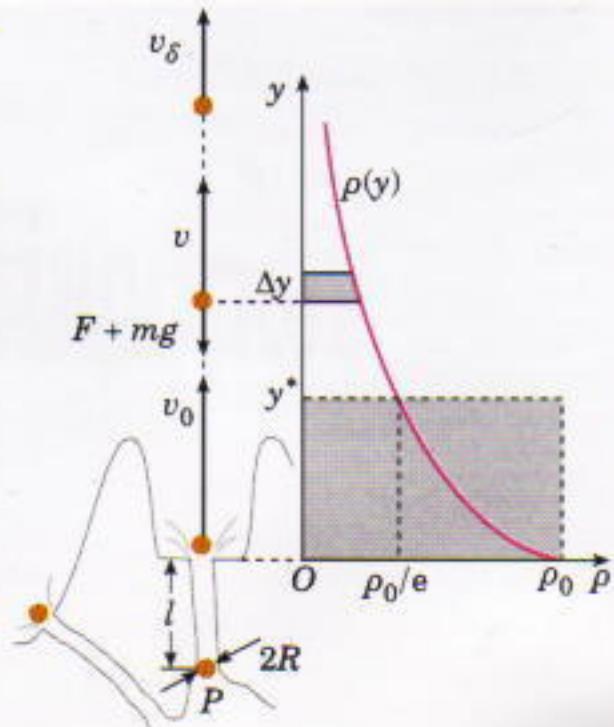
$$F = C\rho S v^2. \quad (2)$$

Ατυχώς, όμως, η διαστατική ανάλυση αδυνατεί να προσδιορίσει τον αδιάστατο συντελεστή  $C$  (πράγμα ουδόλως περίεργο, αφού στο κάτω κάτω πρόκειται για μια αδιάστατη ποσότητα). Εδώ, ωστόσο, μας περιμένει μια ευχάριστη έκπληξη: Το πρόβλημά μας προσέλκυσε το ενδιαφέρον του ιδρυτή της σύγχρονης φυσικής, του σερ Ισαάκ Νεύτωνα — για την περίπτωση της υπερηχητικής κίνησης, οι θεωρητικοί του υπολογισμοί οδηγούν στην τιμή  $C = 1/2$ .

Τι συμβαίνει, λοιπόν, όταν το βλήμα εκτινάσσεται από το ηφαίστειο; Ενόσω κινείται κατά τον άξονα των  $y$ , η δυναμική του ενέργεια αυξάνε-

ται και συνάμα η κινητική του ενέργεια μειώνεται. Μπαίνουμε έτσι στον πειρασμό να πούμε ότι το άθροισμά τους διατηρείται σταθερό και να καταλήξουμε στην εξίσωση (1). Εντούτοις, το βλήμα υφίσταται την επίδραση της αντίστασης του αέρα, οπότε ένα μέρος της κινητικής του ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Επομένως, οφειλουμε να λάβουμε υπόψη ότι η μείωση της ολικής μηχανικής ενέργειας που συντελείται σε ένα μικρό τμήμα  $\Delta y$  της τροχιάς ισούται με το έργο το οποίο καταναλώνει η αντίσταση του αέρα στο ίδιο τμήμα:

$$\Delta \left( \frac{mv^2}{2} + mgy \right) = -F\Delta y. \quad (3)$$



Σχήμα 1

νει το χαρακτηριστικό πάχος της ατμόσφαιρας (περίπου 100 με το ύψος του άρους Έβερεστ), όπου η πυκνότητα του αέρα γίνεται μικρότερη από τη  $\rho_0$  κατά έναν παράγοντα  $e \approx 2.7$ . Η εξάρτηση που μόλις περιγράψαμε απεικονίζεται στη δεξιά πλευρά του Σχήματος 1. Όπως διαπιστώνει κανείς χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια, η πυκνότητα της γήινης ατμόσφαιρας μειώνεται ραγδαία (εκθετικά, όπως συνηθίζουν να λένε οι φυσικοί) αυξανομένου του υψομέτρου.

Η εξίσωση (4) παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον: Εάν θέλαμε να εξισώσουμε τη μάζα μιας άπειρης κατακόρυφης ατμοσφαιρικής στήλης με τη μάζα μιας στήλης πεπερασμένου ύψους και σταθερής πυκνότητας  $\rho_0$ , η τιμή του ύψους της δεύτερης στήλης θα προέκυπτε ίση με  $y^*$ . Με άλλα λόγια, το εμβαδόν  $\rho_0 y^*$  του σκιασμένου ορθογωνίου στο Σχήμα 1 ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που κείται ανάμεσα στην καμπύλη  $\rho(y)$  και στον άξονα των  $y$ . Τούτο το συμπέρασμα θα το αξιοποιήσουμε ευθύς αμέσως.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα όσα είπαμε, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (3) με τη μορφή

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} = -\frac{S}{m} \left( \rho_0 e^{-\frac{y}{y^*}} \Delta y \right). \quad (5)$$

Ένας μαθηματικός θα αναγνώριζε αμέσως την παραπάνω έκφραση ως μια απλή διαφορική εξίσωση με διαχωρι-

ομένες μεταβλητές (το αριστερό μέλος περιέχει μόνο το  $v^2$  και το δεξιό μόνο το  $y$ ). Άλλα και ένας επιχειρηματίας της νέας γενιάς θα δει σ' αυτή κάτι το οικείο —ένα είδος περίπλοκου τραπεζικού ανατοκισμού.

Ε, λοιπόν, με δ.τι κι αν μοιάζει η εξίσωσή μας, ήρθε η ώρα να τη λύσουμε. Από πού να αρχίσουμε; Πρώτα απ' όλα, παρατηρούμε ότι οι παρενθέσεις στο δεύτερο μέλος περιέχουν το στοιχειώδες εμβαδόν  $\rho(y)Δy$  που φαίνεται στο Σχήμα 1. Αυτό σημαίνει πως, καθώς το ηφαιστειακό βλήμα ανέρχεται κινούμενο κατά μήκος του άξονα των  $y$ , αυτό το εμβαδόν θα σαρώσει ολόκληρο το χωρίο που κείται κάτω από την καμπύλη  $\rho(y)$ , του οποίου το εμβαδόν ισούται, όπως επισημάναμε ήδη, με  $\rho_0 y^*$ . Εππλέον, κάπου, όχι πολύ μακριά από την επιφάνεια της Γης (εφόσον το ατμοσφαιρικό στρώμα έχει σχετικά μικρό πάχος), η αντίσταση του αέρα παύει να έχει και την παραμικρή επίπτωση στην ενέργεια του ανερχόμενου σώματος. Σ' αυτό (το όχι ιδιαίτερα μεγάλο) υψόμετρο, λοιπόν, το σώμα πρέπει να κινείται με την ταχύτητα διαφυγής, έτσι ώστε να μπορέσει να «σπάσει τα δεσμά» της βαρύτητας της Γης.

Τι γίνεται όμως στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (5); Η ολοκλήρωση κατά μήκος του άξονα των  $y$  δίνει τον φυσικό λογάριθμο του  $v^2$ , οπότε έχουμε:

$$\ln \frac{v_\delta^2}{v_0^2} = -\rho_0 y \cdot \frac{S}{m}. \quad (6)$$

Από την άλλη πλευρά, η αρχική ταχύτητα του βλήματος που αναδύεται από τον κρατήρα του ηφαιστείου προέρχεται από τη δύναμη  $PS$  που ασκείται στη μάζα  $m$  λόγω της πίεσης των ηφαιστειακών αερίων. Θεωρώντας την πίεση σταθερή και αγνοώντας την τριβή που προκαλείται από την αλληλεπίδραση με το εσωτερικό τοίχωμα του ηφαιστείου, καταλήγουμε ότι ενόσω το βλήμα διατρέχει το φρέαρ του ηφαιστείου, του προσδίδεται σταθερή επιτάχυνση  $\gamma = PS/m$ . Συνεπώς, σύμφωνα με τους νόμους της ευθύγραμμης και ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, το αντικεί-

μένο αποκτά την εξής ειδική κινητική ενέργεια (ή κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας) καθώς διανύει επιταχυνόμενο ένα φρέαρ μήκους  $l$ :

$$\frac{v_0^2}{2} = \gamma l = \frac{PS}{m} l.$$

Εισάγοντας την ανωτέρω έκφραση στην εξίσωση (6) και κάνοντας ορισμένες αναδιατάξεις, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\frac{v_0^2}{v_\delta^2} = \frac{2Pl \frac{S}{m}}{v_\delta^2} = \exp\left(\rho_0 y \cdot \frac{S}{m}\right). \quad (7)$$

Επειδή οι αδιάστατες παράμετροι ασκούν πάντοτε μεγάλη γοητεία στους φυσικούς, ας εισαγάγουμε δύο τέτοιες παραμέτρους προς χάριν της απλότητας και της ομορφιάς:

$$x = \rho_0 y \cdot \frac{S}{m}, \quad k = \frac{2Pl}{\rho_0 y \cdot v_\delta^2}.$$

Η πρώτη παράμετρος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του βλήματος

$$\frac{S}{m} = \frac{\pi R^2}{4\pi R^3 \rho_0 / 3} = \frac{3}{4R\rho_0},$$

όπου με  $\rho_0$  συμβολίζουμε την πυκνότητά του. Η δεύτερη παράμετρος εξαρτάται αποκλειστικά από το ηφαιστειακό «κανόνι»: από το μήκος του  $l$  και από την πίεση  $P$  των αερίων του. Με τη βοήθεια πλέον αυτών των νέων αδιάστατων παραμέτρων, γράφουμε την εξίσωση (7) με τη μορφή

$$kx = e^x. \quad (8)$$

Το αριστερό μέλος της (8) περιγράφει μια ευθεία γραμμή, ενώ στο δεξιό της μέλος συναντούμε τον παλιό μας γνώριμο, την εκθετική συνάρτηση. Στο Σχήμα 2 παριστώνται γραφικά και οι δύο αυτές συναρτήσεις. Όπως διαπιστώνουμε, για μικρές τιμές της  $k$  (όταν, για παράδειγμα, η πίεση  $P$  των αερίων ή το μήκος  $l$  του φρέατος είναι μικρό), η εξίσωση (8) δεν διαθέτει λύση: η ευθεία δεν τέμνει πουθενά τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης.

Για κάποια τιμή  $k_0$ , ωστόσο, υπάρχει ένα μοναδικό σημείο επαφής, για το οποίο έχουμε  $x_0 = 1$  και  $k_0 = e$  (ε-

λέγετε το εισάγοντας τις συγκεκριμένες τιμές στην εξίσωση (8)). Από εδώ παίρνουμε όλες τις τιμές που μας ενδιαφέρουν:

την ακτίνα του βλήματος

$$R_0 = \frac{3 \rho_0 y^*}{4 \rho_0},$$

το απαιτούμενο μήκος (βάθος) του φρέατος

$$l_0 = e^{\frac{\rho_0 y^* v_\delta^2}{2P}},$$

καθώς και την αρχική ταχύτητα εκτόξευσης

$$v_0 = \sqrt{e} v_\delta (\approx 1.65 v_\delta),$$

η οποία απαιτείται ώστε το βλήμα να εξέλθει από την ατμόσφαιρα έχοντας ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής.

(Επιβάλλεται να επομένουμε εν προκειμένω ότι σε τέτοιες ταχύτητες το ηφαιστειακό αέριο, το οποίο παρέχει την ώθηση, δεν είναι εύκολο να διατηρήσει την επαφή του με το βλήμα. Ακόμη προβληματικότερη φαίνεται η διατήρηση σταθερής πίεσης κατά τη διάρκεια της ηφαιστειακής «βολής». Σε μια περισσότερο εκλεπτυσμένη θεωρία, θα έπρεπε να λάβουμε υπόψη τη μη αντιστρεπτή εκτόνωση που υφίσταται ένα ταχέως θερμαινόμενο αέριο, η οποία χαρακτηρίζεται από γρήγορες μεταβολές της θερμοκρασίας και της πίεσης που ασκείται στο κινούμενο βλήμα. Ελπίζω ότι, καθώς οι αναγνώστες μας θα προχωρούν στις σπουδές τους, θα καταστούν κάποτε ικανοί να αντιμετωπίζουν τέτοιες περιπλοκές.)

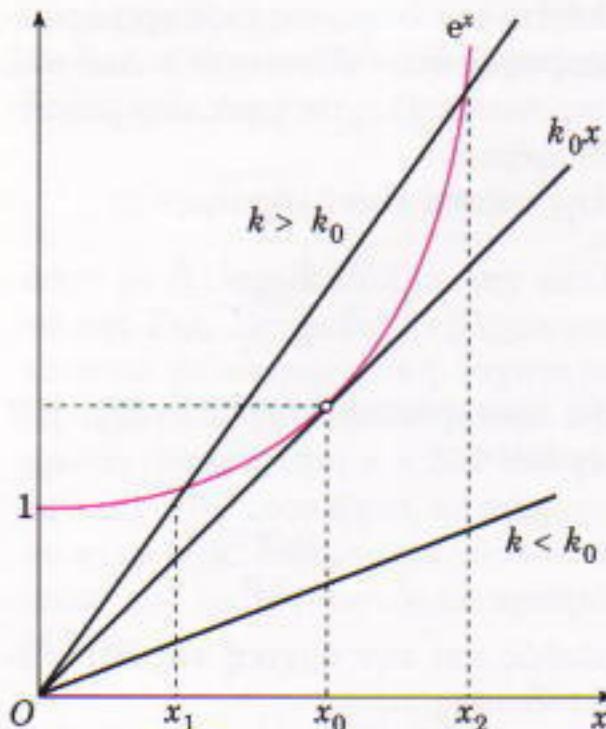
Τι συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για τη σφαίρα και το φρέαρ; Εισάγοντας τις τιμές  $\rho_0 \sim 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $y^* \sim 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m}$ ,  $\rho_0 \sim 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  και  $P \sim 10^5 \text{ atm}$  στις απαντήσεις μας, βρίσκουμε:

$$R_0 = 1.5 \text{ m}, \quad l_0 = 160 \text{ m}.$$

Η μάζα μιας τέτοιας σφαίρας ανέρχεται σε

$$m_0 = 4\pi R_0^3 \rho_0 / 3 = 70 \text{ tn}.$$

Όχι κι άσχημα για έναν τεχνητό δορυφόρο!



Σχήμα 2

Η εξίσωση (8), ωστόσο, διαθέτει και άλλες λύσεις. Εάν, για παράδειγμα,  $k > k_0$ , η αντίστοιχη ευθεία γραμμή του Σχήματος 2 τέμνει την εκθετική καμπύλη σε δύο σημεία. Οι δύο ρίζες  $x_1$  και  $x_2$  αντίστοιχουν σε μια βαριά και μια ελαφριά σφαίρα, διότι  $x \sim 1/R$ . Η βαριά σφαίρα μπορεί να εκτοξευθεί με ταχύτητα μικρότερη από  $v_0$ , ενώ η ταχύτητα εκτόξευσης της ελαφριάς σφαίρας αναγκαστικά υπερβαίνει αυτή την τιμή. Ο λόγος είναι προφανής: Η αντίσταση του αέρα αποβαίνει πολύ σημαντικότερη για την κίνηση ενός φτερού παρά μιας πέτρας.

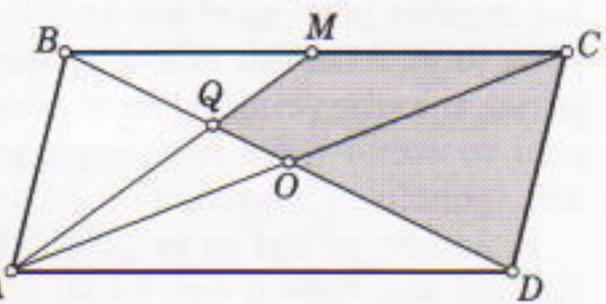
Το πρόβλημά μας παρουσιάζει μία ακόμη πλευρά. Εξετάσαμε μόνο την περίπτωση της κατακόρυφης «εκτόξευσης». Σίγουρα, και ηφαίστειο με κεκλιμένο φρέαρ θα μπορούσε να εκτοξεύσει ένα βλήμα (Σχήμα 1), αυξάνοντας έτσι το πλήθος των δορυφόρων που περιφέρονται γύρω από τη Γη. Για να επτευχθεί κάτι τέτοιο χρειάζεται μικρότερη ταχύτητα: ισούται με την πρώτη κοσμική (διαστημική) ταχύτητα  $v_{\text{π.δ.}} = 8 \text{ km/s}$ . Καλούμε τον αναγνώστη να διερευνήσει ανεξάρτητα την εν λόγω περίπτωση.

Σε ποια συμπεράσματα θα κατέληγε ένας συγκρατημένος επαγγελματίας φυσικός αφού θα εκτιμούσε διεξοδικά τις αναρίθμητες απλουστεύσεις της συλλογιστικής μας; «Λοιπόν, εάν είναι δυνατή η παροχή ηφαιστειακών αερίων υπό σταθερή πίεση περίπου 100 atm μέσω ενός φρέατος

μήκους περίπου 100 m, τότε ένα ηφαίστειο θα μπορούσε ίσως να εκτοξεύσει από τον κρατήρα του ένα αντικείμενο μάζας περίπου 100 tn και να του προσδώσει την απαραίτητη ταχύτητα ώστε να απομακρυνθεί «στο άπειρο». Όλα τούτα ισχύουν, βεβαίως, με την προϋπόθεση ότι μπορεί να βρεθεί ένα σώμα ικανό να αντέξει επιταχύνσεις της τάξεως των δέκα χιλιάδων g.»

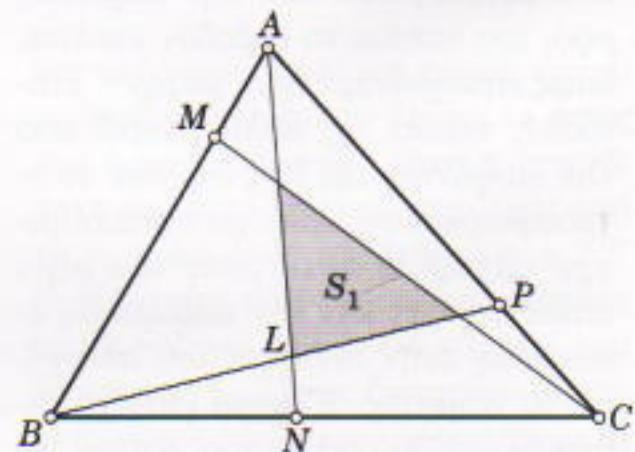
Κατά πόσον ο «ηφαιστειακός καταπέλτης» αποτελεί απλώς ένα διανοητικό παιχνίδι ή ένα πραγματικό φαινόμενο, τούτο παραμένει ανοιχτό ερώτημα. Εντούτοις, το τρομακτικό θέαμα μιας ηφαιστειακής έκρηξης σίγουρα μας έδωσε μερικά ενδιαφέροντα προβλήματα φυσικής. ◻

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 39



Σχήμα 8

διαιρούνται από τα σημεία  $M$ ,  $N$  και  $P$  σε λόγο  $AM + MB = BN + NC = CP + PA = 1 + 4$ . Προσδιορίστε το λόγο του εμβαδού του τριγώνου που ορίζεται από τις ευθείες  $AN$ ,  $BP$  και  $CM$  προς το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$  (Σχήμα 9). ◻



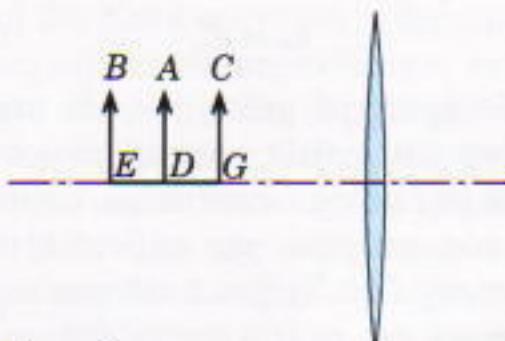
Σχήμα 9

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 46

κή αγωγιμότητα του αέρα δεν παίζει αξιόλογο ρόλο για τις συχνότητες των κυμάτων που μεταφέρουν τον ήχο της ομιλίας ή της μουσικής, καθότι οι διαδοχικές πυκνώσεις και αραιώσεις συμβαίνουν με τέτοια ταχύτητα ώστε η θερμική αγωγιμότητα δεν προλαβαίνει να επιφέρει αισθητή απόσβεση στις κορυφές και τα βαθουλώματα της θερμοκρασίας. Όπως συνηθίζουν να λένε οι φυσικοί, τα ακουστικά κύματα δεν παρουσιάζουν παρά ασήμαντη απορρόφηση και εξασθένηση. Ωστόσο, φαίνεται μάλλον απίθανο οι αρχαίοι Έλληνες να σκέφτονταν αυτά τα προβλήματα όταν έθαβαν τους αμφορείς τους. ◻

**Δείτε ακόμη τα άρθρα...**

- Y. Amstislavsky, «Λιγότερη θερμότητα, περισσότερο φως», Ιαν./Φεβ. 1996.
- A. Byalko, «Ζεστό άγγιγμα», Ιαν./Φεβ. 1998.



Σχήμα 3

αίνα είναι συμμετρική). Ο φακός μεγεθύνει τα ευθύγραμμα τμήματα  $DG$  και  $ED$  κατά τους παράγοντες  $\beta_1$  και  $\beta_2$ , αντιστοίχως. Πόσο μεγεθύνεται το ευθύγραμμο τμήμα  $AD$ ;

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 69**

# Περί του άλματος επί κοντώ

Χρήσιμα σχόλια εν όψει των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004

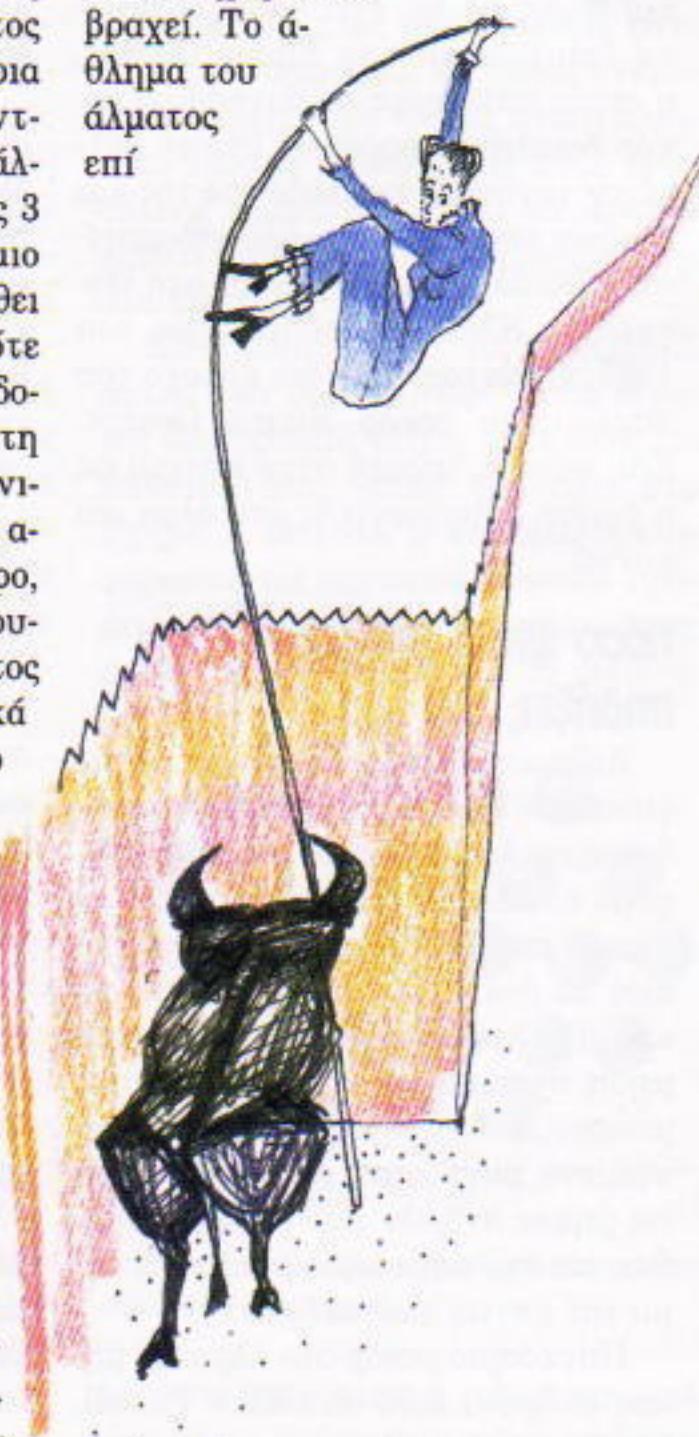
P. Blanchonette και M. Stewart

**Σ**ΤΟΥΣ ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥΣ ΑΓΩΝΕΣ ΤΟΥ Σίδνεϋ, στην Αυστραλία, οι γυναίκες αγωνίστηκαν για πρώτη φορά στο άθλημα του άλματος επί κοντώ. Η αμερικανίδα αθλήτρια Stacey Dragila, η τωρινή ρεκορδούμαν, κατέκτησε το χρυσό μετάλλιο με ένα άλμα στα 4,60 m, μόλις 3 cm κάτω από το δικό της παγκόσμιο ρεκόρ. Μολονότι δεν έχει παρέλθει παρά μόλις μία πενταετία από τότε που οι γυναίκες άρχισαν να επιδιδονται σοβαρά στο άλμα επί κοντώ, στη διάρκεια αυτής της σύντομης χρονικής περιόδου το παγκόσμιο ρεκόρ ανέβηκε δραματικά. Στο παρόν άρθρο, αφού επισκοπήσουμε και σχολιάσουμε εν τάχει την ιστορία του άλματος επί κοντώ, θα αναλύσουμε μερικά ζητήματα φυσικής που αφορούν το εν λόγω άθλημα και θα εξαγάγουμε ορισμένα συμπεράσματα τα οποία θα μας επιτρέψουν να καθορίσουμε σε τι ύψη μπορεί να φτάσουν οι αθλήτριες στις μελλοντικές Ολυμπιάδες!

## Ιστορία

Το άθλημα του άλματος επί κοντώ έχει τις καταβολές του στην αρχαία Ελλάδα, όπου η εκτέλεση αλμάτων πάνω από επελαύνοντες ταύρους με τη βοήθεια μακριών κονταριών αποτελούσε συνηθισμένη αθλοπαιδιά. Στην Ευρώπη, τα κοντάρια από μελιά χρησιμοποιού-

νταν ευρέως ως μέσο που έδινε τη δυνατότητα να περάσει κανείς ένα κανάλι χωρίς να βραχεί. Το άθλημα του άλματος επί



κοντώ όπως το γνωρίζουμε σήμερα εμφανίστηκε προς τα τέλη του 19ου αιώνα, όταν καθιερώθηκε πλέον ως σκοπός των αλτών η άνοδος σε μεγαλύτερο ύψος αντί της υπερπήδησης της κατά το δυνατόν μεγαλύτερης οριζόντιας απόστασης: τότε, μάλιστα, οι αθλητές αναρριχόνταν στο κοντάρι καθώς πηδούσαν. Το 1889, η μετατόπιση των χεριών πάνω στο κοντάρι κηρύχτηκε παράτυπη, και εφαρμόστηκε η τεχνική της αιώρησης των ποδιών προς τα επάνω με το σώμα να περνά τον πήχη με το στομάχι στραμμένο προς τα κάτω —τεχνική παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιείται και σήμερα. Το 1904 εισήχθησαν για πρώτη φορά τα ελαφρά κοντάρια από μπαμπού, και τα οποία προσέφεραν στους αθλητές τη δυνατότητα να πηδούν ψηλότερα.

Κατά τη δεκαετία του 1950 απέκτησε διάδοση η χρήση ανθεκτικότερων κονταριών από αλουμίνιο, και με ένα τέτοιο κοντάρι ο Bob Gutowski πέτυχε το 1957 παγκόσμιο ρεκόρ 4,78 m. Την ίδια περίοδο εποχή εισήχθησαν και τα στρώματα προσγείωσης, τα οποία βελτίωσαν σημαντικά την ασφάλεια των διαγωνιζομένων. Παλιότερα, ως υλικό προσγείωσης χρησιμοποιούνταν ένας συνδυασμός από άμμο και ροκανίδια ξύλου. Το κοντάρια από φάιμπεργκλας ήρθαν στο προσκήνιο στους Ολυμπιακούς Αγώνες του 1956, όμως παγκό-

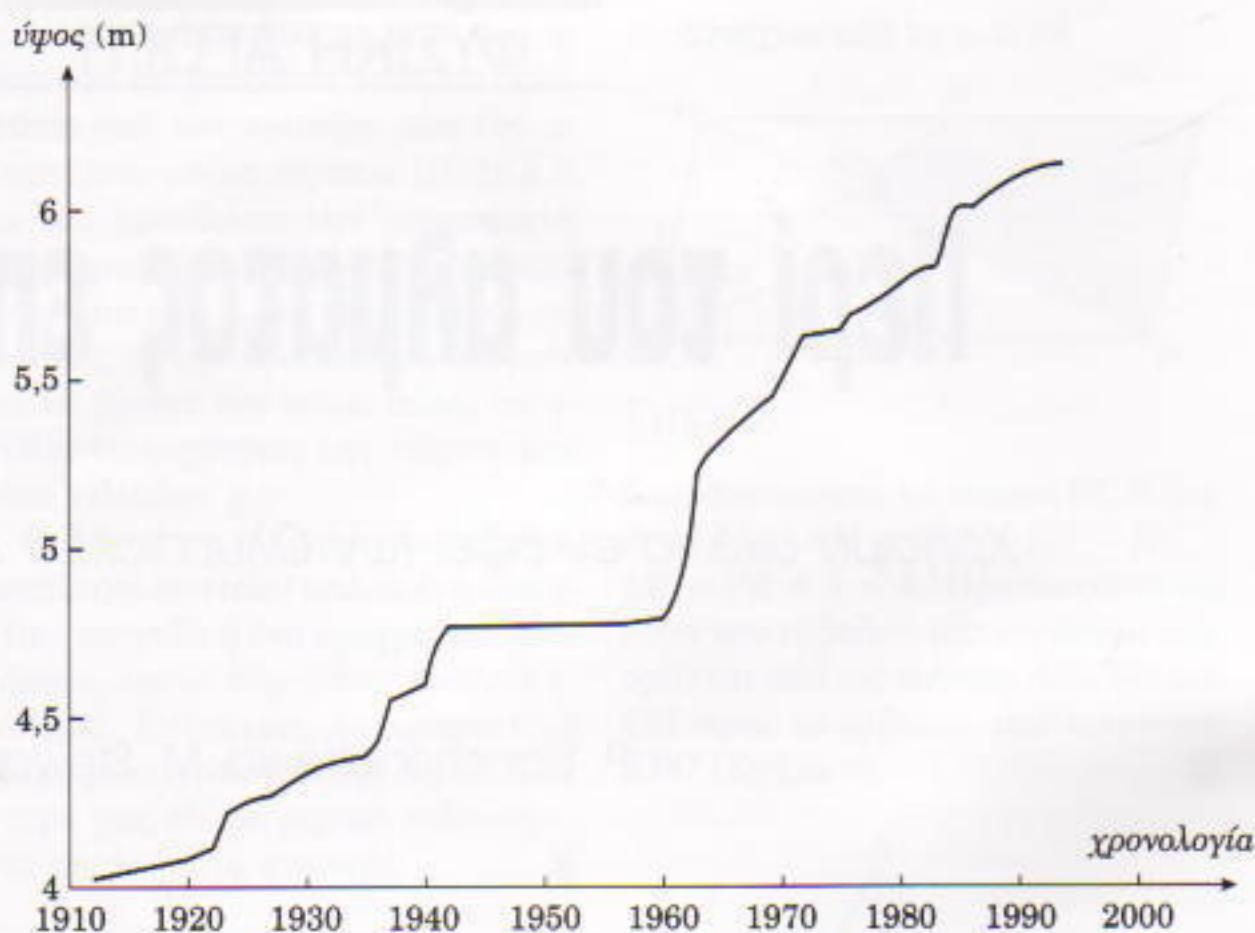
σμιο ρεκόρ με τέτοιο κοντάρι επιτεύχθηκε μόλις το 1961. Η εισαγωγή του φάιμπεργκλας υπήρξε αναμφισβήτητα ο σημαντικότερος νεωτερισμός στο άθλημα από καταβολής του. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα από τη ραγδαία πρόοδο που σημειώθηκε στο παγκόσμιο ρεκόρ των ανδρών κατά τη δεκαετία του 1960 (Σχήμα 1).

Οι αμερικανοί επικοντιστές κυριάρχησαν στους Ολυμπιακούς Αγώνες, με το σερί των επιτυχιών τους να κρατά από το 1896 ώς το 1968. Πιο πρόσφατα, τα σκήπτρα στο άθλημα τα πήρε ο Ουκρανός Sergey Bubka, ο οποίος κατέρριψε το παγκόσμιο ρεκόρ αμέτρητες φορές και κέρδισε έξι παγκόσμια πρωταθλήματα.

Μολονότι οι επιδόσεις των γυναικών στο άλμα επί κοντώ καταγράφονται ήδη από το 1911, η Διεθνής Ομοσπονδία Ερασιτεχνικού Αθλητισμού (IAAF) άρχισε να επικυρώνει το παγκόσμιο ρεκόρ των γυναικών μόλις από το 1995. Το αγώνισμα του άλματος επί κοντώ γυναικών διεξήχθη στο πιο πρόσφατο Παγκόσμιο Πρωταθλήμα Ανοιχτού Στίβου, στα δύο τελευταία Παγκόσμια Πρωταθλήματα Κλειστού Στίβου, και στους Ολυμπιακούς του Σιδνεύ.

## Η Stacey Dragila προς την κορυφή

Η Stacey Dragila μπήκε στο άλμα επί κοντώ διαθέτοντας υπόβαθρο στο έπταθλο (ένα συνδυασμό επτά αγωνισμάτων στίβου και κονίστρας) στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο του Άινταχο. Όσο φοιτούσε στο κολέγιο, η Dragila, κατά προτροπή του προπονητή Dave Nielsen, προσπάθησε να ξεπεράσει τα 6 πόδια (1,83 m) στο άλμα εις ύψος. Μολονότι, όπως παραδέχεται και η ίδια, της χρειάστηκαν πολλά άλματα ώσπου να αποκτήσει άνεση, έκτοτε σημείωσε ταχύτατη πρόοδο. Με το υπόβαθρο της στο έπταθλο, η Stacey είχε σαφές προβάδισμα έναντι των συναθλητριών της σε δύτι αφορούσε τις φυσικές απαιτήσεις του άλματος επί κοντώ, την ταχύτητα και τη δύναμη του άνω σώματος. Συνδυάζοντας αυτή την υπεροχή με το αγωνιστικό της ένστικτο, κατόρθωσε να κερδίσει τέσσερα Ανοιχτά Πρωταθλήματα των ΗΠΑ. Με ύψος 1,70 m



Σχήμα 1

και βάρος 64 kg, έχει όμοια σωματική διάπλαση με την Emma George, η οποία κατέρριψε το παγκόσμιο ρεκόρ δεκαπέντε φορές. Η Stacey βελτίωσε ταχύτατα τις επιδόσεις της και κέρδισε τον πρώτο μεγάλο γυναικείο αγώνα άλματος επί κοντώ, στο Παγκόσμιο Κλειστό Πρωταθλήμα του 1997, νικώντας την τότε κάτοχο του παγκοσμίου ρεκόρ Emma George. Και, φυσικά, πέρασε στην ιστορία ως η πρώτη ολυμπιονίκης στο άλμα επί κοντώ.

## Πόσο ψηλά μπορεί να πηδήξει;

Δεδομένου ότι το άλμα επί κοντώ γυναικών είναι νέο αγώνισμα, ένα ενδιαφέρον ερώτημα που ανακύπτει αφορά το πόσο κοντά βρίσκεται το σημερινό παγκόσμιο ρεκόρ των γυναικών σε ένα «γυνήσιο» παγκόσμιο ρεκόρ. Για να διατυπώσουμε μια εκτίμηση σχετικά με το ζήτημα αυτό, μπορούμε να στηριχτούμε στα υφιστάμενα παγκόσμια ρεκόρ στο άλμα εις μήκος ανδρών και γυναικών καθώς και στο παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα επί κοντώ των ανδρών:

Παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα εις μήκος ανδρών: 8,95 m (Mike Powell, ΗΠΑ).

Παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα εις μή-

κος γυναικών: 7,52 m (Galina Chistyakova, Ρωσία).

Ο λόγος του γυναικείου παγκόσμιου ρεκόρ προς το αντίστοιχο ανδρικό ισούται με  $7,52/8,95 = 0,84$ . Λαμβάνοντας υπόψη αυτό το λόγο και το παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα επί κοντώ ανδρών, το οποίο επέτυχε ο Sergey Bubka το 1994, μπορούμε να εκτιμήσουμε το αληθινό παγκόσμιο ρεκόρ στο αγώνισμα των γυναικών: «γυνήσιο» παγκόσμιο ρεκόρ =  $= (0,84 \text{ m}) \times (6,14 \text{ m}) = 5,15 \text{ m}$ .

Συνυπολογίζοντας το γεγονός ότι, σε σύγκριση με την ανδρική διάπλαση, στις γυναίκες το άνω μέρος του σώματος υστερεί αναλογικά σε δύναμη έναντι του κάτω μέρους, μπορούμε να αναπροσαρμόσουμε προς τα κάτω την εκτίμησή μας, μειώνοντάς τη στα 5,00 m περίπου. Πρόκειται για ένα ύψος που υπερβαίνει το τωρινό ρεκόρ της Stacey κατά περίπου 40 cm. Εφόσον η Stacey αγωνίζεται στο άλμα επί κοντώ επί λίγο χρόνο, είναι πολύ πιθανόν να συνεχίσει να βελτιώνει τις επιδόσεις της. Ιδού, λοιπόν, και ένα ακόμη ερώτημα που αξίζει να το εξετάσουμε: «Μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγιστο ύψος στο

Η συνέχεια στη σελ. 61

# Παρατηρήστε την επιφανειακή τάση

Τέσσερα όμορφα πειράματα με καθημερινά υλικά και ένας υπέροχος τρόπος να μελετήσετε τους φυσικούς νόμους

Mary E. Stokes και Henry D. Schreiber

**Π**ΟΤΕ ΕΙΝΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΓΕΜΑΤΟ ένα κύπελλο με νερό; Προσπαθήστε να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό κάνοντας το εξής πείραμα: Γεμίστε ένα κύπελλο με νερό ώσπου να σας φανεί ότι αποκλείεται να χωρέσει έστω και μία σταγόνα ακόμη. Στη συνέχεια, αρχίστε να προσθέτετε πεντάδραχμα στο κύπελλο, ακουμπώντας τα ένα ένα απαλά στο νερό, με το πλάι, και αφήνοντάς τα να βυθιστούν. Θα διαπιστώσετε ότι θα χρειαστεί να προσθέσετε αρκετά πεντάδραχμα ώσπου το νερό να φτάσει να ξεχειλίσει. Το κύπελλο δεν ήταν τελικά τόσο γεμάτο όσο νομίζατε στην αρχή!

## Πείραμα 1

Πάρτε ένα πλαστικό κύπελλο και γεμίστε το με νερό ώσπου η επιφάνειά του να βρεθεί στο ίδιο επίπεδο με τα χείλη του κυπέλλου. Προσθέστε κατόπιν με μεγάλη προσοχή πεντάδραχμα, έτσι όπως περιγράφαμε παραπάνω, ώσπου το νερό να ξεχειλίσει. Τέλος, καταγράψτε το πλήθος των πενταδράχμων που προσθέσατε.

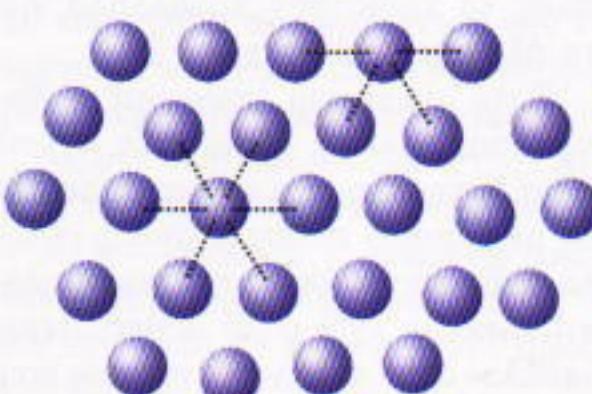
Φανταστείτε το νερό ως αποτελούμενο από ένα ασύλληπτα μεγάλο πλήθος μικροσκοπικών μορίων. Επιπλέον, φανταστείτε το κάθε μόριο του νερού να έλκεται έντονα από τα γειτονικά του μόρια. Συνεπώς, τα μόρια

υπάρχουν ως ένα διασυνδεόμενο δίκτυο, και όχι ως μεμονωμένα, ανεξάρτητα σωματίδια. Μάλιστα, ανάμεσα στα μόρια του νερού αναπτύσσονται τόσο ισχυρές έλξεις ώστε η υδάτινη επιφάνεια τείνει να απωθεί καθετί που προσπαθεί να εισχωρήσει στο δίκτυο.

Κάθε μόριο νερού στο εσωτερικό αυτού του δικτύου υφίσταται ισχυρές διαμοριακές έλξεις προς όλες τις κατευθύνσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Ωστόσο, η κατάσταση διαφοροποιείται σημαντικά εφόσον πρόκειται για τα μόρια της επιφάνειας. Αυτά έλκονται μόνο από τα γειτονι-

ασκείται μια συνισταμένη προς τα έσω δύναμη, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση επιφανειακής τάσης, ή, για να περιγράψουμε τα πράγματα πιο παραστατικά, το σχηματισμό μιας λεπτής «επιδερμίδας» που καλύπτει τον κύριο δύκο του νερού. Ο συντελεστής επιφανειακής τάσης ενός υγρού ορίζεται τυπικά ως το απαιτούμενο έργο για την αύξηση του εμβαδού της επιφάνειας του κατά μία μονάδα. Εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο μετατοπίζεται κατά την κάθετη προς αυτό κατεύθυνση έτσι ώστε να αυξηθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του υγρού, μπορούμε να εννοήσουμε το συντελεστή επιφανειακής τάσης ως την ανά μονάδα μήκους δύναμη που ανθίσταται στη μετατόπιση του ευθύγραμμου τμήματος.

Όσο μεγαλύτερη έλξη ασκεί το ένα μόριο του υγρού στο άλλο τόσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής επιφανειακής τάσης του υγρού. Τα μόρια του νερού θα κάνουν σχεδόν τα πάντα για να αποτρέψουν την απόσπαση ενός ή περισσότερων μορίων από την επιφάνεια. Άλλα υγρά, φυσικά, χαρακτηρίζονται από διαφορετικούς συντελεστές επιφανειακής τάσης, οι οποίοι και χρησιμεύουν ως μέτρο των έλξεων που αναπτύσσονται μεταξύ των μορίων του υγρού.



Σχήμα 1

Οι διαμοριακές έλξεις στην επιφάνεια και στο εσωτερικό ενός υγρού.

κά τους επιφανειακά μόρια και από δύο μόρια βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια. Ως εκ τούτου, πάνω τους

## Πείραμα 2

Γεμίστε ένα πλαστικό κύπελλο με ισοπροπυλική αλκοόλη<sup>1</sup> ώσπου η επιφάνεια του υγρού να φτάσει στο ίδιο επίπεδο με τα χείλη του κυπέλλου. Όπως και στο Πείραμα 1, προσθέστε πεντάδραχμα προσεκτικά, ώσπου τελικά το κύπελλο να ξεχειλίσει. Συγκρίνετε το πλήθος των πενταδράχμων που χρησιμοποιήσατε τούτη τη φορά με το πλήθος στην περίπτωση του νερού.

Ετοιμάστε τώρα λίγο αλατόνερο διαλύοντας 40 g (2 κουταλιές της σούπας) επιτραπέζιο αλάτι σε 160 cm<sup>3</sup> νερού. Γεμίστε ένα άλλο πλαστικό κύπελλο με αυτό το διάλυμα —η επιφάνειά του να ανεβεί ώς τα χείλη του κυπέλλου. Προσθέστε και πάλι πεντάδραχμα, ώσπου το διάλυμα να ξεχειλίσει, και καταγράψτε το πλήθος των πενταδράχμων που χρησιμοποιήσατε.

Παρατηρήστε πόσο έντονα φουσκώνει το υγρό πάνω από τα χείλη του κυπέλλου σε καθένα από αυτά τα τρία συστήματα (νερό, ισοπροπυλική αλκοόλη και αλατόνερο). Όσο μεγαλύτερο συντελεστή επιφανειακής τάσης έχει το υγρό τόσο εντονότερα φουσκώνει και τόσο περισσότερα πεντάδραχμα μπορεί να χωρέσει το κύπελλο χωρίς να ξεχειλίσει.

Προσθέστε μία σταγόνα υγρού απορρυπαντικού στο γεμάτο κέρματα κύπελλο του πρώτου πειράματος. Τι παρατηρείτε;

Μπορείτε να κάνετε μια χονδρική βαθμονόμηση του συντελεστή επιφανειακής τάσης (*a*) του υγρού βάσει του πλήθους των πενταδράχμων που χρειάζονται ώστε να ξεχειλίσει το κύπελλο. Προς τούτο, δεν έχετε παρά να παραστήσετε γραφικά την τιμή του συντελεστή επιφανειακής τάσης (από τον παρακάτω πίνακα που θα τον συμπληρώσετε βάσει των πειρα-

ματικών αποτελεσμάτων σας) συναρτήσει του πλήθους των κερμάτων τα οποία προσθέσατε στο κύπελλο ώσπου να ξεχειλίσει.

Υγρό	<i>a</i> (dyn/cm), 20°C	Πλήθος πενταδράχμων
αλατόνερο (20%)	79	
νερό	73	
ισοπροπυλική αλκοόλη (90%)	22	

Είναι γραμμική η σχέση που προκύπτει; Αφού ετοιμάσετε ποικίλα διαλύματα ισοπροπυλικής αλκοόλης και νερού, μετρήστε τους συντελεστές επιφανειακής τάσης τους στηριζόμενοι στο πλήθος των πενταδράχμων που απαιτούνται για να ξεχειλίσουν τα αντίστοιχα κύπελλα. Προσδιορίστε κατά πόσον ο συντελεστής επιφανειακής τάσης συνιστά ή όχι γραμμική συνάρτηση της συγκέντρωσης. Τέλος, μετρήστε τους συντελεστές επιφανειακής τάσης άλλων υγρών (για παράδειγμα, διαλυμάτων ξιδιού και σαπουνιού) που έχετε διαθέσιμα στην κουζίνα του σπιτιού σας.

Γιατί διαφέρουν οι συντελεστές επιφανειακής τάσης της ισοπροπυλικής αλκοόλης και του αλατόνερου από εκείνον του καθαρού νερού; Πώς επιδρά το απορρυπαντικό στο συντελεστή επιφανειακής τάσης του νερού; Μήπως έτσι εξηγούνται ορισμένες ιδιότητες των απορρυπαντικών οι οποίες τα καθιστούν κατάλληλα για το πλύσιμο των ρούχων;

Κατά μία έννοια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα μόρια ενός υγρού είναι συγκολλημένα το ένα με το άλλο με κάποιου ειδους μοριακή «κόλλα». Ένα υγρό όπως η ισοπροπυλική αλκοόλη έχει πολύ ασθενέστερη «κόλλα» απ' ό,τι το νερό, γεγονός που καθιστά ευκολότερη τη διείσδυση διά της επιφάνειάς του. Μία και τα μόρια που συγκροτούν την επιφάνεια κολλούν μεταξύ τους, δεν δυσκολεύομαστε να αντιληφθούμε γιατί η επιφάνεια του υγρού ανθίσταται στις διεισδύσεις.

Η επιφανειακή τάση του νερού δι-

αδραμάτισε κεντρικό ρόλο στην εξέλιξη της υδρόβιας ζωής, δεδομένου ότι το υπολειμματικό υλικό που επικάθηται στις επιφάνειες των νερόλακκων παρέχει καταφύγιο και τροφή σε ποικίλους οργανισμούς. Επιπλέον, ο υψηλός συντελεστής επιφανειακής τάσης του νερού επιτρέπει σε ορισμένα έντομα να βαδίζουν πάνω στην επιφάνειά του. Μολονότι τα έντομα έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από το νερό, εντούτοις, όταν το βάρος τους κατανέμεται κατά μήκος των απλωμένων άκρων τους, δεν ασκεί πίεση ικανή να υπεριοχύσει της επιφανειακής τάσης του νερού.

## Πείραμα 3

Γεμίστε και πάλι τρία κύπελλα μέχρι τα χείλη, το ένα με νερό, το άλλο με ισοπροπυλική αλκοόλη περιεκτικότητας 91% και το τρίτο με αλατόνερο. Χρησιμοποιήστε τσιμπδάκια φρυδιών για να τοποθετήσετε προσεκτικά ένα μικρό κομμάτι χαρτί πάνω στην επιφάνεια του νερού. Αν δεν γίνουν όπως πρέπει, θα διαπιστώσετε ότι το κομμάτι του χαρτιού δεν θα διαπεράσει την υδάτινη επιφάνεια, μολονότι, ως βαρύτερο από το νερό, θα τη βαθουλώσει.

Προβλέψτε, και κατόπιν διαπιστώστε πειραματικά, εάν η επιφάνεια των δύο άλλων υγρών θα αντέξει το κομματάκι του χαρτιού ή όχι. Καθώς το χαρτάκι ηρεμεί στην επιφάνεια του νερού, προσθέστε μία σταγόνα υγρού απορρυπαντικού και παρατηρήστε τι θα γίνει.

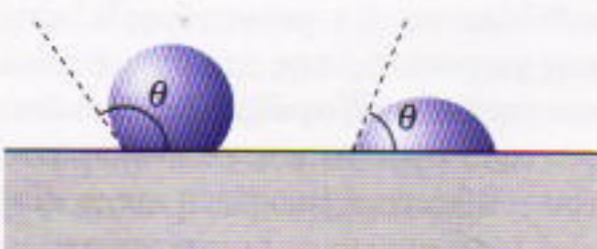
Όλα τα υγρά, εφόσον απουσιάζει κάθε άλλη εξωτερική δύναμη, τείνουν να ελαχιστοποιήσουν το εμβαδόν της επιφάνειάς τους. Επειδή η σφαίρα έχει τον ελάχιστο δυνατό λόγο εμβαδού επιφανείας προς όγκο, οι ελεύθερα αιωρούμενοι όγκοι υγρών προσλαμβάνουν μορφή σφαίρας. Αυτό οφείλεται, και πάλι, στις έλξεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα μόρια των υγρών. Για παράδειγμα, αν ρίξετε νερό σε ένα αμάξι που μόλις έχει γυαλιστεί με κερί, το νερό, αντί να απλωθεί σ' ολόκληρη την επιφάνεια, σχηματίζει σχεδόν σφαιρικά σταγονίδια. Τα μόρια του νερού προ-

1. Την ισοπροπυλική αλκοόλη μπορείτε να την προμηθευθείτε από τα περισσότερα φαρμακεία υπό μορφή διαλυμάτων 91%. Για να προστατέψετε την επιφάνεια του τραπέζιου από τα υγρά που θα ξεχειλίσουν, συνιστάται να τοποθετήσετε κάτω από κάθε κύπελλο ένα πάτο.

τιμούν να κολλούν μεταξύ τους πάρα με το κερί. Εντούτοις, τα μόρια του νερού αλληλεπιδρούν έντονα με το γυαλί και τις υφασμάτινες επιφάνειες. Συνεπώς, τα μόρια του νερού θα απλωθούν πάνω σε τέτοιες επιφάνειες ή, όπως λέμε, θα τις διαβρέξουν. Το αν κάποιο συγκεκριμένο υγρό θα σχηματίσει σταγονίδια πάνω σε μια επιφάνεια ή θα τη διαβρέξει εξαρτάται από το αν η επιφανειακή τάση του υγρού υπερβαίνει τις ελκτικές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στο υγρό και την άλλη επιφάνεια.

## Πείραμα 4

Προσδιορίστε το σχήμα των σταγόνων που σχηματίζουν διάφορα υγρά πάνω σε ποικίλες επιφάνειες. Με τη βοήθεια σταγονομέτρου, τοποθετήστε μία σταγόνα από κάθε υγρό (νερό, αλατόνερο και ισοπροπυλική αλκοόλη) σε ένα κομμάτι κερωμένου χαρτιού, γυαλιού και σε αλουμινόχαρτο. Σκαριφήστε τη μορφή των σταγόνων και μετρήστε τη γωνία των σταγόνων ως προς την επιφάνεια (γωνία συνεπαφής) όπως φαίνε-



Σχήμα 2

Σταγονίδια διαφορετικών υγρών σε μια επιφάνεια. Το σταγονίδιο στα αριστερά δεν διαβρέχει την επιφάνεια, σε αντίθεση με εκείνο που βρίσκεται στα δεξιά και τη διαβρέχει.

ται στο Σχήμα 2. Μπορείτε να συσχετίσετε την τιμή του συντελεστή επιφανειακής τάσης του υγρού με τη μορφή του σταγονιδίου που σχηματίζει; Πώς φαντάζεστε ότι θα επηρέασε η προσθήκη απορρυπαντικού την ικανότητα του νερού να διαβρέχει μια επιφάνεια;

Το καθένα από τα παραπάνω πειράματα κατέδειξε ότι τα επιφανειακά μόρια των υγρών διαφέρουν, κατά κάποιον τρόπο, από τα μόρια που ανήκουν στον κύριο δύκο του υγρού. Η διαφορά αυτή έχει ως αποτέλεσμα να ασκείται στα επιφανειακά μόρια

μια ελκτική δύναμη προς τα έσω, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση επιφανειακής τάσης. Επιπλέον, όλα τούτα τα πειράματα σας παρακίνησαν να αντιμετωπίσετε τα υγρά ως αποτελούμενα από τεράστια πλήθη μικροσκοπικών μορίων μεταξύ των οποίων αναπτύσσονται έλξεις που η έντασή τους ποικίλλει. Φανταστήκατε τα μόρια! Και στηριχτήκατε σ' αυτό το μοριακό μοντέλο για να κατανοήσετε τις παρατηρήσεις σας γύρω από την επιφανειακή τάση των υγρών.

Η ταχύτητα απογείωσης της Stacey έχει μετρηθεί και βρέθηκε ίση με 8,3 m/s. Εισάγοντας την τιμή αυτή στην εξίσωσή μας, διαπιστώνουμε ότι το κέντρο μάζας της ανέρχεται κατά 3,7 m. Κατά τη στιγμή της απογείωσης, ωστόσο, το κέντρο μάζας της Stacey βρίσκεται σε ύψος 1 m περίπου από το έδαφος, ενώ, χάρη στις τεχνικές που χρησιμοποιεί η παγκόσμια ρεκορντγούμαν, το κέντρο μάζας της περνά στην πραγματικότητα 20 cm κάτω από τον πήχη. Επιπλέον, όντας άριστη γυμνάστρια, η Stacey μπορεί να φέρει το σώμα της σε θέση κατακόρυφης στήριξης στα χέρια, προσθέτοντας έτσι άλλα 70 cm περίπου στην επίδοσή της. Συνυπολογίζοντας όλους αυτούς τους παράγοντες, διαπιστώνουμε ότι το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να φτάσει η Stacey ανέρχεται στα 5,6 m. Φυσικά, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αποκλείεται να μην υπάρξουν και κάποιες απώλειες μηχανικής ενέργειας (οφειλόμενες, για παράδειγμα, στη μετατροπή ορισμένου ποσοστού της σε θερμότητα), οι οποίες τελικά δεν πρόκειται να επιτρέψουν στην αθλήτρια μας να πραγματοποιήσει ένα τόσο μεγάλο άλμα. Έστω κι έτσι, δύναται, το αποτέλεσμά μας δείχνει σαφέστατα ότι η Stacey διαθέτει πολλά περιθώρια για περαιτέρω βελτίωση.

Επιπλέον, το αποτέλεσμά μας δείχνει πόσο ζωτική σημασία έχει για την επίτευξη μεγάλων επιδόσεων η ικανότητα της επικοντίστριας να τρέχει γρήγορα, καθότι το ύψος του άλματος είναι ανάλογο προς το τετράγωνο της ταχύτητας απογείωσης. Πάντως, ένα πράγμα πρέπει να θεωρείται βέβαιο: Το παγκόσμιο ρεκόρ γυναικών αναμένεται να συνεχίσει να ανεβαίνει ραγδαία κατά τα προσεχή λίγα χρόνια.

Ο δρ Peter Blanchonette είναι μαθηματικός με ειδίκευση στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, και τρέφει ζωηρό ενδιαφέρον για τη φυσική του αθλητισμού. Ο δρ Mark Stewart είναι ανώτερος λέκτορας στα οικονομικά υπήρξε προπονητής της Emma George από το 1994 ως το τέλος του 1997, περίοδο κατά την οποία η Emma έκανε δέκα παγκόσμια ρεκόρ.

$$h_{\max} = \frac{v^2}{2g}.$$

# Η κυματομηχανική του Erwin Schrödinger

A. Vasiliyev

**T**Ο ΟΝΟΜΑ ΤΟΥ ΔΙΑΠΡΕΠΟΥΣ ΦΥΣΙΚΟΥ Erwin Schrödinger έχει συνδεθεί άρρηκτα με τη δημιουργία και την ανάπτυξη της κβαντικής μηχανικής. Η κυματική του εξίσωση αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα της συγκεκριμένης θεωρίας και εξασφάλισε στον Schrödinger μια περίοπτη θέση στην ιστορία της φυσικής.

Η δημιουργικότητα του Schrödinger χαρακτηρίζεται από πραγματικά εκπληκτική ευρύτητα. Στη μεγάλη αυτή φυσιογνωμία οφείλονται σημαντικές, ενίστε δε και καθοριστικές, συμβολές στην κβαντική θεωρία και την ηλεκτροδυναμική, στη φυσική των στοιχειώδων σωματιδίων και των κοσμικών ακτίνων, στη στατιστική μηχανική και τη θερμοδυναμική, στη γενική θεωρία της σχετικότητας, την κοσμολογία και τη θεωρία πεδίου. Διεξήγαγε επίσης πρωτοποριακή διεπιστημονική έρευνα στη φυσική και τη βιολογία και συνέγραψε εργασίες πάνω στη φιλοσοφία των φυσικών επιστημών.

Το πεδίο των ενδιαφερόντων του Schrödinger εκτεινόταν πολύ πέρα από τα όρια της φυσικής και των φυσικών επιστημών εν γένει. Υπήρξε ειδήμων στην αρχαία και ανατολική φιλοσοφία, είχε μελετήσει ευρύτατα την παγκόσμια λογοτεχνία, ήταν βαθύς γνώστης πολλών γλωσσών, συ-

μπεριλαμβανομένων της λατινικής και της αρχαίας ελληνικής, και προτιμούσε να διαβάζει τα κλασικά έργα της λογοτεχνίας στη γλώσσα που γράφηκαν. Και όλα αυτά δεν εξαντλούν την πολυμέρεια των δραστηριοτήτων του: ο Schrödinger καταγίνοταν με τη γλυπτική σε πηλό και έγραφε ποίηση —μάλιστα, δημοσίευσε και ένα βιβλίο με στίχους του. Το ευρύ και εγκυκλοπαιδικό πνεύμα του είχε προκαλέσει μεγάλη εντύπωση στους συγχρόνους του.

Ο ταραγμένος ρους των γεγονότων του 20ού αιώνα (προπάντων δε οι δύο παγκόσμιοι πόλεμοι) άσκησαν εντονότατη επίδραση στη ζωή του Schrödinger. Εξαναγκάστηκε κατ' επανάληψη να μεταναστεύσει από τη μια ευρωπαϊκή χώρα στην άλλη, για να επιστρέψει στη γενέτειρά του, την Αυστρία, μόνο τα ύστερα χρόνια του βίου του.

Ο Erwin Schrödinger γεννήθηκε το 1887 στη Βιέννη, όπου και αποφοίτησε από ένα από τα πλέον φημισμένα σχολεία της αυστριακής πρωτεύουσας. Αφού πέρασε τις τελικές του εξετάσεις πανηγυρικά, εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης, όπου επέλεξε να ειδικευτεί στη φυσική και τα μαθηματικά. Ως μαθητής του Friedrich Hasenohrl (1874-1917), ενός εξέχοντος αντιπροσώπου της σχολής φυσικής της Βιέννης, ο Schrödinger

σπούδασε διεξοδικά τις μαθηματικές μεθόδους της φυσικής. Ήδη από τα φοιτητικά του χρόνια συνδύαζε τη λαμπρή φυσική διαίσθηση με μια σχεδόν απαράμιλλη δεξιοτεχνία στο χειρισμό αυτών των μεθόδων. Άρχισε την επιστημονική του σταδιοδρομία στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης επιδιδόμενος στη μελέτη της κλασικής μηχανικής, της κίνησης Brown και της θεωρίας σφαλμάτων. Ωστόσο, σύντομα προσέλκυσε το ενδιαφέρον του η κβαντική θεωρία, η οποία ήδη από τότε σημείωνε εντυπωσιακές επιτυχίες.

Το 1920, ο Schrödinger μετανάστευσε στη Γερμανία, όμως λίγο αργότερα προσκλήθηκε να αναλάβει τη διεύθυνση του Τμήματος Θεωρητικής φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης. Την ίδια περίου εποχή, ο γάλλος φυσικός Louis de Broglie ανέπτυσσε την ιδέα ότι ο κυματοσωματιδιακός δυσμός του φωτός (τον οποίο είχε εισαγάγει ως αξίωμα ο Άλμπερτ Αϊνστάιν για να εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο) επιβαλλόταν να επεκταθεί και στα υλικά σωματιδία. Σύμφωνα με τον de Broglie, κάθε σωματίδιο που διαθέτει ενέργεια και ορμή μπορεί να χαρακτηριστεί μέσω μιας συχνότητας ταλάντωσης και κάποιου μήκους κύματος. Ο Schrödinger, ο οποίος εξοικειώθηκε με τη συγκεκριμένη θεω-

ρία το 1925, άντλησε από αυτή την έμπνευση να οικοδομήσει μια κυματομηχανική ικανή να περιγράψει τις φυσικές ιδιότητες των ατόμων. Το επόμενο κιόλας έτος άρχισε να δημοσιεύει μια σειρά εργασιών υπό τον κοινό τίτλο «Η κβάντωση ως πρόβλημα ιδιοτιμών», η οποία έμελλε μεν να καθιερώθει εν καιρώ ως ένα από τα κλασικά έργα της επιστημονικής βιβλιογραφίας, αλλά που, το σπουδαιότερο, έθετε διαμιάς τη μέχρι τότε μυστηριώδη θεωρία της κυματομηχανικής σε στέρεα θεμέλια.

Τις έννοιες της κβαντικής φυσικής που τελούσαν εν χρήσει εκείνη την εποχή τις χαρακτηρίζαν, από πολλές απόψεις, ετερογένεια και αντιφατικότητα. Στο περίφημο ατομικό μοντέλο του Bohr, επί παραδείγματι, οι νόμοι της κλασικής μηχανικής και η ηλεκτροδυναμική εφαρμόζονταν για να υπολογιστούν οι τροχιές των ηλεκτρονίων και οι φασματικές γραμμές του εκπεμπόμενου (ή απορροφούμενου) φωτός, ενώ παράλληλα επιβάλλονταν και οι ασυμβίβαστες με την κλασική φυσική κβαντικές συνθήκες για να εξηγηθεί η ευστάθεια των ηλεκτρονιακών τροχιών. Ένα σημαντικό βήμα προς την άρση αυτής της αντίφασης πραγματοποίησε το 1925 ο Werner Heisenberg, που με το έργο του έθεσε τις βάσεις της μητρομηχανικής (την οποία ολοκλήρωσε στη συνέχεια ο ίδιος σε συνεργασία με τον Max Born και τον P. Jordan).

Αφετηρία για τον Heisenberg στάθηκε η αρχή ότι, όταν μελετάμε το μικρόκοσμο, πρέπει να ενδιαφερόμαστε όχι για ποσότητες που είναι αδύνατο να παρατηρηθούν (τέτοιες όπως οι τροχιές των ηλεκτρονίων ή οι περίοδοι περιφοράς τους) αλλά για τις τιμές εκείνες οι οποίες πράγματι επιδέχονται πειραματική μέτρηση —όπως, λόγου χάρη, οι συχνότητες του εκπεμπόμενου φωτός και οι εντάσεις των φασματικών γραμμών. Ο Heisenberg στόχευε στη διατύπωση μιας αυστηρής κβαντικής θεωρίας η οποία, κατ' αναλογία προς την κλασική μηχανική, θα περιστρέφοταν εξολοκλήρου γύρω από σχέσεις που συνδέουν αποκλειστικά και μόνο παρατηρήσιμα μεγέθη. Το τυπικό μα-

θηματικό οπλοστάσιο της μητρομηχανικής του σύντομα έφτασε στο απαιτούμενο επίπεδο εκλέπτυνσης και προσέφερε ακριβείς λύσεις σε πολλά προβλήματα φυσικής.

Ο Schrödinger δεν αγνοούσε τα νέα ρεύματα ιδεών που διαμορφώνονταν στην κβαντική μηχανική, όμως δεν τον ικανοποιούσε η μητρομηχανική, αφ' ενός μεν διότι έτρεφε έντονη αποστροφή για τα περίπλοκα τεχνάσματά της, αφ' ετέρου δε επειδή αδυνατούσε να σχηματίσει οποιαδήποτε αισθητοποίησή της. Καθώς η εργασία του τον κρατούσε στη Ζυρίχη, ο Schrödinger βρισκόταν μακριά από τα κέντρα των εξελίξεων στην ατομική φυσική, ενώ η προσωπική του επαφή με όσους διαδραμάτιζαν ηγετικό ρόλο στην ανάπτυξή της ήταν περιορισμένη στο ελάχιστο. Επιπλέον, η ανεξάρτητη ιδιοσυγκρασία του δεν του επέτρεπε να προσδεθεί στη μία ή την άλλη θεωρία. Ως αποτέλεσμα όλων τούτων των παραγόντων, ο Schrödinger ακολούθησε τη δική του προσωπική πορεία προς την κυματομηχανική, θεωρώντας το άτομο ως ένα ταλαντούμενο σύστημα και εισάγοντας αξιωματικά την ισοδυναμία όλων των δυνατών φυσικών ταλαντώσεων (ιδιοταλαντώσεων) αυτού του συστήματος με τις ευστάθεις ενεργειακές καταστάσεις του ατόμου. Η εξοικείωσή του με τη θεωρία των ταλαντώσεων βοήθησε τον Schrödinger να διατυπώσει τη θεμελιώδη φυσική ιδέα μέσα στο πλαίσιο του προβλήματος των εξισώσεων ιδιοτιμών για τους διαφορικούς τελεστές.

Για να κατασκευάσει μια νέα ατομική θεωρία στη βάση της υπόθεσης του de Broglie, ο Schrödinger στηρίχτηκε σε μεγάλο βαθμό στη βαθιά γνώση που διέθετε της αναλυτικής μηχανικής του William Hamilton. Ήδη από τα μέσα του 19ου αιώνα, ο σπουδαίος αυτός ιρλανδός μαθηματικός είχε προσδώσει στη θεωρητική μηχανική την τελική της μορφή και είχε εδραιώσει τις τυπικές σχέσεις που συνδέουν την κλασική μηχανική με τη γεωμετρική οπτική. Η οπτικομηχανική αναλογία τον βοήθησε να διατυπώσει τους βασικούς νόμους τούτων των φαινομενικά διαφορετικών επιστημών μέσω μαθημα-

τικώς όμοιων εξισώσεων. Στο πλαίσιο της προαναφερθείσας οπτικομηχανικής αναλογίας, οι νόμοι της κίνησης ενός υλικού σημείου με δεδομένη ενέργεια εντός κάποιου στατικού πεδίου δυνάμεων μοιάζει με τη διάδοση μιας μονοχρωματικής φωτεινής δέσμης σε ένα οπτικό μέσο με μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης. Η σταθερή τιμή της ενέργειας του υλικού σημείου αντιστοιχεί στη σταθερή συχνότητα ταλάντωσης του φωτός, ενώ η ταχύτητα του υλικού σημείου αντιστοιχεί στην ομαδική ταχύτητα που χαρακτηρίζει τη διάδοση του φωτός εντός του οπτικού μέσου.

Ο Schrödinger αποφάσισε να επεκτείνει τη μαθηματική αναλογία μεταξύ της οπτικής και της μηχανικής στις κυματικές ιδιότητες του φωτός και της ύλης. Κατ' αυτό τον τρόπο κατόρθωσε να ξεπεράσει αναρίθμητα προβλήματα, και τελικώς εξήγαγε την περίφημη κυματική εξίσωσή του για το άτομο του υδρογόνου:

$$\nabla^2 \psi + (2m/h^2)(E + e^2/r)\psi = 0,$$

όπου με  $\psi$  παριστάνεται η κυματοσυνάρτηση, ενώ με  $m$  συμβολίζεται η μάζα του ηλεκτρονίου, με  $e$  το φορτίο του, και με  $r$  η απόστασή του από τον πυρήνα· το  $E$  δηλώνει την ολική ενέργεια του συστήματος και, τέλος,  $h$  είναι η περίφημη ανηγμένη σταθερά του Planck. Το σύμβολο  $\nabla^2$  (ο τελεστής του Laplace) αντιπροσωπεύει μια ειδική μαθηματική πράξη: την απόκλιση της κλίσης μιας βαθμωτής συνάρτησης. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ο εν λόγω τελεστής ισούται με το άθροισμα των δεύτερων παραγώγων ως προς καθεμία από τις χωρικές συντεταγμένες, λαμβάνοντας έτσι τη μορφή

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Η χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger συνιστά μια γενίκευση της υπόθεσης του de Broglie αναφορικά με τις κυματικές ιδιότητες της ύλης. Από μαθηματική άποψη, δεν πρόκειται παρά για μια γραμμική διαφορική εξίσωση της οποίας οι λύσεις περιγράφουν στάσιμα κύματα. Οι ε-

πιτρεπόμενες ηλεκτρονιακές τροχιές στο ατομικό μοντέλο του Bohr μπορούσαν πλέον να εκλαμβάνονται ως φυσικές ταλαντώσεις παρόμοιες με εκείνες μιας τεταμένης χορδής, η οποία ταλαντώνεται μόνο σε ένα σύνολο διακριτών συχνοτήτων που καθορίζονται από το μήκος της και από τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της.

Με τη βοήθεια της εξίσωσής του, ο Schrödinger κατόρθωσε να υπολογίσει τις ενεργειακές στάθμες διαφόρων μορφών μικροσκοπικού ταλαντωτή. Επιλέγοντας το άτομο του υδρογόνου ως παράδειγμα τέτοιου ταλαντωτή, κατέδειξε ότι οι θεωρητικά εξαγόμενες ενεργειακές στάθμες είτε συμπίπτουν με εκείνες που λαμβάνονται από τη μητρομηχανική του Heisenberg είτε βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Χάρη στο γεγονός ότι από μαθηματική άποψη στηριζόταν στις ευρέως γνωστές μεθόδους της μαθηματικής φυσικής, η θεωρία του Schrödinger κατέστη δημοφιλέστερη μεταξύ των φυσικών απ' ό, τι η θεωρία των μητρών του Heisenberg. Επιπλέον, στην τρίτη του εργασία πάνω στην κβαντωση, ο Schrödinger απέδειξε την πλήρη μαθηματική ισοδυναμία της μητρομηχανικής και της κυματομηχανικής. Οι κυματοσυνάρτησεις του επέτρεπαν τον υπολογισμό των μητρών του Heisenberg και αντιστρόφως.

Μολονότι με το έργο του Heisenberg και του Schrödinger ολοκληρώθηκε το οικοδόμημα της κβαντικής θεωρίας, δεν έκλεισε εντούτοις και η συζήτηση για τη φυσική της σημασία. Σε κυρίαρχο πρόβλημα αναδείχθηκε πλέον η φύση της κυματοσυνάρτησης. Ως προς αυτό το ζήτημα, οι φυσικοί διαιρέθηκαν σε δύο στρατόπεδα. Για τον Schrödinger, η εγκυρότητα της κλασικής έννοιας της κίνησης ήταν αδιάσειστη· έτσι, απέδιδε άμεση φυσική σημασία στην κυματοσυνάρτηση και εξ αυτού έκανε λόγο για ταλαντωτική κίνηση στον τρισδιάστατο χώρο. Το κβαντικό άλμα που συντελούνταν στο άτομο κατά τη μετάβαση του από τη μία κατάσταση στην άλλη ερμηνευόταν ως βαθμιαίος μετασχηματισμός ο οποίος

οδηγούσε το σύστημα από την κατάσταση που αντιστοιχεί σε φυσικές ταλαντώσεις με ενέργεια  $E_m$  στην κατάσταση με ενέργεια  $E_n$ , όπου η πλεονάζουσα ενέργεια ακτινοβολείται ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Εντός αυτού του πλαισίου, το ηλεκτρόνιο θεωρούνταν ως ένα φορτισμένο νέφος που περιέβαλλε τον πυρήνα του ατόμου και μπορούσε να παρουσιάζει ενεργειακές μεταπτώσεις παράγοντας ένα χωρικά κατανεμημένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο διαδίδεται με συνεχή τρόπο χωρίς οιαδήποτε κβαντικά άλματα. Κατ' αυτό τον τρόπο καθίστατο δυνατή η ομαλή συνύπαρξη της κβαντικής μηχανικής με την κλασική φυσική, πράγμα που έθελε τον Schrödinger και την πλειάρδα των επιφανών φυσικών οι οποίοι γαλουχήθηκαν με τα νάματα της κλασικής φυσικής: τον Louis de Broglie, τον Άλμπερτ Αϊνστάιν, τον Max von Laue και τον Max Planck.

Η «παλιά φρουρά», ωστόσο, είχε να αντιμετωπίσει αντιπάλους μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονταν εξίσου καταξιωμένοι φυσικοί: ο Wolfgang Pauli, ο Werner Heisenberg και ο Niels Bohr. Έπειτα από εντατική εργασία πάνω σε τούτες τις επίμαχες θεωρίες διαποστώθηκε ότι η ημικλασική ερμηνεία της κυματομηχανικής ήταν εσφαλμένη, καθώς επίσης και ότι αποκλειόταν να κατασκευαστεί μια συνεπής κβαντική θεωρία εξολοκλήρου στη βάση των μαθηματικών των κυμάτων χωρίς την έννοια του κυματοσωματιδιακού δυσμού.

Έναν πιθανό δρόμο για το ξεπέρασμα τούτου του αδιεξόδου υπέδειξε η έρευνα πάνω στις κρούσεις των ατόμων την οποία διεξήγαγε ο Max Born το 1926. Η ανάλυση της σκέδασης των ηλεκτρονίων και των σωματιδίων άλφα από πυρήνες προσέφερε το κλειδί για να κατανοηθεί η σημασία της κυματοσυνάρτησης του Schrödinger: το τετράγωνο του μέτρου της παρίστανε την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε ένα δεδομένο σημείο του χώρου. Κατά συνέπεια, η κυματοσυνάρτηση περιγράφει μεμονωμένα συμβάντα (όπως η εκπομπή ενός κβαντού φωτός) μόνο κατά το ότι καθορίζει την πιθανότητα πραγματοποίησή τους. Αυτή η ερμηνεία το-

ποθέτησε την κυματομηχανική σε στέρεα φυσική βάση, και η νεωτεριστική θεωρία που προέκυψε δεν άργησε να αποκτήσει σχετική πληρότητα και συνέπεια. Επί του παρόντος, η στατιστική ερμηνεία της κβαντικής θεωρίας χαίρει καθολικής αναγνώρισης.

Μολονότι οι ελπίδες του Schrödinger για τη δημιουργία κάποιου είδους κλασικής θεωρίας πεδίου για τα ατομικά φαινόμενα διαφεύστηκαν, η κυματομηχανική του αποτέλεσε ένα γιγαντιαίο βήμα στην ανάπτυξη των μαθηματικών μεθόδων της κβαντικής θεωρίας. Επιπλέον, βοήθησε πολλούς φυσικούς να κατανοήσουν και να νιώσουν την ουσία της. Στα χρόνια που ακολούθησαν, ο Schrödinger εργάστηκε εντατικά πάνω στα πολλά θεωρητικά προβλήματα της κυματομηχανικής και τις αναρίθμητες πρακτικές τους εφαρμογές. Κατά την περίοδο αυτή συνέγραψε σημαντικότατες εργασίες πάνω στη θεωρία διαταραχών.

Ος δημιουργός της κυματομηχανικής, ο Erwin Schrödinger βρέθηκε να κατέχει μια θέση ανάμεσα στους διαπρεπέστερους φυσικούς της εποχής του. Το 1933, μάλιστα, τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ —μαζί με τον Paul Dirac—, για την εκ μέρους τους «ανακάλυψη νέων μορφών ατομικής θεωρίας». ◻

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα...

- A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Η φύση του φωτός», Ιαν./Φεβ. 1997.
- A. Stasenko, «Δεν έχουν αποκαλυφθεί όλα», Ιαν./Φεβ. 1997.
- A. Sakharov, «Υπάρχει στοιχειώδες μήκος;», Ιούλ./Αύγ. 1997.
- D. Sviridov και R. Sviridova, «Η κβαντική φύση του φωτός», Ιαν./Φεβ. 1999.
- A. Korzhuyev, «Το κβαντικό άλμα του Bohr», Μάρ./Απρ. 1999.
- A. Semenov, «Ο πλούτος του τίποτα», Σεπ./Οκτ. 1999.
- A. Levashov, «Τα πειράματα των Frank και Hertz», Μάιος/Ιούν. 2000.

# Αυτοκίνητοι εκτοξευτήρες νερού

A. Stasenko

**M**ΙΑ ΦΟΡΑ ΚΙ ΕΝΑΝ ΚΑΙΡΟ, ΜΙΑ ηλικιωμένη Μοσχοβίτισσα ζήτησε από τον εγγονό της, ο οποίος ήταν φοιτητής στο Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας, να ποτίσει το περιβόλι της. Δεν της έλειπε τίποτε από τον χρειαζούμενο εξοπλισμό: βρύση, λάστιχο ποτίσματος, και όλα τα σχετικά. Υπήρχε ένα μόνο πρόβλημα: ο εγγονός της όχι μόνο διακρινόταν για την εξυπνάδα του, αλλά και του άφεσε υπερβολικά η μελέτη. Και είχε τύχει να διαβάσει ότι στην αρχαιότητα, το 450 π.Χ. ή κάπου εκεί γύρω, ένας αρχαίος Έλληνας εξέφρασε την άποψη ότι η σωματική εργασία θα έπρεπε να αντικατασταθεί, κατ' αρχάς μερικώς και στη συνέχεια ολοκληρωτικά, με «αυτόματα». Το πιγούνι του φοιτητή μας έφτασε να ακουμπά στο στήθος του καθώς προσπαθούσε να βρει έναν τρόπο να θέσει σε εφαρμογή τη βαθυστόχαστη αυτή σκέψη. Θυμήθηκε τον υδροτροχό του Segner και φαντάστηκε ένα σωλήνα με τα άκρα του καμπυλωμένα σε αντίθετες κατευθύνσεις, προσαρμοσμένο πάνω σε έναν άλλο σωλήνα κατά τέτοιον τρόπο ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, τιθέμενος σε κίνηση από τη δύναμη του ρέοντος νερού. Με το νου του, ο φοιτητής μας προσέθεσε τις απαραίτητες επεξηγητικές σημειώσεις στο φανταστικό του μηχάνημα (Σχήμα 1), και συνέχισε να σκέφτεται.

Αν σε ένα σωλήνα με εμβαδόν διατομής  $S$  το νερό ρέει με ταχύτητα  $v_v$ , τότε από το άκρο του σωλήνα εκρέ-

ει ανά δευτερόλεπτο ποσότητα νερού ίση με  $Q = \rho_v S$ . Δεδομένου ότι το νερό είναι πρακτικώς ασυμπίεστο (με άλλα λόγια, η πυκνότητά του  $\rho_v$  δεν μεταβάλλεται), το νερό κινείται με την ίδια ταχύτητα σε όλες τις διατομές του σωλήνα που έχουν το ίδιο εμβαδόν  $S$ . (Εδώ ο φοιτητής μας διαισθάνθηκε ότι εφάρμοζε την αρχή διατήρησης της μάζας.)

Αν ένας σωλήνας μήκους  $2l$  αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  λόγω της δύναμης αντίδρασης του νερού, τα άκρα του σωλήνα κινούνται με εφαπτομενική ταχύτητα μέτρου  $\omega l$ , η οποία έχει κατεύθυνση αντίθετη από την ταχύτητα  $v_v$  του εκρέοντος νερού. Συνεπώς, στο σύστημα αναφοράς του περιβολίου, η ταχύτητα του εκτοξευόμενου νερού ισούται με  $v_0 = v_v - \omega l$ . Άρα, η ροή ορμής δι-

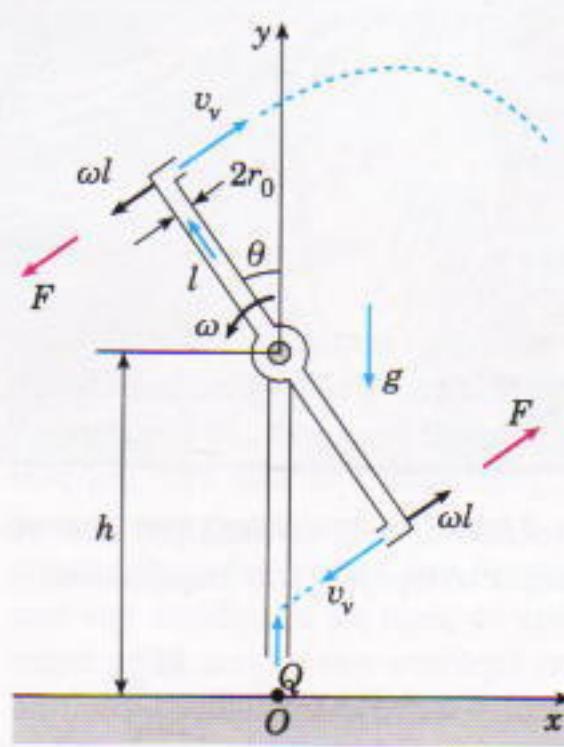
αμέσου καθενός από τα δύο στόμια του σωλήνα δίνεται από την έκφραση  $Q(v_v - \omega l)$ , η οποία έχει διαστάσεις  $(\text{kg/s}) \cdot (\text{m/s}) = \text{N}$ . Ωστε η ροή ορμής έχει τις ίδιες διαστάσεις με τη δύναμη. Οποία έκπληξη!

Έχουμε λοιπόν ένα ζεύγος δυνάμεων  $F$ , ίσων κατά μέτρο, παράλληλων και αντίρροπων. Εδώ, το  $l$  αντιπροσωπεύει το μοχλοβραχίονα της καθεμιάς απ' αυτές τις δυνάμεις ως προς τον άξονα περιστροφής. Κατά συνέπεια, στο σωλήνα ασκείται μια ροπή

$$F \cdot 2l = 2Q(v_v - \omega l)l. \quad (1)$$

Πόση γωνιακή ταχύτητα μπορεί να αναπτύξει ο σωλήνας; Υπάρχουν άραγε κάποιοι παράγοντες που η δράση τους θα ήταν ικανή να αποτρέψει την απεριόριστη επιτάχυνση του περιστρεφόμενου σωλήνα; Φυσικά και υπάρχουν. Για παράδειγμα, η ροπή που παράγει η τριβή στον ομφαλό (μπορούμε να γλιτώσουμε ποτέ από την τριβή);, η αντίσταση του αέρα, κ.ο.κ. Ο φοιτητής μας λίγο έλειψε να ενδώσει στον πειρασμό και να εκστομίσει το στερεότυπο «ας αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα», αλλά, ως ευσυνειδητος επιστήμων, την τελευταία στιγμή συγκρατήθηκε και αποφάσισε να προχωρήσει σε μια αριθμητική εκτίμηση.

Ήξερε ότι η δύναμη της αντίστασης που δρα σε ένα κινούμενο αντικείμενο είναι ανάλογη με το τετράγωνο της σχετικής ταχύτητας  $v$  του αντικειμένου ως προς τον αέρα, με το εμβαδόν  $S_\perp$  της μετωπικής του ε-



Σχήμα 1

πιφάνειας και με την πυκνότητα  $\rho$  του αέρα. Προτού, λοιπόν, αποφανθούμε ότι επιτρέπεται να αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, οφείλουμε πρώτα να τη συγκρίνουμε με κάποια άλλη δύναμη που να θεωρείται ουσιώδης για την εξεταζόμενη κίνηση, και ως τέτοια αβίαστα προβάλλει η ροή ορμής του νερού ( $Qu_v$ ). Ο λόγος των δύο αυτών δυνάμεων στο σύστημα αναφοράς του σωλήνα είναι

$$\frac{\rho v^2 S_\perp}{Qu_v} \leq \frac{\rho \cdot (\omega l)^2 \cdot 2r_0 l}{\rho_v \pi r_0^2 v_v \cdot v_v} \sim \\ \sim \left( \frac{\rho}{\rho_v} \right) \left( \frac{\omega l}{v_v} \right)^2 \left( \frac{l}{r_0} \right).$$

Για να κάνουμε ακόμη ισχυρότερη τούτη την ανισότητα, αντικαταστήσαμε την ταχύτητα  $v$  με τη μέγιστη τιμή της,  $\omega l$ , η οποία σημειώνεται στο άκρο του σωλήνα και, φυσικά, παραβλέψαμε το γεγονός ότι ο περιστρεφόμενος σωλήνας συμπαρασύρει στην κίνησή του τα αμέσως γειτονικά του στρώματα του περιβάλλοντος αέρα. Αλίμονο αν αφήναμε μια τέτοια μικρολεπτομέρεια να μας εμποδίσει να ολοκληρώσουμε την εκτίμησή μας! Προφανώς, το  $\omega l$  αποκλείεται να υπερβαίνει τη  $v_v$  —ειδάλλως, ο σωλήνας δεν θα περιστρεφόταν. Ο λόγος των πυκνοτήτων  $\rho/\rho_v$  είναι περίπου  $10^{-3}$ , οπότε για ένα σωλήνα «εύλογων» διαστάσεων (ας πούμε,  $l \sim 10 \text{ cm}$  και  $2r_0 \sim 1 \text{ cm}$ ) καταλήγουμε ότι οι δύο δυνάμεις θα έχουν λόγο της τάξεως του  $10^{-2}$ , ή και ακόμη μικρότερο. Αυτό σημαίνει ότι, με τίμημα ένα σχετικό σφάλμα που δεν υπερβαίνει τα λίγα εκατοστά, μπορούμε πράγματι να αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα.

Τι άλλο χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας; Μα, φυσικά, την τριβή που αναπτύσσεται στον ομφαλό. Αφότου η περιστροφική κίνηση εισέλθει στη μόνιμη κατάσταση, η ανθιστάμενη ροπή  $M_{tr}$  λόγω τριβής γίνεται ίση με την κινητήρια ροπή του υδάτινου πδάκα, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$2Q(v_v - \omega l) = M_{tr},$$

σχέση από την οποία βρίσκουμε αμέσως την ταχύτητα του νερού που ε-



κτοξεύεται από το σωλήνα στο σύστημα αναφοράς του περιβολίου:

$$v_0 = v_v - \omega l = \frac{M_{tr}}{2lQ}.$$

(Υποθέτουμε πάλι ότι το  $\omega l$  δεν ε-

περβαίνει την ταχύτητα  $v_v$  του νερού στο σύστημα ηρεμίας του σωλήνα.)

Και τώρα πώς συνεχίζουμε; Ε, λοιπόν, δεν έχουμε παρά να δηλώσουμε (δίνοντας όσο μπορούμε πιο «δασκαλίστικο» τόνο στη φωνή μας) ότι το πρόβλημά μας «ανάγεται» σε ένα πα-

σίγνωστο από τα σχολικά βιβλία πρόβλημα: πρόκειται για την κίνηση ενός σώματος το οποίο βάλλεται από ένα σημείο με συντεταγμένες

$$x_0 = -l\eta\mu\theta, \quad y_0 = h + l\sin\theta$$

υπό γωνία  $\theta$  ως προς το οριζόντιο επίπεδο και με αρχική ταχύτητα  $v_0$  (βλ. Σχήμα 1). Λύνοντας ακόμη μία φορά τούτο το κλασικό πρόβλημα, καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$x = -l\eta\mu\theta + (v_0 \sin\theta)t,$$

$$y = h + l\sin\theta + (v_0 \eta\mu\theta)t - \frac{gt^2}{2},$$

όπου με  $t$  συμβολίζουμε το χρόνο που παρήλθε από τη στιγμή κατά την οποία η στοιχειώδης μάζα του νερού εξήλθε από το σωλήνα. Για να φτάσουμε στην παραπάνω λύση, δεχτήκαμε ότι τα στοιχεία της υδάτινης φλέβας, ή οι σταγόνες στις οποίες διασπάται αυτή η φλέβα, δεν έρχονται σε οποιαδήποτε αλληλεπίδραση ούτε με τον αέρα ούτε και μεταξύ τους.

Όταν ποτίζουμε έναν κήπο, δύο πράγματα μας ενδιαφέρουν: το «πού» και το «πόσο». Στο δικό μας σύστημα συντεταγμένων (δηλαδή στο σύστημα του περιβολίου), η τεταγμένη του εδάφους είναι  $y = 0$ . Έστω ότι συμβολίζουμε με  $x_1$  την τετμημένη του σημείου του εδάφους όπου πέφτει το νερό. Απαλείφοντας το χρόνο από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, βρίσκουμε:

$$x_1 = -l\eta\mu\theta + \frac{v_0^2 \sin\theta}{g} [\eta\mu\theta + \sqrt{\eta\mu^2\theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \left( 1 + \frac{l}{h} \sin\theta \right)]. \quad (2)$$

Προφανώς, ο ανωτέρω τύπος εμπεριέχει ως ειδική περίπτωση τη γνωστή έκφραση για την οριζόντια απόσταση που διανύει ένα σώμα ώσπου να πέσει στο έδαφος —ή, αλλιώς, το βεληνεκές— και το οποίο βάλλεται από την αρχή των αξόνων ( $h = 0, l = 0$ ):

$$x_{0+} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin\theta \eta\mu\theta.$$

Όπως μάλλον γνωρίζετε, στην προκειμένη περίπτωση το μέγιστο βε-

ληνεκές επιτυγχάνεται για γωνία βολής  $\theta = 45^\circ$ :

$$x_{0+max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3)$$

Ο τύπος (2) δείχνει ότι στη γενική περίπτωση η λύση εξαρτάται από δύο παραμέτρους: πρώτον, από το λόγο των αρχικών τιμών της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας

$$a = \frac{gh}{v_0^2/2}$$

και, δεύτερον, από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της συσκευής μας, τα οποία υπεισέρχονται στη λύση μέσω του λόγου  $l/h$ . Για να αναλύσει αυτές τις σχέσεις, ο φοιτητής μας προσέφυγε, όπως θα περίμενε κανείς, στη βοήθεια του υπολογιστή του.

Θα περιορίσουμε την ανάλυσή μας σε μια χαρακτηριστική περίπτωση. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι  $l/h \ll 1$  (πράγμα που σημαίνει ότι ο στροφέας μας είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με το ύψος στο οποίο βρίσκεται πάνω από το έδαφος). Εππλέον, θα δεχτούμε ότι το βεληνεκές υπερβαίνει πάντα το  $l$  (με άλλα λόγια, ακόμη και όταν η φλέβα εξέρχεται από το στόμιο του σωλήνα σε μηδενικό ύψος, το νερό φτάνει σε αρκετά μεγάλη απόσταση). Σ' αυτή την περίπτωση, η τετμημένη του σημείου προσγείωσης στο έδαφος, μετρούμενη σε μονάδες της χαρακτηριστικής απόστασης που ορίζει ο τύπος (3), είναι

$$\bar{x} = \frac{x_1}{v_0^2/g} = \\ = \sin\theta (\eta\mu\theta + \sqrt{\eta\mu^2\theta + a}).$$

Μπορούμε ακόμη να βρούμε τη γωνία εκτόξευσης του νερού που αντιστοιχεί στο μέγιστο βεληνεκές, καθώς και την ίδια την απόσταση, θέτοντας την παράγωγο ως προς  $\theta$  —η οποία, όπως θα δούμε, δεν διαφέρει από την παράγωγο ως προς το χρόνο παρά μόνο κατά έναν σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα— ίση με μηδέν:

$$\frac{d\bar{x}}{d\theta} = 1 - 2\eta\mu^2\theta + \frac{\eta\mu\theta}{\sqrt{\eta\mu^2\theta + a}} (1 - 2\eta\mu^2\theta - a) = 0,$$

απ' όπου βρίσκουμε:

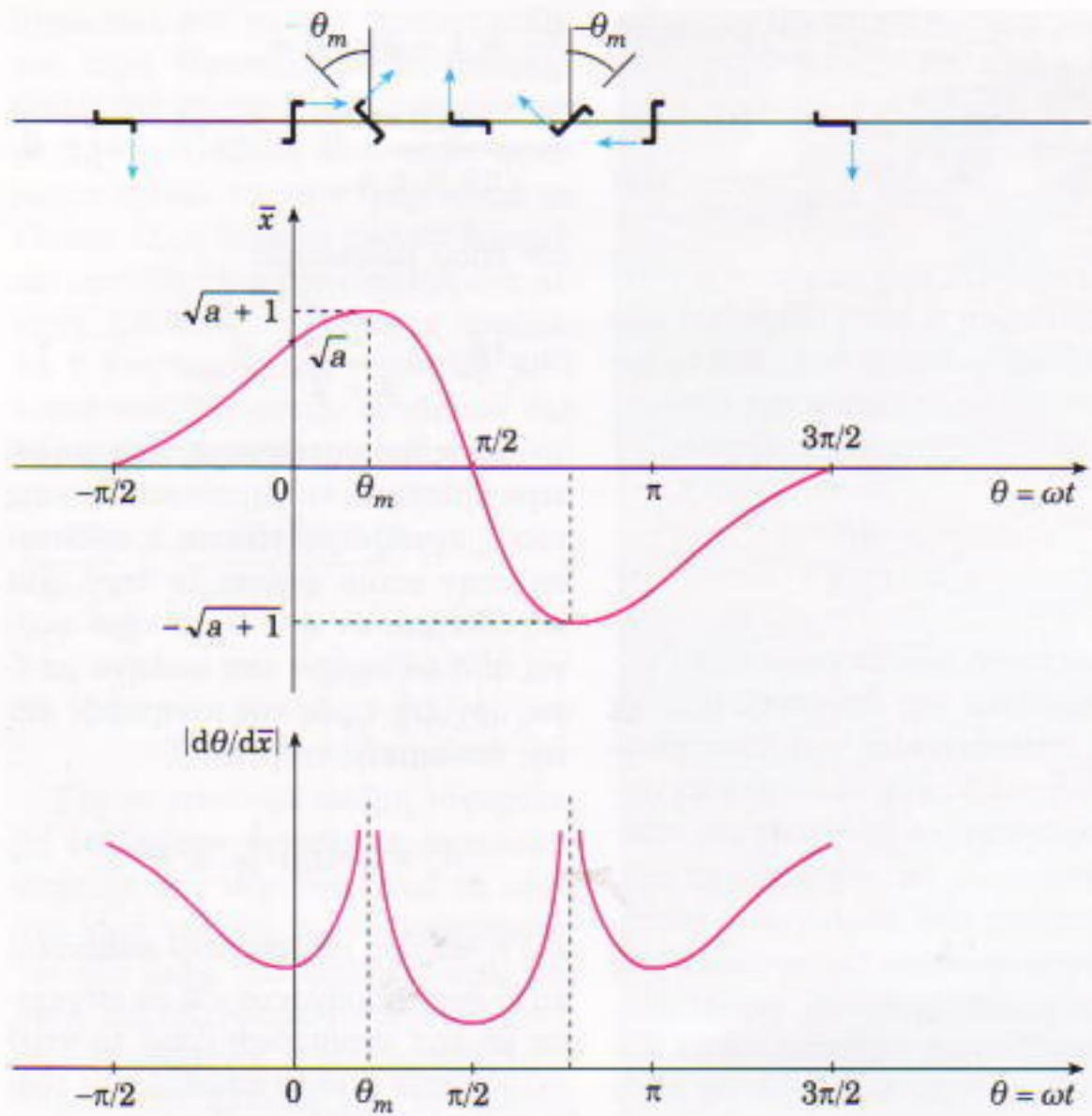
$$\eta\mu^2\theta_m = \frac{1}{a+2}, \quad \bar{x}_{max} = \sqrt{a+1}.$$

Όπως διαπιστώνουμε, δύο ψηλότερα βρίσκεται το σημείο εκτόξευσης τόσο μεγαλύτερη γίνεται η απόσταση στην οποία φτάνει το νερό. Για παράδειγμα, αν  $a = 1$  (το νερό φεύγει από το στόμιο του σωλήνα με ίσες αρχικές τιμές της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας),

$$\theta_m = \text{τοξημ} \frac{1}{\sqrt{3}} \equiv 35^\circ,$$

και η «ακτίνα ποτίσματος» αυξάνεται κατά έναν παράγοντα  $\sqrt{2}$  σε σύγκριση με την περίπτωση όπου το νερό εκτοξεύεται από το επίπεδο του εδάφους (τύπος (3)).

Το Σχήμα 2 δείχνει ποιοτικά πώς εξαρτάται η σχετική συντεταγμένη του σημείου προσγείωσης από τη γωνία  $\theta$  (ή από το χρόνο, καθότι  $\theta = \omega t$ ). Στο πάνω μέρος του Σχήματος 2 φαίνονται οι θέσεις του περιστρεφόμενου σωλήνα που αντιστοιχούν σε μερικές χαρακτηριστικές γωνίες. Ακόμη και αυτό το διάγραμμα αρκεί για να καταστήσει εμφανή τον ακανόνιστο χαρακτήρα της ποτιστικής διαδικασίας. Το κάτω μέρος του ίδιου σχήματος δείχνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $|d\theta/d\bar{x}|$ , η οποία περιγράφει πώς κατανέμεται το νερό στο έδαφος. Πράγματι, όταν ο σωλήνας περιστρέφεται κατά γωνία  $d\theta$ , το νερό που εκτοξεύεται κατά το αντίστοιχο χρονικό διάστημα θα πέφτει στο έδαφος σε μια περιοχή πλάτους  $d\bar{x}$  (υποθέτουμε ότι το νερό απορροφάται αμέσως από το χώμα). Όπως σαφώς προκύπτει από το σχήμα, υπάρχουν στιγμές όπου η «πυκνότητα ποτίσματος» τείνει στο άπειρο. Και τούτο επειδή η φλέβα του νερού που προσγειώνεται σ' αυτά τα σημεία (όπου  $\theta = \theta_m$ ) σταματά επί πεπερασμένο χρόνο για να αλλάξει κατεύθυνση. Η εμφάνιση τουτων



Σχήμα 2

των αφύσικων απειρισμών στους υπολογισμούς μας πρέπει να αποδοθεί στο ότι θεωρήσαμε τη φλέβα ως μια λεπτή κλωστή η οποία μεταφέρει μη μηδενική ροή νερού.

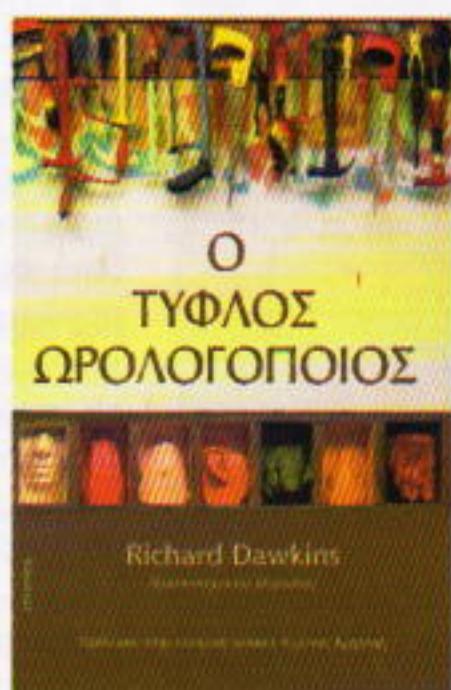
«Οστόσο», μονολόγησε ο φοιτητής μας, «η φλέβα του νερού πολύ απέχει από το να είναι μια μονοδιάστατη γραμμή — ακόμη κι όταν βγαίνει από το στόμιο του σωλήνα έχει διάμετρο  $2r_0$ , κατά δε την εναέρια διαδρομή της διασπάται σε σταγόνες οι οποίες επιβραδύνονται από τον περιβάλλοντα αέρα. Επιπλέον, η φυγόκεντρος αδρανειακή δύναμη πιθανόν να τροποποιεί την κατανομή της πίεσης κατά μήκος του άξονα της φλέβας. Προφανώς η όλη θεωρία πρέπει να υποβληθεί σε διεξοδικό έλεγχο και να επεκταθεί», ζήτημα το οποίο συνέχισε να απασχολεί το φοιτητή μας.

Και τι απέγινε τελικά με τον κήπο της γιαγιάς; Ας περιοριστούμε να πούμε ότι στην εικόνα που παρουσιάζει αυτός στον διερχόμενο περιπατητή, το καστανόφαιο χρώμα κυριαρχεί στο πράσινο. ◻

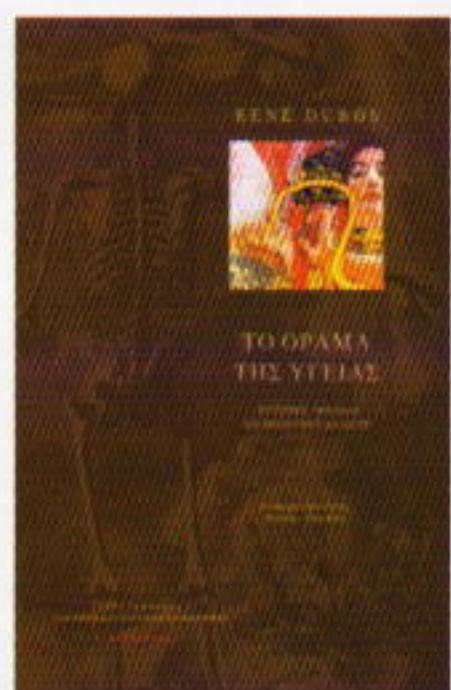
### ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΤΑ ΑΥΤΟ ΤΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ...



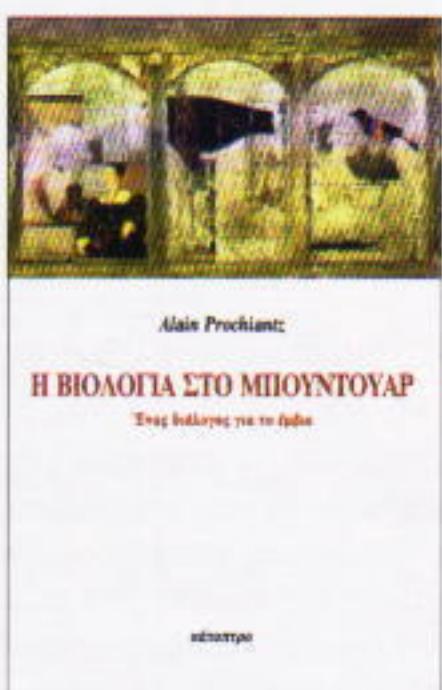
Steven Pinker,  
Το γλωσσικό ένστικτο,  
σελ.: 514, 9.000 δρχ.



Richard Dawkins,  
Ο τυφλός ωρολογοποιός  
σελ.: 516, 7.200 δρχ.



René Dubos,  
Το θράμα της υγείας  
σελ.: 228, 6.300 δρχ.



Alain Prochiantz,  
Η βιολογία στο μπουντούαρ  
σελ.: 188, 4.000 δρχ.

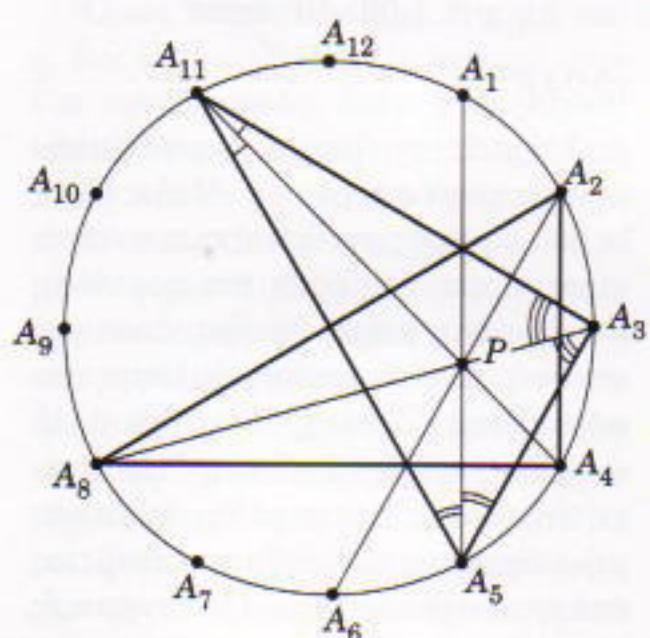
...ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΤΕ ΑΥΤΟΣ ΠΟΥ ΘΑ ΘΕΛΑΤΕ  
ΝΑ ΕΙΣΤΕ ΆΝ ΔΕΝ ΗΣΑΣΤΑΝ ΑΥΤΟΣ ΠΟΥ ΕΙΣΤΕ.

**Μαθηματικά**

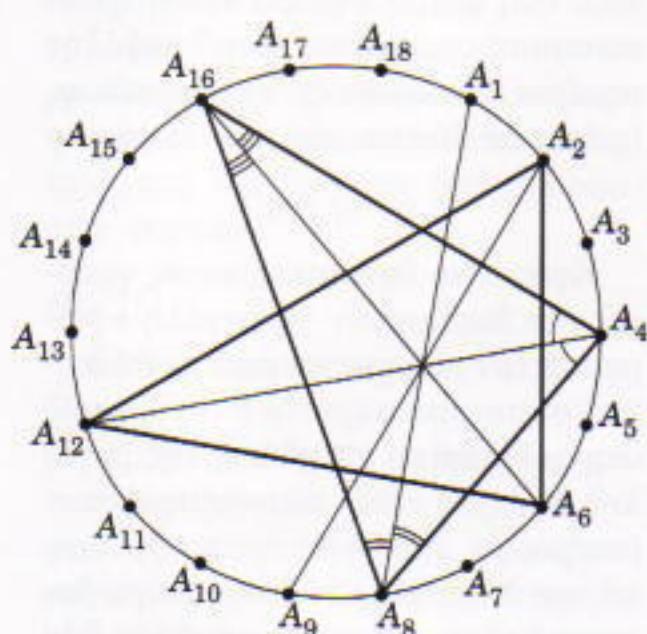
**M216**

(α) Έστω  $A_1A_2\dots A_{12}$  ένα κανονικό 12-γωνο (Σχήμα 1). Θεωρούμε το τρίγωνο  $A_2A_4A_8$ . Οι ευθείες  $A_2A_6$ ,  $A_3A_8$  και  $A_4A_{11}$  είναι διχοτόμοι των γωνιών του. Όμως, οι  $A_3A_8$ ,  $A_5A_1$  και  $A_{11}A_4$  είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου  $A_3A_5A_{11}$ . Συνεπώς, οι διαγώνιοι  $A_1A_5$ ,  $A_2A_6$ ,  $A_3A_8$  και  $A_4A_{11}$  συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

(β) Θεωρούμε ένα κανονικό 18-γωνο  $A_1A_2\dots A_{18}$ , τις κορυφές του οποίου επιλέγουμε από τις κορυφές του δεδομένου 54-γωνου. Οι διαγώνιοι



Σχήμα 1



Σχήμα 2

του 18-γωνου  $A_1A_8$ ,  $A_2A_9$ ,  $A_4A_{12}$  και  $A_6A_{16}$  συντρέχουν στο ίδιο σημείο. Για να αποδείξουμε αυτό το γεγονός, εφαρμόζουμε το επιχείρημα του μέρους (α) στα τρίγωνα  $A_2A_6A_{12}$  και  $A_4A_8A_{16}$ , που έχουν διχοτόμους τις  $A_2A_9$ ,  $A_6A_{16}$ ,  $A_{12}A_4$  και  $A_4A_{12}$ ,  $A_8A_1$ ,  $A_{16}A_6$ , αντίστοιχα (Σχήμα 2).

Έχει ενδιαφέρον να προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε τιμές του  $n$  για τις οποίες υπάρχουν τέσσερις διαγώνιοι του κανονικού  $n$ -γωνου οι οποίες συντρέχουν στο ίδιο σημείο, διαφορετικό από το κέντρο του πολυγώνου. Υπάρχει κανονικό  $n$ -γωνο με πέντε διαγώνιους να συντρέχουν στο ίδιο σημείο, διαφορετικό από το κέντρο του πολυγώνου;

**M217**

Η απάντηση είναι  $k = 1991$ .

Αν  $k \leq 1990$ , τότε τα πρώτα δέκα μέλη μπορεί να αποφασίσουν να μην εγκρίνουν οποιοδήποτε ποσό για το πρώτο στοιχείο, και να προτείνουν ποσό ίσο με  $s/199$  για όλα τα υπόλοιπα στοιχεία. Τα επόμενα δέκα μέλη μπορεί να μην εγκρίνουν οποιοδήποτε ποσό για το δεύτερο στοιχείο, και να προτείνουν ποσό ίσο με  $s/199$  για όλα τα υπόλοιπα, κ.ο.κ. Με αυτό τον τρόπο, θα εγκριθεί το ποσό των  $S/199$  για κάθε στοιχείο και, επομένως, το συνολικό ποσό του προϋπολογισμού θα είναι

$$\frac{200}{199} S > S.$$

Αν  $k = 1991$ , τότε, για κάθε στοιχείο, υπάρχουν το πολύ εννέα μέλη που έχουν προτείνει ποσό μικρότερο απ' αυτό που εγκρίνεται τελικά. Τούτο σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον μέλος το οποίο έχει προτείνει, για όλα τα στοιχεία, ποσά που είναι μεγαλύτερα ή ίσα με αυτά που εγκρίνονται τελικά. Όμως, ο προϋπολογισμός που πρότεινε αυτό το μέλος δεν υπερβαίνει το  $S$ . Επομένως, και ο

προϋπολογισμός που εγκρίνεται τελικά δεν υπερβαίνει αυτό το ποσό.

**M218**

Έστω  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x - 1)^3 + 2(x - 1) + 3$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(y) = y^3 + 2y$ . Τότε, η πρώτη εξίσωση γράφεται ως  $g(a - 1) = f(a) - 3 = -2$ , και η δεύτερη ως  $g(\beta - 1) = f(\beta) - 3 = 2$ . Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα (άρα 1-1). Επειδή προφανώς η  $g$  είναι και περιττή, έχουμε  $g(a - 1) = 2 = -g(\beta - 1) = g(1 - \beta)$ . Επομένως,  $a - 1 = 1 - \beta$ , οπότε  $a + \beta = 2$ .

**M219**

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (a > 0, b > 0)$$

Από την ανισότητα αυτή έπειτα ότι το άθροισμα των αντιστρόφων των αριθμών οι οποίοι είναι γραμμένοι στον πίνακα δεν αυξάνεται έπειτα από κάθε πράξη που εκτελούμε. Αρχικά, το άθροισμα ήταν ίσο με  $n$ . Οπότε στο τέλος της διαδικασίας θα έχουμε  $S \leq n$ . Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός που έχει απομείνει ικανοποιεί την ανισότητα  $1/S \geq 1/n$ .

Για να αποδείξουμε την αρχική ανισότητα, επισημαίνουμε ότι  $(a - b)^2 \geq 0$  και, επομένως,  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$ . Αν διαιρέσουμε την τελευταία σχέση διά  $ab(a + b)$  —που είναι θετικό, αφού και τα  $a, b$  είναι θετικά—, προκύπτει η επιθυμητή ανισότητα.

**M220**

Ο επιθεωρητής μπορεί να τροποποιήσει το αρχικό σχέδιο ανάκρισης συμπεριλαμβάνοντας σε αυτό επιπλέον ερωτήματα με τον εξής τρόπο: Ξεκινά διατυπώνοντας 13 ερωτήσεις σύμφωνα με το αρχικό σχέδιο. Μετά θέτει την ερώτηση: «Έδωσες ψευδή

απάντηση σε κάποια από τις προηγούμενες ερωτήσεις;» Αν ο μάρτυρας απαντήσει αρνητικά, ο επιθεωρητής συνεχίζει με τις επόμενες 12 ερωτήσεις του αρχικού σχεδίου, μετά με τις επόμενες 11, ..., 2, 1, υποβάλλοντας κάθε φορά στο τέλος της σειράς την ερώτηση που ελέγχει την αλήθεια των προηγούμενων απαντήσεων. Αν η απάντηση σε μία απ' αυτές τις ερωτήσεις ελέγχου είναι καταφατική, τότε ο επιθεωρητής επαναλαμβάνει την αντίστοιχη σειρά ερωτήσεων. Στη συνέχεια, η ανάκριση συνεχίζεται σύμφωνα με το αρχικό σχέδιο (υπενθυμίζουμε ότι ο μάρτυρας μπορεί να δώσει μόνο μία ψευδή απάντηση).

Ας υποθέσουμε ότι η καταφατική απάντηση δόθηκε στην  $k$ -οστή ερώτηση ελέγχου. Αυτό σημαίνει ότι θα τεθούν  $k + 14 - k = 14$  επιπλέον ερωτήσεις —σε σύγκριση με το αρχικό σχέδιο. Άρα, το τροποποιημένο σχέδιο μας εξασφαλίζει ότι ο επιθεωρητής θα αποκαλύψει την αλήθεια με 105 ερωτήσεις.

Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό σχέδιο περιέχει  $N$  ερωτήσεις και ότι μία από τις απαντήσεις μπορεί να είναι ψευδής. Τότε, το τροποποιημένο σχέδιο μας εξασφαλίζει ότι η αλήθεια θα αποκαλυφθεί έπειτα από  $N + q$  ερωτήσεις, όπου  $q$  είναι ο ελάχιστος αριθμός για τον οποίο ισχύει  $N \leq q(q-1)/2$ .

Θα ήταν ενδιαφέρον να μάθουμε αν αυτό το πλήθος ερωτήσεων είναι το ελάχιστο δυνατό, καθώς και να αναλύσουμε το παρεμφερές πρόβλημα στο οποίο επιτρέπονται  $k$  ψευδείς απαντήσεις.

## Φυσική

### Φ216

Εάν υποθέσουμε ότι το κομμάτι της κιμωλίας απέκτησε στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος  $\tau$  ταχύτητα  $v_0$ , τότε η μετατόπισή του πάνω στη σανίδα θα δίνεται από την έκφραση

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Όταν η σανίδα ακινητοποιείται απότομα, η κιμωλία οπισθοδρομεί κατά

την ίδια απόσταση και σταματά στο σημείο εκκίνησής της. Στην προκειμένη περίπτωση, επομένως, το μήκος της γραμμής που χαράχτηκε στη σανίδα ισούται με  $L_1$ .

Εάν, ωστόσο, το χρονικό διάστημα  $\tau$  δεν είναι αρκούντως μεγάλο ώστε η κιμωλία να φτάσει στην ηρεμία ως προς την κινούμενη σανίδα, τότε θα προκύψει ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Το μήκος της γραμμής που θα χαραχτεί προτού ακινητοποιηθεί η σανίδα ισούται με

$$L_2 = v_0 \tau - \frac{\mu g \tau^2}{2}.$$

Κατά τη στιγμή που παύει η κίνηση της σανίδας, η κιμωλία έχει αποκτήσει ταχύτητα  $v = \mu g \tau$  ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Κατόπιν τούτου, η κιμωλία θα συνεχίσει την πορεία της με βαθμιαίως μειούμενη ταχύτητα έως ότου σταματήσει εντελώς. Το μήκος αυτού του τμήματος της διαδρομής της είναι

$$L_3 = \frac{1}{2} v \cdot \frac{v}{\mu g} = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Το μήκος  $L_3$  προφανώς υπολείπεται του  $L_2$ , οπότε σ' αυτή την περίπτωση το μήκος της γραμμής που χαράχτηκε θα ισούται με το  $L_2$ .

### Φ217

Προφανώς, αποκλείεται να υπάρχει κάποιο τμήμα του πλανήτη που να κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από την πρώτη κοσμική (ή διαστημική) ταχύτητα  $v_1$ . Η πρώτη κοσμική ταχύτητα δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{v_1^2}{R} = \frac{GM}{R^2},$$

όπου με  $M$  και  $R$  συμβολίζουμε αντίστοιχα τη μάζα και την ακτίνα του πλανήτη.

Συνεπώς, προκειμένου να συγκρατούνται στη θέση τους οι επιφανειακές μάζες ύλης στον ισημερινό του πλανήτη, η ισημερινή ταχύτητα  $v_\infty$  πρέπει κατ' ανάγκην να υπολείπεται της πρώτης κοσμικής ταχύτητας  $v_1$ :

$$v_\infty \leq v_1 = \left( \frac{GM}{R} \right)^{1/2}.$$

Δεδομένου ότι η περίοδος περιστροφής του πλανήτη δίνεται από την έκφραση

$$T = \frac{2\pi R}{v_\infty},$$

καταλήγουμε στην ανισότητα

$$T \geq \frac{2\pi R}{v_1} = 2\pi \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέση πυκνότητα του πλανήτη ορίζεται ως

$$\rho = \frac{M}{\left( \frac{4\pi R^3}{3} \right)},$$

οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$\rho \geq \frac{3\pi}{GT^2}$$

ή, εισάγοντας τις τιμές των δεδομένων,

$$\rho \geq 1,09 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^3.$$

### Φ218

Αρχικά, η μικρή (εσωτερική) σφαίρα είναι αφόριστη. Μόλις όμως οι δύο σφαίρες συνδεθούν με το αγώγιμο σύρμα, ένα ορισμένο φορτίο  $q_1$  ρέει προς τη μικρή σφαίρα, όπου και κατανέμεται ανομοιόμορφα στην επιφάνειά της. Ταυτοχρόνως, ένα άλλο φορτίο  $q_2$  εμφανίζεται στην εσωτερική επιφάνεια της μεγάλης (εξωτερικής) σφαίρας, το οποίο κατανέμεται επίσης ανομοιόμορφα. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου που παράγεται από το σημειακό φορτίο  $q$  τερματίζονται στη μικρή σφαίρα και στην εσωτερική επιφάνεια της μεγάλης σφαίρας. Επομένως, το φορτίο  $q_2$  πρέπει να δίνεται από την έκφραση

$$q_2 = -(q + q_1).$$

Εφόσον οι δυναμικές αυτές γραμμές δεν διαπερνούν τη μεγάλη σφαίρα και δεν εξέρχονται από το σύστημα, συμπεραίνουμε πως το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια της μεγάλης σφαίρας είναι κατανεμημένο ανομοιόμορφα. Εξισώνοντας τα δυναμικά των δύο σφαιρών (τα εν λόγω δυναμικά είναι όντως ίσα επειδή οι δύο σφαίρες συνδέονται με αγώγιμο σύρ-

μα), μπορούμε να αγνοήσουμε το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια της μεγάλης σφαίρας. Κατά συνέπεια, το δυναμικό της μεγάλης σφαίρας μπορεί να ληφθεί ίσο με μηδέν. Άρα, το δυναμικό στο κέντρο του συστήματος ισούται επίσης με μηδέν (δεδομένου ότι δεν υφίσταται πεδίο στο εσωτερικό της μικρής σφαίρας, το δυναμικό της τελευταίας ισούται με το δυναμικό στο κέντρο του συστήματος). Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε τη σχέση

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} = 0.$$

Εισάγοντας την έκφραση  $q_2 = -(q + q_1)$  στην παραπάνω εξίσωση, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$q_1 = -q \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}.$$

Όπως διαπιστώνουμε, η τιμή του  $q_1$  δεν εξαρτάται από τα αρχικά φορτία των σφαιρών, διότι καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την τιμή του  $q$  και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Όλο το «επιπλέον» φορτίο θα βρίσκεται κατανεμημένο στην εξωτερική επιφάνεια της μεγάλης σφαίρας, και θα καθορίζει το δυναμικό ολόκληρου του αγωγού. Αξίζει να επισημάνουμε ότι όταν το φορτίο  $q$  κινείται (ακριβέστερα, όταν μεταβάλλεται η απόσταση  $c$ ), το  $q_1$  (και, ως εκ τούτου, τα  $q_2$  και  $q_{12}$ ) εν γένει μεταβάλλεται. Άρα, σ' αυτή την περίπτωση, το εξωτερικό πεδίο μπορεί επίσης να μεταβάλλεται. Αντίθετα, το πεδίο στο εσωτερικό ενός τέτοιου σφαιρικού «προπετάσματος» δεν εξαρτάται διόλου από την τιμή και τη θέση των εξωτερικών φορτίων.

## Φ219

Καθώς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο «έσβηνε», στο κύκλωμα επαγόταν μια ΗΕΔ οφειλόμενη σε δύο διαφορετικές διαδικασίες: κατά πρώτον, λόγω της μεταβολής στην εξωτερική μαγνητική ροή που διαπερνά το πηνίο κατά δεύτερον, λόγω της μεταβολής στη μαγνητική ροή την παρα-

γόμενη από το ίδιο το πηνίο (ΗΕΔ εξ αυτεπαγωγής).

Εφόσον οι αντιστάτες  $R_1$  και  $R_2$  είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, τα ρεύματα που τους διαρρέουν ικανοποιούν την εξίσωση

$$I_1(t) \cdot R_1 = I_2(t) \cdot R_2.$$

Συνεπώς, αμέσως μόλις απενεργοποιηθεί το εξωτερικό πεδίο, το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη  $R_2$  ισούται με

$$I_2 = \frac{IR_1}{R_2}.$$

Το ηλεκτρικό ρεύμα  $I_L$  που διαρρέει το πηνίο αμέσως μόλις μηδενιστεί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο υπολογίζεται εύκολα με την εφαρμογή του πρώτου κανόνα του Kirchhoff:

$$I_L = I + I_2 = I \frac{R_1 + R_2}{R_2}.$$

Τώρα το σύστημα έχει πλέον απομονωθεί ενεργειακά από το περιβάλλον (με μόνη εξαίρεση την έκλυση θερμότητας από τους αντιστάτες). Στην αρχή, όλη του η ενέργεια βρίσκοταν αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου:

$$U = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2}.$$

Στη συνέχεια, αυτή η ενέργεια εκλύεται υπό μορφή θερμότητας στους αντιστάτες. Εφόσον κατά μήκος των αντιστατών έχουμε ανά πάσα στιγμή την ίδια πτώση τάσης, η ποσότητα της θερμότητας που εκλύεται από αυτούς είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την αντίστασή τους:

$$Q_1 \sim \frac{1}{R_1} \text{ και } Q_2 \sim \frac{1}{R_2}.$$

Έτσι, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = \frac{LI^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2} \\ Q_1/Q_2 = R_2/R_1, \end{cases}$$

το οποίο μας οδηγεί στις εκφράσεις

$$Q_1 = \frac{LI^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)}{R_2}$$

και

$$Q_2 = \frac{LI^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)R_1}{R_2^2}.$$

## Φ220

Έστω ότι συμβολίζουμε την απόσταση ανάμεσα στην κεντρική αιχμή και το φακό με  $a$  και την απόσταση ανάμεσα στο ειδώλο και το φακό με  $b$  (Σχήμα 3). Ας κατασκευάσουμε τώρα τα ειδώλα των αιχμών  $BE$ ,  $AD$  και  $CG$ . Συμβολίζουμε το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων  $ED$  και  $DG$  με  $x$ , την απόσταση μεταξύ των ειδώλων  $A_1D_1$  και  $C_1G_1$  με  $y_1$  και αυτή μεταξύ των ειδώλων  $B_1E_1$  και  $A_1D_1$  με  $y_2$ . Όπως μπορείτε να αποδείξετε και μόνοι σας, η εγκάρσια μεγέθυνση  $m$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AD$  δίνεται από την έκφραση

$$m = \frac{f}{a - f},$$

όπου με  $f$  παριστάνουμε την εστιακή απόσταση του φακού. Από την τελευταία σχέση, παίρνουμε:

$$a = \frac{f(1+m)}{m}$$

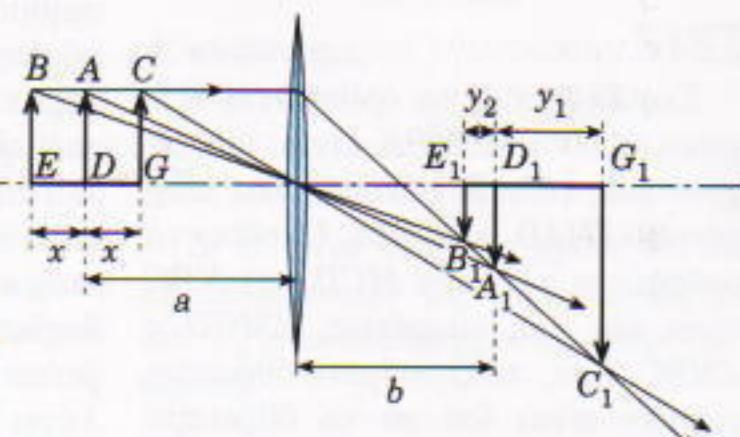
και

$$b = f(1+m)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο των λεπτών φακών για τις αιχμές  $CG$  και  $BE$ , βρίσκουμε αντίστοιχα τις εξισώσεις

$$\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b+y_1} = \frac{1}{f}$$

και



Σχήμα 3

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b-y_2} = \frac{1}{f}.$$

Πραγματοποιώντας μερικούς προφανείς μετασχηματισμούς, καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\frac{xy_1}{f} = \frac{y_1}{m} - xm$$

και

$$\frac{xy_2}{f} = -\left(\frac{y_2}{m} - xm\right).$$

Εφόσον οι μεγεθύνσεις των τμημάτων  $DG$  και  $DE$  είναι, αντίστοιχα,  $y_1/x = \beta_1$  και  $y_2/x = \beta_2$ , η ζητούμενη μεγέθυνση της μεσαίας αιχμής της τρίαινας υπολογίζεται αρκετά εύκολα:

$$m = \sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)}}$$

### Σπαζοκεφαλιές

#### Σ216

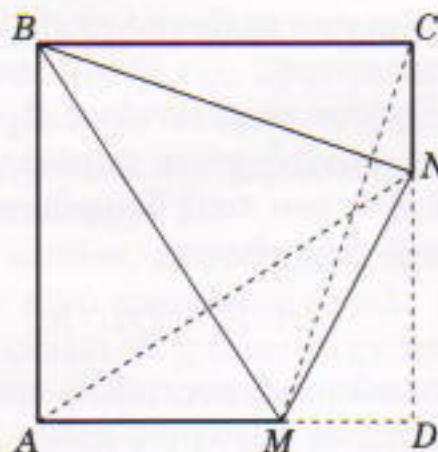
Σύμφωνα με την ιστορία μας, μείωση 72 δραχμών στην αξία ενός κιλού φρούτων είχε αποτέλεσμα να μειωθεί η μέση αξία του κιλού κατά 3 δραχμές. Επομένως, το πλήθος των κιλών ροδάκινων ήταν  $72/3 = 24$ .

Πιο τυπικά, έστω  $A$  το άθροισμα των αρχικών τιμών όλων των ροδάκινων, και έστω  $n$  το πλήθος των κιλών. Τότε,  $A/n$  είναι η αρχική μέση τιμή ενός κιλού,  $(A - 72)/n$  η νέα μέση τιμή, οπότε  $A/n = 3 + (A - 72)/n$ . Αν εκτελέσουμε τις πράξεις, το  $A$  απλοποιείται και βρίσκουμε  $n = 24$ .

Άλλος τρόπος: Η αρχική ολική είσπραξη ήταν  $245n$  δραχμές, ενώ η τελική  $242n$ . Άλλα τη δεύτερη φορά είσπράχθησαν 72 δραχμές λιγότερες. Άρα,  $245n = 242n + 72$ , οπότε  $n = 24$ .

#### Σ217

Στο Σχήμα 4, τα ορθογώνια τρίγωνα  $NAD$  και  $MBA$  είναι ίσα (έχουν ίσες κάθετες πλευρές) και, επομένως,  $\angle NAD = \angle MBA$ . Ομοίως, τα ορθογώνια τρίγωνα  $MCD$  και  $NBC$  είναι ίσα και, επομένως,  $\angle MCD = \angle NBC$ . Άρα, το ζητούμενο άθροισμα γωνιών είναι ίσο με το άθροισμα  $\angle ABM + \angle MBN + \angle NBC$ , δηλαδή με  $\angle ABC = 90^\circ$ .



Σχήμα 4

#### Σ218

Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο παικτη και ας υποθέσουμε ότι κέρδισε  $m$  παιχνίδια παιζόντας με τα άσπρα και  $n$  παιχνίδια παιζόντας με τα μαύρα. Τότε, το συνολικό πλήθος των παρτίδων που έχουν κερδίσει όλοι οι άλλοι παικτες παιζόντας με τα μαύρα είναι επίσης  $n$  και, επομένως, το σύνολο των παρτίδων που έχουν κερδίσει όλοι οι παικτες (μαζί με τον πρώτο) παιζόντας με τα μαύρα είναι  $m + n$ . Όμως, το πλήθος αυτό είναι σταθερό, ανεξάρτητο από τις συγκεκριμένες τιμές των  $m$  και  $n$ . Δηλαδή, είναι ανεξάρτητο από ποιον παικτη θεωρήσαμε αρχικά. Συνεπώς όλοι έχουν κερδίσει το ίδιο πλήθος παρτίδων.

#### Σ219

Τα διαμερίσματα αριθμήθηκαν ως 9, 10, 11 και 12. Οι ένοικοι παρήγγειλαν τα ψηφία 0, 1, 1, 1, 1, 2 και 6. Το ψηφίο 6 τοποθετήθηκε ανάποδα στην πόρτα του διαμερίσματος 9. Το συνολικό ποσό που πλήρωσαν ήταν  $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6 = 12$  δολάρια.

#### Σ220

Αν τα δύο τελευταία ψηφία ενός αριθμού δεν είναι 99, τότε, όταν περάσουμε στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο, είτε αυξάνεται το άθροισμα των ψηφίων κατά 1 είτε (αν το τελευταίο ψηφίο του αρχικού αριθμού είναι το 9) μειώνεται κατά 8. Επομένως, τουλάχιστον ένας από τους διαδοχικούς αυτούς αριθμούς δεν διαιρείται διά του 17. Όταν ένας αριθμός λήγει σε 99 (αλλά όχι 999), τότε, όταν αυξηθεί κατά 1, ο αριθμός που προκύπτει έχει άθροισμα ψηφίων κα-

τά  $9 + 9 - 1 = 17$  λιγότερο — και αυτό ακριβώς είναι που θέλουμε. Επίσης, αν ένας αριθμός λήγει σε 999 (αλλά όχι 9999), τότε, όταν αυξηθεί κατά 1, το άθροισμα των ψηφίων του νέου αριθμού είναι μειωμένο κατά 26 (αριθμός που δεν διαιρείται διά του 17). Συνεπώς, θέλουμε τον μικρότερο αριθμό που λήγει σε 00 και το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται διά του 17. Αυτός είναι ο 8900, οπότε η απάντηση είναι  $8900 - 1 = 8899$ .

### Καλειδοσκόπιο

1. Το μαγνητικό πεδίο της Γης δεν είναι τελείως οριζόντιο, αλλά έχει και μια κατακόρυφη συνιστώσα. Έτσι, στο βόρειο ημιοφαίριο, ο βόρειος πόλος θα βρίσκεται στο κάτω άκρο του κάγκελου και ο νότιος πόλος στο πάνω άκρο του.

2. Όχι, διότι οι επιδράσεις των εξωτερικών μαγνητικών πεδίων, των δονήσεων και των απότομων θερμοκρασιακών μεταβολών συντείνουν στην απομαγνήτιση των μόνιμων μαγνητών.

3. Ένα αρκούντως ισχυρό μαγνητικό πεδίο μαγνητίζει οποιοδήποτε σιδηρομαγνητικό σώμα, ανεξαρτήτως του σχήματός του.

4. Καθώς ο χάλυβας θερμαίνεται και η θερμοκρασία του προσεγγίζει το σημείο Curie, η μαγνητική διαπερατότητά του μειώνεται κατά συνέπεια, ο θερμός χάλυβας χαρακτηρίζεται από μικρή μαγνήτιση και έλκεται ασθενώς από το μαγνήτη.

5. Μόλις κλείσει το κύκλωμα, θα σημειωθεί ροή ηλεκτρικού ρεύματος από το κεντρικό ηλεκτρόδιο προς το δακτύλιο. Τα ιόντα που κινούνται εντός του διαλύματος θα δεχτούν την επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Ως αποτέλεσμα, ολόκληρη η μάζα του υγρού θα τεθεί σε περιστροφική κίνηση κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

6. Καθώς κινούνται εντός του μαγνητικού πεδίου, στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου ασκείται η δύναμη Lorentz, η οποία και τα οθεί προς μία από τις όψεις της ράβδου. Λόγω της συσσώρευσης αρνητικού φορτίου στην όψη αυτή και της εμφάνισης στην απέναντι της αντίστοιχης περίσσειας θετικού φορτίου, πα-

ράγεται ένα ηλεκτρικό πεδίο κάθετο προς την κατεύθυνση της ταχύτητας της ράβδου. Ακριβώς αυτό είναι το περίφημο φαινόμενο Hall.

**7.** Σε αντίθεση με τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου δεν τερματίζονται στην επιφάνεια της «ασπίδας». Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι μια «ασπίδα» μπορεί να εξασθενίσει, όχι όμως και να εξαλείψει το μαγνητικό πεδίο —ακόμη δε και για να επιτύχουμε μια τέτοια εξασθένιση, χρειαζόμαστε μια μάλλον παχιά «ασπίδα».

**8.** Η ταλαντούμενη μαγνητική βελόνα παράγει εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο, το οποίο στην περίπτωση της ορειχάλκινης πυξίδας επάγει δινορρεύματα (γνωστά και ως ρεύματα Foucault). Τα δινορρεύματα αυτά καταναλώνουν ενέργεια η οποία πρέρχεται από τη βελόνα, και έτσι επιταχύνουν την απόσβεση των ταλαντώσεών της.

**9.** Για να διατηρούνται ασθενή τα επαγόμενα δινορρεύματα, τα οποία μειώνουν το βαθμό απόδοσης του μετασχηματιστή.

**10.** Ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται από τη μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο το παραγόμενο από το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το πηνίο. Συνεπώς, ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο με σιδερένιο πυρήνα.

**11.** (a) Θα αυξηθεί κατά πολλές φορές; (b) Θα αυξηθεί ελαφρώς; (γ) Θα μειωθεί ελαφρώς.

**12.** Τα παραμαγνητικά υγρά έλκονται προς την περιοχή όπου το μαγνητικό πεδίο είναι ισχυρότερο, ενώ, αντίθετα, τα διαμαγνητικά υγρά εκδιώκονται από αυτήν.

**13.** Τα αέρια που σχηματίζονται κατά την καύση (διοξείδιο και μονοξείδιο του άνθρακα) ανήκουν στις διαμαγνητικές ουσίες.

**14.** (a) Θα παρουσιαστεί πόλωση; (β) Θα εμφανιστεί ένα παροδικό ρεύμα εξ επαγωγής; (γ) Θα εμφανιστεί ένα ρεύμα εξ επαγωγής το οποίο θα διατηρηθεί επί μακρόν.

**15.** Η μαγνητική ροή στο υπερα-

γώγιμο κύκλωμα αποκλείεται να μεταβληθεί (ειδάλλως, στο απείρως αγώγιμο κύκλωμα θα αναπτυσσόταν ΗΕΔ εξ επαγωγής, η οποία θα προκαλούσε τη ροή άπειρου ρεύματος). Εφόσον, λοιπόν, το εμβαδόν του κυκλώματος μειώθηκε κατά έναν παράγοντα 4, κατά τον ίδιο παράγοντα πρέπει να αυξηθήκε και το μαγνητικό πεδίο.

### Μικροπειραματισμοί

Όταν βρεθεί μέσα στη φλόγα, το σιδερένιο καρφί αποβάλλει τις μαγνητικές του ιδιότητες. Όταν ψυχθεί, ανακτά πάλι την ικανότητά του να μαγνητίζεται.

## Στα πεδία της φυσικής

### Σχετικιστικοί νόμοι διατήρησης

Στο πρόβλημα που θέσαμε στους αναγνώστες μας στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 2001 τους ζητούσαμε να ερευνήσουν ορισμένες πλευρές μιας διαδικασίας διάσπασης εφαρμόζοντας τους νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής στη σχετικιστική τους εκδοχή. Πιο συγκεκριμένα, ένα σχετικιστικό σωματίδιο διασπάται σε δύο φωτόνια. Ένα από τα φωτόνια αποχωρεί κινούμενο κατά τον θετικό ημιάξονα των  $x$  με συχνότητα  $v_1$ , ενώ το δεύτερο φωτόνιο απομακρύνεται στην αντίθετη κατεύθυνση με συχνότητα  $v_2 < v_1$ .

Η σχετικιστική ενέργεια και ορμή ενός σωματιδίου δίνονται αντιστοίχως από τις εκφράσεις

$$E = \gamma mc^2$$

και

$$p = \gamma mv,$$

με

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

και

$$\beta = \frac{v}{c},$$

όπου με  $c$  παριστάνεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Στην περίπτωση των φωτονίων, οι ανωτέρω τύποι αντικαθίστανται από τους

$$E_\gamma = h\nu$$

και

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c}.$$

A. Περνάμε τώρα στην εφαρμογή των νόμων διατήρησης της ενέργειας και της ορμής στη διαδικασία της διάσπασης:

$$\gamma mc^2 = h\nu_1 + h\nu_2 \quad (1)$$

και

$$\gamma mv = \frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c}. \quad (2)$$

Ας διαιρέσουμε τώρα κατά μέλη την εξίσωση (1) με την εξίσωση (2), ας απλοποιήσουμε τους κοινούς παράγοντες και ας λύσουμε την προκύπτουσα εξίσωση για την ταχύτητα  $v$ :

$$v = c \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}. \quad (3)$$

B. Λύνουμε στην εξίσωση (1) ως προς τη μάζα ηρεμίας του αρχικού σωματιδίου:

$$\begin{aligned} m &= \frac{h}{\gamma c^2} (\nu_1 + \nu_2) = \\ &= \frac{h}{c^2} (\nu_1 + \nu_2) \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

και αντικαθιστούμε στο αποτέλεσμά μας το  $\beta$  από την εξίσωση (3). Έτσι, καταλήγουμε στον τύπο

$$m = \frac{2h}{c^2} \sqrt{\nu_1 \nu_2}.$$

C. Στο σύστημα ηρεμίας του αρχικού σωματιδίου, τα δύο φωτόνια πρέπει να απομακρύνονται σε αντίθετες κατεύθυνσεις έχοντας την ίδια κατά μέτρο ορμή. Συνεπώς, και τα δύο φωτόνια θα έχουν την ίδια συχνότητα  $v$ . Ο νόμος διατήρησης της ενέργειας απαιτεί

$$mc^2 = 2h\nu$$

ή, ισοδύναμα,

$$v = \frac{mc^2}{2h}. \quad (5)$$

D. Σ' αυτό το μέρος πρόκειται να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις  $F_1$  και  $F_2$  που υπεισέρχονται στην έκφραση

$$p'_x = F_1 p_x + F_2 \frac{E_\gamma}{c},$$

όπου οι μη τονούμενες μεταβλητές αναφέρονται στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου και η τονούμενη μεταβλητή στο σύστημα του εργαστηρίου. Γράφοντας αυτή την εξίσωση για το πρώτο φωτόνιο, λαμβάνουμε τη σχέση

$$\frac{h\nu_1}{c} = F_1 \frac{h\nu}{c} + F_2 \frac{h\nu}{c} = (F_1 + F_2) \frac{h\nu}{c}$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (5), η παραπάνω σχέση απλουστεύεται και λαμβάνει τη μορφή

$$F_1 + F_2 = \frac{2h\nu_1}{mc^2}. \quad (6)$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το δεύτερο φωτόνιο, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{h\nu_2}{c} &= -F_1 \frac{h\nu}{c} + F_2 \frac{h\nu}{c} = \\ &= (-F_1 + F_2) \frac{h\nu}{c}, \end{aligned}$$

ή

$$F_1 - F_2 = \frac{2h\nu_2}{mc^2}. \quad (7)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (6) και (7) και διαιρώντας διά 2, λαμβάνουμε τη ζητούμενη έκφραση για την  $F_1$ :

$$F_1 = \frac{h}{mc^2}(v_1 + v_2).$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμά μας με την εξίσωση (1), διαπιστώνουμε ότι

$$F_1 = \gamma.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την εξίσωση (7) από την εξίσωση (6) και διαιρώντας διά 2, βρίσκουμε:

$$F_2 = \frac{h}{mc^2}(v_1 - v_2).$$

Η σύγκριση με την εξίσωση (2) δείχνει ότι

$$F_2 = \beta\gamma.$$

### Μια καλή θεωρία

Στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου σάς ζητήσαμε να λύσετε μερικά προβλήματα που οι ρίζες τους κρατούν από τις βαθυστόχαστες θεωρίες του Νεύτωνα και του Bohr.

Στο πρώτο από αυτά τα προβλήματα, οι αναγνώστες καλούνταν να αποδείξουν πως, αν κάποιος φυσικός δορυφόρος μάζας  $m$  περιφέρεται γύρω από έναν πλανήτη μάζας  $M$  σε απόσταση μικρότερη από δεδομένο κατώτερο όριο, οι ελεύθεροι βράχοι που κείνται στην επιφάνεια του δορυφόρου θα αρχίσουν να ανυψώνονται από αυτή.

Η βαρυτική και η κάθετη δύναμη οι οποίες δρουν σε ένα βράχο μάζας  $m$  που κείται στην επιφάνεια του δορυφόρου δίνουν αθροιζόμενες την κεντρομόλο δύναμη που τον διατηρεί σε τροχιά γύρω από τον πλανήτη. Ας υποθέσουμε ότι ο θεωρούμενος βράχος βρίσκεται στην πλευρά του δορυφόρου που είναι στραμμένη προς τον πλανήτη, ότι ο δορυφόρος έχει ακτίνα  $a$  και ότι η απόσταση μεταξύ δορυφόρου και πλανήτη ισούται με  $r$ . Δεχόμαστε επίσης ότι η μάζα του πλανήτη υπερβαίνει κατά πολύ εκείνη του δορυφόρου. Εν τοιαύτη περιπτώσει, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \frac{GM\mu}{(r-a)^2} + F_\kappa - \frac{Gm\mu}{a^2} \\ = \mu\omega^2(r-a) \end{aligned} \quad (1)$$

Η βαρυτική έλξη που ασκεί ο πλανήτης στο δορυφόρο αναγκάζει τον δεύτερο να περιφέρεται γύρω από τον πρώτο με την ίδια γωνιακή ταχύτητα:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r. \quad (2)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2) ως προς  $\omega$  και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξίσωση (1), καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{GM\mu}{(r-a)^2} + F_\kappa - \frac{Gm\mu}{a^2} \\ = \mu(r-a)\left(\frac{GM}{r^3}\right). \end{aligned}$$

Ο ελεύθερος βράχος θα εγκαταλείψει την επιφάνεια του δορυφόρου όταν η κάθετη δύναμη γίνει αρνητική. Η οριακή τιμή  $r_\kappa$  για την ακτίνα της τροχιάς του δορυφόρου προσδιορίζεται αν θέσουμε την κάθετη δύναμη ίση με μηδέν:

$$\frac{GM\mu}{(r_\kappa - a)^2} - \frac{Gm\mu}{a^2} = \mu(r_\kappa - a)\left(\frac{GM}{r_\kappa^3}\right).$$

Αναγνωρίζοντας ότι η απόσταση μεταξύ πλανήτη και δορυφόρου υπερβαίνει συντριπτικά την ακτίνα του δορυφόρου ( $r \gg a$ ), καθώς και ότι  $M \gg m$ , μπορούμε να αγνοήσουμε ορισμένους ενοχλητικούς από τεχνικής απόφεως όρους, θεωρώντας τους πολύ μικρούς έτσι, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$Ma^2r^3 - mr^5 = Ma^2(r^3 - 3r^2a),$$

από την οποία παίρνουμε:

$$r = a^3 \sqrt{\frac{3M}{m}}.$$

Το δεύτερο πρόβλημα περιστρεφόταν γύρω από μια ανελαστική κρούση μεταξύ δύο ατόμων υδρογόνου. Σ' αυτή την κρούση, τα δύο άτομα υδρογόνου «κολλούν» μεταξύ τους, σχηματίζοντας ένα διατομικό μέριο. Η αρχή διατήρησης της ορμής επιβάλλει να ισχύει η σχέση

$$m_1 v_0 = 2m_1 v_r.$$

Τώρα πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε την απώλεια κινητικής ενέργειας:

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_r - K_0 \\ &= \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(m)v_0^2 \\ &= -\frac{1}{4}mv_0^2 = -\frac{K_0}{2}. \end{aligned}$$

Πού πήγε αυτή η ενέργεια; Όταν έχουμε να κάνουμε με μακροσκοπικές μπλίες του μπλιάρδου, η ενέργεια που χάνεται σε μια ανελαστική κρούση μπορεί να μετατραπεί σε ήχο, σε παραμόρφωση των εμπλεκόμενων σωμάτων ή σε θερμότητα· ωστόσο, όλες τουτες οι εκδοχές στερούνται νοήματος στο ατομικό επίπεδο. Την ενέργεια, λοιπόν, πρέπει να την πήρε κάποιο ηλεκτρόνιο ανεβαίνοντας έτσι σε ανώτερη ενεργειακή στάθμη. Η ελάχιστη ενεργειακή μεταβολή που μπορεί να παρουσιάσει ένα ηλεκτρόνιο ευρισκόμενο στη θεμελιώδη κατάσταση του υδρογόνου υπολογίζεται εύκολα:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{E_1}{2^2} - E_1 = -\frac{3E_1}{4} = \frac{3(2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J})}{4} = 1,63 \cdot 10^{-18} \text{ J.}$$

Εξισώνοντας τις δύο ενεργειακές διαφορές μεταξύ τους, μπορούμε να λύσουμε ως προς την αρχική ταχύτητα του ατόμου του υδρογόνου, οπότε βρίσκουμε:

$$v_r = 3,13 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

Εφόσον το διατομικό μέριο κινείται με ταχύτητα  $v_r/2$ , η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου θα παρουσιάζει μετατόπιση Doppler. Για ταχύτητες μικρές σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός, η σχετική μεταβολή της συχνότητας ισούται κατά προσέγγιση με το λόγο της ταχύτητας του μορίου προς την ταχύτητα του φωτός:

$$\frac{\Delta v}{v} \equiv \frac{v}{c} = \frac{6,26 \cdot 10^4 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0,021\%.$$

Το φωτόνιο έχει μεγαλύτερη συχνότητα όταν εκπέμπεται προς τα εμπρός και μικρότερη όταν εκπέμπεται προς τα πίσω.

### Τα Θεμελιώδη Σωματίδια

Στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου ζητούσαμε να κατασκευάσετε μερικά από τα αδρόνια που συναντούμε στη φύση χρησιμοποιώντας για το σκοπό αυτό ως θεμελιώδεις δομικούς λίθους τα κουάρκ.

Για να δομήσετε τα σωματίδια της πρώτης ομάδας, έπρεπε, σύμφωνα με σχετική υπόδειξη μας, να χρησιμοποιήσετε τρία μόνο κουάρκ: το πάνω, το κάτω και το παράδοξο. Οι ιδιότητες αυτών των κουάρκ παρατίθενται στον Πίνακα 1. Προς τούτο, δεν μας χρειάζονται παρά δύο μόνο ιδιότητες

του κάθε αδρονίου, και συγκεκριμένα το φορτίο του (εκφρασμένο σε μονάδες του φορτίου του ηλεκτρονίου) και η παραδοξότητά του.

Το νετρόνιο είναι ουδέτερο. Δεδομένου ότι πρόκειται για βαρύνιο, συντίθεται από τρία κουάρκ, και, επειδή έχει μηδενική παραδοξότητα, πρέπει να αποτελείται αποκλειστικά από πάνω και κάτω κουάρκ. Εφόσον το πάνω και το κάτω κουάρκ έχουν αντίστοιχα φορτία +2/3 και -1/3, το νετρόνιο συντίθεται κατ' ανάγκην από δύο κάτω κουάρκ και ένα πάνω ( $n = d\bar{d}$ ).

Το αρνητικό πιόνιο, από την άλλη, έχει φορτίο -1 και μηδενική παραδοξότητα. Το τελευταίο αυτό χαρακτηριστικό επιβάλλει να αποτελείται και πάλι μόνο από πάνω και κάτω κουάρκ. Τα πιόνια, ωστόσο, είναι μεονία, και ως εκ τούτου συνίστανται από ένα ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ. Δεδομένου ότι κάθε αντικουάρκ φέρει εξ ορισμού το αντίθετο φορτίο από το αντίστοιχο κουάρκ, για να πάρουμε φορτίο -1 χρειαζόμαστε ένα κάτω κουάρκ και ένα πάνω αντικουάρκ ( $\pi^- = d\bar{u}$ ).

Το ουδέτερο καόνιο είναι επίσης μεσόνιο, αλλά έχει παραδοξότητα +1. Ο μοναδικός τρόπος για να πετύχουμε αυτή την παραδοξότητα συνίσταται στο να συμπεριλάβουμε στη σύνθεση του συγκεκριμένου αδρονίου ένα παράδοξο αντικουάρκ. Έτσι καταφέρνουμε να μετατρέψουμε την παραδοξότητα από -1 σε +1. Επομένως, έχουμε να εξουδετερώσουμε ένα φορτίο ίσο με +1/3. Για να επιτύχουμε, λοιπόν, την περιπόθητη ηλεκτρική ουδετερότητα, δεν μας μένει άλλη επιλογή παρά να προσθέσουμε στο παράδοξο αντικουάρκ ένα κάτω κουάρκ ( $K^0 = d\bar{s}$ ).

Το Λ-υπερόνιο (βαρύνιο) παρουσιάζεται αποκλειστικά και μόνο με μηδενικό φορτίο. Η τιμή της παραδοξότητάς του, όντας ίση με -1, μας επιβάλλει να χρησιμοποιήσουμε ένα παράδοξο κουάρκ. Έτσι, έχουμε ένα φορτίο -1/3 το οποίο πρέπει οπωσδήποτε να εξουδετερωθεί με την προσθήκη δύο ακόμη κουάρκ, τα οποία δεν μπορεί παρά να είναι πάνω και/ή κάτω. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ένας μόνο συνδυασμός αυ-

τών των δύο κουάρκ που να δίνει φορτίο +1/3: πρέπει υποχρεωτικά να πάρουμε ένα από το κάθε είδος. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι  $\Lambda^0 = dus$ .

Ως αντιβαρύνιο, το αντινετρόνιο αποτελείται από τρία αντικουάρκ. Έτσι, δεν έχουμε παρά να πάρουμε τη σύνθεση του νετρονίου και να αντικαταστήσουμε το κάθε κουάρκ με το αντίστοιχο αντικουάρκ. Συνεπώς,  $\bar{\Lambda} = \bar{d}\bar{d}\bar{u}$ .

Το αρνητικό  $\Xi$ -υπερόνιο έχει παραδοξότητα -2 και φορτίο -1. Το πρώτο χαρακτηριστικό μάς επιβάλλει να χρησιμοποιήσουμε δύο παράδοξα κουάρκ, τα οποία έχουν συνολικό φορτίο -2/3. Επομένως, για να συμπληρώσουμε το φορτίο του εν λόγω αδρονίου, χρειαζόμαστε ένα κάτω κουάρκ με φορτίο -1/3. Άρα, συμπεραίνουμε ότι  $\Xi^- = dss$ .

Ως εδώ δεν συνέτρεχαν λόγοι ώστε να ανησυχούμε για την απαγορευτική αρχή του Pauli. Ωστόσο, για να ολοκληρώσουμε την εικόνα, χρειάζεται να προσθέσουμε έναν καινούργιο κβαντικό αριθμό. Το χρώμα παρουσιάζεται σε τρεις ποικιλίες (ή τιμές): κόκκινο, πράσινο και μπλε. Θα χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες  $\kappa$ ,  $\mu$  και  $\nu$  για να παριστάνουμε αυτές τις τρεις τιμές, καθώς και τους δείκτες  $c$ ,  $t$  και  $y$  για να παριστάνουμε τα ομόλογα συμπληρωματικά τους χρώματα cyan, magenta και yellow (κυανό, ερυθρό και κίτρινο τετραχρωμίας, αντίστοιχα). Σ' αυτό το σχήμα, όλα τα αδρόνια επιβάλλεται να είναι λευκά, εφόσον φανταζόμαστε τα χρώματα να συνδυάζονται όπως οι φωτεινές δέσμες, δηλαδή προσθετικά.

Η περίπτωση των μεσονίων εξηγήθηκε επαρκώς στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου, όπου και μπορεί να ανατρέξει ο αναγνώστης. Έτσι, μας μένουν τα τέσσερα βαρύνια, για τα οποία δεν έχουμε παρά να επαναλάβουμε την ίδια ακριβώς δουλειά. Αρκεί μόνο να βεβαιωθούμε ότι συμπεριλαμβάνουμε όλες τις τιμές που παίρνει ο κβαντικός αριθμός του χρώματος:

$$\begin{aligned} n &= d_\kappa d_\pi u_\mu + d_\pi d_\mu u_\kappa + d_\mu d_\kappa u_\pi, \\ \bar{n} &= \bar{d}_m \bar{d}_c \bar{u}_y + \bar{d}_c \bar{d}_y \bar{u}_m + \bar{d}_y \bar{d}_m \bar{u}_c, \\ \Lambda^0 &= d_\kappa u_n s_\mu + d_\pi u_\mu s_\kappa + d_\mu u_\kappa s_\pi \\ \Xi^- &= d_\kappa s_\pi s_\mu + d_\pi s_\mu s_\kappa + d_\mu s_\kappa s_\pi. \end{aligned}$$

Ονομασία	Σύμβολο	Φορτίο	Παραδοξότητα
Κάτω	d	-1/3	0
Πάνω	u	+2/3	0
Παράδοξο	s	-1/3	-1

Πίνακας 1

Το διπλά θετικά φορτισμένο Δ-υπερόνιο ανήκει στα βαρυόνια και χαρακτηρίζεται από μηδενική παραδοξότητα. Ως εκ τούτου, συντίθεται αποκλειστικά από πάνω και κάτω κουάρκ. Για να εξασφαλίσουμε φορτίο +2, υποχρεωτικά θα επιλέξουμε τρία πάνω κουάρκ. Συνεπώς, έχουμε

$$\Delta^{++} = u_{\kappa} u_n u_{\mu}.$$

Τέλος, το ουδέτερο αντιλάμδα είναι απλούστατα το αντισωματίδιο του λάμδα υπερονίου. Δεν χρειάζεται, λοιπόν, παρά να αντικαταστήσουμε το κάθε κουάρκ με το αντίστοιχο αντικουάρκ, αλλάζοντας ταυτόχρονα και το κάθε χρώμα με το συμπληρωματικό του:

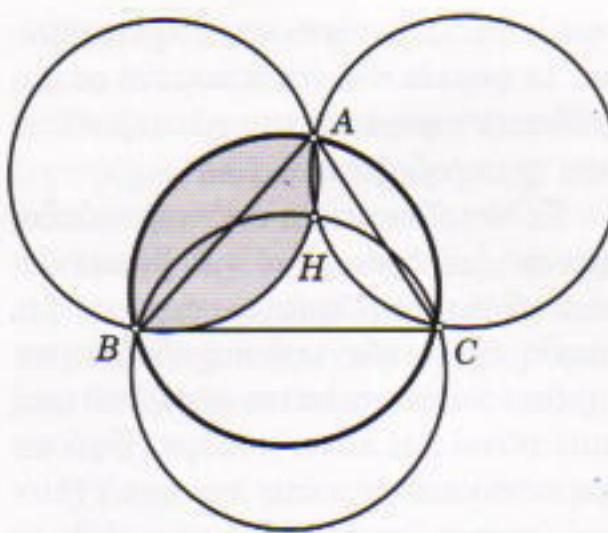
$$\Lambda^0 = \bar{d}_m \bar{u}_c \bar{s}_y + \bar{d}_c \bar{u}_y \bar{s}_m + \bar{d}_y \bar{u}_m \bar{s}_c.$$

—Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

### Φτάστε στα έσχατα όρια

1. Η λύση του προβλήματος είναι παρόμοια με αυτή του Προβλήματος 4 του άρθρου.

2. (a) Αν η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABD$  είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ABC$ , τότε το σημείο  $D$  βρίσκεται στον γραμμοσκιασμένο «διπλό τομέα», συμπεριλαμβανομένου του περιγράμματος, τον οποίο σχηματίζουν το έλασσον τόξο  $AB$  του κύκλου  $ABC$  και το τόξο που είναι συμμετρικό του ως προς την  $AB$  (βλ. Σχήμα 5). Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι κύκλοι που είναι συμμετρικοί του κύκλου  $ABC$  ως προς τις πλευρές του τριγώνου  $ABC$  έχουν ένα κοινό σημείο, το ορθόκεντρο  $H$  του τριγώνου  $ABC$ . Από αυτό το γεγονός έπεται ότι οι τρεις «διπλοί τομείς» που κατασκευάζονται σε καθεμία από τις πλευρές του  $ABC$  έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο. Αυτό βρίσκεται στο εσωτερικό του περιγεγραμμένου κύκλου μόνο αν το τρίγωνο  $ABC$  είναι οξυγώνιο, και σε αυτή την περίπτωση ταυτίζεται με το σημείο  $H$  (Σχήμα 5). Αν το τρίγωνο δεν είναι οξυγώνιο, τότε το κοινό σημείο ταυτίζεται με την κορυφή της ορθής ή αμβλείας γωνίας του τριγώνου (Σχήμα 6).



Σχήμα 5

(β) Αν ο ελάχιστος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$  περιέχει κάποιο άλλο από τα δεδομένα σημεία, έστω  $D$ , τότε από τη λύση του μέρους (a) έπεται ότι το  $D$  είναι το ορθόκεντρο του οξυγώνιου τριγώνου  $ABC$ . Επομένως, οποιοσδήποτε από τους περιγεγραμμένους κύκλους των (αμβλυγώνιων!) τριγώνων  $ABD$ ,  $BCD$  ή  $CAD$  μάς δίνει τη λύση.

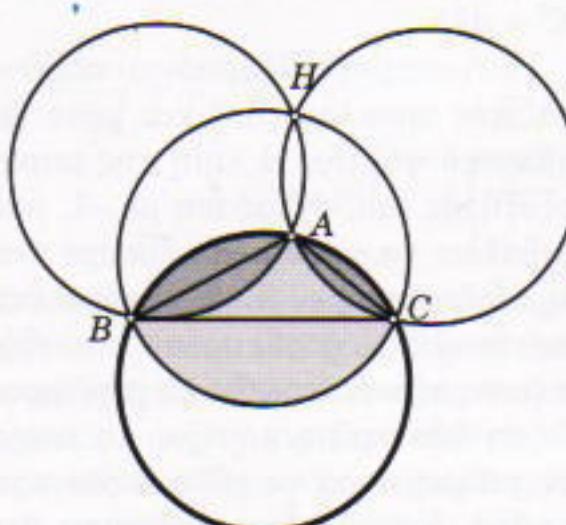
3. Η λύση του προβλήματος είναι παρόμοια με αυτή του Προβλήματος 8 του άρθρου.

4. Απάντηση:  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$ . Αν  $x$  είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς που αναζητούμε, τότε  $xyz = x + y + z \leq 3x$  —και, επομένως,  $yz \leq 3$ . Το μόνο που απομένει είναι να εξετάσουμε όλες τις δυνατότητες:  $yz = 1 \cdot 1$ ,  $1 \cdot 2$ ,  $1 \cdot 3$ .

5. Θεωρήστε τη μεγαλύτερη ακμή.

6. Θεωρήστε τη θέση στη σκακιέρα μία κίνηση πριν επιστρέψει στην αρχική του θέση το πρώτο πούλι.

7. Απάντηση:  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$  ή 2. Ας αποδείξουμε πρώτα ότι όλα τα  $x_i$  είναι ίσα. Υποθέτουμε ότι δεν είναι, επιλέγουμε το μέγιστο  $x_i$  και, σε περίπτωση που δεν είναι μοναδικό, θεωρούμε το μέγιστο  $x_i$  για



Σχήμα 6

το οποίο ισχύει  $x_{i+1} < x_i$  (υποθέτουμε ότι  $x_6 = x_1$ ). Λόγω της συμμετρίας του συστήματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτός είναι ο αριθμός  $x_1$ . Αν αφαιρέσουμε την πέμπτη εξίσωση από την τέταρτη, καταλήγουμε σε αντίφαση:  $0 \geq x_4 - x_1 = x_1^2 - x_2^2 > 0$ . Επομένως,  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x$ , όπου το  $x$  ικανοποιεί την εξίσωση  $2x = x^2$ .

8. Έστω  $Q_1$  ο ελάχιστος κύβος που δημιουργείται μεταξύ αυτών που εφάπτονται στην επιφάνεια του αρχικού κύβου, και έστω  $F$  η εξωτερική έδρα του  $Q_1$ . Έστω  $Q_2$  ο ελάχιστος κύβος που εφάπτεται στην έδρα του  $Q_1$ , η οποία είναι παράλληλη προς την έδρα  $F$ . έστω  $Q_3$  ο ελάχιστος κύβος που εφάπτεται στην έδρα του  $Q_2$ , η οποία είναι παράλληλη προς την  $F$ , και ούτω καθεξής. Έχουμε μια ακολουθία κύβων που γίνονται όλοι και μικρότεροι, ο τελευταίος από τους οποίους εφάπτεται στην έδρα του αρχικού κύβου η οποία είναι παράλληλη προς την  $F$ . Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίφαση με τον τρόπο που επιλέξαμε τον κύβο  $Q_1$ .

9. (a) Ας υποθέσουμε ότι προς το αεροδρόμιο  $O$  πέταξαν αεροπλάνα από 6 αεροδρόμια. Από αυτά, θεωρούμε τα δύο (έστω  $A$  και  $B$ ) για τα οποία η γωνία  $AOB$  είναι η ελάχιστη. Τότε η γωνία  $AOB \leq 60^\circ$ , οπότε μία από τις αποστάσεις  $AO$  ή  $BO$  θα είναι μεγαλύτερη της  $AB$  —γεγονός αδύνατο.

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε τον «κανόνα της διάταξης». Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε αεροδρόμιο προσγειώθηκε τουλάχιστον ένα αεροπλάνο. Τότε, για κάθε αεροδρόμιο  $A_1$  υπάρχει μια αλυσίδα αεροδρομίων  $A_1, A_2, \dots$ , όπου κάθε  $A_{i+1}$  συμβολίζει ένα από τα αεροδρόμια από τα οποία πέταξε αεροπλάνο προς το  $A_i$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή η αλυσίδα πρέπει να είναι κλειστή: ένα αεροπλάνο από το  $A_1$  θα πετάξει προς κάποιο  $A_n$  —δηλαδή,  $A_n = A_1$ . Αν το  $n$  είναι μεγαλύτερο του 2, καταλήγουμε σε αντίφαση:  $A_1A_2 < A_2A_3 < \dots < A_{n-1}A_n < A_nA_1 < A_1A_2$ . Άρα  $n = 2$ , και το σύνολο των αεροδρομίων διαχωρίζεται σε ζεύγη —γεγονός αδύνατο όταν το πλήθος τους είναι περιττό.

# Μουσικές καρέκλες

*Finita la musica, passata la festa*

Don Piele

**Ο**ΤΑΝ ΗΣΑΣΤΑΝ ΠΑΙΔΙΑ, ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΑΙΞΑΤΕ ΚΑΠΟΙΑ παραλλαγή του παιχνιδιού που ονομάζεται «μουσικές καρέκλες». Όταν εγώ πήγαινα στο δημοτικό, παίζαμε αυτό το παιχνίδι με τον εξής τρόπο: μια ομάδα  $n$  παιδιών χορεύει γύρω από  $n - 1$  καρέκλες ακολουθώντας το ρυθμό της μουσικής. Μόλις σταματήσει η μουσική, όλοι τρέχουν να καθίσουν κάτω —ένα παιδί σε κάθε καρέκλα. Αφού οι καρέκλες είναι λιγότερες, ένα παιδί θα μείνει όρθιο —και βγαίνει από το παιχνίδι. Τότε σηκώνονται πάλι όλοι, αφαιρείται μία καρέκλα, και η μουσική ξεκινά ξανά. Το παιχνίδι συνεχίζεται έως ότου απομείνει μία καρέκλα και ένα παιδί καθισμένο σε αυτή. Το παιδί αυτό είναι ο νικητής.

Αυτό το παιχνίδι προσφέρει έναν διασκεδαστικό τρόπο τυχαίας επιλογής ενός ατόμου από μια ομάδα  $n$  ατόμων, επειδή όλοι έχουν την ίδια πιθανότητα να καταλήξουν νικητές. Ας αλλάξουμε τους κανόνες για να δημιουργήσουμε μια νέα παραλλαγή του παιχνιδιού. Αυτή τη φορά ας υποθέσουμε ότι ο καθένας φέρνει τη δική του καρέκλα, και ότι όλες οι καρέκλες είναι διαφορετικές. Τώρα δεν θα απομακρύνουμε μία καρέκλα, αλλά θα απαιτήσουμε όταν σταματά η μουσική να κάτσουν όλοι σε διαφορετική καρέκλα από τη δική τους. Όποιοι δεν τα καταφέρουν, φεύγουν από το παιχνίδι μαζί με την καρέκλα στην οποία κάθονται —που, φυσικά, είναι η δική τους. Η μουσική αρχίζει ξανά, και οι παίκτες επαναλαμβάνουν τη διαδικασία, ακολουθώντας τους ίδιους κανόνες —δεν επιτρέπεται να καθίσεις στη δική σου καρέκλα!

Μπορούμε να παρατηρήσουμε αμέσως δύο πράγματα σε αυτό το παιχνίδι. Πρώτον, δεν μπορεί ποτέ να έχουμε ένα μόνο άτομο που δεν κάθεται στη δική του καρέκλα, διότι, αν έχουμε  $n$  παίκτες, τότε, όταν οι  $n - 1$  κάθονται στη δική τους καρέκλα, τότε, και ο τελευταίος κάθεται επίσης στη δική του. Δεύτερον, σε κάθε γύρο του παιχνιδιού υπάρχει περίπτωση όλοι να βρουν διαφορετική καρέκλα και να μη βγει κανείς από το παιχνίδι. Στο αρχικό παιχνίδι, στο οποίο αφαιρείται μία κα-

ρέκλα σε κάθε γύρο, όταν έχουμε  $n$  παίκτες, το παιχνίδι τελειώνει όταν παίζει η μουσική για  $n$ -οστή φορά. Τι συμβαίνει όμως στη νέα παραλλαγή των «μουσικών καρεκλών»; Πόσο διαρκεί, κατά μέσο όρο, το παιχνίδι; Υπενθυμίζουμε ότι το παιχνίδι τελειώνει όταν τελειώσουν όλες οι καρέκλες.

## Προσομοίωση

Εξοπλισμένοι με έναν υπολογιστή στον οποίο έχουμε φορτώσει το *Mathematica*, θα προσπαθήσουμε να βρούμε εύκολα την απάντηση στο ερώτημά μας με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 12 καρέκλες και 12 παίκτες. Αρχίζουμε αντιστοιχίζοντας έναν αριθμό σε καθεμία από τις δώδεκα καρέκλες,

```
n = 12;
chairs = Range[1, n]
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
```

Υποθέτουμε ότι το παιχνίδι παίζεται με τέτοιον τρόπο, ώστε όταν σταματά η μουσική να επλέγεται μια τυχαία μετάθεση των παικτών {1, 2, ..., 12}. Όποιος αριθμός δεν αλλάζει θέση, απομακρύνεται. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της μετάθεσης {2, 1, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, οι οκτώ αριθμοί 5 έως 12 πρέπει να απομακρυνθούν. Επομένως, η διάρκεια του παιχνιδιού με τους νέους κανόνες αποτελεί τυχαία μεταβλητή, και αναζητούμε τη μέση (ή αναμενόμενη) τιμή της.

Για να δημιουργήσουμε τις τυχαίες μας μεταθέσεις, θα φορτώσουμε ένα πρόγραμμα του *Mathematica*, το «Discrete Permutations».

```
<<DiscreteMath`Permutations`
```

Τώρα είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε μια απλή συνάρτηση, τη Random Permutation, για να δημιουργήσουμε ένα γύρο του νέου μας παιχνιδιού.

```
stopTheMusic = RandomPermutation[12]
{3, 5, 8, 7, 4, 6, 1, 9, 12, 2, 11, 10}
```

Ποιοι από αυτούς τους αριθμούς βρίσκονται στη θέση τους; Ένας απλός τρόπος εντοπισμού τους είναι να αφαιρέσουμε τους αριθμούς που παριστάνουν τις θέσεις —δηλαδή, τους {1, 2, ..., 12}— από τους αντίστοιχους αριθμούς της παραπάνω τυχαίας μετάθεσης, και να δούμε αν εμφανίζονται μηδενικά. Στο *Mathematica* δημιουργούμε το σύνολο {1, 2, ..., 12} με την εντολή **Range[12]**.

```
StopTheMusic=Range[12]
```

```
{2, 3, 5, 3, -1, 0, -6, 1, 3, -8, 0, -2}
```

Σ' αυτό το γύρο του παιχνιδιού, εμφανίζονται δύο μηδέν στις θέσεις 6 και 11 —γεγονός που σημαίνει ότι αυτοί οι παίκτες κάθονται στις δικές τους καρέκλες και πρέπει να αποχωρήσουν από το παιχνίδι. Ένας απλός τρόπος να το καταφέρουμε αυτό με το *Mathematica* είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν κανόνα αντικατάστασης.

```
StopTheMusic=Range[12] // . {a___, 0, b___} ->{a, b}
```

```
{2, 3, 5, 3, -1, -6, 1, 3, -8, -2}
```

Το πλήθος των καρέκλων είναι πλέον 10, και μπορούμε να ξαναρχίσουμε τη μουσική. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να τελειώσουν όλες οι καρέκλες. Ας προσομοιώσουμε ένα ολόκληρο παιχνίδι, παρακολουθώντας πόσες καρέκλες απομένουν έπειτα από κάθε βήμα. Αρχίζουμε με 12 καρέκλες.

```
Clear[a, b]
```

```
n = 12; stage = 0; chairsLeft = {n};
```

```
While [n > 0,
```

```
    sit = randomPermutation[n]-Range[n];
    sit = sit //. {a___, 0, b___} -> {a, b};
    n = Length[sit];
    chairsLeft = Join[chairsLeft, {n}]; stage++;
```

```
Print["Πλήθος γύρων παιχνιδιού", stage]
```

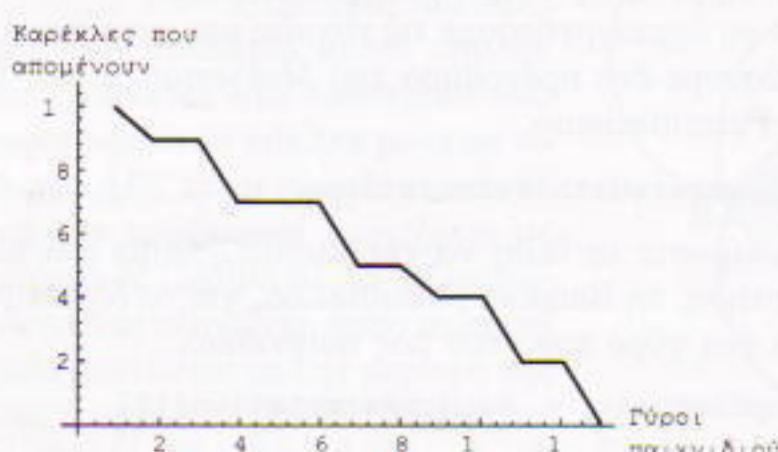
```
Print["Εναπομένουσες καρέκλες έπειτα από κάθε γύρο", chairsLeft]
```

```
Πλήθος γύρων παιχνιδιού 13
```

Καρέκλες που απομένουν έπειτα από κάθε γύρο {12, 10, 9, 9, 7, 7, 7, 5, 5, 4, 4, 2, 2, 0}

Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα με το πλήθος των καρέκλων που απομένουν έπειτα από κάθε γύρο παιχνιδιού.

```
ListPlot[Rest[chairsLeft], PlotJoined→True,
AxesLabel→{"Γύρος", "Απομένουσες καρέκλες"}]
```



Όλα αυτά τα βήματα μπορούν να συγκεντρωθούν σε μια νέα συνάρτηση του *Mathematica*, τη *musicalChairs*.

```
musicalChairs[n_] :=
Module[{stage = 0 sit, m = n},
While [m>0, sit =
RandomPermutation[m]-Range[m];
sit = sit //. {a___, 0, b___} -> {a, b};
m = Length[sit]; stage++]; stage]
```

Η συνάρτηση *musicalChairs[n]* επιστρέφει το πλήθος των γύρων που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί η προσομοίωση ενός παιχνιδιού που αρχίζει με *n* καρέκλες. Ας δούμε τι αποτέλεσμα μας δίνει για *n* = 12.

```
musicalChairs[12]
```

```
11
```

Μπορούμε πλέον να προσομοιώσουμε το παιχνίδι 1.000 φορές και να βρούμε τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων. Θα κάνουμε αυτό το πείραμα για *n* = 12.

```
experiment =
Table[musicalChairs[12], {1000}];
Apply[Plus, experiment]/1000//N
12.129
```

Η απάντηση, στρογγυλεμένη, είναι 12 —το ίδιο πλήθος γύρων που απαιτείται και για το αρχικό παιχνίδι, όπου σε κάθε γύρο απομακρύνουμε μία καρέκλα. Αυτό το αποτέλεσμα με εντυπωσίασε.

## Πιθανότητα

Το έργο της εύρεσης μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας γι' αυτό το τυχαιό πείραμα είναι δυσκολότερο. Σε αυτή την περίπτωση, η επιχειρηματολογία γίνεται αρκετά στρυφνή, και ίσως χρειαστεί να διαβάσετε αρκετές φορές το κείμενο για να την κατανοήσετε πλήρως. Πρώτος μας στόχος είναι να κατασκευάσουμε έναν τύπο που θα υπολογίζει το πλήθος των τρόπων με τους οποίους *n* άνθρωποι μπορούν να καθίσουν σε *n* καρέκλες, έτσι ώστε *k* από αυτούς να κάθονται στη δική τους καρέκλα και οι υπόλοιποι *n* - *k* να μην κάθονται. Θα συμβολίσουμε αυτό το πλήθος *w[n, k]*. ας δούμε πώς μπορούμε να το υπολογίσουμε αναδρομικά.

Πρώτα παρατηρούμε ότι

```
w[1, 0] := 0
```

```
w[1, 1] := 1,
```

διότι στην περίπτωση του ενός μόνου ανθρώπου (*n* = 1) δεν μπορεί να μην κάτσει στη δική του καρέκλα, και ο τρόπος που μπορεί να γίνει αυτό είναι μόνο ένας. Επίσης, έχουμε ότι

```
w[n_, n_-1] := 0
```

```
w[n_, n_] := 1,
```

διότι όταν έχουμε *n* ανθρώπους δεν είναι δυνατόν να κάτσουν οι *n* - 1 στη δική τους καρέκλα χωρίς να κάτσουν και οι *n* στη δική τους. Επίσης, υπάρχει ένας μόνο

τρόπος να κάτσουν και οι  $n$  άνθρωποι στη δική τους καρέκλα —και συγκεκριμένα είναι η διάταξη  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Η επόμενη σχέση αποτελεί το κλειδί που λύνει ένα μεγάλο μέρος του προβλήματος.

```
w[n_, 0] := w[n, 0] = (n-1)w[n-1, 0] +
w[n-1, 1]
```

Αυτή η σχέση μάς λέει ότι, αν γνωρίζουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να διευθετήσουμε  $n - 1$  ανθρώπους ώστε να μην κάθεται κανείς στη δική του καρέκλα —δηλαδή, αν γνωρίζουμε το  $w[n - 1, 0]$ —, τότε προσθέτουμε άλλη μία καρέκλα στο παιχνίδι και την ανταλλάσσουμε με οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες  $n - 1$  καρέκλες. Θα καταλήξουμε με μια διευθέτηση  $n$  καρεκλών, στην οποία κανείς δεν κάθεται στη δική του καρέκλα. Επομένως, έχουμε δημιουργήσει  $(n - 1)w[n - 1, 0]$  διευθετήσεις  $n$  καρεκλών, στις οποίες κανένα άτομο δεν κάθεται στη δική του καρέκλα. Αυτός είναι ο ένας τρόπος να το πετύχουμε. Μπορούμε όμως επίσης να ξεκινήσουμε με όλες τις διευθετήσεις των  $n - 1$  καρεκλών στις οποίες ένα ακριβώς άτομο κάθεται στη δική του καρέκλα (το πλήθος των οποίων είναι  $w[n - 1, 1]$ ). Προσθέτουμε τώρα μία νέα καρέκλα και την ανταλλάσσουμε με του άτομου που κάθεται στη δική του. Έχουμε έτσι άλλες  $w[n - 1, 1]$  νέες διευθετήσεις, οι οποίες ολοκληρώνουν την αναδρομή.

Τέλος, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:

```
w[n_, j_] := w[n, j] = Binomial[n, j]w[n-j,
0]
```

Αυτή η σχέση μάς λέει ότι, για να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν  $j$  άνθρωποι να κάτσουν στη δική τους καρέκλα και οι υπόλοιποι  $n - j$  σε άλλη, επιλέγουμε απλώς  $j$  καρέκλες από τις  $n$  —κάτι που μπορούμε να κάνουμε με την **Binomial**  $[n, j]$ — και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να διατάξουμε τα υπόλοιπα  $n - j$  άτομα, έτσι ώστε να μην κάτσει κανένα στη δική του καρέκλα —δηλαδή, με το  $w[n - j, 0]$ .

Από τη στιγμή που γνωρίζουμε αυτές τις αναδρομικές σχέσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε το  $w[i, j]$  για κάθε  $i$  και  $j \leq i$ .

```
Table[w[i, j], {i, 1, 6}, {j, 0, i}] // TableForm
```

0	1					
1	0	1				
2	3	0	1			
9	8	6	0	1		
44	45	20	10	0	1	
265	264	135	40	15	0	1

Αυτοί οι αριθμοί μετασχηματίζονται σε πιθανότητες αν διαιρέσουμε κάθε γραμμή με το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους  $i$  άτομα κάθονται σε  $i$  καρέκλες, που φυσικά ισούται με  $i!$

```
Table[w[i, j]/(i!), {i, 1, 6}, {j, 0, i}]

// TableForm
```

0	1					
1/2	0	1/2				
1/3	1/2	0	1/6			
3/8	1/3	1/4	0	1/24		
11/30	3/8	1/6	1/12	0	1/120	
53/144	11/30	3/16	1/18	1/48	0	1/720

Κάθε γραμμή μάς δίνει την πιθανότητα να κάτσουν όταν σταματήσει η μουσική  $0, 1, 2, \dots, i$  άνθρωποι στη δική τους καρέκλα, όταν το πλήθος των καρεκλών είναι  $i$ . Ιδού μια γραφική παράσταση αυτής της κατανομής πιθανότητας.

```
Show[Graphics[Table[{Hue[w[i, j]/(i!)]*
((i/i+3))}], Rectangle[{j, (-i)}, {1 + j, 1 - i}], {i,
1, 12}, {j, 0, i}], AspectRatio -> 1/4]
```



Το κόκκινο χρώμα συμβολίζει μικρές πιθανότητες, ενώ οι αποχρώσεις του μπλε υψηλές. Παρατηρήστε ότι οι πρώτες δύο στήλες είναι οι μεγαλύτερες και μετρούν την πιθανότητα να κάτσουν 0 και 1 άτομα, αντίστοιχα, στη δική τους θέση έπειτα από κάθε γύρο του παιχνιδιού. Μπορεί να αποδειχτεί ότι, όταν το  $i$  αυξάνει, και οι δύο αυτές πιθανότητες συγκλίνουν στο  $1/e$ .

## Πόση ώρα θα παίζει η μουσική;

Είμαστε πλέον σε θέση να δημιουργήσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $p[m, k]$ , η οποία μετρά την πιθανότητα να έχουμε  $k$  γύρους ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) παιχνιδιού όταν οι καρέκλες είναι  $m$ . Από τη στιγμή που γνωρίζουμε αυτή την κατανομή, μπορούμε να υπολογίσουμε το αναμενόμενο πλήθος γύρων παιχνιδιού και να το συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα που έδωσε η προσομόωσή μας.

Πρώτα παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να τελειώσει ένα παιχνίδι με  $m$  καρέκλες σε ένα γύρο ισούται με  $1/m!$  Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος να συμβεί αυτό — $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ .

```
Clear[p]
```

```
p[m_, 1] := p[m, 1] = 1/(m!)
```

Και τώρα η τελική παρατήρηση. Αν γνωρίζουμε την πιθανότητα  $p[j, k - 1]$ , δηλαδή την πιθανότητα να τελειώσει σε  $k - 1$  γύρους ένα παιχνίδι με  $j$  καρέκλες (όπου  $j = 2$  έως  $m$ ), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να τελειώσει σε  $k$  γύρους ένα παιχνίδι με  $m$  καρέκλες: πολλαπλασιάζουμε την  $p[j, k - 1]$  επί την πιθα-

νότητα να περάσουμε από  $m$  σε  $j$  καρέκλες —απομακρύνοντας  $m - j$  καρέκλες— μέσα σε ένα γύρο (η τελευταία πιθανότητα ισούται με  $w[m, m - j]/m!$ ). Επομένως, καταλήγουμε στην εξής αναδρομική σχέση:

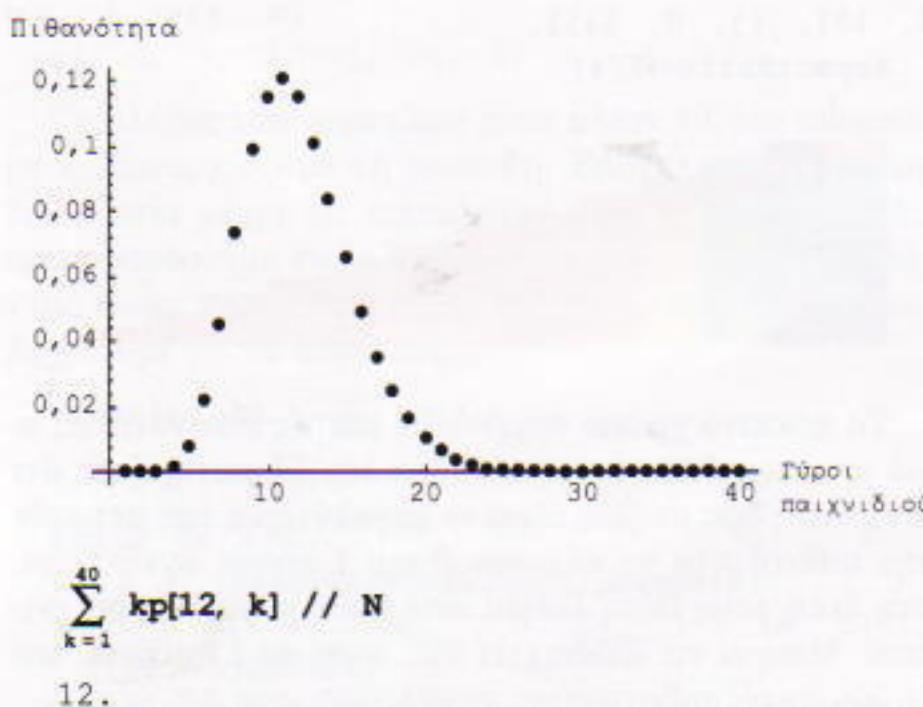
$$p[m_, k_] := p[m_, k] = \sum_{j=2}^m p[j, k-1] \frac{w[m, m-j]}{m!}$$

Ιδού μια εικόνα της κατανομής  $p[12, k]$  για  $k = \{1, 2, \dots, 40\}$ .

```
pdf=Table[p[12, k], {k, 1, 40}];

ListPlot[pdf, AxesLabel
→ {"Γύροι", "Πιθανότητα"}, PlotStyle→
PointSize[.02]]
```

Το μέσο πλήθος γύρων μέχρι την ολοκλήρωση του παιχνιδιού ισούται με 12 ακριβώς.



## Τελικές σκέψεις

Το παρόν άρθρο βασίστηκε στην εξέταση των πλήρων διατάξεων, κατά τις οποίες δεν παραμένει σταθερός κανένας από τους αριθμούς που ορίζουν τη διάταξη. Το θέμα αυτό μελετάται συχνά στα εισαγωγικά μαθήματα της θεωρίας πιθανοτήτων. Ωστόσο, το πρόβλημα των «μουσικών καρεκλών» που παρουσιάσαμε είναι, απ' όσο γνωρίζω, πρωτότυπο. Χρειάστηκα περίπου μία μέρα για να το λύσω. Δεν θα αποτολμούσα ποτέ να το εξετάσω χωρίς τη βοήθεια του *Mathematica* και την ευκολία που προσφέρει για αναδρομικό προγραμματισμό. Αυτό συμβαίνει σχεδόν κάθε φορά. Ξεκινώ από μια προσομοίωση, και μετά αναζητώ την κατανομή πιθανότητας. Είναι ελάχιστες οι περιπτώσεις που το πρόβλημα μπορεί να αντισταθεί στη δύναμη της λογικής και στην ισχύ του *Mathematica*. ◻

• ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ •  
το φυσικομαθητικό βιβλιοπωλείο  
(και ένα βιβλιοπωλείο που θα μπορεί να οφει προμηθεύσει  
τα προπογόνεμα τεύχη του Quantum)  
Ιπποκράτους 6, 10679 Αθήνα, τηλ.: 3628492

## ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το *Quantum* διήννετε οκτώ χρόνια συνεχούς και συνεπούς έκδοσής του στα ελληνικά —άρχισε να κυκλοφορεί τον Μάιο του 1994. Από τα πλέον έγκυρα εκπαιδευτικά/επιστημονικά περιοδικά στον κόσμο, μέσα από τις σελίδες του προσέφερε την τεκμηριωμένη γνώση, αποκαλύπτοντας στο ελληνικό κοινό τη γοητεία των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.



Μέχρι σήμερα κυκλοφόρησαν σαράντα τέσσερα τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους,

μπορείτε να τα προμηθεύσετε από το βιβλιοπαλείο του περιοδικού (*Στοά του βιβλίου, Πεσμαζόγλου 5, Αθήνα*), από τα γραφεία των εκδόσεων (*Κορυζή 8 —κοντά στην αρχή της Λ. Συγγρού*), ή με αντικαταβολή (τηλ.: 9244827, 9244852, fax: 9244756, e-mail: [info@katoptro.gr](mailto:info@katoptro.gr)).

Το *Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης —το υλικό του παραμένει αναλλοίωτο στο πέρασμα του χρόνου. Γι' αυτό φροντίστε να συμπληρώσετε τη σειρά της πρώτης περιόδου έκδοσής του με δύο τεύχη σάς λείπουν.

Για την αρχειοθέτηση των τευχών, διατίθενται και οι αντίστοιχες θήκες.

Τιμής ένεκεν, μέσα στη χρονιά θα κυκλοφορήσουν εκατό σειρές με όλα τα τεύχη, σε πανόδετη/δερματόδετη βιβλιοδεσία, μαζί με ένα αναλυτικό ευρετήριο όρων, άρθρων και συγγραφέων. Το ίδιο ευρετήριο θα διατεθεί ελεύθερο προς χρήση στη διεύθυνση [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr). Τέλος, αυτή και την επόμενη χρονιά θα εκδοθούν, με τη μορφή βιβλίων, μερικές συλλογές δημοσιευμένων και αδημοσίευτων άρθρων του περιοδικού.